ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
&
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΚΑΙ

ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Αναλογιστικά Μοντέλα για Συνεχείς Ισόβιες Ράντες

Αργυρή Ι. Παναγιώτου

Διπλωματική Εργασία

Πειραιάς,

Αύγουστος 2015

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
&
INSURANCE SCIENCE

M.Sc. in Actuarial Science

and

Risk Management

Actuarial Models for Continuous Life Annuities Under Uncertain Interest Rate

Argiri I. Panagiotou

Dissertation Thesis

Piraeus,

August 2015

Στους γονείς μου,

Αναστασία και Ιωάννη

και,

την αδερφή μου Ευμορφία.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να εκφράσω τις παρακάτω ευχαριστίες μου. Πρώτα από όλους, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την εμπιστοσύνη και τη καθοδήγηση που μου έδειξε καθ' όλη της διάρκεια της πτυχιακής εργασίας .

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Νικόλαο Μαχαιρά, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, καθώς και τον κύριο Γεώργιο Τζαβελά, Επίκουρο Καθηγητή του ιδίου Τμήματος, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την αμέριστη συμπαράσταση τους, οι οποίοι στήριξαν τις σπουδές μου όλα αυτά τα χρόνια.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή, θα μελετηθεί μέρος της Αναλογιστικής Επιστήμης, η οποία παρέχει την επιστημονική βάση καθώς και τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία για το βέλτιστο επίπεδο διαχείρισης και λήψης στρατηγικών αποφάσεων που αφορούν οικονομικά μοντέλα. Θα παρουσιαστούν ράντες πληρωμών ζωής, οι οποίες αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο της αναλογιστικής επιστήμης, το οποίο βοηθάει στη λήψη τέτοιων αποφάσεων. Στην εργασία αυτή, θα εστιάσουμε στην παρουσίαση μιας στοχαστικής διαδικασίας για τη μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού, με τη βοήθεια του ποσοστού επιβίωσης για τον υπολογισμό των διαφόρων ράντων ζωής. Θα υπολογίσουμε και θα συγκρίνουμε το καθαρό ασφάλιστρο υπό τη θεώρηση τυχαίου επιτοκίου σε σχέση με τις παραδοσιακές μεθόδους τόσο για το ντετερμινιστικό επιτόκιο όσο και για το στοχαστικό. Τέλος θα παρουσιαστούν παραδείγματα και εφαρμογές καθώς και χρήσιμα συμπεράσματα και παρατηρήσεις.

ABSTRACT

This work presents the scientific basis and tools of the actuarial science, in order to increase the level of management and making strategies. More specifically, life annuity is a critical subject of actuarial science. This paper, models the force of interest due to uncertain process, by combining the survival rate to determine various life annuities. Further, this work studies the net premium under uncertain interest to the usual methods for the deterministic interest case and the corresponding stochastic one. Finally, the paper presents an implementation showing the applicability of the above method.

Εισαγωγή

Η αναλογιστική επιστήμη μας παρέχει την κατάλληλη επιστημονική βάση καθώς και τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία, όσον αφορά τη σωστή διαχείριση και λήψη σωστών στρατηγικών αποφάσεων που συνδέονται άμεσα με τις ράντες πληρωμών ζωής. Στην εγασία αυτή, θα επικεντρωθούμε στην παρουσίαση μιας στοχαστικής διαδικασίας για τη μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού. Ιδιαίτερα θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση επιβίωσης για να υπολογίσουμε παρούσες και συσσωρευμένες αξίες ραντών ζωής.

Οι ράντες πληρωμών ζωής είναι συμβόλαια που έχουν σχεδιαστεί για να παρέχουν πληρωμές προς τον κάτοχο σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα, συνήθως μετά τη συνταξιοδότηση του. Παραδοσιακά, η αναλογιστική θεωρία χρησιμοποιεί κυρίως ντετερμινιστικό επιτόκιο για τον υπολογισμό παρουσών και συσσωρευμένων αξιών διάφορων τύπων ραντών. Υποτίθεται ότι αυτό το επιτόκιο είναι σταθερό και το ίδιο για όλα τα έτη. Ωστόσο, με την ταχεία ανάπτυξη της χρηματοδότησης, το επιτόκιο αλλάζει γρήγορα σε σχέση με την αγορά, την πολιτική που ακολουθείται και ούτω καθεξής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να οδηγεί ορισμένους μελετητές στον έλεγχο πιθανών ελαττωμάτων του ντετερμινιστικού επιτοκίου.

Το 1971, «***το επιτόκιο ως μια τυχαία μεταβλητή***» προτάθηκε αρχικά από τον J. H. Polland, ο οποίος μελέτησε κάποιες αρχικές αναλογιστικές συναρτήσεις. Τα επόμενα χρόνια, ορισμένοι μελετητές άρχισαν να μελετούν το στοχαστικό επιτόκιο, να εισάγουν αναλογιστικά μοντέλα και να λαμβάνουν κάποια συμπεράσματα, βασιζόμενοι στα παρακάτω μοντέλα:

I. Το στοχαστικό μοντέλο *Wiener,*
II. Το στοχαστικό μοντέλο της κίνησης Brown, και
III. Το συνδυασμένο μοντέλο, το οποίο προέρχεται από την κίνηση Brown και την διαδικασία Poisson.

Στη συνέχεια, έχουμε τους Zhao και Gao, οι όποιοι μελέτησαν αναλογιστικά τη συνάρτηση έντασης ανατοκισμού, και θεμελίωσαν πλήρη διακριτά αναλογιστικά μοντέλα με ασαφή επιτόκιο. Το 2008, ο Liu [4] άρχισε τη μελέτη της αβέβαιης (αργότερα στοχαστικής) διαδικασίας και παρουσίασε ένα θεώρημα ακραίας τιμής για ανεξάρτητες διαδικασίες προσαυξήσεων. Μετά από αυτό, ο Liu [6] απέδειξε ότι η αναμενόμενη μέση τιμή της ανεξάρτητης διαδικασίας προσαύξησης είναι μία γραμμική συνάρτηση του χρόνου επενδύσεως, και ο Chen απέδειξε ότι η διασπορά είναι ανάλογη ως προς το τετράγωνο του χρόνου. Το 2009, ο Liu [5], μοντελοποίησε τη κίνηση Brown με μια τυχαία διαδικασία που ονομάζεται *κανονική* (canonical process) και παρατήρησε ότι αυτή είναι μια στάσιμη ανεξάρτητη διαδικασία προσαύξησης με κανονική κατανομή, η οποία οδήγησε σε μια καινούρια μέθοδο αντιμετώπισης αναλογιστικών μοντέλων σε σχέση με το επιτόκιο.

Η εργασία μας διαμορφώνεται ως εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε βασικούς ορισμούς και έννοιες για συνεχείς και ασυνεχείς ράντες πληρωμών. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές έννοιες πιθανοτήτων και θα αναλύσουμε την στοχαστική κίνηση Brown, καθώς και περιπτώσεις αυτής, όπως η αριθμητική και η γεωμετρική κίνηση. Στο τελευταίο κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε σε αναλογιστικούς τύπους ραντών σύμφωνα με τη στοχαστική διαδικασία και θα αποδείξουμε τη χρησιμότητα του στοχαστικού επιτοκίου δίνοντας κατάλληλη εφαρμογή.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές Έννοιες - Ράντες Πληρωμών

1.1 Εισαγωγή

Σκοπός του πρώτου κεφαλαίου είναι η παρουσίαση βασικών ορισμών και εννοιών για συνεχείς και ασυνεχείς ράντες πληρωμών ζωής. Οι ράντες αποτελούν ένα βασικό μέρος της θεωρίας για τη παρακολούθηση και τη κατανόηση του τρίτου κεφαλαίου. Σημειώνεται ότι καθ'όλη τη διάρκεια του κεφαλαίου θα παρατίθενται παραδείγματα, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών.

1.2 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Μία ακολουθία χρηματικών ποσών (*εισροών ή εκροών*) που λήγουν (*εισπράττονται ή πληρώνονται*) σε ίσες απέχουσες μεταξύ τους χρονικές στιγμές ονομάζεται *ράντα* ή *σειρά πληρωμών*. Κάθε χρηματικό ποσό λέγεται *όρος* της ράντας. Η χρονική στιγμή στην οποία καταβάλλεται το χρηματικό ποσό λέγεται *λήξη*. *Περίοδος* μιας ράντας είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ της καταβολής δύο δόσεων της ράντας. Αν για παράδειγμα η δόση καταβάλλεται κάθε τρεις μήνες, η περίοδος της ράντας είναι τρεις μήνες και λέγεται τριμηνιαία. Οι ράντες έχουν εφαρμογή στην καθημερινή μας ζωή, καθώς παραδείγματα αποτελούν η σύνταξη ενός ηλικιωμένου, η πληρωμή του ενοικίου, η αποπληρωμή των δόσεων του δανείου.

Ληξιπρόθεσμες και Προκαταβλητέες Ράντες: Εάν οι όροι της ράντας λήγουν στο *τέλος* κάθε χρονικού διαστήματος (περιόδου), η ράντα λέγεται *ληξιπρόθεσμη*. Εάν οι όροι λήγουν στην *αρχή* κάθε περιόδου, η ράντα λέγεται *προκαταβλητέα*.

Σταθερές και μη Σταθερές Ράντες: Οι ράντες διακρίνονται σε *σταθερές*, όταν οι όροι τους είναι ίσοι μεταξύ τους, και σε *μη σταθερές*, όταν οι όροι τους δεν είναι ίσοι (*π.χ.* οι όροι αυξάνουν κατά ένα σταθερό ποσό ή με ένα σταθερό ρυθμό).

Αβέβαιες και Βέβαιες Ράντες: Εάν η καταβολή των δόσεων της εξαρτάται από τυχαία γεγονότα ονομάζεται *αβέβαιη* ράντα. Παράδειγμα ράντα ζωής όπου τα ασφάλιστρα καταβάλλονται από τον ασφαλισμένο εφόσον είναι εν ζωή. Εάν η καταβολή των όρων δεν εξαρτάται από τυχαία γεγονότα ονομάζεται *βέβαιη* ράντα.

Πρόσκαιρες και Διηνεκείς Ράντες: Όταν αρχίζουν και τελειώνουν μέσα σε συγκεκριμένο χρόνο ονομάζονται *πρόσκαιρες*, ενώ όταν το πλήθος των όρων τους τείνει στο άπειρο, ονομάζονται *διηνεκείς*.

Άμεσες και Μέλλουσες Ράντες: Όταν ο πρώτος όρος καταβάλλεται στην αρχή ή στο τέλος της πρώτης περιόδου ονομάζεται *άμεση* ράντα, ενώ όταν καταβάλεται μετά τη πρώτη περίοδο ονομάζεται μέλλουσα.

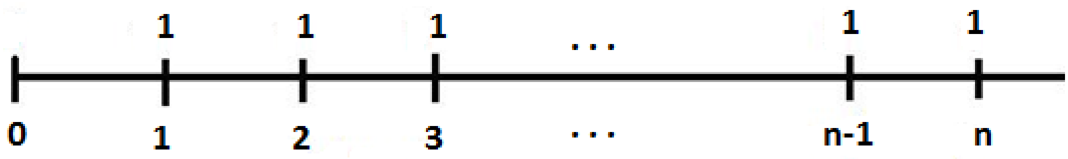
Στη περίπτωση που ο όρος μίας σταθερής ράντας είναι μία νομισματική μονάδα, η ράντα λέγεται *μοναδιαία.*

Πριν ξεκινήσουμε τη μελέτη αβέβαιων ραντών, στην ενότητα που ακολουθεί θα δώσουμε ορισμούς και βασικές έννοιες από τη θεωρία των βέβαιων ραντών.

1.3 Βέβαιες Ράντες Πληρωμών

1.3.1 Ληξιπρόθεσμες Ράντες

Στην υποενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις άμεσες ληξιπρόθεσμες ράντες. Υποθέτουμε ότι έχουμε μία ράντα για n-περιόδους στο διάστημα $[k-1,\ k]$, $k=1,2,\dots,n$ με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας. Στον άξονα του χρόνου (βλ.διάγραμμα 1) παριστάνουμε την άμεση ληξιπρόθεσμη ράντα ως εξής:



Διάγραμμα 1

Η *παρούσα αξία* (present value, PV) της ράντας αυτής συμβολίζεται με

$PV = a_{\overline{n|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n$, η οποία είναι ένα άθροισμα όρων γεωμετρικής πρόοδου με λόγο $\lambda = v$ και πρώτο όρο $a_1 = v$. Τελικά η παρούσα αξία αυτής της ράντας σύμφωνα με το τύπο αθροίσματος της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$a_{\overline{n|}} = v\frac{v^n - 1}{v - 1} = \frac{1}{1+i}\frac{v^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = \frac{1}{1+i}\frac{v^n - 1}{\frac{1 - 1 - i}{1+i}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{i} \qquad (1.1)$$

όπου το i το επιτόκιο για τις πληρωμές. Η σχέση (1.1) γίνεται

$$ia_{\overline{n|}} = 1 - v^n \Rightarrow 1 = ia_{\overline{n|}} + v^n \qquad (1.2)$$

Η *μελλοντική αξία* (accumulation value AV) των πληρωμών της ράντας συμβολίζεται με $S_{\overline{n|}} = AV$ και υπολογίζεται από το τύπο:

$$S_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1,$$

όπου το παραπάνω άθροισμα είναι γεωμετρική πρόοδος με

$\lambda = (1+i)^{-1},\ a_1 = (1+i)^{n-1}$, συνεπώς:

$$S_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1}\frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} \Rightarrow$$

$$S_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^{n-1-n} - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^{-1} - 1} = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{n-1}}{\frac{1 - 1 - i}{1+i}}$$

$$= \frac{(1+i)(1+i)^{-1} - (1+i)(1+i)^{n-1}}{-i} = \frac{1 - (1+i)^n}{-i} \Rightarrow$$

$$S_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Άρα $S_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ (1.3)

Παράδειγμα 1.1

Θα υπολογίσουμε τη παρούσα αξία μίας ληξιπρόθεσμης ράντας, η οποία πληρώνει 1000€ στο τέλος κάθε μισού χρόνου για 20 χρόνια (βλ. διάγραμμα 2) αν έχουμε επιτόκιο $i^{(2)} = 7\%$ με ανατοκισμό ανά εξάμηνο.

Δεδομένου ότι $i^{(m)} = 7\%,\ m = 2,\ i^{(2)} = 0.07,\ \frac{i^{(2)}}{2} = \frac{0.07}{2} = 0.035$

Διάγραμμα 2

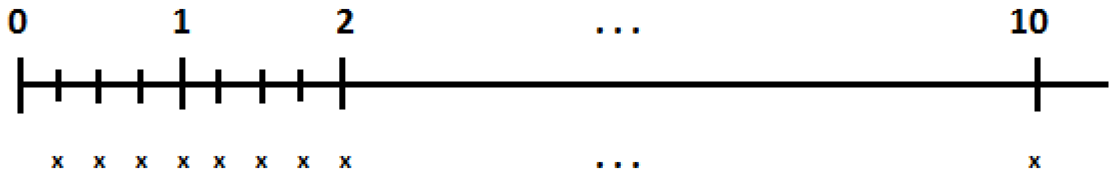
τότε η παρούσα αξία της ράντας θα είναι:

$$1000a_{\overline{40|}0.035} = 1000\frac{1 - \frac{1}{(1+0.035)^{40}}}{0.035} \simeq 21357\ €$$

Παράδειγμα 1.2

Επενδύουμε 1000€ με επιτόκιο $i^{(4)} = 8\%$ με ανατοκισμό ανά τρίμηνο. Θα βρούμε ποιο είναι το ποσό x της ανάληψης που μπορούμε να λαμβάνουμε από την τράπεζα, κάθε τρίμηνο του χρόνου (βλ. διάγραμμα 3), ώστε να έχουμε καταναλώσει το απόθεμα των 1000€ στο τέλος των 10 χρόνων.

Δεδομένου ότι $k = 1000€,\quad i^{(4)} = 8\%,\quad \frac{i^{(4)}}{4} = \frac{0.08}{4} = 0.02 = 2\%$



Διάγραμμα 3

τότε η εξίσωση αξίας που θα ικανοποιεί το ποσό x είναι η:

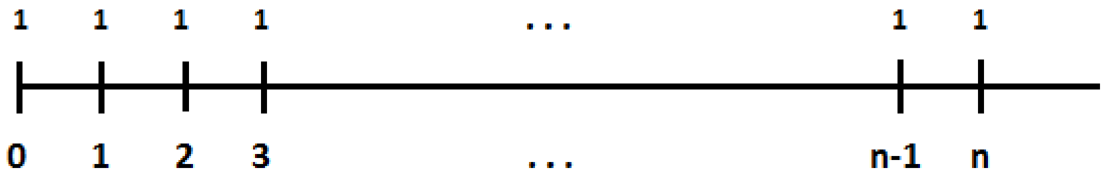
$$x a_{\overline{40}|0.02} = 1000$$

$$x \frac{1 - \frac{1}{(1+0.02)^{40}}}{0.02} = 1000$$

Άρα $x \simeq 36.5€$

1.3.2 Προκαταβλητέες Ράντες

Στην υποενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις προκαταβλητέες ράντες. Υποθέτουμε ότι έχουμε μία ράντα για n-περιόδους με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας. Στον άξονα του χρόνου παριστάνουμε μια προκαταβλητέα ράντα (βλ. διάγραμμα 4) ως εξής:



Διάγραμμα 4

Η παρούσα αξία μιας τέτοιας ράντας συμβολίζεται με $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ ενώ η μελλοντική αξία με $\ddot{S}_{\overline{n}|}$. Όσον αφορά τη παρούσα αξία έχουμε:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}$$

Το παραπάνω άθροισμα είναι γεωμετρική πρόοδος με $\lambda = v,\ a_1 = 1$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{v^n - 1}{v - 1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d} \Rightarrow$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{d} \qquad (1.4)$$

Όμοια για την μελλοντική αξία της προκαταβλητέας ράντας έχουμε:

$$\ddot{S}_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} \qquad (1.5)$$

Όντως το άθροισμα $\ddot{S}_{\overline{n|}} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \cdots + (1+i)$

αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με $\lambda = 1+i,\ a_1 = 1+i.$ Μετά από πράξεις φτάνουμε

$$AV = \ddot{S}_{\overline{n|}} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{d},$$

όπου $d = \frac{i}{1+i}$ το *προεξοφλητικό επιτόκιο.*

Παράδειγμα 1.3

Υποθέτουμε το επιτόκιο μίας προκαταβλητέας ράντας $i = 5\%,\ n = 10.$ Θα βρούμε την παρούσα αξία μίας προκαταβλητέας ράντας $\ddot{a}_{\overline{10|}}$. Από τους γνωστούς τύπους $v = \frac{1}{1+i},\ d = \frac{i}{1+i},\ \ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{d}$ βρίσκουμε ότι

$$v = \frac{1}{1.05} = 0.9523,\ d = \frac{0.05}{1.05} = 0.0476 .$$

Άρα με αντικατάσταση των παραπάνω στη σχέση (1.4) βρίσκουμε

$$\ddot{a}_{\overline{10|}} = \frac{1 - 0.9523^{10}}{0.0476} = \frac{1. - 0.6133}{0.0476} = \frac{0.3867}{0.0476} = 8.1239$$

Παράδειγμα 1.4

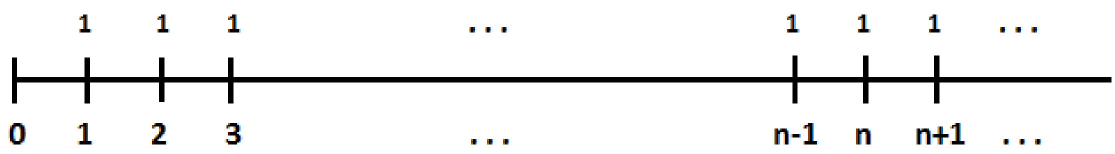
Σε μία επιχείρηση η οποία επενδύει 60000€ στην αρχή κάθε έτους για 8 έτη και με επιτόκιο $i = 6\%$, ζητάμε να υπολογίσουμε την τελική αξία της επένδυσής της στο τέλος των 8 ετών. Δεδομένου ότι το κεφάλαιο είναι

$k = 60000€,\ n = 8,\ i = 0.06,\ S_{\overline{8|}0.06} = 9.897$ καθώς και ότι η μελλοντική αξία προκαταβλητέας ράντας δίνεται από τον τύπο: $\ddot{S}_{\overline{n|}} = k(S_{\overline{n|}} + 1)$, [3] όπου $S_{\overline{n|}}$ είναι η μελλοντική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, βρίσκουμε ότι

$$\ddot{S}_{\overline{8|}} = 60000(9.8974 + 1) = 653844 \text{ €}$$

1.3.3 Διηνεκείς Ράντες

Οι πληρωμές σε μία διηνεκή ράντα γίνονται επ’ άπειρον. Η χρονική περίοδος της ράντας είναι μη πεπερασμένη. Στον άξονα του χρόνου παριστάνουμε μία διηνεκή ράντα (βλ. διάγραμμα 5) ως εξής:



Διάγραμμα 5

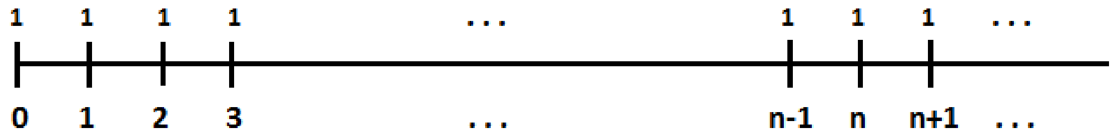
1.3.3.1 ***Ράντα ληξιπρόθεσμη***: η παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης διηνεκούς ράντας δίνεται από το τύπο:

$a_{\overline{\infty|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n + v^{n+1} + \cdots$ (1.6), ο οποίος αποτελεί άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με $\lambda = v,$ $|\lambda|<1,$ $a_1 = v$. Οπότε

$$a_{\overline{\infty|}} = \frac{a_1}{1-\lambda} = \frac{v}{1-v} = \frac{v}{iv} \Rightarrow a_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{i} \quad (1.7)$$

Όσον αφορά τη μελλοντική αξία AV διηνεκούς ράντας, δεν υπάρχει αφού οι πληρωμές γίνονται επ’ άπειρον.

1.3.3.2 ***Ράντα προκαταβλητέα:*** η παρούσα αξία μίας προκαταβλητέας ράντας δίνεται από το παρακάτω τύπο και απεικονίζεται (βλ.διάγραμμα 6) ως εξής:



Διάγραμμα 6

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n + v^{n+1} = \frac{1}{1-v} \quad ,$$

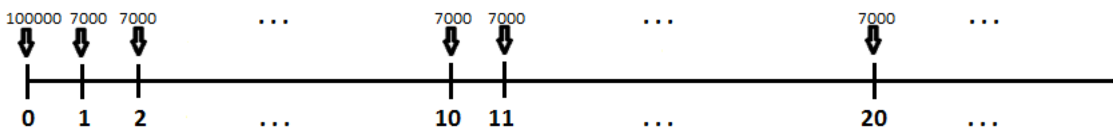
ή ισοδύναμα

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{d} \qquad (1.8)$$

Παράδειγμα 1.5

Υποθέτουμε ότι κάποιος αφήνει μια κληρονομιά των 100.000 €. Ο τόκος κληρονομιάς αυτής μοιράζεται ως εξής: ο Α παίρνει τον τόκο των 100.000€ για τα πρώτα 10 χρόνια κάθε χρόνο, ο Β παίρνει τον τόκο για τα επόμενα 10 χρόνια και ο Γ παίρνει τον τόκο για τα επόμενα άπειρα χρόνια (βλ διάγραμμα 7). Θα υπολογίσουμε τα ποσά που πήραν οι Α,Β,Γ από την επένδυση των 100.000€, αν δίνεται ότι το επιτόκιο είναι $i = 7\%$.

Ο τόκος των 100.000€ είναι $\frac{7}{100}100000 = 7000$ τον χρόνο.



Διάγραμμα 7

Για τον Α η μελλοντική αξία $AV = 7000S_{\overline{10|}0.07} = 7000 * 13.8164 = 96714.8€$

Επίσης η παρούσα αξία θα είναι:

$$PV = 7000a_{\overline{10|}0.07} = 7000 * 7.02358 = 49165€$$

Για τον Β η παρούσα αξία θα είναι:

$$7000(a_{\overline{20|}} - a_{\overline{10|}}) = 7000a_{\overline{20|}0.07} - 49165 = 24993€$$

Για τον Γ η παρούσα αξία θα ειναι:

$$7000(a_{\overline{\infty|}} - a_{\overline{20|}}) = 25842€$$

Η ολική παρούσα αξία (PV):

$$7000a_{\overline{10|}} + 7000(a_{\overline{20|}} - a_{\overline{10|}}) + 7000(a_{\overline{\infty|}} - a_{\overline{20|}}) = 100000€$$

1.4 Αβέβαιες Ράντες Πληρωμών (Life-Annuities)

Στην ενότητα αυτού του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με τις ράντες πληρωμών ζωής και ειδικότερα θα μελετήσουμε τη περίπτωση των συνεχών αβέβαιων ράντων πληρωμών.

1.4.1 Ληξιπρόθεσμες Ισόβιες Συνεχείς Ράντες

Μία συνεχής μοναδιαία ράντα ζωής αποτελείται από πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας στο τέλος της κάθε περιόδου με τη διαφορά ότι η πληρωμή της μίας νομισματικής μονάδας γίνεται συνεχώς και είναι ίση με $1\ dt$ σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Η πληρωμή μπορεί να γίνεται κάθε μέρα, κάθε λεπτό, κάθε δευτερόλεπτο. Στον άξονα του χρόνου παριστάνουμε μία ληξιπρόθεσμη συνεχή ράντα (βλ. διάγραμμα 8) ως εξής:

Διάγραμμα 8

Για μία βέβαια ράντα ζωής με συνεχείς πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας, το μήκος του χρόνου πάνω στο οποίο γίνονται οι πληρωμές είναι μία τυχαία μεταβλητή T, που είναι ο εναπομείνοντας χρόνος ζωής. Η παρούσα αξία των μελλοντικών πληρωμών ενός ασφαλισμένου είναι μια τυχαία μεταβλητή Z τέτοια ώστε:

$$Z = v^T = e^{-\delta T}$$

Ο αναλογιστικός συμβολισμός για το μέσο κόστος ασφάλειας για ατόμο ηλικίας x είναι $\bar{A}_x$. Η μπάρα (-) συμβολίζει ότι το μέσο κόστος υπολογίζεται σε συνεχή βάση.

$$\bar{A}_x = E(Z) = \int_0^\infty v^t f(t)dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t} dt$$

όπου $f(t)$ η συνάρτηση του χρόνου, ${}_tp_x$ η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να επιβιώσει μέχρι $x+t$, και μ_{x+t} η ένταση θνησιμότητας για άτομο ηλικίας $x+t$.

Η μέση τιμή είναι μια καλή εκτίμηση για το ποιο θα είναι το συνολικό κόστος ασφάλειας κατά μέσο όρο, αλλά για τη διαχείριση του κινδύνου θα πρέπει να λαμβάνει υπόψιν τη μεταβλητότητα του κόστους. Έτσι εμείς χρειάζεται να ξέρουμε τη διασπορά ενδεχόμενων πληρωμών, δηλαδή χρειάζεται να υπολογίσουμε το $E(Z^2)$. Υπολογίζουμε το $E(Z^2)$, όπως υπολογίσαμε το $\bar{A}_x$, όπου τώρα:

$$Z^2 = v^{2T} = e^{-2\delta T}$$

Αυτό οδηγεί στο συμβολισμό για την $E(Z^2)$ ως ${}^2\bar{A}_x$. Ο άνω δείκτης 2 στον συμβολισμό υποδεικνύει ότι η τιμή της έντασης ανατοκισμού διπλασιάζεται.
Ο τύπος της ${}^2\bar{A}_x$ είναι:

$${}^2\bar{A}_x = E(Z^2) = \int_0^\infty e^{-2\delta t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-2\delta t}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t} dt$$

Η παρούσα αξία ράντας ζωής είναι μία τυχαία μεταβλητή, συμβολίζεται με $\bar{a}_{\overline{T|}}$ με και δίνεται από:

$$Y = \bar{a}_{\overline{T|}} = \int_0^T v^t\, dt = \int_0^T e^{-\delta t}\, dt = \left[\frac{-e^{-\delta t}}{\delta}\right]_0^T = \frac{-e^{-\delta T}}{\delta} + \frac{e^0}{\delta}$$

$$\Rightarrow \bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1-e^{-\delta T}}{\delta} = \frac{1-v^T}{\delta} \qquad (1.9)$$

όπου δ είναι η *ένταση ανατοκισμού.*

Παραδειγμα 1.6

Δίνεται το επιτόκιο $i = 5\%$, $T = 10$ και ένταση ανατοκισμού $\delta = \ln(1.05)$. Θα βρούμε την παρούσα αξία μίας ληξιπρόθεσμης συνεχούς ράντας ζωής $\bar{a}_{\overline{10|}}$.

Σύμφωνα με το τύπο (1.9): $\bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1-v^T}{\delta} \Rightarrow \bar{a}_{\overline{10|}} = \frac{1-0.95^{10}}{\ln{(1.05)}} \simeq \frac{0.40}{0.05} \simeq 8$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη παρούσα αξία μιας ασφάλειας ή μιας ράντας ζωής η οποία ενσωματώνει πιθανότητες από κατάλληλο μοντέλο επιβίωσης και είναι γνωστή ως ***αναλογιστική παρούσα αξία (APV).*** Θα χρησιμοποιήσουμε τους κάτωθι συμβολισμούς:

- Παρούσα αξία ασφάλειας ορίζεται με A
- Παρούσα αξία ράντας ορίζεται με a
- Το ασφάλιστρο ορίζεται με P και γενικά ισχύει ότι $P = \frac{A}{a}$
- Τα αποθεματικά ορίζονται με V και υπολογίζονται όπως η παρούσα αξία των μελλοντικών κερδών που πληρώνονται λιγότερο από την παρούσα αξία των μελλοντικών ασφαλίστρων που λαμβάνονται.

Για μία αβέβαιη ράντα ζωής με συνεχείς πληρωμές μιας νομισματικής μονάδας συμβολίζουμε με T τη τυχαία μεταβλητή, που εκφράζει τη διάρκεια του χρόνου κατά τον οποίο πραγματώνονται οι πληρωμές. Η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) T είναι γνωστή ως *εναπομείνοντας χρόνος ζωής*. Οπότε η παρούσα αξία μιας ράντας ζωής είναι επίσης μια τ.μ. Y, και δίνεται από τη σχέση:

$$Y = \bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1-v^T}{\delta} \quad (1.10)$$

Σημείωση: Από σχέση (1.10), για διαφορετικές χρονικές στιγμές θανάτου, παίρνουμε διαφορετική παρούσα αξία.

- ***Η Αναλογιστική Παρούσα Αξία $\bar{a}_x$***

Η αναλογιστική παρούσα αξία (APV) της $\bar{a}_{\overline{T}|}$ μιας συνεχούς ράντας συμβολίζεται με $\bar{a}_x$, όπου x η ηλικία του ασφαλισμένου από τη στιγμή που αρχίζουν οι πληρωμές της ράντας. Αυτή ισούται με:

$$E(Y) = \bar{a}_x = E\left(\bar{a}_{\overline{T}|}\right) = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{t}|} f(t)\, dt = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_x\, \mu_{x+t} dt \quad (1.11)$$

Η εξίσωση (1.11) μας δίνει ένα τύπο υπολογισμού της αναλογιστικής παρούσας αξίας $\bar{a}_x$. Παρόλο αυτά υπάρχει ένας εναλλακτικός τύπος υπολογισμού, ο οποίος χρησιμοποιεί τη καθαρή προικοδότηση (ασφάλιση μελλοντικού κεφαλαίου) ${}_nE_x$, η οποία συμβολίζεται επίσης με $A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$. Θεωρούμε ότι η καθαρή προικοδότηση ${}_nE_x$ είναι η αναλογιστική παρούσα αξία (APV) της πληρωμής μίας νομισματικής μονάδας που πραγματώνεται τη χρονική στιγμή n, εάν ο ασφαλισμένος είναι ζωντανός στο χρόνο αυτό. Αυτή ισούται με:

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = {}_nE_x = v^{\mathrm{n}}\, {}_np_x \ = \ e^{-n\delta}\, {}_np_x$$

Με τη βοήθεια της παραγοντικής ολοκλήρωσης μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$E(Y) = \bar{a}_x = \int_0^{+\infty} {}_tE_x\, dt \quad (1.12)$$

Η σχέση (1.12) ισχύει για την $E(Y)$, αλλά δεν ισχύει για την $E(Y^2)$.

Μία φυσική ερμηνεία για την σχέση (1.12) είναι η εξής: μία συνεχής ράντα ζωής της μίας νομισματικής μονάδας πληρώνει $1dt$ στο διάστημα $[t,\ t+dt]$, εάν ο ασφαλισμένος είναι ζωντανός σε αυτό το διάστημα. Η αναλογιστική παρούσα αξία (APV) της μίας νομισματικής μονάδας είναι ${}_tE_x\, dt$.

Παρολ' αυτά υπάρχει ένας πιο εύκολος τρόπος υπολογισμού να βρούμε την αναλογιστική παρούσα αξία $\bar{a}_x$ εάν γνωρίζουμε το μέσο κόστος ασφάλειας για έναν ασφαλιζόμενο ηλικίας x, το οποίο συμβολίζεται με $\bar{A}_x$. Με τη βοήθεια της σχέσης (1.10) παίρνουμε ότι:

$$\bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} \quad (1.13)$$

Όντως εάν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $E(v^T) = \bar{A}_x$ και δεδομένου ότι η (1.13) γίνεται

$$Y = \bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1 - v^T}{\delta}$$

ή ισοδύναμα

$$v^T + \delta \bar{a}_{\overline{T|}} = 1,$$

τότε παίρνοντας την αναμενόμενη μέση τιμή και στα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης, παίρνουμε ότι

$$E(v^T) + \delta E\left(\bar{a}_{\overline{T|}}\right) = 1.$$

Με τη βοήθεια της σχέσης $E\left(\bar{a}_{\overline{T|}}\right) = \bar{a}_x$, φτάνουμε στην

$$\bar{A}_x + \delta \bar{a}_x = 1 \quad (1.14)$$

και επομένως η (1.13) απεδείχθη.

Παράδειγμα 1.7

Υποθέτουμε τον εναπομείνοντα χρόνο ζωής της γενέθλιας τυχαίας μεταβλητής X η οποία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 100]$. Αν η ένταση ανατοκισμού είναι $\delta = 0.05$, τότε βρίσκουμε το μέσο κόστος ασφάλειας για άτομο ηλικίας 30: $\bar{A}_{30} = 0.2771$. Για άτομο ηλικίας $x = 30$, έστω Z η τυχαία μεταβλητή ζωής που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0, 70] με $f(t) = \frac{1}{70}$.

Έτσι

$$\bar{A}_{30} = E(Z) = \int_0^{70} \frac{e^{-0.05t}}{70} dt = \frac{-e^{-0.05t}}{0.05(70)} \Big|_0^{70} = \frac{1-e^{-0.05(70)}}{0.05(70)} = 0.2771.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την αναλογιστική παρούσα αξία $\bar{a}_{30}$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.14) έχουμε: $\bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} \Rightarrow \bar{a}_{30} = \frac{1-\bar{A}_{30}}{0.05} = 14.458$

- ***Το Εκθετικό μοντέλο Επιβίωσης $\bar{a}_x$***

Στην περίπτωση που ο εναπομείνοντας χρόνος ζωής T είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί εκθετική κατανομή με ένταση ανατοκισμού θνησιμότητας μ και ένταση ανατοκισμού του επιτοκίου δ, τότε αποδεικνύεται ότι ο τύπος υπολογισμού για το μέσο κόστος $\bar{A}_x$ είναι:

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu + \delta}$$

Χρησιμοποιώντας την (1.13) βρίσκουμε την αναλογιστική παρουσα αξία $\bar{a}_x$ ίση με:

$$\bar{a}_x = \frac{1 - (\frac{\mu}{\mu + \delta})}{\delta} = \frac{1}{\mu + \delta} \quad (1.15)$$

- ***Η διασπορά της $\bar{a}_{\overline{T|}}$***

Θα υπολογίσουμε τη διασπορά της $\bar{a}_{\overline{T|}}$, χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$V(\bar{a}_{\overline{T|}}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} \quad (1.16),$$

όπου ${}^2\bar{A}_x = E(Z^2)$, η μέση τιμή της μεταβλητής Z^2. Υπενθυμίζουμε ότι ο τύπος για την ${}^2\bar{A}_x$ είναι:

$${}^2\bar{A}_x = E(Z^2) = \int_0^\infty e^{-2\delta t} {}_tp_x \, \mu_{x+t} dt \quad (**)$$

Για να αποδείξουμε την (1.16) παίρνουμε τη διασπορά και στα δύο μέλη της σχέσης

$$\bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1 - v^T}{\delta},$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα:

$$V(\bar{a}_{\overline{T|}}) = V\left(\frac{1}{\delta} + \frac{-v^T}{\delta}\right) = V\left(\frac{-v^T}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^2} V(v^T)$$

καταλήγουμε στη σχέση:

$$V\left(\bar{a}_{\overline{T|}}\right) = \frac{V(v^T)}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

όπου

$$V(v^T) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2.$$

Παράδειγμα 1.8

Θεωρούμε τον εναπομείνοντα χρόνο ζωής της γενέθλιας μεταβλητής X η οποία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 100]$. Αν η ένταση αντοκισμού είναι $\delta = 0.05$, τότε βρίσκουμε το μέσο κόστος

$\bar{A}_{30} = 0.2771$ και ${}^2\bar{A}_{30} = 0.1427$. Για ηλικία ατόμου $x = 30$, έστω Z η τυχαία μεταβλητή ζωής που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0, 70] με $f(t) = \frac{1}{70}$.

Έτσι

$$\bar{A}_{30} = E(Z) = \int_0^{70} \frac{e^{-0.05t}}{70} dt = \frac{-e^{-0.05t}}{0.05(70)} \Big|_0^{70} = \frac{1 - e^{-0.05(70)}}{0.05(70)} = 0.2771$$

Και

$${}^2\bar{A}_{30} = E(Z^2) = \int_0^{70} \frac{e^{-2(0.05)t}}{70} dt = \frac{-e^{-0.1t}}{2(0.05)(70)} \Big|_0^{70} = \frac{1 - e^{-7}}{7} = 0.1427$$

Θα υπολογίσουμε τη διασπορά από τον παρακάτω τύπο:

$$V(v^T) = V(Z) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2 = 0.1427 - (0.2771)^2 = 0.0659$$

Παράδειγμα 1.9

Υποθέτουμε ότι για μία συνεχή ράντα ζωής της μίας νομισματικής μονάδας ενος ασφαλισμένου ηλικίας x, έχουμε:

- Η $T(x)$ είναι η τυχαία μεταβλητή μελλοντικού χρόνου ζωής του ασφαλισμένου ηλικίας x.
- Η ένταση ανατοκισμού δ και η ένταση θνησιμότητας μ είναι ίσες και συνεχείς, και

- Η αναλογιστική παρούσα αξία είναι $\bar{a}_x = 12.50$. Θα υπολογίσουμε τη τυπική απόκλιση της $\bar{a}_{\overline{T(x)|}}$.

Με τη βοήθεια της (1.15) και δεδομένου ότι $\mu = \delta$, παίρνουμε ότι

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\mu + \delta} = \frac{1}{2\mu} = 12.5 \Rightarrow \mu = 0.04,$$

και

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+\delta} = \frac{\mu}{2\mu} = \frac{1}{2}, \quad {}^2\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+2\delta} = \frac{\mu}{3\mu} = \frac{1}{3}.$$

Υπολογίζουμε τη διασπορά:

$$V\left(\bar{a}_{\overline{T|}}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{\frac{1}{3} - (\frac{1}{2})^2}{(0.04)^2} = 52.083$$

Επομένως η τυπική απόκλιση είναι $\sqrt{52.083} = 7.217$

- ***Η κατανομή της $\bar{a}_{\overline{T|}}$***

Θα βρούμε την αθροιστική κατανομή της ασφάλειας ζωής της τυχαίας μεταβλητής $Z = v^T$ (*whole life insurance random variable*) όταν η τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί την κανονική κατανομή. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε κατάλληλους μετασχηματισμούς όσον αφορά την ετήσια τυχαία μεταβλητή $Y = \bar{a}_{\overline{T|}}$, με τη μεταβλητή T να θεωρείται σταθερά. Δίνουμε το κάτωθι παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.10

Έστω ο εναπομείνοντας χρόνος ζωής της τυχαίας μεταβλητής T να ακολουθεί εκθετική κατανομή με σταθερή ένταση θνησιμότητας μ. Εάν η ένταση ανατοκισμού δ είναι σταθερή, θα βρούμε τη συνάρτηση επιβίωσης $S_Y(Y)$ για $Y = \bar{a}_{\overline{T|}}$. Έχουμε:

$$S_Y(Y) = P(Y > y) = P(\frac{1 - v^T}{\delta} > y) = P(1 - v^T > \delta y)$$

$$= P(1 - \delta y > v^T) = P(1 - \delta y > e^{-\delta T})$$

$$= P(\ln(1 - \delta y) > -\delta T) = P(-\frac{\ln(1 - \delta y)}{\delta} < T)$$

$$= S_Y(-\frac{\ln(1 - \delta y)}{\delta}) = e^{(\frac{\mu}{\delta}\ln(1-\delta y))} = (1 - \delta y)^{\frac{\mu}{\delta}}$$

Παράδειγμα 1.11

Θεωρούμε τυχαία μεταβλητή $Y = \bar{a}_{\overline{T|}}$ και θα βρούμε τη πιθανότητα $P(\bar{a}_{\overline{T|}} > \bar{a}_x)$ όταν η τυχαία μεταβλητή T είναι σταθερά.

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T|}} > \bar{a}_x\right) = S_{\bar{a}_{\overline{T|}}}(\bar{a}_x) = S_Y(\bar{a}_x) = (1 - \delta \bar{a}_x)^{\frac{\mu}{\delta}} = \left(1 - \delta \frac{1}{\mu + \delta}\right)^{\frac{\mu}{\delta}} = (\frac{\mu}{\mu + \delta})^{\frac{\mu}{\delta}}$$

1.4.2 Πρόσκαιρες Συνεχείς Ράντες Ζωής

Μία n-χρόνων πρόσκαιρη ράντα ζωής λειτουργεί όπως μία n-χρόνων ασφάλεια ζωής προικοδότησης. Ο ασφαλισμένος λαμβάνει πληρωμές κατά τη διάρκεια των επόμενων n-χρόνων μέχρι τη χρονική στιγμή που είναι ζωντανός. Εάν παραμείνει ζωντανός μέχρι τη χρόνική στιγμή n τότε οι πληρωμές σταματούν, και το συνολικό πόσο που συλλέγεται δίνεται από τη παρούσα αξία $\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{\delta}$, δηλαδή οι πληρωμές σταματούν είτε στην ημέρα του θανάτου του ασφαλισμένου είτε σε n χρόνια, ανάλογα με το τι θα συμβεί πρώτο.

Η τυχαία μεταβλητή Y για μία συνεχή ράντα n-χρόνων πληρωμών μίας νομισματικής μονάδας είναι:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T|}}\,, & T < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}}\,, & T \geq n \end{cases}$$

Ο τύπος επεκτείνεται για μία n-χρόνων πρόσκαιρη ράντα ζωής και είναι παρόμοια με αύτη της ράντας ζωής με μικρές τροποποιήσεις. Η μέση τιμή του Y συμβολίζεται με $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$ και δίνεται από το τύπο:

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{T|}}({}_tp_x\mu_{x+t})\,\mathrm{dt} + \bar{a}_{\overline{n|}}({}_np_x) \quad (1.17)$$

Όπως και προηγουμένως, για τις συνεχείς ισόβιες ράντες ζωής (*continuous whole life annuities*), έτσι και εδώ κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση και μπορούμε να αποδείξουμε το κάτωθι (εναλλακτικό) τύπο της (1.17)

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n {}_tE_x\, dt \quad (1.18)$$

Ένας τύπος ο οποίος συνδέει την αναλογιστική παρούσα αξία πρόσκαιρης ράντας $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$ με την παρούσα αξία μίας n-χρόνων ασφάλεια προικοδότησης $\bar{A}_{x:\overline{n|}}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\delta} \quad (1.19)$$

Η διασπορά της πρόσκαιρης ράντα ζωής n-χρόνων της μεταβλητής Y λειτουργεί ακριβώς όπως η διασπορά της ράντας ζωής και δίνεται από τον τύπο:

$$V(Y) = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n|}} - (\bar{A}_{x:\overline{n|}})^2}{\delta^2} \quad (1.20)$$

Παράδειγμα 1.12

Θεωρούμε τον εναπομείνοντα χρόνο ζωής της γενέθλιας μεταβλητής X, η οποία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 100]$. Αν η ένταση ανατοκισμού είναι $\delta = 0.05$, τότε δεδομένου ότι η παρούσα αξία μίας n-χρόνων ασφάλειας προικοδότησης είναι $\ddot{A}_{30:\overline{10|}} = 0.6323$, θα υπολογίσουμε τη παρούσα αξία προκαταβλητέας πρόσκαιρης ράντας ζωής σύμφωνα με το τύπο (1.19) $\ddot{a}_{30:\overline{10|}} = \frac{1-\ddot{A}_{30:\overline{10|}}}{\delta} = \frac{1-0.6323}{0.05} = 7.35$

Η αναλογιστική μελλοντική αξία σε αύτη τη ράντα συμβολίζεται με:

$$\bar{S}_{x:\overline{n|}} = \frac{\bar{a}_{x:\overline{n|}}}{{}_nE_x}$$

όπου $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$ είναι η αναλογιστική παρούσα αξία, ${}_nE_x$ είναι ο συνδυασμένος αναλογιστικός παράγοντας προεξόφλησης και είναι ίσος με ${}_nE_x = v^n{}_np_x$, όπου v^n είναι η προεξόφληση στο χρόνο και ${}_np_x$ είναι η προεξόφληση επιβίωσης.

Παράδειγμα 1.13

Θεωρούμε τον εναπομείνοντα χρόνο ζωής της τυχαίας μεταβλητής X η οποία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 100]$. Εάν η ένταση ανατοκισμού είναι $\delta = 0.05$, τότε η παρούσα αξία της πρόσκαιρης ράντας σύμφωνα με τον τύπο (1.18) είναι $\bar{a}_{30:\overline{10|}} = 7.35$. Θα υπολογίσουμε την μελλοντική αξία της ίδιας ράντας $\bar{S}_{30:\overline{10|}}$.

Βρίσκουμε ${}_{10}E_{30} = v^{10}{}_{10}p_{30} = e^{-0.05(10)}{}_{10}p_{30}$.

Για ηλικία ατόμου $x = 30$, έστω T η τυχαία μεταβλητή ζωής που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0, 70] έτσι ώστε:

$${}_tp_{30} = S(t) = \frac{70 - t}{70} \Rightarrow {}_{10}p_{30} = \frac{6}{7} = 0.8571 \Rightarrow$$

$${}_{10}E_{30} = e^{-0.5}(0.8571) = 0.51986$$

Αντικαθιστώντας στο τύπο $\bar{S}_{x:\overline{n|}} = \frac{\bar{a}_{x:\overline{n|}}}{{}_nE_x}$ βρίσκουμε:

$$\bar{S}_{30:\overline{10|}} = \frac{\bar{a}_{30:\overline{10|}}}{{}_{10}E_{30}} = \frac{7.35}{0.51986} \simeq 14.14$$

1.4.3 Μέλλουσες Συνεχείς Ράντες Ζωής

Μία n-χρόνων μέλλουσα ράντα είναι μία ράντα ζωής στην οποία οι πληρωμές αρχίζουν σε n-χρόνια εάν ο ασφαλισμένος είναι ακόμη ζωντανός στο χρόνο n. Εάν T είναι ο εναπομείνοντας χρόνος ζωής της τυχαίας μεταβλητής, η τυχαία μεταβλητή Y για μία n-χρόνων μέλλουσα ράντα είναι

$$Y = \begin{cases} 0, & T < n \\ v^n \bar{a}_{\overline{T-n|}}, & T \geq n \end{cases}$$

Η παρούσα αξία μίας n-χρόνων μέλλουσας ράντας της μίας νομισματικής μονάδας για ηλικία ασφαλισμένου x συμβολίζεται με ${}_{n|}\bar{a}_x$. Η αναλογιστική παρούσα αξία σε ηλικία x του ασφαλισμένου μιας ολόκληρης ράντας ζωής ξεκινά στην ηλικία $x + n$ και δίνεται από το παρακάτω τύπο:

$${}_{n|}\bar{a}_x = {}_nE_x\, \bar{\alpha}_{\mathrm{x+n}} = v^{\mathrm{n}}({}_np_x)\bar{\alpha}_{x+n} \quad (1.21)$$

Παράδειγμα 1.14

Υποθέτουμε τον εναπομείνοντα χρόνο ζωής σε μία γενέθλια τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί εκθετική κατανομή με ένταση θνησιμότητας $\mu = 0.05$. Εάν η ένταση ανατοκισμού είναι $\delta = 0.10$, θα βρούμε την παρούσα αξία μέλλουσας ράντας ${}_{10|}\bar{a}_{30}$.

Έστω T η τυχαία μεταβλητή ζωής που ακολουθεί εκθετική κατανομή με ένταση θνησιμότητας $\mu = 0.05$.

Στην εκθετική κατανομή γνωρίζουμε ότι
${}_nE_x = e^{-n(\mu+\delta)} \to {}_{10}E_x = e^{-10(0.05+0.10)} = e^{-1.5}$.

Επιπλέον ο εναπομείνοντας χρόνος ζωής στην ηλικία ασφαλισμένου $x = 40$ είναι επίσης εκθετική κατανομή με ένταση θνησιμότητας $\mu = 0.05$.

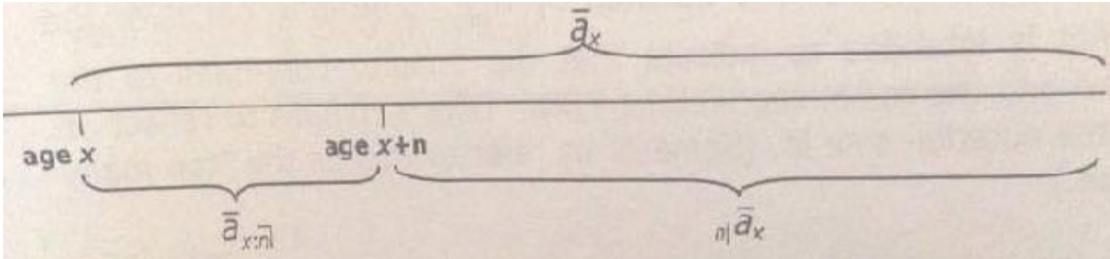
Με τη βοήθεια του τύπου (1.15) της αναλογιστικής παρούσας αξίας βρίσκουμε: $\bar{\alpha}_{40} = \frac{1}{\mu+\delta} = \frac{1}{0.15} = 6.66\bar{6}$

Εάν αντικαθιστήσουμε στο τύπο (1.21) βρίσκουμε τη παρούσα αξία μέλλουσας ράντας ${}_{10|}\bar{a}_{30} = {}_{10}E_{30}\bar{\alpha}_{40} = e^{-1.5}6.66\bar{6} = 1.4875$

ΣΧΟΛΙΟ: Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση που συνδέει τις αναλογιστικές παρούσες αξίες μεταξύ τους, δίνεται από το κάτωθι τύπο:

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{n|}} + {}_{n|}\bar{a}_x \quad (1.22)$$

Χαρακτηριστικά δίνουμε το παρακάτω διάγραμμα:



Από το σχήμα φαίνεται ότι μία ισόβια συνεχής ράντα ζωής μπορεί να αντικατασταθεί από μία n-χρόνων πρόσκαιρη ράντα για να καλύψει τα επόμενα n χρόνια και από μία n-χρόνων μέλλουσα ράντα για να καλύψει τον εναπομείνοντα χρόνο ζωής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βασικές Μαθηματικές Έννοιες - Στοχαστικές Διαδικασίες

2.1 Εισαγωγή

Σκοπός του δευτέρου κεφαλαίου είναι η παρουσίαση βασικών ορισμών και εννοιών για την κατανόηση της θεωρίας της στοχαστικής ανάλυσης. Ιδιαίτερα θα παρουσιάσουμε την κίνηση Brown και ειδικές περιπτώσεις αυτής, όπως την αριθμητική και τη γεωμετρική κίνηση, με στόχο την κατανόηση εννοιών του τρίτου κεφαλαίου. Θα ξεκινήσουμε με βασικούς ορισμούς και έννοιες από τη θεωρία πιθανοτήτων.

2.2 Βασικές έννοιες θεωρίας πιθανοτήτων

2.2.1 σ-άλγεβρες

Ορισμός 2.1 *Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μια κλάση υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του Ω καλείται σ-άλγεβρα αν έχει τις εξής ιδιότητες:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Αν $A \in \mathcal{F}$ τότε και $A^c \in \mathcal{F}$
3. Αν $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ $(\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta\ o\iota\kappa o\gamma\acute{\varepsilon}\nu\varepsilon\iota\alpha\ \upsilon\pi o\sigma\upsilon\nu\acute{o}\lambda\omega\nu\ \tau o\upsilon\ \Omega)$

$$\tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \kappa\alpha\iota \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{F})$ καλείται ***μετρήσιμος χώρος***. Αποδεικνύεται ότι αν $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα τότε το

$$\emptyset \in \mathcal{F}\ \kappa\alpha\iota\ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Παράδειγμα 2.1

Έχουμε ένα μη κενό σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Τότε το σύνολο

$A = \{\Omega, \emptyset, \{2\}, \{1,3\}\}$ είναι μία σ-άλγεβρα αφού ικανοποιεί τις συνθήκες του παραπάνω ορισμού.

Παράδειγμα 2.2

Έχουμε ένα μη κενό σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Τότε το σύνολο

$A_1 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3,4\}\}$ δεν είναι μία σ-άλγεβρα γιατί περιέχει τα υποσύνολα $\{1\}$ και $\{2\}$ αλλά όχι το $\{1\} \cup \{2\}$.

Το σύνολο $A_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$ είναι μία σ-άλγεβρα και είναι μικρότερη από την σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα υποσύνολα του Ω.

Ορισμός 2.2 ***Η ελάχιστη σ-άλγεβρα*** *η οποία ορίζεται από ένα σύνολο A, είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο A. Η άλγεβρα αυτή συνήθως συμβολίζεται με $\sigma(A)$.*

Παράδειγμα 2.3

Θεωρούμε την άλγεβρα $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$. Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο A, οπότε είναι η $\sigma(A)$.

Παράδειγμα 2.4

Έχουμε A_1, A_2 και A_3 υποσύνολα του Ω τέτοια ώστε $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$ και $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$

Η σ-άλγεβρα

$$\left\{\emptyset,\ A_1,\ A_2, A_3,\ A_1 \bigcup A_2,\ A_2 \bigcup A_3,\ A_1 \bigcup A_3, \Omega\right\}$$

είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\sigma(A)$, η οποία περιέχει το σύνολο $A = \{A_1, A_2, A_3\}$.

Ορισμός 2.3 *Η μικρότερη σ-άλγεβρα η οποία περιέχεται σε κάθε σ-άλγεβρα είναι η* ***τετριμένη*** *ή* ***εκφυλισμένη*** *σ-άλγεβρα $O = \{\emptyset, \Omega\}$.*

2.2.2 Άλγεβρα Borel

Ορίζεται $\Omega = R$ και κατασκευάζεται μία σ-άλγεβρα που αποτελείται από υποσύνολα του R.

Ορισμός 2.4 ***Η άλγεβρα Borel****, η οποία συμβολίζεται με B, είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, x)$, τα οποία μπορεί να θεωρηθούν ως υποσύνολα της πραγματικής ευθείας. Τα στοιχεία του B ονομάζονται σύνολα Borel.*

Οι έννοιες της άλγεβρας Borel και των συνόλων της γενικεύονται επίσης και σε υποσύνολα του R^d δηλαδή όταν $\Omega = R^d$, $d = 1, 2, \dots, n$. Λέμε ότι ένα παραλληλόγραμμο του R^d είναι ένα υποσύνολο του R^d της μορφής

$$(a, b] = \{x \in R^d : a_i < x_i \leq b_i, i = 1, .., d\}$$

όπου $a = (a_1, .., a_d) \in R^d και\ b = (b_1, .., b_d) \in R^d$.

Ορισμός 2.5 *Η σ-άλγεβρα Borel $B(R^d)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα η οποία περιέχει όλα τα παραλληλόγραμμα της μορφής $(a, b]$.*

2.2.3 Μέτρο πιθανότητας

Έστω ένα μη κενό σύνολο Ω και $\mathfrak{f}$ μία σ-άλγεβρά του. Μία συνολοσυνάρτηση μ από το $\mathfrak{f}$ στο $[0, \infty]$ καλείται *μέτρο πιθανότητας* αν

i. $\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(\Omega) = 1$
ii. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ για κάθε ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων $A_1, A_2, \dots \in f$.

Σημείωση: Αν παραλείψουμε την συνθήκη $\mu(\Omega) = 1$ τότε λέμε ότι η μ είναι ένα *μέτρο* και όχι ένα μέτρο πιθανότητας και η τριάδα $(\Omega,\ \mathfrak{f},\ \mu)$ καλείται *χώρος μέτρου*. Το μέτρο πιθανότητας συμβολίζεται συνήθως με P και η τριάδα εδώ $(\Omega,\ \mathfrak{f},\ P)$ καλείται *χώρος μέτρου πιθανότητας*.

Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο λ το οποίο ορίζεται επάνω στα σύνολα Borel του R και αντιστοιχεί σε κάθε διάστημα του R το μήκος του (δηλ.

$\lambda([\alpha,\beta]) = \lambda((\alpha,\beta]) = \lambda([\alpha,\beta)) = \lambda((\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$. Το μέτρο αυτό καλείται *μέτρο Lebesgue*.

Περιοριζόμαστε στα σύνολα Borel όσον αφορά το μέτρο Lebesgue, διότι αποδεικνύεται ότι το μέτρο αυτό δεν μπορεί να ορισθεί επάνω σε όλα τα υποσύνολα του R. Ο περιορισμός αυτός δεν αποτελεί σοβαρό πρόβλημα διότι σύνολα εκτός του $B(R)$ σχεδόν σπάνια εμφανίζονται σε εφαρμογές.

2.3 Τυχαίες Μεταβλητές και Στοχαστικές Διαδικασίες

2.3.1. f- μετρήσιμη συνάρτηση

Ορισμός 2.6 *Ορίζεται Ω ένα μη κενό σύνολο. Καλείται η συνάρτηση $\Upsilon: \Omega \rightarrow R^d$ $\mathfrak{f}$-μετρήσιμη αν*

$$\Upsilon^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega: \Upsilon(\omega) \in U\} \in \mathfrak{f}$$

για κάθε ανοιχτό σύνολο $U \in R^d$.

Ειδικότερα μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση Υ είναι $\mathfrak{f}$-μετρήσιμη αν η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου του R^d, κάτω από τη συνάρτηση αυτή, ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{f}$.

2.3.2. Τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός 2.7 *Μια τυχαία μεταβλητή είναι μία $\mathfrak{f}$-μετρήσιμη συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow R^d$, όπου $(\Omega,\ \mathfrak{f},\ P)$ είναι ένας χώρος πιθανοτήτων.*

Παράδειγμα 2.5

Υποθέτουμε ότι ένα νόμισμα ρίχνεται δύο φορές, οπότε ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$. Θεωρούμε X το πλήθος των όψεων «κορώνα» που αντιστοιχούν σε κάθε σημείο. Η αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του δειγματικού χώρου και των τιμών της X δίνεται στον παρακάτω πίνακα, για παράδειγμα στο ΓK εμφανίζεται μία κορώνα, άρα $X = 1$. Θεωρούμε το X να είναι μία τυχαία μεταβλητή.

Πίνακας

Σημείο δειγματικού χώρου	ΚΚ	ΚΓ	ΓΚ	ΓΓ
Χ	2	1	1	0

Εάν μία τυχαία μεταβλητή παίρνει πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο πλήθος τιμών καλείται ***διακριτή τυχαία μεταβλητή***, ενώ αν παίρνει μη αριθμήσιμο πλήθος τιμών καλείται ***συνεχής τυχαία μεταβλητή***.

2.3.3. Διακριτές κατανομές πιθανότητας

Θεωρούμε X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή και ορίζουμε ότι οι τιμές που μπορεί να πάρει είναι $x_1, x_2, \dots$ διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά. Υποθέτουμε ότι οι πιθανότητες να πάρει η μεταβλητή τις τιμές αυτές είναι:

$$P(X = x) = f(x_k) \qquad k = 1,2,.. \quad (2.1)$$

Ορίζουμε ως *συνάρτηση πιθανότητας* (ή *κατανομή πιθανότητας*) την

$$P(X = x) = f(x) \quad (2.2)$$

με $P(X = x_k) = F(X_k)$ και $P(X \neq x_k) = 0$

Η $f(x)$ είναι μία συνάρτηση πιθανότητας, εάν:

i. $f(x) \geq 0$
ii. $\sum_x f(x) = 1$

όπου το άθροισμα θεωρείται ως προς όλες τις δυνατές τιμές του x. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας $f(x)$ καλείται γραφική παράσταση της πιθανότητας.

Παράδειγμα 2.6

Θα βρούμε τη συνάρτηση πιθανότητας η οποία αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή X του παραπάνω παραδείγματος 2.5 και θα σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση.

Για ένα αμερόληπτο νόμισμα έχουμε:

$P(KK) = \frac{1}{4},\ P(K\Gamma) = \frac{1}{4},\ P(\Gamma K) = \frac{1}{4},\ P(\Gamma\Gamma) = \frac{1}{4}$ και άρα:

$$P(X = 0) = P(\Gamma\Gamma) = \frac{1}{4}$$

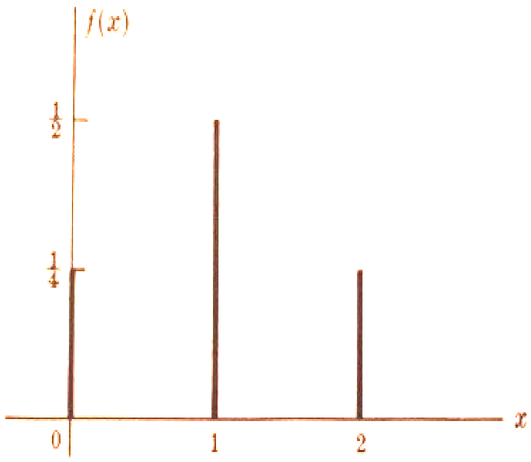
$$P(X = 1) = P(K\Gamma \bigcup \Gamma K) = P(K\Gamma) + P(\Gamma K) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(KK) = \frac{1}{4}$$

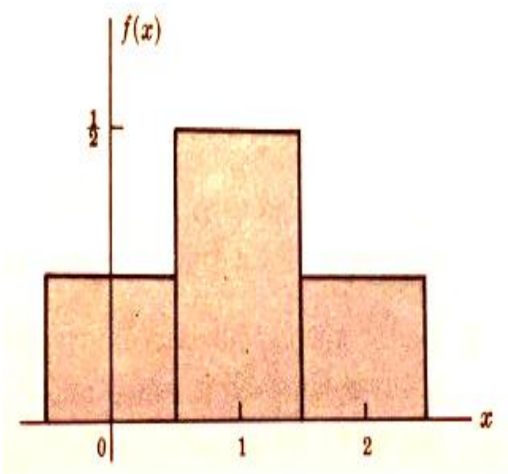
Συνοψίζοντας τα παραπάνω παραθέτουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας μπορεί να αποδοθεί με ένα ραβδόγραμμα ή ιστόγραμμα, τα οποία και παρατίθονται παρακάτω:



Ραβδόγραμμα



Ιστόγραμμα

2.3.3.1 Συναρτήσεις κατανομής για διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Η *συνάρτηση κατανομής* για μία τυχαία μεταβλητή X ορίζεται με τη σχέση:

$$P(X \leq x) = F(x), \qquad -\infty < x < \infty \quad (2.3)$$

Η συνάρτηση κατανομής μπορεί να ληφθεί από τη συνάρτηση πιθανότητας επειδή:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u) \qquad (2.4)$$

όπου το άθροισμα θεωρείται ως προς όλα τα u για τα οποία $u \leq x$.

Έαν η τ.μ. X παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών $x_1, x_2, \dots, x_n$ τότε η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad , & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) \quad , & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2), & x_2 \leq x < x_3 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ f(x_1) + \cdots + f(x_n), & x_n \leq x < \infty \end{cases} \qquad (2.5)$$

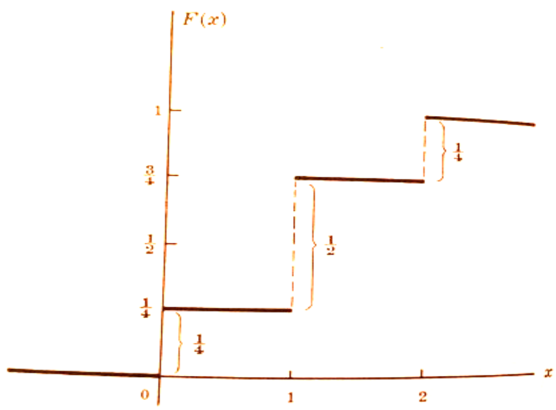
Παράδειγμα 2.7

Θα βρούμε τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X του παραδείγματος 2.6 και τη γραφική της παράσταση.

Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $F(x)$ παριστάνεται παρακάτω:



2.3.4. Συνεχείς κατανομές πιθανότητας

Στην περίπτωση όπου η X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε η πιθανότητα να πάρει η X μία ορισμένη τιμή, είναι σχεδόν 0. Έτσι δε μπορούμε να ορίσουμε με τον ίδιο τρόπο μια συνάρτηση πιθανότητας, όπως στη διακριτή μεταβλητή. Για τη δημιουργία μίας κατανομής πιθανότητας μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, διαπιστώνεται ότι η πιθανότητα X θα βρίσκεται μεταξύ δύο διαφορετικών τιμών.

Θεωρούμε ως βάση τη παρατήρηση αυτή και σύμφωνα με τις ιδιότητες της συνάρτησης πιθανότητας για διακριτές τ.μ. (βλ. σελ.38) οδηγούμαστε στην ύπαρξη μίας συναρτήσεως για την οποία:

i. $f(x) \geq 0$
ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \quad -\infty < x < \infty$

Ορίζουμε τη πιθανότητα η τ.μ. X να πάρει τιμές μεταξύ a και b ως εξής:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Μια συνάρτηση $f(x)$ που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες (i) και (ii) καλείται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* για την συνεχή τυχαία μεταβλητή.

Παράδειγμα 2.8

Θα προσδιορίσουμε τη σταθερά c έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & αλλιώς \end{cases}$$

να είναι συνάρτηση πυκνότητας. Τέλος θα υπολογίσουμε τη $P(1 < X < 2)$.

Από την ιδιότητα (i) έχουμε $c \geq 0$. Σύμφωνα με την ιδιότητα (ii) έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^3 cx^2 dx = \frac{cx^3}{3} \Big|_0^3 = 9c = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{9}.$$

Τέλος για τον υπολογισμό της $P(1 < X < 2)$ έχουμε:

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{x^3}{27}\Big|_1^2 = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}.$$

2.3.4.1 Συναρτήσεις κατανομής για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Ορίζουμε τη συνάρτηση κατανομής της $F(x)$ για μία συνεχή τυχαία μεταβλητή με τη σχέση:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad (2.7)$$

Παράδειγμα 2.9

Θα βρούμε τη συνάρτηση κατανομής για την τυχαία μεταβλητή του παραπάνω παραδείγματος 2.8 και θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα για να υπολογίσουμε την $P(1 < x \leq 2)$.

Έχουμε $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Εάν $x < 0$, τότε $F(x) = 0$.

Εάν $0 \leq x < 3$, τότε $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{9} t^2 dt = \frac{x^3}{27}$.

Εάν $x \geq 3$, τότε $F(x) = \int_0^3 f(t)dt + \int_3^x f(t)dt = \int_0^3 \frac{1}{9} t^2 dt + \int_3^x 0 dt = 1$.

Επομένως η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{27}, & 0 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Τέλος για τον υπολογισμό της $P(1 < X \leq 2)$ έχουμε:

$$P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1)$$

$$= F(2) - F(1)$$

$$= \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27}$$

Η πιθανότητα το X να είναι μεταξύ x και $x + \Delta x$ είναι:

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt \quad (2.8)$$

και εάν το το Δx είναι μικρό, είναι:

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = f(x)\Delta x \quad (2.9)$$

Παραγωγίζοντας την (2.7) έχουμε

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (2.10)$$

σε όλα τα σημεία όπου η $f(x)$ είναι συνεχής. Συμπερασματικά, η παράγωγος της συναρτήσεως κατανομής είναι η συνάρτηση πυκνότητας.

2.3.5. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από μία τυχαία μεταβλητή

Θέτουμε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$ και μία τυχαία μεταβλητή X. Από τα παραπάνω γνωρίζουμε ότι η X είναι εξ' ορισμού $\mathfrak{f}$-μετρήσιμη. Ωστόσο γενικότερα θα υπάρχουν μικρότερες σ-άλγεβρες για τις οποίες η X θα είναι μετρήσιμη.

Ορισμός 2.8 *Η μικρότερη σ-άλγεβρα για την οποία η τυχαία μεταβλητή X είναι μετρήσιμη, αποκαλείται η σ-άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή X και συμβολίζεται με $\sigma(X)$.*

Θεώρημα 2.1 Έστω $X, Y : \Omega \to R^d$, δύο τυχαίες μεταβλητές. Η τ.μ. Y είναι μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα $\sigma(X)$, η οποία παράγεται από την τυχαία μεταβλητή X, αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση g, $g: R^d \to R^d$ μετρήσιμη κατά Borel, τέτοια ώστε $Y = g(X)$.

Παραδειγμα 2.10

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$X_3(\omega)\begin{cases} k_0, & \alpha\nu\ \omega \in A_0 \\ k_1, & \alpha\nu\ \omega \in A_1 \\ k_2, & \alpha\nu\ \omega \in A_2 \end{cases}$$

όπου $A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \Omega$ με $A_0,\ A_1,\ A_2$ ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή είναι η

$$\left\{\emptyset, \Omega, A_0, A_1, A_2, A_0 \bigcup A_1, A_0 \bigcup A_2, A_1 \bigcup A_2\right\}.$$

Η τυχαία μεταβλητή X_3 γράφεται και σαν

$$X_3(\omega) = \sum_{i=1}^{n} k_i I_{A_i}(\omega)$$

όπου $n = 3$. Αυτές οι μεταβλητές που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός δείκτριων συναρτήσεων ονομάζονται **απλές**.

2.3.6. Στοχαστικές Διαδικασίες

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε βασικούς ορισμούς και έννοιες στοχαστικής διαδικασίας.

Ορισμός 2.9 *Μία στοχαστική διαδικασία είναι μία παραμετρισμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών* $\{X_t\}_{t\in T}$ *οι οποίες ορίζονται σε ένα χώρο πιθανοτήτων* $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$ *και παίρνουν τιμές στο* R^d.

Μία στοχαστική διαδικασία έχει δύο «μεταβλητές», την t και την ω.

- Για κάθε $t \in T$ (το οποίο θεωρούμε δεδομένο και σταθερό) υπάρχει η τυχαία μεταβλητή
$$\omega \to X_t(\omega) : \omega \in \Omega$$
- Έχοντας σταθερό $\omega \in \Omega$ θεωρούμε την συνάρτηση
$$t \to X_t(\omega) : t \in T$$

η οποία ονομάζεται *τροχιά* (path) της X_t.

Παράδειγμα 2.11

Ένα παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας με διακριτό σύνολο δεικτών T (διακριτό χρόνο) είναι το ακόλουθο. Θεωρούμε ότι ρίχνουμε διαδοχικά ένα νόμισμα και ω_i είναι το αποτέλεσμα της i ρίψης. Θα θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές X_i οι οποίες παίρνουν τιμές

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \omega_i = K \\ -1, & \alpha\nu\ \omega_i = \Gamma \end{cases}$$

Η τιμή της X_i θεωρείται το κέρδος ενός παίκτη κατά την i ρίψη, αν ποντάρει ένα ευρώ στο αν θα έρθει κορώνα ή γράμματα. Η X_i, $i \in N$ είναι μια στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο. Η τιμή της είναι τα κέρδη του παίχτη κατά την διάρκεια του παιχνιδιού.

Ορισμός 2.10 *Μια ιδιότητα ισχύει σχεδόν βέβαια (σ.β.), όταν δεν ισχύει σε ένα μόνο σύνολο μέτρου 0.*

Αρκετές φορές το μέτρο P δεν είναι μέτρο πιθανότητας, γι'αυτό το λόγο λέμε ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει σχεδόν παντού.

Παράδειγμα 2.12

Το $X \leq Y$, σχεδόν βέβαιο όταν $P(\{X > Y\}) = 0$.

Ορισμός 2.11 *Μία στοχαστική διαδικασία X_t σε συνεχή χρόνο, ονομάζεται **δεξιά συνεχής** αν $X_t = X_{t+}$ όπου $X_{t+} = lim_{\varepsilon\to 0} X_{t+\varepsilon}$.*

Ορισμός 2.12 *Μια στοχαστική διαδικασία A_t ονομάζεται **αύξουσα** αν για σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$ η $A_t(\omega)$ είναι μία μη αρνητική, μη φθίνουσα δεξιά συνεχής συνάρτηση στο $t \geq 0$.*

2.4 Η Κίνηση Brown

2.4.1 Εισαγωγή

Η κίνηση Brown είναι η βασική μονάδα για τυποποιημένες παραγώγους μοντέλων τιμολόγησης. Για παράδειγμα, η επιλογή του black-scholes υπόδειγματος αποτίμησης προυποθέτει ότι η τιμή του βασικού περιουσιακού στοιχείου ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown. Σε αυτή την ενότητα θα εξηγήσουμε τι σημαίνει αυτό.

Μια κίνηση Brown μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τυχαίος περίπατος όπου ένα κέρμα περιστρέφεται απείρως γρήγορα και σε απειροελάχιστα μικρά διαστήματα του χρόνου. Μια κίνηση Brown είναι ένας τυχαίος περίπατος που συμβαίνει σε συνεχή χρόνο με κινήσεις που είναι περισσότερο συνεχής και λιγότερο διακριτές. Η κίνηση χαρακτηρίζεται από μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $Z = \{Z(t)\}$ όπου t δείκτης για το χρόνο, με $Z(t)$ να αντιπροσωπεύει όλες τις τιμές των κινήσεων, μετά από t περιόδους. Μια τέτοια οικογένεια ονομάζεται *στοχαστική διαδικασία*. Για μια κίνηση Brown της οποίας η τιμή ξεκινά $(t = 0)$ από z, η στοχαστική διαδικασία $Z(t)$ έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

i. $Z(0) = z$
ii. Οι διαφορές $Z(t + s) - Z(t)$ είναι κανονικά κατανεμημένες με μέση τιμή 0 και διασπορά s.
iii. Η διαφορά $Z(t + s_1) - Z(t)$ είναι ανεξάρτητη της διαφοράς $Z(t) - Z(t - s_2)$ όπου s_1, $s_2 > 0$, δηλαδή οι διαφορές $Z(t + s_1) - Z(t)$ και $Z(t) - Z(t - s_2)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.
iv. Η τ.μ. $Z(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου t.

Εάν $z = 0$, τότε η κίνηση Brown ονομάζεται *τυπική* κίνηση Brown (standard or a pure Brownian motion). Επίσης η τυπική κίνηση Brown είναι γνωστή και ως *κίνηση Wiener*.

Παράδειγμα 2.13

Θα βρούμε τη διασπορά της $Z(t) - Z(s)$, όπου $0 \leq s < t$.

Η διασπορά της $Z(t) - Z(s)$, όπου $0 \leq s < t$, είναι

$Z(t)-Z(s)=Z\big(s+(t-s)\big)-Z(s)$ και από την ιδιότητα (ii) (βλ. σελ.45), καταλήγουμε ότι ειναι $t-s$.

Παράδειγμα 2.14

Θα δείξουμε ότι $E[Z(t+s)|Z(t)]=Z(t)$. Για κάθε τυχαία μεταβλητή X, Y, Z γνωρίζουμε ότι:

$E(X+Y|Z)=E(X|Z)+E(Y|Z)$ και $E(X|X)=X$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις ιδιότητες έχουμε:

$$E[Z(t+s)|Z(t)]=E[Z(t+s)-Z(t)+Z(t)|Z(t)]$$

$$=E[Z(t+s)-Z(t)|Z(t)]+E[Z(t)|Z(t)]$$

$$=0+Z(t)$$

$$=Z(t)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα συνεπάγεται ότι η $Z(t)$ είναι μια *martingale* (μια στοχαστική διαδικασία $Z(t)$ για την οποία ισχύει $E[Z(t+s)|Z(t)]=Z(t)$, ονομάζεται martingale).

Παράδειγμα 2.15

Θεωρούμε $Z(2)=4$, θα υπολογίσουμε το $E[Z(5)|Z(2)]$. Έχουμε $E[Z(5)|Z(2)]=E[Z(2+3)|Z(2)]=Z(2)=4$

Παράδειγμα 2.16

Θεωρούμε Z μία τυπική κίνηση Brown, θα δείξουμε ότι

$$E\big(Z(t)Z(s)\big)=\min\{t,s\} \text{ όπου } t,s\geq 0.$$

Έστω $t\geq s$. Δεδομένου $Z(t)$ είναι μία τυπική κίνηση Brown, τότε $Z(0)=0$. Έχουμε

$$E[Z(t)]=E[Z(t)-Z(0)]=E[Z(0+t)-Z(0)]=0$$

και

$$Var[Z(t)] = Var[Z(t) - Z(0)] = t - 0 = t.$$

Αλλά

$Var[Z(t)] = E[Z(t)^2] - (E[Z(t)])^2 = E[Z(t)^2] - 0^2 = E[Z(t)^2] = t$. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} E\big(Z(t)Z(s)\big) &= E[\big(Z(s) + Z(t) - Z(s)\big)Z(s))] \\ &= E[\big(Z(s)\big)^2] + E[\big(Z(t) - Z(s)\big)Z(s)] \\ &= s + E[Z(t) - Z(s)]E[Z(s)] = s + 0 = \min\{t, s\} \end{aligned}$$

αφού $Z(t) - Z(s)$ και $Z(s) = Z(s) - Z(0)$ είναι ανεξάρτητες (από την ιδιότητα (iii) βλ. σελ45).

Θα δείξουμε τώρα ότι η τυπική κίνηση Brown Z μπορεί να προσεγγιστεί από ένα άθροισμα ανεξάρτητων διωνυμικών τυχαίων μεταβλητών. Για μία μικρή χρονική περίοδο h, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις μεταβολές της Z από τη χρονική στιγμή t μέχρι τη χρονική στιγμή $t + h$, σύμφωνα με την εξίσωση

$$Z(t + h) - Z(t) = Y(t + h)\sqrt{h},$$

όπου $Y(t)$ είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί μία διωνυμική κατανομή ($Y(t) = \pm 1$ με πιθανότητα 0.5). Επιπλέον $E[Y(t)] = 0$ και $Var[Y(t)] = 1$. Έστω το διάστημα $[0, T]$, το οποίο διαιρείται σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{T}{n}$ το καθένα. Τότε έχουμε,

$$Z(T) = Z(T) - Z(0)$$

$$= [Z(h) - Z(0)] + [Z(2h) - Z(h)] + [Z(3h) - Z(2h)] + \cdots$$

$$\ldots + \big[Z\big((n-1)h\big) + Z\big((n-2)h\big)\big] + [Z(nh) - Z\big((n-1)h\big)] \quad (*)$$

Επομένως,

$$Z(T) = \sum_{i=1}^{n} [Z(ih) - Z\big((i-1)h\big)]$$

$$= Y(0+h)\sqrt{h} + Y(2h)\sqrt{h} + \cdots + Y(nh)\sqrt{h}$$

$$= [Y(h) + Y(2h) + \cdots + Y(nh)]\sqrt{h}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Y(ih)\sqrt{h}$$

$$= \sqrt{T}\ [\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y(ih)],$$

και εφόσον $E[Y(ih)] = 0$, έχουμε

$$E[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y(ih)] = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} E[Y(ih)] = 0$$

Παρόμοια, σύμφωνα με την $Var\big(Y(ih)\big) = 1$, φτάνουμε στη σχέση

$$Var[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y(ih)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = 1$$

Από τα παραπάνω φαίνεται καθαρά, ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τη τυπική κίνηση Brown ως μία προσέγγιση ενός αθροίσματος ανεξάρτητων διωνυμικών μεταβλητών (draws) με μέση τιμή 0 και διασπορά h.

Στη συνέχεια, από το κεντρικό οριακό θεώρημα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y(ih)$$

το οποίο προσεγγίζει μία τυπική κανονική κατανομή, έστω M. Οπότε

$$Z(T) = \sqrt{T}\ M(T)$$

και προκύπτει ότι η $Z(T)$ προσεγγίζεται από μία κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά T. Επιπλέον απο στοχαστική λογισμό γνωρίζουμε ότι, η $Z(T)$ μπορεί να αναπαραστεί σε ολοκληρωτική μορφή ως εξής:

$$Z(T) = \int_0^T dZ(t) \qquad (*)$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της σχέσης $(*)$ ονομάζεται *στοχαστικό ολοκλήρωμα*.

Παράδειγμα 2.17

Θεωρούμε Z να είναι μία τυπική κίνηση Brown. Θα υπολογίσουμε την $E(Z(4)Z(5))$. Παρατηρούμε ότι $Z(4) = Z(4) - Z(0)$ και $Z(5) - Z(4)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Οπότε,

$$\begin{aligned}
E\big(Z(4)Z(5)\big) &= E[Z(4)\{Z(5) - Z(4) + Z(4)\}] \\
&= E[Z(4)^2] + E\big[Z(4)\,\big(Z(5) - Z(4)\big)\big] \\
&= E[Z(4)^2] + E[Z(4)]E[Z(5) - Z(4)] \\
&= E[Z(4)^2] - [E(Z(4))]^2 + E[Z(4)]\,E[Z(5)] \\
&= Var\big(Z(4)\big) \\
&= 4
\end{aligned}$$

Εάν μετονομάσουμε τη μικρή χρονική περίοδο h σε dt και τη μικρή μεταβολή Z σε $dZ(t)$, θα πάρουμε τη διαφορική μορφή

$$dZ(t) = M(t)\sqrt{dt}$$

Με άλλα λόγια, αυτή η συνάρτηση λέει ότι σε μικρές περιόδους του χρόνου, οι αλλαγές στην αξία της διαδικασίας είναι κανονικά κατανεμημένες με διασπορά, η οποία είναι ανάλογη με το μήκος της χρονικής περιόδου.

2.4.2 Βασικές Ιδιότητες της κίνησης Brown Z(t)

Στην υποενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε δύο βασικές ιδιότητες της κίνησης Brown που αποδεικνύονται εξαιρετικά σημαντικές και θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε την διωνυμική προσέγγιση στην κίνηση Brown. Χωρίζουμε ένα διάστημα $[a, b]$ σε n-ίσα υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{b-a}{n}$ το καθένα. Η τετραγωνική απόκλιση της στοχαστικής διαδικασίας $\{Z(t)\}_{a\leq t\leq b}$ ορίζεται να είναι

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[Z(t_i)-Z(t_{i-1})]^2=\int_a^b[dZ(t)]^2$$

εάν το όριο υπάρχει (κάτω από τη σύγκλιση πιθανότητας). Στην περίπτωση της τυπικής κίνησης Brown έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[Z(ih)-Z((i-1)h)]^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(Y_{ih}\sqrt{h})^{\,2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}^2h=T<\infty$$

Ένα σημαντικό συμπέρασμα του γεγονότος, ότι η τετραγωνική απόκλιση της κίνησης Brown είναι πεπερασμένη, είναι ότι οι αποκλίσεις ανώτερης τάξης είναι όλες μηδέν.

Παράδειγμα 2.18

Υποθέτουμε Z μία τυπική κίνηση Brown, θα αποδείξουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[Z(ih)-Z((i-1)h)]^4=0$$

Όντως έχουμε:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}[Z(ih)-Z((i-1)h)]^4\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}(Y_{ih}\sqrt{h})^{\,4}\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}Y_{ih}^4h^2\right|\leq\sum_{i=1}^{n}h^2=\frac{T^2}{n^2}$$

Ως εκ τούτου,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[Z(ih)-Z((i-1)h)]^4=0$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ολική απόκλιση της τυπικής κίνησης Brown. Αυτή είναι:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left|Z(t_i)-Z(t_{i-1})\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|Y_{ih}|\sqrt{h}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{h} = \sqrt{T}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{T}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n} = +\infty$$

Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά της κίνησης Brown (Brownian path) κινείται πάνω κάτω πολύ γρήγορα στο διάστημα $[0,T]$. Δηλαδή, η τροχιά θα διασχίσει το σημείο αφετηρίας άπειρες φορές στο διάστημα $[0,T]$.

2.4.3 Αριθμητική κίνηση Brown

Μία τυπική κίνηση Brown $dZ(t)$ έχει μέση τιμή 0 και διασπορά 1 ανά μονάδα χρόνου. Μπορούμε να γενικεύσουμε, έτσι ώστε αυτή η κίνηση να πάρει μη μηδενική μέση τιμή και μία αυθαίρετη σταθερή διασπορά. Ορίζουμε τ.μ. $X(t)$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$X(t+h)-X(t) = ah + \sigma Y(t+h)\sqrt{h}, \qquad (**)$$

όπου $Y(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή από μία διωνυμική κατανομή. Θεωρούμε στην σχέση $(**)$ ah τον *όρο μετατόπισης* (drift rate) και $\sigma\sqrt{h}$ τον *όρο θορύβου*. Έστω $T>0$, χωρίζουμε το διάστημα $[0,T]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $h=\frac{T}{n}$ το καθένα. Τότε:

$$X(T)-X(0) = \sum_{i=1}^{n}(a\frac{T}{n}+\sigma Y(ih)\sqrt{\frac{T}{n}}) = aT + \sigma(\sqrt{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y(ih)}{\sqrt{n}})$$

Από το κεντρικό οριακό θεώρημα βλέπουμε ότι η $\sqrt{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y(ih)}{\sqrt{n}}$ προσεγγίζει την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά T. Οπότε, έχουμε:

$$X(T)-X(0) = aT + \sigma Z(t)$$

όπου Z είναι η τυπική κίνηση Brown. Η στοχαστική διαφορική μορφή αυτής της έκφρασης είναι:

$$dX(t) = \alpha dt + \sigma dZ(t) \quad (2.11)$$

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ που ικανοποιεί την εξίσωση (2.11) ονομάζεται *αριθμητική κίνηση Brown*. Παρατηρούμε ότι

$E\big(X(t) - X(0)\big) = \alpha t$ και $\mathrm{Var}\ (\mathrm{X(T)} - \mathrm{X(0)}) = \mathrm{Var}(\alpha t + \sigma Z(t)) = \sigma^2 t$. Καλούμε a την στιγμιαία μέση τιμή ανά μονάδα χρόνου ή τον συντελεστή μετατόπισης και σ^2 την στιγμιαία διασπορά ανά μονάδα χρόνου. Θεωρούμε ότι $X(t) - X(0)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με αναμενόμενη μέση τιμή at και διασπορά $\sigma^2 t$. Επομένως, η $X(t)$ ακολουθεί και αυτή κανονική κατανομή με μέση τιμή X $(0) +\ at$ και διασπορά $a^2 t$.

Παράδειγμα 2.19

Θεωρούμε $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ να είναι μία αριθμητική κίνηση Brown με συντελεστή μετατόπισης a και μεταβλητότητα σ. Θα δείξουμε ότι:

$$X(t) = X(a) + a(t-a) + \sigma\sqrt{t-a}W(t),$$

όπου W είναι μία τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.11) μπορούμε να γράψουμε

$X(t) - X(a) = a(t-a) + \sigma\sqrt{t-a}W(t)$. Επιπλέον η $X(t)$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $X(a) + a(t-a)$ και διασπορά $\sigma^2(t-a)$.

Παράδειγμα 2.20

Έστω ότι $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ ακολουθεί μία αριθμητική κίνηση Brown έτσι ώστε

$X(30) = 2$. Ο συντελεστή μετατόπισης a της κίνησης Brown είναι 0.435, και η μεταβλητότητα σ είναι 0.75. Θα βρούμε ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε $X(34) < 0$.

Η μέση τιμή της κανονικής κατανομής $X(34)$ σύμφωνα με το παράδειγμα (2.19) είναι:

$X(30) + a(34 - 30) = 2 + 0.435 * 4 = 3.74.$

Η τυπική απόκλιση είναι $\sigma\sqrt{t - a} = 0.75\sqrt{34 - 30} = 1.5$

Οπότε έχουμε:

$$\mathrm{P}(X(34) < 0) = \mathrm{P}\left(Z < \frac{0 - 3.74}{1.5}\right) = N(Z < -2.49) = 0.006387$$

Παράδειγμα 2.21

Έστω $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ είναι μία αριθμητική τυπική κίνηση Brown με συντελεστή μετατόπισης $a = 0.2$ και μεταβλητότητα $\sigma^2 = 0.125.$ Θα αποδείξουμε ότι η πιθανότητα $X(2)$ είναι μεταξύ 0.1 και 0.5.

Η $X(2)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $aT = 0.4$ και διασπορά $\sigma T^2 = 0.125 * 2 = 0.25$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0.1 < X(2) < 0.5) &= N\left(\frac{0.5 - 0.4}{0.5}\right) - N\left(\frac{0.1 - 0.4}{0.5}\right) = 0.57926 - 0.274253 \\ &= 0.305007\end{aligned}$$

2.4.4 Η κίνηση Ornestein-Uhlenbeck

Στην περίπτωση της μοντελοποίησης βασικών τιμών προιόντων, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι οι τιμές αυτές παρουσιάζουν μια τάση να επανέλθουν στην μέση τιμή. Αν μια τιμή αποκλίνει από τη μέση τιμή σε κάθε κατεύθυνση, μακροπρόθεσμα θα έχει την τάση να επανέλθει στη μέση τιμή. Έτσι το μοντέλο αναστροφής έχει μεγαλύτερη οικονομική λογική από ότι ο αριθμητικός μέσος της κίνησης Brown που περιγράφεται παραπάνω. Μπορούμε να ενσωματώσουμε την μέση αναστροφή τροποποιώντας τον συντελεστή μετατόπισης στην εξίσωση (2.11) παραπάνω, και να καταλήξουμε στη σχέση:

$$dX(t) = \lambda(\alpha - X(t))dt + \sigma dZ(t) \quad (2.12)$$

όπου α είναι το επίπεδο μακροχρόνιας ισορροπίας (ή η μακροχρόνια μέση τιμή στην οποία το $X(t)$ τείνει να επανέλθει), σ είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας, λ είναι η ταχύτητα της αναστροφής ή ο παράγοντας αναστροφής, και $Z(t)$ είναι η τυπική κίνηση Brown. Η στοχαστική διαφορική εξίσωση (2.12) είναι γνωστή ως **Ornestein-Uhlenbeck Process.**

Παράδειγμα 2.22

Θα λύσουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dX(t) = \lambda(\alpha - X(t))dt + \sigma dZ(t)$$

Θέτουμε τη μεταβλητή $Y(t) = X(t) - a$. Σε αυτή την περίπτωση, θα πάρουμε τη διαφορική μορφή:

$$dY(t) = -\lambda Y(t)dt + \sigma dZ(t)$$

ή

$$dY(t) + \lambda Y(t) = \sigma dZ(t)$$

Αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$d\left[e^{\lambda t}Y(t)\right] = e^{\lambda t}\sigma dZ(t)$$

Ολοκληρώνοντας τη τελευταία σχέση από 0 εως t λαμβάνουμε

$$e^{\lambda t}Y(t) - Y(0) = \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dZ(s)$$

ή ισοδύναμα,

$$Y(t) = e^{-\lambda t}Y(0) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\, dZ(s)$$

Γράφοντας τη λύση ως συνάρτηση του X, βρίσκουμε ότι:

$$X(t) = X(0)e^{-\lambda t} + a\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dZ(s)$$

2.4.5 Γεωμετρική κίνηση Brown

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε τη γεωμετρική κίνηση Brown. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι ότι η αριθμητική κίνηση Brown έχει πολλά μειονεκτήματα, συγκεκριμένα,

- Η $X(t)$ μπορεί να είναι αρνητική και ως εκ τούτου η αριθμητική κίνηση Brown είναι ένα φτωχό μοντέλο για τις τιμές των μετοχών.
- Η μέση τιμή και η διασπορά των μεταβολών σε όρους δολαρίου είναι ανεξάρτητες από το επίπεδο της τιμής της μετοχής. Στην πράξη, αν η τιμή των μετοχών διπλασιαζόταν, θα περιμέναμε τόσο την αναμενόμενη απόδοση του δολαρίου όσο και στη τυπική απόκλιση των αποδόσεων του δολάριου περίπου διπλάσια τιμή.

Αυτά τα μειονεκτήματα καθώς και άλλα μπορούν να εξαλειφθούν με τη χρήση της γεωμετρικής κίνησης Brown που θα δούμε ακολούθως. Όταν ο συντελεστή μετατόπισης a και η μεταβλητότητα σ της αριθμητικής κίνησης Brown είναι συναρτήσεις του $X(t)$, τότε η στοχαστική διαφορική μορφή

$$dX(t) = \alpha\big(X(t)\big)dt + \sigma\big(X(t)\big)dZ(t)$$

ονομάζεται *διαδικασία Ito*. Ειδικότερα, αν $a\big(X(t)\big) = aX(t)$ και $\sigma\big(X(t)\big) = \sigma X(t)$ τότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$dX(t) = aX(t)dt + \sigma X(t)dZ(t)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \alpha dt + \sigma dZ(t) \quad (2.13)$$

Η διαδικασία στην προηγούμενη εξίσωση είναι γνωστή ως *γεωμετρική κίνηση Brown*. Σημειώνεται ότι η εξίσωση (2.13) αποδεικνύει ότι η ποσοστιαία μεταβολή της αξίας περιουσιακών στοιχείων ακολουθεί την κανονική κατανομή με στιγμιαία μέση τιμή a και στιγμιαία διασπορά σ^2.

Παράδειγμα 2.23

Παραθέτουμε παρακάτω μία γεωμετρική κίνηση Brown ως εξής:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = 0.215dt + 0.342dZ(t)$$

Θα βρούμε ποια είναι η στιγμιαία μέση τιμή της ποσοστιαίας μεταβολής της αξίας των περιουσιακών στοιχείων και ποια είναι η στιγμιαία διασπορά.

Η στιγμιαία μέση τιμή της ποσοστιαίας μεταβολής στην αξία περιουσιακών στοιχείων είναι $a = 0.215$.

Η στιγμιαία διασπορά της ποσοστιαίας μεταβολής είναι $\sigma^2 = 0.342^2 = 0.116964$

Για μία αυθαίρετη αρχική τιμή $X(0)$ της εξίσωσης (2.13) παίρνουμε

$$X(t) = X(0)e^{(a-0.5\sigma^2)t+\sigma\sqrt{t}Z}$$

όπου Z είναι μία τυχαία μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη με παραμέτρους 0 και 1. Εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε

$$X(t) = X(0)e^{(a-0.5\sigma^2)t+\sigma Z(t)}$$

όπου Z είναι μια τυχαία μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη με παραμέτρους 0 και t. Παρατηρούμε ότι η $X(t)$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή και όχι την κανονική. Όμως η $X(t)$ ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή $E(X(t)) = X(0)e^{at}$ και διασπορά $Var\big(X(t)\big) = e^{2at}X(0)^2(e^{\sigma^2 t} - 1)$. Έπεται ότι η $\ln(X(t))$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή

$\ln\big(X(0)\big) + (a - 0.5\sigma^2)t$ και διασπορά $\sigma^2 t$.

Έτσι,

$$\ln(X(t)) = \ln\big(X(0)\big) + (a - 0.5\sigma^2)t + \sigma Z(t)$$

Επομένως, όταν η X ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown, ο λογάριθμος της ακολουθεί μια αριθμητική κίνηση Brown, η οποία είναι

$$\mathrm{d}[\ln(X(t))] = (a - 0.5\sigma^2)dt + \sigma dZ(t)$$

Παράδειγμα 2.24

Η τιμή μίας μετοχής είναι 100. Η τιμή της μετοχής ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown με εύρος μετατόπισης (drift rate) 10% ανά χρόνο και διασπορά με έυρος 9% ανά χρόνο. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα ότι σε δύο χρόνια από σήμερα η τιμή της μετοχής θα είναι 200.

Θέλουμε $P(S(2) > 200) = P\ (ln(\frac{S(2)}{S(0)}) > ln\, 2)$.

Αλλά $\ln(\frac{S(2)}{S(0)})$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή

$(a - 0.5\sigma^2)t = (0.10 - 0.5(0.09)) * 2 = 0.11$

και διασπορά

$\sigma^2 t = 0.09 * 2 = 0.18$

Επομένως,

$$P(S(2) > 200) = P\left(Z > \frac{ln\, 2 - 0.11}{\sqrt{0.18}}\right) = 1 - N(1.37) = 1 - 0.915 = 0.085$$

Παράδειγμα 2.25

Θεωρούμε μία γεωμετρική κίνηση Brown με συντελεστή μετατόπισης $a = 0.10$. Για $h = \frac{1}{365}$, υποθέτουμε ότι η αναλογία του συντελεστή θορύβου $\sigma\sqrt{h}$ με τον συντελεστή μετατόπισης a είναι 22.926. Θα βρούμε τη τυπική απόκλιση σ.

Δεδομένου ότι $\frac{\sigma\sqrt{h}}{ah} = 22.926$ ή $\frac{\sigma}{0.10\sqrt{\frac{1}{365}}} = 22.926$

λύνουμε ως προς σ και βρίσκουμε $\sigma = 0.12$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Συνεχείς Ράντες Ζωής υπό τη Θεώρηση Στοχαστικού Επιτοκίου

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, θα θεωρήσουμε την ένταση ανατοκισμού ως κανονική διαδικασία και θα επικεντρωθούμε σε αναλογιστικούς τύπους των ραντών σύμφωνα με τη στοχαστική θεωρία. Το κεφάλαιο αυτό οργανώνεται ως εξής. Στην ενότητα 3.2 θα παρουσιάσουμε υπολογισμούς που αφορούν ράντες με σταθερό επιτόκιο, καθώς και τύπους ραντών με τυχαίο επιτόκιο. Στην ενότητα 3.3 θα εισαγάγουμε τύπους ραντών καθώς και συγκεκριμένα επίπεδα ασφαλίστρων τα οποία βρίσκονται υπό την κανονική διαδικασία επιτοκίου. Στην ενότητα 3.4 θα παρουσιάσουμε το βασικό υπόβαθρο κανονικής διαδικασίας επιτοκίου για συνεχείς ράντες ζωής και στην τελευταία ενότητα 3.5 θα δώσουμε εφαρμογή, η οποία μας δείχνει τη χρησιμότητα του στοχαστικού επιτοκίου (Canonical interest rate) υπό τη θεώρηση κανονικής διαδικασίας. Τέλος θα ακολουθήσουν παρατηρήσεις και χρήσιμα συμπεράσματα.

3.2 Συνεχείς Ράντες Ζωής με Σταθερό ή Τυχαίο Επιτόκιο

Θα παραθέσουμε το βασικό συμβολισμό που χρησιμοποιείται στη θεωρία των ραντών. Υποθέτουμε ότι i είναι το θετικό ετήσιο επιτόκιο, ν είναι ο συντελεστής προεξόφλησης, και δ η ένταση ανατοκισμού. Η σχέση που συνδέει τα παραπάνω είναι η [3]:

$$\nu = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta} \qquad (3.1)$$

Η *συνάρτηση επιβίωσης* αντιπροσωπεύει *την πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x χρονών να επιβιώσει τουλάχιστον t-έτη και συμβολίζεται με* ${}_tp_x$. Έστω Y_1 η τυχαία μεταβλητή της παρούσας αξίας της συνεχούς ισόβιας ράντας ζωής στην ηλικία x με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας ανά έτος. Τότε έχουμε:

$$Y_1 = \bar{a}_{\overline{T|}}$$

για κάθε $T = X - x \geq 0$, όπου X είναι η ηλικία θανάτου.

Τότε, η αναλογιστική παρούσα αξία (APV) μιας συνεχούς ισόβιας ράντας ζωής είναι:

$$\bar{a}_x = E(Y_1) = E\left(\bar{a}_{\overline{T|}}\right) = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt \qquad (3.2)$$

Ταυτόχρονα, έστω Y_2 να είναι η τυχαία μεταβλητή της παρούσας αξίας της συνεχούς πρόσκαιρης ράντας ζωής στην ηλικία x με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας ανά έτος για περίοδο n ετών. Τότε:

$$Y_2 = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T|}}, & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}}, & T \geq n \end{cases}$$

Η αναλογιστική παρούσα αξία (APV) των συνεχών πρόσκαιρων ράντων ζωής σ’αυτή τη περίπτωση είναι:

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = E(Y_2) = \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, dt \qquad (3.3)$$

Με τον ίδιο τρόπο, θέτοντας Y_3 να είναι η τυχαία μεταβλητή της παρούσας αξίας m-χρόνων μέλλουσας ράντας ζωής στην ηλικία x με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας ανά έτος, έχουμε:

$$Y_3 = \begin{cases} 0, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{T|}} - \bar{a}_{\overline{m|}}, & T \geq m \end{cases}$$

Τότε, η αναλογιστική παρούσα αξία (APV) θα είναι:

$${}_{m|}\bar{a}_x = E(Y_3) = \int_m^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt \qquad (3.4)$$

Όταν χρησιμοποιούμε τη σταθερή ένταση ανατοκισμού, μπορούμε να πάρουμε τους ακόλουθους τύπους:

$$\bar{\alpha}_x^{(f)} = E(Y_1) = E\left(\bar{\alpha}_{\overline{T|}}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, {}_tp_x \, dt \qquad (3.5)$$

$$\bar{\alpha}_{x:\overline{n|}}^{(f)} = E(Y_2) = \int_0^n e^{-\delta t}\, {}_tp_x \, dt \qquad (3.6)$$

$$ {}_{m|}\bar{\alpha}_x^{(f)} = E(Y_3) = \int_m^{\infty} e^{-\delta t}\, {}_tp_x \, \mathrm{dt} \qquad (3.7)$$

Στη συνέχεια, όταν χρησιμοποιούμε τυχαία ένταση ανατοκισμού, υποθέτουμε ότι αυτή συνδέεται με τη συνάρτηση συσσώρευσης ως εξής:

$$\delta^{(r)}(t) = \delta t + \beta y(t) + \gamma z(t) \qquad (3.8)$$

όπου $\{y(t),\ t \geq 0\}$ είναι μια τυπική κίνηση Wiener και $\{z(t),\ t \geq 0\}$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 0.01$. Επιπλέον οι τυχαίες μεταβλητές $y\,(t)$ και $z\,(t)$ είναι ανεξάρτητες και ταυτόχρονα δ, β και γ είναι επίσης αμοιβαία ανεξάρτητες μεταξύ τους και χωρίς να υπάρχει καμία συσχέτιση τους με το t.

Με βάση τα παραπάνω μοντέλα, οι αναλογιστικές παρούσες αξίες (APV) των συνεχών ισόβιων, πρόσκαιρων και μέλλουσων ραντών ζωής, δίνονται από τους τύπους:

$$\bar{\alpha}_x^{(r)} = E(Y_1) = E\left(\bar{\alpha}_{\overline{T|}}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t + \frac{1}{2}\beta^2 t + \lambda t (e^{-\gamma} - 1)}\, {}_tp_x \, dt \qquad (3.9),$$

$$\bar{\alpha}_{x:\overline{n|}}^{(r)} = E(Y_2) = E\left(\bar{\alpha}_{\overline{T|}}\right) = \int_n^{\infty} e^{-\delta t + \frac{1}{2}\beta^2 t + \lambda t (e^{-\gamma} - 1)}\, {}_tp_x \, dt \qquad (3.10)$$

και

$$ {}_{m|}\bar{a}_x^{(r)} = E(Y_3) = E\left(\bar{\alpha}_{\overline{T|}}\right) = \int_m^{\infty} e^{-\delta t + \frac{1}{2}\beta^2 t + \lambda t (e^{-\gamma} - 1)}\, {}_tp_x \, dt \qquad (3.11)$$

αντίστοιχα.

3.3 Εισαγωγικές Έννοιες για Στοχαστικές Διαδικασίες

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε κάποια εισαγωγικά στοιχεία που αφορούν κανονικές διαδικασίες και ιδιότητες αυτών. Ας ξεκινήσουμε με τους κάτωθι ορισμούς στηριζόμενοι στον Liu [5].

Ορισμός 3.1 *Έστω T ένα σύνολο δεικτών και έστω (Γ, ς, M) ένας στοχαστικός χώρος. Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση από το καρτεσιανό γινόμενο $T \times (\Gamma, \varsigma, M)$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή, για κάθε $t \in T$ και για μοναδικό σύνολο Borel B πραγματικών αριθμών, το σύνολο*

$$\{X_t \in B\} = \{\gamma \in \Gamma \mid X_t(\gamma) \in B\} \qquad (3.12)$$

είναι ένα ενδεχόμενο.

Ορισμός 3.2 *Μια στοχαστική διαδικασία C_t λέγεται κανονική άν:*

- I. $C_0 = 0$ *και όλες σχεδόν οι τροχιές είναι Lipschitz συνεχείς,*
- II. C_t *έχει σταθερές και ανεξάρτητες μεταβολές προσαυξήσεων,*
- III. *κάθε μεταβολή $C_{s+t} - C_s$ είναι μια στοχαστική μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή 0 και διασπορά t^2.*

Στη συνέχεια δίνουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.1 Η κανονική διαδικασία C_t ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά t^2, και έχει συνάρτηση κατανομής:

$$\Phi(x) = \left(1 + e^{-\left(\frac{\pi x}{\sqrt{3}t}\right)}\right)^{-1}, \text{ για κάθε } t > 0, \qquad (3.13)$$

δηλαδή,

$$C_t \sim N\,(0, t)$$

Ορισμός 3.3 *Έστω C_t μια κανονική διαδικασία. Τότε, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς δ και k, η διαδικασία*

$$M_t = \delta t + kC_t \qquad (3.14)$$

ονομάζεται αριθμητική κανονική διαδικασία, όπου δ ονομάζεται ο συντελεστής μετατόπισης και k ο συντελεστής διάχυσης.

Για την αριθμητική κανονική διαδικασία ισχύει το κάτωθι θεώρημα.

Θεώρημα 3.2 Σε κάθε χρονική στιγμή t, η αριθμητική κανονική διαδικασία M_t είναι μια στοχαστική μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή δt και διασπορά k^2t^2, δηλαδή,

$$M_t \sim N(\delta t, kt)$$

και έχει συνάρτηση κατανομής:

$$\Phi(x) = \left(1 + e^{(\frac{\pi(\delta t - x)}{\sqrt{3}kt})}\right)^{-1} \qquad (3.15)$$

Στη συνέχεια δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.4 *Έστω C_t μια κανονική διαδικασία. Τότε, για οποιοσδήποτε πραγματικούς αριθμούς δ και k, η διαδικασία*

$$G_t = e^{(\delta t + kC_t)} \qquad (3.16)$$

ονομάζεται γεωμετρική κανονική διαδικασία, όπου δ ονομάζεται ο λογαριθμικός συντελεστής μετατόπισης (log-drift coefficient) και k ο λογαριθμικός συντελεστής διάχυσης (log-diffusion coefficient).

Θεώρημα 3.3 Σε κάθε χρονική στιγμή t, η γεωμετρική κανονική διαδικασία G_t είναι μία στοχαστική μεταβλητή λογαριθμοκανονικά κατανεμημένη, δηλαδή,

$$G_t \sim \log N(\delta t, kC_t)$$

και έχει συνάρτηση κατανομής η οποία είναι:

$$\Phi(x) = \left(1 + e^{(\frac{\pi(\delta t - lnx)}{\sqrt{3}kt})}\right)^{-1} \qquad (3.17)$$

3.4 Συνεχείς Ράντες Ζωής υπό τη Θεώρηση Επιτοκίου Κανονικής Διαδικασίας

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις συνεχείς ράντες ζωής υπό τη θεώρηση επιτοκίου κανονικής διαδικασίας.

Θεώρημα 3.4 Υποθέτουμε ότι $\delta^{(c)}(t)$ είναι η ένταση ανατοκισμού με συνάρτηση συσσώρευσης:

$$\delta^{(c)}(t) = \delta t + kC_t \qquad (3.19)$$

όπου δt είναι η μηδενικού κινδύνου ένταση ανατοκισμού και kC_t ο επιτοκιακός κίνδυνος. Θεωρούμε μια κανονική διαδικασία C_t με μέση τιμή 0 και διασπορά t^2. Τότε οι αναλογιστικές παρούσες αξίες (APV) συνεχών ισόβιων, πρόσκαιρων και μέλλουσων ραντών ζωής εκφράζονται από τους τύπους:

$$\bar{\alpha}_x{}^{(c)} = E(Y_1) = E\left(\bar{\alpha}_{\overline{T|}}\right) = \sqrt{3}k \int_0^\infty e^{-\delta t}\, csc\left(\sqrt{3}kt\right) {}_tp_x \, dt \qquad (3.20),$$

$$\bar{\alpha}_{x:\overline{n|}}{}^{(c)} = E(Y_2) = \sqrt{3}k \int_0^n e^{-\delta t}\, csc(\sqrt{3}kt) {}_tp_x \, dt \qquad (3.21)$$

και

$${}_{m|}\bar{\alpha}_x{}^{(c)} = E(Y_3) = \sqrt{3}k \int_m^\infty e^{-\delta t}\, csc(\sqrt{3}kt) {}_tp_x \, dt \qquad (3.22)$$

αντίστοιχα, για κάθε $t < \pi \,/\, \kappa\, \sqrt{3}$.

<u>Απόδειξη</u>: Παρατηρούμε ότι C_t είναι μια κανονική διαδικασία με μέση τιμή 0 και διασπορά t^2. Για οποιοδήποτε $t > 0$, και με τη βοήθεια του ορισμού 3.3, προκύπτει ότι η $\delta^{(c)}(t)$ είναι μια αριθμητική κανονική διαδικασία με μέση τιμή δt και διασπορά k^2t^2. Από τη θεωρία του τόκου, γνωρίζουμε τον συντελεστή προεξόφλησης:

$$v_t = e^{-\delta^{(c)}(t)} = e^{-\delta t - kC_t}$$

ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί ως μια γεωμετρική κανονική διαδικασία με μέση τιμή

$$E[v_t] = \begin{cases} \sqrt{3}kte^{-\delta t}\csc\left(\sqrt{3}kt\right), & t < \dfrac{\pi}{k\sqrt{3}} \\ +\infty, & t \geq \pi/k\sqrt{3} \end{cases}$$

Θέτοντας Y_1 να είναι μία τυχαία μεταβλητή παρούσας αξίας μιας συνεχούς ισόβιας ράντας ζωής ηλικίας x με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας ανά έτος, έχουμε:

$$Y_1 = \bar{\alpha}_{\overline{T|}}$$

για κάθε $T = X - x \geq 0$, όπου X είναι η ηλικία θανάτου.

Τότε, η αναλογιστική παρούσα αξία (APV) της συνεχούς ισόβιας ράντας ζωής είναι:

$$\bar{\alpha}_x{}^{(c)} = E(Y_1) = E(\bar{\alpha}_{\overline{T|}}) = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt = \int_0^\infty E(v_t)\, {}_tp_x\, dt = \sqrt{3}k \int_0^\infty e^{-\delta t}\, csc\left(\sqrt{3}kt\right) {}_tp_x\, dt$$

Ταυτόχρονα, θέτοντας Y_2 να είναι η τυχαία μεταβλητή της παρούσας αξίας της συνεχούς πρόσκαιρης ράντας ζωής ηλικίας x με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας ανά έτος, για μια περίοδο n-ετών, έχουμε:

$$Y_2 = \begin{cases} \bar{\alpha}_{\overline{T|}}, & 0 \leq T < n \\ \bar{\alpha}_{\overline{n|}}, & T \geq n \end{cases}$$

Η αναλογιστική παρούσα αξία (APV) της συνεχούς πρόσκαιρης ράντας ζωής είναι:

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}}{}^{(c)} = E(Y_2) = \int_0^n v^t\, {}_tp_x\, dt = \int_0^n E(v_t)\, {}_tp_x\, dt = \sqrt{3}k \int_0^n e^{-\delta t} \csc(\sqrt{3}kt)\, {}_tp_x\, dt$$

Με τον ίδιο τρόπο, θέτοντας Y_3 να είναι η τυχαία μεταβλητή της παρούσας αξίας της συνεχούς m-χρόνων μέλλουσας ράντας ηλικίας x με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας ανά έτος, έχουμε:

$$Y_3 = \begin{cases} 0, & 0 \leq T < m \\ \bar{\alpha}_{\overline{T|}} - \bar{\alpha}_{\overline{m|}}, & T \geq m \end{cases}$$

Επομένως, η αναλογιστική παρούσα αξία (APV) της συνεχούς μέλλουσας ράντας m-χρόνων ζωής είναι:

$$ {}_{m|}\bar{a}_x^{(c)} = E(Y_3) = \int_m^{\infty} v^t{}_t p_x\, dt = \int_m^{\infty} E(v_t)\,{}_t p_x\, dt = \sqrt{3}\mathrm{k} \int_{\mathrm{m}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\delta t} \csc(\sqrt{3}\mathrm{kt})\,{}_t p_x\, dt $$

και το θεώρημα απεδείχθη πλήρως.

3.5 Εφαρμογή

Σε αυτή την ενότητα θα κάνουμε μία εφαρμογή του παραπάνω μοντέλου και θα αποδείξουμε τη χρησιμότητα του στοχαστικού επιτοκίου.

Ένας 42χρονος αγοράζει μια συνεχή 28-χρόνων μέλλουσα ράντα με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας ανά έτος. Ο 42χρονος αναλαμβάνει ορισμένες πληρωμές για 10 συνεχόμενα έτη. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα θανάτου ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 100]$ και έχουμε ότι ${}_t p_x = 1 - t_t q_x = 1 - \frac{t}{100-x}$. Θα υπολογίσουμε το ύψος ασφαλίστρου με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

Στην παραδοσιακή θεωρία της ασφάλισης, υποθέτουμε ότι η ένταση ανατοκισμού είναι σταθερή και ίση με $\delta = 0.05$ και ο τύπος που δίνει το ύψος ασφαλίστρου είναι:

$$ P^{(f)} = \frac{{}_{28|}\bar{a}_{42}{}^{(f)}}{\bar{a}_{42:\overline{10|}}{}^{(f)}} = \frac{\int_{60}^{100} e^{-\delta t}\,{}_t p_x\, \mathrm{dt}}{\int_0^{10} e^{-\delta t}\,{}_t p_x\, \mathrm{dt}} = \frac{\int_{60}^{100} e^{-0.05t}\left(1 - \frac{t}{58}\right) dt}{\int_0^{10} e^{-0.05t}(1 - \frac{t}{58}) dt} = 0.4393 $$

Στη περίπτωση τυχαίου επιτοκίου, υποθέτουμε ότι η ένταση ανατοκισμού σε σχέση με τη συνάρτηση συσσώρευσης είναι:

$$ \delta^{(r)}(t) = \delta t + \beta y(t) + \gamma z(t) $$

όπου $\{y(t), t \geq 0\}$ είναι μία τυπική κίνηση Wiener και $\{z(t), t \geq 0\}$ ακολουθεί τη κατανομή poisson με παράμετρο $\lambda = 0.01$. Ταυτόχρονα οι τυχαίες μεταβλητές $y(t)$ και $z(t)$ είναι ανεξάρτητες καθώς επίσης, $\delta = 0.05$, $\beta = 0.1$ και $\gamma = 0.05$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητες και μη συσχετισμένες με t. Σε αυτή τη περίπτωση ο τύπος υπολογισμού για το ύψος ασφαλίστρου είναι:

$$P^{(r)} = \frac{{}_{28|}\bar{\alpha}_{42}{}^{(r)}}{\bar{\alpha}_{42:\overline{10|}}{}^{(r)}} = \frac{\int_{60}^{100} e^{-\delta t+\frac{1}{2}\beta^2 t+\lambda t(e^{-\gamma}-1)}\ {}_{t}p_x \,\mathrm{dt}}{\int_{0}^{10} e^{-\delta t+\frac{1}{2}\beta^2 t+\lambda t(e^{-\gamma}-1)}\ {}_{t}p_x \,\mathrm{dt}}$$

$$= \frac{\int_{60}^{100} e^{-0.05t+\frac{1}{2}*0.1^2 t+0.01t*(e^{-0.05}-1)}\left(1-\frac{t}{58}\right)dt}{\int_{0}^{10} e^{-0.05t+\frac{1}{2}*0.1^2 t+0.01t*(e^{-0.05}-1)}(1-\frac{t}{58})dt} = 0.4878$$

Τέλος για τη περίπτωση επιτοκίου υπό τη θεώρηση κανονικής διαδικασίας υποθέτουμε ότι η ένταση αντοκισμού σε σχέση με τη συνάρτηση συσσώρευσης είναι:

$$\delta^{(c)}(t) = \delta t + kC_t$$

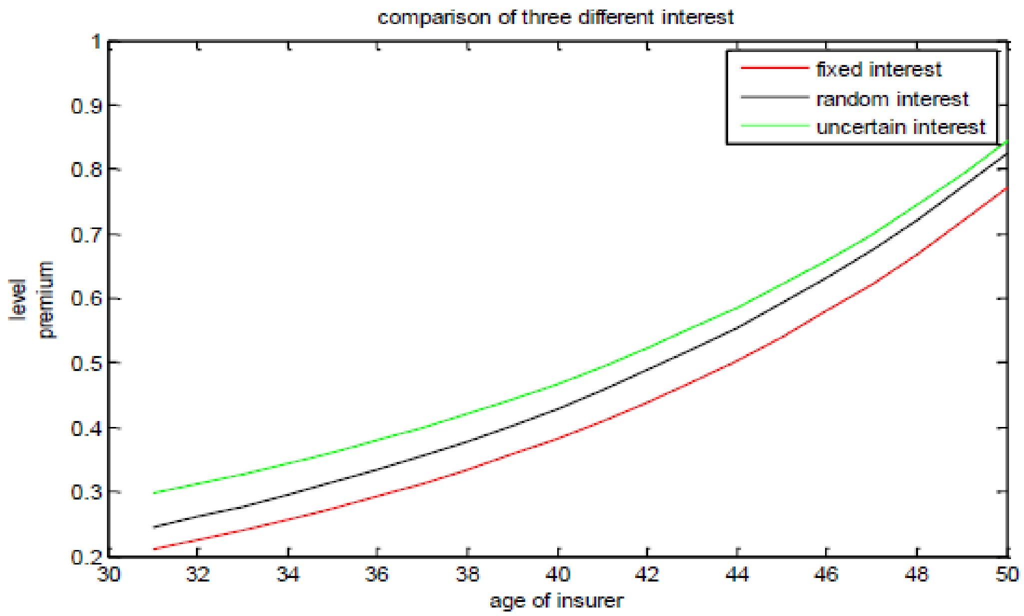
όπου C_t ακολουθεί τη κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά t^2, συντελεστή μετατόπισης $\delta = 0.05$ και συντελεστή διάχυσης $\kappa = 0.02$. Τότε $\pi / k\sqrt{3} = 90.6900 > 58$, και το ύψος του ασφαλίστρου εκφράζεται ως εξής:

$$P^{(c)} = \frac{{}_{28|}\bar{\alpha}_{42}{}^{(c)}}{\bar{\alpha}_{42:\overline{10|}}{}^{(c)}} = \frac{\sqrt{3}k\int_{60}^{100} e^{-\delta t}\csc(\sqrt{3}\mathrm{kt})\ {}_{t}p_x \,\mathrm{dt}}{\sqrt{3}k\int_{0}^{10} e^{-\delta t}\csc(\sqrt{3}\mathrm{kt})\ {}_{t}p_x \,\mathrm{dt}}$$

$$= \frac{\int_{60}^{100} e^{-0.05t}\csc(\sqrt{3}*0.02t)\left(1-\frac{t}{58}\right)dt}{\int_{0}^{10} e^{-0.05t}\csc(\sqrt{3}*0.02t)(1-\frac{t}{58})dt} = 0.5227$$

Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύει ότι, η ακρίβεια των υψών ασφαλίστρων στην υπόθεση του κανονικού επιτοκίου είναι μεγαλύτερο από του σταθερού και τυχαίου επιτοκίου. Τότε παίρνουμε υπόψιν τη γενική περίπτωση.

Ένα x-χρονών άτομο $(30 \le x \le 50)$ αγοράζει μια συνεχή $(60 - x)$ χρονών μέλλουσα ράντα με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας ανά έτος και αναλαμβάνει ορισμένες πληρωμές για 10 συνεχόμενα έτη. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα θανάτου ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 100]$. Μπορούμε να πάρουμε τα στοιχεία επιπέδου ασφαλίστρου με τρεις τρόπους MATLAB ως εξής:



Από το διάγραμμα σύγκρισης, παρατηρούμε ότι το ύψος ασφαλίστρων στοχαστικού επιτοκίου είναι υψηλότερο από τους τρεις τρόπους. Αυτό είναι σημαντικό για τον υπολογισμό της αμοιβής συνταξιοδότησης και της ράντας πληρωμής.

3.6 Παρατηρήσεις - Συμπεράσματα

Σε αυτή την ενότητα, το επιτόκιο θεωρείται ως μια στοχαστική μεταβλητή, και υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή. Κάτω από αυτή την υπόθεση, σχεδιάζουμε αναλογιστικά μοντέλα των τριών συνεχών ραντών ζωής. Κατά τη διάρκεια της σύγκρισή τους με τα μοντέλα σταθερού και τυχαίου επιτοκίου, βρίσκουμε ότι το στοχαστικό επιτόκιο έχει υπεροχή για τον υπολογισμό του ύψους ασφαλίστρου συνταξιοδότησης. Αυτή η έρευνα, με την οποίο εφαρμόζουμε στοχαστική διαδικασία στη θεωρία επιτοκίου, είναι μια επιπλέον ανάπτυξη για τη παραδοσιακή Αναλογιστική Επιστήμη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Γιαννακόπουλος Α, "Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική, Τόμος I και II ", 2003

[2] Hasset, Stewart, Steeby, ACTEX 2007

[3] Kellison S, The Theory Of Interest, 1991

[4] Liu B, Fuzzy process, hybrid process and uncertain process [J], Journal of Uncertain Systems, 2008

[5] Liu B, Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for modeling Human Uncertainty [M] Springer-Verlag, Berlin, 2010

[6] Liu B, Extreme value theorems of uncertain process with application to insurance risk models [J]

[7] Murray R. Spiegel "Πιθανότητες και Στατιστική", μετάφραση Σωτήριος Περσίδης

[8] Marcel B. Finan "A Discussion of Financial Economics in Actuarial Models", 2014

[9] Σεβρόγλου Β, "Οικονομικά και Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά", σημειώσεις 2012

[10]Wang L, Study on actuarial theory and method of life insurance under random rates of interest [D], 2004

[11] Χατζηκωνσταντινίδης Ε, "Συμβάντα Ζωής και Θανάτου", σημειώσεις 2012

[12] Zhang S, The Actuarial Mathematics of Net Single Premium Under Random Interest Rate [J], Journal of Shanghai University of Electric Power, 2007