ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Το πρόβλημα της αντικατάστασης συστήματος με το κριτήριο του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου.

Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με προβλήματα συντήρησης /αντικατάστασης συστήματος,όπου θα χρησιμοποιήσουμε σαν κριτήριο για την βελτιστοποίηση, το κριτήριο του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου.Το κεφάλαιο οργανώνεται ως εξής:

Στην ενότητα 8.1 ορίζουμε το κριτήριο του μέσου κόστους για προβλήματα POMDP και παρουσιάζουμε την αντίστοιχη εξίσωση αριστοποίησης (average-cost-optimality equation,ACOE). Εξετάζουμε πως συνδέεται το κριτήριο του μέσου κόστους με το κριτήριο του αναμενόμενου ολικού εκπίπτοντος κόστους για άπειρο χρονικό ορίζοντα.

Στην ενότητα 8.2 μελετάμε το γενικό πρόβλημα αντικατάστασης συστήματος των Ohnishi-Ibaraki, που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 6, με το κριτήριο του μέσου κόστους και αποδεικνύουμε την ύπαρξη ΜΚ-άριστης πολιτικής αντικατάστασης.

Τέλος στην ενότητα 8.3 εξετάζουμε το ειδικό πρόβλημα αντικατάστασης συστήματος με δύο καταστάσεις και δύο μηνύματα που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 7 και μελετάμε τη δομή της ΜΚ-άριστης πολιτικής.

8.1. Το κριτήριο του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου.

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε προβλήματα POMDP με το κριτήριο του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου (average cost per unit time).

Έστω D η κλάση όλων των πολιτικών (βλέπε ενότητα 1.5).

Ορισμός 8.1.1: Ορίζουμε μέσο κόστος $J(\delta,\pi_o)$ ανά μονάδα χρόνου του συστήματος για την πολιτική $\delta \in D$, αν το αρχικό δ.π είναι π (π(0)= π), την ποσότητα

$$J(\delta,\pi)= \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} E_\delta [\sum_{n=0}^{n-1} C(X_t,Y_t)/p(o)=p] \qquad \underline{\mathbf{8.1.1}}$$

Ορισμός 8.1.2: Μια πολιτική δ*, καλείται άριστη ως προς το κριτήριο του μέσου κόστους, σύντομα ΜΚ-άριστη, αν

$$J(\delta^*,\pi)= J(\pi)\ ,\ \forall \pi\in\Pi.$$

Ελάχιστο μέσο κόστος: $J(\pi) \equiv \inf_{\delta\in D} J(\delta,\pi)\ ,\pi\in\Pi.$

Έστω $V_\beta(\pi),\pi\in\Pi$ η βέλτιστη (ελάχιστη) συνάρτηση του αναμενόμενου ολικού εκπίπτοντος κόστους σε άπειρο χρονικό ορίζοντα (βέλτιστη συνάρτηση τιμών για άπειρο χρονικό ορίζοντα), όπου $b \in (0,1)$, είναι ο συντελεστής έκπτωσης . Η εξίσωση αριστοποίησης του Blackwell γράφεται

$$V_\beta(\pi) = \min_a \{\pi.C^\alpha + \beta.\sum_q \{q/p,a\} V_b(T(p,q,a))\},\forall \pi\in\Pi . \qquad \underline{\mathbf{8.1.2}}$$

Θα αναφερόμαστε στην άριστη πολιτική με το κριτήριο του ολικού εκπίπτοντος κόστους για άπειρο χρονικό ορίζοντα ως β-άριστη (β-optimal), δηλώνοντας την εξάρτηση από τον συντελεστή εκπτώσεως β.

Θεώρημα 8.1.1:.Αν υπάρχουν μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση h(π), $\pi \in P$ και μια σταθερά g, έτσι ώστε:

$$g + h(\pi)= \min_a \{\pi.C^\alpha + \sum_\theta \{\theta/\pi,\alpha\} h(T(\pi,\theta,\alpha))\}\ ,\ \forall \pi\in\Pi, \qquad \underline{\mathbf{8.1.3}}$$

τότε η στάσιμη πολιτική $(\delta^*)^{\infty}$ με συνάρτηση ελέγχου που ελαχιστοποιεί το δεύτερο σκέλος της (8.1.3), είναι ΜΚ -άριστη και

$$g = J(\delta^*,\pi) = J(\pi) \qquad \forall \pi \in \Pi .$$

(Ross)[108]

W

Η εξίσωση (8.1.3) καλείται εξίσωση αριστοποίησης για το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου (average-cost optimality equation, ACOE).

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με το θεώρημα 8.1.1, αν η ACOE έχει φραγμένη λύση, τότε το άριστο (ελάχιστο) κόστος ανά μονάδα χρόνου δεν εξαρτάται από το αρχικό δ.π.- είναι η σταθερή ποσότητα g- και υπάρχει στάσιμη ΜΚ-άριστη πολιτική.

Εστω

$$V_n(\pi) := \min_{a} \{\pi.C^{\alpha} + \sum_{q} \{q/p,a\} V_{n-1}(T(p,q,a))\} ,\pi \in \Pi \quad n=1,2,3\ldots$$

$$V_0(\pi)=0$$

Η συνάρτηση $V_n(\pi)$, $\pi \in \Pi$ είναι η συνάρτηση του ελάχιστου αναμενόμενου ολικού κόστους του συστήματος για χρονικό ορίζοντα μήκους n, όταν το αρχικό δ.π είναι το π ,(με συντελεστή έκπτωσης β=1).

Πρόταση 8.1.1: Αν η ACOE έχει φραγμένη λύση (g,h),τότε υπάρχει σταθερά $K \prec \infty$,έτσι ώστε **:**

$$|V_n(\pi) - n.g| \prec K \qquad \forall n=1,2,\ldots , \forall \pi \in \Pi$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n(\pi)}{n} = g \qquad \forall \pi \in \Pi .$$

(Ross)[108]

W

Θεωρούμε τώρα $\pi^* \in P$

$$h_\beta(\pi) := V_\beta(\pi) - V_\beta(\pi^*) \quad \text{και} \quad g_\beta = (1-\beta).V_\beta(\pi^*), \quad 0 \prec \beta \prec 1 ,$$

8.1.4

τότε η εξίσωση αριστοποίησης του Blackwell (8.1.2) για το ολικό κόστος γράφεται ως εξής:

$$g_\beta + h_\beta(\pi) = \min_a \{\pi.C^\alpha + \beta.\sum_\theta \{\theta/\pi,\alpha\} h_\beta(T(\pi,\theta,\alpha))\} \quad \forall \pi \in \Pi . \qquad \textbf{8.1.5}$$

Εξετάζουμε τώρα τις κατάλληλες συνθήκες ώστε:

$$g_\beta \to g \quad \text{και} \quad h_\beta(\pi) \to h(\pi) \quad \text{όταν το} \quad \beta \to 1^- .$$

Μπορεί να δειχθεί, ότι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη φραγμένης λύσης της ACOE είναι ή συνθήκη (UB) (uniform-boundeness) (βλέπε και Ross [108]).

(UB) Υπάρχει μια σταθερά $K \succ 0$ έτσι ώστε:

$$|h_\beta(\pi)| \equiv |V_\beta(\pi) - V_\beta(\pi^*)| \le K, \ \forall \pi \in \Pi \quad \text{και} \quad 0 \prec \beta \prec 1 ,$$

Περιορίζουμε τον χώρο Π σε ένα κατάλληλο υποσύνολο. Προς τούτο έστω $\pi_0 \in \Pi$. Θεωρούμε το σύνολο **:**

$$S(\pi_0) = \bigcup_{t=0}^{\infty} S_t(\pi_0) \quad \text{μέ} \quad S_0(\pi_0) = \{\pi_0\}$$

$$S_t(\pi_0) = \{T(\pi,\theta,\alpha) \mathbf{:} \ \pi \in S_{t-1}(\pi_0), \theta \in \Theta, \alpha \in A\} , \ t \ge 1 \qquad \textbf{8.1.6}$$

Το $S_t(\pi_0)$ εκφράζει το σύνολο των δ.π που είναι δυνατόν να προκύψουν στον χρόνο t,αν το δ.π στον χρόνο t=0 είναι π_0 και είναι προφανώς πεπερασμένο.

Το $S(\pi_0)$ εκφράζει το σύνολο των δ.π που είναι δυνατόν να προκύψουν στους χρόνους t=0,1,2,…,αν στον χρόνο t=0 το δ.π είναι π_0.

Το σύνολο $S(\pi_0)$ είναι αριθμήσιμο σαν αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων.

Πρόταση 8.1.2: Έστω $\pi_0 \in \Pi$. Αν η συνάρτηση

$$h_\beta(\pi) = V_\beta(\pi) - V_\beta(\pi^*), \pi \in S(\pi_0),$$

είναι ομαλά φραγμένη **(UB) :** Υπάρχει μια σταθερά $K \succ 0$ έτσι ώστε:

$$|h_\beta(\pi)| \equiv |V_\beta(\pi) - V_\beta(\pi^*)| \le K \quad \forall \ \pi \in S(\pi_0), \ \ \forall \ \beta \in (0,1)$$

τότε,

i)Υπάρχει ακολουθία $\{\beta_n\}$ με $\beta_n \in (0,1)$και $\beta_n \to 1$ αν $n \to \infty$,μια φραγμένη συνάρτηση $h(\pi)$, $\pi \in S(\pi_0$ **),**και μια σταθερά g_{π_0},έτσι ώστε:

$$h_{\beta_n}(\pi) \underset{n\to\infty}{\to} h(\pi) \qquad \forall \ \pi \in S(\pi_0) ,$$

$$g_{\beta_n} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} g_{\pi_0}$$

ii) Η σταθερά g_{π_0} και η συνάρτηση h(π), $\pi \in S(\pi_0)$ ικανοποιεί την εξίσωση αριστοποίησης για το μέσο κόστος.

$$g_{\pi_0} + h(\pi) = \min_a \{\pi.q^{\alpha} + \sum_{\theta} \{\theta/\pi,\alpha\} h(T(\pi,\theta,\alpha))\} \qquad \forall \pi \in S(\pi_0)$$

iii) $g_{\pi_0} = J(\pi) \quad \forall \pi \in S(\pi_0)$.

(απόδειξη Ross [108])

W

Πρόταση 8.1.3: Αν η συνάρτηση $h_\beta(\pi)$, $\pi \in \Pi$ είναι ομαλά φραγμένη **(UB)**, τότε για δεδομένο δ.π. π' η ΜΚ-άριστη απόφαση είναι α΄, αν υπάρχει ακολουθία $\{\beta_n\}$ με $\beta_n \in (0,1)$ $\forall n \in N$ και $\beta_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 1$, έτσι ώστε η απόφαση α΄ να είναι β_n –άριστη στο π'.

(Απόδειξη Arapostathis and Fernandez) [4]

W

8.2. Το πρόβλημα της αντικατάστασης συστήματος στα πλαίσια της μερικής διάταξης $\leq_L$ με το κριτήριο του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου.

Στην παρούσα ενότητα εξετάζουμε το πρόβλημα αντικατάστασης συστήματος των Ohnishi-Ibaraki ,που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 6,με το κριτήριο του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου, κάτω από τις ίδιες υποθέσεις Υ1-Υ5 (βλέπε ενότητα 6.1).

Η άριστη (ελάχιστη) συνάρτηση τιμών για άπειρο χρονικό ορίζοντα $\mathbf{V_\beta}$ ικανοποιεί την εξίσωση αριστοποίησης (βλέπε σχέση 6.1.5)

$$V_\beta(\pi) = \min\{\pi.C^k + \beta.\sum_{\theta}\{\theta/\pi\}.V_\beta(\mathrm{T}(\pi,\theta)), \pi.C^R + \beta.V_\beta(e_1)\}, \qquad \mathbf{8.2.1}$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon \quad e_1 = (1,0,0,\ldots,0).$$

Λήμμα 8.2.1: Η συνάρτηση $h_\beta(\pi) = \mathbf{V_\beta(\pi)\text{-}V_\beta(e_1)}$ είναι ομαλά φραγμένη.

Απόδειξη

Από την εξίσωση αριστοποίησης (8.2.1) παίρνουμε:

$$V_\beta(\pi) \leq \pi.C^R + \beta.V_\beta(e_1),\ \forall \pi \in \Pi. \qquad \textbf{8.2.2}$$

Επειδή σύμφωνα με την πρόταση 6.2.2 η συνάρτηση V_β είναι $\leq_L$ αύξουσα και

$e_1 \leq_L \pi, \forall \pi \in \Pi$, παίρνουμε:

$$V_\beta (e_1) \leq V_\beta (\pi) \quad \forall \pi \in \Pi. \qquad \textbf{8.2.3}$$

Επειδή $\pi \leq_L e_N \equiv (0,\ldots,0,1)$ $\forall \pi \in \Pi$ και $C^R \in F^N$ (υπόθεση Υ3, ενότητα 6.1)

προκύπτει ότι : $\pi.C^R \leq e_N.C^R = C_N^R$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (8.2.2) και (8.2.3) παίρνουμε:

$$V_\beta (e_1) \leq V_\beta (\pi) \leq C_N^R + V_\beta (e_1) \qquad \forall \pi \in \Pi, \quad \forall \beta \in (0,1)$$

η

$$0 \leq V_\beta(\pi) - V_\beta(e_1) \leq C_N^R \qquad \forall \pi \in \Pi, \ \forall \beta \in (0,1)$$

και επομένως η συνάρτηση :

$h_\beta(\pi) = V_\beta(\pi) - V_\beta(e_1)$ είναι ομαλά φραγμένη. W

Τα σύνολα $S_t(\pi_0)$, $t \geq 0$, $S(\pi_0)$, $\pi_0 \in \Pi$ που ορίσθηκαν με την (8.1.6)

γράφονται:

$S_0(\pi_0) = \{\pi_0\}$

$S_t(\pi_0) = \{T(\pi,\theta) : \pi \in S_{t-1}(\pi_0), \theta \in \Theta\} \cup \{e_1\} \quad t \geq 1.$

$S(\pi_0) = \bigcup_{t=0}^{\infty} S_t(\pi_0)$.

Προφανώς $S(e_1) \subseteq S(\pi_0) \quad \forall \pi_0 \in \Pi.$

Πρόταση 8.2.2:Με βάση τις υποθέσεις Υ1-Υ5, (βλέπε ενότητα 6.1) υπάρχει μια φραγμένη συνάρτηση $h(\pi), \pi \in \Pi$,και μια σταθερά g, έτσι ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση αριστοποίησης για το μέσο κόστος, δηλαδή

$$g + h(\pi) = \min_a \{\pi.C^\kappa + \sum_\theta \{\theta/\pi\} h(T(\pi,\theta))\}, \pi.C^R\} \qquad \textbf{8.2.4}$$

$$h(e_1) = 0$$

και

$$g = J(\pi) \quad \forall \pi \in \Pi.$$

Απόδειξη

΄Αμεση συνέπεια της πρότασης (8.1.2) και του λήμματος (8.2.1).Επειδή μάλιστα $S(e_1) \subseteq S(\pi)$ καί $g_{\pi_0} = J(e_1)$ $\forall$ $\pi_0 \in \Pi$. Αρα g_{π_0} είναι ανεξάρτητο του αρχικού δ.π. π_0.

W

8.3.Το πρόβλημα της αντικατάστασης με δυο καταστάσεις και δύο μηνύματα με βάση το κριτήριο του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου.

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε τη δομή της άριστης πολιτικής με βάση το κριτήριο του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου, στο πρόβλημα αντικατάστασης ενός συστήματος με δύο καταστάσεις ,S={1,2}(N=2), δύο μηνύματα, Θ={1,2}(M=2) και δύο αποφάσεις, A={0,1},το οποίο μελετήσαμε στο κεφάλαιο 7 και αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος αντικατάστασης που εξετάσαμε στο κεφάλαιο 6..

Με 1 και 2 κωδικοποιούμε την καλή (λειτουργική) και την κακή (μη λειτουργική) κατάσταση αντίστοιχα.

Μήνυμα μπορεί να είναι ένα αποτέλεσμα της λειτουργίας του συστήματος, που αντανακλά την άγνωστη σε μας κατάστασή του (π.χ ποσοστό ελαττωματικών αντικειμένων, αριθμός παραγόμενων τεμαχίων ανά ώρα, κ.λ.π). Ετσι, ως μήνυμα 1 και 2 μπορούμε να κωδικοποιήσουμε χαμηλά ή υψηλά ποσοστά ελαττωματικών μονάδων πού αντανακλούν τις καταστάσεις 1 και 2 αντίστοιχα.

Σε κάθε χρονική περίοδο επιλέγεται μια απόφαση από το σύνολο A={0,1},όπου οι κωδικοποιήσεις 0,1 είναι**:**

0:συνέχιση της λειτουργίας /συντήρηση του συστήματος

1: αντικατάσταση του συστήματος

Αν i είναι η κατάσταση του συστήματος και α η απόφαση, τα άμεσα κόστη c(i,α), i =1,2, α=0,1 είναι: $C(1,0) = c_1$, $C(2,0) = c_2$, C(1,1)=C(2,1)=R.

Τα c_1,c_2 είναι κόστη λειτουργίας-συντήρησης και το R είναι κόστος αντικατάστασης του συστήματος.

Στην απόφαση α=0 αντιστοιχούν ο πίνακας μετάβασης καταστάσεων

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

και ο πίνακας μηνυμάτων

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

Υποθέσεις

1) Οι πίνακες ***P,R*** είναι ολικά θετικοί τάξεως 2 (TP_2) και

$p_{12} > 0$.

2) $c_1 < c_2 < R$

Σημειώνουμε ότι οι υποθέσεις (1),(2) συνεπάγονται τις υποθέσεις (Y1)-(Y5) του γενικότερου προβλήματος αντικατάστασης του κεφαλαίου 6.Επομένως τα συμπεράσματα για το γενικότερο πρόβλημα ισχύουν και για το ειδικό πρόβλημα που μελετάμε. Όπως και στο κεφάλαιο 7, θα εργαζόμαστε με τη δεύτερη συνιστώσα του δ.π, π=(1-p,p) όπου,p,δηλώνει την α-priori πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση 2. Παρόμοια εργαζόμαστε με τη δεύτερη συνιστώσα του α-posteriori δ.π.

$$T(\pi,\theta) = (T_1(\pi,\theta), T_2(\pi,\theta)),$$

Δηλαδή: $T(p,\theta) \equiv T_2(\pi,\theta)$

Έχουμε (βλέπε σχέσεις (7.1.1), (7.1.2)):

$$T(p,\theta) = \frac{\alpha_\theta + \beta_\theta . p}{\gamma_\theta + \delta_\theta . p} \qquad , 0 \le p \le 1$$

$$\{\theta/p\} = \gamma_\theta + \delta_\theta . p \qquad , 0 \le p \le 1$$

όπου οι ποσότητες α_θ, β_θ, γ_θ, δ_θ , θ=1,2 ορίζονται στην (7.1.3).

Οι ιδιότητες των συναρτήσεων T(p,1),T(p,2) , $0 \le p \le 1$ παρέχονται από τα λήμματα 7.1.1, 7.1.2 και την πρόταση 7.1.1 της παραγράφου 7.1.

Εστω $V_\beta(p), 0 \le p \le 1$ η συνάρτηση του ελάχιστου αναμενόμενου ολικού εκπίπτοντος κόστους για άπειρο χρονικό ορίζοντα, με συντελεστή έκπτωσης (discount-factor) $\beta \in (0,1)$.

Η συνάρτηση V_β ικανοποιεί την εξίσωση αριστοποίησης

$$V_\beta(p)=\min\{c_1+c.p+\beta.\sum_{q=1}^{2}\{q/p\}.V_\beta(T(p,q)),\ R+\beta.V_\beta(0)\}, \qquad \underline{\mathbf{8.3.1}}$$

$$0 \le p \le 1$$

όπου $c = c_2 - c_1 (>0)$.

Η επόμενη πρόταση παρέχει ιδιότητες της άριστης συνάρτησης κόστους V_β καθώς και τη δομή της β-άριστης πολιτικής (δηλαδή της άριστης πολιτικής αναφορικά με το κριτήριο του ολικού εκπίπτοντος κόστους για άπειρο χρονικό ορίζοντα, με συντελεστή έκπτωσης $\beta \in (0,1)$).Η πρόταση αυτή αποτελεί πόρισμα αποτελεσμάτων του γενικού προβλήματος αντικατάστασης συστήματος που περιγράψαμε στις παραγράφους 6.1,6.2,6.3.

Πρόταση 8.3.1:

i) Η συνάρτηση $V_\beta(p), 0 \le p \le 1$ είναι αύξουσα και κοίλη.

ii) $0 < V_\beta(p) \le \dfrac{R}{1-\beta}, 0 \le p \le 1$

iii) Η συνάρτηση ελέγχου δ* της β-άριστης πολιτικής $(d^*)^\infty$ έχει την ακόλουθη δομή:

$$\delta^*(p) = \begin{cases} 0 \quad (\text{συνέχιση. λειτουργίας}) & \text{άν} \quad 0 \le p \le p_0 \\ 1 \quad (\text{αντικατάσταση τού συστήματος}) & \text{αν} \quad p_0 < p \le 1 \end{cases}$$

όπου $p_0 \in (0,1]$ κατάλληλη κρίσιμη ποσότητα.

Απόδειξη

i) Προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η συνάρτηση $V_\beta(\pi), \pi \in P$ είναι $\le_L$ αύξουσα και κοίλη (παράγραφος 6.2) και το γεγονός ότι για $\pi=(1-p,p), \pi'=(1-p',p') \in P$,έχουμε:

$$\pi \le_L \pi' \Leftrightarrow p \le p'$$

ii) Από την εξίσωση αριστοποίησης (8.3.1) έχουμε:

$$V_\beta(p) \le R + \beta.V_\beta(0)\,,\ 0 \le p \le 1$$

Για p=0 παίρνουμε : $V_\beta(0) \le R + \beta.V_\beta(0)$

Από την οποία προκύπτει: $V_\beta(0) \le \dfrac{R}{1-\beta}$

Επομένως ,

$$V_\beta(p) \le R + \beta.\frac{R}{1-\beta} = \frac{R}{1-\beta}, \qquad 0 \le p \le 1$$

iii) Άμεση συνέπεια της πρότασης 6.3.1(βλέπε και παρατήρηση στην ενότητα 6.3) . W

Εστω $W_\beta(p), 0 \le p \le 1$,η συνάρτηση του αναμενόμενου ολικού εκπίπτοντος κόστους για άπειρο χρονικό ορίζοντα, όταν εφαρμόζουμε την πολιτική δ^* με συνάρτηση ελέγχου δ(p)=0 , $0 \le p \le 1$ (δεν αντικαθιστούμε ποτέ το σύστημα).

Προφανώς η συνάρτηση W_β ικανοποιεί την εξίσωση:

$$W_\beta(p) = c_1 + p.c + \beta.\sum_q \{q/p\} W_\beta(T(p,q))\,,\ 0 \le p \le 1 \qquad \underline{\mathbf{8.3.2}}$$

όπου $c = c_2 - c_1\ (>0)$.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης W_β θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $\{W_n(p), 0 \le p \le 1\}$που ικανοποιούν την αναγωγική σχέση:Για n=1,2,3…

$$W_n(p) = c_1 + p.c + \beta.\sum_{q=1}^{2} \{q/p\} W_{n-1}(T(p,q))\,,\ 0 \le p \le 1 \qquad \underline{\mathbf{8.3.3}}$$

$$W_0(p) = 0\,,\ 0 \le p \le 1.$$

W

Λήμμα 8.3.1:Εστω $\{W_n\}$ η ακολουθία των συναρτήσεων που ορίζονται με την επαναληπτική σχέση (8.3.3).Τότε

$$W_n(p) = (A_n.p + B_n).c + \frac{1-\beta^n}{1-\beta}.c_1 \quad ,n = 0,1,2,\ldots \qquad \underline{\mathbf{8.3.4}}$$

όπου

$$A_n = 1 + \beta.|P|.A_{n-1} \quad , \quad B_n = \beta.(p_{12}.A_{n-1} + B_{n-1})\ , n = 1,2... \qquad \underline{\mathbf{8.3.5}}$$

$$A_0 = B_0 = 0$$

Απόδειξη

Το λήμμα ισχύει για n=1, επειδή

$$W_1(p)= c_1 + p.c= c_1+ (A_1.p +B_1).c,$$

Όπου $A_1=1$, $B_1=0$ ικανοποιούν τη σχέση (8.3.5).

Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για κάποιο $n \geq 1$.Θα δείξουμε ότι ισχύει για n+1.Για $0 \leq p \leq 1$ έχουμε:

$$W_{n+1}(p) = c_1 + p.c + \beta.\sum_q \{q/p\}.W_n(T(p,q))$$

$$=c_1 + p.c + \beta.\sum_q \{q/p\}[(A_n.T(p,q)+B_n).c+\frac{1-\beta^n}{1-\beta}.c_1]$$

$$=c_1 + p.c + \beta.(A_n\sum_q \{q/p\}.T(p,q)+B_n).c+\beta.\frac{1-\beta^n}{1-\beta}.c_1$$

$$=\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}.c_1+c.p+\beta.(A_n.\sum_q (a_q+b_q.p)+B_n).c$$

$$=\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}.c_1+c.p+\beta.[(A_n.((a_1+a_2)+(b_1+b_2).p)+B_n].c$$

Από τις σχέσεις (7.1.3) της ενότητας 7.1, παίρνουμε:

$$\alpha_1+\alpha_2 = p_{12}.(r_{21}+r_{22}) = p_{12}$$

$$\beta_1+\beta_2 = |P|.(r_{21}+r_{22}) = |P|$$

Επομένως,

$$W_{n+1}(p)= \frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}.c_1+c.p+\beta.[(A_n.(p_{12}+|P|.p)+B_n].c$$

$$=\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}.c_1+(1+\beta.|P|.A_n).c.p+\beta.(p_{12}.A_n+B_n).c$$

$$=\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}.c_1+(A_{n+1}.p+B_{n+1}).c$$

Αρα το λήμμα ισχύει για n+1 και η απόδειξη της επαγωγής ολοκληρώνεται.

W

Πρόταση 8.3.2: Η συνάρτηση $W_\beta(p)$, $0 \le p \le 1$ δίνεται από την σχέση

$$W_\beta(p)=\frac{1}{1-\beta}.c_1+\frac{(1-\beta).p+\beta.p_{12}}{(1-\beta).(1-\beta.|P|)}.c\,,\quad 0 \le p \le 1 \;. \qquad \underline{\mathbf{8.3.6}}$$

Απόδειξη

Η ακολουθία των συναρτήσεων $\{W_n\}$ συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση W_β:
$W_n \to W_\beta$ όταν $n \to \infty$.

Επομένως από τη σχέση (8.3.4), παίρνουμε:

$$W_\beta(p)=(A.p+B).c+\frac{1}{1-\beta}.c_1\;,\; 0 \le p \le 1 \qquad \underline{\mathbf{8.3.7}}$$

όπου $A=\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, $B=\lim\limits_{n\to\infty} B_n$

Τα όρια A καί B των ακολουθιών $\{A_n\}$και $\{B_n\}$που παράγονται από τις αναγωγικές σχέσεις (8.3.5), ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$A=1+\beta.|P|.A \quad , \quad B=\beta.(p_{12}.A+B)$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων παίρνουμε:

$$A=\frac{1}{1-\beta.|P|} \quad , \quad B=\frac{\beta.p_{12}}{(1-\beta).(1-\beta.|P|)}$$

και αντικαθιστώντας στην (8.3.7) παίρνουμε την (8.3.6). ∎

Η επόμενη πρόταση παρέχει αναγκαία και ικανή συνθήκη , ώστε η πολιτική ΄΄ μην αντικαθιστάς ποτέ το σύστημα΄΄ να είναι β-άριστη, για δοσμένο συντελεστή έκπτωσης $\beta \in (0,1)$.

Πρόταση 8.3.3:Η πολιτική d^∞ με συνάρτηση ελέγχου δ(p)=0, $0 \le p \le 1$ είναι β-άριστη ,τότε και μόνο τότε αν:

$$c_1+\frac{1+\beta.p_{12}}{1-\beta.|P|}.c \le R\,. \qquad \underline{\mathbf{8.3.8}}$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση W_β είναι άριστη αν ικανοποιεί την εξίσωση αριστοποίησης (8.3.1).Επειδή η W_β ικανοποιεί την εξίσωση (8.3.2) συνάγεται ότι η W_β ικανοποιεί την (8.3.1) τότε και μόνο τότε αν **:**

$$W_\beta(p) \le R + \beta . W_\beta(0)\,,\ 0 \le p \le 1 \qquad \underline{\mathbf{8.3.9}}$$

Αντικαθιστώντας την (8.3.6) στην (8.3.9) και μετά από ορισμένες πράξεις βρίσκουμε ότι η (8.3.9) ικανοποιείται τότε και μόνο τότε αν ισχύει η (8.3.10):

$$c_1 + \frac{p + \beta . p_{12}}{1 - \beta . |P|} . c \le R \quad , \ 0 \le p \le 1 \qquad \underline{\mathbf{8.3.10}}$$

Όμως η (8.3.10) ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει για p=1.

Επομένως συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση κόστους W_β είναι άριστη (ισοδύναμα η πολιτική δ^∞ :δ(p)=0, $0 \le p \le 1$ είναι β-άριστη),τότε και μόνον τότε αν ισχύει η σχέση (8.3.8). ∎

Παρατήρηση

Λαμβάνοντας υπόψη την πρόταση 8.3.1 (iii), η πρόταση 8.3.3 μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Η συνθήκη (8.3.8) είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε η κρίσιμη ποσότητα της β-άριστης πολιτικής να ισούται με τη μονάδα (p_0=1).

Η πρόταση που ακολουθεί παρέχει αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε η πολιτική ΄΄μην αντικαθιστάς ποτέ το σύστημα΄΄ (ισοδύναμα η πολιτική με κρίσιμη ποσότητα p_0***=1 να είναι β-άριστη, για κάθε συντελεστή έκπτωσης*** $\beta \in (0,1)$ **.**

Πρόταση 8.3.4:Η πολιτική δ^∞ με συνάρτηση ελέγχου δ(p)=0, $0 \le p \le 1$ είναι β-άριστη $\forall\ \beta \in (0,1)$, τότε και μόνο τότε αν**:**

$$c_1 + \frac{1 + p_{12}}{1 - |P|} . c \le R \ . \qquad \underline{\mathbf{8.3.11}}$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση

$$f(\beta) := \frac{1+\beta . p_{12}}{1-\beta .|P|}.c \qquad , \quad 0 < \beta < 1$$

είναι προφανώς γνήσια αύξουσα και

$$\lim_{\beta \to 1^-} f(\beta) = \frac{1+p_{12}}{1-|P|}.c$$

Σημειώνουμε ότι:

$$|P| = p_{22} - p_{12} < 1$$

επειδή $p_{12} > 0$ (υπόθεση (1)).Επομένως η συνθήκη (8.3.11) συνάγεται από την πρόταση 8.3.3, θέτοντας β=1 στη σχέση (8.3.8) . W

Από την πρόταση 8.2.2 συνάγεται, ότι υπάρχει μια φραγμένη συνάρτηση $h(p), 0 \le p \le 1$ και μια σταθερά g έτσι ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση αριστοποίησης για το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου:

$$g + h(p) = \min\{c_1 + c.p + \sum_q \{q/p\} h(T(p,q)), R\}, 0 \le p \le 1 \qquad \textbf{8.3.12}$$

$$h(0)=0.$$

Η ποσότητα

$$g = \lim_{\beta \to 1^-} (1-\beta).V_\beta(0) \qquad \textbf{8.3.13}$$

είναι το ελάχιστο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου ($g = J(p), 0 \le p \le 1$).

Η επόμενη πρόταση παρέχει αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε η πολιτική ΄΄μην αντικαθιστάς ποτέ το σύστημα΄΄ να είναι ΜΚ-άριστη .

Πρόταση 8.3.5:Η πολιτική δ^∞ με συνάρτηση ελέγχου δ(p)=0, $0 \le p \le 1$ είναι ΜΚ-άριστη ,και το ελάχιστο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου δίνεται από τη σχέση

$$g = c_1 + \frac{p_{12}}{1-|P|}.c \qquad \textbf{8.3.14}$$

αν και μόνον αν ισχύει η συνθήκη (8.3.11)**:**

$$c_1 + \frac{1+p_{12}}{1-|P|}.c \le R \ .$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η συνθήκη (8.3.11).Τότε από την πρόταση 8.3.4 η πολιτική d^{∞} με δ(p)=0, $0 \le p \le 1$ είναι β-άριστη για κάθε συντελεστή έκπτωσης $\beta \in (0,1)$ και

$$V_\beta(p)=W_\beta(p)\ ,\ 0 \le p \le 1 \qquad \textbf{8.3.15}$$

Από τις σχέσεις (8.3.6), (8.3.13) και (8.3.15) παίρνουμε :

$$g = \lim_{\beta \to 1^-}(1-\beta).V_\beta(0) = \lim_{\beta \to 1^-}(1-\beta).W_\beta(0)$$

$$= \lim_{\beta \to 1^-}\left(c_1 + \frac{\beta.p_{12}}{1-\beta.|P|}.c\right) = c_1 + \frac{p_{12}}{1-|P|}.c \qquad \textbf{8.3.16}$$

Επίσης για κάθε $\beta \in (0,1)$ έχουμε **:**

$$h_\beta(p)=V_\beta(p)-V_\beta(0)= W_\beta(p)- W_\beta(0)=\frac{c}{1-\beta.|P|}.p\ ,\ 0 \le p \le 1$$

Για $\beta \to 1^-$ παίρνουμε**:**

$$h(p) := \lim_{\beta \to 1^-} h_\beta(p) = \frac{c}{1-|P|}.p\ ,\ 0 \le p \le 1.$$

Θα δείξουμε ότι η σταθερά g και η συνάρτηση h(p), $0 \le p \le 1$ ικανοποιούν την εξίσωση αριστοποίησης (8.3.12).΄Εχουμε

$$c_1 + c.p + \sum_q \{q/p\} h(T(p,q))$$

$$= c_1 + c.p + \frac{c}{1-|P|}\sum_q \{q/p\} T(p,q))$$

$$= c_1 + c.p + \frac{c}{1-|P|}\sum_q (a_q + b_q.p)$$

$$= c_1 + c.p + \frac{c}{1-|P|}(a_1 + a_2 + (b_1 + b_2).p)$$

$$= c_1 + c.p + \frac{c}{1-|P|}(p_{12} + |P|.p)$$

$$= c_1 + \frac{c}{1-|P|}(p_{12} + p) = g + h(p) \qquad \textbf{8.3.17}$$

Λόγω της συνθήκης (8.3.11) έχουμε

$$c_1 + \frac{c}{1-|P|}(p_{12} + p) \le R, 0 \le p \le 1 \qquad \textbf{8.3.18}$$

Από τις (8.3.17) και (8.3.18)συνάγεται ότι η σταθερά g και η συνάρτηση $h(p), 0 \le p \le 1$ ικανοποιούν την εξίσωση αριστοποίησης (8.3.12) και η ποσότητα g πού δίνεται από τη σχέση (8.3.16) εκφράζει το ελάχιστο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου. Επιπλέον η πολιτική δ^{∞} είναι ΜΚ-άριστη επειδή για κάθε $p \in [0,1]$ η απόφαση δ(p)=0 ελαχιστοποιεί το δεύτερο σκέλος της (8.3.12).

Αντιστρόφως ας υποθέσουμε ότι η πολιτική δ^{∞} με δ(p)=0, $0 \le p \le 1$ είναι ΜΚ-άριστη. Τότε σε συνδυασμό με την εξίσωση αριστοποίησης (8.3.12) παίρνουμε την εξίσωση:

$$g + h(p) = c_1 + c.p + \sum_q \{q/p\} h(T(p,q)), \; 0 \le p \le 1$$

η οποία όπως διαπιστώσαμε από τη σχέση (8.3.17), ικανοποιείται για

$$g = c_1 + \frac{c}{1-|P|}.p_{12} \;, \; h(p) = \frac{c}{1-|P|}.p, 0 \le p \le 1$$

Επιπλέον έχουμε:

$$c_1 + c_2.\sum_q \{q/p\} h(T(p,q)) = c_1 + \frac{c}{1-|P|}(p_{12} + p) \le R, 0 \le p \le 1$$

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται από τη συνθήκη (8.3.11). $\square$

Παρατήρηση

Επειδή $1-|P| = 1-(p_{22}-p_{12}) = p_{21}+p_{12}$,

η σχέση (8.3.14) γράφεται:

$$g = c_1 + \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}.c = c_1 + \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}.(c_2 - c_1) = \frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}.c_1 + \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}.c_2 \qquad \textbf{\underline{8.3.19}}$$

Η κατανομή $\underset{\sim}{x} = (\frac{p_{21}}{p_{21}+p_{12}}, \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}})$ είναι η στάσιμη κατανομή του συστήματος (Μαρκοβιανής αλυσίδας) με πίνακα μετάβασης P πού αντιστοιχεί στην απόφαση α=0 και ικανοποιεί τη σχέση

$$\underset{\sim}{x}.\mathrm{P} = \underset{\sim}{x}$$

Οι πιθανότητες $x_1 = \frac{p_{21}}{p_{21}+p_{12}}$ και $x_2 = \frac{p_{12}}{p_{21}+p_{12}}$ εκφράζουν την μακροπρόθεσμη αναλογία των χρονικών περιόδων όπου το σύστημα βρίσκεται στις καταστάσεις 1 και 2 αντίστοιχα. Με την επισήμανση αυτή και λόγω της σχέσης (8.3.19) η ποσότητα g πράγματι ερμηνεύεται ως το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου που αντιστοιχεί στην πολιτική δ^{∞} με δ(p)=0, $0 \le p \le 1$. ■

As θεωρήσουμε τώρα την *παράδοξη* πολιτική δ^{∞} όπου δ(p)=0 αν p=0 και δ(p)=1 αν $p \neq 0$.

Εφαρμόζοντας την πολιτική αυτή, τις μισές χρονικές περιόδους το σύστημα λειτουργεί/συντηρείται και τις υπόλοιπες περιόδους το σύστημα αντικαθίσταται. Πράγματι, αν το σύστημα βρίσκεται αρχικά σε μια «κατάσταση» $p \neq 0$ (πού δηλώνει την a-priori πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση 2),τότε εφαρμόζοντας την παράδοξη πολιτική, το σύστημα στις επόμενες χρονικές περιόδους μεταβαίνει διαδοχικά στις «καταστάσεις»:

$$0, T(0,1) \text{ή} \mathrm{T}(0,2), 0, \mathrm{T}(0,1) \text{ή} \mathrm{T}(0,2), 0 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

στις οποίες το σύστημα λειτουργεί /συντηρείται και αντικαθίσταται εναλλάξ. Επομένως το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου πού αντιστοιχεί στην παράδοξη πολιτική είναι:

$$g = \frac{c_1 + R}{2}$$

Στην πρόταση που ακολουθεί, αποδεικνύουμε ότι αποκλείεται η παράδοξη πολιτική να είναι ΜΚ-άριστη.

Πρόταση 8.3.6:

Η πολιτική d^{∞} με συνάρτηση ελέγχου

$$\delta\ (p)=\begin{cases}0 & (\text{συνέχιση. λειτουργίας}) \quad \text{άν} \quad p=0\\ 1 & (\text{αντικατάσταση τού συστήματος}) \quad \text{αν} \quad 0 \prec p \leq 1\end{cases}$$

δεν είναι ΜΚ-άριστη.

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση αριστοποίησης (8.3.12) ικανοποιείται για

$$g=\frac{c_1+R}{2},\quad h(p)=\frac{R-c_1}{2},0<p\leq 1,\ \text{h(o)=0}$$

και η πολιτική d^{∞} είναι ΜΚ-άριστη αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη:

$$R=c_1 \qquad \underline{\mathbf{8.3.20}}$$

Πράγματι, έχουμε

$$g+h(p)=\frac{c_1+R}{2}+\frac{R-c_1}{2}=R\ ,\ 0<p\leq 1$$

$$g+h(0)=g=\frac{c_1+R}{2}$$

$$c_1+c.p+\sum_q\{q/p\}.h(T(p,q))=c_1+c.p+\frac{R-c_1}{2}\sum_q\{q/p\}=$$

$$c_1+c.p+\frac{R-c_1}{2}=\frac{c_1+R}{2}+c.p,\ 0\leq p\leq 1.$$

Παρατηρούμε ότι για p=0,

$$c_1+c.0+\sum_q\{q/0\}.h(T(0,q))=\frac{c_1+R}{2}=g+h(o).$$

Επομένως η εξίσωση αριστοποίησης (8.3.12) ισχύει για p=0,αν και μόνον αν:

$$g+h(0)=\frac{c_1+R}{2}\leq R \qquad \underline{\mathbf{8.3.21}}$$

Για $p \neq 0$ η εξίσωση αριστοποίησης (8.3.12) ικανοποιείται αν και μόνον αν:

$$g + h(p) = R \leq c_1 + c.p + \sum_q \{q/p\}.h(T(p,q)),\ 0 \leq p \leq 1,$$

δηλαδή,

$$R \leq \frac{c_1 + R}{2} + c.p,\ 0 < p \leq 1 \qquad \textbf{\underline{8.3.22}}$$

Όμως η σχέση (8.3.22) ισοδυναμεί με τη σχέση

$$R \leq \frac{c_1 + R}{2} \qquad \textbf{\underline{8.3.23}}$$

Από τις σχέσεις (8.3.21) και (8.3.23) συνάγεται ότι η εξίσωση αριστοποίησης (8.3.12) ικανοποιείται τότε και μόνο τότε, αν ισχύει η ισότητα

$$\frac{c_1 + R}{2} = R$$

η οποία, όπως διαπιστώνουμε άμεσα, ισοδυναμεί με τη σχέση (8.3.20).Συνοψίζοντας, η ποσότητα

$$\frac{c_1 + R}{2} = g$$

εκφράζει το ελάχιστο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου και η πολιτική d^{∞} είναι ΜΚ-άριστη, τότε και μόνον τότε ,αν ισχύει η συνθήκη (8.3.20).Όμως λόγω της Υπόθεσης (2): $c_1 < c_2 < R$ η συνθήκη (8.3.20) δεν ισχύει και επομένως αποκλείεται η πολιτική d^{∞} να είναι ΜΚ-άριστη. $\square$

Πρόταση 8.3.7:

Αν $$(c_2 <) R < c_1 + \frac{1 + p_{12}}{1 - |P|}.c \qquad \textbf{\underline{8.3.24}}$$

Τότε η συνάρτηση ελέγχου δ τής (ΜΚ-άριστης) πολιτικής d^{∞} έχει την ακόλουθη δομή **:**

$$\delta\ (p) = \begin{cases} 0 & (\text{συνέχιση. λειτουργίας}) & \text{άν} & 0 \leq p \leq p* \\ 1 & (\text{αντικατάσταση τού συστήματος}) & \text{αν} & p* \prec p \leq 1 \end{cases},$$

όπου $\pi^* \in (0,1)$ είναι κατάλληλη κρίσιμη ποσότητα.

Απόδειξη

Από την πρόταση 8.3.3 και την παρατήρηση πού ακολουθεί συνάγεται ότι για κάθε $\beta \in (0,1)$ η κρίσιμη ποσότητα της β-άριστης πολιτικής $\pi_0(\beta) \in (0,1)$, αν και μόνο αν ισχύει:

$$R < c_1 + \frac{(1+\beta.p_{12})}{1-\beta.|P|}.c$$

Επειδή η συνάρτηση

$$f(\beta) := \frac{1+\beta.p_{12}}{1-\beta.|P|}.c \, , 0 \le \beta \le 1$$

είναι γνήσια αύξουσα και

$$\lim_{\beta \to 1^-} f(\beta) = \frac{1+p_{12}}{1-|P|}.c,$$

από τη συνθήκη (8.3.24) συνάγεται ότι υπάρχει $0 < \varepsilon < 1$ έτσι ώστε:

$$R \le c_1 + \frac{(\beta.p_{12}+1)}{1-\beta.|P|}.c \qquad \forall \beta \in (1-\varepsilon,1)$$

Επομένως $\quad 0 < \pi_0(\beta) < 1 \qquad \forall \beta \in (1-\varepsilon,1)$

Θεωρούμε την ακολουθία $\{\beta_n\} \subset (1-\varepsilon,1)$ με $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 1$.

Τότε $0 \le \pi_0(\beta_n) \le 1 \qquad \forall n = 1,2,\ldots$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano-Weirstrass (κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία), υπάρχει μια υπακολουθία $\{\beta_{n_k}\}$ ώστε:

$$\pi_0(\beta_{n_k}) \to \pi^* \text{ όταν το } k \to \infty$$

και $\pi^* \in [0,1]$.

Αν $\pi^* > 0$, τότε για τυχόν $\pi \in [0,\pi^*)$ υπάρχει $t \in \mathbb{N}$ ώστε $\pi < \pi_0(\beta_{n_k}) \quad \forall k \ge t$.

Επομένως η απόφαση για συνέχιση λειτουργίας / συντήρησης του συστήματος στο p είναι b_{n_k}-άριστη "k ³ t .Σύμφωνα με την πρόταση 8.1.3 η απόφαση ,δ(p)=0,είναι ΜΚ-άριστη. Αν p^* p 1, με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η απόφαση για αντικατάσταση του συστήματος, δ(p)=1,είναι ΜΚ-άριστη για "p Ξ $(p^*,1]$.

Απομένει να δείξουμε ότι p^* Ή 0, p^* Ή 1.

Το γεγονός ότι p^* Ή 0, προκύπτει άμεσα από την πρόταση 8.3.6.Αs θεωρήσουμε ότι $p^* = 1$.Τότε για "p Ξ $[0,1)$ η απόφαση δ(p)=0 είναι ΜΚ-άριστη.Αυτό όμως αποκλείεται από την πρόταση 8.3.5 λόγω της συνθήκης (8.3.24).Επομένως p^* Ή 1.Συνεπώς για την κρίσιμη ποσότητα p^* της ΜΚ-άριστης πολιτικής έχουμε $0 < p^* < 1$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. W

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό εφαρμόζουμε το κριτήριο του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου σε προβλήματα POMDP αντικατάστασης συστήματος.

- Σχετικά με το γενικό πρόβλημα αντικατάστασης συστήματος των Ohnishi-Ibaraki δείχνουμε ότι η εξίσωση αριστοποίησης για το μέσο κόστος (ACOE) έχει λύση και ότι υπάρχει ΜΚ-άριστη πολιτική.
- Σχετικά με το ειδικό πρόβλημα αντικατάστασης συστήματος με δύο καταστάσεις και δύο μηνύματα δίνουμε:α)αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η πολιτική να μην αντικαθιστούμε ποτέ το σύστημα να είναι ΜΚ-άριστη β) αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η ΜΚ-άριστη πολιτική να είναι control-limit:αντικαθιστούμε το σύστημα αν η πιθανότητα μη λειτουργικής κατάστασης υπερβαίνει μία κρίσιμη ποσότητα $p^* \in (0,1)$.