ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αλγόριθμος των ακροτάτων σημείων

Περίληψη

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού, είναι η παρουσίαση ενός νέου αλγόριθμου, για τον υπολογισμό της βέλτιστης συνάρτησης οφέλους σύμφωνα με το κριτήριο του αναμενόμενου εκπίπτοντος ολικού οφέλους, για πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα στα πλαίσια της επαναληπτικής διαδικασίας τιμών (value-iteration). *Η βέλτιστη συνάρτηση οφέλους αντιπροσωπεύεται από ένα σύνολο διανυσμάτων* «gradients», που δεν είναι γνωστό από την αρχή αλλά χτίζεται σε διαδοχικά βήματα.

Αρχικά επιλέγονται αυθαίρετα κάποια διανύσματα πληροφορίας δ.π και μέσω γνωστών μεθόδων (αλγόριθμος ενός βήματος) υπολογίζονται τα αντίστοιχα λειτουργικά «gradients».Για καθένα από αυτά, προσδιορίζεται η αντίστοιχη διευρυμένη περιοχή δηλαδή η κυρτή περιοχή του χώρου των διανυσμάτων πληροφορίας, στα οποία το συγκεκριμένο «gradient» είναι λειτουργικό έναντι των άλλων.Ακολούθως υπολογίζεται το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης, το οποίο όπως αποδεικνύεται, επιτυγχάνεται σε κάποιο ακρότατο (κορυφή) των διευρυμένων περιοχών.

Το αρχικό σύνολο «gradients» εμπλουτίζεται με νέα «gradients» που είναι λειτουργικά για την κορυφή στην οποία εμφανίζεται το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης. Κατασκευάζονται νέες διευρυμένες περιοχές και αποδεικνύεται ότι το νέο μέγιστο σφάλμα προσέγγισης είναι μειωμένο σε σχέση με το προηγούμενο. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης μηδενισθεί ή γίνει αρκούντως μικρό,(δηλαδή μικρότερο ή ίσο από ένα προκαθορισμένο σφάλμα).Ο αλγόριθμος των ακροτάτων σημείων αναφέρεται στο πέρασμα από έναν χρονικό ορίζοντα στον επόμενο.Υπολογίζεται το συσσωρευμένο σφάλμα προσέγγισης για κάθε χρονικό ορίζοντα από μια απλή αναγωγική σχέση. Εξετάζεται επίσης πως ο προτεινόμενος αλγόριθμος μπορεί να καλύψει την περίπτωση του υπολογισμού της συνάρτησης του ελαχίστου κόστους για πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα.

3.1. Οι διευρυμένες περιοχές

Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο χρονικό ορίζοντα t³ 1 η συνάρτηση V_t του μέγιστου αναμενόμενου ολικού οφέλους είναι γνωστή. Τίθεται το πρόβλημα του υπολογισμού της συνάρτησης του μέγιστου αναμενόμενου ολικού οφέλους για τον χρονικό ορίζοντα t+1,

$$V_{t+1}=HV_t ,$$

(όπου H είναι τελεστής μεγιστοποίησης)

Γενικότερα έστω υ(π),πΞ P μια κατά τμήματα γραμμική και κυρτή συνάρτηση. Επομένως η συνάρτηση υ αντιπροσωπεύεται μέσω ενός πεπερασμένου συνόλου Γ από «gradients» και

$$\upsilon(\pi) = \max \{\pi.\gamma : \gamma \in \Gamma\}, \pi \in \Pi,$$

όπου συμβατικά τα δ.π πΞ P θεωρούνται διανύσματα – γραμμές και τα «gradients» διανύσματα – στήλες. Ο χώρος Π διαμερίζεται σε κυρτές περιοχές W_γ γΞ G, έτσι ώστε :

$$\upsilon(\pi)= \pi.\gamma \quad " \pi \Xi W_g .$$

H συνάρτηση

$$Hu(p) = \max_{a \Xi A} \{ p.q^a + b.\sum_{q \Xi Q} \{q/p,a\}.u(\mathrm{T}(p,q,a))\}, \pi \Xi \mathrm{P} , \qquad \underline{\mathbf{3.1.1}}$$

όπου q^a το διάνυσμα άμεσου οφέλους, που αντιστοιχεί στην απόφαση α (το οποίο θεωρείται διάνυσμα στήλη) και β ο συντελεστής έκπτωσης (discound-factor) $(0 < b \pounds 1)$, είναι επίσης κατά τμήματα γραμμική και κυρτή.

Το πρόβλημα του υπολογισμού της συνάρτησης Hυ ανάγεται στον καθορισμό του συνόλου των λειτουργικών «gradients» Γ_H για την συνάρτηση Hυ και των αντίστοιχων περιοχών αντιπροσώπευσης της Hυ. Για να βρούμε το παραπάνω σύνολο των «gradients» Γ_H που υποστηρίζουν την Hυ ακολουθούμε την εξής πορεία. Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα πεπερασμένο σύνολο δ.π. (Για παράδειγμα μπορούμε να επιλέξουμε τις κορυφές $e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0), \ldots e_N = (0,0,...,1)$ του χώρου Π των δ.π.

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο A_3 του ενός βήματος του κεφαλαίου 2 υπολογίζουμε τα λειτουργικά «gradients» της Ηυ που αντιστοιχούν σε αυτά τα διανύσματα πληροφορίας. Αs συμβολίσουμε με $\widetilde{\Gamma}_H$ το παραπάνω σύνολο των «gradients» της Ηυ. Ορίζουμε τον τελεστή προσέγγισης $\widetilde{H}$ **:**

$$\widetilde{H}\,\upsilon(\pi):=\max\{\pi.\gamma : \gamma\in \widetilde{\Gamma}_H\}\ ,\forall\ \pi\in\Pi. \qquad \textbf{3.1.2}$$

Αν $\widetilde{H}\,\upsilon$ χρησιμοποιείται για να προσεγγίσει την Ηυ, τότε το μέγιστο σφάλμα για την παραπάνω προσέγγιση είναι το **:**

$$\max_{\pi\in\Pi}\ \{H\upsilon(\pi)-\widetilde{H}\,\upsilon(\pi)\}. \qquad \textbf{3.1.3}$$

Αν το παραπάνω σφάλμα δεν είναι 0,τότε ένα κατάλληλο «gradient» πρέπει να επιλεγεί και να συμπεριληφθεί στο $\widetilde{\Gamma}_H$, ώστε να φθάσουμε σε μια καλύτερη προσέγγιση. Αυτή η διαδικασία θα συνεχισθεί, μέχρις ότου το μέγιστο σφάλμα να γίνει μικρότερο ή ίσο από έναν προκαθορισμένο αριθμό $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό, αν επιθυμούμε προσεγγιστικό αλγόριθμο, ενώ αν επιθυμούμε ακριβή αλγόριθμο, μέχρι μηδενισμού του σφάλματος.

Ορισμός 3.1.1: Έστω $\hat{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}_H$.Ορίζουμε "**διευρυμένη περιοχή**" του «gradient» $\hat{\gamma}$ το κυρτό πολύεδρο του χώρου R^N**:**

$$\widetilde{R}_{\hat{\gamma}}=\{\pi\in\Pi : \pi.\hat{\gamma}\geq\pi.\gamma \quad \forall\,\gamma\in\widetilde{\Gamma}_H\}. \qquad \textbf{3.1.4}$$

Πρόκειται δηλαδή για την περιοχή, όπου το $\hat{\gamma}$ *είναι "νικητής" έναντι των άλλων «gradients» του* $\widetilde{\Gamma}_H$.

Το σύνολο των λειτουργικών «gradients» Γ_H που αντιπροσωπεύουν την συνάρτηση Ηυ δεν είναι φυσικά γνωστό από την αρχή. Ξεκινώντας αρχικά με το σύνολο $\widetilde{\Gamma}_H \subset \Gamma_H$, με διαδοχικά βήματα το εμπλουτίζουμε με νέα λειτουργικά «gradients», όπως θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

Εστω $\hat{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}_H$. Η συσχετιζόμενη ή υποστηρίζουσα περιοχή του $\hat{\gamma}$, $R(\hat{\gamma},\Gamma_H)$ (βλέπε και παράγραφο 2.4), περιέχεται προφανώς στην διευρυμένη περιοχή του $\hat{\gamma}$.

Δηλαδή**:**

$$R(\hat{\gamma},\Gamma_H)\subseteq\widetilde{R}_{\hat{\gamma}}$$

Αν υπάρχουν k το πλήθος «gradients» στο $\widetilde{\Gamma}_H$,τότε θα υπάρχουν k διευρυμένες περιοχές. Αν η συνάρτηση $\widetilde{H}\,\upsilon(\pi):=\max\{\pi.\gamma:\gamma\in\widetilde{\Gamma}_H\},\forall\,\pi\in\Pi$ χρησιμοποιείται για να προσεγγίσει την συνάρτηση $H\upsilon(\pi)=\max_{g \Xi G_H} \pi.\gamma, \pi \in \Pi$ τότε το σφάλμα αυτής της προσέγγισης μπορεί να ορισθεί ως η συνάρτηση **:**

$$\sigma(\pi):=H\upsilon(\pi)-\widetilde{H}\,\upsilon(\pi)\ ,\ \pi \in \Pi\ . \qquad \underline{\mathbf{3.1.5}}$$

Προφανώς $\qquad \sigma(\pi)^{3}\ \ 0 \quad \forall\, \pi \in \Pi.$

Το ουσιαστικό που αποδεικνύεται στο λήμμα 3.1.1 καθώς και στο θεώρημα 3.1.1 είναι το γεγονός, ότι το μέγιστο σφάλμα αυτής της προσέγγισης, ήτοι η μέγιστη τιμή του σ στο Π, θα πετυχαίνεται σε μία από τις κορυφές αυτών ακριβώς των «διευρυμένων περιοχών».

Η βασική ιδέα του αλγορίθμου που θα εκθέσουμε παρακάτω, με απλά βήματα δίνει το σύνολο Γ_H κτίζοντας αυτό προοδευτικά, σε αντιδιαστολή με τους υπάρχοντες αλγόριθμους που ξεκινούν από το πολυπληθές σύνολο G των εν δυνάμει «gradients» για την Ηυ, (βλέπε ενότητα 2.3), που στη συνέχεια με απαλοιφές των μη λειτουργικών «gradients» καταλήγει στην ελάχιστη αντιπροσώπευση Γ_H.

Λήμμα 3.1.1*:Ας είναι* $\widetilde{R}_{\hat{\gamma}}$ *η* ***διευρυμένη περιοχή*** *για ένα «gradient»* $\hat{g} \in \widetilde{\Gamma}_H$*.Τότε η μέγιστη τιμή του σφάλματος σ(π) στην* $\widetilde{R}_{\hat{\gamma}}$ *αντιστοιχεί σε μία από τις κορυφές της* $\widetilde{R}_{\hat{\gamma}}$ *.*

Απόδειξη

Για $\pi \in \widetilde{R}_{\hat{\gamma}}, \pi.\hat{\gamma} \geq \pi.\gamma$, για όλα τα $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_H$.

Η συνάρτηση σφάλματος: $\sigma(\pi):=H\upsilon(\pi)-\max_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}_H} \{\pi.\gamma\}$ μπορεί να ξαναγραφεί σαν :

$$\sigma(\pi)=H\upsilon(\pi)-\pi.\hat{\gamma} \text{ για όλα τα } \pi \in \widetilde{R}_{\hat{\gamma}}\ .$$

Από το γεγονός ότι η Ηυ είναι κυρτή συνάρτηση (βλέπε Sondik [117]) και $\pi.\hat{\gamma}$ είναι μια γραμμική συνάρτηση, η σ θα είναι κυρτή συνάρτηση στην περιοχή $\widetilde{R}_{\hat{\gamma}}$.

Από την θεωρία των κυρτών συναρτήσεων, είναι γνωστό, ότι η μέγιστη τιμή για μια κυρτή συνάρτηση πάνω σε ένα κυρτό πολύεδρο, πετυχαίνεται σε μια από τις κορυφές (ακρότατα) του κυρτού πολύεδρου.

Πράγματι, ας είναι $\pi_1,\pi_2,\ldots\pi_s$ οι κορυφές της περιοχής $\widetilde{R}_{\hat{\gamma}}$. Κάθε $\pi \in \widetilde{R}_{\hat{\gamma}}$ εκφράζεται σαν κυρτός γραμμικός συνδυασμός των κορυφών, δηλ.

$$p = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i . p_i ,$$

όπου : $\lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq s$ και $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1.$

Έχουμε $\sigma(\pi)=\sigma(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i . p_i) \leq \sum_{i=1}^{s} \lambda_i . s(p_i) \leq \max_{1 \leq i \leq s} s(p_i)$.

Αρα $\max_{p \in \widetilde{R}_{\hat{q}}} \sigma(\pi) = \max_{1 \leq i \leq s} s(p_i)$,οπότε η μέγιστη τιμή της σ στην περιοχή $\widetilde{R}_{\hat{\gamma}}$ αντιστοιχεί σε μία από τις κορυφές της διευρυμένης περιοχής $\widetilde{R}_{\hat{\gamma}}$. W

Θεώρημα 3.1.1: Η μέγιστη τιμή του σφάλματος σ στο Π θα είναι σε μία από τις κορυφές αυτών των γενικευμένων περιοχών που αντιστοιχούν σε gradients του $\widetilde{\Gamma}_{H}$.

Απόδειξη

Όπως δείχθηκε στο λήμμα 3.1.1,η μέγιστη τιμή του σ στην περιοχή $\widetilde{R}_{\hat{\gamma}}$ λαμβάνεται σε μία από τις κορυφές $\widetilde{R}_{\hat{\gamma}}$. Από τον ορισμό των παραπάνω διευρυμένων περιοχών, η ένωσή τους είναι το σύνολο Π. Επομένως, η μέγιστη τιμή του σφάλματος σ θα αντιστοιχεί σε μία από αυτές τις διευρυμένες περιοχές, οπότε με βάση το λήμμα 3.1.1,η μέγιστη τιμή του σ στο Π, θα είναι σε μία από τις κορυφές αυτών των διευρυμένων περιοχών.

W

Υποθέτουμε τώρα, ότι όλες οι κορυφές για τις διευρυμένες περιοχές απαρτίζουν ένα σύνολο Ε. Λόγω του θεωρήματος 3.1.1,το μέγιστο σφάλμα αυτής της προσέγγισης, θα είναι σε μία από τις κορυφές του συνόλου Ε. Δηλώνουμε αυτή την κορυφή $\hat{\pi}$ και έχουμε :

$$\sigma(\hat{\pi})=\max_{\pi\in E}\sigma(\pi)\ .$$

Αν $\sigma(\hat{\pi})=0$ τότε, δεν έχουμε καθόλου σφάλμα για την προσέγγιση αυτή, και έχουμε ακριβή λύση.

Αν $\sigma(\hat{\pi})>0$,τότε βρίσκουμε το «gradient η τα gradients» του Ηυ στο $\hat{\pi}$,εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο A_3 (του ενός βήματος) της ενότητας 2.2. Συμβολίζουμε το σύνολο των gradients» της Ηυ στο $\hat{\pi}$ με $\Gamma\hat{\pi}$. Σημειώνουμε επίσης ότι τα «gradients» του $\Gamma\hat{\pi}$ δεν ανήκουν στο $\widetilde{\Gamma}_H$,διότι **:**

$$Hu(\hat{\pi})=\hat{\pi}.\hat{\gamma}>\max\{\hat{\pi}\gamma:\gamma\in\widetilde{\Gamma}_H\}.$$

Επομένως, αν τα gradients του $\Gamma\hat{\pi}$ συμπεριληφθούν στο $\widetilde{\Gamma}_H$ μια καλύτερη προσέγγιση του Ηυ μπορεί να βρεθεί,και κατασκευάζονται πλέον καινούργιες **διευρυμένες περιοχές** για κάθε «gradient» του νέου συνόλου $\widetilde{\Gamma}_H\Theta\,\Gamma\hat{\pi}$.

Από το θεώρημα 3.1.1, το μέγιστο σφάλμα αυτής της νέας προσέγγισης θα αντιστοιχεί σε μία από τις κορυφές των νέων διευρυμένων περιοχών, που ορίζονται μέσω των «gradients» του $\widetilde{\Gamma}_H\Theta\Gamma\hat{\pi}$.Έτσι το μέγιστο σφάλμα για την καινούργια προσέγγιση αναζητείται στις κορυφές των νέων διευρυμένων περιοχών. Όπως θα δειχθεί στην επόμενη πρόταση, όλες οι κορυφές των νέων αυτών διευρυμένων περιοχών ανήκουν στο σύνολο $E\cup C$, όπου C το σύνολο από όλες τις κορυφές των διευρυμένων περιοχών για τα «gradients του $\Gamma\hat{\pi}$. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μόνο οι κορυφές των (ή της) διευρυμένων (διευρυμένης) περιοχών (περιοχής) για τα «gradients (ή gradient)» του $\Gamma\hat{\pi}$ πρέπει να προσδιορισθούν στο νέο βήμα.

***Πρόταση* 3.1.1:**Ας είναι $\widetilde{\Gamma}_H$ ένα σύνολο από «gradients» που περιγράφηκαν παραπάνω. Θεωρούμε τις διευρυμένες περιοχές που ορίζονται μέσω των «gradients» του συνόλου $\widetilde{\Gamma}_H$ **:** Για $\gamma\in\widetilde{\Gamma}_H$, $\widetilde{R}_\gamma=\{\pi\in\Pi:\ \pi.\gamma\geq\pi.\widetilde{\gamma}\ \ "\ \ \widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}_H\}$.Ας είναι τώρα ,Ε, το σύνολο των κορυφών των διευρυμένων περιοχών $\widetilde{R}_\gamma$, $\gamma\in\widetilde{\Gamma}_H$**.** Υποθέτουμε ότι $\$\in E$ είναι ένα δ.π. με $\sigma(\hat{\pi})=\max_{p\Xi E}\sigma(\pi)>0$, και $\Gamma_{\hat{\pi}}$ το σύνολο των «gradients» τής Ηυ στο $\$$.

Για $\gamma\in\ \widetilde{\Gamma}_{\mathrm{H}} \cup \Gamma_{\hat{\pi}}$, συμβολίζουμε με $\widetilde{R}\,'_{\gamma}$, την διευρυμένη περιοχή**:**

$$\widetilde{R}\,'_{\gamma} = \{\pi\in\Pi\textbf{:}\ \pi.\gamma \geq \pi.\widetilde{\gamma} \quad " \quad \widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}_{\mathrm{H}} \cup \Gamma_{\hat{\pi}}\}.$$

Αν επιπλέον C είναι το σύνολο από όλες τις κορυφές των **διευρυμένων περιοχών** $\widetilde{R}\,'_{\gamma}$ για $\gamma\in\Gamma_{\hat{\pi}}$ και Ε΄ το σύνολο των κορυφών των **διευρυμένων περιοχών** $\widetilde{R}\,'_{\gamma}$ για $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_{\mathrm{H}} \cup \Gamma_{\hat{\pi}}$ τότε ισχύει ότι:

$$C\,\mathrm{N}\,\mathrm{E}' \subseteq \mathrm{E}\cup \mathrm{C}.$$

Απόδειξη

Το γεγονός ότι $C\,\mathrm{N}\,\mathrm{E}'$ προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των συνόλων C, E'.

Εστω $x\,\Xi\,E'$.Θα δείξουμε ότι $x\,\Xi\,E\,\Theta\,C$.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

i) $\chi\in \widetilde{R}'_{g}$ για κάποιο $\hat{g} \in\Gamma_{\hat{\pi}}$.

Θα δείξουμε ότι $x\,\Xi\,C$.Θεωρούμε ότι $x\,\mathrm{O}\,C$.Θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Επειδή $\chi\in$ Ε΄ και $x\,\mathrm{O}\,C$,το δ.π ,χ, δεν είναι κορυφή τής διευρυμένης περιοχής $\widetilde{R}'_{g}$,αλλά είναι κορυφή μίας διευρυμένης περιοχής $\widetilde{R}'_{g'}$ όπου γ΄$\in\ \widetilde{\Gamma}_{\mathrm{H}}$.

Έστω $$\mathrm{R} = \widetilde{R}'_{g}\ \mathrm{H}\ \widetilde{R}'_{g'}$$

το κοινό σύνορο των περιοχών $\widetilde{R}'_{g}, \widetilde{R}'_{g'}$,το οποίο είναι μη κενό (επειδή $\chi\,\Xi\,R$) και κυρτό σύνολο ως τομή κυρτών συνόλων (πολυέδρων του χώρου R^{N}).

Επειδή το χ είναι κορυφή της περιοχής $\widetilde{R}'_{g'}$ και $\chi\,\Xi\,R$, $R\,\mathrm{N}\,\widetilde{R}'_{g'}$, έπεται ότι το χ είναι κορυφή του κοινού συνόρου R,επίσης. Σημειώνουμε ότι:

$$R = \{\pi\in\Pi\textbf{:}\ \pi.\hat{g} = \pi.g' \quad \pi.\gamma \quad " \quad \gamma \in \widetilde{\Gamma}_{\mathrm{H}} \cup \Gamma_{\hat{\pi}}\}.$$

Επειδή το χ δεν είναι κορυφή της $\widetilde{R}'_{g}$,υπάρχουν $\pi_1,\pi_2\ \in\ \widetilde{R}'_{g}$,π_1 Ήπ_2 και $\lambda\in(0,1)$ έτσι ώστε : $x = l\,.p_1 + (1- \ l\,).p_2$

Σημειώνουμε ότι αποκλείεται αμφότερα τα π_1,π_2 να ανήκουν στο κοινό σύνορο R επειδή το χ είναι κορυφή του R.Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι το $\pi_1 \notin R$.Τότε έχουμε:

$$\pi_1.\hat{\gamma} > \pi_1.\gamma' \text{ και } \pi_2.\hat{\gamma} \geq \pi_2.\gamma'.$$

Επομένως

$\chi.\hat{\gamma} = (\lambda.p_1 + (1-\lambda).p_2).\hat{\gamma} = \lambda.p_1.\hat{\gamma} + (1-\lambda).p_2.\hat{\gamma} > \lambda.p_1.\gamma' + (1-\lambda).p_2.\gamma' =$

$=(\lambda.p_1 + (1-\lambda).p_2).\gamma' = \chi.\gamma'$

δηλαδή $\chi.\hat{\gamma} > \chi.\gamma'$,πράγμα πού αντίκειται στο γεγονός ότι $\chi \in R$. Αρα το $\chi \in C$.

ii) $x \notin \tilde{R}_{\hat{g}}$ $\forall$ $g \in \Gamma_{\hat{\pi}}$ (και επομένως $x \notin C$). Θα αποδείξουμε ότι $\chi \in E$.

Επειδή $\chi \notin C$,το δ.π. ,χ, είναι κορυφή μιας διευρυμένης περιοχής $\tilde{R}_{g'}$ όπου $\gamma' \in \tilde{\Gamma}_H$.Σημειώνουμε ότι $\chi.\gamma' \geq \chi.g$ $\forall$ $\gamma \in \tilde{\Gamma}_H$ και $\chi.\gamma' > \chi.g$ $\forall$ $g \in \Gamma_{\hat{\pi}}$.

Αν το χ είναι εσωτερικό σημείο του χώρου Π, τότε $\chi = (\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_N)$ με $\chi_i > 0$, $1 \leq i \leq N$.Αν το χ είναι εσωτερικό σημείο μιας συνοριακής περιοχής του χώρου Π πού παράγεται από $s < N$ ακρότατα (κορυφές) του χώρου Π, τότε το χ έχει N-s μηδενικές συνιστώσες. Χωρίς βλάβη της γενικότητας και για απλοποίηση της απόδειξης θεωρούμε ότι:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_s, 0, 0, \ldots, 0) \text{ αν } s < N$$

και s=N αν το $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ είναι εσωτερικό σημείο του χώρου Π. Σε κάθε περίπτωση το δ.π προκύπτει ως μοναδική λύση ενός συστήματος s εξισώσεων. Υπάρχει ένα σύνολο από gradients$\{g^1, g^2, \ldots g^{s-1}\}$,όπου $\gamma^i \in \tilde{\Gamma}_H$, i =1,2,3…,s-1 ,έτσι ώστε αυτό το σύστημα των εξισώσεων να γραφεί ως ακολούθως:

$$\pi.\gamma' = \pi.\gamma^i \text{ , όπου } i = 1,2,3\ldots,s-1$$

και

$$\sum_{k=1}^{s} p_k = 1. \qquad \textbf{(Σ)}$$

με μοναδική λύση $\pi = \chi$.Σημειώνουμε ότι $\gamma^i \in \tilde{\Gamma}_H$, i =1,2,3…,s-1.

Θα δείξουμε ότι το χ είναι κορυφή της περιοχής $\tilde{R}_{g'}$,με εις άτοπον απαγωγή.

Θεωρούμε ότι το χ δεν είναι κορυφή της $\tilde{R}_{g'}$.Τότε υπάρχουν δ.π $\pi_1,\pi_2 \in \tilde{R}_{g'}$

$\pi_1 \neq \pi_2$ και $\lambda \in (0,1)$

έτσι ώστε:

$$\chi = \lambda.\pi_1 + (1-\lambda).\pi_2$$

Αν $s < N$, από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι τα π_1,π_2 έχουν N-s τελευταίες συνιστώσες μηδενικές (όπως το x).Επειδή το χ είναι κορυφή της περιοχής $\tilde{R}_{g'}$ αποκλείεται αμφότερα τα π_1,π_2 να ανήκουν στην $\tilde{R}_{g'}$. Εστω $\pi_1 \in \tilde{R}_{g'} - \tilde{R}_{g'}$.Τότε

$$\pi_1.\gamma' > \pi_1.\gamma^j \text{ για κάποιο } j \in \{1,2,3\ldots,s-1\}.$$

(γιατί αν $\pi_1.\gamma' = \pi_1.\gamma^i$,$1 \leq i \leq s-1$,τότε το π_1 θα ήταν επίσης λύση του συστήματος (Σ) πράγμα πού αντίκειται στη μοναδικότητα της λύσης χ).

Επίσης προφανώς: $\pi_2.\gamma' \geq \pi_2.\gamma^j$ (επειδή $\pi_2 \in \tilde{R}_{g'}$)

Επομένως,

$\chi.\gamma' = (\lambda.\pi_1 + (1-\lambda).\pi_2).\gamma' = \lambda.\pi_1.\gamma' + (1-\lambda).\pi_2.\gamma' > \lambda.\pi_1.\gamma^j + (1-\lambda).\pi_2.\gamma^j =$

$=(\lambda.\pi_1 + (1-\lambda).\pi_2).\gamma^j = \chi.\gamma^j$,

δηλαδή $\chi.\gamma' > \chi.\gamma^j$, πράγμα άτοπο.

Άρα το δ.π χ είναι κορυφή της περιοχής $\tilde{R}_{g'}$,πράγμα πού συνεπάγεται ότι $\chi \in E$.

Από (i) και (ii) έχουμε : $E' \subseteq E \cup C$

$\blacksquare$

Ορίζουμε το νέο σφάλμα προσέγγισης σ΄:

$$\sigma'(\pi) := H\upsilon(\pi) - \max_{\gamma \in \tilde{C}_H \cup G_{\hat{p}}} (\pi.\gamma), \quad \pi \in P.$$

Προφανώς $\sigma'(\pi) \leq \sigma(\pi) \quad \forall \pi \in P$.

Σημειώνουμε επίσης ότι το δ.π, $\hat{p} \in E$ για το οποίο μεγιστοποιείται το αρχικό σφάλμα σ, δηλ. $\sigma(\hat{p}) = \max_{p \in E} \sigma(\pi)$,έχει νέο σφάλμα ίσο με 0, δηλ, $\sigma'(\hat{p})=0$.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει την δυνατότητα να καθορίσουμε επακριβώς το σύνολο Ε΄ των κορυφών των νέων διευρυμένων περιοχών, πράγμα που είναι βασικό για τον αλγόριθμο που ακολουθεί.

Πρόταση **3.1.2:i)** Αν $\pi \in E$ και $\sigma'(\pi) = s(p)$, τότε $\pi \in E'$.

ii) Αν $\pi \in E, p \notin C$ και $\sigma'(\pi) < s(p)$, τότε $p \notin E'$.

Απόδειξη

i) Επειδή $\pi \in E$, το δ.π π είναι κορυφή (ακρότατο) κάποιας διευρυμένης περιοχής $\tilde{R}_{\gamma'}$, όπου $\gamma' \in \tilde{\Gamma}_H$.

Επειδή $\sigma'(\pi) = s(p)$, έχουμε

$$\pi.\gamma' = \max_{\gamma \in \tilde{\Gamma}_H} \{\pi.\gamma\} = \max_{g \in \tilde{G}_H \cap G_{p}} p.g \text{, άρα } \pi \in \tilde{R}'_{\gamma'}.$$

Επειδή το π είναι κορυφή της περιοχής $\tilde{R}_{\gamma'}$, δεν υπάρχουν $\pi', \pi'' \in \tilde{R}_{\gamma'}, \pi' \neq \pi''$, $\lambda \in (0,1)$ έτσι ώστε $\pi = \lambda.\pi' + (1-\lambda).\pi''$.

Επειδή $\tilde{R}'_{\gamma'} \subset \tilde{R}_{\gamma'}$ και $\pi \in \tilde{R}'_{\gamma'}$, έπεται ότι π είναι επίσης κορυφή της διευρυμένης περιοχής $\tilde{R}'_{\gamma'}$. Άρα το $\pi \in E'$.

ii) Θεωρούμε ότι $\pi \in E'$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Επειδή $p \notin C$, το **δ.π** ,π, είναι κορυφή κάποιας διευρυμένης περιοχής $\tilde{R}'_{\gamma'}$ όπου $\gamma' \in \tilde{\Gamma}_H$. Αυτό συνεπάγεται

$$\pi.g' \geq \pi.g \quad \forall g \in \mathring{G}_H \cap G_{p}.$$

Επομένως

$$\pi.g' = \max_{g \in \tilde{G}_H \cap G_{p}} p.g = \max_{\gamma \in \tilde{\Gamma}_H} \pi.\gamma \quad \text{και}$$

$$\sigma'(\pi) := H\upsilon(\pi) - \max_{g \in \tilde{G}_H \cap G_{p}} p.g = H\upsilon(\pi) - \max_{\gamma \in \tilde{\Gamma}_H} \pi.\gamma = \sigma(\pi),$$

που αντιβαίνει στην υπόθεση $\sigma'(\pi) < s(p)$. Άρα $p \notin E'$.

■

Από τις προτάσεις 3.1.1 και 3.1.2 συνάγεται ότι:

$$E' = C \cap \{p \in E : s'(p) = s(p)\} \qquad \textbf{3.1.6}$$

Στο σημείο αυτό, θέλουμε να επισημάνουμε ότι μπορούμε να σταματήσουμε και πιο πριν τον αλγόριθμο, επιλέγοντας έναν μικρό θετικό αριθμό ε (προκαθορισμένο σφάλμα) και απαιτώντας το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης να είναι μικρότερο ή ίσο του παραπάνω αριθμού ε (κριτήριο-τερματισμού).

3.2. Αλγόριθμος (ακρότατων σημείων) A_4

$\boxed{\textbf{ΒΗΜΑ 0}}$:Επιλέγουμε το προκαθορισμένο σφάλμα ε και ένα πεπερασμένο σύνολο από δ.π. $\tilde{E}$ (π.χ. τις κορυφές του Π έστω $e_1, e_2, \dots e_N$).Βρίσκουμε εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του ενός βήματος της ενότητας 2.2 τα "λειτουργικά gradients" και τα τοποθετούμε σε ένα σύνολο $\tilde{\Gamma}_H$. Για κάθε $\bar{\gamma} \in \tilde{\Gamma}_H$ βρίσκουμε την αντίστοιχη διευρυμένη περιοχή :

$$\tilde{R}_{\bar{\gamma}} = \{\pi \in \Pi : \pi.\bar{\gamma} \geq \pi.\gamma \quad \forall \gamma \in \tilde{\Gamma}_H\}.$$

καθώς και τις κορυφές (ακρότατα) αυτών των διευρυμένων περιοχών.
Τοποθετούμε αυτές τις κορυφές μέσα σε ένα σύνολο Ε.
$\boxed{\textbf{ΒΗΜΑ 1}}$:Βρίσκουμε το Ηυ(π) για κάθε $\pi \in E$ με τον αλγόριθμο του ενός βήματος.
$\boxed{\textbf{ΒΗΜΑ 2}}$:Υπολογίζουμε το $\sigma(\pi)=H\upsilon(\pi)- \max_{\gamma \in \tilde{\Gamma}_H} \pi.\gamma$ για τα $\pi \in E$.

Αν όλα τα σ(π) είναι μικρότερα η ίσα του ε πάμε στο βήμα 5,αλλιώς επιλέγουμε την κορυφή από το Ε, στην οποία το σφάλμα προσέγγισης σ μεγιστοποιείται και συμβολίζουμε την κορυφή αυτή με $\hat{\pi}$.

$\boxed{\textbf{ΒΗΜΑ3}}$:Βρίσκουμε τα «gradients» η «gradient» για το Ηυ($\hat{p}$) εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του ενός βήματος και τα τοποθετούμε στο σύνολο $\Gamma_{\hat{p}}$.Ορίζουμε το σύνολο $\tilde{\Gamma}'_H = \tilde{\Gamma}_H \cup \Gamma_{\hat{\pi}}$.Βρίσκουμε τις νέες διευρυμένες περιοχές που αντιστοιχούν στα «gradients» του $\tilde{\Gamma}'_H$:

Για $\gamma \in \tilde{\Gamma}'_H$,

$$\tilde{R}'_{\gamma} = \{\pi \in \Pi : \pi.\gamma \geq \pi.\gamma' \quad " \quad \gamma' \in \tilde{\Gamma}'_H \}.$$

Έστω C το σύνολο των κορυφών των νέων διευρυμένων περιοχών που αντιστοιχούν στα «gradients» του $\Gamma_{\hat{p}}$.

ΒΗΜΑ 4:Υπολογίζουμε σ΄(π)=Ηυ(π)- $\max_{g \in \Gamma_{\hat{p}}}$ π.γ για κάθε $\pi \in E \cup C$. Έστω Ε΄ το σύνολο των κορυφών που δίνεται από την (3.1.6).

Θέτουμε $\tilde{\Gamma}_H = \tilde{\Gamma}'_H$, Ε=Ε΄, σ=σ΄ και πηγαίνουμε στο βήμα 1.

ΒΗΜΑ 5:STOP.Η τιμή $\tilde{H}$υ(π) =max {π.γ **:**$\gamma \in \tilde{\Gamma}_H$} είναι μια προσέγγιση της Ηυ(π) με μέγιστο σφάλμα μικρότερο η ίσο από έναν δεδομένο μικρό θετικό αριθμό ε. Το σύνολο Ε περιέχει όλες τις κορυφές των διευρυμένων περιοχών για τα «gradients» στο $\tilde{\Gamma}_H$. Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι αν ε=0 τότε η συνάρτηση Ηυ καθορίζεται επακριβώς ($\tilde{H}$υ= Ηυ) και $\Gamma_H = \tilde{\Gamma}_H$.

Παρατηρήσεις:

1)Ο παραπάνω αλγόριθμος τερματίζεται μετά από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Πράγματι, έστω $\tilde{\Gamma}_H$ το σύνολο των λειτουργικών «gradients» για την συνάρτηση Ηυ που καθορίσθηκε σε κάποια επανάληψη και Ε το σύνολο των κορυφών των διευρυμένων περιοχών που αντιστοιχούν στα «gradients» του συνόλου $\tilde{\Gamma}_H$. Όταν επιλεγεί από το σύνολο Ε η κορυφή $\hat{p}$ στην οποία αντιστοιχεί το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης

$$s(\hat{p}) = \max_{p \in E} s(p) > e .$$

(όπου $e \geq 0$ είναι το προκαθορισμένο σφάλμα τερματισμού του αλγορίθμου),το σύνολο $\tilde{\Gamma}_H$ επικαιροποιείται με την προσθήκη του συνόλου $\Gamma_{\hat{p}}$ των «gradients» που είναι λειτουργικά για το δ.π $\hat{p}$. Επίσης επικαιροποιείται το σύνολο των κορυφών των νέων διευρυμένων περιοχών σύμφωνα με την σχέση 3.1.5. Επειδή $\tilde{\Gamma}_H \subseteq \Gamma_H$, $\Gamma_{\hat{p}} \subseteq \Gamma_H$ και το σύνολο Γ_H των λειτουργικών «gradients» που αντιπροσωπεύουν τη συνάρτηση Ηυ είναι πεπερασμένο, συνάγεται ότι απαιτείται πεπερασμένος αριθμός επαναλήψεων για να περατωθεί ο αλγόριθμος.

Στην τελική επανάληψη (βήμα τερματισμού) έχουμε:

$$\max_{p \in E} s(p) \leq e$$

Αν $e = 0$ (μηδενικό προκαθορισμένο σφάλμα),τότε στην τελική επανάληψη έχουμε

$$\max_{p \in E} s(p) = 0,$$

και από το θεώρημα 3.1.1 συνάγεται ότι:

$$\sigma(\pi) = \mathrm{H}\upsilon(\pi) - \widetilde{H}\upsilon(\pi) = 0 \quad \forall\ \pi \in \Pi.$$

Επομένως επιτυγχάνεται ακριβής υπολογισμός της συνάρτησης Ηυ ($\widetilde{H}\upsilon$= Ηυ) $\Gamma_H = \widetilde{\Gamma}_H$ και οι διευρυμένες περιοχές συμπίπτουν με τις αντίστοιχες συσχετισμένες, δηλαδή:

$$\widetilde{R}_g = R(g, \Gamma_H) \qquad \forall\ \gamma \in \widetilde{\Gamma}_H\ (=\Gamma_H).$$

Αν $e > 0$,τότε από το θεώρημα 3.1.1 προκύπτει ότι στην τελική επανάληψη,

$$0 \le \sigma(\pi) = \mathrm{H}\upsilon(\pi) - \widetilde{H}\upsilon(\pi) \le e \quad \forall\ \pi \in \Pi.$$

Η προσέγγιση $\widetilde{H}\upsilon$ της συνάρτησης Ηυ προσδιορίζεται από το σύνολο $\widetilde{\Gamma}_H \supseteq \Gamma_H$. Επιπλέον οι διευρυμένες περιοχές δεν συμπίπτουν εν γένει με τις αντίστοιχες συσχετισμένες: $\widetilde{R}_g \supseteq R(\gamma, \Gamma_H), \gamma \in \widetilde{\Gamma}_H$.

2)Άριστη ή σχεδόν άριστη συνάρτηση ελέγχου $\tilde{d}$ για τη συνάρτηση $\widetilde{H}\upsilon$ επιτυγχάνεται όταν $e = 0$ ή $e > 0$ αντίστοιχα και καθορίζεται στο βήμα τερματισμού. Σε κάθε περίπτωση η άριστη (ή σχεδόν) άριστη συνάρτηση ελέγχου επιλέγει για μια διευρυμένη περιοχή τη φέρουσα απόφαση του αντίστοιχου «gradient».

Πιο συγκεκριμένα, για $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_H$ έχουμε:

$$\widetilde{H}\upsilon(\pi) = \pi.\gamma \qquad \forall\ \pi \in \widetilde{R}_g$$

οπότε $$\tilde{d}(p) = a, \qquad \forall\ \pi \in \widetilde{R}_g,$$

όπου ,α, είναι η φέρουσα απόφαση του «gradient» γ (πρβλ. κεφ. 2).

Σημειώνουμε ακόμη ότι:

$$\widetilde{H}\upsilon(\pi) = H_{\tilde{d}}u(p) = p.q^{\tilde{d}} + b.\sum_{q \in Q} \{q/p, \tilde{d}\}.u(T(p,q,\tilde{d})), p \in P.$$

3.3. Εφαρμογή του αλγορίθμου των ακροτάτων σημείων

Στο πρόβλημα που θα ακολουθήσει έχουμε τρεις δυνατές αποφάσεις, δύο μηνύματα. Οι πίνακες μεταφοράς, μηνυμάτων καθώς και τα άμεσα κόστη φαίνονται παρακάτω:

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3.1

$$P^1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad R^1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \qquad q^1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \qquad R^2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \qquad q^2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad R^3 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad q^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta=1, \quad \Gamma=\{\gamma^1,\gamma^2 : \gamma^1=[4,5]^T \quad \gamma^2=[3,9]^T\}$$

Θεωρούμε το σύνολο $\widetilde{E}$ ={(0,1),(1,0)}.Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του ενός βήματος βρίσκουμε τα λειτουργικά «gradients» στα εν λόγω σημεία και είναι για το (0,1) το $(0.2,11)^T$ και για το (1,0) το $(4.62, 7.91)^T$. Άρα θα έχουμε ότι:

$$\widetilde{\Gamma}_H = \{(0.2, 11)^T, (4.62, 7.91)^T\}.$$

Έστω $\widetilde{R}_1$ η διευρυμένη περιοχή για το $(0.2,11)^T$ και $\widetilde{R}_2$ η διευρυμένη περιοχή για το $(4.62, 7.91)^T$

όπου : $\widetilde{R}_1 = \{\pi \in \Pi : \pi_1+\pi_2 =1$ και $0.2\pi_1+11\,\pi_2 \geq 4.62.\,\pi_1 + 7.92\,\pi_2\}$.

Το σύνολο των κορυφών των δύο διευρυμένων περιοχών είναι :

E={(0,1),(0.41,0.59),(1,0)}.Από τα βήματα 1 και 2 υπολογίζουμε το σφάλμα για όλες τις κορυφές και το μέγιστο σφάλμα παρατηρείται για την κορυφή $\hat{\pi}$=(0.41,0.59): $\sigma(\hat{\pi})=0.74>0$. Με το βήμα 3 βρίσκουμε το λειτουργικό «gradient» που αντιστοιχεί στην $\hat{\pi}$ εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του ενός βήματος και είναι το $(4, 9.6)^T$. Δηλαδή $\Gamma_{\hat{\pi}}=\{(4, 9.6)^T\}$.

Άρα $\widetilde{\Gamma}'_H = \widetilde{\Gamma}_H \cup \Gamma_{\hat{\pi}} = \{(0.2,11)^T, (4, 9.6)^T, (4.62, 7.91)^T\}$

Οι κορυφές για την διευρυμένη περιοχή του $(4,9.6)^T$ είναι (0.27,0.73)και (0.73,0.27). Τοποθετούμε τις δύο αυτές κορυφές στο σύνολο C. Υπολογίζουμε τα σ΄([0.27,0.73]) και σ΄([0.73,0.27]) που βγαίνουν 0. Αρα τα «gradients» για την αντιπροσώπευση του Ηυ(π) είναι τα $(0.2,11)^T$, $(4, 9.6)^T$, $(4.62, 7.91)^T$. Οι φέρουσες αποφάσεις που αντιστοιχούν στα παραπάνω «gradients» είναι αντίστοιχα οι 1,2,3.Αφού έχουμε $e = 0$,επομένως οι τελικές συσχετιζόμενες ή υποστηρίζουσες περιοχές των «gradients» $\Gamma_H = \tilde{\Gamma}_H = \{(0.2,11)^T, (4,9.6)^T, (4.62,7.91)^T\}$ ταυτίζονται με τις διευρυμένες περιοχές. Δηλαδή:

$$\tilde{R}_{\gamma} \subseteq R(\gamma, \Gamma_H),\ \gamma \in \tilde{\Gamma}_H = \Gamma_H$$

Η διευρυμένη περιοχή $\tilde{R}_{(0.2,11)^T}$ έχει κορυφές τα δ.π :(0,1), (0.27, 0.73).

Η διευρυμένη περιοχή $\tilde{R}_{(4,\,9.6)^T}$ έχει κορυφές τα δ.π :(0.27, 0.73), (0.73,0.27).

Η διευρυμένη περιοχή $\tilde{R}_{(4.62,\,7.91)^T}$ έχει κορυφές τα δ.π :(0.73,0.27), (1,0).

Και οι 4 κορυφές στο σύνολο Ε΄, είναι οι (0,1), (0.27, 0.73), (0.73,0.27), (1,0).

3.4. Υπολογισμός του συσσωρευμένου σφάλματος της προσέγγισης για την συνάρτηση του μέγιστου αναμενόμενου ολικού οφέλους για δοσμένο χρονικό ορίζοντα.

Στην παράγραφο 3.1 περιγράψαμε έναν τρόπο υπολογισμού της συνάρτησης Ηυ(π),$\pi \in P$,όπου υ(π), $\pi \in P$ είναι γνωστή κατά τμήματα γραμμική και κυρτή συνάρτηση, σε διαδοχικά βήματα, υπολογίζοντας σε κάθε βήμα το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης επιθεωρώντας τα ακρότατα σημεία διευρυμένων περιοχών. Μέσω του αλγορίθμου των ακρότατων σημείων μπορούμε να βρούμε μια προσέγγιση $\tilde{H}\upsilon$ της Ηυ με προκαθορισμένο σφάλμα $\varepsilon > 0$ ή να υπολογίσουμε επακριβώς τη συνάρτηση Ηυ (ε=0). Σε κάθε περίπτωση,

$$\tilde{H}\upsilon(\pi) \le H\upsilon(\pi) \le \tilde{H}\upsilon(\pi) + \varepsilon \quad \forall\ \pi \in P\ .$$

Σημειώνουμε ότι η προσέγγιση $\tilde{H}\upsilon$ είναι κατά τμήματα γραμμική και κυρτή συνάρτηση.

Αν αντί για την συνάρτηση υ διαθέτουμε μια προσεγγιστική συνάρτηση $\tilde{u}$,κατά τμήματα γραμμική και κυρτή, με σφάλμα προσέγγισης $e' \ge 0$:

$$\tilde{u}(\pi) \le u(p) \le \tilde{u}(\pi) + e' \quad \forall\ \pi \in P\ . \qquad \textbf{3.4.1}$$

(για $e'=0$, προφανώς $\tilde{u} = u$),θα υπολογίσουμε το συσσωρευμένο σφάλμα της προσέγγισης $\tilde{H}\tilde{u}$ για τη Ηυ. Από τη σχέση (3.4.1)και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο τελεστής Η είναι ισότονος, παίρνουμε:

$$H\tilde{u}(\pi) \le H\upsilon(\pi) \le H(\tilde{u}(\pi) + \varepsilon') \quad \forall\ \pi \in P\ .$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης γράφεται:

$$H(\tilde{u}(\pi)+\varepsilon') = \max_{\alpha \in A}\{\pi.\theta^{\alpha} + \beta.\sum_{\theta \in \Theta} \{\theta/\pi,\alpha\}.(\tilde{u}(T(\pi,\theta,\alpha)) + \varepsilon')\} =$$

$$= \max_{\alpha \in A}\{\pi.\theta^{\alpha} + \beta.\sum_{\theta \in \Theta} \{\theta/\pi,\alpha\}.(\tilde{u}(T(\pi,\theta,\alpha)) + \beta.\varepsilon'\} =$$

$$= H\tilde{u}(\pi) + \beta.\,\varepsilon'$$

Επομένως,

$$H\tilde{u}(\pi) \leq H\upsilon(\pi) \leq H\tilde{u}(\pi)+\beta.\varepsilon' \quad \forall\ \pi \in P . \qquad \textbf{3.4.2}$$

Για την μέσω του αλγορίθμου των ακρότατων σημείων προσέγγιση $\widetilde{H}\tilde{u}$ της $H\tilde{u}$ με προκαθορισμένο σφάλμα $\varepsilon \geq 0$, έχουμε:

$$\hat{H}\tilde{u}(\pi) \leq H\tilde{u}(\pi) \leq \hat{H}\tilde{u}(\pi) + \varepsilon \quad \forall\ \pi \in P . \qquad \textbf{3.4.3}$$

Από τις σχέσεις (3.4.2) και (3.4.3) παίρνουμε:

$$\hat{H}\tilde{u}(\pi) \leq H\tilde{u}(\pi) \leq H\upsilon(\pi) \leq H\tilde{u}(\pi) + \beta.\varepsilon' \leq \hat{H}\tilde{u}(\pi) + \varepsilon + \beta.\varepsilon', \ \forall\ \pi \in P$$

δηλαδή

$$\hat{H}\tilde{u}(\pi) \leq H\upsilon(\pi) \leq \hat{H}\tilde{u}(\pi) + \varepsilon + \beta.\varepsilon', \ \forall\ \pi \in P . \qquad \textbf{3.4.4}$$

Συνοψίζοντας, αν πάρουμε την προσέγγιση $\tilde{u}$ της υ με σφάλμα προσέγγισης $\varepsilon' \geq 0$ (πρβλ. σχέση 3.4.1), τότε η προσέγγιση $\hat{H}\tilde{u}$ της $H\tilde{u}$ μέσω του αλγορίθμου των ακρότατων σημείων με προκαθορισμένο σφάλμα $\varepsilon \geq 0$, αποτελεί προσέγγιση της Ηυ με σφάλμα $\varepsilon + \beta.\varepsilon'$ (σχέση 3.4.4). Το παραπάνω αποτέλεσμα εφαρμόζεται για να υπολογίσουμε το σφάλμα προσέγγισης της συνάρτησης V_t του μέγιστου αναμενόμενου ολικού οφέλους για τον χρονικό ορίζοντα t.

Συμβολίζουμε με σ_t το συσσωρευμένο σφάλμα της προσεγγιστικής συνάρτησης $\hat{V}_t=\hat{H}\hat{V}_{t-1}$ για τη συνάρτηση $V_t=HV_{t-1}$, t=1,2,3…,

Δηλαδή

$$\hat{V}_t(\pi) \leq V_t(\pi) \leq \hat{V}_t(\pi)+\sigma_t \quad \forall\ \pi \in P . \qquad \textbf{3.4.5}$$

Αν επιλέξουμε $\varepsilon \geq 0$ ως το προκαθορισμένο σφάλμα προσέγγισης στον αλγόριθμο των ακρότατων σημείων, τότε ισχύει η ακόλουθη αναγωγική σχέση.

$$\sigma_t = \varepsilon + \beta.\sigma_{t-1}, \ t=1,2,\ldots \qquad \textbf{3.4.6}$$

Για t=0, ως συνάρτηση κέρδους στον τερματισμό επιλέγουμε συνήθως την μηδενική συνάρτηση ή γενικότερα μια γνωστή συνάρτηση (έστω u), δηλαδή:

$$V_0(\pi)=\pi.q \quad \forall\ \pi \in P \ ,$$

όπου q είναι το διάνυσμα εσόδων στον τερματισμό.

Προφανώς το σφάλμα για t=0 είναι:

$$\sigma_0 = 0$$

Από την (3.3.6) παίρνουμε: $\sigma_t = (1+\beta+\ldots+\beta^{t-1}).\varepsilon \ , t \geq 1$

Επομένως

$$\sigma_t = \begin{cases} \dfrac{1-\beta^t}{1-\beta}.\varepsilon & ,\acute{\alpha}\nu \quad \beta \in (0,1) \\ t.\varepsilon & ,\acute{\alpha}\nu \quad \beta = 1 \end{cases} \qquad \textbf{3.4.7}$$

Ας θεωρήσουμε ένα επιθυμητό άνω φράγμα $h > 0$ για το σφάλμα προσέγγισης της συνάρτησης V_T στον χρονικό ορίζοντα T. Μπορούμε τότε να επιλέξουμε το προκαθορισμένο σφάλμα $\varepsilon \geq 0$ του αλγορίθμου των ακρότατων σημείων ώστε:

$$\sigma_T \leq h$$

Από την (3.4.7) παίρνουμε: $\varepsilon \leq \dfrac{1-\beta}{1-\beta^T}.\eta$ αν $\beta \in (0,1)$

και $\varepsilon \leq \dfrac{h}{T}$ αν $\beta = 1$.

Αν θέσουμε ένα άνω φράγμα $h > 0$ για το σφάλμα προσέγγισης της συνάρτησης V_t για κάθε χρονικό ορίζοντα t=1,2,…, τότε μπορούμε να επιλέξουμε το προκαθορισμένο σφάλμα ε του αλγορίθμου των ακρότατων σημείων ώστε:

$$\sigma_t \leq h \quad \forall\ t=1,2,3\ldots \qquad \textbf{3.4.8}$$

στην περίπτωση όπου ο συντελεστής έκπτωσης $\beta \in (0,1)$.

Η (3.4.8) ισοδυναμεί με την σχέση $\dfrac{1}{1-\beta}.\varepsilon \leq h$,όπου το προκαθορισμένο σφάλμα ε μπορεί να επιλεγεί ώστε :

$$\varepsilon \leq (1-\beta).h .$$

3.5.Εφαρμογή του αλγορίθμου των ακρότατων σημείων στον υπολογισμό της συνάρτησης ελάχιστου κόστους για πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα.

Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο χρονικό ορίζοντα $t \geq 1$ η συνάρτηση V_t του ελάχιστου αναμενόμενου ολικού κόστους είναι γνωστή.Τίθεται το πρόβλημα υπολογισμού της συνάρτησης του ελάχιστου αναμενόμενου ολικού κόστους για τον χρονικό ορίζοντα t+1,

$$V_{t+1}=HV_t$$

(όπου H είναι τελεστής ελαχιστοποίησης)

Γενικότερα, έστω $\upsilon(\pi)$, $\pi \in \Pi$ μια κατά τμήματα γραμμική και κοίλη συνάρτηση. Επομένως η συνάρτηση υ αντιπροσωπεύεται μέσω ενός πεπερασμένου συνόλου Γ από «gradients» και

$$\upsilon(\pi)=\min\{\pi.\gamma\mathbf{:}\ \gamma\in\Gamma\}.$$

Ο χώρος Π διαμερίζεται σε κυρτές περιοχές W_γ ,$\gamma\in\Gamma$ έτσι ώστε:

$$\upsilon(\pi)= \pi.\gamma \quad \forall \pi \in W_\gamma$$

Η συνάρτηση

$$H\upsilon(\pi) = \min_{\alpha\in A}\left\{\pi.c^{\alpha} + \beta.\sum_{q\in Q}\sigma\{q/\pi,\alpha\}.\upsilon(T(\pi,q,\alpha))\right\}, \pi\in \Pi ,$$

όπου c^{α} το διάνυσμα άμεσου κόστους, πού αντιστοιχεί στην απόφαση α (το οποίο θεωρείται διάνυσμα στήλη) και β ο συντελεστής έκπτωσης (discound-factor) $(0<\beta \leq 1)$ είναι επίσης κατά τμήματα γραμμική και κοίλη.

Το πρόβλημα υπολογισμού της συνάρτησης Hυ ανάγεται στον προσδιορισμό του συνόλου των λειτουργικών «gradients» Γ_H για την συνάρτηση Hυ, και των αντίστοιχων περιοχών αντιπροσώπευσης της Hυ. Για να βρούμε το παραπάνω σύνολο των «gradients» Γ_H που υποστηρίζουν την Hυ ακολουθούμε την ίδια πορεία με εκείνη πού περιγράψαμε στην ενότητα 3.1.Οι μόνες αναγκαίες τροποποιήσεις αφορούν τους ορισμούς των διευρυμένων περιοχών και του σφάλματος προσέγγισης. Επιλέγουμε αρχικά ένα πεπερασμένο σύνολο δ.π. (Για παράδειγμα μπορούμε να επιλέξουμε τις κορυφές $e_1 = (1,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,...,0)$, ... $e_N = (0,0,...,1)$ του χώρου

Π των δ.π). Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο A_3 του ενός βήματος του κεφαλαίου 2 υπολογίζουμε τα λειτουργικά «gradients» της Ηυ που αντιστοιχούν σε αυτά τα δ.π. Συμβολίζουμε με $\widetilde{\Gamma}_H$ το παραπάνω σύνολο των «gradients» της Ηυ. Η **διευρυμένη περιοχή** ενός «gradient» $\hat{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}_H$ ορίζεται ως το κυρτό πολύεδρο του χώρου R^N:

$$\widetilde{R}\,\hat{\gamma} = \{\pi \in \Pi : \pi.\hat{\gamma} \le \pi.\gamma \quad \forall \gamma \in \widetilde{\Gamma}_H\} \qquad \textbf{3.5.1}$$

Αν η συνάρτηση $\widetilde{H}\upsilon(\pi) = \min\{\pi.\gamma : \gamma \in \widetilde{\Gamma}_H\}$, $\forall\ \pi \in \Pi$ χρησιμοποιείται για να προσεγγίσει τη συνάρτηση

$$H\upsilon = \min\{\pi.\gamma : \gamma \in G_H\},\ \pi \in \Pi$$

τότε το σφάλμα αυτής της προσέγγισης ορίζεται ως η συνάρτηση

$$s(p) := \widetilde{H}\upsilon(\pi) - H\upsilon(\pi),\ \pi \in \Pi$$

Επειδή $\widetilde{\Gamma}_H \subseteq G_H$, έχουμε $Hu(p) \le \widetilde{H}u(p) \quad \forall p \in P$

Και επομένως $\qquad s(p) \ge 0, \ \forall p \in P$

Οι προτάσεις της ενότητας 3.1 (λήμμα 3.1.1,θεώρημα 3.1.1,πρόταση 3.1.1, πρόταση 3.1.2) αληθεύουν στην περίπτωσή μας με προφανείς αλλαγές λόγω τροποποιήσεων στους ορισμούς των διευρυμένων περιοχών και του σφάλματος προσέγγισης. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο των ακρότατων σημείων της ενότητας 3.2 βρίσκουμε μια προσέγγιση $\widetilde{H}\upsilon$ της Ηυ με προκαθορισμένο σφάλμα $e \ge 0$:

$$\widetilde{H}u(p) - e \le Hu(p) \le \widetilde{H}u(p) + e \quad \forall p \in P$$

(Για $e = 0$,προφανώς $H\upsilon = \widetilde{H}\upsilon$ $\Gamma_H = \widetilde{\Gamma}_H$)

Ακολουθώντας παρόμοια μέθοδο όπως στην ενότητα 3.4,υπολογίζουμε το συσσωρευμένο σφάλμα σ_t της προσεγγιστικής συνάρτησης $\widetilde{V}_t = \widetilde{H}\widetilde{V}_{t-1}$ για την συνάρτηση $\qquad V_t = HV_{t-1} \quad$ t=1,2,..

$$\widetilde{V}_t(p) - s_t \le V_t(p) \le \widetilde{V}_t(p) \quad \forall p \in P$$

Αν $e \ge 0$ είναι το προκαθορισμένο σφάλμα στον αλγόριθμο των ακρότατων σημείων, τότε ισχύει η αναγωγική σχέση (3.3.6) από την οποία προκύπτει η (3.3.7).Όπως και στην ενότητα 3.4, μπορούμε να επιλέξουμε το προκαθορισμένο $e \ge 0$,έτσι ώστε το συσσωρευμένο σφάλμα προσέγγισης να είναι μικρότερο ή ίσο από ένα επιθυμητό φράγμα για οποιοδήποτε χρονικό ορίζοντα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με τον αλγόριθμο των ακροτάτων σημείων αυτού του κεφαλαίου υπολογίζουμε επακριβώς ή προσεγγιστικά τη συνάρτηση Ηυ -όπου Η είναι τελεστής μεγιστοποίησης (ελαχιστοποίησης) και υ είναι κατά τμήματα γραμμική κυρτή (κοίλη) συνάρτηση για προβλήματα εσόδων (κόστους)- σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Σε κάθε επανάληψη προσδιορίζουμε τα ακρότατα (κορυφές) των διευρυμένων περιοχών των λειτουργικών «gradients»για την Ηυ, που ήδη έχουμε εντοπίσει, και υπολογίζουμε το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης επιθεωρώντας αυτά τα ακρότατα.

Ακολούθως εμπλουτίζουμε το σύνολο των «gradients» που ήδη έχουμε εντοπίσει, με νέα λειτουργικά «gradients» και προσδιορίζουμε τα ακρότατα των νέων διευρυμένων περιοχών. Το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης μειώνεται σε διαδοχικές επαναλήψεις και η διαδικασία τερματίζεται όταν αυτό γίνει μικρότερο ή ίσο από ένα προκαθορισμένο αριθμό e^{3} 0.Η πορεία που ακολουθούμε με τον αλγόριθμο αυτό είναι αντίθετη από την μέθοδο των Smallwood-Sondik-Lovejoy,που ξεκινά με ένα πολυπληθές σύνολο από εν δυνάμει «gradients»και κατόπιν διαδοχικών απαλοιφών καταλήγει στην ελάχιστη αντιπροσώπευση Γ_H.

Με τη βοήθεια του αλγορίθμου επιτυγχάνεται προσέγγιση της συνάρτησης του μέγιστου (ελάχιστου) αναμενόμενου ολικού εκπίπτοντος κέρδους (κόστους) για οποιοδήποτε χρονικό ορίζοντα. Το συσσωρευμένο σφάλμα προσέγγισης υπολογίζεται μέσω απλής αναγωγικής σχέσης. Το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου αποτελεί η δυνατότητα επιλογής του προκαθορισμένου σφάλματος e,έτσι ώστε το συσσωρευμένο σφάλμα προσέγγισης για οποιοδήποτε χρονικό ορίζοντα να μην υπερβαίνει ένα επιθυμητό φράγμα. Αυτή η ιδιότητα, θα αξιοποιηθεί στο κεφάλαιο 4 για την προσέγγιση της βέλτιστης συνάρτησης τιμών, αναφορικά με το κριτήριο του ολικού εκπίπτοντος οφέλους (κόστους) για άπειρο χρονικό ορίζοντα