Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τ Μ Η Μ Α   Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ
Κ Α Ι   Α Σ Φ Α Λ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ   Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο   Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α   Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν
Σ Τ Η Ν   Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Η   Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΕΠΙ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΕΣΩ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ MONTE-CARLO

Ηλίας Ν. Γκόρος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούλιος 2016

Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τ Μ Η Μ Α Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ
Κ Α Ι Α Σ Φ Α Λ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν
Σ Τ Η Ν Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Η Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΕΠΙ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΕΣΩ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ MONTE-CARLO

Ηλίας Ν. Γκόρος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούλιος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. 1/29.09.2014 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Μ. Μπούτσικας……………. (Επιβλέπων)
- Γ. Ηλιόπουλος………………
- Γ. Πιτσέλης…………………

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

U N I V E R S I T Y O F P I R A E U S

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

PRICING MULTI-ASSET OPTIONS USING MONTE-CARLO SIMULATION

By

Ilias N. Gkoros

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
July 2016

Αφιερώνεται στη σεβαστή μου μητέρα

Αφροδίτη.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Μιχαήλ Μπούτσικα για την καθοδήγηση καθ' όλη τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας αλλά και για τα μαθήματα που δίδαξε κατά τη διάρκεια του ΜΕΣ, καθώς και όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού που παρείχαν υψηλού επιπέδου επιστημονική γνώση. Θεωρώ ότι η γνώση αυτή θα είναι ωφέλιμη και στον επαγγελματικό στίβο.

Περίληψη

Τα δικαιώματα επί πολλαπλών περιουσιακών στοιχείων είναι ένα σύγχρονο εργαλείο στην αγορά παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Δεν είναι ευρέως διαδεδομένα ίσως λόγω της πολυπλοκότητας τους αν και στην πράξη χρησιμοποιούνται και αποτιμώνται συνήθως ως μονοδιάστατα δικαιώματα όπως στην περίπτωση των δικαιωμάτων επί χρηματιστηριακών δεικτών. Η τελική αξία τους διαμορφώνεται από δύο ή και περισσότερα στοιχεία συσχετισμένα μεταξύ τους.

Τα πολλαπλά δικαιώματα παλαιότερα ήταν δύσκολο να αποτιμηθούν όμως η σημερινή υπολογιστική ισχύς καθιστά εφικτή την αποτίμηση αυτών μέσω αλγορίθμων προσομοίωσης.

Στη παρούσα διπλωματική εργασία θα αναφερθούμε αναλυτικά σε αλγόριθμους αποτίμησης κυρίως δικαιωμάτων επί πολλαπλών υποκείμενων τίτλων-περιουσιακών στοιχείων ευρωπαϊκού τύπου.

Συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο κάνοντας μια εισαγωγή στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα και τις αγορές αυτών και έννοιες όπως η αντιστάθμιση κινδύνου, θα αναφερθούμε στα είδη των δικαιωμάτων, τα εξωτικά δικαιώματα, τα δικαιώματα προαίρεσης επί πολλαπλών περιουσιακών στοιχείων που είναι το κύριο θέμα της εργασίας καθώς και σε εξωτικά δικαιώματα προαίρεσης επί πολλαπλών περιουσιακών στοιχείων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφερόμαστε στο θεωρητικό υπόβαθρο αποτίμησης δικαιωμάτων αναφερόμενοι στη «δίκαιη» τιμή ενός συμβολαίου στην θεωρία εξισορροπητικής κερδοσκοπίας και κυρίως επικεντρωνόμαστε σε στοχαστικές ανελίξεις όπως η κίνηση Brown και η γεωμετρική κίνηση Brown μίας και πολλαπλών διαστάσεων καθώς και στο μοντέλο Black&Scholes.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά σε μεθόδους αποτίμησης απλών και εξωτικών μονοδιάστατων δικαιωμάτων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εφαρμόζουμε την θεωρία και αναλυτικά αποτιμούμε πολλαπλούς τίτλους και δικαιώματα επί πολλαπλών τίτλων όπως Basket, Exchange, Quanto και Extreme, μέσω μεθόδων προσομοίωσης Monte Carlo. Αναφερόμαστε στην χρησιμότητα αυτού τους είδους των δικαιωμάτων και παραθέτουμε γραφήματα τα οποία μας οδηγούν σε χρήσιμα συμπεράσματα.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναφερόμαστε και αποτιμούμε μέσω αλγορίθμων προσομοίωσης εξωτικά δικαιώματα επί πολλαπλών περιουσιακών στοιχείων-υποκείμενων τίτλων.

Τέλος στο παράρτημα της εργασίας αναφερόμαστε στη μέθοδο Monte Carlo, στην παραγωγή «τυχαίων» αριθμών και στις μεθόδους που χρησιμοποιούνται στο να παράγουμε τυχαίους αριθμούς στην μονοδιάστατη αλλά κυρίως και τυχαία διανύσματα στην πολυδιάστατη κανονική κατανομή.

Στην εργασία αυτή, για την υλοποίηση των αλγορίθμων αποτίμησης χρησιμοποιήθηκε το υπολογιστικό πακέτο Wolfram Mathematica 10.

Abstract

The multi asset options is a rather recent tool in the finance derivatives market. These options are not so widely used as the vanilla ones, mainly due to their complexity. In practice they are usually considered as single options, e.g. when the underlying asset is a stock market index. The main characteristic of these derivatives is that their final value is dependent on two or more assets that are related to each other.

The increasing power of modern computing systems enable us to approximate with satisfactory accuracy the fair value of any multi-asset option (with predefined exercise date) using simulation techniques. The main purpose of this master thesis is to present and implement appropriate simulation algorithms for estimating the price of European style multi assets options.

In the first chapter, we make a brief discussion regarding derivatives, derivatives markets and also concepts such as hedging, and we refer to different types of multi asset options which are the main subject of this thesis.

In the second chapter we briefly discuss the theoretical background of option pricing. A reference will be made to the "fair" value of a contract, and to arbitrage pricing. The main focus will be on the stochastic processes of one-dimensional and multi-dimensional Brownian motion and Geometric Brownian motion, as well as the Black&Scholes model.

In the third chapter we present pricing methods for single vanilla options and exotic options using the Monte Carlo method.

In the fourth chapter we present and implement simulation algorithms in order to approximate the fair price of Basket, Exchange, Quanto and Extreme options. The practical use of these type of options is discussed and certain graphs that may lead us to useful conclusions are illustrated.

Finally, the fifth chapter deals with path dependent multi asset options such as Barrier, Extreme and Asian basket options.

In the Appendix of this thesis, we refer in general to the Monte Carlo method, to the generation of "random" numbers and the methods used to produce "random" numbers from the multi-dimensional normal distribution.

The Wolfram Mathematica 10 software package is used in all computations.

Περιεχόμενα.

Κεφάλαιο 1^{ο}:

Παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα.

1.1 Εισαγωγή.

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, παράγονται από τις υποκείμενες αγορές χρηματοοικονομικών προϊόντων. Είναι μια σύμβαση με όρους μελλοντικής συμφωνίας σε προκαθορισμένο χρόνο μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων και αποτελούν ένα «παίγνιο» μηδενικού αθροίσματος. Στη λήξη της σύμβασης το κέρδος του ενός προστιθέμενο με την ζημία του άλλου αντισυμβαλλόμενου θα έχουν μηδενικό αποτέλεσμα. Αν ο Α έχει κέρδος K και ο Β αρνητικό κέρδος $-K$, δηλαδή ζημία $Z = -K$, τότε $K + Z = 0$.

1.2.1 Προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts).

Είναι εξωχρηματιστηριακά συμβόλαια-συμφωνίες μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων συνήθως πιστωτικών ιδρυμάτων, άλλων μεγάλων οργανισμών ή πολυεθνικών εταιρειών. Η διαπραγμάτευση τους γίνεται σε μη οργανωμένες αγορές. Στα συμβόλαια αυτά προκαθορίζεται η Αγορά ή Πώληση ενός αγαθού ή άυλου τίτλου σε συγκεκριμένη ποσότητα και ημερομηνία με προκαθορισμένη τιμή (delivery price) σε μελλοντικό προκαθορισμένο χρόνο.

Ο Αγοραστής λαμβάνοντας θέση θετική (long position), υποχρεούται να αγοράσει στο μέλλον με τους όρους που έχουν συμφωνηθεί και ο Πωλητής λαμβάνοντας αρνητική θέση (short position) να πουλήσει στο μέλλον με τους ίδιους προσυμφωνημένους όρους. Αν ορίσουμε ως S_T την αξία του υποκείμενου τίτλου σε μελλοντικό χρόνο Τ και ως Κ την προκαθορισμένη τιμή συμφωνίας και δεν λάβουμε υπόψη τα κόστη συναλλαγών και την χρονική αξία του χρήματος, τότε το κέρδος του Αγοραστή (long position) θα είναι:

$$S_T - K.$$

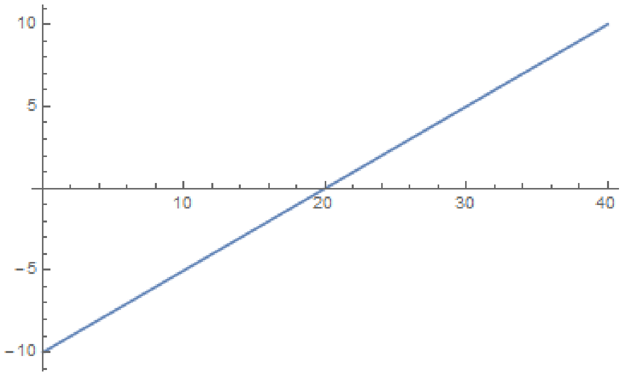
Ενώ αντιθέτως το κέρδος του Πωλητή (short position) θα είναι:

$$K - S_T\,.$$

Η τιμή Κ είναι προκαθορισμένη (delivery price) μέσω της συμφωνίας των δύο αντισυμβαλλομένων, ενώ η τιμή S_T είναι τυχαία μεταβλητή.

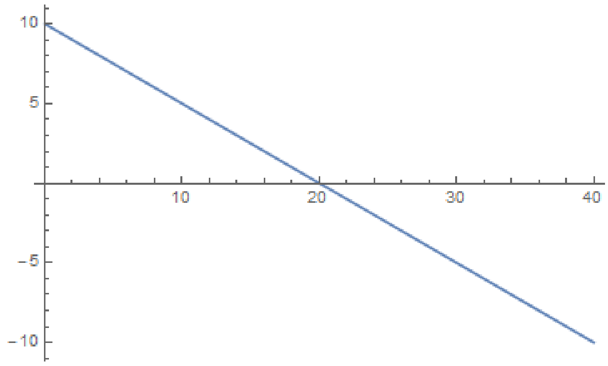
Θέση Αγοράς (Long Position):

```
Plot[0.5 x - 10, {x, 0, 40}]
```



Θέση Πώλησης (Short Position):

```
Plot[-0.5 x + 10, {x, 0, 40}]
```



Θεωρητικά η προκαθορισμένη τιμή παράδοσης K καθορίζεται ώστε να είναι ίση με την αναμένομενη τιμή S_T, δηλαδή στην παρούσα αξία του υποκείμενου τίτλου S_0 προσθέτουμε την αξία του επί του ετήσιου T επιτοκίου αναφοράς r για τον υπολειπόμενο χρόνο εξάσκησης t.

$$K = S_0 + S_0 \cdot rt = S_0 \cdot (1 + rt)$$

Θεωρώντας ότι υπάρχει συνεχής ανατοκισμός έχουμε:

$$K = S_0 \cdot e^{rt}$$

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω είναι η τιμή που πρέπει να έχει το K ώστε να μην υπάρχει ευκαιρία για σίγουρο κέρδος στην αγορά.

1.2.2. Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (future contracts).

Όπως τα προθεσμιακά συμβόλαια, έτσι και τα ΣΜΕ αποτελούνται από συμφωνίες μεταξύ δύο μερών εκ των οποίων ο ένας Αγοράζει (long position) και ο έτερος Πωλεί (short position), σε προκαθορισμένη τιμή (delivery price), συγκεκριμένη ποσότητα του υποκείμενου αγαθού (εμπορεύματα, μετοχές, κ.α.) σε ορισμένη μελλοντική ημερομηνία.

Η διαφορά των ΣΜΕ με τα ΠΣ, είναι ότι τα ΠΣ είναι εξωχρηματιστηριακές συμφωνίες εκτός οργανωμένων αγορών, ενώ τα ΣΜΕ είναι τυποποιημένα συμβόλαια τα οποία συναλλάσσονται σε οργανωμένες αγορές όπως το χρηματιστήριο, με την εγγύηση και τους εκάστοτε κανόνες των οργανωμένων αγορών.

Συνοψίζοντας οι λόγοι που μπορεί να λάβει κάποιος θέση Αγοράς ή Πώλησης σε ΠΣ ή ΣΜΕ είναι η αντιστάθμιση κινδύνου έναντι μιας αντίθετης θέσης που έχει σε υποκείμενο τίτλο, οι ανοδικές ή πτωτικές προσδοκίες ενός τίτλου, η κερδοσκοπία και η αντιστάθμιση μιας μελλοντικής θέσης στην υποκείμενη αγορά.

1.2.3 Αντιστάθμιση κινδύνου (Hedging).

Αποτελείται από στρατηγικές που σκοπό έχουν να περιορίσουν ή και εξαλείψουν τον μη συστημικό κίνδυνο. Ο συστημικός κίνδυνος αφορά την αγορά και μακροοικονομικά μεγέθη και είναι αδύνατο να εξαλειφθεί, μπορεί όμως να περιοριστεί με τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα ο μη συστημικός κίνδυνος αφορά τον κίνδυνο υποκείμενων τίτλων (μετοχές, εμπορεύματα, κ.α.) και δύναται να εξαλειφθεί μέσω ενός καλά διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου ή και μέσω χρήσης παραγώγων αυτών. Τα παράγωγα είναι εργαλεία που μας δίνουν την δυνατότητα μέσω και αντίθετων θέσεων να περιορίσουμε επενδυτικούς κινδύνους, παράδειγμα μπορούμε αν περιμένουμε πτώση του € έναντι του $ να κλείσουμε μια συμφωνία πριν την πτώση αυτή, ή να αγοράσουμε / πουλήσουμε συναλλαγματικά συμβόλαια, κ.τ.λ.. γενικότερα χωρίς ασφαλιστική κάλυψη μπορούμε να ασφαλίσουμε εν μέρει τις αξίες μας μέσω των παραγώγων προϊόντων και των δικαιωμάτων αυτών.

1.3.1 Δικαιώματα προαίρεσης (Options).

Αποτελούν συμφωνίες μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων, ενός Αγοραστή (Long) και ενός Πωλητή (Short) δικαιώματος (option) και αφορά δικαίωμα μελλοντικής αγοράς ή πώλησης ενός υποκείμενου τίτλου με χαμηλή δέσμευση κεφαλαίων (μόχλευση).

Συγκεκριμένα ο Αγοραστής χωρίς να υποχρεούται μπορεί αν τον συμφέρει να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο S της επιλογής του, με δικαίωμα αγοράς αν έχει ανοδικές προσδοκίες ή να πουλήσει τον τίτλο με δικαίωμα πώλησης αν έχει πτωτικές προσδοκίες.

Ο Πωλητής αντιθέτως υποχρεούται να αγοράσει ή πουλήσει τον τίτλο στον Αγοραστή εφόσον αυτός ασκήσει το δικαίωμα του. Για την υποχρέωση του αυτή εισπράττει ένα αντίτιμο ή ασφάλιστρο στην συμφωνηθείσα τιμή του δικαιώματος, το οποίο πληρώνει ο Αγοραστής. Λειτουργεί ουσιαστικά ως ασφαλιστής.

Ο υποκείμενος τίτλος μπορεί να αφορά αγαθό, περιουσιακό στοιχείο, μετοχές, εμπόρευμα, οτιδήποτε έχει προσυμφωνηθεί σε προκαθορισμένη τιμή K, με συγκεκριμένες μονάδες τίτλου ανά συμβόλαιο (π.χ. ένα δικαίωμα η τιμή του να αντιστοιχεί - πολλαπλασιάζεται με 100 μτχ, 5 συμβόλαια, 100 μονάδες ενός εμπορεύματος, κοκ).

Η συμφωνία αφορά το μέλλον σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή T (λήξη). Η εξάσκηση των δικαιωμάτων μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο στην λήξη τους σε δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου (ΕΤ). Εξαιρετικά δύναται μόνο στα δικαιώματα Αμερικανικού τύπου (ΑΤ) να εξασκηθούν και πριν την λήξη τους. Επίσης οποιαδήποτε στιγμή t κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος $[0, T]$, μπορεί κάποιος να κλείσει την θέση του αν τα δικαιώματα διαπραγματεύονται σε οργανωμένες αγορές.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα επικεντρωθούμε στα Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα (ΕΤ).

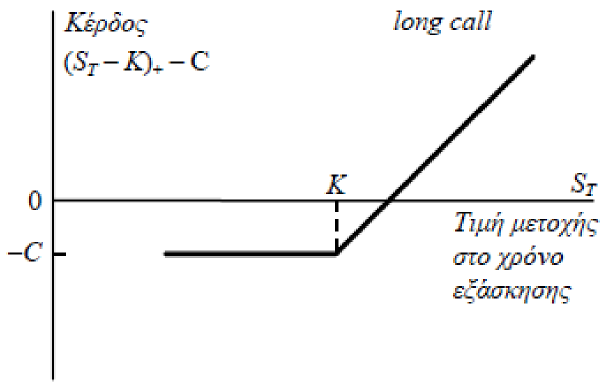
1.3.2 Είδη Δικαιωμάτων Προαίρεσης (Call-Put Vanilla Options).

Αγορά δικαιώματος Αγοράς (Long Call Option): Πραγματοποιείται από κάποιον όταν προσδοκά άνοδο της τιμής ενός τίτλου, χωρίς όμως να ρισκάρει όλο το ποσό που ενδεχομένως θα έκανε σε απευθείας αγορά του τίτλου. Αγοράζει το δικαίωμα αγοράς καταβάλλοντας συγκεκριμένο αντίτιμο C στον Πωλητή και αν τον συμφέρει το εξασκεί στην λήξη του. Αγοράζει δηλαδή τον τίτλο στην προσυμφωνημένη τιμή K.

Μη λαμβάνοντας την χρονική αξία του χρήματος και τα κόστη των συναλλαγών το κέρδος Αγοράς ενός Call θα είναι:

$$(S_T - K)_+ - C$$

Όπου $(S_T - K)_+ = Max[S_T - K, 0]$



Παράδειγμα: Τιμή υποκείμενου τίτλου $S_0 = 20\ \chi.\mu.$ Τιμή Call, $C = 1.4\ \chi.\mu.$ με τιμή εξάσκησης $K = 19\ \chi.\mu.$ Αν στη λήξη η τιμή $S_T = 22\ \chi.\mu.$ ο Αγοραστής του Call θα εξασκήσει το δικαίωμα του να αγοράσει τον τίτλο στις $19\ \chi.\mu. = K$ και θα κλείσει άμεσα την θέση του μεταπουλώντας στις $22\ \chi.\mu. = S_T$. Αν κάθε συμβόλαιο αντιστοιχεί σε 100 τίτλους, τότε το κέρδος του θα είναι:

$$(22 - 19 - 1.4) \cdot 100 = 160\ \chi.\mu.$$

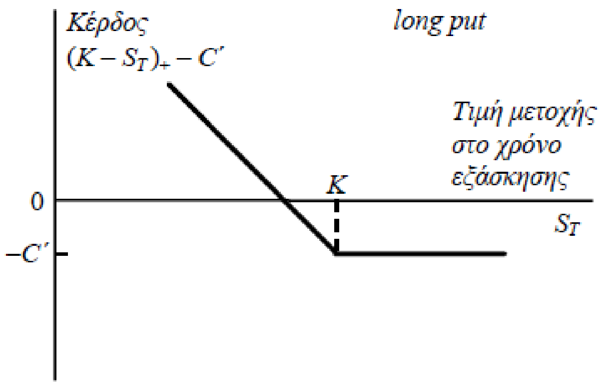
Το νεκρό σημείο 0 βρίσκεται στις $19 + 1.4 = 20.4\ \chi.\mu.$ ανά τίτλο.

Αγορά δικαιώματος Πώλησης (Long Put Option): Πραγματοποιείται από κάποιον όταν προσδοκά πτώση της τιμής ενός τίτλου, χωρίς όμως να ρισκάρει όλο το ποσό που ενδεχόμενος θα έκανε σε απευθείας ελεύθερη πώληση του τίτλου.

Αγοράζει το δικαίωμα πώλησης καταβάλλοντας συγκεκριμένο αντίτιμο P στον Πωλητή και αν τον συμφέρει το εξασκεί στην λήξη του. Πωλεί δηλαδή τον τίτλο στην προσυμφωνημένη τιμή K. Μη λαμβάνοντας την χρονική αξία του χρήματος και τα κόστη των συναλλαγών το κέρδος Αγοράς ενός Put θα είναι:

$$(K - S_T)_+ - P$$

Όπου $(K - S_T)_+ = Max[K - S_T, 0]$



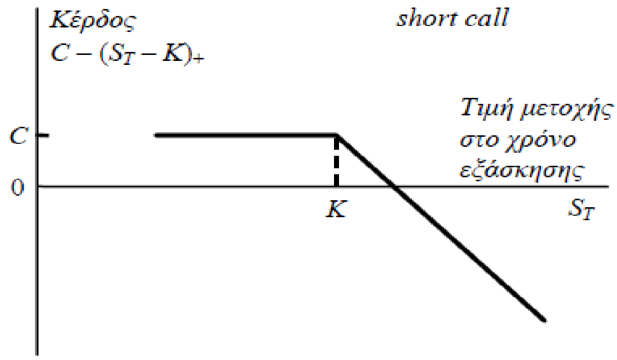
Παράδειγμα: Τιμή υποκείμενου τίτλου $S_0 = 20\ \chi.\mu.$ Τιμή Put, $P = 1.3\ \chi.\mu.$ με τιμή εξάσκησης $K = 21\ \chi.\mu.$ Αν στη λήξη η τιμή $S_T = 19\ \chi.\mu.$ ο Αγοραστής του Put θα εξασκήσει το δικαίωμα του να πουλήσει τον τίτλο στις $21\ \chi.\mu. = K$ και θα κλείσει άμεσα την θέση του αγοράζοντας στις $19\ \chi.\mu. = S_T$. Αν κάθε συμβόλαιο αντιστοιχεί σε 100 τίτλους, τότε το κέρδος του θα είναι:

$$(21 - 19 - 1.3) \cdot 100 = 70\ \chi.\mu.$$

Το νεκρό σημείο 0 βρίσκεται στις $21 - 1.3 = 19.7\ \chi.\mu.$ ανά τίτλο.

Πώληση δικαιώματος Αγοράς (Short Call Option): Πραγματοποιείται από κάποιον που προσδοκά μικρή πτώση της τιμής ενός τίτλου ή σταθερότητα. Εισπράττει συγκεκριμένο αντίτιμο C από τον Αγοραστή και κερδίζει αν αυτός δεν εξασκήσει το δικαίωμα στην λήξη του, όμως ρισκάρει να χάσει απεριόριστο ποσό. Μη λαμβάνοντας την χρονική αξία του χρήματος και τα κόστη των συναλλαγών το κέρδος Πώλησης ενός Call θα είναι:

$$C - (S_T - K)_+$$



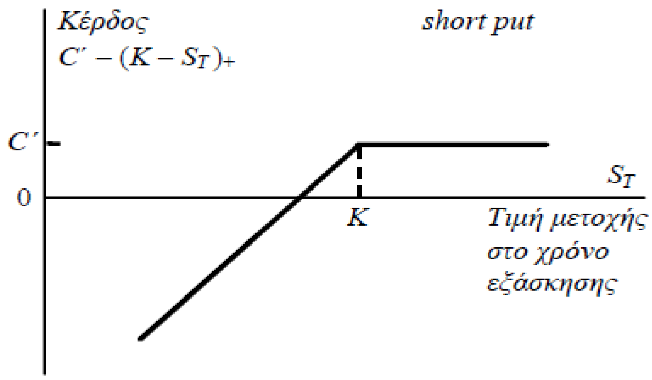
Παράδειγμα: Τιμή υποκείμενου τίτλου $S_0 = 20\ \chi.\mu.$, Τιμή Call, $C = 1.4\ \chi.\mu.$ με τιμή εξάσκησης K= $19\ \chi.\mu.$ Αν στη λήξη η τιμή $S_T = 18\ \chi.\mu.$ και κάθε συμβόλαιο αντιστοιχεί σε 100 τίτλους ο Αγοραστής του Call δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα του να αγοράσει τον τίτλο και ο Πωλητής θα καρπωθεί ολόκληρο το δικαίωμα C. Δηλ. $1.4 \cdot 100 = 140\chi.\mu.$

Πώληση δικαιώματος Πώλησης (Short Put Option): Πραγματοποιείται από κάποιον όταν προσδοκά μικρή άνοδο της τιμής ενός τίτλου ή σταθερότητα, ρισκάρει να χάσει ποσό μέχρι θεωρητικά να μηδενιστεί η τιμή του τίτλου. Εισπράττει συγκεκριμένο αντίτιμο P από τον Αγοραστή και το κερδίζει αν αυτός δεν εξασκήσει το δικαίωμα στην λήξη του.

Μη λαμβάνοντας την χρονική αξία του χρήματος και τα κόστη των συναλλαγών το κέρδος Πώλησης ενός Put θα είναι:

$$P - (K - S_T)_+$$

Όπου $(K - S_T)_+ = Max[K - S_T, 0]$



Παράδειγμα: Τιμή υποκείμενου τίτλου $S_0 = 17\, \chi.\mu.$, Τιμή Put, $P = 1.3\, \chi.\mu.$ με τιμή εξάσκησης $K = 18\, \chi.\mu.$ Αν στη λήξη η τιμή $S_T = 20\, \chi.\mu.$ και κάθε συμβόλαιο αντιστοιχεί σε 100 τίτλους ο Αγοραστής του Put δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα του να πουλήσει τον τίτλο και ο Πωλητής θα καρπωθεί ολόκληρο το δικαίωμα P. Δηλ. $1.3 \cdot 100 = 130\chi.\mu.$

Θεωρούμε ότι ένα δικαίωμα Call στο χρόνο t βρίσκεται *in the money* όταν $S_T > K$. *At the money* όταν$S_T = K$ και *out of the money* όταν $S_T < K$. Η τιμή του αποτελείται από την εσωτερική του αξία $(S_T - K)_+$ και την αξία χρόνου που είναι η διαφορά μεταξύ τιμής δικαιώματος και εσωτερικής αξίας. Η αξία του χρόνου μειώνεται όσο πλησιάζει η λήξη του δικαιώματος και είναι 0 στην λήξη του.

Τα αντίστροφα όσο αναφορά τις ανισότητες ισχύουν σε ένα δικαίωμα Put, ενώ η εσωτερική του αξία ισούται με $(K - S_T)_+$.

1.3.3 Εξωτικά δικαιώματα προαίρεσης (Exotic Options).

Εκτός των παραπάνω συνήθων (vanilla) δικαιωμάτων προαίρεσης υπάρχουν και τα δικαιώματα προαίρεσης με όρους τροποποιημένους, γνωστά ως Εξωτικά (Exotic) Δικαιώματα. Βασικότερα αυτών είναι:

1. **Barrier options**: Τίθεται ένα φράγμα (barrier) u και τα δικαιώματα αυτά ισχύουν ή δεν ισχύουν (alive or killer), αναλόγως της τιμής του υποκείμενου τίτλου και των όρων που έχουν τεθεί σχετικά με το φράγμα (barrier).

A. Up and in: Ισχύουν και εξασκούνται εφόσον η τιμή S του τίτλου περάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα $u > K$ έως το χρόνο εξάσκησης T. Η τελική τους αξία είναι:

$$(S_T - K)_+ \cdot I(\mathrm{Max}_t[S_t] > u), \text{ όπου } t \in [0, T].$$

Όπου $I(A) = 1$ ή 0 ανάλογα με το αν πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A ή όχι.

Β. Up and out: Δεν ισχύουν και δεν εξασκούνται εφόσον η τιμή του τίτλου S περάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα $u > K$ έως το χρόνο εξάσκησης T. Η τελική τους αξία είναι:

$$(S_T - K)_+ \cdot I(\text{Max}_t[S_t] < u)\,,\ \text{όπου } t \in [0, T].$$

$$\text{ή } (S_T - K)_+ \cdot I(\text{Min}_t[S_t] < u),\ \text{όπου } t \in [0, T].$$

Γ. Down and in: Ισχύουν και εξασκούνται εφόσον η τιμή του τίτλου S δεν περάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα $u < S_0$ έως το χρόνο εξάσκησης T. Η τελική τους αξία είναι:

$$(S_T - K)_+ \cdot I(\text{Min}_t[S_t] < u)\,,\ \text{όπου } t \in [0, T].$$

Δ. Down and out: Δεν ισχύουν και δεν εξασκούνται εφόσον η τιμή του τίτλου S δεν περάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα $u < S_0$ έως το χρόνο εξάσκησης T. Η τελική τους αξία είναι:

$$(S_T - K)_+ \cdot I(\text{M}ax_t[S_t] > u),\ \text{όπου } t \in [0, T].$$

Τα παραπάνω αφορούν δικαιώματα Call, τα αντίθετα ισχύουν στην κύρια συνάρτηση αλλά και στις ανισότητες για Put.

2. Lookback options: Σε αυτά τα δικαιώματα η τιμή εξάσκησης K δεν προκαθορίζεται αλλά στα Call ισούται με την μικρότερη (min) του υποκείμενου τίτλου από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος έως το χρόνο λήξης-εξάσκησης T. Η τελική τους αξία είναι:

$$Call\text{: } (S_T - \text{Min}_{t\in[0,T]}[S_t]\,)_+ \quad Put\text{: } (\text{Max}_{t\in[0,T]}[S_t] - S_T)_+$$

3. Asian options: Και εδώ η τιμή εξάσκησης K δεν προκαθορίζεται αλλά ισούται με τον μέσο όρο του υποκείμενου τίτλου από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος έως το χρόνο λήξης-εξάσκησης T. Άλλη περίπτωση είναι η τιμή εξάσκηση K να προκαθορίζεται αλλά στη λήξη η τιμή S_T να ισούται με τον μέσο όρο του υποκείμενου τίτλου από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος έως το χρόνο λήξης T. Η τελική τους αξία είναι:

$$Call\text{: }\left(S_T - \sum_{i=1}^{n} \frac{S_{t_i}}{n}\right)_+ \quad Put\text{: }\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{S_{t_i}}{n} - S_T\right)_+$$

ή

$$Call\text{: }\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{S_{t_i}}{n} - K\right)_+ \quad Put\text{: }\left(K - \sum_{i=1}^{n} \frac{S_{t_i}}{n}\right)_+$$

4. Forward start options: Η τιμή εξάσκησης K δεν προκαθορίζεται αλλά συμφωνείται να ισούται με την τιμή του υποκείμενου τίτλου σε χρόνο t. Η τελική τους αξία είναι:

$$Call: (S_T - S_t)_+ \quad Put: (-S_T + S_t)_+ \quad \text{όπου } t \in [0, T]$$

Στα παραπάνω δικαιώματα οι συμπεριλαμβανόμενες τιμές συνήθως αφορούν το ημερήσιο κλείσιμο συνεδρίασης του τίτλου. Επίσης δεν συμπεριλάβαμε το κόστος αγοράς τος Cή P, χρονικής αξίας χρήματος και τα κόστη συναλλαγών.

1.3.4 Δικαιώματα προαίρεσης επί πολλαπλών περιουσιακών στοιχείων (Multi asset Options).

Είναι δικαιώματα που οι τιμές τους δεν εξαρτώνται μόνο από ένα περιουσιακό στοιχείο-υποκείμενο τίτλο, αλλά από πολλαπλά περιουσιακά στοιχεία-υποκείμενους τίτλους. Παράδειγμα τα δικαιώματα επί ενός χρηματοοικονομικού δείκτη, ο οποίος δείκτης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα χαρτοφυλάκιο πολλαπλών συσχετισμένων περιουσιακών στοιχείων-υποκείμενων τίτλων. Η αποτίμηση τους πραγματοποιείται με μεθόδους προσομοίωσης, λόγω κυρίως των πολλαπλών διαστάσεων τους.

Βασικότερα Multi asset options, είναι:

1. Basket options: Η τιμή του υποκείμενου τίτλου, αποτελείται από το άθροισμα της αξίας ενός συνόλου (καλαθιού) n υποκείμενων τίτλων και ο κάθε τίτλος συμμετέχει στο καλάθι αυτό με κάποια στάθμιση-ποσοστό $w_{i,}$ για $i = 1, \dots, d$.

Η τελική τους αξία είναι:

$$Call: (\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T} - K)_+ \qquad Put: (K - \sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T})_+$$

2. Exchange options: Δικαιώματα ανταλλαγής ενός περιουσιακού στοιχείου-υποκείμενου τίτλου με ένα άλλο περιουσιακό στοιχείο-υποκείμενο τίτλο σε αλλοδαπή ή εγχώρια αγορά. Η τελική τους αξία είναι:

$$Call: (S_T^{(1)} - y S_T^{(2)})_+ \qquad Put: (y S_T^{(2)} - S_T^{(1)})_+$$

Όπου y πολυμεταβλητός παράγοντας, συναλλαγματικής ισοτιμίας για συναλλαγές με την αλλοδαπή αγορά. Αν οι συναλλαγές είναι στην εγχώρια αγορά ή σε αγορές με κοινό νόμισμα $y = 1$.

3. Quanto-Currency options: Δικαιώματα στην αλλοδαπή με διαφορετικό νόμισμα, συνεπώς και συμπεριλαμβάνεται και η συναλλαγματική ισοτιμία. Υποθέτοντας $S_T^{(1)}$ ως συναλλαγματική ισοτιμία και $S_T^{(2)}$ ως τον υποκείμενο τίτλο στην αλλοδαπή, έχουμε τις εξής περιπτώσεις, όπου η τελική τους αξία είναι:

Α.

$$Call: \quad S_T^{(1)}(S_T^{(2)} - K)_+ \quad Put: S_T^{(1)}(K - S_T^{(2)})_+$$

Β.

$$Call: \; (S_T^{(1)} S_T^{(2)} - K)_+ \quad Put: \; (K - S_T^{(1)} S_T^{(2)})_+$$

Γ.

$$Call: \mathrm{Max}\left[S_T^{(1)}, c\right](S_T^{(2)} - K)_+ \quad Put: \mathrm{Max}\left[S_T^{(1)}, c\right](K - S_T^{(2)})_+$$

Δ.

$$Call: (\mathrm{Max}\left[S_T^{(1)}, c\right] S_T^{(2)} - K)_+ \quad Put: (K - \mathrm{Min}\left[S_T^{(1)}, c\right] S_T^{(2)})_+$$

Όπου c στις περιπτώσεις Γ και Δ μία σταθερά-προκαθορισμένη συναλλαγματική ισοτιμία.

4. Extreme options: Δικαιώματα με διαφορετικούς τίτλους από τους οποίους επιλέγεται ένας ο μέγιστος στο Call ο ελάχιστος στο Put. Η S_T αποτελείται από ένα καλάθι (d) υποκείμενων τίτλων, για $i = 1, \dots, d$. Από αυτούς κατά περίπτωση επιλέγεται ένας κατά τη λήξη του δικαιώματος Ε.Τ. $\mathbf{S}_T = (S_{1,T}, \dots, S_{d,T})$. Η τελική τους αξία είναι:

$$Call: (\mathrm{Max}[\mathbf{S}_T] - K)_+ \qquad Put: (K - \mathrm{Min}[\mathbf{S}_T])_+$$

1.3.5 Εξωτικά δικαιώματα προαίρεσης επί πολλαπλών περιουσιακών στοιχείων (Exotic Multi asset Options).

1. Barrier Basket options: Και στα πολυδιάστατα Barrier options ορίζεται ένα φράγμα (barrier) u και τα δικαιώματα αυτά ισχύουν ή δεν ισχύουν (alive or killer), αναλόγως της μεσοσταθμισμένης τιμής των υποκείμενων τίτλων και των όρων που έχουν τεθεί σχετικά με το φράγμα u (barrier).

Παράδειγμα: Δικαιώματα Call που ισχύουν και εξασκούνται εάν η τιμή $\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T}$ περάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα $u > K$ έως το χρόνο εξάσκησης T. Στα Put ισχύουν τα αντίθετα.

Η τελική τους αξία είναι:

$$Call\colon \left[\left(\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T} - K\right)_+ \cdot I\left(\sum_{i=1}^{d} w_i \mathrm{Max}[S_{i,t}] > u\right)\right]$$

$$Put\colon \left[\left(K - \sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T}\right)_+ \cdot I\left(\sum_{i=1}^{d} w_i \mathrm{Min}[S_{i,t}] < u\right)\right]$$

Όπου $t \in [0, T]$ και $I(A)$ είναι η δείκτρια του ενδεχομένου A, η οποία και παίρνει τιμές 0 ή 1.

2. Exotic Extreme options: Αυτό το είδος δικαιωμάτων συγκρίνει διαφορετικούς τίτλους από τους οποίους επιλέγεται ένας. Η $\mathbf{S}_t = (S_{1,t}, \dots, S_{d,t}), t \in [0, T]$ αποτελείται από ένα καλάθι (d) υποκείμενων τίτλων, για $i = 1, \dots, d$. Από αυτούς επιλέγεται ο μέγιστος στο Call και ο ελάχιστος στο Put κατά τη διάρκεια του δικαιώματος έως την λήξη του T. Η τελική τους αξία είναι:

$$Call\colon (\mathrm{Max}[\mathrm{Max}[\mathbf{S}_t], t \in [0, T]] - K)_+ \qquad Put\colon (K - \mathrm{Min}[\mathrm{Min}[\mathbf{S}_t], t \in [0, T]])_+$$

3. Exotic Extreme High Risk options: Αυτό το ιδιαίτερο είδος δικαιωμάτων δεν διακρίνεται σε Call και Put αλλά σε independent path όπου και συγκρίνει διαφορετικούς τίτλους από τους οποίους επιλέγεται ο μέγιστος και ο ελάχιστος, κατά τη διάρκεια του δικαιώματος έως την λήξη του T, η διαφορά αυτών δίνει την εσωτερική αξία του δικαιώματος και σε No independent path όπου και εκεί επιλέγεται ο μέγιστος και ο ελάχιστος, αλλά μόνο κατά τη λήξη του T, η διαφορά αυτών δίνει πάλι την εσωτερική αξία του δικαιώματος.

Η τελική τους αξία είναι:

$$\text{Independent path: } \left(\mathrm{Max}\left[S_{i,t}, t \in [0, T], i \in \{1, \dots, d\}\right] - \mathrm{Min}\left[S_{i,t}, t \in [0, T], i \in \{1, \dots, d\}\right]\right)_+$$

$$\text{No Independent path: } (\mathrm{Max}[S_{i,T}, i \in \{1, \dots, d\}] - \mathrm{Min}[S_{i,T}, i \in \{1, \dots, d\}])_+$$

4. Asian Basket options: Η τιμή εξάσκησης K ισούται με τον μέσο όρο του αθροίσματος της αξίας ενός συνόλου (καλαθιού) n υποκείμενων τίτλων όπου ο κάθε τίτλος συμμετέχει στο καλάθι αυτό με κάποια στάθμιση-ποσοστό w_i, για $i = 1, \dots, d$ από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος έως το χρόνο λήξης-εξάσκησης T.

Η τελική τους αξία είναι:

$$Call\!: \left(\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,t_j}}{k})\right)_+ \qquad Put\!: \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,t_j}}{k}) - \sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T}\right)_+$$

5. Compound Exchange options: Δικαιώματα διαδοχικών ανταλλαγών περιουσιακών στοιχείων-τίτλων και θέσεων σε διαφορετικούς χρόνους με προκαθορισμένη συναλλαγματική ισοτιμία y για συναλλαγές με την αλλοδαπή αγορά.

Παράδειγμα: Exchange Call στο T_1 Exchange Put στο T_2.

Η τελική τους αξία είναι:

$$\left[\left(yS_{T_2}^{(2)} - S_{T_2}^{(1)}\right)_+ - \left(S_{T_1}^{(1)} - yS_{T_1}^{(2)}\right)_+\right]_+$$

Κεφάλαιο 2^{ο}:

Θεωρητικό υπόβαθρο αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης.

2.1 Θεωρητική «δίκαιη» τιμή ενός ΠΣ και ΣΜΕ.

Δεδομένου ότι γνωρίζουμε την τιμή ενός υποκείμενου τίτλου S_0 στο παρόντα χρόνο t_0, η μελλοντική του τιμή S_T είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που ακολουθεί κάποια κατανομή.

Υποθέτουμε ότι η αγορά ισορροπεί, οι συναλλασσόμενοι δρουν λογικά και δεν υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (arbitrage), καθότι αν εμφανιστεί τέτοιο ενδεχόμενο άμεσα μέσω της προσφοράς και ζήτησης η αγορά θα ισορροπήσει καθώς και η τιμή ενός ΠΣ ή ΣΜΕ.

Επιπλέον υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών και μερίσματα και ότι υπάρχει σταθερό φορολογικό καθεστώς. Οι αντισυμβαλλόμενοι δανείζουν και δανείζονται με ίσο επιτόκιο r και με συνεχές ανατοκισμό.

Αποδεικνύεται ότι η δίκαιη τιμή K (delivery price) ενός ΠΣ ή ΣΜΕ με λήξη T, ισούται με:

$$K = S_0 e^{rT}$$

Σε διαφορετική περίπτωση υπάρχει ευκαιρία για arbitrage. Το T μπορεί να αφορά έτη, μήνες, ημέρες, οποιαδήποτε μελλοντική χρονική στιγμή.

Επίσης αποδεικνύεται ότι η δίκαιη αξία f ενός ΠΣ ή ΣΜΕ με λήξη T, σε χρόνο $t < T$, $t \in [0, T]$ και επιτόκιο r, θα είναι:

$$f(t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Όσο πλησιάζουμε στη λήξη μειώνεται η αξία του συμβολαίου κατ ουσία η χρονική του αξία.

2.2 Ισοτιμία δικαιωμάτων προαίρεσης put call parity. Μη εξισορροπητική κερδοσκοπία (no arbitrage). Λειτουργία αποτελεσματικής αγοράς (efficient market).

Αν P και C η δίκαιη αξία ενός Put και ενός Call option αντίστοιχα, αποδεικνύεται ότι πρέπει να ισχύει:

$$S_0 - Ke^{-rT} = Call - Put$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή και ως put call parityκαι κάθε απόκλιση αυτής οδηγεί θεωρητικά σε εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage).

Ενώ εφόσον ισχύει έχουμε μηδενικό ρίσκο στην αξία μας (risk neutral valuation) και αποτελεσματική λειτουργία της αγοράς (efficient market). Η αποτελεσματική λειτουργία μιας αγοράς (efficient market), στηρίζεται στην θεωρία ότι όλοι οι συμμετέχοντες σε αυτήν έχουν πλήρη και άμεση ενημέρωση η οποία και ενσωματώνεται στιγμιαία στις τιμές των διαπραγματεύσιμων τίτλων.

Συνεπώς εφόσον όλοι οι συμμετέχοντες έχουν πλήρη εικόνα της αγοράς άμεσα σε οποιαδήποτε ενδεχόμενη παρέκκλιση της ισοτιμίας (put-call parity), θα επέμβουν ώστε να ισορροπήσει η αγορά.

2.3.1 Στοχαστικές ανελίξεις. Κίνηση Brown.

Όπως έχουμε αναφέρει η τιμή S ενός τίτλου σε μελλοντικό χρόνο T, είναι μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) και η εξέλιξη της $\{S_t,\ t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία.

Κίνηση Brown, είναι μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t > 0\}$ με παραμέτρους μ (drift parameter) και σ^2 (variance), BM (μ,σ^2) , αν για κάθε $t \geq 0, y > 0$:

1). Η τ.μ. $(X_{t+y} - X_y) \sim N\ (\mu t\ , t\sigma^2)$

2). Η τ.μ. $(X_{t+y} - X_y)\ ,\ t > 0\ είναι\ ανεξάρτητη\ από\ τις\ X_u,\ \ 0 \leq u \leq y$

και συνήθως $X_0 = 0$ ή x_0.

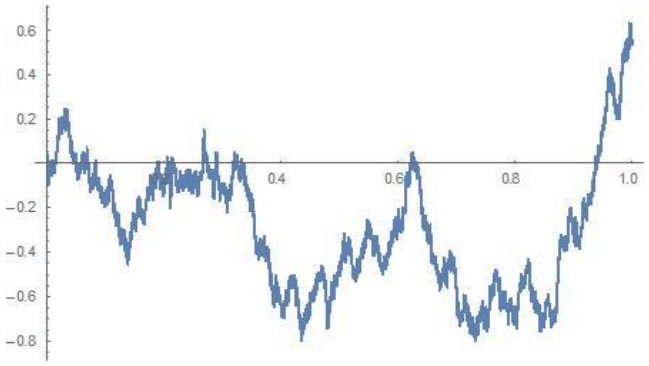
Στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, θα αναφερθούμε σε μεθόδους προσομοίωσης που χρησιμοποιούνται στο να εξάγουμε εμπειρικά συμπεράσματα μέσω παρακολούθησης πολλών πραγματοποιήσεων εξέλιξης ενός στοχαστικού φαινομένου στο χρόνο.

Παρακάτω στο κεφάλαιο αυτό, θα προσομοιώσουμε την κίνηση Brown και την GBM, μίας και πολλαπλών διαστάσεων. Η προσομοίωση μιας διαδρομής της κίνησης Brown πάνω στα χρονικά σημεία $t_1, t_2, \dots, t_n$ γίνεται με το ακόλουθο αλγόριθμο:

1. Έχοντας θέσει αρχικά $X_0 = 0$, παράγουμε $Z \sim N(0,1)$.
2. Θέτουμε $X_i = X_{i-1} + \mu(t_i - t_{i-1}) + \sigma Z\sqrt{t_i - t_{i-1}}$και $i = i + 1$
3. Εάν $i \leq n$, πίσω στο βήμα 1 αλλιώς σταματάμε.

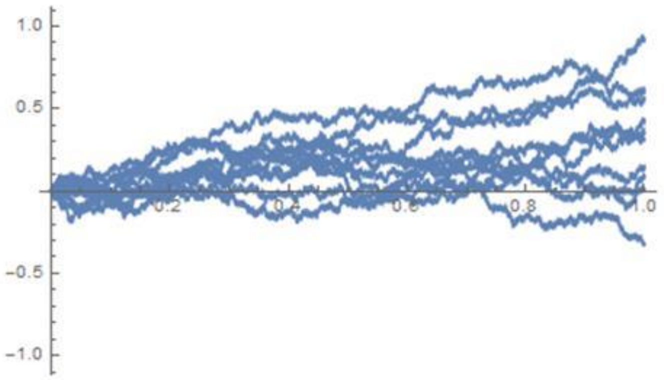
Προσομοίωση στο Mathematica 10.0:$\mu = 0; \sigma = 1; T = 1; n = 100000$)

```
X = 0; t = 1; n = 100000; h = t/n; m = 0; s = 1; x = Table[0, {n}];
Do[z = RandomReal[NormalDistribution[]];
  X = X + h*m + s*h^0.5*z;
  x[[i]] = {i*h, X}, {i, 1, n}];
PrependTo[x, {0, 0}]; ListLinePlot[x]
```



$$\mu = 0.2; \sigma = 0.3; t = 1; n = 100000; paths = 10$$

```
m = 0.2; s = 0.3; t = 1; n = 100000; h = t/n;
Do[X = 0; x = Table[0, {n}];
 Do[z = RandomReal[NormalDistribution[]];
  X = X + h*m + s*h^0.5*z;
  x[[i]] = {i*h, X}
  , {i, 1, n}];
PrependTo[x, {0, 0}];
pl[j] = ListLinePlot[x];, {j, 1, 10}]
Show[Table[pl[j], {j, 1, 10}], PlotRange -> {-1, 1}]
```



2.3.2 Πολυδιάστατη κίνηση Brown.

Παρομοίως με την μονοδιάστατη κίνηση Brown, πολυδιάστατη κίνηση Brown είναι μια στοχαστική ανέλιξη $\{\boldsymbol{X}_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}), t > 0\}$, με παραμέτρους $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ (πολυδιάστατη τάση) και πίνακα διασποράς $\boldsymbol{\Sigma}$, ($\mathbf{X} \sim \boldsymbol{BM}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, αν:

1). Η τ.μ. $(\boldsymbol{X}_{t+y} - \boldsymbol{X}_y) \sim \boldsymbol{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} t, \boldsymbol{\Sigma} t\right)$

2). Η τ.μ. $(\boldsymbol{X}_{t+y} - \boldsymbol{X}_y)$, $t > 0$ *είναι ανεξάρτητη από τις* $\boldsymbol{X}_u$, $0 \le u \le y$

Η προσομοίωση μιας διαδρομής της πολυδιάστατης κίνησης Brown (πάνω στα χρονικά σημεία $t_1, t_2, \dots, t_n$) γίνεται με το ακόλουθο αλγόριθμο:

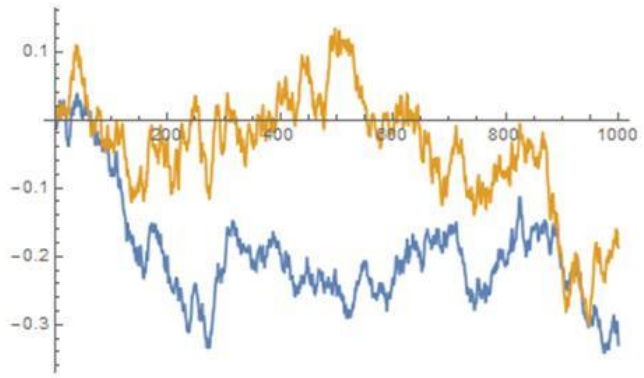
Αλγόριθμος:

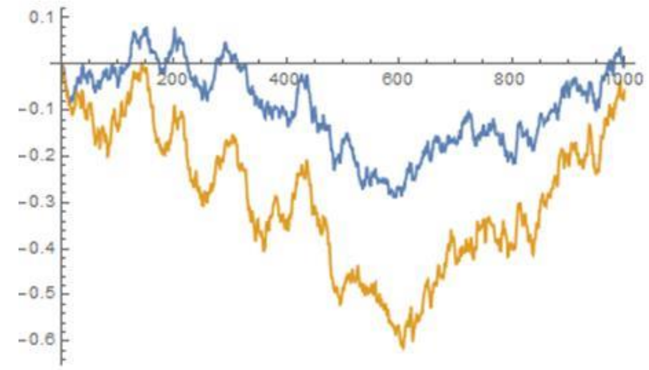
1. Έχοντας θέσει αρχικά $X_0^i = 0$, παράγουμε τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, δηλ. οι τ.μ. $Z_1 \sim N(0,1), \dots, Z_n \sim N(0,1)$ και είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.
2. Θέτουμε $\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{X}_{i-1} + \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{Z} \cdot \sqrt{\frac{T}{n}}$, επίσης θέτουμε $i = i + 1$.
3. Αν $i \le n$, πάμε πίσω στο 2.

Ο πίνακας $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$είναι ο πίνακας με την ιδιότητα $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} = \boldsymbol{\Sigma}$, δηλαδή είναι η ρίζα του πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}$.

Στον παρακάτω $d = 2$ κώδικα όπου $m = \mu$, όπου *paths*= διαφορετικές διαδρομές, και $t = T$.

```
paths = 2; t = 1; n = 1000; s = {0.3, 0.4}; cor = {{1, 0.7}, {0.7, 1}};
sstr=Table[s[[i]]*s[[j]],{i,1,Length[s]},{j,1,Length[s]}]; cov = cor*sstr;
m = {0, 0}; Σ = MatrixPower[cov, 0.5];
X1 = Table[0, {n}]; X2 = Table[0, {n}];
Do[X = Table[{0, 0}, {n}];
 Do[X[[i]] = X[[i - 1]] + t/n*m
    + Sqrt[t/n]*Σ.Table[RandomReal[NormalDistribution[]], {2}]
  , {i, 2, n}];
 Do[X1[[j]] = X[[j]][[1]], {j, 1, n}];
 Do[X2[[j]] = X[[j]][[2]], {j, 1, n}];
 Print[ListLinePlot[{X1, X2}, PlotRange -> All]], {l, 1, paths}]
```





2.4.1 Γεωμετρική κίνηση Brown.

Η ανέλιξη Brown δεν είναι κατάλληλη για τις τιμές των υποκείμενων τίτλων που διαπραγματεύονται σε οργανωμένες και μη αγορές και αυτό διότι δύναται να λάβει αρνητικές τιμές και διότι η αυξομείωση μιας τιμής είναι ανεξάρτητη της ιδίας τιμής ενώ ζητείται η ποσοστιαία αυξομείωση να είναι ανεξάρτητη της τιμής.

Αν $\{X_t, t \geq 0\} \sim BM(\mu, \sigma^2)$ τότε η στοχαστική διαδικασία

$$\{S_t = e^{X_t}, t \geq 0\}$$

καλείται *γεωμετρική κίνηση Brown* GBM (μ, σ^2)).

Αντίστροφα, η ανέλιξη $\{X_t, t \geq 0\} = \{\ln(S_t),\ t \geq 0\}$, είναι κίνηση Brown όπου η τ.μ.

$$X_{(t+y)} - X_y = \ln\big(S_{(t+y)}\big) - \ln\big(S_y\big) = \ln(\frac{S_{(t+y)}}{S_y})$$

είναι ανεξάρτητη του παρελθόντος $S_u, 0 \leq u \leq y$ και ακολουθεί $N(t\mu\ , t\sigma^2)$.

Άρα GBM είναι μια στοχαστική διαδικασία για την οποία:

1. $\ln\left(\frac{S_{(t+y)}}{S_y}\right) \sim N(t\mu, t\sigma^2),\ y > 0$

2. κάθε $\left(\frac{S_{(t+y)}}{S_y}\right)$ $είναι\ ανεξάρτητη\ της\ S_u, 0 \leq u \leq y$

Αν $\{S_t, t \geq 0\} \sim GBM(\mu, \sigma^2)$, τότε η

S_t ~ Λογαριθμοκανομική κατανομή

διότι $X_t - X_0 = \ln(S_t/S_0) \sim N(t\mu, t\sigma^2)$. Και άρα συνεπάγεται:

$$E(S_t) = S_0 e^{t\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}$$

και

$$V(S_t) = E(S_t^2) - E(S_t)^2 = S_0^2 e^{2t\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}\left(e^{t\sigma^2} - 1\right)$$

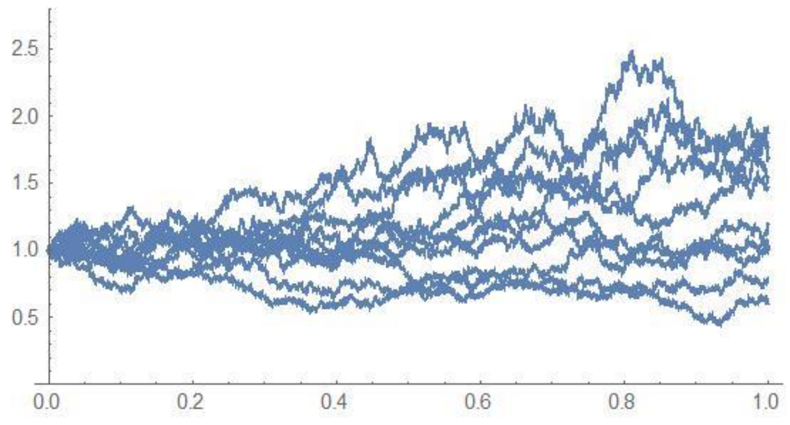
Η ουσιαστική διαφορά της GBM από την BM, εκτός του ότι δεν επιδέχεται αρνητικές τιμές, είναι και ότι η S_{t+y}/S_t είναι ανεξάρτητη της S_t, συνεπώς οι ποσοστιαίες προσαυξήσεις είναι ανεξάρτητες. Ενώ στην BM ανεξάρτητες ήταν οι ποσοτικές και όχι οι ποσοστιαίες διαφορές. Η προσομοίωση μιας διαδρομής της γεωμετρικής κίνησης Brown πάνω στα χρονικά σημεία $t_1, t_2, \ldots, t_n$ γίνεται με το ακόλουθο αλγόριθμο:

<u>Αλγόριθμος GBM</u>:

1. Έχοντας το S_0, παράγουμε $Z \sim N(0,1)$.
2. Θέτουμε $S_i = S_{i-1} e^{\mu(t_i - t_{i-1}) + \sigma Z\sqrt{t_i - t_{i-1}}}$ και $i = i + 1$
3. Εάν $i \leq n$, πίσω στο βήμα 1 αλλιώς σταματάμε.

Παράδειγμα: $S_0 = S = 1; z = Z;\ paths = 10; T = t = 1; \Delta = \frac{T}{n}; \mu = m = 0; \sigma = s = 0.5$

```
s = 0.5; m = 0; t = 1; n = 10000; Δ = t/n;
Do[S = 1; Sl = Table[0, {n}];
  Do[z = RandomReal[NormalDistribution[]];
     S = S*Exp[m*Δ + s*Δ^0.5*z];
Sl[[i]] = {i*Δ, S}
    ,{i, 1, n}];
PrependTo[Sl, {0, 1}];
  pp[j] = ListLinePlot[Sl, PlotRange -> {0, 2.8}]
, {j, 1, 10}];
Show[Table[pp[i], {i, 1, 10}], AspectRatio -> 0.5]
```



2.4.2 Πολυδιάστατη γεωμετρική κίνηση Brown.

Στην πολυδιάστατη γεωμετρική κίνηση Brown (GBM), έχουμε πολυδιάστατο διάνυσμα $\boldsymbol{S}_t = \left(S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}\right)$

Πολυδιάστατη GBM ακολουθεί η στοχαστική διαδικασία της οποίας ο Λογάριθμος είναι πολυδιάστατη BM. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι:

1. $\ln \mathbf{S}_{t+y} - \ln \mathbf{S}_y \sim \boldsymbol{N}\left(t\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{pmatrix}, t\boldsymbol{\Sigma}\right),\ y > 0$

2. $\ln \mathbf{S}_{t+y} - \ln \mathbf{S}_y$ $\textit{είναι ανεξάρτητη των}$ $\boldsymbol{S}_u$ $, 0 \le u \le y$

Ο $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι ο πίνακας διασποράς.

Το διάνυσμα των μέσων αποτελείται από $n = d$ μέσους. $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{pmatrix}$.

Αλγόριθμος:

1. Έχοντας θέσει αρχικά το $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{X}_0 = \ln \boldsymbol{S}_0$ και έχοντας τον πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}$ και τις υποδιαιρέσεις του χρόνου $\frac{T}{n}$,

2.Παράγουμε τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{Z}\sim N(0, \mathbf{I})$, δηλ. $Z_1\sim N(0,1), \dots, Z_n\sim N(0,1)$,ανεξάρτητες μεταξύ τους.

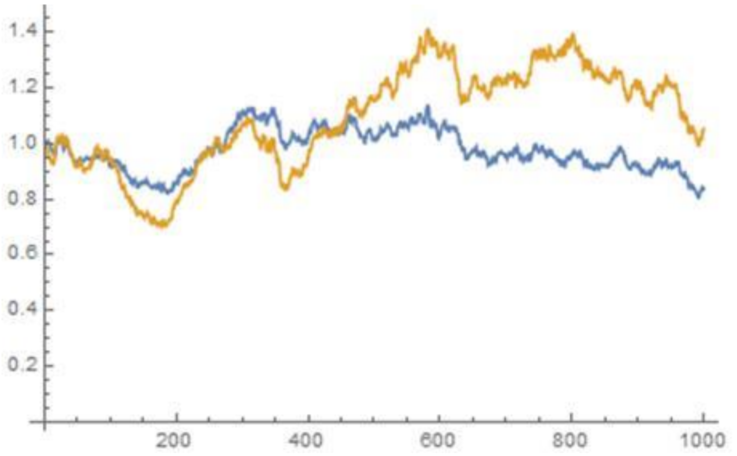
3.Θέτουμε $\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{X}_{i-1} + \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{Z} \cdot \sqrt{\frac{T}{n}}$ και $\mathbf{S}_i = (e^{X_{1i}}, \dots, e^{X_{ni}})$

επίσης θέτουμε $i = i + 1$.

4. Αν $i \le n$, πάμε πίσω στο 2.

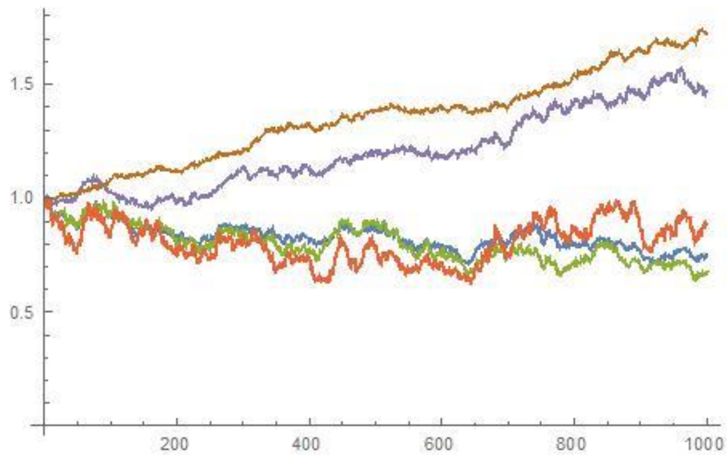
Κώδικας με 2 τίτλους:

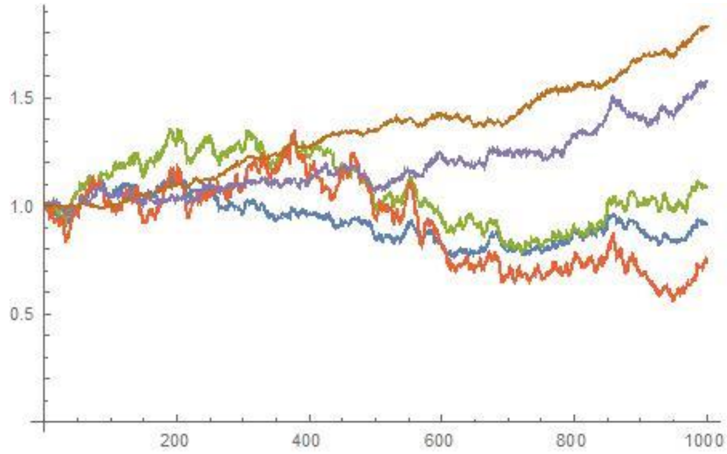
```
paths = 1; t = 1; n = 1000; s = {0.3, 0.4}; cor = {{1, 0.8}, {0.8, 1}};
sstr = Table[s[[i]]*s[[j]], {i, 1, Length[s]}, {j, 1, Length[s]}];
cov = cor*sstr;
m = {0, 0.3}; Σ = MatrixPower[cov, 0.5];
S1 = Table[0, {n}]; S2 = Table[0, {n}];
Do[S = Table[{1, 1}, {n}];
Do[S[[i]] = S[[i - 1]]*Exp[m*t/n
+ Sqrt[t/n]*Σ.Table[RandomReal[NormalDistribution[]], {2}]]
, {i, 2, n}];
 Do[S1[[j]] = S[[j]][[1]], {j, 1, n}];
 Do[S2[[j]] = S[[j]][[2]], {j, 1, n}];
 Print[ListLinePlot[{S1, S2}, PlotRange -> All]], {l, 1, paths}]
```

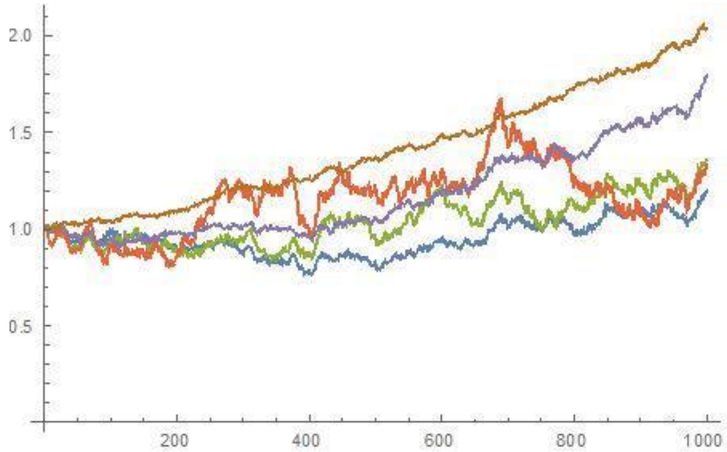


Κώδικας με ν=5 τίτλους:

```
paths = 3; t = 1; n = 1000; s = {0.3, 0.4, 0.6, 0.2, 0.1};
cor = {{1, 0.8, 0.7, 0.5, 0.3}, {0.8, 1, 0.6, 0.4, 0.5}, {0.7,
    0.6, 1, 0.5, 0.4}, {0.5, 0.4, 0.5, 1, 0.2}, {0.3, 0.5, 0.4, 0.2, 1}};
sstr = Table[s[[i]]*s[[j]], {i, 1, Length[s]}, {j, 1, Length[s]}];
cov = cor*sstr;
m = {0, 0.3, 0.1, 0.5, 0.7}; Σ = MatrixPower[cov, 0.5];
S1 = Table[0, {n}]; S2 = Table[0, {n}]; S3 = Table[0, {n}]; S4 =
 Table[0, {n}]; S5 = Table[0, {n}];
Do[S = Table[{1, 1, 1, 1, 1}, {n}];
 Do[S[[i]] = S[[i - 1]]*Exp[m*t/n
+ Sqrt[t/n]*Σ.Table[RandomReal[NormalDistribution[]], {5}]]
, {i, 2, n}];
 Do[S1[[j]] = S[[j]][[1]], {j, 1, n}];
 Do[S2[[j]] = S[[j]][[2]], {j, 1, n}];
 Do[S3[[j]] = S[[j]][[3]], {j, 1, n}];
 Do[S4[[j]] = S[[j]][[4]], {j, 1, n}];
 Do[S5[[j]] = S[[j]][[5]], {j, 1, n}];
 Print[ListLinePlot[{S1, S2, S2, S3, S4, S5}, PlotRange -> All]], {1,
1, paths}]
```







Ο πίνακας συσχετίσεων παραπάνω είναι :

```
TableForm[cor]

 1, 0.8, 0.7, 0.5, 0.3
 0.8, 1, 0.6, 0.4, 0.5
 0.7, 0.6, 1, 0.5, 0.4
 0.5, 0.4, 0.5, 1, 0.2
 0.3, 0.5, 0.4, 0.2, 1
```

2.5 Το μοντέλο Black and Scholes.

Θεωρούμε μια χρηματοοικονομική αγορά στο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Συμβολίζουμε με Ω: το *σύνολο των δυνατών καταστάσεων* αγοράς στο $[0, T]$, με $\mathcal{F}$: Το *χώρο ενδεχομένων* του και με P: το *μέτρο πιθανότητας* στον $(\Omega, \mathcal{F})$. Θεωρούμε ότι στην αγορά διατίθενται οι παρακάτω τίτλοι :

Τίτλος 1 (riskless asset). Ένα ομόλογο με αξία e^{rt} στο χρόνο t.

Τίτλος 2 (risky asset). Μια μετοχή με αξία $\mathrm{S_t}$ στο χρόνο t. Υποθέτουμε ότι η $\mathrm{S_t},\ \mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}]$ ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown(GBM(μ, σ^2)) με αρχική τιμή $\mathrm{S_0}$.

Τίτλος 3 (derivative). Ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν (ΠΧΠ) Ευρωπαϊκού τύπου με χρόνο λήξης T (επί του Τίτλου 2) και τελική αξία $\mathrm{D_T}$. Θεωρούμε ότι η $\mathrm{D_T}$ είναι συνάρτηση της S_T (ή γενικότερα της $S_t, t \in [0, T]$).

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το ακόλουθο θεώρημα (Risk neutral pricing formula)

> Αν ένα ΠΧΠ (Ευρ.τύπου) έχει τελική αξία D_T τότε στο χρόνο 0 θα έχει no-arbitrage αξία
>
> $$C = e^{-rT} E_Q(D_T)$$
>
> όπου, υπό το Q, η $\{S_t, t \geq 0\} \sim GBM(\mu^* = r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$

Παρατηρούμε ότι, υπό το Q, η τυχαία μεταβλητή

$$\ln(\mathrm{S_t}/\mathrm{S_0}) \sim \mathrm{N}(\mathrm{r} - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$$

και

$$\mathrm{E_Q(S_t)} = \mathrm{S_0 e^{t(r - \frac{\sigma^2}{2}) + \frac{1}{2} t\sigma^2}} = \mathrm{S_0 e^{rt}}$$

δηλαδή, υπό το Q, η μέση απόδοση της μετοχής είναι ίση με την απόδοση του ομολόγου.

Το μέτρο P είναι το μέτρο πιθανότητας στον «πραγματικό κόσμο» ενώ το Q αναφέρεται ως μέτρο πιθανότητας σε ένα «κόσμο ουδετέρου ρίσκου» (risk neutral probability measure).

Ο ΤΥΠΟΣ ΤΩΝ BLACK AND SCHOLES

Αν πάρουμε τώρα συγκεκριμένα ΠΧΠ ο γενικός τύπος της αξίας τους

$$C = e^{-rT} E_Q(D_T)$$

όπου, η $\{S_t, t \geq 0\} \sim_Q GBM(\mu^* = r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$, μπορεί να πάρει πιο συγκεκριμένη μορφή.

Θεώρημα (Ο τύπος των Black and Scholes για δικαίωμα αγοράς)

Στο μοντέλο Black-Scholes(-Merton), η no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς (Call ευρωπαϊκού τύπου, με ημερομηνία λήξης T, τιμή εξάσκησης K) στο χρόνο 0 είναι ίση με

$$C = S_0 \Phi(d_1) - e^{-rT} K \Phi(d_2)$$

$όπου\ d_1 = \frac{rT + \frac{\sigma^2 T}{2} + ln\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $\mathrm{N}(0,1)$,

σ η μεταβλητότητα (volatility) της τιμής της υποκείμενης μετοχής και

r το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς.

Κεφάλαιο 3^{o}:

Αποτίμηση δικαιωμάτων μέσω προσομοίωσης.

3.1 Αποτίμηση αξίας δικαιωμάτων προαίρεσης, Call-Put Vanilla Options.

Σύμφωνα με το μοντέλο Black and Scholes, αποδεικνύεται ότι η δίκαιη (no-arbitrage) αξία ενός δικαιώματος αγοράς Ε.Τ. στον χρόνο 0, ισούται:

$$C = e^{-rT}E_Q[(S_T - K)_+]$$

Η παραπάνω μέση τιμή λαμβάνεται υπό το μέτρο Q πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου. Υπό το μέτρο αυτό, η στοχαστική διαδικασία S που περιγράφει την κίνηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown (GBM) με παραμέτρους $\mu^* = r - \frac{\sigma^2}{2}$ (drift) και σ^2 (volatility). Συνεπώς ο λογάριθμος της $S = \{S_t,\ t \geq 0\}$ ακολουθεί κίνηση Brown με τις ίδιες παραμέτρους. Η παραπάνω μέση τιμή μπορεί να γραφεί αναλυτικά (τύπος Black and Scholes):

$$Call = S_0\Phi(\omega) - Ke^{-rT}\Phi\left(\omega - \sigma\sqrt{T}\right) \ \text{ όπου } \omega = \frac{rT + \frac{\sigma^2 T}{2} - \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

Επίσης αποδεικνύεται (put-call parity) ότι η δίκαιη τιμή ενός put option είναι:

$$Put = Call - S_0 + Ke^{-rT}$$

Παράδειγμα. Σύμφωνα με τα παραπάνω η αξία ενός Call και ενός Put με

$r = 0.01, \sigma = \text{sigma} = 0.4,\ K = 100,\ S0 = 100,\ T = t = 0.25$ είναι:

```
r = 0.01; sigma = 0.4; K = 100; S0 = 100; t = 0.25;call = (Omega = (t*r +
sigma^2*t/2 - Log[K/S0])/(sigma*Sqrt[t]);
  C0 = S0*CDF[NormalDistribution[0, 1], Omega] - K*Exp[-r*t]*
CDF[NormalDistribution[0, 1], Omega - sigma*t^0.5]); put = call - S0 +
K*Exp[-r*t]; Print[call]; Print[put]
```

```
8.08109
7.8314
```

Στην μονοδιάστατη απλή περίπτωση μπορούμε να αποτιμήσουμε με ακρίβεια μέσω του παραπάνω τύπου των Black and Scholes, δεν συμβαίνει το ίδιο στις περιπτώσεις εξωτικών δικαιωμάτων και ιδιαίτερα δικαιωμάτων επί πολλαπλών περιουσιακών στοιχείων. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι απαραίτητες οι μέθοδοι προσομοίωσης.

Στην απλή περίπτωση ενός Call option ο αλγόριθμος προσομοίωσης, δεδομένων των παραμέτρων που θέτουμε (και $\mu = m = r - \frac{\sigma^2}{2}$), είναι:

1. Θέτουμε sum=0,
2. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $S_T = S_0 \cdot e^{T\mu + \sigma Z T^{0.5}}$
3. Θέτουμε $sum = sum + \sum_{i=1}^{n} Max[S_T - K, 0]$, το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται όσες φορές έχουμε θέσει το n.
4. Θέτουμε $Call = sum/n \cdot e^{-rT}$

Στην περίπτωση του Put αρκεί να θέσουμε ως πέμπτο βήμα.

5. $Put = Call - S_0 + Ke^{-rT}$

```
n = 1000; r = 0.01; sigma = 0.4; K = 100; S0 = 100; t = 0.25;
sum = 0; m = r - sigma^2/2;
Do[Stable = Table[0, {n}];
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S0*Exp[t*m + sigma*t^0.5*Z]; Stable[[j]] = {S}, {j, 1, n}];
sum = sum + Max[S - K, 0], {i, 1, n}];
Print[Mean[Stable]]; Print[sum/n*Exp[-r*t]]; Print[sum/n*Exp[-r*t] - S0 +
K*Exp[-r*t]]
```

```
{100.589}
8.08221
7.83252
```

Στην υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου μέσω Mathematica, ως πρώτη τιμή {}, προσομοιώσαμε την αναμενόμενη τιμή του υποκείμενου τίτλου S_T, ως δεύτερη την δίκαιη τιμή ενός Call και ως τρίτη την δίκαιη τιμή ενός Put.

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των δικαιωμάτων μέσω προσομοίωσης είναι σχεδόν ίσες με τις τιμές των δικαιωμάτων που αποτιμήσαμε μέσω της μεθόδου Black & Scholes.

3.2 Αποτίμηση αξίας εξωτικών δικαιωμάτων, Exotic Options.

Barrier options: Σε αυτά τα δικαιώματα ορίζεται ένα φράγμα (barrier) u και τα δικαιώματα αυτά ισχύουν ή δεν ισχύουν (alive or killer), αναλόγως της τιμής του υποκείμενου τίτλου και των όρων που έχουν τεθεί σχετικά με το φράγμα u (barrier).

A. Up and in: Ισχύουν και εξασκούνται εάν η τιμή του τίτλου S περάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα $u > K$ έως το χρόνο εξάσκησης T.

Δίκαιη αξία:

$$e^{-rT} E_Q[(S_T - K)_+ \cdot I\ (\text{Max}[S_t] > u)]$$

Όπου $t \in [0, T]$ και $I(A)$ είναι η δείκτρια του ενδεχομένου A, η οποία και παίρνει τιμές 0 ή 1.

Αλγόριθμος για Call:

Εδώ θα χρειαστεί να ορίσουμε k διακριτά σημεία (τιμές στο κλείσιμο κάθε συνεδρίασης του χρηματιστηρίου). Αυτό το θεωρούμε δεδομένο σε όλα τα exotic options που θα εξετάσουμε παρακάτω. Independent path. Επίσης δεδομένο θα θεωρούμε ότι κάθε φορά θα ορίζουμε κάποιες βασικές παραμέτρους όπως χρόνο λήξης, επιτόκιο r, σ, μ, h όπου είναι απαραίτητο, επαναλήψεις n και ότι ξεκινάμε με $sum = 0$.

1. Έχοντας ορίσει χρόνο λήξης $T = t$, επιτόκιο αναφοράς δίχως κίνδυνο r, ty $\sigma = sigma$, αριθμό επαναλήψεων n, αριθμό διαίρεσης του χρόνου και εικονικών συνεδριάσεων-επανεκκίνησης k, $h = \frac{t}{k}$, $\mu = m$ και τιμή αξία εκκίνησης στο t_0, την S_0.
2. Θέτουμε ως αρχική τιμή S την S_0, $sum = 0$, $u > K$ και $\text{Max}[S] = S_0$,
3. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$
4. Θέτουμε $S_{ih} = S_{(i-1)h} \cdot e^{h\mu + \sigma Z h^{0.5}}$ και το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται όσες φορές έχουμε θέσει το k.
5. Θέτουμε λογική συνάρτηση If, όπου αν ισχύει $\text{Max}[S_t] > u$. τότε $I = 1$ αλλιώς $I = 0$ ή εάν $\text{Max}[S_t] < u$ τότε $I = 0$ αλλιώς $I = 1$.
6. Θέτουμε $sum = sum + \sum_{i=1}^{n} Max[S_T - K,\ 0] \cdot I$, το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται όσες φορές έχουμε θέσει το n.
7. Θέτουμε $Call = sum/n \cdot e^{-rT}$

Ο αντίστοιχος κώδικας είναι:

```
S0 = 100; t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h = t/k; sigma = 0.4; K =
100; u = K + S0*0.5; m = r - sigma^2/2; sum = 0;
Do[maxS = S0; S = S0;
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];
If[maxS< S, maxS = S], {j, 1, k}];
If[maxS< u, I01 = 0, I01 = 1];
sum = sum + Max[S - K, 0]*I01, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

```
1.26684
```

Για Put option ισχύουν τα αντίθετα στην κύρια συνάρτηση αλλά και στις ανισότητες.

```
S0 = 100; t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h =  t/k; sigma = 0.4; K =
100; u = K + S0*0.5; m = r - sigma^2/2; sum = 0;
Do[maxS = S0; S = S0;
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z]; If[maxS> S, maxS = S]
, {j, 1, k}];
If[maxS> u, I01 = 0, I01 = 1];sum = sum + Max[-S + K, 0]*I01
,{i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

7.8331

Στις υπόλοιπες περιπτώσεις Barrier options που θα αναφέρουμε η λογική και τα βήματα του κάθε αλγορίθμου παραμένουν ίδια, διαφοροποιούμαστε στις ανισότητες If στο τι θέτουμε Max ή Min και στο φράγμα u. Παρατίθενται αναλυτικά οι κώδικες όπου φαίνονται οι διαφοροποιήσεις και οι αναμενόμενες τιμές.

Β. Up and out: Δεν ισχύουν και δεν εξασκούνται εφόσον η τιμή του τίτλου S περάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα $u > K$ έως το χρόνο εξάσκησης T. Η δίκαιη τιμή δίνεται από τον τύπο:

$$e^{-rT}E_Q[(S_T - K)_+ \cdot I(\mathrm{Min}[S_t] < u)]$$

```
S0 = 100; t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h = t/k; sigma = 0.4; K =
100; u = K + S0*0.5; m = r - sigma^2/2; sum = 0;
Do[minS = S0; S = S0;
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];
If[minS> S, minS = S], {j, 1, k}];
If[minS> u, I01 = 0, I01 = 1];
sum = sum + Max[S - K, 0]*I01, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

8.19044

Put:

```
S0 = 100; t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h =
t/k; sigma = 0.4; K = 100; u = K + 1; m = r - sigma^2/2; sum = 0;
Do[minS = S0; S = S0;
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];
If[minS< S, minS = S], {j, 1, k}];
If[minS< u, I01 = 0, I01 = 1];
sum = sum + Max[-S + K, 0]*I01, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

3.65725

Up and out, άλλη περίπτωση: Δεν ισχύουν και δεν εξασκούνται εφόσον η τιμή του τίτλου S περάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα u>K έως το χρόνο εξάσκησης T. Η δίκαιη τιμή δίνεται από τον τύπο:

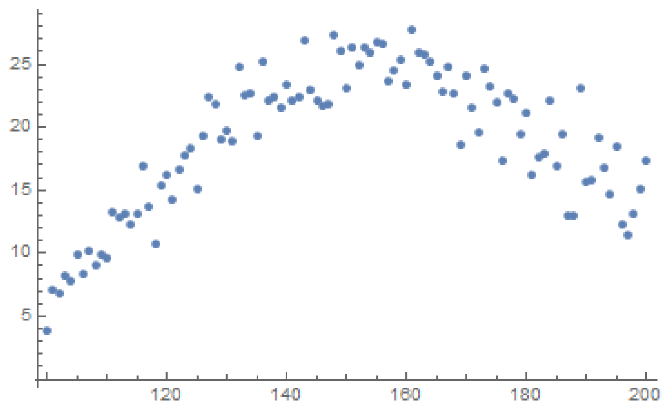
$$e^{-rT}E_Q[(S_T-K)_+\cdot I(\mathrm{Max}[S_t]<u)]$$

```
S0 = 100; t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10;
h =  t/k; sigma = 0.4; K = 100; u = K + S0*0.5; m = r - sigma^2/2; sum = 0;
Do[maxS = S0; S = S0;
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];
If[maxS< S, maxS = S], {j, 1, k}];
If[maxS> u, I01 = 0, I01 = 1];
sum = sum + Max[S - K, 0]*I01, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

6.73547

Γράφημα τιμών του Call με διαφορετικές τιμές S_0, από 100 έως και 200.

```
t = 0.25; r = 0.01; n = 100; k = 10; h = t/k; sigma = 0.4; K = 100;
A = Table[0, {101}]; u = K + S0*0.5; m = r - sigma^2/2; i = 1;
Do[sum = 0;Do[maxS = S0; S = S0;
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];
If[maxS< S, maxS = S], {j, 1, k}];If[maxS> u, I01 = 0, I01 = 1];
sum = sum + Max[S - K, 0]*I01
, {i, 1, n}];
A[[i]] = {S0, Exp[-r*t]*N[sum/n]}; i++
, {S0, 100, 200}]
ListPlot[A]
```



Put, με αλλαγή και στο φράγμα: $u < K$.

```
S0 = 100; t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h =  t/k; sigma = 0.4; K =
100; u = K*0.9; m = r - sigma^2/2; sum = 0;Do[maxS = S0; S = S0;Do[Z = Ran-
domReal[NormalDistribution[0, 1]];S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];If[maxS >
S, maxS = S], {j, 1, k}]; If[maxS < u, I01 = 0, I01 = 1];sum = sum + Max[-S
+ K, 0]*I01, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

```
0.430862
```

Γ. Down and in: Εξασκούνται εφόσον η τιμή του τίτλου S δεν περάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα $u<S_0$ έως το χρόνο εξάσκησης T.

$$e^{-rT}E_Q[(S_T - K)_+ \cdot I\ (Min\ [S_t] < u)]$$

```
S0 = 100; t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h = t/k; sigma = 0.4; K =
100; u = S0*0.95; m = r - sigma^2/2; sum = 0;
Do[minS = S0; S = S0;
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];
   If[minS > S, minS = S], {j, 1, k}];
  If[minS > u, I01 = 0, I01 = 1];
  sum = sum + Max[S - K, 0]*I01, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

```
2.00831
```

Put:

```
S0 = 100; t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h =  t/k; sigma = 0.4; K =
100; u = S0*0.95; m = r - sigma^2/2; sum = 0;
Do[minS = S0; S = S0;
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];
   If[minS < S, minS = S], {j, 1, k}];
  If[minS < u, I01 = 0, I01 = 1];
  sum = sum + Max[-S + K, 0]*I01, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

```
7.78182
```

Δ. Down and out: Δεν ισχύουν και δεν εξασκούνται εφόσον η τιμή του τίτλου S δεν περάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα $u<S_0$ έως το χρόνο εξάσκησης T.

$$e^{-rT}E_Q[(S_T - K)_+ \cdot I\ (Max\ [S_t] > u)]$$

```
S0 = 100; t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h =  t/k; sigma = 0.4; K =
100; u = S0*1.05; m = r - sigma^2/2; sum = 0;
Do[maxS = S0; S = S0;
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];
   If[maxS < S, maxS = S], {j, 1, k}];
  If[maxS < u, I01 = 0, I01 = 1];
  sum = sum + Max[S - K, 0]*I01, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

```
7.99728
```

Put:

```
S0 = 100; t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h =  t/k; sigma = 0.4; K =
100; u = S0*1.05; m = r - sigma^2/2; sum = 0;
Do[maxS = S0; S = S0;
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];
   If[maxS > S, maxS = S], {j, 1, k}];
  If[maxS > u, I01 = 0, I01 = 1];
  sum = sum + Max[S - K, 0]*I01, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

```
7.86922
```

Lookback option: Η τιμή εξάσκησης Κ δεν προκαθορίζεται αλλά ισούται με την μικρότερη (min) στην περίπτωση ενός Call και με την μέγιστη (max) στην περίπτωση ενός Put, του υποκείμενου τίτλου από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος έως το χρόνο λήξης-εξάσκησης T.

Η δίκαιη τιμή είναι:

$$Call = e^{-rT}E_Q(S_T - \mathrm{Min}[S_t]) \text{ και } Put = e^{-rT}E_Q(\mathrm{Max}[S_t] - S_T)$$

Αλγόριθμος για Call:

Και εδώ όπως σε όλα τα Exotic ορίζουμε k διακριτά σημεία, τέλους συνεδρίασης όπως τέλος ημέρας.

1. Έχοντας ορίσει χρόνο-λήξη $T=t$, επιτόκιο αναφοράς δίχως κίνδυνο r, τυπική απόκλιση σ=sigma, αριθμό επαναλήψεων n, αριθμό διαίρεσης του χρόνου και εικονικών συνεδριάσεων-επανεκκίνησης k, h=t/k, μ=m και τιμή-αξία εκκίνησης στο t_0, την S_0.
2. Θέτουμε ως αρχική τιμή S την S_0 και ως αρχική $Min[S_t]$ πάλι την S_0,
3. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$
4. Θέτουμε $S_t = S_{t-1} \cdot e^{h\mu+\sigma Z h^{0.5}}$ και το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται όσες φορές έχουμε θέσει το k. Επίσης θέτουμε λογική συνάρτηση If στην οποία εάν το $Min[S_t] > S_T$

τότε θέτουμε ως $Min[S_t] = S_T$ και το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται όσες φορές έχουμε θέσει το k.

5. Θέτουμε $άθροισμα = sum = \sum_{i=1}^{n} Max[S_T - Min[S_t],0]$, το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται όσες φορές έχουμε θέσει το n.
6. Θέτουμε $Call = sum/n \cdot e^{-rT}$

Ο αντίστοιχος κώδικας για Call θα είναι:

```
t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h=t/k; S0=100; sigma=0.4; sum=0;
m = r -sigma^2/2;
Do[minS = S0; S = S0;
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];
If[minS> S, minS = S];, {j, 1, k}];
sum = sum + Max[S - minS, 0];, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

```
12.2999
```

Στην περίπτωση ενός Put, αντί για $Min[S_t]$ έχουμε $Max[S_t]$:

```
t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h = t/k; S0 = 100; sigma = 0.4; sum
= 0; m = r - sigma^2/2;
Do[maxS = S0; S = S0;
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];
If[maxS< S, maxS = S];
, {j, 1, k}];
sum = sum + Max[-S + maxS, 0];
, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

```
13.0959
```

<u>Asian options</u>: Η τιμή εξάσκησης K ισούται με τον μέσο όρο του υποκείμενου τίτλου από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος έως το χρόνο λήξης-εξάσκησης T.

Οι αντίστοιχες δίκαιες τιμές είναι:

$$Call: e^{-rT} E_Q\left(S_T - \sum_{i=1}^{n} \frac{S_{t_i}}{n}\right)_+ \qquad Put: e^{-rT} E_Q\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{S_{t_i}}{n} - S_T\right)_+$$

Αλγόριθμος για Call:

1. Θέτουμε ως αρχική τιμή S την S_0 και ορίζουμε ένα άθροισμα τιμών της S που θα παράγουμε με αρχική τιμή τηνS_0,

2. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $S_t = S_{t-1} \cdot e^{h\mu + \sigma Z h^{0.5}}$ και το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται όσες φορές έχουμε θέσει το k.
4. Θέτουμε το άθροισμα τιμών της S, $\sum_{j=1}^{k} S_t$, Όπου $t \in [0, T]$.
5. Θέτουμε $sum = sum + \sum_{i=1}^{n} \text{Max}[S_T - \sum_{j=1}^{k} \frac{S_t}{k}, 0]$, και το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται όσες φορές έχουμε θέσει το n.
6. Θέτουμε $Call = sum/n \cdot e^{-rT}$

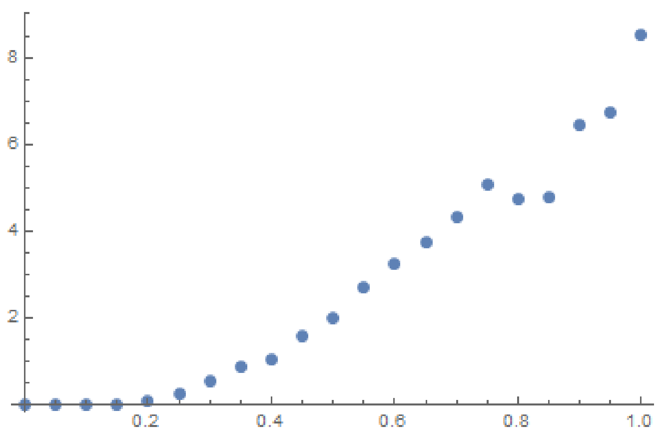
Ο αντίστοιχος κώδικας είναι:

```
t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h=  t/k; S0 = 100; sigma = 0.4; sum =
0; m = r - sigma^2/2;
Do[sum0 = S0; S = S0;
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z]; sum0 = sum0 + S, {j, 1, k}];
sum = sum + Max[S - sum0/k, 0], {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

```
1.2856
```

Γράφημα τιμών του Call με διαφορετικό σ, από 0 έως και 1, με βήμα 0.05.

```
t=0.25;r=0.01;n=1000;k=10;h=t/k;S0=100;m=r-sigma^2/2;A=Range[0,1,0.05];i=1;
Do[sum=0;Do[sum0=S0;S=S0;
   Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    S=S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z];sum0=sum0+S,{j,1,k}];
   sum=sum+Max[S-sum0/k,0],{i,1,n}];A[[i]]={sigma,Exp[-
r*t]*N[sum/n]};i++,{sigma,0,1,0.05}];
ListPlot[A]
```

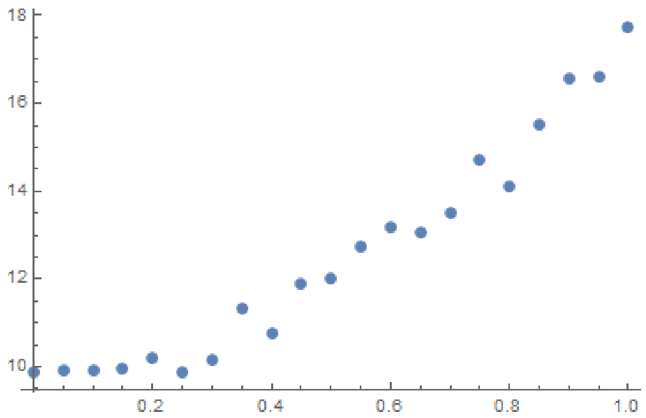


Παρατηρούμε ότι στην πλειοψηφία των περιπτώσεων η αύξηση της τυπικής απόκλισης επιφέρει αύξηση της δίκαιης τιμής.

Στην περίπτωση ενός Put, απλά τροποποιούμε το

$sum = sum + \sum_{i=1}^{n} Max[\sum_{j=1}^{k} \frac{S_t}{k} - S_T, 0]$, στο βήμα 6.

```
t = 0.25; r = 0.01; n = 1000; k = 10; h = t/k; S0 = 100; m =
 r - sigma^2/2; A = Range[0, 1, 0.05]; i = 1;
Do[sum = 0;Do[sum0 = S0; S = S0;
   Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
    S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z]; sum0 = sum0 + S, {j, 1, k}];
   sum = sum + Max[-S + sum0/k, 0], {i, 1, n}];
  A[[i]] = {sigma, Exp[-r*t]*N[sum/n]}; i++, {sigma, 0, 1, 0.05}];
ListPlot[A]
```



Στα Asian υπάρχει και η περίπτωση η τιμή εξάσκησης K να προκαθορίζεται αλλά στη λήξη η τιμή S_T να ισούται με τον μέσο όρο του υποκείμενου τίτλου από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος έως το χρόνο λήξης T. Οι αντίστοιχες δίκαιες τιμές είναι:

$$Call: e^{-rT} E_Q\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{S_{t_i}}{n} - K\right)_+ \qquad Put: e^{-rT} E_Q\left(K - \sum_{i=1}^{n} \frac{S_{t_i}}{n}\right)_+$$

Call:

```
t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h = t/k; S0 = 100; K = 100; sigma =
0.4; sum = 0; m = r - sigma^2/2;
Do[sum0 = S0; S = S0;
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z]; sum0 = sum0 + S, {j, 1, k}];
  sum = sum + Max[sum0/k - K, 0], {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

```
11.4405
```

Put:

```
t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h =
 t/k; S0 = 100; K = 100; sigma = 0.4; sum = 0; m = r - sigma^2/2;
Do[sum0 = S0; S = S0;
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S*Exp[h*m + sigma*h^0.5*Z]; sum0 = sum0 + S, {j, 1, k}];
  sum = sum + Max[-K + sum0/k, 0], {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

```
11.222
```

<u>Forward start option</u>: Η τιμή εξάσκησης K δεν προκαθορίζεται αλλά ισούται με την τιμή του υποκείμενου τίτλου σε καθορισμένο χρόνο t. Οι αντίστοιχες δίκαιες τιμές είναι:

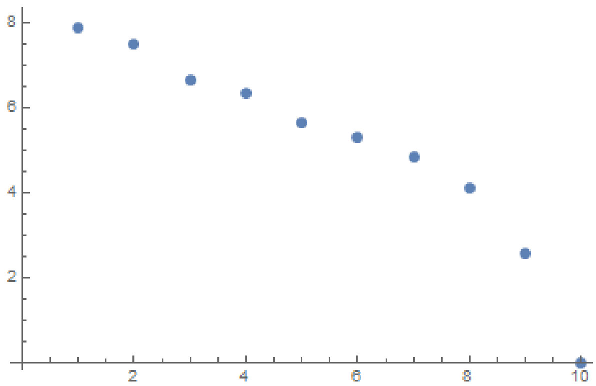
$$Call: e^{-rT}E_Q(S_T - S_t)_+ \quad Put: e^{-rT}E_Q(S_t - S_T)_+$$

Αλγόριθμος για Call:

1. Θέτουμε ως αρχική τιμή S την S_0 και καθορίζουμε το σημείο του k στο οποίο αντιστοιχεί η τιμή εξάσκησης στον χρόνο t. Θέτοντας $t = \frac{T}{k} \cdot T$.
2. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $S_t = S_0 \cdot e^{t\mu + \sigma Z t^{0.5}}$.
3. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $S_T = S_t \cdot e^{(T-t)\mu + \sigma Z (T-t)^{0.5}}$.
4. Θέτουμε $sum = sum + \sum_{i=1}^{n} \text{Max}[S_T - S_t, 0]$ και τα βήματα 2,3 και αυτό επαναλαμβάνονται όσες φορές έχουμε θέσει το n.
6. Θέτουμε $Call = sum/n \cdot e^{-rT}$

Για να κατασκευάσουμε το γράφημα τιμών του Call με διαφορετικό προσυμφωνημένο t χρονικό σημείο έχουμε τον ακόλουθο κώδικα:

```
t = 0.25; r = 0.01; n = 1000; S0 = 100; sigma = 0.4; k = 10;
tii = ti/k*t;m = r - sigma^2/2; A = Range[1, 10, 1]; i = 1;
Do[sum = 0;
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S1 = S0*Exp[tii*m + sigma*tii^0.5*Z];
   Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   S = S1*Exp[(t - tii)*m + sigma*(t - tii)^0.5*Z];
   sum = sum + Max[S - S1, 0], {i, 1, n}];
  A[[i]] = {ti, Exp[-r*t]*N[sum/n]}; i++, {ti, 1, 10, 1}];
ListPlot[A]
```



Στη λήξη T=t η αξία του δικαιώματος είναι πάντα μηδέν. Η μέγιστη τιμή παρατηρείται στο αρχικό χρονικό σημείο t.

Put:

```
t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; S0 = 100; sigma = 0.4; sum = 0; m = r - sig-
ma^2/2; k = 10; ti = 3; tii = ti/k*t;
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
  S1 = S0*Exp[tii*m + sigma*tii^0.5*Z];
  Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
  S = S1*Exp[(t - tii)*m + sigma*(t - tii)^0.5*Z];
  sum = sum + Max[-S + S1, 0], {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

6.64829

Κεφάλαιο 4^{o}:

Αποτίμηση δικαιωμάτων επί πολλαπλών περιουσιακών στοιχείων, μέσω προσομοίωσης.

4.1 Αποτίμηση πολλαπλών υποκείμενων τίτλων.

Η προσομοίωση της στοχαστικής διαδικασίας

$$\{\mathbf{S}_t = (S_{1,t}, S_{2,t}, \dots, S_{d,t}), t \in [0, T]\}$$

που περιγράφει τις κινήσεις των τιμών υποκείμενων τίτλων που ακολουθούν πολυδιάστατη γεωμετρική κίνηση Brown (MGBM) με παραμέτρους μ_i και $\sigma_i{}^2, i = 1,2, \dots, d$ και ο λογάριθμος αυτών που ακολουθεί πολυδιάστατη κίνηση Brown με τις ίδιες παραμέτρους, έχοντας μεταξύ τους συσχετίσεις ρ_{ij} πραγματοποιείται όπως περιγράφεται παρακάτω.

Αλγόριθμος προσομοίωσης αναμενόμενων τιμών συσχετισμένων υποκειμένων τίτλων $\boldsymbol{S_T}$:

1. Ορίζουμε χρόνο λήξης T, volatility $\sigma_i = \mathrm{s}_i$, αριθμό επαναλήψεων n, $\mu_i = m_i$, συσχετίσεις των τίτλων μεταξύ τους ρ_{ij}=corr και τιμή-αξία εκκίνησης στο t_0, του διανύσματος των τίτλων $\mathbf{S}_0^{(i)}$.

2. Βρίσκουμε τον πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων (covariance matrix) $\mathbf{\Sigma}$ από τα σ_i και τις συσχετίσεις ρ_{ij}.

3. Παράγουμε $\mathbf{U}_i = (U_1, U_2, \dots, U_d)$ ανεξάρτητες τ.μ. από ομοιόμορφη κατανομή

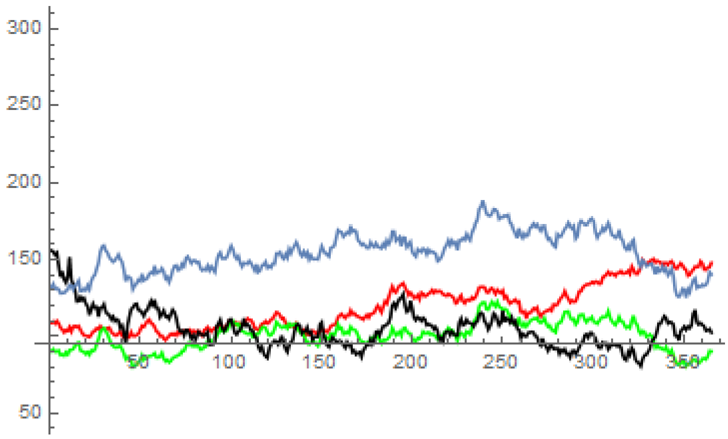
4. Θέτουμε την $\mathbf{Z}_i = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d)$ μέσω της πολικής μεθόδου, βλέπε παράρτημα Π.4.1-Π.4.2.7

5. Θέτουμε $\mathbf{X}_T^{(i)} = \mathbf{X}_0^{(i)} \quad + T\boldsymbol{\mu} \quad + \sqrt{\mathbf{\Sigma}} \,.\, \mathbf{Z}_i T^{0.5}$. (*Κίνηση Brown*).

6. Θέτουμε $SL = \mathbf{S}_T{}^{(i)} = e^{\mathbf{X}_T^{(i)}}$. (*Γεωμετρική κίνηση Brown*).

Γράφημα τιμών υποκειμένων τίτλων ($d = 4$) σε ένα χρόνο $T = 1$ με $n = 365$ μέρες.

```
s = {0.3, 0.4, 0.6, 0.4};
corr = {{1, 0.5, 0.4, 0.3}, {0.5, 1, 0.3, 0.8}, {0.4, 0.3, 1, 0.5}
          , {0.3, 0.8, 0.5, 1}};
sstr = Table[s[[i]]*s[[j]], {i, 1, Length[s]}, {j, 1, Length[s]}];
Sigma = sstr*corr;  m = {0.1, 0.1, 0.2, 0.15};
SqRootSigma = MatrixPower[Sigma, 0.5];T = 1; n = 365; h = T/n;
S0 = {110, 90, 150, 130};SL = Table[S0, {n}];X = Log[S0];
Do[U1=RandomReal[]; U2=RandomReal[]; U3=RandomReal[];U4 = RandomReal[];
 Z = {(-2 Log[U1])^0.5*Cos[2*Pi*U2], (-2 Log[U1])^0.5*
    Sin[2*Pi*U2], (-2 Log[U3])^0.5*Cos[2*Pi*U4], (-2 Log[U3])^0.5*
    Sin[2*Pi*U4]};
 X = X + h*m + h^0.5*SqRootSigma.Z;
 SL[[i]] = Exp[X];
 , {i, 1, n}]
fig1 = ListPlot[Transpose[SL][[1]], Joined -> True,
   PlotStyle -> {Red}];fig2 = ListPlot[Transpose[SL][[2]], Joined -> True,
   PlotStyle -> {Green}];fig3 = ListPlot[Transpose[SL][[3]], Joined ->
True, PlotStyle -> {Black}];fig4 = ListPlot[Transpose[SL][[4]], Joined ->
True];Show[fig1, fig2, fig3, fig4, PlotRange -> {50, 300}]
```



Παρατηρούμε διαγραμματικά την συσχέτιση στην κίνηση των τιμών των τίτλων στον χρόνο, όσο μεγαλύτερη η συσχέτιση τόσο οι τιμές των τίτλων μεταξύ τους θα κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση αυτό φαίνεται εδώ κυρίως μεταξύ του δεύτερου τίτλου με πράσινο χρώμα και του τέταρτου τίτλου με μπλε χρώμα που έχουν και την μεγαλύτερη συσχέτιση 0.8, κινούνται σχεδόν παράλληλα μεταξύ τους.

4.2 Αποτίμηση αξίας Basket option.

Τα δικαιώματα αυτά συναντώνται ως εξωχρηματιστηριακά προθεσμιακά συμβόλαια όπως είναι τα δικαιώματα αμοιβαίων κεφαλαίων που απευθύνονται ειδικά σε πολυεθνικές εταιρείες και περιλαμβάνουν ένα καλάθι πολλαπλών τίτλων από την παγκόσμια οικονομία αλλά και ως τυποποιημένα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης όπως δικαιώματα επί ενός δείκτη. Στην περίπτωση αυτή αποτιμώνται για ευκολία και ταχύτητα από τους επενδυτές ως μονοδιάστατα δικαιώματα μέσω του γνωστού τύπου των Black and Scholes, όμως ένας δείκτης αποτελείται από τίτλους που συχνά έχουν μεταξύ τους υψηλή συσχέτιση γεγονός που καθιστά απαραίτητη την αποτίμηση τους μέσω μεθόδων προσομοίωσης ειδικότερα για έναν διαχειριστή κεφαλαίων καθότι διαφορετικά μπορεί να πέσει σε σφάλματα εκτίμησης.

Σε αυτό το είδος δικαιωμάτων η τελική αξία του δικαιώματος $\mathbf{S}_T$ ισούται με το άθροισμα της αξίας ενός συνόλου (καλαθιού) d υποκείμενων τίτλων όπου ο κάθε τίτλος συμμετέχει στο καλάθι αυτό με κάποια στάθμιση-ποσοστό $w_{i,}$ για $i = 1, \dots, n$.

Η τελική αξία ισούται με:

$$Call\colon e^{-rT} E_Q\Big(\sum_{i=1}^{d} w_i\, S_{i,T} - K\Big)_+ \qquad Put\colon\ e^{-rT} E_Q\Big(K - \sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T}\Big)_+$$

Αλγόριθμος για Call:

1. Ορίζουμε χρόνο λήξης $T = t$, επιτόκιο αναφοράς δίχως κίνδυνο r, volatility $\sigma_i =$ ty $\sigma_i = \mathrm{s}_i$, αριθμό επαναλήψεων n, $\mu_i = m_\iota$, strike price = K, στάθμιση του κάθε τίτλου w_i, συσχετίσεις των τίτλων μεταξύ τουςρ_{ij} , τον αριθμό των τίτλων d που συμμετέχουν στο καλάθι και τιμή-αξία εκκίνησης στο $t_{0,}$ του κάθε τίτλου $S_{i,0}$.
2. Βρίσκουμε τον πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων (covariance matrix) $\mathbf{\Sigma}$ πολλαπλασιάζοντας το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{\sigma}_i \cdot Ανάστροφος(\boldsymbol{\sigma}_i)$ με τον πίνακα συσχετίσεων.
3. Θέτουμε ως αρχή $sum = 0$, και ορίζουμε τον κάθε $\mu_i = m_i = r - \frac{\sigma_i^2}{2}$.
4. Παράγουμε $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots Z_d), Z_i \sim N(0,1)$.
5. Θέτουμε $\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_0 \cdot e^{T\boldsymbol{\mu} + \sqrt{\mathbf{\Sigma}}.\mathbf{Z}\ \ T^{0.5}}$.
6. Θέτουμε $sum = sum + \mathrm{Max}[\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T} - K, 0]$ επαναλαμβάνοντας n φορές.
7. Θέτουμε $Call = sum/n \cdot e^{-rT}$

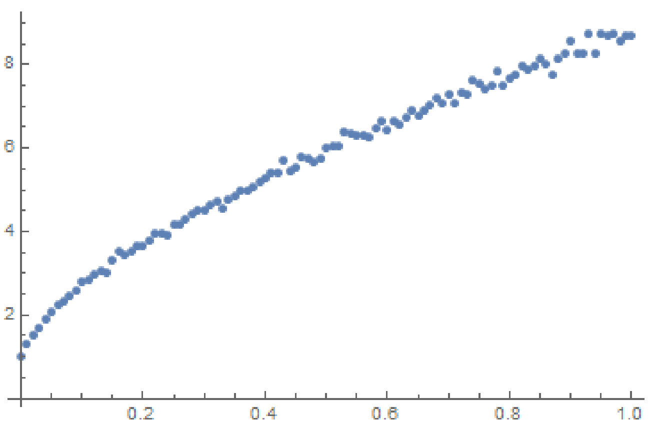
Κώδικας στο Mathematica:

```
t = 0.25; n = 10000; r = 0.01; s = {0.3,0.4,0.5, 0.7};
d = 4; S0={110,90,100,100}; K=100; w1 = 0.3; w2 = 0.2; w3 = 0.2; w4 = 0.3;
correlation = {{1, 0.5, 0.4, -0.6}, {0.5, 1, 0.3, -0.5}
                , {0.4, 0.3, 1, -0.5}, {-0.6, -0.5, -0.5, 1}};
sstr = Table[s[[i]]*s[[j]], {i, 1, Length[s]}, {j, 1, Length[s]}];
S = sstr*correlation ;
Sriza = MatrixPower[S, 0.5];
sum = 0; mi = {r - s[[1]]^2/2, r - s[[2]]^2/2, r - s[[3]]^2/2,
  r - s[[4]]^2/2};
Do[Z = Table[RandomReal[NormalDistribution[0, 1]], {d}];
  Si = S0*Exp[t*mi + Sriza.Z*t^0.5];
  S1 = Si[[1]]; S2 = Si[[2]]; S3 = Si[[3]]; S4 = Si[[4]];
  sum = sum + Max[(S1*w1 + S2*w2 + S3*w3 + S4*w4) - K, 0], {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*sum/n
```

4.19973

Γράφημα τιμών του Call με διαφορετική λήξη T του δικαιώματος, από 0 έως και 1 έτος.

```
n = 10000; r = 0.01; s = {0.3, 0.4, 0.5, 0.7}; d = 4;
S0 = {110, 90, 100, 100}; K = 100; w1 = 0.3; w2 = 0.2; w3 = 0.2; w4 = 0.3;
correlation = {{1, 0.5, 0.4, -0.6}, {0.5, 1, 0.3, -0.5}, {0.4, 0.3,
   1, -0.5}, {-0.6, -0.5, -0.5, 1}}; A = Range[0, 1, 0.01]; i = 1;
sstr = Table[s[[i]]*s[[j]], {i, 1, Length[s]}, {j, 1, Length[s]}];
S = sstr*correlation ; Sriza = MatrixPower[S, 0.5];
mi = {r - s[[1]]^2/2, r - s[[2]]^2/2, r - s[[3]]^2/2, r - s[[4]]^2/2};
Do[sum = 0;
  Do[Z = Table[RandomReal[NormalDistribution[0, 1]], {d}];
   Si = S0*Exp[t*mi + Sriza.Z*t^0.5];
   S1 = Si[[1]]; S2 = Si[[2]]; S3 = Si[[3]]; S4 = Si[[4]];
   sum = sum + Max[(S1*w1 + S2*w2 + S3*w3 + S4*w4) - K, 0], {i, 1, n}];
  A[[i]] = {t, Exp[-r*t]*N[sum/n]}; i++, {t, 0, 1, 0.01}];
ListPlot[A]
```

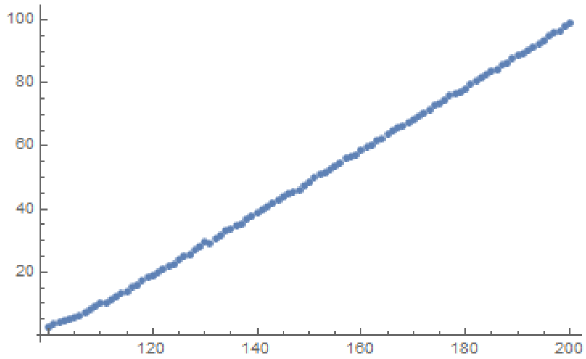


Παρατηρούμε, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι όσο μεγαλύτερο το χρονικό διάστημα λήξης T του δικαιώματος τόσο μεγαλύτερη και η δίκαιη τιμή του. Όσο πλησιάζει στη λήξη το δικαίωμα μειώνεται και η αξία χρόνου. Στη λήξη-εξάσκηση $T = 0$ η χρονική του αξία είναι μηδενική, υπάρχει μόνο η εσωτερική αξία.

Στην περίπτωση ενός Put, αρκεί να διαφοροποιηθούμε μόνο στο έκτο βήμα και να θέσουμε

$sum \ = sum + \mathrm{Max}[K - \sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T}\, , 0]$ επαναλαμβάνοντας n φορές.

Ένα γράφημα τιμών του Put option με διαφορετική τιμή εξάσκησης (Strike Price) K του δικαιώματος, από 100 έως και 200, με βήμα τιμής 1, δίνεται παρακάτω:



Παρατηρούμε, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι όσο μεγαλύτερη η τιμή εξάσκησης K του δικαιώματος μεγαλύτερη και η αναμενόμενη τιμή του, καθότι μεγαλύτερη είναι και η εσωτερική του αξία.

4.3 Αποτίμηση αξίας Δικαιώματος Ανταλλαγής(Exchange option).

Δικαιώματα ανταλλαγής ενός περιουσιακού στοιχείου-υποκείμενου τίτλου με ένα άλλο περιουσιακό στοιχείο-υποκείμενο τίτλο αλλοδαπής ή εγχώριας αγοράς με προκαθορισμένη συναλλαγματική ισοτιμία y για συναλλαγές με την αλλοδαπή αγορά.

Τα δικαιώματα αυτά αποτελούν μια προσυμφωνημένη αγοροπωλησία-ανταλλαγή τίτλων που διασφαλίζει τους αντισυμβαλλόμενους έναντι του κινδύνου αύξησης ή μείωσης των τιμών λόγω πληθωρισμού, αποπληθωρισμού, αλλαγών του οικονομικού, πολιτικού περιβάλλοντος και άλλων συστημικών και μη κινδύνων.

Η δίκαιη τιμή ισούται με:

$$Call\colon e^{-rT} E_Q(S_T^{(1)} - yS_T^{(2)})_+\,, \qquad Put\colon\ e^{-rT} E_Q(yS_T^{(2)} - S_T^{(1)})_+$$

Αλγόριθμος για Call:

1. Ορίζουμε χρόνο λήξης $T = t$, επιτόκιο αναφοράς δίχως κίνδυνο r, τυπικές αποκλίσεις $\sigma_1 = \text{sigma}_1$, $\sigma_2 = \text{sigma}_2$, αριθμό επαναλήψεων n, $\mu_i = m_i$, συσχέτιση = rho των δύο τίτλων μεταξύ τους, προκαθορισμένη συναλλαγματική ισοτιμία y και τιμή-αξία εκκίνησης στο t_0, του κάθε τίτλου $S_0^{(i)}$.
2. Θέτουμε ως αρχή $sum = 0$, και ορίζουμε τον κάθε $μέσο_i = m_i = r - \frac{\sigma^2{}_i}{2}$.
3. Παράγουμε $Z_1, Z_2 \sim N(0,1)$.
4. Θέτουμε $X_2 = Z_1 \cdot rho + Z_2 \cdot \sqrt{1 - rho^2}$
5. Θέτουμε $S_T^{(1)} = S_0{}^{(1)} \cdot e^{T\mu_1 + \sigma_1 \cdot Z_1 T^{0.5}}$ και $S_T^{(2)} = S_0{}^{(2)} \cdot e^{T\mu_2 + \sigma_2 \cdot X_2 T^{0.5}}$
6. Θέτουμε $sum = sum + \text{Max}[S_T^{(1)} - yS_T^{(2)}, 0]$ επαναλαμβάνοντας n φορές.
7. Θέτουμε $Call = sum/n \cdot e^{-rT}$

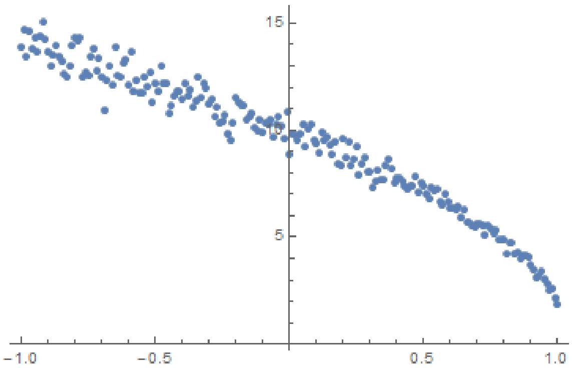
Κώδικας στο Mathematica:

```
n = 1000; r = 0.01; sigma1 = 0.3; sigma2 = 0.4; S0 = List[100, 100]; t =
0.25; rho = 0.5; y = 1;
sum = 0; m1 = r - sigma1^2/2; m2 = r - sigma2^2/2;
Do[Z1 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
  Z2 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
  X2 = Z1*rho + Z2*Sqrt[1 - rho^2];
  S1 = S0[[1]]*Exp[t*m1 + sigma1*t^0.5*Z1];
  S2 = S0[[2]]*Exp[t*m2 + sigma2*t^0.5*X2];
  sum = sum + Max[S1 - y*S2, 0], {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*sum/n
```

```
7.8248
```

Γράφημα τιμών του Exchange Call option με διαφορετική συσχέτιση των δύο τίτλων μεταξύ τους. Από πλήρης αρνητική συσχέτιση -1 έως πλήρη θετική συσχέτιση 1.

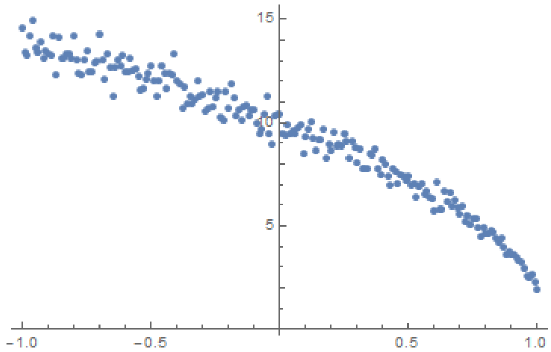
```
n = 1000; r = 0.01; sigma1 = 0.3; sigma2 = 0.4; S0 = List[100, 100];
t = 0.25; y = 1; A = Range[-1, 1, 0.01]; i = 1;m1 = r - sigma1^2/2;
m2 = r - sigma2^2/2;Do[sum = 0;
Do[Z1 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   Z2 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   X2 = Z1*rho + Z2*Sqrt[1 - rho^2];
   S1 = S0[[1]]*Exp[t*m1 + sigma1*t^0.5*Z1];
   S2 = S0[[2]]*Exp[t*m2 + sigma2*t^0.5*X2];
   sum = sum + Max[S1 - y*S2, 0]
, {i, 1, n}];
 A[[i]] = {rho, Exp[-r*t]*N[sum/n]}; i++
, {rho, -1, 1, 0.01}];
ListPlot[A]
```



Παρατηρούμε ότι αρνητικότερη συσχέτιση συνεπάγεται μεγαλύτερη τιμή του δικαιώματος. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι οι παραπάνω τιμές (τελείες) στο γράφημα είναι προσεγγιστικές και η διασπορά τους γύρω από την καμπύλη (που δεν φαίνεται στο γράφημα) η οποία δίνει την δίκαιη αξία του δικαιώματος οφείλεται στο μικρό πλήθος επαναλήψεων που έχουμε λάβει ($n = 1000$).

Στην περίπτωση ενός Put option, αρκεί να διαφοροποιηθούμε μόνο στο έκτο βήμα και να θέσουμε $sum \ = sum + \mathrm{Max}[yS_T^{(2)} - S_T^{(1)}, 0]$ επαναλαμβάνοντας n φορές.

***Γράφημα τιμών του Exchange Put option με διαφορετική συσχέτιση των δύο τίτλων μεταξύ τους. Από πλήρης αρνητική συσχέτιση* -1 *έως πλήρη θετική συσχέτιση* 1.**



Και εδώ παρατηρούμε ότι αρνητικότερη συσχέτιση συνεπάγεται μεγαλύτερη τιμή του δικαιώματος και ότι η διασπορά των αναμενόμενων τιμών ελαττώνεται με την αύξηση της συσχέτισης.

4.4 Αποτίμηση αξίας Quanto-Currency options.

Αφορά δικαιώματα στην αλλοδαπή με διαφορετικό νόμισμα. Συμπεριλαμβανομένης της συναλλαγματικής ισοτιμίας, υποθέτουμε $S_T^{(1)}$ ως συναλλαγματική ισοτιμία και $S_T^{(2)}$ ως τον υποκείμενο τίτλο στην αλλοδαπή.

Τα προϊόντα αυτά είναι ελκυστικά σε κερδοσκόπους αλλά κυρίως και σε επενδυτές που επιθυμούν επένδυση σε ξένα περιουσιακά στοιχεία μειώνοντας ή σε κάποιες περιπτώσεις και εξαλείφοντας τον συναλλαγματικό κίνδυνο.

Οι περιπτώσεις αυτών των δικαιωμάτων και η δίκαιη τιμή τους, είναι:

Περίπτωση Α.

$$Call:\ e^{-rT}E_Q[\,S_T^{(1)}(S_T^{(2)}-K)_+]\,, \qquad Put:\ e^{-rT}E_Q[S_T^{(1)}(K-S_T^{(2)})_+]$$

Αλγόριθμος για Call:

1. Ορίζουμε χρόνο λήξης $T = t$, επιτόκιο αναφοράς δίχως κίνδυνο r, τυπικές αποκλίσεις $\sigma_1 = \text{sigma}_1$, $\sigma_2 = \text{sigma}_2$, αριθμό επαναλήψεων n, $\mu_i = m_i$, συσχέτιση=rho μεταξύ συναλλαγματικής ισοτιμίας και υποκειμένου τίτλου, τιμή εξάσκησης (strike price) = K και τιμή-αξία εκκίνησης στο $t_{0,}$ της $S_T^{(1)}$ συναλλαγματικής ισοτιμίας και $S_T^{(2)}$ υποκείμενου τίτλου στην αλλοδαπή.
2. Θέτουμε ως αρχή $sum = 0$, και ορίζουμε τον κάθε $\mu_i = m_\iota = r - \frac{\sigma^2{}_i}{2}$.
3. Παράγουμε $Z_1, Z_2 \sim N(0,1)$
4. Θέτουμε $X_2 = Z_1 \cdot rho + Z_2 \cdot \sqrt{1 - rho^2}$
5. Θέτουμε $S_T^{(1)} = S_0{}^{(1)} \cdot e^{T\mu_1 + \sigma_1 \cdot Z_1 T^{0.5}}$ και $S_T^{(2)} = S_0{}^{(2)} \cdot e^{T\mu_2 + \sigma_2 \cdot X_2 T^{0.5}}$
6. Θέτουμε $sum\ = sum + \text{Max}[S_T^{(2)} - K, 0]$ επαναλαμβάνοντας n φορές.
7. Θέτουμε $Call = sum/n \cdot e^{-rT}$

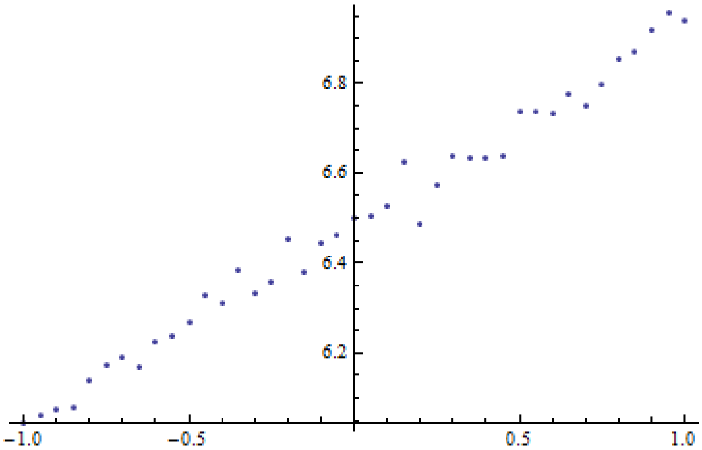
Κώδικας στο Mathematica:

```
n = 1000; r = 0.01; sigma1 = 0.1; sigma2 = 0.4; S0 = List[0.8, 100]; t =
0.25; rho = 0.4;
sum = 0; m1 = r - sigma1^2/2; m2 = r - sigma2^2/2; K = 100;
Do[Z1 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
  Z2 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
  X2 = Z1*rho + Z2*Sqrt[1 - rho^2];
  S1 = S0[[1]]*Exp[t*m1 + sigma1*t^0.5*Z1];
  S2 = S0[[2]]*Exp[t*m2 + sigma2*t^0.5*X2];
  sum = sum + S1*Max[S2 - K, 0], {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*sum/n
```

```
6.56761
```

Γράφημα τιμών του Call με διαφορετική συσχέτιση=rho. Από πλήρης αρνητική συσχέτιση -1 έως πλήρη θετική συσχέτιση +1.

```
n = 10^5; r = 0.01; sigma1 = 0.1; sigma2 = 0.4; S0 = List[0.8, 100];
t = 0.25; A = Range[-1, 1, 0.05]; i = 1;m1 = r - sigma1^2/2;
m2 = r - sigma2^2/2; K = 100;
Do[sum = 0;
Do[Z1 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   Z2 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   X2 = Z1*rho + Z2*Sqrt[1 - rho^2];
   S1 = S0[[1]]*Exp[t*m1 + sigma1*t^0.5*Z1];
   S2 = S0[[2]]*Exp[t*m2 + sigma2*t^0.5*X2];
   sum = sum + S1*Max[S2 - K, 0]
, {i, 1, n}];
  A[[i]] = {rho, Exp[-r*t]*N[sum/n]}; i++
, {rho, -1, 1, 0.05}];
ListPlot[A]
```



Στην περίπτωση ενός Put option, διαφοροποιούμαστε μόνο στο έκτο βήμα και θέτουμε

$$sum \ = sum + \mathrm{Max}[K - S_T^{(2)}, 0] \ ,$$

επαναλαμβάνοντας n φορές.

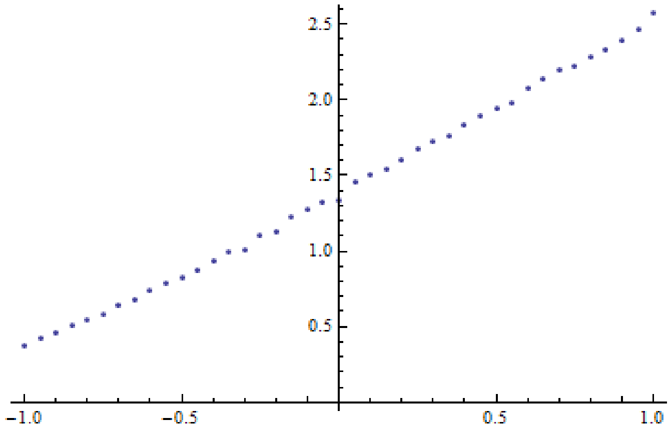
Περίπτωση Β.

$$Call\colon\ e^{-rT}E_Q\,(S_T^{(1)}S_T^{(2)} - K)_+ \qquad\qquad Put\colon\ e^{-rT}E_Q\,(K - S_T^{(1)}S_T^{(2)})_+$$

Όμοια με παραπάνω υπολογίζεται η δίκαιη αξία και σε αυτή την περίπτωση, αλλάζοντας μόνο την τελική αξία.

Γράφημα τιμών του Call με διαφορετική συσχέτιση=rho. Από πλήρης αρνητική συσχέτιση -1 έως πλήρη θετική συσχέτιση +1.

```
n = 10^5; r = 0.01; sigma1 = 0.1; sigma2 = 0.4; S0 = List[0.8, 100];
t = 0.25; A = Range[-1, 1, 0.05]; i = 1;m1 = r - sigma1^2/2;
m2 = r - sigma2^2/2; K = 100;
Do[sum = 0;Do[Z1 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
  Z2 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
  X2 = Z1*rho + Z2*Sqrt[1 - rho^2];
  S1 = S0[[1]]*Exp[t*m1 + sigma1*t^0.5*Z1];
  S2 = S0[[2]]*Exp[t*m2 + sigma2*t^0.5*X2];
  sum = sum + Max[S1*S2 - K, 0]
 , {i, 1, n}];
  A[[i]] = {rho, Exp[-r*t]*N[sum/n]}; i++
, {rho, -1, 1, 0.05}];
ListPlot[A]
```



Παρατηρούμε ότι θετικότερη συσχέτιση συνεπάγεται μεγαλύτερη τιμή του δικαιώματος.

Στην περίπτωση ενός Put, διαφοροποιούμαστε μόνο στο έκτο βήμα και θέτουμε

$sum = sum + Max[K - S_T^{(1)} \cdot S_T^{(2)}, 0]$ επαναλαμβάνοντας n φορές.

Γ. Περίπτωση

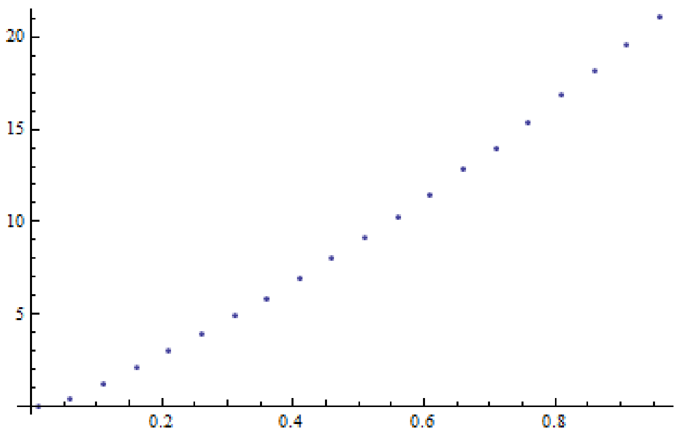
$$Call\colon\ e^{-rT}E_Q[\mathrm{Max}\left[S_T^{(1)}, c\right](S_T^{(2)} - K)_+] \qquad Put\colon\ e^{-rT}E_Q[\mathrm{Max}\left[S_T^{(1)}, c\right](K - S_T^{(2)})_+]$$

Όπου c μία σταθερά-προκαθορισμένη συναλλαγματική ισοτιμία.

Η εκτίμηση της δίκαιης αξίας στην συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται με τον ίδιο τρόπο, αλλάζοντας μόνο την τελική αξία.

Γράφημα τιμών του Call με διαφορετική τυπική απόκλιση του υποκειμένου τίτλου στην αλλοδαπή. Από 1% έως και 100%.

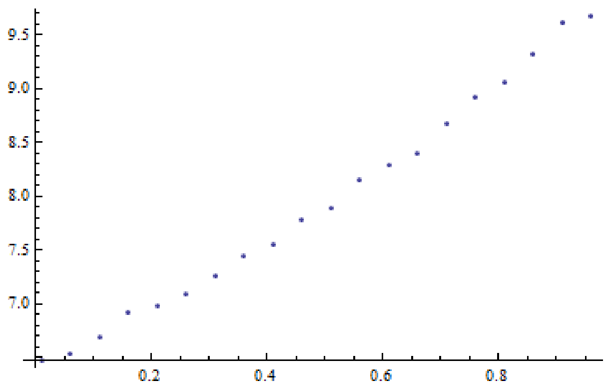
```
n = 10^5; r = 0.01; sigma1 = 0.1; S0 = List[0.8, 100]; t = 0.25;
rho = 0.4; A = Range[0.01, 1, 0.05]; i = 1;
m1 = r - sigma1^2/2; m2 = r - sigma2^2/2; K = 100; c = 0.8;
Do[sum = 0;
  Do[Z1 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
     Z2 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
     X2 = Z1*rho + Z2*Sqrt[1 - rho^2];
     S1 = S0[[1]]*Exp[t*m1 + sigma1*t^0.5*Z1];
     S2 = S0[[2]]*Exp[t*m2 + sigma2*t^0.5*X2];
     sum = sum + Max[S2 - K, 0]*Max[S1, c]
  , {i, 1, n}];
  A[[i]] = {sigma2, Exp[-r*t]*N[sum/n]}; i++
, {sigma2, 0.01, 1, 0.05}];
ListPlot[A]
```



Παρατηρούμε, όπως αναμενόταν, ότι υψηλότερη τυπική απόκλιση του υποκειμένου τίτλου συνεπάγεται μεγαλύτερη αναμενόμενη τιμή του δικαιώματος.

***Γράφημα τιμών του Call με διαφορετική τυπική απόκλιση της συναλλαγματικής ισοτιμίας. Από* 1% *έως και* 100%.**

```
n = 10^5; r = 0.01; sigma2 = 0.4; S0 = List[0.8, 100]; t = 0.25;
rho = 0.4; A = Range[0.01, 1, 0.05]; i = 1;m1 = r - sigma1^2/2;
m2 = r - sigma2^2/2; K = 100; c = 0.8;
Do[sum = 0;Do[Z1 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   Z2 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   X2 = Z1*rho + Z2*Sqrt[1 - rho^2];
   S1 = S0[[1]]*Exp[t*m1 + sigma1*t^0.5*Z1];
   S2 = S0[[2]]*Exp[t*m2 + sigma2*t^0.5*X2];
   sum = sum + Max[S2 - K, 0]*Max[S1, c]
  , {i, 1, n}];
  A[[i]] = {sigma1, Exp[-r*t]*N[sum/n]}; i++
, {sigma1, 0.01, 1, 0.05}];
ListPlot[A]
```



Στην περίπτωση ενός Put, διαφοροποιούμαστε μόνο στο έκτο βήμα και θέτουμε

$sum\ = sum + \mathrm{Max}[S_T^{(1)}, c] \cdot \mathrm{Max}[K - S_T^{(2)}, 0]$ επαναλαμβάνοντας n φορές.

Δ. Περίπτωση

Στην τελευταία αυτή περίπτωση, η δίκαιη αξία του δικαιώματος είναι

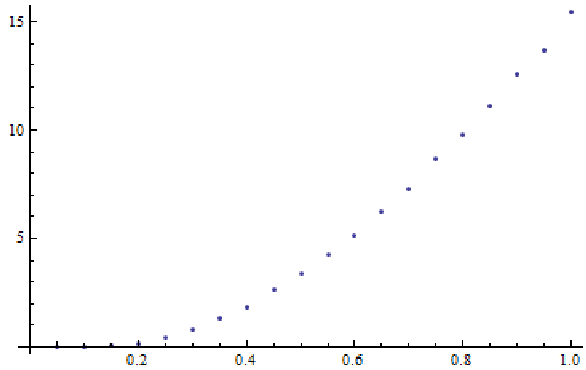
$$Call\colon\ e^{-rT} E_Q\left(\mathrm{Max}\left[S_T^{(1)}, c\right] S_T^{(2)} - K\right)_+, \qquad Put\colon\ e^{-rT} E_Q\left(K - \mathrm{Min}\left[S_T^{(1)}, c\right] S_T^{(2)}\right)_+$$

Όπου c μία σταθερά-προκαθορισμένη συναλλαγματική ισοτιμία.

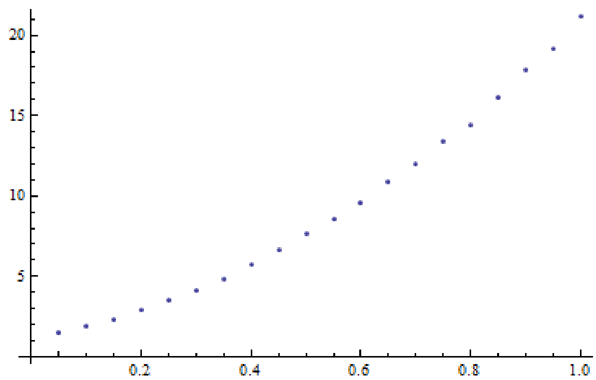
Ο Αλγόριθμος εκτίμησης της παραπάνω μέσης τιμής είναι όμοιο με τις προηγούμενες περιπτώσεις.

***Γράφημα τιμών του Call με διαφορετική τυπική απόκλιση του υποκειμένου τίτλου στην αλλοδαπή. Από* 1% *έως και* 100%.**

```
n = 10^5; r = 0.01; sigma1 = 0.1; S0 = List[0.8, 100]; t = 0.25;
 rho = 0.4; A = Range[0.05, 1, 0.05]; i = 1;
m1 = r - sigma1^2/2; m2 = r - sigma2^2/2; K = 100; c = 0.8;Do[sum = 0;
Do[Z1 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   Z2 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
   X2 = Z1*rho + Z2*Sqrt[1 - rho^2];
   S1 = S0[[1]]*Exp[t*m1 + sigma1*t^0.5*Z1];
   S2 = S0[[2]]*Exp[t*m2 + sigma2*t^0.5*X2];
   sum = sum + Max[Max[S1, c]*S2 - K, 0]
  , {i, 1, n}];
  A[[i]] = {sigma2, Exp[-r*t]*N[sum/n]}; i++
, {sigma2, 0.05, 1, 0.05}];
ListPlot[A]
```



Όμοια κατασκευάζεται και το γράφημα των τιμών του Call option με διαφορετική τυπική απόκλιση της συναλλαγματικής ισοτιμίας. Από 1% έως και 100%.



Παρατηρούμε ότι υψηλότερη τυπική απόκλιση της συναλλαγματικής ισοτιμίας συνεπάγεται μεγαλύτερη αναμενόμενη τιμή του δικαιώματος και μεγαλύτερο κίνδυνο.

Στην περίπτωση ενός Put, διαφοροποιούμαστε μόνο στο έκτο βήμα και θέτουμε

$$sum = sum + Max[K - Min[S_T^{(1)}, c] \cdot S_T^{(2)}, 0]$$

επαναλαμβάνοντας n φορές.

4.5 Αποτίμηση αξίας Extreme option.

Πρόκειται για δικαιώματα πάνω σε d διαφορετικούς τίτλους από τους οποίους επιλέγεται ένας. Η $\mathbf{S}_T$ αποτελείται από ένα καλάθι (d) υποκείμενων τίτλων, για $i = 1, \dots, d$. Από αυτούς επιλέγεται ο μέγιστος στο Call option και ο ελάχιστος στο Put option κατά τη λήξη του δικαιώματος $\mathbf{S}_T = (S_{1,T}, \dots, S_{d,T})$.

Τα δικαιώματα αυτά μειώνουν αρκετά το ρίσκο του επενδυτή και αν είναι καλά διαφοροποιημένες οι επιλογές των τίτλων που λαμβάνουν μέρος στην σύγκριση σχεδόν εξαλείφουν τον μη συστημικό κίνδυνο αλλά απαιτούν για τον ίδιο λόγο και αυξημένο ασφάλιστρο.

Η δίκαιη τιμή ισούται με:

$$Call\colon\ e^{-rT} E_Q(Max[\mathbf{S}_T] - K)_+, \qquad Put\colon\ e^{-rT} E_Q(K - Min[\mathbf{S}_T])_+$$

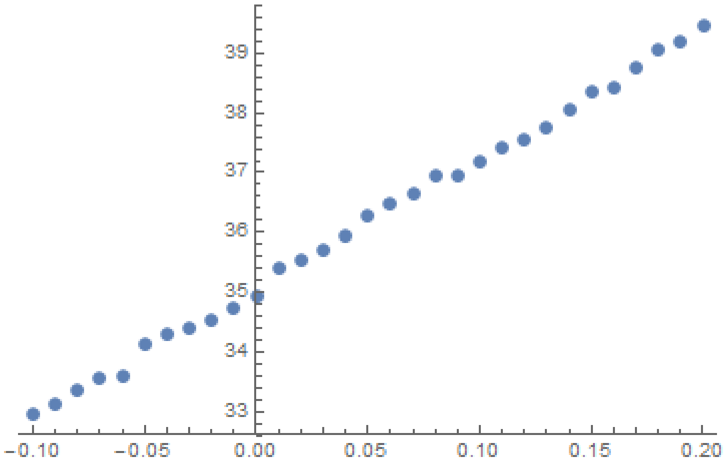
Αλγόριθμος για Call:

1. Θέτουμε ως αρχή $sum = 0$, και ορίζουμε τον κάθε $\mu_i = m_i = r - \frac{\sigma_i^2}{2}$.
2. Παράγουμε $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d) \sim N(0,1)$.
3. Θέτουμε $\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_0 \cdot e^{T\mu + \sqrt{\Sigma}.\mathbf{Z}\ T^{0.5}}$.
4. Θέτουμε $sum = sum + Max[\text{Max}[\mathbf{S}_T] - K, 0]$ επαναλαμβάνοντας n φορές.
5. Θέτουμε $Call = sum/n \cdot e^{-rT}$

Κώδικας στο Mathematica:

```
n = 10000; r = 0.01; s = {0.3, 0.4, 0.5, 0.2, 0.7}; d = 5;
S0 = {100, 90, 120, 80, 110}; t = 0.25; K = 100;sum = 0;
mi = r-s^2/2
correlation = {{1,0.5,0.3,0.4,0.8}, {0.5,1,0.6,0.5,0.3}
, {0.3,0.6,1,0.2,0.2}, {0.4,0.5,0.2,1,0.3}, {0.8,0.3,0.2,0.3,1}};
sstr = Table[s[[i]]*s[[j]], {i, 1, Length[s]}, {j, 1, Length[s]}];
S =sstr*correlation; Sriza = MatrixPower[S, 0.5];
Do[Z = Table[RandomReal[NormalDistribution[0, 1]], {d}];
   Si = S0*Exp[t*mi + Sriza.Z*t^0.5];
   S1 = Si[[1]]; S2 = Si[[2]]; S3 = Si[[3]]; S4 = Si[[4]]; S5 = Si[[5]];
   sum = sum + Max[Max[S1, S2, S3, S4, S5] - K, 0]
, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*sum/n
```

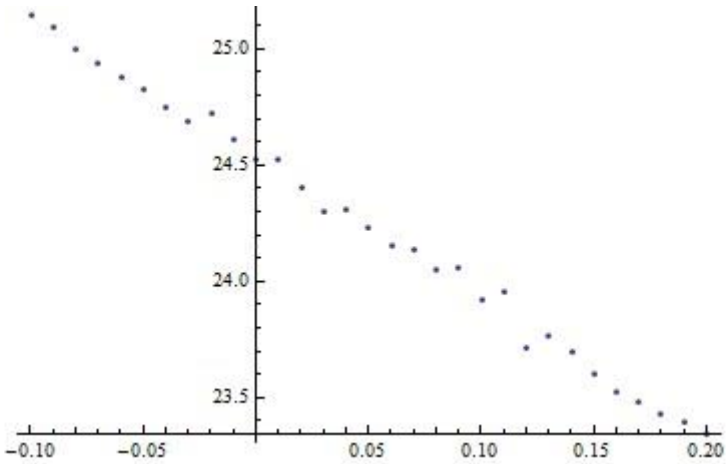
Γράφημα τιμών του Call με διαφορετικό επιτόκιο αναφοράς. Από -10% έως και 20%.



Στην περίπτωση ενός Put, αρκεί να διαφοροποιηθούμε μόνο στο έκτο βήμα και να θέσουμε

$sum\ = sum + \sum_{i=1}^{n} Max[\,K - Min[\mathbf{S}_T], 0]$ επαναλαμβάνοντας n φορές.

Γράφημα τιμών του Put με διαφορετικό επιτόκιο αναφοράς. Από-10% έως και 20%.



Παρατηρούμε στην πλειοψηφία των τιμών του δικαιώματος πώλησης Put ότι υψηλότερο επιτόκιο αναφοράς συνεπάγεται χαμηλότερη αναμενόμενη τιμή του δικαιώματος.

Το αντίθετο παρατηρούμε παραπάνω στο δικαίωμα αγοράς Call.

Κεφάλαιο 5ο:

Αποτίμηση Εξωτικών (path dependent) δικαιωμάτων επί πολλαπλών περιουσιακών στοιχείων, μέσω προσομοίωσης.

5.1 Αποτίμηση αξίας Barrier Basket option.

Όπως στα μονοδιάστατα Barrier options και εδώ στα πολυδιάστατα Barrier options ορίζεται ένα φράγμα (barrier) u και τα δικαιώματα αυτά ισχύουν ή δεν ισχύουν (alive or killed), αναλόγως της τιμής του υποκείμενου τίτλου και των όρων που έχουν τεθεί σχετικά με το φράγμα u (barrier).

Η τιμή του υποκείμενου τίτλου, αποτελείται από το άθροισμα της αξίας ενός συνόλου (καλαθιού) n υποκείμενων τίτλων $\mathbf{S}_t = \left(S_{1,t}, \dots, S_{d,t}\right), t \in [0, T]$ και ο κάθε τίτλος συμμετέχει στο καλάθι αυτό με κάποια στάθμιση-ποσοστό $w_{i,}$ για $i = 1, \dots, n$.

Παράδειγμα: Δικαιώματα Call που ισχύουν και εξασκούνται εάν η τιμή $\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,t}$ περάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα $u > K$ έως το χρόνο εξάσκησης T. Στα Put αντίθετα, εάν δεν περάσει ένα προκαθορισμένο φράγμα $u > K$ έως το χρόνο εξάσκησης T.

Δίκαιη αξία:

$$Call: e^{-rT} E_Q \left[\left(\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T} - K \right)_+ \cdot I \left(\sum_{i=1}^{d} w_i \text{Max}\{S_{i,t}, t \in [0, T]\} > u \right) \right]$$

$$Put: e^{-rT} E_Q \left[\left(K - \sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T} \right)_+ \cdot I \left(\sum_{i=1}^{d} w_i \text{Min}\{S_{i,t}, t \in [0, T]\} < u \right) \right]$$

Όπου $tI(A)$ είναι η δείκτρια του ενδεχομένου A, η οποία και παίρνει τιμές 0 ή 1.

Αλγόριθμος για Call:

1. Ορίζουμε αριθμό διαίρεσης του χρόνου και εικονικών συνεδριάσεων-επανεκκίνησης $k,\ h = t/k$ και τιμή-αξία εκκίνησης στο $t_{0,}$ του κάθε $\mathbf{S}_0^{(i)} = (S_{1,0}^{(i)}, S_{2,0}^{(i)}, \dots, S_{d,0}^{(i)})$.

2. Παράγουμε $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d), Z_i \sim N(0,1)$.

3. Θέτουμε $\mathbf{S}_t^{(i)} = \mathbf{S}_{t-1}^{(i)} \quad \cdot e^{h\boldsymbol{\mu}+\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}}.\mathbf{Z} \quad h^{0.5}}$, και το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται για $i = 1,2, \dots, k$.

4. Θέτουμε λογική συνάρτηση If, όπου αν ισχύει $\sum_{j=1}^{n} w_j \mathrm{Max}\{S_{j,t}^{(i)}, t \in [0,T]\} < u$ τότε $I^{(i)} = 0$ αλλιώς $I^{(i)} = 1$.

5. Θέτουμε $sum \ = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Max}[\sum_{j=1}^{d} w_j S_{j,T}^{(i)} - K, 0] \cdot I^{(i)}$Θέτουμε $Call = sum/n \cdot e^{-rT}$

Κώδικας στο Mathematica:

```
S0 = {110, 90}; t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h = t/k;
s = {0.3, 0.4}; d = 2;K = 100; w1 = 0.6; w2 = 0.4;
u = K + 4*0.5; correlation = {{1, 0.5}, {0.5, 1}};
mi = {r - s[[1]]^2/2, r - s[[2]]^2/2}; sum = 0;
sstr = Table[s[[i]]*s[[j]], {i, 1, Length[s]}, {j, 1, Length[s]}];
S = sstr*correlation; Sriza = MatrixPower[S, 0.5];
Do[maxS1 = S0[[1]]; maxS2 = S0[[2]]; Si = S0;
  Do[Z = Table[RandomReal[NormalDistribution[0, 1]], {d}];
   Si = Si*Exp[h*mi + Sriza.Z*h^0.5];
   S1 = Si[[1]]; S2 = Si[[2]];
   If[maxS1 < S1, maxS1 = S1]; If[maxS2 < S2, maxS2 = S2]
  , {j, 1, k}];
  If[(maxS1*w1 + maxS2*w2) < u, I01 = 0, I01 = 1];
  sum = sum + Max[(S1*w1 + S2*w2) - K, 0]*I01
, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

```
7.04095
```

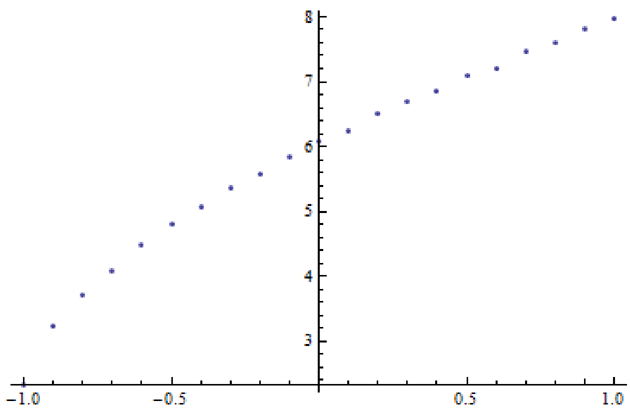
Στην περίπτωση ενός Barrier Put option, αρκεί να διαφοροποιηθούμε στο έκτο βήμα και να θέσουμε λογική συνάρτηση If, όπου αν ισχύει $\sum_{j=1}^{n} w_j \mathrm{Min}\{S_{j,t}^{(i)}, t \in [0,T]\} > u$ τότε $I^{(i)} = 0$ αλλιώς $I^{(i)} = 1$.

Και στο έβδομο βήμα να αντικαταστήσουμε με

$$sum \ = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Min}[\sum_{j=1}^{d} w_j S_{j,T}^{(i)} - K, 0] \cdot I^{(i)}$$

Γράφημα τιμών του Barrier Call option με διαφορετική συσχέτιση=rho δύο τίτλων μεταξύ τους. Από πλήρης αρνητική συσχέτιση -1 έως πλήρη θετική συσχέτιση 1.

```
S0 = {110, 90}; t = 0.25; r = 0.01; n = 10^5; k = 10; h = t/k;
sigma1 = 0.3; sigma2 = 0.4;K = 100; w1 = 0.6; w2 = 0.4; u = K + 4*0.5;
m1 = r - sigma1^2/2; m2 = r - sigma2^2/2;A = Range[-1, 1, 0.1]; i = 1;
Do[sum = 0;
  Do[maxS1 = S0[[1]]; S1 = S0[[1]]; maxS2 = S0[[2]]; S2 = S0[[2]];
    Do[Z1 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
       Z2 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
       X2 = Z1*rho + Z2*Sqrt[1 - rho^2];
       S1 = S1*Exp[h*m1 + sigma1*Z1*h^0.5];
       S2 = S2*Exp[h*m2 + sigma2*X2*h^0.5];
       If[maxS1 < S1, maxS1 = S1];
       If[maxS2 < S2, maxS2 = S2]
    , {j, 1, k}];
    If[(maxS1*w1 + maxS2*w2) < u, I01 = 0, I01 = 1];
    sum = sum + Max[(S1*w1 + S2*w2) - K, 0]*I01
  , {i, 1, n}];
  Print[{rho,Exp[-r*t]*N[sum/n]}];
  A[[i]] = {rho, Exp[-r*t]*N[sum/n]}; i++
, {rho, -1, 1, 0.1}];
ListPlot[A]
```



Παρατηρούμε ότι θετικότερη συσχέτιση συνεπάγεται μεγαλύτερη τιμή του δικαιώματος.

5.2 Αποτίμηση αξίας Exotic Extreme option.

Αυτό το είδος δικαιωμάτων συγκρίνει διαφορετικούς τίτλους από τους οποίους επιλέγεται ένας. Η $\mathbf{S}_t$ αποτελείται από ένα καλάθι d υποκείμενων τίτλων, για $i = 1, \dots, d$. Από αυτούς επιλέγεται ο μέγιστος στο Call και ο ελάχιστος στο Put κατά τη διάρκεια του δικαιώματος έως την λήξη του, T. $\mathbf{S}_t = (S_{i,t}, \dots, S_{d,t}), \in [0, T]$

Η δίκαιη τιμή ισούται με:

$$Call:\ \ e^{-rT}E_Q\big(\mathrm{Max}\big[\mathrm{Max}[\mathbf{S}_t], t \in [0,T]\big] - K\big)_+$$

$$Put:\ \ e^{-rT}E_Q\big(K - \mathrm{Min}\big[\mathrm{Min}[\mathbf{S}_t], t \in [0,T]\big]\big)_+$$

Αλγόριθμος για Call:

1. Ορίζουμε αριθμό διαίρεσης του χρόνου και εικονικών συνεδριάσεων-επανεκκίνησης k, $h = t/k$ και τιμή-αξία εκκίνησης στο t_0, του κάθε τίτλου $\mathbf{S}_0^{(i)} = (S_{1,0}^{(i)}, S_{2,0}^{(i)}, \dots, S_{d,0}^{(i)})$.
2. Παράγουμε $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d), Z_i \sim N(0,1)$.
3. Θέτουμε $\mathbf{S}_t^{(i)} = \mathbf{S}_{t-1}^{(i)} \cdot e^{h\boldsymbol{\mu}+\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}}.\mathbf{Z}\,h^{0.5}}$, το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται k φορές.
4. Θέτουμε $sum = \sum_{i=1}^{k}\left(\mathrm{Max}\left[\mathrm{Max}\left[\mathbf{S}_t^{(i)}\right], t \in [0,T]\right] - K\right)_+$ Θέτουμε $Call = sum/n \cdot e^{-rT}$

Κώδικας στο Mathematica:

```
n = 10000; r = 0.01; s = {0.3, 0.4, 0.5, 0.2, 0.7}; d = 5;
S0 = {100, 90, 120, 80, 110}; t = 0.25; K = 100; k = 10; h = t/k;
sum = 0; mi = {r - s[[1]]^2/2, r - s[[2]]^2/2, r - s[[3]]^2/2,
  r - s[[4]]^2/2, r - s[[5]]^2/2};
correlation = {{1, 0.5, 0.3, 0.4, 0.8}, {0.5, 1, 0.6, 0.5, 0.3}, {0.3,
     0.6, 1, 0.2, 0.2}, {0.4, 0.5, 0.2, 1, 0.3}, {0.8, 0.3, 0.2, 0.3,
    1}};
sstr = Table[s[[i]]*s[[j]], {i, 1, Length[s]}, {j, 1, Length[s]}]; S =
  sstr*correlation; Sriza = MatrixPower[S, 0.5];
Do[Si = S0; maxs1 = S0[[1]]; maxs2 = S0[[2]]; maxs3 = S0[[3]];
  maxs4 = S0[[4]]; maxs5 = S0[[5]];
  Do[Z = Table[RandomReal[NormalDistribution[0, 1]], {d}];
   Si = Si*Exp[h*mi + Sriza.Z*h^0.5];
   S1 = Si[[1]];S2 = Si[[2]];S3 = Si[[3]];S4 = Si[[4]];S5 = Si[[5]];
   If[maxs1 < S1, maxs1 = S1]; If[maxs2 < S2, maxs2 = S2];
   If[maxs3 < S3, maxs3 = S3];
   If[maxs4 < S4, maxs4 = S4];
   If[maxs5 < S5, maxs5 = S5];
   maxs = Max[maxs1, maxs2, maxs3, maxs4, maxs5]
  , {j, 1, k}];
  sum = sum + Max[maxs - K, 0]
, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*sum/n
```

```
51.4642
```

Στην περίπτωση ενός Put, αρκεί να διαφοροποιηθούμε στο έκτο βήμα

5.3 Αποτίμηση αξίας Exotic Extreme High Risk option.

Αυτό το ιδιαίτερο είδος δικαιωμάτων δεν διακρίνεται σε Call και Put αλλά σε

•"*independent path*" όπου και συγκρίνει διαφορετικούς τίτλους από τους οποίους επιλέγεται ο μέγιστος και ο ελάχιστος, κατά τη διάρκεια του δικαιώματος έως την λήξη του T και η διαφορά αυτών δίνει την αξία του δικαιώματος, και σε

• "*No independent path*" όπου και εκεί επιλέγεται ο μέγιστος και ο ελάχιστος, αλλά μόνο κατά τη λήξη του T και η διαφορά αυτών δίνει πάλι την αξία του δικαιώματος.

Εμπεριέχει υψηλό ρίσκο και υψηλή αναμενόμενη απόδοση υψηλότερα από όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις Extreme options που εξετάσαμε, για το λόγο αυτό είναι ιδιαίτερα ελκυστικό για κερδοσκόπους.

Η δίκαιη τιμή ισούται με:

$$Independent\ path:$$
$$e^{-rT}E_Q\big(\mathrm{Max}\big[S_{i,t}, t \in [0,T], i \in \{1,\dots,d\}\big] - \mathrm{Min}\big[S_{i,t}, t \in [0,T], i \in \{1,\dots,d\}\big]\big)_+$$

$$No\ Independent\ path:$$
$$e^{-rT}E_Q(\mathrm{Max}\big[S_{i,T}, i \in \{1,\dots,d\}\big] - \mathrm{Min}\big[S_{i,T}, i \in \{1,\dots,d\}\big])_+$$

Αλγόριθμος για independent path

1. Ορίζουμε αριθμό διαίρεσης του χρόνου και εικονικών συνεδριάσεων-επανεκκίνησης $k,\ h = t/k$ και τιμή-αξία εκκίνησης στο $t_{0,}$ του κάθε τίτλου $\mathbf{S}_0{}^{(i)}$.
2. Παράγουμε $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d), Z_i \sim N(0,1)$Θέτουμε $\mathbf{S}_t^{(i)} = \mathbf{S}_{t-1}^{(i)} \cdot e^{h\boldsymbol{\mu}+\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}}.\mathbf{Z}\,h^{0.5}}$ και το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται για $i = 1,2,\dots,k$.
3. Θέτουμε $sum\ = \sum_{i=1}^{k}\mathrm{Max}[\,\mathrm{Max}[\mathbf{S}_t] - \mathrm{Min}[\mathbf{S}_t], 0]$ επαναλαμβάνοντας k φορές.
4. Θέτουμε $Call = sum/k \cdot e^{-rT}$

Κώδικας στο Mathematica:

```
n = 10000; r = 0.01; s = {0.3, 0.4, 0.5, 0.2, 0.7}; d = 5;
S0 = {100, 90, 120, 80, 110}; t = 0.25; k = 10; h = t/k;
sum = 0; mi = {r - s[[1]]^2/2, r - s[[2]]^2/2, r - s[[3]]^2/2,
  r - s[[4]]^2/2, r - s[[5]]^2/2};
correlation = {{1, 0.5, 0.3, 0.4, 0.8}, {0.5, 1, 0.6, 0.5, 0.3}
                , {0.3, 0.6, 1, 0.2, 0.2}, {0.4, 0.5, 0.2, 1, 0.3}
                , {0.8, 0.3, 0.2, 0.3, 1}};
sstr = Table[s[[i]]*s[[j]], {i, 1, Length[s]},{j, 1, Length[s]}];
S =  sstr*correlation; Sriza = MatrixPower[S, 0.5];
Do[Si = S0; maxs1 = S0[[1]]; maxs2 = S0[[2]]; maxs3 = S0[[3]];
  maxs4 = S0[[4]]; maxs5 = S0[[5]];
  mins1 = S0[[1]]; mins2 = S0[[2]]; mins3 = S0[[3]]; mins4 = S0[[4]];
  mins5 = S0[[5]];
  Do[Z = Table[RandomReal[NormalDistribution[0, 1]], {d}];
     Si = Si*Exp[h*mi + Sriza.Z*h^0.5];
     S1 = Si[[1]];S2 = Si[[2]];S3 = Si[[3]];S4 = Si[[4]];S5 = Si[[5]];
     If[maxs1 < S1, maxs1 = S1]; If[maxs2 < S2, maxs2 = S2];
     If[maxs3 < S3, maxs3 = S3]; If[maxs4 < S4, maxs4 = S4];
     If[maxs5 < S5, maxs5 = S5];
     maxs = Max[maxs1, maxs2, maxs3, maxs4, maxs5];
    If[mins1 > S1, mins1 = S1]; If[mins2 > S2, mins2 = S2];
    If[mins3 > S3, mins3 = S3]; If[mins4 > S4, mins4 = S4];
    If[mins5 > S5, mins5 = S5];
     mins = Min[mins1, mins2, mins3, mins4, mins5]
, {j, 1, k}];
  sum = sum + Max[maxs - mins, 0]
, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*sum/n
```

```
79.7574
```

Στο “*No independent path*” δικαίωμα, η διαφοροποίηση είναι ότι η επιλογή μέγιστου και ελάχιστου τίτλου γίνεται μόνο στη λήξη T οπότε και αναπροσαρμόζουμε κατάλληλα τον αλγόριθμο όπως φαίνεται στον παρακάτω κώδικα.

```
n = 10000; r = 0.01; s = {0.3, 0.4, 0.5, 0.2, 0.7}; d = 5;
S0 = {100, 90, 120, 80, 110}; t = 0.25;
sum = 0; mi = {r - s[[1]]^2/2, r - s[[2]]^2/2, r - s[[3]]^2/2,
  r - s[[4]]^2/2, r - s[[5]]^2/2};
correlation = {{1, 0.5, 0.3, 0.4, 0.8}, {0.5, 1, 0.6, 0.5, 0.3}, {0.3,
     0.6, 1, 0.2, 0.2}, {0.4, 0.5, 0.2, 1, 0.3}, {0.8, 0.3, 0.2, 0.3,
    1}};
sstr = Table[s[[i]]*s[[j]], {i, 1, Length[s]}, {j, 1, Length[s]}];
```

```
S =  sstr*correlation; Sriza = MatrixPower[S, 0.5];
Do[Z = Table[RandomReal[NormalDistribution[0, 1]], {d}];
  Si = S0*Exp[t*mi + Sriza.Z*t^0.5];
  S1 = Si[[1]]; S2 = Si[[2]]; S3 = Si[[3]]; S4 = Si[[4]]; S5 = Si[[5]];
  maxs = Max[S1, S2, S3, S4, S5]; mins = Min[S1, S2, S3, S4, S5];
  sum = sum + Max[maxs - mins, 0]
, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*sum/n
```

58.4318

5.4 Αποτίμηση αξίας Asian Basket option.

Η τιμή εξάσκησης K ισούται με τον μέσο όρο του αθροίσματος της αξίας ενός συνόλου (καλαθιού) d υποκείμενων τίτλων όπου ο κάθε τίτλος συμμετέχει στο καλάθι αυτό με κάποια στάθμιση-ποσοστό $w_{i,}$ για $i = 1, \dots, d$ από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος έως το χρόνο λήξης-εξάσκησης T.

Οι αντίστοιχες δίκαιες τιμές είναι:

$$Call: e^{-rT} E_Q\left(\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,t_j}}{k})\right)_+$$

$$Put: e^{-rT} E_Q\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,t_j}}{k}) - \sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T}\right)_+$$

Αλγόριθμος για Call:

1. Ορίζουμε αριθμό διαίρεσης του χρόνου και εικονικών συνεδριάσεων-επανεκκίνησης $k,\ h = t/k$ και τιμή-αξία εκκίνησης στο $t_{0,}$ του κάθε τίτλου $\mathbf{S}_0{}^{(i)}$.
2. Θέτουμε ως αρχή $sum = 0$, και ορίζουμε τον κάθε $\mu_i = m_\iota = r - \frac{\sigma_i^2}{2}$.
3. Παράγουμε $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d), Z_i \sim N(0,1)$.
4. Θέτουμε $\mathbf{S}_t^{(i)} = \mathbf{S}_{t-1}^{(i)} \cdot e^{h\boldsymbol{\mu} + \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}}.\mathbf{Z}\, h^{0.5}}$, και το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται για $i = 1,2, \dots, k$.
5. Θέτουμε άθροισμα τιμών $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{d} w_l S_{l,t_j}^{(i)}, i = 1,2, \dots, k$ Θέτουμε $sum = \sum_{m=1}^{k} \mathrm{Max}\left(\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,T}^{(m)} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\sum_{i=1}^{d} w_i S_{i,t_j}^{(m)}}{k}, 0\right)]$
6. Θέτουμε $Call = sum/k \cdot e^{-rT}$

Κώδικας στο Mathematica:

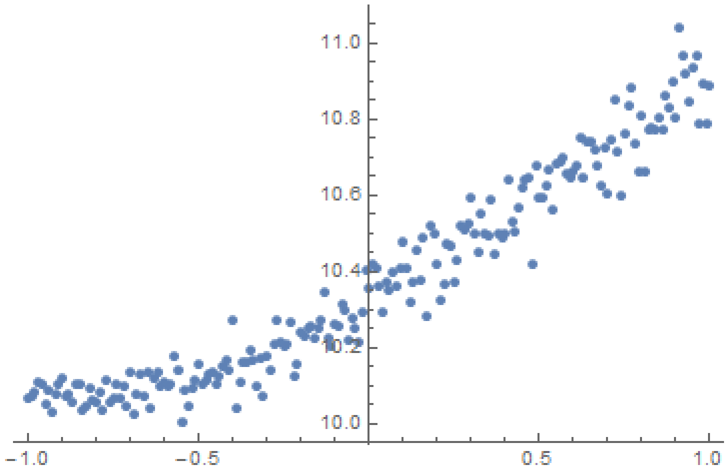
```
t = 0.25; r = 0.01; n = 10000; k = 10; h =  t/k; sum = 0;
s = {0.3, 0.4}; d = 2; S0 = {110,90}; w1 = 0.6; w2 = 0.4;
correlation = {{1, 0.5}, {0.5, 1}};
sstr = Table[s[[i]]*s[[j]], {i, 1, Length[s]}, {j, 1, Length[s]}];
S = sstr*correlation ; Sriza = MatrixPower[S, 0.5];
mi = {r - s[[1]]^2/2, r - s[[2]]^2/2};
Do[sum01 = S0[[1]]; sum02 = S0[[2]]; Si = S0;
  Do[Z = Table[RandomReal[NormalDistribution[0, 1]], {d}];
   Si = Si*Exp[h*mi + Sriza.Z*h^0.5];
   S1 = Si[[1]];
   S2 = Si[[2]];
   sum01 = sum01 + S1; sum02 = sum02 + S2
  ,{j, 1, k}];
sum = sum + Max[(S1*w1 + S2*w2) - (sum01*w1 + sum02*w2)/k, 0]
, {i, 1, n}];
Exp[-r*t]*N[sum/n]
```

0.556521

Στην περίπτωση ενός Put, αρκεί να διαφοροποιηθούμε μόνο στο έκτο βήμα .

Γράφημα τιμών του Put με διαφορετική συσχέτιση=rho δύο τίτλων μεταξύ τους. Από πλήρης αρνητική συσχέτιση -1 έως πλήρη θετική συσχέτιση 1.

```
S0={110,90};t=0.25;r=0.1;n=10^5;k=10;
h=t/k;sigma1=0.3;sigma2=0.4;
w1=0.6;w2=0.4;m1=r-sigma1^2/2;m2=r-sigma2^2/2;
A=Range[-1,1,0.1];i=1;
Do[sum=0;
  Do[sum01=S0[[1]];sum02=S0[[2]];S1=S0[[1]];S2=S0[[2]];
   Do[Z1=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    Z2=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    X2=Z1*rho+Z2*Sqrt[1-rho^2];
    S1=S1*Exp[h*m1+sigma1*Z1*h^0.5];
    S2=S2*Exp[h*m2+sigma2*X2*h^0.5];
    sum01=sum01+S1;sum02=sum02+S2,{j,1,k}];
   sum=sum+Max[-(S1*w1+S2*w2)+(sum01*w1+sum02*w2)/k,0]
  ,{I,1,n}];
  Print[{rho,Exp[-r*t]*N[sum/n]}];
  A[[i]]={rho,Exp[-r*t]*N[sum/n]};i++
,{rho,-1,1,0.1}];
ListPlot[A]
```



5.5 Αποτίμηση αξίας Compound Exchange option.

Πρόκειται για δικαιώματα διαδοχικών ανταλλαγών περιουσιακών στοιχείων-τίτλων και θέσεων σε διαφορετικούς χρόνους με προκαθορισμένη συναλλαγματική ισοτιμία y για συναλλαγές με την αλλοδαπή αγορά.

Παράδειγμα: Exchange Call στο T_1 και Exchange Put στο T_2.

Με τη δίκαιη τιμή να ισούται με:

$$e^{-rT_2}E_Q\left[\left(yS_{T_2}^{(2)}-S_{T_2}^{(1)}\right)_+-\left(S_{T_1}^{(1)}-yS_{T_1}^{(2)}\right)_+\right]_+$$

Αλγόριθμος:

1. Παράγουμε $Z_1, Z_2 \sim N(0,1)$ 4 φορές.
2. Θέτουμε $X_2 = Z_1 \cdot rho + Z_2 \cdot \sqrt{1-rho^2}$ και $X_4 = Z_3 \cdot rho + Z_4 \cdot \sqrt{1-rho^2}$
3. Θέτουμε $S_{T_1}^{(1)} = S_0{}^{(1)} \cdot e^{T_1\mu_1 + \sigma_1 \cdot Z_1 T_1{}^{0.5}}$, $S_{T_1}^{(2)} = S_0{}^{(2)} \cdot e^{T_1\mu_2 + \sigma_2 \cdot X_2 T_1{}^{0.5}}$ και $S_{T_2}^{(1)} = S_{T_1}^{(1)} \cdot e^{(T_2-T_1)\mu_1 + \sigma_1 \cdot Z_3 (T_2-T_1)^{0.5}}$, $S_{T_2}^{(2)} = S_{T_1}^{(2)} \cdot e^{(T_2-T_1)\mu_2 + \sigma_2 \cdot X_4 (T_2-T_1)^{0.5}}$
4. Θέτουμε $sum\ = sum + \sum_{i=1}^{n} Max[\sum_{i=1}^{n} Max[yS_{T_2}^{(2)} - S_{T_2}^{(1)}, 0] - \sum_{i=1}^{n} Max[S_{T_1}^{(1)} - yS_{T_1}^{(2)}, 0]\ , 0]$, επαναλαμβάνοντας n φορές.
5. Θέτουμε $sum/n \cdot e^{-rT_2}$

```
n = 10000; r = 0.01; sigma1 = 0.3; sigma2 = 0.4; S0 =
 List[100, 100]; t1 = 0.25; t2 = 0.5; rho = 0.5; y = 1;
sum = 0; m1 = r - sigma1^2/2; m2 = r - sigma2^2/2;
Do[Z1 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
  Z2 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
  Z3 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
  Z4 = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
  X2 = Z1*rho + Z2*Sqrt[1 - rho^2];
  X4 = Z3*rho + Z4*Sqrt[1 - rho^2];
  S11 = S0[[1]]*Exp[t1*m1 + sigma1*t1^0.5*Z1];
  S1 = {S11, S11*Exp[(t2 - t1)*m1 + sigma1*(t2 - t1)^0.5*Z3]};
  S21 = S0[[2]]*Exp[t1*m2 + sigma2*t1^0.5*X2];
  S2 = {S21, S21*Exp[(t2 - t1)*m2 + sigma2*(t2 - t1)^0.5*X4]};
  sum = sum +
    Max[-Max[S1[[1]] - y*S2[[1]], 0] + Max[S1[[2]] + y*S2[[2]], 0],
     0], {i, 1, n}];
Exp[-r*t2]*sum/n
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ:

Π.1 Εισαγωγή στην προσομοίωση - Παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών.

Στη μονοδιάστατη απλή περίπτωση αποτίμησης δικαιώματος Ε.Τ. επί ενός περιουσιακού στοιχείου, μπορούμε υπό προϋποθέσεις να χρησιμοποιήσουμε αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους. Στην περίπτωση όμως αποτίμησης εξωτικών δικαιωμάτων προαίρεσης αλλά κυρίως και αποτίμησης δικαιωμάτων επί πολλαπλών περιουσιακών στοιχείων (ν-διάστατες περιπτώσεις) οι αναλυτικές μέθοδοι συνήθως δεν επαρκούν.

Μέσω μεθόδων προσομοίωσης (simulation) όμως μπορεί να γίνει αποτίμηση αυτών.

Οι μέθοδοι προσομοίωσης μας βοηθούν στο να εξάγουμε εμπειρικά συμπεράσματα μέσω παρακολούθησης πολλών πραγματοποιήσεων εξέλιξης ενός στοχαστικού φαινομένου στο χρόνο. Από το νόμο των μεγάλων αριθμών γνωρίζουμε ότι μια πιθανότητα ενός ενδεχομένου που εξετάζουμε ισούται ασυμπωτικά με την οριακή σχετική συχνότητα εμφάνισης αυτού του ενδεχομένου.

Συνεπώς όσο μεγαλύτερο το πλήθος των πραγματοποιήσεων ενός φαινομένου που εξετάζουμε τόσο καλύτερη θα είναι και η εμπειρική μας μέθοδος. Αυτό επιτυγχάνεται ικανοποιητικά μέσω Η/Υ και υπολογιστικών πακέτων όπως το Mathematica, το οποίο και χρησιμοποιούμε σε αυτή την διπλωματική εργασία.

Η προσομοίωση στηρίζεται στην παραγωγή τυχαίων αριθμών, το στοχαστικό μοντέλο που καλούμαστε να μελετήσουμε θα επηρεάζεται από τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.), επομένως το πειραματικό μοντέλο μέσω Η/Υ πρέπει και αυτό να στηρίζεται στην παραγωγή «τυχαίων» αριθμών. Συνεπώς και θα πρέπει να παράγουμε «τυχαίους» αριθμούς οι οποίοι και θα εκφράζουν την εξέλιξη ενός φαινομένου. Τυχαίους αριθμούς εννοούμε πραγματοποιήσεις $X_1, X_2, X_3, \dots X_n,$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών τ.μ. που η κάθε μια από αυτές κατανέμεται ομοιόμορφα στο (0,1), δηλ.

$$F_X(x) = P(X_i \leq x) = x, \qquad x \in (0,1)$$

Μέσω Η/Υ δεν παράγουμε πραγματικά τυχαίους αριθμούς αλλά ψευδοτυχαίους καθότι παράγονται μέσα από προσδιοριστικές επαναληπτικές διαδικασίες, παρόλα αυτά καταφέρνουν να «ξεγελάσουν» ελέγχους τυχαιότητας.

Μέθοδος παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών, μέσω πολλαπλασιαστικού αλγορίθμου (multiplicative congruention method):

Αρχική τιμή δίνεται από εμάς ή από τα εκατοστά του δευτερολέπτου του Η/Υ. Η τιμή αυτή $x_0 \in N$ και καλείται seed. Στη συνέχεια οι επόμενες τυχαίες τιμές θα είναι:

$$x_1 = ax_0 \text{mod}\, m, x_2 = ax_1 \text{mod}\, m, \dots, x_n = ax_{n-1} \text{mod}\, m$$

και

$$x \; mod \; m = m \left(\frac{x}{m} - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \right) \text{ υπόλοιπο διαίρεσης.}$$

Άρα κάθε $x_i \in \{0,1,2,\dots,m-1\}$ και ο αριθμός

$$u_i = \frac{x_i}{m} \in \left\{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}\right\} \subseteq [0,1]$$

Τα a και m, πρέπει να επιλεγούν κατάλληλα.

Υπάρχουν και άλλες παρόμοιες μέθοδοι παραγωγής «τυχαίων» αριθμών όπως η μεικτή μέθοδος αλλά και αρκετά πιο σύνθετες μέθοδοι, π.χ. Mersenne Twister, κ.α.

Παραγωγή ενός τυχαίου αριθμού στο Mathematica:

```
SeedRandomReal[]; Print[RandomReal[]]
```

```
0.792138
```

Με [ ] γίνεται τυχαία επιλογή seed από το ρολόι του Η/Υ ή ορίζουμε εμείς το x_0 π.χ. [9] κ.ο.κ

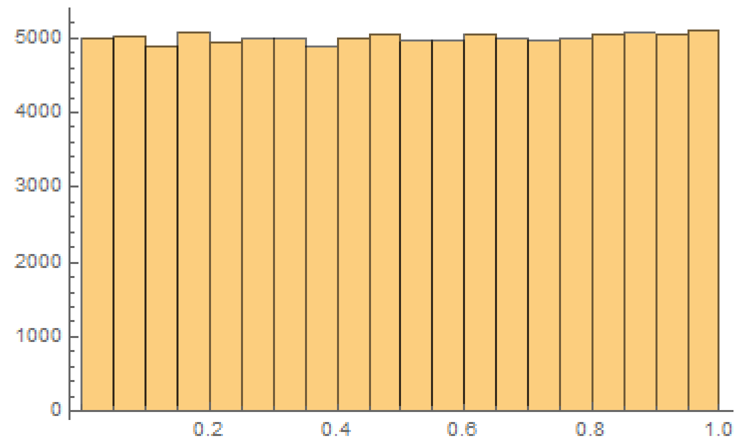
Παραγωγή 6 τυχαίων αριθμών:

```
SeedRandomReal[]; Do[Print[RandomReal[]], {6}]
```

```
0.105032
0.946874
0.989856
0.17513
0.216844
0.229261
```

Κατασκευή ιστογράμματος:

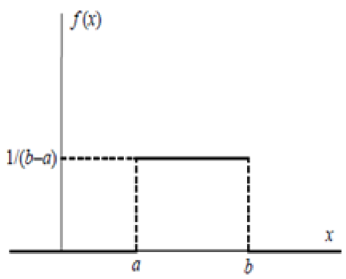
```
HistRandomNum = Table[RandomReal[], {100000}];
Histogram[HistRandomNum]
```

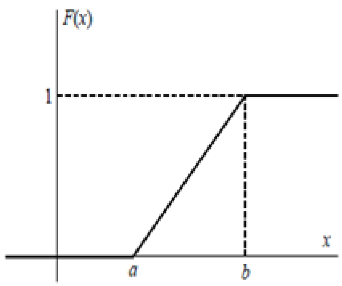


Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί παράγονται από την ομοιόμορφη κατανομή διότι καταφέρνουν και «ξεγελάνε» τους ελέγχους τυχαιότητας.

Υπενθυμίζεται ότι η ομοιόμορφη συνεχής κατανομή U(a,b), μέσα σε ένα διάστημα [a,b] μας δίνει ίση πιθανότητα σε κάθε απειροστό της διάστημα (σημείο).

$$\sigma.\pi.\pi.\ \ f(x) = \frac{1}{b-a}\ ,\ \ x \in [a,b]$$





Π.2 Τεχνική υπολογισμού ολοκληρώματος Monte Carlo.

Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι σχετικά απλή και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε συνάρτηση.

Ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων γενικά είναι δύσκολος ακόμα και με τη χρήση Η/Υ και σε πολλές περιπτώσεις σχεδόν αδύνατος. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε προσομοίωση (simulation), μέσω της τεχνικής Monte Carlo.

Ένα ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως:

$$E\big(g(u)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \mu$$

Θεωρώντας ότι U είναι μια τ.μ. που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο (0,1), έχει δηλαδή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f(x) = 1$ για $x \in (0,1)$. Θα υπολογίσουμε την παραπάνω αναμενόμενη τιμή μέσω προσομοίωσης.

Αν $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή U(0,1). Τότε και οι νέες τ.μ. $g(U_1),\ g(U_2),\ g(U_3), \dots\ ,\ g(U_n)$, θα είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.

Από τον νόμο των μεγάλων αριθμών θα ισχύει ότι:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i) \to E\big(g(U)\big)\ \ \gamma\iota\alpha\ \ n \to \infty$$

Συνεπώς το παραπάνω αποτελεί εκτίμηση του μ. Όσο μεγαλύτερο είναι το n (επαναλήψεις), τόσο καλύτερη εκτίμηση και μικρότερη διασπορά θα έχουμε.

Αλγόριθμος:

1. Παράγουμε n τυχαίους αριθμούς $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n \sim U(0,1)$.
2. Υπολογίζουμε $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$

Όπως προείπαμε όταν το $n \to \infty$, η προσέγγιση μας θα είναι ικανοποιητική, συνεπώς και επιδιώκουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο n (επαναλήψεις). Ο αντίστοιχος κώδικας του Mathematica (για το $\mu = \int_0^1 \ln x\, dx$) θα είναι:

```
n = 100000; sum = 0; g[x_] = Log[x];
Do[u = RandomReal[]; sum = sum + g[u], {n}];
sum/n
```

```
-1.00091
```

Η τεχνική Monte Carlo, δύναται να υπολογίσει και πολλαπλά ολοκληρώματα και πολυδιάστατων περιπτώσεων. Αν:

$$\mu = \int_{[0,1]^k} g(x)dx = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \dots \int_0^1 g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_k$$

Μπορούμε όμοια με την μονοδιάστατη περίπτωση να υποθέσουμε, ότι:

$$\mu = E(g(U_1, U_2, \dots, U_k))$$

Όπου $U_1, U_2, \ldots, U_k$ ανεξάρτητες τ.μ. από ομοιόμορφη κατανομή U (0,1). Και θεωρούμε:

$$\mathbf{U}_i = (U_{i1}, \ldots, U_{ik}), \qquad i = 1, \ldots, n$$

Ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα, όπου το κάθε ένα αποτελείται από k ανεξάρτητες τ.μ. από ομοιόμορφη κατανομή (0,1).

Οι τ.μ. $g(\mathbf{U}_1), \ldots, g(\mathbf{U}_k)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών ισχύει:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{U}_i) \to E\big(g(\mathbf{U})\big) \;\; \mu\varepsilon \;\; n \to \infty$$

Με πιθανότητα 1, g μετρήσιμη και $E(|g(\mathbf{U})|) < \infty$.

Π.χ. Αν

$$\mu = \int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^3} dxdy$$

μέσω Mathematica αριθμητικά επιλύοντας το, βρίσκουμε:

```
NIntegrate[Exp[(x + y)^3], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
```

29.8718

Ο κώδικας προσομοίωσης, δεδομένου ότι:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{U}_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{(U_{i1}+U_{i2})^3}$$

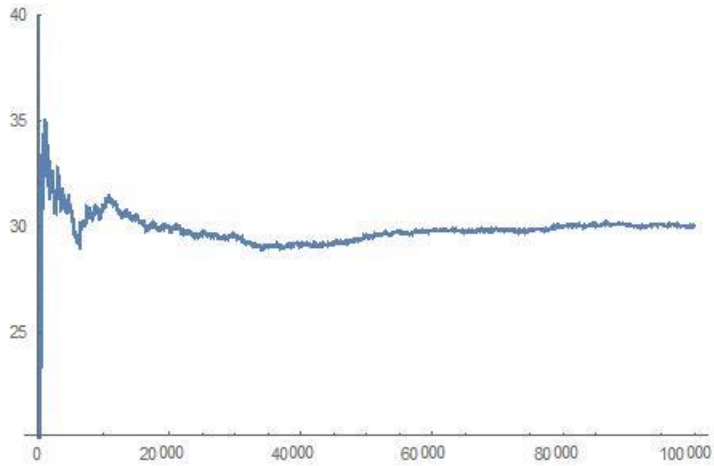
Είναι:

```
n = 100000; sum = 0; g[x_, y_] = Exp[(x + y)^3];
Do[u1 = RandomReal[]; u2 = RandomReal[];
 sum = sum + g[u1, u2], {n}]; sum/n
```

29.8036

Φυσικά όσο μεγαλύτερο είναι το n, τόσο καλύτερη θα είναι και η εκτίμηση μας.

```
n = 100000; g[x_,y_]:= Exp[(x + y)^3]; hx = Table[0, {n}]; sum = 0;
Do[u1 = RandomReal[]; u2 = RandomReal[]; sum = sum + g[u1, u2];
hx[[i]] = sum/i, {i, 1, n}]; ListPlot[hx, Joined -> True,
PlotRange -> {20, 40}]
```



Ο αλγόριθμος Monte Carlo με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορεί να επεκταθεί και σε ολοκληρώματα που ορίζονται σε σύνολα διαφορετικά των $(0,1)^k$.

Π.3 Παραγωγή «τυχαίων» αριθμών από συνεχείς κατανομές.

Θέλουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μια συνεχή κατανομή με σκ και σ.π.π.

$$F_x(x) = \Pr(X \leq x)\,, x \in R \ \kappa\alpha\iota\ f(x) = \frac{d}{dx} F_x(x), \qquad x \in R$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο αντιστροφής, παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός

$$X = F^{-1}(U) \text{ όπου } U \sim U(0,1)$$

δίνει $X \sim F$. Πράγματι,

$$\Pr(X \leq x) = \Pr(U \leq F(x)) = F(x)$$

Με F^{-1}συμβολίζουμε την γενικευμένη αντίστροφη σ.κ. F:

$$F^{-1}(u) = \min\{x: F(x) \in [u, 1]\},$$

Άρα γενικότερα ο αλγόριθμος της μεθόδου αντιστροφής παραγωγής τυχαίων αριθμών μιας κατανομής με σκ F, θα είναι:

1. Παράγουμε ένα αριθμό τυχαίο $U \sim U(0,1)$.
2. Και θέτουμε $X = F^{-1}(U)$.

Ομοιόμορφη κατανομή στο $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

Η ομοιόμορφη κατανομή στο (a, b)έχει

$$\sigma.\pi.\pi.: f(x) = \frac{1}{b-a}\,, \quad \sigma.\kappa.: F(x) = \frac{x-a}{b-a}\,, \qquad x \in (a, b)$$

Στην σκ αντικαθιστώντας το $F(x)$ με U και λύνοντας ως προς x, έχουμε:

$$X = U \cdot (b-a) + a$$

η οποία ακολουθεί την ομοιόμορφη στο (a, b). Η εφαρμογή του αλγορίθμου για την ομοιόμορφη κατανομή, στο Mathematica θα είναι:

```
n = 10; a = 0; b = 100;
Do[U = RandomReal[]; X = a + U*(b - a), {i, 1, n}];
X
```

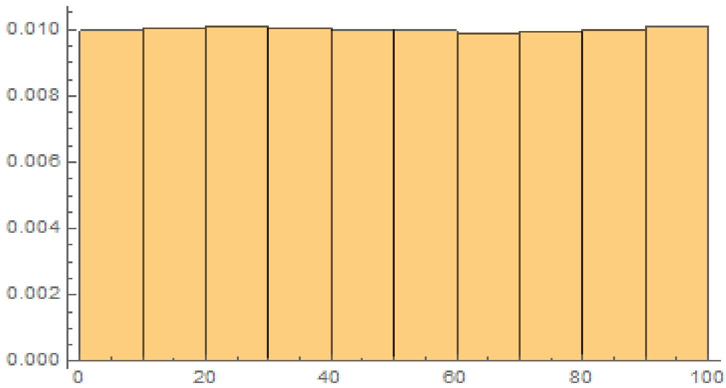
Για την παραγωγή 100 τυχαίων αριθμών:

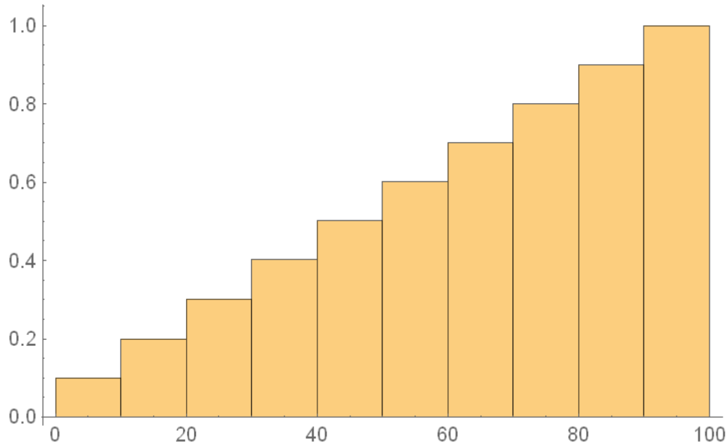
```
n = 100; a = 0; b = 100; Xlist = Table[0, {n}];
Do[U = RandomReal[]; X = a + U*(b - a);
Xlist[[i]] = X, {i, 1, n}];
Sort[Xlist]
```

```
{0.621522, 1.40932, 2.36272, 2.86875, 3.29954, 4.05637, 5.80171, 6.45952, 6.53875, 6.58133, 7.29893,
 7.49914, 9.88397, 10.4483, 12.0537, 12.1117, 12.1984, 12.3114, 13.0483, 14.0147, 14.2363, 14.6186,
 14.6362, 17.9869, 19.6952, 19.8477, 23.5639, 23.9896, 27.0404, 27.628, 28.7043, 29.2155, 29.2375,
 29.3416, 29.6468, 31.7605, 35.208, 35.4561, 35.934, 36.259, 37.1444, 37.6811, 39.1674, 39.2028, 41.2963,
 42.393, 43.0853, 43.4751, 43.6478, 44.6806, 46.5474, 46.8962, 46.9776, 47.1477, 49.6817, 53.9262,
 56.2256, 59.1808, 59.8815, 59.9833, 61.3787, 61.5752, 61.8116, 64.8012, 65.4929, 68.0589, 69.5344,
 69.6256, 69.6347, 70.6458, 74.5878, 75.5527, 75.6237, 75.8784, 75.967, 76.9411, 77.144, 78.5777,
 80.1733, 80.6987, 81.2817, 82.1718, 82.4164, 83.9875, 84.5044, 86.8692, 86.9286, 88.6408, 88.7221,
 90.0075, 90.6485, 91.7076, 91.9699, 92.6632, 92.7013, 95.0979, 95.7536, 95.9144, 97.8237, 98.7811}
```

Το αντίστοιχο ιστόγραμμα θα είναι ($n = 100.000, a = 0, b = 100$).

```
n = 100000; a = 0; b = 100; Xlist = Table[0, {n}];
Do[U = RandomReal[]; X = a + U*(b - a);
Xlist[[i]] = X, {i, 1, n}];
Histogram[Xlist, {0, 100, 10}, "PDF"]
```





Εκθετική κατανομή:

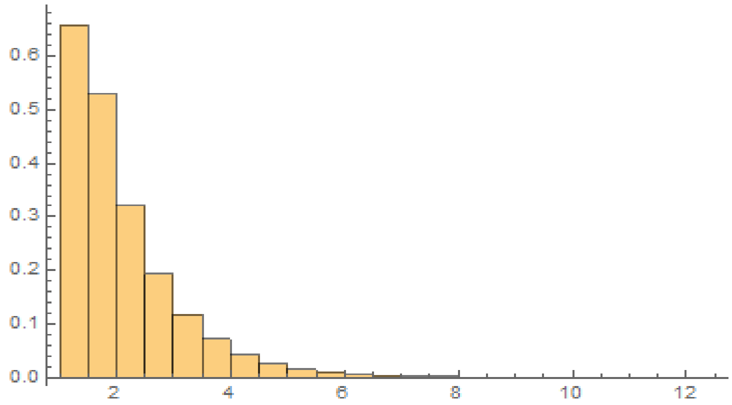
$$\sigma.\pi.\pi.: f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \kappa\alpha\iota\ \sigma.\kappa.: F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$$

Άρα με την μέθοδο της αντιστροφής, βρίσκουμε:

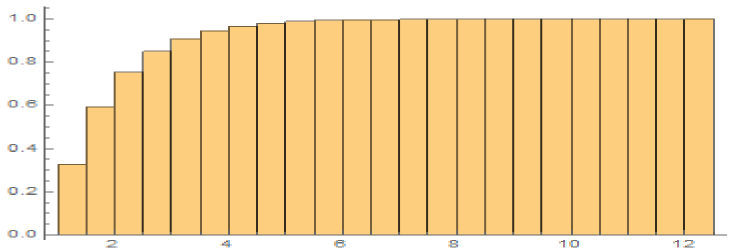
$$U = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - U \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1-U)}{-\lambda}$$

Εφαρμογή του αλγορίθμου για την εκθετική κατανομή, στο Mathematica:

```
λ = 3; n = 100000; ekt = Table[0, {n}];
Do[ek = -Log[(1 - RandomReal[])/λ]; ekt[[i]] = ek, {i, 1, n}]
ekh = Histogram[ekt, Automatic, "PDF"]
```



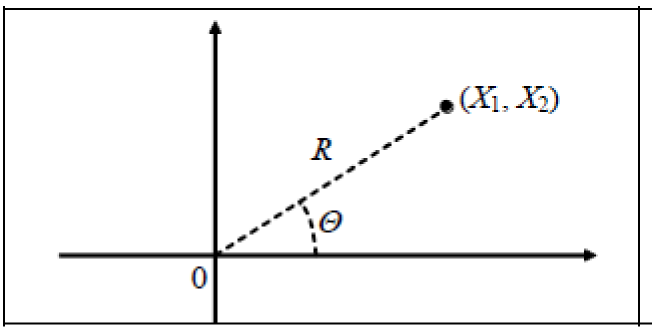

```
ekh = Histogram[ekt, Automatic, "CDF"]
```



Π.4.1 Μέθοδοι παραγωγής τυχαίων αριθμών από Κανονική Κατανομή.

Πολική (Box-Muller) μέθοδος.

Έστω δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) X_1 και X_2, που ακολουθούν τυπική κανονική κατανομή, $X_1 \sim N(0,1)$ και $X_2 \sim N(0,1)$. Παίρνουμε ένα σημείο του R^2 με τις συντεταγμένες (X_1, X_2).



Καθότι (X_1, X_2) τ.μ., συνεπάγεται ότι και R^2 (ακτίνα στο τετράγωνο) και Θ (γωνία) είναι τ.μ.

Και αποδεικνύεται ότι

$$R^2 \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{και} \quad \Theta \sim U(0,2\pi)$$

Οι πολικές συντεταγμένες των (X_1, X_2), θα είναι:

$$R^2 = X_1^2 + X_2^2 \Rightarrow R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

και $\Theta = arctan\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$ και άρα:

$$X_1 = Rcos\Theta \quad \text{και} \quad X_2 = Rsin\Theta.$$

Αντιστρέφοντας τα παραπάνω, αν $R^2 \sim \text{Exp}(1/2)$ και $\Theta \sim U(0,2\pi)$, οι $(X_1, X_2) = (R\cos\Theta, R\sin\Theta)$ θα ακολουθούν διδιάστατη τυπική κανονική κατανομή,

$$(X_1, X_2) \sim N_2(\mathbf{0}, I)$$

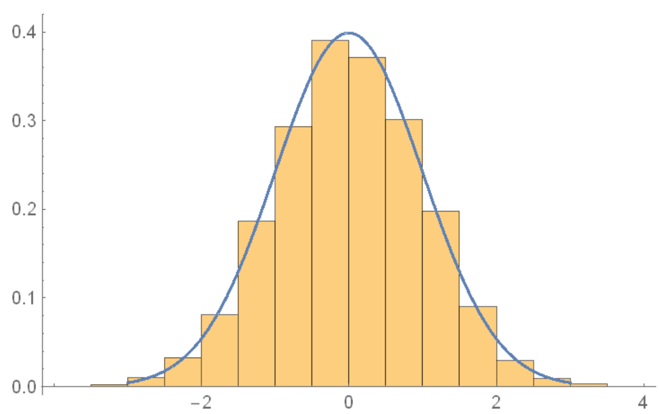
Αλγόριθμος:

1. Παράγουμε $U_1 \sim U(0,1)$και $U_2 \sim U(0,1)$
2. Θέτουμε $R = \sqrt{-2\ln(U_1)}$ $(R^2 \sim Exp(0.5))$ και $\Theta = 2\pi U_2$ $(\Theta \sim U(0,2\pi))$
3. Θέτουμε $X_1 = \mu + \sigma(R\cos\Theta)$ και $X_2 = \mu + \sigma(R\sin\Theta)$,

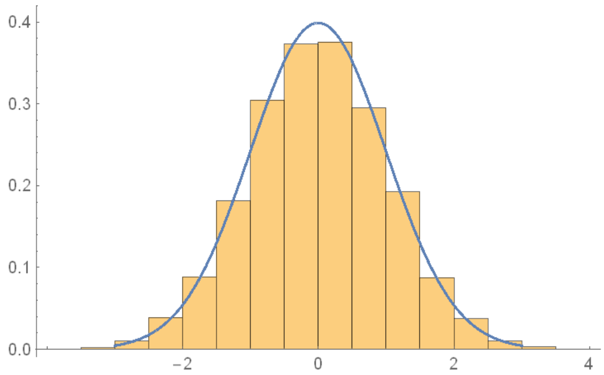
```
m = 0; s = 1;
U1 = RandomReal[]; U2 = RandomReal[];
R = (-2*Log[U1])^0.5; Thita = U2*2*Pi;
X1 = m + s*(R*Cos[Thita]); X2 = m + s*(R*Sin[Thita]);
Print[{X1, X2}]
```

```
{-2.2015, 1.29353}
```

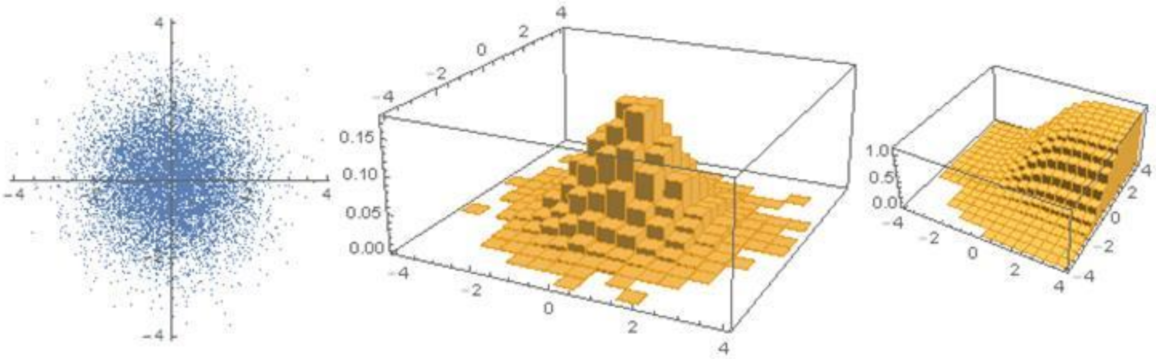
```
n = 10000; m = 0; s = 1; X = Table[0, {n}];
Do[U1 = RandomReal[]; U2 = RandomReal[]; R = (-2*Log[U1])^0.5;
Thita = U2*2*Pi;
  X1 = m + s*(R*Cos[Thita]); X[[i]] = X1, {i, 1, n}];
pX1 = Histogram[X, Automatic, "PDF"];
TypicalND = Plot[1/(2*Pi)^0.5*Exp[-x^2/2], {x, -3, 3}];
Show[pX1, TypicalND]
```



```
n = 10000; m = 0; s = 1; X = Table[0, {n}];
Do[U1 = RandomReal[]; U2 = RandomReal[]; R = (-2*Log[U1])^0.5;
Thita = U2*2*Pi;
  X2 = m + s*(R*Sin[Thita]); X[[i]] = X2, {i, 1, n}];
pX2 = Histogram[X, Automatic, "PDF"];
TypicalND = Plot[1/(2*Pi)^0.5*Exp[-x^2/2], {x, -3, 3}];
Show[pX2, TypicalND]
```



```
n = 10000; m = 0; s = 1; X = Table[0, {n}];
Do[U1 = RandomReal[]; U2 = RandomReal[]; R = (-2*Log[U1])^0.5;
Thita = U2*2*Pi;
  X12 = {m + s*(R*Cos[Thita]), m + s*(R*Sin[Thita])};
  X[[i]] = X12, {i, 1, n}];
ListPlot[X, AspectRatio -> Automatic] Histogram3D[X, Automatic,
  "PDF"] Histogram3D[X, Automatic, "CDF"]
```



Μέθοδος Αντιστροφής.

Μέσω Mathematica μπορούμε να προσεγγίσουμε την αντιστροφή της τυπικής κανονικής κατανομής.

```
InverseCDF[NormalDistribution[0, 1], u]
```

```
ConditionalExpression[-√2 InverseErfc[2 u], 0 ≤ u ≤ 1]
```

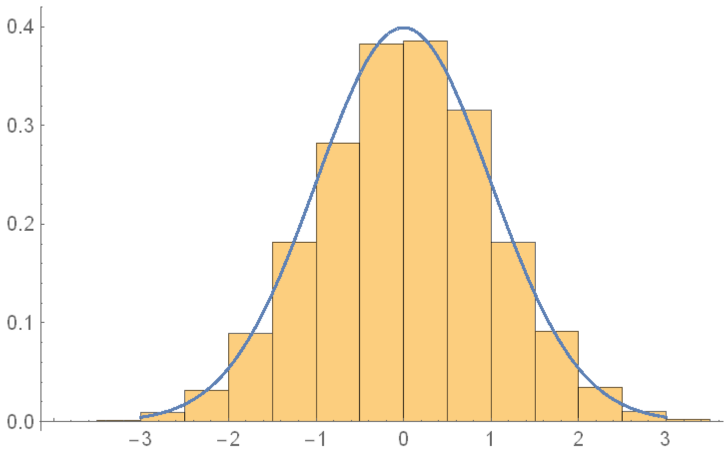
Αλγόριθμος:

1. Παράγουμε $U \sim U(0,1)$
2. Θέτουμε $X = -\sqrt{2}\text{InverseErfc}[2\ U]\ \mu\varepsilon\ U \geq 0\ \kappa\alpha\iota\ U \leq 1$,

```
U = RandomReal[];
X = InverseCDF[NormalDistribution[0, 1], U]; X
```

```
0.243792
```

```
n = 10000; x = Table[0, {n}];
Do[U = RandomReal[]; X = InverseCDF[NormalDistribution[0, 1], U];
  x[[i]] = X, {i, 1, n}];
pX = Histogram[x, Automatic, "PDF"];
TypicalND = Plot[PDF[NormalDistribution[0, 1], y], {y, -3, 3}];
Show[pX, TypicalND]
```



Π.4.2 Μέθοδοι παραγωγής τυχαίων διανυσμάτων από πολυδιάστατη κανονική κατανομή.

Στην μονοδιάστατη περίπτωση είδαμε ότι το $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ αν $Z \sim N(0,1)$. Ομοίως στην πολυδιάστατη περίπτωση

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \Sigma^{1/2}\mathbf{Z} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$$

όπου $\mathbf{Z} \sim N(0, \mathbf{I})$.

Με βάση τα παραπάνω και τη βοήθεια του Mathematica, μπορούμε άμεσα να βρούμε το $\mathbf{\Sigma}^{1/2}$. μέσω της εντολής: **`MatrixPower[Σ,0.5]`**, δεδομένου ότι έχουμε τον πίνακα **Σ**.

Αν ο πίνακας **Σ** (Πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων) είναι:

Σ	A	B	C
A	1		
B	0.7	1	
C	0.9	0.8	1

Τότε $\mathbf{\Sigma}^{1/2}$ μέσω Mathematica θα είναι:

```
Σ2 = {{1, 0.7, 0.9}, {0.7, 1, 0.8}, {0.9, 0.8, 1}};
MatrixForm[MatrixPower[Σ2, 0.5]]
```

$$\begin{pmatrix} 0.81881 & 0.299736 & 0.4896 \\ 0.299736 & 0.867259 & 0.397518 \\ 0.4896 & 0.397518 & 0.776061 \end{pmatrix}$$

Και άρα:

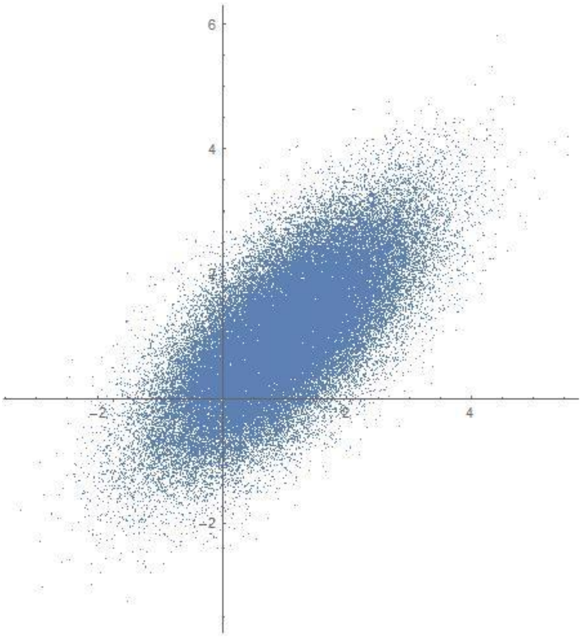
<u>Αλγόριθμος</u>:

1. Βρίσκουμε την ρίζα του πίνακα **Σ**.
2. Παράγουμε $Z_1 \sim N(0,1), Z_2 \sim N(0,1), \dots, Z_n \sim N(0,1)$ και $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$
3. Θέτουμε $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \sqrt{\mathbf{\Sigma}}.\mathbf{Z}$

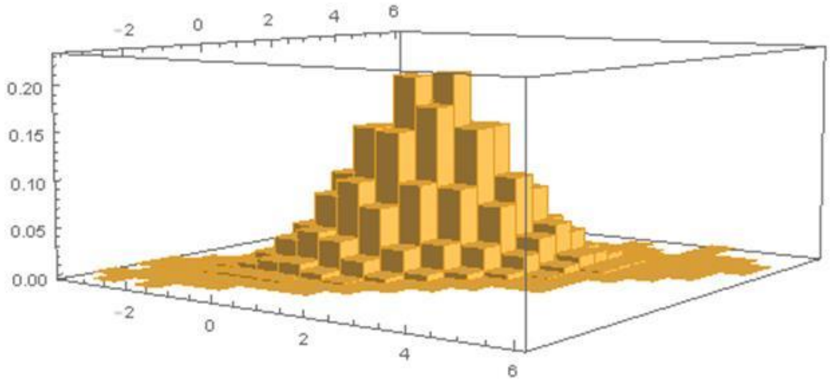
Υλοποίηση μέσω Mathematica (Παρακάτω όπου Sigma=**Σ**)

Δισδιάστατη κανονική κατανομή:

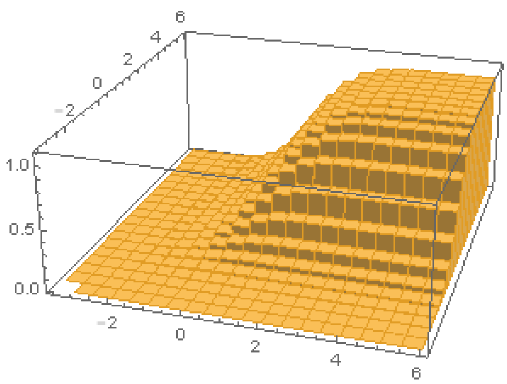
```
m = {1, 1}; Sigma = {{1, 0.7}, {0.7, 1}};
SqRootSigma = MatrixPower[Sigma, 0.5];
n = 100000; Npmd = Table[0, {n}];
Do[U1 = RandomReal[]; U2 = RandomReal[];
 Z = {(-2 Log[U1])^0.5*Cos[2*Pi*U2], (-2 Log[U1])^0.5*Sin[2*Pi*U2]};
 X = m + SqRootSigma.Z; Npmd[[i]] = X;, {i, 1, n}]
ListPlot[Npmd, AspectRatio -> Automatic]
```




```
Histogram3D[Npmd, Automatic, "PDF"]
```




```
Histogram3D[Npmd, Automatic, "CDF"]
```

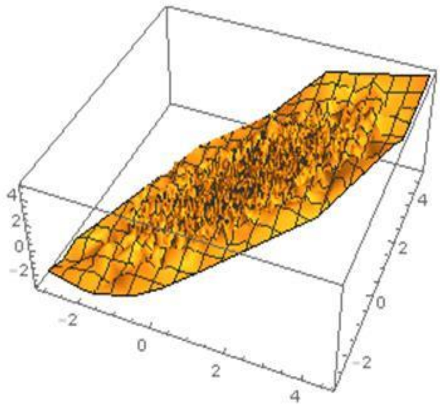


Ταχύτερα, στον παρακάτω κώδικα δίνουμε απευθείας την εντολή παραγωγής τυχαίων αριθμών από την κανονική κατανομή με μέσο 0 και τυπική απόκλιση 1:

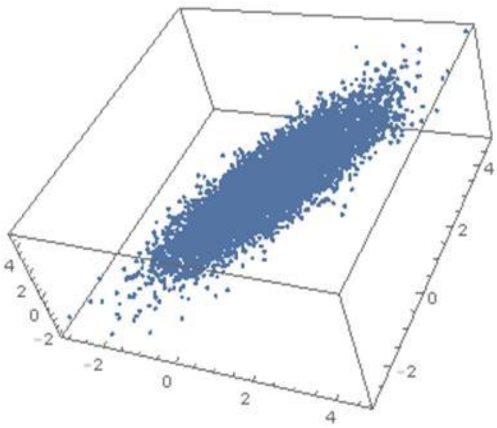
```
d = 2; m = {1, 1}; n = 100000;
Sigma = {{1, 0.7}, {0.7, 1}};
SqRootSigma = MatrixPower[Sigma, 1/2];
x = Table[0, {n}];
Do[Z = Table[RandomReal[NormalDistribution[0, 1]], {d}];
 X = m + SqRootSigma.Z;
 x[[i]] = X, {i, 1, n}]
ListPlot[x, AspectRatio -> Automatic]
```

Τριδιάστατη κανονική κατανομή:

```
d = 3; m = {1, 1, 1}; n = 10000;
Sigma = {{1, 0.7, 0.9}, {0.7, 1, 0.8}, {0.9, 0.8, 1}};
SqRootSigma = MatrixPower[Sigma, 1/2];
x = Table[0, {n}];
Do[Z = Table[RandomReal[NormalDistribution[0, 1]], {d}];
 X = m + SqRootSigma.Z;
 x[[i]] = X, {i, 1, n}]
ListPlot3D[x, AspectRatio ->Automatic]
```




```
ListPointPlot3D[x, AspectRatio ->Automatic]
```



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.

Ελληνική:

Αγορά Παραγώγων, (2004). *Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης και Δικαιώματα.* Χρηματιστήριο Αθηνών Α.Ε.

Μπούτσικας Μιχαήλ, (2004). *Μέθοδοι Προσομοίωσης και Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές.* Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Μπούτσικας Μιχαήλ, (2005-2007). *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα.* Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Ξένη:

Buchen Peter, (2012). *An Introduction to Exotic Option Pricing.* CRC Press.

Chan Ngai Hang - Wong Hoi Ying, (2006). *Simulation Techniques in Financial Risk Management.* Wiley.

Glasserman Paul, (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer.

Shaw William, (1998). *Modelling Financial Derivatives with Mathematica.* Cambridge.