

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

**Πρόβλημα POMDP για την άριστη πολιτική αντικατάστασης συστήματος σε άπειρο χρονικό ορίζοντα στα πλαίσια της διάταξης του λόγου πιθανοφανειών  $\leq L$ .**

### *Περίληψη*

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε ένα πρόβλημα συντήρησης / αντικατάστασης συστήματος, το οποίο περιγράφεται από μια POMDP. Οι καταστάσεις αντιπροσωπεύουν τα επίπεδα χειροτέρευσης του συστήματος. Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε από τους Ohnishi-Ibaraki [91].

Θεωρούμε ότι το σύστημα είναι μερικά παρατηρήσιμο μέσω ενός μηχανισμού ελέγχου, που αποφέρει μηνύματα σχετιζόμενα με τις καταστάσεις (επίπεδα χειροτέρευσης) του συστήματος. Με βάση κάποιες υποθέσεις, που αφορούν τον χαρακτήρα χειροτέρευσης, το χαρακτήρα των μηνυμάτων που αντανακλούν τα επίπεδα χειροτέρευσης, και τη δομή του άμεσου κόστους, οι Ohnishi-Ibaraki έδωσαν τη δομή της άριστης πολιτικής αντικατάστασης του συστήματος για άπειρο χρονικό ορίζοντα.

Στην ενότητα 6.1 περιγράφουμε το πρόβλημα, τις υποθέσεις και την εξίσωση αριστοποίησης για άπειρο χρονικό ορίζοντα.

Στην ενότητα 6.2 παρουσιάζουμε αποτελέσματα των Ohnishi-Ibaraki σχετικά με τις διατάξεις S.I.(στοχαστικής μονοτονίας) και λόγου πιθανοφανειών στον χώρο των διανυσμάτων πληροφορίας  $\Pi$ , καθώς επίσης και ιδιότητες της άριστης συνάρτησης του αναμενόμενου ολικού εκπίπτοντος κόστους για άπειρο χρονικό ορίζοντα.

Στην ενότητα 6.3 δίνουμε τη δομή της άριστης πολιτικής αντικατάστασης, που μελετήθηκε από τους Ohnishi-Ibaraki.

Τέλος στην ενότητα 6.4 δίνουμε γεωμετρικές ιδιότητες της στοχαστικής διάταξης του λόγου πιθανοφαιών.

## 6.1. Περιγραφή και υποθέσεις

Θεωρούμε ένα σύστημα του οποίου η εξέλιξη περιγράφεται από μία POMDP  $(S,A,\Theta,P,R,c)$  (βλέπε ενότητα 1.3) ως εξής :

- $S=\{1,2,3,\dots,N\}$  είναι το σύνολο των καταστάσεων του συστήματος. Οι καταστάσεις δηλώνουν τα επίπεδα χειροτέρευσης του συστήματος και θεωρούνται μη παρατηρήσιμες. Η κατάσταση 1 δηλώνει την βέλτιστη κατάσταση, (το σύστημα είναι καινούργιο) και η κατάσταση N δηλώνει την χειρίστη κατάσταση.

- $A=\{0,1\}$  είναι το σύνολο των αποφάσεων, όπου **0,1** είναι οι κωδικοποιήσεις:

**0:** συνέχιση της λειτουργίας του συστήματος /συντήρηση

**1:** αντικατάσταση του συστήματος με ένα καινούργιο.

- $P = (p_{ij})$  είναι ο  $N \times N$  πίνακας μετάβασης καταστάσεων του συστήματος, που αντιστοιχεί στην απόφαση  $a=0$  (συνέχιση λειτουργίας/συντήρηση). Έτσι αν  $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$  είναι η στοχαστική διαδικασία των καταστάσεων και  $\{Y_t, t \in \mathbb{N}_0\}$  είναι η στοχαστική διαδικασία των αποφάσεων, έχουμε

$$p_{ij} \equiv p[X_{t+1} = j / X_t = i, Y_t = 0], \quad i, j \in S, t \in \mathbb{N}_0.$$

Αν στην χρονική περίοδο  $t$  ληφθεί η απόφαση  $a=1$  (αντικατάσταση), τότε στην αρχή της επόμενης περιόδου  $t+1$  η κατάσταση του συστήματος είναι 1 (καινούργιο σύστημα).

- $\Theta=\{1,2,3,\dots,M\}$ , είναι το σύνολο των μηνυμάτων. Ο decision maker, αντί για την κατάσταση του συστήματος, παρατηρεί ένα μήνυμα  $\theta$  μέσω ενός μηχανισμού ελέγχου στην αρχή κάθε περιόδου.

- $R = (r_{i\theta})$  είναι  $N \times M$  πίνακας μηνυμάτων που αντιστοιχεί στην απόφαση  $a=0$ . Αν  $\{Z_t, t \in \mathbb{N}\}$  είναι η στοχαστική διαδικασία μηνυμάτων, έχουμε:

$$r_{i\theta} \equiv p[Z_{t+1}=\theta / X_t=i, Y_t=0], \quad i \in S, \theta \in \Theta, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

- Τα διανύσματα άμεσου κόστους που αντιστοιχούν στις αποφάσεις  $a=0,1$  συμβολίζονται αντίστοιχα με

$$C^K=C^0=(c(1,0), c(2,0), \dots, c(N,0))^T \quad \text{και} \quad C^R=C^1=(c(1,1), c(2,1), \dots, c(N,1))^T,$$

όπου  $c(i, a)$  είναι το άμεσο κόστος για κάθε χρονική περίοδο, όταν η κατάσταση του συστήματος είναι  $i$  και λαμβάνεται η απόφαση  $a \in A$ . (one-step-cost).

Αν το δ.π στην χρονική περίοδο  $t$  είναι  $\pi(t) = \pi$ , επιλεγεί η απόφαση  $a = 0$  ( $Y_t = 0$ ) και στην αρχή της επόμενης περιόδου  $t+1$  παρατηρηθεί το μήνυμα  $\theta$ , ( $Z_{t+1} = \theta$ ) τότε το νέο δ.π.  $\pi(t+1) = T(\pi, \theta)$ , δίνεται από τη σχέση (βλέπε (1.4.4), (1.4.5)):

$$T(\pi, \theta) = \frac{P \cdot P \cdot R_\theta}{\{q/p\}}, \quad \underline{\underline{6.1.1}}$$

όπου  $R_\theta$  είναι ο  $N \times N$  διαγώνιος πίνακας

$$R_\theta = \text{diag}(r_{1\theta}, r_{2\theta}, \dots, r_{N\theta}) = \begin{pmatrix} r_{1\theta} & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & r_{N\theta} \end{pmatrix},$$

$\{\theta/\pi\}$  είναι η πιθανότητα το επόμενο μήνυμα να είναι  $\theta$ , ( $Z_{t+1} = \theta$ ), δεδομένου ότι το τρέχον δ.π είναι το  $\pi$  ( $\pi(t) = \pi$ ) και η τρέχουσα απόφαση είναι  $a = 0$  ( $Y_t = 0$ ) και δίνεται από την σχέση (βλέπε (1.4.5))

$$\{\theta/\pi\} = \pi \cdot P \cdot R_\theta \cdot \mathbf{1}, \quad \underline{\underline{6.1.2}}$$

όπου  $\mathbf{1}$  είναι το  $N \times 1$  διάνυσμα στήλη με όλα τα στοιχεία του 1. Όπως προκύπτει εύκολα από την (6.1.2), η πιθανότητα  $\{\theta/\pi\}$  γράφεται επίσης ως η  $\theta$ -συνιστώσα του διανύσματος  $\pi \cdot P \cdot R$ , δηλαδή

$$\{\theta/\pi\} = (\pi \cdot P \cdot R)_\theta \quad \underline{\underline{6.1.3}}$$

Επίσης εύκολα διαπιστώνουμε από την (6.1.1) ότι η  $j$ -συνιστώσα του διανύσματος  $T(\pi, \theta)$  γράφεται:

$$T(\pi, \theta)_j = \frac{(\pi \cdot P)_j \cdot r_{j\theta}}{(\pi \cdot P \cdot R)_\theta} \quad \underline{\underline{6.1.4}}$$

Όπως ήδη έχουμε προαναφέρει, αν στην περίοδο  $t$  ληφθεί η απόφαση  $a = 1$  (αντικατάσταση), τότε στην επόμενη περίοδο  $t+1$  η κατάσταση του συστήματος είναι 1, ή ισοδύναμα, το δ.π. είναι  $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ , δηλαδή

$$\pi(t) \xrightarrow{a=1} \pi(t+1) = e_1.$$

Έστω  $V(\pi), \pi \in P$  το ελάχιστο αναμενόμενο ολικό εκπίπτον κόστος για άπειρο χρονικό ορίζοντα, όταν το αρχικό δ.π. είναι  $\pi(0) = \pi$ . (βέλτιστη συνάρτηση τιμών για άπειρο χρονικό ορίζοντα). Η συνάρτηση  $V(\pi), \pi \in P$  ικανοποιεί την εξίσωση βελτιστοποίησης:

$$V(\pi) = \min \begin{cases} \pi C^0 + \beta \sum_{\theta \in \Theta} \{\theta | \pi\} V(T(\pi, \theta)) \\ \pi C^1 + \beta V(e^1) \end{cases}, \pi \in \Pi \quad \mathbf{6.1.5}$$

όπου  $\beta \in (0,1)$  ο συντελεστής έκπτωσης.

Για αυθαίρετη φραγμένη συνάρτηση  $u(\pi)$ ,  $\pi \in \Pi$  ( $u \in B(\Pi)$ ), ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις  $[Cu](\pi)$ ,  $[Ru](\pi)$ ,  $\pi \in \Pi$

$$[Cu](\pi) := \pi C^0 + \beta \sum_{\theta \in \Theta} \{\theta | \pi\} u(T(\pi, \theta)) \quad \mathbf{6.1.6}$$

$$[Ru](\pi) := \pi C^1 + \beta u(e^1) \quad \mathbf{6.1.7}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τους παραπάνω συμβολισμούς η εξίσωση βελτιστοποίησης (6.1.5) γράφεται :

$$V(\pi) = \min \{[CV](\pi), [RV](\pi)\}, \pi \in \Pi. \quad \mathbf{6.1.8}$$

Συμβολίζουμε με  $F^N$  το σύνολο των  $N$ -διάστατων διανυσμάτων με μη ελαττούμενες συνιστώσες:

$$F^N = \{(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N) \in \mathbb{R}^N : \chi_1 \leq \chi_2 \leq \dots \leq \chi_N\}.$$

### ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

**Y1** Ο  $N \times N$  πίνακας μετάβασης καταστάσεων  $P$  είναι ολικά θετικός τάξεως 2 (TP<sub>2</sub>) που σημαίνει ότι:

$$\begin{vmatrix} p_{im} & p_{in} \\ p_{jm} & p_{jn} \end{vmatrix} \geq 0 \quad i < j \quad m < n$$

**Y2** Ο  $N \times M$  πίνακας μηνυμάτων  $R$  είναι TP<sub>2</sub>, που σημαίνει ότι:

$$\begin{vmatrix} r_{i\theta} & r_{ik} \\ r_{j\theta} & r_{jk} \end{vmatrix} \geq 0 \quad i < j, \theta < k.$$

**Y3**  $C^R \in F^N$

**Y4**  $C^K \in F^N$

**Y5**  $C^K - C^R \in F^N$

- Η υπόθεση  $Y_1$  υποδηλώνει, ότι αν το σύστημα συνεχίσει να λειτουργεί, τότε είναι περισσότερο πιθανό να μεταβεί σε υψηλότερο επίπεδο χειροτέρευσης.
- Η υπόθεση  $Y_2$  υποδηλώνει, ότι αυξανόμενου του επιπέδου χειροτέρευσης του συστήματος αυξάνει η πιθανότητα λήψης αυξημένης τιμής μηνύματος. Επομένως υψηλή τιμή μηνύματος είναι ένδειξη υψηλού επιπέδου χειροτέρευσης.
- Οι υποθέσεις  $Y_3$  και  $Y_4$  υποδηλώνουν ότι αυξανόμενου του επιπέδου χειροτέρευσης αυξάνουν τα άμεσα κόστη αντικατάστασης και λειτουργίας/ συντήρησης του συστήματος.
- Τέλος η υπόθεση  $Y_5$  υποδηλώνει, ότι αυξανόμενου του επιπέδου χειροτέρευσης, το εύρος ανάμεσα στα άμεσα κόστη λειτουργίας και αντικατάστασης του συστήματος μειώνεται.

## 6.2. Στοχαστικές διατάξεις στον χώρο $\Pi$ .

Στην ενότητα αυτή ορίζουμε στοχαστικές διατάξεις η εισαγωγή των οποίων είναι απαραίτητη για την απόδειξη δομικών ιδιοτήτων της άριστης συνάρτησης τιμών σε άπειρο χρονικό ορίζοντα  $V(\pi)$ ,  $\pi \in \Pi$  και της άριστης πολιτικής.

**Ορισμός 6.2.1:** Η στοχαστική διάταξη (*ordinary-stochastic-ordering*)  $\leq_D$  στο χώρο  $\Pi$  των δ. π. ορίζεται:

Για  $\chi, \psi \in \Pi$ ,  $\chi \leq_D \psi$  ( $\chi$  καλύτερο από το  $\psi$  ως προς την  $\leq_D$ ), αν και μόνον αν:

$$\sum_{i=k}^N x_i \leq \sum_{i=k}^N \psi_i, \quad 1 \leq k \leq N.$$

**Ορισμός 6.2.2:** Η στοχαστική διάταξη λόγου πιθανοφανειών (*likelihood-ratio-ordering*)  $\leq_L$  στον χώρο  $\Pi$  ορίζεται :

Για  $\chi, \psi \in \Pi$ ,  $\chi \leq_L \psi$  ( $\chi$  καλύτερο από το  $\psi$  ως προς  $\leq_L$ ), αν και μόνον αν:

$$\left| \begin{array}{cc} \chi_i & \chi_j \\ \psi_i & \psi_j \end{array} \right| \geq 0 \quad \text{για } 1 \leq i \leq j \leq N.$$

**Ορισμός 6.2.3:** Ένας  $N \times M$  στοχαστικός πίνακας  $A=(a_{ij})$  καλείται στοχαστικά αυξανόμενος (stochastically-increasing), σύντομα SI, αν και μόνον αν :

$$A_i \leq_D A_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq N,$$

όπου  $A_i$  είναι η  $i$ -γραμμή του πίνακα  $A$

(δηλαδή αν

$$\sum_{l=k}^M a_{il} \leq \sum_{l=k}^M a_{jl}, \quad 1 \leq i \leq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq M).$$

**Ορισμός 6.2.4:** Ένας  $N \times M$  στοχαστικός πίνακας  $A=(a_{ij})$  καλείται ολικά θετικός τάξεως 2 ( $TP_2$ ) αν και μόνον αν

$$A_i \leq_L A_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq N,$$

(δηλαδή αν

$$\begin{vmatrix} a_{im} & a_{in} \\ a_{jm} & a_{jn} \end{vmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq N, \quad 1 \leq m \leq n \leq M.$$

**Λήμμα 6.2.1 :**

(a) Για  $\chi, \psi \in \Pi$ , αν  $\chi \leq_L \psi$  τότε  $\chi \leq_D \psi$ .

(b) Για  $\chi, \psi \in \Pi$ ,  $\chi \leq_D \psi$  αν και μόνον αν:

$$\chi \cdot \alpha \leq \psi \cdot \alpha$$

για κάθε  $N \times 1$  διάνυσμα  $\alpha \in F^N$ .

(c) Για  $\chi, \psi \in \Pi$ ,  $\chi \leq_L \psi$  αν και μόνον αν ο  $2 \times N$  πίνακας  $\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix}$  είναι  $TP_2$ .

(d) Για  $\chi, \psi \in \Pi$ , αν  $\chi \leq_D \psi$  και  $A$  είναι  $N \times M$  στοχαστικός πίνακας S.I, τότε

$$\chi \cdot A \leq_D \psi \cdot A.$$

(e) Για  $\chi, \psi \in \Pi$ , αν  $\chi \leq_L \psi$  και  $A$  ένας  $N \times M$  στοχαστικός πίνακας  $TP_2$ , τότε

$$\chi \cdot A \leq_L \psi \cdot A.$$

(f) Αν οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι στοχαστικοί  $TP_2$  με διαστάσεις  $N \times M$ ,  $M \times K$ , τότε και το γινόμενο  $A \cdot B$  είναι ένας  $N \times K$  στοχαστικός  $TP_2$  πίνακας.

(Derman [24]).

**Πρόταση 6.2.1:** Αν  $\chi, \psi \in \Pi$ ,  $\chi \leq_L \psi$ , τότε  $(\{\theta/\chi\})_{\theta \in \Theta} \leq_L (\{\theta/\psi\})_{\theta \in \Theta}$ .

(Ohnishi-Ibaraki [91])

### Απόδειξη

Απο τη σχέση (6.1.3) παίρνουμε:

$$(\{\theta/\chi\})_{\theta \in \Theta} = ((\chi.P.R)_1, (\chi.P.R)_2, \dots, (\chi.P.R)_M) = \chi.P.R.$$

Επειδή από τις υποθέσεις  $Y_1$  και  $Y_2$  οι στοχαστικοί πίνακες  $P$  και  $R$  είναι  $TP_2$ , τότε σύμφωνα με το λήμμα 6.2.1 (f) το γινόμενο  $P.R$  είναι  $TP_2$ . Επειδή  $\chi \leq_L \psi$ , από το λήμμα 6.2.1 (e) παίρνουμε:

$$\chi PR \leq_L \psi PR.$$

Αρα  $(\{\theta/\chi\})_{\theta \in \Theta} \leq_L (\{\theta/\psi\})_{\theta \in \Theta}$ . □

Η παραπάνω πρόταση δηλώνει ότι όσο το δ.π. (δηλ. η κατανομή πιθανότητας που εκφράζει την άποψη του decision maker για την κατάσταση του συστήματος) χειροτερεύει ως προς  $\leq_L$ , υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα να πάρουμε μήνυμα μεγαλύτερου βαθμού χειροτέρευσης.

**Πρόταση 6.2.2:** Για αυθαίρετο  $\chi \in \Pi$ , ισχύει ότι:

$$T(c, q) \leq_L T(c, k) \text{ για } 1 \leq q \leq k \leq M. \quad (\text{Ohnishi-Ibaraki [91]})$$

### Απόδειξη

Ας είναι  $z = x.P$ . Από τη σχέση (6.1.4) παίρνουμε:

$$T(x, \theta)_i = \frac{z_i \cdot r_{i\theta}}{(z.R)_\theta}$$

Τότε για  $1 \leq i \leq j \leq N$ ,  $1 \leq q \leq k \leq M$  και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο πίνακας  $R$  είναι  $TP_2$ , (υπόθεση  $Y_2$ ), έχουμε:

$$\left| \begin{array}{cc} T(x, \theta)_i & T(x, \theta)_j \\ T(x, \kappa)_i & T(x, \kappa)_j \end{array} \right| = \frac{z_i \cdot z_j}{(zR)_\theta \cdot (zR)_\kappa} \cdot \left| \begin{array}{cc} r_{i\theta} & r_{i\kappa} \\ r_{j\theta} & r_{j\kappa} \end{array} \right| \geq 0.$$

Η παραπάνω πρόταση δηλώνει, ότι το επικαιροποιημένο δ.π. θα χειροτερεύσει με βάση την διάταξη,  $\leq_L$ , όταν ο μηχανισμός ελέγχου δώσει μήνυμα υψηλότερου βαθμού χειροτέρευσης.

**Πρόταση 6.2.3:** Αν  $\chi, \psi \in \Pi$ ,  $\chi \leq_L \psi$  τότε  $T(\chi, \theta) \leq_L T(\psi, \theta)$  για όλα τα  $\theta \in \Theta$ .

(Ohnishi-Ibaraki [91])

### Απόδειξη

As είναι  $z^1 = \chi.P$  και  $z^2 = \psi.P$ . Επειδή ο πίνακας P είναι TP<sub>2</sub> (υπόθεση Y1) και  $\chi \leq_L \psi$ , από το λήμμα 6.2.1 (e) έχουμε:

$$z^1 = \chi.P \leq_L z^2 = \psi.P. \quad \underline{\mathbf{6.2.1}}$$

Για  $1 \leq i \leq j \leq N$ , εφαρμόζοντας τις σχέσεις (6.1.4) και (6.2.1) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} T(z, \theta)_i & T(z, \theta)_j \\ T(\psi, \theta)_i & T(\psi, \theta)_j \end{array} \right| &= \frac{z_i^1 \cdot r_{j\theta}}{(z^1.R)_\theta} \cdot \frac{z_j^2 \cdot r_{i\theta}}{(z^2.R)_\theta} - \frac{z_j^1 \cdot r_{i\theta}}{(z^1.R)_\theta} \cdot \frac{z_i^2 \cdot r_{j\theta}}{(z^2.R)_\theta} \\ &= \left| \begin{array}{cc} z_i^1 & z_j^1 \\ z_i^2 & z_j^2 \end{array} \right| \cdot \frac{r_{i\theta} \cdot r_{j\theta}}{(z^1.R)_\theta \cdot (z^2.R)_\theta} \geq 0 \end{aligned} \quad , \theta \in \Theta.$$

Άρα  $T(\chi, \theta) \leq_L T(\psi, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ .  $\square$

**Ορισμός 6.2.5:** Μια πραγματική συνάρτηση  $g$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $\Pi$  λέγεται  $\leq_L$  αύξουσα, αν  $\chi, \psi \in \Pi$  με  $\chi \leq_L \psi \Rightarrow g(\chi) \leq g(\psi)$ .

**Θεώρημα 6.2.1:** Αν  $f(x, \theta)$  είναι μια πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το καρτεσιανό  $\Pi \times \Theta$  που ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1) Για  $\chi$  αυθαίρετο, σταθερό, η συνάρτηση  $f(x, \theta)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $\theta$ .



2) Για  $\theta$  αυθαίρετο, σταθερό, η συνάρτηση  $f$  είναι  $\xi_L$  αύξουσα,

τότε:

$$\xi_{q \in Q} \{q/c\} \cdot f(x, \theta) \leq \xi_{q \in Q} \{q/y\} \cdot f(y, q) \text{ για } \chi \leq_L \psi.$$

(Ohnishi-Ibaraki [91]).

### Απόδειξη

Ορίζουμε  $f(x) = (f(x,1), f(x,2), \dots, f(x,M))^T$ ,  $x \in \Pi$ . Από ιδιότητα 1 έχουμε  $f(x) \in F^M$ ,  $x \in \Pi$ . Από τη σχέση (6.1.3) παίρνουμε :

$$\xi_{q \in Q} \{q/c\} \cdot f(c, \theta) = \xi_{q \in Q} (x.P.R)_q \cdot f(x, q) = c.P.R.f(c)$$

Θεωρούμε  $\chi, \psi \in \Pi$  με  $\chi \leq_L \psi$ .

Επειδή οι πίνακες  $P, R$  είναι  $TP_2$  (υποθέσεις  $Y1, Y2$ ), εφαρμόζοντας διαδοχικά τα  $(f), (e), (a)$  και  $(b)$  του λήμματος 6.2.1 παίρνουμε:  $\chi PR f(x) \leq \psi PR f(\chi)$ .

Από την ιδιότητα (2) έχουμε:

$$f(x, \theta) \leq f(\psi, \theta) \text{ για κάθε } \theta \in \Theta.$$

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι:

$$\xi_{q \in Q} \{q/c\} \cdot f(c, \theta) \leq \xi_{q \in Q} \{q/y\} \cdot f(c, q) \leq \xi_{q \in Q} \{q/y\} \cdot f(y, q). \quad \square$$

Συμβολίζουμε με  $\mathbf{H}$ , την κλάση όλων των πραγματικών συναρτήσεων  $v(\chi), \chi \in P$  που είναι:

1. Συνεχείς στο χώρο  $\Pi$ .
2.  $\leq_L$  αύξουσες
3. Κοίλες.

**Θεώρημα 6.2.2:** Αν η συνάρτηση  $v(\pi), \pi \in \Pi$ , ανήκει στην κλάση  $\mathbf{H}$ , τότε οι συναρτήσεις  $Cv(\pi), Rv(\pi), \pi \in \Pi$  ανήκουν επίσης στην κλάση  $\mathbf{H}$ .

(Ohnishi-Ibaraki [91]).

### Απόδειξη

1) Από τις σχέσεις (6.1.6) (6.1.7) οι συναρτήσεις  $Cv, Rv$ , είναι συνεχείς στον χώρο  $\Pi$ .

2) Έστω  $\pi^1, \pi^2 \in \Pi$ ,  $\pi^1 \leq_L \pi^2$ . Αφού  $C^K \in F^N$  εφαρμόζοντας διαδοχικά τα (α) και (β) του λήμματος 6.2.1 παίρνουμε

$$\pi^1 \leq_D \pi^2$$

και

$$\pi^1 \cdot C^K \leq \pi^2 \cdot C^K \quad \mathbf{6.2.2}$$

Από την πρόταση 6.2.3 έχουμε:

$$T(\pi^1, \theta) \leq_L T(\pi^2, \theta), \forall \theta \in \Theta.$$

Επειδή η  $v$  είναι  $\leq_L$  αύξουσα έχουμε:

$$v(T(\pi^1, \theta)) \leq v(T(\pi^2, \theta)) \quad \forall \theta \in \Theta. \quad \mathbf{6.2.3}$$

Επιπλέον για  $\pi \in \Pi$ ,  $1 \leq q \leq k \leq M$  έχουμε  $T(p, q) \leq_L T(p, k)$  (πρόταση 6.2.2), οπότε για σταθερό  $\pi$  η  $v(T(\pi, \theta))$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $\theta$ . Επομένως η συνάρτηση

$$f(\pi, \theta) := v(T(\pi, \theta)), \quad (\pi, \theta) \in \Pi \times \Theta,$$

ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- 1) για  $\pi$  σταθερό η  $f(\pi, \theta)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $\theta$ .
- 2) για  $\theta$  σταθερό η συνάρτηση  $f(\pi, \theta)$  είναι  $\leq_L$  αύξουσα.

Σύμφωνα με το θεώρημα 6.2.1 παίρνουμε:

$$\sum_{q \in Q} \{q/p^1\} \cdot v(T(\pi^1, \theta)) \leq \sum_{q \in Q} \{q/p^2\} \cdot v(T(\pi^2, \theta)) \text{ αν } \pi^1 \leq_L \pi^2 \quad \mathbf{6.2.4}$$

Από τις (6.1.6), (6.2.2), (6.2.4) έχουμε:  $Cv(\pi^1) \leq Cv(\pi^2)$ , δηλαδή η συνάρτηση  $Cv$  είναι  $\leq_L$  αύξουσα

Επειδή  $\pi^1 \leq_L \pi^2$  και  $C^R \in F^N$ , από τα (α) και (β) του λήμματος 6.2.1 παίρνουμε:

$$\pi^1 \cdot C^R \leq \pi^2 \cdot C^R \quad \mathbf{6.2.5}$$

Επομένως από τις σχέσεις (6.1.7), (6.2.5) η συνάρτηση  $Rv$  είναι  $\leq_L$  αύξουσα.

3) Έστω  $\pi^1, \pi^2 \in \Pi$ . Για  $\theta \in \Theta$  έχουμε:

$$\{q/l p^1 + (1-l)p^2\} = l \cdot \{q/p^1\} + (1-l) \{q/p^2\}$$

και (βλέπε πρόταση 1.4.1)

$$T(l p^1 + (1-l)p^2, q) = \frac{l \cdot \{q/p^1\}}{\{q/l p^1 + (1-l)p^2\}} \cdot T(p^1, q) + \frac{(1-l) \cdot \{q/p^2\}}{\{q/l p^1 + (1-l)p^2\}} \cdot T(p^2, q).$$

Επειδή η συνάρτηση  $u$  υποτέθηκε κοίλη παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \{q/l p^1 + (1-l)p^2\} \cdot u(T(l p^1 + (1-l)p^2, q)) = \\ & \{q/l p^1 + (1-l)p^2\} \cdot u\left(\frac{l \cdot \{q/p^1\}}{\{q/l p^1 + (1-l)p^2\}} \cdot T(p^1, q) + \frac{(1-l) \cdot \{q/p^2\}}{\{q/l p^1 + (1-l)p^2\}} \cdot T(p^2, q)\right) \\ & \leq l \cdot \{q/p^1\} \cdot u(T(p^1, q)) + (1-l) \{q/p^2\} \cdot u(T(p^2, q)). \end{aligned}$$

Αρα για κάθε  $\theta \in Q$ , η συνάρτηση  $\{q/p\} \cdot v(T(\pi, \theta))$ ,  $\pi \in P$  είναι κοίλη.

Η συνάρτηση  $\pi \cdot C^k$  ως γραμμική είναι κοίλη. Επομένως από την 6.1.6 η συνάρτηση  $Cv$  είναι κοίλη. Τέλος η  $Rv$  είναι κοίλη ως γραμμική.

Επομένως  $Cv, Rv$  ανήκουν στην κλάση **H**.

W

**Θεώρημα 6.2.3:** Αν  $V_n(\pi)$ , το βέλτιστο προσδοκώμενο κόστος σε  $n$  περιόδους, δεδομένου ότι το αρχικό δ.π είναι το  $\pi$ , τότε:

$$V_n(\pi) \underset{n \in \mathbb{N}}{\mathbb{R}} V(\pi), \pi \in \Pi.$$

και μάλιστα η βέλτιστη συνάρτηση  $V(\pi)$ , είναι επίσης στοιχείο της κλάσης **H**.

### Απόδειξη

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $V_n(\pi)$   $\pi \in \Pi$ ,  $n=0,1,2,\dots$ , που ορίζονται αναγωγικά :

$$V_0(\pi) = 0$$

$$V_{n+1}(\pi) = \min\{CV_n(\pi), RV_n(\pi)\}$$

Επειδή  $V_0 \in \mathbf{H}$ , και η πράξη  $\min$  διατηρεί τις ιδιότητες 1,2,3 της κλάσης **H**, συμπεραίνουμε επαγωγικά ότι  $V_n \in \mathbf{H}$  ( $n=0,1,2,\dots$ ). Αφού η σύγκλιση

$$V_n(\pi) \underset{n \in \mathbb{N}}{\mathbb{R}} V(\pi), \pi \in \Pi.$$

είναι ομαλή, συμπεραίνουμε ότι:  $V \in \mathbf{H}$ .

W

Συνοψίζοντας, η βέλτιστη συνάρτηση τιμών για άπειρο χρονικό ορίζοντα,  $V(\pi)$ ,  $\pi \in \Pi$  είναι συνεχής,  $\leq_L$  αύξουσα και κοίλη. Αποδεικνύεται εύκολα εφαρμόζοντας την υπόθεση Y5 ότι η συνάρτηση

$$CV(\pi) - RV(\pi) = \pi \cdot (C^k - C^R) + \beta \cdot \left\{ \sum_{\theta \in \Theta} \{\theta / \pi\} \cdot V(T(\pi, \theta)) - V(e^l) \right\}, \pi \in \Pi$$

ανήκει επίσης στην κλάση **H**.

### 6.3. Δομικές ιδιότητες της βέλτιστης πολιτικής αντικατάστασης

Τα κύρια αποτελέσματα της ενότητας αυτής παράγονται από το γεγονός ότι  $V \in \mathbf{H}$ ,  $CV - RV \in \mathbf{H}$ .

Θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα

$$\mathfrak{I}_C = \{\pi \in \Pi : V(\pi) = CV(\pi)\}$$

$$\mathfrak{I}_R = \{\pi \in \Pi : V(\pi) = RV(\pi)\}$$

$\mathfrak{I}_C, \mathfrak{I}_R$  είναι οι περιοχές όπου είναι βέλτιστες οι αποφάσεις  $\alpha=0$  (συνέχιση λειτουργίας) και  $\alpha=1$  (αντικατάσταση) αντίστοιχα.

**Πρόταση 6.3.1:**

ι) Το σύνολο  $\mathfrak{I}_R$  είναι ένα κυρτό υποσύνολο του  $\Pi$ .

ii) Αν  $\pi^0 \in \mathfrak{I}_R$ , τότε  $\pi^0 \leq_L \pi \Rightarrow \pi \in \mathfrak{I}_R$ .

iii) Αν  $\pi^0 \in \mathfrak{I}_C$ , τότε  $\pi \leq_L \pi^0 \Rightarrow \pi \in \mathfrak{I}_C$ .

(Ohnishi-Ibaraki) [91]

Με απλά λόγια το ii) δηλώνει ότι αν για το καλύτερο εφαρμόζουμε αντικατάσταση, πόσο μάλλον για το χειρότερο.

Αντίστοιχα το iii) δηλώνει ότι αν για το χειρότερο δεν εφαρμόζουμε αντικατάσταση, πόσο μάλλον για το καλύτερο.

Κρίνουμε απαραίτητο στο σημείο αυτό να δώσουμε τους εξής ορισμούς:

**Ορισμός 6.3.1:** Ένα σύνολο  $J \subseteq \Pi$  λέγεται  $\leq_L$  αυξάνον, αν  $: x \in J, x \leq_L \psi \Rightarrow \psi \in J$ .

**Ορισμός 6.3.2:** Ένα σύνολο  $J' \subseteq \Pi$  λέγεται  $\leq_L$  φθίνον, αν  $: \psi \in J', x \leq_L \psi \Rightarrow \chi \in J'$ .

Σημειώνουμε ότι αν  $J \neq \emptyset$  τότε  $e_N \in J$ . Επίσης αν  $J' \neq \emptyset$  τότε  $e_1 \in J'$ .

Σύμφωνα με τον ορισμό 6.3.1 το σύνολο  $\mathfrak{I}_R$  είναι  $\leq_L$  αυξάνον και σύμφωνα με τον ορισμό 6.3.2 το σύνολο  $\mathfrak{I}_C$  είναι  $\leq_L$  φθίνον.

**Παρατήρηση**

Για  $N=2$  καταστάσεις, η άριστη πολιτική αντικατάστασης του συστήματος, σύμφωνα με την πρόταση 6.3.1 είναι η control-limit πολιτική  $(\delta^*)^\infty$ , όπου

$$\delta^*(\pi) = \begin{cases} 0 & \forall \pi = (1 - \pi_2, \pi_2) \in \Pi \text{ με } \pi_2 \leq p^* \\ 1 & \forall \pi = (1 - \pi_2, \pi_2) \in \Pi \text{ με } \pi_2 \geq p^* \end{cases}$$

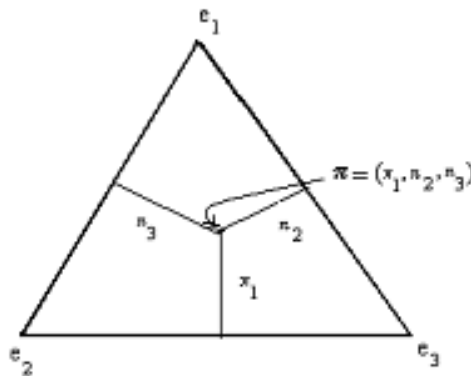
όπου  $p^* \in (0,1)$  κατάλληλη κρίσιμη ποσότητα.

#### 6.4. Γεωμετρική Ερμηνεία της διάταξης $\leq_L$ στην περίπτωση τριών καταστάσεων (N=3).

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε γεωμετρική ερμηνεία της μερικής διάταξης  $\leq_L$  στην ειδική περίπτωση τριών καταστάσεων (N=3). Τότε ο χώρος των δ.π.

$$\Pi = \{\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) : \pi_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1\}$$

παριστάνεται γραφικά με ένα ισόπλευρο τρίγωνο με κορυφές  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  και ύψη ίσα με την μονάδα. Ένα δ.π.  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  απεικονίζεται στο σημείο του τριγώνου, που οι αποστάσεις από τις πλευρές  $e_2e_3$ ,  $e_1e_3$ ,  $e_1e_2$  είναι αντίστοιχα  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  (βλέπε σχήμα 6.1).



Σχήμα 6.1: Ο χώρος  $\Pi$  για  $N=3$ .

**Πρόταση 6.4.1:** Εστω δ.π.  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \in \Pi$ .

ι) Το σύνολο των δ.π που είναι ‘χειρότερα’ του  $\pi$ , ως προς  $\leq_L$

$$D(\pi) = \{\pi' \in \Pi : \pi \leq_L \pi'\}$$

απεικονίζεται στο τρίγωνο  $(\pi e_3 \Gamma)$  με κορυφές  $\pi$ ,  $e_3$ ,  $\Gamma(0, \frac{\pi_2}{\pi_2 + \pi_3}, \frac{\pi_3}{\pi_2 + \pi_3})$ .

ii) Το σύνολο των δ.π που είναι ‘καλύτερα’ του  $\pi$  ως προς  $\leq_L$

$$\hat{\tau}(\pi) = \{\pi' \in \Pi : \pi' \leq_L \pi\}$$

απεικονίζεται στο τρίγωνο  $\pi e_1 A$  με κορυφές  $\pi, e_1, A = \left(\frac{\pi_1}{\pi_1 + \pi_2}, \frac{\pi_2}{\pi_1 + \pi_2}, 0\right)$ .

### Απόδειξη

Σύμφωνα με τον ορισμό 6.2.2 έχουμε  $\pi \leq_L \pi'$  αν και μόνον αν συναληθεύουν οι σχέσεις:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_1' & p_2' \end{vmatrix} = \pi_1 \pi_2' - \pi_2 \pi_1' \geq 0 \quad \mathbf{6.4.1}$$

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_1' & p_3' \end{vmatrix} = \pi_1 \pi_3' - \pi_1' \pi_3 \geq 0 \quad \mathbf{6.4.2}$$

$$\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_2' & p_3' \end{vmatrix} = \pi_2 \pi_3' - \pi_2' \pi_3 \geq 0 \quad \mathbf{6.4.3}$$

Αρχικά θα εντοπίσουμε την περιοχή στην οποία απεικονίζεται το σύνολο των  $\pi' \in \Pi$ , που ικανοποιούν την (6.4.1).

$$\text{Για την κορυφή } e_1 = (1, 0, 0) \text{ έχουμε: } \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\pi_2 \leq 0$$

$$\text{Για την κορυφή } e_2 = (0, 1, 0) \text{ έχουμε: } \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \pi_1 \geq 0$$

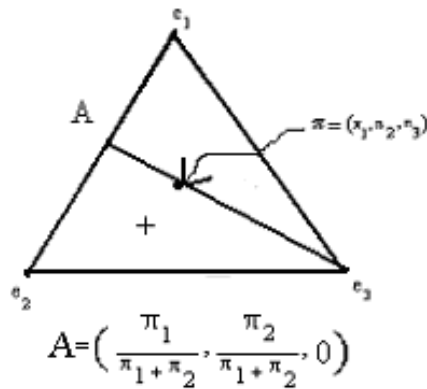
$$\text{Για την κορυφή } e_3 = (0, 0, 1) \text{ έχουμε: } \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Επομένως η κορυφή  $e_2$  και οριακά η  $e_3$  ικανοποιούν την (6.4.1).

Τα σημεία  $(\lambda, 1-\lambda, 0)$  του ευθυγράμμου τμήματος  $e_1 e_2$  που ικανοποιούν την (6.4.1) είναι εκείνα για τα οποία  $0 \leq \lambda \leq \frac{p_1}{p_1 + p_2}$ .

Πράγματι  $\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ \lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \pi_1 - (\pi_1 + \pi_2)\lambda \geq 0 \iff \lambda \leq \frac{p_1}{p_1 + p_2}$ . Από τα ανωτέρω γίνεται

φανερό ότι το σύνολο των  $\pi' \in \Pi$  που ικανοποιούν την (6.4.1) απεικονίζεται στην περιοχή  $\pi + (\text{τρίγωνο } A e_2 e_3)$  του σχήματος 6.2.



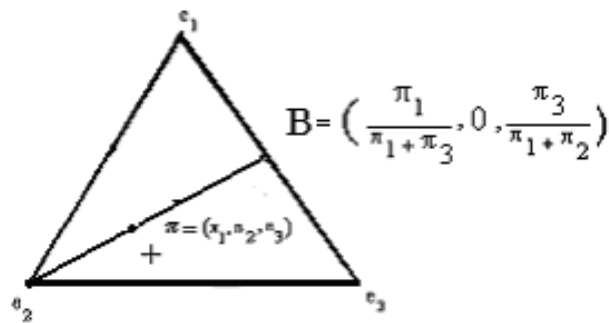
**Σχήμα 6.2: Περιοχή(+) επαληθεύουσα την ανισοτική σχέση (6.4.1).**

Το ευθύγραμμο τμήμα  $Ae_3$ , για το οποίο η σχέση (6.4.1) ισχύει σαν ισότητα, περιγράφεται σαν κυρτός γραμμικός συνδυασμός των σημείων  $e_3=(0,0,1)$  και

$$A = \left( \frac{P_1}{P_1 + P_2}, \frac{P_2}{P_1 + P_2}, 0 \right), \text{ δηλαδή}$$

$$Ae_3: \lambda \cdot \left( \frac{P_1}{P_1 + P_2}, \frac{P_2}{P_1 + P_2}, 0 \right) + (1-\lambda) \cdot (0,0,1) = \left( \lambda \cdot \frac{P_1}{P_1 + P_2}, \lambda \cdot \frac{P_2}{P_1 + P_2}, 1-\lambda \right), 0 \leq \lambda \leq 1$$

Σημειώνουμε ότι το  $\pi \in Ae_3$ , πράγμα πού επαληθεύεται για  $\lambda = \pi_1 + \pi_2$ . Παρόμοια το σύνολο των  $\pi' \in \Pi$  που ικανοποιούν την (6.4.2) απεικονίζεται στην περιοχή + (τρίγωνο  $Be_2e_3$ ) του σχήματος 6.3.



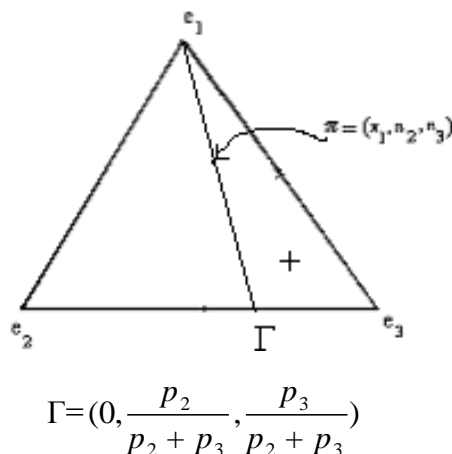
**Σχήμα 6.3: Περιοχή επαληθεύουσα την ανισοτική σχέση (6.4.2).**

Το ευθύγραμμο τμήμα  $Be_2$  για το οποίο η σχέση (6.4.2) ισχύει με ισότητα, περιγράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των σημείων  $B = \left( \frac{P_1}{P_1 + P_3}, 0, \frac{P_3}{P_1 + P_3} \right)$  και

$e_2=(0,1,0)$ , δηλαδή:

$$\text{Be}_2: \lambda \cdot \left( \frac{p_1}{p_1 + p_3}, 0, \frac{p_3}{p_1 + p_3} \right) + (1-\lambda) \cdot (0, 1, 0) = \left( l \cdot \frac{p_1}{p_1 + p_3}, 1-l, l \cdot \frac{p_3}{p_1 + p_3} \right), 0 \leq l \leq 1$$

Σημειώνουμε ότι  $\pi \in \text{Be}_2$ , πράγμα που επαληθεύεται για  $\lambda = \pi_1 + \pi_3$ . Γέλος το σύνολο των  $\pi' \in P$  που ικανοποιούν την ανισοτική σχέση (6.4.3) απεικονίζεται στην περιοχή + (τρίγωνο  $e_1\Gamma e_3$ ) του σχήματος 6.4.



**Σχήμα 6.4: Περιοχή επαληθεύουσα την ανισοτική σχέση (6.4.3).**

Το ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma e_1$  για το οποίο η σχέση (6.4.3) ισχύει με ισότητα περιγράφεται ως κυρτός γραμμικός συνδυασμός των σημείων

$$\Gamma = \left( 0, \frac{p_2}{p_2 + p_3}, \frac{p_3}{p_2 + p_3} \right), \text{ και } e_1 = (1, 0, 0), \text{ δηλαδή:}$$

$$\Gamma e_1: \lambda \left( 0, \frac{p_2}{p_2 + p_3}, \frac{p_3}{p_2 + p_3} \right) + (1-\lambda) \cdot (1, 0, 0) = \left( 1-\lambda, l \cdot \frac{p_2}{p_2 + p_3}, l \cdot \frac{p_3}{p_2 + p_3} \right), 0 \leq l \leq 1$$

Σημειώνουμε ότι  $\pi \in \Gamma e_1$ , πράγμα που επαληθεύεται για  $\lambda = \pi_2 + \pi_3$ .

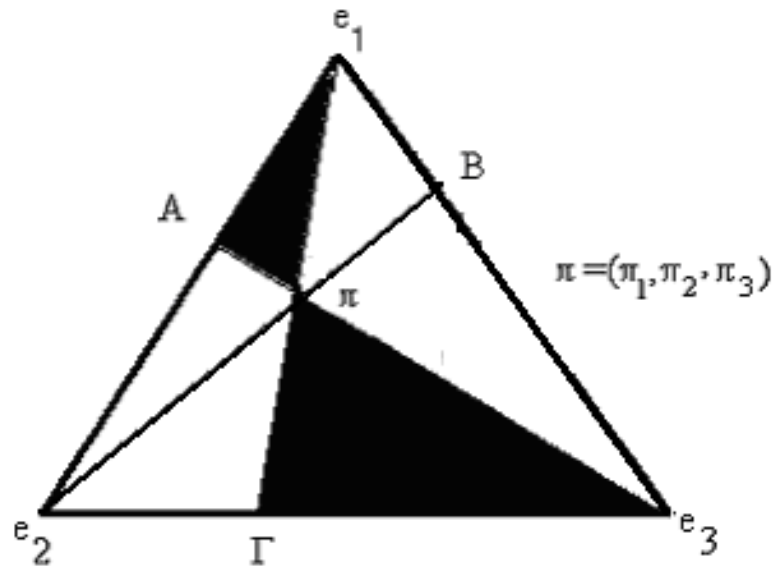
Από τα ανωτέρω συνάγεται ότι τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Gamma e_1, \text{Be}_2, \text{Ae}_3$  τέμνονται στο σημείο  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ . Το σύνολο  $D(\pi)$  απεικονίζεται στο τρίγωνο  $\pi e_3 \Gamma$ , το οποίο είναι η τομή των περιοχών που αντιστοιχούν στις ανισώσεις (6.4.1), (6.4.2), (6.4.3)

Με παρόμοια ανάλυση, το σύνολο  $\tilde{\pi}(\pi)$ , απεικονίζεται στο τρίγωνο  $\pi e_1 \text{A}$  του σχήματος 6.5. □

Σημειώνουμε ότι τα δ.π. που ανήκουν στις περιοχές  $(\text{A}\pi\Gamma e_2)$  και  $(e_1\pi e_3)$ , δεν είναι  $\leq_L$  συγκρίσιμα με το  $\pi$ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η διάταξη  $\leq_L$  είναι μερική και όχι ολική διάταξη.



Η παρακάτω πρόταση συνοψίζει τις κυριότερες ιδιότητες των συνόλων  $D(\pi)$  και αναφέρεται σε σύστημα με  $N$  δυνατές καταστάσεις.



**Σχήμα 6.5: Περιοχές  $\hat{\tau}(\pi)$ ,  $D(\pi)$**

$$\mathbf{A} = \left( \frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}, 0 \right), \mathbf{B} = \left( \frac{p_1}{p_1 + p_3}, 0, \frac{p_3}{p_1 + p_3} \right), \mathbf{\Gamma} = \left( 0, \frac{p_2}{p_2 + p_3}, \frac{p_3}{p_2 + p_3} \right)$$

$D(\pi)$ : τρίγωνο  $\pi e_3 \Gamma$ ,  $\hat{\tau}(\pi)$ : τρίγωνο  $\pi e_1 A$

**Πρόταση 6.4.2:**

- i) Το σύνολο,  $D(\pi)$ ,  $\pi \in P$  είναι κυρτό.
- ii) Αν  $\pi, \pi' \in P$  με  $\pi \leq_L \pi'$  τότε  $D(\pi') \cap D(\pi)$ .
- iii) Για  $\pi \in P$ , το σύνολο  $D(\pi)$  είναι  $\leq_L$  αυζάνον.
- iv) Αν  $X \cap \Pi$ , μη κενό σύνολο, τότε τα σύνολα

$$\bigcup_{p \in C} D(p) \text{ και } \bigcap_{p \in C} D(p) \text{ είναι } \leq_L \text{ αυζάνοντα.}$$

### Απόδειξη

i) Εστω  $\pi', \pi'' \in D(\pi)$  και  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Θα αποδείξουμε ότι:  $\lambda \pi' + (1-\lambda) \pi'' \in D(\pi)$ .

Επειδή  $\pi \leq_L \pi', \pi \leq_L \pi''$  έχουμε: 
$$\begin{vmatrix} p_i & p_j \\ p_i & p_j \end{vmatrix} = \pi_i \pi_j' - \pi_i' \pi_j \geq 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq N \quad \underline{6.4.4}$$

$$\begin{vmatrix} p_i & p_j \\ p_i'' & p_j'' \end{vmatrix} = \pi_i \pi_j'' - \pi_i'' \pi_j \geq 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq N. \quad \underline{6.4.5}$$

Αρα

$$\begin{vmatrix} \pi_i & \pi_j \\ \lambda \pi_i' + (1-\lambda) \pi_i'' & \lambda \pi_j' + (1-\lambda) \pi_j'' \end{vmatrix} = \\ = \lambda \begin{vmatrix} p_i & p_j \\ p_i & p_j \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} p_i & p_j \\ p_i'' & p_j'' \end{vmatrix} \geq 0 \quad \text{για } 1 \leq i \leq j \leq N.$$

Επομένως  $\pi \leq_L \lambda \pi' + (1-\lambda) \pi'' \in D(\pi)$ .

ii) Εστω  $\pi' \in D(\pi)$ , δηλαδή  $\pi \leq_L \pi'$ . Επειδή  $\pi \leq_L \pi'$ , από την μεταβατική ιδιότητα συνάγεται ότι:  $\pi \leq_L \pi'$ , δηλαδή  $\pi' \in D(\pi)$  ή  $D(\pi') \subseteq D(\pi)$ .

iii) Εστω  $\pi' \in D(\pi)$  και  $\pi'' \in \Pi$  έτσι ώστε  $\pi \leq_L \pi''$ . Επειδή  $\pi \leq_L \pi'$ , από μεταβατική ιδιότητα προκύπτει  $\pi \leq_L \pi''$ , δηλαδή  $\pi'' \in D(\pi)$ . Αρα το σύνολο  $D(\pi)$  είναι  $\leq_L$  αυξανόν.

iv) Προφανές, στηρίζεται στο iii). W

Με ανάλογο τρόπο συνοψίζονται οι κυριότερες ιδιότητες των συνόλων  $\mathfrak{I}(\pi)$  στην ακόλουθη πρόταση.

#### Πρόταση 6.4.3:

- i) Το σύνολο,  $\mathfrak{I}(\pi)$ , ( $\pi \in P$ ) είναι κυρτό.
- ii) Αν  $\pi, \pi' \in P$  με  $\pi \leq_L \pi'$  τότε  $\mathfrak{I}(\pi') \subseteq \mathfrak{I}(\pi)$ .
- iii) Για  $\pi \in P$ , το σύνολο  $\mathfrak{I}(\pi)$  είναι  $\leq_L$ -φθίνον.
- iv) Αν  $X \subseteq \Pi$ , μη κενό σύνολο, τότε τα σύνολα

$$\bigcup_{p \in X} \mathfrak{I}(p) \quad \text{και} \quad \bigcap_{p \in X} \mathfrak{I}(p) \quad \text{είναι } \leq_L \text{ φθίνοντα.} \quad \text{W}$$

### Παρατηρήσεις:

1) Ένα  $\leq_L$  αυξάνον σύνολο δεν είναι πάντοτε κυρτό. Πράγματι, στο σχήμα 6.6 η ένωση  $D(\pi_1) \cup D(\pi_2)$  είναι  $\leq_L$  αυξάνον σύνολο, το οποίο όμως δεν είναι κυρτό.

2) Ένα  $\leq_L$  φθίνον σύνολο δεν είναι πάντοτε κυρτό. Πράγματι, στο σχήμα 6.7 η ένωση  $\dot{\tau}(\pi_1) \cup \dot{\tau}(\pi_2)$  είναι  $\leq_L$  φθίνον σύνολο, το οποίο όμως δεν είναι κυρτό.

3) Ένα κυρτό σύνολο που περιέχει το  $e_3$  δεν είναι πάντοτε  $\leq_L$  αυξάνον. Πράγματι, στο σχήμα 6.8 η περιοχή  $D$  (τετράπλευρο  $\Delta\pi Ee_3$ ) περιέχει το  $e_3$  και είναι κυρτή.

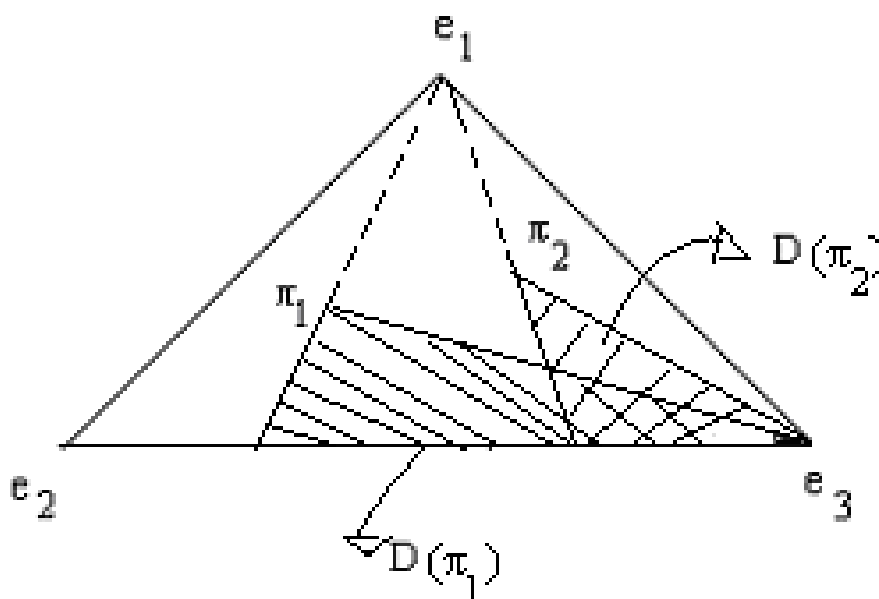
Όμως το σύνολο  $D$  δεν είναι  $\leq_L$  αυξάνον επειδή για το δ.π.  $\pi' = (0, \frac{\pi_2}{\pi_2 + \pi_3}, \frac{\pi_3}{\pi_2 + \pi_3})$

έχουμε  $\pi \leq_L \pi'$  και  $\pi' \notin D$ .

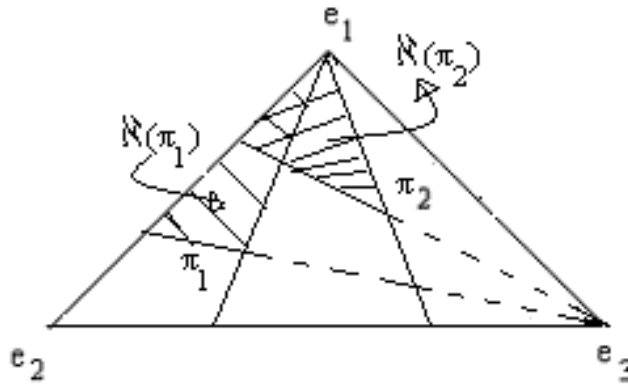
4) Ένα κυρτό σύνολο που περιέχει το  $e_1$  δεν είναι πάντοτε  $\leq_L$  φθίνον. Πράγματι, στο σχήμα 6.9 η περιοχή  $L$  (τετράπλευρο  $Z\pi He_1$ ) περιέχει το  $e_1$  και είναι κυρτή.

Όμως το σύνολο  $L$  δεν είναι  $\leq_L$  φθίνον επειδή για το δ.π.  $\pi'' = (\frac{\pi_1}{\pi_1 + \pi_2}, \frac{\pi_2}{\pi_1 + \pi_2}, 0)$

έχουμε  $\pi'' \leq_L \pi$  και  $\pi'' \notin L$ .

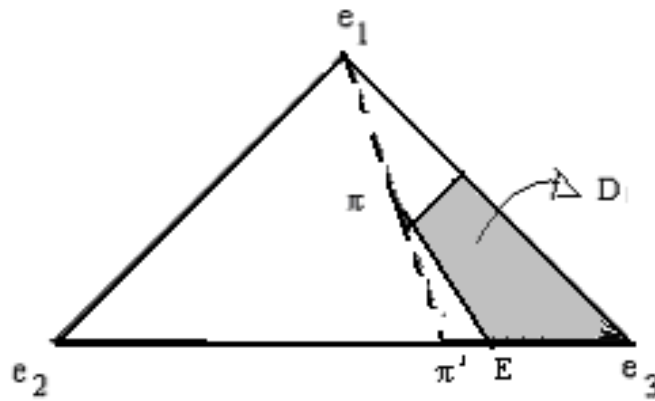


**Σχήμα 6.6: Το  $\leq_L$  αυξάνον σύνολο  $D(\pi_1) \cup D(\pi_2)$  δεν είναι κυρτό.**

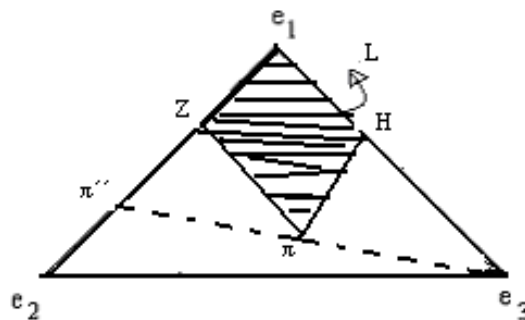


**Σχήμα 6.7:** Το  $\leq_L$  φθίνον σύνολο  $N(\pi_1) \cup N(\pi_2)$  δεν είναι κυρτό.

$$\pi' = \left(0, \frac{\pi_2}{\pi_2 + \pi_3}, \frac{\pi_3}{\pi_2 + \pi_3}\right), \quad \pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$



**Σχήμα 6.8:** Το κυρτό σύνολο  $D$ , περιέχει το  $e_3$  και δεν είναι  $\leq_L$  αυξάνον.

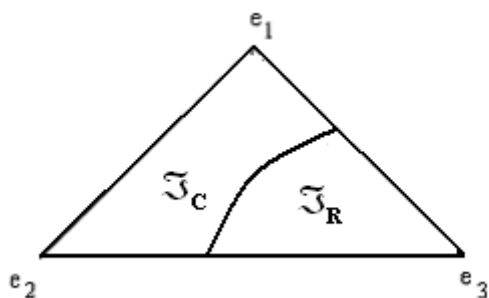


$$\pi'' = \left(\frac{\pi_1}{\pi_1 + \pi_2}, \frac{\pi_2}{\pi_2 + \pi_3}, 0\right), \quad \pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3).$$

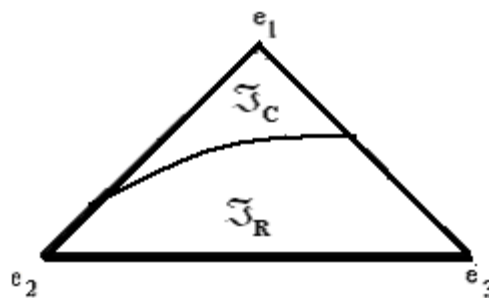
**Σχήμα 6.9:** Το κυρτό σύνολο  $L$ , περιέχει το  $e_1$  και δεν είναι  $\leq_L$  φθίνον.

## Γεωμετρική ερμηνεία της άριστης πολιτικής αντικατάστασης συστήματος

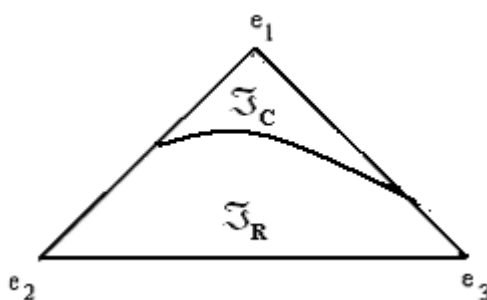
Με τα σχήματα 6.10-6.12 παρουσιάζουμε διάφορες εκδοχές της άριστης πολιτικής για άπειρο χρονικό ορίζοντα σχετικά με τη διαμέριση του χώρου  $\Pi$  στην  $\leq_L$  φθίνουσα περιοχή συνέχισης λειτουργίας/συντήρησης  $\mathfrak{I}_C$  και την  $\leq_L$  αύξουσα κυρτή περιοχή αντικατάστασης  $\mathfrak{I}_R$  (βλέπε πρόταση 6.3.1) για τρεις καταστάσεις ( $N=3$ ).



**Σχήμα 6.10**



**Σχήμα 6.11**



**Σχήμα 6.12**

### **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάσαμε ένα γενικό πρόβλημα αντικατάστασης συστήματος με πεπερασμένο πλήθος επιπέδων χειροτέρευσης, που παρατηρείται ατελώς μέσω μηνυμάτων ενός μηχανισμού ελέγχου, με δύο δυνατές αποφάσεις (συνέχιση της λειτουργίας/συντήρησης ή αντικατάσταση του συστήματος). Η δομή της άριστης πολιτικής μελετήθηκε από τους Ohnishi-Ibaraki στα πλαίσια της διάταξης λόγου

πιθανοφανειών  $\leq_L$ . Σύμφωνα με τη δομή αυτή η περιοχή αντικατάστασης είναι  $\leq_L$  αυξάνον κυρτό σύνολο και η περιοχή συντήρησης είναι  $\leq_L$  φθίνον σύνολο. Για την παραπάνω δομή δίνουμε γεωμετρικές ιδιότητες στην περίπτωση τριών καταστάσεων.