ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Διερεύνηση control-limit πολιτικών σε προβλήματα αντικατάστασης συστήματος με δύο καταστάσεις δύο μηνύματα και δύο αποφάσεις

Περίληψη

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε μία ειδική περίπτωση του προβλήματος συντήρησης/αντικατάστασης των Ohnishi-Ibaraki που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 6, με δύο καταστάσεις και δύο μηνύματα. Ειδικότερα μελετάμε την κλάση των control-limit πολιτικών, στην οποία ανήκει και η άριστη πολιτική με το κριτήριο βελτιστοποίησης για άπειρο χρονικό ορίζοντα και αναζητούμε συνθήκες κάτω από τις οποίες μία control-limit πολιτική επάγει Μαρκοβιανή διαμέριση στον χώρο των δ.π.

Στην ενότητα 7.1 δίνουμε τις ιδιότητες των συναρτήσεων μεταφοράς που αντιστοιχούν στα δύο μηνύματα και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μία control–limit πολιτική είναι πεπερασμένα μεταβατική. Επίσης παρουσιάζουμε διαγράμματα για τις διάφορες περιπτώσεις.

Στην ενότητα 7.2 μελετάμε συνθήκες κάτω από τις οποίες μία control-limit πολιτική ικανοποιεί τη συνθήκη **(A)** της ενότητας 5.3 καθώς και τις ειδικότερες συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτή είναι περιοδική και δίνουμε αρκετά παραδείγματα περιοδικών πολιτικών.

7.1. Πεπερασμένα μεταβατικές control - limit πολιτικές

Θεωρούμε το πρόβλημα αντικατάστασης που περιγράψαμε στην ενότητα 6.1 με δύο καταστάσεις ((N=2),S={1,2}) και δύο μηνύματα ((M=2), Θ={1,2}) με βάση τις υποθέσεις $\mathbf{Y_1}$-$\mathbf{Y_5}$, που αντανακλούν τον Μαρκοβιανό χαρακτήρα της χειροτέρευσης (βλέπε παραγράφο (6.1)).

Με 1 και 2 κωδικοποιούμε την καλή (λειτουργική) και την κακή (μη λειτουργική) κατάσταση αντίστοιχα. Μήνυμα μπορεί να είναι ένα αποτέλεσμα της λειτουργίας του συστήματος, που αντανακλά την άγνωστη σε μας κατάστασή του (π.χ ποσοστό ελαττωματικών αντικειμένων, αριθμός παραγόμενων τεμαχίων ανά ώρα, κ.λ.π). Ετσι, ως μήνυμα 1 και 2 μπορούμε να κωδικοποιήσουμε χαμηλά ή υψηλά ποσοστά ελαττωματικών μονάδων που αντανακλούν τις καταστάσεις 1 και 2 αντίστοιχα.
Για να αποφύγουμε τετριμμένες περιπτώσεις, που δεν παρουσιάζουν ενδιαφέρον, περιοριζόμαστε στην τυπική περίπτωση όπου ο πίνακας μετάβασης καταστάσεων

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

και ο πίνακας μηνυμάτων $R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$

i) είναι γνήσια TP_2, δηλαδή $|P|,|R| > 0$.

ii) έχουν μη μηδενικά στοιχεία, δηλαδή : $p_{ij} \neq 0$, i,j=1,2,

$r_{i\theta} \neq 0$, i,θ=1,2.

Σε κάθε χρονική περίοδο επιλέγεται μια απόφαση από το σύνολο A={0,1},όπου οι κωδικοποιήσεις 0,1 είναι**:**

0:συνέχιση της λειτουργίας /συντήρηση του συστήματος

1:αντικατάσταση του συστήματος

Αν i είναι η κατάσταση του συστήματος και α η απόφαση, τα άμεσα κόστη c(i,α), i =1,2, α=0,1 είναι: $C(1,0) = c_1$, $C(2,0) = c_2$, $C(1,1)= R_1$, $C(2,1)=R_2$,για τα οποία υποθέτουμε ότι : $c_1 \leq c_2$, $R_1 \leq R_2$ και $c_1-R_1 \leq c_2 - R_2$.

Είναι βολικό να εργαζόμεθα με την δεύτερη συνιστώσα του δ.π**:** π = (1-p,p), όπου ,p, δηλώνει την *a priori* πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση 2. Παρόμοια, εργαζόμαστε με την δεύτερη συνιστώσα του a-posteriori δ.π :

$T(\pi,\theta)=(T_1(\pi,\theta), T_2(\pi,\theta))$ την οποία συμβολίζουμε με T(p,θ). Δηλαδή,

$$T(p,\theta) \equiv T_2(\pi,\theta)$$

εκφράζει την a-posteriori πιθανότητα το σύστημα στον επόμενο χρόνο (t+1) να βρεθεί στην κατάσταση 2,δοσμένου ότι στον ίδιο χρόνο (t+1) πήραμε το μήνυμα θ και ότι στον παρόντα χρόνο t επιλέξαμε την απόφαση α=0 (συνέχιση της λειτουργίας του συστήματος) και η πιθανότητα για την κατάσταση 2 είναι p.

Επίσης, {θ/p} είναι η πιθανότητα, ότι στον επόμενο χρόνο (t+1) το μήνυμα θα είναι θ, δοσμένου ότι στον παρόντα χρόνο t η πιθανότητα για την κατάσταση 2 του συστήματος είναι p και λαμβάνεται η απόφαση α=0 (συνέχιση της λειτουργίας). Θα περιοριστούμε στη μελέτη control-limit πολιτικών δ^{∞} , με συνάρτηση ελέγχου:

$$\delta(\pi) = \begin{cases} 0\ (\textit{συνέχιση λειτουργίας})\ \textit{άν} & 0 \le p \le p_0. \\ 1\ (\textit{αντικατάσταση})\quad \textit{άν} & p_0 < p \le 1. \end{cases}$$

Είναι φανερό, ότι μια control -limit πολιτική δ^{∞} εξαρτάται αποκλειστικά από την κρίσιμη ποσότητα p_0. Η συνάρτηση κόστους V(p/δ) που αντιστοιχεί στην δ^{∞} γράφεται:

V(p/δ)= c_1+(c_2-c_1).p+β.{1/p}.V(T(p,1)/δ)+ β.{2/p}.V(T(p,2)/δ)), αν $0 \le p \le p_0$

και V(p/δ)=R_1+(R_2-R_1).p+ β.V(0/δ), αν $p_0 < p \le 1$.

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι μία control - limit πολιτική είναι πεπερασμένα μεταβατική (f.t). Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (1.4.4) και (1.4.5), κατόπιν πράξεων, προκύπτει:

$$T\,(p,\theta)=\frac{\alpha_\theta + \beta_\theta.p}{\gamma_\theta + \delta_\theta.p} \quad ,0 \le p \le 1 \qquad \mathbf{\underline{7.1.1}}$$

$$\{\theta/p\}= \gamma_\theta+\delta_\theta.p \quad ,0 \le p \le 1 \qquad \mathbf{\underline{7.1.2}}$$

όπου

α_θ= $p_{12}.r_{2\theta}$,

β_θ=(p_{22}- p_{12}). $r_{2\theta}$ =$|P|$. $r_{2\theta}$

γ_θ= $p_{11}.r_{1\theta}$+ $p_{12}.r_{2\theta}$

δ_θ= $p_{21}.r_{1\theta}$+ $p_{22}.r_{2\theta}$- $p_{11}.r_{1\theta}$- $p_{12}.r_{2\theta}$ $=(r_{2\theta}-r_{1\theta}).|P|$,θ=1,2.

<u>7.1.3</u>

Προφανώς ισχύουν: $\alpha_\theta > 0$, $\gamma_\theta > 0$,θ=1,2.

Για θ=1**:**δ_1=(r_{21}- r_{22}). $|P|= -|P|.|R| < 0$ όπου είναι - $|R|$=(r_{21}- r_{22}).

Για θ=2**:**δ_2=(r_{22}- r_{12}). $|P|= |P|.|R| > 0$.

Επίσης β_θ=(p_{22}- p_{12}).$r_{2\theta}$ =$|P|$.$r_{2\theta}$ >0,θ=1,2 επειδή**:**

$$|P| = \left|\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\right| = p_{22} - p_{12} > 0$$

Αυτό προκύπτει διότι $p_{11}=1-p_{12}$ και $p_{21}=1-p_{22}$ ενώ ο πίνακας P είναι TP_2, επομένως η παραπάνω ορίζουσα είναι θετική.

Λήμμα 7.1.1:

i) Οι συναρτήσεις T (p,1),T(p,2) , $0 \le p \le 1$ είναι γνήσια αύξουσες

ii) Η συνάρτηση T(p,1), $0 \le p \le 1$ είναι γνησίως κυρτή και

η συνάρτηση T(p,2), $0 \le p \le 1$ είναι γνησίως κοίλη.

Απόδειξη

i) Η παράγωγος της T(p,θ), $0 \le p \le 1$ (θ=1,2) είναι:

$$T'(p,\theta)=\left(\frac{\alpha_\theta+\beta_\theta.p}{\gamma_\theta+\delta_\theta.p}\right)'=\frac{\beta_\theta.\gamma_\theta-\alpha_\theta.\delta_\theta}{(\gamma_\theta+\delta_\theta.p)^2} \succ 0,\ 0 \le p \le 1, \text{δεδομένου ότι:}$$

$$\beta_\theta.\gamma_\theta-\alpha_\theta.\delta_\theta=|P|.r_{2\theta}.(p_{11}.r_{1\theta}+p_{12}.r_{2\theta})-p_{12}.r_{2\theta}.(r_{2\theta}-r_{1\theta}).|P|=|P|.r_{2\theta}.r_{1\theta}>0.$$

Επομένως η συνάρτηση ,T(p,θ), $0 \le p \le 1$ είναι γνήσια αύξουσα.

ii) Η δεύτερη παράγωγος της T(p,θ), $0 \le p \le 1$ (θ=1,2) είναι:

$$T''(p,\theta)=-2\,(\beta_\theta.\gamma_\theta-\alpha_\theta.\delta_\theta).\delta_\theta.(\gamma_\theta+\delta_\theta.p)^{-3} \quad 0 \le p \le 1$$

Επομένως $T''(p,1) > 0,\ 0 \le p \le 1$, επειδή $\delta_1 < 0$.

$T''(p,2) < 0,\ 0 \le p \le 1$, επειδή $\delta_2 > 0$. ∎

Λήμμα 7.1.2: Για τις συναρτήσεις T(p,1), T(p,2) ισχύουν:

i) $T(p,1) < T(p,2),\ 0 \le p \le 1$

ii) $T(1,\theta) < 1$, θ=1,2.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(\alpha_2+\beta_2.p).(\gamma_1+\delta_1.p)-(\alpha_1+\beta_1.p).(\gamma_2+\delta_2.p)>0,\ 0 \le p \le 1.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\{1/p\}+\{2/p\}=(\gamma_1+\delta_1.p)+(\gamma_2+\delta_2.p)=1,$$

το αριστερό μέλος της αποδεικτέας ανισότητας γράφεται:

$$(\alpha_2+\beta_2.p).(\gamma_1+\delta_1.p)-(\alpha_1+\beta_1.p).(\gamma_2+\delta_2.p)$$

$$=(\alpha_2+\beta_2.p).(1-(\gamma_2+\delta_2.p))-(\alpha_1+\beta_1.p).(\gamma_2+\delta_2.p)$$

$$=(\alpha_2+\beta_2.p)-(\alpha_2-\alpha_1+(\beta_2-\beta_1).p).(\gamma_2+\delta_2.p)$$

$(p_{12}.r_{22} + |P|.r_{22}.p) - (p_{12}.(r_{22} - r_{21}) + |P|.(r_{22} - r_{21}).p).(g_2 + d_2.p)$

$= r_{22}.(p_{12} + |P|.p) - (r_{22} - r_{21})(p_{12} + |P|.p).(g_2 + d_2.p)$

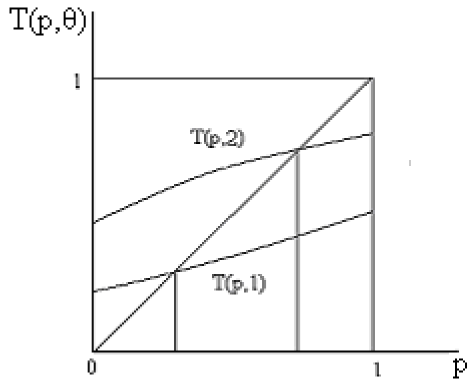
$= (p_{12} + |P|.p).(r_{22} - (r_{22} - r_{21}).(g_2 + d_2.p)) > 0$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή:

Αν $r_{22} - r_{21} \geq 0, \text{τότε} \quad r_{22} - (r_{22} - r_{21}).(g_2 + d_2.p) \geq r_{22} - (r_{22} - r_{21}) = r_{21} > 0$

Αν $r_{22} - r_{21} < 0, \text{τότε} \quad r_{22} - (r_{22} - r_{21}).(g_2 + d_2.p) \geq r_{22} > 0$

ii) Τ (1,θ)= $\dfrac{a_q + b_q}{g_q + d_q} = \dfrac{p_{22}.r_{2q}}{p_{21}.r_{1q} + p_{22}.r_{2q}} < 1$, θ=1,2 . W



Σχήμα 7.1: Οι συναρτήσεις Τ(p,θ), θ=1,2

Παρατήρηση:Το γεγονός ότι η συνάρτηση Τ(p,θ), $0 \leq p \leq 1$ (θ=1,2)είναι αύξουσα είναι αναμενόμενο επειδή από την πρόταση 6.2.3 έχουμε:

$$\pi, \pi' \in \mathrm{P}, p \leq_L p' \Rightarrow \mathrm{T}(p,q) \leq_L T(p',q).$$

Όμως για π=(1-p,p), π΄=(1-p΄,p΄) έχουμε:

$$p \leq_L p' \Leftrightarrow p \leq p' \text{ και } \mathrm{T}(p,q) \leq_L T(p',q) \Leftrightarrow \mathrm{T}(p,q) \leq T(p',q).$$

Αρα $p \leq p' \Rightarrow \mathrm{T}(p,q) \leq T(p',q)$.Επίσης από την πρόταση 6.2.2 έχουμε:

$$\mathrm{T}(p,1) \leq_L T(p,2), \forall p = (1-p,p) \in \mathrm{P},$$

που ισοδυναμεί με τη σχέση:

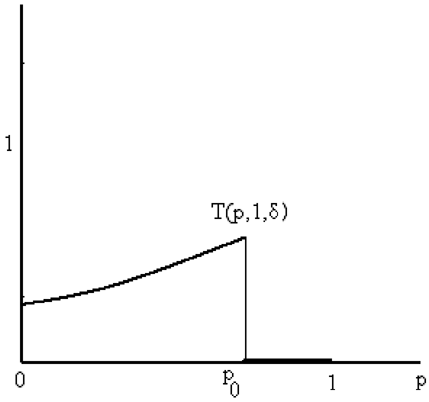
$$\mathrm{T}(p,1) \leq T(p,2) \ , \ 0 \leq p \leq 1$$

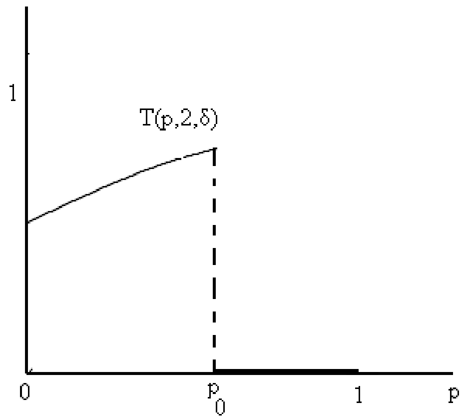
Το γεγονός ότι η παραπάνω σχέση ισχύει με γνήσια ανισότητα (λήμμα 7.1.2) και ότι η συνάρτηση Τ(p,θ), $0 \leq p \leq 1$(θ=1,2) είναι γνήσια αύξουσα, οφείλεται στο γεγονός ότι υϊοθετήσαμε την τυπική περίπτωση στην οποία οι πίνακες P,R είναι γνησίως TP_2 *και έχουν* μη μηδενικά στοιχεία.΄Αλλες χρήσιμες ιδιότητες των συναρτήσεων Τ(p,θ), $0 \le p \le 1$ (θ=1,2) θα διατυπωθούν στην πρόταση 7.1.1 που ακολουθεί.

Στην συνέχεια της ενότητας αυτής θα αναφερόμαστε σε μια conrol-limit πολιτική d^{∞} με κρίσιμη πιθανότητα $p_0 \in (0,1)$. Συνδεδεμένες με την πολιτική d^{∞} είναι οι συναρτήσεις μεταφοράς Τ(p,θ,δ), $0 \le p \le 1$ (θ=1,2), όπου Τ(p,θ,δ) εκφράζει την ***a-posteriori*** πιθανότητα το σύστημα στον επόμενο χρόνο (t+1) να βρεθεί στην κατάσταση 2, δοσμένου ότι στον ίδιο χρόνο (t+1) πήραμε το μήνυμα θ, και ότι στον παρόντα χρόνο t η πιθανότητα για την κατάσταση 2 είναι p και επιλέξαμε την απόφαση δ(p).Ετσι

$$\mathrm{T}(p,\theta,\delta)=\begin{cases}\mathrm{T}(p,\theta) & \acute{\alpha}\nu \quad 0\le p\le p_0\\ 0 & \acute{\alpha}\nu \quad p_0 \prec p\le 1\end{cases}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς Τ(p,θ, δ) είναι ασυνεχής στο σημείο $p=p_0$.





Σχήμα 7.2: Η συνάρτηση Τ(p,θ,δ) με θ=1 Σχήμα 7.3: Η συνάρτηση Τ(p,θ,δ) με θ=2

Εστω D_δ είναι το σύνολο των σημείων στα οποία η συνάρτηση ελέγχου δ παρουσιάζει ασυνέχεια.

Προφανώς $D_\delta=\{p_0\}$

Ορίζουμε τα σύνολα:

$$D^0=D_\delta$$

$$D^n=\{p\in[0,1]:\mathrm{T}(p,\theta,\delta)\in D^{n-1}\ \text{για κάποιο}\ \theta\in\{1,2\}\},$$

$$n=1,2,3...$$

Το σύνολο D^n είναι το σύνολο των a-priori πιθανοτήτων για την κατάσταση 2 του συστήματος, που είναι δυνατόν σε n βήματα να μετασχηματισθούν *a posteriori* στο σημείο ασυνέχειας p_0 της συνάρτησης ελέγχου δ. Αν η πολιτική d^{∞} είναι πεπερασμένα μεταβατική ή περιοδική,(ή γενικότερα ικανοποιεί **την συνθήκη Α** της ενότητας 5.3), τότε η $d^{¥}$ επάγει Μαρκοβιανή διαμέριση στον χώρο Π των δ.π.. Σύμφωνα με το λήμμα 5.2.2 η πολιτική $d^{¥}$ είναι πεπερασμένα μεταβατική αν και μόνον αν είναι υπάρχει n^{3} 0 έτσι ώστε: D^n= Z .

Ο ακέραιος n_{δ} =min{n:D^n= Z }δηλώνει τον δείκτη της $d^{¥}$ και προφανώς D^n= Z "n^{3} n_d.

Παρατήρηση:Αν η κρίσιμη πιθανότητα p_0=1, τότε εφαρμόζουμε την πολιτική $d^{¥}$,ποτέ δεν αντικαθιστούμε το σύστημα (το αφήνουμε να λειτουργεί συνεχώς). Προφανώς η συνάρτηση ελέγχου δ είναι συνεχής και επομένως

$$D^0=D_{\delta}= Z .$$

Αρα η πολιτική $d^{¥}$ είναι πεπερασμένα μεταβατική με δείκτη n_{δ}=0 στην περίπτωση αυτή.

Θεωρώντας p_0 Ξ (0,1) είναι φανερό ότι:

$$D^0=\{p_0\}$$

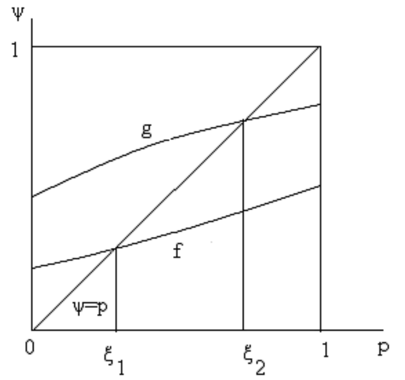
$$D^n=\{p\,\Xi\,[0,p_0]:T(p,q)\,\Xi\,D^{n-1}gi\acute{a}\ \text{κάποιο}\ \ \theta\,\Xi\,\{1,2\}\},n=1,2,3,...$$

Για απλοποίηση των συμβολισμών θέτουμε:

$$f(p)\acute{I}\ T(p,1)=\frac{a_1+b_1.p}{g_1+d_1.p}\ ,\ 0\pounds\ p\pounds\ 1$$

$$g(p)\acute{I}\ T(p,2)=\frac{a_2+b_2.p}{g_2+d_2.p}\ ,\ 0\pounds\ p\pounds\ 1.$$

Στην πρόταση που ακολουθεί συγκεντρώνονται οι κυριότερες ιδιότητες των συναρτήσεων f,g / [0,1] και απεικονίζονται στο σχήμα 7.4 που ακολουθεί.



Σχήμα 7.4: Οι συναρτήσεις f,g με τα μοναδικά τους fixed-point §1,§2 αντίστοιχα.

Η απόδειξη ορισμένων από τις ιδιότητες αυτές στηρίζεται σε προτάσεις της στοιχειώδους ανάλυσης τις οποίες παραθέτουμε στο παράρτημα Α.

Πρόταση 7.1.1:Ιδιότητες των συναρτήσεων f,g/[0,1]

i) Οι συναρτήσεις f,g/[0,1] είναι γνήσια αύξουσες.

ii) Η συνάρτηση f /[0,1] είναι γνήσια κυρτή και η συνάρτηση g/[0,1] είναι γνήσια κοίλη.

iii) $0 < f(p) < g(p) < 1, 0 \le p \le 1$

iv) Η συνάρτηση f /[0,1] έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο διάστημα (0,1) το οποίο συμβολίζουμε με ξ_1, δηλαδή $f(\xi_1)=\xi_1$. Επιπλέον,

$$p < f(p) < \xi_1 \quad \forall p \in [0,\xi_1), \quad \text{και} \quad \xi_1 < f(p) < p \quad \forall p \in (\xi_1,1].$$

v) Η συνάρτηση g/[0,1] έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο διάστημα (0,1) το οποίο συμβολίζουμε με ξ_2, δηλαδή $g(\xi_2)=\xi_2$. Επιπλέον,

$$p < g(p) < \xi_2 \quad \forall p \in [0,\xi_2), \quad \text{και} \quad \xi_2 < g(p) < p \quad \forall p \in (\xi_2,1].$$

vi) $\xi_1 < \xi_2$.

Απόδειξη

Τα (i),(ii)και (iii) είναι επαναδιατύπωση των λημμάτων 7.1.1 και 7.1.2 με τους νέους συμβολισμούς. Τα (i.v)και(v) συνάγονται άμεσα από τα (i) και (ii),την συνέχεια των f,g/[0,1],το γεγονός ότι $0 < f(p) < 1, 0 < g(p) < 1, \forall p \in [0,1]$ και την πρόταση 2 του παραρτήματος Α.

vi) Αν $\xi_2 \le \xi_1$ τότε από (i.v) και (v) έχουμε:

$f(\xi_2) \ge \xi_2 = g(\xi_2)$ πράγμα άτοπο επειδή από (iii)συνάγεται $g(\xi_2) \succ f(\xi_2)$.

Επομένως $\xi_1 \prec \xi_2$. ∎

Σημειώνουμε ότι το σταθερό σημείο ξ_1 της συνάρτησης f /[0,1] προκύπτει ως η επιτρεπτή-δηλαδή η εντός του διαστήματος (0,1)-λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\delta_1.\chi^2 + (\gamma_1 - \beta_1).\chi - \alpha_1 = 0$$

Παρόμοια, το σταθερό σημείο ξ_2 της συνάρτησης g/[0,1] προκύπτει ως η επιτρεπτή-δηλαδή η εντός του διαστήματος (0,1)- λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\delta_2.\chi^2 + (\gamma_2 - \beta_2).\chi - \alpha_2 = 0$$

Εστω f_n /[0,1]η n-στη σύνθεση της f /[0,1] με τον εαυτό της,($f_1=f, f_2=f o f$ και γενικά $f_n= f_{n-1} o f$, n=2,3,…) και

g_n /[0,1] η n-στη σύνθεση της g /[0,1] με τον εαυτό της,($g_1=g, g_2=g o g$ και γενικά $g_n= g_{n-1} o g$, n=2,3,…).

Οι παραπάνω συνθέσεις είναι καλά ορισμένες, επειδή όπως προκύπτει άμεσα από την πρόταση 7.1.1, για τα πεδία τιμών R_f, R_g των συναρτήσεων f /[0,1],g /[0,1] ισχύει:

$$R_f = [f(0), f(1)] \subset (0,1), \quad R_g = [g(0), g(1)] \subset (0,1).$$

Απο την πρόταση 7.1.1 (iii)συνάγεται ότι:

$$0 < f_n(p) < g_n(p) < 1, \ 0 \le p \le 1, \ n = 1, 2, \ldots$$

Στα λήμματα 7.1.3 και 7.1.4 ανακεφαλαιώνονται οι κυριότερες ιδιότητες των συναρτήσεων f_n /[0,1] και g_n /[0,1] αντίστοιχα. Η απόδειξή τους είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 3 του παραρτήματος Α.

Λήμμα 7.1.3: Ιδιότητες της συνάρτησης f_n /[0,1]

i) Για κάθε n= 1, 2, … η συνάρτηση f_n /[0,1] είναι γνήσια αύξουσα, με πεδίο τιμών $[f_n(o), f_n(1)] \subset (0,1)$, και έχει σταθερό σημείο ξ_1 ,(το σταθερό σημείο της f /[0,1]).

ii) Για κάθε $p \in [0, x_1)$ η ακολουθία $\{f_n(p)\}$ είναι γνήσια αύξουσα,

$p < f_n(p) < x_1, n = 1, 2, \ldots$ και $f_n(p) \uparrow x_1$,όταν $n \to \infty$.

Για κάθε $p \in (x_1, 1]$ η ακολουθία $\{f_n(p)\}$ είναι γνήσια φθίνουσα,

$x_1 < f_n(p) < p, n = 1, 2, \ldots$ και $f_n(p) \downarrow x_1$, όταν $n \to \infty$.

$\blacksquare$

Λήμμα 7.1.4:Ιδιότητες της συνάρτησης g_n /[0,1].

Για κάθε n=1,2,…η συνάρτηση g_n /[0,1] είναι γνήσια αύξουσα, με πεδίο τιμών $[g_n(o), g_n(1)] \subset (0,1)$, και έχει σταθερό σημείο ξ_2 ,(το σταθερό σημείο της g/[0,1]).

Για κάθε $p \in [0, x_2)$ η ακολουθία $\{g_n(p)\}$ είναι γνήσια αύξουσα,

$p < g_n(p) < x_2, n = 1, 2, \ldots$ και $g_n(p) \uparrow x_2$,όταν $n \to \infty$.

Για κάθε $p \in (x_2, 1]$ η ακολουθία $\{g_n(p)\}$ είναι γνήσια φθίνουσα,

$x_2 < g_n(p) < p, n = 1, 2, \ldots$ και $g_n(p) \downarrow x_2$, όταν $n \to \infty$. $\blacksquare$

Λήμμα 7.1.5: Έστω $y \in (0,1), n \ge 1$

i) Αν οι εξισώσεις $f_n(x) = y$, $f_{n+1}(x) = y$ έχουν λύσεις στο διάστημα [0,1] και τις συμβολίσουμε με x_n και x_{n+1} αντίστοιχα (δηλαδή $f_n(x_n) = y$, $f_{n+1}(x_{n+1}) = y$), τότε $x_n = f(x_{n+1})$.

ii) Αν οι εξισώσεις $g_n(x) = y$, $g_{n+1}(x) = y$ έχουν λύσεις στο διάστημα [0,1] και τις συμβολίσουμε με x'_n και x'_{n+1} αντίστοιχα (δηλαδή $g_n(x'_n) = y$, $g_{n+1}(x'_{n+1}) = y$), τότε $x'_n = g(x'_{n+1})$.

Απόδειξη

i) Προφανώς οι λύσεις x_n και x_{n+1} είναι μοναδικές.

Επειδή $f_{n+1}(x_{n+1}) = f_n(f(x_{n+1})) = y$ και $f_n(x_n) = y$,συνάγεται ότι $x_n = f(x_{n+1})$

ii) Παρόμοια όπως το (i) . ∎

Λήμμα 7.1.6: Εστω $y \in (0,1)$.Αν οι εξισώσεις $f(x) = y$ και $g(x) = y$ έχουν λύσεις στο διάστημα [0,1] και τις συμβολίσουμε με x_1 και x_2 αντίστοιχα (δηλ. $f(x_1) = y$, $g(x_2) = y$),τότε $x_2 < x_1$.

Απόδειξη

Προφανώς οι λύσεις x_1 και x_2 είναι μοναδικές. Αν $x_2 \geq x_1$, τότε από την πρόταση 7.1.1 έχουμε $g(x_2) = y > f(x_2) \geq f(x_1) = y$,δηλαδή $y > y$,πράγμα άτοπο.

Αρα $x_2 \prec x_1$. ∎

Εστω $p_0 \in (0,1)$ η κρίσιμη ποσότητα που συνδέεται με μια control-limit πολιτική d^∞ .

Οι δυνατές περιπτώσεις πού χρήζουν διερεύνησης, λαμβάνοντας υπόψη και την πρόταση 7.1.1 είναι οι ακόλουθες:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

(1)	$0 < p_0 < x_1$	**με δυνατές υποπεριπτώσεις**	
(1α)	$0 < p_0 < f(0) < x_1$		
(1b)	$f(0) \leq p_0 < g(0) < x_1$	**αν**	$g(0) < x_1$
(1c)	$g(0) \leq p_0 < x_1$	**αν**	$g(0) < x_1$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

(2)	$x_2 < p_0 < 1$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3

(3) $x_1 < p_0 < x_2$ **με δυνατές υποπεριπτώσεις**

(3α) $x_1 < p_0 < g(0)$ **αν** $g(0) > x_1$

(3b) $x_1 < f(p_0) < g(0) \leq p_0 < g(p_0) < x_2$ **αν** $g(0) > x_1$

(3c) $x_1 < g(0) \leq f(p_0) < p_0 < g(p_0) < x_2$ **αν** $g(0) > x_1$

(3d) $g(o) < x_1 < f(p_0) < p_0 < g(p_0) < x_2$ **αν** $g(0) < x_1$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4

(4) $p_0 = x_1$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5

(5) $p_0 = x_2$

Εισάγουμε την ακόλουθη ορολογία:

Έστω $\psi \in [o, p_o]$.

1) Λέμε ότι χ_1' είναι *άμεσος (ή πρώτης τάξης)* $f-$*απόγονος* του ψ ,αν χ_1' είναι η λύση της εξίσωσης $f(\chi) = \psi$, δηλαδή $\chi_1' = f^{-1}(\psi)$, και $\chi_1' \in [o, p_o]$.

2)Λέμε ότι χ_1'' είναι *άμεσος (ή πρώτης τάξης)* $g-$*απόγονος* του ψ ,αν χ_1'' είναι η λύση της εξίσωσης $g(\chi) = \psi$,δηλαδή $\chi_1'' = g^{-1}(\psi)$, και $\chi_1'' \in [o, p_o]$.

3)Λέμε ότι χ_1 είναι *άμεσος (ή πρώτης τάξης) απόγονος του* ψ αν χ_1 είναι άμεσος $f-$απόγονος ή $g-$απόγονος του ψ.

4)Λέμε ότι χ_n *είναι n-στης τάξης απόγονος του* ψ (n≥ 2),αν $\chi_n \in [o, p_o]$ και υπάρχουν $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_{n-1} \in [o, p_o]$, έτσι ώστε τα $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n$ να είναι άμεσοι (πρώτης τάξης) απόγονοι των $\psi, \chi_1, \chi_2, ..., \chi_{n-1}$ αντίστοιχα.

Σημειώνουμε, όπως προκύπτει άμεσα από την παραπάνω ορολογία, ότι αν χ_n είναι n-στης τάξης απόγονος του ψ και χ_{n+1} είναι άμεσος απόγονος του χ_n ,τότε χ_{n+1} είναι n+1- τάξης απόγονος του ψ.

Με την εισαγωγή των συμβολισμών f ,g /[0,1], στη θέση των T(p,1),T(p,2), $0 \leq p \leq 1$, τα σύνολα D^n γράφονται:

$$D^0=\{p_0\}$$

$$D^n=\{p\in[0,p_0]:\ f(p)\in D^{n-1} \text{ η } g(p)\in D^{n-1}\ \},\ n=1,2,3,\ldots$$

Τονίζουμε το γεγονός ότι στα παραπάνω σύνολα το διάστημα αναφοράς είναι το $[0,p_0]$.Το σύνολο D^n μπορεί να θεωρηθεί ως το σύνολο των η-στης τάξης ΄΄απογόνων΄΄ του p_0.

Εστω $z\in[0,p_0]$. *Ορίζουμε τα ακόλουθα σύνολα*:

$$D^0(z)=\{z\},$$

$$D^n(z)=\{p\in[0,p_0]:\ f(p)\in D^{n-1}(z) \quad \text{ή} \quad g(p)\in D^{n-1}(z)\ \},\ n=1,2,3,\ldots$$

Σημειώνουμε ότι στα παραπάνω σύνολα το διάστημα $[0,p_0]$ παραμένει ως διάστημα αναφοράς. Το σύνολο $D^n(z)$ μπορεί να θεωρηθεί ως το σύνολο των n-στης τάξης ΄΄απογόνων΄΄ του z. Προφανώς για $z=p_0$ έχουμε:

$$D^n(p_0)\subseteq D^n,\ n=0,1,2,3,\ldots$$

Στην πρόταση που ακολουθεί αποδεικνύουμε ότι αν $0<z<x_1$ και $z\le p_0$,τότε η ΄΄γενιά΄΄του z ΄΄εκλείπει΄΄ σε πεπερασμένο χρόνο.

Αυτή η ιδιότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια.

Πρόταση 7.1.2:Αν $0\le z<x_1$,και $z\le p_0$, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $m\ge 1$ έτσι ώστε:

$$D^n(z)\neq\varnothing,\ 0\le n<m \text{ και } D^n(z)=\varnothing \quad \forall n\ge m.$$

Απόδειξη

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1) $z<f(0)$

Τότε $z\notin[f(0),f(p_0)]$ και επομένως η εξίσωση $f(x)=z$ δεν έχει λύση στο διάστημα $[0,p_0]$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $f(o)<g(0)$(πρόταση 7.1.1(iii)) έχουμε $z<g(0)$.Συνεπώς $z\notin[g(0),g(p_0)]$ και η εξίσωση $g(x)=z$ δεν έχει λύση στο διάστημα $[0,p_0]$.

Άρα στην περίπτωση αυτή το z δεν έχει απογόνους και $D^1(z)=\varnothing$ (m=1).

2) $f(o)\le z<x_1$

Επειδή $f_n(0)\uparrow x_1$ όταν $n\to\infty$ (λήμμα 7.1.3 (ii)), υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0\ge 1$ έτσι ώστε: $f_n(o)\le z\ \ \forall n\le n_0$ και $f_n(0)>z\ \ \forall n>n_0$.

Είναι φανερό ότι για κάθε $n > n_0$ η εξίσωση $f_n(x) = z$ δεν έχει λύση στο διάστημα [0,p_0] επειδή απλά το $z \notin [f_n(0), f_n(p_0)]$.

Για κάθε $n \leq n_0$, λαμβάνοντας υπόψη το λήμμα 7.1.3 (ii), έχουμε:

$$f_n(0) \leq z < f_n(z) < x_1.$$

Επομένως $z \in [f_n(0), f_n(z)]$ και η εξίσωση $f_n(x) = z$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα [0,z],(και κατά συνέπεια στο [0,p_0],επειδή $z \leq p_0$),την οποία συμβολίζουμε με z_n ,δηλαδή:

$$f_n(z_n) = z \quad \forall n \leq n_0.$$

Αν n=1,τότε $\quad f_1(z_1) = f(z_1) = z$

Αν $n \geq 2$,από λήμμα 7.1.5 (i) έχουμε $z_{n-1} = f(z_n)$.

Επειδή $z_n \leq z < x_1$, έχουμε ότι $f(z_n) > z_n$ (πρόταση 7.1.1 (iv)).

Αρα $z_{n-1} > z_n$. Έτσι προκύπτει η ακόλουθη διάταξη:

$$z_{n_0} < z_{n_0-1} < \ldots < z_1 < z < x_1$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις:

2α) $f(o) \leq z < \min\{g(o), x_1\}$

Επειδή $z < g(o)$, έχουμε $z_n < z < g(o)$, $1 \leq n \leq n_0$.

Επομένως $z \notin [g(0), g(p_0)]$, $z_n \notin [g(0), g(p_0)]$, $1 \leq n \leq n_0$,και οι εξισώσεις $g(x) = z$, $g(x) = z_n$,$1 \leq n \leq n_0$,δεν έχουν λύση στο διάστημα [0,p_0].Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν g-απόγονοι του z και των f απογόνων του $z_1, z_2, \ldots z_{n_0}$. Συμπεραίνουμε ότι:

$$D^n(z) = Z \quad \forall n \succ n_0 \quad (m=n_0+1).$$

2b) $g(o) \leq z \prec x_1$ (φυσικά υπό την προϋπόθεση ότι $g(o) < x_1$).

Επειδή $x_1 < x_2$ (πρόταση 7.1.1(vi)), έχουμε $z < g(z) < x_2$ (πρόταση 7.1.1(v)),οπότε $z \in [g(0), g(z)]$ και η εξίσωση $g(x) = z$ έχει την μοναδική λύση $y_1 = g^{-1}(z)$ στο διάστημα [0,z] (άρα και στο [0,p_0], επειδή $z \leq p_0$).

Επομένως $D^1(z)=\{z_1,\psi_1\}$. Επειδή z_1 είναι η λύση της εξίσωσης $f(x) = z$, από το λήμμα 7.1.6 έχουμε $y_1 < z_1$.

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι για οποιοδήποτε n-τάξεως απόγονο του z (όπου $n \leq n_0$), $w \in D^n(z)$, ισχύει $w \leq z_n$.

Ο ισχυρισμός ισχύει για n=1.Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για n=k$< n_0$,δηλαδή:

$$w \in D^k(z) \text{ ή } w \le z_k$$

Θα δείξουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για n = k+1($\le n_0$). Η απόδειξη βασίζεται στην προφανή παρατήρηση ότι οι k+1 τάξεως απόγονοι του z προκύπτουν ως άμεσοι πρώτης τάξης απόγονοι των k τάξεως απογόνων του z.

Εστω $w \in D^k(z)$.Θεωρούμε τις εξισώσεις $f(x) = w, g(x) = w$ με λύσεις στο διάστημα [0,p_0]-αν υπάρχουν- $w' = f^{-1}(w)$ και $w'' = g^{-1}(w)$ αντίστοιχα. Με άλλα λόγια και εφόσον υπάρχουν $w' = f^{-1}(w)$ και $w'' = g^{-1}(w)$ είναι άμεσοι πρώτης τάξεως απόγονοι του w και επομένως $w', w'' \in D^{k+1}(z)$.Από το λήμμα 7.1.6 έχουμε $w'' < w'$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι : $w' \le z_{k+1}$.

Πράγματι, αν $w' > z_{k+1}$,τότε $w = f(w') > f(z_{k+1}) = z_k$, που αντίκειται όμως στην υπόθεση της επαγωγής $w \le z_k$. Επομένως $w'' < w' \le z_{k+1}$ και ο ισχυρισμός ισχύει για n = k+1$\le n_0$.Αποδείξαμε συνεπώς ότι για $1 \le n \le n_0$, $w \in D^n(z)$ ή $w \le z_n$.

Εστω $w \in D^{n_0}(z)$ (οπότε $w \le z_{n_0}$). Θα δείξουμε ότι $z_{n_0} < f(o)$. Πράγματι, αν $z_{n_0} \ge f(o)$,τότε $z = f_{n_0}(z_{n_0}) \ge f_{n_0}(f(o)) = f_{n_0+1}(o)$,

δηλαδή $z \ge f_{n_0}(f(0)) = f_{n_0+1}(0)$, το οποίο αντίκειται στον ορισμό του n_0 ως $n_0=\max\{n \in N : f_n(o) \le z\}$. Επομένως $w \le z_{n_0} < f(o)$.

Συμπεραίνουμε ότι $w \notin [f(0), f(p_0)], w \notin [g(0), g(p_0)]$ και οι εξισώσεις $f(x) = w$, $g(x) = w$ δεν έχουν λύσεις στο [o,p_0].Με άλλα λόγια το w δεν έχει απογόνους και συνεπώς $D^{n_0+1}(z) = \emptyset \quad (m = n_0 + 1)$. ■

Πόρισμα 7.1.3: (Περίπτωση 1)

Αν $0 < p_0 < x_1$,τότε η control limit πολιτική δ^{∞} με κρίσιμη ποσότητα p_0 είναι πεπερασμένα μεταβατική.

Απόδειξη

Από την πρόταση 7.1.2 , υπάρχει φυσικός αριθμός $m_0 \ge 1$ έτσι ώστε:

$D^n = D^n(p_0)$ΉZ 0£ $n < m_0$ και $D^n = D^n(p_0) =$ Z "n ³ m_0.Επομένως η πολιτική $d^{¥}$ είναι πεπερασμένα μεταβατική με δείκτη $n_δ=m_0$. W

Πρόταση 7.1.4:(Περίπτωση 2)

Αν $x_2 < p_0 < 1$, τότε η control-limit πολιτική $δ^{¥}$ με κρίσιμη ποσότητα p_0 είναι πεπερασμένα μεταβατική με δείκτη $n_δ=1$.

Απόδειξη

Επειδή p_0Ξ$(x_2,1)$ έχουμε $x_2 < g(p_0) < p_0$ (πρόταση7.1.1(v)).

Επομένως p_0O$[g(0), g(p_0)]$και η εξίσωση g(x)=p_0 δεν έχει λύση στο [o,p_0].Επειδή $x_1 < x_2$ (πρόταση 7.1.1(vi)), έχουμε p_0 Ξ$(x_1,1]$. Συνεπώς $x_1 < f(p_0) < p_0$(πρόταση 7.1.1 (iv)),οπότε p_0O$[f(0), f(p_0)]$και η εξίσωση f(x)= p_0 δεν έχει λύση στο [o,p_0].Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι το p_0 δεν έχει άμεσους πρώτης τάξεως απογόνους, δηλαδή $D^1 =$ Z .Επομένως η control-limit πολιτική $δ^{¥}$ με κρίσιμη ποσότητα p_0 είναι πεπερασμένα μεταβατική με δείκτη $n_δ=1$. W

Πρόταση 7.1.5:(Περίπτωση (3α))

Αν x_1 p $g(o)$ και x_1 p p_0 p $g(o)$,τότε η control-limit πολιτική $δ^{¥}$ με κρίσιμη ποσότητα p_0 είναι πεπερασμένα μεταβατική με δείκτη $n_δ=1$.

Απόδειξη

Επειδή p_0O$[g(0), g(p_0)]$ η εξίσωση g(x)=p_0 δεν έχει λύση στο διάστημα [o,p_0].Επειδή p_0f x_1, έχουμε $x_1 < f(p_0) < p_0$(πρόταση 7.1.1(iv)).

Επομένως, p_0O$[f(0), f(p_0)]$και η εξίσωση f(x)= p_0 δεν έχει λύση στο διάστημα [o,p_0].Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το p_0 δεν έχει άμεσους πρώτης τάξεως απογόνους, δηλαδή $D^1 =$ Z .

Αρα, η control-limit $δ^{¥}$ με κρίσιμη ποσότητα p_0 είναι πεπερασμένα μεταβατική με δείκτη $n_δ=1$.

Πρόταση 7.1.6:(Περιπτώσεις (3b), (3c),(3d)).

Εστω ότι $g(0)$ £ p_0 και $x_1 < p_0 < x_2$

Αν υπάρχει φυσικός αριθμός $l \geq 1$, έτσι ώστε να ισχύει η συνθήκη

$$D^l \subset [0, x_1) \qquad \textbf{(Σ)}$$

Τότε η control-limit πολιτική d^∞ με κρίσιμη ποσότητα p_0 είναι πεπερασμένα μεταβατική.

Απόδειξη

Εστω ότι ισχύει η συνθήκη (Σ) για $l \geq 1$. Αν $D^l = \emptyset$ τότε προφανώς η πολιτική d^∞ είναι πεπερασμένα μεταβατική με δείκτη $n_d \leq l$.

Εστω ότι $D^l \neq \emptyset$. Προφανώς το πλήθος των l-τάξεως απογόνων του p_0 είναι πεπερασμένο; $\left|D^l\right| \leq 2^l$.

Για $z \in D^l$, επειδή $z \in [0, x_1)$, υπάρχει φυσικός αριθμός $m(z) \geq 1$:

$$D^n(z) \neq \emptyset, 0 \leq n < m(z) \quad \text{και} \quad D^n(z) = \emptyset \quad \forall n \geq m(z) \text{ (πρόταση 7.1.2).}$$

Επομένως η πολιτική $(d)^\infty$ είναι πεπερασμένα μεταβατική με δείκτη

$$n_d = \max\{m(z) : z \in D^l\} + l . \qquad \blacksquare$$

Ο έλεγχος ισχύος της συνθήκης (Σ) στην παραπάνω πρόταση είναι δύσκολο εγχείρημα , λόγω του πλήθους των δυνητικών απογόνων του p_0 (οι εν δυνάμει l-τάξεως απόγονοι του p_0 είναι 2^l).

Ωστόσο είναι σχετικά απλό να εξετάσουμε την ισχύ της συνθήκης (Σ) για $l=1$ και $l=2$.

Πρόταση 7.1.7:

Εστω $g(0) \leq p_0$ και $x_1 < p_0 < x_2$. Τότε

i) η συνθήκη (Σ) ισχύει για $l = 1$ αν και μόνον αν:

$$p_0 < g(x_1)$$

ii) Αν η συνθήκη (Σ) δεν ισχύει για $l = 1$ $(g(x_1) \leq p_0)$, τότε η (Σ) ισχύει για $l = 2$ αν και μόνο αν :

$$g(f(p_0)) < p_0 < g_2(x_1).$$

Απόδειξη

Οι δυνατές περιπτώσεις όταν $g(0) \leq p_0$ και $x_1 < p_0 < x_2$ είναι οι (3b),(3c) και (3d) . Επειδή

$$p_0 \notin [f(0), f(p_0)],\ p_0 \in [g(0), g(p_0)]$$

από τις δύο εξισώσεις $f(c) = p_0$, $g(c) = p_0$ μόνο η δεύτερη έχει λύση $y = g^{-1}(p_0)$ στο διάστημα $[0, p_0]$.Συνεπώς ο μοναδικός άμεσος (πρώτης τάξεως) απόγονος του p_0 είναι το y και $D^1 = \{y\}$.Διαπιστώνουμε ότι $y \neq p_0$.

Πράγματι, επειδή $p_0 < x_2$ έχουμε:

$$g(y) = p_0 < g(p_0) \quad \text{(πρόταση 7.1.1 (v))}$$

από την οποία προκύπτει $y < p_0$.

i) η συνθήκη (Σ) ισχύει για $l = 1$, τότε και μόνο τότε αν:

$$y < x_1 \text{ η ισοδύναμα αν}$$

$$g(y) = p_0 < g(x_1)$$

ii) Αν δεν ισχύει η συνθήκη (Σ) για $l = 1$, τότε :

$$x_1 \leq y < p_0.$$

Αν η εξίσωση $f(c) = y$ έχει λύση $y_1 = f^{-1}(y)$ στο διάστημα $[0, p_0]$ τότε $y_1 \geq y$.

Πράγματι επειδή $y \geq x_1$, από την πρόταση 7.1.1 (iv) έχουμε:

$f(y_1) = y \geq f(y)$, από την οποία προκύπτει $y_1 \geq y$.

Αν η εξίσωση $g(c) = y$ έχει λύση $y_2 = g^{-1}(y)$ στο διάστημα $[0, p_0]$ τότε $y_2 < y$.

Πράγματι επειδή $y < x_2$, από την πρόταση 7.1.1 (v) έχουμε

$g(y_2) = y < g(y)$, από την οποία προκύπτει $y_2 < y$.

Εξετάζοντας πότε οι παραπάνω εξισώσεις έχουν λύσεις στο διάστημα $[0, p_0]$ διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις**:**

α) $(f(o) < x_1 \leq) y \leq f(p_0) < g(0)$

ή $(f(o) < x_1 \leq) y \leq g(0) \leq f(p_0)$

Επειδή $y \in [f(0), f(p_0)], y \notin [g(0), g(p_0)]$ μόνο η εξίσωση $f(c) = y$ έχει λύση $y_1 = f^{-1}(y)$ στο διάστημα $[0, p_0]$.΄Αρα $D^2 = \{y_1\}$.Επειδή $y_1 \geq y$ συνάγεται ότι $y_1 \geq x_1$ και επομένως η συνθήκη (Σ) δεν ισχύει για $l = 2$.

b) $f(p_0) < y < g(0)$

Επειδή $y \notin [f(0), f(p_0)],\ y \notin [g(0), g(p_0)]$ οι εξισώσεις $f(c) = y$, $g(c) = y$ δεν έχουν λύση στο διάστημα $[0, p_0]$.

Επομένως $D^2 = Z$ και η συνθήκη (Σ) ισχύει τετριμμένα για $l = 2$.

Σημειώνουμε ακόμη ότι:

$$f(p_0) < y < g(0) \Leftrightarrow g(f(p_0)) < g(y) = p_0 < g_2(0).$$

c) $(f(0) <)g(0) \leq y \leq f(p_0)(< p_0 < g(p_0) < x_2)$

Επειδή $y \in [f(0), f(p_0)],\ y \in [g(0), g(p_0)]$, οι εξισώσεις $f(c) = y$, $g(c) = y$ έχουν λύσεις $y_1 = f^{-1}(y)$, $y_2 = g^{-1}(y)$ στο διάστημα $[0, p_0]$. Άρα $D^2 = \{y_1, y_2\}$ και $y_2 < y \leq y_1$. Συνάγεται ότι $y_1 \geq x_1$ και επομένως η συνθήκη (Σ) δεν ισχύει για $l = 2$.

d) $f(p_0) < g(0) \leq y (< p_0 < g(p_0) < x_2)$

ή $g(0) \leq f(p_0) < y (< p_0 < g(p_0) < x_2)$

Επειδή $y \notin [f(0), f(p_0)],\ y \in [g(0), g(p_0)]$, μόνο η εξίσωση $g(c) = y$ έχει λύση $y_2 = g^{-1}(y)$ στο διάστημα $[0, p_0]$. Επομένως $D^2 = \{y_2\}$ και $y_2 < y$. Η συνθήκη (Σ) ισχύει για $l = 2$, αν και μόνον αν $y_2 < x_1$ ή ισοδύναμα αν ισχύει: $p_0 = g_2(y_2) < g_2(x_1)$.

Σημειώνουμε επίσης ότι:

$$f(p_0) < g(0) \leq y \Rightarrow g(f(p_0)) < g_2(0) \leq g(y) = p_0$$

και

$$g(0) \leq f(p_0) < y \Rightarrow g_2(0) \leq g(f(p_0)) < g(y) = p_0$$

Συνοψίζοντας από τις περιπτώσεις (α),(b),(c),(d) συνάγεται ότι η συνθήκη (Σ) ισχύει για $l = 2$ τότε και μόνο τότε αν :

$$g(f(p_0)) < p_0 \leq g_2(x_1) \qquad W$$

Ο έλεγχος της συνθήκης (Σ) για $l = 3$ επιτυγχάνεται με παρόμοιο τρόπο, όμως επισημαίνουμε ότι οι περιπτώσεις που πρέπει να εξετασθούν είναι περισσότερες. Δίνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα παραλείποντας την απόδειξη.

Πρόταση 7.1.8:

Εστω $g(0) \leq p_0$ και $x_1 < p_0 < x_2$. Αν η συνθήκη (Σ) δεν ισχύει για $l = 2$, τότε η (Σ) ισχύει για $l = 3$ αν και μόνον αν:

1) $p_0 \le g((f(p_0))$, $p_0 < g_2(x_1)$,

$g((f_2(p_0)) < p_0 < g(f(g(x_1)))$

ή

2) $g((f(p_0)) < p_0$, $p_0 \ge g_2(x_1)$,

$g_2(f(p_0)) < p_0 < g_3(x_1)$ ■

Πρόταση 7.1.9 :*(Περίπτωση (4))*

Αν $p_0 = x_1$,τότε η control-limit πολιτική d^{∞} με κρίσιμη ποσότητα p_0 είναι περιοδική.

Απόδειξη

Η εξίσωση $f(c) = p_0$ έχει λύση στο διάστημα $[0, p_0]$ το σταθερό σημείο της f , $p_0 = x_1$. Επομένως

$$x_1 \in D^n \text{, n = 0,1,2,}\ldots$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις :

i) $p_0 = x_1 \prec g(0)$.

Έχουμε $p_0 \notin [g(0), g(p_0)]$ και η εξίσωση $g(c) = p_0$ δεν έχει λύση στο διάστημα $[0, p_0]$.Επομένως $D^n = \{x_1\}$ $\forall$ n=0,1,2…και η πολιτική d^{∞} είναι τετριμμένα περιοδική.

ii) $p_0 = x_1 \ge g(0)$.

Επειδή $x_1 \prec x_2$ έχουμε $x_1 \prec g(x_1)$ (πρόταση 7.1.1). Αρα $p_0 \in [g(0), g(p_0)]$ και η εξίσωση $g(c) = p_0 = x_1$ έχει λύση $y = g^{-1}(x_1)$ στο διάστημα $[0, p_0]$.

Επειδή $g(y) = x_1 \prec g(x_1)$,συνάγεται ότι $y \prec x_1 = p_0$.

Σύμφωνα με την πρόταση 7.1.2 ,υπάρχει φυσικός αριθμός $m \ge 1$ έτσι ώστε:

$$D^n(y) \neq \emptyset, 0 \le n < m \quad \text{και} \quad D^n(y) = \emptyset, \forall n \ge m.$$

Συμπεραίνουμε ότι : $D^0 = \{x_1\}$

$$D^n = \{x_1\} \cup \bigcup_{k=0}^{n-1} D^K(y) \text{ ,n=1,2,}\ldots$$

Σημειώνουμε ότι $D^n = D^m \ \forall n \geq m$.

Επομένως η πολιτική d^{∞} είναι περιοδική. W

Πρόταση 7.1.10 :(Περίπτωση (5))

Αν $p_0 = x_2$,τότε η control-limit πολιτική d^{∞} με κρίσιμη ποσότητα p_0 είναι περιοδική.

Απόδειξη

Η εξίσωση $g(c) = p_0$ έχει λύση στο διάστημα $[0, p_0]$ το σταθερό σημείο της g , $p_0 = x_2$.

Επομένως

$$x_2 \in D^n, \text{ n} = 0,1,2,\ldots$$

Επειδή $x_2 = p_0 > x_1$ έχουμε $f(p_0) < p_0$ (πρόταση 7.1.1 (iv)).

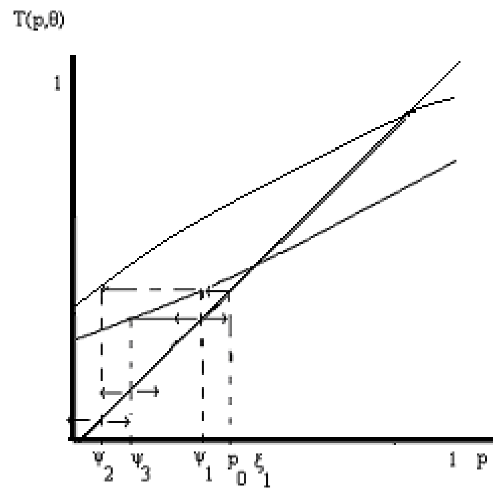
Επομένως $p_0 \notin [f(0), f(p_0)]$ και η εξίσωση $f(c) = p_0$ δεν έχει λύση στο διάστημα $[0, p_0]$.

Συμπεραίνουμε ότι:

$D^n = \{x_2\}$, n = 0,1,2,… και η πολιτική d^{∞} είναι τετριμμένα περιοδική. W

Τα διαγράμματα που ακολουθούν διαφωτίζουν τις διάφορες περιπτώσεις 1-5.Ενδεικτικά παραθέτουμε επίσης τη Μαρκοβιανή διαμέριση τη Μαρκοβιανή απεικόνιση και το διάγραμμα ροής της control limit πολιτικής για κάθε μία από τις περιπτώσεις.

Περίπτωση (1): $0 < p_0 < x_1$ (πρβλ. πρόταση 7.1.3)



Σχήμα 7.5

$$y_1 = f^{-1}(p_0) = \frac{-a_1 + g_1.p_0}{b_1 - d_1.p_0} \qquad D^0=\{p_0\},$$

$$y_2 = g^{-1}(p_0) = \frac{-a_2 + g_2.p_0}{b_2 - d_2.p_0} \qquad D^1 = \{y_1, y_2\},$$

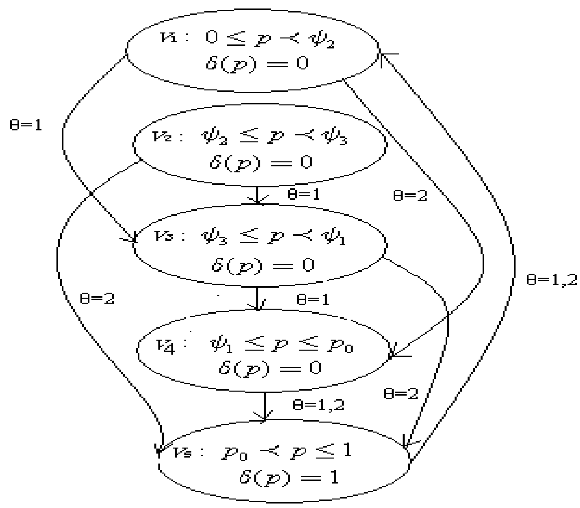
$$y_3 = f^{-1}(y_1) = \frac{-a_1 + g_1.y_1}{b_1 - d_1.y_1} \qquad D^2 = \{y_3\}, \quad D^3 = Z, n_d = 3$$

Μαρκοβιανή διαμέριση του διαστήματος [0,1]:

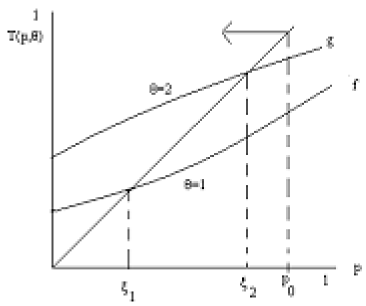
V*1**=[0,ψ2),V*2** =[ψ2,ψ3),***V*3** =[ψ3,ψ1),***V*4** =[ψ1,p0],***V*5**=(p0,1).

Μαρκοβιανή απεικόνιση v(j,θ) **Διάγραμμα ροής για την πολιτική** $d^{¥}$

j \ θ	1	2
1	3	4
2	3	5
3	4	5
4	5	5
5	1	1



Περίπτωση (2): x_2 p p_0 p 1(πρβλ. πρόταση 7.1.4).



D0={p0}

$D^1 = Z$, nδ=1

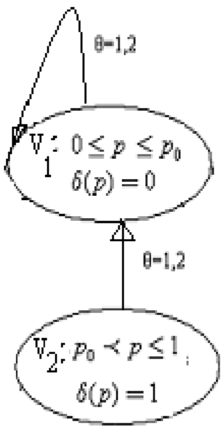
Μαρκοβιανή διαμέριση του διαστήματος [0,1]:

***V*1**=[0, p_0], ***V*2**=(p0,1)

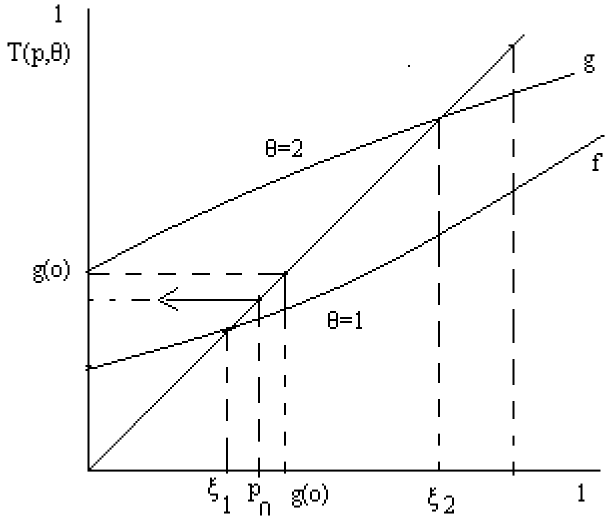
Σχήμα 7.6

<u>Μαρκοβιανή απεικόνιση v(j,θ)</u> **Διάγραμμα ροής για την πολιτική** $d^{¥}$

j \ θ	1	2
1	1	1
2	1	1



□



Περίπτωση (3α): $g(0) \succ x_1$,

$x_1 \prec p_0 \prec g(0)$.(πρβλ. πρόταση 7.1.5).

$D^0=\{p_0\}$

$D^1 = Z$, $n_\delta=1$

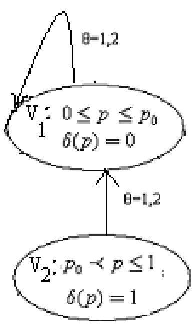
Σχήμα 7.7

Μαρκοβιανή διαμέριση του διαστήματος [0,1]:

$V_1=[0, p_0]$, $V_2=(p_0,1)$

<u>Μαρκοβιανή απεικόνιση v(j,θ)</u> **<u>Διάγραμμα ροής για την πολιτική</u>** $d^{¥}$

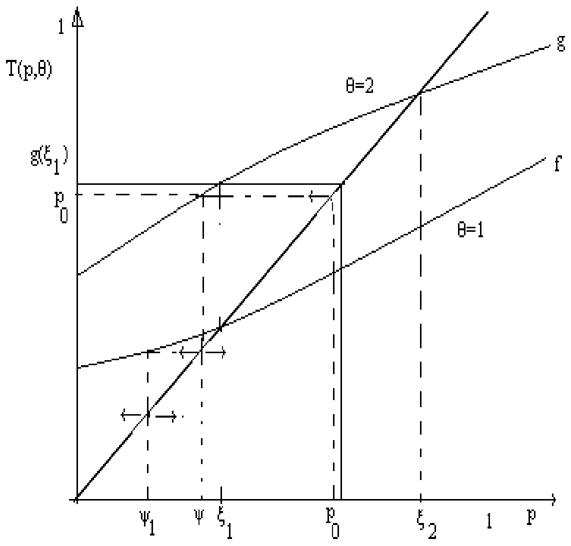
j \ θ	1	2
1	1	1
2	1	1



□

Πρόταση 7.1.7,περίπτωση 1: $g(0) \le p_0, \xi_1 \prec p_0 \prec \xi_2, p_0 \prec g(\xi_1)$

Η Συνθήκη (Σ) ισχύει για l=1.



Σχήμα 7.8

$$y = g^{-1}(p_0) = \frac{-\alpha_2 + \gamma_2 . p_0}{\beta_2 - \delta_2 . p_0} < \xi_1$$

$$y_1 = f^{-1}(y) = \frac{-\alpha_1 + \gamma_1 . y}{\beta_1 - \delta_1 . y}$$

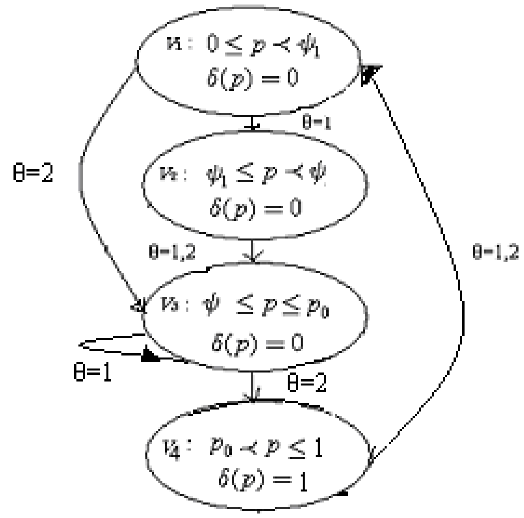
$D^0=\{p_0\}$, $D^1=\{\psi\} \cup [0,\xi_1)$, $D^2=\{\psi_1\}$, $D^3=Z$, $n_\delta=3$.

Μαρκοβιανή διαμέριση του διαστήματος [0,1]:

$\boldsymbol{V_1}=[0,\psi_1)$, $\boldsymbol{V_2}=[\psi_1,\psi)$, $\boldsymbol{V_3}=[\psi,p_0]$, $\boldsymbol{V_4}=(p_0,1]$

Μαρκοβιανή απεικόνιση ν(j,θ) **Διάγραμμα ροής για την πολιτική** d^∞

j \ θ	1	2
1	2	3
2	3	3
3	3	4
4	1	1

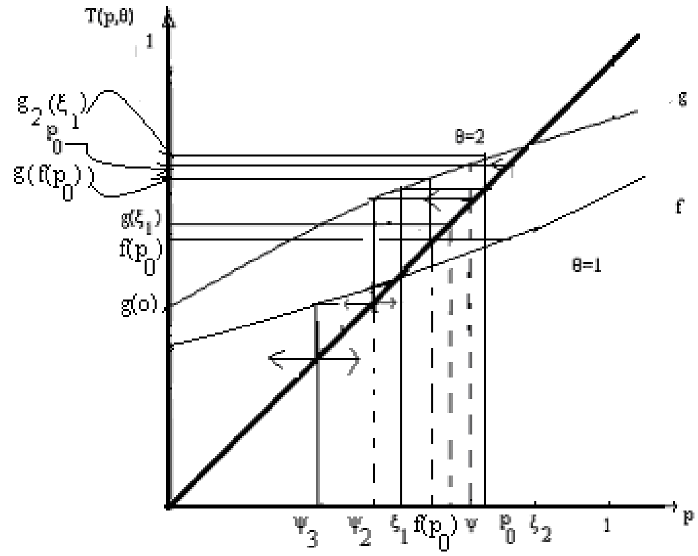


∎

Πρόταση 7.1.7,περίπτωση 2: $g(0) \le p_0, \xi_1 \prec p_0 \prec \xi_2, p_0 \ge g(\xi_1)$.

Η Συνθήκη (Σ) δεν ισχύει για l=1: $g(f(p_0)) \prec p_0 \prec g_2(x_1)$

Η Συνθήκη (Σ) ισχύει για l=2



Σχήμα 7.9

$$y = g^{-1}(p_0) = \frac{-a_2 + g_2.p_0}{b_2 - d_2.p_0}, \ \xi_1 \le y < p_0$$

$D^0=\{p_0\}, D^1 = \{y\}, D^2=\{y_2\} \in [0, x_1),$

$$y_2 = g^{-1}(y) = \frac{-a_2 + g_2.y}{b_2 - d_2.y} \prec x_1 \qquad D^3 = \{y_3\},$$

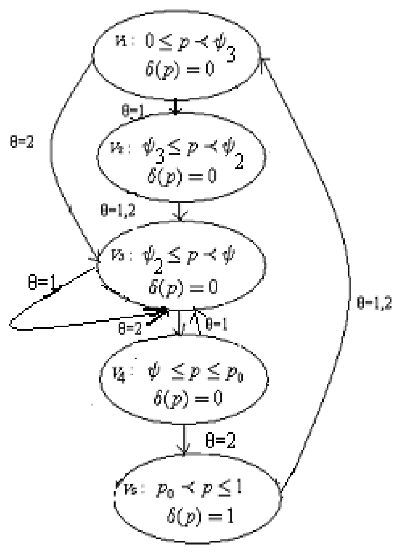
$$y_3 = f^{-1}(y_2) = \frac{-a_1 + g_1.y_2}{b_1 - d_1.y_2} \qquad D^4=Z, \ n_\delta=4$$

Μαρκοβιανή διαμέριση του διαστήματος [0,1]:

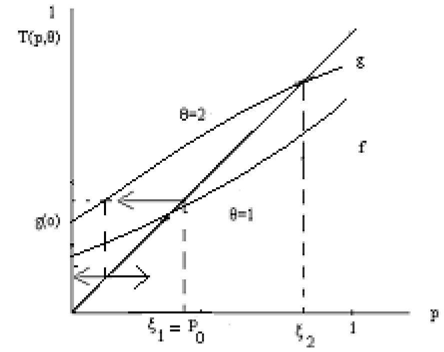
V_1=[0,ψ3), V_2 =[ψ3, ψ2), V_3 =[ψ2,ψ), V_4 =[ψ,p0], V_5=(p0,1).

Μαρκοβιανή απεικόνιση ν(j,θ) **Διάγραμμα ροής για την πολιτική** d^∞

j \ θ	1	2
1	2	3
2	3	3
3	3	4
4	3	5
5	1	1



Περίπτωση (4) : $p_0 = \xi_1$, **(πρβλ. πρόταση 7.1.9),** $g(0)\ \text{p}\ x_1$.



$$p_0 = \xi_1 \;\;,\; g(0)\ \text{p}\ x_1$$

$$y_1 = f^{-1}(p_0) = p_0 = x_1$$

$$y_2 = g^{-1}(p_0)$$

$D^0=\{\xi_1\}, D^n = \{x_1, y_2\}, n = 1,2,3,...$

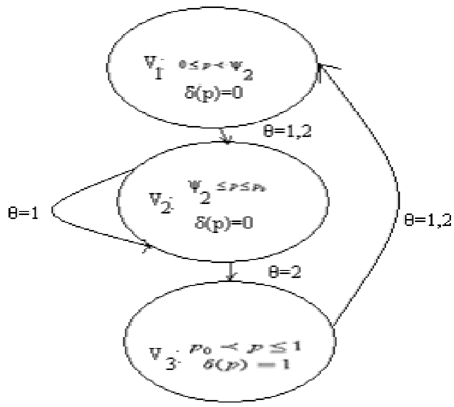
Σχήμα 7.10

<u>Μαρκοβιανή διαμέριση του διαστήματος [0,1]</u>

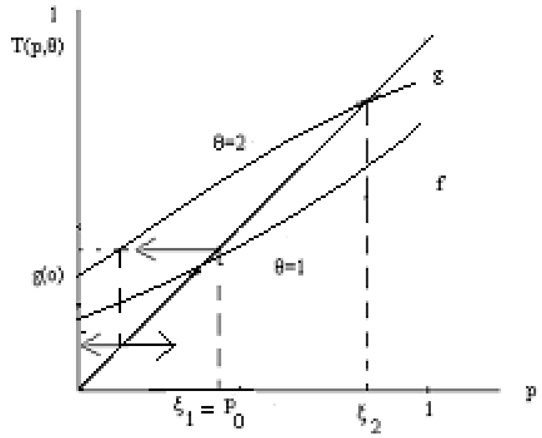
***V*1**=[0,ψ2), ***V*2** =[ψ2, p0], ***V*3**=(p0,1).

Μαρκοβιανή απεικόνιση v(j,θ) **Διάγραμμα ροής για την πολιτική** $d^{¥}$

j \ θ	1	2
1	2	2
2	2	3
3	1	1



Περίπτωση (5): $p_0 = \xi_2$ (πρβλ. πρόταση 7.1.9).



$$y_1 = f^{-1}(p_0) = p_0 = x_1$$

$$g^{-1}(p_0) = p_0 = x_2$$

$D^n = \{\xi_2\}$, n=0,1,2,…

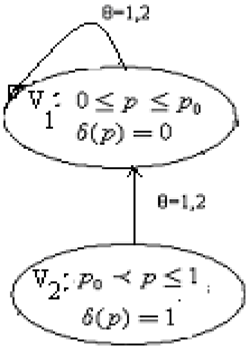
Σχήμα 7.11

<u>Μαρκοβιανή διαμέριση του διαστήματος [0,1]</u>

V_1=[0,p_0], V_2=(p_0,1].

Μαρκοβιανή απεικόνιση v(j,θ) **<u>Διάγραμμα ροής για την πολιτική</u>** d^{∞}

j \ θ	1	2
1	1	1
2	1	1



7.2. Περιοδικές control-limit πολιτικές

Στην ενότητα αυτή θα αναζητήσουμε control-limit πολιτικές, οι οποίες να ικανοποιούν την συνθήκη (Α) της ενότητας 5.3 και ειδικότερα περιοδικές control-limit πολιτικές πέραν των τετριμμένων περιπτώσεων όπου η κρίσιμη ποσότητα είναι $p_0=\xi_1$ ή $p_0=\xi_2$ (βλέπε προτάσεις 7.1.9, 7.1.10). Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, τέτοιες πολιτικές συνδέονται με τα σταθερά σημεία πεπερασμένων συνθέσεων των συναρτήσεων μεταφοράς f , g ,όπως ορίστηκαν στην ενότητα 7.1. Επομένως πρώτα θα μελετήσουμε τέτοιες συνθέσεις, τα σταθερά τους σημεία καθώς και τη διαδικασία υπολογισμού τους.

Θεωρούμε $n \ge 2$ συναρτήσεις $h_1, h_2, \ldots h_n$ ορισμένες στο διάστημα [0,1],όπου $h_i = f$ ή $h_i = g$, i=1,2,3,…,n. Επειδή τα πεδία τιμών των συναρτήσεων f, g /[0,1] περιέχονται στο διάστημα [0,1], οι συνθέσεις

$$w_k = h_1 o h_2 o \ldots o h_k \,/[0,1], \qquad 2 \le k \le n$$

είναι καλά ορισμένες και τα πεδία τιμών τους περιέχονται στο διάστημα [0,1].Σημειώνουμε ακόμα ότι:

$$w_k = w_{k-1} o h_k \,/[0,1], \qquad 2 \le k \le n.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g /[0,1] είναι γνήσια αύξουσες, συνεχείς και ομογραφικές, συνάγεται εύκολα ότι και οι συναρτήσεις w_k /[0,1], $2 \le k \le n$ είναι γνήσια αύξουσες, συνεχείς και ομογραφικές:

$$w_k(\chi) = \frac{\mathrm{A}_k + B_k.\chi}{\Gamma_k + \Delta_k.\chi}, \qquad 0 \le \chi \le 1$$

Επειδή

$$w_k(\chi) = w_{k-1}(h_k(\chi)) = \frac{\mathrm{A}_{k-1} + B_{k-1}.h_k(\chi)}{\Gamma_{k-1} + \Delta_{k-1}.h_k(\chi)}, \qquad 0 \le \chi \le 1$$

οι παράμετροι $A_k, B_k, \Gamma_k, \Delta_\kappa$ υπολογίζονται, όπως διαπιστώνεται εύκολα, μέσω των αναγωγικών σχέσεων:

$$A_k = A_{k-1}.\gamma_\theta + \mathrm{B}_{k-1}.a_\theta$$

$$B_k = A_{k-1}.\delta_\theta + \mathrm{B}_{k-1}.\beta_\theta$$

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1}.\gamma_\theta + \Delta_{k-1}.\alpha_\theta$$

$$\Delta_k = \Gamma_{k-1}.\delta_\theta + \Delta_{k-1}.\beta_\theta \ , \ 2 \le k \le n,$$

όπου θ=1 αν $h_k = f$ και θ=2 αν $h_k = g$,

$$A_1 = a_\theta \ , B_1 = \beta_\theta \ , \Gamma_1 = \gamma_\theta \, , \Delta_1 = \delta_\theta$$

όπου θ=1 αν $h_1 = f$ και θ=2 αν $h_1 = g$.

Τέλος οι συναρτήσεις w_k /[0,1], $2 \le k \le n,$ ως ομογραφικές είναι κοίλες ή κυρτές.

Ανακεφαλαιώνοντας,μια τυχούσα σύνθεση μήκους $n \ge 2, w_n$ /[0,1],των συναρτήσεων f, g /[0,1] είναι γνήσια αύξουσα, συνεχής, ομογραφική και κοίλη ή κυρτή συνάρτηση,

$$w_n(\chi) = \frac{\mathrm{A}_n + B_n.\chi}{\Gamma_n + \Delta_n.\chi}, \quad 0 \le \chi \le 1,$$

όπου οι παράμετροι υπολογίζονται μέσω των αναγωγικών σχέσεων που αναφέραμε προηγούμενα. Επειδή

$$0 \prec f(x) \prec g(x) \prec 1 \ , \ 0 \le \chi \le 1$$

συνάγεται ότι:

$$0 \prec f_n(x) \le w_n(\chi) \le g_n(x) \prec 1 \ , \ 0 \le \chi \le 1.$$

Επομένως $w_n(0) \succ 0, w_n(1) \prec 1$ και σύμφωνα με την πρόταση 1 του παραρτήματος Α η συνάρτηση w_n /[0,1] έχει μοναδικό σταθερό σημείο $\xi \in (0,1)$. Με άλλα λόγια η εξίσωση $w_n(\chi) = \chi$,

έχει μοναδική λύση ξ στο διάστημα (0,1) και υπολογίζεται ως η επιτρεπτή, δηλαδή η εντός του διαστήματος (0,1) λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\Delta_n.\chi^2 + (\Gamma_n - B_n).\chi - \mathrm{A}_n = 0.$$

Σύμφωνα με την πρόταση 2 του παραρτήματος Α έχουμε:

$$\chi < w_n(\chi) < \xi \qquad \forall \chi \in [0,\xi) \qquad \underline{\mathbf{7.2.1}}$$

$$\xi < w_n(\chi) < \chi \qquad \forall \chi \in (\xi,1]. \qquad \underline{\mathbf{7.2.2}}$$

Ειδικές περιπτώσεις τέτοιων συνθέσεων μήκους $n \geq 2$ είναι η f_n /[0,1] (n-στη σύνθεση της f) και η g_n /[0,1] (n-στη σύνθεση της g),που έχουν σταθερά σημεία ξ_1 (το σταθερό σημείο της f) και ξ_2 (το σταθερό σημείο της g) αντίστοιχα. (βλέπε και λήμματα 7.1.3, 7.1.4).

Μια σύνθεση μήκους $n \geq 2, w_n$ /[0,1] των συναρτήσεων f, g θα αναφέρεται ως μη τετριμμένη αν $w_n \neq f_n, g_n$.

Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύεται ότι το σταθερό σημείο *μιας μη τετριμμένης* σύνθεσης των συναρτήσεων f, g ανήκει στο διάστημα (ξ_1,ξ_2).

Πρόταση 7.2.1

Θεωρούμε $n \geq 2$ *συναρτήσεις* $h_1, h_2, \ldots h_n$ *ορισμένες στο διάστημα [0,1],όπου* $h_i = f$ *ή* $h_i = g$ *, i=1,2,3,…,n, όχι όλες του ίδιου τύπου, και τη (μη τετριμμένη) σύνθεση*

$$w_n = h_1 o h_2 o \ldots o h_n \text{ /[0,1].}$$

Έστω $\xi \in (0,1)$ *το μοναδικό σταθερό σημείο της* w_n.

Τότε

i) $\xi_1 < \xi < \xi_2$

ii) $\xi_1 < w_n(\xi_1) < \xi < w_n(\xi_2) < \xi_2$

Απόδειξη

i) Επειδή η συνάρτηση w_n /[0,1] είναι μη τετριμμένη σύνθεση μήκους n των συναρτήσεων f, g , από την πρόταση 7.1.1(iii) παίρνουμε:

$$f_n(\chi) < w_n(\chi) < g_n(\chi), \; 0 \leq \chi \leq 1$$

Αν $\xi_1 \geq \xi$,τότε από την σχέση (7.2.2) παίρνουμε

$$\xi \leq w_n(\xi_1) \leq \xi_1 = f_n(\xi_1)$$

πράγμα άτοπο, επειδή $w_n(\xi_1) \succ f_n(\xi_1)$.

Αν $\xi_2 \leq \xi$,τότε από την σχέση (7.2.1) παίρνουμε

$$g_n(\xi_2) = \xi_2 \leq w_n(\xi_2) \leq \xi,$$

πράγμα άτοπο, επειδή $g_n(\xi_2) > w_n(\xi_2)$.Επομένως $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$.

ii) Συνάγεται άμεσα από το (i) και τις σχέσεις (7.2.1), (7.2.2). □

As θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε μη τετριμμένη σύνθεση πεπερασμένου μήκους των συναρτήσεων f, g καθώς και τις συνθέσεις που παράγονται με κυκλικές εναλλαγές των συναρτήσεων που συμμετέχουν στην αρχική σύνθεση. Στην πρόταση που ακολουθεί παρέχονται χρήσιμες σχέσεις που συνδέουν τα σταθερά σημεία αυτών των συνθέσεων. Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια (πρόταση 7.2.3) η control-limit πολιτική με κρίσιμη ποσότητα το μέγιστο από αυτά τα σταθερά σημεία ικανοποιεί υπό προϋποθέσεις την συνθήκη (A) της ενότητας 5.3.

Πρόταση 7.2.2:

Θεωρούμε $n \geq 2$ συναρτήσεις $h_1, h_2, \ldots h_n$ ορισμένες στο διάστημα [0,1],όπου $h_i = f$ ή $h_i = g$, i=1,2,3,…,n,όχι όλες του ίδιου τύπου. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma_1 /[0,1]$ που ορίζεται ως η σύνθεση των $h_1, h_2, \ldots h_n$ και τις συναρτήσεις $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n /[0,1]$ που παράγονται από τις συνθέσεις των κυκλικών εναλλαγών των $h_1, h_2, \ldots h_n$,δηλαδή

$$\sigma_1 = h_1 \circ h_2 \circ \ldots \circ h_n$$

$$\sigma_2 = h_2 \circ h_3 \circ \ldots \circ h_n \circ h_1$$

…………………………….

……………………………

$$\sigma_n = h_n \circ h_1 \circ \ldots \circ h_{n-1}$$

Αν $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ *είναι τα σταθερά σημεία των συναρτήσεων* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n /[0,1]$ *αντίστοιχα, δηλαδή* $\sigma_i(\chi_i) = \chi_i, i = 1,2,3,\ldots n,$ τότε:

i) $\xi_1 \prec \chi_i \prec \xi_2$ *,i=1,2,…,n*

ii) $\chi_i = h_i(\chi_{i+1}), i = 1,2,3,\ldots n,$

όπου $\chi_{n+1} \equiv \chi_1$

iii) Αν $h_i = f$ τότε $\chi_i \prec \chi_{i+1}$,

Αν $h_i = g$ τότε $\chi_i \succ \chi_{i+1}, i = 1,2,3,\ldots n.$

Απόδειξη

i)Επειδή οι συναρτήσεις $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n /[0,1]$ είναι μη τετριμμένες συνθέσεις μήκους n των συναρτήσεων f, g ,τα σταθερά τους σημεία $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ ανήκουν στο διάστημα (ξ_1, ξ_2) σύμφωνα με την πρόταση 7.2.1 (i).

ii) Για i=1, 2,3,…,n έχουμε

$$h_i(\chi_{i+1}) = h_i(\sigma_{i+1}(\chi_{i+1})) = (h_i \circ \sigma_{i+1})(\chi_{i+1}) = (h_i \circ h_{i+1} \circ ... \circ h_n \circ h_1 \circ ... h_i)(\chi_{i+1}) =$$

$$= (h_i \circ h_{i+1} \circ ... \circ h_n \circ h_1 \circ ... h_{i-1})(h_i(\chi_{i+1})) = \sigma_i(h_i(\chi_{i+1})).$$

Επομένως $h_i(\chi_{i+1})$ είναι σταθερό σημείο της συνάρτησης σ_i /[0,1] και επειδή αυτό είναι μοναδικό συμπεραίνουμε ότι $\chi_i = h_i(\chi_{i+1})$.

iii) Για i =1, 2, 3,…,n έχουμε:

Αν $h_i = f$ τότε από το (ii), $\chi_i = f(\chi_{i+1})$.

Επειδή $\chi_{i+1} > \xi_1$ έχουμε $\chi_i = f(\chi_{i+1}) < \chi_{i+1}$ (πρόταση 7.1.1 (iv)).

Αν $h_i = g$ τότε από το (ii), $\chi_i = g(\chi_{i+1})$.

Επειδή $\chi_{i+1} < \xi_2$ έχουμε $\chi_i = g(\chi_{i+1}) > \chi_{i+1}$ (πρόταση 7.1.1 (v)). □

Παρατηρήσεις

1)Η πρόταση 7.2.2 παρέχει έναν απλό τρόπο υπολογισμού των σταθερών σημείων των συναρτήσεων $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_n$ /[0,1],όπως αυτές ορίσθηκαν στην ίδια πρόταση. Αφού υπολογίσουμε το σταθερό σημείο κάποιας από τις παραπάνω συναρτήσεις με τη διαδικασία που περιγράψαμε στην αρχή της ενότητας, για τα υπόλοιπα $n-1$ σταθερά σημεία μπορούμε να αποφύγουμε αυτή τη διαδικασία υπολογισμού, και να εφαρμόσουμε απλές αναγωγικές σχέσεις που υπαγορεύονται από το τμήμα (ii) της πρότασης 7.2.2. Συγκεκριμένα, αν για παράδειγμα έχουμε υπολογίσει το σταθερό σημείο χ_1 της συνάρτησης σ_1 με τη γνωστή διαδικασία, τότε τα υπόλοιπα σταθερά σημεία $\chi_2, \chi_3, ..., \chi_n$ των συναρτήσεων $\sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_n$ υπολογίζονται μέσω των αναγωγικών σχέσεων

$$\chi_{i+1} = h_i^{-1}(\chi_i) = \frac{-a_\theta + \gamma_\theta \cdot \chi_i}{\beta_\theta - \delta_\theta \cdot \chi_i},$$

όπου $\theta = 1$ αν $h_i = f$ και $\theta = 2$ αν $h_i = g$, i =1, 2, 3,…,n-1 .

2)Αν η διάταξη των συναρτήσεων f, g που συμμετέχουν σε μία σύνθεση παρουσιάζει περιοδικότητα, τότε προφανώς το σταθερό σημείο αυτής της σύνθεσης ταυτίζεται με το σταθερό σημείο της σύνθεσης του περιοδικού τμήματος (δηλαδή του τμήματος της διάταξης που επαναλαμβάνεται).

Για παράδειγμα, το σταθερό σημείο της σύνθεσης

$$f \circ g \circ f \circ f \circ g \circ f \circ f \circ g \circ f \circ f \circ g \circ f,$$

ταυτίζεται με το σταθερό σημείο της σύνθεσης $f \circ g \circ f$.

Επίσης αν η διάταξη των f,g στη σύνθεση σ_1 είναι περιοδική, τότε και οι διατάξεις των f,g στις συνθέσεις $\sigma_2,\sigma_3,...,\sigma_n$-που προκύπτουν με κυκλική εναλλαγή-παρουσιάζουν και αυτές περιοδικότητα. Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι το πρόβλημα σχετικά με τα σταθερά σημεία συνθέσεων των συναρτήσεων f,g απλοποιείται, αν περιοριστούμε σε συνθέσεις διατάξεων των f,g που δεν παρουσιάζουν περιοδικότητα.

Πρόταση 7.2.3:

Θεωρούμε $n\geq 2$ συναρτήσεις $h_1,h_2,...h_n$ ορισμένες στο διάστημα [0,1],όπου $h_i = f$ ή $h_i = g$,i=1,2,3,…,n, όχι όλες του ίδιου τύπου, έτσι ώστε η διάταξη να μην παρουσιάζει περιοδικότητα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma_1/[0,1]$ πού ορίζεται ως η σύνθεση των $h_1,h_2,...h_n$ και τις συναρτήσεις $\sigma_2,\sigma_3,...,\sigma_n/[0,1]$ πού παράγονται από τις συνθέσεις των κυκλικών εναλλαγών των $h_1,h_2,...h_n$, (όπως στην πρόταση 7.2.2).Εστω $\chi_1,\chi_2,...,\chi_n$ τα σταθερά σημεία των συναρτήσεων *$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,...,\sigma_n/[0,1]$.Θέτουμε $p_0=\max\{\chi_1,\chi_2,...,\chi_n\}$ και θεωρούμε τη control-limit πολιτική δ^∞ με κρίσιμη ποσότητα p_0.Τότε:*

i) Για i =1, 2, 3,…,n έχουμε:

Αν $h_i = f$,τότε το χ_{i+1} είναι άμεσος $f-$απόγονος του χ_i *και* $\chi_{i+1}\succ\chi_i$.($\chi_{n+1}\equiv\chi_1$).

Αν $h_i = g$, τότε το χ_{i+1} είναι άμεσος $g-$απόγονος του χ_i *και* $\chi_{i+1}\prec\chi_i$.

ii)Τα $\chi_2,...,\chi_n,\chi_1$ είναι άμεσοι απόγονοι των $\chi_1,\chi_2,...,\chi_n$ αντίστοιχα. Θα αναφερόμαστε σε αυτά ως άμεσους περιοδικούς απογόνους των $\chi_1,\chi_2,...,\chi_n$.

iii) Αν ισχύει η συνθήκη **(Σ΄)**, τότε η πολιτική δ^∞ ικ*ανοποιεί τη συνθήκη* **(A)** της ενότητας 5.3. Η συνθήκη **(Σ΄)** διατυπώνεται ως εξής:

Για i =1, 2, 3,…,n, σε περίπτωση που το σταθερό σημείο χ_i έχει-πέραν του άμεσου περιοδικού απογόνου χ_{i+1}-άμεσο μη περιοδικό απόγονο, έστω ψ_i, υπάρχει $l_i\geq 1$ έτσι ώστε:

$$D^{l_i}(\psi_i)=\varnothing\ . \qquad \textbf{(Σ΄)}$$

Ειδικότερα, αν κανένα από τα $\chi_1,\chi_2,...,\chi_n$ δεν έχει άμεσο μη περιοδικό απόγονο, τότε η πολιτική δ^∞ είναι περιοδική.

Απόδειξη

i) Από την πρόταση 7.2.2 (i), (ii) και την επιλογή της κρίσιμης ποσότητας p_0 ως το μέγιστο των σταθερών σημείων $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n$, έχουμε:

Για i =1, 2, 3,…,n,

$$\chi_{i+1} = h_i^{-1}(\chi_i) \in (\xi_1, p_0].$$

Συμπεραίνουμε ότι αν $h_i = f$, τότε το χ_{i+1} είναι άμεσος $f-$απόγονος του χ_i, ενώ αν $h_i = g$, τότε το χ_{i+1} είναι άμεσος g-απόγονος του χ_i.Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $\chi_{i+1} \succ \chi_i$,ενώ στην δεύτερη $\chi_{i+1} \prec \chi_i$ (πρόταση 7.2.2)(iii)).

ii) Άμεση συνέπεια του (i).

iii) Θεωρούμε τα σύνολα

$$\bar{D}^m = \bigcup_{k=0}^{m} D^k \text{ ,m=0,1,2,…}$$

Για $m \geq 1,$ το σύνολο, $\bar{D}^m$,δηλώνει το σύνολο των απογόνων του p_0 τάξεως μικρότερης ή ίσης του m.

Αν ισχύει η συνθήκη (Σ΄),τότε σε συνδυασμό με το (ii) συνάγεται ότι:

$$\bar{D}^m = \bar{D}^l \quad \forall m \geq l$$

όπου

$$l := n + \max_{1 \leq i \leq n}\{l_i\}$$

(Αν το χ_i δεν έχει άμεσο μη περιοδικό απόγονο, θέτουμε $l_i = 0$.)

Άρα η πολιτική δ^∞ ικανοποιεί τη συνθήκη **(A)** της ενότητας 5.3. Σημειώνουμε ότι η δ^∞ αποκλείεται να είναι πεπερασμένα μεταβατική επειδή το (ii) συνεπάγεται $D^m \neq \varnothing \quad \forall m = 0,1,2,...$

Θεωρούμε τώρα την ειδική περίπτωση όπου κανένα από τα $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n$ δεν έχει μη περιοδικό απόγονο. Θα δείξουμε ότι η δ^∞ είναι περιοδική. Πράγματι, έστω

$$p_0 = \chi_j = \max\{\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n\}.$$

Τότε από το (ii) συνάγεται ότι

$$D^m = \{p_0\} = \left\{\chi_j\right\} \text{ }, m \equiv 0 (\bmod n)$$

$$D^m = \left\{\chi_{j+1}\right\} \text{ }, m \equiv 1 (\bmod n)$$

…………………………………

$$D^m = \left\{\chi_{j+n-1}\right\} \text{ }, m \equiv n-1 (\bmod n),$$

όπου $\chi_{n+k} \equiv \chi_k$ $,1 \le k \le n-1$

Άρα η δ^∞ είναι περιοδική.

Παρατηρήσεις

1) Επειδή $\xi_1 \prec \chi_i \prec \xi_2$, i =1, 2, 3,…,n,(πρόταση 7.2.2 (i)) και η κρίσιμη ποσότητα της πολιτικής δ^∞ είναι $p_0 = \max\{\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n\}$ έχουμε $\xi_1 < p_0 < \xi_2$.

2) Το τμήμα (iii) της πρότασης 7.2.3 δηλώνει ότι αν οι «γενιές» των άμεσων μη περιοδικών απογόνων των σταθερών σημείων $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n$ -εφόσον υπάρχουν τέτοιοι – εκλείπουν σε πεπερασμένο αριθμό χρονικών περιόδων (Συνθήκη (Σ΄)), τότε η πολιτική δ^∞ υπακούει στη συνθήκη **(Α)** της ενότητας 5.3 και επομένως επάγει Μαρκοβιανή διαμέριση στο χώρο Π (βλ. πρόταση 5.3.4)

3) Ας θεωρήσουμε ότι ο άμεσος περιοδικός απόγονος χ_{i+1} του χ_i είναι τύπου f ,δηλαδή $\chi_{i+1} = f^{-1}(\chi_i)$.

Από την πρόταση 7.2.3 (i) έχουμε $\chi_{i+1} > \chi_i$.Επομένως $\chi_i < p_0$.Προφανώς ο δυνάμει άμεσος μη περιοδικός απόγονος του χ_i είναι τύπου g. Επομένως για να διαπιστώσουμε αν υπάρχει άμεσος μη περιοδικός απόγονος του χ_i, εξετάζουμε αν η λύση $g^{-1}(\chi_i)$ της εξίσωσης $g(\chi) = \chi_i$ ανήκει στο διάστημα $[0,p_0]$ ή ισοδύναμα, αν το $\chi_i \in [g(0), g(p_o)]$.

Επειδή $p_0 < \xi_2$, από την πρόταση 7.1.1(v) παίρνουμε:

$$\chi_i < p_0 < g(p_0)$$

Άρα το χ_i έχει άμεσο μη περιοδικό απόγονο $\psi_i \equiv g^{-1}(\chi_i)$ αν $\chi_i \ge g(0)$.

Αποδεικνύεται εύκολα το ακόλουθο:

Αν $\chi_i < g(\xi_1)$ τότε το χ_i ικανοποιεί τη συνθήκη (Σ΄).

Πράγματι η σχέση $\chi_i < g(\xi_1)$ ισοδυναμεί με τη σχέση $g^{-1}(\chi_i) < \xi_1$.

- Αν $g^{-1}(\chi_i) < 0$,τότε το χ_i δεν έχει άμεσο μη περιοδικό απόγονο και επομένως ικανοποιεί τετριμμένα την (Σ΄).
- Αν $0 < g^{-1}(\chi_i) < \xi_1 (< p_0)$, τότε το χ_i έχει άμεσο μη περιοδικό απόγονο $\psi_i = g^{-1}(\chi_i)$. Επειδή $\psi_i \in [o, \xi_1)$, σύμφωνα με την πρόταση 7.1.2, υπάρχει $l_i \ge 1$ έτσι ώστε $D^{l_i}(\psi_i) = \varnothing$.

4)Ας θεωρήσουμε ότι ο άμεσος περιοδικός απόγονος χ_{i+1} του χ_i είναι τύπου g, δηλαδή $\chi_{i+1}=g^{-1}(\chi_i)$. Τότε προφανώς ο δυνάμει άμεσος μη περιοδικός απόγονος του χ_i είναι τύπου f. Επομένως για να διαπιστώσουμε αν υπάρχει άμεσος μη περιοδικός απόγονος του χ_i, εξετάζουμε αν η λύση $f^{-1}(\chi_i)$ της εξίσωσης $f(\chi)=\chi_i$ ανήκει στο διάστημα $[0,p_0]$ή ισοδύναμα αν το χ_iανήκει στο διάστημα $[f(0),f(p_o)]$.

Επειδή $\chi_i>\xi_1>f(0)$, συμπεραίνουμε ότι το χ_i έχει άμεσο μη περιοδικό απόγονο αν $\chi_i\le f(p_0)$.

Αν $\chi_i \succ f(p_0)$ τότε το χ_i δεν έχει άμεσο περιοδικό απόγονο και επομένως ικανοποιεί τετριμμένα τη **(Σ΄)**.

5)Ας θεωρήσουμε ότι χ_j είναι το μέγιστο από τα σταθερά σημεία $\chi_1,\chi_2,...,\chi_n$, οπότε η κρίσιμη ποσότητα της πολιτικής δ^{∞} είναι $p_0=\chi_j$.Τότε

- Ο άμεσος περιοδικός απόγονος χ_{j+1} του p_0 είναι τύπου g.

Πράγματι, αν χ_{j+1} ήταν f-απόγονος του p_0,τότε θα είχαμε $\chi_{j+1}>\chi_j=p_0$,πράγμα άτοπο.

- Το p_0 δεν έχει άμεσο μη περιοδικό απόγονο.

Πράγματι, ο δυνάμει μη περιοδικός απόγονος του p_0 είναι τύπου f.

Επειδή $p_0>\xi_1$, από την πρόταση 7.1.1 (iv) παίρνουμε $p_0>f(p_0)$.

Επομένως $p_0\notin[f(0),f(p_0)]$ και ή εξίσωση $f(\chi)=p_0$ δεν έχει λύση στο διάστημα $[0,p_0]$.Έτσι το p_0δεν έχει άμεσο μη περιοδικό απόγονο και συμπεραίνουμε ότι το p_0ικανοποιεί τετριμμένα τη **(Σ΄).**

Παραδείγματα

Στα παραδείγματα που ακολουθούν θεωρούμε τον πίνακα μετάβασης καταστάσεων P και τον πίνακα μηνυμάτων R,που αντιστοιχούν στην απόφαση α=0 (συνέχιση της λειτουργίας /συντήρησης του συστήματος)**:**

$$P=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (7.1.1), (7.1.3) παίρνουμε:

$f(p)=T(p,1)=\dfrac{2+5p}{18-5p}$, $0\le p\le 1$,γνήσια αύξουσα, κυρτή με πεδίο τιμών $[0.1111, 0.5385]$ και σταθερό σημείο $\xi_1=0.16421833$.

$g(p)=T(p,2)=\dfrac{6+15p}{14+10p}$, $0\le p\le 1$,γνήσια αύξουσα, κοίλη με πεδίο τιμών $[0.4286, 0.8750]$ και σταθερό σημείο $\xi_2=0.826208734$.

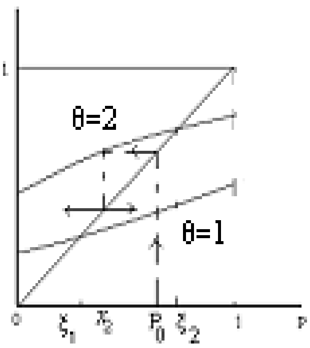
Παράδειγμα 7.2.1: Για $h_1=g, h_2=f$ παίρνουμε:

$\sigma_1(p)=g(f(p))=\dfrac{138+45p}{272-20p}$, $0\le p\le 1,\uparrow$,κυρτή,με πεδίο τιμών $[0.5074, 0.7262]$ και σταθερό σημείο $\chi_1=0.64453034$.

$\sigma_2(p)=f(g(p))=\dfrac{58+95p}{222+105p}$, $0\le p\le 1,\uparrow$,κοίλη,με πεδίο τιμών $[0.2613, 0.4679]$ και σταθερό σημείο $\chi_2=0.353422792$. $p_0=\max\{\chi_1,\chi_2\}=\chi_1$.

Επειδή $\chi_2=h_1^{-1}(\chi_1)=g^{-1}(p_0)$, $p_0=\chi_1=h_2^{-1}(\chi_2)=f^{-1}(\chi_2)$,
το χ_2 είναι άμεσος περιοδικός g-απόγονος του p_0 και το p_0 είναι άμεσος περιοδικός f-απόγονος του χ_2.
Επειδή $p_0>f(p_0)=\chi_2$, $\chi_2<g(0)=0.4286$,
το p_0 δεν έχει άμεσο (μη περιοδικό) f-απόγονο και το χ_2 δεν έχει άμεσο (μη περιοδικό) g-απόγονο. □

$$D^n=\{p_0\}, n\equiv 0.(\mathrm{mod}\,2)$$
$$D^n=\{\chi_2\}, n\equiv 1.(\mathrm{mod}\,2)$$



Σχήμα 7.12: Διάγραμμα παραδείγματος 7.2.1

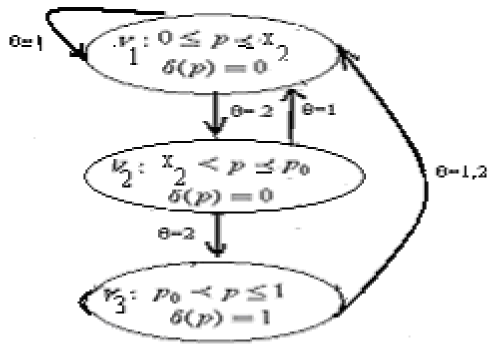
Η πολιτική δ^∞ με κρίσιμη ποσότητα p_0 είναι περιοδική.

Μαρκοβιανή διαμέριση του διαστήματος [0,1]

***V*1**=[0, χ_2], ***V*2** =(χ_2 ,p0], ***V*3**=(p0,1]

Μαρκοβιανή απεικόνιση ν(j,θ) **Διάγραμμα ροής για την πολιτική δ^{∞}**

j \ θ	1	2
1	1	2
2	1	3
3	1	1



Παράδειγμα 7.2.2: Για $h_1 = g, h_2 = g, h_3 = f$ παίρνουμε:

$$\sigma_1(p) = g_2(f(p)) = \frac{3702+555.p}{5188+170p},\ 0 \le p \le 1, \uparrow, \text{κοίλη},$$

με πεδίο τιμών [0.7136,0.7945] και σταθερό σημείο $\chi_1 = 0.776903019$.

$$\sigma_2(p) = g(f(g(p))) = \frac{2202+2055.p}{3688+2420p},\ 0 \le p \le 1, \uparrow, \text{κοίλη},$$

με πεδίο τιμών [0.5971,0.6970] και σταθερό σημείο $\chi_2 = 0.674410542$.

$$\sigma_3(p) = f(g_2(p)) = \frac{1382+2005.p}{3738+3795p},\ 0 \le p \le 1, \uparrow, \text{κοίλη},$$

με πεδίο τιμών [0.3697,0.4496] και σταθερό σημείο $\chi_3 = 0.416883666$.

$$p_0 = \max\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\} = \chi_1.$$

Επειδή

$\chi_2 = h_1^{-1}(\chi_1) = g^{-1}(p_0), \chi_3 = h_2^{-1}(\chi_2) = g^{-1}(\chi_2), p_0 = \chi_1 = h_3^{-1}(\chi_3) = f^{-1}(\chi_3)$, τα χ_2, χ_3 είναι άμεσοι περιοδικοί g-απόγονοι των p_0, χ_2 αντίστοιχα, και το p_0 είναι άμεσος περιοδικός f-απόγονος του χ_3.

Επειδή

$$p_0 > f(p_0) = \chi_3, \chi_2 > f(p_0) = \chi_3,\ \chi_3 < g(0) = 0.4286,$$

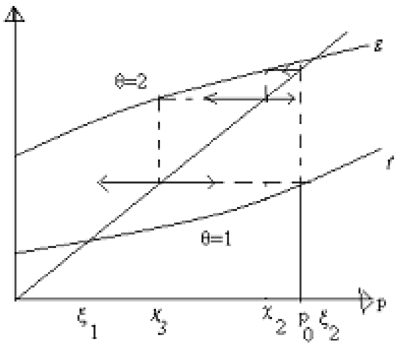
τα p_0, χ_2 δεν έχουν άμεσο (μη περιοδικό) f-απόγονο, και το χ_3 δεν έχει άμεσο (μη περιοδικό) g-απόγονο.

$$D^n = \{p_0\}, n \equiv 0 (\text{mod}\, 3)$$

$$D^n = \{\chi_2\}, n \equiv 1 (\text{mod}\, 3)$$

$$D^n = \{\chi_3\}, n = 2 (\text{mod}\, 3)$$

Η πολιτική δ^{∞} με κρίσιμη ποσότητα p_0 είναι περιοδική.



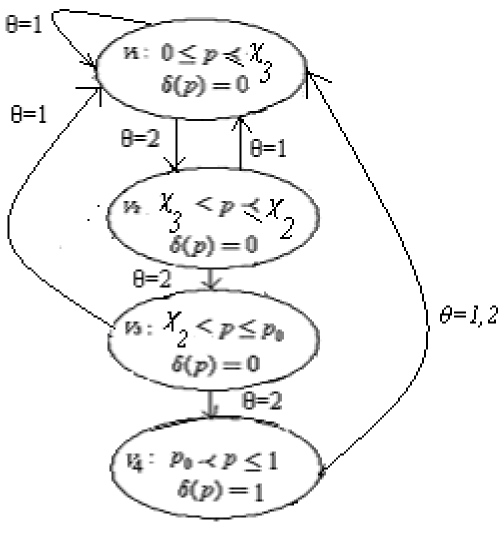
Σχήμα7.13: διάγραμμα παραδείγματος 7.2.2

<u>Μαρκοβιανή διαμέριση του διαστήματος [0,1]</u>

$V_1=[0,\chi_3]$, $V_2=(\chi_3,\chi_2]$, $V_3=(\chi_2,p_0]$, $V_4=(p_0,1]$

<u>Μαρκοβιανή απεικόνιση v(j,θ)</u> **<u>Διάγραμμα ροής για την πολιτική</u>** $d^{¥}$

j \ θ	1	2
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	1	1



Παράδειγμα 7.2.3:Για $h_1=g, h_2=f, h_3=f$ παίρνουμε:

$$\sigma_1(p)=g(f_2(p))=\frac{2574-465.p}{4856-1460p},\ 0\le p\le 1,\uparrow\text{,κυρτή,}$$

με πεδίο τιμών [0.5301,0.6210] και σταθερό σημείο $\chi_1=0.574214278$.

$$\sigma_2(p)=f_2(g(p))=\frac{734+685.p}{3706+1415.p},\ 0\le p\le 1,\uparrow\text{,κοίλη,}$$

με πεδίο τιμών [0.1981,0.2771] και σταθερό σημείο $\chi_2=0.220245338$.

$$\sigma_3(p)=f\,(g(f(p)))=\frac{1234+185.p}{4206-585.p},\ 0\le p\le 1,\uparrow\text{, κυρτή,}$$

με πεδίο τιμών [0.2934,0.3919] και σταθερό σημείο $\chi_3=0.321970677$.

$$p_0 = \max\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\} = \chi_1 .$$

Επειδή

$$\chi_2 = h_1^{-1}(\chi_1) = g^{-1}(p_0)\,,\ \chi_3 = h_2^{-1}(\chi_2) = f^{-1}(\chi_2)\,,\ p_0 = \chi_1 = h_3^{-1}(\chi_3) = f^{-1}(\chi_3),$$

το χ_2 είναι άμεσος περιοδικός g-απόγονος του p0, ενώ τα χ_3, p_0 είναι άμεσοι περιοδικοί f -απόγονοι των χ_2, χ_3 αντίστοιχα.

Επειδή

$$p_0 > f(p_0) = \chi_3, \chi_2 < g(0),\ , \chi_3 < g(0)\ \ (g(0) = 0.4286)\,,$$

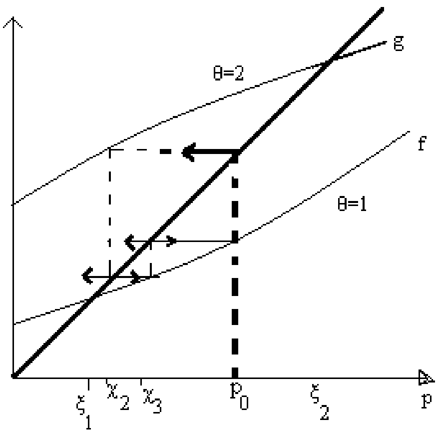
συμπεραίνουμε ότι το p_0 δεν έχει άμεσο (μη περιοδικό) f -απόγονο, και τα χ_2, χ_3 δεν έχουν άμεσο (μη περιοδικό) g -απόγονο.

$D^n = \{p_0\}, n \equiv 0(\bmod 3)$

$D^n = \{\chi_2\}, n = 1(\bmod 3)$

$D^n = \{\chi_3\}, n = 2(\bmod 3)$

Η πολιτική δ^∞ με κρίσιμη ποσότητα p0 είναι περιοδική.



Σχήμα 7.14 : Διάγραμμα παραδείγματος 7.2.3

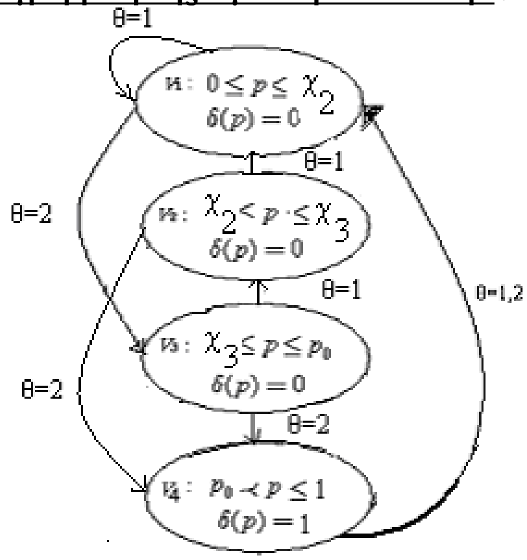
Μαρκοβιανή διαμέριση του διαστήματος [0,1]:

V*1**=[0, χ_2], ***V*2** =(χ_2, χ_3] ,V*3** =(χ_3 , p0], ***V*4** =(p0,1]

<u>Μαρκοβιανή απεικόνιση v(j,θ)</u>

j \ θ	1	2
1	1	3
2	1	4
3	2	4
4	1	1

Διάγραμμα ροής για την πολιτική $d^{¥}$



Παράδειγμα 7.2.4:

Για $h_1 = g, h_2 = g, h_3 = f, h_4 = f$, παίρνουμε:

$$\sigma_1(p) = g_2(f_2(p)) = \frac{67746 - 15735.p}{93724 - 25090.p},\ 0 \le p \le 1, \uparrow, \text{κυρτή},$$

με πεδίο τιμών [0.7228,0.7578]

και σταθερό σημείο $\chi_1 = 0.746730107$.

$$\sigma_2(p) = g(f_2(g(p)) = \frac{33246 + 18765.p}{59224 + 26660.p},\ 0 \le p \le 1, \uparrow, \text{κοίλη},$$

με πεδίο τιμών [0.5614,0.6056]

και σταθερό σημείο $\chi_2 = 0.591318139$.

$$\sigma_3(p) = f_2(g_2(p)) = \frac{14386 + 17615.p}{60374 + 58285.p},\ 0 \le p \le 1, \uparrow, \text{ κοίλη},$$

με πεδίο τιμών [0.2383,0.2697] και σταθερό σημείο $\chi_3 = 0.250742757$.

$$\sigma_4(p) = f\ (g_2(f(p)) = \frac{28886 + 3115.p}{74874 + 285.p},\ 0 \le p \le 1, \uparrow, \text{ κοίλη},$$

με πεδίο τιμών [0.3858,0.4258] και σταθερό σημείο $\chi_4 = 0.401900328$

$p_0 = \max\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4\} = \chi_1$.

Επειδή

$\chi_2 = h_1^{-1}(\chi_1) = g^{-1}(p_0)$, $\chi_3 = h_2^{-1}(\chi_2) = g^{-1}(\chi_2)$, $\chi_4 = h_3^{-1}(\chi_3) = f^{-1}(\chi_3)$,

$p_0 = \chi_1 = h_4^{-1}(\chi_4) = f^{-1}(\chi_4)$, τα χ_2,χ_3 είναι άμεσοι περιοδικοί g-απόγονοι των p_0, χ_2 αντίστοιχα ενώ τα χ_4, p_0 είναι άμεσοι περιοδικοί f-απόγονοι των χ_3, χ_4 αντίστοιχα.

Επειδή

$$p_0 \succ f(p_0) = \chi_4, \chi_2 \succ f(p_0) = \chi_4, \ , \chi_3 \prec g(0) \ , \chi_4 \prec g(0)$$

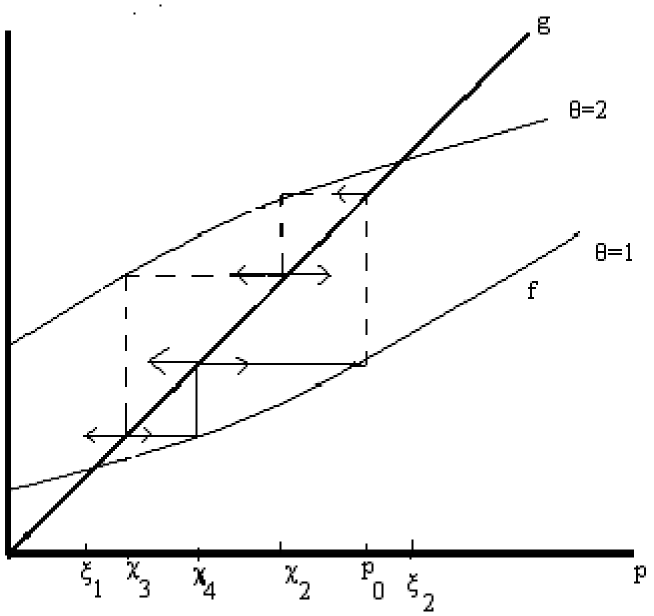
(g(0)=0.4286),συμπεραίνουμε ότι τα p_0, χ_2 δεν έχουν άμεσο (μη περιοδικό) f-απόγονο καθώς επίσης τα χ_3, χ_4 δεν έχουν άμεσο (μη περιοδικό) g-απόγονο.

$$D^n = \{p_0\}, n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$$
$$D^n = \{\chi_2\}, n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$$
$$D^n = \{\chi_3\}, n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$$
$$D^n = \{\chi_4\}, n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$$

Η πολιτική δ^∞ με κρίσιμη ποσότητα p_0 είναι περιοδική.

Μαρκοβιανή διαμέριση του διαστήματος [0,1]:

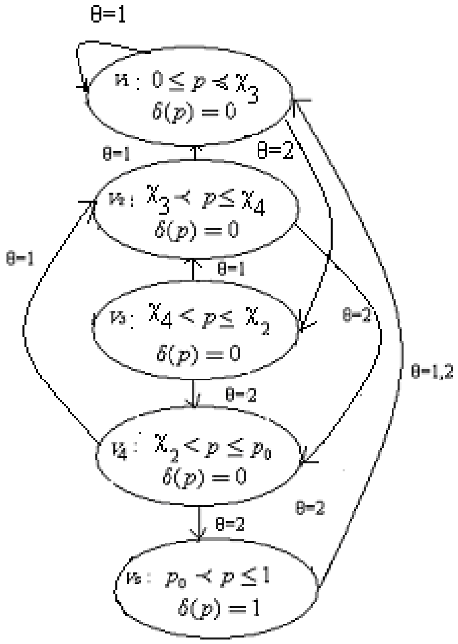
***V*₁**=[0, χ_3], ***V*₂** =(χ_3, χ_4], ***V*₃** =(χ_4, χ_2], ***V*₄** =(χ_2, p_0], ***V*₅**=(p_0,1]



Σχήμα 7.15 : Διάγραμμα παραδείγματος 7.2.3

Μαρκοβιανή απεικόνιση ν(j,θ) **Διάγραμμα ροής για την πολιτική** d^{∞}

j \ θ	1	2
1	1	3
2	1	4
3	2	4
4	2	5
5	1	1



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την κλάση των control limit (λογικών) πολιτικών (στην οποία ανήκει και η άριστη πολιτική με το κριτήριο βελτιστοποίησης για άπειρο χρονικό ορίζοντα)σε ένα πρόβλημα αντικατάστασης συστήματος με δύο καταστάσεις, δύο μηνύματα και δύο αποφάσεις .Ειδικότερα

- Διαπιστώσαμε ότι οι συναρτήσεις μεταφοράς που αντιστοιχούν στα δύο μηνύματα είναι ομογραφικές, δώσαμε τις ιδιότητές τους και δείξαμε ότι έχουν μοναδικά σταθερά σημεία.
- Εξετάσαμε τους “απογόνους” της κρίσιμης ποσότητας μιας control-limit πολιτικής.
- Παρουσιάσαμε συνθήκες κάτω από τις οποίες μια control limit πολιτική είναι πεπερασμένα μεταβατική καθώς επίσης και διαγράμματα για κάθε περίπτωση.
- Διαπιστώσαμε ότι πεπερασμένες συνθέσεις των συναρτήσεων μεταφοράς είναι επίσης ομογραφικές συναρτήσεις και έχουν μοναδικά σταθερά σημεία.
- Μελετήσαμε κάτω από ποιες συνθήκες το μέγιστο των σταθερών σημείων, που αντιστοιχούν σε κυκλικές εναλλαγές μιας πεπερασμένης σύνθεσης συναρτήσεων μεταφοράς αποτελεί κρίσιμη ποσότητα μιας control- limit πολιτικής που ικανοποιεί τη συνθήκη **(A)** της ενότητας 5.3 καθώς και τις ειδικές συνθήκες κάτω από τις οποίες η πολιτική αυτή είναι περιοδική .
- Παρουσιάσαμε αριθμητικά παραδείγματα περιοδικών control- limit πολιτικών .