# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

## *Εφαρμογές των POMDPs σε βέλτιστες πολιτικές επιλογής διδακτικών μεθόδων*

### Περίληψη

Οι POMDPs είναι μοντέλα σχεδιασμού και λήψης αποφάσεων σε συστήματα όπου κυρίαρχο στοιχείο είναι η αβεβαιότητα όσον αφορά την κατάσταση ενός συστήματος. Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση εφαρμογής έχουμε σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού και λήψης αποφάσεων σε ένα εκπαιδευτικό σύστημα βλέπε και Goulionis [37].

Μελετάμε ένα πρόβλημα επιλογής ανάμεσα σε δύο διδακτικές μεθόδους, μία συμβατική και φθηνή και μία εξειδικευμένη και δαπανηρή (π.χ.ενισχυτική,εξατομικευμένη, υποστηριζόμενη από υπολογιστές διδασκαλία κ.λ.π).Το πρόβλημα αυτό τίθεται στη μορφή μερικά παρατηρήσιμης Μαρκοβιανής διαδικασίας αποφάσεων (POMDP) με δύο δυνατές καταστάσεις ,αναφορικά με το βαθμό αφομοίωσης της διδασκόμενης ύλης από την τάξη και δύο μηνύματα (π.χ. επιτυχία/αποτυχία σε test).Υπολογίζεται αναλυτικά η συνάρτηση του ελάχιστου αναμενόμενου ολικού εκπίπτοντος κόστους για άπειρο χρονικό ορίζοντα,και προσδιορίζεται η αντίστοιχη άριστη πολιτική επιλογής διδακτικών μεθόδων σε δύο περιπτώσεις:**α)**περίπτωση πλήρους αβεβαιότητας, όπου το μήνυμα (π.χ. αποτέλεσμα ενός test) είναι ανεξάρτητο από την κατάσταση της τάξης είτε επιλέγεται

η συμβατική, είτε η εξειδικευμένη μέθοδος διδασκαλίας και **β)** περίπτωση πλήρους αβεβαιότητας όταν επιλέγεται η συμβατική μέθοδος ,και μερικής πληροφόρησης όταν επιλέγεται η εξειδικευμένη μέθοδος διδασκαλίας.

## 9.1. Περιγραφή του προβλήματος επιλογής διδακτικών μεθόδων

Στην διαμόρφωση των φυσικών συστημάτων η αρχή της κατάστασης του φυσικού συστήματος, έχει αποδειχθεί ένα πολύτιμο εργαλείο για τον χαρακτηρισμό της λειτουργικότητας του συστήματος. Αυτή η ιδέα είναι επίσης ουσιαστική στην περιγραφή της μαθησιακής διαδικασίας σε μια τάξη. Η κατάσταση μιας τάξης αποτελεί μέτρο της μαθησιακής κατάστασης των μαθητών που την απαρτίζουν.Η εσωτερική κατάσταση κάθε μαθητή συνυφαίνεται με διάφορους παράγοντες, όπως κληρονομικές καταβολές, οικογενειακός και γενικότερα κοινωνικός περίγυρος, προσωπικό μοντέλο σκέψης, υπόβαθρο γνώσεων του μαθητού, συναισθηματική ζωή και γενικότερα ψυχολογικοί παράγοντες.

Η κατάσταση της τάξης εξαρτάται από την επικοινωνία του διδάσκοντος με τους μαθητές, από την διδακτική μέθοδο που χρησιμοποιείται, από το πνεύμα ομαδικότητας των μαθητών, αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθητών κ.λ.π. Το κυρίαρχο στην διαμόρφωση αρμονικής, και πολυδιάστατης σχέσης ανάμεσα στους μαθητές είναι ο διδάσκων. Ο μαθητής δεν είναι για τον διδάσκοντα ένα σακκούλι, που πρέπει να γεμίσει με γνώσεις, αλλά ένα σπίρτο που ο διδάσκων πρέπει να το ανάψει.

Για τον διδάσκοντα η κατάσταση της τάξης σημαίνει βασικά το βαθμό αφομοίωσης της διδασκόμενης ύλης. Επειδή, όπως επισημάναμε παραπάνω, η κατάσταση της τάξης είναι πολυπαραγοντική θεωρείται άγνωστη. Ωστόσο ο διδάσκων μπορεί να πάρει μία εικόνα αυτής της κατάστασης μέσω κάποιων μηνυμάτων, όπως π.χ επιδόσεις σε tests.Στα υποδείγματα που θα μελετήσουμε θεωρούμε δύο δυνατές καταστάσεις για την τάξη:καλή και κακή, που αντανακλούν υψηλό και χαμηλό βαθμό αφομοίωσης της διδασκόμενης ύλης και κωδικοποιούνται αντίστοιχα ως 1 και 2.

Θεωρούμε επίσης δύο τύπους μηνυμάτων που κωδικοποιούνται ως 1,2. Θεωρούμε ότι το μήνυμα τύπου 1,(θ=1), είναι ευνοϊκό για την κατάσταση 1 (καλή κατάσταση της τάξης), ενώ το μήνυμα τύπου 2,(θ=2), είναι ευνοϊκό για την κατάσταση 2,(κακή κατάσταση της τάξης).

Τα είδη μηνυμάτων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι ποικίλα. Για παράδειγμα αν το μήνυμα εκφράζεται μέσω των αποτελεσμάτων ενός test,που διενεργεί ο διδάσκων στην τάξη, τότε έχουμε μήνυμα τύπου 1 (θ=1),αν το ποσοστό της επιτυχίας είναι πάνω από ένα κρίσιμο όριο π.χ επιτυχία στο test που υπερβαίνει το 60%,ενώ έχουμε μήνυμα τύπου 2,αν το ποσοστό της επιτυχίας είναι μικρότερο από το κρίσιμο. ΄Αλλα είδη μηνυμάτων είναι ο βαθμός συμμετοχής στην τάξη, η γλώσσα του σώματος, οι τυχόν πρωτοβουλίες που λαμβάνουν οι μαθητές σχετικά με την διδασκαλία του μαθήματος, εφόσον εκφρασθούν ποσοτικά.

Στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου επιλέγεται μία απόφαση (μέθοδος διδασκαλίας) από ένα σύνολο A={0,1} όπου οι κωδικοποιήσεις 0,1 είναι:

**0:** συμβατική μέθοδος διδασκαλίας

**1:** εξειδικευμένη μέθοδος διδασκαλίας.

Ο περιορισμός σε δύο διδακτικές μεθόδους γίνεται για λόγους απλότητας. Η συμβατική μέθοδος διδασκαλίας θεωρείται φθηνή, ενώ η εξειδικευμένη μέθοδος σχετικά ακριβή και παρέχεται σε ποικίλες μορφές όπως ενισχυτική, εξατομικευμένη, υποστηριζόμενη από υπολογιστές, διδασκαλία που δεν περιορίζεται μόνο στο περιβάλλον του σχολείου αλλά ενισχύεται με δραστηριότητες όπως επισκέψεις σε μουσεία, ιδρύματα ερευνών ,εργαστήρια κ.λ.π.

Αν $i$ είναι η κατάσταση της τάξης και $\alpha$ η απόφαση, τότε τα άμεσα κόστη $C(i,\alpha)$, $i=1,2$ , $\alpha=0,1$ είναι:

$$C(1,0)=0,\ C(2,0)=C,\ C(1,1)=C(2,1)=R.$$

με $0<C<R$ .

Το κόστος C αντανακλά την έλλειψη προσφοράς ευκαιριών και δυνατοτήτων της συμβατικής διδακτικής μεθόδου, στην οποία ενδέχεται να οφείλεται-μερικά τουλάχιστον- η κακή κατάσταση της τάξης.

Η επίδραση των διδακτικών μεθόδων στην κατάσταση της τάξης εκφράζεται μέσω των πινάκων μετάβασης $P^{a} = (p_{ij}^{a})$ $\alpha = 0,1$ . Θεωρούμε ότι :

$$P^{0} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad P^{1} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

όπου $0 < \lambda < 1$.

Οι πίνακες μετάβασης ενσωματώνουν την ποιοτική διαφορά ανάμεσα στις δύο διδακτικές μεθόδους. Έτσι με τη συμβατική μέθοδο διδασκαλίας η πιθανότητα μετάβασης από την κακή στην καλή κατάσταση θεωρείται μηδενική ( $p_{21}^{0} = 0$ ), ενώ με την εξειδικευμένη μέθοδο η αντίστοιχη πιθανότητα μετάβασης θεωρείται μη μηδενική ( $p_{21}^{1} = 1 - \lambda > 0$ ). Σημειώνουμε ότι η θεώρηση αυτή δεν αφορά κάθε μαθητή μεμονωμένα αλλά την τάξη ως σύνολο.

Οι πίνακες μηνυμάτων $R^{a} = (r_{i\theta}^{\alpha}), \alpha = 0,1$ θεωρούμε ότι έχουν τη μορφή

$$R^{a} = \begin{pmatrix} q^{a} & 1-q^{a} \\ 1-q^{a} & q^{a} \end{pmatrix}, \alpha = 0,1,$$

και υποτίθενται TP2 ,δηλαδή $q^{a} \in [\frac{1}{2},1]$ $,\alpha = 0,1$.

Η ποσότητα $q^{a}$ δηλώνει την πιθανότητα να πάρουμε μήνυμα συμβατό με την κατάσταση της τάξης:

$$r_{11}^{a} = r_{22}^{a} = q^{a} \quad ,\alpha = 0,1.$$

Όπως και στα Κεφ 7 και 8, θα εργαζόμαστε με την δεύτερη συνιστώσα του δ.π π =(1-p,p) ,p, που δηλώνει την πιθανότητα η τάξη να βρίσκεται στην κατάσταση 2 (κακή κατάσταση).Παρόμοια εργαζόμαστε με τη δεύτερη συνιστώσα του α *posteriori* δ.π.

$$T(\pi,\theta,\alpha) = (\mathrm{T}_1(\pi,\theta,\alpha),\mathrm{T}_2(\pi,\theta,\alpha)),$$

την οποία συμβολίζουμε με $T(p,\theta,\alpha)$,*δηλαδή*

$$T(p,\theta,\alpha) \equiv T_2(\pi,\theta,\alpha)$$

εκφράζει την *α posteriori* πιθανότητα η τάξη στην επόμενη χρονική περίοδο (t+1) να βρεθεί στην κατάσταση 2 δοσμένου ότι στον ίδιο χρόνο (t+1) παίρνουμε μήνυμα θ

και ότι στον τρέχοντα χρόνο (t) η πιθανότητα για την κατάσταση 2 είναι p και επιλέγουμε την διδακτική μέθοδο *α*.
Η ποσότητα {θ/p,*α*} εκφράζει την πιθανότητα το μήνυμα που θα ληφθεί στην επόμενη χρονική περίοδο (t+1) να είναι θ, δοσμένου ότι στον τρέχοντα χρόνο (t) η πιθανότητα για την κατάσταση 2 είναι $p$ και επιλέγουμε τη διδακτική μέθοδο *α*.
Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (7.1.1),(7.1.2),(7.1.3) του κεφαλαίου 7 παίρνουμε:
Για $0 \leq p \leq 1$,

$$T(p,\theta=1,\alpha=0)=\frac{(1-q^0).(\lambda+(1-\lambda).p)}{(1-\lambda).q^0+\lambda(1-q^0)+(1-\lambda).(1-2q^0).p}. \qquad \textbf{9.1.1}$$

$$\{\theta=1/p,a=0\}=(1-\lambda).q^0+\lambda.(1-q^0)+(1-\lambda).(1-2q^0).p. \qquad \textbf{9.1.2}$$

$$T(p,\theta=2,\alpha=0)=\frac{q^0.(\lambda+(1-\lambda).p)}{(1-\lambda).(1-q^0)+\lambda.q^0+(1-\lambda).(2q^0-1).p}. \qquad \textbf{9.1.3}$$

$$\{\theta=2/p,a=0\}=(1-\lambda).(1-q^0)+\lambda.q^0+(1-\lambda).(2q^0-1).p. \qquad \textbf{9.1.4}$$

$$\mathrm{T}\,(\mathrm{p},\theta=1,\alpha=1)=\frac{\lambda.(1-q^1)}{(1-\lambda).q^1+\lambda.(1-q^1)}\in \sigma_1(\text{σταθερό}), 0\leq p\leq 1. \qquad \textbf{9.1.5}$$

$$\{\theta=1/\mathrm{p}, \alpha=1\}=(1-\lambda).\mathrm{q}^1+\lambda.(1-\mathrm{q}^1)\in \gamma_1(\text{σταθερό}), 0\leq p\leq 1. \qquad \textbf{9.1.6}$$

$$\mathrm{T}\,(\mathrm{p},\theta=2,\alpha=1)=\frac{\lambda.q^1}{(1-\lambda).(1-q^1)+\lambda.q^1}\in \sigma_2(\text{σταθερό}),\ 0\leq p\leq 1. \qquad \textbf{9.1.7}$$

$$\{\theta=2/\mathrm{p}, \alpha=1\}=(1-\lambda).(1-\mathrm{q}^1)+\lambda.\mathrm{q}^1\in \gamma_2(\text{σταθερό}), 0\leq p\leq 1. \qquad \textbf{9.1.8}$$

Σχετικά με το κριτήριο ελαχιστοποίησης του αναμενόμενου ολικού εκπίπτοντος κόστους για άπειρο χρονικό ορίζοντα η βέλτιστη συνάρτηση τιμών V(p), $0 \le p \le 1$, ικανοποιεί την εξίσωση αριστοποίησης:

$$\text{V(p)}= min\{ C.p + \beta.\sum_{\theta=1}^{\theta=2}\{ \theta / p,a = 0 \}.V(T( p,\theta,\alpha = 0)),$$

$$R + \beta.\sum_{\theta=1}^{\theta=2}\{ \theta / p,a = 1 \}.V(T( p,\theta,\alpha = 1))\},\ 0 \le p \le 1 \qquad \textbf{9.1.9}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (9.1.5)-(9.1.8) η (9.1.9) γράφεται:

$$\text{V(p)}= min\{ C.p + \beta.\sum_{\theta=1}^{\theta=2}\{ \theta / p,a = 0 \}.V(T( p,\theta,\alpha = 0)),$$

$$R + \beta.(\gamma_1.V(s_1) + \gamma_2.V(s_2))\},\ 0 \le p \le 1 \qquad \textbf{9.1.10}$$

($\beta \in (0,1)$ είναι ο συντελεστής έκπτωσης).

Σχετικά με τους πίνακες μηνυμάτων θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις.

Στην ενότητα 9.2 μελετάμε την περίπτωση όπου το μήνυμα είναι ανεξάρτητο από την κατάσταση της τάξης , είτε επιλέγουμε τη συμβατική είτε την εξειδικευμένη διδακτική μέθοδο (περίπτωση πλήρους αβεβαιότητας για $\alpha$=0 και $\alpha$=1).

Στην ενότητα 9.3 μελετάμε την περίπτωση πλήρους αβεβαιότητας όταν επιλέγεται η συμβατική μέθοδος ($\alpha$=0) και μερικής πληροφόρησης όταν επιλέγεται η εξειδικευμένη μέθοδος ( $\alpha$=1). Και στις δύο περιπτώσεις υπολογίζουμε την άριστη συνάρτηση τιμών και προσδιορίζουμε την άριστη πολιτική επιλογής διδακτικών μεθόδων για άπειρο χρονικό ορίζοντα.

## 9.2. Περίπτωση πλήρους αβεβαιότητας για οποιαδήποτε επιλογή διδακτικής μεθόδου.

Υποθέτουμε ότι $q^a = \frac{1}{2}$, $\alpha$=0,1.

Οι πίνακες μηνυμάτων γράφονται:

$$R^0 = R^1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Επομένως το μήνυμα που λαμβάνεται σε οποιαδήποτε χρονική περίοδο είναι ανεξάρτητο από την κατάσταση της τάξης και συνεπώς δεν παρέχει καμιά πληροφορία για την κατάσταση (πλήρης αβεβαιότητα).

Από τις σχέσεις (9.1.1)-(9.1.8) παίρνουμε:

$$T(p,\theta=1,\alpha=0)= T(p,\theta=2,\alpha=0)= p(1-\lambda)+\lambda \ , 0 \le p \le 1 \ .$$

και την κοινή τιμή τη συμβολίζουμε με Τ (p),δηλαδή:

$$T(p):= p(1-\lambda)+\lambda \ , \ 0 \le p \le 1 \qquad \textbf{9.2.1}$$

$$T(p,\theta=1,\alpha=1)= T(p,\theta=2,\alpha=1) =\lambda \ , 0 \le p \le 1 \ .$$

$$\{\theta/p,\alpha\}=\frac{1}{2} \ ,\theta=1,2 \ ,\alpha=0,1, \ 0 \le p \le 1.$$

Η εξίσωση αριστοποίησης (9.1.9) γράφεται στην περίπτωσή μας:

$$V(p) = \min\{C.p + \beta.V(T(p)), R + \beta.V(\lambda)\}, 0 \le p \le 1. \qquad \textbf{9.2.2}$$

Η βέλτιστη συνάρτηση τιμών $V(p), 0 \le p \le 1$ είναι αύξουσα, κοίλη και συνεχής. Πράγματι, θεωρούμε την επαναληπτική σχέση

$$V_n(p) = HV_{n-1}(p) = \min\left\{C.p + \beta.V_{n-1}(T(p)), R + \beta.V_{n-1}(\lambda) \ \right\},$$

$$0 \le p \le 1, n=1,2,\ldots$$

όπου $V_0(p) = 0 \ , \ 0 \le p \le 1.$

Αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ότι για κάθε n=1,2,… η συνάρτηση $V_n \,/\, [0,1]$ είναι αύξουσα, κοίλη και συνεχής.

Επομένως και το όριο

$$V(p) = \lim_{n\to\infty} V_n(p), \ 0 \le p \le 1.$$

Είναι αύξουσα,κοίλη και συνεχής.(Η συνέχεια προκύπτει από το γεγονός ότι η σύγκλιση είναι ομαλή).

Επομένως η συνάρτηση ελέγχου της άριστης πολιτικής $\delta^{\infty}$ έχει την ακόλουθη δομή:

$$\delta(p) = \begin{cases} 0 \ (\text{συμβατική μέθοδος}) \ \text{αν} \ 0 \le p \le p* \\ 1 \ (\text{εξειδικευμένη μέθοδος}) \ \text{αν} \ p^* < p \le 1 \end{cases}$$

όπου $p*$ είναι κατάλληλη κρίσιμη ποσότητα.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε αναλυτικά την κρίσιμη ποσότητα $p*$ και τη βέλτιστη συνάρτηση τιμών $V /$ [0,1].

Με $T_n(p), 0 \le p \le 1$ συμβολίζουμε τη n-στη σύνθεση της συνάρτησης T(p), $0 \le p \le 1$(βλέπε σχέση 9.2.1)

$$T_n(p) := \mathrm{T}(\mathrm{T}_{n-1}(p)),\ 0 \le p \le 1,\ \mathrm{n}=1,2,\ldots$$

όπου $$T_0(p) = p\ ,\ 0 \le p \le 1.\ \text{(ταυτοτική συνάρτηση)}$$

**Λήμμα 9.2.1:** Για n=1,2,3…

$$\mathrm{T}_n(p)=1-(1-\lambda)^n.(1-p),\quad 0 \le p \le 1$$

## Απόδειξη

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Το λήμμα αληθεύει για n=1 επειδή

$$T_1(p) = T(p) = \lambda + (1-\lambda).p = 1-(1-\lambda).(1-p)\ ,0 \le p \le 1.$$

As υποθέσουμε ότι το λήμμα αληθεύει για κάποιο $n \ge 1$.Τότε ,

$$T_{n+1}(p) = T(T_n(p)) = 1-(1-\lambda).(1-T_n(p)) = 1-(1-\lambda)^{n+1}.(1-p),\ 0 \le p \le 1$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται. $\square$

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η πολιτική $\delta^{\infty}$ με δ(p)=0, $0 \le p \le 1$ (δηλαδή η πολιτική να ακολουθούμε πάντοτε τη συμβατική μέθοδο διδασκαλίας) να είναι άριστη.

Έστω W(p), $0 \le p \le 1$ η συνάρτηση του αναμενόμενου ολικού εκπίπτοντος κόστους, όταν ακολουθούμε την πολιτική $\delta^{\infty}$ με $0 \le p \le 1$ (δηλαδή εφαρμόζουμε συνεχώς την συμβατική μέθοδο).Έχουμε

$$\mathrm{W}(p)= \mathrm{C}.\ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n\ .\ \mathrm{T}_n(p)\ = \mathrm{C}.\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n\ .(1-(1-p)\ .(1-\lambda)^n)=$$

$$= \mathrm{C}.\left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{(1-p)}{1-\beta.(1-\lambda)}\right), 0 \le p \le 1. \qquad \textbf{9.2.3}$$

Η πολιτική $\delta^{\infty}$ με δ(p)=0, $\forall\ 0 \le p \le 1$ είναι άριστη, και η W/[0,1] είναι άριστη συνάρτηση τιμών, αν η συνάρτηση W ικανοποιεί την εξίσωση αριστοποίησης (9.2.2),δηλαδή αν

$$W(p) = \min\{C.p + \beta.W(T(p)), R + \beta.W(\lambda)\} \quad , 0 \le p \le 1 , \qquad \underline{\mathbf{9.2.4}}$$

Επειδή W(p)= $C.p + \beta.W(T(p)$ $,0 \le p \le 1,$

η (9.2.4) ισχύει τότε και μόνο τότε αν:

$$W(p) \le R + \beta.W(\lambda), 0 \le p \le 1 \qquad \underline{\mathbf{9.2.5}}$$

Η (9.2.5) γράφεται:

$$\frac{C}{1-\beta} - \frac{C.(1-p)}{1-\beta.(1-\lambda)} \le R + \beta.\left(\frac{C}{1-\beta} - \frac{C.(1-\lambda)}{1-\beta.(1-\lambda)}\right), 0 \le p \le 1.$$

Επειδή το αριστερό μέλος είναι αύξουσα συνάρτηση του p, η (9.2.5) ισχύει αν και μόνον αν ισχύει για p=1.Τελικά, αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η συνάρτηση W/[0,1] να ικανοποιεί την εξίσωση αριστοποίησης (9.2.4),και η πολιτική $\delta^{\infty}$ με δ(p)=0, $0 \le p \le 1$ να είναι άριστη ,είναι η **(Σ)**

$$\frac{C}{1-\beta.(1-\lambda)} \le R. \qquad \mathbf{(\Sigma)}$$

Στη συνέχεια της ενότητας αυτής υποθέτουμε ότι:

$$(C <)R < \frac{C}{1-\beta.(1-\lambda)}. \qquad \underline{\mathbf{9.2.6}}$$

Τότε η κρίσιμη ποσότητα που συνδέεται με την άριστη πολιτική $\delta^{\infty}$ είναι $p^* < 1$, και η άριστη συνάρτηση κόστους V(p), $0 \le p \le 1$ ικανοποιεί την εξίσωση**:**

$$V(p) = C.p + \beta.V(T(p)), \qquad 0 \le p \le p^*$$

$$V(p) = V(1) \equiv R + \beta.V(\lambda) \qquad p^* < p \le 1. \qquad \underline{\mathbf{9.2.7}}$$

Επειδή η συνάρτηση V(p), $0 \le p \le 1$ είναι συνεχής, από την (9.2.7) έχουμε**:**

$$V(1) = V(p^*) = C.p^* + \beta.V(T(p^*))$$

Επειδή $T(p^*) \in \lambda + (1-\lambda).p^* = p^* + (1-\lambda).p^* > p^*$, έχουμε : $V(T(p^*)) = V(1)$,

και επομένως,

$$\mathrm{V}(1) = C.p^{*} + b.V(1) \ . \qquad \textbf{9.2.8}$$

**Πρόταση 9.2.2:** Για την κρίσιμη ποσότητα $p^{*}$ που συνδέεται με την άριστη πολιτική $\delta^{\infty}$ ισχύει $p^{*} \geq \lambda$.

### Απόδειξη

Θεωρούμε ότι $p^{*} < \lambda$. Θα εφαρμόσουμε εις άτοπον απαγωγή. Από την (9.2.7) έχουμε:

$$V(\lambda) = V(1) = R + \beta.V(\lambda) \, .$$

Επομένως
$$V(1) = V(\lambda) = \frac{R}{1-\beta} \ .$$

Από την (9.2.8) προκύπτει

$$\rho^{*} = \frac{(1-\beta).V(1)}{C} = \frac{R}{C}$$

και επειδή $\rho^{*} < 1$ συνάγεται ότι $\mathrm{R} < \mathrm{C}$, που αντιβαίνει στην βασική μας υπόθεση $\mathrm{C} < \mathrm{R}$.

Επομένως $p^{*} \geq \lambda$. $\square$

Επειδή $p^{*} \geq \lambda$.=1-(1-λ),έπεται ότι

$$\left\{ n \in \mathbb{N} \ : p^{*} \geq 1-(1-\lambda)^{n} \right\} \neq \varnothing \, .$$

Έστω
$$\mathrm{N} := \max\{ n \in \mathbb{N} \ : p^{*} \geq 1-(1-\lambda)^{n} \} \, . \qquad \textbf{9.2.9}$$

**Πρόταση 9.2.3:** Έστω $\rho^{*}$ η κρίσιμη ποσότητα που συνδέεται με την άριστη πολιτική $\delta^{\infty}$ και N ο φυσικός αριθμός που ορίζεται από τη σχέση (9.2.9). Αν $p \in [0, p^{*}]$,τότε υπάρχει (μοναδικό) $\mathrm{m} \in \{1, 2, ..., N+1\}$ έτσι ώστε:

$$T_{m-1}(p) \leq \rho^{*} < \mathrm{T}_{m}(p) \qquad \textbf{9.2.10}$$

$$(T_{0}(p) \equiv p)$$

Επιπλέον αν $\mathrm{m} \neq N+1$ , τότε η (9.2.10) ισοδυναμεί με τη σχέση

$$1-\frac{1-p^*}{(1-\lambda)^m} < p \le 1-\frac{1-p^*}{(1-\lambda)^{m-1}}.$$

ενώ αν $\mathrm{m}=N+1$ τότε η (9.2.10) ισοδυναμεί με τη σχέση

$$0 \le p \le 1-\frac{1-p^*}{(1-\lambda)^N}.$$

**Απόδειξη**

Από το λήμμα 9.2.1 συνάγεται ότι

$$T_n(p)=1-(1-\lambda)^n.(1-p) \uparrow 1 \text{ όταν το } n \to \infty$$

Επομένως, επειδή $p^* < 1$ (λόγω της υπόθεσης (9.2.6)),

$$\left\{n \in \mathbb{N} : T_n(p) > p^*\right\} \ne \varnothing.$$

Η σχέση (9.2.10) ικανοποιείται προφανώς για

$$m := \min\left\{n \in \mathbb{N} : T_n(p) > p^*\right\}$$

και γράφεται

$$1-(1-\lambda)^{m-1}.(1-p) \le p^* < 1-(1-\lambda)^m.(1-p)$$

ή ισοδύναμα

$$1-\frac{1-p^*}{(1-\lambda)^m} < p \le 1-\frac{1-p^*}{(1-\lambda)^{m-1}} \qquad \textbf{9.2.11}$$

Θα δείξουμε ότι $m \le N+1$. Θεωρούμε ότι $m > N+1$. Τότε $m-1 > N$ και από τον ορισμό του N (σχέση (9.2.9)) έχουμε $(1-\lambda)^{m-1} < 1-p^*$, δηλαδή

$$1-\frac{1-p^*}{(1-\lambda)^{m-1}} < 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (9.2.11) προκύπτει $p < 0$, πράγμα άτοπο. Άρα $m \le N+1$. Αν $m = N+1$, τότε επειδή $m > N$ έχουμε

$$1-\frac{1-p^*}{(1-\lambda)^{N+1}} < 0 \le p \le 1-\frac{1-p^*}{(1-\lambda)^{N}}.$$

□

Με τη βοήθεια της πρότασης 9.2.3 θα δείξουμε ότι η άριστη πολιτική $\delta^{\infty}$ επάγει μία πεπερασμένη ***Μαρκοβιανή διαμέριση***.

Θεωρούμε τα σύνολα $A_0=(p^*,1]$,

$$A_n=\{\, p\in[0,p^*]: T_{n-1}(p)\le p^* < T_n(p)\}=(1-\frac{1-p^*}{(1-\lambda)^n},1-\frac{1-p^*}{(1-\lambda)^{n-1}}],\ n=1,2,3\ldots,N$$

$$A_{N+1}=\{\, p\in[0,p^*]: T_N(p)\le p^* < T_{N+1}(p)\}=[0,\ 1-\frac{1-p^*}{(1-\lambda)^N}].$$

Τα σύνολα $A_0,A_1,A_2,\ldots,A_{N+1}$ αποτελούν διαμέριση του διαστήματος [0,1].

Το σύνολο $A_n$ ($n\ge 1$) είναι το σύνολο των *a priori* πιθανοτήτων p αναφορικά με την κατάσταση 2 για τις οποίες εφαρμόζουμε n-1 συνεχόμενες φορές την συμβατική μέθοδο διδασκαλίας (α=0) και την n-στη φορά την εξειδικευμένη μέθοδο διδασκαλίας (α=1), χρησιμοποιώντας την άριστη πολιτική.

Από τον ορισμό του N (βλέπε (9.2.9)) συνάγεται ότι:

$$\lambda \in A_N . \qquad \textbf{9.2.12}$$

Πράγματι έχουμε

$$T_{N-1}(\lambda)=1-(1-\lambda)^{N}\le p^*$$

και

$$T_N(\lambda)=1-(1-\lambda)^{N+1}> p^*,$$

Δηλαδή:

$$T_{N-1}(\lambda)\le p^* < T_N(\lambda).$$

Παρατηρούμε ότι για n=1,2,…,N+1,

$$p\in A_n \Rightarrow T(p,\theta=1,\alpha=0)=T(p,\theta=2,\alpha=0)=T(p)\in A_{n-1},$$

$$p\in A_0 \Rightarrow T(p,\theta=1,\alpha=1)=T(p,\theta=2,\alpha=1)=\lambda\in A_N .$$

Επομένως η παραπάνω διαμέριση του διαστήματος [0,1],είναι **Μαρκοβιανή** που επάγεται από την άριστη πολιτική $\delta^{\infty}$.Συμπεραίνουμε ότι η άριστη συνάρτηση τιμών $V(p), 0\le p\le 1$ είναι κατά τμήματα γραμμική (βλέπε Κεφ.5).

Έστω $p\in A_n$ για κάποιο $n\in\{1,2,3,\ldots,N+1\}$.

Τότε:

$$V(p)=C.\sum_{i=0}^{n-1}\beta^i.T_i(p)+\beta^n.V(T_n(p))$$

$$= C.\sum_{i=0}^{n-1} \beta^i.(1-(1-p).(1-\lambda)^i) + \beta^n.V(1)$$

$$= C.\left[\sum_{i=0}^{n-1} \beta^i - (1-p).\sum_{i=0}^{n-1} \beta^i.(1-\lambda)^i\right] + \beta^n.V(1)$$

$$= C.\left(\frac{1-\beta^n}{1-\beta} - (1-p).\frac{1-\beta^n.(1-\lambda)^n}{1-\beta.(1-\lambda)}\right) + \beta^n.V(1). \qquad \underline{\mathbf{9.2.13}}$$

Στην έκφραση (9.2.13) μπορούμε να ενσωματώσουμε και την περίπτωση n=0,δεδομένου ότι για $p \in A_0 = (p^*,1]$ έχουμε $V(p) = V(1)$.Επομένως η άριστη συνάρτηση τιμών V(p), $0 \le p \le 1$ γράφεται:

$$V(p) = B_n.p + \Gamma_n \quad , \forall p \in A_n \qquad \underline{\mathbf{9.2.14}}$$

όπου $$B_n = \frac{1-\beta^n.(1-\lambda)^n}{1-\beta.(1-\lambda)} \times C,$$

$$\Gamma_n = C.\left(\frac{1-\beta^n}{1-\beta}\right) + \beta^n.V(1) - B_n \text{ , n=0,1,2…,N+1} \qquad \underline{\mathbf{9.2.15}}$$

Σημειώνουμε ότι**:** $B_0$=0, $\Gamma_0$=V(1) .

Η εξάρτηση της συνάρτησης V(p), $0 \le p \le 1$ από τις άγνωστες παραμέτρους $p^*$ και V(1) (που συνδέονται με τη σχέση (9.2.8)) μας παροτρύνει να τις μελετήσουμε διεξοδικά με σκοπό να τις υπολογίσουμε.

Εφαρμόζοντας τη σχέση (9.2.13) για $p = \lambda$ και λαμβάνοντας υπόψη την (9.2.12) έχουμε**:**

$$V(\lambda) = C.\left(\frac{1-\beta^N}{1-\beta} - (1-\lambda).\frac{1-\beta^N.(1-\lambda)^N}{1-\beta.(1-\lambda)}\right) + \beta^N.V(1)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση: V(1)=$R + \beta.V(\lambda)$

παίρνουμε τελικά

$$V(1) = \frac{1}{1-\beta^{N+1}}\left[R + \beta.C.\left(\frac{1-\beta^N}{1-\beta} - (1-\lambda).\frac{1-\beta^N.(1-\lambda)^N}{1-\beta(1-\lambda)}\right)\right] \qquad \underline{\mathbf{9.2.16}}$$

και από την ( 9.2.8),

$$p^* = \frac{(1-\beta).V(1)}{C} \qquad \textbf{9.2.17}$$

Άρα ο υπολογισμός των $p^*$ και V(1) ανάγεται στον προσδιορισμό του φυσικού αριθμού N, από τον οποίο αυτές οι ποσότητες αποκλειστικά εξαρτώνται. Από τις (9.2.9),(9.2.16),(9.2.17),το πρόβλημα ανάγεται στο να βρεθεί ο μέγιστος φυσικός αριθμός N έτσι ώστε**:**

$$p^* = \frac{1-\beta}{(1-\beta^{N+1}).C}\left[R+\beta.C.\left(\frac{1-\beta^N}{1-\beta}-(1-\lambda).\frac{1-\beta^N.(1-\lambda)^N}{1-\beta(1-\lambda)}\right)\right] \geq 1-(1-\lambda)^N$$

**9.2.18**

Μετά από πράξεις αποδεικνύεται ότι η (9.2.18) είναι ισοδύναμη με την

$$(1-\lambda)^N.\left(1-\frac{\lambda.\beta^{N+1}}{1-\beta(1-\lambda)}\right) \geq \frac{1-\beta}{C}.\left(\frac{C}{1-\beta.(1-\lambda)}-R\right). \qquad \textbf{9.2.19}$$

Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του μέγιστου φυσικού αριθμού N που ικανοποιεί την σχέση (9.2.19).

## Αλγόριθμος $A_5$

**ΒΗΜΑ 0:**Σημειώνουμε τις παραμέτρους του προβλήματος λ, β,C,R.

Αν ισχύει η συνθήκη (Σ), δηλαδή : $\frac{C}{1-\beta.(1-\lambda)} \leq R$**,**τότε η άριστη συνάρτηση τιμών υπολογίζεται από τη σχέση (9.2.3) και η πολιτική $\delta^{\infty}$ με δ(p)=0, $0 \leq p \leq 1$ είναι άριστη και η διαδικασία τερματίζεται . Αν η συνθήκη (**Σ)** δεν ισχύει προχωρούμε στα επόμενα βήματα.

**ΒΗΜΑ 1:**Προσδιορίζουμε τον μέγιστο φυσικό αριθμό N που ικανοποιεί τη σχέση (9.2.19). Κατόπιν υπολογίζουμε τις ποσότητες V(1) και ρ* από τις (9.2.16) και (9.2.17).

**ΒΗΜΑ 2:** Προσδιορίζουμε τα διαστήματα

$$A_0=(p^*,1],\ A_n=(\alpha_n,\alpha_{n-1}],\ n=1,2,3\ldots N\ ,\ A_{N+1}=[0,\alpha_N]$$

Όπου :
$$\alpha_n = 1-\frac{1-p^*}{(1-\lambda)^n},\ n=0,1,\ldots,N$$

$$(0<\alpha_N<\alpha_{N-1}<\ldots<\alpha_1<\alpha_0=p^*<1)$$

**ΒΗΜΑ 3:** Υπολογίζουμε την άριστη συνάρτηση κόστους V(p), $0\le p\le 1$ με βάση τις σχέσεις ( 9.2.14) και (9.2.15 ).

**Εφαρμογή 9.1:** Ας θεωρήσουμε τώρα μια περίπτωση που εμπίπτει στην πλήρη αβεβαιότητα με β=0.9, λ=0.1, C= 4.0, R=10.0.

Στο βήμα 1 η ανίσωση (9.2.19) γράφεται:

$$0.9^N.(1-\frac{0.9^{N+1}}{0.19})\geq 0.276315775$$

Ο μέγιστος ακέραιος που πληροί την παραπάνω ανίσωση : N=10.

Κατόπιν με βάση την σχέση (9.2.16) βρίσκουμε V(1)=26.9140,και με βάση τη σχέση (9.2.17), η κρίσιμη ποσότητα είναι $p^*=0.6728$.

Εφαρμόζοντας το βήμα 2 τα διαιρετικά σημεία της Μαρκοβιανής διαμέρισης είναι: $\alpha_0=0.6728,\alpha_1=0.6364,\alpha_2=0.5960,\alpha_3=0.5511,\alpha_4=0.4961,\alpha_5=0.4458,\alpha_6=0.3843,\alpha_7=0.3157$, $\alpha_8=0.2399$, $\alpha_9=0.1549$, $\alpha_{10}=0.0616$.Τέλος εφαρμόζοντας το βήμα 3 προκύπτει η βέλτιστη συνάρτηση κόστους για άπειρο χρονικό ορίζοντα,V(p)/[0,1]:

$$V(p)=\begin{cases} 18.9794.p + 16.9141 & p\in[0.00000,0.062] \\ 18.4931.p + 16.9441 & p\in(0.062,\ 0.1549] \\ 17.8927.p + 17.0375 & p\in(0.1549,0.2399] \\ 17.1515.p + 17.2154 & p\in(0.2399,0.3157] \\ 16.2365.p + 17.5046 & p\in(0.3157,0.3843] \\ 15.1067.p+ 17.9388 & p\in(0.3843,0.4458] \\ 13.7120.p +18.5608 & p\in(0.4458,0.4961] \\ 11.9902.p +19.4241 & p\in(0.4961,\ 0.5511] \\ 9.8644.p + 20.5954 & p\in(0.5511,0.5960] \\ 7.2400.p + 22.1604 & p\in(0.5960,0.6364] \\ 4.0000.p + 24.2227 & p\in(0.6364,0.6728] \\ 26.9140 & p\in(0.6728,1.000] \end{cases}$$

## *9.3. Περίπτωση πλήρους αβεβαιότητας στην συμβατική μέθοδο και μερικής πληροφόρησης στην εξειδικευμένη μέθοδο διδασκαλίας.*

Υποθέτουμε ότι $q^0 = \frac{1}{2}, \quad q^1 > \frac{1}{2}$.

Οι πίνακες μηνυμάτων γράφονται:

$$R^0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad R^1 = \begin{pmatrix} q^1 & 1-q^1 \\ 1-q^1 & q^1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως αν επιλέξουμε τη συμβατική μέθοδο διδασκαλίας (α=0) το μήνυμα που λαμβάνεται σε οποιαδήποτε χρονική περίοδο είναι ανεξάρτητο από την κατάσταση της τάξης και συνεπώς δεν παρέχει καμιά πληροφορία για την κατάσταση της τάξης(πλήρης αβεβαιότητα για $a = 0$). Από τις σχέσεις ( 9.1.1)- (9.1.4) παίρνουμε:

T (p,θ=1,α=0)= T (p, θ=2,α=0)= T (p) = p(1-λ)+λ , 0 £ $p$ £ 1 .

{θ/p,*α=0*}= $\frac{1}{2}$ ,θ=1,2 ,α=0,1, 0 £ $p$ £ 1.

Τα T (p,θ=1,*α*=1), {θ=1/p,*α*=1} ,T (p,θ=2,*α*=1), {θ=2/p,*α*=1} δίνονται από τις σχέσεις (9.1.5)-(9.1.8).

**Λήμμα 9.3.1:**

**i)** $s_1 < l < s_2$

**ii)** λ= γ1. $s_1 + g_2 . s_2$

**Απόδειξη**

Το (i) είναι συνέπεια της υπόθεσης $q^1 > 1/2$ και το (ii) προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς των $\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2$,(βλέπε (9.1.5)-(9.1.8)). W

Η εξίσωση αριστοποίησης (9.1.10) γράφεται στην περίπτωσή μας

$$V(p) = \min\{C.p + \beta.V(T(p)), R + \beta.\gamma_1.V(s_1) + \beta.\gamma_2.V(s_2)\}, 0 \le p \le 1 \qquad \textbf{9.3.1}$$

Η συνάρτηση V(p), $0 \le p \le 1$ είναι αύξουσα ,κοίλη και συνεχής. Πράγματι θεωρούμε την επαναληπτική σχέση:

$$V_n(p)=HV_{n-1}(p)= \min\{C.p + \beta.V_{n-1}(T(p)), R + \beta.\gamma_1.V_{n-1}(s_1) + \beta.\gamma_2.V_{n-1}(s_2)\}$$

οπου $\qquad V_0(p)=0 , 0 \le p \le 1.$

Αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ότι για κάθε n=1,2,3…η συνάρτηση $V_n(p), 0 \le p \le 1$ είναι αύξουσα, κοίλη και συνεχής. Επομένως και το όριο:$V(p)= \lim_{n\to\infty} V_n(p), 0 \le p \le 1$ είναι αύξουσα, κοίλη και συνεχής συνάρτηση.(Η συνέχεια προκύπτει από το γεγονός ότι η σύγκλιση είναι ομαλή).

Επομένως η συνάρτηση ελέγχου της άριστης πολιτικής $\delta^\infty$ έχει την μορφή:

$$\delta(p) = \begin{cases} 0 \quad (\text{συμβατική μέθοδος}), \alpha\nu \ 0 \le p \le p^* \\ 1 \quad (\text{εξειδικευμένη μέθοδος}), \alpha\nu \ p^* < p \le 1. \end{cases}$$

όπου $p^*$ είναι κατάλληλη κρίσιμη ποσότητα.

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε μια αναλυτική μέθοδο υπολογισμού της κρίσιμης ποσότητας $p^*$ και της βέλτιστης συνάρτησης κόστους,V(p), $0 \le p \le 1$.Θα εξετάσουμε όμως πρώτα υπό ποίες συνθήκες ισχύει $p^*=1$, δηλαδή η πολιτική $\delta^\infty$ με συνάρτηση ελέγχου δ(p)=0, $0 \le p \le 1$ (να χρησιμοποιούμε πάντοτε την συμβατική μέθοδο) είναι άριστη.

Εστω W(p), $0 \le p \le 1$ η συνάρτηση αναμενόμενου ολικού εκπίπτοντος κόστους για άπειρο χρονικό ορίζοντα, όταν εφαρμόζουμε την πολιτική $\delta^{\infty}$ με δ(p)=0, $0 \le p \le 1$, (δηλαδή όταν χρησιμοποιούμε αποκλειστικά την συμβατική μέθοδο διδασκαλίας για κάθε $0 \le p \le 1$). Αυτή υπολογίζεται όπως ακριβώς στην ενότητα 9.2 και δίνεται από τη σχέση:

$$W(p) = \frac{C}{1-\beta} - \frac{C.(1-p)}{1-\beta.(1-\lambda)} . \qquad \textbf{9.3.2}$$

Η πολιτική $\delta^{\infty}$ με δ(p)=0, $0 \le p \le 1$ είναι άριστη και η W/[0,1] είναι άριστη συνάρτηση τιμών αν η W ικανοποιεί την εξίσωση αριστοποίησης (9.3.1).Επειδή

$$W(p) = C.p + \beta.W(T(p)), 0 \le p \le 1$$

η W ικανοποιεί την (9.3.1) αν και μόνο αν

$$W(p) \le R + \beta.\gamma_1.W(s_1) + \beta.\gamma_2.W(s_2), 0 \le p \le 1 \qquad \textbf{9.3.3}$$

Επειδή η συνάρτηση W/[0,1] είναι γραμμική και λαμβάνοντας υπόψη το λήμμα 9.3.1 (ii) και το γεγονός ότι $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$,έχουμε:

$$\gamma_1.W(s_1) + \gamma_2.W(s_2) = W(\gamma_1.s_1 + \gamma_2.s_2) = W(\lambda)$$

Επομένως η (9.3.3) γράφεται

$$W(p) \le R + \beta.W(\lambda), 0 \le p \le 1$$

και ικανοποιείται αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη **(Σ)** (βλέπε ενότητα 9.2)**:**

$$\frac{C}{1-\beta.(1-\lambda)} \le R, \qquad \textbf{(Σ)}$$

*Συνοψίζοντας, αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η πολιτική* $\delta^{\infty}$ *με δ(p)=0,* $0 \le p \le 1$ *(αποκλειστική χρήση της συμβατικής μεθόδου) να είναι άριστη και η W/[0,1] άριστη συνάρτηση τιμών είναι* η (Σ).

Στη συνέχεια της ενότητας αυτής υποθέτουμε ότι :

$$(C <)R < \frac{C}{1-\beta.(1-\lambda)}. \qquad \textbf{9.3.4}$$

Τότε η κρίσιμη ποσότητα που συνδέεται με την άριστη πολιτική $\delta^{\infty}$ είναι $p^* < 1$ και η άριστη συνάρτηση τιμών,V(p), $0 \le p \le 1$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$V(p) = C.p + \beta.V(T(p)), 0 \le p \le p^*$$

$$V(p) = V(1) \equiv R + \beta.\gamma_1.V(s_1) + \beta.\gamma_2.V(s_2), p^* < p \le 1 \qquad \textbf{9.3.5}$$

Επειδή η συνάρτηση V(p), $0 \le p \le 1$ είναι συνεχής, από την (9.3.5) παίρνουμε **:**

$$V(1) = V(p^*) = C.p^*+\beta.V(T(p^*))$$

Επειδή μάλιστα $T(p^*) > p^*$, έχουμε**:** V(T(p*))= V(1) και επομένως

$$V(1) = C.p^*+\beta.V(1) \qquad \textbf{9.3.6}$$

**Πρόταση 9.3.1:**Αν $0 \le p \le s_1$, τότε η άριστη απόφαση που αντιστοιχεί στο p είναι η συμβατική μέθοδος διδασκαλίας, δηλαδή δ(p)=0.

## Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι για την κρίσιμη ποσότητα p* της άριστης πολιτικής ισχύει $p^* \prec s_1$. Επειδή $s_2 \succ s_1$ (λήμμα 9.3.1), έχουμε $s_2 \succ p^*$.

Αρα $V(s_1)= V(s_2)= V(1)$ και επομένως :

$$V(1)=R+\beta.\gamma_1.V(s_1)+\beta.\gamma_2.V(s_2)$$

$$=R+\beta.(\gamma_1+\gamma_2).\,V(1)= R+\beta.V(1)$$

από την οποία προκύπτει : $V(1)=\dfrac{R}{1-\beta}$

Λαμβάνοντας υπόψη την (9.3.6) προκύπτει $R=C.p^*\,(<C)$, πού αντιβαίνει στην υπόθεση $C<R$. Επομένως $p^*\geq s_1$ ή ισοδύναμα, $\delta(p)=0,\ 0\leq p\leq s_1$. ∎

**Πρόταση 9.3.2:** Για την κρίσιμη ποσότητα p* της άριστης πολιτικής ισχύει $p^*\geq \lambda$.

### *Απόδειξη*

Εστω $p^*<\lambda$. Θα εφαρμόσουμε εις άτοπον απαγωγή. Έχουμε:

$$T(p)= p(1-\lambda)+\lambda>\lambda>p^*,\ 0\leq p\leq 1.$$

Επομένως $V(p)=C.p+\beta.V(T(p))=C.p+\beta.V(1),\ 0\leq p\leq p^*$.

Επειδή $s_1\leq p^*$ (πρόταση 9.3.1) και $s_2>\lambda>p^*$ (λήμμα 9.3.1),

$$V(s_1) = C.s_1+\beta.V(T(s_1))= C.s_1+\beta.V(1),\ V(s_2)= V(1).$$

Επομένως $V(1) = R+\beta.\gamma_1.V(s_1)+\beta.\gamma_2.V(s_2)=$

$$= R+ \beta.\gamma_1.s_1.C+(\beta^2.\gamma_1+\beta.\gamma_2).V(1),$$

από την οποία προκύπτει:

$$V(1)=\frac{R+\beta.\gamma_1.s_1.C}{1-\beta^2.\gamma_1-\beta.\gamma_2}$$

Ο παρανομαστής γράφεται:

1-$\beta^2.\gamma_1$-$\beta.\gamma_2$=1-$\beta^2.\gamma_1$-$\beta$.(1-$\gamma_1$)=(1-$\beta$).(1+$\beta.\gamma_1$),οπότε λαμβάνοντας υπόψη την (9.3.6), παίρνουμε: $p^* = \dfrac{(1- b).V(1)}{C} = \dfrac{R + b.g_1.s_1.C}{(1+ b.g_1).C}$

Έχουμε : p*$< l$ $\Leftrightarrow$ R+ $\beta.\gamma_1.s_1$.C $< l$ .(1+$\beta.\gamma_1$).C$\Leftrightarrow$

R+ βλ.(1-$q^1$).C $< l$ .(1+β.(1-λ).$q^1$+β.λ(1-$q^1$).C $\Leftrightarrow$ R$< l$ .(1+β.(1-λ)(2.$q^1$-1)).C

Επειδή όμως 2.$q^1$-1 £ 1 έχουμε:

λ.(1+β.(1-λ)(2.$q^1$-1))£ λ+β.λ.(1-λ)p $l$ + 1- $l$ =1

Συμπεραίνουμε ότι p*$< l$ $\Rightarrow R <$ C , που είναι άτοπο επειδή αντιβαίνει στην υπόθεση Cp R. Επομένως p*³ $l$ . W

Επειδή p*³ $l$ =1-(1-$\lambda$) έπεται ότι

{nΞ¥ : $p^{\cdot}$ ≥1-(1-λ)$^n$}ΉΖ .

Εστω N=max{nΞ¥ : $p^{\cdot}$ ≥1-(1-λ)$^n$}. **9.3.7**

Το διάστημα [0,1] διαμερίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στην ενότητα 9.2 (βλ. πρόταση 9.2.3)

Θεωρούμε τα σύνολα $A_0$=(p$^*$,1],

$A_n$={ p$\in$[0,p*]:$T_{n-1}$(p)£ $p^* <$ $T_n$(p)}= (1-$\dfrac{1- p^*}{(1- l)^n}$,1-$\dfrac{1- p^*}{(1- l)^{n-1}}$] , n=1,2,3…,N

$A_{N+1}$={ p$\in$[0,p*]: $T_N$(p)£ $p^*$ $<$ $T_{N+1}$(p)}=[0, 1-$\dfrac{1- p^*}{(1- l)^N}$],

( όπου $T_0$(p)=p , 0£ $p$£ 1).

Τα σύνολα $A_0$,$A_1$,$A_2$,…,$A_{N+1}$αποτελούν μία διαμέριση του διαστήματος [0,1].Το σύνολο $A_n$ (n³ 1) είναι το σύνολο των *a priori* πιθανοτήτων p αναφορικά με την κατάσταση 2, για τις οποίες εφαρμόζουμε n-1 συνεχόμενες φορές την συμβατική μέθοδο διδασκαλίας(α=0)και την n-στη φορά την εξειδικευμένη μέθοδο διδασκαλίας (α=1), χρησιμοποιώντας την άριστη πολιτική.

Έστω $s_1 \in A_k , s_2 \in A_l$ .

Παρατηρούμε ότι για n=1,2,…,N+1,

$$p \in A_n \Rightarrow T(p,\theta=1,\alpha=0)=T(p,\theta=2,\alpha=1)=T(p) \in A_{n-1},$$

$$T(p,\theta=1,\alpha=1)=s_1 \in A_k .$$

$$p \in A_0 \Rightarrow$$

$$T(p,\theta=2,\alpha=1)=s_2 \in A_l .$$

Επομένως η παραπάνω διαμέριση του διαστήματος [0,1] είναι ***Μαρκοβιανή*** που επάγεται από την άριστη πολιτική $\delta^{\infty}$. Συμπεραίνουμε ότι η άριστη συνάρτηση τιμών $V(p), 0 \le p \le 1$ είναι κατά τμήματα γραμμική (βλέπε κεφάλαιο 5).

Εστω $p \in A_n$ για κάποιο $n \in \{1,2,3,\ldots,N+1\}$. Τότε

$$V(p) = C.\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i.T_i(p) + \beta^n.V(T_n(p)) = C.\sum_{i=0}^{n-1} \beta^i.(1-(1-p).(1-\lambda)^i) + \beta^n.V(1)$$

$$= C.\left(\frac{1-\beta^n}{1-\beta} - (1-p)\frac{1-\beta^n.(1-\lambda)^n}{1-\beta.(1-\lambda)}\right)+\beta^n.V(1). \qquad \textbf{9.3.8}$$

Στην έκφραση (9.3.8) μπορούμε να ενσωματώσουμε και την περίπτωση n=0,δεδομένου ότι για $p \in A_0=(p^*,1]$ έχουμε V(p)= V(1).

Επομένως η βέλτιστη συνάρτηση τιμών $V(p), 0 \le p \le 1$ γράφεται

$$V(p)=B_n.p+\Gamma_n \quad \forall\ p \in A_n \qquad \textbf{9.3.9}$$

όπου

$$B_n = \frac{1-\beta^n.(1-\lambda)^n}{1-\beta.(1-\lambda)}.C ,$$

$$\Gamma_n = \frac{1-\beta^n}{1-\beta}.C - B_n + \beta^n.V(1), \ n=0,1,2,3,\ldots,N+1. \qquad \textbf{9.3.10}$$

Σημειώνουμε ότι : $B_0=0$, $\Gamma_0=V(1)$.

Η εξάρτηση της συνάρτησης $V(p), 0 \le p \le 1$ από τις άγνωστες παραμέτρους p*, V(1)(που συνδέονται με την σχέση (9.3.6)) μας παροτρύνει να τις μελετήσουμε διεξοδικά με την προσδοκία να βρούμε τρόπο υπολογισμού αυτών.

Εστω $s_1 \in A_k$ , $s_2 \in A_l$

Εφαρμόζοντας την σχέση (9.3.9) για p= $s_1$, $s_2$ έχουμε:

$$V(s_1)=C.\left(\frac{1-\beta^k}{1-\beta}-(1-s_1)\frac{1-\beta^k.(1-\lambda)^k}{1-\beta.(1-\lambda)}\right)+\beta^k.V(1)$$

$$V(s_2)=C.\left(\frac{1-\beta^l}{1-\beta}-(1-s_2)\frac{1-\beta^l.(1-\lambda)^l}{1-\beta.(1-\lambda)}\right)+\beta^l.V(1).$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση $V(1)=R+\beta.\gamma_1.V(s_1)+\beta.\gamma_2.V(s_2)$

παίρνουμε τελικά:

$$V(1)=\frac{1}{1-\gamma_1.\beta^{k+1}-\gamma_2.\beta^{k+1}}.[R+\beta.\{\gamma_1.(\frac{1-\beta^k}{1-\beta}-(1-s_1).\frac{1-\beta^k.(1-\lambda)^k}{1-\beta.(1-\lambda)})+\gamma_2.(\frac{1-\beta^l}{1-\beta}-(1-s_2).\frac{1-\beta^l.(1-\lambda)^l}{1-\beta.(1-\lambda)})\}.C],$$

Επίσης από την (9.3.6) παίρνουμε:

$$p^*=\frac{(1-\beta).V(1)}{C}$$

Αρα ο υπολογισμός των p*, V(1) ανάγεται στην εύρεση των κατάλληλων ακεραίων k,l από τους οποίους εξαρτώνται. Η πρόταση που ακολουθεί δίνει σχέσεις των k,l που αξιοποιούνται στην υπολογιστική διαδικασία.

**Πρόταση 9.3.3:** Εστω $s_1 \in A_k$ , $s_2 \in A_l$ και m= $\min\{n \in \mathbb{N}_0 : s_2 < T_n(s_1)\}$.

Τότε ισχύουν**:**

**i)** $m \geq 1, k \geq 1, l \leq k$

**ii)** Αν $l \geq 1$, τότε $k = l+m-1$ ή $k=l+m$.

**iii)** Αν $l$=0, τότε $1 \leq k \leq m$.

## Απόδειξη

**i)** Επειδή $T_0(s_1) \in s_1 < s_2$ έχουμε προφανώς $m \ge 1$. Επειδή $\lambda \le p^*$ (πρόταση 9.3.2) και $s_1 < \lambda$ (λήμμα 9.3.1) έχουμε ότι $s_1 \notin A_0 = (p^*, 1]$, δηλαδή $k \ge 1$.

Επειδή $s_1 < s_2$ έχουμε

$$T_{k-1}(s_1) \le p^* < T_k(s_1) < T_k(s_2).$$

Επομένως $l \le k$. Σημειώνουμε ότι ενδέχεται $l = 0$ $(s_2 \in A_0)$.

**ii)** Από τον ορισμό του m και επειδή $m \ge 1$, έχουμε: $T_{m-1}(s_1) \le s_2 < T_m(s_1)$.

Επειδή $s_1 \in A_k$, $s_2 \in A_l$, $k, l \ge 1$ έχουμε:

$$T_{k-1}(s_1) \le p^* < T_k(s_1), \quad T_{l-1}(s_2) \le p^* < T_l(s_2)$$

Επομένως,

$$T_{l+m-2}(s_1) = T_{l-1}(T_{m-1}(s_1)) \le T_{l-1}(s_2) \le p^* < T_l(s_2) < T_l(T_m(s_1)) = T_{l+m}(s_1)$$

Αρα

$$T_{l+m-2}(s_1) \le p^* < T_{l+m}(s_1)$$

Υπάρχουν δύο δυνατότητες

α) $T_{l+m-2}(s_1) \le p^* < T_{l+m-1}(s_1)$ ή

β) $T_{l+m-1}(s_1) \le p^* < T_{l+m}(s_1)$

Επομένως $k = l+m-1$ ή $k = l + m$.

**iii)** Αν $l=0$, τότε $s_2 \in A_0 = (p^*, 1]$. Επομένως $p^* < s_2 < T_m(s_1)$ από την οποία συνάγεται ότι $k \le m$. W

Εστω $k \ge 1$, $l \ge 0$ ακέραιοι αριθμοί,

$$p_{kl} = \frac{(1-\beta)V_{kl}(1)}{C} \qquad \mathbf{\underline{9.3.11}}$$

όπου

$$V_{kl}(1) = \frac{1}{1-\gamma_1.\beta^{k+1}-\gamma_2.\beta^{l+1}}.[R+\beta.\{\gamma_1.(\frac{1-\beta^k}{1-\beta}-(1-\sigma_1).\frac{1-\beta^k.(1-\lambda)^k}{1-\beta.(1-\lambda)})+\gamma_2.(\frac{1-\beta^l}{1-\beta}-(1-\sigma_2).$$

$$\frac{1-\beta^l.(1-\lambda)^l}{1-\beta.(1-\lambda)})\}.C] \qquad \mathbf{\underline{9.3.12}}$$

Το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση ενός ζεύγους ακεραίων (k,*l*) με $k \geq 1$, $l \geq 0$ έτσι ώστε να συναληθεύουν οι παρακάτω σχέσεις (9.3.13),(9.3.14).

$$T_{k-1}(\sigma_1) \leq p_{kl} < T_k(\sigma_1) \qquad \mathbf{\underline{9.3.13}}$$

$$T_{l-1}(\sigma_2) \leq p_{kl} < T_l(\sigma_2) \quad \text{αν} \quad l \geq 1 \qquad \mathbf{\underline{9.3.14}}$$

$$p_{k0} < \sigma_2 \quad \text{αν} \quad l=0.$$

Τότε $\quad p^* = p_{kl}$ , $V(1)=V_{kl}(1)$.

Η ακόλουθη πρόταση παρέχει ισοδύναμες συνθήκες για τις σχέσεις (9.3.13), (9.3.14), που είναι εύχρηστες στην υπολογιστική διαδικασία.

**Πρόταση 9.3.4:** Εστω (k,l) ένα ζεύγος ακεραίων με $k \geq 1, l \geq 0$.

**i)** Για $l \geq 1, T_{l-1}(\sigma_2) \leq p_{kl} < T_l(\sigma_2) \Leftrightarrow f_1(k,l) < \frac{C}{1-\beta.(1-\lambda)} - R \leq f_2(k,l)$ όπου

$$f_1(k,l) \equiv (1-\sigma_2).(1-\lambda)^l.(\frac{\gamma_2.\beta^{l+1}}{1-\beta.(1-\lambda)}+\frac{1-\gamma_1.\beta^{k+1}-\gamma_2.\beta^{l+1}}{1-\beta}).C$$

$$+(1-\sigma_1).(1-\lambda)^k.\frac{\gamma_1.\beta^{k+1}}{1-\beta.(1-\lambda)}.C,$$

$$f_2(k,l) \equiv (1-\sigma_2).(1-\lambda)^{l-1}.(\frac{\gamma_2.(1-\lambda)\beta^{l+1}}{1-\beta.(1-\lambda)}+\frac{1-\gamma_1.\beta^{k+1}-\gamma_2.\beta^{l+1}}{1-\beta}).C \; +$$

$$(1-\sigma_1).(1-\lambda)^k.\frac{\gamma_1.\beta^{k+1}}{1-\beta.(1-\lambda)}.C$$

Για $l$=0, $p_{k0} < s2 \Leftrightarrow f_1(k,0) < \dfrac{C}{1- b.(1- l)} - R$

ii) $T_{k-1}(s_1) £ p_{kl} < T_k (s_1) \Leftrightarrow f_1(k,l)\ \text{p}\ \dfrac{C}{1- b.(1- l)} - R £ f_2(k,l)$

όπου

$$f_1(k,l)\text{Ì}\ (1- s_1).(1- l)^k.(\frac{g_1.b^{k+1}}{1- b.(1- l)} + \frac{1- g_1.b^{k+1} - g_2.b^{l+1}}{1- b}).C$$

$$+ (1- s_2).(1- l)^l.\frac{g_2.b^{l+1}}{1- b.(1- l)}.C,$$

$$f_2(k,l)\text{Ì}\ (1- s_1).(1- l)^{k-1}.(\frac{g_1.(1- l)b^{k+1}}{1- b.(1- l)} + \frac{1- g_1.b^{k+1} - g_2.b^{l+1}}{1- b}).C$$

$$+(1- s_2).(1- l)^l.\frac{g_2.b^{l+1}}{1- b.(1- l)}.C .$$

Τα ανωτέρω αποτελέσματα προκύπτουν κατόπιν αρκετών πράξεων που τις παραλείπουμε. Στην ακόλουθη πρόταση παρουσιάζουμε υπολογιστικά χρήσιμες σχέσεις ανάμεσα στις συναρτήσεις $f_1, f_2$ και ανάμεσα στις $f_1$,$f_2$.

**Πρόταση 9.3.5:**

**i)** $f_2(k,l) = f_1(k,l) + (1- s_2).l\,(1- l)^{l-1}.\dfrac{1- g_1.b^{k+1} - g_2.b^{l+1}}{1- b}.C$

**ii)** $f_2(k,l+1) = f_1(k,l)$

**iii)** $f_2(k,l) = f_1(k,l) + (1- s_1).l\,.(1- l)^{k-1}.\dfrac{1- g_1.b^{k+1} - g_2.b^{l+1}}{1- b}.C$

**iv)** $f_2(k+1,l) = f_1(k,l)$

### ***Απόδειξη***

Τα (i) και (iii) προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό των $f_1, f_2$ και $f_1, f_2$ αντίστοιχα.

ii) Η απόδειξη του (ii) ανάγεται στη σχέση

$$\frac{\gamma_2(1-\lambda)\beta^{l+2}}{1-\beta.(1-\lambda)}+\frac{1-\gamma_1.\beta^{k+1}-\gamma_2.\beta^{l+2}}{1-\beta}=\frac{\gamma_2.\beta^{l+1}}{1-\beta.(1-\lambda)}+\frac{1-\gamma_1.\beta^{k+1}-\gamma_2.\beta^{l+1}}{1-\beta}$$

που αποδεικνύεται εύκολα.

iv) Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη του ii) W

Συνοψίζοντας, έχουμε**:** $p^* = p_{kl}$, V(1)= $V_{kl}(1)$,
αν το ζεύγος των ακεραίων (k,l),$k \geq 1, l \geq 0$, ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις.

$$f_1(k,l) < \frac{C}{1-\beta.(1-\lambda)} - R \leq f_2(k,l) \qquad \textbf{\underline{9.3.15}}$$

$$f_1(k,l) \leq \frac{C}{1-\beta.(1-\lambda)} - R \leq f_2(k,l), \text{αν } l \geq 1 \qquad \textbf{\underline{9.3.16}}$$

$$f_1(k,0) \leq \frac{C}{1-\beta.(1-\lambda)} - R, \text{αν } l=0 \,. \qquad \textbf{\underline{9.3.17}}$$

## ***Αλγόριθμος $A_6$***

**ΒΗΜΑ 0:** Σημειώνουμε τις παραμέτρους του προβλήματος $q^1$,λ,β,C,R.

**ΒΗΜΑ 1:** Αν ισχύει η συνθήκη (Σ) τότε η άριστη συνάρτηση τιμών υπολογίζεται από τη σχέση (9.2.3) η πολιτική $\delta^\infty$ με δ(p)=0, $0 \leq p \leq 1$ είναι άριστη και η διαδικασία τερματίζεται. Αν η συνθήκη (Σ) δεν ισχύει προχωράμε στα επόμενα βήματα.

**ΒΗΜΑ 2:** Υπολογίζουμε τα $\gamma_1,\gamma_2, s_1, s_2$ από τις σχέσεις (9.1.5)-(9.1.8) και τον αριθμό m όπως ορίσθηκε στην πρόταση 9.3.3.Παραθέτουμε τα επιτρεπτά ζεύγη $(k,l)$ που υπαγορεύονται από την πρόταση 9.3.3 ακολουθώντας την εξής προφανή διάταξη: Ξεκινάμε με $l=0$ και γράφουμε όλα τα επιτρεπτά ζεύγη (k,o) με την φυσική σειρά. Συνεχίζουμε την διαδικασία με $l=1$,κατόπιν με $l=2$ κ.ο.κ. Ετσι παίρνουμε την ακόλουθη διάταξη.

$(1,0), (2,0),\dots,(m,0),(m,1),(m+1,1),(m+1,2),(m+2,2),\dots,(l+m-1,l),(l+m,l),\dots$

Ακολουθώντας τη διαδρομή κατά μήκος της διάταξης επιλέγουμε εκείνο το ζεύγος $(k,l)$ πού ικανοποιεί τις σχέσεις (9.3.15),(9.3.16),(9.3.17).

**ΒΗΜΑ 3:** Υπολογίζουμε τα $p_{kl}, V_{kl}(1)$ από τις σχέσεις (9.3.11) και (9.3.12) και παίρνουμε **:** $p^* = p_{kl}$, $V(1)= V_{kl}(1)$.

Προσδιορίζουμε τον αριθμό $N=\max\{n\in\mathbb{N} : (1-\lambda)^n \geq 1-p^*\}$, από τη σχέση (9.3.7), και τα διαστήματα:

$A_0=(p^*,1], A_n=(\alpha_n,\alpha_{n-1}]$, n=1,2,3,…N, $A_{N+1}=[0,\alpha_N]$

όπου $\alpha_n = 1-\dfrac{1-p^*}{(1-\lambda)^n}$, n=0,1,2…,N

$$(0<\alpha_N<\alpha_{N-1}<\dots<\alpha_1<\alpha_0=p^*<1)$$

**ΒΗΜΑ 4:** Υπολογίζουμε την άριστη συνάρτηση κόστους $V(p), 0\leq p\leq 1$ από τις σχέσεις (9.3.9),(9.3.10).

**Παράδειγμα 9.2:** $\beta=0.9$ ,$\lambda=0.1$ ,$q^1=0.8$,C=4,R=10.

Εχουμε $\gamma_1=0.74$,$\gamma_2=0.26$, $s_1=\dfrac{2}{74}$, $s_2=\dfrac{8}{26}$

$m \equiv \min\{n: s_2 < T_n(s_1)\} = 4$ ,

(επειδή $T_3(s_1)=0.2907 < s_2 = 0.30769 < T_4(s_1) = 0.3616$)

Διάταξη των (k,l):(1,0),(2,0),(3,0),(4,0), (4,1),(5,1),(5,2),(6,2), (6,3),…

$$\frac{C}{1-b.(1-l)} - R = \frac{4}{0.19} - 10 = 11.05263 \equiv d$$

(k=1,l=0) $f_1(1,0) = 19.07417004 > d$
(k=2,l=0) $f_1(2,0) = 18.63452696 > d$
(k=3,l=0) $f_1(3,0) = 18.42780499 > d$
(k=4,l=0) $f_1(4,0) = 18.39481023 > d$
……………………………………………………………………….
(k=10,l=7) $f_1(10,7) = 11.12572387 > d$
(k=11,l=7) $f_1(11,7) = 11.11817573 > d$
(k=11,l=8) $f_1(11,8) < d$

$f_2(11,8) = f_1(11,7) = 11.11817573 > d$

$f_1(11,8) = 10.4058309 < d$

$f_2(11,8) = 11.34254408 > d$

Αρα

το ζεύγος (k=11,l=8) ικανοποιεί τις σχέσεις $f_1(11,8) < d < f_2(11,8)$

$$f_1(11,8) < d < f_2(11,8)$$

Επομένως $V(1)= V_{11,8}(1)=26.84980905$

$p^* = p_{11,8} =0.671245226$

***(Επαλήθευση:*** $T_{10}(s_1) = 0.66074 < p^* < T_{11}(s_1) = 0.69467$

$T_7(s_2) = 0.66887 < p^* < T_8(s_2) = 0.70198$ )

$$N=\max\{n \in \mathbb{N} : (0.9)^n \geq 1 - p^* = 0.328754774\} = 10$$

Εφαρμόζοντας το βήμα 3,τα διαιρετικά σημεία της Μαρκοβιανής διαμέρισης είναι:

$$\alpha_0 = p^* = 0.671245226$$

$\alpha_1$=0.63417 $\alpha_2$=0.59413 $\alpha_3$=0.54903 $\alpha_4$=0.49893 $\alpha_5$=0.44325

$\alpha_6$=0.38139 $\alpha_7$=0.31266 $\alpha_8$=0.23628 $\alpha_9$=0.15143 $\alpha_{10}$=0.05714

Τέλος εφαρμόζοντας το βήμα 4, η άριστη συνάρτηση κόστους για άπειρο χρονικό ορίζοντα είναι:

Αρα

$$V(p)=\begin{cases} 18.9794.p+16.8939, & 0 \le p \le 0.05714 \\ 18.4931.p+16.9217, & 0.05714 \prec p \le 0.15143 \\ 17.8927.p+17.0126, & 0.15143 \prec p \le 0.23628 \\ 17.1515.p+17.1878, & 0.23628 \prec p \le 0.31266 \\ 16.2365.p+17.4738, & 0.31266 \prec p \le 0.38139 \\ 15.1067.p+17.9047, & 0.38139 \prec p \le 0.44325 \\ 13.7120.p+18.5229, & 0.44325 \prec p \le 0.49893 \\ 11.9902.p+19.3820, & 0.49893 \prec p < 0.54903 \\ 9.8644.p+20.5491, & 0.54903 \prec p \le 0.59413 \\ 7.24.p+22.1083, & 0.59413 \prec p \le 0.63417 \\ 4p+24.1648, & 0.63417 \prec p \le 0.67125 \\ 26.8498, & 0.67125 \prec p \le 1 \end{cases}$$

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε ένα πρόβλημα επιλογής ανάμεσα σε δύο διδακτικές μεθόδους, με δύο μαθησιακές καταστάσεις (βαθμούς αφομοίωσης της διδασκόμενης ύλης από την τάξη) και δύο μηνύματα (επιτυχία /αποτυχία σε test) σε δύο περιπτώσεις:

α) περίπτωση πλήρους αβεβαιότητας, όπου το μήνυμα είναι ανεξάρτητο από την μαθησιακή κατάσταση της τάξης είτε επιλέγεται η συμβατική μέθοδος είτε η εξειδικευμένη μέθοδος διδασκαλίας και

β)περίπτωση πλήρους αβεβαιότητας όταν επιλέγεται η συμβατική μέθοδος διδασκαλίας και μερικής πληροφόρησης όταν επιλέγεται η εξειδικευμένη μέθοδος .

Σε κάθε περίπτωση η δομή της άριστης πολιτικής για άπειρο χρονικό ορίζοντα είναι η ακόλουθη:

- Αν ισχύει η συνθήκη ( **Σ),** τότε η πολιτική να επιλέγεται πάντοτε η συμβατική μέθοδος διδασκαλίας είναι άριστη.
- Αν δεν ισχύει η συνθήκη (**Σ)**,τότε η άριστη πολιτική είναι control-limit. Επιλέγεται η εξειδικευμένη μέθοδος διδασκαλίας αν η α- posteriori πιθανότητα για την ελλιπή μαθησιακή κατάσταση υπερβαίνει μία κρίσιμη ποσότητα και η συμβατική μέθοδος διαφορετικά.Η άριστη πολιτική επάγει Μαρκοβιανή διαμέριση στο χώρο των δ.π. και η άριστη (ελάχιστη) συνάρτηση του αναμενόμενου ολικού εκπίπτοντος κόστους είναι κατά τμήματα γραμμική.

Παρέχουμε αλγόριθμο σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις για τον ακριβή υπολογισμό της κρίσιμης ποσότητας της άριστης πολιτικής και της άριστης συνάρτησης κόστους σε άπειρο χρονικό ορίζοντα. Η απλότητα αυτών των αλγορίθμων για τις ειδικές αυτές περιπτώσεις είναι ιδιαίτερα ελκυστική.