ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΤΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΕΛΙΞΕΙΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΔΙΑΧΥΣΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ Γ. ΡΟΥΣΣΑΚΗΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη
και τη Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Γ.Σ.Ε.Σ. του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ΄ αριθμ. ... συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και τη Διοικητική Κινδύνου. Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Ψαρράκος Γ. (Επιβλέπων)

- Πολίτης Κ.

- Μαχαιράς Ν.

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL AND RISK MANAGEMT

COMPOUND GEOMETRIC CONVOLUTIONS WITH APPLICATION TO THE CLASSICAL RISK MODEL WITH DIFFUSION

By
Nick G. Roussakis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial and Risk Management

Piraeus, Greece
September 2016

Στους γονείς μου
Γιώργο και Νικολέττα,
στα αδέρφια μου
Κατερίνα και Λευτέρη,
και στην γιαγιά μου
Χρύσα.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου η οποία αποτέλεσε σημαντικό παράγοντα καθ΄ όλη τη διάρκεια συγγραφής της παρούσας εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου για την αμέτρητη υπομονή και επιμονή που είχαν και συνέβαλαν στον υπέρτατο βαθμό για αυτή την εργασία. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Γ. Ψαρράκο για την άριστη συνεργασία που είχαμε και την υπομονή που επέδειξε. Οι πολύτιμες παρατηρήσεις, συμβουλές και διορθώσεις του καθώς και η αγάπη που τον διακρίνει στην εργασία του, συνέβαλαν καταλυτικά στην εξέλιξη και ολοκλήρωση αυτής της Διπλωματικής Εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Κ. Πολίτη και κ. Ν. Μαχαιρά για το προσεκτικό διάβασμα της εργασίας.

Περίληψη

Σε μια ανανεωτική ανέλιξη η ποσότητα με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι η ανανεωτική συνάρτηση, $U(t)$, η οποία εκφράζει το αναμενόμενο πλήθος των γεγονότων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ανάμεσα σε διαδοχικά γεγονότα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιείται σε διάφορους κλάδους της εφαρμοσμένης έρευνας όπως η θεωρία αξιοπιστίας, η θεωρία κινδύνων και η θεωρία ουρών αναμονής. Κύριος στόχος της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση της εφαρμογής της συνέλιξης μίξης γεωμετρικών κατανομών και την εφαρμογή τους στην υπολειπόμενη διάρκεια ζωής, ιδιαίτερα στην περίπτωση που η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων F μεταξύ των απαιτήσεων ανήκει σε κάποια κλάση αξιοπιστίας (π.χ. (IFR)-(DFR), (NBU)-(NWU)) και την μετάβαση τους στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας με διάχυση για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Abstract

In a renewal process the quantity with the major interest is the renewal function, $U(t)$, which expresses the expected number of the renewals on the interval $[0, t]$ when the intermediate times between successive events are independent random variables. This function has applications in various brances of applied research such as reliability theory, risk theory and queuing theory. The main purpose of this thesis is the presentation on applications of residual lifetimew of compound geometric convolutions, especially in the case where the distribution of the intermediate times F belongs to an aging class of distributions (e.g (IFR)-(DFR), (NBU)-(NWU)) and their transition to the risk theory classic model that is perturbed by diffusion.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι ανανεωτικές ανελίξεις έχουν ως στόχο τους τη μελέτη διαδοχικών πραγματοποιήσεων ενός γεγονότος όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των συμβάντων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Οι ανανεωτικές ανελίξεις είναι μια γενίκευση της ανέλιξης Poisson, αφού οι χρόνοι μεταξύ των συμβάντων μπορούν να έχουν οποιαδήποτε κατανομή σε αντίθεση με την ανέλιξη Poisson στην οποία απαιτείται να είναι Εκθετική κατανομή. Η θεωρία που αναπτύχθηκε για τη μελέτη των ανανεωτικών ανελίξεων ονομάζεται ανανεωτική θεωρία. Οι πρώτες εφαρμογές των ανανεωτικών ανελίξεων προέρχονται από τον χώρο της θεωρίας Αξιοπιστίας. Η ανανεωτική θεωρία αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη της αξιοπιστίας ενός συστήματος για παράδειγμα μηχανημάτων, στο οποίο μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του συστήματος και μετά από την αντικατάσταση μιας μονάδας που έχει αποτύχει. Αργότερα η ανανεωτική θεωρία συνδέθηκε με γενικότερα προβλήματα της θεωρίας πιθανοτήτων που σχετίζονταν με αθροίσματα ανεξάρτητων και μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών.

Μια ποσότητα η οποία παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον στη μελέτη κάθε ανανεωτικής ανέλιξης είναι η ανανεωτική συνάρτηση. Η ανανεωτική συνάρτηση εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό ανανεώσεων της ανέλιξης σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Ο υπολογισμός της ανανεωτικής συνάρτησης εξαρτάται από την κατανομή που έχει ο χρόνος μεταξύ των ανανεώσεων και για τις περισσότερες κατανομές είναι δύσκολο ή αδύνατον να υπολογιστεί.

Δομή της εργασίας.

Η δομή που θα ακολουθήσουμε στην παρούσα εργασία είναι η εξής:

Στο κεφάλαιο 2 δίνουμε κάποιες βασικές έννοιες των στοχαστικών ανελίξεων και εισάγουμε την έννοια της ανανεωτικής ανέλιξης. Στη συνέχεια αναφέρουμε βασικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες της ανέλιξης αυτής και δίνουμε τα βασικά θεωρήματα που περιγράφουν την οριακή της συμπεριφορά. Στο τέλος του κεφαλαίου περιγράφουμε μια μεθοδολογία για τον ακριβή υπολογισμό της ανανεωτικής συνάρτησης για τις κατανομές που αυτός είναι εφικτός.

Στο κεφάλαιο 3 δίνουμε τα βασικά στοιχεία της θεωρίας χρεοκοπίας, η οποία συνδέεται στενά και χρησιμοποιείται ως μεθοδολογικό εργαλείο στις ανανεωτικές ανελίξεις. Συγκεκριμένα εισάγουμε την έννοια της πιθανότητας χρεοκοπίας και περιγράφουμε τις ιδιότητες της. Αποδεικνύουμε πως η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να γραφτεί σαν ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Στο κεφάλαιο 4 αναλύουμε την εφαρμογή της συνέλιξης μίξης γεωμετρικών κατανομών και την εφαρμογή της στην υπολειπόμενη διάρκεια ζωής, καθώς και τις σημαντικότερες κλάσεις αξιοπιστίας και πως επεκτείνονται στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας με διάχυση και την κατανομή ισορροπίας της υπολειπόμενης ζωής.

Στο κεφάλαιο 5 αναλύουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο με διάχυση και την ανάλυση της σε χρεοκοπία λόγω κάποιας απαίτησης ή διάχυσης καθώς και τις διαφοροποιήσεις από το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας.

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε μια μεθοδολογία εύρεσης της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση που έχουμε αναλυτικούς τύπους για τις συναρτήσεις κατανομών και θα δώσουμε και μερικά αριθμητικά παραδείγματα πάνω σε αυτήν.

Κεφάλαιο 2

Στοχαστικές Ανελίξεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να παραθέσουμε μερικές βασικές έννοιες από την θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων, βλέπε Χρυσαφίνου (2012) *Εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις* και Πολίτης (2015) *Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας*, που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε και να ορίσουμε έννοιες που θα συναντήσουμε στα επόμενα κεφάλαια για το Κλασσικό Μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας.

2.1 Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις

Οι στοχαστικές ανελίξεις, έχουν εφαρμογές σε όλες τις επιστήμες, αφού μελετούν την εξέλιξη και τη ροή φαινομένων, με τυχαίο και χρονικά μεταβαλλόμενο χαρακτήρα, τα οποία ακολουθούν τους νόμους των πιθανοτήτων. Τα μοντέλα των στοχαστικών ανελίξεων μπορούν να περιγράψουν βιολογικά φαινόμενα όπως η συμπεριφορά ενός πληθυσμού που υπόκειται σε θάνατο, γέννηση ή σε πολυπλοκότερες καταστάσεις όπως η κατανομή των φυτών και των ζώων.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας, τότε κάθε μετρήσιμη συνάρτηση :*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

*καλείται **τυχαία μεταβλητή**.*

Ορισμός 2.1.2. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας, τότε κάθε οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t \in T\}$ ορισμένων στον ίδιο αυτό χώρο πιθανότητας, καλείται **στοχαστική ανέλιξη ή στοχαστική διαδικασία**.*

Για την περιγραφή των στοχαστικών ανελίξεων χρησιμοποιείται επίσης και ο συμβολισμός $\{X_t, t \in T\}$, τον οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε και στη συνέχεια της διπλωματικής εργασίας. Το σύνολο T, συνήθως αντιστοιχεί σε κάποιο χρονικό διάστημα κατά τη διάρκεια του οποίου θέλουμε να μελετήσουμε τις τιμές της τυχαίας μεταβλητής X_t. Ανάλογα με το είδος του συνόλου T, οι στοχαστικές ανελίξεις μπορούν να χωριστούν σε στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου, εάν το σύνολο T είναι αριθμήσιμο, και σε στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου, εάν το σύνολο T είναι μη αριθμήσιμο.

Ένας, επιπλέον διαχωρισμός των στοχαστικών ανελίξεων μπορεί να προκύψει με βάση το χώρο καταστάσεων τους, δηλαδή τις δυνατές τιμές των X_t. Αν το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, τότε λέμε ότι έχουμε στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χώρο καταστάσεων ενώ αν το σύνολο αυτό είναι υπεραριθμήσιμο, η στοχαστική ανέλιξη έχει συνεχή χώρο καταστάσεων. Προφανώς, συνδυάζοντας τους δύο προηγούμενους τρόπους διαχωρισμού των στοχαστικών ανελίξεων, προκύπτουν τέσσερις νέες κατηγορίες.

Παρατήρηση
Η στοχαστική συμπεριφορά της ανέλιξης $\{X_t, t \in T\}$ είναι πλήρως καθορισμένη, εάν γνωρίζουμε :

1. Το παραμετρικό χώρο T.
2. Το χώρο καταστάσεων S.
3. Την από κοινού συνάρτηση κατανομής κάθε δυνατής πεπερασμένης υποοικογένειας της

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = Pr[X_{t_1} \le x_1, X_{t_2} \le x_2, \ldots, X_{t_n} \le x_n].$$

Ορισμός 2.1.3. *Δύο στοχαστικές ανελίξεις $\{X_t, t \in T\}$, $\{X_s, s \in T\}$, καλούνται **στοχαστικά ανεξάρτητες**, αν κάθε δυνατό ζεύγος πεπερασμένων υποοικογενειών τους, $\underline{X} = (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ και $\underline{Y} = (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n})$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.*

Οι στοχαστικές ανελίξεις, με βάση τη στοχαστική εξάρτηση των μελών τους, μπορούν να χωριστούν σε διάφορες κατηγορίες. Παρακάτω δίνουμε μερικά παραδείγματα των διαφορετικών κατηγοριών τους.

Παραδείγματα Στοχαστικών Ανελίξεων

1. **Μαρκοβιανές Στοχαστικές Ανελίξεις.**

   Αν η γνώση οποιασδήποτε πληροφορίας για το παρελθόν, όταν είναι καθορισμένη η παρούσα κατάσταση δεν επηρεάζει την πιθανότητα να συμβεί οποιοδήποτε δυνατό ενδεχόμενο στο μέλλον, τότε έχουμε Μαρκοβιανές στοχαστικές ανελίξεις. Δηλαδή, η $\{X_t, t \in T\}$ είναι Μαρκοβιανή, αν οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_s, s > t\}$, δεδομένης της X_t είναι στοχαστικά ανεξάρτητες από τις τυχαίες μεταβλητές $\{X_k, k < t\}$.

2. **Στάσιμες Στοχαστικές Ανελίξεις.**

   Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$, καλείται στάσιμη, αν : $\forall r > 0$, οι στοχαστικές ανελίξεις $\{X_t, t \in T\}$ και $\{X_{t+r}, t \in T\}$, είναι στοχαστικά ισοδύναμες δηλαδή, αν οι τυχαίες μεταβλητές :

   $$[X(t_1), X(t_2), X(t_3), \ldots, X(t_n)] \text{ και } [X(t_1+r), X(t_2+r), \ldots, X(t_n+r)],$$

   έχουν την ίδια από κοινού κατανομή, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$.

3. **Στοχαστικές Ανελίξεις με Ομογενείς Προσαυξήσεις.**

   Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$, έχει ομογενείς προσαυξήσεις, αν : για $s < t$ η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X_{t-s}, εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $t - s$ και όχι από τις τιμές t, s.

4. **Στοχαστικές Ανελίξεις με Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις.**

   Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$, έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, αν : οι τυχαίες μεταβλητές $X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$, είναι ανεξάρτητες, $n \in \mathbb{N}$ και $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ με $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

5. **Ανανεωτικές Ανελίξεις.**

   Οι ανανεωτικές ανελίξεις έχουν σαν στόχο τους τη μελέτη διαδοχικών πραγματοποιήσεων ενός γεγονότος, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των συμβάντων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Οι ανελίξεις αυτές θα εξεταστούν αναλυτικότερα στη συνέχεια.

Ορισμός 2.1.4. *Μια στοχαστική ανέλιξη $\{N_t, t \geq 0\}$, καλείται **απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη**, αν η N_t ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες :*

1. *$N_t \in \mathbb{N}$.*

2. *N_t είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς t, δηλαδή : για $s < t \Rightarrow N_s \leq N_t$.*

3. *Για $s < t$, η τυχαία μεταβλητή $N_t - N_s$, παριστάνει των αριθμό των συμβάντων που πραγματοποιήθηκαν στο χρονικό διάστημα $(s, t]$.*

2.2 Ανέλιξη Poisson

Ορισμός 2.2.1. *Μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ καλείται **ανέλιξη Poisson** με ένταση λ όταν ικανοποιούνται οι κάτωθι συνθήκες :*

1. *$N(0) = 0$.*

2. *Σε ένα πολύ μικρό διάστημα h μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι ανάλογη με το μήκος του διαστήματος.*

3. *Για κάθε $t < s$, η τ.μ. $N(s) - N(t)$ είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής $N(t)$.*

Παρακάτω παραθέτουμε δύο βασικές ιδιότητες της στοχαστικής ανέλιξης Poisson :

1. Για κάθε t, η τ.μ. $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt και συμβολικά γράφουμε $N(t) \sim P(\lambda t)$

   Μια ανέλιξη Poisson ορίζει μια ακολουθία από τ.μ. $Y_1, Y_2, \ldots$, που λέγεται ακολουθία των χρόνων άφιξης με τον ακόλουθο τρόπο :

$$\begin{gathered} Y_1 = min\{t : N(t) = 1\} \\ Y_2 = min\{t : N(t) = 2\} \\ \vdots \\ Y_\kappa = min\{t : N(t) = \kappa\}. \end{gathered}$$

   Με βάση αυτή την ακολουθία, μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία $\{T_\kappa : \kappa = 1, 2, \ldots\}$ ως εξής :

$$\begin{aligned} T_1 =& Y_1 \\ T_2 =& Y_2 - Y_1 \\ & \vdots \\ T_\kappa =& Y_\kappa - Y_{\kappa-1}. \end{aligned}$$

   Οι μεταβλητές T_κ ονομάζονται **ενδιάμεσοι χρόνοι ή χρόνοι αναμονής**. Αξίζει να σημειώσουμε πως ενώ η $N(t)$ είναι διακριτή τ.μ., οι μεταβλητές Y_i, T_i είναι για κάθε i συνεχείς τ.μ. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να καταλήξουμε στην δεύτερη ιδιότητα.

2. Για κάθε $i \neq j$, οι μεταβλητές T_i, T_j είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και κάθε μια ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

Ορισμός 2.2.2. *Μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N_t, t \geq 0\}$, καλείται* ***ανέλιξη Poisson****, με παράμετρο λ αν και μόνο αν για κάθε απειροστό χρονικό διάστημα $(t, t+h]$, ισχύει :*

$$Pr(N(t,t+h) = k \mid N(s),\ 0 \leq s \leq t) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & \text{αν} \quad k = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h), & \text{αν} \quad k = 0 \\ o(h), & \text{αν} \quad k \geq 2, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

όπου, $N(t,u) = N(u) - N(t), \quad 0 \leq t \leq u$ είναι ο αριθμός των συμβάντων στο χρονικό διάστημα $(t,u]$ και $o(h)$, ο παράγοντας διόρθωσης για τον οποίο ισχύει :

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0\ .$$

Η σχέση (2.2.1) μπορεί διαισθητικά να ερμηνευτεί ως εξής :

1. Σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα υπάρχουν ακριβώς δύο ενδεχόμενα, είτε να συμβεί ένα γεγονός, είτε κανένα.

2. Η πιθανότητα πραγματοποίησης γεγονότων δεν εξαρτάται από την αρχή t, του χρονικού διαστήματος $(t, t+h]$, ειδικότερα η πιθανότητα εμφάνισης ενός ακριβώς συμβάντος, είναι ανάλογη μόνο του μήκους h του διαστήματος και της παραμέτρου λ.

3. Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός γεγονότος σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια του χρόνου και δεν εξαρτάται από το παρελθόν.

Σχόλιο: Οι Ορισμοί 2.2.1 και 2.2.2 είναι ισοδύναμοι.

Ορισμός 2.2.3. *Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $N_t, t \geq 0$ μια στοχαστική ανέλιξη Poisson, τέτοια ώστε η N_t να είναι ανεξάρτητη των $X_i, \forall i$. Τότε ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή :*

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

που καλείται ***σύνθετη Poisson τυχαία μεταβλητή****. Αντίστοιχα ορίζεται η ανέλιξη :*

$$\{Z_t, t \geq 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} X_i\ ,\ t \geq 0 \right\},$$

η οποία καλείται ***σύνθετη Poisson στοχαστική ανέλιξη****.*

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να γενικευτεί εάν δεχτούμε πως η απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $N(t), t \geq 0$ δεν είναι ανέλιξη Poisson, αλλά μια οποιαδήποτε άλλη απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη.
Παρακάτω δίνεται ο ορισμός της σύνθετης τυχαίας μεταβλητής και της σύνθετης στοχαστικής ανέλιξης.

Ορισμός 2.2.4. *Έστω* $X_1, X_2, X_3, \dots$ *μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και* $N_t, t \geq 0$ *μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη, τέτοια ώστε η τυχαία μεταβλητή* N_t *να είναι ανεξάρτητη από τις* $X_1, X_2, X_3, \dots$. *Τότε ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή :*

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

που καλείται ***σύνθετη*** $\mathbf{N_t}$ ***τυχαία μεταβλητή***[1] *και αντίστοιχα ορίζεται η ανέλιξη :*

$$\{Z_t, t \geq 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} X_i \ , \ t \geq 0 \right\},$$

η οποία καλείται ***σύνθετη*** $\mathbf{N_t}$ ***– στοχαστική ανέλιξη***.

Μια ειδική περίπτωση απαριθμήτριας στοχαστικής ανέλιξης είναι η ανανεωτική ανέλιξη, ο ορισμός της οποίας δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 2.2.5. *Μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη* $\{N_t,\ t \geq 0\}$ *καλείται* ***ανανεωτική ανέλιξη****, αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι αναμονής μεταξύ των συμβάντων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.*

Η ξενόγλωσση βιβλιογραφία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μια εισαγωγή στην ανανεωτική θεωρία αποτελείται αρχικά από τα συγγράμματα των *Cox* (1962), *Ross* (1996) και *Grimmett & Strizaker* (2001), ενώ μια πιο αυστηρή προσέγγιση του θέματος γίνεται από τους *Feller* (1971) και *Asmussen* (1987). Στην ελληνική βιβλιογραφία οι κυριότεροι συγγραφείς που έχουν ασχοληθεί με τις ανανεωτικές ανελίξεις είναι οι *Δαμιανού* (1996), *Φακίνος* (1992) και *Χρυσαφίνου* (2012). Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα βασικά στοιχεία των ανανεωτικών ανελίξεων με τον συμβολισμό που χρησιμοποιήθηκε από τον *Feller* (1971) και την υπόθεση ότι τη χρονική στιγμή μηδέν, που ξεκινάει η μελέτη της ανανεωτικής ανέλιξης, έχουμε μια ανανέωση.

2.3 Βασικά Στοιχεία Ανανεωτικών Ανελίξεων

Έστω $T_1, T_2, T_3, \dots$, μια ακολουθία από μη αρνητικές συνεχείς, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_{T_i}(t) = Pr(T_i \leq t),\ i = 1, 2, 3, \dots$. Αν θεωρήσουμε πως η τυχαία μεταβλητή T_i αντιστοιχεί στον ενδιάμεσο χρόνο μεταξύ των διαδοχικών ανανεώσεων $i,\ i+1,\ i = 0, 1, 2, \dots$ και υποθέσουμε πως τη χρονική στιγμή μηδέν έχουμε μια ανανέωση τότε ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές :

1. Χρόνος μέχρι την n-οστή ανανέωση :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} T_i. \tag{2.3.1}$$

2. Πλήθος ανανεώσεων στο χρόνο $[0, t]$:

$$N(t) = N_t = 1 + max\{n : S_n \leq t\},\ t \geq 0. \tag{2.3.2}$$

[1] Συγκεκριμένα η κατανομή που ακολουθεί η N_t δίνει την ονομασία στη κατανομή που ακολουθεί η σύνθετη τυχαία μεταβλητή π.χ. αν $N_t \sim$ Γεωμετρική, τότε λέμε ότι η Z_t ακολουθεί τη σύνθετη γεωμετρική κατανομή.

Με βάση τον παραπάνω συμβολισμό, ισχύουν τα εξής :

1. Η στοχαστική ανέλιξη $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ καλείται συνήθης ή απλή ανανεωτική ανέλιξη διακριτού χρόνου με συνεχή χώρο καταστάσεων.

2. Η στοχαστική ανέλιξη $\{N_t,\ t \geq 0\}$ καλείται απαριθμήτρια ανανεωτική ανέλιξη συνεχούς χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων.

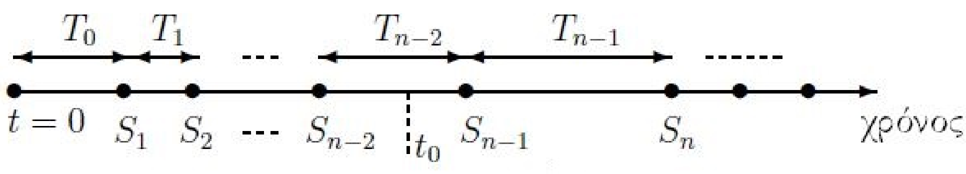
3. Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής N_t, $U(t) = E(N_t)$, $t \geq 0$ καλείται ανανεωτική συνάρτηση και αντιστοιχεί στον αναμενόμενο αριθμό ανανεώσεων στο $[0, t]$.

4. Ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες ισότητες :

    i. $\{N_t \geq n\} = \{S_n \leq t\}$.

    ii. $\{N_t \leq n\} = \{S_{n+1} > t\}$.

    iii. $\{N_t = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}$.



Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε πως εκτός της **συνήθους (ordinal) ανανεωτικής ανέλιξης** που αναφέραμε μέχρι τώρα, υπάρχει και η **με υστέρηση ανανεωτική ανέλιξη (delayed renewal process)**, στην οποία ο χρόνος που συμβαίνει η πρώτη ανανέωση μπορεί να έχει διαφορετική κατανομή από εκείνη που έχουν οι $T_2, T_3, \ldots$, οι οποίες παραμένουν ισόνομες. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με τις συνήθεις ανανεωτικές ανελίξεις.

Πρόταση 2.3.1. *Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής S_n, δίνεται από την :*

$$Pr[S_n \leq t] = F^{*n}(t)\ , \tag{2.3.3}$$

όπου, F^{*n} είναι η n-τάξης συνέλιξη της F με τον εαυτό της (βλέπε Παράρτημα Β΄).

Πρόταση 2.3.2. *Η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής N_t, δίνεται από την :*

$$Pr[N_t = n] = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t), \tag{2.3.4}$$

όπου, $n = 0, 1, 2, \ldots$ και $F^{*0}(t) = 1, \forall t \geq 0$.

Απόδειξη. Από τις ισότητες *i.*, *ii.* και *iii.* που έχουν δοθεί παραπάνω έχουν σαν αποτέλεσμα ότι :

$$\begin{aligned} Pr[N_t = n] &= Pr[N_t \geq n] - Pr[N_t \geq n+1] \\ &= Pr[S_n \leq t] - Pr[S_{n+1} \leq t] \\ &= F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t) \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ∎

Πρόταση 2.3.3. *Για την ανανεωτική συνάρτηση, ισχύουν :*

1. *$\forall t \geq 0$, έχουμε :*
$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t). \tag{2.3.5}$$

2. *$\forall t \geq 0 : F(t) < 1$, έχουμε :*
$$U(t) \leq \frac{1}{1 - F(t)}. \tag{2.3.6}$$

Απόδειξη. Έχουμε λοιπόν :

1. Για τη μέση τιμή μιας μη αρνητικής ακέραιας τυχαίας μεταβλητής X είναι γνωστό ότι ισχύει :
$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} Pr(X \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} Pr(X > k),$$
επομένως, έχουμε :
$$\begin{aligned} U(t) = E(N_t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Pr[N_t \geq t \mid T_0 = 0] = \sum_{n=1}^{\infty} Pr[S_n \leq t \mid T_0 = 0] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Pr[S_{n-1} \leq t] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n-1)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(t). \end{aligned}$$

2. Χρησιμοποιώντας τη βασική ιδιότητα των συνελίξεων :
$$f * g \leq fg \Rightarrow f^{*n} \leq f^n,$$
όπου f, g αύξουσες συναρτήσεις και αφού $F(t) < 1$, έχουμε :
$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} F^{n}(t) = \frac{1}{1 - F(t)}.$$

■

Πρόταση 2.3.4. *Σε μια ανανεωτική ανέλιξη, αν $F(0) = Pr[T_i = 0] < 1$, τότε η ανανεωτική συνάρτηση $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε πεπερασμένο διάστημα της μορφής $[0, \tau]$, $\forall \tau \geq 0$. Άρα, συγκλίνει και $\forall t \geq 0$.*

Πρόταση 2.3.5. *Αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι T_i μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων έχουν αθροιστική συνάρτηση κατανομής F με τις εξής ιδιότητες :*

1. *$F_{T_i}(0) = 0,\ i = 1, 2, \ldots$.*

2. *Έχει φραγμένη πρώτη παράγωγο, $F' = f$.*

τότε, ισχύει :
$$U'(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f * F^{*(i-1)}(t) = f(t) + (f * U)(t),\ \forall t \geq 0, \tag{2.3.7}$$
όπου, $n = 0, 1, 2, \ldots$ και $F^{*0}(t) = 1,\ \forall t \geq 0$.

Από την παραπάνω πρόταση, έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 2.3.1. *Η παράγωγος της ανανεωτικής συνάρτησης σε μια ανανεωτική ανέλιξη όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι ζωής έχουν αθροιστική συνάρτηση κατανομής F, με συνεχή πρώτη παράγωγο και F_{T_i}, $i = 1, 2, \ldots$, καλείται **πυκνότητα ανανεώσεων ή ανανεωτική πυκνότητα (renewal density)** και συμβολίζεται με $u(t)$.*

Παρατήρηση
Η ανανεωτική πυκνότητα $u(t)$ γράφεται στην μορφή :

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f * F^{*(n-1)}(t) = f(t) + (f * U)(t), \ \forall t \geq 0 \ . \tag{2.3.8}$$

Ορισμός 2.3.2. *Αν $\{S_n, \ n \in \mathbb{N}\}$, είναι μια ανανεωτική ανέλιξη και $\{N_t : t \geq 0\}$ η αντίστοιχη απαριθμήτρια ανανεωτική ανέλιξη, τότε ορίζουμε τις παρακάτω τυχαίες μεταβλητές :*

1. ***Χρονική στιγμή της τελευταίας ανανέωσης στο** $[0, t]$:*

$$S_{N_t} = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_{N_{t-1}} \ .$$

2. ***Χρονική στιγμή της πρώτης ανανέωσης στο** $[t, +\infty)$:*

$$S_{N_{t+1}} = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_{N_t} \ .$$

3. ***Υπολειπόμενος χρόνος ζωής μονάδας που ήδη λειτουργεί χρόνο** t :*

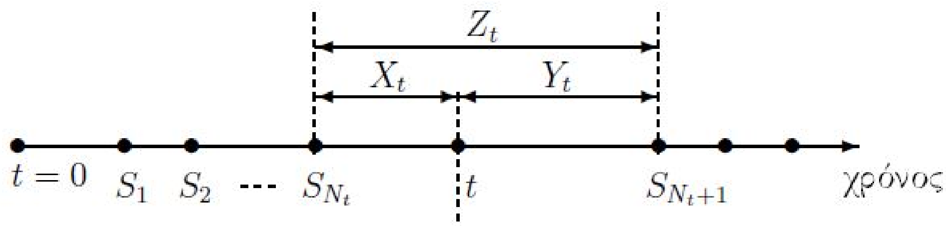
$$Y_t = S_{N_{t+1}} - t \ .$$

4. ***Η ηλικία της μονάδας που βρίσκεται σε λειτουργία κατά τη χρονική στιγμή** t (όπου t, ο συνολικός χρόνος του συστήματος) :*

$$X_t = t - S_{N_t} \ .$$

5. ***Συνολική ζωή της μονάδας που βρίσκεται σε λειτουργία τη χρονική στιγμή** t :*

$$Z_t = X_t + Y_t \ .$$



2.4 Η Ανανεωτική Εξίσωση

Στις ανανεωτικές ανελίξεις μετά από κάθε ανανέωση γεννιέται μια νέα ανανεωτική ανέλιξη με τα ίδια χαρακτηριστικά που είχε η προηγούμενη, το οποίο βοήθησε στην διατύπωση του λεγόμενου ανανεωτικού επιχειρήματος. Σύμφωνα με αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορα χαρακτηριστικά της ανέλιξης, δεσμεύοντας ως προς το χρόνο της πρώτης ανανέωσης. Με βάση αυτή τη μεθοδολογία διατυπώθηκαν πολλά αποτελέσματα στην Ανανεωτική Θεωρία. Στη συνέχεια της παραγράφου θα αναφέρουμε τα σημαντικότερα από αυτά.

Πρόταση 2.4.1. *Η ανανεωτική συνάρτηση $U(t)$ ικανοποιεί τη σχέση :*

$$U(t) = 1 + (F * U)(t) = 1 + \int_0^t U(t-x)dF(x), \ \forall t \geq 0. \tag{2.4.1}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη της πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε το ανανεωτικό επιχείρημα. Έτσι, δεσμεύοντας τη μέση τιμή του αριθμού των ανανεώσεων ως προς το χρόνο που συμβαίνει η πρώτη ανανέωση (μετά τη χρονική στιγμή μηδέν) έχουμε :

$$E(N_t \mid T_1 = x) = \begin{cases} 0 & , \text{αν} \quad x > t \\ U(t-x) & , \text{αν} \quad 0 < x \leq t \\ 1 & , \text{αν} \quad x = 0. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της ολικής πιθανότητας στην (2.4.2), έχουμε :

$$\begin{aligned} U(t) = E(N_t) &= \int_0^t E(N_t \mid T_1 = x)dF(x) \\ &= 1 + \int_0^t U(t-x)dF(x) \\ &= 1 + (F * U)(t). \end{aligned}$$

■

Ορισμός 2.4.1. *Αν Q, είναι μια συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[0,t]$ (βλέπε Παράρτημα Α΄ και Παράρτημα Β΄) και F, μια συνάρτηση κατανομής, τέτοιες ώστε να ορίζονται οι συνελίξεις $H * F$ και $Q * F$, τότε για κάθε άγνωστη συνάρτηση H στο $[0,t]$, ορίζουμε την εξίσωση :*

$$H = Q + H * F \tag{2.4.3}$$

ή ισοδύναμα :

$$H(t) = Q(t) + \int_{0^-}^t H(t-x)dF(x) \quad t \geq 0, \tag{2.4.4}$$

η οποία καλείται ***ανανεωτική εξίσωση****.*

Θεώρημα 2.4.1. *Η ανανεωτική εξίσωση (2.4.3), έχει μια και μοναδική λύση η οποία είναι φραγμένη σε πεπερασμένα διαστήματα και δίνεται από τον τύπο :*

$$H = Q * U \tag{2.4.5}$$

ή ισοδύναμα :

$$H(t) = \int_0^t Q(t-x)dU(x), \tag{2.4.6}$$

όπου, $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)$ η ανανεωτική συνάρτηση.

Πρόταση 2.4.2. *Σε μια ανανεωτική ανέλιξη, όπου οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών ανανεώσεων έχουν αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_{T_i(t)}Pr[T_i \leq t]$, με συνεχή πρώτη παράγωγο (δηλαδή, $F' = f$), τότε για τη πυκνότητα των ανανεώσεων, $u(t)$ ισχύει ότι :*

$$u(t) = \lim_{\delta t \to 0^+} \frac{1}{\delta t} Pr[\text{ανανέωσης στο } (t, t+\delta t)]. \tag{2.4.7}$$

2.5 Μελέτη της Ανανεωτικής Ανέλιξης σε Άπειρο Χρόνο

Στις προηγούμενες παραγράφους, μελετήσαμε την έννοια της ανανεωτικής ανέλιξης σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Στην πράξη όμως μας ενδιαφέρει και η μελέτη της ανέλιξης στην περίπτωση που ο χρόνος είναι αρκετά μεγάλος, θεωρητικά άπειρος, λόγω του ότι μόνο έτσι μπορούμε να προσομοιώνουμε τη συμπεριφορά συστημάτων, που έχουν ήδη λειτουργήσει ή πρόκειται να λειτουργήσουν για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Θεώρημα 2.5.1. *Σε μια ανανεωτική ανέλιξη, όπου οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών ανανεώσεων έχουν μέση τιμή $\mu = E(T_i) < \infty$ και διασπορά $\sigma^2 = Var(T_i) < \infty$, για τη μεταβατική κατανομή $N(t)$ που αντιστοιχεί στην απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ t \geq 0\}$, ισχύει :*

$$\lim_{t \to +\infty} Pr\left[\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{1}{\mu^3} t\sigma^2}} \leq x\right] = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.5.1}$$

όπου, $\Phi(x)$ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής $N(0,1)$ (βλέπε Πολίτης (2015) Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας).

Θεώρημα 2.5.2. *(Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα)* *Σε μια ανανεωτική ανέλιξη, όπου οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών ανανεώσεων έχουν μέση τιμή $\mu = E(T_i) < \infty$, για την απαριθμήτρια ανανεωτική ανέλιξη $\{N(t),\ t \geq 0\}$ και την ανανεωτική συνάρτηση, ισχύουν τα εξής :*

1. $\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{N(t)}{t}\right] = \frac{1}{\mu}$, *(με πιθανότητα 1)*

2. $\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{U(t)}{t}\right] = \frac{1}{\mu}$.

(βλέπε Πολίτης (2015) Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας, σελίδα 20)

Θεώρημα 2.5.3. *(Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα - (Key Renewal Theorem))* *Αν $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, είναι μια ανανεωτική ανέλιξη με απαριθμήτρια ανέλιξη $\{N_t,\ t \geq 0\}$, ανανεωτική συνάρτηση $U(t) = E(N_t)$ και κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων F μη αριθμητική τότε για μια συνάρτηση Q, ολοκληρώσιμη κατά Riemann, ισχύει :*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t Q(t-x) dU(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} dQ(x). \tag{2.5.2}$$

(βλέπε Πολίτης (2015) Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας, σελίδα 21)

2.6 Εφαρμογές

Στην παράγραφο που ακολουθεί θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της ανανεωτικής συνάρτησης στην περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών συμβάντων ακολουθούν : (α) την εκθετική κατανομή και (β) τη Γάμμα κατανομή. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Laplace - Stieltjes (L - S) (βλέπε Παράρτημα Δ′) μιας συνάρτησης F :

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x). \tag{2.6.1}$$

Η πορεία που θα ακολουθήσουμε προκειμένου να καταλήξουμε στην ανανεωτική συνάρτηση είναι η εξής : αρχικά θα βρούμε το μετασχηματισμό Laplace - Stieltjes της συνάρτησης κατανομής $\widehat{F}$ των ενδιάμεσων χρόνων, στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace - Stieltjes για την ανανεωτική συνάρτηση και τέλος θα βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό προκειμένου να πάρουμε την $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$. Παριστάνοντας τη παραπάνω διαδικασία σχηματικά, έχουμε :

$$F \to \widehat{F} \to \widehat{U} = \frac{\widehat{F}}{1-\widehat{F}}$$

$$\downarrow$$

Υπολογισμός της Ανανεωτικής Συνάρτησης

Εφαρμογή 2.6.1. ***(Εκθετική κατανομή)***

Έστω, ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι των ανανεώσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή : $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $\forall x \geq 0$. Τότε, από τον μετασχηματισμό Laplace έχουμε :

$$\widehat{F}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha}{\alpha + t} = M_X(-t).$$

Γνωρίζουμε ότι :

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(x),$$

αν θεωρήσουμε την ποσότητα $\sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(x) = m(x)$ το παραπάνω μπορεί να γραφεί ως :

$$U(x) = 1 + m(x),$$

και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace θα πάρουμε :

$$\widehat{U}(t) = \frac{1}{t} + \widehat{m}(t).$$

Για την ποσότητα $\widehat{m}(t)$ έχουμε ότι :

$$\widehat{m}(t) = \widehat{\left[\sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}\right]}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\widehat{F^{*n}}](t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\widehat{F}(t)]^n$$

$$= \frac{\widehat{F}(t)}{1-\widehat{F}(t)} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha+t}}{1-\frac{\alpha}{\alpha+t}} = \frac{\frac{\alpha}{\cancel{\alpha+t}}}{\frac{\cancel{\alpha}+t-\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha+t}}} = \frac{\alpha}{t}. \tag{2.6.2}$$

Επομένως, έχουμε :

$$\widehat{m}(t) = \frac{\alpha}{t} = \int_0^\infty \alpha e^{-tx} dx, \tag{2.6.3}$$

και επίσης, γνωρίζουμε πως :

$$\widehat{m}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dm(x). \tag{2.6.4}$$

Από τη μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace και με βάση τις (2.6.3), (2.6.4), έχουμε ότι :

$$dm(x) = adx,$$

και ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη έχουμε :

$$m(s) = \int_0^s dm(x) = \int_0^s adx = as.$$

Άρα, αφού $U(x) = 1 + m(x)$, έχουμε :

$$U(x) = 1 + \alpha x.$$

Εφαρμογή 2.6.2. ***(Γάμμα κατανομή)***

Έστω, ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των ανανεώσεων ακολουθούν την Γάμμα (2, λ) κατανομή (συνέλιξη δύο ανεξάρτητων εκθετικών) με $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$, $\forall x \geq 0$. Τότε, από το μετασχηματισμό Laplace έχουμε :

$$\widehat{F}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 \int_0^\infty x e^{-(t+\lambda)x} dx \ . \tag{2.6.5}$$

Γενικά, από την ιδιότητα της πυκνότητας της Γάμμα (α, ϑ) γνωρίζουμε ότι :

$$\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\theta x} dx = 1,$$

όπου :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Συνεπώς, λόγω των παραπάνω μπορούμε να έχουμε :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} e^{-\theta x}}{\Gamma(\alpha)} dt = \frac{1}{\theta^\alpha}. \tag{2.6.6}$$

Επομένως, θέτοντας στην (2.6.6), $\alpha = 2$ και $\theta = s + \lambda$ η (2.6.5), μας δίνει :

$$\widehat{F}(t) = \frac{\lambda^2}{(\lambda + t)^2}. \tag{2.6.7}$$

Όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή θα βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace της ποσότητας $m(x)$, και αυτός είναι :

$$
\begin{aligned}
\widehat{m}(t) &= \left[\widehat{\sum_{n=1}^{\infty} F^{*k}}\right](t) = \sum_{n=1}^{\infty}[\widehat{F^{*n}](t)} = \sum_{n=1}^{\infty}[\widehat{F}(t)]^n \\
&= \frac{\widehat{F}(t)}{1-\widehat{F}(t)} = \frac{\dfrac{\lambda^2}{(\lambda+t)^2}}{1-\dfrac{\lambda^2}{(\lambda+t)^2}} = \frac{\dfrac{\lambda^2}{(\lambda+t)^2}}{\dfrac{(\lambda+t)^2-\lambda^2}{(\lambda+t)^2}} \\
&= \frac{\dfrac{\lambda^2}{\cancel{(\lambda+t)^2}}}{\dfrac{(\cancel{\lambda}+t-\cancel{\lambda}))(\lambda+t+\lambda)}{\cancel{(\lambda+t)^2}}} = \frac{\lambda^2}{2\lambda+t},
\end{aligned}
$$

και χωρίζοντας σε δύο κλάσματα, έχουμε :

$$
\begin{aligned}
\widehat{m}(t) &= \frac{\lambda}{2t} - \frac{\lambda}{2(t+2\lambda)} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-tx} dx - \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-(t+2\lambda)x} dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_0^{\infty} e^{-tx}[1-e^{-2\lambda x}]dx. \qquad (2.6.8)
\end{aligned}
$$

Όμως, γνωρίζουμε πως :

$$
\widehat{m}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dm(x). \qquad (2.6.9)
$$

Από την μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace και με βάση τις σχέσεις (2.6.8), (2.6.9), έχουμε :

$$
dm(x) = \frac{\lambda}{2}[1-e^{-2\lambda x}]dx,
$$

και με ολοκλήρωση και στα δύο μέλη, συνεπάγεται :

$$
\begin{aligned}
m(s) &= \int_0^s dm(x) = \int_0^s \frac{\lambda}{2}[1-e^{-2\lambda x}]dx \\
&= \frac{\lambda s}{2} + \frac{\lambda}{2\cdot 2\cdot \lambda}\int_0^s (e^{-2\lambda x})' dx \\
&= \frac{\lambda s}{2} - \frac{1}{4}(1-e^{-2\lambda s}). \qquad (2.6.10)
\end{aligned}
$$

Άρα, αφού $U(x) = 1 + m(x)$, έχουμε :

$$
\begin{aligned}
U(x) &= 1 + \frac{\lambda x}{2} - \frac{1}{4}(1-e^{-2\lambda x}) \\
&= \frac{3}{4} + \frac{\lambda x}{2} - \frac{e^{-2\lambda x}}{4}.
\end{aligned}
$$

Με την χρήση του υπολογιστικού πακέτου Mathematica, ο υπολογισμός της ανανεωτικής συνάρτησης $U(x)$ για τις κατανομές των ενδιάμεσων χρόνων μπορεί να γίνει πιο εύκολος, πάντα μιλώντας για τις περιπτώσεις που αυτό είναι εφικτό. Στο Παράρτημα Ε′ θα δώσουμε δύο αλγόριθμους σε περιβάλλον Mathematica για τον άμεσο υπολογισμό της ανανεωτικής συνάρτησης.

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Χρεοκοπίας

3.1 Η Στοχαστική Ανέλιξη του Πλεονάσματος

Η έννοια της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος αποτελεί βασικό αντικείμενο μελέτης στη Θεωρία Χρεοκοπίας. Συνήθως χρησιμοποιείται για τη μελέτη εκείνων των χαρτοφυλακίων που εκτός από τα προκαθορισμένα στοιχεία (έσοδα - έξοδα), περιέχουν και ποσότητες οι οποίες έχουν τυχαίο μέγεθος και τυχαίο ρυθμό εμφάνισης. Τέτοιου είδους χαρτοφυλάκια, συναντώνται σε ασφαλιστικές εταιρείες, χρηματοοικονομικές εταιρείες, αλλά και γενικότερα σε κάθε οικονομική επιχείρηση που το χαρτοφυλάκιο της δεν είναι προβλέψιμο αλλά επηρεάζεται από τυχαία για παράδειγμα έξοδα.

Για τη καλύτερη κατανόηση της ανέλιξης του πλεονάσματος θα μελετήσουμε το χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Όπως γνωρίζουμε, οι ασφαλιστικές εταιρείες αναλαμβάνουν τη κάλυψη κινδύνων έναντι προκαθορισμένων ασφαλίστρων που λαμβάνουν. Οι κίνδυνοι που καλείται να καλύψει η εταιρεία αναγράφονται στο συμβόλαιο που υπογράφει με τον πελάτη της. Αν πραγματοποιηθεί ένας ή και περισσότεροι κίνδυνοι τότε η ασφαλιστική εταιρεία αναλαμβάνει να καλύψει τα έξοδα που προκλήθηκαν στον κάτοχο της ασφάλειας. Ας υποθέσουμε πως μια ασφαλιστική εταιρεία τη στιγμή που υπογράφει κάποιο συμβόλαιο διαθέτει αποθεματικό u. Θα μελετήσουμε το χαρτοφυλάκιο της στο συνεχές χρονικό διάστημα $[0, t]$, $\forall t > 0$, όπου θεωρούμε τη χρονική στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο σαν σημείο αναφοράς από το οποίο αρχίζει να μετράει ο χρόνος. Τέλος, αν υποθέσουμε πως τα έσοδα από ασφάλιστρα που πληρώνει ο ασφαλισμένος έρχονται με συνεχή τρόπο και είναι συνολικά $P(t)$ για το χρονικό διάστημα $[0, t]$, ενώ τα έξοδα που προκύπτουν είναι $S(t)$ για το ίδιο χρονικό διάστημα τότε κατά τη χρονική στιγμή t, η αξία του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρείας είναι :

$$R(t) = u + P(t) - S(t). \tag{3.1.1}$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε πως η ποσότητα $S(t)$ και επομένως και η $R(t)$ είναι τυχαίες μεταβλητές, για συγκεκριμένες τιμές του t, ενώ αν τις θεωρήσουμε κατά τη διάρκεια του χρόνου, η πρώτη μας δίνει τη στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος και η δεύτερη τη στοχαστική ανέλιξη των εξόδων που προκύπτουν.

Χρησιμοποιώντας μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ που αντιστοιχούν στα ύψη των αποζημιώσεων που προκύπτουν στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ και μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ t \geq 0\}$ που εκφράζει το πλήθος των ζημιογόνων συμβάντων μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα και η οποία είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές X_i, $\forall i$, μπορούμε να γράψουμε τη στοχαστική ανέλιξη των εξόδων σαν μια σύνθετη στοχαστική ανέλιξη, όπως φαίνεται παρακάτω :

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad N(t) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{N(t)} X_i, & \text{αν} \quad N(t) \geq 1. \end{cases}$$

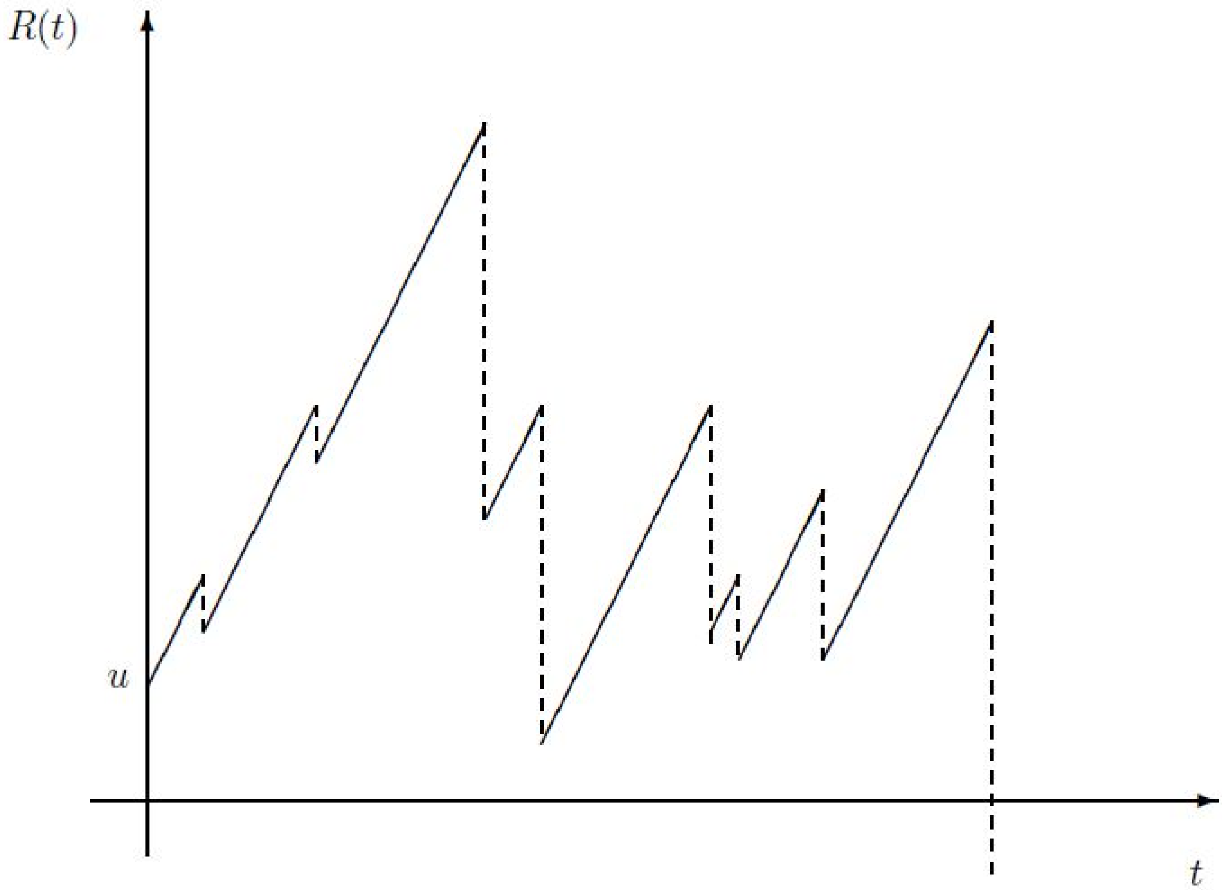
Τέλος, συνοψίζοντας έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.1.1. *Η στοχαστική ανέλιξη, $\{R(t),\ t \geq 0\}$, καλείται **στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος**, αν για κάθε $t \geq 0$, η τιμή του πλεονάσματος ορίζεται από τη τυχαία μεταβλητή :*

$$R(t) = u + P(t) - S(t),$$

όπου,

- *u = το αρχικό αποθεματικό.*
- *$P(t)$ = Τα συνολικά ασφάλιστρα που λαμβάνει η εταιρεία στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ (έσοδα).*
- *$S(t)$ = Οι συνολικές αποζημιώσεις που καλείται να καλύψει η εταιρεία στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ (έξοδα).*



Σχήμα 3.1: Στοχαστική Ανέλιξη Πλεονάσματος

3.2 Το Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων

Στη προηγούμενη παράγραφο έγινε εισαγωγή στην έννοια της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος μέσω της οποίας θα δοθεί ο ορισμός του κλασικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνων. Στο μοντέλο αυτό βασίζεται μεγάλο πλήθος της έρευνας που γίνεται στο χώρο του αναλογισμού και θα αποτελέσει το βασικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε για τη μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Ορισμός 3.2.1. *Αν σε μια στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος $\{R(t),\ t \geq 0\}$ ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις :*

1. *Η $P(t)$ είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή :*

$$P(t) = c \cdot t,\ \forall t \geq 0, \tag{3.2.1}$$

   όπου, c είναι μια θετική σταθερά.

2. *Οι τυχαίες μεταβλητές X_i, που αντιστοιχούν στις αποζημιώσεις που πρέπει να καταβληθούν κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $[0, t]$ είναι θετικές, ανεξάρτητες και ισόνομες.*

3. *Η απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ t \geq 0\}$, είναι μια ανέλιξη Poisson.*

*τότε, έχουμε το **Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου ή Μοντέλο Cramer - Lundberg**.*

Παρατήρηση
Από την υπόθεση ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ t \geq 0\}$, είναι μια ανέλιξη Poisson, προκύπτουν τα εξής :

1. Η στοχαστική ανέλιξη $\{S(t),\ t \geq 0\}$ που μας δίνει το συνολικό ύψος των αποζημιώσεων στο $[0, t]$, είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson.

2. Αποδεικνύεται ότι αφού η $\{N(t),\ t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη Poisson οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των συμβάντων που απαιτούν αποζημίωση ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Μια εισαγωγή στην Θεωρία Κινδύνων, μπορεί να γίνει μέσα από τα συγγράμματα των *Bowers et al.* (1986) και *Kaas et al.* (2001), ενώ μια πιο λεπτομερής προσέγγιση του θέματος γίνεται από τους *Rolski et al.* (1999) και *Asmussen* (2000).

Ορισμός 3.2.2. *Στο κλασικό μοντέλο η σταθερά*

$$c = \frac{P(t)}{t}, \tag{3.2.2}$$

*ονομάζεται **ένταση του ασφαλίστρου** και απεικονίζει το ασφάλιστρο που λαμβάνεται στην μονάδα του χρόνου.*

Στο κλασικό μοντέλο για να μπορέσουμε να αποφύγουμε τη σίγουρη χρεοκοπία ενός χαρτοφυλακίου, θεωρούμε ότι πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$c > \lambda p_1, \tag{3.2.3}$$

γνωστή και ως **Συνθήκη του Καθαρού Κέρδους**, όπου λ είναι η ένταση της ανέλιξης Poisson. Έτσι, μπορούμε να εξασφαλίζουμε ότι η μέση τιμή των εσόδων του ασφαλίστρου στη μονάδα του χρόνου θα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη μέση τιμή των εξόδων του.

Ορισμός 3.2.3. *Η σταθερά*

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1, \tag{3.2.4}$$

όπου,

$$p_1 = E(X_i) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx, \tag{3.2.5}$$

καλείται ***συντελεστής ασφάλειας ή περιθώριο ασφαλείας (premium loading factor)*** *και εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους του ασφαλιστή.*

Παρατήρηση

1. Ο συντελεστής ασφαλείας είναι πάντα θετικός, αφού :

$$\begin{aligned} E(c \cdot t) &> E(\sum_{i=0}^{N(t)} X_i) \\ c \cdot t &> \lambda p_1 t \\ \frac{c}{\lambda p_1} - 1 &> 0. \end{aligned}$$

2. Ο συντελεστής ασφαλείας, όπως έχει αναφερθεί μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει το αναμενόμενο κέρδος του ασφαλιστή, επομένως στη πράξη οι τιμές που παίρνει είναι μεταξύ 0 και 1 ή αν θέλουμε να εκφραστούμε με ποσοστά μεταξύ 0 και 100%.

3.3 Η Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Χρεοκοπία ονομάζεται η κατάσταση στην οποία υπεισέρχεται μια ασφαλιστική εταιρεία τη στιγμή που έχει χάσει την ικανότητα να εξοφλήσει τις υποχρεώσεις της προς τρίτους. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί στην περίπτωση που το συνολικό αποθεματικό που διαθέτει δεν επαρκεί για την εξόφληση οφειλών που προκύπτουν από τα ζημιογόνα συμβάντα. Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα δώσουμε τον ορισμό της πιθανότητας να συμβεί ένα τέτοιο γεγονός για το κλασικό μοντέλο, ανάλογα με το χρονικό ορίζοντα που μελετάμε αυτό το ενδεχόμενο.

Αν θεωρήσουμε το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων :

$$R(t) = u + P(t) - S(t), \ \forall t \geq 0,$$

τότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας για χρονικό ορίζοντα

$$\mathcal{A} = \{t \text{ για τα οποία θέλουμε να μελετήσουμε το πλεόνασμα } U(t)\} \subseteq \mathbb{R}^+,$$

ορίζεται, ως εξής :

$$\begin{aligned} \psi(u) &= Pr(R(t) < 0, \text{ για κάποιο } t \in \mathcal{A} \mid u) \\ &= Pr(u + P(t) - S(t) < 0, \text{ για κάποιο } t \in \mathcal{A} \mid u). \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Ανάλογα με το είδος του συνόλου $\mathcal{A}$, που εκφράζει το χρονικό διάστημα που θέλουμε να μελετήσουμε την ανέλιξη, η πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίζεται στις εξής τέσσερις κατηγορίες:

1. Αν $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών δηλαδή, $\mathcal{A} = \{t : t \in [0, +\infty)\}$ τότε έχουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνεχή και άπειρο χρόνο :

$$\psi(u) = Pr(R(t) < 0, \text{ για κάποιο } t \in \mathcal{A} \mid u).$$

2. Αν $\mathcal{A}$ είναι ένα συνεχές υποσύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών με πεπερασμένα άκρα, δηλαδή $\mathcal{A} = \{t : t \in [a, b], \ 0 < \alpha < b < +\infty\}$ τότε έχουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνεχή και πεπερασμένο χρόνο :

$$\psi(u, t) = Pr(R(\tau) < 0, \text{ για κάποιο } \tau : 0 < \tau < t \mid u).$$

3. Αν $\mathcal{A} = \{t : t \in [0, h_1, h_2, h_3, \ldots], \ h_i \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών τότε έχουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό και άπειρο χρόνο :

$$\psi_h(u) = Pr(R(t) < 0, \text{για κάποιο } t \in \mathcal{A}).$$

4. Αν $\mathcal{A} = \{t : \ t \in [0, h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n], \ h_i \in \mathbb{N}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο των φυσικών αριθμών, τότε έχουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό και πεπερασμένο χρόνο :

$$\psi_h(u, t) = Pr(R(t) < 0, \text{ για κάποιο } \tau \in \mathcal{A}).$$

Παρατήρηση
Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στη μελέτη του κλασικού μοντέλου σε χρόνο συνεχή και άπειρο.

Ορισμός 3.3.1. *Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων,* ***η πιθανότητα μη χρεοκοπίας σε συνεχή και άπειρο χρόνο****, ορίζεται ως εξής :*

$$\begin{aligned} \delta(u) &= Pr(R(t) \geq 0, \ \text{για κάθε } t| \ u) \\ &= Pr(u + P(t) - S(t) \geq 0, \ \text{για κάθε } t| \ u) \\ &= 1 - \psi(u). \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Παρατηρήσεις

1. Αν δεν ισχύει η συνθήκη $c > \lambda p_1$, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι σίγουρη αφού σε κάθε χρονική στιγμή τα αναμενόμενα έξοδα είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα έξοδα, δηλαδή :

$$\psi(u) = 1, \ \forall u.$$

2. Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι φθίνουσα του u αφού όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό αποθεματικό τόσο μικραίνει η πιθανότητα για χρεοκοπία. Αντίθετα, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι αύξουσα συνάρτηση του u. Επομένως, ισχύουν :

   i.
$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0.$$

   ii.
$$\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1.$$

3. Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση κατανομής, αφού :

i. Είναι αύξουσα ως προς u.

ii. Είναι συνεχής από δεξιά.

iii. Ισχύει ότι :

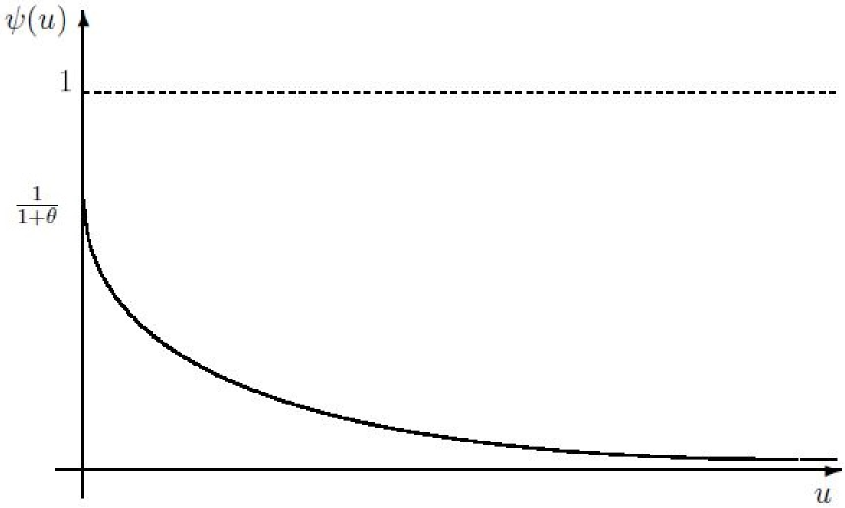
$$\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1.$$

4. Η $\delta(u)$ αντιστοιχεί σε μικτή κατανομή, αφού :

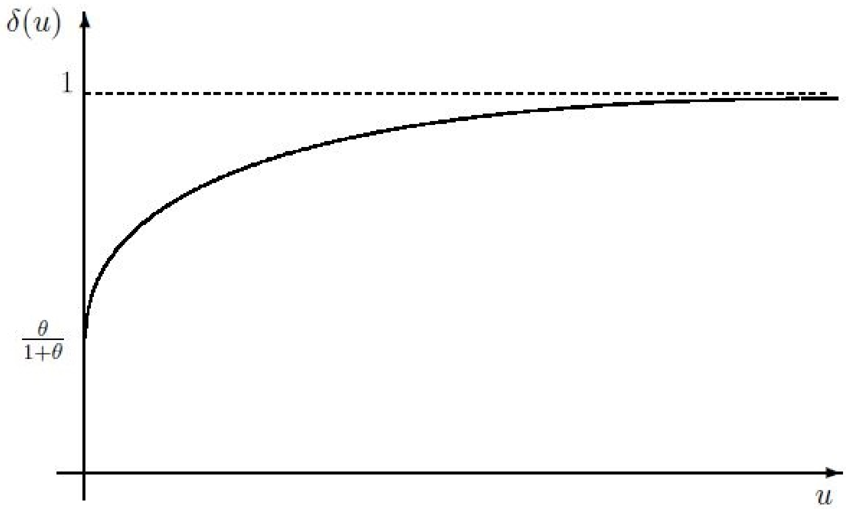
   i. $\delta(0) > 0$.

   ii. $\delta(u)$ έχει πυκνότητα στο $(0, +\infty)$, άρα είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Στα σχήματα (3.2) και (3.3) φαίνεται η γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας και της πιθανότητας μη χρεοκοπίας συναρτήσει του αποθεματικού u, αντίστοιχα.



Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας



Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας

Πρόταση 3.3.1. *Στο κλασικό μοντέλο σε συνεχή και άπειρο χρόνο, με $u \geq 0$, ισχύουν τα εξής :*

1.
$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx. \tag{3.3.3}$$

2.
$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\bar{F}(x)dx, \tag{3.3.4}$$

όπου, $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων X_i.

3.
$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda_1 p}{c} = \frac{\theta}{1+\theta}, \tag{3.3.5}$$

και
$$\psi(0) = \frac{\lambda_1 p}{c} = \frac{1}{1+\theta}. \tag{3.3.6}$$

(βλέπε Πολίτης (2015) Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας, σελίδες 36-39)

3.4 Η Πιθανότητα Χρεοκοπίας και Η Ανανεωτική Εξίσωση

Όπως γνωρίζουμε η γενική μορφή της ανανεωτικής εξίσωσης είναι :

$$\mu(u) = g(u) + \int_0^\infty \mu(u-y)f(y)dy,$$

ενώ στην περίπτωση που η εξίσωση έχει τη μορφή :

$$\mu(u) = g(u) + \phi\int_0^\infty \mu(u-y)f(y)dy,$$

(όπου ϕ μια σταθερά τέτοια ώστε: $0 < \phi < 1$) έχουμε την **ελαττωματική ή ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση** [1] **(defective renewal equation)**.

Αντικαθιστώντας, τη τιμή $\delta(0)$ στην εξίσωση (3.3.4), έχουμε :

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda p_1}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx. \tag{3.4.1}$$

Ορισμός 3.4.1. *Αν ολοκληρώσουμε την ουρά των αποζημιώσεων, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση :*

$$H(x) = \frac{1}{p_1}\int_0^x \overline{F}(y)dy. \tag{3.4.2}$$

---

[1] Έστω ότι έχουμε την ανανεωτική εξίσωση: $\mu(u) = g(u) + \int\limits_o^\infty \mu(u-y)dF(y)$ τότε:

1. Αν $||F|| < 1 \rightarrow$ ελαττωματική ή ελλειμματική (*defective*) ανανεωτική εξίσωση.
2. Αν $||F|| = 1 \rightarrow$ κανονική (*proper*) ανανεωτική εξίσωση.
3. Αν $||F|| > 1 \rightarrow$ υπερβολική (*excessive*) ανανεωτική εξίσωση.

όπου: $||F|| = \lim\limits_{x\to\infty} F(x)$

Άρα, με βάση τον προηγούμενο ορισμό, η εξίσωση (3.4.1), γίνεται :

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda p_1}{c} + \frac{\lambda p_1}{c}\int_0^u \delta(u-x)dH(x), \tag{3.4.3}$$

και αντίστοιχα η πιθανότητα χρεοκοπίας, είναι :

$$1 - \delta(u) = \frac{\lambda p_1}{c} - \frac{\lambda p_1}{c}\int_0^u \delta(u-x)dH(x). \tag{3.4.4}$$

Επομένως :

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{\lambda p_1}{c} + \frac{\lambda p_1}{c}\int_0^u [1 - \psi(u-x)dH(x)\\ &= (\frac{\lambda p_1}{c} - \frac{\lambda p_1}{c}H(x)) + \frac{\lambda p_1}{c}\int_0^u \psi(u-x)dH(x)\\ &= \frac{\lambda p_1}{c}\overline{H}(u) + \frac{\lambda p_1}{c}\int_0^u \psi(u-x)dH(x), \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

όπου, $\overline{H}(x) = 1 - H(x)$. Παρατηρούμε, πως η εξίσωση (3.4.5) είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, αφού έχουμε υποθέσει ότι ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους :

$$\lambda p_1 < c \Rightarrow \frac{\lambda p_1}{c} < 1,$$

και επιπλέον έχουμε :

$$||H|| = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{p_1}\int_0^x \overline{F}(x)dx = \frac{p_1}{p_1} = 1.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε πως η εξίσωση (3.4.5) μπορεί να μετατραπεί σε μια κανονική ανανεωτική εξίσωση, κάτω από την προϋπόθεση, ότι υπάρχει θετικός R πραγματικός αριθμός, ώστε να ισχύει :

$$\int_0^\infty e^{Rx}dH(x) = \frac{c}{\lambda p_1} = \frac{1}{1+\theta}\ . \tag{3.4.6}$$

Έτσι, αν πολλαπλασιάσουμε την (3.4.5) με την ποσότητα e^{Ru}, έχουμε :

$$\begin{aligned}\psi(u)e^{Ru} &= \frac{\lambda p_1}{c}\overline{H}(u)e^{Ru} + \frac{\lambda p_1}{c}\int_0^u \psi(u-x)e^{Ru}dH(x)\\ &= \frac{\lambda p_1}{c}\overline{H}(u)e^{Ru} + \frac{\lambda p_1}{c}\int_0^u e^{R(u-x)}\psi(u-x)e^{Rx}dH(x).\end{aligned}$$

Προκειμένου να καταλήξουμε στην ανανεωτική εξίσωση, θα ορίσουμε την εξής αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Ορισμός 3.4.2. *Αν η ουρά του ύψους των αποζημιώσεων είναι $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ τότε ορίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής :*

$$H_R(x) = \frac{\lambda p_1}{c}\int_0^x e^{Rt}\overline{F}(t)dt. \tag{3.4.7}$$

Παρατήρηση
Το διαφορικό της $H_R(x)$, είναι :

$$dH_R(x) = \frac{\lambda}{p_1 c} e^{Rx} dH(x). \tag{3.4.8}$$

Επομένως, με βάση τον Ορισμό 3.4.2 έχουμε :

$$\psi(u)e^{Ru} = \frac{\lambda p_1}{c}\overline{H}(u)e^{Ru} + \frac{\lambda p_1}{c}\int_0^u e^{R(u-x)}\psi(u-x)e^{Rx}dH_R(x), \tag{3.4.9}$$

όπου,

$$||H_R|| = \lim_{x\to\infty} \frac{\lambda p_1}{c}\int_0^x e^{Rx}\overline{F}(t)dt = \frac{\lambda p_1}{c}\frac{c}{\lambda p_1} = 1. \tag{3.4.10}$$

Παρατηρούμε πως η εξίσωση (3.4.9), αποτελεί την κανονική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η (3.4.6).

3.5 Ο Συντελεστής Προσαρμογής R

Στη προηγούμενη παράγραφο αναφερθήκαμε στην ύπαρξη μιας θετικής σταθεράς R προκειμένου να υπολογίσουμε την ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας. Η σταθερά αυτή καλείται **συντελεστής προσαρμογής (adjustment coefficient)** και ο υπολογισμός της γίνεται μέσω της παρακάτω εξίσωσης :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{Rx}dH(x) &= \frac{c}{\lambda p_1}\\
\Rightarrow \frac{1}{p_1}\int_0^\infty e^{Rx}\overline{F}(x)dx &= \frac{c}{\lambda p_1}\\
\Rightarrow \int_0^\infty e^{Rx}\overline{F}(x)dx &= \frac{c}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (\frac{1}{R}e^{Rx})'\,\overline{F}(x)dx &= \frac{c}{\lambda}\\
\Rightarrow \left[\frac{1}{R}e^{Rx}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{R}e^{Rx}f(x)dx &= \frac{c}{\lambda}\\
\Rightarrow -\frac{1}{R} + \int_0^\infty \frac{1}{R}e^{Rx}f(x)dx &= \frac{c}{\lambda}\\
\Rightarrow -\frac{1}{R} + \frac{1}{R}M_X(R) &= \frac{c}{\lambda}, \qquad (3.5.1)
\end{aligned}$$

όπου, $M_X(R)$ η ροπογεννήτρια της κατανομής των X_i.

Από την εξίσωση (3.5.1), παρατηρούμε πως ο συντελεστής προσδιορισμού R υπολογίζεται σαν λύση της παρακάτω εξίσωσης ως προς r :

$$-\frac{1}{r} + \frac{1}{r}M_X(r) = \frac{c}{\lambda}, \tag{3.5.2}$$

ή αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο : $\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1$, από την ισοδύναμη εξίσωση :

$$M_X(R) = (1+\theta)p_1 R + 1. \tag{3.5.3}$$

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω το κλασικό μοντέλο Cramer - Lundberg με :*

$$R(t) = u + c \cdot t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \ t \geq 0,$$

αν υποθέσουμε ότι ισχύει η συνθήκη $\theta > 0$ και επιπλέον ότι υπάρχει $R > 0$, τέτοιο ώστε :

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} dH(x) = \frac{c}{\lambda p_1} = 1 + \theta.$$

Τότε, ισχύουν τα εξής :

1.
$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \ \forall u \geq 0. \tag{3.5.4}$$

2. *Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε να ισχύει ο παρακάτω ασυμπτωτικός τύπος :*
$$\psi(u) \approx Ce^{-Ru}, \tag{3.5.5}$$
δηλαδή,
$$\exists\, C > 0 : \lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u)}{Ce^{-Ru}} = 1. \tag{3.5.6}$$

3. *Στην ειδική περίπτωση όπου τα ύψη των αποζημιώσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x) = 1 - e^{-x/p_1}$, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u, δίνεται από τον τύπο :*
$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\dfrac{\theta u}{p_1(\theta+1)}}. \tag{3.5.7}$$

(βλέπε Πολίτης (2015) Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας, σελίδες 41-45)

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι σαφές ότι για τον υπολογισμό του συντελεστή προσαρμογής αναγκαία συνθήκη είναι να υπάρχει η ροπογεννήτρια της κατανομής του ύψους των αποζημιώσεων. Σε πολλές κατανομές δεν υπάρχει η ροπογεννήτρια, όπως για παράδειγμα στην $Pareto$ και τη $Weibull(\tau, \gamma)$, με $\gamma < 1$, ή δεν μπορεί να βρεθεί αναλυτικός τύπος για αυτήν όπως στην $Weibull(\tau, \gamma)$, με $\gamma > 1$. Στις περιπτώσεις αυτές είναι απαραίτητο να βρεθούν κάποια φράγματα για τον συντελεστή προσαρμογής, λόγω της σημαντικότητας που παρουσιάζει αυτός στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Ένα άνω φράγμα για τον συντελεστή προσαρμογής (βλέπε Πολίτης (2015) *Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας*) μπορεί να προκύψει αν πάρουμε το ανάπτυγμα Taylor της ροπογεννήτριας γύρω από το μηδέν. Έτσι, έχουμε :

$$\begin{aligned} M_X(R) = E(e^{Rx}) &= E(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Rx)^i}{i!}) = \sum_{i=0}^{\infty} E(\frac{(Rx)^i}{i!}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(R)^i E(x^i)}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(R)^i p_i}{i!} \qquad (3.5.8) \\ &= 1 + Rp_1 + \frac{R^2 p_2}{2} + \frac{R^3 p_3}{6} + \dots \qquad (3.5.9) \end{aligned}$$

Άρα, αντικαθιστώντας την (3.5.9) στην (3.5.3) και χρησιμοποιώντας τους τρείς πρώτους όρους της σειράς, έχουμε :

$$1 + Rp_1 + \frac{R^2 p_2}{2} + \frac{R^3 p_3}{6} + \cdots = (1+\theta)p_1 R + 1$$
$$\Rightarrow (1+\theta)p_1 R + 1 > 1 + Rp_1 + \frac{R^2 p_2}{2}.$$

Επομένως το άνω φράγμα, είναι το :

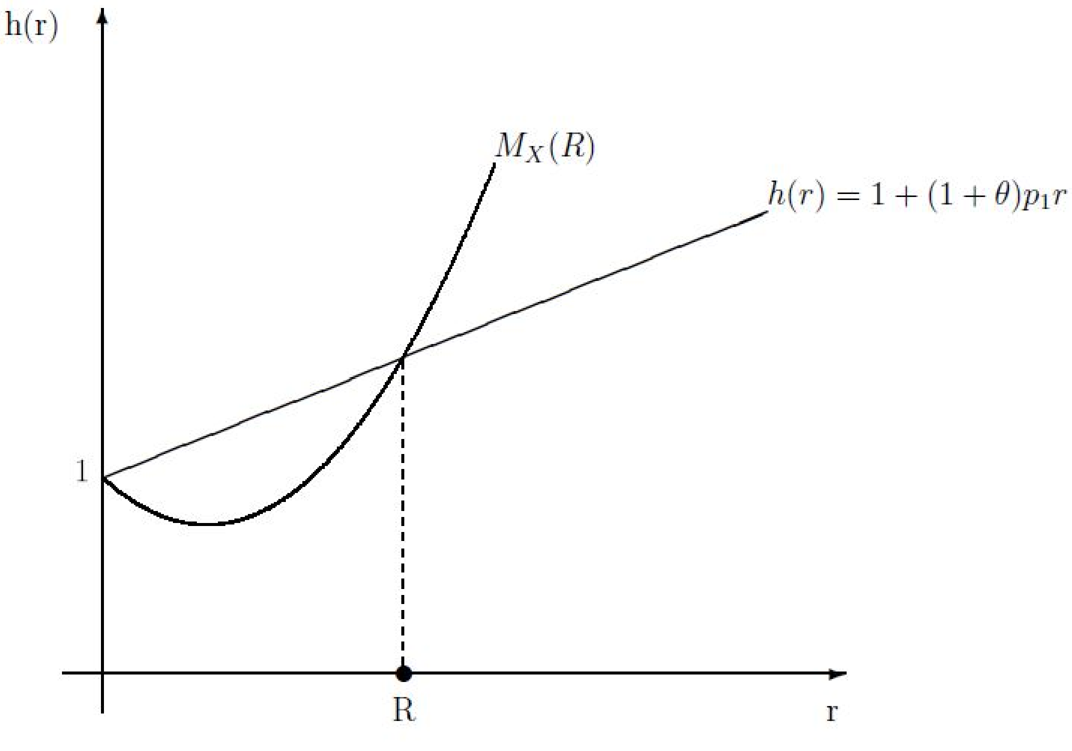
$$R < \frac{2\theta p_1}{p_2}. \tag{3.5.10}$$

Ενώ, αν πάρουμε τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor, έχουμε :

$$R < \frac{12\theta p_1}{\sqrt{9p_2^2 + 24\theta p_1 p_3 + 3p_2}}. \tag{3.5.11}$$

Είναι σαφές πως όσο περισσότερους όρους χρησιμοποιούμε από το ανάπτυγμα της ροπογεννήτριας, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια επιτυγχάνουμε.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται γραφικά η ύπαρξη του συντελεστή προσδιορισμού.



Σχήμα 3.4: Συντελεστής Προσδιορισμού

3.6 Κάποιες Τυχαίες Μεταβλητές που Συνδέονται με τη Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε τις πιο σημαντικές τυχαίες μεταβλητές που μας βοηθούν στη μελέτη της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος και στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας (βλέπε Πολίτης (2015) *Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας*).

Ορισμός 3.6.1. *Η τυχαία μεταβλητή :*

$$T = \begin{cases} inf\{t : U(t) < 0\} \\ \infty, \quad \text{αν } U(t) \geq 0 \quad \forall t \end{cases} \tag{3.6.1}$$

καλείται ***χρόνος χρεοκοπίας****.*

Παρατηρήσεις

1. Ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, αφού :
   i. $Pr(\text{να συμβεί χρεοκοπία}) = Pr(T < \infty) < 1$.
   ii. $Pr(\text{να μη συμβεί χρεοκοπία}) = Pr(T = \infty) > 0$.
2. Ισχύει, ότι : $Pr(T = \infty) = Pr(U(t) > 0,\ \forall t) = 1 - \psi(u) = \delta(u)$.

Ορισμός 3.6.2. *Η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν τη χρονική στιγμή $t = T$ καλείται* ***έλλειμμα τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας*** *και συμβολίζεται με $U(T)$ ή αν θέλουμε να το εκφράσουμε σε θετική κλίμακα με $-U(T)$.*

Ορισμός 3.6.3. *Η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρονική στιμγή $t = T$ καλείται* ***πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία*** *και συμβολίζεται με $U(T-)$ και δίνεται από τον τύπο: $U(T-) = \lim\limits_{t \to T-} R(t)$.*

Ορισμός 3.6.4. *Η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, συμβολίζεται με L_1.*

Αν η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το u έγινε τη χρονική στιγμή t_1 με το πλεόνασμα να είναι ίσο με $U(t_1) = u_1$, τότε με το ίδιο σκεπτικό μπορούμε να ορίσουμε μια δεύτερη τυχαία μεταβλητή την L_2 που να μας δίνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το προηγούμενο αποθεματικό u_1. Επομένως, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία δημιουργούμε μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές, $L_3, L_4, \ldots, L_i$, που μας δίνουν το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος, όταν για πρώτη φορά πέσει κάτω από, $u_2, u_3, \ldots, u_{i-1}$, αντίστοιχα.

Πόρισμα 3.6.1. *Αν ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους $c > \lambda p_1$ στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων, τότε το πλήθος των L_i που εμφανίζονται (έστω K), είναι πεπερασμένο και μάλιστα ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας $\delta(0)$, δηλαδή :*

$$K \sim Geo(\delta(0)) \tag{3.6.2}$$
$$\Rightarrow Pr(K = x) = [\psi(0)]^x \delta(0) \tag{3.6.3}$$
$$\Rightarrow Pr(K = x) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^x \frac{\theta}{1+\theta}. \tag{3.6.4}$$

Ορισμός 3.6.5. *Στο κλασικό μοντέλο, ορίζουμε σαν* ***μέγιστη συσσωρευτική απώλεια*** *τη τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το σύνολο της πτώσης κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Τη συμβολίζουμε με L και ισούται με :*

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_K = \sum_{i=1}^{K} L_i. \tag{3.6.5}$$

Παρατηρήσεις

1. Η L είναι σύνθετη γεωμετρική τυχαία μεταβλητή.
2. Η L είναι μικτή τυχαία μεταβλητή.
3. $Pr(L = 0) = Pr(K = 0) = \delta(0)$.

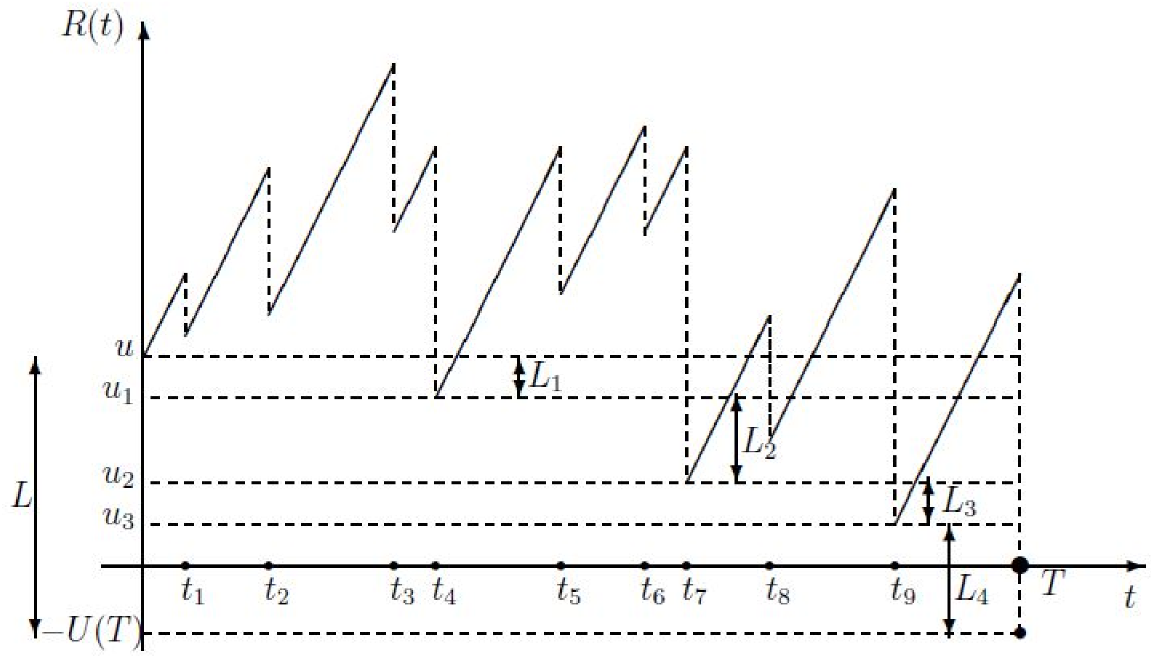
Η μέγιστη συσσωρευτική απώλεια συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε πως το ενδεχόμενο η τυχαία μεταβλητή L, να πέσει κάτω από το αρχικό αποθεματικό είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο να έχουμε χρεοκοπία, δηλαδή :

$$Pr(L > u) = \psi(u), \tag{3.6.6}$$

ή ισοδύναμα :

$$Pr(L \leq u) = \delta(u). \tag{3.6.7}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται γραφικά οι τυχαίες μεταβλητές: L_1, L και $U(T)$.



Σχήμα 3.5: Γραφική παράσταση της στοχαστικής ανέλιξης του πλεονάσματος και απεικόνιση των βοηθητικών τυχαίων μεταβλητών L_1 και L. (βλέπε Πολίτης (2015) *Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας*)

Πρόταση 3.6.1. *Για τη τυχαία μεταβλητή L_1, η οποία ορίζεται στο κλασικό μοντέλο στην περίπτωση που συμβεί πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, ισχύουν τα εξής :*

1. *Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της ισούται με :*

$$F_{L_1}(x) = Pr(L_1 \leq x) = \int_0^x \frac{1}{p_1}[1 - F_X(t)]dt = H(x). \tag{3.6.8}$$

2. *Η ροπογεννήτρια της είναι :*

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{p_1}(M_X(r) - 1). \tag{3.6.9}$$

3. *Ειδικότερα, για την περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές X_i, ακολουθούν εκθετική κατανομή, με παράμετρο β τότε και η τυχαία μεταβλητή L_1, ακολουθεί εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο.*

4. *Η r τάξης ροπή της (γύρω από το μηδέν) είναι :*

$$E(L_i^r) = \frac{p_{r+1}}{p_1(r+1)}. \tag{3.6.10}$$

Όπως έχουμε αναφέρει η μέγιστη συσσωρευτική απώλεια, είναι μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή, επομένως η ροπογεννήτρια της δίνεται από τη σχέση :

$$M_L(r) = M_K(\ln(M_{L_i}(r))), \tag{3.6.11}$$

όπου,

$$M_K(r) = E(e^{rK}) = \frac{\delta(0)}{1 - \psi(0)e^r}, \tag{3.6.12}$$

αφού,

$$K \sim Geometric(\delta(0)). \tag{3.6.13}$$

Αντικαθιστώντας τις (3.6.9) και (3.6.12) στην (3.6.11), έχουμε :

$$M_L(r) = \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{1 - \frac{1}{1+\theta}M_{L_i}(r)} = \frac{\theta}{(1+\theta) - M_{L_i}(r)}. \tag{3.6.14}$$

Πρόταση 3.6.2. *Στο κλασικό μοντέλο για τη μέγιστη συσσωρευτική απώλεια ισχύουν τα εξής :*

1. *Έχει μέση τιμή :*

$$E(L) = \frac{1}{\theta}\frac{p_2}{p_1}, \tag{3.6.15}$$

και

2. *Διασπορά :*

$$Var(L) = \frac{p_3}{3\theta p_1} + (\frac{p_2}{2\theta p_1})^2. \tag{3.6.16}$$

Θεώρημα 3.6.1. *Στο κλασικό μοντέλο, αν $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_K$, είναι η μέγιστη συσσωρευτική απώλεια, όπου L_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και $K \sim Geo(\delta(0))$, τότε η πιθανότητα μη χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u, δίνεται από τον τύπο :*

$$\delta(u) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{k=0}^{\infty} H^{*k}(u) \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^k, \tag{3.6.17}$$

όπου, $H^{*k}(u) = Pr(L_1 + l_2 + \cdots + L_K = u)$, είναι η κ-τάξης συνέλιξη της H, με τον εαυτό της (βλέπε Παράρτημα Γ').

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\delta(u) = Pr(L \le u) &= \sum_{k=0}^{\infty} Pr(L \le u \mid K = k) Pr(K = k) \\
&= Pr(K = k) + \sum_{k=0}^{\infty} Pr(L_1 + L_2 + \cdots + L_K \le u) Pr(K = k) \\
&= \delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} H^{*k}(u) \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^k \frac{\theta}{1+\theta}. \qquad (3.6.18)
\end{aligned}$$

Όμως, εάν ορίσουμε :

$$H^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x \ge 0 \\ 0, & \text{αν} \quad x < 0, \end{cases} \tag{3.6.19}$$

τότε, η (3.6.18), γίνεται :

$$\begin{aligned}
\delta(u) &= \frac{\theta}{1+\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} H^{*k}(u) \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^k \frac{\theta}{1+\theta} \\
&= \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^0 H^{*0}(u) + \sum_{k=1}^{\infty} H^{*k}(u) \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^k \frac{\theta}{1+\theta} \\
&= \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{k=0}^{\infty} H^{*k}(u) \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^k. \qquad (3.6.20)
\end{aligned}$$

■

Θα πρέπει να τονίσουμε πως το προηγούμενο θεώρημα μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι έννοιες ταυτόσημες. Έτσι κάθε ιδιότητα που αποδεικνύεται για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής μεταφέρεται και στην πιθανότητα χρεοκοπίας και αντίστροφα.

3.7 Η Πιθανότητα Χρεοκοπίας σε Συνεχή και Πεπερασμένο Χρόνο

Η μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας ενός χαρτοφυλακίου σε συνεχή και πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[0, t]$, εξαρτάται εκτός από το αρχικό αποθεματικό u και από το μήκος του διαστήματος t. Αυτή η επιπλέον παράμετρος, εμποδίζει ακόμα και σε απλές περιπτώσεις (όπως η εκθετική κατανομή) τον ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας. Για το λόγω αυτό περιοριζόμαστε στη δημιουργία προσεγγίσεων και φραγμάτων της πιθανότητας $\psi(u,t)$.

Πρόταση 3.7.1. *Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων και για αρχικό αποθεματικό $u = 0$, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u,t) = 1 - \psi(u,t)$ στο $[0,t]$, έχει το εξής άνω φράγμα:*

$$\delta(u,t) \leq \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{p_2}{\theta p_1}\frac{1}{ct}, \ \forall t \geq 0. \tag{3.7.1}$$

Πρέπει να αναφέρουμε πως η πιθανότητα μη χρεοκοπίας για πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα και η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο, συνδέονται με τη σχέση :

$$\psi(u,t) = \psi(u)Pr[T \leq t \mid T < \infty], \tag{3.7.2}$$

όμως για μεγάλες τιμές του u, ισχύει το εξής :

$$Pr[T \leq t \mid T < \infty] \simeq \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right),$$

όπου, $\Phi(\cdot)$ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής και

$$\begin{aligned} m &= E[T \leq t \mid T < \infty], \\ \sigma^2 &= Var[T \leq t \mid T < \infty]. \end{aligned}$$

Πρόταση 3.7.2. *Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων για μεγάλες τιμές του αρχικού αποθεματικού u, μια προσέγγιση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας $\delta(u,t) = 1-\psi(u,t)$ στο $[0,t]$, είναι η εξής :*

$$\delta(u,t) \simeq \psi(u)\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right). \tag{3.7.3}$$

3.8 Το Ανανεωτικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου υποθέσαμε ότι οι χρόνοι μεταξύ των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Συνέπεια αυτού είναι ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ t \geq 0\}$, που αντιστοιχεί στο πλήθος των ανανεώσεων που συμβαίνουν στο $[0,t]$, $\forall > 0$ είναι μια ανέλιξη Poisson (βλέπε Schmidt (1995) Θεώρημα 2.3.4). Μια από τις πολλές γενικεύσεις του κλασικού μοντέλου που έχουν μελετηθεί, αποτελεί και το Ανανεωτικό Μοντέλο. Σύμφωνα με αυτό, οι χρόνοι μεταξύ των ζημιογόνων συμβάντων παραμένουν ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ενώ αυτό που αλλάζει είναι ότι εκτός από την εκθετική μπορούν να ακολουθήσουν οποιαδήποτε κατανομή και επιπλέον ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{N(t),\ t \geq 0\}$ μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε ανανεωτική ανέλιξη.

Πρόταση 3.8.1. *Στο ανανεωτικό μοντέλο η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία τη στιγμή που έρχεται η πρώτη αποζημίωση είναι :*

$$\psi_1(u) = \int_0^\infty \phi(t)[1 - F(u+ct)]dt, \tag{3.8.1}$$

όπου, $\phi(t)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ διαδοχικών συμβάντων (βλέπε Πολίτης (2015) Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας).

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το λεγόμενο ανανεωτικό επιχείρημα, δεσμεύοντας ως προς το χρόνο που συμβαίνει η πρώτη αποζημίωση. Αν υποθέσουμε ότι το πρώτο αυτό ζημιογόνο γεγονός συμβαίνει τη χρονική στιγμή $T_1 = t$ τότε χρησιμοποιώντας το νόμο της ολικής πιθανότητας, έχουμε :

$$\begin{aligned}
\psi_1(u) &= \int_0^\infty Pr(R(t) < 0 \mid T_1 = t)\phi(t)dt \\
&= \int_0^\infty Pr(u + ct - X_1 < 0)\phi(t)dt \\
&= \int_0^\infty Pr(X_1 > u + ct)\phi(t)dt \\
&= \int_0^\infty \phi(t)[1 - F_{X_1}(u + ct)]dt.
\end{aligned}$$

■

Στο ανανεωτικό μοντέλο οι ορισμοί για τις τυχαίες μεταβλητές L_i, $i = 1, 2, \ldots$ και L, παραμένουν ίδιοι με το κλασικό μοντέλο, έτσι :

- $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_K$.
- $K \sim Geo(\delta(0))$.
- $\delta(u) = Pr(L \leq u)$.

ενώ, δεν ισχύει η ισότητα : $\psi(0) = \dfrac{1}{1+\theta}$.

Πρόταση 3.8.2. *Στο ανανεωτικό μοντέλο η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο και συνεχή χρόνο, ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :*

$$\psi(u) = \phi\overline{H}(u) + \phi \int_0^u \psi(u - y)dH(y), \tag{3.8.2}$$

όπου, $\phi = \psi(0)$ και $H(x)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής L_1 (βλέπε Πολίτης (2015) Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας).

Απόδειξη. Έστω Κ το ενδεχόμενο να υπάρχει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το προηγούμενο αποθεματικό. Τότε, έχουμε :

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= Pr(R(t) < 0 \mid u) \\
&= \int_0^\infty Pr(R(t) < 0 \mid u, K, L_1 = x)Pr(K)Pr(L_1 \approx x)dx + \\
&+ \int_0^\infty \underbrace{Pr(R(t) < 0 \mid u, K', L_1 = x)}_{=0} Pr(K')Pr(L_1 \approx x)dx \\
&= \phi \int_0^\infty Pr(R(t) < 0 \mid u, K, L_1 = x)Pr(L_1 \approx x)dx.
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας, υπόψιν μας ότι :

- Αν $L_1 = x$, τότε :
$$Pr(R(t) < 0 \mid u, K, L_1 = x) = 1.$$

- Αν $L_1 = x \leq u$, τότε :

$$Pr(R(t) < 0 \mid u, K, L_1 = x) = \psi(u - x).$$

και

$$Pr(L_1 = x) = \frac{dH(x)}{dx} \Rightarrow dH(x) = Pr(L_1 = x)dx,$$

τότε, έχουμε :

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \phi \int_0^u Pr(R(t) < 0 \mid u, K, L_1 = x)dH(x) + \\
&+ \phi \int_u^\infty \underbrace{Pr(R(t) < 0 \mid u, K, L_1 = x)}_{=1} dH(x) \\
&= \phi \int_0^\infty \phi(u - x)dH(x) + \phi[1 - H(u)] \\
&= \phi\overline{H}(u) + \phi \int_0^u \psi(u - y)dH(y).
\end{aligned}$$

■

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές των Συνελίξεων Μίξης Γεωμετρικών στην Υπολειπόμενη Διάρκεια Ζωής

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε την εφαρμογή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής μιας κατανομής μίξης γεωμετρικών σε συνέλιξη με κάποια άλλη κατανομή, που ονομάζεται **συνέλιξη μίξης γεωμετρικών**. Καθώς και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια συνέλιξη μίξης εκθετικών είναι (NWU) ή (NBU) και τις εφαρμογές που έχουν επάνω στο Κλασικό Μοντέλο της Θεωρία Χρεοκοπίας με διάχυση.

Θεωρούμε πως η κατανομή μιας μίξης γεωμετρικών μιας τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πιθανότητας $G(x) = Pr(X \leq x) = 1 - \overline{G}(x)$ είναι μια μίξη γεωμετρικών κατανομών που ορίζεται από την δεξιά ουρά της κατανομής της :

$$\bar{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi)\phi^n \bar{F}^{*n}(x), \ x \geq 0, \tag{4.1.1}$$

όπου, $0 < \phi < 1$ και $F(x) = 1 - \bar{F}(x)$ να είναι η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας θετικής μεταβλητής. Έστω $\{X_1, X_2, \dots\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινή συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και η συνέλιξη αυτών να είναι :

$$\bar{F}^{*n}(x) = Pr(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n > x).$$

Η δεξιά ουρά $\bar{G}(x)$ της κατανομής ορισμένη από την σχέση (4.1.1) ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :

$$\bar{G}(x) = \phi \int_0^x \bar{G}(x-t)dF(t) + \phi\bar{F}(x), \ \ x \geq 0, \tag{4.1.2}$$

βλέπε *Willmot και Lin, (2001), σελίδα 156.* Αν διαιρέσουμε τη σχέση (4.1.2) με το ϕ και στα δύο μέλη, μπορούμε να καταλήξουμε στην παρακάτω σχέση :

$$\frac{\bar{G}(x)}{\phi} = \int_0^x \bar{G}(x-t)dF(t) + \bar{F}(x) = \int_0^x \bar{F}(x-t)dG(t) + \bar{G}(x), \tag{4.1.3}$$

όπου, το $\dfrac{\bar{G}(x)}{\phi}$ είναι η ουρά μιας συνέλιξης μίξης γεωμετρικών και διαφορετικά μπορεί να εκφραστεί και με τη μορφή $1-\dfrac{\bar{G}(x)}{\phi}=G*F(x)$.

Η εφαρμογή της συνάρτηση κατανομής $G(x)$ είναι μεγάλη στην θεωρία ουρών, στη θεωρία αξιοπιστίας καθώς και σε άλλου τομείς, για περισσότερους τομείς που μπορεί να εφαρμοστεί η $G(x)$ βλέπε *Willmot και Lin (2001)*.

Παρακάτω θα δώσουμε τους ορισμούς των κλάσεων αξιοπιστίας καθώς και μερικά παραδείγματα για μια καλύτερη κατανόηση τους. Τους ορισμούς που θα δώσουμε και που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ αλλά και σε άλλα κεφάλαια, περιγράφονται με λεπτομέρειες στους *Barlow και Proschan (1981)* και στους *Willmot και Lin (2001)*.

Ορισμός 4.1.1. *Μια συνάρτηση G είναι **(IFR)** όταν $\forall x, y \geq 0$ η συνάρτηση $\dfrac{\overline{G}(x+y)}{\overline{G}(x)}$ είναι φθίνουσα ως προς x, και **(DFR)** όταν $\forall x, y \geq 0$ η συνάρτηση $\dfrac{\overline{G}(x+y)}{\overline{G}(x)}$ είναι αύξουσα ως προς x.*

Παράδειγμα 4.1.1. *Η εκθετική κατανομή με ουρά :*

$$\overline{G}(x)=e^{-\lambda x},\ x \geq 0,$$

όπου, $\lambda>0$, είναι η μοναδική κατανομή που είναι συγχρόνως (IFR) και (DFR).

Παράδειγμα 4.1.2. *Η μίξη εκθετικών με ουρά :*

$$\overline{G}(x)=qe^{-\lambda_1 x}+(1-q)e^{-\lambda_2 x},\ x \geq 0,$$

όπου, $\lambda_2>\lambda_1>0$ και $0<q<1$, είναι (DFR).

Παράδειγμα 4.1.3. *Η κατανομή Pareto με ουρά :*

$$\overline{G}(x)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha},\ x \geq 0,$$

όπου, $\lambda>0$ και $\alpha>0$, είναι (DFR).

Παράδειγμα 4.1.4. *Η κατανομή Weibull με ουρά :*

$$\overline{G}(x)=e^{-\lambda x^{\alpha}},\ x \geq, 0$$

όπου, $\lambda>0$ και $\alpha>0$, είναι (IFR) για $\alpha \geq 1$ και (DFR) για $0<\alpha \leq 1$.

Ορισμός 4.1.2. *Μια κατανομή G είναι **(DMRL)** όταν η συνάρτηση :*

$$r_G(x)=\int_0^{\infty}\frac{\overline{G}(x+t)}{\overline{G}(x)}dt,\ t \geq 0$$

*είναι φθίνουσα, και **(IMRL)** όταν η συνάρτηση :*

$$r_G(x)=\int_0^{\infty}\frac{\overline{G}(x+t)}{\overline{G}(x)}dt,\ t \geq 0$$

είναι αύξουσα.

Από τον Ορισμό 4.1.1 και τον Ορισμό 4.1.2 προκύπτει ότι η κλάση (IFR) περιέχεται στην κλάση (DMRL) και η κλάση (DFR) περιέχεται στην κλάση (IMRL).

Ορισμός 4.1.3. *Μια κατανομή G είναι* ***(NBU)*** *όταν $\forall x, y \geq 0$ ισχύει :*

$$\overline{G}(x+y) \leq \overline{G}(x)\overline{G}(y),$$

και ***(NWU)*** *όταν $\forall x, y \geq 0$ ισχύει :*

$$\overline{G}(x+y) \geq \overline{G}(x)\overline{G}(y).$$

Η κλάση (IFR) περιέχεται στην κλάση (NBU) και η κλάση (DFR) περιέχεται στην κλάση (NMU). Επίσης, δεν μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ των κλάσεων (NBU) και (DMRL), (NWU) και (IMRL).

Ορισμός 4.1.4. *Μια κατανομή G είναι* ***(2-NBU)*** *όταν $\forall x, y \geq 0$ ισχύει :*

$$\overline{G_e}(x+y) \leq \overline{G_e}(x)\overline{G_e}(y),$$

και ***(2-NWU)*** *όταν $\forall x, y \geq 0$ ισχύει :*

$$\overline{G_e}(x+y) \geq \overline{G_e}(x)\overline{G_e}(y).$$

Η κλάση (DMRL) περιέχεται στη κλάση (2-NBU) και η κλάση (IMRL) περιέχεται στην κλάση (2-NWU). Επίσης, δεν υπάρχει μεταξύ των κλάσεων (2-NBU) και (NBU), (2-NWU) και (NWU).

Ορισμός 4.1.5. *Μια κατανομή G είναι* ***(UBAE)*** *όταν $\forall x, y \geq 0$ ισχύει :*

$$\overline{G_e}(x+y) \geq \overline{G_e}(x)e^{-y/r_G(\infty)},$$

και ***(UWAE)*** *όταν $\forall x, y \geq 0$ ισχύει :*

$$\overline{G_e}(x+y) \leq \overline{G_e}(x)e^{-y/r_G(\infty)}.$$

Η κλάση (UBAE) είναι ευρύτερη από την κλάση (DMRL) και η κλάση (UWAE) είναι ευρύτερη από την κλάση (IMRL). Επιπλέον, δεν υπάρχει σύγκριση μεταξύ των κλάσεων (UBAE) και (2-NBU), (UWAE) και (2-NWU).

Ορισμός 4.1.6. *Μια κατανομή G είναι* ***(NBUC)*** *όταν $\forall x, y \geq 0$ ισχύει :*

$$\overline{G_e}(x+y) \leq \overline{G_e}(x)\overline{G}(y),$$

και ***(NWUC)*** *όταν $\forall x, y \geq 0$ ισχύει :*

$$\overline{G_e}(x+y) \geq \overline{G_e}(x)\overline{G}(y).$$

Η κλάση (NBUC) είναι ευρύτερη από τις κλάσεις (NBU) και (2-NBU) και η κλάση (NWUC) είναι ευρύτερη από τις κλάσεις (NWU) και (2-NWU).

Ορισμός 4.1.7. *Μια κατανομή G είναι* ***(NBUE)*** *όταν $\forall x \geq 0$ ισχύει :*

$$\overline{G_e}(x) \leq \overline{G}(x),$$

και ***(NWUE)*** *όταν $\forall x \geq 0$ ισχύει :*

$$\overline{G_e}(x) \geq \overline{G}(x).$$

Η κλάση (NBUE) είναι ευρύτερη από την κλάση (NBUC) και η κλάση (NWUE) είναι ευρύτερη από την κλάση (NWUC). Για περισσότερες πληροφορίες για αυτές τις κλάσεις και για άλλες κλάσεις κατανομών, βλέπε το βιβλίο των Willmot και Lin (2001, Chapter 2). Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα διάγραμμα για την σχέση που υπάρχει μεταξύ των κλάσεων.

$$\begin{array}{ccc}
\text{(DFR) (IFR)} & \Rightarrow & \text{(NWU) (NBU)} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{(IMRL) (DMRL)} & \Rightarrow \text{(2-NWU) (2-NBU)} \Rightarrow & \text{(NWUC) (NBUC)} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{(3-DFR) (3-IFR)} & & \text{(NWUE) (NBUE)}
\end{array}$$

Αφού δώσαμε τους απαραίτητους ορισμούς για τις κλάσεις των κατανομών αξιοπιστίας, μπορούμε να πούμε πως η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ είναι (NWU) αν $\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$, $\forall x, y \geq 0$, και (NBU) εάν $\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$, $\forall x, y \geq 0$ (βλέπε *Barlow και Proschan (1975), σελίδα 159)* για παραδείγματα).

Ο Brown (1990) απέδειξε ότι η $G(x)$ είναι (NWU), βλέπε Cai και Kalashnikov (2000) και Willmot (2002α) σε πιο γενικές μίξεις κατανομών. Η προσέγγιση που έκανε ο Willmot (2002α) περιλάμβανε την χρήση της συνάρτησης $\psi(x, y)$ ικανοποιώντας την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :

$$\psi(x, y) = \phi \int_0^x \psi(x - t, y) dF(t) + \phi \bar{F}(x + y), \tag{4.1.4}$$

έτσι ώστε $\bar{G}(x) = \psi(x, 0)$ από την (4.1.2). Η συνάρτηση $1 - \psi(x, y)/\bar{G}(x)$ είναι η ουρά της κατανομής του ελλείματος. Σε αυτή την εργασία θα θεωρήσουμε επεκτάσεις για την ανάλυση της συνάρτησης κατανομής της συνέλιξης μίξης γεωμετρικών $W(x) = 1 - \bar{W}(x) = G * A(x)$, όπου $A(x) = 1 - \bar{A}(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής μιας θετικής τυχαίας μεταβλητής ανεξάρτητη της X, έτσι ώστε η ουρά της κατανομής να ικανοποιεί τη σχέση :

$$\bar{W}(x) = \bar{G}(x) + \int_0^x \bar{A}(x - t) dG(t) = \bar{A}(x) + \int_0^x \bar{G}(x - t) dA(t), \tag{4.1.5}$$

και εάν $A(x) = F(x)$, τότε $\bar{W}(x) = \bar{G}(x)/\phi$ όπως στην σχέση (4.1.3). Εάν τώρα θεωρήσουμε γενικά ότι $\bar{A}(x) \leq \bar{F}(x)$, συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.1.3) και (4.1.5) μπορούμε να πάρουμε ένα άνω φράγμα για την $\overline{W}(x)$ το οποίο είναι :

$$\bar{W}(x) \leq \bar{G}(x) + \int_0^x \bar{F}(x - t) dG(t) = \frac{\bar{G}(x)}{\phi}.$$

Ενώ στην περίπτωση που το $\bar{A}(x) \geq \bar{F}(x)$, τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\bar{W}(x) \geq \bar{G}(x)/\phi$.

Η ουρά $\bar{W}(x)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :

$$\bar{W}(x) = \phi \int_0^x \bar{W}(x - t) dF(t) + \phi \bar{F}(x) + (1 - \phi)\bar{A}(x), \tag{4.1.6}$$

(βλέπε *Willmot και Lin, (2001), σελίδα 174*), που είναι μια σχέση με πολλές χρήσεις όπως στην Θεωρία Κινδύνων, η πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο με διάχυση έχει τη μορφή της $\overline{W}(x)$ (βλέπε *Dufresne και Gerber (1991)*).

Για παράδειγμα εάν $k > 0$ ικανοποιεί τη σχέση :

$$\int_0^{\infty} e^{ky} dF(y) = \frac{1}{\phi}, \tag{4.1.7}$$

τότε μπορεί να εφαρμοστεί το ανανεωτικό θεώρημα και να δώσει το αποτέλεσμα :

$$\lim_{x \to +\infty} e^{kx} \bar{W}(x) = \frac{(1-\phi)\int_0^{+\infty} e^{ky} dA(y)}{\phi k \int_0^{+\infty} y e^{ky} dF(y)}$$

(βλέπε *Willmot και Lin (2001), σελίδα 175*).

4.2 Η Κατανομής της Υπολειπόμενη Διάρκεια Ζωής

Με αφορμή την (4.1.5), ορίζουμε την συνάρτηση :

$$\bar{K}(x,y) = \bar{A}(x+y) + \int_0^x \psi(x-t,y) dA(t), \tag{4.2.1}$$

όπου, η $\psi(x,y)$ ικανοποιεί τη σχέση (4.1.4). Επίσης γνωρίζοντας ότι η $\psi(x,0) = \overline{G}(x)$, και χρησιμοποιώντας την σχέση (3.1.5) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\bar{K}(x,0) = \bar{W}(x)$. Συνεπώς η (4.2.1) μετατρέπεται στην (4.1.5) όταν θεωρήσουμε το $y = 0$ (βλέπε *Willmot και Cai (2004)*).

Στη συνέχεια θα δώσουμε δυο διαφορετικούς τρόπους γραφής της συνάρτησης $\bar{K}(x,y)$, που θα μας φανούν αρκετά χρήσιμοι στην πορεία.

Πρόταση 4.2.1. *Η συνάρτηση $\bar{K}(x,y)$ που ορίσαμε πιο πάνω ικανοποιεί την εξίσωση :*

$$\bar{K}(x,y) = \bar{A}(x+y) + \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^x \bar{F}(x+y-t) dW(t), \tag{4.2.2}$$

όπως και την :

$$(1-\phi)\bar{K}(x,y) = \bar{W}(x+y) - \phi\bar{W}(x)\bar{F}(y) - \phi\int_0^y \bar{W}(x+y-t) dF(t) \tag{4.2.3}$$

(βλέπε Willmot και Cai (2004)).

Απόδειξη. Από τη σχέση(4.2.1) έχουμε ότι :

$$\bar{K}(x,y) - \bar{A}(x+y) = \int_0^x \psi(x-t,y) dA(t),$$

και γράφοντας την σχέση (4.2.2) στη μορφή :

$$\bar{K}(x,y) - \bar{A}(x+y) = \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^x \bar{F}(x+y-t) dW(t),$$

και από την ισότητα των μελών έχουμε :

$$\int_0^x \psi(x-t,y)dA(t) = \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dW(t)$$
$$\Rightarrow (1-\phi)\int_0^x \psi(x-t,y)dA(t) = \phi\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dW(t). \tag{4.2.4}$$
Επιπλέον, από την σχέση (4.1.1) μπορούμε με μετασχηματισμό Laplace να πάρουμε :
$$E(e^{-zL}) = \frac{1-\phi}{1-\phi E(e^{-zX})}. \tag{4.2.5}$$
Στη συνέχεια από τις (4.1.4) και (4.2.5),
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-zx}\psi(x,y)dx &= \frac{\phi\int_0^{+\infty} e^{-zx}\bar{F}(x+y)dx}{1-\phi E(e^{-zX})}\\ &= \frac{\phi}{1-\phi}E(e^{-zL})\int_0^{+\infty} e^{-zx}\bar{F}(x+y)dx.\end{aligned}$$
Επομένως :
$$\begin{aligned}(1-\phi)\int_0^{+\infty} e^{-zx}&\left\{\int_0^x \psi(x-t,y)dA(t)\right\}dx =\\ &= (1-\phi)\left\{\int_0^{+\infty} e^{-zx}dA(x)\right\}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-zx}\psi(x,y)dx\right\}\\ &= \phi\left\{E(e^{-zL})\int_0^{+\infty} e^{-zx}dA(x)\right\}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-zx}\bar{F}(x+y)dx\right\}\\ &= \phi\left\{\int_0^{+\infty} e^{-zx}dW(x)\right\}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-zx}\bar{F}(x+y)dx\right\}\\ &= \phi\int_0^{+\infty} e^{-zx}\left\{\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dW(t)\right\}dx,\end{aligned}$$
και έτσι λόγω της μοναδικότητας του μετασχηματισμού Laplace έχουμε τη (4.2.4) και τη (4.2.2).
Για να αποδείξουμε την σχέση (4.2.3), ορίζουμε την δεξιά ουρά της υπολειπόμενης ζωής :
$$\bar{F}_t(y) = 1 - F_t(y) = \frac{\bar{F}(t+y)}{\bar{F}(t)}, \quad t, y \geq 0, \tag{4.2.6}$$
και όπως προκύπτει από την (4.2.2) είναι :
$$\begin{aligned}\bar{K}(x,y) &= \bar{A}(x+y) + \frac{\phi}{1-\phi}\bar{F}(y)\int_0^x \bar{F}_y(x-t)dW(t)\\ &= \bar{A}(x+y) + \frac{\phi}{1-\phi}\bar{F}(y)\left\{\bar{F}_y(x) + \int_0^x \bar{W}(x-t)dF_y(t) - \bar{W}(x)\right\}\\ &= \bar{A}(x+y) + \phi\frac{\bar{F}(x+y) + \int_0^x \bar{W}(x-t)d_tF(y+t) - \bar{W}(x)\bar{F}(y)}{1-\phi}\\ &= \bar{A}(x+y) + \frac{\phi}{1-\phi}\left\{\bar{F}(x+y) + \int_y^{x+y}\bar{W}(x+y-t)dF(t) - \bar{W}(x)\bar{F}(y)\right\}.\end{aligned}$$

Αλλά από την (4.1.6) με αντικατάσταση του x από το $x + y$:

$$
\begin{aligned}
\phi\bigg\{ \bar{F}(x+y) + \int_y^{x+y} \bar{W}(x+y-t)dF(t) \bigg\} \\
&= \phi\bigg\{ \bar{F}(x+y) + \int_0^{x+y} \bar{W}(x+y-t)dF(t) \bigg\} - \phi\int_0^y \bar{W}(x+y-t)dF(t) \\
&= \{\bar{W}(x+y) - (1-\phi)\bar{A}(x+y)\} - \phi\int_0^y \bar{W}(x+y-t)dF(t),
\end{aligned}
$$

και επομένως :

$$
\begin{aligned}
\bar{K}(x,y) =& \bar{A}(x+y) + \frac{1}{1-\phi}\{\bar{W}(x+y) - (1-\phi)\bar{A}(x+y)\} \\
&- \frac{\phi}{1-\phi}\bigg\{ \int_0^y \bar{W}(x+y-t)dF(t) + \bar{W}(x)\bar{F}(y) \bigg\},
\end{aligned}
$$

από την οποία δείχθηκε το ζητούμενο. ∎

Τώρα θα ορίσουμε την ποσότητα :

$$
\bar{K}_x(y) = \frac{\bar{K}(x,y)}{\bar{W}(x)}, \tag{4.2.7}
$$

που θα μας βοηθήσει για το λήμμα που ακολουθεί.

Λήμμα 4.2.1. *Η ουρά της υπολειπόμενης ζωής $\bar{W}_x(y) = \bar{W}(x+y)/\bar{W}(x)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :*

$$
\bar{W}_x(y) = \phi\int_0^y \bar{W}_x(y-t)dF(t) + \phi\bar{F}(y) + (1-\phi)\bar{K}_x(y). \tag{4.2.8}
$$

Απόδειξη. Διαιρώντας την (4.2.3) με την $\bar{W}(x)$ και χρησιμοποιώντας την (4.2.7) έχουμε :

$$
\begin{aligned}
(1-\phi)\bar{K}_x(y) &= \bar{W}_x(y) - \phi\bar{F}(y) - \phi\int_0^y \bar{W}_x(y-t)dF(t) \\
\Rightarrow \bar{W}_x(y) &= \phi\int_0^y \bar{W}_x(y-t)dF(t) + \phi\bar{F}(y) + (1-\phi)\bar{K}_x(y),
\end{aligned}
$$

που είναι η (4.2.8). ∎

Στη συνέχεια ορίζουμε την συνάρτηση :

$$
\bar{C}_x(y) = \frac{\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dW(t)}{\int_0^x \bar{F}(x-t)dW(t)}, \quad y \geq 0, \tag{4.2.9}
$$

που θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα την σχέση (4.2.8).

Η (4.2.6) αντικαθιστώντας όπου t με $x-t$ μπορεί να γραφεί στην μορφή :

$$
\bar{F}_{x-t}(y) = \frac{\bar{F}(x+y-t}{\bar{F}(t)} \Rightarrow \bar{F}(x+y-t) = \bar{F}_{x-t}(y)\bar{F}(x-t),
$$

και με αντικατάσταση στην (4.2.9) έχουμε :

$$\bar{C}_x(y) = \frac{\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dW(t)}{\int_0^x \bar{F}(x-t)dW(t)}, \quad y \geq 0.$$

Συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε πως η $C_x(y)$ είναι μια συνάρτηση κατανομής, όπου :

$$\bar{C}_x(y) = 1 - C_x(y) = \frac{\int_0^x F_{x-t}(y)\bar{F}(x-t)dW(t)}{\int_0^x \bar{F}(x-t)dW(t)}, \tag{4.2.10}$$

δεδομένου ότι είναι μια μίξη συναρτήσεων κατανομής της μορφής $F_t(y)$.
Τώρα, όταν $y = 0$, η (4.2.2) γράφεται στη μορφή :

$$\bar{W}(x) = \bar{A}(x) + \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^x \bar{F}(x-t)dW(t). \tag{4.2.11}$$

Έτσι, η (4.2.9) μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας την (4.2.11) ως

$$\bar{C}_x(y) = \frac{\phi\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dW(t)}{(1-\phi)\{\bar{W}(x) - \bar{A}(x)\}}. \tag{4.2.12}$$

Αν $q(x) = \dfrac{\bar{A}(x)}{\bar{W}(x)}$, τότε από την (4.2.11) έχουμε ότι $\bar{A}(x) \leq \bar{W}(x)$, οπότε $0 \leq q(x) \leq 1$.

Στη συνέχεια ορίζουμε την ουρά της υπολειπόμενης ζωής:

$$\bar{A}_x(y) = 1 - A_x(y) = \frac{\bar{A}(x+y)}{\bar{A}(x)}. \tag{4.2.13}$$

Αν διαιρέσουμε την (4.2.2) με την ποσότητα $\bar{W}(x)$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{K}(x,y)}{\bar{W}(x)} &= \frac{\bar{A}(x+y)}{\bar{W}(x)} + \frac{1}{\bar{W}(x)}\frac{\phi}{1-\phi}\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dW(t) \\
\xRightarrow[(4.2.7)]{} \bar{K}_x(y) &= \frac{\bar{A}(x)}{\bar{W}(x)}\frac{\bar{A}(x+y)}{\bar{A}(x)} + \frac{1}{\bar{W}(x)}\frac{\phi}{1-\phi}\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dW(t) \\
\xRightarrow[q(x)=\bar{A}(x)/\bar{W}(x)]{(4.2.13)} \bar{K}_x(y) &= q(x)\bar{A}_x(y) + \frac{1}{\bar{W}(x)}\frac{\phi}{1-\phi}\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dW(t),
\end{aligned}$$

και από την (4.2.12) έχουμε ότι :

$$\bar{C}_x(y) = \frac{\phi\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dW(t)}{(1-\phi)\{\bar{W}(x) - \bar{A}(x)\}} \Rightarrow \frac{\phi}{1-\phi}\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dW(t) = \bar{C}_x(y)\{\bar{W}(x) - \bar{A}(x)\},$$

άρα η πιο πάνω σχέση μπορεί να γραφεί :

$$\bar{K}_x(y) = q(x)\bar{A}_x(y) + \frac{1}{\bar{W}(x)} \underbrace{\frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \bar{F}(x+y-t)dW(t)}_{=\bar{C}_x(y)\{\bar{W}(x)-\bar{A}(x)\}}$$

$$\Rightarrow \bar{K}_x(y) = q(x)\bar{A}_x(y) + \frac{1}{\bar{W}(x)}\bar{C}_x(y)\{\bar{W}(x) - \bar{A}(x)\}$$

$$\Rightarrow \bar{K}_x(y) = q(x)\bar{A}_x(y) + \left\{\frac{\bar{W}(x)}{\bar{W}(x)} - \underbrace{\frac{\bar{A}(x)}{\bar{W}(x)}}_{q(x)}\right\}\bar{C}_x(y)$$

$$\Rightarrow \bar{K}_x(y) = q(x)\bar{A}_x(y) + \{1 - q(x)\}\bar{C}_x(y). \tag{4.2.14}$$

Επομένως, από την σχέση (4.2.14) μπορούμε να πούμε ότι η $K_x(y) = 1 - \bar{K}_x(y)$ είναι μια συνάρτηση κατανομής αφού είναι μια μίξη των συναρτήσεων κατανομής $A_x(y)$ και $C_x(y)$ ορισμένη από τις σχέσεις (4.2.13) και (4.2.10) αντίστοιχα, με βάρη $q(x)$ και $1 - q(x)$ αντίστοιχα.

Επιπλέον, από τη σχέση (4.1.5) θέτοντας όπου $x = 0$ έχουμε :

$$\bar{W}(0) = \bar{A}(0) + \underbrace{\int_0^0 \bar{G}(0-t)dA(t)}_{0} \Rightarrow \bar{W}(0) = \bar{A}(0),$$

και αφού $\bar{A}(0) = 1$ έχουμε $\bar{W}(0) = 1$ και επομένως $q(0) = 1$. Επομένως, μπορούμε να παρατηρήσουμε για τις σχέσεις (4.2.13) και (4.2.14) (θέτοντας $x = 0$) :

$$\bar{A}_0(y) = \frac{\bar{A}(y)}{\bar{A}(0)} \xRightarrow[\bar{A}(0)=1]{} \bar{A}_0(y) = \bar{A}(y),$$

και

$$\bar{K}_0(y) = q(0)\bar{A}_0(y) + \{1 - q(0)\}\bar{C}_0(y) \xRightarrow[q(0)=1]{1-q(0)=0} \bar{K}_0(y) = \bar{A}_0(y) \xRightarrow[\bar{A}_0(y)=\bar{A}(y)]{} \bar{K}_0(y) = \bar{A}(y).$$

Ενώ, για την (4.2.8) ότι μπορεί να πάρει τη μορφή της (4.1.6) με αντικατάσταση του y από το x, το οποίο θα δείξουμε παρακάτω :

$$\bar{W}_x(y) = \phi \int_0^y \bar{W}_x(y-t)dF(t) + \phi\bar{F}(y) + (1-\phi)\bar{K}_x(y)$$

$$\xRightarrow[x=0]{} \bar{W}_0(y) = \phi \int_0^y \bar{W}_0(y-t)dF(t) + \phi\bar{F}(y) + (1-\phi)\bar{K}_0(y)$$

$$\xRightarrow[\bar{K}_0(y)=\bar{A}(y)]{} \bar{W}(y) = \phi \int_0^y \bar{W}(y-t)dF(t) + \phi\bar{F}(y) + (1-\phi)\bar{A}_0(y)$$

$$\xRightarrow[y=x]{} \bar{W}(x) = \phi \int_0^x \bar{W}(x-t)dF(t) + \phi\bar{F}(x) + (1-\phi)\bar{A}_0(x),$$

όπου,

$$\bar{W}_0(y) = \frac{\bar{W}(0+y)}{\bar{W}(0)} \overset{\bar{W}(0)=1}{=\!=\!=\!=} \bar{W}(y) \ \text{και} \ \bar{W}_0(y-t) = \frac{\bar{W}(0+y-t)}{\bar{W}(0)} \overset{\bar{W}(0)=1}{=\!=\!=\!=} \bar{W}(y-t).$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την συνάρτηση κατανομής της υπολειπόμενης ζωής της $W_x(y)$.

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω ότι η Y_x είναι ανεξάρτητη της τυχαίας μεταβλητής S της μίξης γεωμετρικών με συνάρτηση κατανομής $K_x(y) = Pr(Y_x \leq y)$. Τότε η συνάρτηση κατανομής της υπολειπόμενης ζωή της $W_x(y)$ δίνεται από την συνέλιξη της μίξης γεωμετρικών :*

$$W_x(y) = G * K_x(y) = Pr(X + Y_x \leq y),$$

όπου, μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{\bar{W}(x+y)}{\bar{W}(x)} = \bar{G}(y) + \int_0^y \bar{K}_x(y-t)dG(t). \tag{4.2.15}$$

(βλέπε Willmot και Cai (2004))

Απόδειξη. Όπως προκύπτει από τον *Feller (1971, σελίδα 435)* όπου $F(y) = Pr(X \leq y)$

$$\int_0^\infty e^{-zy}\bar{F}(y)dy = \frac{1 - E(e^{-zX})}{z}$$

και είναι

$$\int_0^\infty e^{-zy}\bar{K}_x(y)dy = \frac{1 - E(e^{-zY_x})}{z}.$$

Από τις (4.2.5) και (4.2.8) έχουμε :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-zy}\bar{W}_x(y)dy &= \frac{\phi\{(1 - E(e^{-zX}))/z\} + (1-\phi)\{(1 - E(e^{-zY_x}))/z\}}{1 - \phi E(e^{-zX})} \\
&= \frac{\{1 - \phi E(e^{-zX})\} - (1-\phi)E(e^{-zY_x})}{z\{1 - \phi E(e^{-zX})\}} \\
&= \frac{1 - E(e^{-zX})E(e^{-zY_x})}{z}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας πάλι τον *Feller (1971, σελίδα 435)* και από την μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε ότι $W_x(y) = G * K_x(y) = Pr(S + Y_x \leq y)$. Επίσης, η (4.2.15) συνεπάγεται από το γεγονός ότι :

$$\frac{1 - E(e^{-zX})E(e^{-zY_x})}{z} = \frac{1 - E(e^{-zX})}{z} + E(e^{-zX})\frac{1 - E(e^{-zY_x})}{z},$$

και δείχθηκε το ζητούμενο. ■

Όταν $A(x) = F(x)$, τότε $\bar{W}(x) = \bar{G}(x)/\phi$ όπως έχει αναφερθεί και στην παράγραφο 4.1, και δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι το Θεώρημα 4.2.1 μετατρέπεται στο Θεώρημα 2.2 του *Willmot (2002a)*. Επίσης όταν το $x = 0$, έχουμε ότι $K_0(y) = A(y)$, το αποτέλεσμα της (4.2.15) μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα στην (4.1.5) με αντικατάσταση του x από το y. Επιπλέον, από την σχέση (4.2.15) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\bar{W}_x(y) \geq \bar{G}(y)$ για κάθε $x \geq 0$, και αυτό γιατί, η $W_x(y)$ είναι στοχαστικά μεγαλύτερη από την $G(y)$.

Συμπέρασμα 4.2.1. *Εάν $\bar{G}(y) \geq \sigma \bar{W}(y)$, όπου $0 < \sigma \leq 1$, τότε η $1 - \alpha \bar{W}(y)$ είναι (NWU) όταν $0 < \alpha \leq \sigma$. Συγκεκριμένα, εάν $\bar{A}(y) \leq \bar{F}(y)$, τότε η $1 - \alpha \bar{W}(y)$ είναι (NWU) όταν $0 < \alpha \leq \phi$.*

Απόδειξη. Εάν $\bar{G}(y) \geq \sigma \bar{W}(y)$, τότε από την (4.2.15),

$$\frac{\alpha \bar{W}(x+y)}{\alpha \bar{W}(x)} \geq \bar{G}(y) \geq \sigma \bar{W}(y) \geq \alpha \bar{W}(y),$$

και η $1 - \alpha \bar{W}(y)$ είναι (NWU). Εάν $\bar{A}(y) \leq \bar{F}(y)$, τότε από το σχόλιο που ακολουθεί στην (4.1.5), έχουμε $\bar{G}(y) \geq \phi \bar{W}(y)$, και το αποτέλεσμα ακολουθεί θέτοντας $\sigma = \phi$. ∎

Επισημαίνουμε ότι εάν η (4.1.7) ισχύει, τότε $\bar{G}(y) \leq e^{-ky}$ (βλέπε *Willmot and Lin (2001), σελίδες 70, 109*), εάν $\bar{G}(y) \geq \sigma \bar{W}(y)$ συνεπάγεται ότι η $\bar{W}(y) \leq e^{-ky}/\sigma$. Το Συμπέρασμα 4.2.1 θα χρησιμοποιηθεί αργότερα, όπως και τα ακόλουθα αποτελέσματα που γενικεύει τα Συμπεράσματα 2.3(b) και 2.3(c) του *Willmot (2002a)*.

Συμπέρασμα 4.2.2. *Εάν $\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x)\bar{A}(y)$ για $x \geq 0$ και $y \geq 0$ και $A(y)$ είναι (NWU), τότε $1 - \alpha \bar{W}(y)$ είναι (NWU) όταν $0 < \alpha \leq 1$ και συγκεκριμένα, $W(y)$ είναι (NWU). Αντιστρόφως, εάν $\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{A}(y)$ για $x \geq 0$ και $y \geq 0$ και $A(y)$ είναι (NBU), τότε η $W(y)$ είναι (NBU).*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι, $\bar{F}(x+y) \geq \bar{A}(y)\bar{F}(x-t)$ όταν $0 \leq t \leq x$ και, από την (4.2.9), $\bar{C}_x(y) \geq \bar{A}(y)$. Εάν $A(y)$ είναι (NWU), τότε, από την (4.2.13), $\bar{A}_x(y) \geq \bar{A}(y)$. Έτσι, από την (4.2.14),

$$\bar{K}_x(y) \geq q(x)\bar{A}(y) + \{1 - q(x)\}\bar{A}(y) = \bar{A}(y).$$

Επομένως, από τις (4.2.15) και (4.1.5),

$$\frac{\bar{W}(x+y)}{\bar{W}(x)} = \bar{G}(y) + \int_0^y \bar{K}_x(y-t)dG(t) \geq \bar{G}(y) + \int_0^y \bar{A}(y-t)dG(t) = \bar{W}(y),$$

και η $W(y)$ είναι (NWU). Με τον ίδιο τρόπο, εάν $\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{A}(y)$ και $A(y)$ είναι (NBU), τότε η $W(y)$ είναι (NBU). Επίσης, εάν $0 < \alpha \leq 1$ και η $W(y)$ είναι (NWU), τότε :

$$\frac{\alpha \bar{W}(x+y)}{\alpha \bar{W}(x)} \geq \bar{W}(y) \geq \alpha \bar{W}(y),$$

και $1 - \alpha \bar{W}(y)$ είναι επίσης (NBU). ∎

Επισημαίνουμε ότι η συνθήκη $\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x)\bar{A}(y)$ στο Συμπέρασμα 2 ισχύει εάν $F(y)$ είναι (NBU) και $\bar{F}(y) \geq \bar{A}(y)$ και ομοίως, $\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{A}(y)$ δίνει αποτέλεσμα εάν η $F(y)$ είναι (NBU) με $\bar{F}(y) \leq \bar{A}(y)$.

Εάν η σχέση (4.1.7) ισχύει και η $F(y)$ και $A(y)$ είναι και οι δύο (NBU), τότε $\bar{G}(y) \leq \phi e^{-ky}$ (π.χ. *Willmot και Lin (2001), σελίδα 95*) και, έτσι, κάτω από τις προϋποθέσεις του Συμπεράσματος 2, προκύπτει ακολουθώντας το σχόλιο της (4.1.5), ότι $\bar{W}(y) \leq \bar{G}(y)/\phi \leq e^{-ky}$. Ομοίως, εάν η (4.1.7) ισχύει και $F(y)$ και $A(y)$ είναι και οι δύο (NBU), τότε υπό τις συνθήκες του Συμπεράσματος 2, $\bar{W}(y) \geq e^{-ky}$.

Έχει ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι εάν η $A(y)$ είναι (NBU) με $\bar{A}(y)\bar{F}(x) \leq \bar{F}(x+y)$, τότε η συνέλιξη της (NBU) συνάρτησης κατανομής $A(x)$ με αυτή της *NBU* συνάρτησης κατανομής $G(x)$ είναι (NBU), όπως προκύπτει από το Συμπέρασμα 2. Αυτό είναι ένα παράδειγμα που η ιδιότητα της (NWU) διατηρείται μετά από συνέλιξη, μια ιδιότητα που δεν σχετίζεται με την κλάση *NBU* (*Barlow και Proschan (1975), σελίδα 185*).

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την εφαρμογή αυτών των αποτελεσμάτων στις ουρές και την Θεωρία Χρεοκοπίας.

4.3 Το Κλασικό Μοντέλο Χρεοκοπίας με έναν όρο Διάχυσης

Για το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας, η διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων είναι μια ανέλιξη Poisson με παράμετρο λ. Η συνάρτηση κατανομής του ύψους των απαιτήσεων θεωρούμε πως είναι η $B(x) = 1 - \bar{B}(x) = Pr(X \leq x)\cdot$ και έστω $B^e(x) = 1 - \bar{B}^e(x) = \int_0^x \bar{B}(t)dt/E(X) = \int_0^x \bar{B}(t)dt/p_1$. Το ασφάλιστρο ανά μονάδα χρόνου είναι $c > \lambda E(X) \Rightarrow c > \lambda p_1$. Για το μοντέλο με την διάχυση, μια ανεξάρτητη ανέλιξη $Wiener$ προστίθεται στην μίξη Poisson στη διαδικασία των συνολικών απαιτήσεων. Η απειροελάχιστη μετατόπιση είναι 0 και η απειροελάχιστη διασπορά είναι $2/\beta$, όπου $\beta > 0$. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε $Dufresne$ και $Gerber$ (1991) για μια πλήρη περιγραφή του μοντέλου.

Για το κομμάτι που θα ασχοληθούμε, έστω $A(x) = 1 - e^{-c\beta x}$ και $F(x) = A * B^e(x)$, η συνάρτηση κατανομής της συνέλιξης και μας δίνει ότι $\bar{F}(x) = \bar{B}^e(x) + \int_0^x e^{-c\beta(x-t)}dB^e(t)$. Επίσης, θεωρούμε ότι $\phi = \lambda E(X)/c = \lambda p_1/c$. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό, η πιθανότητα χρεοκοπίας, ξεκινώντας με αρχικό αποθεματικό x, δίνεται από την $\bar{W}(x)$, και η πιθανότητα επιβίωσης από την συνάρτηση κατανομής $W(x)$.

Σε αυτή την περίπτωση, η (4.1.5) μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$\bar{W}(x) = \bar{G}(x) + \int_0^x e^{-c\beta(x-t)}dG(t). \tag{4.3.1}$$

Επίσης :

$$\int_0^\infty e^{-zx}dW(x) = \left\{\int_0^\infty e^{-zx}dA(x)\right\}\int_0^\infty e^{-zx}dG(x),$$

και, επειδή $F(x) = A * B^e(x)$, συνεπάγεται ότι :

$$\left\{\int_0^\infty e^{-zx}dB^e(x)\right\}\int_0^\infty e^{-zx}dW(x) = \left\{\int_0^\infty e^{-zx}dF(x)\right\}\int_0^\infty e^{-zx}dG(x).$$

Μπορούμε από τη παραπάνω ισότητα να συμπεράνουμε ότι :

$$\bar{W}(x) + \int_0^x \bar{B}^e(x-t)dW(t) = \bar{F}(x) + \int_0^x \bar{G}(x-t)dF(t),$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση (4.1.3), έχουμε :

$$\frac{\bar{G}(x)}{\phi} = \bar{W}(x) + \int_0^x \bar{B}^e(x-t)dW(t). \tag{4.3.2}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.3.1) και (4.3.2) έχουμε :

$$\bar{G}(x) \leq \bar{W}(x) \leq \frac{\bar{G}(x)}{\phi}, \quad x \geq 0. \tag{4.3.3}$$

Επιπλέον έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Θεώρημα 4.3.1. *Η πιθανότητα επιβίωσης $W(y)$ είναι (NWU). Εάν, επιπλέον, $B(x)$ είναι (2-NBU), τότε :*

$$\frac{\bar{W}(x+y)}{\bar{W}(x)} \leq \frac{1}{\phi}\bar{W}(y). \tag{4.3.4}$$

(βλέπε Willmot και Cai (2004))

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\bar{F}(x) = \bar{B}^e(x) + \int\limits_0^x e^{-c\beta(x-t)} dB^e(t) = \bar{A}(x) + \int\limits_0^x \bar{B}^e(x-t)dA(t)$ και για όπου x το $x+y$ έχουμε :

$$\begin{aligned}\bar{F}(x+y) &= e^{-c\beta(x+y)} + \int_0^{x+y} \bar{B}^e(x+y-t)\{c\beta e^{-c\beta t}\}dt \\ &\geq e^{-c\beta(x+y)} + \int_y^{x+y} \bar{B}^e(x+y-t)\{c\beta e^{-c\beta t}\}dt \\ &= e^{-c\beta(x+y)} + \int_0^{x} \bar{B}^e(x+y-t)\{c\beta e^{-c\beta(t+y)}\}dt.\end{aligned}$$

Από το Συμπέρασμα 4.2.2 έχουμε ότι $\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x)e^{-c\beta y} = \bar{F}(x)\bar{A}(y)$ και η $W(y)$ είναι (NBU). Εάν η $B(x)$ είναι (2-NBU) τότε η $B^e(x)$ είναι (NBU) και, αφού η (NBU) ιδιότητα διατηρήθηκε από την συνέλιξη (π.χ. *Barlow και Proschan (1975), σελίδα 184)*, έπεται ότι η $F(x) = A * B^e(x)$ είναι (NBU). Επιπλέον, $\bar{F}(x+y-t) \leq \bar{F}(y)\bar{F}(x-t)$ όπου $0 \leq t \leq x$, και $\bar{C}_x(y) \leq \bar{F}(y)$ από την (4.2.9). Αφού, $\bar{A}(y) = \bar{A}_x(y) = e^{-c\beta y} \leq \bar{F}(y)$, συμπεραίνουμε λόγω της (4.2.14) ότι είναι $\bar{K}_x(y) \leq \bar{F}(y)$. Επίσης, οι (4.2.15),(4.1.3) και (4.3.3) δίνουν το αποτέλεσμα :

$$\frac{\bar{W}(x+y)}{\bar{W}(x)} \leq \bar{G}(y) + \int_0^y \bar{F}(y-t)dG(t) = \frac{\bar{G}(y)}{\phi} \leq \frac{\bar{W}(y)}{\phi},$$

που είναι η (4.3.4). ■

Από το Θεώρημα 4.3.1 μπορούμε να συμπεράνουμε πως αν η $B(x)$ είναι (2-NBU), τότε :

$$\bar{W}(y) \leq \frac{\bar{W}(x+y)}{\bar{W}(x} \leq \frac{1}{\phi}\bar{W}(y), \tag{4.3.5}$$

και το διπλό όριο της (4.3.5) συμπληρώνει την (4.3.3).

4.4 Ιδιότητες Αξιοπιστίας Δευτέρας Τάξης

Τώρα εξετάζουμε τη κατανομή ισορροπίας της υπολειπόμενης ζωής της κατανομής της $W(x)$. Έστω :

$$F^e(x) = 1 - \bar{F}^e(x) = \frac{\int_0^x \bar{F}(t)dt}{\int_0^\infty \bar{F}(t)dt},$$

να είναι η κατανομή ισορροπίας της $F(x)$, και ομοίως :

$$A^e(x) = 1 - \bar{A}^e(x) = \frac{\int_0^x \bar{A}(t)dt}{\int_0^\infty \bar{A}(t)dt}.$$

Η κατανομής ισορροπίας :

$$W^e(x) = 1 - \bar{W}^e(x) = \frac{\int_0^x \bar{W}(t)dt}{\int_0^\infty \bar{W}(t)dt},$$

της συνάρτησης κατανομής της $W(x)$ συνεχίζει να είναι στη μορφή της συνέλιξης γεωμετρικών, με :

$$\bar{W}^e(x) = \bar{G}(x) + \int_0^x \{\theta_1(0)\bar{F}^e(x-t) + \theta_2(0)\bar{A}^e(x-t)\}dG(t), \tag{4.4.1}$$

όπου,

$$\theta_1(0) = 1 - \theta_2(0) = \frac{\phi \int_0^\infty \bar{F}(t)dt}{\phi \int_0^\infty \bar{F}(t)dt + (1-\phi)\int_0^\infty \bar{A}(t)dt}. \tag{4.4.2}$$

(βλέπε *Willmot (2002b), Πρόταση 2.1*). Επομένως, έχουμε το ακόλουθο συμπέρασμα, που είναι στην ίδια λογική με το Συμπέρασμα 4.2.2 και γενικεύει αυτό του Brown (βλέπε *Brown (1990), σελίδες 1397-1398*).

Συμπέρασμα 4.4.1. *Εάν $F(y)$ και $A(y)$ είναι και οι δύο (NWUE) με $\bar{F}(y) \geq \bar{A}(y)$, τότε $1 - \alpha\bar{W}(y)$ είναι (NWUE) όπου $0 < \alpha \leq 1$ και, συγκεκριμένα, $W(y)$ είναι (NWUE). Αντίστροφα, εάν $F(y)$ και $A(y)$ είναι και οι δύο (NBUE) με $\bar{F}(y) \leq \bar{A}(y)$, τότε $W(y)$ είναι (NBUE).*

Απόδειξη. Εάν $F(y)$ και $A(y)$ είναι και οι δύο (NBUE) με $\bar{F}(y) \geq \bar{A}(y)$, τότε, αφού $0 \leq \theta_1(0) \leq 1$ από την (4.4.2), έπεται για $t \geq 0$ ότι :

$$\theta_1(0)\bar{F}^e(t) + \theta_2(0)\bar{A}^e(t) \geq \theta_1(0)\bar{F}(t) + \theta_2(0)\bar{A}(t) \geq \bar{A}(t),$$

και, από τις (4.4.1) και (4.1.5), $\bar{W}^e(y) \geq \bar{G}(y) + \int_0^y \bar{A}(y-t)dG(t) = \bar{W}(y)$. Έτσι η $W(y)$ είναι (NWUE). Ομοίως, εάν $F(y)$ και $A(y)$ είναι και οι δύο (NBUE) με $\bar{F}(y) \leq \bar{A}(y)$, τότε $W(y)$ είναι (NBUE). Εάν $0 < \alpha \geq 1$, τότε $1-\alpha\bar{W}(y)$ επίσης έχει κατανομή ισορροπίας $W^e(y)$ αφού $\bar{W}^e(y) = \int_0^y \{\alpha\bar{W}(t)\}dt / \int_0^\infty \{\alpha\bar{W}(t)\}dt$. Επομένως, εάν η $W(y)$ είναι (NWUE), τότε $\bar{W}^e(y) \geq \bar{W}(y) \geq \alpha\bar{W}(y)$ και $1 - \alpha\bar{W}(y)$ είναι (NWUE) για $0 < \alpha \leq 1$. ■

Πιο ισχυρά συμπεράσματα είναι εφικτά από την εξέταση της υπολειπόμενης κατανομής ισορροπίας της $W(x)$. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση κατανομής της $C_x(y)$ ικανοποιεί την σχέση (4.2.9). Επομένως, από τις σχέσεις (4.2.9) και (4.2.11) έχουμε ότι για $y \geq 0$:

$$\begin{aligned}\int_y^\infty \bar{C}_x(v)dv &= \frac{\int_y^\infty \int_0^x \bar{F}(x+v-t)dW(t)dv}{\int_0^x \bar{F}(x-t)dW(t)} \\ &= \frac{\phi}{1-\phi}\frac{\int_0^\infty \bar{F}(t)dt}{\bar{W}(x) - \bar{A}(x)}\int_0^x \bar{F}^e(x+y-t)dW(t).\end{aligned}$$

Επίσης, για $y = 0$, έχουμε ότι :

$$\int_0^\infty \bar{C}_x(v)dv = \frac{\phi}{1-\phi}\frac{\int_0^\infty \bar{F}(t)dt}{\bar{W}(x) - \bar{A}(x)}\int_0^x \bar{F}^e(x-t)dW(t). \tag{4.4.3}$$

Συνεπώς, η $C_x(y)$ έχει κατανομή ισορροπίας $\bar{C}_x^e(y)$ ικανοποιώντας την παρακάτω σχέση :

$$\bar{C}_x^e(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{C}_x(v)dv}{\int_0^\infty \bar{C}_x(v)dv} = \frac{\int_0^x \bar{F}^e(x+y-t)dW(t)}{\int_0^x \bar{F}^e(x-t)dW(t)}. \tag{4.4.4}$$

Επίσης για λόγους συμβολισμού, θεωρούμε ότι :

$$r_A(x) = \int_0^\infty \frac{\bar{A}(t+x)}{\bar{A}(x)}dt,$$

είναι η μέση τιμή της υπολειπόμενης ζωής της $A(x)$. Η υπολειπόμενη κατανομή ισορροπίας της $W(y)$ δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.4.1. *Η υπολειπόμενη κατανομή ισορροπίας της $W(y)$ είναι της μορφής συνέλιξης μίξης γεωμετρικών, με ουρά :*

$$\frac{\bar{W}^e(x+y)}{\bar{W}^e(x)} = \bar{G}(y) + \int_0^y \bar{P}_x(y-t)dG(t), \tag{4.4.5}$$

όπου, $P_x(y) = 1 - \bar{P}_x(y)$ είναι μια συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί τη σχέση :

$$\bar{P}_x(y) = \theta_1(x)\bar{F}^e(y) + \theta_2(x)\frac{\bar{A}^e(x+y)}{\bar{A}^e(x)} + \theta_3(x)\bar{C}_x^e(y), \tag{4.4.6}$$

και τα $\{\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x)\}$ είναι ένα διακριτό μέτρο πιθανότητας που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\theta_1(x) = \phi m(x) \int_0^\infty \bar{F}(t)dt, \tag{4.4.7}$$

$$\theta_2(x) = (1-\phi)m(x)q(x)r_A(x), \tag{4.4.8}$$

$$\theta_3(x) = (1-\phi)m(x)\{1-q(x)\} \int_0^\infty \bar{C}_x(\upsilon)d\upsilon, \tag{4.4.9}$$

όπου,

$$\frac{1}{m(x)} = \phi \int_0^\infty \bar{F}(t)dt + (1-\phi)q(x)r_A(x) + (1-\phi)\{1-q(x)\} \int_0^\infty \bar{C}_x(\upsilon)d\upsilon. \tag{4.4.10}$$

(βλέπε Willmot και Cai (2004))

Απόδειξη. Πρώτα σημειώνουμε ότι για $y \geq 0$, ισχύει :

$$\int_y^\infty \bar{W}_x(t)dt = \frac{\int_y^\infty \bar{W}(x+t)dt}{\bar{W}(x)} = \frac{\int_0^\infty \bar{W}(t)dt}{\bar{W}(x)}\bar{W}^e(x+y),$$

και επίσης η κατανομή ισορροπίας της $W_x(y)$ έχει ουρά :

$$\frac{\int_0^\infty \bar{W}_x(t)dt}{\int_0^\infty \bar{W}_x(t)dt} = \frac{\bar{W}^e(x+y)}{\bar{W}^e(x)}.$$

Ομοίως, η ουρά της κατανομής ισορροπίας της $A_x(y)$ είναι $\bar{A}^e(x+y)/\bar{A}^e(x)$. Αφού η $W_x(y)$ είναι μια συνέλιξη μίξης γεωμετρικών από το Θεώρημα 4.2.1, συνεπάγεται από την Πρόταση 2.1 του Willmot (2002b) ότι η κατανομή ισορροπίας $1 - \bar{W}^e(x+y)/\bar{W}^e(x)$ της $W_x(y)$ είναι επίσης της μορφής μίξης γεωμετρικών, και η σχέση (4.4.5) ισχύει εάν :

$$\bar{P}_x(y) = \theta_1(x)\bar{F}^e(y) + \{1-\theta_1(x)\}\bar{K}_x^e(y), \tag{4.4.11}$$

όπου,

$$\theta_1(x) = \frac{\phi \int_0^\infty \bar{F}(t)dt}{\phi \int_0^\infty \bar{F}(t)dt + (1-\phi)\int_0^\infty barK_x(t)dt},$$

και η κατανομή ισορροπίας της ουράς $\bar{K}_x^e(y)$ της $K_x(y)$ ικανοποιεί, από την σχέση (4.2.14),

$$\bar{K}_x^e(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{K}_x(t)dt}{\int_0^\infty \bar{K}_x(t)dt} = \frac{q(x)\int_y^\infty \bar{A}_x(t)dt + \{1-q(x)\}\int_y^\infty \bar{C}_x(t)dt}{q(x)\int_0^\infty \bar{A}_x(t)dt + \{1-q(x)\}\int_0^\infty \bar{C}_x(t)dt}.$$

Όμως $r_A(x) = \int_0^\infty \bar{A}_x(t)dt$ και συνεπώς από τις (4.4.3) και (4.4.4) έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}\bar{K}_x^e(y) &= \frac{\{\bar{A}^e(x+y)/\bar{A}^e(x)\}q(x)r_A(x) + \bar{C}_x^e(y)\{1-q(x)\}\int_0^\infty \bar{C}_x(t)dt}{q(x)r_A(x) + \{1-q(x)\}\int_0^\infty \bar{C}_x(t)dt} \\ &= \theta_2^*(x)\frac{\bar{A}^e(x+y)}{\bar{A}^e(x)} + \theta_3^*(x)\bar{C}_x^e(y).\end{aligned}$$

Αφού $\int_0^\infty \bar{K}_x(t)dt = q(x)r_A(x) + \{1-q(x)\}\int_0^\infty \bar{C}_x(t)dt$, είναι προφανές ότι το $\theta_1(x)$ είναι όπως δίνεται στην έκφραση (4.4.7) με το $m(x)$ να ικανοποιεί την (4.4.10). Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι $\theta_2(x) = \{1-\theta_1(x)\}\theta_2^*(x)$ και $\theta_3(x) = \{1-\theta_1(x)\}\theta_3^*(x)$, όπου τα $\theta_2(x)$ και $\theta_3(x)$ δίνονται από τις (4.4.8) και (4.4.9) αντίστοιχα. Συνεπώς η σχέση (4.4.6) προκύπτει από αυτές τις παρατηρήσεις και την σχέση (4.4.11). ∎

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, αφού $q(0) = 1$, $\theta_3(0) = 0$ από τις σχέσεις(4.4.7) και (4.4.9) έχουμε το αποτέλεσμα της (4.4.2) θεωρώντας το $x = 0$.

Μια μεγαλύτερη κλάση από τις (NWU) και (2-NWU), όμως μικρότερη της κλάσης (NWUE), είναι η κλάση του νέου χειρότερου από ότι χρησιμοποιούσαμε με κυρτή διάταξη (NWUC). Η συνάρτηση κατανομής της $F(x)$ είναι (NWUC) εάν $\bar{F}^e(x+y) \geq \bar{F}^e(x)\bar{F}(y)$ για κάθε $x, y \geq 0$. Ομοίως, η $F(x)$ είναι το νέο καλύτερο από αυτό που χρησιμοποιόταν σε κυρτή διάταξη (NBUC) εάν $\bar{F}^e(x+y) \leq \bar{F}^e(x)\bar{F}(y)$. Για λεπτομέρειες βλέπε Fagiuoli και Pellerey (1994).

Η παρακάτω γενίκευση του Συμπεράσματος 3.3 του Willmot (2002b) είναι κατά μήκος των γραμμών του Συμπεράσματος 4.2.2 αυτής της εργασίας.

Συμπέρασμα 4.4.2. *Εάν $F(y)$ και $A(y)$ είναι και οι δύο (NWUC) με $\bar{F}(y) \geq \bar{A}(y)$, τότε $1 - \alpha\bar{W}(y)$ είναι (NWUC) όταν $0 < \alpha \leq 1$ και, συγκεκριμένα, η $W(y)$ είναι (NWUC). Αντίστροφα, εάν η $F(y)$ και $A(y)$ είναι και οι δύο (NBUC) με $\bar{F}(y) \leq \bar{A}(y)$, τότε η $W(y)$ είναι (NBUC).*

Απόδειξη. Εάν η $F(y)$ είναι (NWUC), τότε $\bar{F}^e(y) \geq \bar{F}(y)$ και, εάν $x \geq t$ και $y \geq 0$, έχουμε ότι $\bar{F}^e(x+y-t) \geq \bar{F}^e(x-t)\bar{F}(y)$, συνεπάγεται από την σχέση (4.4.4) ότι $\bar{C}_x^e(y) \geq \bar{F}(y)$. Εάν $A(y)$ είναι (NWUC), τότε $\bar{A}^e(x+y)/\bar{A}^e(x) \geq \bar{A}(y)$ και, από την σχέση (4.4.6) εάν $\bar{F}(y) \geq \bar{A}(y)$, έχουμε :

$$\bar{P}_x(y) \geq \{1-\theta_2(x)\}\bar{F}(y) + \theta_2(x)\bar{A}(y) \geq \bar{A}(y).$$

Επομένως από τις σχέσεις (4.4.5) και (4.1.5), είναι :

$$\frac{\bar{W}^e(x+y)}{\bar{W}^e(x)} \geq \bar{G}(y) + \int_0^y \bar{A}(y-t)dG(t) = \bar{W}(y),$$

δηλαδή, η $W(y)$ είναι (NWUC). Ομοίως, εάν η $F(y)$ και η $A(y)$ είναι και οι δύο (NBUC) με $\bar{F}(y) \leq \bar{A}(y)$, τότε η $W(y)$ είναι (NBUC). Εάν $0 < \alpha \leq 1$, τότε, όπως και στην απόδειξη του Συμπεράσματος 4.4.1, έπεται ότι η κατανομή ισορροπίας της $1 - \alpha\bar{W}(y)$ είναι η $W^e(y)$ και, επίσης, εάν η $W(y)$ είναι (NWUC) το ίδιο πάλι είναι αληθές για την $1 - \alpha\bar{W}(y)$ αφού $\bar{W}^e(x+y)/\bar{W}^e(x) \geq \bar{W}(y) \geq \alpha\bar{W}(y)$.

Εάν η (4.1.7) ισχύει, τότε, υπό τις συνθήκες του Συμπεράσματος 4.4.2, η $\bar{W}(y) \leq e^{-ky}$ στην περίπτωση της (NWUC) και η $\bar{W}(y) \geq e^{-ky}$ στην περίπτωση της (NBUC), μπορούνε να δειχθούν με τον ίδιο τρόπο όπως στην απόδειξη του Συμπεράσματος 4.2.2 ∎

Όσον αφορά στην περίπτωση της κλάσης (NWU), τα Συμπεράσματα 4.4.1 και 4.4.2 είναι ενδιαφέροντα γιατί μπορούν να δώσουν παραδείγματα στα οποία οι ιδιότητες των κλάσεων (NWUE) και (NWUC) διατηρούνται υπό την προϋπόθεση της συνέλιξης.

Κεφάλαιο 5

Το Κλασικό Μοντέλο Χρεοκοπίας με Διάχυση

5.1 Εισαγωγή

Γνωρίζουμε ότι στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας (βλέπε Πολίτης (2015) *Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας*), το πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρείας μια δεδομένη χρονική στιγμή t δίνεται από την έκφραση :

$$u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \tag{5.1.1}$$

όπου, $u \geq 0$ είναι το αρχικό πλεόνασμα, c είναι ο ρυθμός με τον οποίο λαμβάνονται τα ασφάλιστρα, και η διαδικασία των συνολικών απαιτήσεων $\{S(t)\}$ δίνεται από την παράμετρο λ της Poisson, και η κατανομή των ανεξάρτητων αποζημιώσεων, $P(x)$. Το αναμενόμενο ύψος των αποζημιώσεων συμβολίζεται με μ και υποθέτουμε ότι $c > \lambda\mu$, και το επίπεδο ασφαλείας :

$$q = (c - \lambda\mu)/c, \tag{5.1.2}$$

που είναι μεταξύ των τιμών 0 και 1.

Θα επεκτείνουμε το μοντέλο αυτό προσθέτοντας μια διάχυση (ή μια στοχαστική ανέλιξη $Wiener$) στην (5.1.1) (βλέπε *Dufresne και Gerber (1990)*). Έτσι το πλεόνασμα την χρονική στιγμή t μπορεί να γραφεί πλέον ως :

$$R(t) = u + ct - S(t) + W(t), \quad t \geq 0. \tag{5.1.3}$$

Εδώ η $\{W(t), t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη $Wiener$ με απειροελάχιστη μετατόπιση 0 και απειροελάχιστη απόκλιση $2D > 0$. Έτσι, για κάθε $t > 0$ η τυχαία μεταβλητή $W(t)$ έχει συνήθως κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση $2Dt$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι ανελίξεις $\{S(t), t \geq 0\}$ και $\{W(t), t \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητες.

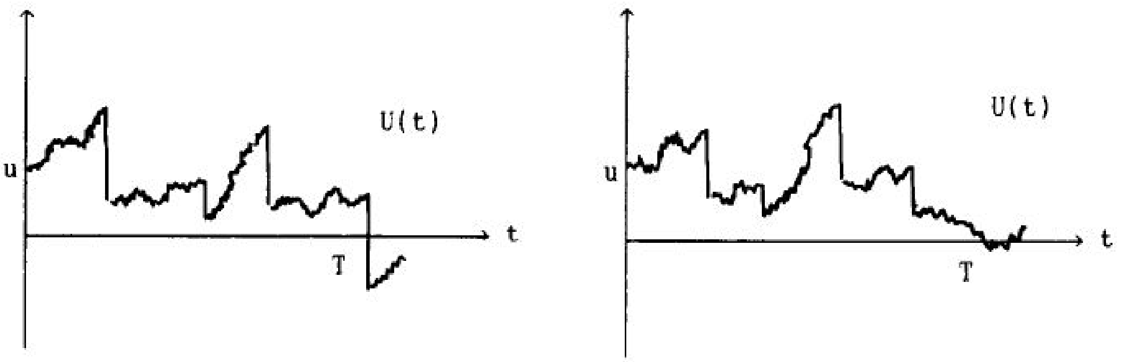
Όπως και στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας ενδιαφερόμαστε για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας, που εκφράζεται :

$$\delta(u) = Pr(R(t) \geq 0, \forall t \geq 0), \tag{5.1.4}$$

και $\psi(u) = 1 - \delta(u)$, η πιθανότητα χρεοκοπίας. Όμως πλέον μπορούμε να αναλύσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας ως :

$$\psi(u) = \psi_d(u) + \psi_s(u), \tag{5.1.5}$$

όπου, με $\psi_d(u)$ να είναι η πιθανότητα της χρεοκοπίας από διάχυση, π.χ. όταν το πλεόνασμα είναι μηδέν την στιγμή της χρεοκοπίας, και $\psi_s(u)$ να είναι η πιθανότητα η χρεοκοπία να προκύπτει λόγω κάποιας απαίτησης, π.χ. το πλεόνασμα την στιγμή της χρεοκοπίας να είναι αρνητικό.



(α΄) Χρεοκοπία λόγω απαίτησης. (β΄) Χρεοκοπία λόγω διάχυσης.

Σχήμα 5.1: Τα δύο είδη χρεοκοπίας.

Επιπλέον, όπως προκύπτει από την κλιμακωτή φύση των διαδρομών όπως ενός απλού περιπάτου

$$\delta(0) = \psi_s(0) = 0, \qquad \psi(0) = \psi_d(0) = 1. \tag{5.1.6}$$

5.2 Η Ελλειμματική Ανανεωτική Εξίσωση της $\delta(u)$

Το σημείο που θα ξεκινήσουμε είναι η παρακάτω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση :

$$D\delta''(u) + c\delta'(u) = \lambda\delta(u) - \lambda \int_0^u \delta(u-x)dP(x), \ u \geq 0, \tag{5.2.1}$$

που μπορεί να παραχθεί από το ακόλουθο ανανεωτικό επιχείρημα.
Θεωρούμε ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα μήκους dt και το διακρίνουμε ανάλογα με το αν υπάρχει ή δεν υπάρχει κάποια απαίτηση σε αυτό το διάστημα. Από τον νόμο της ολικής πιθανότητας έχουμε ότι :

$$\delta(u) = (1-\lambda dt)E[\delta(u + c\cdot dt + W(dt))] + \lambda dt \int_0^u \delta(u-x)dP(x), \tag{5.2.2}$$

και αντικαθιστώντας την :

$$E[\delta(u + c\cdot dt + W(dt))] = \delta(u) + c\cdot dt\delta'(u) + D\cdot dt\delta''(u), \tag{5.2.3}$$

αφαιρούμε το $\delta(u)$ και από τα δύο μέλη και διαιρούμε το αποτέλεσμα της εξίσωσης με dt για να πάρουμε την (5.2.1).

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε την (5.2.1) ως προς το u (από 0 έως v) και αφού το $\delta(0) = 0$, παίρνουμε :

$$D\delta'(v) + c\delta(v) = D\delta'(0) + \lambda \int_0^v \delta(v-y)[1-P(y)]dy. \tag{5.2.4}$$

Υποθέτοντας ότι το $v \to \infty$ καταλήγουμε στην συνάρτηση $c = D\delta'(0) + \lambda\mu$, από την οποία έχουμε :

$$\delta'(0) = (c-\lambda\mu)/D = q\zeta, \tag{5.2.5}$$

θεωρώντας ότι $\zeta = c/D$. Επομένως, η τελική μορφή της (5.2.4) είναι :

$$\delta'(\upsilon) + \zeta\delta(\upsilon) = q\zeta + (\lambda/D)\int_0^\upsilon \delta(\upsilon - y)[1 - P(y)]dy,\ \upsilon \geq 0. \tag{5.2.6}$$

Στην ορολογία του Gerber (1970) αυτή είναι μια ***εκτεταμένη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (extended defective renewal equation)***.

Θα πολλαπλασιάσουμε την σχέση (5.2.6) με τον παράγοντα $e^{\zeta\upsilon}$, και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας ως προς υ (από 0 έως x) θα μας δώσει :

$$\begin{aligned}
& e^{\zeta\upsilon}\delta'(\upsilon) + \zeta e^{\zeta\upsilon}\delta(\upsilon) = q\zeta e^{\zeta\upsilon} + (\lambda/D)e^{\zeta\upsilon}\int_0^\upsilon \delta(\upsilon - y)[1 - P(y)]dy \\
\Rightarrow & \int_0^x (e^{\zeta\upsilon}\delta'(\upsilon) + \zeta e^{\zeta\upsilon}\delta(\upsilon))d\upsilon = \int_0^x q\zeta e^{\zeta\upsilon}d\upsilon + (\lambda/D)\int_0^x \left[e^{\zeta\upsilon}\int_0^\upsilon \delta(\upsilon - y)[1 - P(y)]dy\right]d\upsilon \\
\Rightarrow & \int_0^x (e^{\zeta\upsilon}\delta(x))'d\upsilon = q\int_0^x (e^{\zeta\upsilon})'d\upsilon + (\lambda/D)\int_0^x\int_0^\upsilon e^{\zeta\upsilon}\delta(\upsilon - y)[1 - P(y)]dyd\upsilon \\
\Rightarrow & \left[e^{\zeta\upsilon}\delta(x)\right]_0^x = q\left[e^{\zeta\upsilon}\right]_0^x + (\lambda/D)\int_0^x\int_0^\upsilon e^{\zeta\upsilon}\delta(\upsilon - y)[1 - P(y)]dyd\upsilon.
\end{aligned}$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι :

$$e^{\zeta x}\delta(x) = q(e^{\zeta x} - 1) + (\lambda/D)\int_0^x\int_0^\upsilon e^{\zeta\upsilon}\delta(\upsilon - y)[1 - P(y)]dyd\upsilon,\ x \geq 0. \tag{5.2.7}$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας :

$$\begin{aligned}
h_1(x) &= \zeta e^{-\zeta x},\ x > 0 \\
h_2(x) &= (1/\mu)[1 - P(x)],\ x > 0,
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

και συμβολίζουμε με $H_1(x)$ και $H_2(x)$ τις αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομών τους. Τότε η σχέση (5.2.7) μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη πιο χρηστική μορφή :

$$\delta(x) = qH_1(x) + (1 - q)\int_0^x \delta(z)h_1 * h_2(x - z)dz,\ x \geq 0. \tag{5.2.9}$$

Η σχέση (5.2.9) είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την συνάρτηση $R(x)$. Έτσι συνηθισμένες τεχνικές της ανανεωτικής θεωρίας μπορούν να εφαρμοστούν για να πάρουμε αποτελέσματα για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας.

Εάν τώρα στην σχέση (5.2.9) πάρουμε τον μετασχηματισμό Laplace, έχουμε :

$$M(\rho) = qM_1(\rho) + (1 - q)M(\rho)M_1(\rho)M_2(\rho), \tag{5.2.10}$$

με

$$\begin{aligned}
M(\rho) &= \int_0^\infty e^{-x\rho}d\delta(x), \\
M_1(\rho) &= \int_0^\infty e^{-x\rho}h_1(x)dx = \frac{\zeta}{\zeta + \rho} \\
M_2(\rho) &= \int_0^\infty e^{-x\rho}h_2(x)dx = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-x\rho}[1 - P(x)]dx = \frac{1}{\mu\rho}\left\{1 - \int_0^\infty e^{-x\rho}dP(x)\right\}.
\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Έτσι,

$$M(\rho) = \frac{qM_1(\rho)}{1-(1-q)M_1(\rho)M_2(\rho)}. \tag{5.2.12}$$

Αυτό γενικεύει το κλασικό αποτέλεσμα (για $D = 0$), όπου $M_1(\rho) = 1$.

Από την σχέση (5.2.9) ή επεκτείνοντας την (5.2.12) ως γεωμετρική σειρά, παρατηρούμε ότι :

$$\delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(1-q)^n H_1^{*(n+1)} * H_2^{*n}(x). \tag{5.2.13}$$

Αυτό γενικεύει την κλασική μορφή συνέλιξης που συχνά εμφανίζεται στον *Beekman (1974)*. Η πιθανοθεωρητική ερμηνεία των σχέσεων (5.2.9) και (5.2.13) πιθανόν να είναι λιγότερο εμφανής στην κλασική περίπτωση, θα αναλυθούν περισσότερο στην Παράγραφο 4.

Διαισθητικά περιμένουμε ότι η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της παραμέτρου D, αυτό προκύπτει από την (5.2.13). Στη συνέχεια θεωρούμε τον συμβολισμό $\delta(x, D)$ και $H_1(x, D)$. Υποθέτουμε ότι $0 < D_1 < D_2$. Τότε η $H_1(x, D_1) \geq H_1(x, D_2)$ για όλα τα x, για παράδειγμα η $H_1(\cdot, D_1)$ είναι στοχαστικά μικρότερη από την $H_1(\cdot, D_2)$. Συνεπάγεται, ότι η $H_1^{*(n+1)}(\cdot, D_1)$ είναι στοχαστικά μικρότερη από την $H_1^{*(n+1)}(\cdot, D_2)$ για όλα τα n, για παράδειγμα :

$$H_1^{*(n+1)}(x, D_1) \geq H_1^{*(n+1)}(x, D_2) \;\text{ για κάθε } x \text{ και } n.$$

Τελικά συνεπάγεται από τις (5.2.13) ότι $\delta(x, D_1) \geq \delta(x, D_2)$.

Για τον αριθμητικό υπολογισμό της $\delta(x)$, είναι πιθανόν να αντικαταστήσουμε τις $H_1(x)$ και $H_2(x)$ με κατάλληλες διακριτές κατανομές, για παράδειγμα σύμφωνα με τη μέθοδο του κατώτερου και ανώτερου φράγματος, βλέπε *Dufresne και Gerber (1989)*.

5.3 Η Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Παρόμοιοι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν για τις συναρτήσεις $\psi(x)$, $\psi_d(x)$ και $\psi_s(x)$. Για παράδειγμα, για την συνάρτηση $\psi_d(x)$, η συνάρτηση που ξεκινάμε είναι :

$$D\psi_d''(u) + c\psi_d'(u) = \lambda\psi_d(u) - \lambda \int_0^u \psi_d(u-x)dP(x), \; u \geq 0. \tag{5.3.1}$$

Μια πρώτη ολοκλήρωση μας δίνει την επεκτεταμένη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :

$$\psi_d'(\upsilon) + \zeta\psi_d(\upsilon) = (\lambda/D) \int_0^\upsilon \psi_d(\upsilon-y)[1-P(y)]dy, \; \upsilon \geq 0, \tag{5.3.2}$$

θυμίζουμε ότι $\zeta = c/D$.

Αφού πολλαπλασιάσουμε την ποσότητα $e^{\zeta\upsilon}$ και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε, καταλήγουμε στην εξίσωση που αντιστοιχεί στην σχέση (5.2.9)

$$\psi_d(x) = 1 - H_1(x) + (1-q) \int_0^x \psi_d(x-z)h_1 * h_2(z)dz, \; x \geq 0. \tag{5.3.3}$$

Η (5.3.3) είναι η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της συνάρτησης $\psi_d(x)$.

Η συνάρτηση $\psi_d(x)$ μπορεί να αποκτηθεί απευθείας από την συνάρτηση $\delta(x)$. Για να γίνει αυτό, πρώτα ξαναγράφουμε την (5.2.9) στη μορφή :

$$\delta(x) = qH_1(x) + (1-q) \int_0^x \delta(x-z)h_1 * h_2(z)dz, \tag{5.3.4}$$

και παραγωγίζοντας παίρνουμε την εξίσωση :

$$\delta'(x) = qh_1(x) + (1-q)\int_0^x \delta'(x-z)h_1 * h_2(z)dz. \tag{5.3.5}$$

Τώρα θα συγκρίνουμε την (5.3.3) με την (5.3.5). Όπως ορίστηκε στην Παράγραφο 2 η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$h_1(x) = \zeta e^{-\zeta x} \Rightarrow h_1(x) = \zeta[1 - H_1(x)], \tag{5.3.6}$$

μπορούμε να συμπεράνουμε (λόγω της μοναδικότητας της λύσης αυτών των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων) ότι :

$$\delta'(x) = q\zeta\psi_d(x) = [(c-\lambda\mu)/D]\psi_d(x), \tag{5.3.7}$$

που γενικεύει την (5.2.5). Έτσι, εάν η $\delta(x)$ έχει καθοριστεί, μπορούμε να υπολογίσουμε την $\psi_d(x)$ χρησιμοποιώντας την (5.3.7). Επιπλέον, $\psi(x) = 1 - \delta(x)$, και $\psi_s(x) = \psi(x) - \psi_d(x)$.

5.4 Ανάλυση της Μέγιστης Συνολικής Απώλειας

Θεωρούμε την συνολική απώλεια κάποια στιγμή t :

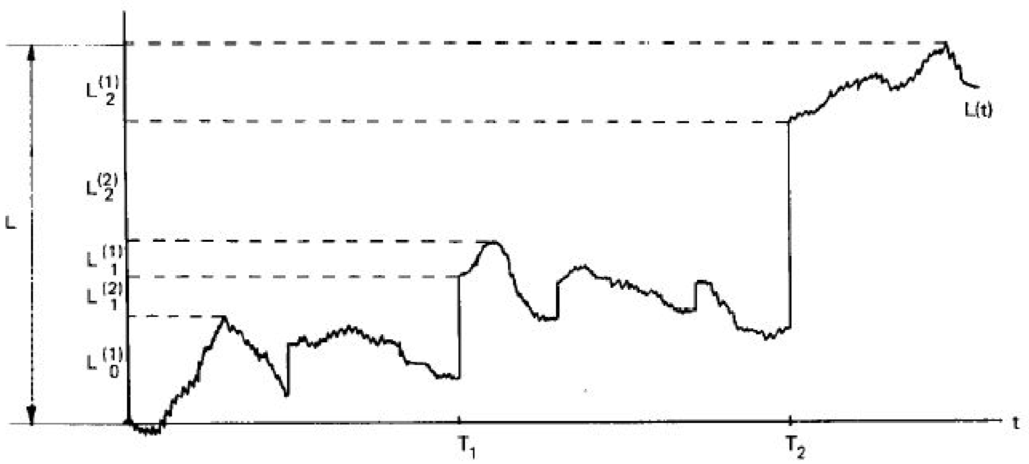
$$L(t) = S(t) - ct - W(t),\ t \geq 0, \tag{5.4.1}$$

και την μέγιστη συνολική απώλεια :

$$L = max\{L(t);\ t \geq 0\}. \tag{5.4.2}$$

Όπως στην κλασική περίπτωση :

$$\delta(u) = Pr(L(t) \leq u,\ \forall t \geq 0) = Pr(L \leq u), \tag{5.4.3}$$



Σχήμα 5.2: Ερμηνεία του τύπου συνέλιξης (βλέπε *Dufresne και Gerber (1991)*).

για παράδειγμα, $\delta(u)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής L.
Ένα τυπικό δείγμα τροχιάς της διαδικασίας $\{L(t)\}$ απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2. Έτσι η τυχαία μεταβλητή L μπορεί να αναλυθεί ως :

$$L = L_0^{(1)} + L_1^{(2)} + L_1^{(1)} + \cdots + L_N^{(2)} + L_N^{(1)}, \tag{5.4.4}$$

με την προϋπόθεση ότι $L = L_0^{(1)}$, εάν $N = 0$. Εδώ το N είναι ο αριθμός των μεγαλύτερων πληρωμών της διαδικασίας $\{L(t)\}$ που προκλήθηκαν από την εμφάνιση μιας απαίτησης. Έστω ότι τα $T_1, \ldots, T_N$ δηλώνουν τις φορές που αυτές οι απαιτήσεις συμβούν, θέτουμε $T_0 = 0$ και $T_{N+1} = \infty$. Τότε :

$$L_k^{(1)} = max\{L(t);\ t < T_{k+1}\} - L(T_k) \quad \text{για} \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{5.4.5}$$

και

$$L_k^{(2)} = L(T_k) - L(T_{k-1}) - L_{k-1}^{(1)} \quad \text{για} \quad k = 1, \ldots, N. \tag{5.4.6}$$

Σημειώνεται ότι η N έχει γεωμετρική κατανομή με :

$$Pr(N = n) = p(1-p)^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.4.7}$$

όπου, p είναι η πιθανότητα μη καταγραφής μεγάλης πληρωμής που να προκλήθηκε από απαίτηση. Οι τυχαίες μεταβλητές $L_0^{(1)}, L_1^{(1)}, \ldots$ είναι ισόνομες, με κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_1(x)$, και οι $L_1^{(2)}, L_2^{(2)}, \ldots$ είναι ισόνομες, με κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_2(x)$. Τελικά, οι τυχαίες μεταβλητές $N, L_0^{(1)}, L_1^{(2)}, L_1^{(1)}, L_2^{(2)}, \ldots$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Συνεπώς από όλα τα παραπάνω είναι :

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n G_1^{*(n+1)} * G_2^{*n}(u). \tag{5.4.8}$$

Παρατηρώντας την (5.2.13) μπορούμε να δούμε την αντιστοιχία με την (5.4.8) θεωρώντας :

$$p = q, \;\; G_1(x) = H_1(x), \;\; G_2(x) = H_2(x), \tag{5.4.9}$$

με q, $H_1(x)$ και $H_2(x)$ να ορίζονται από τις (5.1.2) και (5.2.8).

5.5 Συνδυασμός Εκθετικών Κατανομών

Για παράδειγμα θεωρούμε κατανομές απαιτήσεων με πυκνότητες της μορφής :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \beta_i e^{-\beta_1 x}, \; x > 0, \tag{5.5.1}$$

με $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = 1$ και μπορεί μερικά από τα A_i να είναι αρνητικά, όσο το $p(x) \geq 0$. Τότε :

$$1 - P(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta_i x}, \; x \geq 0, \tag{5.5.2}$$

και

$$M_2(\rho) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{A_i}{\beta_i + \rho} \;\; \text{με} \;\; \mu = A_1/\beta_1 + \cdots + A_n/\beta_n. \tag{5.5.3}$$

Όταν αντικαταστήσουμε το αποτέλεσμα στην (5.2.12) και αποσυνθέτοντας την $M(\rho)$ σε μερικά κλάσματα, παρατηρούμε ότι η $\psi(x) = 1 - \delta(x)$ πρέπει να είναι της μορφής :

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{k+1} C_k e^{-r_k x}, \; x \geq 0. \tag{5.5.4}$$

Στη (5.2.6) αντικαθιστώντας το $\delta(x)$ με την $1-\psi(x)$ και κάνοντας τις ανάλογες πράξεις μπορούμε να την γράψουμε στην μορφή :

$$D\psi'(x) + c\psi(x) = \lambda \int_0^x \psi(x-y)[1-P(y)]dy + \lambda \int_x^\infty [1-P(y)]dy. \tag{5.5.5}$$

Στη συνέχεια με αντικατάσταση των (5.5.2) και (5.5.4) στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε :

$$-D\sum_{k=1}^{n+1} C_k r_k e^{-r_k x} + c\sum_{k=1}^{n+1} C_k e^{-r_k x} = \lambda \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i C_k}{\beta_i - r_k}(e^{-r_k x} - e^{-\beta_i x}) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\beta_i} e^{-\beta_i x}. \tag{5.5.6}$$

Με σύγκριση των συντελεστών $e^{-r_k x}$, παρατηρούμε ότι οι $r_1, \ldots, r_{n+1}$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης :

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\beta_i - r} + Dr = c. \tag{5.5.7}$$

Για λόγους ευκολίας υποθέτουμε ότι αυτή η εξίσωση έχει $n+1$ διακριτές ρίζες. (Αυτή η συνθήκη πάντα ικανοποιείται, εάν όλα τα A_i είναι θετικά). Με σύγκριση των συντελεστών $e^{-\beta_i x}$, παρατηρούμε ότι τα $C_1, \ldots, C_{n+1}$ πρέπει να ικανοποιούν την :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\beta_i}{\beta_i - r_k} C_k = 1 \ \text{ για } \ i = 1, \ldots, n. \tag{5.5.8}$$

Για $\psi(0) = 1$ έχουμε ότι :

$$C_1 + \cdots + C_{n+1} = 1. \tag{5.5.9}$$

Έτσι οι (5.5.8) και (5.5.9) αποτελούν ένα σύστημα $n+1$ γραμμικών εξισώσεων των C_k. Παρακάτω θα παραθέσουμε την μεθοδολογία για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος.

Ορίζουμε τη συνάρτηση :

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_k r_k}{x - r_k}. \tag{5.5.10}$$

Λόγω των (5.5.8) και (5.5.9) έχουμε ότι $Q(0) = -1$ και $Q(\beta_i) = 0$ για $i = 1, \ldots, n$. Έτσι :

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x - \beta_i}{\beta_i}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{r_k}{x - r_k}\right). \tag{5.5.11}$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_k r_k}{x - r_k} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x - \beta_i}{\beta_i}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{r_k}{x - r_k}\right), \tag{5.5.12}$$

με $(x - r_h)$ και θέτωντας $x = r_h$ για να πάρουμε :

$$C_h = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{r_h - \beta_i}{\beta_i}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n+1} \left(\frac{r_k}{r_h - r_k}\right), \ h = 1, \ldots, n+1. \tag{5.5.13}$$

Συνοψίζοντας: Εάν η κατανομή των απαιτήσεων είναι ένας συνδυασμός εκθετικών κατανομών, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι της μορφής (5.5.4), τα r_k είναι οι λύσεις της εξίσωσης (5.5.7), και η (5.5.13) είναι η ακριβής έκφραση των C_k.

Η έκφραση (5.5.13) είναι ανάλογη ενός τύπου που έχει δοθεί από τον *Täcklind* (1942) για $D = 0$, βλέπε επίσης *Chan* (1990). Επίσης η έκφραση (5.5.13) μπορεί να γραφεί σε μια διαφορετική μορφή. Για να το καταφέρουμε αυτό, πρώτα γράφουμε την σχέση (5.5.7) ως μια πολυωνυμική εξίσωση :

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} A_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\beta_j - r) + (Dr - c) \prod_{j=1}^{n} (\beta_j - r) = 0. \tag{5.5.14}$$

Σε αυτή την έκφραση ο συντελεστής r^{n+1} είναι $(-1)^n D$, και ο σταθερός όρος μπορεί να απλοποιηθεί στο $(\lambda\mu - c) \prod_{k=1}^{n+1} \beta_j$. Ως εκ τούτου, από το Θεώρημα του *Vieta*, οι λύσεις των εξισώσεων της (5.5.14) είναι :

$$\prod_{k=1}^{n+1} r_k = \frac{c - \lambda\mu}{D} \prod_{j=1}^{n} \beta_j = q\zeta \prod_{j=1}^{n} \beta_j, \tag{5.5.15}$$

και με αντικατάσταση στην (5.5.13), έχουμε :

$$C_h = \frac{1}{r_h} q\zeta \prod_{i=1}^{n} (r_h - b_i) / \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n} (r_h - r_k). \tag{5.5.16}$$

Τέλος για την $\psi_d(x)$ έχουμε πως από την (5.3.7) παίρνουμε :

$$\psi_d(x) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k^d e^{-r_k x}, \ x \geq 0, \tag{5.5.17}$$

με

$$C_h^d = \frac{r_h}{q\zeta} C_h = \prod_{i=1}^{n} (r_h - \beta_i) / \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n} (r_h - r_k). \tag{5.5.18}$$

5.6 Ο Συντελεστής Προσαρμογής

Σε αυτό το σημείο, θεωρούμε ότι η κατανομή των απαιτήσεων είναι κανονική στην ουρά της, έτσι ώστε η ροπογεννήτρια των ανεξάρτητων απαιτήσεων και συγκεκριμένα ο συντελεστής προσαρμογής να υπάρχει.

Από την σχέση(5.1.3) έχουμε ότι :

$$E[e^{-r \cdot R(t)}] = e^{-ru} \exp\left[-rct + \lambda t \left\{ \int_0^\infty e^{rx} dP(x) - 1 \right\} + Dr^2 t \right]. \tag{5.6.1}$$

Λόγω της παραπάνω σχέσης ορίζουμε τον συντελεστή προσαρμογής R ως την θετική λύση της εξίσωσης :

$$\lambda \int_0^\infty e^{rx} dP(x) + Dr^2 = \lambda + cr. \tag{5.6.2}$$

Τότε η διαδικασία $\{e^{-R\cdot R(t)}\}$ είναι *martingale* και αν τη σταματήσουμε στη χρονική στιγμή T (τη στιγμή της χρεοκοπίας), έχουμε :

$$e^{-Ru} = E[e^{-R\cdot R(T)} \mid T < \infty]\psi(u) = \psi_d(u) + E[e^{R\cdot R(T)} \mid T < \infty, R(T) < 0]\psi_s(u). \quad (5.6.3)$$

Συμπεραίνουμε από την από πάνω σχέση ότι :

$$e^{-Ru} > \psi_d(u) + \psi_s(u) = \psi(u) \text{ για } u > 0. \quad (5.6.4)$$

Ο συντελεστής προσαρμογής επίσης παίζει ρόλο στις ασυμπτωτικές φόρμουλες :

$$\psi_d(u) \approx C^d e^{-Ru} \text{ για } u \to \infty \quad (5.6.5)$$

και

$$\psi_s(u) \approx C^s e^{-Ru} \text{ για } u \to \infty, \quad (5.6.6)$$

που μπορούν να προέρχονται από το κλασικό επιχείρημα της ανανεωτικής θεωρίας, βλέπε *Feller (1971, XI.6)*. Για παράδειγμα, για να καταλήξουμε στην σχέση (5.6.5) πολλαπλασιάζουμε την (5.3.3) με e^{Rx} για να πάρουμε :

$$e^{Rx}\psi_d(x) = e^{Rx}[1 - H_1(x)] + (1-q)\int_0^x e^{R(x-z)}\psi_d(x-z)e^{Rz}h_1 * h_2(z)dz. \quad (5.6.7)$$

Επίσης, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι :

$$(1-q)\int_0^\infty e^{Rz}h_1 * h_2(z)dz = 1. \quad (5.6.8)$$

Έτσι η σχέση (5.6.7) είναι μια κανονική ανανεωτική εξίσωση για την συνάρτηση $e^{Rx}\psi_d(x)$. Επομένως, από το ανανεωτικό θεώρημα έχουμε ότι :

$$e^{Rx}\psi_d(x) \to C^d = \left[\int_0^\infty e^{Rz}[1 - H_1(z)]dz\right] \Big/ \left[(1-q)\int_0^\infty z e^{Rz}h_1 * h_2(z)dz\right], \quad (5.6.9)$$

για $x \to \infty$. Επίσης :

$$\psi(u) \approx C \cdot e^{-Ru} \text{ για } u \to \infty, \quad (5.6.10)$$

με $C = C^d + C^s$. Μια έκφραση για το C έχει δοθεί από τον Gerber (1970).

Κεφάλαιο 6

Μεθοδολογίες και Εφαρμογές

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παραθέσουμε την μεθοδολογία του Tsai (2003) για την εύρεση αναλυτικών λύσεων για την προσδοκώμενη παρούσα αξία του χρόνου της χρεοκοπίας για συνδυασμό εκθετικών και στην συνέχεια θα δώσουμε μερικά αριθμητικά παραδείγματα καθώς και τους αλγόριθμους σε περιβάλλον Mathematica που μας βοήθησαν για την επίλυση τους.

6.1 Μεθοδολογία για Συνδυασμό Εκθετικών

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του συνδυασμού των εκθετικών έχει την μορφή :

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{r} q_k \mu_k e^{-\mu x},\ x \geq 0, \tag{6.1.1}$$

όπου, $q_1 + q_2 + \cdots + q_r = \sum_{k=1}^{r} q_k = 1$. Στην εργασία των Tsai και Willmot (2002α) έχει δειχθεί ότι για $b \neq \mu_k,\ k = 1, 2, \ldots, r$ έχουμε :

$$G'(x) = (1 - bq^*)be^{-bx} + bq^* \sum_{k=1}^{r} q_k^{**} \mu_k e^{-\mu_k x},\ x \geq 0, \tag{6.1.2}$$

όπου,

$$D = \frac{\sigma^2}{2},\ \ b = \frac{c}{D} + \rho,$$

$$q^* = \sum_{j=1}^{r} \frac{q_j^*}{(b - \mu_j)},$$

$$q_k^{**} = \frac{\left[\dfrac{q_k^*}{(b - \mu_k)}\right]}{\sum_{j=1}^{r} \dfrac{q_j^*}{(b - \mu_j)}} = \frac{q_k^*}{q^*(b - \mu_k)},$$

$$q_k^* = \frac{\left[\dfrac{q_k}{(\rho + \mu_k)}\right]}{\sum_{j=1}^{r} \dfrac{q_j}{(\rho + \mu_j)}},\ k = 1, 2, \ldots, r,$$

και ρ η μοναδική μη αρνητική λύση της γενικευμένης εξίσωσης του Lundber :

$$\lambda\widetilde{\rho}(\xi) = \lambda \int_0^\infty e^{-\xi x} dP(x) = \lambda + \delta - c\xi - D\xi^2. \tag{6.1.3}$$

Γνωρίζουμε, βλέπε Tsai (2003), ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $G(x)$ είναι :

$$\bar{G}(-s) = \int_0^\infty e^{su}\bar{K}(u)du = (1-bq^*)(\frac{b}{b-s}) + bq^* \sum_{k=1}^{r} q_k^{**}[\frac{\mu_k}{\mu_k - s}], \tag{6.1.4}$$

και επίσης, επειδή :

$$\int_0^\infty e^{-su}\bar{K}(u)du = \frac{1-\bar{G}(s)}{s[1+\beta-\bar{G}(s)]}, \tag{6.1.5}$$

με αντικατάσταση όπου είναι το s με το $-s$ γίνεται :

$$\int_0^\infty e^{su}\bar{K}(u)du = -\frac{1-\bar{G}(-s)}{s[1+\beta-\bar{G}(-s)]}, \tag{6.1.6}$$

και αντικαθιστώντας την $\bar{G}(-s)$ που βρήκαμε παραπάνω, παίρνουμε :

$$\int_0^\infty e^{su}\bar{K}(u)du = -\frac{1-(1-bq^*)(\frac{b}{b-s}) - bq^* \sum_{k=1}^{r} q_k^{**}[\frac{\mu_k}{\mu_k - s}]}{s\left[1+\beta-(1-bq^*)(\frac{b}{b-s}) - bq^* \sum_{k=1}^{r} q_k^{**}[\frac{\mu_k}{\mu_k - s}]\right]}. \tag{6.1.7}$$

Αν θεωρήσουμε πως οι ρίζες του παρανομαστή είναι $s_0 = 0$ και $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$, τότε οι λύσεις αυτές ικανοποιούν την εξίσωση :

$$(1-bq^*)(\frac{b}{b-s}) + bq^* \sum_{k=1}^{r} q_k^{**}[\frac{\mu_k}{\mu_k - s]} = 1+\beta, \tag{6.1.8}$$

που ισοδύναμα μπορεί να γραφεί στην μορφή :

$$\beta - \frac{s}{b-s}\left[1 + \sum_{k=1}^{r} \frac{q_k^* b}{\mu_k - s}\right] = 0, \tag{6.1.9}$$

και μπορούμε να συμπεράνουμε πως εάν όλα τα q_k^* είναι θετικά, τότε και οι ρίζες $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$ θα είναι θετικές.

Η ποσότητα β που αναφέραμε παραπάνω υπολογίζεται από την έκφραση :

$$\int_0^\infty g(y)dy = \frac{1}{1+\beta} = \frac{\lambda}{bD}\int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{P}(y)dy,$$

με

$$g(y) = \frac{\lambda}{D}\int_0^y e^{-b(y-s)}\int_s^\infty e^{-\rho(x-s)}dP(x)ds.$$

Για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε πως μια από τις $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$, έστω η s_1 ικανοποιεί την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg και την ονομάζουμε συντελεστή προσαρμογής. Τότε από την τεχνική της ανάλυσης σε απλά κλάσματα, (βλέπε Dufresne και Gerber (1998b)), υπάρχουν συντελεστές $D_0, D_1, \ldots, D_{r+1}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει :

$$\frac{D_0}{s} + \sum_{k=1}^{r+1} \frac{D_k}{s - s_k} = -\left\{ s \left[1 + \beta - (1 - bq^*)(\frac{b}{b-s}) - bq^* \sum_{k=1}^{r} q_k^{**} [\frac{\mu_k}{\mu_k - s}] \right] \right\}^{-1}. \quad (6.1.10)$$

Για να βρούμε αυτούς τους συντελεστές $D_0, D_1, \ldots, D_{r+1}$, πολλαπλασιάζουμε την σχέση (6.1.10) με s και στη συνέχεια θέτουμε $s = 0$ για να πάρουμε τη σχέση :

$$D_0 = -\left[1 + \beta - (1 - bq^*) - bq^* \sum_{k=1}^{r} q_k^{**} \right]^{-1} = -\frac{1}{\beta}. \quad (6.1.11)$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την (5.5.10) με την ποσότητα $s(s - s_j)$ και αφήνοντας το $s \to s_j$ καταλήγουμε με την βοήθεια του κανόνα του L'Hospital :

$$D_j = \left\{ s_j \left[(1 - bq^*) \frac{b}{(b - s_j)^2} + bq^* \sum_{k=1}^{r} q_k^{**} \frac{\mu_k}{(\mu_k - s_j)^2} \right] \right\}^{-1}, \quad (6.1.12)$$

και λόγω της (6.1.8) μπορεί να γραφεί στην μορφή :

$$D_j = \left\{ s_j \left[\frac{1+\beta}{b - s_j} + b \sum_{k=1}^{r} \frac{q_k^* \mu_k}{(\mu_k - s_j)^2 (b - s_j)} \right] \right\}^{-1} = \frac{b - s_j}{s_j \left[1 + \beta + b \sum_{k=1}^{r} \frac{q_k^* \mu_k}{(\mu_k - s_j)^2} \right]}, \quad (6.1.13)$$

όπου, $j = 1, 2, \ldots, r+1$. Επίσης, από την (6.1.10) είναι :

$$\frac{D_0}{b} + \sum_{k=1}^{r+1} \frac{D_k}{b - s_k} = \frac{D_0}{\mu_j} + \sum_{k=1}^{r+1} \frac{D_k}{\mu_j - s_k} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r. \quad (6.1.14)$$

Από τις (6.1.8) και (6.1.14) συνεπάγεται ότι :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{su} \bar{K}(u) du &= \left[1 - (1 - bq^*) \frac{b}{b - s} - bq^* \sum_{j=1}^{r} q_j^{**} \frac{\mu_j}{\mu_j - s} \right] \left[\frac{D_0}{s} - \sum_{k=1}^{r+1} \frac{D_k}{s_k - s} \right] \\ &= \beta \sum_{k=1}^{r+1} \frac{D_k}{s_k - s}. \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

Λόγω της μοναδικότητας του μετασχηματισμού Laplace, η $\bar{K}(u)$ δίνεται από την :

$$\bar{K}(u) = \beta \sum_{k=1}^{r+1} D_k e^{-s_k u}, \quad (6.1.16)$$

που είναι το άθροισμα των $r+1$ εκθετικών συναρτήσεων. Παρατηρούμε πως για $u = 0$ η (6.1.16) γίνεται $\bar{K}(0) = \beta \sum_{k=1}^{r+1} D_k$. Επομένως :

$$\bar{K}(0) = \beta \sum_{k=1}^{r+1} D_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{r+1} D_k = \frac{1}{\beta} \bar{K}(0) = \frac{1}{\beta(1+\beta)}. \quad (6.1.17)$$

Από την αναλυτική λύση της (6.1.16) για την $\bar{K}(u)$ έχουμε :

$$\bar{K} * H(u) = \beta \sum_{k=1}^{r+1} D_k \int_0^u e^{-s_k(u-x)} b e^{-bx} dx = b\beta \sum_{k=1}^{r+1} \frac{D_k}{b - s_k} [e^{-s_k u} - e^{-bu}], \tag{6.1.18}$$

και καταλήγουμε ότι, (βλέπε Tsai (2003))

$$\phi_t(u) = b\beta \sum_{k=1}^{r+1} \frac{D_k}{b - s_k} e^{-s_k u} + \left[1 - b\beta \sum_{k=1}^{r+1} \frac{D_k}{b - s_k}\right] e^{-bu} = b\beta \sum_{k=1}^{r+1} \frac{D_k}{b - s_k} e^{-s_k u}, \tag{6.1.19}$$

$$\phi_d(u) = (1 + \beta) \sum_{k=1}^{r+1} \frac{D_k s_k}{b - s_k} e^{-s_k u}, \tag{6.1.20}$$

και

$$\phi_s(u) = \phi_t(u) - \phi_d(u) = \sum_{k=1}^{r+1} D_k \left[\beta - \frac{s_k}{b - s_k}\right] e^{-s_k u}. \tag{6.1.21}$$

Σημειώνεται πως $\psi_t(u) = \phi_t(u)|_{\delta=0}$, $\psi_d(u) = \phi_d(u)|_{\delta=0}$ και $\psi_s(u) = \phi_s(u)|_{\delta=0}$.

Εφαρμογή 1

Θεωρούμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων έχει πυκνότητα :

$$f(x) = 2e^{-5x} + \frac{18}{5} e^{-6x}, \quad x \geq 0$$

και υποθέτουμε ότι η ένταση της ανέλιξης Poisson για την άφιξη των αποζημιώσεων είναι $\lambda = 1$ και η ένταση του ασφαλίστρου είναι $c = 1/4$.

Η $f(x)$ γράφεται στην μορφή :

$$f(x) = 2e^{-5x} + \frac{18}{5} e^{-6x} = \frac{2}{5} 5e^{-5x} + \frac{3}{5} 6e^{-6x},$$

που ικανοποιεί την (6.1.1) για $r = 2$ με $q_1 = 2/5$, $q_2 = 3/5$, $\mu_1 = 5$ και $\mu_2 = 6$ και επιπλέον ισχύει ότι $r_1 + r_2 = \sum_{k=1}^{2} q_k = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

Περιβάλλον Mathematica.

Στην αρχή του Mathematica θα ορίσουμε τις παραμέτρους :

r : δείχνει τον αριθμό τον εκθετικών συναρτήσεων που θα έχουμε για τον συνδυασμό της (6.1.1)

q_i : τα βάρη των εκθετικών με$i = 1, 2, \ldots, r$

μ_i : τις παραμέτρους των εκθετικών$i = 1, 2, \ldots, r$

c : την ένταση του ασφαλίστρου

λ : την ένταση της ανέλιξης $Poisson$

δ : ο συντελεστής προεξόφλησης της συνάρτησης$Gerber - Shiu$

$\boldsymbol{r = 2}$

$\boldsymbol{c = 1/4}$

$\boldsymbol{\lambda = 1}$

$\boldsymbol{\delta = 1}$

$\boldsymbol{q_1 = 2/5}$

$\boldsymbol{q_2 = 3/5}$

$\boldsymbol{\mu_1 = 5}$

$\boldsymbol{\mu_2 = 6}$

Στην συνέχεια ορίζουμε τον συνδυασμό των εκθετικών συναρτήσεων :

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] := \sum_{k=1}^{r} q_k * \mu_k * \mathrm{Exp}\left[-\mu_k * x\right]}$

$\boldsymbol{f[x]}$

$\frac{18e^{-6x}}{5} + 2e^{-5x}$,

και επαληθεύουμε πως το άθροισμα των βαρών αθροίζει στην μονάδα :

$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{r} q_k}$

1 .

Θα χρειαστούμε να βρούμε την διασπορά σ^2 για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τον συντελεστή $D = \sigma^2/2$, επομένως παρακάτω υπολογίζουμε τις ροπές $1^{ης}$, $2^{ης}$ και $3^{ης}$ τάξης και μέσω αυτών βρίσκουμε την διασπορά και τον συντελεστή D.

m1 = Integrate[$x * f[x]$, {x, 0, Infinity}]//N

m2 = Integrate[(x^2) * $f[x]$, {x, 0, Infinity}]//N

m3 = Integrate[(x^3) * $f[x]$, {x, 0, Infinity}]//N

Var = m2 − (m1)^2

D1 = (Var/2)

0.18

0.0653333

0.0358667

0.0329333

0.0164667 .

Τώρα θα βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace της $f(x)$ για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε το p, την μοναδική μη αρνητική λύση της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg :

$\tilde{f}$**[s_]:=LaplaceTransform[$f[x], x, s$]**

$\tilde{f}[s]$

Solve $\left[\lambda * \tilde{f}[s] == \lambda + \delta - c * s - \mathrm{D1} * s^2, s\right] //N$

$$\frac{2}{5+s} + \frac{18}{5(6+s)}$$

$\{\{s \to -21.7412\}, \{s \to -5.48542\}, \{s \to -3.42102\}, \{s \to 4.46546\}\}$

$p =$ **'4.46546'**

4.46546 .

Άρα μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε και την ποσότητα $b = c/D + p$:

$b = (c/\mathrm{D1}) + p$

19.6476 ,

και στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το β από την ισότητα :

$$\int_0^\infty g(y)dy = \frac{1}{1+\beta},$$

όπου,

$$g(y) = (\lambda/D) \int_0^y e^{-b(y-s)} \int_s^\infty e^{-p(x-s)} f(x) dx ds.$$

w1[s_]:=Integrate[Exp[$-p * (x - s)$] * $f[x]$,

$\{x, s,$ Infinity$\}$]

w1[y]

w**[y_]:=**

(λ/D1) * Integrate[Exp[$-b * (y - s)$] * w1[s],

$\{s, 0, y\}$]

$w[y]$

Solve[Integrate[$w[y]$, $\{y, 0,$ Infinity$\}$] == 1/(1 + β)]

$0.343989e^{-6.y} + 0.211294e^{-5.y}$

$60.7287\left(-0.0396301e^{-19.6476y} + 0.025205e^{-6.y} + 0.0144251e^{-5.y}\right)$

$\{\{\beta \to 2.24862\}\}$

$\boldsymbol{\beta =}$ **“2.24862”**

2.24862 .

Σε αυτό το σημείο θα συνεχίσουμε με τον υπολογισμό των :

$$q^* = \sum_{j=1}^{r} \frac{q_j^*}{(b-\mu_j)}, \quad q_k^{**} = \frac{\left[\dfrac{q_k^*}{(b-\mu_k)}\right]}{\sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{q_j^*}{(b-\mu_j)}} = \frac{q_k^*}{q^*(b-\mu_k)},$$

$$q_k^* = \frac{\left[\dfrac{q_k}{(\rho+\mu_k)}\right]}{\sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{q_j}{(\rho+\mu_j)}}, \ k = 1, 2, \ldots, r$$

$\boldsymbol{A = \sum_{k=1}^{r} q_k / (p + \mu_k)}$

0.0995903

$\boldsymbol{(* q_k^* = (q_k / (p + \mu_k)) / A \quad k = 1, 2, ..., r*)}$

$\boldsymbol{q_1^* = (q_1 / (p + \mu_1)) / A}$

$\boldsymbol{q_2^* = (q_2 / (p + \mu_2)) / A}$

0.424327

0.575673

$\boldsymbol{q^* = \sum_{j=1}^{r} q_j^* / (b - \mu_j)}$

0.0711501

$\boldsymbol{(* q_k^{**} = (q_k^* / (b - \mu_k)) / q^* \quad k = 1, 2, ..., r*)}$

$\boldsymbol{(q_1^*)^* = (q_1^* / (b - \mu_1)) / q^*}$

$\boldsymbol{(q_2^*)^* = (q_2^* / (b - \mu_2)) / q^*}$

0.407153

0.592847 .

Έτσι τώρα μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $G'(x) = g(x)$:

(*$G'[x] = g[x]$*)

$\boldsymbol{g[\mathrm{x\_}] := (1 - b * q^*) * b * \mathrm{Exp}[-b * x] +}$

$\boldsymbol{b * q^* * \sum_{k=1}^{r} (q_k^*) * * \mu_k * \mathrm{Exp}[-\mu_k * x]}$

$\boldsymbol{g[x]}$

$-7.81842e^{-19.6476x} + 1.39793\,(3.55708e^{-6x} + 2.03577e^{-5x}),$

και ο μετασχηματισμός Laplace της $G(x)$ να είναι ο $\bar{G}(-s)$:

$\boldsymbol{\tilde{G}[-\mathrm{s\_}] := (1 - b * q^*) * (b/(b - s)) +}$

$\boldsymbol{b * q^* * \sum_{k=1}^{r} (q_k^*) * * (\mu_k / (\mu_k - s))}$

$\boldsymbol{\tilde{G}[-s]}$

$1.39793\left(\frac{2.03577}{5 - s} + \frac{3.55708}{6 - s}\right) - \frac{7.81842}{19.6476 - s}$.

Συνεπώς, από τον μηδενισμό του παρανομαστή της εξίσωσης :

$$\int_0^\infty e^{su}\bar{K}(u)du = -\frac{1 - \bar{G}(-s)}{s[1 + \beta - \bar{G}(-s)]},$$

θα πάρουμε τις ρίζες s_i, $i = 1, 2, \ldots, r$.

$\boldsymbol{\mathrm{Solve}\left[1 + \beta == \tilde{G}[-s], s\right]}$

$\{\{s \to 3.42102\}, \{s \to 5.48542\}, \{s \to 21.7412\}\}$

$\boldsymbol{s_1 = \text{“3.42102”}}$

$\boldsymbol{s_2 = \text{“5.48542”}}$

$\boldsymbol{s_3 = \text{“21.7412”}}$

3.42102

5.48542

21.7412 .

Τώρα θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές D_j, $j = 0, 1, \ldots, r + 1$:

$\boldsymbol{D_0 = -1/\beta}$

-0.444717

$(*D_j = (b - s_j) \,/\, (s_j * (1 + \beta + b * \sum_{k=1}^{r} q_k^* * \mu_k / \, (\mu_k - s_j)^2)) *)$

$D_1 = (b - s_1) \,/\, (s_1 * (1 + \beta + b * \sum_{k=1}^{r} q_k^* * \mu_k / \, (\mu_k - s_1)^2))$

$D_2 = (b - s_2) \,/\, (s_2 * (1 + \beta + b * \sum_{k=1}^{r} q_k^* * \mu_k / \, (\mu_k - s_2)^2))$

$D_3 = (b - s_3) \,/\, (s_3 * (1 + \beta + b * \sum_{k=1}^{r} q_k^* * \mu_k / \, (\mu_k - s_3)^2))$

0.157208

0.00591549

-0.0262295 ,

και η κατανομή της ουράς της μίξης γεωμετρικών $\bar{K}(u)$ είναι :

$\bar{K}[\mathrm{u\_}] := \beta * \sum_{k=1}^{r+1} D_k * \mathrm{Exp}\,[-s_k * u]$

$\bar{K}[u]$

$2.24862\,(-0.0262295e^{-21.7412u} + 0.00591549e^{-5.48542u} + 0.157208e^{-3.42102u})$,

και η συνέλιξη $\bar{K} * H(u)$ είναι :

$(*\bar{K} * H[u]*)$

$T[\mathrm{u\_}] :=$

$b * \beta * \sum_{k=1}^{r} (D_k / \, (b - s_k)) * (\mathrm{Exp}\,[-s_k * u] - \mathrm{Exp}[-b * u])$

$T[u]$

$44.1801\,(0.000417695\,(-e^{-19.6476u} + e^{-5.48542u}) + 0.00968827\,(-e^{-19.6476u} + e^{-3.42102u}))$.

Άρα ο μετασχηματισμός Laplace ή η προσδοκώμενη παρούσα αξία του χρόνου της χρεοκοπίας τη χρονική στιγμή T είναι :

$\varphi_t[\mathrm{u\_}] := b * \beta * \sum_{k=1}^{r+1} (D_k / \, (b - s_k)) * \mathrm{Exp}\,[-s_k * u]$

$\varphi_t[u]$

$44.1801\,(0.0125286e^{-21.7412u} + 0.000417695e^{-5.48542u} + 0.00968827e^{-3.42102u})$,

ενώ ο μετασχηματισμός Laplace ή η προσδοκώμενη παρούσα αξία του χρόνου της χρεοκοπίας τη χρονική στιγμή T λόγω διάχυσης :

$\varphi_d[\mathrm{u\_}] := (1 + \beta) * \sum_{k=1}^{r+1} (D_k * s_k / \, (b - s_k)) * \mathrm{Exp}\,[-s_k * u]$

$\varphi_d[u]$

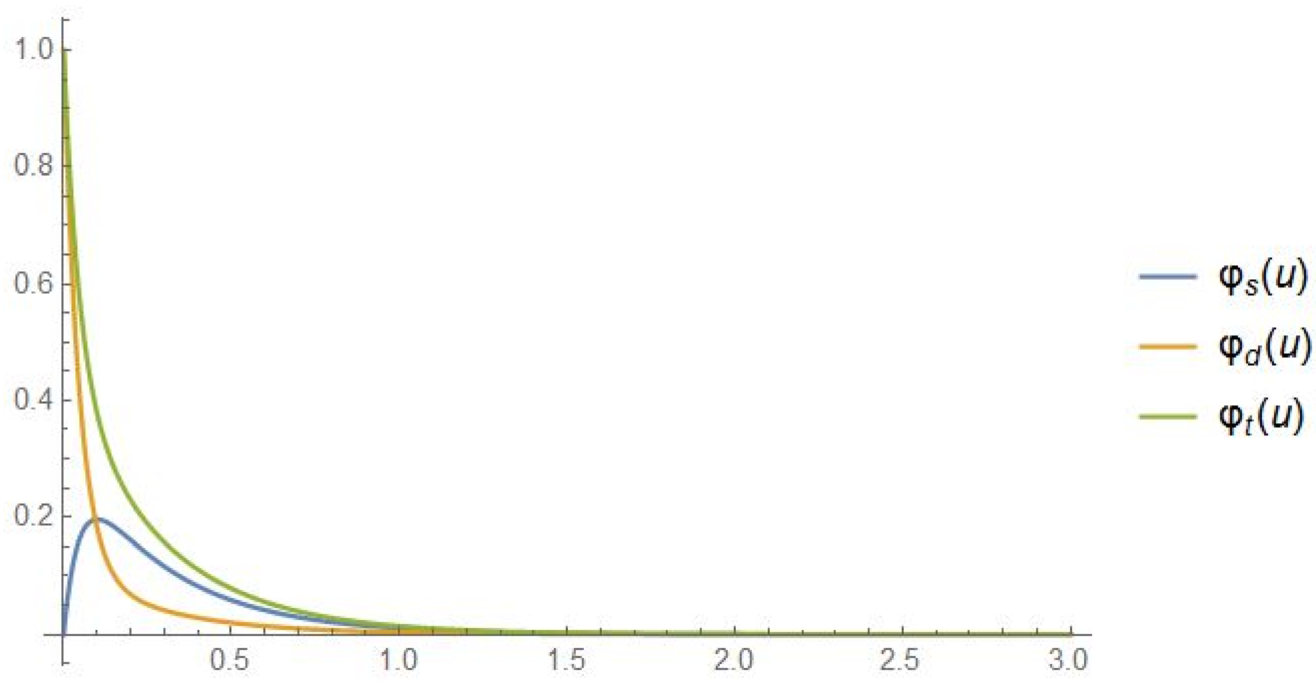
$3.24862\,(0.272388e^{-21.7412u} + 0.00229123e^{-5.48542u} + 0.0331438e^{-3.42102u})$, και ο μετασχηματισμός Laplace ή η προσδοκώμενη παρούσα αξία του χρόνου της χρεοκοπίας τη χρονική στιγμή T λόγω κάποιας απαίτησης :

$\boldsymbol{\varphi_s[\mathrm{u\_}](*{:=}\varphi_t[u] - \varphi_d[u]*){:=}}$

$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{r+1} D_k * (\beta - (s_k/(b - s_k))) * \mathrm{Exp}[-s_k * u]}$

$\boldsymbol{\varphi_s[u]}$

$-0.331368e^{-21.7412u} + 0.0110105e^{-5.48542u} + 0.320358e^{-3.42102u}$.



6.2 Μεθοδολογία για Μίξη Erlangs

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχει την μορφή :

$$f(x) = \frac{\sum_{k=1}^{r} q_k \mu (\mu x)^{k-1} e^{-\mu x}}{(k-1)!},\ x \geq 0$$

όπου, τα $\{q_1, q_2, \ldots, q_r\}$ είναι πιθανότητες κατανομής.
Ο Tsai και Willmot (2002a) έδειξαν πως :

1. Για $b = \mu$ είναι :

$$G'(x) = \frac{\sum_{k=1}^{r} q_k^* \mu (\mu x)^{k} e^{-\mu x}}{k!},$$

και

2. Για $b \neq \mu$ είναι :

$$G'(x) = \frac{1 - bq^*}{b - \mu} b e^{-bx} + \frac{bq^*}{b - \mu} \frac{\sum_{k=1}^{r} q_k^{**} \mu (\mu x)^{k-1} e^{-\mu x}}{(k-1)!},$$

όπου,

$$q^* = \sum_{j=1}^{r} q_j^* \sum_{i=0}^{j-1} (\frac{\mu}{\mu-b})^i \ , \ \ q_k^* = \frac{\sum\limits_{j=k}^{r} q_j \left(\dfrac{\mu}{\mu+\rho}\right)^{j-k}}{\sum\limits_{j=1}^{r} q_j \sum\limits_{i=0}^{j-1} \left(\dfrac{\mu}{\mu+\rho}\right)^{i}} \ ,$$

$$q_k^{**} = \frac{\sum\limits_{j=k}^{r} q_j^* \left(\dfrac{\mu}{\mu-b}\right)^{j-k}}{\sum\limits_{j=1}^{r} q_j^* \sum\limits_{i=0}^{j-1} \left(\dfrac{\mu}{\mu-b}\right)^{i}} \ , \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

και με την ίδια φιλοσοφία όπως και στη πρώτη μεθοδολογία με την αρχή των απλών κλασμάτων μπορούμε να εκφράσουμε την :

$$\bar{K}(u) = \beta \sum_{k=1}^{r+1} D_k e^{-s_k u},$$

ως το άθροισμα των $r+1$ εκθετικών συναρτήσεων, όπου :

1. Για $b \neq \mu$:

$$D_j = \left\{ s_j \left[\left(1 - \frac{bq^*}{b-\mu}\right) \frac{b}{(b-s_j)^2} + \frac{bq^*}{b-\mu} \sum_{k=1}^{r} q_k^{**} \frac{k\mu^k}{(\mu-s_j)^{k+1}} \right] \right\}^{-1} \ , \quad j = 1, 2, \ldots, r+1$$

   και οι ρίζες $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$ ικανοποιούν την σχέση :

$$\left(1 - \frac{bq^*}{b-\mu}\right) \frac{b}{b-s} + \frac{bq^*}{b-\mu} \sum_{k=1}^{r} q_k^{**} \left(\frac{\mu}{\mu-s}\right)^k = 1 + \beta.$$

2. Για $b = \mu$:

$$D_j = \left[s_j \sum_{k=1}^{r} q_k^* \frac{(k+1)\mu^{k+1}}{(\mu-s_j)^{k+2}} \right] \ , \quad j = 1, 2, \ldots, r+1$$

   και οι ρίζες $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$ ικανοποιούν την σχέση

$$\sum_{k=1}^{r} q_k^* \left(\frac{\mu}{\mu-s}\right)^{k+1} = 1 + \beta.$$

Σημειώνουμε πως η ποσότητα β υπολογίζεται όπως και στην μεθοδολογία για τον συνδυασμό των εκθετικών.

Περιβάλλον Mathematica.

Σε αντιστοιχία με το προηγούμενο παράδειγμα θα ορίσουμε τις παραμέτρους :

r : δείχνει τον αριθμό τον εκθετικών συναρτήσεων που θα έχουμε για τον συνδυασμό της (6.1.1)
q_i : τις πιθανότητες κατανομής με $i = 1, 2, \ldots, r$
μ : την παράμετρο της εκθετικής
c : την ένταση του ασφαλίστρου
λ : την ένταση της ανέλιξης $Poisson$
δ : ο συντελεστής προεξόφλησης της συνάρτησης $Gerber - Shiu$

$\boldsymbol{r = 2}$

$\boldsymbol{\mu = 5}$

$\boldsymbol{c = 1/4}$

$\boldsymbol{\lambda = 1}$

$\boldsymbol{\delta = 1}$

$\boldsymbol{q_1 = 2/5}$

$\boldsymbol{q_2 = 3/5}$

2

5

$\frac{1}{4}$

1

1

$\frac{2}{5}$

$\frac{3}{5}$

Στη συνέχεια ορίζουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] := \sum_{k=1}^{r} q_k * \mu * (\mu * x)^{k-1} * \mathrm{Exp}[-\mu * x]/((k-1)!)}$

$\boldsymbol{f[x]}$

$2e^{-5x} + 15e^{-5x}x.$

Θα χρειαστούμε να βρούμε την διασπορά σ^2 για να προσδιορίσουμε τον συντελεστή $D = \sigma^2/2$, επομένως παρακάτω υπολογίζουμε τις ροπές $1^{ης}$, $2^{ης}$ και $3^{ης}$ τάξης και μέσω αυτών βρίσκουμε την διασπορά και τον συντελεστή D.

m1 = Integrate[$x * f[x], \{x, 0,$ Infinity}]//N

m2 = Integrate[(x^2) $* f[x], \{x, 0,$ Infinity}]//N

m3 = Integrate[(x^3) $* f[x], \{x, 0,$ Infinity}]//N

Var = m2 − (m1)^2

D1 = (Var/2)

0.32

0.176

0.1344

0.0736

0.0368 .

Τώρα θα βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace της $f(x)$ για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε το p, την μοναδική μη αρνητική λύση της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg :

$\tilde{f}$[s_]:=LaplaceTransform[$f[x], x, s$]

$\tilde{f}[s]$

Solve $\left[\lambda * \tilde{f}[s] == \lambda + \delta - c * s - \mathrm{D1} * s^2, s\right]$ //N

$$\frac{15}{(5+s)^2} + \frac{2}{5+s}$$

$\{\{s \to -11.4262\}, \{s \to -7.35949\}, \{s \to -2.01569\}, \{s \to 4.00792\}\}$

p = "4.00792"

4.00792 .

Άρα μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε και την ποσότητα $b = c/D + p$:

$b = (c/\mathrm{D1}) + p$

10.8014 ,

και επειδή έχουμε ότι $b \neq \mu$ είναι :

$$G'(x) = \frac{1-bq^*}{b-\mu} b e^{-bx} + \frac{bq^*}{b-\mu} \frac{\sum_{k=1}^{r} q_k^{**} \mu (\mu x)^{k-1} e^{-\mu x}}{(k-1)!},$$

και θα πάμε να υπολογίσουμε τα q^*, q_k^* και q_k^{**} :

$$(*q_k^* = \frac{\sum_{j=k}^{r} q_j (\mu/(\mu+p))^{j-k}}{\sum_{j=1}^{r} q_j \sum_{i=0}^{j-1} (\mu/(\mu+p))^i} *)$$

$$q_1^* = \frac{q_1 + \left(q_2 * \frac{\mu}{\mu+p}\right)}{q_1 + q_2 * \left(1 + \frac{\mu}{\mu+p}\right)}$$

$$q_2^* = \frac{q_2}{q_1 + q_2 * \left(1 + \frac{\mu}{\mu+p}\right)}$$

0.549901

0.450099

$$(*q^* = \sum_{j=1}^{r} q_j^* \sum_{i=0}^{j-1} (\mu/(\mu-b))^i *)$$

$$q^* = q_1^* + q_2^* * \left(1 + \frac{\mu}{\mu-b}\right)$$

0.612077

$$(*q_k^{**} = \frac{\sum_{j=k}^{r} q_j^* (\mu/(\mu-b))^{j-k}}{\sum_{j=1}^{r} q_j^* \sum_{i=0}^{j-1} (\mu/(\mu-b))^i} = \frac{\sum_{j=k}^{r} q_j^* (\mu/(\mu-b))^{j-k}}{q^*} *)$$

$$(q_1^*) * = \frac{q_1^* + q_2^* * \left(\frac{\mu}{\mu-b}\right)}{q^*}$$

$$(q_2^*) * = \frac{q_2^*}{q^*}$$

0.264637

0.735363 .

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την ποσότητα β :

F[x_]:=Integrate[$f[y], \{y, 0, x\}$]

$F[x]$

$e^{-5x}\left(-1 + e^{5x} - 3x\right)$

$$\frac{\lambda}{b * \mathrm{D1}} * \text{Integrate}[\text{Exp}[-p * y] * (1 - F[y]), \{y, 0, \text{Infinity}\}]$$

0.372298

$\beta =$

$\mathbf{1/}$
$\left(\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{b*}\mathbf{D1}}\mathbf{* Integrate[Exp[}-\boldsymbol{p*y}\mathbf{]*(1-}\boldsymbol{F}\mathbf{[}\boldsymbol{y}\mathbf{]),}\right.$
$\mathbf{\{}\boldsymbol{y}\mathbf{,0,Infinity\}])-1}$

1.68602 ,

και λύνοντας την εξίσωση :

$$\left(1-\frac{bq^*}{b-\mu}\right)\frac{b}{b-s}+\frac{bq^*}{b-\mu}\sum_{k=1}^{r}q_k^{**}\left(\frac{\mu}{\mu-s}\right)^k=1+\beta,$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τις ρίζες s_i, $i=1,2,\ldots,r$:

$\mathbf{Solve}\left[\left(1-\frac{b*q^*}{b-\mu}\right)*\frac{b}{b-s}+\frac{b*q^*}{b-\mu}*\sum_{k=1}^{r}(q_k^*)*\left(\frac{\mu}{\mu-s}\right)^k==1+\beta,\right.$
$s]$

$\{\{s\to 2.01569\},\{s\to 7.35949\},\{s\to 11.4262\}\}$

$\boldsymbol{s_1} = \text{“2.01569”}$

$\boldsymbol{s_2} = \text{“7.35949”}$

$\boldsymbol{s_3} = \text{“11.4262”}$

2.01569

7.35949

11.4262 .

Τώρα θα υπολογίσουμε τους συντελεστές D_j, $j=1,\ldots,r+1$:

$$D_1=\left(s_1*\left(\left(1-\frac{b*q^*}{b-\mu}\right)*\frac{b}{(b-s_1)^2}+\frac{b*q^*}{b-\mu}*\sum_{k=1}^{r}(q_k^*)*\frac{k*\mu^k}{(\mu-s_1)^{k+1}}\right)\right)^{-1}$$

0.287388

$$D_2=\left(s_2*\left(\left(1-\frac{b*q^*}{b-\mu}\right)*\frac{b}{(b-s_2)^2}+\frac{b*q^*}{b-\mu}*\sum_{k=1}^{r}(q_k^*)*\frac{k*\mu^k}{(\mu-s_2)^{k+1}}\right)\right)^{-1}$$

-0.0446051

$$D_3=\left(s_3*\left(\left(1-\frac{b*q^*}{b-\mu}\right)*\frac{b}{(b-s_3)^2}+\frac{b*q^*}{b-\mu}*\sum_{k=1}^{r}(q_k^*)*\frac{k*\mu^k}{(\mu-s_3)^{k+1}}\right)\right)^{-1}$$

-0.0219682 ,

και η κατανομή της ουράς της μίξης γεωμετρικών $\bar{K}(u)$ είναι :

$\bar{K}$[u_]:=$\beta * \sum_{k=1}^{r+1} D_k *$ Exp $[-s_k * u]$

$\bar{K}[u]$

$$1.68602\left(-0.0219682e^{-11.4262u} - 0.0446051e^{-7.35949u} + 0.287388e^{-2.01569u}\right),$$

και η συνέλιξη $\bar{K} * H(u)$ είναι :

(*$\bar{K} * H[u]$*)

T[u_]:=$b * \beta * \sum_{k=1}^{r} \left(D_k / (b - s_k)\right) * \left(\text{Exp}[-s_k * u] - \text{Exp}[-b * u]\right)$

$T[u]$

$$18.2114\left(-0.0129594\left(-e^{-10.8014u} + e^{-7.35949u}\right) + 0.0327109\left(-e^{-10.8014u} + e^{-2.01569u}\right)\right).$$

Άρα ο μετασχηματισμός Laplace ή η προσδοκώμενη παρούσα αξία του χρόνου της χρεοκοπίας τη χρονική στιγμή T είναι :

φ_t[u_]:=$b * \beta * \sum_{k=1}^{r+1} \left(D_k / (b - s_k)\right) *$ Exp $[-s_k * u]$

$\varphi_t[u]$

$$18.2114\left(0.0351593e^{-11.4262u} - 0.0129594e^{-7.35949u} + 0.0327109e^{-2.01569u}\right),$$

ενώ ο μετασχηματισμός Laplace ή η προσδοκώμενη παρούσα αξία του χρόνου της χρεοκοπίας τη χρονική στιγμή T λόγω διάχυσης :

φ_d[u_]:=$(1 + \beta) * \sum_{k=1}^{r+1} \left(D_k * s_k / (b - s_k)\right) *$ Exp $[-s_k * u]$

$\varphi_d[u]$

$$2.68602\left(0.401738e^{-11.4262u} - 0.0953748e^{-7.35949u} + 0.0659349e^{-2.01569u}\right),$$

και ο μετασχηματισμός Laplace ή η προσδοκώμενη παρούσα αξία του χρόνου της χρεοκοπίας τη χρονική στιγμή T λόγω κάποιας απαίτησης :

φ_s[u_](*:=$\varphi_t[u] - \varphi_d[u]$*):=

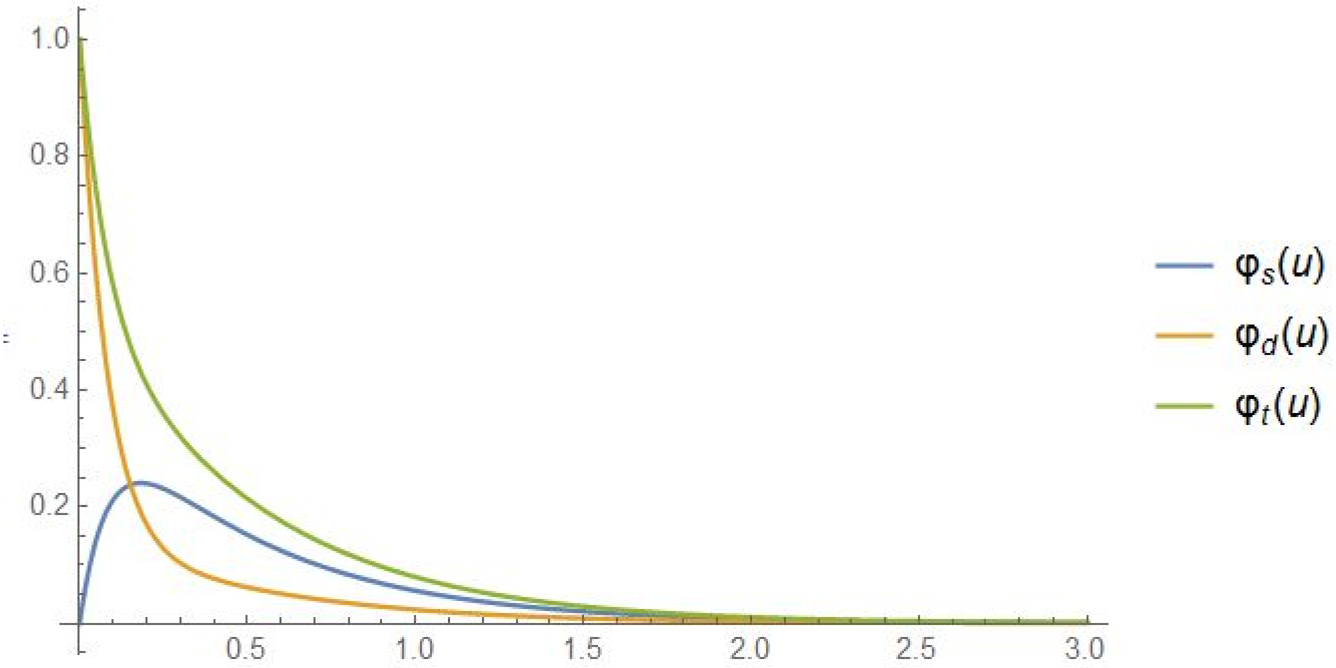
$\sum_{k=1}^{r+1} D_k * \left(\beta - \left(s_k / (b - s_k)\right)\right) *$ Exp $[-s_k * u]$

$\varphi_s[u]$

$$-0.438777e^{-11.4262u} + 0.0201698e^{-7.35949u} + 0.418607e^{-2.01569u}.$$

Plot $[\{\varphi_s[u], \varphi_d[u], \varphi_t[u]\}, \{u, 0, 3\}$, **PlotRange → Full,**

PlotLegends → "Expressions"]



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
$\varphi_s(u)$
$\varphi_d(u)$
$\varphi_t(u)$

Παράρτημα

- **Παράρτημα Α΄** : Συνάρτηση Φραγμένης Κύμανσης
- **Παράρτημα Β΄** : Ολοκλήρωμα Riemann - Stieltjes
- **Παράρτημα Γ΄** : Συνελίξεις Συναρτήσεων
- **Παράρτημα Δ΄** : Μετασχηματισμοί Laplace και Laplace-Stieltjes
- **Παράρτημα Ε΄** : Υπολογισμοί σε περιβάλλον Mathematica

Παράρτημα Α′

Συνάρτηση Φραγμένης Κύμανσης

Ορισμός 1. *Έστω, $[\alpha, \beta]$ ένα διάστημα και P_n μια οποιαδήποτε διαμέριση του I. Έστω μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Για κάθε πιθανή διαμέριση ορίζουμε το παρακάτω άθροισμα :*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Επιλέγουμε το supremum αυτών των αθροισμάτων και το συμβολίζουμε με $V_\alpha^\beta f$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως αυτός ο αριθμός είναι πάντα θετικός ή μηδέν ή άπειρο. Αν για κάποια συνάρτηση είναι πεπερασμένος τότε λέμε ότι αυτή η συνάρτηση είναι φραγμένης κύμανσης.

Παράρτημα Β′

Ολοκλήρωμα Riemann - Stieltjes

Ορισμός 1. *Έστω $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με g αύξουσα συνάρτηση. Τότε η f καλείται RS-ολοκληρώσιμη, ως προς την αύξουσα συνάρτηση g, εάν ισχύει :*

$$sup\{L(f,g,P) : P \text{ διαμέριση του } [\alpha,\beta]\} = inf\{U(f,g,Q) : Q \text{ διαμέριση του } [\alpha,\beta]\} := I,$$

όπου,

$$L(f,g,P) = \sum_{i=0}^{n} \underset{x\in[t_i - t_{i-1}]}{inf} f(x)[g(t_i) - g(t_{i-1})], \;\; P = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta\},$$

και

$$U(f,g,Q) = \sum_{i=0}^{n} \underset{x\in[t_i - t_{i-1}]}{sup} f(x)[g(t_i) - g(t_{i-1})], \;\; Q = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta\}.$$

Θα συμβολίζουμε τον αριθμό I που αντιστοιχεί στο RS-ολοκλήρωμα της g ως προς την f με :

$$I = \int_\alpha^\beta f(x)dg(x).$$

Πρόταση 1. *Έστω $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ όπου f μονότονη συνάρτηση και g συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, ώστε η f να είναι RS ως προς την g, τότε και η g είναι RS ολοκληρώσιμη ως προς την f και ισχύει :*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dg(x) = -\int_\alpha^\beta g(x)df(x) + f(\beta)g(\beta) * f(\alpha)g(\alpha). \tag{B′.0.1}$$

Η σχέση (Β′.0.1) ισχύει και στην περίπτωση που οι f, g είναι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης και επιπλέον η f να είναι συνεχής.

Βασικές Ιδιότητες του RS - ολοκληρώματος

1. $\int_\alpha^\beta df(x) = V_\alpha^\beta(f)$.

2. Αν η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε ισχύει : $\int_\alpha^\beta f(x)dg(x) = \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$.

3. $\int_\alpha^\beta (f+g)(x)dk(x) = \int_\alpha^\beta f(x)dk(x) + \int_\alpha^\beta g(x)dk(x)$.

4. $\int_\alpha^\beta f(x)d(g+k)(x) = \int_\alpha^\beta f(x)dg(x) + \int_\alpha^\beta f(x)dk(x)$.

5. $\int_\alpha^\beta f(x)dg(x) = \int_\alpha^c f(x)dg(x) + \int_c^\beta f(x)dg(x)$.

Παράρτημα Γ΄

Συνελίξεις Συναρτήσεων

Ορισμός 1. *Έστω οι συναρτήσεις f και g. Η συνέλιξη (convolution) των f και g είναι μια νέα συνάρτηση, έστω h, που συμβολίζεται με $h = f * g$, και ορίζεται ως εξής :*

1. *έστω οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται στο διάστημα $[0, +\infty)$. Τότε, είναι :*
$$h(x) = (f * g)(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)dy.$$

2. *έστω οι f και g είναι διακριτές συναρτήσεις (ακολουθίες πραγματικών αριθμών) που ορίζονται στο σύνολο $\{0, 1, 2, \dots\}$. Τότε, είναι :*
$$h(x) = (f * g)(x) = \sum_{y=0}^{x} f(y)g(x-y).$$

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς, κάνοντας αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης και θέτοντας όπου $x - y = z$, τότε για $y = 0$ είναι $z = x$, για $y = x$ είναι $z = 0$ και $y = x - z$, $dy = -dz$. Επομένως, είναι :

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_0^x f(y)g(x-y)dy = -\int_x^0 f(x-z)g(z)dz \\ &= \int_0^x g(z)f(x-z)dz \\ &= (g * f)(x).\end{aligned}$$

Ομοίως αν οι συναρτήσεις f και g είναι διακριτές, τότε όπως πριν βρίσκουμε ότι :

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \sum_{y=0}^{x} f(y)g(x-y) = \sum_{z=0}^{x} f(x-z)g(z) \\ &= (g * f)(x).\end{aligned}$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι :

$$f * g = g * f,$$

δηλαδή, η συνέλιξη των συναρτήσεων f και g είναι ίση με τη συνέλιξη των συναρτήσεων g και f, οπότε δεν έχει σημασία αν γράφουμε $f * g$ ή $g * f$.

Από τον προηγούμενο ορισμό, είναι προφανές ότι ισχύει $(f*g)(0) = 0$ αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς και $(f*g)(0) = f(0)g(0)$ αν οι συναρτήσεις f και g είναι διακριτές.

Θεώρημα 1. *Έστω $h(x) = (f*g)(x)$ $x \geq 0$, η συνέλιξη των συνεχών συναρτήσεων f και g . Τότε ισχύει ότι :*

$$\widehat{h}(s) = \widehat{f}(s)\widehat{g}(s),$$

όπου,

$$\widehat{h}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}h(x)dx, \quad \widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx \quad \text{και} \quad \widehat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx,$$

είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $h(x)$, $f(x)$ και $g(x)$, $x \geq 0$, αντίστοιχα.

Ορισμός 2. *Ορίζουμε σαν κ-τάξης συνέλιξη της f με τον εαυτό της, τη συνάρτηση :*

$$f^{*\kappa}(t) = \underbrace{f * f * \cdots * f}_{k} = \int_0^t f^{*(k-1)}(x)df(x)$$

με $f^{(*1)} = f$ και $f^{(*0)} = 1$.

Ιδιότητες Συνελίξεων

1. Αν η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε :
$$(f*g)(t) = \int_0^t f(x)g'(x)dx$$
2. Αν οι f, g είναι αύξουσες συναρτήσεις τότε ισχύει : $f * g = g * f$.
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$.
4. $(f + g) * h = f * h + g * h$.
5. $f * (\alpha g)(t) = (\alpha f) * g = \alpha(f * g)(t),\ \alpha \in \mathbb{R}$.
6. Αν οι f, g είναι αύξουσες συναρτήσεις τότε ισχύει : $f * g \leq f \cdot g$.
7. Αν η f είναι αύξουσα συνάρτηση τότε ισχύει : $f^{*n} \leq f^n$.
8. Αν οι F, G συναρτήσεις κατανομής μη αρνητικών συνεχών τυχαίων μεταβλητών και $F' = f$, τότε :
$$\frac{d(F*G)(t)}{dt} = (f*G)(t).$$
9. Αν η F συνάρτηση κατανομής μιας μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής και $F' = f$, τότε:
$$\frac{d(F^{*n})(t)}{dt} = (f * F^{*(n-1)})(t).$$

Παράρτημα Δ΄

Μετασχηματισμοί Laplace και Laplace-Stieltjes

Ορισμός 1. *(Feller 1971, Vol II) Αν F είναι συνήθης (proper, $||F|| = 1$) ή ελλειμματική (defective, $||F|| < 1$) κατανομή πιθανότητας ορισμένη στο $[0, +\infty)$ τότε ο μετασχηματισμός Laplace - Stieltjes ορίζεται ως εξής :*

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x).$$

Ορισμός 2. *Αν X είναι μια μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F, τότε ορίζουμε σαν μετασχηματισμό Laplace της τυχαίας μεταβλητής X (ή F) τη συνάρτηση που ορίζεται στο $\mathbb{R}^+$ από τον τύπο :*

$$\mathcal{L}(F)(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x) dx.$$

Είναι φανερό από τους ορισμούς που δόθηκαν πως ο μετασχηματισμός Laplace είναι ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace - Stieltjes. Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace - Stieltjes, όπου όμοιες ισχύουν και για τον μετασχηματισμό Laplace.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes

1. Αν X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F_1, F_2 αντίστοιχα, τότε : $(\widehat{F_1 * F_2}(\lambda) = \widehat{F_1}(\lambda)\widehat{F_2}(\lambda)$.

2. $\widehat{F^{*n}}(\lambda) = (\widehat{F}(\lambda))^n$, $\forall n \geq 0$.

3. $\mathcal{L}(F)(\lambda) = \lambda^{-1}\widehat{F}(\lambda)$.

4. $\mathcal{L}(1 - F)(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}(1 - F(x))dx = \dfrac{(1 - \widehat{F}(\lambda)}{\lambda}$.

5. $\dfrac{d^n \widehat{F}(\lambda)}{d\lambda^n} = (-1)^n \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} x^n dF(x)$.

6. Αν Q είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια $M_X(t)$ τότε ισχύει : $\mathcal{L}(F)(t) = M_X(-t)$.

Παράρτημα Ε΄

Υπολογισμοί σε περιβάλλον **Mathematica**

Υπολογισμός της Ανανεωτικής Συνάρτησης

Στην περίπτωση που μας είναι γνωστή η αθροιστική συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων, τότε η ανανεωτική συνάρτηση $U[t]$ μπορεί να βρεθεί από τον ακόλουθο αλγόριθμο :

$f[x\_] :=$ (ορίζουμε την συνάρτηση που μας δίνετε)
$f[x]$
$F[y\_] := 1 - Integrate[f[x], \{x, 0, y\}]$
$F[y]$
$W[s\_] := LaplaceTransform[F[y], y, s]$
$W[s]$
$U[t\_] := InverseLaplaceTransform[(2 * \alpha * W[s] - 1)/(\alpha^2 * W[s]), s, t]$
$U[t]$

Στη περίπτωση που μας είναι γνωστή η πυκνότητα της κατανομής που ακολουθούν οι ενδιάμεσοι χρόνοι, τότε η ανανεωτική συνάρτηση $U[t]$ μπορεί να βρεθεί από τον ακόλουθο αλγόριθμο :

$f[x\_] :=$ (ορίζουμε την συνάρτηση που μας δίνετε)
$f[x]$
$v[s\_] := LaplaceTransform[f[x], x, s]$
$v[s]$
$M[s\_] := v[s]/(1 - v[s])$
$M[s]$
$n[u\_] := InverseLaplaceTransform[M[s], s, u]$
$n[u]$
$U[t\_] := 1 + Integrate[n[u], \{u, 0, t\}]$
$U[t]$

Βιβλιογραφία

Α. ΕΛΛΗΝΙΚΗ

1. Δαμιανού Χ. (1996). *Στατιστικός έλεγχος ποιότητας και αξιοπιστίας*, Εκδόσεις Αθανασόπουλος, Σ. και Παπαδάμης, Σ.

2. Κουτσόπουλος, Κ.Ι. (1999). *Αναλογιστικά Μαθηματικά - Θεωρία Κινδύνων*, Εκδόσεις Συμμετρία.

3. Νεγρεπόντης, Σ. , Γιωτόπουλος, Σ. , Γιαννακούλιας, Ε. (1998). *Απειροστικός Λογισμός Ι*, Εκδόσεις Αίθρα.

4. Πολίτης, Κ. (2015). *Πανεπιστημιακές σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας*, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

5. Φακίνος, Δ. (1994). *Στοχαστικές μέθοδοι στην επιχειρησιακή έρευνα*, Τεύχος 1, Εκδόσεις Συμμετρία.

6. Χρυσαφίνου Ο. (2012). *Εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις*, Εκδόσεις Σοφία.

Β. ΞΕΝΟΓΛΩΣΗ

1. Apostol, T. M. (1974). *Mathematical Analysis*, second edition, Addison - Wesley.

2. Asmussen, S. (2000). *Ruin Probabilities*, Vol. 2, World Scientific, Signapore.

3. Barlow, R. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*, Holt, Rinehart and Winston, N.Y.

4. Beekman, J. A. (1974). *Two Stochastic Processes*, Almqvist and Wiksell, Stockholm.

5. Bowers, N. L. , Gerber, H. U. , Hickman, J. C., Jonew, D. A. , Nesbitt, C. J. (1986). *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Ithaca Illinois.

6. Brown, M. (1990). *Error Bounds for Exponential Approximations of Geometric Convolutions*, Institute of Mathematical Statistics, The Annals of Probability, Vol. 18, No. 3, 1388-1402.

7. Cai, J. and Kalashnikov, V. (2000). *NWU Property of A Class of Random Sums*, Journal of Applied Probability, Vol. 37, Number 1, 283-289.

8. Cai, J. and Tang, Q. (2004). *On Max-Sum Equivalence and Convolution Closure of Heavy-Tailed Distributions and Their Applications*, Journal of Applied Probability, Vol. 41, No. 1, 117-130.

9. Chan, B. (1990). *Ruin probability for translated combination of exponentia; claims*, ASTIN Bulletin, Vol. 20, 113-114.

10. Chiu, S. N. and Yin, C. (2014). *On the complete monotonicity of the compound geometric convolution with applications in risk theory*, Scandinavian Actuarial Journal, Vol. 2014, Issue 2, 116-124.

11. Cox, D. R. (1962). *Renewal Theory*, Methuen, London.

12. Dufresne, F. and Gerber, H. U. (1989). *Three methods to calculate the probability of ruin*, ASTIN Bulletin, Vol. 19, Issue 1, 71-90.

13. Dufresne, F. and Gerber, H. U. (1991). *Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 10, Issue 1, 51-59.

14. Dufresne, F. and Gerber, H. U. (1998b). *The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 7, Issue 3, 193-199.

15. Fagiuoli, E. and Pellerey, F. (1994). *Preservation of certain classes of life distributions under Poisson shock models*, Journal of Applied Probability, Vol. 31, No. 2, 458-465.

16. Feller W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2, 2nd edition, J. Willey, N.Y.

17. Gerber, H. U. (1970). *An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk*, Scandinavian Actuarial Journal, Vol. 1970, Issue 3-4, 205-210.

18. Grimmet, G. and Stirzaker, D. (2001). *Probability and Random Processes*, 3rd edition, Oxford University Press.

19. Haaser, B. N. and Sullivan, J. (1971). *Real Analysis*, Dover Publications, Inc., N.Y..

20. Kaas, R. , Goovaerts, M. , Dhaene, J. , Denuit, M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers.

21. Rolski, T. , Schmidli, H. , Schmidt, V. and Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, J. Willey, N.Y.

22. Ross, S. (1996). *Stochastic Processes*, 2nd edition, J. Willey, N.Y. .

23. Rudin, W. (2000). *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*, Leader Books.

24. Schmidt, K. D. (1995). *Lectures on Risk Theory*, Lehrstuhl für Versicherungsmathematik Technische Universität Dresden, page 27

25. *Täcklind*, S. (1942). *Sur le risque de ruine dans jeux inéquitables*, Scandinavian Actuarial Journal, Vol. 1942, Issue 1-2, 1-42.

26. Tsai, C. C. L. (2003). *On the expectations of the present values of the time of ruin perturbed by diffusion*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 32, Issue 3, 413-429.

27. Tsai, C. C. L. , Willmot, G. E. (2002a). *A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 30, Issue 1, 51-66.

28. Willmot, G. E. (2002a). *Compound Geometric Residual Lifetime Distirbutions and the Deficit at Ruin*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 30, Issue 3, 421-438.

29. Willmot, G. E. (2002b). *On higher-order properties of compound geometric distributions*, Journal of Applied Probability, Vol. 39, No. 2, 324-340.

30. Willmot, G. E. and Cai, J. (2004). *On Applications of Residual Lifetimes of Compound Geometric Convolutions*, Vol. 41, No. 3, 802-815.

31. Willmot, G. E. and Lin, X. S. (2001). *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*(Lecture Notes Statist. 156), Springer, N.Y.