ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Π.Μ.Σ. ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Στοχαστικές διαδικασίες κινδύνου με εξάρτηση μεταξύ των μεγεθών των ζημιών και των χρόνων εμφάνισης των κινδύνων

Διπλωματική Εργασία

Αθηναίος Απόστολος

Επιβλέπων Καθηγητής: Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2016

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

M. Sc. IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Stochastic risk processes with dependent individual claim sizes and inter-claim times

M. Sc. Thesis

Athinaios Apostolos

Advisor Professor: Chadjiconstantinidis Efstathios

PIRAEUS 2016

Στην Έλενα,

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους Καθηγητές που με δίδαξαν κατά τη διάρκεια των ακαδημαϊκών μου σπουδών. Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης κ. Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο για τη συνεργασία, την καθοδήγηση και τη διαρκή βοήθεια που μου παρείχε κατά την περίοδο της συγγραφής αυτής της διπλωματικής εργασίας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Σεβρόγλου Δημήτριο και Επίκουρο Καθηγητή κ. Γεώργιο Τζαβελά, για την τιμή που μου έκαναν να είναι μέλη της συμβουλευτικής μου επιτροπής. Τέλος θα ήθελα βαθύτατα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, τον πατέρα μου (Αναστάσιο), μητέρα μου (Αικατερίνη) και τον αδερφό μου (Περικλή), τους φίλους μου για τη συμπαράσταση και την υποστήριξή τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση και η μελέτη των στοχαστικών διαδικασιών στην θεωρία κινδύνου με μία μορφή εξάρτησης ανάμεσα στο ύψος ζημιάς και του χρόνου εμφάνισης κινδύνου. Εδώ και έναν αιώνα γίνεται μελέτη της θεωρίας κινδύνου, από το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου μέχρι πιο πολύπλοκα μοντέλα που έχουν εμφανιστεί κατά καιρούς. Το 1998 οι Gerber και Shiu εισήγανε την γνωστή πια συνάρτηση ποινής, και από τότε η μελέτη της θεωρίας κινδύνου περιφέρεται γύρω από αυτήν την συνάρτηση.

Η χρήση των copula, και γενικά μορφές εξάρτησης σε διδιάστατες μεταβλητές να γίνεται όλο και ποιο δημοφιλής στην αναλογιστική επιστήμη και στην διαχείριση κινδύνων, δεν άργησε να μπαίνει και στην θεωρία κινδύνου. Κάποια μοντέλα είναι πιο ρεαλιστικά και αντιπροσωπεύουν την πραγματικότητα θέτοντας μια μορφή εξάρτησης ανάμεσα στο ύψος της ζημιάς (σύνηθες ή καταστροφική) και του χρόνου εμφάνισης του κινδύνου.

Αρχικά θα γίνει η παρουσίαση της θεωρίας κινδύνου και η συνάρτηση των Gerber-Shiu, στην συνέχεια θα γίνει ανάλυση της γενικευμένης συνάρτησης Gerber-Shiu σε μοντέλο με εξάρτηση ανάμεσα στο ύψος της ζημιάς και του χρόνου εμφάνισης του κινδύνου. Θα εισάγουμε μία γενική κλάση εξάρτησης για την διδιάστατη μεταβλητή που περιέχει ειδικές περιπτώσεις που θα δούμε με αριθμητικά παραδείγματα τη επιρροή επιφέρει η μορφή εξάρτησης στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

ABSTRACT

In this thesis, we focus on the study and presentation of Stochastic risk processes with dependent individual claim sizes and inter-claim times. For a century now study of risk theory, from the classical model of risk theory to more complex models that have appeared from time to time. In 1998, Gerber and Shiu proposes the known penalty function, and from then the study of risk theory is wandering around this function.

The use of the copula, and general forms of dependence for bivariate variables is becoming popular in actuarial science and risk management, was not long until it came to risk theory. Some models are more realistic and represent the reality when a form of dependence between the amount of damage (regular or catastrophic) and the risk of time is used.

First will be the presentation of risk theory and the Gerber-Shiu function, then we will analyze the generalized Gerber-Shiu function in a model with dependence between individual claim sizes and inter-claim times. We will introduce a general dependency class for the bivariate variable containing specific cases and with numerical examples the influence of dependence in the probability of default will be determined.

Περιεχόμενα

1.Εισαγωγή

Ένα βασικό στοιχείο για την εύρυθμη λειτουργία ενός ασφαλιστικού οργανισμού είναι ο σχηματισμός επαρκών αποθεματικών προκειμένου να είναι σε θέση να καλύψει τις υποχρεώσεις του έναντι τρίτων και κυρίως των ασφαλισμένων του. Στην αναλογιστική ορολογία, τα αποθεματικά παρουσιάζονται ως η διαφορά ανάμεσα στο ενεργητικό της ασφαλιστικής επιχείρησης και στην εκτίμηση των συνολικών της υποχρεώσεων και χαρακτηρίζονται με τον όρο πλεόνασμα. Βασικό πρόβλημα της κλασικής θεωρίας κινδύνου είναι ο προσδιορισμός της πιθανότητας ‘χρεοκοπίας’, δηλαδή της πιθανότητας τα αποθεματικά να μην είναι επαρκή για την κάλυψη των αποζημιώσεων. Η αρχή της θεωρίας κινδύνου προσδιορίζεται στης αρχές του 20^{ου} αιώνα, όταν ο *Filip Lundberg (1903)* με την διατριβή του *(Approximerad fremställning au sannolikheets funktionen, Upsalla)* έθεσε τα θεμέλια της. Βασιζόμενος σε αυτή ο *Harald Cramér*, ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνου. Το βασικό μοντέλο που προέκυψε από τις παραπάνω συνεισφορές ονομάζεται, κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο *Cramér- Lundberg*. Στην συνέχεια έγινε η γενίκευση του κλασικού μοντέλου από τον *Sparre Andersen*, οπού το κύριο χαρακτηριστικό είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από μία ανανεωτική διαδικασία. Προς το τέλος του 20^{ου} αιώνα οι *Gerber* και *Shiu* πρώτοι παρουσίασαν την συνάρτηση ποινής *Gerber-Shiu* για να αναλύσουν τα μέτρα ενδιαφέροντος της κλασικής θεωρίας χρεοκοπίας όπως τον χρόνο την στιγμή της χρεοκοπίας, το έλλειμα την στιγμή της χρεοκοπίας και το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία. Η συνάρτηση έχει μελετηθεί εκτενώς και συγκεκριμένα με την γενίκευση του *Sparre Andersen* μοντέλου.

Ωστόσο, το σύνηθες *Sparre Andersen* μοντέλο, χρησιμοποιεί την υπόθεση ότι τα ύψη ζημιάς με τον χρόνο εμφάνισης των κινδύνων δεν είναι πολύ λογικός για να αντικατοπτρίσει κάποιες καταστάσεις (π.χ. ασφάλεια καταστροφικών κινδύνων). Επομένως, μία προσέγγιση είναι να θεωρήσεις μια μορφή εξάρτησης ανάμεσα στο ύψος και χρόνου εμφάνισης ζημιάς. Στην παρούσα διατριβή, θα αναλυθεί το πλεόνασμα του ασφαλιστή χρησιμοποιώντας την συνάρτηση ποινής *Gerber-Shiu* σε *Sparre Andersen* μοντέλο υποθέτοντας μία αυθαίρετη μορφή εξάρτησης.

Στο κεφάλαιο 2, θα εισαχθούν εισαγωγικές έννοιες του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας και θα παρουσιασθεί η συνάρτηση ποινής *Gerber-Shiu*.

Στο κεφάλαιο 3, θα γίνει ανάλυση της γενικευμένης συνάρτησης *Gerber-Shiu* προσθέτοντας δύο ακόμη νέες μεταβλητές στην κλασική συνάρτηση. Αυτές είναι ονομαστικά το πλεόνασμα στην προτελευταία ζημιά πριν την χρεοκοπία και το ελάχιστο πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία. Θα αποδειχθεί ότι η γενικευμένη συνάρτηση ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική συνάρτηση και θα δοθεί μία εναλλακτική έκφραση της συνάρτησης που θα μας βοηθήσει να παράγουμε διάφορες από-κοινού και περιθώριες συναρτήσεις με τις τέσσερις μεταβλητές της γενικευμένης συνάρτησης *Gerber-Shiu*.

Στο κεφάλαιο 4, θα αναλύσουμε μία γενική κλάση εξάρτησης που έχει ειδικές περιπτώσεις που έχουν μελετηθεί ξεχωριστά. Χρησιμοποιώντας μία γενική μορφή για τον ενδιάμεσο χρόνο εμφάνισης ζημιάς συμπεριλαμβάνοντας έναν συνδυασμό από τύπου Erlang κατανομών, γίνεται πλήρης ταυτοποίηση της γενικευμένης συνάρτησης *Gerber-Shiu*.

Στο κεφάλαιο 5, θα δούμε κάποιες από τις ειδικές περιπτώσεις εξάρτησης που προκύπτουν από την γενική κλάση του κεφαλαίου 4, και θα δούμε αριθμητικά αποτελέσματα και θα γίνει σύγκριση με το μοντέλο χωρίς εξάρτηση μεταξύ του ύψους ζημιάς και των χρόνων εμφάνισης κινδύνων.

2. Μοντέλο Χρεοκοπίας

2.1. Κλασικό Μοντέλο Χρεοκοπίας

Το θεμελιώδες μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας είναι το μοντέλο των Cramer-Lundberg ή αλλιώς το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας. Το μοντέλο μας περιγράφει μία ασφαλιστική εταιρεία που ένα χαρτοφυλάκιο της αναμένει δύο ειδών χρηματορροές: εισροές με την μορφή ασφαλίστρων και εκροές με την μορφή αποζημιώσεων [$S(t)$]. Επίσης στην αρχή σύστασης του χαρτοφυλακίου η εταιρεία έχει ένα αρχικό αποθεματικό [u]. Το πλεόνασμα [$U(t)$] κάθε μελλοντική χρονική στιγμή t ισούνται με το αρχικό αποθεματικό συν τα ασφάλιστρα μέχρι την στιγμή t μείον τις συσσωρευμένες αποζημιώσεις μέχρι την στιγμή t.

Ορισμός 2.1 *Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος* $\{U(t), t \geq 0\}$ *για το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας ορίζεται για κάθε* $t \geq 0$ *από την σχέση:*

$$U(t) = u + ct - S(t)$$

Όπου:

- $U(t)$: *η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος, με* $U(0) = u$,
- $u \geq 0$*: το αρχικό κεφάλαιο (Initial Capital), αποθεματικό, που διαθέτει η ασφαλιστική στο χρόνο μηδέν,*
- *Ασφάλιστρο* $c > 0$, *δηλαδή η* ct *είναι γραμμική συνάρτηση*
- $S(t) = \sum_{i=1}^{N_i} Y_i$ *οι συνολικές αποζημιώσεις που θα εμφανιστούν σε ένα χαρτοφυλάκιο. Οι τυχαίες μεταβλητές* $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ *που δηλώνουν το ύψος των αποζημιώσεων, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με πυκνότητα p, και συνάρτηση κατανομής* $P(.) = 1 - \bar{P}(.)$. *Είναι επίσης ανεξάρτητες από τον αριθμό των αποζημιώσεων,* N_t. *Η* $\{N(t), t \geq 0\}$ *είναι μια διαδικασία Poisson, έτσι ώστε τελικά η διαδικασία* $\{S(t), t \geq 0\}$ *είναι μία σύνθετη διαδικασία Poisson.*

Στην θεωρία πιθανοτήτων η διαδικασία Poisson ορίζεται με διάφορους τρόπους. Για τους σκοπούς της εργασίας, τη ορίζουμε όπως περιγράφεται παρακάτω. Μια διαδικασία είναι διαδικασία Poisson με παράμετρο λ αν ο χρόνος μεταξύ των γεγονότων ακολουθεί μία εκθετική (Exponential) κατανομή με μέση τιμή $1/\lambda$. Γεγονός θεωρείται η εμφάνιση αποζημίωσης. Στην συνέχεια ορίζουμε

V_i τον ενδιάμεσο χρόνο μεταξύ της $(i-1)$ και ith αποζημίωσης με V_1 ο χρόνος της πρώτης αποζημίωσης. Οπότε η $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$είναι μία σειρά από ανεξάρτητες και εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, κάθε μία με μέση τιμή $1/\lambda$.

Μία βασική υπόθεση που κάνουμε στο κλασικό μοντέλο είναι ότι

$$c > \lambda\mu_1$$

Οπού στο αριστερό μέλος έχουμε την μέση τιμή των εσόδων του χαρτοφυλακίου στην μονάδα του χρόνου, και στο δεξί μέλος έχουμε το μέσο ρυθμό αποζημιώσεων πολλαπλασιασμένο με το μέσο ύψος αυτών. Με λίγα λόγια η συνθήκη απαιτεί τα αναμενόμενα έσοδα του χαρτοφυλακίου να υπερβαίνουν κατά μέσο όρο τα έξοδα στην μονάδα του χρόνου. Σημειώνουμε ότι αν δεν ισχύει η παραπάνω συνθήκη τότε η χρεοκοπία είναι σίγουρη $\psi(u) = 1$ (βλ. παρακάτω για την πιθανότητα χρεοκοπίας). Σε συνέχεια μπορούμε να γράψουμε ότι $c = (1 + \theta)\lambda\mu_1$ για να δούμε το θ σαν ένα **περιθώριο ασφαλείας.** Προφανές είναι ότι το περιθώριο ασφαλείας θ στο κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας ορίζεται από την σχέση $\theta = {}^{c}/_{\lambda\mu_1} - 1$. Πρώτού ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, ας δούμε μία άμεσα συνδεδεμένη ποσότητα με αυτήν, τον χρόνο χρεοκοπίας.

Ορισμός 2.2 *Έστω T ο χρόνος χρεοκοπίας για* $t \geq 0$ *ορίζεται από την σχέση:*

$$T = \inf\{t : U(t) < 0\}$$

δηλαδή, το T παίρνει την τιμή που για πρώτη φορά το πλεόνασμα γίνεται αρνητικό.

Ορισμός 2.3 *Ένα ακόμη σημαντικό μέτρο χρεοκοπίας είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό* $u \geq 0$, *η οποία ορίζεται από την σχέση:*

$$\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u) = P(U(T) < 0 | U(0) = u)$$

Επισημαίνουμε ότι με τον όρο χρεοκοπία, δεν ισοδυναμεί κατ' ανάγκη με πραγματική χρεοκοπία του χαρτοφυλακίου ή του ασφαλιστικού οργανισμού. Με την βοήθεια όμως του μέτρου μπορεί να υπολογίσει το αρχικό αποθεματικό που χρειάζεται, ή και τον ρυθμό που θα έχει σαν έσοδα τα ασφάλιστρα έτσι ώστε να μικρύνει την πιθανότητα ή και να επιμηκύνει την διάρκεια ζωής ενός χαρτοφυλακίου. Για την πιθανότητα χρεοκοπίας τη χρονική στιγμή μηδέν αποδεικνύεται ότι:

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta},$$

Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας δίνεται από : $\delta(u) = 1 - \psi(u)$. Στο κλασικό μοντέλο η συνάρτηση $\delta(u)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση:

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx$$

Η οποία είναι ολοκληροδιαφορική εξίσωση για το $\delta(u)$.

Επίσης η πιθανότητα μη χρεοκοπίας ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\bar{F}(x)dx$$

με $u \geq 0$ και $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων. Παίρνοντας όρια για $u \to \infty$ και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης, έχουμε:

$$1 = \lim_{u\to\infty} \delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\lim_{u\to\infty}\int_0^u \delta(u-x)\bar{F}(x)dx,$$

και αλλάζοντας το ολοκλήρωμα με το όριο έχουμε:

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c},$$

και βάση του ορισμού του περιθώριού ασφαλείας έχουμε:

$$\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta},$$

δηλαδή η πιθανότητα μη χρεοκοπίας δεν εξαρτάται από τις αποζημιώσεις αλλά από τη μέση τιμή. Οπότε η εξίσωση μη χρεοκοπίας που προκύπτει είναι:

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\bar{F}(x)dx$$

η οποία είναι μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Ορισμός 2.4 *Ο συντελεστής προσαρμογής, δηλωμένος ως R, μας δίνει άλλο ένα μέτρο για την στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος. Στο κλασσικό μοντέλο ορίζεται ως η μοναδική θετική ρίζα της σχέσης:*

$$\lambda M_Y(r) - \lambda - cr \;=\; 0,$$

έτσι ώστε το R δίνεται από

$$\lambda + cR = \lambda M_Y(R)$$

όπου $M_Y(R)$ *είναι η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων. Είναι αυτονόητο ότι για την ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής πρέπει να υπάρχει η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει χρησιμοποιούνται προσεγγίσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας.*

Μια παρατήρηση είναι ότι ο συντελεστής προσαρμογής είναι ανεξάρτητος της συχνότητας των αποζημιώσεων λ. Επίσης, η παραπάνω σχέση έχει την τετριμμένη λύση $r = 0$.

Συνεχίζοντας από τον ορισμό του συντελεστή προσαρμογής, το επόμενο βήμα είναι η ύπαρξη ενός άνω φράγματος για πιθανότητα χρεωκοπίας. Η παρακάτω ανισότητα είναι γνωστή ως ανισότητα Lundberg και συνδέει άμεσα την πιθανότητα χρεοκοπίας με τον συντελεστή προσαρμογής.

Ορισμός 2.5 *Ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας (ανισότητα Lundberg) είναι:*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \qquad u \geq 0$$

Όπως αναφέραμε η παραπάνω ανισότητα είναι γνωστή ως ανισότητα του Lundberg. Προσπαθεί να ελέγξει ποια θα είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας στην χείριστη περίπτωση. Όπως είναι κατανοητό όσο μεγαλύτερο είναι το περιθώριο ασφαλείας θ τόσο μικρότερη θα είναι και πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία.

Μία άλλη μεταβλητή που μπορούμε να παρατηρήσουμε στη θεωρία κινδύνων είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο u. Η μεταβλητή αυτή, συμβολίζεται ως L_i για $i = 1,2, \dots, K$. Επομένως, για την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό που συμβαίνει την χρονική στιγμή t_1, το πλεόνασμα θα είναι $u_1 = U(t_1)$. Τότε:

$$L_1 = u - u_1.$$

Διαφορετικά οι τυχαίες μεταβλητές L, κλιμακωτά ύψη και ορίζουμε ως K το πλήθος των $L_1, L_2, \dots$ και ισχύει ότι:

$$P(K = 0) = \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta},$$

$$P(K = 1) = \delta(0)\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta}{1+\theta},$$

$$P(K = 2) = \delta(0)\{\psi(0)\}^2 = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2 \frac{\theta}{1+\theta}.$$

Αμέσως βλέπουμε:

$$P(K = k) = \delta(0)\{\psi(0)\}^k = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \frac{\theta}{1+\theta}$$

για $k = 0,1,2, \dots$ και άρα η K ακολουθεί γεωμετρική κατανομή.

Αθροίζοντας όλα τα κλιμακωτά ύψη, παίρνουμε τη σωρευτική μέγιστη απώλεια (Maximal Aggregate Loss), δηλαδή:

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_k = \sum_{i=1}^{K} L_i$$

Παρατηρούμε ότι τα $L_1, L_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και η κατανομή της L είναι μικτή διότι έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν και ακολουθεί σύνθετη γεωμετρική κατανομή, διότι η K ακολουθεί γεωμετρική κατανομή. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι $P(L = 0) = P(K = 0) = \delta(0)$ και $P(L \leq u) = \delta(u)$. Επίσης αποδεικνύεται ότι την ροπογεννήτρια της L ισχύει:

$$M_L(r) = \frac{\theta}{(1+\theta) - M_{L_1}(r)}$$

όπου, $M_L(r)$ η ροπογεννήτρια του κλιμακωτού ύψους και θ το περιθώριο ασφαλείας.

Ορισμός 2.6 *Όταν υπάρχει μια πτώση του πλεονάσματος, η τυχαία μεταβλητή L_1 ακολουθεί μία συνεχή κατανομή με πυκνότητα $\frac{1}{\mu_1}[1 - F(x)]$, άρα:*

$$P(L_1 \leq x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x [1 - F(y)]dy = F_e.$$

η οποία F_e ορίζεται ως μια κατανομή για την ουρά των αποζημιώσεων:

$$F_e(x) = 1 - \bar{F}_e(x) = \int_0^x \frac{\bar{F}(y)}{E(x)}dy = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x [1 - F(y)]dy = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \bar{F}(y)dy$$

όπου $\bar{F}(y)$ η ουρά των αποζημιώσεων με πυκνότητα $f_e = \frac{\bar{F}(y)}{E(x)}$.

άρα, $M_{L_1}(r) = -\frac{1}{r\mu_1} + \frac{1}{r\mu_1}M_x(r)$. Η f_e ονομάζεται συνάρτηση ισορροπίας.

Εκτός από τις παραπάνω μέτρα που αναφέραμε, θεωρούμε δύο ακόμη τυχαίες μεταβλητές U_{T^-}, $|U_T|$. Οι οποίες παραστούν την τιμή του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή ακριβώς πρίν τη χρεοκοπία και αντίστοιχα την στιγμή της χρεοκοπίας.

2.2. Συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu

Οι Gerber και Shiu στην εργασία τους ‘On the Time Value of Ruin’ το 1998, κατάφεραν να μοντελοποίησουν τις παραπάνω τυχαίες μεταβλητές και τον χρόνο χρεοκοπίας σε μία συνάρτηση, την αναμενόμενη προ εξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function).Μία συνάρτηση, μέσω της οποίας, μελετήθηκαν ταυτόχρονα, μέτρα κινδύνου που μέχρι τότε προσεγγίζονταν μεμονωμένα.

Ορισμός 2.7 *Η συνάρτηση των Gerber-Shiu ορίζεται από την σχέση:*

$$m_{\delta,12}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_{12}(U_{T^-}, |U_T|) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right], u \geq 0 \quad (2.1)$$

όπου $\delta \geq 0$*, μπορεί να θωρηθεί είτε ως μεταβλητή ενός μετασχηματισμού* $Laplace$ *είτε ως ένταση ανατοκισμού (ή παράγων προεξόφλησης),* $w(x, y)$ *μία μη-αρνητική δισδιάστατη συνάρτηση στο* $\mathbb{R}^2$*, και I(.) η δείκτρια συνάρτηση ενός ενδεχομένου.*

Αυτό που κάνει πολύ σημαντική την παραπάνω συνάρτηση είναι ότι περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις αρκετά από τα μέτρα κινδύνου που είναι άμεσα ενδιαφέροντος στη θεωρία χρεοκοπίας. Κάποιες από αυτές αναφέρονται παρακάτω:

- Για $\delta = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1$ παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$m_\delta(u) = E[I(T < \infty)|U_0 = u] = P(T < \infty|U(0) = u) = \psi(u)$$

- Για $w(x_1, x_2) = 1$ παίρνουμε την μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta t} I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right]$$

- Για $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x) I(x_2 \leq y)$ παίρνουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U_{T^-}, |U_T|$

$$m_\delta(u) = F_\delta(x_1, x_2|u) = E\left[e^{-\delta t} I(x_1 < x) I(x_2 < y) \middle| U_0 = u\right]$$

Έχοντας βρει την από κοινού συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) μπορούμε να βρούμε τις περιθώριες σ.κ. και τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας(σ.π.π.) των τυχαίων μεταβλητών $U_{T^-}, |U_T|$. Ισοδύναμα βρίσκονται άμεσα από την (2.1), όπως βλέπουμε παρακάτω:

- Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη περιθώρια σ.π.π της U_{T^-}

$$m_\delta(u) = H_\delta(x_1|u)$$

- Για $\delta > 0$ και $w(x_1, x_2) = I(x_2 \leq x)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη περιθώρια σ.π.π της $|U_T|$.

$$m_\delta(u) = G_\delta(x_1|u)$$

Στην ίδια διατριβή οι *Gerber-Shiu* αποδείξανε ότι η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ολόκληρό-διαφορική τύπου *Voltera*. Η λύση της συγκεκριμένης ολόκληρό-διαφορικής εξίσωσης γίνεται με την βοήθεια μετασχηματισμών *Laplace* και δείχνοντας ότι η συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Πιο συγκεκριμένα για το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας έχουμε:

Ορισμός 2.8 *Η συνάρτηση των Gerber-Shiu* $\{m(u), u \geq 0\}$ *ικανοποιεί την εξής ελλειμματική ολοκληροδιαφορική εξίσωση:*

$$m'(u) = \frac{\lambda + \delta}{c} m(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u m(u-y) f(y) dy - \frac{\lambda}{c} z(u), \text{όπου} \quad (2.2)$$

$$z(u) = \int_u^\infty w(u, y-u) f(y) dy.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τον γενικό ορισμό (2.1) της συνάρτησης *Gerber-Shiu*, δεσμεύουμε ως προς την πρώτη ζημιά, δηλαδή της τυχαίες μεταβλητές του χρόνου και του ύψους ζημιάς. Επομένως προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= \int_0^\infty \int_0^\infty m_\delta(u|t,y) f_Y(y) f_T(t) dy dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} m_\delta(u|t,y) f(y) dy dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty m_\delta(u|t,y) f(y) dy dt. \end{aligned}$$

Την χρονική στιγμή εμφάνισης της πρώτης απαίτησης η διαδικασία πλεονάσματος έχει την μορφή $U(t) = u + ct - y$. Σε αυτήν την χρονική στιγμή μπορούν να εμφανιστούν δύο γεγονότα

1. Εάν $0 \leq y \leq u + ct$ τότε δεν εμφανίζεται χρεοκοπία.

2. Εάν $y \geq u + ct$ εμφανίζεται χρεοκοπία με $U_{T^-} = u + ct$ και $|U_T| = y - u - ct$.

Επομένως από τα παραπάνω προκύπτει

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left\{ \int_0^{u+ct} e^{-\delta t} m_\delta(u + ct - y) f(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} w(u + ct, y - u - ct) f(y) dy \right\} dt \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t} \left\{ \int_0^{u+ct} m_\delta(u + ct - y) f(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{u+ct}^\infty w(u + ct, y - u - ct) f(y) dy \right\} dt \end{aligned}$$

θέτουμε όπου $s = u + ct \Rightarrow dt = \frac{1}{c}ds$ και για τα όρια $u \leq s < \infty$ και $t = \frac{s-u}{c}$,

$$m_\delta(u) = \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s m_\delta(s-y)\, f(y)dy \frac{1}{c} ds$$
$$+ \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_s^\infty w(s, s-y)\, f(y)dy \frac{1}{c} ds.$$

Θέτοντας $z(s) = \int_s^\infty w(s, y-s) f(y)dy$ προκύπτει

$$cm_\delta(u) = \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s m_\delta(s-y)\, f(y)dyds$$
$$+ \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} z(s)ds.$$

Έστω οι παρακάτω βοηθητικές συναρτήσεις

$$g_1(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s m_\delta(s-y)\, f(y)dy,$$

και

$$g_2(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} z(s).$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει

$$\frac{d}{du} \int_u^\infty g_1(u,s)\, ds = -g_1(u,u) + \frac{\lambda+\delta}{c} \int_u^\infty g_2(u,s)ds$$
$$= -\int_0^u m_\delta(u-y) f(y)dy + \frac{\lambda+\delta}{c} \int_u^\infty g_1(u,s)ds,$$

και

$$\frac{d}{du} \int_u^\infty g_2(u,s)\, ds = -g_2(u,u) + \frac{\lambda+\delta}{c} \int_u^\infty g_2(u,s)ds$$
$$= -z(u) + \frac{\lambda+\delta}{c} \int_u^\infty g_2(u,s)ds.$$

Αντικαθιστώντας τις βοηθητικές συναρτήσεις στην αρχική σχέση

$$cm_\delta(u) = \lambda \int_u^\infty g_1(u,s)\, ds + \lambda \int_u^\infty g_2(u,s)\, ds.$$

Παραγωγίζοντας και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα παίρνουμε

$$cm'_\delta(u) = -\lambda \int_0^u m_\delta(u-y)f(y)dy - \lambda z(u) + \frac{\lambda+\delta}{c} cm_\delta(u)$$
$$= -\lambda \int_0^u m_\delta(u-y)f(y)dy + (\lambda+\delta)m_\delta(u) - \lambda z(u).$$

Ολοκληρώσαμε την απόδειξη, καταλήγοντας στην (2.2)

Όπως είδαμε παραπάνω η παραπάνω εξίσωση ανάγεται στην πιθανότητα χρεοκοπίας και επομένως παίρνουμε ότι

Ορισμός 2.9 *Η πιθανότητα χρεοκοπίας* $\Psi(u)$ *ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση*

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-y)\, f(y)dy - \frac{\lambda}{c}\bar{F}(u),$$

όπου $\bar{F}(u) = 1 - F(u) = \int_u^\infty f(x)dx.$

Για την λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης της συνάρτησης *Gerber-Shiu*, θα δείξουμε αρχικά ότι η $m(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Ορισμός 2.10 *Η συνάρτηση* $m(u)$ *για* $u \geq 0$ *ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$m_\delta(u) = \frac{1}{1+\beta_\delta}\int_0^u m_\delta(u-x)g_\delta(x)dx + \frac{1}{1+\beta_\delta}H_\delta(u), u \geq 0 \quad (2.3)$$

με

$$\beta_\delta = \frac{(1+\theta)E(x)}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{F}(y)dy}, \quad \rho = \rho(\delta)$$

$g_\delta(x) = G'_\delta(x)$, *όπου η συνάρτηση κατανομής* $G_\delta(x) = 1 - \bar{G}_\delta(x)$

$$\bar{G}_\delta(x) = \frac{\bar{F}(x) - e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho y} f(y)dy}{\rho \int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{F}(y)dy}$$

και

$$H_\delta(u) = \frac{e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty w(x, y-x)f(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\,\bar{F}(y)dy}.$$

Η απόδειξη παραλείπεται βλέπε *Lin-Wilmot (1999).*

Για την λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση κατανομής $K_\delta(u) = 1 - \overline{K}_\delta$,

$$K_\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_\delta}{1+\beta_\delta}\left(\frac{1}{1+\beta_\delta}\right)^n G_\delta^{*n}(u), u \geq 0,$$

όπου G_δ^{*n} είναι η n-οστή συνέλιξη της συνάρτησης κατανομής $G_\delta(x)$. Τότε, προφανώς ισχύει ότι η συνάρτηση επιβίωσης δίνεται από την

$$\overline{K}_\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_\delta}{1+\beta_\delta}\left(\frac{1}{1+\beta_\delta}\right)^n \bar{G}_\delta^{*n}(u), u \geq 0,$$

όπου $\bar{G}_\delta^{*n}$ είναι η n-οστή συνέλιξη της συνάρτησης επιβίωσης $\bar{G}_\delta(x)$.

Παρατηρούμε ότι η $\overline{K}_\delta(u)$ είναι η δεξιά ουρά μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Συγκεκριμένα είναι

$$\overline{K}_\delta(u) = \Pr(L_1 + L_2 + \cdots + L_M > u),$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $M \sim G(p), p = \frac{\beta_\delta}{1+\beta_\delta}$, δηλαδή είναι

$$\Pr(m = n) = \frac{\beta_\delta}{1+\beta_\delta}\left(\frac{1}{1+\beta_\delta}\right)^n, n = 1,2, \ldots$$

και οι τυχαίες μεταβλητές L_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομε με την συνάρτηση κατανομής $G_\delta(x)$.

Η λύση της εξίσωσης (2.3)μπορεί να εκφραστεί μέσω της $\overline{K}_\delta(u)$ όπως φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα. Πρέπει να τονισθεί ότι το παρακάτω θεώρημα δίνει την ΄λύση οποιασδήποτε συνάρτησης που ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής(2.3).

Θεώρημα *Η λύση της* (2.3) *δίνεται από την*

$$m_\delta(u) = \frac{1}{\beta_\delta}\int_0^u H_\delta(u-x)dK_\delta(u) + \frac{1}{1+\beta_\delta}H_\delta(u),$$

ή

$$m_\delta(u) = -\frac{1}{\beta_\delta}\int_0^u \overline{K}_\delta(u-x)dH_\delta(u) - \frac{H_\delta(0)}{\beta_\delta}\overline{K}_\delta(u) + \frac{1}{\beta_\delta}H_\delta(u).$$

Αν η συνάρτηση $H_\delta(u)$ *είναι διαφορίσιμη, τότε*

$$m_\delta(u) = -\frac{1}{\beta_\delta}\int_0^u \overline{K}_\delta(u-x)H'_\delta(u)dx - \frac{H_\delta(0)}{\beta_\delta}\overline{K}_\delta(u) + \frac{1}{\beta_\delta}H_\delta(u), u \geq 0.$$

Η απόδειξη παραλείπεται βλέπε *Lin-Wilmot (1999).*

Από το τελευταίο Θεώρημα έπεται ότι για τον υπολογισμό της συνάρτησης $m_\delta(u)$, αρκεί να υπολογισθεί η δεξιά ουρά $\overline{K}_\delta(u)$ της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Σε αρκετές περιπτώσεις είναι δυνατόν να βρεθούν αρκετά αναλυτικοί τύποι υπολογισμού της $\overline{K}_\delta(u)$. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εισάγουμε την γενικευμένη συνάρτηση *Gerber-Shiu* προσθέτοντας ακόμη δύο μεταβλητές που αφορούν την θεωρία χρεοκοπίας, επίσης θα περάσουμε στο μοντέλο με εξάρτηση ανάμεσα στο ύψος ζημιάς και στον χρόνο εμφάνισης κινδύνων.

3. Γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu

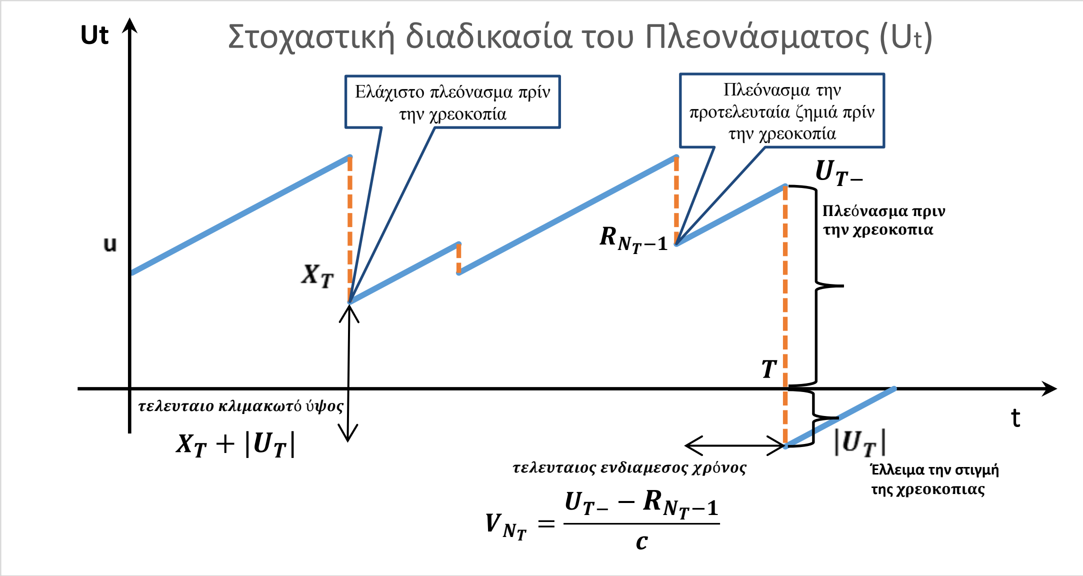
3.1. Γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu σε Sparre-Andersen μοντέλο με εξάρτηση

Στο δεύτερο κεφάλαιο εισήγαμε το μοντέλο με ανεξάρτητες τις μεταβλητές του χρόνο εμφάνισης και του ύψους ζημιάς. Σε αυτό το κεφάλαιο θα γενικεύσουμε το μοντέλο κινδύνου ως εξής. Υποθέτουμε ότι τα ζευγάρια $\{(V_i, Y_i); i = 1,2, \dots\}$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα, έτσι ώστε και τα $\{(cV_i - Y_i); i = 1,2, \dots\}$ να είναι επίσης ανεξάρτητα και ισόνομα, το οποίο υποδηλώνει ότι η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος $\{(U_t), t \geq 0\}$ διατηρεί την δομή του τυχαίου περίπατου *(random walk)* του *Sparre Andersen* μοντέλου. Για ευκολία θα ορίσουμε την από κοινού συνάρτηση των(V_i, Y_i) ως το γινόμενο της περιθώριας πυκνότητας $k(t)$ και της δεσμευμένης πιθανότητας του Y_i δοθέντος το V_i. Ορίζουμε ως πυκνότητα τις δεσμευμένης πιθανότητας του Y_i ως $P_t(y) = \Pr(Y \leq y | V = t) = 1 - \bar{P}_t(y)$ για $y > 0$. Έστω η $p_t(y) = P_t'(y)$ είναι η περιθώρια πυκνότητα, έτσι ώστε η από κοινού συνάρτηση να δίνεται από $p_t(y)k(t)$. Επίσης ο μετασχηματισμός Laplace της $p_t(y)$ είναι $\tilde{p}_t(y) = \int_0^\infty e^{-sy} p_t(y) dy$. Για να ολοκληρώσουμε τον ορισμό της ανέλιξης του πλεονάσματος, ορίζουμε $c (c > 0)$ να είναι το ασφάλιστρο ανά τον χρόνο και υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη του θετικού περιθώριού ασφαλείας.

Πρώτού ξεκινήσουμε την ανάλυση της γενικευμένης συνάρτησης ποινής *Gerber-Shiu* είναι καλό να αναφέρουμε ότι η (2.1) έχει μελετηθεί σε μοντέλα με μορφή εξάρτησης. Η *Cossette (2008)* χρησιμοποίησε $K(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, αλλά με $\Pr(Y \leq y | V = t) = C(P(y), 1 - e^{-\lambda t}) / (1 - e^{-\lambda t})$ όπου $C(u, v)$ είναι η γενικευμένη Farlie-Gumbel-Morgesten σύζευξη. Επίσης ο *Boudreault (2006)* θεώρησε ένα *Poisson* μοντέλο με $K(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ και $P_t(y) = e^{-\beta t} F_1(y) + (1 - e^{-\beta t} F_2(y)$, όπου $F_1(y)$ και $F_2(y)$ είναι 'σύνηθες' και 'σφοδρή' κατανομή του ύψους ζημιάς αντίστοιχα.

Πρόσφατα ο Cheung et al.(2010b) γενίκευσε την συνάρτηση ποινής προσθέτοντας δύο ακόμη μεταβλητές. Πρώτα ορίζουμε ως $X_t = inf_{0 \leq s < t} U_s$ το ελάχιστο πλεόνασμα πριν τον χρόνο t, δηλαδή πρίν την χρεοκοπία. Η μεταβλητή αυτή είναι το πλεόνασμα ακριβώς μετά την προ-τελευταία ζημιά πριν την χρεοκοπία συμβολίζοντας το ως $R_{N_{T-1}}$ όπου:

$R_{N_T} = u + \sum_{i=1}^{n}(cV_i - Y_i)$ $για\ n = 1,2, \ldots και\ R_0 = u.$



Σχημα3.1 *Η διαδικασία του πλεονάσματος στο χρόνο.*

Παραπάνω υπάρχει γράφημα (*Σχήμα 3.1*) που απεικονίζει όλες τις εμπλεκόμενες μεταβλητές της γενικευμένης συνάρτησης ποινής.

Η γενικευμένη συνάρτηση ποινής δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$m_\delta^*(u) = E\left[e^{-\delta T} w^*\left(U_{T^-}, |U_T|, X_t, R_{N_{T-1}}\right) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right], u \geq 0 \ (3.1)$$

Σημειώνουμε ότι με την εισαγωγή των νέων ποσοτήτων μπορούμε να αναλύσουμε το τελευταίο κλιμακωτό ύψος $X_T + |U_T|$ και τον τελευταίο ενδιάμεσο χρόνο πρίν την χρεοκοπία $V_{N_T} = \frac{U_{T-} - R_{N_T-1}}{c}$. Η τελευταία ποσότητα μελετήθηκε από τον *Cheung et al.(2010a)* χρησιμοποιώντας την ειδική περίπτωση της (3.1) με $w^*(x, y, z, v) = w(x, y, v)$:

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} w\left(U_{T^-}, |U_T|, R_{N_{T-1}}\right) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right], u \geq 0 \ (3.2)$$

Στην συνέχεια θα αναλύσουμε την μαθηματική δομή των παραπάνω συναρτήσεων όπως και τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$m_{\delta,123}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_{123}(U_{T^-}, |U_T|, X_t) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right] \ (3.3)$$

$$m_{\delta,23}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_{23}(|U_T|, X_t) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right] \ (3.4)$$

$$m_{\delta,2}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_2(|U_T|) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right] (3.5)$$

και

$$\bar{G}_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right] \ (3.6)$$

Με $\delta = 0$ καταλήγουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ όπου $\psi(u) = \Pr(T < \infty | U_0 = u)$.

Ξεκινάμε, εξετάζοντας την φύση της από κοινού συνάρτησης του χρόνου χρεοκοπίας T, το πλεόνασμα ακριβώς πρίν την χρεοκοπία U_{T^-}, το έλλειμα την στιγμή της χρεοκοπίας $|U_T|$, και το πλεόνασμα την προτελευταία ζημιά πρίν την χρεοκοπία $R_{N_{T-1}}$. Αν η χρεοκοπία επέλθει στην πρώτη ζημιά, τότε το πλεόνασμα (x) και ο χρόνος (t) συσχετίζονται από την σχέση $x = u + ct$, ή αντίστοιχα $t = \frac{x-u}{c}$. Όταν φτάσει το πλεόνασμα την τιμή x, επέρχεται ζημιά ύψους $x + y$ και δημιουργείτε έλλειμα ύψους y. Η πυκνότητα είναι $p_t(x + y)k(t)$ όπου $t = \frac{x-u}{c}$. Με αλλαγή του t με x, η από κοινού ελλειμματική πυκνότητα του πλεονάσματος πρίν την χρεοκοπία (x) και έλλειμα (y) για χρεοκοπία που επέρχεται στην πρώτη ζημιά δίνεται από:

$$h_1(x, y|u) = \frac{1}{c}\left(\frac{x-u}{c}\right) p_{\frac{x-u}{c}}(x + y) \qquad (3.7)$$

και σε αυτή την περίπτωση ο χρόνος χρεοκοπίας T είναι $\frac{x-u}{c}$ και $R_{N_{T-1}} = u$. Στην περίπτωση οπού επέρχεται χρεοκοπία σε μεταγενέστερη ζημιά μετά την πρώτη, δεν υπάρχει απλή σχέση μεταξύ αυτών των τυχαίων μεταβλητών, οπότε δηλώνουμε ότι η από κοινού συνάρτηση του χρόνου χρεοκοπίας (t), η από κοινού συνάρτηση του πλεονάσματος ακριβώς πριν την χρεοκοπία (x), ελλείματος κατά την χρεοκοπία (y) και το πλεόνασμα στην προτελευταία ζημιά πριν την χρεοκοπία (v) είναι $h_2(t, x, y, v|u)$ για $v < x$.

Δεσμεύουμε ως προς την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Η πυκνότητα της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος για την πρώτη ζημιά είναι $h_1(x, y|0)$, όπου x είναι το πλεόνασμα πάνω από το αρχικό αποθεματικό u ακριβώς πρίν την πτώση, και y είναι η πτώση κάτω από το u ετσι ώστε το πλεόνασμα μετά την πτώση να είναι $u - y$. Ο χρόνος της πτώσης ισούνται με $\frac{x}{c}$. Αν το $y > u$ τότε έχουμε χρεοκοπία από την πρώτη ζημιά, το οποίο σημαίνει ότι $U_{T^-} = x + u$, $|U_T| = y - u$, $X_t = u$, $R_{N_{T-1}} = u$. Από την άλλη αν δεν έχουμε χρεοκοπία από την πρώτη ζημιά, δηλαδή $y < u$ τότε η διαδικασία ξεκινάει από την αρχή (πιθανολογικά) με αποθεματικό $u - y$. Αν είμαστε σε αυτήν την περίπτωση η πυκνότητα είναι $h_2(t, x, y, v|0)$. Πάλι Αν το $y > u$ τότε έχουμε χρεοκοπία, το οποίο σημαίνει ότι $U_{T^-} = x + u$, $|U_T| = y - u$, $X_t = u$, $R_{N_{T-1}} = v + u$. Παρόμοια αν δεν έχουμε χρεοκοπία δηλαδή $y < u$, η διαδικασία συνεχίζει με αποθεματικό $u - y$. Αθροίζοντας (ολοκληρώνοντας) όλες τις τιμές των t, x, y, v

έχουμε σαν αποτέλεσμα παρακάτω την ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί την (3.1)

$$m_\delta^*(u) = \int_0^u m_\delta^*(u-y)\left\{\int_0^\infty h_{1,\delta}(x,y|0)dx + \int_0^\infty \int_0^x h_{2,\delta}(x,y,v|0)dvdx\right\}dy + v_\delta^*(u), \quad (3.8)$$

όπου

- $h_{1,\delta}(x,y|u) = e^{-\frac{\delta}{c}(x-u)} h_1(x,y|u) \quad (3.9)$
- $h_{2,\delta}(x,y,v|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\, h_2(t,x,y,v|u) \quad (3.10).$

είναι οι 'προ εξοφλημένες' πυκνότητες. Σε αυτή την περίπτωση, το $v_\delta^*(u)$ είναι η συνεισφορά λόγο της χρεοκοπίας στην πρώτη πτώση και δίνεται από

$$v_\delta^*(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \left\{w^*(x+u, y-u, u, u) h_{1,\delta}(x,y|0) + \int_0^x w^*(x+u, y-u, u, v+u)\, h_{2,\delta}(x,y,v|0)dv\right\} dxdy. (3.11)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.7), η (3.11) μπορεί να γραφτεί ως

$$v_\delta^*(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\int_0^\infty w^*(u+ct, y, u, u)p_t(y+ct+u)dy\right\}k(t)dt + \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x w^*(x+u, y-u, u, v + u) h_{2,\delta}^*(x,y,v|0)dvdxdy. \ (3.12)$$

Στον επόμενο ορισμό, θα εξετάσουμε την δομή της (3.8).

Ορισμός 3.1 *Η συνάρτηση Gerber-Shiu με την γενικευμένη συνάρτηση ποινής* (3.2) *ικανοποιεί την ελλειματική ανανεωτική συνάρτηση:*

$$m_\delta^*(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta^*(u-y) f_\delta(y)dy + v_\delta^*(u), \qquad u \geq 0 \ (3.13)$$

με $\varphi_\delta, f_\delta(y)$ *όπως στην απόδειξη και* $v_\delta^*(u)$ *από* (3.12).

Απόδειξη. Πρώτα, σημειώνουμε ότι η προ εξοφλημένη από κοινού συνάρτηση των $(U_{T^-}, |U_T|)$ στο (x,y) είναι:

$$h_\delta(x,y|u) = h_{1,\delta}(x,y|u) + \int_0^\chi h_{2,\delta}(x,y,v|u)dv\,. (3.14)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.14) με $u = 0$, η (3.8) μπορεί να γραφτεί ως

$$m_\delta^*(u) = \int_0^u m_\delta^*(u-y)\{h_\delta(\,x,y|0)\}\,dy + v_\delta^*(u).\,(3.15)$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι από (3.14) η (2.1) μπορεί να γραφτεί ως

$$m_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty w_{12}(x,y)h_\delta(\,x,y|u)dxdy.\,(3.16)$$

Άρα, έστω

$$\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty h_\delta(\,x,y|0)dxdy\,,(3.17)$$

είναι ξεκάθαρο από (3.16) με $w_{12}(x,y)=1$ και (2.1) ότι $\varphi_\delta = E\big[e^{-\delta t}I(T<\infty)\big|U_0=0\big] < 1,$ και ορίζουμε ότι το κλιμακωτό ύψος έχει πυκνότητα

$$f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_\delta(\,x,y|0)dx\,,(3.18)$$

Όπου είναι ξεκάθαρο ότι είναι ίδια με την προ εξοφλημένη συνάρτηση του ελλείματος$|U_T|$ όταν $u=0$. Άρα συνεπάγεται ότι η (3.15) μπορεί να γραφτεί ως την (3.13) άρα αποδείξαμε τον *ορισμό 3.1* .

Είναι ξεκάθαρο από την (3.13) ότι η γενικευμένη συνάρτηση *Gerber-Shiu* (3.1) ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από την από κοινού συνάρτηση των $U_T-, |U_T|$ και $R_{N_{T-1}}$ με μηδενικό αρχικό αποθεματικό. Συνεπώς, η ανάλυση της $m_\delta(u)$ της (3.2) είναι ουσιώδης για να πάρουμε πληροφορίες που αφορούν όλες τι μεταβλητές στην γενικευμένη συνάρτηση ποινής συμπεριλαμβανομένου και του χρόνου χρεοκοπίας. Αν $w^*(x,y,z,v) = w(x,y,v)$, τότε έχουμε ότι η (3.11) και (3.13) περιορίζεται στην

$$m_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta(u-y)f_\delta(y)dy + v_\delta(u),$$

Όπου

$$v_\delta(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \Big\{ w(x+u,y-u,u)h_{1,\delta}(\,x,y|0) \\ + \int_0^x w(x+u,y-u,v+u)h_{2,\delta}(\,x,y,v|0)dv \Big\} dxdy.$$

αλλάζοντας τα άκρα των ολοκληρωμάτων έχουμε

$$v_\delta(u) = \int_0^\infty \int_u^\infty \Big\{ w(x,y,u) h_{1,\delta}(\, x, y | u) + \int_0^x w(x,y,v) h_{2,\delta}(\, x-u, y+u, v-u|0) dv \Big\} dxdy. \quad (3.18)$$

Επί πλέον, η μορφή του $v_\delta^*(u)$ και άρα και του (3.13) απλοποιείται σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις.

Πρώτη όταν $w^*(x,y,z,v) = w_{123}(x,y,z)$ το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση ποινής δεν περιέχει την $R_{N_{T-1}}$,το δεξί μέλος της (3.11) απλοποιείται σε

$$\int_u^\infty \int_0^\infty w_{123}(x+u, y-u, u, u) \Big\{ h_{1,\delta}(\, x, y|0) + \int_0^x h_{2,\delta}(\, x, y, v|0) dv \Big\} dxdy.$$

Έπειτα χρησιμοποιώντας την (3.14) η (3.3) ικανοποιεί την παρακάτω ανανεωτική συνάρτηση

$$m_{\delta,123}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,123}(u-y) f_\delta(y) dy + v_{\delta,123}(u), \quad (3.19)$$

με

$$v_{\delta,123}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty w_{123}(x+u, y-u, u) h_\delta(\, x, y|0) dxdy. \quad (3.20)$$

Συνεχίζοντας με τις ειδικές περιπτώσεις η (3.20) και σε συνεχεία η (3.19) όταν $w^*(x,y,z,v) = w_{23}(y,z)$ περιέχει μόνο τις μεταβλητές U_{T^-}, $|U_T|$ και X_T . Με την βοήθεια των (3.18) και (3.20), η (3.4) ικανοποιεί την παρακάτω ανανεωτική συνάρτηση

$$m_{\delta,23}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,23}(u-y) f_\delta(y) dy + v_{\delta,23}(u), \quad (3.21)$$

με

$$v_{\delta,23}(u) = \varphi_\delta \int_u^\infty w_{23}(y-u, u) f_\delta(y) dy, \quad (3.22)$$

και είναι ξεκάθαρο από την (3.22) η $m_{\delta,23}(u)$ εξαρτάται μόνο από κλιμακωτό ύψος $f_\delta(y)$. Ενδιαφέρον είναι ότι η κατανομή της $X_T + |U_T|$ μπορεί να καθοριστεί από την κατανομή του κλιμακωτού ύψους.

Στην συνέχεια, όταν $w^*(x,y,z,v) = w_{23}(y,z)$, τότε από (3.21) και (3.22),η (3.5) ικανοποιεί την παρακάτω ανανεωτική συνάρτηση

$$m_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_{\delta,2}(u-y) f_\delta(y) dy + \varphi_\delta \int_u^\infty w_2(y-u) f_\delta(y) dy. \quad (3.23)$$

Η συνάρτηση (3.23) είναι η ίδια ανανεωτική συνάρτηση όπως και στην περίπτωση του μοντέλου με ανεξαρτησία (βλ. *Wilmot 2007*), αλλά με φ_δ και $f_\delta(y)$ ορισμένες από (3.17) και (3.18) αντλιστοιχα. Τέλος με $w(x,y,z,v) = w_2 = 1$, η (3.6) ικανοποιεί την

$$\bar{G}_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u \bar{G}_\delta(u-y) f_\delta(y) dy + \varphi_\delta \bar{F}_\delta(u), \quad (3.24)$$

Επομένως, η $\bar{G}_\delta(u) = 1 - G_\delta(u)$ είναι η δεξιά ουρά μίας σύνθετης γεωμετρικής.

$$\bar{G}_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varphi_\delta)(\varphi_\delta)^n \bar{F}_\delta^{*n}(u), \quad u \geq 0,$$

όπου $F_\delta(u) = 1 - \bar{F}_\delta(u)$=$\int_0^u f_\delta(y) dy$ και $1 - \bar{F}_\delta^{*n}(u)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της n-οστής συνέλιξης. Εννοείται, ότι $\varphi_\delta = \bar{G}_\delta(0)$, και η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από $\psi(u) = \Pr(T < \infty | U_0 = u)$ και είναι ισοδύναμη με το $\bar{G}_0(u)$.

Η γενική συνάρτηση (3.13) όπως και οι αντίστοιχες απλοποιημένες των ειδικών περιπτώσεων, μπορούν να εκφραστούν στους όρους μίας σύνθετης γεωμετρικής $g_\delta(u) = -\bar{G}_\delta'(u)$;όπως παρακάτω

$$g_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varphi_\delta)(\varphi_\delta)^n \bar{f}_\delta^{*n}(u), \qquad u \geq 0 \qquad (3.25)$$

όπου $\bar{f}_\delta^{*n}(u) = -\frac{d}{du} \bar{F}_\delta^{*n}(u)$ είναι η πυκνότητα της n-οστής συνέλιξης της $f_\delta(y)$. Είναι ευρέως γνωστό (*Resncik 1992*) ότι

$$m_\delta(u) = v_\delta(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u g_\delta(u-y) v_\delta(y) dy. \quad (3.26)$$

άλλη μία μορφή που μπορεί να φανεί χρήσιμη εάν η $v_\delta(u)$ είναι παραγωγίσιμη (*Wilmot και Lin* (2001)) είναι η εξής:

$$m_\delta(u) = \frac{1}{1-\varphi_\delta} \left[v_\delta(u) - v_\delta(0) \bar{G}_\delta(u) - \int_0^u \bar{G}_\delta(u-y) v_\delta'(y) dy \right] \quad (3.27)$$

Όσο αναφορά το έλλειμα, σημειώνουμε ότι λόγω η (3.23) είναι λειτουργικά της ίδιας μορφής με αυτήν της περίπτωσης που υπάρχει ανεξαρτησία, συνεπάγεται ότι όλες οι ιδιότητες της κατανομής του ελλείματος $|U_T|$ είναι οι ίδιες με την περίπτωση που υπάρχει ανεξαρτησία, η μόνη διαφορά είναι ότι χρησιμοποιούμε τους ορισμούς της φ_δ και της $f_\delta(y)$ από το μοντέλο που αναπτύχθηκε σε αυτό το κεφάλαιο.

3.2. Εναλακτική μορφή της γενικευμένης συνάρτησης Gerber-Shiu

Όπως παρατηρήθηκε παραπάνω στον *Ορισμό 3.1* η ‘προ εξοφλημένη’ από κοινού συνάρτηση των $U_{T^-}, |U_T|$ και $R_{N_{T-1}}$ είναι αρκετή για να καθοριστούν και οι τέσσερις μεταβλητές συμπεριλαμβανομένου της X_T. Θα επικεντρωθούμε να παράγουμε την από κοινού συνάρτηση αναλύοντας την $m_\delta(u)$ στην (3.2) ξεκινώντας με μία διαφορετική έκφραση της γενικευμένης συνάρτησης *Gerber-Shiu*. Στην συνέχεια θα μελετήσουμε διάφορες από κοινού και περιθώριες συναρτήσεις που είναι συνδεδεμένες με τις τέσσερις μεταβλητές. Όλα τα αποτελέσματα στο παρόν τμήμα βρίσκονται χωρίς κάποια υπόθεση για το ύψος ζημιάς ή του ενδιάμεσου χρόνου εμφάνισης κινδύνων.

Ορισμός 3.2 *Αν η* $h_{2,\delta}(\,x-u, y+u, v-u|0)$ *μπορεί να εκφραστεί ως*

$$h_{2,\delta}(\,x, y, v|0) = h_{1,\delta}(\,x, y|v)\nu_\delta(v), \qquad (3.28)$$

όπου $\nu_\delta(v-u)$ *για* $v > u$ *είναι μία μη-αρνητική συνάρτηση που αντιπροσωπεύει την προεξοφλημένη μετάβαση του πλεονάσματος από* 0 *σε* $v-u$*, τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu με την γενικευμένη συνάρτηση ποινής* (3.2) *μπορεί να βρεθεί στην μορφή:*

$$m_\delta(u) = \beta_\delta(u) + \int_0^\infty \beta_\delta(v)\tau_\delta(u, v)dv \qquad (3.29)$$

όπου

$$\tau_\delta(u, v) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\varphi_\delta}\left\{g_\delta(u-v) + \displaystyle\int_0^v \nu_\delta(v-t)g_\delta(u-t)dt\right\}, v < u \\ \nu_\delta(v-u) + \dfrac{1}{1-\varphi_\delta}\displaystyle\int_0^u \nu_\delta(v-t)g_\delta(u-t)dt, \qquad v > u \end{cases} \qquad (3.30)$$

και $\nu_\delta(v) = \tau_\delta(0, v)$ *δίνεται από την* (3.28). *Συγκεκριμένα, για* $\delta = 0$,

$$\tau_0(u, v) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\psi(0)}\left\{-\psi'(u-v) + \displaystyle\int_0^v \nu_0(v-t)\psi'(u-t)dt\right\}, v < u \\ \nu_0(v-u) + \dfrac{1}{1-\psi(0)}\displaystyle\int_0^u \nu_0(v-t)\psi'(u-t)dt, \qquad v > u \end{cases}$$

Απόδειξη. Για ευκολία, δηλώνουμε ότι

$$\beta_\delta(u) = \int_0^\infty \int_u^\infty w(x,y,u) h_{1,\delta}(x,y|u)dxdy, \qquad (3.31)$$

και

$$\xi_\delta(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \int_u^\infty w(x,y,u) h_{2,\delta}(x-u, y+u, v-u|0)dxdydv, \qquad (3.32)$$

έτσι ώστε η (3.18) μπορεί να εκφραστεί ως $v_\delta(u) = \beta_\delta(u) + \xi_\delta(u)$. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας την (3.26) παίρνουμε την εξής λύση της $m_\delta(u)$

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= v_\delta(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u g_\delta(u-t)v_\delta(t)dt \\ &= \beta_\delta(u) + \xi_\delta(u) \\ &+ \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u g_\delta(u-t)\{\beta_\delta(u) + \xi_\delta(u)\}dt \quad (3.33) \end{aligned}$$

άρα χρησιμοποιώντας την (3.28), από την (3.32) παίρνουμε ότι $\xi_\delta(u) = \int_u^\infty \beta_\delta(u)v_\delta(v-u)$, και το δεξί μέλος της παραπάνω έκφρασης εκτός του πρώτου όρου μπορεί να γραφτεί

$$\begin{aligned} &\xi_\delta(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u g_\delta(u-t)\{\beta_\delta(u) + \xi_\delta(u)\}dt \\ &\quad = \int_u^\infty \beta_\delta(u)v_\delta(v-u) \\ &\quad + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u g_\delta(u-t)\left\{\beta_\delta(u) + \int_t^\infty \beta_\delta(u)v_\delta(v-u)\right\}dt \end{aligned}$$

αλλάζοντας την σειρά των ολοκληρωμάτων έχουμε

$$\begin{aligned} &\xi_\delta(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u g_\delta(u-t)\{\beta_\delta(u) + \xi_\delta(u)\}dt \\ &\quad = \int_u^\infty \beta_\delta(u)v_\delta(v-u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u \beta_\delta(u)g_\delta(u-t)dt \\ &\quad + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\left\{\int_o^u \beta_\delta(u)\int_0^v v_\delta(v-t)g_\delta(u-t)dtdv \right. \\ &\quad \left. + \int_u^\infty \beta_\delta(u)\int_0^u v_\delta(v-t)g_\delta(u-t)dtdv\right\} \qquad (3.34) \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας την (3.34) στην (3.33) καταλήγουμε στην (3.29) που θέλαμε να αποδείξουμε. Το δεξί μέλος της (3.28) ερμηνεύεται ως: μόλις το πλεόνασμα φτάσει το ύψος $v-u$, η επόμενη πτώση προκαλεί χρεοκοπία και εξηγείται από την συνάρτηση $h_{1,\delta}$ με πλεόνασμα πρίν την χρεοκοπία $x-u$ και έλλειμα αμέσως μετά την χρεοκοπία $y+u$.

Σημείωση. *Είναι ξεκάθαρο από τη* (3.28), (3.29) *και* (3.30) *ότι η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση* $h_{2,\delta}$ *με μηδενικό αρχικό αποθεματικό είναι αρκετό για να εξακριβώσει την* $\tau_\delta(u,v)$ *στην* (3.30), *που είναι σημαντική για την ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu.*

Ορισμός 3.3 *Όταν δεν έχουμε χρεοκοπία στην πρώτη ζημιά, η από κοινού συνάρτηση του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, το έλλειμα την στιγμή της χρεοκοπίας, και το πλεόνασμα στην προτελευταία ζημιά πριν την χρεοκοπία δίνεται από*

$$h_{2,\delta}(x,y,v|u) = h_{1,\delta}(x,y|v)\tau_\delta(u,v), \qquad x>v, \quad (3.35)$$

Όπου $\tau_\delta(u,v)$ *δίνεται από την* (3.30).

Απόδειξη. Μπορούμε να δούμε την συνάρτηση ποινής ως αναμενόμενη τιμή, και να την εκφράσουμε ως

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \int_u^\infty w(x,y,u)h_{1,\delta}(x,y|v)dxdy + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_u^\infty w(x,y,u)h_{2,\delta}(x,y,v|u)dxdydv. \quad (3.36)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.31) και συκγρίνοντας την παραπάνω έκφραση με την (3.29) έχουμε σαν αποτέλεσμα

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_u^\infty w(x,y,u)h_{2,\delta}(x,y,v|u)dxdydv = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_v^\infty w(x,y,v)h_{1,\delta}(x,y|v)dxdydv$$

και εξισώνοντας φτάνουμε στο ζητούμενο την (3.35).

Επίσης, ερμηνεύοντας την συνάρτηση ποινής (3.38) σαν πιθανότητα, θεωρούμε την $\beta_\delta(u)$ ως το μέρος της πιθανότητας που αφορά αν επέλθει χρεοκοπία στην πρώτη ζημιά και τον υπόλοιπο όρο, το μέρος της πιθανότητας αν επέλθει χρεοκοπία έπειτα από την πρώτη ζημιά.

Ολοκληρώνοντας ως προς y την (3.35), παίρνουμε την περιθώρια προεξοφλημένη πυκνότητα των (x,v),

$$h_\delta^{(2)}(x,v|u) = h_{1,\delta}^{(1)}(x|v)\tau_\delta(u,v), \qquad x>v, \quad (3.37)$$

όπου $\int_0^\infty h_{1,\delta}(x,y|v)dy = h_{1,\delta}^{(1)}(x|v)$.

Θυμίζουμε, από το δεύτερο κεφάλαιο ότι η θεμελιώδης συνάρτηση του *Lundberg (Lundberg's fundamental equation)* δίνεται από την

$$E\left[e^{-sY-(\delta-cs)V}\right] = 1 \qquad (3.38)$$

Η οποία είναι σημαντική για να αναλύσουμε την συνάρτηση *Gerber-Shiu* στο παρόν μοντέλο.

Πρώτα θα χρειαστούμε την παρακάτω συνάρτηση που θεώρησε ο *Cheung (2010b)*

$$\eta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\omega_t(u+ct)dK(t) \qquad (3.39)$$

για μία συνάρτηση ω_τ. Ο μετασχηματισμός Laplace της είναι

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty e^{-\delta t}\omega_t(u+ct)dK(t)du \\ &= \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\left\{\int_0^\infty e^{-s(u+ct)}\omega_t(u+ct)du\right\}dK(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\left\{\widetilde{\omega}_t(s) - \int_0^{ct} e^{-sx}\omega_t(x)dx\right\}dK(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\widetilde{\omega}_t(s)dK(t) \\ &\quad - \int_0^\infty\int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x+(\delta-cs)(ct-x)\}}\,\omega_t(x)dxdK(t).\end{aligned}$$

άρα θέτοντας

$$\widetilde{\omega}_*(s) = \int_0^\infty\int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x+s(ct-x)\}}\,\omega_t(x)dxdK(t)$$

καταλήγουμε ότι

$$\tilde{\eta}(s) = \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\widetilde{\omega}_t(s)dK(t) - \widetilde{\omega}_*(\delta-cs). \qquad (3.40)$$

Για να βρούμε εκφράσεις για τις $\varphi_\delta, f_\delta(y)$ και $h_\delta(x,y|0)$ της (3.13) συναρτήσει, με όρους που να σχετίζονται με την κατανομή του ύψους ζημιάς $P_t(y)$ και/ή την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης ζημιάς $K(t)$, μία σύνηθες πρακτική είναι να δεσμεύουμε ως προς τον χρόνο και το ύψος της πρώτης ζημιάς. Έτσι κι εδώ εφαρμόζουμε αυτή την πρακτική για να πάρουμε μία ολοκληρωτική συνάρτηση για την $m_\delta(u)$ στην (3.2), συνεπάγεται ότι

$$m_\delta(u) = \beta_\delta(u) + \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{t,\delta}(u+ct)dK(t)\,, (3.41)$$

όπου

$$\beta_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\alpha_t(u+ct,u)dK(t) \quad (3.42)$$

με

$$\alpha_t(x,u) = \int_x^\infty w(x,y-x,u)dP_t(y), \quad (3.43)$$

και

$$\sigma_{t,\delta}(x) = \int_0^x m_\delta(x-y)\,dP_t(y), \qquad (3.44)$$

Να σημειώσουμε ότι εδώ φαίνεται ξεκάθαρα ότι η $\beta_\delta(u)$ είναι το μέρος της που συνεισφέρει στην συνάρτηση ποινής όταν επέλθει χρεοκοπία στην πρώτη ζημιά.

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της (3.41) είναι της μορφής (3.39), οπότε παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace, παίρνουμε

$$\tilde{m}_\delta(s) = \tilde{\beta}_\delta(s) + \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\tilde{\sigma}_{t,\delta}(s)dK(t) - \tilde{\sigma}_w(\delta-cs), (3.45)$$

όπου

$$\tilde{\sigma}_w(s) = \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x+s(ct-x)\}}\,\sigma_{t,\delta}(x)dxdK(t). (3.46)$$

κάνοντας αλλαγή της σειράς των ολοκληρωμάτων η (3.46) γίνεται

$$\tilde{\sigma}_w(s) = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{c}(\delta-s)} \int_{\frac{x}{c}}^\infty e^{-st}\,\sigma_{t,\delta}(x)dK(t)dx. (3.46)$$

Αλλά $\tilde{\sigma}_{t,\delta}(x) = \tilde{m}_\delta(s)\tilde{p}_t(s)$ από (3.44) άρα συνεπάγεται ότι η (3.45) εκφράζεται ως

$$\tilde{m}_\delta(s) = \tilde{\beta}_\delta(s) + \tilde{m}_\delta(s)\int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\tilde{p}_t(s)dK(t) - \tilde{\sigma}_w(\delta-cs),$$

και επειδή $E\left[e^{-sY-(\delta-cs)V}\right] = \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\tilde{p}_t(s)dK(t)$, συνεπάγεται ότι

$$\{1 - E[e^{-sY-(\delta-cs)V}]\}\tilde{m}_\delta(s) = \tilde{\beta}_\delta(s) - \tilde{\sigma}_w(\delta - cs). \quad (3.47)$$

Σημειώνουμε ότι το αριστερό μέρος της συνάρτησης είναι 0 όταν το s αντικατασταθεί με μία ρίζα (μη-αρνητική πραγματική) της εξίσωσης του *Lundberg*. Αυτό μας επιτρέπει να εξάγουμε άγνωστες ποσότητες του όρου $\tilde{\sigma}_w(\delta - cs)$ από το δεξί μέλος της συνάρτησης.

3.3. Προεξοφλημένες από κοινού και περιθώρειες πυκνότητες

Σε αυτή την ενότητα θα εκφράσουμε την από κοινού συνάρτηση των $U_{T^-}, |U_T|, X_T, R_{N_{T-1}}$ σε όρους των προεξοφλημένων $h_{1,\delta}(x, y|u)$ και $h_{2,\delta}(x, y, v|u)$ όπως είναι ορισμένες στις (3.9) και (3.10) αντίστοιχα. Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε την συνάρτηση ποινής $w^*(x, y, z, v) = w(x, y, v) = e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 v}$ όπως στην συνάρτηση (3.2) και η συνάρτηση (3.18) γίνεται

$$v_\delta(u) = \int_0^\infty \int_u^\infty \left\{ e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 v} h_{1,\delta}(x - u, y + u|u) + \int_0^x e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 v} h_{2,\delta}(x - u, y + u, v - u|0) dv \right\} dxdy. \quad (3.48)$$

Στην συνέχεια έχουμε και την πιο γενικευμένη συνάρτηση που συμπεριλαμβάνει και τις τέσσερις μεταβλητές ως $w(x, y, z, v) = e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 v}$. Η συνάρτηση (3.11) γίνεται $v_\delta^*(u) = e^{-s_3 u} v_\delta(u)$. Συνεπάγεται ότι αυτή η συνάρτηση *Gerber-Shiu* εκφράζεται ως

$$m_\delta^*(u) = E\left[e^{-\delta T - s_1 U_{T^-} - s_2 |U_T| - s_3 X_t - s_4 R_{N_{T-1}}} I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right]$$

ικανοποιεί, από (3.26)

$$m_\delta^*(u) = e^{-s_3 u} v_\delta(u) + \int_0^u \frac{g_\delta(u - z)}{1 - \varphi_\delta} e^{-s_3 z} v_\delta(z) dy.$$

η οποία μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας την (3.48)

$$m_\delta^*(u) = \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 u - s_4 v} h_{1,\delta}(x - u, y + u|0) dxdy$$

$$+ \int_0^\infty \int_u^\infty \int_u^x e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 u - s_4 v} h_{2,\delta}(x - u, y + u, v - u|0)\, dvdxdy$$

$$+ \int_0^u \int_0^\infty \int_z^x e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 z} \left\{ h_{1,\delta}(x - z, y + z|0) \frac{g_\delta(u - z)}{1 - \varphi_\delta} \right\} dxdydz$$

$$+\int_0^u\int_0^\infty\int_z^\infty\int_z^x e^{-s_1x-s_2y-s_3z-s_4z}\left\{h_{2,\delta}(x-z,y+z,v-z|0)\frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}\right\}dvdxdydz.$$

Επομένως, από την ιδιότητα της μοναδικότητας του μετασχηματισμού *Laplace-Stieltjes*, η από κοινού συνάρτηση των U_{T^-}, $|U_T|, X_T$, $R_{N_{T-1}}$ έχει προ εξοφλημένες ελλειμματικές πυκνότητες στο $\mathbb{R}^4$.

Ορισμός 3.4 *Η από κοινού συνάρτηση* U_{T^-}, $|U_T|, X_T$, $R_{N_{T-1}}$ *σε* (x,y,z,v) *ορίζονται ως*

1. $h^*_{12,\delta}(x,y|u)=h_{1,\delta}(x-u,y+u|0)$ *με* $\{(x,y,z,v)|x>u,y>0,z=u,v=u\}$ *αντιστοιχεί σε χρεοκοπία από την πρώτη ζημιά,*
2. $h^*_{124,\delta}(x,y,v|u)=h_{2,\delta}(x-u,y+u,v-u|0)$ *με* $\{(x,y,z,v)|x>u,y>0,z=u,u<v<x\}$ *αντιστοιχεί σε χρεοκοπία μετά την πρώτη ζημιά,*
3. $h^*_{123,\delta}(x,y,z|u)=h_{1,\delta}(x-z,y+z|0)\frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}$ *με* $\{(x,y,z,v)|x>z,y>0,0<z<u,v=z\}$ *αντιστοιχεί σε πτώση του πλεονάσματος χωρίς να επέλθει χρεοκοπία ακριβώς πριν επέλθει χρεοκοπία από την επόμενη ζημιά, και*
4. $h^*_{\delta}(x,y,z,v|u)=h_{2,\delta}(x-z,y+z,v-z|0)\frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}$ *με* $\{(x,y,z,v)|z<v<x,y>0,0<z<u\}$ *αντιστοιχεί σε πτώση του πλεονάσματος χωρίς να επέλθει χρεοκοπία και να επέλθει χρεοκοπία όχι όμως από την αμέσως επόμενη ζημιά.*

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις μπορούν να ερμηνευτούν, εμείς θα επικεντρωθούμε στην 3η $h^*_{123,\delta}(x,y,z|u)$.Σημειώνουμε ότι από την (3.25) η $\frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}$ μπορεί να εκφραστεί ως $\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_\delta)^n f_\delta^{*n}(u-z)$, και η ποσότητα αυτή ερμηνεύεται ως πυκνότητα του πλεονάσματος, ξεκινώντας με αρχικό αποθεματικό u, την στιγμή που έχει φτάσει το ύψος z μετά από ένα αυθαίρετο αριθμό πτώσεων. Αφού το z πρέπει να είναι το ελάχιστο ύψος του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, η επόμενη πτώση θα πρέπει να προκαλέσει χρεοκοπία και αυτό αντιπροσωπεύεται από την $h_{1,\delta}(x,y|z)$. Παρόμοια μπορούμε να ερμηνεύσουμε και την $h^*_\delta(x,y,z,v|u)$.

Ορισμός 3.5 *Η από κοινού συνάρτηση* $U_{T^-}, |U_T|, X_T$ *ορίζονται ως*

1. $h^{**}_{12,\delta}(x, y|u) = h_{1,\delta}(x - u, y + u|0)$ *με* $\{(x, y, z)|x > u, y > 0, z = u\}$ *αντιστοιχεί σε χρεοκοπία από την πρώτη ζημιά που το πλεόνασμα θα πέσει κάτω από το αρχικό αποθεματικό* u,

2. $h^{**}_{123,\delta}(x, y, z|u) = h_{1,\delta}(x - z, y + z|0)\frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta}$ *με* $\{(x, y, z)|x > z, y > 0, 0 < z < u\}$ *αντιστοιχεί σε χρεοκοπία όχι στην πρώτη πτώση του πλεονάσματος.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ίδια προσέγγιση, η συνάρτηση ποινής $w_{123}(x, y, v) = e^{-s_1x-s_2y-s_3z}$, η (3.20) γίνεται

$$v_{\delta,123}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty e^{-s_1(x+u)-s_2(y-u)-s_3u} h_\delta(x, y|0)dxdy$$
$$= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_3u} h_\delta(x - u, y + u|0)dxdy,$$

και μετά από (3.19) και (3.26) έχουμε

$$m^*_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T-s_1U_{T^-}-s_2|U_T|-s_3X_t} I(T < \infty)\middle|U_0 = u\right]$$
$$= v_{\delta,123}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u g_\delta(u - z)v_{\delta,123}(z)dz$$
$$= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_3u} h_\delta(x - u, y + u|0)dxdy$$
$$+ \int_0^u \int_0^\infty \int_z^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_3z} \left\{h_\delta(x - z, y + z|0)\frac{g_\delta(u - z)}{1 - \varphi_\delta}\right\} dxdydz.$$

Επομένως, από την ιδιότητα της μοναδικότητας του μετασχηματισμού *Laplace-Stieltjes*, η από κοινού συνάρτηση των $U_{T^-}, |U_T|, X_T$ έχει προ εξοφλημένες ελλειμματικές πυκνότητες στο $\mathbb{R}^3$.

4. Γενική κλάση εξάρτησης

4.1.Εισαγωγή

Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγαμε την γενικευμένη συνάρτηση *Gerber-Shiu.* Όπως αναφέραμε και στο δεύτερο κεφάλαιο, η συνάρτηση με τις τέσσερις μεταβλητές (3.1) μπορεί να προσδιοριστεί από την από κοινού συνάρτηση των $(U_{T^-}, |U_T|, R_{N_T-1})$, οπότε σε αυτό το κεφάλαιο θα εννοούμε την (3.2) όταν αναφερόμαστε σε γενικευμένη συνάρτηση *Gerber-Shiu.* Θα εισάγουμε μία γενική κλάση εξάρτησης ανάμεσα στον χρόνο εμφάνισης και το ύψος της ζημιάς. Θα δείξουμε κάποιες δομικές ιδιότητες με την συγκεκριμένη μορφή εξάρτησης και τέλος αποτέλεσματα με την υπόθεση ότι ο χρόνος εμφάνισης των γεγονώτων ακολουθεί μία Erlang κατανομή.

Υπενθυμίζουμε από τον ορισμό 3.1 η γενικευμένη συνάρτηση *Gerber-Shiu* ικανοποιεί την ελλειματική ανανεωτική εξίσωση:

$$m_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta(u-y) f_\delta(y) dy + v_\delta(u),$$

Θέτοντας ως $\beta_\delta(u) = \int_0^\infty \int_u^\infty w(x,y,u) h_{1,\delta}(x,y|u) dxdy$ τότε η (3.18) γίνεται

$$v_\delta(u) = \beta_\delta(u) + \int_0^\infty \int_u^\infty \int_0^x w(x,y,v) h_{2,\delta}(x-u, y+u, v-u|0) dvdxdy \quad (4.1).$$

Επίσης από την συνάρτηση (3.47) ο μετασχηματισμός *Laplace* της γενικευμένης συνάρτησης *Gerber-Shiu* ικανοποιεί

$$\tilde{m}_\delta(s) = \frac{\tilde{\beta}_\delta(s) - \tilde{\sigma}_\delta(s)}{1 - \tilde{f}(\delta - cs, s)} \qquad (4.2)$$

όπου $\tilde{\sigma}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \int_{x/c}^\infty e^{-(\delta-cs)t} \int_0^x m_\delta(x-y) f(t,y) dydtdx,$

είναι βολικό να ξανάγράψουμε την $\tilde{\sigma}_\delta(s)$ ως

$$\tilde{\sigma}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \varphi_\delta(x, \delta - cs) dx \qquad (4.3)$$

όπου

$$\varphi_\delta(x,r) = \int_{x/c}^{\infty} e^{-rt} \int_0^x m_\delta(x-y) f(t,y) dy dt. \quad (4.4)$$

Όπως αναφέραμε η από κοινού συνάρτηση κατανομής του χρόνου εμφάνισης ζημιάς και του ύψους ζημιάς θα έχουν μορφή μίας γενικής κλάσης εξάρτησης

$$f(t,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} k_{ij}(t) b_{ij}(y), \ (4.5)$$

Το κλασικό *Sparre Andersen* μοντέλο χωρίς εξάρτηση μπορεί να δοθεί ως ειδική περίπτωση της παραπάνω συνάρτησης με $m = n_i = 1$, και το *Coxian* μοντέλο από της διατριβές των *Li and Garrido(2005)* και *Wilmot and Woo (2010)* με ανεξάρτητα τον χρόνο εμφάνισης και το ύψος ζημιάς και με $k_{ij}(t)$ να ακολουθεί Erlang κατανομή. Πρωτού ξεκινήσουμε με τις δομικές ιδιότητες, θα σημειώσουμε πως θα γίνουν κάποια ορισμένα αποτελέσματα από την γενικευμένη συνάρτηση *Gerber-Shiu* στην περιπτώση που η από κοινού συνάρτηση κατανομής είναι η προαναφερντα (4.5).

Η $\varphi_\delta(x,r)$ γίνεται:

$$\varphi_\delta(x,r) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} r_{\delta,ij}(x) \int_{\frac{x}{c}}^{\infty} e^{-rt} k_{ij}(t) dt$$

όπου

$$r_{\delta,ij}(x) = \int_0^{\chi} m_\delta(x-y) b_{ij}(y) dy$$

Επίσης η $\beta_\delta(u)$ θα γίνει

$$\beta_\delta(u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \gamma_{ij}(u+ct,u) k_{ij}(t) dt,$$

$$\gamma_{ij}(x,u) = \int_x^{\infty} w(x, y-x, u)\, b_{ij}(y) dy$$

Τέλος ο μετασχηματισμός Laplace της από κοινού συνάρτησης $f(s_1, s_2)$δίνεται από:

$$\tilde{f}(s_1,s_2) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{k}_{ij}(s_1) \tilde{b}_{ij}(s_2),$$

οπού $\tilde{k}_{ij}(s_1), \tilde{b}_{ij}(s_2)$ οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace.

4.2.Δομικές ιδιότητες στην μεμειγμένη περίπτωση

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση οπού $b_{ij}(y) \geq 0$ για όλα τα i, j, και y.Τότε $b_{ij}(y) = q_{ij}p_{ij}(y)$, όπου $q_{ij} = \tilde{b}_{ij}(0)$ είναι η πιθανότητα ότι ο "τύπος ζημιάς" (π.χ. μικρή,μεγάλη) είναι τύπου (ij), και $p_{ij}(y)$ έιναι η σ.π.π. του ύψους ζημιάς δοθέντως ότι η ζημιά είναι τύπου (ij). Αντίστοιχα, η $k_{ij}(t)$ είναι η σ.π.π. του ενδιάμεσου χρόνου εμφάνισης ζημιάς δοθέντος ότι ο τύπος ζημιάς είναι τύπου (ij). Οπότε οι τρείς μεταβλητές μας, ύψος ζημιάς, ενδιάμεσος χρόνος και τύπος ζημιάς έχουν μία πολυδιάστατη κατανομή αναλογική με $q_{ij}p_{ij}(y)k_{ij}(t)$.

Έστω ότι χρεοκοπία επέρχεται τουλάχιστον από την δεύτερη αποζημίωση και έπειτα $N_T \geq 2$, στον χρόνο $T = t$. Τότε το πλεόνασμα ακριβώς πρίν την χρεοκοπία $U_{T^-} = x$ και το πλεόνασμα ακριβώς μετά την προτελευταία ζημία πρίν επέλθει χρεοκοπία $R_{N_{T-1}} = v$. Συνεπάγεται, ότι ο τελευταίος ενδιάμεσος χρόνος ισούνται με $(x - v)/c$ και η τελευταία ζημιά είναι $x + y$ για να είναι μεγαλύτερη από το x. Είναι εμφανές ότι ο τύπος ζημιάς εξαρτάται από το x και το v. Δεσμέυοντας ως προς τον "τύπο ζημιάς" μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$h_2(t, x, y, v|u) = h^{(2)}(\,t, x, v|u) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}^*(x, v) p_{ij}(x + y),$$

Όπου $a_{ij}^*(x, v) \geq 0$ και $h^{(2)}(\,t, x, v|u)$ είναι η περιθώρια πυκνότητα των T, U_{T^-} και $R_{N_{T-1}}$, την στιγμή της χρεοκοπίας που επέρχεται από την δεύτερη ζημιά. Έστω ότι $f_2(y|t, x, v, u)$ είναι η δεσμευμένη πυκνότητα του ελλείματος $|U_T|$. Στην παραπάνω συνάρτηση η δεσμευμένη πυκνότητα είναι το διπλό άθροισμα του δεξιού μέλους.

Κάνοντας προ-εξόφληση με δ ως ένταση επιτοκίου η παραπάνω συνάρτηση γίνεται

$$h_{2,\delta}(\,x, y, v|u) = h_{\delta}^{(2)}(\,x, v|u) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}^*(x, v) p_{ij}(x + y),$$

Θέτοντας $a_{\delta,ij}(x, v|u) = h_{\delta}^{(2)}(\,x, v|u) a_{ij}^*(x, v) \geq 0$ η συνάρτηση γίνεται

$$h_{2,\delta}(\,x, y, v|u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} a_{\delta,ij}(x, v|u) p_{ij}(x + y)$$

.

Άρα καταλήγοντας στην παραπάνω συνάρτηση που αφορά χρεοκοπία που επέρχεται από ζημιά μεταγενέστερη της πρώτης. Στην συνέχεια έχουμε την από κοινού συνάρτηση του πλεονάσματος και ελλείματος δοθέντος ότι θα επέλθει χρεοκοπια από την πρώτη ζημιά.

$$h_{1,\delta}(\,x,y|u) = \frac{1}{c}e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} q_{ij}k_{ij}\left(\frac{x-u}{c}\right)p_{ij}(x+y).$$

Έχοντας και τις δύο από κοινου συναρτήσεις μπορούμε χρησιμοποιόντας την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση των $U_{T}-$, $|U_T|$ από το τρίτο κεφάλαιο να έχουμε

$$\begin{aligned} h_\delta(\,x,y|u) &= h_{1,\delta}(\,x,y|u) + \int_0^{\chi} h_{2,\delta}(\,x,y,v|u)dv \\ &= \frac{1}{c}e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} q_{ij}k_{ij}\left(\frac{x-u}{c}\right)p_{ij}(x+y) \\ &+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left\{\int_0^{\chi} a_{\delta,ij}(x,v|u)\right\}p_{ij}(x+y). \end{aligned}$$

Θέτοντας $a_{\delta,ij}(x|u) = \frac{1}{c}e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)}q_{ij}k_{ij}\left(\frac{x-u}{c}\right) + \int_0^{\chi} a_{\delta,ij}(x,v|u) \geq 0$ συνεπάγεται ότι $h_\delta(\,x,y|u) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} a_{\delta,ij}(x|u)p_{ij}(x+y)$.

Ολοκληρώνοντας ως προς y βρίσκουμε την περιθώρια πυκνότητα του πλεονάσματος

$$h_\delta(\,x|u) = \int_0^{\infty} h_\delta(\,x,y|u)dy = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} a_{\delta,ij}(x|u)\bar{P}_{ij}(x)$$

με $\bar{P}_{ij}(x) = \int_x^{\infty} p_{ij}(y)\,dy$.

Αν δεσμέυσουμε ως προς το γεγονός ότι συμβαίνει χρεοκοπία για $u = 0$ έχουμε $\varphi_\delta = \int_0^{\infty} h_\delta(\,x|0)dx = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\int_0^{\infty} a_{\delta,ij}(x|0)\bar{P}_{ij}(x)dx$.

Τέλος η πτώση του πλεονάσματος έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_\delta = \int_0^{\infty}\frac{h_\delta(\,x,y|0)}{\varphi_\delta}dx = \frac{1}{\varphi_\delta}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\int_0^{\infty} a_{\delta,ij}(x|0)p_{ij}(x+y)dx.$$

4.3.Ενδιάμεσοι χρόνοι ζημιάς με Erlang κατανομή

Οι *Wilmot,Woo (2010)* και *Li,Garrido (2005)* είχαν αναλύσει το *Sparre Andersen* μοντέλο οπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούσαν *Coxian* κατανομή αλλα με ανεξαρτησία ανάμεσα του χρόνου και του ύψους ζημιάς. Το μοντέλο αυτό θεωρήθηκε ως αρκετά γενικό, διότι είχε σαν ειδικές περιπτώσεις το κλασικό μοντέλο *Poisson* (*Gerber,Shiu (1998)*), το *Erlang (n)* μοντέλο κινδύνου (*Li,Garrido (2004)*), και επίσης το γενικευμένο *Erlang* μοντέλο κινδύνου (*Gerber,Shiu (2005)*).

Θεωρούμε ότι $k_{ij}(t) = \tau_{ij}(t)$ οπου η $\tau_{ij}(t)$ ακολουθεί *Erlang* (j, λ_i) κατανομή

$$\tau_{ij}(t) = \frac{\lambda_i(\lambda_i t)^{j-1} e^{-\lambda_i t}}{(j-1)!}, \qquad t > 0.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από

$$\tilde{\tau}_{ij}(t) = \int_0^\infty e^{-st}\tau_{ij}(t)dt = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}\right)^j$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της γενικευμένης συνάρτησης των Gerber-Shiu $\widetilde{m}_\delta(s)$ δίνεται από την συνάρτηση (4.2). Για να αξιολογήσουμε την συνάρτηση πρέπει να αξιολογήσουμε τα επιμέρους μέρη της. Ξεκινάμε με τον παρανομαστή, οπού θα χρειαστούμε τον μετασχηματιμό Laplace της από κοινού συνάρτησης.

Η περιθώρια κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου εμφάνισης ζημιάς δίνεται από

$$k(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \tilde{b}_{ij}(0)\tau_{ij}(t)\,,$$

και ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\tilde{k}(\sigma) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \tilde{b}_{ij}(0)\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}\right)^j$$

άρα $\tilde{f}(\delta - cs, s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta-cs}\right)^j \tilde{b}_{ij}(s)$.

Συνεχίζουμε με την $\widetilde{\beta}_\delta(s)$ όπου είναι ο μετασχηματισμός Laplace της

$$\beta_\delta(u) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\int_0^\infty e^{-\delta t}\gamma_{ij}(u+ct,u)\tau_{ij}(t)dt,$$

.

τέλος έχουμε την $\tilde{\sigma}_\delta(s)$, που για να την αναλύσουμε πρέπει πρώτα να αναλύσουμε την $\varphi_\delta(x,r)$. Έχουμε $k_{ij}(t) = \tau_{ij}(t)$ και με αλλαγή του j με k έχουμε

$$\varphi_\delta(x,r) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} r_{\delta,ij}(x)\int_{\frac{x}{c}}^{\infty} e^{-rt}k_{ij}(t)dt = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i} r_{\delta,ik}(x)\int_{\frac{x}{c}}^{\infty} e^{-rt}\tau_{ik}(t)dt$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i} r_{\delta,ij}(x)\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + r}\right)^k \int_{\frac{x}{c}}^{\infty} \frac{(\lambda_i + r)^k t^{k-1} e^{-(\lambda_i+r)t}}{(k-1)!} dt =>$$

$$\varphi_\delta(x,r) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i} {\lambda_i}^k r_{\delta,ik}(x) e^{-(\lambda_i+r)\frac{x}{c}} \sum_{j=1}^{k} \frac{(\lambda_i + r)^{-j} x^{k-j}}{c^{k-j}(k-j)!}.$$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε την $\tilde{\sigma}_\delta(s)$,

$$\tilde{\sigma}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\varphi_\delta(x,\delta - cs)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} {\lambda_i}^k r_{\delta,ik}(x) e^{-(\lambda_i+\delta-cs)\frac{x}{c}} \sum_{j=1}^{k} \frac{(\lambda_i + \delta - cs)^{-j} x^{k-j}}{c^{k-j}(k-j)!}\right\} dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{k} {\lambda_i}^k \frac{(\lambda_i + \delta - cs)^{-j}}{c^{k-j}(k-j)!} \times \int_0^\infty x^{k-j} e^{-sx} e^{-(\lambda_i+\delta-cs)\frac{x}{c}} r_{\delta,ik}(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{k} {\lambda_i}^k \frac{(\lambda_i + \delta - cs)^{-j}}{c^{k-j}(k-j)!} \times \int_0^\infty x^{k-j} e^{-\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right)x} r_{\delta,ik}(x)\,dx$$

Θέτοντας $\tilde{r}^{(j)}_{\delta,ik}(s) = \int_0^\infty (-x)^j e^{-sx} r_{\delta,ik}(x)$, απλοποιούμε το δεξί μέλος της συνάρτησης ως εξής:

$$\tilde{\sigma}_\delta(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{k} {\lambda_i}^k \frac{\tilde{r}^{(k-j)}_{\delta,ik}\left(\frac{\lambda_i + \delta}{c}\right)}{(-c)^{k-j}(k-j)!}(\lambda_i + \delta - cs)^{-j}$$

Θέλοντας να απλοποιήσουμε κι άλλο το δεξί μέλος θέτουμε ότι

$$\theta_{ij} = \sum_{k=j}^{n_i} {\lambda_i}^k \frac{\tilde{r}^{(k-j)}_{\delta,ik}\left(\frac{\lambda_i + \delta}{c}\right)}{(-c)^{k-j}(k-j)!},$$

άρα καταλήγουμε ότι

$$\tilde{\sigma}_\delta(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\theta_{ij}}{(\lambda_i + \delta - cs)^j}$$

$$= \frac{\{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i + \delta - cs)^{n_i}\} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\theta_{ij}}{(\lambda_i + \delta - cs)^j}}{\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i + \delta - cs)^{n_i}} \quad => \tilde{\sigma}_\delta(s)$$

$$= \frac{q(s)}{\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i + \delta - cs)^{n_i}} \ .$$

Να σημειώσουμε ότι το $q(s)$ είναι ένα πολυώνυμο $n-1$ βαθμών ή λιγότερων.

Από την γενικευμένη συνάρτηση του Lundberg έχουμε ότι

$$\tilde{f}(\delta - cs, s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - cs}\right)^j \tilde{b}_{ij}(s) = 1.$$

Έστω ότι υπάρχουν n μη-αρνητικές διαφορετικές λύσεις ρ_k; $k = 1,2, \dots, n$ για την συνάρτηση του Lundberg. Θεωρώντας ότι $|\widetilde{m}_\delta(\rho_k)| < \infty$, τα μηδενικά στον παρονομαστή της $\widetilde{m}_\delta(\rho_k)$ πρέπει να συνάδουν με του αριθμητή λόγω της παραπάνω υπόθεσης, συνεπάγεται ότι $\tilde{\sigma}_\delta(\rho_k) = \tilde{\beta}_\delta(\rho_k)$ για κάθε $k = 1,2, \dots, n$.

Όπως αναφέραμε παραπάνω το $q(s)$ είναι ένα πολυώνυμο $n-1$ βαθμών ή λιγότερων. Συνεπάγεται από τον τύπο Lagrange ότι

$$q(s) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i = \sum_{k=1}^{n} q(\rho_k) \prod_{j=1, j\neq i}^{k} \frac{(s - \rho_j)}{(\rho_k - \rho_{j)}}.$$

Οπού $q(\rho_k) = \tilde{\beta}_\delta(s) \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i + \delta - cs)^{n_i}, k = 1,2, \dots, n$

άρα αναλύσαμε όλα τα επιμέρους μέρη μου μετασχηματισμού Laplace $\widetilde{m}_\delta(s)$.

Συνεχίζοντας, θα βρούμε την $m_\delta(0)$. Εφόσον ισχύει ότι η $w(x, y, v)$ είναι παραγωγίσιμη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα αρχικής τιμής των μετασχηματισμών Laplace.

Άρα έχουμε ότι

$$\lim_{t\to 0} m_\delta(t) = \lim_{s\to\infty} s\widetilde{m}_\delta(s) = \lim_{s\to\infty} s \frac{\tilde{\beta}_\delta(s) - \tilde{\sigma}_\delta(s)}{1 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - cs}\right)^j \tilde{b}_{ij}(s)}$$

Το όριο του παρονομαστή είναι ίσο με 1, το βλέπουμε από την εξίσωση του Lundberg. Άρα έχουμε $m_\delta(0) = \beta_\delta(0) + \lim_{s\to\infty} s \frac{q(s)}{\prod_{i=1}^m (\lambda_i+\delta-cs)^{n_i}}$. Επειδή και ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος είναι πολυώνυμα βαθμού n, διαιρώντας και τα δύο μέλη με s^n έχουμε

$$m_\delta(0) = \beta_\delta(0) - \lim_{s\to\infty} s \frac{\sum_{i=0}^{n-1} q_i s^{i-(n-1)}}{\prod_{i=1}^m (\lambda_i+\delta-cs)^{n_i}} = \beta_\delta(0) - \frac{q_{n-1}}{(-c)^n}.$$

Έχουμε $q_{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{q(\rho_k)}{\prod_{j=1,j\neq i}^k (\rho_k-\rho_j)} = \sum_{k=1}^n \tilde{\beta}_\delta(\rho_k) \frac{\prod_{i=1}^m (\lambda_i+\delta-c\rho_k)^{n_i}}{\prod_{j=1,j\neq i}^k (\rho_k-\rho_j)}$.

Θέτουμε για ευκολία $a_k = \frac{\prod_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-\rho_k\right)^{n_i}}{\prod_{j=1,j\neq i}^k (\rho_k-\rho_j)}$ άρα τελικά έχουμε

$$m_\delta(0) = \beta_\delta(0) + \sum_{k=1}^n a_k \tilde{\beta}_\delta(\rho_k).$$

Θυμίζουμε ότι $m_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta(u-y) f_\delta(y)dy + v_\delta(u)$ και

$$v_\delta(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \Big\{ w(x+u, y-u, u) h_{1,\delta}(x, y|0) + \int_0^x w(x+u, y-u, v+u)\, h_{2,\delta}(x, y, v|0) dv \Big\} dxdy$$

$$\Rightarrow v_\delta(u) = \beta_\delta(u) + \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x+u, y-u, v+u)\, h_{2,\delta}(x, y, v|0) dvdxdy.$$

Για $u = 0$ έχουμε ότι $m_\delta(0) = v_\delta(0)$ και την τελευταία συνάρτηση μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\sum_{k=1}^n a_k \tilde{\beta}_\delta(\rho_k) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x, y, v)\, h_{2,\delta}(x, y, v|0) dvdxdy.$$

Από την άλλη πλευρά έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k \tilde{\beta}_\delta(\rho_k) &= \sum_{k=1}^n a_k \int_0^\infty e^{-\rho k^v} \beta(v) dv \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \int_0^\infty e^{-\rho k^v} \int_0^\infty \int_v^\infty \{ w(x, y, v) h_{1,\delta}(x, y|v) dxdydv \} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x, y, v) \Big\{ h_{1,\delta}(x, y|0) \sum_{k=1}^n a_k e^{-\rho k^v} \Big\} dvdxdy.\end{aligned}$$

Επειδή η $w(x,y,v)$ είναι αυθαίρετη, συνεπάγεται ότι τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα, οπότε $h_{2,\delta}(\,x,y,v|0) = h_{1,\delta}(\,x,y|0)\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\rho k^v}$.

Αν θέσουμε ότι $w(x,y,v) = w^*(x,y)$ η $\beta_\delta(u)$ θα γίνει

$$\beta_\delta^*(u) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\int_0^\infty e^{-\delta t}\gamma_{ij}^*(u+ct)\tau_{ij}(t)dt, οπού$$

$$\gamma_{ij}^*(x) = \int_x^\infty w(x,y-x)\,b_{ij}(y)dy.$$

Θα δείξουμε παρακάτω πως όλες οι εξισώσεις στην κλασική συνάρτηση των Gerber-Shiu είναι τις ίδιας μορφής με της γενικής κλάσης εξάρτησης.

Παίρνουμε το ολοκλήρωμα από τα διπλά αθροίσματα της παραπάνω συνάρτησης και πολλαπλασιάζουμε με $\int_0^\infty e^{-su}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty e^{-\delta t}\gamma_{ij}^*(u+ct)\tau_{ij}(t)dt \\
&\qquad = \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\int_0^\infty e^{-s(u+ct)}\gamma_{ij}^*(u+ct)\tau_{ij}(t)dt \\
&\qquad = \tilde{\tau}_{ij}(\delta-cs)\tilde{\gamma}_{ij}^*(s) - \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\left\{\int_0^{ct} e^{-sx}\gamma_{ij}^*(x)dx\right\}\tau_{ij}(t)dt \\
&\qquad = \tilde{\tau}_{ij}(\delta-cs)\tilde{\gamma}_{ij}^*(s) - \int_0^\infty e^{-sx}\left\{\int_{\frac{x}{c}}^\infty e^{-(\delta-cs)t}\tau_{ij}(t)dt\right\}\gamma_{ij}^*(x)dx.
\end{aligned}$$

Όπου $\tilde{\gamma}_{ij}^*(x) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\gamma_{ij}^*(x)dx$.

Από την παραπάνω σχέση και έχοντας υπόψιν μας τις αρχικές σχέσεις που έχουμε δει στην αρχή του κεφαλαίου έχουμε ότι

$$\varphi_\delta^*(x,r) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\gamma_{ij}^*(x)\int_{\frac{x}{c}}^\infty e^{-rt}\tau_{ij}(t)dt,$$

$$\tilde{\sigma}_\delta^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\varphi_\delta^*(x,\delta-cs)dx \text{ και}$$

$$\tilde{\beta}_\delta^*(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \tilde{\tau}_{ij}(\delta - cs)\tilde{\gamma}_{ij}^*(s) - \tilde{\sigma}_\delta^*(s).$$

Είναι ξεκάθαρο πως οι μορφές των εξισώσεων είναι ίδιες με τις αρχικές σχέσεις. Οπότε μπορούμε με παρόμοιο τρόπο να παράγουμε ότι

$$\tilde{\beta}_\delta^*(s) - \tilde{\sigma}_\delta^*(s) = \tilde{\xi}_\delta(s) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\theta_{ij}^*}{(\lambda_i + \delta - cs)^j},$$

με $\tilde{\xi}_\delta(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \tilde{\tau}_{ij}(\delta - cs)\tilde{\gamma}_{ij}^*(s)$ και θ_{ij}^* ως σταθερές. Αυτό υποδηλώνει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $m_\delta^*(u)$ δίνεται από τον ίδιο τύπο που δινόταν και η $m_\delta(u)$ αντικαθιστώντας $\tilde{\beta}_\delta(s)$ με $\tilde{\xi}_\delta(s)$ και $q(s)$ με $q^*(s)$ οπού είναι πάλι ένα πολυώνυμο $n-1$ βαθμών. Οπότε καταλήγουμε ότι

$$m_\delta^*(0) = \sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{\xi}(\rho_k)$$

με ίδιο a_k γιατί ισχύει ότι $\lim_{s\to\infty} s\tilde{\xi}(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \lim_{s\to\infty} \tilde{\tau}_{ij}(\delta - cs)\,\tilde{\gamma}_{ij}^*(0) = 0$

Τώρα, έχουμε ότι $m_\delta^*(0) = v_\delta^*(0)$ από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$m_\delta^*(0) = \int_0^\infty \int_0^\infty w^*(x,y) h_\delta(\,x,y|0) dy$$

Αντίστοιχα χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα μας παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned} m_\delta^*(0) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \tilde{\tau}_{ij}(\delta - c\rho_k)\tilde{\gamma}_{ij}^*(s) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty w^*(x,y) \\ &\quad \times \left\{ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{\tau}_{ij}(\delta - c\rho_k) e^{-\rho_k x} b_{ij}(x+y) \right\} dydx. \end{aligned}$$

Επειδή η $w^*(x,y)$ είναι αυθαίρετη, μπορούμε να δούμε ότι το δεξί μέλος των δύο εξισώσεων μας δίνει ότι

$$h_\delta(\,x,y|0) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{\tau}_{ij}(\delta - c\rho_k) e^{-\rho_k x} b_{ij}(x+y)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x και y μας δίνει

$$\varphi_\delta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{\tau}_{ij}(\delta - \rho_k) \left\{ \frac{\tilde{b}_{ij}(0) - \tilde{b}_{ij}(\rho_k)}{\rho_k} \right\}$$

και ολοκληρώνοντας μόνο ως προς x

$$f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{\tau}_{ij}(\delta - c\rho_k)\, T_{\rho_k} b_{ij}(y).$$

5. Ειδικές περιπτώσεις εξάρτησης

Στο κεφάλαιο 4 εισήγαμε μία γενική κλάση εξάρτησης που για την από κοινού συνάρτηση του ύψους ζημιάς και του χρόνου εμφάνισης των κινδύνων. Με διάφορες τιμές των m, n_i και της κατανομής του χρόνου εμφάνισης των κινδύνων παίρνουμε ειδικές περιπτώσεις με συγκεκριμένες μορφές εξάρτησης. Μπορούμε να χωρίσουμε τις ειδικές περιπτώσεις με βάση αν η κατανομή του χρόνου εμφάνισης είναι εκθετική ή τύπου *Erlang*. Σε κάποιες από τις ειδικές περιπτώσεις θα συμπεριλάβουμε και αριθμητικά αποτελέσματα και συγκρίσεις με το μοντέλο χωρίς εξάρτηση.

5.1. Εκθετική κατανομή

5.1.1. Boudreault (2006)

Ως πρώτη ειδική περίπτωση θα πάρουμε το μοντέλο από την *Boudreault (2006)* το οποίο προτάθηκε για την μοντελοποίηση φυσικών καταστροφών όπως σεισμοί. Η δεσμευμένη συνάρτηση του ύψους ζημιάς δοθέντος του χρόνου εμφάνισης ζημιών δίνεται από

$$p_t(y) = \frac{f(t,y)}{k(t)} = e^{-\beta t} f_1(y) + \left(1 - e^{-\beta t}\right) f_2(y), t > 0, y > 0$$

με περιθώρια κατανομή του χρόνου $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Από την γενική κλάση εξάρτησης το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να ανακτηθεί με $m = 2, n_i = 1$ και υποθέτοντας ότι

$$\tau_{11}(t) = (\lambda + \beta) e^{-(\lambda+\beta)t}$$

$$b_{11}(y) = \frac{\lambda}{(\lambda + \beta)} \{f_1(y) - f_2(y)\}$$

$$\tau_{21}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$b_{21}(y) = f_2(y).$$

Το μοντέλο αυτό είναι πιο ρεαλιστικό για να προσεγγίσει την συμπεριφορά ενός φυσικού καταστροφικού γεγονότος. Πράγματι, έστω ότι κάθε γεγονός έχει δύο πιθανές εντάσεις, $I_j = 1$ (σύνηθες), 2 (καταστροφική). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ότι

$$\Pr(I_j = 1 | V_j = v) = e^{-\beta v} = 1 - \Pr(I_j = 2 | V_j = v)$$

άρα $\Pr(X_j \le x | I_j = i) = F_i(x)$ για $i = 1{,}2$.

Για παράδειγμα, τον σεισμό, θα αναμέναμε ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος ανάμεσα από δύο συμβάντα τόσο μεγαλύτερο θα είναι και το ύψος ζημιάς από το επόμενο καταστροφικό γεγονός. Οπότε θα πρέπει να πέφτει μεγαλύτερο βάρος στην F_2 η οποία έχει πιο ‘βαριά’ ουρά σε σχέση με την F_1.

Από το Θεώρημα 7 της *Boudreault (2006)* παίρνουμε έναν κλειστό τύπο υπολογισμού για το $\{v_\delta(u), u \ge 0\}$.

Θεώρημα *Έστω οι ρίζες* $\{-R_i(\delta), I = 1, \dots, n_1 + n_2\}$, *ο κλειστός τύπος υπολογισμού για* $\{v_\delta(u), u \ge 0\}$ *δίνεται από*

$$v_\delta(u) = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} a_i e^{-R_i u}, \quad (5.1)$$

όπου $a_i = \frac{k_\delta \tilde{l}_{1,\delta}(-R_i) - \tilde{l}_{2,\delta}(-R_i)}{\tilde{l}_{2,\delta}(0) - \tilde{l}_{1,\delta}(0)} \frac{1}{s_1 + R_i} \frac{1}{s_2 + R_i} \prod_{k=1, k \ne i}^{n_1+n_2} \frac{R_k}{R_k - R_i}$.

Η απόδειξη παραλείπεται βλέπε *Boudreault (2006).*

Τώρα θα δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα. Πρώτα θα συγκρίνουμε 3 μοντέλα κινδύνου με ίδιες περιθώριες συναρτήσεις για το ύψος ζημιάς και τον χρόνο εμφάνισης αλλά με διαφορετικές μορφές εξάρτησης:

- Μοντέλο Α: $Y_1 \sim Exp(2.5), Y_2 \sim Exp(0.5)$ και $\beta = 1/3$
- Μοντέλο Β: $Y_1 \sim Exp(0.5), Y_2 \sim Exp(2.5)$ και $\beta = 3$
- Μοντέλο Γ: κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας *Poisson* χωρίς εξάρτηση

Και για τα τρία μοντέλα, $V \sim Exp(1)$, και η περιθώρια είναι μίξη από δύο εκθετικές

$$f_x(x) = \frac{3}{4}(1 - e^{-2.5x}) + \frac{1}{4}(1 - e^{-0.5x}),$$

και $c = 1$, από (5.1) μπορούμε να βρούμε ότι

$$\psi_A(u) = 0.69047 e^{-0.16667u} + 0.08471 e^{-1.68614u},$$

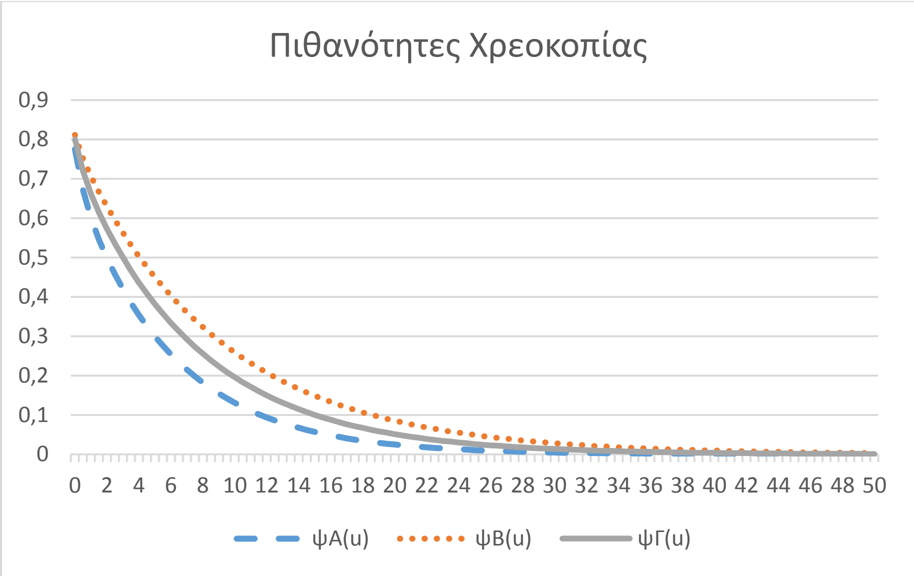
και

$$\psi_B(u) = 0.78455 e^{-0.11092u} + 0.02669 e^{-2.12729u}.$$

Το τρίτο μοντέλο, από *Panjer,Wilmot (1992)*, έχουμε

$$\psi_\Gamma(u) = 0.74640 e^{-0.13398u} + 0.05360 e^{-1.86605u}.$$

Πρώτη παρατήρηση είναι ότι η μορφή και των τριών πιθανοτήτων χρεοκοπίας είναι ίδια.



Σχημα5.1 *Η πιθανότητα χρεοκοπίας ως προς το αρχικό αποθεματικό.*

Στο σχήμα 5.1 παρατηρούμε ότι $\psi_A(u) \leq \psi_\Gamma(u) \leq \psi_B(u)$. Είναι εμφανές ότι η μορφή εξάρτησης έχει επιρροή στις πιθανότητες χρεοκοπίας. Παρατηρούμε ότι η σχέση εξάρτησης μεταξύ του ύψους ζημιάς και του χρόνου εμφάνισης ζημιάς στο μοντέλο Α είναι θετική, αντίστοιχα στο μοντέλο Β είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα η ασφαλιστική εταιρία να έχει επαρκές εισόδημα από τα ασφάλιστρα για να πληρώσει την αποζημίωση είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση του μοντέλου Α, γι’ αυτό και η μικρότερη πιθανότητα χρεοκοπίας και αντίστροφα ισχύει στην Β.

Στις επόμενες ειδικές περιπτώσεις χρησιμοποιείται η σύζευξη *Farlie-Gumbel-Morgesten*, γ αυτόν τον λόγο θα γίνει μία εισαγωγή στην σύζευξη πρώτού προχωρήσουμε στις υπόλοιπες ειδικές περιπτώσεις.

5.1.2. Εισαγωγή στην σύζευξη (Copula) των Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM).

Οι συζεύξεις εκφράζουν στην περίπτωση διδιάστατων κατανομών, τη συναρτησιακή σχέση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής μιας διδιάστατης κατανομής με τις αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής των μονοδιάστατων περιθώριων κατανομών, όπου οι τελευταίες μας είναι πάντοτε γνωστές. Σκοπός της δημιουργίας αυτών των οικογενειών, ήταν να βρεθεί ένας απλός τρόπος για να εισαχθεί η συσχέτιση ανάμεσα στις τυχαίες περιθώριες κατανομές. Αναδεικνύεται δε, στις μελέτες και στην εισαγωγή τέτοιων οικογενειών, σε επίμαχο θέμα η εύρεση κλάσεων διδιάστατων κατανομών με το επιθυμητό εύρος του συντελεστή συσχέτισης. Μια n-διάστατη σύζευξη αποτελεί μια n-διάστατη συνάρτηση κατανομής, περιορισμένη στο $[0,1]^n$ με περιθώριες κατανομές στο $(0,1)$. Για μία δοσμένη *copula* C και περιθώριες $F_1, \dots, F_n$, έχουμε ότι η

$$F\{x_1, \dots, x_n\} = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

είναι μια από κοινού συνάρτηση κατανομής με αυτές τις περιθώριες. Αντίστροφα για δοσμένη από κοινού συνάρτηση κατανομής F με περιθώριες $F_1, \dots, F_n$ υπάρχει πάντα μία *copula* που να ικανοποιεί την παραπάνω συνάρτηση. Αυτή η *copula* είναι μοναδική, στην περίπτωση που οι περιθώριες είναι συνεχείς. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι,

$$C(u_1, \dots, u_n) = F\big(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)\big).$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι γνωστά ως Θεώρημα του *Sklar* και αποτελούν τον λόγο που η *copula* καλείται δομή εξάρτησης. Στην ουσία, η εξίσωση υποδηλώνει ότι η *copula* C διαχωρίζει την συμπεριφορά των περιθώριων συναρτήσεων από την εξάρτηση που περιέχεται στην από κοινού συνάρτηση κατανομής τους F.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, *copula* καλείται μία δομή εξάρτησης η οποία παρουσιάζεται με την μορφή ενός συναρτησιακού. Οι διαφορετικές μορφές αυτού του συναρτησιακού οδηγούν σε μία ποικιλία μοντέλων οικογενειών κατανομών. Ποικίλες τέτοιες δομές κατασκευής διδιάστατων κατανομών με συγκεκριμένες περιθώριες έχουν ερευνηθεί από τους *Plackett(1965), Mardia(1970), Genest(1987), Marshall* και *Olkin (1988)* και άλλους.

Μία από τις πιο εύκολες σε εφαρμογή δομή, εμφανίζεται στην κλάση των διδιάστατων κατανομών που εισήχθη αρχικά από τον *Morgenstern (1956),* χρησιμοποιώντας *Cauchy* περιθώριες. Το 1960 ο *Gumbel* ερεύνησε την οικογένεια κατανομών με εκθετικές περιθώριες, ενώ ο *Farlie* σε συνδυασμό με τις έρευνές του για το συντελεστή συσχέτισης, πρότεινε μία γενίκευση της διδιάστατης δομής που είχε μελετηθεί από τους *Morgenstern* και *Gumbel.*

Οι *Jonhson* και *Kotz (1975,1977)* μελέτησαν την πολυδιάστατη περίπτωση και εισήγαγαν τον όρο οικογένεια κατανομών *Farlie-Gumbel-Morgenstern* ενώ περαιτέρω μελέτες διεξήχθησαν από τους *Schucany (1978), Huang* και *Kotz (1984)* μεταξύ άλλων. Στην απλούστερή της μορφή, η διδιάστατη οικογένεια *FGM* έχει μόνο μία παράμετρο σε συνδυασμό με τις διαφορετικές περιθώριες.

Αυτή όμως η μορφή έχει κάποια μειονεκτήματα, όπως το γεγονός ότι η δομή εξάρτησης δεν είναι εύκαμπτη και το εύρος του συντελεστή συσχέτισης ρ είναι περιορισμένο.

Η μοντελοποίιση με κάποια μορφή εξάρτησης χρησιμοποιώντας *copula* έχει γίνει γενικά δημοφιλής στην αναλογιστική επιστήμη όπως και σε χρηματοοικονομική διαχείριση κινδύνων. Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στο θέμα βλέπε *Frees,Valdez (1998), Wang(1998), Bouye (2000), Denuit (2005), McNeil(2005).*

5.1.3. H Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) σύζευξη (Copula).

Barges (2009) μελέτησε προβλήματα κατανομής των κεφαλαιακών απαιτήσεων σε μία ασφαλιστική εταιρία που έχει διάφορες κατηγορίες δραστηριοτήτων από μία σύζευξη *FGM* με εκθετικά κατανεμημένα ρίσκα. Για την δισδιάστατη περίπτωση, υποθέσαν ότι

$$f(x_1,x_2) = (1+\theta)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} - \theta 2\lambda_1 e^{-2\lambda_1 x_1}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} - \theta\lambda_1 e^{-2\lambda_1 x_1} 2\lambda_2 e^{-2\lambda_2 x_2} + \theta 2\lambda_1 e^{-2\lambda_1 x_1} 2\lambda_2 e^{-2\lambda_2 x_2},$$

όπου $\theta\epsilon[-1,1]$. Είναι μία ειδική μορφή της *FGM* κλάσης κατανομών, για περισσότερες πληροφορίες βλέπε *Kotz (2000).* Σε αυτή την περίπτωση από την γενική κλάση εξάρτησης το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να ανακτηθεί με $m = 2, n_i = 1$ και υποθέτοντας ότι

$$\tau_{11}(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$$

$$b_{11}(y) = (1+\theta)\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} - \theta 2\lambda_2 e^{-2\lambda_2 y}$$

$$\tau_{21}(t) = 2\lambda_1 e^{-2\lambda_1 t}$$

$$b_{21}(y) = -\theta\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} + \theta 2\lambda_2 e^{-2\lambda_2 y}.$$

5.1.4. Η γενικευμένη Farlie-Gumbel-Morgenstern copula σε κλασικό μοντέλο Poisson.

Η *Cossette* το 2008 θεώρησε την γενικευμένη *FGM* σύζευξη για την δισδιάστατη σ.π.π. του χρόνου εμφάνισης ζημιάς και ύψους ζημιάς ως

$$f(t,y) = k(t)p(y) + \theta h'\big(P(y)\big)g'\big(K(t)\big)k(t)p(y),\ \ \theta \in [-1,1]$$

όπου $h(u) = u^a(1-u)^b, g(u) = v^c(1-v)^d,\ a,b,c,d \geq 1$

με $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ και ένα αυθαίρετο $p(y)$. Χρησιμοποιώντας από *Cossette(2008)* η

$$f(t,y) = \lambda e^{-\lambda t}p(y) + \sum_{i=1}^{c+1}\lambda_i e^{-\lambda_i t}\left\{a_i\theta h'\big(P(y)\big)p(y)\right\},$$

όπου $\lambda_i = \lambda(d + i - 1)$ και $a_i = \frac{c!\lambda^c(-1)}{\{\prod_{j=1,j\neq i}^{c+1}(\lambda_j-\lambda_i)\}}$.

Σε αυτή την περίπτωση από την γενική κλάση εξάρτησης το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να ανακτηθεί με $m = c + 2, n_i = 1$ και υποθέτοντας ότι

$$\tau_{11}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$b_{11}(y) = p(y)$$

και για $i = 2,3, \dots, c + 2$

$$\tau_{i1}(t) = \lambda_{i-1} e^{-\lambda_{i-1} t}$$

$$b_{i1}(y) = a_{i-1}\theta h'\big(P(y)\big)p(y).$$

Έστω οι ρίζες $\{-R_i(\delta), I = 1, \dots, n_1 + n_2\}$, *ο κλειστός τύπος υπολογισμού για* $\{\varphi_T(u), u \geq 0\}$ *δίνεται από*

$$\varphi_T(u) = \sum_{j=1}^{\alpha+2} \zeta_j e^{-R_j u}, \quad (5.1)$$

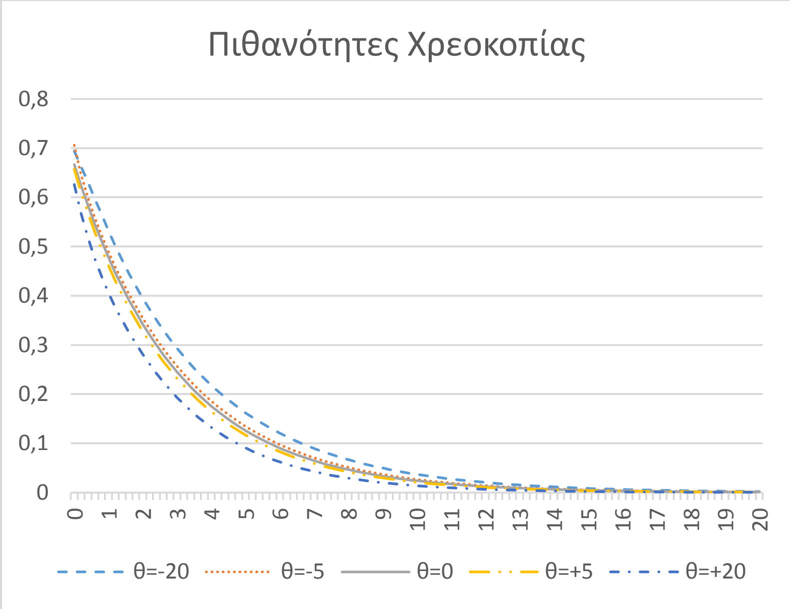
όπου $a_i = \frac{\xi_{1,\delta}(-R_j)-\xi_{2,\delta}(-R_j)}{l_{1,\delta}(0)-\xi_{2,\delta}(0)} \prod_{i=1,i\neq j}^{\alpha+2} \frac{R_j}{R_j-R_i} \prod_{j=1}^{c+2} \frac{-\rho_j}{\rho_j-R_i}.$

Για τις πλήρες εκφράσεις των$\xi_{1,\delta}, \xi_{2,\delta}, l_{1,\delta}$ και την απόδειξη βλέπε *Cossette (2008).*

Τώρα θα δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι $X{\sim}Exp(1), V{\sim}Exp(1)$, και $a = b = c = d = 2$, και ασφάλιστρο $p = 1.5$. Παραθέτουμε στον πίνακα 5.1 τις αναλυτικές εκφράσεις των πιθανοτήτων χρεοκοπίας για διαφορετικές παραμέτρους εξάρτησης $\theta = -20, -5, 0, 5, 20$.

$\boldsymbol{\theta}$	**Εκφράσεις της πιθανότητας χρεοκοπίας**
-20	$0.712e^{-0.296u} + 0.020e^{-1.598u} - 0.038e^{-3.798u}\cos(0.985u) - 0.057e^{-3.798u}\sin(0.985u)$
-5	$0.677e^{-0.323u} + 0.012e^{-1.835u} - 0.017e^{-3.607u}\cos(0.369u) - 0.065e^{-3.607u}\sin(0.369u)$
0	$\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}u}$
5	$0.652e^{-0.344u} - 0.012e^{-4.230u} + 0.017e^{-2.358u}\cos(0.284u) - 0.096e^{-2.358u}\sin(0.284u)$
20	$0.603e^{-0.379u} - 0.012e^{-4.609u} + 0.048e^{-2.090u}\cos(0.872u) - 0.109e^{-2.090u}\sin(0.872u)$

Πίνακας 5.1 *Η αναλυτική έκφραση της πιθανότητας χρεοκοπίας για διαφορετικές παραμέτρους εξάρτησης.*



Σχημα5.2 *Η πιθανότητα χρεοκοπίας ως προς το αρχικό αποθεματικό.*

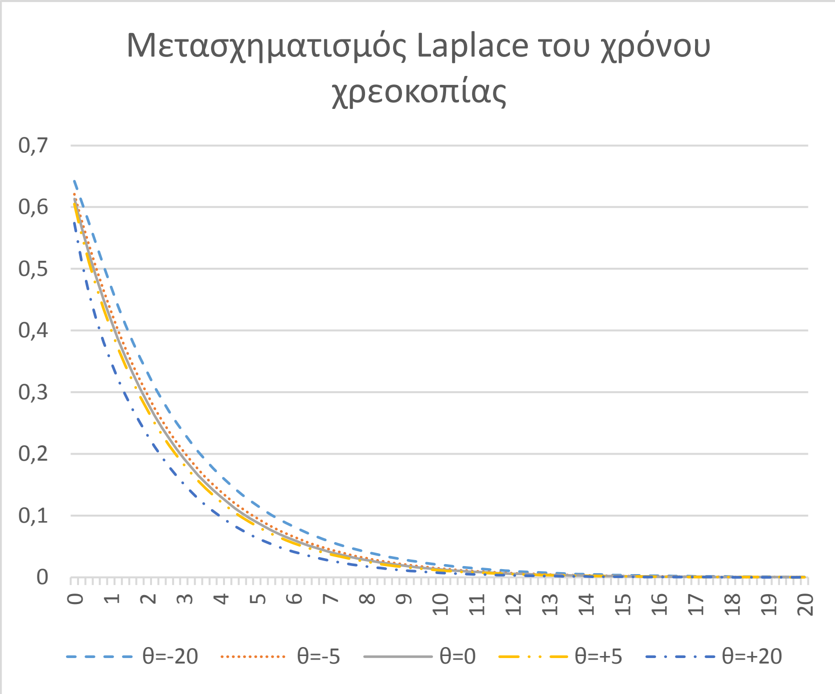
είναι εμφανές ότι η παράμετρος εξάρτησης θ έχει επιρροή στις πιθανότητες χρεοκοπίας.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την επιρροή της εξάρτησης όπως και στο αριθμητικό παράδειγμα από την ειδική περίπτωση 5.1.1.

Επίσης με $\delta = 5\%$ παίρνουμε και τις αναλυτικές εκφράσεις του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας στον παρακάτω πίνακα.

θ	**Εκφράσεις του μετασχηματισμού Laplace**
-20	$0.663e^{-0.384u} + 0.024e^{-1.598u} - 0.045e^{-3.795u}\cos(0.981u) - 0.068e^{-3.795u}\sin(0.981u)$
-5	$0.627e^{-0.376u} + 0.014e^{-1.836u} - 0.020e^{-3.606u}\cos(0.365u) - 0.077e^{-3.606u}\sin(0.365u)$
0	$0.613e^{-0.386u}$
5	$0.599e^{-0.396u} - 0.013e^{-4.230u} + 0.019e^{-2.359u}\cos(0.280u) - 0.114e^{-2.359u}\sin(0.280u)$
20	$0.549e^{-0.430u} - 0.029e^{-4.608u} + 0.054e^{-2.094u}\cos(0.868u) - 0.127e^{-2.094u}\sin(0.868u)$

Πίνακας 5.2 *Η αναλυτική έκφραση του μετασχηματισμού Laplace για διαφορετικές παραμέτρους εξάρτησης.*



Σχημα5.3 *Ο μετασχηματισμός Laplace ως προς το αρχικό αποθεματικό.*

Παρατηρούμε ότι και ο μετασχηματισμός *Laplace* επηρεάζεται παρόμοια με την πιθανότητα χρεοκοπίας από την παράμετρο εξάρτησης θ.

Για την περίπτωση που $a = b = c = d = 1$ η διδιάστατη κατανομή μετατρέπεται στο μοντέλο που μελέτησε η ίδια*(Cossette)* το 2010, και βρήκε παρόμοια αποτελέσματα.

5.2.Erlang κατανομές

5.2.1. Η FGM-type διδιάστατες Erlang.

Οι *D'este(1981)* και *Gupta,Wong(1989)* μελετήσανε την διδιάστατη κατανομή Γάμμα της *FGM-type*. Σε αυτή την περίπτωση η διδιάστατη κατανομή είναι ορισμένη(βλέπε συνάτηση 48.18 στο *Kotz(2000)*) ως

$$f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2) + \theta g(x_1)\{2G(x_1) - 1\}h(x_2) \times \{2H(x_2) - 1\}, \theta \in [-1,1]$$

όπου $G(x_1) = \int_0^{x_1} g(z)dz$ και $H(x_2) = \int_0^{x_2} h(z)dz$, με $g(x_1), h(x_2)$ ακολουθούν γάμμα κατανομές με παραμέτρους α και β αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας την $G(x_1)$ με την δεξιά ουρά η συνάρτηση ξαναγράφεται ως

$$f(x_1, x_2) = g(x_1)[h(x_2) + \theta h(x_2)\{2H(x_2) - 1\}] \\ - g(x_1)\bar{G}(x_1)[2\theta h(y)\{2H(x_2) - 1\}$$

και

$$g(x_1)\bar{G}(x_1) = \frac{e^{-x_1}(x_1)^{a-1}}{(a-1)!}\left\{\sum_{i=0}^{a-1}\frac{e^{-x_1}(x_1)^i}{i!}\right\}$$
$$= \sum_{i=0}^{a-1}\frac{\binom{a+i-1}{i}}{2^{a+i}}\left\{\frac{2(2x_1)^{a+i-1}e^{-2x_1}}{(a+i-1)!}\right\}$$

Σε αυτή την περίπτωση από την γενική κλάση εξάρτησης το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να ανακτηθεί με $m = 2, n_1 = 1, n_2 = a$ και υποθέτοντας ότι

$$\tau_{11}(t) = \frac{t^{a-1}e^{-t}}{(a-1)!},$$

$$b_{11}(y) = h(y) + \theta h(y)\{2H(y) - 1\}$$

και για $j = 0,1, \dots, a-1$ έχουμε

$$\tau_{2j}(t) = \frac{2(2t)^{a+j-1}e^{-2t}}{(a+j-1)!},$$

$$b_{2j}(y) = -\binom{a+i-1}{i}2^{-a-j+1}\theta h(y)\{2H(y) - 1\}.$$

Παράρτημα

- ***Martingales***

Μία *martingale* διακριτού χρόνου είναι μία στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου (δηλ. μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών) $X_1, X_2, X_3, \ldots$ που ικανοποιεί για όλα τα n

$$E[X_n] < \infty$$

$$E[X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n] = X_n$$

Δηλαδή η υπό όρους αναμενόμενη τιμή της επόμενης παρατήρησης, δοθέντος όλων προηγούμενων παρατηρήσεων, ισούται με την τελευταία παρατήρηση.

Πιο γενικά, μία ακολουθία $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ λέγεται μία *martingale* όσον αφορά μία άλλη ακολουθία $X_1, X_2, X_3, \ldots$ αν για όλα τα n

$$E[Y_n] < \infty$$

$$E[Y_{n+1}|X_1, \ldots, X_n] = Y_n$$

Παρομοίως, μία συνεχής *martingale* όσον αφορά την στοχαστική διαδικασία X_tείναι μία στοχαστική διαδικασία Y_t έτσι ώστε για όλα τα t να ισχύει,

$$E[Y_n] < \infty$$

$$E[Y_{n+1}|X_t, t \leq s] = Y_s \forall s \leq t.$$

Έτσι εκφράζεται η ιδιότητα ότι, η υπό όρους αναμενόμενη τιμή της επόμενης παρατηρείς, δοθέντος όλων των παρατηρήσεων μέχρι τον χρόνο s, ισούται με την παρατήρηση στον χρόνο s (δεδομένου ότι $s \leq t$).

Γενικά, μία στοχαστική διαδικασία $Y: T \times \Omega \to S$ είναι μία *martingale* όσον αφορά μία *filtration* Σ_* και ένα μέτρο πιθανότητας P εάν

- Σ_* είναι μία *filtration* του θεμελιώδους χώρου πιθανότητας(Ω,Σ,P)
- Y είναι προσαρμοσμένη στην *filtration* Σ_* δηλαδή, για κάθε t στο σύνολο δεικτών T, η τυχαία μεταβλητή Y_t είναι μία Σ_t-μετρήσιμη συνάρτηση,
- Για κάθε t, Y_t απλώνεται στον L^P χώρο $L^l(\Omega, \Sigma_t, P, S)$, δηλαδή

  $E_p[Y_t] < +\infty$

  Για κάθε s και t με $s < t$ και για όλα $F \in \Sigma_s$

$E_p[Y_t - Y_s]x_F = 0,$

Όπου x_F συμβολίζει την δείκτρια συνάρτηση του γεγονότος F. Στην 'Πιθανότητα και Τυχαίες Διαδικασίες' των *Grimmett* και *Stirzaker* η τελευταία συνθήκη αποτυπώνεται από την,

$Y_s = E_p[Y_t \Sigma_s]$ που είναι η γενική μορφή της υπό όρους αναμενόμενης αξίας.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η ιδιότητα της *martingale* περιλαμβάνει τόσο την *filtration* όσο και το μέτρο πιθανότητας (όσον αφορά εκείνο το οποίο οι προσδοκίες λαμβάνονται υπόψιν). Είναι πιθανό η Y να είναι *martingale* όσον αφορά ένα μέτρο αλλά να μην είναι για κάποιο άλλο. Το θεώρημα του *Girsanov* παρουσιάζει ένα τρόπο για να βρεθεί ένα μέτρο σύμφωνα με το οποίο μία διαδικασία *Ito* να είναι *martingale.*

- ***Martingales και Θεωρία Κινδύνου***

Έστω ξ ένας αριθμός. Επειδή $\{U(t)\}_{t \geq \infty}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία με σταθερές και ανεξάρτητες αυξήσεις, μία διαδικασία της μορφής

$$\left\{e^{-\delta t + \xi U(t)}\right\}_{t \geq \infty} \quad (\Pi.1)$$

είναι *martingale* αν και μόνο αν, για κάθε $t \geq 0,$ η αναμενόμενη τιμή στον χρόνο t είναι ίση με την αρχική του αξία, που ισχύει αν και μόνο αν

$$E\left[e^{-\delta t + \xi U(t)} \middle| U(0)\right] = u = e^{\xi u} \quad (\Pi.2)$$

Αφού

$$E\left[e^{-\delta t + \xi U(t)} \middle| U(0)\right] = u = \exp\{-\delta t + \xi u + \xi ct + \lambda t\}\, p(\xi) - 1,$$

για να είναι *martingale* πρέπει

$$\{-\delta t + \xi u + \xi ct + \lambda t\} p(\xi) - 1 = 0$$

Που είναι ίσο με την θεμελιώδη εξίσωση του *Lundberg.* Έτσι, για να είναι η $(\Pi.1)$ *martingale*, ο συντελεστής του $U(t)$ είναι ίσος είτε με $\xi_1 = \rho \geq 0$ ή με $\xi_2 = -R \leq 0.$

Με αυτές τις τιμές του ξ η $(\Pi.2)$ ισχύει. Αν ο χρόνος τερματισμού συμβολίζεται με T, η $(\Pi.1)$ είναι *martingale* με $\xi = -R$. Για $0 \leq t < T$,

$$\delta t + RU(t) \geq 0,$$

και ως εκ τούτου

$$0 < e^{-\delta t - RU(t)} \leq 1$$

Με $\{e^{-\delta t - RU(t)}\}_{0 \leq t < T}$ να είναι φραγμένο, μπορούμε να εφαρμόσουμε το *optional sampling theorem*(δηλαδή υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις η αναμενόμενη τιμή ενός martingale στον χρόνο τερματισμού είναι ίσο με την αρχική του τιμή) και έχουμε

$$E[e^{-\delta t - RU(t)} | U(0) = u] = e^{-Ru}. \quad (\Pi.3)$$

Επίσης, επειδή ισχύει ότι $\lim_{t \to \infty} U(t) = \infty$, ακόμα και αν $\delta = 0$,

$$E[e^{-\delta t - RU(t)} I(T = \infty) | U(0) = u] = 0.$$

Συνεπώς, μπορούμε να ξαναγράψουμε την $(\Pi.3)$ ως,

$$e^{-Ru} = E\left[e^{-\delta t - RU(t)} I(T = \infty) \middle| U(0) = u\right] = u, \text{ με } \delta \geq 0, u \geq 0$$

Η παραπάνω διαδικασία είναι μία απόδειξη από την θεωρία των *martingale*, μίας γενίκευσης του Θεωρήματος 13.4.1 των Αναλογιστικών Μαθηματικών.

- ***Το Θεώρημα του Sklar***

Το θεώρημα του *Sklar* αποτελεί ένα σημαντικό θεώρημα για τη θεωρία των συζεύξεων, και είναι θεμέλιο για πολλές εφαρμογές αυτής της θεωρίας. Μέσω του θεωρήματος του *Sklar* διευκρινίζεται ο ρόλος των συζεύξεων στη σχέση των πολυδιάστατων συναρτήσεων κατανομών με τις μονοδιάστατες τους περιθώριες συναρτήσεις κατανομών. Στην περίπτωση της δισδιάστατης συνάρτησης κατανομής, το θεώρημα είναι το εξής:

Έστω $H(x, y)$ είναι διδιαστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες συναρτήσεις $F(x)$ και $G(y)$. Τότε υπάρχει μια σύζευξη $C(u, v)$ τέτοια ώστε:

$H(x, y) = C(F(x), G(y))$ για $x, y \in R$.

Αντίστροφα, για κάθε συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και $G(y)$ για κάθε σύζευξη $C(u, v)$, η συνάρτηση $H(x, y)$ που ορίστηκε παραπάνω είναι μία διδιαστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες συναρτήσεις $F(x)$ και $G(y)$.

Παρατηρήσεις:

- *Εάν οι $F(x)$ και $G(y)$ είναι συνεχείς, τότε η $C(u, v)$ είναι μοναδική.*
- *Για συνεχείς περιθώριες συναρτήσεις $F(x)$ και $G(y)$ η μοναδική σύζευξη $C(u, v)$, για $(u, v) \in (0,1) \times (0,1)$ έχει την μορφή:*

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

Όπου F^{-1} *και* G^{-1} *οι αντίστροφες των συναρτήσεων* $F(x)$ *και* $G(y)$ *αντίστοιχα.*

- *Η σύζευξη* $C(u, v)$ *είναι μία συνάρτηση που 'συνδέει' την από κοινού συνάρτηση κατανομής με τις περιθώριες της.*
- *Όταν* $F(x)$ *και* $G(y)$ *είναι συνεχείς τότε οι τυχαίες μεταβλητές* X *και* Y *είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν* $H(x, y) = F(x)G(y)$ *για* $x, y \in R$. *Ισοδύναμα, οι τυχαίες μεταβλητές* X *και* Y *είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν* $C(u, v) = uv$ *όπου:* $(u, v) \in (0,1) \times (0,1)$.

➢ *Το Θεώρημα του Rouche*

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, οι οποίες είναι αναλυτικές πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη C και στο εσωτερικό της. Εάν πάνω στη C ισχύει $|g(z)| < |f(z)|$, τότε οι συναρτήσεις $f(z) + g(z)$ και $f(z)$ έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της C.

Απόδειξη: Θέτουμε $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)} => g(z) = F(z)f(z)$. Εάν N_1 και N_2 είναι αντίστοιχα το πλήθος των ριζών των $f + g$ και f στο εσωτερικό στο C, έχουμε από θεώρημα του ορίσματος ότι,

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f' + g'}{f + g} dz \text{ και } N_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'}{f} dz,$$

επειδή οι συναρτήσεις $f + g$ δεν έχουν πόλους. Άρα,

$$\begin{aligned}
N_1 - N_2 &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f' + f'F + fF'}{f + fF} dz - \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'}{f} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'(1 + F) + fF'}{f(1 + F)} dz - \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'}{f} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'}{f} + \frac{F'}{1 + F} dz - \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{F'}{1 + F} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint F'(1 - F + F^2 - F^3 + \cdots) dz = 0.
\end{aligned}$$

Επειδή $F < 1$ πάνω στη C συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα πάνω στη C και μπορεί να ολοκληρωθεί κατά όρους. Άρα $N_1 = N_2$.

- ***Τελεστής T_r (T_r operator)***

Ο τελεστής T_r (T_r operator) για μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση f και πραγματικό r, ορίζεται από την σχέση :

$$T_r f(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(u-x)} f(u)du$$

Στην θεωρία κινδύνου ο τελεστής T_r εισάχθηκε από τους Dickson-Hipp (2001), και παρακάτω παραθέτουμε κάποιες από τις ιδιότητες του.

Ιδιότητες του τελεστή T_r

- $Αν\ r_1 \neq r_2\ τότε$

$$T_{r_1}T_{r_2}f(x) = T_{r_2}T_{r_1}f(x) = \frac{T_{r_1}f(x) - T_{r_2}f(x)}{r_2 - r_1}$$

- $Αν\ r_1 = r_2 = r\ τότε$

$$T_{r_1}T_{r_2}f(x) = \int_x^{\infty} (u-x)e^{-r(u-x)} f(u)du$$

- $T_r f^*(s) = \frac{f^*(s) - f^*(r)}{r-s}$

- ***Τύπος του Lagrange***

Ο τύπος του Lagrange για το πολυώνυμο παρεμβολής δίνεται από:

$$P_k^L(x) = \sum_{i=0}^{k} f_i \prod_{j=0\ j\neq i}^{k} \frac{(x-x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange $P_k^L(x)$, βαθμού k πρέπει παρεμβάλει την $f(x)$ στα $k+1$ διαφορετικά σημεία του πεδίου ορισμού της $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_k$ άρα:

$$P_k(\chi_i) = f(\chi_i) = f_i, \qquad με\ i = 0,1, \dots, k$$

Το παραπάνω πολυώνυμο βασίζεται σε ένα σύνολο βασικών πολυωνύμων

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1\ αν\ i = j \\ 0\ αν\ i \neq j \end{cases}.$$

Οπού $L_i(x)$=$\prod_{j=0\ j\neq i}^{k} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$ άρα το πολυώνυμο $P_k^L(x) = \sum_{i=0}^{k} L_i(x) f_i$ είναι βαθμού k, και είναι πολυώνυμο παρεμβολής διότι:

$$P_k^L(x_i) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \dots + L_k(x)f_k = f_i$$

Σημειώνουμε ότι το συγκεκριμένο πολυώνυμο είναι μοναδικό το οποίο σημαίνει ότι αν δύο πολυώνυμα παρεμβάλουν τις ίδιες τιμές της $f(x)$, τότε αυτά είναι διαφορετικές εκφράσεις του ιδίου πολυωνύμου.

- ***Θεώρημα αρχικής τιμής***

Το θεώρημα αυτό αναφέρεται στην συμπεριφορά μιας συνάρτησης f(t) καθώς το $t \rightarrow 0$, γι’ αυτό και ονομάζεται θεώρημα της αρχικής τιμής. Με την προϋπόθεση ότι η πρώτη παράγωγος $f^{(1)}(t)$ μπορεί να μετασχηματιστεί κατά Laplace, το θεώρημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

Βιβλιογραφία

Ελληνική:

1. Κουτσόπουλος Κ., 1999. Αναλογιστικά Μαθηματικά, Εκδόσεις Συμμετρία
2. Χατζηκωνσταντινίδης Ε. 2013,Θεωρία κινδύνων Ι, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις.
3. Χατζηκωνσταντινίδης Ε. 2013,Θεωρία κινδύνων ΙΙ, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις.

Ξένη:

1. Albrecher, H., Teugels, J.L., 2006. Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. Journal of Applied Probability 43 (1), 257–273.
2. Asmussen, S., Albrecher, H., 2010. Ruin Probabilities, second ed. World Scientific.
3. Bargès, M., Cossette, H., Marceau, E., 2009. TVaR-based capital allocation with copulas. Insurance: Mathematics and Economics 45 (3), 348–361.
4. Block, H.W., Basu, A.P., 1974. A continuous bivariate exponential distribution. Journal of the American Statistical Association 69, 1031–1037.
5. Boudreault, M., Cossette, H., Laudriault, D., Marceau, E., 2006. On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. Scandinavian Actuarial Journal 5, 265–285.
6. Bouye, E., Nikeghbali, A., Riboulet, G. Roncalli, T., 2000. Copulas for Finance. A reading guide and some applications. Rapport technique du Groupe de recherche operationnelle, Credit Lyonnais
7. Cheung, E.C.K., 2011. A generalized penalty function in Sparre Andersen risk models with surplus-dependent premium. Insurance: Mathematics and Economics 48 (3), 384–397. Cheung, E.C.K., Laudriault, D., Willmot, G.E., Woo, J.-K., 2010b. Structural properties of Gerber–Shiu functions in dependent Sparre Andersen models. Insurance: Mathematics and Economics 46 (1), 117–126.
8. Cheung, E.C.K., Laudriault, D., Willmot, G.E., Woo, J.-K., 2010a. Gerber–Shiu analysis with a generalized penalty function. Scandinavian Actuarial Journal 3, 185–199.
9. Cheung, E.C.K., Laudriault, D., Willmot, G.E., Woo, J.-K., 2011. On orderings and bounds in a generalized Sparre Andersen risk model. Applied Stochastic Models in Business and Industry 27 (1), 51–60.
10. Cossette, H., Marceau, E., Marri, F., 2008. On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie–Gumble–Morgenstern copula. Insurance: Mathematics and Economics 43 (3), 444–455.
11. Cossette, H., Marceau, E., Marri, F., 2010. Analysis of ruin measures for the classical compound Poisson risk model with dependence. Scandinavian Actuarial Journal 3, 221–245.

12. Denui, M., Dhaene, J.m Goovaerts, M.J., Kaas, R., 2005. Actuarial theory for Dependent Risks-Measures, Orders and Models, Wiley, New York.
13. D'Este, G.M., 1981. A Morgenstern-type bivariate gamma distribution. Biometrika 68, 339–340.
14. Farlie, D.J.G., 1960. The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution. Biometrika 47, 307–323.
15. Frees, E.W., Valdez, E.A., 1998. Understanding relationships using copulas. North American Actuarial journal 2, 1-25
16. Freund, J., 1961. A bivariate extension of the exponential distribution. Journal of the American Statistical Association 56, 971–977.
17. Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 1998. On the time value at ruin. North American Actuarial Journal 2 (1), 48–72. Discussions: pp. 72–78.
18. Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 2005. The time value of ruin in a Sparre Andersen model. North American Actuarial Journal 9 (2), 49–84.
19. Gordon E. Wilmot, Jae-Kyung Woo, 2012. On the analysis of a general class of dependent risk processes. Insurance: Mathematics and Economics 51 134-141
20. Gupta, A.K., Wong, C.F., 1989. On a Morgenstern-type bivariate gamma distribution. Metrika 31, 327–332.
21. Kotz, S., Balakrishnan, N., Johnson, N.L., 2000. Continuous Multivariate Distributions Vol. 1: Models and Applications, second ed. Wiley-Interscience.
22. Lee, S.C.K., Lin, X.S., 2012. Modeling dependent risks with multivariate Erlang mixtures. ASTIN Bulletin (in press).
23. Li, S., Garrido, J., 2005. On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber Shiu function. Advances in Applied Probability 37 (3), 836–856.
24. Li, S., Garrido, J., 2004. On ruin for the Erlang(n) risk process. Insurance: Mathematics and Economics 34 (3), 391–408.
25. McNeil, A., Frey, R., Embretchs, P., 2005. Quantitative Risk Management. Princeton Press, Princeton.
26. Panjer, H. H. & Willmot, G.E. 1992. Insurance Risk Models. Schaumburg: Society of Actuaries
27. Rodriguez-Lallena, J.A., Ubena-Flores, M., 2004. A new class of bivariate copulas. Statistics and Probability Letters 66, 315–325.
28. Wang, S., 1998, Aggregation of correlated risk protfolios: Models and algorithms. In: CAS Proceedings, pp.848-939
29. Willmot, G.E., 2007. On the discounted penalty function in the renewal risk model with general interclaim times. Insurance: Mathematics and Economics 41 (1), 17–31.
30. Willmot, G.E., Lin, X.S., 2001. Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications. Springer-Verlag, New York.

31. Willmot, G.E., Lin, X.S., 2011. Risk modelling with the mixed Erlang distribution. Applied Stochastic Models in Business and Industry 27 (1), 2–26.
32. Willmot, G.E., Woo, J.-K., 2010. Surplus analysis for a class of Coxian interclaim time distributions with applications to mixed Erlang claim amounts. Insurance: Mathematics and Economics 46 (1), 32–41.
33. Willmot, G.E., Woo, J.-K., 2007. On the class of Erlang mixtures with risk theoretic applications. North American Actuarial Journal 11 (2), 99–115.
34. Zhang, Z., Yang, H., Yang, H., 2011. On a Sparre Andersen risk model with timedependent claim sizes and jump-diffusion perturbation. Methodology and Computing in Applied Probability 1–23.
35. Zhao, Kui., 2008. On the expected discounted penalty function—a bivariate exponential distribution. Master Thesis. University of Waterloo.