ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Στοχαστικά Μοντέλα για Ράντες Πληρωμών

Αλέξανδρος Κ. Καραμπέτσος

Διπλωματική Εργασία

Πειραιάς,
Ιούνιος 2015

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND
INSURANCE SCIENCE

M.Sc. in Actuarial Science and Risk Management

Recursive Relationships for Annuities Models

Under Random Rates of Interest

Alexandros K. Karabetsos

Dissertation Thesis

Piraeus,
June 2015

Στους γονείς μου,
Κώστα και Έλσα
και
την αδερφή μου Μαίρη

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης της Σχολής Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύ σημαντική υποστήριξη, καθοδήγηση, βοήθεια και υπομονή σε όλη τη διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Κοσμήτορα της Σχολής Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής, κύριο Μάρκο Κούτρα, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης καθώς και τον Επίκουρο Καθηγητή κύριο Γεώργιο Πιτσέλη του ιδίου Τμήματος για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω την αγαπημένη μου αδερφή Μαίρη που αποτελεί παράδειγμα για μένα, καθώς και τους γονείς μου Κωνσταντίνο και Έλσα για την αμέριστη συμπαράστασή τους καθ’ όλη τη διάρκεια των ακαδημαϊκών μου σπουδών. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω όλους τους φίλους μου, οι οποίοι με ενθάρρυναν θετικά σε όλη τη διάρκεια συγγραφής αυτής της εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε στοχαστικά μοντέλα για ράντες πληρωμών υπό τη θεώρηση τυχαίου επιτοκίου. Αρχικά, θα κάνουμε μία στοχαστική προσέγγιση της θεωρίας του τόκου, θεωρώντας το επιτόκιο *i* (rate of interest) ως μία τυχαία μεταβλητή. Έπειτα, θα μελετήσουμε τη συσσωρευμένη αξία βέβαιων ραντών πληρωμών για μια συγκεκριμένη περίοδο, έχοντας ως στόχο τον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής και της διακύμανσης της συσσωρευμένης αξίας. Για τον υπολογισμό αυτό προτείνουμε δύο μεθόδους, με τη μία εκ των δύο να παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον από υπολογιστική άποψη λόγω των αναδρομικών σχέσεων που χρησιμοποιούνται. Στη συνέχεια, θα κάνουμε αναφορά στις στοχαστικές διαδικασίες και ιδιαίτερα σε αυτήν της κίνησης Brown και των υποπεριπτώσεών της. Τέλος, θα παρουσιάσουμε δύο στοχαστικές μεθόδους οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση της «τυχαιότητας» του επιτοκίου και θα δώσουμε αριθμητικά αποτελέσματα.

ABSTRACT

In this paper we will study stochastic models for annuities due to random rate of interest. We will consider a stochastic approach to the theory of interest taking into account that the rate of interest *i* is a random variable. We will also study the accumulated values of certain annuities for a specific period of time, and we will calculate their expected values and variances. For this aim we suggest two methods, one of which, from the mathematical point of view is preferable in terms of the simplicity of calculations, due to the recursive relations used. Further, we will introduce the basic theory of stochastic processes and in particular, the Brownian motion and its special cases. Finally, we will present two stochastic methods for the modeling of the "randomness" of the interest rate, as well as numerical results will be presented.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη στοχαστικών μοντέλων για ράντες πληρωμών. Θα παρουσιαστούν διάφορες μέθοδοι, κάποιες εκ των οποίων χρησιμοποιούν το επιτόκιο σαν μία τυχαία μεταβλητή, ενώ κάποιες άλλες κάνουν χρήση στοχαστικών διαδικασιών με αναφορά στην κίνηση Brown. Για την εύρεση και αποτίμηση των αποτελεσμάτων των μεθόδων αυτών, έχουμε ως στόχο την εύρεση και υπολογισμό μεγεθών όπως η αναμενόμενη αξία, η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής ασυμμετρίας.

Μια ράντα πληρωμών ορίζεται ως μια ακολουθία πληρωμών για περιορισμένη διάρκεια, η οποία συμβολίζεται με *n* [17]. Οι συσσωρευμένες ή τελικές τιμές αυτών των ραντών έχουν ύψιστο μαθηματικό αλλά και πρακτικό ενδιαφέρον. Τυπικά, για λόγους απλότητας, υποθέτουμε ότι το επιτόκιο είναι σταθερό και ίδιο για όλα τα έτη. Ωστόσο, όπως πολύ εύκολα καταλαβαίνουμε, το επιτόκιο που θα ισχύει κατά τα προσεχή έτη δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε, ούτε είναι σταθερό. Έτσι φαίνεται λογικό να αφήσουμε τα επιτόκια να κυμαίνονται κατά τυχαίο τρόπο καθ' όλη τη διάρκεια ζωής της ράντας (βλέπε, π.χ. [18]).

Πολλές προσπάθειες έχουν γίνει για να ερευνηθούν στοχαστικά μοντέλα τυχαίου επιτοκίου και να αποτιμηθούν τα αποτελέσματά τους κάτω από διάφορες υποθέσεις (βλέπε, π.χ. [6], [21], [25], [26], [27]). Στην παρούσα εργασία, υποθέτουμε ότι τα ετήσια επιτόκια είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή μέση τιμή και διασπορά. Εφαρμόζουμε την υπόθεση αυτή, προκειμένου να υπολογίσουμε μέσω αναδρομικών σχέσεων, θεμελιώδη χαρακτηριστικά, όπως η αναμενόμενη αξία και η διακύμανση των συσσωρευμένων αξιών των ραντών, με τις πληρωμές να ποικίλλουν σε αριθμητική ή/και γεωμετρική πρόοδο (βλέπε, π.χ. [7], [28]).

Ένα μεγάλο πλήθος στοχαστικών διαδικασιών έχουν χρησιμοποιηθεί για να μοντελοποιηθεί η «τυχαιότητα» του επιτοκίου στη συνάρτηση παρούσας αξίας και σε άλλες αναλογιστικές συναρτήσεις. Έχει γίνει χρήση μάλιστα, όχι μόνο διαφορετικών διαδικασιών, αλλά και με διαφορετικούς τρόπους. Δύο στοχαστικές προσεγγίσεις οι οποίες έχουν εξετασθεί στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, τις οποίες και χρησιμοποιούμε, είναι αυτή της μοντελοποίησης της συσσωρευμένης συνάρτησης της έντασης ανατοκισμού (βλέπε, π.χ. [3], [4], [5], [9], [10],[11], [12], και [24]) καθώς και αυτή της μοντελοποίησης της έντασης ανατοκισμού (βλέπε, π.χ. [13], [16], [24]). Τα μοντέλα αυτά έχουν μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον, καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε στα οικονομικά, είτε στα ασφαλιστικά και αναλογιστικά μαθηματικά.

Η δομή της εργασίας μας έχει ως εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο, τοποθετούμε το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο που θα χρειαστεί για την κατανόηση της εργασίας, κάνοντας μία στοχαστική προσέγγιση στη θεωρία του τόκου, θεωρώντας το επιτόκιο *i* (rate of interest) ως μία τυχαία μεταβλητή.

Δίνουμε μία βασική εισαγωγή σε διάφορα μοντέλα, τα οποία έχουν σημαντικές εφαρμογές στην πράξη. Αρχικά, εξετάζουμε την περίπτωση κατά την οποία το επιτόκιο μίας περιόδου είναι ανεξάρτητο από το επιτόκιο οποιασδήποτε άλλης περιόδου, και αφετέρου, την περίπτωση κατά την οποία οι διαδοχικές τιμές των επιτοκίων σχετίζονται μεταξύ τους.
Στο δεύτερο κεφάλαιο, μελετάμε τη συσσωρευμένη ή μελλοντική αξία σίγουρων ή βέβαιων ραντών για μια σειρά ετών, στις οποίες το επιτόκιο αποτελεί μία τυχαία μεταβλητή, έχοντας ως στόχο τον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής (*expected value*) και της διακύμανσης (*variance*) της προαναφερθείσας συσσωρευμένης αξίας, προτείνοντας δύο μεθόδους για τον υπολογισμό τους. Οι δύο μέθοδοι που θα περιγραφούν, αντιμετωπίζουν παρόμοιες δυσκολίες, έχουν πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα, και σε κάποιες περιπτώσεις, η μία είναι προτιμότερη έναντι της άλλης, όσον αφορά την ευκολία υπολογισμών. Η καινοτομία της δεύτερης μεθόδου είναι η απευθείας εύρεση της διακύμανσης συσσωρευμένων αξιών, χρησιμοποιώντας αναδρομικές σχέσεις και επίλυση αυτών, σε αντίθεση με τη συνήθη διαδικασία που ήταν να υπολογίζεται πρώτα η δεύτερη ροπή.

Στο τρίτο κεφάλαιο, κάνουμε εισαγωγή στις στοχαστικές διαδικασίες με αναφορά στην κίνηση Brown, καθώς και σε ειδικές περιπτώσεις αυτής, όπως η *αριθμητική κίνηση Brown*, η *γεωμετρική κίνηση Brown*, και η διαδικασία *Ornstein-Uhlenbeck*.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε δύο στοχαστικές μεθόδους οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση της «τυχαιότητας» του επιτοκίου. Συγκεκριμένα, οι στοχαστικές αυτές μέθοδοι αναφέρονται στη μοντελοποίηση της συσσωρευμένης συνάρτησης της έντασης ανατοκισμού, καθώς και στη μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού. Η αναμενόμενη αξία, η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής ασυμμετρίας της παρούσας αξίας μιας ληξιπρόθεσμης ράντας παρουσιάζονται σε πίνακες, και τέλος δίνονται χρήσιμα συμπεράσματα και παρατηρήσεις.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Η Θεωρία του Τόκου - Τυχαία Επιτόκια

Στο κεφάλαιο αυτό, θα κάνουμε μία στοχαστική προσέγγιση στη θεωρία του τόκου, θεωρώντας το i (rate of interest) ως μία τυχαία μεταβλητή. Θα δώσουμε μία βασική εισαγωγή σε διάφορα μοντέλα (βλέπε πχ. [16], [19]), στηριζόμενοι σε στοχαστική βάση, τα οποία έχουν σημαντικές εφαρμογές στην πράξη. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία το επιτόκιο μίας περιόδου είναι ανεξάρτητο από το επιτόκιο οποιασδήποτε άλλης περιόδου. Αφετέρου, θα μελετήσουμε την περίπτωση κατά την οποία οι διαδοχικές τιμές των επιτοκίων σχετίζονται μεταξύ τους (βλέπε πχ. [18]).

1.1 Ανεξάρτητα επιτόκια (Indepedent rates of interest)

Θα θεωρήσουμε ότι το επιτόκιο είναι μία τυχαία μεταβλητή, δηλαδή θα εξετάσουμε την περίπτωση στην οποία το επιτόκιο μίας περιόδου είναι ανεξάρτητο από το επιτόκιο μίας άλλης περιόδου. Θα αποδείξουμε ότι οι αναμενόμενες συσσωρευμένες και παρούσες αξίες δεν είναι κατ΄ ανάγκη ίσες με τις συσσωρευμένες και παρούσες αξίες βάσει του αναμενόμενου επιτοκίου. Ας δούμε όμως πρώτα το επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.1
Έστω ότι έχουμε 1 νομισματική μονάδα, την οποία επενδύουμε για 10 χρόνια με αποτελεσματικό επιτόκιο (effective rate of interest, ERI) το οποίο είναι (με ίση πιθανότητα) είτε 7%, είτε 8%, είτε 9%. Το *Αναμενόμενο Επιτόκιο* ("expected rate of interest") θα δίνεται από τον τύπο (της μέσης τιμής):

$$E[i] = \frac{0,07 + 0,08 + 0,09}{3} = 0,08$$

Η *Αναμενόμενη Συσσωρευμένη Αξία* (expected accumulated value) θα είναι στην περίπτωση του "άγνωστου" επιτοκίου:

$$E[(1+i)^{10}] = \frac{(1,07)^{10} + (1,08)^{10} + (1,09)^{10}}{3} = 2,16448$$

Στην περίπτωση του αναμενόμενου επιτοκίου, $E[i] = 0,08$, η συσσωρευμένη αξία θα είναι ίση με

$$(1,08)^{10} = 2,15892$$

Από τα ανωτέρω, προκύπτει ότι η αναμενόμενη συσσωρευμένη αξία διαφέρει από τη συσσωρευμένη αξία που βρήκαμε βάσει του αναμενόμενου επιτοκίου, αφού και από τη σχέση

$$(1+i)^{10} = 2,16448$$

προκύπτει ότι το επιτόκιο θα ισούται με $i = 8,028\%$. Παρόμοια αποτελέσματα παίρνουμε, όπως φαίνεται και από το παρακάτω παράδειγμα για τις *Παρούσες Αξίες*.

Παράδειγμα 1.2
Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να επενδύσουμε ένα ποσό σήμερα, αρκετό ώστε μετά το πέρας 10 ετών να συσσωρεύεται μία νομισματική μονάδα, βάσει των υποθέσεων που ίσχυαν και στο προηγούμενό μας παράδειγμα, με το ίδιο άγνωστο επιτόκιο.
Στην περίπτωση αυτή, η *Αναμενόμενη Παρούσα Αξία* είναι ίση με:

$$E[(1+i)^{-10}] = \frac{(1,07)^{-10} + (1,08)^{-10} + (1,09)^{-10}}{3} = 0,46465 \quad (*)$$

ενώ η *Παρούσα Αξία βάσει του Αναμενόμενου επιτοκίου*, $E[i] = 0,08$, είναι:

$$(1,08)^{-10} = 0,46319$$

Παρατηρούμε διαφορά πάλι ανάμεσα στην τιμή της αναμενόμενης παρούσας αξίας και της παρούσας αξίας βάσει του αναμενόμενου επιτοκίου.
Το επιτόκιο το οποίο "παράγει" την αναμενόμενη παρούσα αξία της σχέσης $(*)$, θα είναι το:

$$(1+i)^{-10} = 0,46465 \Rightarrow i = 7,966\%$$

Συσσωρευμένες Αξίες

Στα προηγούμενα παραδείγματα, θεωρήσαμε ότι το αβέβαιο επιτόκιο ήταν σταθερό κατά τη διάρκεια

των 10 χρόνων. Τώρα, θα θεωρήσουμε την περίπτωση κατά την οποία το επιτόκιο μπορεί να μεταβάλλεται από περίοδο σε περίοδο, σύμφωνα με κάποια κατανομή (η οποία δεν αλλάζει με το χρόνο). Έστω i_t το επιτόκιο κατά την περίοδο t (δηλαδή από $t-1$ έως t), όπου $t = 1, 2, ..., n$.
Η *Συσσωρευμένη Αξία* μιας επένδυσης 1 νομισματικής μονάδας, στο τέλος n περιόδων, θα δίνεται από τον τύπο:

$$a(n) = (1 + i_1)(1 + i_2)...(1 + i_n) = \prod_{t=1}^{n}(1 + i_t) \tag{1.1}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα επιτόκια i_t είναι ανεξάρτητα και ισόνομα με κατανομή που έχει μέσο όρο i, δηλαδή $E[i_t] = i$. Η *Αναμενόμενη Συσσωρευμένη Αξία* δίνεται από τον τύπο:

$$E[a(n)] = E[\prod_{t=1}^{n}(1 + i_t)] = \prod_{t=1}^{n} E(1 + i_t) = (1 + i)^n \tag{1.2}$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση η αναμενόμενη συσσωρευμένη αξία ισούται με τη συσσωρευμένη αξία βάσει του αναμενόμενου επιτοκίου.
Στη συνέχεια, κάνοντας χρήση της σχέσης (1.2), θεωρούμε τη διασπορά της συσσωρευμένης αξίας η οποία είναι:

$$\begin{aligned} Var[a(n)] &= E[a^2(n)] - \{E[a(n)]\}^2 \\ &= E[a^2(n)] - (1 + i)^{2n} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Έστω ότι τα επιτόκια i_t έχουν διασπορά ίση με s^2, δηλαδή $Var[i_t] = s^2$. Τότε υπολογίζουμε τη *Δεύτερη Ροπή*:

$$\begin{aligned} E[a^2(n)] &= E[\prod_{t=1}^{n}(1 + i_t)^2] \\ &= \prod_{t=1}^{n} E[(1 + i_t)^2] \\ &= \prod_{t=1}^{n} E[1 + 2i_t + (i_t)^2] \\ &= \prod_{t=1}^{n} E[1] + 2E[i_t] + E[(i_t)^2] \qquad (**) \end{aligned}$$

Όμως,

$$E[(i_t)^2] = Var(i_t^2) + (E[i_t])^2 = s^2 + i^2$$

Άρα η $(**)$ γίνεται:

$$\begin{aligned} E[a^2(n)] &= \prod_{t=1}^{n}(1+2i+s^2+i^2) \\ &= (1+2i+s^2+i^2)^n \end{aligned} \tag{1.4}$$

Άρα η σχέση (1.3) με τη βοήθεια της (1.4) γίνεται:

$$Var[a(n)] = (1+2i+s^2+i^2)^n - (1+i)^{2n} \tag{1.5}$$

ή αλλιώς

$$Var[a(n)] = (1+j)^n - (1+i)^{2n}$$

όπου $j = 2i + i^2 + s^2$.

Θα επεκτείνουμε τώρα την παραπάνω ανάλυση για μία προκαταβλητέα ράντα σταθερών πληρωμών (level-payment annuity) για n περιόδους. Η συσσωρευμένη αξία της ράντας αυτής είναι ίση με:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{\overline{n}|} &= (1+i_n) + (1+i_n)(1+i_{n-1}) + ... + (1+i_n)(1+i_{n-1})...(1+i_1) \\ &= \sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}(1+i_{n-s+1}) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
E[\ddot{s}_{\overline{n}|}] &= E[\sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}(1+i_{n-s+1})] \\
&= \sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}E[1+i_{n-s+1}] \\
&= \sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}E(1)+E(i_{n-s+1}) \\
&= \sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}(1+i) \\
&= \sum_{t=1}^{n}(1+i)^t \\
&= (1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+...++(1+i)^n \\
&= \ddot{s}_{\overline{n}|i} \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια αναζητούμε τη διασπορά της $\ddot{s}_{\overline{n}|}$, δηλαδή τη $Var[\ddot{s}_{\overline{n}|}]$ με:

$$Var(\ddot{s}_{\overline{n}|}) = Var(\sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}(1+i_{n-s+1}))$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύεται στο Παράρτημα (το Παράρτημα παρατίθεται στο τέλος της διπλωματικής εργασίας).

Υποθέτουμε ότι m_1^s και m_2^s οι πρώτες και δεύτερες ροπές του $(1+i_t)$ αντίστοιχα, οπότε έχουμε:

$$m_1^s = E(1+i_t) = 1+i$$

και

$$m_2^s = E[(1+i_t)^2] = 1+j$$

όπου

$$j = 2i+i^2+s^2$$

Τότε, όπως αποδεικνύεται και στο Παράρτημα έχουμε ότι:

$$Var(\ddot{s}_{\overline{n}|}) = \frac{m_1^s+m_2^s}{m_2^s-m_1^s}\,\ddot{s}_{\overline{n}|j} - \frac{2m_2^s}{m_2^s-m_1^s}\,\ddot{s}_{\overline{n}|i} - (\ddot{s}_{\overline{n}|i})^2 \qquad (1.8)$$

Παρούσες Αξίες

Ανάλογα αποτελέσματα με εκείνα των *Συσσωρευμένων Αξιών*, μπορούν επίσης να θεμελιωθούν και για τις *Παρούσες Αξίες*. Στην περίπτωση αυτή, όμως, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην επιλογή των επιτοκίων που θα χρησιμοποιήσουμε, αφού εν γένει

$$E[\frac{1}{1+i_t}] \neq \frac{1}{E[1+i_t]}$$

Για αυτόν το λόγο, θα πρέπει να ορίσουμε το επιτόκιο i με

$$E[\frac{1}{1+i_t}] := (1+i)^{-1}$$

Να τονίσουμε εδώ ότι αυτή η τιμή του i είναι διαφορετική από αυτή που χρησιμοποιήθηκε για τις συσσωρευμένες αξίες, για την οποία $E[i_t] = i$. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε τύπους για την αναμενόμενη παρούσα αξία μίας (σειράς πληρωμών) ράντας, ανάλογη του τύπου (1.1).
Έτσι, έχουμε ότι:

$$E[a^{-1}(n)] = (1+i)^{-n} \tag{1.9}$$

Όσον αφορά τη διασπορά της παρούσας αξίας, έχουμε:

$$\begin{aligned} Var[a^{-1}(n)] &= E[a^{-2}(n)] - E[a^{-1}(n)]^2 \\ &= (1+k)^{-n} - (1+i)^{-2n} \end{aligned} \tag{1.10}$$

όπου

$$(1+k)^{-1} = E[(1+i_t)^{-2}]$$

Όσον αφορά τη διασπορά της παρούσας αξίας, η σχέση (1.10) είναι η καλύτερη δυνατή που μπορούμε να έχουμε, καθώς δεν γνωρίζουμε πως κατανέμονται τα i_t. Η προηγούμενη προσέγγιση, με την οποία βρήκαμε τη δεύτερη ροπή για τις συσσωρευμένες αξίες δε θα δουλέψει για τις παρούσες. Αυτή θα υπολογιστεί, βασιζόμενοι σε μία δεύτερη ροπή, η οποία στηρίζεται σε μία συγκεκριμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Γνωρίζουμε ότι η παρούσα αξία μίας annuity-immediate

$n-$περιόδου δίνεται από τον τύπο:

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{n}|} &= (1+i_1)^{-1} + (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1} \\
&\quad + ... + (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}...(1+i_n)^{-1} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \prod_{s=1}^{t} (1+i_s)^{-1}
\end{aligned}
$$

Η μέση τιμή της $a_{\overline{n}|}$ είναι:

$$
\begin{aligned}
E[a_{\overline{n}|}] &= E[\sum_{t=1}^{n} \prod_{s=1}^{t} (1+i_s)^{-1}] \\
&= \sum_{t=1}^{n} \prod_{s=1}^{t} (1+i)^{-1} \\
&= \sum_{t=1}^{n} (1+i)^{-t} \\
&= (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+i)^{-n} \\
&= a_{\overline{n}|i} \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

Η αναγωγή του τύπου (1.11) είναι όμοια με αυτήν του τύπου (1.7).
Τέλος, θεωρούμε τη διασπορά της $a_{\overline{n}|}$. Αν ορίσουμε m_1^a και m_2^a να είναι η πρώτη και η δεύτερη ροπή της $(1+i_t)^{-1}$ γύρω από την αρχή, δηλαδή:

$$m_1^a = E[(1+i_t)^{-1}] = (1+i)^{-1} \qquad (1.12)$$

και

$$m_2^a = E[(1+i_t)^{-2}] = (1+k)^{-1} \qquad (1.13)$$

αντίστοιχα, όπου

$$(1+k)^{-1} = E[(1+i_t)^{-2}]$$

τότε, εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις στη σχέση που αποδείξαμε στο Παράρτημα, έχουμε:

$$Var(\ddot{a}_{\overline{n}|}) = \frac{m_2^a + m_1^a}{m_2^a - m_1^a}\, \ddot{a}_{\overline{n}|k} - \frac{2m_2^a}{m_2^a - m_1^a}\, \ddot{a}_{\overline{n}|i} - (\ddot{a}_{\overline{n}|i})^2 \qquad (1.14)$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν γνωρίζουμε τις πρώτες και δεύτερες ροπές των $1 + i_t$ και $(1 + i_t)^{-1}$, τότε είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά της συσσωρευμένης αξίας ή της παρούσας αξίας μιας πληρωμής ή την πληρωμή μιας ράντας σταθερών πληρωμών (level-annuity).

Θα πρέπει, όμως, να κάνουμε μία επιλογή για την υπόθεση γύρω από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $(\sigma.\pi.\pi)$ της κατανομής των $i_t, t = 1, 2, ..., n$.

Ειδική Περίπτωση

Υπάρχει μία σημαντική ειδική περίπτωση στην οποία ένα χρήσιμο αποτέλεσμα ανάγεται με τρόπο αναλυτικό. Ας υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $log(1 + i_t) \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Τότε η τυχαία μεταβλητή $(1 + i_t)$ ακολουθεί μια lognormal κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 που δίνονται από τους τύπους:

$$E[1 + i_t] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \neq \mu \tag{1.15}$$

και

$$Var[1 + i_t] = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1) \neq \sigma^2 \tag{1.16}$$

Από τη γνωστή σχέση

$$\ddot{a}_{\overline{t}|} = (1 + i_1)(1 + i_2)...(1 + i_t) = \prod_{k=1}^{t}(1 + i_k)$$

έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} log\,\ddot{a}_{\overline{n}|} &= log[\prod_{t=1}^{n}(1 + i_t)] \\ &= log[(1 + i_1)(1 + i_2)...(1 + i_n)] \\ &= log(1 + i_1) + log(1 + i_2) + ... + log(1 + i_n) \\ &= \sum_{t=1}^{n} log(1 + i_t) \end{aligned} \tag{1.17}$$

όπου $t = 1, 2, ..., n$. Το δεξί μέλος της (1.17) είναι το άθροισμα n-ανεξάρτητων κανονικών τυχαίων μεταβλητών, η κάθε μία εκ των οποίων έχει μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Οπότε το $log\,a(n)$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $n\mu$ και διασπορά $n\sigma^2$, δηλαδή

$$log\,a(n) \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

Έτσι η $a(n)$ ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή (lognormal) με παραμέτρους $n\mu$ και $n\sigma^2$. Αν ανατρέξουμε στη σχέση μεταξύ έντασης ανατοκισμού και επιτοκίου:

$$\delta = log_e(1+i)$$

τότε το δεξί μέλος της σχέσης (1.17) είναι το άθροισμα όλων των $\delta_t's$, $(t = 1, 2, ..., n)$ με

$$\delta_{[t]} = log_e(1+i_t) \tag{1.18}$$

όπου το $\delta_{[t]}$ αναφέρεται ως η ένταση ανατοκισμού για το διάστημα $[t-1, t]$, και είναι διαφορετικό από το δ_t το οποίο αφορά μόνο τη χρονική στιγμή t.

ΣΧΟΛΙΟ

Η λογαριθμοκανονική (lognormal) κατανομή μας είναι χρήσιμη, καθώς μας παρέχει καλά μοντέλα για τις διασπορές του επιτοκίου (rate of interest).

Παράδειγμα 1.3

Υποθέτουμε ότι i_t με $t = 1, 2, ..., n$ είναι το αποτελεσματικό επιτόκιο (effective rate of interest), το οποίο κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα [0.07, 0.09] για τις $t = 1, 2, 3$. Θα βρούμε τη μέση τιμή καθώς και την τυπική απόκλιση της συσσωρευμένης αξίας επένδυσης μιας νομισματικής μονάδας στο τέλος των 3 ετών.

Πράγματι, αφού έχουμε ομοιόμορφη κατανομή στο $[a, b] = [0.07,\ 0.09]$, ισχύει ότι

$$E[i_t] = \frac{0,07 + 0,09}{2} = 0,08$$

Από τον τύπο $E[a(n)] = (1+i)^n$ (για $n = 3$ που είναι το τέλος της περιόδου), έχουμε:

$$E[a(3)] = (1 + 0,08)^3 = 1,25971$$

Για την τυπική απόκλιση, επίσης, θα έχουμε:

$$Var[i_t] = s^2 = E[i_t^2] - E[i_t]^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(0,09-0,07)^2}{12} = \frac{0,0001}{3}$$

άρα τελικά $s = 0,01166$. Αυτό θα μπορούσε να προκύψει και με τον παρακάτω τρόπο:

$$Var[a(n)] = (1 + 2i + i^2 + s^2)^n - (1+i)^{2n}$$

και για $n = 3$ έχουμε

$$\begin{aligned} Var[a(3)] &= [1 + 2 * 0,08 + (0,08)^2 + 0,00013]^3 - (1 + 0,08)^6 \\ &= 0,00013605 \end{aligned}$$

άρα τελικά $\sqrt{Var[a(3)]} = 0,01166$.

Παράδειγμα 1.4
Θα βρούμε τη μέση τιμή καθώς και την τυπική απόκλιση για τις συσσωρευμένες αξίες επένδυσης μιας νομισματικής μονάδας που γίνονται στην αρχή κάθε χρόνου και για 3 χρόνια.

Πράγματι, έχουμε ότι

$$E[\ddot{s}_{\overline{3}|}] = \ddot{s}_{\overline{3}|} = \ddot{s}_{\overline{3}|0,08}$$

και αφού ισχύει ότι:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|}(1 + i)$$

προκύπτει τελικά

$$E[\ddot{s}_{\overline{3}|}] = 3,5061$$

Όσον αφορά τη διασπορά της $\ddot{s}_{\overline{3}|}$:

$$Var(\ddot{s}_{\overline{3}|}) = \frac{m_2^s + m_1^s}{m_2^s - m_1^s}\, \ddot{s}_{\overline{n}|j} - (\ddot{s}_{\overline{n}|i})^2$$

όπου

$$m_1^s = E[1 + i_t] = 1 + i = 1,08$$

και

$$m_2^s = E[(1 + i_t)^2] = 1 + j = 1.1664$$

και $j = 2i + i^2 + s^2$ με $s^2 = Var[i_t] = \frac{0,0001}{3}$.

Έτσι, τελικά η διασπορά $\ddot{s}_{\overline{3}|}$ είναι ίση με

$$Var(\ddot{s}_{\overline{3}|}) = 0,0005603$$

και

$$\sqrt{Var(\ddot{s}_{\overline{3}|})} = 0,0237$$

Παράδειγμα 1.5
Έστω ότι το $1+i_t\,(t=1,2,..,n)$ ακολουθεί λογαριθμοκανονική (lognormal) κατανομή, με $\mu=0,06$ και $\sigma^2=0,01$. Θα βρούμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση αρχικά για $a(5)$, για $\ddot{s}_{\overline{5}|}$, για $a^{-1}(5)$ καθώς και για $a_{\overline{5}|}$.

Από υπόθεση, για $a(5)$, έχουμε:

$$E[1+i_t]=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}=e^{0,06+0,005}=1,067159=1+i$$

και με εφαρμογή της σχέσης (1.2)

$$E[a(5)]=(1,067159)^5=1,38403$$

Όσον αφορά τη διασπορά, από τον τύπο (1.16) έχουμε:

$$Var[1+i_t]=e^{2\mu+\sigma^2(e^{\sigma^2}-1)}=e^{0,12+0,01(e^{0,01}-1)}=0,011445$$

Από θεωρία, γνωρίζουμε ότι η $a(5)$ ακολουθεί lognormal κατανομή με παραμέτρους 5μ και $5\sigma^2$, οπότε

$$Var[a(5)]=e^{10\mu+5\sigma^2(e^{5\sigma^2}-1)}=e^{0,6+0,05(e^{0,05}-1)}=0,098112$$

Συνεπώς, βρίσκουμε ότι η τυπική απόκλιση είναι $\sqrt{Var[a(5)]}=0,31339$.

Στη συνέχεια, για $\ddot{s}_{\overline{5}|}$, υπολογίζουμε τις τιμές των $E[\ddot{s}_{\overline{5}|}]$ και $Var[\ddot{s}_{\overline{5}|}]$. Από τον τύπο $E[\ddot{s}_{\overline{n}|}]=\ddot{s}_{\overline{n}|i}$, έχουμε ότι

$$E[\ddot{s}_{\overline{5}|}]=\ddot{s}_{\overline{5}|i}=\ddot{s}_{\overline{5}|0,067159}=6,1023$$

Εν συνεχεία, σύμφωνα με τον τύπο (1.8), και λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι $j=2i+i^2+s^2$ και $s^2=Var[i_t]$ έχουμε:

$$\begin{aligned}Var[\ddot{s}_{\overline{5}|}] &= \frac{E[(1+i_t)^2]+E[1+i_t]}{(1+j)-(1+i)}-\frac{2(1+j)}{(1+j)-(1+i)}\,\ddot{s}_{\overline{5}|0,067159}-(\ddot{s}_{\overline{5}|0,067159})^2\\ &= 0,881737\end{aligned}$$

και τελικά $\sqrt{Var[\ddot{s}_{\overline{5}|}]}=0,9390$.

Τώρα θα υπολογίσουμε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση για $a^{-1}(5)$. Από τη σχέση (1.9), είναι γνωστό πως $E[a^{-1}(n)] = (1+i)^{-n}$, και επίσης ισχύει ότι

$$log(1+i_t)^{-1} = -log(1+i_t)$$

η οποία, όπως αναφέραμε, ακολουθεί λογαριθμοκανονική (lognormal) κατανομή με παραμέτρους $-\mu$ και σ^2, δηλαδή

$$-log(1+i_t) \sim N(-\mu, \sigma^2)$$

Άρα η τυχαία μεταβλητή $(1+i_t)^{-1} \sim lognormal$ με παραμέτρους $-\mu$ και σ^2, δηλαδή

$$E[(1+i_t)^{-1}] = e^{-\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = e^{-0,06+0,005} = 0,946485 = (1+i)^{-1}$$

και

$$Var[(1+i_t)^{-1}] = e^{-2\mu+\sigma^2(e^{\sigma^2}-1)} = 0,009003$$

Συνεπώς, για $n = 5$, βρίσκουμε ότι

$$E[a^{-1}(5)] = (1+i)^{-5} = [(1+i)^{-1}]^5 = (0,946485)^5 = 0,759572$$

και για την $Var[a^{-1}(5)]$ θα έχουμε

$$Var[a^{-1}(5)] = e^{-10\mu+5\sigma^2(e^{5\sigma^2}-1)} = e^{-0,6+0,05(e^{0,05}-1)} = 0,029581$$

και τελικά $\sqrt{Var[a^{-1}(5)]} = \sqrt{0.029581} = 0.17199$.
Τέλος, θα βρούμε την $E[a_{\overline{5}|}]$ και την $\sqrt{Var[a_{\overline{5}|}}$. Είναι όμως γνωστό ότι $E[a_{\overline{5}|}] = a_{\overline{5}|i}$ με $i = 0,056541$.
Άρα τελικά έχουμε ότι

$$E[a_{\overline{5}|}] = a_{\overline{5}|0,056541} = 4,2523$$

Για τη διασπορά επίσης θα έχουμε:

$$Var[a_{\overline{5}|}] = \frac{(1+k)^{-1}+(1+i)^{-1}}{(1+k)^{-1}-(1+i)^{-1}}\,a_{\overline{5}|k} - \frac{2(1+k)^{-1}}{(1+k)^{-1}-(1+i)^{-1}}\,a_{\overline{5}|i} - (a_{\overline{5}|i})^2$$

Επομένως, αρκεί να βρούμε το k για το οποίο ισχύει ότι:

$$(1+k)^{-1} = E[(1+i_t)^{-2}] = e^{-0,12+0,01}e^{0,01} = e^{-0,1} = 0,904837$$

Τελικά $k = 0,105171$. Με τη βοήθεια του k, και χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση (1.8), καταλήγουμε ότι

$$Var[a_{\overline{5}|}] = 0,383244$$

και

$$\sqrt{Var[a_{\overline{5}|}} = 0,6191$$

Παράδειγμα 1.6

Υποθέτουμε ότι $E[i_t] = 0,08, (t = 1,2,3)$ και ότι $(1+i_t) \sim lognormal$ κατανομή, με $\sigma^2 = 0,0001$. Θα βρούμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την αναμενόμενη αξία επένδυσης της μιας νομισματικής μονάδας στο τέλος των τριών χρόνων.

Εφόσον $(1 + i_t) \sim lognormal$ τότε ισχύει ότι:

$$E[(1 + i_t)] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

και

$$Var[(1 + i_t)] = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

Τότε, όμως, θα ισχύει και ότι η $log(1 + i_t) \sim N(\mu, \sigma^2)$, δηλαδή ότι

$$\mu = E[log(1 + i_t)] = log(E[1 + i_t]) = log(1 + E[i_t]) = log(1 + 0,08) = log(1,08) = 0,076961$$

και

$$\sigma^2 = 0,0001$$

Από τη σχέση (1.17),

$$\begin{aligned} log\,\ddot{a}_{\overline{n}|} &= log[(1 + i_1)(1 + i_2)...(1 + i_n)] \\ &= log(1 + i_1) + log(1 + i_2) + ... + log(1 + i_n) \\ &= \sum_{t=1}^{n} log(1 + i_t) \end{aligned}$$

παρατηρούμε ότι η $log\,\ddot{a}_{\overline{n}|} \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ άρα

$$log\,\ddot{a}_{\overline{n}|} = N(3\mu, 3\sigma^2) = N(0,230883, 0,0003)$$

Συνεπώς, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη συνάρτηση $log\, \ddot{a}_{\overline{3}|}$, στο τέλος των 3 χρόνων είναι το

$$(3\mu - 1,96\sigma,\ 3\mu + 1,96\sigma) \ = \ (0,230883 - 1,96\sqrt{0,003},\ 0,230883 + 1,96\sqrt{0,003})$$

$$= \ (0,196935,\ 0,264831)$$

Μπορούμε ανάλογα να βρούμε το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την $\ddot{a}_{\overline{3}|}$.
Εφόσον $log\, \ddot{a}_{\overline{3}|} \sim N(3\mu,\ 3\sigma^2)$, τότε η $\ddot{a}_{\overline{3}|}$ ακολουθεί lognormal κατανομή με

$$E[\ddot{a}_{\overline{3}|}] = e^{3\mu + \frac{3\sigma^2}{2}}$$

και

$$Var[\ddot{a}_{\overline{3}|}] = e^{6\mu + 3\sigma^2}(e^{3\sigma^2} - 1)$$

Άρα, ομοίως, το διάστημα εμπιστοσύνης για την $\ddot{a}_{\overline{3}|}$ θα είναι το

$$(E[\ddot{a}_{\overline{3}|}] - \sqrt{Var[\ddot{a}_{\overline{3}|}]},\ E[\ddot{a}_{\overline{3}|}] + \sqrt{Var[\ddot{a}_{\overline{3}|}]}) \ = \ (e^{0.196935},\ e^{0.264831})$$

$$= \ (1.21766,\ 1.30321)$$

1.2 Εξαρτημένα επιτόκια (Dependent rates of interest)

Στην προηγούμενη ενότητα, υποθέσαμε ότι τα επιτόκια i_t σε κάθε διαδοχική περίοδο είναι ανεξάρτητα. Στην ενότητα αυτή, θεωρούμε κάποια αποτελέσματα χωρίς την παραπάνω υπόθεση. Τα εξαρτημένα επιτόκια έχουν διαισθητική ("intuitive") εμφάνιση. Για παράδειγμα, αν το επιτόκιο σε μια περίοδο είναι αρκετά υψηλότερο από ένα μακροπρόθεσμο μέσο επιτόκιο, τότε είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το επιτόκιο της επόμενης περιόδου θα είναι και αυτό υψηλότερο από το μέσο επιτόκιο, παρά πιο χαμηλό. Η ίδια υπόθεση επίσης φαίνεται λογική για επιτόκια χαμηλότερα από το μέσο.
Η ουσία είναι ότι:
"Τα επιτόκια παραμένουν υψηλά ή χαμηλά για διαδοχικές περιόδους, παρά μια φορά ψηλά και μια φορά χαμηλά, γύρω από το μέσο επιτόκιο."
Το παραπάνω γίνεται αντιληπτό αν σκεφθεί κανείς ότι το επίπεδο των επιτοκίων είναι τις περισσότερες φορές συνδεδεμένο με την ευρύτερη οικονομική κατάσταση και τις κυβερνητικές πολιτικές.

Υπάρχουν πολλά διαφορετικά μοντέλα χρονοσειρών, τα οποία έχουν θεμελιωθεί. Τα πιο δημοφιλή μοντέλα είναι τα Moving Average (MA) μοντέλα, τα Autoregressive (AR) μοντέλα, καθώς και ένας συνδυασμός των δύο. Στην ενότητα αυτή, θα αναφερθούμε στο Autoregressive (AR) μοντέλο, καθώς έχει αποδειχθεί ότι είνξαι πιο επιτυχημένο στην μοντελοποίηση της κίνησης των επιτοκίων σε σχέση με το Moving Average (MA) μοντέλο.

Σαν εισαγωγικό παράδειγμα, ας θεωρήσουμε μια ομοιόμορφη κατανομή που εφαρμόζεται για ένα διάστημα με πλάτος $a > 0$, σε κάθε πλευρά του μέσου. Δηλαδή αν το μακροπρόθεσμο μέσο επιτόκιο είναι i, τότε έχουμε μια ομοιόμορφη κατανομή για το διάστημα $[i - a, i + a]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα διαδοχικά επιτόκια συνδέονται με την αναδρομική σχέση:

$$i_t = i + k(i_{t-1} - i) \tag{1.19}$$

όπου $0 \leq k \leq 1$.
Αν $k = 0$, τότε $i_t = i$.
Αν $k = 1$, τότε $i_t = i + (i_{t-1} - i) = i_{t-1}$.
Αυτή η σχέση εξάρτησης, υποθέτει ότι η ομοιόμορφη κατανομή εφαρμόζεται με κέντρο το i_{t-1} στο διάστημα $[i_{t-1} - a, i_{t-1} + a]$ για κάθε διαδοχική τιμή του $t - 1$.
Η σταθερά k είναι το σχετικό βάρος που δίνεται στο μακροπρόθεσμο μέσο επιτόκιο και στο επιτόκιο της προηγηθείσας περιόδου.
Αν $k = 0$, τότε έχουμε ανεξαρτησία και χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας.
Αν $k = 1$, τότε δίνουμε το ολικό βάρος (total weighting). Το παραπάνω παράδειγμα σχετίζεται με μια εφαρμογή μιας Autoregressive Process of Order One - AR(1).
Να σημειώσουμε εδώ ότι μία τέτοια διαδικασία κάνει το επιτόκιο μιας περιόδου να εξαρτάται από το επιτόκιο της προηγούμενης περιόδου.
Διαδοχικά αποτελέσματα έχουν αναχθεί εφαρμόζοντας την lognormal κατανομή σε εξαρτημένη μορφή. Αυτό επιτυγχάνεται προσδιορίζοντας τη μορφή της $\delta_{[t]}$ όπως ορίστηκε στον τύπο

$$\delta_{[t]} = ln(1 + i_t)$$

Γενικά,

$$\delta = ln(1 + i)$$

Υποθέτουμε ότι η μακροπρόθεσμη μέση ένταση ανατοκισμού, δίνεται από την δ, με

$$E[\delta_{[t]}] = \delta \tag{1.20}$$

για $t = 1, 2, ..., n$.

Εφαρμόζουμε την $AR(1)$ διαδικασία (αναπτύσσοντάς την πληρέστερα από το προηγούμενο παράδειγμα) υποθέτοντας ότι η $\delta_{[t]}$ βασίζεται στην μακροπρόθεσμη μέση ένταση ανατοκισμού, καθώς και στην ένταση της προηγούμενης περιόδου. Γι αυτό και έχει τη μορφή:

$$\delta_{[t]} = \delta + k(\delta_{[t-1]} - \delta) + e(t) \tag{1.21}$$

Η ομοιότητα του τύπου (1.21) με τον τύπο (1.19) φαίνεται καθαρά.
Η έκφραση $e(t)$ είναι ο όρος σφάλματος και υποτίθεται ότι τα $e(t)'s$ για $t = 1, 2, ...$ είναι ανεξάρτητα και κατανέμονται ως προς την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 0$ και διασπορά σ^2.
Δίνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα χωρίς απόδειξη.
Η διασπορά του $\delta_{[t]}$ δίνεται από τη σχέση:

$$Var[\delta_{[t]}] = \frac{\sigma^2}{1-k^2} \tag{1.22}$$

και η συνδιασπορά μεταξύ $\delta_{[s]}$ και $\delta_{[t]}$ δίνεται από τη σχέση:

$$Cov[\delta_{[s]}, \delta_{[t]}] = \frac{\sigma^2}{1-k^2}\, k^{t-s} \tag{1.23}$$

όπου $t > s$ και $|k| < 1$.
Αν $k = 0$, τότε έχουμε ανεξαρτησία και εφαρμόζονται τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας οπότε:

$$Var[\delta_{[t]}] = \sigma^2$$

και

$$Cov[\delta_{[s]}, \delta_{[t]}] = 0$$

Παράδειγμα 1.7
Έστω ότι το μακροπρόθεσμο αποτελεσματικό επιτόκιο (effective rate of interest) είναι 6% και αυτό του προηγούμενου χρόνου είναι 9%. Θα συγκρίνουμε το σχήμα που παράγεται από τον τύπο (1.19) για μια περίοδο τριών ετών, υποθέτοντας ότι η απόδοση κάθε χρόνου είναι ίση με το εκτιμώμενο επιτόκιο που βασίζεται στο μακροπρόθεσμο μέσο επιτόκιο αρχικά για την περίπτωση όπου $k = 0, 2$, και αφετέρου για την περίπτωση όπου $k = 0, 8$.

Πράγματι, η σχέση (1.19) γίνεται για $t = 1$:

$$i_1 = 0, 06 + 0, 2(0, 09 - 0, 06) = 0, 066$$

$$i_2 = 0,06 + 0,2(0,066 - 0,06) = 0,0612$$

$$i_3 = 0,06 + 0,2(0,0612 - 0,06) = 0,06024$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι όσο το t μεγαλώνει, οι τιμές πλησιάζουν το μακροπρόθεσμο επιτόκιο 6%. Δουλεύοντας πάλι με τη σχέση (1.19) αλλά για $k = 0,8$, έχουμε:

$$i_1 = 0,06 + 0,8(0,09 - 0,06) = 0,084$$

$$i_2 = 0,06 + 0,8(0,084 - 0,06) = 0,0792$$

$$i_3 = 0,06 + 0,8(0,0792 - 0,06) = 0,07536$$

Εδώ, όπως παρατηρούμε, υπάρχει και πάλι σύγκλιση, αλλά πολύ πιο αργή από την περίπτωση όπου $k = 0,2$.

Παράδειγμα 1.8
Υποθέτουμε ότι η $\delta_{[t]}$ ακολουθεί μια διαδικασία $AR(1)$ με μέση τιμή $\mu = 0,09$, διασπορά $\sigma^2 = 0,003$ και το $cov[\delta_{[s]}, \delta_{[t]}] = 0,002$. Αν η εκτιμώμενη τιμή της $\delta_{[4]}$ είναι ίση με 0,075, θα βρούμε την πραγματική αξία (actual value) της $\delta_{[3]}$.

Πράγματι, ξεκινάμε διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1.23) και (1.22). Έτσι θα έχουμε:

$$\frac{Cov[\delta_{[s]}, \delta_{[t]}]}{Var[\delta_{[t]}]} = k^{t-s} = k^{4-3} = k$$

Όμως, $Var[\delta_{[4]}] = 0,003$ και $Cov[\delta_{[3]}, \delta_{[4]}] = 0,002$ άρα τελικά $k = \frac{2}{3}$.
Αν συμβολίσουμε με δ^A την πραγματική τιμή και με δ^E την εκτιμώμενη, κάνοντας χρήση του τύπου (1.21), θα έχουμε:

$$\delta^E_{[4]} = \delta + k(\delta^A_{[3]} - \delta)$$

και αφού από υπόθεση έχουμε ότι $\delta = E[\delta_{[4]}] = 0,09$, και $\delta^E_{[4]} = 0,075$, καταλήγουμε ότι $\delta^A_{[3]} = 0.0675$.

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα μελετήσουμε τη συσσωρευμένη ή μελλοντική αξία σίγουρων ή βέβαιων ραντών για μια σειρά ετών, στις οποίες το επιτόκιο αποτελεί μία τυχαία μεταβλητή, έχοντας ως στόχο τον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής (expected value) και της διακύμανσης (variance) της προαναφερθείσας συσσωρευμένης αξίας, προτείνοντας δύο μεθόδους για τον υπολογισμό τους.

Κεφάλαιο 2

Ράντες Πληρωμών με Μεταβαλλόμενα Επιτόκια

Πολλές προσπάθειες έχουν γίνει για να ερευνηθούν στοχαστικά μοντέλα τυχαίου επιτοκίου και να αποτιμηθούν τα αποτελέσματά τους κάτω από διάφορες υποθέσεις (βλέπε, π.χ. [6], [20], [24], [25], [26]). Στην ενότητα αυτή, υποθέτουμε ότι τα ετήσια επιτόκια είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή μέση τιμή και διασπορά. Εφαρμόζουμε την υπόθεση αυτή, προκειμένου να υπολογίσουμε μέσω αναδρομικών σχέσεων, θεμελιώδη χαρακτηριστικά, όπως η αναμενόμενη αξία και η διακύμανση των συσσωρευμένων αξιών των ραντών, με τις πληρωμές να ποικίλλουν σε αριθμητική ή/και γεωμετρική πρόοδο (βλέπε, π.χ. [7], [27]).
Θα μελετηθεί η *συσσωρευμένη* ή *μελλοντική* αξία σίγουρων ή βέβαιων ραντών για μια σειρά ετών, στις οποίες το επιτόκιο(που έγκειται σε κάποιους περιορισμούς) αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την *αναμενόμενη τιμή* (expected value) και τη *διακύμανση* (variance) της συσσωρευμένης αξίας, και προτείνουμε δύο μεθόδους για τον υπολογισμό τους.
Οι δύο μέθοδοι που θα περιγραφούν, αντιμετωπίζουν παρόμοιες δυσκολίες, έχουν πλεονεκτήματα/ μειονεκτήματα, και σε κάποιες περιπτώσεις, η μία είναι προτιμότερη έναντι της άλλης, όσον αφορά την ευκολία υπολογισμών. Η καινοτομία της δεύτερης μεθόδου είναι η απευθείας εύρεση της διακύμανσης συσσωρευμένων αξιών, χρησιμοποιώντας αναδρομικές σχέσεις και επίλυση αυτών, σε αντίθεση με τη συνήθη διαδικασία που ήταν να υπολογίζεται πρώτα η δεύτερη ροπή.

2.1 Η περίπτωση του σταθερού επιτοκίου i

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε σταθερό επιτόκιο i, για περίοδο n ετών.
Το προεξοφλητικό επιτόκιο δίνεται από τη σχέση:

$$d = \frac{i}{(1+i)} \tag{2.1}$$

και η Παρούσα Αξία ν της μίας νομισματικής μονάδας 1, μετά άπό ένα χρόνο, δίνεται από τη σχέση:

$$\nu = \frac{1}{(1+i)} \tag{2.2}$$

οπότε προκύπτουν οι σχέσεις:

$$d = i \cdot \nu \tag{2.3}$$

και

$$d + \nu = \frac{1}{(1+i)} + \frac{i}{(1+i)} = 1 \tag{2.4}$$

Σε όλη την υπόλοιπη εργασία, θα υποθέτουμε ότι $k \leq n$, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά. Η συσσωρευμένη αξία μετά από k έτη μιας προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές της 1 νομισματικής μονάδας, υπολογίζεται ως κάτωθι:

$$\begin{aligned}
\ddot{s}_{\overline{k}|i} &= (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^k \\
&= (1+i)\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{k-1}\right] \\
&= (1+i)\sum_{\mu=0}^{k-1}(1+i) \\
&= (1+i)\ \frac{1-(1+i)^k}{1-(1+i)} \\
&= (1+i)\ \frac{1-(1+i)^k}{-i} \\
&= \frac{1-(1+i)^k}{-\frac{i}{1+i}} \\
&= \frac{1-(1+i)^k}{-d} \\
&= \frac{(1+i)^k - 1}{d} \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

και από το τρίτο βήμα της προηγούμενης απόδειξης, προκύπτει προφανώς και η πρώτη μας αναδρομική σχέση για τη συσσωρευμένη αξία μετά από k έτη μιας προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές της 1 νομισματικής μονάδας. Αυτή θα είναι η κάτωθι:

$$\ddot{s}_{\overline{k}|i} = (1+i)\ \left(1 + \ddot{s}_{\overline{k-1}|i}\right) \tag{2.6}$$

Η συσσωρευμένη αξία μετά από k έτη μιας *αυξανόμενης* προκαταβλητέας ράντας k ετήσιων πληρωμών των 1,2,...,k νομισματικών μονάδων, αντίστοιχα, με τη βοήθεια της σχέσης (2.5) δίνεται από:

$$\begin{aligned}
(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} &= k(1+i) + (k-1)(1+i)^2 + ... + (1+i)^k \\
&= \left[\,(1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^k\,\right] \\
&\quad + \left[\,(1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{k-1}\,\right] + ... + \ (1+i) \\
&= \ \ddot{s}_{\overline{k}|i} \ + \ \ddot{s}_{\overline{k-1}|i} \ + ... + \ \ddot{s}_{\overline{1}|i} \\
&= \sum_{\mu=1}^{k} \ddot{s}_{\overline{\mu}|i} \\
&= \sum_{\mu=1}^{k} \frac{(1+i)^{\mu} - 1}{d} \\
&= \frac{1}{d}\ \sum_{\mu=1}^{k} [\,(1+i)^{\mu} - 1\,] \\
&= \frac{\ddot{s}_{\overline{k}|i} - k}{d}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να οριστεί και με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου:

$$\begin{aligned}(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} &= k(1+i)+(k-1)(1+i)^2+...+(1+i)^k \\ &= (1+i)\ \left[\,(k-1)(1+i)+(k-2)(1+i)^2+...+(1+i)^{k-1}\,\right]+k(1+i) \\ &= (1+i)(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|i}+k(1+i) \\ &= (1+i)\ \left[(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|i}+k\right]. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Τώρα θα αναφέρουμε και τη σχέση ανάμεσα σε $(I\ddot{s})_{\overline{k}|i}$, $(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|i}$ και $(\ddot{s})_{\overline{k}|i}$ η οποία είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned}(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} &= k(1+i)+(k-1)(1+i)^2+...+(1+i)^k \\ &= \left[\,(k-1)(1+i)+(k-2)(1+i)^2+...+(1+i)^{k-1}\,\right]+\left[\,(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^k\,\right] \\ &= (I\ddot{s})_{\overline{k-1}|i}+(\ddot{s})_{\overline{k}|i} \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε θεώρημα που αφορά τη συσσωρευμένη αξία μιας αυξανόμενης προκαταβλητέας ράντας k ετήσιων πληρωμών, των 1^2,2^2,...,k^2 νομισματικών μονάδων, αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.1.1 *Η συσσωρευμένη αξία μιας αυξανόμενης προκαταβλητέας ράντας k ετήσιων πληρωμών, των 1^2,2^2,...,k^2 νομισματικών μονάδων, αντίστοιχα ισούται με:*

$$(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|i}=\frac{2(I\ddot{s})_{\overline{k}|i}-\ddot{s}_{\overline{k}|i}-k^2}{d} \qquad (2.10)$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό της *συσσωρευμένης αξίας* αυξανόμενης προκαταβλητέας ράντας k ετήσιων πληρωμών, $1^2,2^2,...,k^2$, έχουμε

$$(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|i}=k^2(1+i)+(k-1)^2(1+i)^2+...+(1+i)^k \qquad (2.11)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.11) με τον συντελεστή προεξόφλησης ν παίρνουμε

$$\begin{aligned}\nu(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|i} &= \frac{1}{1+i}\left[\ k^2(1+i)+(k-1)^2(1+i)^2+...+(1+i)^k\,\right] \\ &= k^2+(k-1)^2(1+i)+...+2^2(1+i)^{k-2}+(1+i)^{k-1} \qquad (2.12)\end{aligned}$$

και αφαιρώντας την (2.12) από την (2.11), και με τη βοήθεια της (2.4) φτάνουμε στην

$$\begin{aligned} d(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|i} &= (1+i)^k + (2^2-1)(1+i)^{k-1} + ... + [k^2-(k-1)^2](1+i) - k^2 \\ &= (1+i)^k + 3(1+i)^{k-1} + 5(1+i)^{k-2} + ... + (2k-1)(1+i) - k^2 \qquad (2.13) \end{aligned}$$

Αν στην τελευταία προσθέσουμε και αφαιρέσουμε τον όρο $\ddot{s}_{\overline{k}|i} = (1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^k$, μετά από πράξεις φτάνουμε στην σχέση:

$$\begin{aligned} d(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|i} &= (1+i)^k + 3(1+i)^{k-1} + 5(1+i)^{k-2} + ... + (2k-1)(1+i) + \ddot{s}_{\overline{k}|i} - \ddot{s}_{\overline{k}|i} - k^2 \\ &= \big[\,(1+i)^k + ... + (2k-1)(1+i)\,\big] \\ &\quad + \big[\,(1+i)^k + (1+i)^{k-1} + ... + (1+i)\,\big] - \ddot{s}_{\overline{k}|i} - k^2 \\ &= \big[\,2(1+i)^k + 4(1+i)^{k-1} + 6(1+i)^{k-2} + ... + 2k(1+i)\,\big] - \ddot{s}_{\overline{k}|i} - k^2 \\ &= 2(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} - \ddot{s}_{\overline{k}|i} - k^2, \end{aligned}$$

και εύκολα προκύπτει το ζητούμενο. □

Επιπροσθέτως, από την (2.11) πολύ εύκολα προκύπτουν οι ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} (I^2\ddot{s})_{\overline{k}|i} &= k^2(1+i) + (k-1)^2(1+i)^2 + ... + (1+i)^k \\ &= (1+i)(k^2 + (I^2\ddot{s})_{\overline{k-1}|i}) \qquad (2.14) \end{aligned}$$

και αν πάρουμε τη διαφορά ανάμεσα σε $(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|i}$ και $(I^2\ddot{s})_{\overline{k-1}|i}$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|i} - (I^2\ddot{s})_{\overline{k-1}|i} &= [k^2-(k-1)^2](1+i)+[(k-1)^2-(k-2)^2](1+i)^2 \\
&\quad + ... + (2^2-1)(1+i)^{k-1} + (1+i)^k \\
&= (2k-1)(1+i)+(2k-3)(1+i)^2+...+3(1+i)^{k-1}+(1+i)^k \\
&= 2[k(1+i)+(k-1)(1+i)^2+...+2(1+i)^{k-1}+(1+i)^k] \\
&\quad -[(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^k] \\
&= 2(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} - \ddot{s}_{\overline{k}|i} \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Η σχέση (2.15) εκφράζει τη σχέση μεταξύ των $(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|i}$, $(I^2\ddot{s})_{\overline{k-1}|i}$, $(I\ddot{s})_{\overline{k}|i}$, και $\ddot{s}_{\overline{k}|i}$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 2.1.1 *Η συσσωρευμένη αξία μιας αυξανόμενης προκαταβλητέας ράντας k ετήσιων πληρωμών, των 1^2,2^2,...,k^2 νομισματικών μονάδων, αντίστοιχα ισούται με:*

$$(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|i} = \frac{(1+\nu)(\ddot{s}_{\overline{k}|i}+k^2)-2k-2k^2}{d^2} \qquad (2.16)$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.10), και με την βοήθεια των (2.4) και (2.7), έχουμε τα κάτωθι:

$$\begin{aligned}
(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|i} &= \frac{2(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} - \ddot{s}_{\overline{k}|i} - k^2}{d} \\
&= \frac{2(\frac{\ddot{s}_{\overline{k}|i} - k}{d}) - \ddot{s}_{\overline{k}|i} - k^2}{d} \\
&= \frac{2\ddot{s}_{\overline{k}|i} - 2k - d\ddot{s}_{\overline{k}|i} - dk^2}{d^2} \\
&= \frac{2\ddot{s}_{\overline{k}|i} - 2k - (1-\nu)\ddot{s}_{\overline{k}|i} - (1-\nu)k^2}{d^2} \\
&= \frac{2\ddot{s}_{\overline{k}|i} - 2k - \ddot{s}_{\overline{k}|i} + \nu\ddot{s}_{\overline{k}|i} - k^2 + \nu k^2}{d^2} \\
&= \frac{(1+\nu)\ddot{s}_{\overline{k}|i} - 2k + k^2 - k^2 - k^2 + \nu k^2}{d^2} \\
&= \frac{(1+\nu)\ddot{s}_{\overline{k}|i} - 2k + (1+\nu)k^2 - 2k^2}{d^2} \\
&= \frac{(1+\nu)(\ddot{s}_{\overline{k}|i} + k^2) - 2k - 2k^2}{d^2}
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση

Αναφέρουμε ότι για το υπόλοιπο της εργασίας, και για λόγους απλότητας, θα παραλείπεται ο δείκτης i, που αφορά το επιτόκιο, ενώ σε αντίθετη περίπτωση που δεν έχουμε το συγκεκριμένο (σταθερό) επιτόκιο, αυτό θα δηλώνεται.

Οι *φθίνουσες* ράντες πληρωμών είναι παρόμοιες με τις αύξουσες, με τη διαφορά ότι οι πληρωμές γίνονται από τη μεγαλύτερη πληρωμή, προς την μικρότερη. Η συσσωρευμένη αξία μιας τέτοιας προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές των $n, n-1, ..., n-(k-1)$ νομισματικών μονάδων αντίστοιχα, συμβολίζεται με $(D\ddot{s})_{\overline{n,k|}}$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}(D\ddot{s})_{\overline{n,k|}} &= n(1+i)^k + (n-1)(1+i)^{k-1} + ... + (n-k+1)(1+i) \\ &= (1+i)\,\big[n(1+i)^{k-1} + (n-1)(1+i)^{k-2} + ... + (n-k+2)(1+i) + (n-k+1)\big] \\ &= (1+i)\,\Big[(D\ddot{s})_{\overline{n,k-1|}} + (n-k+1)\Big] \qquad (2.17)\end{aligned}$$

και πολύ εύκολα προκύπτει και ότι:

$$(D\ddot{s})_{\overline{n,k|}} \;=\; (n+1)\ddot{s}_{\overline{k|}} - (I\ddot{s})_{\overline{k|}} \qquad (2.18)$$

Συμπέρασμα

Το άθροισμα της συσσωρευμένης αξίας $(I\ddot{s})_{\overline{k|}}$ μίας αύξουσας ράντας k πληρωμών και της συσσωρευμένης αξίας $(D\ddot{s})_{\overline{n,k|}}$ μίας φθίνουσας ράντας k πληρωμών, ισούται με τη συσσωρευμένη αξία μιας αντίστοιχης μοναδιαίας ράντας.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συσσωρευμένη αξία μιας προκαταβλητέας ράντας με *μεταβαλλόμενες πληρωμές βάσει αριθμητικής προόδου.* Η πρώτη πληρωμή θα είναι P νομισματικές μονάδες και έπειτα θα αυξάνουμε την πληρωμή ανά περίοδο κατά Q. Έτσι, δημιουργούμε την ακόλουθη σειρά πληρωμών:

$$P, P+Q, P+2Q, ..., P+(k-1)Q$$

Σημειώνουμε ότι το P πρέπει να είναι θετικό ενώ το Q μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό, αρκεί η τελευταία μας πληρωμή $P+(k-1)Q$ να είναι θετική, ούτως ώστε να αποφύγουμε αρνητικές πληρωμές. Η συσσωρευμένη αξία μιας τέτοιας ράντας πληρωμών θα συμβολίζεται με $(\ddot{s}_\alpha)^{(P,Q)}_{\overline{k|}}$ και ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$(\ddot{s}_\alpha)^{(P,Q)}_{\overline{k|}} = P(1+i)^k + (P+Q)(1+i)^{k-1} \;+\; ... \;+\; [\,P+(k-1)Q\,]\,(1+i) \qquad (2.19)$$

Επιπροσθέτως, η σχέση που συνδέει τη συσσωρευμένη αξία μιας προκαταβλητέας ράντας με μεταβαλλόμενες πληρωμές βάσει αριθμητικής προόδου, που μόλις ορίσαμε, με τις συσσωρευμένες αξίες μιας προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές της 1 νομισματικής μονάδας ($\ddot{s}_{\overline{k|}}$) και μιας αύξουσας προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές ($(I\ddot{s})_{\overline{k|}i}$), δίνεται σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1.2 *Η συσσωρευμένη αξία μιας προκαταβλητέας ράντας με μεταβαλλόμενες πληρωμές βάσει αριθμητικής προόδου θα ισούται με:*

$$(\ddot{s}_\alpha)^{(P,Q)}_{\overline{k}|} = (P-Q)\ddot{s}_{\overline{k}|} + Q(I\ddot{s})_{\overline{k}|} \tag{2.20}$$

Απόδειξη:
Ισχύει ότι:

$$(P-Q)\ddot{s}_{\overline{k}|} = (P-Q)\left[\, (1+i)^k + (1+i)^{k-1} + ... + (1+i) \,\right]$$

και

$$Q(I\ddot{s})_{\overline{k}|} = Q(1+i)^k + 2Q(1+i)^{k-1} + ... + kQ(1+i)$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω δύο σχέσεις κατά μέλη, καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Ειδικές περιπτώσεις των P και Q στην (2.20) αποτελούν τα ($P=1$, $Q=0$), ($P=1$, $Q=1$) και ($P=n$, $Q=-1$), οι οποίες και παρουσιάζονται παρακάτω.

Εφαρμογή 2.1
Αν $P=1$, $Q=0$, τότε το $(\ddot{s}_\alpha)^{(P,Q)}_{\overline{k}|}$ αποτελεί τη συσσωρευμένη αξία μιας προκαταβλητέας ράντας με k πληρωμές της 1 νομισματικής μονάδας, δηλαδή

$$(\ddot{s}_\alpha)^{(1,0)}_{\overline{k}|} = \ddot{s}_{\overline{k}|} \tag{2.21}$$

Εφαρμογή 2.2
Αν $P=1$, $Q=1$, τότε το $(\ddot{s}_\alpha)^{(P,Q)}_{\overline{k}|}$ αποτελεί τη συσσωρευμένη αξία μιας αύξουσας προκαταβλητέας ράντας με k πληρωμές των $1,2,3,...$ νομισματικών μονάδων αντίστοιχα, δηλαδή

$$(\ddot{s}_\alpha)^{(1,1)}_{\overline{k}|} = (I\ddot{s})_{\overline{k}|} \tag{2.22}$$

Εφαρμογή 2.3
Αν $P=n$, $Q=-1$, τότε το $(\ddot{s}_\alpha)^{(P,Q)}_{\overline{k}|}$ αποτελεί τη συσσωρευμένη αξία μιας φθίνουσας προκαταβλητέας ράντας με k πληρωμές των $n, n-1, ..., n-k+1$ νομισματικών μονάδων αντίστοιχα, δηλαδή

$$(\ddot{s}_\alpha)^{(n,-1)}_{\overline{k}|} = (D\ddot{s})_{\overline{n,k}|} \tag{2.23}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συσσωρευμένη αξία μιας προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες *μεταβαλλόμενες πληρωμές με γεωμετρική πρόοδο.* Η πρώτη πληρωμή θα είναι P νομισματικές μονάδες και έπειτα θα αυξάνουμε την πληρωμή ανά περίοδο με γεωμετική πρόοδο λόγου Q. Έτσι, δημιουργούμε την ακόλουθη σειρά γεωμετρικών πληρωμών:

$$P,\, PQ,\, PQ^2,\, ...,\, PQ^{k+1}$$

Σημειώνουμε ότι τα P, Q πρέπει να είναι θετικά, ούτως ώστε να αποφύγουμε αρνητικές πληρωμές της ράντας. Η συσσωρευμένη αξία αυτής της ράντας πληρωμών θα συμβολίζεται με $(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|}^{(P,Q)}$ και ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}
(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|}^{(P,Q)} &= P(1+i)^k + PQ(1+i)^{k-1} + ... + PQ^{k-1}(1+i) \\
&= P(1+i)^k \, \frac{\frac{Q^k}{(1+i)^k} - 1}{\frac{Q}{(1+i)} - 1} \\
&= P(1+i)^k \, \frac{\frac{Q^k-(1+i)^k}{(1+i)^k}}{\frac{Q-1-i}{1+i}} \\
&= P(1+i)\, \frac{(1+i)^k - Q^k}{(1+i) - Q} \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

όπου το παραπάνω άθροισμα υπολογίστηκε σύμφωνα με τον τύπο αθρόισματος k-όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο

$$\lambda = \frac{Q}{1+i}$$

Ειδικές περιπτώσεις της (2.24) αποτελούν τα ($P = 1$, $Q = 1$), ($P = 1$, $Q = 1 + u$) (όπου πρέπει $u \neq i$), με το u να δηλώνει ένα σταθερό ποσοστό αύξησης των πληρωμών. Οι ειδικές αυτές περιπτώσεις παρουσιάζονται παρακάτω.

Εφαρμογή 2.4
Αν $P = 1$, $Q = 1$, τότε το $(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|}^{(P,Q)}$ αποτελεί τη συσσωρευμένη αξία μιας προκαταβλητέας ράντας με k πληρωμές της 1 νομισματικής μονάδας, δηλαδή

$$(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|}^{(1,1)} = \ddot{s}_{\overline{k}|} \qquad (2.25)$$

Εφαρμογή 2.5
Αν $P = 1$, $Q = 1 + u$, τότε το $(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|}^{(P,Q)}$ αποτελεί τη συσσωρευμένη αξία μιας αύξουσας προκαταβλητέας ράντας με k πληρωμές των $1, (1 + u), (1 + u)^2, ..., (1 + u)^{k-1}$ νομισματικών μονάδων

αντίστοιχα, δηλαδή

$$(\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{k}|} = \ddot{s}_{\overline{k}|t}\,\frac{(1+i)^k}{(1+t)} \tag{2.26}$$

όπου το t ορίζεται σαν η λύση της εξίσωσης:

$$1+u = (1+i)(1+t) \tag{2.27}$$

Όντως, ο τύπος (2.26) αποδεικνύεται με την παρακάτω διαδικασία:

$$\begin{aligned}
(\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{k}|} &= (1+i)^k + (1+u)(1+i)^{k-1} + (1+u)^2(1+i)^{k-2} + ... + (1+u)^{k-1}(1+i) \\
&= (1+i)\left[\,(1+i)^{k-1} + (1+u)(1+i)^{k-2} + (1+u)^2(1+i)^{k-3} + ... + (1+u)^{k-1}\,\right] \\
&= (1+i)\frac{(1+i)^k - (1+u)^k}{(1+i)-(1+u)} \\
&= \frac{(1+i)^k - (1+u)^k}{-t} \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

όπου θέσαμε το t ίσο με:

$$t = \frac{(1+u)}{(1+i)} - 1 = \frac{(1+u)-(1+i)}{(1+i)} \tag{2.29}$$

Επίσης, όπως έχουμε δείξει από τη σχέση (2.5) ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\ddot{s}_{\overline{k}|t} &= \frac{(1+t)^k - 1}{d} \\
&= \frac{(1+t)^k - 1}{\frac{t}{1+t}} \\
&= (1+t)\frac{(1+t)^k - 1}{t} \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2.30) με $\frac{(1+i)^k}{1+t}$, καταλήγουμε στο:

$$\begin{aligned}
\frac{(1+i)^k}{(1+t)}\ddot{s}_{\overline{k|}t} &= \frac{(1+i)^k}{(1+t)}(1+t)\frac{(1+t)^k-1}{t} \\
&= \frac{(1+i)^k(1+t)^k-(1+i)^k}{t} \\
&= \frac{(1+i)^k\frac{(1+u)^k}{(1+i)^k}-(1+i)^k}{t} \\
&= \frac{(1+u)^k-(1+i)^k}{t} \\
&= \frac{(1+i)^k-(1+u)^k}{-t} \\
&= (\ddot{s}_g)_{\overline{k|}}^{(1,1+u)}
\end{aligned}$$

οπότε η σχέση (2.26) απεδείχθη.

ΣΧΟΛΙΟ

Παρατηρούμε ότι η (2.26) συνδέει τη συσσωρευμένη αξία μίας προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές της 1 νομισματικής μονάδας, με αυτήν μίας αύξουσας προκαταβλητέας ράντας με πρώτη πληρωμή 1 νομισματική μονάδα και σταθερό γεωμετρικό ρυθμό αύξησης, ίσο με $(1+u)$.

2.2 Ράντες πληρωμών με τυχαίο επιτόκιο

Στην ενότητα αυτή, θα μελετήσουμε ένα μοντέλο πληρωμών μίας ράντας που θα αφορά σταθερές πληρωμές με μεταβλητό επιτόκιο κάθε χρόνο. Έστω ότι το ετήσιο επιτόκιο την k-οστή χρονιά είναι i_k, το οποίο είναι μία τυχαία μεταβλητή. Υποθέτουμε ότι για κάθε k, έχουμε $E(i_k) = i > 0$ και $Var(i_k) = s^2$, καθώς και ότι τα $i_1, i_2, ..., i_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Θα έχουμε ότι:

$$E(1+i_k) = 1+i = \mu \tag{2.31}$$

και

$$\begin{aligned}
E[(1+i_k)^2] &= E(1+2i_k+i_k^2) \\
&= E(1)+E(2i_k)+E(i_k^2) \\
&= E(1)+E(2i_k)+Var[i_k]+[E(i_k)]^2 \\
&= 1+2i+s^2+i^2 \\
&= (1+i)^2+s^2 \\
&= 1+f \\
&= m \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

όπου

$$f = 2i+i^2+s^2 \qquad (2.33)$$

και προφανώς ισχύει ότι

$$Var(1+i_k) = E[(1+i_k)^2] - [E(1+i_k)]^2 = m-\mu^2 \qquad (2.34)$$

Ορίζουμε την τιμή r σαν τη λύση της εξίσωσης:

$$1+r = \frac{1+f}{1+i} = \frac{m}{\mu}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$r = \frac{f-i}{1+i} \qquad (2.35)$$

και με χρήση της σχέσης (2.33), έχουμε

$$r = i + \frac{s^2}{1+i} \qquad (2.36)$$

Για μια μεταβαλλόμενη προκαταβλητέα ράντα k-ετών με πληρωμές $c_1, c_2, ..., c_k$ νομισματικών μονάδων αντίστοιχα, συμβολίζουμε τη συσσωρευμένη αξία μετά το πέρας k ετών με C_k. Υποθέτοντας ότι $c_1 = 1$, θα έχουμε ότι

$$E(C_k) = \mu_k \qquad (2.37)$$

$$E(C_k^2) = m_k \qquad (2.38)$$

επομένως έπεται

$$Var(C_k) = m_k - \mu_k^2 \qquad (2.39)$$

Ειδικές περιπτώσεις των (2.37), (2.38) και (2.39) αποτελούν οι περιπτώσεις όπου έχουμε ράντες με πληρωμές $c_1 = 1, c_2 = c_3 = ... = c_k = 0$ και $c_1 = c_2 = c_3 = ... = c_k = 1$ αντίστοιχα. Οι ειδικές αυτές περιπτώσεις παρουσιάζονται παρακάτω.

Παράδειγμα 2.1
Έστω η περίπτωση όπου έχουμε $c_1 = 1, c_2 = c_3 = ... = c_k = 0$, η οποία ισοδυναμεί με μία και μόνο κατάθεση στην αρχή του πρώτου έτους. Στην περίπτωση αυτή, η συσσωρευμένη αξία της επένδυσης του 1, στο τέλος των k-περιόδων, θα είναι:

$$\begin{aligned} C_k &= (1+i_1)(1+i_2)...(1+i_k) \\ &= C_{k-1}(1+i_k) \\ &= \prod_{t=1}^{k}(1+i_t) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Υποθέτοντας τώρα ότι τα i_t'ς είναι ανεξάρτητα και ταυτοτικά, με κατανομή που έχει μέσο i, η αναμενόμενη συσσωρευμένη αξία θα είναι:

$$\begin{aligned} E(C_k) &= \mu_k \\ &= E[\prod_{t=1}^{k}(1+i_t)] \\ &= \prod_{t=1}^{k}E(1+i_t) \\ &= (1+i)^k \\ &= \mu^k \end{aligned} \tag{2.41}$$

Ομοίως, ισχύει

$$\begin{aligned} E[(C_k)^2] &= m_k \\ &= E[\prod_{t=1}^{k}(1+i_t)^2] \\ &= \prod_{t=1}^{k}E(1+2i_t+i_t^2) \\ &= \prod_{t=1}^{k}(1+2i+s^2+i^2) \\ &= (1+2i+s^2+i^2)^k \\ &= m^k \end{aligned} \tag{2.42}$$

Οπότε, τελικά, η διασπορά της συσσωρευμένης αξίας θα είναι ίση με

$$\begin{aligned} Var(C_k) &= E[(C_k)^2] - [E(C_k)]^2 \\ &= m^k - \mu^{2k} \\ &= [(1+i)^2 + s^2]^k - (1+i)^{2k} \qquad (2.43) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2
Στο παράδειγμα αυτό, θα επεκτείνουμε την ανάλυση του προηγούμενου παραδείγματος για μία level-payment μίας προκαταβλητέας ράντας για k περιόδους, όπου δηλαδή ισχύει $c_1 = c_2 = c_3 = ... = c_k = 1$. Αν C_k η συσσωρευμένη αξία μετά το πέρας k ετών, τότε

$$\begin{aligned} C_k &= (1+i_k) + (1+i_k)(1+i_{k-1}) + ... + (1+i_k)(1+i_{k-1})...(1+i_1) \\ &= (1+i)[1 + (1+i_{k-1}) + (1+i_{k-1})(1+i_{k-2}) + ... + (1+i_{k-1})(1+i_{k-2})...(1+i_1)] \\ &= (1+i)(1+C_{k-1}) \qquad (2.44) \end{aligned}$$

οπότε στην ουσία καταλήξαμε στη σχέση (2.6). Υποθέτοντας πάλι ότι έχουμε ανεξαρτησία στα επιτόκια, η αναμενόμενη συσσωρευμένη αξία θα είναι:

$$\begin{aligned} E(C_k) &= \mu_k \\ &= E[(1+i)(1+C_{k-1})] \\ &= \mu(1+\mu_{k-1}) \qquad (2.45) \end{aligned}$$

και η διασπορά

$$\begin{aligned} Var(C_k) &= m_k \\ &= m(1 + 2m_{k-1} + \mu_{k-1}) \qquad (2.46) \end{aligned}$$

Επιπλέον, με εφαρμογή της σχέσης (2.6) στην σχέση (2.45), έχουμε το κάτωθι αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.2.1 *Αν C_k η συσσωρευμένη αξία μετά το πέρας k ετών, μιας προκαταβλητέας ράντας με ετήσιες πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας, και αν το ετήσιο επιτόκιο την k-οστή χρονιά είναι μία τυχαία μεταβλητή i_k, τέτοια ώστε $E(1+i_k) = 1+i$ και $Var(1+i_k) = s^2$, και τα $i_1, i_2, ..., i_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε ισχύει ότι*

$$\mu_k = E(C_k) = \ddot{s}_{\overline{k|}i}$$

Λήμμα 2.2.1 *Υπό τις προυποθέσεις του θεωρήματος 2.2.1, ισχύει ότι:*

$$\begin{aligned} m_k &= (m + ... + m^k) \;+\; 2(m\ddot{s}_{\overline{k-1}|i} + m^2\ddot{s}_{\overline{k-2}|i} + ... + m^{k-1}\ddot{s}_{\overline{1}|i}) \\ &= M_{1k} + 2M_{2k} \end{aligned}$$

όπου $M_{1k} = (m + ... + m^k)$ *και* $2M_{2k} = (m\ddot{s}_{\overline{k-1}|i} + m^2\ddot{s}_{\overline{k-2}|i} + ... + m^{k-1}\ddot{s}_{\overline{1}|i})$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επαγωγής, θα αποδείξουμε ότι ισχύει η ζητούμενη σχέση.
Αρχικά, θα εξετάσουμε αν ισχύει για $k = 2$:

$$\begin{aligned} m_2 &= M_{12} + 2M_{22} \\ &= (m + m^2) + 2(m\ddot{s}_{\overline{1}|i}) \\ &= m + m^2 + 2m\ddot{s}_{\overline{1}|i} \\ &= m + m^2 + 2m\mu_1 \end{aligned}$$

το οποίο είναι αληθές, σύμφωνα με τη σχέση (2.45) (αν θέσουμε $k = 2$). Έπειτα, θα δεχθούμε ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει για ένα τυχαίο k, δηλαδή ότι

$$m_k = M_{1k} + 2M_{2k}$$

Θα αποδείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση θα ισχύει και για $k+1$, δηλαδή ότι

$$m_{k+1} = M_{1(k+1)} + 2M_{2(k+1)}$$

Έχουμε ότι:

$$M_{1(k+1)} = m + ... + m^k + m^{k+1} = m(1 + M_{1k})$$

και

$$M_{2(k+1)} = m\ddot{s}_{\overline{k}|i} + m^2\ddot{s}_{\overline{k-1}|i} + ... + m^k\ddot{s}_{\overline{1}|i} = m(\ddot{s}_{\overline{k}|i} + M_{2k})$$

Άρα το m_{k+1} θα είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= M_{1(k+1)} + 2M_{2(k+1)} \\ &= m(1 + M_{1k}) + 2m(\ddot{s}_{\overline{k}|i} + M_{2k}) \\ &= m(1 + M_{1k} + 2\ddot{s}_{\overline{k}|i} + 2M_{2k}) \end{aligned}$$

και αφού από το Θεώρημα 2.2.1 ισχύει ότι $\mu_k = E(C_k) = \ddot{s}_{\overline{k}|i}$ καθώς επίσης ότι $m_k = M_{1k} + 2M_{2k}$, τελικά έχουμε:

$$m_{k+1} = m(1 + m_k + 2\mu_k)$$

το οποίο είναι αληθές σύμφωνα με την σχέση (2.46) (ολοκληρώθηκε η απόδειξη με επαγωγή). □

Σε αυτό το σημείο υπενθυμίζουμε ότι ισχύει η σχέση (2.32):

$$m = 1 + f$$

Επιπλέον, έχουμε

$$M_{1k} = m + m^2 + ... + m^k$$

Εύκολα γίνεται αντιληπτό

$$M_{1k} = (1 + f) + (1 + f)^2 + ... + (1 + f)^k$$

Όμως, εξ ορισμού και συγκεκριμένα με τη βοήθεια της σχέσης (2.5), ισχύει ότι

$$\ddot{s}_{\overline{k}|f} = (1 + f) + (1 + f)^2 + ... + (1 + f)^k$$

Άρα, συμπεραίνουμε ότι

$$M_{1k} = \ddot{s}_{\overline{k}|f} \tag{2.47}$$

Χρησιμοποιώντας, τώρα την τιμή του r, όπως αυτή δίνεται από τη σχέση (2.35), την τιμή του m από τη σχέση (2.32), και τη σχέση (2.5), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M_{2k} &= m\ddot{s}_{\overline{k-1}|i} + m^2\ddot{s}_{\overline{k-2}|i} + ... + m^{k-1}\ddot{s}_{\overline{1}|i} \\ &= (1+f)\frac{(1+i)^{k-1}-1}{d} + (1+f)^2\frac{(1+i)^{k-2}-1}{d} + ... + (1+f)^{k-1}\frac{(1+i)-1}{d} \end{aligned} \tag{2.48}$$

Αν εφαρμόσουμε στην παραπάνω σχέση την τιμή του d από τη σχέση (2.1), οδηγούμαστε στην παρακάτω σχέση:

$$M_{2k} = \frac{(1+i)^{k+1}}{i}\left[\frac{1+f}{1+i} + ... + (\frac{1+f}{1+i})^{k-1}\right] - \frac{1+i}{i}\left[(1+f) + ... + (1+f)^{k-1}\right] \tag{2.49}$$

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει η παραπάνω σχέση, ξεκινάμε από αυτήν μέχρις ότου καταλήξουμε σε κάποια σχέση που ξέρουμε ότι είναι αληθής:

$$
\begin{aligned}
M_{2k} &= \frac{(1+i)^{k+1}}{i}\left[\frac{1+f}{1+i}+...+(\frac{1+f}{1+i})^{k-1}\right]-\frac{1+i}{i}\left[(1+f)+...+(1+f)^{k-1}\right] \\
&= \frac{(1+i)^{k-1}(1+i)(1+i)(1+f)}{i(1+i)}+...+\frac{(1+i)^{k-1}(1+i)(1+i)(1+f)^{k-1}}{i(1+i)(1+i)^{k-1}} \\
&\quad -(1+f)\frac{(1+i)}{i}-...-(1+f)^{k-1}\frac{(1+i)}{i} \\
&= (1+i)(1+f)\frac{(1+i)^{k-1}-1}{i}+...+(1+i)(1+f)^{k-1}\frac{(1+i)-1}{i}
\end{aligned}
$$

Άρα ισχύει η σχέση (2.49). Επιπλέον, από την ίδια σχέση, μπορεί να προκύψει μετά από πράξεις ότι:

$$
\begin{aligned}
M_{2k} &= \frac{(1+i)^{k+1}}{i}\left[\frac{1+f}{1+i}+...+(\frac{1+f}{1+i})^{k-1}\right] \\
&\quad -\frac{1+i}{i}\left[(1+f)+...+(1+f)^{k-1}\right] \\
&= \frac{(1+i)^{k+1}}{i}\left[(1+r)+...+(1+r)^{k-1}\right]-\frac{1+i}{i}\left[(1+f)+...+(1+f)^{k-1}\right] \\
&= \frac{(1+i)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|r}-(1+i)\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{i} \qquad (2.50)
\end{aligned}
$$

και με τη βοήθεια της

$$m_k = M_{1k} + 2M_{2k}$$

καθώς και των σχέσεων (2.47) και (2.50), παραθέτουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.2.2 *Υπό τις προυποθέσεις του θεωρήματος (2.2.1), έχουμε:*

$$m_k = \frac{2(1+i)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|r}}{i} - \frac{(2+i)\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{i} \qquad (2.51)$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
m_k &= M_{1k} + 2M_{2k} \\
&= \ddot{s}_{\overline{k}|f} + \frac{2(1+i)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|r}}{i} - \frac{2(1+i)\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{i} \\
&= \frac{2(1+i)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|r}}{i} - \frac{(i-2-2i)\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{i} \\
&= \frac{2(1+i)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|r}}{i} - \frac{(2+i)\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{i} \\
&= E[(C_k)^2]
\end{aligned}$$

□

Στη συνέχεια, και προκειμένου να βρούμε τη διασπορά $Var(C_k)$, απομένει να υπολογίσουμε την τιμή της $[E(C_k)]^2 = (\mu_k)^2 = (\ddot{s}_{\overline{k}|i})^2$. Ας αποδείξουμε πρώτα το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.2.3 *Το τετράγωνο της συσσωρευμένης αξίας (μετά το πέρας k ετών), μιας προκαταβλητέας ράντας με ετήσιες πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας, ισούται με:*

$$(\ddot{s}_{\overline{k}|i})^2 = \frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|i} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|i}}{d} \tag{2.52}$$

Απόδειξη: Από τη σχέση (2.5), έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\ddot{s}_{\overline{k}|i})^2 &= \frac{[(1+i)^k - 1]^2}{d^2} \\
&= \frac{(1+i)^{2k} - 2(1+i)^k + 1 + 1 - 1}{d^2} \\
&= \frac{[(1+i)^{2k} - 1] - 2[(1+i)^k - 1]}{d^2} \\
&= \frac{\frac{(1+i)^{2k}-1}{d} - 2\frac{(1+i)^k-1}{d}d}{} \\
&= \frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|i} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|i}}{d}
\end{aligned}$$

$\square$

Οπότε διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το επόμενο θεώρημα, με το οποίο θα υπολογίσουμε τη ζητούμενη διασπορά.

Θεώρημα 2.2.2 *Αν C_k η συσσωρευμένη αξία μετά το πέρας k ετών, μιας προκαταβλητέας ράντας με ετήσιες πληρωμές 1 νομισματικής μονάδας, και αν το ετήσιο επιτόκιο την k-οστή χρονιά είναι μία τυχαία μεταβλητή i_k, τέτοια ώστε $E(1+i_k) = 1+i$ και $Var(1+i_k) = s^2$, και τα $i_1, i_2, ..., i_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε ισχύει ότι*

$$\mu_k = E(C_k) = \ddot{s}_{\overline{k}|i}$$

και ότι

$$Var(C_k) = 2(1+i)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|r} - (2+i)\ddot{s}_{\overline{k}|f} - (1+i)\ddot{s}_{\overline{2k}|i} + 2(1+i)\ddot{s}_{\overline{k}|i} \tag{2.53}$$

Απόδειξη: Το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύεται εύκολα κάνοντας χρήση του ορισμού της διασποράς

$$Var(C_k) = E[(C_k)^2] - [E(C_k)]^2$$

και τη βοήθεια των σχέσεων (2.51) και (2.52). $\square$

Η τελευταία σχέση εκφράζει την τιμή της $Var(C_k)$ συναρτήσει των μελλοντικών αξιών προκαταβλητέων ραντών για περιόδους k και $2k$, καθώς και των επιτοκίων i,f και r.

2.3 Μεταβαλλόμενες σειρές πληρωμών

Στην ενότητα αυτή, θα επεκτείνουμε την περίπτωση που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Η περίπτωση που θα εξετάσουμε είναι αυτή στην οποία, $c_i = i$ για $i = 1, ..., n$, το οποίο αντιστοιχεί σε μία αυξανόμενη προκαταβλητέα ράντα n πληρωμών των $1, 2, ..., n$ νομισματικών μονάδων. Θα έχουμε ότι:

$$C_k = (1+i_k)(C_{k-1}+k) \tag{2.54}$$

Υποθέτοντας πάλι ότι έχουμε ανεξαρτησία στα επιτόκια, η αναμενόμενη συσσωρευμένη αξία θα είναι:

$$\begin{aligned} E(C_k) &= \mu_k \\ &= E[(1+i_k)(C_{k-1}+k)] \\ &= E[(1+i_k)]E[(C_{k-1}+k)] \\ &= \mu(\mu_{k-1}+k) \end{aligned} \tag{2.55}$$

για $k = 2, ..., n$
Ομοίως, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E(C_k^2) &= m_k \\ &= E[(1+i_k)^2(C_{k-1}+k)^2] \\ &= E[(1+i_k)^2]E[(C_{k-1}+k)^2] \\ &= mE[(C_{k-1}^2+2kC_{k-1}+k^2] \\ &= m(m_{k-1}+2k\mu_{k-1}+k^2) \end{aligned} \tag{2.56}$$

για $k = 2, ..., n$. Με αντικατάσταση της σχέσης

$$\mu = 1 + i = (I\ddot{s})_{\overline{1}|i}$$

και της σχέσης (2.8),

$$\begin{aligned} (I\ddot{s})_{\overline{k}|i} &= (1+i)^k + 2(1+i)^{k-1} + ... + k(1+i) \\ &= (1+i)[(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|i} + k] \end{aligned}$$

στην (2.55), προκύπτει το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 2.3.1 *Αν C_k η συσσωρευμένη αξία μετά το πέρας k ετών, μιας αυξανόμενης προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές των $1, 2, ..., k$ νομισματικών μονάδων αντίστοιχα, και αν το ετήσιο επιτόκιο την k-οστή χρονιά είναι μία τυχαία μεταβλητή i_k, τέτοια ώστε $E(1+i_k) = 1+i$ και $Var(1 + i_k) = s^2$, και τα $i_1, i_2, ..., i_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε ισχύει ότι*

$$\mu_k = E(C_k) = (I\ddot{s})_{\overline{k}|i}$$

για $k = 1, ..., n$ και συγκεκριμένα

$$\mu_n = E(C_n) = (I\ddot{s})_{\overline{n}|i}$$

Για να ξεπεράσουμε την "ακαταλληλότητα" μιας αναδρομικής εξίσωσης για το μ_k $(k = 2, ..., n)$, θα χρησιμοποιήσουμε διαδικασία όμοια με το παράδειγμα 2.2.

Λήμμα 2.3.1 *Υπό τις συνθήκες του θεωρήματος 2.3.1, έχουμε ότι*

$$\begin{aligned} m_k &= M_{1k} + 2M_{2k} \\ &= (m^k + 2^2 m^{k-1} + ... + k^2 m) + 2[2m^{k-1}(I\ddot{s})_{\overline{1}|i} + ... + km(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|i}] \end{aligned} \tag{2.57}$$

όπου $M_{1k} = m^k + 2^2 m^{k-1} + ... + k^2 m \quad$ και $\quad M_{2k} = 2m^{k-1}(I\ddot{s})_{\overline{1}|i} + ... + km(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|i}$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της επαγωγής, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.56). Αρχικά, θα εξετάσουμε αν ισχύει για $k = 2$:

$$m_2 = M_{12} + 2M_{22} = (m^2 + 2^2 m) + 2(2m(I\ddot{s})_{\overline{1}|i})$$

και αφού

$$(I\ddot{s})_{\overline{1}|i}) = 1 + i = \mu$$

τότε

$$m_2 = m^2 + 2^2 m + 4m\mu$$

το οποίο είναι αληθές λόγω της σχέσης (2.56), αν θέσουμε όπου $k = 2$.
Έπειτα, θα δεχθούμε ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει για ένα τυχαίο k, δηλαδή ότι πράγματι

$$m_k = M_{1k} + 2M_{2k}$$

Θα αποδείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση θα ισχύει και για $k+1$, δηλαδή ότι

$$m_{k+1} = M_{1(k+1)} + 2M_{2(k+1)}$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} M_{1(k+1)} &= (m^{k+1} + 2^2 m^k + ... + k^2 m^2 + (k+1)^2 m) \\ &= m[m^k + 2^2 m^{k-1} + ... + k^2 m + (k+1)^2] \\ &= m[M_{1k} + (k+1)^2] \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} M_{2(k+1)} &= 2m^k (I\ddot{s})_{\overline{1}|i} + ... + km^2 (I\ddot{s})_{\overline{k-1}|i} + (k+1)m(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} \\ &= m[2m^{k-1}(I\ddot{s})_{\overline{1}|i} + ... + km(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|i} + (k+1)(I\ddot{s})_{\overline{k}|i}] \\ &= m[M_{2k} + (k+1)(I\ddot{s})_{\overline{k}|i}] \end{aligned}$$

Όμως, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.1, $\mu_n = E(C_n) = (I\ddot{s})_{\overline{n}|i}$.
Άρα η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$M_{2(k+1)} = m[M_{2k} + (k+1)\mu_k]$$

Τελικά,

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= M_{1(k+1)} + 2M_{2(k+1)} \\ &= m[M_{1k} + (k+1)^2 + 2M_{2k} + 2(k+1)\mu_k] \\ &= m[m_k + 2(k+1)\mu_k + (k+1)^2] \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει όπως αποδείξαμε με τη σχέση (2.56) (και έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη με επαγωγή). □

Εφόσον $m = 1 + f$, εφαρμόζοντας τη σχέση (2.14), έχουμε:

$$M_{1k} = (I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f} \tag{2.58}$$

και ακολούθως με χρήση των σχέσεων (2.7), (2.5) και (2.35), προκύπτει:

$$\begin{aligned}
M_{2k} &= 2m^{k-1}(I\ddot{s})_{\overline{1}|i} + ... + km(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|i} \\
&= \frac{2(1+f)^{k-1}(\ddot{s}_{\overline{1}|i} - 1) + ... + k(1+f)[\ddot{s}_{\overline{k-1}|i} - (k-1)]}{d} \\
&= \frac{2(1+f)^{k-1}(\frac{(1+i)-1}{d}) + ... + k(1+f)(\frac{(1+i)^{k-1}-1}{d})}{d} - \frac{2(1+f)^{k-1} + ... + k(k-1)(1+f)}{d} \\
&= \frac{2(1+r)^{k-1}(1+i)^{k-1}[(1+i)-1] + ... + k(1+r)(1+i)[(1+i)^{k-1}-1]}{d^2} \\
&\quad - \frac{2(1+f)^{k-1} + ... + k(k-1)(1+f)}{d} \\
&= \frac{2(1+r)^{k-1}(1+i)^{k} + ... + k(1+r)(1+i)^{k}}{d^2} - \frac{2(1+f)^{k-1} + ... + k(1+f)}{d^2} \\
&\quad - \frac{(2^2-2)(1+f)^{k-1} + ... + (k^2-k)(1+f)}{d} \\
&= \frac{(1+i)^{k}[2(1+r)^{k-1} + ... + k(1+r)]}{d^2} - \frac{2(1+f)^{k-1} + ... + k(1+f)}{d^2} \\
&\quad - \frac{2^2(1+f)^{k-1} + ... + k^2(1+f)}{d} + \frac{2(1+f)^{k-1} + ... + k(1+f)}{d} \\
&= \frac{(1+i)^{k}[(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - (1+r)^{k}]}{d^2} - \frac{(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - (1+f)^{k}}{d^2} \\
&\quad - \frac{(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f} - (1+f)^{k}}{d} + \frac{(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - (1+f)^{k}}{d} \\
&= \frac{(1+i)^{k}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}}{d^2} - \frac{(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{d^2} - \frac{(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{d} + \frac{(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{d} \\
&= \frac{(1+i)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}}{i^2} - \frac{(1+i)^2(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{i^2} - \frac{i(1+i)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{i^2} \\
&\quad + \frac{i(1+i)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{i^2} \\
&= \frac{(1+i)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - (1+i)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - i(1+i)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{i^2}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, οδηγούμαστε στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.3.2 *Υπό τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 2.3.1, θα ισχύει ότι:*

$$M_{2k} = \frac{(1+i)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - (1+i)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - i(1+i)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{i^2} \tag{2.59}$$

Με τη βοήθεια του λήμματος 2.3.2, καταλήγουμε στο επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 2.3.2 *Αν C_k η συσσωρευμένη αξία μετά το πέρας k ετών, μιας αυξανόμενης προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές των $1, 2, ..., k$ νομισματικών μονάδων αντίστοιχα, και αν το ετήσιο επιτόκιο την k-οστή χρονιά είναι μία τυχαία μεταβλητή i_k, τέτοια ώστε $E(1+i_k) = 1+i$ και $Var(1+i_k) = s^2$, και τα $i_1, i_2, ..., i_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε ισχύει ότι*

$$m_k = \frac{2(1+i)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - 2(1+i)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - i(2+i)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{i^2} \tag{2.60}$$

Απόδειξη: *Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (2.58) και (2.59) στη σχέση (2.57), θα έχουμε:*

$$\begin{aligned}
m_k &= M_{1k} + 2M_{2k} \\
&= (m^k + 2^2 m^{k-1} + ... + k^2 m) + 2[2m^{k-1}(I\ddot{s})_{\overline{1}|i} + ... + km(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|i}] \\
&= (I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f} + 2\frac{(1+i)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - (1+i)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - i(1+i)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{i^2} \\
&= \frac{2(1+i)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - 2(1+i)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - i(2+i)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{i^2}
\end{aligned}$$

□

Για να υπολογίσουμε όμως τη διασπορά $Var(C_k)$, χρειαζόμαστε και την αναμενόμενη τιμή $E(C_k)^2 = {\mu_k}^2 = (I\ddot{s})^2_{\overline{k}|i}$. Την τιμή αυτή, την υπολογίζουμε με χρήση του παρακάτω λήμματος.

Λήμμα 2.3.3 *Υπό τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 2.3.1, θα ισχύει ότι:*

$$(I\ddot{s})^2_{\overline{k}|i} = \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|i} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} - k^2}{d^2} \tag{2.61}$$

Απόδειξη: *Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.7) και (2.52), καταλήγουμε στην κάτωθι σχέση:*

$$\begin{aligned}(I\ddot{s})^2_{\overline{k}|i} &= \frac{(\ddot{s}_{\overline{k}|i}-k)^2}{d^2} \\ &= \frac{(\ddot{s}_{\overline{k}|i})^2 - 2k\ddot{s}_{\overline{k}|i} + k^2}{d^2} \\ &= \frac{\frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|i}-2\ddot{s}_{\overline{k}|i}}{d} - 2k\ddot{s}_{\overline{k}|i} + k^2}{d^2} \end{aligned} \tag{2.62}$$

Όμως ισχύει ότι

$$\ddot{s}_{\overline{2k}|i} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|i} = (\ddot{s}_{\overline{2k}|i} - 2k) - 2(\ddot{s}_{\overline{k}|i} - k)$$

και επομένως η (2.62) γίνεται:

$$\begin{aligned}(I\ddot{s})^2_{\overline{k}|i} &= \frac{\frac{(\ddot{s}_{\overline{2k}|i}-2k)-2(\ddot{s}_{\overline{k}|i}-k)}{d} - 2k\ddot{s}_{\overline{k}|i} + k^2}{d^2} + k^2 - k^2 \\ &= \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|i} - 2(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} - 2kd(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} - k^2}{d^2} \\ &= \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|i} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} - k^2}{d^2}\end{aligned}$$

□

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.3 *Αν C_k η συσσωρευμένη αξία μετά το πέρας k ετών, μιας αυξανόμενης προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές των $1, 2, ..., k$ νομισματικών μονάδων αντίστοιχα, και αν το ετήσιο επιτόκιο την k-οστή χρονιά είναι μία τυχαία μεταβλητή i_k, τέτοια ώστε $E(1+i_k) = 1+i$ και $Var(1+i_k) = s^2$, και τα $i_1, i_2, ..., i_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε ισχύει ότι*

$$E(C_k) = (I\ddot{s})_{\overline{k}|i}$$

και

$$\begin{aligned}Var(C_k) &= \frac{2(1+i)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - 2(1+i)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - i(2+i)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{i^2} \\ &\quad - \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|i} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} - k^2}{d^2}\end{aligned} \tag{2.63}$$

Το παραπάνω θεώρημα δε χρειάζεται απόδειξη, καθώς απλά κάναμε χρήση του ορισμού της διασποράς $Var(C_k)$.
Καταλήξαμε, έτσι, σε έναν τύπο με τον οποίο υπολογίζουμε τις τιμές της αναμενόμενης αξίας $E(C_k)$ και της διασποράς $Var(C_k)$ όσον αφορά τις μελλοντικές (συσσωρευμένες) αξίες αυξανόμενων προκαταβλητέων ραντών με περιόδους k και $2k$ και για επιτόκια i, f και r.

Το επόμενο παράδειγμα μας θα είναι η περίπτωση μίας φθίνουσας προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές, για την οποία θα ισχύει $c_i = n - i + 1$ για $i = 1, ..., n$. Θα έχουμε ότι:

$$C_k = (1 + i_k)(C_{k-1} + n + 1 - k) \tag{2.64}$$

Από αυτό προκύπτει (υποθέτοντας ότι έχουμε ανεξαρτησία στα επιτόκια) ότι:

$$\begin{aligned} E(C_k) &= \mu_k \\ &= E[(1 + i_k)(C_{k-1} + n + 1 - k)] \\ &= E[(1 + i_k)]E[(C_{k-1} + n + 1 - k)] \\ &= \mu(\mu_{k-1} + n - k + 1) \end{aligned} \tag{2.65}$$

για $k = 2, ..., n$ και $\mu = 1 + i$ (σχέση 2.31).
Ομοίως, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E(C_k^2) &= m_k \\ &= E[(1 + i_k)^2(C_{k-1} + n + 1 - k)^2] \\ &= E[(1 + i_k)^2]E[(C_{k-1} + n + 1 - k)^2] \\ &= mE[(C_{k-1}^2] + 2(n - k + 1)(C_{k-1}) + (n - k + 1)^2] \\ &= m(m_{k-1} + 2(n - k + 1)\mu_{k-1} + (n - k + 1)^2) \end{aligned} \tag{2.66}$$

για $k = 2, ..., n$ και $m = 1 + f$ (σχέση 2.32).
Βάσει των (2.65) και (2.66), παρατηρούμε ότι

$$\mu_1 = n(1 + i),$$

$$m_1 = n^2(1+f)$$

και

$$Var(C_1) = n^2 s^2$$

Επίσης, με τη βοήθεια της σχέσης

$$(I\ddot{s})_{\overline{k}|i} + \mu_k = (n+1)\ddot{s}_{\overline{k}|i}$$

καταλήγουμε στο επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 2.3.4 *Αν C_k η συσσωρευμένη αξία μετά το πέρας k ετών, μιας φθίνουσας προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές των $n, n-1, ..., n-k+1$ νομισματικών μονάδων αντίστοιχα, και αν το ετήσιο επιτόκιο την k-οστή χρονιά είναι μία τυχαία μεταβλητή i_k, τέτοια ώστε $E(1+i_k) = 1+i$ και $Var(1+i_k) = s^2$, και τα $i_1, i_2, ..., i_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} \mu &= E(C_k) \\ &= (n+1)\ddot{s}_{\overline{k}|i} - (I\ddot{s})_{\overline{k}|i} \\ &= (D\ddot{s})_{\overline{n,k}|i} \end{aligned} \tag{2.67}$$

για $k = 1, ..., n$ ή ισοδύναμα

$$\mu = (n - \frac{1}{i})\ddot{s}_{\overline{k}|i} + \frac{k}{d} \tag{2.68}$$

Η σχέση (2.68) προκύπτει εύκολα με τη βοήθεια της σχέσης (2.7) και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την περίπτωση της αυξανόμενης προκαταβλητέας ράντας, καταληγουμε στο παρακάτω:

Θεώρημα 2.3.5 *Υπό τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.3.4, ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} Var(C_k) &= \frac{\ell}{d^2}\Big[\frac{(n-\frac{1}{i})^2(1+i)^{2k}\ddot{s}_{\overline{k}|\ell}}{1+\ell} - \frac{2(n-\frac{1}{i})^2(1+i)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}}{1+r} \\ &+ \frac{(n-\frac{1}{i})^2\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{1+f} + \frac{2(n-\frac{1}{i})(1+i)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}}{1+r} - \frac{2(n-\frac{1}{i})(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{1+f} \\ &+ \frac{(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{1+f}\Big] \end{aligned} \tag{2.69}$$

όπου

$$\ell = (\frac{s}{1+i})^2$$

2.4 Μεταβαλλόμενες σειρές πληρωμών βάσει γεωμετρικής προόδου

Στην περίπτωση των προκαταβλητέων ραντών με μεταβαλλόμενες πληρωμές βάσει γεωμετρικής προόδου, έχουμε ότι $c_k = PQ^{k-1}$, όπου $k = 1, 2, ..., n$. Υποθέτουμε ότι P, Q είναι θετικά και ότι $Q \neq 1+i, Q^2 \neq 1+f$ και $Q \neq 1+r$. Να σημειώσουμε εδώ, πως αν $0 < Q < 1$, τότε έχουμε φθίνουσα περίπτωση ενώ αν $Q > 1$, τότε έχουμε αύξουσα.
Η μελλοντική αξία μίας τέτοιας ράντας δίνεται αναδρομικά από την παρακάτω σχέση:

$$C_k = (1 + i_k)(C_{k-1} + PQ^{1-k}) \tag{2.70}$$

Ομοίως, όπως και στην περίπτωση των πληρωμών που μεταβάλλονται με αριθμητική πρόοδο, εύκολα βρίσκουμε ότι για $k = 2, ..., n$, ισχύει:

$$\begin{aligned} E(C_k) &= \mu_k \\ &= E[(1+i_k)(C_{k-1} + PQ^{k-1})] \\ &= E[(1+i_k)]E[(C_{k-1} + PQ^{k-1})] \\ &= \mu(\mu_{k-1} + PQ^{k-1}) \end{aligned} \tag{2.71}$$

Η δεύτερη ροπή $E[(C_k)^2]$ δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} E(C_k^2) &= m_k \\ &= E[(1+i_k)^2(C_{k-1}+PQ^{k-1})^2] \\ &= E[(1+i_k)^2]E[(C_{k-1}+PQ^{k-1})^2] \\ &= mE[(C_{k-1}^2]+2PQ^{k-1})(C_{k-1})+(PQ^{k-1})^2] \\ &= m(m_{k-1}+2PQ^{k-1}\mu_{k-1}+P^2Q^{2(k-1)}) \end{aligned} \tag{2.72}$$

Βάσει των 2.71 και 2.72, παρατηρούμε ότι

$$\mu_1 = P(1+i) = P\mu$$

και

$$m_1 = P^2 m$$

Συνεπώς καταλήγουμε στο ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.4.1 *Αν C_k η συσσωρευμένη αξία μιας προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές, (οι οποίες μεταβάλλονται με γεωμετρική πρόοδο) των $P, PQ, PQ^2, ..., PQ^{k-1}$ νομισματικών μονάδων αντίστοιχα, και αν το ετήσιο επιτόκιο την k-οστή χρονιά είναι μία τυχαία μεταβλητή i_k, τέτοια ώστε $E(1+i_k)=1+i$ και $Var(1+i_k)=s^2$, και τα $i_1, i_2, ..., i_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε ισχύει ότι*

$$\mu_k = E(C_k) = (\ddot{s}_g)^{(P,Q)}_{\overline{k}|i} \tag{2.73}$$

Απόδειξη: *Είναι γνωστό ότι:*

$$\begin{aligned} (\ddot{s}_g)^{(P,Q)}_{\overline{k}|i} &= P(1+i)^k + PQ(1+i)^{k-1} + ... + PQ^{k-1}(1+i) \\ &= P(1+i)\frac{(1+i)^k - Q^k}{1+i-Q} \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \mu_k &= E(C_k) \\ &= \mu(\mu_{k-1} + PQ^{k-1}) \\ &= (1+i)[\mu_{k-1} + PQ^{k-1}] \end{aligned}$$

και επομένως,

$$\mu_{k-1} = (1+i)[\mu_{k-2} + PQ^{k-2}$$

$$\mu_{k-2} = (1+i)[\mu_{k-3} + PQ^{k-3}$$

$$........$$

$$\mu_2 = (1+i)[\mu_1 + PQ$$

$$\mu_1 = P(1+i) = P\mu$$

Άρα, τελικά

$$\begin{aligned} \mu_k &= P(1+i)^k + PQ(1+i)^{k-1} + ... + PQ^{k-1}(1+i) \\ &= (\ddot{s}_g)^{(P,Q)}_{\overline{k}|i} \end{aligned}$$

□

Ομοίως με τα προηγούμενα, για να βρούμε μία σχέση για την διασπορά $Var(C_k)$, θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε τις τιμές m_k και μ_k^2.

Λήμμα 2.4.2 *Υπό τις προϋποθέσεις του λήμματος 2.4.1, έχουμε ότι*

$$m_k = P^2m^k + P^2Q^2m^{k-1} + ... + P^2Q^{2(k-1)}m + 2[PQm^{k-1}\mu_1 + PQ^2m^{k-2}\mu_2 + ...PQ^{k-1}m\mu_{k-1}] \tag{2.74}$$

Απόδειξη: *Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την απόδειξη του λήμματος 2.3.1, έστω ότι*

$$M_{1k} = P^2m^k + P^2Q^2m^{k-1} + ... + P^2Q^{2(k-1)}m \tag{2.75}$$

και

$$M_{2k} = PQm^{k-1}\mu_1 + PQ^2m^{k-2}\mu_2 + ... + PQ^{k-1}m\mu_{k-1} \tag{2.76}$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$m_k = M_{1k} + 2M_{2k} \tag{2.77}$$

με την βοήθεια της επαγωγής.
Αρχικά, θα εξετάσουμε αν ισχύει η 2.77 για $k = 1$:
Πράγματι, έχουμε ότι $m_1 = P^2 m$, το οποίο είναι αληθές. Έπειτα, θα δεχθούμε ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει για ένα τυχαίο κ, δηλαδή ότι πράγματι

$$m_k = M_{1k} + 2M_{2k}$$

Θα αποδείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση θα ισχύει και για κ + 1, δηλαδή ότι

$$m_{k+1} = M_{1(k+1)} + 2M_{2(k+1)}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M_{1(k+1)} &= P^2 m^{k+1} + P^2 Q^2 m^k + ... + P^2 Q^{2(k-1)} m^2 + P^2 Q^{2k} m \\ &= m(P^2 m^k + P^2 Q^2 m^{k-1} + ... + P^2 Q^{2(k-1)} m + P^2 Q^{2k}) \\ &= m(M_{1k} + P^2 Q^{2k}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} M_{2(k+1)} &= PQm^k \mu_1 + PQ^2 m^{k-1} \mu_2 + ... + PQ^{k-1} m^2 \mu_{k-1} + PQ^k m \mu_k \\ &= m[PQm^{k-1} \mu_1 + PQ^2 m^{k-2} \mu_2 + ... + PQ^{k-1} m \mu_{k-1} + PQ^k \mu_k] \\ &= m[M_{2k} + PQ^k \mu_k] \end{aligned}$$

Άρα τελικά, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= m(M_{1k} + P^2 Q^{2k}) + 2m[M_{2k} + PQ^k \mu_k] \\ &= m[M_{1k} + P^2 Q^{2k} + 2M_{2k} + 2PQ^k \mu_k] \\ &= m[m_k + P^2 Q^{2k} + 2PQ^k \mu_k] \end{aligned}$$

το οποίο είναι αληθές, σύμφωνα με τη σχέση (2.72) (και έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη με επαγωγή). □

Εφόσον $m = 1 + f$, θα προσπαθήσουμε να αποκτήσουμε μια πιο "άρτια" σχέση για την τιμή M_{1k}.

Λήμμα 2.4.3 *Υπό τις προϋποθέσεις του λήμματος 2.4.2, έχουμε ότι*

$$M_{1k} = P^2(1+f)\frac{(1+f)^k - Q^{2k}}{1+f-Q^2} = (\ddot{s}_g)^{(P^2,Q^2)}_{\overline{k}|f} \tag{2.78}$$

Απόδειξη: *Από την (2.75) και με χρήση της σχέσης $m = 1 + f$, εύκολα προκύπτει ότι:*

$$\begin{aligned} M_{1k} &= P^2m^k + P^2Q^2m^{k-1} + ... + P^2Q^{2(k-1)}m \\ &= P^2(1+f)^k + P^2Q^2(1+f)^{k-1} + ... + P^2Q^{2(k-1)}(1+f) \\ &= P^2(1+f)\frac{(1+f)^k - Q^{2k}}{1+f-Q^2} \end{aligned}$$

το οποίο ισούται εξ ορισμού με $(\ddot{s}_g)^{(P^2,Q^2)}_{\overline{k}|f}$ (σχέση (2.20». □

Τώρα θα "επαναδιατυπώσουμε" τη σχέση (2.76), χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $m = 1 + f$, $\mu_1 = P(1+i)$ και $(1+f) = (1+i)(1+r)$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} M_{2k} &= PQ(1+f)^{k-1}P(1+i)\frac{(1+i)-Q}{1+i-Q} + PQ^2(1+f)^{k-2}P(1+i)\frac{(1+i)^2-Q^2}{1+i-Q} \\ &\quad +... + PQ^{k-1}(1+f)P(1+i)\frac{(1+i)^{k-1}-Q^{k-1}}{1+i-Q} \\ &= \frac{P^2(1+i)}{1+i-Q}\,[\,(Q(1+f)^{k-1}(1+i) + Q^2(1+f)^{k-2}(r+i)^2 \\ &\quad +... + Q^{k-1}(1+f)(1+i)^{k-1} + (1+f)^k - (1+f)^k) - (Q^2(1+f)^{k-1} + Q^4(1+f)^{k-2} \\ &\quad +... + Q^{2(k-1)}(1+f) + (1+f)^k - (1+f)^k)\,] \\ &= \frac{P^2(1+i)}{1+i-Q}\left[(1+i)^k(1+r)\frac{(1+r)^k - Q^k}{1+r-Q} - \frac{(\ddot{s}_g)^{(P^2,Q^2)}_{\overline{k}|f}}{P^2}\right] \end{aligned} \tag{2.79}$$

Παραθέτουμε το ακόλουθο λήμμα σχετικά με το M_{2k}.

Λήμμα 2.4.4 *Υπό τις προϋποθέσεις του λήμματος 2.4.2, έχουμε ότι*

$$M_{2k} = \frac{P(1+i)^{k+1}(\ddot{s}_g)^{(P,Q)}_{\overline{k}|r} - (1+i)(\ddot{s}_g)^{(P^2,Q^2)}_{\overline{k}|f}}{1+i-Q} \tag{2.80}$$

Συνδυάζοντας τα λήμματα 2.4.3 και 2.4.4, λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση $m_k = M_{1k} + 2M_{2k}$, έχουμε:

Λήμμα 2.4.5 *Υπό τις προϋποθέσεις του λήμματος 2.4.2, έχουμε ότι*

$$m_k = \frac{2P(1+i)^{k+1}(\ddot{s}_g)^{(P,Q)}_{\overline{k}|r} - (Q+1+i)(\ddot{s}_g)^{(P^2,Q^2)}_{\overline{k}|f}}{1+i-Q} \tag{2.81}$$

Συνεπώς, έχουμε σχέση για τον υπολογισμό της αναμενόμενης αξίας $E(C_k^2)$. Τώρα θα πρέπει να βρούμε και μία σχέση για την $E(C_k)^2$ ούτως ώστε να βρούμε τελικά τη ζητούμενη διασπορά.

Λήμμα 2.4.6 *Υπό τις προϋποθέσεις του λήμματος 2.4.2, προκύπτει ότι*

$$\mu_k^2 = \frac{P(1+i)}{1+i-Q} \left[(\ddot{s}_g)^{(P,Q)}_{\overline{2k}|i} - 2Q^k(\ddot{s}_g)^{(P,Q)}_{\overline{k}|i} \right] \tag{2.82}$$

Απόδειξη: *Από το λήμμα 2.4.1 και τη σχέση (2.24), προκύπτει ότι:*

$$\begin{aligned}
\mu_k^2 &= \left(P(1+i)\,\frac{(1+i)^k - Q^k}{1+i-Q} \right)^2 \\
&= P^2(1+i)^2\,\frac{(1+i)^{2k} - 2(1+i)^k Q^k + Q^{2k}}{(1+i-Q)^2} \\
&= \frac{P^2(1+i)^2}{1+i-Q}\left[\frac{(1+i)^{2k} - Q^{2k}}{1+i-Q} - \frac{2Q^k[(1+i)^k - Q^k]}{(1+i-Q)} \right] \\
&= \frac{P(1+i)}{1+i-Q}\left[(\ddot{s}_g)^{(P,Q)}_{\overline{2k}|i} - 2Q^k(\ddot{s}_g)^{(P,Q)}_{\overline{k}|i} \right]
\end{aligned}$$

□

Από τη γνωστή σχέση του υπολογισμού της διασποράς $Var(C_k) = m_k - \mu_k^2$, έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.1 *Υπό τις προϋποθέσεις του λήμματος 2.4.2, ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}
Var(C_k) &= \frac{2P(1+i)^{k+1}(\ddot{s}_g)^{(P,Q)}_{\overline{k}|r} - (Q+1+i)(\ddot{s}_g)^{(P^2,Q^2)}_{\overline{k}|f}}{1+i-Q} \\
&\quad - \frac{P(1+i)}{1+i-Q}\left[(\ddot{s}_g)^{(P,Q)}_{\overline{2k}|i} - 2Q^k(\ddot{s}_g)^{(P,Q)}_{\overline{k}|i} \right]
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Μια σημαντική ειδική περίπτωση των ραντών πληρωμών με γεωμετρική πρόοδο, είναι αυτή που παρουσιάστηκε στην Εφαρμογή 2.5 όπου $P = 1$ και $Q = 1 + u$, όπου $u \neq i$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια αύξουσα προκαταβλητέα ράντα με k πληρωμές των $1, (1 + u), (1 + u)^2, ..., (1 + u)^{k-1}$ νομισματικών μονάδων αντίστοιχα.
Υποθέτουμε ότι $1 + u = (1 + i)(1 + t)$, $1 + f = (1 + u)^2(1 + h)$ και $1 + f = (1 + i)^2(1 + t)(1 + w)$. Έτσι οδηγούμαστε στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.4.7 *Αν C_k η συσσωρευμένη αξία μιας προκαταβλητέας ράντας με k ετήσιες πληρωμές, (οι οποίες μεταβάλλονται με γεωμετρική πρόοδο) των $1, 1+u, (1+u)^2, ..., (1+u)^{k-1}$ νομισματικών μονάδων αντίστοιχα, και αν το ετήσιο επιτόκιο την k-οστή χρονιά είναι μία τυχαία μεταβλητή i_k, τέτοια ώστε $E(1 + i_k) = 1 + i$ και $Var(1 + i_k) = s^2$, και τα $i_1, i_2, ..., i_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} E(C_k) &= (\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{k}|i} \\ &= \frac{(1+i)^k \ddot{s}_{\overline{k}|t}}{1+t} \end{aligned} \tag{2.84}$$

$$\begin{aligned} Var(C_k) &= \frac{(1+u)^{2k}(2+t)\ddot{s}_{\overline{k}|h} - 2(1+i)^{2k}(1+t)^k \ddot{s}_{\overline{k}|w}}{t} \\ &\quad - \frac{(1+i)^{2k}(\ddot{s}_{\overline{2k}|t} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|t})}{t(1+t)} \end{aligned} \tag{2.85}$$

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα κάνουμε μία εισαγωγή στις στοχαστικές διαδικασίες με αναφορά στην κίνηση Brown, καθώς και σε ειδικές περιπτώσεις αυτής, όπως η αριθμητική κίνηση Brown, η γεωμετρική κίνηση Brown, καθώς και η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck.
Αφετέρου, θα χρησιμοποιήσουμε τις στοχαστικές αυτές διαδικασίες στο κεφάλαιο 4, ούτως ώστε να παρουσιάσουμε κάποιες στοχαστικές μεθόδους για την μοντελοποίηση της “τυχαιότητας” του επιτοκίου.

Κεφάλαιο 3

Στοχαστικές διαδικασίες - Η κίνηση Brown

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας. Θα αναφέρουμε χαρακτηριστικά το παράδειγμα ισοτιμίας ευρώ - δολαρίου σε κάθε χρονική στιγμή t ανάμεσα στις 9 π.μ. και 10 π.μ. είναι τυχαία. Οπότε, μπορούμε να ερμηνεύσουμε την ισοτιμία αυτή σαν ένα σύνολο $X_t(\omega)$ από τις τυχαίες μεταβλητές X_t και έτσι να παρατηρήσουμε την $X_t(\omega)$, $9 \leq t \leq 10$. Αν θελήσουμε στις 10 π.μ., να κάνουμε μία εκτίμηση για την ισοτιμία $X_1 1(\omega)$ στις 11 π.μ., είναι λογικό να πρέπει να εξατάσουμε την "εξέλιξη" όλων των $X_t(\omega)$ ανάμεσα στις 9 π.μ. και 10 π.μ.. Ένα μαθηματικό μοντέλο για την περιγραφή ενός τέτοιου φαινομένου καλείται στοχαστική διαδικασία.

3.1 Εισαγωγή - Ορισμός

Μια **στοχαστική διαδικασία** [22] είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών

$$(X_t, t\epsilon T) = (X_t(\omega), t\epsilon T, \omega\epsilon\Omega)$$

ορισμένων σε ένα διάστημα Ω.

Οπότε, η στοχαστική διαδικασία X είναι μία συνάρτηση δύο "μεταβλητών", t και ω.

- Για κάθε δεδομένο και σταθερό $t\epsilon T$, η στοχαστική διαδικασία X είναι μία τυχαία μεταβλητή:
$X_t = X_t(\omega)$, $\omega\epsilon\Omega$

- Για κάθε δεδομένο αποτέλεσμα (τιμή) $\omega\epsilon\Omega$, η στοχαστική διαδικασία X είναι μια συνάρτηση του χρόνου:
$X_t = X_t(\omega)$, $t\epsilon T$

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση αυτή καλείται και τροχιά (path) της διαδικασίας X.

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα στοχαστικών διαδικασιών:
Παράδειγμα 3.1
Ένα παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας με διακριτό σύνολο δεικτών T (δηλαδή διακριτό χρόνο) είναι το ακόλουθο. Ας θεωρήσουμε ότι δίνουμε διαδοχικά απαντήσεις σε ερωτήσεις (όπου οι απαντήσεις μπορεί να είναι ΝΑΙ ή ΟΧΙ) και ω_i είναι η απάντηση στην i ερώτηση (όπου $i = 1, 2, ..., n$). Αν θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές X_i, οι οποίες παίρνουν τις τιμές:
$X_i(\omega) = 1$ αν $\omega =$ ΝΑΙ ή $X_i(\omega) = 0$ αν $\omega =$ ΟΧΙ
Η τιμή της X_i μπορεί να θεωρηθεί η ένδειξη του υπολογιστή στο δυαδικό σύστημα ανάλογα με το αν η απάντηση στην ερώτηση είναι ΝΑΙ ή ΟΧΙ. Αυτή η οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_i\}, i\epsilon N$ είναι μια στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο.

Παράδειγμα 3.2
Σαν ένα παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας σε συνεχή χρόνο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $t\epsilon R^+$ και για κάθε t, ορίζουμε μια τυχαία μεταβλητή X_t η οποία έχει την κατανομή πιθανότητας:

$$P(X_t \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} exp(-\frac{y^2}{2t})dy$$

Συνεπώς, η X_t είναι μια στοχαστική διαδικασία και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για κάθε $t\epsilon R$, η X_t είναι μια κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με μέσο 0 και διασπορά t.

3.2 Η κίνηση Brown

Μία από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες είναι η κίνηση Brown [15]. Η κίνηση Brown παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον τόσο από θεωρητικής άποψης, όσο και από πλευράς εφαρμογών. Η στοχαστική αυτή διαδικασία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και αποτελεί έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, όσον αφορά τα μοντέλα σε συνεχή χρόνο.

Για να κατανοήσει κάποιος διαισθητικά τι είναι η κίνηση Brown, μπορεί να κάνει το εξής πείραμα: Παίρνοντας μερικούς κόκκους γύρης και ρίχνοντάς τους στο νερό, παρατηρείται μία ιδιότυπη κίνηση. Οι κόκκοι γύρης φαίνονται σαν να κινούνται ακανόνιστα, προς όλες τις κατευθύνσεις, με ατελείωτα "ζιγκ-ζαγκ", χωρίς πορεία και νόημα. Η κίνηση αυτή ονομάζεται κίνηση Brown, και

οφείλεται στα μικρότερα μόρια του νερού που "χτυπούν" από όλες τις κατευθύνσεις τους μεγαλύτερους κόκκους γύρης.
Ένας άλλος τρόπος για να ερμηνευθεί η κίνηση Brown, θα ήταν ο εξής:
Η κίνηση Brown, μπορεί να ερμηνευθεί ως ένας τυχαίος περίπατος κατά τον οποίο για κάθε στρίψιμο ενός νομίσματος, κάνουμε ένα μικρό βήμα εμπρός ή πίσω (ανάλογα με την ένδειξη του νομίσματος). Η κίνηση Brown, δηλαδή είναι ένας τυχαίος περίπατος ο οποίος διενεργείται σε συνεχή χρόνο και αποτελείται από συνεχείς κινήσεις. Συνεπώς, η κίνηση Brown χαρακτηρίζεται από μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $Z = Z(t)$ αναπροσαρμοσμένες σε χρόνο t, όπου η τιμή $Z(t)$ αναπαριστά το τυχαίο μονοπάτι - το συσσωρευμένο άθροισμα δηλαδή όλων των κινήσεων - μετά από t περιόδους. Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, μια τέτοια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών καλείται στοχαστική διαδικασία.

Για μία κίνηση Brown η οποία ξεκινά από z, η διαδικασία $Z(t)$ έχει τις εξής ιδιότητες:
(1) $Z(0) = z$
(2) Η $Z(t+s) - Z(t)$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέσο 0 και διακύμανση s
(3) Η $Z(t+s_1) - Z(t)$ είναι ανεξάρτητη της $Z(t) - Z(t-s_2)$ όπου $s_1, s_2 > 0$ δηλαδή όλες οι μη επικαλυπτόμενες προσαυξήσεις είναι ανεξάρτητα κατανεμημένες.
Ή αλλιώς, η $Z(t+s_1) - Z(t)$ και η $Z(t) - Z(t-s_2)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.
(4) Η $Z(t)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση του χρόνου t.

Αν $z = 0$ τότε η κίνηση Brown ονομάζεται pure κίνηση Brown ή αλλιώς κίνηση Wiener.

Εφαρμογή 3.1
Θα υπολογίσουμε την διασπορά της διαφοράς $Z(t) - Z(s)$, όπου $0 \leq s \leq t$.

Όντως έχουμε:

$$Z(t) - Z(s) = Z(s + (t-s)) - Z(s)$$

Άρα από την ιδιότητα (2), η διασπορά θα ισούται με $t - s$.

Εφαρμογή 3.2
Θα αποδείξουμε ότι $E[Z(t+s)|Z(s)] = Z(t)$

Για οποιεσδήποτε τυχαίες μεταβλητές X, Y, Z, είναι γνωστό ότι

$$E(X = Y|Z) = E(X|Z) + E(Y|Z)$$

και

$$E(X|X) = X$$

Χρησιμοποιώντας τις τελευταίες σχέσεις, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Z(t+s)|Z(t)] &= E[Z(t+s) - Z(t) + Z(t)|Z(t)] \\ &= E[Z(t+s) - Z(t)|Z(t)] + E[Z(t)|Z(t)] \\ &= 0 + Z(t) = Z(t) \end{aligned}$$

Εφαρμογή 3.3
Αν $Z(2) = 4$, θα υπολογίσουμε το $E[Z(5)|Z(2)])$.
Όντως έχουμε,

$$E[Z(5)|Z(2)] = E[Z(2+3)|Z(2)] = Z(2) = 4$$

Εφαρμογή 3.4
Έστω μια τυποποιημένη κίνηση Brown ή αλλιώς κίνηση Wiener. Θα αποδείξουμε ότι $E[Z(t)Z(s)] = min\{t, s\}$ όπου $t, s \geq 0$.

Έστω ότι $t \geq s$. Αφού η $Z(t)$ είναι τυποποιημένη κίνηση Brown, ισχύει ότι $Z(0) = 0$.
Άρα, βάσει της εφαρμογής (3.1), ισχύει ότι:

$$E[Z(t)] = E[Z(t) - Z(0)] = 0$$

και

$$Var[Z(t)] = Var[Z(t) - Z(0)] = t - 0 = t$$

Άρα, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Z(t)Z(s)] &= E[(Z(s) + Z(t) - Z(s))Z(s)] \\ &= E[(Z(s))^2] + E[(Z(t) - Z(s))Z(s)] \\ &= s + E[Z(t) - Z(s)]E[Z(s)] \\ &= s + 0 = min\{t, s\} \end{aligned}$$

αφού η $Z(t) - Z(s)$ και η $Z(s) = Z(s) - Z(0)$ είναι ανεξάρτητες (από την ιδιότητα (3)).

Ακολούθως, θα αποδείξουμε ότι η τυποποιημένη κίνηση Brown Z μπορεί να προσεγγισθεί από το άθροισμα διωνυμικών τυχαίων μεταβλητών.
Από τη συνέχεια (continuity) της Z, για μια μικρή χρονική περίοδο h, μπορούμε να εκτιμήσουμε την αλλαγή της Z από τη στιγμή t στη στιγμή $t + h$, χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$Z(t + h) - Z(t) = Y(t + h)\sqrt{h}$$

όπου $Y(t)$ το τυχαίο αποτέλεσμα μίας διωνυμικής κατανομής. Αν πάρουμε τώρα το διάστημα $[0, T]$ και το διαιρέσουμε σε n ίσα υποδιαστήματα, το καθένα μήκους $h = \frac{T}{n}$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{i=1}^{n} [\, Z(ih) - Z((i-1)h)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y(ih)\sqrt{h} \\ &= \sqrt{T} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y(ih) \right] \end{aligned}$$

Όμως, λόγω του ότι $E(Y(ih)) = 0$, έχουμε ότι

$$E\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y(ih) \right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} E(Y(ih)) = 0$$

Ομοίως, ισχύει ότι $Var(Y(ih)) = 1$ άρα έχουμε ότι

$$Var\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y(ih) \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 = 1$$

Κατά συνέπεια, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια τυποποιημένη κίνηση Brown παράγεται κατά προσέγγιση από το άθροισμα ανεξάρτητων διωνυμικών τιμών με μέσο 0 και διακύμανση h.
Κάνοντας χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, έχουμε ότι το όριο $\lim_{n->\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y(ih)$ προσεγγίζει μια τυπική κανονική κατανομή, έστω W.
Άρα, $Z(T) = \sqrt{T}\, W(T)$
Έπεται ότι η $Z(t)$ μπορεί να προσεγγισθεί από μία κανονική τυχαία μεταβλητή με μέσο 0 και διακύμανση T. Στην στοχαστική ανάλυση, η $Z(t)$ μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή ενός ολοκληρώματος ως εξής:

$$Z(T) = \int_0^T dZ(t)$$

Το ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης λέγεται **στοχαστικό ολοκλήρωμα**.

Εφαρμογή 3.5
Έστω Z μια τυποποιημένη κίνηση Brown. Θα υπολογίσουμε το $E[Z(4)Z(5)])$.

Παρατηρούμε ότι η $Z(4) = Z(4) - Z(0)$ και η $Z(5) - Z(4)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Z(4)Z(5)] &= E[Z(4)Z(5) - Z(4) + Z(4)] \\ &= E[Z(4)^2] + E[Z(4)(Z(5) - Z(4))] \\ &= E[Z(4)^2] + E[Z(4)]E[Z(5) - Z(4)] \\ &= E[Z(4)^2] - E[Z(4)^2] + E[Z(4)]E[Z(5)] \\ &= Var(Z(4)) = 4 \end{aligned}$$

Θέτοντας όπου h το dt και την μεταβολή του Z ως $dZ(t)$, προκύπτει η εξής διαφορική μορφή:

$$dZ(t) = W(t)\sqrt{d(t)}$$

Με άλλα λόγια, αυτή η εξίσωση δηλώνει, ότι στη διάρκεια μικρών περιόδων του χρόνου, οι μεταβολές στην αξία της διαδικασίας είναι κανονικά κατανεμημένες με διακύμανση ανάλογη με το μήκος της χρονικής περιόδου.

3.2.1 Ιδιότητες της κίνησης Brown

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν δύο επιπλέον ιδιότητες της κίνησης Brown, οι οποίες αποδεικνύονται πολύ σημαντικές. Για να γίνει αυτό, θα συνεχίσουμε να κάνουμε χρήση της διωνυμικής προσέγγισης της διαδικασίας Brown.
Αρχικά, θα πάρουμε το διάστημα $[a, b]$ και θα το χωρίσουμε σε n ίσα υποδιαστήματα. Έπειτα, θα προχωρήσουμε στον εξής ορισμό:
Η **τετραγωνική απόκλιση** μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{Z(t)\}_{a \leq t \leq b}$ ορίζεται ίση με

$$\lim_{n->\infty} \sum_{i=1}^{n} [\, Z(t_i) - Z(t_{i-1}) \,]^2 = \int_a^b [dZ(t)]^2$$

αν το όριο αυτό υπάρχει (στο πλαίσιο της σύγκλισης στην πιθανότητα).
Στην περίπτωση της τυποποιημένης κίνησης Brown (ή αλλιώς διαδικασίας Wiener) όπως την ορίσαμε προηγουμένως στο κεφάλαιο αυτό, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{n->\infty} \sum_{i=1}^{n} [\, Z(ih) - Z((i-1)h) \,]^2 &= \lim_{n->\infty} \sum_{i=1}^{n} (Y_{ih} \sqrt{h})^2 \\
&= \lim_{n->\infty} \sum_{i=1}^{n} Y_{ih}^2 \, h \\
&= T < \infty
\end{aligned}$$

Συμπέρασμα
Εφόσον η τετραγωνική απόκλιση μιας διαδικασίας Brown είναι πεπερασμένη, συμπεραίνουμε ότι όλες οι υψηλότερου βαθμού αποκλίσεις θα είναι ίσες με το μηδέν.
Θα αποδείξουμε το παραπάνω συμπέρασμα με το επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.3
Έστω μια τυποποιημένη κίνηση Brown.

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n->\infty} \sum_{i=1}^{n} \; [\, Z(ih) - Z((i-1)h) \,]^4 = 0$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} |\lim_{n->\infty} \sum_{i=1}^{n} [\, Z(ih) - Z((i-1)h) \,]^4 \,| &= |\sum_{i=1}^{n} (Y_{ih} \sqrt{h})^4 \,| \\ &= |\sum_{i=1}^{n} Y_{ih}^4 \, h^2 \,| \leq \sum_{i=1}^{n} h^2 = \frac{T^2}{n^2} \end{aligned}$$

Άρα, $\lim_{n->\infty} \sum_{i=1}^{n} \; [\, Z(ih) - Z((i-1)h) \,]^4 = 0$.
Η **συνολική απόκλιση** της τυποποιημένης διαδικασίας Brown κινείται ανοδικά και καθοδικά (πάνω-κάτω) πολύ γρήγορα στο διάστημα $[0, T]$. Άρα, το μονοπάτι θα περάσει από το "σημείο εκκίνησης" απεριόριστες φορές κατά τη διάρκεια του διαστήματος $[0, T]$.

3.3 Η αριθμητική κίνηση Brown

Με την τυποποιημένη κίνηση Brown, η $dZ(t)$ έχει μέσο 0 και διακύμανση 1 ανά μονάδα χρόνου. Αυτό μπορεί να γενικευθεί, ούτως ώστε να επιτρέπεται κάποιος μη μηδενικός μέσος και κάποια αυθαίρετη διακύμανση. Για να γίνει αυτό, ορίζουμε το $X(t)$ ως εξής:

$$X(t+h) - X(t) = \alpha h + \sigma Y(t+h)\sqrt{h}$$

όπου $Y(t)$ είναι μία τυχαία τιμή από μία διωνυμική κατανομή. Την τιμή αh συχνά καλούμε και παράγοντα ροπής (drift term) και την $\sigma\sqrt{h}$ παράγοντα θορύβου (noise term).
Έστω ότι $T > 0$. Αν χωρίσουμε το διάστημα $[0, T]$ σε n υποδιαστήματα, καθένα από τα οποία θα έχει μήκος $h = \frac{T}{n}$, τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} X(T) - X(0) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha \, \frac{T}{n} + \sigma Y(ih) \sqrt{\frac{T}{n}}) \\ &= \alpha \, T + \sigma (\sqrt{T} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y(ih)}{\sqrt{n}}) \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, η τιμή $\sqrt{T} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y(ih)}{\sqrt{n}}$ προσεγγίζει κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση T. Ως εκ τούτου, η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως:

$$X(T) - X(0) = \alpha T + \sigma Z(t)$$

όπου η Z είναι μια τυποποιημένη κίνηση Brown. Η **στοχαστική διαφορική μορφή** της εξίσωσης αυτής θα είναι:

$$dX(T) = \alpha dt + \sigma dZ(t) \tag{3.1}$$

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ η οποία ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση θα καλείται **Αριθμητική Κίνηση Brown**.
Παρατηρούμε ότι

$$E[X(t) - X(0)] = \alpha t$$

και

$$Var[X(t) - X(0)] = Var[\alpha t + \sigma Z(t)] = \sigma^2 t$$

Η τιμή α καλείται στιγμιαίος μέσος ανά μονάδα χρόνου ή αλλιώς παράγοντας ροπής (drift term) και η τιμή σ^2 καλείται στιγμιαία διακύμανση ανά μονάδα χρόνου.
Τέλος, παρατηρούμε ότι η $X(t) - X(0)$ είναι κανονικά κατανεμημένη με αναμενόμενη μέση τιμή ίση με αt και διακύμανση $\sigma^2 t$. Άρα, η $X(t)$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέσο $X(0) + \alpha t$ και διακύμανση ίση με $\alpha^2 t$.

Εφαρμογή 3.6
Έστω $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ μια αριθμητική κίνηση Brown, με παράγοντα ροπής α και διακύμανση σ. Θα αποδείξουμε ότι $X(t) = X(a) + \alpha(t-a) + \sigma\sqrt{t-a}\,W(t)$ όπου W είναι μία τυποποιημένη κανονική τυχαία μεταβλητή.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.1) έχουμε ότι:

$$X(t) - X(a) = \alpha(t-a) + \sigma\sqrt{t-a}\,W(t)$$

Οπότε η $X(t)$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέσο $X(a) + \alpha(t-a)$ και διακύμανση $\sigma^2(t-a)$

Εφαρμογή 3.7
Έστω $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ μια αριθμητική κίνηση Brown, τέτοια ώστε $X(30) = 2$. Ο παράγοντας ροπής

είναι ίσος με 0,435 και η διακύμανση ίση με 0,75. Θα βρούμε την πιθανότητα του $X(34) < 0$.

Ο μέσος της κανονικής κατανομής $X(34)$ είναι ίσος με:

$$X(30) + \alpha(34 - 30) = 2 + 0,4354 = 3,74$$

Η τυπική απόκλιση είναι ίση με:

$$\sigma\sqrt{t + a} = 0.75\sqrt{34 - 30} = 1,5$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι ίση με:

$$Pr(X(34) < 0) = Pr(Z < \frac{0 - 3,74}{1,5}) = N(Z < -2,49) = 0,006387$$

Εφαρμογή 3.8
Έστω μια αριθμητική κίνηση Brown, της μορφής $dX(t) = 0,4\,dt + 0,8\,dZ(t)$. Θα υπολογίσουμε αρχικά τον παράγοντα ροπής αυτής της κίνησης Brown και αφετέρου την στιγμιαία διακύμανση ανά μονάδα χρόνου.

Βάσει της μορφής της κίνησης Brown, και κάνοντας χρήση της σχέσης (3.1), έχουμε ότι:
$a = 0,4$ και
$\sigma^2 = 0,8^2 = 0,64$

Αξίζει να σημειωθούν οι εξής παρατηρήσεις για τη σχέση (3.1):
- Η $X(t)$ είναι κανονικά κατανεμημένη.
- Ο τυχαίος όρος $dZ(t)$ πολλαπλασιάζεται με ένα συντελεστή κλίμακας που μας δίνει τη δυνατότητα να αλλάξουμε τη διακύμανση.
- Ο όρος $\alpha\,dt$ εισάγει μια μη τυχαία μετατόπιση στη διαδικασία. Προσθέτοντας $\alpha\,dt$ έχει την επίδραση της προσθήκης α ανά μονάδα χρόνου στο $X(0)$.

Εφαρμογή 3.9
Έστω $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ μια αριθμητική κίνηση Brown, η οποία ξεκινάει από το 0 με $\alpha = 0,2$ και $\sigma^2 = 0,125$. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα το $X(2)$ να είναι ανάμεσα σε 0,1 και 0,5.

Η $X(2)$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέσο $\alpha T = 0,4$ και διακύμανση $\sigma^2 T = 0,125x2 = 0,25$.

Οπότε θα έχουμε:

$$Pr(0,1 < X(2) < 0,5) = N(\frac{0,5-0,4}{0,5}) - N(\frac{0,1-0,4}{0,5}) = 0,305007$$

3.3.1 Η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Κατά τη μοντελοποίηση των τιμών των εμπορευμάτων, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι οι τιμές αυτές παρουσιάζουν μία τάση να "επανέρχονται" στη μέση τιμή. Δηλαδή, αν μια τιμή ξεκινά από τη μέση τιμή προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα, θα τείνει να επανέλθει στη μέση. Έτσι, το μοντέλο επαναφοράς-στο-μέσο (mean-reversion) έχει περισσότερη οικονομική λογική από την αριθμητική κίνηση Brown, η οποία περιγράφθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Μπορούμε να ενσωματώσουμε την επαναφορά στο μέσο, τροποποιώντας τον παράγοντα ροπής στην (3.1) και έτσι θα έχουμε:

$$dX(t) = \lambda(\alpha - X(t))dt + \sigma dZ(t) \tag{3.2}$$

όπου α είναι το επίπεδο μακροχρόνιας ισορροπίας (ή η μακροχρόνια μέση τιμή στην οποία η $X(t)$ τείνει να επανέρχεται, σ είναι ο παράγοντας διακύμανσης, λ είναι η ταχύτητα της επαναφοράς ή αλλιώς ο παράγοντας επαναφοράς και $Z(t)$ είναι η τυποποιημένη κίνηση Brown.
Η σχέση (3.2) είναι γνωστή ως **διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck**.

Εφαρμογή 3.10
Θα λύσουμε την εξίσωση (3.2).

Έστω $Y(t) = X(t) - \alpha$.
Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} dY(t) &= d(X(t) - \alpha) \\ &= dX(t) \end{aligned}$$

και παίρνουμε την εξής διαφορική σχέση:

$$dY(t) = d(X(t) - \alpha) = dX(t)$$

και παίρνουμε την εξής διαφορική σχέση:

$$dY(t) = -\lambda dY(t)dt + \sigma dZ(t) \Rightarrow$$
$$dY(t) + \lambda dY(t)dt = \sigma dZ(t) \Rightarrow$$
$$d[e^{\lambda t}Y(t)] = e^{\lambda t}\sigma dZ(t)$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω στο διάστημα $[0, t]$ έχουμε:

$$e^{\lambda t}Y(t) - Y(0) = \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dZ(s) \Rightarrow$$
$$Y(t) = e^{-\lambda t}Y(0) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dZ(s)$$

και τελικά

$$X(t) = X(0)e^{-\lambda t} + \alpha(1 - e^{-\lambda t}) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dZ(s)$$

3.4 Η γεωμετρική κίνηση Brown

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την γεωμετρική κίνηση Brown, έχοντας ως στόχο να αντιμετωπίσουμε κάποια μειονεκτήματα που παρουσιάζει η αριθμητική κίνηση Brown όπως:
- Η $X(t)$ μπορεί να είναι αρνητική, και ως εκ τούτου η αριθμητική διαδικασία Brown να μην έχει ουσιαστική εφαρμογή σε μοντέλα αποτίμησης τιμών μετοχών.
- Η μέση τιμή και η διακύμανση των μεταβολών πχ. στις τιμές του δολαρίου είναι ανεξάρτητες από το επίπεδο της τιμής της μετοχής. Στην πράξη, αν η αξία των μετοχών διαπλασιαστεί, θα περιμέναμε τόσο την αναμενόμενη απόδοση του δολαρίου όσο και την τυπική απόκλιση των αποδόσεων του, περίπου να διπλασιαστούν. Αυτά τα μειονεκτήματα μπορούμε να τα εξαλείψουμε με χρήση της γεωμετρικής κίνηση Brown.
Όταν ο παράγοντας ροπής (drift factor) και η μεταβλητότητα (volatility) στην αριθμητική κίνηση Brown είναι συναρτήσεις του $X(t)$, τότε η στοχαστική διαφορική τους μορφή θα είναι

$$dX(t) = \alpha(X(t))dt + \sigma(X(t))dZ(t)$$

και καλείται διαδικασία Ito. Συγκεκριμένα, αν $\alpha(X(t)) = \alpha X(t)$ και $\sigma(X(t)) = \sigma X(t)$, τότε η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dZ(t)$$

ή αλλιώς

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \alpha dt + \sigma dZ(t) \tag{3.3}$$

Η διαδικασία που παρουσιάζεται στη σχέση (3.3) είναι γνωστή ως γεωμετρική κίνηση Brown. Η σχέση αυτή, ουσιαστικά λέει ότι η ποσοστιαία μεταβολή της αξίας των περιουσιακών στοιχείων είναι κανονικά κατανεμημένη με στιγμιαία μέση τιμή α και στιγμιαία διακύμανση σ^2.

Για μια αυθαίρετη αρχική τιμή $X(0)$, η σχέση (3.3) έχει λύση

$$X(t) = X(0)e^{(\alpha - 0{,}5\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}$$

όπου Z είναι μία κανονική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους 0 και 1. Εναλλακτικά, η παραπάνω σχέση θα μπορούσε να γραφτεί και ως

$$X(t) = X(0)e^{(\alpha - 0{,}5\sigma^2)t + \sigma Z(t)}$$

όπου Z είναι μία κανονική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους 0 και t. Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό, ότι η $X(t)$ είναι εκθετική(άρα όχι κανονική). Παρόλα αυτά, η $X(t)$ είναι λογαριθμοκανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή $E(X(t)) = X(0)e^{\alpha t}$ και διασπορά $Var(X(t)) = e^{2\alpha t}X(0)^2(e^{\sigma^2 t - 1})$. Οπότε, προκύπτει ότι η $ln(X(t))$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή $ln(X(0)) + (\alpha - 0{,}5\sigma^2)t$ και διασπορά $\sigma^2 t$.
Άρα θα έχουμε

$$lnX(t) = ln(X(0)) + (\alpha - 0{,}5\sigma^2)t + \sigma Z(t)$$

Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όταν η X ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown, τότε ο λογάριθμός της ακολουθεί αριθμητική κίνηση Brown, άρα παίρνουμε τη σχέση

$$d[lnX(t)] = (\alpha - 0{,}5\sigma^2)dt + \sigma dZ(t)$$

Στο κεφάλαιο 4, θα χρησιμοποιήσουμε τις στοχαστικές διαδικασίες που μελετήσαμε στην ενότητα αυτή, ούτως ώστε να παρουσιάσουμε κάποιες στοχαστικές μεθόδους για την μοντελοποίηση της "τυχαιότητας" του επιτοκίου. Η μία μέθοδος θα αναφέρεται στη μοντελοποίηση της συσσωρευμένης συνάρτησης της έντασης ανατοκισμού, ενώ η άλλη στη μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές Στοχαστικών Μεθόδων σε Ράντες Πληρωμών

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιαστούν δύο μέθοδοι οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση της "τυχαιότητας" του επιτοκίου. Η πρώτη προσέγγιση γίνεται μέσω της μοντελοποίησης της συσσωρευμένης συνάρτησης της έντασης ανατοκισμού (βλέπε, π.χ. [3], [4], [5], [9], [10],[11], [12], και [23]), ενώ η άλλη προσέγγιση μέσω της μοντελοποίησης της έντασης ανατοκισμού (βλέπε, π.χ. [13], [15], [23]). Τα μοντέλα αυτά έχουν μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον, καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε στα οικονομικά, είτε στα ασφαλιστικά και αναλογιστικά μαθηματικά. Η Αναμενόμενη Αξία, η Τυπική Απόκλιση και ο Συντελεστής Ασσυμετρίας της Παρούσας Αξίας μιας ληξιπρόθεσμης ράντας παρουσιάζονται σε πίνακες.

4.1 Εισαγωγή

Κατά την πάροδο των ετών, μία μεγάλη γκάμα από στοχαστικές διαδικασίες έχει χρησιμοποιηθεί για να μοντελοποιηθεί η "τυχαιότητα" του επιτοκίου στη συνάρτηση Παρούσας Αξίας καθώς και σε άλλες αναλογιστικές συναρτήσεις. Μάλιστα, όχι μόνο έχουν χρησιμοποιηθεί πολλές διαφορετικές διαδικασίες, αλλά έχουν χρησιμοποιηθεί και με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Δύο προσεγγίσεις, οι οποίες έχουν χρησιμοποιηθεί στην ήδη υπάρχουσα βιβλιογραφία, είναι η μοντελοποίηση της συσσωρευμένης συνάρτησης της έντασης ανατοκισμού, και κατά δεύτερον, η μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού. Η υπόθεση πως οι εντάσεις ανατοκισμού είναι ανεξάρτητες και ταυτόσημα κατανεμημένες, θα χρησιμοποιηθεί και στην ισοδύναμη διαδικασία για τη συσσωρευμένη συνάρτησης της έντασης ανατοκισμού. Αν και οι δύο προσεγγίσεις είναι ταυτόσημες σε μία ντετερμινιστική κατάσταση, είναι πολύ διαφορετικές σε μία στοχαστική κατάσταση.

Στο κεφάλαιο αυτό, συγκρίνουμε τις δύο αυτές προσεγγίσεις για κάποιες απλές Gaussian διαδικασίες. Επιπλέον, θα ορίσουμε τη συνάρτηση της τυχαίας παρούσας αξίας και θα δώσουμε μία έκφραση για τις γεννήτριες ροπές της.

Έπειτα, θα παρουσιάσουμε δύο στοχαστικές διαδικασίες, συγκεκριμένα τη Wiener διαδικασία και την Ornstein-Uhlenbeck διαδικασία, αρχικά για την μοντελοποίηση της συσσωρευμένης συνάρτησης της έντασης ανατοκισμού και αφετέρου για την μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού.

Επιπλέον, θα υπολογίσουμε τις πρώτες τρεις γεννήτριες ροπές της τυχαίας Παρούσας Αξίας μίας ληξιπρόθεσμης ράντας n-ετών με ετήσιες πληρωμές της μίας νομισματικής μονάδας.

Τέλος, παρουσιάζονται αποτελέσματα με την μορφή πινάκων στην Παράγραφο 6.

4.2 Η Συνάρτηση παρούσας αξίας

Έστω δ_s ή ένταση ανατοκισμού τη στιγμή s και $y(t)$ η συσσωρευμένη συνάρτηση της έντασης ανατοκισμού. Ισχύει ότι:

$$y(t) = \int_0^t \delta_s ds \tag{4.1}$$

Η τυχαία Παρούσα Αξία τη χρονική στιγμή 0 μιας πληρωμής μίας νομισματικής μονάδας σε χρόνο t δίνεται από την $e^{-y(t)}$.

Υποθέτοντας ότι η $y(t)$ είναι Gaussian διαδικασία, τότε η συνάρτηση της Παρούσας Αξίας είναι λογοριθμοκανονικά κατανεμημένη με παραμέτρους $E[-y(t)]$ και $V[y(t)]$, και η m-οστή ροπή θα είναι ίση με:

$$E[(e^{-y(t)})^m] = E[e^{-my(t)}] = exp\{-mE[y(t)] + 0,5m^2V[y(t)]\} \tag{4.2}$$

Στην επόμενη ενότητα, θα χρησιμοποιήσουμε δύο Gaussian στοχαστικές διαδικασίες για τη μοντελοποίηση της συσσωρευμένης συνάρτησης έντασης ανατοκισμού. Στην ενότητα 4 θα χρησιμοποιήσουμε δύο στοχαστικές διαδικασίες για τη μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού.

4.3 Μοντελοποίηση της συσσωρευμένης συνάρτησης έντασης ανατοκισμού

Μια πρώτη προσέγγιση για τη θεώρηση της τυχαιότητας του επιτοκίου, είναι η μοντελοποίηση της συνάρτησης έντασης ανατοκισμού $y(t)$. Για τη θεώρηση αυτή, γίνεται χρήση μιας διαδικασίας Wiener με ντετερμινιστικό παράγοντα δ και μιας διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck επίσης με ντετερμινιστικό παράγοντα δ.

4.3.1 Διαδικασία Wiener

Έστω $y(t)$ το άθροισμα του ντετερμινιστικό παράγοντα της κλίσης δ και της διαταραχής μιας διαδικασίας Wiener.
Έτσι έχουμε:

$$y(t) = \delta t + \sigma W_t \tag{4.3}$$

όπου $\sigma \geq 0$ και W_t είναι η τυποποιημένη διαδικασία Wiener.
Αποδεικνύεται ότι η Αναμενόμενη Αξία και η Αυτοσυνδιακύμανση της $y(t)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$E[y(t)] = \delta t \tag{4.4}$$

και

$$cov[y(s), y(t)] = \sigma min(s, t) \tag{4.5}$$

4.3.2 Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Έστω $y(t)$ το άθροισμα του ντετερμινιστικό παράγοντα της κλίσης δ και της διαταραχής μιας διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck.
Θα έχουμε:

$$y(t) = \delta t + X(t) \tag{4.6}$$

όπου $X(t)$ η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck με παραμέτρους $\alpha \geq 0$ και $\sigma \geq 0$ και με αρχική κατάσταση $X(0) = 0$.
Γι αυτό και θα ισχύει η σχέση:

$$dX(t) = -\alpha X(t)dt + \sigma dW_t \tag{4.7}$$

Η Αναμενόμενη Αξία και η Αυτοσυνδιακύμανση της συσσωρευμένης συνάρτησης έντασης ανατοκισμού $y(t)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$E[y(t)] = \delta t \tag{4.8}$$

και

$$cov[y(s), y(t)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t+s)}) \tag{4.9}$$

με $s \leq t$, ή ισοδύναμα:

$$cov[y(s), y(t)] = \rho^2(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t+s)}) \tag{4.10}$$

με $s \leq t$, όπου

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \tag{4.11}$$

4.4 Μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού

Μια δεύτερη προσέγγιση για τη θεώρηση της τυχαιότητας του επιτοκίου, είναι η μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού δ_t. Για τον σκοπό αυτό, γίνεται χρήση μιας διαδικασίας Wiener και μιας διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck. Να σημειωθεί ότι και οι δύο διαδικασίες θα οριστούν έτσι ώστε να ξεκινούν στο δ, και όχι στην αρχή.

4.4.1 Διαδικασία Wiener

Έστω η ένταση ανατοκισμού δ_t, η οποία ορίζεται ως:

$$\delta_t = \delta + \sigma W_t \tag{4.12}$$

όπου $\sigma \geq 0$.
Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας για τη διαδικασία Wiener, καταλήγουμε ότι η Αναμενόμενη Αξία και η Αυτοσυνδιακύμανση της συνάρτησης έντασης ανατοκισμού δ_t, θα υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$E[\delta_t] = \delta \tag{4.13}$$

και

$$cov[\delta_s, \delta_t] = \sigma^2 min(s,t) \tag{4.14}$$

Έπειτα, από τον ορισμό της συσσωρευμένης συνάρτησης έντασης ανατοκισμού (σχέση 4,1), συμπεραίνουμε ότι η $y(t)$ είναι κανονικά κατανεμημένη με Αναμενόμενη αξία:

$$E[y(t)] = \delta t \tag{4.15}$$

και αυτοσυνδιακύμανση

$$cov[y(s), y(t)] = \int_0^s \int_0^t cov[\delta_u, \delta_v] du dv \tag{4.16}$$

η οποία δίνει τη σχέση

$$cov[y(s), y(t)] = \sigma^2 (s^2 \frac{t}{2} - \frac{s^3}{6}) \tag{4.17}$$

όπου και πάλι $s \leq t$

4.4.2 Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Έστω η ένταση ανατοκισμού δ_t, η οποία ορίζεται από την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$d\delta_t = -\alpha(\delta_t - \delta)dt + \sigma W_t \tag{4.18}$$

όπου $\sigma \geq 0$, $\alpha \geq 0$ και αρχική τιμή $\delta_0 = \delta$.

Έπειτα, προκύπτει ότι η Αναμενόμενη Αξία της συνάρτησης έντασης ανατοκισμού δ_t είναι:

$$E[\delta_t] = \delta \tag{4.19}$$

και η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης είναι

$$cov[\delta_s, \delta_t] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t+s)}) \tag{4.20}$$

με $s \leq t$.
Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι η συσσωρευμένη συνάρτηση έντασης ανατοκισμού $y(t)$ είναι μία Gaussian διαδικασία με αναμενόμενη τιμή

$$E[y(t)] = \delta t \tag{4.21}$$

και συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης

$$cov[y(s), y(t)] = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}min(s,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\left[-2 + 2e^{-\alpha s} + 2e^{-\alpha t} - e^{-\alpha|t-s|} - e^{-\alpha(t+s)}\right] \tag{4.22}$$

4.5 Εφαρμογή σε ληξιπρόθεσμες ράντες

Θεωρούμε μία ληξιπρόθεσμη ράντα πληρωμών n-ετών. Έστω $a_{\overline{n}|}$ η παρούσα αξία n ίσων πληρωμών μιας νομισματικής μονάδας, οι οποίες πραγματοποιούνται στη λήξη του κάθε έτους για τα επόμενα n έτη.
Τότε έχουμε:

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} e^{-y(t)} \tag{4.23}$$

Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε τις τρεις πρώτες ροπές της $a_{\overline{n}|}$ χρησιμοποιώντας κατανομή πραγματικής πιθανότητας ούτως ώστε όλες οι ροπές να έχουν τις συνήθεις ερμηνείες τους. Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι η αναμενόμενη αξία θα είναι διαφορετική από την τιμή αγοράς της ράντας, η οποία απαιτεί η εν λόγω τιμή να είναι σε ισορροπία για οποιαδήποτε στρατηγική αγοράς.
Η αναμενόμενη αξία της $a_{\overline{n}|}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E[a_{\overline{n}|}] = E[\sum_{t=1}^{n} e^{-y(t)}] = \sum_{t=1}^{n} E[e^{-y(t)}] \tag{4.24}$$

και σε συνδυασμό με τη σχέση (4,2) προκύπτει ότι

$$E[e^{-y(t)}] = exp\{-E[y(t)] + 0,5V[y(t)]\} \tag{4.25}$$

Οι τιμές για τις $E[y(t)]$ και $V[y(t)]$ δόθηκαν στις προηγούμενες ενότητες για διαφορετικές μεθόδους μοντελοποίησης και διαφορετικές στοχαστικές διαδικασίες.
Η δεύτερη ροπή της $a_{\overline{n}|}$ είναι ίση με

$$E[a_{(\overline{n}|}{})^2] = \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} E[e^{-y(t)-y(s)}] \tag{4.26}$$

Αντίστοιχα, η τρίτη ροπή της $a_{\overline{n}|}$ δίνεται από τη σχέση

$$E[a_{(\overline{n}|}{})^3] = \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} E[e^{-y(t)-y(s)-y(r)}] \tag{4.27}$$

Παρατηρώντας ότι οι εκθετικές τυχαίες μεταβλητές των σχέσεων (4.26) και (4.27) είναι λογαριθμοκανονικά κατανεμημένες, δηλαδή ισχύει ότι

$$e^{-y(t)-y(s)-y(r)} \sim \Lambda(\mu, \beta) \tag{4.28}$$

όπου

$$\mu = -E[y(t)] - E[y(s)] - E[y(r)], \tag{4.29}$$

και

$$\beta = V[y(t)] + V[y(s)] + V[y(r)] + 2cov[y(t), y(s)] + 2cov[y(t), y(r)] + 2cov[y(s), y(r)] \tag{4.30}$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4,2), καταλήγουμε ότι:

$$E[e^{-y(t)-y(s)-y(r)}] = exp\{\mu + 0,5\beta\} \tag{4.31}$$

4.6 Αποτελέσματα - Εφαρμογές

Για να γίνει απεικόνιση των διαφορετικών προσεγγίσεων και των διαφορετικών στοχαστικών διαδικασιών που παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, θα γίνει υπολογισμός των Αναμενόμενων

Αξιών, των Τυπικών Αποκλίσεων, καθώς και των Συντελεστών Κυρτότητας της $a_{\overline{n}|}$, για ορισμένες τιμές των παραμέτρων.

Στον Πίνακα 1, υπολογίζονται οι Αναμενόμενες Αξίες. Για τον υπολογισμό των αποτελεσμάτων, θέτουμε την τιμή του δ ίση με $0,06$ και $0,1$ για κάθε διαδικασία. Για την Weiner διαδικασία, θέτουμε την παράμετρο σ ίση με $0,01$ και $0,02$. Για την διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck, θέτουμε την τιμή της παραμέτρου α ίση με $0,17$ και την παράμετρο ρ ίση με $0,01$ και $0,02$.
Θα πρέπει να επισημανθεί ότι η διαδικασία εκτίμησης για την εύρεση των διαφόρων παραμέτρων από ένα σύνολο δεδομένων παρελθέντων επιτοκίων, θα παρήγαγε γενικά διαφορετικές τιμές των εκτιμήσεων των παραμέτρων σ,α,ή ρ ανάλογα με την προσέγγιση των μοντέλων που θα χρησιμοποιούνταν και των στοχαστικών προσεγγίσεων που θα επιλέγονταν. Οι εκτιμήσεις της παραμέτρου δ, ωστόσο, θα ήταν κατά προσέγγιση ίσες με τις τιμές που επιλέξαμε, σε όλες τις περιπτώσεις.
Η χρήση των ίδιων παραμέτρων και στις δύο μεθόδους που εξετάζονται, θεωρήθηκε καταλληλότερο ούτως ώστε να απεικονισθούν ορισμένες διαφορές ανάμεσα στις δύο μεθόδους.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Αναμενόμενη Τιμή της $a_{\overline{n}|}$
Μοντελοποίηση της συσσωρευμένης συνάρτησης έντασης ανατοκισμού

						n		
				5	10	20	30	40
$Weiner$		δ	σ					
		0,06	0,01	4,1920	7,2983	11,3057	13,5061	14,7143
		0,06	0,02	4,1938	7,3038	11,3202	13,5289	14,7435
		0,10	0,01	3,7418	6,0118	8,2246	9,0390	9,3387
		0,10	0,02	3,7433	6,0161	8,2337	9,0511	9,3524
$O-U$	δ	α	ρ					
	0,06	0,17	0,01	4,1915	7,2967	11,3013	13,4991	14,7052
	0,06	0,17	0,02	4,1919	7,2975	11,3027	13,5008	14,7071
	0,10	0,17	0,01	3,7413	6,0106	8,2218	9,0353	9,3346
	0,10	0,17	0,02	3,7417	6,0113	8,2228	9,0364	9,3357

						n		
				5	10	20	30	40
$Weiner$		δ	σ					
		0,06	0,01	4,1943	7,3273	11,5925	14,4863	17,0285
		0,06	0,02	4,2030	7,4217	12,6140	19,5880	48,6888
		0,10	0,01	3,7437	6,0327	8,3788	9,4388	10,0567
		0,10	0,02	3,7510	6,1008	8,9232	11,3948	18,0414
$O-U$	δ	α	ρ					
	0,06	0,17	0,01	4,1920	7,3007	11,3221	13,5410	14,7658
	0,06	0,17	0,02	4,1938	7,3135	11,3862	13,6702	14,9531
	0,10	0,17	0,01	3,7417	6,0135	8,2336	9,0548	9,3586
	0,10	0,17	0,02	3,7432	6,0229	8,2703	9,1151	9,4331

(όπου O-U: Ornstein-Uhlenbeck)

Από τον πίνακα 1, μπορεί κανείς να δει ότι η Αναμενόμενη Αξία της $a_{\overline{n}|}$ δεν εξαρτάται πολύ από τη μέθοδο μοντελοποίησης που χρησιμοποιείται, ούτε εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων της κάθε διαδικασίας (με εξαίρεση την τιμή της παραμέτρου δ φυσικά). Η διαδικασία Weiner για n μεγαλύτερο των 20 ετών, όταν χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού δ_t, αποτελεί άλλη μία εξαίρεση.

Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει κάποιες τυπικές αποκλίσεις της $a_{\overline{n}|}$. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι για μια δεδομένη στοχαστική διαδικασία και μία δεδομένη μέθοδο μοντελοποίησης, η τυπική απόκλιση είναι άλλοτε λιγότερο, άλλοτε περισσότερο, ανάλογη προς την παράμετρο σ (ή την παράμετρο ρ). Φαίνεται ότι η προσαρμογή των τιμών των παραμέτρων ενός μοντέλου δεν μπορούν να παράγουν παρόμοιες τυπικές αποκλίσεις με εκείνες ενός άλλου μοντέλου για όλα τα n, καθώς η τυπική απόκλιση παρουσιάζει σημαντικές διαφορές ανάλογα με την μέθοδο μοντελοποίησης και/ή την στοχαστική διαδικασία που εξετάζεται.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Τυπική Απόκλιση της $a_{\overline{n}|}$

Μοντελοποίηση της συσσωρευμένης συνάρτησης έντασης ανατοκισμού

				n				
			5	10	20	30	40
Weiner	δ	σ					
	0,06	0,01	0,0605	0,1342	0,2623	0,3503	0,4053
	0,06	0,02	0,1211	0,2687	0,5258	0,7028	0,8137
	0,10	0,01	0,0530	0,1058	0,1734	0,2037	0,2160
	0,10	0,02	0,1061	0,2118	0,3476	0,4085	0,4332
$O-U$ δ	α	ρ					
0,06	0,17	0,01	0,0258	0,0457	0,0645	0,0705	0,0724
0,06	0,17	0,02	0,0517	0,0913	0,1291	0,1411	0,1448
0,10	0,17	0,01	0,0228	0,0368	0,0463	0,0479	0,0482
0,10	0,17	0,02	0,0456	0,0736	0,0926	0,0959	0,0964

Μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού

					n		
			5	10	20	30	40
Weiner	δ	σ					
	0,06	0,01	0,1251	0,5171	1,9640	4,2762	8,6273
	0,06	0,02	0,2515	1,0710	5,1457	27,4239	1111,8356
	0,10	0,01	0,1073	0,3880	1,1483	1,9504	2,9114
	0,10	0,02	0,2157	0,8019	2,8968	10,1266	240,2379
$O-U$ δ	α	ρ					
0,06	0,17	0,01	0,0576	0,1968	0,5294	0,7975	0,9767
0,06	0,17	0,02	0,1152	0,3952	1,0736	1,6334	2,0169
0,10	0,17	0,01	0,0495	0,1495	0,3263	0,4202	0,4610
0,10	0,17	0,02	0,0991	0,3001	0,6604	0,8563	0,9433

(όπου O-U: Ornstein-Uhlenbeck)

Για παράδειγμα, μπορούμε να συγκρίνουμε τις τυπικές αποκλίσεις της $a_{\overline{n}|}$ για τη διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck με παραμέτρους $\delta = 0,06$, $\alpha = 0,17$ και $\rho = 0,02$ για την συσσωρευμένη συνάρτηση έντασης ανατοκισμού, με τις τυπικές αποκλίσεις για την ίδια διαδικασία με παραμέτρους $\delta = 0,06$,

$\alpha = 0,17$ και $\rho = 0,01$ για την ένταση ανατοκισμού.
Οι τιμές των τυπικών αποκλίσεων για $n = 5$ είναι περίπου ίδιεσ$(0,0517$ σε σχέση με $0,1576)$, ενώ για $n = 40$ οι τιμές είναι $0,1448$ και $0,9767$ (δηλαδή σχεδόν 7 φορές περισσότερο) αντίστοιχα. Πολλαπλασιάζοντας την τιμή του ρ - στο πρώτο - με το 7 θα μας έδινε παρόμοιες τιμές απόκλισης για $n = 40$ αλλά τότε η τυπική απόκλιση του πρώτου μοντέλου για $n = 5$ θα ήταν 7 φορές μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του δεύτερου μοντέλου.
Παρόμοιες συγκρίσεις μπορούν να γίνουν μεταξύ των διαφόρων διεργασιών είτε και των ίδιων διεργασιών για διαφορετική μοντελοποίηση. Όλες οι συγκρίσεις, πάντως, δείχνουν ότι δεν είναι δυνατόν να επιλεγούν διαφορετικά μοντέλα που να εξάγουν παρόμοιες τυπικές αποκλίσεις για όλα τα n.
Ο συντελεστής κυρτότητας της $a_{\overline{n}|}$ για τα ίδια μοντέλα παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

Συντελεστής Κυρτότητας της $a_{\overline{n}|}$
Μοντελοποίηση της συσσωρευμένης συνάρτησης έντασης ανατοκισμού

				n				
				5	10	20	30	40
$Weiner$		δ	σ					
		0,06	0,01	0,0481	0,0640	0,0841	0,0963	0,1040
		0,06	0,02	0,0963	0,1282	0,1686	0,1932	0,2087
		0,10	0,01	0,0530	0,0616	0,0772	0,0844	0,0876
		0,10	0,02	0,0946	0,1233	0,1547	0,1693	0,1757
$O-U$	δ	α	ρ					
	0,06	0,17	0,01	0,0197	0,0202	0,0185	0,0171	0,0165
	0,06	0,17	0,02	0,0394	0,0404	0,0370	0,0343	0,0330
	0,10	0,17	0,01	0,0194	0,0198	0,0183	0,0176	0,0175
	0,10	0,17	0,02	0,0389	0,0395	0,0366	0,0353	0,0349

$$\begin{pmatrix}
 & & & & & & n & & \\
 & & & & 5 & 10 & 20 & 30 & 40 \\
Weiner & & \delta & \sigma & & & & & \\
 & & 0,06 & 0,01 & 0,1338 & 03488 & 0,9732 & 2,1347 & 6,5145 \\
 & & 0,06 & 0,02 & 0,2690 & 0,7266 & 2,8689 & 56,9320 & 1,3x10^5 \\
 & & 0,10 & 0,01 & 0,1311 & 0,3336 & 0,8718 & 1,7175 & 4,0382 \\
 & & 0,10 & 0,02 & 0,2636 & 0,6940 & 2,5013 & 41,5591 & 1,2x10^5 \\
O-U & \delta & \alpha & \rho & & & & & \\
 & 0,06 & 0,17 & 0,01 & 0,0585 & 0,1205 & 0,2157 & 0,2773 & 0,3166 \\
 & 0,06 & 0,17 & 0,02 & 0,1172 & 0,2421 & 0,4379 & 0,5693 & 0,6564 \\
 & 0,10 & 0,17 & 0,01 & 0,0573 & 0,1154 & 0,1961 & 0,2383 & 0,2580 \\
 & 0,10 & 0,17 & 0,02 & 0,1148 & 0,2318 & 0,3977 & 0,4874 & 0,5311
\end{pmatrix}$$

(όπου O-U: Ornstein-Uhlenbeck)

Ο συντελεστής κυρτότητας παρουσιάζει επίσης σημαντικές αποκλίσεις ανάλογα με το μοντέλο που εξετάζεται. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει την παρατήρηση που κάναμε νωρίτερα ότι δεν υπάρχουν δύο μοντέλα τα οποία να μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμα.

4.7 Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις

Μέσα από την παρουσίαση και την εφαρμογή των δύο διαφορετικών μεθόδων που χρησιμοποιήσαμε στο κεφάλαιο αυτό για την μοντελοποίηση της τυχαιότητας του επιτοκίου, καταλήγουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα.

Σαφώς, η μοντελοποίηση της συσσωρευμένης συνάρτησης της έντασης ανατοκισμού έχει εντελώς διαφορετικές συνέπειες στη συνάρτηση της Παρούσας Αξίας και σε άλλες αναλογιστικές συναρτήσεις, σε σχέση με την μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού.

Πιο συγκεκριμένα, στη μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού, το δ_s ποικίλλει ανάλογα με την επιλεγμένη στοχαστική διαδικασία. Στη μοντελοποίηση της συσσωρευμένης συνάρτησης της έντασης ανατοκισμού $y(t)$, το δ_s ποικίλλει έτσι ώστε η $y(t)$ να ακολουθεί την στοχαστική διαδικασία που επιλέχθηκε. Οι διαφορές αυτές απεικονίσθησαν με την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή κυρτότητας της $a_{\overline{n}|}$.

Ακόμα, αξίζει να σημειωθεί ότι στην εργασία αυτή, επιλέξαμε να εξετάσουμε τη διακριτή ράντα $a_{\overline{n}|}$, έναντι της συνεχούς ράντας $\bar{a}_{\overline{n}|}$. Η επιλογή της διακριτής ράντας έγινε για να αποφευχθούν τα σφάλματα που εμπλέκονται όταν διενεργούνται αριθμητικές ολοκληρώσεις που θα ήταν απαραίτητες

για τη συνεχή ράντα για μερικά από τα μοντέλα.
Τέλος, να αναφέρουμε ότι, όπως έδειξαν και τα αποτελέσματα των αναμενόμενων τιμών, των τυπικών αποκλίσεων και των συντελεστών κυρτότητας, που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν ισοδύναμα μοντέλα, ακόμα και αν θέσουμε συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους.

Παράρτημα

"Προέλευση" της Διασποράς μίας Ράντας

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τη Διασπορά του συνόλου:
$S = x_1 + x_1\, x_2 + ... + x_1\, x_2 ... x_n$, όπου $x_1, x_2, ..., x_n$ ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές.
Έστω m_1 και m_2 η πρώτη και δεύτερη ροπή αντίστοιχα, δηλαδή
$E(x_k) = m_1$ και $E(x_k^2) = m_2$,
όπου $k = 1, 2, ..., n$. Λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε ότι

$$E(s) = \sum_{k=1}^{n} m_1^k$$

το οποίο θα συμβολίζουμε με $s_n(m_1)$.
Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε είναι η:

$$Var(s) = \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}\, s_n(m_2) - \frac{2m_2}{m_2 - m_1}\, s_n(m_1) - [s_n(m_1)]^2$$

Η απόδειξη γίνεται μέσω επαγωγής:
Έστω ότι $n = 1$. Γνωρίζουμε ότι

$$Var(s) = Var(x_1) = m_2 - m_1^2$$

Το δεξί μέρος της σχέσης είναι ίσο με

$$\frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}\, m_2 - \frac{2m_2}{m_2 - m_1} m_1 - m_1^2 = m_2 - m_1^2$$

Άρα ισχύει για $n = 1$.
Έστω ότι η σχέση ισχύει για $n - 1$.

Ορίζουμε $t = x_1 + x_1\,x_2 + ... + x_1\,x_2\,...\,x_{n-1}$.
Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
Var(t) &= Var(t + x_1\,x_2\,...\,x_n) \\
&= Var(t) + Var(x_1\,x_2\,...\,x_n) + 2Cov[t,\, x_1\,x_2\,...\,x_n]
\end{aligned}$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε τους 3 αυτούς όρους.
Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
Var(t) &= \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}\, s_{n-1}(m_2) \,-\, \frac{2m_2}{m_2 - m_1}\, s_{n-1}(m_1) \,-\, [s_{n-1}(m_1)]^2 \\
&= \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}\,(m_2 + m_2^2 + ... + m_2^{n-1}) \qquad (A) \\
&\quad - \frac{2m_2}{m_2 - m_1}\,(m_1 + m_1^2 + ... + m_1^{n-1}) \qquad (B) \\
&\quad - (m_1 + m_1^2 + ... + m_1^{n-1})^2 \qquad (C)
\end{aligned}$$

Από την ανεξαρτησία των μεταβλητών έχουμε:

$$\begin{aligned}
Var(x_1\,x_2 ...\,x_n) &= m_2^n - m_1^{2n} \\
&= \frac{m_2^{n+1} + m_2^n\,m_1}{m_2 - m_1} \qquad (D) \\
&\quad -m_1^{2n} \qquad (E)
\end{aligned}$$

Για τον όρο της συνδιακύμανσης έχουμε:

$$
\begin{aligned}
2cov(t,\, x_1\, x_2 ... \, x_n) &= 2E(t\, x_1\, x_2 ... \, x_n) \,-\, 2E(t)\, E(x_1\, x_2 ... \, x_n) \\
&= 2(m_2\, m_1^{n-1} \,+\, m_2^2\, m_1^{n-2} \,+\, ... + \, m_2^{n-1}\, m_1) \,-\, 2(m_1 + m_1^2 + ... + m_1^{n-1})\, m_1^n \\
&= 2\frac{m_2^n\, m_1 - m_1^n\, m_2}{m_2 - m_1} \,-\, 2m_1^n(m_1 + m_1^2 + ... + m_1^{n-1}) \\
&= \frac{2m_1\, m_2^n}{m_2 - m_1} \qquad (F) \\
&\quad -\frac{2m_1^n m_2}{m_2 - m_1} \qquad (G) \\
&\quad -\, 2m_1^n(m_1 + m_1^2 + ... + m_1^{n-1}) \qquad (H)
\end{aligned}
$$

Πρέπει να δείξουμε ότι το άθροισμα των τριών αυτών όρων μας δίνει το αποτέλεσμα της επαγωγής. Πράγματι, αυτό ισχύει καθώς όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε, οι σχέσεις $(A)+(D)+(F)$ μας δίνουν τον πρώτο όρο της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε, οι σχέσεις $(B)+(G)$ μας δίνουν τον δεύτερο όρο ενώ οι σχέσεις $(C)+(E)+(H)$ μας δίνουν τον τρίτο όρο.
Άρα τελικά αποδείξαμε ότι η επαγωγή είναι αληθής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] AITCHISON, J. and BROWN, J.A.C. (1963) *The Lognormal Distribution,* 176 pp., Cambridge University Press.

[2] ARNOLD, L. (1974) *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications,* 228 pp., John Wiley & Sons, New York.

[3] BEEKMAN, J.A. and FUELLING, C.P. (1990) Interest and Mortality Randomness in Some Annuities. *Insurance: Mathematics and Economics* 9, 185-196.

[4] BEEKMAN, J.A. and FUELLING, C.P. (1991) Extra Randomness in Certain Annuity Models. *Insurance: Mathematics and Economics* I0, 275-287.

[5] BEEKMAN, J.A. and FUELLING, C.P. (1993) One Approach to Dual Randomness in Life Insurance. To appear.

[6] BOYLE, P.P., 1976. Rates of return as random variables. Journal of Risk and Insurance 53 (4), 693–713.

[7] BURNECKI, K., MARCINIUK, A., WERON, A., 2003. On annuities under random rates of interest. *Insurance: Mathematics and Economics 32 (2003),* 457–460.

[8] BUHLMANN, H. (1992) Stochastic Discounting. *Insurance: Mathematics and Economics11*, 113-127.

[9] DE SCHEPPER, A., DE VYLDER. F., GOOVAERTS, M. and KAAS, R. (1992a) Interest Randomness in Annuities Certain. *Insurance: Mathematics and Economics* I 1, 271-28 I.

[10] DE SCHEPPER, A., GOOVAERTS, M. and DELBAEN, F. (1992b) The Laplace Transform of Annuities Certain with Exponential Time Distribution. *Insurance: Mathematics and Economics 11*, 291-294.

[11] DE SCHEPPER, A. and GOOVAERTS, M. (1992) Some Further Results on Annuities Certain with Random Interest. *Insurance: Mathematics and Economics* 11, 283-290.

[12] DEVOLDER, P. (1986) Operations Stochastiques de Capitalisation. *ASTIN Bulletin* 16S, $5-$30.

[13] DHAENE, J. (1989) Stochastic Interest Rates and Autoregressive Integrated Moving Average Processes.

[14] DUERESNE, D. (1990) The Distribution of a Perpetuity, with Applications to Risk. Theory and Pension Funding. *Scandinavian Actuarial Journal,* 39-79.

[15] FINAN, M. (2014) A Discussion of Financial Economics in Actuarial Models, Arkansas Tech University, 428 – 450.

[16] FREES, E.W. (1990) Stochastic Life Contingencies with Solvency Considerations. *Transaction of the Society of Actuaries* XLII, 91-148.

[17] GERBER, H.U., 1997. Life Insurance Mathematics. Springer, Berlin.

[18] KARLIN, S. and TAYLOR,H. M. (1981*) A Second Course in Stochastic Processes,* 542 pp., Academic Press, San Diego.

[19] KELLISON, S.G., 1991. The Theory of Interest. Irwin, Homewood, IL.

[20] KELLISON, S.G., 1975. Fundamentals of Numerical Analysis. Irwin, Homewood, IL.

[21] McCUTCHEON, J.J., Scott, W.F., 1986. An Introduction to the Mathematics of Finance. Butterworth/Heinemann, London.

[22] MELSA, J.L. and SAGE, A.P. (1973) *An Introduction to Probability and Stochastic Processes.* 403 pp., Prentice-Hall, New Jersey.

[23] MIKOSCH, Thomas (1998) *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View,* World Scientific.
[24] PARKER, G., 1994.*Two stochastic approaches for discounting actuarial functions,* Astin Bulletin Volume 24, Issue 2, 167 - 181
[25] POLLARD, J.H., 1971. On fluctuating interest rates. Bulletin de l'Association Royale des Actuaires Belges 66, 68–97.
[26] WESTCOTT, D.A., 1981. Moments of compound interest functions under fluctuating interest rates. Scandinavian Actuarial Journal 4, 237–244.
[27] WILKIE, A.D., 1976. The rate of interest as a stochastic process — theory and applications. In: Proceedings of the 20th ICA, Vol. 1, Tokyo,pp. 325–338
[28] ZAKS, A., 2001. Annuities under random rates of interest. Insurance: Mathematics and Economics 28, 1–11.