ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΟΥ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΑΡΑΝΤΩΝΗ ΣΟΦΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΠΟΛΙΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2014

UNIVERSITY OF PIRAIEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

MSC IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

REINSURANCE STRATEGIES UNDER ALTERNATIVE PREMIUM PRINCIPLES

MASTER THESIS

KARANTONI SOFIA

SUPERVISOR: POLITIS KONSTANTINOS

ATHENS, DECEMBER 2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 3
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ 7
ΠΕΡΙΛΗΨΗ 8
ABSTRACT 9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ 10
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ 12
2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 12
2.1.1. ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΟΥ 12
2.1.2. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΛΠΙΔΑΣ 15
2.1.3. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΛΠΙΔΑΣ ΜΕ ΠΕΡΙΘΩΡΙΟ ΑΣΦΑΛΕΙΑΣ 16
2.1.4. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ 17
2.1.5. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ 17
2.1.6. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ 18
2.1.7. Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΑΡΧΗ 19
2.1.8. Η ΕΛΒΕΤΙΚΗ ΑΡΧΗ 19
2.1.9. Η ΑΡΧΗ ORLICZ 20
2.1.10. Η ΑΡΧΗ ESSCHER 20
2.1.11. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ 22
2.1.12. Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΜΕΝΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ 22
2.1.13. Η ΟΛΛΑΝΔΙΚΗ ΑΡΧΗ 22
2.2. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ 23
2.2.1. QUOTA SHARE (Αναλογική Κάλυψη) 25
2.2.2. ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΚΑΛΥΨΗ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ (SURPLUS) 26
2.2.3. ΚΑΛΥΨΗ ΥΠΕΡΒΑΛΛΟΝΤΟΣ ΖΗΜΙΑΣ (EXCESS OF LOSS) (Μη- Αναλογική Κάλυψη) 28
2.2.4. ΑΝΑΚΟΠΗ ΖΗΜΙΑΣ (STOP LOSS) (Μη- Αναλογική Κάλυψη) 29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ 31
3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 31
3.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΑ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΚΑΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ 31
Πίνακας 3.2: Βασικά στοιχεία της ασφαλιστικής εταιρείας 31
3.2.1 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ (LOSS AMOUNT) 32
Πίνακας 3.2.1: Στατιστικά Χαρακτηριστικά του Χαρτοφυλακίου 32

3.2.2 ΜΗΝΙΑΙΕΣ ΖΗΜΙΕΣ ΤΗΣ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ 33
Γράφημα 3.2.2 Μηνιαίες ζημιές ασφαλιστικής εταιρείας για την περίοδο 2010 με 2012... 33
3.2.3 ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ (FREQUENCY DISTRIBUTION)...................... 34
Πίνακας 3.2.3: Συχνότητα των απαιτήσεων 34
3.3 ΕΛΕΓΧΟΙ ΚΑΛΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ (GOODNESS OF FIT TESTS).... 35
3.3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 35
Γράφημα 3.3. Ιστόγραμμα.. 37
Γράφημα 3.3.1.1:Q-Q plot των συνολικών ζημιών 38
Γράφημα 3.3.1.2: P-P Plot των συνολικών ζημιών 38
3.3.2 ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ (DISTRIBUTION FITTING – BEST FIT).. 39
Γράφημα 3.3.2.1: Ιστόγραμμα Pearson 5 40
Γράφημα 3.3.2.2: Ιστόγραμμα Lognormal 40
Γράφημα 3.3.2.3: Ιστόγραμμα Lognormal (3P) 41
Γράφημα 3.3.2.4: Ιστόγραμμα Normal 41
Γράφημα 3.3.2.5: Ιστόγραμμα - Pareto 42
Γράφημα 3.3.2.6: Ιστόγραμμα – Generalized Pareto 42
Γράφημα 3.3.2.7: Ιστόγραμμα – Beta 43
Γράφημα 3.3.2.8: Ιστόγραμμα – Exponential 43
Γράφημα 3.3.2.9: Ιστόγραμμα – Burr 44
Γράφημα 3.3.2.10: Ιστόγραμμα – Weibull 44
Πίνακας 3.3.2: Best fit των ζημιών με τη χρήση τριών test 45
3.3.3 ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΥΨΗΛΩΝ ΚΑΙ ΧΑΜΗΛΩΝ ΖΗΜΙΩΝ 49
3.3.3.1 ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΥΨΗΛΩΝ ΖΗΜΙΩΝ 49
Πίνακας 3.3.3.1: Best fit των Υψηλών Ζημιών 49
Γράφημα 3.3.3.1: Ιστόγραμμα – Burr (Υψηλές Ζημιές) 50
Γράφημα 3.3.3.2: Προσαρμογή κατανομών στις υψηλές ζημιές 51
3.3.3.2 ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΧΑΜΗΛΩΝ ΖΗΜΙΩΝ 51
Πίνακας 3.3.3.2: Best fit των Χαμηλών Ζημιών 51
Γράφημα 3.3.3.3: Ιστόγραμμα – Burr (Χαμηλές Ζημιές) 52
Γράφημα 3.3.3.4: Προσαρμογή κατανομών στις χαμηλές ζημιές 52
3.3.3.3. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΧΑΜΗΛΩΝ ΚΑΙ ΥΨΗΛΩΝ ΖΗΜΙΩΝ 53
Πίνακας 3.3.3.3.1. Παράμετροι της κατανομής Burr 53

Πίνακας 3.3.3.3.2. Περιγραφικά στατιστικά των υψηλών και των χαμηλών ζημιών..53
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο – ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΚΑΙ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ 55
4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 55
4.2. Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ 55
4.3. ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ 56
4.4. ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ 56
4.5. ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ ΚΑΙ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ 58
4.6. ΕΜΠΕΡΙΚΕΣ ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΜΕ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ 59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο –ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ 61
5.1. SOLVENCY II – ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΚΑΙ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ 61
5.1.1. ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑ ΙΙ 62
5.1.2. ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ 65
5.2 ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ VaR, TVaR ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΡΧΕΣ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ 65
5.2.1. ΚΡΙΤΗΡΙΑ VaR ΚΑΙ TVaR 66
5.2.2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ 67
5.2.3. QUOTA SHARE ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ 68
Πίνακας 5.2.3.1 :Στατιστικά χαρακτηριστικά των ζημιών με την αντασφάλιση Quota Share 68
5.2.3.1 ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ ΣΤΗΝ QUOTA SHARE 69
5.2.3.2. INSURER’S SURPLUS ΜΕ ΤΗΝ QUOTA SHARE ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ 71
Σχήμα 5.2.3.2. Διαδικασία του Πλεονάσματος με τη χρήση του αντασφαλιστικού σχήματος Quota Share 50% και περιθώριο ασφαλείας θ=10%. 73
Πίνακας 5.2.3.2: Στατιστικές τιμές πλεονάσματος ασφαλιστή 73
5.2.3.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΗΣ QUOTA SHARE ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ 74
Πίνακας 5.2.3.3: Βέλτιστοι συντελεστές αντασφάλισης Quota Share με τη χρήση κριτηρίου VaR και διάφορων αρχών ασφαλίστρων. 76
Σχήμα 5.2.3.3.Στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος κάτω από την αντασφαλιστική σύμβαση Quota Share 3% και περιθώριο ασφαλείας θ=10%. 77
5.2.4. EXCESS OF LOSS ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ 77
Πίνακας 5.2.4: Στατιστικά χαρακτηριστικά των μηνιαίων ζημιών με την αντασφάλιση Excess of Loss 78
Πίνακας 5.2.5: Στατιστικά χαρακτηριστικά των ατομικών ζημιών με την αντασφάλιση Excess of Loss 78
5.2.4.1 ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ ΣΤΗΝ EXCESS OF LOSS ... 79

Πίνακας 5.2.4.1: Μηνιαίο μέσο ασφάλιστρο των συνολικών ζημιών του ασφαλιστή και αντασφαλιστή με την Excess of Loss αντασφάλιση. 80
5.2.4.2. INSURER’S SURPLUS ME THN EXCESS OF LOSS ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ................. 81
Πίνακας 5.2.4.2. Δεδομένα Χαρτοφυλακίου 82
Σχήμα 5.2.4.2: Πλεόνασμα - Αρχή της Μαθηματικής Ελπίδας με περιθώριο ασφαλείας στην Xol όταν d=20.000. 82
Σχήμα 5.2.4.2.1: Πλεόνασμα - Αρχή της Τυπικής Απόκλισης στην Xol όταν d=20.000..83
Σχήμα 5.2.4.2.2: Πλεόνασμα - Μικτό Ασφάλιστρο στην Xol όταν d=20.000 83
Σχήμα 5.2.4.2.3: Πλεόνασμα- Αρχή της Διασποράς στην Xol όταν d=20.000 84
Σχήμα 5.2.4.2.4: Πλεόνασμα- Αρχή της Ημι - Διασποράς στην Xol όταν d=20.000..84
Σχήμα 5.2.4.2.5: Πλεόνασμα- Ολλανδική Αρχή στην Xol όταν d=20.000 85
Πίνακας 5.2.4.2.2: Στατιστικές Τιμές Πλεονάσματος 86
5.2.4.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΠΟΣΟ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ EXCESS OF LOSS ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ....... 87
Πίνακας 5.2.4.3.1:Βέλτιστο ποσό διατήρησης του ασφαλιστή στις ζημιές στην Excess of Loss με τη χρήση κριτηρίου VaR και διάφορων αρχών ασφαλίστρων. 88
Σχήμα 5.2.4.3.1: Σύγκριση Διαδικασίας Πλεονάσματος Ασφαλιστή 88
Σχήμα 5.2.4.3.4: Πλεόνασμα για d=15.000 89
Σχήμα 5.2.4.3.5: Πλεόνασμα για d=20.000 90
Σχήμα 5.2.4.3.6: Πλεόνασμα για d=25.000 90
Σχήμα 5.2.4.3.7: Πλεόνασμα για d=30.000 90
5.2.5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ QUOTA SHARE ME EXCESS OF LOSS –ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 91
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.. 92
ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ 92
ΕΛΛΗΝΙΚΗ...96
ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΕΣ...96
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.. 97

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ τον κύριο Πολίτη Κωνσταντίνο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας αυτής για τις πολύτιμες ώρες που διέθεσε και τις χρήσιμες συμβουλές που προσέφερε για την ολοκλήρωσή της. Επίσης ευχαριστώ τον Παπαχρήστο Αποστόλη για τις χρήσιμες συμβουλές που μου προσέφερε. Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου για την στήριξη και την αγάπη που μου προσφέρουν.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η αντασφάλιση έχει λάβει μεγάλη ανάπτυξη τα τελευταία χρόνια στον ασφαλιστικό τομέα και κυρίως μετά την εμφάνιση της εποπτικής αρχής Solvency II, η οποία θα εφαρμοστεί και επίσημα το 2016. Η χρήση αντασφαλιστικών σχημάτων έγκειται στην ανάγκη που έχουν οι ασφαλιστικές εταιρείες για εκχώρηση ενός μέρους των αποζημιώσεων του χαρτοφυλακίου τους στην αντασφαλιστική εταιρεία, με σκοπό τον περιορισμό των υψηλών απαιτήσεων σε χαμηλά επίπεδα, έναντι ενός μέρους του ασφαλίστρου που λαμβάνουν για να καλύψουν τους κινδύνους που έχουν αναλάβει. Μέσα από αυτή την εργασία θα προσπαθήσουμε να βρούμε τη βέλτιστη στρατηγική αντασφάλισης καθώς επίσης και το βέλτιστο ποσοστό ιδίας κράτησης από την μεριά της ασφαλιστικής εταιρείας πάνω σε νοσοκομειακές αποζημιώσεις για τα έτη 2010, 2011 και 2012, χρησιμοποιώντας βασικές αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου.

ABSTRACT

Reinsurance has experienced great growth in recent years in the insurance sector and especially after the appearance of the supervisory authority Solvency II, which will be officially implemented in 2016. The implementation of reinsurance strategies is because of the need that insurance companies have of assigning a part of compensation portfolio to a reinsurance company, in order to retain the highly cost compensations to a low level, by giving to the reinsurance company a part of the premium. Through this study we will try to find the optimal reinsurance strategy as well as the best rate of insurance reserves from the side of the insurance company in order to cover the total losses from a health insurance portfolio for the years 2010, 2011 and 2012, using basic principles of premium calculation.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} - ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μεγάλη ανάπτυξη τα τελευταία χρόνια έχει λάβει χώρα στο ασφαλιστικό σύστημα η αντασφάλιση. Η διαχείριση ασφαλιστικών κινδύνων έχει εξελιχθεί σημαντικά δεδομένου ότι έχουν δημιουργηθεί πολλά και καινούργια ασφαλιστικά προϊόντα τα οποία με τη σειρά τους δημιουργούν καινούργιους κινδύνους. Η αντασφάλιση αποτελεί εν ολίγοις την ασφάλιση μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Μπορεί να είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος για τη διαχείριση του κινδύνου με την εκχώρησή του από μία ασφαλιστική εταιρεία σε μια δεύτερη. Ενώ, βοηθά στην προστασία των ασφαλιστών από απρόβλεπτες ή έκτακτες ζημιές, επιτρέποντας να περιορίσουν τους κινδύνους τους. Μιλώντας όμως για κίνδυνο και παίρνοντας τα πράγματα από την αρχή, ως κίνδυνο μιας ασφαλιστικής εταιρείας εννοούμε την οικονομική απώλεια που μπορεί να προκύψει είτε από φυσικό κίνδυνο όπως θάνατο, ασθένεια, φυσικές καταστροφές κ.α, είτε ως συνέπεια μιας ανθρώπινης πράξης όπως ένα τροχαίο ατύχημα, είτε στο πλαίσιο μιας οικονομικής δραστηριότητας έχοντας το επιχειρηματικό ρίσκο.

Στην ουσία η ασφαλιστική εταιρεία αναλαμβάνει την πιθανότητα κάλυψης αυτών των κινδύνων μέσω ασφαλιστικών συμβολαίων και κάποιου αντίτιμου ποσού το οποίο είναι το ασφάλιστρο. Δηλαδή, το ασφάλιστρο είναι το χρηματικό ποσό που καταβάλει ο ασφαλισμένος για την ολική ή μερική καλυψή του από έναν επερχόμενο κίνδυνο.

Από την άλλη όψη του νομίσματος οι ασφαλιστικές εταιρείες αναζητούν τρόπους για τον περιορισμό και την διασπορά των κινδύνων που φέρουν κι εδώ λαμβάνει χώρα η αντασφάλιση. Η αντασφαλιστική κάλυψη επιτρέπει σε έναν ασφαλιστή να καταγράψει υψηλότερα χρηματικά όρια στην πολιτική που ακολουθεί διατηρώντας παράλληλα τον κίνδυνο σε ένα επίπεδο που μπορεί να διαχειριστεί. Έτσι, οι μικρότερες ασφαλιστικές εταιρείες μπορούν να ανταγωνιστούν με τις μεγαλύτερες ασφαλιστικές εταιρείες, και να ακολουθήσουν στρατηγικές πέρα από την ικανοτητά τους.

Υπάρχουν πολλές στρατηγικές αντασφάλισης που μπορεί να ακολουθήσει μια ασφαλιστική εταιρεία σύμφωνα με τις ανάγκες που προκύπτουν και τις πολιτικές που θέλει να ακολουθήσει κάθε φορά. Η αντασφαλιστική στρατηγική καλύπτει το σύνολο των αντασφαλιστικών μέτρων που λαμβάνει μία εταιρεία για να προσαρμόσει το προφίλ κίνδυνου των χαρτοφυλακίων της, όσο το δυνατόν καλύτερα, προς ένα επιθυμητό προφίλ κινδύνων. Η στρατηγική διαχείρισης κινδύνων μιας εταιρείας πρέπει να επισημαίνει τους κινδύνους που ισχύουν και το πώς αυτοί πρέπει να αντιμετωπιστούν. Το βασικό εργαλείο της αντασφάλισης είναι η μεταφορά του κινδύνου και η διαχυσή του στο ασφαλιστικό σύστημα. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες στρατηγικές αντασφάλισης δίνοντας την επιλογή μιας πληθώρας αντασφαλιστικών συμβολαίων αλλά και των συνδυασμών τους με σκοπό την βέλτιστη στρατηγική η οποία θα ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο και θα ικανοποιεί τις ανάγκες της κάθε ασφαλιστικής εταιρείας (Sundt and Teugels, 2004).

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια αναζήτησης της βέλτιστης αντασφαλιστικής στρατηγικής χρησιμοποιώντας ένα χαρτοφυλάκιο απαιτήσεων μιας ασφαλιστικής εταιρείας για τα έτη 2010 με 2012. Αναλύονται δυο σχήματα αντασφαλίσεων (αναλογικής και μη αναλογικής) της εταιρείας χρησιμοποιώντας διάφορες αρχές υπολογισμού των ασφαλίστρων κάτω από το πρίσμα υποθέσεων/κριτηρίων αναζητώντας τη βέλτιστη στρατηγική. Το βασικό κριτήριο που χρησιμοποιείται είναι το γνωστό ως η αξία σε κίνδυνο (VaR), το οποίο χρησιμοποιείται στην εξακρίβωση και επιλογή του βέλτιστου αντασφαλιστικού σχήματος.

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής: στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση των αρχών υπολογισμού των ασφαλίστρων καθώς και οι αντασφαλιστικές μέθοδοι που υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία. Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρείας που εξετάζεται, αναλύοντας τα βασικά χαρακτηριστικά του εστιάζοντας στις απώλειες/ζημιές που σημειώνει. Γίνεται ανάλυση των συνοπτικών στατιστικών που διέπουν τις ζημιές αλλά και τη συχνότητα των απαιτήσεων. Χρησιμοποιούνται έλεγχοι καλής προσαρμογής της κατανομής των ζημιών για το συνολό τους αλλά και μεμονωμένα των υψηλών και χαμηλών ζημιών. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η σχέση αλληλεξάρτησης της πιθανότητας πτώχευσης μιας ασφαλιστικής εταιρείας με τη χρήση αντασφάλισης. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται η εκτενής ανάλυση των δυο αντασφαλιστικών στρατηγικών που ακολουθούνται (αναλογική και μη αναλογική) της υφιστάμενης εταιρείας αναζητώντας τη βέλτιστη στρατηγική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε την ανάλυση των αρχών υπολογισμού των ασφαλίστρων και διάφορες συζητήσεις που έχουν γίνει για αυτές κατά καιρούς στη διεθνή βιβλιογραφία. Γίνεται εστίαση στα μειονεκτήματα των μεθόδων και κατά πόσο πληρούν κάποιες ιδιότητες. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι γενικές αρχές αντασφάλισης συζητώντας τα πλεονεκτήματα και μειονεκτηματά τους καθώς και τους τομείς στους οποίους ενδείκνυται περισσότερο η χρήση τους.

2.1.1. ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΟΥ

Ως αρχή υπολογισμού των ασφαλίστρων θεωρείται η «τιμή ενός κινδύνου», ως η αξία ενός στοχαστικού αποθεματικού ή ως ένδειξη της μέγιστης πιθανής ζημίας. Μια μεγάλη γκάμα αρχών/μεθόδων υπολογισμού των ασφαλίστρων έχουν αναπτυχθεί στη διεθνή βιβλιογραφία με τα ασφάλιστρα να υπολογίζονται ως αναμενόμενες τιμές κατάλληλα μετασχηματισμένων τυχαίων μεταβλητών.

Οι Goovaerts, De Vylder και Haezendonck (1984) ανέπτυξαν τις διάφορες κλασικές αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου. Οι παραπάνω αναφέρουν ότι ένα κοινό χαρακτηριστικό τους είναι ότι εκφράζει τα συναισθήματα του ασφαλιστή έναντι των κινδύνων που φέρει. Η αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου είναι στενά συνδεδεμένη με τη διπλή θεωρία του κινδύνου από τον Yaari (1987). Ο Yaari (1987) ανέπτυξε μια θεωρία του κινδύνου προς την αναμενόμενη θεωρία της ωφελιμότητας, τροποποιώντας το αξίωμα της ανεξαρτησίας των von Neumann και Morgenstern το 1944. Στη θεωρία του Yaari, η στάση απέναντι στον κίνδυνο χαρακτηρίζεται από μια παραμορφωμένη εφαρμογή σε συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας, σε αντίθεση με την θεωρία προσδοκώμενης ωφελιμότητας στην οποία η στάση απέναντι στον κίνδυνο χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση ωφελιμότητας του πλούτου.

Κρίνεται σκόπιμο σε αυτό το σημείο να καθοριστούν οι ορισμοί του κινδύνου και του ασφαλίστρου καθώς και οι συμβολισμοί τους όπου θα αναφέρονται συχνά κατά τη διάρκεια της εργασίας.

- Ως **κίνδυνος** X ορίζεται η οικονομική απώλεια/ζημιά που μπορεί να προκύψει είτε από φυσικό κίνδυνο (θάνατο, ασθένεια, φυσικές καταστροφές) είτε ως συνέπεια ανθρώπινης πράξης (τροχαίο ατύχημα) είτε στο πλαίσιο οικονομικής δραστηριότητας (επιχειρηματικό ρίσκο).
- Ως **ασφάλιστρο** $\Pi(X)$ ορίζεται εκείνο το χρηματικό ποσό που καταβάλει ο ασφαλισμένος για την ολική ή μερική κάλυψη του από έναν επερχόμενο κίνδυνο.

Ιδιότητες των αρχών των ασφάλιστρων

Οι κυριότερες αρχές για το καθορισμό των ασφαλίστρων με βάση τον Dickson (2006) και την εγκυκλοπαίδεια της Ασφαλιστικής Επιστήμης (Sundt and Teugels, 2004) είναι οι παρακάτω:

1. Ανεξαρτησία:

Το ασφάλιστρο $\Pi(X)$ εξαρτάται μόνο από το αθροιστική συνάρτηση κατανομής του κινδύνου X, δηλαδή $S(X)$ όπου $S(X_t) = P\{\omega \in \mathrm{X}(\omega) > t\}$, η ασφάλιση του κινδύνου X εξαρτάται μόνο από την ουρά πιθανότητας του κινδύνου X. Αυτή η ιδιότητα ορίζει ότι το ασφάλιστρο εξαρτάται μόνο από τις νομισματικές ζημιές ενός ασφαλιστικού γεγονότος και την πιθανότητα να εμφανιστεί.

2. Μη αρνητική τοποθέτηση του ασφαλίστρου: $\Pi(X) \geq E[X]$.

Το ασφάλιστρο δεν πρέπει να είναι μικρότερο από τις αναμενόμενες απαιτήσεις (μέση τιμή του κινδύνου). Ο γενικός κανόνας χρέωσης του ασφαλίστρου είναι να πληρώνεται τουλάχιστον ο αναμενόμενος κίνδυνος ως ανταλλαγή για την ασφάλιση του.

3. Μετάφραση ίσης διακύμανσης ή του αναλλοίωτου: $\Pi(X+a) = \Pi(X) + a,\ a \geq 0$.

Εάν αυξήσουμε έναν κίνδυνο X κατά μια σταθερή ποσότητα a, τότε το ασφάλιστρο για το $(X+a)$ θα πρέπει να είναι το ασφάλιστρο για το X αυξανόμενο κατά το ίδιο σταθερό ποσό a ποσό.

4. Αδικαιολόγητη χρέωση του κινδύνου: $\Pi(X) = c$

Αν ένας κίνδυνος είναι ίσος με μία σταθερά $c \geq 0$ τότε το ασφάλιστρο θα είναι ίσο με μια σταθερή τιμή. Αν γνωρίζουμε με βεβαιότητα ότι η ασφαλιστική πληρωμή είναι c, τότε δεν έχουμε κανένα λόγο να χρεώσουμε κάποιο ποσό για τον κίνδυνο, διότι δεν υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την πληρωμή.

5. Προσθετικότητα: $\Pi(X_1 + X_2) = \Pi(X_1) + \Pi(X_2)$.

Η ιδιότητα αυτή ορίζει ότι, αν X_1 και X_2 , είναι ανεξάρτητοι κίνδυνοι το ασφάλιστρο για το συνδυασμένο κίνδυνο $X_1 + X_2$, συμβολίζεται ως $\Pi(X_1) + \Pi(X_2)$ και πρέπει να ισούται με $\Pi(X_1) + \Pi(X_2)$.

6. Σταθερότητα κλίμακας: $Z = aX, a \succ 0 \Rightarrow \Pi(Z) = a\Pi(X).$

Αυτή η ιδιότητα ορίζει ότι αν ο κίνδυνος είναι γραμμική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής $Z = aX$, όπου ο παράγοντας $a \succ 0$ τότε ισχύει ότι το ασφάλιστρο $\Pi(Z)$ ισούται με $a\Pi(X)$. Για παράδειγμα έστω ότι το νόμισμα του Ηνωμένου Βασιλείου αλλάζει από στερλίνα σε ευρώ και 1 στερλίνα μετατρέπεται σε a*1 ευρώ. Στη συνέχεια, αν ένας Βρετανός ασφαλιστής χρησιμοποιεί μια αμετάβλητη κλίμακα αρχής ασφάλισης, το ασφάλιστρο των 100 στερλινών θα αλλάξει σε a*100 ευρώ.

7. Μη εκμετάλλευση ή «όχι κλέψιμο» (noripoff): $\Pi(X) \leq X_m$.

Η ιδιότητα αυτή απαιτεί ότι εάν υπάρχει μια (πεπερασμένη) μέγιστη απαίτηση ποσού για τον κίνδυνο ας πούμε X_m, τότε θα πρέπει το ασφάλιστρο να είναι μικρότερο από αυτό το ποσό. Εάν αυτή η προϋπόθεση δεν πληρείται, τότε δεν υπάρχει κίνητρο για ένα άτομο να χρησιμοποιήσει την ασφάλιση για αυτόν τον κίνδυνο.

8. Υπό Προσθετικότητα: $\Pi(X_1 + X_2) \leq \Pi(X_1) + \Pi(X_2)$.

Οι Sundt and Teugels (2004) υποστηρίζουν ότι είναι μια λογική ιδιότητα, διότι το ασφάλιστρο για το άθροισμα των δύο κινδύνων δεν είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των επιμέρους ασφάλιστρων, αλλιώς ο αγοραστής της ασφάλισης απλά θα ασφάλιζε τους δύο κινδύνους μεμονωμένα. Ωστόσο, το επιχείρημα που ισχυρίζεται ότι το αθροιστικό ασφάλιστρο δυο κινδύνων $\Pi(X_1 + X_2)$, δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το άθροισμα των μεμονωμένων κινδύνων $\Pi(X_1)+\Pi(X_2)$, αποτυγχάνει επειδή γενικά δεν είναι δυνατόν για τον αγοραστή της ασφάλισης να πουληθούν ασφάλιστρα για τους δύο κινδύνους μεμονωμένα.

9. Μονοτονία: Αν $X_1(\omega) \le X_2(\omega)$, για κάθε $\omega \in \Omega$, τότε $\Pi(X_1) \le \Pi(X_2)$.

Κάποιες από τις σημαντικότερες αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου που έχουν αναπτυχθεί και εφαρμοστεί στην ξένη βιβλιογραφία είναι οι εξής:

2.1.2. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΛΠΙΔΑΣ

Η αρχή της μαθηματικής ελπίδας είναι η πρώτη μέθοδος υπολογισμού του ασφαλίστρου που πολλοί αναλογιστές μαθαίνουν. Είναι ευρέως εφαρμοσμένη στη βιβλιογραφία, επειδή σύμφωνα με τους Sundt and Teugels (2004), οι αναλογιστές συχνά υποθέτουν ότι ο κίνδυνος είναι ουσιαστικά ανύπαρκτος αν ο ασφαλιστής πωλεί ακλουθώντας ομοιόμορφα κατανεμημένες και ανεξάρτητες πολιτικές.

Το κυριότερο πλεονέκτημα αυτής της αρχής είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί για ένα μεγάλο χαρτοφυλάκιο κινδύνων χωρίς να απαιτεί πολλά στοιχεία για τη κατανομή που ακολουθεί ο κίνδυνος.

Η Αρχή της μαθηματικής ελπίδας ορίζει το ασφάλιστρο από την παρακάτω σχέση:

$$\Pi(X) = \mathrm{E}(X). \tag{2.1.1}$$

Δηλαδή, το καθαρό ασφάλιστρο ισούται με το μέσο όρο (αναμενόμενες ζημίες) του κινδύνου που θα αποζημιώσει ο ασφαλιστής για το κίνδυνο που έχει αναλάβει να καλύψει. Στην πραγματικότητα αυτή η αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου δεν είναι η βέλτιστη για τον ασφαλιστή καθώς δεν του αφήνει κανένα περιθώριο κέρδους ενώ στην πραγματικότητα θα πρέπει ο ασφαλιστής να εισπράττει ασφάλιστρο μεγαλύτερο από το καθαρό ασφάλιστρο καθώς θα πρέπει πέρα από τις αποζημιώσεις να καλυφθούν και άλλα λειτουργικά έξοδα. Επίσης άλλο σημαντικό μειονέκτημα αυτής της αρχής είναι ότι ορίζει το ίδιο ασφάλιστρο στους κινδύνους που έχουν ίδια μέση τιμή χωρίς να λαμβάνονται υπ’ όψιν οι διασπορές των κινδύνων.

Ακόμη, ο Dickson (2006) έχει αναφέρει ότι από την πλευρά του ασφαλιστή αυτή η αρχή δεν είναι πολύ ελκυστική. Το ασφάλιστρο καλύπτει τις αναμενόμενες απαιτήσεις από τον κίνδυνο και δεν αφήνει περιθώριο για κέρδος. Ενώ, τονίζει ότι είναι απίθανο ο ασφαλιστής που υπολογίζει τα ασφάλιστρα με αυτή την αρχή να παραμείνει στην επιχείρηση πολύ καιρό.

2.1.3. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΛΠΙΔΑΣ ΜΕ ΠΕΡΙΘΩΡΙΟ ΑΣΦΑΛΕΙΑΣ

Η Αρχή της μαθηματικής ελπίδας με περιθώριο ασφαλείας αποτελεί μια προέκταση της αρχής της μαθηματικής ελπίδας συμπεριλαμβάνοντας μια αναλογία του κινδύνου και απαιτεί εξίσου λίγες πληροφορίες για τη κατανομή που ακολουθεί ο κίνδυνος (αρκεί να γνωρίζουμε τη μέση τιμή). Το σημαντικό μειονέκτημα όπως και στη προηγούμενη αρχή είναι ότι ορίζει το ίδιο ασφάλιστρο στους κινδύνους που έχουν ίδια μέση τιμή χωρίς να λαμβάνονται υπ' όψιν οι διασπορές των κινδύνων.

Η Αρχή της μαθηματικής ελπίδας με περιθώριο ασφάλειας ορίζει ότι:

$$\Pi(X) = (1+\theta)\mathrm{E}(X), \tag{2.1.2}$$

όπου το θ είναι μια θετική ποσότητα και καλείται περιθώριο ασφαλείας.

Σύμφωνα με τον Dickson (2006), η αρχή της μαθηματικής ελπίδας με περιθώριο ασφαλείας που λαμβάνει υπόψη την αναμενόμενη ζημιά είναι πολύ απλή. Ωστόσο, αναφέρει ότι η σημαντική ανεπάρκεια της μεθόδου είναι ότι αποδίδει το ίδιο ασφάλιστρο σε όλους τους κινδύνους με την ίδια μέση τιμή. Ενώ, τονίζει ότι οι κίνδυνοι με την ίδια μέση τιμή αλλά διαφορετικές διακυμάνσεις θα πρέπει να έχουν διαφορετικά ασφάλιστρα.

2.1.4. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Η αρχή της διασποράς υπολογισμού του ασφαλίστρου γενικεύει την αρχή της μαθηματικής ελπίδας ή αλλιώς την Καθαρή Αρχή ασφαλίστρου περιλαμβάνοντας ένα ποσοστό ή μέρος του κινδύνου που είναι ανάλογο με τη διακύμανση του κινδύνου. Ο Bϋhlmann το 1970, μελέτησε την συγκεκριμένη αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου με κάθε λεπτομέρεια και προσέγγισε το ασφάλιστρο με την αρχή της ισοδύναμης ωφελιμότητας ή μηδενικής ωφελιμότητας. Η Αρχή της Διασποράς καλύπτει το μειονέκτημα των δυο παραπάνω αρχών που λαμβάνουν υπ’ όψιν μόνο τις αναμενόμενες ζημίες.

Έτσι λοιπόν η αρχή της διασποράς ορίζει ότι

$$\Pi\left(X\right)=\mathrm{E}\left(X\right)+\alpha Var(X),\ \alpha \succ 0. \tag{2.1.3}$$

Σε αυτό τον τύπο υπολογισμού του ασφαλίστρου το περιθώριο ασφαλείας είναι ανάλογο προς τη διασπορά καθώς ισούται με $\Pi\left(X\right)-\mathrm{E}\left(X\right)$.

2.1.5. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ

Η αρχή της τυπικής απόκλισης βασίζεται επίσης στην αρχή της μαθηματικής ελπίδας περιλαμβάνοντας ένα περιθώριο ασφαλείας που είναι ανάλογο με την τυπική απόκλιση του κινδύνου σύμφωνα με τους Sundt and Teugels (2004). Ο Bϋhlmann (1970) αναφέρει ότι αυτή η Αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου χρησιμοποιείται συχνά σε ακίνητα όπως ασφάλιση ακίνητης περιουσίας (προσωπική, επαγγελματική) και στην ασφάλιση ατυχημάτων.

Η Αρχή της τυπικής απόκλισης ορίζει το ασφάλιστρο ως εξής:

$$\Pi\left(X\right)=\mathrm{E}\left(X\right)+\alpha\left(V\left(X\right)\right)^{\frac{1}{2}},\ \alpha \succ 0\,. \tag{2.1.4}$$

Ο Denenberg (1990) υποστήριξε ότι θα πρέπει κανείς να αντικαταστήσει την τυπική απόκλιση με την μέση απόκλιση (absolute deviation) κατά τον υπολογισμό του ασφαλίστρου. Ενώ, οι Schweizer (2001) και Møller (2001) συζήτησαν για το πώς μπορεί να προσαρμοστεί και να συνδυαστεί η αρχή της διακύμανσης και η Αρχή της τυπικής απόκλισης υπολογισμού του ασφαλίστρου στην τιμολόγηση των κινδύνων σε μια δυναμική χρηματοπιστωτική αγορά.

Ο Dickson (2006) αναφέρει ότι η Αρχή της τυπικής απόκλισης δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της προσθετικότητας ούτε της μη εκμετάλλευσης από τις αρχές των ασφάλιστρων που είδαμε νωρίτερα.

2.1.6. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ

Η αρχή εκφράζει την πεποίθηση ότι οι οικονομικές αποφάσεις δε λαμβάνονται με γνώμονα την αντικειμενική αξία ενός χρηματικού ποσού, αλλά τη σημασία ή ωφελιμότητα που έχει το ποσό αυτό για το λήπτη της απόφασης. Ο Bernoulli αρχικά διατύπωσε το νόμο της φθίνουσας οριακής ωφελιμότητας όπου ισχύει ότι η αύξηση στην ωφελιμότητα (u) από προσαύξηση στον ήδη υπάρχοντα πλούτο w είναι πάντα αντιστρόφως ανάλογη προς το w.

Η αρχή της ωφελιμότητας χρησιμοποιείται περισσότερο από κάθε άλλη αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου και αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή των ατόμων απέναντι στην ασφάλιση.

Η αρχή της ωφελιμότητας ορίζει ότι το ασφάλιστρο $\Pi_u\left(X\right)$ είναι αυτό που ικανοποιεί την σχέση

$$\mathrm{E}\left(u\left(X-\Pi_u\left(X\right)\right)\right)=0. \qquad (2.1.5)$$

Από τη θεωρία της προσδοκώμενης ωφελιμότητας των Von Neumann & Morgenstern το 1947 και Savage (1954), πολλές έρευνες έχουν τοποθετηθεί εναντίον αυτής της αρχής όπως ο Allais (1953). Οι περισσότερες αντιδράσεις σχετίζονται με την περιγραφική δυναμική της θεωρίας, δηλαδή, αν στην εμπειρική έρευνα πρακτικά μπορεί να συσχετιστεί και να συμπίπτει η συμπεριφορά των ασφαλιστών κάτω από πλαίσιο των κινδύνων και της αβεβαιότητας με τη θεωρία της προσδοκώμενης ωφελιμότητας.

Πολλές εμπειρικές μελέτες έδειξαν ότι τα άτομα παραβιάζουν συχνά την αναμενόμενη ωφελιμοτητά τους με αποτέλεσμα να προκύψουν διάφορες εναλλακτικές θεωρίες οι οποίες συνήθως ονομάζονται ως θεωρίες μη αναμενόμενης ωφελιμότητας. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εξάρτηση της από τη θεωρία της αναμενόμενης ωφελιμότητας όπου εισήγαγε ο Quiggin (1982) με το πρόσχημα της αναμενόμενης θεωρίας ωφελιμότητας, καθώς και από τον Yaari (1987) για την ειδική περίπτωση των γραμμικών εξισώσεων ωφελιμότητας.

2.1.7. Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΑΡΧΗ

Η Εκθετική αρχή αποτελεί μια ειδική περίπτωση της αρχής της ωφελιμότητας και προκύπτει όταν η συνάρτηση u είναι η εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας $u\left(X\right)=e^{-aX}$.

Η Εκθετική αρχή ορίζει το ασφάλιστρο ως εξής:

$$\Pi_a\left(X\right)=\frac{1}{a}\ln M_X(a), \tag{2.1.6}$$

όπου M_X είναι η ροπογεννήτρια του κινδύνου X.

Σύμφωνα με τους Sundt and Teugels (2004), αυτή η αρχή ικανοποιεί πολλές ιδιότητες των ασφάλιστρων συμπεριλαμβανομένης της προσθετικότητας σε σχέση με τους ανεξάρτητους κινδύνους. Ακόμη ο Dickson (2006) αναφέρει ότι η Εκθετική αρχή είναι αρκετά ελκυστική, δεδομένου ότι βασίζεται στη ροπή δημιουργώντας τη συνάρτηση του κινδύνου X και ως εκ τούτου ενσωματώνει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον κίνδυνο X. Οι Musiela and Zariphopoulou (2002) προσάρμοσαν την Εκθετική αρχή στο πρόβλημα της τιμολόγησης χρηματοοικονομικών τίτλων σε ατελή αγορά. Ενώ, οι Young and Zariphopoulou (2002), Young (2003) και Moore and Young (2003) χρησιμοποίησαν αυτή την αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου στην τιμολόγηση διαφόρων ασφαλιστικών προϊόντων σε μια δυναμική αγορά.

2.1.8. Η ΕΛΒΕΤΙΚΗ ΑΡΧΗ

Η αρχή αυτή εισήχθη από τους Buhlmann, Gagliardi, Gerber and Straub (1977). Αναφέρεται ότι είναι μια γενίκευση της αρχής της μηδενικής ωφελιμότητας, όπου ορίζεται και παράγεται από την αρχή της ωφελιμότητας. Η χρήση της ελβετικής αρχής προϋποθέτει την επιλογή μιας συνεχούς και αυστηρά μονότονης συνάρτησης f που ορίζεται στο R και ενός $p \in [0,1]$ και ορίζει ότι το ασφάλιστρο $\Pi_{f,p}(X)$ είναι ο αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f\left((1-p)\Pi_{f,p}(X)\right)=\mathrm{E}\left(f\left(X-p\Pi_{f,p}(X)\right)\right). \qquad (2.1.7)$$

Το ασφάλιστρο συμβολίζεται με $\Pi_{f,p}(X)$ καθώς εξαρτάται από την επιλογή των f και p. Όταν το $p=0$, η Ελβετική αρχή ανάγεται στην Αρχή της μαθηματικής ελπίδας και όταν $p=1$, ανάγεται σε $f(0)=\mathrm{E}\left(f\left(X-\Pi_{f,p}(X)\right)\right)$, δηλαδή στην αρχή της ωφελιμότητας. Η ελβετική αρχή ικανοποιεί την ιδιότητα της μη αρνητικής τοποθέτησης του ασφαλίστρου $\Pi(X)>\mathrm{E}[X]$ για συνεχείς, αυστηρά αύξουσες συναρτήσεις f και την ιδιότητα της μετάφρασης ίσης διακύμανσης ή του αναλλοίωτου με αναγκαία συνθήκη $\Pi(X)=\frac{1}{a}\ln \mathrm{E}\left(e^{aX}\right)$.

2.1.9. Η ΑΡΧΗ ORLICZ

Η αρχή Orlicz είναι μια πολλαπλασιαστική εναλλακτική λύση για την αρχή της ωφελιμότητας ή της ισοδύναμης ωφελιμότητας (Haezendonck & Goovaerts, 1982). Η χρήση της αρχής Orlicz προϋποθέτει την επιλογή μιας συνεχούς συνάρτησης ϕ με $\phi'(X)>0$ και $\phi''(X)\geq 0$ και ορίζει ότι το ασφάλιστρο $\Pi_{\phi}(X)$ είναι ο αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathrm{E}\left(\phi\left(\frac{X}{\Pi_{\phi}(X)}\right)\right)=\phi(1). \qquad (2.1.8)$$

2.1.10. Η ΑΡΧΗ ESSCHER

Η αρχή υπολογισμού των ασφαλίστρων Esscher εισήχθη για πρώτη φορά από τον Bühlmann (1980) ως μια ειδική περίπτωση μιας αρχής οικονομικού ασφαλίστρου. Εν ολίγοις το ασφάλιστρο Esscher προκύπτει ως βέλτιστη λύση κατά Pareto σε μια περίπτωση αγοράς με ανταλλαγές κινδύνου, όπου όλοι οι κίνδυνοι ήταν στοχαστικά ανεξάρτητοι και όλοι οι φορείς χρησιμοποιούν μια εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας. Ακόμη ο Schmidt (1989) επισημαίνει ότι η αρχή υπολογισμού Esscher μπορεί να λαμβάνεται από την εξίσωση υπολογισμού του ασφαλίστρου της αρχής της Ελβετίας.

Ο κίνδυνος περιγράφεται από μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής F. Η συνάρτηση $\Pi_a(X)$ είναι η συνάρτηση αρχής υπολογισμού των ασφαλίστρων του κινδύνου X ενώ ο παράγοντας λ είναι μεγαλύτερος του μηδενός (Kamps,1998).

Η αρχή Esscher ορίζει το ασφάλιστρο ως εξής:

$$\Pi_a(X) = \frac{\mathrm{E}\left(Xe^{\lambda X}\right)}{\mathrm{E}\left(e^{\lambda X}\right)}, \ \lambda > 0 . \tag{2.1.9}$$

Στην περίπτωση αυτή, μπορεί να θεωρηθεί ότι το ασφάλιστρο ελαχιστοποιεί την αναμενόμενη ζημία από την ακόλουθη συνάρτηση ζημιών:

$$L(X,a) = (X-a)^2 e^{\lambda X}. \tag{2.1.10}$$

Ο Heerwaarden (1989) αναφέρει ότι η αρχή Esscher, παρουσιάζεται ως βελτίωση στην Εκθετική αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου αλλά αποτυγχάνει να ανταποκριθεί σε πολλές από τις βασικές απαιτήσεις των αρχών υπολογισμού του. Παρά το γεγονός ότι αποτελεί ενδιαφέρον μαθηματικά, η χρήση της στις πρακτικές εφαρμογές δεν μπορεί να συστηθεί. Οι Gerber and Goovaerts (1981) συγκρότησαν μια αξιωματική πολιτική μιας πρόσθετης αρχής υπολογισμού του ασφαλίστρου που περιλαμβάνει ένα μίγμα μετασχηματισμών της Esscher. Αναφέρουν ότι ένα μειονέκτημα τόσο των μικτών αλλά και μη μικτών μετασχηματισμών της αρχής Esscher είναι ότι δεν χαρακτηρίζεται ως μονοτονική συνάρτηση.

Η αρχή Esscher έχει αποδειχθεί ότι είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την τιμολόγηση των ασφαλιστικών και χρηματοοικονομικών προϊόντων. Οι Gerber & Shiu (1994, 1996) δείχνουν ότι οι μετασχηματισμοί Esscher μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την τιμολόγηση παράγωγων τίτλων (Laeven and Goovaerts, 2007).

2.1.11. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ

Ας υποθέσουμε ότι ο ασφαλιστής έχει συνάρτηση ωφελιμότητας $u(X)$ τέτοια ώστε $u'(X)>0$ και $u''(X)<0$.

Η αρχή της μηδενικής ωφελιμότητας καθορίζεται από:

$$u(W)=\mathrm{E}\big(u\big(W+\Pi(X)-X\big)\big), \tag{2.1.11}$$

όπου W είναι το αρχικό πλεόνασμα του ασφαλιστή. Έτσι, το ασφάλιστρο θα εξαρτάται γενικά από το πλεόνασμα του ασφαλιστή. Η αρχή της μηδενικής ωφελιμότητας ικανοποιεί την ιδιότητα μη αρνητικής τοποθέτησης χρέωσης του ασφαλίστρου.

2.1.12. Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΜΕΝΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Έστω X μία μη αρνητική και τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F. Η αρχή του προσαρμοσμένου κινδύνου υπολογισμού του ασφαλίστρου καθορίζεται ως:

$$\Pi(X)=\int_0^\infty \big(\Pr(X>x)\big)^{\frac{1}{p}}\,dx=\int_0^\infty \big(1-F(X)\big)^{1-p}\,dx,\ p\geq 1, \tag{2.1.12}$$

όπου ο παράγοντας $p\geq 1$ είναι γνωστός ως ο δείκτης κινδύνου. Η ουσία αυτής της αρχής είναι παρόμοια με εκείνη της αρχής Esscher. Η αρχή Esscher μετατρέπει τα βάρη (weights) της κατανομής του κινδύνου X δίνοντας την αύξηση του βάρους σε (δεξιά) σειρά/ουρά πιθανοτήτων. Η αρχή του προσαρμοσμένου στον κίνδυνο ασφάλιστρο βασίζεται ακολούθως σε έναν παρόμοιο μετασχηματισμό. Οι ιδιότητες της αρχής του προσαρμοσμένου ασφαλίστρου στον κίνδυνο συζητήθηκαν εκτενώς από τον Wang (1995).

2.1.13. Η ΟΛΛΑΝΔΙΚΗ ΑΡΧΗ

Οι Van Heerwaarden και Kaas (1992) εισήγαγαν αυτή την αρχή του ασφαλίστρου, και ο Hürlimann (1994) έκανε την επέκτασή της στην αξιολόγηση και την αντασφάλιση.

Η ολλανδική αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου καθορίζεται ως:

$$\Pi(X) = \mathrm{E}(X) + \beta\, \mathrm{E}\big(X - \mathrm{E}(X)\big),\ 0 \prec \beta \prec 1 \qquad (2.1.13)$$

Άλλα παραδείγματα αρχών υπολογισμού του ασφαλίστρου αλλά και επιθυμητές ιδιότητες για τις αρχές του ασφαλίστρου μπορούν να βρεθούν στην αναλογιστική βιβλιογραφία, ιδίως στους Goovaerts et al. (1984) και στον Bühlmann (1980), ο οποίος θέτει την αρχή Esscher υπολογισμού του ασφαλίστρου με τη χρήση οικονομικών επιχειρημάτων, ενώ ο Gerber (1979) ασχολείται με τις ιδιότητεςτης εκθετικής αρχής με κάθε λεπτομέρεια.

2.2. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ

Όπως αναφέρθηκε, η αντασφάλιση αποτελεί στην ουσία την ασφάλιση της ασφαλιστικής εταιρείας. Μέσω των αντασφαλιστικών συμβάσεων οι ασφαλιστικές εταιρείες εκχωρούν μέρος των κινδύνων που αναλαμβάνουν να αποζημιώσουν μέσω των πρωτασφαλίσεων. Με τη χρήση αυτών των αντασφαλιστικών συμβάσεων μειώνουν το μέγεθος του ρίσκου που έχουν αρχικά αναλάβει και ελέγχουν καλύτερα το ύψος των αποζημιώσεων που θα κληθούν να καταβάλλουν. Σύμφωνα με τον David R. Clark (1996), όπως η κύρια ασφάλιση έτσι και η αντασφάλιση είναι ένας μηχανισμός για τον επιμερισμό των κινδύνων. Μια αντασφαλιστική εταιρεία παίρνει κάποιο τμήμα του κινδύνου που έχει αναλάβει ο πρώτο ασφαλιστής για το ασφάλιστρο που έχει χρεώσει στον πελάτη. Συχνά αναφέρεται μαζί με την αντασφάλιση ο όρος συνασφάλιση όπου με τον όρο αυτό ορίζεται η διαδικασία σύμφωνα προς την οποία ο ασφαλισμένος συνάπτει ταυτόχρονα συμβόλαια με πέραν του ενός ασφαλιστές. Παράδειγμα, εάν συμβεί μία ζημιά ο ασφαλισμένος θα καλυφθεί ταυτόχρονα από τους X, Y, Z ασφαλιστές.

Με την αντασφάλιση η ασφαλιστική εταιρία εξασφαλίζει έναν τρόπο προστασίας μέσα από συγκεκριμένες μεθόδους καθώς εκχωρεί μέρος του κινδύνου που φέρει στους αντασφαλιστές, προστατεύοντας με αυτόν τον τρόπο το χαρτοφυλάκιό της και διατηρώντας ευελιξία στην ανάληψη του κινδύνου και στον χειρισμό της ζημίας.

Κάποια πλεονεκτήματα της αντασφάλισης είναι ότι μειώνει την μεταβλητότητα του οικονομικού κόστους για τις ασφαλιστικές εταιρείες που προκύπτουν από την εμφάνιση συγκεκριμένων ασφαλιστικών απαιτήσεων. Ενισχύει την καινοτομία, τον ανταγωνισμό, και την απόδοση της αγοράς. Η παραχώρηση του μεριδίου της ευθύνης δηλαδή ποσοστό του κινδύνου έχει ως αποτέλεσμα την εξάπλωση του κινδύνου περαιτέρω στο ασφαλιστικό σύστημα. Ακριβώς όπως ένα άτομο ή μια εταιρεία αγοράζει ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο από μια ασφαλιστική εταιρεία, η ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να αγοράσει αρκετά ολοκληρωμένη αντασφάλιση από έναν ή περισσότερους αντασφαλιστές (Patrik , 2006).

Η αντασφαλιστική κάλυψη επιτρέπει σε έναν ασφαλιστή να καταγράψει υψηλότερα όρια στην πολιτική που ακολουθεί διατηρώντας παράλληλα τον κίνδυνο σε ένα επίπεδο που μπορεί να διαχειριστεί. Έτσι, οι μικρότερες ασφαλιστικές εταιρείες μπορούν να ανταγωνιστούν με τις μεγαλύτερες ασφαλιστικές εταιρείες, και να ακολουθήσουν στρατηγικές πέρα από την οικονομική ικανότητα τους. Η Αντασφάλιση σταθεροποιεί τα οικονομικά αποτελέσματα, μπορεί να αλλάξει το χρονοδιάγραμμα των εσόδων, να ενισχύσει το πλεόνασμα και να βελτιώσει διάφορους χρηματοοικονομικούς δείκτες με τους οποίους οι ασφαλιστές κρίνονται (Patrik, 2006).

Η αντασφάλιση βοηθά στην προστασία των ασφαλιστών από τις απρόβλεπτες ή έκτακτες ζημιές, επιτρεποντάς τους να περιορίσουν τους κινδύνους τους. Για παράδειγμα, μια καταστροφική πυρκαγιά σε μια βιομηχανική επιχείρηση θα μπορούσε να καταστρέψει οικονομικά τον ασφαλιστή της επιχείρησης. Με την αντασφάλιση κανένας ασφαλιστής δεν επιβαρύνεται με μεγαλύτερο οικονομικό βάρος από αυτό που μπορεί να πληρώσει (Munich Reisurance America, 2010).

Σε πρώτη φάση η ασφαλιστική εταιρεία θα προσπαθήσει να διασφαλίσει τη θέση της από την ίδια την εγγραφή με μια ποικιλία ασφαλιστικών συμβάσεων χρησιμοποιώντας ενδεχομένως μια πληθώρα αντασφαλιστικών εταιρειών. Ως εκ τούτου, η πρώτη κίνηση της ασφαλιστικής εταιρείας για έναν ασφαλισμένο πελάτη γίνεται με την καταβολή ειδικού ασφαλίστρου σε μια εταιρεία αντασφάλισης σε αντάλλαγμα για την πολιτική κάλυψης της αντασφαλισμένης ποσότητας που θα ακολουθήσει. Για την πρωτασφαλίστρια είναι προφανές ότι δεν έχει νόημα να πωλήσει το σύνολο του χαρτοφυλακίου της σε μια εταιρεία αντασφάλισης, διότι τότε θα χάσει όλα τα έσοδα από τα ασφάλιστρα του χαρτοφυλακίου της. Η πρωτασφαλίστρια πρέπει να αναλογιστεί πώς θέλει το χαρτοφυλακιό της και πώς θέλει να κατανεμηθεί ο κίνδυνος μεταξύ της ίδιας και του αντασφαλιστή (Ladoucette and Teugels, 2004).

Συχνά αναφέρεται ότι η πρακτική της αντασφάλισης/συνασφάλισης δεν συνίσταται σε μικρούς και μεσαίους κινδύνους καθώς αυτό θα σήμαινε:

- Αύξηση του διαχειριστικού κόστους σε μικρούς και μεσαίους κινδύνους.
- Αδυναμία αντιμετώπισης συσσώρευσης πολλών ζημιών.
- Μείωση της ποιότητας των προσφερόμενων υπηρεσιών στους ασφαλιζομένους.

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται οι αντασφαλιστικές συμβάσεις, τα γενικά χαρακτηριστικά τους καθώς και τα είδη τους. Οι αντασφαλιστικές συμβάσεις διακρίνονται σε αναλογικές και μη-αναλογικές. Οι αναλογικές συμβάσεις αντασφάλισης διακρίνονται στην Quota Share και στην αναλογική κάλυψη πλεονάσματος (Surplus), και καθορίζονται με την κάλυψη από τον αντασφαλιστή μιας συμφωνημένης αναλογίας (ποσοστό ή ποσό) για κάθε κίνδυνο. Οι μη-αναλογικές καλύψεις διακρίνονται στην υπερβάλλοντος ζημίας (Excess of loss) και στην ανακοπής ζημίας (Stop loss), όπου ο αντασφαλιστής καλύπτει ποσά προσαρμοσμένα σε μεμονωμένους κινδύνους ή γεγονότα ή ολόκληρου του χαρτοφυλακίου με υποθέσεις υπαρκτών ή δυνητικών γεγονότων. Ακόμη γίνεται αναφορά και σε άλλες συμβάσεις που υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία οι οποίες είναι όμως λιγότερο διαδεδομένες.

2.2.1. QUOTA SHARE (Αναλογική Κάλυψη)

Η Quota share είναι είδος αναλογικής αντασφάλισης σύμφωνα με το οποίο τα δύο μέρη συμφωνούν ότι η εκχωρήτρια εταιρεία θα κρατάει για λογαριασμό της ένα σταθερό ποσοστό από κάθε κίνδυνο που έχει αναλάβει (ο οποίος μπορεί να εκφράζεται είτε από το ασφαλισμένο κεφάλαιο είτε από το ασφάλιστρο) και θα εκχωρεί το υπόλοιπο στον ή στους αντασφαλιστή/τες. Με την ίδια σταθερή αναλογία επιμερίζονται αντίστοιχα τα πρωτογενή ασφάλιστρα και οι τυχόν ζημιές. Συνήθως το όριο κάλυψης για κάθε κίνδυνο υπόκειται σε ένα ανώτατο ποσό το οποίο συμφωνείται από τα δύο μέρη (Sundt and Teugels, 2004).

Για την κατανόηση λειτουργίας της αντασφάλισης, ορίζεται αρχικά ως X η συνολική ζημιά που είναι μια τυχαία και μη – αρνητική μεταβλητή (χωρίς τη χρήση της αντασφάλισης) την οποία καλείται να αποζημιώσει η ασφαλιστική εταιρεία. Τότε κάτω από το αντασφαλιστικό σχήμα quota share με συντελεστή $c \in [0,1]$, οι αποζημιώσεις για την ασφαλιστική εταιρεία και για την αντασφαλιστική μπορούν να εκφραστούν αντίστοιχα ως:

$$X_{I_{qs}} = (1-c)X \text{ και } X_{R_{qs}} = cX \text{ ,}$$

όπου $X_{I_{qs}}$ είναι η ζημιά που καλείται να πληρώσει η ασφαλιστική εταιρεία και $X_{R_{qs}}$ είναι η ζημιά που θα πληρώσει η αντασφαλίστρια. Με άλλα λόγια η ασφαλιστική μεταφέρει το κίνδυνο κρατώντας το μερίδιο $1-c$ από την συνολική αποζημίωση, και η αντασφαλίστρια είναι υπεύθυνη για την αποπληρωμή του υπόλοιπου μεριδίου c. Παρατηρούμε ότι η ειδική περίπτωση όπου το $c=0$ ορίζει την περίπτωση όπου ο ασφαλιστής κρατά όλο το μέρος των αποζημιώσεων, και την περίπτωση όπου $c=1$ όπου ο ασφαλιστής εκχωρεί όλο το μέρος των αποζημιώσεων στον αντασφαλιστή.

Για παράδειγμα μια εταιρεία μπορεί να επιλέξει να καλύψει με αντασφαλιστική σύμβαση Quota Share έναν κλάδο ασφαλειών, κρατώντας το 20% των κινδύνων και εκχωρώντας το 80% με ανώτατο όριο για το 100% κάθε κινδύνου τα 31.847.000 ευρώ.

Κάποια μειονεκτήματα της Quota share είναι τα εξής:

- Εκχώρηση ίδιας αναλογίας σε οποιοδήποτε κίνδυνο χωρίς διάκριση.
- Εκχώρηση ίδιας αναλογίας σε κάθε κίνδυνο ανεξαρτήτως μεγέθους.

Δηλαδή, στην συγκεκριμένη περίπτωση ο αντασφαλιστής συμμετέχει σε όλους τους κινδύνους και όχι σε μέρος αυτών.

2.2.2. ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΚΑΛΥΨΗ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ (SURPLUS)

Ο τύπος αυτός της αναλογικής αντασφάλισης είναι συνδυασμός της Quota Share και της κάλυψης υπερβάλλοντος ζημίας (excess of loss) που θα δούμε στην επόμενη ενότητα. Η εκχωρήτρια εταιρεία, αφού καθορίσει την κράτησή της στο επιθυμητό ύψος και την εκφράσει σαν ένα απόλυτο μέγεθος ασφαλιζόμενου ποσού (π.χ. 31.847.000 ευρώ), εκχωρεί το υπερβάλλον ποσό που συμφωνείται να βρίσκεται μέσα στα όρια χωρητικότητας της σύμβασης, όπως αυτά καθορίζονται από την συμφωνία των δύο μερών. Εάν τώρα εκφράσουμε την κράτηση σαν ποσοστό του συνολικού ασφαλιζόμενου ποσού βρίσκουμε το ποσοστό με βάση το οποίο επιμερίζονται τα ασφάλιστρα και οι ζημιές. Η συμφωνία ως προς την αναλογία με την οποία επιμερίζονται τα ασφάλιστρα και οι ζημίες γίνεται από την αρχή της σύμβασης μεταξύ της ασφαλιστικής και αντασφαλιστικής εταιρείας (Sundt and Teugels, 2004). Στο παρακάτω παράδειγμα που παραθέτουμε η αναλογία είναι 1:8 για την Ασφαλιστική Εταιρεία και 7:8 για την Αντασφαλιστκή Εταιρεία:

Έστω ότι μια Ασφαλιστική Εταιρία Α έχει Surplus σύμβαση με αντασφαλιστική εταιρία Β, σύμφωνα με την οποία: η μέγιστη κράτηση από την Α ισούται προς € 100.000 ασφαλισμένο κεφάλαιο και ο αριθμός των τμημάτων της συνολικής κάλυψης ισούται με 10. Το μέγιστο ποσό κράτησης από την Α συμφωνείται και από τα δύο μέρη (Α και Β) που υπογράφουν τη σύμβαση, στην αρχή αυτής και μπορεί να θεωρηθεί ως μια εφαρμογή της κάλυψης υπερβάλλοντος ζημίας (excess of loss) για ποσό μεγαλύτερο από € 100.000 (βλ. Παράγραφο 2.2.3). Στην επέλευση κάποιου κινδύνου, η Α κρατά € 50.000 του ασφαλισμένου κεφαλαίου. Το συνολικό ασφαλισμένο κεφάλαιο για τον κίνδυνο ισούται προς € 400.000 και ο ασφαλισμένος πληρώνει ασφάλιστρο ίσο προς € 2.000.Ο ασφαλιστής κρατά €50.000. Συνεπώς στην σύμβαση με τον αντασφαλιστή ορίζεται ποσό ίσο προς € 400.000 μείον € 50.000 = € 350.000. Ο Α έχει ιδία κράτηση ποσό ίσο προς € 50.000 και εισπράττει ασφάλιστρο ίσο προς € 250 (αναλογία 1:8 € 2.000/8=250 εφόσον € 400.000/€ 50.000=8). Ο Β αναλαμβάνει ποσό ίσο προς € 350.000 και εισπράττει ασφάλιστρο ίσο προς € 1.750 (αναλογία 7:8).

Το συγκεκριμένο είδος αντασφάλισης χρησιμοποιείται για εκείνη την κατηγορία των κινδύνων το μέγεθος των οποίων υπόκειται σε μεγάλη διασπορά (από εκείνη που είναι δυνατόν να εκτιμηθεί αρχικά). Σαν αποτέλεσμα είναι κατάλληλη για κατηγορίες κινδύνων σε χώρους που συνδέονται με υψηλή κυριότητα (π.χ. Ναυτιλία, Αεροπορία). Δεν είναι κατάλληλη για καλύψεις σε ατομικό επίπεδο διότι σε αυτές, τόσο το ποσό της κάλυψης όσο και αυτό των ασφαλίστρων είναι χαμηλό συγκριτικά με τους πόρους του ασφαλιστή.

Το συγκεκριμένο είδος αντασφάλισης καθιστά ικανό τον ασφαλιστή να καλυτερεύσει σημαντικά την εμπειρία του στις κατηγορίες των μεγάλων κινδύνων προκειμένου να κρατά κινδύνους που επιφέρουν ζημιές μικρής διασποράς και να εκχωρεί εκείνους που επιφέρουν ζημιές μεγάλης διασποράς. Παρόλα αυτά υπάρχει μεγάλος βαθμός δυσκολίας στην διαχείρισή του καθώς θα πρέπει να υπάρχει ξεχωριστή πρόσβαση και καταγραφή στο ποσό κάθε κινδύνου που εκχωρείται.

2.2.3. ΚΑΛΥΨΗ ΥΠΕΡΒΑΛΛΟΝΤΟΣ ΖΗΜΙΑΣ (EXCESS OF LOSS)
(Μη- Αναλογική Κάλυψη)

Σε αυτό το είδος μη-αναλογικής αντασφάλισης ο αντασφαλιστής αναλαμβάνει να αποζημιώσει την εκχωρήτρια εταιρία για ζημιογόνα γεγονότα που θα συμβούν στο αντασφαλιζόμενο χαρτοφυλάκιο και οι αποζημιώσεις θα ξεπερνούν ένα συμφωνηθέν ύψος ποσού (Sundt and Teugels, 2004).

Για παράδειγμα, η εκχωρήτρια ασφαλιστική εταιρεία καθορίζει ότι το ποσό το οποίο μπορεί η ίδια να αντέξει για κάθε ζημιογόνο γεγονός είναι π.χ. 6000 ευρώ και συνάπτει αντασφαλιστική συμφωνία βάσει της οποίας ο αντασφαλιστής (ή οι αντασφαλιστές εφόσον είναι περισσότεροι του ενός) θα πληρώσει τις ζημιές τα ποσά των οποίων υπερβαίνουν τα 6000 ευρώ. Επομένως εάν η εκχωρήτρια εταιρία έχει ζημία ύψους 7000 ευρώ θα πληρώσει η ίδια 6000 ευρώ και θα εισπράξει από τον αντασφαλιστή 1000 ευρώ. Εάν όμως το ποσό της ζημίας είναι 5500 ευρώ ολόκληρο το ποσό θα επιβαρύνει την εκχωρήτρια εταιρεία, αφού αυτό είναι μικρότερο των 6000 ευρώ, ποσό το οποίο έχει τεθεί ως όριο κράτησης της εκχωρήτριας εταιρίας.

Ο ουσιαστικός λόγος παροχής του συγκεκριμένου είδους αντασφάλισης αφορά στο να επιτρέπει σε μια ασφαλίστρια επιχείρηση να αναλαμβάνει την κάλυψη κάποιου μεγάλου κινδύνου. Η έννοια του μεγέθους βέβαια καθορίζεται με βάση το περιθώριο φερεγγυότητας της ασφαλίστριας επιχείρησης και το ποσό των ετησίων ασφαλίστρων.

ΤΥΠΟΙ EXCESS OF LOSS

1) Working covers

Με τον όρο working covers νοείται εκείνη η excess of loss αντασφάλιση όπου ο πρωτασφαλιστής και ο αντασφαλιστής δέχονται ότι η αντασφαλιστική συμφωνία θα χρησιμοποιηθεί με σχετική συχνότητα και επομένως φτιάχνεται με σκοπό να καλύψει αντασφαλιστικά τους μάλλον συνηθισμένους κινδύνους που αναλαμβάνονται από την εκχωρήτρια εταιρία. Κατά συνέπεια λοιπόν το ποσό της προτεραιότητας της εκχωρήτριας εταιρίας τίθεται σε σχετικά χαμηλό ύψος, έτσι ώστε εύκολα να μπορεί να ξεπεραστεί από αρκετές ζημιές. Επομένως ο αντασφαλιστής είναι αρκετά εκτεθειμένος σε πιθανές ζημιές που σχετίζονται με έναν μεμονωμένο κίνδυνο ή ένα ασφαλιστήριο.

Υπάρχουν δύο τρόποι έκφρασης ενός working cover,

I. **Κατά κίνδυνο (per risk)**, όπου ο αντασφαλιστής θα πληρώσει για ζημίες που υπερβαίνουν το συμφωνηθέν ποσό της προτεραιότητας της εκχωρήτριας εταιρίας, αλλά ο υπολογισμός της προτεραιότητας και του ποσού υπέρβασης παίρνει υπόψη κάθε ζημία σε κάθε χωριστό κίνδυνο.

II. **Κατά γεγονός (per event ή per occurrence)**, όπου εμπλέκονται πολλοί κίνδυνοι. Ο αντασφαλιστής θα πληρώσει μόνο εφόσον το άθροισμα των ποσών των ζημιών που σχετίζονται με το ίδιο γεγονός (έχουν την ίδια αιτία) υπερβαίνει το συμφωνηθέν ποσό της προτεραιότητας. Δηλαδή, για την περίπτωση της συσσώρευσης κινδύνων από ένα συγκεκριμένο γεγονός.

2) Catastrophe covers

Ο τύπος της excess of loss αντασφάλισης που ονομάζεται κάλυψη καταστροφών (Catastrophe cover) χρησιμοποιείται στην πλέον ακραία περίπτωση όπου ένα γεγονός μπορεί να είναι καταστροφικό προκαλώντας εκατοντάδες ακόμα και χιλιάδες απώλειες αιτία διαφορετικών ασφαλίσιμων κινδύνων. Έτσι, η εκχωρήτρια εταιρία και ο αντασφαλιστής δέχονται ότι η αντασφαλιστική συμφωνία θα χρησιμοποιηθεί μόνο σε περίπτωση που θα συμβεί ένα εξαιρετικά ζημιογόνο γεγονός. Τέτοια γεγονότα αποτελούν συνήθως τα ακραία φυσικά φαινόμενα όπως ο σεισμός, η πλημμύρα, η ανεμοθύελλα, η παγωνιά. Αποτελούν επίσης καταστάσεις προκαλούμενες από ανθρώπινο παράγοντα όπως η ελαττωματική παραγωγή φαρμάκων, η μόλυνση από τοξικά απόβλητα. Υπάρχει ωστόσο αυστηρά καθορισμένο όριο στον αριθμό των καταστροφικών ζημιών που δύνανται να λάβουν χώρα κάτω από μία σύμβαση Catastrophe Excess of Loss. Συχνά, μόνον δύο τέτοια γεγονότα επιτρέπονται[1].

2.2.4. ΑΝΑΚΟΠΗ ΖΗΜΙΑΣ (STOP LOSS) (Μη- Αναλογική Κάλυψη)

Ο ρόλος αυτού του αντασφαλιστικού σχήματος είναι η προστασία του ετήσιου αποτελέσματος ενός χαρτοφυλακίου κινδύνων έναντι πιθανών αρνητικών αποκλίσεων από το μέσο όρο, που οφείλονται σε μια σημαντική αύξηση τόσο του αριθμού

[1]Πηγή: http://www.actuar.aegean.gr/notes/Antasfalisi_sim1.pdf

(συχνότητας) όσο και του μεγέθους των ζημιών. Κάποιες φορές, μια συγκεκριμένη κατηγορία ασφαλιστικών εργασιών συντελεί σε μεγάλες αποκλίσεις στο επίπεδο του συνόλου των ζημιών που πρέπει να πληρωθούν στο έτος (και συνεπώς στην λογιστική εγγραφή του αποτελέσματος από την ανάληψη των εργασιών στην συγκεκριμένη κατηγορία). Η ασφαλιστική επιχείρηση, προκειμένου να καλυφθεί για τις συγκεκριμένες εργασίες της, αντασφαλίζει με μη αναλογική αντασφάλιση το συνολικό κόστος των αποζημιώσεων που υπερβαίνει κάποιο συμφωνηθέν ποσό (Sundt and Teugels, 2004). Στην συγκεκριμένη περίπτωση το συνολικό κόστος των αποζημιώσεων σχετίζεται με το συνολικό λογαριασμό μιας 12 μηνης περιόδου.

Η Stop loss αντασφάλιση είναι ένα είδος μη αναλογικής αντασφάλισης/κάλυψης και λειτουργεί με παρόμοιο τρόπο με την Excess of Loss. Ενώ με την Excess of Loss ο αντασφαλιστής αναλαμβάνει να αποζημιώσει την εκχωρήτρια εταιρία με ποσά για μεμονωμένες ζημιές είτε ανά κίνδυνο είτε κατά γεγονός, η stop-loss καλύπτει ζημιές που σχετίζονται με το συνολικό ποσό των αποζημιώσεων σε ένα έτος. Μπορεί να προσφέρει προστασία έναντι αύξησης των ζημιών σε μία ή περισσότερες ασφαλιστικές κατηγορίες μιας εταιρείας

Η Stop loss αντασφάλιση είναι η βέλτιστη λύση μεταξύ όλων των τύπων αντασφάλισης κατά την έννοια ότι δίνει, για ένα καθορισμένο κίνδυνο ασφαλίστρου τη μικρότερη διακύμανση για τις καθαρές κρατήσεις της εταιρείας, όπως αναφέρουν οι Sundt and Teugels (2004). Συνήθως δίνει πολύ μεγαλύτερη μείωση της διακύμανσης σε σχέση με άλλες μορφές αντασφάλισης κρατώντας σε ένα σταθερό επίπεδο τον κίνδυνο των ασφάλιστρων. Επίσης δίνει μια πολύ καλή εγγύηση κατά της χρεοκοπίας αν η εκχωρήτρια εταιρεία είναι σε θέση να πληρώσει έως το ποσό της ίδιας κράτησης, πέρα του οποίου ξεκινάει να εφαρμόζεται η Stop Loss αντασφάλιση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο} - ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ

3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρείας που μελετάμε, εστιάζοντας στα βασικά χαρακτηριστικά των ζημιών που θέλει να καλύψει η εταιρεία με αντασφάλιση. Οι απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου που μελετάμε αφορούν νοσοκομειακές καλύψεις με απεριόριστη κάλυψη και πιο συγκεκριμένα τα έξοδα που καλύπτει η ασφαλιστική εταιρεία από την εισαγωγή των ασφαλισμένων σε νοσοκομεία Η περίοδος που μελετάται είναι τριών ετών, συγκεκριμένα από το 2010 έως και το 2012. Πριν εξετάσουμε τις στρατηγικές βέλτιστης αντασφάλισης οι οποίες παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 5, οφείλουμε να ερευνήσουμε τα χαρακτηριστικά του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρείας και ειδικότερα των ζημιών που θέλουμε να καλύψουμε. Παρουσιάζονται και αναλύονται τα στατιστικά στοιχεία των συνολικών ζημιών αλλά και η συχνότητα των απαιτήσεων. Γίνονται στατιστικοί και γραφικοί έλεγχοι κανονικότητας των ζημιών. Εφαρμόζονται έλεγχοι καλής προσαρμογής στο σύνολο των ζημιών αλλά και μεμονωμένα των χαμηλών και υψηλών ζημιών, αναζητώντας την βέλτιστη κατανομή που προσαρμόζεται στα δεδομένα κάθε φορά. Ο διαχωρισμός των ζημιών γίνεται ως εξής, οι χαμηλές ζημιές οριοθετούνται μικρότερες του ποσού των 25.000 ευρώ (<25.000), ενώ οι μεγάλες έχουν κατώτερο όριο τις 25.000 ευρώ (≥ 25.000).

3.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΑ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΚΑΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

Τα βασικά χαρακτηριστικά του χαρτοφυλακίου παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 3.2: Βασικά στοιχεία της ασφαλιστικής εταιρείας

Αρχικό Απόθεμα	Έξοδα	Συνολικές Αποζημιώσεις	Συνολικές Ζημιές
3.000.000,00 €	750.000,00 €	3.993.386,01 €	987

Το αρχικό απόθεμα της εταιρείας όλης της περιόδου είναι 3.000.000,00 €, τα έξοδα όλης της περιόδου είναι 750.000,00€, οι συνολικές ζημιές της περιόδου 3.993.386,01€ και ο αριθμός των απαιτήσεων είναι 987. Αυτά τα στοιχεία χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των μέσων μηνιαίων αντίστοιχων ποσών.

3.2.1 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ (LOSS AMOUNT)

Σε αυτή την ενότητα θέλουμε να δούμε πώς κατανέμονται οι συνολικές ζημίες και τα στατιστικά χαρακτηριστικά τους. Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα gretl[2] πήραμε τα ακόλουθα στατιστικά χαρακτηριστικά του συνόλου των ζημιών.

Πίνακας 3.2.1: Στατιστικά Χαρακτηριστικά του Χαρτοφυλακίου

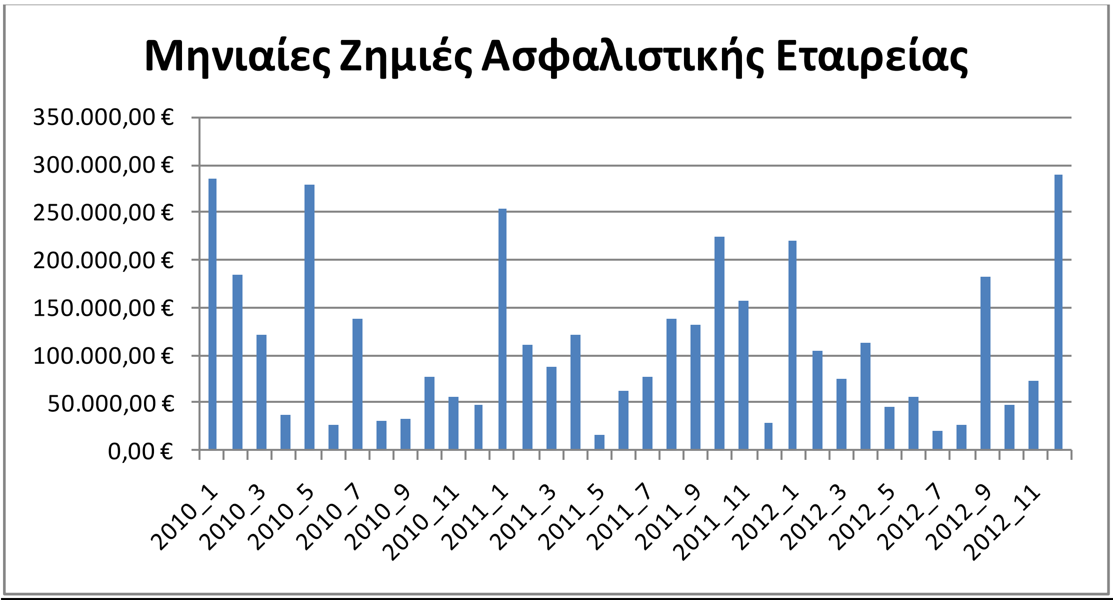
Μέση Τιμή	4.045,95 €
Τυπική Απόκλιση	12.580,15 €
Διασπορά	158.260.450,19
Ασυμετρία	6,07
Κύρτωση	59,04
Ελάχιστη Τιμή	3,86 €
Μέγιστη Τιμή	180.663,25 €

Από τον Πίνακα 3.2.1 βλέπουμε ότι η μέση τιμή των ζημιών της ασφαλιστικής εταιρείας είναι 4.045,954 ευρώ. Παρατηρούμε την πολύ μεγάλη διακύμανση των ζημιών από τη μέση τιμή γεγονός που μπορεί να παραπέμπει στην μη ομοιομορφία των ζημιών και μη κανονικότητα. Ακόμη, βλέπουμε ότι η ελάχιστη ζημιά είναι 3,86 ευρώ ενώ η μεγαλύτερη 180.663,25 ευρώ, δηλαδή είναι πολύ μεγάλο το εύρος των ποσών των ζημιών. Η τυπική απόκλιση είναι της τάξεως του 12.580,15 που δείχνει έναν σχετικά μεγάλο κίνδυνο.

[2] Το gretl είναι ένα οικονομετρικό λογισμικό με εύκολες εφαρμογές σε τουλάχιστον 6 γλώσσες όπως και στα Ελληνικά. Έχει καλή ποιότητα γραφημάτων και υποδειγμάτων, ενώ είναι ελεύθερο στο διαδίκτυο.

3.2.2 ΜΗΝΙΑΙΕΣ ΖΗΜΙΕΣ ΤΗΣ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται οι μηνιαίες αθροιστικές ζημιές όλης της περιόδου. Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζονται οι συνολικές μηνιαίες ζημιές για την περίοδο 2010 με 2012 με σκοπό να δούμε τις απώλειες της εταιρείας ανά μήνα.



Γράφημα 3.2.2 Μηνιαίες ζημιές ασφαλιστικής εταιρείας για την περίοδο 2010 με 2012.

Στο Γράφημα 3.2.2 παρατηρείται ότι τα υψηλότερα ποσά αποζημιώσεων ήρθαν στην ασφαλιστική εταιρεία το έτος 2010 όπου τα συνολικά μηνιαία ποσά (Μαίου, Οκτωβρίου) ξεπερνούν τις 250.000 ευρώ. Οι μήνες με τις μεγάλες συνολικές απαιτήσεις φαίνεται να επηρέαζονται από κάποιες ιδιαίτερα μεγάλες ζημιές, οι οποίες όμως δεν εμφανίζονται με περιοδικότητα. Ενώ για κάποιους μήνες του έτους 2011 και 2012 τα ποσά είναι μικρά και δεν φαίνεται να ξεπερνούν τις 50.000 ευρώ. Βλέπουμε κι εδώ τις μεγάλες αποκλίσεις των ζημιών όπου κάποιους μήνες είναι ελάχιστες ενώ κάποιους άλλους πολύ μεγάλες διακινδυνεύοντας την λειτουργία της αναλαμβάνοντας μεγάλους κινδύνους.

3.2.3 ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ (FREQUENCY DISTRIBUTION)

Θέλουμε να δούμε επίσης τη συχνότητα των απαιτήσεων και σε ποιο εύρος κυμαίνονται. Όπως αναφέραμε παραπάνω οι απαιτήσεις της συνολικής περιόδου είναι 987. Χρησιμοποιώντας πάλι το πρόγραμμα gretl και την εφαρμογή frequency distribution παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα οι συχνότητες της κατανομής των ζημιών.

Πίνακας 3.2.3: Συχνότητα των απαιτήσεων

	Interval			midpt	frequency	rel.	cum.
1		<	6.452,00	3.226,00	866	87,74%	87,74%
2	6.452,00	-	12.900,00	9.678,00	8	0,81%	88,55%
3	12.900,00	-	19.360,00	16.130,00	30	3,04%	91,59%
4	19.360,00	-	25.810,00	22.580,00	33	3,34%	94,93%
5	25.810,00	-	32.260,00	29.030,00	19	1,93%	96,86%
6	32.260,00	-	38.710,00	35.490,00	10	1,01%	97,87%
7	38.710,00	-	45.160,00	41.940,00	6	0,61%	98,48%
8	45.160,00	-	51.620,00	48.390,00	3	0,30%	98,78%
9	51.620,00	-	58.070,00	54.840,00	1	0,10%	98,89%
10	58.070,00	-	64.520,00	61.300,00	2	0,20%	99,09%
11	64.520,00	-	70.970,00	67.750,00	4	0,41%	99,49%
12	70.970,00	-	77.430,00	74.200,00	1	0,10%	99,59%
13	77.430,00	-	83.880,00	80.650,00	0	0,00%	99,59%
14	83.880,00	-	90.330,00	87.100,00	0	0,00%	99,59%
15	90.330,00	-	96.780,00	93.560,00	1	0,10%	99,70%
16	96.780,00	-	103.200,00	100.000,00	0	0,00%	99,70%
17	103.200,00	-	109.700,00	106.500,00	1	0,10%	99,80%
18	109.700,00	-	116.100,00	112.900,00	1	0,10%	99,90%
19		>=	180.700,00	183.900,00	1	0,10%	100,00%

Στον Πίνακα 3.2.3 βλέπουμε τον διαχωρισμό των ποσών των ζημιών σε 19 κλάσεις. Παρατηρείται ότι από τις 987 απαιτήσεις της ασφαλιστικής εταιρείας οι 866 ανήκουν στην πρώτη κλάση και είναι μικρότερες του ποσού των 6.452 ευρώ, με μέση τιμή τις 3.226 ευρώ. Έτσι το 87,74% του αριθμού των απαιτήσεων είναι μικρότερες του ποσού των 6.452 ευρώ. Ακολουθούν 8 απαιτήσεις στη δεύτερη κλάση μεταξύ 6.452,00 με 12.900,00 ευρώ, 30 απαιτήσεις στην τρίτη κλάση δηλαδή το 3,04% του συνολικού αριθμού των απαιτήσεων κυμαίνονται από 12.900,00 έως 19.360,00 κ.οκ. Για το διάστημα από 116.100,00 ευρώ έως 180.700,00 ευρώ δεν υπάρχει καμία απαίτηση. Ενώ, στην τελευταία κλάση υπάρχει μια απαίτηση άνω των 180.700,00 ευρώ η οποία θεωρείται ακραία τιμή της κατανομής.

Επειδή το μεγαλύτερο μέρος των ζημιών του χαρτοφυλακίου αποτελείται από ζημίες μικρότερες των 25.000 ευρώ (937 ζημιές), χωρίσαμε το χαρτοφυλάκιο σε χαμηλές ζημιές ($<$25.000 ευρώ) και υψηλές ζημιές ($\geq$25.000 ευρώ), την ανάλυση των οποίων θα δούμε αναλυτικά στην Ενότητα 3.3.3.

3.3 ΕΛΕΓΧΟΙ ΚΑΛΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ (GOODNESS OF FIT TESTS)

3.3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτή την ενότητα γίνεται μια προσπάθεια ανάδειξης της κατανομής που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα των ζημιών, όλης της περιόδου, του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρείας (loss amount). Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται είναι η γραφική ανάλυση του ιστογράμματος, των P-P Plot και Q-Q plot, και των γραφικών παραστάσεων διάφορων κατανομών που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία με τη χρήση των Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-Squared test.

Οι έλεγχοι καλής προσαρμογής είναι οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται με σκοπό την εύρεση και τελικά την προσαρμογή της κατανομής που ταιριάζει καλύτερα σε κάποια δεδομένα. Η προσαρμογή κατανομής είναι η διαδικασία της επιλογής μιας στατιστικής κατανομής που ταιριάζει περισσότερο σε ένα σύνολο δεδομένων μιας τυχαίας διαδικασίας. Με άλλα λόγια, αν υπάρχουν κάποια τυχαία διαθέσιμα στοιχεία, και θέλουμε να δούμε ποια συγκεκριμένη κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τα δεδομένα, κάνουμε τους ελέγχους της καλής προσαρμογής. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι:

- Περιγραφικά μέτρα: μέση τιμή, διάμεσος, εύρος, διακύμανση, τυπική απόκλιση.
- Έλεγχοι Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk: Αυτές οι μέθοδοι ελέγχουν κατά πόσο μια κατανομή είναι σημαντικά διαφορετική από μια άλλη (π.χ. την κανονική κατανομή) και παράγουν μια απάντηση, ναι ή όχι σε κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας. Συνήθως χρησιμοποιείται ο έλεγχος Shapiro-Wilk, εάν το μέγεθος του δείγματος είναι μεταξύ 3 και 2000 και το τεστ Kolmogorov-Smirnov, εάν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγαλύτερο από 2000. Δυστυχώς, σε ορισμένες περιπτώσεις, και οι δύο έλεγχοι μπορούν να δώσουν παραπλανητικά αποτελέσματα, και πολλοί στατιστικοί προτιμούν τις γραφικές παραστάσεις (Stephens, 1974).

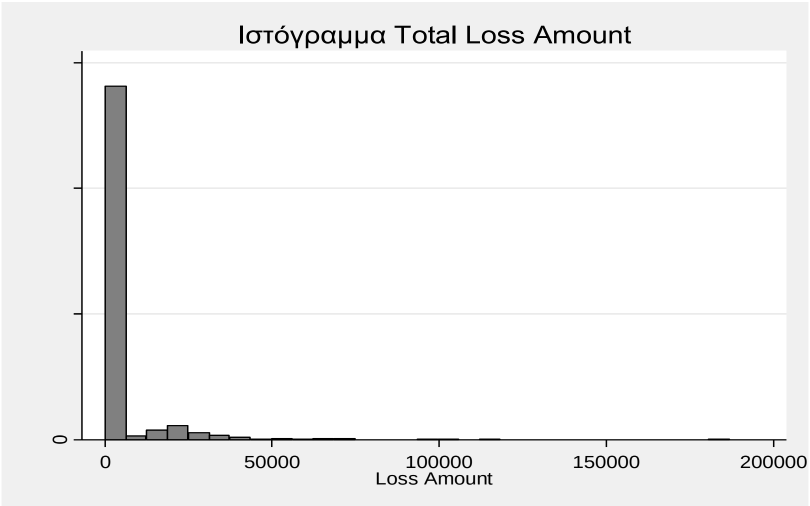
- Γραφική ανάλυση: ιστόγραμμα, P-PPlot και Q-QPlot

Συχνά αναφέρεται ότι οι μικρές και μεσαίες ζημιές είναι το «σώμα» της κατανομής και οι μεγάλες απώλειες η «ουρά».Στην πράξη οι κακές προσαρμογές (badfit) ορισμένες φορές μπορεί να αγνοηθούν. Αν εστιάσουμε κυρίως στη μεγάλη πλειοψηφία των μικρών και μεσαίων απωλειών μπορούμε να δεχτούμε συχνά μια κακή προσαρμογή στην «ουρά» και να συμβιβαστούμε π.χ. με τη λογαριθμοκανονική κατανομή. Θα μπορούσε να έχει μια πολύ ελαφριά ουρά, έτσι ώστε να υποτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή, ωστόσο, συχνά οι μεγάλες απώλειες είναι πολύ σπάνιο να έχουν μικρές αριθμητικές επιπτώσεις. Αντίθετα, σε περίπτωση που είμαστε συγκεντρωμένοι στις ακραίες τιμές χρειαζόμαστε ένα ακριβές μοντέλο για τις μεγάλες απώλειες. Σε τέτοιες περιπτώσεις θα μπορούσε να λειτουργήσει το μοντέλο της κατανομής για τις μικρότερες απώλειες λανθασμένα.

Γίνεται όλο και πιο δημοφιλής η μελέτη της αντασφάλισης σε διάφορα επίπεδα των παρακρατήσεων για μια πολιτική, ή για ένα χαρτοφυλάκιο που θέλουν να αντασφαλίσουν. Για τις εν λόγω αναλύσεις κάποιος χρειάζεται ένα μοντέλο κατανομής πολύ ακριβές, τόσο στην περιοχή μικρών απωλειών όσο και στην περιοχή των μεγάλων ζημιών, των οποίων η επίδραση στην αναμενόμενη ζημία γίνεται υψηλότερη όσο υψηλότερη επιλέγεται η παρακράτηση των ζημιών. Τέτοιες καταστάσεις απαιτούν από τους ασφαλιστές να εγκαταλείψουν τα μοντέλα κατανομής που γνωρίζουν καλύτερα και να προχωρήσουν σε πιο σύνθετα. Δεν υπάρχει καμία έλλειψη τέτοιων σύνθετων μοντέλων, ούτε στη βιβλιογραφία, ούτε σε πακέτα λογισμικού. Για παράδειγμα, οι Klugman et al. το 2008, παρέχουν γενικεύσεις της κατανομής Gamma και Beta που έχουν μέχρι 4 παραμέτρους. Ωστόσο, παρά τη διαθεσιμότητα τέτοιων μοντέλων οι ασφαλιστές/αναλογιστές έχουν την τάση να προτιμούν τις παραδοσιακές κατανομές τους (Fackler, 2013).

Ιστόγραμμα

Το Ιστόγραμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε μια ιδέα για το σχήμα της κατανομής, στη συγκεκριμένη περίπτωση της κατανομής των ζημιών (loss amount) της ασφαλιστικής εταιρείας όλης της περιόδου που εξετάζεται[3].



Γράφημα 3.3. Ιστόγραμμα

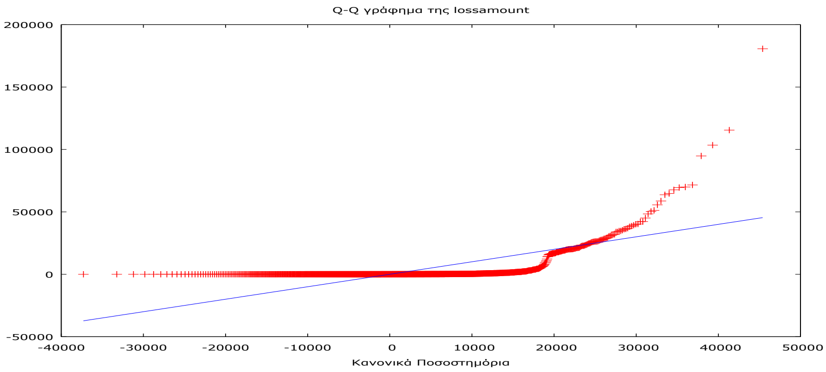
Από το Γράφημα 3.3. με μια πρώτη ματιά δεν φαίνεται να ακολουθούν τα δεδομένα την κανονική κατανομή αλλά φαίνεται να έχουν μια έντονη θετική ασυμμετρία και να ακολουθούν άλλο είδος κατανομής.

[3] Το Ιστόγραμμα πραγματοποιήθηκε στα δεδομένα με το πρόγραμμα stata 9.1: Το λογισμικό Stata είναι ένα ισχυρό στατιστικό και οικονομετρικό πακέτο με έξυπνες διευκολύνσεις διαχείρισης δεδομένων με ένα εξαιρετικό σύστημα για την παραγωγή δημοσιεύσεων και την ποιότητα σε γραφικές παραστάσεις. Έχει μεγάλη γκάμα για την ανάλυση οικονομετρικών μοντέλων και συνθέτων σχεδίων της έρευνας. Το Stata επικεντρώνεται σε μελετητές και ακαδημαϊκούς. Βρίσκεται ελεύθερα στο διαδίκτυο με δοκιμαστική περίοδο 30 ημερών.

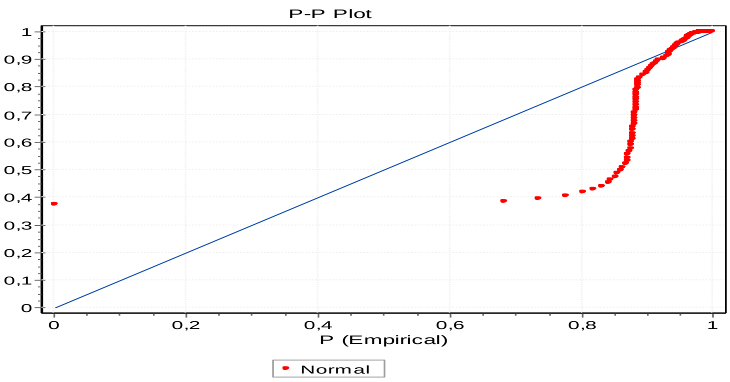
P-P Plot και Q-Q Plot

Τα P-P Plot και Q-Q Plot (probability-probability plot και Quantile-Quantile plot) είναι δύο γραφήματα τα οποία μας βοηθούν να ελέγξουμε αν κάποια δεδομένα προέρχονται από κάποια συγκεκριμένη κατανομή (π.χ. κανονική). Εκτός από το Ιστόγραμμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε μια ιδέα για το σχήμα της κατανομής, υπάρχουν περισσότερο ευαίσθητα εργαλεία για τον έλεγχο αν το σχήμα είναι κοντά σε μια κανονική κατανομή όπως είναι τα QQ και PP γραφήματα

Παρακάτω παρουσιάζονται τα γραφήματα των ζημιών της ασφαλιστικής εταιρείας[4]:



Γράφημα 3.3.1.1:Q-Q plot των συνολικών ζημιών



Γράφημα 3.3.1.2: P-P Plot των συνολικών ζημιών

[4] Τα P-P Plot και Q-Q plot πραγματοποιήθηκαν στα δεδομένα των ζημιών με το πρόγραμμα gretl.

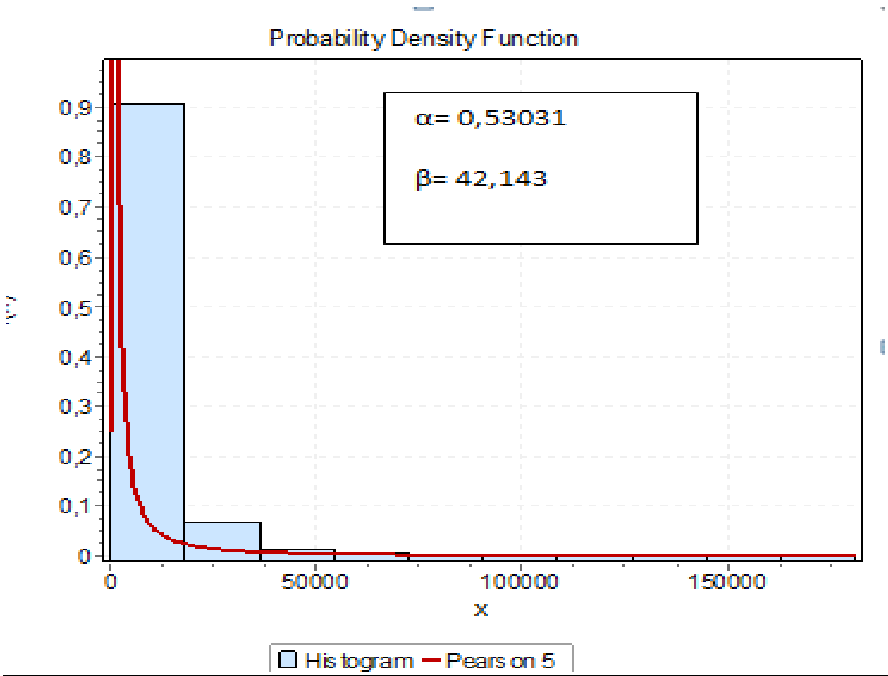
Τα εμπειρικά αυτά τεστ που εφαρμόστηκαν με σκοπό την εξακρίβωση του αν τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή, δείχνουν ότι τα περισσότερα σημεία του επιπέδου «απέχουν» πάρα πολύ από την διαγώνιο και επομένως υπάρχει επαρκής λόγος ώστε να απορρίψουμε ότι τα δεδομένα είναι κανονικά. Ο έλεγχος μέσω των παραπάνω γραφημάτων δεν μπορεί να είναι αξιόπιστος διότι δεν βασίζεται σε κάποιο στατιστικό κριτήριο που μας οδηγεί σε σωστή απόφαση π.χ. στο $1-a\%$ των περιπτώσεων. Συνήθως γίνεται για να πάρουμε μια πρώτη εποπτική εικόνα των παρατηρήσεων.

3.3.2 ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ (DISTRIBUTION FITTING – BEST FIT)

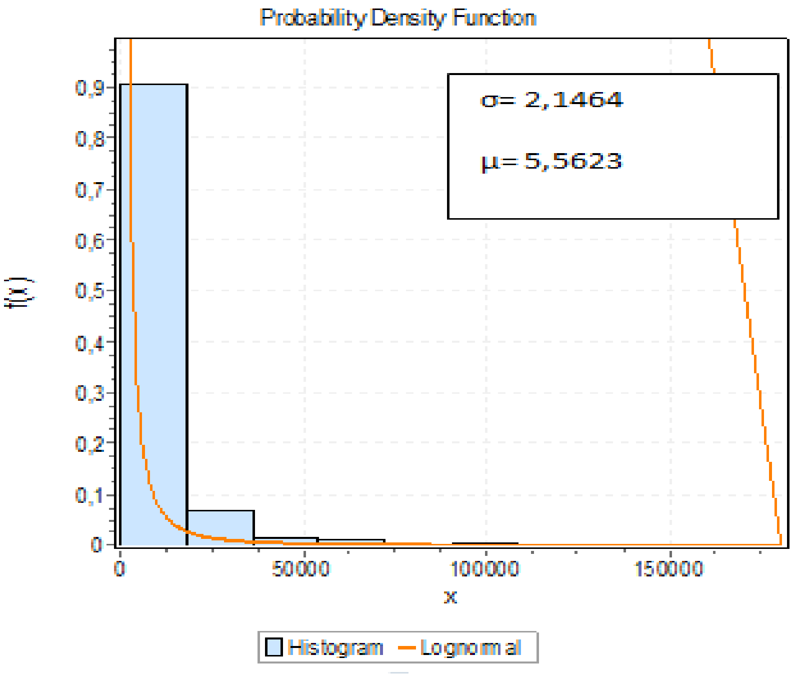
Οι κατανομές σφοδρότητας (severity) της συνολικής απώλειας στον τομέα της ασφάλισης έχουν συχνά ένα σχήμα το οποίο δεν είναι τόσο εύκολο να μοντελοποιηθεί με τις κοινές κατανομές που εφαρμόζονται σε λογισμικά πακέτα. Στη γκάμα των μικρότερων ζημιών και γύρω από τη μέση τιμή οι παρατηρούμενες πυκνότητες συχνά φαίνονται κάπως σαν ασύμμετρες καμπύλες σχήματος καμπάνας, όπου κλείνουν θετικά λοξά. Αυτό δεν είναι ένα πρόβλημα από μόνο του, καθώς αρκετά γνωστά μοντέλα, όπως η Gamma ή η κανονική λογαριθμική κατανομή έχουν μια τέτοια μορφή. Εναλλακτικά, οι κατανομές όπως η Εκθετική φαίνεται να είναι πιο κατάλληλες για τις περιπτώσεις όπου υπάρχει φθίνουσα πυκνότητα. Ενώ, αν περιοριστεί η προσαρμογή για τις πολύ μεγάλες απώλειες η κατανομή Pareto, ή παραλλαγές της, συχνά φαίνεται να είναι η καλύτερη επιλογή (Fackler, 2013).

Παρακάτω παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποιες δοκιμές διάφορων κατανομών γραφικά που αναφέρονται συχνά στη βιβλιογραφία όπως: η normal (κανονική κατανομή), η lognormal (λογαριθμική κανονική), η Gamma, η Beta, η Pareto, η Pearson, η Exponential (Εκθετική κατανομή) καθώς και κάποιες εκδοχές τους[5].

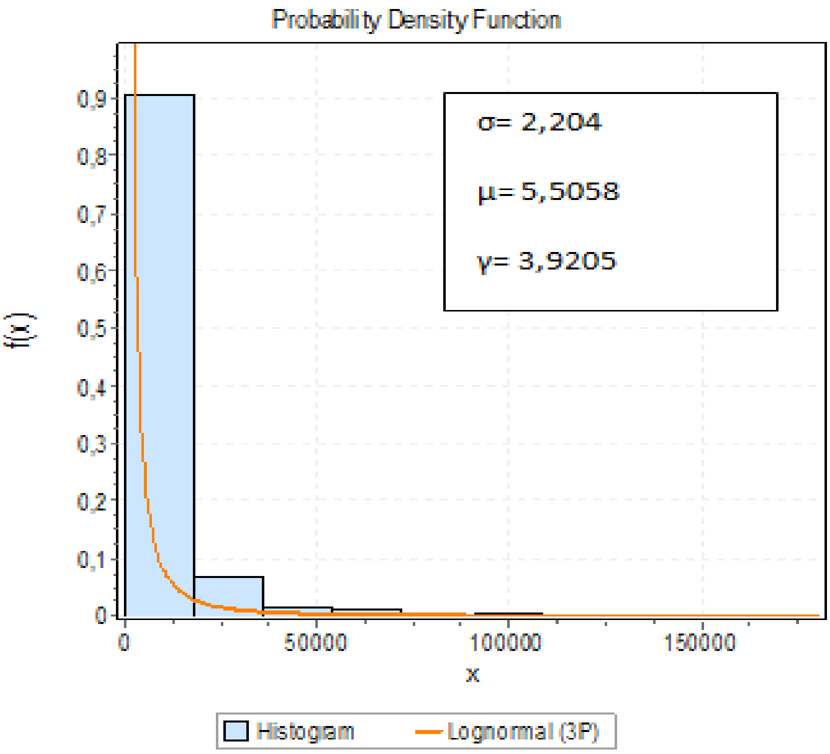
[5] Η γραφική ανάλυση των κατανομών αλλά και οι στατιστικές των Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Chi-Squared που εφαρμόστηκαν στα δεδομένα των ζημιών έγιναν με το πακέτο ανάλυσης Easyfit 5.5 professional: Το EasyFit είναι ένα λογισμικό ανάλυσης δεδομένων και εφαρμογής προσομοιώσεων που «ταιριάζει» τις κατανομές πιθανότητας στο δείγμα των δεδομένων που του δίνονται. Επιλέγει το καλύτερο μοντέλο εφαρμογής στα δεδομένα για την ανάλυση και τη λήψη των βέλτιστων αποφάσεων. Το EasyFit μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως stand-alone εφαρμογή των Windows ή με το Microsoft Excel και λοιπά εργαλεία προσομοίωσης που βασίζονται στο Excel, αφήνοντας τις πολύπλοκες τεχνικές λεπτομέρειες πίσω από τα παρασκήνια. Βρίσκεται ελεύθερα στο διαδίκτυο με δοκιμαστική περίοδο 30 ημερών.



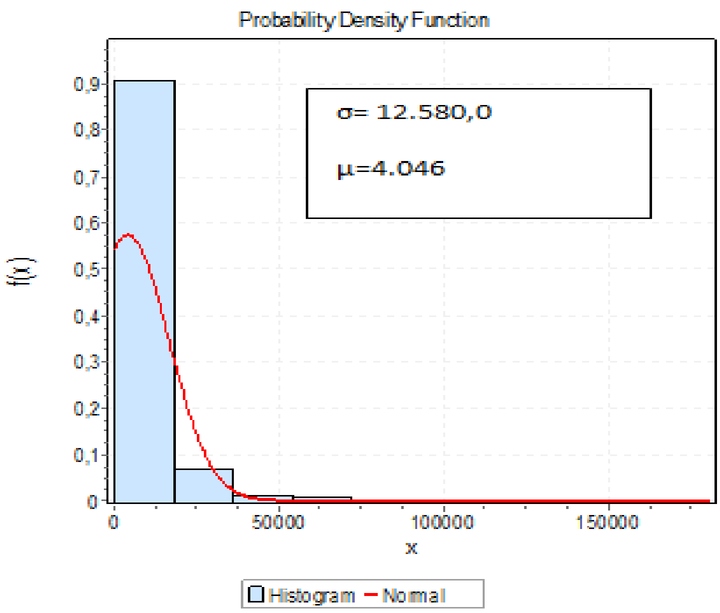
Γράφημα 3.3.2.1: Ιστόγραμμα Pearson 5



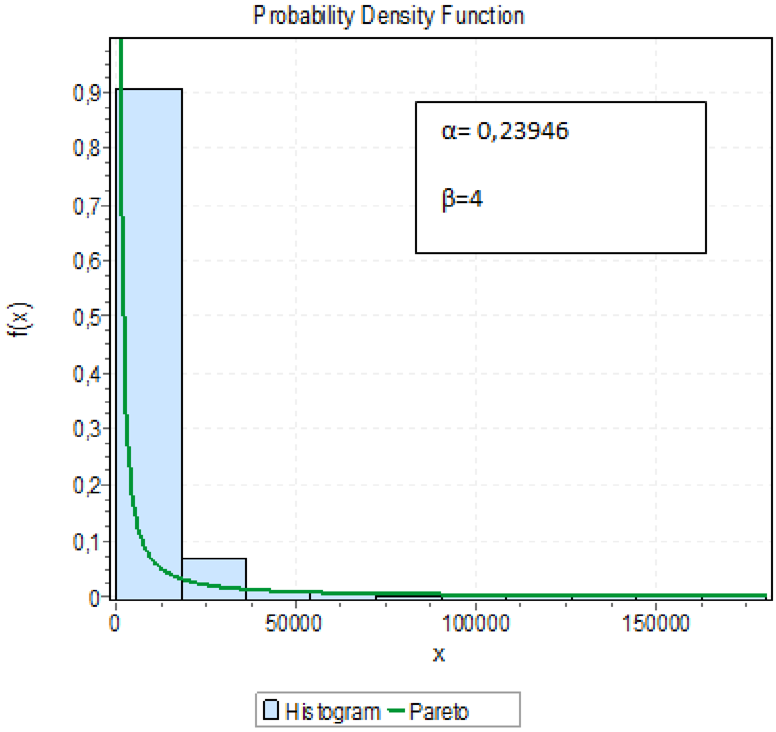
Γράφημα 3.3.2.2: Ιστόγραμμα Lognormal



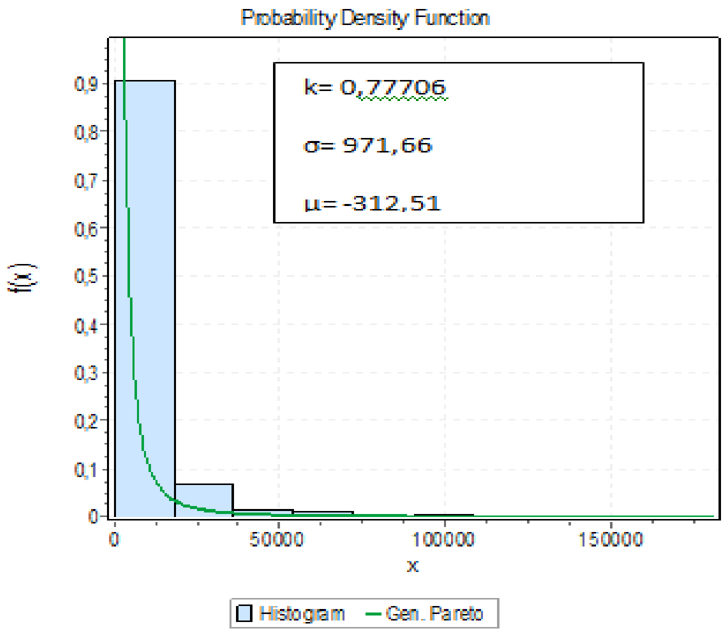
Γράφημα 3.3.2.3: Ιστόγραμμα Lognormal (3P)



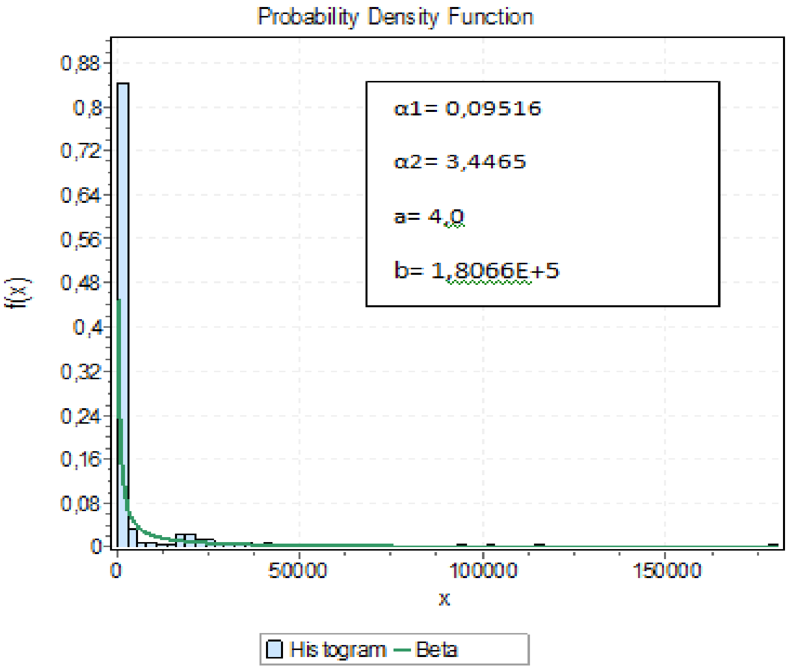
Γράφημα 3.3.2.4: Ιστόγραμμα Normal



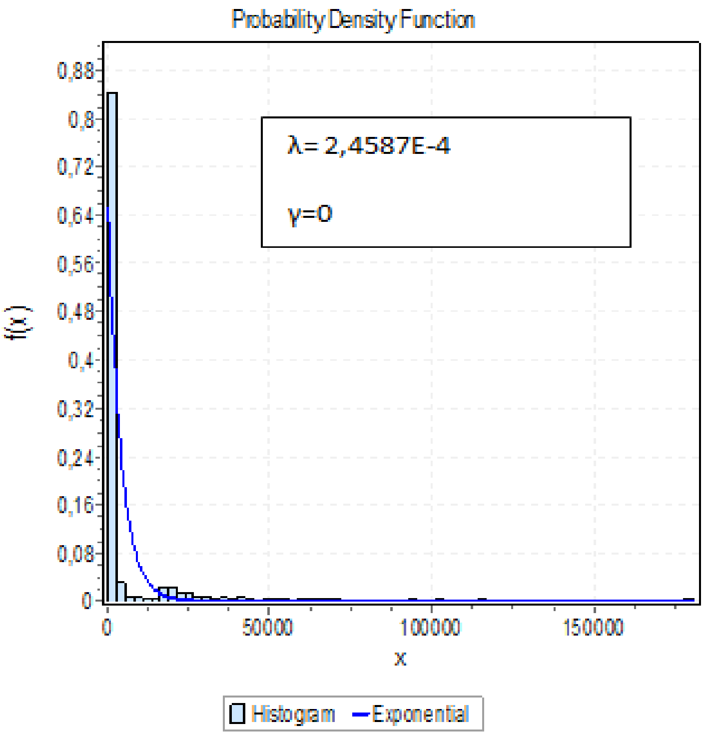
Γράφημα 3.3.2.5: Ιστόγραμμα - Pareto



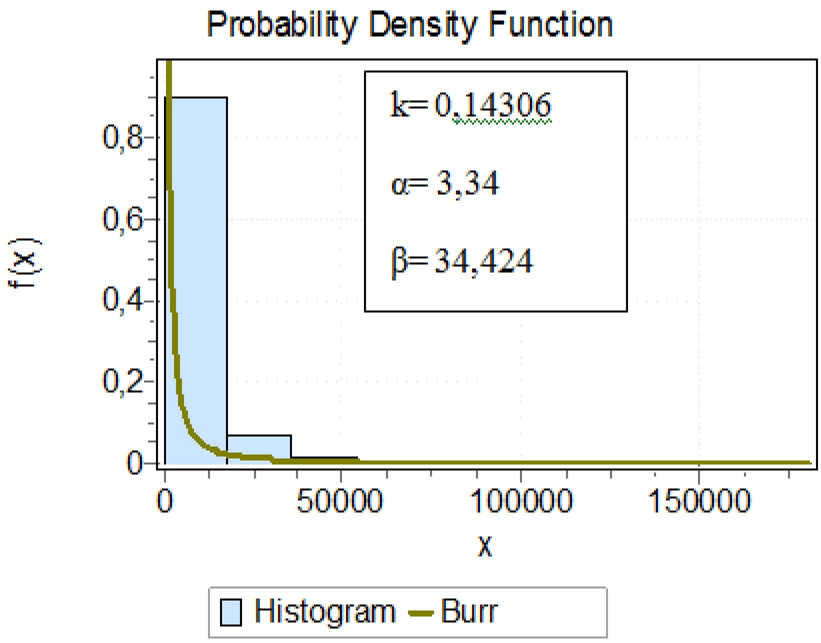
Γράφημα 3.3.2.6: Ιστόγραμμα – Generalized Pareto



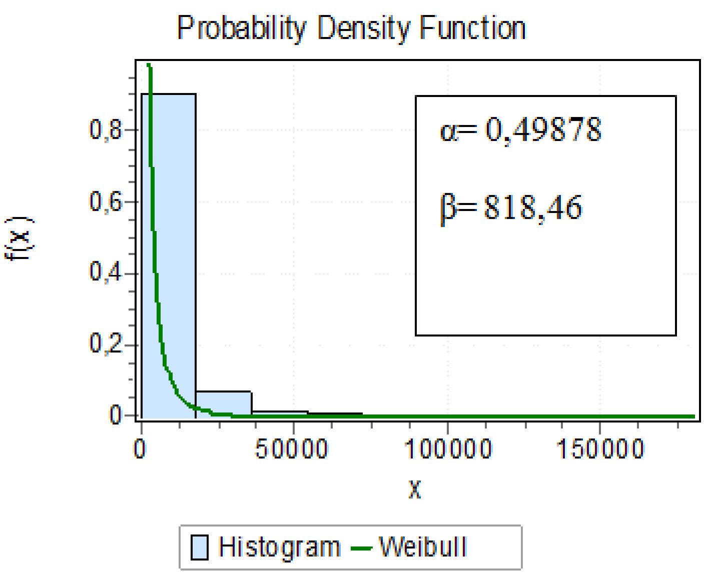
Γράφημα 3.3.2.7: Ιστόγραμμα – Beta



Γράφημα 3.3.2.8: Ιστόγραμμα – Exponential



Γράφημα 3.3.2.9: Ιστόγραμμα – Burr



Γράφημα 3.3.2.10: Ιστόγραμμα – Weibull

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται με την βοήθεια των test Kolmogorov-Smirnov[6], Anderson-Darling[7], Chi-Squared[8] οι στατιστικές τιμές των πρώτων τριών κατανομών ανάμεσα σε 20 κατανομές που παράχθηκαν από το πρόγραμμα Easyfit 5.5 professional, για το σύνολο των ζημιών της ασφαλιστικής εταιρείας (βλ. Παράρτημα - Πίνακας 1. Best Fit ζημιών με τη χρήση του προγράμματος Easyfit 5.5 professional). Οι 20 κατανομές που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα Easyfit 5.5 professional αποτελούν προεπιλογή του προγράμματος. Για καθέναν από τους τρείς ελέγχους, οι κατανομές παρουσιάζονται με σειρά κατάταξης ως προς τη προσαρμογή τους.

Πίνακας 3.3.2: Best fit των ζημιών με τη χρήση τριών test

	Distribution	Kolmogorov-Smirnov		Distribution	Anderson-Darling	Distribution	Chi-Squared		
		Statistic	P-Value		Statistic		Statistic	P-Value	Degree of Freedom
1	**Burr**	**0,08549**	**0,00000099493**	**Burr**	**10,004**	**Burr**	**74,954**	**0,000000000001614**	**9**
2	Pearson 5	0,08645	0,00000071610	Burr (4P)	10,292	Burr (4P)	85,009	0,000000000000016	9
3	Burr (4P)	0,08698	0,00000059631	Pearson 5 (3P)	15,274	Johnson SB	191,33	0	9

Στον πίνακα 3.3.2, βλέπουμε τις στατιστικές τιμές για τους ελέγχους Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-Squared που έδωσε το πρόγραμμα Easyfit 5.5 professional, για τις τρεις πρώτες κατανομές. Δηλαδή, με τη σειρά κατάταξης της καλύτερης προσαρμογής στα δεδομένα των ζημιών όπου τις κατατάσσει

[6] Το τεστ Kolmogorov-Smirnov είναι τεστ καλής προσαρμογής όπου εφαρμόζεται σε ποσοτικές μεταβλητές και ελέγχει αν η παρατηρούμενη συνάρτηση αθροιστικής κατανομής συμπίπτει με κάποια εκ των γνωστών $F_0(x)$.

[7] Το τεστ Anderson-Darling είναι ένα στατιστικό τεστ για το αν ένα δείγμα δεδομένων προέρχονται από μια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας. Στην βασική του μορφή, ο έλεγχος υποθέτει ότι δεν υπάρχουν παράμετροι που πρέπει να εκτιμηθούν στην κατανομή που εξετάζεται. Ωστόσο, η δοκιμασία που συχνά χρησιμοποιείται είναι η δοκιμή σε μια οικογένεια κατανομών όπου οι παράμετροι των κατανομών πρέπει να εκτιμούνται και να λαμβάνονται υπόψη από τις στατιστικές ή κρίσιμες τιμές. Όταν εφαρμόζεται για τη δοκιμή της εφαρμογής της κανονικής κατανομής σε ένα σύνολο δεδομένων, είναι ένα από τα πιο ισχυρά στατιστικά εργαλεία για την ανίχνευση περισσότερων αποκλίσεων από την κανονικότητα.

[8] Ο έλεγχος Chi-square (χ^2) τεστ βασίζεται στην σύγκριση των συχνοτήτων που παρατηρούνται στην κάθε κατηγορία (observed frequencies), με τις συχνότητες που θα αναμενόταν να υπάρχουν στις κατηγορίες αυτές από τύχη (expected frequencies). Δηλαδή, λειτουργεί ως ένα θεωρητικό μοντέλο για το πώς θα αναμενόταν να είναι τα δεδομένα και το συγκρίνει με το πώς είναι τα δεδομένα όπου δίνει μία εκτίμηση goodness-of-fit.

το πρόγραμμα σύμφωνα με τις καλύτερες στατιστικές τιμές των test τα οποία κάνουν ελέγχους σε διάφορα επίπεδα σημαντικότητας. Κατά το Kolmogorov-Smirnov test ύστερα από πολλές επαναλήψεις βρίσκει την κατανομή Burr ως την καλύτερη κατανομή που προσαρμόζεται στα δεδομένα. Δίνοντας την καλύτερη στατιστική τιμή (μικρότερη) 0,08549, ακολουθεί με ελάχιστη διαφορά η κατανομή Pearson 5 με στατιστική τιμή 0,08645. Τα άλλα δυο test Anderson-Darling και Chi-Squared επίσης δίνουν ύστερα από πολλές επαναλήψεις ως καλύτερη προσαρμογή κατανομής στα δεδομένα των ζημιών την κατανομή Burr την οποία θεωρούμε και την καλύτερη κατανομή προσαρμογής στα δεδομένα μας με στατιστική τιμή του τεστ Anderson-Darling 10,004 και 74,954 με το τεστ Chi-Squared. Ενώ, στην δευτερή και τρίτη θέση βρίσκονται οι Burr (4P), Pearson 5 (3P) και Johnson SB (βλ. Παράρτημα). Σαν ένα γενικό συμπέρασμα βλέπουμε ότι οι γενικεύσεις κάποιων κατανομών βελτιώνουν αισθητά την προσαρμογή τους με χρήση επιπρόσθετων παραμέτρων.

Κατανομή Burr

Ποια είναι όμως η κατανομή Burr; συζητήθηκε για πρώτη φορά από τον Burr (1942) και παρουσιάστηκε ως μια οικογένεια δύο παραμέτρων. Μια πρόσθετη παράμετρος αυτή της κλίμακας εισήχθη από τον Tadikamalla (1980). Παρουσιάζεται ως μια ευέλικτη κατανομή που μπορεί να εκφράσει ένα ευρύ φάσμα σχημάτων κατανομής. Η κατανομή Burr περιλαμβάνει, ή έχει ως οριακή περίπτωση, πολλές συνηθισμένες κατανομές όπως η Gamma, κανονική λογαριθμική (Lognormal), loglogistic, και beta κατανομές (αλλά όχι σχήματος U). Κάποιες σύνθετες κατανομές (compound distributions) αντιστοιχούν επίσης στην κατανομή Burr. Η κατανομή Burr έχει επίσης δύο ασυμπτωτικές οριακές περιπτώσεις: την κατανομή Weibull και την Pareto Τύπου I.

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (CDF) της κατανομής Burr είναι:

$$F\left(x|\alpha,\beta,\kappa\right)=1-\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{\kappa}},\ x>0,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \kappa>0\ , \qquad (3.1.1)$$

όπου α και κ είναι οι παράμετροι σχήματος και β είναι η παράμετρος της κλίμακας. Ενώ, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Burr είναι:

$$F\left(x|\alpha,\beta,\kappa\right)=\frac{\alpha\kappa\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}}{\beta\left(1+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{\kappa+1}},\ x>0,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \kappa>0 \quad (3.1.2)$$

και η μέση τιμή της είναι:

$$\mathrm{E}\left(X\right)=\kappa Beta\left(\kappa-\frac{1}{\alpha},1+\frac{1}{\alpha}\right), \quad (3.1.3)$$

όπου:

$$Beta\left(\kappa-\frac{1}{\alpha},1+\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\Gamma\left(\kappa-\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\kappa+1\right)},\ \alpha>0,\ \beta>0\ ,$$

είναι η συνάρτηση Beta.

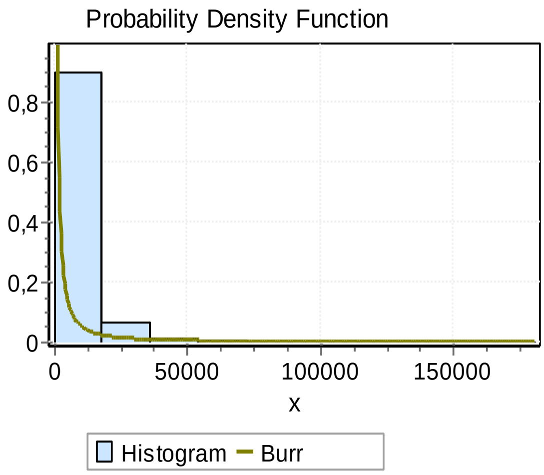
Εκτιμώντας τις παραμέτρους β, k, α για τα δεδομένα των ζημιών η συνάρτηση πυκνότητας των ζημιών που προκύπτει είναι η εξής:

$$f\left(X|\alpha,\beta,\kappa\right)=\frac{0,4778204\left(\frac{X}{34,424}\right)^{2,34}}{34,424\left(1+\left(\frac{X}{34,424}\right)^{3,34}\right)^{1,14306}},$$

και η μέση τιμή:

$$\mathrm{E}\left(X\right)=\kappa Beta\left(0,14306-\frac{1}{3,34},1+\frac{1}{3,34}\right)\Rightarrow \mathrm{E}\left(X\right)=0,14306Beta\left(0,15634,\ 1,29940\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{E}\left(X\right)=28,506.$$

Οπότε, η καλύτερη προσαρμογή της κατανομής (Burr) επάνω στα δεδομένα των συνολικών ζημιών γραφικά είναι η εξής:



Επιπλέον η κατανομή Burr μπορεί να προσαρμοστεί ικανοποιητικά σε ένα ευρύ φάσμα των εμπειρικών δεδομένων. Οι διαφορετικές τιμές των παραμέτρων της κατανομής Burr καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα της ασυμμετρίας και κύρτωσης. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιείται σε διάφορους τομείς όπως τα χρηματοοικονομικά, στην υδρολογία, την αξιοπιστία και σε μοντέλα με ποικιλία διαφορετικών τύπων δεδομένων. Παραδείγματα των δεδομένων που μοντελοποιούνται από την κατανομή Burr είναι το εισόδημα των νοικοκυριών, οι τιμές των καλλιεργειών, ο ασφαλιστικός κίνδυνος, το ταξίδι στο χρόνο, τα επίπεδα των πλημμύρων, καθώς και τα δεδομένα αποτυχίας[9].

Κατανομή Pearson 5

Η κατανομή Pearson τύπου 5, επινοήθηκε πρόσφατα και χρησιμοποιείται για να ταιριάξει παρατηρούμενες κατανομές που λαμβάνονται από τα δεδομένα ή από Μόντε Κάρλο προσομοιώσεις. Οι τύποι προορίζονταν να παρέχουν κατανομές για την προσέγγιση όλων των μονοτροπικών δυνατοτήτων, δηλαδή, με ασύμμετρες εκτεταμένες ουρές.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Pearson 5 είναι:

$$f(x)dx = \kappa\left(1+\left(\frac{x-\lambda}{\alpha}\right)^2\right)^{-m} e^{-v\tan^{-1}\left(\frac{x-\lambda}{\alpha}\right)}dx,\ m>\frac{1}{2}$$

[9] Πηγή: (http://www.mathworks.com/help/stats/burr-type-xii-distribution.html).

Όπου v, a, m και λ είναι πραγματικοί παράμετροι, το κ είναι μια σταθερά κανονικοποίησης που εξαρτάται από το m, v και a. Η κατανομή Pearson τύπου 5 είναι ουσιαστικά μια ασύμμετρη εκδοχή της κατανομής t-Student (όταν $v=0$ έχουμε την t-Student κατανομή). Ειδικότερα, για μικρές τιμές της παραμέτρου m, οι ουρές είναι πολύ μακρύτερες από εκείνες της Gaussian (Heinrich, 2004).

3.3.3 ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΥΨΗΛΩΝ ΚΑΙ ΧΑΜΗΛΩΝ ΖΗΜΙΩΝ

Κάνοντας τον διαχωρισμό των μεγάλων ζημιών και των μικρών ζημιών με σημείο αναφοράς το μέγεθος της ζημιάς των 25.000 ευρώ, γίνονται οι έλεγχοι καλής προσαρμογής για τις δύο ομάδες δεδομένων. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τρείς πρώτες κατανομές καλύτερης προσαρμογής στα δεδομένα των υψηλών ζημιών, χρησιμοποιώντας τρία test, δηλαδή τα Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-Squared:

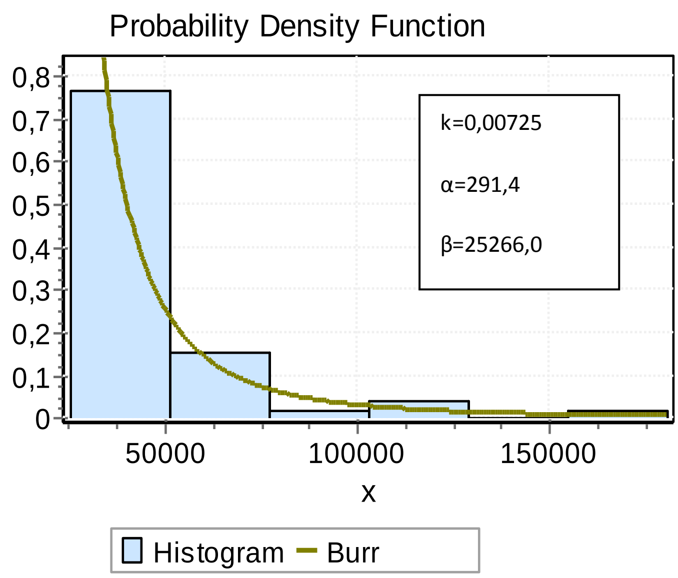
3.3.3.1 ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΥΨΗΛΩΝ ΖΗΜΙΩΝ

Πίνακας 3.3.3.1: Best fit των Υψηλών Ζημιών

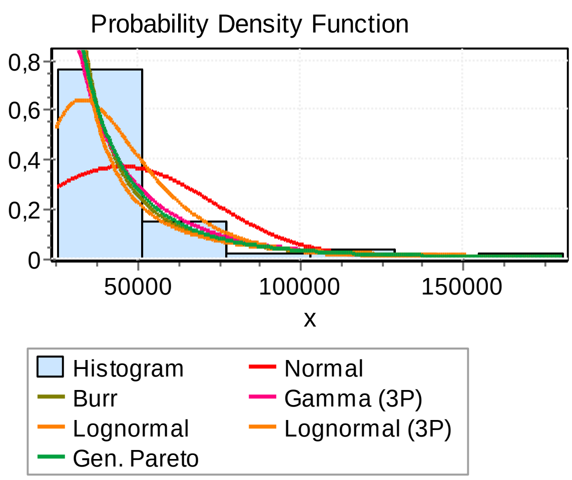
	Distribution	Kolmogorov-Smirnov		Distribution	Anderson-Darling	Distribution	Chi-Squared		
		Statistic	P-Value		Statistic		Statistic	P-Value	Degree of Freedom
1	**Burr**	**0,05686**	**0,9257**	**Burr**	**0,20443**	**Generalized Pareto**	**1,0735**	**0,95643**	**5**
2	Gamma (3P)	0,06097	0,98396	Fatigue Life (3P)	0,22018	Gamma (3P)	1,2858	0,93639	5
3	Pareto	0,06108	0,98367	Lognormal (3P)	0,29987	Generalized Gamma (4P)	1,5342	0,90909	5

Στον Πίνακα 3.3.3.1, βλέπουμε τις στατιστικές τιμές των τριών Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-Squared test για τρείς κατανομές καλύτερης προσαρμογής. Τα test Kolmogorov-Smirnov και Anderson-Darling βρίσκουν ως καλύτερη κατανομή προσαρμογής στα δεδομένα των υψηλών ζημιών την κατανομή Burr με τη μικρότερη στατιστική τιμή, ενώ το Chi-Squared test βρίσκει ως καλύτερη κατανομή προσαρμογής στα δεδομένα των υψηλών ζημιών την κατανομή Generalized Pareto. Ακολουθούν διάφορες κατανομές αμέσως μετά την πρώτη επιλογή με διαφορετική σειρά. Η Lognormal τριών παραμέτρων έρχεται στη Τρίτη θέση κατά το Anderson-Darling test ενώ παρατηρούμε ότι η Pareto, Gamma αλλά και οι γενικεύσεις τους Generalized Gamma, Generalized Pareto έχουν πολύ καλή προσαρμογή στην λεγόμενη «ουρά» της κατανομής δηλαδή στις υψηλές ζημιές της εταιρείας (βλ. παράρτημα).

Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζονται κάποιες ενδεικτικές κατανομές και πώς προσαρμόζονται στο ιστόγραμμα των υψηλών ζημιών. Παρουσιάζεται η κατανομή της καλύτερης προσαρμογής Burr αλλά και κάποιων άλλων κατανομών σε σχέση με την Burr. Στην ουσία επιλέχθηκαν κάποιες από αυτές που δίνουν τα test ως πρώτες όπως την Gamma(3p), Generalized Pareto, Lognormal(3p) με την καλύτερη προσαρμογή αλλά επιπρόσθετα εισάγουμε την κανονική κατανομή αλλά και την απλή Lognormal για να φανεί η ακαταλληλότητα.



Γράφημα 3.3.3.1: Ιστόγραμμα – Burr (Υψηλές Ζημιές)



Γράφημα 3.3.3.2: Προσαρμογή κατανομών στις υψηλές ζημιές

3.3.3.2 ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΧΑΜΗΛΩΝ ΖΗΜΙΩΝ

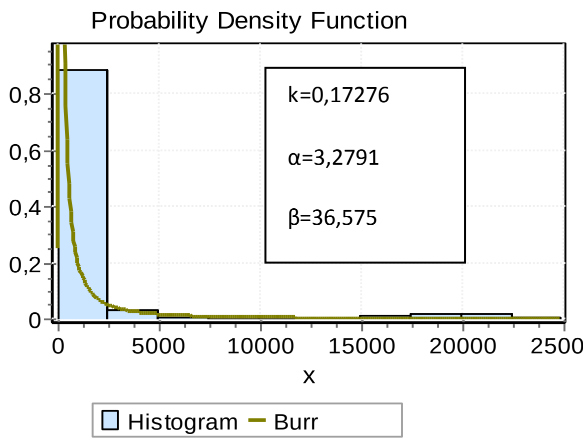
Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τρείς κατανομές καλύτερης προσαρμογής στα δεδομένα των χαμηλών ζημιών, χρησιμοποιώντας τρία test, τα Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-Squared:

Πίνακας 3.3.3.2: Best fit των Χαμηλών Ζημιών

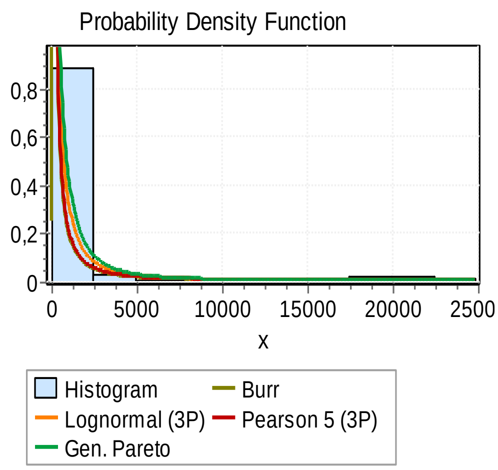
	Distribution	Kolmogorov-Smirnov		Distribution	Anderson-Darling	Distribution	Chi-Squared		
		Statistic	P-Value		Statistic		Statistic	P-Value	Degree of Freedom
1	**Burr**	**0,08801**	**0,000000880**	**Burr**	**15,6**	**Pearson 5**	**235,51**	**0,000000000**	**9**
2	Pearson 6	0,89955	0,000000524	Burr (4P)	16,7	Burr	272,71	0,000000000	9
3	Pearson 6 (4P)	0,90012	0,000000421	Pearson 5	20,169	Burr (4P)	274,61	0,000000000	9

Στον Πίνακα 3.3.3.2, βλέπουμε τις στατιστικές τιμές των ελέγχων Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-Squared για τις τρείς πρώτες κατανομές καλύτερης προσαρμογής. Παρατηρείται ότι, τα δύο test, Kolmogorov-Smirnov και Anderson-Darling, βρίσκουν ως καλύτερη κατανομή προσαρμογής στα δεδομένα των χαμηλών ζημιών την κατανομή Burr με τη μικρότερη στατιστική τιμή, ενώ, το Chi-Squared test δίνει την Pearson 5. Εδώ, βλέπουμε στις πρώτες θέσεις των καλύτερων κατανομών να καλύπτονται με διαφορετικές κατανομές από ότι στις υψηλές ζημιές όπως, η κατανομή Pearson 6. Ενώ, κατανομές που φαινόταν σύμφωνα με τα test να έχουν την καλύτερη προσαρμογή στις υψηλές ζημιές όπως, η Generalized Pareto και Lognormal(3p), εδώ δεν υπάρχουν στις πρώτες θέσεις αλλά έχουν πολύ χαμηλή θέση καταλληλότητας.

Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζονται η κατανομή της καλύτερης προσαρμογής Burr στο ιστόγραμμα των χαμηλών ζημιών και κάποιων ενδεικτικών κατανομών σε σχέση με την πρώτη. Επιλέχθηκαν η Pearson 5 ως δεύτερη στη σειρά καταλληλότητες σύμφωνα με τα test, αλλά και κάποιες που ήταν κατάλληλες στις υψηλές ζημιές.



Γράφημα 3.3.3.3: Ιστόγραμμα – Burr (Χαμηλές Ζημιές)



Γράφημα 3.3.3.4: Προσαρμογή κατανομών στις χαμηλές ζημιές

3.3.3.3. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΧΑΜΗΛΩΝ ΚΑΙ ΥΨΗΛΩΝ ΖΗΜΙΩΝ

Έπειτα από τη προσαρμογή των ζημιών του χαρτοφυλακίου που μελετάμε, σε διάφορες κατανομές, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα δεδομένα του χαρτοφυλακίου για τις χαμηλές ζημιές, τις υψηλές ζημιές αλλά και για όλο το χαρτοφυλάκιο συνολικά προσαρμόζονται καλύτερα στην κατανομή Burr, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε και στην υπόλοιπη εργασία. Παραθέτουμε παρακάτω ένα συγκεντρωτικό Πίνακα των παραμέτρων της κατανομής Burr:

Πίνακας 3.3.3.3.1. Παράμετροι της κατανομής Burr

	Παράμετροι Burr		
	κ	α	β
Χαρτοφυλακίου	0,14306	3,34	34,424
Χαμηλών ζημιών (<25.000)	0,17276	3,2791	36,575
Υψηλών ζημιών (>=25.000)	0,00725	291,4	25266,0

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθούμε σε ορισμένα περιγραφικά στατιστικά των υψηλών και των χαμηλών ζημιών του χαρτοφυλακίου μας παραθέτοντας τα στον παρακάτω Πίνακα:

Πίνακας 3.3.3.3.2. Περιγραφικά στατιστικά των υψηλών και των χαμηλών ζημιών

	Μέση Τιμή		Τυπική Απόκλιση		Διασπορά
Χαμηλές Ζημιές (<25.000)	1.736,42 €	Χαμηλές Ζημιές (<25.000)	4.857,25 €	Χαμηλές Ζημιές (<25.000)	23.592.917,73
Υψηλές Ζημιές (>=25.000)	45.440,15 €	Υψηλές Ζημιές (>=25.000)	27.960,27 €	Υψηλές Ζημιές (>=25.000)	781.776.815,01

Από τον Πίνακα 3.3.3.3.2. παρατηρούμε ότι η μέση τιμή των υψηλών ζημιών είναι περίπου 3,8 φορές μεγαλύτερη από των χαμηλών ζημιών, η τυπική απόκλιση των υψηλών ζημιών είναι περίπου 17,3 φορές μεγαλύτερη από των χαμηλών ζημιών, ενώ ή διασπορά των υψηλών ζημιών είναι περίπου 3 φορές μεγαλύτερη από των χαμηλών ζημιών. Οι πολύ υψηλές διασπορές τόσο για τις χαμηλές (23.592.917,73) όσο και για τις υψηλές ζημιές (781.776.815,01 €) φανερώνουν το πόσο απομακρυσμένες είναι οι τιμές από τη μέση τιμή τόσο για τις χαμηλές ζημιές όσο και για τις υψηλές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο – ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΚΑΙ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ

4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά της θεωρίας της χρεοκοπίας αλλά και της σχέσης που υπάρχει μεταξύ της πιθανότητας χρεοκοπίας και της αντασφάλισης. Ακολουθεί μια βιβλιογραφική ανασκόπηση του θέματος παρουσιάζοντας διάφορες εμπειρικές μελέτες που αναπτύχθηκαν στη διεθνή βιβλιογραφία όπου μελέτησαν την πιθανότητα χρεοκοπίας με τη χρήση της αντασφάλισης.

4.2. Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Ακολουθώντας την ανάλυση και τη μεθοδολογία του Dickson (2006) για τη θεωρία της χρεοκοπίας αλλά και την πιθανότητα χρεοκοπίας χρησιμοποιώντας αντασφάλιση, παρουσιάζονται σε αυτή την ενότητα τα βασικά χαρακτηριστικά της θεωρίας της χρεοκοπίας[10]. Η θεωρία της χρεοκοπίας κάνει την πρώτη της εμφάνιση από τον Lundberg (1909) και ασχολείται με το επίπεδο του πλεονάσματος[11] του ασφαλιστή για ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστικών συμβολαίων. Για παράδειγμα, σε μια ασφαλιστική εταιρεία, λαμβάνεται υπόψη ο χρόνος, ο αριθμός των απαιτήσεων ή αποζημιώσεων καθώς και τα ποσά τους. Γίνεται η παραδοχή ότι ο ασφαλιστής ξεκινά με κάποιο μη-αρνητικό χρηματικό ποσό, εισπράττει ασφάλιστρα και πληρώνει τις αποζημιώσεις όπως αυτές συμβαίνουν. Θεωρείται δηλαδή ότι υπάρχει αρχικό πλεόνασμα (ή πλεόνασμα σε μηδενικό χρόνο), τα ασφάλιστρα που καταβάλλουν οι πελάτες και οι πληρωμένες αποζημιώσεις. Το ενδεχόμενο της χρεοκοπίας της ασφαλιστικής εταιρείας πραγματοποιείται εάν το πλεόνασμα του ασφαλιστή γίνει μηδενικό ή αρνητικό. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχουν έσοδα ή υπάρχει έλλειμμα και μπορεί να ειπωθεί ότι υπάρχει χρεοκοπία (Dickson, 2006).

[10] Για την ανάλυση της Θεωρίας της Χρεοκοπίας εκτενώς με τη χρήση παραδειγμάτων: Dickson D. C. M., (2006)., insurance risk and ruin, Chapter 6,7.

[11] Τα κέρδη της ασφαλιστικής εταιρείας προέρχονται από τα επιβαρυμένα ασφάλιστρα που χρεώνει στους κινδύνους Με αποτέλεσμα τα έξοδα για τις απαιτήσεις των αποζημιώσεων να είναι μικρότερα κατά μέσο όρο. Οποιοδήποτε κέρδος προκύπτει από τη παραπάνω διαφορά είναι το πλεόνασμα.

4.3. ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό χρόνο ορίζεται ως:

$$\psi(u) = \Pr\big(U(t) \prec 0 \text{ για κάποιο t, t} = r, 2r, 3r, \ldots, \text{ δοθέντος ότι } U(0) = u\big). \tag{4.3.1}$$

Σύμφωνα με τον τύπο (4.3.1), η χρεοκοπία συμβαίνει μόνο όταν το πλέονασμα γίνει μικρότερο από μηδέν σε κάποια χρονική στιγμή $r, 2r, 3r, \ldots$. Αυτό συμβαίνει όταν τα ποσά των αποζημιώσεων του χαρτοφυλακίου υπερβούν το κεφάλαιο της εταιρείας που έχει συσσωρευτεί από το αρχικό πλεόνασμα και τα έσοδα από τα ασφάλιστρα.

Επιπλέον, η $\psi_r(u,t)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό χρόνο για πεπερασμένο χρονικό διάστημα και ορίζεται ως:

$$\psi_r(u,t) = \Pr\big(U(s) < 0 \text{ για κάποιο s, s} = r, 2r, 3r, \ldots, t\big), \tag{4.3.2}$$

όπου t είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του r. Εάν το t είναι μεγάλο, τότε η $\psi_r(u,t)$ είναι μια καλή προσέγγιση για την $\psi(u)$.

4.4. ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε το μοντέλο κινδύνου σε διακριτό χρόνο για το πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρείας. Το πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρείας κατά τη χρονική στιγμή n, όπου $n = 1, 2, 3, \ldots,$ συμβολίζεται με $U_d(n)$ και ορίζεται ως:

$$U_d(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i \quad \text{για } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4.4.1}$$

όπου

- $u = U_d(0)$ είναι το αρχικό πλεόνασμα της ασφαλιστικής, ή αλλιώς το πλεόνασμα της τη χρονική στιγμή 0.
- Z_i, οι απαιτήσεις προς την εταιρεία για το i-χρονικό διάστημα, οι οποίες θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες.

- $\sum_{i=1}^{n} Z_i$, δηλώνει το συνολικό ποσό απαίτησης του ασφαλιστή στο χρονικό διάστημα $[0, n]$.
- Τα έσοδα που έχει η ασφαλιστική εταιρεία από τα ασφάλιστρα ανα μονάδα χρόνου είναι ίσα με 1, έτσι ώστε n να είναι το συνολικό έσοδο της εταιρείας από τα ασφάλιστρα μέχρι τη χρονική στιγμή n.

Η διαδικασία $\{U_d(n)_{n=0}^{\infty}\}$ καλείται διακριτή διαδικασία πλεονάσματος, με τον δείκτη d να χρησιμοποιείται για να δηλωθεί ότι αναφερόμαστε στη διαδικασία πλεονάσματος σε διακριτό χρόνο.

Για αυτή τη διαδικασία πλεονάσματος, μπορούμε να πούμε ότι χρεοκοπία θα συμβεί εάν το πλεόνασμα πέσει στο μηδέν ή κάτω του μηδενός. Ακόμα, η τυχαία μεταβλητή $\mathrm{T}_{d,u}$ ονομάζεται χρόνος χρεοκοπίας και δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{T}_{d,u} = \min\{n \geq 1 : U_d(n) \leq 0\}, \tag{4.4.2}$$

όπου $\mathrm{T}_{d,u} = \infty$ αν $U_d(n) \succ 0$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$. Η πιθανότητα της ολικής χρεοκοπίας από το αρχικό πλεόνασμα u, που συμβολίζεται με $\psi_d(u)$, ορίζεται ως:

$$\psi_d(u) = \Pr(\mathrm{T}_{d,u} \prec \infty) = \Pr\left(u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i \leq 0\right), \text{ για } n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{4.4.3}$$

Σύμφωνα με τον τύπο (4.3.5), η χρεοκοπία δεν μπορεί να συμβεί τη χρονική στιγμή 0 αν το πλεόνασμα $u = 0$.

4.5. ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ ΚΑΙ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ

Σύμφωνα με το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, το πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρείας τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον εξής τύπο:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{\mathrm{N}(t)} X_i \tag{4.5.1}$$

Εάν ο ασφαλιστής κάνει μια αντασφαλιστική συμφωνία πληρώνοντας στην αντασφαλίστρια εταιρεία ένα ασφάλιστρο σε σταθερό ρυθμό, τότε το πλεόνασμα της ασφαλίστριας εταιρείας είναι το:

$$U^*(t) = u + c^* t - \sum_{i=1}^{\mathrm{N}(t)} X_i^*,$$

όπου το c^* ορίζει το ασφάλιστρο (εισόδημα) που παίρνει ο ασφαλιστής στην μονάδα του χρόνου, και το X_i^* ορίζει το ποσό της αποζημίωσης που πληρώνει ο ασφαλιστής για την i-οστή ζημία. Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους και ανεξάρτητες από την $\mathrm{N}(t)$. Ο συντελεστής προσαρμογής για τον ασφαλιστή ορίζεται μόνο όταν το $c^* \succ \lambda \mathrm{E}(X_1^*)$ και η ροπογεννήτρια $\mathrm{M}_{X_i^*}$ υπάρχει και είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός (ρίζα) R^* έτσι ώστε

$$\lambda + c^* R^* = \lambda \mathrm{E}\left(e^{R^* X^*}\right).$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για τον ασφαλιστή είναι άνω φραγμένη από την ποσότητα $e^{-R^* u}$ (ανισότητα του Lundberg).

4.6. ΕΜΠΕΡΙΚΕΣ ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΜΕ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ

Όπως ειπώθηκε προηγουμένως η πρώτη αναφορά στη θεωρία της χρεοκοπίας χρονολογείται το 1909 από τον Lundberg. Ωστόσο, στο πρόσφατο παρελθόν έχει αναπτυχθεί μια σειρά νέων τεχνικών που διευκολύνουν τον χειρισμό της θεωρίας της χρεοκοπίας και είναι ακόμη πιο συνεπή σε αυτήν (βλ. για παράδειγμα Albrecher and Haas, 2011).

Πολλές μελέτες έχουν αναπτυχθεί στη διεθνή βιβλιογραφία για την επίδραση της αντασφάλισης στην πιθανότητα της απόλυτης καταστροφής/χρεοκοπίας ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου. Μερικοί συγγραφείς από αυτούς που ασχολήθηκαν εκτενώς με το θέμα είναι ο Gerber (1979), ο Waters (1983), η Centeno (1986) και ο Hesselager (1990). Επικεντρώθηκαν στην επίδραση της αντασφάλισης στην πιθανότητα χρεοκοπίας χρησιμοποιώντας αναπροσαρμοσμένους συντελεστές και βρήκαν τύπους για τις αντασφαλιστικές ρυθμίσεις. Αναλυτικότερα κατέληξαν στην παραδοχή ότι με τη διατήρηση του επιπέδου πλεονάσματος που μεγιστοποιεί (maximises the value) την αξία του συντελεστή προσαρμογής μπορεί να ελαχιστοποιηθεί η τιμή του άνω φράγματος(ορίου) κατά τον Lundberg για την πιθανότητα της χρεοκοπίας. Στο παρελθόν η πιθανότητα της χρεοκοπίας δεν ήταν εύκολο να υπολογιστεί, ωστόσο η πρόσφατη εξέλιξη των αριθμητικών αλγορίθμων και η εφαρμογή τους για τον υπολογισμό και την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας καθιστούν τον υπολογισμό της πιο εφικτό.

Η Centeno (1986) χρησιμοποίησε έναν αλγόριθμο που προτάθηκε από τον Panjer (1986) για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας, ενσωματώνοντας την αντασφάλιση. Στην ουσία έδειξε με μερικά παραδείγματα ότι η συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι παρόμοια με αυτή της ανισότητας κατά Lundberg. Αναφέρει ότι και οι δύο θεωρούνται ως συναρτήσεις του επιπέδου συγκράτησης (retention level), εφόσον το αποτέλεσμα που δίνουν δεν είναι πολύ μικρό. Οι Steenackers και Goovaerts (1992) εξετάζουν επίσης την επίδραση της αντασφάλισης στην πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό και συνεχή χρόνο. Ωστόσο, το πρωταρχικό τους μέλημα ήταν να προσδιοριστεί η βέλτιστη μορφή της αντασφάλισης και όχι το βέλτιστο επίπεδο διατήρησης του πλεονάσματος του ασφαλιστή σε θετικές τιμές.

Οι Dickson and Waters (1994) χρησιμοποίησαν ένα διαφορετικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας. Υπολόγισαν λοιπόν διάφορες πιθανότητες μετά την αντασφάλιση προσαρμόζοντας τον αλγόριθμο του De Vylder και Goovaerts (1988) ενώ, έκαναν διάφορες εκτιμήσεις μέσω της μετασχηματισμένης διαδικασίας Gamma. Οι Walhin and Paris το 2000, υπολόγισαν την πιθανότητα χρεοκοπίας σε ένα μοντέλο κινδύνου σε διακριτό χρόνο με τη χρήση επαναληπτικών ή αναδρομικών μεθόδων.

Η Mata (2000), ανέπτυξε μια μεθοδολογία για τον υπολογισμό της κατανομής των συνολικών απωλειών για δύο ή περισσότερα διαδοχικά στρώματα των ζημιών όταν υπάρχει ένας περιορισμένος αριθμός επανεγγραφής. Ακόμη, εφάρμοσε κάποιες ιδιότητες για διαφορετικές αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου για την Excess of Loss αντασφάλιση με δωρεάν ή επί πληρωμή της επανεγγραφής για δύο ή περισσότερα στρώματα των ζημιών.

Οι Albrecher and Haas (2011), προσπάθησαν να προσδιορίσουν τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε ένα μοντέλο κινδύνου σε συνεχή χρόνο. Σε ένα πρώτο βήμα δείχνουν ότι η ιδέα της εφαρμογής μιας ντετερμινιστικής Markov διεργασίας (piecewise deterministic Markov processes - PDMP) επιτρέπει μία κατάλληλη Μαρκοβιανή περιγραφή της διαδικασίας πλεονάσματος του αντασφαλισμένου με την προσθήκη της αντασφαλιστικής κάλυψης ως μια άλλη διάσταση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο} –ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο αρχικά γίνεται μια αναφορά περί φερεγγυότητας του χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής εταιρείας σύμφωνα με τις πρόσφατες οδηγίες νομοθετικών πλαισίων όσο αναφορά την αντασφάλιση αλλά και του πιστωτικού κινδύνου της αντασφάλισης όπου θεωρείται σημαντικός παράγοντας η μέτρηση και εξάλειψη του κινδύνου αυτού. Μετέπειτα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και η εκτενής ανάλυση των βέλτιστων στρατηγικών αντασφάλισης που ακολουθήθηκαν (αναλογικής και μη αναλογικής), με τη χρήση κριτηρίων VaR, Tvar και διάφορων αρχών αντασφαλίστρων. Στόχος η εύρεση του καλύτερου αντασφαλιστικού σχήματος για την κάλυψη ζημιών του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρείας που αφορά την περίοδο 2010 έως 2012.

5.1. SOLVENCY II – ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΚΑΙ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ

Το Solvency II έχει σαν στόχο του τη δημιουργία ενός νομοθετικού πλαισίου το οποίο είναι βασισμένο στις ιδιαιτερότητες της ασφαλιστικής αγοράς. Η διαχείριση ασφαλιστικών κινδύνων έχει εξελιχθεί σημαντικά δεδομένου ότι έχουν δημιουργηθεί πολλά και καινούργια ασφαλιστικά προϊόντα τα οποία με τη σειρά τους δημιουργούν καινούργιους κινδύνους ενώ παράλληλα δημιουργούνται και νέες μέθοδοι περιορισμού των κινδύνων αυτών. Το Solvency II, εκτός από το ότι εισάγει μια ολιστική προσέγγιση στη διαχείριση των κινδύνων η οποία βασίζεται σε τρεις συμπληρωματικούς πυλώνες , ακολουθεί επίσης βασικές αρχές οι οποίες συντελούν i) στην έγκαιρη αξιολόγηση των πραγματικών κινδύνων και στη δημιουργία προφίλ κινδύνου των εταιριών από τις εποπτικές αρχές, γεγονός που συντελεί στη δημιουργία των σωστών κεφαλαιακών απαιτήσεων ii) στην έγκαιρη εποπτική παρέμβαση η οποία μπορεί να επέλθει πριν από μια κρίσιμη κατάσταση χάρη των αποτρεπτικών μηχανισμών (SOLVENCY II and Reinsurance, 2007).

5.1.1. ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑ ΙΙ

Ο μηχανισμός πρόληψης της αφερεγγυότητας με το Solvency II είναι ένας μηχανισμός πρόληψης γνωστός ως «κλιμακωτή παρέμβαση» (ladder of intervention). Ο μηχανισμός αυτός προβλέπει την εντονότερη παρέμβαση της εποπτικής αρχής μεταξύ των δύο επιπέδων των κεφαλαιακών απαιτήσεων δηλαδή του SCR – Solvency Capital requirement και του MCR – Minimum Capital requirement, υπό την μορφή καθοδήγησης αλλά και προτεινόμενων κινήσεων, προκειμένου να αποφευχθεί η αφερεγγυότητα. Ο μηχανισμός αυτός έχει το πλεονέκτημα ότι επιτρέπει την έγκαιρη αλλά και την ανάλογη με την περίπτωση παρέμβαση της εποπτικής αρχής, προκειμένου να διασφαλιστεί η λήψη διορθωτικών μέτρων στη σωστή για την εταιρία χρονική στιγμή. Επίσης , οι απαιτήσεις του πυλώνα ΙΙ αναφορικά με τον κίνδυνο που πιθανό να προκύπτει από την ίδια την εταιρία (internal risk) αποτελούν από μόνες τους ένα προληπτικό μηχανισμό μείωσης του κινδύνου της αφερεγγυότητας. Ο CEA (Comité Européen des Assurances) πιστεύει ότι ο αποτελεσματικός εσωτερικός έλεγχος σε συνδυασμό με την διαχείριση των κινδύνων σε καθημερινή βάση, αλλά και ως χαρακτηριστικά ενσωματωμένα στην πολιτική λειτουργίας της εταιρίας , αποτελούν τον καλύτερο μηχανισμό πρόληψης της αφερεγγυότητας (CEA, 2007).

Δηλαδή, η Οδηγία Solvency II στις ασφαλιστικές εταιρείες υιοθετεί μια νέα μέθοδο υπολογισμού των απαιτούμενων κεφαλαίων φερεγγυότητας και εισάγει δύο βασικούς όρους: το MCR (Minimum Capital Requirement ή Ελάχιστη Κεφαλαιακή Απαίτηση) και το SCR (Solvency Capital Requirement ή Κεφάλαιο Φερεγγυότητας). Ο υπολογισμός του MCR έχει ως σκοπό την απεικόνιση του ελάχιστου κεφαλαίου φερεγγυότητας της ασφαλιστικής επιχείρησης κάτω του οποίου οι ασφαλισμένοι και όλοι οι δικαιούχοι είναι εκτεθειμένοι σε μη αποδεκτό επίπεδο κινδύνου εάν η ασφαλιστική επιχείρηση συνεχίσει τις εργασίες της. Ο υπολογισμός του SCR έχει ως σκοπό την απεικόνιση του απαιτούμενου κεφαλαίου που δίνει την δυνατότητα στην ασφαλιστική επιχείρηση να απορροφά ζημιές σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99.5% σε ορίζοντα ενός έτους. Έτσι, το SCR (κεφάλαιο φερεγγυότητας) είναι το επιθυμητό (optimum) κεφάλαιο το οποίο θα πρέπει να κατέχει μια ασφαλιστική εταιρεία λαμβάνοντας υπόψη όλους τους πιθανούς κινδύνους για την φερεγγυοτητά της σύμφωνα με την οδηγία Solvency II. Το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας SCR αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο κεφαλαίου το οποίο επιτρέπει στην επιχείρηση να απορροφήσει σημαντικές απρόβλεπτες ζημίες και να παρέχει εύλογη κάλυψη στους ασφαλισμένους και τους δικαιούχους. Όταν μία επιχείρηση δεν πληρεί το SCR, θα πρέπει να αποκαταστήσει σε εύλογο χρόνο το απαραίτητο κεφάλαιο για την κάλυψη της απαίτησης αυτής, με βάση ένα συγκεκριμένο και εφικτό σχέδιο που θα υποβάλλεται προς έγκριση στην εποπτική αρχή (SOLVENCY II and Reinsurance, 2007).

Η Φερεγγυότητα ΙΙ αποτελεί το νέο πλαίσιο λειτουργίας που θα διέπει τις ασφαλιστικές και αντασφαλιστικές επιχειρήσεις που δραστηριοποιούνται στην Ευρωπαϊκή Ένωση, βάσει ενός σύγχρονου και καινοτόμου καθεστώτος προληπτικής εποπτείας, με σκοπό την ενίσχυση της προστασίας των ασφαλισμένων. Ως πρώτο βήμα, εκδόθηκε η Οδηγία 2009/138/ΕΚ του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου και του Συμβουλίου τον Νοέμβριο 2009. Στις 13 Νοεμβρίου 2013, το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο και το Συμβούλιο κατέληξαν σε συμφωνία για την Οδηγία Omnibus II η οποία τροποποιεί την ανωτέρω Οδηγία, ενσωματώνοντας ρυθμίσεις για τις μακροχρόνιες εγγυήσεις που παρέχουν οι ασφαλιστικές και αντασφαλιστικές επιχειρήσεις. Καθορίζει, επίσης, ως ημερομηνία έναρξης της εφαρμογής της Οδηγίας για τη Φερεγγυότητα ΙΙ την 1η Ιανουαρίου 2016. Σύμφωνα με το πλαίσιο της Φερεγγυότητας ΙΙ όταν το προφίλ του κινδύνου της ασφαλιστικής εταιρείας αποκλίνει σημαντικά από τις παραδοχές στις οποίες βασίζεται ο υπολογισμός της Κεφαλαιακής Απαίτησης Φερεγγυότητας, τότε η Τράπεζα της Ελλάδος θα πρέπει να ξεκινήσει τη διαδικασία επιβολής πρόσθετων κεφαλαιακών απαιτήσεων. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση που το σύστημα διακυβέρνησης της ασφαλιστικής εταιρείας αποκλίνει σημαντικά από τις απαιτήσεις διακυβέρνησης. Διότι, οι συγκεκριμένες αποκλίσεις εμποδίζουν την εταιρεία να εντοπίσει, αποτιμήσει, παρακολουθήσει διαχειριστεί και να αναφέρει ορθά του κινδύνους τους οποίου εκτίθεται. Γεγονός αποτελεί ότι εντός του 2014 αλλά και του 2015 οι ασφαλιστικές εταιρείες θα υπόκεινται σε ασκήσεις προσομοίωσης ακραίων καταστάσεων και αντίστοιχων διαγνωστικών ελέγχων για την προστασία φερεγγυότητας του χαρτοφυλακίου (ΔΕΙΑ, 2012). Κάποιες από τις ασκήσεις αυτές έχουν ήδη πραγματοποιηθεί μέσα στο 2014.

Η αντασφάλιση είναι ένα πανίσχυρο εργαλείο για την μείωση της μεταβλητότητας των αποτελεσμάτων που σημειώνονται και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιτύχει σημαντικές μειώσεις στις κεφαλαιακές απαιτήσεις. Αυτό είναι ικανό μόνο αν το αποτέλεσμα της αντασφάλισης είναι επαρκώς αναγνωρισμένο ακόμα και στον υπολογισμό μιας Κοινής Προσέγγισης (standard approach) του Solvency II για τις ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις (MCR) και τις κεφαλαιακές απαιτήσεις του πλαισίου Solvency (SCR). Ο υπολογισμός της μείωσης της μεταβλητότητας λόγω της αντασφάλισης (αναλογικής και μη αναλογικής) απαιτεί μεγάλο επίπεδο πολυπλοκότητας αν εφαρμοστεί η Κοινή Προσέγγιση (standard approach). Πιο συγκεκριμένα, η εκτίμηση του αποτελέσματος μείωσης της μεταβλητότητας για συγκεκριμένους τύπους μη αναλογικής αντασφάλισης (π.χ. excess of loss ή stop loss) δεν μπορεί να οριστεί γραμμικά από την κατανομή των ιστορικών δεικτών ζημίας για ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο. Για παράδειγμα, μία αντασφάλιση excess of loss ορίζεται βάσει είτε μιας μοναδικής ζημίας είτε της συγκέντρωσης ζημιών. Η επιδρασή της λοιπόν στη γενική εικόνα της μεταβλητότητας, δηλαδή στη συνάρτηση κατανομής των αποτελεσμάτων του underwriting (κέρδη/ζημίες) για ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, εξαρτάται από συγκεκριμένους παράγοντες, όπως όρια, ορισμούς των κινδύνων ή του γεγονότος ζημίας, το μέγεθος του αντασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, κλπ. Από τη άλλη, μια αντασφάλιση stop loss παράγει μια απευθείας μείωση της πτητικότητας (volatility) στο δείκτη ζημιών ενός χαρτοφυλακίου , συνεπώς είναι πιο εύκολο να εξομοιωθεί και να είναι ορατά τα αποτελεσματά της για την μείωση των κεφαλαιακών απαιτήσεων. Σε αντιδιαστολή με τις μη αναλογικές αντασφάλειες, οι αναλογικές (quota share and surplus) επηρεάζουν το μέγεθος του χαρτοφυλακίου, αλλά δεν έχουν κανένα σημαντικό αντίκτυπο στην κατανομή του δείκτη ζημιών. Οι συμβάσεις quota share απλώς μεταφέρουν μία συγκεκριμένη αναλογία του χαρτοφυλακίου στα βιβλία του αντασφαλιστή. Η αναγνωρισή τους σε ένα σύστημα φερεγγυότητας δεν αποτελεί τίποτε άλλο από την μείωση της κεφαλαιακής απαίτησης στην καθαρή θέση του χαρτοφυλακίου, δηλαδή στο ποσό το οποίο διατηρεί η εταιρία.

Η κεφαλαιακή «ανακούφιση» η οποία προέρχεται από την υπάρχουσα αντασφάλιση μπορεί να υπολογισθεί με τους παρακάτω τρόπους:

- Με τον υπολογισμό των καθαρών δεικτών ζημίας με βάση τη σημερινή αντασφαλιστική δομή. Αν και ο υπολογισμός αυτός είναι περίπλοκος αποτελεί μια αξιόπιστη λύση.
- Για περιπτώσεις που δεν υπάρχουν σχετικά δεδομένα για τον υπολογισμό, το αποτέλεσμα της αντασφάλισης μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας αληθοφανή σενάρια. Σε κάθε περίπτωση, η χρησιμοποίηση

τέτοιων υπολογισμών μπορεί να οδηγήσει σε πολύπλοκα προβλήματα και σε αυτό το σημείο είναι δύσκολο να υποδειχθεί η σωστή μέθοδος. Μια τέτοια διαδικασία όμως θα πρέπει να οριστεί από τις εποπτικές αρχές στα πλαίσια του Solvency II.

- Προτείνεται να χρησιμοποιηθούν "as if" συγκεντρωτικοί δείκτες, οι οποίοι μπορούν να οριστούν με το να εφαρμοστούν οι νέες αντασφαλιστικές δομές σε ιστορικά δεδομένα. Η διαδικασία για την χρησιμοποίηση τέτοιων υπολογισμών θα πρέπει να περιγραφεί με πλήρη λεπτομέρεια ώστε ένα ανεξάρτητο τρίτο μέρος να μπορεί να τους αξιολογήσει και να τους κατανοήσει οποιαδήποτε στιγμή (SOLVENCY II and Reinsurance, 2007).

5.1.2. ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ

Ο πιστωτικός κίνδυνος της αντασφάλισης προέρχεται από την διμερή σχέση μεταξύ του εκχωρέα του κινδύνου, δηλαδή της ασφαλιστικής εταιρίας και του αντασφαλιστή. Ο ασφαλιστής μεταφέρει ένα μέρος των κινδύνων των εργασιών του στον αντασφαλιστή. Όμως, σχετικά με τον κίνδυνο αθέτησης από τον αντασφαλιστή, ο ασφαλιστής θα πρέπει να προσδιορίσει κεφάλαιο ώστε να καλύψει τον επιπλέον πιστωτικό κίνδυνο στον οποίο εκτίθεται. Συνεπώς, και η μεταφορά κινδύνου καθώς και ο επιπλέον πιστωτικός κίνδυνος που προέρχεται από αυτή τη μεταφορά θα πρέπει να αναγνωριστούν στην κεφαλαιακή απαίτηση φερεγγυότητας προσμετρώντας τα επίπεδα διασποράς και οικονομικής δύναμης του κάθε αντασφαλιστή. Η αξιολόγηση ενός αντασφαλιστή επηρεάζει απευθείας την κεφαλαιακή απαίτηση ενός ασφαλιστή, άρα αποκτούν ανταγωνιστικό πλεονέκτημα οι αντασφαλιστές με καλύτερες αξιολογήσεις.

5.2 ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ VaR, TVaR ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΡΧΕΣ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ

Σε αυτή την ενότητα γίνεται η ανάλυση δυο αντασφαλιστικών σχημάτων με σκοπό την αναζήτηση της βέλτιστης αντασφαλιστικής κάλυψης του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρείας. Η περίοδος κάλυψης είναι οι ζημιές τριών ετών, δηλαδή από το 2010 έως και το 2012. Ενώ, οι αντασφαλίσεις που χρησιμοποιούνται είναι η Quota Share (αναλογική αντασφάλιση) και η Excess of Loss (μη αναλογική αντασφάλιση). Με την ανάπτυξη διάφορων αρχών υπολογισμού των ασφάλιστρων βρίσκεται το πλεόνασμα (Insurer's surplus) του ασφαλιστή σε κάθε αντασφάλιση ενώ, χρησιμοποιώντας κριτήρια όπως το VaR (Value at Risk) για κάθε αρχή αντασφαλίστρου και αντασφάλιση καταγράφεται η βέλτιστη αντασφάλιση.

5.2.1. ΚΡΙΤΗΡΙΑ VaR ΚΑΙ TVaR

Οι κριτικές τιμές (critical values) VaR και Tvar είναι δημοφιλείς στον τομέα της ασφάλισης γενικά και στους αναλογιστικούς κύκλους ειδικότερα. Η κριτική τιμή της VaR είναι το σημείο στο οποίο μπορεί να προκύψει μια «κακή» έκβαση σε μια προκαθορισμένη πιθανότητα, ας πούμε 1%. Ενώ, η κριτική τιμή Tvar είναι η μέση τιμή όλων των αποτελεσμάτων που θα είναι «χειρότερα» από το προκαθορισμένο «Κακό» αποτέλεσμα (Lampaert και Walhin, 2005).

Για τον υπολογισμό της VaR απαιτείται η κατανομή των τιμών του χαρτοφυλακίου στον επιλεγμένο χρονικό ορίζοντα. Η κατανομή μπορεί να υπολογιστεί είτε από ιστορικά δεδομένα είτε υποθέτοντας ότι ακολουθεί κανονική ή άλλη κατανομή. Η VaR είναι η απόσταση της μέσης τιμής του χαρτοφυλακίου και του πρώτου εκατοστημορίου για επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, ενώ ο τύπος καθορίζεται ως:

VaR = Expected Profit/Loss – Worst Case Loss at 99% Confidence Level

Ενώ, η κριτική τιμή Tvar βρίσκεται ως η μέση τιμή όλων των αποτελεσμάτων που θα είναι «χειρότερα» από το προκαθορισμένο «Κακό» αποτέλεσμα της VaR.

Σύμφωνα με τους Fu και Khury το 2010, τα κριτήρια VaR και Tvar δεν είναι συνεπή με την κοινή αντίληψη του κινδύνου από δύο οπτικές γωνίες:

- Ο φόβος δεν είναι μόνο για τις πολύ σοβαρές απώλειες, είναι επίσης και για μικρότερες απώλειες (Bodoff, 2009).
- Οι φορείς που ενέχουν τον κίνδυνο δεν ζυγίζουν τον κίνδυνο απώλειας με ένα γραμμικό τρόπο και αυτό είναι περισσότερο ανησυχητικό για τη συχνότητα των μεγάλων ζημιών από ότι για τις μικρότερες. Με άλλα λόγια, η αντίληψη του

κινδύνου είναι εκθετική καθώς αυξάνεται το μέγεθος της απώλειας, ενώ τα κριτήρια VaR και Tvar αντιλαμβάνονται και υπολογίζουν την αξία σε κίνδυνο γραμμικά.

5.2.2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ

Κάποιες εταιρείες στην πράξη χρησιμοποιούν βέλτιστες στρατηγικές με συνδυασμό αντασφαλίσεων, δηλαδή αναλογικής και μη αναλογικής, όπως την Quota share και stop loss/excess of loss. Αυτή η μορφή της αντασφάλισης έχει συζητηθεί από τους Centeno (1985, 1986, 2002 (α), 2002 (β)), Kaluszka (2001), Schmitter (2001), Cai και Tan (2007), Cai et al. (2008), και πολλούς άλλους. Δηλαδή σε αυτή την μορφή αντασφάλισης, υπάρχει ένα όριο διατήρησης M και μια αναλογία α. Όταν μια απαίτηση X λάβει χώρα η πρώτη ασφαλιστική καταβάλλει το ποσό των α*X ή το ποσό M, όποιο είναι το μικρότερο, και η αντασφαλιστή πληρώνει το υπόλοιπο ποσό.

Οι Gajek and Zagrodny (2004), επέλεξαν μια στρατηγική με μια συνδυαστική σύμβαση αναλογίας και μη αναλογίας, η οποία ήταν ο συνδυασμός της stop-loss και Quota share αντασφάλισης όπου ισχυρίστηκαν ότι είναι η βέλτιστη σύμβαση, σε πολλές περιπτώσεις. Οι Ignatov et al. (2004) ερεύνησαν τα βέλτιστα επίπεδα συγκράτησης δίνοντας τη συνάρτηση επιβίωσης του ασφαλιστή και αντασφαλιστή.

Οι Cai και Tan (2007) ανέπτυξαν δύο νέα μοντέλα βέλτιστης αντασφάλισης που αφορούν την ελαχιστοποίηση ειδικών μέτρων του κινδύνου, όπως η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk-VaR) και υπό όρους προσδοκία του συνολικού κόστους του ασφαλιστή conditional tail expectation-CTE. Χρησιμοποίησαν τη stop-loss αντασφάλιση και κάτω από πρόσθετες παραδοχές της αρχής του προσδοκώμενου ασφαλίστρου, δημιούργησαν τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη των πρωτότυπων βέλτιστων παρακρατήσεων.

Οι Cai et al. (2008) γενίκευσαν τα αποτελέσματα των Cai και Tan (2007), αποδεικνύοντας ότι σύμφωνα με τα κριτήρια VaR και CTE, η σύμβαση stop-loss είναι πράγματι η βέλτιστη στρατηγική αντασφάλισης από ένα σύνολο αντασφαλίσεων.

Οι Lampaert and Walhin (2005) μελέτησαν την βέλτιστη αναλογική αντασφάλιση που μεγιστοποιεί την επιστροφή στον κίνδυνο - προσαρμοσμένου κεφαλαίου RORAC (return on risk-adjusted capital). Η προσέγγιση απαιτεί την εκτίμηση του οικονομικού κεφαλαίου με βάση τα κριτήρια VaR (αξία σε κίνδυνο) ή Tvar (αξία σε κίνδυνο της ουράς) σε μια μικρή προκαθορισμένη πιθανότητα.

5.2.3. QUOTA SHARE ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ

Σε αυτό το σημείο γίνεται η παρουσίαση του αντασφαλιστικού σχήματος χρησιμοποιώντας την Quota Share μέθοδο αντασφάλισης στα δεδομένα του χαρτοφυλακίου μας. Ως ποσοστό συμμετοχής του ασφαλιστή και του αντασφαλιστή στον κίνδυνο επιλέγεται τυχαία το 50% δηλαδή $c = 0,50$. Δηλαδή, για κάθε ζημιά/ απαίτηση που προκύπτει αναλαμβάνουν να καλύψουν από 50% ο ασφαλιστής και ο αντασφαλιστής.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τα στατιστικά χαρακτηριστικά των ζημιών υπολογισμένα σε μηνιαία βάση για το σύνολο των ζημιών με την αντασφάλιση Quota Share , την εικόνα του ασφαλιστή και την εικόνα του αντασφαλιστή.

Πίνακας 5.2.3.1 :Στατιστικά χαρακτηριστικά των ζημιών με την αντασφάλιση Quota Share

	Χαρτοφυλακίου	Ασφαλιστή	Αντασφαλιστή
Μέση Τιμή	110.927,39 €	55.463,69 €	55.463,69 €
Τυπική Απόκλιση	81.381,78 €	40.690,89 €	40.690,89 €
Διασπορά	6.622.994.248,71 €	1.655.748.562,18 €	1.655.748.562,18 €

Στην πρώτη στήλη παρουσιάζονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά των ζημιών συνολικά, ενώ, στις άλλες δυο στήλες παρουσιάζονται τα στατιστικά των ζημιών που αποκομίζεται ο ασφαλιστής και ο αντασφαλιστής αντίστοιχα. Γίνεται εμφανές ότι τα στατιστικά στοιχεία του ασφαλιστή και αντασφαλιστή είναι τα ίδια εφόσον η αναλογία $c = 0,5$ ισχύει. Έτσι, μειώνεται ο κίνδυνος/ζημιές που αναλαμβάνει ο ασφαλιστής κατά 50%.

5.2.3.1 ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ ΣΤΗΝ QUOTA SHARE

Για να υπολογίσουμε το μέσο μηνιαίο ασφάλιστρο των συνολικών ζημιών του ασφαλιστή και του αντασφαλιστή του χαρτοφυλακίου μας για διάφορες αρχές υπολογισμού για την αντασφάλεια Quota Share χρησιμοποιήσαμε τους παρακάτω τύπους που προτείνουν οι Tan, Weng and Zhang (2010):

1) Αρχή της Μαθηματικής Ελπίδας με περιθώριο ασφαλείας:

   $\Pi(X) = (1+\theta)\mathrm{E}(X)$, όπου $\theta = 0{,}10$.

2) Αρχή της Τυπικής Απόκλισης:

   $\Pi(X) = \mathrm{E}(X) + \alpha\big(V(X)\big)^{\frac{1}{2}}$, όπου $\alpha = 0{,}10$.

3) Μικτό Ασφάλιστρο:

   $\Pi(X) = \mathrm{E}(X) + \dfrac{\beta Var(X)}{\mathrm{E}(X)}$, όπου $\beta = 0{,}10$.

4) Αρχή της Διασποράς:

   $\Pi(X) = \mathrm{E}(X) + \beta Var(X)$, όπου $\beta = 0{,}00001$.

5) Η Αρχή της Ημι-Διασποράς:

   $\Pi(X) = \mathrm{E}(X) + \beta \mathrm{E}\big[X - \mathrm{E}[X]\big]^2$, όπου $\beta = 0{,}10$.

6) Ολλανδική Αρχή:

   $\Pi(X) = \mathrm{E}(X) + \beta \mathrm{E}\big[X - \mathrm{E}[X]\big]$, όπου $\beta = 0{,}10$.

Στον παρακάτω Πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τη χρήση των τύπων υπολογισμού του ασφαλίστρου που προτείνουν οι Tan, Weng et Zhang (2010):

Πίνακας 5.2.3.1:Μηνιαίο μέσο ασφάλιστρο των συνολικών ζημιών του ασφαλιστή και αντασφαλιστή

Υπολογισμοί Μηνιαίου Ασφαλίστρου			
Αρχές Υπολογισμού	Χαρτοφυλακίου	Ασφαλιστή	Αντασφαλιστή
Αρχή της Μαθηματικής Ελπίδας με περιθώριο ασφαλείας	122.020,13 €	61.010,06 €	61.010,06 €
Αρχή της Τυπικής Απόκλισης	116.099,76 €	58.049,88 €	58.049,88 €
Μικτό Ασφάλιστρο	116.897,96 €	58.448,98 €	58.448,98 €
Αρχή της Διασποράς	177.157,33 €	88.578,67 €	88.578,67 €
Η Αρχή της Ημι-Διασποράς	110.927,39 €	55.463,69 €	55.463,69 €
Ολλανδική Αρχή	110.927,39 €	55.463,69 €	55.463,69 €

Στον Πίνακα 5.2.3.1 παρατηρείται ο διαχωρισμός των ασφαλίστρων που πρέπει να πληρώσει ο ασφαλιστής και αντασφαλιστής για τις ζημιές να μοιράζονται κατά 50%. Κατά μέσο όρο το ασφάλιστρο που πρέπει να πληρώσει ο ασφαλιστής και αντασφαλιστής είναι 125.671.66 €.

5.2.3.2. INSURER'S SURPLUS ΜΕ ΤΗΝ QUOTA SHARE ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ

Για να βρεθεί το πλεόνασμα/κέρδος του ασφαλιστή στην Quota Share αντασφάλιση χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση της διαδικασίας πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου σε διακριτό χρόνο όπως την εξίσωση (4.4.1), μόνο που γίνεται η προσθήκη και άλλων παραγόντων και της αντασφάλισης που δεν λαμβάνει υπόψη η (4.4.1) όπου είναι η απλή μορφή εξήγησης της διαδικασίας πλεονάσματος:

$$U_n = u + p(1-c) - e - \sum_{i=1}^{n} l_i (1-c), \qquad (5.2.3.2)$$

όπου: U_n είναι η τιμή του πλεονάσματος για το μήνα n

u είναι το αρχικό απόθεμα

p είναι το μηνιαίο μέσο ασφάλιστρο

e είναι το μηνιαίο μέσο έξοδο

c είναι η αναλογία της Quota Share αντασφάλισης

l_i είναι οι συνολικές απαιτήσεις που πληρώνει ο ασφαλιστής για το μήνα i

Τα στοιχεία της εξίσωσης που χρησιμοποιήθηκαν παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα :

	u(0)	P για θ=10%	e	c
Χαρτοφυλάκιο	3.000.000,00 €	3.021.362,00 €	750.000,00 €	0,50 €
Ετήσιο	-	1.007.120,67 €	250.000,00 €	
Μηνιαίο	-	83.926,72 €	20.833,33 €	

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε σε κάποιες παραδοχές που χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε τις παραπάνω αριθμητικές τιμές:

<u>Παραδοχή 1η</u>: Οι συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου για τον ασφαλιστή με τη χρήση της Quota Share αντασφάλισης με ποσοστό ιδίας κράτησης c=0,5 ανέρχονται σε 1.996.693 € για τα τρία έτη. Αναζητούμε το ασφάλιστρο P που ικανοποιεί την συνθήκη $\tilde{\theta} \succ 0$, με βάση τον τύπο ως:

$$\tilde{\theta} > 0 \Rightarrow \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} l_i + e} - 1 > 0 \Rightarrow P > \sum_{i=1}^{n} l_i + e \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P > 1.996.639 + 750.000 \Rightarrow P > 2.746.693,$$

όπου P είναι το ασφάλιστρο (έσοδα) και $\sum_{i=1}^{n} l_i + e$ είναι το άθροισμα όλων των αποζημιώσεων (έξοδα), και καταλήγουμε στο ότι το ασφάλιστρο πρέπει να είναι $P > 2.746.693$€ για τα τρία έτη.

<u>Παραδοχή 2η</u>: Έστω ότι η ασφαλιστική εταιρεία έχει ορίσει ότι θέλει το περιθώριο κέρδους της να είναι $\theta = 10\%$. Επομένως, λύνοντας την εξίσωση

$$\tilde{\theta} = 0.10 \Rightarrow \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} l_i + e} - 1 = 0.10 \Rightarrow P = \sum_{i=1}^{n} l_i + e + 0.10(\sum_{i=1}^{n} l_i + e) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P = 1.996.693 + 750.000 + 0.10(1.996.693 + 750.000) \Rightarrow P = 3.021.362$$

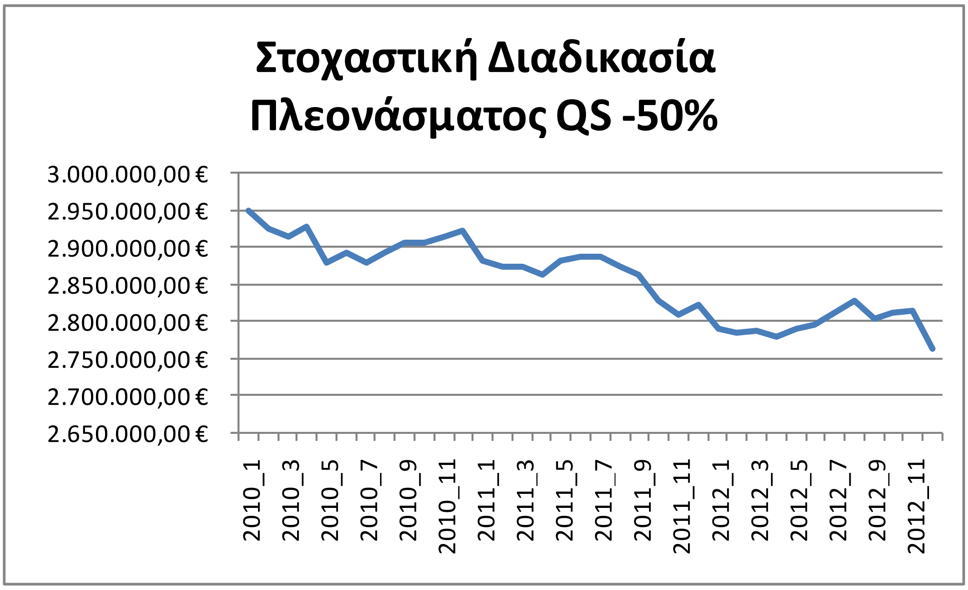
ως προς P καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το ασφάλιστρο P πρέπει να ισούται με 3.021.362€ για τα τρία έτη.

<u>Παραδοχή 3η</u>: Τα λειτουργικά και διαχειριστικά έξοδα e της εταιρείας είναι 750.000 €.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.2.3.2) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το αντασφαλιστικό σχήμα Quota Share 50% δεν είναι κατάλληλο για τον ασφαλιστή καθώς δίνει έλλειμμα 237.665,50 € .

Στο παρακάτω Σχήμα παρουσιάζεται η Διαδικασία του Πλεονάσματος με τη χρήση του αντασφαλιστικού σχήματος Quota Share 50%.

Σχήμα 5.2.3.2. Διαδικασία του Πλεονάσματος με τη χρήση του αντασφαλιστικού σχήματος Quota Share 50% και περιθώριο ασφαλείας θ=10%.



Από το Σχήμα 5.2.3.2. παρατηρούμε ότι με τη χρήση αντασφαλιστικού σχήματος Quota Share 50% το πλεόνασμα του ασφαλιστή πέφτει αισθητά και μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δεν είναι το κατάλληλο αντασφαλιστικό σχήμα.

Ενώ, τα στατιστικά στοιχεία της τυχαίας μεταβλητής του πλεονάσματος, καθώς αυτή μεταβάλλεται στο χρόνο παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 5.2.3.2: Στατιστικές τιμές πλεονάσματος ασφαλιστή

Στατιστικές Τιμές Πλεονάσματος του Ασφαλιστή	
Ελάχιστη Τιμή	2.762.334,50 €
Μέγιστη Τιμή	2.949.694,01 €
Μέση Τιμή	2.855.618,15 €
Διάμεσος	2.873.433,13 €
Τυπική Απόκλιση	51.723,72 €
Διασπορά	2.675.342.744,85 €

Εκτός από τις κλασικές στατιστικές τιμές χρησιμοποιούνται και άλλα δύο κριτήρια τα οποία έχουν αναφερθεί και χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό της βέλτιστης αντασφάλισης. Είναι η στατιστική VaR (αξία σε κίνδυνο) και η Tvar (αξία σε κίνδυνο της ουράς). Η κριτική τιμή της VaR είναι το σημείο στο οποίο μπορεί να προκύψει μια «κακή» έκβαση σε μια προκαθορισμένη πιθανότητα όπου συνήθως η πιθανότητα είναι μικρότερη του 5%. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η πιθανότητα 1% ενός ακραίου κινδύνου. Για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, οι τιμές του VaR(1%) και TVaR(1%) είναι 2.768.341,08€ και 2.762.334,50€ αντίστοιχα.

5.2.3.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΗΣ QUOTA SHARE ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ

Ακολουθώντας την μεθοδολογία των Tan, Weng et Zhang (2010) για τον καθορισμό της βέλτιστης Quota Share αντασφάλισης χρησιμοποιώντας τα VaR και Tvar κριτήρια έχουμε τα εξής:

Για μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X η αξία σε κίνδυνο με επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha'$, όπου $0 \prec \alpha' \prec 1$ ορίζεται ως:

$$VarX(\alpha') = \inf\left\{X : \Pr\left\{X \succ x\right\} \leq \alpha'\right\}.$$

Μια σχέση που προκύπτει από τον ορισμό είναι ότι:

$$VarX(\alpha') = S^{-1}(X)(\alpha') = F^{-1}(X)(1-\alpha'), \qquad (5.2.3.3.1)$$

όπου $S^{-1}(X)$ και $F^{-1}(X)$ είναι οι αντίστροφες συναρτήσεις της συνάρτησης επιβίωσης $S(X)$ και της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $F(X)$. Στην ουσία ψάχνουμε να βρούμε την βέλτιστη αντασφάλιση Quota Share δηλαδή τον συντελεστή c^* ποσοστού/αναλογίας. Έτσι, ψάχνουμε να βρούμε τον βέλτιστο συντελεστή c^* της Quota Share όπου ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης ανάλογα με το μέτρο του κινδύνου:

$$VaR_{\alpha'}\left(\mathrm{T}_{qs};c^*\right) = \min_{c\in|0,1|}\left\{VaR_{\alpha'}\left(\mathrm{T}_{qs};c\right)\right\}. \qquad (5.2.3.3.2)$$

Δηλαδή, αναζητείται ο συντελεστής εκείνος που ελαχιστοποιεί την πιθανότητα κινδύνου. Για να βρούμε τον βέλτιστο συντελεστή λοιπόν της Quota Share αντασφάλισης χρησιμοποιώντας διάφορες αρχές υπολογισμού των αντασφαλίστρων χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις των Tan, Weng and Zhang (2010):

- **Η Αρχή της Διασποράς:** Η βέλτιστη Quota Share αντασφάλιση είναι μη-τετριμμένη αν και μόνο αν $S^{-1}(X)(\alpha') < \mathrm{E}(X) + 2\beta' D(X)$, όπου με βάση το κριτήριο Var το $S^{-1}(X)(\alpha') = VaR(1\%) = 2.768.341{,}08$.

  Σε αυτή την περίπτωση, ο βέλτιστος συντελεστής αντασφάλισης Quota Share δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$c^* = \frac{\mathrm{E}(X) - S^{-1}(X)(\alpha')}{2\beta' D(X)} = \frac{(2.855.618{,}15 - 2.768.341{,}08)}{(2 * 0{,}000533 * 2.675.342.744{,}85)} = 0{,}03 . \qquad (5.2.3.3.3)$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω συνθήκη στα δεδομένα του χαρτοφυλακίου μας, επιλέγουμε $\beta' = 0{,}000533$ και από την εφαρμογή του τύπου (5.2.3.3.3) στα δεδομένα μας καταλήγουμε στο ότι ο βέλτιστος συντελεστής αντασφάλισης είναι ο $c^* = 3\%$.

- **Η Αρχή της Ημί-Διασποράς:** Η βέλτιστη Quota Share αντασφάλιση είναι μη-τετριμμένη αν και μόνο αν $S^{-1}(X)(\alpha') < \mathrm{E}[X] + 2\beta' \mathrm{E}\left[X - \mathrm{E}[X]\right]^2$, όπου με βάση το κριτήριο Var το $S^{-1}(X)(\alpha') = VaR(1\%) = 2.768.341{,}08$ (βλ. Πίνακα 5.2.3.2).

  Σε αυτή την περίπτωση, ο βέλτιστος συντελεστής αντασφάλισης Quota Share δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$c^* = \frac{\mathrm{E}(X) - S^{-1}(X)(\alpha')}{2\beta' \mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2} = \frac{(2.855.618{,}15 - 2.768.341{,}08)}{(2 * 0{,}000548 * 2.601.027.668{,}60)} = 0{,}03 . \qquad (5.2.3.3.4)$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω συνθήκη στα δεδομένα του χαρτοφυλακίου μας, επιλέγουμε $\beta' = 0{,}000548$ και από την εφαρμογή του τύπου (5.2.3.3.4) στα δεδομένα μας καταλήγουμε στο ότι ο βέλτιστος συντελεστής αντασφάλισης και με τη χρήση της Αρχής της Ημι-Διασποράς ότι είναι ο $c^* = 3\%$.

Πίνακας 5.2.3.3: Βέλτιστοι συντελεστές αντασφάλισης Quota Share με τη χρήση κριτηρίου VaR και διάφορων αρχών ασφαλίστρων.

Βέλτιστος Συντελεστής Αντασφάλισης για την Quota Share	
	Αρχή της Διασποράς
c*	3%
	Η Αρχή της Ημι-Διασποράς
c*	3%

Από τον Πίνακα 5.2.3.3 παρατηρούμε ότι και η Αρχή της Διασποράς αλλά και η Αρχή της Ημι-Διασποράς μας δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Έτσι, το βέλτιστο ποσοστό αναλογίας του ασφαλιστή στις ζημιές και άρα στον κίνδυνο είναι 97%. Λύνοντας όλο το αντασφαλιστικό σχήμα της Quota share με τον νέο βέλτιστο συντελεστή πράγματι το κέρδος του αντασφαλιστή όλων των ζημιών υπολογίζεται ως 61.617,28€ σε σχέση με το έλλειμμα 237.665,50€ με αναλογία στις ζημιές $c = 50\%$. Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο βέλτιστος συντελεστής αντασφάλισης κάτω από το αντασφαλιστικό σχήμα Quota Share ισούται με $c^* = 3\%$, δηλαδή ο ασφαλιστής αναλαμβάνει να αποζημιώσει το 97% των ζημιών που έρχονται στην ασφαλιστική εταιρεία και εκχωρεί το 3% στην αντασφαλιστική εταιρεία. Επίσης, λύνοντας τη σχέση:

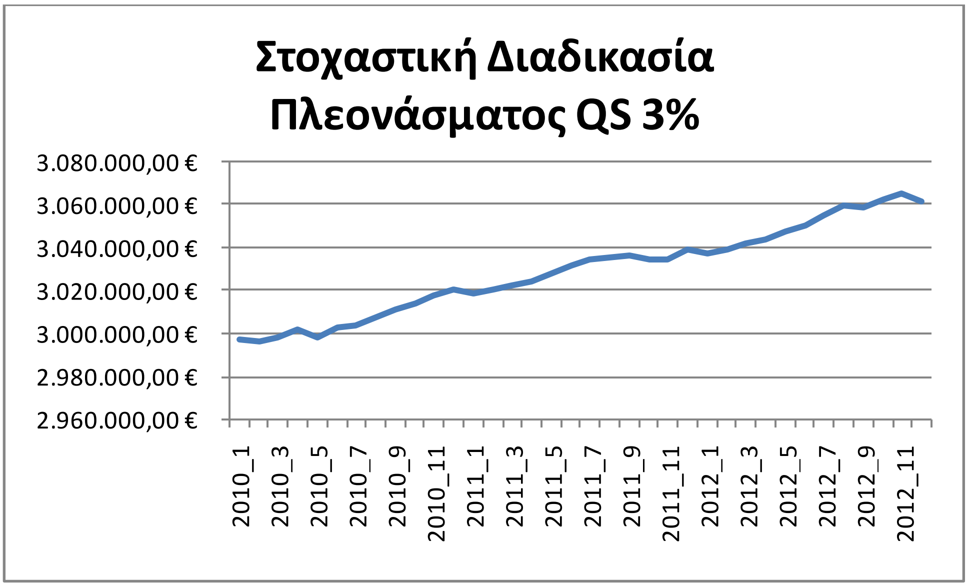
$$\tilde{\theta} = 0,10 \Rightarrow \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} l_i + e} - 1 = 0,10 \Rightarrow P = \sum_{i=1}^{n} l_i + e + 0,10(\sum_{i=1}^{n} l_i + e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 122.050,99 + 750.000 + 0,10(122.050,99 + 750.000) \Rightarrow P = 959.255$$

ως προς P, για $\theta = 0,10$, $e = 750.000$ και $\sum_{i=1}^{n} l_i = 122.050,99$ (σύνολο ζημιών/μήνα) έχουμε: καταλήγουμε στο ότι το $P = 959.255$€ για όλα το χαρτοφυλάκιο, ενώ το μηνιαίο υπολογίζεται σε $P = 26.446$€

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος κάτω από την αντασφαλιστική σύμβαση Quota Share 3%:

Σχήμα 5.2.3.3.Στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος κάτω από την αντασφαλιστική σύμβαση Quota Share 3% και περιθώριο ασφαλείας θ=10%.



Από το Σχήμα 5.2.3.3. μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε ότι το πλεόνασμα του ασφαλιστή με τη χρήση της αντασφαλιστικής σύμβασης Quota Share 3% μας δίνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τη Quota Share 50% (βλ. Σχήμα 5.2.3.2.).

5.2.4. EXCESS OF LOSS ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ

Σε αυτό το σημείο γίνεται η παρουσίαση του αντασφαλιστικού σχήματος του χαρτοφυλακίου της εταιρείας χρησιμοποιώντας την Excess of Loss μέθοδο αντασφάλισης. Ως ποσό κράτησης του ασφαλιστή για κάθε ζημιά θεωρείται το ποσό $d = 20.000$ ευρώ. Δηλαδή ο ασφαλιστής αναλαμβάνει τον κίνδυνο μιας απαίτησης έως 20.000 ευρώ ενώ, τα υπόλοιπα ποσά απαιτήσεων άνω των 20.000 ευρώ αναλαμβάνει να καλύψει ο αντασφαλιστής. Συνεπώς το συγκεκριμένο σχήμα αντασφάλισης αφορά μόνο τον αριθμό των απαιτήσεων άνω των 20.000 ευρώ στις οποίες και εφαρμόζεται η αντασφάλιση και όχι στο σύνολο των απαιτήσεων. Ο αριθμός των απαιτήσεων που χρησιμοποιείται η αντασφάλιση είναι στη πραγματικότητα 79 από το σύνολο των 987 απαιτήσεων.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τα στατιστικά χαρακτηριστικά των ζημιών για το σύνολο των ζημιών με την αντασφάλιση Excess of Loss, την εικόνα του ασφαλιστή και την εικόνα του αντασφαλιστή.

Πίνακας 5.2.4: Στατιστικά χαρακτηριστικά των μηνιαίων ζημιών με την αντασφάλιση Excess of Loss

	Χαρτοφυλακίου	Ασφαλιστή	Αντασφαλιστή
Μέση Τιμή	110.927,39 €	72.842,84 €	38.084,55 €
Τυπική Απόκλιση	81.381,78 €	47.107,47 €	34.274,31 €
Διασπορά	6.622.994.248,71 €	2.219.114.016,27 €	4.403.880.232,43 €

Πίνακας 5.2.5: Στατιστικά χαρακτηριστικά των ατομικών ζημιών με την αντασφάλιση Excess of Loss

	Χαρτοφυλακίου	Ασφαλιστή	Αντασφαλιστή
Μέση Τιμή	4.045,98 €	2.656,88 €	1.389,10 €
Τυπική Απόκλιση	12.580,16 €	6.102,32 €	6.477,84 €
Διασπορά	158.260.450,19 €	37.238.321,21 €	121.022.128,98 €

Στον Πίνακα 5.2.4 βλέπουμε τα στατιστικά στοιχεία στο σύνολο των ζημιών και πώς μοιράζονται στον ασφαλιστή και αντασφαλιστή. Έτσι, μειώνεται η διακύμανση και η τυπική απόκλιση από τη μέση τιμή των ζημιών και μειώνεται το βάρος του κινδύνου που αναλαμβάνει ο ασφαλιστής.

5.2.4.1 ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ ΣΤΗΝ EXCESS OF LOSS

Για να υπολογίσουμε το μέσο μηνιαίο ασφάλιστρο των συνολικών ζημιών του ασφαλιστή και του αντασφαλιστή του χαρτοφυλακίου μας για διάφορες αρχές υπολογισμού για την αντασφάλιση Excess of Loss χρησιμοποιήσαμε ξανά τους παρακάτω τύπους που προτείνουν οι Tan, Weng and Zhang (2010):

1) Αρχή της Μαθηματικής Ελπίδας με περιθώριο ασφαλείας:
$\Pi(X) = (1+\theta)\mathrm{E}(X)$, όπου $\theta = 0{,}10$.

2) Αρχή της Τυπικής Απόκλισης:
$\Pi(X) = \mathrm{E}(X) + \alpha\left(V(X)\right)^{\frac{1}{2}}$, όπου $\alpha = 0{,}10$.

3) Μικτό Ασφάλιστρο:
$\Pi(X) = \mathrm{E}(X) + \dfrac{\beta\ Var(X)}{\mathrm{E}(X)}$, όπου $\beta = 0{,}10$.

4) Αρχή της Διασποράς:
$\Pi(X) = \mathrm{E}(X) + \beta\ Var(X)$, όπου $\beta = 0{,}00001$.

5) Η Αρχή της Ημι-Διασποράς:
$\Pi(X) = \mathrm{E}(X) + \beta\ \mathrm{E}\left[X - \mathrm{E}[X]\right]^2$, όπου $\beta = 0{,}10$.

6) Ολλανδική Αρχή:
$\Pi(X) = \mathrm{E}(X) + \beta\ \mathrm{E}\left[X - \mathrm{E}[X]\right]$, όπου $\beta = 0{,}10$.

Στον παρακάτω Πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τη χρήση των τύπων υπολογισμού του ασφαλίστρου που προτείνουν οι Tan, Weng and Zhang (2010):

Πίνακας 5.2.4.1: Μηνιαίο μέσο ασφάλιστρο των συνολικών ζημιών του ασφαλιστή και αντασφαλιστή με την Excess of Loss αντασφάλιση.

Υπολογισμοί Μηνιαίου Ασφαλίστρου			
Αρχές Υπολογισμού	Χαρτοφυλακίου	Ασφαλιστή	Αντασφαλιστή
Αρχή της Μαθηματικής Ελπίδας με περιθώριο ασφαλείας	122.020,13 €	80.127,12 €	41.893,01 €
Αρχή της Τυπικής Απόκλισης	119.065,57 €	77.553,58 €	41.511,98 €
Μικτό Ασφάλιστρο	116.897,96 €	75.889,28 €	41.008,68 €
Αρχή της Διασποράς	177.157,33 €	95.033,98 €	82.123,36 €
Η Αρχή της Ημι-Διασποράς	110.927,39 €	72.842,84 €	38.084,55 €
Ολλανδική Αρχή	110.927,39 €	72.842,84 €	38.084,55 €

Στον Πίνακα 5.2.4.1 παρουσιάζονται τα ποσά των ασφαλίστρων που πρέπει να πληρώσει ο ασφαλιστής και ο αντασφαλιστής για τις ζημιές. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ξανά ότι η αντασφάλιση Excess of Loss δεν αφορά όλο το χαρτοφυλάκιο των ζημιών που εκτίθεται η εταιρεία αλλά μόνο στις συγκεκριμένες απαιτήσεις οι οποίες λαμβάνουν χώρα και είναι άνω των 20.000 ευρώ, δηλαδή τις 79 απαιτήσεις που αντασφαλίζονται και όχι όλες τις απαιτήσεις (987).

5.2.4.2. INSURER'S SURPLUS ΜΕ ΤΗΝ EXCESS OF LOSS ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ

Για να βρεθεί το πλεόνασμα/κέρδος του ασφαλιστή στην Excess of Loss αντασφάλιση χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση της διαδικασίας πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου σε διακριτό χρόνο όπως την εξίσωση (4.4.1), με την προσθήκη των εξόδων και της αντασφάλισης Excess of Loss:

$$U_n = u + p_I - e - \sum_{i=1}^{n} l_i - p_R, \qquad (5.2.4.2.1)$$

όπου: U_n είναι η τιμή του πλεονάσματος για το μήνα n

u είναι το αρχικό απόθεμα

p_I είναι το μηνιαίο μέσο καθαρό ασφάλιστρο

e είναι το μηνιαίο μέσο έξοδο

p_R είναι το μηνιαίο μέσο αντασφάλιστρο

l_i είναι οι συνολικές απαιτήσεις που πληρώνει ο ασφαλιστής για το μήνα i.

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε σε κάποιες παραδοχές που χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε τις παραπάνω αριθμητικές τιμές:

<u>Παραδοχή 1η</u>: Οι συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου για τον ασφαλιστή με τη χρήση της Excess of Loss αντασφάλισης με ποσοστό ιδίας κράτησης μέχρι d=20.000€ ανέρχονται σε 2.622.342€ για τα τρία έτη. Αναζητούμε το ασφάλιστρο P που ικανοποιεί την συνθήκη $\tilde{\theta} \succ 0$, με βάση τον τύπο ως:

$$\tilde{\theta} > 0 \Rightarrow \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} l_i + e} - 1 > 0 \Rightarrow P > \sum_{i=1}^{n} l_i + e \Rightarrow P > 2.622.342{+}750.000 \Rightarrow P > 3.372.342 ,$$

όπου P είναι το ασφάλιστρο (έσοδα) και $\sum_{i=1}^{n} l_i + e$ είναι το άθροισμα όλων των αποζημιώσεων (έξοδα), και καταλήγουμε στο ότι το ασφάλιστρο πρέπει να είναι $P \succ 3.372.342$€ για τα τρία έτη.

Παραδοχή 2η: Έστω ότι η ασφαλιστική εταιρεία έχει ορίσει ότι θέλει το περιθώριο κέρδους της να είναι $\theta = 10\%$. Επομένως, λύνοντας την εξίσωση:

$$\tilde{\theta} = 0,10 \Rightarrow \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} l_i + e} - 1 = 0,10 \Rightarrow P = \sum_{i=1}^{n} l_i + e + 0,10(\sum_{i=1}^{n} l_i + e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 2.622.342 + 750.000 + 0.10(2.622.342 + 750.000) \Rightarrow P = 3.709.576$$

ως προς P καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το ασφάλιστρο P πρέπει να ισούται με 3.709.576 € για τα τρία έτη.

Παραδοχή 3η: Τα λειτουργικά και διαχειριστικά έξοδα e της εταιρείας είναι 750.000 €.

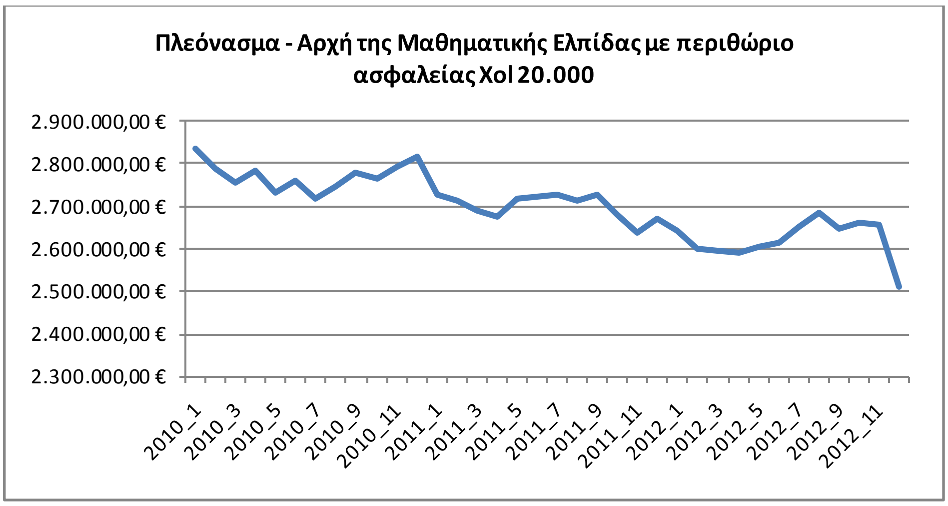
Στα παρακάτω Σχήματα παρουσιάζονται οι Διαδικασίες του Πλεονάσματος με τη χρήση του αντασφαλιστικού σχήματος Excess of Loss για d=20.000€ για κάθε μια από τις Αρχές Υπολογισμού του Ασφαλίστρου.

Τα στοιχεία της εξίσωσης (5.2.4.2.1) που χρησιμοποιήθηκαν παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα :

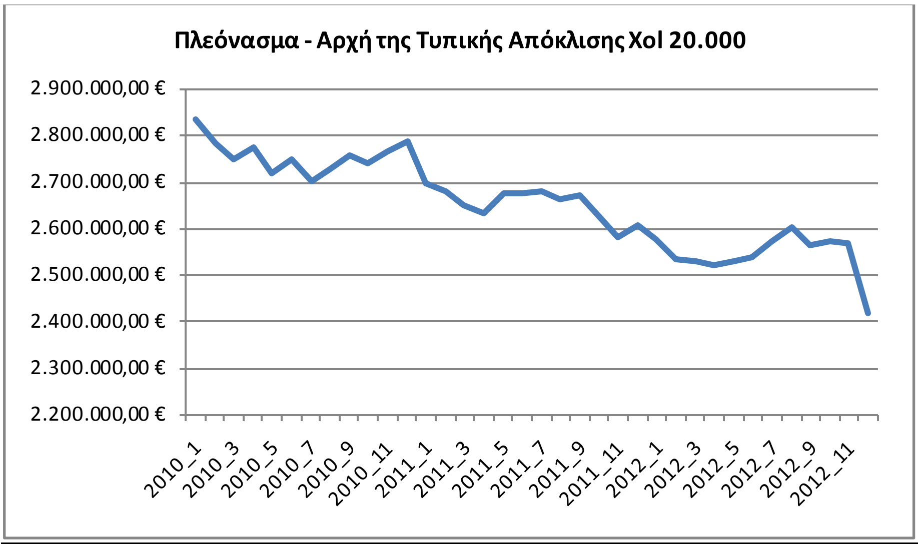
Πίνακας 5.2.4.2. Δεδομένα Χαρτοφυλακίου

	u(0)	P για θ=10%	e	d
Χαρτοφυλάκιο	3.000.000,00 €	3.709.576,00 €	750.000,00 €	20.000,00 €
Ετήσιο	-	1.236.525,33 €	250.000,00 €	
Μηνιαίο	-	103.043,78 €	20.833,33 €	

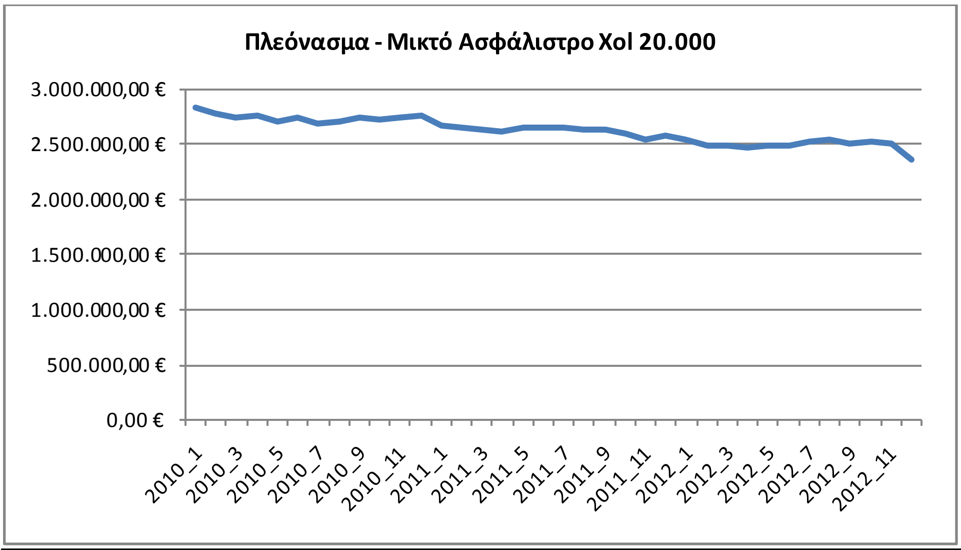
Σχήμα 5.2.4.2: Πλεόνασμα - Αρχή της Μαθηματικής Ελπίδας με περιθώριο ασφαλείας στην Xol όταν d=20.000.



Σχήμα 5.2.4.2.1: Πλεόνασμα - Αρχή της Τυπικής Απόκλισης στην Xol όταν d=20.000.



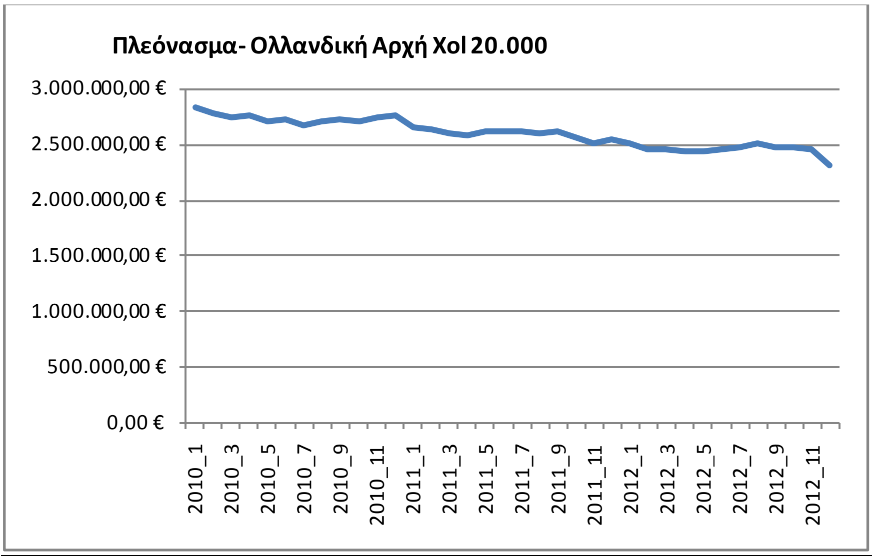
Σχήμα 5.2.4.2.2: Πλεόνασμα - Μικτό Ασφάλιστρο στην Xol όταν d=20.000



Σχήμα 5.2.4.2.3: Πλεόνασμα- Αρχή της Διασποράς στην Xol όταν d=20.000

Σχήμα 5.2.4.2.4: Πλεόνασμα- Αρχή της Ημι - Διασποράς στην Xol όταν d=20.000

Σχήμα 5.2.4.2.5: Πλεόνασμα- Ολλανδική Αρχή στην Xol όταν d=20.000



Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα στατιστικά στοιχεία της τυχαίας μεταβλητής του πλεονάσματος του ασφαλιστή χρησιμοποιώντας τις διάφορες αρχές υπολογισμού αντασφαλίστρων:

Πίνακας 5.2.4.2.2: Στατιστικές Τιμές Πλεονάσματος

Στατιστικές Τιμές Πλεονάσματος του Ασφαλιστή			
	Αρχή της Μαθηματικής Ελπίδας με περιθώριο ασφαλείας		Αρχή της Τυπικής Απόκλισης
Ελάχιστη Τιμή	2.512.234,21 €	Ελάχιστη Τιμή	2.419.586,90 €
Μέγιστη Τιμή	2.836.399,78 €	Μέγιστη Τιμή	2.833.826,24 €
Μέση Τιμή	2.698.988,95 €	Μέση Τιμή	2.651.378,53 €
Διάμεσος	2.715.336,39 €	Διάμεσος	2.667.944,30 €
Τυπική Απόκλιση	71.956,87 €	Τυπική Απόκλιση	95.825,04 €
Διασπορά	5.177.790.693,52 €	Διασπορά	9.182.438.808,10 €
	Μικτό Ασφάλιστρο		Αρχή της Διασποράς
Ελάχιστη Τιμή	2.359.671,88 €	Ελάχιστη Τιμή	2.800.056,90 €
Μέγιστη Τιμή	2.832.161,93 €	Μέγιστη Τιμή	3.180.014,78 €
Μέση Τιμή	2.620.588,86 €	Μέση Τιμή	2.974.765,80 €
Διάμεσος	2.633.826,02 €	Διάμεσος	2.988.923,56 €
Τυπική Απόκλιση	112.049,70 €	Τυπική Απόκλιση	104.429,59 €
Διασπορά	12.555.135.908,04 €	Διασπορά	10.905.539.740,71 €
	Η Αρχή της Ημι-Διασποράς		Ολλανδική Αρχή
Ελάχιστη Τιμή	2.357.901,22 €	Ελάχιστη Τιμή	878.956,05 €
Μέγιστη Τιμή	2.832.112,75 €	Μέγιστη Τιμή	2.791.030,94 €
Μέση Τιμή	2.619.678,94 €	Μέση Τιμή	1.859.665,45 €
Διάμεσος	2.632.817,73 €	Διάμεσος	1.885.394,42 €
Τυπική Απόκλιση	112.535,16 €	Τυπική Απόκλιση	539.713,16 €
Διασπορά	12.664.163.261,56 €	Διασπορά	291.290.295.087,87 €

5.2.4.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΠΟΣΟ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ EXCESS OF LOSS ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗΣ

Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία των Tan, Weng et Zhang (2010) (βλ. Proposition 4.2) για τον καθορισμό της βέλτιστης Excess of Loss αντασφάλισης χρησιμοποιώντας το VaR κριτήριο έχουμε τα εξής:

- **Αρχή της Διασποράς**: Εάν υπάρχει μια θετική σταθερά d^* που ικανοποιεί την εξίσωση $2\beta^{"}\,\mathrm{E}\left[X-d^*\right]_+=1$, τότε η βέλτιστη αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας είναι μη-τετριμμένη (nontrivial) μόνο και μόνο αν:

$$S^{-1}(X)\left(a^{"}\right)\geq d^*+\mathrm{E}\left[X-d^*\right]_++\beta^{"}D\left(X-d^*\right), \tag{5.2.4.3.3}$$

όπου, επιπλέον, το d^* είναι το βέλτιστο ποσό κράτησης.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω συνθήκη στα δεδομένα του χαρτοφυλακίου μας, επιλέγουμε $\beta^{"}=0{,}00000034$ και αναζητούμε το d^* έτσι ώστε $2\beta^{"}\,\mathrm{E}\left[X-d^*\right]_+=1$.

- **Αρχή της ημι-Διασποράς:** Εάν υπάρχει μια θετική σταθερά d^* που ικανοποιεί την εξίσωση $2\beta^{"}\,\mathrm{E}\left[X-d^*-\mathrm{E}\left(X-d^*\right)_+\right]_+=1$, τότε η βέλτιστη αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας είναι μη-τετριμμένη (nontrivial) μόνο και μόνο αν

$$S^{-1}(X)\left(a^{"}\right)\geq d^*+\mathrm{E}\left[X-d^*\right]_++\beta^{"}\,\mathrm{E}\left[X-d^*-\mathrm{E}\left(X-d^*\right)_+\right]_+^2, \tag{5.2.4.3.4}$$

όπου, επιπλέον, το d^* είναι το βέλτιστο ποσό κράτησης.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω συνθήκη στα δεδομένα του χαρτοφυλακίου μας, επιλέγουμε $\beta^{"}=10^{-11}$ και αναζητούμε το d^* έτσι ώστε $2\beta^{"}\,\mathrm{E}\left[X-d^*-\mathrm{E}\left(X-d^*\right)_+\right]_+=1$.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.2.4.3.3) και (5.2.4.3.4) ακολουθούν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Πίνακας 5.2.4.3.1:Βέλτιστο ποσό διατήρησης του ασφαλιστή στις ζημιές στην Excess of Loss με τη χρήση κριτηρίου VaR και διάφορων αρχών ασφαλίστρων.

Βέλτιστο ποσό διατήρησης του ασφαλιστή στις ζημιές στην Excess of Loss με τη χρήση κριτηρίου VaR	
	Αρχή της διασποράς
d*	21.034,33 €
	Αρχή της Ημι-Διασποράς
d*	23.540,08 €

Στον Πίνακα 5.2.4.3.1 το βέλτιστο ποσό διατήρησης με τη χρήση της Αρχής της Διασποράς είναι τα 21.034,33 € ενώ σύμφωνα με την Αρχή της Ημι-Διασποράς είναι τα 23.540,08 €.

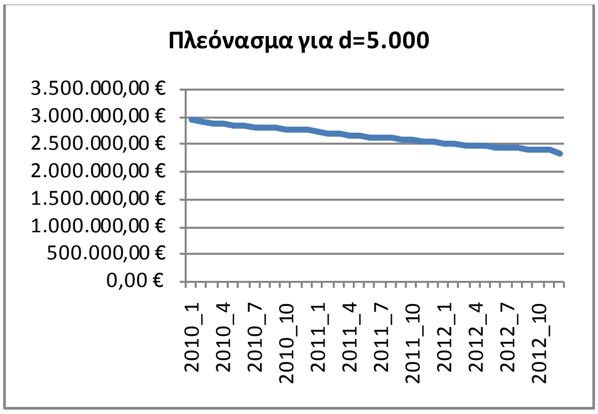
Στο παρακάτω Σχήμα παρουσιάζονται οι διαδικασίες του Πλεονάσματος για την Excess of Loss αντασφάλιση με ποσό ιδίας κράτησης για τον ασφαλιστή μέχρι 20.000€ και μέχρι 21.034€.

Σχήμα 5.2.4.3.1: Σύγκριση Διαδικασίας Πλεονάσματος Ασφαλιστή

Από το Σχήμα 5.2.4.3.1 παρατηρούμε ότι για d*=21.034€ παίρνουμε καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με το d=20.000€ .

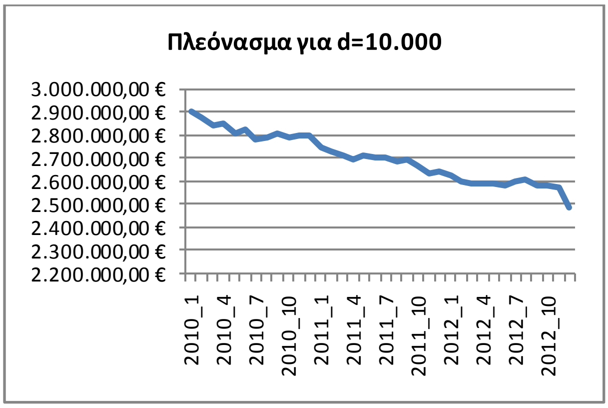
Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι διαδικασίες του πλεονάσματος για διάφορα ποσά ιδίας κράτησης d εφαρμόζοντας την Αρχή της Διασποράς για τους υπολογισμούς του ασφαλίστρου και του αντασφαλίστρου.

Σχήμα 5.2.4.3.2: Πλεόνασμα για d=5.000



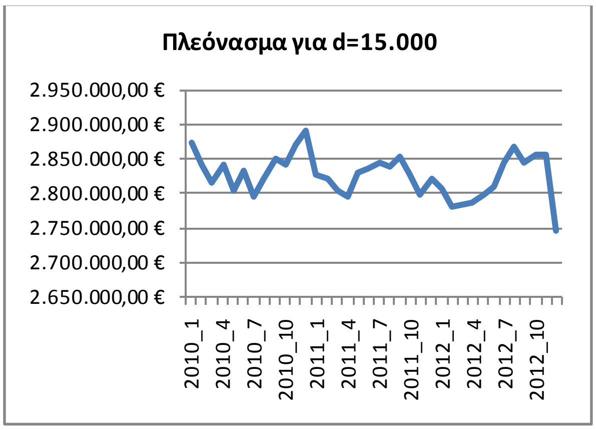
Υπολογισμοί Μηνιαίου Ασφαλίστρου			
	Χαρτοφυλακίου	Ασφαλιστή	Αντασφαλιστή
Αρχή της Διασποράς	177.157,33 €	28.886,20 €	148.271,13 €

Σχήμα 5.2.4.3.3: Πλεόνασμα για d=10.000



Υπολογισμοί Μηνιαίου Ασφαλίστρου			
	Χαρτοφυλακίου	Ασφαλιστή	Αντασφαλιστή
Αρχή της Διασποράς	177.157,33 €	50.337,72 €	126.819,61€

Σχήμα 5.2.4.3.4: Πλεόνασμα για d=15.000

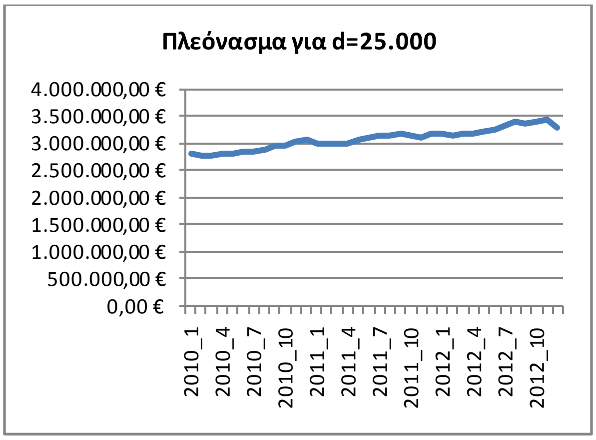


Υπολογισμοί Μηνιαίου Ασφαλίστρου			
	Χαρτοφυλακίου	Ασφαλιστή	Αντασφαλιστή
Αρχή της Διασποράς	177.157,33 €	73.176,18 €	103.981,15 €

Σχήμα 5.2.4.3.5: Πλεόνασμα για d=20.000

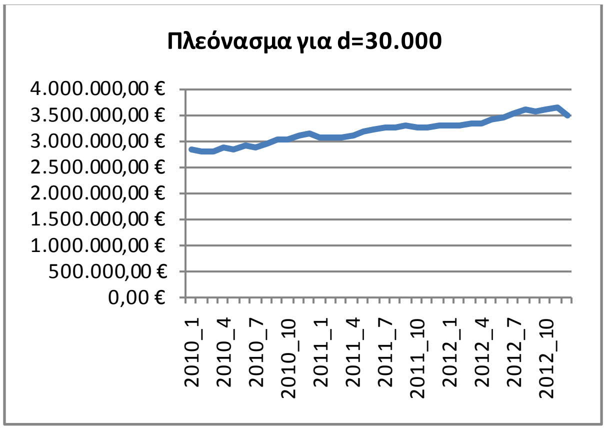
Υπολογισμοί Μηνιαίου Ασφαλίστρου			
	Χαρτοφυλακίου	Ασφαλιστή	Αντασφαλιστή
Αρχή της Διασποράς	177.157,33 €	95.033,98 €	82.123,36 €

Σχήμα 5.2.4.3.6: Πλεόνασμα για d=25.000



Υπολογισμοί Μηνιαίου Ασφαλίστρου			
	Χαρτοφυλακίου	Ασφαλιστή	Αντασφαλιστή
Αρχή της Διασποράς	177.157,33 €	110.499,52 €	66.657,81 €

Σχήμα 5.2.4.3.7: Πλεόνασμα για d=30.000



Υπολογισμοί Μηνιαίου Ασφαλίστρου			
	Χαρτοφυλακίου	Ασφαλιστή	Αντασφαλιστή
Αρχή της Διασποράς	177.157,33 €	122.436,69 €	54.720,64 €

5.2.5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ QUOTA SHARE ME EXCESS OF LOSS –ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτή την ενότητα γίνεται η σύγκριση των στρατηγικών αντασφάλισης που χρησιμοποιήθηκαν για την κάλυψη των ζημιών της ασφαλιστικής εταιρείας.Δηλαδή, της αναλογικής αντασφάλισης Quota Share και της μη αναλογικής Excess of Loss.

Συνοψίζοντας, έπειτα από την ανάλυση του χαρτοφυλακίου καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και με τις δύο αντασφαλιστικές συμβάσεις ο ασφαλιστής έχει κέρδος. Αναλυτικά, χρησιμοποιώντας την αντασφαλιστική σύμβαση Quota Share με ποσοστό ιδίας κράτησης στις ζημιές 3%, που έπειτα από την ανάλυση που έγινε στην Ενότητα 5.2.3.3 καταλήξαμε στο ότι είναι ο βέλτιστος συντελεστής αντασφάλισης, ο ασφαλιστής έχει κέρδος ύψους 61.617,28€. Επισυνάπτοντας την αντασφαλιστική σύμβαση Excess of Loss με κράτηση στις ζημιές το ποσό των 21.034€, που έπειτα από την ανάλυση που έγινε στην Ενότητα 5.2.4.3 καταλήξαμε στο ότι είναι ο βέλτιστος συντελεστής αντασφάλισης, ο ασφαλιστής έχει κέρδος ύψους 489.400,70€. Σύμφωνα με την άνω σύγκριση είναι φανερά συμφέρον η ασφαλιστική εταιρεία να προτιμήσει να χρησιμοποιήσει την Excess of Loss αντασφάλιση από ότι την Quota Share για την κάλυψη των ζημιών της με βέλτιστο ποσό κράτηση στις ζημιές το ποσό των 21.034€.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

1. Allais, Maurice (1953). "Le comportement de l'homme rationnel devant lerisque: critique des postulates et axiomes de l' ecole Americaine, "Econometrica 21, 503-546.
2. Berliner, B. (1977). A risk measure alternative to the variance, ASTIN Bulletin 9, 42–58.
3. Bodoff, N. M. (2009), Capital Allocation by Percentile Layer, Variance 3, pp. 13—30.
4. Burr, Irving W. "Cumulative frequency functions." The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 13, Number 2, (1942), pp. 215–232.
5. Bϋhlmann, H. (1970). Mathematical Models in Risk Theory, Springer-Verlag, New York.
6. Bϋhlmann. H. (1980). An economic premium principle. ASTIN.Bulletin 11, 52-60.
7. Cai, Jun; Tan, Ken Seng (2007). "Optimal Retention for a Stop-Loss Reinsurance under the VaR and CTE Risk Measures", Astin Bulletin, Vol. 37, pp 93-112.
8. CEA insurers of Europe, (2007). Solvency II Frequently Asked Questions.
9. Centeno, Maria de Lourdes (1985). On Combining Quota-share and Excess of Loss, Astin Bulletin , Vol. 15, pp. 49-63.
10. Centeno, Maria de Lourdes (1986). , Some Mathematical Aspects of Combining Proportional and Non-proportional Reinsurance, Insurance and Risk Theory, Publishing Company, Holland, pp. 247-266.
11. Centeno, Maria de Lourdes (2002 (a)). Measuring the Effects of Reinsurance by the Adjustment Coefficient in the Sparre Anderson Model, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 30, pp 37-49.
12. Centeno, Maria de Lourdes (2002 (b)). "Excess of loss reinsurance and Gerber's Inequality in the Sparre Anderson Model", Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 31, pp 415-427.
13. Clark David R.,(1996). Basics of Reinsurance Pricing, FCAS.
14. De Vylder, E and M.J. Goovaerts (1988). Recursive calculation of finite-time ruin probabilities. Insurance: Mathematics and Economics 7, 1-8.

15. Denneberg, D. (1990). Premium calculation: Why standard deviation should be replaced by absolute deviation, ASTIN Bulletin 20(2), 181–190.
16. Dickson C.M., Waters R., (1994). Reinsurance and ruin, Insurance: Mathematics and Economics 19 (1996) 61-80.
17. Dickson D. C. M., (2006)., Insurance risk and ruin, International series on Actuarial Science, Cambridge University Press.
18. Fackler M.,(2013)., Reinventing Pareto: Fits for both small and large losses, Independent Actuary Munich, Germany.
19. Gajek L., Zagrodny D.,(2004)., Reinsurance Arrangements Maximizing Insurer's Survival Probability,Journal of Risk and Insurance, Vol. 71, No. 3, pp. 421-435.
20. Gerber, H. U. (1979) An Introduction to Mathematical Risk Theory. Philadelphia, PA, S. S. Huebner Foundation.
21. Goovaerts, M.J.F. de Vylder and J. Haezendonck (1984). Insurance Premiums: Themy and Applications. North-Holland. Amsterdam.
22. Haezendonck & M. J. Goovaerts (1982). "A new premium calculation principle based on Orlicz norms," Insurance: Mathematics and Economics 1, 41-53.
23. Albrecher H., Haas S. (2011): Ruin theory with excess of loss reinsurance and reinstatements. Applied Mathematics and Computation 217(20): 8031-8043.
24. Heerwaarden Van A.E, Kaas R., Goovaerts M.J, (1989)., Properties of the Esscher Premium calculation principle, Mathematics and Economics 8 (1989) 261-267.
25. Hürlimann, W. (1994). A note on experience rating, reinsurance and premium principles, Insurance: Mathematics and Economics 14(3), 197–204.
26. Ignatov, Z. G., V. K.Kaishev, and R. S. Krachunov (2004)., Optional Retention Levels, Given the Joint Survival of Cedent and Reinsurer. Scandinavian Actuarial Journal 6: 401–30.
27. Kaas, Rob, E. Van Heerwaarden, & M. J. Goovaerts (1994). Ordering of Actuarial Risks, Education Series 1, CAIRE, Brussels.
28. Kamps U., (1998)., On a class of premium principles including the Esscher principle, Scandinavian Actuarial Journal, 1998:1, 75-80.
29. Ken Seng Tan, Chengguo Weng, and Yi Zhang (2010): VaR and CTE Criteria for Optimal Quota-Share and Stop-Loss Reinsurance, North American Actuarial Journal, Volume 13, Number 4, 459-482.

30. Klugman S A, Panjer H H, Willmot G E (2008)., Loss models. From data to decisions.Wiley, Hoboken New Jersey.
31. Ladoucette S.A., Teugels J.L. (2004): Reinsurance of large claims, EURANDOM Report 2004-025, Technical University of Eindhoven, The Netherlands.
32. Ladoucette S.A., Teugels J.L. (2004): Risks measures for a combination of quota-share and drop down excess-of-loss reinsurance treaties, EURANDOM Report 2004-025, Technical University of Eindhoven, The Netherlands.
33. Laeven J.A., Goovaerts M. J.,(2007)., Premium Calculation and Insurance Pricing.
34. Luyang Fu, Khury C. K., (2010)., Optimal Layers for Catastrophe Reinsurance,Variance 4:2, pp. 191-208.
35. Møller, T. (2001). On transformations of actuarial valuation principles, Insurance: Mathematics and Economics 28(3), 281–303.
36. Munich Reinsurance America, (2010), reinsurance: A Basic Guide To Facultative and Treaty reinsurance, Inc.
37. Moore, K.S. and Young, V.R. (2003). Pricing equity linked pure endowments via the principle of equivalent utility, working paper.
38. Musiela, M. and Zariphopoulou, T. (2002). Indifference prices and related measures, working paper.
39. Patrik G, (2006), Reinsurance, Foundations of Casualty Actuarial Society, Encyclopedia of Actuarial Science -Wiley Online Library, Fourth Edition.
40. Quiggin, John (1982). "A theory of anticipated utility", Journal of Economic Behavior and Organization 3, 323-343.
41. Savage, Leonard J. (1954). The Foundations of Statistics, New York: Wiley.
42. Sachs, R. (2007), Reinsurance Credit Risk, Technical report, Münchener Rück.
43. Schmidt, K. D. (1989). Positive homogeneity and multiplicativity of premium principles on positive risks. Insurance Math. Econom. 8, 315-319.
44. Schweizer, M. (2001). From actuarial to financial valuation principles, Insurance: Mathematics and Economics 28(1), 31–47.
45. SOLVENCY II and Reinsurance, (2007). Recognition of risk mitigation, Discussion Paper, German Insurance Association.
46. Steenackers, A. and M.J. Goovaerts (1992). Optimal reinsurance from the viewpoint of the cedent. Transactions of the 24th International Congress of Actuaries 2, 271-300.

47. Stephens, M.A., (1974). Journal of the American Statistical Association, Vol 69, No 347, 730-737.
48. Sundt B. and Teugels, (2004). Premium Principles, Encyclopedia of Actuarial Science.
49. Tadikamalla, Pandu R. "A look at the Burr and related distributions." International Statistical Review, Vol. 48, Number 3, (1980), pp. 337–344.
50. Teugels J.L. (1985): Selected Topics in Insurance Mathematics, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
51. Yaari, Menahem E. (1987). The dual theory of choise under risk, Econometrica 55, 95-115.
52. Young, V.R. (2003). Equity-indexed life insurance: pricing and reserving using the principle of equivalent utility, North American Actuarial Journal 7(1), 68–86.
53. Young, V.R. and Zariphopoulou, T. (2002). Pricing dynamic insurance risks using the principle of equivalent utility, Scandinavian Actuarial Journal 2002 (4), 246-279.
54. Van Heerwaarden, Angela E., Rob Kaas & M. J. Goovaerts (1989). Properties of the Esscher premium calculation principle, Insurance: Mathematics and Economics 8, 261-267.
55. Van Heerwaarden, A.E. and Kaas, R. (1992). The Dutch premium principle, Insurance: Mathematics and Economics 11(2), 129–133.
56. Wang, S. (1995) Insurance pricing&increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. Insurance: Mathematics & Economics 17, 43–54.
57. Wang, J.L. (2000). A note on Christofides' conjecture regarding Wang's premium principle, ASTIN Bulletin 30, 13–17.
58. Walhin J.F., Paris J.(2000), The effect of excess of loss reinsurance with reinstatements on the cedent's portfolio, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs mathematika24 (2000) 616-627.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

59. ΔΕΙΑ (2013)., Οδικός Χάρτης Ασφαλιστικών επιχειρήσεων γα την αποτελεσματική εφαρμογή της φερεγγυότητας ΙΙ, Τράπεζα της Ελλάδος.
60. Κουτσόπουλος Κ.Ι., Αθήνα (1999). Αναλογιστικά Μαθηματικά, Μέρος Ι – Θεωρία των κινδύνων.

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΕΣ

61. http://www.mathworks.com/help/stats/burr-type-xii-distribution.html
62. http://www.unipi.gr/faculty/kpolitis/ruin/ruin_notes.pdf
63. http://www.actuar.aegean.gr/notes/Antasfalisi_sim1.pdf

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας κατανομών πινάκων 3.3.2, 3.3.3.1 και 3.3.3.2

1. Burr

$$f(x) = \frac{\alpha k \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}}{\beta \left(1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{k+1}}$$

2. Burr(4P)

$$f(x) = \frac{\alpha k \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha-1}}{\beta \left(1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{k+1}}$$

3. Pearson 5

$$f(x) = \frac{(x/\beta)^{\alpha_1 - 1}}{\beta\, B(\alpha_1, \alpha_2)\, (1 + x/\beta)^{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

4. Pearson 5(4P)

$$f(x) = \frac{((x-\gamma)/\beta)^{\alpha_1 - 1}}{\beta\, B(\alpha_1, \alpha_2)\, (1 + (x-\gamma)/\beta)^{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

5. Gamma(3P)

$$f(x) = \frac{(x-\gamma)^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)} \exp\left(-(x-\gamma)/\beta\right)$$

6. Johnson SB

$$f(x) = \frac{\delta}{\lambda \sqrt{2\pi}\, z(1-z)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\gamma + \delta \ln\left(\frac{z}{1-z}\right)\right)^2\right)$$

7. Generalized Pareto

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}\left(1 + k\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-1-1/k} & k \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right) & k = 0 \end{cases}$$

8. Pareto

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(x+\beta)^{\alpha+1}}$$

9. Lognormal(3P)

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x-\gamma)-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}{(x-\gamma)\,\sigma\sqrt{2\pi}}$$

10. Fatigue Life(3P)

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-\gamma)/\beta} + \sqrt{\beta/(x-\gamma)}}{2\alpha(x-\gamma)} \cdot \phi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{x-\gamma}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x-\gamma}}\right)\right)$$

Πίνακας 1. Best Fit ζημιών με τη χρήση του προγράμματος Easyfit 5.5 professional

Goodness of Fit - Summary

#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank
2	Burr	0,08549	1	10,004	1	74,954	1
43	Pearson 5	0,08645	2	15,945	4	290,92	5
3	Burr (4P)	0,08698	3	10,292	2	85,009	2
45	Pearson 6	0,08857	4	16,494	6	298,37	6
46	Pearson 6 (4P)	0,08866	5	16,44	5	301,58	9
8	Dagum (4P)	0,09042	6	21,904	11	330,21	10
27	Inv. Gaussian (3P)	0,09457	7	18,855	9	N/A	
44	Pearson 5 (3P)	0,09602	8	15,274	3	264,65	4
31	Levy	0,09716	9	16,749	7	298,58	7
16	Frechet (3P)	0,09843	10	21,553	10	335,72	11
32	Levy (2P)	0,0985	11	17,013	8	298,76	8
36	Log-Pearson 3	0,10585	12	25,139	13	N/A	
15	Frechet	0,1063	13	22,394	12	339,99	12
35	Log-Logistic (3P)	0,11894	14	41,34	16	N/A	
33	Log-Gamma	0,11941	15	27,895	14	391,8	15
42	Pareto 2	0,1235	16	29,237	15	440,05	16
39	Lognormal (3P)	0,16078	17	45,985	17	588,92	21
38	Lognormal	0,16839	18	50,542	19	657,03	23
34	Log-Logistic	0,17051	19	47,935	18	473,73	19
57	Weibull (3P)	0,20833	20	80,025	20	N/A	