ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ MARTINGALES ΚΑΙ ΑΛΛΑΓΕΣ ΜΕΤΡΩΝ

Παπαδόπουλος Αλέξανδρος

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιούνιος 2015

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ MARTINGALES ΚΑΙ ΑΛΛΑΓΕΣ ΜΕΤΡΩΝ

Παπαδόπουλος Αλέξανδρος

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιούνιος 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ 1^{η}/26.09.2013 συνεδρίαση της σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

- Αναπληρωτής Καθηγητής Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Κωνσταντίνος Πολίτης,
- Επίκουρος Καθηγητής Δημήτριος Στέγγος.

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL AND RISK MANAGEMENT

MARTINGALE PROBLEMS
AND CHANGES OF MEASURE

by
Alexandros Papadopoulos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece
June 2015

Στον Γιώργο,

στον Επιβλέποντα Καθηγητή.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα Καθηγητή για την παρούσα διπλωματική εργασία κύριο Νικόλαο Μαχαιρά για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας, καθώς χωρίς την πολύτιμη βοηθειά του δεν θα είχα καταφέρει να ολοκληρώσω την διπλωματική εργασία. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη και κύριο Δημήτριο Στέγγο για την επίβλεψή τους. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με την εν λόγω εργασία.

Περίληψη

Αν $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ είναι μια στοχαστική βάση, ποια είναι τα μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\mathcal{F}$ κάτω από τα οποία όλα τα στοιχεία δοσμένης οικογένειας $\mathscr{X}$ στοχαστικών διαδικασιών (σ.δ. για συντομία) είναι τοπικά martingales; Ένα τέτοιο πρόβλημα ονομάζεται ένα *martingale–πρόβλημα*. Αρχικά μελετούνται "γενικά" martingale–προβλήματα όπως επίσης και οι ειδικές περιπτώσεις που σχετίζονται με σημειακές διαδικασίες, τυχαία μέτρα και ημι–martingales. Στην συνέχεια εξετάζεται τι συμβαίνει σε ένα ημι–martingale, αν αντικατασταθεί το αρχικό μέτρο πιθανότητας P με ένα άλλο Q που είναι απόλυτα συνεχές ως προς P. Μέρος του προβλήματος σχετίζεται με διάφορες γενικεύσεις του θεωρήμάτος Girsanov. Ένα άλλο μέρος σχετίζεται με τον υπολογισμό της σ.δ. πυκνότητας. Οι λύσεις των παραπάνω προβλημάτων έχουν εφαρμογές στον αναλογισμό και στα χρηματοοικονομικά.

Abstract

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ be a filtered probability space. Which are all the probability measures on $\mathcal{F}$ under which all the members of a given family $\mathscr{X}$ of processes are local martingales? Such a problem is called a *martingale−problem*. First "general" martingale problems are introduced, and then the martingale−problems related with point processes, random measures and semi−martingales are investigated. Next, the problem of what happens to a semi−martingale or a random measure, when one replaces the original measure P by another probability measure Q on $\mathcal{F}$ which is absolutely continuous with respect to P, is studied. Part of the problem consists in various versions of Girsanov's theorem. Another part examined, consists in computing density processes. Solutions to the above problems have applications to actuarial science and financial mathematics.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

μ.χ. : μετρήσιμος χώρος
χ.μ. : χώρος μέτρου
χ.π. : χώρος πιθανότητας
σ.μ.μ. : σύνολο μηδενικού μέτρου
σ.β. : σχεδόν βέβαια
σ.ο. : σχεδόν όλα
P−σ.π: σχεδόν παντού ως προς το μέτρο P
τ.μ. : τυχαία μεταβλητή
σ.κ. : συνάρτηση κατανομής
σ.π. : συνάρτηση πιθανότητας
σ.π.π. : συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.δ. : στοχαστική διαδικασία
Δ.Ε. : Διπλωματική Εργασία
χ.δ. : χρόνος διακοπής
δ.μ.τ : δεσμευμένη μέση τιμή
φ.χ.π. : φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας
PII : διαδικασίες με ανεξάρτητες προσαυξήσεις
PIIS : διαδικασίες με ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις

Εισαγωγή

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ μία στοχαστική βάση (βλ. Ορισμό 2.1.1) και $\mathscr{X}$ μία οικογένεια στοχαστικών διαδικασιών (σ.δ. για συντομία). Ένα ενδιαφέρον ερώτημα, γνωστό ως το *martinagle−πρόβλημα* είναι το εξής: Να βρεθούν όλα τα μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\mathcal{F}$ κάτω από τα οποία κάθε μέλος της $\mathscr{X}$ είναι ένα τοπικό martingale (βλ. Ορισμό 2.5.8).

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία (Δ.Ε. για συντομία) γίνεται μία προσπάθεια μελέτης του martinagle−προβλήματος. Γι' αυτόν το σκοπό χρειάζονται προηγουμένως κάποιες έννοιες της θεωρίας των σ.δ. που μελετώνται στα Κεφάλαια 1 έως 6.

Η Δ.Ε. είναι οργανωμένη ως εξής. Στο Κεφάλαιο 1 παρατίθενται βασικές έννοιες και ορισμοί. Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μία επισκόπηση χρήσιμων εννοιών των σ.δ., όπως των χρόνων διακοπής, των προαιρετικών σ−αλγεβρών, των martingales και της μεθόδου της τοπικοποίησης.

Γενικότερα η έννοια της προβλεψιμότητας είναι πολύ σημαντική για τα παρακάτω, για αυτό τον λόγο στο Κεφάλαιο 3 παραθέτουμε στοιχεία των προβλέψιμων σ−αλγεβρών, των προβλέψιμων χρόνων, των ολικά απρόσιτων χρόνων διακοπής και των προβλέψιμων προβολών.

Στο Κεφάλαιο 4 μελετώνται οι αύξουσες σ.δ., το Θεώρημα της ανάλυσης των Doob−Meyer για υπο−martingales (βλ. Θεώρημα 4.2.1) και οι αντισταθμιστές.

Το Κεφάλαιο 5 είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την πορεία της Δ.Ε., καθώς μελετάμε την έννοια των ημι−martingales και ορίζουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Η κλάση των ημι−martingales αποδείχθηκε, ότι είναι κατάλληλη για την ανάπτυξη του Στοχαστικού Λογισμού διότι είναι ευσταθής κάτω από φυσικές λειτουργίες, όπως: **(a)** αν τα X και Y είναι ημι−martingales τότε η σ.δ. $\int_0^t Y dX$ είναι ημι−martingale **(b)** αν η X είναι ημι−martingale και αν η f είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη τότε η $f \circ X$ είναι ημι−martingale σύμφωνα με τον τύπο του Itô (βλ. Θεώρημα 5.5.4). **(c)** Η κλάση των ημι−martingales παραμένει αναλλοίωτη αν το μέτρο P του υποκείμενου χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ αντικατασταθεί από ένα ισοδύναμο μέτρο Q. Σημειώνουμε, ότι γενικά ένα (τοπικό) $P-$martingale δεν θα είναι ένα (τοπικό) $Q-$martingale, αφού οι μέσες τιμές υπολογίζονται ως προς διαφορετικά μέτρα. Επομένως η (c) είναι αξησημείωτη. Η (c) χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη της έννοιας της αλλαγής of drift technique.

Το Κεφάλαιο 6 είναι πολύ βασικό για την συνέχεια της Δ.Ε.. Στην Ενότητα 6.1 ορίζουμε την έννοια των γενικών τυχαίων μέτρων και των τυχαίων μέτρων με ακέραιες τιμές. Στις 6.2 και 6.3 ορίζουμε και μελετούμε τα χαρακτηριστικά των ημι$-$martingales που είναι από τις βασικότερες έννοιες που στην πορεία θα χρησιμοποιηθούν εκτενώς. Στην 6.4 ορίζονται οι σ.δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δίνονται κάποια παραδείγματα, και αποδεικνύονται κάποιοι χαρακτηρισμοί των σ.δ. με ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις μέσω των ημι$-$martingales και των χαρακτηριστικών τους.

Στο Κεφάλαιο 7 τίθεται και αναλύεται το martingale$-$πρόβλημα.

Στο Κεφάλαιο 8 ορίζεται η έννοια της σ.δ. της πυκνότητας και γίνεται μία σύντομη επισκόπηση των Θεωρημάτων τύπου Girsanov. Ειδικότερα αποδεικνύεται το κλασσικό Θεώρημα Girsanov (βλ. Θεώρημα 8.2.3), και διατυπώνονται τα Θεωρήματα Girsanov ως προς ένα τυχαίο μέτρο (βλ. Θεώρημα 8.3.2) και ως προς ένα ημι$-$martingale (βλ. Θεώρημα 8.4.1).

Στο Κεφάλαιο 9 αποδεικνύεται το Θεμελιώδες Θεώρημα Αναπαράστασης για τοπικά Martingales (βλ. Θεώρημα 9.4.1), το οποίο είναι άμεσα συνδεδεμένο με το martingale$-$πρόβλημα και χρήσιμο για το Κεφάλαιο 10.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 10 μελετάται το πρόβλημα του υπολογισμού της διαδικασίας πυκνότητας, που είναι άμεσα συνδεδεμένο με το martingale$-$πρόβλημα (βλ. Θεώρημα 10.1.4 και 10.1.6), και δίνονται κάποια παραδείγματα με "αναλυτικούς" υπολογισμούς της σ.δ. της πυκνότητας.

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες και ορισμοί

Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες και κάποιους βασικούς συμβολισμούς και ορισμούς που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

- Με $\mathbb{N}^*$ συμβολίζεται το σύνολο $\{1, 2, \ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο όλων των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Επίσης χρησιμοποιούνται τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ και $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Ομοίως ορίζονται και οι συμβολισμοί $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$.

- Έστω Ω σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Με A^c ή $\Omega\backslash A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του** A (σε σχέση με το Ω), με $A \uplus B$ συμβολίζεται η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων και με $\biguplus_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται η ένωση μιας οικογένειας $\{A_i\}_{i\in I}$ $(I \neq \varnothing)$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Ω.

- Τα στοιχεία μίας $\mathcal{F}-$άλγεβρας $\mathcal{F}$ καλούνται **ενδεχόμενα**, ενώ για κάθε $A \in \mathcal{F}$ με χ_A συμβολίζουμε την **δείκτρια συνάρτηση** του (ενδεχομένου) A.

- Ας θεωρήσουμε επίσης ένα σύστημα υποσυνόλων $\mathscr{G}$ του Ω. Η **ελάχιστη** $\sigma-$άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathscr{G}$ συμβολίζεται με $\sigma(\mathscr{G})$ και ονομάζεται **η $\sigma-$άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathscr{G}$, ενώ το $\mathscr{G}$ ονομάζεται **γεννήτορας** της $\sigma(\mathscr{G})$. Μία $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μία αριθμήσιμη οικογένεια $\mathscr{G}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύει $\mathcal{A} = \sigma(\mathscr{G})$. Τέλος, με $\mathfrak{B}$ και $\mathfrak{B}((\alpha, \beta))$, όπου $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, συμβολίζουμε την Borel $\sigma-$άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και (α, β), αντίστοιχα.

Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.μ. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

- Ένα σύνολο $N \in \mathcal{F}$ ονομάζεται **σύνολο μηδενικού μέτρου** ($\sigma.\mu.\mu.$) ή **σύνολο** $\mu-$**μηδενικού μέτρου** ($\mu - \sigma.\mu.\mu.$) ή $\mu-$**μηδενικό σύνολο** αν $\mu(N) = 0$. Η οικογένεια όλων των $\mu - \sigma.\mu.\mu.$ συμβολίζεται με $\mathcal{F}_{0,\mu}$, όπου $\mathcal{F}_{0,\mu} := \{N \in \mathcal{F} : \mu(N) = 0\}$. Επίσης ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{N}^\mu := \{A \subseteq \Omega : \exists N \in \mathcal{F}_{0,\mu},\ \ A \subseteq N\}$. Αν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης μπορούμε να γράφουμε $\mathcal{N} := \mathcal{N}^\mu$. Ισχύει $\mathcal{F}_{0,\mu} \subseteq \mathcal{N}^\mu$, και $\mathcal{F}_{0,\mu} = \mathcal{N}^\mu$ αν και μόνο αν ο χ.μ. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι πλήρης.

- Λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X **ακολουθεί την κατανομή** $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$, όπου $m \in \mathbb{N}$, και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X}\nu(dx) = \int_{B\cap R_X} f_X(x)\nu(dx) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

  όπου f_X η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας (σ.π. για συντομία), και ν είναι το αριθμητικό μέτρο επάνω στον $\mathbb{N}$ ή το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στον $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι συνεχής ή διακριτή. Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

- Οι $\sigma-$υποάλγεβρες $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ της $\mathcal{F}$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n$ και για κάθε $A_k \in \mathcal{F}_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια $\sigma-$υποαλγεβρών της $\mathcal{F}$ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων** $\sigma-$**υποαλγεβρών της** $\mathcal{F}$ αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε, πεπερασμένες στο πλήθος, από αυτές είναι ανεξάρτητες.

- Επί πλέον, για κάθε τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}.$$

  Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια $\sigma-$άλγεβρα στον Ω που ονομάζεται η $\boldsymbol{\sigma}-$**άλγεβρα στον** Ω **η παραγόμενη από την** X και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ., όπου I σύνολο δεικτών, ορίζουμε

$$\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big) := \sigma\Bigg(\bigcup_{j\in I}\sigma(X_j)\Bigg).$$

Η $\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big)$ ονομάζεται η $\sigma-$άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$.

- Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathscr{G}$ μία $\sigma-$υποάλγεβρα της $\mathcal{F}$. Κάθε $\mathscr{G}-$μετρήσιμη συνάρτηση $Y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ που ικανοποιεί για κάθε $A \in \mathscr{G}$ την ισότητα $\int_A XdP = \int_A YdP$, ονομάζεται **μία εκδοχή της δεσμευμένης** (ή της υπο συνθήκης) **μέσης τιμής της** X **δοσμένης της** $\mathscr{G}$ (βλ. π.χ. [3], Ορισμός 3.3.10) και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X|\mathscr{G}]$. Για $X = \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \mathcal{F}$ θέτουμε $P(E|\mathscr{G}) := \mathbb{E}_P[\chi_E|\mathscr{G}]$. Για λόγους συντομογραφίας γράφουμε ″δ.μ.τ.″ αντί ″δεσμευμένη μέση τιμή.″

- Αν η X είναι μη φραγμένη και μη αρνητική ή μη θετική τότε ορίζουμε την $\mathbb{E}_P[X|\mathscr{G}] := +\infty$ ή $-\infty$, αντίστοιχα, ως την δ.μ.τ. της X δοσμέμης της $\mathscr{G}$. Αν η X είναι οποιαδήποτε τ.μ. εκτός των παραπάνω περιπτώσεων, τότε **μία γενικευμένη υπο συνθήκη μέση τιμή** της X δοσμένης της $\mathscr{G}$ δίνεται από τον τύπο $\mathbb{E}_P[X|\mathscr{G}] := +\infty$.

- Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in T}$ τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ $\sigma-$υποαλγεβρών της $\mathcal{F}$, όπου $T, I \neq \varnothing$ σύνολα δεικτών, αν για κάθε πεπερασμένο αριθμό τ.μ. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}$ και $\sigma-$υποαλγεβρών $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ της $\mathcal{F}$ $(m, n \in \mathbb{N})$, οι $\sigma-$υποάλγεβρες $\sigma(X_{t_1}), \ldots, \sigma(X_{t_m}), \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ είναι ανεξάρτητες.

- Μία οικογένεια $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in I}$ $\sigma-$υποαλγεβρών της $\mathcal{F}$ ονομάζεται **διύλιση** αν για κάθε $j, k \in I$ με $j < k$ ισχύει $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_k$.

- Μία σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in I}$ αν για κάθε $j \in I$ η τ.μ. X_j είναι $\mathcal{F}_j-$μετρήσιμη.

  Η $\{T_j\}_{j\in I}$ με $T_j = \sigma\big(\{X_k : k \leq j\}\big)$ για κάθε $j \in I$ ονομάζεται **η κανονική διύλιση για την** $\{X_j\}_{j\in I}$. Προφανώς, κάθε σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στην κανονική της διύλιση.

Κεφάλαιο 2

Επισκόπηση χρήσιμων στοιχείων σ.δ.

Στο Κεφάλαιο αυτό γίνεται μια επισκόπηση κάποιων εννοιών της θεωρίας των Στοχαστικών Διαδικασιών που είναι χρήσιμες για τα επόμενα κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα στην Ενότητα 2.1 αναφέρονται οι ορισμοί των στοχαστικών βάσεων, διυλίσεων και των καθολικά ισοδύναμων σ.δ.. Στην Ενότητα 2.2 ορίζονται οι χρόνοι διακοπής και αποδεικνύονται οι βασικές τους ιδιότητες. Στην 2.3 ορίζονται οι προαιρετικές $\sigma-$άλγεβρες και σ.δ., και αποδεικνύονται κάποιες χρήσιμες ιδιότητές τους. Στην 2.4 περιγράφεται η μέθοδος της τοπικοποίησης, ενώ στην 2.5 ορίζονται τα martingales, που είναι ένα κεντρικό θέμα της Δ.Ε., και αποδεικνύονται κάποιες ιδιότητες χρήσιμες για τα παρακάτω.

2.1 Στοχαστική βάση

Ορισμοί 2.1.1. **(a)** **Στοχαστική βάση** ή **φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας** (φ.χ.π.) είναι μία τετράδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, όπου $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι ένας χ.π. εφοδιασμένος με μία διύλιση $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, όπου μια **διύλιση** στον μ.χ. $(\Omega, \mathcal{F})$ είναι μία αύξουσα οικογένεια $\sigma-$υποαλγεβρών της $\mathcal{F}$.
(b) Μία δυίλιση $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **δεξιά συνεχής**, αν

$$\forall \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Συμβολισμοί : $\quad \mathcal{F}_{\infty^-} := \bigvee_{s \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_s := \sigma\left(\bigcup_{s \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_s\right)$ και $\mathcal{F}_\infty := \mathcal{F}$.

Σε πολλές περιπτώσεις (αλλά όχι πάντα, όπως θα δούμε) είναι πιθανόν να έχει μία παραπάνω ιδιότητα, δηλαδή :

Ορισμοί 2.1.2. **(a)** Λέμε ότι η στοχαστική βάση $\mathscr{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ (ή η διύλιση $\mathbb{F}$) ικανοποιεί τις **συνήθεις συνθήκες** (usual − conditions), αν:

(f$_1$) η $\mathbb{F}$ είναι δεξιά συνεχής

(f$_2$) η $\mathcal{F}_{0,P}$ περιέχει όλα τα $P-$μηδενικά σύνολα της $\mathcal{F}$, δηλαδή $\mathcal{F}_{0,P} \subseteq \mathcal{F}_0$

(f$_3$) η $\mathcal{F}$ είναι $P-$πλήρης.

(b) Με $\mathcal{F}^P$ συμβολίζουμε την $P-$πλήρωση της $\sigma-$άλγεβρας $\mathcal{F}$. Η $\mathcal{F}_t^P$ είναι η μικρότερη $\sigma-$άλγεβρα που περιέχει τα $\mathcal{F}_t$ και $\mathcal{N}^P$. Αυτό εύκολα επαληθεύεται αφού ο $(\Omega, \mathcal{F}^P, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t{}^P\}_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$ είναι ένας καινούργιος φ.χ.π., ο οποίος ονομάζεται η **πλήρωση** της $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$.
(c) Ένα **τυχαίο σύνολο** είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Μία στοχαστική διαδικασία (σ.δ. για συντομία) είναι μία οικογένεια $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. $X_t : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Επομένως μία σ.δ. X επιτρέπεται να θεωρηθεί ως μία συνάρτηση $\widetilde{X} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$, ώστε $\widetilde{X}(\omega, t) := X_t(\omega)$ για κάθε $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$. Για λόγους απλοποίησεις των συμβολισμών από εδώ και πέρα, τα $\widetilde{X}$ και X θα ταυτίζονται.
(d) Για σταθερό $\omega \in \Omega$ η απεικόνιση $X_\bullet(\omega) : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$, ώστε $t \longmapsto X_\bullet(\omega)(t) := X_t(\omega)$ ονομάζεται μία **τροχιά** (path,trajectory) της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.
Για παράδειγμα, η δείκτρια συνάρτηση $\chi_{\mathbf{A}}$ ενός συνόλου $A \in \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$ είναι μια διαδικασία, όπου οι τροχιές της είναι οι δείκτριες συναρτήσεις πάνω στο χ_{A_ω}.
(e) Μία σ.δ. X καλείται **càg** εάν όλες οι τροχιές είναι αριστερά συνεχείς ενώ μια σ.δ. X καλείται **càdlàg** εάν όλες οι τροχιές είναι δεξιά συνεχείς και υπάρχει το αριστερό όριο. Όταν η X είναι càdlàg, ορίζουμε άλλες δύο διαδικασίες, $X_- := \{X_{t^-}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\Delta X := \{\Delta X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} X_{0^-} &:= X_0, \ X_{t^-} := \lim_{s\uparrow\uparrow t} X_s := \lim_{s\to t^-} X_s, \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ \Delta X_t &:= X_t - X_{t^-} \end{aligned} \tag{2.1}$$

(f) Εάν $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία και $T : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ είναι μια απεικόνιση, τότε η $\widetilde{X}^T : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $\widetilde{X}^T(\omega, t) := X_t^T(\omega) := X_{T(\omega)\wedge t}(\omega)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ονομάζεται « **η στοχαστική διαδικασία που σταματάει στο χρόνο T**».

Ορισμοί 2.1.3. **(a)** Ένα τυχαίο σύνολο A καλείται **P − εξαφανιζόμενο** (για συντομία, P−evanescent) αν το σύνολο $A_e := \{\omega \in \Omega : \exists \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (\omega, t) \in A\}$ είναι στοιχείο της οικογένειας $\mathcal{N}^P$. Προφανώς $A_e = \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} A^t$. Αν δεν υπάρχει πρόβλημα σύνγχυσης (δηλ. αν δεν υπάρχει άλλο μέτρο πιθανότητας εκτός του P) τότε μπορούμε να γράφουμε ″εξαφανιζόμενο″ αντί ″P−εξαφανιζόμενο.″

(b) Δύο σ.δ. X και Y καλούνται **P−καθολικά ισοδύναμες** (P−indistinguishable) αν το τυχαίο σύνολο $\{X \neq Y\} = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ είναι P−εξαφανιζόμενο. Για λόγους απλοποίησης, αν δεν υπάρχει πρόβλημα σύνγχυσης θα γράφουμε ″καθολικά ισοδύναμες″ αντί ″P−καθολικά ισοδύναμες.″

Αν οι X και Y είναι καθολικά ισοδύναμες, τότε θα λέμε ότι ″ $X = Y$ **ως προς την καθολική ισοδυναμία.**″

Γενικότερα, για δύο σ.δ. X και Y ισχύει ότι ″ $X \leq Y$ **ως προς την καθολική ισοδυναμία**,″ αν το σύνολο $\{X \nleq Y\}$ είναι εξαφανιζόμενο.

(c) Δύο τυχαία σύνολα A και B ονομάζονται **καθολικά ισοδύναμα** αν οι σ.δ. χ_A και χ_B είναι καθολικά ισοδύναμες. Επίσης θα λέμε ότι ″**A = B ως προς την καθολική ισοδυναμία**″ αν τα A και B είναι καθολικά ισοδύναμα.

Παρατήρηση 2.1.4. Οι σ.δ. X, Y είναι καθολικά ισοδύναμες αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη

$$\exists N \in \mathcal{F}_{0,P}\ \forall t \in \mathbb{R}_+\ \forall \omega \in \Omega\ \ X_t(\omega) = Y_t(\omega) \tag{2.2}$$

Πράγματι, θέτουμε $A := \{X \neq Y\}$. Τότε έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned}
A \ \text{ εξαφανιζόμενο } :&\Longleftrightarrow \exists N \in \mathcal{F}_{0,P}\ \ A_e \subseteq N \\
&\Longleftrightarrow \exists N \in \mathcal{F}_{0,P}\ \ \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} A^t \subseteq N \\
&\Longleftrightarrow \exists N \in \mathcal{F}_{0,P}\ \ \bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} (A^t)^c \supseteq N^c \\
&\Longleftrightarrow \exists N \in \mathcal{F}_{0,P}\ \ \forall \omega \in N^c\ \ \omega \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} (A^t)^c \\
&\Longleftrightarrow \exists N \in \mathcal{F}_{0,P}\ \forall t \in \mathbb{R}_+\ \forall \omega \in N^c\ \ X_t(\omega) = Y_t(\omega) \\
&\Longleftrightarrow (2.2).
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει η παραπάνω παρατήρηση.

2.2 Χρόνοι διακοπής

Ας θεωρήσουμε ότι η τετράδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ είναι ένας φ.χ.π..

Ορισμοί 2.2.1. (a) Χρόνος διακοπής (για συντομία χ.δ.) είναι μια απεικόνιση $T : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ τέτοια ώστε $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.
(b) Αν T είναι ένας χ.δ., τότε συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_T$ την οικογένεια όλων των συνόλων $A \in \mathcal{F}$, έτσι ώστε $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, δηλαδή

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : \quad A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}_+\}.$$

(c) Αν T είναι ένας χ.δ., τότε συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_{T^-}$ την παραγόμενη $\sigma-$άλγεβρα από την $\mathcal{F}_0$ και όλα τα σύνολα της μορφής $A \cap \{t < T\}$, όπου $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{F}_t$ δηλαδή,

$$\mathcal{F}_{T^-} := \sigma(\mathcal{F}_0 \cup \{A \cap \{t < T\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall A \in \mathcal{F}\}).$$

Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι $\mathcal{F}_T$ είναι μία $\sigma-$άλγεβρα. Αν $t \in \mathbb{R}_+$ και $T(\omega) \equiv t$, τότε T είναι ένας χ.δ. και $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$. Παρόμοια για $T \equiv t$, έχουμε $\mathcal{F}_{T^-} = \mathcal{F}_0$ αν $t = 0$ και $\mathcal{F}_{T^-} = \bigvee\limits_{s<t} \mathcal{F}_s$,αν $t > 0$ αρα εχουμε οτι,

$$\mathcal{F}_{t^-} := \begin{cases} \mathcal{F}_0, & t = 0 \\ \bigvee\limits_{s<t} \mathcal{F}_s, & t \in (0, \infty]. \end{cases}$$

Η $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ συνήθως ερμηνεύεται σαν το σύνολο των γεγονότων που συμβαίνουν μετά το χρόνο t. Τότε ο χ.δ. είναι ο τυχαίος χρόνος T έτσι ώστε για κάθε χρόνο t μπορούμε να ελέγξουμε αν $T \leq t$ ή $T > t$, ανάλογα για το τι γνωρίζουμε μέχρι το χρόνο t. Επίσης το $\mathcal{F}_T$ μπορεί να ερμηνευτεί ως το σύνολο των γεγονότων που συμβαίνουν μέχρι το χρόνο T.

Παρακάτω θα διατυπώσουμε πολύ χρήσιμες ιδιότητες των χρόνων διακοπής.

Ιδιότητες 2.2.2. *(a) Αν T είναι ένας χ.δ. και $s \in \mathbb{R}_+$, τότε $T + s$ είναι χ.δ..*

(b) Αν T είναι ένας χ.δ., τότε $\mathcal{F}_{T^-} \subseteq \mathcal{F}_T$ και T είναι $\mathcal{F}_{T^-}-$μετρήσιμη.

(c) Αν T είναι ένας χ.δ. και αν $A \in \mathcal{F}_T$, τότε

$$T_A(\omega) := \begin{cases} T(\omega), & \omega \in A \\ \\ \infty, & \omega \notin A \end{cases}$$

είναι επίσης χ.δ..

(d) Αν η $\mathbb{F}$ είναι δεξιά συνεχής, τότε η απεικόνιση $T : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ είναι ένας χ.δ. αν και μόνο αν $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Σε αυτήν την περίπτωση, ένα σύνολο $A \in \mathcal{F}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_T$ αν και μόνο αν $A \bigcap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

(e) Αν S, T είναι δύο χ.δ., τότε το ίδιο ισχύει για τα $T \wedge S, T \vee S$ και $T + S$.

(f) Αν S, T είναι δύο χ.δ. και αν $A \in \mathcal{F}_S$, τότε $A \bigcap \{S \le T\} \in \mathcal{F}_T$, $A \bigcap \{S = T\} \in \mathcal{F}_T$ και $A \bigcap \{S < T\} \in \mathcal{F}_{T-}$. Ιδιαιτέρως αν $S \le T$ τότε $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

(g) Αν $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι μία ακολουθία χ.δ., τότε $S = \bigwedge T_n$ και $T = \bigvee T_n$ είναι δύο χ.δ. και $\mathcal{F}_S = \bigcap \mathcal{F}_{T_n}$.

Αποδείξεις. **(a)** Έστω ότι $s \in \mathbb{R}_+$, τότε $\{T + s \le t\} = \{T \le t - s\}$ όπου εξετάζουμε τις εξής δύο περιπτώσεις,

- αν $t < s$ έχουμε ότι $\{T \le t - s\} = \emptyset \in \mathcal{F}_t$
- αν $t \ge s$ έχουμε ότι $\{T \le t - s\} \in \mathcal{F}_{t-s} \subseteq \mathcal{F}_t$

άρα $T + s$ είναι χ.δ..
(b) Έστω $A \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t$, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Επίσης, αν $\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$ τότε έχω ότι $A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow A \in \mathcal{F}_T \Longrightarrow \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_T$.
Έστω $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{F}_t$. Επίσης έχουμε ότι $B = A \bigcap \{t < T\}$, τότε έχουμε ότι $\{t < T\} = \{T \le t\}^c \in \mathcal{F}_t$ με $A \in \mathcal{F}_t$ και $t \in \mathbb{R}_+$, άρα έχουμε ότι $B \in \mathcal{F}_t \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$.
Επομένως, πρέπει να δείξουμε ότι $B = A \bigcap \{T \le s\} \in \mathcal{F}_s, \forall s \in \mathbb{R}_+$.
Πράγματι, αν $B \in \mathcal{F}_t$ και $\{T \le s\} \in \mathcal{F}_s \Longrightarrow B \bigcap \{T \le s\} \in \mathcal{F}_s, \forall s \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow B \in \mathcal{F}_T \Longrightarrow \{A \bigcap \{t < T\} : t \in \mathbb{R}_+, A \in \mathcal{F}_t\} \subseteq \mathcal{F}_T$.
Επομένως από τις σχέσεις έχουμε ότι,

$$\mathcal{F}_0 \bigcup \{A \cap \{t < T\} : t \in \mathbb{R}_+, A \in \mathcal{F}_t\} \subseteq \mathcal{F}_T \Longrightarrow$$

$$\sigma(\mathcal{F}_0 \bigcup \{A \cap \{t < T\} : t \in \mathbb{R}_+, A \in \mathcal{F}_t\}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_T) \Longrightarrow \mathcal{F}_{T^-} \subseteq \mathcal{F}_T.$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι T είναι $\mathcal{F}_{T^-}-$μετρήσιμη.
Έστω $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $T^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{T^-}$.
Έστω $B = (-\infty, t]$ με,

$$\begin{aligned}
T^{-1}(B) &:= \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\} \\
&= \{\omega \in \Omega : t < T(\omega)\} \\
&= \Omega \bigcap \{A < T\} \in \mathcal{F}_0 \bigcup \{A \cap \{t < T\} : t \in \mathbb{R}_+, A \in \mathcal{F}_t\} \\
&\Longrightarrow T^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{T^-}
\end{aligned}$$

άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, η T είναι $\mathcal{F}_{T^-}-$μετρήσιμη.
(c) Έστω $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{F}_T$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\{T_A \leq t\} &= \{\omega \in \Omega : T_A(\omega) \leq t\} \\
&= \{\omega \in A : T(\omega) \leq t\} \bigcup \{\omega \in A^c : \infty \leq t\} \\
&= \{\omega \in A : T(\omega) \leq t\} \bigcup \emptyset \\
&= A \bigcap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t
\end{aligned}$$

διότι αφού $A \in \mathcal{F}_T \Longrightarrow \{T_A \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, άρα η T_Aείναι χ.δ..
(d) ($\Longrightarrow$) Έστω ότι T ότι είναι χ.δ.. Τότε ισχύει $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε έχουμε ότι $\{T < 0\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0$ και για κάθε $t > 0$ έχω ότι,

$$\{T < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$$

αφού $\mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}} \subseteq \mathcal{F}_t$, $n \in \mathbb{N}$ και $\forall \quad t \in \mathbb{R}_+$. Η ισότητα

$$\{T < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t \tag{2.3}$$

αποδεικνύεται ως εξής:
Έστω $\omega \in \Omega$ αυθαίρετο. Τότε

$$\omega \in \{T < t\} \Longleftrightarrow T(\omega) < t.$$

Επίσης υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε

$$T(\omega) \leq s < t \tag{2.4}$$

Όμως από την αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε $n \geq \frac{1}{t-s}$, επομένως

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad s \leq t - \frac{1}{n} < t \tag{2.5}$$

Από τις σχέσεις (2.4) και (2.5) προκύπτει ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $T(\omega) \leq s \leq t - \frac{1}{n} < t$, επομένως υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T(\omega) \leq t - \frac{1}{n}$ και έτσι

$$\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T \leq t - \frac{1}{n}\}.$$

Επειδή το $\omega \in \Omega$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι

$$\{T < t\} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T \leq t - \frac{1}{n}\}. \tag{2.6}$$

Αφού η αντίστροφη σχέση εγκλεισμού είναι προφανής, από την (2.6) έπεται ότι ισχύει η (2.3).
($\Longleftarrow$) Έστω ότι $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T < t + \frac{1}{n}\} \tag{2.7}$$

Πράγματι, έστω $\omega \in \Omega$ αυθαίρετο τότε

$$\begin{aligned}
\omega \in \{T \leq t\} &\implies T(\omega) \leq t \\
&\implies T(\omega) < t + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&\implies \omega \in \{T < t + \frac{1}{n}\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&\implies \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T < t + \frac{1}{n}\}.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\{T \leq t\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T < t + \frac{1}{n}\}. \tag{2.8}$$

Αντιστρόφως,

$$\begin{aligned}\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{T < t + \frac{1}{n}\} &\implies T(\omega) < t + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\implies T(\omega) \leq \lim_{n\to\infty} (t + \frac{1}{n}) \\ &\implies T(\omega) \leq t.\end{aligned}$$

Άρα

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{T < t + \frac{1}{n}\} \subseteq \{T \leq t\}. \tag{2.9}$$

Από τις σχέσεις (2.8) και (2.9) έπεται η (2.7).
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$ από την υποθεσή μας προκύπτει ότι $\{T < t+\frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}$.
Συνεπώς

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{T < t + \frac{1}{n}\} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}} = \mathcal{F}_t$$

όπου η ισότητα είναι συνέπεια της δεξιάς συνέχειας της $\mathbb{F}$. Άρα από την (2.3) έπεται ότι $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, δηλαδή ο T είναι χ.δ..
(e) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $T \wedge S$ είναι χ.δ..
Γνωρίζουμε ότι $T \wedge S = \inf(T, S)$, όπου S, T είναι χρόνοι διακοπής. Επομένως από τον ορισμό έχουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\begin{aligned}\{T \wedge S \leq t\} &= \{\inf(T, S) \leq t\} \\ &= \{T \leq t\} \cup \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t\end{aligned}$$

άρα $T \wedge S$ είναι χ.δ..

Τώρα θα αποδείξουμε ότι $T \vee S$ είναι χ.δ..
Έχουμε ότι $T \vee S = \sup(T, S)$ και όπου S, T είναι χ.δ.. Επομένως από τον ορισμό έχουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\begin{aligned}\{T \vee S \leq t\} &= \{\sup(T, S) \leq t\} \\ &= \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t\end{aligned}$$

Άρα $T \vee S$ είναι χ.δ..
Τέλος θα αποδείξουμε ότι $T + S$ είναι χ.δ..

Παρατηρούμε ότι,

$$\{T \leq t, S > t - T\} = \bigcup_{q \in [o,t] \cap \mathbb{Q}} \{q \leq T \leq t, S > t - q\}.$$

Πράγματι, έστω $\omega \in \Omega$ αυθαίρετο. Τότε

$$\begin{aligned} \omega \in \{T \leq t, S > t - T\} &\iff T(\omega) \leq t, \quad S(\omega) > t - T(\omega) \\ &\implies \exists q \in \mathbb{Q} \cap [0,t] \quad q \leq T(\omega) \leq t, \quad S(\omega) > t - T(\omega) \\ &\implies \exists q \in \mathbb{Q} \cap [0,t] \quad q \leq T(\omega) \leq t, \quad S(\omega) > t - q \geq t - T(\omega). \end{aligned}$$

Όπου η παραπάνω σχέση ισχύει διότι, αν ήταν

$$\begin{aligned} S(\omega) \leq t - q &\implies S(\omega) + q \leq t \\ &\implies S(\omega) + q \leq S(\omega) + T(\omega) \leq t \end{aligned}$$

άτοπο, αφού $S + T > t$.
Άρα

$$\omega \in \{T \leq t, S > t - T\} \implies \omega \in \{q \leq T \leq t, S > t - q\}.$$

Επειδή το $\omega \in \Omega$ αυθαίρετο, έπεται ότι

$$\{T \leq t, S > t - T\} \subseteq \bigcup_{q \in [o,t] \cap \mathbb{Q}} \{q \leq T \leq t, S > t - q\}.$$

Αντιστρόφως,

$$\begin{aligned} &\omega \in \bigcup_{q \in [o,t] \cap \mathbb{Q}} \{q \leq T \leq t, S > t - q\} \\ &\implies \exists q \in \mathbb{Q} \cap [0,t] \quad q \leq T(\omega) \leq t \quad S(\omega) > t - q \\ &\implies \exists q \in \mathbb{Q} \cap [0,t] \quad q \leq T(\omega) \leq t \quad S(\omega) > t - q \leq t - T(\omega) \\ &\implies \exists q \in \mathbb{Q} \cap [0,t] \quad q \leq T(\omega) \leq t \quad S(\omega) + T(\omega) > t \\ &\implies \omega \in \{T \leq t, S + T > t\}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\bigcup_{q\in[o,t]\cap\mathbb{Q}} \{q \le T \le t, S > t-q\} \subseteq \{T \le t, S > t-T\}.$$

Άρα έχουμε ότι

$$\{T \le t, S > t-T\} = \bigcup_{q\in[o,t]\cap\mathbb{Q}} \{q \le T \le t, S > t-q\}.$$

(f) Έστω $A \in \mathcal{F}_S$. Για να αποδείξω την ισότητα $A \cap \{S \le T\} \in \mathcal{F}_T$ αρκεί να δείξω ότι

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (A \cap \{S \le T\}) \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Πράγματι, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$A \cap \{S \le T\} \cap \{T \le t\} = [A \cap \{S \le t\} \cap \{T \le t\} \cap \{S \wedge t \le T \wedge t\}].$$

Όμως παρατηρούμε ότι

$$A \cap \{S \le t\} \in \mathcal{F}_t, \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t, \{S \wedge t \le T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$$

άρα κάθε όρος είναι στο $\mathcal{F}_t$. Επομένως έχουμε ότι

$$A \bigcap \{S \le T\} \in \mathcal{F}_T. \tag{2.10}$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι $A \cap \{S = T\} \in \mathcal{F}_t$. Επομένως αρκεί να δείξω ότι

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (A \cap \{S = T\}) \bigcap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Όμως γνωρίζουμε ότι $A \in \mathcal{S}$ και άρα $A \cap \{S \le t\}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (A \cap \{S = T\}) \bigcap \{T \le t\} &= A \cap \{S = T\} \bigcap \{T \le t\} \\ &= A \cap \{S \le t\} \in \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Επομένως, $A \cap \{S = T\} \in \mathcal{F}_t$.

Ιδιαιτέρως, έστω $S \le T$ και $t \in \mathbb{R}_+$ με $A \in \mathcal{F}_S$. Τότε $A \cap \{T \le t\} = A \cap \{S \le T\} \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$. Αφού ισχύει η (2.10) έχουμε ότι $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

(g) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $S = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} T_n$ είναι χ.δ..

Έχουμε ότι $S = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} T_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} T_n$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ από τον ορισμό έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\{S \leq t\} &= \{\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} T_n \leq t\} \\
&= \{\inf_{n\in\mathbb{N}} T_n \leq t\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t
\end{aligned}
$$

και άρα $S = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} T_n$ είναι χ.δ..
Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $T = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} T_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ είναι χ.δ..
Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ από τον ορισμό έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\{T \leq t\} &= \{\bigvee_{n\in\mathbb{N}} T_n \leq t\} \\
&= \{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n \leq t\} \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t
\end{aligned}
$$

και άρα $T = \bigvee T_n$ είναι χ.δ..
Τέλος θα δείξουμε ότι $\mathcal{F}_S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{T_n}$. Από το βήμα (f) και τον ορισμό της S προκύπτει ότι

$$
F_S \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{T_n}. \tag{2.11}
$$

Για τον αντίστροφο εγλεισμό, έστω $A \subseteq \Omega$. Τότε

$$
\begin{aligned}
A \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{T_n} &\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad A \cap \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t \\
&\implies \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \bigcap(\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n \leq t\}) \in \mathcal{F}_t \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \bigcap\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t \\
&\iff A \in \mathcal{F}_S,
\end{aligned}
$$

όπου η δεύτερη ισοδυναμία προκύπτει από την απόδειξη του βήματος (g). Αφού το $A \subseteq \Omega$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{T_n} \subseteq \mathcal{F}_S. \tag{2.12}$$

Από τις σχέσεις (2.11) και (2.12) έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 2.2.3. *Κάθε χ.δ. T πάνω στον πλήρη φ.χ.π. $(\Omega^P, \mathcal{F}^P, \mathbb{F}^P, P)$ είναι σ.β. ίσος με έναν χρόνο διακοπής πάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$.*

Απόδειξη. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει $A_t \in \mathcal{F}_t$ τέτοιο ώστε $A_t = \{T < t\}$ σ.δ. (βλ. Ορισμό 2.1.2 (b)). Τότε ορίζουμε $T'(\omega) = \inf\{s \in \mathbb{Q}_+ : \omega \in A_s\}$, είναι ένας $\mathbf{F}-$χ.δ. αφού $\{T' < t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}_+, s<t} A_s$ που ανήκει στην $\mathcal{F}_t$ και $T' = T$ σ .β. επειδή $\{T < t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}_+, s<t} \{T < t\}$ είναι σ .β. ίσο με το $\{T' < t\}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. $\square$

2.3 Προαιρετική σ−άλγεβρα

Ορισμοί 2.3.1. **(a)** Μία σ.δ. X είναι **προσαρμοσμένη στη δυίλιση** $\mathbb{F}$ (ή εν συντομία προσαρμοσμένη), αν η X_t είναι $\mathcal{F}_t-$μετρήσιμη για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.
(b) Η προαιρετική σ−άλγεβρα είναι η σ−άλγεβρα $\mathscr{O}$ στον $\Omega \times \mathbb{R}_+$, η οποία παράγεται από όλες τις *càdlàg* προσαρμοσμένες σ.δ. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$(θεωρώντας τις $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ως απεικονίσεις στον $\Omega \times \mathbb{R}_+$). Έστω η συνάρτηση $\widetilde{X} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R} : (\omega, t) \longmapsto \widetilde{X}(\omega, t) := X_t(\omega)$. Τότε

$$\mathscr{O} := \sigma\left(\{\widetilde{X} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R} : \text{η} \quad X \quad \text{είναι} \quad \textit{càdlàg} \quad \text{και προσαρμοσμένη}\}\right).$$

(c) Μία σ.δ., η οποία είναι $\mathscr{O}-$μετρήσιμη θα καλείται **προαιρετική**. Ομοίως ένα τυχαίο σύνολο που είναι στοιχείο της $\mathscr{O}$ ονομάζεται **προαιρετικό**.

Ορισμός 2.3.2. Έστω σ.δ. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ και T ένας χ.δ.. Ορίζουμε την συνάρτηση $X_T : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ως εξής: $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ αν $T(\omega) < \infty$, και $X_T(\omega) := \lim_{t \to \infty} X_t(\omega)$ αν $T(\omega) = \infty$ και υπάρχει το $\lim_{t \to \infty} X_t(\omega)$. Ο συμβολισμός $X_T \chi_{\{T<\infty\}}$ χρησιμοποιείται για την συνάρτηση που συμφωνεί με την X_T επάνω στο $\{T < \infty\}$ και μηδενίζεται επάνω στο $T = \infty$.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία προαιρετική σ.δ., δηλαδή η $\widetilde{X}$ είναι $\mathscr{O}$−μετρήσιμη. Τότε η $\widetilde{X}$ είναι $\mathcal{F}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$−μετρήσιμη. Επιπλέον, αν T είναι ένας χ.δ., τότε*

(i) η $X_T\chi_{\{T<\infty\}}$ είναι $\mathcal{F}_T$−μετρήσιμη (ως εκ τούτου, η X είναι προσαρμοσμένη)

(ii) η σ.δ. X^T είναι προαιρετική.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το θεώρημα θα χρειαστούμε το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης για συναρτήσεις (βλ. Θεώρημα Β΄.3.6). Έστω $\mathcal{V}$ η κλάση όλων των σ.δ. που είναι $\mathcal{F}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$−μετρήσιμες και ικανοποιούν τις ιδιότητες (i) και (ii). Προφανώς η $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός σύνδεσμος που είναι κλειστός ως προς τα σημειακά όρια. Τότε σύμφωνα με το Ορισμό 2.3.1 και ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης για συναρτήσεις είναι αρκετό να δείξουμε ότι κάθε *càdlàg* προσαρμοσμένη στην $\mathbb{F}$ σ.δ. X είναι $\mathcal{F}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$−μετρήσιμη και ικανοποιεί τις (i) και (ii).

(a) Θεωρούμε την κλάση $\widetilde{\mathcal{M}}$ όλων των σ.δ. $\widetilde{X} : \Omega\times[0,\infty) \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε η X να είναι *càdlàg*, προσαρμοσμένη στην $\mathbb{F}$ και φραγμένη. Τότε $\sigma(\widetilde{\mathcal{M}}) = \mathscr{O}$.
Πράγματι, έστω

$$\mathcal{M} := \{\widetilde{X} : \Omega\times\mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R} : \text{η } X \text{ είναι } càdlàg \text{ και προσαρμοσμένη στην } \mathbb{F}\}$$

και $\widetilde{\mathscr{O}} := \sigma(\widetilde{\mathcal{M}})$. Αφού $\widetilde{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$, έπεται ότι $\widetilde{\mathscr{O}} \subseteq \mathscr{O}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mathscr{O} \subseteq \widetilde{\mathscr{O}}$. Πράγματι, έστω $\widetilde{X} \in \mathcal{M}$. Τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $\{\widetilde{X_n}\}$ στο $\widetilde{\mathcal{M}}$ ώστε $\widetilde{X} = \lim_{n\to\infty}\widetilde{X_n}$. Θέτουμε $\mathcal{D} := \{B\in\mathfrak{B} : \widetilde{X}^{-1}(B)\in\widetilde{\mathscr{O}}\}$ και $\mathscr{G}_{\mathfrak{B}} := \{(-\infty,a] : a\in\mathbb{R}\}$. Τότε η κλάση $\mathscr{G}_{\mathfrak{B}}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές και $\mathfrak{B} = \sigma(\mathscr{G}_{\mathfrak{B}})$. Επίσης $\mathscr{G}_{\mathfrak{B}} \subseteq \mathcal{D}$ διότι, αν $B := (-\infty,a]$ όπου $a\in\mathbb{R}$, τότε αφού η $\{\widetilde{X}\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\widetilde{\mathcal{M}}$ με $\widetilde{X} = \lim_{n\to\infty}\widetilde{X_n}$, εύκολα προκύπτει ότι $\widetilde{X}^{-1}(B) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\widetilde{X_n}^{-1}(B)\in\widetilde{\mathscr{O}}$, δηλαδή $B\in\mathcal{D}$. Θα δείξουμε επιπλέον ότι η $\mathcal{D}$ είναι κλάση Dynkin. Πράγματι,

(Dyn1) $\varnothing\in\mathcal{D}$, προφανές.

(Dyn2) για κάθε $B\in\mathcal{D}, B^c\in\mathcal{D}$.

Πράγματι, έστω $B\in\mathcal{D}$. Τότε $\widetilde{X}^{-1}(B)\in\widetilde{\mathscr{O}}$. Άρα $\widetilde{X}^{-1}(B^c)\in\widetilde{\mathscr{O}}$.

(Dyn3) Έστω $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συνόλων στο $\mathfrak{B}$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $B_n \in \mathcal{D}$ και $B_i \cap B_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j \in \mathbb{N}$.
Τότε $\widetilde{X}^{-1}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{X}^{-1}(B_n)$, άρα $\widetilde{X}^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \in \widetilde{\mathscr{O}}$ αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $B_n \in \mathcal{D}$.
Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης για σύνολα (βλ. Θεώρημα Β΄.2.2) για να συμπεράνουμε ότι $\mathcal{D} = \mathfrak{B}$. Άρα ισχύει ότι $\widetilde{X}^{-1}(B) \in \widetilde{\mathscr{O}}$, για κάθε $B \in \mathfrak{B}$. Επομένως, $\mathcal{M} \subseteq \widetilde{\mathscr{O}}$ και άρα $\mathscr{O} \subseteq \widetilde{\mathscr{O}}$.
(b) Ισχύει ότι $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$. Για την απόδειξη του (b) ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα,
($\mathbf{b_1}$) Κάθε $\widetilde{X} \in \mathcal{M}$ είναι $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)-$μετρήσιμη.
Πράγματι, έστω $\widetilde{X} \in \mathcal{M}$. Ορίζουμε την ακολουθία $\{\widetilde{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θέτοντας

$$X_t{}^n := \sum_{k=1}^{\infty} X_{\frac{k}{2^n}} \chi_{\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)}(t)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Έστω $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\{\widetilde{X}^n \in B\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_{\frac{k}{2^n}} \in B\} \times \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) \in \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+).$$

Πράγματι, αφού για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\{X_{\frac{k}{2^n}} \in B\} \times \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) \in \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$$

προκύπτει ότι $\{\widetilde{X}^n \in B\} \in \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $\widetilde{X}^n$ είναι $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)-$μετρήσιμη, και επειδή η X είναι δεξιά συνεχής, θα έχουμε ότι $\widetilde{X} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{X}^n$ άρα η $\widetilde{X}$ είναι $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)-$μετρήσιμη.
($\mathbf{b_2}$) Έστω T είναι ένας χ.δ.. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την απεικόνιση $T_n : \Omega \longmapsto [0, \infty]$ ως εξής:

$$T_n(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{αν} \quad \frac{k-1}{2^n} \le T(\omega) < \frac{k}{2^n} \\ \\ \infty, & \text{αν} \quad \omega \in \{T = \infty\}. \end{cases}$$

Τότε η T_n είναι χ.δ. και $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την Ιδιότητα 2.2.2 (d) έχουμε

$$
\begin{aligned}
\{T_n \le t\} &:= \{\omega \in \Omega : T_n(\omega) \le t\} \\
&= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : \frac{k}{2^n} \le t, \quad \frac{k-1}{2^n} \le T(\omega) < \frac{k}{2^n}\} \\
&= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \le T(\omega) < \frac{k}{2^n} \le t\} \in \mathcal{F}_t.
\end{aligned}
$$

δηλαδή η T_n είναι χ.δ.. Επιπλέον η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι φθίνουσα ακολουθία και το T είναι κάτω φράγμα της.
Πράγματι,

- Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $T_n = \infty$ τότε και μόνο τότε $T = \infty$ και επομένως $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$.
- Αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $T_{n_0} < \infty$, τότε για κάθε $\omega \in \Omega$ θα έχουμε $T_{n_0}(\omega) = \frac{k}{2^{n_0}}$ και $\frac{k-1}{2^{n_0}} \le T(\omega) < \frac{k}{2^{n_0}}$. Άρα για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει
$$\lim_{n\to\infty} \frac{k-1}{2^n} \le T(\omega) \le \lim_{n\to\infty} \frac{k}{2^n}$$
ή ισοδύναμα $T(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(\omega)$.

($\mathbf{b_3}$) Ισχύει η ιδιότητα (i). Πράγματι για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ και $n \in \mathbb{N}_0$ έχουμε

$$\{X_{T_n} \in B\} \cap \{T_n \le t\} = \bigcup_{k=1,\, \frac{k}{2^n}\le t}^{\infty} \{X_{\frac{k}{2^n}} \in B\} \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_t$$

Επομένως $X_{T_n} \in \mathcal{F}_{T_n}$ και η $X_{T_n}\chi_{\{T_n<\infty\}}$ είναι $\mathcal{F}_{T_n}$−μετρήσιμη. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η X είναι δεξιά συνεχής και το ($\mathbf{b_2}$), παίρνουμε ότι $X_T\chi_{\{T<\infty\}} = \lim\limits_{n\to\infty} X_{T_n}\chi_{\{T_n<\infty\}}$. Επομένως λαμβάνοντας υπ' όψη την Ιδιότητα 2.2.2 (g) παίρνουμε ότι ισχύει η (i) για την X_T.
($\mathbf{b_4}$) Η X^T είναι $\mathscr{O}$− μετρήσιμη.
Πράγματι, αφού για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$X_t^T := X_{T\wedge t} = X_t\chi_{\{T>t\}} + X_T\chi_{\{T\le t\}} \in \mathcal{F}_t$$

προκύπτει ότι η X^T είναι *càdlàg* και προσαρμοσμένη στην $\mathbb{F}$, άρα είναι προαιρετική δηλαδή ισχύει η (ii).

Από τα βήματα των αποδείξεων (b_1) μέχρι και (b_4) προκύπτει ότι $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$. $\square$

Επίσης, υπάρχει ένας άλλος χαρακτηρισμός για τις προαιρετικές $\sigma-$άλγεβρες ο οποίος διαφέρει από το προηγούμενο ορισμό και μας δίνει μία εικόνα για αυτήν την έννοια. Για αυτό το αποτέλεσμα, αρχικά θα εισάγουμε την έννοια του στοχαστικού διαστήματος.

Ορισμός 2.3.4. Αν S, T είναι δύο χ.δ., τότε μπορούμε να ορίσουμε τέσσερα είδη στοχαστικών διαστημάτων ως εξής:

- $[\![S,T]\!] := \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : t \in \mathbb{R}_+, \quad S(\omega) \leq t \leq T(\omega)\}$
- $[\![S,T[\![:= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : t \in \mathbb{R}_+, \quad S(\omega) \leq t < T(\omega)\}$
- $]\!]S,T]\!] := \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : t \in \mathbb{R}_+, \quad S(\omega) < t \leq T(\omega)\}$
- $]\!]S,T[\![:= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : t \in \mathbb{R}_+, \quad S(\omega) < t < T(\omega)\}$.

Συμβολισμός: αν έχουμε $[\![T,T]\!]$, τότε μπορούμε να γράφουμε $[\![T]\!] := [\![T,T]\!]$. Επίσης, το $[\![T]\!]$ είναι ο περιορισμός του γραφήματος της απεικόνισης $T : \Omega \longmapsto \bar{\mathbb{R}}_+$ στο σύνολο $\Omega \times \mathbb{R}_+$, το οποίο ονομάζουμε **το γράφημα του χρόνου διακοπής** T.

Η διαδικασία $\chi_{[\![0,T]\!]}$ είναι *càdlàg*, και είναι προσαρμοσμένη στην $\mathbb{F}$ αν και μόνο αν T είναι χ.δ.. Τότε από τον Ορισμό 2.3.1 έχουμε ότι $[\![0,T]\!] \in \mathscr{O}$ για κάθε χ.δ. T. Γενικά ισχύει ότι:

Πρόταση 2.3.5. *Αν S, T είναι δύο χ.δ. και αν η τ.μ. Y είναι $\mathcal{F}_S-$μετρήσιμη, τότε οι τέσσερις σ.δ. $Y\chi_{[\![S,T]\!]}$, $Y\chi_{[\![0,T[\![}$, $Y\chi_{]\!]S,T]\!]}$, $Y\chi_{]\!]S,T[\![}$ είναι προαιρετικές.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το παραπάνω αποτέλεσμα όταν η Y είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $A \in \mathcal{F}_S$.
Ας πάρουμε ότι $X = \chi_A \chi_{]\!]S,T]\!]}$. Τότε η X είναι το όριο της

$$X^n = \chi_A \chi_{[\![S_n,T_n[\![}$$

όπου $S_n = S + \frac{1}{n}$ και $T_n = T + \frac{1}{n}$.
Η X^n είναι μία *càdlàg* από την κατασκευή της και από την Ιδιότητα 2.2.2, (f)

και το γεγονός ότι $A \in \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_{S_n}$, προκύπτει ότι η X^n είναι προσαρμοσμένη και άρα η X_n είναι προαιρετική και συγλίνει στο X. Ανάλογα αποδεικνύουμε και τις άλλες σχέσεις. □

Πρόταση 2.3.6. *Κάθε σ.δ. X η οποία είναι càg και προσαρμοσμένη είναι προαιρετική.*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε μία νέα στοχαστική διαδικασία X^n όπου,

$$X^n = \sum_{k \in \mathbb{N}} X_{\frac{k}{2^n}} \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}$$

Από την Πρόταση 2.3.5 έχουμε ότι η X^n είναι προαιρετική. Αφού η X είναι càg τότε η ακολουθία $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο X. Επομένως η X είναι προαιρετική. □

Πόρισμα 2.3.7. *Αν X είναι μία càdlàg προσαρμοσμένη σ.δ. τότε οι δύο σ.δ. X_- και ΔX είναι προαιρετικές.(υπενθυμίζουμε ότι $\Delta X = X - X_-$).*

2.4 Η μέθοδος της τοπικοποίησης

Σε αυτήν την παράγραφο, θα περιγράψουμε την μέθοδο της τοπικοποίησης όπου θα την χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

Ορισμός 2.4.1. Έστω $\mathcal{C}$ μία κλάση σ.δ.. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}_{loc}$ **την τοπικοποιημένη κλάση** (localized class), που ορίζεται ως εξής: Μια σ.δ. X ανήκει στην κλάση $\mathcal{C}_{loc}$, αν

- υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ χ.δ. (εξαρτώμενη από τη X) έτσι ώστε $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = \infty$ P$-$σ.β., και
- κάθε διακοπτόμενη σ.δ. X^{T_n} ανήκει στην κλάση $\mathcal{C}$.

Η ακολουθία $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ καλείται **τοπικοποιούσα ακολουθία** για την σ.δ. X (σε σχέση με την κλάση $\mathcal{C}$). Για παράδειγμα, αν $\mathcal{C}$ είναι η κλάση όλων των φραγμένων σ.δ., επίσης $\mathcal{C}_{loc}$ είναι η κλάση των λεγόμενων τοπικά φραγμένων σ.δ.. Όπως θα δούμε και στην επόμενη παράγραφο, αν $\mathcal{C}$ είναι η κλάση όλων των υπο$-$martingales, τότε η $\mathcal{C}_{loc}$ θα είναι η κλάση των τοπικών υπο$-$martingales. Βέβαια, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{loc}$. Η τοπικοποίηση είναι πολύ χρήσιμη για τις κλάσεις οι οποίες ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα (όλες οι κλάσεις των σ.δ. που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια θα ικανοποιούν την ακόλουθη ιδότητα).

Ορισμός 2.4.2. Μία κλάση $\mathcal{C}$ από σ.δ. καλείται **ευσταθής υπο την διακοπή** (stable under stopping) αν για κάθε $X \in \mathcal{C}$ και κάθε χ.δ. T, η διακοπτόμενη διαδικασία X^T ανήκει στην $\mathcal{C}$.

Λήμμα 2.4.3. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι δύο κλάσεις από σ.δ., οι οποίες είναι ευσταθής υπό την διακοπή. Τότε,*

(a) η $\mathcal{C}_{loc}$ είναι ευσταθής υπό την διακοπή και $(\mathcal{C}_{loc})_{loc} = \mathcal{C}_{loc}$

(b) $(\mathcal{C} \bigcap \mathcal{C}')_{loc} = \mathcal{C}_{loc} \bigcap \mathcal{C}'_{loc}$

Απόδειξη. (a1) Η κλάση $\mathcal{C}_{loc}$ είναι ευσταθής υπο την διακοπή. Πράγματι, έστω $X \in \mathcal{C}_{loc}$ και T ένας χ.δ.. Τότε υπάρχει χ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$, P$-$σ.β. ώστε $X^{T_n} \in \mathcal{C}$. Γνωρίζουμε όμως ότι η $\mathcal{C}$ είναι ευσταθής υπό την διακοπή και αφού $X^{T_n} \in \mathcal{C}$ τότε έχουμε ότι $(X^{T_n})^T \in \mathcal{C}$ ή ισοδύναμα $(X^T)^{T_n} \in \mathcal{C}$ (αφού $(X^T)^{T_n} = (X^{T_n})^T$). Επομένως $X^T \in \mathcal{C}_{loc}$.
(a2) Ισχύει $(\mathcal{C}_{loc})_{loc} = \mathcal{C}_{loc}$. Έστω $X \in (\mathcal{C}_{loc})_{loc}$. Τότε υπάρχει είναι μια τοπικοποιούσα ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X^{T_n} \in \mathcal{C}_{loc}$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει μια τοπικοποιούσα ακολουθία $\{T(n,p_n)\}_{p\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $(X^{T_n})^{T(n.p_n)} \in \mathcal{C}$ και υπάρχει ένας ακέραιος p_n έτσι ώστε $P\left(\{T(n,p_n) < T_n \wedge n\}\right) \le 2^{-n}$.
Θέτουμε $S_n := T_n \bigwedge \left[\bigwedge\limits_{m\ge n} T(m,p_n)\right]$. Σύμφωνα με την Ιδιότητα 2.2.2 (g), κάθε S_n είναι ένας χ.δ. και αφού η ακολουθία T_n είναι αύξουσα, τότε το ίδιο ισχύει και για την ακολουθία S_n. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \{S_n < T_m \wedge n\} &\subseteq \bigcup_{m\ge n} \{T(m,p_n) < T_m \wedge n\}. \\ \text{Άρα} \quad P\left(\{S_n < T_n \wedge n\}\right) &\le \sum_{m\ge n} P\left(\{T(m,p_m) < T_n \wedge n\}\right) \\ &\le \sum_{m\ge n} P\left(\{T(m,p_m) < T_m \wedge m\}\right) \\ &\le \sum_{m\ge n} 2^{-m} = 2^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$ P$-$σ.β., τότε έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ P$-$σ.β. και S_n είναι μία τοπικοποιούσα ακολουθία. Τώρα έχουμε

$$X^{S_n} = \left[(X^{T_n})^{T(n,p_n)}\right]^{S_n}$$

και αφού $\mathcal{C}$ είναι ευσταθής υπο την διακοπή, τότε έχουμε ότι $X^{S_n} \in \mathcal{C}$, οπότε $X \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{loc}$, άρα $X \in \mathcal{C}_{loc}$. Ο αντίστροφος εγλεισμός $\mathcal{C}_{loc} \subseteq (\mathcal{C}_{loc})_{loc}$ είναι προφανής.

(b) Ο πρώτος εγλεισμός $(\mathcal{C} \cap \mathcal{C}')_{loc} \subseteq \mathcal{C}_{loc} \cap \mathcal{C}'_{loc}$ είναι προφανής. Τώρα θα δείξουμε τον αντίθετο εγλεισμό. Έστω $X \in \mathcal{C}_{loc} \cap \mathcal{C}'_{loc}$. Έστω T_n και T'_n είναι δύο τοπικοποιούσες ακολουθίες έτσι ώστε $X^{T_n} \in \mathcal{C}$ και $X^{T'_n} \in \mathcal{C}'$. Θέτουμε $S_n = T_n \wedge T'_n$. Η ακολουθία S_n είναι αύξουσα και $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ σ.β.. Αφού $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι ευσταθής υπο την διακοπή, τότε $X^{S_n} = (X^{T_n})^{T'_n} \in \mathcal{C}$ και ανάλογα $X^{S_n} \in \mathcal{C}'$. Επομένως $X \in (\mathcal{C} \cap \mathcal{C}')_{loc}$. □

2.5 Martingales

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε τον ορισμό των **martingales** και δούμε ιδιότητες σχετικά με **martingales**, **υπο−martingales**, **υπερ−martingales** που οφείλονται κυρίως στο Θεώρημα του **Doob**.

Ορισμός 2.5.1. Μια σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ με το σύνολο δεικτών I μερικά διατεταγμένο ονομάζεται **ένα martingale ή υπο−martingale ή υπερ−martingale ως προς τη διύλιση** $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in I}$ martingale ή **ένα** $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in I}-$ **martingale** (ή η οικογένεια $\{(X_j, \mathcal{F}_j)\}_{j\in I}$ ονομάζεται **ένα martingale ή υπο−martingale ή υπερ−martingale**) αν ισχύουν τα εξής:

(m1) Η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη (διύλιση) $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in I}$.

(m2) Για κάθε $j \in I$ η $X_j \in \mathcal{L}^1(P)$.

(m3) Για κάθε $j, k \in I$ με $j \leq k$ ισχύει $\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_j] = X_j \quad P|\mathcal{F}_j - \sigma.\beta..$ ή
$\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_j] \geq X_j \quad$ ή $\quad \mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_j] \leq X_j$, αντίστοιχα

(m4) Για P−σ.ο. τα $\omega \in \Omega$ οι τροχιές $t \longmapsto X_t(\omega)$ είναι *càdlàg*.

Συνήθως για τον παραπάνω ορισμό αναφέρονται μόνο οι ιδιότητες $(m1)$,$(m2)$,$(m3)$. Η $(m4)$ αναφέρεται στους [16], 1e, Def. 1.36. Αρκετά από τα παρακάτω αποτελέσματα για martingales ισχύουν και χωρίς την $(m4)$ (συνήθως με τις (m1),(m2),(m3) και μία συνθήκη ασθενέστερη της (m4)).

Ορισμός 2.5.2. Λέμε ότι η σ.δ. X δέχεται μία **τερματική τυχαία μεταβλητή** X_∞, αν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συγκλίνει P$-$σ.β. στο X_∞. Σε αυτήν την περίπτωση η τ.μ. X_T είναι P$-$σ.β. καλά ορισμένη για κάθε χ.δ. T με $X_T = X_\infty$ πάνω στο $\{T = \infty\}$.

Παρατήρηση 2.5.3. Για οποιαδήποτε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $t < s$ ισχύει:

$$\mathbb{E}_P[\chi_A X_s] = \mathbb{E}_P[\chi_A X_t] \ \ \forall A \in \mathcal{F}_t \Longleftrightarrow \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] = X_t \ \ P|\mathcal{F}_t - \text{σ.β.}.$$

Απόδειξη. Έστω $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $t < s$ και $A \in \mathcal{F}_t$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[\chi_A X_s] = \mathbb{E}_P[\chi_A X_t] \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_A X_s dP = \int_A X_t dP \\
&\Longleftrightarrow \quad \int_A \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] dP = \int_A X_t dP \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] = X_t \ \ P|\mathcal{F}_t - \text{σ.β.}.
\end{aligned}$$

□

Ορισμοί 2.5.4. (a) Μία οικογένεια $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. ονομάζεται **ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη**, αν

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \int_{\{Y_t \geq n\}} |Y_t| dP = 0.$$

(b) Με $\mathscr{M}$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των **ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingales**, δηλαδή όλων των martingales $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ώστε η οικογένεια $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Ορισμός 2.5.5. Με $\mathscr{H}^2$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων martingales**, δηλαδή όλων των martingales $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που ικανοποιούν την ανισότητα $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \mathbb{E}[{X_t}^2] < \infty$.

Προφανώς έχουμε ότι $\mathscr{H}^2 \subseteq \mathscr{M}$. Το ακόλουθο θεώρημα μας λέει ότι οι κλάσεις $\mathscr{M}$ και $\mathscr{H}^2$ είναι ευσταθείς υπο την διακοπή.

Θεώρημα 2.5.6. (a) *Αν το martingale $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο, τότε η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συγκλίνει σ.β. και στον $\mathcal{L}^1$, σε μία τερματική τ.μ. X_∞ και $\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_T] = X_T$ για όλους τους χρόνους διακοπής T. Επιπλέον, η X είναι*

τετραγωνικά ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η X_∞ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Στην τελευταία περίπτωση η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συγκλίνει στην X_∞ και στον $\mathcal{L}^2$.
(b) *Αν Y είναι μία ολοκληρώσιμη τ.μ., τότε υπάρχει ένα ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, και ένα εξαφανιζόμενο σύνολο $N \subseteq \Omega\times\mathbb{R}_+$ ώστε $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t](\omega) = X_t(\omega)$ για κάθε $\omega \notin N_e$ και $t\in\mathbb{R}_+$. Επιπλέον $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{\infty^-}] = X_\infty$.*

Λήμμα 2.5.7. *Έστω $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία càdlàg προσαρμοσμένη σ.δ., με μία τερματική τ.μ. X_∞. Τότε η X είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale αν και μόνο αν για κάθε χρόνο διακοπής T, η τ.μ. X_T είναι ολοκληρώσιμη και ικανοποιεί την σχέση $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.*

Απόδειξη. Η αναγκαία συνθήκη βγαίνει άμεσα από το Θεώρημα 2.5.6. Πράγματι, αν η X είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale, από το Θεώρημα 2.5.6 προκύπτει ότι για κάθε χρόνο διακοπής T ισχύει $\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_T] = X_T$ $P|\mathcal{F}_T-$σ.β.. Επομένως $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_T]] = \mathbb{E}[X_T]$ ή ισοδύναμα

$$\mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_T] \quad \text{για κάθε χ.δ.} \quad T \tag{2.13}$$

Αφού η (2.12) ισχύει για κάθε χ.δ. T, θα ισχύει και για $T := 0$. Άρα από την (2.12) προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0] \tag{2.14}$$

Από τις (2.12) και (2.13) έχουμε ότι $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.
Για να αποδείξουμε την ικανή συνθήκη, σημειώνουμε ότι η X_∞ είναι ολοκληρώσιμη από την υπόθεση. Αν $t\in\mathbb{R}_+$ και $A\in\mathcal{F}_t$, ορίζουμε τον χ.δ. T με $T = t$, επάνω στο σύνολο A και $T = \infty$ στο συμπληρωματικό του A^c. Έχουμε ότι $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_t\chi_A] + \mathbb{E}[X_\infty\chi_{A^c}]$ και $\mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_\infty\chi_A] + \mathbb{E}[X_\infty\chi_{A^c}]$. Επομένως σύμφωνα με την υπόθεση προκύπτει ότι $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_\infty]$, ως εκ τούτου $\mathbb{E}[X_t\chi_A] = \mathbb{E}[X_\infty\chi_A]$. Όμως ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t\cdot\chi_A] &= \mathbb{E}[X_\infty\cdot\chi_A] \quad \forall A\in\mathcal{F}_t \\
\iff \int_A X_t dP &= \int_A X_\infty dP \quad \forall A\in\mathcal{F}_t \\
\iff \int_A X_t dP &= \int_A \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t] dP \quad \forall A\in\mathcal{F}_t \\
\iff X_t &= \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t] \quad P|\mathcal{F}_t - \text{σ.β.},
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισοδυναμία είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της $\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]$. Τότε, από το Θεώρημα 2.5.6 (b) άμεσα προκύπτει ότι $X \in \mathscr{M}$. □

Ορισμός 2.5.8. Ένα **τοπικό martingale** (αντίστοιχα ένα **τοπικά τετραγωνικό ολοκληρώσιμο martingale**) είναι μία σ.δ. η οποία ανήκει στην τοπικοποιημένη κλάση $\mathscr{M}_{loc}$ (αντίστοιχα $\mathscr{H}^2_{loc}$), η οποία κατασκευάζεται μέσω του Ορισμού 2.4.1 από την $\mathscr{M}$. (αντίστοιχα $\mathscr{H}^2$)

Ορισμός 2.5.9. Μία σ.δ. $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ανήκει στην κλάση (D) εάν η οικογένεια $\{X_T : T$ πεπερασμένος χ.δ.$\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Πρόταση 2.5.10. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(a) Κάθε martingale είναι ένα τοπικό martingale (συνεπώς, η $\mathscr{M}_{loc}$ είναι η τοπικοποιημένη κλάση που κατασκευάζεται μέσω του Ορισμού 2.4.1 από την κλάση όλων των martingales).

(b) Κάθε ομοιόρμοφα ολοκληρώσιμο martingale είναι μία σ.δ. της κλάσης (D).

(c) Ένα τοπικό martingale είναι ένα ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale αν και μόνο αν είναι μία σ.δ. της κλάσης (D).

Απόδειξη. **(a)** Έστω $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale. Θέτουμε ότι $T_n = n$. Τότε $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_t] = X^{T_n}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και από το Θεώρημα 2.5.6 (b) συνεπάγεται ότι $X^{T_n} \in \mathscr{M}$.
(b) Το (b) προκύπτει από το Θεώρημα 2.5.6 και από το γνωστό γεγονός, ότι αν η τ.μ. $Y \in \mathcal{L}^1$ τότε η οικογένεια $\{\mathbb{E}(Y|\mathscr{G}) : \mathscr{G}$ οποιαδήποτε σ-υποάλγεβρα της $\mathcal{F}\}$ των τ.μ. είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.
(c) Η αναγκαία συνθήκη προκύπτει από το (b). Άρα μένει να αποδειχθεί η ικανή συνθήκη. Πράγματι, έστω $X \in \mathscr{M}_{loc}$ είναι μία κλάση του (D) και έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια τοπικοποιούσα ακολουθία για το X. Αν $s \leq t$ τότε,

$$X_{s\wedge T_n} = {X_s}^{T_n} = \mathbb{E}[{X_t}^{T_n}|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s]. \tag{2.15}$$

Οι δύο ακολουθίες $\{X_{s\wedge T_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{X_{t\wedge T_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες επειδή η X ανήκει στην κλάση (D) και συγκλίνουν $\mathrm{P}-$σ.β. στο X_s και X_t αντίστοιχα, διότι $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$ $\mathrm{P}-$σ.β.. Ως εκ τούτου, οι ακολουθίες συκλίνουν στον $\mathcal{L}^1$

και έτσι από την (2.15), προκύπτει ότι $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ και η X είναι ένα martingale. Τελικά, αφού η X ανήκει στην κλάση (D), είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. $\square$

Θα τελειώσουμε την παράγραφο αυτή, δίνοντας δύο παραδείγματα τα οποία μας δείχνουν τις διαφορές μεταξύ των εννοιών ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale, martingale και τοπικό martingale.

Παράδειγμα 2.5.11. *Έστω $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $P(\{Z_n = 1\}) = P(\{Z_n = -1\}) = \frac{1}{2}$. Θέτουμε $\mathcal{F}_t := \sigma(\{Z_p : p \in \mathbb{N}, p \leq t\})$ και $X_t := \sum\limits_{1\leq p\leq [t]} Z_p$, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε είναι προφανές ότι η $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale. Πράγματι, η X είναι προσαρμοσμένη στην $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, δηλαδή ισχύει η (m2). Επιπλέον για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε $\mathbb{E}[|X_t|] = \mathbb{E}[|\sum\limits_{1\leq p\leq [t]} Z_p|] \leq \mathbb{E}[|Z_1|]+\cdots+\mathbb{E}[|Z_{[t]}|] = [t]\cdot\mathbb{E}[|Z_1|] = [t] < \infty$, άρα $X_t \in \mathcal{L}^1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, δηλαδή ισχύει η (m1). Τέλος για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι $\mathbb{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[Z_{[t]+1} + X_t|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[Z_{[t]+1}|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[Z_{[t]+1}] + X_t = X_t, \quad P|\mathcal{F}_t - \sigma.\beta.$.*

Αλλά από το κεντρικό οριακό θεώρημα η X δεν συγκλίνει σ.β. καθώς $t \to \infty$, ως εκ τούτου η X δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα 2.5.12. *Έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία μετρήσιμη διαμέριση με $P(A_n) = 2^{-n}$ και $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία από τ.μ οι οποίες είναι ανεξάρτητες από τα A_n και ισχύει ότι $P(\{Z_n = 2^n\}) = P(\{Z_n = -2^n\}) = \frac{1}{2}$. Θέτουμε $\mathcal{F}_t := \sigma(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$, αν $t \in (0, 1]$ και $\mathcal{F}_t := \sigma(\{A_n, Z_n : n \in \mathbb{N}\})$, αν $t \in (1, \infty]$. Επίσης θέτουμε $Y_n = \sum\limits_{1\leq p\leq n} Z_p\chi_{A_p}$*

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{αν } t \in [0, 1) \\ \\ Y_\infty, & \text{αν } t \in [1, \infty) \end{cases}$$

$$T_n = \begin{cases} \infty, & \text{στο σύνολο } \bigcup\limits_{1\leq p\leq n} A_p \\ \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία από χ.δ. που συγκλίνει στο ∞. Η σ.δ. $\{X^{T_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ίση με 0 (αντίστοιχα Y_∞) στο $[\![0,1[\![$ (αντίστοιχα $[\![1,\infty[\![$). Η Y_n είναι φραγμένη και ανεξάρτητη από την σ−άλγεβρα $\mathcal{F}_{1-}$, οπότε $X^{T_n} \in \mathscr{M}$ και $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα τοπικό martingale. Όμως δεν είναι martingale επειδή $X_1 = Y_\infty$ δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Κεφάλαιο 3

Προβλέψιμες σ−άλγεβρες και προβλέψιμοι χρόνοι

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε τις έννοιες των προβλέψιμων σ−αλγεβρών και των προβλέψιμων χρόνων, σε συνεχή χρόνο επάνω σε έναν φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. Οι δύο αυτές έννοιες είναι βασικές για τη μελέτη του θέματος της Δ.Ε.. Στην Ενότητα 3.1 ορίζονται οι προβλέψιμες σ−άλγεβρες, οι προβλέψιμες σ.δ. και οι προβλέψιμοι χρόνοι, και αποδεικνύονται βασικές ιδιότητες του. Στην 3.2 ορίζεται η έννοια των ολικά απρόσιτων χρόνων και αποδεικνύονται χρήσιμες ιδιότητες τους. Τέλος στην 3.3 ορίζονται οι προβλέψιμες προβολές και αποδεικνύονται βασικές ιδιοτητές τους.

3.1 Προβλέψιμη σ−άλγεβρα και προβλέψιμοι χρόνοι

Ορισμοί 3.1.1. **(a)** Η **προβλέψιμη σ−άλγεβρα** είναι η σ−άλγεβρα $\mathscr{P}$ πάνω στον $\Omega \times \mathbb{R}_+$, η οποία παράγεται από όλες τις càg προσαρμοσμένες σ.δ. (θεωρούμενες ως απεικονίσεις πάνω στον $\Omega \times \mathbb{R}_+$).
(b) Μία σ.δ. η οποία είναι $\mathscr{P}-$ μετρήσιμη θα καλείται **προβλέψιμη**. Ομοίως ένα τυχαίο σύνολο που είναι στοιχείο της $\mathscr{P}$ ονομάζεται **προβλέψιμο**.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.3.6 από την δεύτερη ενότητα έχουμε ότι $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{O}$.

Θεώρημα 3.1.2. *Η προβλέψιμη σ−άλγεβρα παράγεται επίσης από κάθε μία από τις παρακάτω οικογένειες τυχαίων συνόλων :*

(i) $A \times \{0\}$, *όπου* $A \in \mathcal{F}_0$, *και* $[\![0, T]\!]$ *όπου* T *είναι ένας χ.δ.*

(ii) $A \times \{0\}$, *όπου* $A \in \mathcal{F}_0$ *και* $A \times (s,t]$, *όπου* $s < t$ *και* $A \in \mathcal{F}_s$.

Απόδειξη. Έστω $\mathscr{P}'$ και $\mathscr{P}''$ είναι οι σ−άλγεβρες που παράγονται από τα σύνολα των (i) και (ii) αντίστοιχα. Αφού οι δείκτριες συναρτήσεις των συνόλων του (i) είναι προσαρμοσμένες και càg σ.δ. τότε έχουμε ότι $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$. Αν $A \in \mathcal{F}_s$ και $s < t$, έχουμε ότι $A \times (s,t] =]\!]s_A, t_A]\!]$ και σύμφωνα με την Ιδιότητα 2.2.2 (c) μας δίνει ότι s_A και t_A είναι δύο χ.δ.. Ως εκ τούτου $]\!]s_A, t_A]\!] = [\![0, t_A]\!] - [\![0, s_A]\!] \in \mathscr{P}'$ και άρα έπεται ότι $\mathscr{P}'' \subseteq \mathscr{P}'$.
Έστω X είναι μία càg προσαρμοσμένη σ.δ.. Θέτουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$X^n = X_0 \chi_{[\![0]\!]} + \sum_{k \in \mathbb{N}} X_{\frac{k}{2^n}} \chi_{]\!]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]\!]}$$

Είναι προφανές ότι X^n είναι μία σ.δ. η οποία είναι $\mathscr{P}''$−μετρήσιμη και η ακολουθία $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά στο X επειδή η X είναι càg. Επομένως η X είναι $\mathscr{P}''$−μετρήσιμη και έπεται ότι $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}''$. □

Παρατήρηση 3.1.3. Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι η $\mathscr{P}$ παράγεται από όλες τις προσαρμοσμένες σ.δ. οι οποίες έχουν συνεχείς τροχιές (το οποίο δεν θα χρησιμοποιηθεί στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία).

Πρόταση 3.1.4. *Αν X είναι μία προβλέψιμη σ.δ. και αν T είναι ένας χ.δ. τότε:*

(a) $X_T \chi_{\{T<\infty\}}$ *είναι* $\mathcal{F}_{T-}$*−μετρήσιμη,*

(b) η διακοπτόμενη διαδικασία X^T *είναι επίσης προβλέψιμη.*

Απόδειξη. Το σύνολο όλων των σ.δ. οι οποίες ικανοποιούν τα (a) και (b) είναι ένας διανυσματικός σύνδεσμος και είναι κλειστό κάτω από την σημειακή σύγκλιση. Από την άλλη πλευρά, η οικογένεια όλων των τυχαίων συνόλων που εμφανίζονται στο Θεώρημα 3.1.2 (ii) είναι μία άλγεβρα Boole. Επομένως από το Θεώρημα 3.1.2 και ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης (βλ. Θεώρημα Μονότονης Κλάσης για συναρτήσεις Β΄.3.6), είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι αν X είναι η δείκτρια συνάρτηση από οποιαδήποτε σύνολα του Θεωρήματος 3.1.2 (ii), τότε ικανοποιεί τα (a) και (b). □

Πρόταση 3.1.5. *Αν X είναι μία càdlàg προσαρμοσμένη σ.δ. τότε η X_- είναι μία προβλέψιμη σ.δ.. Επιπλέον αν η X είναι προβλέψιμη, τότε και η ΔX είναι προβλέψιμη.*

Απόδειξη. Άμμεσο από τον ορισμό της προβλεψιμότητας αφού αυτή η σ.δ. είναι προσαρμοσμένη και càg. □

Ορισμός 3.1.6. Ένας **προβλέψιμος χρόνος** είναι μία συνάρτηση $T : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ τέτοια ώστε το στοχαστικό διάστημα $[\![0, T[\![$ να είναι προβλέψιμο.

Κάθε προβλέψιμος χρόνος T είναι ένας χ.δ.. Πράγματι $[\![T, \infty[\![\in \mathscr{P} \subseteq \mathscr{O}$, έτσι η càdlàg σ.δ. $X = \chi_{[\![T,\infty[\![}$ είναι προσαρμοσμένη καθώς $\{T \leq t\} = \{X_t = 1\}$. Επίσης, αν T είναι ένας προβλέψιμος χρόνος τότε $[\![T]\!] \in \mathscr{P}$ (λόγω της σχέσης $[\![T]\!] = [\![0, T]\!] - [\![0, T[\![$ και του Θεωρήματος 3.1.2). Επιπλέον, αν T είναι ένας χ.δ. και $[\![T]\!] \in \mathscr{P}$, τότε το T είναι προβλέψιμος χρόνος (αφού $[\![0, T[\![= [\![0, T]\!] - [\![T]\!]$ και Θεώρημα 3.1.2).

Πρόταση 3.1.7. *Αν T είναι ένας χ.δ. και $t > 0$, τότε $T + t$ είναι ένας προβλέψιμος χρόνος.*

Απόδειξη. Επειδή $[\![0, T + t[\![= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![0, T + \frac{n-1}{n} \cdot t]\!]$ είναι στον $\mathscr{P}$ (θυμίσου ότι $T - t$ δεν είναι χ.δ. γενικά). □

3.2 Ολικά απρόσιτοι χρόνοι διακοπής

Ορισμός 3.2.1. Ένα τυχαίο σύνολο A ονομάζεται **λεπτό** (thin), αν είναι της μορφής $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![T_n]\!]$, όπου $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία χ.δ.. Αν επιπλέον η ακολουθία $\{T_n\}$ ικανοποιεί την $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$ για όλα τα $n \neq m$, τότε αυτή ονομάζεται μία **εξαντλητική** (exhausting) **ακολουθία** του A.

Ορισμός 3.2.2. Ένας χ.δ. T καλείται **ολικά απρόσιτος** αν $P(T = S < \infty) = 0$ για όλους τους προβλέψιμους χρόνους S.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω T ένας χ.δ.. Υπάρχει μία ακολουθία $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ από προβλέψιμους χρόνους και ένα μοναδικό ($P-$σ.β.) $\mathcal{F}_T-$μετρήσιμο υποσύνολο A του $\{T < \infty\}$, έτσι ώστε ο χ.δ. T_A να είναι ολικά απρόσιτος και ο χ.δ. T_{A^c} να ικανοποιεί την σχέση $[\![T_{A^c}]\!] \subseteq \bigcup [\![S_n]\!]$.*

Απόδειξη. Για κάθε πεπερασμένη οικογένεια $\{S_i\}_{i \in P_n}$ από προβλέψιμους χρόνους όπου $P_n := \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ ένα σύνολο δεικτών, θέτουμε $B(\{S_i\}) := \bigcup_i \{T = S_i <$

$\infty\}$. Τότε το $B(\{S_i\}) \in \mathcal{F}_T$ και η κλάση $\mathscr{C}$ όλων των συνόλων που έχουν την μορφή $B(\{S_i\})$ είναι σταθερή κάτω από τις πεπερασμένες ενώσεις και πεπερασμένες τομές. Αρχικά θα κάνουμε την απόδειξη για τις πεπερασμένες ενώσεις. Πράγματι, έστω $A = B(\{S_i\})$ και $C = B(\{S_j\})$, όπου $i \in P_n := \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ και $j \in Q_n := \{q_1, q_2, \cdots, q_m\}$ αντίστοιχα. Τότε

$$\begin{aligned} A \cup C &= B\left(\{S_i\}\right) \cup B(\{S_j\}) \\ &= \left(\bigcup_i \{T = S_i < \infty\}\right) \cup \left(\bigcup_j \{T = S_j < \infty\}\right) \\ &= \bigcup_i \bigcup_j \left(\{T = S_i < \infty\} \cup \{T = S_j < \infty\}\right), \end{aligned}$$

άρα διακρίνουμε τις εξείς περιπτώσεις:

$$S_k(\omega) := S_{ij}(\omega) := \begin{cases} S_i(\omega), & \text{αν } S_j(\omega) \neq T(\omega) = S_i(\omega) < \infty \\ S_j(\omega), & \text{αν } S_i(\omega) \neq T(\omega) = S_j(\omega) < \infty \\ S_i(\omega), & \text{αν } i = j,\ S_j(\omega) = T(\omega) = S_i(\omega) < \infty \end{cases}$$

επομένως σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $A \cup C = \bigcup_{k \in P_n \times Q_m} \implies A \cup C \in \mathscr{C}$.
Ανάλογα, για τις πεπερασμένες τομές έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A \cap C &= B(\{S_i\}) \cap B(\{S_j\}) \\ &= \left(\bigcup_i \{T = S_i < \infty\}\right) \cap \left(\bigcup_j \{T = S_j < \infty\}\right) \\ &= \bigcup_i \left[\{T = S_i < \infty\} \cap \left(\bigcup_j \{T = S_j < \infty\}\right)\right] \\ &= \bigcup_i \bigcup_j \left(\{T = S_i < \infty\} \cap \{T = S_j < \infty\}\right), \end{aligned}$$

για κάθε $i \in P_n$, $j \in Q_n$ και $i = j \in P_n \cap Q_n \neq \emptyset$. Επομένως, αν

- $P_n \cap Q_n = \emptyset \implies A \cap C = \emptyset \in \mathscr{C}$

- $P_n \cap Q_n \neq \emptyset \Longrightarrow A \cap C = \bigcup_{i \in P_n \cap Q_n} \{T = S_i < \infty\} \in B(\{S_i\}) \Longrightarrow A \cap C \in \mathscr{C}$.

Ισχυρισμός. Έστω,

$$a := \sup\{P(B(\{S_i\}_{i\in P_n})) : B(\{S_i\}_{i\in P_n}) \in \mathscr{C} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.$$

Ένα σύνολο $E \in \mathcal{F}$ ονομάζεται **ουσιώδες supremum** της κλάσης $\mathscr{C}$ αν $a = P(E)$. Υπάρχει ένα σύνολο $B \in \mathscr{C}$ ώστε το B να είναι η ένωση μίας αριθμήσιμης οικογένειας στοιχείων της $\mathscr{C}$ και ουσιώδες supremum της $\mathscr{C}$. Πράγματι έστω

$$a := \sup\{P(B(\{S_i\}_{i\in P_n})) : B(\{S_i\}_{i\in P_n}) \in \mathscr{C} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}$$

επομένως για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $t_m \in \mathbb{R}_+$ έτσι ώστε $a - \frac{1}{m} < P(B_{t_m}(\{S_i\}_{i\in P_n}))$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
a &= \sup\{P(B_{t_m}(\{S_i\}_{i\in P_n})) : B_{t_m}(\{S_i\}_{i\in P_n}) \in \mathscr{C} \text{ για κάθε } m, n \in \mathbb{N}\} \\
&= \sup\{P(\bigcup_{k=1}^{m} B_{t_k}(\{S_i\}_{i\in P_n})) : B_{t_k}(\{S_i\}_{i\in P_n}) \in \mathscr{C} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\{P(\bigcup_{k=1}^{m} B_{t_k}(\{S_i\}_{i\in P_n})) : B_{t_k}(\{S_i\}_{i\in P_n}) \in \mathscr{C} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\} \\
&= P\left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{B_{t_k}(\{S_i\}_{i\in P_n})) : B_{t_k}(\{S_i\}_{i\in P_n}) \in \mathscr{C} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}\right] \\
&= P\left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{B_{t_k}(\{S_i\}_{i\in P_n})) : B_{t_k}(\{S_i\}_{i\in P_n}) \in \mathscr{C}\}\right].
\end{aligned}$$

Έστω

$$B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{B_{t_k}(\{S_i\}_{i\in P_n})) : B_{t_k}(\{S_i\}_{i\in P_n}) \in \mathscr{C}\}.$$

Τότε $a = P(B)$ και το B είναι το ζητούμενο σύνολο. □

Έστω $A := \{T < \infty\} \backslash B$. Συνεπώς υπάρχει μία διπλή ακολουθία $(\{S(n,i)\}_{i\in P_n})_{n\in\mathbb{N}}$ από προβλέψιμους χρόνους έτσι ώστε $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{i\leq P_n}\{T = S_{(n,i)} < \infty\}$, και $[\![T_{A^c}]\!] = [\![T_B]\!] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{i\in P_n}[\![S_{(n,i)}]\!]$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι T_A είναι ολικά απρόσιτος. Αν δεν ήταν, τότε θα υπήρχε ένας προβλέψιμος χρόνος S με

$$P(T_A = S < \infty) > 0. \tag{3.1}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\{T_A = S < \infty\} &= \{T = S < \infty\} \cap A \\
&= \{T_A = S < \infty\} = \{T = S < \infty\} \cap A \\
&= \{T = S < \infty\} \cap \{T < \infty\} \cap B^c \\
&= \{T = S < \infty\} \cap B^c \\
&= B(\{S\}) \cap B^c. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Άρα, λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.1) έχουμε $P[B(\{S\}) \cap B^c] > 0$. Αφού $B(\{S\}) \in \mathscr{C}$ από τον ισχυρισμό και το γεγονός ότι $a = P(E)$, όπου E ουσιώδες supremum προκύπτει ότι $B(\{S\}) \subseteq B, P-$σ.β. (Πράγματι, $B(\{S\}) = [B(\{S\}) \cap B] \cup A$, όπου $A \subseteq E \backslash B \in \mathcal{F}_{0,P}$. Άρα $B(\{S\}) = B(\{S\}) \cap B, P-$σ.β., δηλαδή $B(\{S\}) \subseteq B, P-$σ.β.). Από την $B(\{S\}) \subseteq B, P-$σ.β. προκύπτει $B(\{S\}) \cap B^c \subseteq \emptyset, P-$σ.β., άρα $P[B(\{S\}) \cap B^c] = 0$, άτοπο διότι από τις (3.1) και (3.2) έχουμε $P[B(\{S\}) \cap B^c] > 0$. Τελικά η μοναδικότητα του A είναι προφανής. □

Το T_A καλείται **ολικά απρόσιτο μέρος του** T, και το T_{A^c} καλείται **προσιτό μέρος** του T. Είναι μοναδικά καθορισμένα $P-$σ.β.. Η ακολουθία $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ του Θεωρήματος 3.2.3 δεν είναι μοναδική, και μπορεί να επιλεγεί (όπως θα δούμε αργότερα) ως τα γραφήματα των S_n που είναι ανα δύο ξένα. Αν T είναι ολικά απρόσιτος ή προβλέψιμος χ.δ., τότε το ολικά απρόσιτο μέρος είναι T ή $+\infty$ και το προσιτό μέρος είναι $+\infty$ ή T.

Σαν πρώτη εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος, θα συμπεράνουμε κάποιες ιδιότητες των λεπτών συνόλων τα οποία είναι προβλέψιμα.

Λήμμα 3.2.4. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(a) Αν το A είναι ένα προβλέψιμο λεπτό σύνολο, υπάρχει μία ακολουθία $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ από προβλέψιμους χρόνους με ξένα ανα δύο γραφήματα, έτσι ώστε $[\![T_n]\!] \subseteq A$ και το $A \backslash \bigcup_n [\![T_n]\!]$ είναι εξαφανιζόμενο.

(b) Αν επιπλέον ο φ.χ.π. είναι πλήρης, μπορούμε να πάρουμε τα T_n έτσι ώστε

$A = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ (με άλλα λόγια, το A δέχεται μία εξαντλητική ακολουθία από προβλέψιμους χρόνους).

Απόδειξη. (i) Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία από χ.δ. που εξαντλούν το λεπτό σύνολο A, και συμβολίζουμε με $T_n^{'}$ και $T_n^{''}$, αντίστοιχα, το προσιτό και το ολικά απρόσιτο μέρος του T_n. Από το Θεώρημα 3.2.3 έχουμε μία ακολουθία $(S(n,p))_{\in\mathbb{N}}$ από προβλέψιμους χρόνους έτσι ώστε $[\![T_n^{'}]\!] \subseteq \bigcup_n [\![S(n,p)]\!]$. Θέτουμε $A^{'} := A \cap \left(\bigcup_{n,p} [\![S(n,p)]\!]\right)$, το οποίο ανήκει στην $\mathscr{P}$. Έστω S ένας προβλέψιμος χρόνος με $[\![S]\!] \subseteq A \backslash A^{'}$, επομένως $[\![S]\!] \subseteq \bigcup_n [\![T_n^{''}]\!]$. Τότε από τον Ορισμό 3.2.2 έχουμε ότι $S = \infty$ σ.β.. Επιπλέον από μία Πρόταση (βλ. π.χ. [16], Chapter I, §2b, Proposition 2.18) έχουμε ότι το $A \backslash A^{'}$ είναι εξαφανιζόμενο.
(ii) Μετατρέπουμε την διπλή ακολουθία $\{S(n,p)\}_{n,p\in\mathbb{N}}$ από προβλέψιμους χρόνους στην ακολουθία $(R_n)_{n\geq 1}$. Θέτουμε $C_n := \bigcap_{1\leq m\leq n-1} \{R_m \neq R_n\}$ και $D_n := C_n \cap \{\omega : (\omega, R_n(\omega)) \in A\}$, έτσι η $D_n \in \mathcal{F}_{R_n}$ από Πρόταση 3.1.4 και μία Πρόταση (βλ. π.χ. [16], Chapter I, §2b, Proposition 2.11), και $R_n^{'} = (R_n)_{D_n}$ είναι επίσης ένας προβλέψιμος χρόνος. Τότε ξεκάθαρα $A^{'} = \bigcup_{n\geq 1} [\![R_n^{'}]\!]$ και $[\![R_n^{'}]\!]$ είναι ανα δύο ξένα, επομένως έχουμε το (a).
(iii) Για να δείξουμε το (b), αρκεί να δείξουμε ότι ένας χ.δ. T, ο οποίος είναι σ.β. άπειρος είναι πράγματι ένας προβλέψιμος χρόνος, έχοντας ότι ο φ.χ.π. είναι πλήρης. Πράγματι, αφού ο $T_n^{''} = \infty$ σ.β. από (i), κάθε $T_n^{''}$ θα είναι προβλέψιμο, και η ακολουθία $(T_n^{''})$ εξαντλεί το σύνολο $A \backslash A^{'}$, όπου αν συνδυαστεί με την (ii) έχουμε αυτό που θέλουμε. Έπειτα, θέτουμε $S_n := n \wedge (T - \frac{1}{n})^+$, και παρατηρούμε ότι $\{S_n \leq t\}$ ανήκει στο $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^T$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, άρα S_n είναι χ.δ., που μας δίνει το T. Οπότε ο T είναι προβλέψιμος χρόνος. □

3.3 Προβλέψιμες προβολές

Λήμμα 3.3.1. *Έστω X ένα τοπικό martingale, τότε $\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_{T-}] = X_{T-}$ επάνω στο σύνολο $\{T < \infty\}$ για όλους τους προβλέψιμους χρόνους T (η X_T δεν είναι απαραίτητα ολοκληρώσιμη, αλλά εδώ χρησιμοποιούμε την γενικευμένη υπο συνθήκη μέση τιμή).*

Απόδειξη. Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία τοπικοποιούσα ακολουθία για την σ.δ. X. Αφού $\{T \leq T_n\} \in \mathcal{F}_{T-}$ από τις Ιδιότητες 2.2.2 (f), έχουμε $\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_{T-}] = \mathbb{E}[(X^{T_n})_T|\mathcal{F}_{T-}]$ και

$X_{T-} = (X^{T_n})_{T-}$ επάνω στο $\{T \leq T_n\}$. Επομένως είναι αρκετό να αποδείξουμε το αποτέλεσμα για κάθε διακοπτόμενη σ.δ. X^{T_n}. Με άλλα λόγια θα αποδείξουμε ότι $X \in \mathscr{M}$. Ο προβλέψιμος χρόνος T εκφράζεται από την ακολουθία χ.δ. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Από το Stopping Theorem του Doob (βλ. π.χ. [16], Chapter I, §1e, Theorem 1.39) και το Θεώρημα 2.5.6 συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_{S_n}] = X_{S_n}$ (επειδή $S_n \leq T$). Απο το Θεώρημα σύγκλισης 2.5.6 (a) στο διακριτό χρόνο του ομοιόμορφου ολοκληρώσιμου martingale $(X_{S_n}, \mathcal{F}_{S_n})$ δείχνει ότι $X_{S_n} \to \mathbb{E}[X_T| \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{S_n}]$ σ.β.. Αφού $S_n < T$ επάνω στο σύνολο $\{T > 0\}$, από Ιδιότητες 2.2.2 (f) έχουμε ότι $\mathcal{F}_{S_n} \subseteq \mathcal{F}_{T-}$. Από την άλλη μεριά, από τον ορισμό του $\mathcal{F}_{T-}$ και την ισότητα $A \cap \{t < T\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[A \cap \{t < S_n\}]$ σ.β. επάνω στο σύνολο $\{T > 0\}$ έχουμε ότι $\mathcal{F}_{T-} \subseteq \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{S_n}\right)$ $P-$σ.β.. Επομένως $\mathcal{F}_{T-} = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{S_n}\right)$ $P-$σ.β.. Επιλέον αποδείξαμε ότι $X_{S_n} \to \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_{T-}]$ σ.β.. Αλλά αφού $\{S_n\}$ εκφράζει τον χ.δ. T, προκύπτει ότι $X_{S_n} \to X_{T-}$ σ.β. επάνω στο $\{T < \infty\}$ και επομένως έχουμε το ισχυρισμό. □

Θεώρημα 3.3.2. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(a) Έστω X μία $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)-$μετρήσιμη σ.δ. με τιμές στον $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει μία σ.δ. με τιμές στο διάστημα $(-\infty, +\infty]$, που καλείται η ***προβλέψιμη προβολή*** *του X και συμβολίζεται με ${}^pX$, η οποία ορίζεται μοναδικά ως προς την καθολική ισοδυναμία σύμφωνα με τις παρακάτω δύο ιδιότητες:*

(i) είναι προβλέψιμη

(ii) $({}^pX)_T = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_{T-}]$ επάνω στο $\{T < \infty\}$ για όλους τους προβλέψιμους χρόνους T.

(b) Επιπλέον αν T είναι ένας χ.δ., τότε ${}^pX^T = ({}^pX)\chi_{[\![0,T]\!]} + X_T\chi_{]\!]T,\infty[\![}$.

(c) Επιπλέον, αν η ${}^pX$ παίρνει πεπερασμένες τιμές και η X' είναι μία προβλέψιμη σ.δ. με τιμές στο $(-\infty, +\infty]$, τότε ${}^p(XX') = X'{}^p(X)$.

Απόδειξη. (a) (1) Η μοναδικότητα, ως προς την καθολική ισοδυναμία, προκύπτει άμμεσα από μία Πρόταση (βλ. π.χ. [16], Chapter I, §2b, Proposition 2.18).

(2) Όσον αφορά την ύπαρξη, αρχικά θεωρούμε ότι οι σ.δ. είναι φραγμένες. Έστω $\mathscr{H}$ η οικογένεια από όλες τις $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)-$μετρήσιμες φραγμένες σ.δ. X για τις οποίες μία αντίστοιχη σ.δ. ${}^pX$ ικανοποιεί τις (i) και (ii). Η οικογένεια $\mathscr{H}$ είναι διανυσματικός χώρος, σταθερός κάτω από την σημειακή σύγκλιση των ομοιόμορφα φραγμένων σ.δ.. Πράγματι, αν $X(n)$ είναι μία τέτοια

ακολουθία, τότε ${}^pX = \limsup_n {}^pX(n)$ ικανοποιεί τις (i) και (ii) σε σχέση με την οριακή σ.δ. $X = \lim_n X(n)$. Συνεπώς από ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης, είναι αρκετό να αποδείξουμε το αποτέλεσμα για κάθε σ.δ. X της μορφής $X_t(\omega) = \chi_A(\omega)\chi_{[u,v)}(t),\ A \in \mathcal{F},\ 0 \le u < v$. Έστω X μία τέτοια σ.δ. και θεωρούμε το φραγμένο martingale M που ικανοποιεί την $\mathbb{E}[\chi_A|\mathcal{F}_t] = M_t$. Τότε ${}^pX := M_{-}\chi_{\llbracket u,v\llbracket}$ και από Λήμμα 3.3.1 έχουμε:

$$
\begin{aligned}
({}^pX)_T &= M_{T-}\chi_{\{u \le T < v\}} \\
&= \mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_{T-}]\chi_{\{u \le T < v\}} \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\chi_A|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_{T-}\right]\chi_{\{u \le T < v\}} \\
&= \mathbb{E}[\chi_A|\mathcal{F}_{T-}]\chi_{\{u \le T < v\}} \\
&= \mathbb{E}[\chi_A\chi_{\{u \le T < v\}}|\mathcal{F}_{T-}] \\
&= \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_{T-}]
\end{aligned}
$$

επάνω στο σύνολο $\{T < \infty\}$ αν T είναι προβλέψιμος χρόνος. Επομένως $X \in \mathscr{H}$ και συμπεραίνουμε ότι η $\mathscr{H}$ είναι πράγματι η οικογένεια όλων των φραγμένων μετρήσιμων σ.δ.. Τελικά, αν $X \in \mathscr{H}$, οι ισχυρισμοί (b) και (c) είναι προφανείς.
(3) Ας υποθέσουμε ότι η είναι $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)-$μετρήσιμη και μη αρνητική, και θέτουμε $X(n) := X \wedge n$. Από το βήμα (2) της απόδειξης, υπάρχει μία σ.δ. ${}^pX(n)$ και ικανοποιεί την (i) και (ii). Επιπλέον, $X(n) \le X(n+1)$, άρα από την μοναδικότητα έχουμε ότι ${}^pX(n) \vee {}^pX(n+1)$ είναι πάλι μία εκδοχή της προβλέψιμης προβολής της $X(n+1)$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να επιλέξουμε μία εκδοχή της ${}^pX(n)$ έτσι ώστε ${}^pX(n) \le {}^pX(n+1)$. Αν θέσουμε ${}^pX = \lim_n {}^pX(n)$, μπορούμε άμμεσα να ελέγξουμε ότι η ${}^pX$ ικανοποιεί την (i) και (ii), καθώς και τις (a) και (b).
(4) Ας θεωρήσουμε την γενική υπόθεση μίας σ.δ. X με τιμές στον $\overline{\mathbb{R}}$. Τότε η ${}^pX$, όπως ορίζεται παρακάτω, προφανώς ικανοποιεί τις (i), (ii), (b), (c):

$$
{}^pX = \begin{cases} {}^p(X^+) - {}^p(X^-), & \text{πάνω στο τυχαίο σύνολο } \{{}^p|X| < \infty\} \\ +\infty, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}
$$

□

Πόρισμα 3.3.3. *Αν X είναι ένα τοπικό martingale, τότε ${}^{p}X = X_{-}$ και ${}^{p}(\Delta X) = 0$.*

Ορισμός 3.3.4. Ο **προβλέψιμος φορέας** ενός μετρήσιμου τυχαίου συνόλου A είναι το προβλέψιμο σύνολο $A' = \{{}^{p}(\chi_A) > 0\}$, το οποίο ορίζεται μοναδικά ως προς την καθολική ισοδυναμία.

Ορισμός 3.3.5. Μία càdlàg σ.δ. X καλείται **ψευδό−αριστερά−συνεχής** αν $\Delta X_T = 0$ σ.β. επάνω στο σύνολο $\{T < \infty\}$ για κάθε προβλέψιμο χρόνο T.

Πρόταση 3.3.6. *Έστω X μία càdlàg προσαρμοσμένη σ.δ.. Τότε η X είναι ψευδό−αριστερά−συνεχής αν και μόνο αν ο προβλέψιμος φορέας του τυχαίου συνόλου $\{\Delta X \neq 0\}$ είναι εξαφανιζόμενο σύνολο. Σε αυτήν την περίπτωση, ${}^{p}X = X_{-}$ (όλη η πρόταση προκύπτει εύκολα από τον Ορισμό 3.3.5).*

Κεφάλαιο 4

Αύξουσες στοχαστικές διαδικασίες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε τον ορισμό της αύξουσας σ.δ. και έπειτα θα δούμε σημαντικές ιδιότητές της. Θεωρούμε ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ σε όλο το κεφάλαιο. Στην Ενότητα 4.1 δίνονται κάποιοι συμβολισμοί και ορισμοί, και αποδεικνύονται βασικές ιδιότητες των σ.δ. κύμανσης και των ολοκληρώσιμων σ.δ. με διαφορικά σ.δ. κύμανσης. Στην 4.2 ορίζεται ο αντισταθμιστής μίας ολοκληρώσιμης σ.δ. με διαφορικό μία αύξουσα σ.δ. (αντίστοιχα μιάς ολοκληρώσιμης σ.δ. με διαφορικό μία σ.δ. φραγμένης κύμανσης) και μελετώνται βασικές ιδιοτητές του.

4.1 Βασικές ιδιότητες

Συμβολισμός 4.1.1. *Έστω $\mathscr{V}^+$ (αντίστοιχα $\mathscr{V}$) το σύνολο όλων των σ.δ. $A = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ οι οποίες είναι càdlàg, προσαρμοσμένες, με $A_0 = 0$ και κάθε τροχιά $t \longmapsto A_t(\omega)$ είναι μη−φθίνουσα (αντίστοιχα έχει πεπερασμένη ολική κύμανση σε κάθε πεπερασμένο διάστημα [0,t]).*

Εν συντομία θα λέμε ότι μία σ.δ. ανήκει στον $\mathscr{V}^+$ (αντίστοιχα $\mathscr{V}$) αν είναι προσαρμοσμένη αύξουσα σ.δ. (αντίστοιχα προσαρμοσμένη σ.δ με πεπερασμένη ολική κύμανση). Αν $\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} \in \mathscr{V}^+$, τότε έχει μία τερματική τ.μ. A_∞ και παίρνει τιμές στον $\overline{\mathbb{R}}_+$ με $\lim\limits_{t\to\infty} A_t = A_\infty$.

Έστω $A \in \mathscr{V}$. Συμβολίζουμε με $V(A)$ την **σ.δ. κύμανσης** της A, που είναι η σ.δ. έτσι ώστε η $V(A)_t(\omega)$ να είναι η **ολική κύμανση** της συνάρτησης $s \longmapsto A_s(\omega)$ στο διάστημα $[0,t]$ για οποιοδήποτε σταθερό $\omega \in \Omega$. Ισχύει $V(A) = A$, αν $A \in \mathscr{V}^+$.

Πρόταση 4.1.2. *Έστω $A \in \mathscr{V}$. Υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος (B, C) από προσαρμοσμένες αύξουσες σ.δ. έτσι ώστε $A = B - C$ και $V(A) = B + C$ (οπότε $V(A) \in \mathscr{V}^+$ και $\mathscr{V} = \mathscr{V}^+ \ominus \mathscr{V}^+$). Επιπλέον, αν $\{A_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι προβλέψιμη τότε B, C και $V(A)$ είναι επίσης προβλέψιμες.*

Απόδειξη. Υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος (B, C) από σ.δ. οι οποίες είναι càdlàg, με $B_0 = C_0 = 0$, με μη−φθίνουσες τροχιές, έτσι ώστε $A = B - C$ και $V(A) = B + C$. Αυτές οι σ.δ. είναι

$$B = \frac{A + V(A)}{2} \quad \text{και} \quad C = B - A.$$

Πράγματι, η B είναι αύξουσα αφού για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} B_t - B_s &= \frac{A_t + V(A_t)}{2} - \frac{A_s + V(A_s)}{2} \\ &= \frac{A_t - A_s + V(A_t) - V(A_s)}{2} \\ &= \frac{A_t - A_s + V_s^t(A)}{2}, \end{aligned}$$

όπου η $V_s^t(A)$ είναι η ολική κύμανση της $u \longmapsto A_{u(\omega)}$ στο $[s, t]$. Όμως $A_t - A_s \leq |A_t - A_s| \leq V_s^t(A)$. Άρα έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} B_t - B_s &= \frac{A_t - A_s + V_s^t(A)}{2} \\ &= \frac{-(A_s - A_t) + V_s^t(A)}{2} \\ &= \frac{V_s^t(A) - (A_s - A_t)}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Οπότε η B είναι αύξουσα. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και για την C. Άρα μένει να δείξουμε ότι είναι προσαρμοσμένη (αντίστοιχα προβλέψιμη όταν είναι και το A προβλέψιμη). Από τον ορισμό του $V(A)$, έχουμε ότι:

$$V(A)_t(\omega) = \lim_{n \to \infty} \sum_{1 \leq k \leq n} |A_{\frac{tk}{n}}(\omega) - A_{\frac{t(k-1)}{n}}(\omega)|$$

που είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη. Άρα η $V(A)$ είναι προσαρμοσμένη.

Υποθέτουμε ότι η $\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι προβλέψιμη. Η $V(A)_-$ είναι càg και προσαρμοσμένη, επομένως η $V(A)_-$ είναι προβλέψιμη. Άρα εφαρμόζωντας την Πρόταση 3.1.5 έχουμε ότι η $\Delta[V(A)]$ είναι προβλέψιμη διότι ισχύει $\Delta[V(A)] = |\Delta A|$. Άρα η

$$V(A) = V(A)_- + \Delta[V(A)]$$

είναι προβλέψιμη. □

Έστω $A \in \mathscr{V}$. Για κάθε $\omega \in \Omega$, η τροχιά $t \longmapsto A_t(\omega)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του προσημασμένου μέτρου (θετικό μέτρο αν η A είναι αύξουσα) επάνω στον $\mathbb{R}_+$, το οποίο είναι πεπερασμένο σε κάθε διάστημα $[0,t]$ και είναι πεπερασμένο στον $\mathbb{R}_+$ αν και μόνο αν $V(A)_\infty(\omega) < \infty$. Συμβολίζουμε αυτό το μέτρο με $dA_t(\omega)$.

Λέμε ότι $dA \ll dB$ όπου $A, B \in \mathscr{V}$, αν το μέτρο $dA_t(\omega)$ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο $dB_t(\omega)$ για σ.ο. τα $\omega \in \Omega$.

Έστω $A \in \mathscr{V}$ και H μία προαιρετική σ.δ.. Από την Πρόταση 2.3.3, η συνάρτηση $t \longmapsto H_t(\omega)$, για οποιοδήποτε $\omega \in \Omega$, είναι Borel μετρήσιμη. Οπότε, ορίζουμε την **ολοκληρώσιμη σ.δ.** που συμβολίζετε με $H \bullet A$ ή με $\displaystyle\int_0^{\bullet} H_s dA_s$, ως ακολούθως:

$$(H \bullet A)_t(\omega) := \begin{cases} \int_0^t H_s(\omega) dA_s(\omega), & \text{αν} \quad \int_0^t |H_s(\omega)| d[V(A)]_s(\omega) < \infty \\ \\ \infty, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Πρόταση 4.1.3. *Έστω $A \in \mathscr{V}$ (αντίστοιχα $\mathscr{V}^+$) και H μία προαιρετική σ.δ. (αντίστοιχα μη–αρνητική) έτσι ώστε η σ.δ. $B = H \bullet A$ να έχει πεπερασμένες τιμές. Τότε $B \in \mathscr{V}$ (αντίστοιχα $\mathscr{V}^+$) και $dB \ll dA$. Αν επιπλέον οι A και H είναι προβλέψιμες, τότε και η B είναι προβλέψιμη.*

Απόδειξη. Αν B έχει πεπερασμένες τιμές, τότε είναι προφανώς càdlàg με $B_0 = 0$ και οι τροχιές έχουν πεπερασμένη ολική κύμανση πάνω σε πεπερασμένα διαστήματα. Μένει να δείξουμε ότι η B είναι προσαρμοσμένη. Πράγματι, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ σταθερό αν $\mu(\omega, ds) := dA_s(\omega)\chi_{\{s\leq t\}}$ για κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε ένα μέτρο $\mu(\omega, \bullet)$ στο $[0,t]$ έτσι ώστε η $\mu(\bullet, I)$ είναι $\mathcal{F}_t$–μετρήσιμη για κάθε διάστημα I. Από την άλλη μεριά η συνάρτηση $(\omega, s) \longmapsto H_s(\omega)$ είναι $\mathcal{F}_t \otimes \mathfrak{B}([0,t])$–μετρήσιμη στον $\Omega \times [0, t]$. Επομένως από το Θεώρημα Fubini για μέτρα μετάβασης έχουμε ότι η B_t είναι $\mathcal{F}_t-$μετρήσιμη. Προφανώς $dB \ll dA$ και $B \in \mathscr{V}^+$ όταν η A είναι αύξουσα και H μη αρνητική. Τελικά, αν A και H είναι προβλέψιμες σ.δ. τότε η $\Delta B = H\Delta A$ είναι προβλέψιμη και η $B = B_- + \Delta B$ είναι επίσης προβλέψιμη. $\square$

Με $\mathscr{A}^+$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $A \in \mathscr{V}^+$ οι οποίες είναι P–ολοκληρώσιμες δηλαδή $\mathbb{E}_P[A_\infty] < \infty$. Με $\mathscr{A}$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $A \in \mathscr{V}$ οι οποίες έχουν P$-$ολοκληρώσιμη κύμανση δηλαδή $\mathbb{E}_P[V(A)_\infty] < \infty$. Από Προτάσεις 4.1.2 και 4.1.3 έχουμε ότι $\mathscr{A} = \mathscr{A}^+ \ominus \mathscr{A}^+$.

Έστω $\mathscr{A}^+_{loc}$ και $\mathscr{A}_{loc}$ είναι οι τοπικοποιημένες κλάσεις των $\mathscr{A}^+$ και $\mathscr{A}$ αντίστοιχα (σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.1). Μία σ.δ. στο σύνολο $\mathscr{A}^+_{loc}$ (αντίστοιχα $\mathscr{A}_{loc}$) καλείται μία **τοπικά ολοκληρώσιμη προσαρμοσμένη αύξουσα σ.δ.** (αντίστοιχα προσαρμοσμένη σ.δ. με τοπικά ολοκληρώσιμη κύμανση).

Πρέπει να τονίσουμε ότι οι κλάσεις $\mathscr{V}, \mathscr{V}^+, \mathscr{A}, \mathscr{A}^+$ είναι αναλλοίωτες υπο την διακοπή και ότι οι τοπικοποιημένες κλάσεις $\mathscr{V}_{loc}$ και $\mathscr{V}^+_{loc}$ είναι ακριβώς τα $\mathscr{V}$ και $\mathscr{V}^+$ αντίστοιχα. Επιπλέον έχουμε τα επόμενα αποτελέσματα:

$$\mathscr{A}_{loc} = \mathscr{A}^+_{loc} \ominus \mathscr{A}^+_{loc}, \quad \mathscr{A}^+ \subseteq \mathscr{A}^+_{loc} \subseteq \mathscr{V}^+, \quad \mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}_{loc} \subseteq \mathscr{V}.$$

Λήμμα 4.1.4. *Κάθε τοπικό martingale το οποίο ανήκει στον $\mathscr{V}$, ανήκει και στον $\mathscr{A}_{loc}$.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter I, §3a, page 29.

Λήμμα 4.1.5. *Έστω $A \in \mathscr{A}$ και M ένα φραγμένο martingale και T ένας χ.δ.. Τότε $\mathbb{E}[M_T A_T] = \mathbb{E}[M \bullet A_T]$. Αν επιπλέον, η A είναι μία προβλέψιμη σ.δ. τότε $\mathbb{E}[M_T A_T] = \mathbb{E}[M_- \bullet A_T]$.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter I, §3a, page 29.

Πρόταση 4.1.6. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(a) Έστω $A \in \mathscr{A}_{loc}$ και M ένα τοπικό martingale το οποίο είναι τοπικά φραγμένο. Τότε η σ.δ. $MA - M \bullet A$ είναι επίσης τοπικό martingale.

(b) *Αν επιπλέον η σ.δ. A είναι προβλέψιμη, τότε η σ.δ. $MA - M_- \bullet A$ είναι επίσης ένα τοπικό martingale.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την τοπικοποίηση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \in \mathscr{A}$ και $M \in \mathscr{M}$, και η M είναι φραγμένη. Τότε από τα Λήμματα 2.5.7 και 4.1.5 συμπεραίνουμε τον ισχυρισμό. □

4.2 Ανάλυση Doob−Meyer και αντισταθμιστές μιας αύξουσας σ.δ.

Αρχικά ας θυμηθούμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω αποτέλεσμα (ανάλυση των Doob − Meyer για υπο−martingales).

Θεώρημα (ανάλυση των Doob−Meyer για υπο−martingales) 4.2.1. *Αν X είναι ένα υπο−martingale της κλάσης (D) (βλέπε Ορισμό 2.5.9), τότε υπάρχει μοναδική (ως προς την καθολική ισοδυναμία) αύξουσα ολοκληρώσιμη προβλέψιμη σ.δ. A με $A_0 = 0$ και ώστε η $X - A$ να είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [20] Theorem 4.10 page 25.

Πόρισμα 4.2.2. *Κάθε προβλέψιμο τοπικό martingale το οποίο ανήκει στην κλάση $\mathscr{V}$ είναι ίσο με 0 (ως προς την καθολική ισοδυναμία).*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την αρχή της τοπικοποίησης είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι αν $X \in \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ είναι προβλέψιμο, τότε το X είναι καθολικά ισοδύναμο με το 0 (σημειώνουμε, ότι σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.4 ισχύει ότι $\mathscr{M} \cap \mathscr{V} \subseteq \mathscr{A}_{loc}$). Από την Πρόταση 4.1.2 έχουμε ότι $X = A - B$, όπου $A, B \in \mathscr{A}^+$ είναι προβλέψιμες σ.δ.. Αφού το $A \in \mathscr{A}^+$ είναι ένα υπο−martingale της κλάσης (D), τότε από το Θεώρημα 4.2.1 έχουμε την ύπαρξη της μοναδικής προβλέψιμης $A' \in \mathscr{A}^+$ έτσι ώστε $A - A' \in \mathscr{M}$ ως προς την καθολική ισοδυναμία. Και οι δύο διαδικασίες $A' = A$ και $A' = B$ ικανοποιούν αυτές τις προυποθέσεις, άρα η $X = A - B$ είναι καθολικά ισοδύναμη με το 0. □

Στη συνέχεια έχουμε ένα ακόμη πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω $A \in \mathscr{A}^+_{loc}$. Υπάρχει μία σ.δ., η οποία ονομάζεται ο* **αντισταθμιστής** *(compesator) της A και συμβολίζεται με A^p, η οποία είναι μοναδική ως προς την καθολική ισοδυναμία και χαρακτηρίζεται να είναι μία προβλέψιμη σ.δ. στον $A \in \mathscr{A}^+_{loc}$ ικανοποιώντας οποιαδήποτε από τις ακόλουθες τρείς ισοδύναμες συνθήκες:*

(i) $A - A^p$ *είναι ένα τοπικό martingale*

(ii) $\mathbb{E}[A^p{}_T] = \mathbb{E}[A_T]$ *για κάθε χ.δ.* T

(iii) $\mathbb{E}[(H \bullet A^p)_\infty] = \mathbb{E}[(H \bullet A)_\infty]$ *για κάθε μη αρνητική προβλέψιμη σ.δ.* H.

Απόδειξη. (iii) $\Longrightarrow$ (ii) Θέτωντας $H := \chi_{[\![0,T]\!]}$ στην (iii) προκύπτει εύκολα η (ii).
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης, το Θεώρημα 3.1.2 και $A_0 = A^p{}_0 = 0$ έχουμε τον ισχυρισμό.
(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) Έστω η τοπικοποιούσα ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε A^{T_n} και $(A^p)^{T_n}$ είναι στον $\mathscr{A}_+$. Τότε το (i) είναι ισοδύναμο με το $(A - A^p)^{T_n} \in \mathscr{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το οποίο από Λήμμα 2.5.9 είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{E}[A^p{}_{T\wedge T_n}] = \mathbb{E}[A_{T\wedge T_n}]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε χ.δ. T. Όπου αυτό είναι ισοδύναμο με το (ii) επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[A_{T\wedge T_n}] = \mathbb{E}[A_T] \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[A^p{}_{T\wedge T_n}] = \mathbb{E}[A^p{}_T].$$

Αν υπήρχαν δύο προβλέψιμες σ.δ. στον $\mathscr{A}^+_{loc}$ που ικανοποιούσαν την (i), η διαφορά τους θα ήταν ένα προβλέψιμο τοπικό martingale στον $\mathscr{V}$. Τότε από το Πόρισμα 4.2.2 έχουμε την μοναδικότητα. Μένει να αποδείξουμε την ύπαρξη της προβλέψιμης σ.δ. $A^p \in \mathscr{A}^+_{loc}$ που ικανοποιεί την (i). Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία τοπικοποιούσα ακολουθία έτσι ώστε $A^{T_n} \in \mathscr{A}^+$. Τότε A^{T_n} είναι ένα υπο−martingale στη κλάση (D). Από το Θεώρημα 4.2.1 έχουμε την ύπαρξη της προβλέψιμης σ.δ. $B(n) \in \mathscr{A}^+$ έτσι ώστε $A^{T_n} - B(n) \in \mathscr{M}$ και η μοναδικότητα μας δίνει ότι $B(n+1)^{T_n} = B(n)$. Οπότε, η σ.δ.

$$A^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} B(n)\chi_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]}$$

είναι προβλέψιμη και επειδή ικανοποιείται η $(A^p)^{T_n} = B(n)$ τότε περιέχεται στην $A \in \mathscr{A}^+_{loc}$ και $A - A^p \in \mathscr{M}$. □

Μερικές φορές η A^p καλείται ″**προβλέψιμος αντισταθμιστής**″ της A ή και επίσης λέμε ότι είναι ″**δυϊκός προβλέψιμος αντισταθμιστής**″ της A.

Στη συνέχεια έχουμε μία παραπέρα επεκτάση του παραπάνω θεωρήματος αλλά με μικρότερη σημασία.

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω $A \in \mathscr{A}_{loc}$. Τότε υπάρχει μία σ.δ. που καλείται ο* **αντισταθμιστής** *της A και συμβολίζεται με A^p, η οποία είναι μοναδική ως προς την καθολική ισοδυναμία και η οποία χαρακτηρίζεται να είναι μία προβλέψιμη σ.δ. του $\mathscr{A}_{loc}$ έτσι ώστε η $A - A^p$ να είναι ένα τοπικό martingale.*
Επιπλέον, για κάθε προβλέψιμη σ.δ. H έτσι ώστε $H \bullet A^p \in \mathscr{A}_{loc}$ και $H \bullet A^p = (H \bullet A)^p$ και συγκεκριμένα η $H \bullet A - H \bullet A^p$ είναι ένα τοπικό martingale.

Απόδειξη. Από τη Πρόταση 4.1.2 έχουμε ότι $A = B - C$ και $B, C \in \mathscr{A}^+_{loc}$ (επειδή $B + C = V(A) \in \mathscr{A}^+_{loc}$ από υπόθεση). Τότε $A^p = B^p - C^p$ είναι μία προβλέψιμη σ.δ. στον $\mathscr{A}_{loc}$ και $A - A^p \in \mathscr{M}_{loc}$. Αν υπήρχαν δύο σ.δ. που να ικανοποιούν τις απαιτούμενες ιδιότητες, η διαφορά τους θα ήταν ένα προβλέψιμο τοπικό martingale που ανήκει στον $\mathscr{A}_{loc}$ και οπότε θα ήταν ίσο με 0 ως προς την καθολική ισοδυναμία σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.2.
Έστω H μία προβλέψιμη σ.δ. έτσι ώστε $H \bullet A \in \mathscr{A}_{loc}$. Τότε $H^+ \bullet B \in \mathscr{A}^+_{loc}$ και από Πρόταση 4.1.3, η $H^+ \bullet B^p$ είναι μία προβλέψιμη σ.δ. στον $\mathscr{A}^+_{loc}$. Για οποιαδήποτε άλλη μη αρνητική προβλέψιμη σ.δ. K έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[((KH^+) \bullet B^p)_\infty] = \mathbb{E}[((KH^+) \bullet B)_\infty]$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.3 (iii). Αλλά $(KH^+) \bullet B = K \bullet (H^+ \bullet B)^p$. Παρόμοια έχουμε για το B^p. Επομένως ο χαρακτηρισμός 4.2.3 (iii) συνεπάγεται ότι $H^+ \bullet B^p = (H^+ \bullet B)^p$. Ανάλογα έχουμε ότι

$$H^- \bullet B^p = (H^- \bullet B)^p$$

και $(H^\pm \bullet C)^p = H^\pm \bullet C^p$ και όλες αυτές οι σ.δ. ανήκουν στον $\mathscr{A}^+_{loc}$. Οπότε ο δεύτερος ισχυρισμός του θεωρήματος βγαίνει από το εξής:

$$H \bullet A = H^+ \bullet B + H^- \bullet C - H^- \bullet B - H^+ \bullet C$$

και

$$H \bullet A^p = H^+ \bullet B^p + H^- \bullet C^p - H^- \bullet B^p - H^+ \bullet C^p,$$

όπου και στις δύο σχέσεις εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.1.2. □

Παρακάτω έχουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των αντισταθμιστών.

Ιδιότητες 4.2.5. *Βασικές ιδιότητες των αντισταθμιστών:*

(a) Αν η $A \in \mathscr{A}_{loc}$ είναι προβλέψιμη, τότε ισχύει $A^p = A$.

(b) Αν η $A \in \mathscr{A}_{loc}$ και T είναι ένας χ.δ., τότε $(A^T)^p = (A^p)^T$.

(c) Αν $A \in \mathscr{A}_{loc}$, τότε η ${}^p(\Delta A) = \Delta(A^p)$.

(d) Αν $A \in \mathscr{A}_{loc}$, τότε το A είναι ένα τοπικό martingale αν και μόνο αν $A^p = 0$.

(e) Αν $A \in \mathscr{M}_{loc} \cap \mathscr{V}$ και H είναι μία προβλέψιμη σ.δ. έτσι ώστε $H \bullet A \in \mathscr{A}_{loc}$, τότε η σ.δ. $H \bullet A$ είναι ένα τοπικό martingale.

Ας σημειώσουμε το γεγονός ότι ο αντισταθμιστής A^p της $A \in \mathscr{A}_{loc}$ συνήθως διαφέρει από την προβλέψιμη προβολή ${}^pA$, όπου αυτό θα το διαπιστώσουμε με ένα παράδειγμα έπειτα από την απόδειξη της Πρότασης 4.2.7.

Ένα θεμελιώδης παράδειγμα είναι οι σημειακές διαδικασίες και η σ.δ. Poisson. Από τον ορισμό της σημειακής διαδικασίας έχουμε ότι μία προσαρμοσμένη σημειακή διαδικασία είναι μία σ.δ. $N \in \mathscr{V}^+$ η οποία παίρνει τιμές στον $\mathbb{N}$ και τα άλματα είναι ίσα με 1 (η σ.δ. άλματος ΔN παίρνει τις τιμές 0 και 1 μόνο). Μερικές φορές μία τέτοια διαδικασία καλείται **απλή σημειακή διαδικασία**, σύμφωνα με το γεγονός ότι το ΔN παίρνει τις τιμές 0 και 1 μόνο. Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι το πλήθος των γεγονότων που συμβαίνουν στο διάστημα $(0, t]$, αυτή η υπόθεση σημαίνει ότι δύο ή περισσότερα γεγονότα δεν μπορούν να συμβαίνουν ακριβώς την ίδια στιγμή.

Μπορούμε να προσαρτήσουμε την ακόλουθη ακολουθία από χ.δ. με την σημειακή διαδικασία N:

$$T_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t = n\}.$$

Ας επισημάνουμε ότι ισχύει $T_0 = 0$ με $T_n < T_{n+1}$ στο σύνολο $\{T_n < \infty\}$ και το $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$.

Αντίστροφα, η ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ χαρακτηρίζει πλήρως την σ.δ. N, οπότε έχουμε ότι:

$$N = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{[\![T_n,\infty[\![} \tag{4.1}$$

Τέλος, σημαντικό θα ήταν να τονίσουμε ότι κάθε προαρμοσμένη σημειακή διαδικασία είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και ακόμα τοπικά φραγμένη επειδή $T_n \leq n$.

Ορισμοί 4.2.6. **(a)** Μία **γενικευμένη** (extended) **σ.δ. Poisson** στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ είναι μία προσαρμοσμένη σημειακή διαδικασία N έτσι ώστε:

(i) $\mathbb{E}[N_t] < \infty$, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$

(ii) η $N_t - N_s$ είναι ανεξάρτητη από την σ–άλγεβρα $\mathcal{F}_s$, για κάθε $0 \leq s < t$.

(b) Η συνάρτηση $a(t) = \mathbb{E}[N_t]$ καλείται η **ένταση** της N. Αν αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής, τότε λέμε ότι η N είναι μία **σ.δ. Poisson**. Αν η συνάρτηση είναι η $a(t) = t$, τότε λέμε ότι η N είναι μία **τυπική** (standard) **σ.δ. Poisson**.

Αργότερα θα αποδείξουμε ότι αν N είναι μία σ.δ. Poisson, η κατανομή της τ.μ. $N_t - N_s$ είναι μία κατανομή Poisson με μέση τιμή $a(t) - a(s)$. Γαι την ώρα θα επικεντρωθούμε στον υπολογισμό του αντισταθμιστή.

Πρόταση 4.2.7. *Έστω N μία γενικευμένη σ.δ. Poisson στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ με την συνάρτηση έντασης $a(\bullet)$.*

(a) Ο αντισταθμιστής της N είναι ο $N_t^p = a(t)$.

(b) Η N είναι ψευδό–αριστερά–συνεχής αν και μόνο αν είναι μία σ.δ. Poisson.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της γενικευμένης σ.δ Poisson έχουμε άμμεσα ότι $\mathbb{E}[N_t - N_s|\mathcal{F}_s] = a(t) - a(s)$ για κάθε $s \leq t$. Επομένως $X_t = N_t - a(t)$ είναι ένα martingale και $A_t = a(t)$ είναι μία προβλέψιμη σ.δ. στον $\mathscr{A}^+_{loc}$, άρα έχουμε τον ισχυρισμό (a). Από τις Ιδιότητες 4.2.5 (c), έχουμε για κάθε προβλέψιμο χρόνο T:

$$\begin{aligned} P(\{\Delta N_T \neq 0, T < \infty\}) &= \mathbb{E}[\Delta N_T \chi_{\{T<\infty\}}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Delta N_T|\mathcal{F}_{T-}]\chi_{T<\infty}] \\ &= \mathbb{E}[\Delta a(T)\chi_{\{T<\infty\}}]. \end{aligned}$$

Τότε αν η συνάρτηση $a(t)$ είναι συνεχής από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι $P(\{\Delta N_T \neq 0, T < \infty\}) = 0$ για όλους τους προβλέψιμους χρόνους και άρα η N είναι ψευδο–αριστερά–συνεχής. Αντίστροφα, αν η συνάρτηση $a(t)$ έχει μία ασυνέχεια στο χρόνο t, από τη παραπάνω σχέση έχουμε ότι $P(\{\Delta N_T \neq 0\}) = \Delta a(t) > 0$ και έτσι η N δεν είναι ψευδο–αριστερά–συνεχής, οπότε αποδείχθηκε και το (b). $\square$

Τελειώνοντας, ας σημειώσουμε μία άλλη σημαντική εφαρμογή της Πρότασης 3.3.6 η οποία μας δείχνει ότι ${}^{p}N = N_{-}$ αν N είναι μία σ.δ. Poisson, ως εκ τούτου μας δίνει ένα παράδειγμα όπου ${}^{p}N \neq N^{p}$.

Κεφάλαιο 5

Ημι–martingales και στοχαστικά ολοκληρώματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την έννοια του ημι–martingale και θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Στην Ενότητα 5.1 ορίζονται τα τοπικά τετραγωνικά ολοκληρώσιμα martingales και οι σ.δ. τετραγωνικής μεταβολής, και αναφέρονται οι βασικές ιδιοτητές τους. Στην 5.2 αναφέρεται το θεώρημα της ανάλυσης ενός τοπικού martingales σε ένα συνεχές και σε ένα καθαρά ασυνεχές τοπικό martingale (βλ. Θεώρημα 5.2.3). Στην 5.3 ορίζονται οι έννοιες των ημι–martingales και των ειδικών ημι–martingales, και αποδεικνύονται χαρακτηρισμοί και ιδιότητες των ειδικών ημι–martingales. Στην 5.4, αρχικά ορίζεται το στοχαστικό ολοκλήρωμα απλών σ.δ. και το στοχαστικό ολοκλήρωμα τοπικά φραγμένων προβλέψιμων σ.δ. με διαφορικό ένα ημι–martingale, και αποδεικνύονται βασικές ιδιοτητέ τους. Στην 5.5 ορίζεται η τετραγωνική κύμανση ενός ημι–martingale και δίνεται ο τύπος του Itô. Στην 5.6 παρουσιάζεται ο εκθετικός τύπος Doléans – Dade, ως μία εφαρμογή του τύπου του Itô χρήσιμη για τα παρακάτω.

5.1 Τοπικά τετραγωνικά ολοκληρώσιμα martingales

Για αυτήν την ενότητα θεωρούμε έναν αυθαίρετο αλλά σταθερό φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. Θυμίζουμε ότι με $\mathscr{H}^2$ συμβολίζουμε τον χώρο όλων των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων martingales και με $\mathscr{H}^2_{loc}$ την τοπικοποιημένη κλάση (δηλαδή την κλάση των τοπικά τετραγωνικά ολοκληρώσιμων martingales).

Είναι προφανές ότι ένα τοπικό martingale M έτσι ώστε $M_0 \in \mathcal{L}^2$ και η σ.δ. ΔM να είναι τοπικά φραγμένη, ανήκει στον $\mathscr{H}^2_{loc}$.

Ορισμός 5.1.1. Αν $X \in \mathscr{H}^2$, τότε η **σ.δ. τετραγωνικής μεταβολής** (quadratic variation process) είναι η συνεχής αύξουσα σ.δ. $\langle X \rangle$ ώστε η σ.δ. $X^2 - \langle X \rangle$ να είναι martingale, που μηδενίζεται στο $t = 0$.

Θεώρημα 5.1.2. *Σε κάθε ζευγάρι (M,N) από τοπικά τετραγωνικά ολοκληρώσιμα martingales αντιστοιχεί μία προβλέψιμη σ.δ. $\langle M, N \rangle \in \mathscr{V}$, μοναδική ως προς την καθολική ισοδυναμία, έτσι ώστε $MN - \langle M, N \rangle$ να είναι τοπικό martingale. Επιπλέον,*

$$\langle M, N \rangle = \frac{1}{4}(\langle M+N, M+N \rangle - \langle M-N, M-N \rangle)$$

και αν $M, N \in \mathscr{H}^2$ τότε $\langle M, N \rangle \in \mathscr{A}$ και $MN - \langle M, N \rangle \in \mathscr{M}$. Επίσης $\langle M, M \rangle$ είναι μη φθίνουσα σ.δ. και έχει μία συνεχή εκδοχή αν και μόνο αν η $\mathscr{M}$ είναι ψευδό−αριστερά−συνεχής.
Η σ.δ. $\langle M, N \rangle$ καλείται **προβλέψιμη τετραγωνική συνκύμανση** *ή* **τετραγωνικό χαρακτηριστικό** *ή επίσης* **γωνιακή αγκύλη** *του ζεύγους (M,N). Επίσης $\langle M, N \rangle = \langle M - M_0, N - N_0 \rangle$.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter I, §4a, page 38.

Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων $M \in \mathscr{H}^2$ και των τερματικών τ.μ. M_∞. Έτσι είναι φυσικό να εφοδιάσουμε την κλάση $\mathscr{H}^2$ με μία δομή χώρου Hilbert, όπως φαίνεται παρακάτω:

Αν $M, N \in \mathscr{H}^2$ τότε έχουμε το βαθμωτό γινόμενο και την νόρμα ως εξής,

$$(M, N)_{H^2} := \mathbb{E}[M_\infty N_\infty] \quad \text{και} \quad ||M||_{H^2} := ||M_\infty||_{L^2}.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το $\mathscr{H}^2$ είναι πράγματι ένας χώρος Hilbert αφού αν (M^n) είναι μία ακολουθία Cauchy για την $|| \bullet ||_{H^2}$, τότε η ακολουθία (M^n_∞) είναι Cauchy στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\infty^-}, P)$ και συγκλίνει στο M_∞ σε αυτό τον χώρο. Τότε αν M είναι το (μοναδικό) martingale με τερματική τ.μ. M_∞, ανήκει στην κλάση $\mathscr{H}^2$ και $||M^n - M||_{H^2} \to 0$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, έχουμε ότι,

$$(M, N)_{H^2} = \mathbb{E}[\langle M, N\rangle_\infty] + \mathbb{E}[M_0 N_0].$$

Ένα θεμελιώδες παράδειγμα: η στοχαστική διαδικασία Wiener.

Ορισμοί 5.1.3. **(a)** Μία **σ.δ. Wiener** στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ είναι μία συνεχής προσαρμοσμένη σ.δ. W έτσι ώστε $W_0 = 0$ και

(i) $\mathbb{E}[{W_t}^2] < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbb{E}[W_t] = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) η $W_t - W_s$ να είναι ανεξάρτητη από την $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}_s$, για όλα τα $0 \leq s \leq t$.

(b) Η συνάρτηση $\sigma^2(t) = \mathbb{E}[{W^2}_t]$ καλείται **συνάρτηση διακύμανσης ή διασποράς** της W. Αν $\sigma^2(t) = t$, τότε λέμε ότι η W είναι **τυπική σ.δ. Wiener**. (Μία εναλλακτική ορολογία αντί της ″σ.δ. Wiener″ είναι ″κίνηση Brown″).

Ο ορισμός αυτός θα πρέπει να συγκριθεί με τον ορισμό της σ.δ. Poisson (Ορισμός 4.2.6). Θα παρατηρήσουμε ότι δεν έχουμε ορίσει την γενικευμένη σ.δ. Wiener. Ας τονίσουμε ότι ο προηγούμενος ορισμός είναι μόνο μία περίπτωση, υπάρχουν και άλλοι τρόποι για να ορίσουμε τη σ.δ. Wiener.

Για την ώρα θα αποδείξουμε την επόμενη πρόταση, όπου το αντίστροφο θα αποδειχθεί αργότερα.

Πρόταση 5.1.4. *Μία σ.δ. Wiener W είναι ένα συνεχές martingale και για την $\langle W, W\rangle$ ισχύει $\langle W, W\rangle_t(\omega) = \sigma^2(t)$, όπου $\sigma^2(\bullet)$ είναι η συνάρτηση διασποράς.*

Απόδειξη. **(a)** Από τον Ορισμό 5.1.3 προκύπτει αμέσως ότι η W είναι ένα συνεχές martingale. Η X_t με $X_t = {W_t}^2 - \sigma^2(t)$ είναι ένα martingale. Πράγματι,

$$X_t - X_s = (W_t - W_s)^2 - [\sigma^2(t) - \sigma^2(s)] + 2W_s(W_t - W_s). \tag{5.1}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_s] \\
&\overset{(5.1)}{=} \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] - [\sigma^2(t) - \sigma^2(s)] + X_s \\
&= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] - \sigma^2(t) + \sigma^2(s) + X_s \\
&= \mathbb{E}[W_t^2] + \mathbb{E}[W_s^2] - 2\mathbb{E}[W_t W_s] - \sigma^2(t) + \sigma^2(s) + X_s \\
&= \sigma^2(t) + \sigma^2(s) - 2\big[\mathbb{E}[(W_t - W_s)W_s] - \mathbb{E}[W_s^2]\big] - \sigma^2(t) + \sigma^2(s) + X_s \\
&= 2\sigma^2(s) - 2\mathbb{E}[W_t - W_s]\mathbb{E}[W_s] - 2\sigma^2(s) + X_s \\
&= X_s,
\end{aligned}
$$

όπου οι ισότητες ισχύουν $P|\mathcal{F}_s$−σ.β..
(b) Από το Θεώρημα 5.1.2 και το βήμα (a) έχουμε ότι $\langle W, W\rangle_t(\omega) = \sigma^2(t)$ και ότι η σ^2 είναι συνεχής, μηδενική στο 0 και αύξουσα. □

5.2 Ανάλυση ενός τοπικού martingale

Ορισμός 5.2.1. (a) Δύο τοπικά martingales M, N καλούνται **ορθογώνια**, αν το γινομενό τους MN είναι ένα τοπικό martingale (η ορολογία θα εξηγηθεί στη συνέχεια).
(b) Ένα τοπικό martingale καλείται **καθαρά ασυνεχές τοπικό martingale**, αν $X_0 = 0$ και αν είναι ορθογώνιο με όλα τα συνεχή τοπικά martingales.

Η ακόλουθη πρόταση μας εξήγει την ορολογία της λέξης ορθογώνιο.

Πρόταση 5.2.2. *Έστω $M, N \in \mathscr{H}^2$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(a) Τα M και N είναι ορθογώνια.

(b) $\langle M, N\rangle = 0$.

(c) Για κάθε χ.δ. T, τα M^T και $N - N_0$ είναι ορθογώνια στον χώρο Hilbert $\mathscr{H}^2$.

Απόδειξη. (a) $\Longleftrightarrow$ (b) ισχύει από το Θεώρημα 5.1.2
(a) $\Longrightarrow$ (c) Αν τα M και N είναι ορθογώνια σύμφωνα με τον Ορισμό 5.2.1, τότε είναι ορθογώνια και τα $M^T, N - N_0$ (T αυθαίρετος χ.δ.), ως εκ τούτου

$$\mathbb{E}[M^T_\infty(N_\infty - N_0)] = \mathbb{E}[M^T_0(N_0 - N_0)] = 0.$$

Επίσης το M^T είναι ορθογώνιο στο $N - N_0$ στον $\mathscr{H}^2$. Αντίστροφα, αν ισχύει η υπόθεση (c) και T ένας χ.δ. τότε από το stopping theorem έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[M_T N_T] = \mathbb{E}[M_T N_\infty] = \mathbb{E}[M^T_\infty(N_\infty - N_0)] + \mathbb{E}[M_T N_0] = 0 + \mathbb{E}[M_0 N_0].$$

Επομένως από το Λήμμα 2.5.7 έπεται ότι $MN \in \mathscr{M}$, οπότε ισχύει η (a). □

Θεώρημα 5.2.3. *Κάθε τοπικό martingale δέχεται μία μοναδική (ως προς την καθολική ισοδυναμία) ανάλυση $M = M_0 + M^c + M^d$, όπου M^c είναι ένα συνεχές τοπικό martingale και M^d είναι ένα καθαρά ασυνεχές τοπικό martingale.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter I, §4b, page 43.

Το σύνολο M^c καλείται το **συνεχές μέρος** του M και το M^d καλείται το **καθαρά ασυνεχές μέρος** του M.

5.3 Ημι−martingales

Σε αυτήν την ενότητα θα δώσουμε τον ορισμό των ημι− martingales, που αποτελούν μία θεμελιώδη έννοια για τη συνέχεια της Δ.Ε. και θα διατυπώσουμε κάποια βασικά θεώρημα.
Με $\mathscr{L}$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των τοπικών martingales M έτσι ώστε $M_0 = 0$.

Ορισμός 5.3.1. (a) Ένα **ημι− martingale** είναι μία διαδικασία X που έχει την μορφή $X = X_0 + M + A$, όπου η X_0 έχει πεπερασμένες τιμές και είναι $\mathcal{F}_0$−μετρήσιμη, $M \in \mathscr{L}$ και $A \in \mathscr{V}$. Με $\mathscr{S}$ θα συμβολίζουμε το χώρο όλων των ημι−martingales.
(b) Ένα **ειδικό ημι−martingale** είναι ένα ημι−martingale X το οποίο δέχεται μία ανάλυση της μορφής $X = X_0 + M + A$ όπως προηγουμένως, όπου επιπλέον η σ.δ. A είναι προβλέψιμη. Με $\mathscr{S}_P$ θα συμβολίζουμε το χώρο όλων των ειδικών ημι−martingales.

Είναι προφανές ότι $\mathscr{M}_{loc} \subseteq \mathscr{S}_P$ και $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{S}$. Όλα τα ημι−martingales είναι càdlàg και προσαρμοσμένα. Η ανάλυση $X = X_0 + M + A$ στον Ορισμό 5.3.1 (a) δεν είναι μοναδική. Παρόλα αυτά, από το Πόρισμα 4.2.2 υπάρχει το πολύ μία τέτοια ανάλυση με το A να είναι προβλέψιμη (ως προς την καθολική ισοδυναμία), οπότε έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.3.2. Αν X είναι ένα ειδικό ημι−martingale, η μοναδική ανάλυση $X = X_0 + M + A$ έτσι ώστε $M \in \mathscr{L}$ και A να είναι μία προβλέψιμη σ.δ. που ανήκει στον $\mathscr{V}$, καλείται η **κανονική ανάλυση** της σ.δ. X.

Παρόλο που δεν είναι αρκετά εμφανής από τον παραπάνω ορισμό, ο χώρος των ημι−martingales είναι ένας καλός χώρος, αφού παραμένει σταθερός κάτω από πολλούς μετασχηματισμούς, όπως υπό την διακοπή (είναι εμφανές), κάτω από την τοπικοποίηση (θα το δούμε αργότερα), κάτω την "αλλαγή του χρόνου", κάτω από την "απόλυτα συνεχή αλλαγή του μέτρου", κάτω από την "αλλαγή της διύλισης", και η βασική ιδιότητα είναι ότι είναι η μεγαλύτερη δυνατή κλάση από σ.δ. οι οποίες μπορούν να ολοκληρώσουν όλες τις φραγμένες προβλέψιμες σ.δ. βλέπε [[17] ,[7] ,[12] ,[11]]. Δυστυχώς δεν θα μελετήσουμε αναλυτικά την κλάση των ημι−martingales διότι δεν είναι η ουσία αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Πρόταση 5.3.3. *Έστω X είναι ένα ημι−martingale. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) το X είναι ένα ειδικό ημι−martingale

(ii) υπάρχει μία ανάλυση $X = X_0 + M + A$ όπου $A \in \mathscr{A}_{loc}$

(iii) όλες οι αναλύσεις $X = X_0 + M + A$ ικανοποιούν την $A \in \mathscr{A}_{loc}$

(iv) η σ.δ. $Y_t = \sup_{s \le t} |X_s - X_0|$ ανήκει στην κλάση $\mathscr{A}^+_{loc}$.

Απόδειξη. (iii) $\Longrightarrow$ (ii) είναι προφανές.
(ii) $\Longrightarrow$ (i):Έχουμε ότι $X = X_0+M+A$ με $A \in \mathscr{A}_{loc}$. Αν $A' = A^p$ και $M' = M+A-A'$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.4 έχουμε $M' \in \mathscr{L}$ και A' είναι μία προβλέψιμη σ.δ. και ανήκει στην κλάση $\mathscr{V}$. Άρα $X = X_0+M'+A'$ είναι ειδικό ημι−martingale. Άρα (ii) $\Longrightarrow$ (i).
(i) $\Longrightarrow$ (iv) Αν $A \in \mathscr{A}_{loc}$, τότε η αύξουσα càd σ.δ. $\sup_{s \le \bullet} |A_s|$ ανήκει στην κλάση $\mathscr{A}_{loc}$, επειδή είναι μικρότερη από την $V(A)$. Για να αποδείξουμε την (i) $\Longrightarrow$ (iv) αρκεί να δείξουμε ότι αν $M \in \mathscr{L}$, τότε $M^*_t = \sup_{s \le t} |M_s|$ ανήκει στην κλάση $\mathscr{A}^+_{loc}$. Έστω $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μία τοπικοποιούσα ακολουθία έτσι ώστε $M^{T_n} \in \mathscr{M}$ και το σύνολο

$S_n = \inf\{t : t \geq T_n \quad ή \quad |M_t| > n\}$. Τότε $S_n \uparrow \infty$ και $M^*_{S_n} \leq n + |M_{S_n}|$, το οποίο είναι ολοκληρώσιμο επειδή $M^{T_n} \in \mathscr{M}$, οπότε $M^* \in \mathscr{A}_{loc}$.
(vi) $\Longrightarrow$ (iii) Τελικά έστω ότι ισχύει η (iv). Έστω $X = X_0 + M + A$ είναι μία οποιαδήποτε ανάλυση της X (Ορισμός 5.3.1). Από την υπόθεση έχουμε ότι $Y \in \mathscr{A}_{loc}$ και έχουμε δεί παραπάνω ότι $M^* \in \mathscr{A}_{loc}$, οπότε η σ.δ. $A^*_t = \sup_{s \leq t} A_s$ επίσης ανήκει στην κλάση $\mathscr{A}_{loc}$. Αφού $V(A) \leq V(A)_- + 2A^*$ και επίσης $V(A)_-$ είναι τοπικά φραγμένο (επειδή είναι càd με πεπερασμένες τιμές και αύξουσα), τότε $V(A) \in \mathscr{A}_{loc}$, οπότε (iv) $\Longrightarrow$ (iii). $\square$

Λήμμα 5.3.4. *Αν ένα ημι−martingale X ικανοποιεί την $|\Delta X| \leq a$, τότε είναι ειδικό και η κανονική αναλυσή του $X = X_0 + M + A$ ικανοποιεί την $|\Delta A| \leq a$ και $|\Delta M| \leq 2a$ (ιδιαιτέρως αν το X είναι συνεχές, τότε τα M και A είναι συνεχή).*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter I, §4c, page 44.

Πρόταση 5.3.5. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(a) Οι χώροι $\mathscr{S}$ και $\mathscr{S}_P$ είναι ευσταθείς υπο την διακοπή.

(b) Έχουμε ότι $\mathscr{S}_{loc} = \mathscr{S}$ και $(\mathscr{S}_P)_{loc} = \mathscr{S}_P$.

(c) Η $X \in \mathscr{S}$ αν υπάρχει μία τοπικοποιούσα ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από χ.δ. και μία ακολουθία από $\{Y(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ημι−martingales, έτσι ώστε $X = Y(n)$ σε κάθε διάστημα $[\![0, T_n[\![$.

Απόδειξη. (a) Είναι προφανές.
(c) Αφού $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αυξάνει στο ∞, η σ.δ. X είναι càdlàg και προσαρμοσμένη. Θέτουμε

$$Z(n) = Y(n)^{T_n} + (X_{T_n} - Y(n)_{T_n}) \cdot \chi_{[\![T_n,\infty[\![}.$$

Η σ.δ. $Z(n)$ είναι ένα άθροισμα από διακοπτόμενα ημιmartingales και μιάς σ.δ. στον $\mathscr{V}$, άρα $Z(n) \in \mathscr{S}$. Θεωρούμε την ανάλυση $Z(n) = X_0 + M(n) + A(n)$ σύμφωνα με τον Ορισμό 5.3.1 (παρατηρούμε ότι $X^{T_n} = Z(n)$). Τότε $X = X_0 + M + A$, όπου $M = \sum M(n)\chi_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]}$ και $A = X - X_0 - M$. Αφού,

$$M^{T_n} = \sum_{1 \leq p \leq n} [M(p)^{T_p} - M(p)^{T_{p-1}}]$$

(με την σύμβαση $T_0 = 0$) έχουμε ότι $M \in \mathscr{L}$ και ανάλογα μπορούμε να αποδείξουμε ότι $A \in \mathscr{V}$, ως εκ τούτου $X \in \mathscr{S}$.

(b) Η σχέση $\mathscr{S}_{loc} = \mathscr{S}$ συνάγεται από το βήμα (c). Χρησιμοποιώντας την πρώτη σχέση και το γεγονός ότι $(\mathscr{A}_{loc})_{loc} = \mathscr{A}_{loc}$ και από την Πρόταση 5.3.3 (iv), έχουμε άμμεσα ότι $(\mathscr{S}_P)_{loc} = \mathscr{S}_P$. □

Επειδή οι κλάσεις $\mathscr{V}$ και $\mathscr{M}_{loc}$ ανήκουν στην κλάση $\mathscr{S}$, υπάρχουν πολλά παραδείγματα από ημι−martingales. Από το θεώρημα ανάλυσης των Doob−Meyer έχουμε ότι κάθε υπο−martingale (ή υπερ−martingale) της κλάσης D είναι ένα ειδικό ημι−martingale. Χρησιμοποιώντας την τοπικοποίηση, μπορούμε να αποδείξουμε ότι (βλ. [17]): Μία προσαρμοσμένη σ.δ. X είναι ένα ειδικό ημι−martingale αν και μόνο αν $X - X_0$ είναι η διαφορά από δύο τοπικά υπο−martingales (ή υπερ−martingales). Αυτό το αποτελέσμα δεν θα το χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια.
Είναι επίσης ενδιαφέρον και χρήσιμο να αναγνωρίζουμε όλες τις ντετερμινιστικές σ.δ. οι οποίες είναι ημι−martingales.

Πρόταση 5.3.6. *Έστω f μία συνάρτηση με πραγματικές τιμές επάνω στον $\mathbb{R}_+$. Για να είναι η σ.δ. $X_t(\omega) = f(t)$ ένα ημι−martingale, είναι αναγκαίο και ικανό ότι η f είναι càdlàg, με πεπερασμένη ολική κύμανση σε κάθε πεπερασμένο διάστημα.*

Απόδειξη. Η ικανή συνθήκη είναι προφανής. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $X \in \mathscr{S}$. Τότε κατ' ανάγκη η f είναι càdlàg, οπότε τοπικά φραγμένη, ως εκ τούτου η X ικανοποιεί την Πρόταση 5.3.3 (iv) και είναι ειδικό ημι−martingale. Θεωρούμε την ανάλυση $X = f(0) + M + A$ και μία τοποικοποιούσα ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $M^{T_n} \in \mathscr{M}$ και $A^{T_n} \in \mathscr{A}$ (επειδή $X \in \mathscr{S}_P$). Επίσης συμβολίζουμε την κατανομή του T_n με $F_n(dx)$, το οποίο είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στον $\mathbb{R}_+$. Έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} g_n(t) := \int F_n(ds) f(s \wedge t) &= \mathbb{E}(X_{t\wedge T_n}) \\ &= f(0) + \mathbb{E}(M_t^{T_n}) + \mathbb{E}(A_t^{T_n}) \\ &= f(0) + \mathbb{E}(A_t^{T_n}). \end{aligned}$$

Επιπλέον η g_n είναι μία συνάρτηση με πεπερασμένη κύμανση. Επιπλέον έχουμε ότι,

$$F_n((t,\infty]) f(t) = g_n(t) - \int_{[0,t]} f(s) F_n(ds)$$

και ο τελευταίος όρος στο δεξί μέλος είναι επίσης μία συνάρτηση (στο t) με πεπερασμένη ολική κύμανση. Επιπλέον η f έχει πεπερασμένη ολική κύμανση σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $[0, t]$, με την προυπόθεση $F_n((t, \infty]) > 0$. Αλλά, αφού $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, υπάρχει ένα αρκετά μεγάλο n έτσι ώστε $F_n((t, \infty]) > 0$, και επομένως έχουμε το αποτέλεσμα. $\square$

5.4 Κατασκευή του στοχαστικού ολοκληρώματος

Σε αυτήν την παράγραφο, θα προχωρήσουμε στην κατασκευή του στοχαστικού ολοκληρώματος για τοπικά φραγμένες προβλέψιμες σ.δ. σε αντιστοιχία με ένα ημι−martingale.

Αν $X \in \mathscr{V}$ και H είναι μία φραγμένη σ.δ., έχουμε ορίσει στην παράγραφο 4.1 μία ολοκληρώσιμη σ.δ. $(H \bullet X)_t = \int_0^t H_s dX_s$. Το πρόβλημα εδώ είναι να ορίσουμε μία ολοκληρώσιμη σ.δ. όπου X δεν ανήκει στην κλάση $\mathscr{V}$, αλλά είναι μόνο ημι−martingale. Οπότε η τροχιά $X_\bullet(\omega)$ δεν μπορεί να ορίσει ένα μέτρο $dX_s(\omega)$ επάνω στον $\mathbb{R}_+$ (για παράδειγμα αν X είναι μία σ.δ. Wiener, τότε σχεδόν όλες οι τροχιές $t \to X_t(\omega)$ έχει πεπερασμένη ολική κύμανση επάνω σε κάθε πεπερασμένο διάστημα).

Ορισμός 5.4.1. Όταν η H είναι αρκετά απλή σ.δ. είναι πολύ εύκολο να ορίσουμε την **ολοκληρώσιμη σ.δ.**. Πιο συγκεκριμένα, συμβολίζουμε με $\mathcal{S}$ το σύνολο όλων των σ.δ. της μορφής:

$$H := \begin{cases} \text{είτε } Y\chi_{[\![0]\!]}, & \text{αν η } Y \text{ είναι φραγμένη } \mathcal{F}_0 - \text{μετρήσιμη} \\ \\ \text{είτε } Y\chi_{]\!]r,s]\!]}, r < s, & \text{αν η } Y \text{ είναι φραγμένη } \mathcal{F}_r - \text{μετρήσιμη.} \end{cases} \tag{5.2}$$

Για ένα τέτοιο H, η ολοκληρώσιμη σ.δ. $(H \bullet X)_t = \int_0^t H_s dX_s = \int_{(0,t]} H_s dX_s$ έχει έναν "φυσικό" μοναδικό ορισμό (ακόμα αν dX_s δεν έχει νόημα), δηλαδή:

$$(H \bullet X)_t := \begin{cases} 0, & \text{αν } H = Y\chi_{[\![0]\!]} \\ \\ Y(X_{s\wedge t} - X_{r\wedge t}), & \text{αν } H = Y\chi_{]\!]r,s]\!]}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Θεώρημα 5.4.2. *Έστω X ένα ημι−martingale. Η απεικόνιση $H \longmapsto H \bullet X$, που ορίστηκε επάνω στον $\mathcal{S}$ σύμφωνα με την (5.3), έχει μία επέκταση, που συμβολίζεται επίσης με $H \longmapsto H \bullet X$ (και η $H \bullet X$ καλείται το* ***στοχαστικό ολοκλήρωμα*** *της H σε σχέση με το X) στον χώρο όλων των τοπικά φραγμένων προβλέψιμων σ.δ. H, με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $H \bullet X$ είναι μία càdlàg προσαρμοσμένη σ.δ.

(ii) η απεικόνιση $H \longmapsto H \bullet X$ είναι γραμμική, ως προς την καθολική ισοδυναμία (δηλ. οι σ.δ. $(aH + K) \bullet X$ και $aH \bullet X + K \bullet X$ είναι καθολικά ισοδύναμες)

(iii) αν η ακολουθία $\{H^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ από προβλέψιμες σ.δ. συγκλίνει σημειακά σε ένα όριο H, και αν $|H^n| \leq K$ όπου K είναι μία τοπικά φραγμένη προβλέψιμη σ.δ., τότε $(H^n \bullet X)_t \to (H \bullet X)_t$ κατά μέτρο για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Επιπλέον αυτή η επέκταση είναι μοναδική, ως προς την καθολική ισοδυναμία (δηλαδή αν $H \longmapsto a(H)$ είναι μία άλλη επέκταση με τις ίδιες ιδιότητες, τότε οι σ.δ. $a(H)$ και $H \bullet X$ είναι καθολικά ισοδύναμες) και από την (iii) η $H^n \bullet X$ συγκλίνει στην $H \bullet X$ κατά μέτρο, ομοιόμορφα σε πεπερασμένα διαστήματα, δηλ.

$$\sup_{s \leq t} |(H^n \bullet X)_s - (H \bullet X)_s| \xrightarrow{P} 0.$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter I, §4d, page 48−51.

Παρατήρηση 5.4.3. Θα μπορούσε κανείς να ορίσει την ολοκληρώσιμη σ.δ. από την σχέση (5.3) για κάθε H της μορφής (5.2) αλλά χωρίς τις συνθήκες μετρησιμότητας επάνω στο Y, δηλαδή για απλές σ.δ. οι οποίες δεν είναι προβλέψιμες. Αλλά η επέκταση είναι ουσιαστικά δυνατή για προβλέψιμες σ.δ. μόνο. Παρόμοια, η σχέση (5.3) έχει νόημα για κάθε σ.δ. X, ημι−martingale ή όχι. Αλλά η επέκταση είναι πιθανή μόνο όταν η X είναι ημι−martingale. Καθώς έχει ειπωθεί και προηγουμένως, αυτό είναι ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα των Bichteler, Dellacherie και Mokobodzki, το οποίο εξηγεί, γιατί ο χώρος των ημι−martingales είναι τόσο σημαντικός.

Παρακάτω θα δούμε κάποιες σημαντικές ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος. Το X είναι πάντα ένα ημι−martingale και H, K είναι τοπικά φραγμένες προβλέψιμες σ.δ.. Όλες τις ισότητες (ή άλλες προτάσεις) είναι καθολικά ισοδύναμες.

Ιδιότητες 5.4.4. *Έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος:*

(i) Η απεικόνιση $X \longmapsto H \bullet X$ είναι γραμμική.

(ii) Ισχύουν τα παρακάτω:

(a) Η σ.δ. $H \bullet X$ είναι ημι−martingale.

(b) Αν X είναι ένα τοπικό martingale, τότε το ίδιο ισχύει και για την $H \bullet X$.

(c) Αν $X \in \mathscr{V}$ τότε $H \bullet X \in \mathscr{V}$ και η $H \bullet X$ συμπίπτει με την σ.δ. που έχει ορισθεί στην παράγραφο 4.1 (Stieltjes ολοκληρώσιμη σ.δ.).

(iii) $(H \bullet X)_0 = 0$ και $H \bullet X = H \bullet (X - X_0)$.

(iv) $\Delta(H \bullet X) = H \Delta X$

(v) $X^T = X_0 + \chi_{]\!]0,T]\!]} \bullet X$ και $(H \bullet X)^T = (H\chi_{[\![0,T]\!]}) \bullet X$ για κάθε χ.δ. T. Γενικότερα $K \bullet (H \bullet X) = (KH) \bullet X$.

(vi) Αν T είναι ένας προβλέψιμος χρόνος και Y είναι μία $\mathcal{F}_{T-}$−μετρήσιμη τ.μ. με τιμές στον $\mathbb{R}$, τότε $(Y\chi_{[\![T]\!]}) \bullet X = Y \Delta X_T \chi_{[\![T,\infty]\!]}$ (παρατηρούμε ότι $Y\chi_{[\![T]\!]}$ είναι αναγκαία μία τοπικά προβλέψιμη σ.δ.).

Θα μπορούσαμε ακόμα να μεγαλώσουμε την κλάση ως προς τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε κάποιες μη τοπικά φραγμένες σ.δ.. Αυτό είναι μάλλον δύσκολο για ένα ημι−martingale αλλά για $X \in \mathscr{H}^2_{loc}$ αυτό είναι εύκολο, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Αρχικά , για όλα τα $X \in \mathscr{H}^2_{loc}$ έχουμε τις ακόλουθες κλάσεις σ.δ.:

Συμβολισμός 5.4.5. *Με $L^2(X)$ ή L^2_{loc} συμβολίζουμε τον χώρο όλων των προβλέψιμων σ.δ. H έτσι ώστε η σ.δ. $H^2 \bullet \langle X, X \rangle$ να είναι ολοκληρώσιμη ή τοπικά ολοκληρώσιμη, αντίστοιχα.*

Ας τονίσουμε ότι όλες οι τοπικά φραγμένες προβλέψιμες σ.δ. ανήκουν στην κλάση $L^2_{loc}(X)$, διότι γνωρίζουμε ότι $\langle X, X \rangle \in \mathscr{A}^+_{loc}$.

Θεώρημα 5.4.6. *Έστω $X \in \mathscr{H}^2_{loc}$. Η απεικόνιση $H \longmapsto H \bullet X$ (ορισμένη είτε επάνω στην κλάση $\mathcal{S}$ από την σχέση (5.3) ή για όλα τα τοπικά φραγμένα προβλέψιμα H από το Θεώρημα 5.4.2) έχει μία επιπλέον επέκταση στο σύνολο $L^2_{loc}(X)$, που συμβολίζετε επίσης με $H \longmapsto H \bullet X$, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) του Θεωρήματος 5.4.2 και την* *(iii)'* *αν μια ακολουθία* $\{H^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *από προβλέψιμες σ.δ. συγκλίνει σημειακά σε ένα όριο* H *και* $|H^n| \leq K$ *για κάποιο* $K \in L^2_{loc}(X)$*, τότε* $\sup_{s\leq t}|H^n \bullet X_s - H \bullet X_s|$ *τείνει στο 0 κατα μέτρο για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$.

Επιπλέον αυτή η επέκταση είναι μοναδική (ως προς την καθολική ισοδυναμία), και έχουμε ότι:

(a) $H \bullet X \in \mathscr{H}^2_{loc}$.

(b) $H \bullet X \in \mathscr{H}^2$ *αν και μόνο αν* $H \in L^2$.

(c) Ισχύουν οι ιδιότητες (i),(iii),(iv) και (v) από Ιδιότητες 5.4.4 (για $H \in L^2_{loc}(X)$ *και* $K \in L^2_{loc}(H \bullet X)$*).*

(d) Αν $X, Y \in \mathscr{H}^2_{loc}$ *με* $H \in L^2_{loc}(X)$ *και* $K \in L^2_{loc}(Y)$*, τότε*

$$\langle H \bullet X, K \bullet Y\rangle = (HK) \bullet \langle X, Y\rangle. \tag{5.4}$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter I, §4d, page 48−51 και [11].

Τελειώνουμε αυτήν την ενότητα δείχνοντας ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα μίας προβλέψιμης σ.δ. η οποία είναι càg μπορεί να προσεγγισθεί από τα αθροίσματα Riemann.

Καλούμε **προσαρμοσμένη υποδιαίρεση** (adapted subdivision), κάθε ακολουθία $\tau := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από χ.δ. με $T_0 = 0$, $\sup_n T_n < \infty$ και $T_n < T_{n+1}$ επάνω στο σύνολο $\{T_n < \infty\}$. Η τ είναι **ντεντερνιμιστική υποδιαίρεση** αν όλα τα T_n είναι σταθερά. Η $\tau-$**Riemann προσέγγιση** της $H \bullet X$ είναι η σ.δ. $\tau(H \bullet X)$ που ορίζεται από την σχέση

$$\tau(H \bullet X)_t := \sum_{n\in\mathbb{N}} H_{T_n}(X_{T_{n+1}\wedge t} - X_{T_n\wedge t}). \tag{5.5}$$

Ορισμός 5.4.7. Μία ακολουθία $\{\tau_n = \{T(n,m)\}_{m\in\mathbb{N}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ από προσαρμοσμένες υποδιαιρέσεις καλείται **ακολουθία Riemann** αν

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\{T(n, m+1) \wedge t - T(n,m) \wedge t\} \to 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Πρόταση 5.4.8. *Έστω* X *ένα ημι−martingale,* H *μία càg προσαρμοσμένη σ.δ. και* τ_n *μία ακολουθία Riemann από προσαρμοσμένες υποδιαιρέσεις. Τότε η* τ_n-*Riemann προσέγγιση* $\tau_n(H\bullet X)$ *συγκλίνει στην* $H\bullet X$*, κατα μέτρο ομοιόμορφα επάνω σε κάθε συμπαγές διάστημα.*

Απόδειξη. Αν $\tau_n = \{T(n,m)\}_{m\in\mathbb{N}}$, ορίζουμε την H^n από την σχέση

$$H^n := \sum_{m\in\mathbb{N}} H_{T(n,m)}\chi_{]\!]T(n,m),T(n,m+1)]\!]}.$$

Τότε η H^n είναι προβλέψιμη, συγκλίνει σημειακά στο H επειδή η H είναι càg, και αν $K_t = \sup_{s\leq t}|H_s|$ τότε η K είναι προσαρμοσμένη, càg, τοπικά φραγμένη και $|H^n| \leq K$. Τότε το αποτέλεσμα προκύπτει από το Θεώρημα 5.4.2 και εύκολα προκύπτει η ιδιότητα $\tau_n(H \bullet X) = H^n \bullet X$. □

5.5 Τετραγωνική κύμανση ενός ημι−martingale και ο τύπος του Itô

Αρχικά ορίζουμε την τετραγωνική κύμανση.

Ορισμός 5.5.1. Η **τετραγωνική συνκύμανση** (quadratic covariation) των δύο ημι−martingales X και Y (ή η **τετραγωνική κύμανση** του X, όταν $X = Y$) είναι η ακόλουθη σ.δ.:

$$[X,Y] := XY - X_0Y_0 - X_- \bullet Y - Y_- \bullet X$$

που ορίζεται μοναδικά ως προς την καθολική ισοδυναμία.

Το επόμενο θεώρημα εξηγεί την ορολογία "τετραγωνική κύμανση". Προηγουμένως, διατυπώνουμε τις παρακάτω προφανείς ιδιότητες:

$$\begin{cases} [X,Y]_0 = 0, \quad [X,Y] = [X - X_0, Y - Y_0] \\ [X,Y] = \frac{1}{4}([X+Y,X+Y] - [X-Y,X-Y]). \end{cases} \tag{5.6}$$

Θεώρημα 5.5.2. *Έστω X και Y δύο ημι−martingales.*

(a) Για κάθε ακολουθία Riemann $\{\tau_n = \{T(n,m)\}_{m\in\mathbb{N}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ από προσαρμοσμένες υποδιαιρέσεις, η σ.δ. $S_{\tau_n}(X,Y)$, που ορίζεται από την σχέση

$$S_{\tau_n}(X,Y)_t := \sum_{m\geq 1}(X_{T(n,m+1)\wedge t} - X_{T(n,m)\wedge t})(Y_{T(n,m+1)\wedge t} - Y_{T(n,m)\wedge t}) \tag{5.7}$$

συγκλίνει στην σ.δ. $[X,Y]$, κατα μέτρο και ομοιόμορφα επάνω σε κάθε συμπαγές διάστημα.

(b) $[X,Y] \in \mathscr{V}$ και $[X,X] \in \mathscr{V}^+$.

(c) $\Delta[X,Y] = \Delta X \Delta Y$.

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 5.5.1 και τις σχέσεις (5.6) έχουμε

$$S_\tau(X,Y) = \frac{1}{4}[S_\tau(X+Y,X+Y) - S_\tau(X-Y,X-Y)]$$

και

$$\Delta X \Delta Y = \frac{1}{4}[(\Delta X + \Delta Y)^2 - (\Delta X - \Delta Y)^2]$$

που είναι ικανά για να αποδείξουμε τους ισχυρισμούς όταν $X = Y$.
Αφού $(x-y)^2 = x^2 - y^2 - 2y(x-y)$, από τις σχέσεις (5.5) και (5.7) συνάγουμε ότι

$$S_{\tau_n}(X,X) = X^2 - X_0^2 - 2\tau_n(X_- \bullet X),$$

οπότε προκύπτει το (a) από την Πρόταση 5.4.8. Η $S_{\tau_n}(X,X)$ είναι αύξουσα, έτσι από το (a) συμπεράνουμε ότι η $[X,X]$ είναι αύξουσα. Αφού είναι càdlàg προσαρμοσμένη με $[X,X]_0 = 0$, έχουμε ότι $[X,X] \in \mathscr{V}^+$ και επομένως αποδείχθηκε το (b). Από τον Ορισμό 5.5.1 και την Ιδιότητα 5.4.4 (iv) έχουμε ότι $\Delta[X,X] = \Delta(X^2) - 2X_-\Delta X$, και αφού $\Delta(X^2) = (\Delta X)^2 + 2X_-\Delta X$ έχουμε ότι $\Delta[X,X] = (\Delta X)^2$ και επομένως αποδείχθηκε και το (c). □

Θεώρημα 5.5.3. *Αν X, Y είναι ημι−martingales, τότε*

$$[X,Y]_t = \langle X^c, Y^c\rangle_t + \sum_{s\le t} \Delta X_s \Delta Y_s. \tag{5.8}$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter I, §4e, page 55.

Τέλος, έχουμε κάποια βασικά αποτελέσματα: Τώρα θα διατυπώσουμε τον τύπο του Itô. Στη συνέχεια, με $D_i f$ και $D_{ij} f$ συμβολίζουμε τις μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x^i$ και $\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 5.5.4. *Έστω $X = (X^1, \cdots, X^d)$ ένα d−διάστατο ημι−martingale και μία συνάρτηση f της κλάσης C^2 επάνω στον $\mathbb{R}^d$. Τότε $f(X)$ είναι ένα ημι−martingale και έχουμε ότι:*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i\le d} D_i f(X_-) \bullet X^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j\le d} D_{ij} f(X_-) \bullet \langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle \\ &\quad + \sum_{s\le t}\left[f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i\le d} D_i f(X_{s-})\Delta X_s^i\right]. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter I, §4e, page 57.

Φυσικά, αυτός ο αναλυτικός τύπος μας δείχνει ότι όλοι οι όροι είναι καλά ορισμένοι. Ιδιαιτέρως οι δύο τελευταίοι όροι είναι σ.δ. με πεπερασμένη κύμανση (ο πρώτος όρος είναι συνεχής και ο δεύτερος είναι καθαρά ασυνεχής). Η σχέση (5.9) ισχύει επίσης όταν η συνάρτηση f είναι μιγαδική, όπου παίρνουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ξεχωριστά.

5.6 Ο Εκθετικός τύπος Doléans – Dade

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζουμε μία εφαρμογή του τύπου του Itô. Θεωρούμε την εξίσωση

$$Y = 1 + Y_{-} \bullet X \ \ (\text{ή } dY = Y_{-}dX \ \text{ και } \ Y_0 = 1) \tag{5.10}$$

όπου X είναι ένα δοσμένο ημι–martingale, και Y είναι μία άγνωστη càdlàg προσαρμοσμένη σ.δ.
Σε αντιστοιχία με την συνήθη διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = y$, καλούμε την λύση του Y την e^X. Θα πρέπει να εξετάσουμε αυτήν την εξίσωση σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις:

(a) όταν η X είναι τοπικό martingale (με πραγματικές τιμές)

(b) όταν η X είναι μία μιγαδική σ.δ. με πεπερασμένη κύμανση. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (5.10) λύνεται ως προς τις τροχιές (pathwise), δηλαδή για κάθε $\omega \in \Omega$ θεωρούμε την ντεντερμινιστική εξίσωση

$$Y_t(\omega) := 1 + \int_0^t Y_{s-}(\omega)dX_s(\omega).$$

Ωστόσο για να ενοποιήσουμε τις μελέτες μας, θεωρούμε την περίπτωση όπου η X είναι ένα μιγαδικό ημι–martingale, όπου έχουμε $X = X' + iX''$ με X' και X'' δύο ημι–martingales με πραγματικές τιμές. Τότε η εξίσωση (5.10) μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύστημα δύο εξισώσεων με πραγματικές τιμές, δηλαδή

$$\begin{aligned} Y' &= 1 + Y'_{-} \bullet X' - Y''_{-} \bullet X'' \\ Y'' &= Y''_{-} \bullet X' + Y'_{-} \bullet X'' \end{aligned} \tag{5.11}$$

και $Y = Y' + iY''$.

Θεώρημα 5.6.1. *Έστω $X = X' + iX''$ ένα μιγαδικό ημι−martingale. Τότε η εξίσωση (5.10) έχει μιά και μόνο μία (ως προς την καθολική ισοδυναμία) càdlàg προσαρμοσμένη λύση. Αυτή η λύση είναι ένα ημι−martingale και συμβολίζεται με $\mathscr{E}(X)$, και δίνεται από τον τύπο*

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(X)_t &= \{\exp(X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X'^c, X'^c\rangle_t + \frac{1}{2}\langle X''^c, X''^c\rangle_t - i\langle X'^c, X''^c\rangle_t)\} \\ &\quad \times \prod_{s \le t} \left[(1 + \Delta X_s)e^{-\Delta X_s}\right]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

όπου το άπειρο γινόμενο συγκλίνει απολύτως. Επιπλέον,

(a) Αν η X έχει πεπερασμένη ολική κύμανση, τότε και η $\mathscr{E}(X)$ έχει πεπερασμένη ολική κύμανση.

(b) Αν η X είναι τοπικό martingale, τότε και η $\mathscr{E}(X)$ είναι τοπικό martingale.

(c) Έστω $T = \inf\{t : \Delta X_t = -1\}$. Τότε η $\mathscr{E}(X) \neq 0$ στο διάστημα $[\![0, T[\![$, και $\mathscr{E}(X)_- \neq 0$ στο διάστημα $[\![0, T]\!]$ και $\mathscr{E}(X) = 0$ στο διάστημα $[\![T, \infty[\![$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter I, §4e, page 59.

Ιδιαιτέρως, η σχέση (5.8) συνεπάγεται ότι όταν η X έχει πεπερασμένη ολική κύμανση, τότε

$$\mathscr{E}(X)_t = e^{X_t - X_0} \prod_{s \le t} (1 + \Delta X_s)e^{-\Delta X_s}. \tag{5.13}$$

Όταν η X είναι ένα ημι−martingale με πραγματικές τιμές, τότε

$$\mathscr{E}(X)_t = e^{X_t - X_0 - 1/2\langle X^c, X^c\rangle_t} \prod_{s \le t} (1 + \Delta X_s)e^{-\Delta X_s}. \tag{5.14}$$

Κεφάλαιο 6

Χαρακτηριστικά των ημι−martingales και σ.δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε βασικές έννοιες τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια και θα δούμε κάποιες σημαντικές ιδιότητες.

Συνεχίζουμε το πρόγραμμα της ανάπτυξης της γενικής θεωρίας των σ.δ.. Ωστόσο, εδώ θίγουμε μία ελαφρώς διαφορετική πτυχή της θεωρίας, η οποία είναι λιγότερο γνωστή από ό,τι αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Κατά κάποια έννοια, στο κεφάλαιο αυτό επικεντρωνόμαστε σε σ.δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, παρά το ότι αυτές οι σ.δ. εμφανίζονται συγκεκριμένα μόνο στην ενότητα 6.4. Ας θεωρήσουμε π.χ. μία σ.δ. με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Όπως είναι γνωστό, η κατανομή μίας τέτοιας σ.δ. χαρακτηρίζεται πλήρως από τρείς ποσότητες, συγκεκριμένα το ″drift″, τον ″συντελεστή διάχυσης″ και το ″μέτρο Lèvy″. Επίσης η σύγκλιση τέτοιων σ.δ. ορίζεται πλήρως από την σύγκλιση των παραπάνω αντίστοιχων ποσοτήτων κατά μία κατάλληλη έννοια.

Σκοπός μας είναι να γενικεύσουμε αυτές τις έννοιες για ημι−martingales. Μετά από μία εισαγωγική ενότητα για τα τυχαία μέτρα, αυτή η μελέτη πραγματοποιείται στην Ενότητα 6.2, ενώ στην 6.3 παρέχονται κάποια παραδείγματα.

Μετά αρχίζουμε την μελέτη σ.δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις (PII για συντομία). Τα κύρια αποτελέσματα συγκεντρώνονται στην Ενότητα 6.4, όπου μελετώνται οι PII που είναι ημι−martingales.

6.1 Τυχαία μέτρα

Η έννοια του τυχαίου μέτρου είναι μία από τις βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε στην πορεία της Δ.Ε., παρόλο που δεν είναι τόσο γνωστή όπως για παράδειγμα η έννοια των ημι−martingales. Θα αποδειχθεί μάλλον απαραίτητη για το σκοπό μας, υπό την έννοια ότι μας επιτρέπει μια πολύ εύκολη περιγραφή των αλμάτων μίας càdlàg σ.δ.. Εδώ περιγράφουμε την θεωρία των τυχαίων μέτρων λεπτομερειακά. Ωστόσο, θα έπρεπε να έχουμε κατά νου, ότι το περιοχόμενο αυτής της ενότητας δεν είναι τίποτα άλλο από μία απλή επέκταση των εννοιών των αύξουσων σ.δ. και των αντισταθμιστών τους.

6.1.1 Γενικά τυχαία μέτρα

Όπως και σε όλη την πορεία της Δ.Ε. θεωρούμε (σε συνεχή χρόνο) τον φ.χ.π. $\mathscr{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. Θυμίζουμε ότι δεν απαιτούμε οι σ−άλγεβρες μας να είναι πλήρεις.

Επίσης θεωρούμε έναν βοηθητικό μ.χ. $(E, \mathcal{E})$ ο οποίος υποθέτουμε ότι είναι ένας **Πολωνικός χώρος** (βλ. π.χ. [11], [15]) (δηλαδή ένας τοπολογικός χώρος ομοιομορφικός με έναν πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο).

Δύο βασικές ιδιότητες ενός Πολωνικού χώρου είναι οι ακόλουθες:

(pl1) Η σ−άλγεβρα είναι **διαχωρίσιμη**, δηλαδή παράγεται από μία αριθμήσιμη άλγεβρα.

Για την δεύτερη ιδιότητα, θα πρέπει να θυμηθούμε ότι ένας **πυρήνας μετάβασης** (transition kernel) ή **πυρήνας Markov** $\alpha(a, db)$ από έναν μετρήσιμο χώρο (μ.χ. για συντομία) $(A, \mathcal{A})$ μέσα σε έναν άλλο μ.χ. $(B, \mathcal{B})$ είναι μία οικογένεια $\{\alpha(a, \bullet)\}_{a \in A}$ από μη−αρνητικά μέτρα επάνω στην $\mathcal{B}$, έτσι ώστε η $\alpha(\bullet, C)$ να είναι $\mathcal{A}$−μετρήσιμη για κάθε σταθερό $C \in \mathcal{B}$.

(pl2) Έστω $(G, \mathscr{G})$ οποιοσδήποτε μ.χ.. Αν m είναι ένα μη−αρνητικό πεπερασμένο μέτρο επάνω στον $(G \times E, \mathscr{G} \otimes \mathcal{E})$ με G−περιθώριο μέτρο $\widehat{m} : \mathscr{G} \longmapsto \mathbb{R}_+$ ώστε $\widehat{m}(A) = m(A \times E)$ για κάθε $A \in \mathscr{G}$, τότε υπάρχει ένας πυρήνας μετάβασης $\alpha(g, dx)$ από το $(G, \mathscr{G})$ στο $(E, \mathcal{E})$ έτσι ώστε

$$m(B) = \int \widehat{m}(dg) \int \alpha(g, dx) \chi_B(g, x) = \iint \chi_B(g, x) \alpha(g, dx) \widehat{m}(dg)$$

για κάθε $B \in \mathscr{G} \otimes \mathcal{E}$.

Μπορούμε επίσης να το γράφουμε ως εξής, $m(dg, dx) := \widehat{m}(dg)\alpha(g, dx)$. Ας τονίσουμε ότι αυτή η **ιδιότητα της disintegration** είναι επίσης ισοδύναμη με την ακόλουθη ιδιότητα : αν $Z : \Omega \longmapsto E$ είναι οποιαδήποτε $\mathcal{F}-\mathcal{E}-$μετρήσιμη συνάρτηση με $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ οποιαδήποτε χ.π. και $\mathscr{G}$ οποιαδήποτε σ−υποάλγεβρα της $\mathcal{F}$, τότε η Z δέχεται μία **κανονική υπο συνθήκη κατανομή** (regular conditional distribution) ως προς την $\mathcal{F}$, δηλαδή δέχεται έναν πυρήνα Markov α_Z από τον μ.χ. $(\Omega, \mathcal{F})$ στον μ.χ. $(E, \mathcal{E})$ ώστε $\alpha_Z(\bullet, B) := P[Z^{-1}(B)|\mathscr{G}](\bullet)$.

Πλέον μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό του τυχαίου μέτρου (θεωρούμε ότι οι τ.μ. μας είναι μη αρνητικές).

Ορισμός 6.1.1.1. Ένα **τυχαίο μέτρο** επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times E$ είναι μία οικογένεια $\mu = \{\mu(\omega; dt, dx\}_{\omega\in\Omega}$ από μη αρνητικά μέτρα επάνω στην $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$ που ικανοποιούν την $\mu(\omega; \{0\} \times E) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ ώστε η συνάρτηση $\omega \longmapsto \mu(\omega; dt, dx)$ να είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη.

Θέτουμε $\widetilde{\Omega} := \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$, με τις σ−άλγεβρες $\widetilde{\mathscr{O}} := \mathscr{O} \otimes \mathcal{E}$ και $\widetilde{\mathscr{P}} := \mathscr{P} \otimes \mathcal{E}$.

Μία συνάρτηση W επάνω στο $\widetilde{\Omega}$ η οποία είναι $\widetilde{\mathscr{O}}-$ μετρήσιμη (αντίστοιχα $\widetilde{\mathscr{P}}-$ μετρήσιμη) καλείται **προαιρετική** συνάρτηση (αντίστοιχα **προβλέψιμη** συνάρτηση). Αν W είναι μία συνάρτηση στο $\widetilde{\Omega}$ και αν H είναι μία σ.δ., τότε γράφουμε WH ή HW για την συνάρτηση $(\omega, t, x) \longmapsto H(\omega, t)W(\omega, t, x)$.

Έστω μ ένα τυχαίο μέτρο και W μία προαιρετική συνάρτηση στον $\widetilde{\Omega}$. Αφού σύμφωνα με το θεώρημα Fubini η συνάρτηση $(t, x) \longmapsto W(\omega, t, x)$ είναι $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}-$μετρήσιμη για κάθε $\omega \in \Omega$, τότε μπορούμε να ορίσουμε την **ολοκληρωτική διαδικασία** (ή **διαδικασία ολοκλήρωμα**) $W * \mu$ ως εξής :

$$(W*\mu)_t(\omega) := \begin{cases} \int_{[0,t]\times E} W(\omega, s, x)\mu(\omega; ds, dx), & \text{αν } \int_{[0,t]\times E} |W(\omega, s, x)|\mu(\omega; ds, dx) < +\infty \\ \\ +\infty, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για κάθε $\omega \in \Omega$ και $t \in \mathbb{R}_+$.

Παρατήρηση 6.1.1.2. Η $W * \mu$ είναι σ.δ.. Πράγματι, γενικά ισχύει το εξής. Αν $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, Q)$ είναι χ.π. και $f : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση ώστε $\int |f(\omega, x)| Q(dx) < \infty$ τότε η $F : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ με $F(\omega) := \int f(\omega, x) Q(dx)$ είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη. Το ίδιο ισχύει αν το Q αντικατασταθεί από έναν πυρήνα Markov $Q_\omega := Q(\omega, db)$ από τον μ.χ. (Ω, Σ) στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Επειδή δεν βρέθηκε στη βιβλιογραφία μία απόδειξη της παραπάνω παρατήρησης, παραθέτουμε την παρακάτω απόδειξη.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τις standart μεθόδους της θεωρίας μέτρου για να αποδείξουμε το ζητούμενο.
(a) Αν $f := \chi_E$, όπου $E = A \times B$. Τότε

$$
\begin{aligned}
F_E(\omega) &= \int \chi_E(\omega, x) Q(dx) \\
&= \int \chi_A(\omega) \chi_B(x) Q(dx) \\
&= \chi_A(\omega) \int_{[A \times B]_\omega} Q(dx) \\
&= \chi_A(\omega) Q(B) \\
&= \begin{cases} Q(B), & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Η $F := F_E$ είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη, αν $E = A \times B$ με $A \in \mathcal{F}$ και $B \in \mathfrak{B}$.
(b) Η $F : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ με $F(\omega) := F_E(\omega) = \int \chi_E(\omega, x) Q(dx)$ για κάθε $E \in \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}$ και για κάθε $\omega \in \Omega$ είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη.
Πράγματι, θεωρούμε την κλάση

$$\mathscr{D} := \{E \in \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B} : F_E(\omega) := \int \chi_E(\omega, x) Q(dx) \text{ είναι } \mathcal{F} - \text{μετρήσιμη συνάρτηση}\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι το παραπάνω σύνολο είναι μία κλάση Dynkin.
Πράγματι,
(Dyn1) $\varnothing \in \mathscr{D}$, προφανές.
(Dyn2) Για κάθε $E \in \mathscr{D}$ ισχύει ότι $E^c \in \mathscr{D}$.

Πράγματι, έστω $E \in \mathscr{D}$. Τότε έχουμε ότι η F_E είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη. Άρα η F_{E^c} είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη.

(Dyn3) Έστω $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συνόλων στον $\mathcal{F}\otimes\mathfrak{B}$ τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει ότι $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{D}$ και $E_i \cap E_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j \in \mathbb{N}$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
F_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}(\omega) &= \int \chi_{\{\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n\}}(\omega, x) Q(dx) \\
&= \int \delta_{(\omega,x)}(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) Q(dx) \\
&= \int \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{(\omega,x)}(E_n) Q(dx) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int \delta_{(\omega,x)}(E_n) Q(dx) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int \chi_{E_n}(\omega, x) Q(dx) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_{E_n}(\omega).
\end{aligned}$$

Αφού κάθε F_{E_n} είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη, έπεται ότι η $F_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}$ είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη.

Αφού, λόγω του βήματος (a) έχουμε ότι $\mathscr{E} := \{A \times B : A \in \mathcal{F}, B \in \mathfrak{B}\} \subseteq \mathscr{D}$, από το Θεώρημα της Μονότονης Κλάσης για σύνολα (βλ. Β΄.2.2) έχουμε ότι $\mathscr{D} = \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}$ δηλαδή για κάθε $E \in \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}$ η $F_E(\omega) := \int \chi_E(\omega, x) Q(dx)$ είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη.

(c) Έστω η f είναι μία απλή μη αρνητική συνάρτηση με κανονική μορφή $f(\omega, x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(\omega, x)$, όπου $E_k \in \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}$ με $E_k = f^{-1}(\{a_k\})$ και $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Τότε

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int f(\omega,x)Q(dx) \\ &= \int \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(\omega,x)Q(dx) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \int \chi_{E_k}(\omega,x)Q(dx) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k F_{E_k}(\omega). \end{aligned}$$

Επομένως λόγω και του (b) η F είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη.
(d) Έστω f μία $\mathcal{F}\otimes\mathfrak{B}-$μετρήσιμη συνάρτηση με $f \geq 0$. Τότε υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ απλών συναρτήσεων $f_n : \Omega\times\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ (βλέπε [3], Θεώρημα 2.1.12). Τότε

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int f(\omega,x)Q(dx) \\ &= \int \lim_{n\to\infty} f_n(\omega,x)Q(dx) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int f_n(\omega,x)Q(dx) \\ &= \lim_{n\to\infty} F_n(\omega). \end{aligned}$$

Άρα, αφού από το βήμα (c) κάθε F_n είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη, προκύπτει ότι η F είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη.
(e) Έστω f είναι $\mathcal{F}\otimes\mathfrak{B}-$μετρήσιμη. Τότε έχουμε $f = f^+ - f^-$ και άρα

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int f(\omega,x)Q(dx) \\ &= \int f^+(\omega,x)Q(dx) - \int f^-(\omega,x)Q(dx) \\ &= F_1(\omega) - F_2(\omega). \end{aligned}$$

Επομένως, αφού οι F_1 και F_2 είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμες σύμφωνα με το βήμα (a), θα έχουμε ότι η F είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη.

(f) Η απόδειξη για $Q_\omega(db)$ αντι Q είναι η ίδια. $\square$

Ορισμοί 6.1.1.3. **(a)** Ένα τυχαίο μέτρο μ καλείται **προαιρετικό** ή **προβλέψιμο** αν η διαδικασία $W * \mu$ είναι προαιρετική ή προβλέψιμη για κάθε προαιρετική ή προβλέψιμη συνάρτηση W, αντίστοιχα.
(b) Ένα προαιρετικό μέτρο μ καλείται **ολοκληρώσιμο** αν η τ.μ. $(1*\mu)_\infty = \mu(\bullet, \mathbb{R}_+ \times E)$ είναι ολοκληρώσιμη (ή ισοδύναμα, αν $1 * \mu \in \mathscr{A}^+$).
(c) Ένα προαιρετικό τυχαίο μέτρο μ καλείται $\widetilde{\mathscr{P}} - \sigma-$**πεπερασμένο** αν υπάρχει μία αυστηρά θετική προβλέψιμη συνάρτηση V στο $\widetilde{\Omega}$ έτσι ώστε η τ.μ. $(V * \mu)_\infty$ να είναι ολοκληρώσιμη (ή ισοδύναμα $V * \mu \in \mathscr{A}^+$). Αυτή η ιδιότητα είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη της $\widetilde{\mathscr{P}}-$μετρήσιμης διαμέρισης $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του $\widetilde{\Omega}$ έτσι ώστε κάθε $(\chi_{A_n} * \mu)_\infty$ να είναι ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα 6.1.1.4. *Έστω $A \in \mathscr{V}^+$. Στο A αντιστοιχίζουμε ένα τυχαίο μέτρο μ επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times \{1\}$ με $\mu(\omega; dt \times \{1\}) = dA_t(\omega)$. Τότε:*

(i) *Το μέτρο μ είναι προαιρετικό. Το μ είναι προβλέψιμο αν και μόνο αν είναι και το A.*

(ii) *Το μ είναι ολοκληρώσιμο αν και μόνο αν είναι και το A είναι ολοκληρώσιμο (δηλ. $A \in \mathscr{A}^+$).*

(iii) *Αν $A \in \mathscr{A}^+_{loc}$ τότε το μ είναι $\widetilde{\mathscr{P}} - \sigma-$πεπερασμένο (παίρνουμε μία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τοπικοποιούσα ακολουθία για την A, έτσι ώστε $A^{T_n} \in \mathscr{A}$ και την προβλέψιμη διαμερίση $A_0 = [\![0]\!] \times \{1\}$, $A_n =]\!]T_{n-1}, T_n]\!] \times \{1\}$ του συνόλου $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \{1\}$).*

Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι η επόμενη γενίκευση του Θεωρήματος 4.2.4.

Θεώρημα 6.1.1.5. *Έστω μ ένα $\widetilde{\mathscr{P}} - \sigma-$πεπερασμένο τυχαίο μέτρο. Υπάρχει ένα τυχαίο μέτρο, που καλείται ο* ***αντισταθμιστής*** *του μ και συμβολίζεται με μ^P, το οποίο είναι μοναδικό $P-$σ.β., και το οποίο χαρακτηρίζεται να είναι ένα προβλέψιμο τυχαίο μέτρο ικανοποιώντας κάθε μία από τις ακόλουθες ισοδύναμες ιδιότητες:*

(i) $\mathbb{E}[(W * \mu^P)_\infty] = \mathbb{E}[(W * \mu)_\infty]$ *για κάθε μη αρνητική $\widetilde{\mathscr{P}}-$μετρήσιμη συνάρτηση W επάνω στο $\widetilde{\Omega}$.*

(ii) Για κάθε $\widetilde{\mathscr{P}}$−μετρήσιμη συνάρτηση W επάνω στο $\widetilde{\Omega}$ έτσι ώστε $|W| * \mu \in \mathscr{A}^+_{loc}$, η $|W| * \mu^P$ ανήκει στον $\mathscr{A}^+_{loc}$ και η σ.δ. $W * \mu^P$ είναι ο αντισταθμιστής της σ.δ. $W * \mu$ (ή ισοδύναμα, $W * \mu - W * \mu^P$ είναι ένα τοπικό martingale).

Επιπλέον, υπάρχει μία προβλέψιμη σ.δ. $A \in \mathscr{A}^+$ και ένας πυρήνας μετάβασης $K(\omega, t; dx)$ από τον μ.χ. $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathscr{P})$ στον μ.χ. $(E, \mathcal{E})$ έτσι ώστε

$$\mu^P(\omega; dt, dx) = dA_t(\omega)K(\omega, t; dx). \tag{6.1}$$

Πολλές φορές το μ^P καλείται και **προβλέψιμος αντισταθμιστής** *ή* **δυική προβλέψιμη προβολή** *του μ.*

Απόδειξη. Έστω V μία αυστηρά θετική προβλέψιμη συνάρτηση επάνω στο $\widetilde{\Omega}$ έτσι ώστε $V * \mu \in \mathscr{A}^+$. Σημειώνουμε ότι κάθε ένα από τα (i) και (ii) συνεπάγεται ότι $V * \mu^P \in \mathscr{A}^+$.

(a) Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Έστω W μία προβλέψιμη συνάρτηση με $|W| * \mu \in \mathscr{A}^+_{loc}$ και $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία τοπικοποιούσα ακολουθία με $(|W| * \mu)^{T_n} \in \mathscr{A}^+$. Εφαρμόζοντας το (i) σε κάθε $|W|\chi_{[\![0,T_n]\!]}$, βλέπουμε ότι $|W| * \mu^P \in \mathscr{A}_{loc}$. Αν T ένας χ.δ., εφαρμόζοντας το (i) στο $W^+\chi_{[\![0,T\wedge T_n]\!]}$ και $W^-\chi_{[\![0,T\wedge T_n]\!]}$ συνεπάγεται ότι

$$\mathbb{E}[(W * \mu^P)_{T\wedge T_n}] = \mathbb{E}[(W * \mu)_{T\wedge T_n}].$$

Τότε από το Λήμμα 2.5.7 έχουμε ότι κάθε $(W * \mu - W * \mu^P)^{T_n} \in \mathscr{M}$, ως εκ τούτου $W * \mu - W * \mu^P$ είναι ένα τοπικό martingale.

(b) Τώρα θα αποδείξουμε ότι $(ii) \Longrightarrow (i)$.

Αν $0 \leq W \leq nV$ και αν η W είναι προβλέψιμη, έχουμε ότι $W * \mu \in \mathscr{A}^+$ και από την (ii) μαζί και με το Θεώρημα 4.2.3 και τις Ιδιότητες 5.4.4 προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}[W * \mu^P_\infty] = \mathbb{E}[W * \mu_\infty].$$

Αν W είναι οποιαδήποτε προβλέψιμη μη−αρνητική συνάρτηση, εφαρμόζουμε ότι προηγείται του κάθε $W(n) = W\chi_{\{W\leq nV\}}$ και τότε αφήνουμε το $n \to \infty$ και έχουμε την (i).

(c) Τώρα θα αποδείξουμε την μοναδικότητα.

Έστω $\mathcal{E}_0$ μία αριθμήσιμη άλγεβρα, η οποία παράγει την $\mathcal{E}$, και έστω ότι τα μ^P και $\widehat{\mu}^P$ ικανοποιούν την (ii). Τότε για κάθε $A \in \mathcal{E}_0$, οι δύο σ.δ. $(V\chi_A) * \mu^P$ και $(V\chi_A) * \widehat{\mu}^P$ είναι καθολικά ισοδύναμες. Επομένως το σύνολο

$$N = \bigcup_{A\in\mathcal{E}_0} \{\omega : \exists\, t \in \mathbb{R}_+ \quad [(V\chi_A) * \mu^P]_t(\omega) \neq [(V\chi_A) * \widehat{\mu}^P]_t(\omega)\}$$

είναι $P-$μηδενικό, ενώ στο συμπληρωμά του N^c έχουμε ότι $\mu^P(\omega;\bullet) = \widehat{\mu}^P(\omega;\bullet)$.
(d) Τελικά θα αποδείξουμε την ύπαρξη και την (6.1).
Θέτουμε $A := (V * \mu)^P$. Για κάθε φραγμένη $\widetilde{\mathscr{P}}-$μετρήσιμη συνάρτηση W, επίσης θέτουμε $m(W) := \mathbb{E}[(VW * \mu)_\infty]$, το οποίο ορίζει ένα θετικό πεπερασμένο μέτρο m επάνω στο $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{P}})$. Επιπλέον θεωρούμε το θετικό πεπερασμένο μέτρο $\widehat{m}$ επάνω στον μ.χ. $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathscr{P})$, που ορίζεται από την σχέση $\widehat{m}(d\omega, dt) = P(d\omega)dA_t(\omega)$, δηλ. $\widehat{m}(B) = \mathbb{E}[(\chi_B \bullet A)_\infty]$ για όλα τα $B \in \mathscr{P}$. Αν $B \in \mathscr{P}$ έχουμε ότι $(V\chi_B) * \mu = \chi_B \bullet (V * \mu)$ (προφανές), συνεπώς $[(V\chi_B) * \mu]^P = \chi_B \bullet A$ από το Θεώρημα 4.2.4 επομένως $\widehat{m}(B) = \mathbb{E}[((V\chi_B) * \mu)_\infty] = m(B \times E)$. Συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την (pl2), και έτσι να πάρουμε έναν πυρήνα μετάβασης α από τον μ.χ. $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathscr{P})$ στον μ.χ. $(E, \mathcal{E})$ με

$$m(d\omega, dt, dx) = \widehat{m}(d\omega, dt)\alpha(\omega, t; dx).$$

Θέτουμε

$$K(\omega, t; dx) := \alpha(\omega, t; dx)\frac{1}{V(\omega, t, x)},$$

δηλαδή K είναι ένας πυρήνας μετάβασης από το $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathscr{P})$ στο $(E, \mathcal{E})$ που ορίζεται από την σχέση

$$K(\omega, t; B) = \int_B \frac{1}{V(\omega, t, x)}\alpha(\omega, t; dx),$$

για όλα τα $B \in \mathcal{E}$. Τότε αν W είναι μία μη$-$αρνητική $\widetilde{\mathscr{P}}-$μετρήσιμη συνάρτηση, η σ.δ.

$$(KW)_t(\omega) := \int_E W(\omega, t, x)K(\omega, t; dx),$$

είναι προφανώς προβλέψιμη. Τώρα ας ορίσουμε το τυχαίο μέτρο μ^P σύμφωνα με την (6.1). Αν W είναι μη$-$αρνητική και $\widetilde{\mathscr{P}}-$μετρήσιμη, τότε το $W * \mu^P = (KW) \bullet A$ είναι προβλέψιμη, επομένως το μ^P είναι ένα προβλέψιμο τυχαίο μέτρο. Επιπλέον, για κάθε W μη$-$αρνητική $\widetilde{\mathscr{P}}-$μετρήσιμη συνάρτηση, έχουμε

$$\mathbb{E}[(W * \mu^P)_\infty] = \int m(d\omega, dt, dx)\frac{W(\omega, t, x)}{V(\omega, t, x)} = \mathbb{E}[(W * \mu)_\infty].$$

Και άρα έχουμε την (i). □

Στη συνέχεια έχουμε δύο σημαντικές ιδιότητες:

Ιδιότητες 6.1.1.6. *Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες,*

(i) Αν μ είναι ένα προβλέψιμο $\widetilde{\mathscr{P}}-\sigma-$πεπερασμένο τυχαίο μέτρο, τότε $\mu^P = \mu$.

(ii) Έστω μ είναι ένα προαιρετικό $\widetilde{\mathscr{P}}$ − σ−πεπερασμένο τυχαίο μέτρο, και έστω W είναι μία μη−αρνητική προβλέψιμη συνάρτηση επάνω στο $\widetilde{\Omega}$. Τότε για κάθε προβλέψιμο χρόνο T,

$$\int_E \mu^P(\{T\} \times dx)W(T,x) = \mathbb{E}\left[\int_E \mu(\{T\} \times dx)W(T,x)|\mathcal{F}_{T-}\right]$$

επάνω στο $\{T < \infty\}$ (το $W(T,x)$ συμβολίζει την $W(\omega, T(\omega), x)$. Αυτήν την ιδιότητα την έχουμε από την Ιδιότητα 4.2.5 (c) εφαρμόζοντάς την στην $A = (W\chi_{[\![T]\!]}) * \mu$, για την οποία έχουμε ότι $A^P = (W\chi_{[\![T]\!]}) * \mu^P$).

6.1.2 Τυχαία μέτρα με ακέραιες τιμές

Ορισμοί 6.1.2.1. Ένα **τυχαίο μέτρο με ακέραιες τιμές** είναι ένα τυχαίο μέτρο το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες:
(i) Το $\mu(\omega; \{t\} \times E) \leq 1$ για κάθε $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$.
(ii) Για κάθε $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$, $\mu(\bullet, A)$ παίρνει τιμές στον $\overline{\mathbb{N}}$.
(iii) Το μ είναι προαιρετικό και $\widetilde{\mathscr{P}}$ − σ−πεπερασμένο.

Φυσικά, η ιδιότητα (iii) είναι μία ad−hoc ιδιότητα, την οποία εμείς προσθέτουμε στον ορισμό έτσι ώστε να μην επαναλαμβανόμαστε στη συνέχεια της διπλωματικής.

Πρόταση 6.1.2.2. *Αν μ είναι ένα τυχαίο μέτρο με ακέραιες τιμές, τότε υπάρχει ένα λεπτό τυχαίο σύνολο D και μία προαιρετική σ.δ. β με τιμές στον E, έτσι ώστε*

$$\mu(\omega; dt, dx) = \sum_{s \geq 0} \chi_D(\omega, s)\delta_{(s,\beta_s(\omega))}(dt, dx) \tag{6.2}$$

όπου δ_α συμβολίζει το μέτρο Dirac στο σημείο α. Ας σημειώσουμε ότι για κάθε μη−αρνητική προαιρετική συνάρτηση W, αν $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία χ.δ. που εξαντλεί το λεπτό το σύνολο D, έχουμε ότι

$$(W * \mu)_t = \begin{cases} \sum_n W(T_n, \beta_{T_n})\chi_{\{T_n \leq t\}} \\ \\ \sum_{0<s\leq t} W(s, \beta_s)\chi_D(s). \end{cases}$$

Αντιστρόφως, αν το μ ορίζεται όπως στην (6.2), όπου D είναι ένα λεπτό σύνολο και β είναι μία προαιρετική σ.δ. με τιμές στον E, τότε το μ είναι ένα τυχαίο μέτρο με ακέραιες τιμές, υπο την προυπόθεση ότι είναι $\widetilde{\mathscr{P}}$ − σ−πεπερασμένο.

Απόδειξη. Αν θέσουμε $D := \{(\omega, t) : \mu(\omega; \{t\} \times E) = 1\}$, τότε από τον Ορισμό 6.1.2.1 έχουμε ότι το μ έχει την απαιτούμενη μορφή για κάποιες σ.δ. β με τιμές στον E. Το μόνο που μένει να αποδείξουμε είναι ότι η β είναι προαιρετική, και ότι το D είναι λεπτό σύνολο.
Έστω $\{A_n\}$ είναι μία $\widetilde{\mathscr{P}}-$μετρήσιμη διαμέριση του $\widetilde{\Omega}$ έτσι ώστε $\chi_{A_n} * \mu \in \mathscr{A}^+$ και $\{S(n,p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ να είναι οι διαδοχικοί χρόνοι άλματος της σ.δ. $\chi_{A_n} * \mu$, η οποία από τον Ορισμό 6.1.2.1 είναι μία σημειακή σ.δ. με την έννοια της σχέσης (4.1). Άρα $D = \bigcup_{(n,p)} [\![S(n,p)]\!]$ είναι ένα λεπτό σύνολο.
Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία χ.δ. που εξαντλούν το λεπτό σύνολο D. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και κάθε $C \in \mathcal{E}$, η τ.μ. $\chi_C(\beta_{T_n})\chi_{\{T_n \le t\}} = [(\chi_{[\![T_n]\!]\times C}) * \mu]_t$ πρέπει να είναι $\mathcal{F}_t-$μετρήσιμη, επειδή το μ είναι προαιρετικό. Συμπεραίνουμε ότι η β_{T_n} είναι $\mathcal{F}_{T_n}-$μετρήσιμη, και αφού μπορούμε να επιλέξουμε την β να είναι ίση με ένα αυθαίρετο σταθερό σημείο, έστω α, έξω από το D, έτσι έχουμε την προαιρετική σ.δ. β. $\square$

Επίσης σημειώνουμε ότι ένα τυχαίο μέτρο με ακέραιες τιμές μπορεί να θεωρηθεί και ως ένα "μέτρο απαρίθμησης" που συνδέεται με μία τυχαία σημειακή διαδικασία στον $\mathbb{R}_+ \times E$, της οποίας τα σημεία είναι τα (T_n, β_{T_n}) που εμφανίζονται στην Πρόταση 6.1.2.2.

Το πιο χρήσιμο παράδειγμα τυχαίου μέτρου με ακέραιες τιμές είναι το παρακάτω:

Πρόταση 6.1.2.3. *Έστω X μία càdlàg προσαρμοσμένη σ.δ. με τιμές στον $\mathbb{R}^d$. Τότε η σχέση*

$$\mu^X(\omega; dt, dx) := \sum_s \chi_{\{\Delta X_s(\omega)\neq 0\}} \delta_{(s,\Delta X_s(\omega))}(dt, dx)$$

ορίζει ένα τυχαίο μέτρο με ακέραιες τιμές στον $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ (στην Πρόταση 6.1.2.2 έχουμε ότι $D = \{\Delta X \neq 0\}$ και $\beta = \Delta X$).

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 2.3.7 προκύπτει ότι η ΔX είναι προαιρετική. Από την Πρόταση 6.1.2.2 και τα δεδομένα μας, αυτό που μας μένει να αποδείξουμε είναι ότι το μ^X είναι $\widetilde{\mathscr{P}} - \sigma-$πεπερασμένο. Ορίζουμε τους χ.δ. $S(n,p)$ με $S(n,0) = 0$ και

$$S(n, p+1) = \inf\{t > S(n,p) : |X_t - X_{S(n,p)}| > 2^{-n-1}\},$$

και θέτουμε $A(n,p) := [\![0, S(n,p)]\!] \times \{x \in \mathbb{R}^d : |x| > 2^{-n}\}$ και $A(0) = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \{0\}$, και $V = \chi_{A(0)} + \sum_{n,p\in\mathbb{N}} \chi_{A(n,p)} 2^{-n-p}$. Τότε η V είναι $\widetilde{\mathscr{P}}$−μετρήσιμη και αυστηρά θετική (επειδή $S(n,p) \uparrow \infty$ καθώς $p \uparrow \infty$). Επιπλέον $(\chi_{A(0)} * \mu^X)_\infty = 0$ και $(\chi_{A(n,p)} * \mu^X)_\infty \leq p$ από την κατασκευή του μ^X, και επειδή κάθε άλμα του X μεγέθους $> 2^{-n}$ συμβαίνει σε ένα από τους χρόνους $S(n,p)$. Ως εκ τούτου $(V * \mu^X)_\infty \leq \sum_{n,p\in\mathbb{N}} p 2^{-n-p}$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 6.1.2.4. *Έστω μ ένα τυχαίο μέτρο με ακέραιες τιμές, $\nu = \mu^P$ ο αντισταθμιστής του και $J = \{(\omega,t) : \nu(\omega; \{t\} \times E) > 0\}$.*

(a) Το J είναι ο προβλέψιμος φορέας του D της Πρότασης 6.1.2.2 και για όλους τους προβλέψιμους χρόνους T και μία μη−αρνητική προβλέψιμη συνάρτηση W έχουμε ότι

$$\int_E W(T,x)\nu(\{T\} \times dx) = \mathbb{E}[W(T,\beta_T)\chi_D(T)|\mathcal{F}_{T-}] \text{ επάνω στο } \{T < \infty\}.$$

(b) Υπάρχει μία εκδοχή του ν έτσι ώστε $\nu(\omega, \{t\} \times E) \leq 1$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και το λεπτό σύνολο J να εξαντλείται από μία ακολουθία από προβλέψιμους χρόνους.

Απόδειξη. (a) Η σχέση του συμπεράσματος (a) είναι η ίδια με την Ιδιότητα 6.1.1.6 (ii). Συγκεκριμένα, η $a_t := \nu(\{t\} \times E)$ είναι η προβλέψιμη προβολή της σ.δ. χ_D, και έτσι το πρώτο ζητούμενο προκύπτει από τον ορισμό του προβλέψιμου φορέα του D.

(b) Από Λήμμα 3.2.4 έχουμε μία ακολουθία από προβλέψιμους χρόνους, των οποίων τα γραφήματα είναι κατά ζεύγη ξένα, με $J' \subseteq J$ και $J \setminus J'$ εξαφανιζόμενο, αν $J' = \bigcup [\![T_n]\!]$. Επιπλέον $a_{T_n} \leq 1$ σ.β. από (a), ενώ το α είναι προβλέψιμο. Ως εκ τούτου αν $A_n = \{a_{T_n} \leq 1\}$ και $T_n^{'} = (T_n)_{A_n}$ και $J'' = \bigcup [\![T_n^{'}]\!]$, τότε κάθε $T_n^{'}$ είναι προβλέψιμο, $J'' \subseteq J$ και $J \setminus J''$ είναι εξαφανιζόμενο. Επιπλέον το μέτρο $\nu^{''}(\omega; dt \times dx) = \nu(\omega, dt \times dx)\chi_{(J\setminus J'')^c}(\omega,t)$ είναι σ.β. ίσο με το ν και είναι προβλέψιμο. Άρα είναι της μορφής του μ^P, το οποίο ικανοποιεί τις απαιτήσεις το (b). □

Έπειτα, αν χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.3.6 έχουμε ότι,

Πόρισμα 6.1.2.5. *Έστω X μία càdlàg προβλέψιμη σ.δ. και μ^X το μέτρο που αντιστοιχεί στα άλματα του σύμφωνα με την Πρόταση 6.1.2.2. Τότε η X είναι ψεύδο−δεξιά−συνεχής αν και μόνο αν υπάρχει μία εκδοχή του $(\mu^X)^p$, η οποία ικανοποιεί την $(\mu^X)^p(\omega; \{t\} \times E) = 0$ για κάθε $(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$.*

6.1.3 Ένα θεμελιώδες παράδειγμα: μέτρα Poisson

Στη συνέχεια δίνουμε μία επέκταση του Ορισμού 4.2.6.

Ορισμοί 6.1.3.1. **(a)** Ένα **γενικευμένο μέτρο Poisson** επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times E$, σε σχέση με το φιλτράρισμα $\mathbb{F}$, είναι ένα τυχαίο μετρο μ με ακέραιες τιμές έτσι ώστε:

(i) Το μη αρνητικό μέτρο m επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times E$ που ορίζεται ως $m(A) := \mathbb{E}[\mu(\bullet, A)]$ να είναι $\sigma-$πεπερασμένο.

(ii) Για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ και κάθε $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$ έτσι ώστε $A \subseteq (s, \infty) \times E$ και $m(A) < \infty$, η τ.μ. $\mu(\bullet, A)$ είναι ανεξάρτητη της σ−άλγεβρας $\mathcal{F}_s$.

(b) Το μέτρο m καλείται **μέτρο της έντασης** του μ.
(c) Αν το m ικανοποιεί την $m(\{t\} \times E) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, τότε το μ καλείται **μέτρο Poisson**. Αν m έχει την μορφή $m(dt, dx) = dt \times F(dx)$, όπου F είναι ένα θετικό $\sigma-$πεπερασμένο μέτρο στο $(E, \mathcal{E})$, τότε το μ καλείται **ομογενές μέτρο Poisson.**

Για παράδειγμα, έστω N μία σημειακή διαδικασία και έστω μ ένα μέτρο όπως έχει ορισθεί στο Παράδειγμα 6.1.1.4 (με $E = \{1\}$). Τότε το μ είναι ένα γενικευμένο μέτρο Poisson ή Poisson, ή ομογενές μέτρο Poisson αν η N είναι μία γενικευμένη σ.δ. Poisson ή σ.δ. Poisson, ή τυπική σ.δ. Poisson, αντίστοιχα.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα Poisson μέτρο είναι ένα μέτρο απαρίθμησης μίας "συνήθους" σημειακής διαδικασίας Poisson επάνω στον $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$, δηλαδή αν η $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία από ξένα ανά δύο μετρήσιμα υποσυνόλα του $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$ με $m(A_i) < \infty$, τότε η ακολουθία $\{\mu(\bullet, A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και τα $\mu(\bullet, A_i)$ έχουν την κατανομή Poisson με μέση τιμή $m(A_i)$. Σε αυτό το σημείο, θα υπολογίσουμε τον αντισταθμιστή του μέτρου Poisson.

Πρόταση 6.1.3.2. *Έστω μ ένα γενικευμένο μέτρο Poisson επάνω στην $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{E}$, σε σχέση με το φιλτράρισμα $\mathbb{F}$, με μέτρο έντασης m. Τότε ο αντισταθμιστής του μ είναι το $\mu^P(\omega; \bullet) = m(\bullet)$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $\mu^P(\omega, \bullet) = m(\bullet)$, το οποίο είναι ένα "τυχαίο" μέτρο, που είναι προβλέψιμο (αφού είναι ντεντερμινιστικό). Χρειάζεται να αποδείξουμε την Ιδιότητα (i) του Παραδείγματος 6.1.1.4. Για αυτό τον σκοπό με ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης και το Θεώρημα 3.1.2, είναι αρκετό να αποδείξουμε την Ιδιότητα (i) του Παραδείγματος 6.1.1.4 για όλα τα W της μορφής $W = \chi_A \chi_{B\times(s,t]\times C}$, όπου $0 \leq s < t$, $B \in \mathcal{F}_s$, $C \in \mathcal{E}$ και $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$ με $m(A) < \infty$. Από την υπόθεση, οι τ.μ. χ_B και $\mu(\bullet, A \cap ((s,t] \times C))$ είναι ανεξάρτητες και ολοκληρώσιμες. Άρα

$$\mathbb{E}[(W * \mu)_\infty] = W(\chi_B \mu(A \cap ((s,t] \times C))) = P(B) m(A \cap ((s,t] \times C)) = \mathbb{E}[(W * \mu^P)_\infty].$$

□

6.1.4 Στοχαστικό ολοκλήρωμα ως προς ένα τυχαίο μέτρο

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε την κατασκευή στοχαστικών ολοκληρωμάτων ως προς ένα ″αντισταθμισμένο″ τυχαίο μέτρο με ακέραιες τιμές. Στην παρούσα συγκυρία, θα έπρεπε να παρατηρήσουμε ότι στο Κεφάλαιο 5 κατασκευάσαμε στοχαστικά ολοκληρώματα ως προς ένα ημι−martingale X, αλλά μόνο για (τοπικά) φραγμένες προς ολοκλήρωση σ.δ.. Το στοχαστικό ολοκλήρωμα ″πιο γενικών″ σ.δ. προς ολοκλήρωση έχει επιτευχθεί μόνο όταν $X \in \mathscr{H}^2_{loc}$ (και μόνο για σ.δ. προς ολοκλήρωση, ώστε το ίδιο το στοχαστικό ολοκλήρωμα να ανήκει επίσης στην $\mathscr{H}^2_{loc}$). Αλλά βεβαίως υπάρχει επίσης ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα για ″κατάλληλες″ μη τοπικά φραγμένες προς ολοκλήρωση σ.δ. (βλέπε [17], [22]). Δίνουμε κατ' ευθείαν το πιο γενικό ολοκλήρωμα, εν μέρει διότι η έννοια του ″τοπικά φραγμένου″ δεν έχει νόημα εδώ.

Αρχίζουμε με ένα τυχαίο μέτρο μ επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times E$ με ακέραιες τιμές. Από τη Πρόταση 6.1.2.2, το μ είναι της μορφής

$$\mu(\omega; dt, dx) = \sum_{s\geq 0} \chi_D(\omega, s)\delta_{(s,\beta_s(\omega))}(dt, dx) \tag{6.3}$$

όπου D είναι ένα προαιρετικό λεπτό σύνολο με $(\omega, 0) \notin D$ και β είναι μία προαιρετική σ.δ. με τιμές στον E.

Ονομάζουμε ν μία ″καλή″ εκδοχή της δυικής προβλέψιμης προβολής του μ, όπως κατασκευάστηκε στην Πρόταση 6.1.2.4, και θέτουμε:

$$\begin{cases} \alpha_t(\omega) = \nu(\omega; \{t\} \times F) \\ J = \{\alpha > 0\}, \text{ εξαντλημένο από τους προβλέψιμους χρόνους } \{T_n\} \\ \nu^c(\omega; dt, dx) = \nu(\omega; dt, dx)\chi_{J^c}(\omega, t). \end{cases} \tag{6.4}$$

Ας θυμηθούμε ότι $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$ και $\widetilde{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \otimes \mathcal{E}$. Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση W επάνω στον $\widetilde{\Omega}$ έχουμε την σ.δ.

$$\widehat{W}_t(\omega) := \begin{cases} \int_E W(\omega, t, x)\nu(\omega; \{t\} \times dx), & \text{αν } \int_E |W(\omega, t, x)|\mu(\omega; \{t\} \times dx) < +\infty \\ \\ +\infty, & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \tag{6.5}$$

Ορισμοί 6.1.4.1. **(a)** Συμβολίζουμε με $G_{loc}(\mu)$ το σύνολο όλων των $\widetilde{\mathscr{P}}-$μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων W επάνω στον $\widetilde{\Omega}$ έτσι ώστε η σ.δ.

$$\widetilde{W}_t(\omega) = W(\omega, t, \beta_t(\omega))\chi_D(\omega, t) - \widehat{W}_t(\omega)$$

να ικανοποιεί την $\left[\sum_{s \leq \bullet} (\widetilde{W}_s)^2\right]^{1/2} \in \mathscr{A}^+_{loc}$.
(b) Αν $W \in G_{loc}(\mu)$ καλούμε **στοχαστικό ολοκλήρωμα της** W **ως προς το** $\mu - \nu$ και το συμβολίζουμε με $W * (\mu - \nu)$ κάθε καθαρά ασυνεχές τοπικό martingale έτσι ώστε οι ΔX και $\widetilde{W}$ να είναι καθολικά ισοδύναμες.

Είναι ξεκάθαρο ότι ο $G_{loc}(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος, και η απεικόνιση $W \longmapsto W*(\mu-\nu)$ είναι γραμμική (ως προς την καθολική ισοδυναμία) επάνω στον $G_{loc}(\mu)$. Επειδή το χρειαζόμαστε παρακάτω, δίνουμε έναν χαρακτηρισμό της ιδιότητας $W \in G_{loc}(\mu)$ μέσω της ολοκληρωσιμότητας μίας κατάλληλης αύξουσας προβέψιμης σ.δ.. Για κάθε προβλέψιμη συνάρτηση W επάνω στον $\widetilde{\Omega}$, θεωρούμε δύο (πιθανόν άπειρες) προβλέψιμες σ.δ. έτσι ώστε:

$$C(W)_t := [(W - \widehat{W})^2 * \nu]_t + \sum_{s \leq t} (1 - \alpha_s)(\widehat{W}_s)^2 \tag{6.6}$$

$$\overline{C}(W)_t := [|W - \widehat{W}| * \nu]_t + \sum_{s \leq t} (1 - \alpha_s)|\widehat{W}_s|. \tag{6.7}$$

Θεώρημα 6.1.4.2. *Έστω W μία προβλέψιμη συνάρτηση επάνω στον $\widetilde{\Omega}$.*

(a) Η W ανήκει στον $G_{loc}(\mu)$ και το $W * (\mu - \nu)$ ανήκει στον $\mathscr{H}^2$ (αντίστοιχα $\mathscr{H}^2_{loc}$) αν και μόνο αν η $C(W)$ ανήκει στον $\mathscr{A}^+$ (αντίστοιχα $\mathscr{A}^+_{loc}$), όπου στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι

$$\langle W * (\mu - \nu), W * (\mu - \nu) \rangle = C(W). \tag{6.8}$$

(b) Η W ανήκει στον $G_{loc}(\mu)$ και το $W*(\mu-\nu)$ ανήκει στον $\mathscr{A}$ (αντίστοιχα $\mathscr{A}_{loc}$) αν και μόνο αν $\overline{C}(W)$ ανήκει στον $\mathscr{A}^+$ (αντίστοιχα $\mathscr{A}^+_{loc}$).

(c) Η W ανήκει στον $G_{loc}(\mu)$ αν και μόνο αν το $C(W')+\bar{C}(W'')$ ανήκει στον $\mathscr{A}_{loc}$, όπου

$$\begin{cases} W' := (W-\widehat{W})\chi_{\{|W-\widehat{W}|\leq 1\}} + \widehat{W}\chi_{\{|\widehat{W}|\leq 1\}} \\ \\ W'' := (W-\widehat{W})\chi_{\{|W-\widehat{W}|>1\}} + \widehat{W}\chi_{\{|\widehat{W}|>1\}}. \end{cases} \tag{6.9}$$

(d) Θεωρούμε επιπλέον ότι $\widetilde{W}\geq -1$ για κάθε $\omega\in\Omega$ και $t\in\mathbb{R}_+$. Τότε $\widehat{W}\leq 1$ επάνω στο $\{\alpha<1\}$ ως προς την καθολική ισοδυναμία, και η W ανήκει στον $G_{loc}(\mu)$ αν και μόνο αν η αύξουσα προβλέψιμη σ.δ. $C'(W)$ ανήκει στον $\mathscr{A}^+_{loc}$, όπου

$$C'(W)_t := \left[\left(1-\sqrt{1+W-\widehat{W}}\right)^2 * \nu\right]_t + \sum_{s\leq t}(1-\alpha_s)\left(1-\sqrt{1-\widehat{W}_s}\right)^2. \tag{6.10}$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], II, παρ. 1d, σελ. 73−74.

6.2 Χαρακτηριστικά των ημι−martingales

Η έννοια των ″χαρακτηριστικών″ των ημι−martingales έχει γίνει για να επεκταθούν οι τρείς βασικές έννοιες: drift, διακύμανση του Gaussian μέρους και μέτρο Lèvy, που χαρακτηρίζουν την κατανομή μιάς σ.δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Έστω X μία σ.δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις με $X_0=0$ και χωρίς καθορισμένους χρόνους ασυνέχειας. Είναι γνωστό ότι η X_t έχει μία κατανομή απείρως διαιρετή και η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι της μορφής $\mathbb{E}[e^{(iuX_t)}]=e^{[\psi_t(u)]}$, με

$$\psi_t(u) = iub_t - \frac{u^2}{2}c_t + \int (e^{iux}-1-iuh(x))F_t(dx) \tag{6.11}$$

(**Lèvy−Khintchine τύπος**), όπου $b_t\in\mathbb{R}, c_t\in\mathbb{R}_+, F_t$ είναι ένα θετικό μέτρο που ολοκληρώνει την $1\wedge x^2$ και h είναι οποιαδήποτε φραγμένη Borel συνάρτηση με συμπαγή φορέα, η οποία ″συμπεριφέρεται όπως το x″ κοντά στο 0. Επιπλέον, από την ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων έχουμε ότι,

$$e^{(iuX_t)}/e^{\psi_t(u)}, \quad \text{είναι ένα martingale.} \tag{6.12}$$

Αν το X είναι ένα ημι−martingale, τότε έχουμε την εξής ιδέα: βρίσκουμε δύο σ.δ. $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και ένα τυχαίο μέτρο ν έτσι ώστε αν ορίσουμε την σ.δ. $\psi_t(u)$ σύμφωνα με την (6.11), με τα b_t, c_t και $F_t(dx)$ να αντικαθίστανται από τα B_t, C_t και $\nu([0,1]\times dx)$, αντίστοιχα, τότε ισχύει η (6.12). Φυσικά δεν μπορούμε να βρούμε μία τριάδα (B, C, ν) η οποία να είναι ντετερμινιστική (εκτός αν η X είναι ένα ημι−martingale με ανεξάρτητες προσαυξήσεις) αλλά μπορεί κανείς να βρει μία τριάδα και μόνο μία, η οποία ικανοποιεί την απαιτούμενη ιδιότητα και να είναι προβλέψιμη. Αυτή η τριάδα καλείται τα **χαρακτηριστικά** της X.

Θεωρούμε ένα $d-$διάστατο ημι−martingale $X = (X^1, \ldots, X^d)$ που είναι ορισμένο πάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, όπου γράφουμε $X \in \mathscr{S}^d$.

Ορισμός 6.2.1. Συμβολίζουμε με $\mathscr{C}_t^d$ την κλάση όλων των συναρτήσεων $h : \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{R}^d$ οι οποίες είναι φραγμένες και ικανοποιούν την $h(x) = x$ σε μία περιοχή του 0. Κάθε στοιχείο της $\mathscr{C}_t^d$ ονομάζεται **συνάρτηση περικοπής** (truncation function).

Έστω $h \in \mathscr{C}_t^d$. Τότε $\Delta X_s - h(\Delta X_s) \neq 0$ μόνο αν $|\Delta X_s| > b$ για κάποια $b > 0$ και οι ακόλουθοι τύποι

$$\check{X}(h)_t = \sum_{s\leq t}[\Delta X_s - h(\Delta X_s)] \tag{6.13}$$

$$X(h) = X - \check{X}(h) \tag{6.14}$$

ορίζουν μία $d-$διάστατη διαδικασία $\check{X}(h)$ στον $\mathscr{V}^d$ (δηλαδή οι συντεταγμένες της ανήκουν στον $\mathscr{V}$) και ένα $d-$διάστατο ημι−martingale $X(h)$. Επιπλέον, $\Delta X(h) = h(\Delta X)$, άρα η $\Delta X(h)$ είναι φραγμένη, και ως εκ τούτου από Λήμμα 5.3.4 η $X(h)$ είναι ένα ειδικό ημι−martingale (δηλαδή τα στοιχεία του ανήκουν στον $\mathscr{S}_P$) και θεωρούμε την κανονική της ανάλυση:

$$X(h) = X_0 + M(h) + B(h) \tag{6.15}$$

όπου $M(h) \in \mathscr{L}^d$ και $B(h)$ είναι προβλέψιμο στον $\mathscr{V}^d$.

Ορισμοί 6.2.2. Σταθεροποιούμε μία $h \in \mathscr{C}_t^d$ αυθαίρετη. Καλούμε **χαρακτηριστικά** της X (ή χαρακτηριστικά της X σε σχέση με την h, αν υπάρχει μία ασάφεια για την h) την τριάδα (B, C, ν) που συνιστάται από:
(i) την $B = \{B^i\}_{i\leq d}$ που είναι μία προβλέψιμη διαδικασία στον $\mathscr{V}^d$, δηλαδή η σ.δ. $B := B(h)$ που εμφανίζεται στην (6.15).
(ii) την $C = \{C^{ij}\}_{i,j\leq d}$ που είναι μία συνεχής σ.δ. στον $\mathscr{V}^{d\times d}$, συγκεκριμένα

$$C^{ij} = \langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle$$

(X^c είναι το συνεχές μέρος του martingale της X, βλ. Θεώρημα 5.2.3).
(iii) Το ν που είναι ένα προβλέψιμο τυχαίο μέτρο στον $\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^d$, συγκεκριμένα ο αντισταθμιστής του τυχαίου μέτρου μ^X που αντιστοιχεί στα άλματα της X σύμφωνα με την Πρόταση 6.1.2.3.

Παρατήρηση 6.2.3. Βλέπουμε ότι τα C και ν δεν εξαρτώνται από την επιλογή της συνάρτησης h, ενώ $B = B(h)$ εξαρτάται από την h. Αυτό αντιστοιχεί στο επόμενο γνωστό γεγονός: στην σχέση (6.11), αν αντικαταστίσουμε το h από μία άλλη συνάρτηση, τότε το b_t μπορεί να τροποποιηθεί, αλλά ούτε το c_t ούτε το F_t τροποποιείται. *Στη συνέχεια, η συνάρτηση h θα είναι αυθαίρετη στον χώρο $\mathscr{C}_t^d$, αλλά σταθεροποιημένη (εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό).* Αρχικά, η συνάρτηση h μπορεί να θεωρηθεί ως $h(x) = x \cdot \chi_{\{|x|\leq 1\}}$, το οποίο είναι ένα είδος κανονικότητας (βλ. π.χ. [18]). Αλλά σε αυτήν την διπλωματική για τεχνικούς λόγους είναι καλύτερο να επιλέξουμε την συνάρτηση h να είναι συνεχής.

Παρατήρηση 6.2.4. Από τον Ορισμό 6.2.2, τα χαρακτηριστικά είναι μοναδικά $P-$σ.β. (επειδή η ανάλυση (6.15), όπως επίσης το X^c, το $\langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle$ και ο αντισταθμιστής του μ^X είναι μοναδικά $P-$σ.β.). Έτσι είναι βολικό να καλούμε **χαρακτηριστικά** κάθε τριάδα (B', C', ν') που αποτελείται από μία σ.δ. B' με τιμές στον $\mathbb{R}^d$, μία σ.δ. C' με τιμές στον $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ και ένα τυχαίο μέτρο ν', έτσι ώστε

$$(B'_\bullet(\omega), C'_\bullet(\omega), \nu'(\omega;\bullet)) = (B_\bullet(\omega), C_\bullet(\omega), \nu(\omega;\bullet)), \text{ για όλα τα } \omega \notin N,$$

όπου N είναι ένα $P-$μηδενικό σύνολο. Αυτή η συνθήκη δεν συνεπάγεται ότι η τριάδα (B', C', ν') είναι προβλέψιμη (εκτός αν ο φ.χ.π. είναι πλήρης), και δεν συνεπάγεται ακόμα ότι για παράδειγμα το B' έχει πεπερασμένη κύμανση ή είναι càdlàg παντού. Μία τέτοια ασθενή επέκταση της έννοιας των χαρακτηριστικών θα αποδείξουμε στην συνέχεια για τα προβλήματα martingales.

Από εδώ και κάτω, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $*$ που είδαμε στην υποενότητα 6.1.1 Έχουμε $E = \mathbb{R}^d$. Αν η f μία συνάρτηση επάνω στον $\mathbb{R}^d$, ο συμβολισμός $f * \nu$ σημαίνει ότι ολοκληρώνουμε την $W(\omega, t, x) = f(x)$ ως προς το ν. Αν η f είναι πολυδιάστατη, τότε ολοκληρώνουμε κατά συνιστώσες και το αποτέλεσμα είναι μία πολυδιάστατη διαδικασία. Αν η f είναι της μορφής $f(x) = |x|^2 \wedge 1$, τότε επίσης γράφουμε $(|x|^2 \wedge 1) * \nu$. Η μη μοναδικότητα που προαναφέρθηκε στην Παρατήρηση 6.2.4 μας επιτρέπει για την επιλογή μίας καλής εκδοχής των χαρακτηριστικών.

Πρόταση 6.2.5. *Μπορούμε να βρούμε μία εκδοχή (B, C, ν) χαρακτηριστικών της X τα οποία έχουν την μορφή:*

$$\begin{aligned} B^i &= b^i \bullet A \\ C^{ij} &= c^{ij} \bullet A \\ \nu(\omega; dt, dx) &= dA_t(\omega) K_{\omega,t}(dx) \end{aligned} \tag{6.16}$$

όπου:

(i) η A είναι μία προβλέψιμη σ.δ. στον $\mathscr{A}^+_{loc}$, η οποία μπορεί να επιλεχθεί να είναι συνεχής αν και μόνο αν η X είναι ψευδό−αριστερά−συνεχής,

(ii) η $b = (b^i)_{i \leq d}$ είναι μία d−διάστατη προβλέψιμη σ.δ.,

(iii) η $c = (c^{ij})_{i,j \leq d}$ είναι μία προβλέψιμη σ.δ. με τιμές στο σύνολο όλων των συμμετρικών μη αρνητικών $d \times d$ πινάκων,

(iv) ο $K_{\omega,t}(dx)$ είναι ένας πυρήνας μετάβασης από τον μ.χ. $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathscr{P})$ στον μ.χ. $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ ο οποίος ικανοποιεί τις

$$\begin{aligned} K_{\omega,t}(\{0\}) &= 0, \quad \int (|x|^2 \wedge 1) K_{\omega,t}(dx) \leq 1 \\ \Delta A_t(\omega) > 0 \implies & b_t(\omega) = \int h(x) K_{\omega,t}(dx) \\ \Delta A_t(\omega) K_{\omega,t}(\mathbb{R}^d) &\leq 1. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Επίσης από την (iii) και τις σχέσεις (6.17) αυτή η "καλή" εκδοχή των χαρακτηριστικών (B, C, ν) ικανοποιεί τα παρακάτω για κάθε $\omega \in \Omega$:

$$s \leq t \Longrightarrow (C_t^{ij}(\omega) - C_t^{ij}(\omega))_{i,j \leq d}, \text{ είναι ένας συμμετρικός μη αρνητικός πίνακας} \tag{6.18}$$

$$(|x|^2 \wedge 1) * \nu \in \mathscr{A}_{loc} \text{ και } \nu(\omega; \{t\} \times \mathbb{R}^d) \leq 1 \tag{6.19}$$

$$\Delta B_t(\omega) = \int h(x) \nu(\omega; \{t\} \times dx). \tag{6.20}$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στον Jacod−Shirayev [16].

Ορισμός 6.2.6. Έστω $h \in \mathscr{C}_t^d$. Ονομάζουμε, **τροποποιημένο δευτερεύον χαρακτηριστικό** του X (σε σχέση με την h) την προβλέψιμη σ.δ. $\widetilde{C}$ του χώρου $\mathscr{V}^{d\times d}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\widetilde{C}^{ij} = \left\langle M(h)^i, M(h)^j \right\rangle$$

όπου η $M(h)$ ορίζεται από την σχέση (6.15) (ας σημειώσουμε ότι $\Delta X(h) = h(\Delta X)$ και η h είναι επίσης φραγμένη, επομένως κάθε συνιστώσα της $M(h)^i$) είναι τοπικά τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale και η $\widetilde{C}^{ij}$ είναι καλά ορισμένη). Η τριάδα $(B, \widetilde{C}, \nu)$ καλείται το **τροποποιημένο χαρακτηριστικό** της X.

Φυσικά, η $\widetilde{C}$ εξαρτάται από την συνάρτηση h, και μερικές φορές γράφουμε $\widetilde{C}(h)$ για να τονίσουμε την εξάρτηση. Η Παρατήρηση 6.2.4 εφαρμόζεται επίσης στην $\widetilde{C}$. Εδώ δίνεται ένας αναλυτικός υπολογισμός του $\widetilde{C}$ μέσω των χαρακτηριστικών (B, C, ν). Η παρακάτω σχέση (6.21) μας δείχνει ξεκάθαρα ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τα $(B, \widetilde{C}, \nu)$ μέσω των (B, C, ν), και αντίστροφα.

Πρόταση 6.2.7. *(a) Ως προς την καθολική ισοδυναμία*

$$\begin{aligned} \widetilde{C}^{ij} &= C^{ij} + (h^i h^j) * \nu \\ &\quad - \sum_{s \le \bullet} \left(\int h^i(x) \nu(\{s\} \times dx) \right) \left(\int h^j(x) \nu(\{s\} \times dx) \right) \\ &= C^{ij} + (h^i h^j) * \nu - \sum_{s \le \bullet} \Delta B_s^i \Delta B_s^j. \end{aligned} \tag{6.21}$$

(b) Αν (B, C, ν) είναι η "καλή" εκδοχή των χαρακτηριστικών στην Πρόταση 6.2.5, τότε μπορούμε να πάρουμε $\widetilde{C}^{ij} = \widetilde{c}^{ij} \bullet A$, όπου $\widetilde{c} = \widetilde{c}^{ij}_{i,j\le d}$ είναι μία προβλέψιμη σ.δ. με τιμές στο σύνολο όλων των συμμετρικών μη αρνητικών $d \times d$ πινάκων που δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \widetilde{c}_t^{ij}(\omega) &= c_t^{ij}(\omega) + \int K_{\omega,t}(dx)(h^i h^j)(x) \\ &\quad - \Delta A_t(\omega) \left[\int K_{\omega,t}(dx) h^i(x) \right] \left[\int K_{\omega,t}(dx) h^j(x) \right]. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter II, §2a, page 79.

Είναι ξεκάθαρο από τον Ορισμό 6.2.2 ότι τα ημι−martingales χαρακτηρίζονται από τα (B, C, ν) .

Από την μία μεριά, αρχίζουμε με μία càdlàg προσαρμοσμένη σ.δ. $X = \{X^i\}_{i \le d}$. Από την άλλη μεριά, μας δίνεται μία τριάδα (B, C, ν) τα οποία είναι τα υποψήφια χαρακτηριστικά της X, σε σχέση με κάποια δεδομένη συνάρτηση $h \in \mathscr{C}_t^d$. Επιλέγουμε μία $d-$διάστατη προβλέψιμη σ.δ. $B \in \mathscr{V}^d$, μία σ.δ. πίνακα $C \in \mathscr{V}^{d \times d}$ με συνεχείς τιμές και ένα προβλέψιμο τυχαίο μέτρο ν επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (6.18), (6.19), (6.20). Επίσης ορίζουμε την $\widetilde{C}$ από την (6.21).

Τελικά εισάγουμε ένα σύνολο συναρτήσεων έτσι ώστε:

Ορισμός 6.2.8. Το σύνολο $\mathscr{C}^+(\mathbb{R}^d)$ είναι οποιαδήποτε οικογένεια από φραγμένες συναρτήσεις Borel επάνω στον $\mathbb{R}^d$, που μηδενίζεται σε μία περιοχή του μηδενός, με την ακόλουθη ιδιότητα: αν για οποιαδήποτε δύο θετικά μέτρα η και η' επάνω στον $\mathbb{R}^d$ με $\eta(\{0\}) = \eta'(\{0\}) = 0$ και $\eta(x : |x| > \varepsilon) < \infty$ και $\eta'(x : |x| > \varepsilon) < \infty$ για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει $\eta(f) = \eta'(f)$ για κάθε $f \in \mathscr{C}^+(\mathbb{R}^d)$, τότε $\eta = \eta'$ (υπάρχουν πολλές τέτοιες οικογένειες; Υπάρχουν τέτοιες οικογένειες οι οποίες είναι αριθμήσιμες και περιέχουν μόνο συνεχείς ή ακόμα C^∞ συναρτήσεις).

Θεώρημα 6.2.9. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(a) Η X είναι ένα ημι−martingale με χαρακτηριστικά (B, C, ν).

(b) Οι επόμενες σ.δ. είναι τοπικά martingales:

- *(i) $M(h) = X(h) - B - X_0$, (όπου η $X(h)$ ορίζεται απο την (6.13) και (6.14)).*
- *(ii) $M(h)^i M(h)^j - \widetilde{C}^{ij}$, για κάθε $i, j \le d$.*
- *(iii) $g * \mu^X - g * \nu$, για κάθε $g \in \mathscr{C}^+(\mathbb{R}^d)$.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter II, §2a, pages 80−81.

Τελειώνουμε αυτήν την ενότητα δείχνοντας πως οι $B = B(h)$ και $\widetilde{C} = \widetilde{C}(h)$ εξαρτώνται από την h.

Πρόταση 6.2.10. *Έστω $h, h' \in \mathscr{C}_t^d$. Τότε, ως προς την καθολική ισοδυναμία ισχύει*

$$B(h) - B(h') = (h - h') * \nu \tag{6.23}$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter II, §2a, pages 81.

6.3 Χαρακτηριστικά και εκθετικός τύπος

Θεωρούμε από τη μία πλευρά μία $d-$διάστατη προσαρμοσμένη σ.δ. $X = (X^i)_{i\leq d}$. και από την άλλη πλευρά την τριάδα (B, C, ν) η οποία είναι υποψήφια για να είναι τα χαρακτηριστικά της (που συνοδεύεται από μία δοσμένη συνάρτηση $h \in \mathscr{C}_t^d$). Δηλαδή, επιλέγουμε μία προβλέψιμη $d-$διάστατη σ.δ. $B = (B^i)_{i\leq d}$ στον $\mathscr{V}^d$, μία συνεχή σ.δ. πίνακα $C = (C^{ij})_{i,j\leq d}$ στον $\mathscr{V}^{d\times d}$, και ένα προβλέψιμο τυχαίο μέτρο ν επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις (6.18), (6.19), (6.20) (ή ισοδύναμα τα B, C, ν δίνονται από την σχέση (6.16) και A, b, c, K ικανοποιούν όλες τις συνθήκες της Πρότασης 6.2.5). Τώρα συνδέουμε την τριάδα (B, C, ν) με μία σ.δ. που παίζει το ρόλο της συνάρτησης ψ_t της σχέσης (6.11). Για το σκοπό αυτό, αρχικά εισάγουμε το **συνήθες εσωτερικό γινόμενο**: αν $u, x \in \mathbb{R}^d$, τότε $u \cdot x = \sum_{i\leq d} u^i x^i$ και ανάλογα για την σ.δ. $u \cdot B$ ή $u \cdot X$. Αναλόγως, αν $z = (z^{ij})_{i,j\leq d}$ είναι ένας πίνακας, συμβολίζουμε με $u \cdot z \cdot u$ τον αριθμό $u \cdot z \cdot u = \sum_{i,j\leq d} u^i z^{ij} u^j$, και παρόμοια ορίζεται για την σ.δ. $u \cdot C \cdot u$.΄Εχουμε ότι $|e^{iu\cdot x} - 1 - iu \cdot h(x)| \leq \alpha(|x|^2 \wedge 1)$ για κάποια σταθερά α, επομένως αφού $(|x|^2 \wedge 1) * \nu \in \mathscr{V}$ από την υπόθεση μπορούμε να θέσουμε

$$A(u)_t := iu \cdot B_t - \frac{1}{2} u \cdot C_t \cdot u + \int (e^{iu\cdot x} - 1 - iu \cdot h(x))\nu([0, t] \times dx). \tag{6.24}$$

Η μιγαδική σ.δ. $A(u)$ όπως ορίσθηκε είναι προβλέψιμη με πεπερασμένη κύμανση (δηλαδή, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ανήκει στον $\mathscr{V}$). Αυτό είναι φανερό για τον πρώτο και τρίτο όρο, και ο δεύτερος είναι συνεχής και αύξων από την (6.18). Ας σημειώσουμε ότι η $A(u)$ δεν εξαρτάται από την h, σύμφωνα με την (6.23).

Θεώρημα 6.3.1. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(a) Η X είναι ένα ημι−martingale και επιδέχεται τα χαρακτηριστικά (B, C, ν).

(b) Για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$, η σ.δ. $e^{iu\cdot X} - (e^{iu\cdot X_-}) \bullet A(u)$ είναι ένα μιγαδικό τοπικό martingale.

(c) Για κάθε φραγμένη συνάρτηση f της κλάσης C^2 επάνω στον χώρο $\mathbb{R}^d$, η σ.δ.

$$\begin{aligned} f(X) - f(X_0) \quad &- \quad \sum_{j\leq d} D_j f(X_-) \bullet B^j - \frac{1}{2} \sum_{j,k\leq d} D_{jk} f(X_-) \bullet C^{jk} \\ &- \quad \left[f(X_- + x) - f(X_-) - \sum_{j\leq d} D_j f(X_-) h^j(x) \right] * \nu \end{aligned} \tag{6.25}$$

είναι ένα τοπικό martingale.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter II, §2d, page 87.

Ας ξενκινήσουμε με ένα Λήμμα (βλ. π.χ. Gnedenko και Kolmogorov [14])

Λήμμα 6.3.2. *Έστω $b \in \mathbb{R}^d$ και c ένας συμμετρικός μη αρνητικός $d \times d$ πίνακας, και έστω F ένα θετικό μέτρο επάνω στον $\mathbb{R}^d$, το οποίο ολοκληρώνει την $(|x|^2 \wedge 1)$ και ικανοποιεί την $F(0) = 0$. Τότε η συνάρτηση*

$$\psi(u) = iu \cdot b - \frac{1}{2} u \cdot c \cdot u + \int (e^{iu \cdot x} - 1 - iu \cdot h(x)) F(dx) \tag{6.26}$$

έχει μία μοναδική αναπαράσταση της μορφής **(6.24)***, δηλαδή αν ψ ικανοποιεί την* **(6.24)** *με (b', c', F') τότε $b' = b, c' = c$ και $F' = F$.*

Απόδειξη. Έστω $w \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ και ορίζουμε την συνάρτηση

$$\phi_w(u) = \psi(u) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \psi(u + sw) ds.$$

Με απλούς υπολογισμούς έχουμε ότι

$$\phi_w(u) = \frac{1}{6} w \cdot c \cdot w + \int (1 - \frac{\sin w \cdot x}{w \cdot x}) e^{iu \cdot x} F(dx).$$

Επομένως, η ϕ_w είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του μέτρου

$$G_w(dx) = \frac{1}{6} w \cdot c \cdot w \delta_0(dx) + (1 - \frac{\sin w \cdot x}{w \cdot x}) F(dx).$$

Άρα κάθε μέτρο G_w είναι μοναδικό ορισμένο από την συνάρτηση ϕ_w ή από την ψ. Από την άλλη μεριά, η οικογένεια των μέτρων $\{G_w : w \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}\}$ ορίζει πλήρως μοναδικά τον πίνακα c και το μέτρο F (ας θυμηθούμε ότι $F(\{0\}) = 0$). Τελικά, το b υπολογίζεται εύκολα από τα c, F και την συνάρτηση ψ. □

Ορισμός 6.3.3. Αν T ένας προβλέψιμος χρόνος ώστε $T = \lim_{n \to \infty} T_n$ όπου (T_n) ακολουθία χ.δ., **ένα τοπικό martingale επάνω στο** $[\![0, T[\![$, είναι μία σ.δ. M έτσι ώστε κάθε διακοπτόμενη σ.δ. M^{T_n} να είναι ένα τοπικό martingale.

Είναι προφανές ότι αυτή η έννοια δεν εξαρτάται από την ακολουθία (T_n), και ότι μπορεί κανείς να βρει μία ακολουθία, ώστε κάθε M^{T_n} να είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Ας σημειώσουμε επίσης ότι οι τιμές της M που βρίσκονται εκτός του $[\![0, T[\![$ δεν μας ενδιαφέρουν, έτσι είναι αρκετό η σ.δ. M να ορισθεί στο στοχαστικό διάστημα $[\![0, T[\![$.

6.4 Ημι−martingales με ανεξάρτητες προσαυξήσεις

6.4.1 Σ.Δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Σε αυτήν την παράγραφο θα εξετάσουμε θεμελιώδη παραδείγματα σ.δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Ορισμός 6.4.1.1. **(a)** Μία σ.δ. με **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** (εν συντομία PII) επάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ είναι μία càdlàg προσαρμοσμένη σ.δ. $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ με τιμές στον $\mathbb{R}^d$ έτσι ώστε $X_0 = 0$ και για όλα τα $0 \leq s \leq t$ η τ.μ. $X_t - X_s$ να είναι ανεξάρτητη από την σ−άλγεβρα $\mathcal{F}_s$.
(b) Μία σ.δ. $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ με **στάσιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις** (εν συντομία PIIS) επάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ είναι μία PII έτσι ώστε η κατανομή των τ.μ. $X_t - X_s$ να εξαρτάται μόνο από την διαφορά $t - s$.
(c) Ένας χρόνος $t \in \mathbb{R}_+$ καλείται **καθορισμένος χρόνος ασυνέχειας** (fixed time of discontinuity) για την X αν $P(\Delta X_t \neq 0) > 0$.

Μία γενικευμένη σ.δ. Poisson και μία σ.δ. Wiener (βλ. Ορισμούς 4.2.6 και 5.1.3 αντίστοιχα) είναι PII. Μία τυπική σ.δ. Poisson και μία τυπική σ.δ. Wiener είναι PIIS.
Ας επισημάνουμε ότι αν $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία από χ.δ. η οποία εξαντλεί τα άλματα της X, το σύνολο D_n όλων των t για τα οποία $P(T_n = t) > 0$ είναι αριθμήσιμο και το σύνολο των καθορισμένων χρόνων ασυνέχειας είναι το $\bigcup D_n$. Το σύνολο όλων των καθορισμένων χρόνων ασυνέχειας είναι αριθμήσιμο (μία ιδιότητα που ισχύει για όλες τις càdlàg σ.δ.).

Παρατήρηση 6.4.1.2. Τώρα, αν X είναι μία PIIS η κατανομή των τ.μ. $\Delta X_t = \lim_{s \uparrow\uparrow t}(X_t - X_s)$ δεν εξαρτάται από το t. Τότε από τα παραπάνω δύο έχουμε ότι μία PIIS δεν έχει καθορισμένους χρόνους ασυνέχειας.

Προτού πάμε στην γενίκευση της έννοιας των PII, θα εξετάσουμε δύο ξεχωριστά παραδείγματα, την σ.δ. Wiener και την σ.δ. Poisson διότι είναι πολύ απλούστερα από ότι η γενικευμένη PII. Τα επόμενα δύο παραδείγματα θα μας βοηθήσουν στη συνέχεια για την παράγραφο 6.4.4.

6.4.2 Στοχαστική διαδικασία Wiener

Το επόμενο θεώρημα βασίζεται στον Lèvy και συμπληρώνει την Πρόταση 5.1.4.

Θεώρημα 6.4.2.1. *Ένα συνεχές τοπικό martingale W με $W_0 = 0$ είναι μία σ.δ. Wiener αν και μόνο αν η $\langle W, W\rangle$ είναι ντετερμινιστική, με $\langle W, W\rangle_t = \sigma^2(t)$ για κάποια αύξουσα συνεχή συναρτήση $\sigma^2(\bullet)$. Τότε αυτή η συνάρτηση είναι η συνάρτηση διακύμανσης της W και για όλα τα $0 \le s \le t$ η τ.μ. $W_t - W_s$ είναι Gaussian, κεντραρισμένη στο 0, με διακύμανση $\sigma^2(t) - \sigma^2(s)$.*

Απόδειξη. Η αναγκαία συνθήκη είναι ακριβώς η Πρόταση 5.1.4. Αντίστροφα, θεωρούμε ότι η W είναι ένα συνεχές τοπικό martingale με $W_0 = 0$ και $\langle W, W\rangle_t = \sigma^2(t)$. Θέτουμε

$$Y_t := e^{iuW_t + \frac{u^2}{2}\sigma^2(t)}.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Ito στην συνάρτηση $f(x, y) = e^{iux-y}$ τότε έχουμε ότι

$$Y = 1 + iuY_- \bullet W,$$

οπότε η Y είναι ένα τοπικό martingale όπως επίσης είναι ένα (μιγαδικό) ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale επειδή $\sup_{s\le t} |Y_s| \le e^{\frac{u^2\sigma^2(t)}{2}}$. Τότε αν $s \le t$ και $A \in \mathcal{F}_s$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\chi_A e^{iu(W_t - W_s)}\right] &= \mathbb{E}\left[\chi_A \frac{Y_t}{Y_s} e^{-\frac{1}{2}u^2(\sigma^2(t)-\sigma^2(s))}\right] \\ &= P(A)e^{-\frac{1}{2}u^2(\sigma^2(t)-\sigma^2(s))}\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ταυτόχρονα την συνθήκη του Ορισμού 5.1.3 (ii) και ότι η $W_t - W_s$ είναι Gaussian, κεντραρισμένη στο 0, με διασπορά $\sigma^2(t) - \sigma^2(s)$. Τότε η συνθήκη από τον Ορισμό 5.1.3 (i) είναι προφανής και άρα αποδείχθηκε. □

6.4.3 Στοχαστική διαδικασία Poisson και τυχαία μέτρα Poisson

Θεωρούμε μία σ.δ. Poisson όπως έχουμε ορίσει στον Ορισμό 4.2.6. Αν $\alpha : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μία càdlàg αύξουσα συνάρτηση, τότε συμβολίζουμε με α^c το **συνεχές μέρος** της, δηλαδή την συνάρτηση α^c με τύπο

$$\alpha^c(t) = \alpha(t) - \sum_{0<s\le t} \Delta\alpha(s).$$

Θεώρημα 6.4.3.1. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(a) *Μία σημειακή διαδικασία N είναι γενικευμένη σ.δ. Poisson επάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ αν και μόνο αν ο αντισταθμιστής της N^p είναι ντετερμινιστικός, δηλαδή $N_t^p = \alpha(t)$ για κάποια αύξουσα συνάρτηση α.*

(b) *Σε αυτήν την περίπτωση, ένας χρόνος t είναι ένας καθορισμένος χρόνος ασυνέχειας αν και μόνο αν $\Delta\alpha(t) \neq 0$, και για όλα τα $u \in \mathbb{R}$, $0 \leq s \leq t$, έχουμε ότι:*

$$\mathbb{E}\left[e^{iu(N_t - N_s)}\right] = \left[\exp(e^{iu} - 1)(\alpha^c(t) - \alpha^c(s))\right]\left[\prod_{s<r\leq t}(1 + (e^{iu} - 1)\Delta\alpha(r))\right]. \tag{6.27}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα οφείλεται ουσιαστικά τον S. Watanabe. Ιδιαιτέρως,

- όταν η N είναι Poisson ή ισοδύναμα όταν η συνάρτηση α είναι συνεχής, τότε η κατανομή της $N_t - N_s$ είναι Poisson με μέση τιμή $\alpha(t) - \alpha(s)$.
- Από την Πρόταση 4.2.7 (b), έχουμε ότι οι έννοιες ″ψευδο−αριστερά−συνεχής″ και ″χωρίς καθορισμένους χρόνους ασυνέχειας ″ είναι συνώνυμες με μία γενικευμένη σ.δ. Poisson. Αυτή η ιδιότητα θα ισχύει για όλες τις PII σ.δ..

Μπορεί κανείς να πάει περαιτέρω στην δομή μίας γενικευμένης σ.δ. Poisson. Έστω $J = \{t : \Delta\alpha(t) > 0\}$ και θέτουμε

$$N_t^d := \int_0^t \chi_J(s) dN_s, \qquad N^c = N - N^d.$$

Τότε N^c και N^d είναι δύο ανεξάρτητες γενικευμένες σ.δ. Poisson (άμμεση συνέπεια του Ορισμού 4.2.6 (ii) και του Θεωρήματος 6.4.3.1). Οι αντισταθμιστές τους είναι αντίστοιχα $\alpha^c(t)$ και $\alpha(t) - \alpha^c(t)$. Τότε η N^c είναι στην πραγματικότητα μία σ.δ. Poisson και από την σχέση (6.27) έχουμε ότι

$$N_t^d = \sum_{s\leq t, s\in J} Y_s$$

όπου $\{Y_s\}_{s\in J}$ είναι μία ακολουθία από τ.μ. που παίρνουν δύο τιμές 0 και 1, έτσι ώστε $P(Y_s = 1) = \Delta\alpha(s)$.
Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τα τυχαία μέτρα Poisson. Χρησιμοποιούμε την παράγραφο 6.1.2 και συγκεκριμένα ότι το E είναι ένας βοηθητικός πολωνικός χώρος.

Απόδειξη. Η αναγκαία συνθήκη (a) προκύπτει από την Πρόταση 4.2.7. Αντίστροφα, θεωρούμε ότι $N^p_t = \alpha(t)$ για κάποια αύξουσα συνάρτηση α. Έχουμε $\mathbb{E}[N_t] = \alpha(t)$, οπότε έχουμε την πρώτη συνθήκη του Ορισμού 4.2.6. Έστω $u \in \mathbb{R}$. Με απλούς υπολογισμούς έχουμε ότι

$$e^{iuN} = 1 + (e^{iu} - 1)e^{iuN_-} \bullet N.$$

Τότε, από τον ορισμό του $N^p = \alpha$, η σ.δ.

$$M_t = e^{iuN_t} - 1 - \int_0^t (e^{iu} - 1)e^{iuN_{s-}} d\alpha(s)$$

είναι ένα (μιγαδικό) τοπικό martingale όπως και martingale επειδή η M_t φράσεται από τον όρο $2(1+\alpha(t))$. Έστω $A \in \mathcal{F}_s$ με $P(A) > 0$. Από τα παραπάνω για $t \geq s$, έχουμε ότι

$$\chi_A e^{iu(N_t - N_s)} = \chi_A + \chi_A e^{-iuN_s}(M_t - M_s) + (e^{iu} - 1)\int_s^t e^{iu(N_{r-} - N_s)} d\alpha(r).$$

Έστω

$$f(t) := \frac{\mathbb{E}[\chi_A e^{iu(N_t - N_s)}]}{P(A)}.$$

Από την παραπάνω μέση τιμή και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini, και το γεγονός ότι η M είναι ένα martingale, έχουμε ότι

$$f(t) = 1 + \int_s^t f(r-)(e^{iu} - 1)d\alpha(r), \quad t \geq s.$$

Τότε από το Θεώρημα 5.6.1 έχουμε $f(t) = \mathscr{E}(a')_t$, όπου η α' είναι η συνάρτηση $\alpha' = (e^{iu} - 1)[\alpha(r) - \alpha(r \wedge s)]$. Από την σχέση (5.13) και τον ορισμό του α^c έχουμε ότι η $f(t)$ είναι ίση με τον δεξί όρο της σχέσης (6.27) όπου τον συμβολίζουμε με $g_{s,t}(u)$, για $s \leq t$

$$\mathbb{E}[\chi_A e^{iu(N_t - N_s)}] = P(A)g_{s,t}(u).$$

Ο παραπάνω τύπος μας δίνει την πρώτη συνθήκη του Ορισμού 4.2.6 και την σχέση (6.27). Τελικά, η (6.27) μας δίνει ότι

$$\mathbb{E}[e^{iu\Delta N_t}] = 1 + (e^{iu} - 1)\Delta\alpha(t)$$

(έστω $s \uparrow\uparrow t$ στην (6.27)), οπότε το t είναι ένας δεδομένος χρόνος ασυνέχειας αν και μόνο αν $\Delta\alpha(t) \neq 0$. □

Αν m είναι ένα θετικό σ−πεπερασμένο μέτρο επάνω στον $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$, τότε θέτουμε

$$\begin{cases} J = \{t : m(\{t\} \times E) > 0\} \\ m^d(dt, dx) = m(dt, dx)\chi_J(t, x), \quad m^c = m - m^d. \end{cases}$$

Το J είναι το πολύ αριθμήσιμο. Αν E εκφυλίζεται σε ένα σημείο, π.χ. στο 1, και αν $m(dt, \{1\}) = d\alpha(t)$ για κάποια αύξουσα συνάρτηση α, τότε το m^c αντιστοιχεί στο συνεχές μέρος του α^c.

Θεώρημα 6.4.3.2. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(a) Ένα τυχαίο μέτρο μ με ακέραιες τιμές είναι ένα γενικευμένο τυχαίο μέτρο Poisson επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ αν και μόνο αν ο αντισταθμιστής της μ^p είναι ντετερμινιστικός, δηλαδή $\mu^p(\omega, \bullet) = m(\bullet)$, για κάποιο θετικό σ−πεπερασμένο μέτρο m επάνω στον $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$ ικανοποιώντας την σχέση $m(\{t\} \times E) \leq 1$.

(b) Σε αυτήν την περίπτωση, για κάθε οικογένεια $\{A_j\}_{j \leq d}$ κατα ζεύγη ξένα μετρήσιμα σύνολα επάνω στον $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$ έτσι ώστε $m(A_j) < \infty$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp \sum_{j \leq d} iu_j \mu(A_j)\right] &= \left[\exp \sum_{j \leq d} (e^{iu_j} - 1) m^c(A_j)\right] \\ &\quad \times \prod_{s>0} \left[1 + \sum_{j \leq d} (e^{iu_j} - 1) m(\{s\} \times E \cap A_j)\right]. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Αν το μ είναι ένα τυχαίο μέτρο Poisson, δηλαδή αν $m = m^c$, το άπειρο γινόμενο εξαφανίζεται και η (6.28) μας δίνει ότι οι $\{A_j\}_{j \leq d}$ είναι ανεξάρτητες τ.μ., η κατανομή των $\mu(A_j)$ είναι Poisson με μέση τιμή $m(A_j)$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter II, §4b, pages 105−106.

6.4.4 Στοχαστικές διαδικασίες με ανεξάρτητες προσαυξήσεις και ημι−martingales

Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι μία PII δεν είναι απαραίτητα ένα ημι−martingale. Για παράδειγμα κάθε ντετερμινιστική càdlàg διαδικασία που είναι μηδενική στο 0 είναι μία PII αλλά δεν είναι ημι−martingale εκτός εάν έχει πεπερασμένη ολική κύμανση σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.6. Σε αυτή την παράγραφο μας ενδιαφέρουν μόνο οι PII που είναι ημι−martingales. Αρχικά έχουμε τον παρακάτω συμβολισμό,

$$g(u)_t := \mathbb{E}(e^{iu\cdot X_t}), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \quad u \in \mathbb{R}^d. \tag{6.29}$$

Είναι προφανές ότι $g(u)_0 = 1$ και όλες οι συναρτήσεις $t \longmapsto g(u)_t$ είναι càdlàg.

Θεώρημα 6.4.4.1. *Έστω X μία d−διάστατη PII. Τότε η X είναι ένα ημι−martingale αν και μόνο αν για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$, η συνάρτηση $t \longmapsto g(u)_t$ έχει πεπερασμένη ολική κύμανση επάνω σε πεπερασμένα διαστήματα.*

Παρακάτω έχουμε ένα θεώρημα που περιγράφει τα χαρακτηριστικά ενός PII−ημι−martingale.

Θεώρημα 6.4.4.2. *Έστω X ένα d−διάστατο ημι−martingale με $X_0 = 0$. Τότε το X είναι μία PII αν και μόνο αν υπάρχει μία εκδοχή (B, C, ν) των χαρακτηριστικών της η οποία είναι ντετερμινιστική.*

Επιπλέον, σε αυτήν την περίπτωση, το σύνολο όλων των καθορισμένων χρόνων ασυνέχειας είναι $J = \{t : \nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) > 0\}$ και για όλα τα $s \leq t, \ \ u \in \mathbb{R}^d$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{iu\cdot(X_t - X_s)}) \;&=\; \exp\Big[iu\cdot(B_t - B_s) - \frac{1}{2}u\cdot(C_t - C_s)\cdot u \\
&\quad + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iu\cdot x} - 1 - iu\cdot h(x))\chi_{J^c}(r)\nu(dr, dx)\Big] \\
&\quad \times \prod_{s<r\leq t} \Big\{ e^{iu\cdot \Delta B_r}\Big[1 + \int (e^{iu\cdot x} - 1)\nu(\{r\} \times dx)\Big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Ιδιαιτέρως, η $g(u)_t$ είναι ίση με το δεξί μέλος του παραπάνω τύπου για $s = 0$ και η κατανομή της τ.μ. ΔX_t είναι

$$\nu(\{t\} \times dx) + [1 - \nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d)]\delta_0(dx). \tag{6.31}$$

Η παραπάνω σχέση (6.30) και το γεγονός ότι η X έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις μας διευκολύνει να υπολογίσουμε την κατανομή οποιασδήποτε οικογένειας $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. Ως εκ τούτου η κατανομή της σ.δ. X χαρακτηρίζεται πλήρως από τα (ντετερμινιστικά) χαρακτηριστικά της X. Θα διατυπώσουμε ακριβώς αυτήν την ιδιότητα στο τέλος αυτής της ενότητας (Θεώρημα 6.4.4.4).

Ας παρατηρήσουμε ότι το Θεώρημα 6.4.2.1 προκύπτει από το Θεώρημα 6.4.4.2 (για $C_t = \sigma^2(t)$, $B = 0$ και $\nu = 0$) και το Θεώρημα 6.4.3.1 επίσης είναι πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος (για $C = 0$, $\nu(dt, dx) = d\alpha(t)\varepsilon_1(dx)$ και $B_t = h(1)\alpha(t)$).

Εάν συνδυάσουμε το Θεώρημα 6.4.4.2 με το Πόρισμα 6.1.2.5, τότε έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 6.4.4.3. *Μία $d-$διάστατη διαδικασία X είναι μία PIIS αν και μόνο αν είναι ένα ημι−martingale που επιδέχεται μία εκδοχή (B, C, ν) των χαρακτηριστικών της τα οποία έχουν την μορφή:*

$$B_t(\omega) = bt, \quad C_t(\omega) = ct, \quad \nu(\omega; dt, dx) = dtK(dx) \tag{6.32}$$

όπου $b \in \mathbb{R}^d$, c είναι ένας συμμετρικός μη−αρνητικός $d \times d$ πίνακας και K είναι ένα θετικό μέτρο επάνω στον $\mathbb{R}^d$ το οποίο ολοκληρώνει την $(|x|^2 \wedge 1)$ και ικανοποιεί την $K(\{0\}) = 0$.

Επιπλέον, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+,\ u \in \mathbb{R}^d$ έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}(e^{iu\cdot X_t}) = \exp t\Big[iu \cdot b - \frac{1}{2}u \cdot c \cdot u + \int (e^{iu\cdot x} - 1 - iu \cdot h(x))K(dx)\Big]. \tag{6.33}$$

Απόδειξη. Η ικανή συνθήκη έπεται από το Θεώρημα 6.4.4.2. Ιδιαιτέρως η σχέση (6.30) συνεπάγεται, ότι αφού τα (B, C, ν) δίνονται από την σχέση (6.32), τότε η $\mathbb{E}[e^{iu\cdot(X_t - X_s)}]$ εξαρτάται μόνο από τα u και $t - s$, πράγμα το οποίο συνεπάγεται την στασιμότητα των προσαυξήσεων της X.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η X είναι μία PIIS. Τότε είναι προφανές ότι $g(u)_{t+s} = g(u)_t g(u)_s$, άρα η $g(u)_t$ είναι της μορφής $g(u)_t = e^{t\psi(u)}$ και ιδιαιτέρως η συνάρτηση $t \longmapsto g(u)_t$ έχει πεπερασμένη ολική κύμανση. Τότε το Θεώρημα 6.4.4.1 μας δίνει ότι η σ.δ. X είναι ένα ημι−martingale. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 6.4.4.2 μπορούμε να επιλέξουμε μία εκδοχή (B, C, ν) χαρακτηριστικών τα οποία είναι ντεντερμινιστικά. Από την Παρατήρηση 6.4.1.2 έχουμε ότι $J = \emptyset$, και από την σχέση (6.30) έχουμε ότι

$$t\psi(u) = iu \cdot B_t - \frac{1}{2}u \cdot C_t \cdot u + \int (e^{iu\cdot x} - 1 - iu \cdot h(x))\nu([0, t] \times dx).$$

Τότε, αν θέσουμε $b = B_1,\ c = C_1,\ K(dx) = \nu([0, 1] \times dx)$, από την μοναδικότητα του Λήμματος 6.3.2 έχουμε την σχέση την σχέση (6.32). □

Απόδειξη *των Θεωρημάτων 6.4.4.1 και 6.4.4.2.*
(a) Αρχικά θα αποδείξουμε κάποια βοηθητικά αποτελέσματα. Θέτουμε

$$S(u) := \inf\{t : g(u)_t = 0\}$$

και

$$h(u)_{s,t} = \mathbb{E}[e^{iu\cdot(X_t - X_s)}] \quad \text{για κάθε} \quad s \leq t.$$

Κάθε $h(u)_{s,t}$ είναι càdlàg ως προς τα s και t. Θα δείξουμε ότι αν η X είναι PII, τότε:
(a1) Η συνάρτηση $t \longmapsto |g(u)|_t$ είναι φθίνουσα και $g(u)_{S(u)-} \neq 0$ αν $S(u) < \infty$ (επομένως $g(u)_t = 0$ αν $t \geq S(u)$). Πράγματι, η ανεξαρτησία των προσαυξήσεων συνεπάγεται άμμεσα ότι για $s \leq t$, $g(u)_t = g(u)_s h(u)_{s,t}$. Αφού $|h(u)_{s,t}| \leq 1$ έχουμε ότι η $t \longmapsto |g(u)_t|$ είναι φθίνουσα και $g(u)_t = 0$ αν $t \geq S(u)$. Επίσης συμπεραίνουμε ότι $g(u)_{t-} = g(u)_s h(u)_{s,t-}$ αν $s < t$. Άρα αν $S(u) < \infty$ και $g(u)_{S(u)-} = 0$, θα πρέπει να έχουμε $h(u)_{s,t-} = \mathbb{E}[e^{iu\cdot(X_{t-} - X_s)}] \to 1$ όταν $s \uparrow t$. Έτσι προκύπτει η (a1).
Επίσης θέτουμε

$$Z_(u)_t := \begin{cases} e^{iu\cdot X_t / g(u)_t}, & \text{αν } t < S(u) \\ e^{iu\cdot X_{S(u)}/g(u)_{S(u)-}}, & \text{αν } t \geq S(u), \end{cases}$$

πράγμα το οποίο σύμφωνα με την (a1) ορίζει μία φραγμένη σ.δ.. Αν θεωρήσουμε την σ.δ. $X' = X\chi_{]\!]0,S(u)[\![} + X_{S(u)-}\chi_{]\!]S(u),\infty[\![}$, τότε η X' είναι προφανώς μία άλλη PII και η συνάρτηση που συνδέεται με την X' σύμφωνα με την σχέση (6.29) είναι η $g'(u)_t = g(u)_t$ για $t < S(u)$, $\quad g'(u)_t = g(u)_{S(u)-}$ για $t \geq S(u)$. Από τον ορισμό του $Z(u)$, για $s \leq t$ έχουμε ότι

$$Z(u)_t = Z(u)_s \frac{g'(u)_s}{g'(u)_t} e^{iu\cdot(X'_t - X'_s)}$$

και η ανεξαρτησία των προσαυξήσεων του X' μας δίνει άμμεσα ότι:
(a2) η $Z(u)$ είναι ένα martingale, και $\alpha \leq |Z(u)| \leq 1$ για κάποιο $\alpha > 0$ (η τελευταία ιδιότητα είναι προφανής από την (a_1) και τον ορισμό του $Z(u)$).
(b) *Ας αποδείξουμε την αναγκαία συνθήκη του Θεωρήματος 6.4.4.1.* Ας υποθέσουμε ότι η X είναι μία PII και ένα ημι−martingale. Τότε αν εφαρμόσουμε τον τύπο του Itô σε μία συνάρτηση f της κλάσης C^2 επάνω στον $\mathbb{R}^{d+2}$, η οποία ικανοποιεί την $f(x, y, z) = e^{-iu\cdot x}/(y + iz)$ για $|y + iz| \geq \alpha$ (όπου α είναι αυτό που είχαμε στην (a_2)), τότε έχουμε ότι η σ.δ. $e^{-iu\cdot X}/Z(u)$ είναι ένα ημι−martingale. Αφού $g(u)_t = [e^{-iu\cdot X_t}/Z(u)_t]\chi_{\{t<S(u)\}}$, τότε έχουμε ότι η $t \longmapsto g(u)_t$ είναι ένα

ημι−martingale, και έτσι έχει πεπερασμένη ολική κύμανση από την Πρόταση 5.3.6.

(c) *Ας αποδείξουμε την ικανή συνθήκη του Θεωρήματος 6.4.4.1.* Ας υποθέσουμε ότι κάθε $t \longmapsto g(u)_t$ έχει πεπερασμένη ολική κύμανση. Έστω $t \in \mathbb{R}_+$. Έχουμε ότι $g(u)_t \to 1$ όταν $u \to 0$, ως εκ τούτου υπάρχει $b > 0$ έτσι ώστε για $|u| \leq b$ να έχουμε ότι $|g(u)_t| > 0$, και επομένως αν $|u| \leq b$ έχουμε $e^{iu \cdot X_s} = Z(u)_s g(u)_s$ για $s \leq t$, και οι δύο σ.δ. $Z(u)$ και $\{g(u)_s\}_{s \geq 0}$ είναι ημι−martingales (από την (a2) και την υπόθεση). Τότε από το Θεώρημα 5.5.4 έχουμε ότι η σ.δ. $e^{iu \cdot X^t}$ είναι ένα ημι−martingale. Τώρα, αν $|u| > b$ τότε υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $|u/n| \leq b$, ενώ $e^{iu \cdot X} = [e^{I \frac{u}{n} \cdot X}]^n$, άρα από το Θεώρημα 5.5.4 έχουμε ξανά ότι η σ.δ. $e^{iu \cdot X^t}$ είναι ένα ημι−martingale. Όλα τα παραπάνω ισχύουν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Επομένως από την Πρόταση 5.3.5, βλέπουμε ότι η σ.δ. $e^{iu \cdot X}$ είναι ένα ημι−martingale, για όλα τα $u \in \mathbb{R}^d$, και η απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.1 μας δίνει ότι η X είναι ένα ημι−martingale.

(d) *Ας αποδείξουμε την αναγκαία συνθήκη του Θεωρήματος 6.4.4.2.* Υποθέσουμε ότι η X είναι μία PII και ένα ημι−martingale, καλούμε με (B, C, ν) τα χαρακτηριστικά του και θυμίζουμε ότι η $A(u)$ είναι η σ.δ. όπως έχει ορισθεί από την σχέση (6.24). Από το βήμα (b) της απόδειξης, η συνάρτηση $t \longmapsto g(u)_t$ έχει πεπερασμένη ολική κύμανση, συνεπώς οι σ.δ. $\mathscr{E}[A(u)]$ και $g(u)$ είναι καθολικά ισοδύναμες επάνω στο $[\![0, S(u)[\![$ (βλ. π.χ. [16], Chapter II, Theorem 2.47). Γενικότερα, για οποιοδήποτε αυθαίρετο αλλά σταθερό $s \in \mathbb{R}_+$ η X–X^s είναι μία PII, της οποίας η αντίστοιχη συνάρτηση $''g(u)_t''$ είναι η $t \longmapsto h(u)_{s,t}$. Επίσης η X–X^s ένα ημι−martingale του οποίου η αντίστοιχει σ.δ. $''A(u)''$ είναι η $A(u)$–$A(u)^s$. Τότε χρησιμοποιώντας την ίδια απόδειξή όπως προηγουμένως έχουμε ότι $\mathscr{E}[A(u)–A(u)^s]_t = h(u)_{s,t}$ σ.β. για όλα τα $t \geq s, \quad t < \inf\{r > s : h(u)_{s,t} = 0\}$. Η συνάρτηση $\mathscr{E}[A(u)–A(u)^s]_t(\omega)$ είναι συνεχής στο u και δεξιά συνεχής στο s, t για όλα τα $\omega \in \Omega$. Τότε, αν αλλάξουμε τα χαρακτηριστικά (B, C, ν) και την $A(u)$ σε ένα P−μηδενικό σύνολο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathscr{E}[A(u)–A(u)^s]_t = h(u)_{s,t}$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $u \in \mathbb{R}^d, \quad s \leq t < \inf\{r > s : h(u)_{s,r} = 0\}$. Αν $b = \mathscr{E}(\alpha)$, όπου α μία μιγαδική συνάρτηση με πεπερασμένη ολική κύμανση και $\alpha(0) = 0$, τότε $\alpha(t) = \int_0^t b(s-)^{-1} db(s)$ αν $b(t) \neq 0$. Άρα έχουμε ότι κάθε $A(u)_t$–$A(u)_{t \wedge s}$ είναι ντεντερμινιστικό για όλα τα $t < \inf\{r > s : \Delta A(u)_r = -1\}$. Τότε εύκολα προκύπτει ότι $A(u)_t(\omega) = \alpha(u)_t$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $t \in \mathbb{R}_+$, για κάποια συνάρτηση $\alpha(u)$, και το Λήμμα 6.3.2 σε συνδυασμό με την (6.24) μας δίνει ότι τα χαρακτηριστικά B, C, ν δεν εξαρτώνται από το ω.

(e) Τέλος, υποθέτουμε ότι η X είναι ένα ημι−martingale με $X_0 = 0$ και με ντεντερμινιστικά χαρακτηριστικά (B, C, ν). Οι σ.δ. $A(u)$ όπως είναι στην σχέση (6.24), είναι επίσης ντεντερμινιστικές. Έστω $M(u) = e^{iu\cdot X} – e^{iu\cdot X_-} \bullet A(u)$ το τοπικό μιγαδικό martingale του Θεωρήματος 6.3.1 (b). Πράγματι, $|M(u)_t| \leq 1 + Var[A(u)_t]$, άρα η σ.δ. $M(u)$ είναι ένα martingale. Έστω $s \in \mathbb{R}_+$ και $F \in \mathcal{F}_s$ με $P(F) > 0$. Για $t \geq s$ έχουμε ότι

$$\chi_F e^{iu\cdot(X_t – X_s)} = \chi_F + \chi_F e^{-iu\cdot X_s}(M(u)_t – M(u)_s) + \int_s^t \chi_F e^{iu\cdot(X_{r-} – X_s)} dA(u)_r.$$

Ως εκ τούτου, αν $f(t) = \mathbb{E}[\chi_F e^{iu\cdot(X_t – X_s)}]/P(F)$ για κάθε $t \geq s$, και $f(t) = 1$ για κάθε $t < s$, τότε αν πάρουμε την μέση τιμή της παραπάνω σχέσης και εφαρμόσουμε το Θεώρημα Fubini (σημειώνουμε ότι η $A(u)$ είναι ντετερμινιστική):

$$f(t) = 1 + \int_0^t f(r-) d[A(u) – A(u)^s](r).$$

Έτσι το Θεώρημα 5.6.1 μας δίνει ότι $f(t) = \mathscr{E}[A(u) – A(u)^s]_t$, δηλαδή για κάθε $t \geq s$:

$$\mathbb{E}[\chi_F e^{iu\cdot(X_t – X_s)}] = P(F)\mathscr{E}[A(u) – A(u)^s]_t.$$

Η παραπάνω σχέση αληθεύει για κάθε $F \in \mathcal{F}_s$, και μας δίνει ότι η $X_t – X_s$ είναι ανεξάρτητη από το $\mathcal{F}_s$. Από τις σχέσεις (5.13) και (6.24), η $\mathscr{E}[A(u) – A(u)^s]_t$ είναι ίση με το δεξί μέρος της (6.30), και οπότε έχουμε την (6.30). Επιπλέον, από την (6.30) έχουμε ότι $(s \uparrow t)$:

$$\mathbb{E}[e^{iu\cdot\Delta X_t}] = 1 + \int (e^{iu\cdot x} - 1)\nu(\{t\} \times dx),$$

το οποίο ισούται με 1 για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$ αν και μόνο αν $\nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) = 0$. Τότε το σύνολο $J = \{t : \nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) > 0\}$ είναι το σύνολο των καθορισμένων χρόνων ασυνέχειας της X. Επίσης από τον παραπάνω τύπο συνάγεται η (6.31). Εδώ τελειώνει η απόδειξη της (6.30). □

Τώρα θα εξηγήσουμε ακριβώς τι εννοούσαμε συγκεκριμένα με το σχόλιο που κάναμε μετά το Θεώρημα 6.4.4.2: ότι η κατανομή ενός ημι−martingale−PII περιγράφεται από τα χαρακτηριστικά του.

Για αυτόν τον σκοπό υποθέτουμε ότι η X είναι μία δοσμένη d−διάστατη càdlàg προσαρμοσμένη σ.δ. που ορίζεται επάνω στον Ω. Θεωρούμε την σ−άλγεβρα $\mathscr{H}$ και το φιλτράρισμα

$$\mathscr{G}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{G}_s^0 \text{ και } \mathscr{G} = \bigvee_t \mathscr{G}_t \text{ όπου } \mathscr{G}_s^0 = \mathscr{H} \vee \sigma(X_r : r \leq s)$$

Θεώρημα 6.4.4.4. *Έστω P και Q δύο μέτρα πιθανότητας επάνω στον $(\Omega, \mathscr{G})$, έτσι ώστε:*

(i) *τα P και Q να συμπίπτουν επάνω στην σ−άλγεβρα $\mathscr{H}$*

(ii) *$X_0 = 0$ P−σ.β. και Q−σ.β.*

(iii) *η X να είναι ένα ημι−martingale με τα ίδια ντεντερμινιστικά χαρακτηριστικά επάνω στις δύο στοχαστικές βάσεις $(\Omega, \mathscr{H}, \mathbb{G}, P)$ και $(\Omega, \mathscr{H}, \mathbb{G}, Q)$ αντίστοιχα.*

Τότε ισχύει ότι $P = Q$.

Ας παρατηρήσουμε ότι στην (iii) μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον φ.χ.π. από την πληρωσή της σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.2 (b) χωρίς να αλλοιώσουμε το αποτελεσμά μας.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 6.4.4.2, η X έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις στις δύο στοχαστικές βάσεις. Αφού τα χαρακτηριστικά είναι τα ίδια, η (6.30) μας δείχνει ότι η μέση τιμή του $\chi_F e^{i\sum_{j\leq n} u^j \cdot (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})}$, όπου $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ και $F \in \mathscr{H}$, είναι η ίδια για το P και για το Q. Αφού η $\mathscr{G}$ παράγεται από την $\mathscr{H}$ και από τις τ.μ. X_t–X_s και $X_0 = 0$, έχουμε ότι $P = Q$. $\square$

Κεφάλαιο 7

Προβλήματα martingales

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε μία από τις σημαντικότερες έννοιες της διπλωματικής εργασίας.

Όπως είναι γνωστό, η κατανομή μίας σ.δ. χαρακτηρίζεται από την οικογένεια των "πεπερασμένης–διάστασης" κατανομών της. Παρόλα αυτά, σπάνια μπορούμε ρητά να υπολογίσουμε αυτές της πεπερασμένης–διάστασης κατανομές, εκτός των ίσως κάποιων PII. Από την άλλη πλευρά, πολλές συνηθισμένες διαδικασίες είναι ημι–martingales. Ένα φυσικό εργαλείο προέκυψε στο κεφάλαιο 6 για να τις μελετήσουμε, συγκεκριμένα τα χαρακτηριστικά τους που συνήθως είναι αρκετά εύκολο να υπολογισθούν.

Το πρώτο ερώτημα που διατυπώνεται σε αυτό το κεφάλαιο είναι το εξής: *σε ποιό βαθμό τα χαρακτηριστικά ενός ημι–martingale πραγματικά χαρακτηρίζουν την κατανομή ενός ημι–martingale;* Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα μπορούσε να είναι θετική, καθώς π.χ. για τις PII σ.δ. (τις έχουμε αναφέρει στο Θεώρημα 6.4.4.2) ή για τις σ.δ. διάχυσης, γενικά, παρ' όλα αυτά η απάντηση είναι αρνητική.

Τα χαρακτηριστικά μπορούν να ορισθούνε για έναν αριθμό σ.δ., που είναι τοπικά martingales (Θεώρημα 6.2.9). Έτσι το ερώτημα μπορεί να τεθεί ως εξής: *ποιά είναι όλα εκείνα τα μέτρα πιθανότητας επάνω σε έναν φιλτραρισμένο χώρο* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ *κάτω από τα οποία όλα τα στοιχεία μίας δοσμένης οικογένειας* $\mathscr{X}$ *από σ.δ. είναι τοπικά martingales;* Ένα τέτοιο πρόβλημα καλείται **martingale–πρόβλημα**. Προβλήματα martingales που αφορούν τα ημι–martingales και τα χαρακτηριστικά τους θα παρουσιασθούν στην Ενότητα 7.4, όπου θα παρουσιασθούν πολλά παραδείγματα. Στην Ένοτητα 7.1 θα εισάγουμε την έννοια του γενικού martingale–προβλήματος . Στην Ενότητα 7.2 εισάγονται τα προβλήματα ημι–martingales που σχετίζονται με τυχαία μέτρα. Στην Ενότητα 7.3

εισάγονται προβλήματα σχετιζόμενα με σημειακές, πολυμεταβλητές σημειακές διαδικασίες και τυχαία μέτρα. Τα παραπάνω είναι σημαντικά για την Ενότητα 7.4 διότι καθιστούν πιο εύκολη την μελέτη των εκεί προβλημάτων, εισάγεται η κλάση των martingale−προβλημάτων, που σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά των ημι−martingales (βλ. Ορισμό 7.4.2) και στη συνέχεια δίνονται κάποιες σημαντικές ιδιοτητές τους. Στην 7.5 δίνουμε ένα παράδειγμα για να κατανοήσουμε καλύτερα τα παραπάνω. Τέλος στην 7.6 αναφέρουμε την ιδιότητα της τοπικής μοναδικότητας και αποδεικνύουμε κάποιες ιδιότητες, που θα βοηθήσουν στο Κεφάλαιο 10.

7.1 Γενικά προβλήματα martingales

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε τι είναι ένα γενικό martingale−πρόβλημα.

Έστω

- ένας φιλτραρισμένος χώρος $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ (όπου δεν ορίζουμε το μέτρο ακόμα) και $\mathscr{H}$ μία σ−υποάλγεβρα του $\mathcal{F}_0$, που καλείται η **αρχική σ−άλγεβρα**,
- μία οικογένεια $\mathscr{X}$ προαιρετικών σ.δ. επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ με τιμές στον $\overline{\mathbb{R}}$.

Ορισμός 7.1.1. Έστω P_H ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στον $(\Omega, \mathscr{H})$ (που καλείται η **αρχική συνθήκη**). Τότε μία **λύση του martingale−προβλήματος** που συνδέεται με τα $\mathscr{H}$ και P_H είναι ένα μέτρο πιθανότητας P επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F})$ έτσι ώστε:
(i) Ο περιορισμός $P \restriction \mathscr{H}$ του P στον $\mathscr{H}$ είναι ίσο με P_H.
(i) Κάθε σ.δ. $X \in \mathscr{X}$ είναι ένα τοπικό martingale στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$.

Αυτή η διατύπωση εξηγεί γιατί στα προηγούμενα κεφάλαια, είχαμε δεχθεί ο φ.χ.π. να μην είναι πλήρης. Εδώ το φιλτράρισμα $\mathbb{F}$ δεν μπορεί να είναι πλήρες, αφού δεν ξέρουμε εκ των προτέρων το μέτρο P, και επομένως ένα martingale−πρόβλημα μπορεί να έχει πολλές λύσεις.

Έχουμε ήδη συναντήσει πολλά τέτοια παραδείγματα:

Παράδειγμα 7.1.2. Η τυπική σ.δ. Wiener. *Έστω W μία συνεχής προσαρμοσμένη σ.δ. ορισμένη στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$. Τότε από το Θεώρημα 6.4.2.1 έχουμε ότι η W είναι μία τυπική σ.δ. Wiener υπό το μέτρο P αν και μόνο αν το P είναι μία λύση του martingale−προβλήματος που συνδέεται με την:*

$$\begin{cases} \mathscr{H} = \sigma(W_0), \quad P_H \text{ είναι το μέτρο έτσι ώστε } P_H(W_0 = 0) = 1 \\ \mathscr{X} = \{W, Y\}, \quad\quad \text{με } \; Y_t = W_t^2 - t. \end{cases}$$

Παράδειγμα 7.1.3. Η τυπική σ.δ.Poisson. *Έστω N μία προσαρμοσμένη σημειακή διαδικασία ορισμένη στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$. Τότε από το Θεώρημα 6.4.3.1 έχουμε ότι η N είναι μία τυπική σ.δ. Poisson υπό το μέτρο P αν και μόνο αν το P είναι μία λύση του martingale−προβλήματος που συνδέεται με την:*

$$\begin{cases} \mathscr{H} = \{\Omega, \emptyset\}, \quad P_H \text{ είναι το προφανές μέτρο πιθανότητας στο } (\Omega, \mathscr{H}), \\ \mathscr{X} = \{X\}, \quad\quad \text{με } \; X_t = N_t - t. \end{cases}$$

7.2 Προβλήματα martingales και τυχαία μέτρα

Σε αυτήν την παράγραφο θα περιγράψουμε την απλούστερη από τις δύο κλάσεις των προβλημάτων martingales που θα ανακύψουν σε αυτήν την διπλωματική. Θεωρούμε τον φιλτραρισμένο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ και την αρχική σ−άλγεβρα $\mathscr{H}$, όπως έχει ορισθεί στην παράγραφο 7.1.
Έστω $(E, \mathcal{E})$ ένας βοηθητικός Πολωνικός χώρος (βλέπε παράγραφο 6.1.1, όπου για πρακτικούς λόγους θεωρούμε $E = \mathbb{R}^d$ ή $\overline{\mathbb{R}}^d$) και θεωρούμε ένα τυχαίο μέτρο μ με ακέραιες τιμές επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times E$, υπο την έννοια του Ορισμού 6.1.2.1. Το μ είναι ένα προαιρετικό τυχαίο μέτρο, που παίρνει τιμές στον $\overline{\mathbb{N}}$, έτσι ώστε $\mu(\omega; \{t\} \times E) \leq 1$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Η διαφορά του σε σχέση με τον Ορισμό 6.1.2.1 είναι ότι δεν μπορούμε να θέσουμε εκ των προτέρων την έννοια "$\widetilde{\mathscr{P}}$ − *σ−πεπερασμένο*" επειδή δεν υπάρχει, μέτρο πιθανότητας. Παρόλα αυτά, έχουμε την επόμενη συνθήκη επάνω στο μέτρο μ:

Συνθήκη 7.2.1. *Υπάρχει μία αυστηρά θετική $\widetilde{\mathscr{P}}$−μετρήσιμη συνάρτηση V επάνω στον $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$ (ας θυμηθούμε ότι $\widetilde{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \otimes \mathcal{E}$) έτσι ώστε $(V * \mu)_\infty(\omega) < \infty$ για όλα τα ω ($V * \mu$ είναι η Stieltjes ολοκληρωτική διαδικασία του V ως προς το μ, βλέπε παράγραφο 6.1.1).*

Είναι προφανές ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε το V με το $V \wedge 1$ στα παραπάνω. Τότε, αν $T_n = \inf\{t : (V * \mu)_t \leq n\}$ θα έχουμε $T_n(\omega) \uparrow \infty$ για κάθε ω καθώς $n \uparrow \infty$, και $(V * \mu)_{T_n} \leq n + 1$. Ως εκ τούτου η $V' := \sum_{n \geq 1} 2^{-n} V \chi_{[\![0, T_n]\!] \times E}$ είναι $\widetilde{\mathscr{P}}$−μετρήσιμη και αυστηρά θετική συνάρτηση και ισχύει ότι $(V' * \mu)_\infty = \sum_{n \geq 1} (n + 1) 2^{-n}$. Επομένως από τα παραπάνω προκύπτει:

Συνθήκη 7.2.2. *Υπάρχει μία αυστηρά θετική $\widetilde{\mathscr{P}}$−μετρήσιμη συνάρτηση V επάνω στον $\widetilde{\Omega}$ έτσι ώστε η $(V * \mu)_\infty$ να είναι φραγμένη.*

Ιδιαιτέρως, τότε συμπεραίνουμε ότι το μ είναι $\widetilde{\mathscr{P}}$−σ−πεπερασμένο σε σχέση με όλα τα μέτρα πιθανότητας επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F})$.

Ορισμός 7.2.3. Θεωρούμε τον φιλτραρισμένο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$, την αρχική σ–άλγεβρα $\mathscr{H}$ και το μέτρο μ ικανοποιεί την Συνθήκη 7.2.1. Έστω P_H μία αρχική συνθήκη (δηλαδή, ένα μέτρο πιθανότητας P_H επάνω στον $(\Omega, \mathscr{H})$). Έστω ν ένα προβλέψιμο τυχαίο μέτρο επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times E$. Τότε, μία **λύση του martingale−προβλήματος** που σχετίζεται με $(\mathscr{H}, \mu)$ και (P_H, ν), είναι ένα μέτρο πιθανότητας P επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F})$ έτσι ώστε:
(i) Ο περιορισμός $P \upharpoonright \mathscr{H}$ του P στον $\mathscr{H}$ να ισούται με το P_H.
(ii) Το ν είναι ο αντισταθμιστής του μ επάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$.
Συμβολίζουμε με $s(\mathscr{H}, \mu | P_H, \nu)$ το σύνολο όλων των λύσεων.

Πρόταση 7.2.4. *Το P ανήκει στον $s(\mathscr{H}, \mu | P_H, \nu)$ αν και μόνο αν είναι μία λύση του martingale−προβλήματος του Ορισμού 7.1.1, με $\mathscr{X}$ την οικογένεια όλων των σ.δ. της μορφής*

$$X = (WV) * \mu - (WV) * \nu \tag{7.1}$$

όπου W είναι μία μη−αρνητική φραγμένη $\widetilde{\mathscr{P}}$−μετρήσιμη συναρτήση και η V είναι όπως στην Συνθήκη 7.2.2.

Απόδειξη. Ας τονίσουμε ότι κάθε σ.δ. της σχέσης (7.1) είναι καλά ορισμένη (με τιμές στο $[-\infty, \infty]$). Υποθέτουμε πρώτα ότι $P \in s(\mathscr{H}, \mu | P_H, \nu)$. Τότε $WV * \mu \in \mathscr{A}^+$ και έτσι από τον ορισμό του αντισταθμιστή (βλ. Θεώρημα 6.1.1.5 (ii)), έχουμε ότι $WV * \mu - WV * \nu \in \mathscr{M}$.
Αντίστροφα, ας θεωρήσουμε ότι όλα τα X της σχέσης (7.1) είναι τοπικά martingales στην $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ για κάποιο μέτρο P. Τότε $\mathbb{E}[(WV * \mu)_\infty] = \mathbb{E}[(WV * \nu)_\infty]$ για όλες τις φραγμένες και μη−αρνητικές $\widetilde{\mathscr{P}}$−μετρήσιμες W (επειδή $WV * \nu$ είναι ο αντισταθμιστής του $WV * \mu$). Επίσης από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, ισχύουν τα ίδια για όλες τις μη−αρνητικές $\widetilde{\mathscr{P}}$−μετρήσιμες W, φραγμένες ή όχι. Τότε το ν είναι ο αντισταθμιστής του μ επάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ και επομένως αποδείχθηκε. $\square$

Παρατήρηση 7.2.5. Στον ορισμό της οικογένειας $\mathscr{X}$, δεν είναι απαραίτητο να πάρουμε όλα αυτά τα W. Θα μπορούσαμε να πάρουμε όλα τα W της μορφής $W(\omega, t, x) = g(x)$ όπου η g κυμαίνεται στα σύνολα που περιέχουν όλες τις φραγμένες μη−αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις επάνω στον $(E, \mathcal{E})$ ή ακόμα μέσα από ένα μικρότερο υποσύνολο της κλάσης $\mathscr{C}^+(\mathbb{R}^d)$ οπως έχει ορισθεί στην 6.2.8, όταν $E = \mathbb{R}^d$.

Πρόταση 7.2.6. *Το $s(\mathscr{H}, \mu|P_H, \nu)$ είναι ένα κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $P, P' \in s(\mathscr{H}, \mu|P_H, \nu)$ και $Q = \alpha P + (1-\alpha)P'$ όπου $\alpha \in (0,1)$. Τότε

$$Q \restriction \mathscr{H} = \alpha P \restriction \mathscr{H} + (1-\alpha)P' \restriction \mathscr{H} = \alpha P_H + (1-\alpha)P_H,$$

και για όλες τις μη−αρνητικές $\widetilde{\mathscr{P}}$−μετρήσιμες συναρτήσεις W στον $\widetilde{\Omega}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[(W * \mu)_\infty] &= \alpha \mathbb{E}_P[(W * \mu)_\infty] + (1-\alpha)\mathbb{E}_{P'}[(W * \mu)_\infty] \\
&= \alpha \mathbb{E}_P[(W * \nu)_\infty] + (1-\alpha)\mathbb{E}_{P'}[(W * \nu)_\infty] \\
&= \mathbb{E}_Q[(W * \nu)_\infty].
\end{aligned}$$

Έτσι το ν είναι ο Q−αντισταθμιστής του μ. □

Σαν πρώτο παράδειγμα, έχουμε (γενικευμένα) μέτρα Poisson (βλ. παράγραφο 6.1.3). Επομένως το Θεώρημα 6.4.3.2 μπορεί να πάρει την εξής μορφή:

Θεώρημα 7.2.7. *Υποθέτουμε ότι στον Ορισμό 7.2.3 το μέτρο ν να είναι ντετερμινιστικό (δηλαδή $\nu(\omega, \bullet) = m(\bullet)$ για κάποιο μέτρο m).*

(a) *Το P ανήκει στο $s(\mathscr{H}, \mu|P_H, \nu)$ αν και μόνο αν το μ είναι ένα γενικευμένο μέτρο Poisson επάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, με μέτρο έντασης ν και $P \restriction \mathscr{H} = P_H$.*

(b) *Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\Sigma = \mathcal{F}_{\infty-}$ και ότι $\mathbb{F}$ είναι το ελάχιστο φιλτράρισμα έτσι ώστε το μ να είναι προαιρετικό μέτρο και $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}_0$. Τότε το $s(\mathscr{H}, \mu|P_H, \nu)$ περιέχει το πολύ ένα στοιχείο.*

Απόδειξη. (a) Το πρώτο αποτέλεσμα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 6.4.3.2 (a). Επιπλέον, από το Θεώρημα 6.4.3.2 έχουμε ότι αν το P είναι μία λύση, τότε

$$\mathbb{E}\left[\chi_B \exp \sum_{j \le d} i u_j \mu(A_j)\right],$$

όπου $B \in \mathscr{H}$, $u_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{E}$, βασίζονται μόνο στο ν και $P(B) = P_H(B)$. Αφού $\mathcal{F} = \mathscr{H} \vee \sigma(\mu(A) : A \in \mathcal{E})$, συμπεραίνουμε την μοναδικότητα για την P. $\square$

Αυτό το θεώρημα μας δίνει την μοναδικότητα. Υπάρχει επίσης ένα αποτέλεσμα ύπαρξης, αλλά για αυτό ο χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$ πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος ώστε να περιέχει όλα τις πιθανές "τροχιές" του τυχαίου μέτρου με ακέραιες τιμές. Ας τονίσουμε το εξής αποτέλεσμα με έναν περιγραφικό τρόπο. Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ο **κανονικός χώρος** (βλ. Υπόθεση 7.4.7) όλων των τυχαίων μέτρων με ακέραιες τιμές επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times E$ και συμβολίζουμε με μ το κανονικό τυχαίο μέτρο επάνω στον Ω. Έστω $\mathbb{F}$ το ελάχιστο φιλτράρισμα για τα οποία το μ είναι προαιρετικό και $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\infty-}$. Τελικά, έστω $\mathscr{H}$ η τετριμένη σ−άλγεβρα $\{\Omega, \emptyset\}$ με το τετριμένο μέτρο πιθανότητας P_H. Τότε:

Αν m είναι οποιοδήποτε θετικό σ−πεπερασμένο μέτρο επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times E$ έτσι ώστε $m(\{t\} \times E) \leq 1$ για όλα τα t και αν $\nu(\omega, \bullet) = m(\bullet)$, υπάρχει μία και μόνο μία λύση στο $s(\mathscr{H}, \mu | P_H, \nu)$.

(Για τη απόδειξη βλέπε [17]). Φυσικά, υπάρχει επίσης μία εκδοχή του παραπάνω αποτελέσματος με μη−τετριμένη αρχική συνθήκη.

7.3 Σημειακές διαδικασίες και πολυμεταβλητές σημειακές διαδικασίες

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ ένας φιλτραρισμένος χώρος με αρχική σ−άλγεβρα $\mathscr{H}$. Υποθέτουμε ότι ο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ είναι εφοδιασμένος με μία προσαρμοσμένη σημειακή διαδικασία N (βλ. παράγραφο 4.2). Έστω $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία χ.δ. που αντιστοιχεί στην N (βλ. Ορισμό 4.2.6).
Επίσης θεωρούμε μία αρχική συνθήκη P_H στο $(\Omega, \mathscr{H})$ και μία αύξουσα càdlàg προβλέψιμη διαδικασία A με $A_0 = 0$. Μας ενδιαφέρουν εκείνα τα μέτρα P για τα οποία το A είναι ο αντισταθμιστής του N και $P \restriction \mathscr{H} = P_H$.
Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί στο πλαίσιο της προηγούμενης παραγράφου, ως ακολούθως. Θέτουμε $E := \{1\}$. Τότε η N μπορεί να θεωρηθεί ως η "συνάτηση κατανομής" ενός τυχαίου μέτρου μ με ακέραιες τιμές στον $\mathbb{R}_+ \times \{1\}$, δηλαδή (βλέπε Παράδειγμα 6.1.1.4):

$$\mu(\omega; dt, dx) = \sum_{n \geq 1} \chi_{\{T_n < \infty\}} \delta_{(T_n, 1)}(dt \times dx) \tag{7.2}$$

το οποίο προφανές σχετίζεται με την Συνθήκη 7.2.1, αν πάρουμε

$$V = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \chi_{]\!]0,T_n[\![\times \{1\}})$$

και ανάλογα το A είναι η συνάρτηση κατανομής του προβλέψιμου τυχαίου μέτρου ν:

$$\nu(dt, dx) = dA_t \delta 1(dx). \tag{7.3}$$

Τέλος, έχουμε ακόμα μία υπόθεση:

Υπόθεση 7.3.1. *$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\infty-}$ και $\mathbb{F}$ είναι το ελάχιστο φιλτράρισμα για το οποίο η N είναι προσαρμοσμένη και έτσι ώστε $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}_0$ (δηλαδή $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^0$, $\mathcal{F}_s^0 = \mathscr{H} \vee \sigma(N_r : r \leq s)$).*

Θεώρημα 7.3.2. *Κάτω από τις παραπάνω υποθέσεις και ιδιαίτερα την τελευταία, υπάρχει το πολύ ένα μέτρο πιθανότητας P έτσι ώστε $P_{|\mathscr{H}} = P_H$ και το A να είναι ο αντισταθμιστής του N στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ (με άλλα λόγια, το $s(\mathscr{H}, \mu | P_H, \nu)$ έχει το πολύ μία λύση).*

Παρατηρήσεις 7.3.3. Έχουμε μιλήσει μόνο για τα αποτελέσματα της μοναδικότητας. Όσον αφορά την ύπαρξη, αυτό είναι ένα άλλο θέμα.

(a) Μπορεί κανείς να ελπίζει για μία λύση αν το Ω είναι αρκετά πλούσιος χώρος, για παράδειγμα αν είναι ο κανονικός χώρος από όλες τις σημειακές διαδικασίες.

(b) Ακόμα και έτσι, δεν είμαστε σίγουροι για την ύπαρξη επειδή η σημειακή διαδικασία επιτρέπεται να μας οδηγήσει στην ″έκρηξη″ σε ένα πεπερασμένο χρόνο από τον αντισταθμιστή του.

Πράγματι, μπορεί να αποδειχθεί η ύπαρξη και μοναδικότητα αν το Ω είναι το σύνολο όλων των απαριθμητριών συναρτήσεων με τιμές στον $\overline{\mathbb{N}}$ (δηλαδή της μορφής (4.1) αλλά το όριο $\lim_n \uparrow T_n$ είναι πεπερασμένο ή άπειρο, βλέπε [19])

Το Θεώρημα 7.3.2 είναι μία ειδική περίπτωση από μία παρόμοια κατάσταση που αφορά στις πολυδιάστατες σημειακές διαδικασίες, που ορίζουμε παρακάτω:

Ορισμός 7.3.4. Έστω $(E, \mathcal{E})$ ένας Πολωνικός χώρος. Μία **πολυμεταβλητή σημειακή διαδικασία** με τιμές στον E είναι ένα τυχαίο μέτρο μ με ακέραιες τιμές στον $\mathbb{R}_+ \times E$ έτσι ώστε $\mu(\omega; [0,t] \times E) < \infty$ για κάθε $\omega, t \in \mathbb{R}_+$.

Ας εισάγουμε την ακολουθία χ.δ. $T_n := \inf\{t : \mu([0,t] \times E) \geq n\}$. Τότε $T_n < T_{n+1}$, αν $T_n < \infty$ και $T_n \uparrow \infty$ καθώς $n \uparrow \infty$. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.1.2.2 υπάρχουν τ.μ. Z_n που είναι $\mathcal{F}_{T_n}-$μετρήσιμες με τιμές στον E έτσι ώστε

$$\mu(dt, dx) = \sum_{n \geq 1} \chi_{\{T_n < \infty\}} \delta_{(T_n, Z_n)}(dt, dx). \tag{7.4}$$

Ας σημειώσουμε ότι το μέτρο μ πληροί την Συνθήκη 7.2.1 παίρνουμε $V = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \chi_{[\![0, T_n]\!] \times E}$. Επίσης θεωρούμε μία αρχική συνθήκη P_H επάνω στον $(\Omega, \mathscr{H})$ και ένα προβλέψιμο τυχαίο μέτρο ν στον $\mathbb{R}_+ \times E$.

Τελικά έχουμε την ακόλουθη υπόθεση:

Υπόθεση 7.3.5. *$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\infty-}$ και $\mathbb{F}$ είναι το ελάχιστο φιλτράρισμα για το οποίο το μ είναι προαιρετικό και έτσι ώστε $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}_0$ (δηλαδή $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}^0_s$, $\mathcal{F}^0_s = \mathscr{H} \vee \sigma\{\mu([0,r] \times B) : r \leq s, B \in \mathcal{E}\}$).*

Αφού μία σημειακή διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί σαν μία πολυμεταβλητή σημειακή διαδικασία με τιμές στον E, με το E να ανάγεται σε ένα σημείο, στην περίπτωση αυτή η Υπόθεση 7.3.5 ανάγεται στην Υπόθεση 7.3.1.

Το ακόλουθο επεκτείνει το Θεώρημα 7.3.2:

Θεώρημα 7.3.6. *Κάτω από τις ανωτέρω υποθέσεις (ιδιαιτέρως το μ είναι μία πολυμεταβλητή σημειακή διαδικασία και ισχύει η Υπόθεση 7.3.5), το σύνολο $s(\mathscr{H}, \mu | P_H, \nu)$ περιέχει το πολύ ένα σημείο.*

Παρατηρήσεις 7.3.7. (a) Το Θεώρημα 7.3.6 είναι συνήθως λανθασμένο όταν το μέτρο μ είναι ένα τυχαίο μέτρο με ακέραιες τιμές, αλλά όχι όταν είναι μία πολυμεταβλητή σημειακή διαδικασία (παρόλα αυτά, έχουμε δει ότι είναι σωστό για τυχαία μέτρα Poisson).

(b) Σχετικά με τις σημειακές διαδικασίες, ένα αποτέλεσμα ύπαρξης μπορεί να βρεθεί στον J.Jacod [19].

7.4 Προβλήματα martingales και ημι$-$Martingales

Σε αυτό το εδάφιο θα εισάγουμε την δεύτερη και πιο σημαντική κλάση των προβλημάτων martingales, δηλαδή αυτά που σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά των ημι−martingales. Τέλος θα δώσουμε κάποια παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω εννοιών.

Σε όλη την παράγραφο θα θεωρήσουμε τον φιλτραρισμένο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ και μία αρχική σ−άλγεβρα $\mathscr{H}$, όπως επίσης μία αρχική συνθήκη P_H (το οποίο είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στον $(\Omega, \mathscr{H})$). Ας σημειώσουμε ότι δεν γνωρίζουμε ποιό είναι το μέτρο επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F})$ ακόμα.

Υποθέσεις 7.4.1. *Για όλη την Ενότητα 7.4 υποθέτουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω:*

(a) $X = \{X^i\}_{i\leq d}$ *είναι μία d−διάστατη càdlàg προσαρμοσμένη διαδικασία επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$. Η X συνήθως είναι ένα ημι−martingale και έτσι από δω και κάτω θεωρούμε δοσμένες:*

(b) *μία συνάρτηση περικόπης $h \in \mathscr{C}_t^d$*

(c) *μία τριάδα (B, C, ν) (μία υποψήφια τριάδα για τα χαρακτηριστικά του X), όπου:*

- *(i) $B = \{B^i\}_{i\leq d}$ είναι $\mathbb{F}$−προβλέψιμη σ.δ., με πεπερασμένη ολική κύμανση επάνω σε πεπερασμένα διαστήματα, και $B_0 = 0$.*
- *(ii) $C = \{C^{ij}\}_{i,j\leq d}$ είναι $\mathbb{F}$−προβλέψιμη, συνεχής σ.δ., $C_0 = 0$ και $C_t - C_s$ είναι ένας μη−αρνητικός συμμετρικός πίνακας $d \times d$ για $s \leq t$.*
- *(iii) Το ν είναι $\mathbb{F}$−προβλέψιμο τυχαίο μέτρο επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, το οποίο δεν ορίζεται στους χώρους $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$, και $\{0\} \times \mathbb{R}^d$, και είναι τέτοιο ώστε $(|x| \wedge 1) * \nu_t(\omega) < \infty$ και $\int \nu(\omega; \{t\} \times dx) h(x) = \Delta B_t(\omega)$ και $\nu(\omega; \{t\} \times \mathbb{R}^d) \leq 1$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $t \in \mathbb{R}_+$.*

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι ακριβώς οι ιδιότητες που χρειαζόμαστε ώστε να είναι μία ″καλή″ εκδοχή χαρακτηριστικών, όπως κατασκευάστηκαν στην Πρόταση 6.2.5.

Ορισμός 7.4.2. Μία λύση για το martingale−πρόβλημα που συνδέεται με $(\mathscr{H}, X)$ και $(P_H; B, C, \nu)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F})$ έτσι ώστε:
(i) Ο περιορισμός $P \restriction \mathscr{H}$ του P στον $\mathscr{H}$ να είναι ίσος με το P_H.
(ii) Το X να είναι ένα ημι−martingale επάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, με χαρακτηριστικά (B, C, ν) σε σχέση με την συνάρτηση περικοπής h.
Συμβολίζουμε με $s(\mathscr{H}, X | P_H; B, C, \nu)$ το σύνολο όλων των λύσεων P.

Παρόλο που το "πρόβλημα ημι−martingale" φαίνεται μία κατάλληλη ονομασία, η ορολογία "martingale−πρόβλημα" συνήθως χρησιμοποιείται για τα παραπάνω, διότι αυτό πράγματι ανάγεται στο πρόβλημα του Ορισμού 7.1.1, όπως φαίνεται παρακάτω. Πριν από αυτό, ας θυμηθούμε τον ορισμό της ακόλουθης càdlàg σ.δ. (βλέπε τις σχέσεις (6.13),(6.14) και (6.15))

$$\begin{cases} \breve{X}(h)_t := \sum_{s\leq t}[\Delta X_s - h(\Delta X_s)] \\ \\ X(h) := X - \breve{X}(h) \\ \\ M(h) := X(h) - X_0 - B. \end{cases} \tag{7.5}$$

Επίσης, ας θυμηθούμε ότι (βλέπε σχέση (6.21)),

$$\widetilde{C}^{ij} = C^{ij} + (h^i h^j) * \nu - \sum_{s\leq \bullet} \Delta B^i_s \Delta B^j_s. \tag{7.6}$$

Σημειώνουμε ότι η $\widetilde{C}$ ικανοποιεί την Ιδιότητα (c) (ii), εκτός του ότι είναι càdlàg και όχι απαραίτητα συνεχής. Ως συνήθως, μ^X είναι ένα τυχαίο μέτρο που συνδέεται με τα άλματα του X σύμφωνα με την Πρόταση 6.1.2.3.

Τα παρακάτω αποτελέσματα είναι μία αναδιατύπωση του Θεωρήματος 6.2.9.

Θεώρημα 7.4.3. *Ένα μέτρο πιθανότητας ανήκει στο $s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$ αν και μόνο αν είναι μία λύση του martingale−προβλήματος του Ορισμού 7.1.1 σχετιζόμενη με την P_H και την οικογένεια $\mathscr{X}$ των διαδικασιών που αποτελείται από τα ακόλουθα:*

(i) $M(h)^i$, *για* $i \leq d$

(ii) $M(h)^i M(h)^j - \widetilde{C}^{ij}$, *για* $i, j \leq d$

(iii) $g * \mu^X - g * \nu$, *όπου* $g \in \mathscr{C}^+(\mathbb{R}^d)$ *(βλ. Θεώρημα 6.2.9).*

Πόρισμα 7.4.4. *Το σύνολο $s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$ είναι ένα κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω P, P' δύο λύσεις και $Q = bP + (1-b)P'$ ένας κυρτός συνδυασμός με $b \in [0,1]$. Είναι προφανές ότι $Q \restriction \mathscr{H} = P_H$. Έστω μία σ.δ. Y που ικανοποιεί το Θεώρημα 7.4.3. Τότε $Y_0 = 0$ και η $|\Delta Y|$ είναι φραγμένη από την κατασκευή της. Αν $T_n = \inf\{t : |Y_t| > n\}$, τότε η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία από χ.δ. που αυξάνει στο $+\infty$ και η Y^{T_n} είναι φραγμένη. Τότε από την Πρόταση 2.5.10, η Y^{T_n} είναι ένα ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale για το το P και το P', και για κάθε χ.δ. S έχουμε $\mathbb{E}[Y_S^{T_n}] = 0$,

$$\mathbb{E}_Q[Y_S^{T_n}] = b\mathbb{E}_P[Y_S^{T_n}] + (1-b)\mathbb{E}_{P'}[Y_S^{T_n}] = 0$$

και από την Πρόταση 2.5.7 έχουμε ότι η Y^{T_n} είναι ένα $Q-$martingale. Επομένως η Y είναι ένα $Q-$τοπικό$-$martingale και $Q \in s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$ από το Θεώρημα 7.4.3. □

Παρατήρηση 7.4.5. **(i)** Σε κάποιες περιπτώσεις οι Υποθέσεις 7.4.1 (a) και (c) είναι αρκετά ισχυρές, και θα πρέπει να αντικατασταθούν από τις:

$$\begin{cases} X, & \text{είναι μία προσαρμοσμένη σ.δ. με τιμές στον } \overline{\mathbb{R}}^d \\ B, & \text{είναι μία προπροβλέψιμη σ.δ. με τιμές στον } \overline{\mathbb{R}}^d \\ C, & \text{είναι μία προβλέψιμη σ.δ. με τιμές στον } \overline{\mathbb{R}}^{d\times d} \\ \nu, & \text{είναι ένα προβλέψιμο τυχαίο μέτρο επάνω στον } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{7.7}$$

Τότε στον Ορισμό 7.4.2, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε την (ii) με την:

(ii)$'$ η σ.δ. X είναι καθολικά ισοδύναμη με ένα ημι−martingale επάνω στην $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, του οποίου τα χαρακτηριστικά είναι καθολικά ισοδύναμα με τα (B, C, ν). Φυσικά, αν το P είναι μία λύση, τότε η σ.δ. X είναι μία $P-$σ.β. càdlàg και παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^d$, και τα (B, C, ν) ικανοποιούν την Υπόθεση 7.4.1 (c) εκτός από ένα $P-$μηδενικό σύνολο. Σε αυτήν την περίπτωση, το Θεώρημα 7.4.3 και το Πόρισμα 7.4.4 είναι αληθή, όπως φαίνεται εύκολα, αν στην σχέση (7.6) θέσουμε $\widetilde{C}_t^{ij} = +\infty$ όταν το δεξιό μέρος δεν είναι καλά ορισμένο, και στο Θεώρημα 7.4.3 προσθέτουμε ότι $P-$σ.β. η:

$$B \text{ έχει πεπερασμένη ολική κύμανση επάνω σε πεπερασμένα διαστήματα.} \tag{7.8}$$

(ii) Μπορεί κανείς να πάει ακόμη περισσότερο, αν στην σχέση (7.7) βγάλουμε την προβλεψιμότητα και δεν είναι προσαμοσμένες. Τότε αν η P είναι μία λύση, τα X, B, C, ν είναι προσαρμοσμένα ή προβλέψιμα σε σχέση με το πλήρη φιλτράρισμα $\mathbb{F}^P$ μόνο.

Τελειώνουμε αυτήν την Ενότητα με μία περιγραφή με επιπλέον υποθέσεις που φυσικά συμπληρώνουν τον φιλτραρισμένο χώρο και την Υπόθεση 7.4.1 (a). Μέχρι εδώ ο χώρος $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ είναι αυθαίρετος, από το γεγονός ότι στηρίζεται στην προσαρμοσμένη σ.δ. X. Παρόλα αυτά, εκτός από κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις, δεν μπορούμε να ελπίζουμε για την μοναδικότητα της λύσης του συνόλου $s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$ εκτός εάν έχουμε την εξής υπόθεση:

Υπόθεση 7.4.6. *Η $\mathbb{F}$ παράγεται από την X και την $\mathscr{H}$, με το οποίο εννοούμε τα εξής:*
(i) $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^0$ *και* $\mathcal{F}_s^0 = \mathscr{H} \vee \sigma(X_r : r \leq s)$ *(με άλλα λόγια, η $\mathbb{F}$ είναι το ελάχιστο φιλτράρισμα έτσι ώστε η X να είναι προσαρμοσμένη και $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}_0$).*
(ii) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\infty-} (= \bigvee_t \mathcal{F}_t)$.

Την παραπάνω υπόθεση την έχουμε ήδη συναντήσει την Ενότητα 7.3. Όσον αφορά την ύπαρξη μίας λύσης ενός martingale−προβλήματος, χρειαζόμαστε μία καλύτερη δομή για το Ω, και μία κατάλληλη δομή είναι η εξής:

Η κανονική υπόθεση 7.4.7. *Το Ω είναι ο* ***κανονικός χώρος*** *(επίσης συμβολίζεται με $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$) όλων των càdlàg συναρτήσεων $\omega : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}^d$. Η X είναι η* ***κανονική σ.δ.*** *που ορίζεται από την $X_t(\omega) = \omega(t)$ και $\mathscr{H} = \sigma(X_0)$. Τελικά η $\mathbb{F}$ παράγεται από την X και την $\mathscr{H}$ κατα την Υπόθεση 7.4.6.*

Βλ. π.χ. [16], Chapter VI, §1a, 1b, 1c για περισσότερες πληροφορίες.

Στην κανονική υπόθεση, ή πιο γενικότερα όταν η $\mathscr{H} = \sigma(X_0)$, μπορούμε να ταυτίσουμε το αρχικό μέτρο P_H με την κατανομή της X_0 στον $\mathbb{R}^d$:

Συμβολισμός: αν $\mathscr{H} = \sigma(X_0)$ και αν το η είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στον $\mathbb{R}^d$, επίσης με η συμβολίζουμε το μέτρο επάνω στον $(\Omega, \mathscr{H})$ που ορίζεται από την σχέση $\eta(X_0 \in A) = \eta(A)$.

7.5 Παράδειγμα:στοχαστικές διαδικασίες με ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Έχουμε ήδη συναντήσει και λύσαμε κατάλληλα, μία σειρά από martingale−προβλήματα με (υπο συνθήκη) ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Για παράδειγμα, αν το P_H είναι ένα αυθαίρετο μέτρο πιθανότητας επάνω στον $(\Omega, \mathscr{H})$, τότε μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το Θεώρημα 6.4.2.1 ως εξής:

Θεώρημα 7.5.1. *Έστω $d = 1$ και υποθέτουμε ότι $X_0 = 0$. Έστω σ^2 μία συνεχής αύξουσα συνάρτηση με $\sigma^2(0) = 0$. Τότε το P ανήκει στο σύνολο λύσεων $s(\mathscr{H}, X|P_H; 0, \sigma^2, 0)$ αν και μόνο αν η X είναι μία σ.δ. Wiener με συνάρτηση διακύμανσης σ^2 επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$.*

Αυτό στην ουσία είναι το ίδιο με το Παράδειγμα 7.1.2.

Γενικότερα, μπορούμε να γράφουμε τα Θεωρήματα 6.4.4.2 και 6.4.4.4 στην παρακάτω μορφή:

Θεώρημα 7.5.2. *Έστω ότο η τριάδα (B, C, ν) ικανοποιεί την Υπόθεση 7.4.1(c) και είναι ντεντερμινιστική. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(a) *Το P ανήκει στο $s(\mathscr{H}, X, |P_H; B, C, \nu)$ αν και μόνο αν $P \upharpoonright \mathscr{H} = P_H$ και X–X_0 είναι μία PII επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ της οποίας η κατανομή περιγράφεται από την (6.30).*

(b) *Επιπλέον υποθέτουμε ότι η $\mathcal{F}$ παράγεται από την από την σ.δ. X και την $\mathscr{H}$ (βλέπε Υπόθεση 7.4.6). Τότε το σύνολο $s(\mathscr{H}, X, |P_H; B, C, \nu)$ περιέχει το πόλυ ένα στοιχείο του P.*

(c) *Έστω επιπλέον ότι ισχύει η κανονική υπόθεση 7.4.7. Τότε για κάθε μέτρο πιθανότητας η επάνω στον $\mathbb{R}^d$, το σύνολο $s(\mathscr{H}, X, |\eta; B, C, \nu)$ περιέχει μία και μόνο μία λύση.*

Ορισμός 7.5.3. Μία τ.μ. $Y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ και μία $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathscr{G}$ της $\mathcal{F}$ είναι **υπο συνθήκη ανεξάρτητες** ως προς μία $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathscr{H}$ αν

$$\mathbb{E}\left[f(Y)Z|\mathscr{H}\right] = \mathbb{E}\left[f(Y)|\mathscr{H}\right]\mathbb{E}\left[Z|\mathscr{H}\right]$$

για όλες τις φραγμένες $\mathfrak{B}-$μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ και όλες τις φραγμένες $\mathscr{G}-$μετρήσιμες τ.μ. Z.

Ορισμός 7.5.4. Έστω $\mathscr{H}$ μία $\sigma-$υποάλγεβρα της $\mathcal{F}_0$. Μία σ.δ. με **$\mathscr{H}-$υπο συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις** (εν συντομία, $\mathscr{H}-$PII), είναι μία càdlàg προσαρμοσμένη σ.δ. με τιμές στον $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $X_0 = 0$ και για όλα τα $0 \leq s \leq t$ η τ.μ. $X_t - X_s$ και η σ–άλγεβρα $\mathcal{F}_s$ είναι υπο συνθήκη ανεξάρτητες ως προς την $\mathscr{H}$.

Θεώρημα 7.5.5. *Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{F}$ παράγεται από την από την σ.δ. X και την $\mathscr{H}$ (βλέπε την Υπόθεση 7.4.6), και ότι κάθε ένα από τα χαρακτηριστικά (B, C, ν) είναι $\mathscr{H}-$μετρήσιμο. Τότε το σύνολο $s(\mathscr{H}, X, |P_H; B, C, \nu)$ περιέχει το πολύ ένα στοιχείο του P, στην περίπτωση αυτή η X–X_0 είναι μία $\mathscr{H}-$PII επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$.*

7.6 Τοπική μοναδικότητα

Σε αυτήν την ενότητα για "τεχνικούς" λόγους, χρήσιμους για τα οριακά θεωρήματα καθώς και για την μελέτη της απόλυτης συνέχειας, χρειαζόμαστε μία μορφή μοναδικότητας για τα προβλήματα−martingales, η οποία είναι ισχυρότερη από την "συνήθη" μοναδικότητα τη λύσης του $s(\mathscr{H}, X, |P_H; B, C, \nu)$.

Η υπόθεση είναι αυτή που έχουμε και στην Παράγραφο 7.1, και θεωρούμε επιπλέον ότι η $\mathbb{F}$ παράγεται από την X και την $\mathscr{H}$ (Υπόθεση 7.4.6). Στην διπλωματική εργασία οι χ.δ. ως προς ένα "φιλτράρισμα" $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ παίζουν βασικό ρόλο. Για να τονίσουμε το γεγονός ότι η $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ δεν είναι ένα φιλτράρισμα, όπως το χρειαζόμαστε (διότι γενικά δεν είναι δεξιά συνεχές), δίνουμε ειδικό όνομα στους χ.δ. ως προς αυτό:

Ορισμός 7.6.1. Ένας **γνήσιος χ.δ.** (ή ένας χ.δ. ως προς το φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t\geq 0}$) είναι μία απεικόνιση $T : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ έτσι ώστε $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t^0$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$. Αν T είναι ένας γνήσιος χ.δ., τότε η $\mathcal{F}_T^0$ συμβολίζει την $\sigma-$άλγεβρα όλων των $A \in \mathcal{F}$ έτσι ώστε $A \cap \{T \leq t\}$ να ανήκει στο $\mathcal{F}_t^0$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.

Αφού $\mathcal{F}_{t-} \subseteq \mathcal{F}_t^0 \subseteq \mathcal{F}_t$ για κάθε $t > 0$ έχουμε:

Παρατήρηση 7.6.2. Ένας γνήσιος χ.δ. είναι ένας χ.δ., $\mathcal{F}_T^0 \subseteq \mathcal{F}_T$ και $\mathcal{F}_{T-} \subseteq \mathcal{F}_T^0$ επάνω στο $\{T > 0\}$. Ένας προβλέψιμος χρόνος T είναι ένας γνήσιος χ.δ. αν $\{T = 0\} \in \mathcal{F}_0^0$.

Έστω (B, C, ν) μία τριάδα με τις Υποθέσεις 7.4.1. Αν T είναι ένας χ.δ., τότε γνωρίζουμε πως ορίζουμε τις διακοπτόμενες σ.δ. X^T, B^T, C^T, και το **διακοπτόμενο τυχαίο μέτρο** ν^T ορίζεται από την

$$\nu^T(\omega; ds, dx) = \nu(\omega; ds, dx)\chi_{\{s\leq T(\omega)\}}.$$

Επομένως $W * \nu^T = (W * \nu)^T$.

Ορισμός 7.6.3. Ας θεωρήσουμε ότι ισχύει η Υπόθεση 7.4.6. Τότε λέμε ότι ικανοποιείται η **τοπική μοναδικότητα** για το martingale−πρόβλημα (Ορισμός 7.4.2), αν για κάθε γνήσιο χ.δ. T , οποιεσδήποτε δύο λύσεις P και P' του "διακοπτόμενου" martingale−προβλήματος $s(\mathscr{H}, X^T|P_H; B^T, C^T, \nu^T)$ συμπίπτουν επάνω στην $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}_T^0$ (η τοπική μοναδικότητα μας δίνει την μοναδικότητα, αν πάρουμε $T \equiv \infty$).

Είναι φανερό από τον ορισμό της, ότι η τοπική μοναδικότητα δεν θα είναι εύκολο να ελεγχθεί αν ισχύει, εκτός αν μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτή προκύπτει από την μοναδικότητα. Δεν μπορούμε να ελπίζουμε για αυτό γενικώς. Εντούτοις, αυτό αληθεύει όταν το martingale−πρόβλημα έχει τη μορφή ενός ″Μαρκοβιανού″ τύπου, το οποίο περιγράφουμε παρακάτω.

Από εδώ και πέρα υποθέτουμε ότι ο χώρος $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ είναι κανονικός, με την κανονική σ.δ. X και $\mathscr{H} = \mathcal{F}_0^0$ (βλέπε Υπόθεση 7.4.6). Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει μία απεικόνιση (η **μετατόπιση** (shift)) $\theta_t : \Omega \longmapsto \Omega$, που ορίζεται από την

$$X_s \circ \theta_t(\omega) := X_{s+t}(\omega) \quad \forall\, s \geq 0, \ \ \forall\, \omega \in \Omega. \tag{7.9}$$

Υπόθεση 7.6.4. *Έστω ότι μας δίνεται μία τριάδα (B, C, ν) που ικανοποιεί τις Υποθέσεις 7.4.1. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε την τριάδα $(p_tB, p_tC, p_t\nu)$ που ικανοποιεί τις Υποθέσεις 7.4.1, έτσι ώστε*

(i) *οι απεικονίσεις $(\omega, t) \longmapsto (p_tB)_s(\omega)$, και $(\omega, t) \longmapsto (p_tC)_s(\omega)$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$, και $(\omega, t) \longmapsto (p_t\nu)(\omega, A)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{B}_d$ είναι $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)-$μετρήσιμη,*

(ii) *για κάθε $\omega \in \Omega, s \in \mathbb{R}_+, A \in \mathfrak{B}_d$*

$$\begin{aligned}
(p_tB)_s(\theta_t\omega) &= B_{t+s}(\omega) - B_t(\omega) \\
(p_tC)_s(\theta_t\omega) &= C_{t+s}(\omega) - C_t(\omega) \\
(p_t\nu)(\theta_t\omega; (0, s] \times A) &= \nu(\omega; (t, t+s] \times A).
\end{aligned}$$

Ιδιαιτέρως, $p_0B = B, p_0C = C, p_0\nu = \nu$.

Θεώρημα 7.6.5. *Εκτός από τις παραπάνω υποθέσεις (δηλαδή τις Υποθέσεις 7.6.4 και την Υπόθεση 7.4.6), υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας πυρήνας μετάβασης $P_{x,t}(d\omega)$ από τον χώρο $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \mathfrak{B}_d \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+))$ στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ έτσι ώστε για κάθε (x, t), το $P_{x,t}$ είναι μία λύση του martingale−προβλήματος $s(\mathscr{H}, X|\delta_x; p_tB, p_tC, p_t\nu)$. Αν επιπλέον το πρόβλημα $s(\mathscr{H}, X|\delta_x; B, C, \nu)$ έχει μοναδική λύση (η οποία αναγκαία είναι το $P_{x,0}$!), τότε η τοπική μοναδικότητα ισχύει για το συγκεκριμένο πρόβλημα.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter III, §2d, page 161.

Δίνουμε ένα παράδειγμα ως συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος

Πόρισμα 7.6.6. *Αν τα χαρακτηριστικά* (B, C, ν) *είναι ντεντερμινιστικά, τότε έχουμε την ύπαρξη και την τοπική μοναδικότητα.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$(p_t B)_s := B_{t+s} - B_t, \;\; (p_t C)_s := C_{t+s} - C_t, \;\; p_t\nu([0,s] \times A) := \nu((t, t+s] \times A).$$

Έτσι τα χαρακτηριστικά $(p_t B, p_t C, p_t \nu)$ είναι ντεντερμινιστικά και προφανώς ισχύουν οι Ιδιότητες 7.6.4. Από το Θεώρημα 7.5.2 το σύνολο $s(\mathscr{H}, X|\delta_x; p_t B, p_t C, p_t \nu)$ έχει μία μοναδική λύση $P_{x,t}$, για την οποία η σ.δ. $X - X_0$ είναι μία PII. Επιπλέον, αν η $h(u)_{s,t}$ είναι το δεξί μέλος της σχέσης (6.30) και η $\mathbb{E}_{x,t}$ συμβολίζει την μέση τιμή ως προς το $P_{x,t}$, τότε από την (6.30) έχουμε ότι για κάθε $0 = s_0 < \cdots < s_p, \; u_p \in \mathbb{R}^d$ ισχύει

$$\mathbb{E}_{x,t}\left[expi\left(u_0 \cdot X_0 + \sum_{1 \le j \le p} u_j \cdot (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\right)\right] = [e^{iu_0 \cdot x}] \prod_{1 \le j \le p} h(u_j)_{t+t_{j-1}, t+t_j},$$

όπου η συνάντηση είναι Borel–μετρήσιμη ως προς το (x, t). Εύκολα συνάγουμε ότι η $P_{x,t}(d\omega)$ είναι ένας πυρήνας μετάβασης και ο ισχυρισμός έπεται από τα Θεωρήματα 7.5.2 και 7.6.5. $\square$

Κεφάλαιο 8

Απόλυτη συνέχεια και αλλαγές μέτρων

Θεωρούμε δύο μέτρα πιθανότητας P και P' επάνω στον φιλτραρισμένο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$. Η βασική υπόθεση είναι ότι είτε το μέτρο P' είναι απόλυτα συνεχείς σε σχέση με το μέτρο P ($P' \ll P$), είτε μία πιο χαλαρή υπόθεση ότι το P' είναι ″τοπικά″ απόλυτα συνεχείς σε σχέση με το μέτρο P.

Ο κύριος σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να υπολογίσουμε τα χαρακτηριστικά ενός ημι−martingale X αναφορικά με το μέτρο P', από τα χαρακτηριστικά του μέτρου P. Αυτοί οι υπολογισμοί και άλλοι σχετικοί υπολογισμοί που αφορούν martingales και τυχαία μέτρα, είναι γνωστοί ως τα ″**Θεωρήματα του Girsanov**″. Το κύριο συστατικό των παραπάνω είναι η ″**σ.δ. της πυκνότητας**″ του P' ως προς το P. Αυτή η σ.δ. είναι ένα martingale επάνω στον φιλτραρισμένο χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ έτσι ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, η Z_t να είναι η Radon−Nikodym παράγωγος $dP' \restriction \mathcal{F}_t / dP \restriction \mathcal{F}_t$ των περιορισμών των μέτρων P' και P επάνω στον μ.χ. $(\Omega, \mathcal{F}_t)$.

8.1 Η διαδικασία της πυκνότητας

Αρχικά θα εισάγουμε κάποιους συμβολισμούς. Με $\mathbb{E}$ και $\mathbb{E}'$ συμβολίζουμε τις μέσες τιμές ως προς τα μέτρα P και P' αντίστοιχα. Για κάθε χ.δ. T θέτουμε

$$P_T := P \restriction \mathcal{F}_T \ \text{ και } \ P_{T-} := P \restriction \mathcal{F}_{T-} \tag{8.1}$$

και ανάλογα για τα μέτρα P'_T και P'_{T-}.

Ορισμός 8.1.1. Καλούμε το μέτρο P' **τοπικά απόλυτα συνεχές** ως προς το μέτρο P, και γράφουμε ότι $P' \overset{loc}{\ll} P$, αν $P_t' \ll P_t$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.

Συνήθως, μία ″τοπική″ ιδιότητα προσδιορίζονται μέσω μίας ακολουθίας από χ.δ. (βλέπε 2.4). Η παρούσα έννοια πράγματι ικανοποιεί τον ίδιο κανόνα, όπως φαίνεται ακολούθως:

Λήμμα 8.1.2. *$P' \overset{loc}{\ll} P$ αν και μόνο αν υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία $\{T_n\}$ από χ.δ., έτσι ώστε $P'(\lim_{n\to\infty} T_n = \infty) = 1$ και $P_{T_n}' \ll P_{T_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Η αναγκαία συνθήκη είναι προφανής. Θα αποδείξουμε την ικανή συνθήκη, έστω $A \in \mathcal{F}_t$ με $P_t(A) = 0$. Τότε

$$P'{}_t(A) = \lim_n P_{T_n}'(A \cap \{T_n > t\}) = 0$$

επειδή $A \cap \{T_n > t\} \in \mathcal{F}_{T_n}$ και $P_{T_n}' \ll P_{T_n}$. Συνεπώς $P_t' \ll P_t$. □

Θεώρημα 8.1.3. *Υποθέτουμε ότι $P' \overset{loc}{\ll} P$. Τότε υπάρχει ένα $P-$ και $P'-$ μοναδικό $P-$martingale Z, έτσι ώστε $Z_t = \frac{dP_t'}{dP_t}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Επιπλέον*

(i) έχουμε $Z_t(\omega) \geq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$.

(ii) Αν T είναι ένας χ.δ., τότε περιορισμένα επάνω στο σύνολο $\{T < \infty\}$ έχουμε ότι $P_T' \ll P_T$ και $Z_T = \frac{dP_T'}{dP_T}$.

(iii) Αν T είναι ένας προβλέψιμος χρόνος, περιορισμένα επάνω στο σύνολο $\{T < \infty\}$ τότε έχουμε ότι $P_{T-}' \ll P_{T-}$ και $Z_{T-} = \frac{dP_{T-}'}{dP_{T-}}$.

Το $P-$matingale Z καλείται η ″ **σ.δ. πυκνότητας** ″ του P' ως προς το P. Παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}[Z_t] = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Απόδειξη. Αν $U^n := \frac{dP_n'}{dP_n}$, τότε $U^n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Καλούμε Y^n το $P-$martingale έτσι ώστε $Y_t^n := \mathbb{E}[U^n|\mathcal{F}_t]$ αν $t < n$ και $Y_t^n = U^n$ αν $t \geq n$ (βλέπε Θεώρημα 2.5.6). Μπορούμε να πάρουμε μία εκδοχή έτσι ώστε $Y^n \geq 0$. Θέτουμε

$$Z := \sum_{n\geq 1} Y^n \chi_{[\![n-1, n [\![}.$$

Τότε η σ.δ. Z είναι càdlàg και προσαρμοσμένη, με $Z_t(\omega) \geq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$.

Έστω T ένας χ.δ. και $A \in \mathcal{F}_T$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\chi_A \chi_{\{T<\infty\}} Z_T] &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[\chi_A \chi_{\{n-1\leq T<n\}} Y_T^n] \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[\chi_A \chi_{\{n-1\leq T<n\}} U^n] \\
&= \sum_{n\geq 1} P'(A \cap \{n-1 \leq T < n\}) \\
&= P'(A \cap \{T < \infty\}).
\end{aligned}$$

Άρα $P'_T \ll P_T$ περιορισμένα στο σύνολο $\{T < \infty\}$ και $Z_T = \frac{dP'_T}{dP_T}$ επομένως έχουμε την (ii). Αν πάρουμε $A \in \mathcal{F}_t$ και $T \equiv t$ (αντίστοιχα $T \equiv s > t$) έχουμε ότι $\mathbb{E}[\chi_A Z_t] = P'(A) = \mathbb{E}[\chi_A Z_s]$, άρα η σ.δ. Z είναι ένα $P-$martingale. Αν T είναι ένας προβλέψιμος χρόνος και $A \in \mathcal{F}_{T-}$, τότε

$$P'(A \cap \{T < \infty\}) = \mathbb{E}[\chi_A \chi_{\{T<\infty\}} Z_T] = \mathbb{E}[\chi_A \chi_{\{T<\infty\}} Z_{T-}]$$

από το Λήμμα 3.3.1 και την Παρατήρηση 2.5.3, οπότε έχουμε την (iii). Τέλος, η Radon$-$Nikodym παράγωγος $\frac{dP'_t}{dP_t}$ είναι $P-$σ.β. και $P'-$σ.β. μοναδική, οπότε έχουμε την $P-$σ.β. και $P'-$σ.β. μοναδικότητα της σ.δ. Z. □

Στη συνέχεια έχουμε κάποιες εύκολες ιδιότητες για την σ.δ. της πυκνότητας.

Πρόταση 8.1.4. *Υποθέτουμε ότι $P' \overset{loc}{\ll} P$ και έστω Z η σ.δ. της πυκνότητας. Τότε:*

(a) $P'(\{\inf_t\{Z_t > 0\}\}) = 1$.

(b) Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) $P'_{\infty-} \ll P_{\infty-}$.

(ii) $P'(\sup_t\{Z_t < \infty\}) = 1$.

(iii) Η Z είναι ένα $P-$ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale.

Απόδειξη. (a) Έστω $T_n := \inf\{t : Z_t < \frac{1}{n}\}$. Τότε από το Θεώρημα 8.1.3 έχουμε ότι

$$P'(T_n < \infty) = \mathbb{E}_P[Z_{T_n} \chi_{\{T_n<\infty\}}] \leq \frac{1}{n},$$

Συνεπώς $P'(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{T_n < \infty\}) = 0$ και ο ισχυρισμός έπεται.

(b) (i) $\Longrightarrow$ (ii) Από το οριακό Θεώρημα του Doob (βλ. π.χ. [16], Chapter I, §1e, Theorem 1.39), η σ.δ. Z_t συγκλίνει $P-$σ.β. σε ένα πεπερασμένο όριο καθώς $t \uparrow \infty$. Εφόσον ισχύει η (i), το ίδιο ισχύει και για $P'-$σ.β., οπότε έχομε την (ii).
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\mathbb{E}[Z_s \chi_{\{Z_s > n\}}] = P'(\{Z_s > n\}) \leq P'(\{\sup_t Z_t > n\})$.
Συνεπώς $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_s \chi_{\{Z_s>n\}}] \leq \lim_{n\to\infty} P'(\{\sup_t Z_t > n\}) = 0$. Οπότε η οικογένεια Z_t είναι $P-$ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.
(iii) $\Longrightarrow$ (i) Κάτω από την (iii), $Z_t \to Z_\infty$ στον $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ενώ για κάθε $A \in \mathcal{F}_t$, $P'(A) = \mathbb{E}[\chi_A Z_t] = \mathbb{E}[\chi_A Z_\infty]$. Από ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης έχουμε ότι $P'(A) = \mathbb{E}[\chi_A Z_\infty]$ για κάθε $A \in \mathcal{F}_{\infty-}$, και άρα έχουμε την (i). □

Λήμμα 8.1.5. *Έστω Z ένα μη αρνητικό $P-$υπερ$-$martingale (π.χ. η σ.δ. της πυκνότητας όταν $P' \overset{loc}{\ll} P$). Τότε η $T = \inf\{t : Z_t = 0 \;\text{ ή }\; Z_{t-} = 0\}$ είναι ένας χ.δ., και $Z = 0$ $P-$σ.β. επάνω στο σύνολο $[\![T, \infty[\![$.*

Απόδειξη. Έστω $T_n := \inf\{t : Z_t < \frac{1}{n}\}$, που είναι ένας χ.δ.. Έχουμε ότι $T = \lim_{n\to\infty} T_n$. Από το Stopping Theorem του Doob (βλ. π.χ. [16], Chapter I, §1e, Theorem 1.39), έχουμε ότι $\mathbb{E}[Z_T | \mathcal{F}_{T_n}] \leq Z_{T_n} \leq \frac{1}{n}$ επάνω στο σύνολο $\{T_n < \infty\}$, άρα $\mathbb{E}[Z_T \chi_{\{T<\infty\}}] \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως $Z_T = 0$ $P-$σ.β. επάνω στο σύνολο $\{T < \infty\}$. Τώρα αν θέσουμε $S_n := \inf\{t > T : Z_t > \frac{1}{n}\}$, τότε η S_n είναι ένας χ.δ. και $\mathbb{E}[Z_{S_n} | \mathcal{F}_T] \leq Z_T = 0$ επάνω στο σύνολο $\{T < \infty\}$, το οποίο μας δίνει ότι $S_n = \infty$ $P-$σ.β., και έτσι έχουμε ότι $Z = 0$ $P-$σ.β. επάνω στο σύνολο $[\![T, \infty[\![$. □

8.2 Θεώρημα Girsanov και τοπικα martingales

Θα ξεκινήσουμε με ένα γενικό αποτέλεσμα.

Πρόταση 8.2.1. *Υποθέτουμε ότι $P' \overset{loc}{\ll} P$ και έστω η Z μία σ.δ. της πυκνότητας. Έστω M' μία προσαρμοσμένη σ.δ..*

(a) Η $M'Z$ είναι ένα $P-$martingale αν και μόνο αν η M' είναι ένα $P'-$martingale.

(b) Αν η $M'Z$ είναι ένα $P-$τοπικό martingale, τότε η M' είναι ένα $P'-$τοπικό martingale.

(c) Αν η M' είναι ένα $P'-$τοπικό martingale με την τοπικοποιούσα ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να ικανοποιεί την $P(\lim_{n\to\infty} T_n = \infty) = 1$, τότε η $M'Z$ είναι ένα $P-$τοπικό martingale.

Ας παρατηρήσουμε ότι το (a) είναι ισοδύναμο με τον ακόλουθο γνωστό τύπο: αν η σ.δ. Y είναι φραγμένη (ή $P'-$ολοκληρώσιμη) και $\mathcal{F}_s-$μετρήσιμη, και $t \le s$ τότε

$$\mathbb{E}'[Y|\mathcal{F}_t] = \frac{1}{Z_t}\mathbb{E}[YZ_s|\mathcal{F}_t]. \tag{8.2}$$

Απόδειξη. (a)Έστω $A \in \mathcal{F}_t$, τότε $\mathbb{E}'[\chi_A M_t'] = \mathbb{E}[\chi_A Z_t M_t']$. Επομένως $\mathbb{E}'[M_t' - M_s'|\mathcal{F}_s] = 0$ για κάθε $s \le t$ αν και μόνο αν $\mathbb{E}[Z_t M_t' - Z_s M_s'|\mathcal{F}_s] = 0$, και άρα έχουμε την ισοδυναμία.

(b) Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ η τοπικοποιούσα ακολουθία για το $P-$τοπικό martingale $M'Z$ και $T = \lim_{n\to\infty} T_n$. Τότε από το Θεώρημα 8.1.3 έχουμε ότι $P'(T < \infty) = \mathbb{E}[Z_T \chi_{\{T<\infty\}}] = 0$ (επειδή $T = \infty \quad P-$σ.β.). Επιπλέον η $M'^{T_n}Z = (M'Z)^{T_n} + M'_{T_n}(Z - Z_{T_n})\chi_{[\![T_n,\infty[\![}$ είναι προφανώς ένα $P-$martingale, επομένως από το (a) έχουμε αυτό που θέλουμε.

(c) Η $M'^{T_n}Z$ είναι ένα $P-$martingale από το (a), έτσι

$$(M'Z)^{T_n} = M'^{T_n}Z - M'_{T_n}(Z - Z_{T_n})\chi_{[\![T_n,\infty[\![}$$

είναι επίσης ένα $P-$martingale. □

Πόρισμα 8.2.2. *Σύμφωνα με τις παραδοχές της Πρότασης 8.2.1, αν η $T_n = \inf\{t : Z_t < \frac{1}{n}\}$ και αν όλες οι σ.δ. $(M'Z)^{T_n}$ είνα $P-$τοπικά martingales, τότε η M' είναι ένα $P'-$τοπικό martingale.*

Απόδειξη. Η $M'^{T_n}Z = (M'Z)^{T_n} + M'_{T_n}(Z - Z_{T_n})\chi_{[\![T_n,\infty[\![}$ είναι προφανώς ένα $P-$τοπικό martingale, έτσι η M'^{T_n} είναι ένα $P'-$τοπικό martingale από την Πρόταση 8.2.1 (b), και $T_n \uparrow \infty \quad P'-$σ.β. από την Πρόταση 8.1.4. □

Τώρα θα διατυπώσουμε το "κλασσικό" Θεώρημα του Girsanov.

Θεώρημα 8.2.3. *Υποθέτουμε ότι $P' \overset{loc}{\ll} P$ και ότι η Z είναι μία σ.δ. της πυκνότητας. Έστω M ένα $P-$τοπικό martingale με $M_0 = 0$ και έστω ότι η $P-$τετραγωνική συνκύμανση $[M, Z]$ έχει $P-$τοπικά ολοκληρώσιμη κύμανση. Συμβολίζουμε με $\langle M, Z\rangle$ τον $P-$αντισταθμιστή της $[M, Z]$. Τότε η σ.δ.*

$$M' = M - \frac{1}{Z-} \bullet \langle M, Z\rangle \tag{8.3}$$

είναι $P'-$σ.β. καλά ορισμένη, και είναι ένα $P'-$τοπικό martingale. Επιπλέον η $P-$τετραγωνική κύμανση $\langle M^c, M^c\rangle$ του συνεχούς μέρους M^c (σε σχέση με το P) του M είναι επίσης μία εκδοχή της $P'-$τετραγωνικής κύμανσης του συνεχούς μέρους (ως προς το P') του M'.

Απόδειξη. (a) Έστω $T_n = \inf\{t : Z_t < \frac{1}{n}\}$ και $A = (1/Z_-) \bullet \langle M, Z\rangle$, το οποίο είναι προφανώς καλά ορισμένο σε κάθε στοχαστικό διάστημα $[\![0, T_n]\!]$. Καθώς $T_n \uparrow \infty$ $P-$σ.β. από την Πρόταση 8.1.4, οι σ.δ. A και M' είναι $P'-$σ.β. καλά ορισμένες.

(b) Αφού η $MZ = M_- \bullet Z + Z_- \bullet M + [Z, M]$, η σ.δ. $(MZ)^{T_n} - \langle M, Z\rangle^{T_n}$ είναι ένα $P-$τοπικό martingale. Αφού η σ.δ. A^{T_n} είναι προβλέψιμη με πεπερασμένη ολική κύμανση, προκύπτει ότι $(AZ)^{T_n} = A \bullet Z_{T_n} + Z_- \bullet A^{T_n}$ (βλ. π.χ. [16], Chapter I, Proposition 4.49 (b)). Έτσι $(AZ)^{T_n} - Z_- \bullet A^{T_n}$ είναι επίσης ένα $P-$τοπικό martingale. Επίπλεον, $Z_- \bullet A^{T_n} = \langle M, Z\rangle^{T_n}$ από τον ορισμό του A. Οποτέ εναλλακτικά έχουμε ότι $(M'Z)^{T_n}$ είναι ένα $P-$τοπικό martingale, έτσι η M' είναι ένα $P'-$τοπικό martingale από το Πόρισμα 8.2.2.

(c) Από το (b) συνάγουμε ότι η M είναι ένα $P'-$ημι$-$martingale (με κανονική ανάλυση $M = M' + A$). Τα ″αθροίσματα Riemann″ $S_{\tau_n}(M, M)$ που ορίζονται απο την σχέση (5.7) δεν εξαρτώνται από το μέτρο πιθανότητας, ως εκ τούτου η τετραγωνική κύμανση $[M, M]$ είναι η ίδια για τα μέτρα P και P' , από το Θεώρημα 5.5.2 (a). Ο τελευταίος ισχυρισμός έπεται, διότι από την σχέση (5.8) η τετραγωνική κύμανση του συνεχούς martingale μέρους ενός ημι$-$martingale είναι απλά το ″συνεχές μέρος″ της τετραγωνικής κύμανσης του ημι$-$martingale. □

8.3 Θεώρημα Girsanov και τυχαία μέτρα

Θεωρούμε έναν βοηθητικό Πολωνικό χώρο $(E, \mathcal{E})$ (όπως έχουμε ορίσει στην Ενότητα 6.1.1). Σε κάθε τυχαίο μέτρο μ επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times E$ ορισμένο επάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ έχουμε τα ακόλουθα:

Ορισμός 8.3.1. Το M_μ^P είναι το θετικό μέτρο επάνω στον $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$ που ορίζεται από τον τύπο $M_\mu^P(W) := \mathbb{E}[(W * \mu)_\infty]$ για όλες τις μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις W, όπου $\widetilde{\Omega} := \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$.

Επιπλέον υποθέτουμε ότι το μ είναι $\widetilde{\mathscr{P}}-\sigma-$πεπερασμένο επάνω στην $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, πράγμα το οποίο είναι ισοδύναμο με το να λέμε ότι ο περιορισμός του μέτρου M_μ^P στον $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{P}})$ είναι $\sigma-$πεπερασμένο, όπου $\widetilde{\mathscr{P}} := \mathscr{P} \otimes \mathcal{E}$. Τότε, υπάρχει μία έννοια της ″υπο συνθήκης μέσης τιμής σε σχέση με το M_μ^P ″, δοσμένης της σ$-$άλγεβρας $\widetilde{\mathscr{P}}$: για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση W, η ″υπο συνθήκη μέση τιμή ″ $W' = M_\mu^P(W|\widetilde{\mathscr{P}})$ είναι η M_μ^P-σ.π. μοναδική $\widetilde{\mathscr{P}}-$μετρήσιμη συνάρτηση ώστε

$$M_\mu^P(WU) = M_\mu^P(W'U) \tag{8.4}$$

Για όλες τις μη αρνητικές $\widetilde{\mathscr{P}}$−μετρήσιμες συναρτήσεις U.

Επιπλέον, ακριβώς όπως και στον Ορισμό γενικευμένης υπο συνθήκης μέσης τιμής, μπορούμε να ορίσουμε μία "γενικευμένη" υπο συνθήκη M_μ^P−μέση τιμή για όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις W.

Θεώρημα 8.3.2. *Υποθέτουμε ότι $P' \overset{loc}{\ll} P$ και έστω η Z μία σ.δ. της πυκνότητας. Έστω μ ένα τυχαίο μέτρο με ακέραιες τιμές επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times E$ ορισμένο επάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ (αυτό μας δίνει ιδιαιτέρως ότι το μ είναι $\widetilde{\mathscr{P}}$ − σ−πεπερασμένη σε σχέση με το P), και συμβολίζουμε με ν τον P−αντισταθμιστή του μ.*

(a) *Το μ είναι επίσης $\widetilde{\mathscr{P}}$ − σ−πεπερασμένο σε σχέση με το P'.*

(b) *Έστω Y μία $\widetilde{\mathscr{P}}$−μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση επάνω στον $\widetilde{\Omega}$. Έστω ν' μία εκδοχή του P'−αντισταθμιστή του μ. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

   (i) *$\nu' = Y \cdot \nu$ P'−σ.β. (όπου $Y \cdot \nu(\omega; dt, dx) = \nu(\omega; dt, dx) Y(\omega, t, x)$)*

   (ii) *$\chi_{\{Z_- > 0\}} \cdot \nu' = Y \chi_{\{Z_- > 0\}} \cdot \nu$ P−σ.β.*

   (iii) *η YZ_- είναι μία εκδοχή της υπο συνθήκης μέσης τιμής $M_\mu^P(Z|\widetilde{\mathscr{P}})$.*

   Επιπλέον, κάθε μη αρνητική εκδοχή Y του $M_\mu^P\left(\frac{Z}{Z_-}\chi_{\{Z_- > 0\}}|\widetilde{\mathscr{P}}\right)$ έχει τις παραπάνω ιδιότητες.

(c) *Υπάρχει μία εκδοχή του ν', ώστε*

$$\begin{cases} \nu' = Y \bullet \nu \text{ για κάποια } \widetilde{\mathscr{P}}\text{−μετρήσιμη μη-αρνητική συνάρτηση } Y, \\ \nu(\omega; \{t\} \times E) = 1 \Longrightarrow \nu'(\omega; \{t\} \times E) = 1, \forall (\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{8.5}$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter III, §2c, page 171.

8.4 Θεώρημα Girsanov και ημι−martingales

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε ένα d−διάστατο ημι−martingale $X = (X^i)_{i \le d}$ επάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, με χαρακτηριστικά (B, C, ν) σε σχέση με μία δοσμένη συνάρτηση περικοπής h.

Συμβολίζουμε με X^c το συνεχές martingale μέρος του X, σε σχέση με το μέτρο P. Έστω A μία προβλέψιμη αύξουσα σ.δ. έτσι ώστε $C^{ij} = c^{ij} \bullet A$ (βλέπε την σχέση (6.16)).

Θεώρημα 8.4.1. *Υποθέτουμε ότι* $P' \overset{loc}{\ll} P$ *και έστω* $X = (X^i)_{I\leq d}$ *ένα ημι−martingale. Τότε υπάρχει μία* $\widetilde{\mathscr{P}}$*−μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση* Y *και μία προβλέψιμη σ.δ.* $\beta = (\beta^i)_{i\leq d}$ *που ικανοποιεί τις*

$$|h(x)(Y-1)| * \nu_t < \infty \ \ P' - \text{σ.β. για κάθε } t \in \mathbb{R}_+, \tag{8.6}$$

$$|\sum_{j\leq d} c^{ij}\beta^j| \bullet A_t < \infty \ \text{ και } \left(\sum_{j,k\leq d} \beta^j c^{jk} \beta^k\right) \bullet A_t < \infty \ \ P' - \text{σ.β. για κάθε } t \in \mathbb{R}_+, \tag{8.7}$$

και έτσι ώστε μία εκδοχή των χαρακτηριστικών του X *ως προς το* P' *είναι η*

$$\begin{aligned} B'^i &= B^I + \left[\sum_{j\leq d} c^{ij}\beta^j\right] \bullet A + h^i(x)(Y-1) * \nu \qquad (8.8)\\ C' &= C \\ \nu' &= Y \cdot \nu. \end{aligned}$$

Επιπλέον, η Y *και η* β *ικανοποιούν όλες τις παραπάνω συνθήκες, αν και μόνο αν*

$$\begin{aligned} YZ_- &= M^P_{\mu^X}(Z|\widetilde{\mathscr{P}}) \qquad (8.9)\\ \langle Z^c, X^{i,c}\rangle &= \left(\sum_{j\leq d} c^{ij}\beta^j Z_-\right) \bullet A, \end{aligned}$$

(φυσικά $P-$*σ.β.), όπου* Z *είναι η σ.δ. της πυκνότητας,* Z^c *είναι το συνεχές martingale μέρος της ως προς το* P*, και* $\langle Z^c, X^{i,c}\rangle$ *είναι η σ.δ.−αγκύλη σε σχέση με το* P *(η οποία επίσης ισούται με την* $[Z, X^{i,c}]$*). Επιπλέον είναι δυνατόν να επιλέξουμε την* Y *έτσι ώστε*

$$\nu(\omega;\{t\}\times\mathbb{R}^d) = 1 \Longrightarrow \nu'(\omega;\{t\}\times\mathbb{R}^d) = \int Y(\omega,t,x)\nu(\omega;\{t\}\times dx) = 1. \tag{8.10}$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter III, §3d, page 174.

Ας παρατηρήσουμε ότι οι σχέσεις (8.6) και (8.7) μας δίνουν ότι οι σ.δ. στην σχέση (8.8) είναι $P'-$σ.β. με πεπερασμένες τιμές.

Κεφάλαιο 9

Το Θεώρημα αναπαράστασης για martingales

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα δρομολογήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα: έστω X ένα $d-$διάστατο ημι$-$martingale επάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, με χαρακτηριστικά (B, C, ν), και με X^c το συνεχές μέρος του martingale X και $\mu = \mu^X$ το μέτρο που σχετίζεται με τα αλματά του σύμφωνα με την Πρόταση 6.1.2.3. Κάτω από ποιές συνθήκες κάθε τοπικό martingale είναι το άθροισμα ενός στοχαστικού ολοκληρώματος ως προς την X^c και ενός στοχαστικού ολοκληρώματος ως προς το $\mu - \nu$, όπου ν είναι ο αντισταθμιστής του μ. Αυτή η ιδιότητα, που από μόνη της είναι ενδιαφέρουσα, μας επιτρέπει (εφόσον ισχύει) να υπολογίζουμε αναλυτικά την σ.δ. πυκνότητας οποιαδήποτε μέτρου P' ώστε $P' \overset{loc}{\ll} P$ ως προς το P.

9.1 Στοχαστικό ολοκλήρωμα ως προς ένα πολυδιάστατο συνεχές τοπικό martingale

Αυτή η ενότητα συμπληρώνει την 5.4, από την οποία δανειστήκαμε όλους τους συμβολισμούς. Έστω ένας φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ και ένα συνεχές $d-$διάστατο τοπικό martingale $X = (X^i)_{i \leq d}$, σταθερά για όλη την ενότητα.

Στο Θεώρημα 5.4.6 έχουμε ορίσει την πιο γενική μορφή στοχαστικού ολοκληρώματος ως προς κάθε X^i ξεχωριστά, δηλαδή τα ολοκληρώματα των σ.δ. X^i στην κλάση $L^2_{loc}(X^i)$. Οπότε αν θέλουμε να ολοκληρώσουμε ως προς το X φαίνεται φυσικό, με την πρώτη ματιά, να εργαστούμε ως ακολούθως. Έστω $H = (H^i)_{i \leq d}$

μία προβλέψιμη σ.δ. με $H^i \in L^2_{loc}(X^i)$ για όλα τα $i \leq d$, και έστω

$$H \bullet X := \sum_{i \leq d} H^i \bullet X^i. \tag{9.1}$$

Παρόλα αυτά, θα δούμε ότι συνήθως αυτό δεν είναι το πιο γενικό στοχαστικό ολοκλήρωμα των $d-$διάστατων σ.δ. ως προς το X.

Για να επεκτείνουμε τη σχέση (9.1) θεωρούμε την ανάλυση

$$\langle X^i, X^j \rangle = c^{ij} \bullet A, \tag{9.2}$$

όπου $(c^{ij})_{i,j \leq d}$ είναι μία προβλέψιμη σ.δ. με τιμές στο σύνολο όλων των μη αρνητικών συμμετρικών $d \times d$ πινάκων και A είναι μία αύξουσα προβλέψιμη σ.δ..

Υπάρχουν πολλές τέτοιες αναλύσεις, βλέπε την απόδειξη της Πρότασης 6.2.5 στο [16], Chapter II, Proposition 2.9. Για κάθε προβλέψιμη σ.δ. $H = (H)_{i \leq d}$ θέτουμε $H \cdot c \cdot H := \sum_{i,j \leq d} H^i c^{ij} H^j$ και δίνουμε τον παρακάτω συμβολισμό:

Συμβολισμός 9.1.1. *Με $L^2(X)$ ή $L^2_{loc}(X)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των προβλέψιμων σ.δ. H έτσι ώστε η αύξουσα σ.δ. $(H \cdot c \cdot H) \bullet A$ να είναι ολοκληρώσιμη ή τοπικά ολοκληρώσιμη αντίστοιχα.*

(Αν τα συγκρίνουμε με τον Συμβολισμό 5.4.5, τα $L^2(X)$ και $L^2_{loc}(X)$ δεν εξαρτώνται από την ανάλυση (9.2)).

Για το επόμενο θεώρημα, χρειαζόμαστε να παρατηρήσουμε κάτι ακόμα. Έστω $Y \in \mathscr{H}^2_{loc}$. Τότε $d\langle Y, X^i \rangle_t \ll d\langle X^i, X^i \rangle_t$. Πράγματι, αν $Z^1 = X^i$ και $Z^2 = Y$, τότε υπάρχει μία ανάλυση $\langle Z^i, Z^j \rangle = \widetilde{c}^{ij} \bullet \widetilde{A}$ όπως στη σχέση (9.2) και $\widetilde{c}^{12} = 0$ όταν $\widetilde{c}^{11} = 0$ διότι η $\widetilde{c}$ είναι μη$-$αρνητική. Έτσι έχουμε $d\langle Z^1, Z^2 \rangle_t \ll d\langle Z^1, Z^1 \rangle_t$ ή ισοδύναμα $d\langle Y, X^i \rangle_t \ll c^{ii}_t dA_t \ll dA_t$. Επομένως, υπάρχει μία προβλέψιμη σ.δ. c^{Yi} έτσι ώστε

$$\langle Y, X^i \rangle = c^{Yi} \bullet A, \;\; c^{Yi} = 0 \;\text{ όταν }\; c^{ii} = 0. \tag{9.3}$$

Θεώρημα 9.1.2. *Έστω $X = (X^i)_{i \leq d}$ ένα συνεχές τοπικό martingale, και $H \in L^2_{loc}(X)$.*

(a) Αν $H(n) = H\chi_{\{|H| \leq n\}}$ τότε $H(n) \bullet X$ (που ορίσαμε στην (9.1)) συγκλίνει κατά μέτρο, ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές διάστημα, σε ένα όριο που το συμβολίζουμε με $H \bullet X$.

(b) *Επίσης η $H \bullet X$ χαρακτηρίζεται ως ακολούθως: είναι το μοναδικό (ως προς την καθολική ισοδυναμία) συνεχές τοπικό martingale, μηδέν στο 0, έτσι ώστε*

$$\langle H \bullet X, Y\rangle = \left(\sum_{i\leq d} H^i c^{Yi}\right) \bullet A \tag{9.4}$$

για όλα τα $Y \in \mathscr{H}^2_{loc}$.

(c) *Αν $H, K \in L^2_{loc}(X)$, τότε*

$$\langle H \bullet X, K \bullet X\rangle = (H \cdot c \cdot K) \bullet A. \tag{9.5}$$

(d) *$H \bullet X$ ανήκει στην κλάση $\mathscr{H}^2$ αν και μόνο αν $H \in L^2_{loc}(X)$.*

(e) *Η απεικόνιση $H \longmapsto H \bullet X$ είναι γραμμική (ως προς την καθολική ισοδυναμία) επάνω στο σύνολο $L^2_{loc}(X)$, και για όλους τους χ.δ. T ισχύει*

$$H\chi_{[\![0,T]\!]} \in L^2_{loc}(X) \ \text{ και } \ (H\chi_{[\![0,T]\!]}) \bullet X = (H \bullet X)^T. \tag{9.6}$$

Αν K είναι μία προβλέψιμη τοπικά φραγμένη σ.δ. με τιμές στον $\mathbb{R}$, τότε

$$KH \in L^2_{loc}(X) \ \text{ και } \ (KH) \bullet X = K \bullet (H \bullet X). \tag{9.7}$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter III, §4a, page 180.

Τώρα θα "προβάλουμε" ένα αυθαίρετο τοπικό martingale επάνω στο X, σύμφωνα με την ορθογωνιότητα που ορίστηκε στον Ορισμό 5.2.1:

Θεώρημα 9.1.3. *Έστω $X = (X^i)_{i\leq d}$ ένα συνεχές τοπικό martingale, και Z ένα αυθαίρετο τοπικό martingale. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό (9.2).*

(a) *Υπάρχει μία προβλέψιμη σ.δ. $H = (H^i)_{i\leq d}$ έτσι ώστε*

$$[Z, X^i] = \langle Z^c, X^i\rangle = \left(\sum_{j\leq d} c^{ij} H^j\right) \bullet A. \tag{9.8}$$

(b) *Κάθε προβλέψιμη σ.δ. που ικανοποιεί την (9.8) ανήκει στην $L^2_{loc}(X)$, το στοχαστικό ολοκλήρωμα $H \bullet X$ δεν εξαρτάται από την επιλεγμένη εκδοχή του H, και η σ.δ. $Y = Z - H \bullet X$ είναι ορθογώνια προς όλες τις συντεταγμένες της X και*

$$[Y, X^i] = \langle Y^c, X^i\rangle = 0. \tag{9.9}$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter III, §4a, page 182.

9.2 Προβολή ενός τοπικού martingale επάνω σε ένα τυχαίο μέτρο

Η ανάλυση είναι όπως και στην Ενότητα 6.1, από την οποία θα δανειστούμε όλους τους συμβολισμούς. Ξεκινάμε θεωρώντας ένα τυχαίο μέτρο με ακέραιες τιμές μ επάνω στον $\mathbb{R} \times E$, ορισμένο επάνω στην σ.β. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, και όπου το $(E, \mathcal{E})$ είναι ένας πολωνικός χώρος. Θυμίζουμε ότι $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$ και $\widetilde{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \otimes \mathcal{E}$.

Το μέτρο έχει την μορφή

$$\mu(\omega; dt, dx) = \sum_{s \geq 0} \chi_D(\omega, s) \delta_{(s, \beta_s(\omega))}(dt, dx) \tag{9.10}$$

όπου D είναι ένα προαιρετικό λεπτό σύνολο και β μία προαιρετική σ.δ. με τιμές στον E. Συμβολίζουμε με ν μία "καλή" εκδοχή του αντισταθμιστή του μ, έτσι ώστε εάν

$$\alpha_t(\omega) := \nu(\omega : \{t\} \times E) \tag{9.11}$$

τότε $\alpha \leq 1$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Επιπλέον, σύμφωνα με την σχέση (6.5), για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση W επάνω στον $\widetilde{\Omega}$ θέτουμε

$$\widehat{W}_t(\omega) := \begin{cases} \int W(\omega, t, x) \nu(\omega; \{t\} \times dx), & \text{αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει} \\ +\infty, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{9.12}$$

Τέλος, θυμίζουμε ότι έχουμε ορίσει το μέτρο M_μ^P στον Ορισμό 8.3.1, και έχουμε την έννοια της υπο συνθήκης μέσης τιμής M_μ^P δοσμένης της $\widetilde{\mathscr{P}}$.

Θεώρημα 9.2.1. *Έστω X ένα τοπικό martingale και $U = M_\mu^P(\Delta X | \widetilde{\mathscr{P}})$ (εδώ, η ΔX ορίζεται επάνω στον $\widetilde{\Omega}$ από την σχέση $\Delta X(\omega, t, x) = \Delta X_t(\omega)$).*

(a) Υπάρχει μία εκδοχή της U έτσι ώστε $\{\alpha = 1\} \subseteq \{\widehat{U} = 0\}$.

(b) Έστω $W = U + \frac{\widehat{U}}{1-\alpha} \chi_{\{\alpha < 1\}}$. Τότε $W \in G_{loc}(\mu)$, και αν $Y = W * (\mu - \nu)$ και $Z = X - Y$, τότε έχουμε ότι $M_\mu^P(\Delta Z | \widetilde{\mathscr{P}}) = 0$.

Η σχέση $M^P_\mu(\Delta Z|\widetilde{\mathscr{P}}) = 0$ μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής: το Z είναι "ορθογώνιο" προς το μ, έτσι η Y είναι η προβολή της X επάνω στο μ (ή, καλύτερα, στο χώρο όλων ολοκληρωμάτων της μορφής $V * (\mu - \nu)$).

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter III, §4b, page 184.

9.3 Η ιδιότητα της αναπαράστασης

Μέχρι το τέλος αυτής της ενότητας θεωρούμε τα εξής: Το ημι−martingale $X = (X^i)_{i\leq d}$ με χαρακτηριστικά τα (B, C, ν), ως προς μία συνάρτηση αποκοπής h ορίζεται επάνω στη σ.β. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. Η X^c είναι το συνεχές martingale μέρος της X, και $\mu = \mu^X$ ορίζεται στην Πρόταση 6.1.2.3.

Ορισμός 9.3.1. Λέμε ότι **ένα τοπικό martingale έχει την ιδιότητα της αναπαράστασης σε σχέση με το** X αν έχει την μορφή

$$M = M_0 + H \bullet X^c + W * (\mu - \nu) \tag{9.13}$$

όπου η $H = (H^i)_{i\leq d}$ ανήκει στην κλάση $L^2_{loc}(X^c)$ (βλέπε Ορισμό 9.1.1) και η $W \in G_{loc}(\mu)$ (βλέπε Ορισμό 6.1.4.1).

Από πολλές απόψεις θα ήταν πιο φυσικό να σταματήσουμε την αναφορά σε ένα βασικό ημι−martingale X. Έτσι η X^c θα μπορούσε να αντικατασταθεί από ένα αυθαίρετο συνεχές τοπικό martingale, και το $\mu = \mu^X$ από ένα αυθαίρετο τυχαίο μέτρο μ με ακέραιες τιμές με αντίστοιχο αντισταθμιστή ν. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω θα παράμεναν αληθή.

Λήμμα 9.3.2. *Κάθε τοπικό martingale M έχει την εξής ανάλυση*

$$M = H \bullet X^c + W * (\mu - \nu) + N, \tag{9.14}$$

όπου $H \in L^2_{loc}(X^c)$, $W \in G_{loc}(\mu)$, και

$$\langle N^c, (X^c)^i\rangle = 0 \ \ \forall i \leq d, \quad M^P_\mu(\Delta N|\widetilde{\mathscr{P}}) = 0. \tag{9.15}$$

Επιπλέον, η ανάλυση είναι μοναδική, ως προς την καθολική ισοδυναμία (παρόλο που η σ.δ. H και η W δεν είναι απαραίτητα μοναδικά).

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter III, §4c, page 186.

Πόρισμα 9.3.3. *Οι επόμενες τρείς διατυπώσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) Όλα τα τοπικά martingales έχουν την ιδιότητα της αναπαράστασης.

(ii) Όλα τα τοπικά martingales που ικανοποιούν την (9.15) είναι τετριμμένα (ένα τοπικό martingale N καλείται **τετριμμένο** *αν $N_t = N_0$, $P-$σ.β. για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$).*

(iii) Όλα τα φραγμένα martingales που ικανοποιούν την (9.15) είναι τετριμμένα.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter III, §4c, page 186.

9.4 Το θεμελιώδες θεώρημα της αναπαράστασης

Όπως θα δούμε τώρα, η ιδιότητα της αναπαράστασης σχετίζεται στενά με ένα martingale−πρόβλημα. Προκειμένου να συνδυάσουμε την αναλυσή μας με τον Ορισμό 7.4.2, εισάγουμε την παρακάτω *αρχική συνθήκη*:

$$\mathscr{H} \quad \sigma - \text{υποάλγεβρα της } \mathcal{F}_0 \text{ και } P_H = P \restriction \mathscr{H}.$$

Οι υποθέσεις της 9.3 παραμένουν οι ίδιες και σε αυτήν την ενότητα.

Ιδιαιτέρως, το δοσμένο μέτρο P είναι μία λύση του προβλήματος $s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$ σύμφωνα με τον Ορισμό 7.4.2.

Θεώρημα 9.4.1. *Εκτός από τις παραπάνω υποθέσεις, θεωρούμε ότι $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\infty-}$. Τότε οι επόμενες τέσσερις διατυπώσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) Όλα τα τοπικά martingales έχουν την ιδιότητα της αναπαράστασης, ως προς την σ.δ. X. Επιπλέον η $\mathcal{F}_0$ περιέχεται στην $\sigma-$άλγεβρα που παράγεται από την $\mathscr{H}$ και από όλα τα $P-$μηδενικά σύνολα της $\mathcal{F}$.

(ii) Το P είναι ένα ακραίο σημείο στο κυρτό σύνολο $s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$.

(iii) Αν $P' \in s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$ και $P' \overset{loc}{\ll} P$, τότε $P' = P$.

(iv) Αν $P' \in s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$ και $P' \ll P$, τότε $P' = P$.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή (iii) $\Longrightarrow$ (iv.) είναι προφανής.
(iv) $\Longrightarrow$ (ii). Υποθέτουμε ότι το P είναι κυρτός συνδυασμός $P = \alpha P' + (1-\alpha)P''$ δύο άλλων λύσεων P' και P'', με $0 < \alpha < 1$. Τότε προφανώς $P' \overset{loc}{\ll} P$ και $P'' \overset{loc}{\ll} P$, ως εκ τούτου η (iv) μας δίνει ότι $P = P' = P''$. Έτσι το P είναι ακραίο στο σύνολο όλων των λύσεων.
(ii) $\Longrightarrow$ (i). Αν η ιδιότητα της αναπαράστασης δεν ισχύει, τότε το Πόρισμα 9.3.3 μας δίνει ένα μη−τετριμμένο φραγμένο martingale M με $M_0 = 0$, το τοποίο ικανοποιεί την (9.15), και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|M| \leq 1$. Αν η δεύτερη ιδιότητα του (i) δεν ισχύει, υπάρχει ένα σύνολο $A \in \mathcal{F}_0$ έτσι ώστε $P(A|\mathscr{H})$ δεν είναι σ.β. ίση με την χ_A. Θέτουμε $M_t := \chi_A - P(A|\mathscr{H})$ για όλα τα t. Έτσι η M είναι ένα martingale, με $|M| \leq 1$ που ικανοποιεί την (9.15).
Ως εκ τούτου, στην περίπτωση που το (i) δεν ισχύει, έχουμε κατασκευάσει ένα martingale $Z = 1 + M$ με $0 \leq Z \leq 2$ και $\mathbb{E}[Z_t] = 1$ για όλα τα $\overline{\mathbb{R}}_+$, ώστε να ισχύει η (9.15) και $P(\{Z_\infty = 1\}) < 1$. Έτσι το $P'(d\omega) := P(d\omega)Z_\infty(\omega)$ ορίζει ένα νέο μέτρο πιθανότητας P' επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F})$ και η (8.9) ικανοποιείται για $Y = 1$ και $\beta = 0$. Επομένως από το Θεώρημα 8.4.1 έχουμε ότι η X είναι ένα $P'-$ημι−martingale με χαρακτηριστικά τα (B, C, ν). Επιπλέον $\mathbb{E}[Z_\infty|\mathscr{H}] = \mathbb{E}[Z_0|\mathscr{H}] = 1 \ \ P-$σ.β. από την κατασκευή του, οπότε ο περιορισμός του P' στον $\mathscr{H}$ ισούται με P_H και έτσι $P' \in s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$. Τελικά $P' \neq P$ επειδή $P(\{Z_\infty = 1\}) < 1$.
Ανάλογα αν $Z' = 1 - M$ τότε $\widetilde{P}'(d\omega) := P(d\omega)Z'_\infty(d\omega)$ ορίζει μία λύση $\widetilde{P}' \in s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$ και $\widetilde{P}' \neq P$. Αφού $Z + Z' = 2$, για όλα τα $A \in \mathcal{F}$ ισχύει

$$P'(A) + \widetilde{P}'(A) = \mathbb{E}[Z_\infty \chi_A] + \mathbb{E}[Z'_\infty \chi_A] = 2P(A)$$

και έτσι $P = \frac{1}{2}(P' + \widetilde{P}')$, ως εκ τούτου αντιτίθεται με το (ii).
(i) $\Longrightarrow$ (iii). Έστω $P' \in s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$ με $P' \overset{loc}{\ll} P$, και καλούμε Z την σ.δ. της πυκνότητας. Τα P και P' συμπίπτουν επάνω στον $\mathscr{H}$, έτσι $\mathbb{E}[Z_0|\mathscr{H}] = 1$. Αφού η Z_0 είναι $P-$σ.β. ίση με μία $\mathscr{H}-$μετρήσιμη μεταβλητή, τότε έχουμε ότι $Z_0 = 1 \ \ P-$σ.β..
Στην συνέχεια, αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 8.4.1 και την υπόθεση, έχουμε την (8.8) με $\beta = 0$ και $Y = 1$. Σε σύγκριση με την (8.9), έχουμε ότι η Z ικανοποιεί την (9.15). Τότε, εξαιτίας της ιδιότητας της αναπαράστασης, το Πόρισμα 9.3.3 μας δίνει ότι η Z είναι τετριμμένη. Οπότε $Z_t = 1 \ \ P-$σ.β. για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε συνάγουμε ότι τα P και P' συμπίπτουν επάνω στο $\mathcal{F}_t$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$. Αφού $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\infty-}$ τότε έχουμε ότι $P' = P$. $\square$

Παρατήρηση 9.4.2. Η (i) είναι μία ιδιότητα του φιλτραρίσματος $\mathbb{F}$ και άρα εμπλέκει τον περιορισμό του P στο $\mathcal{F}_{\infty-}$. Αντιθέτως, οι (ii)–(iv) εμπλέκουν "ολόκληρο" το μέτρο P επάνω στον $(\Omega, \mathcal{F})$. Για αυτό το λόγο υποθέσαμε ότι $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\infty-}$. Τώρα, αν η $\mathcal{F}_{\infty-}$ είναι γνήσιο υποσύνολο της $\mathcal{F}$, τότε οποιοδήποτε από τα (ii),(iii),(iv) συνεπάγεται το (i).

Η δεύτερη ιδιότητα στο (i) περιλαμβάνεται ώστε να συνδέσουμε την ιδιότητα της αναπαράστασης με το martingale πρόβλημα $s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$, αλλά δεν είναι αυτός ο κύριος σκοπός μας.

Παρακάτω έχουμε ένα απλό πόρισμα, που προκύπτει αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 9.4.1 με $\mathscr{H} = \mathcal{F}_0$ (έτσι η δεύτερη ιδιότητα στο (i) ικανοποιείται), και για το οποίο θυμίζουμε ότι το P_0 είναι ο περιορισμός του P στο $\mathcal{F}_0$.

Τώρα θα δώσουμε μερικά παραδείγματα. Πράγματι, κάθε φορά που το P είναι η μοναδική λύση του προβλήματος $s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$, είναι σίγουρα ακραίο σημείο σε αυτό το σύνολο. Έτσι όλες οι υποθέσεις της μοναδικότητας οδηγούν στην ιδιότητα της αναπαράστασης.

Αρχικά, από τα Θεωρήματα 7.5.1 (ή 7.5.2) και 9.4.1 συμπεραίνουμε το κλασσικό αποτέλεσμα αναπαράστασης για τα martingales μίας σ.δ. Wiener.

Θεώρημα 9.4.3. *Έχουμε την Υπόθεση 7.4.6 και ότι η X είναι μία σ.δ. Wiener επάνω στην $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. Τότε*

(a) *Κάθε τοπικό martingale έχει την μορφή $M = M_0 + H \bullet X$, για κάποια $H \in L^2_{loc}(X)$ (ιδιαιτέρως, κάθε τοπικό martingale είναι συνεχές).*

(b) *Αν η $\mathscr{H}$ είναι τετριμμένη ή αν $\mathscr{H} = \sigma(X_0)$, τότε κάθε σύνολο του $\mathcal{F}_0$ έχει μέτρο 0 ή 1 ("$0-1$ νόμος"). Ιδιαιτέρως στην (a), η M_0 είναι σ.β. σταθερή.*

Γενικότερα, από το Θεώρημα 7.5.5 προκύπτει το παρακάτω:

Θεώρημα 9.4.4. *Έχουμε την Υπόθεση 7.4.6 και ότι η X είναι μία $\mathscr{H}$–υπο συνθήκη PII επάνω στην $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. Τότε*

(a) *Κάθε τοπικό martingale έχει την μορφή $M = M_0 + H \bullet X^c + W * (\mu - \nu)$, για κάποιες σ.δ. $H = (H^i)_{i \le d} \in L^2_{loc}(X^c)$, και $W \in G_{loc}(\mu)$.*

(b) *Αν η $\mathscr{H}$ είναι τετριμμένη ή αν $\mathscr{H} = \sigma(X_0)$, τότε κάθε σύνολο του $\mathcal{F}_0$ έχει μέτρο 0 ή 1 (σε αυτήν την περίπτωση, η X είναι PII).*

Τα ίδια ισχύουν και για τα martingale προβλήματα που έχουν εισαχθεί στην Ενότητα 7.2.

Πιο συγκεκριμένα, ας ξεχάσουμε την σ.δ. X, και ας υποθέσουμε ότι ο φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ είναι εφοδιασμένος με ένα τυχαίο μέτρο μ με ακέραιες τιμές επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times E$, με αντισταθμιστή το ν. Επίσης θεωρούμε μία αρχική σ−άλγεβρα $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}_0$ και τον περιορισμό P_H του P στον $\mathscr{H}$. Τότε όλα τα αποτελέσματα της Ενότητας 9.3 και της παρούσας ενότητας ισχύουν, υπο την προυπόθεση ότι η $''X''$ αντικαταστάθηκε από το μ. Για παράδειγμα, η ιδιότητα της αναπαράστασης γίνεται ως εξής:

Ορισμός 9.4.5. Κάθε τοπικό martingale M έχει την **ιδιότητα της αναπαράστασης ως προς το** μ αν έχει την μορφή $M = M_0 + W * (\mu - \nu)$ για κάποια $W \in G_{loc}(\mu)$.

Τότε το κύριο αποτελεσμά μας, το Θεώρημα 9.4.1 ισχύει, με $''\mu''$ αντί του $''X''$ στην (i), και $s(\mathscr{H}, \mu | P_H, \nu)$ στα (ii), (iii), (iv). Φυσικά, κάθε αποτέλεσμα μοναδικότητας μας παρέχει ένα αποτέλεσμα αναπαράστασης. Για παράδειγμα, το Θεώρημα 7.3.6 μας δίνει ότι:

Παρατήρηση 9.4.6. Αν μ είναι μία πολυμεταβλητή σημειακή διαδικασία και ισχύει η Υπόθεση 7.3.5, τότε όλα τα τοπικά martingales έχουν την μορφή $M = M_0 + W * (\mu - \nu)$ για κάποια $W \in G_{loc}(\mu)$.

A−priori, το ολοκλήρωμα $W * (\mu - \nu)$ στην Παρατήρηση 9.4.6 είναι στοχαστικό ολοκλήρωμα, παρόλο που το $\mu - \nu$ είναι ένα πεπερασμένο μέτρο περιορισμένο σε κάθε σύνολο $[0, t] \times F$ (ας θυμηθούμε ότι το μ είναι μία πολυμεταβλητή σημειακή διαδικασία). Παρόλα αυτά, το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι το ολοκλήρωμα είναι πράγματι ένα Stieltjes ολοκλήρωμα.

Θεώρημα 9.4.7. *Υποθέτουμε το μ είναι μία πολυμεταβλητή σημειακή διαδικασία και ότι ισχύει η Υπόθεση 7.3.5. Τότε όλα τα τοπικά martingales έχουν την μορφή*

$$M = M_0 + W * \mu - W * \nu)$$

όπου η W είναι μία $\widetilde{\mathscr{P}}$−μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $|W| * \mu$ να είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [16], Chapter III, §4d, page 190.

Αυτό είναι ένα αξιοσημείωτο αποτέλεσμα, από το οποίο συνεπάγεται ότι *τα τοπικά martingales έχουν πεπερασμένη ολική κύμανση* αν ισχύει η Υπόθεση 7.3.5 και αν το μ είναι μία πολυμεταβλητή σημειακή διαδικασία.

Για παράδειγμα, έστω N μία σημειακή διαδικασία με αντισταθμιστή το A, και έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 7.3.1. Τότε όλα τα martingales έχουν την μορφή

$$M = M_0 + H \bullet N + H \bullet A \tag{9.16}$$

όπου η H είναι μία προβλέψιμη σ.δ., η οποία είναι Stieltjes − ολοκληρώσιμη ως προς το N και το A.

Κεφάλαιο 10

Απόλυτα συνεχείς αλλαγές μέτρων: υπολογισμοί της διαδικασίας πυκνότητας

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ένας φ.χ.π. εφοδιασμένη με ένα $d-$διάστατο ημι$-$martingale $X = (X^i)_{i\leq d}$ με χαρακτηριστικά τα (B, C, ν), σε σχέση με κάποια συνάρτηση περικοπής h. Η X^c συμβολίζει το συνεχές martingale μέρος της X, και $\mu = \mu^X$ είναι το τυχαίο μέτρο που σχετίζεται με τα άλματά της σύμφωνα με την Πρόταση 6.1.2.3. Έχουμε τους παρακάτω συμβολισμούς

$$\alpha_t(\omega) = \nu(\omega; \{t\} \times \mathbb{R}^d) \tag{10.1}$$

$$\widehat{W}_t(\omega) := \begin{cases} \int W(\omega, t, x)\nu(\omega; \{t\} \times dx), & \text{αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει} \\ +\infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{10.2}$$

όπως στην σχέση (9.12). Επίσης επιλέγουμε μία ″καλή εκδοχή″ του C η οποία έχει την μορφή:

$$C^{ij} = c^{ij} \bullet A \tag{10.3}$$

όπου A είναι μία συνεχής αύξουσα σ.δ., $c = (c^{ij})_{i,j\leq d}$ είναι μία προβλέψιμη σ.δ. με τιμές στο σύνολο των $d \times d$ συμμετρικών μη αρνητικών πινάκων.

Θεωρούμε ένα άλλο μέτρο P' κάτω από το οποίο η X είναι ένα ημι$-$martingale με χαρακτηριστικά (B', C', ν'), σε σχέση με την ίδια συνάρτηση περικοπής h. Τις περισσότερες φορές θα υποθέτουμε ότι $P' \overset{loc}{\ll} P$, όπου ο σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την διαδικασία πυκνότητας του του μέτρου P' ως προς το P, μέσω των (B, C, ν) και (B', C', ν').

10.1 Όλα τα P−martingales έχουν την ιδιότητα αναπαράστασης ως προς την X

Εφόσον $P' \overset{loc}{\ll} P$, από το Θεώρημα του Girsanov 8.4.1 έχουμε ότι υπάρχει

$$\begin{cases} \beta = (\beta)_{i \le d}, & \text{μία προβλέψιμη σ.δ. και} \\ Y : \widetilde{\Omega} \longmapsto \mathbb{R}_+, & Y \;\; \widetilde{\mathscr{P}} - \text{μετρήσιμη} \end{cases} \tag{10.4}$$

όπου $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ και $\widetilde{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \otimes \mathfrak{B}_d$, έτσι ώστε

$$\begin{cases} B'^i = (B^i) + [\sum_{j \le d} c^{ij} \beta^j] \bullet A + h^i(x)(Y-1) * \nu, \\ C' = C \\ \nu' = Y \cdot \nu \end{cases} \tag{10.5}$$

όπου το δεύτερο μέλος της πρώτης ισότητας είναι το $+\infty$ αν κάποιο από τα ολοκληρώματα δεν συγκλίνει, και όπου οι ισότητες ισχύουν P'−σ.β..

Θα θέλαμε να αποδείξουμε ότι η διαδικασία πυκνότητας Z είναι ο εκθετικός τύπος Dolèans−Dade ενός τοπικού martingale N, το οποίο θα κατασκευάσουμε στην πιο γενική του μορφή. Θέτουμε

$$\sigma := \inf\{t : \;\; \widehat{Y}_t > 1, \; \veebar \; (a_t = 1 \;\; \& \;\; \widehat{Y}_t < 1)\}, \tag{10.6}$$

όπου το ''$\veebar$'' σημαίνει ότι ''ισχύει ακριβώς ένα από τα δύο'', το οποίο προφανώς είναι ένας προβλέψιμος χρόνος, με $\sigma > 0$ (και $P'(\{\sigma = \infty\}) = 1$ από το Θεώρημα 8.3.2).
Στη συνέχεια, θέτουμε

$$\begin{aligned} H \;\; &= \;\; (\beta \cdot c \cdot \beta)\chi_{[\![0,\sigma[\![} \bullet A + (1 - \sqrt{Y})^2 \chi_{[\![0,\sigma[\![} * \nu \\ &\quad + \sum_{s \le \bullet} (\sqrt{1 - \alpha_s} - \sqrt{1 - \widehat{Y}_s})^2 \chi_{\{s < \sigma\}}. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Η H είναι μία προβλέψιμη σ.δ. με τιμές στον $\overline{\mathbb{R}}_+$ με μη φθίνουσες τροχιές και $H_0 = 0$. Εν τούτοις δεν είναι απαραίτητα ''αύξουσα'' σ.δ. στα πλαίσια της Ενότητας

4.1, διότι μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$ και να μην είναι δεξιά συνεχής. Ενόψει της επικείμενης σημασίας τους, δίνουμε μία ειδική ονομασία στις σ.δ. αυτού του τύπου:

Ορισμός 10.1.1. **(a)** Μία **γενικευμένη αύξουσα σ.δ.** είναι μία σ.δ. H με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) παίρνει τιμές στον $\overline{\mathbb{R}}_+$, με $H_0 = 0$ και οι τροχιές είναι μη−φθίνουσες,

(ii) αν $T = \inf\{t : H_t = \infty\}$ τότε η H είναι δεξιά συνεχής επάνω στο $[\![0, T[\![$ (και φυσικά επάνω στο $]\!]T, \infty[\![$).
Παρόλα αυτά, μπορεί να έχουμε ότι $H_T < \infty$, ενώ $H_{T+} = \infty$ αν $T < \infty$.

(b) Λέμε ότι η γενικευμένη αύξουσα σ.δ. H **δεν κάνει άλματα στο άπειρο** αν $H_{T-} = +\infty$ επάνω στο σύνολο $\{T < \infty\}$, όπου στην περίπτωση αύτη όλες οι τροχιές είναι παντού δεξιά συνεχείς.

Έτσι η σ.δ. H που ορίσθηκε στη σχέση (10.7) είναι μία γενικευμένη αύξουσα σ.δ., επειδή τα ολοκληρώματα στη σχέση (10.7) μπορεί να αρχίζουν να αποκλίνουν στον χρόνο T, ενώ συγκλίνουν στο κλειστό διάστημα $[0, T]$. Θέτουμε $T := \inf\{t : H_t = \infty\}$ και

$$T_n := \inf\{t : H_t \geq n\}, \quad \Delta = [\![0, \sigma[\![\bigcap \left(\bigcup_n [\![0, T_n]\!] \right). \tag{10.8}$$

Η ακολουθία $\{T_n\}$ είναι ένας χ.δ., αλλά μπορεί να μην είναι προβλέψιμος χρόνος (δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Proposition 2.13 (βλ. π.χ. [16], Chapter I)) επειδή η H_{T_n} μπορεί να είναι μικρότερη από το n, στην περίπτωση που $T_n = T$. Η Δ είναι ένα προβλέψιμο τυχαίο διάστημα και $[\![0]\!] \subseteq \Delta$.

Πρόταση 10.1.2. *Υπάρχει μία σ.δ. N, μοναδική (ως προς την P−καθολική ισοδυναμία) επάνω στο σύνολο Δ, έτσι ώστε για κάθε χ.δ. S με $[\![0, S]\!] \subseteq \Delta$ η διακοπτόμενη σ.δ. N^S είναι το ακόλουθο P−τοπικό martingale:*

$$N^S = (\beta \chi_{[\![0,S]\!]}) \bullet X^c + (Y - 1 + \frac{\widehat{Y} - \alpha}{1 - \alpha} \chi_{\{\alpha<1\}}) \chi_{[\![0,S]\!]} * (\mu - \nu). \tag{10.9}$$

Αν επεκτείνουμε τον Ορισμό 6.3.3 θα μπορούσε κανείς να πει ότι η N είναι ένα ″τοπικό martingale επάνω στο προβλέψιμο τυχαίο διάστημα Δ ″. Φυσικά, η σχέση (10.9) προυποθέτει ότι:

$$\begin{cases} \beta \chi_{[\![0,S]\!]} \in L^2_{loc}(X^c) \\ V \chi_{[\![0,S]\!]} \in G_{loc}(\mu), \quad \text{όπου } V = [Y - 1 + \frac{\widehat{Y} - \alpha}{1 - \alpha} \chi_{\{\alpha<1\}}] \chi_{[\![0,\sigma[\![}. \end{cases} \tag{10.10}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την V από την σχέση (10.10). Με την σύμβαση ότι $0/0 = 0$ έχουμε ότι $\widehat{V} = \frac{\widehat{Y}-1}{\alpha-1}$ επάνω στο $[\![0,\sigma]\!]$. Επομένως

$$\widetilde{V}_t = [(Y(t,\Delta X_t) - 1)\chi_{\{\Delta X_t \neq 0\}} - \frac{\widehat{Y}_t - \alpha_t}{1-\alpha_t}\chi_{\{\Delta X_t = 0\}}]\chi_{\{t<\sigma\}} \tag{10.11}$$

ικανοποιεί την $\widetilde{V} \geq -1$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Από την (6.10) έχουμε ότι $H = (\beta \cdot c \cdot \beta)\chi_{[\![0,\sigma]\!]} \bullet A + C'(V)$. Αν $[\![0,S]\!] \subseteq \Delta$ τότε $H_S < \infty$, ως εκ τούτου η προβλέψιμη (διακοπτόμενη) σ.δ. H^S ανήκει στον $\mathscr{A}^+_{loc}$. Από τον Ορισμό 6.1.2.1 και τον Ορισμό 9.1.1, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η (10.10) και το δεξιό μέρος της (10.9) ορίζει ένα $P-$τοπικό martingale. Αν S' είναι ένας άλλος χ.δ. με $[\![0,S']\!] \subseteq \Delta$, το δεξιό μέρος της (10.9) για την S και για την S' προφανώς συμπίπτει επάνω στο $[\![0,S\wedge S']\!]$, ως προς την $P-$καθολική ισοδυναμία. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της σ.δ. N με τις ακόλουθες ιδιότητες, μας δίνει την δυνατότητα να γράφουμε ότι $\Delta = \bigcup_n [\![0,S_n]\!]$ $P-$σ.β., για κάποια ακολουθία χ.δ. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Το τελευταίο κομμάτι είναι εύκολο, αφού υπάρχει μία ακολουθία $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από χ.δ. ώστε $\sigma = \lim_{n\to\infty}$ $P-$σ.β. (η οποία είναι προβλέψιμη σύμφωνα με τον Ορισμό 6.2.6). Τότε Η $S_n = \sigma_n \wedge T_n$ μας δίνει αυτό που θέλουμε. □

Από τώρα και έως το τέλος της παραγράφου, υποθέτουμε ότι $P' \overset{loc}{\ll} P$, ότι η Z συμβολίζει την διαδικασία πυκνότητας του P' ως προς το P, και ότι

$$R_n = \inf\{t : Z_t < 1/n\}. \tag{10.12}$$

Έτσι από το Λήμμα 8.1.5 προκύπτει

$$\{Z_- > 0\} \cap]\!]0,\infty[\![= \bigcup_n]\!]0,R_n]\!], \quad \text{ως προς την } P-\text{καθολική ισοδυναμία.} \tag{10.13}$$

Λήμμα 10.1.3. *Υποθέτουμε ότι $P' \overset{loc}{\ll} P$, και ότι η σ.δ. Δ ορίζεται από την (10.8). Τότε:*

(a) Η διαδικασία πυκνότητας Z έχει την μορφή

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 + (Z_-\beta) \bullet X^c + Z_-(Y - 1 + \frac{\widehat{Y}-\alpha}{1-\alpha}\chi_{\{\alpha<1\}}) * (\mu - \nu) + Z' \\ &= Z_0 + (Z_-\beta) \bullet X^c + (Z_-V) * (\mu - \nu) + Z', \end{aligned} \tag{10.14}$$

όπου V δίνεται από την (10.10) και η Z' είναι ένα $P-$τοπικό martingale με $Z'_0 = 0$ και $\langle Z'^c, X^{i,c}\rangle = 0$ για κάθε $i = 1, \cdots, d$ και $M^P_\mu[\Delta Z' | \widetilde{\mathscr{P}}] = 0$.

(b) $\bigcup_n [\![0, R_n]\!] \subseteq \Delta$ *ως προς την $P-$καθολική ισοδυναμία.*

Απόδειξη. Από την (10.5), το Θεώρημα 8.4.1 μας δίνει ότι η β και η Y ικανοποιούν την σχέση (8.9), και ιδιαιτέρως $M^P_\mu[\Delta Z|\widetilde{\mathscr{P}}] = Z_-(Y-1)$. Τότε από τα Θεωρήματα 9.1.3 και 9.2.1 έχουμε την πρώτη ισότητα της (10.14). Επιπλέον, το Θεώρημα 8.4.1 μας δίνει ότι $P'(\sigma < \infty) = 0$. Αφού η σ είναι προβλέψιμη, και $Z_{\sigma-} = dP'_{\sigma-}/dP_{\sigma-}$ επάνω στο $\{\sigma < \infty\}$ (βλέπε Θεώρημα 8.1.3(iii)), προκύπτει ότι $Z_{\sigma-} = 0$ $P-$σ.β. επάνω στο $\{\sigma < \infty\}$. Ως εκ τούτου $Z_-\chi_{[\![0,\sigma[\![} = Z_-$ και άρα συνάγουμε την τελευταία ισότητα της (10.14). Επίσης έχουμε, χρησιμοποιώντας την (10.12), ότι $\bigcup_n [\![0, R_n]\!] \subseteq [\![0,\sigma[\![$ ως προς την $P-$καθολική ισοδυναμία. Έχουμε ότι $(1/Z_-)\chi_{[\![0,R_n]\!]} \leq n$, οπότε συμπεραίνουμε από τις $Z_-\beta \in L^2_{loc}(X^c)$ και $Z_-V \in G_{loc}(\mu)$ ότι $\beta\chi_{[\![0,R_n]\!]} \in L^2_{loc}(X^c)$ και $V\chi_{[\![0,R_n]\!]} \in G_{loc}(\mu)$. Τότε από τον Ορισμό 9.1.1 και το Θεώρημα 6.1.4.2 (από την (10.11) είχαμε $\widetilde{\mathscr{V}} \geq -1$) έχουμε ότι $H_{R_n \wedge t} < \infty$ $P-$σ.β. για κάθε $t < \infty$. Αυτό ξεκάθαρα μας δίνει ότι $[\![0, R_n]\!] \subseteq \bigcup_n [\![0, T_p]\!]$ ως προς την $P-$καθολική ισοδυναμία, οπότε έχουμε τον τελευταίο ισχυρισμό. □

Θεώρημα 10.1.4. *Υποθέτουμε ότι $P' \overset{loc}{\ll} P$ και ότι όλα τα $P-$τοπικά martingales έχουν την ιδιότητα αναπαράστασης ως προς την X. Τότε η διαδικασία της πυκνότητας Z ικανοποιεί τη σχέση*

$$Z = Z_0 + (Z_-\beta) \bullet X^c + Z_-(Y–1 + \frac{\widehat{Y} - \alpha}{1-\alpha}\chi_{\{\alpha<1\}}) * (\mu - \nu). \tag{10.15}$$

Επιπλέον, αν οι Δ και N δίνονται από τις (10.8) και (10.9) τότε

$$Z_t = \begin{cases} Z_0 e^{(N_t - \frac{1}{2}(\beta\cdot c\cdot\beta)\bullet A_t)} \prod_{s\leq t}(1+\Delta N_s)e^{-\Delta N_s}, & \text{αν } t \in \Delta \\ 0, & \text{αν } t \notin \Delta. \end{cases} \tag{10.16}$$

Απόδειξη. (a) Η σχέση (10.15) βγαίνει άμμεσα από το Λήμμα 10.1.3(a) και από την ισοδυναμία $(i) \iff (ii)$ του Πορίσματος 9.3.3.
(b) Γνωρίζουμε ότι $Z_t = 0$ αν $t \notin \Delta$ από το Λήμμα 10.1.3(b). Επιπλέον, αφού $[\![0, R_n]\!] \subseteq \Delta$, από τις σχέσεις (10.9) και (10.15) έχουμε ότι

$$Z^{R_n} = Z_0 + Z_- \bullet N^{R_n}.$$

Ως εκ τούτου η $Z(n) = Z^{R_n}/Z_0$ (με $0/0 = 0$) ικανοποιεί την $Z(n) = 1 + Z(n)_- \bullet N^{R_n}$ και η σχέση (5.12) μας δίνει ότι $Z(n) = \mathscr{E}[N^{R_n}]$, άρα $Z^{R_n} = Z_0\mathscr{E}[N^{R_n}]$. Αφού

$$\langle (N^{R_n})^c, (N^{R_n})^c \rangle = (\beta \cdot c \cdot \beta)\chi_{[\![0,R_n]\!]} \bullet A$$

από την (9.5), από την σχέση (5.14 διαπιστώνουμε ότι η $Z_t^{R_n} = Z_t$ δίνεται από την (10.16), για $t \leq R_n$. Μένει να αποδείξουμε ότι αν $t \in \Delta$ και $t > R_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το δεξί μέρος της (10.16), έστω $\widetilde{Z}_t$, ισούται με μηδέν. Θέτουμε $R := \lim_{n\to\infty} R_n$ και $S := \inf\{t : \widetilde{Z}_t = 0 \text{ ή } \widetilde{Z}_{t-} = 0\}$. Από την κατασκευή της $\widetilde{Z}$, έχουμε ότι $\widetilde{Z} = 0$ επάνω στο $[\![S, \infty[\![$. Τότε έχουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $R_n = R$ για κάποιο n. Τότε $\widetilde{Z}_R = \widetilde{Z}_{R_n} = Z_{R_n} = Z_R = 0$, οπότε $S = R$ και $\widetilde{Z}_t = 0$ επειδή $t \geq S$.

(ii) $R_n < R$ για όλα τα n. Τότε $\widetilde{Z}_{R-} = \lim \widetilde{Z}_{R_n} = \lim Z_{R_n} = Z_{R-} = 0$, οπότε $S = R$ και $\widetilde{Z}_t = 0$ πάλι. □

Πόρισμα 10.1.5. *Εκτός από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 10.1.4, υποθέτουμε ότι ισχύει μόνο η (i) ή μόνο τουλάχιστον μία από τις (ii) και (iii) από τις παρακάτω συνθήκες:*

(i) $Z_t = 0$ $P-$*σ.β. για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$,

(ii) $T \leq \sigma$ *και η γενικευμένη αύξουσα σ.δ.* H *δεν έχει άλματα στο άπειρο,*

(iii) για $P-$*σ.ο. τα* ω *υπάρχει ένα* t *με* $(\omega, t) \in \Delta$ *και* $\Delta N_t(\omega) = -1$.

Τότε έχουμε ότι

$$Z_t = Z_0 e^{(N_t - \frac{1}{2}(\beta \cdot c \cdot \beta) \bullet A_t)} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta N_s) e^{-\Delta N_s} \tag{10.17}$$

Απόδειξη. Οι ισχυρισμοί είναι προφανείς κάτω από την (i) ή (iii). Υποθέτωντας ότι ισχύει η (ii), έχουμε ότι $H_{T-} = \infty$ επάνω στο $\{T < \infty\}$ και $T \leq \sigma$. Επομένως $T_n < T$ για όλα τα n επάνω στο $\{T < \infty\}$, και $\Delta = [\![0, T[\![$. Αφού $\bigcup_n [\![0, R_n]\!] \subseteq \Delta$, έχουμε ότι $R_n < T$ επάνω στο $\{T < \infty\}$ και έτσι $\lim_{t \uparrow\uparrow T} Z_t = 0$ επάνω στο $\{T < \infty\}$. Επομένως η (10.17) έπεται άμμεσα από την (10.15). □

Παρακάτω έχουμε μία πολύ ενδιαφέρον συνέπεια. Έστω μία *αρχική σ−άλγεβρα* $\mathscr{H}$ (δηλαδή μία σ − υποάλγεβρα της $\mathcal{F}_0$) και τους περιορισμούς P_H και P'_H των P και P', αντίστοιχα, στην $\mathscr{H}$.

Θεώρημα 10.1.6. *Υποθέτουμε ότι* $P' \overset{loc}{\ll} P$. *Τότε* *(a) αν όλα τα $P-$τοπικά martingales έχουν την ιδιότητα αναπαράστασης ως προς την X, τότε όλα τα $P'-$τοπικά martingales έχουν επίσης την ιδιότητα αναπαράστασης ως προς την X (βεβαίως στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P')$ για το τελευταίο).*

(b) Αν P είναι ακραίο (extremal) σημείο στον $s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$ και αν $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\infty-}$, τότε το P' είναι ένα ακραίο σημείο στο $s(\mathscr{H}, X|P'_H; B', C', \nu')$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.1, το (a) είναι ειδική περίπτωση του (b) όταν έχουμε ότι $\mathscr{H} = \mathcal{F}_0$. Υποθέτουμε ότι το P είναι ένα ακραίο σημείο στον $s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$, και έστω $\widetilde{P}' \in s(\mathscr{H}, X|P'_H; B', C', \nu')$ με $\widetilde{P}' \ll P'$. Τότε $\widetilde{P}' \overset{loc}{\ll} P$ και συμβολίζουμε με $\widetilde{Z}$ την διαδικασία πυκνότητας του $\widetilde{P}'$ ως προς το P. Τότε η $\mathbb{E}_P[\widetilde{Z}_0|\mathscr{H}] = \mathbb{E}_P[Z_0|\mathscr{H}]$ είναι η πυκνότητα dP'_H/dP_H. Από την δεύτερη ιδιότητα του Θεωρήματος 9.4.1 (i) συμπεραίνουμε ότι $\widetilde{Z}_0 = Z_0$ $P-$σ.β.. Εφαρμόζωντας το Θεώρημα 10.1.4, αφού $\widetilde{Z}_0 = Z_0$ $P-$σ.β., τα $\widetilde{Z}_t$ και Z_t δίνονται $P-$σ.β. από την σχέση (10.16). Ως εκ τούτου $\widetilde{Z}_t = Z_t$ $P-$σ.β., επομένως $\widetilde{P}' = P'$ σε κάθε $\mathcal{F}_t$. Αφού $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\infty-}$, τότε έχουμε ότι $\widetilde{P}' = P'$. Επομένως το P' ικανοποιεί το Θεώρημα 9.4.1 (iv), και η άρα το P' είναι ακραίο σημείο στον $s(\mathscr{H}, X|P'_H; B', C', \nu')$. □

Παρατήρηση 10.1.7. Το Λήμμα 10.1.3 και το Θεώρημα 10.1.4 περιέχουν ένα πολύ αξιοσημείωτο αποτελέσμα, δηλαδή ότι $Z_{\sigma-} = 0$ επάνω στον $\{\sigma < \infty\}$. Πράγματι, αν ορίσουμε την Z όπως στην (10.16) τότε δεν υπάρχει απολύτως κανένας λόγος η $Z_{\sigma-}$ να είναι ίση με το 0 για $\sigma < \infty$ (εκτός από το σύνολο $\{H_{\sigma-} = \infty\}$). Αυτή η ιδιότητα προκύπτει στην πραγματικότητα από την ″implicit″ υπόθεση επάνω στα χαρακτηριστικά (B', C', ν'), ότι αυτά είναι τα χαρακτηριστικά του X για ένα μέτρο P' με $P' \overset{loc}{\ll} P$.

10.2 Το P' έχει την ιδιότητα της τοπικής μοναδικότητας

Ξεκινάμε ξανά με κάποια γενικά αποτελέσματα. Έστω β και Y όπως ορίζονται από ην σχέση (10.4) και τα σ, H, Δ όπως ορίζονται από τις σχέσεις (10.6), (10.7) και (10.8), και η σ.δ. N όπως έχει εισαχθεί από στην Πρόταση 10.1.3. Θέτουμε

$$\widetilde{Z}_t := \begin{cases} \widetilde{Z}_0 e^{(N_t - \frac{1}{2}(\beta\cdot c\cdot\beta)\bullet A_t)} \prod_{s\leq t}(1+\Delta N_s)e^{-\Delta N_s}, & \text{αν } t \in \Delta \\ 0, & \text{αν } t \notin \Delta \end{cases} \tag{10.18}$$

όπου $\widetilde{Z}_0$ είναι μία $\mathcal{F}_0-$μετρήσιμη τ.μ., με $\widetilde{Z}_0 \geq 0$ και $\mathbb{E}[\widetilde{Z}_0] = 1$.

Αφού $\Delta N = \widetilde{V} \geq -1$ (βλέπε σχέση (10.11)), έχουμε ότι $\widetilde{Z} \geq 0$. Επιπλέον αν το S είναι ένας χ.δ. με $[\![0, S]\!] \subseteq \Delta$, όπως φαίνεται και στην απόδειξη του Θεωρήματος 10.1.4 προκύπτει ότι $\widetilde{Z}^S = \widetilde{Z}_0 \mathscr{E}(N^S)$, και άρα $\widetilde{Z}^S$ είναι ένα $P-$τοπικό martingale.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $B'(\omega), C'(\omega), \nu'(\omega)$ όπου δίνονται από την σχέση (10.5) για κάθε $\omega \in \Omega$ (και όχι μόνο $P-$σ.β.). Αυτή είναι μία ουσιώδης υπόθεση για το επόμενο λήμμα, στο οποίο κατασκευάζουμε ένα άλλο μέτρο $\widetilde{P}'$ το οποίο a$-$priori δεν έχει σχέση με το P'.

Λήμμα 10.2.1. *Έστω S ένας χ.δ. έτσι ώστε $[\![0, S]\!] \subseteq \Delta$, και υποθέτουμε επιπλέον ότι η $\widetilde{Z}^S$ είναι ένα $P-$ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale. Τότε, κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\widetilde{P}'(d\omega) = P(d\omega)\widetilde{Z}_S(\omega)$, η X^S είναι ένα ημι$-$martingale με χαρακτηριστικά τα (B'^S, C'^S, ν'^S) (βλέπε πριν τον Ορισμό 7.6.3 για τον συμβολισμό του ν'^S).*

Απόδειξη. Όπως είδαμε προηγουμένως, $\widetilde{Z}^S = \widetilde{Z}_0 \mathscr{E}(N^S)$, και έτσι από την σχέση (10.9) έχουμε ότι

$$\widetilde{Z}^S = \widetilde{Z}_0 + (\widetilde{Z}^S_- \beta \chi_{[\![0,S]\!]}) \bullet X^c + (\widetilde{Z}^S_- V \chi_{[\![0,S]\!]}) * (\mu - \nu), \tag{10.19}$$

όπου V είναι όπως στην Πρόταση 10.1.2. Τότε το Θεώρημα 9.1.3 μας δίνει ότι

$$\langle (\widetilde{Z}^S)^c, X^{i,c} \rangle = (\widetilde{Z}^S_- (\sum_{j \leq d} c^{ij} \beta^j) \chi_{[\![0,S]\!]}) \bullet A.$$

Επιπλέον η σχέση (10.11) δίνει ότι $\widetilde{Z}^S = \widetilde{Z}^S_-(Y-1)\chi_{[\![0,S]\!]}$ $M^P_\mu-$σ.β., και δεύτερον είναι $\widetilde{P}-$μετρήσιμη. Ως εκ τούτου $M^P_\mu(\Delta \widetilde{Z}^S | \widetilde{\mathscr{P}}) = \widetilde{Z}^S_-(Y-1)\chi_{[\![0,S]\!]}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η (10.8) ικανοποιείται από τα X^S και $\widetilde{Z}^S$ (ως προς τα χαρακτηριστικά (B^S, C^S, ν^S) και (B'^S, C'^S, ν'^S)). Αφού η σ.δ. $\widetilde{Z}^S$ είναι η σ.δ. πυκνότητας του $\widetilde{P}'$ ως προς το P, το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 8.4.1. $\square$

Τελικά θα υποθέσουμε μία τοπική μοναδικότητα (βλέπε Ορισμό 7.6.3) για το martingale$-$πρόβλημα για το οποίο το P' είναι μία λύση του. Οπότε έχουμε τις επόμενες υποθέσεις: Έστω $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}_0$ μία αρχική σ$-$άλγεβρα, και P_H και P'_H οι περιορισμοί των P και P' αντίστοιχα επάνω στην $\mathscr{H}$, και υποθέτουμε ότι η $\mathbb{F}$ παράγεται από την X και $\mathscr{H}$ (βλέπε Υπόθεση 7.4.6). Ας θυμηθούμε ότι έχουμε ορίσει τους γνήσιους χ.δ. στον Ορισμό 7.6.1.

Υπόθεση 10.2.2. *$\Delta = \bigcup_n [\![0, \sigma_n]\!]$ ως προς την $P-$καθολική ισοδυναμία, όπου $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία από γνήσιους χ.δ..*

Παρατηρούμε ότι η Δ είναι πάντα της μορφής $\bigcup_n [\![0, \sigma_n]\!]$ για μία ακολουθία $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ απο χ.δ.. Πράγματι για παράδειγμα, ας πάρουμε $\sigma_n = \sigma'_n \wedge T_n$, όπου $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι όπως στην (10.8) και η $\{\sigma'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία που μας δίνει τον θετικό προβλέψιμο χρόνο σ. Παρόλα αυτά, η ακολουθία $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι απαραίτητα γνήσιος χ.δ.. Ωστόσο, η Υπόθεση 10.2.2 ικανοποιείται όταν η H δεν έχει άλματα στο άπειρο και $\sigma \geq \lim_n T_n (= \inf\{t : H_t = \infty\})$, επειδή τότε κάθε T_n είναι προβλέψιμο (Proposition 2.13, [16], Chapter I) και θετικό, έτσι είναι γνήσιος από την Παρατήρηση (7.6.2), και $\Delta = \bigcup_n [\![0, T_n]\!]$.

Λήμμα 10.2.3. *Υποθέτουμε ότι ισχύει η Υπόθεση 7.4.6 και η Υπόθεση 10.2.2. Τότε υπάρχει μία ακολουθία $\{S_n\}$ από γνήσιους χ.δ., έτσι ώστε*

$$\Delta = \bigcup_n [\![0, S_n]\!] \quad P - \sigma.\beta.$$

και ώστε η $\widetilde{Z}^{S_n}$ να είναι ένα $P-$ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale για όλα τα n.

Απόδειξη. (a) Αρχικά υποθέτουμε ότι $\Delta = \Omega \times \mathbb{R}_+$, επομένως $\sigma \equiv \infty$ και η H έχει πεπερασμένες τιμές (και έτσι είναι μία 'συνήθης' δεξιά συνεχής αύξουσα σ.δ.). Η V δίνεται από την σχέση (10.10) και συνδέουμε την V' και την V'' μέσω της σχέσης (6.9). Θέτουμε

$$K := (\beta \cdot c \cdot \beta) \bullet A + C(V') + \overline{C}(V'')$$

$$K' := (1 + \widetilde{Z}_- + (\widetilde{Z}_-)^2) \bullet K.$$

Από την σχέση (10.10) και το Θεώρημα 6.1.4.2, βλέπουμε ότι η K, ως εκ τούτου και η K' επίσης, είναι προβλέψιμες, και ανήκουν στο σύνολο $\mathscr{A}_{loc}$. Θέτουμε $S_n := \inf\{t : K'_t \geq n\}$. Τότε η S_n είναι ένας προβλέψιμος χρόνος (Proposition 2.13, [16], Chapter I), και $S_n > 0$, και $S_n \to \infty$ καθώς $n \to \infty$. Μένει να αποδείξουμε ότι η $\widetilde{Z}^{S_n}$ είναι $P-$ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Για απλοποίηση, θέτουμε $S := S_n$. Από την σχέση (10.19), η $\widetilde{Z}^S$, είναι ένα $P-$τοπικό martingale, καθώς και $\widetilde{Z}^{S-} := \widetilde{Z}^S_0 + \chi_{[\![0,S[\![} \bullet \widetilde{Z}^S$, όπου S είναι προβλέψιμο. Από την (10.19) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}^{S-} &= Z_0 + (\widetilde{Z}_- \beta \chi_{[\![0,S[\![}) \bullet X^c + (\widetilde{Z}_- V' \chi_{[\![0,S[\![}) * (\mu - \nu) \\ &\quad + (\widetilde{Z}_- V'' \chi_{[\![0,S[\![}) * (\mu - \nu). \end{aligned} \tag{10.20}$$

Επιπλέον, $K'_{S-} \leq n$ από την κατασκευή της. Άρα από τον ορισμό της K' έχουμε ότι

$$(\widetilde{Z}_-^2(\beta \cdot c \cdot \beta)\chi_{[\![0,S[\![}) \bullet A_\infty \ \leq \ n$$

$$C(\widetilde{Z}_- V'\chi_{[\![0,S[\![})_\infty \ = \ \widetilde{Z}_-^2 \bullet C(V')_{S-} \leq n$$

$$\overline{C}(\widetilde{Z}_- V''\chi_{[\![0,S[\![})_\infty \ = \ \widetilde{Z}_- \bullet C(V'')_{S-} \leq n.$$

Τότε από Θεώρημα 9.1.2(d) έχουμε ότι $(\widetilde{Z}_-\beta\chi_{[\![0,S[\![}) \bullet X^c \in \mathscr{H}^2$, και από Θεώρημα 6.1.4.2(a) έχουμε $(\widetilde{Z}_- V'\chi_{[\![0,S[\![}) * (\mu - \nu) \in \mathscr{H}^2$, και από Θεώρημα 6.1.4.2(b) έχουμε ότι $(\widetilde{Z}_- V''\chi_{[\![0,S[\![}) * (\mu - \nu) \in \mathscr{A}$. Αφού η $\widetilde{Z}_0$ είναι $P-$ολοκληρώσιμη, από την (10.20) συνεπάγεται ότι η $\widetilde{Z}^{S-}$ είναι $P-$ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Τώρα, $\widetilde{Z}^S = \widetilde{Z}^{S-} + \Delta\widetilde{Z}_S\chi_{[\![S,\infty[\![}$, άρα μένει να αποδείξουμε ότι η $\Delta\widetilde{Z}_S\chi_{\{S<\infty\}}$ είναι $P-$ολοκληρώσιμη. Έχουμε ότι $\Delta\widetilde{Z}_S = \widetilde{Z}_{S-}\Delta N_S$ επάνω στο σύνολο $\{S < \infty\}$, και η $\widetilde{Z}_{S-}$ είναι $P-$ολοκληρώσιμη από τα προηγούμενα. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι η μέση τιμή $\mathbb{E}[|\Delta N_S||\mathcal{F}_{S-}]\chi_{\{S<\infty\}}$ είναι φραγμένη. Αλλά από την σχέση (10.11) για $\widetilde{V} = \Delta N$, και από το ότι $\alpha \leq 1, \widehat{Y} \leq 1$, επάνω στο σύνολο $\{S < \infty\}$ παίρνουμε ότι:

$$|\Delta N_S| \leq 1 + Y(S, \Delta X_S)\chi_{\{\Delta X_S \neq 0\}} + \frac{2}{1-\alpha_S}\chi_{\{\Delta X_S = 0\}}$$

και άφού η S είναι προβλέψιμη, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[|\Delta N_S||\mathcal{F}_{S-}] \leq +\widehat{Y}_S + \frac{2}{1-\alpha_S}P(\Delta X_S = 0|\mathcal{F}_{S-}) = \widehat{Y}_S + 3 \leq 4.$$

(b) Επιστρέφουμε τώρα στην γενική περίπτωση. Θέτουμε $p \in \mathbb{N}^*$, και σταματάμε όλες τις σ.δ. στο χρόνο σ_p. Τότε από το βήμα (a) προκύπτει μία ακολουθία $\{S_{n,p}\}_{n\geq 1}$, από θετικούς προβλέψιμους και άρα γνήσιους χ.δ., με $\Omega \times \mathbb{R}_+ = \bigcup_n [\![0, S_{n,p}[\![$ και η $(\widetilde{Z}^{\sigma_p})^{S_{n,p}}$ είναι ένα $P-$ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale. Τότε η $S'_{n,p} := S_{n,p} \wedge \sigma_p$ είναι πάλι ένας απόλυτος χ.δ., και $\Delta = \bigcup_{n,p}[\![0, S'_{n,p}]\!]$, και $\widetilde{Z}^{S'_{n,p}}$ είναι ένα $P-$ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale. Παίρνοντας την ακολουθία $\{S'_{n,p}\}_{n,p\in\mathbb{N}^*}$ έχουμε το αποτέλεσμα. □

Τώρα θα διατυπώσουμε το βασικό αποτέλεσμα, το οποίο θα το συκρίνουμε με το Θεώρημα 10.1.4. Εδώ υποθέτουμε την τοπική μοναδικότητα για το πρόβλημα $s(\mathscr{H}, X|P'_H; B', C', \nu')$ του οποίου μία λύση είναι η P' (επόμενως η μοναδική λύση). Στο Θεώρημα 10.1.4 θεωρούμε την ιδιότητα της αναπαράστασης για όλα τα $P-$τοπικά martingales, μία ιδιότητα η οποία στην πράξη μπορεί να ικανοποιείται όταν ισχύει η μοναδικότητα για το $s(\mathscr{H}, X|P_H; B, C, \nu)$.

Θεώρημα 10.2.4. *Θεωρούμε ότι η δοσμένη τριάδα (B', C', ν') ικανοποιεί την (10.5), όπου (β, Y) ικανοποιεί την (10.4). Θεωρούμε ότι η $\mathbb{F}$ παράγεται από την X και την $\mathscr{H}$ (βλέπε την Υπόθεση 7.4.6) και ότι η Υπόθεση 10.2.2 ικανοποιείται, και ότι η τοπική μοναδικότητα ικανοποιείται για το martingale−πρόβλημα $s(\mathscr{H}, X|P'_H; B', C', \nu')$, με μοναδική λύση την P'.*
Τότε αν $P' \overset{loc}{\ll} P$, η διαδικασία πυκνότητας Z της P' ως προς το P δίνεται από την σχέση (10.16) (ή την (10.17) εάν ακρίβως μία από τις επιπλέον υποθέσεις στο Πόρισμα 10.1.5 ικανοποιείται), όπου η Z_0 είναι $P-$σ.β. ίση με την Radon − Nikodym παράγωγο $Z_H = dP'_H/dP_H$.

Παρατήρηση 10.2.5. Ότι τα χαρακτηριστικά (B', C', ν') δίνονται από την σχέση (10.5) είναι μία καίρια υπόθεση (έχουν χρησιμοποιηθεί στο Λήμμα 10.2.1, το οποίο είναι θεμελιώδες για την απόδειξη του Θεωρήματος 10.2.4).
Πολύ συχνά το μέτρο P' δίνεται αρχικά, και υπάρχουν συνήθως πολλές εκδοχές των $P'-$χαρακτηριστικών της X. Τότε πρέπει κανείς να επιλέξει μία εκδοχή που ικανοποιεί την (10.5), και η τοπική μοναδικότητα πρέπει να ισχύει για αυτήν την επιλογή των χαρακτηριστικών (B', C', ν').

Για την καλύτερη κατανόηση δίνουμε το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 10.2.6. *Έστω $\Omega = \{1, 2\}$ με $P(1) = P(2) = \frac{1}{2}$ και $P'(1) = 1$, έτσι $P' \ll P$. Έστω η σ.δ. X που ορίζεται ως εξής,*

$$X_t(1) = 0, \quad X_t(2) = (t-1)^+.$$

Έστω $\mathbb{F}$ όπως στην Υπόθεση 7.4.6 ($\mathscr{H}$ = η τετριμμένη σ−άλγεβρα). Τότε $B = X, C = 0, \nu = 0$ είναι τα $P-$χαρακτηριστικά της X, και η σ.δ. πυκνότητας είναι

$$Z_t(\omega) = 1 \text{ για } t < 1, \quad Z_t(1) = 2 \text{ και } Z_t(2) = 0 \text{ για } t \geq 1.$$

Επομένως η Z δεν είναι της μορφής (10.16) (διότι $N = 0$, αφού $\mu = 0$ και $X^c = 0$). Ωστόσο ένα φυσικό σύνολο χαρακτηριστικών για την X υπο το μέτρο P' είναι τα $B' = 0, C' = 0, \nu' = 0$, για τα οποία η τοπική μοναδικότητα προφανώς ισχύει, αλλά τα χαρακτηριστικά μας δεν ικανοποιούν την (10.5) .

Πράγματι, το μόνο σύνολο χαρακτηριστικών τα οποία ικανοποιούν την (10.5) είναι τα $(B', C', \nu') = (B, C, \nu)$, και όλα τα μέτρα πιθανότητας επάνω στον Ω είναι λύσεις του αντίστοιχου martingale−προβλήματος.

Απόδειξη του Θεώρηματος 10.2.4. Ορίζουμε την $\widetilde{Z}$ από την σχέση (10.18), με $\widetilde{Z}_0 = Z_H := dP'_H/dP_H$, και θεωρούμε την ακολουθία $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ όπως την κατασκευάσαμε στο Λήμμα 10.2.3. Τότε το Λήμμα 10.2.1 μας δίνει ότι η $P'^n(d\omega) = P(d\omega)\widetilde{Z}_{S_n}(\omega)$ είναι μία λύση του διακοπτόμενου προβλήματος $s(\mathscr{H}, X^{S_n}|P'_H; B'^{S_n}, C'^{S_n}, \nu'^{S_n})$ (ας σημειώσουμε ότι $P'^n_0 = Z_H \bullet P_0$, ως εκ τούτου η σχέση $P'^n_H = P'_H$ είναι προφανής). Εφαρμόζουμε τώρα την τοπική μοναδικότητα. Η ακολουθία $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένας γνήσιος χ.δ., οπότε $P'^n = P'$ επάνω στην σ−άλγεβρα $\mathcal{F}^0_{S_n}$, πολύ περισσότερο επάνω στην $\mathcal{F}_{(S_n)-}$, περιορίζοντάς την στο σύνολο $\{S_n > 0\}$. Έτσι $P'^n_t = P'_t$ επάνω στο σύνολο $\{S_n > t\}$, και συμπεραίνουμε ότι $\widetilde{Z} = Z$ επάνω στο σύνολο $\bigcup_n [\![0, S_n[\![$. Λόγω του Λήμματος 10.1.3 και της σχέσης (10.18), έχουμε ότι $\widetilde{Z} = Z = 0$ επάνω στο σύνολο Δ^c. Μένει να δούμε τι συνβαίνει στο χρόνο S, επάνω στο σύνολο $\bigcup_n\{S_n = S < \infty\}$. Έχουμε ότι $Z_S = 0$ επάνω στο σύνολο $\bigcup_n\{S_n = S < \infty\}$ (επειδή η Z είναι cad), ενώ $\widetilde{Z}_S \geq 0$, και έτσι έχουμε ότι

$$\widetilde{Z}^{S_n} - Z^{S_n} = \widetilde{Z}_S \chi_{\{S=S_n<\infty\}} \chi_{[\![S,\infty[\![} \geq 0.$$

Επομένως για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η σ.δ. $M(n,t) = \widetilde{Z}^{S_n\wedge t} - Z^{S_n\wedge t}$, η οποία είναι ένα $P-$martingale, είναι επίσης μη αρνητική και ικανοποιεί την $\mathbb{E}[M(n,t)_0] = 0$. Ως εκ τούτου $M(n,t) = 0$ $P-$σ.β. και άρα $\widetilde{Z}_S = 0$ $P-$σ.β. επάνω στο σύνολο $\{S = S_n \leq t\}$. Άρα $\widetilde{Z}_S = 0$ $P-$σ.β. επάνω στο σύνολο $\bigcup_n\{S = S_n \leq \infty\}$. □

Μία συνέπεια του Θεωρήματος 10.2.4 είναι το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 10.2.7. *Θεωρούμε ότι τα χαρακτηριστικά (B', C', ν') δίνονται από την σχέση (10.5), ότι η $\mathbb{F}$ παράγεται από την X και την $\mathscr{H}$, ότι ικανοποιείται η Υπόθεση 10.2.2, και ότι η τοπική μοναδικότητα ισχύει για το martingale−πρόβλημα $s(\mathscr{H}, X|P'_H; B', C', \nu')$, με την μοναδική λύση του P'.*
Τότε αν $P'_H \ll P_H$ και αν $P'(\{H_t < \infty\}) = 1$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$, προκύπτει ότι $P' \overset{loc}{\ll} P$ και ότι η σ.δ. πυκνότητας Z του P' ως προς το P δίνεται από την σχέση (10.16), με $Z_0 = dP'_H/dP_H$.

Απόδειξη. Θέτουμε $Z_H := dP'_H/dP_H$ και ορίζουμε την $\widetilde{Z}$ όπως στην (10.18) με $\widetilde{Z}_0 = Z_H$. Μπορούμε να αναπαράξουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 10.2.4 μέχρι το σημείο $P'^n = P'$ επάνω στο σύνολο $\{0 < S_n\} \cap \mathcal{F}_{(S_n)-}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} P'(\{S_n > t\}) = 1$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$. Αν $A \in \mathcal{F}_t$, τότε $A \cap \{S_n > t\} \in \mathcal{F}_{(S_n)-}$, και αν επιπλέον $P(A) = 0$ τότε έχουμε ότι

$$P'(A) = \lim_n P'(A \cap \{S_n > t\}) = \lim_n P'^n(A \cap \{S_n > t\}) = 0,$$

επειδή $P'^n \ll P$. Τότε συνεπάγεται ότι $P'_t \ll P_t$, και άρα $P' \overset{loc}{\ll} P$. Τελικά, ο τελευταίος ισχυρισμός έπεται από Θεώρημα 10.2.4. □

10.3 Παραδείγματα

Σε αυτήν την Ενότητα θα δώσουμε μερικά παραδείγματα με "αναλυτικούς" υπολογισμούς της σ.δ. πυκνότητας, και διάφορες άλλες εφαρμογές αυτών που προηγήθηκαν. Θα θεωρούμε ότι ισχύει η κανονική υπόθεση 7.4.7.

1.Σ.δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Εδώ θεωρούμε ότι η X (η κανονική σ.δ.) είναι μία PII υπο τα μέτρα P και P', με αντίστοιχα χαρακτηριστικά (B, C, ν) και (B', C', ν'). Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι ντετερμινιστικά, έτσι θεωρούμε ότι ισχύει η (10.5) με ντετερμινιστικούς όρους τα β και Y. Τότε η σ.δ. H είναι ντετερμινιστική, καθώς και το σ και το Δ (βλέπε (10.6) και (10.7)). Ιδιαιτέρως , η Υπόθεση 10.2.2 προφανώς ικανοποιείται.

Θεώρημα 10.3.1. *Εκτός από τις παραπάνω υποθέσεις, θεωρούμε ότι $P' \overset{loc}{\ll} P$. Τότε η σ.δ. πυκνότητας Z του P' ως προς το P δίνεται από την σχέση (10.16), και η σ.δ. $N = \{N_t\}_{t\in\Delta}$ είναι μία σ.δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις επάνω στην $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, με δείκτη το χρονικό διάστημα Δ.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται είτε από το Θεώρημα 10.1.4 (χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 9.4.4) είτε από το Θεώρημα 10.2.4 (χρησιμοποιώντας την Υπόθεση 7.4.7).

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, χρειάζεται να αποδείξουμε ότι αν $s \in \Delta$, τότε η διακοπτόμενη σ.δ. N^s είναι μία PII. Τώρα, η αναλυτική μορφή (10.9) για $r \leq t$ μας δίνει ότι:

$$N^s_t – N^s_r = (\beta\chi_{(r,t]}) \bullet X^c_s + (Y–1 + \frac{\widehat{Y} - \alpha}{1-\alpha}\chi_{\{\alpha<1\}})\chi_{(r,t]} * (\mu - \nu)_s$$

και η προς ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι ντετερμινιστικές, άρα η $N^s_u – N^s_r$ είναι μετρήσιμη ως προς την $\sigma-$άλγεβρα που παράγεται από τις $X^c_u – X^c_r$ για $u \geq r$ και από το $\mu((r,u] \times A)$ για $u \geq r$, $A \in \mathbb{R}^d$, η οποία περιέχεται στην $\sigma(\{X_u – X_r : u \geq r\})$ (στην πραγματικότητα είναι ίση με αυτή την $\sigma-$άλγεβρα). Τότε η PII ιδιότητα της X συνεπάγεται ότι αυτή η $\sigma-$άλγεβρα είναι $P-$ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_r$, και άρα η N^s είναι μία PII επάνω στον φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. □

2. **Σημειακές σ.δ. και πολυμεταβλητές σημειακές σ.δ..**

Ακριβώς όπως και στην Ενότητα 9.1, είναι προφανές ότι όλα τα αποτελέσματα της παρούσας ενότητας ισχύουν, τηρουμένων των αναλογιών, αν αντικαταστήσουμε το βασικό ημι−martingale X από ένα τυχαίο μέτρο μ επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times E$, με $(E, \mathcal{E})$ έναν βοηθητικό Πολωνικό χώρο. Συμβολίζουμε με ν και ν' τον αντισταθμιστή του P και P', αντίστοιχα. Τότε μόνο η Y εμφανίζεται στην (10.4), και η (10.5) μεταφράζεται ως $\nu' = Y \cdot \nu \;\; P-$σ.β., και η σ δεν αλλάζει, και η H δίνεται από την

$$H = (1 - \sqrt{Y})^2 \chi_{[\![0,\sigma[\![} * \nu + \sum_{s \leq \bullet} (\sqrt{1 - \alpha_s} - \sqrt{1 - \widehat{Y}_s})^2 \chi_{\{s<\sigma\}} \tag{10.21}$$

και η Δ ορίζεται από την (10.8), και από την (10.9) έχομε ότι

$$N^S = (Y - 1 + \frac{\widehat{Y} - \alpha}{1 - \alpha} \chi_{\{\alpha<1\}}) \chi_{[\![0,S]\!]} * (\mu - \nu). \tag{10.22}$$

Τότε από το Θεώρημα 10.1.4 και από το Θεώρημα 9.4.7 προκύπτει ότι:

Θεώρημα 10.3.2. *Θεωρούμε ότι το μ είναι μία πολυμεταβλητή σημειακή σ.δ. με τιμές στο σύνολο E και ότι ισχύει η Υπόθεση 7.3.5. Αν $P' \overset{loc}{\ll} P$, τότε η σ.δ. πυκνότητας Z του P' ως προς το P δίνεται από την (10.16), όπου η N ορίζεται στην (10.22).*

Ιδιαιτέρως, αυτό το Θεώρημα εφαρμόζεται για σημειακές σ.δ. (όταν η E ανάγεται σε ένα σημείο). Έτσι ας θεωρήσουμε ότι η X είναι μία σημειακή σ.δ. με αντισταθμιστές A και A' υπο τα μέτρα P και P' αντίστοιχα, και ότι

$$A' = y \bullet A, \quad y \text{ μη αρνητική προβλέψιμη σ.δ..} \tag{10.23}$$

Τότε ο τύπος που δίνει το Z έχει μία καλύτερη μορφή όταν η A είναι συνεχής (δηλαδή, η X είναι ψευδο−αριστερά−συνεχής):

Θεώρημα 10.3.3. *Θεωρούμε την Υπόθεση 7.3.1 και την σχέση (10.23) και ότι η A είναι συνεχής, και έστω $\{T_n\}_{n\geq 1}$ η σ.δ. άφιξης (successive jump times) της X. Τότε αν $P' \overset{loc}{\ll} P$ η σ.δ. πυκνότητας Z της P' ως προς το P δίνεται από την*

$$Z_t := \begin{cases} e^{(y-1)\bullet A_t} \prod_{n:T_n \leq t} y_{T_n}, & \text{αν } t < T := \inf\{t : y \bullet A_t = \infty\} \\ 0, & \text{αν } t \geq T. \end{cases} \tag{10.24}$$

Παραρτήματα

Παράρτημα Α΄

Vector lattices (Διανυσματικοί σύνδεσμοι)

Ορισμός Α΄.1. Έστω L ένας διανυσματικός χώρος. Ένα υποσύνολο C του δ.χ. L ονομάζεται **κώνος με κορυφή το 0** αν για κάθε $\lambda > 0 \quad \lambda C \subseteq C$, δηλαδή αν το C είναι αναλλοίωτο ως προς όλες τις ομοθετικές απεικονίσεις $x \longmapsto \lambda x$ με $\lambda > 0$ (ή κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιαμό $\lambda \cdot x$ όπου $\lambda > 0$ και $x \in C$). Αν επιπλέον το C είναι κυρτό σύνολο, τότε το C ονομάζεται **κυρτός κώνος** με κορυφή το 0. Έτσι ένας κυρτός κώνος με κορυφή το 0 είναι ένα υποσύνολο του L, τότε $C + C \subseteq C$ και $\lambda C \subseteq C$ για κάθε $\lambda > 0$ (C μη αρνητικός κώνος $\Longleftrightarrow \lambda C \subseteq C, \quad \forall \lambda \geq 0 \Longrightarrow 0 \in C$).

Ορισμός Α΄.2. Έστω L ένας δ.χ. επάνω στον $\mathbb{R}$ εφοδιασμένος με μία σχέση $''\leq''$ μερικής διάταξης. Ο L ονομάζεται **διατεταγμένος δ.χ.** επάνω στον $\mathbb{R}$, αν

($\boldsymbol{LO_1}$) $\forall x, y, z \in L \quad [x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z]$

($\boldsymbol{LO_2}$) $\forall x, y \in L$ και $\forall \lambda > 0 \quad [x \leq y \Longrightarrow \lambda x \leq \lambda y]$.

Ορισμός Α΄.3. Ένας **διανυσματικός σύνδεσμος** (vector lattices) είναι ένας διατεταγμένος δ.χ. L επάνω στον $\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $(x, y) \in L \times L$ να υπάρχουν τα $x \wedge y := \sup\{x, y\}$ και $x \vee y := \sup\{x, y\}$ και να είναι στοιχεία του L.

Παράρτημα Β΄

Στοιχεία της θεωρίας μέτρου

Β΄.1 Χρήσιμοι ορισμοί

Ορισμός Β΄.1.1. Έστω $f : X \longmapsto \mathbb{R}$ μία $\mathcal{F}-$μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι **ουσιωδώς φραγμένη** επάνω στο X σε σχέση με το P αν υπάρχει $M < +\infty$ έτσι ώστε $|f| \leq M, \;\; P-$σ.π. επάνω στο X.

Ορισμός Β΄.1.2. Έστω $f : X \longmapsto \mathbb{R}$ μία $\mathcal{F}-$μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι ουσιωδώς φραγμένη, τότε το μικρότερο M με την ιδιότητα $|f| \leq M, \;\; P-$σ.π. επάνω στο X καλείται το **ουσιώδες supremum** της f επάνω στο X σε σχέση με το P και συμβολίζεται με $ess - \sup_{X,P}\{f\}$.
Το $ess - \sup_{X,P}\{f\}$ χαρακτηρίζεται από τις επόμενες ιδιότητες:

(i) $|f| \leq ess - \sup_{X,P}\{f\}, \;\; P-$σ.π. επάνω στο X,

(ii) για κάθε $m < ess - \sup_{X,P}\{f\}$, έχουμε ότι $P(\{x \in X || f(x)| > m\}) > 0$.

Ορισμός Β΄.1.3. Έστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p < \infty$. Μία τ.μ. $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται $p-$**ολοκληρώσιμη** (ως προς το μέτρο P) αν $\left(\int |f|^p dP\right)^{1/p} < \infty$. Με $\mathcal{L}^p(P)$ (αντ. $\mathcal{L}^p_+(P)$) συμβολίζεται ο χώρος όλων των $p-$ολοκληρώσιμων (αντ. μη αρνητικών $P-\sigma.\beta.$, $p-$ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Ιδιαιτέρως, ο χώρος $\mathcal{L}^2(P)$ ονομάζεται και ο χώρος των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων**, ενώ ο $\mathcal{L}^1(P)$ ονομάζεται ο χώρος των **ολοκληρώσιμων συναρτήσεων**. Η συνάρτηση $\|\|_p$: $\mathcal{L}^p(P) \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε

$$\| f \|_p := \left(\int |f|^p dP\right)^{1/p}$$

είναι μία ημινόρμα (βλ. π.χ. [8], Corollary 3.3.4).
Ορίζουμε τον χώρο $L^p(P) := \{f^\bullet : f \in \mathcal{L}^p(P)\}$ όπου $f^\bullet := \{g \in \mathcal{L}^p(P) : P[\{f \neq g\}] = 0\}$. Τότε ο $L^p(P)$ είναι ένας πλήρης διανυσματικός χώρος με νόρμα την $\|\|_p$ (βλ. π.χ. [8], Theorem 3.4.1).

Ορισμός Β΄.1.4. Με $\mathcal{L}^\infty(P)$ συμβολίζουμε τον χώρο όλων των $\mathcal{F}-$μετρήσιμων φραγμένων συναρτήσεων $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $\|\|_\infty$: $\mathcal{L}^\infty(P) \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε

$$\| f \|_\infty := \inf\{M \geq 0 : |f| \leq M \ \ P - \text{σ.β.}\}$$

είναι μία ημινόρμα (βλ. π.χ. [8], Theorem 3.3.4). Ορίζουμε τον χώρο $L^\infty(P) := \{f^\bullet : f \in \mathcal{L}^\infty(P)\}$. Τότε ο $L^\infty(P)$ είναι ένας πλήρης διανυσματικός χώρος με νόρμα την $\|\|_\infty$ (βλ. π.χ. [8], Theorem 3.4.1).

Σε όλη την Δ.Ε. για λόγους απλοποίησης ταυτίζουμε μία συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^p(P)$, $1 \leq p \leq \infty$, με την αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας $f^\bullet$, επομένως ταυτίζουμε τον $\mathcal{L}^p(P)$ με τον $L^p(P)$ για κάθε $1 \leq p \leq \infty$. Αν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης γράφουμε L^p αντί $L^p(P)$.

Ορισμός Β΄.1.5. Έστω$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ και (Θ, T, ν) χ.μ.. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Theta$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο (του $\Omega \times \Theta$)**, αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \mathcal{F}$ και $B \in T$. Επί πλέον, η σ$-$άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται **σ$-$άλγεβρα γινόμενο** των $\mathcal{F}$ και T και συμβολίζεται με $\mathcal{F} \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.μ. $(\Omega \times \Theta, \mathcal{F} \otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των μ και ν** και συμβολίζεται με $\mu \otimes \nu$ αν για κάθε $A \in \mathcal{F}$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Εαν I είναι ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο δεικτών και $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)\}_{i \in I}$ είναι μία οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\emptyset \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \mathcal{F}_J, P_J)$ τον χ.π.$-$γινόμενο $\otimes_{i \in J}(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i) := \Big(\prod_{i \in J} \Omega_i, \otimes_{i \in J}\mathcal{F}_i, \otimes_{i \in J} P_i\Big)$. Αν $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με P^I την πιθανότητα$-$γινόμενο στον Ω^I και με $\mathcal{F}^I$ το πεδίο ορισμού της P^I.

Β΄.2 Θεώρημα της μονότονης κλάσης για σύνολα

Λήμμα Β΄.2.1. *Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μια οικογένεια στοιχείων του Ω. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*

(i) **(Dyn1')** $\Omega \in \mathcal{D}$

(Dyn2') $B \setminus A \in \mathcal{D}$, *για* $A, B \in \mathcal{D}$ *και* $A \subseteq B$

(Dyn3') $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, *για κάθε αύξουσα ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *υποσυνόλων στο* $\mathcal{D}$.

(ii) **(Dyn1)** $\emptyset \in \mathcal{D}$

(Dyn2) $\Omega \setminus A \in \mathcal{D}$, *για κάθε* $A \in \mathcal{D}$

(Dyn3) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, *για κάθε ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ξένων ανα δύο υποσυνόλων στο* $\mathcal{D}$.

Θεώρημα μονότονης κλάσης για σύνολα Β΄.2.2. *Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μία κλάση Dynkin υποσυνόλων του Ω. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$ είναι τέτοιο, ώστε $I \cap J \in \mathcal{I}$ για όλα τα $I, J \in \mathcal{I}$. Τότε η $\mathcal{D}$ περιέχει την $\sigma(\mathcal{I})$.*

Μία αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος μονότονης κλάσης για σύνολα υπάρχει στο [5]

Β΄.3 Θεώρημα της μονότονης κλάσης για συναρτήσεις

Ορισμός Β΄.3.1. Μια οικογένεια $\mathcal{V}$ συναρτήσεων από ένα σύνολο E στον $\mathbb{R}$ ονομάζεται **μονότονη κλάση** αν είναι

(i) διανυσματικός χώρος

(ii) περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις

(iii) κλειστή ως προς τα όρια μονότονων ακολουθιών.

Ορισμός Β΄.3.2. Μια οικογένεια $\mathcal{M}$ φραγμένων συναρτήσεων από ένα σύνολο E στον $\mathbb{R}$ ονομάζεται **πολλαπλασιαστική**, αν είναι κλειστή ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Ορισμός Β΄.3.3. Μία οικογένεια $\mathcal{A}$ συναρτήσεων από ένα σύνολο E σε ένα τοπολογικό χώρο **ονομάζεται ακολουθιακά κλειστή** (sequentially closed), αν το κατά σημείο όριο οποιασδήποτε ακολουθίας στοιχείων της $\mathcal{A}$ ανήκει στην $\mathcal{A}$. Συνήθως για τις εφαρμογές τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ παίρνουν τιμές στον $\bar{\mathbb{R}}$.

- Προφανώς η τομή μιάς οποιασδήποτε οικογένειας από ακολουθιακά κλειστές οικογένειες συναρτήσεων επάνω στον E είναι μία ακολουθιακά κλειστή οικογένεια.

- Αν $\mathcal{E}$ είναι οποιαδήποτε οικογένεια συναρτήσεων επάνω στον E, τότε υπάρχει η ελάχιστη ακολουθιακά κλειστή οικογένεια $\mathcal{E}^\sigma$ συναρτήσεων επάνω στον E, που περιέχει την $\mathcal{E}$, η οποία είναι η τομή όλων των ακολουθιακά κλειστών οικογενειών που περιέχουν την $\mathcal{E}$.

- Η $\mathcal{E}^\sigma$ μπορεί να κατασκευαστεί με υπερπεπερασμένη επαγωγή ως εξής: Έστω β_0 ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός (ordinal number) με πληθικότητα $\aleph_1$ και έστω β οποιαδήποτε διατακτικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος με το β_0. Έστω $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E}$. Υποθέτουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{E}_\alpha$ έχει οριστεί για όλους τους διατακτικούς αριθμούς $\alpha < \beta$. Αν ο β είναι ο επόμενως του α, δηλαδή (successor of a) $\beta = \alpha + 1$, τότε ορίζουμε την οικογένεια $\mathcal{E}_\beta$ ως το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι σημειακά όρια ακολουθιών μέσα από το $\mathcal{E}_\alpha$. Αν ο β είναι οριακός διατακτικός αριθμός (limit ordinal), τότε θέτουμε $\mathcal{E}_\beta := \bigcup\limits_{\alpha<\beta} \mathcal{E}_\alpha$. Τότε ισχύει $\mathcal{E}_\beta = \mathcal{E}^\sigma$ για κάθε $\beta \geq \beta_0$.

- Η οικογένεια $\mathcal{E}^\sigma$ ονομάζεται η **ακολουθιακή κλειστότητα** (sequentially closure or sequentially span) του $\mathcal{E}$.

- Ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ είναι **κλειστός κάτω από τον τεμαχισμό** (chopping) αν για κάθε $f \in \mathcal{E}$ ισχύει $f \wedge 1 \in \mathcal{E}$.

- Μία οικογένεια $\mathcal{E}$ συναρτήσεων από το E στον $\bar{\mathbb{R}}$ ονομάζεται $\sigma-$ **πεπερασμένη** ($\sigma-$finite), αν περιέχει μία αριθμήσιμη υποοικογένεια της οποίας, το supremum κατά σημείο είναι παντού αυστηρά θετικό.

Λήμμα Β΄.3.4. *Ισχύουν τα παρακάτω :*

(i) *Αν η $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος, άλγεβρα ή διανυσματικός σύνδεσμος συναρτήσεων με πραγματικές τιμές, τότε έτσι είναι και η $\mathcal{E}^\sigma$.*

(ii) *Αν η $\mathcal{E}$ είναι μία άλγεβρα φραγμένων συναρτήσεων ή ένας διανυσματικός σύνδεσμος κλειστός κάτω από τον τεμαχισμό, τότε η $\mathcal{E}^\sigma$ είναι και τα δύο. Επιπλέον, αν η $\mathcal{E}$ είναι $\sigma-$πεπερασμένη, τότε η $\sigma-$άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{E}$ συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{E})$ ή $\mathcal{E}_e^\sigma$ και ισχύει ότι η $\mathcal{E}^\sigma$ αποτελείται ακριβώς από τις συναρτήσεις που είναι $\sigma(\mathcal{E})-$μετρήσιμες.*

Θεώρημα (Stone – Weierstraß) Β΄.3.5. *Έστω $\mathcal{E}$ μία άλγεβρα ή ένας διανυσματικός σύνδεσμος κλειστός κάτω από τον τεμαχισμό, από φραγμένες συναρτήσεις από το E στον $\mathbb{R}$. Τότε η ομοιόμορφη κλειστότητα $\bar{\mathcal{E}}$ της $\mathcal{E}$ είναι και άλγεβρα και διανυσματικός σύνδεσμος κλειστός κάτω από τον τεμαχισμό.*

Θεώρημα μονότονης κλάσης για συναρτήσεις Β΄.3.6. *Έστω $\mathcal{V}$ μία μονότονη κλάση συναρτήσεων από ένα σύνολο E στον $\mathbb{R}$ και $\mathcal{M}$ μία πολλαπλασιαστική κλάση ώστε $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$. Τότε η $\mathcal{V}$ περιέχει όλες τις συναρτήσεις που είναι $\sigma(\mathcal{M})-$μετρήσιμες.*

Απόδειξη. Έστω η οικογένεια $\mathcal{E}$ όλων των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών των συναρτήσεων στο $\mathcal{M} \cup \{1\}$,και η $\mathcal{E}$ είναι μια άλγεβρα από φραγμένες συναρτήσεις και περιέχεται στον $\mathcal{V}$. Τότε η ομοιόμορφη κλειστότητα $\bar{\mathcal{E}}$ της $\mathcal{E}$ περιέχεται στην $\mathcal{V}$. Πράγματι, έστω $\bar{f} \in \bar{\mathcal{E}}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε μια αύξουσα ακολουθία $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{E}$ ώστε η $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\bar{f}$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ θα ισχύει ότι $||\bar{f} - f_n||_\infty < \frac{2^{-n}}{4}$, όπου $||\bar{f} - f_n||_\infty := \sup\limits_{x\in E}|\bar{f}(x) - f_n(x)|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως η ακολουθία $\{f_n - 2^{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στην $\bar{f}$ και για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $f_n - 2^{-n} \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}$. Αφού, σύμφωνα με το Θεώρημα Β΄.3.5 η $\bar{\mathcal{E}}$ είναι διανυσματικός σύνδεσμος, από την τελευταία σχέση $\mathcal{E} \subseteq \bar{\mathcal{E}}$ και τον ορισμό της $\bar{\mathcal{E}}$ έπεται ότι $\bar{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{V}$. Έστω $\mathcal{E}^{\uparrow\downarrow}$ είναι η ελάχιστη οικογένεια από συναρτήσεις η οποία περιέχει την $\mathcal{E}$ και είναι κλειστή κάτω από τα σημειακά όρια μονότονων ακολουθιών, επομένως περιέχεται στην $\mathcal{V}$. Ακολουθώντας τα επιχειρήματα της απόδειξης του [Bichteler, Lemma A.3.3, Λήμμα Β΄.3.4], είναι εύκολο να δούμε ότι η $\mathcal{E}^{\uparrow\downarrow}$ είναι ένας διανυσματικός σύνδεσμος (βλ. Λήμμα Β΄.3.4). Αφού

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{N\to\infty} \inf\limits_{n>N} f_n$ τότε η $\mathcal{E}^{\uparrow\downarrow}$ είναι ακολουθιακά κλειστή. Επίσης, αν η συνάρτηση f είναι $\sigma(\mathcal{M})-$μετρήσιμη τότε είναι προφανώς $\sigma(\mathcal{E})-$μετρήσιμη, και έτσι η f ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{E}^{\sigma} \subseteq \mathcal{E}^{\uparrow\downarrow} \subseteq \mathcal{V}$ (Λήμμα Β΄.3.4).

Βιβλιογραφία

[1] Γιαννακόπουλος, Α. Ν. : *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική* , Τόμος Ι, Παναπιστήμιο Αιγαίου (2003).

[2] Γιαννόπουλος, Α. : *Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης (2003).

[3] Μαχαιράς, Ν.Δ. : *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς (2006).

[4] Μαχαιράς, Ν.Δ. : *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης*, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς (2005).

[5] Τζανίνης, Σ. : *Διπλωματική Εργασία, Μεμειγμένες Ανανεωτικές Σ.Δ. με Εφαρμογές στα Αναλογιστικά Υποδείγματα*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς (2012).

[6] Bichteler, K. : *Stochastic integration theory and L^p theory of semimartingales*, Ann. Probab. 9, 49−89 (1981).

[7] Bichteler, Klaus : *Stochastic Integration and Stochastic Differential Equations* , University of Texas (2002).

[8] Cohn, Donald L. : *Measure Theory*, Second Edition Springer Birkhäuser (2013).

[9] Delbaen, Freddy and Schachermayer, Walter : *The Mathematics of Arbitage*, Springer−Verlag, Berlin Heidelberg, (2006).

[10] Dellacherie, C. : *Capacités et processus stohastiques*, Springer, Berlin Heidelberg New York (1972).

[11] Dellacherie, C. and Meyer, P.A. : *Probabilités et potentiel*, Hermann Paris I (1976), II (1982).

[12] Dellacherie, C. : *Un survol de la théorie de l'intégrale stochastique*, Stochastic Processes Appl. 10, 115–144 (1980).

[13] Fremlin, D. H. : *Measure Theory*, Volume II (2001).

[14] Gnedenko, B.W. and Kolmogorov, A.N. : *Limits distributions for sums of independent random variables*, Addison – Wesley, New York (1954).

[15] Getoor, R.K. : *On the construction of kernels. Séminaire de Proba. IX. Lecture Notes in Mathematics 465, 443–463.*, Springer, Berlin Heidelberg, New York (1979).

[16] Jacod, Jean and Shirayev, Albert N. : *Limits Theorems for Stochastic Processes*, Springer (2002).

[17] Jacod, Jean : *Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lecture Notes in Mathematics 714.* , Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, New York (1979).

[18] Jacod, Jean and Mémin, J. : *Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semimartingales.*, Z. Wahrsch. Verw. Geb. 35, 1–37 (1976).

[19] Jacod, Jean : *Multivariate point processes: predictable projection, Radon–Nikodym derivative, representation of martingales*, Z. Wahrsch. Verw. Geb. 31, 235–253 (1975).

[20] Karatzas, Ioannis and Shreve, Steven E. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer (1991).

[21] Karatzas, Ioannis and Shreve, Steven E. : *Method of Mathematical Finance*, Springer (1998).

[22] Metivier, M. : *Semimartinga1es: a course on stochastic integration*, De Gruyter, Berlin (1982).

[23] Papadimitrakis, M. : *Measure Theory*, Department of Mathematics, University of Crete (2004).

[24] Protter, Philip E. : *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer (2004).

[25] Schaefer, H. H. and Wolff, M. P. : *Topological Vector Spaces*, Second Edition Springer and Business Media, New York (1999).

[26] Weizsäcker, Heinrich von : *Stochastic Integrals*, Springer (2001).

Ευρετήριο Όρων

Βασικές Κλάσεις σ.δ.

$\mathscr{A}$: σ.δ. με ολοκληρώσιμη κύμανση

$\mathscr{A}^+$: ολοκληρώσιμες αύξουσες σ.δ.

$\mathscr{A}^+_{loc}$: σ.δ. με τοπικά ολοκληρώσιμη κύμανση

$\mathscr{A}^+_{loc}$: τοπικά ολοκληρώσιμες αύξουσες σ.δ.

$\mathcal{C}_{loc}$: τοπικοποιημένη κλάση

$\mathscr{H}^2$: τετραγωνικά ολοκληρώσιμα martingales

$\mathscr{H}^2_{loc}$: τοπικά τετραγωνικά ολοκληρώσιμα martingales

$\mathscr{H}^{2,c}$: συνεχή τοπικά martingales

$\mathscr{H}^{2,d}$: καθαρά ασυνεχή τοπικά τετραγωνικά ολοκληρώσιμα martingales

$\mathscr{L}$: τοπικά martingales

$\mathscr{L}^d$: $d-$διάστατα τοπικά martingales

$\mathscr{M}$: ομοιόμορφα ολοκληρώσιμα martingales

$\mathscr{M}_{loc}$: τοπικά martingales

$\mathscr{S}$: ημι$-$martingales

$\mathscr{S}_P$: ειδικά ημι$-$martingales

$\mathscr{V}$: σ.δ. με πεπερασμένη ολική κύμανση

$\mathscr{V}^+$: αύξουσες σ.δ. με πεπερασμένες τιμές

$\mathscr{V}^d$: $d-$διάστατες σ.δ. με πεπερασμένη ολική κύμανση

Ευρετήριο Συμβόλων