

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΑΝΔΡΕΑΣ Α. ΝΙΚΟΓΛΟΥ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. 1/30.09.2015 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

1. Επίκ. Καθηγητής Μ. Μπούτσικας (Επιβλέπων)
2. Αναπλ. Καθηγητής Κ. Πολίτης
3. Επίκ. Καθηγητής Γ. Ψαρράκος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

FORECASTING FINANCIAL RISK

ANDREAS A. NIKOGLOU

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

PIRAEUS, 2016

στη γυναίκα μου . . .

Ευχαριστίες

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Επίκ. Καθηγητή κ. Μ. Μπούτσικα για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντάς μου το συγκεκριμένο θέμα καθώς και για την καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Οι ευχαριστίες μου επεκτείνονται και στα άλλα δύο μέλη της επιτροπής, τον Αναπλ. Καθηγητή κ. Κ. Πολίτη και τον Επίκ. Καθηγητή κ. Γ. Ψαρράκο για τις επισημάνσεις τους και τη συμβολή τους στην τελική μορφή του κειμένου.

Περίληψη

Αντικειμενικός σκοπός της παρούσας εργασίας είναι αφενός η περιγραφή της έννοιας του κινδύνου και η παρουσίαση των σημαντικότερων μέτρων κινδύνου τα οποία χρησιμοποιούνται στην σύγχρονη οικονομική επιστήμη, και αφετέρου η παρουσίαση και υλοποίηση των βασικότερων τεχνικών εκτίμησης και πρόβλεψης χρηματοοικονομικών κινδύνων.

Για την επίτευξη των παραπάνω η παρούσα εργασία διαρθρώνεται ως εξής: Αρχικά, για λόγους πληρότητας και καλύτερης κατανόησης της εργασίας, παρέχονται εισαγωγικά στοιχεία της έννοιας του κινδύνου και βασικές έννοιες της επιστήμης των μαθηματικών και της στατιστικής οι οποίες χρησιμοποιούνται στα χρηματοοικονομικά για τον ποιοτικό και ποσοτικό προσδιορισμό της συμπεριφοράς των αγορών.

Ακολουθεί παρουσίαση των σημαντικότερων μέτρων κινδύνου, με ιδιαίτερη έμφαση στο μέτρο της αξίας σε κίνδυνο VaR και τις παραμέτρους που το επηρεάζουν. Εν συνεχεία αναλύονται οι state of the art τεχνικές πρόβλεψης χρηματοοικονομικών κινδύνων, οι οποίες κατηγοριοποιούνται βάσει των υποθέσεων στατιστικής κατανομής και χρονικής εξάρτησης των εξεταζόμενων μεγεθών. Σε κάθε περίπτωση παραθέτονται επιλεγμένα παραδείγματα και γίνονται αναφορές στη διεθνή βιβλιογραφία.

Τέλος γίνεται υλοποίηση των τεχνικών εκτίμησης και πρόβλεψης κινδύνου που αναλύθηκαν, τόσο για την περίπτωση μεμονωμένων τίτλων (μετοχές) όσο και για την περίπτωση ισοβαρούς χαρτοφυλακίου τεσσάρων μετοχών. Η υλοποίηση έγινε με χρήση του υπολογιστικού προγράμματος R και ο κώδικας δίνεται στο Παράρτημα της παρούσας εργασίας. Τα απαραίτητα ιστορικά δεδομένα για τις τιμές κλεισίματος των μετοχών αντλήθηκαν από ελεύθερες βάσεις δεδομένων.

Abstract

The present thesis focuses on both the definition of risk and the presentation of the most important risk measures that are used in modern economic science, as well as the presentation and implementation of basic techniques for measuring and forecasting financial risk.

The outline of this thesis is as follows: In the first chapter, an introduction in risk concept is given and the basic mathematical and statistical tools that are used in finance in order to study markets from a qualitative as well as quantitative point of view are provided.

In the following chapters (chapters 2, 3) the most popular risk measures with emphasis on the Value at Risk (VaR) are presented. Furthermore, frequently used state-of-the-art techniques applied in market risk management are introduced and classified based on statistical properties and time dependence of the financial variables. In each case, selected examples are provided along with references to the relevant literature.

The implementation of risk management techniques including risk forecasting, which have been thoroughly analyzed, is discussed in the last chapter both in case of individual assets (stocks) and a balanced portfolio consisting of four stocks. The programming language R has been used and the source code is listed in the Appendix A. The historical data on the adjusted close prices have been selected from free on-line databases.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	viii
Κατάλογος Σχημάτων	ix
1 Εισαγωγή	1
1.1 Αξία και απόδοση	2
1.2 Χρονοσειρές	2
1.2.1 Στασιμότητα χρονοσειρών	3
1.2.2 Το αυτοπαλίνδρομο μοντέλο AR	4
1.2.3 Το μοντέλο κινούμενου μέσου MA	5
1.2.4 Το αυτοπαλίνδρομο κινούμενου μέσου μοντέλο ARMA	5
1.2.5 Το γενικευμένο μοντέλο ARIMA	7
1.2.6 Χρηματοοικονομικές Χρονοσειρές	7
2 Μέτρα κινδύνου	13
2.1 Τυπική απόκλιση αποδόσεων (Volatility)	14
2.2 Αξία σε κίνδυνο Value at Risk	17
2.2.1 Επίπεδο εμπιστοσύνης	18
2.2.2 Χρονική περίοδος	18
2.2.3 Κατανομή αποδόσεων	19
2.3 Δεσμευμένη ή υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο (Conditional VaR or Expected Shortfall)	19
3 Τεχνικές πρόβλεψης κινδύνου	23
3.1 Μη παραμετρικό VaR	23
3.1.1 Ιστορική αναδρομή (Historical simulation)	23
3.2 Παραμετρικό VaR	27
3.2.1 VaR χαρτοφυλακίου	28
3.2.2 Μέθοδος mapping	30
3.3 Χρονικά εξαρτώμενη μεταβλητότητα	31
3.3.1 Κινούμενος μέσος	33

3.3.2 Εκθετικός Κινούμενος μέσος	35
3.4 Αυτοπαλίνδρομη Δεσμευμένη	
Ετεροσκεδαστικότητα	37
3.4.1 Μοντέλα ARCH	38
3.4.2 Μοντέλα ARCH-M	39
3.4.3 Μοντέλα GARCH	39
3.5 Αυτοπαλίνδρομη δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα με ασύμμετρες δια- κυμάνσεις	40
3.5.1 Μοντέλα EGARCH	41
3.5.2 Μοντέλα TARCH	41
3.6 Αξιολόγηση των μοντέλων μεταβλητότητας	42
3.6.1 Σημαντικότητα παραμέτρων, έλεγχος καταλοίπων	42
3.6.2 Πρόβλεψη μεταβλητότητας και εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο	49
4 Εφαρμογή πρόβλεψης κινδύνου για ισοβαρές χαρτοφυλάκιο	53
4.1 Ισοβαρές Χαρτοφυλάκιο	53
4.2 Ημερήσιο VaR μετοχών και χαρτοφυλακίου	56
4.2.1 Παραμετρικός προσδιορισμός	56
4.2.2 Μη παραμετρικός προσδιορισμός	56
4.2.3 Μέθοδος mapping	58
4.2.4 Κινούμενος μέσος και εκθετικός κινούμενος μέσος	60
4.2.5 Υπόδειγμα GARCH	61
A' Κώδικας R	65
A.1 Εισαγωγή δεδομένων και περιγραφικά στοιχεία	65
A.2 Παραμετρική εκτίμηση κινδύνου	68
A.3 Μη παραμετρική εκτίμηση κινδύνου	69
A.4 Μέθοδος mapping	69
A.5 Απλός κινούμενος μέσος	70
A.6 Εκθετικός κινούμενος μέσος	71
A.7 Υπόδειγμα GARCH	71
Βιβλιογραφία	75
Ευρετήριο	77

Ονοματολογία

Λατινικοί χαρακτήρες

\mathbb{N} Σύνολο θετικών ακεραίων

\mathbb{Z} Σύνολο ακεραίων

$\{X_t\}$ Χρονοσειρά

A Ημέρες συναλλαγών ανά έτος

C Συντελεστής μεταβολής

$f_q(\cdot)$ Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποδόσεων

f_{VaR} Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας VaR

M Ποσό επένδυσης - Θέση

p Πλήθος χρονικών περιόδων του υποδείγματος ARCH

P_t Αξία ενός αγαθού ή ενός χαρτοφυλακίου

q Πλήθος χρονικών υστερήσεων μεταβλητότητας στο *GARCH* μοντέλο

$R_p(t)$ Απόδοση χαρτοφυλακίου

R_t Συνεχής απόδοση ενός αγαθού ή ενός χαρτοφυλακίου

r_t Απόδοση ενός αγαθού ή ενός χαρτοφυλακίου

w Διάνυσμα συμμετοχών τίτλων σε χαρτοφυλάκιο

w_i Ποσοστό συμμετοχής (βαρύτητα) τίτλου σε χαρτοφυλάκιο

M' Ισοδύναμο ποσό επένδυσης - Ισοδύναμη Θέση χαρτοφυλακίου αγοράς

Ελληνικοί χαρακτήρες

α Επίπεδο εμπιστοσύνης

- γ_3 Ασυμμετρία (skewness)
- γ_4 Κυρτότητα (kurtosis)
- γ_X Συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης της χρονοσειράς $\{X_t\}$
- λ Συντελεστής εξασθένισης μοντέλου εκθετικού κινούμενου μέσου
- $\Phi^{-1}(p)$ Αντίστροφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κανονικής κατανομής
- $\rho_X(\cdot)$ Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της χρονοσειράς $\{X_t\}$

Ακρωνύμια

- ACF Autocorrelation Function
- ARCH-M ARCH in mean
- ARCH Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
- ARIMA Autoregressive Integrated Moving Average
- ARMA Autoregressive Moving Average
- AR Autoregressive
- BCBS Basel Committee on Banking Supervision
- BIS Bank for International Settlements
- CAPM Capital Price Asset Model
- DJI Dow Jones Industrial
- EWMA Eponentially Weighted Moving Average
- FTSE 100 Financial Times Stock Exchange 100 Index
- GARCH Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
- i.i.d. independent and identically distributed
- LB Ljung-Box
- MA Moving Average
- NYSE New York Stock Exchange
- S&P500 Standard & Poor's 500 index

VaR Value at Risk

Κατάλογος Πινάκων

1.1 Τιμές του p -value στατιστικών ελέγχων κανονικότητας.	11
2.1 Επίδραση του συντελεστή συσχέτισης στην εκτίμηση του $VaR T$ ημερών σε σχέση με το ημερήσιο VaR	19
3.1 Κατηγοριοποίηση μεθοδολογιών εκτίμησης αξίας σε κίνδυνο σύμφωνα με τους Miura και Oue [20].	23
3.2 Στατιστικός έλεγχος Engle's ύπαρξης ετεροσκεδαστικότητας.	43
3.3 Εκτιμήσεις των συντελεστών των μοντέλων ARCH και GARCH για τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 της περιόδου 2005 έως 2009.	45
3.4 Εκτιμήσεις των συντελεστών του μοντέλου t-GARCH(1,1) για τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 της περιόδου 2005 έως 2009.	46
3.5 Πρόβλεψη volatility και VaR(5%) πέντε ημερών του δείκτη S&P500 σύμφωνα με το μοντέλο GARCH(1,1).	49
4.1 Περιγραφικά στατιστικά στοιχεία αποδόσεων.	56
4.2 Παράμετρος κλίσης του μοντέλου CAPM.	59
4.3 Συνοπτικός πίνακας εκτιμήσεων της αξίας σε κίνδυνο των μετοχών και του χαρτοφυλακίου, για επίπεδο εμπιστοσύνης $p = 5\%$	59
4.4 Συνοπτικός πίνακας εκτιμήσεων της αξίας σε κίνδυνο των μετοχών και του χαρτοφυλακίου, για επίπεδο εμπιστοσύνης $p = 1\%$	60
4.5 Συνοπτικός πίνακας εκτιμήσεων της ημερήσιας αξίας σε κίνδυνο των μετοχών και του χαρτοφυλακίου, με χρήση του απλού και του εκθετικού κινούμενου μέσου, για επίπεδο εμπιστοσύνης $p = 5\%$	60
4.6 Συντελεστές υποδείγματος GARCH(1,1), για τις μετοχές και το χαρτοφυλάκιο.	61
4.7 Πρόβλεψη μίας ημέρας της υπό συνθήκη τυπική απόκλιση (σ) και του ημερήσιου VaR, σύμφωνα με το υπόδειγμα GARCH(1,1).	64

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Υπόδειγμα AR(1) για $t = 1, 2, \dots, 1000$, τιμές παραμέτρων $\phi_0 = 0, \phi_1 = 0.9$ και $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$	6
1.2	Υπόδειγμα random walk για $t = 1, 2, \dots, 1000$ και $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$	6
1.3	Ημερήσιες τιμές κλεισίματος της μετοχής της εταιρείας Apple Inc για την χρονική περίοδο 2010 έως 2015.	8
1.4	Ημερήσιες αποδόσεις της μετοχής της εταιρείας Apple Inc για την χρονική περίοδο 2010 έως 2015.	9
1.5	Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των ημερήσιων αποδόσεων της μετοχής της εταιρείας Apple Inc κατά το έτος 2010.	10
1.6	Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των ημερήσιων αποδόσεων της μετοχής της εταιρείας Apple Inc κατά το έτος 2010.	10
1.7	Ιστογράμματα συχνοτήτων ημερήσιων και των εβδομαδιαίων αποδόσεων της μετοχής της εταιρείας Apple Inc για την περίοδο 2010 - 2015.	12
2.1	Ιστογράμματα των ημερήσιων τιμών κλεισίματος (2.1α') και των ημερήσιων αποδόσεων (2.1β'), και διάγραμμα διασποράς των ημερήσιων τιμών κλεισίματος 2.1γ' της μετοχής της εταιρείας General Electric κατά το χρονικό διάστημα 2014 - 2015.	15
2.2	Σχηματική απεικόνιση της αξίας σε κίνδυνο VaR 0.5% και 2.5% για την περίπτωση κανονικής κατανομής.	20
3.1	Ημερήσια ισοτιμία EUR - CHF περιόδου 2009 - 2014.	25
3.2	Ημερήσια απόδοση EUR - CHF περιόδου 2009 - 2014.	25
3.3	Ιστόγραμμα ημερήσιων αποδόσεων.	26
3.4	Διάταξη ημερήσιων αποδόσεων από τη χειρίστη στη βέλτιστη.	26
3.5	Διάγραμμα ροής ανάλυσης διακύμανσης - συνδιακύμανσης για την εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο χαρτοφυλακίου.	30
3.6	Ιστόγραμμα των ημερήσιων αποδόσεων, της μετοχής της εταιρείας General Electric κατά το χρονικό διάστημα 2014 - 2015.	32

3.7	Διάγραμμα ποσοστημορίων των ημερήσιων αποδόσεων, της μετοχής της εταιρείας General Electric κατά το χρονικό διάστημα 2014 - 2015. . . .	32
3.8	Ημερήσιες αποδόσεις και εκτιμήσεις της μεταβλητότητας του δείκτη FTSE 100 με τη μέθοδο του κινούμενου μέσου, για το χρονικό διάστημα από 1986 έως 1990, στις οποίες είναι εμφανής η συμπεριφορά “ghosting”. .	34
3.9	Ημερήσιες αποδόσεις και εκτιμήσεις της ετήσιας μεταβλητότητας του δείκτη FTSE 100 με τη μέθοδο του εκθετικού κινούμενου μέσου, με παράμετρο $\lambda = 0.94$, για τη χρονική περίοδο 1986 έως 1990.	36
3.10	Ημερήσιες τιμές κλεισίματος και αποδόσεις του δείκτη S&P500.	44
3.11	Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των υπολοίπων του S&P500.	44
3.12	Ημερήσιες αποδόσεις του δείκτη S&P500 με υπέρθεση των ορίων $\pm 2\sigma_t$ του μοντέλου GARCH(1,1).	47
3.13	Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των κανονικοποιημένων υπολοίπων του μοντέλου GARCH(1,1).	47
3.14	Διάγραμμα ποσοστημορίων κανονικής κατανομής των τυποποιημένων υπολοίπων του μοντέλου GARCH(1,1).	48
3.15	Διάγραμμα ποσοστημορίων κατανομής Student-t των τυποποιημένων υπολοίπων του μοντέλου t-GARCH(1,1).	48
3.16	Πρόβλεψη της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης των αποδόσεων του δείκτη S&P500 για περιόδους έντονων και ήπιων μεταβολών.	50
3.17	Πρόβλεψη 200 ημερών της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης των αποδόσεων του δείκτη S&P500 σύμφωνα με το μοντέλο t-GARCH(1,1). . . .	50
4.1	Τιμές κλεισίματος των μετοχών του χαρτοφυλακίου και του δείκτη DJI. . . .	54
4.2	Ημερήσιες αποδόσεις των μετοχών, του δείκτη DJI και του χαρτοφυλακίου.	55
4.3	Σχηματική ερμηνεία του κινδύνου υποεκτίμησης ή υπερεκτίμησης της αξίας σε κίνδυνο ανάλογα του επιπέδου εμπιστοσύνης από τη χρήση κανονικής κατανομής για τις περιπτώσεις λεπτόκυρτων κατανομών.	57
4.4	Διαγράμματα διασποράς των αποδόσεων των μετοχών συναρτήσει των αποδόσεων του δείκτη DJI.	58
4.5	Συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των υπολοίπων.	62
4.6	Πρόβλεψη 200 ημερών της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης των μετοχών και του χαρτοφυλακίου.	63

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Τα χρηματοοικονομικά αποτελούν μέρος της οικονομικής επιστήμης το οποίο μελετά τη λειτουργία των χρηματοοικονομικών αγορών σε μία ή περισσότερες αγορές οι οποίες αλληλοσυνδέονται. Οι αγορές αυτές αποτελούν ένα δίαυλο επικοινωνίας μεταξύ των επιχειρήσεων αλλά και των μεμονωμένων επενδυτών με απώτερο σκοπό τη συγκέντρωση των απαραίτητων κεφαλαίων για τη λειτουργία, την ευημερία και την επένδυση του πλεονάζοντος πλούτου αντίστοιχα.

Στο Κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε βασικές έννοιες της επιστήμης των μαθηματικών που χρησιμοποιούνται στα χρηματοοικονομικά για τη μοντελοποίηση της συμπεριφοράς των αγορών και των συναλλασσόμενων προϊόντων. Τα μαθηματικά μοντέλα στοχεύουν στον ποιοτικό και ποσοτικό προσδιορισμό των παραμέτρων που επηρεάζουν και διαμορφώνουν τη συμπεριφορά των χρηματοοικονομικών προϊόντων με απώτερο στόχο τη δυνατότητα προβλέψεων.

Η ανάγκη μέτρησης και εν συνεχεία πρόβλεψης χρηματοοικονομικών κινδύνων περιλαμβάνει κινδύνους διαφορετικού τύπου, όπως ο κίνδυνος της αγοράς (*market risk*) ο οποίος είναι ιδιαίτερα σημαντικός και αναφέρεται στην μεταβολή της αξίας ενός προϊόντος. Ο πιστωτικός κίνδυνος (*credit risk*), ο οποίος αναφέρεται στην πιθανότητα μη εξυπηρέτησης δανείων λόγω αδυναμίας του δανειολήπτη. Ο κίνδυνος ισοτιμίας (*currency risk*) ο οποίος αφορά στην απώλεια κεφαλαίου λόγω μεταβολής της ισοτιμίας μεταξύ δύο νομισμάτων. Ο κίνδυνος ρευστότητας (*liquidity risk*) υφίσταται όταν μία επένδυση δεν μπορεί να αγοραστεί ή να πωληθεί σε μικρό χρονικό διάστημα ώστε να αποτρέψει τυχόν απώλειες. Ένα νέο είδος κινδύνου το οποίο αποκτά ολοένα και μεγαλύτερη βαρύτητα είναι ο λειτουργικός κίνδυνος (*operational risk*), ο οποίος αφορά πιθανότητα απωλειών λόγω ανθρώπινου παράγοντα, διαδικασιών ή τεχνικών συστημάτων. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε κυρίως με τον κίνδυνο αγοράς.

1.1 Αξία και απόδοση

Η έννοια του κινδύνου είναι συνυφασμένη με την άγνοια της μελλοντικής απόδοσης R_t ενός περιουσιακού στοιχείου-αγαθού. Ως απόδοση (return) (Σχέση 1.1) ορίζεται η σχετική μεταβολή της αξίας P_t ενός αγαθού εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος και συχνά εκφράζεται ως εκατοστιαίο ποσοστό.

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \quad (1.1)$$

Μία εναλλακτική έκφραση της απόδοσης, η οποία χρησιμοποιείται κυρίως στις περιπτώσεις εκτίμησης της απόδοσης σε περισσότερες της μίας περιόδους, δίνεται από τη Σχέση 1.2, και συχνά αναφέρεται με το όρο λογαριθμική απόδοση,

$$R_t = \log(1 + r_t) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \log P_t - \log P_{t-1}. \quad (1.2)$$

Η διαφορά στον υπολογισμό μεταξύ της αριθμητικής (Σχέση 1.1) και λογαριθμικής (Σχέση 1.2) απόδοσης γίνεται σημαντική στις περιπτώσεις 'υψηλών' ποσοστιαίων μεταβολών, της τάξης του 30 – 40%, μεταξύ των τιμών P_t και P_{t-1} οι οποίες είναι εξαιρετικά σπάνιο να εμφανιστούν εντός μικρών χρονικών διαστημάτων, όπως π.χ. στην περίπτωση των ημερήσιων αποδόσεων. Μία σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο αυτών σχέσεων είναι ότι οι λογαριθμικές αποδόσεις είναι συμμετρικές ενώ οι αριθμητικές αποδόσεις όχι. Δηλαδή μεταξύ δύο διαδοχικών αποδόσεων με ίδια απόλυτη τιμή και διαφορετικό πρόσημο ($R_{t-1} = -R_t, r_{t-1} = -r_t$) στην πρώτη περίπτωση το αρχικό ποσό επένδυσης παραμένει αμετάβλητο ενώ στη δεύτερη περίπτωση μεταβάλλεται. Στην παρούσα εργασία για τον υπολογισμό των ημερήσιων αποδόσεων χρησιμοποιήθηκε η λογαριθμική Σχέση 1.2.

Η τυχαία μεταβλητή της απόδοσης προτιμάται έναντι της τυχαίας μεταβλητής της αξίας του αγαθού λόγω των ιδιοτήτων της στασιμότητας και της εργοδικότητας, ιδιότητες οι οποίες δεν επαληθεύονται για τις τιμές της αξίας του αγαθού. Επιπλέον η απόδοση είναι απαλλαγμένη από νομισματικές μονάδες και κατ' επέκταση επιτρέπει την άμεση δια σύγκριση μεταξύ διαφορετικών αγαθών.

1.2 Χρονοσειρές

Ως διακριτή χρονοσειρά μπορεί να θεωρηθεί η αλληλουχία δεδομένων τα οποία αντιστοιχούν σε διαδοχικές χρονικές στιγμές οι οποίες συνήθως έχουν σταθερό χρονικό βήμα, π.χ. ημερήσιες τιμές μίας μετοχής, μηνιαίο ή ετήσιο επιτόκιο κ.λ.π..

Πρόκειται για στοχαστική διαδικασία διακριτών τιμών η οποία συνήθως συμβολίζεται ως $\{X_t\}$, $t \in \mathbb{Z}$, όπου t η χρονική στιγμή και X_t η τιμή της σειράς στην αντίστοιχη χρονική στιγμή.

Για την κατανόηση των ιδιοτήτων των χρονοσειρών έχουν αναπτυχθεί διάφορα μοντέλα, τα οποία προσαρμόζονται στα πειραματικά δεδομένα με απώτερο σκοπό τη δημιουργία προβλέψεων είτε βραχυπρόθεσμων είτε μακροπρόθεσμων προβλέψεων. Η μελέτη αυτών των μοντέλων αναφέρεται ως *ανάλυση χρονοσειρών* η οποία έχει ευρύ πεδίο εφαρμογής στις οικονομικές αναλύσεις και ιδιαίτερα στην πρόβλεψη και διαχείριση χρηματοοικονομικών κινδύνων.

Στην ανάλυση χρονοσειρών υπάρχουν τρεις βασικές ομάδες μοντέλων: τα αυτοπαλίνδρομα (autoregressive, AR), τα ολοκληρώσιμα (integrated, I) και τα κινούμενου μέσου (moving average, MA). Συχνά οι παραπάνω κατηγορίες συνδυάζονται προκειμένου να δημιουργήσουν νέα μοντέλα όπως το αυτοπαλίνδρομο κινούμενου μέσου (autoregressive moving average, ARMA) και το αυτοπαλίνδρομο ολοκληρωμένου κινούμενου μέσου (autoregressive integrated moving average, ARIMA).

1.2.1 Στασιμότητα χρονοσειρών

Μία χρονοσειρά είναι *στάσιμη* όταν συγκλίνει στη μακροχρόνια ισορροπία της και οι ιδιότητές της δεν μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου. Αναλυτικότερα μία χρονοσειρά $\{X_t\}$ χαρακτηρίζεται ως *αυστηρά στάσιμη* όταν τα διανύσματα $[X_1, \dots, X_k]$ και $[X_{1+h}, \dots, X_{k+h}]$ ανήκουν στην ίδια πολυδιάστατη κατανομή για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $h \in \mathbb{Z}$. Μία απλουστευμένη έκφραση του παραπάνω ορισμού αποτελεί η *ασθενής στασιμότητα* σύμφωνα με την οποία η χρονοσειρά $\{X_t\}$ θα πρέπει να ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- Η μέση τιμή της διαδικασίας είναι σταθερή συναρτήσει του χρόνου.

$$E[X_t] = \mu, \forall t \in \mathbb{Z}.$$

- Η μεταβλητότητα της διαδικασίας είναι σταθερή συναρτήσει του χρόνου.

$$Var[X_t] = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{Z}.$$

- Η αυτόσυνδιακύμανση μεταξύ δύο τιμών της διαδικασίας εξαρτάται μόνο από τη μεταξύ τους χρονική απόσταση και όχι από τις απόλυτες χρονικές στιγμές της κάθε τιμής.

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(h), \forall t, h \in \mathbb{Z}.$$

Από τη συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης $\gamma_X(\cdot)$ προκύπτει και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\rho_X(\cdot)$ σύμφωνα με τη Σχέση 1.3,

$$\rho_X(\cdot) = \frac{\gamma_X(\cdot)}{\gamma_X(0)}. \quad (1.3)$$

Το απλούστερο παράδειγμα ασθενώς στάσιμης χρονοσειράς αποτελεί η διαδικασία λευκού θορύβου (white noise), για την οποία ισχύουν οι Σχέσεις 1.4,

$$\begin{aligned} E[X_t] &= 0, \forall t \in \mathbb{Z}, \\ \text{Var}[X_t] &= \sigma^2, \forall t \in \mathbb{Z}, \\ \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= 0, \forall t, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Η αυτοσυνδιακύμανση $\gamma(h)$ εκτιμάται από τη δειγματική τιμή $\hat{\gamma}(h)$ σύμφωνα με τη Σχέση 1.5,

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-h} (X_j - \bar{X})(X_{j+h} - \bar{X}) = \hat{\gamma}(-h), \quad (1.5)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j. \quad (1.6)$$

Οι παραπάνω σχέσεις αν και εφαρμόζονται σε πεπερασμένα δείγματα αποτελούν ικανοποιητικούς εκτιμητές της αυτοσυνδιακύμανσης, υπό την προϋπόθεση ότι οι αριθμητικές τιμές των h και n δεν είναι ‘κοντά’, καθώς στην περίπτωση αυτή το πλήθος των (X_j, X_{j+h}) κρίνεται ανεπαρκές για την ορθή εκτίμηση $\gamma_X(h)$. Στη διεθνή βιβλιογραφία η χρήση των παραπάνω σχέσεων προτείνεται για $n > 50$ και $h \leq n/4$ [10].

Η στασιμότητα αποτελεί ιδιαίτερης σημασίας ιδιότητα στην ανάλυση χρονοσειρών καθώς ουσιαστικά αντικαθιστά την υπόθεση ανεξαρτησίας και ισόνομης κατανομής (independent and identically distributed - i.i.d) της κλασικής στατιστικής.

1.2.2 Το αυτοπαλίνδρομο μοντέλο AR

Τα αυτοπαλίνδρομα μοντέλα αποτελούν την απλούστερη μορφή μοντέλων στάσιμων χρονοσειρών τα οποία εφαρμόζουν την έννοια της παλινδρόμησης για να εκφράσουν τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής X_t και της ανεξάρτητης X_{t-1} . Η γενική μορφή ενός αυτοπαλίνδρομου μοντέλου p τάξης δίνεται από τη Σχέση 1.7,

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (1.7)$$

Όπου ϕ_i , $i = 1, \dots, p$ οι παράμετροι του μοντέλου, $\phi_0 = E(X_t) = \mu$ και ε_t λευκός θόρυβος ($E[\varepsilon_t] = 0, E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$). Η παραπάνω σχέση συνδέει την τιμή της μεταβλητής X , τη χρονική στιγμή t με τις τιμές της μεταβλητής X σε μία προγενέστερη χρονική περίοδο συν μία τυχαία μεταβλητή ε , η τιμή της οποίας εξαρτάται από τη χρονική στιγμή t .

Για την περίπτωση όπου $p = 1$ προκύπτει το αυτοπαλίνδρομο μοντέλο πρώτης τάξης

AR(1) της Σχέσης 1.8, το οποίο συγκλίνει για $|\phi_1| < 1$.

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (1.8)$$

Το μοντέλο καλείται πρώτης τάξης καθώς υφίσταται μόνο μία χρονική υστέρηση. Στη ιδιαίτερη περίπτωση όπου για το AR(1) ισχύει $\phi_0 = 0$ και $\phi_1 = 1$ τότε το μοντέλο που προκύπτει (Σχέση 1.9) ονομάζεται τυχαίου περιπάτου (random walk), σύμφωνα με το οποίο η βέλτιστη πρόβλεψη για την τιμή της μεταβλητής X τη χρονική στιγμή t προκύπτει από την τιμή της X τη χρονική στιγμή $t - 1$.

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (1.9)$$

Δεδομένου ότι δεν ισχύει η συνθήκη $|\phi_1| < 1$ το μοντέλο τυχαίου περιπάτου δεν συγκλίνει μακροχρόνια αλλά αντιθέτως μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή γι' αυτό και χρησιμοποιείται συχνά για τη μοντελοποίηση της τιμής χρηματοοικονομικών προϊόντων όπως μετοχών ομολόγων κ.α.. Η διαφορά μεταξύ των δύο αυτών μοντέλων είναι άμεσα αντιληπτή στα Σχήματα 1.1 και 1.2 τα οποία απεικονίζουν προσομοιώσεις μοντέλου AR(1), με με τιμές παραμέτρων $\phi_0 = 0$ και $\phi_1 = 0.9$ και μοντέλου random walk για πλήθος χρονικών βημάτων $n = 1000$.

1.2.3 Το μοντέλο κινούμενου μέσου MA

Η γενική μορφή ενός μοντέλου κινούμενου μέσου q τάξης δίνεται από τη Σχέση 1.10,

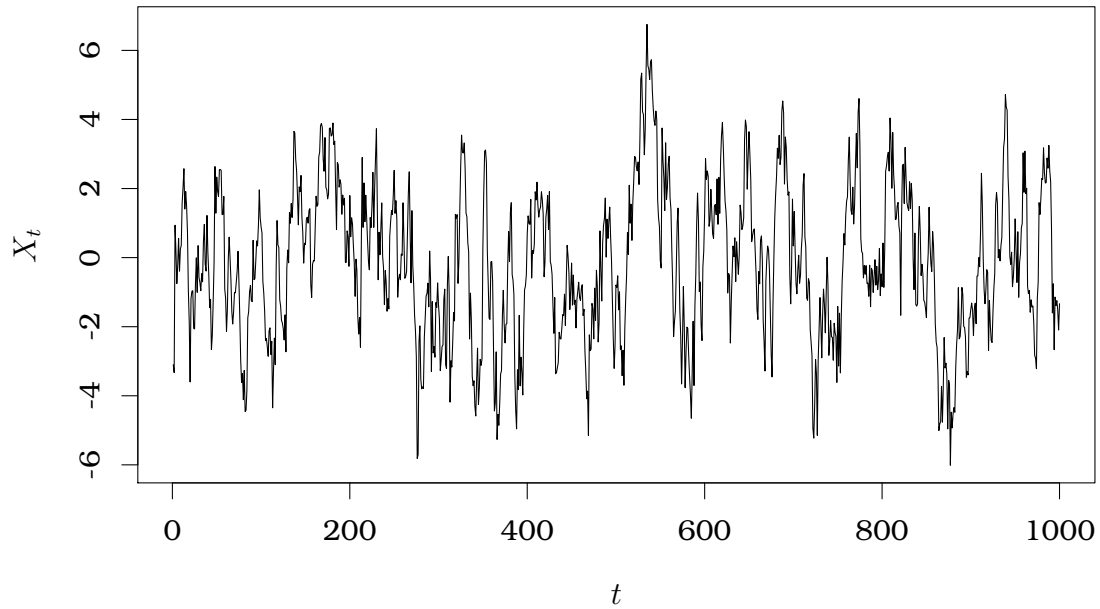
$$X_t = \theta_0 + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t. \quad (1.10)$$

Όπου θ_j , $j = 1, \dots, q$ οι παράμετροι του μοντέλου, $\theta_0 = \mu$ η εκτίμηση για την τιμή της X_t η οποία συχνά θεωρείται ίση με μηδέν και ε_t λευκός θόρυβος ($\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\forall t$). Για την περίπτωση όπου $q = 1$ προκύπτει το μοντέλο κινούμενου μέσου πρώτης τάξης MA(1) το οποίο περιγράφεται από τη Σχέση 1.11,

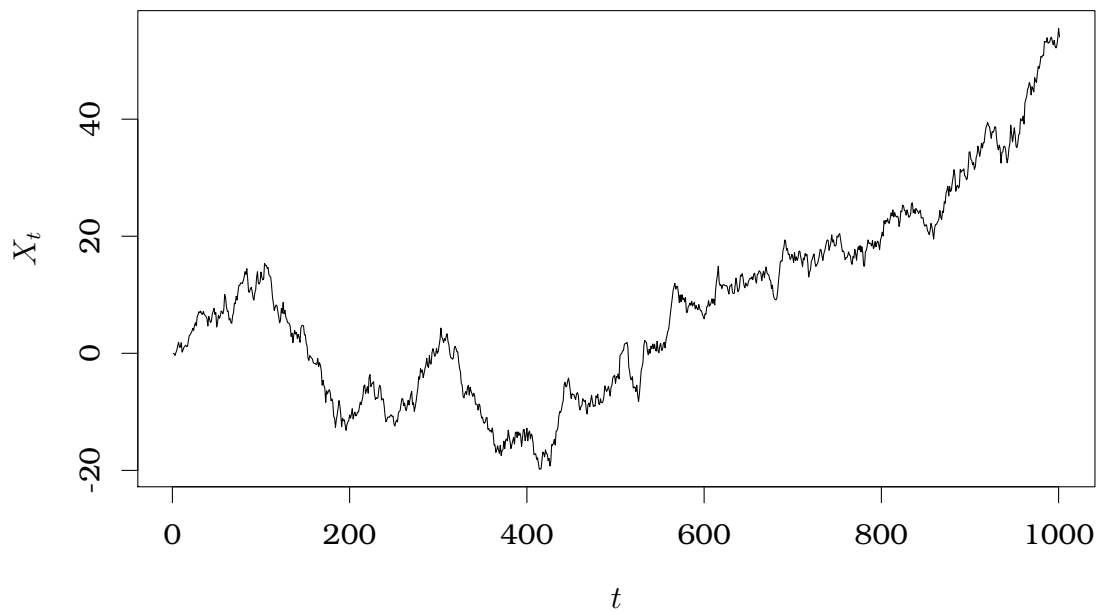
$$X_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (1.11)$$

1.2.4 Το αυτοπαλίνδρομο κινούμενου μέσου μοντέλο ARMA

Συνδυάζοντας τα μοντέλα αυτοπαλινδρόμησης και κινούμενου μέσου προκύπτει μία νέα ομάδα μοντέλων τα ARMA(p,q) για τα οποία ο γενικός τύπος δίνεται από τη Σχέση



Σχήμα 1.1: Υπόδειγμα AR(1) για $t = 1, 2, \dots, 1000$, τιμές παραμέτρων $\phi_0 = 0, \phi_1 = 0.9$ και $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.



Σχήμα 1.2: Υπόδειγμα random walk για $t = 1, 2, \dots, 1000$ και $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1.12,

$$X_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t. \quad (1.12)$$

Όπου οι περιορισμοί στους συντελεστές του μοντέλου προκειμένου αυτό να συγκλίνει στη μακροχρόνια ισορροπία παραμένουν όπως ορίστηκαν για τα μοντέλα AR και MA στα εδάφια 1.2.2 και 1.2.3 αντίστοιχα.

1.2.5 Το γενικευμένο μοντέλο ARIMA

Είναι διαπιστωμένο ότι πολλές φορές οι χρονοσειρές χρηματοοικονομικών προϊόντων εμφανίζουν κατά περιόδους θετική ή αρνητική συσχέτιση ως προς το χρόνο (τάσεις - trends) γεγονός το οποίο αντιτίθεται στην υπόθεση στασιμότητας της χρονοσειράς. Σε αυτές τις περιπτώσεις για να εξαλειφθούν οι τάσεις αυτές χρησιμοποιείται η χρονοσειρά των διαφορών ν - οστής τάξης των τιμών X_t . Για διαφορές πρώτης τάξης οι όροι της χρονοσειράς προκύπτουν σύμφωνα με τη Σχέση 1.13 και για διαφορές ανώτερης τάξης σύμφωνα με τη Σχέση 1.14, όπου $\Delta^0 X_t = X_t$ [16].

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}, \quad (1.13)$$

$$\Delta^\nu X_t = \Delta(\Delta^{\nu-1} X_t). \quad (1.14)$$

Η εφαρμογή του μοντέλου ARMA(p,q) στις διαφορές d τάξης, οι οποίες εξασφαλίζουν τη στασιμότητα της χρονοσειράς, περιγράφει το γενικευμένο μοντέλο ARIMA(p,d,q). Το ARIMA(0,1,0) αποτελεί την απλούστερη μορφή του μοντέλου η οποία δίνεται από τη Σχέση Σχέση 1.15 και περιγράφει μία διαδικασία τυχαίου περιπάτου, όπου η τυχαία μεταβλητή ε_t αποτελεί λευκό θόρυβο.

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i, \quad t \geq 1. \quad (1.15)$$

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη χρήση των μοντέλων ARIMA προτείνεται η κλασική βιβλιογραφία των Box και Jenkins [10].

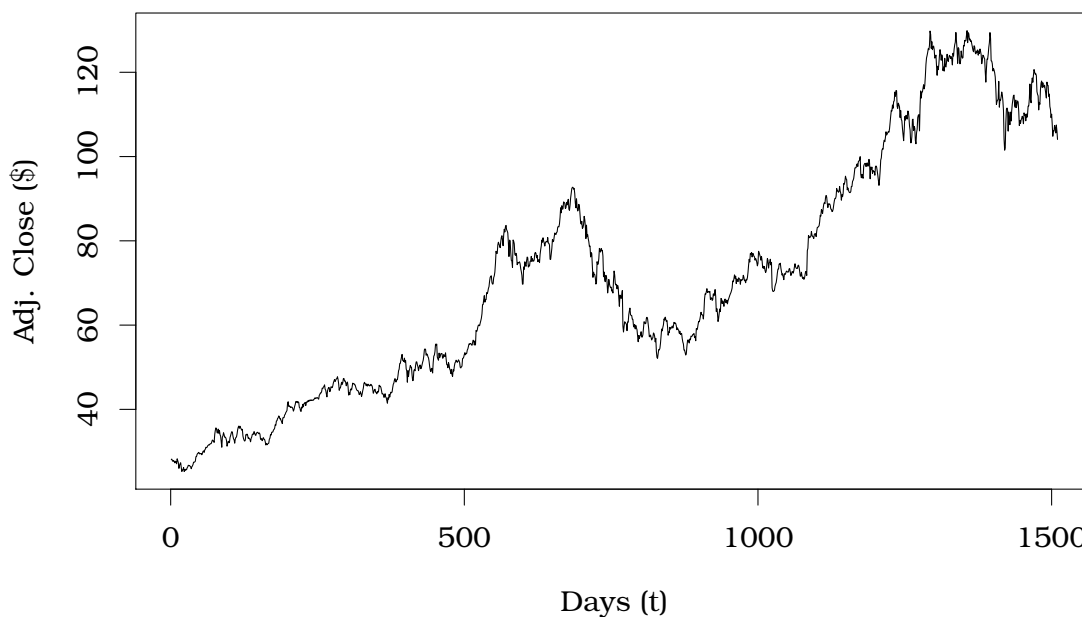
1.2.6 Χρηματοοικονομικές Χρονοσειρές

Η συμπεριφορά των χρονοσειρών των χρηματοοικονομικών μεγεθών παρουσιάζει ιδιαίτερες οι οποίες καθιστούν την μοντελοποίηση τους μέσω στοχαστικών μοντέλων ιδιαίτερα δύσκολη υπόθεση. Οι ιδιαιτερότητες αυτές, οι οποίες περιγράφονται στη διεθνή βιβλιογραφία με τον όρο *stylized facts*, αποτελούν εμπειρικές παρατηρήσεις οι οποίες λόγω της συχνότητας εμφάνισής τους γίνονται de facto αποδεκτές. Οι περισσότερες από αυτές συνοψίστηκαν για πρώτη φορά από τον Mandelbrot B. το 1963 [19]

και εν συνεχεία αποτέλεσαν αντικείμενο εμπειρικών μελετών πολλών ερευνητών. Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσουν ιδιαιτερότητες οι οποίες αφορούν κυρίως τις χρονοσειρές των ημερήσιων τιμών χρηματοοικονομικών μεγεθών, όπως τιμές μετοχών, δεικτών ή ισοτιμιών και οι οποίες συνοψίζονται ως εξής:

Μη στασιμότητα της χρονοσειράς των τιμών.

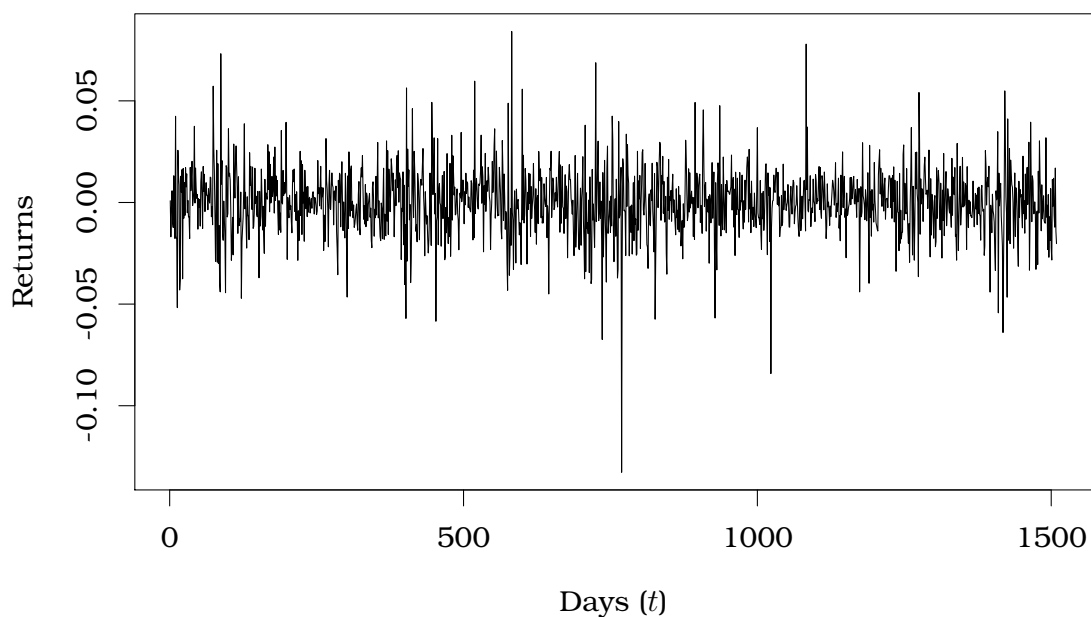
Στα Σχήματα 1.3 και 1.4 παρουσιάζονται οι ημερήσιες τιμές κλεισίματος και οι ημερήσιες αποδόσεις της μετοχής της εταιρείας Apple Inc. για το χρονικό διάστημα 2010 έως 2015. Από το Σχήμα 1.3 υπάρχουν ενδείξεις ότι η χρονοσειρά των τιμών έχει συμπεριφορά τυχαίου περιπάτου ενώ η χρονοσειρά των αποδόσεων παλινδρομεί γύρω από την τιμή μηδέν εμφανίζοντας μεγάλες διακυμάνσεις οι οποίες φαίνεται να έχουν μία σταθερή μέση τιμή όταν αυτή εκτιμάται για μεγάλες χρονικές περιόδους, π.χ. ετησίως.



Σχήμα 1.3: Ημερήσιες τιμές κλεισίματος της μετοχής της εταιρείας Apple Inc για την χρονική περίοδο 2010 έως 2015.

Οι μεταβολές των τιμών δεν αυτοσυσχετίζονται.

Συνήθως οι χρονοσειρές των αποδόσεων παρουσιάζουν στατιστικά μη σημαντική αυτοσυσχέτιση για τα συνήθη επίπεδα σημαντικότητας $\sim 5\%$, όπως φαίνεται και στο



Σχήμα 1.4: Ημερήσιες αποδόσεις της μετοχής της εταιρείας Apple Inc για την χρονική περίοδο 2010 έως 2015.

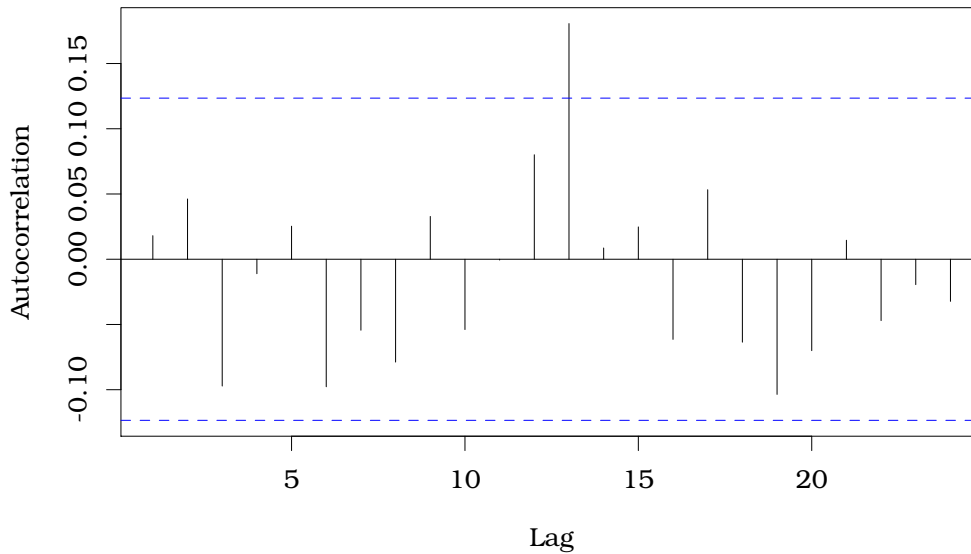
Σχήμα 1.5, συμπεριφορά η οποία είναι παραπλήσια αυτής των χρονοσειρών τυχαίου περιπάτου.

Τα τετράγωνα των αποδόσεων εμφανίζουν ισχυρή αυτοσυσχέτιση.

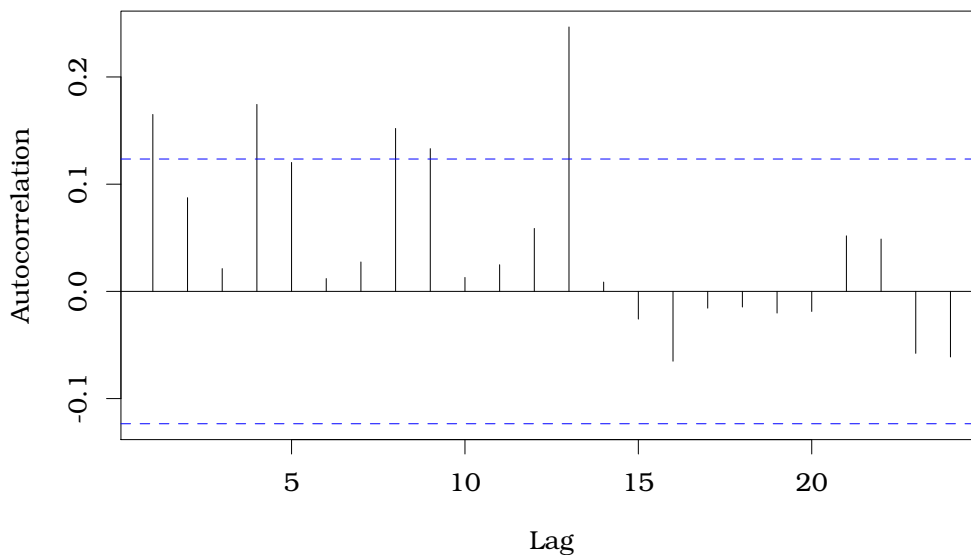
Τα τετράγωνα των αποδόσεων ή οι απόλυτες τιμές αυτών εμφανίζουν στατιστικά σημαντική αυτοσυσχέτιση, για τα συνήθη επίπεδα σημαντικότητας $\sim 5\%$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.6.

Η μεταβλητότητα των αποδόσεων δεν είναι σταθερή.

Η ιδιότητα αυτή φαίνεται στο Σχήμα 1.4 στο οποίο διακρίνονται υπό-περίοδοι έντονων μεταβολών της απόδοσης ενδιάμεσα των οποίων οι μεταβολές είναι ηπιότερες. Αν και αυτές οι υπό-περίοδοι επαναλαμβάνονται εντούτοις δεν φαίνεται να χαρακτηρίζονται από κάποια περιοδικότητα, κάτι το οποίο θα ήταν αντίθετο με την υπόθεση στασιμότητας της χρονοσειράς.



Σχήμα 1.5: Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των ημερήσιων αποδόσεων της μετοχής της εταιρείας Apple Inc κατά το έτος 2010.



Σχήμα 1.6: Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των ημερήσιων αποδόσεων της μετοχής της εταιρείας Apple Inc κατά το έτος 2010.

Η κατανομή των αποδόσεων διαφέρει στατιστικά σημαντικά της κανονικής.

Όπως θα δούμε αναλυτικότερα σε επόμενο Κεφάλαιο, η μορφή της κατανομής των αποδόσεων αποκλίνει στατιστικά σημαντικά από την κανονική κατανομή, και συγκε-

κριμένα εμφανίζει αιχμηρότερη κορυφή και πλατύτερες ουρές, με τους κλασικούς στατιστικούς ελέγχους κανονικότητας Kolmogorov Smirnov, Shapiro-Wilk's, Jarque - Bera, έλεγχο χ^2 κ.α. να απορρίπτουν την κανονικότητα σε κάθε 'λογικό' επίπεδο εμπιστοσύνης. Οι πειραματικές κατανομές των αποδόσεων συνήθως εμφανίζουν διογκωμένες ουρές, δηλαδή φθίνουν με ρυθμό μικρότερο από $\exp(-x^2/2)$, ενώ για τιμές πλησίον του μηδέν εμφανίζουν αιχμηρότερες κορυφές σε σχέση με την κανονική κατανομή, και σε αυτή την περίπτωση καλούνται λεπτόκυρτες.

Το μέτρο απόκλισης της καμπυλότητας της πειραματικής κατανομής από την κανονική λέγεται κύρτωση (kurtosis) και ορίζεται ως ο λόγος της τέταρτης κεντρικής ροπής προς το τετράγωνο της μεταβλητότητας του δείγματος, όπως φαίνεται στη Σχέση 1.16,

$$\gamma_4(x) = \frac{E[(x - \mu)^4]}{\sigma^4}. \quad (1.16)$$

Αντίστοιχα η ασυμμετρία (skewness) της πειραματικής κατανομής ως προς την κανονική δίνεται από το μέτρο της τρίτης κεντρικής ροπής προς την τρίτη δύναμη της τυπικής απόκλισης του δείγματος, σύμφωνα με τη Σχέση 1.17,

$$\gamma_3(x) = \frac{E[(x - \mu)^3]}{\sigma^3}. \quad (1.17)$$

Αύξηση του χρονικού διαστήματος μεταξύ των παρατηρήσεων της απόδοσης (π.χ. εβδομαδιαίες παρατηρήσεις αντί ημερήσιων) τείνει να ελαττώσει τη λεπτοκυρτότητα της κατανομής φέρνοντάς την πλησιέστερα στην κανονική.

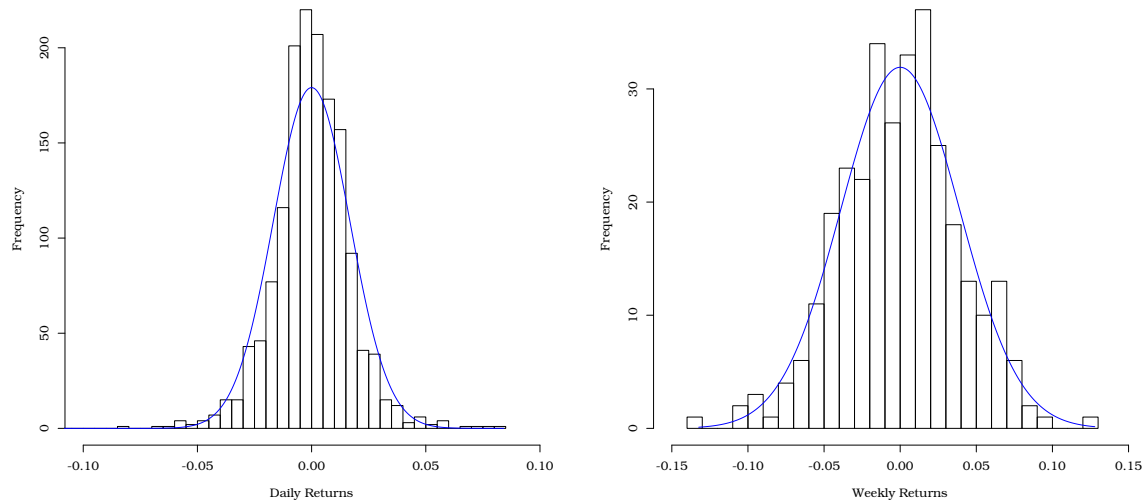
Στο Σχήμα 1.7 παρουσιάζονται τα ιστογράμματα συχνοτήτων των ημερήσιων και των εβδομαδιαίων αποδόσεων της μετοχής της εταιρείας Apple Inc για το χρονικό διάστημα 2010 - 2015 και στον Πίνακα 1.1 τα αποτελέσματα στατιστικών ελέγχων κανονικότητας, στα οποία ελέγχονται οι υποθέσεις της Σχέσης 1.18,

$$H_0 : x_t \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad (1.18)$$

$$H_1 : x_t \notin \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Πίνακας 1.1: Τιμές του p-value στατιστικών ελέγχων κανονικότητας.

Στατιστικός Έλεγχος	p-value	
	Ημερήσιες αποδόσεις	Εβδομαδιαίες
Kolmogorov-Smirnov	$< 2.2 \cdot 10^{-16}$	$< 2.2 \cdot 10^{-16}$
Shapiro-Wilk's	$< 2.2 \cdot 10^{-16}$	0.7211
Jarque - Bera	$< 2.2 \cdot 10^{-16}$	0.5533
χ^2	$1.531 \cdot 10^{-8}$	0.8867



Σχήμα 1.7: Ιστογράμματα συχνοτήτων ημερήσιων και των εβδομαδιαίων αποδόσεων της μετοχής της εταιρείας Apple Inc για την περίοδο 2010 - 2015.

Οι θετικές και οι αρνητικές μεταβολές των τιμών επιδρούν με διαφορετική βαρύτητα στη μεταβλητότητα.

Η συμπεριφορά αυτή περιγράφεται με τον όρο leverage (μόχλευση) και λαμβάνεται υπ' όψιν στα μοντέλα EGARCH και TARARCH όπως θα δούμε στο εδάφιο 3.5.

Συχνά οι αποδόσεις επηρεάζονται λόγω ημερολογιακών γεγονότων

Οι ημέρες πριν ή μετά από περιόδους διακοπών είναι πιθανόν να επηρεάσουν τις αποδόσεις χρηματοοικονομικών προϊόντων. Έχει παρατηρηθεί ότι η μεταβλητότητα των αποδόσεων αυξάνεται μετά από περιόδους όπου οι αγορές είναι κλειστές και δεν πραγματοποιούνται συναλλαγές, με τη συμπεριφορά αυτή να αποδίδεται στην πληροφορία η οποία συσσωρεύεται κατά τη διάρκεια της διακοπής. Η εξάρτηση των αποδόσεων από ημερολογιακά γεγονότα χαρακτηρίζεται ως εποχικότητα.

Κεφάλαιο 2

Μέτρα κινδύνου

Η ανάγκη διαχείρισης των χρηματοοικονομικών κινδύνων οδήγησε στην ανάγκη εκτίμησης των κινδύνων αυτών. Στη μέχρι σήμερα βιβλιογραφία δεν υφίσταται μονοσήμαντος ορισμός της έννοιας του χρηματοοικονομικού κινδύνου καθώς ο όρος καλύπτει ένα ευρύ φάσμα οικονομικών συναλλαγών. Ένας γενικός ορισμός, ο οποίος είναι ευρέως αποδεκτός, είναι ότι ο όρος *‘κίνδυνος (risk)’* εκφράζει το ενδεχόμενο απώλειας συγκεκριμένου ποσοστού μίας επένδυσης. Εντούτοις προκειμένου να γίνει διαχείριση του κινδύνου μίας επένδυσης θα πρέπει πρώτα ο κίνδυνος αυτός να μπορέσει να μετρηθεί και για να γίνει αυτό θα πρέπει να οριστεί κατάλληλο μέτρο η σύγκριση με το οποίο θα αξιολογεί την επικινδυνότητα μιας επένδυσης.

Η δυνατότητα μέτρησης και εν συνεχεία πρόβλεψης του κινδύνου γίνεται ολοένα και πιο επιτακτική στο πλαίσιο της διοίκησης κινδύνου (risk management) τραπεζών και άλλων φορέων οι οποίοι εμπλέκονται στις χρηματοοικονομικές αγορές. Η ανάγκη ποσοτικοποίησης του κινδύνου πηγάζει από την ανάγκη προσδιορισμού του κεφαλαίου που θα πρέπει να κατέχει ένας χρηματοοικονομικός φορέας ως προστασία των επενδυτών έναντι απρόβλεπτων απωλειών.

Η μέτρηση χρηματοοικονομικών κινδύνων έχει γίνει επιτακτική ανάγκη τις τελευταίες δύο δεκαετίες λόγω της εφαρμογής οδηγιών οι οποίες για πρώτη φορά θεσπίστηκαν το 1988 από την επιτροπή τραπεζικής εποπτείας (BCBS) στη Βασιλεία της Ελβετίας, απ’ όπου η πρώτη αυτή συμφωνία πήρε και το όνομά της Basle I Accord ή BIS Accord*. Πριν την εφαρμογή της Basle I το 1992 η απαιτούμενη κεφαλαιακή επάρκεια των τραπεζών καθορίζονταν από ομοιόμορφα σταθερά κάτω όρια ανεξάρτητα από το επενδυτικό ρίσκο και τις θέσεις εκτός ισολογισμού κάθε τράπεζας. Η πρώτη αυτή συμφωνία καθόρισε μία σειρά οδηγιών προσδιορισμού της ελάχιστης κεφαλαιακής επάρκειας οι οποίες ήταν αλληλένδετες με το χρηματοπιστωτικό κίνδυνο (credit risk) κάθε τράπεζας. Εν συνεχεία το 1996 η συμφωνία αυτή επεκτάθηκε συμπεριλαμβάνοντας και τον κίνδυνο αγοράς (market risk). Το 2004 εκδόθηκε η Basle II Accord η οποία εφαρ-

*<https://www.bis.org>

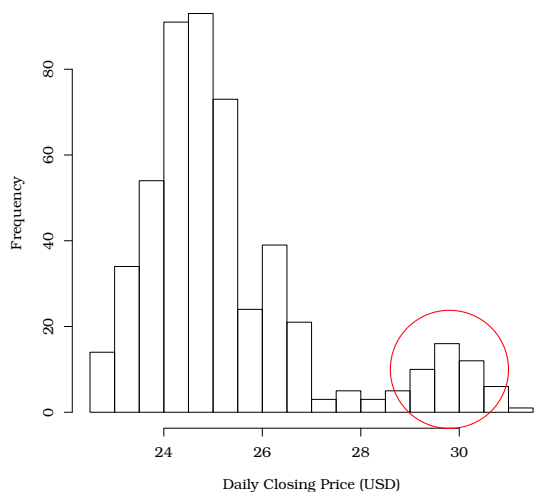
μόστηκε το 2008 και η οποία περιλαμβάνει ακόμα περισσότερες κατηγορίες κινδύνου στις οποίες υπόκειται το τραπεζικό σύστημα καθώς και οδηγίες στον τρόπο λειτουργίας των τραπεζών. Η οικονομική κρίση που ξεκίνησε το 2008 στις Η.Π.Α. και εν συνεχεία επεκτάθηκε στην Ευρώπη οδήγησε στην τρίτη συμφωνία Basle III η οποία δεν υπεισέρχεται στις οδηγίες των Basle I & II αλλά επικεντρώνεται στον κίνδυνο της μαζικής ανάληψης καταθέσεων (bank run risk) η οποία πρόκειται να εφαρμοστεί το 2019. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα σημαντικότερα μέτρα κινδύνου τα οποία χρησιμοποιούνται στην οικονομική επιστήμη, αφενός για την περίπτωση ενός μόνο αγαθού, και αφετέρου για την περίπτωση χαρτοφυλακίου.

2.1 Τυπική απόκλιση αποδόσεων (Volatility)

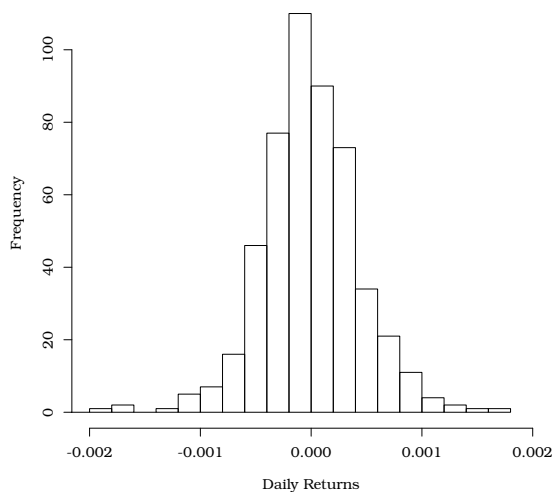
Είναι σύνηθες οι χρονοσειρές της αξίας $\{P_t\}$ των χρηματοοικονομικών προϊόντων να εμφανίζουν τη μορφή τυχαίου περιπάτου, γεγονός το οποίο μεταξύ άλλων σημαίνει ότι η καλύτερη πρόβλεψη για την αυριανή τιμή είναι η τιμή που έχει το προϊόν σήμερα. Δεδομένου ότι οι χρονοσειρές τυχαίου περιπάτου δεν οριοθετούνται, η πρόβλεψη της μελλοντικής πορείας της χρονοσειράς είναι ιδιαίτερα δύσκολη αξιολογώντας μόνο τις τιμές της αξίας P_t . Στα Σχήματα 2.1α' και 2.1β' παρουσιάζονται τα ιστογράμματα συχνοτήτων των ημερήσιων τιμών P_t και των ημερήσιων αποδόσεων R_t αντίστοιχα για τη μετοχή της εταιρείας General Electric κατά τα έτη 2014 και 2015.

Από τα σχήματα αυτά γίνεται κατανοητό ότι στην περίπτωση των αποδόσεων η κατανομή των συχνοτήτων έχει σχήμα οικείο σε σχέση με τις γνωστές από τη στατιστική κατανομές, σε αντίθεση με την κατανομή των συχνοτήτων των τιμών της μετοχής. Θεωρώντας λοιπόν γνωστή την κατανομή των αποδόσεων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις στατιστικές παραμέτρους θέσης και διασποράς προκειμένου να περιγράψουμε τη συμπεριφορά τους. Στις περιπτώσεις αυτές η προσέγγιση ονομάζεται παραμετρική και εξαρτάται άμεσα από την υπόθεση κατανομής.

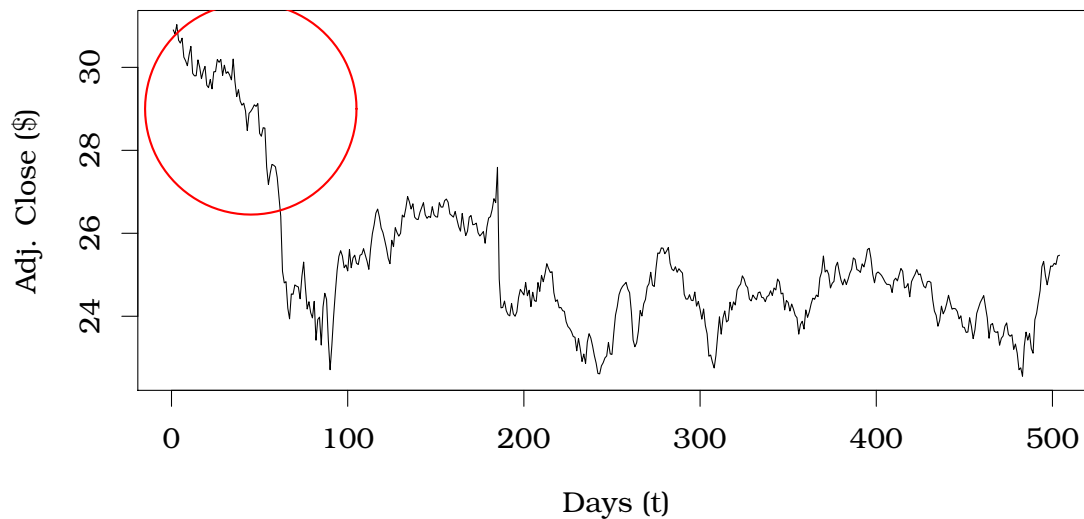
Στο σημείο αυτό μία γόνιμη παρατήρηση προκύπτει από το Σχήμα 2.1α', στο οποίο διακρίνεται καθαρά μία δευτερή προεξέχουσα κορυφή στην περιοχή τιμών κλεισίματος της μετοχής περί τα 29 – 30 \$. Η συμπεριφορά αυτή, η οποία δεν είναι συνήθης για τις χρονοσειρές των τιμών χρηματοοικονομικών αγαθών, είναι πιθανόν να αποδοθεί σε απότομη μεταβολή της περιοχής τιμών στην οποία κινείται η χρονοσειρά. Το διάγραμμα διασποράς των τιμών κλεισίματος της μετοχής (Σχήμα 2.1γ') ενισχύει τον παραπάνω συλλογισμό καθώς παρατηρούμε ότι αρχικά η χρονοσειρά κινείται σε περιοχή υψηλών τιμών (29 – 30 \$), εν συνεχεία εντός μικρού χρονικού διαστήματος παρατηρείται σημαντική πτώση μετά την οποία η χρονοσειρά συνεχίζει να κινείται τυχαία σε μία περιοχή χαμηλότερων τιμών (24 – 25 \$). Είναι κατανοητό ότι οι δύο αυτές περιοχές αντιστοιχούν στις προεξέχουσες συχνότητες του Σχήματος 2.1α'.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 2.1: Ιστογράμματα των ημερήσιων τιμών κλεισίματος (2.1α) και των ημερήσιων αποδόσεων (2.1β), και διάγραμμα διασποράς των ημερήσιων τιμών κλεισίματος 2.1γ της μετοχής της εταιρείας General Electric κατά το χρονικό διάστημα 2014 - 2015.

Θεωρώντας $\{R_t\}$ τη χρονοσειρά των ημερήσιων αποδόσεων η υπό συνθήκη μεταβλητότητα σ_t^2 δίνεται, κατά τα γνωστά από τη στατιστική, από τη Σχέση 2.1 και η τυπική απόκλιση σ_t από την τετραγωνική ρίζα αυτής.

$$\sigma_t^2 = \sum_{t=1}^n \frac{(R_t - \bar{R})^2}{n-1}. \quad (2.1)$$

Η μεταβλητότητα ενός αγαθού *volatility* εκφράζεται ως η ετησιοποιημένη τυπική απόκλιση σ_t των ημερήσιων αποδόσεων R_t , σύμφωνα με τη Σχέση 2.2, όπου A οι ημέρες συναλλαγής ανά έτος· συνήθως λαμβάνεται $A = 252$.

$$\sigma_T = \sigma_t \sqrt{A}. \quad (2.2)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι οι ημερήσιες αποδόσεις είναι ανεξάρτητες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν συμμετρική κατανομή (i.i.d.) τότε η τυπική απόκλιση h ημερών εκτιμάται ως το γινόμενο $\sqrt{h}\sigma_t$. Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω η γενική μορφή της εκτίμησης της μεταβλητότητας h -ημερών ενός αγαθού δίνεται από τη Σχέση 2.3, όπου για πρόβλεψη της ημερήσιας μεταβλητότητας προκύπτει η Σχέση 2.2,

$$\sigma_h = \sigma_t \sqrt{A/h} = \sigma_t \sqrt{252/h}. \quad (2.3)$$

Η μεταβλητότητα αποτελεί ένα πρώτο μέτρο κινδύνου στις οικονομικές αναλύσεις. Η Σχέση 2.3 επιτρέπει τη δια-σύγκριση μεταβλητοτήτων οι οποίες αναφέρονται σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα h καθώς η αύξηση της τυπικής απόκλισης σ_t με την αύξηση του χρονικού διαστήματος αντισταθμίζεται από τη μείωση του παράγοντα ετησιοποίησης $\sqrt{A/h}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η μοντελοποίηση των ημερήσιων αποδόσεων ενός τίτλου γίνεται σύμφωνα με τη Σχέση 2.4, όπου μ_t και σ_t οι εκτιμήσεις της απόδοσης και της τυπικής απόκλισης αντιστοίχως, σύμφωνα με τα διαθέσιμα δεδομένα μέχρι τη χρονική στιγμή t . Με ε_{t+1} συμβολίζεται ο λευκός θόρυβος (white noise), του οποίου οι τιμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και προέρχονται από τυπική κανονική κατανομή.

$$R_{t+1} = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_{t+1}. \quad (2.4)$$

Το παραπάνω μοντέλο είναι απλουστευμένο καθώς οι υποθέσεις ότι τα μ και σ είναι σταθερές παράμετροι και ότι το ε αποτελεί λευκό θόρυβο δεν επαληθεύονται στις περισσότερες περιπτώσεις πραγματικών δεδομένων.

2.2 Αξία σε κίνδυνο Value at Risk

Μία από τις σημαντικότερες εξελίξεις στον τομέα της διαχείρισης κινδύνου (risk management) είναι η υλοποίηση μίας νέας κλάσης μέτρων κινδύνου για τη συγκεντρωτική μέτρηση του κινδύνου διαφορετικών θέσεων χρησιμοποιώντας ένα κοινό εννοιολογικό πλαίσιο, η οποία πρωτοεμφανίστηκε στις αρχές της δεκαετίας του 90. Αν και τα μέτρα αυτά απαντώνται με διάφορες μορφές και ονόματα όπως για παράδειγμα το Capital at Risk (CaR) της Bankers Trust, το Value at Risk (VaR) και το Daily Earnings at Risk (DEaR) της J.P. Morgan ή μέτρα άλλων οίκων όπως τα Dollars at Risk (DaR) και Money at Risk (MaR) όλα έχουν τη βάση του σε ένα κοινό ορισμό ο οποίος αφορά την αξία σε κίνδυνο (Value at Risk) ή VaR το οποίο αποτελεί ένα ευρείας αποδοχής μεταξύ των οικονομικών οργανισμών μέτρο κινδύνου. Το 1991 η τράπεζα J.P. Morgan δημοσίευσε μία μέθοδο εκτίμησης του VaR χαρτοφυλακίου η οποία είναι γνωστή ως RiskMetrics [1]. Το μέτρο της αξίας σε κίνδυνο VaR σήμερα αποτελεί ένα αναντικατάστατο εργαλείο το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως από τράπεζες, ρυθμιστικούς οργανισμούς και διαχειριστές χαρτοφυλακίων [18].

Η αξία σε κίνδυνο ή VaR ορίζεται ως η εκτίμηση της μέγιστης πιθανής απώλειας αξίας -χρημάτων μίας θέσης ή ενός χαρτοφυλακίου εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος και με συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Δηλαδή το VaR ορίζεται ως ο μέγιστος αριθμός p για τον οποίο ισχύει η Σχέση 2.5,

$$P(P_t - P_{t-1} < -VaR(p)) = p. \quad (2.5)$$

Η ποσοστιαία έκφραση της οποίας έχει ως εξής:

$$P(R_t < -VaR\%(p)) = p. \quad (2.6)$$

Πρόκειται δηλαδή για το αρνητικό p ποσοστημόριο της κατανομής των τιμών ή των αποδόσεων αντίστοιχα, εφόσον ενδιαφερόμαστε για τις πιθανές απώλειες. Θεωρώντας f_q τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποδόσεων R_t τότε από τη Σχέση 2.6 προκύπτει η πιθανότητα οι απώλειες να είναι μεγαλύτερες από $-VaR$.

$$p = \int_{-\infty}^{-VaR(p)} f_q(x) dx. \quad (2.7)$$

Για παράδειγμα ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο έχει 5% πιθανότητα, δηλαδή μία ημέρα κάθε 20 ημέρες, να έχει απώλειες τουλάχιστον 1 M€, τότε αυτό έχει VaR ίσο με 1 M€.

2.2.1 Επίπεδο εμπιστοσύνης

Σύμφωνα με τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι για την εκτίμηση του VaR αρχικά θα πρέπει να καθοριστεί η πιθανότητα p οι απώλειες να υπερβούν το VaR, με τις συνήθεις τιμές να κυμαίνονται μεταξύ 1 – 5%. Η πιθανότητα αυτή είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης της στατιστικής μεθόδου και συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα α . Το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης κατά τα γνωστά από τη στατιστική προκύπτει ίσο με $1 - \alpha$. Είναι κατανοητό ότι μειώνοντας το επίπεδο εμπιστοσύνης α προκύπτουν υψηλότερες τιμές του μέτρου VaR , οι οποίες αντιστοιχούν υψηλότερες απώλειες με μικρότερη όμως πιθανότητα εμφάνισης. Οι εποπτικές αρχές εφαρμόζουν επίπεδο εμπιστοσύνης 1% για τον κίνδυνο αγοράς και 99.9% για την περίπτωση πιστωτικού ή λειτουργικού κινδύνου. Το πολύ χαμηλό επίπεδο εμπιστοσύνης έχει ως άμεσο αποτέλεσμα τη συρρίκνωση του πλήθους των συμβάντων κάτω από την τιμή του VaR γεγονός το οποίο επηρεάζει την εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο στις περιπτώσεις όπου εφαρμόζονται μη παραμετρικές τεχνικές, όπως θα δούμε αναλυτικότερα σε επόμενο Κεφάλαιο.

2.2.2 Χρονική περίοδος

Εν συνεχεία θα πρέπει να προσδιοριστεί η χρονική περίοδος για την οποία εκτιμώνται οι πιθανές απώλειες. Κατά τη διαχείριση χαρτοφυλακίων η χρονική περίοδος συνήθως ορίζεται μία ημέρα. Στις περιπτώσεις θεσμικών επενδυτών η περίοδος αυτή επεκτείνεται ενώ υπάρχουν και περιπτώσεις όπου εκτιμάται το VaR κατά τη διάρκεια μίας ημέρας συναλλαγών, με χρονικό περιθώριο συνήθως μία ώρα.

Το μέτρο της αξίας σε κίνδυνο αυξάνει όσο αυξάνει η αντίστοιχη χρονική περίοδος. Η εκτίμηση του VaR χρονικής περιόδου T ημερών γίνεται με παρέκταση (extrapolation) των εκτιμήσεων του ημερήσιου VaR, σύμφωνα με τη Σχέση 2.8, υποθέτοντας ότι οι αποδόσεις είναι τυχαίες μεταβλητές οι οποίες προέρχονται από την ίδια κατανομή και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (i.i.d.).

$$VaR(T \text{ ημέρες}) = VaR(\text{ημερήσιο}) \cdot \sqrt{T}. \quad (2.8)$$

Για την περίπτωση όπου οι τιμές των αποδόσεων δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά εμφανίζουν συντελεστή συσχέτισης ρ τότε το υπόριζο T του πολλαπλασιαστή της Σχέσης 2.8 εκτιμάται σύμφωνα με τη Σχέση 2.9,

$$T' = T + 2(T - 1)\rho + 2(T - 2)\rho^2 + 2(T - 3)\rho^3 + \dots + 2\rho^{n-1}. \quad (2.9)$$

Η επίδραση του συντελεστή συσχέτισης συναρτήσκει του χρονικού ορίζοντα συνοψίζεται στον Πίνακα 2.1

Οι εποπτικές αρχές εφαρμόζουν χρονική περίοδο μίας ημέρας για την περίπτωση

Πίνακας 2.1: Επίδραση του συντελεστή συσχέτισης στην εκτίμηση του $VaR T$ ημερών σε σχέση με το ημερήσιο VaR .

	$T = 1$	$T = 2$	$T = 5$	$T = 10$	$T = 50$	$T = 250$
$\rho = 0.00$	1.0	1.41	2.24	3.16	7.07	15.81
$\rho = 0.05$	1.0	1.45	2.33	3.31	7.43	16.62
$\rho = 0.10$	1.0	1.48	2.42	3.46	7.80	17.47
$\rho = 0.20$	1.0	1.55	2.62	3.79	8.62	19.35

εκτίμησης του κινδύνου της αγοράς και ενός έτους για την περίπτωση εκτίμησης του πιστωτικού ή του λειτουργικού κινδύνου.

2.2.3 Κατανομή αποδόσεων

Τέλος θα πρέπει να προσδιοριστεί η κατανομή των αποδόσεων του υπ' όψιν τίτλου ή χαρτοφυλακίου. Η συνήθης πρακτική είναι να γίνεται εκτίμηση της κατανομής χρησιμοποιώντας παλαιότερες παρατηρήσεις και γνωστές κατανομές.

Το ημερήσιο VaR σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% εκφράζει τη μέγιστη πιθανή απώλεια της επόμενης ημέρας αν εξαιρεθεί το 5% των χαμηλότερων πιθανών αποδόσεων ή εναλλακτικά την ελάχιστη πιθανή απώλεια της επόμενης ημέρας λαμβάνοντας υπ' όψιν το 5% των χαμηλότερων πιθανών αποδόσεων.

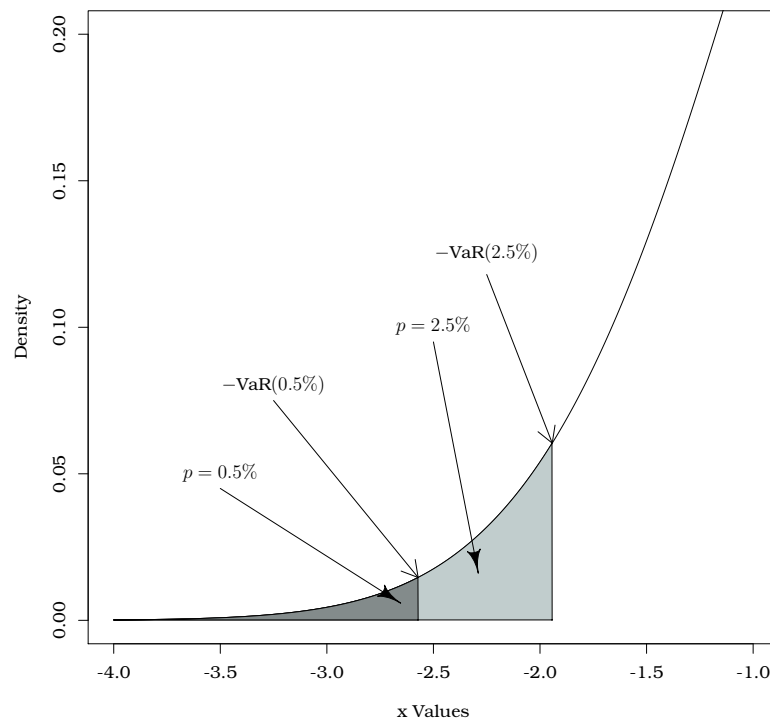
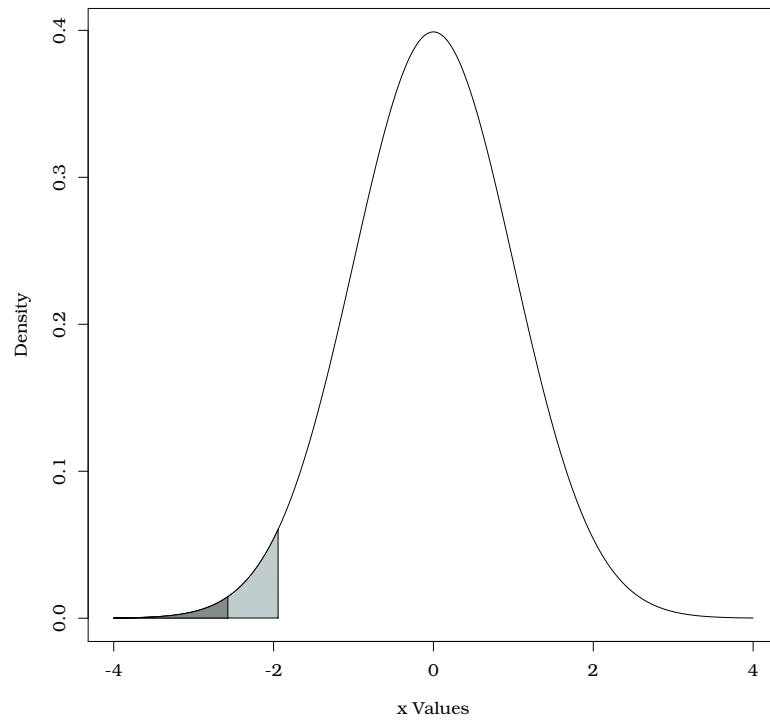
Η αξία σε κίνδυνο ως μέτρο κινδύνου, έχει το χαρακτηριστικό ότι δίνει απ' ευθείας ένα χρηματικό ποσό και όχι μία πιθανότητα, με αποτέλεσμα να γίνεται ευκολότερα κατανοητό σε σχέση με ποσότητες οι οποίες σχετίζονται με την ίδια την κατανομή πιθανότητας όπως π.χ. η διασπορά.

Η εφαρμογή του VaR δεν προϋποθέτει κανονικότητα των αποδόσεων αλλά εφαρμόζεται για οποιαδήποτε κατανομή αρκεί να μπορεί να υπολογιστεί η μέση τιμή αυτής. Στην περίπτωση όπου οι αποδόσεις προέρχονται από κανονική κατανομή τότε το VaR ως μέτρο κινδύνου ταυτίζεται με τη μεταβλητότητα (Volatility).

2.3 Δεσμευμένη ή υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο (Conditional VaR or Expected Shortfall)

Ένα από τα μειονεκτήματα του VaR είναι ότι αγνοεί τις απώλειες με μικρότερη πιθανότητα εμφάνισης, από την πιθανότητα p για την οποία εκτιμάται. Δηλαδή δεν συνυπολογίζει τις απώλειες από την αριστερή ουρά της κατανομής των αποδόσεων (Σχήμα 2.2), οι οποίες θεωρητικά μπορούν να φτάσουν το 100% του χαρτοφυλακίου.

Το κενό αυτό έρχεται να καλύψει ένα παραπλήσιο μέτρο κινδύνου, το οποίο ονο-



Σχήμα 2.2: Σχηματική απεικόνιση της αξίας σε κίνδυνο VaR 0.5% και 2.5% για την περίπτωση κανονικής κατανομής.

μάζεται conditional VaR ή CVaR και το οποίο είναι προσανατολισμένο στην εκτίμηση ακραίων αρνητικών αποδόσεων. Αν λοιπόν το VaR αξιολογεί το πόσο πιθανό είναι ένα χαρτοφυλάκιο να χάσει τουλάχιστον 1 Μ€ τότε το CVaR αξιολογεί το μέγεθος της απώλειας όταν αυτή υπερβεί το 1 Μ€.

Το CVaR ορίζεται από τη Σχέση 2.10 και εκτιμάται ως το άθροισμα του VaR και του σταθμισμένου μέσου των απωλειών οι οποίες υπερβαίνουν το VaR. Δηλαδή εκφράζει το σταθμισμένο μέσο της σκιασμένης περιοχής του Σχήματος 2.2.

$$CVaR = E[R_t | R_t < -VaR_{\%}(p)]. \quad (2.10)$$

Η μαθηματική έκφραση του CVaR δίνεται από τη Σχέση 2.11 [12]

$$CVaR(p) = - \int_{-\infty}^{-VaR(p)} x f_{VaR}(x) dx, \quad (2.11)$$

όπου για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{VaR}(\cdot)$ ισχύει η Σχέση 2.12,

$$1 = \int_{-\infty}^{-VaR(p)} f_{VaR}(x) dx = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{-VaR(p)} f_q(x) dx. \quad (2.12)$$

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι η εκτίμηση του CVaR δεν μπορεί να είναι κατ' απόλυτη τιμή χαμηλότερη από την εκτίμηση του VaR.

Κεφάλαιο 3

Τεχνικές πρόβλεψης κινδύνου

Το μέτρο της αξίας σε κίνδυνο VaR μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διαχείριση κινδύνου αγοράς (market risk), πιστωτικού κινδύνου (credit risk), λειτουργικού ή ασφαλιστικού κινδύνου (operational or insurance risk). Η αξία σε κίνδυνο μπορεί να εκτιμηθεί με διάφορες τεχνικές οι οποίες στη διεθνή βιβλιογραφία κατηγοριοποιούνται κατά περίπτωση. Μία χρήσιμη κατηγοριοποίηση είναι των Miura και Oue [20] η οποία βασίζεται τις υποθέσεις κατανομής και εξάρτησης των εξεταζόμενων μεγεθών και η οποία συνοψίζεται στον Πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.1: Κατηγοριοποίηση μεθοδολογιών εκτίμησης αξίας σε κίνδυνο σύμφωνα με τους Miura και Oue [20].

	Normal	Non-Normal	Non-Parametric
i.i.d.	Variance - Covariance & Equally Weighttted Moving Average		Historical Simulation
Time Dependence	Exponentially Weighted Moving Average & GARCH	Exponentially Weighted Moving Average & GARCH	

3.1 Μη παραμετρικό VaR

3.1.1 Ιστορική αναδρομή (Historical simulation)

Η ιστορική αναδρομή (historical simulation) αποτελεί μία μη παραμετρική τεχνική πρόβλεψης κινδύνου, η οποία βασίζεται στην υπόθεση ότι η πρόσφατη παρελθοντική συμπεριφορά ενός τίτλου ή ενός χαρτοφυλακίου είναι πιθανό να επαναληφθεί και στο

προσεχές μέλλον.

Η τεχνική αυτή είναι σχετικά απλή, εύκολη στην εφαρμογή και την κατανόησή της. Ως μη παραμετρική τεχνική είναι ανεξάρτητη από την κατανομή την οποία ακολουθούν οι αποδόσεις R_t και ως εκ τούτου μπορεί να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις όπου παρατηρούνται σημαντικές αποκλίσεις αποδόσεων από την κανονική κατανομή, ιδιαίτερα στην αριστερή ουρά της κατανομής.

Το σημαντικότερο μειονέκτημα της τεχνικής αυτής είναι ότι η εκτίμηση του VaR εξαρτάται εξ ολοκλήρου από το δείγμα των παρελθοντικών τιμών, το οποίο μπορεί να περιλαμβάνει ακραίες τιμές με πολύ χαμηλή πιθανότητα εμφάνισης στο εγγύς μέλλον. Επιπλέον η μέγιστη πρόβλεψη απωλειών είναι άνω φραγμένη από τη μέγιστη 'ιστορική' απώλεια η οποία βρίσκεται στο δείγμα μας.

Υποθέτοντας N το πλήθος ιστορικές τιμές P_t ενός τίτλου δηλαδή $N - 1$ τιμές παρελθοντικών αποδόσεων R_t , τότε η αξία σε κίνδυνο με πιθανότητα p , ($VaR(p)$) δίνεται από την $(N - 1) \cdot p$ τιμή των διατεταγμένων κατ' αύξουσα σειρά αποδόσεων R_t πολλαπλασιασμένη με τη συνολική αξία του τίτλου. Η συγκεκριμένη μέθοδος υποθέτει στασιμότητα της χρονοσειράς των αποδόσεων και απαιτεί μεγάλα δείγματα προκειμένου αυτά να είναι αντιπροσωπευτικά.

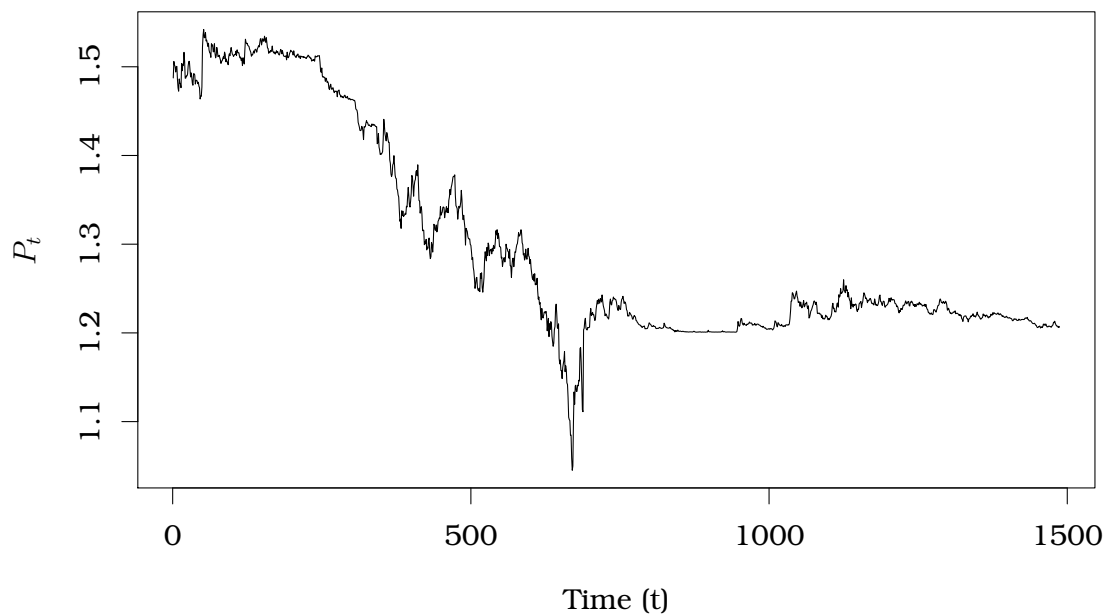
Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται ότι αύξηση της πιθανότητας p , δηλαδή του διαστήματος εμπιστοσύνης επηρεάζει σημαντικά την εκτίμηση του VaR λόγω έλλειψης δεδομένων, όπως αναφέρθηκε και στο εδάφιο 2.2. Επί παραδείγματι για διάστημα εμπιστοσύνης $p = 1 - \alpha = 99.99\%$ και χρονικό διάστημα μίας εργάσιμης ημέρας θεωρητικά απαιτείται δείγμα ιστορικών δεδομένων πλήθους $n = 10,000$ ημερών προκειμένου να υπάρχει ένα σημείο με πιθανότητα εμφάνισης 0.01% .

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα σύντομο παράδειγμα εκτίμησης του VaR για την περίπτωση ισοτιμίας Ευρώ (EUR) - Ελβετικού φράγκου (CHF). Τα 'ιστορικά' δεδομένα αποτελούνται από ημερήσιες τιμές της ισοτιμίας για την περίοδο από 02.01.2009 έως 20.10.2014, έτσι όπως αυτές έχουν ανακοινωθεί από την Κεντρική Ευρωπαϊκή Τράπεζα*.

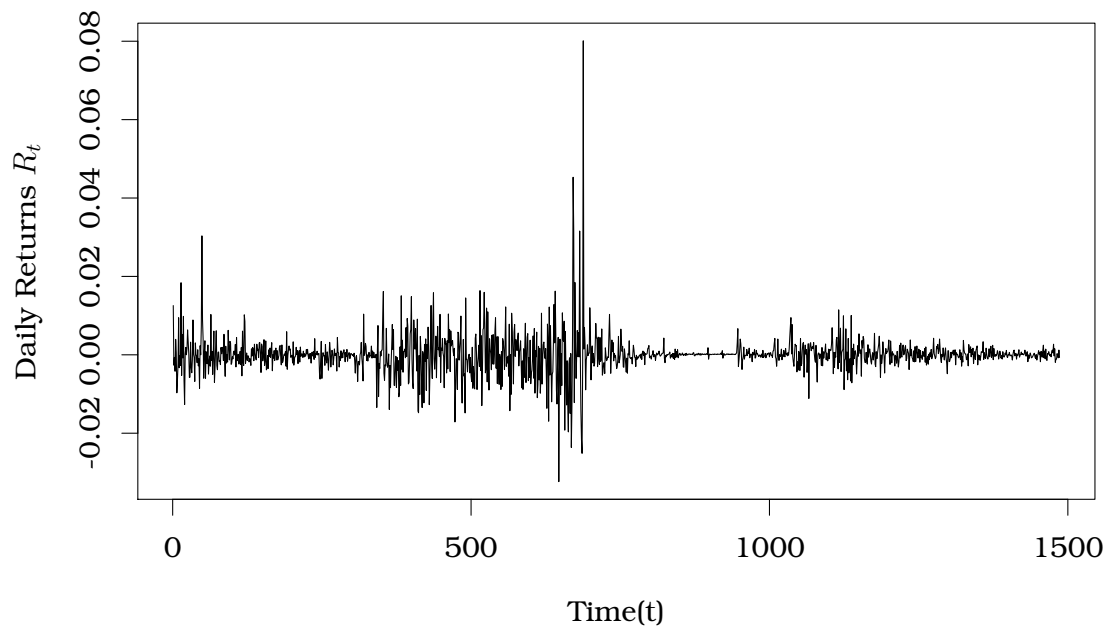
Συλλογή ιστορικών δεδομένων

Για την περίοδο ενδιαφέροντος από τις ημερήσιες ισοτιμίες P_t (Σχήμα 3.1) εκτιμάμε σύμφωνα με τη σχέση 1.1 τις τιμές της ημερήσιας απόδοσης R_t του Ελβετικού φράγκου (Σχήμα 3.2), οι οποίες εφεξής θα αναφέρονται και με τον όρο 'παρατηρήσεις'.

*www.ecb.europa.eu



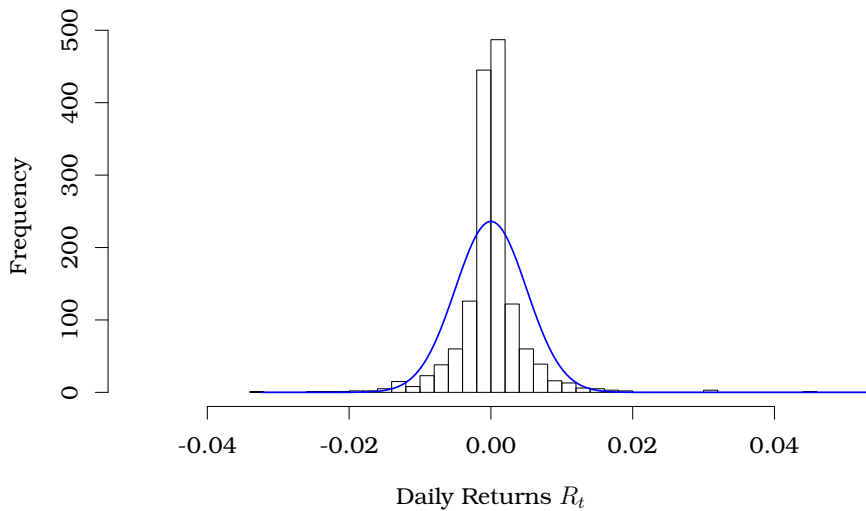
Σχήμα 3.1: Ημερήσια ισοτιμία EUR - CHF περιόδου 2009 - 2014.



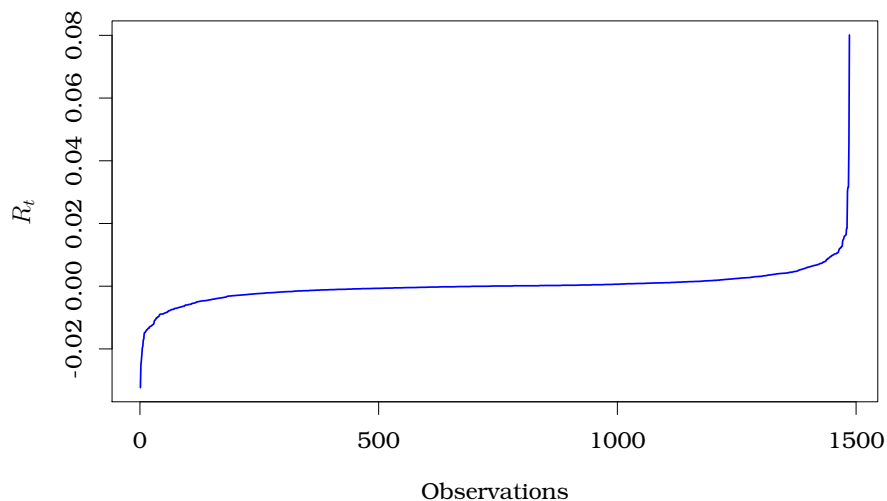
Σχήμα 3.2: Ημερήσια απόδοση EUR - CHF περιόδου 2009 - 2014.

Επεξεργασία των παρατηρήσεων

Το ιστόγραμμα των ημερήσιων αποδόσεων φαίνεται στο Σχήμα 3.3. Προκειμένου να εκτιμήσουμε την οριακή τιμή απόδοσης σε συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης διατάσσουμε τις ημερήσιες αποδόσεις κατ' αύξουσα σειρά από την ελάχιστη στη μέγιστη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.3: Ιστόγραμμα ημερήσιων αποδόσεων.



Σχήμα 3.4: Διάταξη ημερήσιων αποδόσεων από τη χειρίστη στη βέλτιστη.

Εκτίμηση της οριακής τιμής απόδοσης R^*

Αναζητούμε την οριακή τιμή απόδοσης για την οποία η πιθανότητα p χαμηλότερης απόδοσης είναι 5%.

Επί συνόλου 1487 παρατηρήσεων το 5% των ελάχιστων αποδόσεων (αριστερή ουρά κατανομής του Σχήματος 3.3) αντιστοιχεί σε $T \cdot p = 74.35$ (~ 74) ημερήσιες παρατηρήσεις. Από την διατεταγμένη κατ' αύξουσα σειρά κατανομή του Σχήματος 3.4, εντοπίζουμε την τιμή της απόδοσης που αντιστοιχεί στην 74^η παρατήρηση.

Η τιμή αυτή αποτελεί τη μέγιστη πιθανή ημερήσια απώλεια σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% και ισούται με -0.0071 , πολλαπλασιάζοντας με το συνολικό ποσό επένδυσης σε CHF προκύπτει το αντίστοιχο VaR.

3.2 Παραμετρικό VaR

Η βασική υπόθεση για την εκτίμηση του VaR με παραμετρικές μεθόδους είναι ότι οι αποδόσεις R_t ακολουθούν κανονική κατανομή, με τη γνωστή συνάρτηση κατανομής της Σχέσης 3.1, με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right). \quad (3.1)$$

Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται εύκολα ότι η πιθανότητα εμφάνισης μίας τιμής εντός του διαστήματος $(\mu - \kappa \cdot \sigma, \mu + \kappa \cdot \sigma)$ εξαρτάται μόνο από το κ και δίνεται από τη Σχέση 3.2,

$$P(\mu - \kappa\sigma < X < \mu + \kappa\sigma) = \int_{\mu - \kappa\sigma}^{\mu + \kappa\sigma} f(x) dx. \quad (3.2)$$

Κατά συνέπεια εφόσον η πιθανότητα ενός γεγονότος προερχόμενου από πιθανοσύνολο κανονικής κατανομής δεν εξαρτάται από τα μ και σ είναι δυνατόν να εκτιμηθεί αναλύοντας την τυπική κανονική κατανομή και μόνο, χρησιμοποιώντας την αδιάστατη ανηγμένη μεταβλητή 3.3, η οποία ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή ($\mu = 0$ και $\sigma = 1$).

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}. \quad (3.3)$$

Η πιθανότητα εμφάνισης μίας τιμής x από πιθανοσύνολο κανονικής κατανομής, εντός του διαστήματος $(\mu - \kappa \cdot \sigma, \mu + \kappa \cdot \sigma)$ είναι ίδια με την πιθανότητα η μεταβλητή z να εμφανίσει τιμή εντός του διαστήματος $(-\kappa, \kappa)$, η οποία είναι γνωστή.

Για παράδειγμα υποθέτοντας $\kappa = 1$ γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα αυτή είναι περίπου 68% ανεξαρτήτως των τιμών μ και σ . Επιπλέον εφόσον η κατανομή είναι συμμετρική

συνεπάγεται ότι το υπόλοιπο 32% κατανέμεται σε 16% πιθανότητα εμφάνισης τιμής χαμηλότερης από $\mu - \sigma$ και σε 16% πιθανότητα εμφάνισης τιμής υψηλότερης από $\mu + \sigma$. Χρησιμοποιώντας την αντίστροφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής $\Phi^{-1}(p) = -z_p$ η εκτίμηση του VaR δίνεται από τη Σχέση 3.4,

$$VaR(p) = (\mu - \sigma z_p)P_{t-1}. \quad (3.4)$$

Ας υποθέσουμε η ημερήσια απόδοση μίας μετοχής ακολουθεί κανονική κατανομή με διακύμανση (volatility) 2% και μέση τιμή 0.006. Στην περίπτωση αυτή γνωρίζουμε ότι υπάρχει 90% πιθανότητα η μετοχή να εμφανίσει απόδοση μεταξύ $(\mu - z_{0.05}\sigma, \mu + z_{0.05}\sigma)$ όπου $z_{0.05} = 1.645$ άρα μεταξύ $(-2.69\%, 3.89\%)$ και πιθανότητα 5% να εμφανιστεί απόδοση μικρότερη από -2.69% . Κατά συνέπεια το ημερήσιο ποσοστιαίο VaR της μετοχής σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% ισούται με 2.69%.

3.2.1 VaR χαρτοφυλακίου

Στην περίπτωση χαρτοφυλακίου όπου ζητείται η εκτίμηση του VaR για περισσότερους από έναν τίτλους θα πρέπει πέραν της μεταβλητότητας κάθε τίτλου, να συνεκτιμηθούν η συνδιακύμανση (covariance) μεταξύ των τίτλων καθώς και η συμμετοχή - βαρύτητα w_i (weights) κάθε τίτλου στο χαρτοφυλάκιο. Η συνδιακύμανση μεταξύ των τιμών των τίτλων του χαρτοφυλακίου εκφράζει τη γραμμική μεταβολή ενός τίτλου σε σχέση με κάποιον άλλο και δίνεται από τη Σχέση 3.5,

$$cov(X, Y) = \sigma_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (3.5)$$

Με απλούστερα λόγια η συνδιακύμανση μας λέει πόσο και προς ποια κατεύθυνση μεταβάλλεται το y όταν μεταβάλλεται το x , προσφέροντας ένα μέτρο για κάθε μεταβλητή σε σχέση με κάθε άλλη μεταβλητή.

Για χαρτοφυλάκιο n τίτλων η μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου σ_{port}^2 δίνεται από τη Σχέση 3.6,

$$\begin{aligned} \sigma_{port}^2 &= \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n w_i w_j \sigma_{i,j}, \\ &= \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i}^n w_i w_j \sigma_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι σε αυτή την περίπτωση ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος αυξάνει ραγδαία εφόσον για n τίτλους σε ένα χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να εκτιμηθούν n μεταβλητότητες και $n \cdot (n - 1)/2$ συντελεστές συνδιακύμανσης. Στις

περιπτώσεις μεγάλου αριθμού τίτλων για ευκολότερη διαχείριση των συντελεστών χρησιμοποιούμε συμβολισμό πινάκων σύμφωνα με τη Σχέση 3.7,

$$\sigma_{port}^2 = \begin{bmatrix} w_1, \dots, w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Ο $n \times n$ πίνακας ονομάζεται πίνακας συνδιακύμανσης, η διαγώνιος του οποίου δίνει τις τιμές της μεταβλητότητας ($\sigma_{i,i} = \sigma_i^2$) του κάθε αντικειμένου. Συμβολίζοντας τον πίνακα συνδιακύμανσης με Σ η Σχέση 3.7 απλοποιείται στη μορφή της Σχέσης 3.8,

$$\sigma_{port}^2 = w' \Sigma w. \quad (3.8)$$

Επειδή το μέτρο της συνδιακύμανσης εξαρτάται από τη διακύμανση των συνιστωσών και δεν είναι εύκολο να αξιολογηθεί, χρησιμοποιείται ο αδιάστατος συντελεστής συσχέτισης ρ (Σχέση 3.9), ο οποίος παίρνει τιμές στο διάστημα -1 έως 1 . Όσο το $|\rho| \rightarrow 1$ τόσο υψηλότερη είναι η συσχέτιση ενώ αντίθετα όσο το $|\rho| \rightarrow 0$ είναι χαμηλότερη.

$$\rho = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (3.9)$$

Δεν υπάρχει ουσιώδης διαφορά μεταξύ του συντελεστή συνδιακύμανσης και του συντελεστή συσχέτισης, υπό την προϋπόθεση ότι στην περίπτωση του πρώτου γίνεται προσαρμογή των μονάδων. Η αξιολόγηση είναι ευκολότερη για το συντελεστή συσχέτισης ενώ ο υπολογισμός είναι ευκολότερος για το συντελεστή συνδιακύμανσης.

Για την απλή περίπτωση χαρτοφυλακίου δύο τίτλων η μεταβλητότητα σ_{port}^2 δίνεται από τη Σχέση 3.10, όπου $\rho\sigma_1\sigma_2$ η συνδιακύμανση $\sigma_{1,2}$.

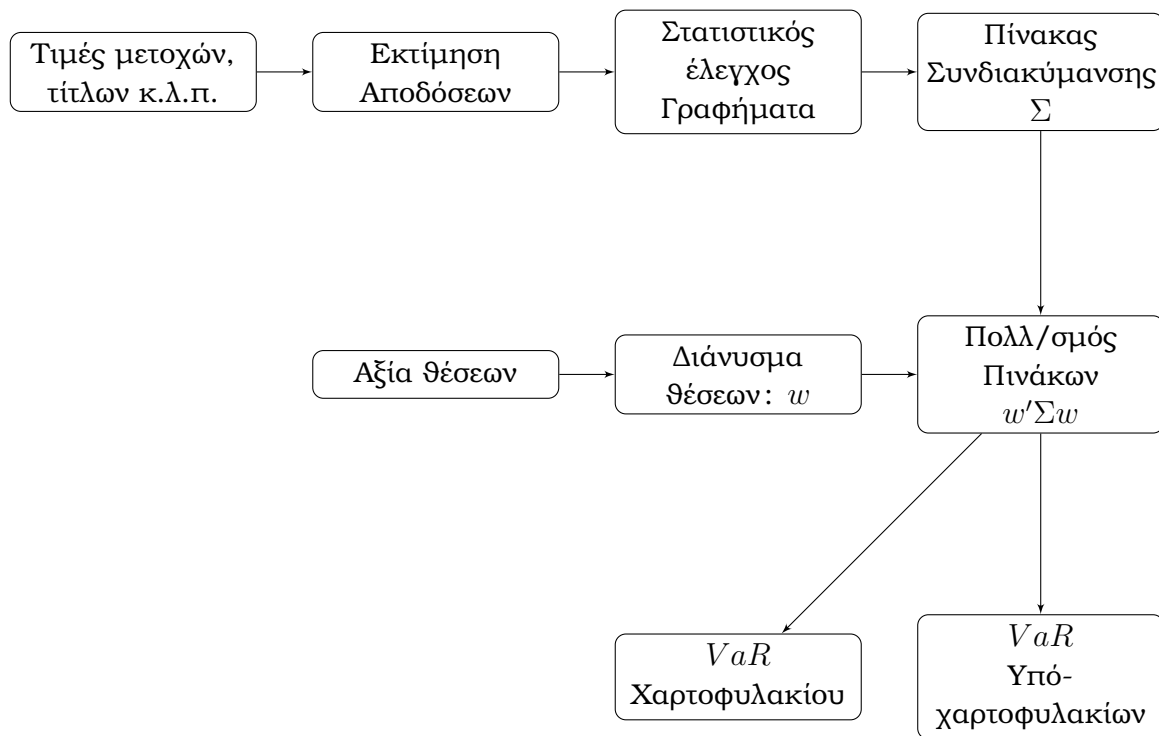
$$\sigma_{port}^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2. \quad (3.10)$$

Σύμφωνα με τη Σχέση 3.4 το VaR του χαρτοφυλακίου εκτιμάται από τη Σχέση 3.11,

$$\begin{aligned} VaR_{port}(p) &= (\mu - \sigma_{port}z_p)P_{port,t-1}, \\ &= (\mu - \sqrt{w'\Sigma w}z_p)P_{port,t-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι η αξία σε κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου εξαρτάται από τις διακυμάνσεις, τις συνδιακυμάνσεις και το πλήθος των τίτλων που περιλαμβάνει. Αν δύο τίτλοι είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους τότε η συνδιακύμανσή τους είναι μηδέν. Αν η συνδιακύμανσή τους έχει θετική τιμή τότε οι δύο αυτοί τίτλοι έχουν την τάση να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση (ανοδικά ή καθοδικά). Αντίστοιχα αν η

συνδιακύμανση έχει αρνητική τιμή, τότε οι τίτλοι έχουν την τάση να κινούνται αντίθετα. Στις περιπτώσεις όπου ο συντελεστής συσχέτισης ρ είναι μηδέν ή ένα τότε το VaR του χαρτοφυλακίου ισούται με $\sqrt{VaR_1^2(p) + VaR_2^2(p)}$ ή $VaR_1(p) + VaR_2(p)$ αντιστοίχως. Στο Σχήμα 3.5 παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής για την εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο χαρτοφυλακίου, μέσω της ανάλυσης της διακύμανσης και της συνδιακύμανσης της αξίας των τίτλων του χαρτοφυλακίου.



Σχήμα 3.5: Διάγραμμα ροής ανάλυσης διακύμανσης - συνδιακύμανσης για την εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο χαρτοφυλακίου.

3.2.2 Μέθοδος mapping

Η μέθοδος αυτή στοχεύει στη μετατροπή ενός συνόλου θέσεων ενός χαρτοφυλακίου μέσω συγκεκριμένων μεταβλητών, όπως χρηματιστηριακοί δείκτες, δείκτες ισοτιμιών ή επιτοκίων κ.α., και εν συνεχεία στην εκτίμηση του VaR του μετασχηματισμένου χαρτοφυλακίου (mapped portfolio). Η μέθοδος αυτή μειώνει σημαντικά τις υπολογιστικές απαιτήσεις αλλά εμπεριέχει τον κίνδυνο υπεραπλουστεύσεων και κατ' επέκταση εσφαλμένης εκτίμησης του πραγματικού VaR.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με n μετοχές. Μέσω του μοντέλου CAPM* μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γενικό δείκτη του χρηματιστηρίου, στο οποίο διαπραγματεύονται οι μετοχές, ως σχετικό δείκτη κινδύνου. Εφαρμόζοντας ανάλυση πα-

*Capital Price Asset Model

λινδρόμησης μεταξύ των χρονοσειρών των αποδόσεων κάθε μετοχής ($R_{i,t}$) και του γενικού δείκτη της αγοράς ($R_{M,t}$) εκτιμάμε το συντελεστή β του γραμμικού μοντέλου της Σχέσης 3.12 για κάθε μετοχή, ως μέτρο του συστηματικού κινδύνου.

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i(R_{M,t}) + \varepsilon_{i,t}. \quad (3.12)$$

Η αξία M' του ισοδύναμου χαρτοφυλακίου προκύπτει από το άθροισμα των γινομένων του ποσού επένδυσης σε κάθε μετοχή επί τον συντελεστή β_i αυτής. Υποθέτοντας ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου αγοράς (market portfolio) ακολουθούν κανονική κατανομή, με τυπική απόκλιση σ_M , τότε το ημερήσιο VaR του χαρτοφυλακίου των n μετοχών σε επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha = 1\%$ δίνεται από τη Σχέση 3.13,

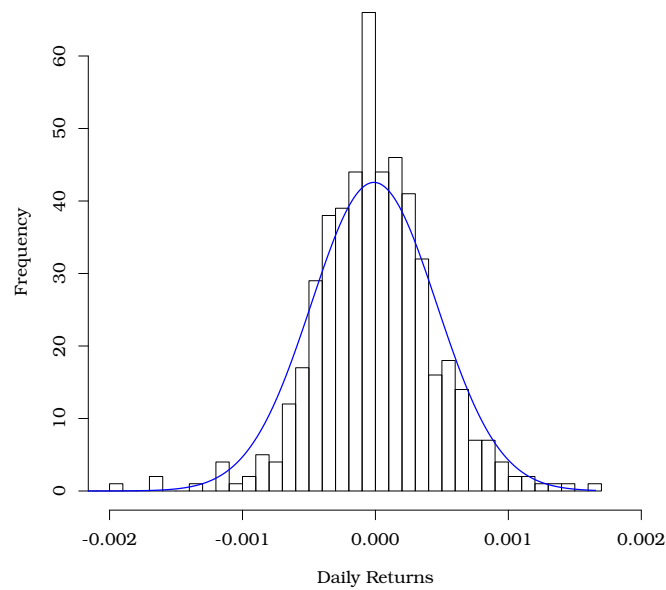
$$VaR(1 - \alpha) = M' \sigma_M z_\alpha = M' \sigma_M 2.326. \quad (3.13)$$

Η μέθοδος αυτή απλοποιεί τον τρόπο εκτίμησης του VaR αλλά παράλληλα υποεκτιμά την πραγματική του τιμή καθώς δεν λαμβάνει υπ' όψιν το μη-συστηματικό κίνδυνο κάθε τίτλου που περιέχει ένα χαρτοφυλάκιο.

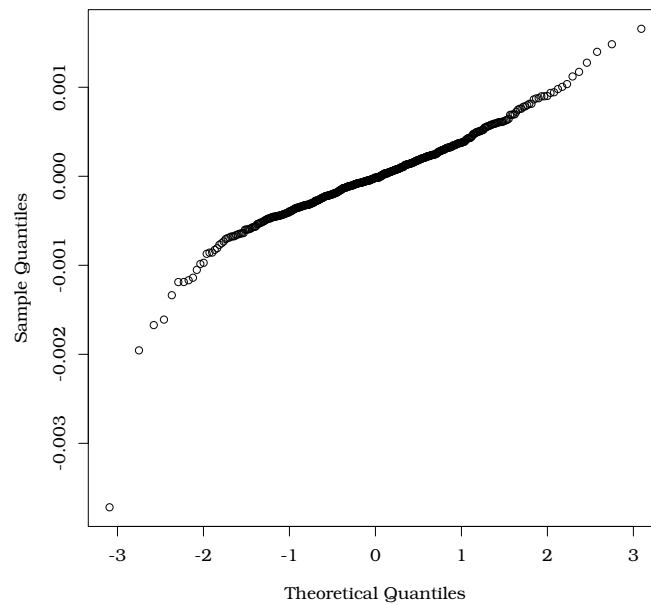
3.3 Χρονικά εξαρτώμενη μεταβλητότητα

Χρησιμοποιώντας τις τιμές της ημερήσιας απόδοσης της μετοχής της εταιρείας General Electric για τα έτη 2014 και 2015 κατασκευάζουμε το ισόγραμμα συχνοτήτων σε αντιπαραβολή με την καμπύλη κανονικής κατανομής και το διάγραμμα ποσοστημορίων κανονικής κατανομής ($Q - Q$), τα οποία παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.6 και 3.7 αντίστοιχα. Για την περίοδο αυτή η μέση ημερήσια διακύμανση (volatility) εκτιμάται 0.04714% και θεωρώντας 252 ημέρες διαπραγμάτευσης ανά έτος η μέση ετήσια διακύμανση εκτιμάται ίση με 0.7483%.

Από το Σχήμα 3.6 παρατηρούμε ότι σε σχέση με την κανονική κατανομή υπάρχουν περισσότερες παρατηρήσεις τόσο στην κορυφή της καμπύλης, όσο και στις ουρές αυτής. Αντίστοιχες παρατηρήσεις προκύπτουν και από το διάγραμμα ποσοστημορίων κανονικής κατανομής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7.



Σχήμα 3.6: Ιστογράμμο των ημερήσιων αποδόσεων, της μετοχής της εταιρείας General Electric κατά το χρονικό διάστημα 2014 - 2015.



Σχήμα 3.7: Διάγραμμα ποσοστημορίων των ημερήσιων αποδόσεων, της μετοχής της εταιρείας General Electric κατά το χρονικό διάστημα 2014 - 2015.

Οι διογκωμένες ουρές της κατανομής συχνότητων ερμηνεύονται με δύο τρόπους. Ο πρώτος θεωρεί ότι η κατανομή είναι στάσιμη (stationary) η οποία έχει αυτό το σχήμα.

Σε αυτή την περίπτωση η προσέγγισή της μέσω της κανονικής κατανομής δεν ενδείκνυται και συνήθως χρησιμοποιούνται οι κατανομές Student και Logistic. Ο δεύτερος τρόπος ερμηνείας θεωρεί ότι η κατανομή μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο και κατά συνέπεια ένα στάσιμο μοντέλο προσέγγισης θεωρεί τις αυξημένες παρατηρήσεις ως εξέχουσες τιμές (outliers) οι οποίες προέρχονται από κατανομή με μεγαλύτερη διασπορά. Στην πράξη και οι δύο προσεγγίσεις έχουν ένα μέρος αληθείας γι' αυτό και η πρόβλεψη της μεταβλητότητας είναι ιδιαίτερα σημαντική για την πρόβλεψη και διαχείριση του κινδύνου.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τεχνικές εκτίμησης της χρονικά εξαρτώμενης μεταβλητότητας, οι οποίες βασίζονται σε παραμετρικά μοντέλα χρονοσειρών.

3.3.1 Κινούμενος μέσος

Η τεχνική του κινούμενου μέσου (*Moving Average*, MA) χρησιμοποιεί ένα κινούμενο 'παράθυρο' σταθερού εύρους, για το οποίο εκτιμάται η μεταβλητότητα. Για ημερήσιες τιμές απόδοσης R_t πλήθους M η εκτίμηση της μεταβλητότητας μέσω κινητού μέσου δίνεται από τη Σχέση 3.14,

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M R_{t-i}^2. \quad (3.14)$$

Όπως φαίνεται και από τη Σχέση 3.14 στην περίπτωση αυτή επικεντρωνόμαστε στις αποδόσεις και όχι στις αποδόσεις γύρω από τη μέση τιμή. Η παραδοχή $\mu = 0$ δεν εισάγει σημαντικό σφάλμα στις περιπτώσεις όπου εξετάζουμε τη μεταβλητότητα για μικρές χρονικές περιόδους όπως ημερήσιες μεταβολές [2].

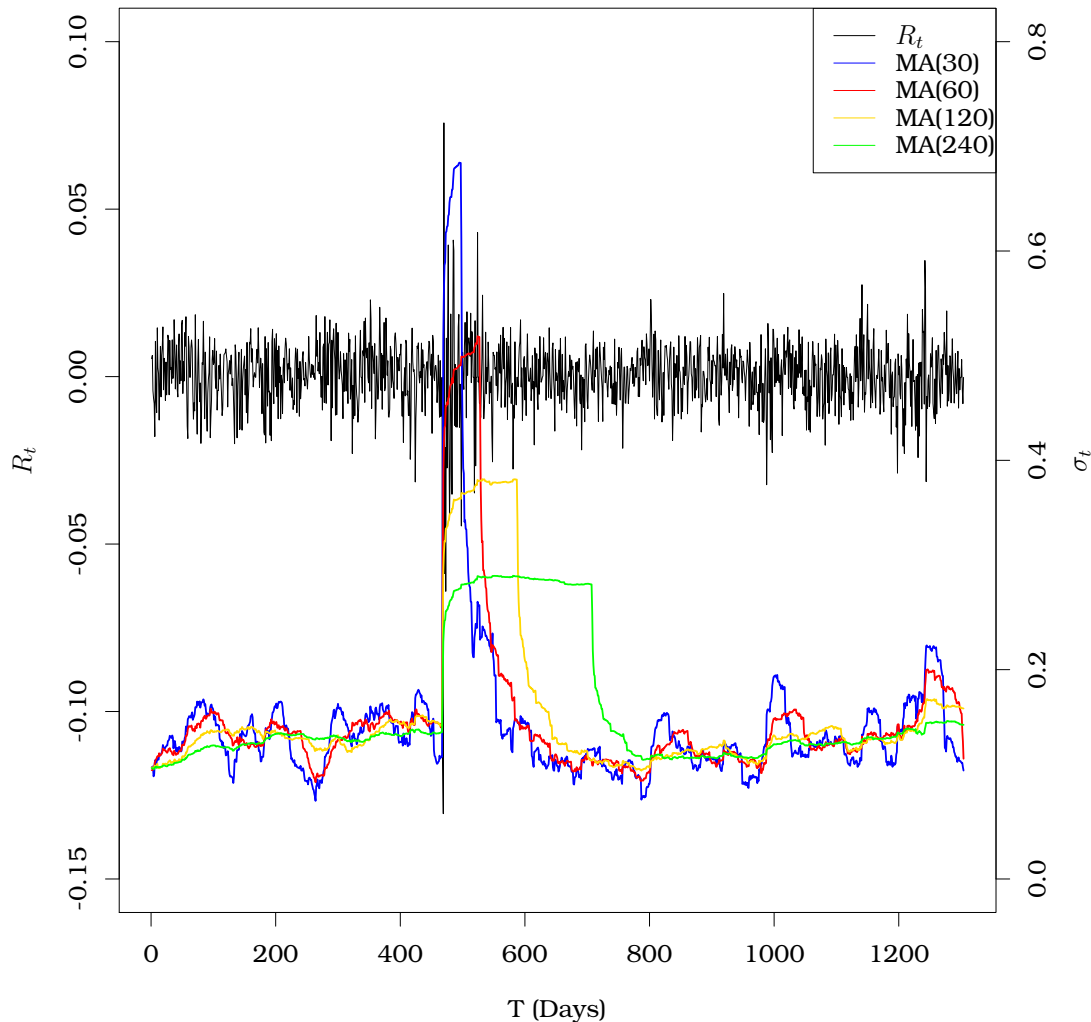
Η ημερήσια πρόβλεψη αναπροσαρμόζεται προσθέτοντας κάθε ημέρα την παρατήρηση της προηγούμενης και αφαιρώντας παράλληλα την παρατήρηση πριν $M + 1$ ημέρες. Τυπικές τιμές του χρονικού εύρους είναι 20 και 60 ημέρες συναλλαγών οι οποίες αντιστοιχούν σε μήνα και σε τρίμηνο αντίστοιχα για 252 ημέρες συναλλαγών ανά έτος.

Η μεθοδολογία αυτή αν και είναι εύκολη στην εφαρμογή της έχει σημαντικά μειονεκτήματα. Όπως φαίνεται και από τη Σχέση 3.14 όλες οι παρατηρήσεις έχουν την ίδια βαρύτητα στην εκτίμηση της μεταβλητότητας ίση με $1/M$, ανεξάρτητα του χρόνου παρατήρησης.

Επιπλέον η ύπαρξη μίας πολύ χαμηλής απόδοσης πριν M ημέρες θα επηρεάσει σημαντικά την εκτίμηση καθώς το μοντέλο θα προχωρήσει στην επόμενη ημέρα και η παρατήρηση αυτή θα βρεθεί εκτός του χρονικού 'παράθυρου' των M ημερών. Η συμπεριφορά αυτή είναι γνωστή με το όνομα *ghosting* λόγω του ότι παρατηρούνται μεταβολές στις εκτιμήσεις χωρίς προφανείς λόγους.

Στο Σχήμα 3.8 παρουσιάζονται οι ημερήσιες αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη FTSE 100 για την περίοδο 1986 έως 1990 καθώς και οι εκτιμήσεις της ετησιοποιη-

μένης μεταβλητότητας με τη μέθοδο του κινητού μέσου για διάστημα 30, 60, 120 και 240 ημερών.



Σχήμα 3.8: Ημερήσιες αποδόσεις και εκτιμήσεις της μεταβλητότητας του δείκτη FTSE 100 με τη μέθοδο του κινούμενου μέσου, για το χρονικό διάστημα από 1986 έως 1990, στις οποίες είναι εμφανής η συμπεριφορά “ghosting”.

Η χρονική περίοδος αυτή επιλέχθηκε επειδή συμπεριλαμβάνει το ακραίο γεγονός της γνωστής και ως ‘Μαύρης Δευτέρας’ στις 19-10-1987 όπου οι αγορές μετοχών σημείωσαν σημαντικά μεγάλες απώλειες εντός πολύ μικρού χρονικού διαστήματος. Το γεγονός της ‘Μαύρης Δευτέρας’ παρατηρούμε ότι αποτελεί αιτία εμφάνισης της συμπεριφοράς ghosting η οποία είναι εντονότερη όσο μεγαλύτερο είναι το χρονικό ‘παράθυρο’ εκτίμησης του κινούμενου μέσου. Για παράδειγμα παρατηρούμε ότι η ετήσια μεταβλητότητα του δείκτη FSTE 100 για την περίπτωση κινούμενου μέσου 240 ημερών μετά τις

19-10-1987 αυξάνει στο 26% περίπου και παραμένει σε αυτό το επίπεδο για ένα χρόνο περίπου (~ 252 ημέρες συναλλαγών ανά έτος). Μετά την πάροδο 240 ημερών, όπου η υψηλή τιμή μεταβλητότητας της ‘Μαύρης Δευτέρας’ βγαίνει εκτός του διαστήματος υπολογισμού του κινούμενου μέσου η ετήσια μεταβλητότητα του δείκτη επιστρέφει στα ‘φυσιολογικά’ επίπεδα περί το 13%.

Η τεχνική του κινούμενου μέσου αν και είναι εύκολο να υλοποιηθεί δεν έχει μεγάλη εφαρμογή στην πράξη καθώς δίνει σημαντικά χαμηλότερες τιμές πρόβλεψης του VaR.

3.3.2 Εκθετικός Κινούμενος μέσος

Μία βελτιωμένη εναλλακτική της μεθόδου κινητού μέσου αποτελεί η μέθοδος του εκθετικού κινούμενου μέσου (*Exponentially Weighted Moving Average, EWMA*). Η μέθοδος αυτή μειώνει εκθετικά τη βαρύτητα των παλαιότερων παρατηρήσεων με αποτέλεσμα οι πιο πρόσφατες παρατηρήσεις να επηρεάζουν περισσότερο την πρόβλεψη. Με τον τρόπο αυτό εξαλείφεται η συμπεριφορά *ghosting* η οποία αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα μειονεκτήματα της μεθόδου του κινητού μέσου.

Το n -περιόδων υπόδειγμα εκθετικού κινητού μέσου μίας χρονοσειράς $\{x_t\}$ δίνεται από τη Σχέση 3.15,

$$\frac{x_{t-1} + \lambda x_{t-2} + \lambda^2 x_{t-3} + \dots + \lambda^{n-1} x_{t-n}}{1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1}}. \quad (3.15)$$

Η παράμετρος λ ονομάζεται *συντελεστής εξασθένισης* (decay factor) και έχει θετική τιμή μικρότερη της μονάδας. Δεδομένου ότι για $n \rightarrow \infty$ ο παρανομαστής τείνει στο $1/(1 - \lambda)$ το υπόδειγμα άπειρων όρων δίνεται από τη Σχέση 3.16,

$$(1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} x_{t-i}. \quad (3.16)$$

Το υπόδειγμα της Σχέσης 3.16 χρησιμοποιείται για πρόβλεψη της μεταβλητότητας και της συνδυακύμανσης (§3.2.1) στη μεθοδολογία διαχείρισης κινδύνου που εφαρμόζει ο όμιλος J.P. Morgan/Reuters με την ονομασία σήμα κατατεθέν RiskMetrics™ [1]. Για την περίπτωση πρόβλεψης της μεταβλητότητας χρησιμοποιείται η χρονοσειρά των τετραγώνων των ημερήσιων αποδόσεων $\{R_t^2\}$ (Σχέση 3.17) και για την περίπτωση πρόβλεψης της συνδιακύμανσης η χρονοσειρά του γινομένου των ημερήσιων αποδόσεων $\{R_{x,t}R_{y,t}\}$ (Σχέση 3.18),

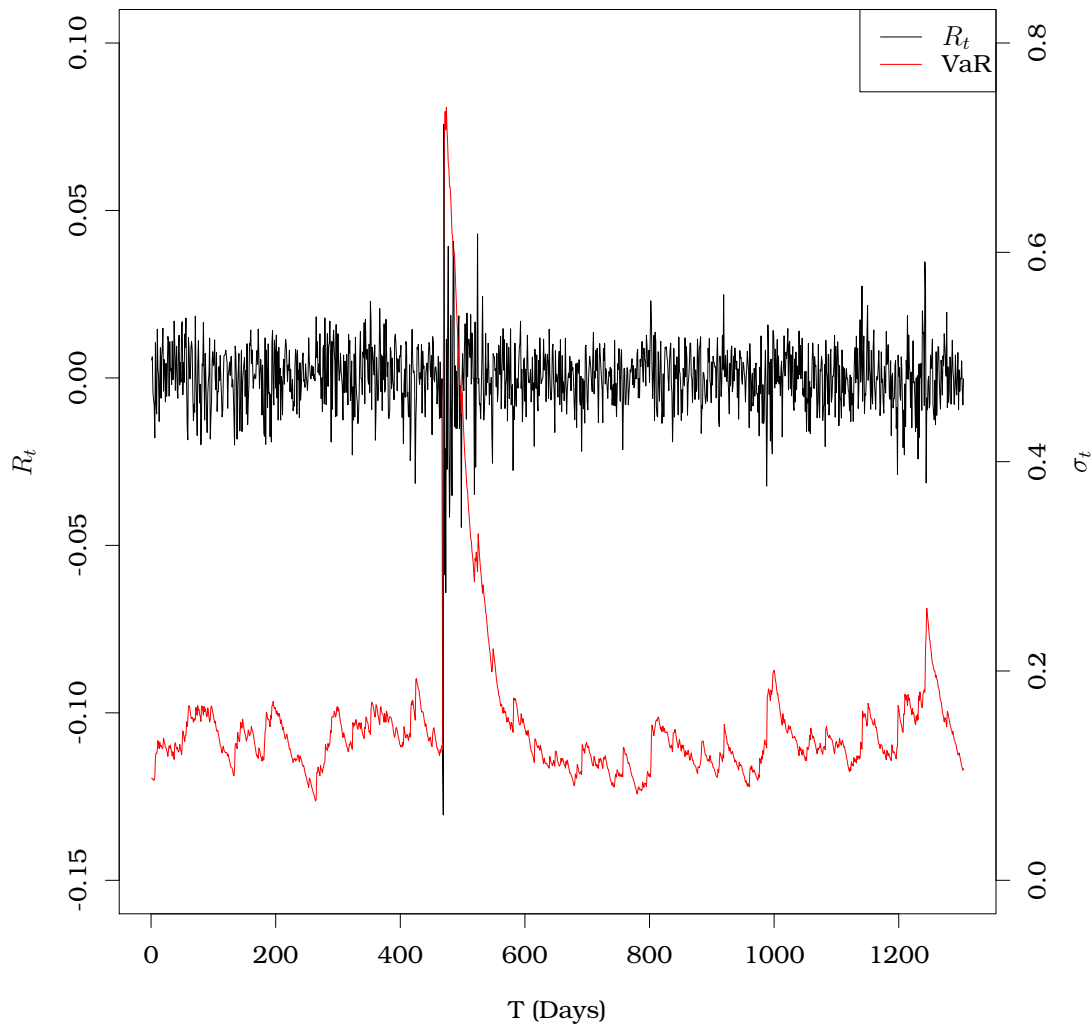
$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} R_{t-i}^2 \quad (3.17)$$

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) R_{t-1}^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2$$

$$\sigma_{x,y} = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} R_{x,t-i} R_{y,t-i}. \quad (3.18)$$

Η συγκεκριμένη τεχνική είναι εύχρηστη καθώς πέραν των ιστορικών παρατηρήσεων χρειάζεται μόνο μία παράμετρο (λ) για να εφαρμοστεί. Τυπικές τιμές της παραμέτρου λ για ημερήσια πρόβλεψη είναι 0.94 και για μηνιαία, δηλαδή για 25 ημέρες συναλλαγών, 0.97.

Στο Σχήμα 3.9 παρουσιάζονται οι ημερήσιες αποδόσεις και η εκτίμηση της ετήσιας μεταβλητότητας του δείκτη FTSE 100, με τη μέθοδο του εκθετικού κινούμενου μέσου ($\lambda = 0.94$), για την χρονική περίοδο 1986 έως 1990. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι η επίδραση των ακραίων γεγονότων της *Μαύρης Δευτέρας* εξασθενούν πολύ πιο σύντομα σε σχέση με το μοντέλο σταθερού κινητού μέσου (Σχήμα 3.8).



Σχήμα 3.9: Ημερήσιες αποδόσεις και εκτιμήσεις της ετήσιας μεταβλητότητας του δείκτη FTSE 100 με τη μέθοδο του εκθετικού κινούμενου μέσου, με παράμετρο $\lambda = 0.94$, για τη χρονική περίοδο 1986 έως 1990.

3.4 Αυτοπαλίνδρομη Δεσμευμένη Ετεροσκεδαστικότητα

Σύμφωνα με τις τελευταίες έρευνες στον τομέα της οικονομετρίας, για την μοντελοποίηση της συμπεριφοράς των επενδυτών ως προς τον κίνδυνο και την αναμενόμενη απόδοση μιας επένδυσης προτείνεται η χρήση μη γραμμικών μοντέλων χρονοσειρών. Έχει παρατηρηθεί ότι οι χρονοσειρές οι οποίες περιγράφουν οικονομικά μεγέθη εμφανίζουν συστηματικά ομαδοποιημένες μεταβολές της μεταβλητότητάς τους (volatility clustering), δηλαδή υψηλές αποδόσεις ακολουθούνται από ακόμα υψηλότερες και αντίστοιχα χαμηλές αποδόσεις οδηγούν σε ακόμα χαμηλότερες. Κατ' επέκταση αφενός είναι λογικά ασυνεπής και αφετέρου στατιστικά ανεπαρκής η υπόθεση σταθερής μεταβλητότητας εντός ορισμένου χρονικού διαστήματος για τη μελέτη των αποδόσεων ενώ αυτές μεταβάλλονται χρονικά (Σχέση 3.19),

$$Var(R_t | R_{t-1}, R_{t-2}, \dots) \neq ct. \quad (3.19)$$

Η πλειοψηφία των μοντέλων πρόβλεψης των αλλαγών της μεταβλητότητας των οικονομικών χρονοσειρών υλοποιούν τεχνικές αυτοπαλινδρόμησης.

Η πρώτη εφαρμογή αυτοπαλίνδρομου μοντέλου με μη γραμμική μεταβλητότητα προτάθηκε από τον Engle το 1982 [13], Autoregressive Conditional Heteroscedasticity ή ARCH, το οποίο εν συνεχεία γενικεύθηκε από τον Bollerslev το 1986 [6] ως Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity ή GARCH. Εν συνεχεία αναπτύχθηκε πλήθος παραλλαγών του γενικευμένου μοντέλου, κάποιες από τις οποίες θα παρουσιαστούν στη συνέχεια. Για εκτενέστερη ανασκόπηση των μοντέλων GARCH, η οποία ξεφεύγει από το πλαίσιο της παρούσας εργασίας, προτείνεται η βιβλιογραφία Bollerslev et. al [8, 9]

Τα μοντέλα τύπου GARCH όπως δηλώνει και το όνομά τους ανήκουν στην κατηγορία υπό συνθήκη (conditional) ετεροσκεδαστικότητας, δηλαδή μοντέλα μη σταθερής μεταβλητότητας, τα οποία βελτιστοποιούν τη βαρύτητα των ιστορικών αποδόσεων προκειμένου να παράξουν πρόβλεψη της μεταβλητότητας. Η βασική ιδέα των μοντέλων αυτών είναι η προσθήκη μίας δεύτερης εξίσωσης στο γενικό μοντέλο παλινδρόμησης η οποία θα προσομοιάζει την υπό συνθήκη μεταβλητότητα. Η πρώτη εξίσωση στα GARCH υποδείγματα αφορά στην υπό συνθήκη μέση τιμή η οποία επειδή τα υποδείγματα αυτά εστιάζουν κυρίως στη μεταβλητότητα έχει την απλή μορφή της Σχέσης 3.20,

$$R_t = ct + \varepsilon_t. \quad (3.20)$$

Στα απλά GARCH μοντέλα υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή ε_t προέρχεται από υπό συνθήκη κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση σ_t . Στην περίπτωση αυτή οι απόλυτες (unconditional) αποδόσεις ακολουθούν λεπτόκυρτες κατανομές δηλαδή κατανομές οι οποίες έχουν αιχμηρότερη κορυφή και διογκωμένες ουρές σε σχέση με την κανονική κατανομή, καθώς η μεταβολή της σ_t έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ακραίων αποδόσεων. Σύμφωνα με τα παραπάνω τα μοντέλα τα οποία εφαρμόζονται στην οικονομετρία για τη μελέτη χρηματοοικονομικών σειρών έχουν τη γενική μορφή της Σχέσης 3.21,

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t. \quad (3.21)$$

Όπου οι κατανομές των τυχαίων μεταβλητών Z_t είναι i.i.d με μέση τιμή μηδέν και μοναδιαία μεταβλητότητα. Η συνηθέστερη περίπτωση είναι η τ.μ. Z_t να ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή $Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Στις περιπτώσεις αυξημένης κυρτώσης της κατανομής των αποδόσεων θεωρούμε ότι αυτές ακολουθούν κατανομή student-t $Z_t \sim t_\nu$, [4, 5] ή μείγμα κανονικών κατανομών. Σε κάθε περίπτωση η χρονοσειρά $\{\varepsilon_t\}$ είναι στάσιμη, σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στο εδάφιο 1.2.1.

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτών των μοντέλων είναι ότι η μη δεσμευμένη μεταβλητότητα σ εξαρτάται από όλες τις παρατηρήσεις της απόδοσης του αγαθού ενώ η δεσμευμένη μεταβλητότητα σ_t εκτιμάται από τις παραμέτρους του εφαρμοζόμενου μοντέλου και τις πρόσφατες παρατηρήσεις της απόδοσης.

3.4.1 Μοντέλα ARCH

Το πρώτο υπόδειγμα $ARCH(p)$ το οποίο προτάθηκε από τον Engle το 1982 [13] εκφράζει την υπό συνθήκη μεταβλητότητα σ_t σύμφωνα με τη Σχέση 3.22,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad (3.22)$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \geq 0.$$

Όπου p οι χρονικές περίοδοι στις οποίες εφαρμόζεται το υπόδειγμα. Οι περιορισμοί στους συντελεστές εξασφαλίζουν θετικές εκτιμήσεις της μεταβλητότητας ενώ προκειμένου να εξασφαλιστεί η στασιμότητα της χρονοσειράς θα πρέπει επιπλέον να ισχύει: $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$.

Το μοντέλο αυτό προβλέπει την υπό συνθήκη μεταβλητότητα των αποδόσεων εφαρμόζοντας την τεχνική του κινούμενου μέσου στα τετράγωνα του ε_t της Σχέσης 3.20. Υποθέτοντας λοιπόν ότι παρατηρούμε μία σημαντική μεταβολή, θετική ή αρνητική, στην απόδοση R_t πριν από m χρονικές περιόδους, όπου $m < p$, τότε η μεταβολή αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της εκτίμησης της σημερινής μεταβλητότη-

τας σ_t που εκτιμά το μοντέλο. Η συμπεριφορά αυτή συνάδει με τις ομαδοποιημένες μεταβολές της μεταβλητότητας (volatility clustering) οι οποίες έχουν επαληθευτεί από παλαιότερες παρατηρήσεις στις ανά τον κόσμο αγορές.

Η μέση μη-δεσμευμένη μεταβλητότητα του $ARCH$ μοντέλου δίνεται θέτοντας $E(\varepsilon_t^2) = \sigma$ και επιλύοντας ως προς σ όπου και προκύπτει:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i}. \quad (3.23)$$

Για χρονική υστέρηση $p = 1$ προκύπτει η απλούστερη μορφή του μοντέλου το $ARCH(1)$, η οποία φαίνεται στη Σχέση 3.24, για την οποία η μέση μη-δεσμευμένη μεταβλητότητα δίνεται από τη Σχέση 3.25,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \quad (3.24)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}. \quad (3.25)$$

3.4.2 Μοντέλα ARCH-M

Η παρατήρηση ότι η απόδοση μίας επένδυσης-θέσης εμφανίζει θετική συσχέτιση με το μέτρο κινδύνου της αποτέλεσε την αφορμή για τη δημιουργία από τους Engle et. al [14] μίας παραλλαγής του κλασικού ARCH μοντέλου, του ARCH-M σύμφωνα με το οποίο η υπό συνθήκη μέση τιμή μ_t των αποδόσεων εξαρτάται ως ένα βαθμό από την υπό συνθήκη μεταβλητότητα σ_t . Ένας απλός τρόπος μοντελοποίησης αυτής της εξάρτησης δίνεται από τη Σχέση 3.26,

$$R_t = \mu_t + \sigma_t Z_t. \quad (3.26)$$

Όπου η μ_t είναι είτε σταθερά (Σχέση 3.20) είτε ακολουθεί μία αυτοπαλίνδρομη διαδικασία (AR).

$$\mu_t = \delta \sigma_t^2. \quad (3.27)$$

Στη δεύτερη περίπτωση μία τυπική έκφραση δίνεται από τη Σχέση 3.27, όπου η παράμετρος δ εκφράζει την επίδραση της μεταβλητότητας στη μέση τιμή.

3.4.3 Μοντέλα GARCH

Η γενίκευση του αυτοπαλίνδρομου μοντέλου ετεροσκεδασικότητας $ARCH(p)$ του Engle από τον Bollerslev [6, 7] προσθέτει q παράγοντες αυτοπαλινδρόμησης στο αρχικό μοντέλο. Η μαθηματική έκφραση η οποία περιγράφει το γενικευμένο $GARCH(p, q)$

μοντέλο δίνεται από τη Σχέση 3.28,

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (3.28)$$

$$\omega > 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \geq 0. \quad (3.29)$$

Όπου οι περιορισμοί στους συντελεστές ω, α_i και β_j εξασφαλίζουν θετικές εκτιμήσεις της μεταβλητότητας.

Αντίστοιχα με την περίπτωση του *ARCH* μοντέλου η μη δεσμευμένη μεταβλητότητα για το *GARCH* μοντέλο δίνεται από τη Σχέση 3.30.

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j}. \quad (3.30)$$

Από την παραπάνω Σχέση διαπιστώνεται εύκολα ότι για τους συντελεστές α_i και β_j θα πρέπει επιπλέον να ισχύει $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. Στην περίπτωση όπου $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$ ή > 1 τότε σύμφωνα με τη Σχέση 3.30 η μη-δεσμευμένη μεταβλητότητα γίνεται άπειρη ή δεν ορίζεται αντίστοιχα.

Για χρονικές υστερήσεις $p = q = 1$ προκύπτει η απλούστερη μορφή του μοντέλου το *GARCH*(1,1) η οποία φαίνεται στη Σχέση 3.31, και για την οποία η μέση μη δεσμευμένη μεταβλητότητα για το *GARCH*(1,1) μοντέλο δίνεται από τη Σχέση 3.32,

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 R_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (3.31)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}. \quad (3.32)$$

Οι τιμές των παραμέτρων α και β των μοντέλων *GARCH*(p, q) δίνουν πληροφορίες για τη μορφή της χρονοσειράς της μεταβλητότητας. Υψηλές τιμές των συντελεστών αυτοπαλινδρόμησης υποδηλώνουν ότι οι σημαντικές μεταβολές της μεταβλητότητας ομαλοποιούνται αργά ενώ εν αντιθέσει χαμηλές τιμές των συντελεστών απόδοσης υποδηλώνουν γρήγορες μεταβολές της μεταβλητότητας αντίστοιχα με τις μεταβολές της αγοράς.

3.5 Αυτοπαλίνδρομη δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα με ασύμμετρες διακυμάνσεις

Τα μοντέλα *GARCH* τα οποία παρουσιάστηκαν στο εδάφιο 3.4.3 υποθέτουν ότι οι θετικές και οι αρνητικές μεταβολές της απόδοσης έχουν συμμετρική επίδραση στη μεταβλητότητα. Εντούτοις έχει παρατηρηθεί στην πράξη ότι η παραπάνω υπόθεση παραβιάζεται καθώς η μεταβλητότητα αυξάνει περισσότερο στις περιπτώσεις όπου οι αποδόσεις R_t

μειώνονται σε σχέση με τις περιπτώσεις όπου οι αποδόσεις αυξάνουν. Η αρνητική συσχέτιση της μεταβλητότητας σε σχέση την απόδοση ενός τίτλου ονομάζεται *μόχλευση* (*leverage effect*) και για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία αναφέρθηκε από τον F. Black το 1976 [15].

Προκειμένου να ενσωματωθεί η ασύμμετρη επίδραση των αποδόσεων στην πρόβλεψη της μεταβλητότητας ενός τίτλου τα μοντέλα GARCH εξελίχθηκαν με την προσθήκη νέων παραμέτρων. Τα δημοφιλέστερα μοντέλα τα οποία προέκυψαν είναι το Exponential GARCH ή EGARCH [11] και το Threshold ARCH ή TARARCH [17].

3.5.1 Μοντέλα EGARCH

Η γενική μαθηματική έκφραση της δεσμευμένης μεταβλητότητας ενός $EGARCH(p, q)$ μοντέλου δίνεται από τη Σχέση 3.33, όπου Z_t τυχαία μεταβλητή προερχόμενη από κανονική κατανομή ($Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$).

$$\begin{aligned} \log(\sigma_t^2) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \log(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j g(Z_{t-j}), \\ g(Z_t) &= \theta Z_t + \lambda(|Z_t| - E(|Z_t|)). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Δεδομένου ότι το $EGARCH$ μοντελοποιεί το λογάριθμο της μεταβλητότητας, ο οποίος μπορεί να έχει και αρνητικές τιμές, δεν υπάρχουν οι περιορισμοί του μοντέλου $GARCH$ καθώς η θετική τιμή της μεταβλητότητας είναι εξασφαλισμένη.

Για χρονικές υστερήσεις $p = q = 1$ προκύπτει η απλούστερη μορφή του μοντέλου το $EGARCH(1, 1)$ η οποία δίνεται στη Σχέση 3.34,

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \log(\sigma_{t-1}^2) + \beta(\theta(Z_t) + \lambda(|Z_t| - E(|Z_t|))). \quad (3.34)$$

Η μοντελοποίηση με χρήση της συνάρτησης $g(Z_t)$ επιτρέπει τόσο το πρόσημο όσο και το μέτρο της τ.μ. Z_t να επιδρούν ξεχωριστά στην εκτίμηση της μεταβλητότητας.

3.5.2 Μοντέλα TARARCH

Η μαθηματική έκφραση του υποδείγματος $TARARCH(p, q)$ δίνεται από τη Σχέση 3.35,

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \gamma_{t-i} N_{t-i}) Z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \\ N_{t-i} &= \begin{cases} 1 & Z_{t-i} < 0 \\ 0 & Z_{t-i} \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Για χρονικές υστερήσεις $p = q = 1$ προκύπτει η απλούστερη μορφή του μοντέλου το $TGARCH(1, 1)$ η οποία δίνεται στη Σχέση 3.36,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma Z_{t-1}^2 N_{t-1}. \quad (3.36)$$

Ο συντελεστής γ αντιστοιχεί στην επίδραση της *μόχλευσης*.

3.6 Αξιολόγηση των μοντέλων μεταβλητότητας

Για την εφαρμογή των ARCH ή/και GARCH βασική προϋπόθεση είναι η ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας των υπολοίπων των αποδόσεων R_t (Σχέση 3.37),

$$\epsilon_t = R_t - \hat{\mu}_t. \quad (3.37)$$

Ο post-hoc έλεγχος αφορά είτε στη σημαντικότητα των συντελεστών του κάθε μοντέλου, είτε στις στατιστικές ιδιότητες των υπολοίπων. Σε κάθε περίπτωση αντικειμενικός σκοπός είναι η εφαρμογή του βέλτιστου μοντέλου εκτίμησης της μεταβλητότητας και κατ' επέκταση της βέλτιστης πρόβλεψης.

3.6.1 Σημαντικότητα παραμέτρων, έλεγχος καταλοίπων

Οι εκτιμήσεις των συντελεστών του αυτοπαλίνδρομου μοντέλου συνοδεύονται από τις εκτιμήσεις των τυπικών σφαλμάτων τους και κατ' επέκταση μπορεί να εφαρμοστεί στατιστικός έλεγχος σημαντικότητας (t-test) προκειμένου να διαπιστωθεί αν οι τιμές των συντελεστών είναι διάφορες του μηδενός, σε συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Ο έλεγχος ARCH έτσι όπως αυτός περιγράφεται από τον Engle, Robert F. [13] εξετάζει τις ακόλουθες στατιστικές υποθέσεις (Σχέσεις 3.38), όπου u_t τυχαία μεταβλητή λευκού θορύβου.

$$\begin{aligned} H_0 & : \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_l = 0, \\ H_1 & : \epsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_l \epsilon_{t-l}^2 + u_t. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Η συνάρτηση ελέγχου ορίζεται ως TR^2 , όπου T το πλήθος των παρατηρήσεων και R^2 ο συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού της παλινδρόμησης των τετραγώνων των υπολοίπων, η οποία ακολουθεί κατανομή χ^2 , με l βαθμούς ελευθερίας.

Η διαδικασία ελέγχου ARCH επίδρασης συνοψίζεται ως εξής:

1. Θεωρούμε τη χρονοσειρά $y_t = \mu_t + \epsilon_t = \mu_t + \sigma_t Z_t$, όπου Z_t i.i.d κατανομή με μέση τιμή μηδέν και μοναδιαία μεταβλητότητα. Συνήθως ισχύει $Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

2. Εφαρμόζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων οποιοδήποτε αυτο-παλίνδρομο μοντέλο της μορφής: $y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{2t} + \dots + \beta_k y_{kt} + \varepsilon_t$, και εν συνεχεία εκτιμάται η χρονοσειρά των καταλοίπων $\varepsilon_t = y_t - \hat{\mu}_t$.
3. Εκτελείται η παλινδρόμηση της εναλλακτικής υπόθεσης για l το πλήθος χρονικές υστερήσεις και εκτιμάται η συνάρτηση ελέγχου TR^2 .

Μία εναλλακτική προσέγγιση αποτελεί ο έλεγχος των καταλοίπων της αναδρομής, τα οποία στην περίπτωση καλής προσαρμογής του μοντέλου αναμένεται αφενός να προέρχονται από κανονική κατανομή και αφετέρου να είναι ασυσχέτιστα, δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης συναρτήσει των βημάτων υστέρησης (lags) να είναι στατιστικά μη σημαντικές.

Στο Σχήμα 3.10 παρουσιάζονται οι ημερήσιες τιμές κλεισίματος και οι αντίστοιχες αποδόσεις του δείκτη S&P500 για περίοδο πέντε ετών από 2005 έως 2009.

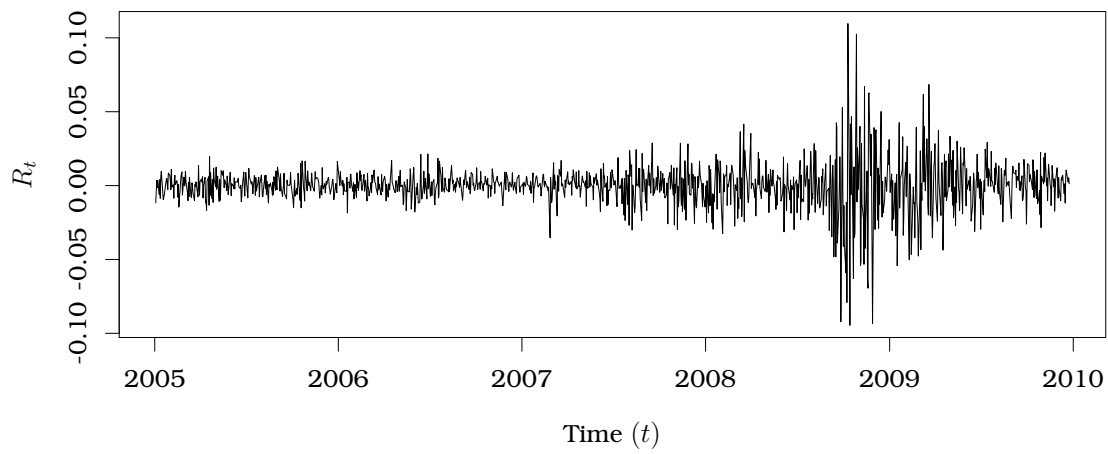
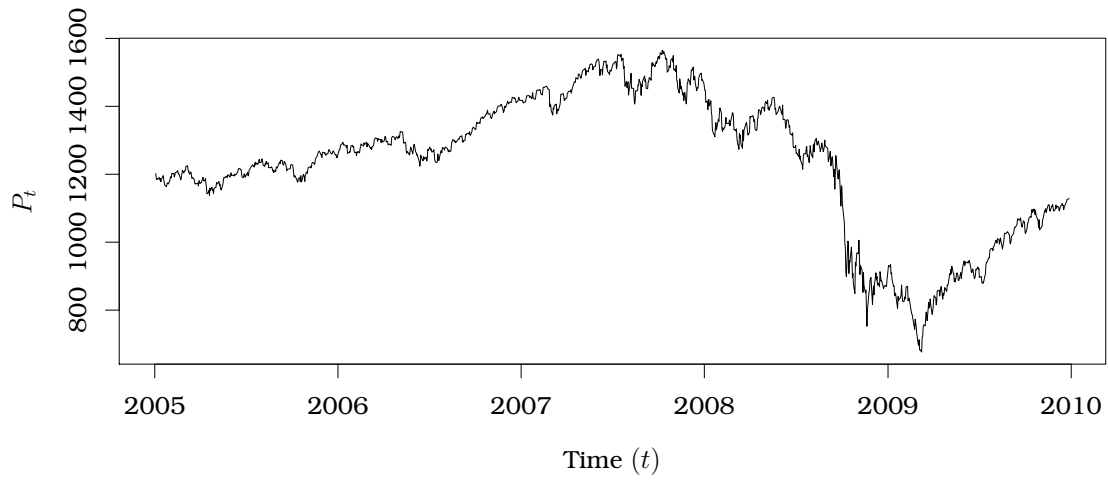
Εφαρμόζοντας τη συνάρτηση ArchTest της βιβλιοθήκης FinTS του λογισμικού **R** γίνεται έλεγχος των στατιστικών υποθέσεων της Σχέσης 3.38, για τιμές χρονικής υστέρησης $l = 1, 5, 10$ και τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 3.2. Από τον

Πίνακας 3.2: Στατιστικός έλεγχος Engle's ύπαρξης ετεροσκεδαστικότητας.

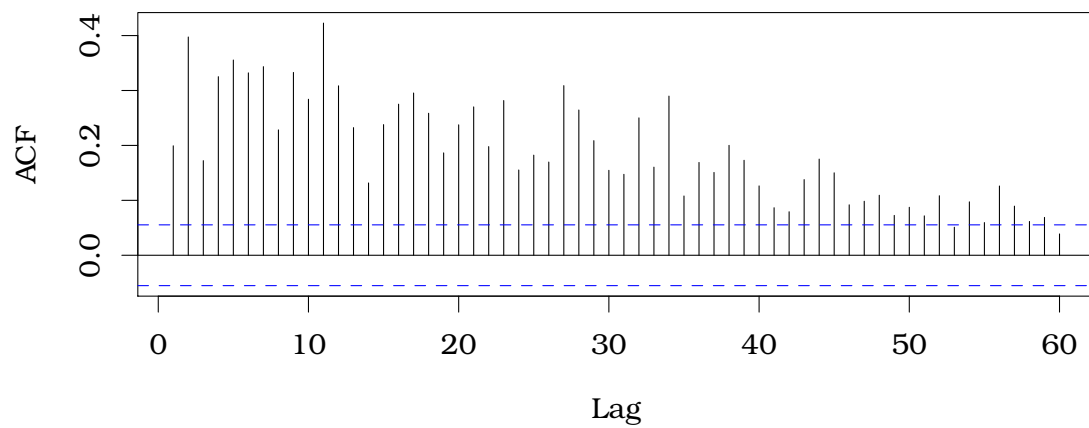
l	F-Stat	p-value	Critical χ^2 (1%)
1	49.82.38	$1.6 \cdot 10^{-12}$	6.635
5	331.3783	$2.2 \cdot 10^{-16}$	15.086
10	388.2346	$2.2 \cdot 10^{-16}$	23.209

Πίνακα 3.2 παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, σε οποιοδήποτε από τα συνήθη επίπεδα εμπιστοσύνης, οι συντελεστές του μοντέλου είναι στατιστικά διάφοροι του μηδενός και κατά συνέπεια δεχόμαστε την επίδραση ARCH.

Η πιθανή επίδραση ARCH μπορεί να φανεί και από τη συμπεριφορά της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των τιμών των υπολοίπων των αποδόσεων. Στο Σχήμα 3.11 παρουσιάζεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των υπολοίπων του δείκτη S&P500 για 60 βήματα χρονικής υστέρησης. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση έχει φθίνουσα συμπεριφορά με τις τιμές της όμως να παραμένουν στατιστικά σημαντικές, γεγονός το οποίο καταδεικνύει την ύπαρξη volatility clustering στη χρονοσειρά των καταλοίπων και κατ' επέκταση στη χρονοσειρά των αποδόσεων.



Σχήμα 3.10: Ημερήσιες τιμές κλεισίματος και αποδόσεις του δείκτη S&P500.



Σχήμα 3.11: Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των υπολοίπων του S&P500.

Πέραν του ποιοτικού γραφικού ελέγχου ή ύπαρξη αυτοσυσχέτισης μπορεί να ελεγχθεί ποσοτικά μέσω του στατιστικού ελέγχου Ljung-Box (LB)*, ο οποίος εξετάζει την σημαντικότητα της αυτοσυσχέτισης από κοινού σε l το πλήθος χρονικές υστερήσεις. Η μηδενική υπόθεση του ελέγχου δίνεται από τη Σχέση 3.39 και η συνάρτηση ελέγχου από τη Σχέση 3.40, η οποία υπό τη μηδενική υπόθεση ακολουθεί κατανομή χ^2 , με l βαθμούς ελευθερίας.

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_l = 0, \quad (3.39)$$

$$Q(l) = T(T+2) \sum_{h=1}^m \frac{\hat{\rho}_h^2}{T-h}. \quad (3.40)$$

Για την περίπτωση του δείκτη S&P500 ο έλεγχος LB για $l = 10$ απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας 1% καθώς η συνάρτηση ελέγχου και το p-value εκτιμώνται 56.8766 και $1.406 \cdot 10^{-8}$ αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τη συνάρτηση `garchFit` της βιβλιοθήκης `fGarch` εκτιμώνται οι συντελεστές διαφόρων μοντέλων ARCH και GARCH και τα τυπικά σφάλματά τους, η τιμή Z-statistics η οποία εκτιμάται από το πηλίκο συντελεστή προς την τυπική απόκλιση αυτού[†] και η τιμή p-value για τον στατιστικό έλεγχο σημαντικότητας των συντελεστών. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 3.3.

Πίνακας 3.3: Εκτιμήσεις των συντελεστών των μοντέλων ARCH και GARCH για τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 της περιόδου 2005 έως 2009.

	Coeff	Value	St. Error	Z-Stat	p-value
ARCH(1)	a_0	$1.371 \cdot 10^{-4}$	$8.445 \cdot 10^{-6}$	16.238	$< 2 \cdot 10^{-16}$
	a_1	$5.513 \cdot 10^{-1}$	$9.240 \cdot 10^{-2}$	5.967	$2.42 \cdot 10^{-9}$
ARCH(2)	a_0	$7.065 \cdot 10^{-5}$	$5.272 \cdot 10^{-6}$	13.401	$< 2 \cdot 10^{-16}$
	a_1	$3.101 \cdot 10^{-1}$	$5.804 \cdot 10^{-2}$	5.342	$9.2 \cdot 10^{-8}$
	a_2	$4.811 \cdot 10^{-1}$	$5.938 \cdot 10^{-2}$	8.103	$4.44 \cdot 10^{-16}$
GARCH(1,1)	ω	$1.230 \cdot 10^{-6}$	$3.538 \cdot 10^{-7}$	3.477	0.000506
	a_1	$8.099 \cdot 10^{-2}$	$1.19 \cdot 10^{-2}$	6.733	$1.26 \cdot 10^{-11}$
	β_1	$9.103 \cdot 10^{-1}$	$1.22 \cdot 10^{-2}$	74	$< 2 \cdot 10^{-16}$
GARCH(2,1)	ω	$1.682 \cdot 10^{-6}$	$4.950 \cdot 10^{-7}$	3.398	0.000678
	a_1	$1.0 \cdot 10^{-8}$	$1.759 \cdot 10^{-2}$	0	1
	a_2	0.1023	$2.410 \cdot 10^{-2}$	4.244	$2.19 \cdot 10^{-5}$
	β_1	0.8855	$1.735 \cdot 10^{-2}$	51.031	$< 2 \cdot 10^{-16}$

Έχοντας εκτιμήσει τους συντελεστές των μοντέλων μπορούμε να προχωρήσουμε στην εκτίμηση της υπό συνθήκη μεταβλητότητας σ_t^2 της υπό μελέτη χρονοσειράς. Στο

*Συχνά στη βιβλιογραφία αναφέρεται και ως Ljung-Box Q Test

†Τυχόν αποκλίσεις στις τιμές του πίνακα οφείλονται στις στρογγυλοποιήσεις των συντελεστών

Σχήμα 3.12 απεικονίζονται οι ημερήσιες αποδόσεις R_t του δείκτη και το άνω και κάτω όριο $\pm 2\sigma_t$, για το μοντέλο GARCH(1,1). Από το σχήμα αυτό υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι το μοντέλο ‘παρακολουθεί’ ικανοποιητικά τις μεταβολές των αποδόσεων. Ο γραφικός έλεγχος μπορεί να επεκταθεί χρησιμοποιώντας τα υπόλοιπα από την προσαρμογή του μοντέλου. Στο Σχήμα 3.13 απεικονίζεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των υπολοίπων από την οποία διαπιστώνουμε ότι δεν παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές τιμές, γεγονός το οποίο υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει volatility clustering στα κατάλοιπα και κατ’ επέκταση συμπεραίνουμε ότι η συμπεριφορά αυτή έχει αποτυπωθεί από το μοντέλο.

Τέλος στο Σχήμα 3.14 παρουσιάζεται το διάγραμμα ποσοστημορίων κανονικής κατανομής (Normal Q-Q) των τυποποιημένων υπολοίπων του μοντέλου, από το οποίο υπάρχουν ενδείξεις ότι οι ουρές της κατανομής των υπολοίπων αποκλίνουν της κανονικής κατανομής, με την απόκλιση να είναι εντονότερη στην αριστερή ουρά της κατανομής.

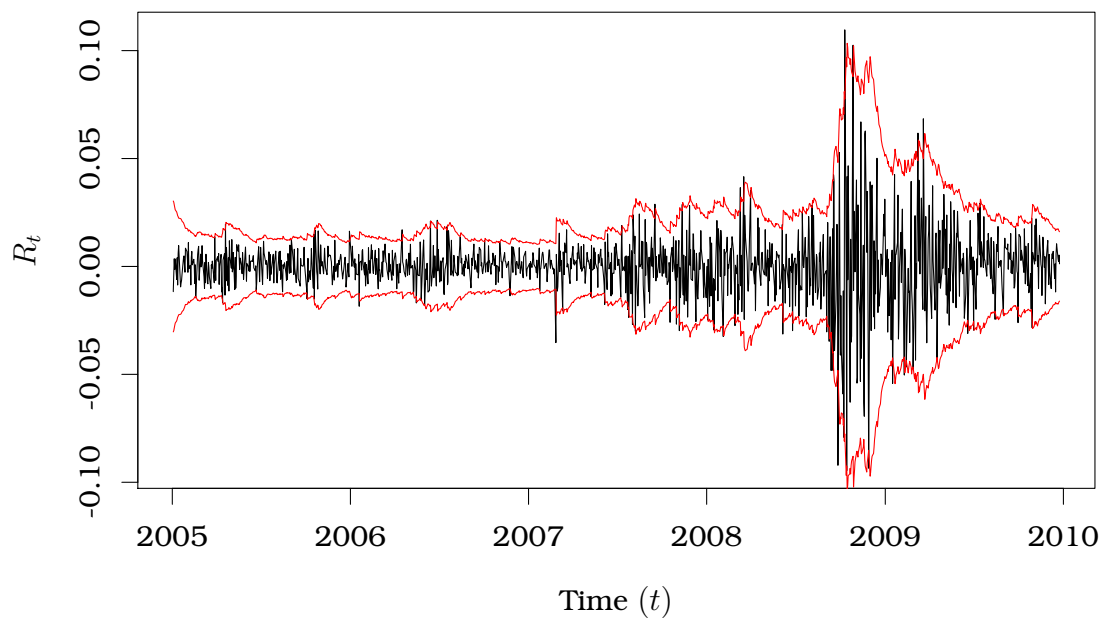
Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στο εδάφιο 3.4 κατά την εφαρμογή των υποδειγμάτων ARCH & GARCH συνήθως υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή ε_t της Σχέσης 3.21 ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Εναλλακτικά στις περιπτώσεις όπου θέλουμε να προσομοιάσουμε κατανομές αποδόσεων με αυξημένη κυρτότητα υποθέτουμε κατανομή student-t, με ν βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι εκτιμώνται ως επιπλέον παράμετρος του μοντέλου και συνήθως έχουν τιμή 6 έως 10.

Στον Πίνακα 3.4 παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις των συντελεστών του t-GARCH(1,1) μοντέλου για $\nu = 6.8$ βαθμούς ελευθερίας, έτσι όπως αυτοί προκύπτουν από τη συνάρτηση `garchFit` της R.

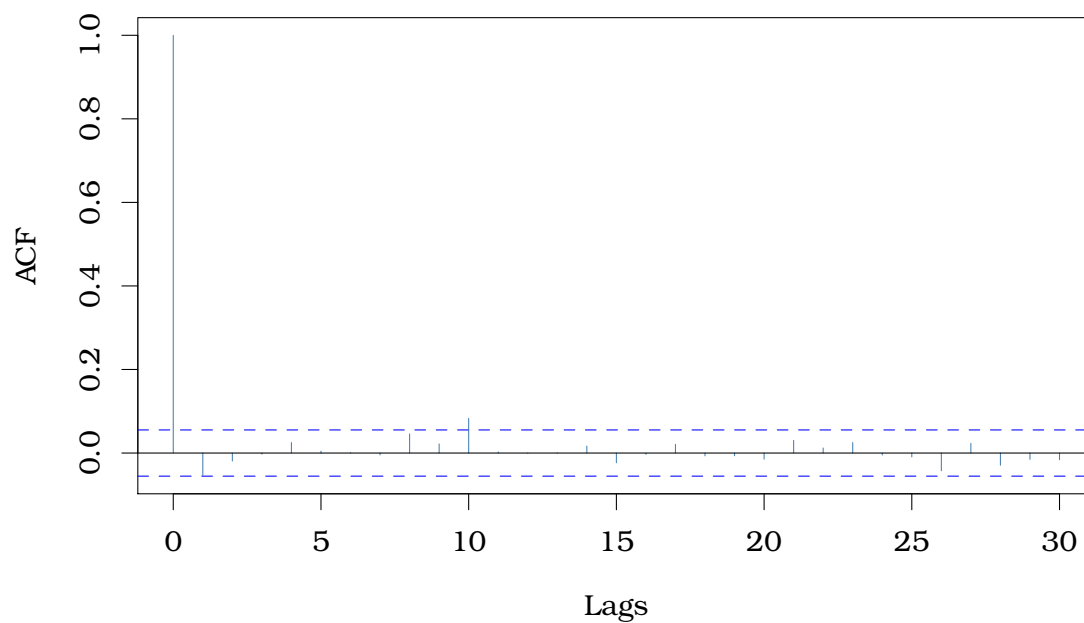
Πίνακας 3.4: Εκτιμήσεις των συντελεστών του μοντέλου t-GARCH(1,1) για τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 της περιόδου 2005 έως 2009.

	Coeff	Value	St. Error	Z-Stat	p-value
t-GARCH(1,1)	ω	$7.157 \cdot 10^{-7}$	$3.709 \cdot 10^{-7}$	1.929	0.0537
	a_1	$8.401 \cdot 10^{-2}$	$1.485 \cdot 10^{-2}$	5.657	$1.54 \cdot 10^{-8}$
	β_1	$9.150 \cdot 10^{-1}$	$1.369 \cdot 10^{-2}$	66.855	$< 2 \cdot 10^{-16}$
	shape	6.806	1.374	4.952	$7.33 \cdot 10^{-7}$

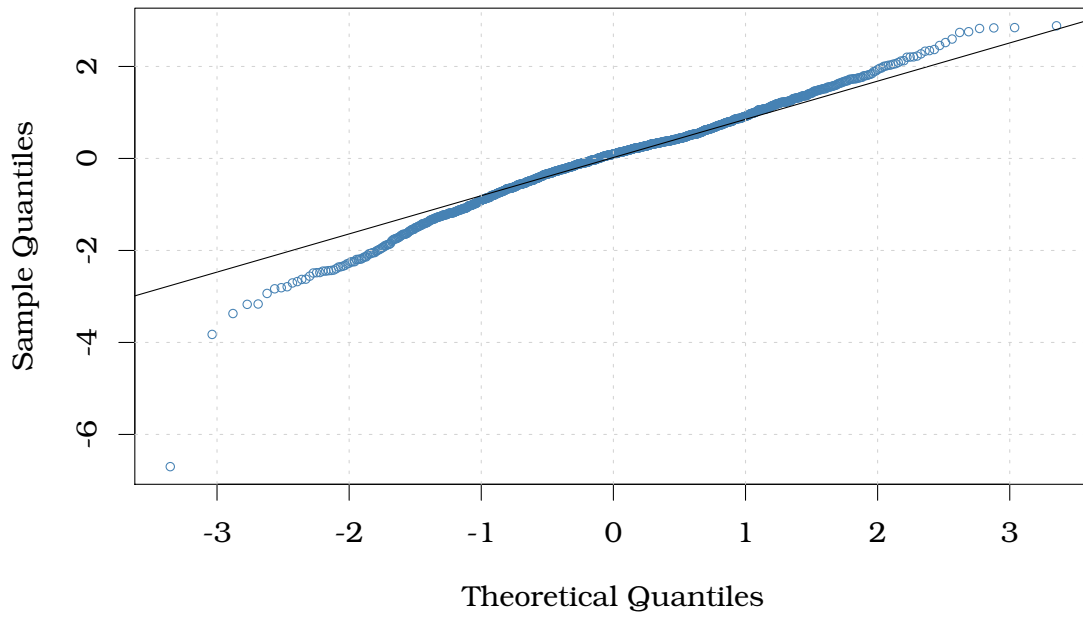
Στο Σχήμα 3.15 παρουσιάζεται το διάγραμμα ποσοστημορίων της κατανομής Student-t των τυποποιημένων υπολοίπων του μοντέλου από το οποίο φαίνεται ότι το μοντέλο προσαρμόζεται ικανοποιητικά στις διαθέσιμες παρατηρήσεις. Συγκρίνοντας το διάγραμμα αυτό με το αντίστοιχο του υποδείγματος GARCH(1,1) (Σχήμα 3.14) διαπιστώνουμε ότι η προσαρμογή στο αριστερό μέρος της κατανομής δείχνει σημαντικά βελτιωμένη.



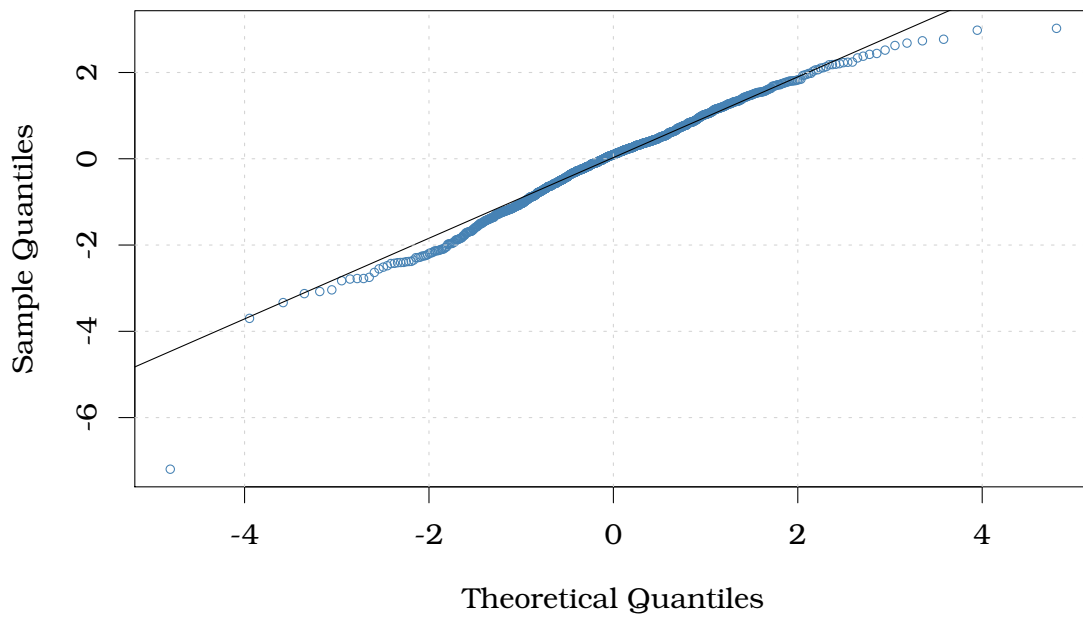
Σχήμα 3.12: Ημερήσιες αποδόσεις του δείκτη S&P500 με υπέρθεση των ορίων $\pm 2\sigma_t$ του μοντέλου GARCH(1,1).



Σχήμα 3.13: Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των κανονικοποιημένων υπολοίπων του μοντέλου GARCH(1,1).



Σχήμα 3.14: Διάγραμμα ποσοστημορίων κανονικής κατανομής των τυποποιημένων υπολοίπων του μοντέλου GARCH(1,1).



Σχήμα 3.15: Διάγραμμα ποσοστημορίων κατανομής Student-t των τυποποιημένων υπολοίπων του μοντέλου t-GARCH(1,1).

3.6.2 Πρόβλεψη μεταβλητότητας και εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο

Ένα από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά της GARCH μεθοδολογίας είναι ότι παρέχει τη δυνατότητα πρόβλεψης της μεταβλητότητας για οποιοδήποτε χρονικό ορίζοντα από ένα μόνο μοντέλο. Έχοντας εκτιμήσει τους συντελεστές του μοντέλου μπορούμε να προβλέψουμε την ημερήσια μεταβλητότητα του R_{t+n} για κάθε χρονική στιγμή από $t + 1$ έως $t + n$. Για παράδειγμα στην περίπτωση του GARCH(1,1) μοντέλου (Σχέση 3.41) η πρόβλεψη n βημάτων δίνεται από την αναδρομική Σχέση 3.42,

$$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha}\varepsilon_t^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_{t-1}^2, \quad (3.41)$$

$$\hat{\sigma}_{t+j}^2 = \hat{\omega} + (\hat{\alpha} + \hat{\beta})\hat{\sigma}_{t+j-1}^2. \quad (3.42)$$

Εν συνεχεία από την εκτίμηση της μεταβλητότητας των αποδόσεων μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία σε κίνδυνο $Var(p)$ για συγκεκριμένη πιθανότητα p , σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο εδάφιο 3.2.

Για την περίπτωση του δείκτη S&P500 η πρόβλεψη πέντε ημερών της μεταβλητότητας και η αξία σε κίνδυνο για πιθανότητα $p = 5\%$, με χρήση του μοντέλου GARCH(1,1) δίνονται στον Πίνακα 3.5.

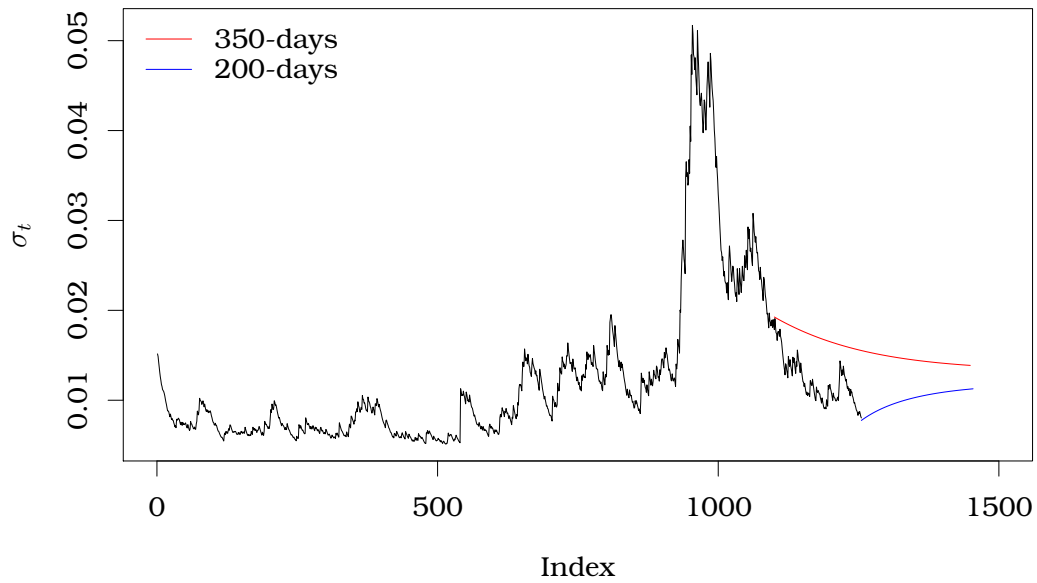
Πίνακας 3.5: Πρόβλεψη volatility και VaR(5%) πέντε ημερών του δείκτη S&P500 σύμφωνα με το μοντέλο GARCH(1,1).

<i>Days</i>	σ_t	<i>VaR(5%)</i>
1	0.007752089	0.01275105
2	0.007797549	0.01282583
3	0.007842354	0.01289952
4	0.007886517	0.01297217
5	0.007930053	0.01304378

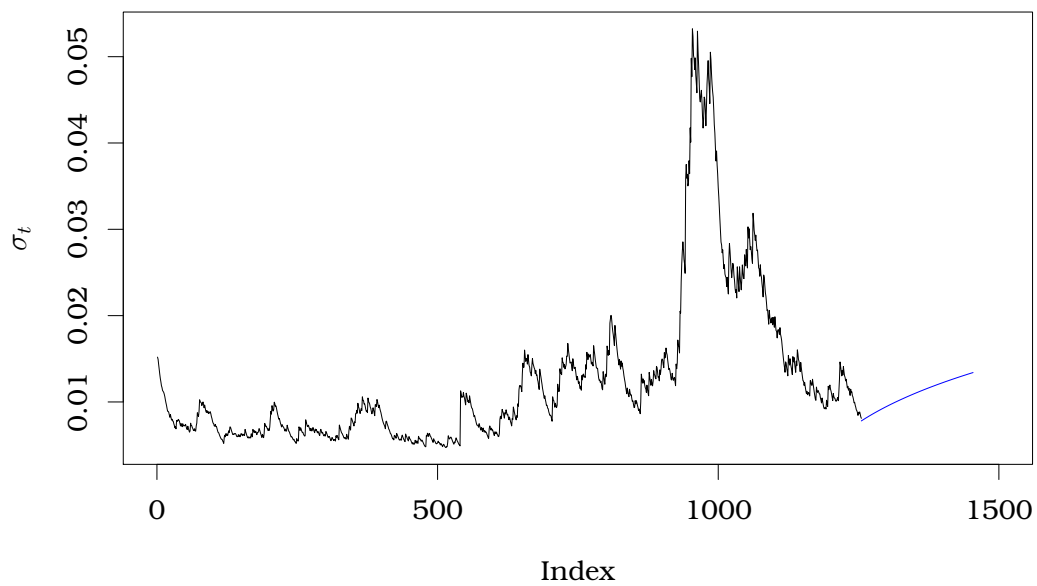
Στο Σχήμα 3.16 απεικονίζεται η πρόβλεψη 350 ημερών και 200 ημερών σε δύο χρονικές στιγμές υψηλής και χαμηλής μεταβλητότητας αντίστοιχα. Αν και τόσο μακροχρόνια πρόβλεψη δεν έχει πρακτική αξία μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι προβλέψεις ανεξάρτητα του χρονικού ορίζοντα συγκλίνουν στη μακροχρόνια ισορροπία, περί το 1.1% στην περίπτωση του δείκτη S&P500. Επιπλέον παρατηρούμε ότι σε περιόδους έντονων μεταβολών η σύγκλιση στην τιμή ισορροπίας επιτυγχάνεται με φθίνουσα σειρά ενώ αντίθετα σε περιόδους ηρεμίας επιτυγχάνεται με αύξουσα σειρά.

Η ταχύτητα με την οποία ένα μοντέλο GARCH(1,1) συγκλίνει στη μακροχρόνια ισορ-

ροπία εξαρτάται από την τιμή του αθροίσματος $\alpha + \beta$ των συντελεστών του. Όσο μεγαλύτερο το άθροισμα τόσο βραδύτερη η σύγκλιση και αντιστρόφως.



Σχήμα 3.16: Πρόβλεψη της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης των αποδόσεων του δείκτη S&P500 για περιόδους έντονων και ήπιων μεταβολών.



Σχήμα 3.17: Πρόβλεψη 200 ημερών της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης των αποδόσεων του δείκτη S&P500 σύμφωνα με το μοντέλο t -GARCH(1,1).

Στο Σχήμα 3.17 παρουσιάζεται η πρόβλεψη 200 ημερών του μοντέλου t-GARCH(1,1) από το οποίο παρατηρούμε ότι σε σχέση με το μοντέλο normal GARCH(1,1) η σύγκλιση είναι βραδύτερη. Γεγονός το οποίο επαληθεύεται και από την τιμή του αθροίσματος των συντελεστών $\alpha + \beta$ για κάθε μοντέλο το οποίο υπολογίζεται ίσο με 0.991287 και 0.999027 αντιστοίχως. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι το μοντέλο t-GARCH(1,1) για την περίοδο υψηλής μεταβλητότητας δεν εφαρμόζεται διότι για τους συντελεστές του προκύπτει ότι $\alpha_1 + \beta_1 > 1$ και συνεπώς το μοντέλο δεν συγκλίνει.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή πρόβλεψης κινδύνου για ισοβαρές χαρτοφυλάκιο

Στο Κεφάλαιο αυτό εφαρμόζουμε τις τεχνικές εκτίμησης και πρόβλεψης κινδύνου, τις οποίες παρουσιάσαμε, για την περίπτωση ισοβαρούς χαρτοφυλακίου. Η υλοποίηση των διαφόρων τεχνικών έγινε με χρήση του υπολογιστικού προγράμματος **R*** και ο κώδικας ο οποίος συντάχθηκε παρατίθεται στο Παράρτημα Α΄

4.1 Ισοβαρές Χαρτοφυλάκιο

Επιλέγουμε τέσσερις μετοχές οι οποίες διαπραγματεύονται στο Χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης (NYSE) για τις οποίες αντλούμε από ελεύθερες βάσεις δεδομένων ημερήσια δεδομένα που αφορούν την τιμή κλεισίματος κάθε μετοχής κατά το χρονικό διάστημα 2010 - 2015. Επιλέχθηκαν μετοχές του τραπεζικού κλάδου και συγκεκριμένα οι μετοχές των τραπεζών Citigroup, Morgan Stanley, JP Morgan Chase και WellsFargo. Οι τιμές κλεισίματος των μετοχών καθώς και του δείκτη Dow Jones Industrial παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.1. Οι τέσσερις αυτές μετοχές ($n = 4$) σχηματίζουν ένα ισοβαρές χαρτοφυλάκιο η απόδοση του οποίου δίνεται από τη Σχέση 4.1, όπου οι αποδόσεις R_i εκτιμώνται σύμφωνα με τη Σχέση 1.2.

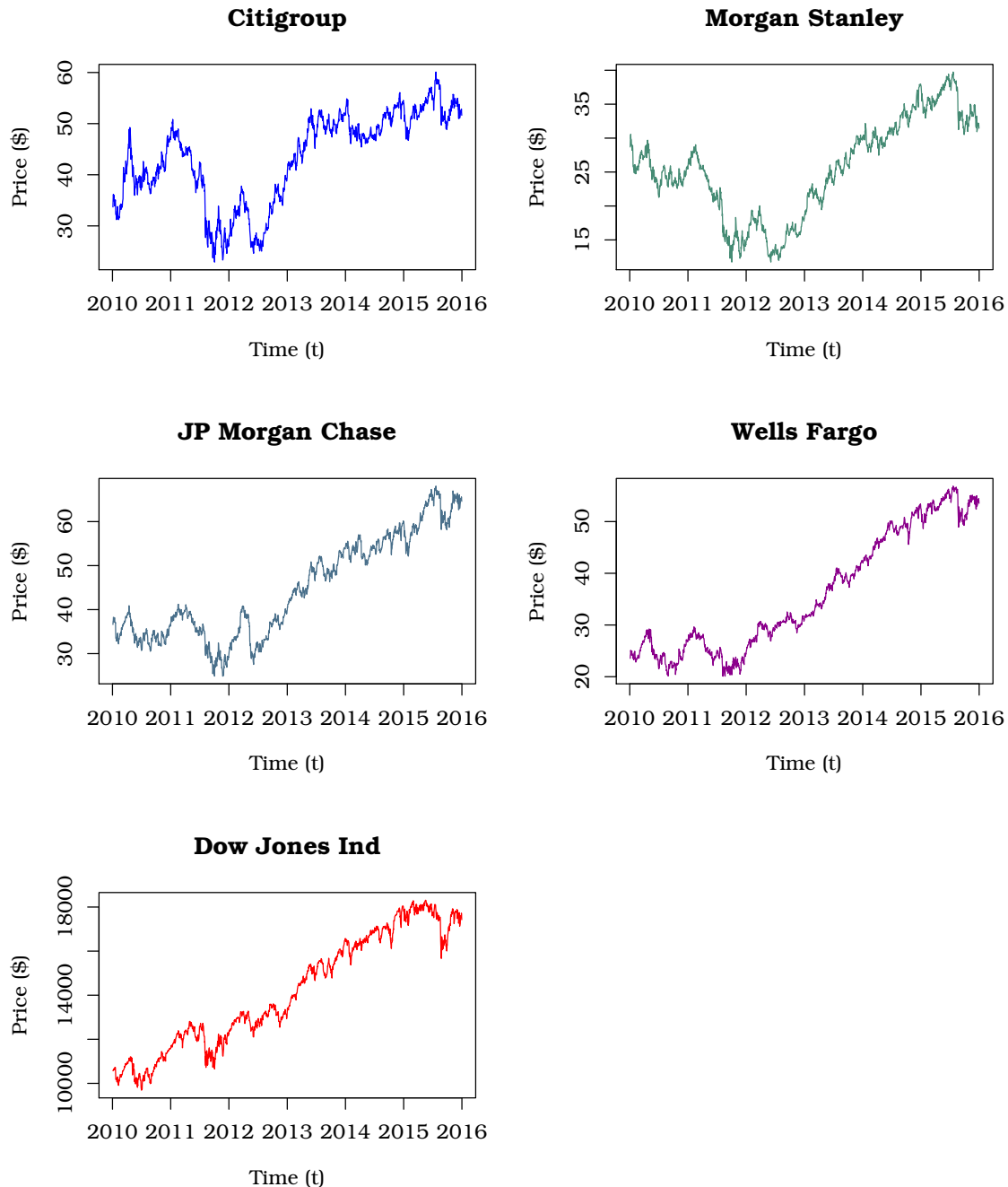
$$R_p(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i(t). \quad (4.1)$$

Στην περίπτωση μη ισοβαρούς χαρτοφυλακίου, όπου κάθε τίτλος συμμετέχει με διαφορετικό ποσοστό στο χαρτοφυλάκιο η απόδοση εκτιμάται ως σταθμισμένος μέσος των

*<https://www.r-project.org>

αποδόσεων των τίτλων, Σχέση 4.2.

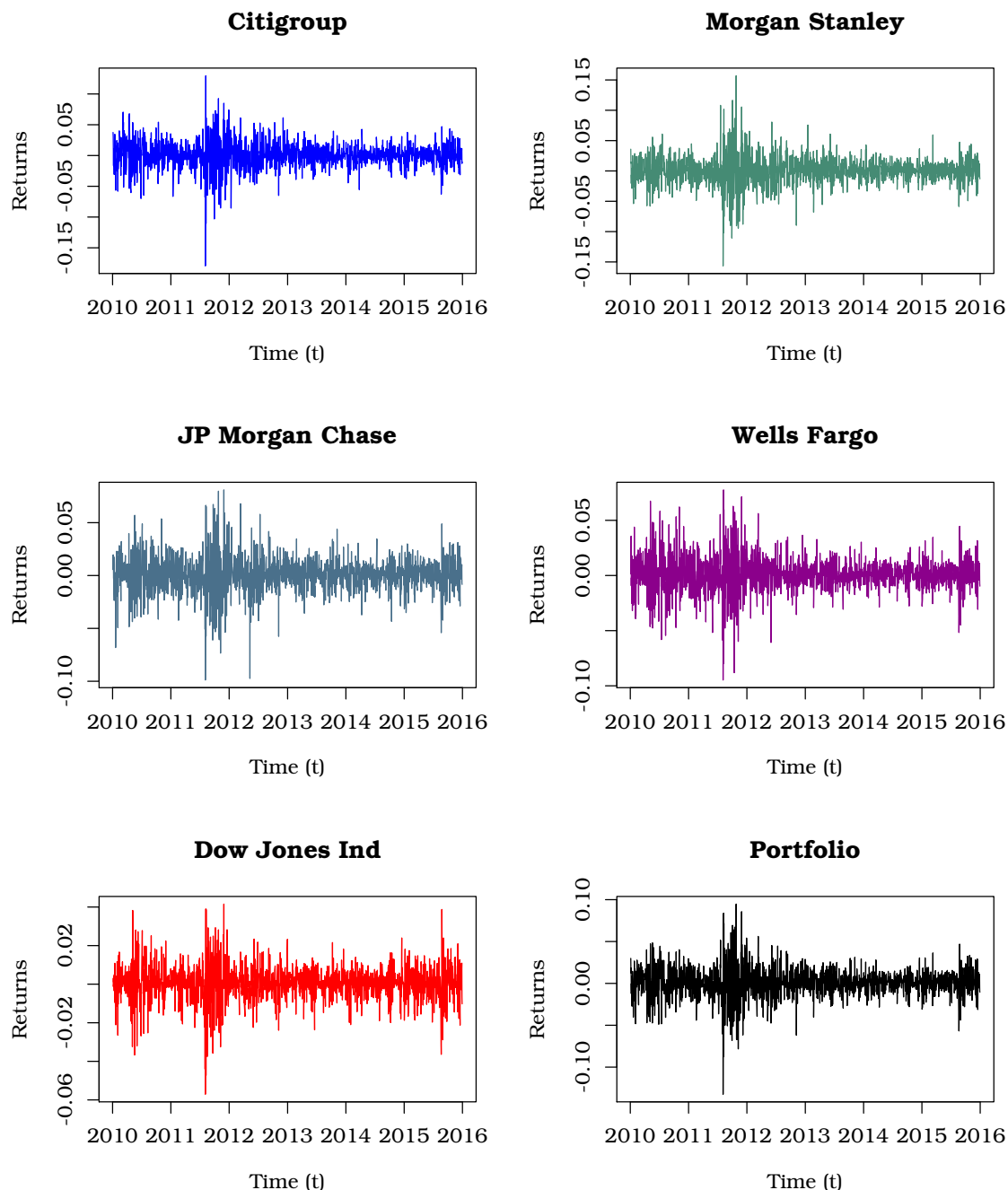
$$R_p(t) = \sum_{i=1}^n w_i R_i(t). \quad (4.2)$$



Σχήμα 4.1: Τιμές κλεισίματος των μετοχών του χαρτοφυλακίου και του δείκτη DJI.

Οι ημερήσιες αποδόσεις κάθε μετοχής, του δείκτη DJI και του χαρτοφυλακίου παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.2 και τα στατιστικά περιγραφικά μέτρα τους συνοψίζονται

στον Πίνακα 4.1.



Σχήμα 4.2: Ημερήσιες αποδόσεις των μετοχών, του δείκτη DJI και του χαρτοφυλακίου.

Από τις τιμές του Πίνακα 4.1 παρατηρούμε ότι η μετοχή της Morgan Stanley και της Wells Fargo παρουσιάζουν την υψηλότερη και χαμηλότερη διακύμανση αντίστοιχα. Ένα ακόμα μέτρο διασποράς αποτελεί ο συντελεστής μεταβολής C , ο οποίος εκφράζει το λόγο της τυπικής απόκλισης προς τη μέση τιμή (Σχέση 4.3), και ο οποίος αποτελεί ένα μέτρο σύγκρισης της διασποράς μεταξύ σειρών των οποίων οι μέσες τιμές διαφέρουν

σημαντικά

$$C_i = \frac{\sigma_i}{\mu_i}. \quad (4.3)$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι οι τιμές κύρτωσης είναι μεγαλύτερες του 3 και κατ' επέκταση αναμένουμε λεπτόκυρτες κατανομές στις αποδόσεις με αυξημένο πάχος στις ουρές. Για τις τιμές της κύρτωσης εκτελείται ο στατιστικός έλεγχος Anscombe-Glynn [3] από τον οποίο προκύπτει ότι όλες οι εκτιμήσεις είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας 1%.

Πίνακας 4.1: Περιγραφικά στατιστικά στοιχεία αποδόσεων.

	μ	σ	σ^2	R_{max}	R_{min}	$ C $	γ_4
Citigroup	0.00028	0.02175	0.00047	0.12968	-0.17934	76.916	5.743
Morgan Stanley	0.00006	0.02314	0.00054	0.15699	-0.15648	380.449	5.436
JP Morgan Chase	0.00038	0.01740	0.00030	0.08101	-0.09888	46.233	3.224
Wells Fargo	0.00054	0.01619	0.00026	0.07759	-0.09479	29.730	3.753
Dow Jones Ind	0.00033	0.00928	0.00009	0.04153	-0.05706	28.088	3.584
Portfolio	0.00032	0.01797	0.00032	0.09474	-0.13237	56.839	4.656

4.2 Ημερήσιο VaR μετοχών και χαρτοφυλακίου

4.2.1 Παραμετρικός προσδιορισμός

Υποθέτοντας ότι οι αποδόσεις των μετοχών ακολουθούν κανονική κατανομή, με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ , σύμφωνα με τον Πίνακα 4.1, οι εκτιμήσεις για το ημερήσιο VaR ή DEAR σε επίπεδο σημαντικότητας 5% δίνεται από τη Σχέση 3.4, όπου $z_{0.05} = 1.67$.

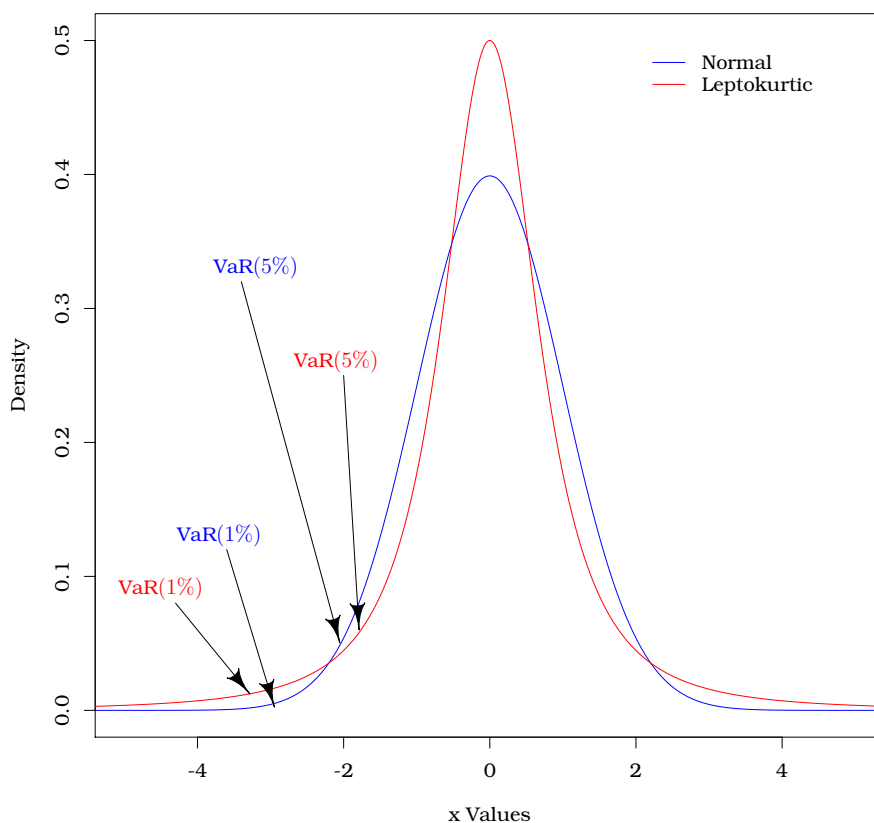
Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης του χαρτοφυλακίου εκτιμάται ο $n \times n$ πίνακας συνδιακύμανσης και το διάνυσμα συμμετοχής κάθε μετοχής στο χαρτοφυλάκιο και εφαρμόζεται η Σχέση 3.8, από την οποία προκύπτει $\hat{\sigma}_p = 0.017966$. Εν συνεχεία υπό την υπόθεση κανονικής κατανομής εκτιμάται η αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 4.3 και ο κώδικας της **R** παρατίθεται στο Παράρτημα Α.2

4.2.2 Μη παραμετρικός προσδιορισμός

Προκειμένου να απαλλαγούμε από από την επισφαλή υπόθεση της κανονικότητας των αποδόσεων των μετοχών και του χαρτοφυλακίου εφαρμόζουμε την μη παραμετρική τεχνική της ιστορικής αναδρομής. Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο εδάφιο 3.1.1 από τις κατανομές των αποδόσεων εκτιμάται η πιθανότητα η ημερήσια απόδοση να είναι

μικρότερη από το επίπεδο σημαντικότητας p (Σχέσεις 2.5 & 2.6). Οι εκτιμήσεις της αξίας σε κίνδυνο για επίπεδο σημαντικότητας 5% συνοψίζονται στον Πίνακα 4.3 Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της ιστορικής αναδρομής η εκτίμηση της απώλειας των χρημάτων της επένδυσης είναι συστηματικά χαμηλότερη από την περίπτωση παραμετρικής εκτίμησης, κατά την οποία υποθέτουμε ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή. Η συστηματική αυτή απόκλιση αποδίδεται στο λεπτόκυρτο σχήμα της κατανομής των αποδόσεων, σε σχέση με την κανονική κατανομή (Πίνακας 4.1). Στην περίπτωση λεπτόκυρτων κατανομών η χρήση κανονικής κατανομής είναι πιθανό να οδηγήσει τόσο σε υπερεκτίμηση του VaR σε υψηλά επίπεδα σημαντικότητας ($\alpha \sim 0.05$), όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.3, όσο και σε υποεκτίμηση του VaR σε χαμηλά επίπεδα σημαντικότητας ($\alpha \sim 0.01$), όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.4. Η συμπεριφορά αυτή παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 4.3, όπου οι θέσεις των ποσοστημορίων 1 & 5% είναι ενδεικτικές.

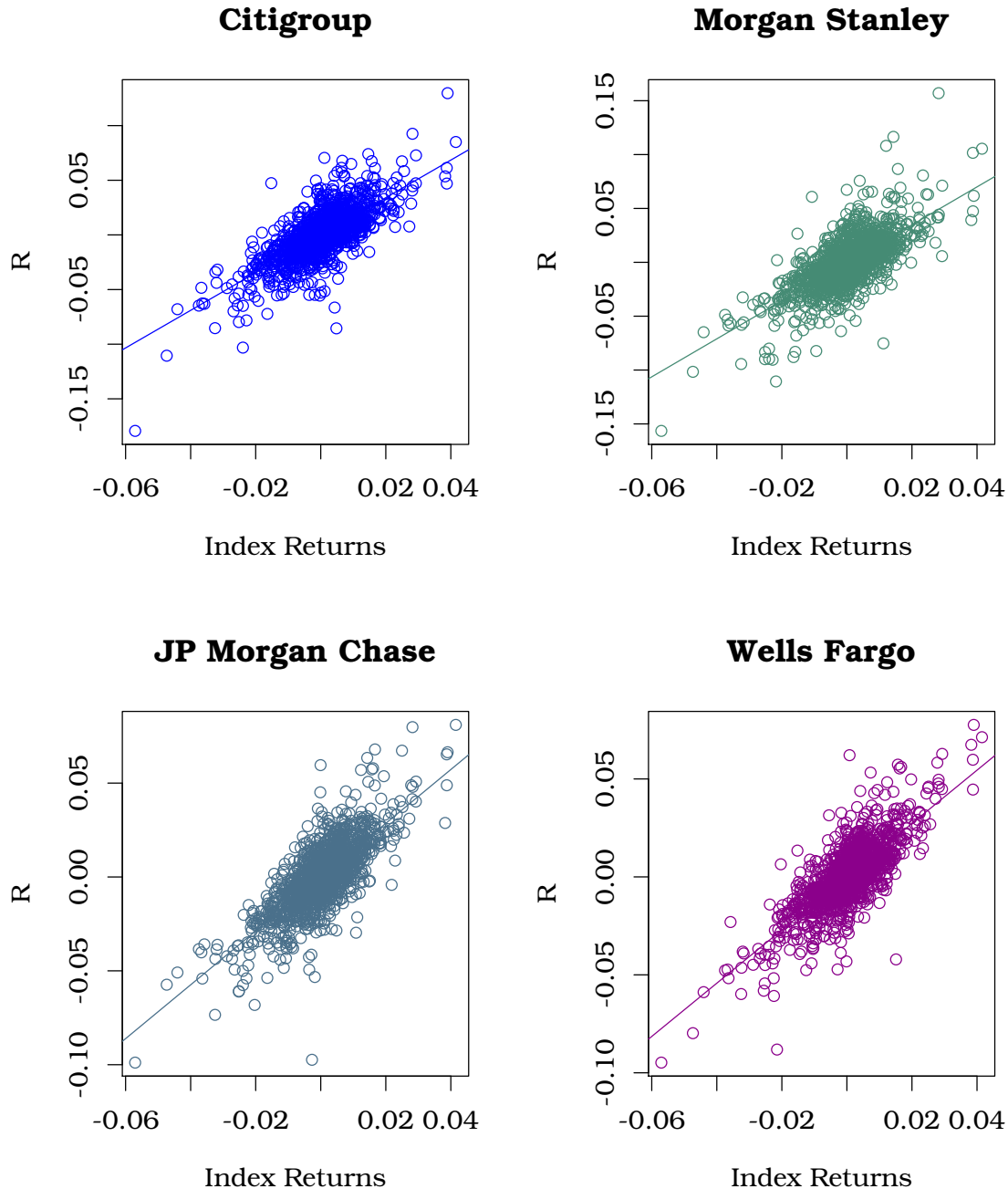
Ο κώδικας της **R** παρατίθεται στο Παράρτημα Α.3



Σχήμα 4.3: Σχηματική ερμηνεία του κινδύνου υποεκτίμησης ή υπερεκτίμησης της αξίας σε κίνδυνο ανάλογα του επιπέδου εμπιστοσύνης από τη χρήση κανονικής κατανομής για τις περιπτώσεις λεπτόκυρτων κατανομών.

4.2.3 Μέθοδος mapping

Χρησιμοποιώντας τις αποδόσεις του δείκτη DJI ως σχετικό μέτρο κινδύνου εφαρμόζουμε το γραμμικό μοντέλο CAPM (Σχέση 3.12) ο συντελεστής κλίσης (β) του οποίου αποτελεί εκτίμηση του μέτρου του συστηματικού κινδύνου.



Σχήμα 4.4: Διαγράμματα διασποράς των αποδόσεων των μετοχών συναρτήσει των αποδόσεων του δείκτη DJI.

Στο Σχήμα 4.4 παρουσιάζονται τα διαγράμματα διασποράς των ημερήσιων απο-

δόσεων των μετοχών του χαρτοφυλακίου, συναρτήσει των αποδόσεων του δείκτη DJI καθώς και οι αντίστοιχες ευθείες αναδρομής. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων κλίσης των αναδρομών και το αντίστοιχο τυπικό σφάλμα συνοψίζονται στον Πίνακα 4.2. Από

Πίνακας 4.2: Παράμετρος κλίσης του μοντέλου CAPM.

	$\hat{\beta}$	Std Error	t-value	p-value
Citigroup	1.71902	0.04104	41.88155	0.00000
Morgan Stanley	1.76299	0.04541	38.82335	0.00000
JP Morgan Chase	1.43357	0.03113	46.05647	0.00000
Wells Fargo	1.35900	0.02816	48.26641	0.00000

τον Πίνακα 4.2 και τις τιμές των στατιστικών παραμέτρων Student-t και p-value προκύπτει ότι οι εκτιμήσεις των συντελεστών $\hat{\beta}_i$ είναι στατιστικά σημαντικοί.

Η ισοδύναμη θέση του χαρτοφυλακίου αγοράς (market portfolio) προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τη θέση $M \cdot w_i$ σε κάθε μετοχή με τον αντίστοιχο συντελεστή β_i και εν συνεχεία αθροίζοντας τα γινόμενα, Σχέση 4.4,

$$M' = M \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot w_i. \quad (4.4)$$

Κατά συνέπεια το ποσό M το οποίο έχει τοποθετηθεί σε τέσσερις μετοχές τραπεζών ισοδυναμεί με ποσό $M' = 1.56865 \cdot V$ το οποίο έχει επενδυθεί στο δείκτη DJI απ' ευθείας. Η σημαντικά αυξημένη ισοδύναμη θέση καταδεικνύει ότι η μέση θέση του χαρτοφυλακίου είναι επιθετική. Το VaR του χαρτοφυλακίου για επίπεδα εμπιστοσύνης 5% και 1% δίνεται από τη Σχέση 3.13 και προκύπτει ίσο με $VaR(5\%) = -0.04636$ και $VaR(1\%) = -0.06556$ αντίστοιχα.

Ο κώδικας της **R** παρατίθεται στο Παράρτημα Α.4

Πίνακας 4.3: Συνοπτικός πίνακας εκτιμήσεων της αξίας σε κίνδυνο των μετοχών και του χαρτοφυλακίου, για επίπεδο εμπιστοσύνης $p = 5\%$.

	Παραμετρικό	Ιστορική Αναδρομή	Mapping
Citigroup	-0.03550	-0.03346	
Morgan Stanley	-0.03800	-0.03540	
JP Morgan Chase	-0.02824	-0.02702	
Wells Fargo	-0.02608	-0.02479	
DJI	-0.01493	-0.01492	
Portfolio	-0.02924	-0.02808	-0.04636

Πίνακας 4.4: Συνοπτικός πίνακας εκτιμήσεων της αξίας σε κίνδυνο των μετοχών και του χαρτοφυλακίου, για επίπεδο εμπιστοσύνης $p = 1\%$.

	Παραμετρικό	Ιστορική Αναδρομή	Mapping
Citigroup	-0.05032	-0.06275	
Morgan Stanley	-0.05376	-0.06392	
JP Morgan Chase	-0.04010	-0.04935	
Wells Fargo	-0.03711	-0.04500	
DJI	-0.02126	-0.02556	
Portfolio	-0.04148	-0.04880	-0.06556

4.2.4 Κινούμενος μέσος και εκθετικός κινούμενος μέσος

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει συνήθως οι αποδόσεις χρηματοοικονομικών προϊόντων παρουσιάζουν ομαδοποιήσεις (volatility clustering) και κατά συνέπεια η υπόθεση της σταθερής μεταβλητότητας ως προς το χρόνο συχνά παραβιάζεται.

Η απλούστερη τεχνική διαχείρισης μη σταθερής μεταβλητότητας είναι η μέθοδος του απλού κινούμενου μέσου. Τα αποτελέσματα της υλοποίησης τεχνικής αυτής με σκοπό την εκτίμηση του VaR, σύμφωνα με όσα αναφέραμε στο εδάφιο 3.3.1, για σταθερό παράθυρο 10 ημερών συνοψίζονται στον Πίνακα 4.5

Εξέλιξη της τεχνικής του απλού κινούμενου μέσου αποτελεί ο εκθετικός κινούμενος μέσος, ο οποίος παρουσιάστηκε στο εδάφιο 3.3.2. Για ημερήσια πρόβλεψη και τιμή της παραμέτρου $\lambda = 0.94$ και αρχική εκτίμηση της μεταβλητότητας από δείγμα 10 ημερών οι εκτιμήσεις του VaR των μετοχών και του χαρτοφυλακίου συνοψίζονται στον Πίνακα 4.5.

Ο κώδικας της **R** παρατίθεται στο Παράρτημα Α'5 και Α'6 * για σταθερό και κινούμενο μέσο αντίστοιχα.

Πίνακας 4.5: Συνοπτικός πίνακας εκτιμήσεων της ημερήσιας αξίας σε κίνδυνο των μετοχών και του χαρτοφυλακίου, με χρήση του απλού και του εκθετικού κινούμενου μέσου, για επίπεδο εμπιστοσύνης $p = 5\%$.

	Απλός Κιν. Μέσος	Εκθετικός Κιν. Μέσος
Citigroup	-0.02390	-0.02616
Morgan Stanley	-0.03143	-0.03124
JP Morgan Chase	-0.02318	-0.02441
Wells Fargo	-0.02016	-0.02166
DJI	-0.01794	-0.01656
Portfolio	-0.02390	-0.02955

Από τις τιμές του Πίνακα 4.5 παρατηρούμε ότι οι δύο μεθοδολογίες δίνουν πα-

*Για τον εκθετικό κινούμενο μέσο χρησιμοποιήθηκε κώδικας που αναπτύχθηκε από τον Jon Danielson [12]

ραπλήσιες τιμές για την αξία σε κίνδυνο, γεγονός το οποίο μπορεί να αποδοθεί στην σχετικά ήπια μεταβλητότητα των τιμών των μετοχών, χωρίς την ύπαρξη μεγάλων διακυμάνσεων, όπως φαίνεται στα Σχήματα 4.1 και 4.2. Για την περίπτωση του χαρτοφυλάκιου παρατηρούμε ότι ο απλός κινητός μέσος υποεκτιμά την αξία σε κίνδυνο σε σχέση με τον εκθετικό κινητό μέσο.

4.2.5 Υπόδειγμα GARCH

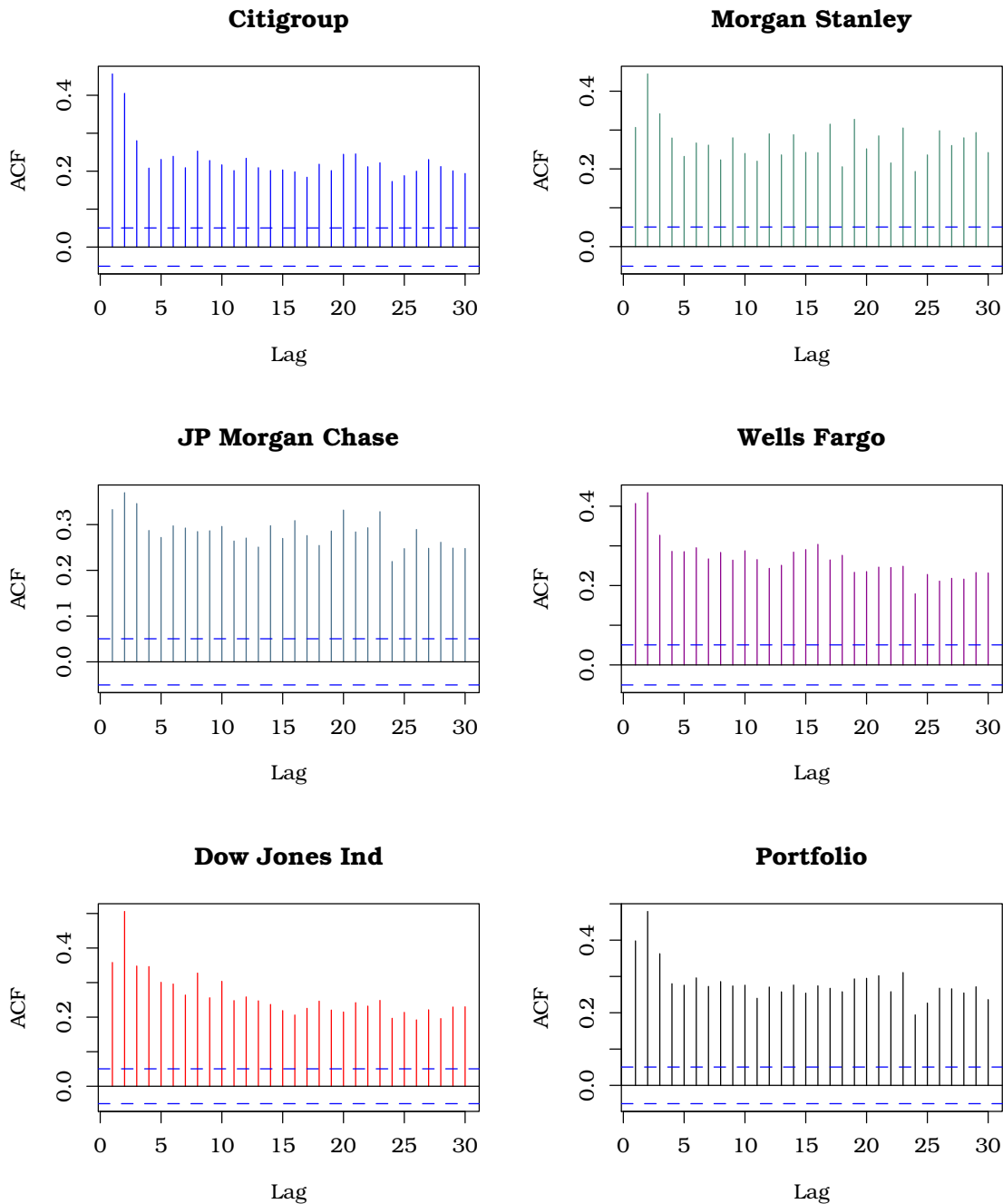
Προκειμένου να ανιχνεύσουμε την ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας των υπολοίπων των αποδόσεων ϵ_t της σχέσης 3.37 εκτελούμε τους ελέγχους των Engle και Ljung-Box εφαρμόζοντας τις συναρτήσεις `ArchTest` και `Box.test` της **R**, για τις μετοχές και το χαρτοφυλάκιο.

Πίνακας 4.6: Συντελεστές υποδείγματος GARCH(1,1), για τις μετοχές και το χαρτοφυλάκιο.

	Coeff.	Value	St. Error	t-Stat	p-Value
Citigroup	ω	0.00000	0.00000	2.52567	0.01155
	α	0.06758	0.01165	5.79909	0.00000
	β	0.92514	0.01230	75.22302	0.00000
Morgan Stanley	ω	0.00001	0.00000	2.52781	0.01148
	α	0.06922	0.01397	4.95352	0.00000
	β	0.92096	0.01550	59.42801	0.00000
JP Morgan Chase	ω	0.00000	0.00000	2.54100	0.01105
	α	0.06615	0.01468	4.50518	0.00001
	β	0.91670	0.01896	48.35735	0.00000
Wells Fargo	ω	0.00000	0.00000	2.53135	0.01136
	α	0.07517	0.01605	4.68364	0.00000
	β	0.91394	0.01829	49.96592	0.00000
DJI	ω	0.00000	0.00000	4.56696	0.00000
	α	0.14694	0.02083	7.05555	0.00000
	β	0.81416	0.02263	35.97952	0.00000
Portfolio	ω	0.00000	0.00000	2.54597	0.01090
	α	0.08037	0.01461	5.50015	0.00000
	β	0.90823	0.01661	54.67103	0.00000

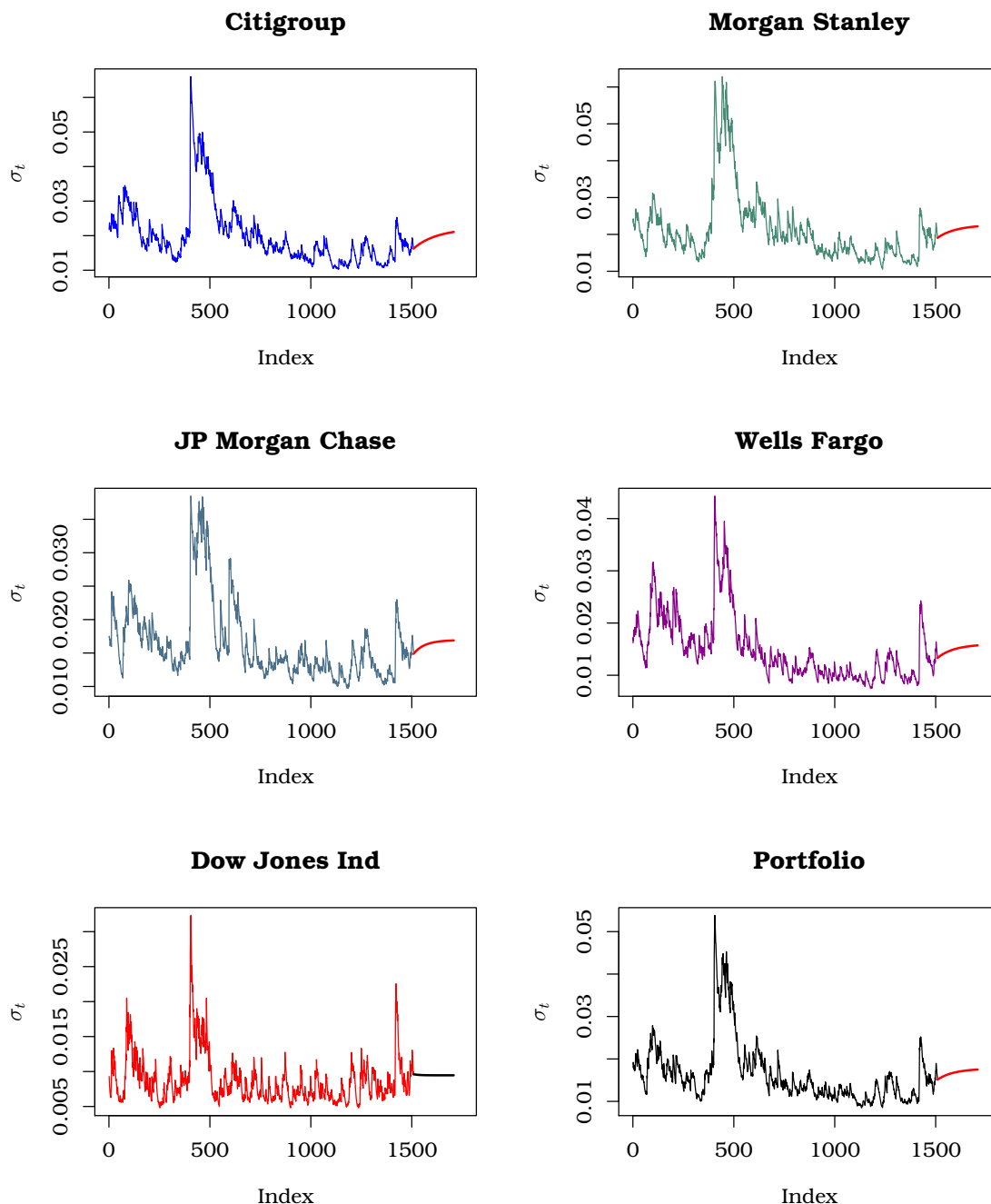
Σε κάθε περίπτωση η μηδενική υπόθεση του ελέγχου απορρίπτεται και συνεπώς δεχόμαστε την επίδραση `arch`, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στο εδάφιο 3.6.1. Ο αντίστοιχος γραφικός έλεγχος παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.5, από τον οποίο γίνεται εμφανής η ύπαρξη αυτοσυσχέτισης μεταξύ των τετραγώνων των υπολοίπων των αποδόσεων.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `garchFit` της βιβλιοθήκης `fgARCH` της **R** εφαρμόζεται για κάθε χρονοσειρά του παραδείγματός μας το υπόδειγμα GARCH(1,1) (Σχέση 3.28) και οι τιμές των συντελεστών συνοψίζονται στον Πίνακα 4.6.



Σχήμα 4.5: Συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των υπολοίπων.

Από τις τιμές του Πίνακα 4.6 παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση τα υποδείγματα συγκλίνουν σε μακροχρόνια ισορροπία, με τις παραμέτρους α και β να είναι σε κάθε περίπτωση στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο 1%.



Σχήμα 4.6: Πρόβλεψη 200 ημερών της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης των μετοχών και του χαρτοφυλακίου.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `predict` της **R** γίνεται πρόβλεψη της υπό συνθήκη μεταβλητότητας για χρονικό ορίζοντα 200 ημερών και στο Σχήμα 4.6 γίνεται εποπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

Με εξαίρεση την περίπτωση του δείκτη DJI το υπόδειγμα GARCH(1,1) θεωρεί ότι οι

τιμές των μετοχών βρίσκονται σε περίοδο ηρεμίας και προβλέπει προοδευτική αύξηση της μεταβλητότητας.

Πίνακας 4.7: Πρόβλεψη μίας ημέρας της υπό συνθήκη τυπική απόκλιση (σ) και του ημερήσιου VaR, σύμφωνα με το υπόδειγμα GARCH(1,1).

	$\hat{\sigma}$	VaR
Citigroup	0.01624	-0.02671
Morgan Stanley	0.01906	-0.03135
JP Morgan Chase	0.01488	-0.02447
Wells Fargo	0.01331	-0.02190
DJI	0.00962	-0.01582
Portfolio	0.01512	-0.02487

Αναλυτικότερα πρόβλεψη μίας ημέρας για την υπό συνθήκη τυπική απόκλιση και το αντίστοιχο VaR (Σχέση 3.13), η οποία έχει και πρακτικό ενδιαφέρον, παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.7.

Παράρτημα Α΄

Κώδικας R

Α΄.1 Εισαγωγή δεδομένων και περιγραφικά στοιχεία

```
setwd("~/")
setwd("../Documents/UNIPPI/Master Thesis/Rprojects/")
library(shape)
library(tikzDevice)
library(fGarch)
library(FinTS)
library(TSA)
library(forecast)
library(graphics)
library(MASS)
library(gridExtra)
library(tseries)
library(ggplot2)
library(PerformanceAnalytics)
library(xtable)
library(moments)

C <- read.csv(file = "../Data/C.csv", sep = ",", header = TRUE)
C <- C[order(C$Date, decreasing = FALSE),]
C$date <- as.Date(C$Date)
C$week.num <- (as.integer(C$date) + 3) %/% 7
C$week <- as.Date(C$week.num * 7 - 3,
  as.Date("2010-01-01", "%Y-%m-%d"))

MS <- read.csv(file = "../Data/MS.csv", sep = ",",
```

```

header = TRUE)
MS <- MS[order(MS$Date, decreasing = FALSE),]
MS$date <- as.Date(MS$Date)

JPM <- read.csv(file = "../Data/JPM.csv", sep = ",",
header = TRUE)
JPM <- JPM[order(JPM$Date, decreasing = FALSE),]
JPM$date <- as.Date(JPM$Date)

WFC <- read.csv(file = "../Data/WFC.csv", sep = ",",
header = TRUE)
WFC <- WFC[order(WFC$Date, decreasing = FALSE),]
WFC$date <- as.Date(WFC$Date)

DJI <- read.csv(file = "../Data/DJI.csv", sep = ",",
header = TRUE)
DJI <- DJI[order(DJI$Date, decreasing = FALSE),]
DJI$date <- as.Date(DJI$Date)

RDate <- DJI$date[1:length(DJI$date)-1]

Rnames = c("Citigroup", "Morgan Stanley", "JP Morgan Chase",
"Wells Fargo", "Dow Jones Ind", "Portfolio")
Color = c("blue", "aquamarine4", "skyblue4",
"darkmagenta", "red", "black")

Price <- as.data.frame(cbind("Citigroup" = C$Adj.Close,
" Morgan Stanley" = MS$Adj.Close,
"JP Morgan Chase" = JPM$Adj.Close,
"Wells Fargo" = WFC$Adj.Close,
"Dow Jones Ind" = DJI$Adj.Close))

Returns = as.data.frame(cbind(
"Citigroup"=diff(log(C$Adj.Close)),
" Morgan Stanley"=diff(log(MS$Adj.Close)),
"JP Morgan Chase" = diff(log(JPM$Adj.Close)),
"Wells Fargo" = diff(log(WFC$Adj.Close)),
"Dow Jones Ind" =diff(log(DJI$Adj.Close)))

```



```

T = nrow>Returns)

P>Returns <- rowMeans>Returns[,1:4])
>Returns <- as.data.frame(cbind>Returns, "Portfolio" = P>Returns))
attach>Returns)

tikz("../Tex/stock_returns.tex", width = 5, height = 6)
par(mfrow=c(3,2))
for( pi in seq(1,6, by = 1)){
plot(RDate,>Returns[,pi], type = "l", ylab = "Returns",
xlab = "Time (t)", main = Rnames[pi], col = Color[pi])
}
dev.off()

tikz("../Tex/stocks.tex", width = 5, height = 6)
par(mfrow=c(3,2))
for( pi in seq(1,5, by =1)){
  plot(C$date, Price[,pi], type = "l", ylab = "Price (\\$)",
  xlab = "Time (t)", main = Rnames[pi], col = Color[pi])
}
dev.off()

C_Stat <- c(mean>Returns[,1]), sd>Returns[,1]),
          var>Returns[,1]), max>Returns[,1]), min>Returns[,1]),
          abs(sd>Returns[,1])/mean>Returns[,1]),
          kurtosis>Returns[,1]))
MS_Stat <- c(mean>Returns[,2]), sd>Returns[,2]),
          var>Returns[,2]), max>Returns[,2]), min>Returns[,2]),
          abs(sd>Returns[,2])/mean>Returns[,2]),
          kurtosis>Returns[,2]))
JPM_Stat <- c(mean>Returns[,3]), sd>Returns[,3]),
          var>Returns[,3]), max>Returns[,3]), min>Returns[,3]),
          abs(sd>Returns[,3])/mean>Returns[,3]),
          kurtosis>Returns[,3]))
WFC_Stat <- c(mean>Returns[,4]), sd>Returns[,4]),
          var>Returns[,4]), max>Returns[,4]), min>Returns[,4]),
          abs(sd>Returns[,4])/mean>Returns[,4]),

```

```

        kurtosis>Returns[,4]))
DJI_Stat <- c(mean>Returns[,5]), sd>Returns[,5]),
            var>Returns[,5]), max>Returns[,5]), min>Returns[,5]),
            abs(sd>Returns[,5])/mean>Returns[,5]),
            kurtosis>Returns[,5]))
Port_Stat <- c(mean>Returns[,6]), sd>Returns[,6]),
            var>Returns[,6]), max>Returns[,6]), min>Returns[,6]),
            abs(sd>Returns[,6])/mean>Returns[,6]),
            kurtosis>Returns[,6]))

Stat <- as.data.frame(rbind(C_Stat, MS_Stat, JPM_Stat, WFC_Stat,
DJI_Stat, Port_Stat))
rownames(Stat) <- Rnames
colnames(Stat) <- c("Mean", "StDev", "Var", "Max", "Min",
"|C|", "Kurtosis")

xtable(Stat, type = "latex", file = "../Tex/Stat.tex", digits = 5)

for( i in seq(1,6, by = 1)){
print(bonett.test>Returns[,i], alternative = c("two.sided")))
}

for( i in seq(1,6, by = 1)){
  print(anscombe.test>Returns[,i], alternative = c("two.sided")))
}

```

Α.2 Παραμετρική εκτίμηση κινδύνου

```

#Parametric Var Estimations
p = 0.05
Uni_Param_VaR <- numeric(5)
for(i in seq(1,5, by = 1)){
  Uni_Param_VaR[i] <- round(
    Stat[i,1] - Stat[i,2]*qnorm(1-p), digits = 5)
}
stock>Returns <- data.matrix>Returns[,1:4])
cov.matrix <- cov(stock>Returns)

```

```
w <- matrix(rep(c(0.25), 4))
sigma_portfolio <- as.numeric(sqrt(t(w)%*%cov.matrix%*%w))
Port_Param_VaR <- round(
Stat[6,1] - sigma_portfolio*qnorm(1-p), digits = 5)

Param_VaR <- c(Uni_Param_VaR, Port_Param_VaR)
```

Α'3 Μη παραμετρική εκτίμηση κινδύνου

```
#Non Parametric VaR
sReturns <- Returns
for(i in seq(1,6, by = 1)){
  sReturns[,i] <- sort>Returns[,i], decreasing = FALSE)
}
Non_Param_VaR <- numeric(6)
VaR_index <- ceiling(nrow(sReturns)*p)
for(i in seq(1,6, by = 1)){
  Non_Param_VaR[i] <- round(sReturns[VaR_index,i], digits = 5)
}
```

Α'4 Μέθοδος mapping

```
### Mapping method ###
C.mod <- lm(Citigroup ~ `Dow Jones Ind`)
MS.mod <- lm(`Morgan Stanley` ~ `Dow Jones Ind`)
JPM.mod <- lm(`JP Morgan Chase` ~ `Dow Jones Ind`)
WFC.mod <- lm(`Wells Fargo` ~ `Dow Jones Ind`)
Port.mod <- lm(Portfolio ~ `Dow Jones Ind`)

summary(C.mod)
summary(MS.mod)
summary(JPM.mod)
summary(WFC.mod)
summary(Port.mod)

RegNames <- Rnames[-5 -6]
tikz("../Tex/stock_mapping.tex", width = 5, height = 6)
```

```

par(mfrow = c(2,2))
beta <- c()
beta_st_error <- c()
beta_t <- c()
beta_pval <- c()
for(i in seq(1:4)){
  plot>Returns[,i] ~ Returns[,5], type = "p", col = Color[i],
      main = RegNames[i], xlab = "Index Returns", ylab = "R")
  abline(lm>Returns[,i] ~ Returns[,5]), col = Color[i])
  beta[i] <- summary(
    lm>Returns[,i] ~ Returns[,5]))$coefficients[2,1]
  beta_st_error[i] <- summary(
    lm>Returns[,i] ~ Returns[,5]))$coefficients[2,2]
  beta_t[i] <- summary(
    lm>Returns[,i] ~ Returns[,5]))$coefficients[2,3]
  beta_pval[i] <- summary(
    lm>Returns[,i] ~ Returns[,5]))$coefficients[2,4]
}
dev.off()
reg.beta <- cbind(beta, beta_st_error, beta_t, beta_pval)
xtable(reg.beta, type = "latex",
file = "../Tex/reg_beta.tex", digits = 5)

VaR_mapping = mean(beta)*sigma_portfolio*qnorm(p)

```

Α.5 Απλός κινούμενος μέσος

```

### Moving Average ###

for(i in 1:6){
  f10 <- rep(1/10, 10)
  ma10Returns <- filter>Returns[,i], f10, sides = 1, method = "c")
  s10Returns <- filter>Returns[,i]**2, f10, sides = 1, method = "c")
  VaR_ma_10 <- sqrt(s10Returns)*qnorm(p)
  print(round(VaR_ma_10[T], digits = 5))
}

```

Α.6 Εκθετικός κινούμενος μέσος

```
### Exponential Moving Average ###
### Danielsson, Financial Risk Forecasting ###

lambda = 0.94
win = 10
lwin = win+2
VaR_ewma_stock <- c()
s_ewma_stock <- rep(0,T)
s_ewma_stock = var>Returns[1:win,1])
for(i in seq(1,5, by =1)){
  for (t in lwin:T){
    s_ewma_stock = lambda*s_ewma_stock +
      (1-lambda)*Returns[t-1,i]**2
  }
  VaR_ewma_stock[i] = -sqrt(s_ewma_stock)*qnorm(p)
}
print(round(VaR_ewma_stock, digits = 5))

### EWMA Portfolio
s_ewma_port <- cov(stock>Returns)
for(t in 2:T){
  s_ewma_port = lambda*s_ewma_port +
    (1-lambda)*stock>Returns[t-1,]**t(stock>Returns[t-1,])
}
VaR_ewma_port <- -sigma_portfolio*qnorm(p)
print(round(VaR_ewma_port, digits = 5))
```

Α.7 Υπόδειγμα GARCH

```
### GARCH ###

#arch.test>Returns, lags.single = 2, multivariate.only = TRUE)
for(i in 1:6){
  print(ArchTest>Returns[,i], lags = 1, demean = FALSE))
  print(Box.test>Returns[,i], lag = 10, type = c("Ljung-Box"),
    fitdf = 0))
```

```

}

tikz("../Tex/all_autocorr.tex", width = 5, height = 6)
par(mfrow=c(3,2))
for(i in 1:6){
  acf>Returns[,i]^2, lag.max = 30, type = c("correlation"),
    plot = TRUE, demean = FALSE, main = Rnames[i], col = Color[i])
}
dev.off()

value = 1

omega <- c()
g_alpha <- c()
g_beta <- c()
g_sigma <- c()
coef_garch_function <- function(rData){
  omega = garchFit(formula = ~garch(1,1),
    data = rData, include.mean = FALSE)@
    fit$matcoef[1,1:4]
  g_alpha = garchFit(formula = ~garch(1,1),
    data = rData, include.mean = FALSE)@f
    it$matcoef[2,1:4]
  g_beta = garchFit(formula = ~garch(1,1),
    data = rData, include.mean = FALSE)@
    fit$matcoef[3,1:4]
  g_sigma = garchFit(formula = ~garch(1,1),
    data = rData, include.mean = FALSE)@
    h.t
  return(rbind(omega, g_alpha, g_beta))
}

mod_garch_function <- function(rData){
  g_sigma = garchFit(formula = ~garch(1,1),
    data = rData, include.mean = FALSE)@h.t
  return(g_sigma)
}

```

```

Day_fork <- c()
Day_VaR <- c()
ftime <- seq(from = T, to = T+199)
fColors = c("red", "red", "red", "red", "black", "red")
tikz("../Tex/forecast_port.tex", width = 5, height = 6)
par(mfrow=c(3,2))
for (i in 1:6){
g_forc <- predict(garchFit(formula = ~garch(1,1),
data = Returns[,i], include.mean = FALSE), n.ahead = 200)$
meanError
plot(sqrt(mod_garch_function>Returns[,i])), type = "l",
      xlim = c(0,1750), ylab = "$\\sigma_{t}$",
      main = Rnames[i], col = Color[i])
lines(ftime, g_forc, col = fColors[i], lty = 1, lwd = 2)
Day_fork[i] <- g_forc[1]
Day_VaR[i] <- -g_forc[1]*qnorm(p)
}
dev.off()

xtable(cbind(Day_fork, Day_VaR), digits = 5)

VaR_forc <- -g_forc*qnorm(0.05)

xtable(coef_garch_function>Returns[,1]), digits = 5)

for(i in 1:6){
  mod_garch_function>Returns[,1])
}

```


Βιβλιογραφία

- [1] Riskmetrics - technical document. Technical Report 4, J.P. Morgan/Reuters, New York, December 1996.
- [2] C. Alexander. *Risk Management and Analysis, Volume 1: Measuring and modelling financial risk*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1998.
- [3] F. Anscombe and W. Glynn. Distribution of kurtosis statistic for normal statistics. *Biometrika*, 70(1):227-234, 1983.
- [4] R. T. Baillie and T. Bollerslev. The message in daily exchange rates: A conditional-variance tale. *Journal of Business & Economic Statistics*, 7(3):297-305, 1989.
- [5] R. T. Baillie and T. Bollerslev. Intra-day and inter-market volatility in foreign exchange rates. *Review of Economic Studies*, 58:565-585, 1990.
- [6] T. Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307-327, 1986.
- [7] T. Bollerslev. A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *The Review of Economics and Statistics*, 69(3):542-547, August 1987.
- [8] T. Bollerslev, R. Y. Chou, and K. F. Kroner. Arch modeling in finance. *Journal of Econometrics*, 52:5-59, 1992.
- [9] T. Bollerslev, R. F. Engle, and D. B. Nelson. Arch models. *Handbook of Econometrics*, IV:2959-3038, 1994.
- [10] G. Box, G. Jenkins, and G. C. Reinsel. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Prentice Hall, New Jersey, 3rd edition, 1994.
- [11] B. N. Daniel. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, 59(2):347-370, March 1991.

-
- [12] J. Danielsson. *Financial risk forecasting*. WILEY, Gt Yarmouth, Norfolk, 2011.
- [13] R. F. Engle. Autorrergessive conditional heteroskedasticity with estimates of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50:987–1008, 1982.
- [14] R. F. Engle, M. Lilien, David, and P. R. Russel. Estimating time varying risk premia in the term structure: The arch-m model. *Econometrica*, 55(2):391–407, 1987.
- [15] B. Fischer. Studies of stock price volatility changes. In *Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, pages 177–181, 1976.
- [16] C. Francq and J.-M. Zakoian. *GARCH Models, Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. John Wiley & Sons, West Sussex, England, 2010.
- [17] L. Glosten, R. Jagannathan, and Runkle. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48:1779–1801, 1993.
- [18] P. Jorion. *Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill, New York, second edition, 2000.
- [19] B. Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. *Journal of Buisiness*, 36:394–419, 1963.
- [20] R. Miura and S. Oue. Statistical methodologies for the market risk measurement. *Asia-Pacific Financial Markets*, 7:305–319, 2000.

Ευρετήριο

- Απόδοση, 2
- Απόδοση χαρτοφυλακίου, 53
- Αυτοπαλίνδρομο μοντέλο, 4
- Αυτοσυνδιακύμανση, 3
- Χρονοσειρές, 3
- Κίνδυνος αγοράς, 1
- Κίνδυνος ισοτιμίας, 1
- Κίνδυνος ρευστότητας, 1
- Λειτουργικός κίνδυνος, 1
- Λευκός θόρυβος, 4
- Μόχλευση, 41, 42
- Μεταβλητότητα, 16
- Στασιμότητα χρονοσειρών, 4
- Συνεχής απόδοση, 2
- Συντελεστής μεταβολής, 56
- ARCH-M, 39
- ARCH, 37
- ARIMA, 7
- ARMA, 7
- Basle Accord, 14
- CAPM, 31, 59
- EWMA, 35, 61
- GARCH, 37, 62
- Kurtosis, 11, 56
- Mapping, 31, 59
- Moving Average (MA), 33, 61
- Random Walk, 5
- RiskMetrics, 17
- Skewness, 11
- VaR, 17, 56
- Volatility, 16
- leverage, 12