ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

Μ.Π.Σ ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ

« Μετατρέψιμα Ομόλογα και Μέθοδοι Αποτίμησης »

Επιβλέπων Καθηγητής
Λέκτορας Εγγλέζος Νικόλαος

Επιτροπή
Καθηγητής Αντζουλάτος Άγγελος
Αναπληρωτής Καθηγητής Τσιριτάκης Εμμανουήλ

Σακέτου Σωτηρία ΜΧΡΗ1405

Φεβρουάριος 2016

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή έχει ως στόχο να μας εισάγει στον κόσμο των μετατρέψιμων ομολόγων και των μεθόδων αποτίμησής τους. Τα μετατρέψιμα ομόλογα είναι ομόλογα τα οποία εκδίδονται από μια εταιρεία και προσφέρουν στον κάτοχό τους το δικαίωμα να ανταλλάξουν το ομόλογο για ένα προκαθορισμένο αριθμό μετοχών. Την τελευταία εικοσαετία ο όγκος έκδοσης των μετατρέψιμων ομολόγων γνώρισε σημαντική άνοδο, το ίδιο και η προσπάθεια αποτίμησής τους που λόγω της υβριδικής φύσης των μετατρέψιμων ομολόγων καθίσταται περίπλοκη.

Στην αρχή παρουσιάζεται η ιστορική αναδρομή αποτίμησης των μετατρέψιμων ομολόγων. Στη συνέχεια περιγράφεται ένα μοντέλο αποτίμησης μετατρέψιμων ομολόγων διακριτού χρόνου, το τριωνυμικό υπόδειγμα του Hull και στη συνέχεια ένα μοντέλο συνεχούς χρόνου, το μοντέλο του Ingersoll. Επιπλέον, πραγματοποιείται μια εμπειρική μελέτη με τη βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού MatLab για το τριωνυμικό μοντέλο. Αφού εκτιμήσαμε τις παραμέτρους του μοντέλου με τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg-Marquardt και ελέγξαμε την προβλεπτική ικανότητά του, καταλήγουμε πως το μοντέλο μας είναι ένα αξιόπιστο υπόδειγμα μετατρέψιμων ομολόγων. Τέλος πραγματοποιείται μια αριθμητική ανάλυση ως προς την εξάρτηση της τιμής των μετατρέψιμων ομολόγων από τις παραμέτρους που εκτιμήθηκαν.

Λέξεις κλειδιά:

Μετατρέψιμα ομόλογα, ανακαλέσιμα μετατρέψιμα ομόλογα, Τριωνυμικό υπόδειγμα του Hull, Μοντέλο Ingersoll, εμπειρική μελέτη, εκτίμηση παραμέτρων, προβλεπτική ικανότητα

Abstract

The aim of this thesis is to introduce us to the world of convertible bonds and their valuation methods. Convertible bonds are bonds which are issued by a company offering their holder the right to exchange the bond with a predetermined number of shares. In the last twenty years, the volume of issuance of convertible bonds increased significantly, so as their valuation attempts. However, the hybrid nature of convertible bonds made the latter task quite complicated.

Firstly a historical review of the valuation of convertible bonds is presented. Secondly, a discrete-time model of convertible bond pricing, Hull's trinomial model and afterwards the continuous time Ingersoll term structure model are described. An empirical study is also conducted with the assistance of the programming language MatLab for the trinomial model. After evaluating the parameters of the model by using the iterative algorithm of Levenberg-Marquardt and examining the forecasting power of the model, we conclude that this is a reliable model to evaluate convertible bonds. Finally, a numerical analysis is being conducted to examine the dependency of the price of convertible bonds from the evaluated parameters.

Key words:

Convertible bonds, callable convertible bonds, Hull's Trinomial model, Ingersoll's valuation model, empirical study, parameter valuation, forecasting power

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα μετατρέψιμα ομόλογα, τα χαρακτηριστικά τους και μια ιστορική αναδρομή για τα μοντέλα αποτίμησής τους.

1.1. Μετατρέψιμα Ομόλογα

Τα μετατρέψιμα ομόλογα είναι ομόλογα τα οποία έχουν εκδοθεί από μια εταιρεία και ενσωματώνουν μια επιπλέον σημαντική επιλογή που τα υπόλοιπα εταιρικά ομόλογα δε διαθέτουν. Προσφέρουν στον κάτοχο τους το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να μετατρέψει το ομόλογο σε ένα προκαθορισμένο αριθμό μετοχών της υποκείμενης εταιρείας για συγκεκριμένη χρονική περίοδο και σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές στο μέλλον, μέχρι τη λήξη του. Οι όροι μετατροπής καθορίζονται από την εκδότρια εταιρεία κατά την έκδοση του μετατρέψιμου ομολόγου.

Όταν εκδοθούν για πρώτη φορά συμπεριφέρονται ως κανονικά ομόλογα. Ωστόσο, ο κάτοχος λαμβάνει τις περιοδικές πληρωμές κουπονιού από τον εκδότη. Ο επενδυτής-ομολογιούχος, λόγω της υβριδικής φύσης του μετατρέψιμου ομολόγου, προστατεύεται από μία κάθοδο- μείωση της αξίας της επιχείρησης, ενώ ως δυναμικός μέτοχος μπορεί να ωφεληθεί από την άνοδο της μετοχής.

Επιπλέον, τα περισσότερα μετατρέψιμα ομόλογα περιλαμβάνουν συνήθως ένα επιπλέον χαρακτηριστικό, την ανάκληση. Οι ανακαλέσιμες μετατρέψιμες ομολογίες (Callable Convertible Bonds, CCB) είναι έτσι οι πιο συνηθισμένες μετατρέψιμες ομολογίες. Τέτοιες ομολογίες επιτρέπουν στον εκδότη να ανακαλέσει (εξαγοράσει) το ομόλογο. Η εκδότρια εταιρία δηλαδή, έχει το δικαίωμα να αγοράσει πίσω το ομόλογο από τον κάτοχο στον οποίο το είχε πουλήσει νωρίτερα. Όταν η εταιρία ανακοινώσει την ανάκληση, ο επενδυτής-ομολογιούχος έχει στη διάθεσή του μια χρονική περίοδο (call notice), κατά την οποία θα αποφασίσει είτε την εξαγορά τοις μετρητοίς, λαμβάνοντας τη λεγόμενη τιμή ανάκλησης, είτε τη μετατροπή των ομολόγων του σε ένα συγκεκριμένο αριθμό μετοχών. Η περίοδος αυτή συνήθως είναι 30 ημέρες. Ο κάτοχος έχει πάντα το δικαίωμα να μετατρέψει το ομόλογο σε μετοχές από τη στιγμή που θα ανακληθεί από την εκδότρια εταιρία. Το χαρακτηριστικό της ανάκλησης από την εκδότρια εταιρία είναι επομένως ένας τρόπος πρόωρης αναγκαστικής μετατρεψιμότητας για τον κάτοχο.

Συνεπώς, στρατηγικές συμπεριφορές και από τους δύο παράγοντες θα πρέπει να ληφθούν υπόψη για την συστηματική αποτίμηση των ανακαλέσιμων μετατρέψιμων ομολογιών, CCB. Όπως όλα τα εταιρικά ομόλογα έτσι και τα μετατρέψιμα ομόλογα έχουν ένα συγκεκριμένο επιτόκιο (κουπόνι), το οποίο είναι μικρότερο από το επιτόκιο του αντίστοιχου κανονικού ομολόγου, και μια συγκεκριμένη ημερομηνία λήξης.

1.1.1. Γενικά χαρακτηριστικά

Τα μετατρέψιμα ομόλογα διαθέτουν ελκυστικά χαρακτηριστικά τόσο για τους επενδυτές, όσο και για τους εκδότες. Από τη μεριά των επενδυτών, τα μετατρέψιμα ομόλογα τους προσφέρουν μεγαλύτερη σταθερότητα εισοδήματος από αυτή που τους προσφέρουν οι μετοχές. Επίσης παρέχουν μια απόδοση η οποία συνήθως είναι υψηλότερη από τη μερισματική απόδοση των κοινών μετοχών. Επιπρόσθετα, αν η τιμή της μετοχής κινηθεί καθοδικά, ο επενδυτής ως ομολογιούχος, είναι προστατευμένος και λαμβάνει το κουπόνι του ομολόγου. Από την άλλη μεριά αν η τιμή της μετοχής ανέβει, ο επενδυτής μπορεί να ωφεληθεί από αυτή την άνοδο μετατρέποντας τα ομόλογα του σε μετοχές.

Οι εκδότες από τη μεριά τους έχουν ποικίλους λόγους ώστε να προτιμήσουν τη χρηματοδότηση μέσω μετατρέψιμων ομολόγων. Η εκδότρια εταιρία έχει τη δυνατότητα να προσφέρει το ομόλογο με μικρότερο κουπόνι σε σύγκριση με αυτό που θα πλήρωνε για ένα κανονικό ομόλογο. Συνεπώς, ακόμη και μικρότερες εταιρίες οι οποίες δεν μπορούν να έχουν πρόσβαση στην αγορά κανονικών ομολόγων, μπορούν να εκδώσουν μετατρέψιμα ομόλογα. Τέλος, μερικές εταιρίες που έχουν την προσδοκία για άνοδο της τιμής της μετοχής, εκδίδουν μετατρέψιμα ομόλογα με σκοπό να αναβάλλουν τη χρηματοδότηση με μετοχές όταν επιτευχθεί άνοδος.

Τα μετατρέψιμα ομόλογα συνήθως ταυτοποιούνται από το όνομα του εκδότη, το κουπόνι, την ημερομηνία λήξης και το νόμισμα. Επίσης μπορούν να αναγνωριστούν από το International Securities Identification Number (ISIN) ο οποίος ταυτοποιεί μοναδικά ένα χρεόγραφο. Το ομολογιακό συμβόλαιο περιγράφει τους ειδικούς όρους της έκδοσης της μετατρέψιμης ομολογίας. Γενικά, οι όροι περιλαμβάνουν τις ακόλουθες ποσότητες και χαρακτηριστικά:

- *Κεφάλαιο (Principal):* Η ονομαστική αξία (nominal value) του μετατρέψιμου ομολόγου. Συνήθως πρόκειται για το ποσό για το οποίο μπορεί να εξαγοραστεί το ομόλογο στη λήξη του.

- *Κουπόνι (Coupon):* Το ετήσιο επιτόκιο ως ποσοστό του κεφαλαίου που πληρώνεται στον κάτοχο από τον εκδότη.

- *Συχνότητα κουπονιού (Coupon frequency):* Ο αριθμός των πληρωμών κουπονιού κάθε έτος. Συνήθως είναι δύο για τα μετατρέψιμα ομόλογα.

- *Δείκτης Μετατροπής (Conversion ratio):* Ο αριθμός των μεριδίων της υποκείμενης μετοχής για την οποία το μετατρέψιμο ομόλογο μπορεί να ανταλλαγεί. Ο δείκτης αυτός συνήθως δημοσιεύεται στην έκδοση και παραμένει σταθερός σε όλη τη διάρκεια ζωής του χρεογράφου, μολονότι είναι προσαρμοσμένο στις διασπάσεις της μετοχής, στα πρόσθετα μερίσματα και σε άλλα μειωτικά γεγονότα
.

- *Τιμή μετατροπής (Conversion price):* Η τιμή που πληρώνεται για κάθε μερίδιο της υποκείμενης μετοχής κατά τη μετατροπή, υποθέτοντας ότι το κεφάλαιο του ομολόγου χρησιμοποιείται για να πληρώσει τα μερίδια της μετοχής που λαμβάνει ο κάτοχος.

$$\text{τιμή μετατροπής} = \text{κεφάλαιο} \div \text{δείκτης μετατροπής}$$

- *Parity/ Conversion value:* Η αγοραία αξία των μεριδίων της υποκείμενης μετοχής κατά τη χρονική στιγμή που θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τη μετατροπή.
.

$$\text{Parity} = \text{conversion ratio} \times \text{current stock price}$$

- *Αρχική ημέρα μετατροπής (First conversion date):* Η πρώτη μέρα μετά την έκδοση κατά την οποία το ομόλογο μπορεί να μετατραπεί σε μετοχές. Μερικές φορές, υπάρχει μία περίοδος μετά την έκδοση κατά την οποία δεν επιτρέπεται η μετατροπή.

- *Πρόβλεψη ανάκλησης (Call Provision):* Το χαρακτηριστικό αυτό δίνει στον εκδότη το δικαίωμα να εξαγοράσει το ομόλογο πριν από τη λήξη σε προκαθορισμένη τιμή που είναι γνωστή ως *τιμή ανάκλησης* (call price). Επιπρόσθετα, τα μετατρέψιμα ομόλογα θα περιέχουν σχεδόν σίγουρα ένα καθεστώς call protection. Η προστασία ανάκλησης (Hard Call) είναι σημαντική για τους επενδυτές καθώς εγγυάται τη δυνατότητα μετατρεψιμότητας του ομολόγου και οποιαδήποτε πλεονεκτική απόδοση έχει έναντι των υποκείμενων μετοχών για ορισμένο χρονικό διάστημα. Όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η περίοδος προστασίας, τόσο μεγαλύτερο είναι το όφελος για τους επενδυτές. Το χαρακτηριστικό αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως ένα call option το οποίο έχει πωληθεί από τον επενδυτή στην εκδότρια εταιρεία. Επιπλέον, μειώνει την αξία του ομολόγου σε σύγκριση με ένα παρόμοιο μη ανακαλέσιμο μετατρέψιμο ομόλογο.

- *Πρόβλεψη πώλησης (Put Provision):* Το χαρακτηριστικό αυτό επιτρέπει στον ομολογιούχο να πωλήσει το μετατρέψιμο ομόλογο στην εκδότρια εταιρεία για μία προκαθορισμένη τιμή η οποία καθορίζεται από το χρονοδιάγραμμα πώλησης (put schedule). Αυτό το δικαίωμα παρέχει περαιτέρω προστασία από τη τυχόν καθοδική κίνηση της τιμής της μετοχής και έτσι προσθέτει αξία στο ομόλογο. Μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δικαίωμα πώλησης (put option), το οποίο έχει πωληθεί από την εκδότρια εταιρεία στον κάτοχο του ομολόγου και συνεπώς είναι μεγαλύτερη η αξία του σε σχέση με την αξία παρόμοιων μετατρέψιμων ομολόγων που δε διαθέτουν αυτό το χαρακτηριστικό.

1.1.2. Η χρήση τους στις αγορές

Η ιστορία των μετατρέψιμων ομολογιών ξεκινάει το 19^{ο} αιώνα, όταν οι αμερικανικές εταιρίες σιδηροδρόμου χρειάζονταν κεφάλαια για τη χρηματοδότηση των εργασιών τους. Οι Η.Π.Α εκείνη την εποχή ήταν μια ταχύτατα αναπτυσσόμενη οικονομία, παρόμοια με τις σημερινές αναδυόμενες αγορές. Η απόκτηση κεφαλαίου δεν ήταν μια εύκολη υπόθεση για την εποχή εκείνη, είτε μέσω έκδοσης ομολόγων είτε μέσω έκδοσης μετοχών. Μέσα στο σκληρό ανταγωνισμό για την απόκτηση κεφαλαίου, μια νέα μορφή χρηματοδότησης αποδείχθηκε ελκυστική ταυτόχρονα για τις επιχειρήσεις αλλά και για τους επενδυτές. Η νέα αυτή μορφή ήταν το μετατρέψιμο ομόλογο. Το δικαίωμα της μετατροπής ομολόγων σε μετοχές σήμαινε για τον επενδυτή ότι ήταν δυνατό να επωφεληθεί από την άνοδο της τιμής της μετοχής στην αναπτυσσόμενη αγορά των Η.Π.Α. Αν από την άλλη πλευρά, η τιμή της μετοχής είχε καθοδική πορεία, οι επενδυτές είχαν ακόμα το τόκο και την αποπληρωμή της επένδυσής τους.

Για μεγάλο χρονικό διάστημα, η αγορά των μετατρέψιμων ομολόγων θεωρούταν ως μια αγορά για μικρού ή μεσαίου μεγέθους επιχειρήσεις. Αυτή η αντίληψη άλλαξε στη δεκαετία του 1980, όταν η IBM, προτίμησε να χρηματοδοτήσει μια εταιρία εξαγοράς χρησιμοποιώντας 1,25 δις δολάρια έκδοση μετατρέψιμων ομόλογων, καθώς είχε ως σκοπό το κέρδος από τις χαμηλότερες πληρωμές τόκων σε σχέση με αυτές των κοινών εταιρικών ομολόγων.

Σήμερα, πολλές εταιρείες μεγάλης κεφαλαιοποίησης εκδίδουν μετατρέψιμες ομολογίες. Ο παγκόσμιος δείκτης μετατρέψιμων UBS, ο οποίος καλύπτει περίπου το ήμισυ της συνολικής αγοράς, περιλαμβάνει το 50% των εταιριών μεγάλης κεφαλαιοποίησης (UBS AG, 2013).

Τα μετατρέψιμα ομόλογα πριν από κάποια χρόνια δεν ήταν ευρέως γνωστά στην παγκόσμια αγορά. Παρά το γεγονός ότι τη δεκαετία του 80 η χρήση των παραγώγων στις χρηματιστηριακές αγορές γνώρισε μεγάλη άνοδο, οι επενδυτές προτιμούσαν τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και τα δικαιώματα και όχι τα μετατρέψιμα ομόλογα. Παρόλο που η αγορά τους υπάρχει για πάνω από έναν αιώνα, μόνο τη τελευταία 20ετία ο παγκόσμιος όγκος έκδοσης μετατρέψιμων ομολογιών γνώρισε σημαντική άνοδο, όπως φαίνεται και από τον παρακάτω πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 1).

Πίνακας 1. Μέγεθος Μετατρέψιμων Ομολογιών: 2000-2011

	USA			EUROPE			JAPAN			ASIA			TOTAL		
Year	CB	Bond	%	CB	Bond	%	CB	Bond	%	CB	Bond	%	CB	Bond	%
2000	101.127	2295.06	4.406	33.916	380.42	8.915	46.203	655.82	7.045	8.942	320.99	2.786	190.188	3772.50	5.041
2001	163.406	2379.82	6.866	48.558	436.68	11.120	33.112	613.81	5.394	10.450	358.19	2.917	255.526	3909.89	6.535
2002	157.329	2369.97	6.638	61.455	545.81	11.259	32.552	682.98	4.766	13.298	378.13	3.517	264.634	4104.16	6.448
2003	228.611	2435.95	9.385	76.142	715.97	10.635	35.426	769.79	4.602	12.323	379.85	3.244	352.501	4460.14	7.903
2004	224.950	2552.61	8.813	84.332	800.01	10.541	34.676	787.43	4.404	13.165	399.34	3.297	357.123	4723.52	7.561
2005	208.227	2696.13	7.723	72.539	735.76	9.859	30.451	704.76	4.321	9.472	414.67	2.284	320.688	4751.79	6.749
2006	239.125	2840.51	8.418	62.852	878.99	7.150	27.081	671.86	4.031	9.663	477.04	2.026	338.720	5078.81	6.669
2007	261.248	3040.96	8.591	55.508	1077.64	5.151	25.203	728.22	3.461	14.700	531.92	2.764	356.659	5620.67	6.345
2008	142.407	3139.17	4.536	32.889	1276.34	2.577	21.952	766.62	2.864	11.429	594.92	1.921	208.677	5986.84	3.486
2009	182.897	3025.84	6.045	51.278	1476.39	3.473	18.595	782.68	2.376	18.218	874.24	2.084	270.978	6445.62	4.204
2010	188.550	3143.76	5.998	48.603	1399.63	3.473	27.443	900.38	3.048	23.482	1158.91	2.026	288.079	6933.64	4.155
2011	148.699	3488.40	4.263	40.161	1351.50	2.972	21.012	927.00	2.267	23.772	1287.60	1.846	233.644	7054.50	3.312

Ο πίνακας περιγράφει το μέγεθος της αγοράς μετατρέψιμων ομολόγων σε σχέση με την αγορά των εταιρικών ομολόγων για τις κυριότερες αγορές: Η.Π.Α, Ευρώπη, Ιαπωνία, και Ασία, για την περίοδο 2000-2011. Η στήλη CB αναφέρεται στα μετατρέψιμα ομόλογα, η στήλη Bond αναφέρεται στην αγορά εταιρικών ομολόγων. Το ποσοστό % των μετατρέψιμων ως προς τα εταιρικά φαίνεται στη 3η στήλη. Τα μεγέθη περιγράφονται σε δισεκατομμύρια $US. Η πηγή για τα δεδομένα των μετατρέψιμων ομολόγων είναι η Datastream, ενώ για τα εταιρικά ομόλογα από τη Bank of International Settlements, BIS (2012).

Η επιτυχία της αγοράς μετατρέψιμων ομολόγων επέφερε σημαντικό ακαδημαϊκό ερευνητικό ενδιαφέρον στην τιμολόγηση των μετατρέψιμων ομολόγων. Αν και αναπτύχθηκαν πολλά θεωρητικά μοντέλα αποτίμησης για τα μετατρέψιμα ομόλογα, ο αριθμός των εκτενών εμπειρικών μελετών σχετικά με την αγορά αποτίμησης των μετατρέψιμων ομολόγων παραμένει μικρός. Αυτή η ανεπάρκεια είναι πιθανό να οφείλεται λόγω της πολυπλοκότητας των υπολογισμών που απαιτούνται για τα πολλαπλά συμβατικά χαρακτηριστικά ενός τυπικού μετατρέψιμου ομολόγου.

1.2. Ιστορική Αναδρομή

Όπως αναφέραμε και πιο πάνω, ένα σημαντικό ζήτημα με τις μετατρέψιμες ομολογίες είναι ότι είναι δύσκολο να αποτιμηθούν. Αυτό οφείλεται στην υβριδική φύση τους, η οποία περιπλέκει την τιμολόγηση. Η δυσκολία αυτή προκύπτει από τον αριθμό συγκεκριμένων παραγόντων που επηρεάζουν τη τιμή τους. Οι παράγοντες αυτοί είναι: ο χρόνος προς τη λήξη, το κουπόνι, η ονομαστική αξία, ο δείκτης μετατροπής και η μερισματική απόδοση του υποκείμενου τίτλου. Οι μέθοδοι αποτίμησης των μετατρέψιμων ομολόγων βασίστηκαν στις μεθόδους αποτίμησης των παραγώγων, αφού τα μετατρέψιμα ομόλογα θεωρήθηκαν ως ομόλογα που περιέχουν ένα επιπλέον δικαίωμα (call option).

Τα υποδείγματα αποτίμησης κυμαίνονται από το πιο απλό μέχρι και το πιο δύσκολο και περίπλοκο και διαφέρουν ακόμη περισσότερο όταν λαμβάνονται υπόψη αγοραίες μεταβλητές όπως τα επιτόκια, η ανακαλέσεις της εκδότριας εταιρίας, τα πιστωτικά ανοίγματα κλπ. Η κατασκευή διωνυμικών και τριωνυμικών δέντρων καθιερώθηκαν ως οι πιο δημοφιλείς προσεγγίσεις αποτίμησης των μετατρέψιμων ομολογιών παγκοσμίως, δεδομένου ότι είναι σχετικά εύκολα να τα κατανοήσουμε και μπορούν να τα βγάλουν περά με τα πιο κοινά χαρακτηριστικά των μετατρέψιμων ομολογιών. Παρόλα αυτά, ακόμη και αυτή η μέθοδος μπορεί να είναι προβληματική αφού τα δέντρα αδυνατούν να αντιμετωπίσουν αποτελεσματικά διακριτά γεγονότα, όπως τα μερίσματα μετοχών.

Τα θεωρητικά μοντέλα αποτίμησης μετατρέψιμων ομολόγων πρωτοεμφανίστηκαν τη δεκαετία του 1960 και η γενική διαδικασία αξιολόγησής τους ήταν να θέσουν τη τιμή του μετατρέψιμου ομολόγου ίση με το μέγιστο της αξίας του ως κανονικό ομόλογο ή την αξία του σε μετοχές , αφού έχει γίνει μετατροπή, κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον και στη συνέχεια γίνεται προεξόφληση της αξίας αυτής στο παρόν. Αυτού του είδους η προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε από τους Baumol, Malkiel and Quandt (1966) και πολλούς άλλους οικονομολόγους της εποχής. Αυτά τα μοντέλα αποδείχθηκαν προβληματικά για αρκετούς λόγους. Αν το μελλοντικό σημείο αξιολόγησης είναι πριν τη ληκτότητα, τότε η διάρκεια του προνομίου μετατροπής περιορίζεται. Από την άλλη, αν ληφθεί υπόψη μόνο η ημέρα λήξης, είναι πολύ πιθανό να αγνοηθεί μια πρώιμη μετατροπή. Κάθε τέτοιου είδους περιορισμοί στο δικαίωμα μετατροπής μπορεί να υποεκτιμήσουν την αξία του μετατρέψιμου ομολόγου. Επίσης το δικαίωμα ανάκλησης δεν εξετάζεται στα παραπάνω μοντέλα, γεγονός που κάνει τα ανακαλέσιμα μετατρέψιμα ομόλογα υπερτιμημένα.

Η σύγχρονη διαδικασία αποτίμησης των μετατρέψιμων ομολογιών βασίζεται σε δύο προσεγγίσεις. Η πρώτη καλείται structural approach(firm value approach) και η δεύτερη καλείται reduced-form approach (stock-value approach). Η βασική διαφορά μεταξύ αυτών των δύο προσεγγίσεων είναι το είδος των μεταβλητών εισόδου που χρησιμοποιούν. Η πρώτη χρησιμοποιεί πληροφορίες για μια συγκεκριμένη εταιρεία ενώ η δεύτερη χρησιμοποιεί πληροφορίες της αγοράς.

Οι περισσότερες από τις πρώτες έρευνες για τη τιμολόγηση των μετατρέψιμων ομολογιών βασίστηκαν στην προσέγγιση της αξίας της επιχείρησης (firm-value) η οποία προήλθε από τους Black-Scholes (1973) και Merton(1974). Τα μετατρέψιμα χρεόγραφα θεωρήθηκαν ως παράγωγα στην αξία της επιχείρησης και ως εκ τούτου η αξία των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης ήταν ο κύριος παράγοντας κινδύνου. Ο Ingersoll (1977a) ήταν ο πρώτος ο οποίος βασιζόμενος στη βιβλιογραφία των Black-Scholes τιμολόγησε τα μετατρέψιμα ομόλογα ως ενδεχόμενες απαιτήσεις της εταιρίας ως ολότητα. Ο Ingersoll (1977a) επίλυσε τη μερική διαφορική εξίσωση η οποία αποδεικνύει ότι ένα μη εξαγοράσιμο μετατρέψιμο ομόλογο χωρίς μερίσματα μπορεί να παρομοιαστεί με ένα χαρτοφυλάκιο ενός κανονικού ομολόγου και ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος. Λόγω των υποθέσεων που έχει πάρει, πιο συγκεκριμένα όχι μερίσματα, όχι κουπόνια, ο Ingersoll μπορεί να αξιολογήσει αναλυτικά τη τιμή των μετατρέψιμων ομολόγων. Οι Brennan και Schwartz (1977) εργάστηκαν στο ίδιο πλαίσιο με τον Ingersoll.

Το άρθρο των Brennan και Schwartz (1977) αποτελεί μια επέκταση της εργασίας των Black and Scholes (1973) και του Merton (1974) στην αποτίμηση των μετατρέψιμων ομολογιών. Στο άρθρο τους καταλήγουν στη διαφορική εξίσωση και τις οριακές συνθήκες (boundary conditions) που διέπουν την αξία του ομολόγου και παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης.

Και ο Ingersoll και οι Brennan και Schwartz υποθέτουν ότι τα επιτόκια στα μοντέλα τους είναι μη στοχαστικά. Αυτό το διορθώνουν αργότερα οι Brennan και Schwartz (1980) οι οποίοι ενσωμάτωσαν στοχαστικότητα στα επιτόκια. Παρόλο αυτά, τελικά καταλήγουν ότι για μια λογική διακύμανση των επιτοκίων, τα σφάλματα του μη στοχαστικού μοντέλου είναι μικρά. Έτσι για πρακτικούς λόγους προτιμάται το πιο απλό μοντέλο με τα μη στοχαστικά επιτόκια. Αν και πολλά αποτελέσματα στα δύο άρθρα των Ingersoll (1977a) και Brennan και Schwartz (1977) είναι ίδια, η κυριότερη διαφορά είναι ότι ο Ingersoll επικεντρώνεται στην παραγωγή κλειστού τύπου λύσεων για την αξία του ομολόγου ενώ οι Brennan και Schwartz προσφέρουν ένα γενικό αλγόριθμο για τον προσδιορισμό της αξίας του μετατρέψιμου ομολόγου.

Τα άρθρα των Ingersoll και Brennan και Schwartz υποθέτουν ότι η αξία της επιχείρησης αποτελείται αποκλειστικά από μετοχές και μετατρέψιμα ομόλογα και ότι η αξία της επιχείρησης ακολουθεί Γεωμετρική Κίνηση Brown. Αν και τα μοντέλα είναι σχετικά απλά, διαθέτουν μια αδυναμία. Η αξία της επιχείρησης είναι ένα μη παρατηρήσιμο μέγεθος. Από την άλλη μεριά, η αξία της μετοχής της επιχείρησης αποτελεί παρατηρήσιμο μέγεθος, αφού διαπραγματεύεται στην αγορά. Τα παραπάνω μοντέλα (firm value models), αν και είναι γνωστά, είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθούν στην πράξη εξαιτίας της αναγκαιότητας να υπολογιστεί η αβέβαιη αξία της επιχείρησης όπως και η μεταβλητότητά της. Ως εκ τούτου, η μεταγενέστερη βιβλιογραφία για την αποτίμηση των μετατρέψιμων ομολόγων βασίζεται στην υπόθεση ότι το μετατρέψιμο ομόλογο είναι ένα χρεόγραφο εξαρτώμενο από την υποκείμενη μετοχή και όχι από την αξία της επιχείρησης. Τα μοντέλα αυτά είναι τα λεγόμενα equity value models.

Οι McConnel-Schwartz (1986) εισήγαγαν πρώτοι ένα τέτοιο μοντέλο χρησιμοποιώντας τη τιμή της μετοχής ως μεταβλητή για τη τιμολόγηση των μετατρέψιμων ομολογιών. Πρόκειται για ένα μονοπαραγοντικό μοντέλο που χρησιμοποιεί τη τρέχουσα αξιολόγηση πιστοληπτικής ικανότητας και το επιτόκιο προσαρμοσμένο από τον πιστωτικό κίνδυνο για να λάβει υπόψη την αθέτηση στη τιμολόγηση των μετατρέψιμων ομολόγων. Στο μοντέλο αυτό οι McConnel-Schwartz (1986) τιμολόγησαν τα LYONs, που είναι μετατρέψιμα ομόλογα μηδενικού κουπονιού και ανακαλέσιμα από την εκδότρια εταιρία. Ένα από τα βασικά μειονεκτήματα του μοντέλου αυτού είναι η απουσία του χαρακτηριστικού της πτώχευσης. Οι Tsiveriotis-Fernades (1998) επέκτειναν το μοντέλο των McConnel-Schwartz (1986) υποθέτοντας ότι το μετατρέψιμο ομόλογο είναι ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει δύο συστατικά: το κανονικό ομόλογο και μετοχές. Εισήγαγαν την έννοια του COCB (Cash Only part of the CB), ένα υποθετικό χρεόγραφο που ο κάτοχός του είναι δικαιούχος όλων των ταμειακών ροών (όχι των μετοχικών ροών) τις οποίες λαμβάνει ένας δικαιούχος που συμπεριφέρεται με το βέλτιστο τρόπο. Έτσι παράγουν δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις, μία για κάθε συστατικό, τις οποίες λύνουν ταυτόχρονα για να τιμολογήσουν τα μετατρέψιμα ομόλογα. Το μοντέλο των Tsiveriotis-Fernades (1998) είναι δημοφιλές αφού χρησιμοποιεί λίγες παραμέτρους. Εκτός της διακύμανσης της υποκείμενης μετοχής οι μόνες μεταβλητές εισόδου είναι τα πιστωτικά ανοίγματα που παρατηρούνται στην αγορά.

Οι Ayache et al (2002) εισήγαγαν επίσης ένα μονοπαραγοντικό μοντέλο που διαχωρίζει το μετατρέψιμο ομόλογο σε ομολογιακό και μετοχικό συστατικό όπως και οι Tsiveriotis-Fernades (1998). Το μοντέλο υποθέτει μια διαδικασία αθέτησης κατά Poisson. Επιπλέον υποστηρίζεται η άποψη ότι το μοντέλο των Tsiveriotis-Fernades (1998) δεν αντιμετωπίζει σωστά τις τιμές των μετοχών σε περίπτωση αθέτησης, καθώς δεν προσδιορίζει τι θα συμβεί με τη τιμή της μετοχής μιας προβληματικής επιχείρησης η οποία μπορεί να βρεθεί σε κατάσταση χρεοκοπίας. Οι Ayache et al (2002) καταλήγουν ότι το μοντέλο των Tsiveriotis-Fernades (1998) είναι από τη φύση του μη ικανοποιητικό, λόγω της υπόθεσης ότι οι τιμές των μετοχών δεν επηρεάζονται από μια κατάσταση χρεοκοπίας. Και τα δύο μοντέλα θεωρούν τις υποθέσεις της αγοραίας αξίας και της ανάκτησης της ονομαστικής αξίας.

Τέλος, πολλά από τα μοντέλα αυτής της κατηγορίας (equity models), έχουν τη μορφή διωνυμικών ή τριωνυμικών δέντρων. Τέτοια είναι το μοντέλο της Goldman Sachs (1994), το οποίο χρησιμοποιεί το διωνυμικό δέντρο της τιμής της μετοχής των Cox, Ross και Rubenstein (1979) , το μοντέλο των Hung-Wang (2002), το μοντέλο του Hull (2005) και το μοντέλο Huang-Liu-Rao (2013) το οποίο ενσωματώνει τον πιστωτικό κίνδυνο.

1.3. Περιγραφή Διπλωματικής

Στο προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίσαμε τα μετατρέψιμα ομόλογα, πως πρωτοεμφανίστηκαν, τα χαρακτηριστικά τους γνωρίσματα και ταξιδέψαμε μέσω της ιστορικής αναδρομής στις μεθόδους αποτίμησης των μετατρέψιμων ομολόγων από το 1966 μέχρι σήμερα.

Στο κεφάλαιο 2 θα πραγματοποιήσουμε μια περιγραφή για το Διωνυμικό δέντρο που εμπνεύστηκαν οι Cox,Ross και Rubinstein, μία απλή και ταυτόχρονα ευφυής ιδέα που άλλαξε τον τρόπο αποτίμησης των παραγώγων. Ακολούθως, θα γνωρίσουμε μια επέκταση αυτού του μοντέλου, το μοντέλο του Hull που είναι διακριτού χρόνου και είναι διαμορφωμένο για την αποτίμηση μετατρέψιμων ομολόγων. Πρόκειται στην ουσία για ένα τριωνυμικό δέντρο. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζεται λεπτομερώς μια εφαρμογή αποτίμησης ενός μετατρέψιμου ομολόγου.

Στο κεφάλαιο 3 θα ανακαλύψουμε το μοντέλο του Ingersoll για την αποτίμηση των μετατρέψιμων ομολόγων. Το μοντέλο αυτό είναι συνεχούς χρόνου, σε αντίθεση με αυτό του Hull και βασίζεται στο μοντέλο των Black-Scholes-Merton, το πλέον γνωστό για την αποτίμηση δικαιωμάτων. Η ιδέα του μοντέλου των Black-Scholes-Merton περιγράφεται στην αρχή του κεφαλαίου και ακολουθεί το μοντέλο του Ingersoll.

Στο μοντέλο του Ingersoll, η αξία της τιμής των μετατρέψιμων ομολόγων εξαρτάται από την αξία της επιχείρησης, η οποία είναι ένα μη-παρατηρίσιμο μέγεθος για κάθε χρονική στιγμή και έτσι είναι πολύ δύσκολο να πραγματοποιηθεί εμπειρική μελέτη. Στο μοντέλο του Hull, η τιμή των μετατρέψιμων ομολόγων εξαρτάται από τη τιμή της μετοχής της εταιρίας. Η τιμή της μετοχής είναι ένα παρατηρίσιμο μέγεθος και συνεπώς είναι σχετικά πιο εύκολο να πραγματοποιηθεί εμπειρική μελέτη του μοντέλου, όπως και γίνεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Στο κεφάλαιο 4 πραγματοποιείται μία εμπειρική μελέτη αποτίμησης μετατρέψιμων ομολόγων με τη βοήθεια του τριωνυμικού μοντέλου του Hull που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 2, αλλά και ενός διωνυμικού μοντέλου αποτίμησης μετατρέψιμων ομολόγων. Στην αρχή του κεφαλαίου γίνεται περιγραφή του διωνυμικού μοντέλου και στη συνέχεια ακολουθεί μία εφαρμογή αποτίμησης με το αυτό το μοντέλο για ένα τυχαίο μετατρέψιμο ανακαλέσιμο ομόλογο του οποίου τα δεδομένα συλλέξαμε από τη βάση δεδομένων της Bloomberg. Στη συνέχεια σειρά έχει το μοντέλο του Hull. Στην αρχή παραθέτουμε τα δεδομένα για τα ομόλογα που θέλουμε να κάνουμε την αποτίμηση. Έπειτα εκτιμούμε τις παραμέτρους σ και λ με τη βοήθεια του επαναληπτικού αλγόριθμου Levenberg-Marquardt και τέλος ερευνάμε τη προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου μας. Η έρευνά μας έχει ως στόχο να παρατηρήσουμε πόσο καλά συμπεριφέρεται η τιμή του μοντέλου μας σε σχέση με την τιμή της αγοράς. Με λίγα λόγια πόσο αξιόπιστο μπορεί να είναι τελικά. Στο τέλος του κεφαλαίου, πραγματοποιείται μια αριθμητική ανάλυση ως προς την εξάρτηση της τιμής του μετατρέψιμου ομολόγου από τις παραμέτρους που εκτιμήθηκαν.

Τέλος, επισυνάπτεται παράρτημα με τους κώδικες της MatLab που χρησιμοποιήθηκαν για την εμπειρική μελέτη.

Κεφάλαιο 2

2. ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΜΕΤΑΤΡΕΨΙΜΩΝ ΟΜΟΛΟΓΩΝ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε το τριωνυμικό δέντρο που εισήγαγε ο Hull (2004) για τη τιμολόγηση των μετατρέψιμων ομολόγων. Πρώτα όμως θα πάρουμε μια γεύση από το πρώτο διωνυμικό δέντρο που εισήγαγαν οι Cox-Ross-Rubinstein (1979) για την αποτίμηση δικαιωμάτων και ήταν η βάση για όλα τα μεταγενέστερα δέντρα αποτίμησης που κατασκευάστηκαν, συμπεριλαμβανομένου και του τριωνυμικού δέντρου του Hull (2004).

2.1. Διωνυμικό Μοντέλο Cox-Ross-Rubinstein

Δικαίωμα (option) ορίζεται ένα παράγωγο χρεόγραφο που δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να πραγματοποιήσει μια συναλλαγή με τον υποκείμενο τίτλο που είναι εγγεγραμμένο το παράγωγο σε προκαθορισμένη τιμή, οποιαδήποτε στιγμή μέχρι μια δεδομένη ημερομηνία. Η πραγματοποίηση αυτής της συναλλαγής αναφέρεται ως εξάσκηση του δικαιώματος. Η προκαθορισμένη τιμή ονομάζεται strike price και η δεδομένη ημερομηνία καλείται expiration date. Ένα δικαίωμα μπορεί να είναι είτε call option είτε put option. Το call option δίνει το δικαίωμα στον κάτοχό του να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο (π.χ. μετοχές, χρυσό, πετρέλαιο, σιτάρι κλπ), ενώ το put δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο του να πωλήσει τον υποκείμενο τίτλο. Τέλος ένα δικαίωμα μπορεί να είναι είτε Αμερικάνικο, δηλαδή ο κάτοχος του μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα του οποιαδήποτε στιγμή μέχρι τη λήξη του, είτε Ευρωπαϊκό, δηλαδή ο κάτοχος του μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα μόνο την ημερομηνία λήξης του.

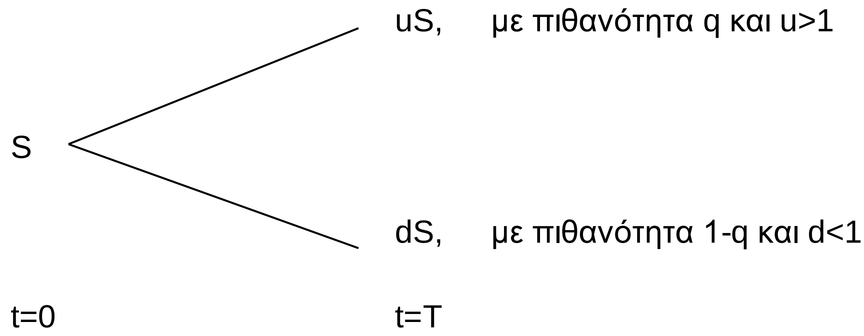
Η προσπάθεια αποτίμησης ενός δικαιώματος ξεκίνησε το 1900 και το πρώτο υπόδειγμα δημιουργήθηκε το 1973 από τους Black-Scholes (1973). Το Διωνυμικό υπόδειγμα θεμελιώθηκε το 1979, έξι χρόνια μετά το άρθρο των Black-Scholes (1973), από τρεις επιφανείς οικονομολόγους, τους John Cox, Stephen Ross και Mark Rubinstein. Στο άρθρο τους παρουσιάζουν μια απλή φόρμουλα διακριτού χρόνου. Το μοντέλο αυτό βασίστηκε στην ιδέα των Black-Scholes (1973), αλλά είναι δομημένο σε διακριτό χρόνο σε αντίθεση με το μοντέλο των Black-Scholes (1973), το οποίο είναι δομημένο σε συνεχή χρόνο.

Η δυσκολία αποτίμησης ενός δικαιώματος υπάρχει από την εν γένει δυσκολία να αποτιμήσουμε ένα οποιοδήποτε περιουσιακό στοιχείο με αβέβαια έσοδα. Δε γνωρίζουμε με βεβαιότητα τις μελλοντικές ροές και επομένως ούτε το προεξοφλητικό επιτόκιο.

Οι CRR (1979) έτσι κατασκεύασαν ένα διωνυμικό δέντρο το οποίο παρουσιάζει διαφορετικά πιθανά μονοπάτια για τη τιμή της υποκείμενης μετοχής μέχρι τη λήξη του δικαιώματος. Η υπόθεση που κάνουν για τη τιμή της μετοχής είναι ότι ακολουθεί τυχαίο περίπατο. Σε κάθε βήμα η τιμή της μετοχής έχει μια συγκεκριμένη πιθανότητα να κινηθεί προς τα επάνω και μια συγκεκριμένη πιθανότητα να κινηθεί προς τα κάτω.

2.1.1. Διωνυμικό δέντρο μίας περιόδου

Υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής σήμερα είναι S. Στην επόμενη περίοδο η τιμή της μετοχής θα είναι uS αν κινηθεί ανοδικά με πιθανότητα q ή dS με πιθανότητα (1-q) αν κινηθεί καθοδικά. Όπου u είναι ο ρυθμός αύξησης της τιμής της μετοχής και είναι σταθερός σε κάθε περίοδο και το d είναι ο ρυθμός μείωσης της τιμής της μετοχής. Η κίνηση της μετοχής παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα:

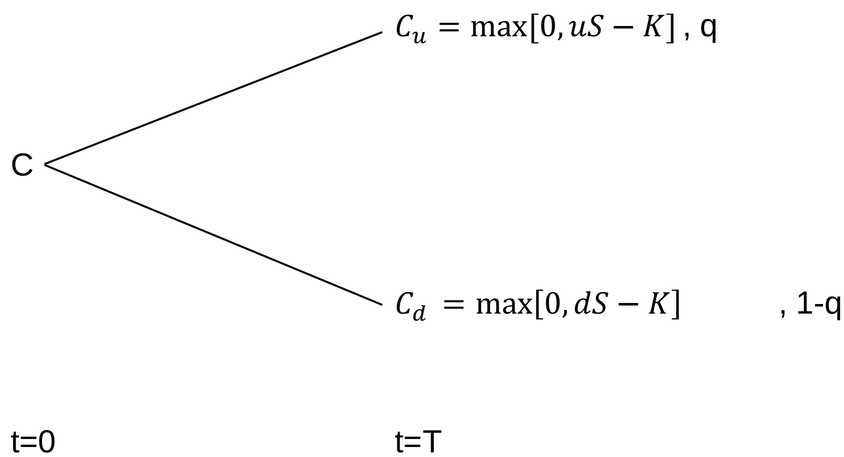


<u>Υποθέσεις</u>

- το επιτόκιο είναι σταθερό
- ∄ κόστη συναλλαγών
- ∄ margin requirements
- ∄ φόροι
- Για την ώρα η μετοχή δεν πληρώνει μέρισμα
- ∄ ευκαιρίες για arbitrage

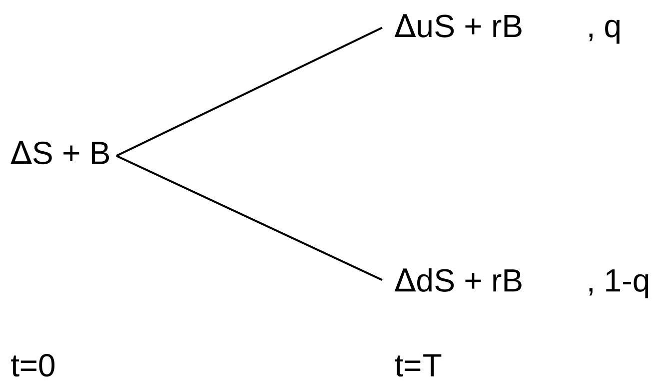
Ορίζουμε ως r = 1+ r_f και έτσι πρέπει u>r>d. Αν αυτές οι ανισότητες δεν ισχύουν τότε θα υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage.

Στη συνέχεια θα δούμε πως θα αποτιμήσουμε ένα call option που είναι εγγεγραμμένο στη μετοχή που είδαμε πιο πάνω. Παίρνουμε την πιο απλή κατάσταση όπου η ημερομηνία λήξης του είναι μια περίοδος. Έστω C η τρέχουσα αξία του call, C_u είναι η αξία του call στο τέλος της περιόδου αν η τιμή της υποκείμενης μετοχής κινηθεί ανοδικά και C_d είναι η αξία του call στο τέλος της περιόδου αν η τιμή της υποκείμενης μετοχής έχει κινηθεί καθοδικά. Από τη στιγμή που απομένει μόνο μια περίοδος για τη λήξη του call γνωρίζουμε ότι μια ορθολογική πολιτική εξάσκησης είναι $C_u = \max[0, uS - K]$ και $C_d = \max[0, dS - K]$. Παρακάτω δίνεται το διάγραμμα που αναπαριστά τη τιμή του call:



Ο σκοπός του υποδείγματος είναι να αποτιμήσει τόσο Ευρωπαϊκά όσο και Αμερικάνικα δικαιώματα. Η βασική ιδέα των CRR είναι σχετικά απλή. Κατασκεύασαν το λεγόμενο χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης (replicating portfolio) , δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο που θα απαρτίζεται από μετοχές και μετρητά τα οποία καταθέτουμε με ένα επιτόκιο r. Το χαρτοφυλάκιο αυτό το διαμόρφωσαν με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να ακολουθεί επακριβώς την κίνηση της τιμής του δικαιώματος.

Υποθέτουμε έτσι ότι κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει Δ μετοχές και μετρητά (ή ομόλογα μηδενικού κινδύνου) αξίας Β. Το ποσό των μετρητών Β το τοκίζουμε με ένα επιτόκιο r. Το χαρτοφυλάκιο αυτό θα κοστίζει σήμερα ΔS + B. Στο τέλος κάθε περιόδου η αξία του χαρτοφυλακίου θα έχει ως εξής



Αφού μπορούμε να διαλέξουμε τα Δ και Β με όποιο τρόπο θέλουμε εμείς, θα τα διαλέξουμε έτσι ώστε η αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος της περιόδου να ισούται με τη αξία του call σε κάθε πιθανή εκδοχή. Επομένως θα πρέπει να ισχύουν οι ισότητες:

$$\Delta dS + rB = C_u$$

$$\boldsymbol{\Delta dS + rB = C_d} \qquad (1)$$

Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές, έχουμε:

$$\boldsymbol{\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}, \quad B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r}} \qquad (2)$$

Εφόσον δεν υπάρχουν ευκαιρίες για εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage) και αφού η αξία του χαρτοφυλακίου στο μέλλον ισούται με την αξία του δικαιώματος στο μέλλον, θα πρέπει επίσης η αξία του χαρτοφυλακίου σήμερα να ισούται με την αξία του δικαιώματος σήμερα. Επομένως:

$$\boldsymbol{C = \Delta S + B = \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} = [\frac{r-d}{u-d}C_u + \frac{u-r}{u-d}C_d]/\mathrm{r}} \qquad \textbf{(3)}$$

Ορίζουμε:

$$\boldsymbol{p \equiv \frac{r-d}{u-d}} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{1 - p \equiv \frac{u-r}{u-d}} \qquad \textbf{(4)}$$

Όπου p και 1-p είναι οι λεγόμενες ψευδοπιθανότητες αφού έχουν χαρακτηριστικά πιθανοτήτων.

Έτσι η ισότητα (3) γράφεται ως εξής

$$\boldsymbol{C = [pC_u + (1-p)C_d]/r} \qquad \textbf{(5)}$$

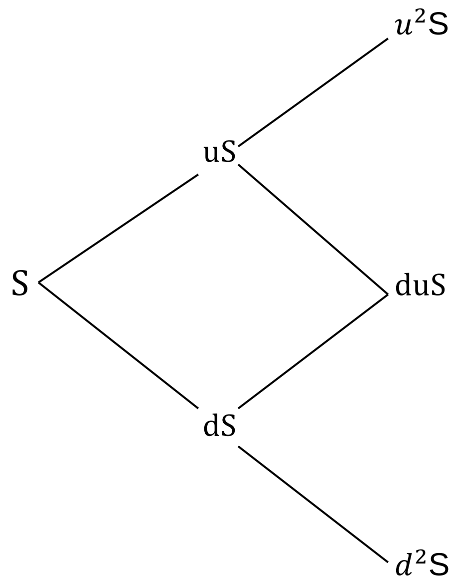
Η (5) αποτελεί τη φόρμουλα αποτίμησης ενός call με ληκτότητα μιας περιόδου σε όρους S, K, u, d, και r.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η φόρμουλα αυτή δεν περιέχει, για καλή μας τύχη, την υποκειμενική πιθανότητα q. Αυτό σημαίνει ότι η φόρμουλα αυτή εξαλείφει τις προτιμήσεις των επενδυτών. Δηλαδή διαφορετικοί επενδυτές με διαφορετικές υποκειμενικές πιθανότητες για την ανοδική και καθοδική κίνηση της τιμής της μετοχής θα καταλήξουν στο ίδιο αποτέλεσμα για τη τιμή του call, C. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η αξία του call εξαρτάται μόνο από τη τιμή της μετοχής. Έτσι η αξία του call αναπαρίσταται ως η αναμενόμενη μελλοντική τιμή του προεξοφλημένη σε ένα κόσμο με επενδυτές που είναι ουδέτεροι στον κίνδυνο.

2.1.2. Διωνυμικό δέντρο δύο περιόδων

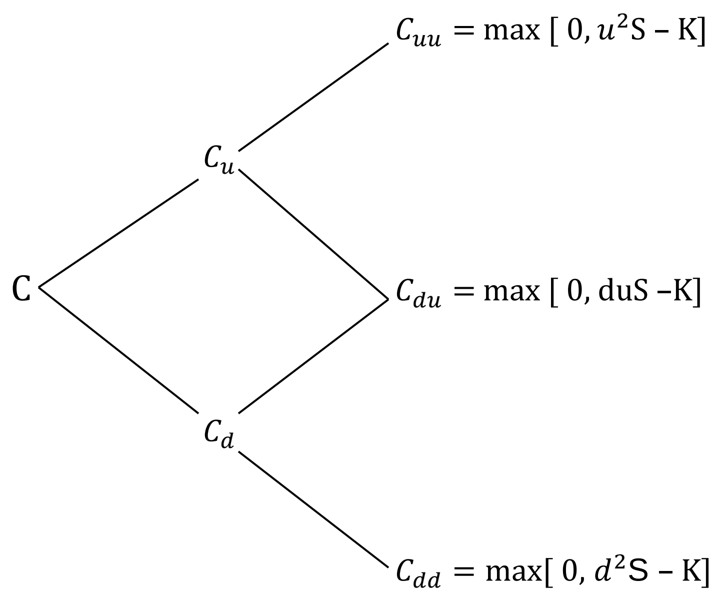
Τώρα θα εξετάσουμε τη τιμή ενός call, στο οποίο απομένουν δύο περίοδοι μέχρι τη λήξη.

Η τιμή της μετοχής σε κάθε περίοδο φαίνεται από το παρακάτω δέντρο:



t=0 t=T/2 t=T

Ομοίως για τη τιμή του call θα έχουμε:



t=0 t=T/2 t=T

όπου C_{uu} είναι η τιμή του call όταν η τιμή της μετοχής έχει κινηθεί ανοδικά και στις δύο περιόδους, C_{du} είναι η τιμή του call όταν η τιμή της μετοχής έχει κινηθεί ανοδικά στη πρώτη περίοδο και καθοδικά στη δεύτερη και C_{dd} είναι η τιμή του call όταν η τιμή της μετοχής έχει κινηθεί καθοδικά και στις δύο περιόδους.

Η φόρμουλα (5) που είδαμε πιο πάνω ισχύει για μια περίοδο. Εδώ θα τη χρησιμοποιήσουμε σε κάθε περίοδο και έτσι θα έχουμε:

$$C_u = [pC_{uu} + (1-p)C_{du}]/r$$

$$\boldsymbol{C_d = [pC_{du} + (1-p)\, C_{dd}]/r} \qquad \textbf{(6)}$$

και

$$\boldsymbol{C = [pC_u + (1-p)\, C_d]/\mathbf{r} = [\, p^2 C_{uu} + 2\mathbf{p}(1-\mathbf{p})C_{du} + (1-p)^2\, C_{dd}\,]/r^2} \qquad \textbf{(7)}$$

ένας άλλος τύπος για τη τιμή του call για μια περίοδο είναι

$$\boldsymbol{C = e^{-r_f \Delta t}[pC_u + (1-p)C_d]} \qquad \textbf{(8)}$$

όπου $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $p = \frac{e^{r_f \Delta t} - d}{u-d}$,

και όπου σ είναι η τυπική απόκλιση, μεταβλητότητα.

Για δύο περιόδους έχουμε:

$$C_u = e^{-r_f \Delta t}[pC_{uu} + (1-p)\, C_{du}]$$
$$C_d = e^{-r_f \Delta t}[pC_{du} + (1-p)C_{dd}]$$
$$C = e^{-r_f \Delta t}[pC_u + (1-p)\, C_d] \rightarrow$$
$$C = e^{-2r_f \Delta t}[p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{du} + (1-p)^2\, C_{dd}]$$

Η αποτίμηση ενός Αμερικάνικου δικαιώματος είναι ίδια με την αποτίμηση που είδαμε πιο πάνω ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος με τη διαφορά ότι κινούμενοι προς τα πίσω σε κάθε κόμβο συγκρίνουμε τη τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος με την εσωτερική τιμή του.

2.2. Τριωνυμικό Μοντέλο

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε το τριωνυμικό δέντρο του Hull (2005) και την έννοια της έντασης ουδετέρου κινδύνου, λ, που είναι σημαντική για την αποτίμηση των μετατρέψιμων ομολόγων

2.2.1. Τριωνυμικό υπόδειγμα Hull

Ο Hull (2005) εισήγαγε ένα μοντέλο αποτίμησης μετατρέψιμων ομολογιών σε μορφή δέντρου βασιζόμενο στο μοντέλο που εισήγαγαν οι Cox-Ross–Rubinstein (1979). Πρόκειται για ένα τριωνυμικό δέντρο το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως για την αποτίμησή τους. Το υπόδειγμα αυτό μοντελοποιεί τη τιμή της μετοχής της εκδότριας εταιρίας, υποθέτοντας ότι η μετοχή ακολουθεί Γεωμετρική Κίνηση Brown και υπάρχει μια πιθανότητα λΔt στην οποία αντιστοιχεί η χρεοκοπία της επιχείρησης σε κάθε μικρή χρονική περίοδο Δt. Στην περίπτωση χρεοκοπίας, η τιμή της μετοχής πέφτει στο 0 και η αξία του ομολόγου κατρακυλάει στο ποσό της ονομαστική αξίας του ομολόγου επί το ποσοστό ανάκτησης (συνήθως ορίζεται ως 40%). Η μεταβλητή λ ορίζεται ως η ένταση χρεοκοπίας ουδετέρου κινδύνου (βλέπε 2.2.2).

Τροποποιώντας το γνωστό διωνυμικό δέντρο των Cox-Ross–Rubinstein (1979), θα έχουμε για κάθε κόμβο:

- Μια πιθανότητα p_u για την ποσοστιαία ανοδική μεταβολή u της τιμής της μετοχής κατά την επόμενη περίοδο διάρκειας Δt
- Μια πιθανότητα p_d για την ποσοστιαία καθοδική μεταβολή d της τιμής της μετοχής κατά την επόμενη περίοδο διάρκειας Δt
- Μια πιθανότητα $p_{def} = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$ στην οποία αντιστοιχεί η περίπτωση χρεοκοπίας κατά την οποία η τιμή της μετοχής πέφτει στο 0, κατά την επόμενη περίοδο διάρκειας Δt

Εξισώνοντας τη διακύμανση της απόδοσης της μετοχής από το Black-Scholes, με τη διακύμανση της απόδοσης της μετοχής στο δέντρο, ο Hull καταλήγει στους ακόλουθους τύπους για τις παραμέτρους:

$$\boldsymbol{p_u = \frac{a - de^{-\lambda \Delta t}}{u-d}}, \quad \boldsymbol{p_d = \frac{ue^{-\lambda \Delta t} - a}{u-d}}, \quad \boldsymbol{u = e^{\sqrt{(\sigma^2 - \lambda)\Delta t}}}, \quad \boldsymbol{d = \frac{1}{u}} \quad (9)$$

όπου $a = e^{(r-q)\Delta t}$, $\mathrm{r} = r_f$ το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και q είναι η μερισματική απόδοση της μετοχής.

Η διάρκεια ζωής του τριωνυμικού δέντρου έχει σχεδιαστεί να είναι ίση με τη διάρκεια ζωής του μετατρέψιμου ομολόγου. Η αξία του ομολόγου στους κόμβους της τελευταίας περιόδου του δέντρου υπολογίζεται ανάλογα με τα δικαιώματα μετατροπής που έχει ο κάτοχος τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Στη συνέχεια κινούμαστε προς τα πίσω στο δέντρο. Στους κόμβους όπου επιτρέπεται η μετατροπή από τους όρους του ομολόγου, ελέγχουμε αν η μετατροπή είναι το πιο κερδοφόρο αποτέλεσμα. Επίσης ελέγχουμε αν η θέση της εκδότριας εταιρίας βελτιώνεται αν καλέσει τα ομόλογα. Αν όντως βελτιώνεται, υποθέτουμε ότι τα ομόλογα καλούνται και επανελέγχουμε αν είναι καλύτερο να γίνει μετατροπή. Έτσι για κάθε κόμβο η αξία του μετατρέψιμου ομολόγου θα είναι ισοδύναμη με :

$$\boldsymbol{V = max[min(Q_1, Q_2),\ Q_3]} \qquad \textbf{(10)}$$

όπου:

Q_1: η αξία του ομολόγου αν δεν γίνει ούτε μετατροπή, ούτε ανάκληση στο ομόλογο

Q_2: η τιμή ανάκλησης (call price)

Q_3: η αξία του ομολόγου όταν πραγματοποιείται η μετατροπή (conversion value)

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ένα μετατρέψιμο ομόλογο με ημερομηνία λήξης σε 9 μήνες, το οποίο εκδόθηκε από μια εταιρία Χ. Η ονομαστική αξία του είναι \$100. Ο δείκτης μετατροπής είναι 2 και η μετατροπή μπορεί να γίνει οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια των 9 μηνών. Η τιμή ανάκλησης είναι \$113. Η αρχική τιμή της μετοχής είναι \$50, η διακύμανση είναι 30% ετησίως και δεν υπάρχουν μερίσματα. Η ένταση χρεοκοπίας λ είναι 1% ανά χρόνο και όλα τα επιτόκια μηδενικού κινδύνου για όλες τις ληκτότητες είναι 5%. Υποθέτουμε ότι στην περίπτωση χρεοκοπίας η αξία του ομολόγου είναι \$40 (το ποσοστό ανάκτησης ορίζεται ως 40%).

Υπολογίζουμε τις μεταβλητές u, d, a, p_u , p_d και κατασκευάζουμε ένα τριωνυμικό δέντρο (Εικόνα 1) .

$\Delta\mathrm{t} = \frac{3\ \mu\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma}{12\ \mu\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma} = 0{,}25$

$\mathrm{u} = e^{\sqrt{(0.3^2-0.01)\times 0{,}25}} = 1.1519$, $\quad$ $\mathrm{d} = \frac{1}{u} = \frac{1}{1.1519} = 0.8681$

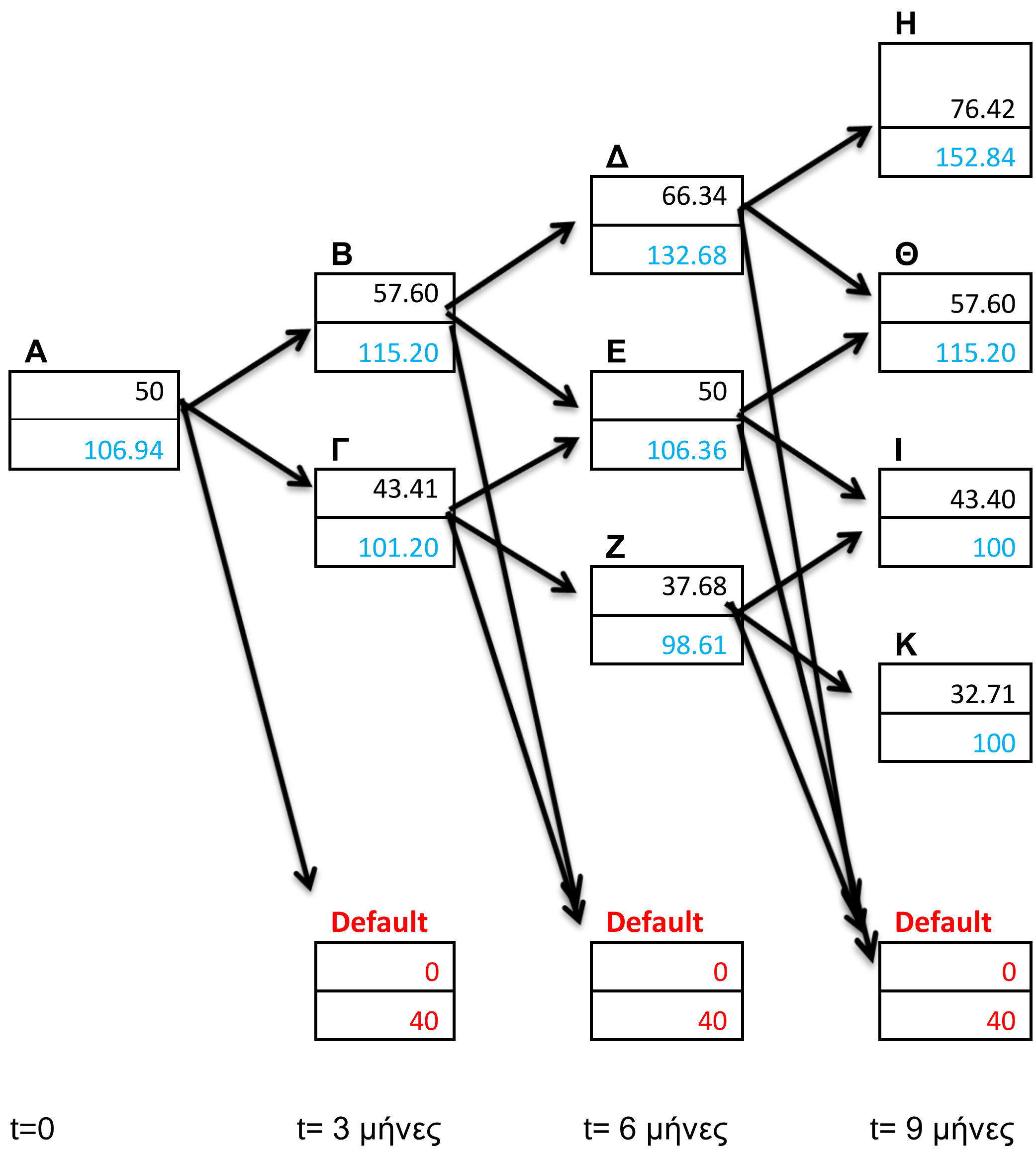
$$a = e^{0.05\times0.25} = 1.0126$$

$$p_u = \frac{1.0126-0.8681\times e^{-0.01\times0.25}}{1.1519-0.8681} = 0.5167$$

$$p_d = \frac{1.1519 \ \times e^{-0.01\times0.25} - \ 1.0126}{1.1519 - 0.8681} = 0.4808$$

$$p_{default} = 1 - \ e^{-0.05 \ \times0.25} = 0.002497$$

Εικόνα 1 . Τριωνυμικό Δέντρο για την αποτίμηση του μετατρέψιμου ομολόγου. Η πάνω τιμή με τα μαύρα γράμματα είναι η τιμή της μετοχής σε κάθε κόμβο, ενώ η κάτω τιμή με τα μπλε γράμματα είναι η τιμή του μετατρέψιμου ομολόγου σε κάθε κόμβο.



Στην αρχή βρίσκουμε τη τιμή της μετοχής σε κάθε κόμβο. Η αρχική τιμή της μετοχής είναι S= \$50. Αν η μετοχή κινηθεί ανοδικά την πρώτη περίοδο, η τιμή της θα είναι $S_B = u \times S$ = 1.1519 × 50 = \$57.60 (κόμβος B). Αν στη δεύτερη περίοδο κινηθεί πάλι ανοδικά τότε η τιμή θα είναι $S_\Delta = u \times S_B = \$\,66.34$

Αν η τιμή της μετοχής κινηθεί καθοδικά την πρώτη περίοδο, τότε θα έχουμε $S_\Gamma = d \times S$ = \$ 43.41 (κόμβος Γ). Αν τη δεύτερη περίοδο κινηθεί πάλι καθοδικά, τότε θα έχουμε $S_Z = d \times S_\Gamma$ = \$ 37.68. Αν τη τρίτη περίοδο κινηθεί ανοδικά τότε η τιμή της μετοχής θα είναι $S_I = u \times S_Z$ = \$ 43.41. Με την ίδια διαδικασία συμπληρώνουμε όλους τους κόμβους με τις τιμές των μετοχών. Στην περίπτωση χρεοκοπίας η τιμή της μετοχής πέφτει στο 0.

Στη συνέχεια, για να βρούμε τη τιμή του μετατρέψιμου ομολόγου σήμερα ακολουθούμε τα εξής βήματα.

Ξεκινάμε από τους τελευταίους κόμβους. Στον κόμβο Η είναι πιο αρεστό να γίνει η μετατροπή. Ο έλεγχος γίνεται πάντα με την εξίσωση (10). Στους τελευταίους κόμβους έχουμε Q_1= ονομαστική αξία του ομολόγου= \$100. Επομένως για τον κόμβο Η θα έχουμε:

Η: $max[min(100,\ 113),\ 2 \times 76.42] = 152.84$

Ομοίως για τον κόμβο Θ είναι πιο αρεστή η μετατροπή.

Θ: $max[min(100,113),\ 2 \times 57.60\ ] = 115.20$

Ι: $max[min(\ 100, 113),\ 2 \times 43.41\ ] = 100$

Κ: $max[min(100,113)\ ,\ 2 \times 32.71] = 100$

Για τους κόμβους Ι και Κ επομένως δεν πραγματοποιείται μετατροπή του ομολόγου σε μετοχές.

Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας αποτίμησης ελέγχουμε την αξία των κόμβων της προηγούμενης περιόδου. Το Q_1 σε αυτή την περίοδο θα είναι διαφορετικό για το κάθε κόμβο. Το Q_1 ενός κόμβου υπολογίζεται ως η παρούσα αξία του σταθμισμένου μέσου όρου των 3 τιμών του ομολόγου στους κόμβους της επόμενης περιόδου που συνδέονται με τον κόμβο αυτό, με σταθμά τις αντίστοιχες πιθανότητες p_u , p_d , $p_{default}$.

Για τον κόμβο Δ επομένως θα έχω:

$Q_1 = (\,p_u \times 152.84 + p_d \times 115.20 + p_{default} \times 40\,) \times e^{-r \times \Delta t}$

$Q_1 = (0.5167 \times 152.84 + 0.4808 \times 115.20 + 0.002497 \times 40) \times e^{-0.05 \times 0.25}$
$Q_1 = 132.79$

Συνεπώς έχουμε:

Δ: $max[min(132.79, 113)\,,\ 2 \times 66.34] =$
$max[min(132.79, 113)\,,\ 132.68] = max[113,\ 132.68] = 132.68$

Δηλαδή στον κόμβο Δ η εκδότρια εταιρία ανακαλεί το ομόλογο και είναι προτιμότερο για τον επενδυτή να μετατρέψει το ομόλογο σε μετοχές παρά να λάβει την αξία ανάκλησης.

Για τον κόμβο Ε:
$Q_1 = (0.5167 \times 115.20 + 0.4808 \times 100 + 0.002497 \times 40) \times e^{-0.05 \times 0.25} =$
$Q_1 = 106.36$

Ε: $max[min(106.36, 113)\,,\ 100] = 106.36$

Για τον κόμβο Β ομοίως θα έχουμε:
$Q_1 = (0.5167 \times 132.68 + 0.4808 \times 106.36 + 0.002497 \times 40) \times e^{-0.05 \times 0.25} = 118.31$

Β: $max[min(118.31, 113)\,,\ 115.2] = 115.2$

Ομοίως συμπληρώνουμε όλους τους κόμβους και την αξία του κόμβου Α που είναι και η αξία του μετατρέψιμου ομολόγου σήμερα, δηλαδή η αξία που ψάχνουμε τελικά.

Για τον κόμβο Α:
$Q_1 = (0.5167 \times 115.20 + 0.4808 \times 101.2 + 0.002497 \times 40) \times e^{-0.05 \times 0.25} = 106.94$

Α: $max[min(106.94, 113)\,,\ 100] = 106.94$

Συνεπώς η αξία του μετατρέψιμου ομολόγου στο παράδειγμά μας είναι \$106.94.

2.2.2. Ένταση χρεοκοπίας ουδέτερου κινδύνου, λ

Ένα χαρακτηριστικό των πιστωτικών αγορών είναι η διαφορά μεταξύ των πιθανοτήτων χρεοκοπίας οι οποίες αντλούνται από ιστορικά δεδομένα (real-world default probabilities) και αυτών που υπολογίζονται από τις τιμές των ομολόγων (risk –neutral default probabilities). Η διαφορά τους υπόκειται στο λόγο της ανάλυσης του πιστωτικού κινδύνου. Κατά τη διενέργεια ανάλυσης σεναρίων για τον υπολογισμό των πιθανών μελλοντικών ζημιών εξαιτίας χρεοκοπίας χρησιμοποιείται το real world. Όταν αποτιμούμε πιστωτικά παράγωγα ή εκτιμούμε την επιρροή του κινδύνου χρεοκοπίας στην αποτίμηση χρεογράφων χρησιμοποιούνται οι πιθανότητες χρεοκοπίας ουδέτερου κινδύνου (risk-neutral). Αυτό συμβαίνει διότι η ανάλυση υπολογίζει την παρούσα αξία των αναμενόμενων χρηματικών ροών και σχεδόν πάντα εμπεριέχει τη χρήση της αξιολόγησης ουδέτερου κινδύνου. Στη διαδικασία τιμολόγησης των μετατρέψιμων ομολόγων επομένως χρησιμοποιούμε τις risk- neutral default probabilities.

Ως ένταση χρεοκοπίας (συχνά καλείται και hazard rate) ορίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας ανά έτος υπό την προϋπόθεση ότι δεν έχει υπάρξει χρεοκοπία νωρίτερα. Μια προσέγγιση που χρησιμοποιείται για την εύρεση της έντασης χρεοκοπίας ουδετέρου κινδύνου είναι:

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{y-r}{1-R}} \qquad (11)$$

όπου:

y: η απόδοση του ομολόγου

r: η απόδοση ενός ομολόγου μηδενικού κινδύνου το οποίο δίνει τις ίδιες χρηματικές ροές με το ομόλογο

R: το επιτόκιο ανάκτησης (recovery rate)

Κεφάλαιο 3

3. ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΜΕΤΑΤΡΕΨΙΜΩΝ ΟΜΟΛΟΓΩΝ ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΧΡΟΝΟ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε το μοντέλο του Ingersoll (1977a) για την αποτίμηση των μετατρέψιμων ομολόγων. Το μοντέλο του βασίστηκε στο άρθρο των Black-Scholes (1973), το οποίο παρουσιάζεται πρώτο.

3.1. Μοντέλο Black-Scholes

Οι Fisher Black, Myron Scholes (1973) και Robert Merton (1973) έφεραν μια νέα εποχή επανάστασης στην αποτίμηση των δικαιωμάτων. Το υπόδειγμα που εισήγαγαν ονομάστηκε ‘μοντέλο Black-Scholes’ και έγινε γρήγορα αποδεκτό και δημοφιλές στο χώρο της αποτίμησης των παραγώγων και είχε μεγάλη επιρροή στο τρόπο που οι έμποροι τιμολογούσαν και αντιστάθμιζαν πλέον τα δικαιώματα. Η σπουδαιότητα του μοντέλου αναγνωρίστηκε και επίσημα το 1977, όταν οι Robert Merton και Myron Scholes βραβεύτηκαν με το βραβείο Νόμπελ Οικονομικών. Δυστυχώς ο Fisher Black απεβίωσε το 1995.

Το μοντέλο των Black-Scholes αποτελεί μια από τις πιο διάσημες μερικές διαφορικές εξισώσεις στο χώρο των Οικονομικών. Οι υποθέσεις που χρησιμοποίησαν για να παραχθεί αυτή η μερική διαφορική εξίσωση είναι οι ακόλουθες:

Υποθέσεις

i. Η μετοχή ακολουθεί Γεωμετρική Κίνηση Brown με μέσο, μ και τυπική απόκλιση , σ, σταθερά
ii. Επιτρέπεται η ανοικτή θέση πώλησης (short selling)
iii. $\nexists$ κόστη συναλλαγών και φόροι
iv. $\nexists$ μερίσματα μέχρι τη λήξη του παραγώγου
v. $\nexists$ ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (arbitrage)
vi. Η συναλλαγή του χρεογράφου είναι συνεχής
vii. Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου , *r*, είναι σταθερό και ίδιο για όλες τις ληκτότητες

Συμπεριφορά της τιμής της μετοχής

Υποθέτουμε ότι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής ανά μονάδα χρόνου είναι σταθερή και ίση με μ:

$$\frac{1}{\Delta\tau} E\left[\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}\right] = \mu$$

Αν η μεταβλητότητα της μετοχής είναι πάντα 0, τότε

$$\Delta S(t) = \mu S(t) \Delta\tau$$

Όμως για $\Delta\tau \rightarrow 0$

$$dS = \mu S dt$$

Η λύση της οποίας είναι

$$S(t) = S(0) e^{\mu t}$$

Στην πραγματικότητα όμως μια μετοχή εμπεριέχει μεταβλητότητα. Έτσι περιλαμβάνοντας τη μεταβλητότητα θα έχουμε

$$\frac{\Delta \boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})} = \boldsymbol{\mu}\Delta\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{t}}\sqrt{\Delta\boldsymbol{\tau}} \qquad \textbf{(12)}$$

Όπου $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο υποθέτει ότι η διακύμανση της μετοχής ανά μονάδα χρόνου είναι σταθερή και ίση με σ^2:

$$\frac{1}{\Delta\tau} Var\left[\frac{S(t+\Delta\tau) - S(t)}{S(t)}\right] = \sigma^2$$

το σ καλείται μεταβλητότητα της υποκείμενης μετοχής.

Η εξίσωση (12) γράφεται :

$$\Delta S(t) = \mu S(t)\Delta\tau + \sigma S(t)\varepsilon_t\sqrt{\Delta\tau}$$

Για $\Delta\tau \to 0$

$$\boldsymbol{dS}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\mu S}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\sigma S}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dz}(\boldsymbol{t}) \qquad \textbf{(13)}$$

Η εξίσωση αυτή είναι το μοντέλο που χρησιμοποιείται ευρέως για τη συμπεριφορά της τιμής της μετοχής και καλείται Γεωμετρική Κίνηση Brown. Για να επιλύσουμε την εξίσωση χρησιμοποιούμε το λήμμα του Ito και έχουμε ότι :

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{e}^{\left(\boldsymbol{\mu}-\frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{2}\right)\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{t})} \qquad \textbf{(14)}$$

Η απόδοση της μετοχής ακολουθεί κανονική κατανομή

$$\frac{\Delta \boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S}} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}\Delta\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\sigma}\sqrt{\Delta\boldsymbol{t}})$$

Από την εξίσωση (14) έχω ότι :

$$\boldsymbol{ln}\, \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{t}} \sim \boldsymbol{N}\left[\boldsymbol{ln}\, \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{0}} + \left(\boldsymbol{\mu} - \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{2}\right)\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\sigma}\sqrt{\Delta\boldsymbol{t}}\right] \qquad \textbf{(15)}$$

Η εξίσωση (15) δείχνει ότι η $\ln S_t$ ακολουθεί κανονική κατανομή , άρα η S_t θα ακολουθεί log-normal κατανομή.

Έτσι από την (15) έχουμε ότι η αναμενόμενη τιμή της μετοχής θα δίνεται από το τύπο

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu t}$$

και η διακύμανση της τιμής της μετοχής θα δίνεται από το τύπο:

$$Var(S_t) = {S_0}^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$$

<u>Απόδειξη της μερικής διαφορικής Black-Scholes</u>

Κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο με Δ(t) μετοχές και B(t) χρήματα τα οποία επενδύω στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Αυτό το χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να είναι ίσο με C(t), $\forall t$, άρα

$$\Delta(t)S(t) + B(t) = C(S(t), t)$$

$\forall t < T$ υποθέτουμε ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί τη φόρμουλα της εξίσωσης (13), που είδαμε πιο πάνω

$$dS(t) = \mu S(t)d(t) + \sigma S(t)dz(t)$$

και

$$dB(t) = rB(t)dt$$

Οι αλλαγές του χαρτοφυλακίου για πολύ μικρό χρονικό διάστημα θα είναι:

$$\Delta(t)dS(t) + rB(t)d(t) = dC(S(t), t)$$

Με τη βοήθεια του Λήμμα του Ito βρίσκω τις δυναμικές του $C(S(t), t)$

$$dC(S(t), t) = \frac{\partial C}{\partial S}[\mu S(t)dt + \sigma S(t)dz(t)] + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2(t)\right)dt$$

$$\Delta(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dS}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{rB}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t}) = \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \boldsymbol{S}}\boldsymbol{dS}(\boldsymbol{t}) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \boldsymbol{t}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{C}}{\partial \boldsymbol{S}^2}\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{S}^2(\boldsymbol{t})\right)\boldsymbol{dt} \tag{16}$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\Delta(t) = \frac{\partial C}{\partial S} \qquad \text{και} \qquad B(t) = C(t) - \frac{\partial C}{\partial S}S(t)$$

Άρα από την (16) έχουμε ότι

$$\boldsymbol{rC}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{rS}(\boldsymbol{t})\frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \boldsymbol{S}} + \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \boldsymbol{t}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{C}}{\partial \boldsymbol{S}^2}\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{S}^2(\boldsymbol{t}) \tag{17}$$

Αυτή είναι η περίφημη μερική διαφορική εξίσωση (PDE) των Black-Scholes για τις τιμές ενός παραγώγου. Η εξίσωση αυτή είναι ανεξάρτητη από τις προτιμήσεις ρίσκου, αφού δεν περιέχει τον όρο της αναμενόμενης απόδοσης, μ.

Η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος με τιμή εξάσκησης K, δίνεται από το τύπο:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{N}(\boldsymbol{d_1}) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{t})}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{d_2}) \tag{18}$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln(S(t)/K) + \ (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S(t)/K) + \ (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

Και όπου N(x) είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας τυπικής κανονικής κατανομής, δηλαδή συμβολίζει την πιθανότητα ότι μια μεταβλητή με τυπική κανονική κατανομή N(0,1) θα είναι μικρότερη του x.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Wiener Process

Μια μεταβλητή z ακολουθεί Wiener Process αν ικανοποιεί τις ακόλουθες προϋποθέσεις

- Η αλλαγή Δz σε μικρό χρονικό διάστημα Δt είναι
$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \ ,$$
όπου το ε μια μεταβλητή που ακολουθεί τη τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0,1)
Επομένως επειδή
$$\varepsilon \sim \mathrm{N}(0,1)$$
τότε
$$\varepsilon\sqrt{\Delta\tau} \sim N(0, \Delta\tau)$$
$$\Delta z \sim N(0, \Delta\tau)$$

- Οι τιμές των Δz για δύο διαφορετικές μικρές αποστάσεις στο χρόνο, Δt, είναι ανεξάρτητες

Λήμμα του Ito (1951)

Υποθέτουμε ότι η αξία μιας μεταβλητής x ακολουθεί τη διαδικασία του Ito

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

Όπου dz είναι η διαδικασία Wiener και τα a και b είναι συναρτήσεις του x και t. Το λήμμα του Ito δείχνει ότι μια συνάρτηση G, εφαρμόζοντας τη σειρά Taylor, ακολουθεί την ακόλουθη διαδικασία

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

3.2. Μοντέλο Αποτίμησης Μετατρέψιμων Ομολόγων Ingersoll

Ο Ingersoll (1977a) ήταν ο πρώτος που τιμολόγησε τα μετατρέψιμα ομόλογα με τη βοήθεια της βιβλιογραφίας των Black-Scholes (1973). Στο άρθρο του ο Ingersoll (1977a) αναπτύσσει επιχειρήματα κερδοσκοπίας για να καταλήξει σε διάφορα συμπεράσματα, λαμβάνοντας υπόψη ταυτόχρονα τη βέλτιστη στρατηγική μετατροπής για τους ομολογιούχους, καθώς και τη βέλτιστη στρατηγική ανάκλησης για την εκδότρια επιχείρηση. Επιπρόσθετα, παράγει αναλυτικές λύσεις αποτίμησης για τα μετατρέψιμα ομόλογα για ένα εύρος ειδικών περιπτώσεων. Ο Ingersoll επικεντρώνεται στην παραγωγή κλειστού τύπου λύσεων για τη τιμολόγηση συγκεκριμένων τύπων μετατρέψιμων ομολόγων.

3.2.1. Υποθέσεις και περιορισμοί του μοντέλου

Οι υποθέσεις που χρησιμοποίησε για να καταλήξει στο μοντέλο του χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία είναι οι συμπεριφορικές υποθέσεις, οι οποίες λαμβάνουν υπόψη τις πράξεις, δηλαδή πώς συμπεριφέρονται γενικά ο επενδυτής και η διοίκηση της επιχείρησης. Η δεύτερη κατηγορία είναι οι γενικές υποθέσεις για την αγορά και η τρίτη κατηγορία είναι οι ειδικές υποθέσεις για την αγορά.

Οι Συμπεριφορικές Υποθέσεις είναι:

I. Οι επενδυτές προτιμούν περισσότερο πλούτο από ότι λιγότερο
II. Η διοίκηση της εταιρίας παίρνει αποφάσεις με σκοπό τη μεγιστοποίηση του πλούτου των μετόχων σε όλες τις χρονικές στιγμές

Οι Γενικές Υποθέσεις για την Αγορά είναι:

III. Οι αγορές είναι τέλειες, δηλαδή δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών, δεν υπάρχουν φόροι και η πρόσβαση στις πληροφορίες είναι ίδια για όλους τους επενδυτές
IV. Δεν γίνονται πληρωμές μερισμάτων
V. Οι όροι μετατροπής των μετατρέψιμων ομολόγων είναι σταθεροί και δεν αλλάζουν στο χρόνο
VI. Δεν υπάρχουν εταιρικοί φόροι και ισχύει η Πρόταση Ι από το θεώρημα των Modigliani-Miller

VII. Όταν γίνει ανάκληση του μετατρέψιμου ομολόγου από την εκδότρια εταιρία, ο ομολογιούχος είναι υποχρεωμένος να παραδώσει κατευθείαν τις απαιτήσεις εξαργύρωσης ή μετατροπής. Δηλαδή, δεν υπάρχει κάποια περίοδος για να πραγματοποιηθεί η παράδοση αυτή (no call notice)

VIII. Το επιτόκιο είναι σταθερό και μη στοχαστικό

Οι Ειδικές Υποθέσεις για την Αγορά είναι:

IX. Η συναλλαγή λαμβάνει χώρα συνεχόμενα και δεν υπάρχουν περιορισμοί για το δανεισμό ή για τις ανοιχτές θέσεις πώλησης

X. Η αγοραία αξία της εταιρίας ακολουθεί Γεωμετρική Κίνηση Brown με διακύμανση ανά μονάδα χρόνου ανάλογη της ρίζας της αγοραίας αξίας της εταιρίας

XI. Οι εκδόσεις των μετατρέψιμων ομολογιών αποτελούν τη μοναδική κύρια έκδοση της εταιρίας. Η μόνη άλλη απαίτηση είναι η μετοχή

Στη συνέχεια, ο Ingersoll κατασκευάζει κάποιους προκαταρτικούς περιορισμούς αποτίμησης. Το ανώτατο όριο για μια έκδοση μετατρέψιμων ομολόγων είναι η αξία της επιχείρησης, V. Για να μην υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage, η έκδοση πρέπει να αξίζει τουλάχιστον όσο η αξία μετατροπής της, γV. Επομένως:

$$0 \leq \gamma V \leq G(V, \tau\,; B, C, \gamma) \leq V$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\gamma V} \leq \boldsymbol{H}[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\tau};\ \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{C}, \boldsymbol{\gamma}] \leq \boldsymbol{V} \tag{19}$$

όπου:

γ: συντελεστής αραίωσης (dilution factor). Υποδηλώνει το ποσοστό των μετοχών που θα διακρατήσουν οι ομολογιούχοι αν γίνει μετατροπή των ομολόγων. Αν υπάρχουν N μετοχές που εκκρεμούν και n είναι ο αριθμός των μετοχών που ανταλλάσσονται για τα μετατρέψιμα ομόλογα στο σύνολο, τότε έχουμε ότι:

$$\gamma \equiv \frac{n}{n + N}$$

V: η αγοραία αξία της επιχείρησης

γV: η αξία μετατροπής του μετατρέψιμου ομολόγου (conversion value)

$G(V, \tau\,; B, C, \gamma)$: η συνολική αξία μιας έκδοσης μη-ανακαλέσιμων μετατρέψιμων ομολόγων με λήξη τ, με balloon payment, B και πληρωμές μερισμάτων και κουπονιών C.

$H[V, \tau;\ K(\tau), C, \gamma]$: η συνολική αξία μιας έκδοσης ανακαλέσιμων μετατρέψιμων ομολόγων με τα ίδια χαρακτηριστικά του $G(.)$ και είναι ανακαλέσιμο από την εταιρία για το ποσό $K(\tau)$, δηλαδή τη τιμή ανάκλησης.

Σε μια ανάκληση, ο κάτοχος των ανακαλέσιμων μετατρέψιμων ομολόγων θα πρέπει να διαλέξει είτε να κάνει μετατροπή και να λάβει γV, είτε την εξαγορά για το ποσό των $K(\tau)$. Επομένως:

$$\boldsymbol{H[V, \tau;\ K(\tau), C, \gamma] = max[K(\tau), \gamma V]} \qquad \textbf{(20)}$$

Στη λήξη των ομολόγων, η συνάρτηση εσόδων της έκδοσης θα είναι:

$$\boldsymbol{H[V, 0;\ K(0) = B, C, \gamma] = G(V, 0\,; B, C, \gamma) = min[V, max(B, \gamma V]} \qquad \textbf{(21)}$$

Η αξία της έκδοσης μετατρέψιμων ομολόγων πρέπει να είναι μη-φθίνουσα σε σχέση με το γ, αφού ένα μετατρέψιμο ομόλογο δε μπορεί να αξίζει λιγότερο από ένα μετατρέψιμο ομόλογο που ανταλλάσσεται για λιγότερες μετοχές. Έτσι:

$$F(V, \tau\,; B, C) \le G(V, \tau\,; B, C, \gamma_1) \le G(V, \tau\,; B, C, \gamma_2) \quad , 0 < \gamma_1 < \gamma_2$$

$$\boldsymbol{H[V, \tau;\ K(\tau), C, \gamma_1] \le H[V, \tau;\ K(\tau), C, \gamma_2]} \quad , \boldsymbol{\gamma_1 < \gamma_2} \qquad \textbf{(22)}$$

Επιπλέον, η αξία μιας έκδοσης ανακαλέσιμων μετατρέψιμων ομολόγων, $\mathrm{H}(.)$, πρέπει να είναι μη-φθίνουσα σε σχέση με τη τιμή ανάκλησης $K(\tau)$.

$$\boldsymbol{H[V, \tau;\ K_1(\tau), C, \gamma] \le\ H[V, \tau;\ K_2(\tau), C, \gamma] \le\ G[V, \tau;\ B, C, \gamma]} \qquad \textbf{(23)}$$

με $K_1(\tau) \leq K_2(\tau)$ **,**$\forall\boldsymbol{\tau}$ και $K_1(0) = K_2(0) = B$

Με τους παραπάνω περιορισμούς που δημιούργησε ο Ingersoll, κατέληξε στα παρακάτω θεωρήματα που αποτελούν τη δομή για τη βέλτιστη στρατηγική μετατροπής για τους επενδυτές που είναι κάτοχοι μετατρέψιμων ομολογιών.

Θεώρημα 1. Αν ισχύουν οι υποθέσεις ότι οι αγορές είναι τέλειες, δεν υπάρχουν μερίσματα και οι όροι μετατροπής παραμένουν σταθεροί (υποθέσεις III, IV, V), τότε δε θα γίνει ποτέ μετατροπή ενός μετατρέψιμου χρεογράφου πριν τη λήξη του

Θεώρημα 2. Αν ισχύουν οι υποθέσεις ότι οι αγορές είναι τέλειες, δεν υπάρχουν μερίσματα και οι όροι μετατροπής παραμένουν σταθεροί (υποθέσεις III, IV, V), τότε δε θα γίνει ποτέ μετατροπή ενός ανακαλέσιμου μετατρέψιμου ομολόγου εκτός από τη μέρα λήξης του, ή αν πραγματοποιηθεί ανάκληση

Θεώρημα 3. Αν ισχύουν οι υποθέσεις ότι οι αγορές είναι τέλειες, ισχύει το θεώρημα των Modigliani Miller και δεν υπάρχει call notice (υποθέσεις III, VI, VII), η βέλτιστη πολιτική ανάκλησης $\overline{V}(\tau)$ για ένα μετατρέψιμο ομόλογο, ικανοποιεί τη σχέση $\overline{V}(\tau) \leq K(\tau)/\gamma$ για όλα τα τ και όπου $K(\tau)$ είναι η τιμή ανάκλησης συν τους δεδουλεμένους τόκους

Θεώρημα 4. Η βέλτιστη στρατηγική ανάκλησης για ένα μετατρέψιμο ομόλογο εμπεριέχει την ανάκληση όταν η αξία της εταιρίας προσεγγίζει τη τιμή
$V = \overline{V}(\tau) = K(\tau)/\gamma$

Ο Merton (1974) απέδειξε ότι η αξία οποιασδήποτε ενδεχόμενης απαίτησης η οποία μπορεί να γραφτεί ως συνάρτηση μόνο της αγοραίας αξίας και της ληκτότητας, $f(V,\tau)$, θα ικανοποιεί την παρακάτω βασική μερική διαφορική εξίσωση

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 f_{vv} + (rV - C)f_v - rf - f_\tau + c = 0} \qquad \textbf{(24)}$$

C: οι πληρωμές για όλες τις απαιτήσεις της εταιρίας
c: ποσοστό των εκταμιεύσεων που πληρώνονται για τις απαιτήσεις
σ^2: η διακύμανση της απόδοσης

Η εξίσωση αυτή είναι μια επέκταση της κλασικής εξίσωσης των Black-Scholes (1973). Η αξία των μετατρέψιμων ομολόγων θα εξαρτάται μόνο επάνω σε δύο συνοριακές συνθήκες, μία αρχική συνθήκη και η μορφή της συνάρτησης των δύο ροών πληρωμών C και c.

3.2.2. Μη ανακαλέσιμα μετατρέψιμα ομόλογα

Η συνάρτηση αποτίμησης για ένα μη-ανακαλέσιμο προεξοφλητικό ομόλογο, $G(V,\tau\,;B,0,\gamma)$, θα ικανοποιεί την παραπάνω διαφορική εξίσωση. Στην περίπτωση αυτή, C=c=0, αφού το ομόλογο είναι προεξοφλητικό και δεν πληρώνονται μερίσματα για τη μετοχή. Έτσι η τροποποιημένη εξίσωση για τα ομόλογα αυτά θα είναι

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 G_{vv} + rVG_v - rG - G_\tau = 0} \tag{25}$$

με $G(0,\tau\,) = 0$, $G(V,\tau\,) \leq V$ και $G(V,0\,) = max[\gamma V, min(V,B)]$

ο Ingersoll τελικά καταλήγει ότι η συνάρτηση αποτίμησης για το μη-ανακαλέσιμο μετατρέψιμο ομόλογο είναι

$$\boldsymbol{G(V,\tau\,;B,0,\gamma) = F(V,\tau\,;B,0) + W(\gamma V,\tau\,;B)} \tag{26}$$

Η εξίσωση αυτή μας δείχνει πως η αξία ενός μη-ανακαλέσιμου μετατρέψιμου ομολόγου είναι ίση με την αξία ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από ένα κανονικό προεξοφλητικό ομόλογο και ένα warrant.

3.2.3. Ανακαλέσιμα μετατρέψιμα ομόλογα

Καταρχήν, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση της τιμής ανάκλησης για το ανακαλέσιμο μετατρέψιμο ομόλογο σε έκπτωση είναι η εκθετική συνάρτηση, $K(\tau) = Be^{-\rho\tau}$, όπου ρ είναι ο ρυθμός μεταβολής της τιμής ανάκλησης. Επιπλέον, η βέλτιστη στρατηγική ανάκλησης είναι να πραγματοποιηθεί ανάκληση όταν η αξία της εταιρίας προσεγγίσει τη τιμή $\overline{V}(\tau) = K(\tau)/\gamma$.

Ένα ανακαλέσιμο μετατρέψιμο ομόλογο με τα παραπάνω χαρακτηριστικά θα ικανοποιεί τη βασική εξίσωση. Όπως και με το μη-ανακαλέσιμο μετατρέψιμο ομόλογο, οι όροι πληρωμής είναι 0, δηλαδή $C = c = 0$. Η συνάρτηση αποτίμησης του ανακαλέσιμου μετατρέψιμου ομολόγου $H[V, \tau;\ K(\tau), 0, \gamma]$, θα είναι λύση της εξίσωσης

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 H_{vv} + rVH_v - rH - H_\tau = 0}, \qquad \boldsymbol{0 \leq V \leq \overline{V}(\tau)} \qquad \textbf{(27)}$$

με $H(0, \tau) = 0$, $H\lfloor \overline{V}(\tau), \tau \rfloor = K(\tau)$ και $H(V, 0) = \min(V, B)$.

Ο Ingersoll (1977a) καταλήγει ότι η λύση για τα ανακαλέσιμα μετατρέψιμα ομόλογα είναι:

$$\boldsymbol{H(V, \tau\,; B, 0, \gamma) = F(V, \tau\,; B, 0) + W(\gamma V, \tau\,; B) + Z^{2(r-\rho)/\sigma^2}\left[F(\gamma V', \tau; B', 0) - F\left(\gamma V', \tau; \frac{B'}{\gamma}, 0\right)\right]} \qquad \textbf{(28)}$$

όπου

$$B' \equiv Be^{(r-\rho)\tau}$$

$$V' \equiv Ve^{(\rho-r)\tau}$$

$$Z \equiv \frac{\overline{V}(\tau)}{V} = \frac{K(\tau)}{\gamma V}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου ο ρυθμός ανάπτυξης της τιμής ανάκλησης ισούται με το επιτόκιο, δηλαδή $\rho = r$, τότε η τιμή του ομολόγου θα είναι:

$$H(V, \tau) = F(V, \tau; B, 0) + W\left(\gamma V, \tau; \frac{B}{\gamma}\right)$$

Κεφάλαιο 4

4. ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Η εμπειρική μελέτη θα επικεντρωθεί στην ικανότητα του Διωνυμικού και του Τριωνυμικού μοντέλου να περιγράψουν τη τιμή των μετατρέψιμων ομολογιών. Για το μοντέλο του Ingersoll λόγω δυσκολίας, όπως αναφέραμε και πιο πάνω, παρατήρησης της αξίας της εταιρείας κάθε χρονική στιγμή, δε θα πραγματοποιηθεί εμπειρική μελέτη.

Στην αρχή περιγράφεται το διωνυμικό μοντέλο. Το μοντέλο αυτό αναλύεται από το Justin London (2005) στο βιβλίο του ‘Financial Modeling in C++’. Έπειτα, ακολουθεί αποτίμηση ενός ομολόγου με τη συγκεκριμένη μέθοδο. Στη συνέχεια σειρά έχει το Τριωνυμικό μοντέλο του Hull. Αρχικά θα περιγράψουμε τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε και στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους σ και λ και θα υπολογίσουμε τη θεωρητική τιμή των ομολόγων με αυτά και θα τα συγκρίνουμε με τις τιμές τις αγορές μέσα στο δείγμα και εκτός δείγματος. Τέλος, πραγματοποιείται μια αριθμητική ανάλυση ως προς την εξάρτηση της τιμής ενός μετατρέψιμου ομολόγου από τις παραμέτρους που εκτιμήθηκαν.

4.1. Διωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης Μετατρέψιμων Ομολογιών

Σε αυτή την υποενότητα θα εισάγουμε το διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης μετατρέψιμων ομολόγων από το ‘Financial Modeling in C++’ και θα πραγματοποιήσουμε την αποτίμηση για ένα πραγματικό ομόλογο που διαπραγματεύεται στην αγορά.

4.1.1. Περιγραφή του μοντέλου

Τα μετατρέψιμα ομόλογα μπορούν να αποτιμηθούν με τη βοήθεια ενός διωνυμικού δέντρου n περιόδων παρόμοιο με αυτό των Cox-Ross-Rubinstein που περιγράψαμε στο 2º κεφάλαιο.
Υποθέτουμε ότι η τιμή της υποκείμενης μετοχής ικανοποιεί την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$dS = \big(r(t) - q(t)\big)Sdt + \sigma(t)Sdz$$

Όπου r(t) είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου τη χρονική στιγμή t, q(t) είναι η μερισματική απόδοση τη χρονική στιγμή t, σ(t) είναι η μεταβλητότητα και dz είναι η κίνηση Brown που αντιπροσωπεύει την αβεβαιότητα στην απόδοση της μετοχής για τη μικρή μεταβολή του χρόνου, dt.
Οι τύποι για τις ανοδικές και καθοδικές κινήσεις της μετοχής για μια δοσμένη αρχική τιμή της μετοχής S, είναι αντίστοιχα:

$$S_u = Su$$

όπου $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$

$$S_d = Sd$$

όπου $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$

Η αξία του μετατρέψιμου ομολόγου σε κάθε κόμβο θα είναι

$$\boldsymbol{V} = \mathbf{max}(\boldsymbol{NS}, (\mathbf{min}(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{C} + \boldsymbol{I})) \qquad \mathbf{(29)}$$

Όπου V είναι η αξία του μετατρέψιμου ομολόγου, N είναι ο δείκτης μετατροπής, S είναι η τιμή της μετοχής στον κόμβο, C είναι η τιμή ανάκλησης, H είναι το holding value στον κόμβο και I είναι οι τόκοι που έχουν πληρωθεί. Το holding value υπολογίζεται συναρτήσει των τιμών του μετατρέψιμου ομολόγου ,V_u, V_d μία περίοδο αργότερα ως

$$\boldsymbol{H} = \mathbf{0.5}\left(\frac{\boldsymbol{V_u}+\boldsymbol{I}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{y\delta t}} + \frac{\boldsymbol{V_d}+\boldsymbol{I}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{y\delta t}}\right) \qquad \mathbf{(30)}$$

και είναι το άθροισμα της παρούσας αξίας των κουπονιών που πληρώνονται στην επόμενη περίοδο συν την αναμενόμενη παρούσα αξία του ομολόγου στους δύο κόμβους.

Όπου y είναι το credit adjusted discount rate το οποίο για κάθε κόμβο ορίζεται ως

$$\boldsymbol{y = pr + (1 - p)d} \qquad \textbf{(31)}$$

Όπου p είναι η πιθανότητα μετατροπής, r είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και d είναι το risky rate που εμπεριέχει το credit spread.

Τα παρακάτω βήματα περιγράφουν τη διαδικασία κατασκευής του διωνυμικού δέντρου αποτίμησης μετατρέψιμων ομολόγων:

Βήμα 1: Κατασκευάζουμε ένα διωνυμικό δέντρο για τη τιμή της μετοχής που φτάνει μέχρι την ημερομηνία λήξης του μετατρέψιμου ομολόγου και υπολογίζουμε τη τιμή της μετοχής στον κάθε κόμβο.

Βήμα 2: Υπολογίζουμε το payoff του CB στη λήξη του, δηλαδή στους τελευταίους κόμβους. Αν η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη από το conversion price τότε το payoff υπολογίζεται ως το max(NS,H). Αν η τιμή της μετοχής είναι μικρότερη από το conversion price τότε το payoff θα είναι το H. To holding value, H, στη λήξη θεωρούμε πως ισούται με την ονομαστική αξία του ομολόγου συν τα κουπόνια που έχουν προστεθεί. Στη συνέχεια θέτουμε τη πιθανότητα μετατροπής p=1 στους κόμβους όπου γίνεται η μετατροπή και p=0 στους υπόλοιπους κόμβους.

Βήμα 3: Κινούμαστε από πίσω προς τα εμπρός στο δέντρο ένα χρονικό βήμα δt κάθε φορά. Σε κάθε κόμβο ορίζουμε την πιθανότητα μετατροπής ως $p = 0.5(p_u + p_d)$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το y σύμφωνα με την εξίσωση (31) και το H σύμφωνα με τη εξίσωση (30).

Βήμα 4: Υπολογίζουμε την πραγματική αξία του ομολόγου σε κάθε κόμβο. Αν η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη του conversion price τότε αποφασίζουμε με βάση την εξίσωση (29), αλλιώς παίρνουμε το min(H,C+I).

Το conversion price λειτουργεί ως strike price για το μετατρέψιμο ομόλογο.
Αν η τιμή της μετοχής, S>conversion price, τότε θα λέμε ότι το μετατρέψιμο ομόλογο είναι “In the money”. Ο ομολογιούχος στην ουσία θα εξασκήσει το δικαίωμα της μετατροπής.
Αν S<conversion price, τότε θα λέμε ότι το ομόλογο είναι “Out the money”. Ο ομολογιούχος δεν εξασκεί το δικαίωμα.

Αν S=conversion price, τότε λέμε ότι το ομόλογο είναι “At the money”. Ο ομολογιούχος είναι αδιάφορος για την εξάσκηση του δικαιώματος.

4.1.2. Δεδομένα μελέτης και εφαρμογή

.

Στις 28 Ιανουαρίου 2016, υποθέστε ότι θέλουμε να αποτιμήσουμε το ανακαλέσιμο ομόλογο FCRN 4.95 03/31/17 που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 2). Το ομόλογο είναι καναδικό και λήγει στις 31 Μαρτίου 2017 και με τη βοήθεια των βάσεων δεδομένων Bloomberg και Datastream θα συλλέξουμε και τα υπόλοιπα δεδομένα που χρειαζόμαστε για την τιμολόγησή του.

Εικόνα 2: Αποτίμηση μετατρέψιμων ομολόγων με τη λειτουργία του OVCV της Bloomberg

Ενεργοποιούμε τη λειτουργία της Bloomberg, **OVCV,** η οποία πραγματοποιεί την αποτίμηση μετατρέψιμων ομολογιών με τη διαδικασία Jump diffusion. Όπως φαίνεται στην εικόνα η αρχική τιμή της μετοχής στις 28 Ιανουαρίου 2016 είναι CAD18.34, η διακύμανση της μετοχής (90-day historical volatility) είναι 0.1567 και ο χρόνος μέχρι τη λήξη του ομολόγου είναι 14/12= 1.17 έτη. Το ομόλογο είναι ανακαλέσιμο για CAD100 μέχρι τη λήξη του (Εικόνα 3). Στη συνέχεια κατεβάζουμε τα risk-free rates του Καναδά από τη Datastream για τα τέσσερα βήματα που κάνουμε στο χρόνο.

Εικόνα 3: Call Schedule του μετατρέψιμου ομολόγου

.

Το μετατρέψιμο ομόλογο είναι BB- πιστοληπτικής ικανότητας και έχει credit spread 101 basis points.
Ο δείκτης μετατροπής είναι 42.1053 και η τιμή μετατροπής είναι CAD23.75, όπως φαίνεται και στην εικόνα. Η ονομαστική αξία του ομολόγου είναι CAD1000 και πληρώνει κουπόνι 4.95%.

Κατασκευάζουμε ένα διωνυμικό δέντρο με 4 χρονικά βήματα με δt= 1.17/4= 0.29.

Με τη βοήθεια του κώδικα που δημιουργήσαμε στη Matlab, CBbinomial3 (Κώδικας 1) και εισάγοντας τα παραπάνω δεδομένα βρίσκουμε ως θεωρητική τιμή CAD100.2941. Η τιμή αυτή είναι αρκετά κοντά στην πραγματική τιμή της αγοράς (Market price), που είναι CAD100.128, όπως φαίνεται και στην εικόνα. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η θεωρητική τιμή που μας έδωσε ο κώδικας είναι καλύτερη από τη θεωρητική τιμή του OVCV στη Bloomberg (Fair value) η οποία είναι CAD104.041 (Οι τιμές market price, fair value και call price εκφράζονται ως ποσοστά του par value).

4.2. Τριωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης Μετατρέψιμων Ομολογιών

Θα προσπαθήσουμε τώρα να κάνουμε αποτίμηση 4 μετατρέψιμων ομολόγων με το τριωνυμικό μοντέλο του Hull. Από δοκιμές που έγιναν σε πραγματικά μοντέλα καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι το μοντέλο που περιγράφει ο Hull (2005), είναι μια ειδική περίπτωση. Συνεπώς καταλήξαμε στην ενσωμάτωση και του περιορισμού του conversion price, όπως γίνεται και στο διωνυμικό μοντέλο που περιγράψαμε προηγουμένως. Για την αποτίμησή τους λοιπόν, κατασκευάσαμε τον Κώδικα 2, που είναι το μοντέλο του Hull προσαρμοσμένο με το conversion price. Στην αρχή παραθέτουμε τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε , στη συνέχεια πραγματοποιείται εκτίμηση παραμέτρων και τέλος μια ανάλυση της προβλεπτικής ικανότητας του μοντέλου.

4.2.1. Δεδομένα εμπειρικής μελέτης

Για την επίτευξη της ακόλουθης εμπειρικής μελέτης χρειαστήκαμε:

- δεδομένα για 4 Αμερικάνικα ανακαλέσιμα μετατρέψιμα ομόλογα μηδενικού κουπονιού, μη ενεργά (inactive) και με διαφορετικές ληκτότητες. Στον Πίνακα 2 παρέχουμε πιο αναλυτικά τα δεδομένα
- 101 συνεχόμενες ημερήσιες παρατηρήσεις της τιμής της κάθε μετατρέψιμης ομολογίας και της αντίστοιχης υποκείμενης μετοχής της. Για το 1^{ο} ομόλογο αυτό το χρονικό διάστημα είναι 23/12/05-12/05/06. Για το 2^{ο} ομόλογο 15/03/06-03/08/07, για το 3^{ο} ομόλογο 07/05/07-24/09/07 και για το 4^{ο} 30/06/09-17/11/09. Οι 91 πρώτες μέρες χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των παραμέτρων (in sample), ενώ οι επόμενες 10 χρησιμοποιούνται ως χρονικός ορίζοντας για την προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου (out of sample)

- τα αντίστοιχα ημερήσια risk-free rates, ως το yield του 10ετούς κυβερνητικού ομολόγου των Η.Π.Α

Πίνακας 2: Δεδομένα των μετατρέψιμων ομολόγων

ISIN	Ημερομηνία Εκδοσης	Ημερομηνία λήξης	Πιστοληπτική ικανότητα
US617446DK22	27-05-99	05-06-06	AA-
US38143UAM36	04-06-04	11-06-09	BBB+
US38143UAZ49	08-12-04	15-12-09	BBB+
US929903BB79	08-02-06	08-02-12	BBB+

4.2.2. Εκτίμηση παραμέτρων

Στο τριωνυμικό μοντέλο που μελετάμε η μεταβλητότητα, σ και η ένταση χρεοκοπίας ουδετέρου κινδύνου, λ είναι δύο μη παρατηρήσιμα μεγέθη. Συνεπώς, καταφεύγουμε στην εκτίμησή τους. Μια πολύ δημοφιλής διαδικασία εκτίμησης είναι ο αλγόριθμος Levenberg-Marquardt. Η διαδικασία αυτή υποθέτει ότι έχουμε ένα μοντέλο και ένα σετ παραμέτρων που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Ο αλγόριθμος βρίσκει τις τιμές των παραμέτρων για τις οποίες τα τετράγωνα των διαφορών από τις τιμές των μετατρέψιμων ομολόγων που προήλθαν από το μοντέλο (θεωρητικές τιμές) με τις τιμές των μετατρέψιμων ομολόγων της αγοράς (πραγματικές τιμές), να έχουν όσο το δυνατό μικρότερη τιμή.

$$\hat{\theta} = argmin \sum_{i=0}^{N} \left(f_i^{market} - f_i^{model}\right)^2$$

όπου $\hat{\theta}$ είναι το σετ των παραμέτρων (σ^*, λ^*) και N είναι ο αριθμός των ημερών που πραγματοποιήθηκαν οι παρατηρήσεις μέσα στο δείγμα (in sample). Στην περίπτωσή μας, N=91.
Ο αλγόριθμος Levenberg-Marquardt είναι μία μέθοδος που χρησιμοποιείται ευρέως για την επίλυση μη-γραμμικών least square curve fitting problems. Υποθέτουμε N παρατηρήσεις y_i, i=1,2,…,N και μια συνάρτηση g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με n παραμέτρους $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Υποθέτουμε $N \geq n$.

Στην περίπτωση μας οι y_i είναι οι τιμές των μετατρέψιμων ομολόγων που έχουμε συλλέξει από την αγορά.

Υπολογίζουμε τις τιμές του μοντέλου g(x)=$\widehat{y_i}$ και εν συνεχεία βρίσκουμε τα κατάλοιπα r_i(x)= $\widehat{y_1} - y_i$. Βρίσκουμε δηλαδή ένα διάνυσμα N διάστασης που περιέχει τα κατάλοιπα R=$(r_1,\ldots,r_N)^T$. Συνεπώς θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης που ακολουθεί

$$\min_{\mathrm{x}} \mathrm{f(x)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{r_i(x)}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{R(x)^T R(x)}$$

Για την επίλυση του παραπάνω curve fitting προβλήματος, οι Levenberg και Marquardt πρότειναν τη χρήση ενός επαναληπτικού αλγόριθμου που συνδυάζει δύο μεθόδους, τη Steepest descent μέθοδο και τη μέθοδο των Newton-Gauss.
O Levenberg (1944) με το άρθρο του προτείνει τον υπολογισμό μιας κατεύθυνσης αναζήτησης d_k ως λύση της προσαρμοσμένης εξίσωσης των Newton-Gauss

$$(R'(x^k)^T R'(x^k) + \lambda_k I)d_k = -\left(R'(x^k)^T R'(x^k)\right)$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας και λ_k είναι μία παράμετρος απόσβεσης με $\lambda_k > 0$. Ο πίνακας στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι θετικά ορισμένος. Ετσι η λύση d_k είναι βέβαιο ότι θα είναι μία δίκαιη κατεύθυνση για τη συνάρτηση f για όλες τις θετικές παραμέτρους απόσβεσης.

Για μικρά λ_k ο επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg–Marquardt προσομοιάζει την επαναληπτική μέθοδο Newton-Gauss και παρουσιάζει ένα ρυθμό τετραγωνικής σύγκλισης των x^k τιμών που επικρατούν και βρίσκονται κοντά στο x^*
Για επαναλήψεις μακριά από το βέλτιστο, η παράμετρος απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη και η κατεύθυνση αναζήτησης d_k είναι περίπου:

$$d_k \approx \frac{1}{\lambda_k} R'(x^k)^T R'(x^k)$$

Η τελευταία σχέση είναι ένα μικρό βήμα της μεθόδου Steepest Descent.

Η επιλογή της παραμέτρου απόσβεσης επηρεάζει άμεσα τη σταθερότητα της μεθόδου. Ως επιλογή παίρνουμε συνήθως

$$\lambda_0 = \tau \max_{\mathrm{i}}\{D_0(i,i)\}_{i=1,..,n}$$

όπου τ είναι η παράμετρος που σχετίζεται με την αρχική πρόβλεψη που κάνουμε για τις παραμέτρους.

Θα βρούμε τις τιμές της αγοράς των 4 μετατρέψιμων ομολόγων για τις 91 ημέρες και θα εφαρμόσουμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg-Marquardt ,με τη βοήθεια της προγραμματιστικής γλώσσας της MatLab με την εντολή lsqnonlin. Θα δώσουμε μία αρχική τιμή στις παραμέτρους, συνήθως αυτή που θεωρούμε εμείς ως πιο πιθανή και τρέχοντας τον κώδικα που κατασκευάσαμε, θα μας δώσει τον βέλτιστο συνδυασμό τιμών των παραμέτρων σ και λ που αν χρησιμοποιηθούν στο μοντέλο μας, θα μας δώσουν μια θεωρητική τιμή με το μικρότερο σφάλμα σε σχέση με την πραγματική τιμή του μετατρέψιμου ομολόγου. Στη συνέχεια θα ελέγξουμε την ορθότητα αυτών των τιμών και θα βρούμε την προβλεπτική ικανότητα του τριωνυμικού μοντέλου για χρονικό ορίζοντα 10 ημερών.

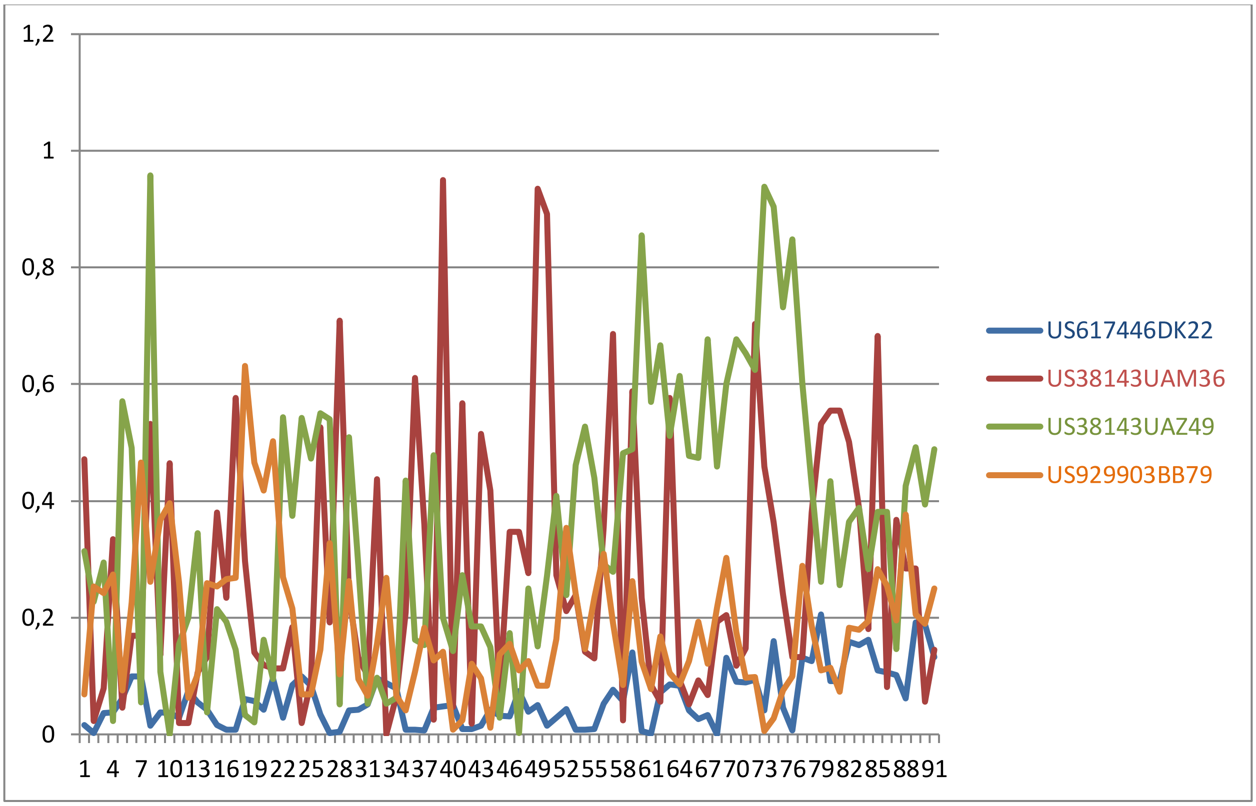
Τα αποτελέσματα από των κώδικα εκτίμησης (Κώδικας 3) για το κάθε ομόλογο βρίσκονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3)

Πίνακας 3: Αποτελέσματα σ, λ για κάθε ομόλογο με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt

Convertible Bond	σ^*	λ^*
US617446DK22	0.190894	0.006681
US38143UAM36	0.258269	0.004823
US38143UAZ49	0.252062	0.002353
US929903BB79	0.154398	0.001002

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις θεωρητικές τιμές των μετατρέψιμων ομολόγων με το τριωνυμικό μοντέλο και τα αντίστοιχα σ^* και λ^* που βρήκαμε με τη μέθοδο των Levenberg-Marquardt και βρίσκουμε το σχετικό σφάλμα των θεωρητικών τιμών με τις τιμές της αγοράς Στο σχήμα (Εικόνα 4) που ακολουθεί φαίνεται το σχετικό σφάλμα για κάθε ομόλογο για τις 91 ημέρες.

Εικόνα 4: Σχετικό σφάλμα των θεωρητικών τιμών με τις τιμές της αγοράς για κάθε ομόλογο για τις 91 ημέρες



όπου σχετικό σφάλμα:

$$rerror = 100 * \frac{|V^{market} - V^{model}|}{|V^{market}|}$$

Για το $1^{ο}$ ομόλογο, ο μέσος όρος των σχετικών σφαλμάτων για τις 91 ημέρες του δείγματος είναι 0.061386. Για το $2^{ο}$ ομόλογο ο μέσος όρος των σχετικών σφαλμάτων είναι 0.280606, για το $3^{ο}$ ομόλογο είναι 0.358595 και για το $4^{ο}$ ομόλογο είναι 0.186169.

Ο μέσος όρος των σχετικών σφαλμάτων και για τα τέσσερα ομόλογα είναι 0.221689 με ελάχιστο σφάλμα 0.00029 και μέγιστο 0.957202. Το μοντέλο μας δηλαδή προσομοιώνει αρκετά καλά την πραγματική τιμή των μετατρέψιμων ομολόγων.

Οι παράγοντες που παίζουν ρόλο για τη διαφορά στα σχετικά σφάλματα των τεσσάρων ομολόγων είναι η διαφορετική μεταβλητότητα των ομολόγων, καθώς και οι διαφορετικές χρονικές στιγμές των 91 ημερών του δείγματος που έχουμε επιλέξει.

4.2.3. Προβλεπτική ικανότητα του τριωνυμικού μοντέλου

Στην προηγούμενη υποενότητα παρατηρήσαμε την κίνηση των σχετικών σφαλμάτων των θεωρητικών τιμών με τις πραγματικές τιμές της αγοράς για το χρονικό διάστημα των 91 ημερών μέσα στο οποίο πραγματοποιήσαμε την εκτίμησή μας (In Sample error).

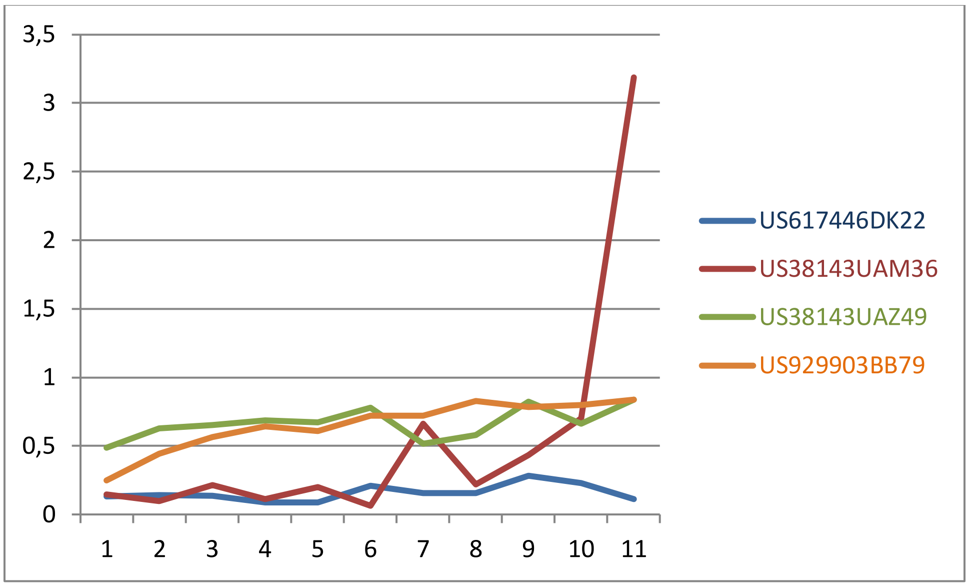
Το γεγονός ότι η θεωρητική τιμή είναι σχετικά κοντά με αυτή της αγοράς στο δείγμα μας ήταν κάτι το αναμενόμενο. Τώρα θα δούμε πώς κινείται αυτό το σφάλμα και εκτός του δείγματος (Out of sample error).

Θα πάρουμε τις επόμενες 10 ημέρες που βρίσκονται μετά το δείγμα μας ως χρονικό ορίζοντα για την πραγματοποίηση της προβλεπτικής ικανότητας του μοντέλου. T=0 είναι η $91^{η}$ ημέρα και συνεχίζουμε με T=1,2,…,10 για να παρατηρήσουμε την κίνηση της θεωρητικής τιμής που θα πάρουμε με τα σ και λ που έχουμε εκτιμήσει.

Στη συνέχεια θα βρούμε το σχετικό σφάλμα της θεωρητικής με τη τιμή της αγοράς για την περίοδο των 10 ημερών εκτός του δείγματος.

Υπολογίζουμε το σχετικό σφάλμα της θεωρητικής τιμής των μετατρέψιμων ομολόγων με τη τιμή της αγοράς Στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 5), φαίνεται η κίνηση αυτών των σχετικών σφαλμάτων για το χρονικό ορίζοντα 10 ημερών.

Εικόνα 5: : Σχετικό σφάλμα των θεωρητικών τιμών με τις τιμές της αγοράς για τις 10 ημέρες εκτός δείγματος



Έτσι, για τα ομόλογα ο μέσος όρος των σχετικών σφαλμάτων για τις 10 ημέρες εκτός του δείγματος έχει ως εξής:

Για το $1^{ο}$ ομόλογο ο μέσος όρος του σφάλματος είναι 0.159684. Για το $2^{ο}$ ομόλογο είναι 0.588534 , για το $3^{ο}$ ομόλογο είναι 0.683509 και για το $4^{ο}$ έχουμε 0.694788. Παρατηρούμε ότι τα σφάλματα εκτός δείγματος είναι περίπου διπλάσια, εκτός από το τελευταίο ομόλογο που είναι τριπλάσιο λόγω της ακραίας τιμής που πήρε τη δέκατη ημέρα.

Ο μέσος όρος σφαλμάτων και για τα τέσσερα ομόλογα είναι 0.531628 που είναι 2.4 φορές μεγαλύτερος από το μέσο όρο των σφαλμάτων εντός του δείγματος. Το ελάχιστο σφάλμα είναι 0.062969 και μέγιστο 3.18524.

Οι πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζουν συγκεντρωτικά τα παραπάνω αποτελέσματα:

Πίνακας 4: Μέσος όρος σχετικών σφαλμάτων για κάθε ομόλογο εντός και εκτός δείγματος

CB	M.O σχετικών σφαλμάτων (in sample)	M.O σχετικών σφαλμάτων (out of sample)
US617446DK22	0.061386	0.159684
US38143UAM36	0.280606	0.588534
US38143UAZ49	0.358595	0.683509
US929903BB79	0.186169	0.694788

Πίνακας 5: Μέσος όρος σχετικών σφαλμάτων και για τα 4 ομόλογα, εντός και εκτός δείγματος

M.O σχετικών σφαλματων για τα 4 ομόλογα (in sample)	Ελάχιστο σχετικό σφάλμα (in sample)	Μέγιστο σχετικό σφάλμα (in sample)	M.O σχετικών σφαλματων για τα 4 ομόλογα (out of sample)	Ελάχιστο σχετικό σφάλμα (out of sample)	Μέγιστο σχετικό σφάλμα (out of sample)
0.221689	0.00029	0.957202	0.531628	0.062969	3.18524

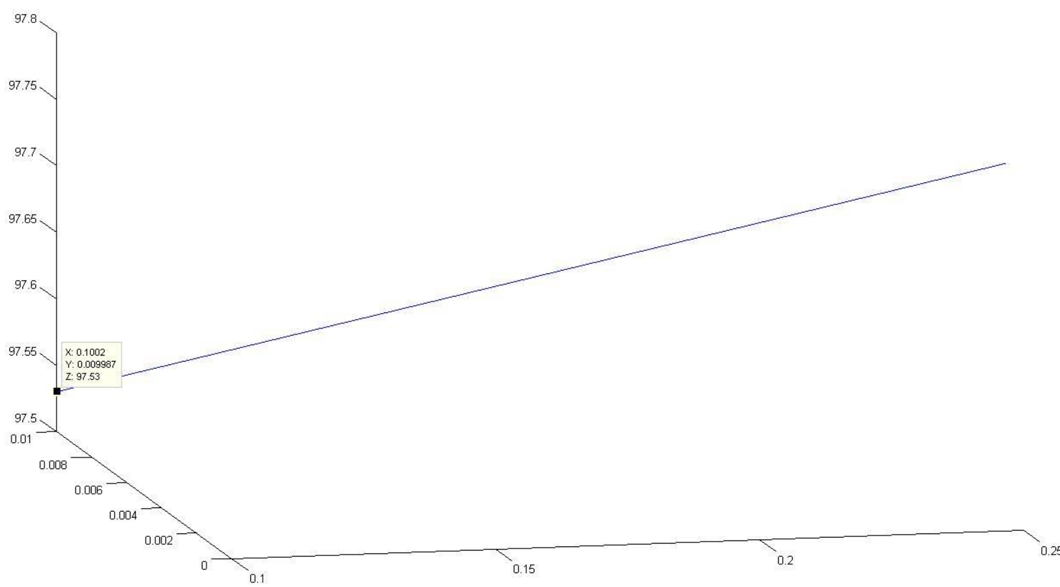
Τα αποτελέσματα της εμπειρικής μας μελέτης ήταν αρκετά ικανοποιητικά. Το τριωνυμικό μοντέλο φαίνεται να προσομοιάζει αρκετά καλά την πραγματική τιμή των μετατρέψιμων ομολόγων, όπως φαίνεται και από τα σχετικά σφάλματα. Επιπλέον, το διωνυμικό μοντέλο μας έδωσε μία τιμή πολύ κοντά στην πραγματική τιμή των μετατρέψιμων ομολόγων.

Καταλήγουμε λοιπόν πως τα μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε, παρά τη μη ύπαρξη μεγάλης πολυπλοκότητας, όπως αυτά του συνεχούς χρόνου, μας αποφέρουν μια αρκετά ικανοποιητική προσέγγιση στην πραγματική τιμή των μετατρέψιμων ομολόγων.

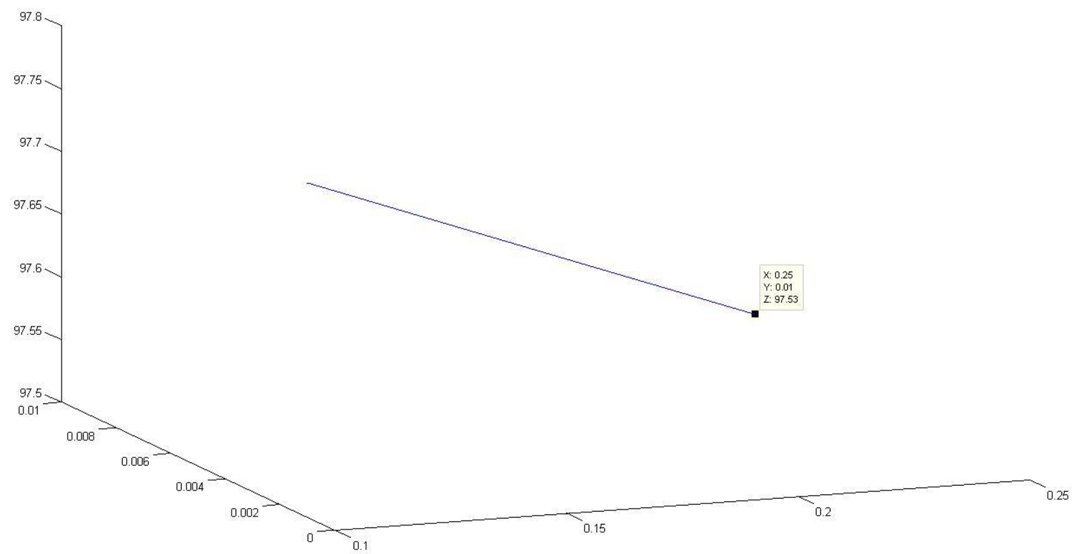
4.2.4. Αριθμητική Ανάλυση

Στην υποενότητα αυτή θα πραγματοποιήσουμε μια ανάλυση για την εξάρτηση της τιμής των μετατρέψιμων ομολόγων από τις παραμέτρους σ και λ που εκτιμήσαμε στην προηγούμενη υποενότητα. Χρησιμοποιήσαμε το πρώτο ομόλογο για την ανάλυση αυτή. Αυξήσαμε με γραμμικό ρυθμό τα σ και λ. Στις παρακάτω εικόνες φαίνονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης.

Εικόνα 6: σ ↑ λ ↓ → Τιμή CB↑



Εικόνα 7: σ ↓ λ ↓ → Τιμή CB↑



Ο κέρσορας και στις δύο εικόνες βρίσκεται στην αρχική τιμή του ομολόγου. Από τις εικόνες φαίνεται πως όπως και να κινείται το σ, αν το λ μειώνεται, η τιμή του ομολόγου αυξάνεται και το αντίστροφο. Το αποτέλεσμά μας είναι αναμενόμενο αφού αν το λ, δηλαδή η πιθανότητα χρεοκοπίας αυξάνεται, τότε αυξάνεται ο πιστωτικός κίνδυνος και συνεπώς η τιμή του ομολόγου μειώνεται για να είναι πιο ελκυστικό για τους επενδυτές.

Συμπεράσματα

Την τελευταία εικοσαετία, τα μετατρέψιμα ομόλογα έχουν εισέλθει για τα καλά στην οικονομική ζωή των επενδυτών και των εταιρειών, χάρη στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους. Έτσι, γίνεται ολοένα και πιο επιτακτική η ανάγκη για την καλύτερη αποτίμησή τους.

Πολλά μοντέλα έχουν κατασκευαστεί για αυτό το σκοπό. Στη διπλωματική αυτή παρουσιάσαμε το Τριωνυμικό μοντέλο του Hull αλλά και το μοντέλο του Ingersoll.

Πραγματοποιήσαμε μια εμπειρική μελέτη για το τριωνυμικό μοντέλο και ενός διωνυμικού μοντέλου αποτίμησης μετατρέψιμων ομολόγων. Εκτιμήσαμε τις παραμέτρους και ελέγξαμε την προβλεπτική ικανότητα του τριωνυμικού μοντέλου για να παρατηρήσουμε αν μπορεί το μοντέλο μας να περιγράψει τη συμπεριφορά της τιμής ενός μετατρέψιμου ομολόγου και σε εκτός του δείγματος τιμές. Με λίγα λόγια πόσο ικανοποιητικά μπορεί το μοντέλο μας να προβλέψει τις τιμές της αγοράς.

Αν και τα μοντέλα που μελετήσαμε στην εμπειρική μελέτη είναι διακριτού χρόνου, τα αποτελέσματά μας ήταν αρκετά ικανοποιητικά όπως υποδηλώνουν και τα σχετικά σφάλματα. Και το διωνυμικό μοντέλο, μας έδωσε μια τιμή πολύ κοντά στην πραγματική τιμή της αγοράς. Συνεπώς τα μοντέλα μας εκτός από εύχρηστα μπορούν να θεωρηθούν και αρκετά αξιόπιστα.

Βιβλιογραφία

Άρθρα

1. Andersen L., Buffum D., 2004. Calibration and Implementation of Convertible Bond Models. J. Comput. Finance 7 (2) 1-34

2. Ayache, E., Forsyth, P.A., Vetzal, K.R., 2002. Next Generation Models for Convertible Bonds with Credit Risk. Wilmott Mag. 11 (2002) 68-77

3. Ayache, E., Forsyth, P.A., Vetzal, K.R., Fall 2003. The valuation of convertible bond with credit risk. Journal of Derivatives 11 (1), 9-29.

4. Batten-Khaw-Young (2004). Convertible Bond Pricing Models. Journal of Economic Surveys. Vol. 28, No 5, pp775-803

5. Baumol, W.J., Malkiel, B.G., Quandt, R.E., 1966. The valuation of convertible securities. Quarterly Journal of Economics 80, 48-59.

6. Black, F., Scholes, M., 1973. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy 81, 637–654.

7. Brennan, M.J., Schwartz, E.S., 1977. Convertible bonds: valuation and optimal strategies for call and conversion. Journal of Finance 32, 1699–1715.

8. Brennan, M.J., Schwartz, E.S., 1980. Analyzing convertible bonds. Journal of Financial and Quantitative Analysis 15 (4), 907–929.

9. Cox J.C, Ross S.A., Rubinstein M. (1979). Option pricing: A simplified approach. Journal of Financial Economics, vol.7, no.3, pp. 229-263

10. Goldman Sachs, 1994. Valuing convertible bonds as derivatives. Technical report, Quantitative Strategies Research Notes.

11. Huang-Liu-Rao(2013). Binary Tree Pricing to Convertible Bonds with Credit Risk under Stochastic Interest Rates. Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, Volume 2013, Article ID 270467

12. Hull J., Predescu M., White A., 2005. Bond Prices, Default Probabilities and Risk Premiums. Journal of Credit Risk Volume 1 /Number 2

13. Hung M.W, Wang J.Y (2002). Pricing Convertible Bonds Subject to Default Risk. The Journal of Derivatives, 10: 75-87

14. Ingersoll J., (1976). A Theoretical and Empirical Investigation of the Dual Funds. Journal of Financial Economics, 3(1976) 83-123

15. Ingersoll J., (1977a). A contingent claim valuation of convertible securities. Journal of Financial Economics 4, 289–321.

16. Ingersoll J., (1977b). An Examination of Corporate Call Policies on Convertible Securities, Journal of Finance 32, 463- 478

17. Ito K. (1951). On Stochastic Differential Equations. Memoirs of the American Mathematical Society, 4, 1-51

18. Levenberg, K.,(1944).: A Method for the Solution of Certain Problems in Least-Squares. Quarterly Applied Math. 2, pp. 164–168

19. Marquardt, D., 1963.: An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. SIAM Journal Applied Math., Vol. 11, pp. 431–441

20. McConnell, J.J., Schwartz, E.S., 1986. LYON taming. The Journal of Finance XLI (3), 561–577.

21. Merton R.C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141-83

22. Merton R.C. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. Journal of Finance, Vol. 292, No.2, pp 449-470.

23. Milanov-Kounchev: Binomial Tree Model for Convertible Bond Pricing within Equity to Credit Risk Framework

24. Tang-Song (2012). The Analysis of Black-Scholes Option Pricing. Advances in Applied Economics and Finance, Vol.1, No 3, pp 169-173.

25. Tsiveriotis, K., Fernandes, C., 1998. Valuing convertible bonds with default risk. The Journal of Fixed Income 8 (2), 95–102.

26. University of Basel - Convertible Bonds: An Overview for Investors and Issuers

27. Zabolotnyuk Y.,Jones R, Veld C. (2010): An empirical Comparison of Convertible Bond Valuation Models. Financial Management, 39(2), pp. 675-706.

Βιβλία

1. Hull J.C. (2005). Options, Futures and Other Derivatives. Prentice Hall, New Jersey, sixth edition.

2. Justin London (2005). Financial Modelling in C++, ,Pbl Wiley

3. Kienitz J., Wetterau D. (2012) Financial Modelling, Theory,Implementation and Practice with MATLAB Source., Pbl Wiley

4. Paolo Brandimarte (2006). Numerical Methods in Finance and Economics, Pbl Wiley

Παράρτημα

Κώδικες MatLab

Κώδικας 1: Αποτίμηση μετατρέψιμων ομολόγων με το διωνυμικό δέντρο

```
function[price]=CBbinomial(S0,T,s,N,k,H,def,convprice,cp)
dT=T/N;
u=exp(s*sqrt(dT));
d=1/u;
int=H*cp*dT;
latticeS=zeros(N+1,N+1);
latticeV=zeros(N+1,N+1);
latticep=zeros(N+1,N+1);
call=[100,100,100,100,100];
r=[0.0202,0.0213,0.02347,0.24];
for j=0:N
    for i=0:j
    latticeS(i+1,j+1)=S0*(u^(j-i))*(d^i);
    end
end
for i=N:-1:0
    if latticeS(i+1,N+1)>=convprice
        latticeV(i+1,N+1)=max(k*latticeS(i+1,N+1),H+int);
    else
        latticeV(i+1,N+1)=H+int;
    end
    if latticeV(i+1,N+1)==k*latticeS(i+1,N+1)
        latticep(i+1,N+1)=1;
    else
        latticep(i+1,N+1)=0;
    end
end

    for j=N-1:-1:0
        for i=j:-1:0
            if latticeV(i+1,j+2)==k*latticeS(i+1,j+2)
                latticep(i+1,j+2)=1;
            else
                latticep(i+1,j+2)=0;
            end
            if latticeV(i+2,j+2)==k*latticeS(i+2,j+2)
                latticep(i+2,j+2)=1;
            else
                latticep(i+2,j+2)=0;
            end
            latticep(i+1,j+1)=0.5*(latticep(i+1,j+2)+latticep(i+2,j+2));
            y=latticep(i+1,j+1)*r(i+1)+(1-latticep(i+1,j+1))*def;

H=0.5*((latticeV(i+1,j+2)/(1+y*dT))+(latticeV(i+2,j+2)/(1+y*dT)));
            if latticeS(i+1,j+1)>=convprice

latticeV(i+1,j+1)=max(min(H,call(i+1)+int),k*latticeS(i+1,j+1));
            else
```

```
                latticeV(i+1,j+1)=min(H,call(i+1)+int);
            end

        end
    end
price=latticeV(1,1);
```

Κώδικας 2: Αποτίμηση μετατρέψιμων ομολόγων με το τριωνυμικό υπόδειγμα του Hull

```
function[p,u,d,dT,pu,pd,pdef,a]=CBTrinomialb(S0,r,T,s,N,l,Q1,Q2,cr,q,convp)
dT=T/N;
u=exp(sqrt((s^2-l)*dT));
d=1/u;
a=exp((r-q)*dT);
pu=(a-d*exp(-l*dT))/(u-d);
pd=(u*exp(-l*dT)-a)/(u-d);
pdef=1-exp(-l*dT);
lattice=zeros(N+2,N+1);
for i=0:N+1
    if i==N+1
        lattice(N+2,N+1)=0.4*Q1;
    else
        lattice(i+1,N+1)=max(min(Q1,Q2),cr*S0*(u^(N-i))*(d^i));
    end

end

for j=N:-1:1
    for i=1:j+1
        if i==j+1
            lattice(i,j)=0.4*Q1;
        else
            Q11=(pu*lattice(i,j+1)+pd*lattice(i+1,j+1)+pdef*0.4*Q1)*exp((-
r)*dT);
            if S0*u^(j-i)*d^(i-1)>=convp
                 lattice(i,j)=max(min(Q11,Q2),cr*S0*u^(j-i)*d^(i-1));
            else
                lattice(i,j)=min(Q11,Q2);
            end

        end
    end
end
p=lattice(1,1)
```

Κώδικας 3: Εκτίμηση παραμέτρων σ και λ

```
function [ x,resnorm,residual,exitflag,output] = CBTrCalibration2(~)
clear all
global S0;
global Q1 ;
global TTM;
global mktprice;
global irate ;
global cratio ;
global Q2;
global q;
global convp;
global N;
global k;
S0=zeros(101,4);
irate=zeros(101,4);
cratio=zeros(101,4);
TTM=zeros(101,4);
Q1=zeros(101,4);
Q2=zeros(101,4);
q=zeros(101,4)
convp=zeros(101,4)
mktprice=zeros(101,4);
parameter=zeros(101,2);
res=zeros(101,1);
exit=zeros(101,1);
N=xlsread('AABB.xlsx','matrixN','A1:DF101');
S0 = xlsread('AABB.xlsx','matrixstock','A1:D101');
irate = xlsread('AABB.xlsx','matrixrf','A1:D101');
Q1= xlsread('AABB.xlsx','matrixQ1','A1:D101');
TTM = xlsread('AABB.xlsx','matrixT','A1:D101');
Q2 = xlsread('AABB.xlsx','matrixQ2','A1:D101');
q = xlsread('AABB.xlsx','matrixq','A1:D101');
cratio = xlsread('AABB.xlsx','matrixcbratio','A1:D101');
convp=xlsread('AABB.xlsx','matrixconvp','A1:D101');
mktprice = xlsread('AABB.xlsx','matrixpcb','A1:D101');
for j=1:4
    x0 = [0.30,0.01577];
    lb = [0.1,0.001]; ub = [0.99,0.99]; k=j;
    [x,resnorm,residual,exitflag,output] = lsqnonlin(@CBTrLSQD2,x0,lb,ub);
    parameter(j,:)=x;
    res(j)=resnorm;

    cbtr_matrix = zeros(101,4);


      for i=1:101
        cbtr_matrix(i,j) =
      CBTrinomialb(S0(i,j),irate(i,j),TTM(i,j),x(1),N(i,j),x(2),Q1(i,j),Q2(i,
      j),cratio(i,j),q(i,j),convp(i,j));

      end

pricedata = [cbtr_matrix];
end
```

```
xlswrite('aaa.xls',pricedata,'results','E2:J102');
xlswrite('aaa.xls',res,'results','C2:C102');
xlswrite('aaa.xls',parameter,'results','A2:B102');
```

Κώδικας 4: Βοηθητικός κώδικας για την εκτίμηση. Καλείται από τον κώδικα 3

```
function [ cbtr_lsqd ] = CBTrLSQD2( x )
global S0;
global Q1;
global Q2 ;
global TTM;
global mktprice;
global irate ;
global cratio ;
global convp;
global N;
global q;
global k;
cbtr_lsqd = zeros(101,1);
for i=1:101
    cbtr_lsqd(i)= mktprice(i,k)-
CBTrinomialb(S0(i,k),irate(i,k),TTM(i,k),x(1),N(i,k),x(2),Q1(i,k),Q2(i,k),cra
tio(i,k),q(i,k),convp(i,k));
end;
```

Κώδικας 5: Εύρεση των σχετικών σφαλμάτων

```
function [latticecal]=rerror(~)
S0=zeros(101,4);
N=zeros(101,4);
irate=zeros(101,4);
cratio=zeros(101,4);
TTM=zeros(101,4);
Q1=zeros(101,4);
Q2=zeros(101,4);
q=zeros(101,4)
convp=zeros(101,4)
mktprice=zeros(101,4);
s=zeros(1,4);
l=zeros(1,4);
N=xlsread('AABB.xlsx','matrixN','A1:D101');
S0 = xlsread('AABB.xlsx','matrixstock','A1:D101');
```

```
irate = xlsread('AABB.xlsx','matrixrf','A1:D101');
Q1= xlsread('AABB.xlsx','matrixQ1','A1:D101');
TTM = xlsread('AABB.xlsx','matrixT','A1:D101');
Q2 = xlsread('AABB.xlsx','matrixQ2','A1:D101');
q = xlsread('AABB.xlsx','matrixq','A1:D101');
cratio = xlsread('AABB.xlsx','matrixcbratio','A1:D101');
convp=xlsread('AABB.xlsx','matrixconvp','A1:D101');
mktprice = xlsread('AABB.xlsx','matrixpcb','A1: D101');
s= xlsread('A.xlsx','results','A1:A4');
l= xlsread('A.xlsx','results','B1:B4');
for j=1:4
    for i=1:101
    latticecal(i,j)= abs(mktprice(i,j)-
CBTrinomialb(S0(i,j),irate(i,j),TTM(i,j),s(j),N,l(j),Q1(i,j),Q2(i,j),cratio(i
,j),q(i,j),convp(i,j)));
    end
end

xlswrite('aaaaa.xls',latticecal,'leastsquares2','Q2:T102');
```