



Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Προηγμένα Συστήματα Πληροφορικής»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	Μία επισκόπηση των δικτύων Petri (A survey of Petri Nets)
Όνοματεπώνυμο Φοιτητή	Χατζηχαραλάμπους Βασίλειος
Πατρώνυμο	Χαράλαμπος
Αριθμός Μητρώου	ΜΠΣΠ/ 12090
Επιβλέπων	Παναγιώτης Τσικούρας, Καθηγητής

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)

Παναγιώτης Τσικούρας
Καθηγητής

(υπογραφή)

Κωνσταντίνος Πατσάκης
Επικ. Καθηγητής

(υπογραφή)

Αριστείδης Σαπουνάκης
Καθηγητής

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή ασχολείται με την ανάλυση των δικτύων Petri καθώς και την υλοποίηση εφαρμογών στα διάφορα επίπεδά τους.

Το πρώτο κεφάλαιο είναι εισαγωγικό με μια βιβλιογραφική ανασκόπηση του θέματος και την παρουσίαση μερικών εννοιών της θεωρίας των γραφημάτων, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στα υπόλοιπα κεφάλαια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, αναλύονται τα δίκτυα Petri, ξεκινώντας από την ιστορική τους αναδρομή και τον ορισμό τους. Στη συνέχεια αναλύονται τα δομικά τους στοιχεία και οι ιδιότητές τους. Έπειτα, αναφέρεται η μοντελοποίηση με την βοήθεια των δικτύων Petri.

Στο τρίτο κεφάλαιο, αναφέρονται οι κατηγορίες των δικτύων Petri και πραγματοποιείται εκτενής ανάλυση των δικτύων χαμηλού επιπέδου, υψηλού επιπέδου, των δικτύων με χρονισμένες μεταβάσεις, των στοχαστικών δικτύων και των δικτύων με ουρές.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, αναπτύσσονται διάφορες εφαρμογές των δικτύων Petri. Πιο συγκεκριμένα, δίνονται και αναλύονται παραδείγματα εφαρμογών δικτύου Petri χαμηλού και υψηλού επιπέδου, δικτύου με χρονισμένες μεταβάσεις και απλού μοντέλου Petri για την πρόγνωση του καιρού.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, αναλύονται δύο ακόμα εφαρμογές των δικτύων Petri χρησιμοποιώντας τα ως μαθηματικό και ως γραφικό εργαλείο.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο, καταγράφονται τα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης.

Abstract

This thesis deals with the analysis of the Petri nets and the implementation of each application in different levels.

The first chapter is an introduction, containing a literature review of the subject and an introduction to the theory of graphs, presenting concepts which will be used in other chapters.

In the second chapter, Petri nets are analyzed, starting from their history and their definition and followed by their main components and properties and closing with modeling based on Petri nets.

In the third chapter, the Petri net classes are introduced, followed by an extensive analysis of each one of them. In particular, the classes being analyzed are low-level Petri nets, high-level Petri nets, Petri nets with timed transitions, stochastic Petri nets and Petri nets with tails.

In the fourth chapter, several applications of Petri net are described. This is being achieved by analyzing examples of low-level Petri network applications and high-level Petri network applications, Petri networks with timed transitions and a simple Petri model for weather forecast.

In the fifth chapter, another two applications of a Petri net are being overviewed. In the first of these applications the Petri net is being used as a mathematical tool, whereas in the second it is used as a graphic tool.

Finally, the sixth chapter states the conclusions that the present thesis has come to.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	6
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή	7
1.1 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	7
1.2 Θεωρία των γραφημάτων	8
1.3 Σκοπός της εργασίας.....	11
Κεφάλαιο 2: Τα δίκτυα Petri.....	12
2.1 Ιστορική αναδρομή	12
2.2 Ορισμός των δικτύων Petri	13
2.3 Δομικά στοιχεία των δικτύων Petri	15
2.4 Ιδιότητες των δικτύων Petri.....	19
2.4.1 Προσβασιμότητα (Reachability)	19
2.4.2 k-Περιοριστικότητα (k-Boundedness).....	20
2.4.3 Ασφάλεια (Safety).....	21
2.4.4 Ζωτικότητα (Liveness).....	22
2.4.5 Ανιστρεψιμότητα (Reversibility)	23
2.4.6 Οικεία κατάσταση (Home state)	24
2.4.7 Δικαιοσύνη (Fairness)	24
2.4.8 Κάλυψη (Coverability)	25
2.4.9 Επιμονή (Persistence).....	25
2.4.10 Απόσταση συγχρονισμού (Synchronic distance).....	25
2.4.11 Συντηρητικότητα (Conservativeness).....	26
2.4.12 Συνέπεια (Consistency).....	27
2.4.13 Επαναληπτικότητα (Repetitiveness)	27
2.5 Μοντελοποίηση με τη βοήθεια δικτύων Petri	27
2.5.1 Ακολουθία γεγονότων ή Διαδοχικότητα (Sequence).....	28
2.5.2 Ταυτοχρονισμός (Concurrency)	28
2.5.3 Συγχρονισμός (Synchronization).....	29
2.5.4 Σύγκρουση (Conflict).....	29
2.5.5 Αμοιβαίος αποκλεισμός (Mutual exclusion)	30
2.5.6 Αδιέξοδος (Deadlock).....	31
2.5.7 Έλλειψη φραγμάτων (Unboundedness).....	32
2.5.8 Σύγχυση (Confusion).....	33
2.6 Βιβλιογραφική ανασκόπηση του θέματος	33

Κεφάλαιο 3: Κατηγορίες δικτύων Petri.....	37
3.1 Δίκτυα Petri Χαμηλού Επιπέδου	37
3.1.1 Μηχανές κατάστασης (State machines)	37
3.1.2 Μαρκαρισμένα γραφήματα (Marked graphs)	37
3.1.3 Δίκτυα Petri ελεύθερης επιλογής (Free choice PNs).....	37
3.1.4 Απλά δίκτυα Petri (Simple PNs).....	37
3.2 Δίκτυα Petri Υψηλού Επιπέδου	39
3.2.1 «Καθαρά» δίκτυα Petri υψηλού επιπέδου (Individual tokens)	39
3.2.2 Δίκτυα που εμφανίζουν τροποποιημένη σημασιολογία (High-level PNs with modified semantics).....	39
3.2.3 Ιεραρχικά δίκτυα (Hierarchical high-level PNs / HHPNs)	40
3.2.4 Μοντέλα από τα οποία υιοθετούνται χαρακτηριστικά από άλλες τυπικές μεθόδους που προσδιορίζουν τις προδιαγραφές.....	40
3.3 Δίκτυα Petri με χρονισμένες μεταβάσεις	40
3.3.1 Προσέγγιση/Αναπαράσταση δράσεων.....	41
3.3.2 Προσέγγιση/Αναπαράσταση πόρων	42
3.4 Στοχαστικά δίκτυα Petri	43
3.5 Δίκτυα Petri με ουρές.....	46
3.5.1 Χαρακτηριστικά δικτύων με ουρές.....	47
Κεφάλαιο 4: Εφαρμογές Δικτύων Petri	48
4.1 Παράδειγμα εφαρμογής δικτύου Petri χαμηλού επιπέδου.....	48
4.2 Παράδειγμα εφαρμογής δικτύου Petri υψηλού επιπέδου	49
4.3 Παράδειγμα εφαρμογής δικτύου Petri με χρονισμένες μεταβάσεις.....	50
4.4 Παράδειγμα απλού μοντέλου Petri για την πρόγνωση του καιρού	51
Κεφάλαιο 5: Εφαρμογές Δικτύων Petri με Εργαλείο Προσομοίωσης.....	58
5.1 Εισαγωγή	58
5.2 Δίκτυο Petri ως μαθηματικό εργαλείο.....	58
5.3 Δίκτυο Petri ως γραφικό εργαλείο	65
Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα	68
Βιβλιογραφία	69

Ευρετήριο Σχημάτων

Σχήμα 1 Μη κατευθυνόμενο γράφημα.....	9
Σχήμα 2 Γράφημα με τη μορφή δέντρου.....	9
Σχήμα 3 Κατευθυνόμενο γράφημα.....	10
Σχήμα 4 a) Κατευθυνόμενο και b) Μη κατευθυνόμενο βεβαρημένο γράφημα.....	10
Σχήμα 5 a) Κατευθυνόμενο γράφημα και b) Κατευθυνόμενο πολυγράφημα.....	11
Σχήμα 6 Δομικά στοιχεία των δικτύων Petri.....	15
Σχήμα 7 Σχέσεις στα δίκτυα Petri.....	16
Σχήμα 8 Παράδειγμα δικτύου Petri με χρήση διακριτικών.....	17
Σχήμα 9 Παράδειγμα χημικής ένωσης νερού με χρήση του δικτύου Petri (πριν τη μετάβαση)	18
Σχήμα 10 Παράδειγμα χημικής ένωσης νερού με χρήση του δικτύου Petri (μετά τη μετάβαση)	18
Σχήμα 11 Δίκτυο Petri με προσβασιμότητα.....	20
Σχήμα 12 Δίκτυο Petri με 0-περιοριστικότητα.....	20
Σχήμα 13 Δίκτυο Petri με 2-περιοριστικότητα.....	21
Σχήμα 14 Δίκτυο Petri με ασφάλεια.....	22
Σχήμα 15 Δίκτυο Petri με νεκρό μαρκάρισμα.....	22
Σχήμα 16 a) Δίκτυο Petri με ζωτικότητα και b) Δίκτυο Petri χωρίς ζωτικότητα.....	23
Σχήμα 17 Δίκτυο Petri με αντιστρεψιμότητα.....	24
Σχήμα 18 Δίκτυο Petri με κάλυψη.....	25
Σχήμα 19 Δίκτυο Petri με την ιδιότητα της απόστασης συγχρονισμού.....	26
Σχήμα 20 Δίκτυο Petri με την ιδιότητα της συντηρητικότητας.....	27
Σχήμα 21 Παράδειγμα δικτύου με χρήση της ακολουθίας γεγονότων.....	28
Σχήμα 22 Παράδειγμα δικτύου με χρήση ταυτοχρονισμού.....	28
Σχήμα 23 Παράδειγμα δικτύου με χρήση συγχρονισμού.....	29
Σχήμα 24 Παραδείγματα συγκρούσεων σε δίκτυα Petri.....	30
Σχήμα 25 Παράδειγμα αμοιβαίου αποκλεισμού σε δίκτυο Petri.....	31
Σχήμα 26 Παράδειγμα αδιεξόδου σε δίκτυο Petri.....	32
Σχήμα 27 Παράδειγμα δικτύου Petri χωρίς φράγματα.....	32
Σχήμα 28 Παράδειγμα σύγχυσης σε δίκτυο Petri.....	33
Σχήμα 29 Κατηγορίες δικτύων Petri χαμηλού επιπέδου.....	38
Σχήμα 30 Σχέσεις των κατηγοριών δικτύων Petri χαμηλού επιπέδου.....	38
Σχήμα 31 Δίκτυο Petri με χρονισμένες μεταβάσεις.....	41

Σχήμα 32 Δίκτυο Petri με χρονισμένες μεταβάσεις - Προσέγγιση/Αναπαράσταση δράσεων ...	42
Σχήμα 33 Δίκτυο Petri με χρονισμένες μεταβάσεις - Προσέγγιση/Αναπαράσταση πόρων	43
Σχήμα 34 Γραφική παράσταση εκθετικής κατανομής.....	44
Σχήμα 35 Διάγραμμα ρυθμού μετάβασης αλυσίδας Markov	44
Σχήμα 36 Στοχαστικό δίκτυο Petri που ικανοποιεί τις δομές της μηχανής κατάστασης και του μαρκαρισμένου γραφήματος.....	45
Σχήμα 37 Η αντίστοιχη αλυσίδα Markov σε συνεχή χρόνο	45
Σχήμα 38 Δίκτυο Petri με ουρές.....	47
Σχήμα 39 Δίκτυο Petri με ουρές-Χαρακτηριστικά	47
Σχήμα 40 Παράδειγμα δικτύου Petri χαμηλού επιπέδου	48
Σχήμα 41 Παράδειγμα δικτύου Petri υψηλού επιπέδου στην αρχική κατάσταση	49
Σχήμα 42 Παράδειγμα δικτύου Petri υψηλού επιπέδου μετά από πραγματοποίηση μίας μετάβασης	50
Σχήμα 43 Δίκτυα με χρονισμένες μεταβάσεις: a) αναπαράσταση δράσεων και b) αναπαράσταση πόρων	51
Σχήμα 44 Κανόνας καταιγίδας.....	52
Σχήμα 45 Κανόνας καλού καιρού	53
Σχήμα 46 Κανόνας βροχερού καιρού	54
Σχήμα 47 Απλή σύνδεση των κανόνων	55
Σχήμα 48 Αναλυτική σύνδεση των κανόνων	56
Σχήμα 49 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (αρχική κατάσταση)	59
Σχήμα 50 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (πρόσθεση).....	60
Σχήμα 51 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (αφαίρεση).....	61
Σχήμα 52 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (πολλαπλασιασμός).....	62
Σχήμα 53 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (αδύνατο αποτέλεσμα)	63
Σχήμα 54 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (εφικτή τιμή παρονομαστή).....	64
Σχήμα 55 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (τελικό αποτέλεσμα).....	65
Σχήμα 56 Γραφικό παράδειγμα με τη χρήση δικτύου Petri	66

Πρόλογος

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών του Τμήματος Πληροφορικής, του Πανεπιστημίου Πειραιώς. Στόχος της διπλωματικής αυτής είναι η μελέτη των δικτύων Petri και οι εφαρμογές των διαφόρων επιπέδων τους.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα της εργασίας μου, Καθηγητή Παναγιώτη Τσικούρα, ο οποίος μου παρείχε αδιαλείπτως πολύτιμη καθοδήγηση και βοήθεια σε όλη την προσπάθεια διεκπεραίωσης της εργασίας αυτής. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον Καθηγητή Αριστείδα Σαπουνάκη και τον Επίκουρο Καθηγητή Κωνσταντίνο Πατσάκη.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ θα ήθελα να απευθύνω στην οικογένεια μου και ιδιαίτερα στους γονείς μου, η οποίοι με στήριξαν και με στηρίζουν από την έναρξη των σπουδών μου έως και σήμερα.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Στις μέρες μας η μεγάλη ανάπτυξη του κλάδου της πληροφορικής και ο συνεχώς αυξανόμενος ανταγωνισμός απαιτούν από τις επιχειρήσεις την παροχή όλο και πιο ικανοποιητικών προϊόντων και υπηρεσιών. Για την ικανοποίηση αυτών των απαιτήσεων οι επιχειρήσεις οφείλουν να οργανώσουν με βέλτιστο τρόπο τις παραγωγικές τους διαδικασίες, μειώνοντας το κόστος αλλά και το χρόνο παραγωγής τους. Χρήσιμο εργαλείο σε αυτήν τους την προσπάθεια αποτελούν οι μέθοδοι μοντελοποίησης διαδικασιών και συστημάτων. Ήδη μεγάλη πληθώρα επιχειρήσεων έχουν υιοθετήσει μεθόδους μοντελοποίησης λαμβάνοντας αξιόλογα κέρδη εκμεταλλευόμενες τα πλεονεκτήματά τους.

Έχει προταθεί ένας μεγάλος αριθμός από σύγχρονα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση και μοντελοποίηση συστημάτων. Το πιο διαδεδομένο από αυτά είναι τα δίκτυα Petri (Petri Nets/PNs/ΔP). Αποτελούν ένα περιληπτικό και τυπικό μοντέλο ροής πληροφοριών. Οι ιδιότητες, τα χαρακτηριστικά, τα εργαλεία ανάλυσης και οι τεχνικές που διαθέτουν δημιουργήθηκαν με σκοπό την εύρεση απλών και αποτελεσματικών μεθόδων περιγραφής και ανάλυσης της ροής της πληροφορίας σε ένα σύστημα. Επίσης με τη χρήση τους καθίσταται εφικτός και ο έλεγχος του συστήματος. Αποτελούν μια τυπική και γραφική γλώσσα που είναι κατάλληλη για τη μοντελοποίηση συστημάτων σύγχρονης (concurrent) ή ασύγχρονης (asynchronous) εκτέλεσης, καταμεμημένα (distributed), παράλληλα (parallel) και στοχαστικά (stochastic), (Valette, Chezalviel and Girault, 1999).

Τα δίκτυα Petri είναι μια γενίκευση της θεωρίας αυτομάτων, έτσι ώστε να μπορούν να εκφράσουν τα γεγονότα που εκτελούνται ταυτόχρονα. Για τη μοντελοποίηση των συστημάτων χρησιμοποιούν τόσο γραφικά όσο και μαθηματικά εργαλεία. Θεωρώντας τα ως ένα γραφικό εργαλείο μπορούν να χρησιμοποιηθούν παρόμοια με τα διαγράμματα ροής και τα διαγράμματα μπλοκ. Αντίθετα, στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται ως ένα μαθηματικό εργαλείο δίνουν τη δυνατότητα κατασκευής αλγεβρικών εξισώσεων, εξισώσεων καταστάσεων και άλλων μαθηματικών μοντέλων που ρυθμίζουν τη συμπεριφορά του συστήματος, (Peterson, 1997). Ανεξάρτητα από τον τρόπο χρήσης τους, αποτελούν εργαλείο για τους θεωρητικούς αλλά και τους εφαρμοσμένους επιστήμονες, παρέχοντάς τους ένα μέσο επικοινωνίας και συνεννόησης, (Murata, 1989).

Τα δίκτυα Petri παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον Carl Adam Petri το 1962 στη διδακτορική του διατριβή με τίτλο "Επικοινωνία με Αυτόματα", (Petri, 1966). Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκαν ως ένα μαθηματικό εργαλείο. Συγκεκριμένα, σκοπός του Carl Adam Petri ήταν να χρησιμοποιήσει αυτό το μαθηματικό εργαλείο ως βάση μιας θεωρίας η οποία εξέταζε την επικοινωνία μεταξύ των συστατικών μερών ενός υπολογιστικού συστήματος. Ο Petri υποστήριξε μέσα από την εργασία του ότι η βέλτιστη διαδικασία που μπορεί να ακολουθηθεί για την τυποποιημένη ανάλυση ενός συνόλου επικοινωνούντων αυτομάτων είναι να δηλωθούν με τον ίδιο τρόπο οι αλλαγές κατάστασης στα αυτόματα κι η μεταξύ τους επικοινωνία. Η χρήση των δικτύων Petri έγινε για την περιγραφή διασυνδεδεμένων συστημάτων, χωρίς όμως να δίνεται μεγάλη έμφαση στο χρόνο. Το αποτέλεσμα της εργασίας ήταν η ανάπτυξη, από θεωρητικής απόψεως, των βασικών κανόνων λειτουργίας των δικτύων Petri, (Valette, Chezalviel & Girault, 1999).

Τα δίκτυα Petri επιτρέπουν την υλοποίηση στατικών και δυναμικών χαρακτηριστικών πραγματικών συστημάτων. Αυτό επιτυγχάνεται συνδυάζοντας την έννοια της καταμεμημένης κατάστασης μαζί με έναν κανόνα αλλαγής κατάστασης. Αυτό τα καθιστά ένα ιδιαίτερα αποτελεσματικό εργαλείο ανάπτυξης πολύπλοκων συστημάτων, ειδικά αν συνυπολογιστεί η ύπαρξη υπολογιστικών εργαλείων που επιτρέπουν την προσομοίωσή τους, (Peterson, 1981). Συγκεκριμένα υπάρχουν λογισμικά σχεδίασης δικτύων Petri τα οποία ακολουθούν μια σειρά προκαθορισμένων προδιαγραφών και βοηθούν το σχεδιαστή να μοντελοποιήσει και να αναλύσει γραφικά μια διαδικασία.

Τα βασικότερα αντικείμενα για τα οποία χρησιμοποιούνται τα δίκτυα Petri είναι η μοντελοποίηση, προσομοίωση, αξιολόγηση αποδοτικότητας, ανάλυση συμπεριφοράς, επιβεβαίωση δομικών ιδιοτήτων, παρακολούθηση χρονοπρογραμματισμού και ο εποπτικός έλεγχος συστημάτων. Επίσης χρησιμοποιούνται και για τον έλεγχο συστημάτων σε πραγματικό

χρόνο, (Murata, 1989). Τα δίκτυα Petri έχουν τη δυνατότητα να εντοπίσουν παράγοντες που περιορίζουν την απόδοση ενός συστήματος, δίνοντας παράλληλα τη δυνατότητα να προτιμηθούν αλλαγές και βελτιώσεις που θα συμβάλλουν δραστικά στη βελτιστοποίηση της συμπεριφοράς του. Επιπλέον, επιτρέπουν την προσομοίωση δυναμικά εξελισσόμενων και παράλληλων δραστηριοτήτων ενός συστήματος καθώς επίσης υποστηρίζουν την ιεραρχική μοντελοποίηση και τη μοντελοποίηση συστημάτων που διαθέτουν διαφορετικά επίπεδα λεπτομέρειας, (Jehng, 2002).

Τα δίκτυα Petri έχουν χρησιμοποιηθεί σε πολλούς επιστημονικούς τομείς όπως οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, τα συστήματα επεξεργασίας πληροφοριών, η μοντελοποίηση συστημάτων παραγωγής, η ρομποτική, η μοντελοποίηση και αξιολόγηση αποδοτικότητας συστημάτων πολλών εξυπηρετητών, ο έλεγχος σιδηροδρομικών δικτύων, η αυτοματοποίηση εργοστασίων κτλ. Ο τομέας με τις περισσότερες εφαρμογές είναι αυτός των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Τα προβλήματα σχετικά με ηλεκτρονικούς υπολογιστές που καλούνται να επιλύσουν τα δίκτυα Petri αναφέρονται σε επεξεργασία δεδομένων, υπολογιστικά συστήματα ροής δεδομένων, μεταγλωττιστές, ψηφιακά κυκλώματα, συστήματα πολλαπλών πρακτόρων, αναζήτηση και επαλήθευση γνώσης κ.α.

Σήμερα η χρήση των δικτύων Petri έχει επεκταθεί ως προς τις εφαρμογές. Παραδείγματα αυτής της ευρύτερης χρήσης αποτελούν η μελέτη της συμπεριφοράς ομάδων κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, η μελέτη διαδικασιών εξέλιξης και νευρωνικών δικτύων, εφαρμογές στην ιατρική και τη βιοτεχνολογία, η μοντελοποίηση οικολογικών διαδικασιών και περιβαλλοντικών θεμάτων, η μοντελοποίηση βιολογικών διαδικασιών και η βιοχημεία, (Τσιναράκη, 2007).

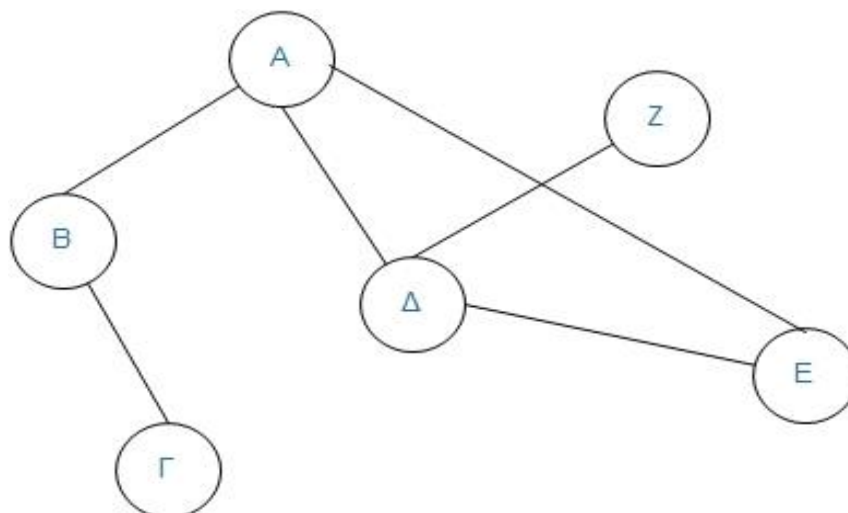
1.2 Θεωρία των γραφημάτων

Επειδή τα δίκτυα Petri αποτελούν μια ειδική περίπτωση γραφημάτων στην παράγραφο αυτή θα γίνει μια ανάλυση των βασικών εννοιών των γραφημάτων καθώς επίσης και των ιδιοτήτων τους.

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα ή απλά γράφημα είναι ένα σύνολο από σημεία, που ονομάζονται κόμβοι του γραφήματος, κάποια από τα οποία ενώνονται μεταξύ τους με γραμμές, τις ακμές του γραφήματος. Ένας επίσημος ορισμός των γραφημάτων είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 1: Καλούμε μη κατευθυνόμενο γράφημα (ή γράφο) κάθε διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$ όπου V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και E είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του V το καθένα εκ των οποίων έχει δύο στοιχεία του V . Καλούμε τα στοιχεία του V κορυφές του G και τα στοιχεία του E ακμές του G . Για κάθε ακμή $e = \{v, u\} \in E$, καλούμε τις κορυφές v και u άκρα της e και λέμε ότι οι κορυφές v και u είναι **γειτονικές** στο G . Δεδομένου ενός γραφήματος G , χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $V(G)$ και $E(G)$ για το σύνολο κορυφών και το σύνολο ακμών του αντίστοιχα, (Θηλυκός, 2014).

Ο αριθμός των ακμών που ενώνουν ένα κόμβο με άλλους κόμβους του γραφήματος λέγεται **βαθμός** του κόμβου. Ένα γράφημα ορίζεται είτε με το διάγραμμά του, είτε ορίζοντας τα V και E , (Μπλέρης και Σταμέλος, 2002). Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται η μορφή ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος.

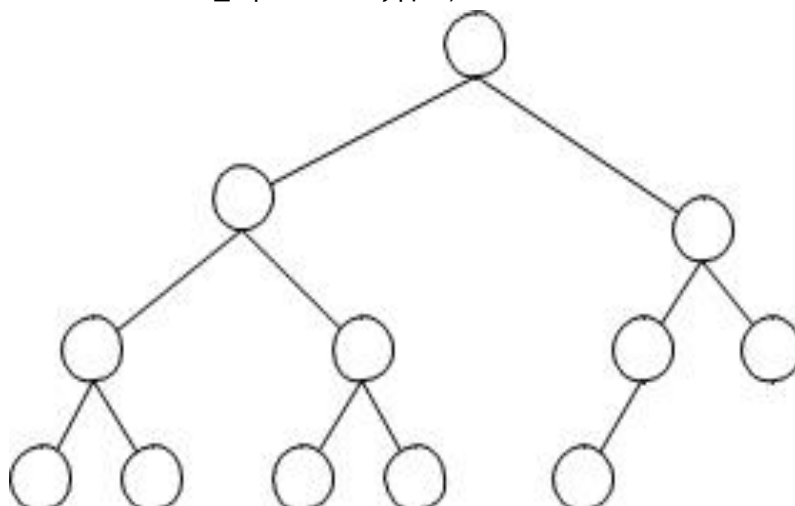


Σχήμα 1 Μη κατευθυνόμενο γράφημα

Πηγή: http://www.dbnet.ece.ntua.gr/~kpatro/theses/geodb/Papadopoulou_thesis.pdf

Ένα γράφημα H λέγεται **υπογράφημα** του G όταν το σύνολο των κόμβων του είναι ένα υποσύνολο των κόμβων του G . Το σύνολο των ακμών του H αποτελείται από τις ακμές του G που ενώνουν τους κόμβους του H , (http://eclass.uth.gr/eclass/modules/document/file.php/INFS170/ΘΕΩΡΙΑ%10ΓΡΑΦΩΝ_1η%20Διάλεξη.pdf).

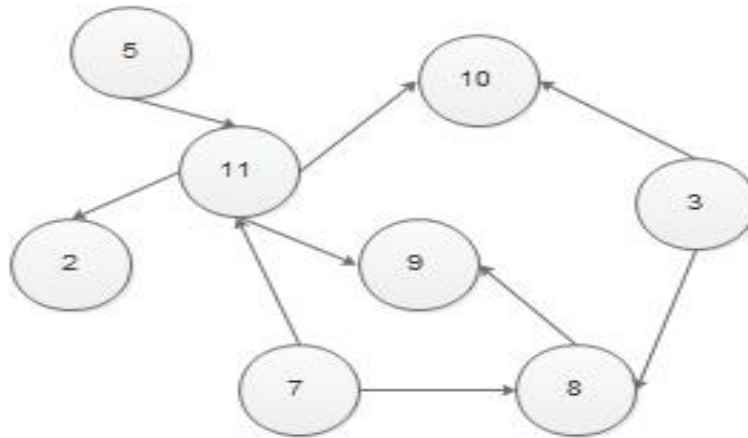
Μονοπάτι (path) σε ένα γράφημα ονομάζεται μια ακολουθία κόμβων που ενώνονται διαδοχικά με ακμές. Όταν κάθε κόμβος του μονοπατιού εμφανίζεται μόνο μια φορά στο μονοπάτι τότε το μονοπάτι ονομάζεται **απλό**. Όταν σε ένα γράφημα υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι για κάθε ζεύγος κόμβων του τότε το γράφημα λέγεται **συνεκτικό** (ή **συνδεδεμένο**). Όταν ένα μονοπάτι αρχίζει και τελειώνει στον ίδιο κόμβο ονομάζεται **κύκλος**. Αν στον κύκλο ο μόνος κόμβος που εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές είναι ο πρώτος (και ταυτόχρονα ο τελευταίος) ο κύκλος ονομάζεται **απλός**. Όταν μια ακμή ξεκινά και καταλήγει στον ίδιο κόμβο ονομάζεται **βρόχος** (loop). Ένα γράφημα ονομάζεται **δέντρο** (tree) αν είναι συνεκτικό και δεν έχει κύκλους (Σχήμα 2). Στα δέντρα υπάρχουν κόμβοι που έχουν βαθμό 1. Αυτοί οι κόμβοι ονομάζονται **φύλλα** του δέντρου, (http://eclass.uth.gr/eclass/modules/document/file.php/INFS170/ΘΕΩΡΙΑ%20ΓΡΑΦΩΝ_3η%20Διάλεξη.pdf).



Σχήμα 2 Γράφημα με τη μορφή δέντρου

Πηγή: [https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%94%CE%AD%CE%BD%CF%84%CF%81%CE%BF_\(%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1_%CE%93%CF%81%CE%AC%CF%86%CF%89%CE%BD\)](https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%94%CE%AD%CE%BD%CF%84%CF%81%CE%BF_(%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1_%CE%93%CF%81%CE%AC%CF%86%CF%89%CE%BD))

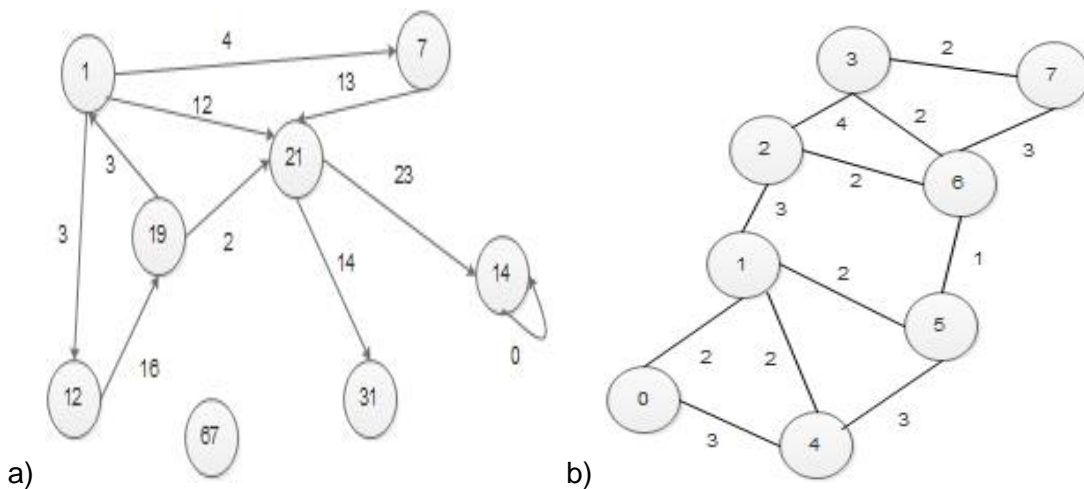
Αν σε ένα γράφημα αντικαταστήσουμε τις ακμές του με βέλη, θεωρήσουμε δηλαδή διατεταγμένα ζεύγη (i,j) αντί για το δισύνολο $\{i,j\}$, παίρνουμε ως αποτέλεσμα ένα **κατευθυνόμενο γράφημα** (directed graph) ή αλλιώς ένα **διγράφημα**, (digraph) (Σχήμα 3), (http://www.softlab.ntua.gr/~fotakis/discrete_math_aegean/graphs_intro.pdf).



Σχήμα 3 Κατευθυνόμενο γράφημα

Πηγή: https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9A%CE%B1%CF%84%CE%B5%CF%85%CE%B8%CF%85%CE%BD%CF%8C%CE%BC%CE%B5%CE%BD%CE%BF%CF%82_%CE%B3%CF%81%CE%AC%CF%86%CE%BF%CF%82

Όταν σε ένα γράφημα χρειάζεται να απεικονίσουμε δεδομένα, όπως για παράδειγμα το κόστος μεταφοράς από τον κόμβο-θέση A στον κόμβο-θέση B, χρησιμοποιούμε **ΕΤΙΚΕΤΕΣ** (labels) οι οποίες επισυνάπτονται ως αριθμοί σε κάθε κόμβο ή ακμή του γραφήματος. Οι ετικέτες αυτές καλούνται βάρη του γραφήματος και το νέο γράφημα ονομάζεται **βεβαρημένο** (Σχήμα 4). Η χρήση βαρών επιτρέπεται σε όλα τα είδη γραφημάτων (κατευθυνόμενα, μη κατευθυνόμενα και δέντρα). Σε ένα βεβαρημένο γράφημα το άθροισμα των συντελεστών βαρους των ακμών ενός μονοπατιού ονομάζεται **μήκος** του μονοπατιού, (Λεφέβρ, 2015).

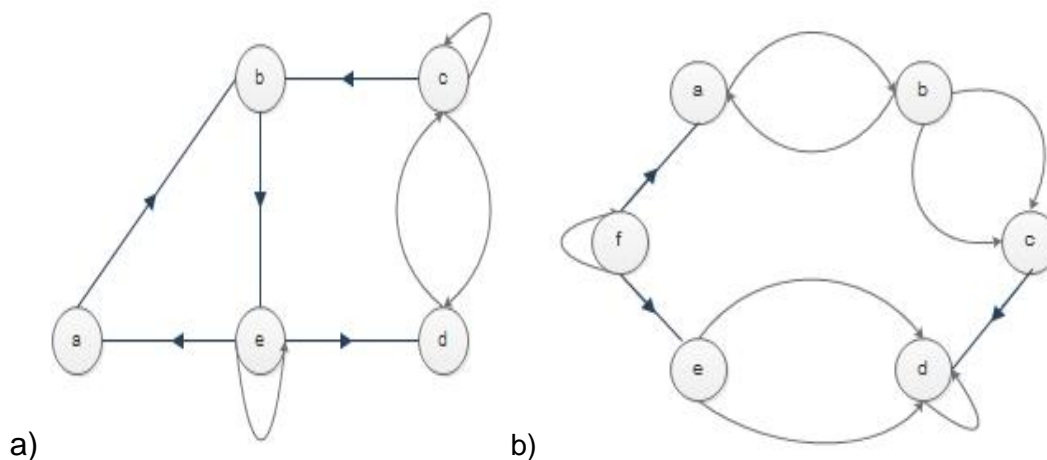


Σχήμα 4 a) Κατευθυνόμενο και b) Μη κατευθυνόμενο βεβαρημένο γράφημα

Πηγή: <http://www.introprogramming.info/english-intro-csharp-book/read-online/chapter-17-trees-and-graphs/>

Δύο κόμβοι ενός γραφήματος που συνδέονται με μια ακμή ονομάζονται **γειτονικοί κόμβοι** (adjacent nodes). Όταν σε ένα γράφημα υπάρχουν δύο ή περισσότερες ακμές, οι οποίες συνδέουν τους ίδιους κόμβους, τότε αυτές ονομάζονται **παράλληλες ακμές**. Όταν σε ένα γράφημα επιτρέπεται η χρήση παράλληλων ακμών, τότε το γράφημα ονομάζεται **πολυγράφημα** (multigraph). Για να χαρακτηριστεί ένα κατευθυνόμενο γράφημα ως πολυγράφημα πρέπει οι παράλληλες ακμές που ενώνουν δύο κόμβους να έχουν την ίδια

κατεύθυνση. Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζονται δύο γραφήματα όπου παρότι και στα δύο επιτρέπεται η χρήση παράλληλων ακμών μόνο το ένα είναι πολυγράφημα. Αυτό συμβαίνει διότι μόνο στο δεύτερο γράφημα οι παράλληλες ακμές (b,c) και (e,d) έχουν την ίδια κατεύθυνση, (http://www.softlab.ntua.gr/~fotakis/discrete_math_aegean/graphs_intro.pdf).



Σχήμα 5 a) Κατευθυνόμενο γράφημα και b) Κατευθυνόμενο πολυγράφημα

Πηγή:<http://math.troplet.com/question/directed-multigraph-or-directed-simple-graph-1070306.html>

1.3 Σκοπός της εργασίας

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται τη χρήση των δικτύων Petri. Σκοπός της εργασίας είναι να γίνει μία εκτενής ανάλυση των δικτύων Petri όσον αφορά τα δομικά στοιχεία τους, τις ιδιότητές τους, τη μοντελοποίηση με τη βοήθεια δικτύων Petri, τις κατηγορίες τους, καθώς και τις περιπτώσεις όπου εφαρμόζονται τα συγκεκριμένα δίκτυα, μέσα από διάφορα παραδείγματα εφαρμογών.

Κεφάλαιο 2: Τα δίκτυα Petri

2.1 Ιστορική αναδρομή

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως η αρχική επινόηση των Δικτύων Petri (ΔP) έγινε το 1962 από τον Carl Adam Petri, στη διδακτορική του διατριβή στη Φυσικομαθηματική σχολή του πανεπιστημίου του Darmstadt στη Γερμανία, με τίτλο “Επικοινωνία με Αυτόματα”, ως ένα μαθηματικό εργαλείο, (Petri, 1966). Συγκεκριμένα, περιγράφηκε με τη χρήση ενός δικτύου η τυπική σχέση μεταξύ των γεγονότων σε ένα σύστημα υπολογιστών. Πρόκειται για την πρώτη φορά που διατυπώνεται μια γενική θεωρία που αφορά τα διακριτά παράλληλα συστήματα.

Οι πρώτες έρευνες σχετικές με τα δίκτυα Petri πραγματοποιήθηκαν στις Ηνωμένες Πολιτείες κατά τη δεκαετία του 1970. Από αυτές προέκυψαν και οι πρώτες τους εφαρμογές. Η ομάδα ερευνητών της Applied Data Research Inc με επικεφαλής τους A.Holt, F.Commoner και M.Hack εργάστηκαν, από το 1968 έως το 1976, σε ένα project σχετικά με τη Θεωρία των Πληροφοριακών Συστημάτων (Information System Theory project). Η ομάδα αυτή ανέπτυξε τη θεωρία συστημάτων η οποία ασχολήθηκε με την αναπαράσταση και την ανάλυση των συστημάτων και της συμπεριφοράς τους. Μέσα από τη δουλειά τους έγινε αντιληπτή η αρχική θεωρία και αναπαράσταση των δικτύων Petri καθώς επίσης και ο τρόπος με τον οποίο τα δίκτυα Petri θα μπορούσαν να επεκταθούν για τη μοντελοποίηση και ανάλυση συστημάτων με ταυτόχρονες λειτουργίες.

Την ίδια περίπου περίοδο πραγματοποιείται έρευνα και στο Computation Structures Group του MIT με επικεφαλής τον καθηγητή J. B. Dennis. Βασιζόμενο στη δουλειά του Petri, το MIT παρουσιάζει πολλές διδακτορικές διατριβές πάνω στο αντικείμενο ενώ επίσης οργανώνει και δύο σημαντικά συνέδρια, (Murata, 1989):

1. Το “Project MAC Conference on Concurrent Systems and Parallel Computation”, στο Woods Hall το 1970, και
2. Το “Petri Nets and Related Methods”, στο MIT το 1975.

Ο Petri επέκτεινε την αρχική του θεωρία ανάγοντάς την σε μια γενική θεωρία συστημάτων που ονομάστηκε Θεωρία Δικτύων και σχετίζεται με την τοπολογία. Παρομοίως ο Holt συνέχισε να μελετά τα δίκτυα Petri αλλά επικέντρωσε την έρευνά του κυρίως στην ανάπτυξη των βασικών εννοιών των ταυτόχρονων συστημάτων. Αντιθέτως, το MIT και άλλα μεγάλα αμερικάνικα ερευνητικά κέντρα επικεντρώθηκαν περισσότερο στις μαθηματικές έννοιες των δικτύων Petri οι οποίες σχετίζονται με τη Θεωρία Αυτομάτων (Automata Theory).

Μετά από αυτό το σημείο, παρατηρείται αυξημένο ενδιαφέρον για τα δίκτυα Petri, που είχε σαν αποτέλεσμα την εξέλιξη και συμπλήρωση της αρχικής θεωρίας. Από τα τέλη της δεκαετίας του 1970 μεγάλο ενδιαφέρον παρατηρείται για τα δίκτυα Petri και στην Ευρώπη. Διοργανώνονται ημερίδες και συνέδρια στα οποία παρουσιάζονται εργασίες ειδικά πάνω στα δίκτυα Petri. Τον Οκτώβριο του 1979 πραγματοποιήθηκε το πρώτο πρόγραμμα προηγμένων διαλέξεων στο Αμβούργο της Δυτικής Γερμανίας. Πρόκειται για μια σειρά διαλέξεων πάνω στη Γενική Θεωρία Δικτύων των Διαδικασιών και Συστημάτων (General Net Theory of Processes and Systems), διάρκειας δύο εβδομάδων, στις οποίες συμμετείχαν 135 ερευνητές περίπου, που προέρχονταν κυρίως από Ευρωπαϊκές χώρες. Οι 17 εργασίες που παρουσιάστηκαν στο συνέδριο δημοσιεύτηκαν στα πρακτικά και αποτέλεσαν κύρια πηγή για έρευνα στον τομέα, (Murata, 1989). Το δεύτερο πρόγραμμα προηγμένων διαλέξεων πραγματοποιήθηκε το Σεπτέμβριο του 1986 στο Bad Honnef της Δυτικής Γερμανίας. Μεταξύ των εργασιών που παρουσιάστηκαν υπήρχαν και δύο πρόσφατα άρθρα από τον Petri, ένα που αφορούσε τα αξιώματα της θεωρίας ταυτοχρονισμού και ένα που περιλάμβανε τις προτάσεις του για περαιτέρω έρευνα.

Το 1980 στο Στρασβούργο πραγματοποιήθηκε η πρώτη Ευρωπαϊκή Ημερίδα με θέμα τις Εφαρμογές και τη Θεωρία των δικτύων Petri. Η χρονιά αυτή αποτελεί ορόσημο, καθώς από τη χρονιά αυτή και έπειτα διεξάγονται κάθε χρόνο ημερίδες σε διαφορετικές πόλεις στην Ευρώπη. Συγκεκριμένα, έχουμε τη διεξαγωγή ημερίδων στο Bad Honnef το 1981, στη Varenna το 1982, στην Toulouse το 1983, στο Aarhus το 1984, στο Esposo το 1985 κλπ. Οι εργασίες από αυτές τις ημερίδες είναι διαθέσιμες μόνο στους συμμετέχοντες. Από τον Ιούλιο του 1985 ξεκίνησε μια άλλη σειρά διεθνών ημερίδων οι οποίες έδιναν έμφαση στα χρονικά και στοχαστικά δίκτυα Petri

και τις εφαρμογές τους στην αξιολόγηση των επιδόσεων. Η πρώτη ημερίδα έλαβε χώρα το 1985 στο Τορίνο της Ιταλίας, η δεύτερη στο Μάντισον του Ουισκόνσιν τον Αύγουστο του 1987, και η τρίτη στο Κιότο της Ιαπωνίας το Δεκέμβριο του 1989, (Murata, 1989).

Τη δεκαετία του 1980 εκδίδονται και τα πρώτα βιβλία σχετικά με τα δίκτυα Petri. Το πρώτο βιβλίο εκδόθηκε το 1981 και περιέχει μια συλλογή μελετών και κειμένων γύρω από τα δίκτυα, (Peterson, 1981) και το δεύτερο το 1985, (Resig, 1985) δείχνει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σχετικά με την έρευνα που πραγματοποιείται στην Ευρώπη. Οι περισσότερες μελέτες αφορούν συστήματα επεξεργασίας δεδομένων που απασχολούσαν τους ερευνητές του τομέα των ηλεκτρονικών υπολογιστών, (Meng & Kugarati, 1999).

Τα δίκτυα Petri χρησιμοποιήθηκαν αρχικά για τη μελέτη των ποιοτικών ιδιοτήτων (qualitative properties) συστημάτων που χαρακτηρίζονται από ταυτοχρονισμό και συγχρονισμό. Για να μπορέσει να γίνει η ποιοτική ανάλυση των συστημάτων χρησιμοποιώντας τα βασικά μοντέλα των δικτύων Petri ήταν απαραίτητος ο εμπλουτισμός τους με χρονικές προδιαγραφές. Ο χρόνος σχετίζεται με την απόδοση ενός συστήματος και αποτελεί σημαντικό παράγοντα στα καταναμημένα και στα ταυτόχρονα συστήματα. Ως αποτέλεσμα υπήρξε η εισαγωγή της έννοιας του χρόνου στα μοντέλα των δικτύων Petri. Επίσης αναπτύχθηκαν και διάφορα άλλα είδη δικτύων Petri με σκοπό να αντιμετωπιστούν προβλήματα που προέκυψαν με την πάροδο του χρόνου, όπως η αυξημένη πολυπλοκότητα σε πολλές περιπτώσεις εφαρμογών τους.

Ωστόσο για να μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν τα δίκτυα Petri στην πράξη έπρεπε να αντιμετωπιστούν δυο ακόμα μειονεκτήματα, (Jensen, 1998):

1. Δεν υπάρχουν διαθέσιμες κατάλληλες δομές για την αναπαράσταση των δεδομένων, με αποτέλεσμα τις περισσότερες φορές τα μοντέλα να γίνονται υπερβολικά μεγάλα.
2. Δεν υπάρχουν ιεραρχικές δομές, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ένα μεγάλο μοντέλο που θα συγκροτείται από ένα σύνολο ανεξάρτητων υπομοντέλων, τα οποία θα συνδέονται μεταξύ τους με καλά ορισμένες διεπαφές.

Τα προβλήματα αυτά επιλύθηκαν στο τέλος της δεκαετίας του 1980 όταν και αναπτύχθηκαν τα δίκτυα Petri υψηλού επιπέδου (High level PNs) και τα ιεραρχικά δίκτυα Petri (Hierarchical PNs). Η πιο διαδεδομένη κατηγορία δικτύων Petri υψηλού επιπέδου είναι τα χρωματισμένα δίκτυα Petri. Τα δίκτυα αυτά ενσωματώνουν τόσο τη δόμηση δεδομένων όσο και την ιεραρχική αποσύνθεση, χωρίς ωστόσο να αλλοιώνουν τις αξίες των πρωτότυπων δικτύων Petri.

Παράλληλα, κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1980, αναλυτές ερεύνησαν τη δυνατότητα χρήσης των δικτύων Petri σε άλλες εφαρμογές, δίνοντας έμφαση στα Αυτόματα Συστήματα Κατεργασιών. Μέσα από αυτή την έρευνα αποδείχθηκε ότι τα δίκτυα Petri αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο για την περιγραφή συστημάτων που εξαρτώνται από τα γεγονότα (Event Driven Systems), (Holloway, Krogh & Giua, 1997). Τα συστήματα αυτά μπορούσαν να είναι ασύγχρονα, να περιέχουν τόσο σειριακές όσο και παράλληλες εργασίες, να περιλαμβάνουν συγκρούσεις, να περιλαμβάνουν αμοιβαίο αποκλεισμό και να είναι μη-ντετερμινιστικά. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται Συστήματα Διακριτών Γεγονότων ή Δυναμικά Συστήματα Διακριτών Γεγονότων (Discrete Event Dynamic Systems - DEDS), (Ben-Naoum, Boel, Bongaerts et al, 1995).

Από τη δεκαετία του 1990 και έπειτα, οι περισσότερες έρευνες που πραγματοποιήθηκαν καθώς επίσης και πολλά βιβλία που γράφθηκαν ασχολήθηκαν με τη χρήση των δικτύων Petri σε προβλήματα του τομέα της μηχανικής όπως η ανάλυση, μοντελοποίηση, αποτίμηση επιδόσεων και έλεγχος συστημάτων παραγωγής, η μοντελοποίηση και σύνθεση μεθόδων για έλεγχο συστημάτων μέσω διακριτών γεγονότων, και η μοντελοποίηση και σύνθεση εργασιών για έλεγχο καταναμημένων συστημάτων, (Αβραμίδου, 2004).

2.2 Ορισμός των δικτύων Petri

Δεν υπάρχει μόνο ένας ορισμός που να περιλαμβάνει όλα τα δίκτυα Petri. Στην παράγραφο αυτή θα παρατεθούν διάφοροι ορισμοί που έχουν προταθεί για τα δίκτυα Petri.

Το βασικότερο μοντέλο από το οποίο προέκυψαν όλες οι παραλλαγές και επεκτάσεις των δικτύων Petri είναι τα **συνήθη δίκτυα Petri** (Ordinary Petri Nets - OPNs). Το μοντέλο αυτό είναι ανεξάρτητο από την έννοια του χρόνου, αλλά παρουσιάζει τις ακολουθίες εκτέλεσης διακριτών

γεγονότων εντός του συστήματος. Επίσης έχει τη δυνατότητα να αναπαραστήσει τη λογική σύνδεση μεταξύ των συστατικών μερών του συστήματος αλλά και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους. Ένα σύνηθες δίκτυο Petri είναι ένα προσανατολισμένο γράφημα που ορίζεται από μια πεντάδα στοιχείων $\Delta P = \{P, T, I, O, M_0\}$, όπου, (Δημητριάδου, 2013):

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο και μη κενό σύνολο από θέσεις.
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ είναι ένα πεπερασμένο και μη κενό σύνολο από μεταβάσεις.
- Η τομή των συνόλων των θέσεων και των μεταβάσεων είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $P \cap T = \emptyset$, ενώ η ένωσή τους ορίζει το σύνολο V των κόμβων του δικτύου δηλαδή $P \cup T = V$.
- $I : (P \times T) \rightarrow \mathbb{N}$ είναι ο πίνακας συμβάντων εισόδου, που αντιστοιχεί στο σύνολο των τόξων με κατεύθυνση από θέσεις προς μεταβάσεις.
- $O : (P \times T) \rightarrow \mathbb{N}$ είναι ο πίνακας συμβάντων εξόδου, που αντιστοιχεί στο σύνολο των τόξων με κατεύθυνση από μεταβάσεις προς θέσεις.
- Το σύνολο των τόξων ενός δικτύου Petri είναι $A = O \cup I$.
- Το M_0 συμβολίζει το αρχικό μαρκάρισμα του ΔP , δηλαδή την αρχική κατανομή των διακριτικών στις θέσεις του.

Στα συνήθη δίκτυα Petri, δεδομένης μιας κατανομής διακριτικών, τα οποία θα ορίσουμε σε επόμενη ενότητα, M ο κανόνας ενεργοποίησης μιας θέσης είναι: $M(p) \geq I(p, t) \forall p \in P$, όπου $M(p)$ είναι το μαρκάρισμα της θέσης p . Αντίστοιχα ο κανόνας πυροδότησης μιας θέσης είναι: $M'(p) = M(p) - I(p, t) + O(p, t) \forall p \in P$ όπου M' είναι το νέο μαρκάρισμα του δικτύου και $M'(p)$ το νέο μαρκάρισμα της θέσης p .

Η ακολουθία πυροδοτήσεων μιας σειράς από μεταβάσεις $t_1, t_2, t_3, \dots, t_m$ συμβολίζεται με $\sigma_m = t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot \dots \cdot t_m$. Το σύνολο όλων των ακολουθιών πυροδοτήσεων συμβολίζεται με T^* .

Εναλλακτικά, ένα δίκτυο Petri μπορεί να οριστεί ως μια αλγεβρική δομή που αποτελείται από την τετράδα $\Delta P = \{P, T, F, W\}$, όπου, (Αβραμίδου, 2004):

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο και μη κενό σύνολο από θέσεις.
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ είναι ένα πεπερασμένο και μη κενό σύνολο από μεταβάσεις.
- Η τομή των συνόλων των θέσεων και των μεταβάσεων είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $P \cap T = \emptyset$, ενώ η ένωσή τους ορίζει το σύνολο V των κόμβων του δικτύου δηλαδή $P \cup T = V$.
- $F \subset (P \times T) \cup (T \times P)$ αναπαριστά το σύνολο των τόξων του δικτύου.
- $W: F \rightarrow \mathbb{N}$ αντιστοιχεί ένα βάρος σε κάθε τόξο του δικτύου.

Αν στον παραπάνω ορισμό αντικαταστήσουμε τα διανύσματα F και W με δυο συναρτήσεις πρόσπτωσης (incidence functions), τη συνάρτηση εισόδου (input function) Pre και τη συνάρτηση εξόδου (output function) $Post$, προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός. Ένα δίκτυο Petri είναι μια αλγεβρική δομή η οποία αποτελείται από την τετράδα $\Delta P = \{P, T, Pre, Post\}$, όπου, (Δημάδης, 2008):

- P : το πεπερασμένο, μη κενό σύνολο $n=|P|$ των θέσεων.
- T : το πεπερασμένο, μη κενό σύνολο $m=|T|$ των μεταβάσεων.
- $Pre: P \times T \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{0\}$ η συνάρτηση εισόδου.
- $Post: T \times P \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{0\}$ η συνάρτηση εξόδου

Στην περίπτωση αυτή, τα τόξα του δικτύου ορίζονται από τις συναρτήσεις πρόσπτωσης, όταν φυσικά αυτές δεν περιέχουν μηδενικά στοιχεία. Έτσι όταν $Pre(p_i, t_j) \neq 0$, τότε τα $Pre(p_i, t_j)$ είναι τα βέλη που κατευθύνονται από τη θέση p_i προς τη μετάβαση t_j . Αντίστοιχα αν $Post(t_k, p_m) \neq 0$, τότε τα $Post(t_k, p_m)$ είναι τα βέλη που κατευθύνονται από τη μετάβαση t_k προς τη θέση p_m .

Το σύνολο των θέσεων εισόδου μιας μετάβασης t , δίνεται από τον τύπο: $t = \{p \in P | Pre(p, t) > 0\}$. Αντίστοιχα το σύνολο των θέσεων εξόδου μιας μετάβασης t , δίνεται από τον τύπο: $t = \{p \in P | Post(t, p) > 0\}$.

Το σύνολο των μεταβάσεων που είναι εισοδοί μιας θέσης p , δίνεται από τον τύπο: $p = \{t \in T | Post(t, p) > 0\}$. Το σύνολο των μεταβάσεων που είναι έξοδοι μιας θέσης p , δίνεται από τον τύπο: $p = \{t \in T | Pre(p, t) > 0\}$.

Μια μετάβαση t_m είναι ενεργοποιημένη, για δεδομένο μαρκάρισμα του δικτύου, όταν ισχύει ότι $M \geq Pre(t_m)$, ενώ ο κανόνας πυροδότησης ορίζεται ως $M' = M + Post(t_m) - Pre(t_m)$.

Ένας άλλος ορισμός θεωρεί τα δίκτυα Petri ως διμερείς προσανατολισμένα γραφήματα $G = (V, E)$, όπου, (Δημάδης, 2008):

- $V = P \cup T$ ένα σύνολο από κόμβους, με P να αντιστοιχεί στο πεπερασμένο μη κενό σύνολο $n=|P|$ των θέσεων και T στο πεπερασμένο μη κενό σύνολο $m=|T|$ των μεταβάσεων. Επίσης οι κόμβοι των θέσεων δεν συμπίπτουν με τους κόμβους των μεταβάσεων, δηλαδή $P \cap T = \emptyset$.
- $E = (v_i, v_j, w)$ το σύνολο των προσανατολισμένων τόξων, όπου $v_i, v_j \in V$ και $w \in W: F \rightarrow \mathbb{N}$ αντιστοιχεί ένα βάρος σε κάθε τόξο του δικτύου.

Τέλος, ένας απλός ορισμός έχει διατυπωθεί από τον Vander Aalst (1998), σύμφωνα με τον οποίο ένα δίκτυο Petri είναι μια τριάδα (P, T, F) όπου:

- P είναι ένα πεπερασμένο σύνολο θέσεων.
- T είναι ένα πεπερασμένο σύνολο μεταβάσεων τέτοιο ώστε $P \cap T = \emptyset$.
- $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ είναι ένα σύνολο από τόξα που συνδέουν θέσεις με μεταβάσεις και αντίστροφα.

2.3 Δομικά στοιχεία των δικτύων Petri

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο τα δίκτυα Petri αποτελούν μια ειδική περίπτωση γραφημάτων. Συγκεκριμένα είναι διμερείς κατευθυνόμενα γραφήματα. Ο όρος διμερείς δηλώνει ότι διαθέτουν δύο είδη κόμβων για τα οποία χρησιμοποιούνται διαφορετικά σύμβολα με σκοπό να τα διακρίνουμε, και επίσης δύο κόμβοι του ίδιου είδους δε συνδέονται ποτέ μεταξύ τους. Το πρώτο είδος κόμβων ονομάζεται **θέση** ή **κατάσταση** ή **τόπος** (place), ενώ το δεύτερο είδος ονομάζεται **μετάβαση** (transition). Οι θέσεις αναπαρίστανται με κύκλους, ενώ οι μεταβάσεις αναπαρίστανται με κατακόρυφες γραμμές ή ορθογώνια. Τα στοιχεία αυτά συνδέονται μεταξύ τους με ακμές. Σε ένα δίκτυο Petri οι ακμές είναι πάντα κατευθυνόμενες και ονομάζονται **τόξα** (arcs). Ένα άλλο δομικό στοιχείο των δικτύων Petri είναι οι **τελείες** ή **διακριτικά** (tokens) (Σχήμα 6). Τα διακριτικά αλληλεπιδρούν με τους δύο τύπους κόμβων, από τους οποίους αποτελείται το δίκτυο, ενώ η δυναμικότητα του συστήματος εξασφαλίζεται με την κυκλοφορία τους εντός του δικτύου, (Δημητριάδου, 2013).



Σχήμα 6 Δομικά στοιχεία των δικτύων Petri

Πηγή: <http://nemertes.lis.upatras.gr/jsui/bitstream/10889/1509/1/diplomatikh.pdf>

Οι θέσεις αντιπροσωπεύουν τους πόρους και τις καταστάσεις του συστήματος. Αποτελούν τα παθητικά στοιχεία του δικτύου και σε αυτές αποθηκεύονται τα υλικά συστατικά του συστήματος, δηλαδή λειτουργούν ως αποθήκες. Όταν κάθε θέση μπορεί να δεχθεί ένα συγκεκριμένο αριθμό από διακριτικά τότε το δίκτυο θεωρείται πεπερασμένης χωρητικότητας (finite capacity net). Αντιθέτως, όταν κάθε θέση μπορεί να δεχθεί ένα άπειρο αριθμό από διακριτικά, τότε το δίκτυο θεωρείται ότι είναι άπειρης χωρητικότητας (infinite capacity net), (Στυλιανού, 2013).

Οι μεταβάσεις αντιπροσωπεύουν τα γεγονότα ή τις εργασίες που συμβαίνουν στο σύστημα, όπως για παράδειγμα τη μετάδοση ενός μηνύματος ή την αποστολή ενός πακέτου δεδομένων. Αποτελούν τα ενεργά στοιχεία του συστήματος και δείχνουν τη μεταβολή της κατάστασής του. Οι μεταβάσεις συνδέουν θέσεις και μπορούν να έχουν μηδενική διάρκεια, σταθερή διάρκεια ή μεταβλητή (στοχαστική) διάρκεια. Όταν μια μετάβαση έχει μηδενική διάρκεια ονομάζεται **άμεση μετάβαση** (immediate transition). Όταν σε ένα δίκτυο έχουμε μόνο

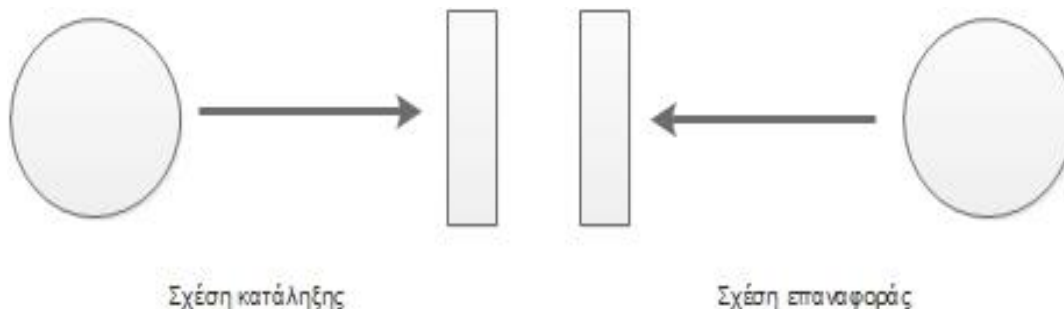
καθορισμένες, σταθερές διάρκειες μεταβάσεων αυτό ονομάζεται **ντετερμινιστικά χρονισμένο** δίκτυο Petri (Deterministic Timed PN), ενώ όταν έχουμε μόνο διάρκειες μεταβάσεων που αποτελούν τυχαίες τιμές γνωστών κατανομών το δίκτυο ονομάζεται **στοχαστικά χρονισμένο** δίκτυο Petri (Stochastic Timed PN). Τέλος, αν έχουμε άμεσες και στοχαστικές μεταβάσεις το δίκτυο ονομάζεται **γενικευμένο στοχαστικό** δίκτυο Petri (Generalized Stochastic PN), (Δημάδης, 2008· Δημητριάδου, 2013).

Οι θέσεις εισόδου μιας μετάβασης αποτελούν τις προϋποθέσεις ή τα απαραίτητα δεδομένα εισόδου για την πραγματοποίηση του γεγονότος που αντιστοιχεί στη μετάβαση. Οι θέσεις εξόδου μιας μετάβασης αποτελούν τα αποτελέσματα του γεγονότος που ορίζει τη μετάβαση. Όταν μια μετάβαση δεν έχει θέσεις εισόδου ονομάζεται **πηγή** (source transition), ενώ όταν δεν έχει θέσεις εξόδου ονομάζεται **δεξαμενή** (sink transition). Το σύνολο των θέσεων και των μεταβάσεων αναπαριστούν τη στατική δομή ενός δικτύου Petri, (Βροντάκης, 2015).

Τα τόξα σε ένα δίκτυο Petri αναπαριστούν, (Δημητριάδου, 2013):

- ✓ Τη φυσική και λογική σύνδεση μεταξύ θέσεων και μεταβάσεων,
- ✓ Τις απαιτήσεις πόρων για την πραγματοποίηση μεταβάσεων, και
- ✓ Τη σειρά με την οποία θα εκτελεστούν οι εργασίες εντός του δικτύου.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, τα τόξα δεν συνδέουν ποτέ δύο θέσεις ή δύο μεταβάσεις, αλλά συνδέουν πάντα μία θέση με μία μετάβαση και αντίστροφα. Έτσι, είτε ξεκινούν από μία θέση και καταλήγουν σε μία μετάβαση, ορίζοντας μια σχέση κατάληξης, είτε ξεκινούν από μία μετάβαση και καταλήγουν σε μία θέση, ορίζοντας μια σχέση επαναφοράς (Σχήμα 7). Στα τόξα του δικτύου ανατίθενται ακέραιοι αριθμοί που αντιστοιχούν στο βάρος τους. Όταν σε ένα τόξο δεν εμφανίζεται κάποιος αριθμός τότε το βάρος του θεωρείται μοναδιαίο, δηλαδή 1, (Δημητριάδου, 2013).



Σχήμα 7 Σχέσεις στα δίκτυα Petri

Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

Τα διακριτικά αποθηκεύονται και εμφανίζονται μέσα στις θέσεις του δικτύου. Η ύπαρξη ενός διακριτικού μέσα σε μια θέση δηλώνει τη διαθεσιμότητα κάποιου πόρου. Ο καταμερισμός των διακριτικών στις θέσεις του δικτύου ονομάζεται **μαρκάρισμα** (marking). Η αλλαγή αυτού του καταμερισμού γίνεται με τη μετακίνηση των διακριτικών χρησιμοποιώντας τα τόξα του δικτύου. Το βάρος του τόξου αντιστοιχεί στον αριθμό των διακριτικών που προστίθενται ή αφαιρούνται στη θέση εισόδου ή εξόδου ανάλογα με το είδος της μετάβασης, δηλαδή το είδος της σχέσης που πραγματοποιείται, (Δημητριάδου, 2013).

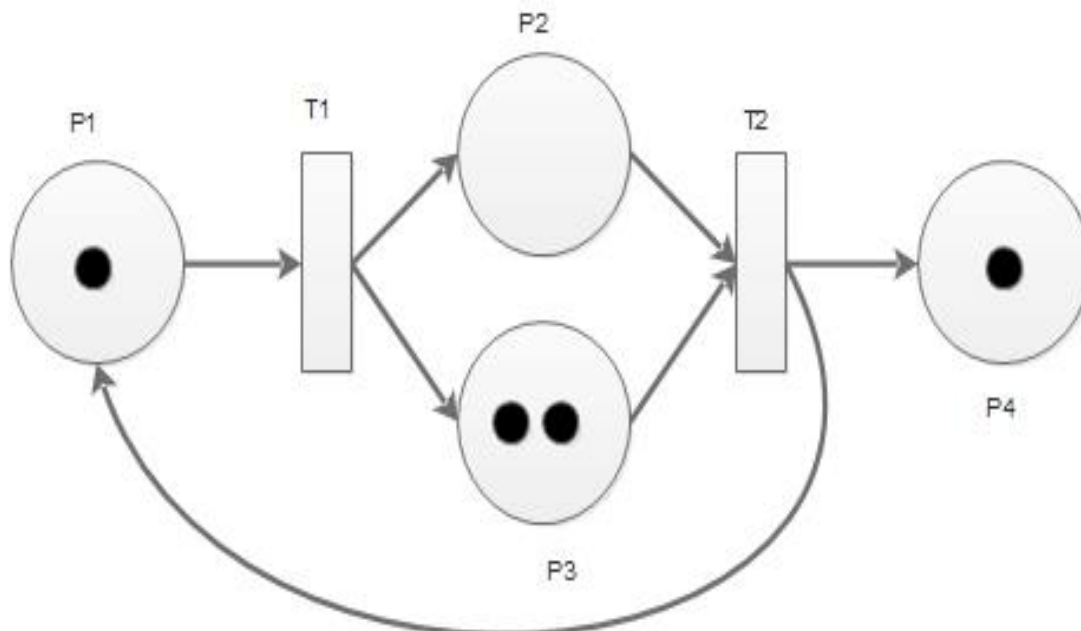
Για να πραγματοποιηθεί μια μετακίνηση απαιτείται η **ενεργοποίηση** (enabling) μιας μετάβασης. Μία μετάβαση **ενεργοποιείται** όταν κάθε θέση εισόδου της έχει τουλάχιστον ένα διακριτικό. Ο αριθμός των διακριτικών που απαιτούνται ορίζεται από έναν **κανόνα ενεργοποίησης**. Η ενεργοποίηση προκαλεί την **πυροδότηση** της μετάβασης, δεσμεύοντας ένα ή περισσότερα διακριτικά από κάθε θέση εισόδου και απελευθερώνοντας ένα ή περισσότερα διακριτικά σε κάθε θέση εξόδου. Ο αριθμός των διακριτικών που δεσμεύονται και απελευθερώνονται ορίζεται από τα βάρη των τόξων του δικτύου. Ωστόσο, μια ενεργοποιημένη μετάβαση δεν είναι απαραίτητο και να πυροδοτηθεί, καθώς η συμπεριφορά του μοντέλου είναι μη ντετερμινιστική. Η πυροδότηση ορίζεται από ένα **κανόνα πυροδότησης** (firing rule). Η χρονική διάρκεια κάθε πυροδότησης θεωρείται μηδενική. Επίσης δεν είναι δυνατόν μια πυροδότηση να πραγματοποιηθεί τμηματικά, δηλαδή μόνο ορισμένα διακριτικά να προστεθούν ή να αφαιρεθούν από τις θέσεις εισόδου και εξόδου της μετάβασης αντίστοιχα, (Γερογιάννης,

2001). Η σειρά με την οποία πυροδοτούνται ένα σύνολο από μεταβάσεις ονομάζεται **ακολουθία πυροδοτήσεων** (firing sequence). Στα δίκτυα Petri πεπερασμένης χωρητικότητας υπάρχουν δύο τρόποι πυροδότησης μεταβάσεων, (Αβραμίδου, 2004):

- 1) Η **αυστηρή πυροδότηση** στην οποία μια ενεργοποιημένη μετάβαση πυροδοτείται μόνο αν μετά την πυροδότησή της ο αριθμός από διακριτικά σε κάθε θέση του δικτύου δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα της θέσης.
- 2) Η **ασθενής πυροδότηση** στην οποία μια ενεργοποιημένη μετάβαση πυροδοτείται ανεξάρτητα από τη χωρητικότητα κάθε θέσης του δικτύου.

Όταν σε ένα δίκτυο γίνεται ένα αρχικό μαρκάρισμα και στη συνέχεια αυτό έχει τη δυνατότητα να παράγει διακριτικά επ' άπειρον, τότε το δίκτυο ονομάζεται **κλειστό**, ενώ όταν η παραγωγή διακριτικών αντιστοιχεί σε ένα αρχικό μαρκάρισμα και ενδέχεται να σταματήσει κατά τη διάρκεια λειτουργίας του δικτύου τότε το δίκτυο ονομάζεται **ανοιχτό**. Με τη χρήση των διακριτικών είναι δυνατόν να περιγραφεί η κατάσταση του δικτύου σε μια δεδομένη στιγμή καθώς επίσης και να σηματοδοτηθεί η εξέλιξη της διαδικασίας, (Τσιναράκη, 2007).

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται ένα παράδειγμα ενός δικτύου Petri που διαθέτει τέσσερις θέσεις (P_1, P_2, P_3 και P_4), δύο μεταβάσεις (T_1 και T_2) και τέσσερα διακριτικά (tokens) τα οποία τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή (στιγμιότυπο) βρίσκονται στις θέσεις P_1, P_3 και P_4 .



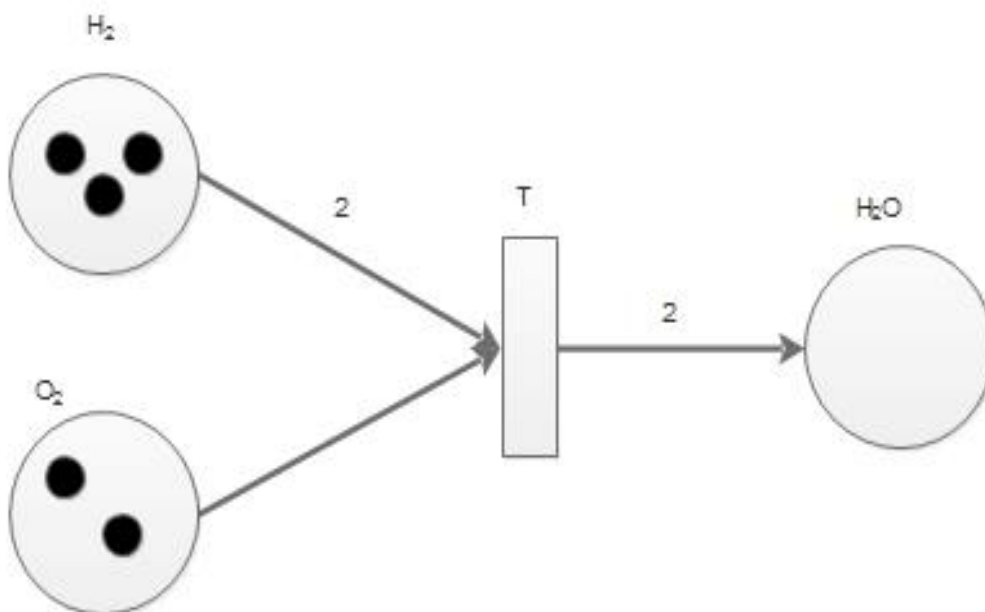
Σχήμα 8 Παράδειγμα δικτύου Petri με χρήση διακριτικών

Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Petri_net

Σύμφωνα με όσα αναλύθηκαν προηγουμένως, τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή ικανοποιείται μόνο η μετάβαση T_1 , καθώς η θέση P_1 , η οποία αποτελεί τη θέση εισόδου για την μετάβαση αυτή, διαθέτει ένα διακριτικό που είναι και το απαιτούμενο για την ενεργοποίησή της. Αντίθετα, η μετάβαση T_2 δεν ικανοποιείται και άρα δεν μπορεί να ενεργοποιηθεί, παρότι υπάρχουν διακριτικά στη θέση P_3 , διότι για την ενεργοποίησή της απαιτούνται δύο διακριτικά, ένα στη θέση P_3 και ένα στη θέση P_2 .

Θα προσπαθήσουμε να επεξηγήσουμε περαιτέρω την ενεργοποίηση και την πυροδότηση ενός δικτύου Petri, με αποτέλεσμα τη μετακίνηση των διακριτικών, με την αναπαράσταση της χημικής ένωσης του νερού μέσα από ένα δίκτυο Petri, στο οποίο θα γίνεται και χρήση βαρών στα τόξα του δικτύου. Όπως είναι γνωστό η ένωση δύο μορίων υδρογόνου (H_2) με ένα μόριο οξυγόνου (O_2) παράγουν δύο μόρια νερού (H_2O). Επομένως ο κανόνας πυροδότησης του δικτύου θα είναι $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$.

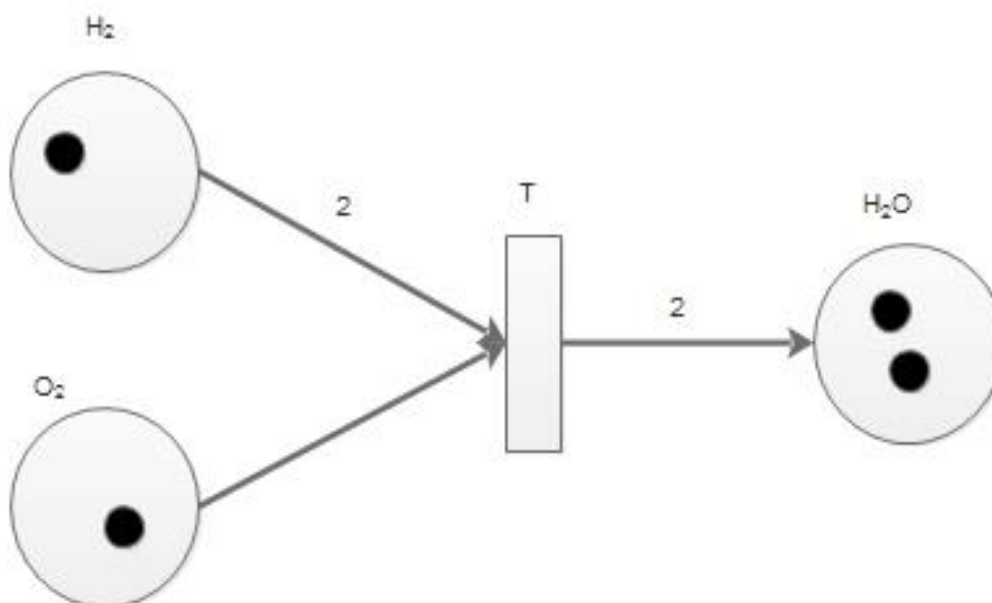
Έστω λοιπόν ότι στο δίκτυο που αναπαριστά την χημική ένωση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχουμε αρχικά τρία μόρια υδρογόνου και δύο μόρια οξυγόνου που εμφανίζονται εντός του δικτύου ως διακριτικά.



Σχήμα 9 Παράδειγμα χημικής ένωσης νερού με χρήση του δικτύου Petri (πριν τη μετάβαση)

Πηγή: <http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/1509/1/diplomatikh.pdf>

Στην περίπτωση αυτή η μετάβαση T είναι ενεργοποιημένη, διότι για την ενεργοποίησή της ο κανόνας ενεργοποίησης ορίζει ότι απαιτούνται δύο διακριτικά στη θέση εισόδου που αποτελεί το υδρογόνο και ένα διακριτικό στη θέση εισόδου που αποτελεί το οξυγόνο. Επομένως, η μετάβαση T θα πυροδοτηθεί και η πυροδότησή της, πάλι σύμφωνα με τον κανόνα, θα μεταφέρει δύο διακριτικά στη θέση εξόδου της που αντιπροσωπεύει τα μόρια του νερού. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 10 Παράδειγμα χημικής ένωσης νερού με χρήση του δικτύου Petri (μετά τη μετάβαση)

Πηγή: <http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/1509/1/diplomatikh.pdf>

2.4 Ιδιότητες των δικτύων Petri

Τα δίκτυα Petri ως μαθηματικό εργαλείο διαθέτουν ένα μεγάλο αριθμό από ιδιότητες. Μέσα από αυτές μπορεί να περιγραφεί η δυναμική συμπεριφορά του δικτύου. Επίσης μας επιτρέπουν να αναγνωρίσουμε την παρουσία ή την απουσία ενός συνόλου λειτουργικών χαρακτηριστικών του συστήματος. Οι ιδιότητες χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, (Δημητριάδου, 2013):

- Τις ιδιότητες συμπεριφοράς (Behavioral properties) και
- Τις ιδιότητες δομής (Structural properties)

Ο διαχωρισμός αυτός γίνεται ανάλογα με το εάν οι ιδιότητες εξαρτώνται ή όχι από το αρχικό μαρκάρισμα του δικτύου. Συγκεκριμένα, οι ιδιότητες συμπεριφοράς εξαρτώνται από το αρχικό μαρκάρισμα του δικτύου, ενώ οι ιδιότητες δομής εξαρτώνται μόνο από την τοπολογία, δηλαδή τη δομή, του δικτύου. Παραλλαγές κάποιων ιδιοτήτων μπορούν να ανήκουν και στις δύο κατηγορίες.

Οι ιδιότητες συμπεριφοράς περιλαμβάνουν την Προσβασιμότητα (Reachability), την k-Περιοριστικότητα (k-Boundedness), την Ασφάλεια (Safety), τη Ζωτικότητα (Liveness), την Αντιστρεψιμότητα (Reversibility), την Οικεία κατάσταση (Homestate), τη Δικαιοσύνη (Fairness), την Κάλυψη (Coverability), την Επιμονή (Persistence) και την Απόσταση συγχρονισμού (Synchronic distance). Οι ιδιότητες δομής περιλαμβάνουν τη Συντηρητικότητα (Conservativeness), τη Δομική Περιοριστικότητα (Structural Boundedness), τη Δομική Ζωτικότητα (Structural Liveness), τη Συνέπεια (Consistence) και την Επαναληπτικότητα (Repetitiveness). Η Δομική Περιοριστικότητα και η Δομική Ζωτικότητα αποτελούν επεκτάσεις των αντίστοιχων ιδιοτήτων συμπεριφοράς και ισχύουν για οποιοδήποτε πεπερασμένο μαρκάρισμα, (Τσιναράκη, 2007· Αβραμίδου, 2004· Δημάδης, 2008· Van der Aalst, 1998· Murata, 1989).

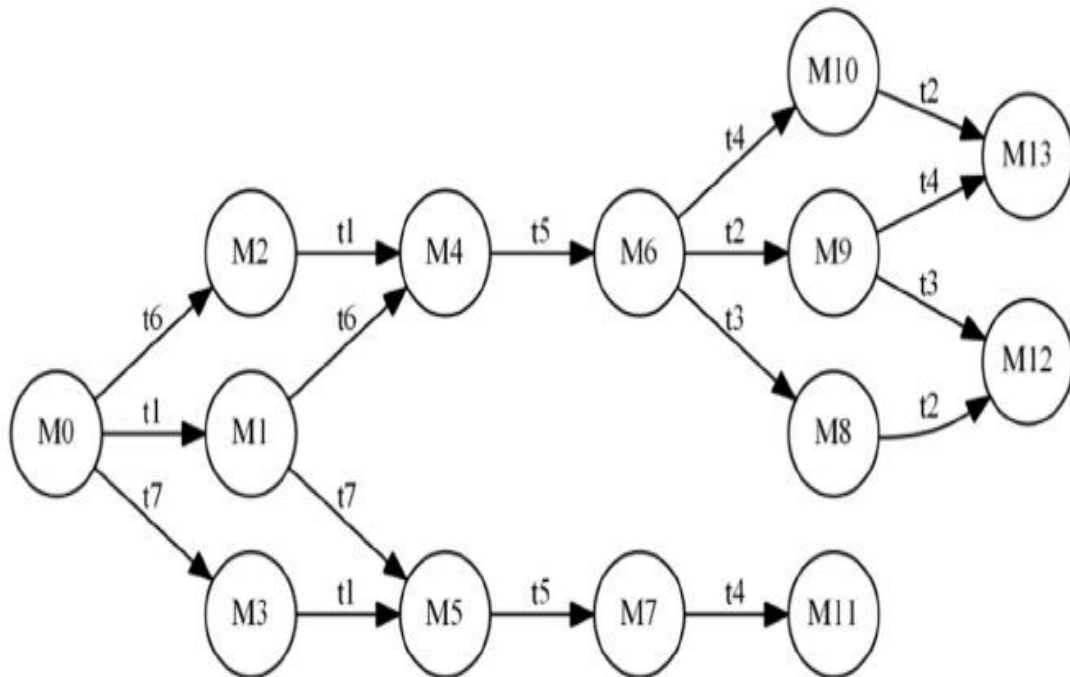
2.4.1 Προσβασιμότητα (Reachability)

Πολλές φορές σε ένα δίκτυο είναι χρήσιμο να εντοπιστούν όλα τα δυνατά μαρκάρια τα οποία μπορούν να προκύψουν από το αρχικό μαρκάρισμα M_0 . Με τον όρο προσβασιμότητα εννοούμε την δυνατότητα μετάβασης από ένα μαρκάρισμα του δικτύου σε ένα άλλο. Έτσι λοιπόν ορίζουμε το μαρκάρισμα M_k **προσβάσιμο** από το M_0 όταν υπάρχει κάποια ακολουθία πυροδοτήσεων σ που οδηγεί από το M_0 στο M_k . Συμβολικά αυτό γράφεται με τη σχέση $M_0 \rightarrow M_k$, (Κλεάνθους, 2012· Yilmaz, 2008).

Σε περίπτωση που για τη μετάβαση από το M_0 στο M_k αρκεί η πυροδότηση μόνο μιας ενεργοποιημένης μετάβασης, τότε αυτό ορίζεται ως **άμεσα προσβάσιμο** (immediately reachable) από το M_0 . Το σύνολο των δυνατών μαρκαρισμάτων ενός δικτύου N , με αρχικό μαρκάρισμα M_0 , ονομάζεται **σύνολο προσιότητας** (reachability set) του δικτύου και συμβολίζεται με $R(N, M_0)$, (Κλεάνθους, 2012· Yilmaz, 2008).

Σε ένα δίκτυο Petri ο έλεγχος σχετικά με το εάν ένα δεδομένο μαρκάρισμα M ανήκει στο σύνολο όλων εκείνων των μαρκαρισμάτων που είναι προσιτά από το αρχικό μαρκάρισμα M_0 λέγεται πρόβλημα προσιότητας (reachability problem). Το πρόβλημα αυτό απαιτεί εκθετικό χρόνο προκειμένου να λυθεί, εκτός από την περίπτωση όπου δεν εμφανίζονται **συγκρούσεις** (δύο μεταβάσεις που έχουν μία κοινή θέση στα σύνολα εισόδου τους, η οποία θέση έχει λιγότερα διακριτικά (tokens) από τα απαιτούμενα για την πυροδότηση και των δύο) εντός του δικτύου όπου το πρόβλημα μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, (Αβραμίδου, 2004). Η προσιότητα αποτελεί μια σημαντική ιδιότητα, ιδιαίτερα σε συστήματα κρίσιμα σε ασφάλεια (safety critical systems), όπου μια σειρά από συνθήκες δεν πρέπει να ικανοποιηθούν για λόγους ασφαλείας, και σε συστήματα με χρονικές απαιτήσεις όπου μπορεί να αναδείξει την παραβίαση χρονικών προθεσμιών, (Αβραμίδου, 2004).

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα δίκτυο με προσβασιμότητα:



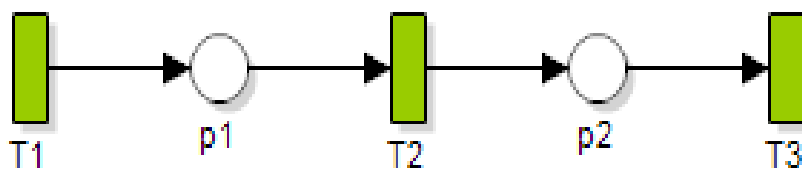
Σχήμα 11 Δίκτυο Petri με προσβασιμότητα

Πηγή: https://www.researchgate.net/figure/274838823_fig1_Fig-2-Reachability-graph-for-an-example-Petri-net

2.4.2 k-Περιοριστικότητα (k-Boundedness)

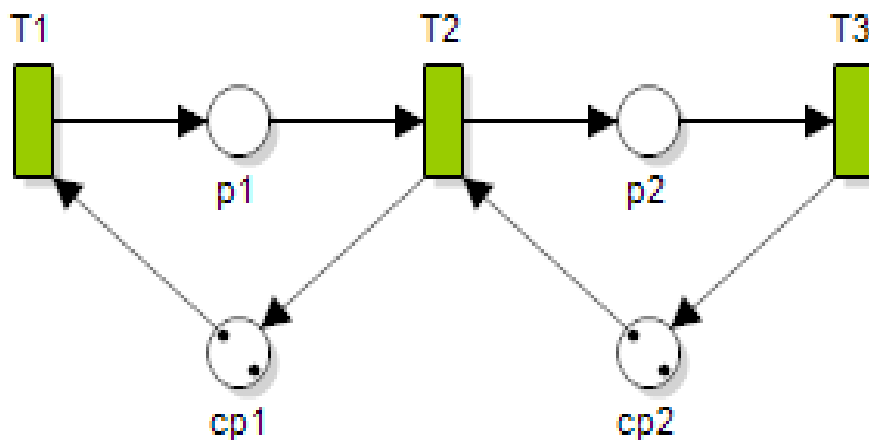
Η ιδιότητα αυτή ορίζει ότι σε ένα δίκτυο Petri με αρχικό μαρκάρισμα M_0 και σύνολο προσιτότητας $R(N, M_0)$, κάθε κόμβος του δικτύου μπορεί να δεχθεί το πολύ k διακριτικά για οποιοδήποτε προσιτό μαρκάρισμα M από το M_0 . Η ιδιότητα της k -περιοριστικότητας εξασφαλίζει ότι ο αριθμός των καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί ένα σύστημα είναι πεπερασμένος. Συγκεκριμένα ο αριθμός αυτός δεν υπερβαίνει τις $(k+1)^N$ καταστάσεις. Η επιβεβαίωση της k -περιοριστικότητας σε ένα σύστημα εγγυάται ότι δεν υπάρχει περίπτωση υπέρβασης της χωρητικότητας των πεπερασμένων θέσεων του. Θεωρούμε ότι ένα δίκτυο είναι **δομικά περιορισμένο** (structurally bounded) αν είναι πεπερασμένο για κάθε αρχικό μαρκάρισμα του M_0 , (Αβραμίδου, 2004 Yilmaz, 2008).

Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται δύο δίκτυα Petri, το ένα με 0-περιοριστικότητα και το άλλο με 2-περιοριστικότητα:



Σχήμα 12 Δίκτυο Petri με 0-περιοριστικότητα

Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Petri_net

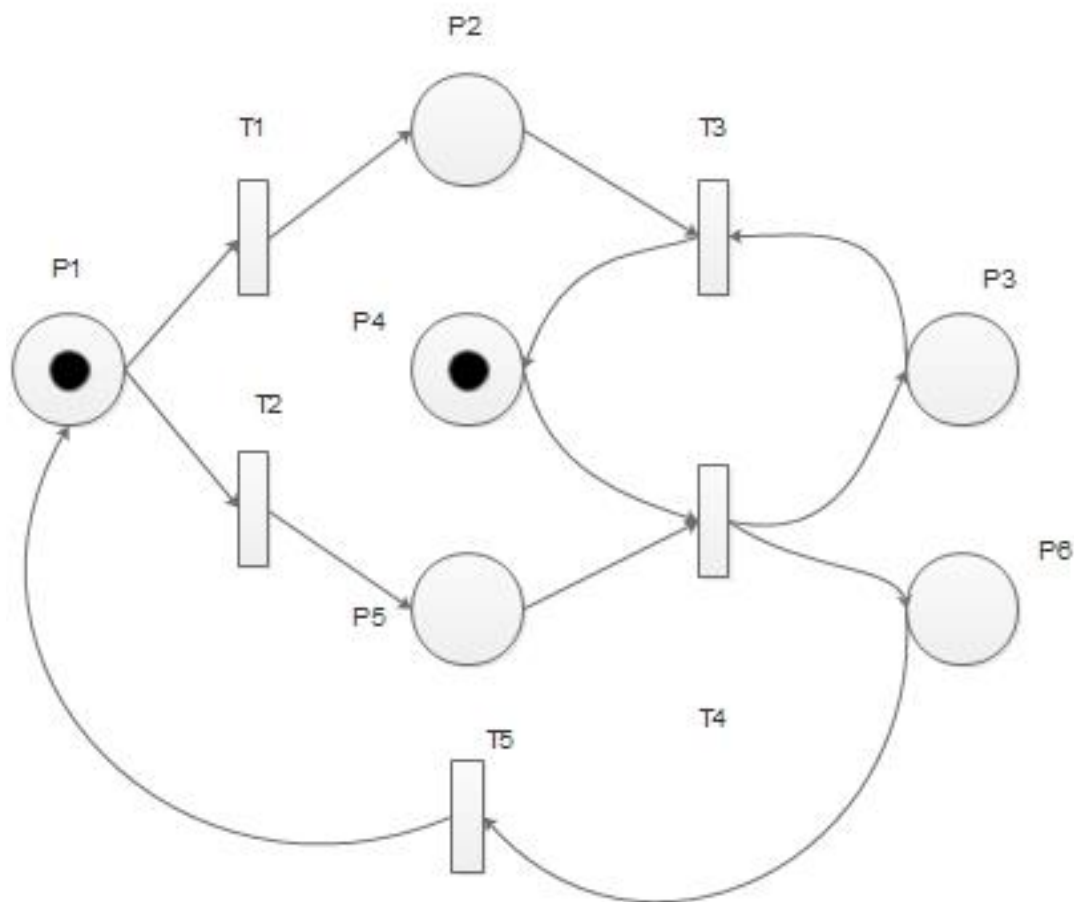


Σχήμα 13 Δίκτυο Petri με 2-περιοριστικότητα

Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Petri_net

2.4.3 Ασφάλεια (Safety)

Η ασφάλεια αποτελεί ειδική περίπτωση της k -περιοριστικότητας, συγκεκριμένα όταν το $k = 1$. Η ασφάλεια έχει την έννοια της διαθεσιμότητας ενός πόρου κάθε χρονική στιγμή, καθώς κάθε θέση μπορεί να έχει μόνο μέχρι ένα διακριτικό, (Κλεάνθους, 2012; Yilmaz, 2008). Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα δίκτυο Petri με ασφάλεια:

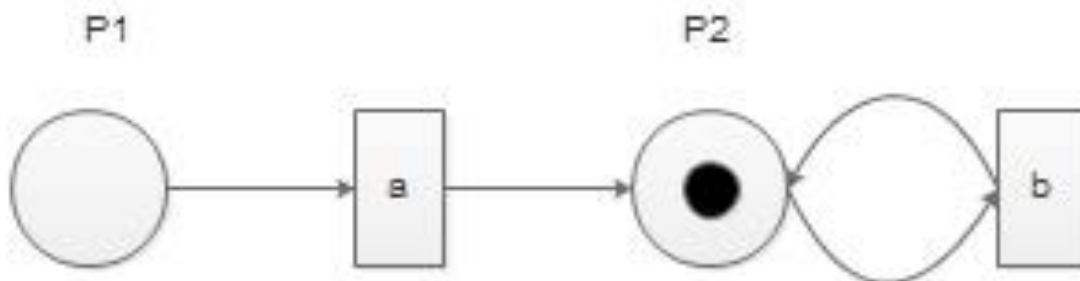


Σχήμα 14 Δίκτυο Petri με ασφάλεια

Πηγή: <http://www.di.univaq.it/adimarco/teaching/bioinfo15/paper.pdf>

2.4.4 Ζωτικότητα (Liveness)

Η έννοια της ζωτικότητας έχει σχέση με την αποφυγή καταστάσεων αδιεξόδου (deadlock) σε ένα δίκτυο Petri. Ένα δίκτυο περιέχει ένα αδιέξοδο αν υπάρχει ένα μαρκάρισμα $M \in R(N, M_0)$ τέτοιο ώστε μία ή περισσότερες μεταβάσεις του να μην ενεργοποιούνται. Το μαρκάρισμα αυτό ορίζεται ως **νεκρό μαρκάρισμα**. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα τέτοιο παράδειγμα:



Σχήμα 15 Δίκτυο Petri με νεκρό μαρκάρισμα

Πηγή: http://0agr.ru/wiki/index.php/Workflow_Soundness#Liveness

Μια μετάβαση t είναι **ζωτική** αν υπάρχει η δυνατότητα ενεργοποίησής της μετά από την ενεργοποίηση μιας ακολουθίας μεταβάσεων. Εναλλακτικά λέμε ότι η t είναι ζωτική αν για ένα

οποιοδήποτε μαρκάρισμα $M \in R(N, M_0)$, υπάρχει μια ακολουθία πυροδοτήσεων η οποία συνεπάγεται ένα νέο μαρκάρισμα που συμπεριλαμβάνει την t , (Δημητριάδου, 2013· Murata, 1989).

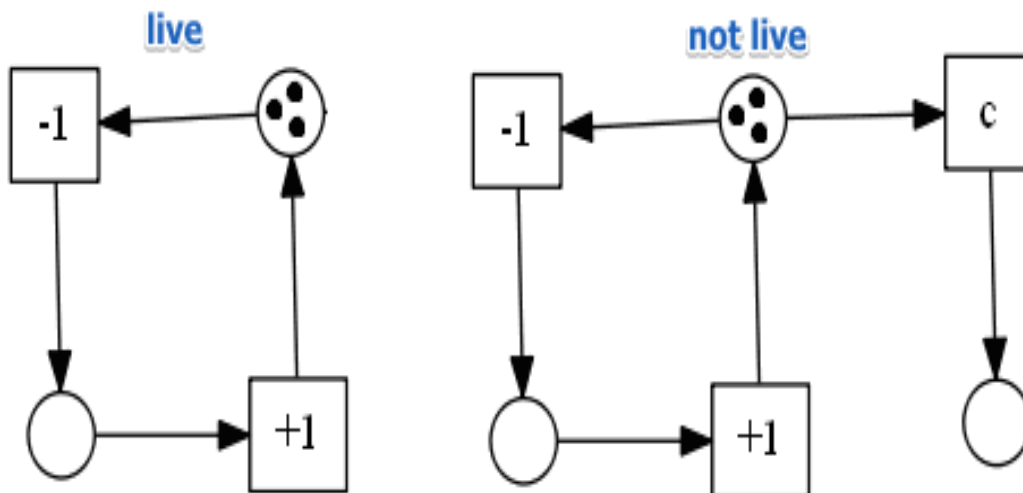
Ένα δίκτυο Petri είναι **ζωτικό** αν κάθε μετάβασή του είναι ζωτική. Αν στο δίκτυο μόνο κάποιες από τις μεταβάσεις είναι ζωτικές τότε αυτό ονομάζεται **μερικώς ζωτικό**. Όταν μια μετάβαση δεν είναι ζωτική αναφέρεται ως **νεκρή**. Ένα δίκτυο Petri είναι **δομικά ζωτικό** (structurally live) αν διαθέτει ένα ζωτικό αρχικό μαρκάρισμα M_0 . Γενικά ισχύει ότι όταν σε ένα δίκτυο Petri έστω και μια μετάβαση είναι ζωτική τότε αυτό δε μπορεί να οδηγηθεί σε αδιέξοδο.

Για μια μετάβαση έχουν οριστεί πέντε επίπεδα ζωτικότητας. Αυτά είναι, (Δημητριάδου, 2013· Murata, 1989):

- Επίπεδο 0 - Νεκρή μετάβαση: Η μετάβαση δεν μπορεί να πυροδοτηθεί σε καμία ακολουθία πυροδοτήσεων του συνόλου T^* .
- Επίπεδο 1: Είναι πιθανώς ενεργοποιημένη, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον μία ακολουθία πυροδοτήσεων του συνόλου T^* που πυροδοτεί τη μετάβαση.
- Επίπεδο 2: Για κάθε πεπερασμένο θετικό ακέραιο n υπάρχει ακολουθία πυροδοτήσεων τέτοια ώστε να περιλαμβάνει τη μετάβαση τουλάχιστον n φορές.
- Επίπεδο 3: Η μετάβαση πυροδοτείται άπειρες φορές σε κάποια ακολουθία πυροδοτήσεων του συνόλου T^* .
- Επίπεδο 4: Η μετάβαση ενεργοποιείται για κάθε $M \in R(N, M_0)$.

Κάθε επίπεδο ζωτικότητας περιέχει τα προηγούμενά του. Τέλος, ένα δίκτυο Petri είναι επιπέδου ζωτικότητας n , όταν το επίπεδο ζωτικότητας για κάθε μετάβασή του είναι n .

Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται δύο δίκτυα Petri, το ένα με ζωτικότητα και το άλλο χωρίς ζωτικότητα:



Σχήμα 16 a) Δίκτυο Petri με ζωτικότητα και b) Δίκτυο Petri χωρίς ζωτικότητα

Πηγή: http://0agr.ru/wiki/index.php/Workflow_Soundness#Liveness

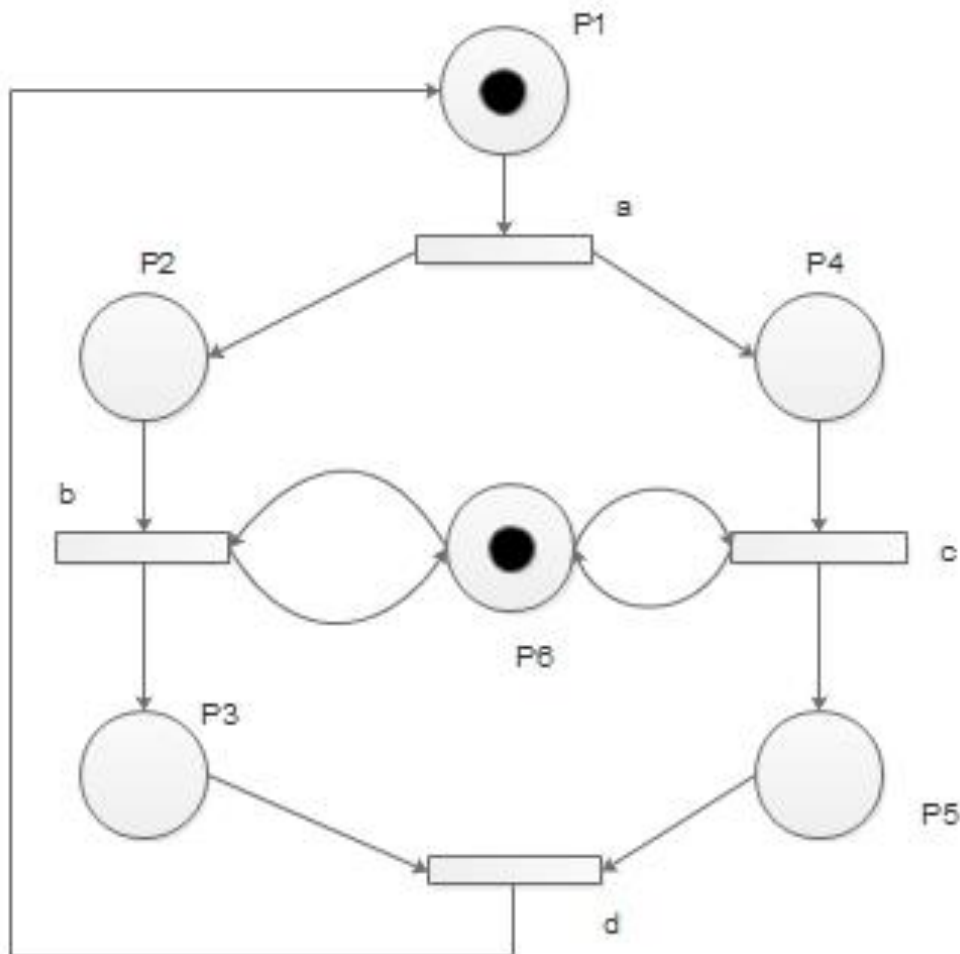
2.4.5 Αντιστρεψιμότητα (Reversibility)

Η ιδιότητα της αντιστρεψιμότητας ορίζει αν ένα δίκτυο Petri μπορεί από κάθε μαρκάρισμα $M \in R(N, M_0)$ να επιστρέψει στο αρχικό μαρκάρισμα του δικτύου, δηλαδή στο M_0 . Όταν αυτό είναι δυνατόν, το δίκτυο ονομάζεται **αντιστρέψιμο**.

Ένα δίκτυο ορίζεται ως **δομικά αντιστρέψιμο** (structurally reversible), αν οποιοδήποτε αρχικό πεπερασμένο μαρκάρισμα του το κάνει αντιστρέψιμο, (Κυρίσης, 2008).

Η ιδιότητα της αντιστρεψιμότητας είναι ιδιαίτερα σημαντική για ένα δίκτυο Petri, διότι η ύπαρξή της εγγυάται ότι το σύστημα δύναται να επιστρέψει πάντα σε μια ασφαλή κατάσταση από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση και αν βρεθεί. Έτσι λοιπόν, ένα αντιστρέψιμο σύστημα θα μπορέσει να ανακάμψει από μια κατάσταση αποτυχίας ή λάθους σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Τέλος, η ιδιότητα αυτή εγγυάται την κυκλική συμπεριφορά του συστήματος, η οποία

απαιτείται για όλα τα επαναληπτικά συστήματα, (Κυρίσης, 2008). Στο παρακάτω σχήμα, απεικονίζεται ένα δίκτυο Petri με αντιστρεψιμότητα:



Σχήμα 17 Δίκτυο Petri με αντιστρεψιμότητα

Πηγή:<http://site.uottawa.ca/~bochmann/ELG7187C/CourseNotes/FormalModels/Petri-nets/Fig5-1+2.jpg>

2.4.6 Οικεία κατάσταση (Home state)

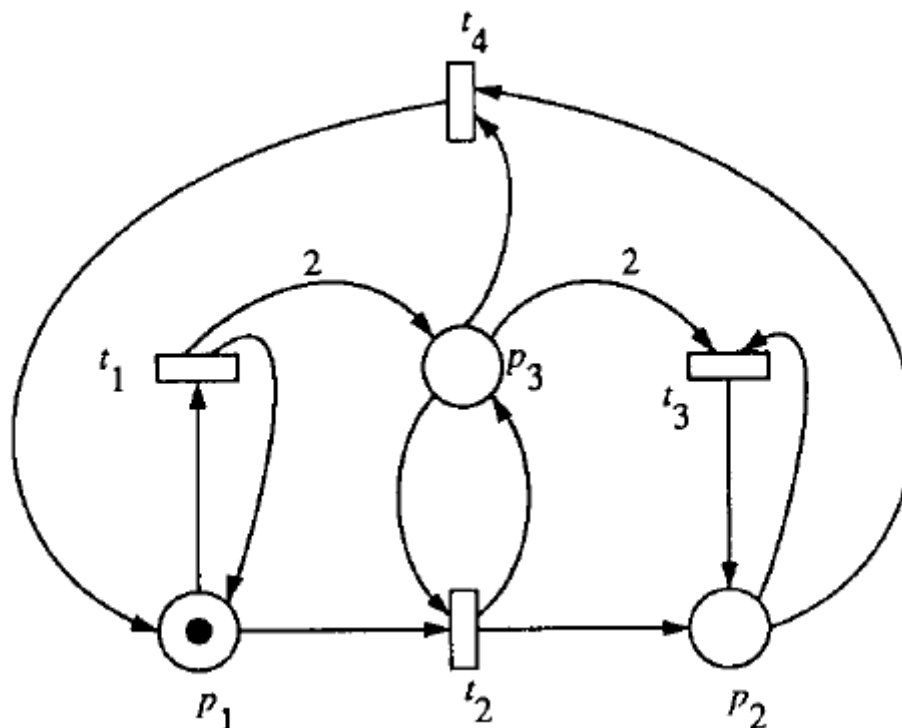
Η ιδιότητα της οικείας κατάστασης αποτελεί γενίκευση της αντιστρεψιμότητας. Ένα μαρκάρισμα $M \in R(N, M_0)$ ονομάζεται οικεία κατάσταση αν για κάθε μαρκάρισμα $M' \in R(N, M_0)$ το M είναι προσβάσιμο από το M' (Yilmaz, 2008).

2.4.7 Δικαιοσύνη (Fairness)

Η ιδιότητα της δικαιοσύνης ορίζει ότι σε ένα πεπερασμένο δίκτυο Petri, κάθε ζεύγος μεταβάσεων είναι πεπερασμένα δίκαιο. Αυτό σημαίνει ότι είναι πεπερασμένος ο μέγιστος αριθμός των φορών που μπορεί να πυροδοτηθεί η μια από τις δύο μεταβάσεις χωρίς να πυροδοτείται η άλλη. Όταν κάθε μετάβαση του δικτύου επιτρέπεται να βρισκείται άπειρες φορές σε μια ακολουθία πυροδοτήσεων, τότε το δίκτυο χαρακτηρίζεται από **καθολική δικαιοσύνη** (global fairness), (Αβραμίδου, 2004).

2.4.8 Κάλυψη (Coverability)

Σε ένα δίκτυο Petri ένα μαρκάρισμα M **καλύπτει** ένα άλλο μαρκάρισμα M' , αν για κάθε θέση p του δικτύου ισχύει ότι $M(p) \geq M'(p)$, (Yilmaz, 2008). Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα δίκτυο με κάλυψη:



Σχήμα 18 Δίκτυο Petri με κάλυψη

Πηγή: <http://www.di.univaq.it/adimarco/teaching/bioinfo15/paper.pdf>

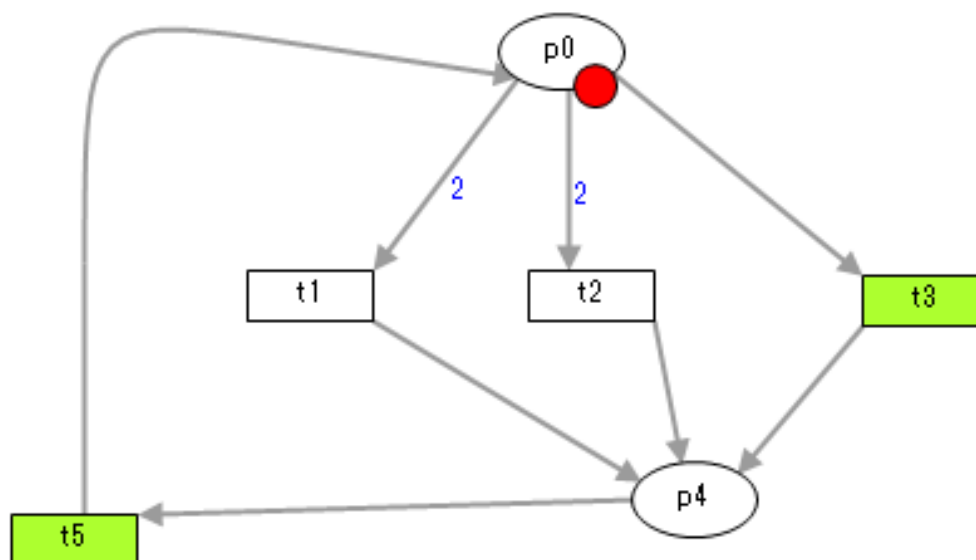
2.4.9 Επιμονή (Persistence)

Η επιμονή ορίζει ότι δεδομένου ενός μαρκάρισματος M σε ένα δίκτυο Petri, μια μετάβαση που βρίσκεται σε ετοιμότητα μπορεί να σταματήσει να βρίσκεται σε ετοιμότητα μόνο λόγω της ενεργοποίησής της. Επίσης, η πυροδότηση μιας μετάβασης δεν καθιστά κάποια άλλη απενεργοποιημένη.

Αντίθετα αν σε ένα δίκτυο η πυροδότηση μια μετάβασης καθιστά μια άλλη απενεργοποιημένη έχουμε το φαινόμενο της **σύγκρουσης** ή **αμοιβαίου αποκλεισμού**, (Αβραμίδου, 2004).

2.4.10 Απόσταση συγχρονισμού (Synchronic distance)

Σε ένα δίκτυο Petri η απόσταση συγχρονισμού μεταξύ δύο μεταβάσεων t_i και t_j , όπου $t_i, t_j \in T$, συμβολίζεται με d_{ij} και ισούται με τη μέγιστη διαφορά των φορών που οι δύο μεταβάσεις πυροδοτούνται σε μια ακολουθία πυροδοτήσεων. Ο αριθμός των φορών που πυροδοτείται μια μετάβαση σε μια ακολουθία πυροδοτήσεων συμβολίζεται με $\sigma(t_i)$. Η απόσταση συγχρονισμού δείχνει το βαθμό εξάρτησης μεταξύ των μεταβάσεων και ο μαθηματικός τύπος που την υπολογίζει για δύο μεταβάσεις i, j είναι $d_{ij} = \max |\sigma(t_i) - \sigma(t_j)|$, (Αβραμίδου, 2004). Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα δίκτυο Petri με την ιδιότητα της απόστασης συγχρονισμού:



Σχήμα 19 Δίκτυο Petri με την ιδιότητα της απόστασης συγχρονισμού

Πηγή: [http://hips-tools.sourceforge.net/wiki/index.php/Users_Manual_\(en\)_for_1.x#Synchronic_Distance_and_Fairness_analysis](http://hips-tools.sourceforge.net/wiki/index.php/Users_Manual_(en)_for_1.x#Synchronic_Distance_and_Fairness_analysis)

2.4.11 Συντηρητικότητα (Conservativeness)

Με τον όρο συντηρητικότητα σε ένα δίκτυο Petri εννοούμε την ιδιότητά του να διατηρεί σταθερό τον αριθμό των διακριτικών σε κάθε θέση του δικτύου. Όταν συμβαίνει αυτό, το δίκτυο ονομάζεται **αυστηρά συντηρητικό**. Αν το άθροισμα των διακριτικών παραμένει σταθερό για κάποιες μόνο θέσεις του δικτύου, τότε αυτό ονομάζεται **μερικώς συντηρητικό** (partially conservative).

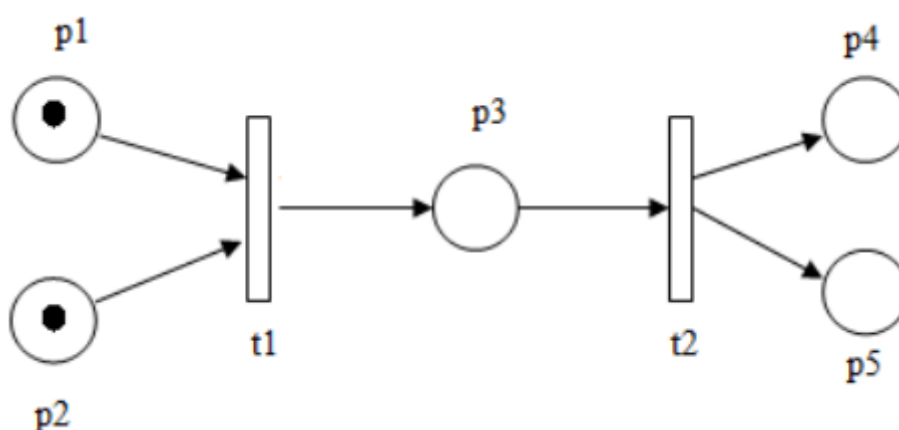
Έστω λοιπόν ένα $\Delta P = \{P, T, I, O, M_0\}$ όπου M_0 το αρχικό του μαρκάρισμα. Η σχέση που ορίζει ότι το δίκτυο αυτό είναι αυστηρά συντηρητικό είναι:

$$\forall p_i \in P \text{ και } M \in R(N, M_0) \text{ πρέπει } \sum M(p_i) = \sum M_0(p_i) = c, \text{ όπου } c \text{ μια σταθερά.}$$

Στην περίπτωση που τα βάρη των τόξων του δικτύου περιγράφονται από ένα διάνυσμα $w > 0$, η σχέση που ορίζει τη συντηρητικότητα του δικτύου είναι:

$$\forall p_i \in P \text{ και } M \in R(N, M_0) \text{ πρέπει } \sum w(p_i) M(p_i) = \sum w(p_i) M_0(p_i) = c, \text{ όπου } c \text{ μια σταθερά.}$$

Η ύπαρξη αυστηρής συντηρητικότητας σε ένα δίκτυο σημαίνει ότι ο αριθμός των τόξων εισόδου μίας μετάβασης είναι ίσος με τον αριθμό των τόξων εξόδου της, (Ελευθεριάδης, 2001). Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα δίκτυο Petri με την ιδιότητα της συντηρητικότητας:



Σχήμα 20 Δίκτυο Petri με την ιδιότητα της συντηρητικότητας

Πηγή: <http://www.ijcse.com/docs/INDJCSE12-03-04-063.pdf>

2.4.12 Συνέπεια (Consistency)

Ένα δίκτυο Petri ονομάζεται συνεπές όταν υπάρχει μια ακολουθία πυροδοτήσεων, που περιλαμβάνει τουλάχιστον μια φορά όλες τις μεταβάσεις του δικτύου, και η εκτέλεσή της οδηγεί από την αρχική κατάσταση M_0 ξανά στην αρχική κατάσταση M_0 . Όταν στην ακολουθία πυροδοτήσεων δεν περιλαμβάνονται όλες τις μεταβάσεις του δικτύου, αλλά μέρος αυτών, τότε το δίκτυο ονομάζεται **μερικώς συνεπές** (partially consistent), (Κυρίσης, 2008).

2.4.13 Επαναληπτικότητα (Repetitiveness)

Ένα δίκτυο Petri ονομάζεται επαναληπτικό όταν υπάρχει μια ακολουθία πυροδοτήσεων η οποία επαναφέρει το δίκτυο στην αρχική του κατάσταση (M_0) και περιέχει άπειρες φορές όλες τις μεταβάσεις του δικτύου. Στην περίπτωση που η ακολουθία πυροδοτήσεων δεν περιέχει όλες τις μεταβάσεις του δικτύου αλλά μέρος αυτών, το δίκτυο ονομάζεται **μερικώς επαναληπτικό** (partially repetitive), (Κυρίσης, 2008).

2.5 Μοντελοποίηση με τη βοήθεια δικτύων Petri

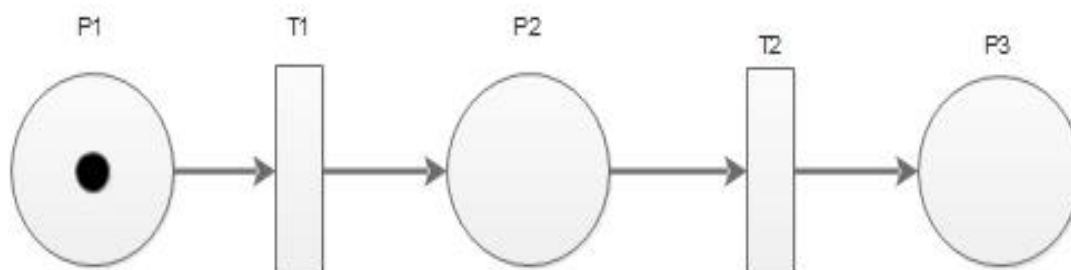
Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή του κεφαλαίου, τα δίκτυα Petri χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις και λειτουργίες συστημάτων και υποσυστημάτων. Τα συστήματα αυτά μπορούν να είναι τόσο απλά όσο και σύνθετα, διαθέτοντας χαρακτηριστικά σύγχρονης και ταυτόχρονης εκτέλεσης.

Τα πιο απλά δίκτυα Petri τα οποία μοντελοποιούν συνήθεις καταστάσεις ονομάζονται **κύτταρα**, γιατί ο συνδυασμός τους μπορεί να οδηγήσει στη μοντελοποίηση πολύπλοκων συστημάτων. Τα κυριότερα κύτταρα μοντελοποίησης είναι η Ακολουθία γεγονότων ή Διαδοχικότητα (Sequence), ο Ταυτοχρονισμός (Concurrency), ο Συγχρονισμός (Synchronization), ο Αμοιβαίος αποκλεισμός (Mutual exclusion), η Σύγκρουση (Conflict), το Αδιέξοδο (Deadlock), η Έλλειψη φραγμάτων (Unboundedness) και η Σύγχυση (Confusion), (Τσιναράκη, 2007· Αβραμίδου, 2004· Δημάδης, 2008· Δημητριάδου, 2013).

Στη συνέχεια ακολουθεί μια παρουσίαση του τρόπου με τον οποίο μοντελοποιείται κάθε ένα από τα κύτταρα που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

2.5.1 Ακολουθία γεγονότων ή Διαδοχικότητα (Sequence)

Τα κύτταρα ακολουθίας χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση δικτύων στα οποία θέλουμε να εξασφαλίσουμε μια προκαθορισμένη ακολουθία ενεργειών. Σε αυτά, οι μεταβάσεις εκτελούνται σειριακά και η θέση εξόδου μιας μετάβασης αποτελεί τη θέση εισόδου της επόμενης μετάβασης. Η δεύτερη μετάβαση ενεργοποιείται μόνο εάν ενεργοποιηθεί η πρώτη.



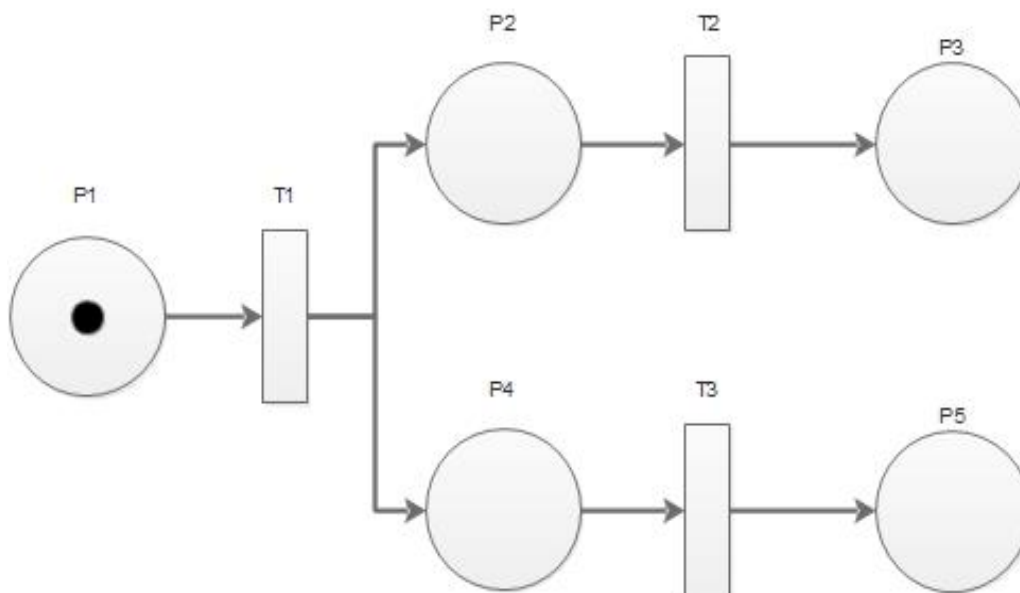
Σχήμα 21 Παράδειγμα δικτύου με χρήση της ακολουθίας γεγονότων

Πηγή: <http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/1509/1/diplomatikh.pdf>

Ένα παράδειγμα χρήσης της ακολουθίας γεγονότων παρουσιάζεται στο δίκτυο του Σχήματος 21. Στο δίκτυο αυτό υπάρχουν δύο μεταβάσεις T_1 και T_2 και τρεις θέσεις P_1 , P_2 και P_3 . Η σειρά ενεργοποίησης των μεταβάσεων είναι εξαρχής σταθερά προκαθορισμένη. Συγκεκριμένα, πρώτα ενεργοποιείται και πυροδοτείται η μετάβαση T_1 μεταφέροντας το διακριτικό του δικτύου στη θέση P_2 και στη συνέχεια ενεργοποιείται και πυροδοτείται η μετάβαση T_2 μεταφέροντας το διακριτικό στη θέση P_3 .

2.5.2 Ταυτοχρονισμός (Concurrency)

Σε ένα δίκτυο Petri δύο ή περισσότερες μεταβάσεις ονομάζονται ταυτόχρονες όταν ενώ δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, έχοντας κάποια σχέση αιτιότητας, μπορούν να πυροδοτηθούν ταυτόχρονα, είτε σειριακά η μια μετά την άλλη, είτε παράλληλα. Οι ταυτόχρονες μεταβάσεις εκτελούνται ανεξάρτητα, χωρίς να επηρεάζει η μια την εκτέλεση της άλλης, (CSLAB, 2010).



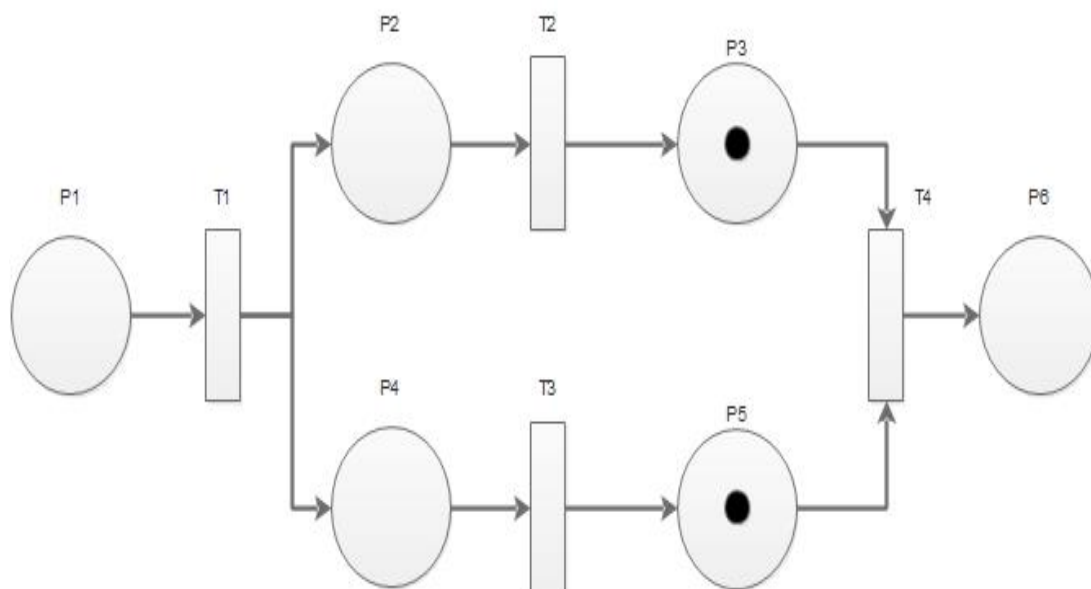
Σχήμα 22 Παράδειγμα δικτύου με χρήση ταυτοχρονισμού

Πηγή: <http://artemis.cslab.ntua.gr/Dienst/UI/1.0/Download/artemis.ntua.ece/DT2009-0027>

Στο Σχήμα 22 παρουσιάζεται ένα δίκτυο στο οποίο υπάρχουν ταυτόχρονες μεταβάσεις. Οι μεταβάσεις αυτές είναι οι T_2 και T_3 οι οποίες πυροδοτούνται παράλληλα, μετά την πυροδότηση της μετάβασης T_1 . Αυτό συμβαίνει γιατί μετά την πυροδότηση της μετάβασης T_1 μεταφέρεται από ένα διακριτικό στις θέσεις P_2 και P_3 καθιστώντας τις T_2 και T_3 ενεργοποιημένες. Αποτέλεσμα αυτής της ενεργοποίησης είναι η ταυτόχρονη πυροδότηση των δυο μεταβάσεων και η παράλληλη εκτέλεσή τους.

2.5.3 Συγχρονισμός (Synchronization)

Τα κύτταρα συγχρονισμού χρησιμοποιούνται μέσα σε ένα δίκτυο Petri με σκοπό το συνδυασμό και συγχρονισμό δύο ή περισσότερων παραλληλισμών. Σε αυτήν την περίπτωση μια μετάβαση έχει περισσότερες από μια θέσεις εισόδου και δεν τίθεται σε ετοιμότητα, οπότε ούτε πυροδοτείται, μέχρι κάθε θέση εισόδου της να αποκτήσει τουλάχιστον ένα διακριτικό. Τα κύτταρα συγχρονισμού αποτελούν ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για τη μοντελοποίηση ενός συστήματος διότι η χρήση τους μας επιτρέπει να καταμήσουμε το σύστημα σε ένα πλήθος ανεξάρτητων υποσυστημάτων τα οποία λειτουργούν αυτόνομα, απλοποιώντας έτσι όλη τη διαδικασία σχεδίασης και υλοποίησης του συστήματος, (Τσιναράκης, 2007).



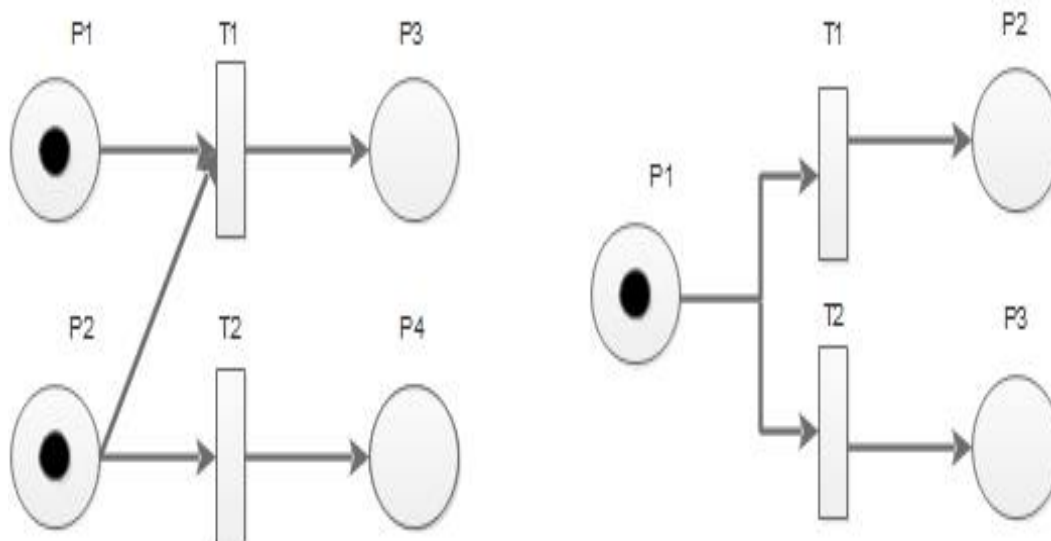
Σχήμα 23 Παράδειγμα δικτύου με χρήση συγχρονισμού

Πηγή: <http://artemis.cslab.ntua.gr/Dienst/UI/1.0/Download/artemis.ntua.ece/DT2009-0027>

Το δίκτυο του Σχήματος 23 αποτελεί επέκταση του ταυτόχρονου δικτύου του Σχήματος 22. Ο συγχρονισμός επιτυγχάνεται στο δίκτυο με τη χρήση της μετάβασης T_4 η οποία συνδυάζει τα δύο παράλληλα υποδίκτυα του δικτύου. Συγκεκριμένα, η μετάβαση T_4 δεν θα ενεργοποιηθεί και κατ' επέκταση δεν θα πυροδοτηθεί μέχρις ότου να αποκτήσουν τουλάχιστον ένα διακριτικό οι θέσεις P_3 και P_4 .

2.5.4 Σύγκρουση (Conflict)

Η σύγκρουση σε ένα δίκτυο Petri είναι μια κατάσταση στην οποία δύο οι περισσότερες μεταβάσεις ενεργοποιούνται ταυτόχρονα από την ύπαρξη ενός διακριτικού σε μια κοινή θέση εισόδου. Οι θέσεις αυτές μπορούν να είναι κοινές εξολοκλήρου ή εν μέρει. Το δίκτυο πρέπει να είναι σε θέση να επιλύει τις συγκρούσεις αποφασίζοντας ποιά από τις συγκρουόμενες μεταβάσεις θα πυροδοτηθεί βάσει κριτηρίων. Όταν ένα δίκτυο δεν περιέχει καμία σύγκρουση ονομάζεται **ελεύθερο από συγκρούσεις** (Conflict free), (Αβραμίδου, 2004).



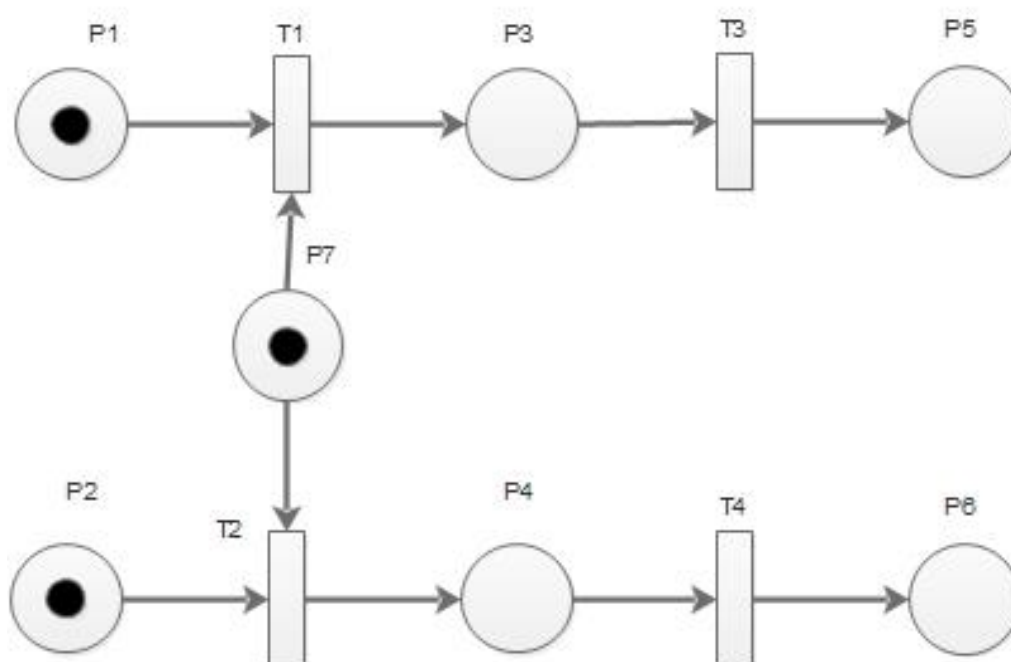
Σχήμα 24 Παραδείγματα συγκρούσεων σε δίκτυα Petri

Πηγή: <http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/1509/1/diplomatikh.pdf>

Στο Σχήμα 24 γίνεται παρουσίαση δύο περιπτώσεων συγκρούσεων εντός ενός δικτύου Petri. Στο A οι συγκρουόμενες μεταβάσεις T_1 και T_2 έχουν μια εν μέρει κοινή θέση εισόδου, η οποία είναι η P_2 . Στην περίπτωση αυτή δεν είναι σίγουρο ότι θα προκύψει σύγκρουση. Αυτό συμβαίνει γιατί για να προκύψει σύγκρουση πρέπει να έχουν τουλάχιστον ένα διακριτικό και οι δύο θέσεις του δικτύου, ώστε να ενεργοποιηθούν ταυτόχρονα και οι δύο μεταβάσεις, ενώ όταν υπάρχει διακριτικό μόνο στην θέση P_1 ενεργοποιείται και πυροδοτείται μόνο η μετάβαση T_1 . Αντίθετα στο B υπάρχει μια εξολοκλήρου κοινή θέση εισόδου για τις δύο μεταβάσεις T_1 και T_2 η οποία προκαλεί σύγκρουση κάθε φορά που δέχεται ένα διακριτικό.

2.5.5 Αμοιβαίος αποκλεισμός (Mutual exclusion)

Ο αμοιβαίος αποκλεισμός αποτελεί μια ειδική περίπτωση σύγκρουσης μέσα σε ένα δίκτυο Petri. Συγκεκριμένα, ο αμοιβαίος αποκλεισμός παρατηρείται όταν δύο μεταβάσεις του δικτύου είναι ταυτόχρονα σε ετοιμότητα, δεδομένου ενός μαρκαρίσματος του δικτύου, αλλά η πυροδότηση της μιας απενεργοποιεί την άλλη, αποκλείοντας έτσι την πυροδότησή της, (Αβραμίδου, 2004· Δημητριάδου, 2013).



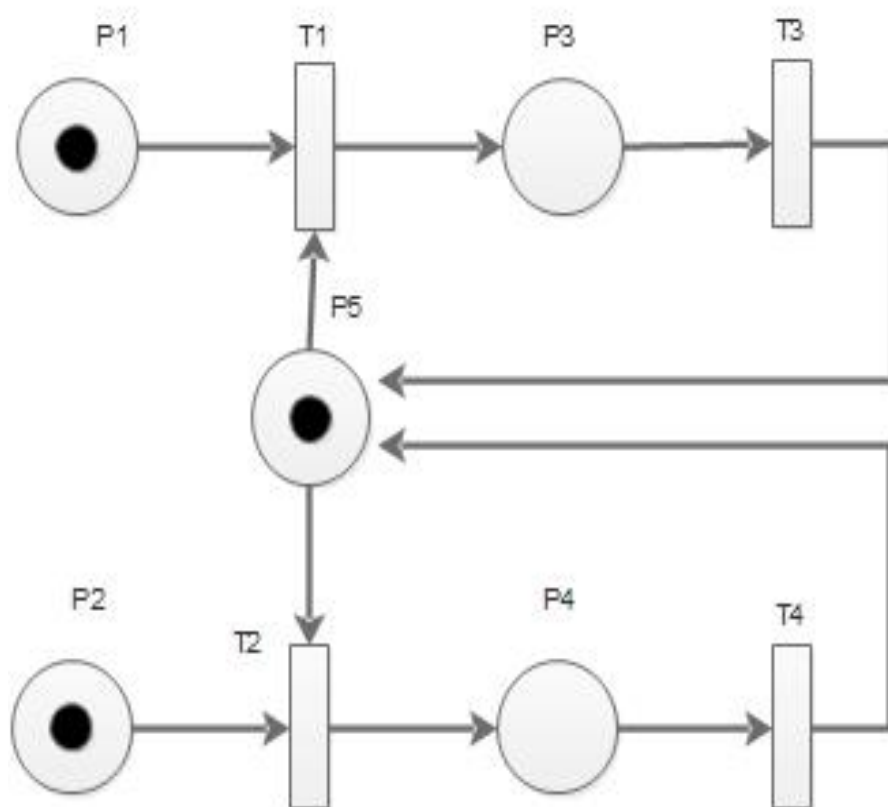
Σχήμα 25 Παράδειγμα αμοιβαίου αποκλεισμού σε δίκτυο Petri

Πηγή: <http://artemis.cslab.ntua.gr/Dienst/UI/1.0/Download/artemis.ntua.ece/DT2009-0027>

Στο δίκτυο του Σχήματος 25 δεν είναι δυνατή η ταυτόχρονη ενεργοποίηση των ακολουθιών πυροδοτήσεων T1, T3 και T2, T4 γιατί υπάρχει ένας αμοιβαίος αποκλεισμός μεταξύ των μεταβάσεων T1 και T2 όπου η πυροδότηση της T1 απενεργοποιεί την T2 και αντίστροφα.

2.5.6 Αδιέξοδο (Deadlock)

Αδιέξοδο σε ένα δίκτυο Petri ονομάζεται η κατάσταση στην οποία καμία μετάβαση δεν μπορεί να ενεργοποιηθεί και επομένως η λειτουργία του δικτύου σταματά. Τα αδιέξοδα οφείλονται σε σχεδιαστικά λάθη του δικτύου και για την αποφυγή τους οφείλουμε να επανασχεδιάσουμε το δίκτυο από την αρχή, (Αβραμίδου, 2004; Κυρίτσης, 2008; Δημητριάδου, 2013). Στο Σχήμα 26 παρουσιάζεται ένα δίκτυο Petri το οποίο οδηγεί σε αδιέξοδο. Συγκεκριμένα ενώ αρχικά είναι ενεργοποιημένες τόσο η μετάβαση T₁ όσο και η μετάβαση T₂, μετά την πυροδότηση της ακολουθίας πυροδοτήσεων T₁, T₃, T₂, T₄ ή T₂, T₄, T₁, T₃ το δίκτυο μεταβαίνει σε μια κατάσταση αδιεξόδου στην οποία υπάρχει μόνο ένα διακριτικό στη θέση P₅ με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η ενεργοποίηση και πυροδότηση καμίας από τις μεταβάσεις του.

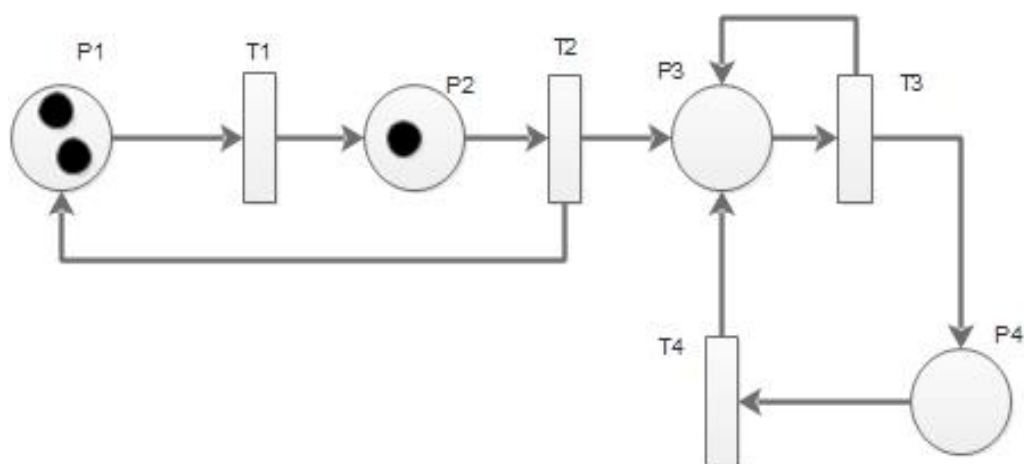


Σχήμα 26 Παράδειγμα αδιεξόδου σε δίκτυο Petri

Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

2.5.7 Έλλειψη φραγμάτων (Unboundedness)

Σε ένα δίκτυο Petri συνήθως ορίζεται ένας μέγιστος αριθμός διακριτικών που μπορεί να δεχθεί η κάθε θέση του δικτύου. Στην περίπτωση που δεν οριστεί κάποιος τέτοιος περιορισμός και κάθε θέση μπορεί να δεχθεί άπειρο αριθμό διακριτικών, λέμε ότι το δίκτυο παρουσιάζει έλλειψη φράγματος, (Αβραμίδου, 2004).



Σχήμα 27 Παράδειγμα δικτύου Petri χωρίς φράγματα

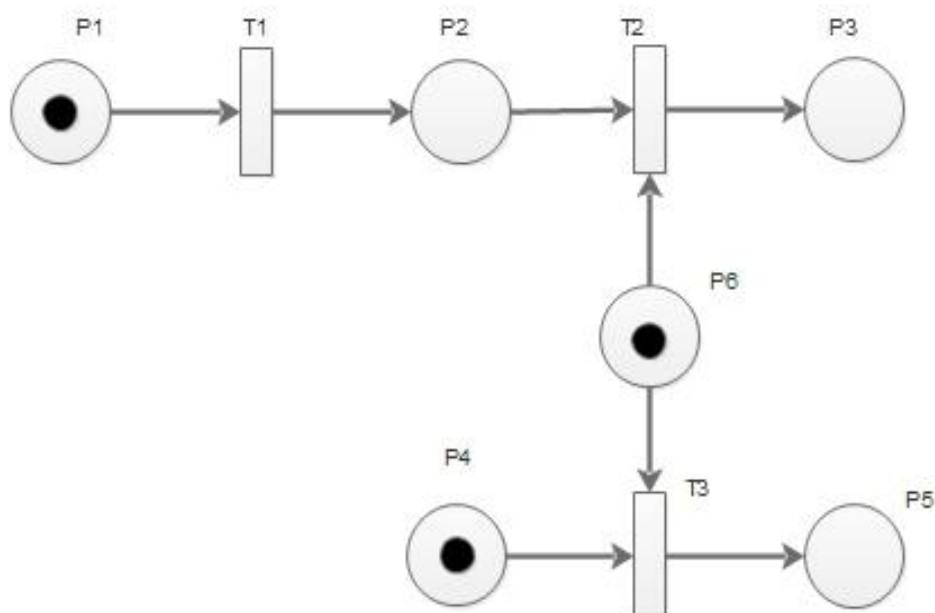
Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

Ένα παράδειγμα τέτοιου δικτύου απεικονίζεται στο Σχήμα 27 όπου η θέση P_3 δέχεται συνεχώς αυξανόμενο αριθμό διακριτικών, ο οποίος με την συνεχή εκτέλεση του δικτύου πλησιάζει το άπειρο παρά το γεγονός ότι η θέση αυτή αποτελεί θέση εισόδου για τη μετάβαση T_3 .

2.5.8 Σύγχυση (Confusion)

Η σύγχυση είναι ένα φαινόμενο που σχετίζεται με τις διαθέσιμες ακολουθίες πυροδοτήσεων ενός δικτύου Petri. Συγκεκριμένα, σε ένα δίκτυο έχουμε σύγχυση όταν παρουσία ταυτόχρονου έχουμε διαθέσιμες δύο ακολουθίες πυροδοτήσεων για τις οποίες ισχύει ότι η μια οδηγεί σε σύγκρουση ενώ η άλλη όχι. Υπάρχουν δύο είδη σύγχυσης: η συμμετρική σύγχυση και η ασύμμετρη σύγχυση.

Σε ένα δίκτυο Petri εμφανίζεται **συμμετρική σύγχυση** όταν δύο ή περισσότερες μεταβάσεις είναι ταυτόχρονες και σε σύγκρουση με μία άλλη μετάβαση, ενώ εμφανίζεται **ασύμμετρη σύγχυση** όταν δύο ή περισσότερες μεταβάσεις είναι ταυτόχρονες και θα συγκρουστούν με μία άλλη αν μία από αυτές πυροδοτηθεί πρώτη, (Ρούκας & Τσιρίκας, 1998; Αβραμίδου, 2004; Χριστοφιδέλη, 2006; Δημητριάδου, 2013).



Σχήμα 28 Παράδειγμα σύγχυσης σε δίκτυο Petri

Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

Στο Σχήμα 28 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ασύμμετρης σύγχυσης σε ένα δίκτυο Petri. Οι ταυτόχρονες μεταβάσεις του δικτύου είναι οι $T1$ και $T3$ και η σύγκρουση δημιουργείται μεταξύ των μεταβάσεων $T2$ και $T3$ μετά την πυροδότηση της μετάβασης $T1$.

2.6 Βιβλιογραφική ανασκόπηση του θέματος

Αν και τα δίκτυα Petri αποτελούν μια σχετικά σύγχρονη εξέλιξη, (χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι η αρχική τους επινοήση έγινε το 1962), αποτέλεσαν και εξακολουθούν να αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο μοντελοποίησης συστημάτων, το οποίο είναι ικανό να αντιμετωπίσει ακόμα και προβλήματα υψηλής πολυπλοκότητας, γι αυτό και έχουν γίνει ευρέως αποδεκτά. Έχουν προκαλέσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητικών κοινοτήτων ενώ χρησιμοποιούνται σε πάρα πολλούς τομείς όπως η πληροφορική, η μηχανική, η οικονομία και η διοίκηση.

Στην παράγραφο αυτή ακολουθούν μερικά παραδείγματα ερευνών που επιλέχθηκαν και μελετήθηκαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας:

✚ Οι Y. H. Cheng και L. A. Yang (2009) παρουσίασαν “Μια προσέγγιση ασαφών δικτύων Petri για τον έλεγχο της σιδηροδρομικής κυκλοφορίας σε περίπτωση ανωμαλίας: Αποδεικτικά στοιχεία από το σιδηροδρομικό σύστημα της Ταϊβάν (A fuzzy Petri nets approach for railway traffic control in case of abnormality: Evidence from Taiwan railway system)”, (Cheng & Yang, 2009).

Σύμφωνα με τους Yung-Hsiang Cheng και Li-An Yang ο έλεγχος της κυκλοφορίας των σιδηροδρόμων από τους δρομολογητές, σε περίπτωση ανωμαλίας, είναι ζωτικής σημασίας για τη διασφάλιση της ποιότητας των υπηρεσιών λειτουργίας ενός σιδηροδρομικού συστήματος. Ωστόσο, αυτή η μοναδική επαγγελματική γνώση βρίσκεται συχνά στο μυαλό του διαχειριστή της σιδηροδρομικής κυκλοφορίας. Η εργασία τους είχε ως στόχο να μετατρέψει την εμπειρία ενός διαχειριστή σιδηροδρομικής κυκλοφορίας σε ένα χρήσιμο κανόνα γνώσης. Η προσέγγιση ασαφούς δικτύου Petri υιοθετήθηκε για να διατυπωθούν οι κανόνες απόφασης των διαχειριστών σιδηροδρομικής κυκλοφορίας σε περίπτωση ανωμαλίας, ως μια βάση για τη μελλοντική ανάπτυξη ενός συστήματος λήψεων αποφάσεων δρομολόγησης. Οι κανόνες λήψης αποφάσεων, οι παράγοντες και οι πιθανές επιλογές σχετικά με τη διαχείριση της σιδηροδρομικής κυκλοφορίας, όταν συμβαίνει η διαταραχή, συλλέγονται μέσω συνεντεύξεων εμπειρογνομόνων και ανασκοπήσεις βιβλιογραφίας. Αυτή η μελέτη εξετάζει τα ανώμαλα σενάρια συμπεριλαμβανομένων:

- 1) Της κεντρικής βλάβης του συστήματος ελέγχου της κυκλοφορίας.
- 2) Της αυτόματης προστασίας του τρένου σε περίπτωση βλάβης, και
- 3) Της βλάβης κινητήρα.

Υλοποιείται μια περίπτωση για μελέτη, ενός τμήματος της γραμμής του σιδηροδρομικού δικτύου της Ταϊβάν και το εμπειρικό αποτέλεσμα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως σημείο αναφοράς στην δρομολόγηση των συρμών σε περίπτωση ανωμαλίας.

✚ Οι Kouzehgar M., Badamchizadeh M. A. και Khanmohammadi S. (2011) πρότειναν τη χρήση “Ασαφών δικτύων Petri για την επαλήθευση και την επικύρωση της ανθρώπινης συμπεριφοράς (Fuzzy Petri nets for human behavior verification and validation)”, (Kouzehgar, Badamchizadeh & Khanmohammadi, 2011).

Λόγω της ραγδαίας ανάπτυξης του μεγέθους και της πολυπλοκότητας των εφαρμογών προσομοίωσης, ο σχεδιασμός εφαρμόσιμων και προσιτών δομών επαλήθευσης και επικύρωσης (V&V) είναι ένα σημαντικό πρόβλημα. Από την άλλη μεριά, τα σημερινά μοντέλα ανθρώπινης συμπεριφοράς αποτελούν αρχές για τη λήψη αποφάσεων σε πολλές προσομοιώσεις, και για να μπορέσουμε να έχουμε έγκυρες αποφάσεις βασισμένες σε ένα αξιόπιστο μοντέλο ανθρώπινων αποφάσεων πρέπει το μοντέλο αυτό να περνάει τα κριτήρια επικύρωσης και επαλήθευσης. Συνήθως τα μοντέλα ανθρώπινης συμπεριφοράς αναπαρίστανται ως βάσεις ασαφών κανόνων. Σε όλες τις πρόσφατες εργασίες η διαδικασία V&V εφαρμόζεται σε μια ήδη δοσμένη βάση κανόνων. Σε αυτή την εργασία υποτίθεται ότι αρχικά κατασκευάζεται μια βάση ασαφών κανόνων και στη συνέχεια εφαρμόζεται η διαδικασία V&V σε αυτή. Λαμβάνοντας υπόψη ως περίπτωση για μελέτη την αλληλεπίδραση καθηγητή - μαθητή, προκειμένου να κατασκευαστεί η βάση κανόνων, σχεδιάστηκε ένα ερωτηματολόγιο με έναν ιδιαίτερο τρόπο, ώστε να μετατραπεί σε μια ιεραρχική βάση ασαφών κανόνων. Αμέσως μετά, η κατασκευασμένη ασαφής βάση κανόνων χαρτογραφείται σε ένα ασαφές δίκτυο Petri και στη συνέχεια ακολουθούν οι διαδικασίες της επαλήθευσης (παραγωγή και αναζήτηση του γραφήματος προσβασιμότητας) και επικύρωσης για πιθανά διαρθρωτικά και σημασιολογικά λάθη

✚ Οι Jayasudha S., Ramanathan K., και Rangarajan K. (2012) μελέτησαν τη “Σύνδεση μεταξύ των ασαφών δικτύων Petri και των ασαφών γνωστικών χαρτών (Fuzzy Petri nets and fuzzy cognitive maps)”.

Τα δίκτυα Petri έχουν χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση πολλών συστημάτων όπως συστήματα υπολογιστών, συστήματα βασισμένα σε γνώσεις, συστήματα παραγωγής κλπ. Αλλά τα δίκτυα Petri δεν έχουν αρκετή δύναμη για να αναπαραστήσουν και να χειριστούν προσεγγιστικές και αβέβαιες πληροφορίες. Ως εκ τούτου τα ασαφή δίκτυα Petri (Fuzzy Petri nets - FPNs) ορίζονται για τη μοντελοποίηση συστημάτων, όπως ρομποτικά συστήματα, που έχουν δραστηριότητες χαμηλότερου επιπέδου. Η μελέτη των παραγόντων αβεβαιότητας στα γεγονότα και η αλλαγή του χρόνου μπορεί να αναπαρασταθεί στα FPNs. Σε μια άλλη προσέγγιση, οι ασαφείς γνωστικοί χάρτες (Fuzzy cognitive maps - FCMs) συνδέουν τιμές

τυχαίων γεγονότων, στόχους και τάσεις σε ένα ασαφές δυναμικό σύστημα ανατροφοδότησης. Ένας ασαφής γνωστικός χάρτης παραθέτει τον ασαφή κανόνα ή το τυχαίο διάγραμμα ροής που συσχετίζει τα γεγονότα. Αυτή η εργασία συσχετίζει τα FCMs και FPNs. Αυτή η εργασία δείχνει με τη χρήση ενός παραδείγματος ότι η αντίληψη των FCMs μπορεί εύκολα να μεταφερθεί μέσα στα FPNs.

✚ Οι Milinkovic S., Markovic M., Veskovic S., Ivic M. και Pavlovic N. (2013) πρότειναν “Ένα μοντέλο ασαφούς δικτύου Petri για την εκτίμηση των καθυστερήσεων των τρένων (A fuzzy Petri net model to estimate train delays)”.

Ακόμη και με τα πιο ακριβή χρονοδιαγράμματα, τα τρένα λειτουργούν συχνά με καθυστερήσεις. Οι χρόνοι λειτουργίας και αναμονής μπορούν να αυξηθούν απροσδόκητα για τα τρένα, δημιουργώντας πρωτογενείς καθυστερήσεις που προκαλούν αλυσιδωτές καθυστερήσεις καθώς επίσης και καθυστερήσεις για τις υπόλοιπες αμαξοστοιχίες. Η ακριβής εκτίμηση των καθυστερήσεων των συρμών είναι σημαντική για τη δημιουργία χρονοδιαγραμμάτων, τη δρομολόγηση των συρμών και τον προγραμματισμό των έργων υποδομής. Σε αυτήν την εργασία, προτείνεται ένα μοντέλο ασαφούς δικτύου Petri (FPN) για την εκτίμηση των καθυστερήσεων των τρένων. Το μοντέλο FPN έχοντας χαρακτηριστικά ιεραρχίας, χρώματος, χρόνου και ασαφούς συλλογιστικής χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση των διαδικασιών κυκλοφορίας και των μετακινήσεων των τρένων σε ένα σιδηροδρομικό σύστημα.

Τα τρένα ήταν χρωματιστά tokens, τα τμήματα της σιδηροτροχιάς ορίστηκαν ως θέσεις και τα διακριτά γεγονότα της κίνησης των συρμών ορίστηκαν ως μεταβάσεις. Οι πρωτογενείς καθυστερήσεις των συρμών προσομοιώθηκαν από μια ασαφή μονάδα δικτύου Petri του μοντέλου. Η ασαφής λογική ενσωματώθηκε στη μονάδα FPN με δύο τρόπους:

- ✓ Πρώτον, όταν δεν υπήρχαν ιστορικά δεδομένα για τις καθυστερήσεις των τρένων, χρησιμοποιήθηκαν εξειδικευμένες γνώσεις για τον καθορισμό των ασαφών συνόλων και κανόνων, μετατρέποντας την εμπειρία σε ένα μοντέλο για τον υπολογισμό των καθυστερήσεων των τρένων.
- ✓ Δεύτερον, για τα συστήματα όπου ήταν διαθέσιμα τα ιστορικά δεδομένα σχετικά με τις καθυστερήσεις των τρένων, χρησιμοποιήθηκε ένα μοντέλο που βασίζεται σε συστήματα συμπερασμού προσαρμοζόμενων ασαφών δικτύων (Adaptive Network Fuzzy Inference System - ANFIS). Τα διαθέσιμα αυτά δεδομένα προήλθαν από τα συστήματα ανίχνευσης ή από τα αρχεία καταγραφής των τρένων.

Τα δεδομένα καθυστέρησης χρησιμοποιήθηκαν για να εκπαιδεύσουν το ασαφές-νευρωνικό ANFIS μοντέλο. Στη συνέχεια αφού ελέγχθηκαν τα αποτελέσματα του συστήματος ασαφούς λογικής, το ANFIS μοντέλο αντιγράφηκε από ένα ασαφές δίκτυο Petri. Η προσομοίωση επικυρώθηκε από τις κινήσεις των συρμών και τη γραφική αναπαράσταση των γραφημάτων χρονοαπόστασης των τρένων. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης εξήχθησαν σε μια βάση δεδομένων για περαιτέρω εξόρυξη δεδομένων και συγκριτική ανάλυση. Το μοντέλο FPN δοκιμάστηκε σε ένα τμήμα του σιδηροδρομικού κόμβου του Βελιγραδίου.

✚ Οι Bartoletti M., Cimoli T. και Pinna G. M. (2015) μελέτησαν τα “Δανειζόμενα δίκτυα Petri (Lending Petri nets)”.

Σε αυτή την εργασία μελετήθηκαν τα δανειζόμενα δίκτυα Petri, μια επέκταση των δικτύων Petri όπου οι θέσεις μπορούν να φέρουν έναν αρνητικό αριθμό από tokens. Αυτό επιτρέπει τις συμβάσεις μοντελοποίησης, στις οποίες ένας συμμετέχων μπορεί να υποσχεθεί ότι θα δώσει ορισμένους από τους πόρους του υπό την εγγύηση ότι κάποιος άλλος πόρος θα του αποδοθούν εν τέλει ως αντάλλαγμα.

✚ Οι G. Mejia, K. Nino, C. Montoya, M. A. Sanchez, J. Palacios και L. Amodeo (2016) παρουσίασαν “Ένα πλαίσιο για ρεαλιστική διαχείριση έργων και προγραμματισμό το οποίο βασίζεται σε δίκτυο Petri: Μια εφαρμογή σε κινούμενα σχέδια και βιντεοπαιχνίδια (A Petri Net-based framework for realistic project management and scheduling: An application in animation and video games)”.

Αυτή η εργασία παρουσιάζει ένα πλαίσιο πραγματικής ζωής, το οποίο βασίζεται σε δίκτυο Petri, για την ολοκληρωμένη και συνεργατική διαχείριση έργων στη βιομηχανία των κινουμένων σχεδίων και βιντεοπαιχνιδιών (A&V). Το πλαίσιο αυτό παρέχει ένα πλήρες εργαλείο μοντελοποίησης, προγραμματισμού και προσομοίωσης. Ο στόχος του πλαισίου είναι διπλός:

1. Πρώτον, για να διευκολύνει τη διαμόρφωση (και ενδεχομένως αναδιαμόρφωση) των έργων, και
2. Δεύτερον, για να παράσχει τα κατάλληλα εργαλεία ανάλυσης

Η μοντελοποίηση των δραστηριοτήτων του έργου και των σχετικών πόρων επιτυγχάνεται μέσω μιας νέας κατηγορίας δικτύων Petri, που δηλώνονται εδώ ως δίκτυα Petri εκτεταμένων ιδιοτήτων με χρονισμένες θέσεις. Αυτή η κατηγορία δικτύων Petri συνδυάζει τα πλεονεκτήματα των χρωματισμένων και των συνήθων χρονικών δικτύων Petri από την άποψη της μοντελοποίησης και της ανάλυσης. Το χρονοδιάγραμμα του έργου, παράγεται από έναν αλγόριθμο αναζήτησης γραφήματος που διερευνά το χώρο καταστάσεων του δικτύου Petri. Ο αλγόριθμος είναι επίσης προσαρμοσμένος για να χειρίζεται επιδιορθώσεις συμμόρφωσης που συχνά συμβαίνουν λόγω πολλαπλών αλλαγών κατά την εκτέλεση. Αρκετά σενάρια μπορούν να προσομοιωθούν μαζί με τους υπολογισμούς της διάρκειας, του κόστους και της χρήσης των πόρων. Η δυναμική του πλαισίου απεικονίζεται με δύο σύντομες περιπτώσεις για μελέτη.

Τα αποτελέσματα και τα παραδοτέα της προσέγγισης έχουν έρθει αντιμέτωπα με τα διευθυντικά στελέχη διαφόρων εταιρειών, που συμμετείχαν στο έργο, οι οποίοι παρείχαν πολύτιμες πληροφορίες και διατύπωσαν θετικές παρατηρήσεις.

✚ Ο A. Al-Ahmari (2016) παρουσίασε “Ένα βέλτιστο προγραμματισμό ρομποτικών κυττάρων με ελεγκτές, χρησιμοποιώντας χρονικά δίκτυα Petri βασισμένα στα Μαθηματικά (Optimal robotic cell scheduling with controllers using mathematically based timed Petri nets)”.

Αυτή η εργασία παρουσιάζει μια βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του προγραμματισμού των ρομποτικών κυττάρων των ελεγκτών κίνησης ενός ρομπότ χρησιμοποιώντας χρονικά δίκτυα Petri (TPNs).

Η προτεινόμενη προσέγγιση TPN χρησιμοποιείται για τη δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου μεταβάσεων το οποίο εκτιμά όλες τις πιθανές κινήσεις του ρομπότ μεταξύ των σταθμών των κυττάρων. Το μοντέλο αυτό έχει ως βάση μια μήτρα μεταβάσεων Από/Προς και τις ιδιότητες του TPN. Το μαθηματικό μοντέλο που λαμβάνεται, επιλύεται για τον προσδιορισμό της βέλτιστης αλληλουχίας πυροδότησεως των μεταβάσεων του TPN που έχει σχέση με το εξεταζόμενο πρόβλημα ρομποτικών κυττάρων, ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος που μεσολαβεί πριν από την πυροδότηση του ρομποτικού κυττάρου της τελευταίας μετάβασης (ο χρόνος κύκλου).

Τέλος, η βέλτιστη αλληλουχία μεταβάσεων χρησιμοποιείται για την παραγωγή ελεγκτών ρομποτικών κυττάρων και την κατασκευή του τελικού μοντέλου TPN.

Κεφάλαιο 3: Κατηγορίες δικτύων Petri

3.1 Δίκτυα Petri Χαμηλού Επιπέδου

Μια από τις κατηγορίες των δικτύων Petri είναι αυτή του χαμηλού επιπέδου (low-level PNs). Είναι σημαντικό ένα δίκτυο να κατηγοριοποιείται δομικά σε κάποια κατηγορία, ώστε να διευκολύνεται η ανάλυσή του σύμφωνα με τις ιδιότητές του. Άρα, όταν κάποιος στοχεύει να σχεδιάσει ένα δίκτυο και να το αναλύσει, ένα χαμηλού επιπέδου δίκτυο είναι αρκετά χρήσιμο. Όμως, εάν κάποιος θέλει να σχεδιάσει πολύπλοκα και ρεαλιστικά συστήματα, τότε υπάρχει περίπτωση να δημιουργηθούν πιο σύνθετα δίκτυα εάν χρησιμοποιήσει ένα χαμηλού επιπέδου μοντέλο.

Τα δίκτυα Petri χαμηλού επιπέδου μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως εξής, (Δημητριάδου, 2013):

3.1.1 Μηχανές κατάστασης (State machines)

Οι μηχανές κατάστασης είναι δίκτυα τέτοια ώστε κάθε μετάβαση που περιέχεται στο δίκτυο αποτελείται από μια είσοδο και μία έξοδο, δηλαδή κάθε μία από τις μεταβάσεις περιέχει ένα μόνο εισερχόμενο τόξο και ένα μόνο εξερχόμενο. Επίσης, μια μηχανή κατάστασης αναπαριστά τις συγκρούσεις, αλλά δεν επιτρέπει την περιγραφή του συγχρονισμού μεταξύ ταυτόχρονων ενεργειών, (Δημητριάδου, 2013).

3.1.2 Μαρκαρισμένα γραφήματα (Marked graphs)

Τα μαρκαρισμένα γραφήματα είναι δίκτυα τα οποία αποτελούνται και αυτά από μια συγκεκριμένη ιδιότητα που ορίζει ότι κάθε θέση που περιέχεται στο δίκτυο αποτελείται από μια μετάβαση στην είσοδο και μια μετάβαση στην έξοδο, δηλαδή κάθε μία από τις θέσεις περιέχει ένα μόνο εισερχόμενο τόξο και ένα μόνο εξερχόμενο. Επίσης, κάθε μαρκαρισμένο γράφημα αναπαριστά τις ταυτόχρονες ενέργειες, αλλά δεν μπορεί να περιγράψει τις συγκρούσεις. Άρα ένα τέτοιο είδος δικτύου θεωρείται κατάλληλο ώστε να μοντελοποιηθούν ταυτόχρονα συστήματα, (Δημητριάδου, 2013).

3.1.3 Δίκτυα Petri ελεύθερης επιλογής (Free choice PNs)

Δίκτυα Petri ελεύθερης επιλογής είναι δίκτυα τα οποία αποτελούνται από μια άλλη ιδιότητα που ορίζει ότι κάθε μία από τις θέσεις συνδέεται με κάθε μία από τις μεταβάσεις με ένα συγκεκριμένο τρόπο. Η σύνδεση μεταξύ τους γίνεται εάν η μετάβαση αποτελεί το μοναδικό τρόπο μετάβασης της εξόδου μιας συγκεκριμένης θέσης ή εάν η συγκεκριμένη θέση αποτελεί το μοναδικό τρόπο για την την είσοδο της μετάβασης. Αυτό σημαίνει ότι το τόξο ή θα είναι το μόνο εξερχόμενο της θέσης ή το μόνο εισερχόμενο της μετάβασης. Τέτοιου είδους δικτύων δεν μπορεί να απεικονίσει καταστάσεις σύγκρουσης, (Δημητριάδου, 2013).

3.1.4 Απλά δίκτυα Petri (Simple PNs)

Τα απλά δίκτυα Petri είναι δίκτυα που χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα ότι κάθε μία από τις μεταβάσεις αποτελείται από μία το πολύ θέση εισόδου, η οποία δείχνει σε άλλες μεταβάσεις. Αυτό σημαίνει ότι ένα τέτοιου είδους δίκτυο δεν μπορεί ν' αποτελείται από δύο μεταβάσεις που να δείχνουν στην ίδια θέση εισόδου και στην ίδια θέση εξόδου ταυτόχρονα, (Δημητριάδου, 2013).

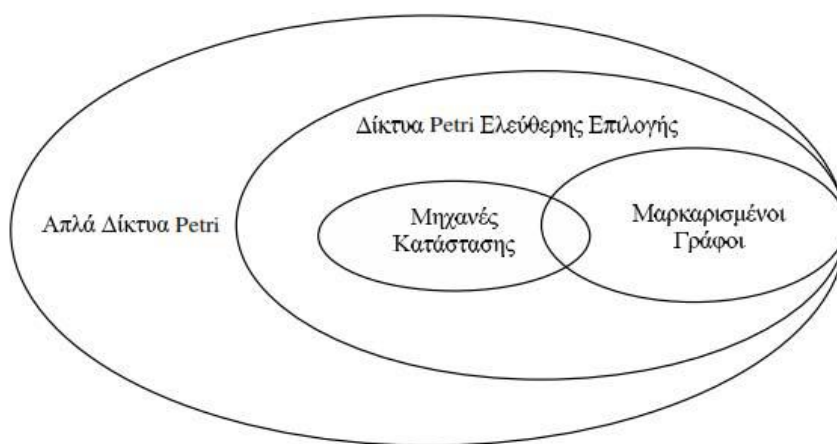
Οι τέσσερις κατηγορίες των δικτύων Petri χαμηλού επιπέδου φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:

Κατηγορίες Δικτύων Petri	Επιτρεπτή Μορφή	Μη Επιτρεπτή Μορφή
Μηχανές Κατάστασης (State Machines)		
Μαρκαρισμένοι Γράφοι (Marked Graphs)		
Δίκτυα Petri Ελεύθερης Επιλογής (Free Choice Nets)		
Απλά Δίκτυα Petri (Simple Nets)		

Σχήμα 29 Κατηγορίες δικτύων Petri χαμηλού επιπέδου

Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

Στο παρακάτω σχήμα αναπαρίστανται οι σχέσεις μεταξύ των τεσσάρων κατηγοριών:



Σχήμα 30 Σχέσεις των κατηγοριών δικτύων Petri χαμηλού επιπέδου

Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

Παρατηρείται ότι οι μηχανές κατάστασης και τα μαρκαρισμένα γραφήματα αποτελούν υποσύνολα της ελεύθερης επιλογής και όλα μαζί αυτά τα τρία αποτελούν υποσύνολο των απλών δικτύων, (Δημητριάδου, 2013).

3.2 Δίκτυα Petri Υψηλού Επιπέδου

Τα χρησιμοποιούμενα δίκτυα χαρακτηρίζονται για την πολυπλοκότητά τους, με αποτέλεσμα να περιορίζονται τα μοντέλα των δικτύων Petri χαμηλού επιπέδου, τα οποία δεν μπορούν να περιγράψουν εφαρμογές που η πολυπλοκότητά τους είναι μεσαίου βαθμού. Επίσης, τα μοντέλα χαμηλού επιπέδου δε μπορούν να υποστηρίξουν επαρκώς, και να προσδιορίσουν τις διακεκριμένες οντότητες ενός συστήματος, αλλά ούτε τις ιδιότητες και τους συσχετισμούς μεταξύ τους. Επιπλέον, ο προσδιορισμός για συγκεκριμένους μηχανισμούς δόμησης δεν υποστηρίζεται πλήρως από τον φορμαλισμό πολλών μοντέλων, όπως για παράδειγμα τους τελεστές σύνθεσης, (Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014).

Με βάση όλα τα παραπάνω, έχουν υλοποιηθεί άλλα μοντέλα δικτύων Petri που ονομάζονται υψηλού επιπέδου (high-level PNs), τα οποία παρέχουν περισσότερη περιεκτικότητα και ευχρηστία για την αναπαράσταση των συστημάτων, καθώς χρησιμοποιούνται και για την περιγραφή λειτουργιών με σαφή τρόπο, όπως για παράδειγμα τη ροή δεδομένων, τη ροή ελέγχου, τις σύνθετες συνθήκες, τις ενέργειες πυροδότησης αλλά και διάφορα άλλα χαρακτηριστικά. Τα δίκτυα Petri υψηλού επιπέδου χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες, αυτή των «καθαρών» δικτύων Petri υψηλού επιπέδου όπου οι επεκτάσεις εμφανίζουν διακεκριμένες μάρκες (individual tokens), τα δίκτυα που εμφανίζουν τροποποιημένη σημασιολογία (high-level PNs with modified semantics), αυτή των ιεραρχικών δικτύων (hierarchical high-level PNs / HHPNs) όπου περιλαμβάνονται επεκτάσεις με συγκεκριμένους μηχανισμούς δόμησης, και η κατηγορία όπου περιλαμβάνονται μοντέλα από τα οποία υιοθετούνται χαρακτηριστικά από άλλες τυπικές μεθόδους που προσδιορίζουν τις προδιαγραφές, (Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014).

3.2.1 «Καθαρά» δίκτυα Petri υψηλού επιπέδου (Individual tokens)

Τα «καθαρά» δίκτυα περιλαμβάνουν φορμαλισμούς όπως είναι τα χρωματισμένα δίκτυα (coloured PNs-CPNs) και τα δίκτυα διακεκριμένων μαρκών (Individual Token Nets - ITNs). Τα χρωματισμένα δίκτυα αποτελούν επέκταση των δικτύων χαμηλού επιπέδου αφού συσχετίζουν τις μάρκες, τις θέσεις αλλά και τις μεταβάσεις των δικτύων με χρώματα. Αντίστοιχα με τους όρους που υπάρχουν στις γλώσσες προγραμματισμού, το χρώμα αποτελεί απλά έναν τύπο, δηλαδή μια μέθοδο κατά την οποία γίνεται διάκριση των κλάσεων των αντικειμένων, οι οποίες περιέχουν χαρακτηριστικά από μια ίδια κατηγορία ως προς τη δομή. Έτσι και στα δίκτυα, είναι εφικτός ο μετασχηματισμός ενός χρωματισμένου δικτύου Petri σε ένα δίκτυο Θέσης Μετάβασης, αλλά καθίσταται πιο σύνθετο εάν το πλήθος των χρωμάτων είναι πεπερασμένο. Ο λόγος για το παραπάνω είναι ότι ένα δίκτυο θέσης μετάβασης θεωρείται ξεχωριστή περίπτωση για ένα αντίστοιχο χρωματισμένο δίκτυο, στο οποίο κάθε ένα από τα σύνολα των χρωμάτων περιλαμβάνει ένα και μόνο στοιχείο. Γενικά όμως, σε μη πεπερασμένα δίκτυα, τα χρωματισμένα δίκτυα είναι ισχυρότερα όπως οι μηχανές Turing, με αποτέλεσμα να μπορούν να αναπαραστήσουν κάθε υπολογιστικό σύστημα. Στις ίδιες επεκτάσεις περιλαμβάνονται και τα δίκτυα με διακεκριμένες μάρκες. Ο φορμαλισμός των δικτύων αυτών είναι παρόμοιος με αυτόν από τα χρωματισμένα δίκτυα, αλλά υπάρχουν ορισμένες διαφορές όσον αφορά τους κανόνες ενεργοποίησης των μεταβάσεων και της πυροδότησης αυτών. Οι κανόνες αυτοί επηρεάζονται στο συγκεκριμένο μοντέλο λόγω επιπρόσθετων συνθηκών και λειτουργιών στις μεταβάσεις, (Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014).

3.2.2 Δίκτυα που εμφανίζουν τροποποιημένη σημασιολογία (High-level PNs with modified semantics)

Η δεύτερη κατηγορία που αφορά τα δίκτυα που εμφανίζουν τροποποιημένη σημασιολογία (high-level PNs with modified semantics), παρουσιάζει αλλαγές συγκεκριμένων παραμέτρων, όπως είναι για παράδειγμα η χωρητικότητα των θέσεων, καθορίζονται συγκεκριμένοι τύποι στα βέλη, στις μεταβάσεις και στις θέσεις, καθώς μπορεί να τροποποιηθεί η πυροδότηση των μεταβάσεων ως προς τη σημασιολογία τους. Παρόλα αυτά σε πολύπλοκα συστήματα, ακόμη και ένα μοντέλο τροποποιημένης σημασιολογίας δεν θεωρείται επαρκές για την περιγραφή του συστήματος. Κύριος παράγοντας που επηρεάζει τον συγκεκριμένο περιορισμό είναι η απλή και «επίπεδη όψη» (flat view) των περισσότερων φορμαλισμών, ώστε να μοντελοποιήσουν το

σύστημα. Για το λόγο αυτό έχουν δημιουργηθεί τα Ιεραρχικά Δίκτυα Petri (hierarchical high-level PNs / HHPNs), (Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014).

3.2.3 Ιεραρχικά δίκτυα (Hierarchical high-level PNs / HHPNs)

Με τα ιεραρχικά δίκτυα Petri ενσωματώνονται ορισμένοι μηχανισμοί που στοχεύουν στη συστηματική και ιεραρχική δόμηση των δικτύων. Τα μοντέλα αυτά επικεντρώνονται στην αποσύνθεση των θέσεων και των μεταβάσεων ενός δικτύου από υποδίκτυα τα οποία περιέχουν περισσότερες λεπτομέρειες ή στη σύνθεση των τμημάτων, συμπύσσοντας τις μεταβάσεις, τις θέσεις ή τα βέλη. Μέσω της διαδικασίας αυτής της σύνθεσης προδιαγράφονται και οι μηχανισμοί που αφορούν την επικοινωνία των τμημάτων σε ένα δίκτυο, (Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014).

Όσον αφορά την σύμπτυξη των μεταβάσεων, σε αυτήν επιτρέπεται να αναπαρίσταται η σύγχρονη επικοινωνία όπου διατηρούνται στεθερές οι ιδιότητες των υποδικτύων και του συνολικού δικτύου, ώστε να εφαρμόζεται με περισσότερη ευκολία η ανάλυση του συστήματος. Όμως, με αυτή την σύμπτυξη μπορεί να δημιουργηθούν υποδίκτυα με ισχυρή σύζευξη και έτσι κάθε ένα από τα υποδίκτυα να μην αντιστοιχεί με ευκρίνεια σε κάποιο αυτόνομο κομμάτι του συστήματος.

Όσον αφορά την σύμπτυξη των θέσεων, σε αυτήν επιτρέπεται να αναπαρίσταται η ασύγχρονη επικοινωνία μεταξύ των υποδικτύων, όπου η επικοινωνία πραγματοποιείται από τις κοινές θέσεις οι οποίες αντιστοιχούν σε πόρους που διαμοιράζονται κοινά κατά την αναπαράσταση του συστήματος. Η διαδικασία αυτή της σύμπτυξης συμβαδίζει με τη θεωρία των δικτύων Petri, εφόσον οι μεταβάσεις αποτελούν ενεργητικές οντότητες όπου η επικοινωνία πραγματοποιείται μέσω των θέσεων οι οποίες θεωρούνται παθητικές οντότητες.

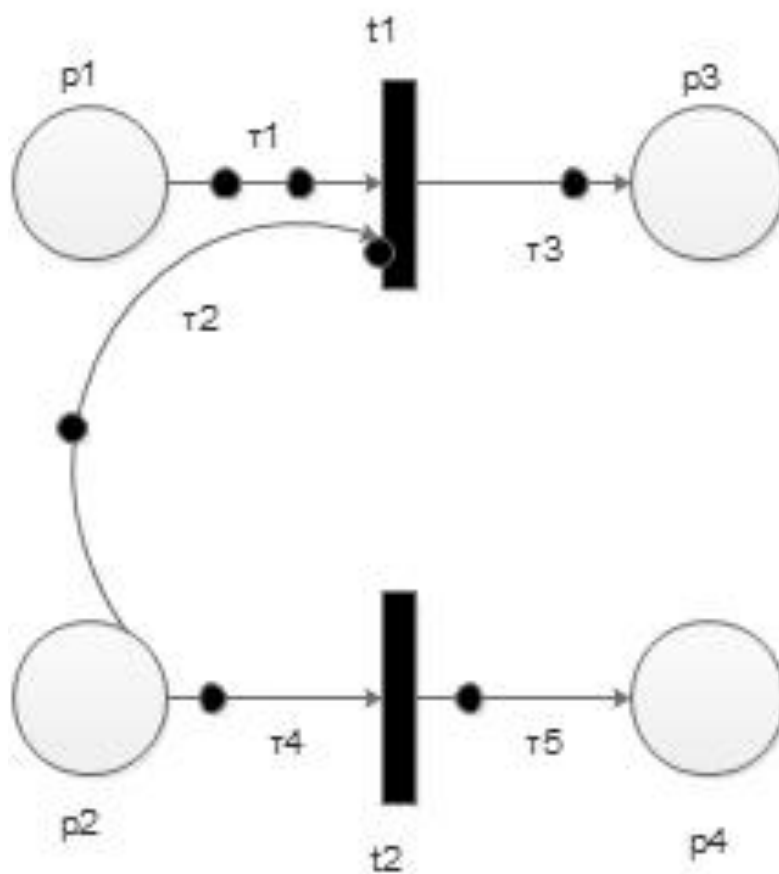
Τέλος, όσον αφορά την σύμπτυξη των βελών με την οποία δημιουργείται χαμηλός βαθμός σύζευξης, όπου η επικοινωνία μεταξύ των υποδικτύων θεωρείται ως ανταλλαγή μηνυμάτων η οποία περιλαμβάνει αποστολή και λήψη δεδομένων μεταξύ των συνιστώσεων του δικτύου, (Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014).

3.2.4 Μοντέλα από τα οποία υιοθετούνται χαρακτηριστικά από άλλες τυπικές μεθόδους που προσδιορίζουν τις προδιαγραφές

Γενικά, η σχέση ανάμεσα στα υψηλού επιπέδου δίκτυα Petri και στα χαμηλού επιπέδου δίκτυα Petri, είναι ανάλογη της σχέσης μεταξύ μιας υψηλού επιπέδου γλώσσας προγραμματισμού με έναν κώδικα assembly. Τα δίκτυα υψηλού επιπέδου περιλαμβάνουν την προσθήκη ορισμένων τύπων και τη διευκόλυνση δόμησης των συστημάτων. Στη θεωρία τα δύο επίπεδα, χαμηλό και υψηλό, έχουν την ίδια υπολογιστική ισχύ, και κάθε δίκτυο Petri υψηλού επιπέδου μπορεί να μεταφραστεί σε ένα συμπεριφορικά ισοδύναμο δίκτυο Petri χαμηλού επιπέδου, και αντίστροφα, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα τα υψηλού επιπέδου δίκτυα Petri να μπορούν να επωφεληθούν από τις καθορισμένες βασικές έννοιες των δικτύων Petri. Στην πράξη όμως, τα δίκτυα υψηλού επιπέδου έχουν πολύ περισσότερη ισχύ μοντελοποίησης και ως εκ τούτου είναι και πολύ πιο βολικά για τους προγραμματιστές. Παρακάτω παρουσιάζονται τα δίκτυα Petri υψηλού επιπέδου χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα, (Laganeckas, 2012).

3.3 Δίκτυα Petri με χρονισμένες μεταβάσεις

Τα δίκτυα Petri με χρονισμένες μεταβάσεις περιλαμβάνουν τα μοντέλα στα οποία συσχετίζονται οι χρονικές προδιαγραφές και οι μεταβάσεις του δικτύου, και αποτελούν κατηγορία που περιέχει το μεγαλύτερο πλήθος χρονικών εκδόσεων. Τα μοντέλα αυτών των δικτύων εφαρμόζουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις ώστε να αναπαραστήσουν εφαρμογές που περιέχουν χρονικά εξαρτημένες συμπεριφορές, (Laganeckas, 2012· Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014). Στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνεται ένα δίκτυο με χρονισμένες μεταβάσεις:

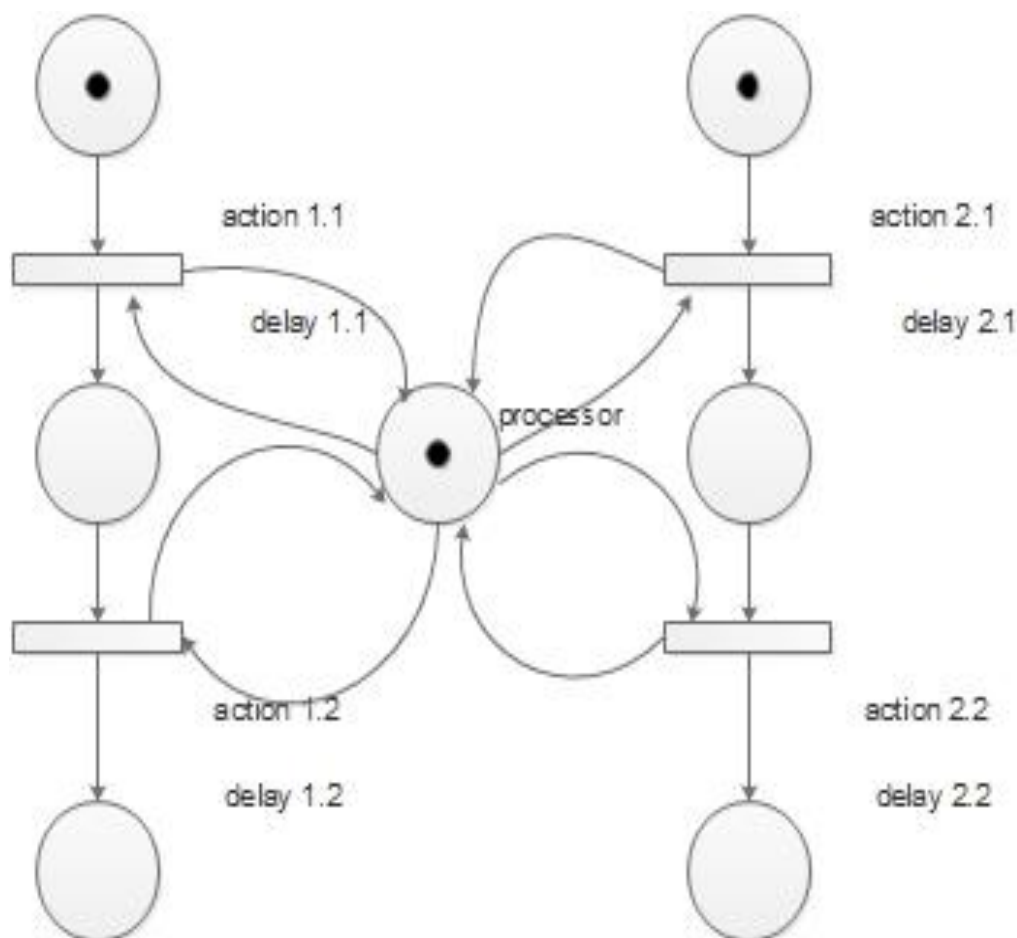


Σχήμα 31 Δίκτυο Petri με χρονισμένες μεταβάσεις

Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

3.3.1 Προσέγγιση/Αναπαράσταση δράσεων

Η μία από τις δύο προσεγγίσεις αναπαριστά τις δράσεις με τις οποίες πραγματοποιείται η σύνθεση μιας εφαρμογής, καθώς αναλύεται πλήρως η διαδικασία κατά την οποία κάθε μία από τις δράσεις διαχωρίζεται σε άλλες επιμέρους δράσεις. Επίσης, υπάρχει αντιστοιχία κάθε δράσης με μια διαφορετική μετάβαση και η διάρκεια του χρόνου κατά την οποία εκτελείται μια δράση αναγράφεται με κάποιον χρονικό προσδιορισμό ως προς την αντίστοιχη μετάβαση. Οι πόροι που διαμοιράζονται κοινές μεταβάσεις, απεικονίζονται με μια μάρκα/κουπόνι στην αντίστοιχη θέση, ή αρκετές φορές δεν απεικονίζονται καθόλου. Γενικά, η προσέγγιση αυτή εφαρμόζεται για την αναπαράσταση της δομής μιας εφαρμογής. Όμως, σημαντικό μειονέκτημα αποτελεί η αδυναμία να περιγράψει φαινόμενα, όπως είναι για παράδειγμα οι πόροι που καταχωρούνται σε ένα σύστημα, στις δράσεις του αλλά και στη διακοπή εκτέλεσης αυτών, (Laganekas, 2012; Δημητριάδου, 2013; Αβραμίδου, 2014). Στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνεται ένα δίκτυο Petri με χρονισμένες μεταβάσεις, το οποίο αναπαριστά τις δράσεις:

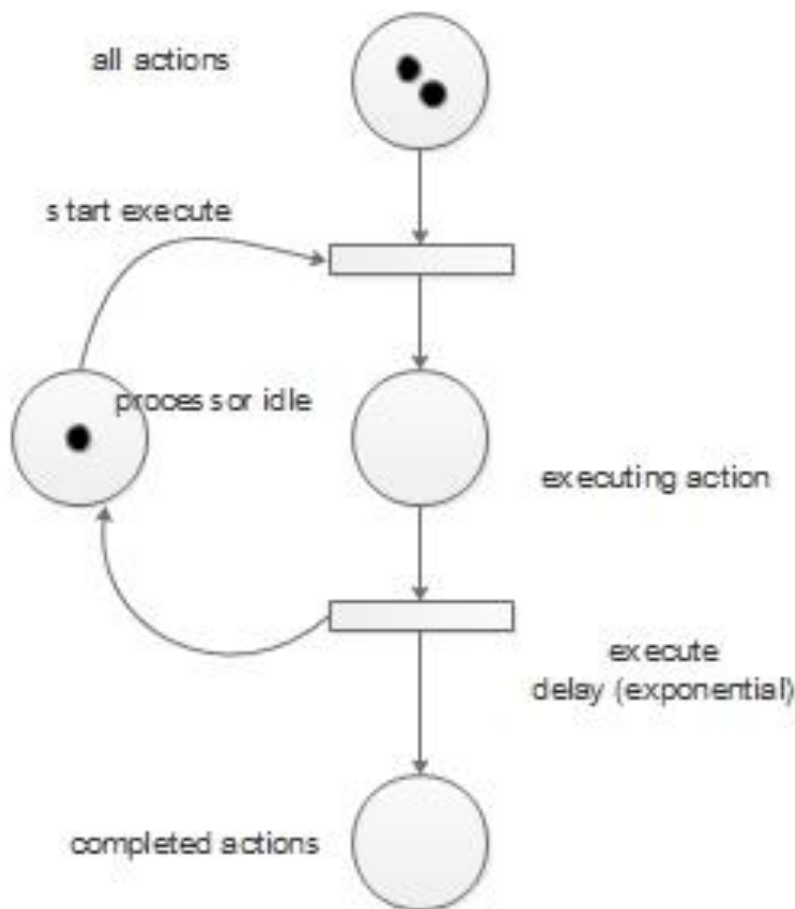


Σχήμα 32 Δίκτυο Petri με χρονισμένες μεταβάσεις - Προσέγγιση/Αναπαράσταση δράσεων

Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

3.3.2 Προσέγγιση/Αναπαράσταση πόρων

Η άλλη προσέγγιση αναπαριστά τους πόρους οι οποίοι χρησιμοποιούνται από τις δράσεις μιας εφαρμογής. Η απεικόνιση των δράσεων εφαρμόζεται με τη διακίνηση των κουπονιών μέσα στο δίκτυο. Γενικά, η προσέγγιση αυτή αναπαριστά τις δεσμεύσεις και τις αποδεσμεύσεις των πόρων που εμπλέκονται, όμως δεν αναλύεται η διαδικασία με την οποία κάθε μία από τις δράσεις διαχωρίζεται σε άλλες επιμέρους δράσεις, ούτε η πραγματική διάρκεια του χρόνου εκτέλεσής τους. Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιείται κυρίως για να αναλυθεί η απόδοση μιας εφαρμογής, (Laganekas, 2012· Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014). Στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνεται ένα δίκτυο Petri με χρονισμένες μεταβάσεις, το οποίο αναπαριστά τους πόρους:

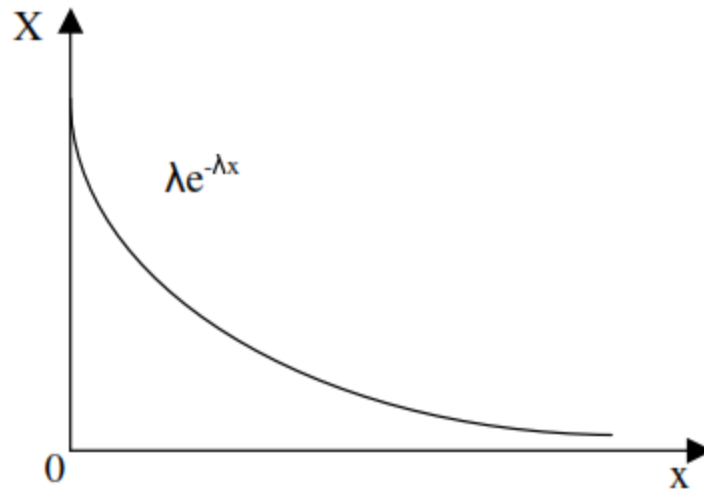


Σχήμα 33 Δίκτυο Petri με χρονισμένες μεταβάσεις - Προσέγγιση/Αναπαράσταση πόρων

Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

3.4 Στοχαστικά δίκτυα Petri

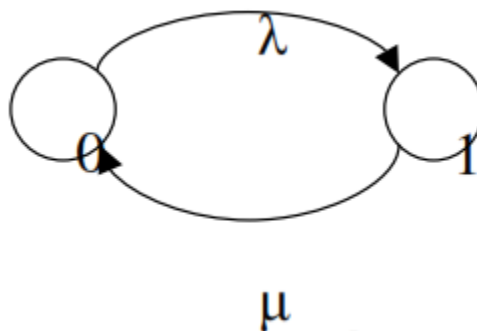
Τα στοχαστικά δίκτυα αποτελούν δίκτυα με χρονισμένες μεταβάσεις και με κανόνα εκτέλεσης ή αλλιώς πυροδότησης, ο οποίος είναι ατομικός. Στα δίκτυα αυτά οι καθυστερήσεις που παρουσιάζει μια εκτέλεση μετάβασης, κατανέμονται εκθετικά με μεταβλητές οι οποίες είναι τυχαίες, και κάθε μία από τις μεταβάσεις συνδέεται και με μια τυχαία μεταβλητή, όπου η συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας που αντιστοιχεί σε αυτή, είναι εκθετική με αρνητικό πρόσημο και παρουσιάζει το χρόνο κατά τον οποίο καθυστερεί μια μετάβαση από την ενεργοποίησή της έως και την πυροδότηση. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μία από τις μεταβάσεις που συμβολίζεται με t σε ένα στοχαστικό δίκτυο παρουσιάζει συσχέτιση με έναν ρυθμό πυροδότησης ο οποίος κατανέμεται εκθετικά. Η εκθετική κατανομή είναι η $f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ και εξαρτάται από το λ (τιμή του ρυθμού), και είναι αντίστροφος από τη μέση τιμή $E[X] = 1/\lambda$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της εκθετικής κατανομής, (Laganekas, 2012; Δημητριάδου, 2013; Αβραμίδου, 2014):



Σχήμα 34 Γραφική παράσταση εκθετικής κατανομής

Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

Η εκθετική αυτή κατανομή αποτελεί τη μοναδική συνάρτηση για την κατανομή της πιθανότητας σε συνεχή χρόνο, με την ιδιότητα «χωρίς μνήμη» (memory less property). Οι εκθετικές κατανομές είναι σημαντικές ώστε να ορίζονται οι χρονικές προδιαγραφές, διότι στα στοχαστικά δίκτυα υπάρχει η δυνατότητα μετασχηματισμού των δικτύων σε αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου. Οι αλυσίδες Markov είναι Markovιανές διαδικασίες για διακεκριμένες καταστάσεις, οι οποίες είναι κατηγορία των στοχαστικών διαδικασιών, οι οποίες με τη σειρά τους είναι οι τυχαίες συναρτήσεις στο χρόνο. Οι διακεκριμένες καταστάσεις αναφέρονται στο πλήθος των εφικτών τιμών της διαδικασίας, που είναι πεπερασμένο. Οι μελλοντικές καταστάσεις στις Markovιανές διαδικασίες δεν εξαρτώνται από το παρελθόν αλλά μόνο από το παρόν, δεν περιλαμβάνουν δηλαδή την ιδιότητα «χωρίς μνήμη». Για την πρόβλεψη του μέλλοντος μιας Markovιανής διαδικασίας σε συνεχή χρόνο, είναι απαραίτητη η γνώση της τρέχουσας κατάστασης και όχι η διάρκεια της διαδικασίας στην τρέχουσα κατάσταση. Για την περιγραφή μιας αλυσίδας Markov σε συνεχή χρόνο εφαρμόζεται το διάγραμμα ρυθμού μετάβασης-κατάστασης, το οποίο αποτελεί ένα κατευθυνόμενο γράφημα, όπου κάθε ένας από τους κόμβους έχει ως επιγραφή μια κατάσταση της αλυσίδας Markov και κάθε ένα από τα τόξα το ρυθμό της εκθετικής κατανομής. Ο ρυθμός της εκθετικής κατανομής λέγεται ρυθμός μετάβασης της κατάστασης και αποτελεί τον απαιτούμενο χρόνο για τη μετάβαση της αλυσίδας μεταξύ των καταστάσεων. Στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνεται το διάγραμμα ρυθμού μετάβασης-κατάστασης μιας αλυσίδας Markov σε συνεχή χρόνο μεταξύ δύο καταστάσεων, 0 και 1, και αντίστοιχα οι ρυθμοί μετάβασης, λ και μ , (Laganeckas, 2012· Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014).

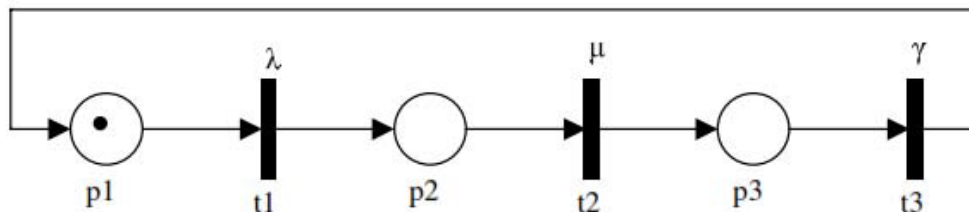


Σχήμα 35 Διάγραμμα ρυθμού μετάβασης αλυσίδας Markov

Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

Τα στοχαστικά δίκτυα, εξ αιτίας της ιδιότητας, που αναφέρθηκε και παραπάνω, «χωρίς μνήμη» στην εκθετική κατανομή, είναι ισόμορφα με μια αλυσίδα Markov σε συνεχή χρόνο, και το γράφημα που αναπαριστά την προσιτότητα του δικτύου παρουσιάζει αντιστοιχία με το διάγραμμα ρυθμού μετάβασης της αλυσίδας Markov. Αυτό, φαίνεται ευδιάκριτα αν η δομή του στοχαστικού δικτύου μπορεί να ικανοποιήσει παράλληλα και τη δομή που αφορά τη μηχανή κατάστασης κατά την οποία κάθε μία από τις μεταβάσεις περιλαμβάνει μόνο μία είσοδο και μία έξοδο, καθώς και τη δομή που αφορά το μαρκαρισμένο γράφημα, κατά την οποία κάθε μία από τις θέσεις περιλαμβάνει μόνο μια μετάβαση εισόδου και μία εξόδου, και περιέχει μόνο μία μάρκα/κουπόνι κατά το αρχικό μαρκάρισμα. Σε μια τέτοια περίπτωση η κατάσταση του μοντέλου ορίζεται μονοσήμαντα από κάθε θέση και η κατάσταση κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης χρονικής στιγμής καθορίζεται από τη θέση του κουπονιού, (Laganeckas, 2012· Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014).

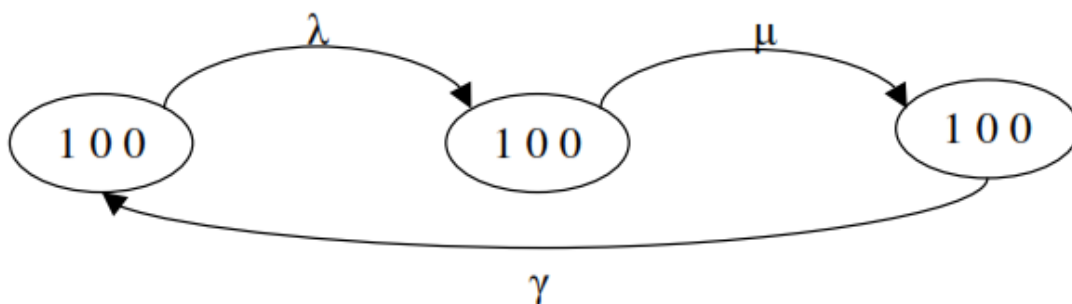
Κάθε ένα από τα μαρκαρίσματα που περιέχονται στο δίκτυο αντιστοιχεί σε μια κατάσταση αλυσίδας Markov και με τη σειρά της, κάθε μία από αυτές τις μεταβάσεις αντιστοιχεί σε ένα τόξο το οποίο αναγράφει το ρυθμό του συγκεκριμένου χρόνου πυροδότησης που κατανέμεται. Εάν ο ρυθμός της πυροδότησης έχει εκθετική κατανομή με αρνητικό πρόσημο, τότε ο χρόνος που καταναλώνεται για κάθε θέση του δικτύου, καθορίζεται πλήρως από τη μετάβαση εκείνη η οποία έχει τη δυνατότητα να αποσύρει το κουπόνι από τη συγκεκριμένη θέση. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένα στοχαστικό δίκτυο Petri που ικανοποιεί τις δομές της μηχανής κατάστασης, καθώς και του μαρκαρισμένου γραφήματος, (Laganeckas, 2012· Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014):



Σχήμα 36 Στοχαστικό δίκτυο Petri που ικανοποιεί τις δομές της μηχανής κατάστασης και του μαρκαρισμένου γραφήματος

Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

Παρακάτω απεικονίζεται η αντίστοιχη αλυσίδα Markov σε συνεχή χρόνο:



Σχήμα 37 Η αντίστοιχη αλυσίδα Markov σε συνεχή χρόνο

Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

Σε γενικές γραμμές, για την εξαγωγή μιας αλυσίδας Markov η οποία σχετίζεται με κάποιο στοχαστικό δίκτυο εφαρμόζονται ορισμένοι απλοί κανόνες, (Laganeckas, 2012· Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014):

- Ο χώρος καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου ($S = \{s_i\}$) αντιστοιχεί στο σύνολο προσιτότητας του στοχαστικού δικτύου ($M_i \leftrightarrow s_i$, όπου M_i ένα μαρκάρισμα).
- Ο ρυθμός μετάβασης-κατάστασης από την κατάσταση s_i , του μαρκαρισματος M_i , στην κατάσταση s_j , του μαρκαρισματος M_j , είναι το άθροισμα των ρυθμών πυροδότησης των ενεργοποιημένων στο M_i μεταβάσεων, που οι πυροδοτήσεις τους παράγουν το μαρκάρισμα M_j .

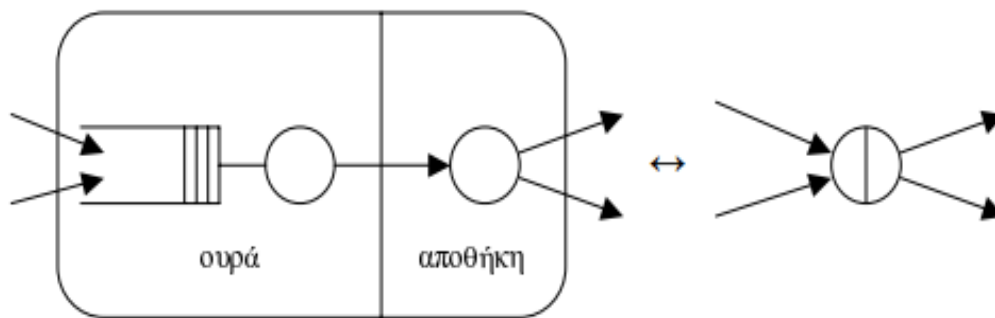
Με βάση τους κανόνες των στοχαστικών δικτύων Petri πυροδοτείται πρώτη η μετάβαση η οποία καθυστερεί λιγότερο. Ο χρόνος αυτός της καθυστέρησης που προκύπτει για κάθε μία από τις μεταβάσεις σε ένα καινούριο μαρκάρισμα, αποτελεί μια καινούρια τιμή της εκθετικής κατανομής ή τον χρόνο της πυροδότησης που έχει απομείνει στο χρονομετρητή. Εξ αιτίας όμως της ιδιότητας «χωρίς μνήμη» από την εκθετική κατανομή η οποία έχει αρνητικό πρόσημο, η κατανομή από το συνολικό χρόνο της πυροδότησης είναι αντίστοιχη με αυτή από το χρόνο πυροδότησης που έχει απομείνει ύστερα από κάποια αλλαγή κατάστασης. Για το λόγο αυτό, δεν είναι απαραίτητος ο ορισμός κάποιας πολιτικής μνήμης, όπως είναι η επαναδειγματοληψία, εφόσον δε διαφέρουν μεταξύ τους ως προς την εκθετική κατανομή. Σημαντική ιδιότητα αποτελεί και η συνέχεια της εκθετικής κατανομής. Η εκθετική κατανομή, λόγω της συνεχούς συνάρτησης παρουσιάζει πιθανότητα ίση με το μηδέν για την επιλογή μιας συγκεκριμένης τιμής x τυχαία. Συνεπώς, είναι μηδενική και η πιθανότητα λειτουργίας δύο χρονομετρητών την ίδια ακριβώς χρονική στιγμή. Με λίγα λόγια, αυτό σημαίνει ότι αν έχει δοθεί μια τυχαία τιμή σε έναν από τους χρονομετρητές, σε μια εκθετική κατανομή με αρνητικό πρόσημο, τότε η πιθανότητα να δοθεί η ίδια τιμή τυχαία και σε έναν άλλον χρονομετρητή είναι μηδενική, (Laganeckas, 2012· Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014).

Συμπερασματικά, τα στοχαστικά δίκτυα Petri αποτελούν υψηλού επιπέδου δίκτυα, όπου η περιγραφή της δυναμικής συμπεριφοράς τους πραγματοποιείται με τη στοχαστική διαδικασία. Η απόδοση των συστημάτων εκτιμάται μέσω της μοντελοποίησης του αρχικού συστήματος με τη χρήση στοχαστικών δικτύων και της στοχαστικής διαδικασίας. Έπειτα, γίνεται ανάλυση αυτής της διαδικασίας μέσω της αλυσίδας Markov σε συνεχή χρόνο, (Laganeckas, 2012· Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014).

3.5 Δίκτυα Petri με ουρές

Για την ανάλυση ενός συστήματος είναι συχνά απαραίτητες τόσο οι ποιοτικές όσο και οι ποσοτικές πτυχές. Τις τελευταίες δεκαετίες, έχουν αναπτυχθεί πολλοί φορμαλισμοί στην προσπάθεια να συνδυάσουν αυτές τις πτυχές σε μια περιγραφή. Προς το παρόν περισσότερη έμφαση δίνεται στα Στοχαστικά Δίκτυα Petri. Μεταξύ άλλων, ένα μειονέκτημα αυτών των δικτύων είναι οι φορμαλισμοί που παρουσιάζουν δυσκολίες κατά την περιγραφή των στρατηγικών προγραμματισμού με στοιχεία των δικτύων Petri. Τα δίκτυα Petri με ουρές, συνδυάζουν τόσο τα δίκτυα με ουρές όσο και γενικά τα στοχαστικά δίκτυα για την εξάλειψη των μειονεκτημάτων που παρουσιάζουν τα τελευταία. Τα δίκτυα με ουρές αποτελούν υποσύνολο των στοχαστικών δικτύων ενσωματώνοντας τις ουρές στις θέσεις, (Bause, Buchholz et al, 2011)

Η πολυπλοκότητα της ποσοτικής ανάλυσης μπορεί να μειωθεί σε μεγάλο βαθμό εάν τα δίκτυα με ουρές αποτελούνται από μια ιεραρχική δομή, η οποία πρόσφατα οδήγησε σε επέκταση το μοντέλο φορμαλισμού των ιεραρχικών δικτύων σε συνδυασμό με τις ουρές, (Bause, Buchholz et al, 2011). Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα δίκτυο με ουρές:



Σχήμα 38 Δίκτυο Petri με ουρές

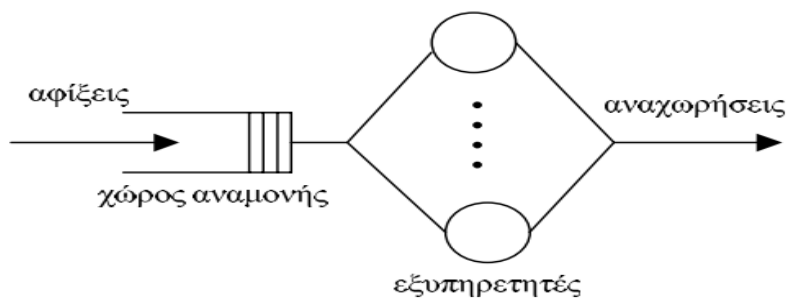
Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

3.5.1 Χαρακτηριστικά δικτύων με ουρές

Ένα τέτοιο δίκτυο Petri περιλαμβάνει μια ουρά (queue) και μια αποθήκη (depository) για την εξυπηρέτηση των κουπονιών. Τα κουπόνια προστίθενται σε μια θέση, ύστερα από μια μετάβαση, και εισάγονται στην ουρά με βάση τη στρατηγική προγραμματισμού της ουράς.

Η ουρά αποτελείται από έναν χώρο αναμονής και ένα κέντρο υπηρεσιών που περιλαμβάνει έναν ή περισσότερους εξυπηρετητές. Κάθε κουπόνι/μάρκα που φτάνει στην ουρά εξυπηρετείται κατευθείαν από έναν εξυπηρετητή ο οποίος είναι ελεύθερος και μπορεί να διατεθεί για το κουπόνι. Εάν ο εξυπηρετητής δεν είναι ελεύθερος για διάθεση, τότε το κουπόνι περιμένει στον χώρο αναμονής έως ότου απελευθερωθεί ο εξυπηρετητής και να μπορέσει να διατεθεί για αυτό, (Bause et al, 1996· Kounev & Buchmann, 2006).

Η στρατηγική προγραμματισμού της ουράς καθορίζει τους κανόνες για την εξυπηρέτηση των κουπονιών. Τυπικές στρατηγικές της ουράς αποτελεί το μοντέλο First Come First Served (FCFS) που επικεντρώνεται στην προτεραιότητα, και το μοντέλο Processor Sharing (PS) που επικεντρώνεται στην κοινή χρήση των εξυπηρετητών. Από τον χρόνο που χρειάζεται ένας εξυπηρετητής για να εξυπηρετήσει ένα κουπόνι, εξαρτάται και ο χρόνος εξυπηρέτησης του κουπονιού, (Bause et al, 1996· Kounev & Buchmann, 2006). Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα δίκτυο με ουρές μαζί με τα χαρακτηριστικά του:



Σχήμα 39 Δίκτυο Petri με ουρές-Χαρακτηριστικά

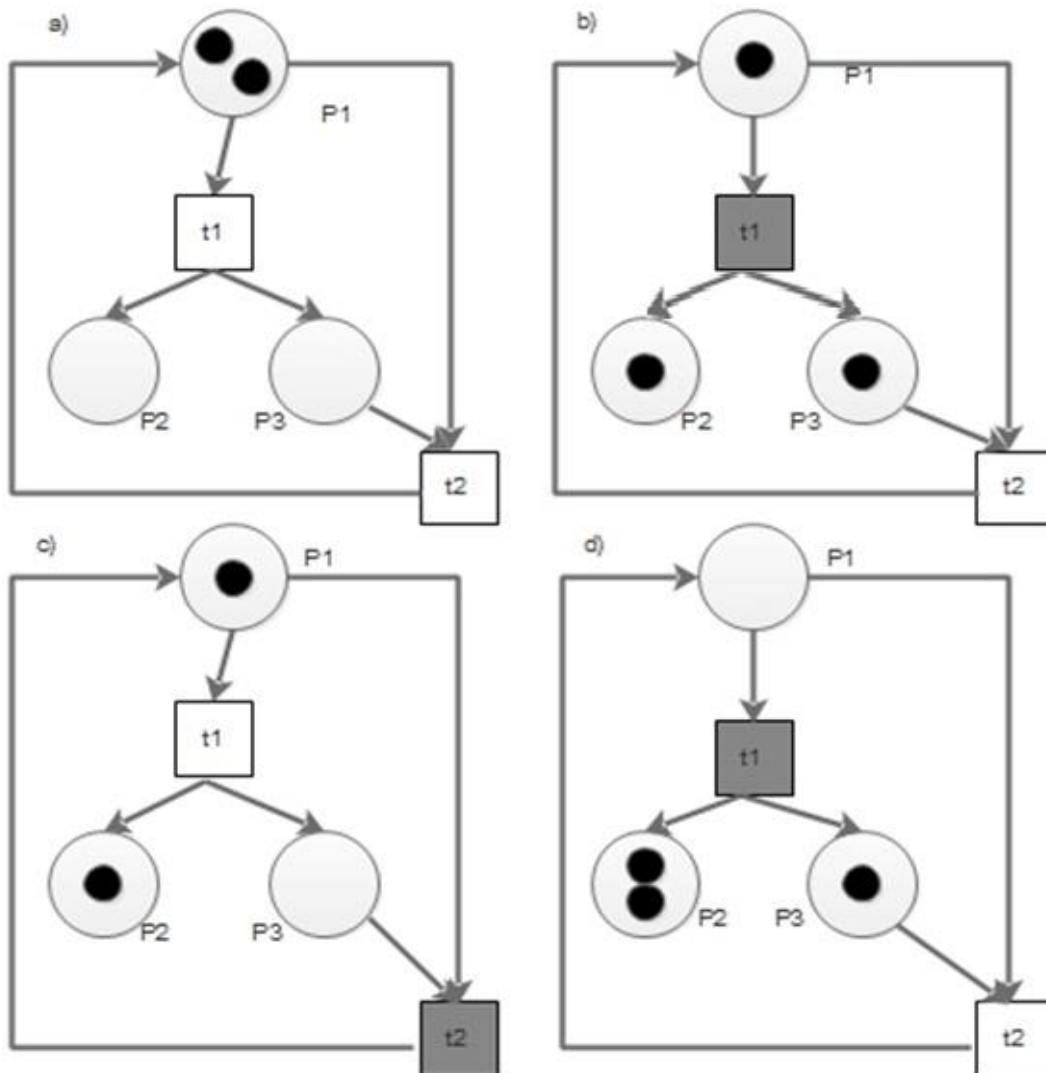
Πηγή: <http://delab.csd.auth.gr/~katsaros/ModelingAndSimulationByColoredPetriNets.pdf>

Ο συνήθης συμβολισμός για μεμονωμένες ουρές είναι A/B/M, όπου το A δηλώνει την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας που προσδιορίζει τους χρόνους μεταξύ των αφίξεων των κουπονιών, το B δηλώνει την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του χρόνου εξυπηρέτησης και το M είναι ο αριθμός των εξυπηρετητών, (Bause et al, 1996· Kounev & Buchmann, 2006).

Κεφάλαιο 4: Εφαρμογές Δικτύων Petri

4.1 Παράδειγμα εφαρμογής δικτύου Petri χαμηλού επιπέδου

Τα δίκτυα Petri χαμηλού επιπέδου, αναλύονται περισσότερο, σύμφωνα με το παράδειγμα που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Το σχήμα χωρίζεται σε 4 μέρη τα οποία δείχνουν 4 διαφορετικές καταστάσεις του ίδιου δικτύου Petri. Το δίκτυο Petri που δίνεται στο παράδειγμα έχει τρεις θέσεις (απεικονίζονται με ελλείψεις) και δύο μεταβάσεις (που απεικονίζονται με ορθογώνια) (Laganeckas, 2012).



Σχήμα 40 Παράδειγμα δικτύου Petri χαμηλού επιπέδου

Πηγή: http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc_download.php/6403/pdf/imm6403.pdf

α) Το σχήμα (α) δείχνει την αρχική κατάσταση του καθαρού Petri. Στην αρχική κατάσταση, ο τόπος P_1 έχει αρχική σήμανση - δύο μαύρες μάρκες. Και μόνο η μετάβαση t_1 είναι ενεργοποιημένη στη δεδομένη σήμανση. Για να ενεργοποιηθεί μια μεταβατική περίοδος σε μια δεδομένη σήμανση σε κάθε τόπο εισαγωγής θα πρέπει να έχει τουλάχιστον ένα μαύρο κουπόνι μέσα. Στον τόπο P_3 δεν έχει κανένα μαύρο κουπόνι στο εσωτερικό, οπότε η μετάβαση t_2 δεν είναι ενεργοποιημένη. Μόλις βρεθεί μια ενεργοποιημένη μετάβαση (στην περίπτωση αυτή το t_1), τα κουπόνια μπορούν να απελευθερωθούν, (Laganeckas, 2012).

β) Το σχήμα (b) δείχνει το ίδιο Petri μετά τη μετάβαση t_1 που απελευθερώθηκε. Η μετάβαση πραγματοποιείται απλά με την αφαίρεση ενός μαύρου κουπονιού από κάθε θέση εισόδου και προσθέτοντας ένα μαύρο κουπόνι σε κάθε θέση εξόδου της αντίστοιχης μετάβασης. Έτσι τώρα τα σημεία P_1, P_2, P_3 έχουν ένα κουπόνι το καθένα. Με μπλε χρώμα στο t_1 φαίνεται η μετάβαση. Τώρα και οι δύο μεταβάσεις t_1 και t_2 είναι ενεργοποιημένες και μπορεί να επιλεγεί είτε η t_1 είτε η t_2 , (Laganeckas, 2012).

γ) Το σχήμα (c) δείχνει το ίδιο Petri μετά τη μετάβαση t_2 που απελευθερώθηκε. Τώρα μόνο μετάβαση t_1 είναι ενεργοποιημένη, (Laganeckas, 2012).

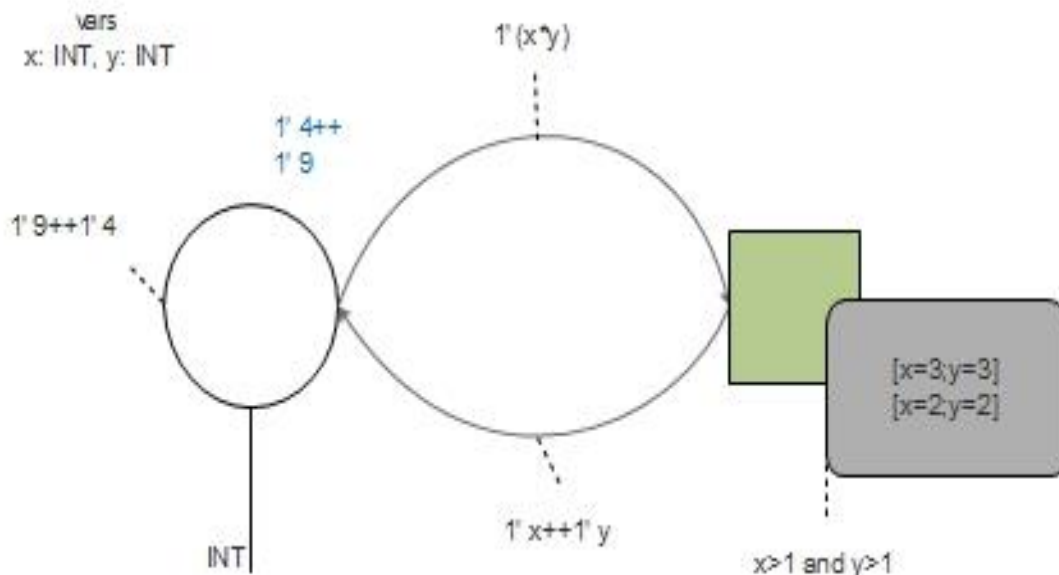
δ) Το σχήμα (d) δείχνει το ίδιο Petri μετά τη μετάβαση t_1 που απελευθερώθηκε. Δεν υπάρχουν πλέον περισσότερες ενεργοποιημένες μεταβάσεις, (Laganeckas, 2012).

4.2 Παράδειγμα εφαρμογής δικτύου Petri υψηλού επιπέδου

Στο Σχήμα 41 το δίκτυο Petri εφαρμόζει τη θεωρία της παραγοντοποίησης, δηλαδή αν έχουμε τον αριθμό 12, οι πρώτοι του παράγοντες θα είναι $2 * 2 * 3 = 12$.

Επεξήγηση των συμβόλων:

- Σταθερά: μια ποσότητα που δεν αλλάζει, π.χ. 1
- Μεταβλητή: ένα σύμβολο που αντιπροσωπεύει μια τιμή, π.χ. x ή y
- Συντελεστής: ένας αριθμός που τοποθετείται μπροστά από μία μεταβλητή, π.χ. $5x$
- Σύμβολα πράξεων, π.χ. $+$, $-$, $/$ κλπ.
- Όρος: μπορεί να είναι μία σταθερά, μία μεταβλητή με ένα συντελεστή κλπ, π.χ. 5, $4*x$, $x*y$ κλπ
- Εκχώρηση μιας τιμής: συμβολίζεται με το ' \leftarrow ', π.χ. $[x \leftarrow 7]$, δηλαδή στη μεταβλητή x εκχωρείται ο συντελεστής 7
- Πολυσύνολο: είναι ένα σύνολο όπου επιτρέπεται η επανάληψη των στοιχείων, π.χ. 2^3 , δηλαδή για το στοιχείο 3 επιτρέπονται δύο επαναλήψεις/περιπτώσεις
- Πρόσθεση πολυσυνόλων: συμβολίζεται με το ' $++$ ', π.χ. $1^5++2^8++3^5=4^5++2^8$, δηλαδή το 1^5++3^5 με την πρόσθεση έχει ως αποτέλεσμα 4^5 , διότι μοιράζονται το ίδιο στοιχείο, δηλαδή το 5.



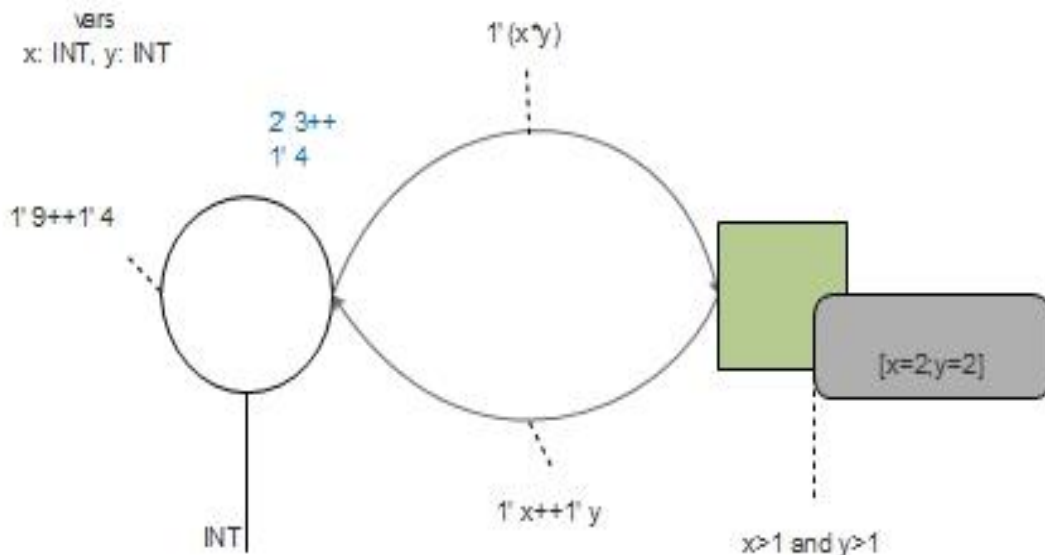
Σχήμα 41 Παράδειγμα δικτύου Petri υψηλού επιπέδου στην αρχική κατάσταση

Πηγή: http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc_download.php/6403/pdf/imm6403.pdf

Ο κύκλος του σχήματος αποτελεί έναν αρχικό τόπο σήμανσης. Το μπλε κείμενο στην επάνω δεξιά γωνία του τόπου είναι ο τόπος εκτέλεσης της σήμανσης (η τιμή εκτέλεσης). Σε

αυτό το παράδειγμα ο τόπος της εκτέλεσης της σήμανσης είναι ίσος με την αρχική σήμανση. Με πράσινο χρώμα φαίνεται το στάδιο μετάβασης το οποίο δείχνει ενεργοποιημένη μετάβαση. Το μενού με γκρι χρώμα εμφανίζει τις διαθέσιμες λειτουργίες για την επιλεγμένη μετάβαση. Το δίκτυο Petri έχει μόνο ένα μέρος και ένα μεταβατικό στάδιο. Το μέρος είναι στον ίδιο χρόνο εισόδου και εξόδου ως προς τον τόπο της μετάβασης. Η αρχική σήμανση του τόπου είναι ένας ακέραιος πολλαπλής επιλογής, $1'4++$ και $1'9$, και τα τόξα εισόδου και εξόδου έχουν τις επιγραφές $1'(x * y)$ και $1'x++1'y$, αντίστοιχα. Τέλος, η μετάβαση απαιτεί τα x και y να είναι μεγαλύτερα του 1 ($x > 1$ and $y > 1$). Για να ελεγχθεί εάν η μετάβαση είναι ενεργοποιημένη, θα πρέπει να βρεθούν τέτοιες τιμές για τα x και y που $1'4++1'9 \geq 1'(x*y)$. Στην περίπτωση του παραδείγματος, είναι προφανές, ότι η παραπάνω ανισότητα ικανοποιείται όταν $x*y=4$ ή $x*y=9$. Εάν $[x \leftarrow 2, y \leftarrow 2]$, τότε η εξίσωση $x*y=4$, ικανοποιείται. Το ίδιο ισχύει και για $x*y=9$, όταν $[x \leftarrow 3, y \leftarrow 3]$. Η μετάβαση ενεργοποιείται, εφόσον βρέθηκαν οι δεσμεύσεις των μεταβλητών, η οποία, μετάβαση, πληροί τις επιγραφές των τόξων και την κατάσταση της μετάβασης. Μετά τη ενεργοποίηση της μετάβασης, η τιμή που προέρχεται από το τόξο εισόδου αφαιρείται από το τόξο εξόδου, δηλαδή $1'4++1'9 - 1 \gg (3 * 3) = 1'4$. Μετά την αφαίρεση, η τιμή που προέρχεται από το τόξο εξόδου προστίθεται στην θέση εξόδου της σήμανσης, δηλαδή $1'4 ++ 1'3 ++ 1'3 = 1'4 ++ 2'3$, (Laganeckas, 2012).

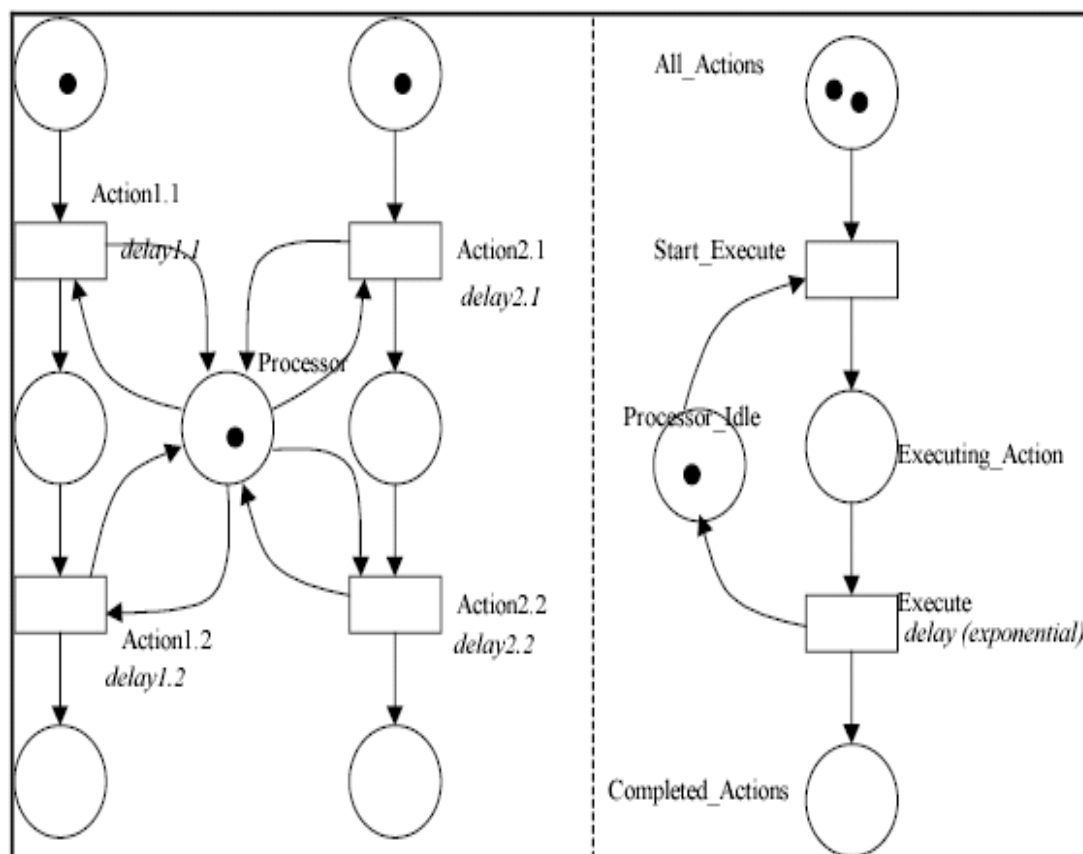
Το παρακάτω σχήμα δείχνει το ίδιο δίκτυο Petri μετά την πραγματοποίηση της μετάβασης. Φαίνεται ότι η μετάβαση εξακολουθεί να είναι ενεργοποιημένη, αλλά αυτή τη φορά είναι δεσμευτική μόνο μία δυνατή μεταβλητή, $[x \leftarrow 2, y \leftarrow 2]$, (Laganeckas, 2012).



Σχήμα 42 Παράδειγμα δικτύου Petri υψηλού επιπέδου μετά από πραγματοποίηση μίας μετάβασης
 Πηγή: http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc_download.php/6403/pdf/imm6403.pdf

4.3 Παράδειγμα εφαρμογής δικτύου Petri με χρονισμένες μεταβάσεις

Στο σχήμα (α) που απεικονίζεται παρακάτω φαίνεται ένα παράδειγμα δικτύου το οποίο αναπαριστά τις δράσεις, ενώ στο σχήμα (β) φαίνεται ένα παράδειγμα δικτύου το οποίο αναπαριστά τους πόρους, (Laganeckas, 2012· Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014).



Σχήμα 43 Δίκτυα με χρονισμένες μεταβάσεις: **a)** αναπαράσταση δράσεων και **b)** αναπαράσταση πόρων

Πηγή: http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc_download.php/6403/pdf/imm6403.pdf

Στα δίκτυα Petri με χρονισμένες μεταβάσεις, σημαντικά μοντέλα αποτελούν τα Χρονικά Δίκτυα (Time PNs) και τα Χρονισμένα Δίκτυα (Timed PNs). Γενικά, συγκριτικά μεταξύ αυτών των δύο μοντέλων, τα χρονισμένα δίκτυα παρουσιάζουν μειονέκτημα σε εκφραστικές δυνατότητες, διότι δεν μπορούν να περιγράψουν τις αλλαγές που πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια που πυροδοτούνται/ενεργοποιούνται οι μεταβάσεις, καθώς και τις διακυμάνσεις κατά τη διάρκεια των αντίστοιχων δράσεων όταν σχεδιάζεται μια εφαρμογή κατά την προσέγγιση που αφορά τις δράσεις. Όμως, το συγκεκριμένο μοντέλο, παρουσιάζει πλεονέκτημα ως προς τη δυνατότητα να εφαρμόζονται μέθοδοι ανάλυσης, εφόσον περιλαμβάνει έναν πιο μικρό χώρο καταστάσεων, (Laganeckas, 2012· Δημητριάδου, 2013· Αβραμίδου, 2014).

4.4 Παράδειγμα απλού μοντέλου Petri για την πρόγνωση του καιρού

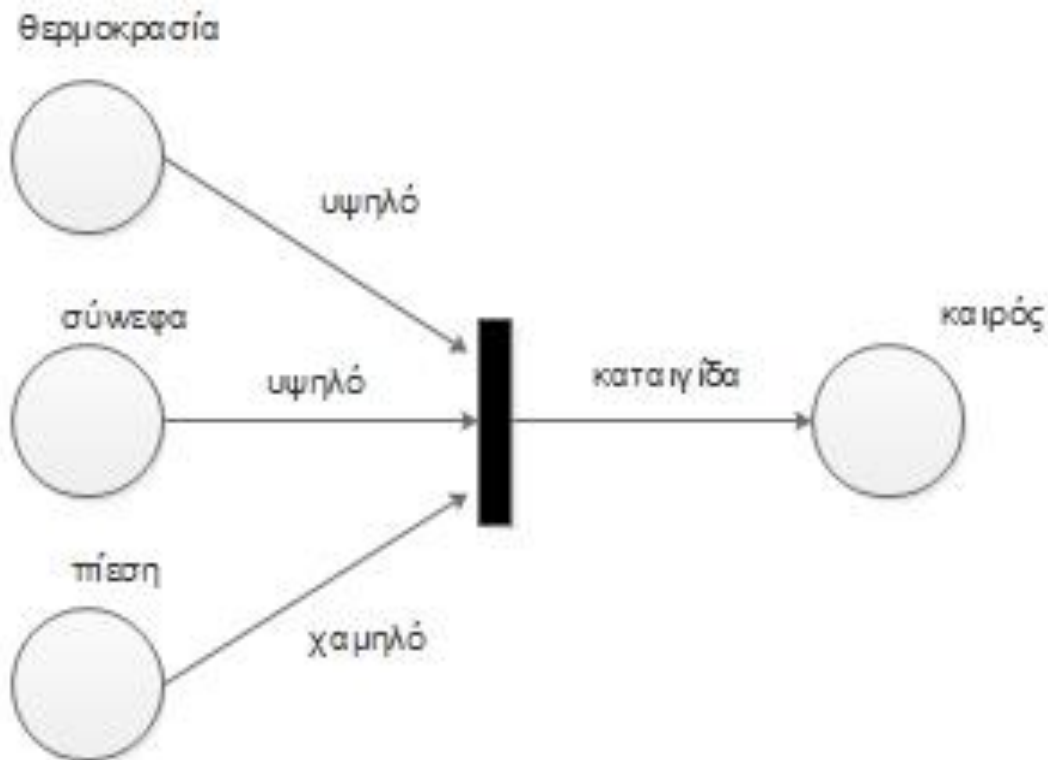
Ανάμεσα στο πλήθος των εφαρμογών που μπορούν να υλοποιηθούν με τη χρήση των δικτύων Petri, είναι αυτή για την πρόγνωση του καιρού. Σε αυτό το παράδειγμα αναλύεται ένα απλό μοντέλο της συμπεριφοράς του καιρού, το οποίο εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, με τη χρήση των δικτύων Petri. Στους παράγοντες αυτούς περιλαμβάνονται η θερμοκρασία του αέρα, η πίεση και η συννεφιά, και αποτελούν τις εισόδους για το δίκτυο Petri. Το μοντέλο που αναλύεται παρακάτω έχει δημιουργηθεί σύμφωνα με ορισμένες προτάσεις/κανόνες, οι οποίες είναι οι εξής, (Knybel and Pavliska, 2005):

- Εάν η θερμοκρασία βρίσκεται σε υψηλό επίπεδο, τα σύννεφα επίσης σε υψηλό επίπεδο και η πίεση σε χαμηλό επίπεδο, τότε θα υπάρξει καταιγίδα,
- Εάν η θερμοκρασία βρίσκεται σε υψηλό επίπεδο, χωρίς σύννεφα και η πίεση επίσης σε υψηλό επίπεδο, τότε ο καιρός θα είναι καλός, και

- Εάν η θερμοκρασία βρίσκεται σε μέτριο επίπεδο και τα σύννεφα σε υψηλό επίπεδο, τότε ο καιρός θα είναι βροχερός.

Σε πρώτη ανάλυση, οι τρεις παραπάνω κανόνες μοντελοποιούνται με τη χρήση δικτύου Petri, ο κάθε ένας ξεχωριστά, (Knybel and Pavliska, 2005).

Για την καταιγίδα το δίκτυο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

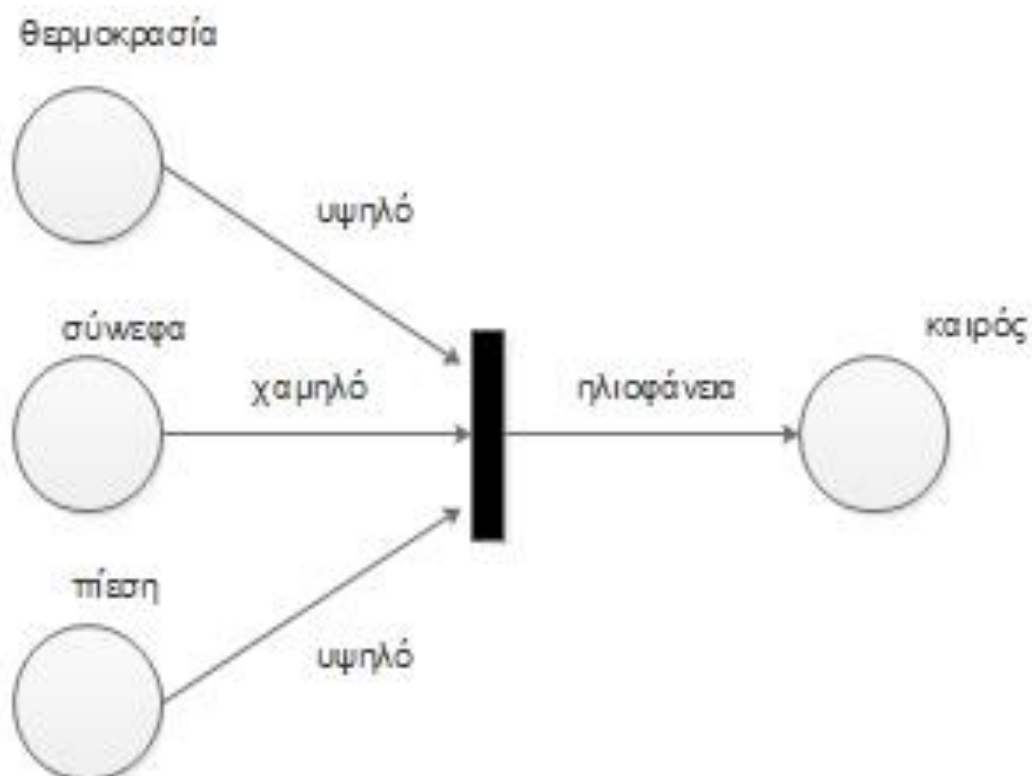


Σχήμα 44 Κανόνας καταιγίδας

Πηγή:http://irafm.osu.cz/research_report/84_rep84.pdf

Παρατηρείται ότι οι εισοδοί του δικτύου, δηλαδή οι θέσεις που βρίσκονται στα αριστερά του σχήματος, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, είναι η θερμοκρασία, τα σύννεφα και η πίεση, ως προς το επίπεδό τους. Τα τρία τόξα συμβολίζουν το αντίστοιχο επίπεδο που αναφέρθηκε στον συγκεκριμένο κανόνα. Κατά την μετάβαση αυτών των τριών επιπέδων, εξάγεται στη θέση εξόδου, η οποία είναι ο καιρός στα δεξιά του σχήματος, η πρόγνωση των καιρικών συνθηκών, κατά την οποία προβλέπεται να υπάρξει καταιγίδα.

Στο επόμενο σχήμα, απεικονίζεται το δίκτυο Petri για τον καλό καιρό, ο οποίος αντιστοιχεί στον δεύτερο κανόνα:

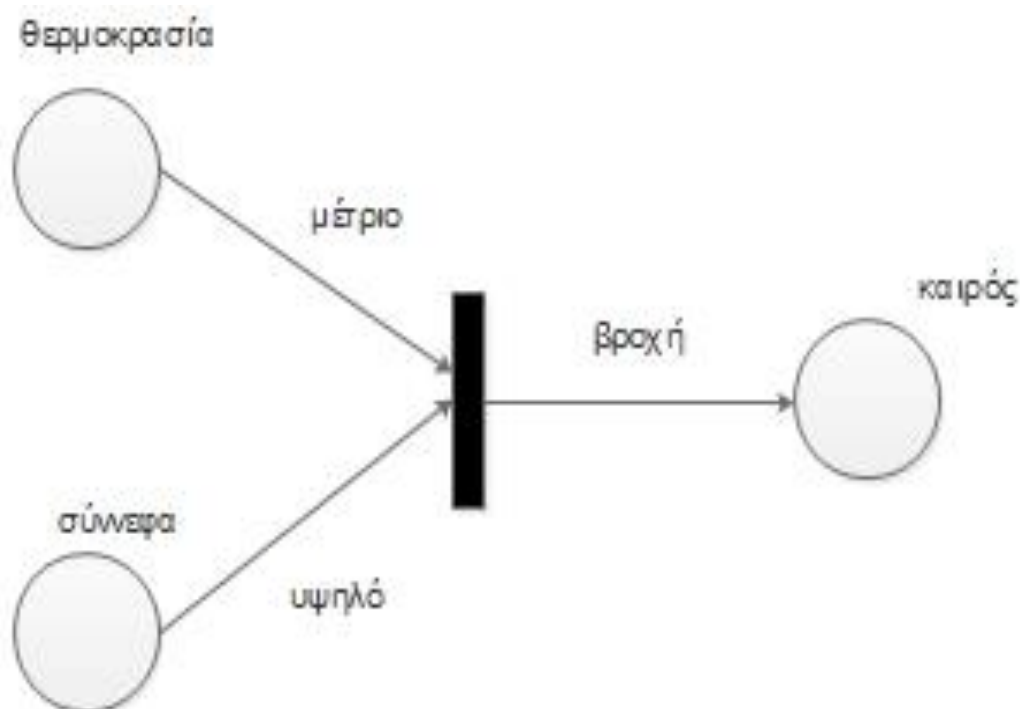


Σχήμα 45 Κανόνας καλού καιρού

Πηγή: http://ira.fm.osu.cz/research_report/84_rep84.pdf

Παρατηρείται ότι, και εδώ, οι είσοδοι του δικτύου, δηλαδή οι θέσεις που βρίσκονται στα αριστερά του σχήματος, είναι η θερμοκρασία, τα σύννεφα και η πίεση, ως προς το επίπεδό τους. Τα τρία τόξα συμβολίζουν, και πάλι, το αντίστοιχο επίπεδο που αναφέρθηκε στον συγκεκριμένο κανόνα. Κατά την μετάβαση αυτών των τριών επιπέδων, εξάγεται στη θέση εξόδου, η οποία είναι ο καιρός στα δεξιά του σχήματος, η πρόγνωση των καιρικών συνθηκών, κατά την οποία προβλέπεται να υπάρξει ηλιοφάνεια.

Στο επόμενο σχήμα, απεικονίζεται το δίκτυο Petri για καιρικές συνθήκες με βροχή, το οποίο αντιστοιχεί στον τρίτο και τελευταίο κανόνα, που ορίστηκε στην αρχή της εφαρμογής:

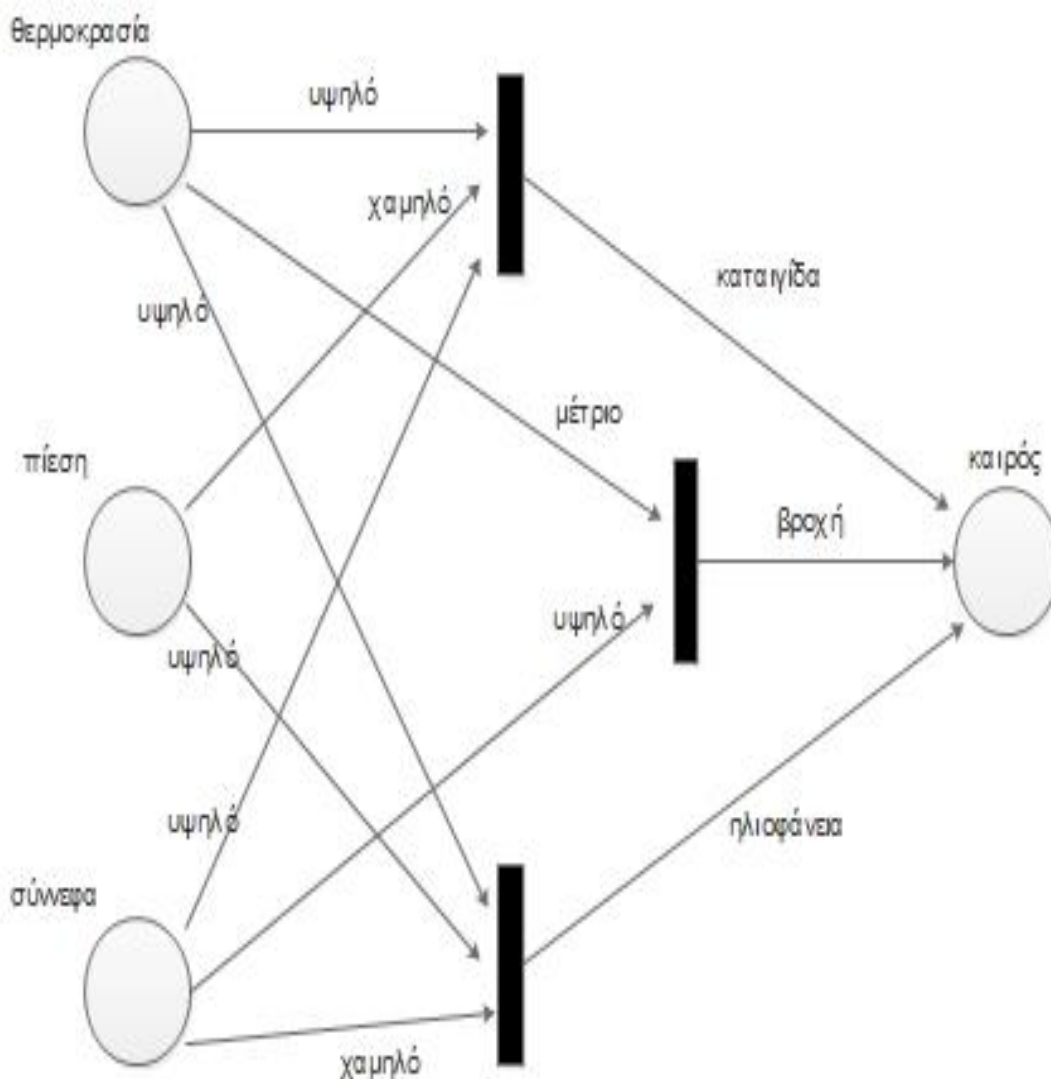


Σχήμα 46 Κανόνας βροχερού καιρού

Πηγή: http://irafm.osu.cz/research_report/84_rep84.pdf

Παρατηρείται ότι, σε αυτόν τον κανόνα, οι εισοδοί του δικτύου διαφέρουν από τα δύο προηγούμενα δίκτυα που αντιστοιχούν στους δύο πρώτες κανόνες. Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται ότι οι εισοδοί, δηλαδή οι θέσεις που βρίσκονται στα αριστερά του σχήματος, είναι η θερμοκρασία και τα σύννεφα, ως προς το επίπεδό τους. Τα δύο τόξα συμβολίζουν, και πάλι, το αντίστοιχο επίπεδο που αναφέρθηκε στον συγκεκριμένο κανόνα. Κατά την μετάβαση αυτών των δύο επιπέδων, εξάγεται στη θέση εξόδου, η οποία είναι ο καιρός στα δεξιά του σχήματος, η πρόγνωση των καιρικών συνθηκών, κατά την οποία προβλέπεται να υπάρξουν βροχοπτώσεις.

Εφόσον οι κανόνες έχουν μεταφερθεί ο κάθε ένας ξεχωριστά, αναλυτικά, σε δίκτυα Petri, όλοι αυτοί οι κανόνες μπορούν στη συνέχεια απλά να ενταχθούν σε μόνο ένα δίκτυο Petri, (Knybel and Pavliska, 2005). Ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιείται αυτό, απεικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί:



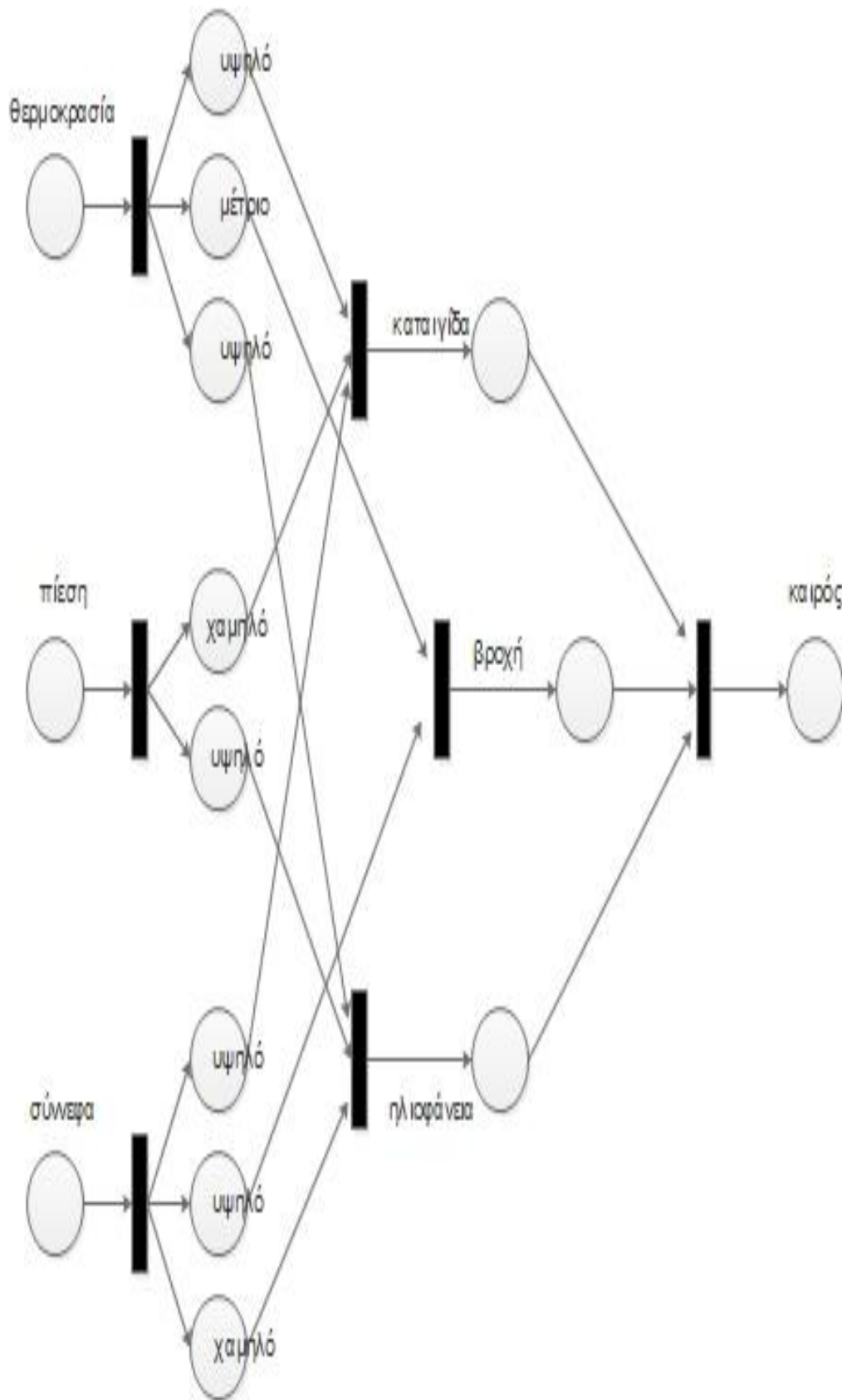
Σχήμα 47 Απλή σύνδεση των κανόνων

Πηγή: http://irafm.osu.cz/research_report/84_rep84.pdf

Από το νέο επίπεδο του δικτύου, παρατηρείται ότι τα τρία δίκτυα των κανόνων έχουν υλοποιηθεί σε ένα ενοποιημένο δίκτυο Petri. Οι εισόδοι του δικτύου είναι οι τρεις παράγοντες που υπήρχαν εξ' αρχής στα προηγούμενα δίκτυα, δηλαδή η θερμοκρασία, τα σύννεφα και η πίεση, στα αριστερά του σχήματος, και συνδέονται με τις αντίστοιχες μεταβάσεις, ώστε να προκύψει το κατάλληλο αποτέλεσμα, σύμφωνα με τους κανόνες. Έπειτα, κάθε μία από τις τρεις μεταβάσεις, ανάλογα με το επίπεδο των παραγόντων/εισόδων, εξάγουν και το αντίστοιχο αποτέλεσμα για την πρόγνωση του καιρού, στη θέση που βρίσκεται δεξιά στο σχήμα.

Μια τέτοια σύνδεση, όπως η παραπάνω, είναι αρκετά συνοπτική. Για να φανεί το επίπεδο των στοιχείων του δικτύου και όλα τα στοιχεία του τελικού ασαφούς συνόλου, θα πρέπει να δημιουργηθούν επιπλέον σχέσεις μεταξύ τους, ώστε να καλυφθούν όλες οι πιθανές μεταβάσεις που μπορεί να υπάρχουν, (Knybel & Pavliska, 2005).

Για μία καλύτερη και αναλυτικότερη προσέγγιση του παραπάνω δικτύου Petri, για την πρόβλεψη του καιρού με τους κανόνες που έχουν οριστεί, το δίκτυο μπορεί να τροποποιηθεί σε μία άλλη έκδοση, όπως φαίνεται αναλυτικά από το επόμενο σχήμα, (Knybel and Pavliska, 2005):



Σχήμα 48 Αναλυτική σύνδεση των κανόνων
 Πηγή: http://irafm.osu.cz/research_report/84_rep84.pdf

Από τη αναλυτικότερη έκδοση του δικτύου, παρατηρείται ότι προστέθηκαν τρεις μεταβάσεις, στα αριστερά του σχήματος, όπου κάθε μία από αυτές αντιστοιχεί και σε έναν παράγοντα, σε αυτόν της θερμοκρασίας, σε αυτόν των σύννεφων και σε αυτόν της πίεσης. Οι τρεις νέες αυτές μεταβάσεις που προστέθηκαν βοηθούν να εκτιμηθεί με μεγαλύτερη αξιοπιστία η κατάσταση του καιρού. Επιπλέον, η μετάβαση που έχει προστεθεί στα δεξιά του δικτύου Petri, μπορεί να προσφέρει συνδυασμούς στην έξοδο, για τα ασαφή σύνολα των μεμονωμένων κανόνων, δηλαδή συνδυασμούς μεταξύ της καταιγίδας, της βροχής και την ηλιοφάνειας, (Knybel and Pavliska, 2005).

Κεφάλαιο 5: Εφαρμογές Δικτύων Petri με Εργαλείο Προσομοίωσης

5.1 Εισαγωγή

Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν και αναλύθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια για τη θεωρία και τις εφαρμογές των δικτύων Petri, παρακάτω θα παρουσιαστούν κάποια παραδείγματα εφαρμογών των δικτύων Petri, που υλοποιήθηκαν για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας. Τα δίκτυα των εφαρμογών κατασκευάστηκαν με το λογισμικό εργαλείο «Platform Independent Petri Net Editor (PIPE) v.4.3.0», όπου και εκτελέστηκαν οι προσομοιώσεις.

5.2 Δίκτυο Petri ως μαθηματικό εργαλείο

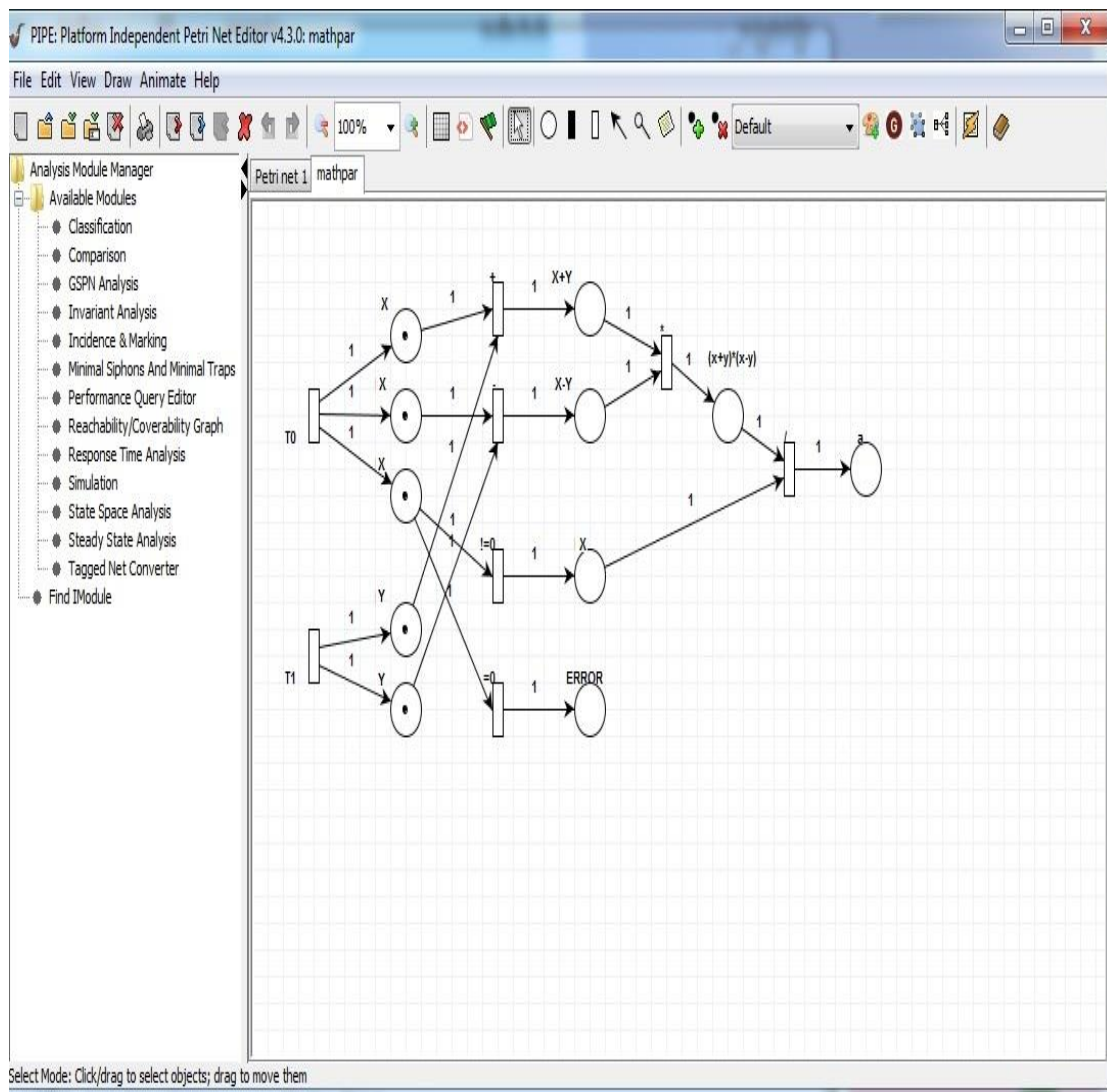
Ένα μαθηματικό παράδειγμα αποτελούν οι μαθηματικές παραστάσεις. Για τις ανάγκες της εργασίας, θέτουμε μία τυχαία μαθηματική συνάρτηση, ώστε να υλοποιήσουμε ένα δίκτυο Petri, το οποίο θα υπολογίζει τη συγκεκριμένη παράσταση. Έστω λοιπόν η παρακάτω παράσταση:

$$a = \frac{(x + y) * (x - y)}{x}$$

Για την παραπάνω παράσταση μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα εξής:

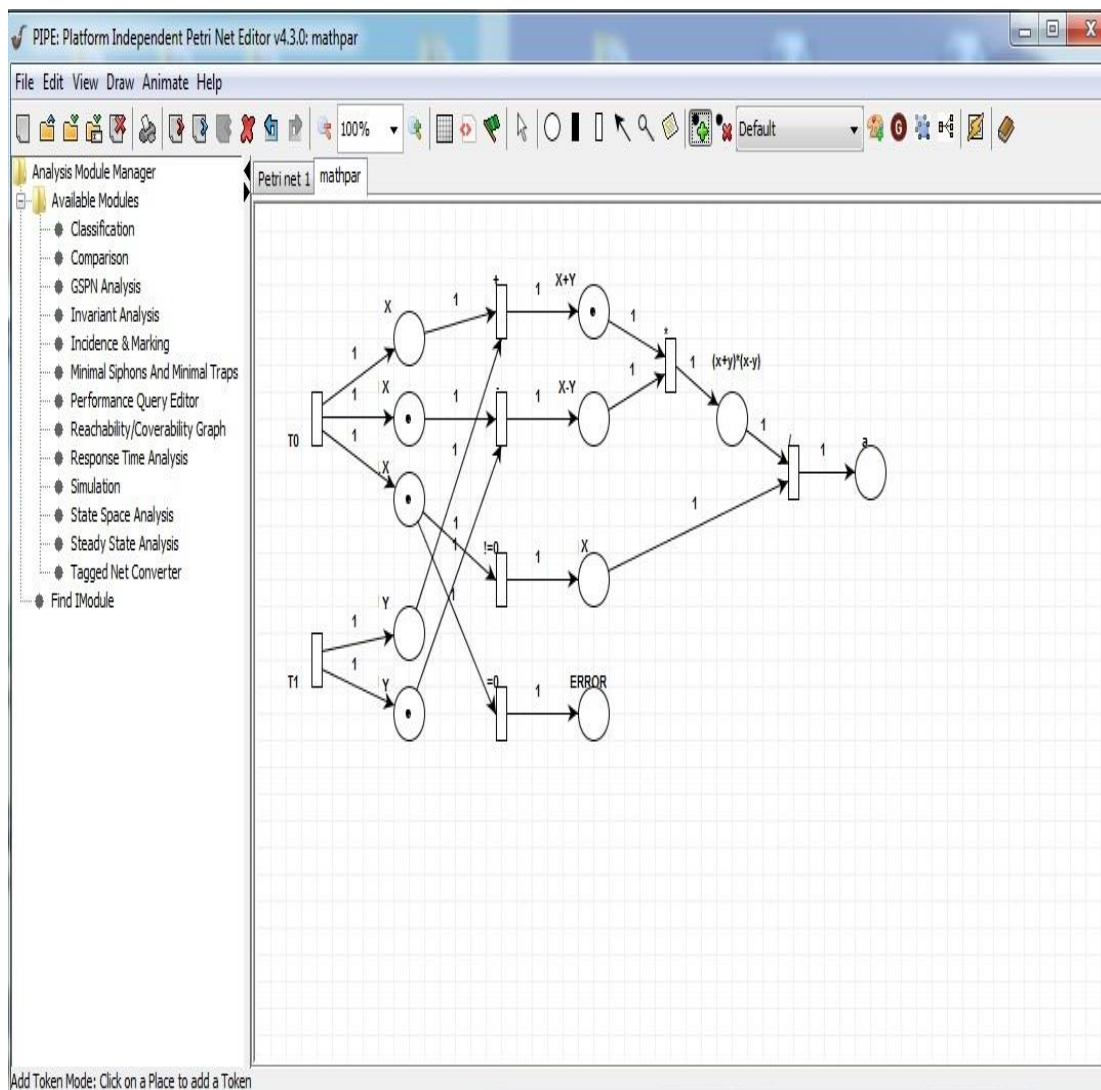
- Πέντε θέσεις εισόδου που θα αντιστοιχούν στα x και y , και πιο συγκεκριμένα τρεις θέσεις για το x εφόσον αυτό υπάρχει τρεις φορές μέσα στην παράσταση και δύο θέσεις για το y εφόσον αυτό υπάρχει δύο φορές μέσα στην παράσταση,
- Έξι μεταβάσεις από τις οποίες οι τέσσερις θα υλοποιούν τις πράξεις μεταξύ των συντελεστών, και πιο συγκεκριμένα η μία μετάβαση θα υλοποιεί την πρόσθεση $x+y$, η μία την αφαίρεση $x-y$, η μία τον πολλαπλασιασμό $(x+y)*(x-y)$, και η μία την διαίρεση $(x+y)*(x-y) / x$. Οι υπόλοιπες δύο μεταβάσεις θα αντιστοιχούν στον έλεγχο της διαίρεσης σε περίπτωση που ο παρονομαστής είναι ίσος με το μηδέν.
- Δύο θέσεις εξόδου για το αποτέλεσμα, το οποίο είτε θα είναι αριθμός εάν ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός, είτε θα προκύπτει σφάλμα λόγω αδύνατης λύσης εάν ο παρονομαστής είναι ίσος με το μηδέν.

Όλα τα παραπάνω φαίνονται αναλυτικά με την υλοποίηση του παρακάτω σχήματος για το δίκτυο Petri:



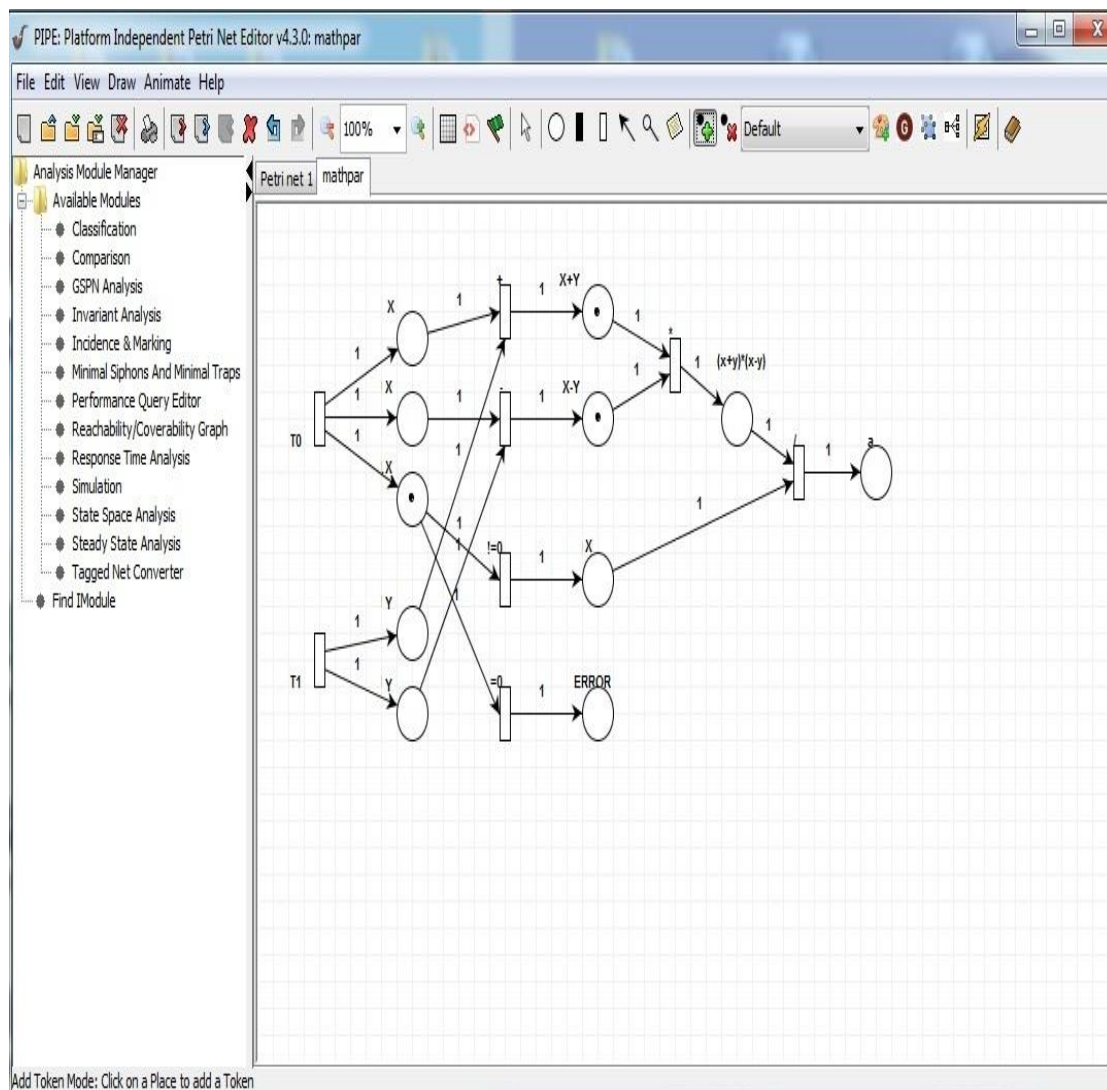
Σχήμα 49 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (αρχική κατάσταση)

Ξεκινώντας την ανάλυση από τα αριστερά του σχήματος, παρατηρείται ότι οι πέντε θέσεις εισόδου είναι μαρκαρισμένες με τις μεταβλητές που εμφανίζονται στην παράσταση που δόθηκε ως παράδειγμα. Στη συνέχεια, στην πρώτη μετάβαση της πρόσθεσης (+) βλέπουμε ότι παίρνει τη μία είσοδο του x και την μία είσοδο του y και τα εξαγει ακριβώς στα δεξιά στη θέση $x+y$, υπολογίζοντας το άθροισμα των δύο μεταβλητών, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



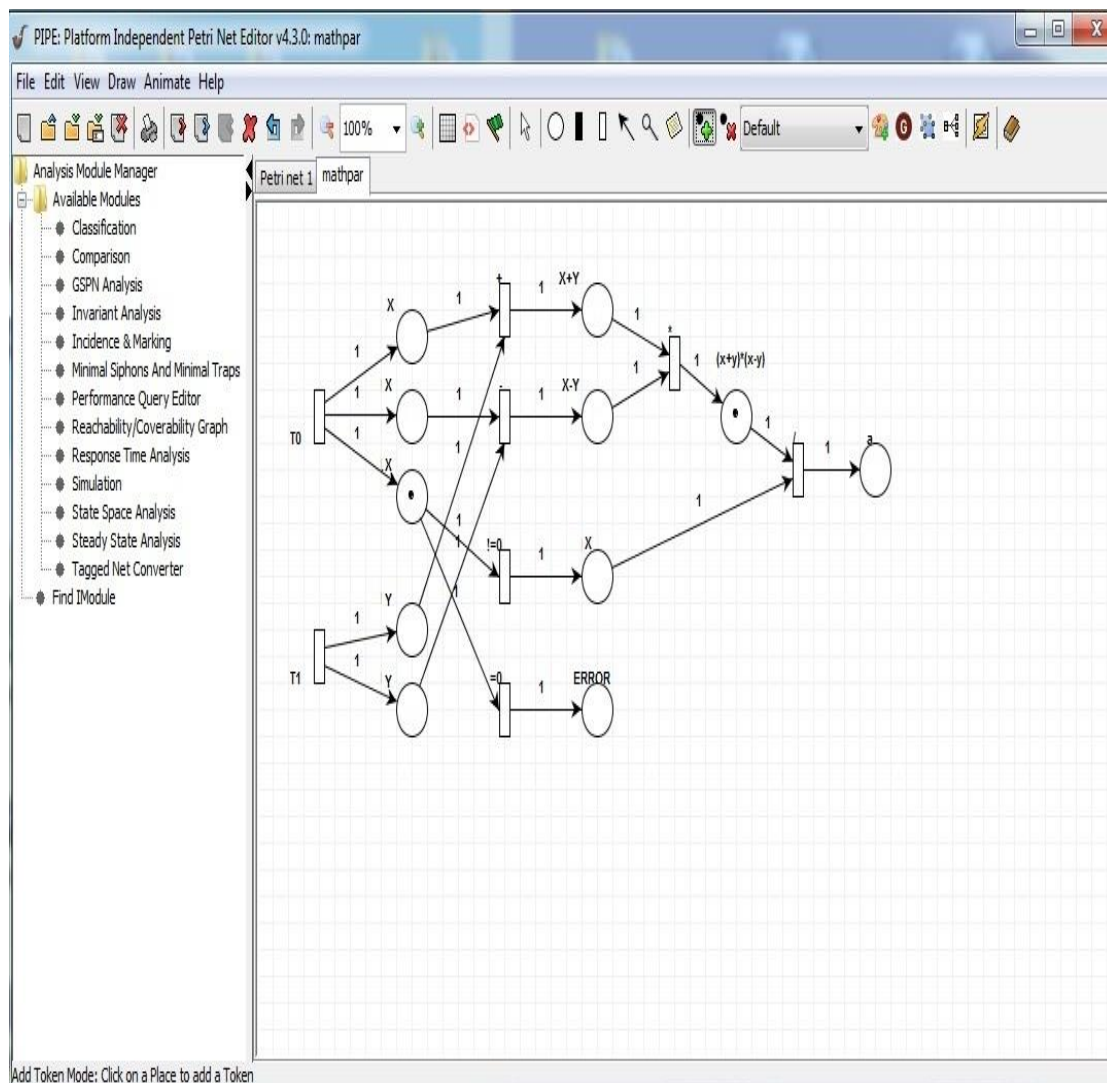
Σχήμα 50 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (πρόσθεση)

Αντίστοιχα, στην δεύτερη μετάβαση όπου πραγματοποιείται η πράξη της αφαίρεσης (-) βλέπουμε ότι παίρνει την άλλη είσοδο του x και την άλλη είσοδο του y και τα εξάγει ακριβώς στα δεξιά στη θέση $x-y$, υπολογίζοντας τη διαφορά των δύο μεταβλητών. Η νέα κατάσταση του δικτύου φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



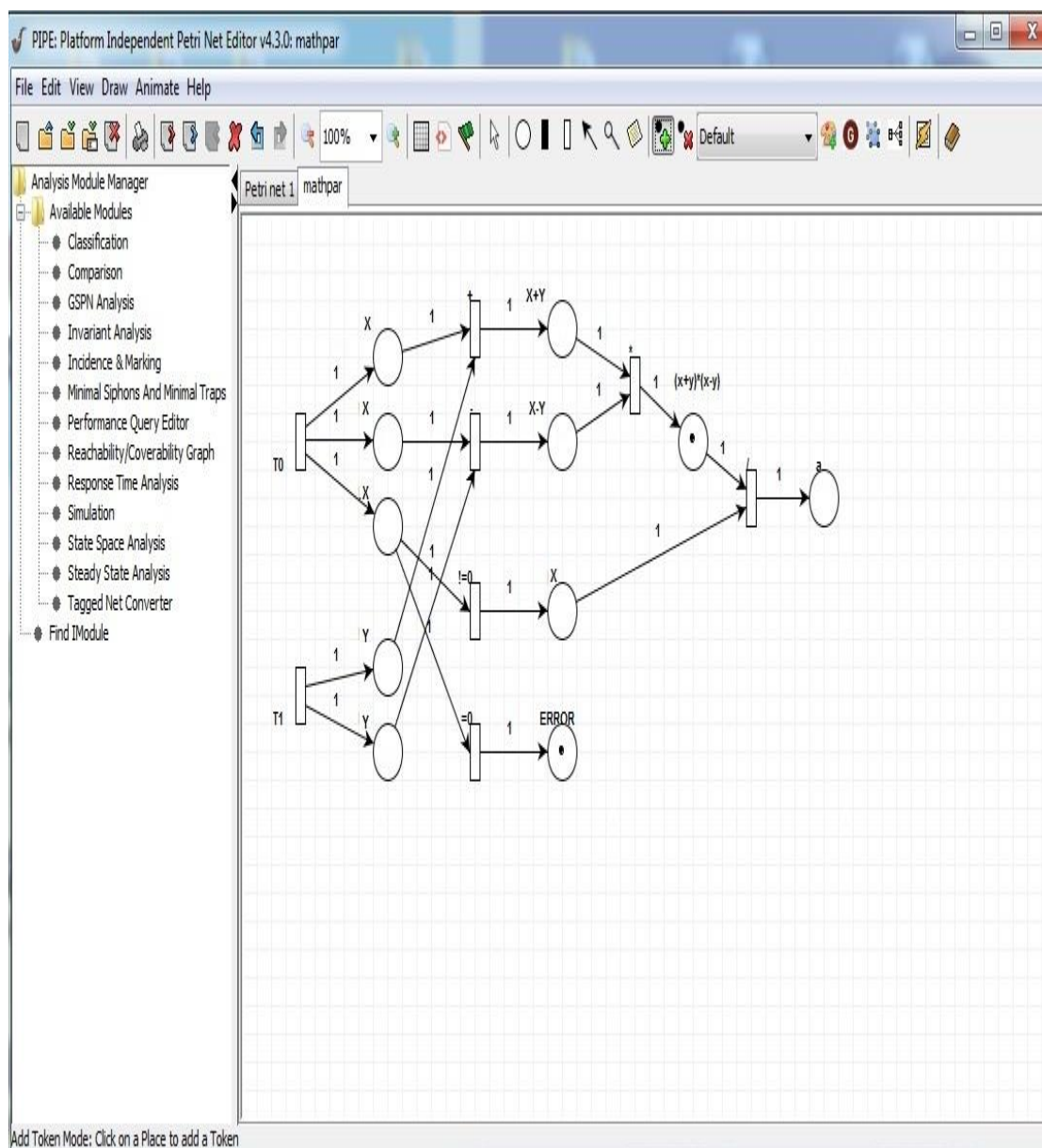
Σχήμα 51 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (αφαίρεση)

Παρατηρώντας το προηγούμενο σχήμα, βλέπουμε ότι αφού έχουν πραγματοποιηθεί οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, τα δύο αυτά αποτελέσματα που εξάγονται στις θέσεις, παίρνουν τη θέση των εισόδων για τη μετάβαση (*) που βρίσκεται ακριβώς στα δεξιά τους και υπολογίζει το γινόμενο των δύο τιμών, δηλαδή $(x+y)*(x-y)$. Η πράξη αυτή φαίνεται στο επόμενο σχήμα, όπου απεικονίζεται η νέα κατάσταση του δικτύου:



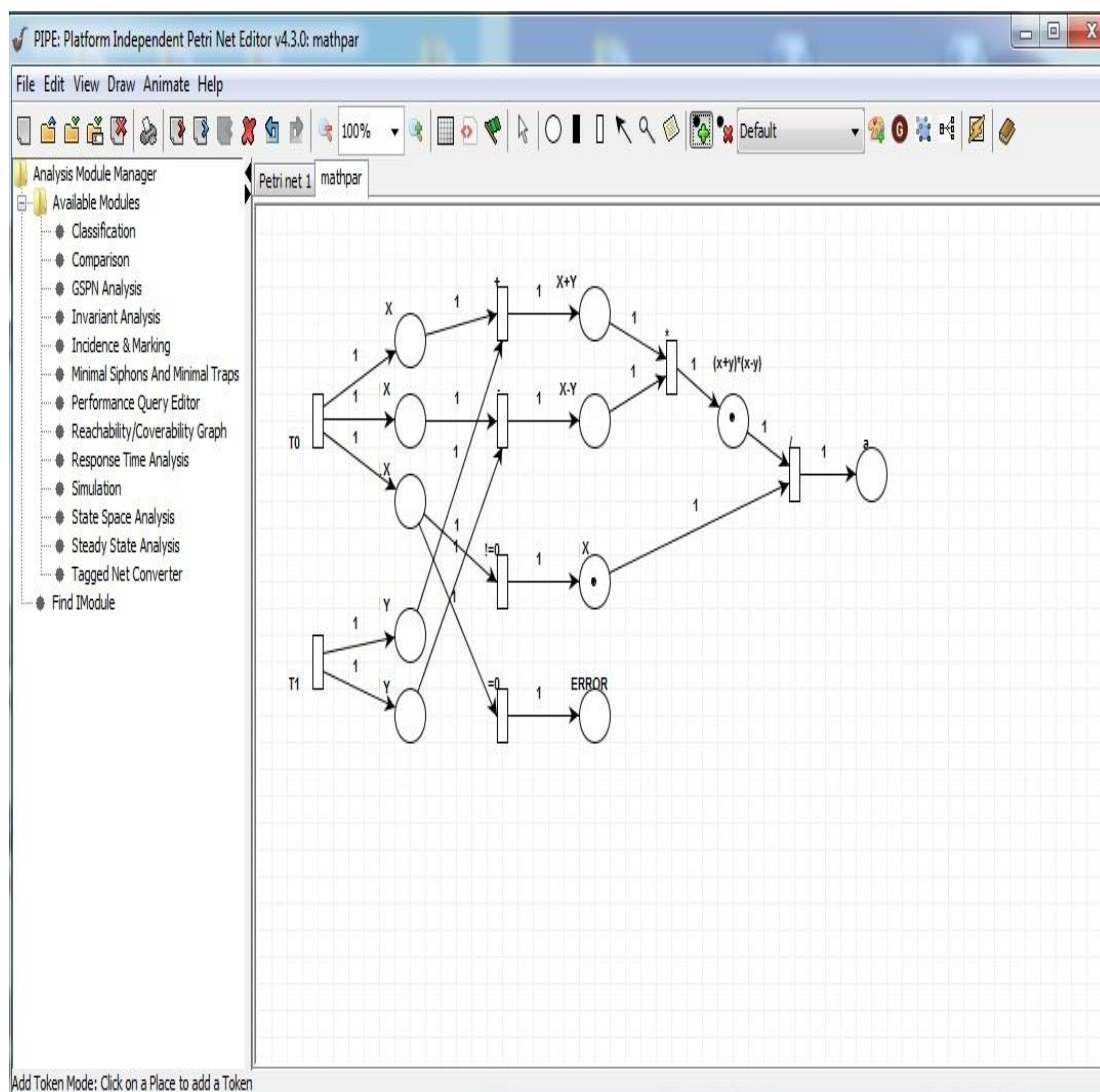
Σχήμα 52 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (πολλαπλασιασμός)

Αμέσως από κάτω, παίρνει ως είσοδο την τελευταία τιμή του x και ελέγχει εάν η τιμή του είναι διάφορη του μηδενός. Εάν η πρόταση είναι ψευδής, δηλαδή εάν η τιμή του x ισούται με το μηδέν, τότε η τιμή περνά από την τέταρτη μετάβαση που βρίσκεται κάτω, και την εξάγει με ένα σφάλμα, διότι δεν υπάρχει εφικτό αποτέλεσμα, εφόσον ο παρονομαστής της παράστασης είναι μηδέν. Το αποτέλεσμα αυτό με τη νέα κατάσταση του δικτύου, φαίνεται αναλυτικά στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 53 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (αδύνατο αποτέλεσμα)

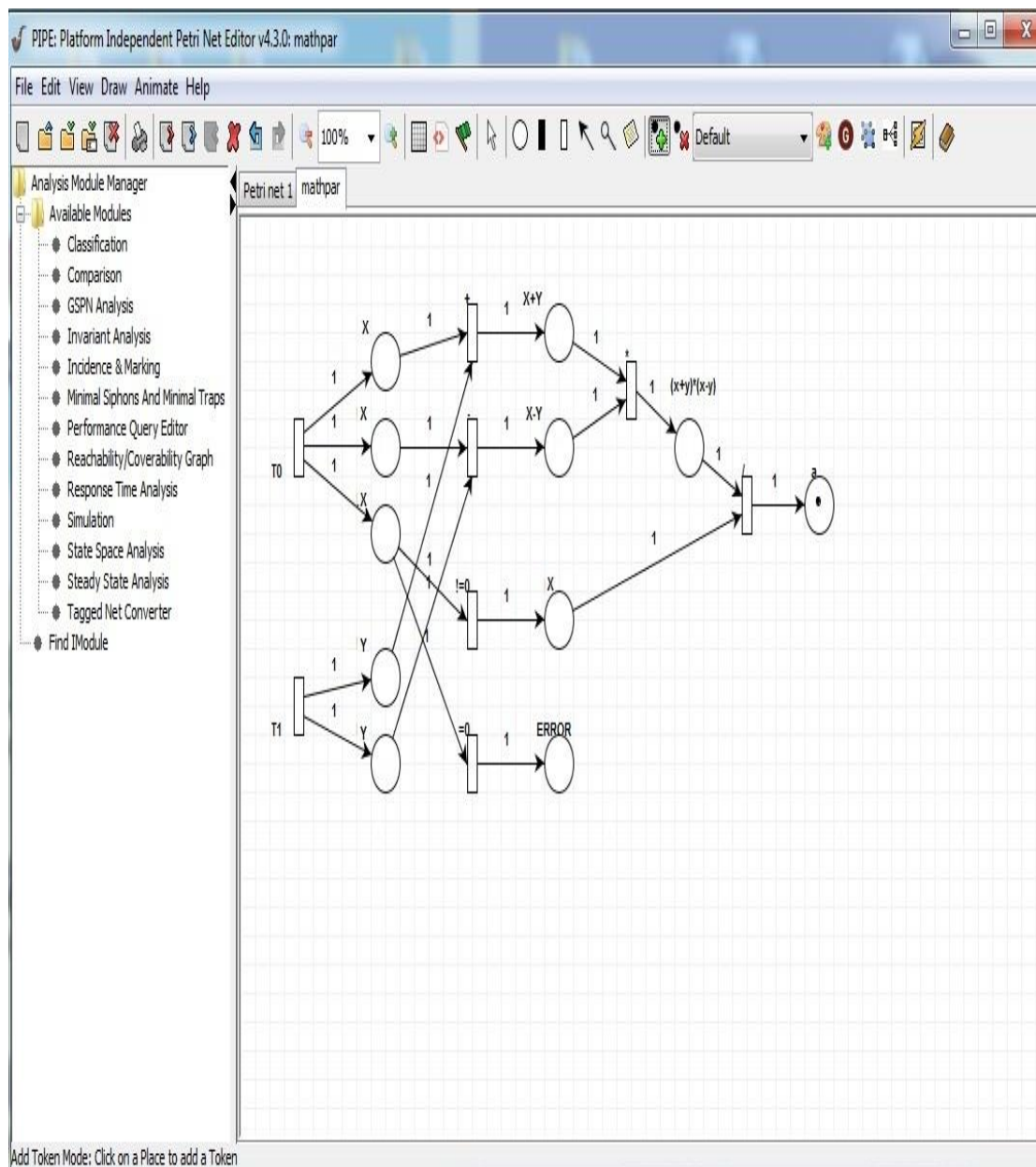
Εάν όμως η πρόταση του ελέγχου είναι αληθής, δηλαδή εάν η τιμή του x δεν ισούται με το μηδέν, τότε η τιμή περνά από την τρίτη μετάβαση ($!=$), και την εξαγει ακριβώς δεξιά του στη θέση x , με την ίδια τιμή που έχει το x κατά την αρχική του είσοδο. Η μετάβαση αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα με τη νέα κατάσταση του δικτύου:



Σχήμα 54 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (εφικτή τιμή παρονομαστή)

Τα δύο τελευταία που αναφέρθηκαν, πραγματοποιούν τον έλεγχο του παρονομαστή ώστε η τιμή του να είναι εφικτή για τον υπολογισμό πράξης.

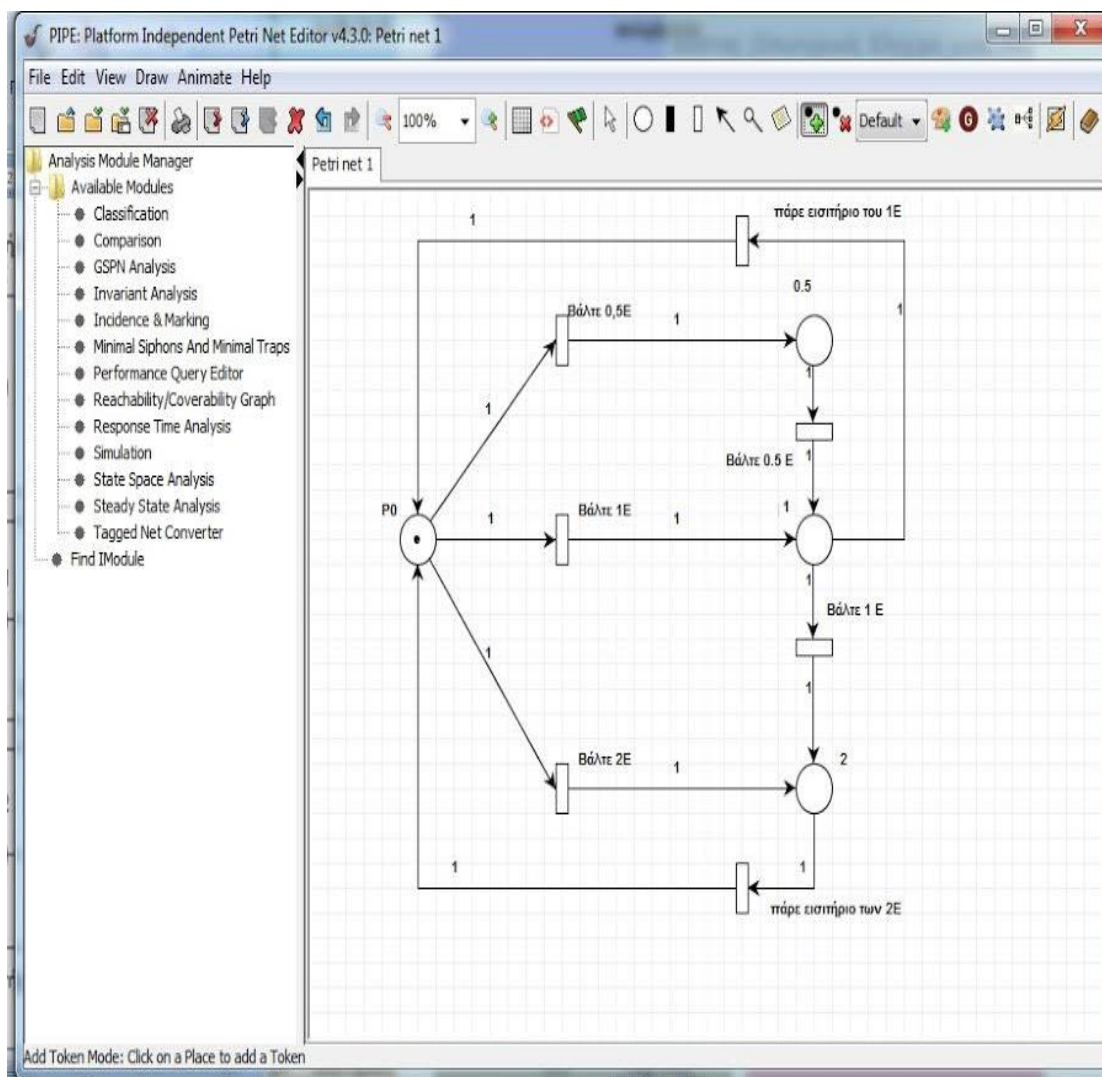
Έπειτα, εφόσον έχει γίνει ο έλεγχος του παρονομαστή, εάν το αποτέλεσμα είναι εφικτό, τότε η τελευταία μετάβαση (l) δέχεται ως εισόδους τις θέσεις με το αποτέλεσμα του γινομένου και με την τιμή του x , εκτελώντας την πράξη της διαίρεσης μεταξύ τους, $(x+y) \cdot (x-y) / x$. Τέλος, το αποτέλεσμα που εξάγεται από τον υπολογισμό της διαίρεσης τοποθετείται ως είσοδος στην θέση εξόδου a ώστε να δώσει την τελική τιμή της μαθηματικής παράστασης. Η τελική κατάσταση του δικτύου Petri, όπου εξάγεται το τελικό αποτέλεσμα της μαθηματικής παράστασης, απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 55 Μαθηματική παράσταση με τη χρήση δικτύου Petri (τελικό αποτέλεσμα)

5.3 Δίκτυο Petri ως γραφικό εργαλείο

Ένα δίκτυο Petri, εκτός από μαθηματικό εργαλείο, μπορεί να αποτελέσει και γραφικό εργαλείο. Για την υλοποίηση ενός παραδείγματος για ένα δίκτυο Petri ως γραφικό εργαλείο, υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε πάνω σε ένα αστικό λεωφορείο και θέλουμε να «κόψουμε» εισιτήριο για τη διαδρομή μας. Το μηχάνημα των εισιτηρίων βγάζει εισιτήριο μίας διαδρομής που κοστίζει 1€, και εισιτήριο διπλής διαδρομής που κοστίζει 2€. Τα χρήματα που δέχεται για την έκδοση των εισιτηρίων περιλαμβάνουν κέρματα των 50 λεπτών, 1€ και 2€. Βασικός περιορισμός είναι ότι το μηχάνημα εκτυπώνει ένα εισιτήριο κάθε φορά, άρα το μέγιστο ποσό χρημάτων που μπορεί να δεχτεί είναι τα 2€. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται μία λύση του παραπάνω προβλήματος, με τη χρήση δικτύου Petri:



Σχήμα 56 Γραφικό παράδειγμα με τη χρήση δικτύου Petri

Παρατηρώντας το παραπάνω σχήμα, βλέπουμε ότι το μηχάνημα που εκδίδει εισιτήρια ξεκινά από την αριστερή μαρκαρισμένη θέση η οποία αρχικά έχει το ποσό των 0€.

Η θέση αυτή της εισόδου μπορεί να πάρει τρεις διαφορετικές τιμές που καταλήγουν σε τρεις διαφορετικές μεταβάσεις. Εάν ο χρήστης θέλει να εισάγει ένα κέρμα των 50 λεπτών τότε πηγαίνει στην πάνω μετάβαση «βάλτε 0,5€», εάν θέλει να εισάγει κέρμα του 1€ πηγαίνει στη μετάβαση «βάλτε 1€» και εάν θέλει να εισάγει κέρμα των 2€ τότε πηγαίνει στη μετάβαση «βάλτε 2€».

Εάν ο χρήστης θέλει να εκδόσει εισιτήριο της μιας διαδρομής που κοστίζει 1€ και εισάγει απευθείας ένα κέρμα του 1€ τότε μετά τη μετάβαση «βάλτε 1€» η οποία εξάγεται στη θέση που ονομάζεται 1, ακριβώς στα δεξιά της, πηγαίνει στη μετάβαση «πάρτε εισιτήριο του 1€» και καταλήγει στη θέση εξόδου εκτυπώνοντας εισιτήριο μιας διαδρομής. Αντίστοιχα, εάν θέλει να εκδόσει εισιτήριο διπλής διαδρομής και εισάγει απευθείας ένα κέρμα των 2€, τότε το κέρμα περνά από τη μετάβαση «βάλτε 2€», έπειτα στη θέση των 2, και από εκεί εξάγεται στην θέση εξόδου, περνώντας από τη μετάβαση «πάρτε εισιτήριο των 2€», και εκτυπώνει ένα εισιτήριο διπλής διαδρομής που κοστίζει 2€.

Όμως για τις ανάγκες υλοποίησης του συγκεκριμένου προβλήματος, θα πρέπει να καλυφθούν και άλλες επιλογές του χρήστη, οπότε χρησιμοποιούνται και επιπλέον βοηθητικές θέσεις εισόδου και μεταβάσεις.

Για παράδειγμα, μπορεί ο χρήστης να θέλει να εκδόσει ένα εισιτήριο μονής διαδρομής και να εισάγει δύο κέρματα των 50 λεπτών, συμπληρώνοντας έτσι την τιμή του 1€. Τότε το πρώτο κέρμα των 0,50€ περνά και πάλι από την πρώτη μετάβαση που βρίσκεται στ' αριστερά του σχήματος και ονομάζεται «βάλε 0,5€», στη συνέχεια εξάγει το ποσό το οποίο μπαίνει ως είσοδος στη θέση «0,5», και στην επόμενη εισαγωγή του ίδιου κέρματος, καταλήγει ως είσοδος, από το άθροισμά τους (0,5€+0,5€), στη θέση εισόδου που ονομάζεται 1.

Αντίστοιχα εάν εισάγει διάφορα κέρματα ώστε να συμπληρώσει το ποσό των 2€ για μια διπλή διαδρομή, τότε αυτά παίρνουν αθροιστικά απ' τις αντίστοιχες θέσεις και μεταβάσεις μέχρι να καταλήξουν στη θέση εισόδου που ονομάζεται 2.

Έτσι, σύμφωνα με όλα τα παραπάνω και την υλοποίηση του δικτύου, συμπεραίνεται ότι με αυτή την υλοποίηση μπορούμε να καλύψουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις που μπορεί να χρησιμοποιήσει ένας χρήστης για την έκδοση αυτών των εισιτηρίων.

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

Τα δίκτυα Petri εισήχθησαν το 1962 από τον Δρ. Καρλ Άνταμ Πετρί, και αποτελούν ένα ισχυρό μοντέλο φορμαλισμού για την επιστήμη των υπολογιστών, των μηχανικών συστημάτων και πολλών άλλων επιστημονικών κλάδων. Τα δίκτυα Petri συνδυάζουν μια καλά καθορισμένη μαθηματική θεωρία, με μια γραφική αναπαράσταση της δυναμικής συμπεριφοράς των συστημάτων. Η θεωρητική πτυχή αυτών των δικτύων, επιτρέπει την ακριβή μοντελοποίηση και ανάλυση της συμπεριφοράς ενός συστήματος, ενώ η γραφική τους αναπαράσταση επιτρέπει την απεικόνιση των μοντελοποιημένων καταστάσεων του συστήματος, που μεταβάλλονται. Ο συνδυασμός αυτός, είναι ο κύριος λόγος για τη μεγάλη επιτυχία των δικτύων Petri. Κατά συνέπεια, τα δίκτυα Petri έχουν χρησιμοποιηθεί για να διαμορφώσουν τα διάφορα είδη των δυναμικών συστημάτων, αναφέροντας μόνο μερικά σημαντικά παραδείγματα, όπως τα δίκτυα υπολογιστών, τα συστήματα επικοινωνίας, τα συστήματα διοίκησης και ελέγχου, τα υπολογιστικά συστήματα πραγματικού χρόνου, τα εφοδιαστικά δίκτυα, οι ροές εργασίας κ.α.. Αυτό το ευρύ φάσμα των εφαρμογών συνοδεύεται, αντίστοιχα, από ένα ευρύ φάσμα διαφορετικών πτυχών που έχουν ληφθεί υπόψη κατά τις έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί σχετικά με τα δίκτυα Petri.

Ένα δίκτυο Petri αποτελεί ένα ιδιαίτερο είδος για το σχηματισμό γραφικών παραστάσεων που αποτελούνται από τρία βασικά αντικείμενα, τις «θέσεις», τις «μεταβάσεις» και τα «τόξα». Ο σχεδιασμός των τόξων συνδέει τις θέσεις προς τις μεταβάσεις ή τις μεταβάσεις προς τις θέσεις. Στην απλούστερη μορφή του, ένα δίκτυο Petri μπορεί να αναπαρασταθεί από μία μετάβαση, μαζί με μία θέση εισόδου και μία θέση εξόδου. Αυτό το στοιχειώδες δίκτυο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αντιπροσωπεύσει τις διάφορες πτυχές των πρότυπων συστημάτων. Για παράδειγμα, μια μετάβαση μαζί με μία θέση εισόδου και μία θέση εξόδου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αντιπροσωπεύσει ένα συμβάν επεξεργασίας δεδομένων, όπου εισάγονται και εξάγονται τα δεδομένα, αντίστοιχα, σε ένα σύστημα επεξεργασίας δεδομένων. Προκειμένου να μελετηθεί η δυναμική συμπεριφορά ενός διαμορφωμένου συστήματος Petri, από την άποψη, δηλαδή, των αντικειμένων και των αλλαγών της κατάστασης, κάθε θέση μπορεί να περιέχει, είτε κανένα, είτε ένα θετικό αριθμό από μάρκες-κουπόνια (tokens). Τα κουπόνια αποτελούν μια πρωτόγονη αντίληψη για τα δίκτυα Petri, εκτός από τις θέσεις και τις μεταβάσεις. Η παρουσία ή η απουσία ενός κουπονιού σε μία θέση μπορεί να δείξει αν μια κατάσταση, που σχετίζεται με αυτή, είναι αληθής ή ψευδής.

Γενικά, τα δίκτυα Petri έχουν οριστεί ως πρότυπα για τα συστήματα που παρουσιάζουν ταυτόχρονα ασύγχρονες δραστηριότητες. Οι βασικοί παράγοντες που θα μπορούσαν να επηρεάσουν την αποδοχή τους είναι οι ανησυχίες, σχετικά με την ισχύ μοντελοποίησης και τη λήψη ισχύος του μοντέλου. Παρά το γεγονός ότι τα δίκτυα Petri δεν είναι τα μόνα μοντέλα των ασύγχρονων ταυτόχρονων συστημάτων, είναι ισοδύναμα ή συμπεριλαμβάνουν τα περισσότερα από τα άλλα μοντέλα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να επιτρέπεται μια απλή και φυσική αναπαράσταση πολλών συστημάτων. Έτσι, τα δίκτυα Petri έχουν αποκτήσει μια αυξανόμενη αποδοχή τα τελευταία χρόνια, καθώς έχει αυξηθεί και η χρήση τους.

Ωστόσο, ένα σύστημα μοντελοποίησης θα πρέπει να παρέχει περισσότερα από μία απλή και βολική εκπροσώπηση ενός συστήματος. Θα πρέπει, επίσης, να παρέχει διαδικασίες ανάλυσης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καθορίσουν τις ιδιότητές του, ως πρότυπο σύστημα μέσω του μοντέλου.

Συμπερασματικά, τα δίκτυα Petri έχει αποδειχθεί ότι είναι ένα ισχυρό εργαλείο μοντελοποίησης για τα διάφορα είδη των δυναμικών συστημάτων. Από το 1962 που εισήχθησαν, έχουν πραγματοποιηθεί και δημοσιευθεί πολλές ερευνητικές εργασίες που σχετίζονται με αυτά. Οι έρευνες έχουν διεξαχθεί σε πολλούς κλάδους, με κάθε κλάδο να ερευνά πολλές πτυχές της εφαρμογής τους. Λαμβάνοντας υπόψη τα πλούσια ερευνητικά αποτελέσματα των δικτύων Petri, είναι δύσκολο να καλυφθούν όλα αυτά σε μία τόσο σύντομη εργασία, όπως η παρούσα. Ως εκ τούτου, στην εργασία αυτή έχει πραγματοποιηθεί μία ανασκόπηση στις πιο βασικές έννοιες των δικτύων Petri, στη θεωρία τους, αλλά και σε διάφορες εφαρμογές των δικτύων αυτών, με βάση ήδη υπάρχουσες εργασίες και αναφορές. Μάλιστα, για τις ανάγκες της εργασίας, υλοποιήθηκαν και κάποια καινούρια παραδείγματα εφαρμογών, με τη χρήση των δικτύων Petri, τα οποία και επεξηγήθηκαν λεπτομερώς.

Βιβλιογραφία

- Al-Ahmari A. (2016), “*Optimal robotic cell scheduling with controllers using mathematically based timed Petri nets*”, Information Sciences, vol. 329, pp. 638–648.
- Bartoletti M., Cimoli T. and Pinna G. M. (2015), “*Lending Petrinets*”, Science of Computer Programming, vol. 112, pp. 75 – 101.
- Bause F., Buchholz P. and Kemper P., LS Informatik IV , Technische Universität Dortmund (16.04.2008 changed 31.05.2011), “*Queueing Petri Nets (QPNs)*”, Lehrstuhl Informatik IV, TU Dortmund, <http://ls4-www.cs.tu-dortmund.de/QPN/>
- Bause F., Informatik IV, Universität Dortmund (1996), “*Queueing Petri Nets A Formalism for the Combined Qualitative and Quantitative Analysis of Systems*” 44221 Dortmund, Germany http://ls4-www.cs.tu-dortmund.de/QPN/QPN_article/qpn_final/qpn_final.html
- Ben-Naoum L., Boel R., Bongaerts L., De Schutter B., Peng Y., Valckenaers P., Vandewalle J. and Wertz V. (1995), “*Methodologies for discrete event dynamic systems: A survey*”, Journal A, vol. 36, pp. 3 – 14.
- Chengand Y. H. and Yang L. A. (2009), “*A fuzzy Petri nets approach for railway traffic control in case of abnormality: Evidence from Taiwan railway system*”, Expert Systems with Applications, vol. 36, pp. 8040-8048.
- CSLAB (2010), “*Parallel Architectures – Coherence & Consistency*”, διαθέσιμο στο: <http://www.cslab.ece.ntua.gr/courses/pps/files/fall2010/pps-coherence.pdf>
- Holloway L. E., Krogh B. H. and Giua A. (1997), “*A Survey of Petri Net Methods for Controlled Discrete Event Systems*”, Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications, vol. 7, Issue 2, pp. 151-190.
- Jayasudha S., Ramanathan K. and Rangarajan K. (2012), “*Fuzzy Petri nets and fuzzy cognitive maps*”, International Journal of Computer Applications, vol. 46, No. 11, pp. 5 – 9.
- Jehng W. K. (2002), “*Petri net models applied to analyze automatic sequential pressing systems*”, Journal of Materials Processing Technology, Volume 120, pp. 115 – 125.
- Jensen K. (1998), “*An Introduction to the Practical Use of Coloured Petri Nets*”, Lectures on Petri Nets II: Applications, Lecture Notes in Computer Science, vol. 1492, pp. 237-292.
- Knybel J. and Pavliska V. (2005), “*Representation of Fuzzy IF-THEN rules by Petri Nets*”, Research report No. 84, University of Ostrava, Institute for Research and Applications of Fuzzy Modeling, Submitted/to appear ASIS 2005, Supported by project 1M0572 of the MSM CR.
- Kounev S. and Buchmann A. (2006), “*On the Use of Queueing Petri Nets for Modeling and Performance Analysis of Distributed Systems*”, Technische Universität Darmstadt, Germany, DOI: 10.5772/5317.
- Kouzehgar M., Badamchizadeh M. A. and Khanmohammadi S. (2011), “*Fuzzy Petri nets for human behavior verification and validation*”, International Journal of Advanced Computer Science and Applications, vol. 2, No. 12, pp. 106 – 113.
- Laganeckas M. (2012), “*A Simulator for high level Petri Nets: Model based design and implementation*”, Technical University of Denmark Informatics and Mathematical Modelling, Building 321, DK-2800 Kongens Lyngby, Denmark, IMM-M.Sc.: ISSN 0909-3192.
- Mejia G., Nino K., Montoya C., Sanchez M. A., Amodeo J. and Palacios L. (2016), “*A Petri Net-based framework for realistic project management and scheduling: An application in animation and video games*”, Computers & Operations Research, vol. 66, pp. 190-198.
- Meng C. Z. and Dicesare F. (1993), “*Petri Net Synthesis for Discrete Event Control of Manufacturing Systems*”, Springer, US.
- Meng C. Z. and Kurapati V. (1999), “*Modeling, Simulation and Control of Flexible Manufacturing Systems: A Petri Net Approach*”, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, London.
- Milinkovic S., Markovic M., Veskovic S., Ivic M. and Pavlovic N. (2013), “*A fuzzy Petri net model to estimate train delays*”, Simulation Modelling Practice and Theory, vol. 33, pp. 144 – 157.
- Murata T. (1989), “*Petri Nets: Properties, Analysis and Applications*”, Proc. IEEE, Invited Paper, Proceedings of the IEEE, Vol. 77, No. 4, April 1989.

- Peterson J. (1977), “*Petri nets*”, Computing Surveys, vol. 9, no. 3, pp. 223 – 252.
- Peterson J. (1981), “*Petri Net theory and the Modeling of Systems*”, Prentice Hall Inc.
- Petri C. A. (1966), “*Communication with Automata*”, Griffiss Air Force Base, New York, Tech. Rep. RADC-TR-65-377, vol. 1.
- Valette R., Chezalviel - Pradin B. and Girault F. (1999), “*An Introduction to Petri net theory, Fuzziness in Petri Nets*”, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Cardoso J. and Carmago H. Eds., Physica Verlag, vol. 22, pp. 3 – 24.
- Van der Aalst W.M.P (1998), “*The Application of Petri Nets to Workflow Management*”, Eindhoven University of Technology.
- Yilmaz B. (October 2008), “*Applications of Petri Nets*”, A Thesis Submitted to the Graduate School of Engineering and Sciences of Izmir Institute of Technology in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Mathematics.
- Αβραμίδου Ε. (2004), “*Μοντελοποίηση και Προσομοίωση με Χρωματισμένα Δίκτυα Petri*”, Διπλωματική Εργασία, επιβλ. Π. Κατσαρός, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- Βροντάκης Κ. (2015), “*Αξιολόγηση Αποδοτικότητας και Μελέτη Λειτουργίας Μονάδας Επεξεργασίας Δέρματος*”, διπλωματική εργασία, επιβλ. Τσινιάρης Γ. and Ιωαννίδης Ε., Πολυτεχνείο Κρήτης, Σχ. Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης.
- Γερογιάννης Β. (2001), “*Ενοποιημένο τυπικό μοντέλο για την αναπαράσταση της λειτουργικότητας και της ανάλυσης της χρονοδρομολογησιμότητας εφαρμογών πραγματικού χρόνου*”, Διδακτορική διατριβή, επιβλ. Πιντέλας Π., Πανεπιστήμιο Πατρών.
- Δημάδης Χ. (2008), “*Χρονικός Προγραμματισμός στη Διοίκηση Έργων με τη χρήση δικτύων Petri*”, Διπλωματική Εργασία, επιβλ. Λεώπουλος Β., Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Δημητριάδου - Γιαννέλη Χ. (2013), “*Δίκτυα Petri*”, Διπλωματική Εργασία, επιβλ. Παπαδόπουλος Χ., Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- Ελευθεριάδης Δ. (Οκτώβριος 2001), “*Οικονομική ανάλυση συστημάτων βιομηχανικής παραγωγής*”, πτυχιακή εργασία, επιβλ. Κεφαλιδής Α., ΤΕΙ Καβάλας, Τμ. Ηλεκτρολογίας, Σχ. Τεχνολογικών Εφαρμογών.
- Θηλυκός Δ. (2014), “*Σημειώσεις στη Θεωρία Γραφημάτων*”, Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.
- Κλεάνθους Ν. (Μάιος 2012), “*Τυπική Ανάλυση Βιολογικών Συστημάτων με τη χρήση Δικτύων Petri*”, διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμ. Πληροφορικής.
- Κυρίσης Χ. (2008), “*Ασαφή Δίκτυα Petri*”, μεταπτυχιακή εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμ. Μαθηματικών (ΜΔΕ).
- Λεφέβρ Ν. (Σεπτέμβριος 2015), “*Σύνθετα Δίκτυα: Μελέτη και Ανάλυση Βιολογικών Δικτύων – Εφαρμογή στην Διάδοση Ασθενειών*”, ΤΕΙ Ηπείρου, Τμ. Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε..
- Μπλέρης Γ. και Σταμέλος Ι. (2002), “*Θεωρία γλωσσών και αυτομάτων*”, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τμήμα εκδόσεων.
- Παπαναστασίου Σ. (Φεβρουάριος 2013), “*Τεχνοοικονομική Ανάλυση Δικτύων Ηλεκτρικής Ενέργειας σε Συνθήκες Ελεύθερης Αγοράς με Προσεγγίσεις Στατιστικής Μηχανικής*”, διπλωματική εργασία, επιβλ. Αλεξανδρίδης Α., Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμ. Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών, Τομέας Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας.
- Ρούκας Α. και Τσιρίκας Α. (1998), “*Μαθηματικά Μοντέλα για Παράλληλη Επεξεργασία- Δίκτυα Petri*”, πτυχιακή εργασία, επιβλ. Χριστοφορίδης Σ., ΤΕΙ Καβάλας, Τμ. Ηλεκτρολογίας, Σχ. Τεχνολογικών Εφαρμογών.
- Σημειώσεις μαθήματος, “*Θεωρία Γραφημάτων-3^η Διάλεξη – Μονοπάτια και Κύκλοι*”, Πανεπιστήμιο Στερεάς Ελλάδας, Τμ. Πληροφορικής, Εξάμηνο ΣΤ, διαθέσιμο στο: http://eclass.uth.gr/eclass/modules/document/file.php/INFS170/%CE%98%CE%95%CE%A9%CE%A1%CE%99%CE%91%20%CE%93%CE%A1%CE%91%CE%A6%CE%A9%CE%9D_3%CE%B7%20%CE%94%CE%B9%CE%AC%CE%BB%CE%B5%CE%BE%CE%B7.pdf
- Σημειώσεις μαθήματος, “*Θεωρία Γραφημάτων-Εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων*”, Πανεπιστήμιο Στερεάς Ελλάδας, Τμ. Πληροφορικής, Εξάμηνο ΣΤ, διαθέσιμο στο: <http://eclass.uth.gr/eclass/modules/document/file.php/INFS170/%CE%98%CE%95%CE%A9>

%CE%A1%CE%99%CE%91%20%CE%93%CE%A1%CE%91%CE%A6%CE%A9%CE%9D_1%CE%B7%20%CE%94%CE%B9%CE%AC%CE%BB%CE%B5%CE%BE%CE%B7.pdf

Τσιναράκης Γ. (2007), “Μοντελοποίηση και μελέτη συστημάτων παραγωγής τυχαίας τοπολογίας με δίκτυα Petri: Μια προσέγγιση ιεραρχικού ελέγχου”, Διδακτορική διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.

Φωτάκης Δ., “Βασικές Έννοιες στη Θεωρία Γραφημάτων”, Τμ. Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 83200 Καρλόβασι, Σάμος, διαθέσιμο στο: http://www.softlab.ntua.gr/~fotakis/discrete_math_aegean/graphs_intro.pdf

Χριστοφιδέλη Ε. (Απρίλιος 2006), “Αξιολόγηση στρατηγικών για γραμμές παραγωγής με την μέθοδο εξομοίωσης και την XML”, πτυχιακή εργασία, επιβλ. Χριστοφορίδης Σ., Καβάλα, ΤΕΙ Καβάλας, Τμ. Διαχείρισης Πληροφοριών, Σχ. Διοίκησης και Οικονομίας.