Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Μελέτη της συνάρτησης εκχώρησης προμηθειών για αντασφαλιστικά σχήματα Quota Share

Ζωή-Μαρία Ξενογιώργη

Επιβλέπων

Κωνσταντίνος Πολίτης

Διπλωματική Εργασία υποβληθείσα στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από την ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθ. ……… συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και την Διοικητική Κινδύνου.

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

….....................................	…....................................	…..
Κωνσταντίνος Πολίτης	Γεώργιος Ψαρράκος	Δημήτριος Αντζουλάκος
Αναπληρωτής Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής	Αναπληρωτής Καθηγητής

University of Piraeus
Department of Statistics and Insurance Science
Postgraduate Program in
Actuarial Science and Risk Management

A Study of the Sliding Commission Scale for Quota Share treaties

Zoi-Maria Xenogiorgi

Supervisor

Konstantinos Politis

MSc Dissertation submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus 2016

Περίληψη

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα ορίσουμε την έννοια της αντασφάλισης και θα παρουσιάσουμε συνοπτικά την εξέλιξή της στη πάροδο του χρόνου. Επιπλέον, θα αναφέρουμε τους σημαντικότερους τύπους αντασφάλισης καθώς και τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα αυτών τόσο για τον ασφαλιστή όσο και για τον αντασφαλιστή.

Στη συνέχεια, θα επικεντρωθούμε στη σύμβαση Σταθερού ποσοστού (Quota Share) και θα γίνει προσπάθεια προσδιορισμού του βέλτιστου ποσοστού εκχώρησης για ένα χαρτοφυλάκιο ζημιών χρησιμοποιώντας τα μέτρα κινδύνου Αξία στον Κίνδυνο (VaR) και Αναμενόμενη Αξία στον Κίνδυνο (CTE).

Πιο συγκεκριμένα, βασιζόμενοι σε μοντέλα βελτιστοποίησης που ελαχιστοποιούν τα παραπάνω μέτρα κινδύνου του συνολικού κόστους του ασφαλιστή θα γίνει προσπάθεια εύρεσης της βέλτιστης σύμβασης Σταθερού Ποσοστού χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου.

Τέλος, θα διερευνηθούν οι επιπτώσεις τριών διαφορετικών δομών κλιμακωτής προμήθειας στην βέλτιστη σύμβαση στην οποία καταλήξαμε.

Abstract

In the context of this dissertation we will define the concept of reinsurance. Subsequently we will shortly present its development through the course of time. Furthermore, we will discuss in detail the most important types of reinsurance as well as their advantages/disadvantages for the insurer and the reinsurer.

Moreover, we will focus on the Quota Share reinsurance treaty and we will try to determine the optimal ceding percentage for a portfolio of losses, by using the risk measures; Value At Risk (VaR) and Conditional Tail Expectation (CTE).

To be more specific, we are going to be structuring our analysis on optimization models that minimize the aforementioned risk measures of the insurer's total cost in order to find the optimal Quota Share reinsurance treaty by using specific premium principles.

Lastly, we will investigate the effect of three different sliding commission scale structures on the optimal reinsurance treaty, on which we have concluded.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ

1.1 Ορισμός της αντασφάλισης

Η αντασφάλιση είναι μια συνήθης και καίριας σημασίας λειτουργία της ασφαλιστικής διαδικασίας καθώς προσφέρει στις ασφαλιστικές εταιρίες ένα πλέγμα οικονομικής προστασίας. Είναι το μέσο που τους επιτρέπει να αναλαμβάνουν κινδύνους πέρα από τις δυνατότητες που τους παρέχει η ίδια η οικονομική τους υπόσταση. Αποτελεί μια ευρέως χρησιμοποιούμενη στρατηγική διαχείρισης κινδύνου με σκοπό να εξασφαλιστεί η σταθερότητα στα κέρδη του ασφαλιστή και να προστατευτεί ενάντια σε ενδεχόμενες μεγάλες ζημιές. Διαδραματίζει για τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις τον ίδιο ρόλο που αυτές παίζουν για τους ασφαλισμένους.

Μια Αντασφαλιστική σύμβαση πραγματοποιείται μεταξύ δύο μερών, του πρωτασφαλιστή (ασφαλιζόμενος ή εκχωρητής) και ενός δεύτερου ασφαλιστικού φορέα που καλείται αντασφαλιστής. Ο πρωτασφαλιστής μεταφέρει μέρος ή ολόκληρο τον κίνδυνο, που αρχικά αναλαμβάνει, στον αντασφαλιστή έναντι συγκεκριμένου ποσού που καλείται αντασφάλιστρο. Με τον τρόπο αυτό αντικαθιστά ένα μέρος του μεταβλητού κόστους του ισολογισμού του, δηλαδή τις άγνωστες αποζημιώσεις, με ένα σταθερό κόστος, δηλαδή τα ασφάλιστρα που διαρρέουν στον αντασφαλιστή. Επομένως όταν επέλθει το ζημιογόνο γεγονός ο αντασφαλιστής καλύπτει το προσυμφωνηθέν κομμάτι του κινδύνου μειώνοντας έτσι το ρίσκο του πρωτασφαλιστή.

1.2 Ιστορική αναδρομή

Ιστορικά, η πρώτη σύμβαση αντασφάλισης εμφανίζεται στα τέλη του Μεσαίωνα ως εξέλιξη της ασφάλισης θαλάσσιων μεταφορών. Την περίοδο εκείνη παρατηρείται ανάπτυξη των εμπορικών συναλλαγών στην Ευρώπη. Οι πόλεις της Μεσογείου μετατρέπονται σε σημαντικά εμπορικά κέντρα διευρύνοντας τις επιχειρηματικές τους σχέσεις με την Ανατολή. Η ναύλωση πλοίων για τη μεταφορά εμπορευμάτων δια θαλάσσης γίνεται η βασική μορφή εμπορικής δραστηριότητας. Η διαδικασία προέβλεπε μια σύμβαση δανείου, σύμφωνα με την οποία ο χρηματοδότης, που μετέπειτα αντικαταστάθηκε από τον ασφαλιστή, δάνειζε χρήματα στον έμπορο που επιθυμούσε να μεταφέρει το εμπόρευμά του μέσω θαλάσσης. Εφόσον το εμπόρευμα έφθανε ακέραιο στον προορισμό του, το ποσό του δανείου επιστρεφόταν έντοκα, ενώ στη περίπτωση που το πλοίο βυθιζόταν, ο έμπορος μπορούσε να κρατήσει το δάνειο ως αποζημίωση. Οι συμβάσεις αυτές, αποτέλεσαν τη βασική δομή των συμφωνιών ανάληψης κινδύνων έναντι πληρωμής και διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη του πρώτου συστήματος αντασφάλισης.

Το πρώτο συμβόλαιο που μπορεί να χαρακτηρισθεί ως αντασφαλιστική σύμβαση (γραμμένη στα Λατινικά) συνάφθηκε στη Γένοβα της Ιταλίας στις 12 Ιουλίου του 1370. Αφορούσε το εμπόρευμα ενός πλοίου το οποίο ταξίδευε από το Καντίζ της Ισπανίας προς το Σλουίς της Ολλανδίας και ήταν ήδη ασφαλισμένο. Όμως, λόγω της επικινδυνότητας του ταξιδιού ο ασφαλιστής μετέφερε το μεγαλύτερο κομμάτι του ρίσκου σε έναν δεύτερο ασφαλιστή, ο οποίος και το αποδέχτηκε. Αυτό αποτελεί ένα γνήσιο δείγμα αντασφάλισης μεταξύ πρωτασφαλιστή και αντασφαλιστή, χωρίς ο ιδιοκτήτης του φορτίου να έχει κάποια σύμβαση με τον αντασφαλιστή. Το συγκεκριμένο συμβόλαιο είχε δύο πολύ ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά όσον αφορά την αντασφάλιση. Πρώτον, ότι μόνο το τελευταίο κομμάτι του ταξιδιού ήταν αντασφαλισμένο δηλαδή όχι από τη Γένοβα στο Καντίζ αλλά μόνο από το Καντίζ στο Σλουίς. Δεύτερον, ότι αντασφαλίστηκε το κομμάτι του ταξιδίου που εμπεριείχε τον μεγαλύτερο κίνδυνο, κάτι που αποτελεί μία μορφή αντασφάλισης που παραμένει σε χρήση ακόμα και σήμερα. (*Institute of Insurance Sciences*. FUNDACION MAPFRE,(2013))

Παρόμοιες συμβάσεις συνεχίστηκαν μέσα στους επόμενους αιώνες, αλλά τα αντασφαλιστικά συμβόλαια με την σύγχρονη έννοια ήταν ακόμη άγνωστα. Υπάρχουν αναφορές σε αντασφαλιστικές πρακτικές σε ναυτικό δίκαιο (Guidon de la Mer) της Γαλλίας τον 16^{ο} αιώνα καθώς επίσης και στην Αγγλία του 17^{ου} αιώνα. Μεταξύ 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα, η αντασφάλιση αποκτά μεγαλύτερη σημασία, ενώ για πρώτη φορά θεσπίζεται το ανώτατο ύψος του ασφαλιζόμενου ποσού, η ημερομηνία καταβολής των πληρωμών και οι τρόποι ανάκτησης. Οι πρώτες αντασφαλιστικές συμβάσεις με την σύγχρονη έννοια εμφανίστηκαν στην Γερμανία στα τέλη του 18^{ου} αιώνα καθώς λόγω της ραγδαίας εκβιομηχανοποίησης δημιουργήθηκε η ανάγκη για περισσότερη ασφάλιση και κατ' επέκταση αντασφάλιση. Μέχρι τα μέσα του 18^{ου} αιώνα η αντασφάλιση γινόταν με την μορφή αλληλασφάλισης από πρωτασφαλίστριες εταιρίες. Αυτό δημιούργησε πρόβλημα στην αγορά καθώς ανταγωνιστές αλληλασφαλίζονταν, με αποτέλεσμα η μία εταιρία να έχει πρόσβαση σε ευαίσθητα δεδομένα και διαδικασίες της άλλης όπως ασφάλιστρα, αποζημιώσεις και τεχνικές λεπτομέρειες προϊόντων. Συνεπώς, ήταν ξεκάθαρη η ανάγκη της αγοράς για την ύπαρξη αμιγούς αντασφαλιστικής εταιρίας. Η πρώτη εταιρία ιδρύθηκε το 1842 με την επωνυμία Koelnische Rueck και η δημιουργία της επιδοκιμάστηκε από την ασφαλιστική αγορά της εποχής. Ακολούθησε η ίδρυση αρκετών εταιριών όπως και των μέχρι σήμερα κολοσσών στον χώρο, της SwissRE (1863) και MunichRE (1880).

1.3 Τύποι Αντασφάλισης

Από τη δημιουργία των πρώτων αντασφαλιστικών συμβάσεων μέχρι σήμερα, η αντασφάλιση έχει εξελιχθεί αρκετά. Έχουν αναπτυχθεί διαφορετικά είδη αντασφάλισης για να μπορέσουν να καλύψουν τις αυξανόμενες ανάγκες των ασφαλιστικών εταιριών. Το κριτήριο με το οποίο γίνεται η διάκριση στα είδη αντασφάλισης είναι ο τρόπος επιμερισμού του κινδύνου, των ασφαλίστρων και των ζημιών μεταξύ των δύο μερών που συμμετέχουν στην αντασφαλιστική σύμβαση.

Με βάση αυτή την υπόθεση έχουμε τους εξής δύο γενικούς τύπους :

1) Αναλογικές Συμβάσεις

2) Μη Αναλογικές συμβάσεις

Οι αναλογικές συμβάσεις αποτελούνται από την Σταθερού ποσοστού (Quota Share) και την Υπερβάλλοντος κεφαλαίου ή ποσού (Surplus) αντασφάλιση. Οι μη αναλογικές από την Ανακοπή Ζημιάς (Stop Loss) και την Υπερβάλλοντος Ποσού Ζημιάς (Excess of Loss) που εμφανίζεται κυρίως με δύο τύπους, την Catastrophe Covers και την Working Covers αντασφάλιση.

1.3.1 Αναλογικές Συμβάσεις

Με τον όρο Αναλογική σύμβαση εννοούμε μία συμφωνία η οποία υποχρεώνει τον ασφαλιστή να εκχωρήσει και τον αντασφαλιστή να αποδεχτεί ένα προκαθορισμένο ποσοστό από κάθε κίνδυνο που ανέλαβε αρχικά ο ασφαλιστής. Αυτό σημαίνει ότι ο ασφαλιστής μπορεί να παρέχει άμεση κάλυψη σε κάθε κίνδυνο που αποφασίζει να ασφαλίσει εφόσον υπόκειται στους όρους της σύμβασης. Ο αντασφαλιστής συμμετέχει κατά αναλογία στα ασφάλιστρα καθώς και στις ζημιές και τις δαπάνες που ανέλαβε ο ασφαλιστής και που αφορούν κινδύνους που εκχωρήθηκαν υπό τη σύμβαση. Ο αντασφαλιστής είναι υποχρεωμένος να αποδεχτεί όλους τους κινδύνους (καλούς και κακούς) και η μελλοντική του εμπειρία εξαρτάται απόλυτα από την ποιότητα των διαδικασιών ανάληψης κινδύνων καθώς επίσης και από τον τρόπο διαχείρισης των ζημιών της πρωτασφαλίστριας εταιρίας. *(P. Booth et.al* (2005))

1.3.1.α Σύμβαση σταθερού ποσοστού (Quota Share)

Πιο συγκεκριμένα υπό μια Quota Share αντασφάλιση όλες οι ζημιές που προέρχονται από το χαρτοφυλάκιο της εταιρίας, που υπόκειται στην αντασφαλιστική σύμβαση, επιμερίζονται μεταξύ ασφαλιστή και αντασφαλιστή με την ίδια προκαθορισμένη αναλογία. Τα ασφάλιστρα, μοιράζονται επίσης με την ίδια αναλογία, υποβάλλονται σε μια αρχική τροποποίηση που αντικατοπτρίζει τις προμήθειες που η εκχωρήτρια εταιρία θα πληρώσει στους πράκτορες ή στους μεσίτες και επιπλέον αντανακλά τα επιπρόσθετα έξοδα που η πρωτασφαλίστρια εταιρία θα επιβαρυνθεί μέσω της διαδικασίας του underwriting (επεξεργασία αιτήσεων για ασφάλιση) και της διαχείρισης των ζημιών. Μπορεί να υπάρξουν επιπλέον τροποποιήσεις όπως προμήθεια από τον αντασφαλιστή στον πρωτασφαλιστή. (*UK Institute of Actuaries* (2013))

<u>Παράδειγμα 1.1</u>

Η ασφαλιστική εταιρία Α συνάπτει Quota Share σύμβαση για τον κλάδο ζημιών με την αντασφαλιστική εταιρία Β. Σύμφωνα με τη σύμβαση, αντασφαλίζεται ένα 70% του ποσού που ανακύπτει από την έλευση του κινδύνου, με ανώτατο όριο κάλυψης τις 100.000€. Τα ακόλουθα συμβόλαια εκδόθηκαν από την εταιρία Α και υπόκεινται στην Quota Share σύμβαση με την εταιρία Β.

Συμβόλαιο 1^{o} : Ασφάλιση κτιρίου για 25.000€, με ασφάλιστρο 400€ για μια ζημιά 8.000€.
Συμβόλαιο 2^{o} : Ασφάλιση κτιρίου για 100.000€, με ασφάλιστρο 1.000€ για μια ζημιά 10.000€.
Συμβόλαιο 3^{o} : Ασφάλιση κτιρίου για 150.000€, με ασφάλιστρο 1.500€ για μια ζημιά 60.000€.

Στον παρακάτω πίνακα παρατίθεται ο τρόπος με τον οποίο κατανέμονται το ασφαλισμένο κεφάλαιο, τα ασφάλιστρα και οι ζημιές υπό τη Quota Share σύμβαση για κάθε ένα συμβόλαιο:

Πίνακας 1.1

	Ασφαλιστική Α 30% κράτηση	Ανταασφαλιστική Β 70% εκχώρηση	Total
Συμβόλαιο 1ο			
Ασφαλισμένο ποσό	7.500	17.500	25.000
Ασφάλιστρα	120	280	400
Ζημιές	2.400	5.600	8.000
Συμβόλαιο 2ο			
Ασφαλισμένο ποσό	30.000	70.000	100.000
Ασφάλιστρα	300	700	1.000
Ζημιές	3.000	7.000	10.000
Συμβόλαιο 3ο			
Ασφαλισμένο ποσό*	30.000	70.000	100.000
Ασφάλιστρα	450	1.050	1.500
Ζημιές	18.000	42.000	60.000

*Σημείωση: Καθώς το ανώτατο όριο κάλυψης της αντασφαλιστικής σύμβασης είναι 100.000€, στο συμβόλαιο 3ο που το ασφαλισμένο κεφάλαιο είναι 150.000€, το υπερβάλλον ποσό (50.000€) καλύπτεται από άλλη σύμβαση ή επιστρέφει στην πρωτασφαλίστρια εταιρία.

Η Quota Share επιτρέπει στην εκχωρήτρια εταιρία να εκτεθεί σε μεγαλύτερο εύρος κινδύνων από ότι θα μπορούσε χωρίς αντασφάλιση, επίσης είναι πολύ απλή σύμβαση με αποτέλεσμα να μην υπάρχει μεγάλο κόστος διαχείρισης. Επιπλέον, ο πρωτασφαλιστής μπορεί να επωφεληθεί από την τεχνική κατάρτιση του αντασφαλιστή για να βελτιώσει δικές του διαδικασίες όσον αφορά τα πλαίσια ανάληψης ασφαλιστικών κινδύνων, τους όρους ανάληψης του κινδύνου και τα εν γένει πλαίσια διαμόρφωσης των συμφωνιών ασφαλιστικής και αντασφαλιστικής κάλυψης. Το μειονέκτημα είναι ότι η εταιρία εκχωρεί το ίδιο ποσοστό από όλους τους κινδύνους, συνεπώς και το αντίστοιχο ποσοστό ασφαλίστρου. Με άλλα λόγια, προκειμένου να έχει αρκετή προστασία από τους μεγάλους κινδύνους αναγκάζεται να εκχωρεί μέρος και από τους μικρούς με αποτέλεσμα μεγαλύτερη διαρροή ασφαλίστρων από την επιθυμητή. Αυτό συνεπάγεται μείωση στα έσοδα και κατ' επέκταση στην απόδοση επενδύσεων. Επιπρόσθετα, δεν επιτυγχάνεται ικανή προστασία της εκχωρήτριας εταιρίας στη περίπτωση εμφάνισης μιας πολύ μεγάλης ζημίας καθώς εκχωρώντας, για παράδειγμα, το 60% της ζημιάς, η εταιρία εξακολουθεί να πρέπει να καλύψει το 40% ενός πολύ μεγάλου ποσού. Τέλος, από την πλευρά του αντασφαλιστή ένα σημαντικό πλεονέκτημα της συγκεκριμένης σύμβασης είναι ότι αναλαμβάνοντας μέρος από όλους τους κινδύνους, καλούς και κακούς, του αντασφαλιζόμενου χαρτοφυλακίου, πετυχαίνει καλύτερη διασπορά του κινδύνου. Επιτυγχάνει δηλαδή, ένα πιο ισορροπημένο χαρτοφυλάκιο που του προσφέρει σταθερή εμπειρία από πλευράς ζημιών. Ταυτόχρονα ο αντασφαλιστής, επειδή λαμβάνει ένα σταθερό ποσοστό επί των ασφαλίστρων όλων των συμβολαίων της πρωτασφαλίστριας εταιρίας πετυχαίνει μεγαλύτερο μερίδιο κερδών από ότι θα εκλάμβανε από άλλο τύπο αναλογικής σύμβασης. Βέβαια η συγκεκριμένη συνθήκη έχει ένα σημαντικό μειονέκτημα, το γεγονός ότι ο αντασφαλιστής δεν έχει καμία προστασία ενάντια σε μια συσσώρευση απωλειών στη περίπτωση μιας φυσικής καταστροφής, η οποία μπορεί να επηρέαζε έναν μεγάλο αριθμό μεμονωμένων κινδύνων, οι οποίοι καλύπτονται από την Quota Share. (*Γ. Πιτσέλης* (2014))

1.3.1.β Πλεονασματική σύμβαση (Surplus)

Συνεχίζοντας, θα κάνουμε μια σύντομη περιγραφή της άλλης μορφής αναλογικής σύμβασης, της Surplus. Με αυτό τον τύπο αντασφάλισης η εκχωρήτρια εταιρία αντιμετωπίζει καλύτερα τα προβλήματα που εμφανίζονται από την έλλειψη ευελιξίας της Quota Share. Δίνει στον πρωτασφαλιστή τη δυνατότητα να επιλέξει, με βάση τις ανάγκες του, το ποσό που θα κρατήσει από κάθε κίνδυνο αλλά με ένα ανώτατο ποσό κάλυψης, ρυθμίζοντας έτσι την εμπειρία του για μελλοντικές ζημιές. Πιο συγκεκριμένα, καθορίζεται αρχικά από τον πρωτασφαλιστή ένα ποσό ιδίας κράτησης, το οποίο μπορεί να εκφραστεί και ως ποσοστό(%) επί του ασφαλισμένου κεφαλαίου ώστε να κατανεμηθούν αναλόγως τα ασφάλιστρα και οι ζημιές. Επιπλέον καθορίζονται οι "γραμμές" η χωρητικότητα δηλαδή του αντασφαλιστή, η οποία εκφράζεται ως πολλαπλάσιο της κράτησης. Όταν επέλθει ο κίνδυνος καλύπτεται το προαναφερθέν ποσοστό επί το ποσό της ζημιάς με ανώτατο όριο αυτό που έχει τεθεί στην σύμβαση. Για να γίνει περισσότερο αντιληπτή η λειτουργία της Surplus συνθήκης θα παραθέσουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα:1.2</u>

Ασφαλιστική εταιρία Α έχει Surplus σύμβαση με την αντασφαλιστική εταιρία Β. Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη συνθήκη, η εταιρία Α έχει όριο ιδίας κράτησης 25.000€ και η Β έχει 10 γραμμές χωρητικότητα δηλαδή η μέγιστη εκχώρηση είναι 250.000€. Τα ακόλουθα συμβόλαια εκδόθηκαν από την εταιρία Α και υπόκεινται στην Surplus σύμβαση με την εταιρία Β.

Συμβόλαιο 1^{ο} : Ασφάλιση κτιρίου για 25.000€, με ασφάλιστρο 400€ για μια ζημιά 8.000€.
Συμβόλαιο 2^{ο} : Ασφάλιση κτιρίου για 100.000€, με ασφάλιστρο1.000€ για μια ζημιά 10.000€.
Συμβόλαιο 3^{ο} : Ασφάλιση κτιρίου για 150.000€, με ασφάλιστρο 1.500€ για μια ζημιά 60.000€.

Στον παρακάτω πίνακα παρατίθεται ο τρόπος με τον οποίο κατανέμονται το ασφαλισμένο κεφάλαιο, τα ασφάλιστρα και οι ζημιές υπό τη Surplus σύμβαση για κάθε ένα συμβόλαιο:

Πίνακας 1.2

	Ασφαλιστική Α κράτηση	Αντασφαλιστική Β εκχώρηση	Total
Συμβόλαιο 1ο	**(100%)**	**(0%)**	
Ασφαλισμένο ποσό	25.000	0	25.000
Ασφάλιστρα	400	0	400
Ζημιές	8.000	0	8.000
Συμβόλαιο 2ο	**(25%)**	**(75%)**	
Ασφαλισμένο ποσό	25.000	75.000	100.000
Ασφάλιστρα	250	750	1.000
Ζημιές	2.500	7.500	10.000
Συμβόλαιο 3ο	**(16,67%)**	**(83,33%)**	
Ασφαλισμένο ποσό	25.000	125.000	150.000
Ασφάλιστρα	250	1.250	1.500
Ζημιές	10.000	50.000	60.000

Η κάλυψη Surplus δίνει την δυνατότητα στον πρωτασφαλιστή να γράψει περισσότερους κινδύνους καθώς μειώνονται τα κεφάλαια που πρέπει να κρατήσει για κάθε κίνδυνο. Επίσης, επειδή μέρος των κινδύνων που δεν υπερβαίνει το όριο ιδίας κράτησης δεν εκχωρείται και άρα όλοι οι μικροί κίνδυνοι και μέρος τον μεγαλύτερων παραμένουν στην εκχωρήτρια εταιρία υπάρχει και αντίστοιχη κράτηση των ασφαλίστρων. Όμως, ο συγκεκριμένος τύπος αντασφάλισης είναι αρκετά πολύπλοκος στην εφαρμογή του και για αυτό σπάνια συναντάται σε χαρτοφυλάκια ζωής, παρά μόνο σε εξατομικευμένες συμβάσεις (π.χ. κάλυψη πυρός για επαγγελματικά κτίρια). Τέλος, δεν καλύπτει τον πρωτασφαλιστή από μεγάλες ζημιές, όπως και η Quota Share.

1.3.2 Μη Αναλογικές Συμβάσεις

1.3.2.α Σύμβαση υπερβάλλοντος ζημίας (Excess of Loss)

Σε περίπτωση που ξεπεραστεί αυτό το όριο, το υπόλοιπο ποσό της υποχρέωσης επιστρέφει στον πρωτασφαλιστή. Για το λόγο αυτό αρκετές φορές εφαρμόζονται πολλά στρώματα αντασφάλισης, ούτως ώστε να ικανοποιείται η ανάγκη για πλήρη κάλυψη του πρωτασφαλιστή. Όμως, επειδή παρατηρήθηκε από τους αντασφαλιστές ότι γίνεται κατάχρηση των όρων αυτής της μορφής αντασφάλισης, με μη ικανοποιητικές διαδικασίες ανάληψης κινδύνων από την μεριά του πρωτασφαλιστή, συνήθως καλείται να συμμετέχει και αυτός ποσοστιαία στις ζημιές πάνω από το ποσό ιδίας κράτησης (έτσι μειώνεται και ο κίνδυνος για τον αντασφαλιστή).

Παράδειγμα:1.3

Έστω ότι η πρωτασφαλίστρια εταιρεία υπολογίζει ότι μπορεί να αναλάβει κινδύνους που ο καθένας δε θα ξεπερνάει το ποσό των 10.000€. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι συνάπτει μια αντασφαλιστική σύμβαση η οποία προβλέπει ότι ο αντασφαλιστής αποζημιώνει μόνο κάθε φορά που θα συμβαίνουν ζημιές άνω των 10.000€ και η αποζημίωση θα είναι ίση με το υπερβάλλον ποσό μέχρι του ανώτατου ορίου των 15.000€.

Συνεπώς, μια απαίτηση 8.000€ θα αποζημιωθεί εξ’ ολοκλήρου από την πρωτασφαλίστρια εταιρεία. Για απαίτηση 12.000€ η πρωτασφαλίστρια εταιρεία θα καταβάλλει τα πρώτα 10.000€ και η αντασφαλίστρια τα υπόλοιπα 2.000€. Τέλος, μια απαίτηση 17.000€ θα αποζημιωθεί ως εξής: οι πρώτες 10.000€ πληρώνονται από των πρωτασφαλιστή, οι επόμενες 5.000€ από τον αντασφαλιστή και οι υπόλοιπες 2.000€ και πάλι από τον πρωτασφαλιστή. (Γ. Πιτσέλης (2014))

1.3.2.β Σύμβαση ανακοπής ζημίας (Stop Loss)

Τελειώνοντας την περιγραφή των διαφόρων τύπων αντασφάλισης, αξίζει να αναφερθούμε σε ένα πιο σπάνιο, την Stop Loss. Η Stop Loss αντασφάλιση καλύπτει όλες τις ζημιές που προέρχονται μέσα σε ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα (συνήθως ένα χρόνο) από όλο το χαρτοφυλάκιο από οποιοδήποτε κίνδυνο και ανεξαρτήτως μεγέθους, αρκεί το σύνολο να ξεπερνά το προκαθορισμένο ποσό ιδίας κράτησης του πρωτασφαλιστή. Είναι όμοια με την Excess of Loss όσον αφορά το ποσό ιδίας κράτησης αλλά όπως προαναφέραμε, διαφέρει στον ορισμό των ζημιών. Έτσι η Stop Loss δίνει στον πρωτασφαλιστή το πλεονέκτημα να έχει μια σύμβαση με εύκολη και σχετικά ανέξοδη διαχείριση ενώ ταυτόχρονα του παρέχεται κάλυψη όχι μόνο για τις μεγάλες ζημιές αλλά και για τις μικρές αφού εφαρμόζεται στο σύνολο των κινδύνων. Βέβαια, ο πρωτασφαλιστής για λόγους ασφάλειας του αντασφαλιστή καλείται συνήθως να καλύψει ποσοστιαία ένα ποσό ζημιών πάνω από το όριο ιδίας κράτησης.

Κεφάλαιο 2

ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΓΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗ QUOTA SHARE ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ

2.1 Εισαγωγή στα Μέτρα Κινδύνου

Κάθε ασφαλιστική εταιρία που επιλέγει να κάνει χρήση αντασφαλιστικής κάλυψης, έχει σαν στόχο την ανεύρεση της κατάλληλης κάθε φορά σύμβασης, ώστε να μπορεί να ελέγξει και ως εκ τούτου να διαχειριστεί αποτελεσματικά την έκθεσή της στον κίνδυνο. Η χρήση αντασφάλισης όμως, όπως έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω, επιβαρύνει τον ασφαλιστή με ένα επιπλέον κόστος, το αντασφάλιστρο, το οποίο είναι ανάλογο του κινδύνου που μεταφέρεται. Είναι λογικό ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο κίνδυνος που εκχωρείται τόσο υψηλότερο είναι το αντασφάλιστρο και αντίστροφα. Συνεπώς, το ζητούμενο είναι η εύρεση του επιθυμητού επιπέδου εκχώρησης κινδύνου ώστε το οριακό κόστος της αντασφάλισης να είναι ίσο με το οριακό όφελος από αυτή. Για το λόγο αυτό, βασικό αντικείμενο έρευνας και μελέτης των ασφαλιστικών εταιριών είναι η αναζήτηση κατάλληλων μαθηματικών μοντέλων που βελτιστοποιούν την εκάστοτε αντασφαλιστική σύμβαση ικανοποιώντας την προαναφερθείσα συνθήκη. Η ιδανική αντασφαλιστική συμφωνία προσδιορίζεται από την λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης το οποίο μπορεί να περιλαμβάνει είτε μεγιστοποίηση είτε ελαχιστοποίηση ενός κατάλληλα επιλεγμένου κριτηρίου. Τα μέτρα κινδύνου που επιλέγονται συνήθως για τον καθορισμό των βέλτιστων συμβάσεων τόσο σε ασφάλιση όσο και σε αντασφάλιση είναι η Αξία στον Κίνδυνο (VaR) και η Αναμενόμενη Αξία στον κίνδυνο (CTE). Η χρήση των μέτρων αυτών για την εκτίμηση του κινδύνου και τον προσδιορισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων έχει επικρατήσει τόσο σε τράπεζες όσο και σε ασφαλιστικές επιχειρήσεις.

Στη παρούσα διπλωματική εργασία θα επικεντρωθούμε στην Quota Share αντασφάλιση και πιο συγκεκριμένα θα αναζητηθεί το ιδανικό ποσοστό εκχώρησης για ένα χαρτοφυλάκιο ζημιών χρησιμοποιώντας το VaR (Value at Risk) και το CTE (Conditional Tail Expectation). Πριν προχωρήσουμε σε αυτή την ανάλυση και για την καλύτερη κατανόηση του περιεχομένου της εργασίας, θα κάνουμε μια θεωρητική προσέγγιση του VaR και CTE. (*K. S. Tan, C. Weng, Y.Zhang* (2011))

2.1.1 Αξία στον Κίνδυνο (Value at Risk)

Το VaR είναι η μέγιστη ζημιά που ένας χρηματοοικονομικός οργανισμός μπορεί να υποστεί σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα με ορισμένη πιθανότητα α ή διαφορετικά με επίπεδο εμπιστοσύνης 1-α. Η παράμετρος α είναι μια πολύ μικρή τιμή, παραδείγματος χάριν 5% ή ακόμα και 1%. Κατά συνέπεια το VaR συλλαμβάνει την υποκείμενη έκθεση στον κίνδυνο εξασφαλίζοντας ότι με ένα υψηλό βαθμό εμπιστοσύνης η ζημιά δεν θα υπερβεί το επίπεδο VaR. Με άλλα λόγια, το VaR είναι το άνω (1-α) εκατοστημόριο της κατανομής ζημιών για δεδομένη χρονική περίοδο. Για παράδειγμα, εάν για α=1% το ημερήσιο VaR ενός χαρτοφυλακίου είναι € 1.000.000 αυτό σημαίνει ότι το χαρτοφυλάκιο δεν θα έχει συνολικές ζημιές πάνω από αυτό το ποσό μέσα στην επόμενη μέρα, 99 φορές στις 100.

Για τον υπολογισμό του VaR πρέπει να καθοριστούν τρεις μεταβλητές:

<u>Το επίπεδο εμπιστοσύνης (1-α).</u>

Τα πιο συνήθη στην ασφαλιστική αγορά είναι το 99% και το 95%. Όταν μας ενδιαφέρουν οι πολύ μεγάλες ζημιές, που συμβαίνουν σπάνια, χρησιμοποιούμε το επίπεδο εμπιστοσύνης 99,90% δηλαδή μας ενδιαφέρουν οι ζημιές που συμβαίνουν με πιθανότητα 1‰.

<u>Η χρονική περίοδος πρόγνωσης.</u>

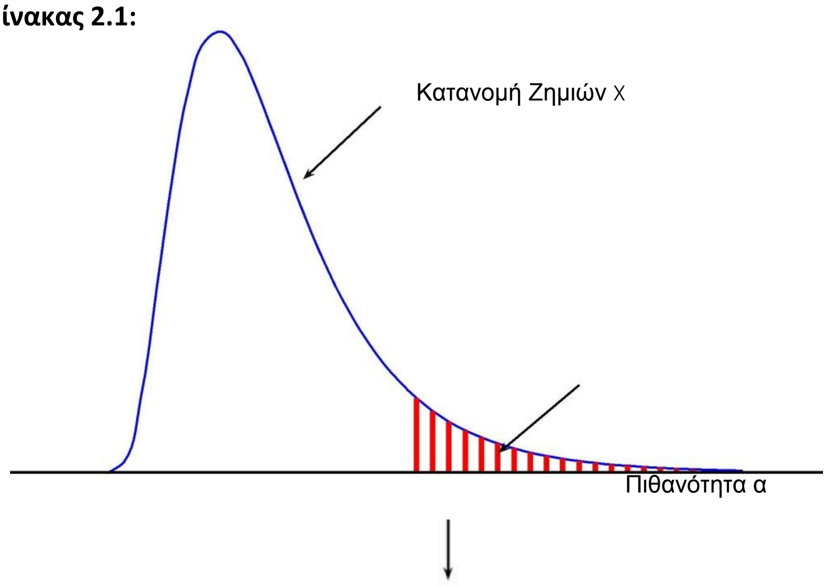
Το διάστημα για το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε τη ζημιά.

<u>Η νομισματική μονάδα.</u>

Είναι το νόμισμα στο οποίο εκφράζεται το κυρίως κεφάλαιο της εταιρίας.

Παρακάτω παρατίθεται μια διαγραμματική απεικόνιση του Value at Risk για να διευκολύνει περισσότερο την κατανόηση της έννοιας:

Πίνακας 2.1:



$$VaR_X\left(a\right)$$

Από μαθηματική σκοπιά, αν θεωρήσουμε ότι η ζημιά του ασφαλιστή παριστάνεται από μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X, με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X\left(x\right)$ και συνάρτηση επιβίωσης $S_X\left(x\right)$, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το VaR της τ.μ. με ένα επίπεδο εμπιστοσύνης 1-α με 0<α<1, ορίζεται ως εξής:

$$VaR_\alpha\left(X\right)=\inf\{x\in\mathbb{R}:F_X(x)=P\left(X\leq x\right)\geq 1-a\}$$

ή ισοδύναμα

$$VaR_\alpha\left(X\right)=\inf\{x\in\mathbb{R}:S_X(x)=P\left(X>x\right)\leq a\}$$

Στη περίπτωση της γενικευμένης αντίστροφης συνάρτησης έχουμε ότι $VaR_X\left(a\right)=S_X^{-1}\left(a\right)=F_X^{-1}\left(1-a\right)$ όπου S_X^{-1} και F_X^{-1} είναι αντίστοιχα, οι αντίστροφες συναρτήσεις της S_X και F_X. Επίσης, υποθέτουμε ότι $0<\alpha<S_X\left(0\right)$ για να αποκλείσουμε την περίπτωση το $VaR_X\left(\alpha\right)=0$ για $\alpha\geq S_X\left(0\right)$.

Το Value at Risk χρησιμοποιείται για την μέτρηση του κινδύνου απώλειας/ζημιάς σε ένα χαρτοφυλάκιο χρηματοοικονομικών προϊόντων , ιδιαίτερα σε επίπεδο Risk Management, καθώς επίσης και για τον υπολογισμό της κεφαλαιακής επάρκειας κατά Solvency II (Solvency Capital Requirement). Το VaR, αν και ευρέως αποδεκτό ως μέτρο κινδύνου, θεωρείται συχνά ανεπαρκές να συλλάβει τη συμπεριφορά της ουράς της κατανομής ζημιάς.

2.1.2 Αναμενόμενη αξία στον κίνδυνο (Conditional tail expectation)

Ένα μέτρο κινδύνου που δεν έχει το ίδιο μειονέκτημα με το VaR, είναι το CTE. Το συγκεκριμένο μέτρο, στα πλαίσια ενός χαρτοφυλακίου ζωής/ζημιών αναφέρεται στην αναμενόμενη απώλεια δοθέντος ότι αυτή υπερβαίνει το VaR, δηλαδή όταν η ζημιά πέφτει στο χειρότερο α σημείο της κατανομής ζημιάς. Προσπαθεί να περιγράψει καλύτερα τον ακραίο και πραγματικά καταστροφικό κίνδυνο. Αυτό βέβαια καθιστά πολύ δύσκολη την εύρεση κατάλληλης κατανομής, καθώς στην άκρη της ουράς δεν υπάρχει μεγάλος όγκος δεδομένων (ζημιών) και αυτό μας οδηγεί σε πολλές παραδοχές και υποθέσεις.

Από μαθηματικής άποψης το CTE μιας τυχαίας μεταβλητής ζημιάς Χ με ένα επίπεδο εμπιστοσύνης 1-α με 0<α<1, ορίζεται ως η μέση τιμή του VaR:

$CTE_a(X) = E\left(X \mid X > VaR_a(X)\right)$, αν η κατανομή του Χ είναι συνεχής,

ή πιο γενικά

$$CTE_\alpha(Z) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_q(Z)\,dq$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι οι ζημιές πάνω από το σημείο α της κατανομής ζημιάς Χ σχηματίζουν μια άλλη κατανομή απώλειας, έστω Υ, τότε το CTE ορίζεται ως η μέση τιμή της α-άνω ουράς της κατανομής αυτής με συνάρτηση κατανομής Ψα(ξ), όπου:

$$\Psi_\alpha(\xi) = \begin{cases} 0 & ,\gamma\iota\alpha\ \xi < VaR_a(X) \\ \frac{\Pr(X\le\xi)-(1-\alpha)}{\alpha} & ,\gamma\iota\alpha\ \xi \ge VaR_a(X) \end{cases}$$

Αφού περιγράψαμε αναλυτικά και τα δυο αυτά μέτρα κινδύνου, εδώ πρέπει να κάνουμε την εξής παρατήρηση. Το VaR δεν λαμβάνει υπόψιν το μέγεθος της ζημιάς εφόσον το συμβάν με πιθανότητα (1-α) πραγματοποιηθεί. Η κατανομή απώλειας πέραν από το αντίστοιχο ποσοστημόριο δεν επηρεάζει το VaR, εκεί βοηθάει το CTE. Για να γίνει πιο κατανοητό αυτό θα παραθέσουμε ένα απλό παράδειγμα. Έστω ότι σε ένα χαρτοφυλάκιο το 95% VaR ανέρχεται σε € 100.000 ενώ το CTE σε € 150.000. Πράγματι διαπιστώνουμε ότι το VaR μας δίνει πληροφορία μόνο για την μέγιστη ζημιά σε ένα συγκεκριμένο ποσοστημόριο, ενώ η πιθανή ζημιά μετά από αυτό μπορεί να είναι αρκετά μεγαλύτερη. Το πώς εξελίσσονται οι ζημιές στην άκρη της ουράς της κατανομής, όπου τα δεδομένα μας είναι «αραιά» είναι μια πληροφορία πολύ σημαντική για τον πρωτασφαλιστή καθώς και για τον αντασφαλιστή, για το λόγο αυτό τα τελευταία χρόνια το συγκεκριμένο μέτρο κινδύνου «κερδίζει έδαφος». (Κ. Τολίκας (2014))

2.2 Αρχές Υπολογισμού του ασφαλίστρου

2.2.1 Εισαγωγή

Η αντασφάλιση, όπως έχει ήδη αναφερθεί, προήλθε από τη βασική ανάγκη των ασφαλιστικών εταιριών να επιμερίσουν τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν. Για την καλύτερη απεικόνιση της λειτουργίας της αντασφάλισης, θα εκφράσουμε τη συνολική απώλεια με την οποία έρχεται αντιμέτωπος ο πρωτασφαλιστής με μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X. Στη περίπτωση της Quota Share αντασφάλισης με συντελεστή εκχώρησης $c \in [0,1]$, οι απώλειες του πρωτασφαλιστή και του αντασφαλιστή εκφράζονται αντίστοιχα ως εξής:

$$\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{qs}} = (1-c)\mathrm{X} \qquad \text{και} \qquad \mathrm{X}_{R_{qs}} = c\mathrm{X}$$

όπου $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{qs}}$ είναι η ζημιά που κρατάει ο πρωτασφαλιστής και $\mathrm{X}_{R_{qs}}$ είναι η ζημιά που καλύπτεται από τη πλευρά του αντασφαλιστή. Με άλλα λόγια, ο εκχωρητής μεταφέρει μέρος του κινδύνου που αρχικά αναλαμβάνει, κρατώντας το $1-c$ της συνολικής ζημιάς. Ο αντασφαλιστής είναι υπεύθυνος για το μέρος c που απομένει. Στην ειδική περίπτωση που ο συντελεστής $c=0$ ο ασφαλιστής αναλαμβάνει όλη την υποχρέωση ενώ αν $c=1$ μεταφέρει όλο τον κίνδυνο στον αντασφαλιστή. Κατά συνέπεια, η πρώτη περίπτωση σημαίνει ότι δεν υπάρχει αντασφάλιση ενώ η δεύτερη συνεπάγεται πλήρη αντασφάλιση.

Μεταφέροντας μερικώς τον κίνδυνο στον αντασφαλιστή ο εκχωρητής επιβαρύνεται με ένα πρόσθετο κόστος, το αντασφάλιστρο. Όσο πιο μεγάλος είναι ο κίνδυνος που εκχωρεί ο πρωτασφαλιστής τόσο πιο δαπανηρό είναι το αντασφάλιστρο (και το αντίστροφο). Αυτό συνεπάγεται ότι όταν ένας ασφαλιστής αναζητά αντασφαλιστική κάλυψη, έρχεται αντιμέτωπος με το κλασσικό ζήτημα της αμοιβαίας αντιστάθμισης ανάμεσα στο ποσοστό εκχώρησης και στο κόστος του αντασφαλίστρου.

Ένα σημαντικό κομμάτι της έως σήμερα έρευνας, όσον αφορά τα βέλτιστα μοντέλα αντασφάλισης, είναι αφιερωμένο είτε στην μεγιστοποίηση της ωφελιμότητας του ασφαλιστή είτε στην ελαχιστοποίηση ενός μέτρου κινδύνου του ασφαλιστικού ρίσκου, παρουσία της αντασφάλισης. Στην παρούσα εργασία βασιζόμενοι στις πιο πρόσφατες μελέτες θα ελαχιστοποιήσουμε συγκεκριμένα μέτρα κινδύνου όπως το Value at Risk (VaR) και το Conditional Tail Expectation (CTE) του συνολικού κόστους του ασφαλιστή στην προσπάθεια μας για την εύρεσης της βέλτιστης Quota Share αντασφάλισης (ανάμεσα σε άλλες στρατηγικές αντασφάλισης) χρησιμοποιώντας όμως διαφορετικές αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου, πέραν της αρχής της μαθηματικής ελπίδας (που είχε χρησιμοποιηθεί στην έρευνα των Cai και Tan (2007)).

2.2.2 Αρχές Υπολογισμού του Ασφαλίστρου

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε μια λίστα από αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου που θα χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη του ανωτέρω σκοπού. Οι αρχές ασφαλίστρου εξαρτώνται αποκλειστικά από την οριακή συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής. Επομένως θα χρησιμοποιηθούν οι συμβολισμοί $\Pi[F]$ και $\Pi[X]$ για να εκφράσουμε το ασφάλιστρο του X, αν F είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X.

Παρακάτω δίνονται 17 αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου που έχουν προταθεί από αναλογιστές (*K. S. Tan, C. Weng, Yi Zhang,* 2009):

A_1 <u>Αρχή της μαθηματικής ελπίδας</u> : $\Pi(X) = (1+\beta)E[X]$ όπου $\beta > 0$

Το β είναι μία παράμετρος και η επιβάρυνση του ασφαλίστρου ισούται με $\beta E[X]$.

A_2 <u>Αρχή της τυπικής απόκλισης</u> : $\Pi(X) = E[X] + \beta\sqrt{D[X]}$ όπου $\beta > 0$

και $D[X]$ συμβολίζει τη διακύμανση της τ.μ. X.

Και σε αυτή τη περίπτωση πρέπει να ισχύει ότι $\beta > 0$ για να αποφευχθεί η χρεοκοπία με πιθανότητα 1. Η αρχή αυτή συνδέει την επιβάρυνση του ασφαλίστρου με τη διακύμανση των κινδύνων και χρησιμοποιείται ευρέως στις ασφαλίσεις κατά ζημιών.

A_3 <u>Μικτή Αρχή</u> : $\Pi(X) = E[X] + \beta D[X]/E[X]$ όπου $\beta > 0$

A_4 <u>Αρχή της τροποποιημένης διακύμανσης</u> : $\Pi(X) = E[X] + \beta\sqrt{D[X]} + \gamma D[X]/E[X]$ όπου $\beta, \gamma > 0$

A_5 <u>Αρχή της μέσης τιμής</u>: $\Pi(X) = \sqrt{E[X^2]} = \sqrt{(E[X])^2 + D[X]}$

A_6 <u>Αρχή της p-μέσης τιμής</u> : $\Pi(X) = (E[X^p])^{1/p}$ όπου $p > 1$

A_7 <u>Αρχή της Ημιδιακύμανσης</u>: $\Pi(X) = E[X] + \beta\{E[X - EX]_+^2\}^{1/2}$ με $0 < \beta < 1$

A_8 Ολλανδική Αρχή : $\Pi(\mathrm{X})=\mathrm{E}[\mathrm{X}]+\beta\mathrm{E}[\mathrm{X}-\mathrm{EX}]_+$ με $0<\beta<1$

Για $E[X]=\mu$ έχουμε $(X-EX)_+=(X-\mu)_+=\max(X-\mu,0)=\begin{cases}0, & X\leq\mu\\ X-\mu, & X>\mu\end{cases}$ και

$E[X-EX]_+=E(X-\mu)_+=\int_{\mu}^{\infty}(1-F_X(x))dx$

A_9 Αρχή του Wang : $\Pi(\mathrm{X})=\int_0^{\infty}[\Pr(\mathrm{X}\geq t)]^p dt$ με $0<\beta<1$

A_{10} Αρχή του Gini : $\Pi(\mathrm{X})=\mathrm{E}[\mathrm{X}]+\beta\mathrm{E}\left|\mathrm{X}-\mathrm{X}'\right|$ όπου $\beta>0$

Οι X, X' είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή και ο όρος $E\left|X-X'\right|$ εκφράζει το μέσο όρο του εύρους της κατανομής.

A_{11} Αρχή του γενικευμένου ποσοστημορίου: $\Pi(\mathrm{X})=\mathrm{E}[\mathrm{X}]+\beta\left\{F_{\mathrm{X}}^{-1}(1-p)-\mathrm{E}[\mathrm{X}]\right\}$ με $\beta>0$ και $p<1$

A_{12} Αρχή TVaR : $\Pi(\mathrm{X})=1/p\int_{1-p}^{1}F_{\mathrm{X}}^{-1}(x)dx$ όπου $0<p<1$

A_{13} Αρχή της Διακύμανσης : $\Pi(\mathrm{X})=\mathrm{E}[\mathrm{X}]+\beta D[\mathrm{X}]$ με $\beta>0$

Στη περίπτωση αυτή η επιβάρυνση του ασφαλίστρου είναι ανάλογη της διακύμανσης D[X]

A_{14} Αρχή της Ημιδιακύμανσης : $\Pi(\mathrm{X})=\mathrm{E}[\mathrm{X}]+\beta\mathrm{E}[\mathrm{X}-\mathrm{EX}]_+^2$ με $\beta>0$

Ή ισοδύναμα $\Pi(\mathrm{X})=\mathrm{E}[\mathrm{X}]+\beta D_+[\mathrm{X}]$ όπου $D_+[\mathrm{X}]=\int_{\mu}^{\infty}(\mathrm{X}-\mu)^2 dF_{\mathrm{X}}(x)$ με $\mu=E(X)$ και $F(X)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X .

A_{15} Αρχή της δευτεροβάθμιας ωφελιμότητας : $\Pi(\mathrm{X})=\mathrm{E}[\mathrm{X}]+\beta-\sqrt{\beta^2-D[X]}$ με $\beta>0$ και $\beta^2\geq D[X]$

A_{16} Αρχή της Συνδιακύμανσης: $\Pi(\mathrm{X})=\mathrm{E}[\mathrm{X}]+2\beta D[X]-\beta Cov(X,Y)$ με $\beta>0$

και Y είναι μία τυχαία μεταβλητή.

A17 <u>Εκθετική Αρχή</u> : $\Pi(\mathrm{X}) = \frac{1}{\beta}\log \mathrm{E}[\exp(\beta \mathrm{X})]$ με $\beta > 0$

Η παράμετρος β εκφράζει την αποστροφή από τον κίνδυνο. Το εκθετικό ασφάλιστρο αυξάνεται αν το β αυξάνει. Στη περίπτωση που $\beta \downarrow 0$ τότε ισχύει $\Pi(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})$ (Αρχή της ισοδυναμίας), ενώ αν $\beta \to \infty$ το ασφάλιστρο ισούται με τη μέγιστη τιμή του κινδύνου X (M. Govaaerts et al, 2008).

2.2.3 Ιδιότητες των αρχών ασφαλίστρου

Σύμφωνα με άρθρο στην Encyclopedia of Actuarial Science (J.Teugels, B.Sundt, 2004) κάποιες επιθυμητές ιδιότητες των παραπάνω αρχών είναι οι ακόλουθες:

Ανεξαρτησία: Το $\Pi(\mathrm{X})$ εξαρτάται από τη συνάρτηση επιβίωσης της τ.μ. X, με $S_{\mathrm{X}}(t) = \Pr(\mathrm{X} > t)$. Αυτό σημαίνει ότι το ασφάλιστρο του Χ συνδέεται μόνο με τις πιθανότητες που βρίσκονται στην ουρά της κατανομής της Χ. Αυτή η ιδιότητα δηλώνει ότι το ασφάλιστρο εξαρτάται αποκλειστικά από το μέγεθος της ζημιάς και την πιθανότητα επέλευσής της, αλλά όχι από την αιτία της.

Επιβάρυνση λόγω κινδύνου: $\Pi(\mathrm{X}) \geq \mathrm{E}(\mathrm{X})$

Η επιβάρυνση λόγω κινδύνου είναι επιθυμητή διότι για να ασφαλίσουμε ένα κίνδυνο περιμένουμε το ασφάλιστρο να καλύπτει τουλάχιστον το αναμενόμενο ποσό ζημιάς

($\mathrm{E}(\mathrm{X})$). Διαφορετικά, είναι ορατός ο κίνδυνος της χρεοκοπίας.

Μη αδικαιολόγητη επιβάρυνση του ασφαλίστρου: Σε αντίθεση με την προηγούμενη ιδιότητα, εάν γνωρίζουμε με απόλυτη βεβαιότητα ότι το ποσό της ζημιάς ανέρχεται σε c $(c \geq 0)$ δηλαδή $P(X = c) \equiv 1$ τότε $\Pi(\mathrm{X}) = c$. Συνεπώς, όταν δεν υφίσταται αβεβαιότητα αναφορικά με το ποσό της ζημιάς δεν υπάρχει λόγος επιβάρυνσης του ασφαλίστρου.

Μέγιστη Απώλεια: $\Pi(\mathrm{X}) \leq \max(\mathrm{X})$

Το $\Pi(\mathrm{X})$ είναι μία φραγμένη συνάρτηση με άνω φράγμα τη μέγιστη τιμή του X. Αν η ζημιά είναι πολύ μεγάλη (χωρίς όριο) τότε η ιδιότητα αυτή ικανοποιείται για οποιαδήποτε τιμή του ασφαλίστρου.

Προσθετικότητα ως προς σταθερά : $\Pi(\mathrm{X}+c)=\Pi(\mathrm{X})+c$

Αν αυξήσουμε την απαίτηση X, κατά ένα σταθερό ποσό c, τότε το ασφάλιστρο, για τον κίνδυνο $X+c$, θα πρέπει να αυξηθεί κατά το ίδιο ποσό c.

Ομοιογένεια πρώτου βαθμού: $\Pi(b\mathrm{X})=b\Pi(\mathrm{X})$ για όλα τα X και b≥0

Έστω, b=2. Η ιδιότητα αυτή δηλώνει ότι το ασφάλιστρο για το διπλάσιο κίνδυνο είναι διπλάσιο του ασφαλίστρου για τον μεμονωμένο κίνδυνο. Για να αιτιολογηθεί αυτή η ιδιότητα συνήθως χρησιμοποιείται η Αρχή της μη κερδοσκοπίας (no-arbitrage). Πράγματι, εάν το ασφάλιστρο για τον διπλάσιο κίνδυνο ήταν μεγαλύτερο από δύο φορές το ασφάλιστρο για τον μεμονωμένο, τότε θα μπορούσαμε να καλύψουμε πιο φθηνά την ασφάλιση του διπλάσιου κινδύνου αγοράζοντας δύο συμβόλαια από τον μεμονωμένο κίνδυνο.

Προσθετικότητα: $\Pi\left(\mathrm{X}+\mathrm{Y}\right)=\Pi\left(\mathrm{X}\right)+\Pi\left(\mathrm{Y}\right)$ όπου X,Y ανεξάρτητες τ.μ.

Αυτή η ιδιότητα είναι πιο ισχυρή από την προαναφερθείσα. Δικαιολογείται επίσης από την Αρχή της μη κερδοσκοπίας (no-arbitrage).

Υποπροσθετικότητα: $\Pi\left(\mathrm{X}+\mathrm{Y}\right)\leq\Pi\left(\mathrm{X}\right)+\Pi\left(\mathrm{Y}\right)$ όπου X,Y ανεξάρτητες τ.μ.

Η παραπάνω ιδιότητα συλλαμβάνει πραγματικά την έννοια της διασποράς του κινδύνου (diversification).

Υπερπροσθετικότητα : $\Pi\left(\mathrm{X}+\mathrm{Y}\right)\geq\Pi\left(\mathrm{X}\right)+\Pi\left(\mathrm{Y}\right)$ όπου X,Y ανεξάρτητες τ.μ.

Η συγκεκριμένη ιδιότητα θα μπορούσε να είναι λογική για μια αρχή ασφαλίστρου αν υφίστανται περιορισμοί όσον αφορά το πλεόνασμα τέτοιοι ώστε ο ασφαλιστής να πρέπει να επιβαρύνει το ασφάλιστρο ώστε να ασφαλίσει μεγαλύτερους κινδύνους.

Επαναληψιμότητα: $\Pi\left(\mathrm{X}\right)=\Pi\left(\Pi\left(\mathrm{X}\middle|\mathrm{Y}\right)\right)$ για κάθε X,Y

Σύμφωνα με την συγκεκριμένη ιδιότητα το ασφάλιστρο για τον κίνδυνο X μπορεί να υπολογιστεί σε δύο βήματα. Αρχικά εφαρμόζουμε το $\Pi\left(\cdot\right)$ στη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της X δοθέντος $Y = y$. Το ασφάλιστρο που προκύπτει είναι μία συνάρτηση $h(y)$. Κατόπιν εφαρμόζουμε την ίδια αρχή ασφαλίστρου στην τυχαία μεταβλητή $\Pi[X|Y] := h(Y)$

Μονοτονία: Αν ισχύει ότι $X \le Y$ με πιθανότητα 1, τότε $\Pi(X) \le \Pi(Y)$

Η ιδιότητα αυτή δηλώνει ότι για έναν ασφαλιστικό κίνδυνο X που είναι μικρότερος από έναν κίνδυνο Y, το ασφάλιστρο για την κάλυψη του πρώτου θα είναι χαμηλότερο από του δεύτερου .

Πρώτου βαθμού στοχαστική διάταξη: Αν $S_X(t) \le S_Y(t)$ για όλα τα $t \ge 0$ τότε $\Pi(X) \le \Pi(Y)$

Η ιδιότητα αυτή δηλώνει ότι αν η πιθανότητα ο κίνδυνος X να υπερβεί ένα οποιοδήποτε ποσό t είναι μικρότερη της αντίστοιχης πιθανότητας ενός κινδύνου Y, δηλαδή ότι αν ο κίνδυνος X είναι στοχαστικά μικρότερος από τον Y, τότε το ασφάλιστρο για τον πρώτο είναι πιο χαμηλό από ότι για τον δεύτερο κίνδυνο.

2.3 Υπολογισμός του βέλτιστου ποσοστού εκχώρησης

2.3.1 Εισαγωγή

Οι αρχές ασφαλίστρου που χρησιμοποιούνται συνήθως στη πράξη δεν ικανοποιούν απαραίτητα όλες τις παραπάνω ιδιότητες, ωστόσο ικανοποιούν τις περισσότερες από αυτές. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα περισσότερα βέλτιστα μοντέλα αντασφάλισης που έχουν μελετηθεί ως τώρα, έγιναν με βάση την υπόθεση ότι το αντασφάλιστρο καθορίζεται από την αρχή της μαθηματικής ελπίδας. Ενδιαφέρον λοιπόν παρουσιάζει να εξετάσουμε πώς θα επηρεαστεί η βέλτιστη Quota Share αντασφάλιση όταν η αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου αποκλίνει από την τυπική αρχή της μαθηματικής ελπίδας.

Πιο συγκεκριμένα, βασιζόμενοι στα μέτρα κινδύνου VaR και CTE και χρησιμοποιώντας κάποιες από τις προαναφερθείσες αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου (Παράγραφος 2.2.2) θα γίνει προσπάθεια προσδιορισμού του βέλτιστου συντελεστή εκχώρησης $c^* \in [0,1]$. Η επιλογή των αρχών θα γίνει σύμφωνα με μία ταξινόμηση όσον αφορά τη βέλτιστη αντασφάλιση σε τετριμμένη (ασήμαντη) ή μη τετριμμένη. Με τον όρο μη τετριμμένη εννοούμε ότι ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης c^* στη Quota Share αντασφάλιση παίρνει τιμές στο ανοιχτό διάστημα $(0,1)$. Από την άλλη, με τον όρο τετριμμένη βέλτιστη αντασφάλιση εννοούμε ότι το c^* είναι είτε 0 είτε 1, δηλαδή ότι το βέλτιστο είναι είτε να μην έχουμε αντασφάλιση είτε να έχουμε πλήρη κάλυψη από τον αντασφαλιστή.

2.3.2 Μοντέλα βελτιστοποίησης

Απουσία αντασφάλισης ο ασφαλιστής είναι εκτεθειμένος στη ζημιά που συμβολίζεται με την τυχαία μεταβλητή X. Με τη σύναψη αντασφαλιστικής σύμβασης η έκθεση στον κίνδυνο του ασφαλιστή μετασχηματίζεται από X σε X_{I} ανάλογα με το ποσοστό του κινδύνου που αναλαμβάνει. Επιπλέον επιφορτίζεται με το κόστος του αντασφαλίστρου για το κομμάτι του κινδύνου $\mathrm{X}_R = \mathrm{X} - \mathrm{X}_{\mathrm{I}}$ που εκχωρεί στον αντασφαλιστή. Ανάλογα με την αρχή ασφαλίστρου που υιοθετείται κάθε φορά, το κόστος του αντασφαλίστρου ορίζεται σε $\Pi(\mathrm{X}_R)$. Συνεπώς, η συνολική δαπάνη του ασφαλιστή παρουσία αντασφάλισης ορίζεται :

$$\mathrm{X}_T = \mathrm{X}_I + \Pi(\mathrm{X}_R) \qquad (2.1)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση και σύμφωνα με την ιδιότητα της προσθετικότητας ως προς σταθερά των μέτρων VaR και CTE:

$$VaR(X+c) = VaR(X) + c \qquad (2.2)$$

$$CTE(X+c) = CTE(X) + c \qquad (2.3)$$

για τυχαία ζημιά X και οποιοδήποτε σταθερά $c \in \mathbb{R}$

Οδηγούμαστε στις επόμενες σχέσεις:

$$VaR_\alpha(X_T) = VaR_\alpha(X_I) + \Pi(X_R) \qquad (2.4)$$

$$CTE_\alpha(X_T) = CTE_\alpha(X_I) + \Pi(X_R) \qquad (2.5)$$

Επιπλέον, από τη σχέση που συνδέει το VaR και το CTE *(K. S. Tan, C. Weng, Yi Zhang* (2009)) έχουμε ότι:

$$CTE_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_\alpha(X)}^{\infty} S_X(x)dx \qquad (2.6)$$

Το CTE της ζημιάς που κρατάει ο ασφαλιστής μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω ως:

$$CTE_\alpha(X_I) = VaR_\alpha(X_I) + \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_\alpha(X_I)}^{\infty} S_{X_I}(x)dx \qquad (2.7)$$

που σε συνδυασμό με τη σχέση (2.5) μας δίνει:

$$CTE_\alpha(X_T) = VaR_\alpha(X_I) + \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_\alpha(X_I)}^{\infty} S_{X_I}(x)dx + \Pi(X_R) \qquad (2.8)$$

Οι παραπάνω είναι κάποιες γενικές σχέσεις για τα μέτρα κινδύνου που σχετίζονται με τη τυχαία μεταβλητή της ζημιάς που καλύπτει ο πρωτασφαλιστής και τη τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τη συνολική δαπάνη του ασφαλιστή παρουσία αντασφάλισης.

Στα πλαίσια μιας Quota Share αντασφάλισης, η συνάρτηση επιβίωσης της τυχαίας μεταβλητής της ζημιάς που αναλαμβάνει ο πρωτασφαλιστής $X_{I_{qs}}$ ορίζεται ως εξής:

$$S_{X_{I_{qs}}}(x) = \Pr\left((1-c)X > x\right) = \begin{cases} S_X\left(\frac{x}{1-c}\right), & 0 \le c < 1 \\ 0, & c = 1 \end{cases} \qquad \text{για } x \ge 0$$

Συνεπώς αν θεωρήσουμε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$ το VaR της τ.μ. $X_{I_{qs}}$ δίνεται :

$$VaR_\alpha\left(X_{I_{qs}};c\right) = (1-c)S_X^{-1}(\alpha) \qquad (2.9)$$

Επιπλέον το VaR της συνολικής δαπάνης $X_{T_{qs}}$ όπως προκύπτει από τις σχέσεις (2.4) και (2.9) είναι:

$$VaR_\alpha\left(X_{T_{qs}};c\right) = (1-c)S_X^{-1}(\alpha) + \Pi(cX) \qquad (2.10)$$

για $0 \le c \le 1$ και $0 < a < S_X(0)$.

Τέλος, με τη βοήθεια της σχέσης (2.8) ορίζεται το αντίστοιχο CTE της συνολικής δαπάνης του πρωτασφαλιστή :

$$CTE_{\alpha}\left(\mathrm{X}_{T_{qs}};c\right)=(1-c)S_X^{-1}(\alpha)+\frac{1-c}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{\infty}S_X(\alpha)dx+\Pi(cX) \quad (2.11)$$

για $0 \le c \le 1$ και $0 < a < S_X(0)$.

Παρατηρούμε από τις παραπάνω σχέσεις ότι υπό μια Quota Share αντασφάλιση τα μέτρα κινδύνου VaR και CTE της ολικής δαπάνης του πρωτασφαλιστή εξαρτώνται ρητά από το c. Η ρητή αυτή εξάρτηση του c σχετικά με τα μέτρα κινδύνου συνεπάγεται την αναζήτηση των βέλτιστων συντελεστών c^* που ελαχιστοποιούν το αντίστοιχο μέτρο κινδύνου. Πιο συγκεκριμένα, τα βέλτιστα μοντέλα αντασφάλισης σταθερού ποσοστού μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

$$VaR \text{ optimization: } VaR_{\alpha}\left(T_{qs};c^*\right)=\min_{c\in[0,1]}\left\{VaR_{\alpha}\left(T_{qs};c\right)\right\} \quad \text{(Κριτήριο 1)}$$

$$CTE \text{ optimization: } \mathrm{CTE}_{\alpha}\left(T_{qs};c^*\right)=\min_{c\in[0,1]}\left\{CTE_{\alpha}\left(\mathrm{T}_{qs};c\right)\right\} \quad \text{(Κριτήριο 2)}$$

Συμπερασματικά θα μπορούσαμε να πούμε, ότι τα παραπάνω μοντέλα βελτιστοποίησης βασίζονται στη λογική ότι ο ασφαλιστής ενδιαφέρεται να ελαχιστοποιήσει τον κίνδυνο που αντιμετωπίζει. Συνεπώς, το βέλτιστο σχέδιο αντασφάλισης βεβαιώνει ότι η έκθεση στον κίνδυνο του ασφαλιστή, καθώς μετριέται με το μέτρο κινδύνου του συνολικού κόστους, ελαχιστοποιείται βέλτιστα. Τέλος, όπως έχει προαναφερθεί, όταν οι βέλτιστες λύσεις στα παραπάνω μοντέλα είναι μη τετριμμένες, συνεπάγεται ότι ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης c^* ανήκει αυστηρά στο διάστημα $(0,1)$.

2.3.3 Βέλτιστη Quota Share αντασφάλιση

Στο σημείο αυτό θα διατυπωθούν δύο θεωρήματα, σύμφωνα με τους *K. S. Tan, C. Weng, Y. Zhang* (2009), τα οποία παρέχουν τη συνθήκη για την ύπαρξη βέλτιστης Quota Share αντασφάλισης υπό μία γενική αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου.

Θεώρημα 2.1:

Λαμβάνοντας υπόψη το Κριτήριο 1 (VaR optimization) της παραγράφου 2.3.2:

α)Υποθέτουμε ότι το αντασφάλιστρο $\Pi(\cdot)$ ικανοποιεί ότι $\Pi(0)=0$ και την ιδιότητα $\Pi(cX)=c\Pi(X)$ για κάθε σταθερά $c>0$. Τότε η βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσού είναι τετριμμένη, και επιπλέον, ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης εξαρτάται από τη σχέση των $\Pi(X)$ και $S_X^{-1}(\alpha)$ όπως υποδεικνύεται παρακάτω:

$$c^* = \begin{cases} 0 & \Pi(\mathrm{X}) > \mathrm{S}_\mathrm{X}^{-1}(\alpha) \\ \forall \text{ αριθμό} \in [0,1] & \Pi(\mathrm{X}) = \mathrm{S}_\mathrm{X}^{-1}(\alpha) \\ 1 & \Pi(\mathrm{X}) < \mathrm{S}_\mathrm{X}^{-1}(\alpha) \end{cases} \tag{2.12}$$

β)Αν $\Pi(cX)$ είναι αυστηρά κυρτή συνάρτηση (δηλαδή αν $\Pi^{'}(cX)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση) στο c για $0\le c\le 1$ τότε η μη τετριμμένη βέλτιστη Quota Share αντασφάλιση υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει μία σταθερά $c^*\in(0,1)$ τέτοια ώστε:

$$\Pi_c^{'}(c^*X)-S_X^{-1}(\alpha)=0 \tag{2.13}$$

όπου $\Pi_c^{'}(\cdot)$ συμβολίζει τη μερική παράγωγο ως προς c. Συνεπώς, το c^* που ικανοποιεί τη (2.13) είναι ο βέλτιστος quota-share συντελεστής.

<u>Θεώρημα 2.2</u>:

Λαμβάνοντας υπόψη το Κριτήριο 2 (CTE optimization) της παραγράφου 2.3.2:

α)Υποθέτουμε ότι το αντασφάλιστρο $\Pi(\cdot)$ ικανοποιεί ότι $\Pi(0)=0$ και την ιδιότητα $\Pi(cX)=c\Pi(X)$ για κάθε σταθερά $c>0$. Τότε η βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσού είναι τετριμμένη, και επιπλέον, ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης καθορίζεται ανάλογα με τις ποσότητες $\Pi(X)$ και $u(\alpha)$ όπως υποδεικνύεται παρακάτω:

$$c^* = \begin{cases} 0 & \Pi(\mathrm{X}) > u(\alpha) \\ \forall \text{ αριθμό} \in [0,1] & \Pi(\mathrm{X}) = \mathrm{u}(\alpha) \\ 1 & \Pi(\mathrm{X}) < u(\alpha) \end{cases} \tag{2.14}$$

β)Αν $\Pi(cX)$ είναι αυστηρά κυρτή συνάρτηση (δηλαδή αν $\Pi^{'}(cX)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση) στο c για $0 \le c \le 1$ τότε η βέλτιστη Quota Share αντασφάλιση υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει μία σταθερά $c^{*} \in (0,1)$ τέτοια ώστε:

$$\Pi_{c}^{'}\left(c^{*}X\right) - u(\alpha) = 0 \qquad (2.15)$$

όπου $\Pi_{c}^{'}(\cdot)$ συμβολίζει τη μερική παράγωγο ως προς c και η συνάρτηση

$$u(a) = S_X^{-1}(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{\infty} S_X(x)\,dx$$

είναι ουσιαστικά το CTE στο σημείο α. Προφανώς, το c^{*} που ικανοποιεί την (2.15) είναι ο βέλτιστος quota-share συντελεστής.

2.3.4 Ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης

Τα Θεωρήματα 2.1 και 2.2 της προηγούμενης παραγράφου παρουσιάζουν τις συνθήκες για την ύπαρξη (ή όχι) της μη τετριμμένης βέλτιστης αντασφάλισης σταθερού ποσοστού υπό μία γενική αρχή ασφαλίστρου. Σε αυτή την παράγραφο θα προσαρμόσουμε τα παραπάνω συμπεράσματα στις 17 αρχές ασφαλίστρου που παρουσιάσαμε στη παράγραφο 2.2.2. Ακολουθούν τρεις προτάσεις που διατυπώθηκαν από τους *K. S. Tan, C. Weng, Y. Zhang* (2009). Στη πρώτη δηλώνεται ότι οι βέλτιστες quota-share αντασφαλίσεις είναι τετριμμένες για τις αρχές A_1-A_{12}. Οι άλλες δύο προτάσεις εξετάζουν τις υπόλοιπες αρχές (A_{13}-A_{17}) όσον αφορά τα κριτήρια για τη VaR βελτιστοποίηση και τη CTE βελτιστοποίηση αντίστοιχα, δίνοντας για κάθε μία αρχή την αναγκαία συνθήκη και τον τύπο υπολογισμού του βέλτιστου συντελεστή εκχώρησης.

Πρόταση 2.1 :

Τόσο για το Κριτήριο 1 (VaR optimization) όσο και για το Κριτήριο 2 (CTE optimization), η βέλτιστη quota-share αντασφάλιση είναι τετριμμένη για τις αρχές A_1-A_{12} και ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης προσδιορίζεται από τις σχέσεις (2.12) και (2.14) αντίστοιχα.

Η απόδειξη είναι προφανής και προκύπτει από το τμήμα (α) των Θεωρημάτων 2.1 και 2.2 καθώς και από το γεγονός ότι για όλες τις αρχές A_1-A_{12} ισχύει ότι $\Pi(0) = 0$ και η ιδιότητα της θετικής ομοιογένειας.

<u>Πρόταση 2.2</u> :

Λαμβάνοντας υπόψη το Κριτήριο 1:

α) A_{13} (Αρχή της Διακύμανσης) : Η βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσοστού είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$E[X] < S_X^{-1}(\alpha) < E[X] + 2\beta D[X]$$

και ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης, σε αυτή την περίπτωση, δίνεται ως εξής:

$$c^* = \frac{S_X^{-1}(\alpha) - E[X]}{2\beta D[X]}$$

β)A_{14} (Αρχή της Ημιδιακύμανσης): Η βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσοστού είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$E[X] < S_X^{-1}(\alpha) < E[X] + 2\beta E[X - EX]_+^2$$

και ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$c^* = \frac{S_X^{-1}(\alpha) - E[X]}{2\beta \mathrm{E}[X - EX]_+^2}$$

γ)A_{15} (Αρχή της τετραγωνικής Ωφελιμότητας): Η βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσοστού είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$S_X^{-1}(\alpha) > E[X] \quad \text{και} \quad \frac{\left(S_X^{-1}(\alpha) - E[X]\right)\beta}{\sqrt{D[X]\left\{D[X] + \left(S_X^{-1}(\alpha) - E[X]\right)^2\right\}}} < 1$$

και ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης, σε αυτή τη περίπτωση, καθορίζεται ως εξής:

$$c^* = \frac{\left(S_X^{-1}(\alpha) - E[X]\right)\beta}{\sqrt{D[X]\left\{D[X] + \left(S_X^{-1}(\alpha) - E[X]\right)^2\right\}}}$$

δ)A_{16} (Αρχή της Συνδιακύμανσης): Αν Y είναι μία τυχαία μεταβλητή, και η βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσοστού υπάρχει αν και μόνο αν

$$E[X] > \beta Cov(X,Y)$$

και

$$E[X] - \beta Cov(X,Y) < S_X^{-1}(\alpha) < 4\beta D[X] + E[X] - \beta Cov(X,Y)$$

Ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης, σε αυτή τη περίπτωση, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$c^* = \frac{S_X^{-1}(\alpha) - E[X] + \beta Cov(X,Y)}{4\beta D[X]}$$

ε)A_{17} (Εκθετική Αρχή): Η βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσοστού είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν υπάρχει μία σταθερά $c^* \in (0,1)$ τέτοια ώστε:

$$E\left[X \exp\left(c^* \beta X\right)\right] = S_X^{-1}(\alpha) E\left[\exp\left(c^* \beta X\right)\right] \qquad (2.16)$$

Στη περίπτωση αυτή ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης c^* καθορίζεται από την (2.16)

<u>Πρόταση 2.3</u> :

Λαμβάνοντας υπόψη το Κριτήριο 2:

α) A_{13} (Αρχή Διακύμανσης) : Η βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσοστού είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$E[X] < u(\alpha) < E[X] + 2\beta D[X]$$

και ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης, σε αυτή την περίπτωση, υπολογίζεται ως εξής:

$$c^* = \frac{u(\alpha) - E[X]}{2\beta D[X]}$$

β)A_{14} (Αρχή της Ημιδιακύμανσης): Η βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσοστού είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$E[X] < u(\alpha) < E[X] + 2\beta E[X - EX]_+^2$$

και ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης, σε αυτή τη περίπτωση, δίνεται από τη σχέση:

$$c^* = \frac{u(\alpha) - E[X]}{2\beta \mathrm{E}[X - EX]_+^2}$$

γ)A_{15} (Αρχή της τετραγωνικής ωφελιμότητας): Η βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσοστού είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$u(\alpha) > E[X] \quad \text{και} \quad \frac{\left(u(\alpha)-E[X]\right)\beta}{\sqrt{D[X]\left\{D[X]+\left(u(\alpha)-E[X]\right)^2\right\}}} < 1$$

και ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης, σε αυτή τη περίπτωση, καθορίζεται ως εξής:

$$c^* = \frac{\left(u(\alpha)-E[X]\right)\beta}{\sqrt{D[X]\left\{D[X]+\left(u(\alpha)-E[X]\right)^2\right\}}}$$

Δ)A_{16} (Αρχή της Συνδιακύμανσης): Αν Υ είναι μία τυχαία μεταβλητή, τότε η βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσοστού είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν

$$E[X] > \beta Cov(X,Y)$$

και

$$E[X] - \beta Cov(X,Y) < u(\alpha) < 4\beta D[X] + E[X] - \beta Cov(X,Y).$$

Ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης, σε αυτή τη περίπτωση, δίνεται από τον τύπο:

$$c^* = \frac{u(\alpha)-E[X]+\beta Cov(X,Y)}{4\beta D[X]}$$

ε)A_{17} (Εκθετική Αρχή): Η βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσοστού είναι μη τετριμμένη αν και μόνο αν υπάρχει μία σταθερά $c^* \in (0,1)$ τέτοια ώστε:

$$E\left[X \exp\left(c^*\beta X\right)\right] = u(\alpha) E\left[\exp\left(c^*\beta X\right)\right] \qquad (2.17)$$

Στην περίπτωση αυτή ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης c^* καθορίζεται από την (2.17)

Κεφάλαιο 3

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

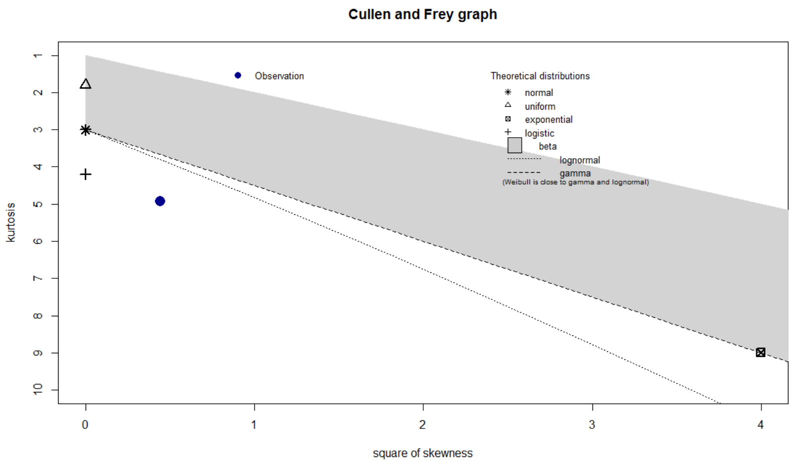
3.1Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε αναλυτικά τους τύπους που προσδιορίζουν το βέλτιστο ποσοστό εκχώρησης σε μια σύμβαση σταθερού ποσοστού ανάλογα με την αρχή ασφαλίστρου που υιοθετείται κάθε φορά. Για την εφαρμογή αυτών των τύπων, μας δόθηκαν δεδομένα από μία Ελληνική ασφαλιστική εταιρεία. Τα δεδομένα αφορούν ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει 1.188 συμβόλαια. Για κάθε ένα συμβόλαιο μας δίνονται τα ασφάλιστρα, οι προμήθειες και οι τυχόν ζημιές ανά μήνα για χρονική περίοδο ενός έτους. Καθώς μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το μέγεθος και το πλήθος των ζημιών ανά μήνα, έγινε επιλογή των συμβολαίων (225 το πλήθος) που εμφάνισαν ζημιές κατά τη διάρκεια του έτους.

3.2 Μελέτη της κατανομής του μεγέθους των ζημιών

Αρχικά θα καθορίσουμε σε ποιά συνάρτηση κατανομής ταιριάζουν καλύτερα τα δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας. Για την επίτευξη αυτού του στόχου χρησιμοποιήσαμε το στατιστικό πρόγραμμα R. Αφού έγινε η απαραίτητη διαμόρφωση των αρχικών δεδομένων για να είναι κατάλληλα προς χρήση, πραγματοποιήθηκε μια προσέγγιση αναφορικά με το ποιά κατανομή πιθανόν να προσαρμόζεται καλύτερα στο μέγεθος των ζημιών του χαρτοφυλακίου.

3.2.1 Προσέγγιση Cullen-Frey



Διάγραμμα 3.1: Cullen and Frey graph

Το διάγραμμα αυτό είναι ένα διάγραμμα κύρτωσης-ασυμμετρίας που προτάθηκε από τους Cullen-Frey για την εμπειρική κατανομή των δεδομένων μας. Σε αυτό το διάγραμμα εμπεριέχονται τιμές από γνωστές κατανομές σαν βοηθητικά εργαλεία για την επιλογή της κατάλληλης κατανομής. Για κάποιες κατανομές (κανονική, ομοιόμορφη, λογιστική) υπάρχει μόνο μια πιθανή τιμή για την ασυμμετρία και την κύρτωση (για παράδειγμα για την κανονική κατανομή, η Ασυμμετρία=0 και η Κύρτωση=3), έτσι λοιπόν αυτές οι κατανομές αναπαριστώνται με ένα σημείο στο διάγραμμα. Για τις υπόλοιπες κατανομές, υπάρχουν περιοχές από πιθανές τιμές που παριστάνονται είτε με γραμμές (Γάμμα, Λογαριθμοκανονική), είτε με ολόκληρες περιοχές (Βήτα). Η κατανομή Weibull δεν αναπαρίσταται στο διάγραμμα 3.1, αλλά όπως αναγράφεται στο υπόμνημά του, μορφές εμπειρικών κατανομών που βρίσκονται κοντά στην Γάμμα και την Λογαριθμοκανονική μπορεί να ακολουθούν αυτή την κατανομή.

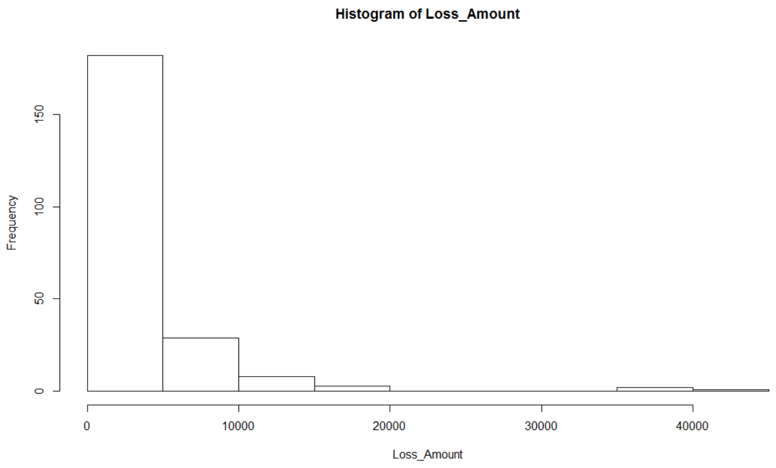
Συμπερασματικά από το παραπάνω διάγραμμα, μπορούμε να πούμε ότι η κατανομή που φαίνεται να βρίσκεται πιο κοντά στα δεδομένα μας είναι η Λογιστική. Επειδή όμως απεικονίζεται με ένα σημείο, αυτό σημαίνει ότι αφορά συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων της. Εμάς μας ενδιαφέρει να έχουμε μια οικογένεια κατανομών ούτως ώστε να υπάρχει ευελιξία στην εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής που περιγράφει τις παρατηρήσεις μας. Για το λόγο αυτό εστιάζουμε στις κατανομές που παριστάνονται από ένα σύνολο σημείων. Οι κατανομές αυτές είναι:

1. Λογαριθμοκανονική
2. Γάμμα
3. Weibull

3.2.2 Γραφική ανάλυση δεδομένων

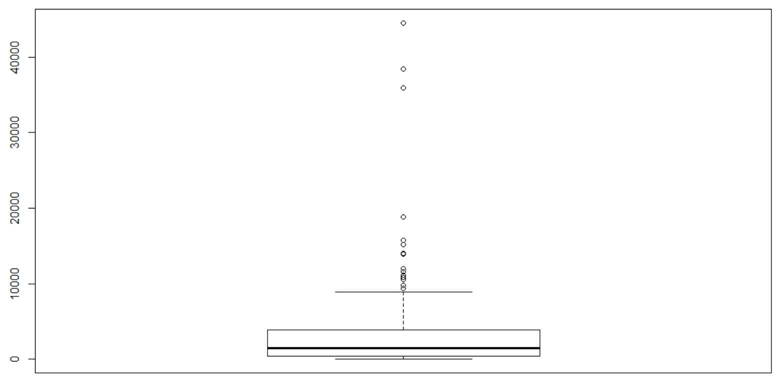
Συνεχίζοντας θα γίνει μια παρουσίαση των κυριότερων χαρακτηριστικών της κατανομής του μεγέθους των ζημιών μέσω γραφικής παράστασης:

Ιστόγραμμα του μεγέθους των ζημιών



Διάγραμμα 3.2

Θηκόγραμμα του μεγέθους των ζημιών



Διάγραμμα 3.3

Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι οι μικρού ύψους ζημιές εμφανίζονται με πολύ μεγαλύτερη συχνότητα από ότι οι μεγάλου ύψους ζημιές. Ουσιαστικά αυτό μας υποδεικνύει μια κατανομή αριστερά μετατοπισμένη με βαριά δεξιά ουρά. Η βαριά δεξιά ουρά είναι ένδειξη ύπαρξης ακραίων τιμών, γεγονός που φαίνεται πιο καθαρά από το θηκόγραμμα (boxplot).

3.2.3 Στατιστική ανάλυση δεδομένων

Descriptive Statistics of Losses					
Average	*St.Deviation*	*Min*	*Max*	*VaR(75%)*	*VaR(99%)*
3.232,93	5.431,49	30,00	44.525,57	3.856,08	31.842,20

Πίνακας 3.1: Περιγραφικά στατιστικά μέτρα για το μέγεθος των ζημιών

Στον παραπάνω πίνακα παραθέτουμε κάποιες στατιστικές μετρήσεις που περιγράφουν το μέγεθος των ζημιών του χαρτοφυλακίου. Από τη τιμή της τυπικής απόκλισης, παρατηρούμε ότι έχουμε μεγάλη διασπορά των τιμών γύρω από τον μέσο. Επιπλέον, βλέπουμε ότι το 75% ποσοστιαίο σημείο της κατανομής είναι αρκετά κοντά στο μέσο κάτι το οποίο αποτελεί δείγμα ύπαρξης μεγάλων τιμών. Από το 99% ποσοστιαίο σημείο της κατανομής και έπειτα, γίνεται πιο φανερή η ύπαρξή τους. Επίσης εξετάζοντας τη μέγιστη τιμή διαπιστώνουμε μεγάλη απόκλιση ακόμη και μετά το 99% ποσοστιαίο σημείο.

3.3 Προσαρμογή κατανομών στα εμπειρικά δεδομένα

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας για το μέγεθος των ζημιών, στόχος μας είναι να ελέγξουμε ποια κατανομή προσαρμόζεται καλύτερα στα εμπειρικά δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας. Για το σκοπό αυτό θα εξετάσουμε κάποιες κατανομές που παρουσιάζουν εκ φύσεως σχετικά βαριές ουρές όπως τη Lognormal και τη Weibull.

Παρακάτω παραθέτουμε τα αποτελέσματα των υπολογισμών:

Εκτίμηση Παραμέτρων

Lognormal		Weibull	
Meanlog	*Sdlog*	*Shape*	*Scale*
7,058	1,611	0,707	2.523,056

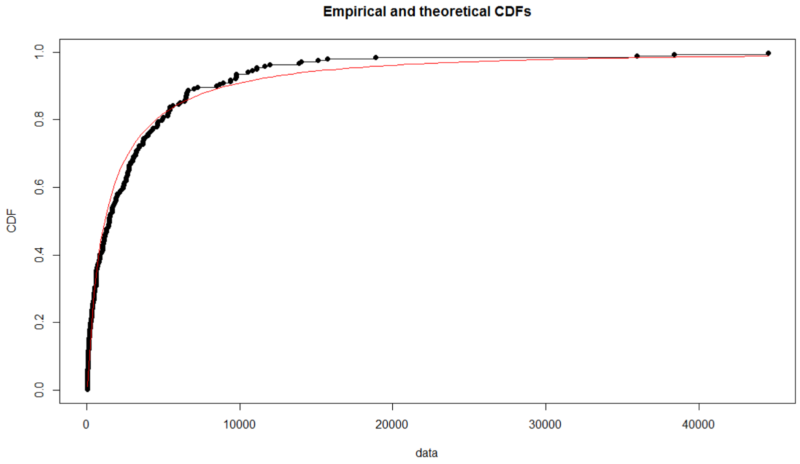
Πίνακας 3.2: Εκτίμηση παραμέτρων με τη μέθοδο Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Οι τιμές του πίνακα αντιπροσωπεύουν τις παραμέτρους των υπό εξέταση κατανομών.

Το επόμενο βήμα αυτής της διαδικασίας περιλαμβάνει να εξετάσουμε διαγραμματικά καθώς και με στατιστικά τεστ το αν και κατά πόσο οι συναρτήσεις αυτές αντιπροσωπεύουν σωστά τα δεδομένα μας.

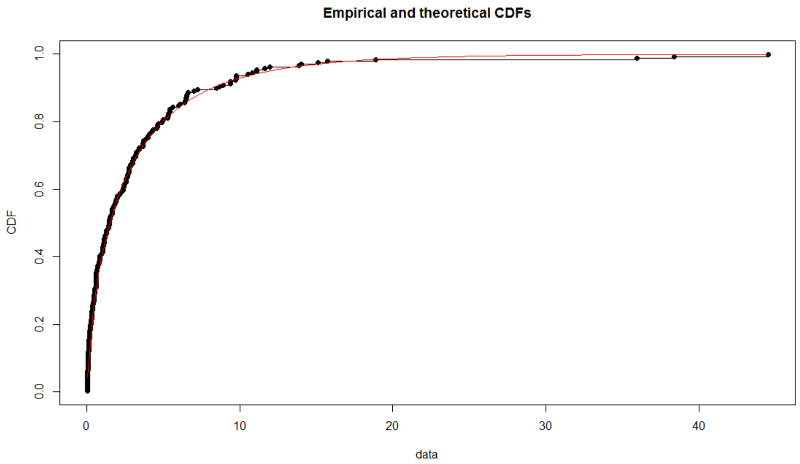
Μια πρώτη εικόνα μας παρέχεται από τα παρακάτω γραφήματα:

Λογαριθμοκανονική κατανομή:



Διάγραμμα 3.4

Κατανομή Weibull:

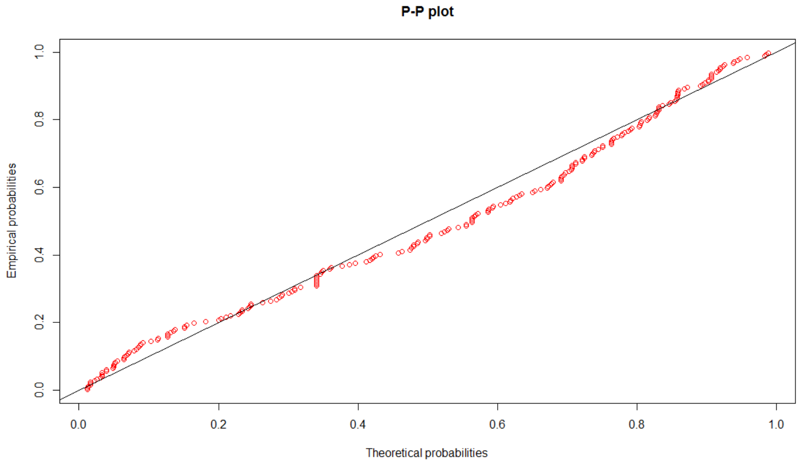


Διάγραμμα 3.5

Από τα παραπάνω διαγράμματα σύγκρισης των θεωρητικών και εμπειρικών κατανομών φαίνεται ότι η Weibull έχει καλύτερη προσαρμογή από τη Λογαριθμοκανονική. Καθώς όμως αυτό δεν επαρκεί να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα, συνεχίζουμε την ανάλυση μας με δύο ακόμα τύπους διαγραμμάτων, αυτά των P-P Plots και Q-Q Plots:

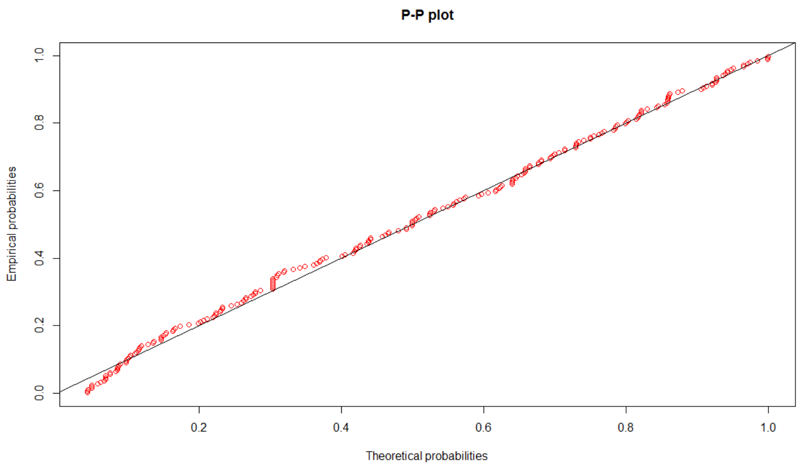
P-P Plots

<u>Λογαριθμοκανονική κατανομή:</u>



Διάγραμμα 3.6

<u>Κατανομή Weibull:</u>

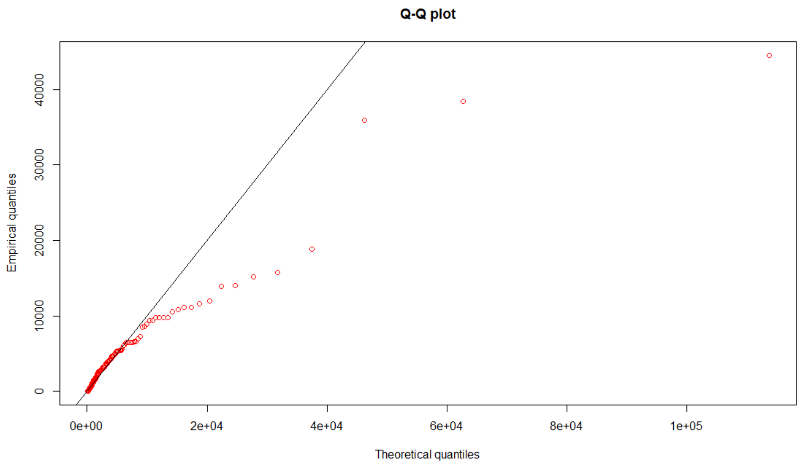


Διάγραμμα 3.7

Παρόμοια εικόνα δίνουν και τα παραπάνω διαγράμματα σύγκρισης των θεωρητικών και εμπειρικών αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής όπου φαίνεται ότι οι κατανομές Lognormal και Weibull βρίσκονται αρκετά κοντά στα δεδομένα μας.

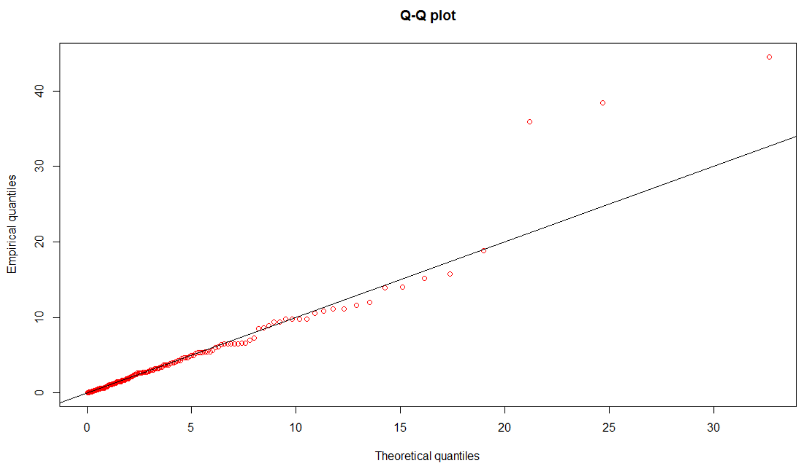
Ολοκληρώνουμε την διαγραμματική μας ανάλυση με τα Q-Q Plots των κατανομών:

Λογαριθμοκανονική κατανομή:



Διάγραμμα 3.8

Κατανομή Weibull:



Διάγραμμα 3.9

Τα αποτελέσματα των παραπάνω διαγραμματικών απεικονίσεων επιβεβαιώνουν τις έως τώρα υποθέσεις μας, ότι δηλαδή οι δύο αυτές κατανομές φαίνεται να προσαρμόζονται αρκετά καλά στα δεδομένα μας. Η κατανομή Weibull μάλιστα, φαίνεται να ταιριάζει καλύτερα καθώς οι εμπειρικές και οι θεωρητικές παρατηρήσεις συμπίπτουν σχεδόν απόλυτα. Επειδή όμως, όπως προαναφέραμε οι ενδείξεις των γραφημάτων δεν αρκούν για να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα, παρακάτω θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα των στατιστικών τεστ που κρίθηκαν αναγκαία να διεξαχθούν, ούτως ώστε να μπορούμε να εξάγουμε τα τελικά μας συμπεράσματα.

Πιο συγκεκριμένα, σε επίπεδο σημαντικότητας 1% πραγματοποιούμε τους ακόλουθους ελέγχους:

H_0 : Οι ζημιές ακολουθούν Λογαριθμοκανονική κατανομή

H_1 : Οι ζημιές δεν ακολουθούν Λογαριθμοκανονική κατανομή

H_0 : Οι ζημιές ακολουθούν κατανομή Weibull

H_1 : Οι ζημιές δεν ακολουθούν κατανομή Weibull

Έλεγχος καλής Προσαρμογής

Στατιστική Συνάρτηση	*Lognormal*	*Weibull*
Cramer-Von Mises	0,29276642	0,05261258
Anderson-Darling	1,80978256	0,6083225
Akaike's info	924,6383	924,3141
Bayesian Info	931,4705	931,1463

Πίνακας 3.3: Στατιστικός έλεγχος καλής προσαρμογής

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1) Το τεστ Cramer-Von Mises αποτελεί μια προέκταση του Kolmogorov-Smirnov. Με αυτό το τεστ επιβεβαιώνεται η ένδειξη ότι οι ζημιές είναι πιθανόν να ακολουθούν τη Weibull κατανομή καθώς η στατιστική συνάρτηση ελέγχου λαμβάνει μικρότερη τιμή έναντι της Λογαριθμοκανονικής.
2) Το τεστ Anderson-Darling αποτελεί μια παραλλαγή του Kolmogorov-Smirnov καθώς δίνει μεγαλύτερη βάση στην ουρά της κατανομής. Οι ίδιες παρατηρήσεις και συμπεράσματα με το προηγούμενο τεστ ισχύουν και εδώ.
3) Το Akaike's information criterion (AIC) είναι ένα μέτρο σύγκρισης της ποιότητας της κάθε κατανομής αναφορικά με τα δεδομένα. Η κατανομή με την μικρότερη τιμή είναι και αυτή που ταιριάζει πιο καλά σε αυτά. Εν προκειμένω, η Weibull κατανομή ταιριάζει καλύτερα από τη Λογαριθμοκανονική.
4) Το κριτήριο Bayes είναι πολύ στενά συνδεδεμένο με το Akaike's information criterion και αυτό με την σειρά του βρίσκει την βέλτιστη κατανομή ανάμεσα σε ένα πλήθος

κατανομών. Το συγκεκριμένο κριτήριο επιβεβαιώνει ότι τα δεδομένα μας ακολουθούν τη Weibull.

Τέλος, παρατίθεται ένας συγκεντρωτικός πίνακας που περιέχει τα αποτελέσματα (p-values) των Kolomogorov-Smirnov tests που διεξήχθησαν:

Kolmogorov-Smirnov					
Κατανομές	Κανονική	Λογαριθμοκανονική	Γάμμα	Εκθετική	Weibull
p-values	7,25E-06	0,1526	8,31E-05	0,01174	0,7661
D	0.7225	0.0756	0.1497	0.1689	0.0444

Πίνακας 3.4: Kolomogorov-Smirnov tests

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι οι κατανομές Weibull, Λογαριθμοκανονική και Εκθετική είναι αυτές που πληρούν την συνθήκη για μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή p-value > 0,01. Καθώς, τα αποτελέσματα της Εκθετικής κατανομής είναι οριακά, θα χρησιμοποιήσουμε τις κατανομές Weibull και Λογαριθμοκανονική για τη συνέχεια αυτής της εργασίας.

3.4 Έλεγχος ευαισθησίας της κατανομής του μεγέθους των ζημιών

Έχοντας βρει ότι οι ζημιές ακολουθούν την κατανομή Weibull, πραγματοποιούμε έλεγχο ευαισθησίας για να επιβεβαιώσουμε την καταλληλότητά της. Αφαιρούμε τις 3 ακραίες ζημιές (X>30.000€) για να δούμε πώς επηρεάζονται οι παράμετροι της κατανομής. Συμβολίζουμε με Weibull_V2 την κατανομή που ακολουθούν τα περικομμένα δεδομένα μας. Καταλήξαμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Εκτίμηση Παραμέτρων		
Κατανομή	*Weibull*	*Weibull_V2*
shape	0.7067139	0.7642275
scale	2.523,06	2.337,62

Πίνακας 3.5: Εκτίμηση παραμέτρων με τη μέθοδο Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Είναι προφανές ότι η κατανομή δεν είναι πολύ ευαίσθητη στην αφαίρεση των ακραίων τιμών των παρατηρήσεων καθώς οι παράμετροι της Weibull δεν άλλαξαν αισθητά.

Εν συνεχεία διεξάγουμε έναν ακόμα έλεγχο ευαισθησίας. Πραγματοποιούμε από την αρχή τον έλεγχο καλής προσαρμογής. Έτσι θα διαπιστώσουμε εάν και εφόσον η αλλαγή αυτή οδήγησε σε αλλαγή κατανομής για τα δεδομένα μας. Παρακάτω παραθέτουμε τα αποτελέσματα του Kolmogorov-Smirnov τεστ:

Kolmogorov-Smirnov					
Κατανομές	*Κανονική*	*Λογαριθμοκανονική*	*Γάμμα*	*Εκθετική*	*Weibull*
p-values	6,73E-04	0.04901	0.5127	0.000539	0.6357
D	0.7881	0.0908	0.0546	0.1911	0.0497

Πίνακας 3.6: Kolomogorov-Smirnov tests

Παρατηρούμε ότι η Weibull και η Γάμμα αποτελούν τις κατανομές που φαίνεται να ταιριάζουν καλύτερα στα περικομμένα δεδομένα μας. Βέβαια, η κατανομή Weibull εξακολουθεί να έχει μεγαλύτερο p-value. Για να βεβαιώσουμε ότι συνεχίζει να αποτελεί την καλύτερη κατανομή, θα διεξάγουμε μερικά ακόμα τεστ καλής προσαρμογής ανάμεσα στις δυο επικρατέστερες κατανομές.

Έλεγχος καλής Προσαρμογής

Στατιστική Συνάρτηση	***Γάμμα***	***Weibull***
Cramer-Von Mises	0.10367017	0.09838158
Anderson-Darling	0.84222380	0.77536609
Aikake's Info	3.935.349	3.933.245
Bayesian Info	3.942.154	3.940.050

Πίνακας 3.7: Στατιστικός έλεγχος καλής προσαρμογής

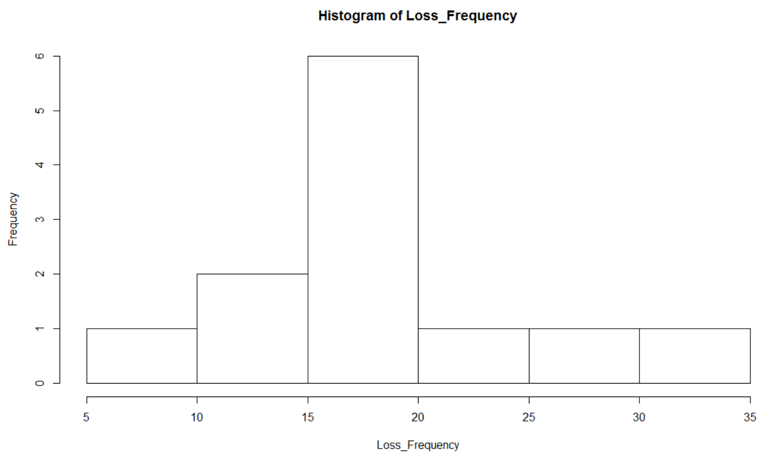
Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.7 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, έστω και οριακά, η κατανομή Weibull παραμένει η κατανομή που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα μας:

1) Το τεστ Cramer-Von Mises αποτελεί μια προέκταση του Kolmogorov-Smirnov. Με αυτό το τεστ επιβεβαιώνεται ότι οι ζημιές ακολουθούν τη Weibull κατανομή καθώς λαμβάνει μικρότερη τιμή έναντι της Γάμμα.
2) Το τεστ Anderson-Darling αποτελεί μια παραλλαγή του Kolmogorov-Smirnov καθώς δίνει μεγαλύτερη βάση στην ουρά της κατανομής. Ανάλογες παρατηρήσεις και συμπεράσματα με το προηγούμενο τεστ ισχύουν και εδώ.
3) Το Akaike's information criterion (AIC) είναι ένα μέτρο σύγκρισης της ποιότητας της κάθε κατανομής αναφορικά με τα δεδομένα μας, η κατανομή με την μικρότερη τιμή είναι και αυτή που ταιριάζει πιο καλά σε αυτά. Εν προκειμένω, η Weibull κατανομή ταιριάζει οριακά καλύτερα από τη Γάμμα
4) Τέλος, το κριτήριο Bayes είναι πολύ στενά συνδεδεμένο με το Akaike's information criterion και αυτό με την σειρά του βρίσκει την βέλτιστη κατανομή ανάμεσα σε ένα πλήθος κατανομών. Το συγκεκριμένο κριτήριο επιβεβαιώνει ότι ανάμεσα στις κατανομές που εξετάστηκαν, τα δεδομένα μας προσαρμόζονται καλύτερα στην κατανομή Weibull.

3.5 Μελέτη της κατανομής της συχνότητας των ζημιών

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία θα μελετήσουμε την κατανομή της μηνιαίας συχνότητας των ζημιών. Αρχικά κατασκευάζουμε ένα ιστόγραμμα των δεδομένων μας ούτως ώστε να πάρουμε μια ιδέα για την μορφή της κατανομής.

Ιστόγραμμα της συχνότητας των ζημιών



Διάγραμμα 3.10

Με την βοήθεια του παραπάνω γραφήματος και γνωρίζοντας ότι η κατανομή Poisson είναι η πιο συνήθης κατανομή συχνότητας ζημιών, θα εξετάσουμε την κανονική και τη κατανομή Poisson. Παρακάτω παραθέτουμε έναν πίνακα με τα αποτελέσματα του Kolmogorov-Smirnov τεστ:

Kolmogorov-Smirnov		
Κατανομή	*Κανονική*	*Poisson*
p-value	0,8573	0,9386

Πίνακας 3.8: Kolomogorov-Smirnov test

Παρατηρούμε ότι τα p-values > 0,01, δηλαδή και οι δύο κατανομές πληρούν την συνθήκη για μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης. Καθώς όμως το p-value της κατανομής Poisson είναι μεγαλύτερο από της Κανονικής κατανομής, συμπεραίνουμε ότι ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα μας.

3.6 Προσομοίωση Monte-Carlo

3.6.1 Μελέτη της κατανομής των συνολικών ζημιών

Έχοντας ολοκληρώσει τον έλεγχο καλής προσαρμογής του μεγέθους και του πλήθους των μηνιαίων ζημιών του χαρτοφυλακίου θα θεωρούμε στο εξής τα ακόλουθα.

1) Το μέγεθος των ζημιών ακολουθεί την κατανομή Weibull με παραμέτρους: shape = 0.7067139, scale = 2.523,0556.
2) Η μηνιαία συχνότητα των ζημιών, για το διάστημα που εξετάζουμε, ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο: λ=18,75.

Χρησιμοποιώντας το συλλογικό πρότυπο για τις συνολικές ζημιές ενός χαρτοφυλακίου,

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N \qquad (3.1)$$

και θεωρώντας ότι Χ είναι το μέγεθος των ζημιών και Ν η συχνότητα με την οποία αυτές εμφανίζονται, προκύπτει ότι η τ.μ. S ακολουθεί τη σύνθετη Poisson κατανομή.

Η μέση τιμή και η διακύμανση της S δίνεται από τις σχέσεις:

1) $E(S) = \lambda * E(X)$ (3.2)
2) $Var(S) = \lambda * E(X^2)$ (3.3)

Όπου λ = E(N) = 18,75

(Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (2013))

Το επόμενο βήμα είναι να εφαρμόσουμε προσομοίωση Monte Carlo για να βρούμε το VaR και το CTE των δεδομένων μας. Χρησιμοποιούμε 1000 ζημιές (σενάρια) από την κατανομή Poisson με παράμετρο *λ=18,75*. Με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε τις συχνότητες $n_1, n_2, \ldots, n_k$ των ζημιών ενός έτους. Ύστερα, για αυτές τις συχνότητες προσομοιώνουμε n_k φορές με $1 \leq k \leq 1000$ το μέγεθος των ζημιών από την κατανομή Weibull. Τέλος, για κάθε σενάριο n_k με $1 \leq k \leq 1000$ αθροίζουμε το μέγεθος των ζημιών για να καταλήξουμε σε μια σειρά από αθροιστικές ετήσιες ζημιές. Έπειτα ταξινομούμε την σειρά των ετήσιων ζημιών που έχουμε παράγει στα προηγούμενα βήματα για να πάρουμε την αθροιστική κατανομή ζημιών. Η αθροιστική κατανομή ζημιών που παράγεται είναι το κλειδί που θα μας οδηγήσει στον υπολογισμό του VaR και του CTE.

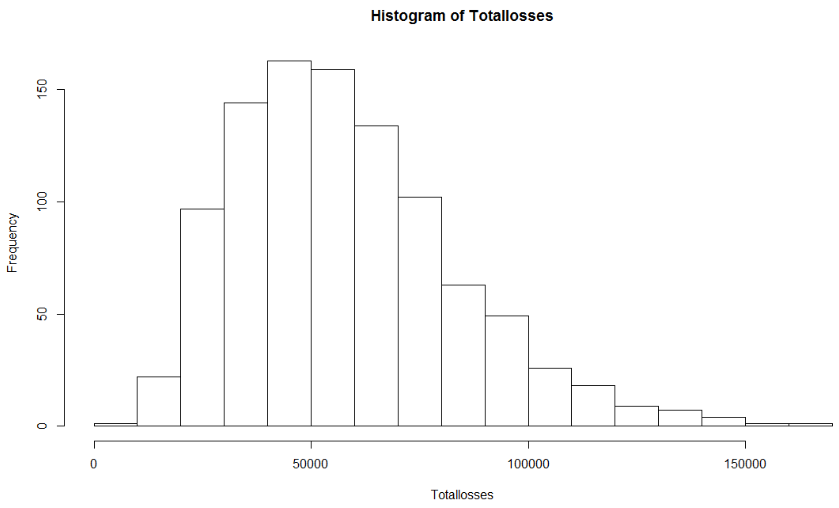
Η Αξία στον κίνδυνο (VaR) θα είναι τότε το (1-α) εκατοστημόριο της εμπειρικής αθροιστικής κατανομής ζημιών που έχουμε παράγει και η Αναμενόμενη Αξία στον κίνδυνο (CTE) θα είναι η μέση τιμή του ύψους των ζημιών έπειτα από το VaR. Όσο πιο μεγάλος ο αριθμός των προσομοιώσεων τόσο πιο μεγάλη η ακρίβεια αυτής της μεθόδου. (Κ. Τολίκας (2014))

Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τα αποτελέσματα της προσομοίωσης Monte Carlo:

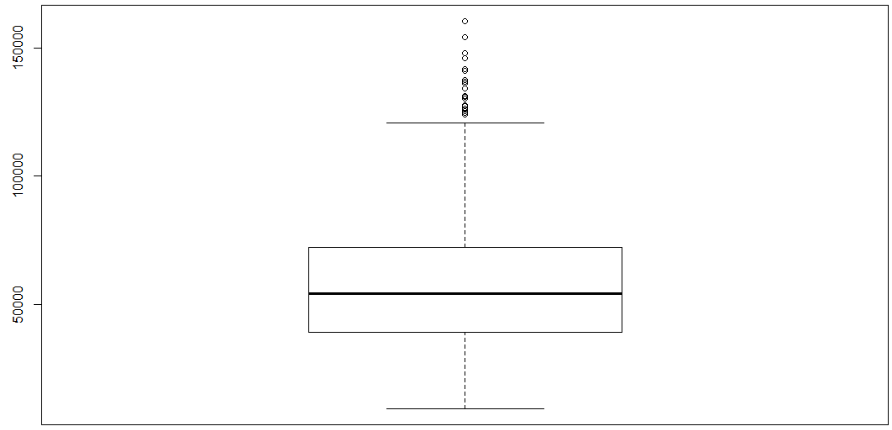
Προσομοίωση Monte-Carlo	
Μέση Τιμή	58.039,05
Τυπική Απόκλιση	25.328,51
VaR (99%)	131.446,50
CTE(99%)	143.742,70

Πίνακας 3.9: Monte-Carlo simulation

Επίσης παραθέτουμε και δύο διαγράμματα για την καλύτερη απεικόνιση των παραπάνω αποτελεσμάτων:



Διάγραμμα 3.11: Ιστόγραμμα συνολικών ζημιών



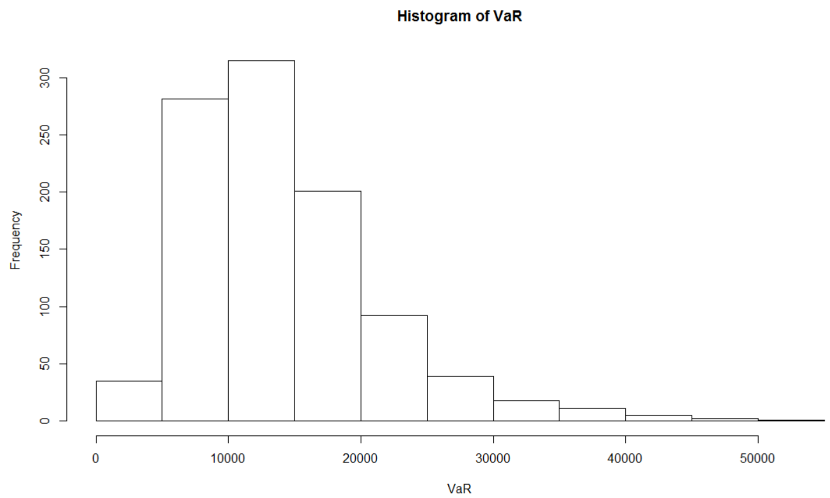
Διάγραμμα 3.12: Θηκόγραμμα συνολικών ζημιών

3.6.2 Μελέτη της κατανομής του VaR και CTE των ατομικών ζημιών

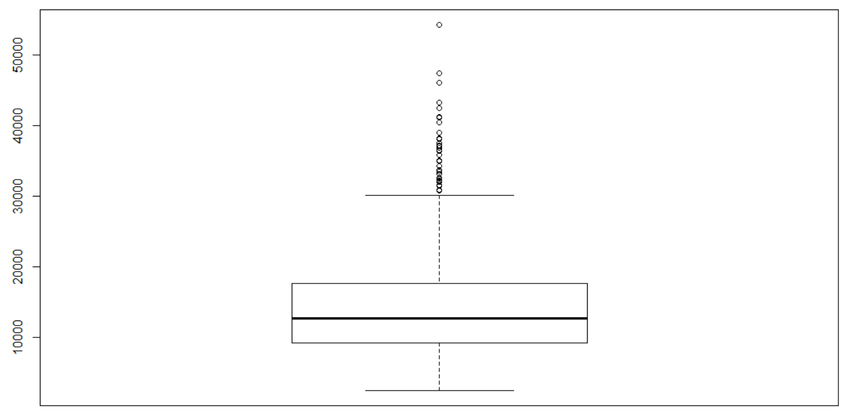
Αφού εξετάσαμε την κατανομή των συνολικών ζημιών, τώρα θα παραθέσουμε μια ανάλυση αναφορικά με το VaR και το CTE των ατομικών ζημιών. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε, χρησιμοποιώντας τη προσομοίωση Monte Carlo (με τις ίδιες παραμέτρους που αναφέραμε στην Παράγραφο 3.6), τι κατανομή ακολουθούν τα παραπάνω μέτρα κινδύνου.

Έχοντας προσομοιώσει 1000 σενάρια, η κατανομή του VaR και του CTE αντίστοιχα, παρουσιάζουν την παρακάτω μορφή:

Value at Risk (VaR):



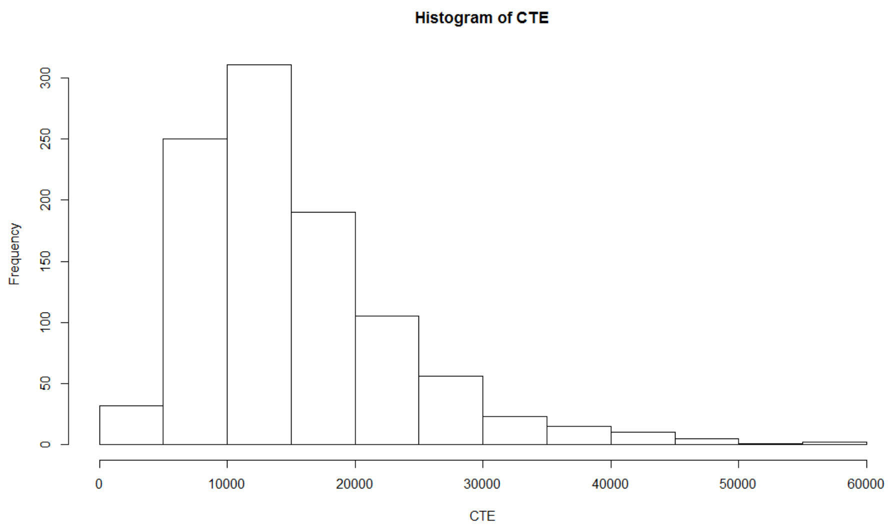
Διάγραμμα 3.13: Ιστόγραμμα VaR ατομικών ζημιών



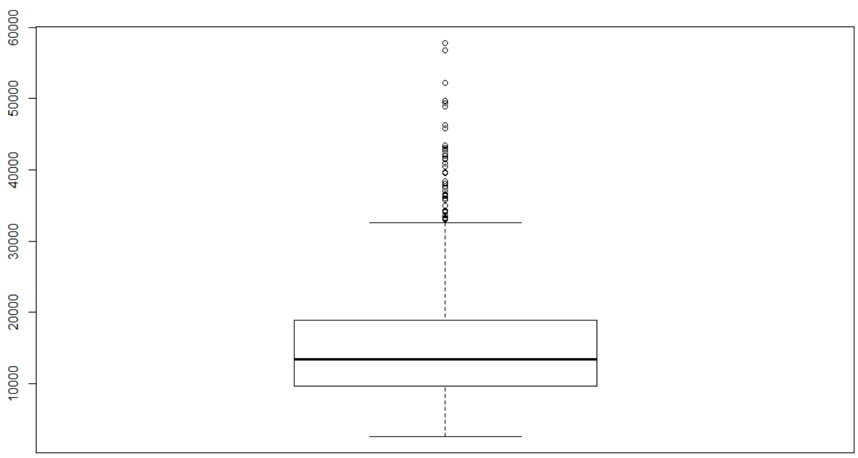
Διάγραμμα 3.14: Θηκόγραμμα VaR ατομικών ζημιών

Από το παραπάνω ιστόγραμμα γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι έχουμε μια κατανομή αριστερά μετατοπισμένη με βαριά δεξιά ουρά. Το συμπέρασμα αυτό ενισχύεται από το θηκόγραμμα όπου φαίνεται καθαρά η ύπαρξη ακραίων τιμών.

Conditional Tail Expectation (CTE):



Διάγραμμα 3.15: Ιστόγραμμα CTE ατομικών ζημιών



Διάγραμμα 3.16: Θηκόγραμμα CTE ατομικών ζημιών

Ανάλογα συμπεράσματα με το VaR εξάγουμε και για την κατανομή του CTE.

Επίσης, παραθέτουμε και τα εξής στατιστικά στοιχεία αναφορικά με τα δεδομένα μας:

	VaR	CTE
Μέση Τιμή	14.174,23	15.190,35
Τυπική Απόκλιση	7.172,51	8.149,56

Πίνακας 3.10:Περιγραφικά στατιστικά μέτρα

Από την τιμή της τυπικής απόκλισης, παρατηρούμε ότι έχουμε μεγάλη διασπορά των τιμών γύρω από το μέσο.

Τώρα θα εξετάσουμε την καλή προσαρμογή των ανωτέρω μέτρων κινδύνου σε μια σειρά από κατανομές χρησιμοποιώντας το Kolmogorov Smirnov τεστ. Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα ανά μέτρο κινδύνου:

Value At Risk (VaR):

Kolmogorov-Smirnov					
Κατανομές	*Κανονική*	*Λογαριθμοκανονική*	*Γάμμα*	*Εκθετική*	*Weibull*
p-values	6,72E-06	2,20E-16	0,2645	2,20E-16	2,20E-16
D	0,0988	0,7961	0,0318	0,282	0,7455

Πίνακας 3.11: Kolomogorov-Smirnov test

Conditional Tail Expectation (CTE):

Kolmogorov-Smirnov					
Κατανομές	*Κανονική*	*Λογαριθμοκανονική*	*Γάμμα*	*Εκθετική*	*Weibull*
p-values	1,50E-06	2,20E-16	0,1526	2,20E-16	2,20E-16
D	0,1025	0,804	0,0359	0,28	0,7509

Πίνακας 3.12: Kolomogorov-Smirnov test

Από τους παραπάνω πίνακες συμπεραίνουμε ότι και για τα δύο μέτρα κινδύνου η κατανομή Γάμμα είναι αυτή που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα, καθώς πληρεί την συνθήκη για μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή το p-value > 0,01.

Κεφάλαιο 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΕΚΧΩΡΗΣΗΣ

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με τον προσδιορισμό και τη μελέτη της κατανομής που προσαρμόζεται καλύτερα στο μέγεθος των ζημιών του χαρτοφυλακίου μας. Στο παρόν κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε την κατανομή αυτή ούτως ώστε, βασιζόμενοι στη δημοσίευση των Tan et.al (2009) για τις διάφορες αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου, να υπολογίσουμε το βέλτιστο ποσοστό εκχώρησης c* για το χαρτοφυλάκιο μας. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2^o αυτό θα γίνει μόνο για τις αρχές (A_{13}-A_{17}) για τις οποίες έχουμε μη τετριμμένη βέλτιστη αντασφάλιση δηλαδή όταν c* ϵ (0,1). Για κάθε μία από αυτές τις αρχές, υπάρχουν δύο τρόποι προσέγγισης για τον υπολογισμό του βέλτιστου ποσοστού εκχώρησης και αφορούν τα μέτρα κίνδυνου VaR και CTE.

Αρχικά θα γίνει προσπάθεια προσδιορισμού του συντελεστή β που εμφανίζεται στους τύπους που θα χρησιμοποιηθούν στους υπολογισμούς μας. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο συντελεστής β (0< β<1) συμβολίζει την επιβάρυνση του ασφαλίστρου και κατά συνέπεια την αποστροφή από τον κίνδυνο από τη μεριά του ασφαλιστή (risk averse). Για τον υπολογισμό του, θα βασιστούμε στις ακόλουθες δύο υποθέσεις. Υποθέτουμε ότι το ασφάλιστρο, που εκτιμάται βάσει της εκάστοτε αρχής, είναι με μεγάλη πιθανότητα, επαρκές για την κάλυψη του κινδύνου. Συνεπώς, η πιθανότητα οι ζημιές να ξεπερνούν το ασφάλιστρο είναι πάρα πολύ μικρή. Επιπλέον υποθέτουμε, ότι η τιμή του συντελεστή β είναι τέτοια ώστε να ικανοποιείται η αναγκαία συνθήκη για βέλτιστη αντασφάλιση σταθερού ποσοστού σε κάθε μία αρχή ασφαλίστρου. Τέλος, εφαρμόζοντας τους τύπους των Tan et.al (2009) θα υπολογίσουμε για τις διάφορες τιμές του β που θα προκύψουν, τα αντίστοιχα ποσοστά εκχώρησης c*.

4.2 Βέλτιστο Ποσοστό Εκχώρησης ανά Αρχή Ασφαλίστρου

Έχουμε καταλήξει ότι οι ζημίες του χαρτοφυλακίου μας ακολουθούν την κατανομή Weibull. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήξαμε και μετά από έλεγχο ευαισθησίας που διεξαγάγαμε για την κατανομή, εξαιρώντας τις ακραίες ζημιές. Έτσι λοιπόν για τις κατανομές Weibull και Weibull_V2 του Κεφαλαίου 3^{ου} παραθέτουμε τους παρακάτω συγκεντρωτικούς πίνακες:

Weibull	
a	0,71
b	2.523,06
Mean	3.165,09
Variance	20.961.800,00
VaR	21.898,75
CTE	29.174,50

Πίνακας 4.1

Weibull_v2	
a	0,76
b	2.337,62
Mean	2.741,34
Variance	13.193.900,00
VaR	17.243,98
CTE	22.434,60

Πίνακας 4.2

όπου α,b είναι οι παράμετροι της κάθε κατανομής και το VaR και CTE έχουν υπολογιστεί με συντελεστή εμπιστοσύνης 99%.

Επίσης, αναφέρουμε ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Weibull είναι

$$F(x) = 1 - \exp[-(\mathrm{x/b})^{a}] \qquad (4.1)$$

και αντίστοιχα η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$S(x) = exp[-(\mathrm{x/b})^{a}] \qquad (4.2)$$

Υποθέσαμε ότι, η πιθανότητα οι ζημιές να ξεπερνούν το ασφάλιστρο είναι πολύ μικρή:

$$\mathrm{P}\big(\mathrm{X} > \Pi(\mathrm{X})\big) = i \qquad (4.3)$$

για i < 5%.

Η παραπάνω πιθανότητα εκφράζει στην πραγματικότητα τη συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής των ζημιών, στη προκειμένη περίπτωση της Weibull, στο σημείο με τιμή το ασφάλιστρο Π(Χ), δηλαδή:

$$S\big(\Pi(\mathrm{X})\big) = i \qquad (4.4)$$

Και μέσω της σχέσης (4.2) προκύπτει:

$$\exp[-(\Pi(\mathrm{x})/\mathrm{b})^{a}] = i \qquad (4.5)$$

Με την βοήθεια του προγράμματος Mathematica θα λύσουμε την εξίσωση (4.5) ως προς β, αντικαθιστώντας το Π(x) με τη τιμή του ασφαλίστρου που προκύπτει από την κάθε αρχή και για τις δύο κατανομές Weibull των δεδομένων μας.

Η τιμή του β όπως θα παρατηρήσουμε και από τα κάτωθι αποτελέσματα διαφοροποιείται ανά αρχή ασφαλίστρου και συνάρτηση κατανομής. Για κάθε τιμή του β που θα εξάγουμε, θα χρησιμοποιήσουμε εν συνεχεία τις εξισώσεις της παραγράφου 2.3.4 για να υπολογίσουμε το βέλτιστο ποσοστό εκχώρησης με τα κριτήρια VaR και CTE optimization.

Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα αυτών των υπολογισμών ανά αρχή και ανά τρόπο προσέγγισης.

4.2.1 VaR optimization

<u>Αρχή της Διακύμανσης :</u> $\Pi 13 = M + \beta * V$

όπου M=Mean και V=Variance για κάθε κατανομή σύμφωνα με τους πίνακες 4.1 και 4.2.

Η σχέση (4.5) για τη συγκεκριμένη αρχή γίνεται:

$$\exp[-(\Pi 13/b)^{a}] = i \qquad (4.6)$$

και λαμβάνοντας υπόψιν την αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ισχύει

$$M < \mathrm{VaR} < M + 2 * \beta * V \qquad (4.7)$$

και τον τύπο που υπολογίζει το βέλτιστο συντελεστή εκχώρησης:

$$c^{*} = \frac{VaR - M}{2 * \beta * V} \qquad (4.8)$$

έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Αρχή Διακύμανσης	Weibull		Weibull_V2	
P(X>Π(X))	*β*	*c**	*β*	*c**
0,04	0,00048	93,41%	0,00061	90,07%
0,03	0,00056	79,88%	0,00071	77,72%
0,02	0,00068	65,87%	0,00085	64,81%
0,01	0,00089	50,00%	0,00110	50,00%

Πίνακας 4.3

Αρχικά, από τις τιμές του Πίνακα 4.3 παρατηρούμε ότι όταν η πιθανότητα το ασφάλιστρο να μη καλύπτει την επερχόμενη ζημιά αυξάνεται, η επιβάρυνση β του ασφαλίστρου ελαττώνεται ενώ ο αντίστοιχος συντελεστής εκχώρησης c^{*} αυξάνει. Αυτό θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι λογικό, καθώς όσο πιο μικρή είναι αυτή η πιθανότητα ο ασφαλιστής εκχωρεί μικρότερο ποσοστό του κινδύνου, έχοντας βέβαια επιβαρύνει με μεγαλύτερο ποσοστό το ασφάλιστρό του. Με άλλα λόγια όταν η επιβάρυνση β μειώνεται η πιθανότητα μη επάρκειας του ασφαλίστρου αυξάνει με αποτέλεσμα ο ασφαλιστής να θεωρεί πιο ασφαλές να εκχωρήσει μεγαλύτερο μέρος από τον κίνδυνο.

Συγκρίνοντας τώρα τις τιμές που προκύπτουν για τις δύο κατανομές, παρατηρούμε ότι οι τιμές του συντελεστή β στη Weibull είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες στη κατανομή Weibull_V2, ενώ συμβαίνει το ακριβώς αντίθετο με τους συντελεστές εκχώρησης. Αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς η Weibull_V2 περιγράφει τα περικομμένα δεδομένα μας, δηλαδή αυτά στα οποία έχουν αφαιρεθεί οι ακραίες ζημιές. Συνεπώς ο ασφαλιστής έρχεται αντιμέτωπος με μικρότερου ύψους ζημιές, οπότε με μια μεγαλύτερη επιβάρυνση στο ασφάλιστρό του εκχωρεί μικρότερο ποσοστό του κινδύνου.

<u>Αρχή της Ημιδιακύμανσης:</u> $\Pi 14 = M + \beta * \mathrm{DVar}$

όπου $DVar = \int_M^{\infty} (x-M)^2 * f_{wei}(x)dx$ με $f_{wei}(x) = \dfrac{a * exp[-(x/b)^a * (x/b)^{a-1}}{b}$

και M=Mean για κάθε κατανομή από τους πίνακες 4.1 και 4.2.

Η σχέση (4.5) για τη συγκεκριμένη αρχή γίνεται:

$$\exp[-(\Pi 14/b)^a] = i \qquad (4.9)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ισχύει

$$M < \mathrm{VaR} < M + 2 * \beta * \mathrm{DVar} \qquad (4.10)$$

και τον τύπο που υπολογίζει το βέλτιστο συντελεστή εκχώρησης:

$$c^* = \frac{VaR - M}{2 * \beta * DVar} \qquad (4.11)$$

έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Αρχή Ημιδιακύμανσης	Weibull		Weibull_V2	
P(X>Π(X))	*β*	*c**	*β*	*c**
0,04	0,00058	93,41%	0,00076	90,07%
0,03	0,00068	79,88%	0,00088	77,72%
0,02	0,00083	65,87%	0,00106	64,81%
0,01	0,00109	50,00%	0,00137	50,00%

Πίνακας 4.4

Όπως παρατηρούμε από τις τιμές του Πίνακα 4.4, τα συμπεράσματα είναι αντίστοιχα με εκείνα της Αρχής της Διακύμανσης. Επίσης, διαπιστώνουμε ότι για τις ίδιες πιθανότητες έχουμε τα ίδια ποσοστά εκχώρησης με την προηγούμενη αρχή και στις δύο κατανομές. Αυτό που διαφοροποιείται είναι η τιμή του συντελεστή β, όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση παίρνει τιμές μεγαλύτερες από ότι πριν. Αυτό θα μπορούσαμε να πούμε ότι συμβαίνει για τον εξής λόγο. Η επιβάρυνση του ασφαλίστρου είναι ανάλογη της διακύμανσης και της ημιδιακύμανσης αντίστοιχα στις δύο προαναφερθείσες αρχές. Καθώς η ημιδιακύμανση, η οποία περιγράφει τη διακύμανση των τιμών πάνω από τη μέση τιμή, έχει μικρότερη τιμή από τη διακύμανση ολόκληρου του χαρτοφυλακίου συνεπάγεται αντιστρόφως ανάλογες τιμές στους συντελεστές β.

<u>Αρχή της δευτεροβάθμιας ωφελιμότητας:</u> $\Pi 15 = M + \beta - \sqrt{\beta^2 - V}$

με M=Mean και V=Variance για κάθε κατανομή σύμφωνα με τους πίνακες 4.1 και 4.2 και β >0 με $\beta^2 > V$.

Η σχέση (4.5) για τη συγκεκριμένη αρχή γίνεται:

$$\exp[-(\Pi 15/b)^a] = i \qquad (4.12)$$

Στη περίπτωση αυτή θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

$$VaR > M \quad \text{και} \quad \frac{(VaR - M)*\beta}{\sqrt{V*\{V+(VaR-M)^2\}}} < 1 \qquad (4.13)$$

Ο τύπος υπολογισμού του συντελεστή εκχώρησης είναι:

$$c^* = \frac{(VaR - M)*\beta}{\sqrt{V*\{V+(VaR-M)^2\}}} \qquad (4.14)$$

Στη αρχή της δευτεροβάθμιας ωφελιμότητας η εξίσωση (4.12) δε δίνει λύση για i < 11%, συνεπώς για τη συγκεκριμένη αρχή το βέλτιστο ποσοστό εκχώρησης δεν μπορεί να υπολογιστεί βάσει των υποθέσεων που έχουμε κάνει, ότι δηλαδή η πιθανότητα η ζημία να ξεπερνάει το ασφάλιστρο είναι πάρα πολύ μικρή (i < 5%).

Αρχή της Συνδιακύμανσης: $\Pi 16 = M + 2 * \beta * V - \beta * \mathrm{Cov}$

με M=Mean, V=Variance και Cov=Covariance για κάθε κατανομή με βάση τους πίνακες 4.1 και 4.2.

Η σχέση (4.5) για τη συγκεκριμένη αρχή γίνεται:

$$exp[-(\Pi 16/b)^{a}] = i \qquad (4.15)$$

Οι αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ισχύουν είναι:

$$M > \beta * \mathrm{Cov} \quad \text{και} \quad M - \beta * \mathrm{Cov} < \mathrm{VaR} < 4 * \beta * V + M - \beta * \mathrm{Cov} \qquad (4.16)$$

και ο τύπος που υπολογίζει το βέλτιστο συντελεστή εκχώρησης είναι:

$$c^{*} = \frac{VaR - M + \beta * Cov}{4 * \beta * V} \qquad (4.17)$$

Στην παρούσα αρχή στάθηκε αδύνατος ο υπολογισμός του βέλτιστου ποσοστού εκχώρησης, καθώς δεν παρέχεται από την βιβλιογραφία (Tan et.al (2009)) επαρκής πληροφόρηση για την τυχαία μεταβλητή Y, βάση της οποίας θα υπολογιζόταν η συνδιακύμανση (*Cov*) στις παραπάνω σχέσεις.

Εκθετική Αρχή: $E[X * \exp(c^{*} * \beta * X)] = VaR * E[\exp(c^{*} * \beta * X)] \qquad (4.18)$

Στην Εκθετική αρχή ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης c^* καθορίζεται από την παραπάνω σχέση. Όπως παρατηρούμε η σχέση (4.18) περιέχει τη ροπογεννήτρια της κατανομής των ζημών. Καθώς οι ζημιές του χαρτοφυλακίου μας ακολουθούν Weibull με παράμετρο α=0,71<1 και τα περικομμένα δεδομένα μας Weibull_V2 με α=0,76<1 ,δηλαδή έχουμε κατανομές με βαριά ουρά, η ροπογεννήτρια απειρίζεται σε όλον το θετικό ημιάξονα. Κατά συνέπεια η συγκεκριμένη αρχή δε μπορεί να μας δώσει αποτελέσματα.

4.2.2 CTE optimization

Αρχή της Διακύμανσης : $\Pi 13 = M + \beta * V$

όπου M=Mean και V=Variance για κάθε κατανομή σύμφωνα με τους πίνακες 4.1 και 4.2.

Η σχέση (4.5) για τη συγκεκριμένη αρχή γίνεται:

$$\exp[-(\Pi 13/b)^{a}] = i \qquad (4.19)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ισχύει

$$M < u_\alpha < M + 2 * \beta * V \qquad (4.20)$$

με $$u_\alpha = \text{VaR} + 1/\alpha \int_{VaR}^{\infty} S_X(x)dx \qquad (4.21)$$

και τον τύπο που υπολογίζει το βέλτιστο συντελεστή εκχώρησης:

$$c^* = \frac{u_\alpha - M}{2 * \beta * V} \qquad (4.22)$$

έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

Αρχή Διακύμανσης	Weibull		Weibull_V2	
P(X>Π(X))	*β*	*c**	*β*	*c**
0,04	0,00048	N/A	0,00061	N/A
0,03	0,00056	N/A	0,00071	N/A
0,02	0,00068	91,45%	0,00085	88,00%
0,01	0,00089	69,42%	0,00110	67,90%

Πίνακας 4.5

Από τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι για πιθανότητα μεγαλύτερη του 2% η τιμή του β που προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης (4.19) δεν ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη (4.20) της συγκεκριμένης αρχής, συνεπώς δε μπορεί να υπολογιστεί ποσοστό εκχώρησης. Και σε αυτή τη περίπτωση βλέπουμε ότι, αύξηση της πιθανότητας συνεπάγεται αύξηση του ποσοστού εκχώρησης. Εντούτοις, διαπιστώνουμε ότι στη συγκεκριμένη μέθοδο, για την ίδια αρχή, τα ποσοστά εκχώρησης είναι πολύ μεγαλύτερα στις αντίστοιχες πιθανότητες σε σύγκριση με τη μέθοδο VaR optimization.

<u>**Αρχή της Ημιδιακύμανσης:**</u> $\Pi 14 = M + \beta * \text{DVar}$

όπου $DVar = \int_M^{\infty} (x - M)^2 * f_{wei}(x)dx$ με $f_{wei}(x) = \dfrac{a * exp[-(x/b)^a * (x/b)^{a-1}}{b}$

και M=Mean για κάθε κατανομή από τους πίνακες 4.1 και 4.2.

Η σχέση (4.5) για τη συγκεκριμένη αρχή γίνεται:

$$\exp[-(\Pi 14/b)^a] = i \qquad (4.23)$$

Από την αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ισχύει

$$M < u_\alpha < M + 2 * \beta * \mathrm{DVar} \qquad (4.24)$$

και τον τύπο που υπολογίζει το βέλτιστο συντελεστή εκχώρησης:

$$c^* = \frac{u_\alpha - M}{2 * \beta * DVar} \qquad (4.25)$$

έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Αρχή Ημιδιακύμανσης	Weibull		Weibull_V2	
P(X>Π(X))	*β*	*c**	*β*	*c**
0,04	0,00058	N/A	0,00076	N/A
0,03	0,00068	N/A	0,00088	N/A
0,02	0,00083	91,45%	0,00106	88,01%
0,01	0,00109	69,42%	0,00137	67,90%

Πίνακας 4.6

Ανάλογες παρατηρήσεις και συμπεράσματα προκύπτουν σε σχέση με την προηγούμενη αρχή.

Αρχή της δευτεροβάθμιας ωφελιμότητας: $\Pi 15 = M + \beta - \sqrt{\beta^2 - V}$

με M=Mean και V=Variance για κάθε κατανομή σύμφωνα με τους πίνακες 4.1 και 4.2 και β >0 με $\beta^2 > V$.

Η σχέση (4.5) για τη συγκεκριμένη αρχή γίνεται:

$$\exp[-(\Pi 15/b)^\alpha] = i \qquad (4.26)$$

Στη περίπτωση αυτή θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

$$u_\alpha > M \quad \text{και} \quad \frac{(u_\alpha - M) * \beta}{\sqrt{V * \{V + (u_\alpha - M)^2\}}} < 1 \qquad (4.27)$$

Ο τύπος υπολογισμού του συντελεστή εκχώρησης είναι:

$$c^* = \frac{(u_\alpha - M) * \beta}{\sqrt{V * \{V + (u_a - M)^2\}}} \qquad (4.28)$$

Στη αρχή της δευτεροβάθμιας ωφελιμότητας η εξίσωση (4.26) δεν έχει λύση για i < 11%, συνεπώς για τη συγκεκριμένη αρχή το βέλτιστο ποσοστό εκχώρησης δεν μπορεί να υπολογιστεί βάσει των υποθέσεων που έχουμε κάνει (i ≤ 5%).

Αρχή της Συνδιακύμανσης: $\Pi16 = M + 2 * \beta * V - \beta * \mathrm{Cov}$

με M=Mean, V=Variance και Cov=Covariance για κάθε κατανομή με βάση τους πίνακες 4.1 και 4.2.

Η σχέση (4.5) για τη συγκεκριμένη αρχή γίνεται:

$$e\mathrm{xp}[-(\Pi16/b)^{a}] = i \qquad (4.29)$$

και λαμβάνοντας υπόψιν τις αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ισχύουν

$$M > \beta * \mathrm{Cov} \quad \text{και} \quad M - \beta * \mathrm{Cov} < u_{\alpha} < 4 * \beta * V + M - \beta * \mathrm{Cov} \qquad (4.30)$$

και τον τύπο που υπολογίζει το βέλτιστο συντελεστή εκχώρησης:

$$c^{*} = \frac{u_{\alpha} - M + \beta * Cov}{4 * \beta * V} \qquad (4.31)$$

Στην παρούσα αρχή στάθηκε αδύνατος ο υπολογισμός του βέλτιστου ποσοστού εκχώρησης, καθώς δεν παρέχεται από την βιβλιογραφία (Tan et.al (2009)) επαρκής πληροφόρηση για την τυχαία μεταβλητή Y, βάση της οποίας θα υπολογιζόταν η συνδιακύμανση (*Cov*) στις παραπάνω σχέσεις.

Εκθετική Αρχή: $E[X * \exp(c^{*} * \beta * X)] = u_{\alpha} * E[\exp(c^{*} * \beta * X)]$ (4.32)

Στην Εκθετική αρχή ο βέλτιστος συντελεστής εκχώρησης c^{*} καθορίζεται από την παραπάνω σχέση. Όπως παρατηρούμε η σχέση (4.32) περιέχει τη ροπογεννήτρια της κατανομής των ζημιών. Καθώς οι ζημιές του χαρτοφυλακίου μας ακολουθούν Weibull με παράμετρο α=0,71<1 και τα περικομμένα δεδομένα μας Weibull_V2 με α=0,76<1 , έχουμε δηλαδή κατανομές με βαριά ουρά, η ροπογεννήτρια δεν υπάρχει. Κατά συνέπεια η συγκεκριμένη αρχή δε μπορεί να μας δώσει αποτελέσματα.

4.3 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, μπορούμε να επισημάνουμε ότι σύμφωνα με τη μεθοδολογία του VaR, το οποίο λαμβάνει υπόψη την μέγιστη ζημία με μια συγκεκριμένη πιθανότητα (1%), το ποσοστό εκχώρησης από 93,41% μειώνεται μέχρι και τα επίπεδα του 50% καθώς η πιθανότητα η ζημιά να υπερβεί το ασφάλιστρο ελαττώνεται. Ενώ σύμφωνα με το CTE που εξετάζει τις ζημιές μετά το VaR, αναζητώντας τη μέση ζημιά στην ουρά της κατανομής, το ποσοστό αυτό είναι κατά πολύ υψηλότερο γύρω στο 70%.

Συνεπώς, σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν με βάση τις Αρχές Ασφαλίστρου και τις δύο μεθόδους βελτιστοποίησης των μέτρων VaR και CTE καταλήγουμε στα εξής:

- Σύμφωνα με τη μέθοδο VaR, αν υποθέσουμε ότι η ζημιά ενδέχεται να ξεπεράσει το ασφάλιστρο με πιθανότητα 1%, το βέλτιστο ποσοστό εκχώρησης είναι 50%, .
- Για την ίδια πιθανότητα, σύμφωνα με τη μέθοδο CTE το αντίστοιχο ποσοστό είναι 70%.

Κεφάλαιο 5

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΚΛΙΜΑΚΩΤΗΣ ΠΡΟΜΗΘΕΙΑΣ

5.1 Ορισμός

Η προμήθεια αποτελεί ένα σημαντικό συντελεστή καθορισμού της αξίας μιας αντασφαλιστικής σύμβασης. Η αναλογική προσέγγιση τιμολόγησης εξελίχθηκε από την επιθυμία του αντασφαλιστή να καθορίσει το αναμενόμενο μελλοντικό αποτέλεσμα με βάση τα σημερινά δεδομένα. Ο αντασφαλιστής, με γνώμονα πάντα την έκθεση στον κίνδυνο, υπολογίζει τις αναμενόμενες απαιτήσεις που θα επιβαρυνθεί από το αντασφαλιζόμενο χαρτοφυλάκιο. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται λεπτομερή πληροφόρηση για το κομμάτι της παραγωγής που αναλαμβάνει να ασφαλίσει. Έτσι λοιπόν, με τη σύναψη μιας αντασφαλιστικής σύμβασης ο αντασφαλιστής, με την έγκριση του πρωτασφαλιστή αποκτά πρόσβαση σε όλο το χαρτοφυλάκιο της εταιρίας (ζημίες, διαδικασία διαχείρισης ζημιών, επίπεδο underwriting) ούτως ώστε να μπορέσει να υπολογίσει το κατάλληλο αντασφάλιστρο. Αν η μελλοντική εμπειρία είναι καλύτερη από αυτό που έχει υποθέσει ο αντασφαλιστής τότε βγάζει μεγαλύτερο κέρδος από ότι περίμενε και επιστρέφει ένα ποσοστό αυτού του κέρδους στον πρωτασφαλιστή, υπό την μορφή προμήθειας. Με αυτό τον τρόπο “επιβραβεύεται” ο πρωτασφαλιστής για την καλύτερη εμπειρία, η οποία πιθανώς προέρχεται από το καλό επίπεδο underwriting, διαχείρισης ζημιών και γενικότερης προσοχής του πρωτασφαλιστή όσον αφορά την ανάληψη κινδύνων.

Το sliding commission scale αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο καταβάλλονται οι προμήθειες από τους αντασφαλιστές στους πρωτασφαλιστές στα πλαίσια μιας Quota Share σύμβασης. Αυτός ο τύπος προμήθειας επικροτεί ή τιμωρεί την ποιότητα του χαρτοφυλακίου που υπόκειται στην αντασφαλιστική σύμβαση. Όπως γίνεται αντιληπτό και από το όνομά της, η εκχωρούμενη προμήθεια ολισθαίνει πάνω ή κάτω ανάλογα με το πόσο ζημιογόνα είναι η εμπειρία του αντασφαλιστή.

Η διαδικασία θα μπορούσαμε να πούμε ότι λειτουργεί ως ακολούθως. Αρχικά, συμφωνείται μεταξύ ασφαλιστή και αντασφαλιστή μια προσωρινή προμήθεια, η οποία θα είναι μεταβλητή και θα οριστικοποιηθεί στο τέλος του έτους. Επιπλέον, ορίζεται μια κατώτατη και μια ανώτατη προμήθεια που αφορούν, αντίστοιχα, σε μία μέγιστη και σε μία ελάχιστη συχνότητα εμφάνισης ζημιών. Η κλιμακωτή προμήθεια βασίζεται σε έναν πίνακα που έχει προσυμφωνηθεί μεταξύ ασφαλιστή και αντασφαλιστή, και στον οποίο ορίζεται το ποσοστό των ασφαλίστρων που θα θεωρείται ως προμήθεια, σε σχέση με τον λόγο των απαιτήσεων προς τα ασφάλιστρα.

Ο λόγος των απαιτήσεων προς τα ασφάλιστρα που καλείται δείκτης ζημιάς (Loss ratio) υπολογίζεται, συνήθως, στο τέλος κάθε έτους σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο:

$$\mathbf{LR_{percentage}} = \frac{\text{Paid Claims}+\text{OS}_{\text{end}}-\text{OS}_{\text{start}}}{\text{Written Premius}+\text{UPR}_{\text{start}}-\text{UPR}_{\text{end}}} \tag{5.1}$$

όπου

OS_{start} : απόθεμα εκκρεμών ζημιών στο τέλος του προηγούμενου έτους

OS_{end} : απόθεμα εκκρεμών ζημιών στο τέλος του τρέχοντος έτους

UPR_{start} : απόθεμα μη δεδουλευμένων ασφαλίστρων στο τέλος του προηγούμενου έτους

UPR_{end} : απόθεμα μη δεδουλευμένων ασφαλίστρων στο τέλος του τρέχοντος έτους

Αν το loss ratio είναι χαμηλό, η προμήθεια η οποία θα πληρωθεί στον πρωτασφαλιστή θα είναι μεγαλύτερη, ενώ αν είναι υψηλό θα είναι μικρότερη. Συνεπώς, με αυτό το σύστημα προμηθειών, ο αντασφαλιστής, επιβραβεύει ένα ικανοποιητικό loss ratio με μια αυξημένη προμήθεια, αντιθέτως με τη περίπτωση που το loss ratio αυξηθεί, οπότε η προμήθεια θα είναι μικρότερη.

Είναι πολύ σημαντικό εδώ να τονίσουμε ότι η προμήθεια δεν μπορεί ποτέ να είναι μικρότερη από αυτήν που έχει οριστεί ως κατώτατη και μεγαλύτερη από την ανώτατη, ανεξαρτήτως από το αν το επιτευχθέν loss ratio είναι πολύ υψηλό ή πολύ χαμηλό.

Εφόσον το loss ratio που υπολογίστηκε για αυτή την περίοδο της σύμβασης είναι ανάμεσα σε αυτό που έχει τεθεί ως ελάχιστο και μέγιστο, τότε η τελική προμήθεια θα είναι επίσης ανάμεσα στα ανώτατα και κατώτατα όρια. Τέλος, αν το loss ratio πέσει εκτός ορίων της κλίμακας (είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω) είναι πιθανό η σύμβαση να επιτρέψει αυτές οι υπερβάσεις να ληφθούν υπόψιν στον υπολογισμό του loss ratio της επόμενης χρονιάς (π.χ. Loss brought forward). *(P. Booth et.al* (2005))

Ακολουθεί ένα παράδειγμα που παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται το Sliding Commission scale υπό μια Quota Share σύμβαση.

Παράδειγμα 5.1:

Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας κλιμακωτής προμήθειας που συμφωνήθηκε μεταξύ ασφαλιστή και αντασφαλιστή είναι ο παρακάτω:

Loss Ratio	above 70%	68%-69,9%	66%-67,9%	64%-65,9%	62-63,9%	under 62%
Commission	25%	26%	27%	28%	29%	30%

Πίνακας 5.1

Σε αυτό το παράδειγμα κάθε βελτίωση δύο ποσοστιαίων μονάδων του Loss ratio (ξεκινώντας με 70%) ανταμείβεται με μία αύξηση της προμήθειας κατά μία ποσοστιαία μονάδα (με μέγιστο το 30%).

Υποθέτουμε ότι η προσωρινή προμήθεια είναι σταθερή στο 25%. Τα εκτιμώμενα μικτά εγγεγραμμένα ασφάλιστρα ανέρχονται σε 10.000.000€. Η Quota Share αντασφαλιστική σύμβαση έχει ποσοστό εκχώρησης 20%, δηλαδή το αντασφάλιστρο ισούται με 2.000.000€ (=10.000.000*20%).

Ο εξαμηνιαίος αντασφαλιστικός λογαριασμός περιέχει μικτά ασφάλιστρα ύψους 9.000.000€. Το αντασφάλιστρο ανέρχεται σε 1.800.000€ (=9.000.000*20%), άρα ο αντασφαλιστής θα καταβάλει στον πρωτασφαλιστή μια προμήθεια της τάξεως των 450.000€ (=1.800.000*25%). Επιπλέον οι ζημιές, στο πρώτο μισό του έτους, ανέρχονται σε 3.000.000€, από αυτά ο αντασφαλιστής θα καλύψει τα 600.000€ (=3.000.000*20%).

Στο τέλος του έτους (οριστικά) τα μικτά ασφάλιστρα ανέρχονται σε 10.000.000€ και οι ζημιές σε 6.500.000€. Ο αντασφαλιστής οφείλει να καλύψει 1.300.000€ (=6.500.000*20%). Το Loss Ratio υπολογίζεται ότι είναι 65% ($=\frac{1.300.000}{2.000.000}$). Σύμφωνα με τον άνωθεν πίνακα στο συγκεκριμένο Loss Ratio αντιστοιχεί μία προμήθεια της τάξης του 28%, δηλαδή ο αντασφαλιστής πληρώνει μια συνολική προμήθεια 560.000€ (=2.000.000*28%). Με τον τελικό αντασφαλιστικό λογαριασμό, ο αντασφαλιστής λαμβάνει τα υπόλοιπα αντασφάλιστρα που ανέρχονται σε 200.000€ (=2.000.000-1.800.000), καταβάλει την εναπομείνασα προμήθεια στον πρωτασφαλιστή που ανέρχεται σε 110.000€ (=560.000-450.000) και πληρώνει το υπόλοιπο ποσό ζημιών που του αντιστοιχεί, σύμφωνα με τους όρους της σύμβασης και το οποίο ανέρχεται σε 700.000€ (=1.300.000-600.000). (*A. Schwepcke (2004))*

5.2 Εφαρμογή Κλιμακωτής Προμήθειας στα δεδομένα μας

Στη παράγραφο αυτή θα εφαρμόσουμε την κλιμακωτή προμήθεια στα δεδομένα του χαρτοφυλακίου που έχουμε στη διάθεσή μας.

Πιο συγκεκριμένα, θα παραθέσουμε 3 σενάρια με διαφορετικές δομές κλιμακωτής προμήθειας επιθυμώντας με το τρόπο αυτό να εξετάσουμε δύο πράγματα. Πρώτον, το πληρωτέο ποσό προμήθειας ανά μήνα και ανά σενάριο και δεύτερον, το κέρδος ή την ζημιά του πρωτασφαλιστή ανά μήνα και σενάριο. Αυτό θα γίνει τόσο για τα εμπειρικά μας δεδομένα όσο και για τα θεωρητικά σύμφωνα με τα συμπεράσματα του 3^{ου} Κεφαλαίου.

Επιπρόσθετα, θα διερευνήσουμε την επίπτωση της δομής της κλιμακωτής προμήθειας στο βέλτιστο ποσοστό εκχώρησης. Για το σκοπό αυτό θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις για κάθε σενάριο. Με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, στη πρώτη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε σαν βέλτιστο ποσοστό εκχώρησης το 50%, στο οποίο καταλήξαμε με τη μέθοδο VaR και στη δεύτερη το 70% από τη μέθοδο CTE.

Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι στους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν για τον προσδιορισμό του δείκτη ζημιάς (LR) θα χρησιμοποιηθεί, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μια απλουστευμένη μορφή του τύπου (5.1) καθώς τα δεδομένα μας αφορούν περίοδο ενός έτους και σε μηνιαία βάση δεν διαθέτουμε τις αντίστοιχες πληροφορίες.

Ο τύπος είναι ο εξής:

$$\mathbf{LR} = \frac{\text{Paid Claims}}{\text{Written Premius}} \qquad (5.2)$$

Παρακάτω συνοψίζουμε ορισμένα στατιστικά από το χαρτοφυλάκιο μας που θα μας βοηθήσουν στην εκτίμηση των παραπάνω:

Μήνας	Μηνιαία Μικτά Ασφάλιστρα	Μηνιαίο Ποσό Ζημιών	Μηνιαίος αριθμός ζημιών	Μηνιαίο Loss Ratio
1	105.046,67	62.685,71	16,00	60%
2	88.282,45	70.834,62	13,00	80%
3	74.610,78	64.964,05	24,00	87%
4	75.547,17	66.320,05	8,00	88%
5	77.186,32	56.825,35	18,00	74%
6	101.846,15	73.481,32	26,00	72%
7	82.834,16	66.926,58	18,00	81%
8	66.146,59	35.173,89	19,00	53%
9	62.743,68	62.476,41	17,00	100%
10	75.434,52	53.518,48	20,00	71%
11	31.606,74	17.302,47	12,00	55%
12	142.958,89	96.900,54	34,00	68%
Σύνολο	**984.244,12**	**727.409,47**	**225,00**	**74%**

Πίνακας 5.2

$1^{η}$ Περίπτωση: Ποσοστό εκχώρησης 50%

Σενάριο $1^{ο}$:

Υποθέτουμε τα ακόλουθα:

Ποσοστό Εκχώρησης	Μέση Προμήθεια	Κλιμακωτή Προμήθεια		
		Loss Ratio<=30%	30%<Loss Ratio<=45%	Loss Ratio>45%
50%	20%	30%	60%-LR	15%

Πίνακας 5.3

Η μέση προμήθεια είναι το ποσοστό που πληρώνεται από τον αντασφαλιστή στον πρωτασφαλιστή σε μηναία βάση. Εάν (όπως δείξαμε και στο παράδειγμα 5.1) η κλιμακωτή προμήθεια είναι μεγαλύτερη από την μέση προμήθεια τότε ο αντασφαλιστής οφείλει στο τέλος του μήνα να καλύψει την διαφορά (και το αντίθετο).

Εάν λοιπόν εφαρμοστούν οι παραπάνω υποθέσεις (Πίνακας 5.3) στο χαρτοφυλάκιο μας, θα προκύψουν τα ακόλουθα:

Αποτελέσματα Πρωτασφαλιστή						
Μήνας	Ασφάλιστρα	Ζημιές	Πληρωτέα Προμήθεια στον Πρωτασφαλιστή	Κλιμακωτή Προμήθεια	Αποτέλεσμα Μήνα	Επιστρεφόμενη Προμήθεια
1	52.523,34	31.342,86	10.504,67	7.878,50	29.058,98	2.626,17
2	44.141,23	35.417,31	8.828,25	6.621,18	15.345,10	2.207,06
3	37.305,39	32.482,03	7.461,08	5.595,81	10.419,17	1.865,27
4	37.773,59	33.160,03	7.554,72	5.666,04	10.279,60	1.888,68
5	38.593,16	28.412,68	7.718,63	5.788,97	15.969,46	1.929,66
6	50.923,08	36.740,66	10.184,62	7.638,46	21.820,88	2.546,15
7	41.417,08	33.463,29	8.283,42	6.212,56	14.166,35	2.070,85
8	33.073,30	17.586,95	6.614,66	4.960,99	20.447,34	1.653,66
9	31.371,84	31.238,21	6.274,37	4.705,78	4.839,41	1.568,59
10	37.717,26	26.759,24	7.543,45	5.657,59	16.615,61	1.885,86
11	15.803,37	8.651,24	3.160,67	2.370,51	9.522,64	790,17
12	71.479,45	48.450,27	14.295,89	10.721,92	33.751,09	3.573,97
Σύνολο	**492.122,06**	**363.704,74**	**98.424,41**	**73.818,31**	**202.235,63**	**24.606,10**

Πίνακας 5.4

Από ότι παρατηρούμε από τα παραπάνω καθώς το μηνιαίο Loss Ratio (βλ. Πίνακα 5.2) είναι σταθερά πάνω από 45%, ο πρωτασφαλιστής δικαιούται 15% προμήθεια από τον αντασφαλιστή αντί της μέσης μηνιαίας προμήθειας ύψους 20% που λαμβάνει. Αυτό σημαίνει ότι ο πρωτασφαλιστής θα πρέπει να «επιστρέψει» για κάθε μήνα το 5% της προμήθειας που έλαβε από τον αντασφαλιστή. Αυτό μειώνει την κερδοφορία του κατά 24.606,10€.

Σενάριο $2^{ο}$:

Εν συνεχεία θα εξετάσουμε πώς θα επηρεάσει τα αποτελέσματα του πρωτασφαλιστή μια αλλαγή στην δομή της κλιμακωτής προμήθειας.

Σύμφωνα με αυτό το σενάριο ισχύουν τα παρακάτω:

Ποσοστό Εκχώρησης	Μέση Προμήθεια	Κλιμακωτή Προμήθεια		
		Loss Ratio<=60%		Loss Ratio>60%
50%	20%	30%		15%

Πίνακας 5.5

Τα αποτελέσματα του εν λόγω σεναρίου φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Αποτελέσματα Πρωτασφαλιστή						
Μήνας	Ασφάλιστρα	Ζημιές	Πληρωτέα Προμήθεια στον Πρωτασφαλιστή	Κλιμακωτή Προμήθεια	Αποτέλεσμα Μήνα	Επιστρεφόμενη Προμήθεια
1	52.523,34	31.342,86	10.504,67	15.757,00	36.937,48	-5.252,33
2	44.141,23	35.417,31	8.828,25	6.621,18	15.345,10	2.207,06
3	37.305,39	32.482,03	7.461,08	5.595,81	10.419,17	1.865,27
4	37.773,59	33.160,03	7.554,72	5.666,04	10.279,60	1.888,68
5	38.593,16	28.412,68	7.718,63	5.788,97	15.969,46	1.929,66
6	50.923,08	36.740,66	10.184,62	7.638,46	21.820,88	2.546,15
7	41.417,08	33.463,29	8.283,42	6.212,56	14.166,35	2.070,85
8	33.073,30	17.586,95	6.614,66	9.921,99	25.408,34	-3.307,33
9	31.371,84	31.238,21	6.274,37	4.705,78	4.839,41	1.568,59
10	37.717,26	26.759,24	7.543,45	5.657,59	16.615,61	1.885,86
11	15.803,37	8.651,24	3.160,67	4.741,01	11.893,15	-1.580,34
12	71.479,45	48.450,27	14.295,89	10.721,92	33.751,09	3.573,97
Σύνολο	**492.122,06**	**363.704,74**	**98.424,41**	**89.028,31**	**217.445,63**	**9.396,10**

Πίνακας 5.6

Ανατρέχοντας πάλι στον Πίνακα 5.2, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το Loss Ratio του χαρτοφυλακίου μας είναι κάτω από 60% για τους μήνες Ιανουάριο, Αύγουστο και Νοέμβριο. Έτσι λοιπόν παρατηρείται στην τελευταία στήλη του Πίνακα 5.6 ότι για αυτούς τους μήνες ο αντασφαλιστής πρέπει να καταβάλει έξτρα προμήθεια από αυτήν που κατέβαλε αρχικά. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα (συγκριτικά με το 1^{ο} σενάριο) να μειωθεί αρκετά το σύνολο της επιστρεφόμενης προμήθειας και να αυξηθεί η κερδοφορία του πρωτασφαλιστή.

<u>Σενάριο 3^{ο}:</u>

Αλλάζουμε και πάλι την δομή της κλιμακωτής προμήθειας όπως φαίνεται στον Πίνακα 5.7.

Οι παράμετροι είναι ως εξής:

Ποσοστό Εκχώρησης	Μέση Προμήθεια	Κλιμακωτή Προμήθεια		
		Loss Ratio<=60%	60%<Loss Ratio<=80%	Loss Ratio>80%
50%	20%	30%	90%-LR	10%

Πίνακας 5.7

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Αποτελέσματα Πρωτασφαλιστή						
Μήνας	Ασφάλιστρα	Ζημιές	Πληρωτέα Προμήθεια στον Πρωτασφαλιστή	Κλιμακωτή Προμήθεια	Αποτέλεσμα Μήνα	Επιστρεφόμενη Προμήθεια
1	52.523,34	31.342,86	10.504,67	15.757,00	36.937,48	-5.252,33
2	44.141,23	35.417,31	8.828,25	4.414,12	13.138,04	4.414,12
3	37.305,39	32.482,03	7.461,08	3.730,54	8.553,90	3.730,54
4	37.773,59	33.160,03	7.554,72	3.777,36	8.390,92	3.777,36
5	38.593,16	28.412,68	7.718,63	6.321,17	16.501,65	1.397,46
6	50.923,08	36.740,66	10.184,62	9.090,11	23.272,52	1.094,51
7	41.417,08	33.463,29	8.283,42	4.141,71	12.095,50	4.141,71
8	33.073,30	17.586,95	6.614,66	9.921,99	25.408,34	-3.307,33
9	31.371,84	31.238,21	6.274,37	3.137,18	3.270,82	3.137,18
10	37.717,26	26.759,24	7.543,45	7.186,29	18.144,31	357,16
11	15.803,37	8.651,24	3.160,67	4.741,01	11.893,15	-1.580,34
12	71.479,45	48.450,27	14.295,89	15.881,23	38.910,41	-1.585,34
Σύνολο	**492.122,06**	**363.704,74**	**98.424,41**	**88.099,71**	**216.517,04**	**10.324,70**

Πίνακας 5.8

Όπως αναφέραμε και παραπάνω καθώς το Loss Ratio του χαρτοφυλακίου είναι μικρότερο από 60% τους μήνες Ιανουάριο, Αύγουστο και Νοέμβριο ο πρωτασφαλιστής δικαιούται για κάθε μήνα 10% επιπλέον προμήθεια από τον αντασφαλιστή. Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τη συγκεκριμένη δομή Κλιμακωτής προμήθειας και για το μήνα Δεκέμβριο δικαιούται έξτρα προμήθεια 2%. Για τους υπόλοιπους μήνες η εμπειρία του πρωτασφαλιστή είναι χειρότερη και επιστρέφει ποσοστό της προμήθειας που έλαβε.

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα σε αυτή τη περίπτωση είναι κοντά σε αυτά του προηγούμενου σεναρίου. Ωστόσο, στο 2^{ο} Σενάριο, τα οικονομικά στοιχεία του πρωτασφαλιστή είναι καλύτερα καθώς σε αυτό έχουμε τη λιγότερη επιστρεφόμενη προμήθεια.

<u>2^{η} Περίπτωση</u>: Ποσοστό εκχώρησης 70%

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε τα τρία παραπάνω σενάρια διατηρώντας όλες τις παραμέτρους ίδιες εκτός από το ποσοστό εκχώρησης που από 50% γίνεται 70%. Με αυτό τον τρόπο θέλουμε να εξετάσουμε την ευαισθησία των αποτελεσμάτων του χαρτοφυλακίου μας στην αλλαγή της συγκεκριμένης παραμέτρου.

<u>Σενάριο 4^{ο}:</u>

Υποθέτουμε τα ακόλουθα:

Ποσοστό Εκχώρησης	Μέση Προμήθεια	Κλιμακωτή Προμήθεια		
		Loss Ratio<=30%	30%<Loss Ratio<=45%	Loss Ratio>45%
70%	20%	30%	60%-LR	15%

Πίνακας 5.9

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω υποθέσεις στο χαρτοφυλάκιο μας, προκύπτουν τα ακόλουθα:

Αποτελέσματα Πρωτασφαλιστή						
Μήνας	Ασφάλιστρα	Ζημιές	Πληρωτέα Προμήθεια στον Πρωτασφαλιστή	Κλιμακωτή Προμήθεια	Αποτέλεσμα Μήνα	Επιστρεφόμενη Προμήθεια
1	31.514,00	18.805,71	14.706,53	11.029,90	23.738,19	3.676,63
2	26.484,74	21.250,39	12.359,54	9.269,66	14.504,01	3.089,89
3	22.383,23	19.489,22	10.445,51	7.834,13	10.728,15	2.611,38
4	22.664,15	19.896,02	10.576,60	7.932,45	10.700,59	2.644,15
5	23.155,90	17.047,61	10.806,08	8.104,56	14.212,85	2.701,52
6	30.553,85	22.044,40	14.258,46	10.693,85	19.203,29	3.564,62
7	24.850,25	20.077,97	11.596,78	8.697,59	13.469,86	2.899,20
8	19.843,98	10.552,17	9.260,52	6.945,39	16.237,20	2.315,13
9	18.823,10	18.742,92	8.784,12	6.588,09	6.668,27	2.196,03
10	22.630,36	16.055,54	10.560,83	7.920,62	14.495,44	2.640,21
11	9.482,02	5.190,74	4.424,94	3.318,71	7.609,99	1.106,24
12	42.887,67	29.070,16	20.014,24	15.010,68	28.828,19	5.003,56
Σύνολο	**295.273,24**	**218.222,84**	**137.794,18**	**103.345,63**	**180.396,03**	**34.448,54**

Πίνακας 5.10

Καθώς το εκχωρούμενο ποσοστό αυξήθηκε κατά 20 ποσοστιαίες μονάδες, αυξήθηκε και η πληρωτέα από τον αντασφαλιστή προμήθεια. Όμως, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, καθώς το Loss Ratio είναι σταθερά άνω του 45%, αυτό έχει ως αποτέλεσμα να πρέπει ο πρωτασφαλιστής να επιστρέψει το 5% της προμήθειας που έλαβε, η οποία σε αυτή τη περίπτωση είναι πολύ μεγαλύτερη. Αυτό συνεπάγεται χειροτέρευση της κερδοφορίας του πρωτασφαλιστή συγκριτικά με το 1^{o} σενάριο.

<u>Σενάριο 5^{o}:</u>

Σύμφωνα με αυτό το σενάριο ισχύουν τα εξής:

Ποσοστό Εκχώρησης	Μέση Προμήθεια	Κλιμακωτή Προμήθεια		
		Loss Ratio<=60%		Loss Ratio>60%
70%	20%	30%		15%

Πίνακας 5.11

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Αποτελέσματα Πρωτασφαλιστή						
Μήνας	Ασφάλιστρα	Ζημιές	Πληρωτέα Προμήθεια στον Πρωτασφαλιστή	Κλιμακωτή Προμήθεια	Αποτέλεσμα Μήνα	Επιστρεφόμενη Προμήθεια
1	31.514,00	18.805,71	14.706,53	22.059,80	34.768,09	-7.353,27
2	26.484,74	21.250,39	12.359,54	9.269,66	14.504,01	3.089,89
3	22.383,23	19.489,22	10.445,51	7.834,13	10.728,15	2.611,38
4	22.664,15	19.896,02	10.576,60	7.932,45	10.700,59	2.644,15
5	23.155,90	17.047,61	10.806,08	8.104,56	14.212,85	2.701,52
6	30.553,85	22.044,40	14.258,46	10.693,85	19.203,29	3.564,62
7	24.850,25	20.077,97	11.596,78	8.697,59	13.469,86	2.899,20
8	19.843,98	10.552,17	9.260,52	13.890,78	23.182,59	-4.630,26
9	18.823,10	18.742,92	8.784,12	6.588,09	6.668,27	2.196,03
10	22.630,36	16.055,54	10.560,83	7.920,62	14.495,44	2.640,21
11	9.482,02	5.190,74	4.424,94	6.637,42	10.928,70	-2.212,47
12	42.887,67	29.070,16	20.014,24	15.010,68	28.828,19	5.003,56
Σύνολο	**295.273,24**	**218.222,84**	**137.794,18**	**124.639,63**	**201.690,03**	**13.154,54**

Πίνακας 5.12

Όπως έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω, καθώς το Loss Ratio του χαρτοφυλακίου μας είναι μικρότερο του 60% για τους μήνες Ιανουάριο, Αύγουστο και Νοέμβριο ο αντασφαλιστής θα πρέπει να καταβάλει για αυτούς τους μήνες 10% επιπλέον προμήθεια από αυτήν που κατέβαλε αρχικά. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα συγκριτικά με το 4^{ο} σενάριο να μειωθεί σημαντικά το σύνολο της επιστρεφόμενης προμήθειας και να αυξηθεί η κερδοφορία του πρωτασφαλιστή. Ωστόσο, σε σχέση με το 2^{ο} Σενάριο η επιστρεφόμενη προμήθεια σε αυτή τη περίπτωση είναι μεγαλύτερη, με αποτέλεσμα τα οικονομικά αποτελέσματα του πρωτασφαλιστή να εμφανίζουν χειρότερη εικόνα.

Σενάριο 6^{ο}:

Οι παράμετροι που θα χρησιμοποιηθούν είναι οι ακόλουθοι:

Ποσοστό Εκχώρησης	Μέση Προμήθεια	Κλιμακωτή Προμήθεια		
		Loss Ratio<=60%	60%<Loss Ratio<=80%	Loss Ratio>80%
70%	20%	30%	90%-LR	10%

Πίνακας 5.13

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Αποτελέσματα Πρωτασφαλιστή						
Μήνας	**Ασφάλιστρα**	**Ζημιές**	**Πληρωτέα Προμήθεια στον Πρωτασφαλιστή**	**Κλιμακωτή Προμήθεια**	**Αποτέλεσμα Μήνα**	**Επιστρεφόμενη Προμήθεια**
1	31.514,00	18.805,71	14.706,53	22.059,80	34.768,09	-7.353,27
2	26.484,74	21.250,39	12.359,54	6.179,77	11.414,12	6.179,77
3	22.383,23	19.489,22	10.445,51	5.222,75	8.116,77	5.222,75
4	22.664,15	19.896,02	10.576,60	5.288,30	8.056,44	5.288,30
5	23.155,90	17.047,61	10.806,08	8.849,64	14.957,93	1.956,45
6	30.553,85	22.044,40	14.258,46	12.726,15	21.235,60	1.532,31
7	24.850,25	20.077,97	11.596,78	5.798,39	10.570,67	5.798,39
8	19.843,98	10.552,17	9.260,52	13.890,78	23.182,59	-4.630,26
9	18.823,10	18.742,92	8.784,12	4.392,06	4.472,24	4.392,06
10	22.630,36	16.055,54	10.560,83	10.060,81	16.635,62	500,02
11	9.482,02	5.190,74	4.424,94	6.637,42	10.928,70	-2.212,47
12	42.887,67	29.070,16	20.014,24	22.233,72	36.051,23	-2.219,48
Σύνολο	**295.273,24**	**218.222,84**	**137.794,18**	**123.339,60**	**200.389,99**	**14.454,58**

Πίνακας 5.14

Από τον Πίνακα 5.14 διαπιστώνουμε ότι έχουμε παρόμοια εικόνα με αυτή του προηγούμενου σεναρίου. Συγκριτικά με το 3^{ο} Σενάριο το κέρδος του πρωτασφαλιστή είναι μικρότερο καθώς πρέπει να επιστρέψει μεγαλύτερη προμήθεια.

Συμπερασματικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι, η αύξηση του ποσοστού εκχώρησης από 50% σε 70% συνεπάγεται μείωση της κερδοφορίας του πρωτασφαλιστή, καθώς εκχωρώντας μεγαλύτερο ποσοστό του κίνδυνο εκχωρείται και μεγαλύτερο ποσοστό ασφαλίστρων. Συγκρίνοντας για παράδειγμα το 2^{ο} και το 4^{ο} σενάριο (με 50% και 70% ποσοστό εκχώρησης αντίστοιχα) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η κλιμακωτή προμήθεια αυξήθηκε σαν ποσοστό του ασφαλίστρου που εισέπραξε ο πρωτασφαλιστής (από 18% στο 2^{ο} σενάριο σε 42% στο 4^{ο}) αλλά και σαν απόλυτο ποσό (από 89.028,31 σε 124.639,63€). Μολοταύτα, η αύξηση αυτή δεν αρκεί για να καλύψει την πτώση στα εισπραττόμενα ασφάλιστρα. Έτσι λοιπόν παρατηρούμε ότι έχουμε μεγαλύτερη κερδοφορία στο 2^o σενάριο.

5.3 Κλιμακωτή Προμήθεια και θεωρητική συνάρτηση κατανομής

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε την κλιμακωτή προμήθεια σε θεωρητικό επίπεδο χρησιμοποιώντας την κατανομή Weibull στην οποία καταλήξαμε (Κεφάλαιο 3^o) ότι προσαρμόζονται καλύτερα οι ζημιές του χαρτοφυλακίου μας. Αρχικά, θα υπολογίσουμε την μέση ζημιά ανά μήνα πολλαπλασιάζοντας το μέσο της κατανομής (3.165,09€) με τον εμπειρικό μηνιαίο αριθμό ζημιών. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τα καινούργια μηνιαία Loss Ratios και θα εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία και σενάρια με την προηγούμενη ενότητα.

Παρακάτω συνοψίζουμε τα αποτελέσματα που απεικονίζουν τη νέα εικόνα του χαρτοφυλακίου μας:

Μήνας	Μηνιαία Μικτά Ασφάλιστρα	Μηνιαίο Ποσό Ζημιών	Μηνιαίος αριθμός ζημιών	Μηνιαίο Loss Ratio
1	105.046,67	50.641,44	16,00	48%
2	88.282,45	41.146,17	13,00	47%
3	74.610,78	75.962,16	24,00	102%
4	75.547,17	25.320,72	8,00	34%
5	77.186,32	56.971,62	18,00	74%
6	101.846,15	82.292,34	26,00	81%
7	82.834,16	56.971,62	18,00	69%
8	66.146,59	60.136,71	19,00	91%
9	62.743,68	53.806,53	17,00	86%
10	75.434,52	63.301,80	20,00	84%
11	31.606,74	37.981,08	12,00	120%
12	142.958,89	107.613,06	34,00	75%
Σύνολο	**984.244,12**	**712.145,25**	**225,00**	**72%**

Πίνακας 5.15

Υποθέτουμε τα ακόλουθα :

<u>Σενάριο 1^o:</u>

Ποσοστό Εκχώρησης	Μέση Προμήθεια	Κλιμακωτή Προμήθεια		
		Loss Ratio<=30%	30%<Loss Ratio<=45%	Loss Ratio>45%
50%	20%	30%	60%-LR	15%

Πίνακας 5.16

Αποτελέσματα Πρωτασφαλιστή						
Μήνας	Ασφάλιστρα	Ζημιές	Πληρωτέα Προμήθεια στον Πρωτασφαλιστή	Κλιμακωτή Προμήθεια	Αποτέλεσμα Μήνα	Επιστρεφόμενη Προμήθεια
1	52.523,34	25.320,72	10.504,67	7.878,50	35.081,12	2.626,17
2	44.141,23	20.573,09	8.828,25	6.621,18	30.189,32	2.207,06
3	37.305,39	37.981,08	7.461,08	5.595,81	4.920,12	1.865,27
4	37.773,59	12.660,36	7.554,72	10.003,79	35.117,02	-2.449,07
5	38.593,16	28.485,81	7.718,63	5.788,97	15.896,32	1.929,66
6	50.923,08	41.146,17	10.184,62	7.638,46	17.415,37	2.546,15
7	41.417,08	28.485,81	8.283,42	6.212,56	19.143,83	2.070,85
8	33.073,30	30.068,36	6.614,66	4.960,99	7.965,93	1.653,66
9	31.371,84	26.903,27	6.274,37	4.705,78	9.174,35	1.568,59
10	37.717,26	31.650,90	7.543,45	5.657,59	11.723,95	1.885,86
11	15.803,37	18.990,54	3.160,67	2.370,51	-816,66	790,17
12	71.479,45	53.806,53	14.295,89	10.721,92	28.394,83	3.573,97
Σύνολο	**492.122,06**	**356.072,63**	**98.424,41**	**78.156,06**	**214.205,50**	**20.268,35**

Πίνακας 5.17

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα με εκείνα του Πίνακα 5.4 παρατηρούμε ότι η Κλιμακωτή Προμήθεια είναι μεγαλύτερη και κατ’ επέκταση η επιστρεφόμενη μικρότερη. Συνεπώς τα οικονομικά αποτελέσματα του πρωτασφαλιστή φαίνονται καλύτερα σε σχέση με του 1^{ου} Σεναρίου της προηγούμενης παραγράφου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τον μήνα Απρίλιο το LR είναι 34% (λαμβάνει 6% επιπλέον προμήθεια) σε αντίθεση με τα εμπειρικά Loss Ratios που είναι όλα πάνω από 45%.

Σενάριο 2^{ο}:

Ποσοστό Εκχώρησης	Μέση Προμήθεια	Κλιμακωτή Προμήθεια		
		Loss Ratio<=60%		Loss Ratio>60%
50%	20%	30%		15%

Πίνακας 5.18

Αποτελέσματα Πρωτασφαλιστή						
Μήνας	Ασφάλιστρα	Ζημιές	Πληρωτέα Προμήθεια στον Πρωτασφαλιστή	Κλιμακωτή Προμήθεια	Αποτέλεσμα Μήνα	Επιστρεφόμενη Προμήθεια
1	52.523,34	25.320,72	10.504,67	15.757,00	42.959,62	-5.252,33
2	44.141,23	20.573,09	8.828,25	13.242,37	36.810,51	-4.414,12
3	37.305,39	37.981,08	7.461,08	5.595,81	4.920,12	1.865,27
4	37.773,59	12.660,36	7.554,72	11.332,08	36.445,30	-3.777,36
5	38.593,16	28.485,81	7.718,63	5.788,97	15.896,32	1.929,66
6	50.923,08	41.146,17	10.184,62	7.638,46	17.415,37	2.546,15
7	41.417,08	28.485,81	8.283,42	6.212,56	19.143,83	2.070,85
8	33.073,30	30.068,36	6.614,66	4.960,99	7.965,93	1.653,66
9	31.371,84	26.903,27	6.274,37	4.705,78	9.174,35	1.568,59
10	37.717,26	31.650,90	7.543,45	5.657,59	11.723,95	1.885,86
11	15.803,37	18.990,54	3.160,67	2.370,51	-816,66	790,17
12	71.479,45	53.806,53	14.295,89	10.721,92	28.394,83	3.573,97
Σύνολο	**492.122,06**	**356.072,63**	**98.424,41**	**93.984,03**	**230.033,47**	**4.440,38**

Πίνακας 5.19

Ανατρέχοντας στον Πίνακα 5.15, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το Loss Ratio του χαρτοφυλακίου είναι κάτω από 60% για τους μήνες Ιανουάριο, Φεβρουάριο και Απρίλιο. Παρατηρούμε λοιπόν στον Πίνακα 5.19 ότι για αυτούς τους μήνες η επιστρεφόμενη προμήθεια είναι αρνητική. Συνεπώς ο αντασφαλιστής πρέπει να καταβάλει έξτρα προμήθεια από αυτήν που κατέβαλε αρχικά. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα συγκριτικά με το 1^{ο} σενάριο να μειωθεί αρκετά το σύνολο της επιστρεφόμενης προμήθειας και να αυξηθεί η κερδοφορία του πρωτασφαλιστή. Επιπλέον, αν συγκρίνουμε τα οικονομικά αποτελέσματα του πρωτασφαλιστή με τα αντίστοιχα του 2ου Σεναρίου της προηγούμενης παραγράφου, διαπιστώνουμε ότι στη προκειμένη περίπτωση είναι αρκετά βελτιωμένα λόγω της διαφορετικής μηνιαίας κατανομής του LR ανάμεσα στα δύο σενάρια.

<u>Σενάριο 3ο:</u>

Ποσοστό Εκχώρησης	Μέση Προμήθεια	Κλιμακωτή Προμήθεια		
		Loss Ratio<=60%	60%<Loss Ratio<=80%	Loss Ratio>80%
50%	20%	30%	90%-LR	10%

Πίνακας 5.20

Αποτελέσματα Πρωτασφαλιστή						
Μήνας	Ασφάλιστρα	Ζημιές	Πληρωτέα Προμήθεια στον Πρωτασφαλιστή	Κλιμακωτή Προμήθεια	Αποτέλεσμα Μήνα	Επιστρεφόμενη Προμήθεια
1	52.523,34	25.320,72	10.504,67	15.757,00	42.959,62	-5.252,33
2	44.141,23	20.573,09	8.828,25	13.242,37	36.810,51	-4.414,12
3	37.305,39	37.981,08	7.461,08	3.730,54	3.054,85	3.730,54
4	37.773,59	12.660,36	7.554,72	11.332,08	36.445,30	-3.777,36
5	38.593,16	28.485,81	7.718,63	6.248,03	16.355,38	1.470,60
6	50.923,08	41.146,17	10.184,62	5.092,31	14.869,21	5.092,31
7	41.417,08	28.485,81	8.283,42	8.789,56	21.720,83	-506,15
8	33.073,30	30.068,36	6.614,66	3.307,33	6.312,27	3.307,33
9	31.371,84	26.903,27	6.274,37	3.137,18	7.605,76	3.137,18
10	37.717,26	31.650,90	7.543,45	3.771,73	9.838,09	3.771,73
11	15.803,37	18.990,54	3.160,67	1.580,34	-1.606,83	1.580,34
12	71.479,45	53.806,53	14.295,89	10.524,97	28.197,89	3.770,92
Σύνολο	**492.122,06**	**356.072,63**	**98.424,41**	**86.513,43**	**222.562,87**	**11.910,98**

Πίνακας 5.21

Από ότι μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα παραπάνω, η εικόνα στα οικονομικά στοιχεία του πρωτασφαλιστή είναι χειρότερη σε σχέση με το προηγούμενο σενάριο, καθώς σε πολλούς μήνες το LR είναι μεγαλύτερο από 80% και ο πρωτασφαλιστής επιστρέφει το 10% της προμήθειας που έλαβε. Τέλος, συγκρίνοντας αυτό το σενάριο με το αντίστοιχο 3ο Σενάριο της Παραγράφου 5.2 παρατηρούμε ότι το οικονομικό αποτέλεσμα του πρωτασφαλιστή είναι καλύτερο παρότι η επιστρεφόμενη προμήθεια είναι μεγαλύτερη καθώς την ίδια στιγμη το ποσό το ζημιών είναι μικρότερο.

Τέλος, συγκρίνοντας τους πίνακες 5.2 και 5.15 με τα στατιστικά του χαρτοφυλακίου, μπορούμε να διακρίνουμε ότι οι ετήσιες ζημιές στα εμπειρικά δεδομένα είναι περισσότερες από τις θεωρητικές (727.409,47€ έναντι 712.145,25 €). Κατ' επέκταση το ετήσιο Loss Ratio είναι και αυτό αυξημένο (74% έναντι 72%). Με άλλα λόγια, στη δεύτερη περίπτωση, το μειωμένο (συγκριτικά με τα εμπειρικά δεδομένα) Loss Ratio έχει ως αποτέλεσμα να επωφελείται ο πρωτασφαλιστής. Συνεπώς, σε κάθε σενάριο, τα οικονομικά αποτελέσματα της παραγράφου 5.3 είναι βελτιωμένα συγκριτικά με αυτά της προηγούμενης παραγράφου.

Παράρτημα

First_Attempt.nb

CTE attempt.nb

R_Code.txt

Βιβλιογραφία

Ελληνική

1. Κ.Ι. Κουτσόπουλος, Αθήνα (1999). Αναλογιστικά Μαθηματικά Μέρος Ι, Θεωρία των Κινδύνων.

2. Γ. Πιτσέλης (2014). Θεωρία Τιμολόγησης. Σημειώσεις για το ΠΜΣ Αναλογιστική & Διοικητική Κινδύνου, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

3. Κ. Τολίκας (2014), Λειτουργικοί Κινδύνοι. Σημειώσεις για το ΠΜΣ Αναλογιστική & Διοικητική Κινδύνου, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

4. Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (2013). Θεωρία Κινδύνου Ι. Σημειώσεις για το ΠΜΣ Αναλογιστική & Διοικητική Κινδύνου, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξενόγλωσση

1. P. Booth, R.Chadburn, S. Haberman. D. James, Z. Khorasanee, R.H. Plumb, B. Rickayzen (2005). Modern Actuarial Theory and Practice, Second Edition, Chapman & Hall/CRC.

2. Institute of Insurance Sciences. An Introduction to Reinsurance. Fundacion MAPFRE, Madrid (2013)

3. R. Kaas, M. Govaaerts, J. Dhaene, M. Denuit (2008). Modern Actuarial Risk Theory, Second Edition, Chapman & Hall/CRC.

4. A. Schwepcke (2004). Reinsurance Principles and State of the Art-A Guidebook for home Learners.

5. K. S. Tan, C. Weng, Yi Zhang (2011). Optimality of General Reinsurance Contracts under CTE Risk Measure. Insurance: Mathematics and Economics 49, 175-187

6. K. S. Tan, C. Weng, Yi Zhang (2009). VaR and CTE Criteria for Optimal Quota Share and Stop Loss Reinsurance, The North American Actuarial Journal, Volume 13, Issue 4.

7. J. Teugels, B. Sundt (2004). Encyclopedia of Actuarial Science, John Wiley & Sons, Ltd.

8. UK Institute of Actuaries (2013), Actuarial Risk Management (CA1).