ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ

ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

«ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ»

Αικατερίνη Σ. Κασαννή

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Ιούνιος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (Επιβλέπων)

- Μ. Νεκτάριος

- Π. Χατζόπουλος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIREAUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

MSC IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

STOCHASTIC SURPLUS PROCESSES WITH DEPENDENCE AND DIVIDEND STRATEGIES

By

Aikaterini S. Kasanni

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of MSc in Actuarial Science and Risk management

Piraeus, Greece

June 2016

Στην οικογένεια μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ε. Χατζηκωνσταντινίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη καθοδήγησή του, την υπομονή που επέδειξε και την ουσιαστική βοήθεια του καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου που μου συμπαραστέκονται και στηρίζουν ηθικά και οικονομικά κάθε προσπάθεια και επιλογή μου.

Αικατερίνη Σ. Κασαννή

Ιούνιος 2016

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη διαφόρων μέτρων χρεοκοπίας και η κατανομή των καταβαλλόμενων μερισμάτων για στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος με εξάρτηση μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων και των αντίστοιχων μεγεθών ατομικών ζημιών θεωρώντας παράλληλα και την ύπαρξη στρατηγικών μερισμάτων. Στην παρούσα εργασία θα εξεταστεί η δομή εξάρτησης μέσω της σύζευξης των Farlie-Gumbel-Morgenstern. Τότε, για κάθε μία από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις και για τις αντίστοιχες τροποποιημένες στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος θα μελετηθούν οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu καθώς και τα αναμενόμενα μερίσματα που καταβάλλει η ασφαλιστική εταιρία μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Αρχικά, στο Κεφάλαιο 1 δίνουμε μία λεπτομερή περιγραφή του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων και παρουσιάζουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για το προαναφερόμενο μοντέλο. Επίσης, στη συνέχεια του ίδιου κεφαλαίου δίνεται αναλυτική περιγραφή του γενικευμένου Erlang ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, του οποίου ειδική περίπτωση αποτελεί το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων.

Στο Κεφάλαιο 2 εισάγουμε μία στρατηγική σταθερού μερίσματος και παρουσιάζουμε αναλυτικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu και των ροπών των προεξοφλημένων μερισμάτων κάτω από την ύπαρξη της προαναφερόμενης στρατηγικής τόσο στη περίπτωση του κλασσικού μοντέλου όσο και στην περίπτωση του γενικευμένου Erlang ανανεωτικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων.

Στο Κεφάλαιο 3 εξετάζουμε την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων με εξάρτηση μέσω της σύζευξης των Farlie-Gumbel-Morgenstern. Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων ακολουθούν την κατατομή Erlang(n). Αρχικά ορίζουμε τη δομή εξάρτησης και στη συνέχεια γίνεται λεπτομερής ανάλυση της συνάρτησης των Gerber-Shiu όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν. Αποδεικνύεται στη συνέχεια ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και δίνεται η λύση της. Στη συνέχεια, για εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις δίνονται αναλυτικές εκφράσεις και αριθμητικά παραδείγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας και το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Στο Κεφάλαιο 4 θεωρούμε την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων όπου η από κοινού κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων και των μεγεθών των απαιτήσεων εμφανίζει εξάρτηση μέσω της σύζευξης των Farlie-Gumbel-Morgenstern και οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την Erlang(n) κατανομή υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Στο κεφάλαιο αυτό δείχνουμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu ικανοποιεί μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση και δίνονται οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες. Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι η λύση της μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu για το ίδιο μοντέλο κινδύνου απουσία στρατηγικής μερίσματος και ενός γραμμικού συνδυασμού από πεπερασμένες το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης, η οποία υπολογίζεται με τη βοήθεια μετασχηματισμών Laplace. Επίσης, παίρνουμε μία ομογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωση με οριακές συνθήκες για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία και αποδεικνύεται ότι η λύση της μπορεί να εκφραστεί ως ένας διαφορετικός γραμμικός συνδυασμός του ίδιου πεπερασμένου πλήθους από γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης που σχετίζεται με την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu. Τέλος, δίνονται αναλυτικές εκφράσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων για εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is the study of various ruin measures and the expected discounted dividend payments before ruin for stochastic surplus process by introducing a dependence structure between the claim sizes and the interclaim times through a Farlie-Gumbel-Morgenstern copula in the presence of a constant dividend barrier.

In Chapter 1 we give a detailed introduction of the classical risk model and we present known results for the Gerber-Shiu function in this model. Also, in the same chapter we give a detailed introduction of the renewal risk process and we present known results for the Gerber-Shiu function respectively.

In Chapter 2 we consider a constant dividend barrier strategy in case of the classical risk model and the renewal risk process respectively. We present known results for the Gerber-Shiu function and some results on the distribution of dividend payments until ruin under a classical risk model and a renewal risk model with generalized Erlang(n) distributed interclaim times, respectively, under a constant dividend barrier.

In Chapter 3 we consider an extension to the renewal risk process by introducing a dependence structure between the claim sizes and the interclaim times through a Farlie-Gumbel-Morgenstern copula. We consider that the interclaim times follow the Erlang(n)distribution. Moreover, a detailed analysis of the Gerber-Shiu function is given when the initial surplus is zero. It is proved that this function satisfies a defective renewal equation and its solution is given. Also, for exponential claim sizes explicit expressions and numerical examples for the ruin probability and the Laplace Transform of the time to ruin give.

Finally, in chapter 4 we consider the renewal risk process where the join distribution of the interclaim time and the corresponding claim size has a dependence structure based on a Farlie-Gumbel-Morgenstern copula and the interclaim times follow the Erlang(n) distribution in the presence of a constant dividend barrier. We derive an integro-differential equation with boundary conditions for some Gerber-Shiu discounted penalty functions. We proved that its solution is expressed as the Gerber-Shiu discounted penalty function in the same risk process

with the absence of a dividend barrier plus a linear combination of a finite number of linearly independent solutions to the associated homogenous integro-differential equation, which are obtained through Laplace transforms. Also, we derive a homogenous integro-differential equation with boundary conditions for the expected discounted dividend payments before ruin and it is shown that its solution can be expressed as a different linear combination of the same finite number of the linearly independent solutions to the homogenous integro-differential equation associated with the Gerber-Shiu discounted penalty function. Finally, we obtain explicit solutions for exponential claim sizes.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

τ.μ.	τυχαία μεταβλητή
σ.π.π.	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.κ.	συνάρτηση κατανομής
$\mathbb{N}$	σύνολο των φυσικών αριθμών
$\mathbb{R}$	σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\Re(x)$	πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού x
$*$	τελεστής συνέλιξης μεταξύ πραγματικών συναρτήσεων
$I(A)$	δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A
$a \wedge b$	minimum των a και b
$f^{(k)}(x)$	παράγωγος k τάξης της πραγματικής συνάρτησης $f(x)$
$\frac{\partial}{\partial u}$	τελεστής παραγώγισης ως προς u
$\mathbb{C}$	σύνολο των μιγαδικών αριθμών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

1.1. Εισαγωγή

Η μελέτη της χρεοκοπίας αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα μελέτης της Θεωρίας Κινδύνων. Με τον όρο «κίνδυνο» αναφερόμαστε σε κάθε απρόοπτο και αβέβαιο τυχαίο γεγονός ή στο ενδεχόμενο εμφάνισης πολύ μεγάλων απαιτήσεων οι οποίες είναι πιθανό να θέσουν σε κίνδυνο την εύρυθμη λειτουργία της ασφαλιστικής εταιρείας ακόμα και την επιβίωση της.

Ο σχηματισμός επαρκών αποθεματικών είναι απαραίτητος, πλέον και νομοθετικά, προκειμένου η ασφαλιστική επιχείρηση να είναι σε θέση να καλύψει μελλοντικές απαιτήσεις των ασφαλισμένων της αλλά και υποχρεώσεις έναντι τρίτων. Στην ασφαλιστική ορολογία τα εν λόγω αποθεματικά χαρακτηρίζονται με τον όρο πλεόνασμα και αποτελούν την διαφορά ανάμεσα στο ενεργητικό της ασφαλιστικής επιχείρησης και την καλύτερη δυνατή αναλογιστική εκτίμηση των συνολικών υποχρεώσεων της.

Ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα μελέτης της Θεωρίας Κινδύνου είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας. Ο όρος «χρεοκοπία» που θα χρησιμοποιούμε δεν αναφέρεται στην κυριολεκτική σημασία της λέξης, δηλαδή δεν είναι κάποιο είδος χρηματοπιστωτικής πτώχευσης αλλά είναι ένας όρος που δηλώνει τη φερεγγυότητα και την αξιοπιστία ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου. Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως η πιθανότητα τα αποθεματικά να μην επαρκούν ώστε να καλυφθούν οι συνολικές απαιτήσεις της ασφαλιστικής επιχείρησης.

Το 1903 ο Σουηδός Filip Lundberg με τη διδακτορική διατριβή του «Approximerad fremstaellning au sannolikheets functioned» έθεσε τα θεμέλια της Θεωρίας Κινδύνων και στη συνέχεια ο Harald Cramer (1930), έπειτα από μία σειρά εργασιών, ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στη Θεωρία Κινδύνων. Από τις παραπάνω συνεισφορές προέκυψε το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου ή μοντέλο Cramer- Lundberg. Βασικό χαρακτηριστικό του κλασσικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνων είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από την κατανομή Poisson. Το κλασσικό μοντέλο στη συνέχεια επεκτάθηκε και ενσωμάτωσε υποθέσεις σχετικά με την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των απαιτήσεων, την κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων κ.ά.. Το 1957 ο Νορβηγός Sparre Andersen εισήγαγε τη γενίκευση του κλασσικού μοντέλου γνωστή ως μοντέλο Sparre Andersen ή ανανεωτικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων. Βασικό χαρακτηριστικό του ανανεωτικού μοντέλου είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από μία ανανεωτική διαδικασία. Επομένως, είναι φανερό ότι τα μοντέλα που εισήχθησαν για την μοντελοποίηση του προβλήματος της χρεοκοπίας εξαρτώνται άμεσα από τη (στοχαστική) διαδικασία που επιλέγεται για την περιγραφή του αριθμού των κινδύνων. Το 1998 οι Gerber-Shiu εισήγαγαν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, η μελέτης της οποίας δίνει σημαντικά αποτελέσματα για μεγέθη της Θεωρίας Κινδύνων.

1.2. Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Για να μοντελοποιήσουμε το πλεόνασμα ενός χαρτοφυλακίου ενός ασφαλιστικού οργανισμού είναι απαραίτητο αρχικά να γίνει ο προσδιορισμός του αριθμού των κινδύνων. Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μία στοχαστική διαδικασία η οποία παριστά τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα $[0,t]$. Τότε η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ονομάζεται απαριθμήτρια και ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.1. *Μία στοχαστική διαδικασία* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία αν και μόνο αν*

(i) $N(t) > 0$, *με* $N(0) = 0$,

(ii) $N(t)$ *είναι διακριτή,*

(iii) *αν* $s \le t$ *τότε* $N(s) \le N(t)$. ■

Μία από τις γενικές «οικογένειες» στοχαστικών διαδικασιών, ευρέως χρησιμοποιούμενη τόσο στη θεωρία ουρών όσο και στη θεωρία κινδύνου, είναι η οικογένεια των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών. Ο ορισμός μιας ανανεωτικής διαδικασίας βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των γεγονότων (ενδεχομένων) που απαριθμεί η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Έστω, λοιπόν, $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ μία ακολουθία μη αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.κ.

$F_W(t)$, σ.π.π. $f_W(t)$, μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_W(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_W(t) d_t$ και μέση τιμή $E(W) < \infty$, όπου W_i είναι ο ενδιάμεσος χρόνος άφιξης της $i-$ ζημιάς (ενδεχομένου).

1.3. Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων

Η ασφαλιστική εταιρία έχει την υποχρέωση να καταβάλλει την συμφωνημένη αποζημίωση στους ασφαλισμένους της κατά τη χρονική στιγμή της έλευσης του ζημιογόνου γεγονότος. Κάθε ασφαλιστική εταιρεία οφείλει να έχει στην κατοχή της όσο το δυνατόν πιο αναλυτικά στοιχεία αναφορικά με το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων, που ενδέχεται να καταβάλει, σε κάθε χρονική στιγμή. Οι συνολικές αποζημιώσεις εξαρτώνται από το πλήθος των ζημιογόνων ενδεχομένων που εμφανίζονται σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και το μέγεθος των ζημιών που προκαλούνται.

Ορισμός 1.2. *Συμβολίζουμε με S(t) τη στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο* t. *Ορίζουμε με* $\{X_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$ *μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., με την τ.μ.* X_i *να περιγράφει το μέγεθος της* $i-$*οστής ζημιάς. Το μέγεθος λοιπόν των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως τον χρόνο* t *θα είναι*

$$S(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)}$$

ή ισοδύναμα

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

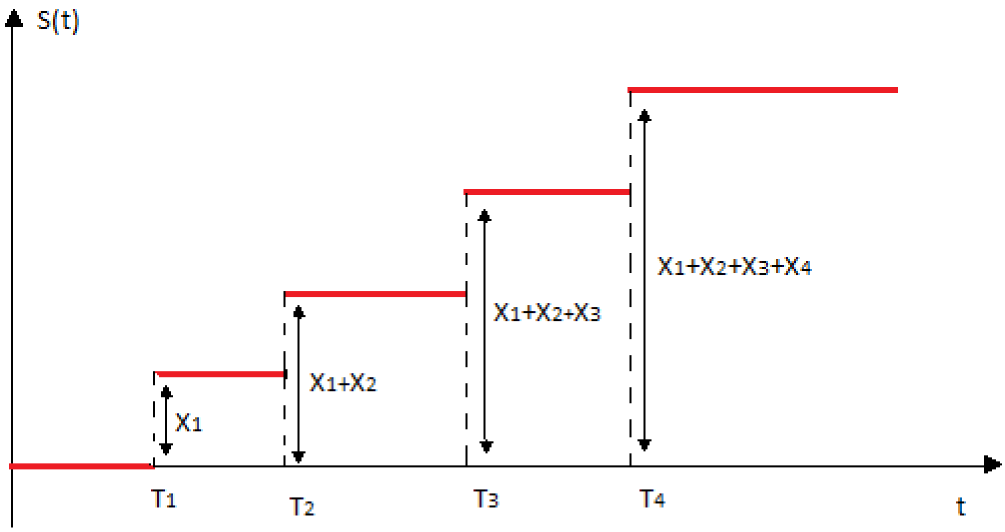
■

Ορισμός 1.3. *Ορίζουμε ως* $\{W_n, n \geq 1\}$ *μια ακολουθία τ.μ. που εκφράζει τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων και ως* T_n *τον χρόνο επέλευσης του* n*-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύει ότι*

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i \ .$$

Επίσης, ορίζουμε με $N(t) = \sup\{n : T_n < t\}$ *να είναι η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των ζημιογόνων ενδεχομένων που εμφανίζονται στο διάστημα* $[0,t]$ ■

Θεωρούμε ότι οι $\{W_n, n \geq 1\}$ και $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες ακολουθίες οι οποίες αποτελούνται από ισόνομες, ανεξάρτητες και θετικά ορισμένες τ.μ..



Σχήμα 1. Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων $S(t)$.

Στο Σχήμα 1. παρουσιάζεται γραφικά η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων. Παρατηρούμε ότι τις χρονικές στιγμές επέλευσης του ζημιογόνου ενδεχομένου η δειγματοσυνάρτηση $S(t)$ παρουσιάζει άλματα προς τα πάνω αντίστοιχα με το μέγεθος του ζημιογόνου ενεχομένου.

1.4. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το κλασσικό μοντέλο

Έχοντας μοντελοποιήσει τον αριθμό των κινδύνων, το επόμενο βήμα είναι να μοντελοποιήσουμε τα αποθεματικά ενός ασφαλιστικού οργανισμού. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος περιγράφει την εξέλιξη των τιμών του πλεονάσματος στην πορεία του χρόνου. Το ύψος του πλεονάσματος, για δεδομένη χρονική στιγμή, εξαρτάται από το αρχικό αποθεματικό, το ποσό των ασφαλίστρων που έχουν εισπραχτεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή και το ποσό των αποζημιώσεων που έχουν καταβληθεί μέχρι εκείνη την χρονική στιγμή.

Το πλεόνασμα μία δεδομένη χρονική στιγμή είναι ουσιαστικά η διαφορά μεταξύ των εσόδων και των εξόδων. Τα έσοδα της ασφαλιστικής εταιρείας είναι το αρχικό αποθεματικό και τα ασφάλιστρα που έχει εισπράξει ενώ τα έξοδα είναι οι αποζημιώσεις που πρέπει να καταβάλει.

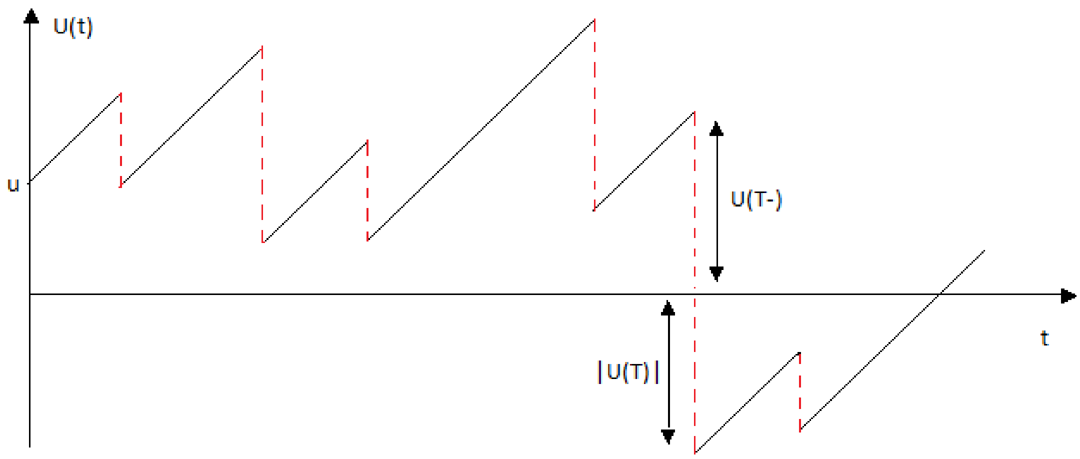
Ορισμός 1.4. (surplus process) *Ως διαδικασία πλεονάσματος* $\{U(t),\ t \geq 0\}$*, ορίζεται η στοχαστική διαδικασία*

$$U(t) = u + ct - S(t), \tag{1.2}$$

ή ισοδύναμα για $\theta > 0$ *ισχύει ότι*

$$U(t) = u + (1+\theta)\lambda E(X) - S(t),$$

όπου c *είναι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων ανά μονάδα χρόνου και* $S(t)$ *οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα* $[0,t]$*.Κάθε ασφαλιστική εταιρεία είναι υποχρεωμένη από το νόμο να διαθέτει ένα συγκεκριμένο αρχικό κεφάλαιο (αρχικό αποθεματικό) κατά την έναρξη των εργασιών της. Προφανώς λοιπόν την χρονική στιγμή* $t = 0$ *το αρχικό απόθεμά της είναι το πλεόνασμα της. Συμβολίζουμε με* u *το αρχικό απόθεμα και ισχύει* $U(0) = u \ \ (u \geq 0)$. ■



Σχήμα 2. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$.

Από τις σχέσεις (1.1) και (1.2) έπεται, βλ. Σχήμα 2., ότι η δειγματοσυνάρτηση $U(t)$ εμφανίζει άλματα (προς τα κάτω) κατά τις χρονικές στιγμές επέλευσης των ζημιογόνων γεγονότων X_i. Τα άλματα αυτά είναι του ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα άλματα (προς τα πάνω) της διαδικασίας των συνολικών αποζημιώσεων $S(t)$, βλ. Σχήμα 1., με τη διαφορά ότι η δειγματοσυνάρτηση $S(t)$ είναι κλιμακωτή, διότι η $S(t)$ έχει σταθερή τιμή μεταξύ δύο διαδοχικών χρόνων W_i, ενώ η αντίστοιχη δειγματοσυνάρτηση $U(t)$ είναι μεταξύ δύο διαδοχικών χρόνων W_i ευθύγραμμο τμήμα με θετική κλίση c.

Από τον Ορισμό 1.4, είναι φανερό ότι η διαδικασία πλεονάσματος κατά τις χρονικές στιγμές W_i μπορεί να γίνει αρνητική. Στην αναλογιστική ορολογία το ενδεχόμενο αυτό ονομάζεται χρεοκοπία και η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου πιθανότητα χρεοκοπίας.

1.5. Υποθέσεις του κλασσικού μοντέλου

Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων θεωρούμε ότι τα ασφάλιστρα που εισπράττονται από τους ασφαλιζομένους είναι η μοναδική πηγή εσόδων της ασφαλιστικής εταιρείας. Επίσης, ως μοναδική πηγή εξόδων θεωρούνται αποζημιώσεις που θα κληθεί να καταβάλλει η εταιρείας στους δικαιούχους σε περίπτωση επέλευσης του κινδύνου.

Στην περίπτωση αυτή, η ανέλιξη του πλεονάσματος σε συνεχή χρόνο δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$U(t) = u + P(t) - S(t), \;\; t \geq 0 \,.$$

Θεωρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες υποθέσεις:

- Η συνάρτηση του συνολικού ποσού των καταβληθέντων ασφαλίστρων δίνεται από τη σχέση $P(t) = ct$, όπου $c > 0$ είναι μία σταθερά που καλείται ένταση ασφαλίστρου και εκφράζει το ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων στο χρόνο $t \geq 0$, δηλαδή $P(t)$ είναι μία γραμμική συνάρτηση.
- Η απαριθμήτρια ζημιών $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μία ανέλιξη Poisson με ένταση λ, όπου η σταθερά λ εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό άφιξης ζημιών στη μονάδα του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα ζημιογόνο γεγονός σε ένα διάστημα είναι ανάλογο του μήκους του διαστήματος. Δηλαδή, $N(t) \sim P(\lambda t)$

επομένως $P_r(N(t)=n)=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$ έτσι ώστε η $\{S(t): t \geq 0\}$ να είναι η μία σύνθετη ανέλιξη Poisson.

- Οι στοχαστικές διαδικασίες $\{X_n, n \geq 1\}$ και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ακόμα θεωρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ με $n = 1,2,\ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους και έχουν από κοινού συνάρτηση κατανομής

  $$F(x) = P_r(X \leq x) = \int_0^x f(y)dy,$$

  με $f(x) = P_r(X = x)$ και συνάρτηση δεξιάς ουράς

  $$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \int_x^\infty f(y)dy.$$

  Το αναμενόμενο μέγεθος ζημιάς το συμβολίζουμε με μ και είναι ίσο με

  $$\mu = E(x) = \int_0^\infty x\, f(x)dx = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx.$$

  Ακόμα, με $F_e(y)$ θα συμβολίζουμε την κατανομή ισορροπίας (equilibrium) και ισούται με

  $$F_e(y) = 1 - \overline{F}_e(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(y)dy \quad \text{και} \quad f_e(y) = \frac{\overline{F}(y)}{\mu}.$$

Αν ισχύουν τα παραπάνω τότε ισχύει το κλασσικό μοντέλο ή κλασσικό πρότυπο. Επιπλέον, μία βασική υπόθεση σχετικά με το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων είναι ότι τα αναμενόμενα έξοδα της επιχείρησης δεν θα πρέπει να υπερβαίνουν τα έσοδα της. Απαιτούμε δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή τα ασφάλιστρα που εισπράττονται να είναι μεγαλύτερα κατά μέσο όρο από τις αποζημιώσεις που καταβάλλονται προς τους ασφαλιζομένους. Δηλαδή, θέλουμε να ισχύει η συνθήκη:

$$ct > E(S(t))$$

$$\Leftrightarrow ct > E(N(t))E(X)$$

$$\Leftrightarrow ct > \lambda t E(X)$$

$$\Leftrightarrow c > \lambda\mu_1 \text{ (συνθήκη καθαρού κέρδους)}$$

όπου $\mu_1 = E(X)$. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η ένταση του ασφαλίστρου c είναι $c = (1+\theta)\lambda\mu_1$ ή ισοδύναμα $\theta = (c/\lambda\mu_1) - 1$, όπου το θ καλείται περιθώριο ασφαλείας ή συντελεστής ασφαλείας (premium loading factor) και είναι αυστηρά θετικός $(\theta > 0)$. Σε περίπτωση που $\theta \leq 0$ τότε θα είχαμε βέβαιη χρεοκοπία. Σε ένα δεδομένο μοντέλο κινδύνου για συγκεκριμένη τιμή του αρχικού αποθεματικού u, όσο αυξάνεται η τιμή του συντελεστή ασφαλείας τόσο μικραίνει η πιθανότητα εμφάνισης χρεοκοπίας. Επομένως, το θ φαίνεται να αποτελεί ένα μέτρο έκφρασης του αναμενόμενου ποσοστού κέρδους μίας ασφαλιστικής επιχείρησης για ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο και εκφράζει πόσο μεγαλύτερα είναι κατά μέσο όρο τα έσοδα της ασφαλιστικής εταιρείας σε σχέση με τα έξοδα της. Το θ παίρνει συνήθως τιμές μεταξύ 0 και 1 προκειμένου το χαρτοφυλάκιο να είναι ανταγωνιστικό.

1.6. Μέτρα χρεοκοπίας

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε κάποια θεμελιώδη μέτρα χρεοκοπίας της Θεωρίας Κινδύνων όπως είναι ο χρόνος χρεοκοπίας και η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Προκειμένου να ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, χρειάζεται αρχικά να δώσουμε τον ορισμό του χρόνου κατά τον οποίο εμφανίζεται η χρεοκοπία.

Ορισμός 1.5. (time to ruin). *Για* $t \geq 0$, *ορίζουμε*

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\} \text{ με } \inf \emptyset = \infty,$$

να είναι ο χρόνος κατά τον οποίο για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική. ■

Με βάση τον παραπάνω ορισμό η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.6. *Για* $u \geq 0$ *η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως*

$$\psi(u) := P_r(T < \infty \,|\, U(0) = u) = P_r(U(T) < 0 \,|\, U(0) = u).$$

Αντίστοιχα, για $u \geq 0$ *ως* $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ *ορίζεται η πιθανότητα να μην συμβεί χρεοκοπία, ως εξής*

$$\delta(u) = P_r(T = \infty \,|\, U(0) = u) = P_r(U(t) \geq 0 \text{ για κάθε } t \geq 0). \qquad \blacksquare$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς το αρχικό αποθεματικό u και συγκεκριμένα ισχύει ότι $\lim_{u\to\infty}\psi(u) = 0$. Αντιθέτως, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς το u και ισχύει ότι $\lim_{u\to\infty}\delta(u) = 1$.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, αν και είναι πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου, δεν είναι το μοναδικό. Δύο άλλες τυχαίες μεταβλητές, που σχετίζονται με την τυχαία μεταβλητή T, είναι η $|U(T)|$ και η $U(T-)$ [(με $T-$ το αριστερό όριο της T), βλ. Σχήμα 2.]. Η $|U(T)|$ συμβολίζει το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και δηλώνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν τη χρονική στιγμή εμφάνισης της χρεοκοπίας T. Η $U(T-)$ συμβολίζει το πλεόνασμα λίγο πριν τη χρεοκοπία και εκφράζει το μέγεθος του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρονική στιγμή T όπου πραγματοποιείται η καταβολή της ασφαλιστικής αποζημίωσης η οποία οδηγεί σε χρεοκοπία. Η τ.μ. $U(T-)$ λαμβάνει μόνο θετικές τιμές και ορίζεται μέσω της σχέσης που ακολουθεί

$$U(T-) = \lim_{t\to T-} U(t).$$

Είναι φανερό ότι η μελέτη των παραπάνω ποσοτήτων δίνουν πολύ περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη συμπεριφορά της διαδικασίας πλεονάσματος $U(t)$, απ' ότι μόνο η μελέτη της τυχαίας μεταβλητής T. Έτσι πολλοί συγγραφείς μελέτησαν τις περιθώριες και από κοινού κατανομές των τ.μ. T, $|U(T)|$και $U(T-)$τόσο για το κλασσικό όσο και για το ανανεωτικό μοντέλο.

Υπάρχει ακόμα μία σημαντική τ.μ. η οποία συμβολίζεται με L_1 και εκφράζει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Η τ.μ. L_1 μας βοηθάει να εξετάσουμε τη πτώση του πλεονάσματος κατ' απόλυτη τιμή και λαμβάνει θετικές τιμές. Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u ισχύει ότι $L_1 = 0$.

Έστω ότι με t_1 θα συμβολίσουμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του πλεονάσματος πέφτει για πρώτη φορά κάτω από την τιμή του αρχικού αποθεματικού u. Έτσι θα συμβολίσουμε με $u_1 = U(t_1)$ την τιμή του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή t_1 οπότε στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $L_1 = u - u_1$. Κατ' αντιστοιχία με L_2 θα συμβολίσουμε την τ.μ. που δηλώνει την πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u_1 κ.ο.κ

Σύμφωνα με τα παραπάνω, προκύπτει μία ακολουθία μεταβλητών $L_1, L_2, ...$ η οποία θεωρείται πεπερασμένη διότι από ένα σημείο και έπειτα λαμβάνει μηδενικές τιμές. Οι τ.μ. L_i ονομάζονται επίσης και κλιμακωτά ύψη και εκφράζουν τη σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από την τιμή του αρχικού αποθεματικού u μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας T. Στην περίπτωση που δεν συμβεί χρεοκοπία οι τ.μ. L_i εκφράζουν τη σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από την τιμή του αρχικού αποθεματικού u μέχρι την ελάχιστη τιμή που παίρνει η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t) : t \geq 0\}$.

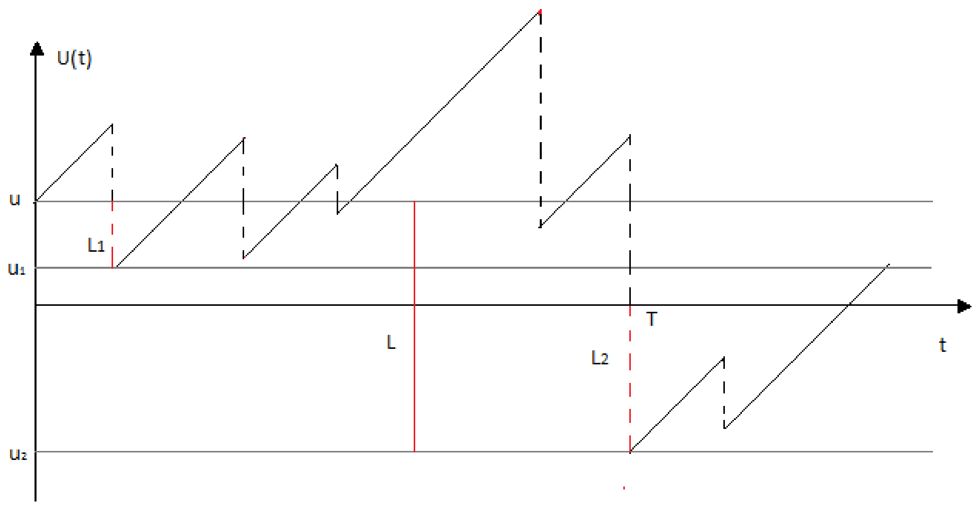
Στη συνέχεια, θεωρούμε τη διακριτή τ.μ. K η οποία εκφράζει το πλήθος των κλιμακωτών υψών, δηλαδή το πλήθος των μεταβλητών L_i σε μία ανέλιξη πλεονάσματος η οποία ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή. Στην περίπτωση όπου οι μεταβλητές $L_1, L_2, ...$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και ανεξάρτητες της τ.μ. K προκύπτει μία σύνθετη τ.μ. L η οποία ονομάζεται μέγιστη σωρευτική απώλεια και ορίζεται μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$L = \begin{cases} 0, & \text{αν } K = 0 \\ L_1 + L_2 + \cdots + L_K, & \text{αν } K \geq 1 \end{cases}.$$

Η τ.μ. L εκφράζει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος από την τιμή του αρχικού αποθεματικού έως την ελάχιστη τιμή της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος

$\{U(t): t \geq 0\}$. Η κατανομή της τ.μ. L, όπως φαίνεται από τον τρόπο που έχει οριστεί, είναι μικτή και συγκεκριμένα ακολουθεί την σύνθετη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\theta/(1+\theta)$.

Στη συνέχεια, στο Σχήμα 3. φαίνεται η γραφική παράσταση της μέγιστης σωρευτικής απώλειας.



Σχήμα 3. Μέγιστη σωρευτική απώλεια στη διαδικασία πλεονάσματος.

Η μελέτη της τ.μ. L είναι πολύ σημαντική για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων. Πιο αναλυτικά, ισχύει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής όπως φαίνεται από τις παρακάτω σχέσεις

$$P_r(L > u) = \psi(u) \quad \text{και} \quad P_r(L \leq u) = \delta(u).$$

Αξίζει να επισημανθεί ότι στην πράξη, η διαδικασία πλεονάσματος δεν είναι ο μοναδικός «πόρος» μιας ασφαλιστικής επιχείρησης και ότι η καταβολή μιας αποζημίωσης δεν είναι στιγμιαίο γεγονός διότι απαιτείται κάποιο χρονικό διάστημα, που συνεπάγεται εισροή ασφαλίστρου πέρα από το καταβεβλημένο μέχρι τη χρονική στιγμή T. Έτσι η «μαθηματική χρεοκοπία» που ορίζουμε δεν ταυτίζεται αναγκαία με την πραγματική χρεοκοπία, αλλά είναι ένα πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου από το οποίο η επιχείρηση μπορεί να βγάλει χρήσιμα συμπεράσματα. Έτσι, με βάση αυτό το μέτρο κινδύνου, αν η επιχείρηση έχει ενδείξεις ότι οι υποχρεώσεις της θα είναι εξαιρετικά αυξημένες μπορεί να προχωρήσει σε αύξηση των ασφαλίστρων, σε σύναψη δανείου, σε αύξηση μετοχικού κεφαλαίου κ.ο.κ. Από μαθηματικής άποψης είναι φανερό ότι υπολογίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί κανείς να προσδιορίσει κατάλληλα το αρχικό απόθεμα u και το ασφάλιστρο c έτσι ώστε να αποφύγει ή σε κάθε περίπτωση να επιμηκύνει το ενδεχόμενο, η διαδικασία πλεονάσματος να γίνει αρνητική.

Επιπλέον, από τον ορισμό της διαδικασίας πλεονάσματος προκύπτει άμεσα ότι τα ασφάλιστρα της επιχείρησης c δεν μπορεί να είναι οποιοδήποτε χρηματικό ποσό. Έτσι υποθέτουμε ότι ο ρυθμός είσπραξης του ασφαλίστρου c στο $[0,t]$ είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τις μέσες ζημιές, $E(S(t))$, που εμφανίζονται στο $[0,t]$, διαφορετικά η χρεοκοπία στο $[0,t]$ είναι βέβαιη από την πρώτη κιόλας ζημιά.

<u>Συντελεστής προσαρμογής</u>

Μία πολύ σημαντική ποσότητα που συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ο συντελεστής προσαρμογής R.

Ορισμός 1.7. *Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου ως συντελεστής προσαρμογής* R *ορίζεται η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης*

$$1+(1+\theta)E(X)r = M_X(r) \tag{1.3}$$

όπου θ *είναι το περιθώριο ασφαλείας και* $M_X(r)=E(e^{rX})$ *είναι η ροπογεννήτρια της τ.μ. του ύψους των απαιτήσεων* X *η οποία υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση*

$$M_X(r)=E(e^{rX})=\int_0^\infty e^{rx} f(x)dx\,. \tag{1.4}$$

■

Η σχέση (1.3) είναι γνωστή ως εξίσωση του Lundberg ή εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής και από τη λύση της προκύπτει το πολύ μία θετική ρίζα, την οποία θέτουμε και ως την τιμή του συντελεστή προσαρμογής R.

Σημείωση 1.1. Ο υπολογισμός της τιμής του συντελεστή προσαρμογής R δεν είναι πάντοτε εφικτός. Στις περιπτώσεις που εξετάζουμε κατανομές με βαριά δεξιά ουρά όπως είναι οι κατανομές Pareto, Weibull και η λογαριθμοκανονική, η ροπογεννήτρια συνάρτηση των αποζημιώσεων $M_X(r)$ απειρίζεται για κάθε $r > 0$ οπότε και ο συντελεστή προσαρμογής R δεν υφίσταται.

Ανισότητα Lundberg

Στο κλασσικό μοντέλο, με τη βοήθεια του συντελεστή προσαρμογής R, εξάγουμε χρήσιμα αποτελέσματα που σχετίζονται με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Ένα τέτοιο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα είναι η ανισότητα Lundberg η οποία αποτελεί την πιο γνωστή ανισότητα του κλασσικού μοντέλου. Η ανισότητα Lundberg δίνει πληροφορίες για την πιθανότητα χρεοκοπίας με τη βοήθεια ενός άνω φράγματος συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού και του συντελεστή προσαρμογής στην περίπτωση που δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος για τον ακριβή υπολογισμό της.

Θεώρημα 1.1. *Εφόσον υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R και έστω $u \geq 0$ το αρχικό αποθεματικό , ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}. \qquad \blacksquare$$

Παρατήρηση 1.1. Η μελέτη της ανισότητας Lundberg δίνει τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- για μία δεδομένη τιμή του συντελεστή προσαρμογής R, όσο μεγαλώνει το αρχικό αποθεματικό $u \geq 0$ τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας,
- για δεδομένη τιμή του αρχικού αποθεματικού $u \geq 0$, όσο μεγαλώνει ο συντελεστής προσαρμογής R τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg

Ένα εξίσου σημαντικό αποτέλεσμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασσικό μοντέλο αποτελεί ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg, ο οποίος παρέχει μία προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό u παίρνει πολύ μεγάλες τιμές.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ασυμπτωτική σχέση

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru}, \text{ καθώς } u \to \infty$$

ή ισοδύναμα ισχύει ότι

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C ,$$

όπου C είναι μία θετική σταθερά η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$C = \frac{\theta E(X)}{R\int_0^\infty xe^{Rx}\overline{F}(x)dx}$$

όπου $\int_0^\infty xe^{Rx}\overline{F}(x)dx < \infty$.

Θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg

Ορισμός 1.8. *Ορίζεται ως θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg η εξίσωση της μορφής*

$$cs + \lambda \hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0 \tag{1.5}$$

όπου $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy$ *είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας* $f(s)$. *Για* $\delta > 0$ *η εξίσωση (1.5) έχει μία θετική ρίζα, έστω* $\rho = \rho(\delta)$. ■

Παρατήρηση 1.2 . Επισημαίνουμε ότι οι θετικές ρίζες της παραπάνω εξίσωσης υπάρχουν για $\delta > 0$, ανεξάρτητα από την τιμή του περιθωρίου ασφαλείας θ.

- για $\delta = 0$ και $\theta < 0$ οι ρίζες της εξίσωσης (1.5) είναι θετικές
- για $\delta = 0$ και $\theta > 0$ οι ρίζες της εξίσωσης (1.5) είναι ίσες με το μηδέν.

1.7. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο

Στα τέλη του περασμένου αιώνα και συγκεκριμένα το 1998 οι Hans Gerber και Elias Shiu δημοσίευσαν μία εργασία με τίτλο “On the time of ruin.”, στην οποία εισήγαγαν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function), μέσω της οποίας μπορεί να γίνει μελέτη διάφορων μέτρων κινδύνων ταυτόχρονα και όχι μεμονωμένα όπως ίσχυε μέχρι τότε.

Ορισμός 1.9. *Για* $u \geq 0$, $\delta \geq 0$, *η συνάρτηση των Geber-Shiu ορίζεται ως*

$$m_{\delta}(u) := E\left\{e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|)\, I(T<\infty) \,|\, U(0)=u\right\}, \quad u \geq 0 \tag{1.6}$$

όπου δ *είναι η ένταση ανατοκισμού,* $w:[0,\infty)\times(0,\infty)\to[0,\infty)$ *μία διδιάστατη συνάρτηση στο* $\mathbb{R}^2$ *που ονομάζεται συνάρτηση ποινής (penalty function),* $U(T-)$ *το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία,* $|U(T)|$ *το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και* $I(T<\infty)$ *η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου εμφάνισης χρεοκοπίας. Για την δείκτρια συνάρτηση ισχύει το εξής:*

$$I(T<\infty) = \begin{cases} 1, & \text{συμβαίνει χρεοκοπία} \\ 0, & \text{δεν συμβαίνει χρεοκοπία} \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

Διαισθητικά, η συνάρτηση των Gerber-Shiu μπορεί να ερμηνευθεί ως η προεξοφλημένη ποινή η οποία επιβάλλεται όταν συμβεί η χρεοκοπία. Από τον ορισμό της $m_{\delta}(u)$ και για κατάλληλα ορίσματα των μεταβλητών της προκύπτει πλήθος αποτελεσμάτων για διάφορα μέτρα κινδύνου. Στη συνέχεια παρατίθενται κάποιες ειδικές περιπτώσεις:

- για $\delta = 0$, $w(x,y) = 1$, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\psi(u) := E(\, I(T<\infty) \,|\, U(0)=u) = P_r(T<\infty \,|\, U(0)=u),$$

- για $\delta > 0$, $w(x,y) = 1$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας στο σημείο δ ή η προεξοφλημένη πιθανότητα χρεοκοπίας

$$m_{\delta}(u) := E\left\{e^{-\delta T}\, I(T<\infty) \,|\, U(0)=u\right\}$$

- για $\delta > 0$, $w(x,y) = I(x=x_1)\, I(y=x_2)$, προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος $(U(T-), |U(T)|)$, δηλαδή του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$f(x_1, x_2 \,|\, u) = E\left\{e^{-\delta T}\, I(U(T-)=x_1, |U(T)|=x_2) I(T<\infty) \,|\, U(0)=u\right\}$$

- για $\delta > 0, w(x,y) = I(x \le x_1)\, I(y \le x_2)$, προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού σ.κ. του τυχαίου διανύσματος ($U(T-), |U(T)|$), δηλαδή του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και συμβολίζεται με $F_\delta(x_1, x_2 \mid u)$,

$$F_\delta(x_1, x_2 \mid u) = E\left\{ e^{-\delta T}\; I(U(T-) \le x_1, |U(T)| \le x_2) I(T < \infty) \mid U(0) = u \right\}$$

- για $\delta > 0, w(x,y) = I(x = x_1)$, προκύπτει η προεξοφλημένη σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, $U(T-)$,

$$h(x_1 \mid u) = E\left\{ e^{-\delta T}\; I(U(T-) = x_1), I(T < \infty) \mid U(0) = u \right\}$$

- για $\delta > 0, w(x,y) = I(y = x_2)$, προκύπτει η προεξοφλημένη σ.π.π. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, $|U(T)|$,

$$g(x_2 \mid u) = E\left\{ e^{-\delta T}\; I(|U(T)| = x_2)\, I(T < \infty) \mid U(0) = u \right\}$$

- για $\delta > 0, w(x,y) = x_1^k$, παίρνουμε την προεξοφλημένη ροπή τάξης k του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία,

$$E\left\{ e^{-\delta T}\; |U(T)|^k\; I(T < \infty) \mid U(0) = u \right\},$$

- για $\delta > 0, w(x,y) = x_2^k$, παίρνουμε την προεξοφλημένη ροπή τάξης k του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία

$$E\left\{ e^{-\delta T}\; U(T-)^k I(T < \infty) \mid U(0) = u \right\}.$$

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu είναι ένα πανίσχυρο εργαλείο που εκτός από τη χρήση της στα αναλογιστικά μαθηματικά, έχει και εφαρμογές στη θεωρία των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Παραδείγματος χάρη, όταν $w(x,y) = \max\{0, K - x\}$, η $m_\delta(u)$ χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση ενός Αμερικανικού put option με τιμή άσκησης K και αγοραία αξία του δικαιώματος ίση με x. Για περισσότερες πληροφορίες βλ. Gerber-Shiu (1999) και Gerber – Landry (1998).

Η μελέτη της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου έγινε από τους Gerber και Shiu (1998). Σε αυτή την εργασία οι συγγραφείς απέδειξαν ότι η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση τύπου Voltera. Η λύση της συγκεκριμένης ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης γίνεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace, αποδεικνύοντας ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Η γενική λύση της παραπάνω ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, για μεγέθη ζημιών ελεύθερα κατανομής, δόθηκε από τους Lin και Willmot (1999) σε όρους της ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής (associated compound geometric).

Θεώρημα 1.2. *Η συνάρτηση* $m_\delta(u)$ *των Gerber-Shiu ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$m'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c} m(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u m(u-x) f(x)dx - \frac{\lambda}{c} z(u), \quad u \geq 0 \tag{1.7}$$

όπου $z(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) f(x)dx$. ■

Παρατήρηση 1.3. Για $\delta = 0, w(x,y) = 1$ η συνάρτηση $m_\delta(u)$ των Gerber-Shiu ανάγεται στην πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ και επομένως προκύπτουν τα ακόλουθα.

Πόρισμα 1.1. *Η πιθανότητα χρεοκοπίας* $\psi(u)$ *ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x) f(x)dx - \frac{\lambda}{c}\overline{F}(u), \quad u \geq 0 \tag{1.8}$$

όπου $\overline{F}(u) = 1 - F(u) = \int_u^\infty f(x)dx$. ■

Παρατήρηση 1.4. Από το Πόρισμα 1.1 έπεται ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ είναι η δεξιά ουρά μίας σύνθετης Γεωμετρικής κατανομής. Πιο αναλυτικά έχουμε ότι $\psi(u) = P_r(L > u)$ όπου $L = L_1 + L_2 + ... + L_M$ και $M \sim Geo(1/(1+\theta))$. Οι τ.μ. L_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f_e(x)$.

Για τη λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.7), πρέπει αρχικά να δείξουμε ότι η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (defective renewal equation).

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να δώσουμε τον ορισμό της ανανεωτικής εξίσωσης.

Ορισμός 1.10. *Μία εξίσωση που έχει τη μορφή*

$$\phi(u) = \lambda \int_0^u \phi(u-x)dG(x) + g(u), \quad u \geq 0$$

ονομάζεται ανανεωτική εξίσωση ή εξίσωση ανανεωτικού τύπου , όπου

- *το* λ *είναι μία σταθερά έτσι ώστε* $0 < \lambda \leq 1$,
- *η* g *είναι μία φραγμένη συνάρτηση,*
- *η* G *είναι μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής,*
- ϕ *είναι η άγνωστη συνάρτηση* ■

Οι εξισώσεις ανανεωτικού τύπου διακρίνονται σε:

- ελλειμματικές (defective) όταν $0 < \lambda < 1$, και
- κανονικές (proper) ή μη ελλειμματικές (no defective) όταν στην εξίσωση η σταθερά $\lambda = 1$.

Θεώρημα 1.3. *Η συνάρτηση* $m_\delta(u)$ *για* $u \geq 0$ *ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$m_\delta(u) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^u m_\delta(u-x) g(x) dx + \frac{1}{1+\beta} H(u), \quad u \geq 0 \tag{1.9}$$

όπου

$$\beta = \frac{(1+\theta)E(X)}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \overline{F}(y)dy}, \quad \rho = \rho(\delta),\ g(x) = G'(x)$$

με

$$G(x) = 1 - \overline{G}(x) = 1 - \frac{\overline{F}(x) - e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho y} f(y)dy}{\rho \int_0^\infty e^{-\rho y} \overline{F}(y)dy}$$

και

$$H(u)=\frac{e^{\rho u}\int_u^{\infty}e^{-\rho x}\int_x^{\infty}w(x,y-x)f(y)dy}{\int_0^{\infty}e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}. \qquad \blacksquare$$

Απόδειξη. Βλ. Lin-Willmot (1999). ■

Για τον προσδιορισμό της λύσης της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.9), είναι απαραίτητο να οριστεί η ακόλουθη συνάρτηση κατανομής $K(u)=1-\overline{K}(u)$, με

$$K(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n G^{*n}(u), \quad u\geq 0 \tag{1.10}$$

όπου G^{*n} είναι η n-οστή συνέλιξη της σ.κ. $G(x)$. Επομένως, θα ισχύει ότι η συνάρτηση επιβίωσης δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\overline{K}(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n G^{*n}(u), \quad u\geq 0 \tag{1.11}$$

όπου $\overline{G}^{*n}$ είναι η n-οστή συνέλιξη της συνάρτησης $\overline{G}(x)$.

Παρατήρηση 1.5. Παρατηρούμε ότι η $\overline{K}(u)$ είναι η δεξιά ουρά μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Πιο αναλυτικά,

$$\overline{K}(u)=P_r(L_1+L_2+\ldots+L_M>u),$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $M\sim Geo\left(\frac{1}{1+\theta}\right)$, δηλαδή

$$P_r(M=n)=\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n, \ n=1,2,..$$

και οι τυχαίες μεταβλητές L_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με τη συνάρτηση κατανομής $G(x)$.

Η λύση οποιασδήποτε συνάρτησης που ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής (1.9) του Θεωρήματος 1.3. μπορεί να εκφραστεί μέσω της $\overline{K}(u)$ όπως φαίνεται στο Θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1.4. *Η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (1.9) δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση*

$$m_\delta(u)=\frac{1}{\beta}\int_0^u H(u-x)dK(u)+\frac{1}{1+\beta}H(u),$$

ή

$$m_\delta(u)=-\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)dH(u)-\frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u)+\frac{1}{\beta}H(u).$$

Αν η συνάρτηση $H(u)$ είναι διαφορίσιμη, τότε

$$m_\delta(u)=-\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)H'(u)du-\frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u)+\frac{1}{\beta}H(u),\quad u\geq 0. \qquad \blacksquare$$

Απόδειξη. Βλ. Θεώρημα 2.1. των Lin και Willmot (1999). ■

Το κλασικό μοντέλο είναι ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου. Στην παράγραφο που ακολουθεί δίνουμε αναλυτικά την παραπάνω θεωρία για το ανανεωτικό μοντέλο με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης να κατανέμονται σύμφωνα με μια γενικευμένη Erlang $(n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$.

1.8. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το γενικευμένο Erlang ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου.

Το μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας στη θεωρία κινδύνου επικεντρώνεται στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, όπου οι απαιτήσεις προκύπτουν σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson. Ο Andersen (1957) θεώρησε ότι οι απαιτήσεις προκύπτουν σύμφωνα με μία περισσότερο γενική ανανεωτική διαδικασία και εξήγαγε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την αντίστοιχη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο έγινε από τον Malinovskii (1998). Όμως, στη συγκεκριμένη εργασία η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογισθεί υπό την υπόθεση συγκεκριμένων μορφών της κατανομής των αποζημιώσεων, $f(x)$. Έτσι, αρκετοί συγγραφείς, προκειμένου να έχουν αναλυτικά αποτελέσματα για οποιαδήποτε κατανομή των αποζημιώσεων, $f(x)$, υποθέτουν συγκεκριμένες μορφές για την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των ζημιών, $f_W(t)$. Μία από τις ευρέως χρησιμοποιούμενες υποθέσεις στην θεωρία κινδύνου είναι οι $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ να κατανέμονται σύμφωνα με την Erlang ή γενικευμένη Erlang. Σε αυτή την περίπτωση το μοντέλο κινδύνου που προκύπτει ονομάζεται ανανεωτικό μοντέλο με Erlang ή γενικευμένους Erlang ενδιάμεσους χρόνους αντίστοιχα. Από εδώ και στο εξής, όταν αναφερόμαστε στο ανανεωτικό μοντέλο θα νοείται το ανανεωτικό μοντέλο με ενδιάμεσους χρόνους κατανεμημένους σύμφωνα με μια γενικευμένη Erlang.

Στο ανανεωτικό μοντέλο ή μοντέλο Sparre Andersen θεωρούμε ότι η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ είναι μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Στην παρούσα ενότητα θεωρούμε ότι η διαδικασία πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου $U(t)$ ορίζεται από τη σχέση (1.2) και ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ που ακολουθούν την γενικευμένη Erlang $(n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ κατανομή. Σε αυτή την περίπτωση η διαδικασία κινδύνου ονομάζεται γενικευμένη Erlang διαδικασία κινδύνου.

Ορισμός 1.11. *Έστω* $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ *μία ακολουθία ανεξάρτητων εκθετικών τ.μ. με παραμέτρους* $\lambda_i, i=1,2,\ldots,n$. *Τότε η κατανομή της (συνέλιξης των* Z_i*) τ.μ.* $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ *ονομάζεται γενικευμένη Erlang κατανομή. Σε αυτή την περίπτωση η σ.π.π. της τ.μ.* σ_n *δίνεται από τη σχέση*

$$f_{\sigma n}(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}\right)\lambda_i e^{-\lambda_i t}, t\geq 0,\ \lambda_i>0,$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. σ_n δίνεται από τη σχέση

$$\hat{f}_{\sigma_n}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_W(t)\,dt = E(e^{-sW}) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i + s)}, s \geq 0. \tag{1.12}$$

■

Παρατήρηση 1.6. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η γενικευμένη Erlang κατανομή αποτελεί γενίκευση της κατανομής Erlang. Έτσι θέτοντας $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda$ παίρνουμε την κατανομή Erlang(n,λ), ενώ θέτοντας $n = 1, \lambda_1 = \lambda$ παίρνουμε την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

1.9. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για τη γενικευμένη Erlang διαδικασία κινδύνου

Για τη γενικευμένη Erlang διαδικασία κινδύνου, οι Gerber-Shiu (2005) έδειξαν ότι η προεξοφλημένη αναμενόμενη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση όπως δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.5. *Για $u \geq 0$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, $m_\delta(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right) m_\delta(u) - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j \int_0^u m_\delta(u-x)\, f(x)\,dx - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j w(u) = 0 \tag{1.13}$$

όπου

$$w(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u) f(x)\,dx = \int_0^{\infty} w(u,x)\, f(x+u)\,dx\,. \tag{1.14}$$

■

Πόρισμα 1.2. *Για $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda$ η εξίσωση (1.13) γίνεται*

$$\left(\lambda + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)^n m_\delta(u) - \lambda^n \int_0^u m_\delta(u-x)\, f(x)\,dx - \lambda^n w(u) = 0, \tag{1.15}$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο με Erlang(n,λ) *ενδιάμεσους χρόνους άφιξης.* ■

Πόρισμα 1.3. *Για* $n=1, \lambda_1=\lambda$ *η εξίσωση (1.13) γίνεται*

$$cm'_\delta(u)-(\delta+\lambda)m_\delta(u)+\lambda\int_0^u m_\delta(u-x)\,f(x)\,dx+\lambda w(u)=0, \tag{1.16}$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο. ■

Η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.13) βρίσκεται χρησιμοποιώντας ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο εργαλείο στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, τους μετασχηματισμούς Laplace. Έτσι για $\Re(s)\geq 0$ ορίζουμε $\hat{m}_\delta(s), \hat{f}(s)$ και $\hat{w}(s)$ να είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των $m_\delta(u), f(u)$ και $w(u)$ αντίστοιχα, που δίνονται από τις σχέσεις

$$\hat{m}_\delta(s)=\int_0^\infty e^{-sx}m_\delta(x)\,dx,, \quad \hat{f}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx \quad \text{και} \quad \hat{w}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}w(x)\,dx \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace, $\hat{m}_\delta(s)$, χρειαζόμαστε το παρακάτω θεώρημα και το παρακάτω λήμμα.

Θεώρημα 1.6. (Lundberg's generalized fundamental equation). *Για* $s\in\mathbb{C}$ *και* $\delta\geq 0$, *η θεμελιώδης γενικευμένη εξίσωση του Lundberg δίνεται από τη σχέση*

$$\tilde{\gamma}(s)-\prod_{j=1}^n\lambda_j\hat{f}(s)=0, \tag{1.17}$$

όπου $\tilde{\gamma}(s)=\prod_{j=1}^n(\lambda_j+\delta-cs).$ ■

Πόρισμα 1.4. (Lundberg's fundamental equation). *Για* $n=1$ *και* $\lambda_1=\lambda$, *η εξίσωση (1.17) γίνεται*

$$\delta+\lambda-cs=\hat{f}(s), \tag{1.18}$$

που είναι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου. ■

Η λύση της εξίσωσης (1.17) παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu και δίνεται από το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 1.1.

(i) *Για* $\Re(s) \geq 0$, $\delta > 0$ *η γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg, (1.17), έχει ακριβώς* n *ρίζες, στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.*

(ii) *Για* $\Re(s) \geq 0$ *και* $\delta \to 0^{+}$, *τότε η γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg έχει ακριβώς μία ρίζα, το* 0 *και* $n-1$ *ρίζες, στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.* ■

Απόδειξη. Gerber και Shiu (2005), Albrecher και Boxma (2005). ■

Στο εξής θα συμβολίζουμε τις θετικές ρίζες της εξίσωσης (1.17), $r_i(\delta) \equiv r_i$, $\Re(r_i(0)) > 0$, $i = 1,2,..n$, ενώ επίσης υποθέτουμε ότι οι r_i, $i = 1,2,..n$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Τώρα, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.13), και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.1, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης των Gerber-Shiu δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.7. *Για* $\Re(s) \geq 0$, *ο μετασχηματισμός Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής* $\hat{m}_\delta(s)$ *δίνεται από τη σχέση*

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{w}(s) - q(s)}{\tilde{\gamma}(s) - \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{f}(s)}, \tag{1.19}$$

όπου $q(s) = \sum_{j=1}^{n} \hat{w}(r_j) \prod_{k=1,k\neq j}^{n} \dfrac{s-r_k}{r_j - r_k}$ *και* r_i, *με* $\Re(r_i) > 0$, $i = 1,2,..n$ *είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.17).* ■

Απόδειξη. Gerber και Shiu (2005). ■

Επειδή η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace (1.19), είναι αρκετά δύσκολο να υπολογισθεί, στη γενική περίπτωση, το επόμενο βήμα για τον υπολογισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu είναι να δείξουμε ότι η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και να βρούμε τη λύση αυτής. Για αυτό το σκοπό χρειαζόμαστε ένα εργαλείο, ευρέως γνωστό και χρησιμοποιούμενο στη θεωρία κινδύνου, τους τελεστές T_r.

Ορισμός 1.12. (T_r operator). *Έστω $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε για*

$\Re(r) \geq 0$ και $x \geq 0$ ορίζουμε τον τελεστή T_r να δίνεται από τη σχέση

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(u-x)} f(u)\,du = \int_0^\infty e^{-ru} f(u+x)\,du. \qquad \blacksquare$$

Στη θεωρία κινδύνου ο τελεστής T_r εισήχθηκε από τους Dickson και Hipp (2001). Ο τελεστής T_r έχει κάποιες πολύ χρήσιμες ιδιότητες, όπως δίνονται ακολούθως.

Πρόταση 1.1 (Ιδιότητες των τελεστών T_r). *Έστω $T_r f(x)$ ο T_r τελεστής μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f(x)$. Ο τελεστής $T_r f(x)$ ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:*

(i) $T_r f(0) = \int_0^\infty e^{-ru} f(u)\,du = \hat{f}(r)$,

(ii) $T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_2} T_{r_1} f(x) = \dfrac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}$, $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$,

(iii) $\dfrac{d}{dx} T_r f(x) = r\, T_r f(x) - f(x)$,

$$\frac{d}{dx} T_{r_1} T_{r_2} f(x) = -\sum_{k=1}^{2} \frac{r_k\, T_{r_k} f(x)}{r_2'(r_k)}, \quad r_2(s) = (s - r_1)(s - r_2),$$

(iv) $T_r \hat{f}(s) = \dfrac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r - s}$, $r \neq s \in \mathbb{C}$,

(v) $T_r \hat{f}(s) = \widehat{(T_r f)}(s) = T_s T_r f(0)$,

(vi) $s\hat{f}(s) - r\hat{f}(r) = (s - r)\,[-s T_r \hat{f}(s) - \hat{f}(r)]$,

(vii) $\hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s) - \hat{f}_1(r)\hat{f}_2(r) = -(s - r)\,[\hat{f}_1(s) T_{r_2} \hat{f}_2(s) + T_{r_1} \hat{f}_1(r) \hat{f}_2(s)]$,

για κάθε $s \neq r$ και για f_1, f_2 δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις,

(viii) αν $r_1, r_2, \ldots, r_k$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί, τότε

$$T_{r_1} T_{r_2} \ldots T_{r_k} = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{r_j} f(x)}{\tau_k'(r_j)}, \quad \tau(s) = \prod_{j=1}^{k} (s - r_j),$$

και

$$T_{s_1} T_{r_1} T_{r_2} \dots T_{r_k} f(0) = (-1)^k \left(\frac{\hat{f}(s)}{\tau_k(s)} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\hat{f}(r_j)}{(s-r_j)\,\tau_k'(r_j)} \right).$$

Επιπλέον αν η $f(x)$ *είναι σ.π.π. της τ.μ.* X *με σ.κ.* $F(x) = 1 - \bar{F}(x)$, *τότε ισχύουν τα παρακάτω*

(ix) $T_0 T_r f(x) = \int_x^{\infty} T_r f(u)\, du = \dfrac{\bar{F}(x) - T_r f(x)}{r} = T_r \bar{F}(x)$,

(x) $\int_0^{u} T_r f(x+y)\, dx = T_r \bar{F}(y) - T_r \bar{F}(y+u)$,

(xi) $\int_0^{\infty} T_{r_1} T_{r_2} f(x)\, dx = \dfrac{1}{r_2 - r_1} \left(\dfrac{1 - \hat{f}(r_1)}{r_1} - \dfrac{1 - \hat{f}(r_2)}{r_2} \right)$,

(xii) $\int_0^{\infty} \left(T_{r_1} f * T_{r_2} f \right)(x)\, dx = \dfrac{\left(1 - \hat{f}(r_1)\right)\left(1 - \hat{f}(r_2)\right)}{r_1 r_2}$. ■

Απόδειξη. Για την απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων παραπέμπουμε στους Lin και Willmot (1999), Dickson και Hipp (2001), Li και Carrido (2004a). ■

O Li (2003), χρησιμοποιώντας τους τελεστές T_r απέδειξε ότι η $\hat{m}_\delta(s)$ της εξίσωσης (1.19) γράφεται σε μια ισοδύναμη μορφή, απ' όπου εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, όπως φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.8. *Για* $\Re(s) \geq 0$, *ο μετασχηματισμός Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής,*

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{\hat{G}(s)}{1 - \hat{n}(s)}, \tag{1.20}$$

όπου

$$\hat{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} G(x)\, dx = \frac{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j}{c^n} T_s \left(\prod_{j=1}^{n} T_{rj} w \right)(0)$$

και $\hat{n}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} n(x)\, dx = \dfrac{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j}{c^n} T_s \left(\prod_{j=1}^{n} T_{rj} f \right)(0)$ *και* r_i, $\Re(r_i) > 0$, $i = 1,2,\dots n$ *είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.17).* ■

Απόδειξη. Li (2003), Θεώρημα 2. ■

Τώρα, αντιστρέφοντας την εξίσωση (1.20) ως προς s παίρνουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.9. *Για $u \geq 0$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_\delta(u)$, ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-x)\, n(x)\, dx + G(u)$$

$$= \frac{1}{1+\xi}\int_0^u m_\delta(u-x)\, z(x)\, dx + \frac{1}{1+\xi} H(u), \qquad (1.21)$$

- $n(x) = \dfrac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n}\left(\prod_{j=1}^n T_{rj} f\right)(x)$, $G(x) = \dfrac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n}\left(\prod_{j=1}^n T_{rj} w\right)(x)$,
- ξ *τέτοιο ώστε* $\dfrac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty n(x)\, dx = 1 - \dfrac{\prod_{j=1}^n (\lambda_j + \delta) - \prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n \prod_{j=1}^n r_j} < 1$
- r_i, $\Re(r_i) > 0$, $i = 1,2,..n$, *να είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.17),*
- $H(x) = (1+\xi) G(x)$
- $z(x) = (1+\xi)\, n(x)$ *όπου η* $z(x)$ *είναι η σ.π.π. της κατανομής*

$$Z(u) = \frac{\int_0^u \eta(y)\, dy}{\int_0^\infty n(y)\, dy}.$$

Επιπλέον αν $\delta \to 0^+$, *τότε* $\xi \to \xi_0$, *τέτοιο ώστε* $\dfrac{1}{(1+\xi_0)} = 1 - \dfrac{\theta \prod_{j=1}^n \lambda_{jm}}{c^n \prod_{j=1}^{n-1} r_j(0)} < 1$, *δεδομένου ότι το περιθώριο ασφαλείας* θ *είναι θετικό.* ■

Απόδειξη. Li (2003). ■

Πόρισμα 1.5. *Για $n = 1$ και $\lambda_1 = \lambda$, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (1.21) γίνεται*

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-x)\, n(x)\, dx + G(u)$$

$$= \frac{1}{1+\xi}\int_0^u m_\delta(u-x)\, z(x)\, dx + \frac{1}{1+\xi} H(u), \qquad (1.22)$$

που είναι η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου όπου

- $n\,(x) = \frac{\lambda}{c} T_r f(x),\ G(x) = \frac{\lambda}{c} T_r w\,(x),$,
- ξ *τέτοιο ώστε* $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty n(x)\, dx = 1 - \frac{\delta}{cr} < 1$
- *με* r *,* $\Re(r) > 0$*, , να είναι η ρίζα της εξίσωσης (1.18),*
- $H(x) = (1+\xi) G(x)$
- $z(x) = (1+\xi)\, n\,(x)$ *όπου η* $z(x)$ *είναι η σ.π.π. της κατανομής* $Z(u) = \dfrac{\int_0^u \eta(y)\, dy}{\int_0^\infty n(y)\, dy}$.

Επιπλέον αν $\delta \to 0^+$ *, τότε* $\xi \to \xi_0$*, τέτοιο ώστε* $\frac{1}{(1+\xi_0)} = 1 - \frac{1}{cr'(0)} < 1$. ■

Η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.21) υπολογίζεται σε όρους της δεξιάς ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Έτσι για $u \geq 0$, ορίζουμε τη σ.κ. της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής (associate compound geometric distribution) $K(u) = 1 - \overline{K}(u)$, όπου η δεξιά ουρά $\overline{K}(u)$ δίνεται από τη σχέση

$$\overline{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{1+\xi}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^n \overline{N}^{*n}(u),\ u \geq 0,$$

με $\overline{N}^{*n}(u)$ η $n-$οστή συνέλιξη της δεξιάς ουράς $\overline{N}(u) = 1 - N(u) = \int_u^\infty n(y)\, dy$.

Θεώρημα 1.10. *Για* $u \geq 0$ *, η λύση της ανανεωτικής ελλειμματικής εξίσωσης (1.21) δίνεται από τη σχέση*

$$m_{\delta}(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u H(u-x)\, dK(x) + \frac{1}{1+\xi} H(u), \tag{1.23}$$

ή ισοδύναμα

$$m_{\delta}(u) = -\frac{1}{\xi}\int_0^u \overline{K}(u-x)\, dH(x) - \frac{H(0)}{\xi}\overline{K}(u) + \frac{1}{\xi}H(u), \tag{1.24}$$

ή ισοδύναμα

$$m_{\delta}(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u (1-\overline{K}(u-x)\, dH(x)) + \frac{H(0)}{\xi}(1-\overline{K}(u)). \tag{1.25}$$

■

Απόδειξη. Lin και Willmot (1999). ■

Από τις σχέσεις (1.23),(1.24) και (1.25) και τον τύπο της $H(u)$ είναι φανερό ότι η λύση της $m_{\delta}(u)$ εξαρτάται άμεσα από τον υπολογισμό της δεξιάς ουράς, $\overline{K}(u)$. Οι Lin και Willmot (1999) απέδειξαν ότι η ουρά της βοηθητικής σύνθετης γεωμετρικής κατανομής ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\overline{K}(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \overline{K}(u-x)\, z(x)\, dx + \frac{1}{1+\xi}\overline{Z}(u), u \geq 0, \tag{1.26}$$

όπου $\overline{Z}(u) = 1 - Z(u) = \int_u^{\infty} z(x)dx$.

Επιπλέον επιλέγοντας $\mathrm{w(x,y)} = 1$, η συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_{\delta}(u)$ γίνεται ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, $E(e^{-\delta T}\, 1_{(T<\infty)} \,|\, U(0) = u) = m_{\delta T}(u)$.

Ακόμα για $w(x,y) = 1$, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 9 των τελεστών T_r, παίρνουμε άμεσα ότι $H(u) = (1+\xi)\dfrac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n}\left(\prod_{j=1}^{n} T_{rj}\overline{Z}\right)(u)$ και συνεπώς η (1.22) γίνεται

$$m_{\delta T}(u)=\frac{1}{1+\xi}\int_0^u m_{\delta T}(u-x)\,z(x)dx+\frac{1}{1+\xi}\bar{Z}(u),u\geq 0 \tag{1.27}$$

απ' όπου συγκρίνοντας τις εξισώσεις (1.26) και (1.27) παρατηρούμε ότι η δεξιά ουρά της σύνθετης βοηθητικής γεωμετρικής κατανομής είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T .

Θεώρημα 1.11. *Για $u\geq 0$ ισχύει ότι*

$$\bar{K}(u)=E(e^{-\delta T}\,1_{(T<\infty)}\,|\,U(0)=u)=m_{\delta T}(u)\,. \qquad \blacksquare$$

Από τα Θεωρήματα (1.10) και (1.11), είναι φανερό ότι γνωρίζοντας τη $m_{\delta T}(u)$ και υπολογίζοντας την $H(u)$ για διάφορες τιμές της συνάρτησης ποινής, $w(x,y)$,μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορα μέτρα κίνδυνου, όπως την πιθανότητα χρεοκοπίας, την κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, $U(T-)$, την κατανομή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία,$|U(T)|$, την από κοινού κατανομή των δύο παραπάνω τ.μ., καθώς και άλλα μέτρα κινδύνου.

Έτσι, από τα παραπάνω, είναι φανερό ότι ο προσδιορισμός διάφορων μέτρων κινδύνου εξαρτάται άμεσα από τον υπολογισμό της συνάρτησης $m_{\delta T}(u)$, η οποία βρίσκεται μέσω των μετασχηματισμών Laplace. Έτσι από τη σχέση (1.20), για $w(x,y)=1$ έχουμε ότι

$$\hat{m}_{\delta T}(s)=\frac{\hat{G}(s)\prod_{j=1}^{n}(r_j-s)}{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)-\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)}, \tag{1.28}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$1-\hat{n}(s)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)-\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)}{\prod_{j=1}^{n}(r_j-s)},s\neq r_j,j=1,2,\ldots,n,$$

η οποία αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.1. και τις ιδιότητες των τελεστών T_r, (βλ. Lin (2003) Θέωρημα 2). Επιπλέον, επιλέγοντας $w(x,y)=1$, και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 5 των τελεστών T_r, η συνάρτηση $\hat{G}(s)$ γίνεται

$$\hat{G}(s)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n}T_sT_{r1}\ldots T_{rn}f(0)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n}\cdot\frac{T_0T_{r1}\ldots T_{rn}f(0)-T_sT_{r1}\ldots T_{rn}f(0)}{s}$$

$$=\frac{\hat{n}(0)-\hat{n}(s)}{s}=\frac{1}{s}\left(\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)--\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)}{\prod_{j=1}^{n}(r_j-s)}-\frac{\xi}{1+\xi}\right). \tag{1.29}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.29) στην (1.28) παίρνουμε άμεσα ότι

$$\hat{m}_{\delta T}(s)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)-\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)-\frac{\xi}{1+\xi}\prod_{j=1}^{n}(r_j-s)}{s\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)-\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)\right]}. \tag{1.30}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace (1.30), μπορεί να αντιστρέφεται σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις. Μία από αυτές τις περιπτώσεις είναι όταν η $\hat{m}_{\delta T}(s)$ έχει πολυωνυμική μορφή. Έτσι η $\hat{m}_{\delta T}(s)$ μπορεί να έχει πολυωνυμική μορφή, αν και μόνο αν η $\hat{f}(s)$ έχει πολυωνυμική μορφή και συνεπώς για αυτό το σκοπό επιλέγουμε την $f(x)$ να ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

Ορισμός 1.13. (rational distribution family). *Η τ.μ. X με σ.π.π. $f(x)$, ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών $\Re_f$ αν ο μετασχηματισμός Laplace, $\hat{f}(s)$, γράφεται ως πηλίκο δύο πολυωνύμων,*

$$\hat{f}(s)=\frac{Q_{m-1}(s)}{Q_m(s)},\ \mu\varepsilon\ Q_m(0)=Q_{m-1}(0),\ \Re(s)\in(h_X,\infty), \tag{1.31}$$

όπου $m \in \mathbb{N}^{+}$, $\inf\{s \in \mathbb{R} : E(e^{-sX}) < \infty\}$, *και* $Q_m(s), Q_{m-1}(s)$ *είναι πολυώνυμα βαθμού* m *και* $\deg(Q_{m-1}(s)) \le m-1$ *αντίστοιχα.* ■

Υποθέτοντας ότι η κατανομή των ζημιών $f(x)$ ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών, δηλ. ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από την εξίσωση (1.31), και ορίζοντας

$$B_{m,n}(s) = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j + \delta}{c} - s\right) Q_m(s) - \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{c} Q_{m-1}(s), \tag{1.32}$$

να είναι ένα πολυώνυμο $m+n$ βαθμού, τότε ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, $m_{\delta T}(u) = \overline{K}(u)$, δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.12. *Εάν ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. του μεγέθους των ζημιών* $\hat{f}(s)$ *έχει τη μορφή της (1.31), τότε*

$$\hat{m}_{\delta T}(s) = \frac{B_{m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s + R_i)},$$

με $B_{m-1}(s) = \frac{1}{s}\left(\prod_{i=1}^{m}(s+R_i) - \frac{\xi}{1+\xi} Q_m(s)\right)$, *όπου* ξ *δίνεται από το Θεώρημα 1.9. και* $-R_i$ *είναι όλες οι ρίζες της εξίσωσης* $B_{m,n}(s) = 0$, *με* $\Re(R_i) > 0$ $i = 1,2,\ldots,m$. *Επιπλέον, αν* $-R_i$ $i = 1,2,\ldots,m$ *είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε*

$$\hat{m}_{\delta T}(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{s + R_i},$$

και

$$m_{\delta T}(u) = \sum_{i=1}^{m} a_i \, e^{-R_i u}, u \ge 0,$$

με

$$a_i = \frac{\prod_{i=1}^{m} R_i}{R_i \prod_{j=1, j\neq i}^{m} (R_j - R_i)} \cdot \frac{Q_m(-R_i)}{Q_m(0)}, i = 1,2,....,m \text{ .} \qquad \blacksquare$$

Παρατήρηση 1.7. Από το Θεώρημα 1.12. μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, αφού ισχύει ότι $\psi(u) = \lim_{\delta \to 0} m_{\delta T}(u)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΥΠΟ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ

2.1. Εισαγωγή

Με βάση το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας Κινδύνου οι ερευνητές ανέπτυξαν διάφορες στρατηγικές που αναφέρονται στο όριο όσον αφορά την απόδοση μερίσματος. Χαρακτηριστικά, από τους Lin –Willmot (2003) μελετήθηκε η στρατηγική ενός σταθερού ορίου μερίσματος, από τους Lin – Pavlova (2005) μελετήθηκε η στρατηγική μερίσματος κατωφλιού , από τους Zhang-Yang (2008) μελετήθηκε η στρατηγική για απόδοση πολλαπλών μερισμάτων κ.α.. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θα μελετηθεί η στρατηγική ενός σταθερού ορίου μερίσματος (constant dividend barrier strategy).

Η στρατηγική σταθερού μερίσματος (barrier strategy) αρχικά προτάθηκε από τον De Finetti (1957) για το διωνυμικό μοντέλο. Σύμφωνα με αυτή τη στρατηγική όταν η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος ξεπεράσει ένα κατώφλι (threshold) τότε επιστρέφεται μέρισμα στους δικαιούχους, συνήθως με τη μορφή έκπτωσης στα ασφάλιστρα του επόμενου έτους. Υπάρχει αρκετή βιβλιογραφία για τη μελέτη στρατηγικών κατωφλίου για μια σύνθετη Poisson διαδικασία κινδύνου. Χαρακτηριστικά αναφέρονται Buhlmann (1970), Segerdahl (1970), Gerber (1972,1973,1979,1981), Paulsen και Gjessing (1997), Gerber και Shiu (1998), Albrecher and Kainhofer (2002) και Hojgaard (2002).

Με την στρατηγική σταθερού ορίου μερίσματος υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σταθερό οριζόντιο όριο το οποίο συμβολίζουμε με b και είναι μεγαλύτερο από το αρχικό αποθεματικό u, δηλαδή $b > u$. Με βάση την στρατηγική αυτή όταν το πλεόνασμα ξεπερνάει το σταθερό όριο b πληρώνονται μερίσματα στους δικαιούχους με σταθερό και συνεχή ρυθμό, που είναι ίσος με τον ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων c.

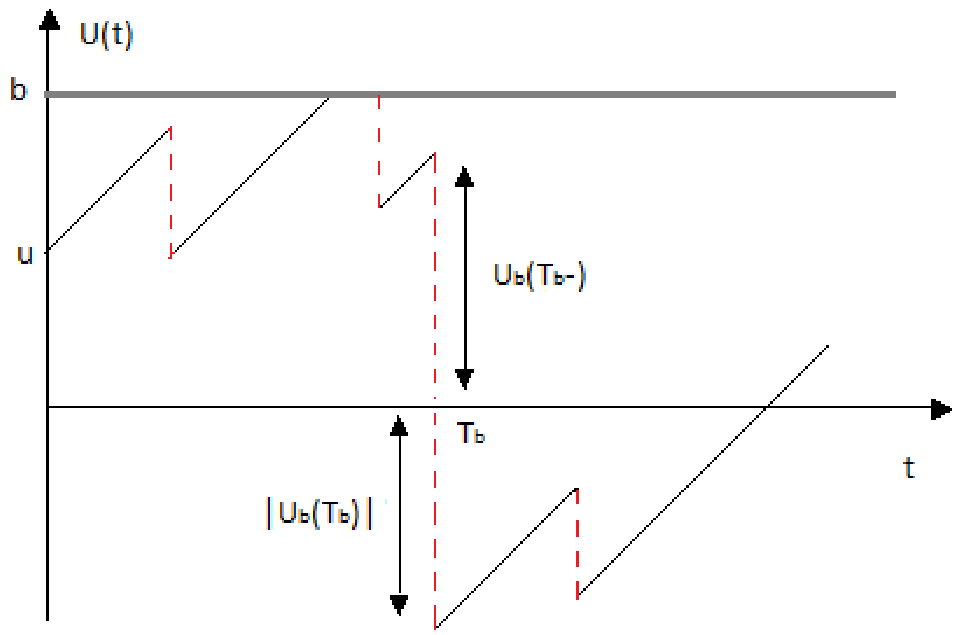
2.2. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Έστω $U_b(t)$ να είναι η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος με αρχικό αποθεματικό $U_b(0)=u$ κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος. Επομένως, το πλεόνασμα $U_b(t)$ δεν ξεπερνάει το όριο b και μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$U_b(t)=\begin{cases} u+ct-S(t), & U_b(t)<b \\ u-S(t), & U_b(t)=b \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$dU_b(t)=\begin{cases} cdt-dS(t), & U_b(t)<b \\ -dS(t), & U_b(t)=b \end{cases}.$$



Σχήμα 4. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$ υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

Ορίζουμε ως $T_b=\inf\{t\geq 0: U_b(t)<0\}$, $u\leq b$, να είναι ο χρόνος όπου το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό. Ο χρόνος T_b αναφέρεται ως χρόνος χρεοκοπίας. Επίσης, θεωρούμε $U_b(T_b-)$ να είναι το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και $|U_b(T_b)|$ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία. Η ειδική περίπτωση $b=\infty$ αναφέρεται στην κλασσική θεωρία χρεοκοπίας.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi_b(u) = P_r(T_b < \infty) = P_r(U_b(t) < 0), \quad u \le b\,.$$

2.3. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

Ορισμός 2.1. *Για* $\delta \ge 0$ *και* $u \le b$*, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ορίζεται ως*

$$m_b(u) = E\left\{ e^{-\delta T_b} w(U_b(T_b-), |U_b(T_b)|)\, I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u \right\}, u \le b \qquad (2.1)$$

όπου δ *είναι η ένταση ανατοκισμού,* $0 \le w(x,y) < \infty$ *μία διδιάστατη συνάρτηση στο* $\mathbb{R}^2$ *και*

$$I(T_b < \infty) = \begin{cases} 1, & T_b < \infty \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

Η συνάρτηση $m_\delta(u;b)$ είναι πολύ χρήσιμη στο να παράγουμε αποτελέσματα για τις από κοινού και τις περιθώριες συναρτήσεις των $T_b, U_b(T_b-)$, και $|U_b(T_b)|$. Για διάφορες τιμές της συνάρτησης ποινής και με βάση τον ορισμό της $m_\delta(u;b)$ προκύπτουν οι ακόλουθες ειδικές περιπτώσεις:

- για $\delta = 0, w(x,y) = 1$ παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\psi_b(u) := E\{ I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u\} = P_r(T_b < \infty \,|\, U_b(0),$$

- για $\delta > 0, w(x,y) = 1$ προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,

$$m_{T_b}(u;b) := E\left\{ e^{-\delta T_b}\, I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u \right\}$$

- για $\delta > 0, w(x,y) = I(x = x_1) I(y = x_2)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος $(U_b(T_b-), |U_b(T_b)|)$,

$$f(x_1,x_2\,|\,u)=E\left\{e^{-\delta T_b}\ I(U_b(T_b-)=x_1,|U_b(T_b)|=x_2)I(T_b<\infty)\,|\,U_b(0)=u\right\}$$

- για $\delta>0, w(x,y)=I(x=x_1)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη σ.π.π. της τ.μ. $U_b(T_b-)$,

$$h(x_1\,|\,u)=E\left\{e^{-\delta T_b}I(U_b(T_b-)=x_1\ I(T_b<\infty)\,|\,U_b(0)=u\right\}$$

- για $\delta>0, w(x,y)=I(y=x_2)$, παίρνουμε την προεξοφλημένη σ.π.π. της τ.μ. $|U_b(T_b)|$,

$$g(x_2\,|\,u)=E\left\{e^{-\delta T_b}\ I(|U_b(T_b)|=x_2\ I(T_b<\infty)\,|\,U_b(0)=u\right\}$$

- για $\delta>0, w(x,y)=x_1^k$,παίρνουμε την προεξοφλημένη ροπή τάξης k του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία,

$$E\left\{e^{-\delta T_b}\ |U_b(T_b)|^k\ I(T_b<\infty\,|\,U_b(0)=u\right\}$$

- για $\delta>0, w(x,y)=x_2^k$,παίρνουμε την προεξοφλημένη ροπή τάξης k του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία

$$E\left\{e^{-\delta T_b}\ U_b(T_b-)^k I(T<\infty)\,|\,U_b(0)=u\right\}.$$

Παρατήρηση 2.1. Από τον ορισμό της διαδικασίας πλεονάσματος $U_b(t)$ γίνεται φανερό ότι πρόκειται για μία ειδική περίπτωση της διαδικασία πλεονάσματος χωρίς την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος. Έτσι, για $b\to\infty$ έχουμε ότι

$$\lim_{b\to\infty}U_b(t)=U(t)\Rightarrow\lim_{b\to\infty}m_b(t)=m(u).$$

Στη συνέχεια, θα προσδιορίσουμε τη γενική λύση της συνάρτησης των Gerber –Shiu $m_b(u)$ που ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση της μορφής

$$m_b'(u)=-\frac{\lambda}{c}\int_0^u m_b(u-y)f(x)dx+\frac{\lambda+\delta}{c}m_b(u)-\frac{\lambda}{c}z(u),\quad 0\le u\le b \tag{2.2}$$

με οριακή συνθήκη $m_b'(b)=0$. (2.3)

Αξίζει να σημειωθεί όσον αφορά την σχέση (2.2) ότι η εξίσωση αυτή καθαυτή δεν συμπεριλαμβάνει το κατώφλι b. Επομένως, η συνάρτηση των Gerber και Shiu για όλες τις θετικές τιμές του b, συμπεριλαμβανομένης της περίπτωσης $b=\infty$, ικανοποιεί την σχέση (2.2). Η μόνη διαφορά μεταξύ αυτών των δυο διαφορετικών συναρτήσεων είναι η οριακή συνθήκη $m_b'(b)=0$ την οποία ορίζουμε.

Για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης της $m_b(u)$ ορίζεται το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 2.1. *Έστω ότι η διαφορίσιμη συνάρτηση $\phi(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$\phi'(u)=a\phi(u)+\beta\int_0^u \phi(u-x)h(x)dx+\gamma w(u),\quad u\geq 0 \tag{2.4}$$

όπου α,β,γ είναι σταθερές ανεξάρτητες της μεταβλητής u και h,w είναι γνωστές συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις ϕ,h και w έχουν πεπερασμένους μετασχηματισμούς Laplace. ■

Τότε η γενική λύση της (2.4) δίνεται από την

$$\phi(u)=\phi(0)v(u)+\gamma\int_0^u v(u-x)w(x)dx,\quad u\geq 0 \tag{2.5}$$

όπου η συνάρτηση $v(u)$ ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$v'(u)=\alpha v(u)+\beta\int_0^u v(u-x)f(x)dx,\quad u\geq 0\,,$$

που είναι η αντίστοιχη ομογενής της (2.4) με $v(0)=1$. (2.6)

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο χωρίς την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος είναι της μορφής (2.4) του Λήμματος 2.1.

Έστω $v(u)$ ορίζεται να είναι η συνάρτηση που ικανοποιεί την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.7), επομένως θεωρούμε ότι η $v(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση

$$\upsilon'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c}\upsilon(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \upsilon(u-x)f(x)dx, \quad u \geq 0, \tag{2.7}$$

με $\upsilon(0) = 1$.

Επομένως, κάνοντας χρήση της σχέσης (1.7) και με τη βοήθεια του Λήμματος 2.1, καταλήγουμε στο πόρισμα που ακολουθεί.

Πόρισμα 2.1. *Η γενική λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.7) δίνεται από την σχέση*

$$m_\delta(u) = m_\delta(0)\upsilon(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \upsilon(u-x)z(x)dx, \quad u \geq 0 \tag{2.8}$$

όπου η $\upsilon(u)$ ικανοποιεί την (2.7) με $\upsilon(0) = 1$. ■

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι και η συνάρτηση $m_b(u)$ των Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος είναι της μορφής (2.4) όπως φαίνεται στο Λήμμα 2.1. Επομένως, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1 παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.2. *Η γενική λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (2.2) δίνεται από την ακόλουθη σχέση*

$$m_b(u) = m_b(0)\upsilon(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \upsilon(u-x)z(x)dx, \quad u \geq 0 \tag{2.9}$$

όπου η $\upsilon(u)$ ικανοποιεί την (2.7) με $\upsilon(0) = 1$. ■

Χρησιμοποιώντας τα Πορίσματα 2.1 και 2.2 βρίσκουμε τη γενική λύση της $m_b(u)$ μέσω της $m_\delta(u)$.

Πρόταση 2.1. *Η γενική λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (2.2) με οριακή συνθήκη (2.3) δίνεται από τη σχέση*

$$m_b(u) = m_\delta(u) + k(b)\upsilon(u), \quad 0 \leq u \leq b. \tag{2.10}$$

όπου η σταθερά $k(b)$ δίνεται από τη σχέση

$$k(b) = -\frac{m'_\delta(b)}{\upsilon'(b)} \tag{2.11}$$

■

Απόδειξη. Αρχικά, αφαιρούμε τις σχέσεις (2.8), (2.9) κατά μέλη και προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$m_b(u) - m_\delta(u) = \left[m_b(0) - m_\delta(0)\right]\upsilon(u), \quad o \le u \le b$$

ή ισοδύναμα

$$m_b(u) = m_\delta(u) + k(b)\upsilon(u), \quad o \le u \le b \tag{2.12}$$

όπου $k(b) = m_b(0) - m_\delta(0)$.

Από την (2.3) έχουμε ότι $m'_b(b) = 0$ οπότε παραγωγίζοντας την (2.12) ως προς u και θέτοντας $u = b$ καταλήγουμε στη σχέση $0 = m'_\delta(b) + k(b)\upsilon'(b)$ από όπου προκύπτει ότι $k(b) = -\frac{m'_\delta(b)}{\upsilon'(b)}$ και με αντικατάσταση στην (2.12) παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση (2.10). ■

2.4. Η κατανομή των καταβαλλόμενων μερισμάτων

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τα καταβαλλόμενα μερίσματα που δίνονται πριν το χρόνο χρεοκοπίας όπως επίσης θα πάρουμε χρήσιμα αποτελέσματα για την κατανομή της παρούσας αξίας των μερισμάτων.

2.4.1. Οι ροπές της παρούσας αξίας των μερισμάτων

Ορίζουμε ως D_u να είναι η τ.μ. που εκφράζει την παρούσα αξία των μερισμάτων που καταβάλλονται στους δικαιούχους μέχρι τη στιγμή επέλευσης της χρεοκοπίας. Επίσης, ορίζουμε ως $V_n(u;b) = E\left[D_u^n\right]$ όπου $V_0(u;b) = E\left[D_u^0\right] = 1$. Αρχικά, θα βρούμε μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την $V_n(u;b)$ και μία οριακή συνθήκη. Στη συνέχεια, θα δώσουμε αναλυτικά αποτελέσματα για την περίπτωση όπου οι ατομικές απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή και θα υπολογισθεί η αναμενόμενη τιμή της παρούσας αξίας των μερισμάτων, δηλαδή η περίπτωση όπου $n = 1$.

Θεώρημα 2.1. *Για* $n=1,2,\ldots$ *η* $V_n(u;b)$ *ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$V_n'(u;b)=\frac{\lambda+n\delta}{c}V_n(u;b)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u V_n(u-y;b)\,f(y)\,dy,\quad 0\le u\le b \tag{2.13}$$

με οριακή συνθήκη

$$V_n'(u;b)\big|_{u=b}=n\,V_{n-1}(b;b) \tag{2.14}$$

■

Στη συνέχεια, θα δούμε μία εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος στην περίπτωση όπου το μέγεθος της απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha\ge 0$. Έστω με X να συμβολίσουμε την τ.μ. που εκφράζει το μέγεθος της απαίτησης επομένως η σ.κ. και η σ.π.π. δίνονται από τις σχέσεις $F(x)=1-e^{-ax}$ και $f(x)=ae^{-ax}$ αντίστοιχα.

Επομένως, η συνάρτηση (2.13) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$V_n'(u;b)=\frac{\lambda+n\delta}{c}V_n(u;b)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u a\,e^{-ax}V_n(u-x;b)dx$$

$$=\frac{\lambda+n\delta}{c}V_n(u;b)-\frac{\lambda a}{c}\int_0^u e^{-a(u-x)}V_n(x;b)dx$$

$$=\frac{\lambda+n\delta}{c}V_n(u;b)-\frac{\lambda a}{c}\,e^{-au}\int_0^u e^{ax}\,V_n(x;b)dx \tag{2.15}$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.15) ως προς u παίρνουμε

$$V_n''(u;b)=\frac{\lambda+n\delta}{c}V_n'(u;b)-\frac{\lambda a}{c}\,(-a)e^{-au}\int_0^u e^{ax}\,V_n(x;b)dx-\frac{\lambda a}{c}e^{-au}e^{au}V_n(u;b)$$

$$=\frac{\lambda+n\delta}{c}V_n'(u;b)+\frac{\lambda\alpha^2}{c}e^{-au}\int_0^u e^{ax}V_n(x;b)dx-\frac{\lambda a}{c}V_n(u;b). \tag{2.16}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (2.15) στην (2.16) προκύπτει ότι

$$V_n''(u;b)+\left(a-\frac{\lambda+n\delta}{c}\right)V_n'(u;b)-\frac{an\delta}{c}V_n(u;b)=0\,.$$

Σύμφωνα με τους Gerber και Shiu (1998) για τη συγκεκριμένη κατανομή του μεγέθους των ατομικών απαιτήσεων από τη γενικευμένη εξίσωση του Lundberg παίρνουμε

$$s^2+\left(a-\frac{\lambda+n\delta}{c}\right)s-\frac{an\delta}{c}=0 \tag{2.17}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$V_n(u;b)=k_{1,n}\,e^{\rho_{1,n}u}+k_{2,n}\,e^{\rho_{2,n}u} \tag{2.18}$$

όπου $\rho_{1,n}$ και $\rho_{2,n}$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (2.17). Έπειτα, αντικαθιστώντας τη σχέση (2.18) στην σχέση (2.13), χρησιμοποιώντας την $f(x)$ όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω και παραγωγίζοντας ως προς u προκύπτει η ακόλουθη σχέση για τα $k_{1,n}$ και $k_{2,n}$

$$\frac{k_{1,n}}{k_{2,n}}=-\frac{a+\rho_{1,n}}{a+\rho_{2,n}}\,.$$

Επομένως, έχουμε

$$V_n(u;b)=\frac{k_{1,n}}{a+\rho_{1,n}}\left[\left(a+\rho_{1,n}\right)e^{\rho_{1.n}u}-\left(a+\rho_{2,n}\right)e^{\rho_{2.n}u}\right]$$

με οριακή συνθήκη

$$V_n'(u;b)\big|_{u=b}=n\,V_{n-1}(b;b)=\frac{k_{1,n}}{a+\rho_{1,n}}\left[\left(a+\rho_{1,n}\right)\rho_{1,n}\,e^{\rho_{1.n}b}-\left(a+\rho_{2,n}\right)\rho_{2,n}\,e^{\rho_{2.n}b}\right]$$

Άρα, προκύπτει τελικά ότι

$$V_n(u;b)=n\,V_{n-1}(b;b)\frac{\left(a+\rho_{1,n}\right)e^{\rho_{1.n}u}-\left(a+\rho_{2,n}\right)e^{\rho_{2.n}u}}{\left(a+\rho_{1,n}\right)\rho_{1,n}\,e^{\rho_{1.n}b}-\left(a+\rho_{2,n}\right)\rho_{2,n}\,e^{\rho_{2.n}b}}\,. \tag{2.19}$$

2.4.2. Η αναμενόμενη τιμή της παρούσας αξίας των μερισμάτων

Για να υπολογίσουμε την τιμή της παρούσας αξίας των μερισμάτων θεωρούμε ότι $n=1$ και θα τη συμβολίσουμε με $V_1(u;b)=V(u;b)$.

Από το θεώρημα (2.1) παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.3. *Η συνάρτηση* $V(u;b)$ *ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$V'(u;b)=\frac{\lambda+\delta}{c}V(u;b)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u V(u-y;b)\, f(y)\, dy, \quad 0\le u\le b \qquad (2.20)$$

με οριακή συνθήκη

$$V'(u;b)\big|_{u=b}=1. \qquad (2.21)$$

■

Για τον υπολογισμό της γενικής λύσης της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (2.20) θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2. *Για την συνάρτηση* $V(u;b)$ *ισχύει ότι*

$$V(u;b)=\frac{\upsilon(u)}{\upsilon'(b)}, \quad 0\le u\le b$$

όπου $\upsilon(u)=\dfrac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}e^{\rho u}, \quad u\ge 0$ *και* $\psi(u)$ *η πιθανότητα χρεοκοπίας.* ■

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1. για $\phi(u)=V(u;b)$, $a=\dfrac{\lambda+\delta}{c}$, $\beta=-\dfrac{\lambda}{c}$, $h(y)=f(y)$ και $\gamma=0$ έπεται ότι η γενική λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (2.4) είναι

$$\phi(u)=\phi(0)\upsilon(u),\ u\ge 0.$$

Η προαναφερθείσα σχέση ισχύει για κάθε $u\ge 0$ επομένως θα ισχύει και για $u\in[0,b]$ συνεπώς ισχύει ότι

$$V(u;b)=V(0;b)\,\upsilon(u), \quad 0\le u\le b \qquad (2.22)$$

όπου $\upsilon(u)=\dfrac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}e^{\rho u}$, $u\geq 0$. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση και για $u=b$ παίρνουμε

$$V'(u;b)\big|_{u=b}=V(0;b\,)\,\upsilon'(u)\,.$$

Τέλος, λόγω της οριακής συνθήκης (2.21) έπεται ότι $V(0;b)=\dfrac{1}{\upsilon'(b)}$ και αντικαθιστώντας το στη σχέση (2.22) προκύπτει το ζητούμενο. ■

Το κλασσικό μοντέλο είναι ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου. Στην ενότητα που ακολουθεί δίνουμε αναλυτικά την παραπάνω θεωρία για το γενικευμένο Erlang ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου υπό την ύπαρξη σταθερού ορίου μερίσματος.

2.5. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το γενικευμένο Erlang ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου υπό την ύπαρξη σταθερού μερίσματος

Στην ενότητα αυτή παρατίθενται τα αποτελέσματα για την συνάρτηση των Gerber-Shiu για το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των απαιτήσεων $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ να κατανέμονται με γενικευμένη $\text{Erlang}(n\,;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ υπό την υπόθεση ύπαρξης στρατηγικής σταθερού μερίσματος $b\geq u$. Εάν το πλεόνασμα αγγίξει το επίπεδο b, τότε μερίσματα μοιράζονται συνεχώς στους δικαιούχους με ρυθμό c, μέχρι τη στιγμή εμφάνισης νέας απαίτησης.

Θεώρημα 2.3. *Για $u\leq b$ και $\delta\geq 0$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, $m_b(u)$, ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j+\delta-c\frac{\partial}{\partial u}\right)m_b(u)-\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\int_0^u m_b(u-x)\,f(x)\,dx-\prod_{j=1}^{n}\lambda_j w(u)=0\ , \quad (2.23)$$

με οριακές συνθήκες

$$m_b^{(k)}(0)=0,\quad k=1,2,\ldots,n\,, \quad (2.24)$$

και $w(u)$ να δίνεται από τη σχέση (1.14). ■

Απόδειξη. Li και Garrido (2004b). ■

Πόρισμα 2.4. *Για* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$ *, η εξίσωση (2.23) γίνεται*

$$\left(\lambda + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)^n m_b(u) - \lambda^n \int_0^u m_b(u-x)\, f(x)\, dx - \lambda^n w(u) = 0,\ u \le b\,, \quad (2.25)$$

με οριακές συνθήκες

$$m_b^{(k)}(0) = 0,\quad k = 1,2,\ldots,n\,,$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο με Erlang(n) *ενδιάμεσους χρόνους άφιξης.* ■

Πόρισμα 2.5. *Για* $n = 1, \lambda_1 = \lambda,$ *η εξίσωση (2.23) γίνεται*

$$\left(\lambda + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right) m_b(u) - \lambda \int_0^u m_b(u-x)\, f(x)\, dx - \lambda w(u) = 0,\ u \le b\,, \quad (2.26)$$

με οριακές συνθήκες

$$m_b'(0) = 0\,,$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο. ■

Η λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (2.23) με οριακές συνθήκες που δίνονται από την (2.24) εξαρτάται άμεσα από τη λύση της ακόλουθης ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (ως προς $v_\delta(u)$)

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right) v_\delta(u) - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j \int_0^u v_\delta(u-x) f(x)\, dx = 0,\ u \ge 0\,,$$

ή ισοδύναμα

$$A_\delta(D)\, v_\delta(u) - \int_0^u v_\delta(u-x)\, f(x)\, dx = 0,\ u \ge 0, \quad (2.27)$$

όπου $D = \partial / \partial u$ είναι ο τελεστής παραγώγισης και

$$A_\delta(s)=\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}-\frac{c}{\lambda_j}s\right)=\sum_{k=0}^{n}A_{\delta,k}s^k$$

είναι ένα πολυώνυμο τάξης n, με $A_{\delta,k}$ σταθερούς αριθμούς, που δίνονται σε όρους των $\lambda_1,\lambda_{2,},\ldots,\lambda_n, c$ και δ.

Τότε, από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων (βλ. Κεφ. 7 των Boyce και DiPrima (2000)) έπεται ότι η λύση της n-τάξης μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (2.23) εκφράζεται σαν μία μερική λύση συν ένα γραμμικό συνδυασμό από n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (2.27). Εφόσον, από το Θεώρημα 1.5 η συνάρτηση Gerber-Shiu χωρίς μερίσματα, $m_\delta(u)$, είναι μία μερική λύση της (2.23), τότε η γενική λύση της $m_b(u)$ δίνεται από τη σχέση

$$m_b(u)=m_\delta(u)+\sum_{i=1}^{n}\eta_i(b)\,\upsilon_{\delta,i}(u),\ 0\le u\le b, \tag{2.28}$$

όπου $\upsilon_{\delta,i}(u)$ είναι n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (2.27) και $\eta_i, i=1,2,\ldots,n$ είναι σταθεροί αριθμοί οι οποίοι υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες (2.24), δηλαδή λύνοντας ως προς $\eta_i(b)$ το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$m^{(k)}(b)+\sum_{i=1}^{n}\eta_i(b)\upsilon_{\delta,i}^{k}(b)=0, k=1,2,..,n..$$

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης (2.27), προσδιορίζεται με βάση την επιλογή των αρχικών συνθηκών $\upsilon_\delta{}^{(k)}(0), k=0,1,\ldots,n-1$ και υπολογίζεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε

$$\upsilon_{\delta,i}{}^{(k)}(0)=1_{(k=i-1)},\ k=0,1,\ldots,n-1. \tag{2.29}$$

Κάτω από αυτές τις αρχικές συνθήκες οι λύσεις $\upsilon_{\delta,i}(u),\ i=0,1,\ldots,n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Για να δείξουμε τη γραμμική ανεξαρτησία θεωρούμε ότι υπάρχουν κάποιοι σταθεροί αριθμοί $c_i, i=1,2,\ldots,n$, τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{n}c_i\ \upsilon_{\delta,i}(u)=0$. Τότε

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \, \upsilon_{\delta,i}{}^{(k)}(u) = 0,\ k = 0,1,\ldots,n-1, \forall u \ge 0 .$$

Αντικαθιστώντας $u = 0$ και χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες (2.29), έχουμε ότι $c_i = 0 \ \forall\, i = 1,2,\ldots,n$, από το οποίο αποδεικνύεται ότι οι λύσεις $\upsilon_{\delta,i}(u),\ i = 0,1,\ldots,n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Εφόσον οι $\upsilon_{\delta,i}(u),\ i = 1,2,\ldots,n$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης (2.27), τότε επαληθεύουν την εξίσωση (2.27), δηλαδή

$$A_\delta(D)\upsilon_{\delta,i}(u) - \int_0^u \upsilon_{\delta,i}(u-x) f(x)dx = 0,\ i = 1,2,\ldots,n,\ u \ge 0 . \qquad (2.30)$$

Έτσι από την εξίσωση (2.30), με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace και των οριακών συνθηκών (2.29), μπορούμε να υπολογίσουμε τις λύσεις $\upsilon_{\delta,i}(u),\ i = 1,2,\ldots,n$.

Έστω $\hat{\upsilon}_{\delta,i}(s)$ να είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\upsilon_{\delta,i}(u)$ ως προς s,

$$\hat{\upsilon}_{\delta,i}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \upsilon_{\delta,i}(x)\, dx,\ \ \Re(s) \ge 0.$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης (2.30), η $\hat{\upsilon}_{\delta,i}(s)$ δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.4. *Για $\Re(s) \ge 0$ και $\delta \ge 0$, ο μετασχηματισμός Laplace των λύσεων $\upsilon_{\delta,i}(s)$, δίνεται από τη σχέση*

$$\hat{\upsilon}_{\delta,i}(s) = \frac{d_{\delta,i}(s)}{A_\delta(s) - \hat{f}(s)}, i = 1,2,\ldots,n, \qquad (2.31)$$

όπου

$$d_{\delta,i}(s) = \sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{k=j+1}^{n} A_{\delta,k} \upsilon_{\delta,i}^{(k-j-1)}(0),$$

και

$$A_\delta(s)=\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}-\frac{c}{\lambda_j}s\right)=\sum_{k=0}^{n}A_{\delta,k}s^k\ ,$$

με A_k *σταθερούς αριθμούς, που δίνονται σε όρους των* λ_j, $j=1,2,\ldots,n,c$ *και* δ. ■

Απόδειξη. Li και Garrido (2004b). ■

Ο μετασχηματισμός Laplace (2.31), μπορεί να αντιστραφεί σε κάποιες μόνο περιπτώσεις. Έτσι υποθέτοντας ότι τα μεγέθη των ζημιών ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών (βλ. ορισμό 1.13) και χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.12, οι λύσεις της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (2.27), δίνονται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.5. *Έστω ότι ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. του μεγέθους των ζημιών* $\hat{f}(s)$ *δίνεται από την (1.31), τότε για* $\Re(s)\geq 0$,

$$\hat{\upsilon}_{\delta,i}(s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{h_{i,k}}{s-r_k}+\sum_{l=1}^{m}\frac{g_{i,l}}{s+R_l},\ i=1,2,\ldots,n\ ,$$

όπου

$$h_{i,k}=\frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n}\cdot\frac{-d_{\delta,i}(r_k)Q_m(r_k)}{\prod_{j=1}^{m}(R_j+r_k)\prod_{l=1,l\neq k}^{n}(r_l-r_k)},\ k=1,2,\ldots,n\ ,$$

όπου

$$g_{i,l}=\frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n}\cdot\frac{d_{\delta,i}(-R_l)Q_m(-R_l)}{\prod_{j=1}^{n}(R_l+r_j)\prod_{l=1,l\neq k}^{m}(R_l-R_k)},\ l=1,2,\ldots,m$$

με r_k *και* $-R_l$, $k=1,2,\ldots,n$, $l=1,2,\ldots,m$ *είναι οι ρίζες της εξίσωσης* $B_{m,n}(s)=0$, *όπου* $B_{m,n}(s)$ *δίνεται από τη εξής σχέση*

$$B_{m,n}(s)=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)Q_m(s)-\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c}Q_{m-1}(s)$$

και είναι ένα πολυώνυμο $m+n$ *βαθμού και* $Q_m(s), Q_{m-1}(s)$ *είναι πολυώνυμα βαθμού* m *και* $\deg(Q_{m-1}(s))\le m-1$ *αντίστοιχα. Επιπλέον, αν* r_k *και* $-R_l$ *είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε*

$$\upsilon_{\delta,i}(u)=\sum_{k=1}^{n}h_{i,k}e^{r_k u}+\sum_{l=1}^{m}g_{i,l}e^{-R_l u},\ u\ge 0\ . \qquad ■$$

Παρατήρηση 2.2. Οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $\upsilon_{\delta,i}(u), i=1,2,\ldots,n$, του Θεωρήματος 2.5 δεν είναι μοναδικές, αφού η επιλογή των αρχικών συνθηκών των $\upsilon_{\delta,i}(u), i=1,2,\ldots,n$, (2.29) γίνεται αυθαίρετα χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Παρατήρηση 2.3. Σημειώνουμε ότι παρόλο που οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg μπορεί να είναι μιγαδικές, οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $\upsilon_{\delta,i}(u), i=1,2,\ldots,n$, του Θεωρήματος 2.5 είναι πραγματικές συναρτήσεις, οι οποίες στην περίπτωση των μιγαδικών ριζών περιέχουν κάποιες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

2.6. Ροπές των σωρευτικών μερισμάτων

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής είναι ένα σημαντικό μέτρο κινδύνου όσον αφορά τη διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη μιας στρατηγικής μερίσματος. Ένα άλλο όμως πολύ σημαντικό εργαλείο, το οποίο συνδέεται με την «ποιότητα» της στρατηγικής μερίσματος, είναι οι ροπές ή ακόμα και η κατανομή των προεξοφλημένων σωρευτικών πληρωμών μερίσματος μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας. Έτσι, ενώ η συνάρτηση των Gerber-Shiu, σχετίζεται με τη μέτρηση του κίνδυνου, οι ροπές των προεξοφλημένων σωρευτικών πληρωμών μερίσματος μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας σχετίζονται με το ύψος του ποσού των μερισμάτων που διανέμεται πίσω στους δικαιούχους της ασφάλισης. Στην παρούσα ενότητα γίνεται η μελέτη των ροπών της παρούσας αξίας των μερισμάτων της διαδικασίας $U_b(t)$.

Ορισμός 2.2. *Για* $0 \le u \le b$ *και* $\delta \ge 0$*, ορίζουμε*

$$D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t),$$

να είναι η παρούσα αξία του συνόλου των καταβληθέντων μερισμάτων πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας, όπου $D(t)$ *τα σωρευτικά μερίσματα που πληρώνονται μέχρι το χρόνο* t*, και* δ *να συμβολίζει την ένταση ανατοκισμού.* ■

Ορισμός 2.3. *Για* $0 \le u \le b$ *και* $m \in \mathbb{N}^+$*, ορίζουμε*

$$W_m(u,b) = E(D_{u,b}^m \mid U_b(0) = u),\ 0 \le u \le b,\ m \in \mathbb{N},$$

να είναι η m*-τάξης ροπή της τ.μ.* $D_{u,b}$ *με* $W_0(u,b) = 1$. ■

Για την γενικευμένη Erlang(n) διαδικασία κινδύνου, η m-τάξης ροπή $W_m(u,b)$ ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση όπως δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.6. *Για* $0 \le u \le b$*,* $m \in \mathbb{N}$*, η* m*-τάξης ροπή της τ.μ.* $D_{u,b}, W_m(u,b)$*, ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\delta m - c\frac{\partial}{\partial u} + \lambda_j\right)\right) W_m(u,b) - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j \int_0^u W_m(u-x,b) f(x)dx = 0, \qquad (2.32)$$

με οριακές συνθήκες

$$\prod_{j=2}^{k}\left(\delta m + \lambda_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial u}W_m(u,b)\bigg|_{u=b} = m\left(\prod_{j=2}^{k}\left(\delta(m-1) + \lambda_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right)\right) W_{m-1}(u,b)|_{u=b}, \qquad (2.33)$$

για $k = 1,2,\ldots,n$ *και* $\prod_{j=2}^{1} \cdot = 1$*. Επιπλέον*

$$\lim_{b\to\infty} W_m(u,b) = 0.$$ ■

Απόδειξη. Albrecher, Claramunt και Marmol (2005) σελ. 6,7. ■

Πόρισμα 2.6. *Για* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$ *, η εξίσωση (2.32) γίνεται*

$$\left(\delta m - c\frac{\partial}{\partial u} + \lambda\right)^n W_m(u,b) - \lambda^n \int_0^u W_m(u-x,b) f(x)dx = 0 \, , \tag{2.34}$$

με οριακές συνθήκες

$$\left(\delta m + \lambda_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right)^{k-1} \frac{\partial}{\partial u} W_m(u,b)|_{u=b} = m\left(\delta(m-1) + \lambda_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right)^{k-1} W_{m-1}(u,b)|_{u=b} \, ,$$

για $k = 1,2,\ldots,n$ *που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο με Erlang(n) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων.* ■

Πόρισμα 2.7. *Για* $n = 1, \lambda_1 = \lambda$ *, η εξίσωση (2.32) γίνεται*

$$\left(\delta m - c\frac{\partial}{\partial u} + \lambda\right) W_m(u,b) - \lambda \int_0^u W_m(u-x,b) f(x)dx = 0 \, , \tag{2.35}$$

με οριακές συνθήκες

$$\left.\frac{\partial}{\partial u} W_m(u,b)\right|_{u=b} = m W_{m-1}(u,b)\Big|_{u=b} \, ,$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο. ■

Η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (2.32) εξαρτάται άμεσα από τη λύση της ακόλουθης ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \tilde{\delta} - c\frac{\partial}{\partial u}\right) \upsilon_{\tilde{\delta}}(u) - \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \int_0^u \upsilon_{\tilde{\delta}}(u-x) f(x)dx = 0, \; u \geq 0 \, , \tag{2.36}$$

όπου $\tilde{\delta} = \delta m$. Τότε από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων [Βλ. Κεφ. 7 των Boyce και DiPrima (2000)] η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (2.32) εκφράζεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός από n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (2.36). Έτσι η γενική λύση της $W_m(u,b)$ δίνεται από τη σχέση

$$W_m(u,b)=\sum_{i=1}^{n}\eta_{i,m}\upsilon_{\tilde{\delta},i}(u),\ 0\le u\le b\ ,$$

όπου $\upsilon_{\tilde{\delta},i}(u)$ είναι οι n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (2.36) και $\eta_{i,m}, i=1,2,\ldots,n$, είναι σταθεροί αριθμοί οι οποίοι υπολογίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες του Θεωρήματος 2.6 . Αναλυτικότερα, οι σταθερές $\eta_{i,m}, i=1,2,\ldots,n$ υπολογίζονται αναδρομικά από τη σχέση

$$\prod_{j=2}^{k}\left(\delta m+\lambda_{j-1}-c\frac{\partial}{\partial u}\right)\sum_{i=1}^{n}\eta_{i,m}\upsilon'_{\tilde{\delta},i}(b)=m\prod_{j=2}^{k}\left(\delta(m-1)+\lambda_{j-1}-c\frac{\partial}{\partial u}\right)\sum_{i=1}^{n}\eta_{i,m-1}\upsilon_{\tilde{\delta},i}(b)\ ,$$

για $k=1,2,\ldots,n$, $\prod_{j=2}^{1}.=1$ και $m\in\mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (2.36) είναι ακριβώς η ίδια με την εξίσωση (2.27), με $\tilde{\delta}=\delta m$ στη θέση του δ. Επομένως, υποθέτοντας ότι ο μετασχηματισμός Laplace, $\hat{f}(s)$, έχει την ίδια μορφή όπως στην εξίσωση (1.31) οι $\upsilon_{\tilde{\delta},i}(u), i=1,2,\ldots,n$, δίνονται από το Θεώρημα 2.5 με $\tilde{\delta}=\delta m$ στη θέση του δ .

2.7. Αναλυτικά αποτελέσματα με τη χρήση μετασχηματισμού Laplace

Αρχικά, θα αγνοήσουμε το γεγονός ότι $W_m(u;b)$ ορίζεται μόνο για $0\le u\le b$ και θα ορίσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace $\hat{W}_m(s;b)=\int_0^\infty e^{-su}W_m(u;b)du$ και $\hat{f}(s)=\int_0^\infty e^{-su}f(u)du$. Θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς Laplace για να εξάγουμε μία δομή για την $W_m(u;b)$.

Ορίζουμε το πολυώνυμο n -οστού βαθμού

$$\gamma(s)=\prod_{j=1}^{n}\left(\delta m-cs+\lambda_j\right).$$

Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace της σχέσης (2.32) και προκύπτει ότι

$$\gamma(s)\,\hat{W}_m(s;b)+G_{n-1}(s)-\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\,\hat{W}_m(s;b)\hat{f}(s)=0$$

όπου $G_{n-1}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο του s βαθμού $(n-1)$, οι συντελεστές του οποίου περιλαμβάνουν τις ποσότητες $\frac{\partial^j}{\partial u^j} W_m(0;b),\ j=0,\ldots,n-1$. Επομένως συνεπάγεται ότι

$$\hat{W}_m(s;b) = \frac{G_{n-1}(s)}{\gamma(s) - \left(\prod_{j=1}^{n} \lambda_j\right) \hat{f}(s)}. \tag{2.37}$$

Παρατηρούμε ότι θέτοντας τον παρανομαστή της σχέσης (2.37) ίσο με μηδέν παίρνουμε τη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rouche αποδεικνύεται ότι η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς n ρίζες στο θετικό ημιάξονα.

Στη συνέχεια, θα περιορίσουμε την ανάλυση μας στην περίπτωση όπου η κατανομή του μεγέθους των αποζημιώσεων έχουν μετασχηματισμό Laplace που δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\hat{f}(s) = \frac{Q_{r-1}(s)}{P_r(s)}$$

όπου $Q_{r-1}(s)$ και $P_r(s)$ συμβολίζουν πολυώνυμα βαθμού $r-1$ και r αντίστοιχα με $r \geq 1$. Επιπλέον, το $P_r(s)$ δεν έχει ρίζες στο θετικό ημιάξονα και $P_r(0) = Q_{r-1}(0)$.

Για τη συγκεκριμένη επιλογή της κατανομής του μεγέθους των απαιτήσεων, ο παρονομαστής της εξίσωσης (2.37) έχει ακριβώς $n+r$ μηδενικά, τα οποία θα συμβολίζουμε με $R_1,\ldots,R_{n+r}$, τα οποία δεν εξαρτώνται από το b. Σύμφωνα με τα παραπάνω συνεπάγεται ότι r από αυτά τα μηδενικά βρίσκονται στον αρνητικό ημιάξονα. Για λόγους απλοποίησης υποθέτουμε ότι $R_1,\ldots,R_{n+r}$ είναι πραγματικοί και διακριτοί. Επομένως, χρησιμοποιώντας μερικές εξισώσεις στην σχέση (2.37), παίρνουμε την ακόλουθη σχέση

$$W_m(u;b) = \sum_{i=1}^{n+r} a_i(b)\, e^{R_i u}. \tag{2.38}$$

Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $\alpha_i(b)$, χρειαζόμαστε $n+r$ εξισώσεις. Οι n πρώτες εξισώσεις προκύπτουν άμεσα από τη σχέση (2.33). Οι υπολειπόμενες r εξισώσεις προκύπτουν αντικαθιστώντας τη σχέση (2.38) στη σχέση (2.32). Σημειώνεται ότι $\lim_{b\to\infty} a_i(b)=0$ ισχύει για όλα τα $i=1,\ldots,n+r$ προκειμένου να ικανοποιείται η σχέση $\lim_{b\to\infty} W_m(u;b)=0$. Στην περίπτωση όπου τα μηδενικά $R_1,\ldots,R_{n+r}$ δεν είναι όλα διακριτά ή/και πραγματικοί αριθμοί τότε ο προσδιορισμός των συντελεστών θα ήταν πιο περίπλοκος διότι τα α_i θα είναι επιπλέον συναρτήσεις του u.

Στη συνέχεια, ακολουθεί μία εφαρμογή των παραπάνω αποτελεσμάτων για την περίπτωση όπου έχουμε ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με τους ενδιάμεσους χρόνους να ακολουθούν την Erlang(2,λ) κατανομή, δηλαδή εξετάζουμε την περίπτωση όπου $n=2$ και $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. Συνεπώς, $P_r(T_i\le t)=1-(\lambda t+1)e^{-\lambda t}$, $t\ge 0$. Επομένως, από την εξίσωση (2.32) συνεπάγεται ότι η m-οστή ροπή των προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων $W_m(u;b)$ είναι λύση της ακόλουθης εξίσωσης

$$c^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}W_m(u;b)-2c(\delta m+\lambda)\frac{\partial}{\partial u}W_m(u;b)+(\delta m+\lambda)^2W_m(u;b)-\lambda^2\int_0^u W_m(u-x;b)\,f(x)dx=0 \qquad (2.39)$$

και οι οριακές συνθήκες που δίνονται από τη σχέση (2.33) απλοποιούνται ως εξής

$$\left.\frac{\partial}{\partial u}W_m(u;b)\right|_{u=b}=m\,W_{m-1}(b;b) \text{ για } k=1. \qquad (2.40)$$

Για $k=2$ από τη σχέση (2.33) συνεπάγεται ότι

$$(\delta m+\lambda)\left.\frac{\partial}{\partial u}W_m(u;b)\right|_{u=b}-c\left.\frac{\partial^2}{\partial u^2}W_m(u;b)\right|_{u=b}=m\,(\delta(m-1)+\lambda)W_{m-1}(b;b)-mc\left.\frac{\partial}{\partial u}W_{m-1}(u;b)\right|_{u=b}$$

η οποία απλοποιείται ως ακολούθως

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial u^2}W_m(u;b)\right|_{u=b}=m\left.\frac{\partial}{\partial u}W_{m-1}(u;b)\right|_{u=b}+\frac{m\delta}{c}W_{m-1}(b;b)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} W_m(u;b)\bigg|_{u=b} = m(m-1) W_{m-2}(b;b) + \frac{m\delta}{c} W_{m-1}(b;b) \tag{2.41}$$

με την προϋπόθεση ότι $W_{-1}(u;b) \equiv 0$.

Εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι $X_i \sim$ Erlang(2,η) τότε $\hat{f}(s) = \frac{\eta^2}{(s+\eta)^2}$ και σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην αρχή της ενότητας έχουμε την ακόλουθη αναπαράσταση για τη $W_m(u;b)$

$$W_m(u;b) = \sum_{i=1}^{4} a_i(b)\, e^{R_i u} \tag{2.42}$$

όπου $R_i, i = 1,..,4$ είναι οι λύσεις της ακόλουθης εξίσωσης ως προς R

$$\left(\delta m - cR + \lambda^2\right) - \frac{\lambda^2 \eta^2}{(R+\eta)^2} = 0 . \tag{2.43}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (2.42) στην σχέση (2.39) και έπειτα από πράξεις συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i=1}^{4} a_i(b)\left((cR_i - \lambda - m\delta)^2 - \frac{\lambda^2\eta^2}{(R_i+\eta)^2} \right) e^{R_i u} = \lambda^2\eta^2 \sum_{i=1}^{4} a_i(b) \left(\frac{u}{R_i+\eta} - \frac{1}{(R_i+\eta)^2} \right) e^{-\eta u}$$

από την οποία παίρνουμε τις δύο ακόλουθες συνθήκες

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{a_i(b)}{(R_i+\eta)} = 0 \qquad \text{και} \qquad \sum_{i=1}^{4} \frac{a_i(b)}{(R_i+\eta)^2} = 0 . \tag{2.44}$$

Για $m = 1$ από την εξίσωση (2.40) παίρνουμε ότι $\frac{\partial}{\partial u} W_1(u;b)\Big|_{u=b} = 1$ επομένως

$$\sum_{i=1}^{4} a_i(b)\, R_i e^{R_i b} = 1 . \tag{2.45}$$

και από την εξίσωση (2.41) έχουμε ότι $\frac{\partial^2}{\partial u^2} W_1(u;b)\Big|_{u=b} = \frac{\delta}{c}$ συνεπώς έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{4} a_i(b)\, R_i^{\,2} e^{R_i b} = \frac{\delta}{c} . \tag{2.46}$$

Άρα οι συντελεστές $\alpha_i(b)$ μπορούν να προσδιοριστούν ως η λύση των γραμμικών εξισώσεων (2.44), (2.45)και (2.46).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ FGM

3.1. Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, όπου το μέγεθος των απαιτήσεων και οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των απαιτήσεων είναι δύο εξαρτημένα μεγέθη. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι η κοινή κατανομή των δύο αυτών μεγεθών εμφανίζει δομή εξάρτησης μέσω της σύζευξης Farlie-Gumbel-Morgensten (FGM).

Κάτω από αυτή την υπόθεση είναι φανερό πως το μοντέλο που θα εξετάσουμε αποτελεί ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνου. Η κύρια διαφορά με το ανανεωτικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου είναι πως στην περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου το μέγεθος των απαιτήσεων και οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων δεν εμφανίζουν εξάρτηση.

3.2. Η σύζευξη των Farlie-Gumbel-Morgensten (FGM)

Οι συζεύξεις εκφράζουν στην περίπτωση των διδιάστατων κατανομών, τη συναρτησιακή σχέση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής μιας διδιάστατης κατανομής με τις αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής των μονοδιάστατων περιθώριων κατανομών, όπου οι τελευταίες μας είναι πάντοτε γνωστές.

Σκοπός της δημιουργίας αυτών των οικογενειών ήταν να βρεθεί ένας απλός τρόπος για να εισαχθεί η συσχέτιση ανάμεσα στις τυχαίες περιθώριες κατανομές.

Ορισμός 3.1. *Μία n-διάστατη σύζευξη (copula) αποτελεί μία n-διάστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες ομοιόμορφες κατανομές στο* $(0,1)$.

Για μία δεδομένη copula C και περιθώριες $F_1, F_2, \ldots, F_n$ έχουμε ότι

$$F x_1, \ldots, x_n = C F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n) \tag{3.1}$$

είναι μία από κοινού συνάρτηση κατανομής με αυτές τις περιθώριες. Αντίστροφα, για δεδομένη από κοινού σ.κ. F με περιθώριες $F_1, F_2, \ldots, F_n$ υπάρχει πάντα μία σύζευξη (copula) που ικανοποιεί την (3.1). Αυτή η σύζευξη δεν είναι απαραίτητα μοναδική, εκτός εάν $F_1, F_2, \ldots, F_n$ είναι συνεχείς. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι,

$$Cu_1, \ldots, u_n = F\left(F_1^{-1}u_1, \ldots, F_n^{-1}u_n\right) \ . \tag{3.2}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι γνωστά ως Θεώρημα του Sklar και αποτελούν το λόγο που η σύζευξη (copula) καλείται δομή εξάρτησης. Ουσιαστικά η εξίσωση (3.1) υποδηλώνει ότι η σύζευξη (copula) C διαχωρίζει τη συμπεριφορά των περιθώριων συναρτήσεων $F_1, F_2, \ldots, F_n$ από την εξάρτηση που περιέχεται στην από κοινού σ.κ. τους F .

Σύμφωνα με όσα ορίσαμε παραπάνω η σύζευξη είναι μία δομή εξάρτησης η οποία παρουσιάζεται με τη μορφή ενός συναρτησιακού. Οι διάφορες μορφές αυτού του συναρτησιακού οδηγούν σε μία ποικιλία μοντέλων οικογενειών κατανομών. Τέτοιες δομές κατασκευής διδιάστατων κατανομών με συγκεκριμένες περιθώριες έχουν ερευνηθεί από τους Plackett (1965), Mardia (1970), Genest (1987), Marshall και Olkin (1988) κ.ά..

Μία από τις πιο διαδεδομένες και εύκολες σε εφαρμογή δομή εισήχθη αρχικά από τον Morgenstern (1956), χρησιμοποιώντας Cauchy περιθώριες. Το 1960 ο Gumbel ερεύνησε την οικογένεια κατανομών με εκθετικές περιθώριες, ενώ ο Farlie, σε συνδυασμό με τις έρευνές του για το συντελεστή συσχέτισης, πρότεινε μία γενίκευση της διδιάστατης δομής που είχε μελετηθεί από τους Morgenstern και Gumbel.

Οι Johnson και Kotz (1975, 1977) μελέτησαν τη πολυδιάστατη περίπτωση και εισήγαγαν τον όρο οικογένεια κατανομών Farlie–Gumbel–Morgenstern, ενώ περαιτέρω μελέτες διεξήχθησαν από τους Schuncany (1978), Johnson και Kotz (1977) και Huang και Kotz (1984) κ.ά.. Στην απλούστερή της μορφή, η διδιάστατη οικογένεια Farlie –Gumbel – Morgenstern έχει μόνο μία παράμετρο σε συνδυασμό με τις διάφορες περιθώριες. Η συγκεκριμένη μορφή παρουσιάζει όμως και το μειονέκτημα ότι η δομή εξάρτησης δεν είναι εύκαμπτη και το εύρος του συντελεστή συσχέτισης είναι περιορισμένο.

Η μοντελοποίηση της δομής εξάρτησης ανάμεσα στις τυχαίες μεταβλητές χρησιμοποιώντας συζεύξεις είναι αρκετά διαδεδομένη στην αναλογιστική επιστήμη και στην διοικητική κινδύνου. Μελέτες για τις εφαρμογές των συζεύξεων στην αναλογιστική επιστήμη έχουν γίνει από τους Frees & Voldez (1998), Wang (1998), Bouye et al. (2000), Denuit et al. (2005) και McNeil et al. (2005).

Ανάμεσα στις πρόσφατες εφαρμογές της σύζευξης των FGM, αξίζει να αναφέρουμε τη χρήση της στην επιλογή μοντέλων για ασφαλιστικά προγράμματα υγείας από τον Prieger (2002). Επίσης, η πολυμεταβλητή μορφή της σύζευξης των FGM είναι εφαρμόσιμη στο πλαίσιο των αθροισμάτων των ανεξάρτητων τ.μ. (Gelk & Tang (2008)) και στην ανάλυση της συμπεριφοράς των μοντέλων κινδύνου διακριτού χρόνου με εξαρτημένους οικονομικούς κινδύνους (Tang & Vernik (2007)). Οι Gebizlioglou & Yagci (2008) εφήρμοσαν τη σύζευξη των FGM για να βρουν διαστήματα ανοχής ποσοστιαίων διδιάστατων κινδύνων στο πλαίσιο της μέτρησης των κινδύνων. Η απλότητα της σύζευξης των FGM αποτελεί το λόγο που οι διάφοροι συγγραφείς ασχολήθηκαν με αρκετές επεκτάσεις της (Drouet-Mari & Kotz (2001)).

3.3. Περιγραφή του μοντέλου και της δομής εξάρτησης

Σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο ως διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t),\ t \geq 0\}$, ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία $U(t) = u + ct - S(t)$, όπου $U(0) = u$ $(u \geq 0)$ είναι το αρχικό απόθεμα και c είναι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων ανά μονάδα χρόνου. Με $\{S(t), t \geq 0\}$ συμβολίζουμε τη στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο t. Ορίζουμε με $\{X_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., με την τ.μ. X_i να περιγράφει το μέγεθος της $i-$οστής ζημιάς. Το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως τον χρόνο t ισούται με $S(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)}$. Η κοινή τ.μ. X θεωρούμε ότι έχει συνάρτηση κατανομής $F(x) = P_r(X \leq x) = \int_0^x f(y)dy$, με $f(x) = P_r(X = x)$ και συνάρτηση δεξιάς ουράς $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \int_x^{\infty} f(y)dy$. Το αναμενόμενο μέγεθος ζημιάς το συμβολίζουμε με μ και είναι ίσο με $\mu = E(x) = \int_0^{\infty} x\, f(x)dx = \int_0^{\infty} \overline{F}(x)dx$. Ο μετασχηματισμός Laplace (LT) της σ.π.π. $f(x)$ συμβολίζεται με $\hat{f}(x)$ και ισούται με $\hat{f}(x) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$.

Η στοχαστική διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ονομάζεται απαριθμήτρια και είναι μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία και ορίζεται μέσω μίας ακολουθίας μη αρνητικών, ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$, όπου W_i είναι ο ενδιάμεσος χρόνος άφιξης της i – απαίτησης, δηλαδή ο χρόνος μεταξύ της $(i-1)$ και i απαίτησης με $i \geq 2$. Η κοινή τ.μ. W έχει σ.κ. $F_W(t)$, σ.π.π. $f_W(t)$, μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_W(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_W(t) d_t$ και μέση τιμή $E(W) < \infty$.

Υποθέτουμε ότι η τ.μ. W κατανέμεται σύμφωνα με την κατανομή Erlang(n,λ) οπότε θα ισχύει ότι $E(W) = n/\lambda,\ n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda > 0$ και σ.π.π., σ.κ. και μετασχηματισμό Laplace όπως δίνονται στη συνέχεια:

$$f_W(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, t \geq 0,\ n \in \mathbb{N}^* \tag{3.3}$$

$$F_W(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \tag{3.4}$$

$$\hat{f}_W(s) = E\left[e^{-sw}\right] = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^n. \tag{3.5}$$

Όπως οι Cossette et al (2010), υποθέτουμε ότι τα ζεύγη $\{(X_i, W_i)\}_{i=1}^{\infty}$ σχηματίζουν μία ακολουθία από ανεξάρτητα και ισόνομα διανύσματα με γενικό κοινό τυχαίο διάνυσμα (X, W) έτσι ώστε τα ζεύγη $\{cW_i - X_i\}_{i=1}^{\infty}$ να αποτελούν επίσης μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. .

Η κοινή σ.π.π. των (X, W), συμβολίζεται με $f_{X,W}$ και η κοινή σ.κ. συμβολίζεται με $F_{X,W}$. Για να ορίσουμε τη δομή εξάρτησης μεταξύ του μεγέθους των απαιτήσεων και των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των απαιτήσεων και ως εκ τούτου για τον υπολογισμό της από κοινού κατανομής των (X, W) θα χρησιμοποιήσουμε τη σύζευξη Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM).

Η σύζευξη FGM ορίζεται ως εξής:

$$C_\theta^{FGM}(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2) \tag{3.6}$$

με $(u_1, u_2) \in [0,1] \times [0,1]$ και $-1 \leq \theta \leq 1$.

Η σύζευξη FGM επιτρέπει θετική και αρνητική εξάρτηση, και επίσης περιλαμβάνει την ανεξάρτητη σύζευξη για $\theta = 0$. Η σύζευξη FGM χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές για να περιγράψει τη δομή εξάρτησης εξαιτίας της απλότητας της. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη σύζευξη FGM βλ. Nelsen (2006).

Η διδιάστατη σ.κ. της $F_{X,W}$ βασιζόμενη στην σύζευξη FGM ορίζεται ως εξής:

$$F_{X,W}(x,t) = C_\theta^{FGM}(F_X(x), F_W(t)) = F_X(x)F_W(t) + \theta F_X(x)F_W(t)(1-F_X(x))(1-F_W(t))$$

$$= F_X(x)F_W(t) + \theta F_X(x)\overline{F}_X(x)F_W(t)\overline{F}_W(t),\ \ x,t \in \mathbb{R}^+$$

Σύμφωνα με τη Εξίσωση (3.6) η σ.π.π. του (X,W) δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$c_\theta^{FGM}(u_1,u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_\theta^{FGM} = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 - \theta u_1 u_2^2 - \theta u_1^2 u_2 + \theta u_1^2 u_2^2)$$

$$= 1 + \theta(1-2u_1)(1-2u_2)\ .$$

Συνεπώς η διδιάστατη σ.π.π. του (X,W) υπολογίζεται ως εξής:

$$f_{X,W}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} F_{X,W}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} C_\theta^{FGM}(F_X(x), F_W(t)) = f_X(x) f_W(t)\, c_\theta^{FGM}(F_X(x), F_W(t))$$

$$= f_X(x) f_W(t)\big(1 + \theta\big(1-2F_X(x)\big)\big(1-2F_W(t)\big)\big)$$

$$= f_X(x)f_W(t) + \theta f_X(x)f_W(t) - 2\theta F_W(t)f_X(x)f_W(t) - 2\theta F_X(x)f_X(x)f_W(t) + 4\theta F_W(t)F_X(x)f_X(x)f_W(t)$$

$$= f_X(x)f_W(t) + \theta f_W(t)\big[f_X(x) - 2F_W(t)f_X(x) - 2F_X(x)f_X(x) + 4F_W(t)F_X(x)f_X(x)\big]$$

$$= f_X(x)f_W(t) + \theta f_W(t)f_X(x)\big[1-2F_W(t)\big]\big[1-2F_X(x)\big] = f_X(x)f_W(t) + \theta f_W(t)\,h(x)\big[1-2F_W(t)\big]$$

$$= f_X(x)f_W(t) + \theta f_W(t)\,h(x)\big[1-2\big[1-\overline{F}_W(t)\big]\big] = f_X(x)f_W(t) + \theta f_W(t)\,h(x)\big[2\overline{F}_W(t)-1\big]$$

όπου $h(x) = f_X(x)\big[1-2F_X(x)\big]$.

Επομένως,

$$f_{X,W}(x,t) = f_X(x)f_W(t) + \theta f_W(t)\,h(x)\big[2\overline{F}_W(t)-1\big],\quad x,t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.7}$$

όπου $h(x) = f_X(x)\left[1 - 2F_X(x)\right]$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.3),(3.4) η εξίσωση (3.7) γράφεται ως εξής

$$f_{X,W}(x,t) = f_X(x)\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t} + \theta h(x)\left[2\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right)e^{-2\lambda t} - \frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}\right],\ x,t \in \mathbb{R}^+. \quad (3.8)$$

Ειδικότερα, από τη σχέση (3.8) προκύπτει ότι η δεσμευμένη σ.π.π. της X δίνεται από τη σχέση

$$f_{X|W}(x,t) = f_X(x) + \theta h(x)\left[2\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right)e^{-\lambda t} - 1\right],\ \ x,t \in \mathbb{R}^+.$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $\theta \neq 0$, διαφορετικά το μοντέλο κινδύνου ανάγεται στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με Erlang(n) ενδιάμεσους χρόνους.

Έστω $T = \inf_{t \geq 0}\{t, U(t) < 0\}$ να είναι η στιγμή της χρεοκοπίας με $T = \infty$ εάν $U(t) \geq 0\ \forall\ t \geq 0$ (δηλαδή δεν εμφανίζεται χρεοκοπία) και $\psi(u) = P_r(T < \infty | U(0) = u)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας. Για να εξασφαλιστεί ότι η χρεοκοπία δεν θα συμβεί σχεδόν σίγουρα, το ποσοστό των ασφαλίστρων είναι τέτοιο ώστε

$$E\left[cW_i - X_i\right] > 0,\ i = 1,2,\ldots$$

Ισοδύναμα, έχουμε ότι

$$c > \frac{\lambda}{n}E(x) \quad (3.9)$$

3.4. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu περιλαμβάνει πολλά άλλα μέτρα χρεοκοπίας και ορίζεται από:

$$m_\delta(u) := E\left\{e^{-\delta T}w(U(T-),|U(T)|)\,I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right\}\ \ u \geq 0 \quad (3.10)$$

όπου δ είναι η ένταση ανατοκισμού, $w : [0,\infty)\times(0,\infty) \to [0,\infty)$ μία διδιάστατη συνάρτηση στο$\mathbb{R}^2$ που ονομάζεται συνάρτηση ποινής (penalty function), $U(T-)$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, $|U(T)|$ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και $I(T < \infty)$ η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου εμφάνισης χρεοκοπίας. Για την δείκτρια συνάρτηση ισχύει το εξής:

$$I(T<\infty)=\begin{cases}1, & \text{συμβαίνει χρεοκοπία}\\ 0, & \text{δεν συμβαίνει χρεοκοπία}\end{cases}.$$

Σημείωση 3.1. Για $\delta=0,\ w(x,y)=1,$ προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας, $\psi(u):=E(\,I(T<\infty)|U(0)=u)=P_r(T<\infty|U(0)=u)$ και για $\delta>0,\ w(x,y)=1,$ προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας στο σημείο δ ή η προεξοφλημένη πιθανότητα χρεοκοπίας $m_\delta(u):=E\left\{e^{-\delta T}\ I(T<\infty)|U(0)=u\right\}.$

3.5. Ανάλυση της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg

Στην ενότητα αυτή, θα δούμε την γενικευμένη εκδοχή της εξίσωσης του Lundberg για το ανανεωτικό μοντέλο με Erlang(n) διαδικασία κινδύνου και με εξάρτηση βασισμένη στην σύζευξη FGM. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τον αριθμό των ριζών της στο μιγαδικό επίπεδο με θετικό πραγματικό μέρος. Οι ρίζες αυτές είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης της συνάρτησης των Gerber – Shiu $m_\delta(u)$ καθώς επίσης και για τον υπολογισμό αρκετών μέτρων χρεοκοπίας.

Προκειμένου να πάρουμε την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg θα θεωρήσουμε ότι η διαδικασία πλεονάσματος σε διακριτό χρόνο ενσωματώνεται σε διαδικασία πλεονάσματος για συνεχή χρόνο $\{U(t),\ t\geq 0\}$. Έστω $T_0=0$ και $T_n=\sum_{i=1}^{n}W_i$, $n\geq 1$ να είναι ο χρόνος επέλευσης του n-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου. Έχει οριστεί σε διακριτό χρόνο το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή $t=0$ να ισούται με $U_0=u$ $(u\geq 0)$ και για $t\geq 1$ θεωρούμε ότι

$$U_n=U(T_n)=u+cT_n-S(t)=U(T_n)=u+cT_n-\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$=u+c\sum_{i=1}^{n}W_i-\sum_{i=1}^{n}X_i=u+\sum_{i=1}^{n}\left(cW_i-X_i\right)$$

είναι το πλεόνασμα μετά την εμφάνιση του n-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου. Αναζητούμε έναν αριθμό s τέτοιο ώστε η στοχαστική διαδικασία $\left\{e^{-\delta T_n+sU_n}:n=0,1,2,\ldots\right\}$ να είναι martingale.

Απόδειξη. Η στοχαστική διαδικασία $\left\{ e^{-\delta T_n + sU_n} : n = 0,1,2,\ldots \right\}$ είναι martingale αν και μόνο αν

$$E\left[e^{-\delta W} e^{s(cW-X)}\right] = E\left[e^{(cs-\delta)W} e^{-sX}\right] = 1 \tag{3.11}$$

η οποία καλείται γενικευμένη εξίσωση του Lundberg συσχετισμένη με το μοντέλο μας.

Σύμφωνα με την εξίσωση (3.5) το αριστερό μέλος της εξίσωσης (3.11) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&E\left[e^{-\delta W} e^{s(cW-X)}\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(cs-\delta)} e^{-sx} f_{X,W}(x,t)\,dx\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(cs-\delta)} e^{-sx} \left[f_X(x) f_W(t) + \theta f_W(t)\, h(x) \left[2\bar{F}_W(t) - 1 \right] \right] dx\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(cs-\delta)} e^{-sx} \left[f_X(x) f_W(t) + \theta f_W(t)\, h(x) 2\bar{F}_W(t) - \theta\, h(x) f_W(t) \right] dx\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(cs-\delta)} e^{-sx} \left[f_X(x) f_W(t) - \theta\, h(x) f_W(t) \right] dx\,dt + 2\theta \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(cs-\delta)} e^{-sx} \left[h(x) f_W(t)\, \bar{F}_W(t) \right] dx\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(cs-\delta)} e^{-sx} \left[f_X(x) - \theta\, h(x) \right] f_W(t)\,dx\,dt + 2\theta \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(cs-\delta)} e^{-sx} h(x) f_W(t)\, \bar{F}_W(t)\,dx\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{t(cs-\delta)} f_W(t) \left(\int_0^\infty e^{-sx} \left[f_X(x) - \theta\, h(x) \right] dx \right) dt + 2\theta \int_0^\infty f_W(t)\, \bar{F}_W(t) e^{t(cs-\delta)} \left(\int_0^\infty e^{-sx} h(x)\,dx \right) dt \\
&= \int_0^\infty e^{t(cs-\delta)} f_W(t) \left[\hat{f}_X(s) - \theta \hat{h}(s) \right] dt + 2\theta \int_0^\infty f_W(t)\, \bar{F}_W(t) e^{t(cs-\delta)} \hat{h}(s)\,dt \\
&= \left(\hat{f}_X(s) - \theta\, \hat{h}(s) \right) \int_0^\infty e^{-t(\delta-cs)}\, f_W(t)\,dt + 2\theta\, \hat{h}(s) \int_0^\infty f_W(t)\, \bar{F}_W(t) e^{-t(\delta-cs)}\,dt \\
&= \left(\hat{f}_X(s) - \theta\, \hat{h}(s) \right) \hat{f}_W(\delta - cs) + 2\theta\, \hat{h}(s) \int_0^\infty e^{-t(\delta-cs)}\, f_W(t)\, \bar{F}_W(t)\,dt\ .
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.3) και (3.4) στο ολοκλήρωμα της προηγούμενης σχέσης έχουμε τα εξής:

$$\int_0^\infty e^{-t(\delta-cs)}\, f_W(t)\, \bar{F}_W(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t(\delta-cs)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i\,!} \right) e^{-2\lambda t}\,dt$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i\,!} \int_0^\infty e^{-t(\delta+2\lambda-cs)}\, t^{n-1+i}\,dt = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i\,!} \frac{(n+i-1)!}{(\delta+2\lambda-cs)^{n+i}}$$

$$=\lambda^n \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{(\delta+2\lambda-cs)^{n+i}} .$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.5) , η σχέση (3.12) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$E\left[e^{-\delta W}e^{s(cW-X)}\right]=\left(\hat{f}_X(s)-\theta\,\hat{h}(s)\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n+2\theta\,\hat{h}(s)\lambda^n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{(\delta+2\lambda-cs)^{n+i}}$$

$$=\left(\hat{f}_X(s)-\theta\,\hat{h}(s)\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n+2\theta\,\hat{h}(s)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda-cs}\right)^{n+i} .$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg (εξίσωση (3.11)) ανάγεται στην εξής μορφή

$$\left[\hat{f}_X(s)-\theta\,\hat{h}(s)\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n+2\theta\,\hat{h}(s)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda-cs}\right)^{n+i}=1$$

$$\Rightarrow \hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n-\theta\,\hat{h}(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n+2\theta\,\hat{h}(s)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda-cs}\right)^{n+i}=1$$

$$\Rightarrow \hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n+\theta\,\hat{h}(s)\left[2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda-cs}\right)^{n+i}-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n\right]=1 \tag{3.13}$$

■

Όταν $n=1$, η εξίσωση (3.13) απλοποιείται στην γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, (Εξίσωση (16)) στο Cossette et al (2010), και φαίνεται ότι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες με $\mathrm{Re}(s)\geq 0$ όταν $\delta>0$ και $\theta\neq 0$.

Πρόταση 3.1. *Για* $\delta>0$ *και* $\theta\neq 0$ *η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg (3.13) έχει ακριβώς* $3n-1$ *ρίζες, έστω* $\rho_1(\delta),\rho_2(\delta),\ldots,\rho_{3n-1}(\delta)$ *στο μιγαδικό επίπεδο με* $\mathrm{Re}(\rho_i(\delta))\geq 0,\ i=1,2,\ldots,3n-1$. ■

Απόδειξη. Η εξίσωση (3.13) μπορεί επίσης να γραφεί στην ακόλουθη μορφή

$$\lambda^n\hat{f}_X(s)\,(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}+\theta\,\lambda^n\,\hat{h}(s)$$
$$\times\left[2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\lambda^i(\delta+\lambda-cs)^n(\delta+2\lambda-cs)^{n-i-1}-(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}\right]=(\delta+\lambda-cs)^n(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1} \tag{3.14}$$

αρκεί επομένως να αποδείξουμε ότι η εξίσωση (3.14) έχει ακριβώς $3n-1$ ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος.

Έστω $r>0$ να είναι ένας αρκετά μεγάλος αριθμός, και θα συμβολίζουμε με C_r την καμπύλη που περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα που εκτείνεται από το $-ir$ στο ir και είναι ένα ημικύκλιο με ακτίνα r που κινείται δεξιόστροφα από το ir στο $-ir$.

Επομένως, $C_r=\{s\in\mathbb{C} : |s|=r, \mathrm{Re}(s)=0, r>0$ σταθερό$\}$. Για $r\to\infty$ συμβολίζουμε την κλειστή καμπύλη με C.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις σύμφωνα με τις οποίες $\mathrm{Re}(s)>0$ ή $\mathrm{Re}(s)=0$.

Για να αποδειχθεί το ζητούμενο εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rouche πάνω στο κλειστό C.

Θεώρημα 3.1. (Θεώρημα του Rouche) *Έστω δύο συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, οι οποίες είναι αναλυτικές πάνω σε μία απλή κλειστή καμπύλη C και στο εσωτερικό της. Εάν πάνω στη C ισχύει ότι $|g(z)|<|f(z)|$ τότε οι συναρτήσεις $f(z)+g(z)$ και $f(z)$ έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της C.* ■

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1. οδηγούμαστε στα εξής:

Για s πάνω στο ημικύκλιο C, δηλαδή στην περίπτωση όπου $\mathrm{Re}(s)>0$ έχουμε ότι για $r\to\infty$, $|\delta+\lambda-cs|\to\infty$ και $|\delta+\lambda-cs|\to\infty$ επομένως συνεπάγεται ότι

$$\left|\hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n+\theta\,\hat{h}(s)\left[2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda-cs}\right)^{n+i}-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n\right]\right|$$

$$\leq\left|\hat{f}_X(s)\right|\frac{\lambda^n}{|\lambda+\delta-cs|^n}+\left|\theta\,\hat{h}(s)\right|\left|\left[2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda-cs}\right)^{n+i}-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n\right]\right|$$

$$\leq\left|\hat{f}_X(s)\right|\frac{\lambda^n}{|\lambda+\delta-cs|^n}+\left|\theta\,\hat{h}(s)\right|\left[2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^{n+i}}{|\delta+2\lambda-cs|^{n+i}}+\frac{\lambda^n}{|\lambda+\delta-cs|^n}\right]\to 0$$

πάνω στην καμπύλη C για $r\to\infty$. Επομένως, συνεπάγεται ότι

$$\left| \hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n + \theta\,\hat{h}(s)\left[2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda-cs}\right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n\right]\right| < 1 \tag{3.15}$$

πάνω στο C.

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε την τ.μ. Z η οποία έχει σ.π.π. που δίνεται από τη σχέση $g_Z(x) = 2f_X(x)F_X(x)$. Εφόσον έχουμε ορίσει ότι $h(x) = f_X(x)[1-2F_X(x)]$, σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι $h(x) = f_X(x) - g_Z(x)$ και ο μετασχηματισμός Laplace της $g_Z(x)$ δίνεται από τη σχέση $\hat{g}_Z(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g_Z(x)dx$. Ακόμα θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\hat{d}_\delta(s) = 2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda-cs}\right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda-cs}\right)^n.$$

Επομένως, για s που βρίσκεται πάνω στο φανταστικό άξονα , δηλαδή για $\mathrm{Re}(s)=0$, και για $\delta>0$, εφαρμόζοντας παρόμοια διαδικασία με τους Cossette et al (2008), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&\left| \hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n + \theta\,\hat{h}(s)\left[2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda-cs}\right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n\right]\right| \\
&\qquad \le \left|\hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n\right| + \left|\theta\left[\hat{f}_X(s)-\hat{g}_Z(s)\right]\hat{d}_\delta(s)\right| \qquad (3.16) \\
&\qquad = \left|\hat{f}_X(s)\right| \frac{\lambda^n}{|\lambda+\delta-cs|^n} + |\theta|\,\left|\hat{f}_X(s)-\hat{g}_Z(s)\right|\,\left|\hat{d}_\delta(s)\right| \\
&\qquad \le \frac{\lambda^n}{|\lambda+\delta-cs|^n} + |\theta|\,\left|\hat{d}_\delta(s)\right| \\
&\qquad \le \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^n + |\theta|\,\left|\hat{d}_\delta(0)\right| \\
&\qquad \le \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^n + \left|\hat{d}_\delta(0)\right|
\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό θέλουμε να δούμε πως συμπεριφέρεται η $\hat{d}_\delta(0)$ για $\delta>0$. Επομένως, έχουμε ότι

$$\hat{d}_{\delta}(0) = 2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda}\right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n}$$

$$= \frac{2}{2^{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{2\lambda}{\delta+2\lambda}\right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{2\lambda}{\delta+2\lambda}\right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n}$$

$$\geq \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2\lambda}{\delta+2\lambda}\right)^{n}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} - \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n}$$

Σημείωση 3.2. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή ταυτότητα

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+i}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 2^{n},\ n \geq 0 \tag{3.17}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.17) στην προηγούμενη σχέση προκύπτει το εξής:

$$\hat{d}_{\delta}(0) \geq \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2\lambda}{\delta+2\lambda}\right)^{n} 2^{n-1} - \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{2\lambda}{\delta+2\lambda}\right)^{n} - \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n} > 0\text{, για } \delta > 0,\ n \geq 1.$$

Άρα προκύπτει ότι $\hat{d}_{\delta}(0) > 0$.

Επομένως, για s στον άξονα των φανταστικών αριθμών η εξίσωση (3.16) γίνεται

$$\left|\hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^{n} + \theta\,\hat{h}(s)\left[2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda-cs}\right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^{n}\right]\right|$$

$$\leq \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n} + \hat{d}_{\delta}(0)$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n} + 2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda}\right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n}$$

$$= 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^{n+i}$$

$$= 2 \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^{i}$$

εφόσον $\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} < \frac{1}{2}$ για $\delta > 0$ έχουμε

$$\left| \hat{f}_X(s) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs} \right)^n + \theta \hat{h}(s) \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs} \right)^n \right] \right|$$

$$< 2 \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{1}{2} \right)^{i}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.17) στην προηγούμενη σχέση παίρνουμε

$$\left| \hat{f}_X(s) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs} \right)^n + \theta \hat{h}(s) \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs} \right)^n \right] \right|$$

$$= 2 \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^{n} 2^{n-1}$$

$$= \left(\frac{2\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^{n} < 1 \text{ για } \delta > 0 .$$

Επομένως, τελικά συνεπάγεται ότι για κάθε μία από τις παραπάνω εξεταζόμενες περιπτώσεις ισχύει ότι

$$\left| \hat{f}_X(s) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs} \right)^n + \theta \hat{h}(s) \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs} \right)^n \right] \right| < 1 \qquad (3.18)$$

ή ισοδύναμα προκύπτει ότι

$$\Big| \lambda^n \hat{f}_X(s) (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} + \theta \lambda^n \hat{h}(s)$$
$$\times \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \lambda^i (\delta + \lambda - cs)^n (\delta + 2\lambda - cs)^{n-i-1} - (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} \right] \Big|$$

$$< \left| (\delta+\lambda-cs)^n (\delta+2\lambda-cs)^{2n-1} \right|$$

Επομένως εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rouche συνεπάγεται ότι η εξίσωση (3.14) έχει τον ίδιο αριθμό ριζών με την εξίσωση $(\delta+\lambda-cs)^n(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}=0$ στο εσωτερικό της καμπύλης C_r. Έτσι αφού η εξίσωση $(\delta+\lambda-cs)^n(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}=0$ έχει ακριβώς $3n-1$ θετικές ρίζες στο εσωτερικό της καμπύλης C_r, συνεπάγεται ότι η εξίσωση (3.14) και ισοδύναμα η εξίσωση (3.13) έχει ακριβώς $3n-1$ ρίζες. Έστω ότι θα συμβολίζουμε με $\rho_1(\delta),\rho_2(\delta),\ldots,\rho_{3n-1}(\delta)$ τις $3n-1$ ρίζες της εξίσωσης (3.13) οι οποίες έχουν θετικό πραγματικό μέρος. Τέλος, ολοκληρώνουμε την απόδειξη για $r\to\infty$. ■

Σημείωση 3.3. Από εδώ και στο εξής για λόγους απλοποίησης θα συμβολίζουμε με ρ_j τις ρίζες $\rho_j(\delta)$, $j=1,\ldots,3n-1$ όταν $\delta>0$.

Παρατήρηση 3.1. Παρατηρούμε ότι το θεώρημα του Rouche δεν ικανοποιείται στην περίπτωση όπου $\delta=0$, διότι για $s=0$ αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.17) στην ακόλουθη σχέση

$$\left| \hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n + \theta\,\hat{h}(s)\left[2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda-cs}\right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n\right]\right|$$

προκύπτει ότι

$$\left| \hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n + \theta\,\hat{h}(s)\left[2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{\delta+2\lambda-cs}\right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right)^n\right]\right|$$

$$= \left| 1+\theta\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i - 1\right]\right|$$

$$= \left| 1+\theta\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n 2^{n-1} - 1\right]\right| = |1| = 1$$

και όχι <1 όπως απαιτούν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rouche.

Επίσης, αποδεικνύεται ότι μία τετριμμένη ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg, εξίσωση (3.15), για $\delta = 0$ είναι η μηδενική.

Ακόμα, για $\delta = 0$ παίρνουμε διάφορες ποσότητες που σχετίζονται με τη χρεοκοπία, όπως είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, η από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Όλα τα προηγούμενα αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης των Gerber-Shiu με κατάλληλη επιλογή παραμέτρων.

Πρόταση 3.2. *Για $\delta = 0$ και $\theta \neq 0$, η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg που δίνεται από την εξίσωση (3.13), έχει ακριβώς $3n-2$ ρίζες στο θετικό ημιάξονα με θετικό πραγματικό μέρος και μία ρίζα ίση με το μηδέν.* ■

3.6. Ο μετασχηματισμός Laplace (LT) της συνάρτησης των Gerber-Shiu

Στην ενότητα αυτή σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace $\hat{m}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su} m_\delta(u) du$ της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu όπως αυτή έχει οριστεί σε προηγούμενη ενότητα και δίνεται από την εξίσωση (3.10).

Αρχικά, για $u \geq 0$ ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις:

$$\gamma_1(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)\, f_X(x)\, dx, \qquad \gamma_2(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)\, h(x)\, dx \tag{3.19}$$

$$\sigma_{1,\delta}(u) = \int_0^u m_\delta(u-x)\, f_X(x)\, dx + \gamma_1(u), \qquad \sigma_{2,\delta}(u) = \int_0^u m_\delta(u-x)\, h(x)\, dx + \gamma_2(u) \tag{3.20}$$

Με προσαρμογή στο χρόνο και στο ποσό της πρώτης απαίτησης και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.7) παίρνουμε

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \left\{ \int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x)\, f_{X,W}(x,t)\, dx + \int_{u+ct}^\infty w(u+ct, x-u-ct)\, f_{X,W}(x,t) dx \right\}$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t} \left\{ \int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x) \left[f_X(x)\, f_W(t) + \theta\, h(x)\, f_W(t) \left[2\overline{F}_W(t) - 1 \right] \right] dx \right.$$

$$\left. + \int_{u+ct}^\infty w(u+ct, x-u-ct) \left[f_X(x)\, f_W(t) + \theta\, h(x)\, f_W(t) \left[2\overline{F}_W(t) - 1 \right] \right] dx \right\} dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x)\, f_W(t)\left[f_X(x)+\theta\, h(x)\left[2\bar{F}_W(t)-1\right]\right]dx\right.$$

$$\left.+\int_{u+ct}^\infty w(u+ct,x-u-ct)\, f_W(t)\left[f_X(x)+\theta\, h(x)\left[2\bar{F}_W(t)-1\right]\right]dx\right\}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\delta t}\, f_W(t)\left\{\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x)\, f_X(x)dx. + \int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x)\,\theta\, h(x).\left[2\bar{F}_W(t)-1\right]dx\right.$$

$$\left.+\int_{u+ct}^\infty w(u+ct,x-u-ct)\, f_X(x)dx + \int_{u+ct}^\infty w(u+ct,x-u-ct)\,\theta\, h(x)\left[2\bar{F}_W(t)-1\right]dx\right\}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\delta t}\, f_W(t)\left\{\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x)\, f_X(x)dx. +\gamma_1(u+ct)\right.$$

$$+2\,\theta\,\bar{F}_W(t)\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x)\;h(x).dx-\theta\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x)\;h(x).dx$$

$$\left.+2\,\theta\,\bar{F}_W(t)\int_{u+ct}^\infty w(u+ct,x-u-ct)\,h(x)\,dx-\theta\int_{u+ct}^\infty w(u+ct,x-u-ct)\,h(x)\,dx\right\}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\delta t}\, f_W(t)\left\{\sigma_{1,\delta}(u+ct)+2\,\theta\,\bar{F}_W(t)\left[\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x)\;h(x).dx+\gamma_2(u+ct)\right]\right.$$

$$\left.-\theta\left[\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x)\;h(x).dx+\gamma_2(u+ct)\right]\right\}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\delta t}\, f_W(t)\left\{\sigma_{1,\delta}(u+ct)+2\,\theta\,\bar{F}_W(t)\,\sigma_{2,\delta}(u+ct)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(u+ct)\right\}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\delta t}\, f_W(t)\left[\sigma_{1,\delta}(u+ct)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(u+ct)\right]dt+2\,\theta\int_0^\infty e^{-\delta t} f_W(t)\,\bar{F}_W(t)\,\sigma_{2,\delta}(u+ct)\,dt \qquad (3.21)$$

Θέτοντας $y=u+ct$, η εξίσωση (3.21) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$m_\delta(u)=\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\left[\sigma_{1,\delta}(y)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(y)\right]\frac{1}{c}\,dy$$

$$+2\,\theta\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\bar{F}_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\sigma_{2,\delta}(y)\,\frac{1}{c}\,dy$$

$$\Rightarrow c\, m_\delta(u)=\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\left[\sigma_{1,\delta}(y)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(y)\right]dy$$

$$+2\,\theta\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\bar{F}_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\sigma_{2,\delta}(y)\,dy\,.$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις f_W και $\overline{F}_W$ όπως αυτές έχουν οριστεί από τις σχέσεις (3.3) και (3.4) αντίστοιχα προκύπτει το ακόλουθο:

$$c\, m_\delta(u) = \int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^{n-1} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)} \left[\sigma_{1,\delta}(y) - \theta\, \sigma_{2,\delta}(y)\right] dy$$

$$+ 2\theta \int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^{n-1} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}\left(\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)\right)^i \sigma_{2,\delta}(y)\, dy$$

$$\Rightarrow c^n\, m_\delta(u) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_u^\infty e^{-\frac{(\delta+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1} \left[\sigma_{1,\delta}(y) - \theta\, \sigma_{2,\delta}(y)\right] dy$$

$$+ \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!} \int_u^\infty e^{-\frac{(\delta+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\right] \sigma_{2,\delta}(y)\, dy\,.$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην προηγούμενη σχέση έχουμε

$$c^n\, \hat{m}_\delta(u) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-su} \left\{ \int_u^\infty e^{-\frac{(\delta+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1} \left[\sigma_{1,\delta}(y) - \theta\, \sigma_{2,\delta}(y)\right] dy \right\} du$$

$$+ \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-su} \left\{ \int_u^\infty e^{-\frac{(\delta+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\right] \sigma_{2,\delta}(y)\, dy \right\} du$$

και με αλλαγή μεταβλητών στα ολοκληρώματα της προηγούμενης σχέσης παίρνουμε

$$c^n\, \hat{m}_\delta(u) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\frac{(\delta+\lambda)y}{c}} \left[\sigma_{1,\delta}(y) - \theta\, \sigma_{2,\delta}(y)\right] \left\{ \int_0^y (y-u)^{n-1} e^{-\left(s-\frac{\delta+\lambda}{c}\right)u}\, du \right\} dy$$

$$+ \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\frac{(\delta+2\lambda)y}{c}} \sigma_{2,\delta}(y) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i\, i!} \left\{ \int_0^y (y-u)^{n+i-1} e^{-\left(s-\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)u}\, du \right\} dy\,. \qquad (3.22)$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η ακόλουθη ισότητα ισχύει για $a > 0,\, k = 0,1,2,\ldots$

$$\int_0^y (y-u)^k e^{-au}\, du = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j j! \binom{k}{j} \frac{y^{k-j}}{a^{j+1}} + (-1)^{k+1} \frac{k!}{a^{k+1}} e^{-ay}\,. \qquad (3.23)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.23), η εξίσωση (3.22) γίνεται:

$$c^n\,\hat{m}_\delta(u)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\frac{(\delta+\lambda)y}{c}}\left[\sigma_{1,\delta}(y)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(y)\right]$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\,j!\binom{n-1}{j}\frac{y^{n-1-j}}{\left(s-\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{j+1}}+(-1)^n\frac{(n-1)!}{\left(s-\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^n}e^{-\left(s-\frac{\delta+\lambda}{c}\right)y}\right]dy$$

$$+\frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\frac{(\delta+2\lambda)y}{c}}\sigma_{2,\delta}(y)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i\,i!}$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\,j!\binom{n+i-1}{j}\frac{y^{n+i-1-j}}{\left(s-\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{j+1}}+(-1)^{n+i}\frac{(n+i-1)!}{\left(s-\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{n+i}}e^{-\left(s-\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)y}\right]dy$$

$$=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{j!\binom{n-1}{j}}{\left(s-\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{j+1}}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)y}y^{n-1-j}\left[\sigma_{1,\delta}(y)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(y)\right]dy$$

$$+\frac{\lambda^n(-1)^n}{\left(s-\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^n}\int_0^\infty e^{-sy}\left[\sigma_{1,\delta}(y)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(y)\right]dy$$

$$+\frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i\,i!}\sum_{j=0}^{n+i-1}(-1)^j\frac{j!\binom{n+i-1}{j}}{\left(s-\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{j+1}}\int_0^\infty e^{-\frac{(\delta+2\lambda)y}{c}}y^{n+i-1-j}\,\sigma_{2,\delta}(y)\,dy$$

$$+2\theta\lambda^n\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n+i}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{c^i\left(s-\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{n+i}}\int_0^\infty e^{-sy}\,\sigma_{2,\delta}(y)\,dy$$

$$=(-1)^n\frac{\lambda^n}{\left(s-\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^n}\left[\hat{\sigma}_{1,\delta}(s)-\theta\,\hat{\sigma}_{2,\delta}(s)\right]$$

$$+2\,\theta\lambda^n \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n+i}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{c^i\left(s-\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{n+i}}\hat{\sigma}_{2,\delta}(s)+\hat{B}_\delta(s)$$

$$=\frac{\lambda^n}{\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n}\left[\hat{\sigma}_{1,\delta}(s)-\theta\,\hat{\sigma}_{2,\delta}(s)\right]$$

$$+2\,\theta\lambda^n \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{c^i\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n+i}}\hat{\sigma}_{2,\delta}(s)\;+\hat{B}_\delta(s).$$

Άρα,

$$c^n\,\hat{m}_\delta(u)=\frac{\lambda^n}{\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n}\left[\hat{\sigma}_{1,\delta}(s)-\theta\,\hat{\sigma}_{2,\delta}(s)\right]+2\,\theta\lambda^n \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{c^i\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n+i}}\hat{\sigma}_{2,\delta}(s)\;+\hat{B}_\delta(s) \quad (3.24)$$

όπου

$$\hat{\sigma}_{i,\delta}(s)=\int_0^\infty e^{-su}\,\sigma_{i,\delta}(u)\,du,\; i=1,2$$

και

$$\hat{B}_\delta(s)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{j!\binom{n-1}{j}}{\left(s-\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{j+1}}\int_0^\infty y^{n-1-j}\,e^{-\frac{(\delta+\lambda)y}{c}}\left[\sigma_{1,\delta}(y)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(y)\right]dy$$

$$+\frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i\,i!}\sum_{j=0}^{n+i-1}(-1)^j\frac{j\,!\binom{n+i-1}{j}}{\left(s-\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{j+1}}\int_0^\infty y^{n+i-j-1}\,e^{-\frac{(\delta+2\lambda)y}{c}}\,\sigma_{2,\delta}(y)\,dy\,.$$

Στη συνέχεια, θεωρώντας ότι $\hat{\gamma}_i(s)=\int_0^\infty e^{-su}\,\gamma_i(u)\,du,\; i=1,2$, από την εξίσωση (3.20) προκύπτει ότι $\hat{\sigma}_{1,\delta}(s)=\hat{m}_\delta(s)\,\hat{f}_X(s)+\hat{\gamma}_1(s)$ και $\hat{\sigma}_{2,\delta}(s)=\hat{m}_\delta(s)\,h(s)+\hat{\gamma}_2(s)$ συνεπώς η εξίσωση (3.24) θα πάρει την ακόλουθη μορφή

$$\hat{m}_\delta(s)\left\{c^n - \frac{\lambda^n}{\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n}\left[\hat{f}_X(s)-\theta\,\hat{h}(s)\right]-2\theta\lambda^n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{c^i\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n+i}}\hat{h}(s)\right\}$$

$$=\frac{\lambda^n}{\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n}\left[\hat{\gamma}_1(s)-\theta\,\hat{\gamma}_2(s)\right]+2\theta\lambda^n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{c^i\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n+i}}\hat{\gamma}_2(s)+\hat{B}_\delta(s)\,. \quad (3.25)$$

Στη συνέχεια, προκειμένου να δώσουμε μία σχέση για τον μετασχηματισμό Laplace $\hat{m}_\delta(s)$ της συνάρτησης των Gerber –Shiu $m_\delta(u)$ θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα3.2. *Για την Erlang(n) διαδικασία κινδύνου με δομή εξάρτησης βασισμένη στην σύζευξη FGM, ο μετασχηματισμός Laplace* $\hat{m}_\delta(s)$ *της συνάρτησης των Gerber –Shiu* $m_\delta(u)$ *δίνεται από την σχέση*

$$\hat{m}_\delta(s)=\frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(s)+\hat{\beta}_{2,\delta}(s)}{\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)} \quad (3.26)$$

όπου

$$\hat{h}_{1,\delta}(s)=\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}\hat{h}_{2,\delta}(s)&=\frac{\lambda^n}{c^n}\hat{f}_X(s)\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}+\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\hat{h}(s)\\&\times\left[2\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n-i-1}-\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}\right]\end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{1,\delta}(s)&=\frac{\lambda^n}{c^n}\hat{\gamma}_1(s)\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}+\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\hat{\gamma}_2(s)\\&\times\left[2\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n-i-1}-\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}\right]\end{aligned} \quad (3.29)$$

και $\hat{\beta}_{2,\delta}(s)$ *είναι ένα πολυώνυμο βαθμού* $3n-2$ *ή μικρότερου, οπότε*

$$\hat{\beta}_{2,\delta}(s) = -\sum_{j=1}^{3n-1} \hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j) \prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1} \frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}. \qquad \blacksquare$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (3.25) με

$$\frac{\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}}{c^n}$$

και λύνοντας την εξίσωση ως προς $\hat{m}_\delta(s)$ προκύπτει η εξίσωση (3.26) με

$$\hat{\beta}_{2,\delta}(s) = \frac{1}{c^n}\hat{h}_{1,\delta}(s)\hat{B}_\delta(s)$$

$$= -\left\{ \frac{\lambda^n}{c^n (n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} j! \binom{n-1}{j} \left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^{n-j-1} \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1} \hat{\mu}_j\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{2\theta\lambda^n}{c^n (n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i\, i!} \sum_{j=0}^{n+i-1} j! \binom{n+i-1}{j} \left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-j-2} \hat{\delta}_{i,j}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)\right\}$$

$$= -\left\{ \frac{\lambda^n}{c^n (n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} j! \binom{n-1}{j} \left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^{n-j-1} \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1} \hat{\mu}_j\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{2\theta\lambda^n}{c^n (n-1)!} \sum_{i=0}^{2n-2} \left(\sum_{i=\max(0,\,j+1-n)}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i\, i!} \binom{n+i-1}{j} \hat{\delta}_{i,j}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)\right) \left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-j-2} \right\}$$

το οποίο είναι πολυώνυμο του s βαθμού $3n-2$ ή μικρότερου, όπου

$$\hat{\mu}_j\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right) = \int_0^\infty y^{n-1-j} e^{-\frac{(\delta+\lambda)y}{c}} \left[\sigma_{1,\delta}(y) - \theta\sigma_{2,\delta}(y)\right] dy$$

και

$$\hat{\delta}_{i,j}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right) = \int_0^\infty y^{n+i-1-j} e^{-\frac{(\delta+2\lambda)y}{c}} \sigma_{2,\delta}(y)\, dy \; .$$

Η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg (3.13) μπορεί επίσης να γραφεί στη μορφή $\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s) = 0$ το οποίο σημαίνει ότι οι ρ_i, $i = 1,2,\ldots,3n-1$ είναι ρίζες του παρονομαστή της εξίσωσης (3.26). Επίσης, η $\hat{m}_\delta(s)$ είναι αναλυτική για $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ οπότε συνεπάγεται ότι οι

$\rho_i,\ i=1,2,\ldots,3n-1$ είναι επίσης ρίζες του αριθμητή της εξίσωσης (3.26), και έτσι $\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_i)+\hat{\beta}_{2,\delta}(\rho_i)=0 \Rightarrow \hat{\beta}_{2,\delta}(\rho_i)=-\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_i),\quad i=1,2,\ldots,3n-1$. Εφόσον, $\hat{\beta}_{2,\delta}(s)$ είναι πολυώνυμο του s βαθμού $3n-2$, από τον τύπο παρεμβολής του Lagrange για $3n-1$ σημεία έχουμε

$$\hat{\beta}_{2,\delta}(s)=\sum_{j=1}^{3n-1}\hat{\beta}_{2,\delta}(\rho_j)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}=-\sum_{j=1}^{3n-1}\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}. \qquad \blacksquare$$

3.7. Ανάλυση της συνάρτησης των Gerber-Shiu όταν u=0

Θα εξετάσουμε κάποιες ποσότητες χρεοκοπίας λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση $u=0$.

Θεωρούμε ακόμα πως οι ρίζες $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{3n-1}$ είναι διακριτές και εφαρμόζοντας το Θεώρημα αρχικής τιμής έχουμε:

$$m_\delta(0)=\lim_{s\to\infty}s\,\hat{m}_\delta(s)=\lim_{s\to\infty}s\,\frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(s)+\hat{\beta}_{2,\delta}(s)}{\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)}=\lim_{s\to\infty}\frac{s^{3n-1}}{s^{3n-2}}\,\frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(s)+\hat{\beta}_{2,\delta}(s)}{\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{\frac{1}{s^{3n-2}}}{\frac{1}{s^{3n-1}}}\,\frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(s)+\hat{\beta}_{2,\delta}(s)}{\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)}=\lim_{s\to\infty}\frac{\frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(s)}{s^{3n-2}}+\frac{\hat{\beta}_{2,\delta}(s)}{s^{3n-2}}}{\frac{\hat{h}_{1,\delta}(s)}{s^{3n-1}}-\frac{\hat{h}_{2,\delta}(s)}{s^{3n-1}}}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{\frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(s)}{s^{3n-2}}-\frac{1}{s^{3n-2}}\sum_{j=1}^{3n-1}\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}}{\frac{\hat{h}_{1,\delta}(s)}{s^{3n-1}}-\frac{\hat{h}_{2,\delta}(s)}{s^{3n-1}}}$$

$$=\frac{-\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^{3n-2}}\sum_{j=1}^{3n-1}\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}}{(-1)^{3n-1}}=\frac{-\sum_{j=1}^{3n-1}\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\frac{1}{\rho_j-\rho_k}}{(-1)^{3n-1}}$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)}{\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)}. \tag{3.30}$$

Στο σημείο αυτό θεωρούμε ότι

$$b_{1,\delta}(s) = \frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1} \tag{3.31}$$

και

$$b_{2,\delta}(s) = \theta\,\frac{\lambda^n}{c^n}\left[\,2\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{n-1}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n-i-1} - \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}\,\right] \tag{3.32}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.31) και (3.32) στην εξίσωση (3.29) προκύπτει ότι

$$\hat{\beta}_{1,\delta}(s) = b_{1,\delta}(s)\,\hat{\gamma}_1(s) + b_{2,\delta}(s)\,\hat{\gamma}_2(s) \tag{3.33}$$

Επίσης, θεωρούμε ότι

$$b_{i\,j} = \frac{b_{i,\delta}(\rho_j)}{\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k - p_j\right)}, \tag{3.34}$$

για $i = 1,2$ και $j = 1,2,\ldots,3n-1$.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.33) και (3.34) στην εξίσωση (3.30) προκύπτει ότι

$$m_\delta(0) = \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)}{\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)} = \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,\delta}(\rho_j)\,\hat{\gamma}_1(\rho_j) + b_{2,\delta}(\rho_j)\,\hat{\gamma}_2(\rho_j)}{\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)}$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3n-1} b_{i,j}\,\hat{\gamma}_i(\rho_j) \tag{3.35}$$

Εφόσον έχουμε ορίσει ότι

$$\gamma_1(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)\, f_X(y)\, dy = \int_0^\infty w(x,y)\, f_X(x+y)\, dy$$

και

$$\gamma_2(x) = \int_x^{\infty} w(x, y-x)\, h(y)\, dy = \int_0^{\infty} w(x,y)\, h(x+y)\, dy$$

προκύπτει ότι

$$\hat{\gamma}_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, \gamma_1(x)\, dx = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-sx} w(x,y)\, f_X(x+y)\, dy\, dx$$

και αντίστοιχα

$$\hat{\gamma}_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, \gamma_2(x)\, dx = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-sx} w(x,y)\, h(x+y)\, dy\, dx\,.$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση (3.35) προκύπτει ότι

$$m_\delta(0) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} w(x,y) \left[f_X(x+y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j}\, e^{-\rho_j x} + h(x+y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j}\, e^{-\rho_j x} \right] dy dx \qquad (3.36)$$

Έστω ότι ορίζουμε $f(x,y,t\,|\,0)$ να είναι η από κοινού ελλειμματική σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία (x), του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας (y) και του χρόνου χρεοκοπίας (t) δεδομένου ότι $U(0)=0$. Επιπλέον, με $f_\delta(x,y\,|\,0)$ ορίζουμε την προεξοφλημένη (στην περίπτωση όπου $\delta \to 0$ είναι η μη-προεξοφλημένη) σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας δεδομένου ότι $U(0)=0$. Τότε, έχουμε ότι

$$f_\delta(x,y\,|\,0) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(x,y,t\,|\,0)\, dt\,.$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (16) των Cheung et al (2010) και για $u=0$ συνεπάγεται ότι

$$m_\delta(0) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, w(x,y)\, f(x,y,t\,|\,0)\, dt\, dy\, dx = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} w(x,y)\, f_\delta(x,y\,|\,0)\, dy\, dx\,. \qquad (3.37)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.36) και (3.37) προκύπτει ότι

$$f_\delta(x,y\,|\,0) = f_X(x+y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j}\, e^{-\rho_j x} + h(x+y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j}\, e^{-\rho_j x} \qquad (3.38)$$

Σημείωση 3.4. Στη συνέχεια θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε κάποιες ιδιότητες των τελεστών T_r των Dickson-Hipp οπότε και παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 1, στην Πρόταση 1.1 όπου παρατίθενται αναλυτικά οι ιδιότητες των τελεστών.

Έστω ότι ορίζουμε $f_{1,\delta}(x\,|\,0)=\int_0^\infty f_\delta(x,y\,|\,0)\,dy$ να είναι η προεξοφλημένη (μη-προεξοφλημένη στην περίπτωση όπου $\delta\to 0$) σ.π.π. του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και $f_{2,\delta}(y\,|\,0)=\int_0^\infty f_\delta(x,y\,|\,0)\,dx$ να είναι η προεξοφλημένη (μη-προεξοφλημένη στην περίπτωση όπου $\delta\to 0$) σ.π.π. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας δεδομένου ότι $U(0)=0$.

Εφόσον

$$\int_0^\infty h(x+y)\,dy=\int_x^\infty h(y)\,dy=\int_x^\infty f_X(y)\left[1-2\,F_X(y)\right]dy=-\,F_X(x)\,\overline{F}_X(x)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.38) συνεπάγεται ότι

$$f_{1,\delta}(x\,|\,0)=\int_0^\infty f_\delta(x,y\,|\,0)\,dy=\int_0^\infty\left[f_X(x+y)\sum_{j=1}^{3n-1}b_{1j}\,e^{-\rho_j x}+h(x+y)\sum_{j=1}^{3n-1}b_{2j}\,e^{-\rho_j x}\right]dy$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1}b_{1j}\,e^{-\rho_j x}\int_0^\infty f_X(x+y)\;dy+\sum_{j=1}^{3n-1}b_{2j}\,e^{-\rho_j x}\int_0^\infty h(x+y)\,dy$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1}b_{1j}\,e^{-\rho_j x}\;\overline{F}_X(x)\;+\;\sum_{j=1}^{3n-1}b_{2j}\,e^{-\rho_j x}\left[-\,F_X(x)\,\overline{F}_X(x)\right]$$

$$=\overline{F}_X(x)\left[\sum_{j=1}^{3n-1}b_{1j}\,e^{-\rho_j x}\;-F_X(x)\sum_{j=1}^{3n-1}b_{2j}\,e^{-\rho_j x}\right]$$

και

$$f_{2,\delta}(y\,|\,0)=\int_0^\infty f_\delta(x,y\,|\,0)\,dx=\int_0^\infty\left[f_X(x+y)\sum_{j=1}^{3n-1}b_{1j}\,e^{-\rho_j x}+h(x+y)\sum_{j=1}^{3n-1}b_{2j}\,e^{-\rho_j x}\right]dx$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1}b_{1j}\int_0^\infty e^{-\rho_j x}f_X(x+y)\;dx\;+\sum_{j=1}^{3n-1}b_{2j}\int_0^\infty e^{-\rho_j x}\;h(x+y)\,dx$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j} \int_{y}^{\infty} e^{-\rho_j (z-y)} f_X(z)\, dz + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j} \int_{y}^{\infty} e^{-\rho_j (z-y)}\, h(z)\, dz$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j} \int_{y}^{\infty} e^{-\rho_j (z-y)} f_X(z)\, dz + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j} \int_{y}^{\infty} e^{-\rho_j (z-y)}\, h(z)\, dz$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j}\, T_{\rho_j} f_X(y) + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j}\, T_{\rho_j} h(y)\ .$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $f_{2,\delta}(y\,|\,0)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\hat{f}_{2,\delta}(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sy} f_{2,\delta}(y\,|\,0)\, dy = T_s f_{2,\delta}(0\,|\,0)$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j}\, T_s T_{\rho_j} f_X(0) + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j}\, T_s T_{\rho_j} h(0)$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j} \frac{\hat{f}_X(s) - \hat{f}_X(\rho_j)}{\rho_j - s} + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j} \frac{\hat{h}(s) - \hat{h}(\rho_j)}{\rho_j - s}$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j} \frac{\hat{f}_X(\rho_j) - \hat{f}_X(s)}{s - \rho_j} + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j} \frac{\hat{h}(\rho_j) - \hat{h}(s)}{s - \rho_j}$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1j}\hat{f}_X(\rho_j) + b_{2j}\hat{h}(\rho_j)}{s - \rho_j} - \hat{f}_X(s) \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1j}}{s - \rho_j} - \hat{h}(s) \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{2j}}{s - \rho_j} \qquad (3.39)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.27), (3.31) και (3.32) προκύπτει ότι

$$\hat{h}_{2,\delta}(s) = b_{1,\delta}(s)\, \hat{f}_X(s) + b_{2,\delta}(s)\, \hat{h}(s)$$

και επομένως για $j = 1,2,\ldots,3n-1$ έχουμε

$$b_{1j}\, \hat{f}_X(\rho_j) + b_{2j}\, \hat{h}(\rho_j) = \frac{b_{1,\delta}(\rho_j)}{\prod\limits_{k=1,\, k\neq j}^{3n-1} \left(\rho_k - \rho_j\right)} \hat{f}_X(\rho_j) + \frac{b_{2,\delta}(\rho_j)}{\prod\limits_{k=1,\, k\neq j}^{3n-1} \left(\rho_k - \rho_j\right)} \hat{h}(\rho_j)$$

$$=\frac{b_{1,\delta}(\rho_j)\,\hat{f}_X(\rho_j)+b_{2,\delta}(\rho_j)\,\hat{h}(\rho_j)}{\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)}=\frac{\hat{h}_{2,\delta}(\rho_j)}{\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)}=\frac{\hat{h}_{1,\delta}(\rho_j)}{\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)}$$

και επομένως από τις (3.27) και (3.31) συνεπάγεται ότι:

$$\hat{f}_{2,\delta}(s)=\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,j}\hat{f}_X(\rho_j)+b_{2,j}\,\hat{h}(\rho_j)}{\left(s-\rho_j\right)}-\hat{f}_X(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,j}}{s-\rho_j}-\hat{h}(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{2,j}}{s-\rho_j}$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{1,\delta}(\rho_j)}{\left(s-\rho_j\right)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)}-\hat{f}_X(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,j}}{s-\rho_j}-\hat{h}(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{2,j}}{s-\rho_j}$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\left(\delta+\lambda-c\,\rho_j\right)^n\left(\delta+2\lambda-c\,\rho_j\right)^{2n-1}}{c^{3n-1}\left(s-\rho_j\right)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)}-\hat{f}_X(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,j}}{s-\rho_j}-\hat{h}(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{2,j}}{s-\rho_j}\qquad(3.40)$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Παρεμβολής, όπως οι Li και Carrido (2005) (βλ. εξισώσεις (17) και (18)), μπορούν εύκολα να αποδειχθούν οι ακόλουθες ταυτότητες:

$$\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\left(\delta+\lambda-c\,\rho_j\right)^n\left(\delta+2\lambda-c\,\rho_j\right)^{2n-1}}{c^{3n-1}\left(s-\rho_j\right)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)}=\frac{1-\left(\delta+\lambda-c\,s\right)^n\left(\delta+2\lambda-c\,s\right)^{2n-1}}{c^{3n-1}\prod_{i-1}^{3n-1}\left(\rho_i-s\right)}\qquad(3.41)$$

$$\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,j}}{s-\rho_j}=\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,\delta}(\rho_j)}{\left(s-\rho_j\right)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)}=\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\lambda^n\left(\delta+2\lambda-c\,\rho_j\right)^{2n-1}}{c^{3n-1}\left(s-\rho_j\right)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)}$$

$$=\frac{-\lambda^n\left(\delta+2\lambda-c\,s\right)^{2n-1}}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}\left(\rho_i-s\right)}\qquad(3.42)$$

και

$$\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{2,j}}{s-\rho_j}=\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{2,\delta}(\rho_j)}{\left(s-\rho_j\right)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)}$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{\theta\,\lambda^n \left[2\left(\delta+\lambda-c\,\rho_j\right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{n-1} \lambda^i \left(\delta+2\lambda-c\,\rho_j\right)^{n-i-1} - \left(\delta+2\lambda-c\,\rho_j\right)^{2n-1} \right]}{c^{3n-1}\left(s-\rho_j\right) \prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)}$$

$$= \frac{-\,\theta\,\lambda^n \left[2\left(\delta+\lambda-c\,s\right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{n-1} \lambda^i \left(\delta+2\lambda-c\,s\right)^{n-i-1} - \left(\delta+2\lambda-c\,s\right)^{2n-1} \right]}{c^{3n-1} \prod_{i=1}^{3n-1}\left(\rho_i-s\right)} \tag{3.43}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που μόλις αποδείξαμε η εξίσωση (3.40) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\hat{f}_{2,\delta}(s) = \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{\left(\delta+\lambda-c\,\rho_j\right)^n \left(\delta+2\lambda-c\,\rho_j\right)^{2n-1}}{c^{3n-1}\left(s-\rho_j\right)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\left(\rho_k-\rho_j\right)} - \hat{f}_X(s) \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1,j}}{s-\rho_j} - \hat{h}(s) \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{2,j}}{s-\rho_j}$$

$$= 1 - \frac{\left(\delta+\lambda-c\,s\right)^n \left(\delta+2\lambda-c\,s\right)^{2n-1}}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}\left(\rho_i-s\right)} + \hat{f}_X(s)\,\frac{\lambda^n \left(\delta+2\lambda-c\,s\right)^{2n-1}}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}\left(\rho_i-s\right)}$$
$$+ \frac{\hat{h}(s)\,\theta\,\lambda^n \left[2\left(\delta+\lambda-c\,s\right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{n-1} \lambda^i \left(\delta+2\lambda-c\,s\right)^{n-i-1} - \left(\delta+2\lambda-c\,s\right)^{2n-1} \right]}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}\left(\rho_i-s\right)}$$

$$= 1 - \frac{1}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}\left(\rho_i-s\right)} \Big\{ \left(\delta+\lambda-c\,s\right)^n \left(\delta+2\lambda-c\,s\right)^{2n-1} - \lambda^n \left(\delta+2\lambda-c\,s\right)^{2n-1} \hat{f}_X(s)$$
$$- \theta\,\lambda^n \left[2\left(\delta+\lambda-c\,s\right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{n-1} \lambda^i \left(\delta+2\lambda-c\,s\right)^{n-i-1} - \left(\delta+2\lambda-c\,s\right)^{2n-1} \right] \hat{h}(s) \Big\}$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Laplace της

$$\hat{f}_{2,\delta}(s) = 1 - \frac{\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)}{\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i - s)} \tag{3.44}$$

Θέτοντας $w(x,y)=1$, από την εξίσωση (3.37) συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας m_T δεδομένου $U(0)=0$ είναι

$$m_T(0) = E\left[e^{-\delta T}\ I(T<\infty) \,|\, U(0)=0\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty f_\delta(x,y\,|\,0)\,dy\,dx = \int_0^\infty f_{2,\delta}(y\,|\,0)\,dy$$

$$= \lim_{s\to 0} \hat{f}_{2,\delta}(s) = 1 - \frac{\hat{h}_{1,\delta}(0) - \hat{h}_{2,\delta}(0)}{\prod_{i=1}^{3n-1} \rho_i} = 1 - \frac{\left[(\delta+\lambda)^n\,(\delta+2\lambda)^{2n-1} - \lambda^n\,(\delta+2\lambda)^{2n-1}\right]}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}\rho_i}$$

$$= 1 - \frac{(\delta+2\lambda)^{2n-1}\left[(\delta+\lambda)^n - \lambda^n\right]}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}\rho_i} \tag{3.45}$$

εφόσον $\hat{f}_X(0)=1$ συνεπάγεται $\hat{h}(0)=0$.

Ακόμα από την εξίσωση (3.45) παρατηρούμε ότι $m_T(0)<1$ λόγω του ότι $\delta>0$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(0)$ δεδομένου ότι το αρχικό αποθεματικό $u=U(0)=0$. Οπότε έχουμε ότι

$$\psi(0) = \lim_{\delta\to 0^+} m_T(0) = \lim_{\delta\to 0^+} E\left[e^{-\delta T} I(T<\infty) \,|\, U(0)=0\right]$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+}\left[1 - \frac{(\delta+2\lambda)^{2n-1}\left[(\delta+\lambda)^n - \lambda^n\right]}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}\rho_i}\right] = 1 - \lim_{\delta\to 0^+}\frac{(\delta+2\lambda)^{2n-1}\left[(\delta+\lambda)^n - \lambda^n\right]}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}\rho_i}$$

$$= 1 - \frac{n\,2^{2n-1}\,\lambda^{3n-2}}{c^{3n-1}\,\rho_1'(0)\,\rho^*(0)}$$

όπου $\rho^*(0) = \prod_{i=2}^{3n-1}\rho_i(0)$ και $\rho_1'(0) = \frac{d}{d\delta}\rho_1(\delta)\Big|_{\delta\to 0^+}$.

Για να υπολογίσουμε την $\rho_1'(0)$, θα χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση ότι $\rho_1(\delta)$ είναι μία ρίζα του παρονομαστή της εξίσωσης (3.26). Οπότε έχουμε ότι $\hat{h}_1(\rho_1(\delta)) - \hat{h}_2(\rho_1(\delta)) = 0 \Rightarrow \hat{h}_1(\rho_1(\delta)) = \hat{h}_2(\rho_1(\delta))$ από το οποίο παραγωγίζοντας ως προς δ και θεωρώντας ότι $\delta\to 0^+$ παίρνουμε ότι

$$n\,2^{2n-1}\,\lambda^{3n-2}\,\left(1-c\rho_1'(0)\right)+\left(2n-1\right)2^{2n-2}\,\lambda^{3n-2}\,\left(1-c\rho_1'(0)\right)$$

$$=\left(2n-1\right)2^{2n-2}\,\lambda^{3n-2}\left(1-c\rho_1'(0)\right)+2^{2n-1}\lambda^{3n-1}\left[\rho_1'(0)\,\hat{f}_X'(0)-\theta\,\hat{h}'(0)\,\rho_1'(0)\right]$$

$$+\,\theta\,2^{n}\,\lambda^{3n-1}\,\rho_1'(0)\,\hat{h}'(0)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\quad .$$

Από τη σχέση που προέκυψε θέλουμε να υπολογίσουμε την $\rho_1'(0)$. Εφόσον $\hat{f}_X(s)=E\left[e^{-sX}\right]$ συνεπάγεται ότι $\hat{f}'(0)=-E[X]$ και επιπλέον χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.17) προκύπτουν τα εξής

$$n\,2^{2n-1}\,\lambda^{3n-2}\,\left(1-c\rho_1'(0)\right)+\left(2n-1\right)2^{2n-2}\,\lambda^{3n-2}\,\left(1-c\rho_1'(0)\right)$$

$$=\left(2n-1\right)2^{2n-2}\,\lambda^{3n-2}\left(1-c\rho_1'(0)\right)+2^{2n-1}\lambda^{3n-1}\left[\rho_1'(0)\left[-E[X]\right]-\theta\,\hat{h}'(0)\,\rho_1'(0)\right]$$

$$+\,\theta\,2^{n}\,\lambda^{3n-1}\,\rho_1'(0)\,\hat{h}'(0)\,2^{n-1}$$

$$\Rightarrow\left[1-c\rho_1'(0)\right]\left[n\,2^{2n-1}\,\lambda^{3n-2}\right]=-\,2^{2n-1}\,\lambda^{3n-1}\,\rho_1'(0)\,E[X]$$

$$\Rightarrow\ n\,2^{2n-1}\,\lambda^{3n-2}-c\,n\,2^{2n-1}\,\lambda^{3n-2}\,\rho_1'(0)+2^{2n-1}\,\lambda^{3n-1}\,\rho_1'(0)\,E[X]=0$$

$$\Rightarrow\rho_1'(0)=\frac{-\,n\,2^{2n-1}\,\lambda^{3n-2}}{-\,c\,n\,2^{2n-1}\,\lambda^{3n-2}+2^{2n-1}\,\lambda^{3n-1}\,E[X]}=\frac{-\,n}{-\,c\,n\,+\lambda\,E[X]}$$

$$\Rightarrow\rho_1'(0)\;=\frac{n}{c\,n\,-\lambda\,E[X]}=\frac{\dfrac{n}{\lambda}}{c\,\dfrac{n}{\lambda}\,-E[X]}\;\overset{E(W)=\frac{n}{\lambda}}{\Rightarrow}\;\frac{E(W)}{cE(W)-E(X)}>0\ \ \text{(λόγω της εξίσωσης (3.9)).}$$

Επομένως, επιστρέφοντας στην σχέση για την $\psi(0)$ και σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\psi(0)=1-\frac{n\,2^{2n-1}\,\lambda^{3n-2}\,\left[cE(W)-E(X)\right]}{c^{3n-1}\,E(W)\,\rho^{*}(0)}=1-\frac{2^{2n-1}\,\lambda^{3n-2}\,\left[nc-\lambda\,E(X)\right]}{c^{3n-1}\,\rho^{*}(0)}<1\quad .$$

3.8. Ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την συνάρτηση των Gerber-Shiu

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της συνάρτησης των Gerber –Shiu. Οι Gerber και Shiu (2005) και οι Li και Carrido (2005) απέδειξαν ότι η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που προσέγγισαν οι Gerber και Shiu (1998) για το κλασσικό μοντέλο με σύνθετη Poisson μπορεί να επεκταθεί στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου. Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα, όπως ότι ολοκληρώνουμε ως προς την πρώτη πτώση του πλεονάσματος υπό τη συνθήκη ότι το αρχικό αποθεματικό είναι $u \geq 0$ και εξετάζοντας αν η χρεοκοπία προκύπτει με την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης ή όχι. Οι Cheung et al (2010) εξήγαγαν μία ολοκληρωτική εξίσωση (βλ. εξίσωση (15) Cheung et al (2010)) για τη γενικευμένη αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής συμπεριλαμβανομένου του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, το ελάχιστο πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και του πλεονάσματος ακριβώς μετά την προτελευταία απαίτηση πριν συμβεί χρεοκοπία. Επομένως, θεωρώντας $w(x,y,z,v) = w(x,y)$ στις εξισώσεις (12) και (15) των Cheung et al (2010) προκύπτει ότι η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y) \left\{ \int_0^\infty f_\delta(x,y \mid 0)\, dx \right\} dy + G_\delta(u)$$

$$= \int_0^u m_\delta(u-y)\, f_{2,\delta}(y \mid 0)\, dy + G_\delta(u), \quad u \geq 0 \tag{3.46}$$

όπου η $f_{2,\delta}(y \mid 0)$ δίνεται από την εξίσωση (3.39) και

$$G_\delta(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty w(x+u, y-u)\, f_\delta(x,y \mid 0)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty \int_u^\infty w(s,t)\, f_\delta(s-u, t+u \mid 0)\, ds\, dt \tag{3.47}$$

Από την εξίσωση (3.45) συμπεραίνουμε ότι $\int_0^\infty f_{2,\delta}(y \mid 0)\, dy = m_T(0) < 1$. Επομένως, προκύπτει ότι η εξίσωση (3.46) είναι μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Στη συνέχεια θα δώσουμε έναν εναλλακτικό τύπο για την $f_{2,\delta}(y|0)$.

Από την εξίσωση (3.27), παρατηρούμε ότι η η $\hat{h}_{1,\delta}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο του s βαθμού $3n-1$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής του Lagrange για την $\hat{h}_{1,\delta}(s)$ προκύπτει ότι

$$\hat{h}_{1,\delta}(s)= \hat{h}_{1,\delta}(0)\prod_{k=1}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{(-\rho_k)}+s\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{1,\delta}(\rho_j)}{\rho_j}\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}$$

Σύμφωνα με την όγδοη ιδιότητα του τελεστή Dickson – Hipp (βλ. Κεφάλαιο 1, Πόρισμα 1.1) και χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως οι Cossette et al (2010) σελ. 15, η προαναφερθείσα σχέση παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)$$

$$=\Pi_{3n-1}(s)\left[\frac{\hat{h}_{1,\delta}(0)}{\Pi_{3n-1}(0)}-\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{2,\delta}(\rho_j)}{(-\rho_j)\Pi'_{3n-1}(\rho_j)}+\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{2,\delta}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\Pi'_{3n-1}(\rho_j)}-\frac{\hat{h}_{2,\delta}(s)}{\Pi_{3n-1}(s)}\right] \tag{3.48}$$

όπου $\Pi_{3n-1}(s)=\prod_{i=1}^{3n-1}(s-\rho_j)$.

Εφόσον, $\hat{h}_{2,\delta}(\rho_j)=\hat{h}_{1,\delta}(\rho_j)$, $j=1,2,\ldots,3n-1$ και κάνοντας χρήση των εξισώσεων (3.27) και (3.41) για $s=0$ έχουμε ότι

$$\frac{\hat{h}_{1,\delta}(0)}{\Pi_{3n-1}(0)}+\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{2,\delta}(\rho_j)}{\rho_j\,\Pi'_{3n-1}(\rho_j)}=\frac{\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^n\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{2n-1}}{\prod_{i=1}^{3n-1}(-\rho_i)}+\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{1,\delta}(\rho_j)}{\rho_j\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$=\frac{(\delta+\lambda)^n\,(\delta+2\lambda)^{2n-1}}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}(-\rho_i)}+\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-\rho_j\right)^n\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-\rho_j\right)^{2n-1}}{\rho_j\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$=\frac{(\delta+\lambda)^n\,(\delta+2\lambda)^{2n-1}}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}(-\rho_i)}+(-1)^{3n-1}\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{(\delta+\lambda-c\rho_j)^n\,(\delta+2\lambda-c\rho_j)^{2n-1}}{c^{3n-1}\,\rho_j\,(-1)^{3n-1}\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}(\rho_k-\rho_j)}$$

$$=\frac{(\delta+\lambda)^n\ (\delta+2\lambda)^{2n-1}}{c^{3n-1}\ \prod_{i=1}^{3n-1}(-\rho_i)}+(-1)^{3n-1}\left\{1-\frac{(\delta+\lambda)^n\ (\delta+2\lambda)^{2n-1}}{c^{3n-1}\ \prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i)}\right\}$$

$$=\frac{(\delta+\lambda)^n\ (\delta+2\lambda)^{2n-1}}{c^{3n-1}\ \prod_{i=1}^{3n-1}(-\rho_i)}+(-1)^{3n-1}-\frac{(\delta+\lambda)^n\ (\delta+2\lambda)^{2n-1}}{c^{3n-1}\ \prod_{i=1}^{3n-1}(-\rho_i)}=(-1)^{3n-1}.$$

Επομένως, η εξίσωση (3.48) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)=\Pi_{3n-1}(s)\left[(-1)^{3n-1}-\frac{1}{(-1)^{3n-1}}T_s\ T_{\rho 1}\cdots T_{\rho 3n-1}h_{2,\delta}(0)\right]$$

$$=(-1)^{3n-1}\Pi_{3n-1}(s)\left[1-\ T_s\ T_{\rho 1}\cdots T_{\rho 3n-1}h_{2,\delta}(0)\right] \tag{3.49}$$

Συνεπώς, από τις εξισώσεις (3.44) και (3.49) συνεπάγεται ότι

$$\hat{f}_{2,\delta}(s)=1-\frac{\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)}{\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i-s)}=1-\frac{(-1)^{3n-1}\Pi_{3n-1}(s)\ \left[1-\ T_s\ T_{\rho 1}\cdots T_{\rho 3n-1}h_{2,\delta}(0)\right]}{(-1)^{3n-1}\ \Pi_{3n-1}(s)}$$

$$=T_s\ T_{\rho 1}\cdots T_{\rho 3n-1}h_{2,\delta}(0) \tag{3.50}$$

και επομένως, αντιστρέφοντας το παραπάνω αποτέλεσμα για την $f_{2,\delta}(y\,|\,0)$, από την όγδοη ιδιότητα του τελεστή Dickson – Hipp (βλ. Κεφάλαιο 1, Πρόταση 1.1 (Ιδιότητες των τελεστών T_r))προκύπτει ότι $f_{2,\delta}(y\,|\,0)=T_{\rho 1}\cdots T_{\rho 3n-1}h_{2,\delta}(y)$.

Επίσης, από τις εξισώσεις (3.38) και (3.47) προκύπτει ότι

$$G_\delta(u)=\int_0^\infty\int_u^\infty w(s,t)\,f_\delta(s-u,t+u\,|\,0)\,ds\,dt$$

$$=\int_0^\infty\int_u^\infty w(s,t)\left[f_X(s+t)\sum_{j=1}^{3n-1}b_{1j}\ e^{-\rho_j\,(s-u)}\ +h(s+t)\sum_{j=1}^{3n-1}b_{2j}\ e^{-\rho_j\,(s-u)}\ \right]ds\,dt$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1}b_{1j}\int_u^\infty e^{-\rho_j\,(s-u)}\int_0^\infty w(s,t)\ \ f_X(s+t)\,dt\,ds+\sum_{j=1}^{3n-1}b_{2j}\int_u^\infty e^{-\rho_j\,(s-u)}\int_0^\infty w(s,t)\,h(s+t)\ \ dt\,ds$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j} \int_u^\infty e^{-\rho_j (s-u)} \gamma_1(s)\, ds + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j} \int_u^\infty e^{-\rho_j (s-u)} \gamma_2(s)\, ds$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j}\, T_{\rho j}\gamma_1(u) + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j}\, T_{\rho j}\gamma_2(u) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3n-1} b_{ij}\, T_{\rho j}\gamma_i(u) \tag{3.51}$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε μία άλλη έκφραση για τη συνάρτηση $G_\delta(u)$.

Από την εξίσωση (3.51) συνεπάγεται ότι

$$\hat{G}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su} G_\delta(u)\, du = T_s G_\delta(0) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3n-1} b_{i,j}\, T_s T_{\rho j}\gamma_i(0)$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1,j}\, \hat{\gamma}_1(\rho_j) + b_{2,j}\, \hat{\gamma}_2(\rho_j)}{\left(s-\rho_j\right)} - \hat{\gamma}_1(s) \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1,j}}{s-\rho_j} - \hat{\gamma}_2(s) \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{2,j}}{s-\rho_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1,\delta}(\rho_j)\, \hat{\gamma}_1(\rho_j) + b_{2,\delta}(\rho_j)\, \hat{\gamma}_2(\rho_j)}{\left(s-\rho_j\right) \prod_{k=1,\, k\neq j}^{3n-1} \left(\rho_k - \rho_j\right)} - \hat{\gamma}_1(s) \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1,j}}{s-\rho_j} - \hat{\gamma}_2(s) \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{2,j}}{s-\rho_j}$$

όπου η τελευταία εξίσωση προέκυψε από την εξίσωση (3.34). Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.33), (3.42) και (3.43) προκύπτει ότι

$$\hat{G}_\delta(s) = \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{\hat{\beta}_{1,\delta}\left(\rho_j\right)}{\left(s-\rho_j\right) \prod_{k=1,\, k\neq j}^{3n-1} \left(\rho_k - \rho_j\right)} + \frac{\lambda^n \left(\delta + 2\lambda - cs\right)^{3n-1}}{c^{3n-1} \prod_{i=1}^{3n-1} \left(\rho_i - s\right)}\, \hat{\gamma}_1(s)$$

$$+ \frac{\theta\, \lambda^n \left[2\left(\delta + \lambda - cs\right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{n-i} \lambda^i \left(\delta + 2\lambda - cs\right)^{n-i-1} - \left(\delta + 2\lambda - cs\right)^{2n-1} \right]}{c^{3n-1} \prod_{i=1}^{3n-1} \left(\rho_i - s\right)}\, \hat{\gamma}_2(s)$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)}{\left(s-\rho_j\right) \prod_{k=1,\, k\neq j}^{3n-1} \left(\rho_k - \rho_j\right)} + \frac{b_{1,\delta}\, \hat{\gamma}_1(s) + b_{2,\delta}\, \hat{\gamma}_2(s)}{\prod_{i=1}^{3n-1} \left(\rho_i - s\right)} = \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)}{\left(s-\rho_j\right) \prod_{k=1,\, k\neq j}^{3n-1} \left(\rho_k - \rho_j\right)} + \frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(s)}{\prod_{i=1}^{3n-1} \left(\rho_i - s\right)}$$

$$= \left(-1\right)^{3n-1} \left[\frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(s)}{\Pi_{3n-1}(s)} - \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)}{\left(s-\rho_j\right) \Pi'_{3n-1}(\rho_j)} \right] = T_s T_{\rho_j} \cdots T_{\rho 3n-1}\, \beta_{1,\delta}(0) \tag{3.52}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την όγδοη ιδιότητα του τελεστή των Dickson Hipp (Βλ. Κεφάλαιο 1, Πρόταση 1.1).

Επομένως, εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace για την παραπάνω σχέση προκύπτει άλλη μία έκφραση για τη $G_\delta(u)$ οπότε

$$G_\delta(u) = T_{\rho_1} \cdots T_{\rho 3n-1}\, \beta_{1,\delta}(u)$$

η οποία εύκολα μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας επίσης την όγδοη ιδιότητα του τελεστή των Dickson Hipp (Βλ. Κεφάλαιο 1, Πρόταση 1.1).

Επομένως, από την εξίσωση (3.46) και γνωρίζοντας ότι $\int_0^\infty f_{2,\delta}(y\,|\,0)\,dy = m_T(0) < 1$ παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3. *Η συνάρτηση των Gerber-Shiu* $m_\delta(u)$ *είναι μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y)\, f_{2,\delta}(y\,|\,0)\,dy + G_\delta(u), \quad u \geq 0 \tag{3.53}$$

όπου $f_{2,\delta}(y\,|\,0) = T_{\rho_1} \ldots T_{\rho 3n-1}\, h_{2,\delta}(y)$ *και* $G_\delta(u) = T_{\rho_1} \cdots T_{\rho 3n-1}\, \beta_{1,\delta}(u)$.

Επιπλέον, η εξίσωση (3.53) επιτρέπει την ακόλουθη εναλλακτική αναπαράσταση

$$m_\delta(u) = \frac{1}{1+\kappa_\delta}\int_0^u m_\delta(u-y)\, \theta_\delta(y)\,dy + \frac{1}{1+\kappa_\delta}\, \Lambda_\delta(u), \quad u \geq 0 \tag{3.54}$$

όπου κ_δ *ορίστηκε τέτοιο ώστε* $\frac{1}{1+\kappa_\delta} = T_0\, T_{\rho 1} \cdots T_{\rho 3n-1}\, h_{2,\delta}(0) = m_T(0)$.

Επιπλέον,

$$\Lambda_\delta(u) = (1+\kappa_\delta)\, G_\delta(u) \tag{3.55}$$

και

$$\theta_\delta(y) = (1+\kappa_\delta)\, f_{2,\delta}(y\,|\,0)$$

η οποία είναι μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. ■

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $m_T(u)$ και επομένως η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ είναι η ουρά μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Πρόταση 3.4 *Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας* $m_T(u)$ *ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$m_T(u) = \int_0^u m_T(u-y)\, f_{2,\delta}(y\,|\,0)\, dy + \int_u^\infty f_{2,\delta}(y\,|\,0)\, dy$$

$$= \frac{1}{1+\kappa_\delta}\int_0^u m_T(u-y)\,\theta_\delta(y)\, dy + \frac{1}{1+\kappa_\delta}\,\overline{\Theta}_\delta(u), \quad u \ge 0 \tag{3.56}$$

η οποία έχει την ακόλουθη σύνθετη γεωμετρική αναπαράσταση:

$$m_T(u) = \frac{\kappa_\delta}{1+\kappa_\delta}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\kappa_\delta}\right)^j \overline{\Theta}_\delta^{*j}(u), \quad u \ge 0$$

όπου $\overline{\Theta}_\delta(u) = \int_u^\infty \theta_\delta(y)\, dy$ *και* $\overline{\Theta}_\delta^{*j}(u)$ *είναι η* j*-οστή συνέλιξη της συνάρτησης επιβίωσης* $\overline{\Theta}_\delta(u)$. ■

Απόδειξη. Για $w(x_1, x_2) = 1$ από την εξίσωση (3.19) προκύπτει ότι:

$$\gamma_1(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)\, f_X(x)\, dx = \int_u^\infty f_X(x)\, dx = T_0 f_X(u)$$

και

$$\gamma_2(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)\, h(x)\, dx = \int_u^\infty h(x)\, dx = T_0 h(u)$$

διότι από τις ιδιότητες των τελεστών Dickson –Hipp γνωρίζουμε ότι

$$T_r g(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(y-x)} g(y)\, dy \qquad \text{και} \qquad T_0 g(x) = \int_x^{\infty} g(y)\, dy$$

Επίσης, από την εξίσωση (3.51) συνεπάγεται ότι

$$G_\delta(u) = \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j} \int_u^{\infty} e^{-\rho_j (s-u)} \gamma_1(s)\, ds + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j} \int_u^{\infty} e^{-\rho_j (s-u)} \gamma_2(s)\, ds$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j} \int_u^{\infty} e^{-\rho_j (s-u)} T_0 f_X(s)\, ds + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j} \int_u^{\infty} e^{-\rho_j (s-u)} T_0 h(s)\, ds$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j}\, T_{\rho j}\, T_0 f_X(u) + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j}\, T_{\rho j}\, T_0 h(u)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.39) συνεπάγεται ότι

$$G_\delta(u) = \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j}\, T_{\rho j}\, T_0 f_X(u) + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j}\, T_{\rho j}\, T_0 h(u) = T_0\, f_{2,\delta}(u\,|\,0) = \int_u^{\infty} f_{2,\delta}(y\,|\,0)\, dy$$

και συνεπώς το αποτέλεσμα προκύπτει απευθείας εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.3. ∎

Πρόταση 3.5 *Η λύση* $m_\delta(u)$ *της εξίσωσης (3.54) μπορεί να γραφεί ως*

$$m_\delta(u) = -\frac{1}{\kappa_\delta} \int_0^{u} m_T(u-x)\, d\Lambda_\delta(x) + \frac{1}{\kappa_\delta} \Lambda_\delta(u) - \frac{1}{\kappa_\delta} \Lambda_\delta(0)\, m_T(u)\,. \qquad (3.57)$$

∎

3.9. Προεξοφλημένες κατανομές των $U(T-)$ και $|U(T)|$

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε τις από κοινού και τις περιθώριες κατανομές του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$ και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$ χρησιμοποιώντας την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής και την Πρόταση 3.5.. Αρχικά, θα υπολογίσουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-)$ και $|U(T)|$, έστω ότι θα τη συμβολίζουμε με $F_\delta(x,y\,|\,u)$, δεδομένου ότι $U(0)=0$. Μπορούμε να εξάγουμε τη $F_\delta(x,y\,|\,u)$ από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_\delta(u)$ θεωρώντας ότι $w(x_1,x_2)=I(x_1\le x, x_2\le y)$ για κάθε x και y σταθερό.

Όπως οι Lin και Willmot (1999), Tsai και Sun (2004) και Tsai (2005) ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις κατανομής

$$\Gamma_{i.j}(y)=1-\overline{\Gamma}_{i.j}(y),\ i=1,2,\ j=1,2,\ldots,3n-1$$

με

$$\Gamma_{1,\delta}(y)=\frac{\int_0^y T_{\rho j} f_X(t)\,dt}{E_{1,j}} \quad \text{και} \quad \Gamma_{2,\delta}(y)=\frac{\int_0^y T_{\rho j} h(t)\,dt}{E_{2,j}} \tag{3.58}$$

όπου

$$E_{1,\delta}=\int_0^\infty T_{\rho j} f_X(t)\,dt \qquad \text{και} \qquad E_{2,\delta}=\int_0^\infty T_{\rho j} h(t)\,dt\,.$$

Εφόσον $\overline{F}(x)$ είναι μία συνάρτηση επιβίωσης, από την Εξίσωση (2.19) των Lin και Willmot (1999) (Βλ. επίσης Εξίσωση 1 , Tsai (2005)) συνεπάγεται ότι

$$\overline{\Gamma}_{1,j}(y)=\frac{\int_y^\infty e^{-\rho j(x-y)}\,\overline{F}_X(x)\,dx}{E_{1,j}},\ j=1,2,\ldots 3n-1.$$

Ακόμα, έστω ότι $\overline{H}(y)=\int_y^\infty h(t)\,dt$. Επομένως,

$$\overline{\Gamma}_{2,j}(y)=\frac{\overline{H}(y)-e^{\rho_j y}\int_y^\infty e^{-\rho j\,x}\,h(x)\,dx}{\rho_j\,E_{2,j}}=\frac{e^{\rho_j y}\lim_{x\to+\infty} e^{-\rho j\,x}\,\overline{H}(x)\ +\rho_j\int_y^\infty e^{-\rho j\,(x-y)}\,\overline{H}(x)\,dx}{\rho_j\,E_{2,j}}$$

$$=\frac{\int_y^\infty e^{-\rho j\,(x-y)}\,\overline{H}(x)\,dx}{E_{2,j}},\ j=1,2,\ldots,3n-1$$

εφόσον από τον ορισμό της $h(x)$ συνεπάγεται ότι $\overline{H}(x) = -F_X(x)\,\overline{F}_X(x)$ και επομένως $\lim_{x\to\infty} e^{-\rho j\, x}\ \overline{H}(x) = 0$ για $j = 1,2,\ldots,3n-1$.

Επιπλέον, από τις εξισώσεις (3.39) και (3.58) έχουμε

$$\overline{\Theta}_\delta(y) = \int_y^\infty \theta_\delta(t)\,dt = \int_y^\infty \left(1+\kappa_\delta\right) f_{2,\delta}(t\,|\,0)\,dt = \left(1+\kappa_\delta\right)\int_y^\infty f_{2,\delta}(t\,|\,0)\,dt$$

$$= \left(1+\kappa_\delta\right)\left[\int_y^\infty \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j}\, T_{\rho_j} f_X(t)\,dt \;+ \int_y^\infty \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j}\, T_{\rho_j} h(t)\,dt\right]$$

$$= \left(1+\kappa_\delta\right)\left[\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j} \int_y^\infty T_{\rho_j} f_X(t)\,dt + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j} \int_y^\infty T_{\rho_j} h(t)\,dt\right]$$

$$= \left(1+\kappa_\delta\right)\left[\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1j}\, E_{1,j}\overline{\Gamma}_{1,j}(y) + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2j} E_{2,j}\overline{\Gamma}_{2,j}(y)\right]$$

$$= \left(1+\kappa_\delta\right)\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3n-1} b_{i,j}\, E_{i,j}\, \overline{\Gamma}_{i,j}(y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j}\, \overline{\Gamma}_{i,j}(y) \qquad (3.59)$$

όπου

$$w_{i,j} = \left(1+\kappa_\delta\right) b_{i,j}\, E_{i,j},\ i = 1,2,\ j = 1,2,\ldots 3n-1.$$

Σημειώνεται ότι

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j} = \left(1+\kappa_\delta\right)\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3n-1} b_{i,j}\, E_{i,j}$$

$$= \left(1+\kappa_\delta\right)\left[\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} \int_0^\infty T_{\rho j}\, f_X(t)\,dt + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} \int_0^\infty T_{\rho j}\, h(t)\,dt\right]$$

$$= \left(1+\kappa_\delta\right)\int_0^\infty f_{2,\delta}(t\,|\,0)\,dt = \left(1+\kappa_\delta\right) m_T(0) = \left(1+\kappa_\delta\right)\frac{1}{1+\kappa_\delta} = 1$$

επομένως προκύπτει ότι η $\Theta_\delta(y)$ είναι μία σταθμισμένη συνάρτηση κατανομής.

Τώρα, θεωρούμε ότι $w(x_1, x_2) = I(x_1 \le x, x_2 \le y)$ για κάθε x και y σταθερό.

Τότε

$$w(x_1, x_2 - x_1) = I(x_1 \le x, x_2 \le x_1 + y) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } x_1 \le x, x_2 \le x_1 + y \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$\gamma_1(x_1) = \int_{x_1}^{\infty} w(x_1, x_2 - x_1)\, f_X(x_2)\, dx_2 = \begin{cases} \int_{x_1}^{x_1+y} f_X(x_2)\, dx_2, & \text{εάν } x_1 \le x \\ 0, & \text{εάν } x_1 > x \end{cases}.$$

Εφόσον,

$$T_{\rho j}\gamma_1(u) = \int_u^{\infty} e^{-\rho j (x_1 - u)}\, \gamma_1(x_1)\, dx_1$$

συνεπάγεται ότι $T_{\rho j}\gamma_1(u) = 0$ εάν $0 < x \le u$ για $j = 1,2,\ldots,3n-1$ και εάν $0 \le u < x$ τότε για $j = 1,2,\ldots,3n-1$ έχουμε ότι

$$T_{\rho j}\gamma_1(u) = \int_u^{x} e^{-\rho j (x_1 - u)}\, \gamma_1(x_1)\, dx_1 = \int_u^{x} e^{-\rho j (x_1 - u)} \left(\int_{x_1}^{x_1+y} f_X(x_2)\, dx_2 \right) dx_1$$

$$= \int_u^{x} e^{-\rho j (x_1 - u)} \left[\overline{F}_X(x_1) - \overline{F}_X(x_1 + y) \right] dx_1$$

$$= \int_u^{x} e^{-\rho j (x_1 - u)}\, \overline{F}_X(x_1)\, dx_1 - \int_u^{x} e^{-\rho j (x_1 - u)}\, \overline{F}_X(x_1 + y)\, dx_1$$

$$= \int_u^{x} e^{-\rho j (x_1 - u)}\, \overline{F}_X(x_1)\, dx_1 - \int_{u+y}^{x+y} e^{-\rho j (z - u - y)}\, \overline{F}_X(z)\, dz$$

$$= \int_u^{\infty} e^{-\rho j (x_1 - u)}\, \overline{F}_X(x_1)\, dx_1 - \int_x^{\infty} e^{-\rho j (x_1 - u)}\, \overline{F}_X(x_1)\, dx_1$$

$$- \int_{u+y}^{\infty} e^{-\rho j (z - u - y)}\, \overline{F}_X(z)\, dz + \int_{x+y}^{\infty} e^{-\rho j (z - u - y)}\, \overline{F}_X(z)\, dz$$

$$= E_{1,j}\, \overline{\Gamma}_{1,j}(u) - \int_x^{\infty} e^{-\rho j (x_1 - u)}\, \overline{F}_X(x_1)\, dx_1 \; - \; E_{1,j}\, \overline{\Gamma}_{1,j}(u + y) + \int_{x+y}^{\infty} e^{-\rho j (z - u - y)}\, \overline{F}_X(z)\, dz$$

$$= E_{1,j}\ \overline{\Gamma}_{1,j}(u)\ -\ e^{-\rho j\,(x-u)}\int_x^{\infty} e^{-\rho j\,(x_1-x)}\ \overline{F}_X(x_1)\,dx_1$$

$$-\ E_{1,j}\ \overline{\Gamma}_{1,j}(u+y) +\ e^{-\rho j\,(x-u)}\int_{x+y}^{\infty} e^{-\rho j\,(z-x-y)}\ \overline{F}_X(z)\,dz$$

$$= E_{1,j}\ \overline{\Gamma}_{1,j}(u)\ -\ e^{-\rho j\,(x-u)}\ E_{1,j}\ \overline{\Gamma}_{1,j}(x) -\ E_{1,j}\ \overline{\Gamma}_{1,j}(u+y) +\ e^{-\rho j\,(x-u)} E_{1,j}\ \overline{\Gamma}_{1,j}(x+y)$$

$$= E_{1,j}\left[\overline{\Gamma}_{1,j}(u) - \overline{\Gamma}_{1,j}(u+y)\right] - E_{1,j}\ e^{-\rho j\,(x-u)}\left[\overline{\Gamma}_{1,j}(x) - \overline{\Gamma}_{1,j}(x+y)\right]$$

και ομοίως για $j = 1,2,\ldots,3n-1$ συνεπάγεται ότι $T_{\rho j}\gamma_2(u) = 0$ εάν $0 < x \le u$ και

$$T_{\rho j}\gamma_2(u) = E_{2,j}\left[\overline{\Gamma}_{2,j}(u) - \overline{\Gamma}_{2,j}(u+y)\right] - E_{2,j}\ e^{-\rho j\,(x-u)}\left[\overline{\Gamma}_{2,j}(x) - \overline{\Gamma}_{2,j}(x+y)\right]$$

για $j = 1,2,\ldots,3n-1$ εάν $0 \le u < x$.

Επομένως, από τις εξισώσεις (3.51)και (3.55) συνεπάγεται ότι

$$\Lambda_\delta(u) = (1+\kappa_\delta)\,G_\delta(u) = (1+\kappa_\delta)\sum_{i=1}^{2}\ \sum_{j=1}^{3n-1} b_{ij}\ T_{\rho j}\gamma_i(u)$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\ \sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j}\ \left\{\overline{\Gamma}_{i,j}(u) - \overline{\Gamma}_{i,j}(u+y) - e^{-\rho j\,(x-u)}\left[\overline{\Gamma}_{i,j}(x) - \overline{\Gamma}_{i,j}(x+y)\right]\right\}$$

και επομένως χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.59) προκύπτει ότι

$$\Lambda_\delta(u) = \overline{\Theta}_\delta(u) - \overline{\Theta}_\delta(u+y) - \sum_{i=1}^{2}\ \sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j}\ e^{-\rho j\,(x-u)}\left[\overline{\Gamma}_{i,j}(x) - \overline{\Gamma}_{i,j}(x+y)\right] \qquad (3.60)$$

και για $u > 0$

$$d\Lambda_\delta(u) = d\Theta_\delta(u+y) - d\Theta_\delta(u) - \sum_{i=1}^{2}\ \sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j}\ \rho_j\ e^{-\rho j\,(x-u)}\left[\overline{\Gamma}_{i,j}(x) - \overline{\Gamma}_{i,j}(x+y)\right]du \qquad (3.61)$$

Αφού για $w(x_1,x_2) = I(x_1 \le x, x_2 \le y)$ η εξίσωση (3.57) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$F_\delta(x,y\,|\,u) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\kappa_\delta}\displaystyle\int_0^u m_T(u-t)\,d\Lambda_\delta(t)\ + \dfrac{1}{\kappa_\delta}\Lambda_\delta(u) - \dfrac{1}{\kappa_\delta}\Lambda_\delta(0)\,m_T(u), & 0 \le u < x \\ -\dfrac{1}{\kappa_\delta}\displaystyle\int_0^x m_T(u-t)\,d\Lambda_\delta(t)\ - \dfrac{1}{\kappa_\delta}\Lambda_\delta(0)\,m_T(u), & 0 < x \le u \end{cases}$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τα $\Lambda_{\delta}(u)$ και $d\Lambda_{\delta}(u)$ από τις εξισώσεις (3.60) και (3.61) αντίστοιχα, και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.56) παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση, η οποία δίνει την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-)$ και $|U(T)|$, από την οποία θέτοντας $u=0$ παίρνουμε την $F_{\delta}(x,y\,|\,0)$ χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.56) και ότι $m_T(0)=1/(1+\kappa_{\delta})$.

Πρόταση 3.6. *Έστω* $\Psi_j(u)=m_T(u)+\rho_j\int_0^u e^{\rho_j t}\, m_T(u-t)\,dt$, $j=1,2,\ldots,3n-1$. *Τότε η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των* $U(T-)$ *και* $|U(T)|$ *δίνεται από την ακόλουθη σχέση*

$$F_{\delta}(x,y\,|\,u)=\begin{cases} \dfrac{1+\kappa_{\delta}}{\kappa_{\delta}}\left[m_T(u)-m_T(u+y)\right]-\dfrac{1}{\kappa_{\delta}}\Theta_{\delta}(y)m_T(u)+\dfrac{1}{\kappa_{\delta}}\displaystyle\int_0^y m_T(u+y-t)\,d\Theta_{\delta}(t) \\ +\dfrac{1}{\kappa_{\delta}}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j}e^{-\rho_j x}\left[\overline{\Gamma}_{i,j}(x)-\overline{\Gamma}_{i,j}(x+y)\right] \\ \times\left[\Psi_j(u)-e^{-\rho_j u}\right],\quad 0\le u<x \\ \dfrac{1}{\kappa_{\delta}}\displaystyle\int_0^x m_T(u-t)\left[d\Theta_{\delta}(t)-d\Theta_{\delta}(y+t)\right]-\dfrac{1}{\kappa_{\delta}}\Theta_{\delta}(y)m_T(u) \\ +\dfrac{1}{\kappa_{\delta}}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j}e^{-\rho_j x}\left[\overline{\Gamma}_{i,j}(x)-\overline{\Gamma}_{i,j}(x+y)\right] \\ \times\left\{\Psi_j(u)+e^{\rho_j x}\left[m_T(u-x)-\Psi_j(u-x)\right]\right\},\ 0<x\le u \end{cases}$$

με

$$F_{\delta}(x,y\,|\,0)=\frac{1}{1+\kappa_{\delta}}\left\{\Theta_{\delta}(y)-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j}\, e^{-\rho_j x}\left[\overline{\Gamma}_{i,j}(x)-\overline{\Gamma}_{i,j}(x+y)\right]\right\}. \qquad \blacksquare$$

Οι περιθώριες προεξοφλημένες συναρτήσεις κατανομής $F_{1,\delta}(x\,|\,u)$ του $U(T-)$ και $F_{2,\delta}(y\,|\,u)$ του $|U(T)|$ δεδομένου ότι $U(0)=u$ εξάγονται άμεσα θεωρώντας ότι $y\to\infty$ και $x\to\infty$, αντίστοιχα. Η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. $f_{\delta}(x,y\,|\,u)$ των $U(T-)$ και $|U(T)|$ δεδομένου ότι $U(0)=u$ εξάγεται άμεσα από την ακόλουθη σχέση

$$f_{\delta}(x,y\,|\,u)=\frac{\partial^2 F_{\delta}(x,y\,|\,u)}{\partial x\partial y},$$

και δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.7. *Η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π.* $f_\delta(x,y\,|\,u)$ *των* $U(T-)$ *και* $|U(T)|$ *γράφεται στην ακόλουθη μορφή*

$$f_\delta(x,y\,|\,u)=\begin{cases}\dfrac{1+\kappa_\delta}{\kappa_\delta}\displaystyle\sum_{j=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}f_X(x+y)+b_{2,j}h(x+y)\right]e^{-\rho_j x}\left[e^{\rho_j u}-\Psi_j(u)\right], 0\le u<x\\ \dfrac{1+\kappa_\delta}{\kappa_\delta}\displaystyle\sum_{j=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}f_X(x+y)+b_{2,j}h(x+y)\right]\left[\Psi_j(u-x)-e^{-\rho_j x}\Psi_j(u)\right], 0<x\le u\end{cases}$$

με

$$f_\delta(x,y\,|\,0)=\sum_{j=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}f_X(x+y)+b_{2,j}h(x+y)\right]e^{-\rho_j x}. \qquad \blacksquare$$

Η περιθώρια προεξοφλημένη σ.π.π. $f_{1,\delta}(x\,|\,u)$ του $U(T-)$ δεδομένου ότι $U(0)=u$ εξάγεται άμεσα από τη σχέση $f_{1,\delta}(x\,|\,u)=\int_0^\infty f_\delta(x,y\,|\,u)\,dy$ και δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.8. *Η προεξοφλημένη σ.π.π.* $f_\delta(x\,|\,u)$ *του* $U(T-)$ *μπορεί να γραφεί ως εξής:*

$$f_{1,\delta}(x\,|\,u)=\begin{cases}\dfrac{1+\kappa_\delta}{\kappa_\delta}\displaystyle\sum_{j=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}-b_{2,j}F_X(x)\right]\overline{F}_X(x)\,e^{-\rho_j x}\left[e^{\rho_j u}-\Psi_j(u)\right], 0\le u<x\\ \dfrac{1+\kappa_\delta}{\kappa_\delta}\displaystyle\sum_{j=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}-b_{2,j}F_X(x)\right]\overline{F}_X(x)\left[\Psi_j(u-x)-e^{-\rho_j x}\Psi_j(u)\right], 0<x\le u\end{cases}$$

με

$$f_{1,\delta}(x\,|\,0)=\sum_{j=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}-b_{2,j}F_X(x)\right]\overline{F}_X(x)\,e^{-\rho_j x}. \qquad \blacksquare$$

Η περιθώρια προεξοφλημένη σ.π.π. $f_{2,\delta}(y\,|\,u)$ του $|U(T)|$ δίνεται από τη σχέση $f_{2,\delta}(y\,|\,u)=\int_0^\infty f_\delta(x,y\,|\,u)\,dx$. Για $\delta\to 0$ από τις προαναφερθείσες προτάσεις παίρνουμε τις από κοινού και περιθώριες συναρτήσεις και σ.π.π. των $U(T-)$ και $|U(T)|$.

3.10. Αποτελέσματα για εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις

Στην παρούσα παράγραφο, υποθέτουμε ότι η τ.μ. X που αναπαριστά το μέγεθος της ατομικής απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha > 0$, οπότε έχουμε

$f_X(x) = ae^{-ax},\ a > 0, x > 0$ και $\hat{f}_X(s) = \dfrac{a}{a+s}$.

Στις Προτάσεις 3.6-3.8 της προηγούμενης παραγράφου είδαμε πως για τον υπολογισμό της προεξοφλημένης από κοινού συνάρτησης κατανομής των $U(T-)$ και $|U(T)|$ αλλά και των αντίστοιχων περιθώριων κατανομών είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την $m_T(u)$ οπότε και θα προβούμε στον υπολογισμό της. Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της σχέσης (3.56) προκύπτει ότι

$$\hat{m}_T(s) = \frac{m_T(0) - \hat{f}_{2,\delta}(s)}{s\left[1 - \hat{f}_{2,\delta}(s)\right]} = \frac{\left[1 - \hat{f}_{2,\delta}(s)\right] - \left[1 - m_T(0)\right]}{s\left[1 - \hat{f}_{2,\delta}(s)\right]} \tag{3.62}$$

Από την εξίσωση (3.50) συνεπάγεται ότι

$$1 - \hat{f}_{2,\delta}(s) = 1 - T_s\, T_{\rho 1} \cdots T_{\rho 3n-1} h_{2,\delta}(0) \tag{3.63}$$

και επομένως αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.49) και (3.63) στην εξίσωση (3.62) προκύπτει ότι

$$\hat{m}_T(s) = \frac{\left[\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)\right] - \left[1 - m_T(0)\right]\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i - s)}{s\left[\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)\right]} \tag{3.64}$$

Για $\hat{f}_X(s) = \dfrac{a}{a+s}$ και $\hat{h}(s) = -\dfrac{as}{(s+a)(s+2a)}$ η εξίσωση (3.28) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}\hat{h}_{2,\delta}(s) = {} & \frac{\lambda^n}{c^n}\frac{a}{a+s}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1} - \theta\frac{\lambda^n}{c^n}\frac{as}{(s+a)(s+2a)} \\ & \times\left[2\left(\frac{\delta+\lambda}{c} - s\right)^n \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{n-i-1} - \left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1}\right]\end{aligned} \tag{3.65}$$

οπότε από τις σχέσεις (3.27) και (3.65) προκύπτει

$$\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)=\frac{Q_{3n+1,\delta}(s)}{c^{3n-1}(s+a)(s+2a)} \tag{3.66}$$

όπου

$$Q_{3n+1,\delta}(s)=(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}(\delta+\lambda-cs)^n(s+a)(s+2a)-a\lambda^n(s+2a)(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}$$

$$-a\lambda^n\theta\, s\left[\,2\,(\delta+\lambda-cs)^n\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i\binom{n+i-1}{i}(\delta+2\lambda-cs)^{n-i-1}-(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}\right].$$

Το $Q_{3n+1,\delta}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $3n+1$ με το μεγιστοβάθμιο όρο να έχει συντελεστή $(-c)^{3n-1}$ και η εξίσωση $Q_{3n+1,\delta}(s)=0$ έχει $3n+1$ ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο. Εφόσον, $\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)=0$ έχουμε δει ότι είναι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, από την Πρόταση 3.1 και την σχέση (3.66) συνεπάγεται ότι η εξίσωση $Q_{3n+1,\delta}(s)=0$ έχει $3n-1$ ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος, τις συμβολίζουμε με $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{3n-1}$ και δύο ρίζες, έστω ότι θα τις συμβολίζουμε $-R_i=-R_i(\delta)$, όπου $\mathrm{Re}(R_i)>0, i=1,2$.

Συνεπώς, η $Q_{3n+1,\delta}(s)$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$Q_{3n+1,\delta}(s)=(-c)^{3n-1}(s+R_1)(s+R_2)\prod_{i=1}^{3n-1}(s-\rho_i)$$

$$=c^{3n-1}(s+R_1)(s+R_2)\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i-s) \tag{3.67}$$

Οπότε, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.64),(3.66) και (3.67) έχουμε

$$\hat{m}_T(s)=\frac{(s+R_1)(s+R_2)-[1-m_T(0)](s+a)(s+2a)}{s\,(s+R_1)(s+R_2)}. \tag{3.68}$$

Εφόσον, $\hat{m}_T(s)<\infty$ για $s\geq 0$, ο αριθμητής της εξίσωσης (3.68) πρέπει να μηδενίζεται για $s=0$, οπότε έχουμε

$$1-m_T(0)=\frac{R_1R_2}{2a^2}$$

και επομένως η εξίσωση (3.68) παίρνει τη μορφή

$$\hat{m}_T(s) = \frac{R_1 + R_2 + \left(1 - \frac{R_1 R_2}{2\alpha^2}\right)s - \frac{3R_1 R_2}{2\alpha}}{(s + R_1)(s + R_2)}$$

Υποθέτοντας ότι οι ρίζες R_1, R_2 είναι διακριτές συνεπάγεται ότι

$$\hat{m}_T(s) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\zeta_{j,\delta}}{s + R_j},$$

όπου

$$\zeta_{1,\delta} = \frac{R_2}{R_2 - R_1}\left(1 - \frac{3R_1}{2a} + \frac{R_1^2}{2a^2}\right) \text{ και } \zeta_{2,\delta} = \frac{R_1}{R_2 - R_1}\left(1 - \frac{3R_2}{2a} + \frac{R_2^2}{2a^2}\right).$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στη σχέση που προέκυψε παραπάνω προκύπτει ότι

$$m_T(u) = \zeta_{1,\delta}\, e^{-R_1 u} + \zeta_{2,\delta}\, e^{-R_2 u}, u \geq 0. \tag{3.69}$$

Για $\delta \to 0$ από τη σχέση (3.69) προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας. Για να βρούμε την προεξοφλημένη από κοινού κατανομή και τις περιθώριες κατανομές των $U(T-)$ και $|U(T)|$ είναι απαραίτητο να βρούμε τη $\Psi_j(u)$ όπως αυτή ορίστηκε στην Πρόταση 3.6. Επομένως, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.69) η $\Psi_j(u)$ υπολογίζεται ως εξής

$$\Psi_j(u) = \frac{\zeta_{1,\delta}\, R_1}{R_1 + \rho_j}\, e^{-R_1 u} + \frac{\zeta_{2,\delta}\, R_2}{R_2 + \rho_j}\, e^{-R_2 u} + \left(\frac{\zeta_{1,\delta}}{R_1 + \rho_j} + \frac{\zeta_{2,\delta}}{R_2 + \rho_j}\right)\rho_j e^{\rho_j u}.$$

3.11. Αριθμητικό παράδειγμα

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την επίδραση της παραμέτρου εξάρτησης θ στην πιθανότητα χρεοκοπίας και το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Για το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με εξάρτηση μέσω της σύζευξης FGM υποθέτουμε ότι η τ.μ. $W \sim$Erlang(2,2), οπότε $f_W(t) = 4te^{-2t}$ και επομένως ο αναμενόμενος αριθμός των απαιτήσεων στο διάστημα $[0,t]$ είναι $E[N(t)] = t - \frac{1}{4}\left(1-e^{-4t}\right)$. Θεωρώντας ότι ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου είναι $c = 1.5$ και για $\delta = 0$ από την εξίσωση (3.69) παίρνουμε μία αναλυτική έκφραση για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού $u \geq 0$. Χρησιμοποιώντας το Mathematica, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου θ, υπολογίσθηκαν οι πιθανότητες χρεοκοπίας ως εξής

- για $\theta = -1$

$$\psi(u) = 0.6416701672\ e^{-0.3487732254u} - 0.0169012248\ e^{-2.1517194000u}$$

- για $\theta = -0.5$

$$\psi(u) = 0.6111640019\ e^{-0.3833132642u} - 0.0096651749\ e^{-2.0792454120u}$$

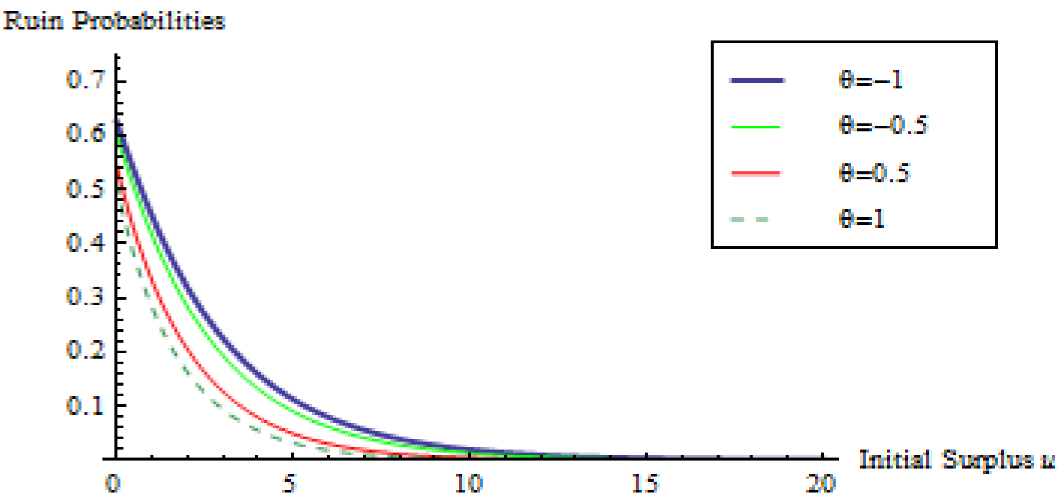
- για $\theta = 0.5$

$$\psi(u) = 0.5314436215\ e^{-0.4762087115u} + 0.01332254042\ e^{-1.911908905u}$$

- για $\theta = 1$

$$\psi(u) = 0.4774717870\ e^{-0.5409429369u} + 0.03255482730\ e^{-1.811552947u}.$$

Στο γράφημα που ακολουθεί αναπαριστώνται οι τιμές των πιθανοτήτων χρεοκοπίας όπως αυτές υπολογίσθηκαν για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου θ.



Γράφημα 1. Πιθανότητες χρεοκοπίας.

Όπως μπορούμε να δούμε στο Γράφημα 1 υπάρχει σαφής εξάρτηση μεταξύ της παραμέτρου θ και της πιθανότητας χρεοκοπίας, και μάλιστα όσο μεγαλώνει η παράμετρος θ τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας. Πράγματι, αν για παράδειγμα έχουμε θετική σχέση εξάρτησης, η πιθανότητα να εμφανιστεί μεγάλη απαίτηση αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο που μεσολαβεί από την τελευταία εμφάνιση μίας μεγάλης απαίτησης.

Στη συνέχεια, για $\delta = 0.05$ από την εξίσωση (3.69) παίρνουμε μία αναλυτική έκφραση για το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $m_T(u)$ συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού $u \geq 0$. Χρησιμοποιώντας το Mathematica, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου θ, υπολογίσθηκαν οι μετασχηματισμοί Laplace ως εξής

- για $\theta = -1$

$$m_T(u) = 0.588107070542046 \; e^{-0.4015607208u} - 0.0198661651519552 8\; e^{-2.150382538u}$$

- για $\theta = -0.5$

$$m_T(u) = 0.558265539590616 \; e^{-0.4358563215u} - 0.0112379309905072 \; e^{-2.078539964u}$$

- για $\theta = 0$

$$m_T(u) = 0.5230305556 \; e^{-0.476969444u}$$

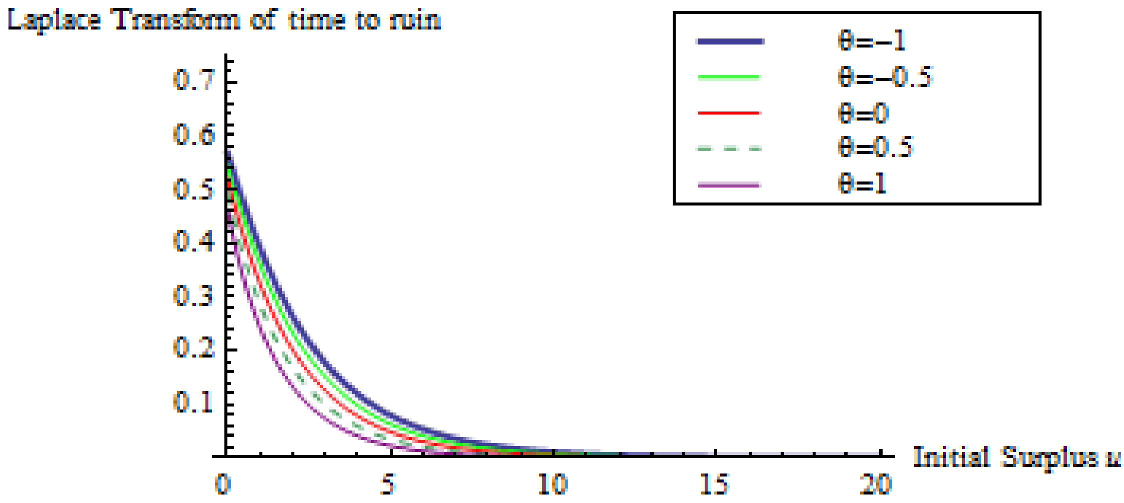
- για $\theta = 0.5$

$$m_T(u) = 0.480589531459186\ e^{-0.5272636612u} + 0.0151619535823271\ e^{-1.912699668u}$$

- για $\theta = 1$

$$m_T(u) = 0.427916113486677\ e^{-0.5905527687u} + 0.0366819441278372\ e^{-1.813223037u}.$$

Στο γράφημα που ακολουθεί αναπαριστώνται οι τιμές του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας όπως αυτές υπολογίσθηκαν για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου θ.



Γράφημα 2. Μετασχηματισμοί Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Όπως μπορούμε να δούμε στο Γράφημα 2 υπάρχει σαφής εξάρτηση μεταξύ της παραμέτρου θ και του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, και μάλιστα όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της παραμέτρου θ τόσο μικρότερη είναι η τιμή του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ FGM ΚΑΙ ΥΠΟ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ

4.1. Περιγραφή του μοντέλου

Το Κεφάλαιο 4 αποτελεί ειδική περίπτωση του Κεφαλαίου 3 καθώς εδώ εξετάζουμε επίσης την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου με εξάρτηση μέσω της σύζευξης FGM αλλά εφαρμόζουμε μία επιπλέον υπόθεση, την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού ορίου μερίσματος.

Υπό την ύπαρξη στρατηγικής πληρωμής μερίσματος, στη διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t),\ t \geq 0\}$ εφαρμόζεται ένα σταθερό φράγμα μερίσματος $b > 0$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, κάθε φορά που το πλεόνασμα φθάσει στο επίπεδο του φράγματος $b \geq u$, μερίσματα καταβάλλονται συνεχώς στους δικαιούχους μέχρι την εμφάνιση νέας απαίτησης. Στην περίπτωση όπου το πλεόνασμα δεν φθάσει στο επίπεδο b δεν πληρώνονται μερίσματα στους δικαιούχους. Δηλώνοντας την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος, με την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος, με $\{U_b(t),\ t \geq 0\}$ συνεπάγεται ότι το $U_b(t)$ δεν μπορεί να υπερβεί το φράγμα b.

Επίσης, με $D_b(t) = c\int_0^t I(U_b(t) > b)dt$ δηλώνουμε τα συνολικά μη-προεξοφλημένα μερίσματα που καταβάλλονται μέχρι τη χρονική στιγμή t, υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος με επίπεδο φράγματος b. Τότε, η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος δίνεται από τη σχέση $U_b(t) = U(t) - D_b(t)$ και ικανοποιεί την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dU_b(t) = \begin{cases} -dS(t), & U_b(t) = b \\ c\,dt - dS(t), & 0 \leq U_b(t) < b \end{cases}. \tag{4.1}$$

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια της παρούσας εργασίας, δύο σημαντικά μέτρα που σχετίζονται με τη χρεοκοπία και είναι μεγάλης σημασίας για τη διαδικασία πλεονάσματος (4.1) είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu καθώς και οι αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων. Στο παρόν κεφάλαιο στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις ποσότητες αυτές.

Έστω ότι θεωρούμε $T_b = \inf_{t \geq 0}\{t, U_b(t) < 0\}$ να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας για τη διαδικασία πλεονάσματος που δίνεται από την εξίσωση (4.1), δηλαδή T_b είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία η διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$ γίνεται για πρώτη φορά αρνητική.

4.2. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού φράγματος μερίσματος b δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$m_\delta(u;b) := E\left\{e^{-\delta T_b}\, w(U_b(T_b-), |U_b(T_b)|)\, I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u\right\}, \quad 0 \leq u < b \qquad (4.2)$$

όπου δ είναι η ένταση ανατοκισμού, $w: [0,\infty) \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ μία διδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ που ονομάζεται συνάρτηση ποινής (penalty function), $U_b(T_b-)$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, $|U_b(T_b)|$ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και $I(T_b < \infty)$ η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου εμφάνισης χρεοκοπίας. Για την δείκτρια συνάρτηση ισχύει το εξής:

$$I(T_b < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{συμβαίνει χρεοκοπία} \\ 0, & \text{δεν συμβαίνει χρεοκοπία} \end{cases}.$$

Σημείωση 4.1. Για $\delta = 0, w(x,y) = 1$, η $m_\delta(u;b)$ ανάγεται στην πιθανότητα χρεοκοπίας, $\psi_b(u) := E(\,I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u) = P_r(T_b < \infty \,|\, U_b(0) = u)$ και για $\delta > 0, w(x,y) = 1$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T_b στο σημείο δ ή η προεξοφλημένη πιθανότητα χρεοκοπίας η οποία συμβολίζεται με $m_{T_b}(u)$ όπου

$$m_{T_b}(u) := E\left\{e^{-\delta T_b}\, I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u\right\}, \quad 0 \leq u \leq b. \qquad (4.3)$$

Για επιπλέον μέτρα χρεοκοπίας, συμπεριλαμβανομένης της συνάρτησης των Gerber-Shiu $m_\delta(u;b)$ βλ. Lin et al (2003). Στην περίπτωση όπου $b \to \infty$, το μοντέλο (4.1) ανάγεται στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου απουσία στρατηγικής σταθερού ορίου μερίσματος για

Erlang(n) ενδιάμεσους χρόνους και με εξαρτημένη δομή βασισμένη στη σύζευξη FGM. Η μελέτη της περίπτωσης αυτής έγινε στο Κεφάλαιο 3.

Υποθέτουμε επίσης, για $\delta > 0$ να δηλώνει την ένταση ανατοκισμού για την προεξόφληση των μερισμάτων και $D_{u,b}$ να δηλώνει την παρούσα αξία όλων των καταβληθέντων μερισμάτων στους δικαιούχους μερίσματος μέχρι τη στιγμή χρεοκοπίας T_b. Τότε

$$D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} \, dD_t(t) \, .$$

Θα συμβολίζουμε με $V(u;b)$ την αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία όλων των καταβληθέντων μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας T_b, οπότε

$$V(u;b) = E\left[D_{u,b} \mid U_b(0) = u\right], \quad 0 \le u \le b \, . \tag{4.4}$$

Πράγματι,

$$0 \le V(u;b) \le c \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \, dt = \frac{c}{\delta} \quad \text{και} \quad \lim_{u \to \infty} V(u;b) = \frac{c}{\delta}$$

που συνεπάγεται την ύπαρξη της $V(u;b)$.

Στη συνέχεια, για την εξαγωγή των επιθυμητών αποτελεσμάτων θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (4.2) και (4.4).

4.3. Βασικά αποτελέσματα

Στην παρούσα παράγραφο θα αποδείξουμε δύο χρήσιμα Λήμματα τα οποία θα χρειαστούμε στη συνεχεία για την εξαγωγή των ζητούμενων αποτελεσμάτων.

Σημείωση 4.2. Θα συμβολίζουμε με I και D τον ταυτοτικό και διαφορικό τελεστή αντίστοιχα. Επιπλέον, θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $D^k(\cdot)$ και $(\cdot)^k$.

Λήμμα 4.1. *Έστω* $A_m(u)$ *και* $\varepsilon(u),\ u \geq 0$ *να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις που πληρούν τις ακόλουθες αναδρομικο-διαφορικές εξισώσεις*

$$A'_m(u) = a\, A_m(u) - m\, A_{m-1}(u), \quad m = 1,2,\ldots \tag{4.5}$$

$$A'_0(u) = a\, A_0(u) - \varepsilon(u) \tag{4.6}$$

Τότε, συνεπάγεται ότι

$$(a\, I - D)^{m+1} A_m(u) = m\,!\, \varepsilon(u), \quad m = 0,1,\ldots \tag{4.7}$$

■

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.5) και εφαρμόζοντας τον τελεστή $(a\, I - D)^{m+1}$ στην συνάρτηση $A_m(u)$,παίρνουμε

$$\begin{aligned}
(a\, I - D)^{m+1} A_m(u) &= (a\, I - D)^m \left[(a\, I - D)\, A_m(u)\right] \\
&= (a\, I - D)^m\ a\, A_m(u) - (a\, I - D)^m A'_m(u) \\
&= (a\, I - D)^m \left[a\, A_m(u) - A'_m(u)\right] \\
&= (a\, I - D)^m \left[a\, A_m(u) - a\, A_m(u) + m\, A_{m-1}(u)\ \right] \\
&= (a\, I - D)^m\ m\, A_{m-1}(u)
\end{aligned}$$

και εφαρμόζοντας διαδοχικά το αποτέλεσμα , λόγω της εξίσωσης (4.6), έχουμε

$$\begin{aligned}
(a\, I - D)^{m+1} A_m(u) &= m!\, (a\, I - D)\, A_0(u) \\
&= a\, m!\, A_0(u) - m!\, A'_0(u) \\
&= m!\left(a\, A_0(u) - A'_0(u)\right) \\
&= m!\, \varepsilon(u)
\end{aligned}$$

■

Λήμμα 4.2 *Έστω* $A_m(u), u \geq 0$ *να είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την αναδρομική διαφορική εξίσωση (4.5). Τότε, για την* k *-οστή τάξης παράγωγο της συνάρτησης* $A_m(u)$*, για* $k = 1,2,\ldots,m+1$ *δηλαδή για* $m \geq k-1$ *έχουμε*

$$A_m^{(k)}(u) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} \prod_{x=0}^{j-1} (m-x)\, a^{k-1-j}\ A'_{m-j}(u) \tag{4.8}$$

και για $k = m + r + 1,\ r \geq 0$ *έχουμε*

$$A_m^{(m+r+1)}(u) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m+r}{j} \prod_{x=0}^{j-1} (m-x) a^{m+r-j} A'_{m-j}(u)$$

$$+(-1)^{m+1} \sum_{j=1}^{r} \frac{(m+r-j)!}{(r-j)!} a^{r-j} \varepsilon^{(j)}(u) \tag{4.9}$$

■

Για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος, αρχικά θα υπολογίσουμε μία μη-ομογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την $m_\delta(u;b)$ και έπειτα θα προσδιορίσουμε τις οριακές συνθήκες για την εξίσωση αυτή. Στη συνέχεια, θα βρούμε μία λύση για τη μη-ομογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωση με οριακές συνθήκες, η οποία θα μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα μίας συγκεκριμένης λύσης, συγκεκριμένα τη συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_\delta(u;\infty)$ σε ένα περιβάλλον χωρίς την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος και ενός συνδυασμού από γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης.

4.4. Η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την συνάρτηση των Gerber-Shiu

Αρχικά, θα χρειαστεί να ορίσουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Για $u \geq 0$, έχουμε

$$\gamma_1(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)\, f_X(x)\, dx\,, \qquad \gamma_2(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)\, h(x)\, dx \tag{4.10}$$

$$\sigma_{1,\delta}(u;b) = \int_0^u m_\delta(u-x;b)\, f_X(x) dx + \gamma_1(u)\,,\ \ \sigma_{2,\delta}(u;b) = \int_0^u m_\delta(u-x;b)\, h(x)\, dx + \gamma_2(u) \tag{4.11}$$

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο εμφάνισης και το ποσό της πρώτης απαίτησης και χρησιμοποιώντας ανανεωτικά επιχειρήματα (βλ. επίσης Landriault (2008) και Cossette et al (2001)) για $0 \leq u \leq b$ παίρνουμε

$$m_\delta(u;b)=\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t}\left\{\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x;b)\, f_{X,W}(x,t)\,dx+\int_{u+ct}^{\infty} w(u+ct,x-u-ct)\, f_{X,W}(x,t)dx\right\}dt$$

$$+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\left\{\int_0^{b} m_\delta(b-x;b)\, f_{X,W}(x,t)\,dx+\int_{b}^{\infty} w(b,x-b)\, f_{X,W}(x,t)dx\right\}dt$$

$$=\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t}\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x;b)\, f_{X,W}(x,t)\,dxdt+\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t}\int_{u+ct}^{\infty} w(u+ct,x-u-ct)\, f_{X,W}(x,t)dxdt$$

$$+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\int_0^{b} m_\delta(b-x;b)\, f_{X,W}(x,t)\,dxdt+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\int_{b}^{\infty} w(b,x-b)\, f_{X,W}(x,t)dxdt$$

$$=\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t}\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x;b)\,\left[f_X(x)\, f_W(t)+\theta\, h(x)\, f_W(t)\left[2\overline{F}_W(t)-1\right]\right]dxdt$$

$$+\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t}\int_{u+ct}^{\infty} w(u+ct,x-u-ct)\,\left[f_X(x)\, f_W(t)+\theta\, h(x)\, f_W(t)\left[2\overline{F}_W(t)-1\right]\right]dxdt$$

$$+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\int_0^{b} m_\delta(b-x;b)\left[f_X(x)\, f_W(t)+\theta\, h(x)\, f_W(t)\left[2\overline{F}_W(t)-1\right]\right]dxdt$$

$$+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\int_{b}^{\infty} w(b,x-b)\left[f_X(x)\, f_W(t)+\theta\, h(x)\, f_W(t)\left[2\overline{F}_W(t)-1\right]\right]dxdt$$

$$=\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t}\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x;b)\, f_X(x)\, f_W(t)\,dxdt$$

$$+\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t}\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x;b)\,\theta\, h(x)\, f_W(t)\left[2\overline{F}_W(t)-1\right]\,dxdt$$

$$+\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t}\int_{u+ct}^{\infty} w(u+ct,x-u-ct)\,\theta\, h(x)\, f_W(t)\left[2\overline{F}_W(t)-1\right]dxdt$$

$$+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\int_0^{b} m_\delta(b-x;b) f_X(x)\, f_W(t)\;\; dxdt+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\int_0^{b} m_\delta(b-x;b)\theta\, h(x)\, f_W(t)\left[2\overline{F}_W(t)-1\right]dxdt$$

$$+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\int_{b}^{\infty} w(b,x-b) f_X(x)\, f_W(t)\;\; dxdt+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\int_{b}^{\infty} w(b,x-b)\theta\, h(x)\, f_W(t)\left[2\overline{F}_W(t)-1\right]\, dxdt$$

$$=\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t}\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x;b)\, f_X(x)\, f_W(t)\,dxdt$$

$$+2\theta\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t}\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x;b)\;h(x)\, f_W(t)\,\overline{F}_W(t)\;\;dxdt$$

$$
-\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t}\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x;b)\,\theta\, h(x)\, f_W(t)\;dxdt+\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t} f_W(t)\;\gamma_1(u+ct)\,dt
$$

$$
+2\theta\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t} f_W(t)\,\overline{F}_W(t)\;\gamma_2(u+ct)dt-\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t}\theta\, f_W(t)\;\gamma_2(u+ct)dt
$$

$$
+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\int_0^{b} m_\delta(b-x;b) f_X(x)\, f_W(t)\;dxdt+2\theta\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\int_0^{b} m_\delta(b-x;b) h(x)\, f_W(t)\overline{F}_W(t)\,dxdt
$$

$$
-\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\int_0^{b} m_\delta(b-x;b)\theta\, h(x)\, f_W(t)\,dxdt+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\; f_W(t)\,\gamma_1(b)\,dt
$$

$$
+2\theta\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\;\gamma_2(b) f_W(t)\,\overline{F}_W(t)\,dt-\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t}\;\gamma_2(b)\,\theta\, f_W(t)\;dt
$$

$$
=\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t} f_W(t)\left[\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x;b) f_X(x)\;dx+\;\gamma_1(u+ct)\;\right]dt
$$

$$
+2\theta\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t} f_W(t)\,\overline{F}_W(t)\left[\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x;b)\; h(x)\,dx+\gamma_2(u+ct)\right]dt
$$

$$
+2\theta\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t} f_W(t)\overline{F}_W(t)\left[\int_0^{b} m_\delta(b-x;b) h(x)\;dx+\gamma_2(b)\right]dt
$$

$$
+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t} f_W(t)\left[\int_0^{b} m_\delta(b-x;b) f_X(x)\,dx+\gamma_1(b)\right]dt
$$

$$
-\theta\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t} f_W(t)\left[\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-x;b) h(x)\,dx+\gamma_2(u+ct)\right]dt
$$

$$
-\theta\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t} f_W(t)\left[\int_0^{b} m_\delta(b-x;b) h(x)\,dx+\gamma_2(b)\right]dt
$$

$$
=\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t} f_W(t)\left[\sigma_{1,\delta}(u+ct;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(u+ct;b)\right]dt
$$

$$
+2\theta\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t} f_W(t)\,\overline{F}_W(t)\,\sigma_{2,\delta}(u+ct;b)dt\;+2\theta\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t} f_W(t)\overline{F}_W(t)\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\,dt
$$

$$
+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t} f_W(t)\left[\sigma_{1,\delta}(b;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\right]dt\,. \tag{4.12}
$$

Θέτοντας $y=u+ct$, η εξίσωση (4.12) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$m_\delta(u;b)=\int_u^b e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\left[\sigma_{1,\delta}(y;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(y;b)\right]\frac{1}{c}\,dy$$

$$+2\,\theta\int_u^b e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\overline{F}_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\sigma_{2,\delta}(y;b)\,\frac{1}{c}\,dy$$

$$+2\theta\int_b^\infty e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\overline{F}_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\sigma_{2,\delta}(b;b)\frac{1}{c}\,dy$$

$$+\int_b^\infty e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\left[\sigma_{1,\delta}(b;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\right]\frac{1}{c}\,dy$$

$$\Rightarrow c\,m_\delta(u;b)=\int_u^b e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\left[\sigma_{1,\delta}(y;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(y;b)\right]dy$$

$$+2\,\theta\int_u^b e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\overline{F}_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\sigma_{2,\delta}(y;b)\,dy$$

$$+2\theta\int_b^\infty e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\overline{F}_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\sigma_{2,\delta}(b;b)dy$$

$$+\int_b^\infty e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\left[\sigma_{1,\delta}(b;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\right]dy\ .$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις f_W και $\overline{F}_W$ όπως αυτές έχουν οριστεί από τις σχέσεις (3.3) και (3.4) αντίστοιχα προκύπτει ότι

$$c\,m_\delta(u;b)=\int_u^b e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^{n-1} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)}\left[\sigma_{1,\delta}(y;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(y;b)\right]dy$$

$$+2\,\theta\int_u^b e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^{n-1} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i\,!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\sigma_{2,\delta}(y;b)\,dy$$

$$+\int_b^\infty e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^{n-1} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)}\left[\sigma_{1,\delta}(b;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\right]dy$$

$$+2\theta\int_b^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{y-u}{c}\right)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^{n-1} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i \sigma_{2,\delta}(b;b)\,dy$$

$$\Rightarrow c^n\, m_\delta(u;b) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_u^b e^{-\frac{(\delta+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sigma_{1,\delta}(y;b) - \theta\,\sigma_{2,\delta}(y;b)\right]dy$$

$$+\frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\int_u^b e^{-\frac{(\delta+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\right]\sigma_{2,\delta}(y;b)\,dy$$

$$+\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_b^{\infty} e^{-\frac{(\delta+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sigma_{1,\delta}(b;b) - \theta\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\right]dy$$

$$+\frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\int_b^{\infty} e^{-\frac{(\delta+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\right]\sigma_{2,\delta}(b;b)\,dy\,. \tag{4.13}$$

Για $0 \le u \le b$, ορίζουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$\mathrm{B}_{n-1}(u;b) = \int_u^{\infty} e^{-\frac{(\delta+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sigma_{1,\delta}(y\wedge b;b) - \theta\sigma_{2,\delta}(y\wedge b;b)\right]dy \tag{4.14}$$

και

$$\Gamma_{n+i-1}(u;b) = \int_u^{\infty} e^{-\frac{(\delta+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\sigma_{2,\delta}(y\wedge b;b)\,dy \tag{4.15}$$

όπου $a\wedge b = \min\{a,b\}$.

Επομένως, για $0\le u\le b$ η εξίσωση (4.13) γράφεται ως εξής

$$c^n\, m_\delta(u;b) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_u^b e^{-\frac{(\delta+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sigma_{1,\delta}(y;b) - \theta\,\sigma_{2,\delta}(y;b)\right]dy$$

$$+\frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\int_u^b e^{-\frac{(\delta+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\right]\sigma_{2,\delta}(y;b)\,dy$$

$$+\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_b^{\infty} e^{-\frac{(\delta+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sigma_{1,\delta}(b;b) - \theta\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\right]dy$$

$$+\frac{2\,\theta\,\lambda^n}{(n-1)!}\int_b^\infty e^{-\frac{(\delta+2\lambda)(y-u)}{c}}\,(y-u)^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i\,!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\right]\sigma_{2,\delta}(b;b)\,dy$$

$$=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_u^\infty e^{-\frac{(\delta+\lambda)(y-u)}{c}}\,(y-u)^{n-1}\left[\sigma_{1,\delta}(y\wedge b;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(y\wedge b;b)\right]dy$$

$$+\frac{2\,\theta\,\lambda^n}{(n-1)!}\int_u^\infty e^{-\frac{(\delta+2\lambda)(y-u)}{c}}\,(y-u)^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i\,!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\right]\sigma_{2,\delta}(y\wedge b;b)\,dy$$

$$=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}B_{n-1}(u;b)+\frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i\,!\,c^i}\Gamma_{n+i-1}(u;b). \tag{4.16}$$

Μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι για $0\le u\le b$, η εξίσωση $B_{n-1}(u;b)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις (4.5) και (4.6) για $m=n-1$, $a=(\delta+\lambda)/c$ και $\varepsilon(u)=\sigma_{1,\delta}(u;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(u;b)$ ενώ η εξίσωση $\Gamma_{n+i-1}(u;b)$ επίσης ικανοποιεί τις εξισώσεις (4.5) και (4.6) με $m=n+i-1$, $a=(\delta+2\lambda)/c$ και $\varepsilon(u)=\sigma_{2,\delta}(u;b)$.

Επομένως, εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.1, για $0\le u\le b$ παίρνουμε

$$\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^n B_{n-1}(u)=(n-1)!\,\left[\sigma_{1,\delta}(u;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(u;b)\right]$$

και

$$\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{n+i}\Gamma_{n+i-1}(u)=(n+i-1)!\,\sigma_{2,\delta}(u;b)$$

και στη συνέχεια εφαρμόζοντας τον τελεστή $\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^n\cdot\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}$ στα δύο μέλη της εξίσωσης (4.16) προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1. *Έστω $\sigma_{i,\delta}(u;b)$, $i=1,2$ να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του u. Τότε, η συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_\delta(u;b)$ για Erlang(n) διαδικασία κινδύνου με δομή εξάρτησης βασισμένη στην σύζευξη FGM και σταθερό όριο μερίσματος b, ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}m_{\delta}(u;b)$$

$$=\frac{\lambda^{n}}{c^{n}}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\sigma_{1,\delta}(u;b)-\theta\frac{\lambda^{n}}{c^{n}}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\sigma_{2,\delta}(u;b)$$

$$+\frac{2\theta\lambda^{n}}{c^{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^{i}}{c^{i}}\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{n-i-1}\sigma_{2,\delta}(u;b)\quad(4.17)$$

για $0\le u\le b$. ■

4.5. Οριακές συνθήκες

Προκειμένου να βρούμε μία έκφραση για την συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_{\delta}(u;b)$ χρειάζεται να βρούμε οριακές συνθήκες για την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.17) του Θεωρήματος 4.1.

Θεωρήματος 4.2. *Έστω* $\sigma_{i,\delta}(u;b),\ i=1,2$ *να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του* u. *Τότε, η συνάρτηση των Gerber-Shiu* $m_{\delta}(u;b)$ *ικανοποιεί τις ακόλουθες* $3n-1$ *οριακές συνθήκες*

$$m_{\delta}^{(k)}(b;b)=0\ \text{για}\ k=1,2,\ldots,n\qquad(4.18)$$

και

$$m_{\delta}^{(n+r)}(b;b)=(-1)^{n}\frac{\lambda^{n}}{c^{n}(n-1)!}\sum_{j=1}^{r}\frac{(n+r-1-j)!}{(r-j)!}\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{r-j}\left[\sigma_{1,\delta}^{(j)}(b;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}^{(j)}(b;b)\right]$$

$$+2\theta\frac{\lambda^{n}}{c^{n}(n-1)!}\sum_{i=0}^{(r-1)\wedge(n-1)}(-1)^{n+i}\frac{\lambda^{i}}{c^{i}\,i!}\sum_{j=1}^{r-i}\frac{(n+r-1-j)!}{(r-i-j)!}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{r-i-j}\sigma_{2,\delta}^{(i)}(b;b)\qquad(4.19)$$

για $r=1,2,..2n-1$. ■

Απόδειξη. Παίρνοντας την k-οστή τάξης παράγωγο για $u=b$ και στα δύο μέλη της εξίσωσης (4.16) προκύπτει

$$c^{n}m_{\delta}^{(k)}(b;b)=\frac{\lambda^{n}}{(n-1)!}B_{n-1}^{(k)}(b;b)+\frac{2\theta\lambda^{n}}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^{i}}{i!\,c^{i}}\Gamma_{n+i-1}^{(k)}(b;b).\qquad(4.20)$$

Για $0 \le u \le b$, $n \ge 2$ και εφόσον $B_{n-1}(u;b)$ ικανοποιεί την εξίσωση (4.5), έχουμε

$$B'_{n-1}(b;b) = \frac{\delta+\lambda}{c} B_{n-1}(b;b) - (n-1) B_{n-2}(b;b)$$

και αφού για $0 \le u \le b$, $y \ge u$ συνεπάγεται ότι $y \wedge b = b$ για $u = b$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.14), η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} B'_{n-1}(b;b) &= \frac{\delta+\lambda}{c}(n-1)!\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{n-1}\left[\sigma_{1,\delta}(b;b) - \theta\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\right] \\ &\quad -(n-1)(n-2)!\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{n-2}\left[\sigma_{1,\delta}(b;b) - \theta\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη γνωστή σχέση

$$\int_u^\infty e^{-a(y-u)}(y-u)^k = \frac{k!}{a^{k+1}}, \quad k = 0,1,2,.... \tag{4.21}$$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.6) και (4.14), με τη βοήθεια της εξίσωσης (4.21) βρίσκουμε ότι $B'_0(b;b) = 0$ και επομένως συνεπάγεται ότι $B'_{n-1}(b;b) = 0$ για $n-1 \ge 0$. Επίσης, για $0 \le u \le b$ εφαρμόζοντας ανάλογη μεθοδολογία αποδεικνύεται ότι $\Gamma'_{n+i-1}(b;b) = 0$ για $n+i-1 \ge 0$.

Στη συνέχεια, για $1 \le k \le n$ και $0 \le j \le k-1$ έχουμε ότι $n-1-j \ge 0$ και επομένως συνεπάγεται ότι $B'_{n-1-j}(b;b) = 0$. Ακόμα, συνεπάγεται ότι $B^{(k)}_{n-1}(b;b) = 0$ για $1 \le k \le n$ εφόσον η $B_{n-1}(u;b)$ ικανοποιεί για $m = n-1$ την ακόλουθη σχέση

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}. \tag{4.22}$$

Επίσης, για $1 \le k \le n$ και $i \ge 0$ έχουμε ότι $1 \le k \le n+i$ και για $0 \le j \le k-1$ συνεπάγεται ότι $n+i-1-j \ge 0$. Επομένως, συνεπάγεται ότι $\Gamma'_{n+i-1-j}(b;b) = 0$ από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $\Gamma^{(k)}_{n+i-1}(b;b) = 0$ για $1 \le k \le n$ και $i \ge 0$ εφόσον $\Gamma_{n+i-j}(u;b)$ επίσης ικανοποιεί την εξίσωση (4.22) για $m = n+i-1$.

Συνεπώς, από την εξίσωση (4.20) συνεπάγεται άμεσα η εξίσωση (4.18).

Για $k=n+r,\ r\geq 1$ και για $m=n-1$ η συνάρτηση $B_{n-1}(u;b)$ ικανοποιεί την εξίσωση (4.9) και εφόσον $0\leq j\leq n-1$ συνεπάγεται ότι $B'_{n-1-j}(b;b)=0$. Επίσης, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.9) και τη συνάρτηση $B_{n-1}(u;b)$ για $u=b$, έχουμε ότι

$$B_{n-1}^{(n+r)}(b;b)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{m+r}{j}\prod_{x=0}^{j-1}(m-x)\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{m+r-j}B'_{n-1-j}(b;b)$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{j=1}^{r}\frac{(m+r-j)!}{(r-j)!}\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{r-j}\left[\sigma_{1,\delta}^{(j)}(b;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}^{(j)}(b;b)\right]$$

$$=(-1)^n\sum_{j=1}^{r}\frac{(n+r-1-j)!}{(r-j)!}\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{r-j}\left[\sigma_{1,\delta}^{(j)}(b;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}^{(j)}(b;b)\right],\text{για } r\geq 1 \qquad (4.23)$$

Για $0\leq j\leq n+i-1$, συνεπάγεται ότι $\Gamma'_{n+i-1-j}(b;b)=0$ και αφού η $\Gamma_{n+i-1}(u;b)$, για $m=n+i-1$, ικανοποιεί τις εξισώσεις (4.9) και (4.22) για $u=b$ προκύπτει ότι

$$\Gamma_{n+i-1}^{(n+i+r)}(b;b)=\begin{cases}0, & r=0\\ (-1)^{n+i}\sum_{j=1}^{r}\frac{(n+i+r-1-j)!}{(r-j)!}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{r-j}\sigma_{2,\delta}^{(j)}(b;b), & r\geq 1\end{cases} \qquad (4.24)$$

και επομένως έχουμε $\Gamma_{n+i-1}^{(n+r)}(b;b)=\Gamma_{n+i-1}^{(n+i+r-i)}(b;b)\neq 0$ για $r-i\geq 1$ άρα συνεπάγεται ότι $\Gamma_{n+i-1}^{(n+r)}(b;b)\neq 0$ για $i\leq r-1$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i\,i!}\Gamma_{n+i-1}^{(n+r)}(b;b)=\sum_{i=0}^{(r-1)\wedge(n-1)}\frac{\lambda^i}{c^i\,i!}\Gamma_{n+i-1}^{(n+i+r-i)}(b;b)$$

και ως εκ τούτου για $r-i\geq 1$ αντί για $r\geq 1$ από την εξίσωση (4.24) παίρνουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i\,i!}\Gamma_{n+i-1}^{(n+r)}(b;b)=\sum_{i=0}^{(r-1)\wedge(n-1)}\frac{\lambda^i}{c^i\,i!}(-1)^{n+i}\sum_{j=1}^{r-i}\frac{(n+r-1-j)!}{(r-i-j)!}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{r-i-j}\sigma_{2,\delta}^{(j)}(b;b), \qquad (4.25)$$

για $r\geq 1$.

Τελικά, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.20), (4.23) και (4.25) προκύπτει η δεύτερη οριακή συνθήκη του θεωρήματος, σχέση (4.19). ■

Παρατηρείται ότι για $k=0$, η τιμή της $m_\delta(u;b)$ όταν $u=b$ δίνεται άμεσα από την εξίσωση (4.12).

Πράγματι, για $u=b$ από την εξίσωση (4.12) προκύπτει ότι

$$m_\delta(b;b)=\left[\sigma_{1,\delta}(b;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\right]\int_0^\infty e^{-\delta t} f_W(t)dt+2\theta\sigma_{2,\delta}(b;b)\int_0^\infty e^{-\delta t} f_W(t)\,\overline{F}_W(t)\,dt$$

και στη συνέχεια αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις $f_W(t)$ και $F_W(t)$ από τις εξισώσεις (3.3) και (3.4) αντίστοιχα, παίρνουμε

$$m_\delta(b;b)=\left[\sigma_{1,\delta}(b;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\right]\int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda)t}\,\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}\,dt$$

$$+\,2\theta\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\int_0^\infty e^{-(\delta+2\lambda)t}t^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^n(\lambda t)^i}{(n-1)!\,i\,!}\,dt$$

$$\Rightarrow m_\delta(b;b)=\left[\sigma_{1,\delta}(b;b)-\theta\,\sigma_{2,\delta}(b;b)\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\right)^n+2\theta\sigma_{2,\delta}(b;b)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\lambda}{2\lambda+\delta}\right)^{n+i}$$

η οποία μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί ως οριακή συνθήκη.

4.6. Μια γενική λύση για την $m_\delta(u;b)$

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε μία έκφραση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού ορίου μερίσματος. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η σχέση (4.17) δεν εξαρτάται από το σταθερό όριο μερίσματος b. Επομένως, η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu $m_\delta(u;\infty)$ χωρίς την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος, είναι μία λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3, και ικανοποιεί την ακόλουθη μη ομογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωσης βαθμού $3n-1$

$$\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^n\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}m_\delta(u;\infty)$$

$$=\frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\left(\int_0^u m_\delta(u-x;\infty)f_X(x)dx+\gamma_1(u)\right)$$

$$-\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\left(\int_0^u m_\delta(u-x;\infty)h(x)dx+\gamma_2(u)\right)$$

$$+2\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{c^i}\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^n\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{n-i-1}$$

$$\times\left(\int_0^u m_\delta(u-x;\infty)h(x)dx+\gamma_2(u)\right),\quad 0\le u<\infty \tag{4.26}$$

Από το Θεώρημα 4.1. παρατηρούμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_\delta(u;b)$, $0\le u\le b$ ικανοποιεί μία μη-ομογενή εξίσωση βαθμού $3n-1$. Επομένως, από το θεώρημα των διαφορικών εξισώσεων συνεπάγεται ότι η λύση της μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης βαθμού $3n-1$ που δίνεται από το Θεώρημα 4.1, σχέση (4.17), με οριακές συνθήκες που δίνονται από το θεώρημα 4.2, σχέσεις (4.18) και (4.19), μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα μίας ειδικής λύσης της $m_\delta(u;\infty)$, δηλαδή της συνάρτησης των Gerber-Shiu χωρίς την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος, και ενός συνδυασμού από $3n-1$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ακόλουθης ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης βαθμού $3n-1$ για $0\le u<\infty$

$$\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^n\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\upsilon_\delta(u)$$

$$=\frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\int_0^u\upsilon_\delta(u-x)f_X(x)dx-\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\int_0^u\upsilon_\delta(u-x)h(x)dx$$

$$+2\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{c^i}\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^n\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{n-i-1}\int_0^u\upsilon_\delta(u-x)h(x)dx. \tag{4.27}$$

Από τη μορφή της παραπάνω εξίσωσης συμπεραίνουμε ότι οι αρχικές συνθήκες $\upsilon_\delta(0),\upsilon_\delta^{(1)}(0),\ldots.\upsilon_\delta^{(3n-2)}(0)$ καθορίζουν μοναδικά τη λύση της εξίσωσης (4.27), την οποία θα συμβολίζουμε με $\upsilon_\delta(u)$. Επομένως, έστω $\{\upsilon_{\delta,m}(u), u \geq 0\}$, $m = 1,2,\ldots,3n-1$ να είναι οι ειδικές λύσεις της εξίσωσης (4.27) με αρχικές συνθήκες $\upsilon_{\delta,m}^{(k)}(0) = I(k = m-1)$, $k = 0,1,\ldots,3n-2$ και $m = 1,\ldots,3n-1$. Είναι φανερό ότι οι λύσεις $\{\upsilon_{\delta,m}(u), u \geq 0\}$, $m = 1,2,\ldots,3n-1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Συνεπώς, η γενική λύση της εξίσωσης (4.27) έχει την ακόλουθη μορφή

$$\upsilon_\delta(u) = \sum_{m=1}^{3n-1} c_m \upsilon_{\delta,m}(u), \quad u \geq 0 \tag{4.28}$$

όπου $c_1, c_2, \ldots, c_{3n-1}$ είναι σταθερές.

Τότε, το θεώρημα που ακολουθεί δίνει μία γενική λύση για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu υπό την ύπαρξη σταθερού ορίου μερίσματος $m_\delta(u;b)$.

Θεώρημα 4.3. *Μία κλειστής μορφής έκφραση για την συνάρτηση των Gerber-Shiu* $m_\delta(u;b)$ *είναι η ακόλουθη*

$$m_\delta(u;b) = m_\delta(u;\infty) + \sum_{m=1}^{3n-1} \zeta_m(b)\upsilon_{\delta,m}(u), \quad 0 \leq u \leq b \tag{4.29}$$

όπου $m_\delta(u;\infty)$ *είναι η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu απουσία στρατηγικής μερίσματος για Erlang(n) διαδικασία κινδύνου με εξάρτηση μέσω της σύζευξης FGM. Οι σταθερές* $\{\zeta_m(b), m = 1,2,..,3n-1\}$ *είναι λύσεις του ακόλουθου συστήματος* $3n-1$ *γραμμικών εξισώσεων*

$$\sum_{m=1}^{3n-1} \zeta_m(b)\upsilon_{\delta,m}^{(k)}(b) = -m_\delta^{(k)}(b;\infty), \quad k = 1,2,\ldots,n \tag{4.30}$$

και

$$\sum_{m=1}^{3n-1} \zeta_m(b)\eta_{m.r}(b) = l_r(b), \quad r = 1,2,\ldots,2n-1 \tag{4.31}$$

όπου

$$\eta_{m,r}(b)=\upsilon_{\delta,m}^{(n+r)}(b)+(-1)^{n+1}\frac{\lambda^n}{c^n(n-1)!}\sum_{j=1}^{r}\frac{(n+r-1-j)!}{(r-j)!}\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{r-j}$$

$$\times\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^u \upsilon_{\delta,m}(u-x)\left[f_X(x)-\theta\, h(x)\right]dx\,\Big|_{u=b}$$

$$-\frac{2\theta\lambda^n}{c^n(n-1)!}\sum_{i=0}^{(r-1)\wedge(n-1)}(-1)^{n+i}\frac{\lambda^i}{c^i i!}\sum_{j=1}^{r-i}\frac{(n+r-1-j)!}{(r-i-j)!}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{r-i-j}$$

$$\times\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^u \upsilon_{\delta,m}(u-x)h(x)dx\,\Big|_{u=b} \qquad (4.32)$$

και

$$l_r(b)=-m_\delta^{(n+r)}(b;\infty)+(-1)^n\frac{\lambda^n}{c^n(n-1)!}\sum_{j=1}^{r}\frac{(n+r-1-j)!}{(r-j)!}\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{r-j}$$

$$\times\left\{\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^u m_\delta(u-x;\infty)\left[f_X(x)-\theta\, h(x)\right]dx\,\Big|_{u=b}+\gamma_1^{(j)}(b)-\theta\,\gamma_2^{(j)}(b)\right\}$$

$$+\frac{2\theta\lambda^n}{c^n(n-1)!}\sum_{i=0}^{(r-1)\wedge(n-1)}(-1)^{n+i}\frac{\lambda^i}{c^i\, i!}\sum_{j=1}^{r-i}\frac{(n+r-1-j)!}{(r-j-i)!}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{r-i-j}$$

$$\times\left\{\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^u m_\delta(u-x;\infty)h(x)\,dx\,\Big|_{u=b}+\gamma_2^{(j)}(b)\right\}. \qquad (4.33)$$

■

Απόδειξη. Από τις εξισώσεις (4.17) και (4.26) συνεπάγεται ότι η $m_\delta(u;b)-m_\delta(u;\infty)$, $0\le u\le b$ ικανοποιεί μία ομογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωση της μορφής (4.27). Επομένως, η λύση της $m_\delta(u;b)-m_\delta(u;\infty)$ έχει τη μορφή της σχέσης (4.28) από την οποία συνεπάγεται ότι η $m_\delta(u;b)$ αναπαρίσταται σύμφωνα με την εξίσωση (4.29).

Οι σταθερές $\{\zeta_m(b), m=1,\ldots,3n-1\}$ επιλέγονται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες του Θεωρήματος 4.2. Συνεπώς, οι παραπάνω σταθερές είναι λύσεις του ακόλουθου συστήματος $3n-1$ γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{m=1}^{3n-1} \zeta_m(b)\, v_{\delta,m}^{(k)}(b) + m_\delta^{(k)}(b;\infty) = 0, \quad k=1,2,\ldots,n \tag{4.34}$$

και

$$\sum_{m=1}^{3n-1} \zeta_m(b)\, v_{\delta,m}^{(n+r)}(b) + m_\delta^{(n+r)}(b;\infty) = m_\delta^{(n+r)}(b;b), \quad r=1,2,\ldots,2n-1\ . \tag{4.35}$$

Προφανώς, η εξίσωση (4.34) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση (4.30). Από την εξίσωση (4.19) γίνεται φανερό πως η $m_\delta^{(n+r)}(b;b)$, $r=1,2,\ldots,2n-1$ εξαρτάται από τις παραγώγους των $\sigma_{1,\delta}(u;b)$ και $\sigma_{2,\delta}(u;b)$ για $u=b$ και συνεπώς από την οριακή συνθήκη που δίνεται από τη σχέση (4.35) φαίνεται πως το δεξιό μέλος της εξίσωσης εξαρτάται από τη λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.17), δηλαδή εξαρτάται από τη $m_\delta(u;b)$ για $0 \le u \le b$. Ωστόσο, η εξίσωση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας την σχέση (4.29).

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.11), (4.19) και (4.35) έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{3n-1} \zeta_m(b)\, v_{\delta,m}^{(n+r)}(b) &= -m_\delta^{(n+r)}(b;\infty) + (-1)^n \frac{\lambda^n}{c^n (n-1)!} \sum_{j=1}^{r} \frac{(n+r-1-j)!}{(r-j)!} \left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{r-j} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\partial^j}{\partial u^j} \int_0^u m_\delta(u-x;b) f_X(x)dx \,\Big|_{u=b} + \gamma_1^{(j)}(b) - \theta \left[\frac{\partial^j}{\partial u^j} \int_0^u m_\delta(u-x;b)\, h(x)dx \,\Big|_{u=b} + \gamma_2^{(j)}(b) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{2\theta\lambda^n}{c^n (n-1)!} \sum_{i=0}^{(r-1)\wedge(n-1)} (-1)^{n+i} \frac{\lambda^i}{c^i\, i\,!} \sum_{j=1}^{r-i} \frac{(n+r-1-j)!}{(r-i-j)!} \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{r-i-j} \\
&\quad \times \left[\frac{\partial^j}{\partial u^j} \int_0^u m_\delta(u-x;b)\, h(x)dx \,\Big|_{u=b} + \gamma_2^{(j)}(b) \right] \\
&= -m_\delta^{(n+r)}(b;\infty) + (-1)^n \frac{\lambda^n}{c^n (n-1)!} \sum_{j=1}^{r} \frac{(n+r-1-j)!}{(r-j)!} \left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{r-j}
\end{aligned}$$

$$\times\left\{\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^u m_\delta(u-x;\infty)f_X(x)dx\,\Big|_{u=b}+\gamma_1^{(j)}(b)+\sum_{m=1}^{3n-1}\zeta_m(b)\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^\infty \upsilon_{\delta,m}(u-x)f_X(x)dx\Big|_{u=b}\right.$$

$$\left.-\theta\left[\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^u m_\delta(u-x;\infty)h(x)dx\,\Big|_{u=b}+\gamma_2^{(j)}(b)+\sum_{m=1}^{3n-1}\zeta_m(b)\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^\infty \upsilon_{\delta,m}(u-x)h(x)dx\Big|_{u=b}\right]\right\}$$

$$+\frac{2\theta\lambda^n}{c^n(n-1)!}\sum_{i=0}^{(r-1)\wedge(n-1)}(-1)^{n+i}\frac{\lambda^i}{c^i\,i!}\sum_{j=1}^{r-i}\frac{(n+r-1-j)!}{(r-i-j)!}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{r-i-j}$$

$$\times\left[\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^u m_\delta(u-x;\infty)h(x)dx\,\Big|_{u=b}+\gamma_2^{(j)}(b)+\sum_{m=1}^{3n-1}\zeta_m(b)\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^u \upsilon_{\delta,m}(u-x)h(x)dx\Big|_{u=b}\right],$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση (4.31). ■

Στη συνέχεια, θέλοντας να συμπληρώσουμε την μορφή που δώσαμε για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_\delta(u;b)$, σχέση (4.29), απομένει να ορίσουμε τις $3n-1$ γραμμικές ανεξάρτητες λύσεις $\{\upsilon_{\delta,m}(u), u\geq 0\}$, $m=1,2,\ldots,3n-1$ της εξίσωσης (4.27) με αρχικές συνθήκες $\upsilon_{\delta,m}^{(l)}=I(l=m-1)$, $l=0,1,\ldots 3n-2$ και $m=1,2,\ldots,3n-1$. Με τον υπολογισμό αυτών των $3n-1$ γραμμικών ανεξάρτητων λύσεων θα ασχοληθούμε στην ενότητα που ακολουθεί.

4.7. Ανάλυση της συνάρτησης $\upsilon_\delta(u)$

Στην ενότητα αυτή θα προσδιορίσουμε τη λύση της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.25), χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace.

Αρχικά, θα θεωρήσουμε τα ακόλουθα

$$P(D)=\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^n=\sum_{k=0}^n P_k D^k$$

και

$$Q(D)=\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}=\sum_{j=0}^{2n-1}Q_j D^j\ ,$$

όπου

$$P_k=(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{n-k} \text{ και } Q_j=(-1)^j\binom{2n-1}{j}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{2n-1-j}$$

και $d(u)=P(D)Q(D)\upsilon_\delta(u)$.

Τότε,

$$d(u)=\sum_{k=0}^{3n-1}C_k D^k \upsilon_\delta(u)$$

όπου

$$C_k=\begin{cases}\sum_{j=0}^{k\wedge n}P_jQ_{k-j}, & k=0,1,\ldots,2n-1\\ \sum_{j=k-2n+1}^{n}P_jQ_{k-j}, & k=2n,\ldots,3n-1\end{cases}.$$

Επίσης, έστω

$$\phi_{1,\delta}(u)=\int_0^u \upsilon_\delta(u-x)f_X(x)dx, \qquad \phi_{2,\delta}(u)=\int_0^u \upsilon_\delta(u-x)h(x)dx$$

και $$d_i(u)=Q(D)\phi_{i,\delta}(u)=\sum_{j=0}^{2n-1}Q_jD^j\phi_{i,\delta}(u), \quad i=1,2.$$

Ακόμα, ας θεωρήσουμε

$$H_i(D)=\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{n-i-1}=\sum_{k=0}^{n-i-1}H_{k,i}D^k, \quad 0\le i\le n-1$$

όπου

$$H_{k,i}=(-1)^k\binom{n-i-1}{k}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{n-i-1-k}$$

και

$$q_i(u)=P(D)H_i(D)\phi_{2,\delta}(u), \quad 0\le i\le n-1$$

η οποία μπορεί να γραφεί επίσης ως εξής

$$q_i(u) = \sum_{k=0}^{2n-i-1} L_{k,i} D^k \phi_{2,\delta}(u),$$

όπου

$$L_{k,i} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k\wedge(n-i-1)} H_{j,i} \, P_{k-j}, & k = 0,1,\ldots,2n-1 \\ \sum_{j=k-n}^{n-i-1} H_{j,i} P_{k-j}, & k = n+1,\ldots,2n-i-1 \end{cases}$$

για $i = 0,1,..,n-1$. Σύμφωνα με τα παραπάνω η σχέση (4.27) μπορεί να εκφραστεί σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση

$$d(u) = \frac{\lambda^n}{c^n} d_1(u) - \theta \frac{\lambda^n}{c^n} d_2(u) + 2\theta \frac{\lambda^n}{c^n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \frac{\lambda^i}{c^i} q_i(u), \quad u \geq 0 . \qquad (4.36)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης παίρνουμε

$$\hat{d}(s) = \frac{\lambda^n}{c^n} \hat{d}_1(s) - \theta \frac{\lambda^n}{c^n} \hat{d}_2(s) + 2\theta \frac{\lambda^n}{c^n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \frac{\lambda^i}{c^i} \hat{q}_i(s).$$

Εφόσον,

$$\hat{d}(s) = \sum_{k=0}^{3n-1} C_k \left[s^k \hat{\upsilon}_\delta(s) - \sum_{l=0}^{k-1} s^{k-l-1} \upsilon_\delta^{(l)}(0) \right] = P(s) Q(s) \hat{\upsilon}_\delta(s) - \sum_{k=0}^{3n-1} C_k \sum_{l=0}^{k-1} s^{k-l-1} \upsilon_\delta^{(l)}(0)$$

$$= \left(\frac{\delta+\lambda}{c} - s \right)^n \left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s \right)^{2n-1} \hat{\upsilon}_\delta(s) - \sum_{k=0}^{3n-1} C_k \sum_{l=0}^{k-1} s^{k-l-1} \upsilon_\delta^{(l)}(0)$$

και ομοίως

$$\hat{d}_1(s) = Q(s) \hat{\phi}_{1,\delta}(s) - \sum_{k=0}^{2n-1} Q_k \sum_{l=0}^{k-1} s^{k-l-1} \phi_{1,\delta}^{(l)}(0)$$

$$= \left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s \right)^{2n-1} \hat{f}_X(s) \, \hat{\upsilon}_\delta(s) - \sum_{k=0}^{2n-1} Q_k \sum_{l=0}^{k-1} s^{k-l-1} \phi_{1,\delta}^{(l)}(0)$$

$$\hat{d}_2(s)=\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}\hat{h}(s)\hat{v}_\delta(s)-\sum_{k=0}^{2n-1}Q_k\sum_{l=0}^{k-1}s^{k-l-1}\phi_{2,\delta}^{(l)}(0)$$

και

$$\hat{q}_i(s)=\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n-i-1}\hat{h}(s)\hat{\upsilon}_\delta(s)-\sum_{k=0}^{2n-i-1}L_{k,i}\sum_{l=0}^{k-1}s^{k-l-1}\phi_{2,\delta}^{(l)}(0),$$

αντικαθιστώντας τους μετασχηματισμούς Laplace που υπολογίσαμε παραπάνω στη σχέση (4.36) προκύπτει ότι

$$\hat{\upsilon}_\delta(s)=\frac{\hat{\omega}_\delta(s)}{\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)},\tag{4.37}$$

όπου

$$\hat{h}_{1,\delta}(s)=\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}$$

$$\hat{h}_{2,\delta}(s)=\frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}\hat{f}_X(s)$$

$$+\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\hat{h}(s)\left[2\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n-i-1}-\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}\right]$$

και

$$\hat{\omega}_\delta(s)=\sum_{k=0}^{3n-1}C_k\sum_{l=0}^{k-1}s^{k-l-1}\upsilon_\delta^{(l)}(0)-\frac{\lambda^n}{c^n}\sum_{k=0}^{2n-1}Q_k\sum_{l=0}^{k-1}s^{k-l-1}\phi_{1,\delta}^{(l)}(0)+\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\sum_{k=0}^{2n-1}Q_k\sum_{l=0}^{k-1}s^{k-l-1}\phi_{2,\delta}^{(l)}(0)+$$

$$-\frac{2\theta\lambda^n}{c^n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{i}\sum_{k=0}^{2n-i-1}L_{k,i}\sum_{l=0}^{k-1}s^{k-l-1}\phi_{2,\delta}^{(l)}(0)\tag{4.38}$$

το οποίο είναι βαθμού το πολύ $3n-2$.

Θέτοντας

$$a_l(s)=\sum_{k=l+1}^{3n-1}C_ks^{k-l-1}\ ,\qquad \beta_l(s)=\sum_{k=l+1}^{2n-1}:Q_ks^{k-l-1}\quad\text{και}\quad\gamma_{l,i}(s)=\sum_{k=l+1}^{2n-i-1}:L_{k,i}\ s^{k-l-1}$$

και εφόσον

$$\phi_{1,\delta}^{(l)}(0)=\sum_{j=0}^{l-1} f^{(l-1-j)}(0)\upsilon_{\delta}^{(j)}(0) \qquad \text{και} \qquad \phi_{2,\delta}^{(l)}(0)=\sum_{j=0}^{l-1} h^{(l-1-j)}(0)\upsilon_{\delta}^{(j)}(0)$$

αλλάζοντας τη σειρά των αθροισμάτων στην εξίσωση (4.38), η $\hat{w}_{\delta}(s)$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\hat{\omega}_{\delta}(s)=\sum_{l=0}^{3n-2} a_l(s)\upsilon_{\delta}^{(l)}(0)-\frac{\lambda^n}{c^n}\sum_{l=0}^{2n-3}\left(\sum_{j=l+1}^{2n-2}\beta_j(s)\left[f^{(j-1-l)}(0)-\theta\, h^{(j-1-l)}(0)\right]\right)\upsilon_{\delta}^{(l)}(0)$$

$$-\frac{2\theta\lambda^n}{c^n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{i}\sum_{l=0}^{2n-i-3}\left(\sum_{j=l+1}^{2n-i-2}\gamma_{j,i}(s)h^{(j-1-l)}(0)\right)\upsilon_{\delta}^{(l)}(0). \tag{4.39}$$

Στη συνέχεια θέλουμε να πάρουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των $3n-1$ γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων $\{\upsilon_{\delta,m}(u), u\geq 0\}$, $m=1,2,\ldots,3n-1$ ορίζοντας τις αρχικές συνθήκες ως $\upsilon_{\delta,m}^{(l)}=I(l=m-1), l=0,1,..3n-2$. Για $m=1,2,\ldots,3n-1$ από την εξίσωση (4.37) συνεπάγεται ότι

$$\hat{\upsilon}_{\delta,m}(s)=\frac{\hat{\omega}_{\delta,m}(s)}{\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)} \tag{4.40}$$

όπου

$$\hat{\omega}_{\delta,m}(s)=a_{m-1}(s)-\frac{\lambda^n}{c^n}\sum_{j=m}^{2n-2}\beta_j(s)\left[f^{(j-m)}(0)-\theta\, h^{(j-m)}(0)\right]$$

$$-\frac{2\theta\lambda^n}{c^n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{i}\sum_{j=m}^{2n-i-2}\gamma_{j,i}(s)h^{(j-m)}(0) \tag{4.41}$$

για $m=1,2,\ldots,3n-1$.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε μία γενική λύση για τις εξισώσεις $\upsilon_{\delta,m}(u)$, $m=1,2,\ldots,2n-1$.

Στο Κεφάλαιο 3 της παρούσας εργασίας αποδείξαμε ότι ο παρονομαστής $\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)$ της εξίσωσης (4.37) αντιπροσωπεύει τη γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για Erlang(n) διαδικασία κινδύνου με εξάρτηση μέσω της σύζευξης FGM απουσία στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Επίσης, στο ίδιο κεφάλαιο αποδείχθηκε ότι η εξίσωση αυτή έχει $3n-1$ ρίζες , τις οποίες συμβολίσαμε με $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{3n-1}$ με θετικό πραγματικό μέρος όταν $\delta>0$ και $3n-2$ ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος όταν $\delta=0$. Υποθέτοντας ότι οι ρίζες $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{3n-1}$ είναι διακριτές, από τον τύπο παρεμβολής του Lagrange, η $\hat{\omega}_\delta(s)$ που δίνεται από την εξίσωση (4.38) γράφεται ως εξής

$$\hat{\omega}_\delta(s)=\sum_{j=1}^{3n-1}\hat{\omega}_\delta\left(\rho_j\right)\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{\rho_k-\rho_j} \tag{4.42}$$

$$=(-1)^{3n-2}\Pi_{3n-1}(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{\omega}_\delta\left(\rho_j\right)}{s-\rho_j}\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}\frac{1}{\rho_k-\rho_j} \tag{4.43}$$

όπου

$$\Pi_{3n-1}(s)=\prod_{j=1}^{3n-1}\left(s-\rho_j\right).$$

Επίσης, στο Κεφάλαιο 3, αποδείχθηκε ότι

$$\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)=(-1)^{3n-1}\Pi_{3n-1}(s)\left[1-\ T_s\ T_{\rho 1}\cdots T_{\rho 3n-1}h_{2,\delta}(0)\right], \tag{4.44}$$

βλ. εξίσωση (3.49) , όπου T_ρ είναι ο συντελεστής των Dickson-Hipp.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.43) και (4.44) στην εξίσωση (4.37) προκύπτει ότι

$$\hat{\upsilon}_\delta(s)=\frac{\hat{\omega}_\delta(s)}{\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)}=\frac{(-1)^{3n-2}\Pi_{3n-1}(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{\omega}_\delta\left(\rho_j\right)}{s-\rho_j}\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}\frac{1}{\rho_k-\rho_j}}{(-1)^{3n-1}\Pi_{3n-1}(s)\left[1-\ T_s\ T_{\rho 1}\cdots T_{\rho 3n-1}h_{2,\delta}(0)\right]}$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{3n-1}\xi_j\frac{1}{s-\rho_j}}{1-\ T_s\ T_{\rho 1}\cdots T_{\rho 3n-1}h_{2,\delta}(0)} \tag{4.45}$$

όπου

$$\xi_j = -\frac{\hat{\omega}_\delta(\rho_j)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}(\rho_k - \rho_j)}, \; j = 1,\ldots,3n-1 \tag{4.46}$$

Αντιστρέφοντας την εξίσωση (4.45), προκύπτει ότι

$$\upsilon_\delta(u) = \kappa_\delta \int_0^u \upsilon_\delta(u-y)\, g_\delta(y)dy + \sum_{j=1}^{3n-1} \xi_j e^{\rho_j u}, \quad u \geq 0 \tag{4.47}$$

όπου

$$g_\delta(y) = \frac{1}{\kappa_\delta} T_{\rho 1} \cdots T_{\rho 3n-1}\, h_{2,\delta}(y) \quad \text{και} \quad \kappa_\delta = \int_0^\infty T_{\rho 1} \cdots T_{\rho 3n-1}\, h_{2,\delta}(y)\, dy\,.$$

Όπως έχει αποδειχθεί και στο Κεφάλαιο 3, βλ. εξίσωση (3.45), γνωρίζουμε ότι

$$\kappa_\delta = 1 - \frac{(\delta+2\lambda)^{2n-1}\left[(\delta+\lambda)^n - \lambda^n\right]}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}\rho_i} < 1\ . \tag{4.48}$$

Εφόσον $T_{\rho 1} \cdots T_{\rho 3n-1}\, h_{2,\delta}(y)$ είναι μία ελλειμματική σ.π.π. η εξίσωση (4.47) είναι μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Ακόμα, σημειώνεται ότι $T_{\rho 1} \cdots T_{\rho 3n-1}\, h_{2,\delta}(y)$ είναι η προεξοφλημένη σ.π.π. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας δεδομένου ότι το αρχικό αποθεματικό ισούται με μηδέν για Erlang(n) διαδικασία κινδύνου με εξάρτηση υπό την σύζευξη FGM χωρίς την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος.

Επομένως, από την εξίσωση (4.47) συμπεραίνουμε ότι οι $3n-1$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $\{\upsilon_{\delta,m}(u), u \geq 0\}$, $m = 1,2,\ldots,3n-1$ ικανοποιούν τις ακόλουθες ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για $m = 1,2,\ldots,3n-1$

$$\upsilon_{\delta,m}(u) = \kappa_\delta \int_0^u \upsilon_{\delta,m}(u-y)\, g_\delta(y)dy + \sum_{j=1}^{3n-1} \xi_{j,m} e^{\rho_j u}, \quad u \geq 0 \tag{4.49}$$

όπου

$$\xi_{j,m} = -\frac{\hat{\omega}_{\delta,m}(\rho_j)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}(\rho_k - \rho_j)}, \; j = 1,\ldots,3n-1 \tag{4.50}$$

και $\hat{\omega}_{\delta,m}(\rho_j)$ να δίνεται από την εξίσωση (4.41).

Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (5.49) μπορεί να λυθεί ώστε να δώσει μία συγκεκριμένη έκφραση για τις $\upsilon_{\delta,1}(u),\ldots,\upsilon_{\delta,3n-1}(u)$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε μία σύνθετη γεωμετρική κατανομή με σ.κ. L_δ και ουρά να δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\overline{\Lambda}_\delta(u) = 1 - \Lambda_\delta(u) = \sum_{r=1}^{\infty}(1-\kappa_\delta)\,\kappa_\delta^r\,\overline{G}^{*r}(u),$$

όπου $\overline{G}^{*r}(u)$ είναι η ουρά της κατανομής της r-οστής συνέλιξης της σ.π.π. $g_\delta(y)$. Τότε, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.1. *Έστω* $\lambda_{\delta,j}(u) = e^{\rho_j u} - \rho_j \int_0^u e^{\rho_j y}\,\overline{\Lambda}_\delta(u-y)\,dy$ *για* $j = 1,\ldots,3n-1$. *Η λύση της εξίσωσης* (4.49) *μπορεί να εκφραστεί ως εξής*

$$\upsilon_{\delta,m}(u) = \begin{cases} \frac{1}{1-\kappa_\delta}\left[\sum_{j=1}^{3n-1}\xi_{j,m}\,\lambda_{\delta,j}(u) - \overline{\Lambda}_\delta(u)\right], & m = 1 \\ \frac{1}{1-\kappa_\delta}\left[\sum_{j=1}^{3n-1}\xi_{j,m}\,\lambda_{\delta,j}(u)\right], & m = 2,3,\ldots,3n-1 \end{cases}$$

όπου κ_δ *και* $\xi_{j,m}$ *δίνονται από τις σχέσεις* (4.48) *και* (4.50) *αντίστοιχα.* ■

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα δώσουμε την εξίσωση των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων $V_\delta(u;b)$ πριν επέλθει χρεοκοπία. Για τον υπολογισμό της εξίσωσης αυτής θα ακολουθήσουμε παρόμοια διαδικασία με αυτήν που ακολουθήθηκε στις παραγράφους 4.4-4.6 για τον υπολογισμό της συνάρτησης των Gerber-

Shiu. Βρίσκοντας μία ομογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την $V_\delta(u;b)$ και οριακές συνθήκες για την εξίσωση αυτή θα μπορέσουμε να εκφράσουμε την $V_\delta(u;b)$ ως ένα συνδυασμό από γραμμικές ανεξάρτητες λύσεις $\{\upsilon_{\delta,m}(u), u \geq 0\}$, $m = 1,2,\ldots,3n-1$ όπως είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο.

4.8. Ολοκληρο-διαφορική εξίσωση και οριακές συνθήκες για την $V_\delta(u;b)$

Για $u \geq 0$, θεωρούμε τις ακόλουθες συναρτήσεις

$$a_{1,\delta}(u;b) = \int_0^u V_\delta(u-x;b) f_X(x) dx \tag{4.51}$$

και

$$a_{2,\delta}(u;b) = \int_0^u V_\delta(u-x;b) h(x) dx \ . \tag{4.52}$$

Προσαρμόζοντας στο χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης (όπως Landriault (2008)), για $0 \leq u \leq b$ παίρνουμε,

$$V_\delta(u;b) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} V_\delta(u+ct-x\,;b) f_{X,W}(x,t)\, dxdt$$

$$+ \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} \int_0^b \left[c\, e^{-\frac{\delta(b-u)}{c}} \bar{a}_{\overline{t-\frac{b-u}{c}}|} + e^{-\delta t} V_\delta(b-x;b) \right] f_{X,W}(x;t)\, dxdt$$

$$+ \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} \int_b^{\infty} \left[c\, e^{-\frac{\delta(b-u)}{c}} \bar{a}_{\overline{t-\frac{b-u}{c}}|} f_{X,W}(x;t)\, dxdt \right]$$

όπου $\bar{a}_t = \dfrac{1-e^{-\delta t}}{\delta}$ είναι η παρούσα αξία της συνεχούς ράντας με ένταση ανατοκισμού δ. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.7), (4.51) και (4.52) η παραπάνω εξίσωση μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή

$$V_\delta(u;b)=\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t} f_W(t)\left[a_{1,\delta}(u+ct;b)-\theta\, a_{2,\delta}(u+ct;b)\right]dt$$

$$+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t} f_W(t)\left[a_{1,\delta}(b;b)-\theta\, a_{2,\delta}(b;b)\right]dt+2\theta\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-\delta t} f_W(t)\,\overline{F}_W(t)\,a_{2,\delta}(u+ct;b)\,dt$$

$$+2\theta\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-\delta t} f_W(t)\overline{F}_W(t)a_{2,\delta}(b;b)\,dt+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} c\, e^{-\frac{\delta(b-u)}{c}}\,\overline{a}_{\left.t-\frac{b-u}{c}\right|}\, f_W(t)\,dt\,. \tag{4.53}$$

Θέτοντας $y=u+ct$ και αντικαθιστώντας τις $f_W(t)$ και $\overline{F}_W(t)$ από τις εξισώσεις (3.3) και (3.4) αντίστοιχα, η εξίσωση (4.53) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$V_\delta(u;b)=\frac{\lambda^n}{c^n(n-1)!}\int_u^{\infty} e^{-\frac{(\delta+\lambda)(y-u)}{c}}(y-u)^{n-1}\left[a_{1,\delta}(y\wedge b;b)-\theta\, a_{2,\delta}(y\wedge b;b)\right]dy$$

$$+\frac{2\theta\,\lambda^n}{c^n(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i i!}\int_u^{\infty} e^{-\frac{(\delta+2\lambda)(y-u)}{c}}(y-u)^{n+i-1}a_{2,\delta}(y\wedge b;b)\,dy$$

$$+\int_b^{\infty} e^{-\frac{\delta(b-u)}{c}}\,\overline{a}_{\left.\frac{y-b}{c}\right|}\, f_W\!\left(\frac{y-u}{c}\right)dy\,. \tag{4.54}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε a,b ισχύει

$$\int_b^{\infty} e^{-ay}(y-u)^n\,dy=n!\,e^{-ab}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\frac{1}{i!\,a^{n+1-i}}(b-u)^i,\quad n=0,1,\ldots \tag{4.55}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.55) το τελευταίο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (4.54) γίνεται

$$e^{-\frac{\delta(b-u)}{c}}\int_b^{\infty}\overline{a}_{\left.\frac{y-b}{c}\right|}\, f_W\!\left(\frac{y-u}{c}\right)dy$$

$$=\frac{1}{\delta}e^{-\frac{\delta(b-u)}{c}}\left\{c\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} f_W(t)\,dt-\int_b^{\infty} e^{-\frac{\delta(y-b)}{c}} f_W\!\left(\frac{y-u}{c}\right)dy\right\}$$

$$= \frac{1}{\delta} e^{-\frac{\delta(b-u)}{c}} \left\{ c\, e^{-\frac{\lambda(b-u)}{c}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i\, i!} (b-u)^i - \frac{\lambda^n}{c^n (n-1)!} e^{-\frac{\delta b + \lambda u}{c}} \int_b^{\infty} e^{-\frac{(\delta+\lambda) y}{c}} (y-u)^{n-1}\, dy \right\}$$

$$= \frac{1}{\delta} e^{-\frac{\delta(b-u)}{c}} \left\{ c\, e^{-\frac{\lambda(b-u)}{c}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i\, i!} (b-u)^i \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda^n}{c^{n-1} (n-1)!} (n-1)!\, e^{-\frac{\lambda(b-u)}{c}} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{c}{\delta+\lambda} \right)^{n-i} (b-u)^i \right\}$$

$$= \frac{1}{\delta} e^{-\frac{(\delta+\lambda)(b-u)}{c}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^{i-1}\, i!} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda} \right)^{n-i} \right] (b-u)^i$$

και επομένως για $0 \le u \le b$ από την εξίσωση (4.54) συνεπάγεται ότι η $V_\delta(u;b)$ ικανοποιεί την εξίσωση που ακολουθεί

$$V_\delta(u;b) = \frac{\lambda^n}{c^n (n-1)!} \varDelta_{n-1}(u;b) + 2\theta \frac{\lambda^n}{c^n (n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i\, i!} E_{n+i-1}(u;b)$$

$$+ \frac{c}{\delta} e^{-\frac{(\delta+\lambda)(b-u)}{c}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i\, i!} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda} \right)^{n-i} \right] (b-u)^i \qquad (4.56)$$

όπου

$$\varDelta_{n-1}(u;b) = \int_u^{\infty} e^{-\frac{(\delta+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1} \left[a_{1,\delta}(y \wedge b; b) - \theta\, a_{2,\delta}(y \wedge b; b) \right] dy$$

$$E_{n+i-1}(u;b) = \int_u^{\infty} e^{-\frac{(\delta+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n+i-1} a_{2,\delta}(y \wedge b; b)\, dy$$

για $0 \le u \le b,\, n \ge 1,\, 0 \le i \le n-1$.

Θεώρημα 4.4. *Έστω $a_{i,\delta}(u;b), i = 1,2$ να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του u. Τότε, οι αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων $V_\delta(u;b)$ για Erlang(n) διαδικασία κινδύνου με δομή εξάρτησης βασισμένη στην σύζευξη FGM και υπό την ύπαρξη σταθερού ορίου μερίσματος b, ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}V_{\delta}(u;b)$$

$$=\frac{\lambda^{n}}{c^{n}}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\left[a_{1,\delta}(u;b)-\theta\, a_{2,\delta}(u;b)\right]$$

$$+2\theta\frac{\lambda^{n}}{c^{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^{i}}{c^{i}}\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{n-i-1}a_{2,\delta}(u;b) \quad (4.57)$$

για $0\le u\le b$. ■

Απόδειξη. Έστω $Z_i(u;b)=e^{-\frac{(\delta+\lambda)(b-u)}{c}}(b-u)^i$, $i\ge 0$. Τότε, συνεπάγεται ότι

$$Z_i'(u;b)=\frac{\delta+\lambda}{c}Z_i(u;b)-i\,Z_{i-1}(u;b),\ i\ge 0$$

και επομένως χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του Λήμματος 4.1 έχουμε

$$\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^{i+1}Z_i(u;b)=i\,!\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)Z_0(u;b)$$

$$=i\,!\left[\frac{\delta+\lambda}{c}Z_0(u;b)-\frac{\delta+\lambda}{c}Z_0(u;b)\right]=0\,.$$

Επομένως, για $0\le i\le n-1$,

$$\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^{n}Z_i(u;b)=\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^{n-i-1}\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^{i+1}Z_i(u;b)=0 \quad (4.58)$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\Delta_{n-1}(u;b)$ και $E_{n+i-1}(u;b)$ για $0\le u\le b$ ικανοποιούν τις εξισώσεις (4.5), (4.6) και (4.7) για $m=n-1$, $a=\frac{\delta+\lambda}{c}$, $\varepsilon(u)=a_{1,\delta}(u;b)-\theta\, a_{2,\delta}(u;b)$ και $m=n+i-1$, $a=\frac{\delta+2\lambda}{c}$, $\varepsilon(u)=a_{2,\delta}(u;b)$ αντίστοιχα. Επομένως, από το Λήμμα 4.1. και για $0\le u\le b$ παίρνουμε

$$\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\Delta_{n-1}(u;b)=(n-1)!\left[a_{1,\delta}(u;b)-\theta\, a_{2,\delta}(u;b)\right] \tag{4.59}$$

$$\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{n+i}E_{n+i-1}(u;b)=(n+i-1)!\, a_{2,\delta}(u;b). \tag{4.60}$$

Έπειτα, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (4.56) με τον τελεστή $\left(\frac{\delta+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}$ και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.58),(4.59) και (4.60) προκύπτει η ζητούμενη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση, εξίσωση (4.57). ■

Στη συνέχεια, θα προσδιορίσουμε τις οριακές συνθήκες για την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.57). Όπως και για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_\delta(u;b)$, αυτές οι οριακές συνθήκες λαμβάνονται από τις παραγώγους της συνάρτησης $V_\delta(u;b)$ για $u=b$.

Θεώρημα 4.5. *Έστω $a_{i,\delta}(u;b), i=1,2$ να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του u. Τότε, οι αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων $V_\delta(u;b)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες $3n-1$ οριακές συνθήκες*

$$V_\delta^{(k)}(b;b)=\frac{c}{\delta}\sum_{i=0}^{(n-1)\wedge k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\lambda^i}{c^i}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n-i}\right]\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{k-i} \tag{4.61}$$

για $k=1,..,n$.

$$\begin{aligned}V_\delta^{(n+r)}(b;b)&=(-1)^n\frac{\lambda^n}{c^n(n-1)!}\sum_{j=1}^{r}\frac{(n+r-1-j)!}{(r-j)!}\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{r-j}\left[a_{1,\delta}^{(j)}(b;b)-\theta\, a_{2,\delta}^{(j)}(b;b)\right]\\&+2\theta\frac{\lambda^n}{c^n(n-1)!}\sum_{i=0}^{(r-1)\wedge(n-1)}(-1)^{n+i}\frac{\lambda^i}{c^i i!}\sum_{j=1}^{r-i}\frac{(n+r-1-j)!}{(r-i-j)!}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right)^{r-i-j}a_{2,\delta}^{(j)}(b;b)\\&+\frac{c}{\delta}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n+r}{i}\frac{\lambda^i}{c^i}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n-i}\right]\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{n+r-i},\end{aligned} \tag{4.62}$$

για $r=1,\ldots,2n-1$. ■

Απόδειξη. Παίρνοντας την k-οστή τάξης παράγωγο για $u=b$ της εξίσωσης (4.56) προκύπτει

$$V_{\delta}^{(k)}(b;b)=\frac{\lambda^{n}}{c^{n}(n-1)!}\Delta_{n-1}^{(k)}(b;b)+2\theta\frac{\lambda^{n}}{c^{n}(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^{i}}{c^{i}\,i!}E_{n+i-1}^{(k)}(b;b)$$

$$+\frac{c}{\delta}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^{i}}{c^{i}\,i!}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n-i}\right]Z_{i}^{(k)}(b;b),\quad k\geq 1. \tag{4.63}$$

όπου

$$Z_{i}^{(k)}(u;b)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}\prod_{x=0}^{j-1}(i-x)\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{k-j}e^{-\frac{(\delta+\lambda)(b-u)}{c}}(b-u)^{i-j}$$

και επομένως

$$Z_{i}^{(k)}(b;b)=(-1)^{i}\binom{k}{i}i!\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{k-i}.$$

Τέλος, το ζητούμενο προκύπτει εάν ακολουθήσουμε την ίδια μεθοδολογία όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2. Από την εξίσωση (4.63) λαμβάνεται άμεσα η ζητούμενη σχέση λαμβάνοντας υπόψη ότι οι συναρτήσεις $\Delta_{n-1}(u;b)$ και $E_{n+i-1}(u;b)$ ικανοποιούν τις ίδιες οριακές συνθήκες με τις συναρτήσεις $B_{n-1}(u;b)$ και $\Gamma_{n+i-1}(u;b)$ αντίστοιχα, αντικαθιστώντας τις $\sigma_{i,\delta}(u;b)$ με $a_{i,\delta}(u;b), i=1,2$. ■

4.9. Γενική λύση της $V_{\delta}(u;b)$

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μία γενική λύση για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων $V_{\delta}(u;b)$ βασιζόμενοι στο Θεώρημα 4.4 της προηγούμενης παραγράφου. Το θεώρημα που ακολουθεί παρέχει μία γενική λύση για τη συνάρτηση $V_{\delta}(u;b)$

Θεώρημα 4.6. *Σε μία Erlang(n) διαδικασία κινδύνου με εξάρτηση που δίνεται από την σύζευξη FGM και υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος* $b\geq u$, *μία έκφραση για τη γενική λύση της* $V_{\delta}(u;b)$ *είναι*

$$V_\delta(u;b)=\sum_{m=1}^{3n-1} \upsilon_m(b)u_{\delta,m}(u), \quad 0\le u\le b \tag{4.64}$$

όπου οι σταθερές $\{\upsilon_m(b); m=1,..,3n-1\}$ *είναι οι λύσεις του ακόλουθου συστήματος των* $3n-1$ *γραμμικών εξισώσεων*

$$\sum_{m=1}^{3n-1} \upsilon_m(b)u_{\delta,m}^{(k)}(b;b)=\frac{c}{\delta}\sum_{i=0}^{(n-1)\wedge k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\lambda^i}{c^i}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n-i}\right]\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{k-i}, \; k=1,\dots,n \tag{4.65}$$

και

$$\sum_{m=1}^{3n-1} \upsilon_m(b)\eta_{m,r}(b)=\frac{c}{\delta}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n+r}{i}\frac{\lambda^i}{c^i}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{n-i}\right]\left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right)^{n+r-i} \tag{4.66}$$

για $r=1,\dots,2n-1$ *όπου οι σταθερές* $\eta_{m,r}(b)$ *δίνονται από την εξίσωση* (4.32) *και* $\{u_{\delta,m}(u), \; u\ge 0\}$ *για* $m=1,\dots,3n-1$ *είναι* $3n-1$ *γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης* (4.27). ■

Απόδειξη. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.57) και (4.27) και σύμφωνα με τη γενική λύση της εξίσωσης (4.27) όπως αυτή δίνεται από την εξίσωση (4.28) συνεπάγεται ότι η $V_\delta(u;b)$ δίνεται από την εξίσωση (4.64) και ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες του Θεωρήματος 4.5. Επομένως, αυτές οι σταθερές είναι λύσεις του ακόλουθου συστήματος των $3n-1$ γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{m=1}^{3n-1} \upsilon_m(b)u_{\delta,m}^{(k)}(b;b)=V_\delta^{(k)}(b;b), \quad k=1,\dots,n \tag{4.67}$$

και

$$\sum_{m=1}^{3n-1} \upsilon_m(b)u_{\delta,m}^{(n+r)}(b)=V_\delta^{(n+r)}(b;b), \quad r=1,\dots,2n-1\,. \tag{4.68}$$

Σύμφωνα με τις οριακές συνθήκες που δίνονται από την εξίσωση (4.61) παρατηρούμε ότι η εξίσωση (4.67) είναι προφανώς ισοδύναμη με την εξίσωση (4.65). Επίσης, αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.62) στην εξίσωση (4.66) συνεπάγεται ότι το αποτέλεσμα εξαρτάται επίσης από τη λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.57). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.51) και (4.52) έχουμε ότι

$$a_{1,\delta}^{(j)}(u;b)=\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^u V_\delta(u-x;b)f_X(x)dx$$

και

$$a_{2,\delta}^{(j)}(u;b)=\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^u V_\delta(u-x;b)h(x)dx.$$

και σύμφωνα με την εξίσωση (4.64) για $u=b$ οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την ακόλουθη μορφή

$$a_{1,\delta}^{(j)}(b;b)=\sum_{m=1}^{3n-1}v_m(b)\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^u u_{\delta,m}(u-x)f_X(x)dx\bigg|_{u=b}$$

και

$$a_{2,\delta}^{(j)}(b;b)=\sum_{m=1}^{3n-1}v_m(b)\frac{\partial^j}{\partial u^j}\int_0^u u_{\delta,m}(u-x)h(x)dx\bigg|_{u=b}.$$

Αντικαθιστώντας τις $a_{i,\delta}^{(j)}(b;b)$, $i=1,2$, όπως αυτές υπολογίσθηκαν παραπάνω, στην εξίσωση (4.62) προκύπτει το δεξί μέλος της σχέσης (4.67). Τέλος, συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.67) και (4.68) προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση (4.64). ■

4.10. Αποτελέσματα για εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις

Στην παρούσα παράγραφο, υποθέτουμε ότι η τ.μ. X που αναπαριστά το μέγεθος της ατομικής απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha>0$, οπότε έχουμε $f_X(x)=ae^{-ax}$, $a>0, x>0$ και $\hat{f}_X(s)=\frac{a}{a+s}$. Δεδομένης της παραπάνω υπόθεσης θα δώσουμε μία έκφραση για το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T_b, $m_{Tb}(u)$ καθώς επίσης και για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων $V_\delta(u;b)$.

Στο Κεφάλαιο 3, μελετώντας επίσης την περίπτωση των εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων, δείξαμε ότι η διαφορά $\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)$ σύμφωνα με τη σχέση (3.66) ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση

$$\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)=\frac{Q_{3n+1,\delta}(s)}{c^{3n-1}(s+a)(s+2a)} \tag{4.69}$$

όπου

$$Q_{3n+1,\delta}(s)=(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}(\delta+\lambda-cs)^{n}(s+a)(s+2a)-a\lambda^{n}(s+2a)(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}$$

$$-a\lambda^{n}\theta\, s\left[\,2\,(\delta+\lambda-cs)^{n}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^{i}\binom{n+i-1}{i}(\delta+2\lambda-cs)^{n-i-1}-(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}\right].$$

Το $Q_{3n+1,\delta}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $3n+1$ με το μεγιστοβάθμιο όρο να έχει συντελεστή $(-c)^{3n-1}$ και η εξίσωση $Q_{3n+1,\delta}(s)=0$ έχει $3n+1$ ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο. Εφόσον, $\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)=0$ έχουμε δει ότι είναι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg , από την Πρόταση 3.1 και την σχέση (3.66) συνεπάγεται ότι η εξίσωση $Q_{3n+1,\delta}(s)=0$ έχει $3n-1$ ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος, τις συμβολίζουμε με $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{3n-1}$ και δύο ρίζες, έστω ότι θα τις συμβολίζουμε $-R_j=-R_j(\delta)$, όπου $\mathrm{Re}(R_j)>0,\ j=1,2$.

Συνεπώς, η $Q_{3n+1,\delta}(s)$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$Q_{3n+1,\delta}(s)=(-c)^{3n-1}(s+R_1)(s+R_2)\prod_{i=1}^{3n-1}(s-\rho_i)$$

$$=c^{3n-1}(s+R_1)(s+R_2)\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i-s) \tag{4.70}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.69) και (4.70) στη σχέση (4.40) προκύπτει ότι

$$\hat{\upsilon}_{\delta,m}(s)=\frac{(-1)^{3n-1}(s+a)(s+2a)\,\hat{\omega}_{\delta,m}(s)}{(s+R_1)(s+R_2)\prod_{i=1}^{3n-1}(s-\rho_i)},\ m=1,\ldots,3n-1 \tag{4.71}$$

και με κατάλληλες τεχνικές η σχέση μπορεί να γραφεί επίσης στην ακόλουθη μορφή

$$\hat{\upsilon}_{\delta,m}(s)=\sum_{j=1}^{2}\frac{\varepsilon_{1,m,j}}{s+R_j}+\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\varepsilon_{2,m,j}}{s-\rho_j},\ m=1,\ldots,3n-1 \tag{4.72}$$

όπου

$$\varepsilon_{1,m,j} = (-1)^j \frac{(a-R_j)(2a-R_j)\hat{\omega}_{\delta,m}(-R_j)}{(R_1-R_2)\prod_{i=1}^{3n-1}(R_j+\rho_i)}, \ j=1,2$$

και

$$\varepsilon_{2,m,j} = (-1)^{3n-1} \frac{(a+\rho_j)(2a+\rho_j)\hat{\omega}_{\delta,m}(\rho_j)}{(R_1+\rho_j)(R_2+\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}(\rho_j-\rho_k)}, \ j=1,2,\ldots,3n-1.$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στη σχέση (4.72) παίρνουμε

$$v_{\delta,m}(u) = \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_{1,m,j}\, e^{-R_j u} + \sum_{j=1}^{3n-1} \varepsilon_{2,m,j}\, e^{\rho_j u}, \ \ m=1,\ldots,3n-1 \tag{4.73}$$

Στο Κεφάλαιο 3, δείξαμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, τον οποίο συμβολίσαμε με $m_T(u)$, στην περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου για Erlang(n) διαδικασία κινδύνου με εξάρτηση μέσω της σύζευξης FGM και απουσία στρατηγικής μερίσματος , δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$m_T(u) = \sum_{j=1}^{2} \mu_j e^{-R_j u}, \ \ u \geq 0 \tag{4.74}$$

όπου

$$\mu_j = (-1)^{j+1} \frac{R_{3-j}}{R_2 - R_1}\left(1 - \frac{3R_j}{2a} + \frac{R_j^2}{2a^2}\right), \ j=1,2. \tag{4.75}$$

Επομένως, θέτοντας $w(x,y)=1$ και με αντικατάσταση των εξισώσεων (4.73) και (4.74) στην σχέση (4.29) του Θεωρήματος 4.3 παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας ή τη προεξοφλημένη πιθανότητα χρεοκοπίας

$$m_{Tb}(u) = \sum_{j=1}^{2} \mu_j e^{-R_j u} + \sum_{m=1}^{3n-1} \zeta_m(b)\left[\sum_{j=1}^{2} \varepsilon_{1,m,j}\, e^{-R_j u} + \sum_{j=1}^{3n-1} \varepsilon_{2,m,j}\, e^{\rho_j u}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\left(\mu_j+\sum_{m=1}^{3n-1}\zeta_m(b)\varepsilon_{1,m,j}\right)e^{-R_j u}+\sum_{j=1}^{3n-1}\left(\sum_{m=1}^{3n-1}\zeta_m(b)\varepsilon_{2,m,j}\right)e^{\rho_j u} \qquad (4.76)$$

για $0\le u\le b$, όπου οι σταθερές $\{\zeta_m(b), m=1,\ldots,3n-1\}$είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (4.34) και (4.35) με $h(x)=2ae^{-2ax}-ae^{-ax}$, $\gamma_1(u)=e^{-au}$και $\gamma_2(u)=e^{-2au}-e^{-au}$. Τέλος, από τις εξισώσεις (4.64) και (4.73) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων $V_\delta(u;b)$

$$V_\delta(u;b)=\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{m=1}^{3n-1}\upsilon_m(b)\varepsilon_{1,m,j}\right)e^{-R_j u}+\sum_{j=1}^{3n-1}\left(\sum_{m=1}^{3n-1}\upsilon_m(b)\varepsilon_{2,m,j}\right)e^{\rho_j u}. \qquad (4.77)$$

4.11. Αριθμητικό παράδειγμα

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την επίδραση της παραμέτρου θ στο μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και στις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων χρησιμοποιώντας στρατηγική σταθερού μερίσματος.

Για το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με εξάρτηση μέσω της σύζευξης FGM υπό την ύπαρξη σταθερού ορίου μερίσματος υποθέτουμε ότι η τ.μ. W ~Erlang(2,1) και η τ.μ. X ~ Exp(0.7) Ακόμα θεωρούμε ότι ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου είναι $c=1$, η ένταση ανατοκισμού είναι $\delta=0.03$ και $b=4$ το όριο μερίσματος. Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω υποθέσεις από τη σχέση (4.76) παίρνουμε μία αναλυτική έκφραση για το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $m_{Tb}(u)$ συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού u, $0\le u\le b$. Χρησιμοποιώντας το Mathematica, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου θ, υπολογίσθηκαν τα εξής

- για $\theta=-1$

$$m_{T4}(u)=-0.01183\ e^{-1.50913u}+0.42923\ e^{-0.26266u}+0.33908e^{0.08395u}-0.00002e^{1,37706u}$$

- για $\theta=-0.5$

$$m_{T4}(u)=-0.00663\ e^{-1.45694u}+0.40703\ e^{-0.28432u}+0.34600e^{0.08528u}-0.00002e^{1.41182u}$$

- για $\theta=0$

$$m_{T4}(u)=0.38176\ e^{-0.31038u}+0.35306e^{0.08673u}-0.00001e^{1.58365u}$$

➢ για $\theta = 0.5$

$$m_{T4}(u) = 0.00878\ e^{-1.33691u} + 0.35239\ e^{-0.34239u} + 0.36020\ e^{0.08830u}$$
$$-0.00003\,e^{1.39964u}\cos(0.25403\,u) - 0.00006\,e^{1.39964u}\sin(0.25403\,u)$$

➢ για $\theta = 1$

$$m_{T4}(u) = 0.02098\ e^{-1.26534u} + 0.31732\ e^{-0.38291u} + 0.36736\ e^{0.09001u}$$
$$-0.00011\,e^{1.28253u}\cos(0.24685\,u) - 0.00013\,e^{1.28253u}\sin(0.24685\,u).$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παρατίθενται οι τιμές του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας όπως αυτές υπολογίσθηκαν για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου θ για δεδομένο αρχικό αποθεματικό.

Πίνακας 1. Μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

u\θ	θ=-1	θ=-0.5	θ=0	θ=0.5	θ=1
0	0.75646	0.74638	0.73481	0.72134	0.70555
1	0.696159	0.681476	0.664894	0.645801	0.623752
2	0.65401	0.640148	0.624906	0.607145	0.586967
3	0.630018	0.618866	0.607277	0.591565	0.574399
4	0.619538	0.611497	0.604145	0.584373	0.566717
5	0.611809	0.604935	0.598133	0.551288	0.526046
6	0.572383	0.555599	0.519525	0.384842	0.356124

Όπως μπορούμε να δούμε στον Πίνακα 1, υπάρχει σαφής εξάρτηση μεταξύ της παραμέτρου θ και του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, και μάλιστα όσο μεγαλώνει η παράμετρος θ τόσο μικραίνει η τιμή του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το Mathematica, για τις διάφορες τιμές παραμέτρου θ, υπολογίσθηκαν οι αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερίσματος $V_\delta(u;b)$ συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού $u \geq 0$.

➢ για $\theta = -1$

$$V_{0.03}(u;4) = 0.12612\ e^{-1.50913u} - 3.26536\ e^{-0.26266u} + 5.97535e^{0.08395u} + 0.00005e^{1.37706u}$$
$$+0.00002e^{1.80159u}\cos(0.83997\,u) - 0.00003e^{1.80159u}\sin(0.83997\,u)$$

➢ για $\theta = -0.5$

$$V_{0.03}(u;4) = 0.06859\ e^{-1.45694u} - 3.07978\ e^{-0.28432u} + 5.88936e^{0.08528u} + 0.00006e^{1.41182u}$$

➢ για $\theta = 0$

$$V_{0.03}(u;4) = -2.87329\, e^{-0.31038u} + 5.80178\ e^{0.08673u} + 0.00003 e^{1.58365u}$$

➢ για $\theta = 0.5$

$$V_{0.03}(u;4) = -0.08475\ e^{-1.33691u} - 2.63936\ e^{-0.34239u} + 5.71319 e^{0.08830u} + 0.00010 e^{1.39964u} \cos(0.25403\, u) + 0.00024 e^{1.39964u} \sin(0.25403\, u)$$

➢ για $\theta = 1$

$$V_{0.03}(u;4) = -0.19496\ e^{-1.26534u} - 2.36699\ e^{-0.38291u} + 5.62453 e^{0.090001u} + 0.00043 e^{1.28253u} \cos(0.24685\, u) + 0.00052 e^{1.28253u} \sin(0.24685\, u).$$

Στον πίνακα που ακολουθεί αναπαριστώνται οι τιμές των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερίσματος όπως αυτές υπολογίσθηκαν για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου θ για δεδομένο αρχικό αποθεματικό.

Πίνακας 2. Αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων

u\θ	θ=-1	θ=-0.5	θ=0	θ=0.5	θ=1
0	2.83618	2.87823	2.92852	2.98918	3.06301
1	4.01559	4.11225	4.22097	4.34485	4.48719
2	5.14251	5.24527	5.35693	5.48345	5.62587
3	6.19872	6.29894	6.39703	6.51539	6.64448
4	7.213	7.31307	7.39449	7.53132	7.6623
5	8.39622	8.34754	8.42516	8.69103	8.85751

Όπως μπορούμε να δούμε στον Πίνακα 2, υπάρχει σαφής εξάρτηση μεταξύ της παραμέτρου θ και των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερίσματος και μάλιστα όσο μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου θ τόσο αυξάνεται η τιμή των αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερίσματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- Πολίτης, Κ. (2012). Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.
- Πολίτης, Κ. (2015). Θεωρία Χρεοκοπίας, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2015). Θεωρία Κινδύνου, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξένη

- Albrecher, H., Mercé, C. & Marmol, M., (2005). On the distribution of the dividends payments in a Sparre Andersen model with Generalized Erlang(n) inter-claim times. Insurance Mathematics and Economics, 37, 324-334.
- Andersen, E. Sparre., (1957). On collective theory of risk in case of contagion between the claims. Transactions XVth International congress of Actuaries, New York, II, 219-229.
- Boudreault, M., Cossette, H., Landriault, D. & Marceau, E. (2006). On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. Scandinavian Actuarial Journal, 5, 265-285.
- Boyce, E.W. & DiPrima, C.R., (2000). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Sevetnh Edition. Wiley.
- Bühlmann, H., (1970). Mathematical Methods in Risk Theory. New York: Springer-Verlag.
- Chadjiconstantinidis, S. & Vrontos, S. (2012). On a renewal risk process with dependence under a Farlie Gumbel Morgenstern copula. Scandinavian Actuarial Journal, 2, 125-158.
- Cheung, E., Landriault, D. & Willmot, G. E.(2010). Structural properties of Gerber-Shiu functions in dependent Sparre Andersen models. Insurance: Mathematics and Economics , 46, 117-126.
- Cossette et al (2011). Constant dividend barrier in a risk model with a generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern Copula. Methodology and Computing in Applied Probability.
- Cossette, H., Marceau, E. & Marri, F. (2008). On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie Gumbel Morgenstern copula. Insurance Mathematics and Economics, 43, 444-455.
- Cossette, H., Marceau, E. & Marri, F. (2010). Analysis of ruin measures for the classical compound Poisson risk model with dependence. Scandinavian Actuarial Journal, 3, 221-245.
- De Finetti, B., (1957). Su un’impostazione alternativa dell teoria collectiva del risschio. Transactions of the XV International Congress of Actuaries, 2, 433-443.
- Dickson, D.C.M. & Hipp, C. (1998). Ruin probabilities for Erlang(2) risk process. Insurance Mathematics and Economics, 22, 251-262.
- Dickson, D.C.M. & Hipp, C. (2001). On the time to ruin for Erlang(2) risk processes. Insurance Mathematics and Economics, 29, 333-344.

- Frees, E. & Valdez, E. (1998). Understanding relationships using copulas. North American Actuarial Journal, 2, 1-25.
- Gerber, H. & Shiu, E. (1998). On the time value of ruin. North American Actuarial Journal, 2, 48-78.
- Gerber, H. & Shiu, E. (2005). The time value of ruin in a Sparre Andersen model. North American Actuarial Journal, 9, 49-84.
- Huang, J. S. & Kotz, S. (1984). Correlation structure in iterated Farlie-Gumbel-Morgenstern distribution. Biometrika,71, 633-637.
- Klimenok, V. (2001). On the modification of Rouche's theorem for the queuing theory problems. Queuing Systems, 38, 431-434.
- Landriault, D. (2008). Constant dividend barrier in a risk model with interclaim-dependent claim sizes. Insurance Mathematics and Economics, 42, 31–38.
- Li, S. & Garrido, J. (2004).On ruin for the Erlang(n) risk process. Insurance Mathematics and Economics, 34, 391-408.
- Li, S. & Garrido, J. (2004a). On the ruin for the Erlang(n) risk process. Insurance Mathematics and Economics, 34, 193-225.
- Li, S. & Garrido, J. (2004). On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function. Advances in Applied probability, 37, 836-856.
- Li, S. & Garrido, J. (2004b). On a class of renewal risk models with a constant dividend barrier. Insurance Mathematics and Economics, 35, 529-539.
- Lin, S., Pavlova, K.P., (2006). The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy. Insurance Mathematics and Economics, 38, 57-80.
- Lin, X. S. & Willmot, G. E. (1999). Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. Insurance Mathematics and Economic , 25, 63-84.
- Lin, S., (2003). Discussion of Y Cheng and Q Tang's 'Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin. North American Actuarial Journal, 7 (3), 122-124.
- Lin, S., Willmot, G. & Drekic, S. (2003). The classical risk model with a constant dividend barrier: Analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function. Insurance Mathematics and Economics, 33, 551-566.
- Marshall, A. W. & Olkin, I. (1988). Families of multivariate distributions. Journal of American Statistical Association, 83, 834-841.
- Nelsen, R. B. (2006). An introduction to copulas (2nd ed). Springer Series in Statistics. New York: Springer-Verlang.
- Paulsen, J. & Giessing, H., (1997). Optimal choice of dividend barriers for a risk process with stochastic return on investments. Insurance Mathematics and Economics, 20, 215-223.
- Placket, R.L., (1965). A class of bivariate distributions. Journal of the American Statistical Association, 60, 516-522.
- Shi et al (2013). On the compound Poisson risk model with dependence and a threshold dividend strategy. Statistics and Probability Letters, 83, 1998-2006.
- Tang, Q. & Vernik, R. (2007). The impact on ruin probabilities of the association structure among financial risks. Statistic and Probability Letters, 77, 1522-1525.

- Tsai, C. (2005). Discussion of H. Gerber, E. Shiu, The time value of ruin in a Sparre Andersen risk model. North American Actuarial Journal, 9, 74-77.
- Tsai, C. & Sun, L. (2004). On the discounted distribution functions for the Erlang(2) risk process. Insurance Mathematics and Economics, 35, 5-19.