ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Γάκας Γεώργιος

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ 1^{η}/26.09.2013 συνεδρίασή της σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

- Αναπληρωτής Καθηγητής Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων),
- Αναπληρωτής Καθηγητής Κωνσταντίνος Πολίτης,
- Λέκτορας Νικόλαο Εγγλέζος.

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Γάκας Γεώργιος

**Πειραιάς
2015**

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL AND RISK MANAGEMENT

ON THE FUNDAMENTAL THEOREM OF ASSET PRICING

by
George Gakas

Piraeus, Greece
2015

Στο δάσκαλο,

Ευχαριστίες

Νοιώθοντας ιδιαίτερα ευγνώμων για το γεγονός ότι μου δόθηκε η δυνατότητα να μελετήσω το θέμα της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα κύριο Νικόλαο Μαχαιρά για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη και κύριο Νικόλαο Εγγλέζο για την επίβλεψή τους και τις πολύτιμες συμβουλές τους.

Περίληψη

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία μελετάται το Θεμελιώδες Θεώρημα Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων που αποτελεί τη βάση της σύγχρονης τιμολόγησης χρεογράφων και παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Το πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων που αποδείχθηκε το 1981, θεμελιώνει την ισοδυναμία μεταξύ της απουσίας ευκαιριών κερδοσκοπίας *no arbitrage* και της ύπαρξης ισοδύναμων martingale μέτρων κάτω από κατάλληλες συνθήκες. Παρουσιάζεται μία λεπτομερής επισκόπηση των γενικεύσεων του παραπάνω αποτελέσματος μέχρι το 1994, όπου η έννοια του no arbitrage αντικαθίσταται από τις γενικότερες έννοιες *μη δωρεάν γέυμα* και *μη δωρεάν γεύμα με εξαφανιζόμενο κίνδυνο*.

Abstract

In this thesis, we focus on the study of the Fundamental Theorem of Asset Pricing, which is the basis of the nowadays pricing of financial instruments and derivatives. The first Fundamental Theorem of Asset Pricing proved in 1981, establishes the equivalence between the absence of opportunities of *arbitrage* and the existence of equivalent martingale measures, under some specific conditions. We present a detailed overview of the generalizations of the Theorem until 1994, where the notion of *no arbitrage* is replaced by the more general *no free lunch* and *no free lunch with vanishing risk*.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

FTAP: Fundamental Theorem of Asset Pricing

μ.χ.: μετρήσιμος χώρος

χ.μ.: χώρος μέτρου

χ.π.: χώρος πιθανότητας

σ.μ.μ.: σύνολο μηδενικού μέτρου

σ.β.: σχεδόν βέβαια

σ.π.: σχεδόν παντού

τ.μ.: τυχαία μεταβλητή

σ.δ.: στοχαστική διαδικασία

δ.μ.τ.: δεσμευμένη μέση τιμή

Δ.Ε.: Διπλωματική εργασία

χ.δ.: χρόνος διακοπής

φ.χ.π.: φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας

Εισαγωγή

Το 1973 οι F. Black και M. Scholes δημοσίευσαν την πρωτοπόρα εργασία τους [13] σχετικά με την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς-πώλησης. Η βασική ιδέα, που αποδόθηκε στον R. Merton σε μια υποσημείωση της εργασίας των Black-Scholes, είναι η χρήση της έννοιας του *arbitrage* (βλ. σελ 11 για τον ορισμό) σε συνεχή χρόνο. Η απλή και οικονομικά πολύ κατανοητή *αρχή του no arbitrage* (βλ. σελ 11 για τον ορισμό) επιτρέπει σε κάποιον να υπολογίσει, σε ορισμένα μαθηματικά μοντέλα των χρηματοοικονομικών αγορών μοναδικές τιμές για τα δικαιώματα προαίρεσης και άλλα ενδεχόμενα κέρδη. Ένα τέτοιο μοντέλο είναι το μοντέλο Samuelson, [53] που στις μέρες μας αναφέρεται επίσης ως το μοντέλο Black-Scholes και βασίζεται στη γεωμετρική κίνηση Brown.

Αυτό το αξιοσημείωτο επίτευγμα των Black, Scholes και Merton είχε μία βαθιά επίδραση στις χρηματοπιστωτικές αγορές και μετατόπισε το πρόβλημα της αντιμετώπισης χρηματοοικονομικών κινδύνων προς τη κατεύθυνση της χρήσης πολύ δύσκολων μαθηματικών μοντέλων.

Ήταν στα τέλη της δεκαετίας του εβδομήντα όταν ο κεντρικός ρόλος των επιχειρημάτων no arbitrage είχε απόκρυσταλλωθεί σε τρεις σημαντικές εργασίες των M. Harrison-D. Kreps [36] (1979), M. Harrison-S. Pliska [37] (1981) και D. Kreps [44] (1981). Οι Harrison, Kreps και Pliska δημιούργησαν ένα γενικό πλαίσιο, το οποίο επιτρέπει τη συστηματική μελέτη των διαφόρων μοντέλων των χρηματοπιστωτικών αγορών. Το μοντέλο Black-Scholes είναι μόνο ένα, προφανώς πολύ σημαντικό, παράδειγμα που εμπίπτει στο πλαίσιο μιας γενικής θεωρίας. Βασική προσφορά αυτών των εργασιών ήταν η στενή σχέση μεταξύ των επιχειρημάτων no arbitrage και της θεωρίας των martingales. Αυτή η σχέση είναι το θέμα του *Θεμελιώδους Θεώρηματος Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων (Fundamental Theorem of Asset pricing, FTAP για συντομία)* (αυτό το όνομα δόθηκε από τους Ph. Dybvig και S. Ross [28]), το οποίο δεν είναι απλώς ένα μεμονωμένο θεώρημα, αλλά μάλλον μια γενική αρχή συσχέτισης του no arbitrage με τη θεωρία των martingales. Γενικά, το θεώρημα αναφέρει ότι το μαθηματικό μοντέλο μιας χρηματοπιστωτικής αγοράς είναι απαλλαγμένο από ευκαιρίες arbitrage αν και μόνο αν είναι ένα martingale υπό ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας. Μόλις επιτευχθεί η βασική αυτή σχέση, κάποιος μπορεί γρήγορα να συμπεράνει ακριβείς πληροφορίες σχετικά με την τιμολόγηση και αντιστάθμιση των ενδεχόμενων απαιτήσεων όπως τα δικαιώματα προαίρεσης. Έτσι, η χρήση της θεωρίας των martingales και της στοχαστικής ολοκλήρωσης ανοίγει τις πύλες για την εφαρμογή μιας ισχυρής μαθηματικής θεωρίας.

Η μαθηματική πρόκληση είναι να μετατρέψουμε αυτή τη γενική αρχή σε ακριβή θεωρήματα. Αυτό καθιερώθηκε για πρώτη φορά από τους M. Harrison και S. Pliska στην εργασία [37] για την περίπτωση των πεπερασμένων χώρων πιθανότητας. Το τυπικό παράδειγμα ενός μοντέλου, που βασίζεται σε ένα χώρο πιθανότητας με πεπερασμένο δειγματικό χώρο, είναι το *διωνυμικό μοντέλο*, επίσης γνωστό ως το μοντέλο *COX-Ross-Rubinstein* στα χρηματοοικονομικά.

Σαφώς, η υπόθεση του πεπερασμένου δειγματικού χώρου είναι πολύ περιοριστική και δεν εφαρμόζεται σε παραδείγματα της θεωρίας, όπως το μοντέλο Black-Scholes ή το πολύ παλαιότερο μοντέλο που εξετάστηκε από τον L. Bachelier [8] (1900), δηλαδή η κίνηση Brown. Ως εκ τούτου, το πρόβλημα της δημιουργίας θεωρημάτων που ισχύουν για γενικότερες καταστάσεις εκτός από τους πεπερασμένους δειγαμτικούς χώρους παρέμεινε ανοικτό.

Αρχίζοντας από το έργο του D. Kreps [44] για τις επόμενες δύο δεκαετίες ακολούθησε μια μακρά σειρά ερευνών και γενικεύσεων του FTAP. Αποδείχθηκε ότι το έργο αυτό ήταν μαθηματικά πολύ δύσκολο και προς όφελος και των δύο θεωριών που συνδέει. Σε ό,τι αφορά την οικονομική πλευρά, βοήθησε να αναπτυχθεί μια βαθύτερη κατανόηση των εννοιών του arbitrage, των επενδυτικών στρατηγικών κλπ, η οποία κατέληξε να είναι ζωτικής σημασίας για διάφορες εφαρμογές. Σε ό,τι αφορά τις καθαρά μαθηματικές πτυχές της θεωρίας της στοχαστικής ολοκλήρωσης, οδήγησε στη δεκαετία του 90 σε μία αναγέννηση αυτής της θεωρίας που αρχικά είχε ακμάσει στις δεκαετίες των εξήντα και εβδομήντα.

Μεγάλο ρόλο στην εξέλιξη αυτής της θεωρία έπαιξαν οι εργασίες [19] (1994) και [20] (1998) των Delbaen και Schachermayer όπου αποδείχθηκε μια γενίκευση του FTAP, για τη γενικότερη έννοια των ημί-martingales αντί για martingales. Τα επιχειρήματα των αποδείξεων είναι αρκετά τεχνικά.

Στην παρουσα Διπλωματική εργασία (Δ.Ε. για συντομία) γίνεται μια μελέτη της ιστορικής εξέλιξης του FTAP από τη δεκαετία του 70 μέχρι και τη δεκαετία του 90, και μια προσπάθεια ανάλυσης των αποτελεσμάτων. Η Δ.Ε. είναι οργανωμένη ως εξής. Το Κεφάλαιο 1 περιέχει βασικούς ορισμούς που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια. Στο είσαγωγικό Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται το θέμα του FTAP συνοπτικά χωρίς ιδιαίτερες τεχνικές λεπτομέριες με σκοπό να δημιουργηθεί μία πρώτη κατανόηση των οικονομικών εννοιών.

Στο Κεφάλαιο 3, αναλύεται η εργασία των Harrison-Pliska [37] (1981) με έναν μαθηματικά αυστηρό τρόπο στην περίπτωση των χώρων πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με το Ω να έχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι χώροι συναρτήσεων $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι πεπερασμένης διάστασης, περιορίζοντας τη χρήση συναρτησιακής ανάλυσης σε απλή γραμμική άλγεβρα.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται αναλυτικά ένα αποτέλεσμα των R.C. Dalang, A. Morton και W. Willinger [16] (1990) όπου το FTAP των Harrison-Pliska γενικεύεται για οποινδήποτε χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (βλ. Θεώρημα 4.1.7). Η απόδειξη είναι αρκετά δύσκολη και πολλοί συγγραφείς έχουν επεξεργαστεί διάφορες αποδείξεις του αποτελέσματος, προσπαθώντας να απλοποιήσουν τις τεχνικές δυσκολίες. Στην απόδειξη των Dalang-Morton-Willinger γίνεται χρήση του Θεωρήματος Μετρήσιμων Επιλογών.

Από το Κεφάλαιο 5 και μετά το επίπεδο τεχνικής εξειδίκευσης αυξάνεται, στη προσπάθεια της παρουσίασης γενικεύσεων του FTAP για γενικούς χ.π. με συνεχή χρόνο ξεκινώντας με τη παρουσίαση της γενίκευσης του FTAP από τον D. Kreps [44] που αναφέρεται σε οποιονδήποτε χώρο πιθανότητας, φραγμένες στοχαστικές διαδικασίες τιμών συνεχούς χρόνου και απλές επενδυτικές στρατηγικές (βλ. Θεώρημα 5.2.2). Ιδιαιτέρως, αναγκαία στη παραπάνω γενίκευση του FTAP είναι η εισαγωγή της έννοιας του *μη δωρεάν γεύματος* που γενικεύει το *no arbitrage*.

Καθώς η παραπέρα γενίκευση των αποτελεσμάτων απαιτεί τη Θεωρία Στοχαστικής ολοκλήρωσης, στο Κεφάλαιο 6 δίνουμε μια σύντομη επισκόπηση της παραπάνω θεωρίας. Λόγω του γενικού χαρακτήρα των μοντέλων παρουσιάζουμε μία γενική στοχαστική θεωρία ολοκλήρωσης, επισημαίνοντας τις πτυχές που είναι ιδιαίτερα σημαντικές για τα χρηματοοικονομικά.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 μελετάται μια γενίκευση του FTAP, που είναι αποτέλεσμα των Delbaen-Schachermayer [19] (1994), για οποιονδήποτε χ.π., φραγμένες σ.δ. τιμών συνεχούς χρόνου και αποδεκτές (όχι κατ' ανάγκη απλές) επενδυτικές στρατηγικές, με την εισαγωγή της έννοιας του *μη δωρεάν γεύματος με εξαφανιζόμενο κίνδυνο*.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

1.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί

Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες και κάποιους βασικούς συμβολισμούς και ορισμούς που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

Με $\mathbb{N}$ συμβολίζεται το σύνολο $\{1, 2, \ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών , με $\mathbb{Z}$ το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο όλων των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Επίσης χρησιμοποιούνται τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_m := \{1, 2, \ldots, m\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ και $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Ομοίως ορίζονται και οι συμβολισμοί $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$.

Έστω Ω ένα σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Με A^c ή $\Omega\backslash A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το ***συμπλήρωμα του*** A (σε σχέση με το Ω), με $A \uplus B$ συμβολίζεται η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων και με $\biguplus_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται η ένωση μιας οικογένειας $\{A_i\}_{i\in I}$ $(I \neq \emptyset)$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Ω. Αν $A \subseteq \Omega$, με χ_A συμβολίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση του A.

Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ ένας μ.χ. και $\mathcal{G}$ ένα σύστημα υποσυνόλων του Ω. Η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$ συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται ***η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το*** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται ***γεννήτορας*** της $\sigma(\mathcal{G})$. Μία σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ***αριθμήσιμα παραγόμενη*** εάν υπάρχει μία αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύει $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, με $\mathfrak{B}$ και $\mathfrak{B}((\alpha, \beta))$, όπου $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, συμβολίζουμε την Borel σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και (α, β), αντίστοιχα.

Σε όλη τη Δ.Ε. κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν αυθαίρετο αλλά σταθερό χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Με $\mathcal{F}_{0,P}$ συμβολίζουμε την οικογένεια όλων των ενδεχομένων $N \in \mathcal{F}$ ώστε $P(N) = 0$, ενώ με $\mathcal{N}_{P,\mathcal{F}}$ συμβολίζουμε την οικογένεια όλων των υποσυνόλων N του Ω, ώστε να υπάρχει $A \in \mathcal{F}_{0,P}$ με την ιδιότητα $N \subseteq A$. Αν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης μπορούμε να γράφουμε $\mathcal{N} := \mathcal{N}_P := \mathcal{N}_{P,\mathcal{F}}$. Προφανώς $\mathcal{F}_{0,P} \subseteq \mathcal{N}_P$ ενώ $\mathcal{F}_{0,P} = \mathcal{N}_P$ αν και μόνο αν ο χώρος $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι πλήρης.

1.2 Βασικές έννοιες στοχαστικών διαδικασιών

Μια ***στοχαστική διαδιασία*** (σ.δ. για συντομία) $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία οικογένεια τ.μ. $X_t : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Αν οι X_t είναι τυχαία d-διάστατα ($d \in \mathbb{N}$) διανύσματα, τότε η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται ***στοχαστική διαδικασία με τιμές στον*** $\mathbb{R}^d$. Μία σ.δ. X θα λέμε ότι είναι **càdlàg** αν για σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$ η απεικόνιση $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $t \longmapsto X_t(\omega)$ είναι δεξιά συνεχής με αριστερά όρια.

Ένα μέτρο πιθανότητας Q είναι ***απόλυτα συνεχές*** ως προς το P (συμβολισμός $Q \ll P$), αν

$$\forall A \subset \mathcal{F} \quad [P(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0].$$

Δύο μέτρα πιθανότητας P, Q θα λέγονται ***ισοδύναμα*** ($P \sim Q$) αν $P \ll Q$ και $Q \ll P$.

Για κάθε τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο Ω που ονομάζεται ***η παραγόμενη από την*** X ***σ-άλγεβρα στο*** Ω και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ., όπου I σύνολο δεικτών, ορίζουμε

$$\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big) := \sigma\bigg(\bigcup_{j\in I} \sigma(X_j)\bigg).$$

Η $\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big)$ ονομάζεται ***η παραγόμενη από την οικογένεια*** $\{X_j\}_{j\in I}$ ***σ-άλγεβρα***.

Μία οικογένεια $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_j\}_{j\in I}$ σ-υποαλγεβρών της $\mathcal{F}$ ονομάζεται ***διύλιση ή φιλτράρισμα*** αν και μόνο αν το I είναι μερικά διατεταγμένο με μερική διάταξη "$\leq$" και για κάθε $j, k \in I$ με $j \leq k$ ισχύει $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_k$. Συμβολισμός: $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_j\}_{i\in I}$. Η σ-υποάλγεβρα $\sigma(\cup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{F}_t)$ της $\mathcal{F}$ συμβολίζεται με $\mathcal{F}_\infty$. Μία σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ λέμε ότι είναι ***προσαρμοσμένη σε μία διύλιση*** $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in I}$, αν για κάθε $j \in I$ η τ.μ. X_j είναι

$\mathcal{F}_j$-μετρήσιμη. Η $\{\mathcal{F}_j^X\}_{j\in I}$ με $\mathcal{F}_j^X := \sigma\big(\{X_k : k \le j\}\big)$ για κάθε $j \in I$ ονομάζεται ***η κανονική διύλιση για την*** $X := \{X_j\}_{j\in I}$ και $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t^X)$.

Ορισμός 1.2.1. Λέμε ότι η σ.δ. X δέχεται μία ***τερματική τ.μ.*** X_∞ αν

$$P[\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty] = 1$$

.

Ορισμός 1.2.2. Η τετράδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ονομάζεται ***στοχαστική βάση*** ή ***φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας*** (φ.χ.π. για συντομία). Το φιλτράρισμα $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ του $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ικανοποιεί τις ***συνήθεις συνθήκες***, αν

(c_1) $\mathcal{N}_{P,\mathcal{F}_\infty} \subseteq \mathcal{F}_0$

(c_2) $\mathbb{F}$ δεξιά συνεχής, δηλαδή $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Ορισμός 1.2.3. Αν $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία σ.δ., για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ορίζουμε

(i) $\mathcal{G}_t = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s^X$ και $\mathcal{G}_\infty = \mathcal{F}_\infty^X$.

(ii) $\mathcal{N} := \mathcal{N}_{P,\mathcal{G}_\infty} := \{A \subseteq \Omega : \exists B \in \mathcal{G}_\infty,\ (A \subseteq B \ \&\ P(B) = 0)\}$.

(iii) $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{N})$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Το φιλτράρισμα $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται το ***φυσικό (ή κανονικό) δεξιά συνεχές φιλτράρισμα*** της X και ικανοποιεί της συνήθεις συνθήκες. Το φιλτράρισμα $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μερικές φορές αναφέρεται και ως εσωτερική ιστορία της X.

Ορισμός 1.2.4. Μια σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται ***ένα martingale ως προς τη διύλιση*** $\boldsymbol{\{\mathcal{F}_j\}_{j\in I}}$ ή ***ένα*** $\boldsymbol{\{\mathcal{F}_j\}_{j\in I}}$***-martingale*** (ή η οικογένεια $\{(X_j, \mathcal{F}_j)\}_{j\in I}$ ονομάζεται ***ένα martingale***) αν ισχύουν τα εξής:

(m1) Η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη (διύλιση) $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in I}$.

(m2) Για κάθε $j \in I$ η $X_j \in \mathcal{L}^1(P)$,

(m3) Για κάθε $j, k \in I$ με $j \le k$ ισχύει $\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_j] = X_j \quad P|\mathcal{F}_j - \sigma.\beta.$.

Η $\{X_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται ***ένα υπέρ-martingale (supermartingale) ως προς τη διύλιση*** $\boldsymbol{\{\mathcal{F}_j\}_{j\in I}}$ αν ισχύουν οι (m1), (m2) και

(m3≤) Για κάθε $j, k \in I$ με $j \leq k$ ισχύει $\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_j] \leq X_j \quad P|\mathcal{F}_j - \sigma.\beta.$.

Ορισμός 1.2.5. Ένα μέτρο Q ονομάζεται ***ισοδύναμο (αντίστοιχα απόλυτα συνεχές) martingale μέτρο*** για την $X = \{X_j\}_{j\in I}$ αν η X είναι ένα $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in I}$-martingale για το μέτρο Q και $Q \sim P$ (αντίστοιχα $Q \ll P$). Με $\mathcal{M}^e(X)$:=$\mathcal{M}^e(X, P)$ (αντίστοιχα $\mathcal{M}^a(X)$) συμβολίζεται η οικογένεια όλων των ισοδύναμων martingale μέτρων (αντίστοιχα απόλυτα συνεχών μέτρων) πιθανοτητας. Θα λέμε ότι η X ικανοποιεί τη συνθήκη της ύπαρξης ενός ισοδύναμου martingale μέτρου (EMM για συντομία) αν $\mathcal{M}^e(X) \neq \emptyset$.

1.3 Χρόνοι διακοπής και τοπικά martingales

Ορισμός 1.3.1. Έστω $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια διύλιση στον $(\Omega, \mathcal{F})$. Μια απεικόνιση $T : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ τέτοια ώστε $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ονομάζεται ***χρόνος διακοπής ως προς την*** $\mathbb{F}$ ή απλώς ***χρόνος διακοπής*** (χ.δ. για συντομία). Επίσης, αν T είναι ένας χ.δ. , τότε

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_T &:= \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}_+\} \quad \text{και} \\
\mathcal{F}_{T-} &:= \sigma(\mathcal{F}_0 \bigcup \{A \cap \{t < T\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall A \in \mathcal{F}\}).
\end{aligned}$$

Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ συνήθως ερμηνεύεται σαν το σύνολο των γεγονότων που συμβαίνουν μέχρι το χρόνο t. Τότε ο χ.δ. είναι ο τυχαίος χρόνος T έτσι ώστε για κάθε χρόνο t μπορούμε να ελέγξουμε αν $T \leq t$ ή $T > t$, ανάλογα για το τι γνωρίζουμε μέχρι το χρόνο t. Επίσης το $\mathcal{F}_T$ μπορεί να ερμηνευτεί ως το σύνολο των γεγονότων που συμβαίνουν μέχρι το χρόνο T.

Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια σ.δ., $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια διύλιση στον $(\Omega, \mathcal{F})$ και $T : \Omega \longmapsto [0, \infty]$ ένας χ.δ. ως προς την $\mathbb{F}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $X_T : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ως εξής:

$$X_T(\omega) = \begin{cases} X_{T(\omega)}(\omega) \text{ αν } \omega \in \{T < \infty\} \\ \lim\limits_{t\to\infty} X_t(\omega) \text{ αν } \omega \in \{T = \infty\} \text{ και αν } \exists_1 \lim\limits_{t\longrightarrow\infty} X_t(\omega). \end{cases}$$

Αν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι δεξιά ή αριστερά συνεχής και προσαρμοσμένη στην $\mathbb{F}$, τότε η $X_T \restriction \{T < \infty\}$ είναι $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη *(βλ. π.χ. [43] Karatzas, Πρόταση 1.13 & Πρόταση 2.18).*

Ορισμός 1.3.2. Για έναν χ.δ. T, ορίζουμε τη σ.δ. X^T ώς $\{X^T\}_t = X_{t\wedge T}$ και καλούμε τη X^T ***τη διαδικασία*** X ***που σταματάει στο χρόνο*** T ***ή τη διακοπτόμενη σ.δ. στο T***.

Αν S, T είναι δύο χ.δ. , τότε μπορούμε να ορίσουμε τέσσερα είδη στοχαστικών διαστημάτων ως εξής:

$$[\![S,T]\!] := \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : t \in \mathbb{R}_+, \quad S(\omega) \leq t \leq T(\omega)\}$$

$$[\![S,T[\![:= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : t \in \mathbb{R}_+, \quad S(\omega) \leq t < T(\omega)\}$$

$$]\!]S,T]\!] := \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : t \in \mathbb{R}_+, \quad S(\omega) < t \leq T(\omega)\}$$

$$]\!]S,T[\![:= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : t \in \mathbb{R}_+, \quad S(\omega) < t < T(\omega)\}.$$

Συμβολισμός: Αν έχουμε $[\![T,T]\!]$, τότε μπορούμε να γράφουμε $[\![T]\!] := [\![T,T]\!]$. Επίσης, το $[\![T]\!]$ είναι ο περιορισμός του γραφήματος της απεικόνισης $T : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ στο σύνολο $\Omega \times \mathbb{R}_+$, το οποίο ονομάζουμε **το γράφημα του χρόνου διακοπής** T. Η σ.δ. $\chi_{[\![0,T]\!]}$ είναι càdlàg, και είναι προσαρμοσμένη στην $\mathbb{F}$ αν και μόνο αν η T είναι χ.δ. .

Ορισμός 1.3.3. Αν (P) είναι μια ιδιότητα των σ.δ., τότε μια σ.δ. X ικανοποιεί τη (P) ***τοπικά*** αν υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία χ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ τέτοια ώστε $T_n \nearrow \infty$ σ.β. και για κάθε n η σ.δ. X^{T_n} ικανοποιεί την (P).

Οι ακολουθίες $T_n \nearrow \infty$, τέτοιες ώστε κάθε X^{T_n} ικανοποιεί τη (P), καλούνται ***τοπικοποιούσες ακολουθίες***. Ιδιαιτέρως έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.3.4. Μία οικογένεια $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. ονομάζεται **ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη**, αν

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \int_{\{Y_t \geq n\}} |Y_t| dP = 0.$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathbb{E}_P[\chi_{\{|Y_t \geq n|\}}] = 0.$$

Ορισμοί 1.3.5. **(a)** Μια σ.δ $S : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ είναι ***τοπικά φραγμένη*** αν υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία χ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ που τείνει στο ∞ σ.β. και ακολουθία $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ στο $\mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $|S\chi_{[\![0,T_n]\!]}| \leq K_n$.
(b) Μια σ.δ. $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ καλείται ***τοπικό martingale*** αν υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία χ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που τείνει στο ∞ σ.β. έτσι ώστε, για κάθε n, η σ.δ. X^{T_n} είναι ένα ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale.

Ορισμός 1.3.6. Έστω $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία σ.δ. και $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ένα φιλτράρισμα στον μ.χ. $(\Omega, \mathcal{F})$.
(a) Ένα μέτρο πιθανότητας Q επάνω στην $\mathcal{F}$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το P θα λέγεται ***ισοδύναμο τοπικό martingale μέτρο***, αν η X είναι ένα τοπικό martingale υπό το μέτρο Q. Με $\mathcal{M}_l^e(X)$ συμβολίζεται η οικογένεια όλων των ισοδύναμων τοπικών martingale μέτρων πιθανοτητας. Θα λέμε ότι η X ικανοποιεί τη συνθήκη της ύπαρξης ενός ισοδύναμου τοπικού martingale μέτρου ($ELMM$ για συντομία) αν και μόνο αν $\mathcal{M}_l^e(X) \neq \emptyset$.
(b) Ένα μέτρο πιθανότητας Q επάνω στην $\mathcal{F}$ το οποίο είναι απόλυτα συνεχές ως προς το P θα λέγεται ***απόλυτα συνεχές τοπικό martingale μέτρο***, αν η X είναι ένα τοπικό martingale υπό το μέτρο Q. Με $\mathcal{M}_l^a(X)$ συμβολίζεται η οικογένεια όλων των απόλυτα συνεχών τοπικών martingale μέτρων πιθανοτητας.

1.4 Χρηματοοικονομικές έννοιες- Ορισμοί

Εδώ παραθέτουμε βασικές χρηματοοικονομικές έννοιες με οικονομικούς όρους.
(a) ***Χρηματοοικονομικοί τίτλοι*** (*Financial instruments*): Αποτελούν τη βάση των χρηματοοικονομικών συναλλαγών.Αυτοί που θα μας απασχολήσουν είναι οι εξής:

- ***ομόλογα*** (*Bonds*): Τα ομόλογα αποτελούν τρόπο άντλησης κεφαλαίων για επιχειρήσεις και τράπεζες.Αγορά ομολόγου από τον B με εκδότη τον A θεωρείται δανεισμός του A από τον B. O τόκος αυτού του δανείου θα υπολογίζεται θεωρώντας συνεχή ανατοκισμό με ονομαστικό επιτόκιο *r*. Ως εκ τούτου έχουν το σημαντικό χαρακτηριστικό ότι δεν εμπεριέχουν ρίσκο (***riskless assets***) καθώς είναι γνωστή η αξία τους στο χρόνο t.

- ***μετοχές*** (*Stocks*): Η μετοχή είναι ένα μερίδιο του κεφαλαίου μιας ανώνυμης εταιρείας και χρηματιστηριακή της αξία στο χρόνο t είναι μια σ.δ. S_t. Καθότι δεν είναι γνωστή η αξία της στο χρόνο t αναφέρεται ως τίτλος με ρίσκο (***risky asset***).

(b) ***Χρηματοοικονομική αγορά*** (*Financial market*): Θεωρείται μία δομή μέσα στην οποία επενδυτές πραγματοποιούν αγοραπωλησίες χρηματοοικονομικών τίτλων.
(c) ***Χαρτοφυλάκιο*** (*Portfolio*): Το χαρτοφυλάκιο είναι ένα σύνολο τίτλων μιας αγοράς, το οποίο μπορεί να αλλάζει ανάλογα με τη τρέχουσα και παρελθούσα κατάσταση της αγοράς.
(d) ***Επενδυτική στρατηγική*** (*Trading strategy*): Είναι ένα τυχαίο διάνυσμα $(\varphi_1(t),$

$\varphi_2(t), \ldots \varphi_n(t))$ που περιγράφει το πλήθος των τεμαχίων των τίτλων που περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο στο χρόνο t. Το $\varphi_i(t)$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός:

- αν $\varphi_i(t) < 0$ τότε έχει προηγηθεί δανεισμός $\varphi_i(t)$ μονάδων του τίτλου i (από τη χρονική στιγμή 0) αν πρόκειται για ομόλογα και πώληση $\varphi_i(t)$ μονάδων αν πρόκειται για μετοχή, έως τη χρονική στιγμή t.

- αν $\varphi_i(t) > 0$, έχουμε επένδυση $\varphi_i(t)$ μονάδων αν πρόκειται για ομόλογο (στο χρόνο 0) και αγορά $\varphi_i(t)$ μονάδων αν πρόκειται για μετοχή έως τη χρονική στιγμή t.

Αν το χαρτοφυλάκιο επιτυγχάνει να είναι αυτοχρηματοδοτούμενο (δηλαδή η αγορά ενός τίτλου αντισταθμίζεται από τη πώληση ενός ή περισσοτέρων άλλων) τότε η στρατηγική ονομάζεται ***αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική*** (*self financing stratedy*).
(e) ***Βέβαιο κέρδος*** (*Arbitrage*): Arbitrage είναι η δυνατότητα να αποκομίσουμε κέρδος σε μια οικονομική αγορά χωρίς κινδυνο (ρίσκο) και χωρίς επένδυση κεφαλαίου χρησιμοποιώντας μία συγκεκριμένη επενδυτική στρατηγική.

Κεφάλαιο 2

Η έννοια των arbitrage και free lunch στα χρηματοοικονομικά

Στο εδάφιο αυτό εξηγούμε τις έννοιες που σχετίζονται με το τίτλο με οικονομικούς όπως επίσης και μαθηματικούς όρους.

2.1 Η έννοια του Arbitrage.

Το ***arbitrage*** (βέβαιο κέρδος ή εξισορροποιητική κερδοσκοπία) είναι η δυνατότητα να αποκομίσουμε κέρδος σε μία οικονομική αγορά χωρίς κίνδυνο (ρίσκο) και χωρίς επένδυση κεφαλαίου. Συνεπώς ***η αρχή του no arbitrage*** αναφέρει ότι ένα μαθηματικό μοντέλο θα έπρεπε να μην επιτρέπει να υπάρξει δυνατότητα arbitrage σε μία οικονομική αγορά.

Για να κατανοηθεί καλύτερα η έννοια του arbitrage θα αναφέρουμε το εξής παράδειγμα. Έστω ότι στο Los Angeles ο λόγος του € με το $ είναι 1:1. Ως εκ τούτου μπορούμε να ανταλλάξουμε 1 $ με 1 €. Αν τώρα υποθέσουμε ότι στην Αθήνα η αξία του $ είναι 0,950 € τότε θα μπορούσαμε να αγοράζαμε στην Αθήνα 1 $ (στη τιμή των 0,950 €) και ταυτόχρονα να πουλήσουμε 1 $ στο Los Angeles (στη τιμή του 1 €) αποκομίζοντας άμεσα κέρδος 0,050 €. Οι άνθρωποι που προσπαθούν να εκμεταλλευτούν τέτοιου είδους ανισσοροπίες στην αγορά, αποκομίζοντας σε μεγάλες ποσότητες το άμεσο κέρδος, ονομάζονται arbitrageurs.

2.2 Ένα απλό παράδειγμα χρηματοοικονομικής αγοράς.

Έστω ότι έχουμε δύο είδη παραγώγων, τα ομόλογα (*bonds*) και τις μετοχές (*stocks*). Τα ομόλογα είναι ακίνδυνα (χωρίς ρίσκο) διότι γνωρίζουμε την αξία που θα έχουν αύριο. Για ευκολία παραμελούμε την έννοια του επιτοκίου και υποθέτουμε ότι η τιμή του ομολόγου σήμερα θα έιναι ίδια και αύριο και ίση με 1 € :

$$B_0 = B_1 = 1 \tag{2.1}$$

Το πιο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του μοντέλου μας είναι η μετοχή, η οποία εμπεριέχει ρίσκο. Ξέρω την αξία της σήμερα $S_0 = 1$ αλλά όχι την αξία της αύριο. Προσεγγίζοντας στοχαστικά υποθέτω ότι η S_1 είναι μία τιμή που εξαρτάται από το τυχαίο στοιχείο $\omega \in \Omega$. Έστω ότι ο χώρος Ω περιέχει δύο στοιχεία μόνο, τα g (*good*) και b (*bad*) με πιθανότητα $P[g] = P[b] = \frac{1}{2}$ και:

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 2 \text{ , } for \ \omega = g \\ \frac{1}{2} \text{ , } for \ \omega = b \end{cases} \tag{2.2}$$

Εδώ εισάγουμε την έννοια του δικαιώματος αγοράς της μετοχής (option on the stock). Ο αγοραστής έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει μια μετοχή (σε χρόνο t=1) σε μια προκαθορισμένη τιμή K. Έστω K=1. Συνεπώς τη χρονική στιγμή t=1 η αξία του δικαιώματος είναι:

$$C_1 = (S_1 - K)_+ \tag{2.3}$$

και συγκεκριμένα στο παράδειγμά μας,

$$C_1(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ , } for \ \omega = g \\ 0 \text{ , } for \ \omega = b \end{cases} \tag{2.4}$$

Συνεπώς γνωρίζουμε τη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης σε χρόνο t=1 ,με βάση τις ενδεχόμενες τιμές της μετοχής.

Ποιά είναι όμως η τιμή του δικαιώματος σήμερα;

Η κλασσική προσέγγιση που χρησιμοποιείται απο αναλογιστές έγγειται στη μαθηματική ελπίδα και το παράδειγμά μας δίνει:

$$C_0 = \mathbb{E}\left[C_1\right] = 1 \cdot \tfrac{1}{2} \ + 0 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Η προσέγγιση αυτή όμως, αν και επιτυχημένη σε πολλούς τομείς, εδώ δεν έχει ικανοποιητική εφαρμογή. Και αυτό γιατί υπολογίζοντας την αξία του ενδεχόμενου κέρδους μέσω της μαθηματικής ελπίδας βασιζόμαστε στην εξής υπόθεση: οτι μακροπρόθεσμα, ο αγοραστής του δικαιώματος προαίρεσης δε πρόκειται ούτε να κερδίσει, ούτε να χάσει κατά μέσο όρο. Δηλαδή, με χρηματοοικονομικούς όρους, ότι η επένδυση στο δικαίωμα προαίρεσης (*option*) θα είναι ισοδύναμη με την επένδυση στο ομόλογο (*bond*). Εδώ όμως, αξίζει να σημειωθεί οτι, βασικό χαρακτηριστικό των χρηματοοικονομικών είναι ότι η επένδυση σε μία μετοχή (περιουσιακό στοιχείο με ρισκο) θα έχει καλύτερη απόδοση από την επένδυση σε ένα ομόλογο. Για το λόγο αυτό, στο δικό μας παράδειγμα, επιλέξαμε $\mathbb{E}\left[S_1\right] = 2 \cdot \frac{1}{2} \ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1.25 > 1 = \mathbb{E}\left[B_1\right]$.

2.3 Τιμολογηση μέσω συνθήκης no arbitrage.

Μια άλλη προσέγγιση της αποτίμησης του παραπάνω δικαιώματος προαίρεσης είναι η εξής. Μπορούμε να αγοράσουμε τη χρονική στιγμή t=0 ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από $\frac{2}{3}$ μιας μετοχής και -$\frac{1}{3}$ ενός ομολόγου (το (-) δηλώνει ότι δανείζομαι). Η αξία του χαροφυλακίου για t=1 είναι:

$$\Pi_1(\omega) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{2}{3} \ + 1 \cdot (-\frac{1}{3}) \ = 1 \ , for \ \omega = g \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \ + 1 \cdot (-\frac{1}{3}) \ = 0 \ , for \ \omega = b \end{cases}$$

Συνεπώς παρατηρώ ότι το χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή t=1 αξίζει όσο και το δικαίωμα, δηλαδή

$$C_1 \equiv \Pi_1 \tag{2.5}$$

Επίσης το χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή t=0 έχει αξία $\Pi_0 = \frac{2}{3}S_0 - \frac{1}{3}B_0 = \frac{1}{3}$. Έτσι, χρησιμοποιώντας το no arbitrage επιχείρημα, η συνθήκη (2.5) πρέπει να συνεπάγεται ότι,

$$C_0 = \Pi_0 \tag{2.6}$$

από όπου πέρνω $C_0 = \frac{1}{3}$. Υποθέτοντας τώρα, μέσω της μαθηματικής ελπίδας (την υπολογίσαμε προηγουμένως), ότι $C_0 = \frac{1}{2}$ παρατηρώ ότι δημιουργείται arbitrage. Έτσι τη χρονική στιγμή t=0 αγοράζουμε (*going long*) το χαρτοφυλάκιο Π και ταυτόχρονα πουλάμε (*going short*) το δικαίωμα C αποκομίζοντας κέρδος $C_0 - \Pi_0 = \frac{1}{6}$,ενώ τη χρονική στιμγή t=1 η αξία του δικαιώματος αντισταθμίζει την αξία του χαρτοφυλακίου ανεξάρτητα από τη τιμή που πέρνει το τυχαίο στοιχείο ω (g ή b).

2.4 Γενίκευση του παραδείγματος.

Από τον ορισμό του χρόνου στο $\{0,1\}$ περνάμε στο $\{0,1,...,T\}$ θεωρώντας T-στο πλήθος ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, X_2, \cdots, X_T$ που ακολουθούν τη κατανομή Bernoulli. Αυτό το διωνυμικό μοντέλο αποκαλείται *Cox-Ross-Rubinstein model*.

Δεν είναι δύσκολο να περάσουμε στο όριο, όταν το T τείνει στο άπειρο, για να καταλήξουμε σε μία σ.δ. κίνησης Brown (βλ. Shreve [56], Κεφάλαιο $3, \S3.2.5$), από την οπόια μπορεί να παραχθεί μία γεωμετρική κίνηση Brown που αποτελεί τη βάση για το μοντέλο τιμολόγησης των Black-Scholes, που προτάθηκε από τον P. Samuelson [53] το 1965.

2.5 Martingale μέτρα.

Προσπαθώντας να εμβαθύνουμε με μαθηματικούς όρους θα ξεκινήσουμε από το παράδειγμά μας. Είχαμε δεί ότι υπό τη no arbitrage συνθήκη η τιμή του δικαιώματός μας είναι $C_0 = \frac{1}{3}$ ενώ μέσω της μαθηματικής ελπίδας πέρνουμε $\mathbb{E}\left[C_1\right] = \frac{1}{2}$. Έτσι δημιουργήθηκε arbitrage, κάτι που στα χρηματοοικονομικά αιτιολογείται από τη διαφορά απόδοσης που έχουνε η μετοχή και το ομόλογο.

Ας κάνουμε τώρα την εξής υπόθεση. Έστω ότι υπάρχει ένα άλλο μέτρο πιθανότητας Q υπό το οποίο $Q[g] = \frac{1}{3}$ και $Q[b] = \frac{2}{3}$ απ' όπου πέρνουμε $\mathbb{E}_Q\left[S_1\right] = 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1 = S_0$. Οπότε, με τη μαθηματική ορολογία, η σ.δ. S είναι ένα ***martingale*** ως προς το μέτρο Q και το Q είναι ένα ***martingale μέτρο*** για την S. Και αυτό διότι $\mathbb{E}_Q\left[S_1 | S_0\right] = S_0 = 1$.

Παρατηρουμε λοιπόν ότι υπό το μέτρο Q, παίρνοντας αναμενόμενες τιμές, βρίσκουμε αξία του δικαιώματος συμβατή με την υπό no arbitrage συνθήκη. Συγκεκριμένα στο παράδειγμά μας έχουμε,

$$\mathbb{E}_Q\left[C_1\right] = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \tag{2.7}$$

Εύλογο είναι να αναρωτηθούμε για το τί ακριβώς συμβαίνει πίσω από αυτό το φαινόμενο.

2.6 Θεμελιώδες θεώρημα της τιμολόγησης παραγώγων (Fundamental Theorem of Asset Pricing).

Μία χρηματοοικονομική αγορά είναι απαλλαγμένη από το arbitrage αν και μόνο αν υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας Q ισοδύναμο με το P, τέτοιο ώστε η σ.δ. των τιμών της μετοχής να είναι ένα martingale ως προς το μέτρο Q. Σε αυτή τη περίπτωση η χρήση αναμενόμενων τιμών $\mathbb{E}_Q[.]$ για τη τιμολόγηση των ενδεχόμενων κερδών ικανοποιεί τη συνθήκη του no arbitrage και το Q διατρέχει όλα τα ισοδύναμα martingale μέτρα. Τέλος, αν το Q είναι μοναδικό, τότε η μέση τιμή $\mathbb{E}_Q[.]$ μας δίνει το μοναδική απαλλαγμένη από το arbitrage τιμή, όπως στο απλό παράδειγμά μας παραπάνω.

Το συγκεκριμένο θεώρημα αποδείχτηκε από τους M. Harrison και S. Pliska [37] το 1981 για διακριτό χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Στον ίδιο χρόνο (1981) ο Kreps [44] επέκτεινε αυτό το θεώρημα σε ένα πιο γενικό αποτέλεσμα: για αυτή την επέκταση η συνθήκη του no arbitrage αντικαταστάθηκε από μία ισχυρότερη υπόθεση (το no free lunch).

2.7 Μη δωρεάν γεύμα.

Επεκτείνουμε το μοντέλο σε συνεχή χρόνο $[0, T]$. Το ομόλογο είναι και πάλι ακίνδυνο και χωρίς βλάβη της γενικότητας κανονικοποιημένο, με $B_t = 1$ για $0 \le t \le T$. Η σ.δ. τιμών της μετοχής $\{S_t\}_{0 \le t \le T}$ με πραγματικές τιμές, υποθέτουμε ότι είναι μία σ.δ. ορισμένη και προσαρμοσμένη σε ένα φ.χ.π $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \le t \le T}, P)$ έτσι ώστε το φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \le t \le T}$ να ικανοποιεί τις *συνήθεις συνθήκες* της δεξιάς συνέχειας και της πληρότητας (βλέπε κεφάλαιο 1 για τους ορισμούς).

Μία σ.δ. $S = \{S_t\}_{0 \le t \le T}$ είναι μία συνάρτηση $S : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί το εξής: Η S είναι προοδευτικά μετρήσιμη αν για κάθε $t \in [0, T]$ ο περιορισμός της S στο $\Omega \times [0, t]$ είναι $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, T])$-μετρήσιμη συνάρτηση. Η ερμηνεία είναι ότι η συμπεριφορά της $(S_u)_{0 \le u \le t}$ εξαρτάται εξ' ολοκλήρου από τη πληροφορία που είναι γνωστή στο χρόνο t, μέσω της σ-αλγεβρας $\mathcal{F}_t$.

Οι οικονομικοί αντιπρόσωποι πουλάνε ή αγοράζουνε μετοχές στο διάστημα $[0, T]$. Μοντελοποιώντας μαθηματικά αυτή τη δραστηριότητα θεωρούμε πρώτα τις ονομαζόμενες στοιχειώδεις επενδυτικές στρατηγικές. Θεωρούμε μια σταθερή διαμέριση $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$ την οποία ερμηνεύουμε ως στιγμές του χρόνου κατά τις οποίες μία αντιπρόσωπος εξισσοροπεί το χαρτοφυλάκιό της. Για να καθορίσει το χαρτοφυλάκιο, πρέπει να προσδιορίσει τις ποσότητες $H_{t_{i-1}}$ των μετοχών που έχει στο δίαστημα $(t_{i-1}, t_i]$. Όταν πάρει αυτή την απόφαση π.χ. στο χρόνο t_{i-1}, τότε θα διαθέτει τις πληροφορίες που έχει διαθέσιμες στο χρόνο t_{i-1}. Ως εκ τούτου, είναι φυσικό να απαιτεί η $H_{t_{i-1}}$ να είναι μια $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Μια στοιχειώδης στρατηγική εμπορικών συναλλαγών ορίζεται ως μια συνάρτηση $H = H_t(\omega)$ ορισμένη στον $\Omega \times T$ της μορφής:

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} H_{t_{i-1}}(\omega)\chi_{(t_{i-1}, t_i]}, \tag{2.8}$$

όπου κάθε $H_{t_{i-1}}$ είναι $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-μετρήσιμη. Η ερμηνεία είναι ότι σε χρόνο t, η αντιπρόσωπος κατέχει $H_t(\omega)$ μετοχές στο χαρτοφυλάκιό της.

Για κάθε τέτοια συνάρτηση H ορίζουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα X_T^H ως τη τ.μ

$$X_T^H = \sum_{i=1}^{n} H_{t_{i-1}}(S_{t_i} - S_{t_{i-1}}) =: \int_0^T H_t dS_t \tag{2.9}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τη στρατηγική H καταλήγουμε σε ένα (τυχαίο) κέρδος ή ζημία $H_{t_{i-1}}(\omega)(S_{t_i}(\omega) - S_{t_{i-1}}(\omega))$ στο χρονικό διάστημα $(t_{i-1}, t_i]$. Το συνολικό κέρδος ή ζημία δίνεται από το παραπάνω άθροισμα Riemann, το οποίο μπορεί να γραφτεί για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$ σαν ένα ολοκλήρωμα Stieltjes dS_t για κάθε απλή συνάρτηση.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι θα έπρεπε κανένας να θεωρήσει πιο ''γενικές'' στρατηγικές από ότι οι ''στοιχειώδεις''. Για γενικότερες συναρτήσεις προς ολοκλήρωση H χρειαζόμαστε μερικά επιπλέον θέματα: αρχικά χρειαζόμαστε η S να είναι ημί-martingale (βλ. [50] για ορισμό). Σύμφωνα με ένα θεώρημα των Bichteler και Dellacherie αυτή είναι η μέγιστη κλάση σ.δ. (maximal class of stochastic processes) για τις οποίες υπάρχει μια τεκμηριωμένη ολοκληρωτική θεωρία. Αυτό δε περιορίζει τη γενικότητα καθώς έχει δειχθεί ότι όταν η S δεν είναι ημί-martingale, τότε η S παρουσιάζει arbitrage (βλ. [19]).

Αναπτύσσοντας την ολοκληρωτική θεωρία ,αρχικά, αντί για μια διαμέριση $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$,ορίζουμε μία αύξουσα ακολουθία χ.δ. $0 = \tau_0 < \cdots < \tau_n = T$. Η αντίστοιχη κλάση $\mathcal{H}$ των συναρτήσεων προς ολοκλήρωση (ή σε οικονομικού όρους, στρατηγικών αγοράς) αποτελεί την ονομαζόμενη κλάση των απλών ολοκληρωτέων συναρτήσεων. Αυτή η πρώτη επέκταση από τις στοιχειώδεις στις απλές ολοκληρωτέες συναρτήσεις δεν απαιτεί πέρασμα στο όριο, καθώς το ολοκλήρωμα εξακολουθεί να ορίζεται από ένα πεπερασμένο άθροισμα (όπως στην

(2.9)).

Γενικά, οι στρατηγικές της αγοράς μοντελοποιούνται από μία προβλέψιμη S-ολοκληρώσιμη σ.δ. $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ όπου H_t περιγράφει το πλήθος των μετοχών τη χρονική στιγμή t. Για κάθε H η τ.μ.

$$X_H^T = \int_0^T H_t dS_t \tag{2.10}$$

ισούται με τη συσσωρευμένη αξία κέρδους ή ζημίας μέχρι τη χρονική στιγμή T, ακολουθώντας τη στρατηγική H. Για τεχνικούς λόγους περιορίζουμε τις H σε "αποδεκτές" στρατηγικές. για κάθε $0 \leq t \leq T$ οι συσσωρευμένες ζημιές μέχρι τη χρονική στιγμή t πρέπει να είναι μικρότερες από M σ.β. (όπου M σταθερά), δηλαδή

$$\int_0^t H_u dS_u > -M \text{ σ.β., για } 0 \leq t \leq T. \tag{2.11}$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε μια ευκαιρία arbitrage ως μια αποδεκτή στρατηγική αγοράς H τέτοια ώστε η τ.μ. X_T^H να είναι μια μη αρνητική σ.β. και αυστηρά θετική με αυστηρά θετική πιθανότητα.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η έννοια του no arbitrage είναι πολύ αδύναμη για να συνεπάγεται την ύπαρξη ισοδύναμου martingale μέτρου γενικά. Η ιδέα του Kreps ήταν η δυνατότητα περάσματος στο όριο.

Ορισμός 2.7.1. (Kreps 1981) Η σ.δ. S δέχεται ένα δωρεάν γεύμα (free lunch), αν υπάρχει τ.μ. $f \in L_+^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με $P[f > 0] > 0$ και ένα δίκτυο $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I} = \{g_\alpha - h_\alpha\}_{\alpha\in I}$ έτσι ώστε:

(t_1) $g_\alpha = \int_0^T H_t^\alpha dS_t$ για κάποια αποδεκτή στρατηγική H^α ,

(t_2) $h_\alpha \geq 0$ και

(t_3) $\lim_{\alpha\in I} f_\alpha = f$ ως προς την ασθενή* τοπολογία του $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Η οικονομική ιδέα πισω από αυτή την έννοια είναι η εξής: Αν και η f δεν υποτίθεται ότι είναι της μορφής $\int_0^T H_t dS_t$,για κάποιες αποδεκτές συναρτήσεις H (αυτό θα ήταν κάποιο arbitrage), απαιτούμε η f να μπορεί να προσεγγιστεί από μία f_α σε μια κατάλληλα ορισμένη τοπολογία. Η ερμηνεία της τ.μ. $h_\alpha \geq 0$ είναι ότι σε αυτή τη προσέγγιση, οι άνθρωποι έχουν τη δυνατότητα να "πετάξουν χρήματα".

Έτσι, από την έρευνα του D. Kreps συμπεραίνουμε την εξής εκδοχή του FTAP:

Θεώρημα 2.7.2. *Μία φραγμένη σ.δ. $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ δέχεται ένα δωρέαν γεύμα, αν και μόνο αν υπάρχει ένα μέτρο Q ισοδύναμο με το P, τέτοιο ώστε η S να είναι martingale υπό το Q.*

Με βάση αυτή τη πολύ δημιουργική εργασία του Kreps, αρκετοί συγγραφείς προσπάθησαν να βελτιώσουν το θεώρημα (βλ. Delbaen-Schachermayer [20] (1998) για μία επισκόπηση της βιβλιογαρφίας). Κλασσικά ερωτήματα που προκύψανε είναι τα εξής:

1. Μπορεί η ασθενής* τοπολογία (που είναι δύσκολο να ερμηνευτεί με οικονομικούς όρους) να αντικατασταθεί από μία "λεπτότερη" (καλύτερη) τοπολογία;

2. Μπορεί το δίκτυο $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ να αντικατασταθεί από ακολουθία $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$;

Στην εργασία των Delbaen-Schachermayer [19] εισήχθει η έννοια του ***δωρεάν γεύμα με εξαφανιζόμενο κίνδυνο*** αντικαθιστώντας την ασθενή* τοπολογία με τη norm-τοπολογία του L^∞. Τότε κάποιος μπορεί να αντικαταστήσει το δίκτυο $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ με μια ακολουθία $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Αυτή η έννοια επιτρέπει μια σαφή οικονομική ερμηνεία την οποία υπαινισσόμαστε με τη χρήση του όρου "εξαφανιζόμενος κίνδυνος".

Για να επεκταθεί κάποιος στη περίπτωση των μη φραγμένων σ.δ., οι οποίες είναι σημαντικές για τις εφαρμογές, χρειαζόμαστε κάποιες γενικεύσεις της έννοιας του martingale οι οποίες είναι:

(**i**) Η έννοια του τοπικού martingale.

(**ii**) Η εννοια του σ-martingale.

Η τελευταία έρευνα παραπέμπει στη μελέτη των Choa και Emery (βλ. [20]).

Τώρα μπορούμε να παραθέσουμε την εκδοχή του FTAP όπως αναφέρεται στο [20].

Θεώρημα 2.7.3. *Ένα ημί-martingale $S = \{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ δέχεται ένα δωρεάν γεύμα με εξαφανιζόμενο κίνδυνο αν και μόνο αν υπάρχει ένα μέτρο πιθανοτήτας Q ισοδύναμο με το P ε.ω. το S να είναι σ-martingale υπό το Q.*

Αν η S είναι φραγμένη (αντίστοιχα τοπικά φραγμένη) τότε ο όρος σ-martingale μπορεί να αντικατασταθεί ισοδύναμα με τον όρο martingale (αντίστοιχα τοπικό martingale).

Κεφάλαιο 3

Το FTAP για πεπερασμένο διακριτό χρόνο και χώρους πιθανότητας με πεπερασμένο δειγματικό χώρο

Στο εδάφιο αυτό θα εισάγουμε ένα βασικό υπόδειγμα χρηματοοικονομικών αγορών (χρησιμοποιώντας και μαθηματικούς όρους) εξετάζοντας τη περίπτωση που ο χρόνος είναι διακριτός και ο δειγαμτικός χώρος είναι πεπερασμένος. Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου οφείλονται στους J.M. Harrison και S.P. Pliska [37] (1981).

3.1 Διατύπωση του μοντέλου της χρηματοικονομικής αγοράς

Έστω χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ο Ω είναι πεπερασμένος και κάθε στοιχείο του ερμηνεύει τις ***δυνατές καταστάσεις της αγοράς***. Υποθέτουμε ότι $P(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και αυτός είναι ο μοναδικός ρόλος του μέτρου πιθανότητας. Δεχόμαστε ότι οι επενδυτές συμφωνούν στο οτι η αγορά μπορεί να βρεθεί σε κάποιες διακριτές, πεπερασμένες καταστάσεις χωρίς όμως απαραίτητα να συμφωνούν για τις αντίστοιχες πιθανότητες. Όλες οι υποθέσεις και αποτελέσματα παραμένουν τα ίδια αν το μέτρο πιθανότητας αντικατασταθεί από οποιοδήποτε ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας.
Ορίζεται ο ***χρονικός ορίζοντας*** T, ο οποίος αποτελλεί καταληκτική ημερομηνία για όλες τις οικονομικές δραστηριότητες και το φιλτράρισμα $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_T\}$.

Δηλαδή, καθε $\mathcal{F}_t$ είναι μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω με $\mathcal{F}_0 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$. Χωρίς απώλεια της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ και $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων.

Όλα τα χρεόγραφα αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης τις χρονικές στιγμές $t = 0, 1, \ldots, T$ και το φιλτράρισμα $\mathbb{F}$ περιγράφει το ***πώς η πληροφορία παρουσιάζεται στους επενδυτές***. Κάθε $\mathcal{F}_t$ αντιστοιχεί σε μία μοναδική διαμέριση $\mathcal{P}_t$ του Ω και τη χρονική στιγμή t οι επενδυτές γνωρίζουν ποιό σύνολο της διαμέρισης περιέχει τη πραγματική κατάσταση της αγοράς, αλλά τίποτα περισσότερο.

Το μοντέλο μας είναι μια σ.δ. $K+1$ διαστάσεων $S = \{S_t\}_{t \in \{0,\ldots,T\}}$ με συνιστώσες της τις σ.δ. $S^0, S^1, \ldots, S^K$. Απαιτούμε κάθε S^k να είναι αυστηρά θετική και προσαρμοσμένη στην $\mathbb{F}$. Δηλαδή η συνάρτηση $\omega \longrightarrow S_t^k(\omega)$ είναι μετρήσιμη ως προς το $\mathcal{F}_t$. Ερμηνεύουμε το S_t^k σαν τη ***τιμή χρεόγραφου k τη χρονική στιγμή t***, οπότε το ότι το S είναι προσαρμοσμένο σημαίνει ότι τη χρονική στιγμή t οι επενδυτές γνωρίζουν τις παλιές και πρόσφατες τιμές των $K+1$ χρεογράφων. Για το 1^o χρεόγραφο υποθέτουμε ότι $S_0^0 = 1$ και το αποκαλούμε ομόλογο (bond) χωρίς να κάνουμε καμία υπόθεση για το πώς διαχωρίζεται από τα άλλα χρεόγραφα. Στη συνεχή περίπτωση θα δούμε ότι το ομόλογο θα έχει κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που θα το διαχωρίζουν από τα άλλα χρεόγραφα. Ορίζουμε τη σ.δ. β θέτωντας $\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$ και την ονομάζουμε ***προεξοφλητική διαδικασία*** (discount process). Εδώ αξίζει να σημειωθεί η ειδική περίπτωση όπου $S_t^0 = (1+r)^t$ με r το σταθερό και θετικό επιτόκιο χωρίς ρίσκο.

Ορίζουμε ως ***επενδυτική στρατηγική*** να είναι μια ***προβλέψιμη*** σ.δ.-διάνυσμα $\varphi = \{\varphi_t\}_{t \in \{1,\ldots,T\}}$ με όπου $\varphi_t = (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \cdots, \varphi_t^k) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$. Με τον όρο προβλέψιμη εννοούμε ότι η φ_t είναι $\mathcal{F}_{t-1}$-μετρήσιμη για $t = 1, \ldots, T$. Ερμηνεύουμε το φ_t^k ως την ακέραια ποσότητα του χρεογράφου k που κατέχει ο επενδυτής μεταξύ του χρόνου $t-1$ και t. Το διάνυσμα φ_t του επενδυτή θα καλείται ***χρηματοφυλάκιο*** στο χρόνο t και τα στοιχεία του μπορουν να παίρνουν και θετικές και αρνητικές τιμές. Τότε

- Αν $\varphi^i < 0 \quad \longrightarrow \quad$ έχω εκδώσει χρεόγραφα και έχω δανειστεί λεφτά.
- Αν $\varphi^i > 0 \quad \longrightarrow \quad$ έχω αγοράσει χρεόγραφα και έχω δανείσει λεφτά.

Ειδικότερα, επιτρέπουμε απεριόριστες ανοιχτές πωλήσεις. Απαιτώντας το φ να είναι προβλέψιμο-γνωστο επιτρέπουμε στον επενδυτή να επιλέξει το χαρτοφυλάκιό του τη χρονική στιγμή t, αφότου οι τιμές S_{t-1} έχουν παρατηρηθεί. Παρόλα αυτά, το χαρτοφυλάκιο φ_t πρέπει να έχει καθοριστεί πριν, και να κατέχεται έως, τη γνωστοποιήση των τιμών της S_t.

Να σημειώσουμε ότι αν X, Ψ είναι δύο σ.δ. διανυσμάτων τιμών, ίδιας διάστασης και σε διακριτό χρόνο, τότε το $X_t \Psi_s$ υποδηλώνει το ***εσωτερικό γινόμενο*** $X_t^1 \Psi_s^1 + X_t^2 \Psi_s^2 + \cdots$ και $X\Psi$ υποδηλώνει τη σ.δ. πραγματικών τιμών που τη χρονική στιγμή t είναι $X_t \Psi_t$. Επίσης, ορίζουμε ΔX_t να υποδηλώνει το διάνυσμα $X_t - X_{t-1}$ και ΔX τη σ.δ. τιμών , με τιμή τη χρονική στιγμή t , ΔX_t.

Αναμενόμενα, $\varphi_t S_{t-1}$ αντιπροσωπεύει τη χρηματοοικονομική αξία του χαρτοφυλακίου φ_t, αφότου έχει καθοριστεί τη χρονική στιγμή $t-1$, με $\varphi_t S_t$ η χρηματοοικονομική αξία μετά το καθορισμό των τιμών τη χρονική στιγμή t, αλλά πριν οποιαδήποτε αλλαγή στο χαρτοφυλάκιο. Ως εκ τούτου $\varphi_t \Delta S_t$ είναι η μεταβολή της χρηματοοικονομικής αξίας του χαρτοφυλακίου λόγω της μεταβολής των τιμών του χρεογράφου μεταξύ των χρονικών στιγμών $t-1$ και t. Αν ο επενδυτής επιλέξει την επενδυτική στρατηγική φ ,τότε βλεπουμε ότι

$$G_t(\varphi) = \sum_{i=1}^{t} \varphi_i \Delta S_i \quad \text{για, } t = 1, \ldots, T \tag{3.1}$$

αντιπροσωπεύει τα ***σωρευτικά έσοδα ή απολαβές της επένδυσης του κεφαλαίου*** που έχει ο επενδυτής στο χρόνο t. Θέτουμε $G_0(\varphi) = 0$ και ονομάζουμε τη $G(\phi)$ ***διαδικασία κέρδους***, η οποία συνδέεται με τη φ. Σημειώνεται ότι η ϕ είναι μια προσαρμοσμένη σ.δ. πραγματικών τιμών.

Είναι σημαντικό να λάβουμε υπόψιν ότι μια γενική επενδυτική στρατηγική φ μπορεί να απαιτεί προσθήκη νέων κεφαλαίων μετά τη χρονική στιγμή 0 ή να επιτρέπει άντληση κεφαλαίων. Αντίθετα, καλούμε μια επενδυτική στρατηγική ***αυτοχρηματοδοτούμενη*** αν:

$$\varphi_t S_t = \varphi_{t+1} S_t \quad \text{για, } t = 1, \ldots, T-1 \tag{3.2}$$

Αυτό ερμηνεύεται ως εξής: σε καμία χρονική στιγμή $t = 1, \ldots, T-1$ δεν έχουμε προσθήκη ή άντληση κεφαλαίων από το χαρτοφυλάκιο. Μέσω της (3.1) έχω ότι η (3.2) είναι ισοδύναμη με την εξής:

$$\varphi_t S_t = \varphi_1 S_0 + G_t(\varphi) \;\; \text{για, } t = 1, \ldots, T \tag{3.3}$$

Πράγματι έχουμε,

$$\begin{aligned}
\varphi_t S_t &= \varphi_{t+1} S_t \\
&= \varphi_{t+1} S_t + (\varphi_1 S_0 + \varphi_1 S_1 + \ldots + \varphi_t S_t) + (-\varphi_1 S_0 - \varphi_1 S_1 - \ldots - \varphi_t S_t) \\
&= \varphi_{t+1} S_t + (\varphi_1 S_0 + \varphi_1 S_1 + \ldots + \varphi_t S_t) + (-\varphi_1 S_0 - \varphi_2 S_1 - \ldots - \varphi_{t+1} S_t) \\
&= \varphi_1 S_0 + \sum_{i=1}^{t} \varphi_i \Delta S_i \\
&= \varphi_1 S_0 + G_t(\varphi).
\end{aligned}$$

Άρα μια επενδυτική στρατηγική καλείται αυτοχρηματοδοτούμενη αν και μόνο αν όλες οι μεταβολές του χαρτοφυλακίου οφείλονται στα κέρδη από τις επενδύσεις. Θα προσθέσουμε έναν ακόμα περιορισμό. Μια επενδυτική στρατηγική καλείται ***απόδεκτή*** αν είναι αυτοχρηματοδοτούμενη και η $V(\varphi)$ είναι μια μη αρνητική σ.δ. τιμών με

$$V_t(\varphi) := \begin{cases} \varphi_t S_t & \text{για } t = 1, \ldots, T \\ \varphi_1 S_0 & \text{για } t = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Η $V(\varphi)$ καλείται ***διαδικασία τιμων*** της φ, αφού $V_t(\varphi)$ αναπαριστά τη χρηματοοικονομική αξία του χαρτοφυλακίου που κατέχουμε ακριβώς πριν τις συναλλαγές στο χρόνο t. Απαιτώντας $V(\varphi) > 0$ καθορίζουμε το ότι ο επενδυτής θα ξεκινησει με θετικό "πλούτο" και οι επενδύσεις του ,θα είναι τετοιες ώστε, δε θα χρειαστεί ποτέ να δανειστεί. Αυτός είναι ένας περιορισμός που είναι συνηθισμένος στη χρηματοοικονομική βιβλιογραφία. Αφού οι τιμές των αξιογράφων είναι θετικές, έχουν ως αποτέλεσμα την απαγόρευση ορισμένων ανοικτών πωλήσεων. Έστω $\mathbf{\Phi}$ ***το σύνολο όλων των απόδεκτών στρατηγικών***.

Ένα ***ενδεχόμενο κέρδος*** είναι μια μη αρνητική τ.μ. X. Θα μπορουσε επίσης να είναι ένα συμβόλαιο ή συμφωνία που αποδίδει $X(\omega)$ € στο χρόνο T για τιμές που αφορούν το ω. Συμβολίζοντας με $\mathbb{X}$, ***το σύνολο όλων αυτων των ενδεχόμενων κερδών***, είναι εύκολο να δούμε ότι το $\mathbb{X}$ είναι ένας ***κυρτός κώνος***. Ένα ενδεχόμενο κέρδος X είναι ***εφικτό*** αν υπάρχει $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ τέτοιο ώστε $V_T(\varphi) = X$. Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι το φ ***παράγει*** το X και ότι η $\pi = V_0(\varphi)$ είναι η ***τιμή*** (στο χρόνο 0) ***που συνδέεται με αυτό το ενδεχόμενο κέρδος***.

Ερώτημα: Είναι η τιμή αυτή μοναδική ή μπορεί ένα ενδεχόμενο κέρδος να παράγεται από δύο διαφορετικές επενδυτικές στρατηγικές με τις αντίστοιχες αρχικές τιμές V_0 να είναι διαφορετικές σε κάθε περίπτωση; Αυτό θα είναι το αντικείμενο μελέτης της επόμενης ενότητας.

3.2 Βιωσιμότητα του μοντέλου

Η ***δυνατότητα για arbitrage*** είναι κάποια $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ για την οποία έχουμε $V_0(\varphi) = 0$ και $\mathbb{E}[V_T(\varphi)] > 0$. Η δυνατότητα αυτή, αν υπάρχει, αναπαριστά μια στρατηγική χωρίς ρίσκο που θα αποφέρει βέβαιο κέρδος χωρίς ρίσκο και χωρίς επένδυση κεφαλαίου. Δεν απαιτεί ούτε αρχικά κεφάλαια, ούτε νέα κεφάλαια στις επόμενες περιόδους, αλλά, αφού $V_T(\varphi) \geq 0$, αποδίδει μέσω ενώς συνδυασμού αγοράς και πώλησης, κέρδος απαλλαγμένο από το κίνδυνο απώλειας. Μία αγορά χρεογράφων με δυνατότητα arbitrage δε μπορεί να βρίσκεται οικονομικά σε κατάσταση ισορροπίας.
Σκοπός αυτής της υποενότητας είναι να παραθέσει δύο συνθήκες οι οποίες είναι ισοδύναμες με τον ισχυρισμό ότι σε μια αγορά δεν εχουμε δυνατότητα arbitrage. Αρχικά καθορίζουμε ένα ***σύστημα τιμολόγησης ενδεχόμενων κερδών*** να είναι μία συνάρτηση $\pi : \mathbb{X} \longmapsto \mathbb{R}_+$ που ικανοποιεί τα εξής:

$$\pi(X) = 0 \text{ αν και μόνο αν } X = 0 \tag{3.5a}$$

και

$$\pi(\alpha X + bX') = \alpha\pi(X) + b\pi(X') \text{ για κάθε } \alpha, b \geq 0 \text{ και } X, X' \in \mathbb{X}. \tag{3.5b}$$

Ένα τέτοιο σύστημα τιμολόγησης π λέγεται ότι είναι ***συνεπές*** με το μοντέλο χρηματοοικονομικής αγοράς αν $\pi(V_T(\phi)) = V_0(\varphi)$ για όλα τα $\varphi \in \mathbf{\Phi}$. ***Έστω $\mathbf{\Pi}$ το σύνολο όλων των συστημάτων τιμολόγησης που είναι συνεπή με το μοντέλο αγοράς.***
Έστω $\mathbb{P}$ το σύνολο όλων των μέτρων πιθανότητας Q τα οποία είναι ισοδύναμα με το P και είναι τέτοια ώστε η προεξοφλητική σ.δ. τιμών βS να είναι martingale (διάνυσμα) υπό το μέτρο Q. Η σχέση μεταξύ $\mathbb{P}$ και $\mathbf{\Pi}$ εκφράζεται με ακρίβεια στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.1. *Υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των συστημάτων τιμολόγησης $\pi \in \mathbf{\Pi}$ και των μέτρων πιθανότητας $Q \in \mathbb{P}$ μέσω της ισοδυναμίας των παρακάτω:*

- **(i)** $\pi(X) = \mathbb{E}_Q[\beta_T X]$, $\forall X \in \mathbb{X}$
- **(ii)** $Q(A) = \pi(S^0_T \chi_A)$, $\forall A \in \mathcal{F}$.

Απόδειξη. **(i)$\Longrightarrow$(ii)** Έστω $Q \in \mathbb{P}$ και για το π ισχύει η (i).
(a) Αφού $X = V_T(\varphi)$, θα έχουμε ότι $\pi(V_T(\varphi)) = \mathbb{E}_Q[\beta_T V_T(\varphi)]$. Όμως

$$
\begin{aligned}
\beta_T V_T(\varphi) &= \beta_T \varphi_T S_T \\
&= \beta_T \varphi_T S_T + \sum_{i=1}^{T-1} (\varphi_i - \varphi_i)\beta_i S_i \\
&= \beta_T \varphi_T S_T + \sum_{i=1}^{T-1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})\beta_i S_i \\
&= \varphi_1 \beta_1 S_1 - \varphi_2 \beta_1 S_1 + \beta_T \varphi_T S_T + \sum_{i=2}^{T-1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})\beta_i S_i \\
&= \varphi_1 \beta_1 S_1 + \sum_{i=2}^{T} \varphi_i \beta_i S_i - \sum_{i=2}^{T-1} \varphi_{i+1} \beta_i S_i - \varphi_2 \beta_1 S_1 = \\
&= \varphi_1 \beta_1 S_1 + \sum_{i=2}^{T} \varphi_i \beta_i S_i - \sum_{i=3}^{T} \varphi_i \beta_{i-1} S_{i-1} - \varphi_2 \beta_1 S_1 \\
&= \varphi_1 \beta_1 S_1 + \sum_{i=2}^{T} \varphi_i (\beta_i S_i - \beta_{i-1} S_{i-1})
\end{aligned}
$$

όπου η τρίτη ισότητα ισχύει διότι από (3.2) έχω $\varphi_i \beta_i S_i = \varphi_{i+1} \beta_i S_i$.
Ως εκ τούτου, έχω

$$
\pi(V_T(\phi)) = \mathbb{E}_Q[\beta_T V_T(\varphi)] = \mathbb{E}_Q[\sum_{i=2}^{T} \phi_i (\beta_i S_i - \beta_{i-1} S_{i-1})] + \mathbb{E}_Q[\varphi_1 \beta_1 S_1]
$$

(b) Αφού η σ.δ. βS είναι martingale υπό το μέτρο Q και η φ είναι προβλέψιμη, προκύπτει ότι

$$
\mathbb{E}_Q[\sum_{i=2}^{T} \varphi_i (\beta_i S_i - \beta_{i-1} S_{i-1})] = 0.
$$

Πράγματι

$$
\begin{aligned}
& & \mathbb{E}_Q[\beta_i S_i|\mathcal{F}_{i-1}] &= \beta_{i-1}S_{i-1}, \\
& & & \qquad Q|\mathcal{F}_{i-1} - \text{σ.β. για κάθε } i \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow & & \varphi_i\mathbb{E}_Q[\beta_i S_i|\mathcal{F}_{i-1}] &= \varphi_i\beta_{i-1}S_{i-1}, \\
& & & \qquad Q|\mathcal{F}_{i-1} - \text{σ.β. για κάθε } i \in \mathbb{N} \\
\Longleftrightarrow & & \int_A \varphi_i\mathbb{E}_Q[\beta_i S_i|\mathcal{F}_{i-1}]dQ &= \int_A \varphi_i\beta_{i-1}S_{i-1}dQ, \\
& & & \qquad \text{για κάθε } A \in \mathcal{F}_{i-1} \text{ και κάθε } i \in \mathbb{N} \\
\Longleftrightarrow & & \int_A \varphi_i\beta_i S_i dQ &= \int_A \varphi_i\beta_{i-1}S_{i-1}dQ, \\
& & & \qquad \text{για κάθε } A \in \mathcal{F}_{i-1} \text{ και κάθε } i \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

με τη πρώτη συνεπαγωγή να ισχύει διότι φ_i προβλέψιμη και τη τελευταία από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής.

(c) Για $A = \Omega$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
& \int \varphi_i\beta_i S_i dQ &=& \int \varphi_i\beta_{i-1}S_{i-1}dQ, \quad \text{για κάθε } i \in \mathbb{N} \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathbb{E}_Q[\varphi_i\beta_i S_i] &=& \mathbb{E}_Q[\varphi_i\beta_{i-1}S_{i-1}], \quad \text{για κάθε } i \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Οπότε, τελικά έχουμε $\pi(V_T(\phi)) = \mathbb{E}_Q[\varphi_1\beta_1 S_1] = \varphi_1\mathbb{E}_Q(\beta_1 S_1) = \varphi_1\beta_0 S_0 = V_0(\varphi)$ διότι βS martingale, φ_1 σταθερό και $\beta_0 = 1$, επαληθεύοντας έτσι ότι το π είναι συνεπές και ως εκ τούτου στοιχείο του $\mathbf{\Pi}$.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Για το αντίστροφο, έστω $\pi \in \mathbf{\Pi}$ ώστε να ισχύει η (ii). Τότε για κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε $Q(\{\omega\}) = \pi(S_T^0\chi_{\{\omega\}}) > 0$ καθώς $S_T^0\chi_{\{\omega\}} \neq 0$ και το π ικανοποιεί την (3.5a). Επίσης, έστω η στρατηγική $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ με $\varphi^0 = 1$ και $\varphi^k = 0$ για $k = 1, \ldots, K$ (κρατάμε δηλαδή από εδώ και κάτω ένα μόνο ομόλογο από όλα).
(a) *Το Q είναι μέτρο πιθανότητας ισοδύναμο με το P.*

(a_1) Καθώς το π είναι συνεπές με το μοντέλο μας, έχουμε:

$$\begin{aligned} & V_0(\varphi) := \pi(V_T(\varphi)) \\ \iff \quad & \varphi_1 S_0 = \pi(\varphi_T S_T) \\ \iff \quad & (1,0\ldots,0)S_0^0 = \pi(S_T^0 \chi_\Omega) \\ \iff \quad & 1 = Q(\Omega). \end{aligned}$$

Επίσης, επειδη Ω πεπερασμένο έχω $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Έστω $< A_m >_{m\in\mathbb{N}}$ μια (αναγκαστικά πεπερασμένη λόγω του Ω) ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$ ώστε $A_l \cap A_m = \emptyset$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $A_m \neq \emptyset$ για $\forall m \in \mathbb{N}$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ με $m_0 \leq n$ και υπάρχουν $k_1 < \ldots < k_{m_o} \leq n$ ώστε $A_m = \{\omega_{k_1}, \ldots, \omega_{k_{m_o}}\}$. Έστω l το πλήθος των στοιχείων της $< A_m >_{m\in\mathbb{N}}$. Τότε,

$$\begin{aligned} Q(\biguplus_{m\in\mathbb{N}} A_m) &= Q(\bigcup_{m=1}^{l} A_m) \\ &\overset{(ii)}{=} \pi(S_T^0 \chi_{(\biguplus_{m=1}^{l} A_m)}) \\ &= \pi(\sum_{m=1}^{l} S_T^0 \chi_{A_m}) \\ &= \sum_{m=1}^{l} \pi(S_T^0 \chi_{A_m}) \\ &\overset{(ii)}{=} \sum_{m=1}^{l} Q(A_m) \end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια της υπόθεσης $\pi \in \mathbf{\Pi}$. Συνεπώς Q είναι μέτρο πιθανότητας.

($\mathbf{a_2}$) Αφού $P(\{\omega\}) > 0$ για $\forall \omega \in \Omega$ (εξ'ορισμού) και $Q(\{\omega\}) > 0$ για $\forall \omega \in \Omega$, θα έχουμε ότι για $\forall A \in \mathcal{F}$, ισχύει:

$$P(A) = 0 \iff A = \emptyset \quad \text{και} \quad Q(A) = 0 \iff A = \emptyset$$

Άρα για $\forall A \in \mathcal{F}$ ισχύει $P(A) = 0 \iff Q(A) = 0$, δηλαδή $P \sim Q$.

(b) $\pi(X) = E_Q(\beta_T X)$ *για κάθε* $X \in \mathbb{X}$.
Πράγματι έστω $X \in \mathbb{X}$. Τότε έχουμε

(b_1) $\frac{X}{S_T^0} \in \mathcal{M}_+ \longrightarrow \exists \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathcal{S}_+$ ώστε

$$\frac{X}{S_T^0} = \lim_{n \longrightarrow \infty} Y_n \longrightarrow X = S_T^0 \lim_{n \longrightarrow \infty} Y_n$$

(b_2) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $Y_n \in \mathcal{S}_+$ έχουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $\alpha_{1,n} \dots \alpha_{m,n} \in \mathbb{R}_+$ και $A_k \in \mathcal{F}$ με $k = 1, \dots, m$ ώστε

$$Y_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} \chi_{A_k} \qquad (A_{k,n} = Y_n^{-1}(\{\alpha_{k,n}\}))$$

.

(b_3) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\begin{aligned}
(b_2) \Longrightarrow \qquad \mathbb{E}_Q[Y_n] &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} Q(A_{k,n}) \\
\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_Q[Y_n] &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} Q(A_{k,n}) \\
\Longrightarrow \mathbb{E}_Q[\lim_{n \to \infty} Y_n] &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} Q(A_{k,n}) \\
\Longrightarrow \qquad \mathbb{E}_Q[\frac{X}{S_T^0}] &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} Q(A_{k,n}) \qquad \text{,με } \frac{1}{S_T^0} = \beta_T \\
\Longrightarrow \qquad \mathbb{E}_Q[\beta_T X] &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} Q(A_{k,n})
\end{aligned}$$

(b_4) Από τα $(b_1), (b_2)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\pi(X) &= \pi(S_T^0 \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} \chi_{A_k}) \\
&= \lim_{n \to \infty} \pi(S_T^0 \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} \chi_{A_k}) \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} \pi(S_T^0 \chi_{A_k}) \\
&\overset{(ii)}{=} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} Q(A_{k,n})
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει καθώς βρισκόμαστε σε διακριτό και πεπερασμένο Ω, συνεπώς η π είναι συνεχής.

Από τα (b_3) και (b_4) προκύπτει ότι $\pi(X) = E_Q(\beta_T X)$.
(c) *Το* $Q \in \mathbb{P}$.
Αρκεί να δείξουμε ότι βS είναι martingale διάνυσμα για το μέτρο Q. Έστω $k \geq 1$ αυθαίρετο ,$\tau \leq T$ χ.δ. και $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ μια στρατηγική που ορίζεται ώς εξής

$$\varphi_t^k = \chi_{\{t \leq \tau\}}, \qquad \varphi_t^0 = (S_\tau^k / S_\tau^0)\chi_{\{t > \tau\}},$$

και $\varphi^i = 0$ για κάθε άλλο i. Αυτή είναι μια στρατηγική η οποία κρατάει ένα είδος μετοχής k έως το χ.δ. τ, και κατόπιν πουλάει αυτό το είδος μετοχής και επενδύει όλα τα έσοδα σε ομόλογα. Έχουμε ότι η φ είναι προβλέψιμη διότι:

$$\{t \leq \tau\}^c = \{\tau < t\} = \{\tau \leq t-1\} \in \mathcal{F}_{t-1} \Longleftrightarrow \{t \leq \tau\} \in \mathcal{F}_{t-1}$$
$$\text{και}$$
$$\{t > \tau\} = \{t - 1 \geq \tau\} \in \mathcal{F}_{t-1}.$$

Τότε,

- $V_0(\varphi) = S_0^k$ (διότι η χρηματοοικονομική αξία του χαρτοφυλακίου μας τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με την αξία του ομολόγου k) και
- $V_T(\varphi) = \varphi_T S_T = (S_\tau^k / S_\tau^0) S_T^0 = S_T^0 \beta_\tau S_\tau^k$.

Καθώς το π είναι συνεπές έχουμε ότι $V_0(\varphi) = \pi(V_T(\phi))$ οπότε:

$$S_0^k = \pi(S_T^0 \beta_\tau S_0^k) \overset{(i)}{=} E_Q(\beta_T S_T^0 \beta_\tau S_\tau^k) = E_Q(\beta_\tau S_\tau^k) \quad \text{διότι, } \beta_T = \frac{1}{S_T^0}$$

Αφού τα k και τ είναι αυθαίρετα, έπεται ότι βS είναι martingale διάνυσμα για το μέτρο Q και ως εκ τούτου το Q είναι στοιχείο του $\mathbb{P}$.

Από τα (a),(b),(c) έπεται το ζητούμενο. □

Επιστρέφουμε τώρα στην έννοια των ευκαιριών arbitrage παραθέτωντας έναν ακόμα ορισμό.

Ορισμός 3.2.2. Μία σ.δ. $\varphi_t \in \mathcal{F}_{t-1}$ με $\varphi_t S_t = \varphi_{t+1} S_t$ για, $t = 1, \ldots, T-1$ θα λέμε ότι είναι **ασθενής δυνατότητα arbitrage** αν

- $V_0(\varphi) = 0$,
- $V_T(\varphi) \geq 0$ (δηλ. δεν έχουμε $V_t(\varphi) \geq 0$ για κάθε $t \in \{1, \ldots, T-1\} \Longleftrightarrow \varphi \notin \mathbf{\Phi}$) και

- $\mathbb{E}(V_T(\varphi)) > 0$,

Λήμμα 3.2.3. *Αν υπάρχει μια επενδυτική στρατηγική φ που να είναι ασθενής δυνατότητα arbitrage τότε υπάρχει μια δυνατότητα arbitrage.*

Απόδειξη. Θα διακρίνουμε περιπτώσεις για τη $V(\varphi)$. Αν $V(\varphi) \geq 0$, τότε η φ είναι αποδεκτή ($\varphi \in \mathbf{\Phi}$) και ώς εκ τούτου έχουμε ευκαιρία arbitrage. Αν $V(\varphi) < 0$, θα κατασκευάσουμε σ.δ. (επενδυτική στρατηγική) $\psi \in \mathbf{\Phi}$, που να είναι δυνατότητα arbitrage.
(a) Επειδή $V(\varphi) < 0$ θα πρέπει να υπάρχουν ένα $t < T,\ A \in \mathcal{F}_t$ και $\alpha < 0$ τέτοια ώστε $V_t(\varphi) = \varphi_t S_t = \alpha$ επάνω στο A και $V_u(\varphi) = \varphi_u S_u \geq 0$ επάνω στο A για κάθε $u > t$.
(b) *Ορίζουμε νέα στρατηγική ψ.*
Θέτουμε:

- για $u \leq t$ έχουμε $\psi_u = 0$,
- για $u > t$ και $\omega \notin A$ έχουμε $\psi_u(\omega) = 0$
- για $u > t$ και $\omega \in A$ έχουμε:

$$\psi_u^k(\omega) = \begin{cases} \varphi_u^0(\omega) - \frac{\alpha}{S_t^0(\omega)} & \text{για } k = 0, \\ \varphi_u^k(\omega) & \text{για } k = 1, 2, \dots, K \end{cases}$$

(c) *Η ψ είναι προβλέψιμη.*
Πράγματι,

- Για $u \leq t \Longrightarrow \psi_u = 0 \Longrightarrow$ η ψ_u είναι $\mathcal{F}_{u-1}$ -μετρήσιμη.
- Για $u > t$ και $\omega \notin A \Longrightarrow \psi_u(\omega) = 0 \Longrightarrow$ η ψ_u είναι $\mathcal{F}_{u-1}$ -μετρήσιμη.
- Για $u > t \Longrightarrow u - 1 \geq t$ και αφού $A \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{u-1}$ θα έχουμε,
  - $S_t^0\quad \mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη $\Longrightarrow S_t^0\quad \mathcal{F}_{u-1}$ -μετρήσιμη $\Longrightarrow S_t^0|A\quad \mathcal{F}_{u-1}$ -μετρήσιμη $\Longrightarrow \frac{\alpha}{S_t^0}|A\quad \mathcal{F}_{u-1}$ -μετρήσιμη ,
  - η φ_u^0 είναι $\mathcal{F}_{u-1}$ -μετρήσιμη $\Longrightarrow$ η $\varphi_u^0|A$ είναι $\mathcal{F}_{u-1}$ -μετρήσιμη για $k = 0$ και
  - η φ_u^k είναι $\mathcal{F}_{u-1}$ -μετρήσιμη $\Longrightarrow$ η $\varphi_u^k|A$ είναι $\mathcal{F}_{u-1}$ -μετρήσιμη για $k = 1, \dots, K$

δηλαδή η $\psi_u^k|A$ είναι $\mathcal{F}_{u-1}$-μετρήσιμη για $\forall u \leq T$.

(d) *Η ψ είναι αυτοχρηματοδοτούμενη.*
Πράγματι,

- Για $u = t+1 > t$ έχουμε
  - $\psi_{t+1}S_t = (\varphi_{t+1}^0 - \frac{\alpha}{S_t^0})S_t^0 + \sum_{k=1}^{K} \varphi_{t+1}^k S_t^k \overset{(3.2)}{=} \varphi_t S_t - \alpha = 0$ στο A και
  - $\psi_{t+1}S_t = 0$ στο A^c
- Για $\forall u \leq t$ έχουμε $\psi_u = 0$,συνεπώς $\psi_t S_t = 0$.

Άρα σε κάθε περίπτωση $\psi_{t+1}S_t = \psi_t S_t$.
(e) *Η $\boldsymbol{V}(\psi)$ είναι μη αρνητική.*
Πράγματι,

- Για $u \leq t$ έχουμε $\psi_u = 0$,συνεπώς $V_u(\psi) = \psi_t S_t = 0$.

- Για $u > t$ έχουμε
  - $V_u(\psi) = \psi_u S_u = (\varphi_u^0 - \frac{\alpha}{S_t^0})S_u^0 + \sum_{k=1}^{K} \varphi_u^k S_u^k = \varphi_u S_u - \alpha(\frac{S_u^0}{S_t^0}) \geq 0$, στο A
  - $V_u(\psi) = \psi_u S_u = 0$, διότι $\psi_u = 0$ στο A^c

συνεπώς $V(\psi) \geq 0$.

Από τα (c),(d),(e) έπεται ότι $\psi \in \mathbf{\Phi}$. Επίσης έχουμε ότι $S_T^0 > 0$ το οποίο συνεπάγεται ότι $V_T(\psi) > 0$ στο A, συνεπώς η ψ εμπεριέχει δυνατότητα arbitrage. □

Θεώρημα 3.2.4. *Η χρηματοοικονομική αγορά είναι απαλλαγμένη από ευκαιρίες arbitrage αν και μόνον αν το $\mathbb{P} \neq \emptyset$ (ή ισοδύναμα το $\mathbf{\Pi} \neq \emptyset$). Δηλαδή οι παρακάτω ιδιότητες είναι ισοδύναμες.*

(i) $\mathbb{P} \neq \emptyset$.

(ii) $\mathbf{\Pi} \neq \emptyset$.

(iii) Η αγορά είναι απαλλαγμένη από ευκαιρίες arbitrage.

Απόδειξη. **(i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii)** Έστω $\mathbb{P} \neq \emptyset$. Απευθείας από τη Πρόταση 3.2.1 θα έχουμε $\mathbf{\Pi} \neq \emptyset$. Έστω $\pi \in \mathbf{\Pi}$ και $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ με $V_0(\varphi) = 0$. Αφού το π είναι συνεπές έχουμε $\pi(V_T(\varphi)) = V_0(\varphi) = 0$ και ως εκ τούτου $V_T(\varphi) = 0$ από (3.5). Ως εκ τούτου η αγορά είναι απαλλάγμένη από ευκαιρίες arbitrage.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage, δηλαδή δεν υπαρχει κάποια $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ για την οποία έχουμε $V_0(\varphi) = 0$ και $\mathbb{E}[V_T(\varphi)] > 0$.
Ορίζουμε,

- $\mathbb{X}^+ = \{X \in \mathbb{X} : \mathbb{E}(X) \geq 1\}$ και,
- $\mathbb{X}^0$ το σύνολο όλων των τ.μ. X επάνω στον Ω με $X = V_T(\varphi)$ για κάποια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική φ (όχι απαραίτητα αποδεκτή) με $V_0(\varphi) = 0$.

(a) *Τα $\mathbb{X}^0$ και $\mathbb{X}^+$ είναι ξένα μεταξύ τους.*
Πράγματι, αν υπήρχε $X \in \mathbb{X}^0 \cap \mathbb{X}^+$ τότε θα είχαμε:

$$\mathbb{E}[X] \geq 1 \text{ και } X = V_T(\varphi) \text{ με } V_0(\varphi) = 0.$$

Επειδή όμως δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage για την X δε μπορεί να ισχύει $\mathbb{E}[X] > 0$. Άρα $\mathbb{E}[X] \ngeq 1$, άτοπο.
(b) *Το $\mathbb{X}^+$ είναι κλειστό, φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^\Omega$.*
Πράγματι,

- το $\mathbb{X}^+ = \mathbb{E}^{-1}([1, +\infty))$ είναι κλειστό αφού είναι αντίστροφη εικόνα του κλειστού διαστήματος $[1, +\infty)$ μέσω της συνεχούς $\mathbb{E}[X]$.
- το $\mathbb{X}^+$ είναι φραγμένο διότι βρισκόμαστε σε διακριτό και πεπερασμένο χώρο $\mathbb{R}^\Omega$.
- το $\mathbb{X}^+$ είναι κυρτό διότι το $\mathbb{X}$ είναι κυρτός κώνος.

(c) *Το $\mathbb{X}^0$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{X}$.*
Πράγματι, έστω $X, Y \in \mathbb{X}^0$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν αυτοχρηματοδοτούμενες στρατηγικές φ και ψ ώστε $X = V_T(\varphi), Y = V_T(\psi)$ και $V_0(\varphi) = V_0(\psi) = 0$. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}
\kappa X + \lambda Y &= \kappa\varphi_T S_T + \lambda\psi_T S_T \\
&= (\kappa\varphi_T + \lambda\psi_T) S_T \\
&=: \eta_T S_T
\end{aligned}$$

με $\eta := \kappa\varphi + \lambda\psi$ (προφανώς) προβλέψιμη σ.δ., και

$$\begin{aligned} V_0(\eta) &= V_0(\kappa\varphi + \lambda\psi) \\ &= \kappa V_0(\varphi) + \lambda V_0(\psi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(d) *Υπάρχει ένας γραμμικός ισομορφισμός* $F : \mathbb{R}^\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Πράγματι

(d_1) Αφού το Ω είναι πεπερασμένο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπαχει μια διαμέριση $P := \{D_1, \ldots, D_n\}$ του Ω με $P(D_i) := p_i > 0$ όπου τα D_i είναι P-άτομα, για $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει $D_i = \{\omega_i\} \subseteq \Omega$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ και ότι $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ με $P(\{\omega_i\}) > 0$.

(d_2) Έστω $F : \mathbb{R}^\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ώστε $F(X) := (X(\omega_1), \ldots, X(\omega_n))$. Προφανώς η F είναι 1-1 και επί. Επίσης για $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $X, Y \in \mathbb{R}^\Omega$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F(\kappa X + \lambda Y) &:= (\kappa X(\omega_1) + \lambda Y(\omega_1), \ldots, \kappa X(\omega_n) + \lambda Y(\omega_n)) \\ &= \kappa F(X) + \lambda F(Y). \end{aligned}$$

Συνεπώς η F είναι γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ των γραμμικών χώρων $\mathbb{R}^\Omega$ και $\mathbb{R}^n$.
(e) *Η F είναι ισομορφισμός μεταξύ χώρων Banach.*
Πράγματι αφού ο $\mathbb{R}^\Omega$ είναι πεπερασμένης διάστασης με νόρμα και ο $\mathbb{R}^n$ είναι χώρος με νόρμα, οι γραμμικές απεικονίσεις F και F^{-1} είναι φραγμένες (βλ. π.χ. [4], Θεώρημα 1.3.3). Επομένως η F είναι ισομορφισμός χώρων με νόρμα και συνεπώς χώρων Banach, αφού κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα είναι πλήρης (βλ. π.χ. [4], Πρόταση 1.3.5).

Από τα (a), (b), (c) έπεται ότι ισχύουν οι προυποθέσεις του Θεωρήματος διαχωρισμού από υπερεπίπεδο (βλ. Θεώρημα Ε΄.13) για σύνολα στο $\mathbb{R}^n$ και από τα (d) και (e) προκύπτει ότι μπορούμε να το εφαρμόσουμε και στο $\mathbb{R}^\Omega$.
(f) *Υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $C : \mathbb{R}^\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε $C(X) = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{X}^0$ και $C(X) > 0$ για κάθε $X \in \mathbb{X}^+$.*
Πράγματι από τα (a),(b),(c),(d),(e) προκύπτει ότι τα σύνολα $L := F(\mathbb{X}^0)$ και $K := F(\mathbb{X}^+)$ ικανοποιούν τις προυποθέσεις του θεωρήματος διαχωρισμού από υπερεπίπεδο (βλ. Θεώρημα Ε΄.13). Επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε μία

φραγμένη γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\phi(x) = 0$ για κάθε $x \in L$ αλλά $\phi(x) > 0$ για κάθε $x \in K$. Έστω $C := \phi \bullet F : \mathbb{R}^\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Τότε προφανώς ισχύει ότι $C(X) = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{X}^0$ και $C(X) > 0$ για κάθε $X \in \mathbb{X}^+$.

(g) *Για κάθε $X \in \mathbb{X}$ ισχύει $C(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i z_i$, όπου $X_i := X(\omega_i)$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ και $z = (z_i, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ όπως στο Λήμμα Ε΄.12 Επίσης για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ ισχύει $z_i > 0$.*

Πράγματι, από τον ορισμό της C στο βήμα (f) προκύπτει ότι για κάθε $X \in \mathbb{X}$ ισχύει

$$\begin{aligned} C(X) &=: \phi(F(X)) := \phi(X(\omega_1), \ldots, X(\omega_n)) \\ &:= (X_1, \ldots, X_n) \cdot (z_1, \ldots, z_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i z_i \end{aligned}$$

Επίσης για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ επίλέγοντας $Y^{(i)} \in \mathbb{X}$ με $F(Y^{(i)}) := (0, \ldots, 0, \frac{2}{p_i}, 0, \ldots, 0)$, όπου $p_i := P(\{\omega_i\})$, παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}_P[Y^{(i)}] = \frac{2p_i}{p_i} = 2$. Συνεπώς $Y^{(i)} \in \mathbb{X}^+$ και $C(Y^{(i)}) = \frac{2z_i}{p_i} > 0$, με την ανισότητα να είναι συνέπεια του βήματος (f) και της (d_1). Άρα $z_i > 0$ για κάθε $i \leq n$.

Παίρνουμε $\pi(X) := \frac{C(X)}{C(S_T^0)}$ για κάθε $X \in \mathbb{X}$.

(h) *Το $\pi : \mathbb{X} \longrightarrow [0, \infty)$ αποτελεί ένα σύστημα τιμολόγησης ενδεχόμενων κερδών.*

Πράγματι,

- $\pi(X) = 0$ αν και μόνο αν $X = 0$, διότι $\pi(X) = 0 \Longleftrightarrow C(X) = 0 \Longleftrightarrow X \cdot z = 0 \Longleftrightarrow X = 0$ καθώς $z_i > 0$ για κάθε $i \leq n$ και $X \geq 0$, και

- $\pi(\alpha X + bX') = \alpha\pi(X) + b\pi(X')$ για κάθε $\alpha, b \geq 0$ και $X, X' \in \mathbb{X}$ προφανώς ως γραμμική συνάρτηση.

(i) *Το* $\boldsymbol{\pi}$ *είναι συνεπές με το μοντέλο μας.*

(Υπενθ. $\pi(V_T(\phi)) = V_0(\varphi)$ για όλα τα $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ δηλαδή $\pi \in \mathbf{\Pi}$)

Πράγματι, έστω $\varphi \in \mathbf{\Phi}$. Ορίζουμε:

$$\psi_t^k = \begin{cases} \varphi_t^0 - V_0(\varphi) & \text{για } k = 0, \\ \varphi_t^k & \text{για } k = 1, 2, \ldots, K \end{cases}$$

και έχουμε ότι,

(i_1) Η ψ είναι αυτοχρηματοδούμενη (όχι απαραίτητα αποδεκτή) στρατηγική. Πράγματι,

$$\psi_t \cdot S_t = (\varphi_t^0 - V_0(\varphi))S_t^0 + \sum_{k=1}^{K} \varphi_t^k S_t^k = \varphi_t \cdot S_t - V_0(\varphi)S_t^0 \quad \text{και}$$

$$\psi_{t+1} \cdot S_t = (\varphi_{t+1}^0 - V_0(\varphi))S_t^0 + \sum_{k=1}^{K} \varphi_{t+1}^k S_t^k = \varphi_{t+1} \cdot S_t - V_0(\varphi)S_t^0$$

συνεπώς $\psi_t \cdot S_t = \psi_{t+1} \cdot S_t$ αφού η $\varphi \in \Phi$.

(i_2) $V_0(\psi) = 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} V_0(\psi) = \psi_0 \cdot S_0 &= (\varphi_0^0 - V_0(\varphi))S_0^0 + \sum_{k=1}^{K} \varphi_0^k S_0^k \\ &= \varphi_0 \cdot S_0 - V_0(\varphi)S_0^0 \\ &= V_0(\varphi) - V_0(\varphi)1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(i_3) $V_T(\psi) = V_T(\varphi) - V_0(\varphi)S_T^0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} V_T(\psi) = \psi_T \cdot S_T &= (\varphi_T^0 - V_0(\varphi))S_T^0 + \sum_{k=1}^{K} \varphi_T^k S_T^k \\ &= \sum_{k=0}^{K} \varphi_T^k S_T^k - V_0(\varphi)S_T^0 \\ &= V_T(\varphi) - V_0(\varphi)S_T^0 \end{aligned}$$

(i_4) Για κάθε $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ ισχύει $\pi(V_T(\varphi)) = V_0(\varphi)$ που σημαίνει ότι $\pi \in \mathbf{\Pi}$. Πράγματι, για κάθε $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ έχουμε έχουμε:

$$\begin{aligned} \pi(V_T(\varphi)) - V_0(\varphi) &= \pi(V_T(\varphi)) - V_0(\varphi)\pi(S_T^0) \\ &= \pi(V_T(\varphi)) - \pi(V_0(\varphi)S_T^0) \\ &= \pi(V_T(\varphi) - V_0(\varphi)S_T^0) \\ &= \pi(V_T(\psi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια της σχέσης $\pi(S_T^0) = 1$. η δεύτερη προκύπτει από το γεγονός ότι η $V_0(\varphi)$ είναι σταθερή καθώς στο χρόνο 0 γνωρίζουμε την αξία του χαρτοφυλακίου μας και από τη γραμμικότητα της π και η πέμπτη από τη σχέση $V_T(\psi) \in \mathbb{X}^0$ που προκύπτει από τα (i_1),(i_2) και το θεώρημα διαχωρισμού από υπερεπίπεδο (βλ. Θεώρημα Ε΄.13).

Άρα, από τη Πρόταση 3.2.1 προκύπτει ότι $\mathbb{P} \neq \emptyset$. □

Ορισμός 3.2.5. Θα λέμε ότι το μοντέλο της αγοράς είναι ***βιώσιμο*** αν ισχύει μία από τις εξής τρείς ισοδύναμες ιδιότητες:

(i) $\mathbb{P} \neq \emptyset$.

(ii) $\mathbf{\Pi} \neq \emptyset$.

(iii) Η αγορά είναι απαλλαγμένη από ευκαιρίες arbitrage.

Πόρισμα 3.2.6. *Αν το μοντέλο μας είναι βιώσιμο, υπάρχει μοναδικό $\pi \in \mathbf{\Pi}$ που συνδέεται με οποιοδήποτε εφικτό ενδεχόμενο κέρδος X, και για το οποίο $\pi(X) = \mathbb{E}_Q[\beta_T X]$ για κάθε $Q \in \mathbb{P}$.*

Απόδειξη. Έστω $Q \in \mathbb{P}$ και $X \in \mathbb{X}$ τέτοιο ώστε να υπάρχει $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ με $V_T(\varphi) = X$. Τότε από το *Θεώρημα 3.2.4* προκύπτει ότι υπάρχει $\pi \in \mathbf{\Pi}$ με $\pi(X) = V_0(\varphi)$, ενώ από τη *Πρόταση 3.2.1* προκύπτει ότι το π είναι μοναδικό και ισχύει $\pi(X) = \mathbb{E}_Q[\beta_T X]$. □

Παρατήρηση 3.2.7. Αυτό το πόρισμα απανταέι και στο ερώτημα μοναδικότητας που τέθηκε στο τέλος της §3.1. Αν έχουμε δύο διαφορετικές επενδυτικές στρατηγικές $\varphi, \psi \in \mathbf{\Phi}$ με $V_0(\varphi) \neq V_0(\psi)$, τέτοιο ώστε να παράγουν εφικτά ενδεχόμενα κέρδη X, Y, τότε $X \neq Y$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} & V_0(\varphi) \neq V_0(\psi) \\ \iff\ & \pi(X) \neq \pi(Y) \\ \implies\ & \quad X \neq Y. \end{aligned}$$

Επίσης, μας απέδειξε ότι η γνώση οποιουδήποτε $Q \in \mathbb{P}$ μας επιτρέπει να τιμολογήσουμε (τουλάχιστον θεωρητικα) όλα τα τα ενδεχόμενα κέρδη $X \in \mathbb{X}$.

Παρατήρηση 3.2.8. Από τις τρεις ισοδύναμες υποθέσεις που ορίζουν τη βιωσιμότητα, η λιγότερο αφηρημένη και πιο σημαντική σε οικονομικούς όρους είναι η απουσία ευκαιριών arbitrage. Η υπόθεση αυτή είναι που δικαιολογεί τη χρήση του όρου της βιωσιμότητας. Παρόλα αυτά, η ύπαρξη ενός martingale ισοδύναμου μέτρου $Q \in \mathbb{P}$ είναι που συνήθως επαληθεύεται ευκολότερα σε εφαρμογές.

3.3 Εφικτά κέρδη.

Όπως είδαμε στη §3.2 για κάθε εφικτό κέρδος X η συνδεόμενη τιμή αγοράς π ικανοποιεί την ισότητα $\pi(X) = \mathbb{E}_Q[\beta_T X]$ για όλα τα $Q \in \mathbb{P}$. Όμως πώς μπορεί κάποιος να ελέγξει το κατά πόσο ένα ενδεχόμενο κέρδος X είναι εφικτό; Για αρχή παραθέτουμε δύο προτάσεις.

Πρόταση 3.3.1. *Αν $\varphi \in \mathbf{\Phi}$, τότε η προεξοφλητική σ.δ. τιμών $\beta V(\varphi)$ είναι ένα martingale για κάθε μέτρο $Q \in \mathbb{P}$.*

Απόδειξη. Αφού φ είναι αυτοχρηματοδοτούμενη, εύκολα αποδεικνύεται ότι $\Delta(\beta V(\varphi))_t = \sum_{k=1}^{K} \varphi_t^k \Delta(\beta S^k)_t$. Πράγαμτι,

$$
\begin{aligned}
\Delta(\beta V(\varphi))_t &:= \beta_t V_t(\varphi) - \beta_{t-1} V_{t-1}(\varphi) \\
&= \beta_t \varphi_t \cdot S_t - \beta_{t-1} \varphi_{t-1} \cdot S_{t-1} \\
&= \beta_t \varphi_t \cdot S_t - \beta_{t-1} \varphi_t \cdot S_{t-1} \\
&= \sum_{k=1}^{K} \varphi_t^k \Delta(\beta S^k)_t + (\beta_t \varphi_t^0 S_t^0 - \beta_{t-1} \varphi_t^0 S_{t-1}^0) \\
&= \sum_{k=1}^{K} \varphi_t^k \Delta(\beta S^k)_t \quad , t = 1, \ldots, T
\end{aligned}
$$

Επίσης από τη προβλεψιμότητα της φ και το γεγονός ότι βS είναι εξ'ορισμού martingale για κάθε μέτρο $Q \in \mathbb{P}$ θα έχουμε:

($\mathbf{m_1}$) Η $\{\beta_t V_t(\varphi)\}_{t \in \{0,\ldots,T\}}$ είναι προσαρμοσμένη στη (διύλιση) $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}$.

($\mathbf{m_2}$) Για κάθε $t \in \{0, \ldots, T\}$ η $\beta_t V_t(\varphi) \in \mathcal{L}^1(Q)$ $\quad$ ($\mathbb{E}[|\beta V(\varphi)|]_t < \infty$).

($\mathbf{m_3}$) Για κάθε $t, s \in \{0, \ldots, T\}$ με $s = t + 1$ ισχύει

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[\beta_s V_s(\varphi) | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_Q[\beta_s \varphi_s S_s | \mathcal{F}_t] \\
&= \varphi_s \mathbb{E}_Q[\beta_s S_s | \mathcal{F}_t] \\
&= \varphi_s \beta_t S_t \\
&= \varphi_{t+1} \beta_t S_t \\
&= \varphi_t \beta_t S_t \\
&= \beta_t V_t(\varphi)
\end{aligned}
$$

όπου όλες οι ισότητες ισχύουν $Q|\mathcal{F}_t - \sigma.\beta.$

Συνεπώς η προεξοφλητική σ.δ. τιμών $\beta V(\varphi)$ είναι ένα martingale για κάθε μέτρο $Q \in \mathbb{P}$. □

Πρόταση 3.3.2. *Αν $X \in \mathbb{X}$ είναι εφικτό, τότε*

$$\beta_t V_t(\varphi) = \mathbb{E}_Q[\beta_T X|\mathcal{F}_t] \quad ,\textit{για κάθε } t = 0, \dots, T \quad Q|\mathcal{F}_t - \sigma.\beta.$$

για κάθε $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ που παράγει το X και κάθε $Q \in \mathbb{P}$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι ένα ενδεχόμενο κέρδος $X \in \mathbb{X}$ είναι ***εφικτό*** αν υπάρχει $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ τέτοιο ώστε $V_T(\varphi) = X$. Από τη *Πρόταση 3.1.1* έχουμε ότι η $\beta V(\varphi)$ είναι martingale ως προς Q. Επομένως

$$\begin{aligned} \beta_t V_t(\varphi) &= E_Q[\beta_T V_T(\varphi)|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_Q[\beta_T X|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

όπου οι ισότητες ισχύουν $Q|\mathcal{F}_t - \sigma.\beta.$ □

Παρατηρηση 3.3.3 Άμεση συνέπεια της *Πρότασης 3.3.2* είναι ότι αν ένα ενδεχόμενο κέρδος είναι εφικτό, τότε υπάρχει μία $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ που παράγει το X και για τη σ.δ. τιμών $V = V(\varphi)$ ισχύει:

$$V_t = \left(\frac{1}{\beta_t}\right) \mathbb{E}_Q[\beta_T X|\mathcal{F}_t] \quad \text{για κάθε} \;\; t = 0, \dots, T \tag{3.6}$$

με $Q \in \mathbb{P}$ αυθαίρετο.

Παρατηρηση 3.3.4 Από τη *Πρόταση 3.3.1* έχουμε ότι αν η V υπολογίζεται μέσω του X από τη σχέση (3.6), και αν $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ είναι η επενδυτική στρατιγική που παράγει το X, τότε

$$\Delta(\beta V)_t = \sum_{k=1}^{K} \varphi_t^k \Delta(\beta S^k)_t \quad \text{για κάθε} \;\; t = 1, \dots, T \tag{3.7}$$

με το ομόλογο-συνιστώσα φ^0 να μην εισάγεται στη σχέση (3.7).

Αξίζει να συμειωθεί ότι κάποιος μπορεί να δείξει και τον αντίθετο ισχυρισμό. Ένα ενδεχόμενο κέρδος X είναι εφικτό αν και μόνο αν υπάρχει προβλέψιμη σ.δ. $\phi^1, \dots, \varphi^K$ ε.ω. να ισχύει η *σχέση (3.7)*. Τέλος αν κάθε ενδεχόμενο κέρδος είναι εφικτό τότε το μοντέλο αγοράς χρεογράφων λέγεται ότι είναι ***πλήρες***.

Κεφάλαιο 4

Το FTAP για πεπερασμένο διακριτό χρόνο και χώρους πιθανότητας με οποιοδήποτε δειγματικό χώρο

Στο παρών κεφάλαιο επεκτείνονται τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου θεωρώντας αυθαίρετο χώρο πιθανότητας και δείχνοντας ότι η υπόθεση του no arbitrage είναι ικανή και αναγκαία για την ύπαρξη ενός martingale ισοδύναμου μέτρου πιθανότητας για τη στοχαστική διαδιακασία τιμών των χρεογράφων (μοντελοποιώντας τις τιμές ενός χρεογράφου χωρίς ρίσκο και d πεπερασμένων χρεογράφων με ρίσκο).

Το πρόβλημα της απόδειξης ύπαρξης ενός martingale ισοδύναμου μέτρου πιθανότητας για γενικές σ.δ. τιμών χρεογράφων ορισμένες σε ένα γενικό φ.χ.π τέθηκε από τους Harrison και Pliska (1981) και αποδείχτηκε για τη περίτπωση που έχουμε ένα ομόλογο και μία μετοχή από τους Back και Pliska στην [9] (1987). Το Θεώρημα 4.2.1 αποδεικνύει ότι τα ίδια αποτελέσματα διατηρούνται και στη περίπτωση που έχουμε παράπανω από ένα χρεόγραφα με ρίσκο διακριτής και πεπερασμένης χρονικής περιόδου. Παράλληλα, ενώ οι Back και Pliska περιορίζονται στη κλάση των εφικτών κερδών, στο παρών κεφάλαιο και συγκεκριμένα στη ενότητα 4.3 παρατηρούμε ότι ο περιορισμός αυτός δεν είναι ουσιώδης.

'Εστω $X = \{X_t\}_{t\in\{0,1,\dots,T\}}$ ένα martingale διάνυσμα με τιμές στον $\mathbb{R}^d$ πάνω σε ένα φ.χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}.\mathbb{F}, P)$ και έστω $V = \{V_t\}_{t\in\{0,1,\dots,T\}}$ μία $\mathbb{F}$-προσαρμοσμένη σ.δ. (επενδυτική στρατηγική) με τιμές στον $\mathbb{R}^d$. Τότε ο ***martingale μετασχηματισμός***

$V \cdot X = \{(V \cdot X)_t\}_{t \in \{0,1,\ldots,T\}}$ της V πάνω στη σ.δ. X ορίζεται ως εξής,

$$(V \cdot X)_t = V_1 \cdot X_0 + \sum_{s=1}^{t} V_s \cdot (X_s - X_{s-1})$$

και αναπαριστά τις συσσωρευμένες απολαβές μέχρι το χρόνο t υπό τη στρατηγική V (όπου $V_s \cdot X_s$ το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο των V_s και X_s). Αν η $V \cdot X$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η κλασσική θεωρία των martingales μας δείχνει ότι η $V \cdot X$ είναι επίσης ένα martingale επάνω στο P και στην $\mathbb{F}$. Στο εδάφιο αυτό δείχνουμε ότι για κάθε $t \in \{1, \ldots, T\}$ η συνθήκη

$$V_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \geq 0 \quad P - \text{σ.β.} \quad \Longrightarrow \quad V_t \cdot (X_t - X_{t-1}) = 0 \quad P|\mathcal{F}_{t-1}\text{-σ.β.} \tag{4.1}$$

είναι όχι μόνο ικανή αλλά και αναγκαία για μία σ.δ. X ώστε να είναι martingale υπό ένα ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας Q επάνω στο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$. Ένα τέτοιο Q θα λέγεται ισοδύναμο martingale μέτρο για το ζευγάρι $(\mathbb{F}, X)$.

Η μέθοδος των R. Dalang, A. Morton και W. Willinger [16] (1990) βασίζεται σε μία ανάλυση της συνθήκης (4.1) και επεκτείνεται σε δύο έως τότε γνωστά αποτελέσματα: (i) μία παρόμοια αλλά πιο στοιχειώδης μελέτη της (4.1), όπου ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος και (ii) μία ανάλυση του ίδιου προβλήματος αλλαγής μέτρου στη περίπτωση μιας σ.δ. X για $T = \{0, 1\}$ (βλ. Willinger and Taqqu [60] (1988)). Οι Willinger and Taqqu [60] (1988) έχουν επίσης λύσει το πρόβλημα της ύπαρξης ενός ***μοναδικού martingale μέτρου*** . Στη παραπάνω περίπτωση το πρόβλημα μοναδικότητας μπορεί να λυθεί με τη χρήση στοιχειωδών πιθανοθεωρητικών εργαλείων, ενώ η επέκταση των R. Dalang, A. Morton και W. Willinger [16] (1990) στηρίζεται σε κάποια θεωρήματα μετρήσιμων επιλογών (measurable selections).

4.1 Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ενός martingale ισοδύναμου μέτρου στην απλή περίπτωση όπου T={0,1}

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ πλήρης χ.π. και $\widetilde{P}$, P ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας στην $\mathcal{F}$. Σημειώνεται ότι αν $\mathcal{G}$ είναι μία σ-υποάλγεβρα της $\mathcal{F}$, τότε τα P και $\widetilde{P}$ μπορεί να είναι ισοδύναμα στην $\mathcal{G}$ αλλά όχι στην $\mathcal{F}$. Αν τα P και $\widetilde{P}$ είναι ισοδύναμα, τότε το $\frac{d\widetilde{P}}{dP}$ συμβολίζει τη ***παράγωγο Radon-Nikodym*** του $\widetilde{P}$ σε σχέση με το P. Σ αυτή τη περίπτωση έχουμε, $\frac{d\widetilde{P}}{dP} > 0$, P-σ.β.. Επίσης, αν P και $\widetilde{P}$ είναι ισοδύναμα στην $\mathcal{F}$ και Y είναι $\widetilde{P}$-ολοκληρώσιμη τότε έχουμε ότι αν

$$Z := \frac{d\widetilde{P}}{dP} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{G} \;\; \widetilde{P}(A) = \int_A Z dP = \int_A \mathbb{E}_P[Z|\mathcal{G}] dP$$

και

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[YZ|\mathcal{G}] &= \mathbb{E}_P\Big[Y \; \mathbb{E}_P[Z|\mathcal{G}]\Big|\mathcal{G}\Big] \\ &= \mathbb{E}_P[Z|\mathcal{G}] \; \mathbb{E}_P[Y|\mathcal{G}] \\ &\overset{P\sim\widetilde{P}}{=} \mathbb{E}_P[Z|\mathcal{G}] \; \mathbb{E}_{\widetilde{P}}[Y|\mathcal{G}] \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\mathbb{E}_{\widetilde{P}}[Y|\mathcal{G}] = \frac{\mathbb{E}_P[YZ|\mathcal{G}]}{\mathbb{E}_P[Z|\mathcal{G}]}.$$

Παίρνουμε το σύνολο $\mathbb{R}^d$ με την ευκλείδια νόρμα $||\cdot||$ και το εφοδιάζουμε με την ευκλείδια τοπολογία και τη Borel σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}_d := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$. Για δύο στοιχεία $x, y \in \mathbb{R}^d$,το $x \cdot y$ εκφράζει το ***ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο*** και κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^d$ ορίζει ένα ***υπερεπίπεδο***

$$H^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : \;\alpha \cdot x = 0\}.$$

Ορίζουμε επίσης τα εξής:

$$H^\alpha_\geq = \{x \in \mathbb{R}^d : \;\alpha \cdot x \geq 0\}$$

$$H^\alpha_> = \{x \in \mathbb{R}^d : \;\alpha \cdot x > 0\}$$

$$H^\alpha_< = \{x \in \mathbb{R}^d : \;\alpha \cdot x < 0\}$$

$$H^\alpha_\leq = \{x \in \mathbb{R}^d : \;\alpha \cdot x \leq 0\}.$$

Τέλος θυμίζουμε ότι ένα σύνολο C ***διαχωρίζεται πλήρως από την αρχή*** από ένα υπερεπίπεδο H^α εφόσον $H^\alpha_\geq$ περιέχει το C αλλά το H^α δεν περιέχει το C.

Λήμμα 4.1.1. *Έστω ν μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$ με συμπαγή φορέα K. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Για $\forall \alpha \in \mathbb{R}^d$ με $\nu(H^\alpha_\geq) = 1$, ισχύει $\nu(H^\alpha) = 1$.*

(ii) *Υπάρχει μια συνεχής και αυστηρά θετική συνάρτηση $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow (0, 1]$ ε.ω.*

$$\int_{\mathbb{R}^d} x \; g(x) \; \nu(dx) = 0.$$

Απόδειξη. **(i)⟹(ii)** Έστω ότι ισχύει η (i). Τότε για $\forall \alpha \in \mathbb{R}^d$ ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

- $\nu(H^\alpha) = 1$, ή
- $\nu(H^\alpha) < 1$ και $[\nu(H^\alpha_>) > 0$ και $\nu(H^\alpha_<) > 0]$. $\quad (*)$

(a) Για $\nu(H^\alpha) = 1$, ορίζουμε δύο συναρτήσεις $g^\alpha_>$ και $g^\alpha_<$ με:

$$g^\alpha_>(x) = 1 \text{ και } g^\alpha_<(x) = 1 \text{ για } \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Για $\nu(H^\alpha) < 1$, από την (*) έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\alpha \cdot x)\ \chi_{H^\alpha_>}(x)\ \nu(dx) > 0 \text{ και } \int_{\mathbb{R}^d} (\alpha \cdot x)\ \chi_{H^\alpha_<}(x)\ \nu(dx) < 0$$

Προσεγγίζοντας τις παραπάνω χαρακτηριστικές συναρτήσεις από τοπικά συνεχείς γραμμικές συναρτήσεις, παρατηρούμε ότι

- $\exists\ g^\alpha_> : \mathbb{R}^d \longrightarrow (0,1]$ τέτοιο ώστε $\int_{\mathbb{R}^d} (\alpha \cdot x)\ g^\alpha_>(x)\ \nu(dx) > 0$, και
- $\exists\ g^\alpha_< : \mathbb{R}^d \longrightarrow (0,1]$ τέτοιο ώστε $\int_{\mathbb{R}^d} (\alpha \cdot x)\ g^\alpha_<(x)\ \nu(dx) < 0$

(b) Ανεξάρτητα από τη τιμή του $\nu(H^\alpha)$ θέτουμε:

$$m^\alpha_> := \int_{\mathbb{R}^d} x\ g^\alpha_>(x)\ \nu(dx) \quad \text{και} \quad m^\alpha_< := \int_{\mathbb{R}^d} x\ g^\alpha_<(x)\ \nu(dx)$$

και παρατηρούμε ότι αφού ο φορέας του ν είναι φραγμένος, τα $m^\alpha_>$ και $m^\alpha_<$ είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^d$).
Θέτουμε,

$$M = \{m^\alpha_> : \alpha \in \mathbb{R}^d\} \cup \{m^\alpha_< : \alpha \in \mathbb{R}^d\}.$$

(c) *Δεν υπάρχει υπερεπίπεδο που να διαχωρίζει το M από την αρχή.*
Πράγματι, αν $\beta \in \mathbb{R}^d$ είναι τέτοιο ώστε $\nu(H^\beta) = 1$, τότε για όλα τα $\alpha \in \mathbb{R}^d$ έχουμε,

$$\beta \cdot m^\alpha_> = \int_{\mathbb{R}^d} (\beta \cdot x)\ g^\alpha_>(x)\ \nu(dx) = \int_{H^\beta} (\beta \cdot x)\ g^\alpha_>(x)\ \nu(dx) = 0$$

και όμοια

$$\beta \cdot m^\alpha_< = \int_{\mathbb{R}^d} (\beta \cdot x)\ g^\alpha_<(x)\ \nu(dx) = \int_{H^\beta} (\beta \cdot x)\ g^\alpha_<(x)\ \nu(dx) = 0.$$

Έτσι, το M θα μπορούσε να περιέχεται στο H^β, και κατά συνέπεια το H^β δε θα μπορούσε να διαχωρίζει το M από την αρχή.
Από την άλλη, αν $\nu(H^\beta) < 1$, τότε από τον ορισμό του $g^\beta_<$ και την $(*)$ έχουμε

$$\beta \cdot m^\beta_< = \int_{\mathbb{R}^d} (\beta \cdot x)\ g^\beta_<(x)\ \nu(dx) < 0$$

και έτσι το $H^\beta_\geq$ δεν περιέχει το M.

(δ) Αφού κανένα υπερεπίπεδο δε διαχωρίζει το M από την αρχή, το ίδιο θα ισχύει και για τη κυρτή θήκη $conv(M)$ του M και κατά συνέπεια η αρχή θα ανήκει στην $conv(M)$ (βλ. π.χ. [51] Θεώρημα 11.3). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν πολλά πεπερασμένα σημεία $m_1, \ldots, m_k \in M$ και πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$ έτσι ώστε

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1 \quad \text{και} \quad \lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_k m_k = 0.$$

Τότε θέτωντας $g(x) = \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_k g_k(x)$, όπου g_i συνεχείς συναρτήσεις που ορίζουν τα $m_i \in M$ για $i = 1, \ldots, k$ θα έχουμε ότι η g είναι συνεχής με $0 < g(x) \leq 1$ για $\forall x \in \mathbb{R}^d$ και

$$\int_{\mathbb{R}^d} x\ g(x)\ \nu(dx) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_i = 0.$$

(ii)$\Longrightarrow$(i) Η απόδειξη του αντίστροφου ισχυρισμού δεν μας χρειάζεται και είναι παρόμοια με την αρχή της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1.7. □

Θεώρημα 4.1.2. *Έστω ν ένα αυθαίρετο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}^d$. Τότε οι επόμενες δύο συνθήκες είναι ισοδύναμες.*

(i) *Για $\forall \alpha \in \mathbb{R}^d$ με $\nu(H^\alpha_\geq) = 1$, ισχύει $\nu(H^\alpha) = 1$.*

(ii) *Υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $g : \overline{\mathbb{R}}^d \longrightarrow [0,1]$ ε.ω.*

- *$g(x) > 0$ για $\forall x \in \mathbb{R}^d$,*
- *$\int_{\mathbb{R}^d} ||x||\ g(x)\ \nu(dx) < +\infty$ και*
- *$\int_{\mathbb{R}^d} x\ g(x)\ \nu(dx) = 0$.*

Απόδειξη. **(i)$\Longrightarrow$(ii)** Ορίζουμε μια 1-1 και $\mathfrak{B}_d$-$\mathfrak{B}\big(B(0,1)\big)$-μετρήσιμη συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow B(0,1)$ (η ανοιχτή μοναδιαία σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων) με

$$\psi(x) = \frac{x}{1+||x||}.$$

Τότε $\psi(A) \in \mathfrak{B}\big(B(0,1)\big)$ και αφού το $B(0,1)$ είναι φραγμένο θα έχουμε ότι και ο φορέας του θα είναι φραγμένος (βλ. π.χ. [15], Theorem 8.3.7). Άρα μπορεί να οριστεί το μέτρο πιθανότητας $\overline{\nu} : \mathfrak{B}\big(B(0,1)\big) \longrightarrow [0,1]$ με τον τύπο $\overline{\nu} := \nu \cdot \psi$ με το $\overline{\nu}$ αποτελεί ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$ με φραγμένο φορέα (συνεπώς με συμπαγή φορέα) και ικανοποιεί τη συνθήκη (i) του Λήμματος 4.1.1. Συνεπώς υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $\overline{g} : \mathbb{R}^d \longrightarrow (0,1]$ ώστε $\int_{\mathbb{R}^d} x \ \overline{g}(x) \ \overline{\nu}(dx) = 0$. Ορίζουμε $g : \overline{\mathbb{R}}^d \longrightarrow [0,1]$ ως εξής:

$$g(x) = \frac{\overline{g}(\psi(x))}{1+||x||} \quad \text{για} \ \ x \neq \infty \quad \text{και} \quad g(\infty) = 0.$$

Αυτή η συνάρτηση ικανοποιεί όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες, αφου:

- $g(x) > 0$ για $\forall x \in \mathbb{R}^d$,
- ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} ||x|| \ g(x) \ \nu(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d} ||x|| \ \frac{\overline{g}(\psi(x))}{1+||x||} \ \nu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} ||\psi(x)|| \ \overline{g}(\psi(x)) \ \nu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} ||x|| \ \overline{g}(x) \ \overline{\nu}(dx) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

- και παράλληλα,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} x \ g(x) \ \nu(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d} x \ \frac{\overline{g}(\psi(x))}{1+||x||} \ \nu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) \ \overline{g}(\psi(x)) \ \nu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} x \ \overline{g}(x) \ \overline{\nu}(dx) \\ &= 0. \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια της συνθήκης (ii) του Λήμματος 4.1.1.
(ii)$\Longrightarrow$**(i)** Ομοίως με το Λήμμα 4.1.1. □

Ορισμός 4.1.3. Έστω $\mathcal{G}$ μια σ-υποάλγεβρα της $\mathcal{F}$ και $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Θα λέμε ότι η Y έχει μια ***υπο συνθήκη κατανομή πιθανότητας δοσμένης της*** $\mathcal{G}$, αν υπάρχει $\mu : \Omega \times \mathfrak{B}_d \longrightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

(cd1) $\omega \longmapsto \mu(\omega, B)$ να είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη για κάθε σταθερό $B \in \mathfrak{B}_d$,

(cd2) Υπάρχει $N \in \mathcal{F}$ με $P(N) = 0$ τέτοιο ώστε για κάθε σταθερό $\omega \notin N$, η συνάρτηση $B \longmapsto \mu(\omega, B)$ να είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ και

(cd3) $\mu(\cdot, B) = P(\{Y \in B\}|\mathcal{G})$ $P|\mathcal{G}$-σ.β. για κάθε σταθερό $B \in \mathfrak{B}_d$.

Είναι γνωστό ότι υπάρχει πάντα μία υπό συνθήκη κατανομή πιθανότητας της Y δοσμένης της $\mathcal{G}$ (βλ. π.χ. [7]).

Λήμμα 4.1.4.

(i) *Έστω $(S, \mathcal{S})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ και Y όπως παραπάνω. Υποθέτουμε ότι η $F : \Omega \times \mathbb{R}^d \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d \otimes \mathcal{S}$-μετρήσιμη και μη αρνητική. Τότε η απεικόνιση $F^* : \Omega \times S \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ που ορίζεται ώς:*

$$F^*(\omega, s) = \int_{\mathbb{R}^d} F(\omega, x, s) \ \mu(\omega, dx)$$

είναι $\mathcal{G} \otimes \mathcal{S}$-μετρήσιμη.

(ii) *Υποθέτουμε ότι η $h : \Omega \longrightarrow S$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη και ορίζουμε*

$$\begin{aligned} U(\omega) &:= F(\omega, Y(\omega), h(\omega)) \quad \textit{και} \\ V(\omega) &:= F^*(\omega, h(\omega)). \end{aligned}$$

Τότε η V είναι P-ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η U είναι P-ολοκληρώσιμη και σ αυτή τη περίπτωση $V = \mathbb{E}_P[U|\mathcal{G}]$ $P|\mathcal{G}$-σ.β.

(iii) *Για $K \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^d$, ορίζουμε $K_\omega := \{x \in \mathbb{R}^d : (\omega, x) \in K\}$. Αν υποθέσουμε ότι $K \in \mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d$ τότε η απεικόνιση $\omega \longmapsto \mu(\omega, K_\omega)$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη και*

$$P\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in K_\omega\} = \int_\Omega \mu(\omega, K_\omega) \ P(d\omega).$$

Απόδειξη. Για τα **(i)** και **(ii)** αρχικά υποθέτουμε ότι

$$F(\omega, x, s) = \chi_G(\omega)\ \chi_B(x)\ \chi_R(s),\ \text{με } G \in \mathcal{G},\ B \in \mathfrak{B}_d \text{ και } R \in \mathcal{S}.$$

(a) *Για την F ισχύει η συνθήκη (i).*
Πράγματι, για κάθε $(\omega, s) \in \Omega \times S$ ισχύει

$$\begin{aligned}
F^*(\omega, s) &= \int_{\mathbb{R}^d} F(\omega, x, s)\ \mu(\omega, dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_G(\omega)\ \chi_B(x)\ \chi_R(s)\ \mu(\omega, dx) \\
&= \chi_G(\omega)\ \chi_R(s) \int_{\mathbb{R}^d} \chi_B(x)\ \mu(\omega, dx) \\
&= \chi_G(\omega)\ \chi_R(s) \int_B \mu(\omega, dx) \\
&= \chi_G(\omega)\ \chi_R(s)\ \mu(\omega, B) \\
&= [\chi_G(\omega) \cdot \mu(\omega, B)]\ \chi_R(s)
\end{aligned}$$

η οποία είναι $\mathcal{G} \otimes \mathcal{S}$-μετρήσιμη.
(b) *Για την F έχουμε $V := F^*\big(\cdot, h(\cdot)\big) = \mathbb{E}_P[U|\mathcal{G}]$.*
Πράγματι, για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει

$$\begin{aligned}
U(\omega) &= F(\omega, Y(\omega), h(\omega)) \\
&= \chi_G(\omega) \cdot (\chi_B \cdot Y)(\omega) \cdot (\chi_R \cdot h)(\omega)
\end{aligned}$$

και έτσι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[U|\mathcal{G}] &= \mathbb{E}_P\big[\chi_G \cdot (\chi_B \cdot Y) \cdot (\chi_R \cdot h)\ \big|\ \mathcal{G}\big] \\
&= \chi_G \cdot (\chi_R \cdot h) \cdot \mathbb{E}_P\big[\chi_{\{Y \in B\}}\ \big|\ \mathcal{G}\big] \\
&= \chi_G \cdot (\chi_R \cdot h) \cdot P\big(\{Y \in B\}\ \big|\ \mathcal{G}\big) \\
&= \chi_G \cdot (\chi_R \cdot h) \cdot \mu(\cdot, B) \\
&= F^*\big(\cdot, h(\cdot)\big)
\end{aligned}$$

όπου όλες οι ισότητες ισχύουν $P|\mathcal{G}$-σ.β., η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του γεγονότος ότι οι συναρτήσεις χ_G και $\chi_R \cdot h$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμες (η δεύτερη ως σύνθεση μετρησίμων συναρτήσεων), ενώ η τέταρτη προκύπτει από την ιδιότητα (cd3) του Ορισμού 4.1.3.
(c) *Το (i) ισχύει για όλες τις φραγμένες $\mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d \otimes \mathcal{S}$-μετρήσιμες συναρτήσεις από το $\Omega \times \mathbb{R}^d \times S$ στο $\mathbb{R}$.*

Πράγματι, ορίζουμε τις εξής οικογένειες συναρτήσεων

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &:= \{F : \Omega \times \mathbb{R}^d \times S \longmapsto \mathbb{R},\ F = \chi_G \cdot \chi_B \cdot \chi_R,\ G \in \mathcal{G},\ B \in \mathfrak{B}_d,\ R \in \mathcal{S}\}\\ \mathcal{V} &:= \{F : \Omega \times \mathbb{R}^d \times S \longmapsto \mathbb{R},\ F \text{ φραγμένη}\}.\end{aligned}$$

Τότε

(c_1) Η $\mathcal{M}$ είναι μία πολλαπλασιαστική κλάση και η $\mathcal{V}$ είναι μια μονότονη κλάση που περιέχει την $\mathcal{M}$. Επομένως από το θεώρημα μονότονης κλάσης (*βλ. Παράρτημα Δ, Θεώρημα Β΄.1.7*) προκύπτει ότι το (i) ισχύει για όλες τις φραγμένες, μη αρνητικές $\sigma(\mathcal{M})$-μετρήσιμες συναρτήσεις από το $\Omega \times \mathbb{R}^d \times S$ στο $\mathbb{R}$.

(c_2) Ισχύει ότι $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d \otimes \mathcal{S}$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{M}) &= \sigma\big(\{F : \Omega \times \mathbb{R}^d \times S \longmapsto \mathbb{R},\ F = \chi_G \cdot \chi_B \cdot \chi_R\}\big)\\ &= \sigma\big(\bigcup \sigma(F) : F \in \mathcal{M}\big)\\ &= \mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d \otimes \mathcal{S}\end{aligned}$$

με τη τρίτη ισότητα να ισχύει από το γεγονός ότι για την οικογένεια $\mathcal{K} := \{G \times B \times S :\ G \in \mathcal{G},\ B \in \mathfrak{B}_d,\ R \in \mathcal{S}\}$ ισχύει $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d \otimes \mathcal{S}$.

(d) *Τα (i) και (ii) ισχύουν για όλες τις $\mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d \otimes \mathcal{S}$-μετρήσιμες συναρτήσεις από το $\Omega \times \mathbb{R}^d \times S$ στο $\mathbb{R}$.*
Πράγαμτι, ορίζουμε

$$\begin{aligned}F_n &:= \min(F, n),\\ U_n(\omega) &:= F_n(\omega, Y(\omega), h(\omega)),\\ F_n^*(\omega, s) &:= \int_{R^d} F_n(\omega, x, s)\ \mu(\omega, dx) \quad \text{και}\\ V_n &:= F_n^*(\omega, h(\omega)).\end{aligned}$$

Τότε

- η F_n είναι φραγμένη και $\mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d \otimes \mathcal{S}$-μετρήσιμη και
- $F_n \uparrow F$, $\quad U_n \uparrow U$ και $\quad V_n \uparrow V$

καθώς $n \to \infty$.
Προφανώς $V_n = \mathbb{E}_P[U_n|\mathcal{G}]$ και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για δεσμευμένες μέσες τιμές αυξουσών ακολουθιών μη αρνητικών τ.μ. (*βλ. [15] Πρόταση και απόδειξη 10.4.4b*) προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P[U_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}_P[\lim_{n\to\infty} U_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}_P[U|\mathcal{G}] = V \quad P\text{-σ.β.}$$

ανεξάρτητα από το εαν οι αναμενόμενες τιμές είναι πεπερασμένες.

Τέλος, από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής έχουμε

$$\begin{aligned} \int_F \mathbb{E}[U|\mathcal{G}]dP &= \int_F UdP \qquad \forall F \in \mathcal{G} \\ \Rightarrow \quad \int \mathbb{E}[U|\mathcal{G}]dP &= \int UdP \end{aligned}$$

συνεπώς ισχύει $U \in \mathcal{L}^1(P) \iff V \in \mathcal{L}^1(P)$.

Για το **(iii)**, έστω $K \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^d$ ώστε $K \in \mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d$. Τότε για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει $K_\omega \in \mathfrak{B}_d$. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $\omega \longmapsto \mu(\omega, K_\omega)$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη και ότι $\mu(\cdot, K_\cdot) = P(\{Y(\cdot) \in K_\cdot\}|\mathcal{G}) \quad P|\mathcal{G}$-σ.β..
Πράγματι για $K = A \times B \in \mathcal{G} \times \mathfrak{B}_d$ έχουμε

$$K_\omega = \begin{cases} \emptyset & \text{αν } \omega \notin A \\ B & \text{αν } \omega \in A. \end{cases}$$

Άρα,

- για $\omega \notin A$ ισχύει $\mu(\omega, K_\omega) = \mu(\omega, \emptyset)$ και επομένως από την (cd1) η απεικόνιση $\Omega \backslash A \ni \omega \longmapsto \mu(\omega, \emptyset)$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, ενώ
- για $\omega \in A$ ισχύει $\mu(\omega, K_\omega) = \mu(\omega, B)$ και επομένως πάλι από την (cd1) η απεικόνιση $A \ni \omega \longmapsto \mu(\omega, B)$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη.

Έτσι η απεικόνιση $\omega \longmapsto \mu(\omega, K_\omega)$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη για $K = A \times B \in \mathcal{G} \times \mathfrak{B}_d$. Ομοίως προκύπτει και ότι

$$\mu(\cdot, K_\cdot) = P(\{Y(\cdot) \in K_\cdot\}|\mathcal{G}) \quad P|\mathcal{G}\text{-σ.β..} \quad (*)$$

για κάθε $K = A \times B \in \mathcal{G} \times \mathfrak{B}_d$. Έστω

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \{A \times B : A \in \mathcal{G}, B \in \mathfrak{B}_d\} \quad \text{και} \\ \mathcal{D} &:= \{K \in \mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d : \omega \longmapsto \mu(\omega, K_\omega) \ \mathcal{G}\text{-μετρήσιμη και ισχύει η } (*)\}. \end{aligned}$$

Τότε $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$ και η $\mathcal{D}$ είναι μία κλάση Dynkin. Άρα από το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης για σύνολα (Θεώρημα Β΄.1.10) προκύπτει ότι για κάθε $K \in \mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d$ η απεικόνιση $\omega \longmapsto \mu(\omega, K_\omega)$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη και ότι $\mu(\cdot, K_\cdot) = P(\{Y(\cdot) \in K_\cdot\}|\mathcal{G}) \quad P|\mathcal{G}$-σ.β.. Επομένως

$$\begin{aligned} P(\{Y(\cdot) \in K_\cdot\}) &= \int P(\{Y(\cdot) \in K_\cdot\}|\mathcal{G})dP \\ &= \int \mu(\cdot, K_\cdot)dP \end{aligned}$$

$\square$

Λήμμα 4.1.5. *Έστω Y μια αυθαίρετη τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}^d$. Τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες.*

(i) *Για όλες τις $\mathcal{G}$-μετρήσιμες τ.μ. Z με τιμές στο $\mathbb{R}^d$ έχουμε:*

$$Z \cdot Y \geq 0 \ P\text{-σ.β.} \quad \Longrightarrow \quad Z \cdot Y = 0 \ P\text{-σ.β.}$$

(ii) *Για σ.ο. τα $\omega \in \Omega$, για όλα τα $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $\mu(\omega, H^{\alpha}_{\geq}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mu(\omega, H^{a}) = 1$.*

Απόδειξη. **(ii)$\Longrightarrow$(i)** Έστω Z μία $\mathcal{G}$-μετρήσιμη τ.μ με τιμές στο $\mathbb{R}^d$ έτσι ώστε $Z \cdot Y \geq 0$ P-σ.β.. Σημειώνουμε ότι:

$$\{Z \cdot Y \geq 0\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in H^{Z(\omega)}_{\geq}\} \qquad (1)$$

$$\{Z \cdot Y = 0\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in H^{Z(\omega)}\} \qquad (2)$$

Από το Λήμμα 4.1.4,(iii) και την (1) βλέπουμε ότι

$$1 = P(\{Z \cdot Y \geq 0\}) = \int_{\Omega} \mu(\omega, H^{Z(\omega)}_{\geq}) \ dP(\omega),$$

και έτσι $\mu(\omega, H^{Z(\omega)}_{\geq}) = 1$, για $\omega \in \Omega \backslash N$, όπου N P-μηδενικό σύνολο. Από την υπόθεση του (ii), για σ.ο. τα $\omega \in \Omega \backslash N$ έχω $\mu(\omega, H^{Z(\omega)}) = 1$. Έτσι από το Λήμμα 4.1.4,(iii) και την (2) έχουμε:

$$P(\{Z \cdot Y = 0\}) = \int_{\Omega} \mu(\omega, H^{Z(\omega)}) \ dP(\omega) = 1$$

και κατά συνέπεια το (i) έχει αποδειχτεί.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Αρχικά χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{G}$ είναι πλήρης ως προς το μέτρο πιθανότητας P. Ορίζουμε

$$U = \{(\omega, \alpha) \in \Omega \times \mathbb{R}^d : \quad \mu(\omega, H^{\alpha}_{\geq}) = 1 \text{ και } \mu(\omega, H^{\alpha}) < 1\}.$$

Τότε $U \in \mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d$. Έστω $pr : \Omega \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \Omega$ η κανονική προβολή: $pr(\omega, x) = \omega$. Για να δείξουμε το (ii) θα πρέπει να δείξουμε ότι $pr(U)$ έχει P-μηδενική πιθανότητα (αφού $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ είναι πλήρης, ισχύει $pr(U) \in \mathcal{G}$ (βλ.[15] Πρ. 8.4.4)).

Υποθέτουμε ότι $P(pr(U)) > 0$ και θα δείξουμε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο. Αφού $U \in \mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d$, σύμφωνα με το Θεώρημα Μετρήσιμων Επιλογών (Θεώρημα Β΄.3.1) θα υπάρχει μία $\mathcal{G}$-μετρήσιμη συνάρτηση Z που παίρνει τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}^d$ τέτοιο ώστε

$$P(\{\omega \in \Omega : (\omega, \overline{Z}(\omega) \in U\}) = P(pr(U)) > 0.$$

Θέτουμε $Z(\omega) = \overline{Z}(\omega)$ αν $(\omega, \overline{Z}(\omega)) \in U$ και $Z(\omega) = 0$ διαφορετικά. Τώρα θα δείξουμε ότι $P(\{Z \cdot Y \geq 0\}) = 1$ αλλά $P(\{Z \cdot Y = 0\}) < 1$ σε αντίθεση το τον ισχυρισμό του (i). Πράγματι,

$$\begin{aligned} P(\{Z \cdot Y \geq 0\}) &= \int_\Omega \mu(\omega, H_{\geq}^{Z(\omega)})\, dP(\omega) \\ &= \int_{pr(U)} 1\, dP(\omega) + \int_{(pr(U))^c} 1\, dP(\omega) \\ &= 1, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 4.1.4,(iii). Όμως,

$$\begin{aligned} P(\{Z \cdot Y = 0\}) &= \int_\Omega \mu(\omega, H^{Z(\omega)})\, dP(\omega) \\ &= \int_{pr(U)} \mu(\omega, H^{Z(\omega)}\ dp(\omega) + \int_{(pr(U))^c} 1\, dP(\omega) \\ &< P(pr(U)) + P((pr(U))^c) \\ &= 1, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 4.1.4,(iii), η δεύτερη από τον ορισμό της Z και του H^α, ενώ η ανισότητα είναι συνέπεια του ορισμού του U. □

Λήμμα 4.1.6. *Έστω $C[\overline{\mathbb{R}}^d]$ ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στον $\overline{\mathbb{R}}^d$, με τη νόρμα $||g||_\infty = sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}^d} |g(x)|$ και έστω $\mathfrak{B}(C[\overline{\mathbb{R}}^d])$ η αντίστοιχη Borel σ-άλγεβρα. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες*

- **(i)** $\{g \in C[\overline{\mathbb{R}}^d] : 0 < g(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^d\} \in \mathfrak{B}(C[\overline{\mathbb{R}}^d])$.
- **(ii)** *Η απεικόνιση $(x, g) \longrightarrow g(x)$ είναι $\mathfrak{B}_d \otimes \mathfrak{B}(C[\overline{\mathbb{R}}^d])$-μετρήσιμη.*

(iii) *Έστω ότι η* $F : \Omega \times \mathbb{R}^d \times C[\overline{\mathbb{R}}^d] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *είναι* $\mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}_d \otimes \mathfrak{B}(C[\overline{\mathbb{R}}^d])$*-μετρήσιμη. Θέτουμε*

$$\overline{F}^*(\omega, g) = \int_{\mathbb{R}^d} ||F(\omega, x, g)|| \ \mu(\omega, dx)$$

και

$$F^*(\omega, g) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} F(\omega, x, g) \ \mu(\omega, dx), & \textit{αν} \quad \overline{F}^*(\omega, g) < +\infty \\ \infty, & \textit{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε F^* *είναι* $\mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}(C[\overline{\mathbb{R}}^d])$*-μετρήσιμη.*

(iv) *Έστω* $h : \Omega \longrightarrow C[\overline{\mathbb{R}}^d]$ *είναι* $\mathcal{G}$*-μετρήσιμη. Θέτουμε*

- $U(\omega) = F(\omega, Y(\omega), h(\omega))$,
- $V(\omega) = F^*(\omega, h(\omega))$,
- $\overline{U}(\omega) = ||F(\omega, Y(\omega), h(\omega))||$,
- $\overline{V}(\omega) = \overline{F}^*(\omega, h(\omega))$.

Αν $\overline{V}$ *είναι P-ολοκληρώσιμη, τότε οι* U *και* V *είναι P-ολοκληρώσιμες και* $V = \mathbb{E}_P[U|\mathcal{G}]$ *P-σ.β..*

Απόδειξη. **(i)** Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\{g \in C[\overline{\mathbb{R}}^d] : 0 < g(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^d\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+} \bigcap_{x \in \mathbb{Q}^d, ||x|| \leq N} \{g \in C[\overline{\mathbb{R}}^d] : r < g(x) \leq 1\}.$$

(ii) Εδώ σημειώνουμε ότι $(x, g) \longmapsto g(x)$ είναι συνεχής για τη τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{R}^d \times C[\overline{\mathbb{R}}^d]$ *(βλ. πχ [27], Κεφάλαιο XII, Θεώρημα 2.4)*, και ως εκ τούτου μετρήσιμη ως προς τη Borel σ-άλγεβρα της παραγόμενης τοπολογίας. Αλλά αυτή η σ-άλγεβρα ισούται με τη $\mathfrak{B}_d \otimes \mathfrak{B}(C[\overline{\mathbb{R}}^d])$, αφου οι $\mathbb{R}^d$ και $C[\overline{\mathbb{R}}^d]$ είναι διαχωρίσιμοι *(βλ. π.χ [12], App.II, p.225).* Έτσι έχουμε το (ii).

(iii) και **(iv)** Αν η $||F||$ είναι φραγμένη, τότε ένα αντίστοιχο επιχείρημα μονότονης κλάσης αντίστοιχο με αυτό του Λήμματος 4.1.4 μας αποδίδει τα (iii) και (iv). Αν τώρα η V είναι P-ολοκληρώσιμη, από το Λημμα 4.1.4,(ii) έπεται ότι η $\overline{U}$ ειναι P-ολοκληρώσιμη και έτσι το επιχείρημα κυριαρχημένης σύγκλισης ολοκληρώνει την απόδειξή μας. □

Θεώρημα 4.1.7. *Έστω $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ δύο πλήρεις σ-υποάλγεβρες της $\mathcal{F}$ και έστω Y μία αυθαίρετη $\mathcal{H}$-μετρήσιμη τ.μ.. Τότε το (i) του Λήμματος 4.1.5 είναι ισοδύναμο με το εξής:*
Υπάρχει μία $\mathcal{H}$-μετρήσιμη πραγματική τ.μ. D τέτοιο ώστε

- $0 < D \leq 1$ *σ.β.,*
- $\int ||Y(\omega)||\ D(\omega)P(d\omega) < \infty$ *και*
- $\mathbb{E}_P[YD|\mathcal{G}] = 0$

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) Έστω ότι υπάρχει μία τ.μ. D με τις ιδιότητες του θεωρήματός μας. Θα δείξουμε ότι αυτό συνεπάγεται το Λήμμα 4.1.5,(i).
Πράγματι, έστω Z μια $\mathcal{G}$-μετρήσιμη τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε $Z \cdot Y \geq 0$ P-σ.β.. Θα πρέπει να δείξουμε ότι $P(\{Z \cdot Y > 0\}) = 0$. Αν $P(\{Z \cdot Y > 0\}) > 0$, τότε θα έχουμε $P(\{Z \cdot (DY) > 0\}) > 0$ και ως εκ τούτου,

$$0 < \mathbb{E}_P[Z \cdot (DY)] = \mathbb{E}_P\big[Z \cdot \mathbb{E}_P[DY|\mathcal{G}]\big] = 0 \quad , \text{άτοπο.}$$

($\Longrightarrow$) Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (i) του Λήμματος 4.1.5. Τότε θα έχουμε ότι ισχύει ισοδύναμα το Λήμμα 4.1.5,(ii). Θα αποδείξουμε την ύπαρξη μιας τ.μ. D με τις απαιτούμενες ιδιότητες. Θέτουμε

$$F(\omega, x, g) = xg(x) \text{ και } \overline{F}(\omega, x, g) = ||x||\ |g(x)|$$

για κάθε $(\omega, x, g) \in \Omega \times \mathbb{R}^d \times C[\overline{\mathbb{R}}^d]$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.1.6 βλέπουμε ότι το σύνολο

$$H = \{(\omega, g) \in \Omega \times C[\overline{\mathbb{R}}^d] : 0 < g(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \&$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} ||x||\ g(x)\mu(\omega, dx) \leq 1, \int_{\mathbb{R}^d} x\ g(x)\ \mu(\omega, dx) = 0\}$$

είναι $\mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}(C[\overline{\mathbb{R}}^d])$-μετρήσιμο. Αφού ισχύει το Λήμμα 4.1.5,(ii), χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1.2 βλέπουμε ότι για P-σ.ο. τα $\omega \in \Omega$, υπάρχει μία $g_\omega \in C[\overline{\mathbb{R}}^d]$ τέτοιο ώστε $(\omega, g_\omega) \in H$. Αυτό σημαίνει ότι $P(pr(H)) = 1$ δηλαδή η προβολή του H στο Ω έχει P-πιθάνοτητα 1.
Τώρα, αφού ο $\overline{\mathbb{R}}^d$ είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμος χώρος, το $C[\overline{\mathbb{R}}^d]$ είναι πολωνικός χώρος και ως εκ τούτου μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μετρήσιμων επιλογών (βλ. Θεώρημα Β΄.3.1) ώστε να πάρουμε μία $\mathcal{G}$-μετρήσιμη απεικόνιση

$$G : \Omega \longrightarrow C(\overline{\mathbb{R}^d}) : \omega \longmapsto G(\omega) \in C(\overline{\mathbb{R}}^d)$$

με $G(\omega) : \overline{\mathbb{R}}^d \longmapsto \mathbb{R}$ συνεχής και τέτοιο ώστε $(\omega, G(\omega)) \in H$ για όλα τα $\omega \in \Omega$. Έστω $\overline{G} : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, ώστε $\overline{G}(\omega, x) := G(\omega)(x) \in \mathbb{R}$. Τότε η $\overline{G}$ είναι σύνθεση των απεικονίσεων

$$\begin{aligned} \overline{H} \ &: \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \times C(\overline{\mathbb{R}}^d), \ \text{ώστε } \overline{H}(\omega, x) := (x, G(\omega)), \ \text{και} \\ \overline{K} \ &: \mathbb{R}^d \times C(\overline{\mathbb{R}}^d) \longrightarrow \mathbb{R}, \ \text{ωστε } \overline{K}(x, g) := g(x). \end{aligned}$$

Πράγματι,

$$(\overline{K} \cdot \overline{H})(\omega, x) = (\overline{K}(\overline{H}(\omega, x)) := \overline{K}(x, G(\omega)) := G(\omega)(x) =: \overline{G}(\omega, x).$$

Όμως η απεικόνιση $\overline{H}$ είναι $\mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}^d) - \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}^d) \otimes \mathfrak{B}(C(\overline{\mathbb{R}}^d))-$μετρήσιμη (διότι η G είναι μετρήσιμη) και η $\overline{K}$ είναι $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}^d) \otimes \mathfrak{B}(C(\overline{\mathbb{R}}^d)) - \mathfrak{B}-$μετρήσιμη (Λήμμα 4.1.6ii). Άρα η $\overline{G}$ είναι $\mathcal{G} \otimes \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}^d) - \mathfrak{B}-$μετρήσιμη, ως σύνθεση μετρησίμων συναρτήσεων. Θέτωντας $D(\omega) = \overline{G}(\omega, Y(\omega))$ για κάθε $\omega \in \Omega$, έχουμε ότι $D = \overline{G} \circ \overline{Y}$, όπου η απεικόνιση $\overline{Y} : \Omega \longmapsto \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^d$ ορίζεται από το τύπο $\overline{Y}(\omega) := (\omega, Y(\omega))$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Άρα η D είναι $\mathcal{H}$-μετρήσιμη αφού η $\overline{Y}$ είναι $\mathcal{H} - \mathcal{H} \otimes \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}^d)-$μετρήσιμη. Επίσης $0 < D \leq 1$ λόγω του ορισμού του D (αφού ισχύει ότι $G(\omega) \in H_\omega$ για όλα τα $\omega \in \Omega$).
Επιπλέον, αφού έχουμε

- $\overline{F}^*(\omega, G(\omega)) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{F}(\omega, x, G(\omega))\mu(\omega, dx) = \int_{\mathbb{R}^d} ||x|| \ G(\omega, x)\mu(\omega, dx) \leq 1$,
- $\overline{U}(\omega) = \overline{F}(\omega, Y(\omega), G(\omega)) = ||Y(\omega)|| \ D(\omega)$ είναι P-ολοκληρώσιμη και
- $F^*(\omega, G(\omega)) = 0$ P-σ.β.,

από το Λήμμα 4.1.6,(iv) με $U(\omega) := F(\omega, Y(\omega), G(\omega)) = Y(\omega)D(\omega)$ εχουμε ότι $\mathbb{E}_P[YD|\mathcal{G}] = \mathbb{E}_P\big[\mathbb{E}_P[YD|\mathcal{H}]\big|\mathcal{G}\big] = \mathbb{E}_P[\ 0 \ |\mathcal{G}] = 0$ και η απόδειξή μας έχει ολοκληρωθεί. $\square$

4.2 Διακριτός χρόνος και πεπερασμένος ορίζοντας

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ πλήρης χ.π. , $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_k\}_{k \in \{0,\ldots,n\}}$ ένα φιλτράρισμα όπου κάθε $\mathcal{F}_k$ είναι μια πλήρης σ-υποάλγεβρα της $\mathcal{F}$ με $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Έστω $X = \{X_k\}_{k \in \{0,\ldots,n\}}$ μία σ.δ. με τιμές στον $\mathbb{R}^d$, προσαρμοσμένη στο $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in \{0,\ldots,n\}}$. Συνεπώς η X_k είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη για κάθε $k = 0, \ldots, n$.

Θεώρημα 4.2.1. *Οι επόμενες δύο συνθήκες είναι ισοδύναμες.*

(i) *Για $k = 1, \ldots, n$ και για όλες τις $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμες τ.μ. Z, έχουμε:*

$$Z \cdot (X_k - X_{k-1}) \geq 0 \ P|\mathcal{F}_{k-1}\text{-σ.β.} \Longrightarrow Z \cdot (X_k - X_{k-1}) = 0 \ P|\mathcal{F}_{k-1}\text{-σ.β.}$$

(ii) *Υπάρχει ένα ισοδύναμο martingale μέτρο $\overline{P}$ για την X.*

Απόδειξη. **(i)$\Longrightarrow$(ii)** Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύει το (i) και ας θέσουμε $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n$, $X_{n+1} = X_n$, $D_{n+1} = 1$ και $Y_{n+1} = 0$.

(a) Σταθεροποιούμε ένα $k \leq n$ και υποθέτουμε με αντίστροφη επαγωγή ότι έχουν οριστεί $D_{k+1}, \ldots, D_{n+1}$ και $Y_{k+1}, \ldots, Y_{n+1}$ με τέτοιο τρόπο ώστε για $k+1 \leq l \leq n+1$ να έχουμε:

(1) D_l είναι $\mathcal{F}_l$-μετρήσιμη και $0 < D_l \leq 1$ P-σ.β.,

(2) $Y_l = (X_l - X_{l-1})\mathbb{E}_P[D_{l+1} \cdots D_{n+1}|\mathcal{F}_l]$ P-σ.β. και

(3) $\int ||Y_l(\omega)|| \ D_l(\omega)P(d\omega) < \infty$ και $\mathbb{E}_P[Y_l \ D_l|\mathcal{F}_{l-1}] = 0$.

(b) Έστω $Y_k := (X_k - X_{k-1})\mathbb{E}_P[D_{l+1} \cdots D_{n+1}|\mathcal{F}_k]$. Τότε η Y_k είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη αφου η $\mathbb{E}_P[D_{k+1} \cdots D_{n+1}|\mathcal{F}_k]$ είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη (ως δεσμευμένη μέση τιμή ως προς $\mathcal{F}_k$) και η $X_k - X_{k-1}$ είναι από την υπόθεσή μας $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη.

Αφού $0 < D_l \leq 1$ P-σ.β. εύκολα αποδεικνύεται ότι $0 < \mathbb{E}_P[D_l|\mathcal{F}_k] \leq 1$ $P|\mathcal{F}_k$-σ.β.. Επομένως $0 < \mathbb{E}_P[D_{k+1} \cdots D_{n+1}|\mathcal{F}_k] \leq 1$ $P|\mathcal{F}_k$-σ.β.. Άρα λόγω της συνθήκης (i) η Y_k θα ικανοποιεί τη συνθήκη (i) του Λήμματος 4.1.5. Επομένως, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.1.7, πετυχαίνουμε την ύπαρξη μιας $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμης τ.μ. D_k ώστε να ισχύει η (3) για $l = k$ και η (1).

Με αντίστροφη επαγωγή, λοιπόν, ορίσαμε τ.μ. $D_1, \ldots, D_{n+1}$ και $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$ ε.ω. τα $(1), (2)$ και (3) να ισχύουν για $1 \leq l \leq n+1$. Τέλος, ορίζουμε

$$D_0 = \frac{1}{1 + ||X_0||} \text{ και } D = D_0 \cdots D_{n+1}.$$

(c) Έστω $\overline{P}$ το μέτρο πιθανότητας που είναι ισοδύναμο με το P και του οποίου η παράγωγος Radon-Nikodym $\frac{d\overline{P}}{dP}$ ισοδυναμεί με D. Θα δείξουμε ότι $\overline{P}$ είναι ένα martingale μέτρο για την X. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\overline{P}}[||X_0||] &= \mathbb{E}_P[||X_0||\ D] \\
&= \mathbb{E}_P[||X_0||\ D_0 \cdots D_{n+1}] \\
&\leq \mathbb{E}_P[||X_0||\ D_0] \\
&\leq 1 \quad \text{και}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\overline{P}}[||X_l - X_{l-1}||] &= \mathbb{E}_P[||X_l - X_{l-1}||\ D] \\
&= \mathbb{E}_P[D_0 \cdots D_l ||X_l - X_{l-1}||\ D_{l+1} \cdots D_{n+1}] \\
&= \mathbb{E}_P[D_0 \cdots D_l ||Y_l||] \\
&\leq \mathbb{E}_P[D_l ||Y_l||] \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

από (3) για $1 \leq l \leq n$. Όμως $||X_l|| - ||X_{l-1}|| \leq ||X_l - X_{l-1}||$ και έτσι θα έχουμε ότι $\mathbb{E}_{\overline{P}}[||X_l||] < \infty$ συνεπώς $||X_l||$ είναι $\overline{P}$-ολοκληρώσιμη, $0 \leq l \leq n$.
Τέλος για να δείξουμε ότι $\mathbb{E}_{\overline{P}}[X_l|\mathcal{F}_{l-1}] = X_{l-1}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{E}_P[(X_l - X_{l-1})D|\mathcal{F}_{l-1}] = 0$. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[(X_l - X_{l-1})D|\mathcal{F}_{l-1}] &= D_0 \cdots\ D_{l-1}\mathbb{E}_P[(X_l - X_{l-1})D_l \cdots D_{n+1}|\mathcal{F}_{l-1}] \\
&= D_0 \cdots\ D_{l-1}\mathbb{E}_P\big[(X_l - X_{l-1})D_l\ \mathbb{E}_P[D_{l+1} \cdots D_{n+1}|\mathcal{F}_l]\big|\mathcal{F}_{l-1}\big] \\
&= D_0 \cdots D_{l-1}\mathbb{E}_P[D_l Y_l|F_{l-1}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

από (3) για $1 \leq l \leq n$.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Άμεσο από το Θεώρημα 4.1.7 (αλλά και τη martingale ιδιότητα).

□

Παρατήρηση: Στη περίπτωση της σ.δ. $X = \{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ με διακριτό αλλά μη πεπερασμένο χρόνο η 4.2.1 (i) δεν συνεπάγεται απαραίτητα την ύπαρξη ενός ισοδύναμου martingale μέτρου $\overline{P}$ για την X. Παραθέτουμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 4.2.2. Έστω $X_k = Y_1 + \ldots + Y_k$ όπου για κάποιο $0 < p < 1$, $p \neq \frac{1}{2}$, $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ με $P(\{Y_k = 1\}) = p, P(\{Y_k = -1\}) = 1 - p$. Θέτουμε $\mathcal{F}_k = \sigma(Y_1, \ldots, Y_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $\overline{P}$ είναι martingale μέτρο για την X, ισοδύναμο με το P , τότε $\overline{P}(\{Y_k = 1\}) =$

$\overline{P}(\{Y_k = -1\}) = \frac{1}{2}$. Αλλά, τότε, από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι $\overline{P}$ και P δεν είναι ισοδύναμα επάνω στο $\mathcal{F} = \sigma(\cup_{k\geq 0}\mathcal{F}_k)$ (στη πραγματικότητα είναι αμοιβαία ιδιάζοντα (mutually singular).

Ολοκληρώνουμε την ανάλυσή της παρούσας ενότητας παραθέτωντας τα αποτελέσματα των Willinger and Taqqu [60] (1988) που αφορούν το πρόβλημα μοναδικότητας ενός ισοδύναμου martingale μέτρου $\overline{P}$ για την X. Σε αντίθεση με το πρόβλημα ύπαρξης, οι Willinger and Taqqu [60] (1988) έδειξαν ότι το πρόβλημα της μοναδικότητας μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη χρήση στοιχειωδών πιθανοθεωρητικών μεθόδων για τις οποίες απαιτείται μία ουσιαστικά πεπερασμένη και περιορσμένη πιθανοθεωρητική κατασκευή. Πιο συγκεκριμένα οι Willinger και Taqqu απέδειξαν το παρακάτω:

Πόρισμα 4.2.3. *Οι επόμενες δύο ιδιότητες είναι ισοδύναμες.*

(i) *Για $k = 1, \dots, n$ υπάρχει μια πεπερασμένη ελάχιστη διαμέριση $\mathcal{P}_k$ του Ω με $\mathcal{F}_k = \sigma(\mathcal{P}_k)$ (up to P-null sets) και τέτοια ώστε για όλα τα $A \in \mathcal{P}_k$*

$$dim(span(\{X_{k+1}(\omega) - X_k(\omega) : \omega \in A\})) = card\{A' \in \mathcal{P}_{k+1} : A' \subseteq A\} - 1$$

(ii) *Υπάρχει ένα μοναδικό ισοδύναμο martingale μέτρο $\overline{P}$ για την X.*

Ενώ στο Θεώρημα 4.2.1 δεν υποθέτουμε περιορισμούς ως προς το φιλτράρισμα $\mathbb{F}$ και εξετάζεται αποκλειστικά η κατάλληλη γεωμετρία του X, στο Πόρισμα 4.2.3 απεικονίζεται ρητά ο θεμελιώδης ρόλος της κομψής κατασκευής του $\mathbb{F}$.

Στη πραγματικότητα, το Πόρισμα 4.2.3 όχι μόνο υπονοεί ότι αν $\overline{P}$ είναι μοναδικό τότε το $\mathbb{F}$ είναι αναγκαστικά το ελάχιστο (i.e. $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_k^X : k = 0, 1, \dots, n)$ με $\mathcal{F}_k^X = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_k)$ και $0 \leq k \leq n$ αλλά επιβάλλει και αυστηρούς περιορισμους της μορφής 4.2.3,(i) στη σχέση μεταξύ X και $\mathbb{F}$.

4.3 Ανάλυση των αγορών χρεογράφων σε πεπερασμένο χρόνο

Στη ενότητα αυτή περιγράφουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας στο πλαίσιο του στοχαστικού μοντέλου των Harrison-Pliska που αναλύσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δείχνοντας ότι η συνθήκη (i) του Θεωρήματος 4.2.1 προκύπτει φυσικά από και είναι ισοδύναμη με την οικονομικά σημαντική υπόθεση του no arbitrage. Επιπρόσθετα, η μοναδικότητα ενός ισοδύναμου martingale μέτρου πιθανότητας που διέπει τη σ.δ. τιμών των χρεογράφων συνδέεται άμεσα με την επονομαζόμενη ιδιότητα της "πληρότητας"- ιδιότητα που μας επιτρέπει να τιμολογήσουμε μοναδικά κάθε χρηματοοικονομικό προϊόν της αγοράς.

Σημειώνουμε ότι εδώ οι Dallang-Morton-Willinger χρησιμοποίησαν το μοντέλο των Harrison-Pliska επιλέγοντας $S_t^0 = 1$ για όλα τα t και παραθέσανε τις εξής παραδοχες-υποθέσεις που εμφανίζονται συχνά στη βιβλιογραφία των χρηματοοικονομικών:

(i) Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών.

(ii) Όλα τα χρεόγραφα είναι τέλεια διαιρετά.

(iii) Τα χρεόγραφα δεν αποδίδουν μερίσματα στο χρόνο $[0, T]$.

(iv) Επιτρέπονται απεριόσριστες ανοιχτές πωλήσεις χωρίς περιορισμούς.

Στη συνέχεια, το στοχαστικό μοντέλο που αφορά το χ.π. $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, τη σ.δ. τιμών S και το σύνολο $\mathbf{\Phi}$ όλων των αποδεκτών στρατηγικών συναλλαγών και ικανοποιούν τις (i)-(iv) θα συμβολίζεται με $(\mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ και θα αποκαλείται ως ***(πεπερασμένης περιόδου και χωρίς τριβές) αγορά χρεογράφων*** όπου $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ συμβολίζει το σύνολο όλων των χρονικών στιγμών συναλλαγής.

Παρατήρηση: Δεν υποθέτουμε περιορισμό του πλούτου όπως στον Harrison-Pliska [37] (1981) και Back-Pliska [9] (1987) αλλά επιτρέπουμε μη φραγμένες ανοικτές πωλήσεις. Στο διακριτό χρόνο, οι περιορισμοί στις ανοικτές πωλήσεις επηρεάζουν ελαχιστα τα επακόλουθα αποτελέσματα και δεν είναι απαραίτητα από τη μαθηματική πλευρά.

4.4 Το no arbitrage επιχείρημα και η ιδιότητα martingale.

Ορισμός 4.4.1. Μια ***ευκαιρία arbitrage*** είναι μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ έτσι ώστε $P[V_0(\varphi) = 0] = 1$ και $P[V_T(\varphi) \geq 0] = 1$ και $P[V_T(\varphi) > 0] > 0$. Το μοντέλο της αγοράς $(\mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ θα λέμε ότι δεν περιέχει ευκαιρίες arbitrage αν για όλα τα $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ με $V_0(\varphi) \geq 0$ P-σ.β., έχουμε $V_T(\varphi) = 0$ P-σ.β..

Αν και η περιγραφή του arbitrage όπως περιγράφεται παραπάνω ορίζεται ”globally” (δηλαδή περιλαμβάνει τις χρονικές στιγμές 0 και T μόνο), το no arbitrage ισχύει και ”locally” , δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή $t = 1, 2, \ldots, T$, όπως θα δούμε παρκάτω. Επιπρόσθετα για να επεξηγήσουμε καλήτερα τη ”φύση” της no arbitrage ιδιότητας, το παρακάτω Θεώρημα 4.4.2 συνδέει το no arbitrage με το Θεώρημα 4.2.1 και ως εκ τούτου στην martingale ιδιότητα της σ.δ. τιμών S υπό το νέο ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας $\overline{P}$. Έστω $\mathbb{P}$ το σύνολο όλων των ισοδύναμων martingale μέτρων για το S και έστω $\overline{S} = (\overline{S}_t : t = 0, 1, \ldots, T)$ η σ.δ. τιμών στον $\mathbb{R}^d$ που είναι $\mathbb{F}$-προσαρμοσμένη και προέρχεται από την S αφαιρώντας τη 0^{th} συντεταγμένη $S_t^0 \equiv 1$ (δηλ. $S = (1, \overline{S})$).

Θεώρημα 4.4.2. *Οι επόμενες τρεις συνθήκες είναι ισοδύναμες.*

(i) *Το μοντέλο αγοράς $(\mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ δε περιέχει ευκαιρίες arbitrage.*

(ii) *Για κάθε $t \in \{1, \ldots, T\}$ και όλα τα d-διάστατα τυχαία διανύσματα. α που είναι $\mathcal{F}_{t-1}$-μετρήσιμα έχουμε,*

$$\alpha \cdot (\overline{S}_t - \overline{S}_{t-1}) \geq 0 \ P\text{-σ.β.} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \cdot (\overline{S}_t - \overline{S}_{t-1}) = 0 \ P\text{-σ.β.}.$$

(iii) *$\mathbb{P} \neq \emptyset$. δηλαδή υπάρχει ένα ισοδύναμο martingale μέτρο $\overline{P}$ για την S.*

Απόδειξη. **(i)$\Longrightarrow$(ii)** Υποθέτουμε ότι υπάρχει $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ και τυχαίο $\mathcal{F}_{t-1}$-μετρήσιμο διάνυσμα $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^d)$ τέτοιο ώστε $\alpha \cdot (\overline{S}_{t+1} - \overline{S}_t) \geq 0$ P-σ.β. και $\alpha \cdot (\overline{S}_{t+1} - \overline{S}_t) > 0$ με θετική πιθανότητα. Θέτουμε $W = \{\omega \in \Omega : P\{\alpha \cdot (\overline{S}_{t+1} - \overline{S}_t) > 0 | \mathcal{F}_t\}(\omega)\} > 0$ και παρατηρούμε ότι $P(W) > 0$. Θα κατασκευάσουμε μια στρατηγική $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ με $V_0(\varphi) = 0$ και $V_T(\varphi) \geq 0$ P-σ.β., τέτοιο ώστε $V_T(\varphi) > 0$ με θετική πιθανότητα. Έτσι θα δείξουμε την ύπαρξη δυνατότητας arbitrage για το μοντέλο αγοράς $(\mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$.

(*a*) Για να κατασκευάσουμε αυτή την φ με τις απαιτούμενες ιδιότητες, ορίζουμε φ_s σε κάθε χρονική στιγμή και για κάθε $\omega \in \Omega$ ως εξής:

- για $s \leq t$ έχουμε $\varphi_s(\omega) = 0$ για όλα τα $\omega \in \Omega$,
- για $s = t + 1$ και για κάθε $\omega \in W$, έχουμε

$$\varphi_{t+1}^k(\omega) = \begin{cases} \alpha^k(\omega) & \text{αν} \quad k \in \{1, 2, \ldots, d\} \\ -\sum_{k=1}^d \alpha^k(\omega) S_t^k(\omega) & \text{αν} \quad k = 0 \end{cases}$$

  και για κάθε $\omega \in W^c$ έχουμε $\varphi_{t+1}(\omega) = 0$,

- για $t+1 < s < T$ θέτουμε

$$\varphi_s^k(\omega) = \begin{cases} V_{t+1}(\varphi)(\omega) & \text{αν} \quad k=0 \text{ και } \omega \in W \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(b) Ξεκάθαρα η φ είναι $\mathbb{F}$-προβλέψιμη. Για να δείξουμε ότι φ είναι αυτοχρηματοδοτούμενη, ελέγχουμε αν ισχύει $\varphi_s \cdot S_s = \varphi_{s+1} \cdot S_s$ κάτι το οποίο ισχύει ξεκάθαρα για $s < t$ και $s > t$. Για $s = t$, έχουμε $\varphi_t(\omega) \cdot S_t(\omega) = 0$ για όλα τα $\omega \in \Omega$ διότι για $\omega \in W$,

$$\varphi_{t+1}(\omega) \cdot S_t(\omega) = -(\sum_{k=1}^{d} \alpha^k S_t^k)(\omega) + (\sum_{k=1}^{d} \alpha^k(\omega) S_t^k(\omega) = 0$$

Αφού $\varphi_{t+1} \cdot S_t = 0$ στο W^c, $\varphi_{t+1} \cdot S_t = \varphi_t \cdot S_t$ ισχύει για κάθε $\omega \in \Omega$.
(c) Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι $V_0(\varphi) = 0$ P-σ.β. και $V_T(\varphi) \geq 0$ P-σ.β..
Πράγματι, για όλα τα $s > t+1$,

$$V_s(\varphi)(\omega) = \begin{cases} V_{t+1}(\varphi)(\omega) = \alpha(\omega) \cdot (\overline{S}_{t+1}(\omega) - \overline{S}_t(\omega)) \geq 0 & \text{αν} \quad \omega \in W \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και ως εκ τούτου,

$$P(\{V_T(\varphi) \geq 0\}) = P\{\alpha \cdot (\overline{S}_{t+1} - \overline{S}_t) \geq 0\} = 1$$

(d) Επιπρόσθετα, από τον ορισμό του W,

$$P(\{V_T(\varphi) > 0\}) = P(\{V_T(\varphi) > 0\} \cap W) = P(\chi_W P\{\alpha \cdot (\overline{S}_{t+1} - \overline{S}_t) > 0 | \mathcal{F}_t\}) > 0$$

το οποίο μας δείχνει ότι η φ εμπεριέχει δυνατότητα arbitrage.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) ισχύει από Θεώρημα 4.2.1

(iii)$\Longrightarrow$(i) Έστω $\overline{P} \in \mathbb{P}$ και έστω $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ τέτοιο ώστε $V_0(\varphi) = 0$ και $V_T(\varphi) \geq 0$ P-σ.β. Τότε $V_T(\varphi) = 0$ P-σ.β. με επαναλαμβανόμενη χρήση

- των ιδιοτήτων των δεσμευμένων αναμενόμενων τιμών που αναφέρθηκαν στην αρχή της απόδειξης του Θεωρήματος 4.2.1 (θυμηθείτε ότι η S είναι θετική),
- της martingale ιδιότητας της S υπό το $\overline{P}$ και
- του ότι η $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ είναι αυτοχρηματοδοτούμενη και μπορούμε να γράψουμε

$$\overline{P}(V_T(\varphi)) = \overline{P}(V_0(\varphi)) = 0$$

□

Παρατηρήσεις 4.4.3. **(a)** Από όσο γνωρίζουμε, το Θεώρημα 4.4.2 είναι το πρώτο του είδους του που αποδεικνύει την ύπαρξη ενός ισοδύναμου martingale μέτρου για δοσμένης πεπερασμένης περιόδου σ.δ. τιμών στον $\mathbb{R}^d$ ως συνέπεια της συνθήκης no arbitrage. Στη πραγματικότητα, δε κάνουμε καμία υπόθεση όσον αφορά την ολοκληρωσιμότητα της S υπό το μέτρο P. Από την άλλη πλευρά, τέτοια προυπόθεση δείχνει αφύσικη μιας και

- Δεν διατηρείται κατά την αλλαγή με ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας και

- Για τη δημιουργία arbitrage, η ολοκληρωσιμότητα της S υπό το P είναι άνευ ουσίας.

Αυτή η απουσία των υποθέσεων ολοκληρωσιμότητας για την S είναι που σε αντίθεση με υπάρχοντα αποτελέσματα (βλ. για παράδειγμα Harrison and Kreps [36] (1979)) που απαιτούν η S να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ή (βλ. Back and Pliska [9] (1987) που υποθέτουν P-ολοκληρωσιμότητα για την μονοδιάστατη σ.δ. τιμών καταλήγει να είναι κρίσιμη για την απόδειξη της μονοδιάστατης εκδοχής του Θεωρήματος 4.4.2. Από την άλλη πλευρά, κάποιος θα μπορούσε πάντα να υποθέσει την ύπαρξη ενός ισοδύναμου μέτρου P' στον $(\Omega, \mathcal{F})$ με φραγμένη παράγωγο Radon-Nikodym $\frac{dP'}{dP}$ έτσι ώστε η S να είναι ολοκληρώσιμη υπό το μέτρο P' (βλ. Dellacherie and Meyer [26] (1982), Θεώρημα VII. 57)). Υποθέτοντας ολοκληρωσιμότητα του S υπό το P προκύπτει ένα πρόβλημα μοντελοποίησης το οποίο δεν είναι απαραίτητο από μαθηματικής πλευράς.
(b) Το Θεώρημα 4.4.2 όχι μόνο μας παρέχει πιθανοθεωρητικό χαρακτηρισμό (ισχυρισμός (iii)) αλλά και γεωμετρικό χαρακτηρισμό (ισχυρισμός (ii)) του no arbitrage. Πράγματι ο ισχυρισμός (ii) υποννοεί ότι από όλες τις τροχιές της $\overline{S}$ (ή της S), ο φορέας της δεσμευμένης κατανομής της προσαύξησης $\overline{S}_{t+1} - \overline{S}_t$ για δοσμένη $\mathcal{F}_t$ δε μπορεί να είναι συγκεντρωμένος μόνο επάνω στη μία πλευρά του κάθε $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμου υπερεπίπεδου στον $\mathbb{R}^d$ (ή $\mathbb{R}^{d+1}$).

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο με μία σύντομη αναφορά όσον αφορά το ερώτημα της μοναδικότητας του $\overline{P}$ και την οικονομική του ερμηνεία. Έστω X μία μη αρνητική, $\mathcal{F}$-μετρήσιμη τ.μ. (ενδεχόμενα κέρδη) την οποία ερμηνεύουμε ως ένα συμβόλαιο που αποδίδει $X(\omega)$ € αν, στο χρόνο T, το $\omega \in \Omega$ υποδηλώνει τη πραγματική κατάσταση της αγοράς. Θα θέλαμε να ξέρουμε ποίες τιμές του X είναι "λογικές" στο χρόνο 0, αν το μοντέλο της αγοράς $(\mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ δε περιέχει ευκαιρίες arbitrage. Ξεκάθαρα, αν το X είναι εφικτό, δηλαδή υπάρχει μία στρατηγική

$\varphi \in \mathbf{\Phi}$ τέτοια ώστε $X = V_T(\varphi)$ P-σ.β., τότε το no arbitrage επιχείρημα μας αποφέρει ότι η αξία στο χρόνο 0 $\pi(X)$ δίνεται από $\pi(x) = V_0(\varphi)$. Αλλά, ποιά κέρδη είναι εφικτά? Το μοντέλο της αγοράς $(\mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ θα λέγεται πλήρες αν όλα τα ενδεχόμενα κέρδη είναι εφικτά. Ο επόμενος χαρακτηρισμός της οικονομικά επιθυμητής ιδιότητας της πληρότητας της αγοράς $(\mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ είναι άμεσο αποτέλεσμα του πορίσματος 4.2.3 (2.11) και της ανάλυσης πεπερασμένων αγορών χρεογράφων στην [58] (1987) των Taqqu amd Willinger (Παράγραφος 4).

Πόρισμα 4.4.4. *Αν η αγορά δεν περιέχει ευκαιρίες arbitrage (ή ισοδύναμα $\mathbb{P} \neq \emptyset$) τότε οι επόμενες τρεις συνθήκες είναι ισοδύναμες.*

(i) *Το μοντέλο αγοράς $(\mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ είναι πλήρες.*

(ii) *Για κάθε $t \in \{1, \ldots, T\}$ υπάρχει μια πεπερασμένη ελάχιστη διαμέριση $\mathcal{P}_k$ του Ω με $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$ (up to P-null sets) και τέτοια ώστε για όλα τα $A \in \mathcal{P}_t$*

$$dim(span(\{X_{t+1}(\omega) - X_t(\omega) : \omega \in A\})) = card\{A' \in \mathcal{P}_{t+1} : A' \subseteq A\} - 1$$

(όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε $P(\{\alpha\}) > 0$ για όλα τα $A \in \mathcal{P}_t$, $0 \leq t < T$).

(ii) *$|\mathbb{P}| = 1$, δηλαδή υπάρχει ένα μοναδικό ισοδύναμο martingale μέτρο $\overline{P}$ για το $(\mathbb{F}, S)$.*

Για περαιτέρω ανάλυση όσον αφορά πλήρεις αγορές, παραπέμπουμε στους Taqqu and Willinger [58] (1987).

Κεφάλαιο 5

Το FTAP για συνεχή χρόνο, φραγμένη σ.δ. τιμών και απλή επενδυτική στρατηγική

Ας γυρίσουμε τώρα στην θεωρία του no arbitrage που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 3 διερωτώμενοι: Τί μπορύμε να συμπεράνουμε εφαρμόζοντας το επιχείρημα στη τιμολόγηση και αντιστάθμιση κινδύνου χρεογράφων;

Αν και δώσαμε ικανοποιητικές και μαθηματικά ακριβείς απαντήσεις στη περίπτωση που ο χ.π. Ω είναι πεπερασμένος, γνωρίζουμε ότι τα παραπάνω αποτελέσματα δεν έχουν εφαρμογή σε γνωστά παραδείγματα της θεωρίας όπως το μοντέλο του Bachelier και το μοντέλο των Black-Scholes, καθώς περιλαμβάνουν την κίνηση Brown.

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τη θεωρία των Kreps-Yan για την περίπτωση που ο χρόνος είναι συνεχής και η σ.δ. φραγμένη.

5.1 Το γενικό πλαίσιο.

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ένας φ.χ.π. με το φιλτράρισμα $\mathbb{F}$ να ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες με $\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{N}_P)$ και $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$. Από τη (c_1) έπεται ότι ο $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι πλήρης χ.π.. Έστω επίσης $S = \{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια προσαρμοσμένη σ.δ. με τιμές στον R^{d+1} με την υπόθεση ότι το ομόλογο-συνιστώσα είναι κανονικοποιημένο με τιμές $S_t^0 := 1$.

Ορισμός 5.1.1. Μια σ.δ. S καλείται ***τοπικά φραγμένη*** αν υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ χ.δ., έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty}\tau_n = \infty$ και η ***διακοπτόμενη σ.δ.*** $S_t^{\tau_n} := S_{t\wedge\tau_n}$ να είναι ***ομοιόμορφα φραγμένη*** για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (σημειώνουμε ότι οι συνεχείς σ.δ. ή πιο γενικά οι càdlàg σ.δ. με ομοιόμορφα φραγμένα άλματα είναι τοπικά φραγμένες).

Πολύ σημαντική υπόθεση για τη παρούσα θεωρία αποτελεί το ότι θεωρούμε οτι η S είναι τοπικά φραγμένη, με càdlàg τροχιές.

Ορισμός 5.1.2. Θα καλούμε ***απλή επενδυτική στρατηγική*** (ή πιο μαθηματικά απλή σ.δ. προς ολοκλήρωση), μια σ.δ. $H = \{H_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με τιμές στον $\mathbb{R}^d$ αν είναι της μορφής,

$$H = \sum_{i=1}^{n} h_i \chi_{]\!]\tau_{i-1},\tau_i]\!]},$$

όπου $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_n < \infty$ είναι πεπερασμένοι χ.δ. και οι h_i είναι $\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}$-μετρήσιμες σ.δ. με τιμές στο $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 5.1.3. Έστω S μία τοπικά φραγμένη σ.δ και H μία απλή επενδυτική στρατηγική. Το ***στοχαστικό ολοκλήρωμα*** $H \bullet S$ είναι η σ.δ. $H \bullet S = \{(H \bullet S)_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ με

$$\begin{aligned}(H \bullet S)_t &= \sum_{i=1}^{n}(h_i, S_{\tau_i\wedge t} - S_{\tau_{i-1}\wedge t}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} h_i^j (S^j_{\tau_i\wedge t} - S^j_{\tau_{i-1}\wedge t}), \quad 0 \leq t \leq \infty,\end{aligned}$$

με τερματική τιμή τη τυχαία μεταβλητή

$$(H \bullet S)_\infty = \sum_{i=1}^{n}(h_i, S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}}).$$

Σε όλο το κεφάλαιο θα καλούμε την H ***αποδεκτή*** αν, εκτός της διακοπτόμενης σ.δ. S^{τ_n}, και οι συναρτήσεις $h_1, \ldots, h_n$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες.

Λήμμα 5.1.4. *Έστω Q ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathcal{F}$ το οποίο είναι απόλυτα συνεχές ως προς το P. Τότε η τοπικά φραγμένη σ.δ. S είναι ένα τοπικό martingale υπό το μέτρο Q αν και μόνο αν*

$$\mathbb{E}_Q[(H \bullet S)_\infty] = 0 \tag{5.1}$$

για κάθε αποδεκτή στρατηγική H.

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) Έστω $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ μία αύξουσα ακολουθία χ.δ. με πεπερασμένες τιμές, ώστε $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ P-σ.β. και ώστε κάθε S^{τ_n} να είναι φραγμένη και να ισχύει η (5.1) για κάθε αποδεκτή στρατηγική H. Θα δείξουμε ότι η S^{τ_n} είναι ένα Q-martingale ή αλλιώς ότι για κάθε $n \geq 1$ και κάθε ζευγάρι χ.δ. $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \tau_n$ ισχύει

$$\mathbb{E}_Q[S_{\sigma_2}|\mathcal{F}_{\sigma_1}] = S_{\sigma_1}.$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με την απαίτηση ότι για κάθε $\mathcal{F}_{\sigma_1}$-μετρήσιμη και ομοιόμορφα φραγμένη συνάρτηση h με τιμές στον $\mathbb{R}^d$ ισχύει

$$\mathbb{E}_Q[(h, S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1})] = 0$$

κάτι που έπεται άμεσα από την (5.1).
($\Longrightarrow$) Έστω ότι η σ.δ. S είναι ένα τοπικό martingale υπό το μέτρο Q. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε ζευγάρι χ.δ. $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \tau_n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[S_{\sigma_2}|\mathcal{F}_{\sigma_1}] = S_{\sigma_1} \quad Q|\mathcal{F}_{\sigma_1}\text{-σ.β.} &\iff \mathbb{E}_Q[(h, S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1})] = 0 \\ &\Longrightarrow \mathbb{E}_Q[(H \bullet S)_\infty] = 0. \end{aligned}$$

□

Ορίζουμε τον υπόχωρο K^{simple} του $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ των ενδεχόμενων κερδών, διαθέσιμων στη τιμή 0 μέσω μίας αποδεκτής και απλής στρατηγικής και με C^{simple} ορίζουμε το κυρτό κώνο στον $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ των ενδεχόμενων κερδών που κυριαρχούνται από μία $f \in K^{simple}$. Δηλαδή έχουμε

$$\begin{aligned} K^{simple} &:= \{(H \bullet S)_\infty : \ H \text{ απλή και αποδεκτή}\} \\ C^{simple} &:= K^{simple} - L^\infty_+ = \{f - k : f \in K^{simple}, f \in L^\infty, k \in L^\infty_+\}. \end{aligned}$$

Ορισμός 5.1.5. *Η S θα ικανοποιεί τη **no arbitrage συνθήκη** (NA^{simple}) **για απλές σ.δ. προς ολοκλήρωση**, αν $K^{simple} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{0\}$ (ή ισοδύναμα αν $C^{simple} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{0\}$).*

Λήμμα 5.1.6. *Έστω H μία απλή αποδεκτή στρατηγική ορισμένη ως $H = \sum_{i=1}^{n} h_i \chi_{]\!]\tau_{i-1}, \tau_i]\!]}$ η οποία επιφέρει μία ευκαιρία arbitrage. Με άλλα λόγια θα έχουμε*

$$P[(H \bullet S)_\infty \geq 0] = 1 \text{ και } P[(H \bullet S)_\infty > 0] > 0.$$

Τότε υπάρχει μια στρατηγική αγοράς και κατοχής $K = h\chi_{]\!]\sigma_1,\sigma_2]\!]}$ τέτοια ώστε η K να είναι αποδεκτή και να παράγει μια ευκαιρία arbitrage.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται σε επαγωγή και συνεπάγεται επιπλέον ότι οι χ.δ. σ_1 και σ_2 μπορούνε να επιλεγούν ως $\sigma_1 = \tau_{i-1}$ και $\sigma_2 = \tau_i$, για κάποια $i \leq n$. Για $n = 1$ το συμπέρασμα είναι προφανές αφού μπορούμε να θέσουμε $H = K$. Οπότε απομένει να δείξουμε το επαγωγικό βήμα. Αν $P[(H \bullet S)_{\tau_{n-1}} < 0] > 0$ τότε θέτουμε $\sigma_1 = \tau_{n-1}$, $\sigma_2 = \tau_n$ και $h = h_{n-1}\chi_{\{(H\bullet S)_{\tau_{n-1}}<0\}}$. Η στρατηγική $K = h\chi_{]\!]\sigma_1,\sigma_2]\!]}$ θα είναι μία ευκαιρία arbitrage αφού $(H \bullet S)_{\tau_n} \geq 0$ σ.β. και ως εκ τούτου $(K \bullet S)_{\tau_n} > 0$ στο $\{(H \bullet S)_{\tau_{n-1}} < 0\}$. Αν $(H \bullet S)_{\tau_{n-1}} = 0$ σ.β. τότε $K = h_{n-1}\chi_{]\!]\sigma_1,\sigma_2]\!]}$ θα μας δίνει μια ευκαρία arbitrage. Το μόνο που απομένει είναι η περίπτωση όπου $(H \bullet S)_{\tau_{n-1}} > 0$ σ.β. και $P[(H \bullet S)_{\tau_{n-1}} > 0] > 0$. Εδώ είναι που εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση. □

Θέλουμε να αποδείξουμε μία εκδοχή του θεμελιώδους θεωρήματος αποτίμησης παραγώγων ανάλογη με του κεφαλαίου 3. Όμως, η έννοια του no arbitrage (NA^{simple}) είναι αρκετά αδύναμη ώστε να αποδώσει την ύπαρξη ενώς τοπικού martingale μέτρου.

Πρόταση 5.1.7. *Η συνθήκη $(ELMM)$ της ύπαρξης ενός τοπικού martingale ισοδύναμου μέτρου συνεπάγεται τη συνθήκη NA^{simple} της μη ύπαρξης ευκαιριών arbitrage για απλές σ.δ. προς ολοκλήρωση αλλα όχι το αντίθετο.*

Απόδειξη. $(ELMM) \implies NA^{simple}$: Ο ισχυρισμός έπεται άμεσα από το Λήμμα 5.1.4, σημειώνοντας ότι για $Q \sim P$ και μία μη αρνητική συνάρτηση $f \geq 0$ που δεν μηδενίζεται σ.β. θα έχουμε $\mathbb{E}_Q[f] > 0$.

$NA^{simple} \not\Longrightarrow (ELMM)$ Θα δώσουμε ένα απλό αντιπαράδειγμα με ένα μη πεπερασμένο τυχαίο περίπατο. Έστω $t_n := 1 - \frac{1}{n+1}$ και ορίζουμε την διαδιασία S να παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$ με αρχική τιμή $S_0 = 1$ και να είναι σταθερή εκτός από τα άλματα στα σημεία t_n τα οποία ορίζονται ως

$$\Delta S_{t_n} := 3^{-n}\varepsilon_n, \quad n \geq 1,$$

έτσι ώστε η ακολουθία $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να αποτελείται από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που πέρνουν τις τιμές +1 και -1 με πιθανότητες

$$P[\{\varepsilon_n = 1\}] = \frac{1+\alpha_n}{2}, \quad P[\{\varepsilon_n = -1\}] = \frac{1-\alpha_n}{2},$$

όπου $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο $(-1,+1)$ που θα οριστεί παρακάτω.

Ξεκάθαρα αυτή η κατασκευή ορίζει μια φραγμένη σ.δ. S, για την οποία υπάρχει μοναδικό μέτρο Q επάνω στον $(\Omega,\mathcal{F}) = (\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, \mathfrak{B}(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}))$, υπό το οποίο η S είναι ένα $Q-$martingale για τη κανονική της διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Αυτό το μέτρο δίνεται από τον τύπο

$$Q[\{\varepsilon_n = 1\}] = Q[\{\varepsilon_n = -1\}] = \frac{1}{2},$$

και οι $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες υπο το Q.

Όμως από ενα αποτέλεσμα του Kakutani [42] γνωρίζουμε ότι το Q είτε είναι ισοδύναμο με το P είτε τα P και Q είναι μεταξύ τους ιδιάζοντα αναλόγως αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 < \infty$ ή όχι. Παίρνοντας για παράδειγμα, $\alpha_n = \frac{1}{2}$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, έχουμε κατασκευάσει μία σ.δ. S στον $(\Omega,\mathcal{F},P)$, για την οποία δεν υπάρχει κανένα ισοδύναμο (τοπικό) martingale μέτρο Q. Από την άλλη, είναι εύκολο να δείξουμε ότι για απλές επενδυτικές στρατηγικές, δεν υπάρχει ευκαιρία arbitrage για τη σ.δ. S.

Από το Λήμμα 5.1.6 απαιτείται μόνο να ελέγξουμε για στρατηγικές της μορφής $H = h\chi_{]\!]\sigma_1,\sigma_2]\!]}$. Μια τέτοια στρατηγική αποφέρει ως αποτέλεσμα $h(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1})$ με h να είναι $\mathcal{F}_{\sigma_1}$-μετρήσιμη. Έστω ότι $(H \bullet S)_\infty \geq 0$. Μπορούμε βεβαίως να αντικαταστήσουμε και το h με $sign(h)$. Η επιλογή του 3^{-n} επίσης μας αποδίδει ότι στο σύνολο $\{\sigma_1 = 1-\frac{1}{n}\}\cap\{\sigma_2 \geq 1-\frac{1}{n+1}\}$ θα έχουμε $sign(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1}) = sign(\varepsilon_n)$. Επίσης παίρνουμε $sign(h(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1})) = sign(h\varepsilon_n)$. Η ανεξαρτησία του ε_n από το $\mathcal{F}_{1-\frac{1}{n}}$ μας δίνει ότι $h = 0$ στο $\{\sigma_1 = 1-\frac{1}{n}\}\cap\{\sigma_2 \geq 1-\frac{1}{n+1}\}$. Συνδέοντας όλα αυτά τα δεδομένα παίρνουμε ότι $h(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1}) = 0$ σ.β. □

5.2 Μη δωρεάν γεύμα.

Για την εξέλιξη της παραπάνω θεωρίας, καθοριστικό ρόλο έπαιξε η εργασία του D. Kreps [44] (1981), ο οποίος αντιλήφθηκε ότι η καθαρά αλγεβρική έννοια του no arbitrage για απλές σ.δ. προς ολοκλήρωση πρέπει να συμπληρωθεί με μια τοπολογική έννοια.

Ορισμός 5.2.1. *(Kreps [44] (1981)) Η σ.δ. S ικανοποιεί τη συνθήκη του μη δωρεάν γεύματος (no free lunch) (NFL) αν η κλειστότητα $\overline{C}$ του C^{simple}, ως προς την ασθενή* τοπολογία του $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P)$ ικανοποιεί την συνθήκη*

$$\overline{C} \cap L^\infty_+(\Omega,\mathcal{F},P) = \{0\}.$$

Η επέκταση αυτή του no arbitrage μας παρέχει τη δυνατότητα να αποδείξουμε το παρακάτω βασικό αποτέλεσμα αποτίμησης παραγώγων του παρόντος κεφαλαίου.

Θεώρημα (Kreps-Yan) 5.2.2. *Μια τοπικά φραγμένη σ.δ. S ικανοποιεί την (NFL), αν και μόνο αν ικανοποιείται η συνθήκη $(ELMM)$ της ύπαρξης ενός τοπικού martingale μέτρου, δηλ.*

$$(NFL) \iff (ELMM).$$

Απόδειξη. $(ELMM) \implies (NFL)$: Από το Λήμμα 5.1.4 έχουμε ότι $\mathbb{E}_Q[f] \leq 0$ για κάθε $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ και $f \in C^{simple}$, και αυτή η ανισότητα επεκτείνεται και στην ασθενή* κλειστότητα $\overline{C}$ αφού η συνάρτηση $f \mapsto \mathbb{E}_Q[f]$ είναι ένα συνεπές ως προς την ασθενή* τοπολογία συναρτησοειδές. Από την άλλη αν ίσχυε η $(ELMM)$ και όχι η (NFL), θα υπήρχε ένα $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ και μία $f \in \overline{C}, f \geq 0$ που δεν θα ήταν 0 σ.β., συνεπώς $\mathbb{E}_Q[f] > 0$ το οποίο αποτελεί αντίφαση.

$(NFL) \implies (ELMM)$: Η απόδειξη εμπεριέχει βελτιωμένα επιχειρήματα της διακριτής περίπτωσης:
Βήμα 1. Επιχείρημα Hahn Banach: Έστω $f \in L^\infty_+$, $f \not\equiv 0$. Τότε υπάρχει μία $g \in L^1_+$ η οποία ως γραμμικό συναρτησοειδές επάνω στον L^∞, είναι μικρότερη ή ιση του μηδενώς επάνω στο $\overline{C}$ και τέτοια ώστε $(f, g) > 0$.

Για να το αποδείξουμε αυτό εφαρμόζουμε το Θεώρημα Διαχωρισμού Υπερεπιπέδων (βλ. π.χ, [55], Θεώρημα II, 9.2) στο κλειστό (ως προς την ασθενή* τοπολογία) κυρτό σύνολο $\overline{C}$ και στο συμπαγές σύνολο $\{f\}$ για να βρούμε μία $g \in L^1$ και $\alpha < \beta$ τέτοια ώστε $g|\overline{C} \leq \alpha$ και $(f, g) > \beta$. Αφού $0 \in C$, θα έχουμε $\alpha \geq 0$. Αφού ο $\overline{C}$ είναι κώνος, θα έχουμε ότι η g είναι μηδενική ή αρνητική επάνω στο $\overline{C}$ και, ιδιαιτέρως, μη αρνητική επάνω στο L^∞_+ δηλαδή $g \in L^1_+$. Σημειώνοντας το γεγονός ότι $\beta > 0$, έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του βήματος 1.

Βήμα 2. Επιχείρημα εξαντλήσεως (exhaustion argument): Συμβολίζουμε με $\mathcal{G}$ το σύνολο όλων των $g \in L^1_+$, $g \leq 0$ στον $\overline{C}$. Αφού $0 \in \mathcal{G}$, το $\mathcal{G}$ είναι μη κενό.

Έστω $\mathcal{S}$ η οικογένεια των υποσυνόλων του Ω που δημιουργούνται από τους φορείς $\{g > 0\}$ των στοιχείων $g \in \mathcal{G}$. Σημειώνουμε ότι το $\mathcal{S}$ είναι κλειστό κάτω από τις αριθμήσιμες ενώσεις, διότι για μία ακολουθία $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{G}$, μπορούμε να βρούμε αυστηρά θετικούς αριθμούς $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, τέτοιους ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n g_n \in \mathcal{G}$. Ως εκ τούτου υπάρχει μία $g_0 \in \mathcal{G}$ τέτοια ώστε να έχουμε

$$P[\{g_0 > 0\}] = \sup\{P[\{g > 0\}] \ : g \in \mathcal{G}\} \ .$$

Θα δείξουμε τώρα $P[\{g_0 > 0\}] = 1$, το οποίο ξεκάθαρα δείχνει ότι η g_0 είναι αυστηρά θετική σ.β..
Πράγματι, αν $P[\{g_0 > 0\}] < 1$, θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το βήμα 1 στην $f = \chi_{\{g_0=0\}}$ και να βρούμε $g_1 \in \mathcal{G}$ με

$$E[fg_1] = \int_{\{g_0=0\}} g_1(\omega)dP(\omega) > 0.$$

Ως εκ τούτου, το $g_0 + g_1$ θα ήταν στοιχείο του $\mathcal{G}$ του οποίου ο φορέας έχει P-μέτρο αυστηρά μεγαλύτερο από $P[\{g_0 > 0\}]$, άτοπο. Κανονικοποιούμε το g_0 έτσι ώστε $||g_0||_1 = 1$ και έστω Q το μέτρο επάνω στην $\mathcal{F}$ με παράγωγο Radon-Nikodym $\frac{dQ}{dP} = g_0$. Από το Λήμμα 5.1.4 συμπεραίνουμε ότι το Q είναι ένα τοπικό martingale μέτρο για την $\mathcal{S}$ και έτσι $\mathcal{M}^e(S) \neq \emptyset$. $\square$

Αυτό το θεώρημα αποδείχθηκε από τον D. Kreps [44] (1981) για μία πιο αφηρημένη κατασκευή και υπό μία ελαφριά υπόθεση διαχωρισιμότητας. Η ανάγκη αυτής της υπόθεσης προήλθε από το γεγονός ότι ο Kreps δε χρησιμοποιεί στην απόδειξή του το επιχείρημα εξάντλησης αλλά μία ακολουθιακή διαδικασία βασιζόμενη στη διαχωρισιμότητα του $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Την ίδια εποχή και ανεξάρτητα από τον Kreps, ο Ji-An Yan [61] (1980), απέδειξε ένα γενικό θεώρημα (αντίστοιχο με του Θεωρήματος 5.2.2), όπου γίνεται ένας χαρακτηρισμός των ημί-martingales ως καλών ολοκληρωτών, κάτι που αποτελεί και το θέμα του Θεωρήματος των Bichteler-Dellacherie. Το θεώρημα αυτό δεν αναφερότανε σε χρηματοοικονομικά έως ότου ο Ch. Stricker [57] (1990) παρατήρησε ότι το θεώρημα του Yan μπορεί να εφαρμοστεί για να αποδειχθεί το θεώρημα του Kreps χωρίς την υπόθεση της διαχωρισιμότητας. Για τους παραπάνω λόγους, το Θεώρημα 5.1.4 ονομάζεται το Kreps-Yan θεώρημα.

5.3 Ερμηνεία.

Ας δούμε τη χρηματοοικονομική ερμηνεία των εως τώρα αποτελεσμάτων. Εξ ορισμού η S θα παραβιάζει τη (NFL) συνθήκη αν υπάρχει μία συνάρτηση $g_0 \in L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με $g_0 \neq 0$ και κάποια δίκτυα $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ και $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ στον $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

τέτοια ώστε $f_\alpha = (H^\alpha \bullet S)_\infty$ για κάποια αποδεκτή και απλή συνάρτηση προς ολοκλήρωση H^α, $g_\alpha \leq f_\alpha$ και $\lim_{\alpha \in I} g_\alpha = g_0$, όπου η σύγκλιση είναι ως προς την ασθενή* τοπολογία του $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Με οικονομικούς όρους έχουμε ότι
(a)μια ευκαρία arbitrage είναι η δυνατότητα ύπαρξης μίας στρατηγικής H, τέτοια ώστε

$$P[(H \bullet S)_\infty \geq 0] = 1 \quad \text{και} \quad P[(H \bullet S)_\infty > 0] > 0.$$

(b)Μια ευκαιρία free lunch είναι η ύπαρξη ενός ενδεχόμενου κέρδους $g_0 \geq 0$, $g_0 \neq 0$ το οποίο δεν μπορεί να γραφτεί σαν (ή να κυριαρχείται από) ένα στοχατικό ολοκλήρωμα $(H \bullet S)_\infty$ για κάποια απλή, αποδεκτή σ.δ. προς ολοκλήρωση H, αλλά υπάρχουν ενεδεχόμενα κέρδη g_α ''κοντά'' στο g_0, τα οποία μπορούν να παραχθούν από την επενδυτική στρατηγική H^α και συνεπώς να ''εξαλείψουν'' τη ποσότητα $f_\alpha - g_\alpha$.

Το θεώρημα των Kreps-Yan αποτελεί μία πολύ όμορφη και μαθηματικά ακριβή επέκταση του θεμελιώδους θεωρήματος αποτίμησης χρεογράφων για ένα γενικότερο πλαίσιο σ.δ. σε συνεχή χρόνο. Τα ερωτήματα που προκύπτουν από τη μελέτη των παραπάνω είναι τα εξής:
(a) Είναι εφικτό γενικά, να αντικαταστήσουμε το δίκτυο $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ με μία ακολουθία $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$?
(b) Μπορούμε να επιλέξουμε το δίκτυο $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (ή, αν είναι εφικτό την ακολουθία $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) έτσι ώστε το $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ να παραμένει φραγμένο στον $L^\infty(P)$ (ή τουλάχιστον τα αρνητικά μέρη $\{g_\alpha^-\}_{\alpha \in I}$ να παραμένουν φραγμένα)?
(c) Είναι απαραίτητο να επιτρέψουμε το ''πέταγμα των χρημάτων'' ή με άλλα λόγια το πέρασμα από το K^{simple}, στο C^{simple} ?

Οι απαντήσεις γενικά για το υπάρχον πλαίσιο είναι όχι, και στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε ότι κάτω από κατάλληλες υποθέσεις υπάρχουν θετικές απαντήσεις.

Κεφάλαιο 6

Επισκόπηση στη Στοχαστική ολοκλήρωση

Αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου θα είναι μία σύντομη επισκόπηση στη Στοχαστική ολοκληρωση.

6.1 Στοιχεία στοχαστικών διαδικασιών.

Σε όλο το κεφάλαιο 6 ο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ είναι ένας φ.χ.π. που ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες. Σημειώνουμε ότι για $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ το διάστημα $[\![0, \infty]\!]$ συμβολιζει το $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ και όχι το $[0, \infty] \times \Omega$. Επίσης, το σύμβολο π συμβολίζει τη προβολή $\pi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \Omega$.

Στις περιπτώσεις που $\mathbb{T} = [0, 1]$ ή $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ υποθέτουμε οτι η σ.δ. S είναι càdlàg. Αν η $X : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ είναι càdlàg ορίζουμε

$$\Delta X_t(\omega) = X_t(\omega) - \lim_{s \nearrow t} X_s(\omega) = X_t(\omega) - X_{t-}(\omega).$$

Η σ.δ. X θα λέγεται ***συνεχής*** αν σ.β. η απεικόνιση $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $t \longmapsto X_t(\omega)$ είναι συνεχής.

Αν και τα προβλήματα που παρουσιάζονται για $\mathbb{T} = \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{N}$, $[0, 1]$, και $\mathbb{R}_+$ είναι διαφορετικά, υπάρχει δυνατότητα να αντιμετωπίζονται διαφορετικές περιπτώσεις με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Αυτό επιτυγχάνεται με την εμφύτευση του $\mathbb{T}$ στο $\mathbb{R}_+$. Στη περίπτωση που έχουμε διακριτό χρόνο $\mathbb{T} = \{0, \dots, n\}$ εργαζόμαστε ως εξής: για $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, θέτουμε $S_m = S_n$ και $\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_n$, εμφυτεύοντας έτσι τη περίπτωση όπου $\mathbb{T} = \{1, \dots, n\}$ στη περίπτωση όπου $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Για τη περίπτωση όπου έχουμε $\mathbb{T} = [0, 1]$ για να την εμφυτεύσουμε στο $\mathbb{R}_+$ εργαζόμαστε με αντίστοιχο τρόπο, θέτωντας $S_u = S_1$ και $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}_1$ για $u \geq 1$. Για να εμφυτεύσουμε το

$\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}_+$ θέτουμε για $n \leq t < n+1, S_t = S_n$ και $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_n$. Υπό το πρίσμα του ότι έχουμε τη δυνατότητα να ενσωματώσουμε όλα τα χρονικά πλαίσια στο $\mathbb{R}_+$, θα εργαστούμε μόνο με $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$.

Ορισμός 6.1.1. **(a)** *Μια σ.δ. $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι μετρήσιμη για τη $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty$ θα καλείται απλώς μετρήσιμη σ.δ..*
(b) *Η σ-άλγεβρα που παράγεται από όλα τα στοχαστικά διαστήματα της μορφής $[\![0, T]\!]$ όπου T είναι χ.δ. , θα καλέιται **προβλέψιμη σ-άλγεβρα**. Για να είμαστε ακριβείς, για μη τετρημμένη $\mathcal{F}_0$, θα πρέπει επίσης να συμπεριλάβουμε τα σύνολα της μορφής $\{0\} \times A$, όπου $A \in \mathcal{F}_0$. Η προβλέψιμη σ-άλγεβρα συμβολίζεται με $\mathcal{P}$ και παράγεται από όλες τις αριστερά συνεχείς και προσαρμοσμένες σ.δ. με πραγματικές τιμές. Κάποιος μπορεί επίσης να δείξει ότι η $\mathcal{P}$ παράγεται από όλες τις συνεχείς προσαρμοσμένες σ.δ. με πραγματικές τιμές. Αυτό συνεπάγεται ότι $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$ (βλ. π.χ. [24]). Μια σ.δ. ονομάζεται **προβλέψιμη σ.δ.**, αν είναι $\mathcal{P}$-μετρήσιμη.*

Ορισμός 6.1.2. Ένας χ.δ. T θα καλείται ***προβλέψιμος*** αν υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία χ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $T_n \nearrow T$ σ.β. και $T_n < T$ στο $\{0 < T\}$.

Υπό τις συνήθεις συνθήκες ο T είναι προβλέψιμος αν και μόνο αν το σύνολο $[\![T]\!] = [\![T, T]\!] = \{T(\omega, \omega) : T(\omega) < \infty\} \in P$. Μπορεί επίσης να δειχθεί ότι η $\mathcal{P}$ παράγεται από τα στοχαστικά διαστήματα $[\![0, T[\![$, όπου T προβλέψιμος χ.δ. .
Η ακόλουθη πρόταση είναι σχεδόν προφανής, αλλά έχει πολύ σημαντικές συνέπειες στα χρηματοοικονομικα.

Πρόταση 6.1.3. *Αν $L : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα τοπικό martingale τέτοιο ώστε $L \geq -1$, τότε το L είναι ένα υπέρ-martingale.*

6.2 Στρατηγικές, ημί-martingales και στοχαστική ολοκλήρωση.

Η πιο απλή στρατηγική που μπορεί να ακολουθήσει ένας επενδυτής είναι να αγοράσει σε ένα ντετερμινιστικό χρόνο $T_1 \in \mathbb{R}$ και να πουλήσει σε έναν χρόνο $T_2 \geq T_1, T_2 \in \mathbb{R}$. Για να είναι οι επιλογές δυνατές θα πρέπει οι τυχαίοι χρόνοι T_1 και T_2 να βασίζονται μόνο σε πληροφορίες του παρελθόντος, συνεπώς θα πρέπει να είναι χ.δ. . Αφού μπορούμε να θέσουμε όρια στο μεσάζοντα, η απόφαση να αγοράσουμε ή πουλήσουμε στο χρόνο T_1 θα πρέπει να στηρίζεται στη πληροφορία που είναι διαθέσιμη στο χρόνο T_1. Συνεπώς ο αριθμός των χρεογράφων που αγοράζουμε στο χρόνο T_1 θα πρέπει να είναι $\mathcal{F}_{T_1}$-μετρήσιμος. Πράτοντας με αυτό το τρόπο, ο επενδυτής διατηρεί $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ χρεόγραφα απο το χρόνο T_1 έως το χρόνο T_2, όπου f είναι μία $\mathcal{F}_{T_1}$-μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στον $\mathbb{R}^d$. Αυτή η επιλογή αποδίδει κέρδος ή ζημία ίση με $(f, S_{T_2} - S_{T_1})$.

Ορισμοί 6.2.1. Μια προβλέψιμη σ.δ. $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ με $H_0 = 0$ λέγεται ότι είναι

(a) μια ***απλή στρατηγική*** αν υπάρχουν χ.δ. $0 \leq T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_n < \infty$, καθώς επίσης και τ.μ. $f_0, \cdots, f_{n-1}$, όπου κάθε f_k είναι $\mathcal{F}_{T_k}$-μετρήσιμη, έτσι ώστε $H = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \chi_{\rrbracket T_k, T_K+1 \rrbracket}$,

(b) μια ***φραγμένη απλή στρατηγική*** αν επιπρόσθετα, $f_0, \cdots, f_{n-1}$ είναι μέσα στο L^∞.

(c) με ***φραγμένο φορέα*** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $t \in \mathbb{R}_+$ τέτοιος ώστε $H = H\chi_{\llbracket 0,t \rrbracket}$.

Αν H είναι μια απλή στρατηγική και S μία προσαρμοσμένη σ.δ. τότε το ***τελικό (ultimate) κέρδος*** είναι

$$(H \bullet S)_\infty := \sum_{k=0}^{n-1} (f_k, S_{T_{k+1}} - S_{T_k}) \tag{6.1}$$

και στο χρόνο t το χαρτοφυλάκιο έχει κέρδος ίσο με

$$(H \bullet S)_t := \sum_{k=0}^{n-1} (f_k, S_{T_{k+1} \wedge t} - S_{T_k \wedge t}). \tag{6.2}$$

(d) Η σ.δ $H \bullet S$ θα καλείται το ***στοχαστικό ολοκλήρωμα*** της H υπό την S. Το τελικό κέρδος περιγράφεται από μία τ.μ. $(H \bullet S)_\infty = \lim_{t\to\infty} (H \bullet S)_t$ (όπου το όριο προφανώς υπάρχει). Άλλος ένας συμβολισμός είναι το

$$H \bullet S = \int H_u dS_u. \tag{6.3}$$

Το κρίσιμο βήμα είναι να επεκτείνουμε την έννοια του απλών συναρτήσεων προς ολοκλήρωση σε πιο γενικές με μια κατάλληλη οριακή διαδικασία. Τα προβλήματα ήδη εμφανίζονται στη περίπτωση που έχουμε κίνηση Brown: επικεντρονόμαστε προς το παρών στη περίπτωση όπου $S_t = W_t$ με $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ τη κανονική κίνηση Brown με πραγματικές τιμές.

Ήταν η θεμελιώδης άποψη του Itô [38] (1944) ότι η ιδανική ιδέα είναι να μην προχωρήσουμε τμηματικά θεωρώντας καθε $\omega \in \Omega$ μεμονωμένα. Αντ' αυτού, μπορούμε να εφαρμόσουμε μια βασική ισομμέτρια των χώρων Hilbert της συναρτησιακής ανάλυσης.

a) Εστω απλές στρατηγικές $H = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \chi_{[\![T_k, T_{k+1}[\![}$ οι οποίες είναι φραγμένες και με φραγμένο φορέα ως στοιχεία του $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, P \otimes \lambda)$, όπου $\mathcal{P}$ είναι η προβλέψιμη σ-άλγεβρα στο $\Omega \times \mathbb{R}_+$ και $P \otimes \lambda$ το μέτρο γινόμενο. Ορίζουμε τη νόρμα

$$||H||_{L^2(P\otimes\lambda)} := \left(\mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s^2 ds\right]\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.4}$$

Η κρίσιμη ισομετρία είναι ότι αυτή η $L^2(P \otimes \lambda)$-νόρμα του προς ολοκληρωση H ισοδυναμεί με την $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$-νόρμα του στοχαστικού ολοκληρώματος $(H \bullet S)_\infty$, δηλαδή

$$||H||_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+,\mathcal{P},P\otimes\lambda)} := ||(H \bullet W)_\infty||_{L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)} = \left(\mathbb{E}[(H \bullet W)_\infty^2]\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.5}$$

όπου $\mathcal{F}_\infty$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τη κίνηση Brown $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Αφού εδραιώσαμε την (6.5) για το συνολο των φραγμένων απλών συναρησεων προς ολοκλήρωση, αποτελεί τυπική διαδικασία να επεκτείνουμε αυτή την ισομετρία στις κλειστότητες στους χώρους Hilbert $L^2(P \otimes \lambda)$ και $L^2(P)$ αντίστοιχα. Για το πρώτο, έπεται από τον ορισμό της προβλέψιμης σ-άλγεβρας $\mathcal{P}$ της ενότητας 6.1 ότι, αυτή η κλειστότητα ισούται με ολόκληρο το χώρο $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, P \otimes \lambda)$. Για τη κλειστότητα των στοχαστικών ολοκληρωμάτων $(H \bullet S)_\infty$ στον $L^2(P)$, έπεται ότι αυτή είναι το υπερεπίπεδο στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ που κατασκευάζεται από τη τ.μ. f με $\mathbb{E}[f] = 0$. Αυτό στηρίζεται στο Θεώρημα Αναπαράστασης Martingales (βλ. [18] Θεώρημα 4.2.1).

Ορίζουμε τώρα την σ.δ. $H \bullet W = \{(H \bullet W)_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, όπου πρέπει να είμαστε προσεκτικοί γιατί περιέχει πολλά (μη αριθμήσιμα το πλήθος) $t \in \mathbb{R}_+$. Αυτό γίνεται ως εξής. Για αυθαίρετο $H \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, P \otimes \lambda)$ παίρνουμε μία ακολουθία H^n απλών προς ολοκήρωση σ.δ. με $H^n \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, P \otimes \lambda)$ έτσι ώστε

$$||H - H^n||_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+,\mathcal{P},P\otimes\lambda)} \le 4^{-n-1}.$$

Από τη μεγιστική ανισότητα του Doob (βλ. [52], Κεφάλαιο 2, Θεώρημα 70.2) λαμβάνουμε ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} ||\sup_{t\ge 0}((H^m - H^n) \bullet W)_t||_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} &\le 2||((H^m - H^n) \bullet W)_\infty||_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} \\ &\overset{(6.5)}{=} 2||H^m - H^n||_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+,\mathcal{P},P\otimes\lambda)}. \end{aligned}$$

οπότε

$$P[\sup_{t\geq 0}((H^n - H^{n+1} \bullet W)_t > 2^{-n}] \leq 2^{-n}.$$

Τότε από το Λήμμα Borrel-Cantelli έχουμε ότι σ.β. η ακολουθία $(H^n \bullet W)_t(\omega)$ συγκλίνει ομοιόμορφα ως ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}_+$. Ας συμβολίσουμε αυτή την οριακή διαδικασία με $(H \bullet W)$. Βεβαίως $||\sup_{t\geq 0}((H-H^n)\bullet W)_t||_2 \longrightarrow 0$. Από την (6.5) και περνώντας στο όριο καθώς $n \longrightarrow \infty$, έχουμε

$$||H\chi_{]\!]0,t]\!]}||_{L^2(P\otimes\lambda)} = ||(H \bullet W)_t||_{L^2(P)}.$$

Την ίδια στιγμη η $(H \bullet W)$, ως όριο των L^2 martingales $(H^n \bullet W)_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι επίσης ένα martingale φραγμένο στον $L^2(P)$.

Σκιαγραφήσαμε κάποια βασικά στοιχεία στοχαστικής ολοκήρωσης τα οποία μπορούν να βρεθούν πιο αναλυτικά σε πολλά ωραία βιβλία (βλ. π.χ.[49],[50],[52]), καθώς πιστεύουμε ότι η **ισομετρική ταυτότητα (6.5) είναι η καρδιά του συγκεκριμένου θέματος**. Αφού ξεκαθαρίσαμε τα πράγματα για τη περίπτωση της κίνησης Brown W είναι ουσιώδες να πραγματοποιήσουμε κάποιες τεχνικές ρουτίνας για να επεκτείνουμε το βαθμό γενίκευσης.

b) Για να ξεκινήσουμε θα περιοριστούμε ακόμα στη περίπτωση της κίνησης Brown W αλλά τώρα θα θεωρήσουμε προβλέψιμες σ.δ. H ώστε η H να βρίσκεται μόνο τοπικά στον $L^2(P \otimes \lambda)$. Αυτή η τελευταία απαίτηση είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι $\int_0^t H_u^2 du < \infty$ σ.β, για κάθε $t < \infty$. Σε αυτή τη περίπτωση κάποιος μπορεί να ορίσει το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\{(H \bullet S)_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ το οποίο είναι ένα τοπικό martingale.

Για να περάσουμε σε πιο γενικούς απο τη κίνηση Brown ολοκληρωτές W θεωρούμε ένα martingale $S = \{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ το οποίο αρχικά υποθέτουμε ότι είναι L^2 φραγμένο, δηλαδή $\sup_t ||S_t||_{L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P)} < \infty$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε το ***μέτρο τετραγωνικής κύμανσης*** $d[S]$ επάνω στη προβλέψιμη σ-άλγεβρα $\mathcal{P}$ με το τύπο:

$$d[S]([\![\tau,\sigma]\!]) := \mathbb{E}[|S_\tau - S_\sigma|^2] \tag{6.6}$$

για όλα τα ζευγάρια πεπερασμένων χ.δ. $\tau \leq \sigma$ και να επεκτείνουμε αυτό το μέτρο στην $\mathcal{P}$. Το μέτρο $d[S]$ είναι το ανάλογο του μέτρου $P \otimes \lambda$ για τη περίπτωση της κίνησης Brown $S = W$, και λαμβάνουμε ξανά την ισομετρική ταυτότητα

$$||H||_{L^2(d[S])} = ||(H \bullet S)_\infty||_{L^2(P)}, \tag{6.7}$$

για κάθε φραγμένη απλή συνάρτηση σ.δ. H τέτοια ώστε το αριστερό μέρος της (6.6) να είναι πεπερασμένο.

Πράγματι η ταυτότητα (6.6) είναι απλά μία επαναδιατύπωση του ορισμού (6.7). Όπως στη περίπτωση της κίνησης Brown, η ταυτότητα (6.7) μας επιτρέπει να επιτρέπει να επεκτείνουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα από απλές φραγμένες προς ολοκλήρωση σ.δ. σε γενικές προβλέψιμες σ.δ. H, με πεπερασμένη $L^2(d[S])$-νόρμα. Τοπικοποιώντας, αυτή η έννοια, μπορεί να επεκταθεί στη περίπτωση martingales S τα οποία είναι τοπικά L^2 φραγμένα όπως επίσης και σε σ.δ. H οι οποίες ανήκουν τοπικά στον $L^2(d[S])$. Για τη περίπτωση συνεχών τοπικών martingales S αυτή είναι ήδη η φυσική γενίκευση καθώς κάθε συνεχές τοπικό martingale είναι αυτόματα L^2 φραγμένο. Τέλος διαπιστώνουμε ότι η θεωρία μπορεί επίσης να επεκταθεί στη περίπτωση τοπικών martingales με τιμές στο $\mathbb{R}^d$, εφοδιάζοντας το $\mathbb{R}^d$ με την ευκλείδεια νόρμα $|\cdot|$ και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω τεχνικές για χώρους Hilbert.

Επεκτείνουμε τώρα τη θεωρία για τη περίπτωση των (càdlàg, προσαρμοσμένων με τιμές στον $\mathbb{R}^d$) σ.δ. S οι οποίες δεν είναι κατ' ανάγκη τοπικά martingales. Στη περίπτωση όπου η S είναι τοπικά φραγμένης κύμανσης, δήλ.

$$|S|_t = \sup_{0\le t_0<\ldots<t_n\le t} \sum_{i=1}^{n} |S_{t_i} - S_{t_{i-1}}| < \infty \quad \text{σ.β., για κάθε } t<\infty,$$

η θεωρία ολοκλήρωσης είναι μάλλον απλή, αφού μπορούμε να εργαστούμε τμηματικά θεωρώντας κάθε $\omega \in \Omega$ ξεχωριστά. Για σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$ η càdlàg συνάρτηση $\{S_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, η οποία είναι φραγμένης κύμανσης στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, ορίζει ένα σ-πεπερασμένο μέτρο Borel $dS(\omega)$ επάνω στον $\mathbb{R}_+$ με τιμές στον $\mathbb{R}^d$. Αυτό ορίζεται στα διαστήματα $(a,n]$ για $0 \le a < b < \infty$ με τον τύπο

$$dS(\omega)((a,b]) = S_b(\omega) - S_a(\omega)$$

Επομένως, για κάθε φραγμένη μετρήσιμη σ.δ. H με τιμές στον $\mathbb{R}^d$, το στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$(H \bullet S)_t(\omega) := \int_0^t (H_u(\omega), dS_u(\omega)) \tag{6.8}$$

είναι καλά ορισμένο για σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$ και για $t \in \mathbb{R}_+$, ως ένα κλασσικό Lebesque-Stieltjes ολοκλήρωμα επάνω στον $\mathbb{R}_+$. Μπορούμε να επεκτείνουμε το στοχ. ολοκλήρωμα (6.8) στη περίπτωση όπου η σ.δ. H δεν είναι κατ' ανάγκη φραγμένη, αλλά μόνο τέτοια ώστε για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$ και κάθε $t \in \mathbb{R}_+^*$ η $(H_u(\omega))_{0\le u\le t}$ είναι $dS(\omega)$- ολοκληρώσιμη. Αυτή είναι μία L^1-θεωρία σε αντίθεση με την L^2-θεωρία της κίνησης Brown.

Έτσι έχουμε σύντομα ανακεφαλαιώσει τα επιτεύγματα της θεωρίας της στοχαστικής ολοκλήρωσης η οποία αναπτύχθηκε αρχίζοντας από τη πρωτοποριακή εργασία του Itô μέχρι την Ιαπωνική σχολή και τη Σχολή πιθανοτήτων του Strausbourg γύρω από τον P.A. Meyer. Η έννοια του στοχ. ολοκληρώματος προωθήθηκε σε αυξανόμενα περισσότερο γενικές κλάσεις: αν η (càdlàg, προσαρμοσμένη με τιμές στον $\mathbb{R}^d$) σ.δ. S μπορεί να γραφτεί ως $S = M + A$, όπου M είναι ένα τοπικό martingale και A είναι τοπικά φραγμένης κύμανσης, τότε υπάρχει μία καλή θεωρία ολοκλήρωσης για την S. Για κάθε τοπικά φραγμένη προβλέψιμη σ.δ. H με τιμές στον $\mathbb{R}^d$ το στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$(H \bullet S)_t := (H \bullet M)_t + (H \bullet A)_t, \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{6.9}$$

είναι καλά ορισμένο. Μπορούμε να περάσουμε σε όχι κατ' ανάγκη τοπικά φραγμένες προβλέψιμες σ.δ., υποθέτοντας ότι οι δύο όροι του δεξιού μέλους της (6.9) έχουν έννοια. Σ αυτό το επίπεδο, γύρω στο 1980, η προώθηση σε μεγαλύτερες και μεγαλύτερες γενικέυσεις έφτασε σε ένα τέλος. Μέσω των εργασιών των Bichteler [11] (1981) και Dellacherie [25] (1980) έγινε σαφές ότι η κλάση των ***ημί-martingales*** που ορίζεται στον ορισμό 6.2.2 παρακάτω, είναι η μεγαλύτερη κλάση σ.δ. για τις οποίες η θεωρία ολοκλήρωσης μπορεί να γενικευτεί από απλές προς ολοκλήρωση σ.δ. σε περισσότερο γενικές με συνεχή επέκταση. Το θεώρημα Bichteler-Dellacherie (Βλ. π.χ. [49]) μας λέει, ότι τα ημί-martingales S είναι ακριβώς εκείνες οι σ.δ. που επιτρέπεται να αναλυθουν ως $S = M + A$, όπου M είναι ένα τοπικό martingale και A είναι τοπικά φραγμένης κύμανσης. Θα αναφέρουμε σύντομα αυτό το θεώρημα.

Ο χώρος $\mathcal{S}$ των φραγμένων απλών στρατηγικών είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία της ***ομοιόμορφης σύγκλισης***, που δίνεται από τη νόρμα

$$||H||_\infty = \sup\{||H_t||_{L^\infty(\Omega,\mathcal{F}_t,P)} | t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Ορισμός 6.2.2. (a) Με $\mathcal{L}^0(P)$ συμβολίζεται ο χώρος όλων των $\mathcal{F}$-μετρήσιμων συναρτήσεων από τον Ω στον $\mathbb{R}$. Ο χώρος $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ή απλούστερα L^0, είναι ***ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας μετρήσιμων συναρτήσεων*** από τον $\mathcal{L}^0(P)$. Ο χώρος L^0 είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία της σύγκλισης κατά μέτρο. Είναι ένας πλήρης μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος, ένας χώρος Fréchet, αλλά δεν είναι τοπικά κυρτός.
b) Η S είναι ένα ***αυστηρά ημί-martingale*** αν ο τελεστής

$$I : \mathcal{S} \longrightarrow L^0(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P) \quad \text{με} \quad I(H) = (H \bullet S)_\infty$$

είναι συνεχής για τις τοπολογίες που ορίζονται αντίστοιχα από την $||\cdot||_\infty$ και από τη σύγκλιση κατά πιθανότητα,
c) η S είναι ένα ***ημί-martingale*** αν είναι τοπικά ένα αυστηρό ημί-martingale.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η S είναι ένα ημί-martingale αν $||H^n||_\infty \longrightarrow 0$ συνεπάγεται $(H^n \bullet S)_t \longrightarrow 0$ στον L^0 για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$. Είναι επίσης εύκολο να αποδειχθεί ότι για μία σ.δ S της μορφής $S = M + A$ όπου M είναι ένα τοπικό martingale και A είναι μια càdlàg σ.δ. πεπερασμένης κύμανσης δηλ. για κάθε t έχουμε $\int_0^t |dA_u| < \infty$ σ.β., αυτή η ιδιότητα της συνέχειας ικανοποιείται. (Από εδώ και στο εξής ακολουθούμε τη συνήθη ορολογία να ονομάζουμε μια σ.δ. φραγμένης κύμανσης αν είναι τοπικά φραγμένης κύμανσης). Το θεώρημα Bichteler-Dellacherie ισχυρίζεται ότι ισχύει και το αντίστροφο: ένα ημί-martingale S με την έννοια του ορισμού 6.2.2 μπορεί να αναλυθεί ως $S = M + A$ με τον παραπάνω τρόπο.

Λέμε ότι η S είναι ένα ***ειδικό ημί-martingale*** αν $S = M + A$ όπου M είναι ένα τοπικό martingale, A είναι πεπερασμένης κύμανσης και προβλέψιμη σ.δ.. Σ αυτή τη περίπτωση η ανάλυση του S ως ένα άθροισμα ενός τοπικού martingale και μιας προβλέψιμης σ.δ. πεπερασμένης κύμανσης είναι μοναδική. Αναφερόμαστε σ' αυτήν ως την ***κανονική ανάλυση*** (βλ. π.χ. [25] και [49]). Μπορεί να αποδειχθεί, ότι ένα ημί-martingale S είναι ειδικό ημί-martingale αν και μόνο αν το S είναι τοπικά ολοκληρώσιμο, δηλαδή αν υπάρχει μία ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ χ.δ. με $T_n \nearrow \infty$ ώστε $\mathbb{E}[\sup\limits_{0\le t\le T_n} |S_t|] < \infty$.

Τονίζουμε ότι ένα ημί-martingale δεν εξαρτάται από το P αλλά μόνο από τα μηδενικά σύνολα. Με άλλα λόγια, αν η S είναι ένα ημί-martingale κάτω από το P και $Q \sim P$, τότε η S είναι ημί-martingale κάτω από το Q. Παρόλα αυτά, αν η S είναι ειδικό ημί-martingale για το P και $Q \sim P$, τότε το S δεν είναι αναγκαία ειδικό ημί-martingale για το Q.

Στο χώρο των μονοδιάστατων ημί-martingales ορίζουμε μια τοπολογία διανυσματικού χώρου, την ονομάζουμε ***ημί-martingale τοπολογία*** επαγόμενη από την ημίνόρμα

$$D[S] := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} s \sup\{\mathbb{E}[|(K \bullet S)_n| \wedge 1]|\ |K| \le 1\}, \tag{6.10}$$

όπου η σ.δ. K είναι προβλέψιμη με πραγματικές τιμές (βλ. π.χ. [30]). Σ αυτή τη τοπολογία έχουμε, για μία ακολουθία $\{S^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ημί-martingales, ότι $S^k \longrightarrow 0$ αν και μόνο αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε $(K \bullet S^k)_t \xrightarrow{P} 0$ ομοιόμορφα στο K, $|K| \le 1$,

K προβλέψιμη με πραγματικές τιμές. Μια ισοδύναμη μετρική επίσης επάγουσα την ημί-martingale τοπολογία είναι η

$$D^*[S] := \sum 2^{-n} \sup\{\mathbb{E}[(K \bullet S)^*_n \wedge 1]| \; |K| \leq 1\}. \tag{6.11}$$

Όπως συνήθως η Y^* συμβολίζει τη μεγιστική συνάρτηση ορισμένη ως $Y^*_t = \sup_{0 \leq u \leq t} |Y_u|$. Για càdlàg σ.δ. Y, η σ.δ. Y^* είναι πάλι càdlàg. Μπορούμε να ορίσουμε μία ισχυρότερη συνάρτηση νόρμας, D_∞, επάγουσα την ημί-martingale τοπολογία στον $\mathbb{T} = [0, \infty]$ σε αντιδιαστολή με το σύνολο δεικτών $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Αυτή η απόσταση οριζεται ως

$$D_\infty[S] := \sup\{\mathbb{E}[(K \bullet S)^*_\infty \wedge 1]| \; |K| \leq 1\}.$$

Για τη θεωρία ολοκλήρωσης αυτή η τοπολογία είναι πολύ ισχυρή αλλά στο επόμενο κεφάλαιο θα μας φανεί χρήσιμη.

Τέλος επεκτείνουμε τη κλάση των προς ολοκλήρωση σ.δ. για δοσμένο ημί-martingale S από τις τοπικά φραγμένες προβλέψιμες σ.δ. H με τιμές στον $\mathbb{R}^d$ σε σ.δ. H οι οποίες δεν είναι αναγκαία τοπικά φραγμένες. Λέμε ότι ***μια προβλέψιμη σ.δ.*** H ***με τιμές στον*** $\mathbb{R}^d$ ***είναι*** S***-ολοκληρώσιμη*** αν η $(H\chi_{\{|H| \leq n\}} \bullet S)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία ***ακολουθία Cauchy*** στον χώρο των μονοδιάστατων ημί-martingales ως προς τη ημί-martingale τοπολογία που επάγεται από την (6.10) (ή ισοδύναμα από την (6.11)). Η οριακή σ.δ. συμβολίζεται με $H \bullet S$.

Κεφάλαιο 7

Το FTAP για συνεχή χρόνο, φραγμένη σ.δ. τιμών και αποδεκτές ολοκληρώσιμες επενδυτικές στρατηγικές

Μετά από όλη αυτή τη προκαταρκτική εργασία είμαστε τελικά σε μια θέση να αντιμετωπίσουμε το θέμα της μη κερδοσκοπίας σε πλήρη γενικότητα, δηλαδή για γενικά μοντέλα S χρηματοοικονομικών αγορών σε συνεχή χρόνο, και για γενικές (όχι αναγκαία απλές) επενδυτικές στρατηγικές H.

Πρώτα απ' όλα πρέπει κάποιος να περιορίσει την επιλογή των H με τέτοιον τρόπο, ώστε να είναι βέβαιο ότι η τ.μ. $(H \bullet S)_\infty$ υπάρχει. Εκτός των ποιοτικών περιορισμών που έρχονται από τη θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης, πρέπει κανένας να αποφύγει προβλήματα που έρχονται από τις επονομαζόμενες στρατηγικές διπλασιασμού. Για να εξηγήσουμε αυτή τη παρατήρηση ας θεωρήσουμε τη κλασική στρατηγική διπλασιασμού. Ρίχνουμε ένα νόμισμα και όταν έρχεται κορώνα, ο παίχτης πληρώνεται 2 φορές το ποντάρισμά του. Όταν έρχεται γράμματα, ο παίχτης χάνει το ποντάρισμά του. Η στρατηγική αυτή είναι γνωστή: ο παίχτης διπλασιάζει το ποντάρισμά του μέχρι το πρώτο χρόνο που νικάει. Αν αρχίσει με 1 ευρώ, το τελικό κέρδος $C =$ η τελευταία πληρωμή μείον το ολικό άθροισμα των προηγούμενων πονταρισμάτων είναι σχεδόν βέβαια 1 ευρώ. Έχει ένα σχεδόν βέβαιο κέρδος. Η πιθανότητα ότι τελικά θα εμφανιστεί η κορώνα είναι πράγματι 1, ακόμα και αν το νόμισμα είναι μη κανονικό. Οπωσδήποτε το άθροισμα των χαμένων πονταρισμάτων δεν είναι κάτω φραγμένο. Καθένας, ακόμα και ο υπεύθυνος ενός Casino, ξέρει ότι αυτός είναι ένας πολύ ριψοκίνδυνος τρόπος να κερδίσει κάποιος 1 ευρώ. Αυτός ο τύπος στρατηγικής θα πρέπει να αποκλειστεί: θα έπρεπε να υπάρχει ένα κάτω φράγμα των απωλειών του παίχτη.

Ένας δυνατός τρόπος αποφυγής αυτών των δυσκολιών είναι να περιοριστεί κάποιος σε απλές προβλέψιμες σ.δ. προς ολοκλήρωση όπως έγινε στα Κεφάλαια 3,4 και 5. Επομένως, έμεινε η φυσική ερώτηση: Μπορεί γενικά για μία προσαρμοσμένη σ.δ. S, η ύπαρξη ενός ισοδύναμου martingale μέτρου να χαρακτηριστεί στα παραπάνω πλαίσια;

Η απάντηση είναι όχι, αν κάποιος χρησιμοποιήσει μόνο απλές σ.δ. (βλ. [18], Παράγραφος 9.7 για αντιπαράδειγμα). Έτσι αναγκαζόμαστε να αφήσουμε τα πλαίσια των απλών σ.δ. και ερχόμαστε αντιμέτωποι με νέα προβλήματα.

a) Πρώτον η σ.δ. S θα έπρεπε να περιοριστεί για να επιτραπεί ο ορισμός ολοκληρωμάτων $H \bullet S$ για πιο γενικές επενδυτικές στρατηγικές. Η S πρέπει να είναι ένα ημί-martingale για να πραγματοποιηθεί αυτό. Αυτό είναι ακριβώς το περιεχόμενο του θεωρήματος Bichteler – Dellacherie (βλ. π.χ. P. Protter [49] (1990)). Επομένως η υπόθεση αυτή δεν είναι ένας περιορισμός, αφού είναι αναγκαία.

b) Η δεύτερη δυσκολία προκύπτει από το γεγονός ότι οι στρατηγικές όπως αυτή του διαπλασιασμού, πρέπει να αποκλειστούν. Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρήση της αρχής των αποδεκτών H, που απαιτεί ότι η σ.δ. $H \bullet S$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη από κάτω, μία αρχή που πάει πίσω στους Harisson-Pliska [37] (1981) και αναπτύχθηκε από τους F. Delbaen [17] (1992), D.W. McBeth [46] (1991) και W. Schachermayer [54] (1994). Η αρχή των αποδεκτών H είναι μία μαθηματική διατύπωση της απαίτησης ότι η θέση ενός οικονομικού επενδυτή δε μπορεί να γίνει πολύ αρνητική.

c) Το τρίτο πρόβλημα είναι να κάνουμε σίγουρο ότι το $(H \bullet S)_\infty = \lim_{t\to\infty}(H \bullet S)_t$ έχει νόημα. Θα δούμε ότι αυτό το πρόβλημα έχει μία πολύ ικανοποιητική λύση αν περιοριστούμε σε αποδεκτές σ.δ..

Η συνθήκη του **μη δωρεάν γεύματος με εξαφανιζόμενο κίνδυνο (NFLVR)**, μπορεί τώρα να περιγραφεί ως εξής: Δε θα έπρεπε να υπάρχει ακολουθία αποδεκτών σ.δ. $f_n := (H^n \bullet S)_\infty$ τέτοιων ώστε τα αρνητικά μέρη f_n^- να τείνουν ομοιόμορφα στο 0 και ώστε οι f_n να τείνουν σχεδόν βέβαια σε μία συνάρτηση f_0 με τιμές στο $[0,\infty]$ και $P[f_0 > 0] > 0$.

Η απόδειξη του κύριου Θεωρήματος 7.3.3 του παρόντος κεφαλαίου είναι αρκετά τεχνική και θα είναι το αντικείμενο της Ενότητας 7.3. Η Ενότητα 7.1 περιέχει ορισμούς, συμβολισμούς και αποτελέσματα γενικής φύσης ενώ στην 7.2 εξετάζεται η ιδιότητα (NFLVR) και αποδεικνύεται ότι κάτω από αυτή τη συνθήκη, το όριο $(H \bullet S)_\infty = \lim_{t\to\infty}(H \bullet S)_t$ υπάρχει σ.β. για αποδεκτές σ.δ. H.

7.1 Ορισμοί και προαπαιτούμενα αποτελέσματα.

Παρατήρηση 7.1.1. Ο δυικός χώρος του $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ταυτίζεται με τον $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, το χώρο των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων. Η ασθενής* τοπολογία επάνω στον L^∞ είναι η τοπολογία $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Η ύπαρξη ενός ισοδύναμου martingale μέτρου αποδεικνύεται με τη χρήση θεωρημάτων τύπου Hahn-Banach. ***Κεντρική σε αυτή την προσέγγιση είναι η κατασκευή ενός κυρτού ασθενώς* κλειστού υποσυνόλου του*** L^∞. Για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο είναι ασθενώς* κλειστό θα χρησιμοποιούμε το παρακάτω αποτέλεσμα. Η απόδειξη συνίσταται ουσιωδώς σε ένα συνδυασμό του κλασσικού θεωρήματος Krein – Smulian (βλ. π.χ. [54] p.50) και του γεγονότος ότι η μοναδιαία σφαίρα του L^∞ κάτω από την ασθενή* τοπολογία είναι Eberlein συμπαγής (βλ. [22]).

Θεώρημα 7.1.2. *Αν C είναι ένας κυρτός κώνος του L^∞, τότε ο C είναι ασθενώς* κλειστός αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον C που είναι ομοιόμορφα φραγμένη από το 1 και συγκλίνει κατά πιθανότητα σε μία συνάρτηση f_0, ισχύει $f_0 \in C$.*

Αν η X είναι ένα ημί-martingale τότε η X ορίζει ένα συνεχή τελεστή από τον χώρο των φραγμένων προβλέψιμων σ.δ. με φραγμένο φορέα στον χώρο L^0. Ο χώρος των ημί-martingales μπορεί επομένως να θεωρηθεί ως ένας χώρος γραμμικών τελεστών. Η ημί-martingale τοπολογία επάγεται ακριβώς από την τοπολογία των γραμμικών τελεστών. Άρα είναι μετρικοποιήσιμη από μία αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις μετρική που δίνεται από την απόσταση της X από το μηδενικό ημί-martingale

$$D(X) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mathbb{E}[\min\{|(H \bullet S)_n|, 1\}] : \; H \text{ προβλέψιμη}, |H| \leq 1\}.$$

Για αυτή τη μετρική, ο χώρος των ημί-martingale είναι πλήρης (βλ. [30]). Το παρακάτω θεώρημα επάνω σε ειδικά ημί-martingales θα χρησιμοποιηθεί αρκετά και για την απόδειξη παραπέμπουμε στην [14].

Θεώρημα 7.1.3. *Αν η X είναι ένα ειδικό ημί-martingale με κανονική ανάλυση $X = M + A$ και αν η H είναι X-ολοκληρώσιμη σ.δ. τότε* ***το ημί-martingale*** $H \bullet X$ ***είναι ειδικό*** *αν και μόνο αν*

(sp1) *η H είναι M-ολοκληρώσιμη με την έννοια των στοχαστικών ολοκληρωμάτων τοπικών martingales, και*

(sp2) *η H είναι A-ολοκληρώσιμη με τη συνήθη έννοια των ολκληρωμάτων Stieljes-Lebesque.*

Σ αυτή τη περίπτωση η κανονική ανάλυση της $H \bullet X$ δίνεται από το τύπο

$$H \bullet X = H \bullet M + H \bullet A.$$

Το παρακάτω θεώρημα και για την ακρίβεια το Πόρισμά του 7.1.5 θα χρησιμοποιηθεί στην Ενότητα 7.3. ***Επιτρέπει να ελέγχουμε τα άλματα του martingale μέρους στην κανονική ανάλυση ενός ειδικού ημί-martingale.***

Θεώρημα 7.1.4. *Αν X είναι ένα ημί-martingale που ικανοποιεί την*

$$||(\Delta X)^*||_p < \infty \text{ με } 1 < p \leq \infty,$$

τότε

- **(a)** *το X είναι ειδικό και έχει κανονική ανάλυση $X = M + A$,*
- **(b)** *η A ικανοποιεί την $||(\Delta A)^*||_p < \frac{p}{p-1}||(\Delta X)^*||_p$*
- **(c)** *η M ικανοποιεί την $||(\Delta M)^*||_p < \frac{2p-1}{p-1}||(\Delta X)^*||_p$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη που παρουσιάζουμε οφείλεται στον Stricker [57] Αφού η X είναι τοπικά p-ολοκληρώσιμη, θα είναι βεβαίως τοπικά ολοκληρώσιμη και άρα ειδικό ημί-martingale. Επομένως, ισχύει η (a). Έστω Y ένα ***càdlàg martingale*** που ορίζεται ως

$$Y_t := \mathbb{E}[(\Delta X)^*|\mathcal{F}_t].$$

Αφού η A είναι προβλέψιμη, το σύνολο $\{\Delta A \neq 0\}$ είναι η ένωση μίας ακολουθίας συνόλων της μορφής $[\![T_n]\!]$, όπου T_n είναι προβλέψιμοι χ.δ. . Για κάθε προβλέψιμο χ.δ. T έχουμε $\Delta A_T = \mathbb{E}[\Delta X_T | \mathcal{F}_{T_-}]$ και άρα

$$|\Delta A_T| \leq \mathbb{E}[|\Delta X_T|\big|\mathcal{F}_{T_-}] \leq \mathbb{E}[(\Delta X)^*|\mathcal{F}_{T_-}] = Y_{T_-} \leq Y^*.$$

Άρα $(\Delta A)^* \leq Y^*$. Από τη μεγισιτκή ανισότητα του Doob, βλ. [25], τώρα έπεται

$$||Y^*||_p \leq \frac{p}{p-1}||(\Delta X)^*||_p \quad \text{και άρα}$$

$$||(\Delta A)^*||_p \leq \frac{p}{p-1}||(\Delta X)^*||_p \quad \text{και}$$

$$||(\Delta M)^*||_p \leq \frac{2p-1}{p-1}||(\Delta X)^*||_p.$$

□

Πόρισμα 7.1.5. *Αν T είναι ένας χ.δ. τότε*

$$\begin{aligned} ||(\Delta A)_T||_p &\leq \frac{p}{p-1}||(\Delta X)^*||_p \quad \text{και} \\ ||(\Delta M)_T||_p &\leq \frac{2p-1}{p-1}||(\Delta X)^*||_p. \end{aligned}$$

Αν A είναι μια προβλέψιμη σ.δ πεπερασμένης κύμανσης με $A_0 = 0$, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σ αυτήν ένα (τυχαίο) μέτρο επάνω στον $\mathbb{R}_+$. Η κύμανση της A, μια σ.δ. συμβολιζόμενη με V, δίνεται από τη σχέση

$$V_t := \sup\{\sum_{k=1}^{n} |A_{S_k} - A_{S_{k-1}}| : 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t\}.$$

Η σ.δ. V ορίζει ένα σ-πεπερασμένο μέτρο μ_V πάνω στην προβλέψιμη σ-άλγεβρα επάνω στον $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Ο ορισμός του μ_V δίνεται για ένα προβλέψιμο υποσύνολο K του $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ από τη σχέση

$$\mu_V(K) := \mathbb{E}[\int_0^\infty (\chi_K)_u dV_u].$$

Το μέτρο μ_A ορίζεται με ένα παρόμοιο τρόπο, αλλά ο ορισμός του περιορίζεται σε έναν σ-δακτύλιο για να αποφύγουμε εκφράσεις της μορφής $\infty - \infty$. Είναι γνωστό, (βλ. [48], Κεφάλαιο 1), ότι το μέτρο μ_V είναι ακριβώς το μέτρο κύμανσης του

μ_A. Από το *θεώρημα ανάλυσης του Hahn* προκύπτει ότι υπάρχει μία διαμέριση του $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ σε δύο σύνολα B_+ και B_- και τα δύο προβλέψιμα, ώστε οι σ.δ. $(\chi_{B_+} \bullet A)$ και $(-\chi_{B_-} \bullet A)$ να είναι αύξουσες. Επιπλέον, $V = ((XB_+ - XB_-) \bullet A)$. Για σχεδόν όλα τα ω το μέτρο dA επάνω στον $\mathbb{R}_+$ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το dV και η παράγωγος Radon-Nikodym είναι ακριβώς η $XF_+ - XF_-$, όπου $F_\pm := \{t : (t,\omega) \in B_\pm\}$. Θα αναφέρουμε αυτή την ανάλυση **ως την ανάλυση Hahn της** A. Σημειώνουμε ότι η δυσκολία στον ορισμό της βήμα-βήμα ανάλυσης των μέτρων $dA(\omega)$ έρχεται από το γεγονός ότι τα σύνολα F_+ και F_- πρέπει να κολάνε μαζί για να σχηματίσουν τα προβλέψιμα σύνολα B_+ και B_- (βλ. π.χ [48], Κεφάλαιο 1 για τις λεπτομέρειες αυτού του αποτελέσματος που οφείλεται στην Catherine Doléans-Dade). Σε όλο το κεφάλαιο, το S είναι ένα σταθερό ημί-martingale.

Ορισμοί 7.1.6. Έστω $\alpha > 0$. Μία S-ολοκληρώσιμη προβλέψιμη σ.δ. H ονομάζεται ***α-αποδεκτή*** αν $H_0 = 0$ και $(H \bullet S) \geq -\alpha$ (δηλαδή για όλα τα $t \geq 0$ ισχύει $(H \bullet S)_t \geq -\alpha$ σ.β.). Η H ονομάζεται ***αποδεκτή*** αν είναι α-αποδεκτή για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Ορίζουμε

$$K_0 := \{(H \bullet S)_\infty : H \text{ αποδεκτή και } (H \bullet S)_\infty = \lim_{t\to\infty}(H \bullet S)_t \text{ υπάρχει σ.β.}\}.$$

Με C_0 συμβολίζεται ο κώνος των συναρτήσεων που κυριαρχούνται από στοιχεία του K_0, δηλαδή $C_0 = K_0 - L^0_+$. Με C και K συμβολίζονται οι αντίστοιχες τομές με το χώρο L^∞ των φραγμένων συναρτήσεων $K = K_0 \cap L^\infty$ και $C = C_0 \cap L^\infty$. Με $\overline{C}$ συμβολίζεται η κλειστότητα του C ως προς την norm-τοπολογία του L^∞ και με $\overline{C}^*$ η ασθενής* κλειστότητα του C.

Ορισμός 7.1.7. *Το ημί-martingale S ικανοποιεί τη συνθήκη*

(i) ***No arbitrage*** (NA) *αν* $C \cap L^\infty_+ = \{0\}$.

(ii) ***Μη δωρεάν γεύμα με εξαφανιζόμενο κίνδυνο*** $(NFLVR)$ *αν* $\overline{C} \cap L^\infty_+ = \{0\}$.

Είναι σαφές ότι $(ii) \Longrightarrow (i)$. Η (NA) είναι ισοδύναμη με την $K_0 \cap L^0_+ = \{0\}$.Όμως γενικά η έννοια (NA) είναι πολύ περιοριστική για να συνεπάγεται την ύπαρξη ενός ισοδύναμου martingale μέτρου για την S, (βλ. [18] ενότητα 9.7). Το επόμενο θεώρημα μας δίνει ένα κριτήριο το οποίο σχετίζεται με την αποδεκτικότητα της H.

Θεώρημα 7.1.8. *Εάν η σ.δ. M είναι ένα τοπικό martingale και αν η H είναι μία αποδεκτή προς ολοκλήρωση σ.δ. ως προς M, τότε η σ.δ. $H \bullet M$ είναι ένα τοπικό martingale. Συνεπώς, η $H \bullet M$ είναι ένα υπέρ-martingale.*

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στις [31] και [6]. Είναι μία εύκολη συνέπεια του Λήμματος Fatou ότι αν η $H \bullet M$ είναι τοπικό martingale ομοιόμορφα φραγμένο από κάτω, τότε είναι ένα υπέρ-martingale. □

7.2 Μη δωρεάν γεύμα με εξαφανιζόμενο κίνδυνο

Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας αναφέρει ότι για ένα ημί-martingale S, κάτω από τη συνθήκη (NFLVR), το όριο $(H \bullet S)_\infty := \lim_{t\to\infty}(H \bullet S)_t$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο αν η H είναι αποδεκτή. Για να πάρουμε ένα κίνητρο για αυτό το αποτέλεσμα, θεωρούμε την περίπτωση όπου ήδη γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα ισοδύναμο τοπικό martingale μέτρο Q. Σε αυτή την περίπτωση, από το Θεώρημα 7.1.8, το στοχαστικό ολοκλήρωμα $H \bullet S$ είναι ένα Q-τοπικό martingale αν η H είναι αποδεκτή. Αυτό συνεπάγεται ότι είναι ένα υπέρ-martingale και το κλασικό θεώρημα σύγκλισης των martingales δείχνει ότι το όριο $(H \bullet S)_\infty := \lim_{t\to\infty}(H \bullet S)_t$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο σ.π.. Αλλά βεβαίως δε γνωρίζουμε ακόμα ότι υπάρχει ένα ισοδύναμο martingale μέτρο Q και η τέχνη του παιχνιδιού είναι να παράξουμε το αποτέλεσμα σύγκλισης απλώς από την $(NFLVR)$. Αρχίσουμε με δύο προπαρασκευαστικά αποτελέσματα.

Πρόταση 7.2.1. *Αν η S είναι ένα ημί-martingale με την ιδιότητα $(NFLVR)$, τότε το σύνολο $A := \{(H \bullet S)_\infty : H$ είναι 1-αποδεκτή και φραγμένου φορέα $\}$ είναι φραγμένο στον L^0.*

Απόδειξη. Η H είναι 1-αποδεκτή σημαίνει ότι η H είναι $S-$ ολοκληρώσιμη και $(H \bullet S)_t \geq -1$.
Η H είναι φραγμένου φορέα σημαίνει ότι η H είναι 0 έξω από το $[\![0, T]\!]$ όπου T είναι θετικός πραγματικός αριθμός. Το όριο $(H \bullet S)_\infty = \lim_{t\to\infty}(H \bullet S)_t$ υπάρχει χωρίς δυσκολία, διότι η $(H \bullet S)_t$ γίνεται τελικά σταθερή. Υποθέτουμε ότι το σύνολο A δεν είναι φραγμένο στον L^0. Αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη μιας ακολουθίας H^n από 1-αποδεκτές προς ολοκλήρωση σ.δ. φραγμένου φορέα και την ύπαρξη ενός $\alpha > 0$ ώστε $P[(H^n \bullet S)_\infty \geq n] > \alpha > 0$. Η ακολουθία $f_n := \min\{\frac{1}{n}(H^n \bullet S)_\infty, 1\}$ είναι στο C, $P[f_n = 1] > \alpha > 0$ και $||f_n^-||_\infty \leq \frac{1}{n}$. Παίρνοντας κυρτούς συνδυασμούς επιτρέπεται να πάρουμε $g_n \in conv\{f_n, f_{n+1}, \dots\}$ ώστε $g_n \longrightarrow g : \Omega \longmapsto [0, 1]$ σ.β. (μπορούμε

να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα Β΄.4.1, αλλά ένα απλούστερο επιχείρημα στον L^∞ μπορεί να χρησιμοποιηθεί (σύγκρινε [54], Παρατήρηση 3.4). Σαφώς $\mathbb{E}[g] \geq \alpha$ και άρα $P[g > 0] = \beta \geq \alpha > 0$. Από το θεώρημα του Egorov ισχύει ότι $g_n \longrightarrow g$ ομοιόμορφα επάνω σε ένα σύνολο Ω' μέτρου τουλάχιστον $1 - \frac{\beta}{2}$. Οι συναρτήσεις $h_n := \min\{g_n, \chi_{\Omega'}\}$ είναι ακόμα στον C και $h_n \longrightarrow g\chi_{\Omega'}$ ως προς την τοπολογία νόρμας στον L^∞. Αφού $P[g\chi_{\Omega'} > 0] \geq \frac{\beta}{0} > 0$, προκύπτει μία αντίφαση στην $(NFLVR)$. $\square$

Πρόταση 7.2.2. *Αν η S είναι ένα ημί-martingale που ικανοποιεί την $(NFLVR)$, τότε για κάθε αποδεκτή H σ.δ. η συνάρτηση $(H \bullet S)^* := \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |(H \bullet S)_t|$ είναι πεπερασμένη σ.β. και το σύνολο $\{(H \bullet S)^* : H\ 1-\text{αποδεκτή}\}$ είναι φραγμένο στον L^0.*

Απόδειξη. Αν το σύνολο δεν ήταν φραγμένο, θα μπορούσαμε να βρούμε μία ακολουθία από 1-αποδεκτές προς ολοκλήρωση σ.δ. H^n, χ.δ. T_n και $\alpha > 0$ ώστε $P[T_n < \infty] > \alpha > 0$ και $(H^n \bullet S)_{T_n} > n$ επάνω στο $\{T_n < \infty\}$. Για κάθε n παίρνουμε t_n αρκετά μεγάλο ώστε $\alpha < P[T_n \leq t_n]$ και παρατηρούμε ότι για $K^n := H^n \chi_{[\![0,\min\{T_n,t_n\}]\!]}$ έχουμε ότι η K^n είναι φραγμένου φορέα και $P[(K^n \bullet S)_\infty > n] > \alpha > 0$, μία αντίφαση στην Πρόταση 7.2.1. $\square$

Τώρα αποδεικνύουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της Ενότητας.

Θεώρημα 7.2.3. *Αν η S είναι ένα ημί-martingale που ικανοποιεί την $(NFLVR)$, τότε για αποδεκτή σ.δ. H το όριο $(H \bullet S)_\infty = \lim_{t\to\infty}(H \bullet S)_t$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο σ.π..*

Απόδειξη. Θα μιμηθούμε την απόδειξη του Θεωρήματος σύγκλισης martingales του Doob. Η κλασσική ιδέα της θεώρησης upcrossings μέσω ενός διαστήματος $[\beta, \gamma]$ μπορεί στα μαθηματικά χρηματοοικονομικά να ερμηνευτεί ως η γνωστή διαδικασία: "Αγόρασε χαμηλα, πούλα ψηλα." Επιτρέπεται να υποθέσουμε ότι η H είναι 1-αποδεκτή και επομένως $(H \bullet S)^* := \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |(H \bullet S)_t| < \infty$ σ.β από την Πρόταση 7.2.2 Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \inf(H \bullet S)_t = \lim_{t\to\infty} \sup(H \bullet S)_t.$$

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει αυτό και ότι $P[\lim_{t\to\infty} \inf(H \bullet S)_t < \lim_{t\to\infty} \sup(H \bullet S)_t] > 0$. Παίρνουμε $\beta < \gamma$ και $\alpha > 0$ ώστε

$$P[\lim_{t\to\infty}\inf(H\bullet S)_t<\beta<\gamma<\lim_{t\to\infty}\sup(H\bullet S)_t]>\alpha.$$

Θα κατασκευάσουμε δύο πεπερασμένους χ.δ. $\{U_n,V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

(1) $U_1\le V_1\le U_2\le V_2\le\ldots\le U_n\le V_n\le U_{n+1}\le\ldots$

(2) η $L^n:=\sum_{k-1}^{n}H\chi_{]\!]U_k,V_k]\!]}$ είναι $(1+\beta)$-αποδεκτή

(3) $P[(L^n\bullet S)_\infty>n(\gamma-\beta)]>\frac{\alpha}{2}$.

Η ύπαρξη μιας τέτοιας ακολουθίας σαφώς και παραβιάζει το συμπέρασμα της πρότασης της Πρότασης 7.2.2 και αυτό θα είναι η απόδειξη του Θεωρήματος.

Οι χ.δ. κατασκευάζονται με επαγωγή. Παίρνουμε $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία αυστηρά θετικών αριθμών και έτσι ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\frac{\alpha}{100}$. Ορίζουμε το σύνολο

$$A:=\{\lim_{t\to\infty}\inf(H\bullet S)_t<\beta<\gamma<\lim_{t\to\infty}\sup(H\bullet S)_t\}.$$

Αφού η άλγεβρα Boole $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{F}_t$ είναι πυκνή στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$, προκύπτει ότι υπάρχει t_1 και $A_1\in\mathcal{F}_{t_1}$ ώστε $P(A\triangle A_1)<\varepsilon_1$. Για $\omega\notin A_1$ θέτουμε $U_1=V_1=t_1$ και συγκεντρωνόμαστε στα $\omega\in A_1$.
Αρχικά για κάθε $\omega\in A_1$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} U_1'(\omega) &:= \inf\{t:t\ge t_1 \text{ και } (H\bullet S)_t<\beta\}\\ V_1'(\omega) &:= \inf\{t:t\ge U_1' \text{ και } (H\bullet S)_t>\gamma\}.\end{aligned}$$

Οι τ.μ. U_1' και V_1' είναι σαφώς χ.δ και παίρνουν τιμές το $[0,\infty]$. Από τη κατασκευή του A_1 έχουμε

$$P[V_1'<\infty]\ge P[A\cap A_1]>\alpha-\varepsilon_1.$$

Παίρνουμε $s_1>t_1$ ώστε $P[V_1'\le s_1]>\alpha-\varepsilon_1$ και ορίζουμε

$$U_1:=\min\{U_1',s_1\},$$

$$V_1:=\min\{V_1',s_1\}.$$

Το σύνολο $B_1 := \{(H{\bullet}S)_{U_1} \leq \beta < \gamma \leq (H{\bullet}S)_{V_1}\}$ είναι στην $\mathcal{F}_{s_1}$ και $P[B_1 \cap A] > \alpha - \varepsilon_1$ διότι $B_1 \subseteq A_1$ και

$$\begin{aligned} \alpha < P(A) &= P(A \cap A_1) + P(A \setminus A_1) \\ &\leq P(A \cap A_1) + P(A \triangle A_1) \\ &< P(A \cap A_1) + \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Θέτουμε $K^1 := H\chi_{]\!]U_1,V_1]\!]}$. Ισχυριζομαστε ότι η K^1 είναι $(1+\beta)$-αποδεκτή. Πράγματι, επάνω στο A_1^c σαφώς $(K^1 \bullet S)_t = 0$ για όλα τα t. Για $\omega \in A_1$ και $t \leq U_1$ έχουμε επίσης $(K^1 \bullet S)_t = 0$. Για $\omega \in A_1$ και $U_1 \leq t \leq V_1$ έχουμε

$$(K^1 \bullet S)_t = (H \bullet S)_t - (H \bullet S)_{U_1} \geq -1 - \beta = -(1 - \beta).$$

Θέτουμε $L^1 := K^1$. Εφαρμόζουμε την ίδια αιτιολόγηση επάνω στο $B_1 \cap A$, δηλ. παίρνουμε $t_2 \geq s_1$, $A_2 \in \mathcal{F}_{t_2}$ ώστε $A_2 \subseteq B_1$, $P[(A_2 \triangle (B_1 \cap A)] > \alpha - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Επάνω στο A_2 ορίζουμε

$$\begin{aligned} U_2' &:= \inf\{t : t \geq t_2 \text{ και } (H \bullet S)_t < \beta\} \\ V_2' &:= \inf\{t : t \geq U_2' \text{ και } (H \bullet S)_t > \gamma\}. \end{aligned}$$

$P[V_2' < \infty] > \alpha - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ και επιλέγουμε $s_2 > t_2$ ώστε $P[V_2' \leq s_2] > \alpha - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Παίρνουμε

$$\begin{aligned} U_2 &:= \min\{U_2', s_2\} \\ V_2 &:= \min\{V_2', s_2\} \\ K^2 &:= H\chi_{]\!]U_2,V_2]\!]}. \end{aligned}$$

Τότε η K^2 είναι $(1+\beta)$-αποδεκτή, αλλά έξω από το σύνολο B_1 η σ.δ. $(K^2{\bullet}S)$ είναι 0. Επάνω στο B_1 ισχύει $(L^1{\bullet}S)_{t_2} = (L^1{\bullet}S)_{s_2} \geq \gamma - \beta > 0$. Η $L^2 = L^1 + K^2$ παραμένει επομένως $(1+\beta)$-αποδεκτή. Επιπλεόν, $P[(L^2 \bullet S)_{t_2} > 2(\gamma - \beta)] > \alpha - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Αυτό μας επιτρέπει να συνεχίσουμε την κατασκευή και να ορίσουμε την L^n με επαγωγή. $\square$

Το υπόλοιπο της ενότητας αφιερώνεται σε κάποια αποτελέσματα που δίνουν μία καλύτερη κατανόηση της ιδιότητας $(NFLVR)$ και την σχέση της με προηγούμενα αποτελέσματα των [17] [54].

Πόρισμα 7.2.4. *Αν το ημί-martingale S ικανοποιεί την $(NFLVR)$ τότε το σύνολο*

$$\{(H \bullet S)_\infty : H \text{ είναι 1-αποδεκτή}\}$$

είναι φραγμένο στον L^0.

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της ύπαρξης του ορίου $(H \bullet S)_\infty$ και της Πρότασης 7.2.1 □

Παρατήρηση 7.2.5. Το Θεώρημα 7.2.3 δείχνει ιδιαιτέρως ότι στον ορισμό του K_0 η απαίτηση ότι το όριο υπάρχει είναι περιττή. Επίσης θέλουμε να τονίσουμε ότι για την απόδειξη των παραπάνω αποτελεσμάτων 7.2.1 και 7.2.4, χρησιμοποιήσαμε την $(NFLVR)$ για σ.δ. με φραγμένο φορέα, δηλ. για σ.δ. προς ολοκλήρωση που είναι 0 έξω από ένα στοχαστικό διάστημα $[\![0, k]\!]$ για κάποιο $k \in \mathbb{R}$.

Το επόμενο αποτέλεσμα χρησιμοποιεί μόνο την (πολύ ασθενή) συνθήκη (NA).

Πρόταση 7.2.6. *(Schachermayer [54], Πρόταση 4.2]) Αν το ημί-martingale S ικανοποιεί τη (NA) τότε για κάθε αποδεκτή σ.δ. H, ώστε το όριο $(H \bullet S)_\infty = \lim_{t\to\infty}(H \bullet S)_t$ να υπάρχει, έχουμε*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad ||(H \bullet S)_t^-||_\infty \leq ||(H \bullet S)_\infty^-||_\infty.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $||(H \bullet S)_t^-||_\infty > ||(H \bullet S)_\infty^-||_\infty$ για κάποιο $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε ορίζουμε το σύνολο

$$A := \{(H \bullet S)_t < -||(H \bullet S)_\infty^-||_\infty\} \in \mathcal{F}_t.$$

Η προς ολοκλήρωση σ.δ. $K = \chi_A \chi_{]\!]t,\infty[\![}$ είναι αποδεκτή, η τ.μ $(K \bullet S)_\infty$ υπάρχει, είναι μή αρνητική και $P[(K \bullet S)_\infty > 0] > 0$. Αυτό παραβιάζει τη (NA). □

Το επόμενο αποτέλεσμα συνδυάζει τη (NA) με το συμπέρασμα της Πρότασης 7.2.1

Πρόταση 7.2.7. *Αν το ημί-martingale S δεν έχει $(NFLVR)$ τότε ή δεν έχει (NA) ή υπάρχει $f_0 : \Omega \longmapsto [0, \infty]$ όχι ταυτοτικά 0,και μία ακολουθία τ.μ. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{(H^n \bullet S)_\infty\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο K_0 με H^n μία $\frac{1}{n}$-αποδεκτή σ.δ., ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n = f_0$ κατά πιθανότητα.*

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι η ύπαρξη μιας τέτοιας ακολουθίας παραβιάζει την $(NFLVR)$. Πράγματι, το σύνολο $\{n(H^n \bullet S)_\infty : n \geq 1\}$ είναι μη φραγμένο στον L^0, ενώ οι προς ολοκλήρωση σ.δ. $\{nH^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι 1-αποδεκτές. Αυτό αντιφάσκει στο Πόρισμα 7.2.4.

Το αντίστροφο είναι λιγότερο προφανές. Υποθέτουμε ότι η S ικανοποιεί την (NA) και ότι η $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στον C, ώστε $g_0 = \lim_{n\to\infty} g_n$ στον L^∞, $g_0 \geq 0$, $P[g_0 > \alpha] > \alpha > 0$. Από την υπόθεση για την $\{g_n\}$ συμπεραίνουμε ότι $||g_n^-||_\infty$ τείνει στο 0. Περνώντας σε μία υπακολουθία, αν είναι αναγκαίο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $||g_n^-||_\infty \leq \frac{1}{n}$. Για κάθε n παίρνουμε μία συνάρτηση h_n στον K_0 ώστε $h_n \geq g_n$. Αν $h_n = (L^n \bullet S)_\infty$, τότε $||h_n^-||_\infty \leq \frac{1}{n}$ και άρα η L^n είναι $\frac{1}{n}$-αποδεκτή από την Πρόταση 7.2.6 και την (NA) της S. Το Λήμμα Β΄.4.1 μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε την h_n με μία $f_n \in conv\{h_n, h_{n+1}, \ldots\}$, έτσι ώστε η f_n να συγκλίνει στην $f_0 : \Omega \to [0,\infty]$ κατά πιθανότητα. Έστω H^n ο αντίστοιχος κυρτός συνδυασμός των $\{L^k\}_{k\geq n}$. Προφανώς η H_n είναι ακόμα $\frac{1}{n}$-αποδεκτή και η f_n^- τείνει στο 0 στον L^∞. Για n ικανοποιητικά μεγάλο έχουμε $||g_n - g_0||_\infty \leq \frac{\alpha}{2}$ και άρα $P[h_n > 0] \geq P[g_n > \frac{\alpha}{2}] > \frac{\alpha}{2}$. Το Λήμμα Β΄.4.1 τώρα δείχνει ότι $P[f_0 > 0] > 0$. □

Πόρισμα 7.2.8. *Το ημί-martingale S ικανοποιεί την $(NFLVR)$ αν και μόνο αν για μία ακολουθία $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον K_0 η συνθήκη $||g_n^-||_\infty \longrightarrow 0$ συνεπάγεται ότι η g_n τείνει στο 0 κατά πιθανότητα.*

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι η συνθήκη που αναφέρεται στο πόρισμα συνεπάγεται την (NA). Το πόρισμα τώρα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 7.2.7 και του Λήμματος Β΄.4.1. □

7.3 Απόδειξη του κύριου Θεωρήματος.

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε το κύριο θεώρημα της εργασίας. Η απόδειξη ακολουθεί το παρακάτω σχέδιο: αποδεικνύουμε ότι το σύνολο C, που ορίστηκε στην Ενότητα 7.2, είναι ασθενώς* κλειστό στον L^∞ και εφαρμόζουμε το θεώρημα διαχωρισιμότητας των Kreps και Yan (βλ. [54]), το οποίο είναι μία συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach. Χρησιμοποιούμε παρόμοια επιχειρήματα όπως της [17] και [54]. Οι τεχνικές είναι, οπωσδήποτε, διαφορετικές και πιο περίπλοκες.

Ορισμός 7.3.1. (Mc Beth [46], Schahermayer [54], Ορισμός 3.4)΄Ενα υποσύνολο D του L^0 είναι ***Fatou κλειστό*** αν για κάθε ακολουθία $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον L^0 ομοιόμορφα φραγμένη από κάτω και τέτοια ώστε $f_n \longrightarrow f$ σ.β., έχουμε $f \in D$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι η τεχνική εκδοχή του κύριου θεωρήματος.

Θεώρημα 7.3.2. *Αν η S είναι ένα φραγμένο ημί-martingale που ικανοποιεί την $(NFLVR)$, τότε*

(1) το C_0 είναι Fatou κλειστό και άρα

(2) $C = C_0 \cap L^\infty$ είναι $\sigma(L^\infty, L^1)$-κλειστό.

Απόδειξη. Δεν θα αποδείξουμε το πρώτο μέρος του Θεωρήματος 7.3.2 αμέσως. Η απόδειξή του είναι αρκετά περίπλοκη και θα γεμίσει το υπόλοιπο της ενότητας. Το δεύτερο μέρος αποδεικνύεται με τη χρήση του Θεωρήματος 7.1.2. Αν το C_0 είναι Fatou κλειστό, τότε πρέπει να αποδείξουμε ότι το C είναι κλειστό για την τοπολογία $\sigma(L^\infty, L^1)$. Παίρνουμε μια ακολουθία $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο C, ομοιόμορφα φραγμένη κατά απόλυτη τιμή από την 1 και τέτοια ώστε $f_n \longrightarrow f$ σ.β.. Αφού το C_0 είναι Fatou κλειστό, η f είναι στοιχείο του C_0 και άρα επίσης $f \in C$. □

Τώρα δείχνουμε πώς το Θεώρημα 7.3.2 συνεπάγεται το κύριο Θεώρημα του Κεφαλαίου 7.

Κύριο Θεώρημα 7.3.3. *Έστω S ένα φραγμένο ημί-martingale με πραγματικές τιμές. Υπάρχει ένα ισοδύναμο martingale μέτρο Q για την S αν και μόνο αν η S ικανοποιεί την (NFLVR).*

Απόδειξη. Αφού η S ικανοποιεί την (NA), έχουμε $C \cap L^\infty_+ = \{0\}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.3.2 το C είναι ασθενώς* κλειστό στον L^∞. Άρα υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q ώστε $\mathbb{E}_Q[f] \leq 0$ για κάθε $f \in C$. Αυτό είναι ακριβώς το Θεώρημα διαχωρισμού των Kreps-Yan. Για κάθε $s < t, B \in \mathcal{F}_s, \alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε $\alpha(S_t - S_s)\chi_B \in C$ (η S είναι φραγμένη!). Άρα $\mathbb{E}_Q[(S_t - S_s)\chi_B] = 0$ και το Q είναι ένα martingale μέτρο για την S.
Η συνθήκη (NFLVR) δεν αλλοιώνεται αν αντικαταστήσουμε το αρχικό μέτρο πιθανότητας από ένα ισοδύναμο. Στην απόδειξη ότι η συνθήκη (NFLVR) είναι επίσης αναγκαία, μπορούμε επομένως να υποθέσουμε ότι το P είναι ήδη ένα martingale μέτρο για το φραγμένο ημί-martingale S. Αν η H είναι μία αποδεκτή προς ολοκλήρωση σ.δ., τότε από το Θεώρημα 7.1.8 γνωρίζουμε ότι η σ.δ. $(H \bullet S)$ είναι ένα υπέρ-martingale. Άρα $\mathbb{E}[(H \bullet S)_\infty] \leq \mathbb{E}[(H \bullet S)_0] = 0$. Επομένως για κάθε $f \in C$ ισχύει $\mathbb{E}[f] \leq 0$. Το ίδιο ισχύει για στοιχεία του $\overline{C}$. Άρα $\overline{C} \cap L^\infty_+ = \{0\}$. □

Τώρα δείχνουμε πώς το κύριο Θεώρημα συνεπάγεται το Πόρισμα 7.3.4 που αφορά στην τοπικά φραγμένη περίπτωση. Παραπέμπουμε στην [21] για παραδείγματα που δείχνουν ότι μπορούμε να αποκτήσουμε μόνο ένα ισοδύναμο τοπικό martingale μέτρο για την S. Η απόδειξη του Πορίσματος 7.3.4 είναι όμοια με του Θεωρήματος 5.1 στην [54] του W. Schachermayer.

Πόρισμα 7.3.4. *Έστω S ένα τοπικά φραγμένο ημί-martingale με πραγματικές τιμές. Υπάρχει ένα ισοδύναμο τοπικό martingale μέτρο Q για την S αν και μόνο αν η S ικανοποιεί την (NFLVR).*

Απόδειξη. Αφού η S είναι τοπικά φραγμένη, υπάρχει μία ακολουθία $\alpha_n \longrightarrow \infty$ και μια αύξουσα ακολουθία χ.δ. $T_n \longrightarrow \infty$ ώστε επάνω στο $[\![0, T_n]\!]$ η S να είναι φραγμένη από το α_n. Αντικαθιστούμε την S από την

$$\widetilde{S} := S\chi_{[\![0,T_1]\!]} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} (\chi_{]\!]T_n, T_{n+1}]\!]} \bullet S).$$

Η $\widetilde{S}$ είναι φραγμένη και ικανοποιεί την (NFLVR), αφού τα αποτελέσματα των αποδεκτών προς ολοκλήρωση σ.δ. είναι τα ίδια για την S και την $\widetilde{S}$.Ένα martingale μέτρο για την $\widetilde{S}$ είναι ένα τοπικό martingale μέτρο για την S και άρα το πόρισμα έπεται από το κύριο Θεώρημα. Η απόδειξη του αναγκαίου της (NFLVR) αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως στο Θεώρημα 7.3.3. □

Τώρα προχωράμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.2. Υποθέτουμε ότι το φραγμένο ημί-martingale S ικανοποιεί την (NFLVR). Παίρνουμε μία ακολουθία $h_n \in C_0$,$h_n \geq -1$ και $h_n \longrightarrow h$ σ.β.. Πρέπει να δείξουμε ότι $h_n \in C_0$. Αυτό είναι το ίδιο με το να δείξουμε ότι υπάρχει μία $f_0 \in K_0$ με $f_0 \geq h$. Για κάθε n παίρνουμε $g_n \in K_0$ ώστε $g_n \geq h_n$. Η ακολουθία g_n δεν είναι κατ'ανάγκη συγκλίνουσα και ακόμα και αν ήταν, αυτό δε δίνει καλές πληροφορίες για την ακολουθία των προς ολοκλήρωση σ.δ. που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή της g_n. Για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία εισάγουμε ένα μεγιστικό στοιχείο. Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$ το υποσύνολο

$$\mathcal{D} := \{f : \exists \text{ ακολουθία } K^n \text{ από 1-αποδεκτές προς ολοκλήρωση σ.δ. ώστε}$$

$$(K^n \bullet S)_\infty \longrightarrow f \text{ σ.β. και} f \geq h\}.$$

Λήμμα 7.3.5. *Το $\mathcal{D}$ είναι μη κενό και περιέχει ένα μεγιστικό στοιχείο f_0.*

Απόδειξη. : Το $\mathcal{D}$ είναι μη κενό. Πράγματι, το $\mathcal{D}$ περιέχει ένα στοιχείο g με $g \geq h$. Για να το δούμε αυτό, παίρνουμε g_n όπως παραπάνω και εφαρμόζουμε το Λήμμα Β΄.4.1. Μετά παρατηρούμε ότι το $\mathcal{D}$ είναι φραγμένο στον L^0 αφού περιέχεται στην κλειστότητα του συνόλου $\{(H \bullet S)_\infty : H$ 1-αποδεκτή$\}$ που είναι φραγμένη από το Πόρισμα 7.2.4. Το σύνολο $\mathcal{D}$ σαφώς είναι κλειστό για τη σύγκλιση κατά πιθανότητα. Τώρα εφαρμόζουμε το γνωστό γεγονός ότι ένα φραγμένο κλειστό σύνολο του L^0 περιέχει ένα μεγιστικό στοιχείο. Για πληρότητα δίνουμε μια απόδειξη με υπερπερασμένη επαγωγή. Για $\alpha = 1$ παίρνουμε ένα αυθαίρετο στοιχείο $f_1 \in \mathcal{D}$. Αν το α είναι της μορφής $\alpha = \beta+1$ και αν f_β δεν είναι ένα μεγιστικό στοιχείο, τότε επιλέγουμε $f_\alpha \geq f_\beta ; P[f_\alpha > f_\beta] > 0$ και $f_\alpha \in \mathcal{D}$. Αν το α είναι ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός, τότε $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$, όπου η β_n αυξάνει στα α. Η ακολουθία f_{β_n} είναι αύξουσα και συγκλίνει σε μία συνάρτηση f_α πεπερασμένη σ.β. (το $\mathcal{D}$ είναι φραγμένο!). Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε για κάθε αριθμήσιμο οριακό διατακτικό αριθμό την f_α. Αφού η $\mathbb{E}[e^{-f_\alpha}]$ είναι καλά όρισμένη και αποτελεί μία φθίνουσα “long ακολουθία”, αυτή η ακολουθία πρέπει να γίνεται τελικά στάσιμη, ας πούμε σε έναν αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό α_0. Από την κατασκευή η $f_0 = f_{\alpha_0}$ είναι μεγιστική. □

Για το υπόλοιπο της απόδειξης του Θεωρήματος 7.3.2 συμβολίζουμε με f_0 ένα μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{D}$, με $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων $f_n := (H^n \bullet S)_\infty$, όπου H^n είναι 1-αποδεκτές στρατηγικές, και η ακολουθία f_n συγκλίνει στην f_0 σ.β.. Παρατηρούμε ότι αν μπορούμε να αποδείξουμε ότι $f_0 \in K_0$ τελειώνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος7.3.2.

Λήμμα 7.3.6. *Με τους παραπάνω συμβολισμούς έχουμε ότι οι τ.μ.*

$$F_{n,m} := ((H^n - H^m) \bullet S)^* := \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |(H^n \bullet S)_t - (H^m \bullet S)_t|$$

τείνουν στο 0 κατά πιθανότητα καθώς $n, m \longrightarrow \infty$

Απόδειξη. Υποθέτουμε, αν είναι δυνατόν, ότι υπάρχει $\alpha > 0$, ακολουθίες $\{n_k, m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ που τείνουν στο ∞ και για κάθε k :

$$P[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}((H^{n_k} \bullet S)_t - (H^{m_k} \bullet S)_t) > \alpha] \geq \alpha.$$

Ορίζουμε τους χ.δ. T_k με

$$T_k := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : (H^{n_k} \bullet S)_t - (H^{m_k} \bullet S)_t \geq \alpha\}.$$

Τότε $P[T_k < \infty] \geq \alpha$.
Ορίζουμε L^k με

$$L^k := H^{n_k} \chi_{[\![0,T_k]\!]} + H^{m_k} \chi_{]\!]T_k,\infty[\![}.$$

Η σ.δ. L^k είνα προβλέψιμη και 1-αποδεκτή. Πράγματι για $t \leq T_k$ έχουμε $(L^k \bullet S)_t = (H^{n_k} \bullet S)_t \geq -1$ αφού η H^{n_k} είναι 1-αποδεκτή. Για $t \geq T_k$ έχουμε

$$\begin{aligned}(L^k \bullet S)_t &= (H^{n_k} \bullet S)_{T_k} + (H^{m_k} \bullet S)_t - (H^{m_k} \bullet S)_{T_k} \\ &\geq (H^{m_k} \bullet S)_t + \alpha \geq -1 + \alpha.\end{aligned}$$

Έστω $\rho_k := \lim_{t \to \infty} (L^k \bullet S)_t$. Από τις προηγούμενες ανισότητες προκύπτει ότι $\rho_k = \varphi_k + \psi_k$ όπου $\varphi_k := f_{n_k} \chi_{\{T_k = \infty\}} + f_{m_k} \chi_{\{T_k < \infty\}}$ και $P[\psi_k \geq \alpha] \geq \alpha$.

Από την υπόθεση, $\varphi_k \longrightarrow f_0$ και παίρνοντας κυρτούς συνδυασμούς όπως στο Λήμμα Β΄.4.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varphi_k \longrightarrow \psi_0$ όπου $P[\psi_o > 0] > 0$. Άρα κυρτοί συνδυασμοί των ρ_k συγκλίνουν σ.β. σε ένα στοιχείο $f_0 + \psi_o$, μία αντίφαση στη μεγιστικότητα του f_0. □

Το επόμενο λήμμα είναι σημαντικό στην απόδειξη του κύριου Θεωρήματος. Χρησιμοποιείται για την απόκτηση φραγμάτων της $H^n \bullet M$. Επειδή χρειαζόμαστε μία τέτοια εκτίμηση επίσης για άλλες προς ολοκλήρωση σ.δ., το αναφέρουμε με μία πιο γενική μέθοδο.

Για $\lambda > 0$, έστω $\mathcal{H}_\lambda$ το κυρτό σύνολο των 1-αποδεκτών προς ολοκλήρωση σ.δ. H με την ιδιότητα $||(H \bullet S)^*||_{L^2(Q)} \leq \lambda$.

Λήμμα 7.3.7. *Για $\lambda > 0$ το σύνολο $\{(H \bullet M)^* : H \in \mathcal{H}_\lambda\}$ των μεγιστικών συναρτήσεων είναι φραγμένο στον $L^0(Q)$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $\lambda > 0$ και γράφουμε $\mathcal{H}$ αντί $\mathcal{H}_\lambda$. Τα ημί-martingales $H \bullet S$, όπου $H \in \mathcal{H}$ είναι ειδικά (ως πρός Q) διότι οι μεγιστικές τους συναρτήσεις είναι στον $L^2(Q)$. Άρα, από το Θεώρημα 7.1.3, η κανονική ανάλυση της $H \bullet S$ προέρχεται από την ανάλυση $S = M + A$, δηλαδή $H \bullet S = H \bullet M + H \bullet A$.

Επειδή η απόδειξη του λήμματος είναι μάλλον μεγάλη σε έκταση, ας σκιαγραφήσουμε χονδρικά την ιδέα, η οποία είναι αρκετά απλή. Αν K^n είναι μία ακολουθία στο $\mathcal{H}$ ώστε η $(K^n \bullet M)^*$ να είναι μη φραγμένη κατά πιθανότητα, τότε η $K^n \bullet M$ είναι επίσης μη φραγμένη και (θυμίζοντας ότι η $K^n \bullet A$ είναι προβλέψιμη) χρησιμοποιώντας καλές στρατηγικές θα μπορούσαμε να πάρουμε πλεονέκτημα θετικών απολαβών. Αυτό φαίνεται να είνα δυνατό αφού οι υπολογισμοί θα δείξουν, ότι οι απολαβές που προέρχονται από το προβλέψιμο μέρος A στην μακρά πορεία υπερκαλύπτουν τις δυνατές απώλειες (losses) που προέρχονται από το martingale μέρος M. Αυτό θα αντιφάσκει με τη $(NFLVR)$.

Μιλώντας πολύ χονδρικά, οι απολαβές που προέρχονται από το προβλέψιμο μέρος A προστίθενται αναλογικά (up proportionally) σε χρόνο, καθώς οι αναμενόμενες απώλειες από το martingale μέρος προστίθενται μόνο αναλογικά (up proportionally) σε $\sqrt{\text{χρόνους}}$. Αυτά τα φαινόμενα οφείλονται στην ορθογωνιότητα των martingale διαφορών, καθώς η κύμανση του προβλέψιμου μέρους επάνω στην ένωση δύο διαστημάτων είναι το άθροισμα των κυμάνσεων επάνω σε κάθε διάστημα.

Ας ξαναγυρίσουμε στις τεχνικότητες. Αν το $\{(H \bullet M)^* : H \in \mathcal{H}\}$ δεν είναι φραγμένο στον L^0, τότε υπάρχει μία ακολουθία $\{K^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στο $\mathcal{H}$ όπως και $\alpha > 0$, ώστε για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ να έχουμε $Q[(K^n \bullet M)^* > n^3] > 8\alpha$. Από το L^2 φράξιμο της $(H \bullet S)^*$ και την ανισότητα Tchebysheff συμπεραίνουμε ότι $Q[\sup_t |K^n \bullet S| > n] \leq \dfrac{\lambda^2}{n^2}$ και για n αρκετά μεγάλο (π.χ. $n \geq N$) αυτή η έκφραση είναι μικρότερη του $\frac{\alpha}{3}$. Για κάθε n ορίζουμε την T_n με

$$T_n := \inf\{t : |(K^n \bullet M)_t \geq n^3 \;\; \text{ή} \;\; |(K^n \bullet S)_t| \geq n\}$$

Αν $L^n := \frac{1}{n^2} K^n \chi_{[\![0,T_n]\!]}$ τότε

(i) τα $L^n \bullet M$ είναι τοπικά martingales

(ii) $Q[(L^n \bullet M)^* \geq n] \geq Q[(K^n \bullet M)^* \geq n^3] - Q[(K^n \bullet S)^* \geq n] \geq 8\alpha - \frac{\lambda^2}{n^2} \geq 7\alpha$ για όλα τα $n \geq N$.

(iii) Το $L^n \bullet M$ είναι σταθερό μετά το T_n .

(iv) Τα άλματα της $L^n \bullet S$ είναι κάτω φραγμένα από το $-\frac{n+1}{n^2}$. Πράγματι, η σ.δ. $(K^n \bullet S)^{T_n}$ είναι άνω φραγμένη από το n επάνω στο $[\![0, T_n[\![$. η τιμή της είναι πάντα μεγαλύτερη από του -1 και άρα τα άλματα της $(K^n \bullet S)^{T_n}$ είναι φραγμένα από κάτω από το $-(n+1)$.

(v) $||(L^n \bullet M)^*||_{L^2(Q)} \leq n + ||\Delta(L^n \bullet M)_{T_n}||_{L^2(Q)} \leq n + \frac{3\lambda}{n^2}$. Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το Πόρισμα 7.1.5 και την ανισότητα $||(L^n \bullet S)^*||_{L^2(Q)} \leq \frac{\lambda}{n^2}$.

Το τοπικό martingale $L^n \bullet M$ είναι επομένως ένα $L^2(Q)$-martingale. Για κάθε n ορίζουμε μία ακολουθία χ.δ $\{T_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Αρχίζουμε με $T_{n,0} := 0$ και θέτουμε (μπορέι η τιμή να είναι $+\infty$)

$$T_{n,i} := \inf\{t : t \geq T_{n,i-1} \ \text{ και } \ |(L^n \bullet M)_t - (L^n \bullet M)_{T_{n,i-1}}| \geq 1\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
||(L^n \bullet M)_{T_{n,i}} - (L^n \bullet M)_{T_{n,i-1}}||_{L^2(Q)} &\leq 1 + ||\Delta(L^n \bullet M)_{T_{n,i}}||_{L^2(Q)} \\
&\leq 1 + \frac{3\lambda}{n^2} \leq 1 + \alpha \leq 2 \ \text{ για όλα τα } \ n \geq N.
\end{aligned}$$

Έστω k_n το ακέραιο μέρος του $\frac{n\alpha}{4}$. Ισχυριζόμαστε ότι για $i = 1, \ldots, k_n$ και $n \geq N$ έχουμε $Q[T_{n,i} < \infty] > 6\alpha$.

Μια ανισότητα αυτού του τύπου προκύπτει από το γεγονός ότι οι τ.μ. $f_{n,i} = (L^n \bullet M)_{T_{n,i}} - (L^n \bullet M)_{T_{n,i-1}}$ είναι φραγμένες από το 2 στον $L^2(Q)$ αλλά το άθροισμά τους πρέπει να είναι μεγάλο, έτσι χρειαζόμαστε πολλές από αυτές. Για να αποδείξουμε, ότι για κάθε $i \leq k_n$ έχουμε $Q[T_{n,i} < \infty] > 6\alpha$, είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι

$$Q[T_{n,k_n} < \infty] = Q[|(L^n \bullet M)_{T_{n,k_n}} - (L^n \bullet M)_{T_{n,k_{n-1}}}| \geq 1] > 6\alpha.$$

Έστω $B := \{T_{n,k_n} < \infty\}$ και $n \geq N$. Τότε

$$\begin{aligned}
||(L^n \bullet M)^* \chi_{B^c}||_{L^2(Q)} &\leq ||\sum_{i=1}^{k_n} (L^n \chi_{]\!]T_{n,i-1},T_{n,i}]\!]} \bullet M)^* \chi_{B^c}||_{L^2(Q)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k_n} ||(L^n \chi_{]\!]T_{n,i-1},T_{n,i}]\!]} \bullet M)^* \chi_{B^c}||_{L^2(Q)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k_n} ||(L^n \chi_{]\!]T_{n,i-1},T_{n,i}]\!]} \bullet M)^*||_{L^2(Q)} \\
&\leq 2\sum_{i=1}^{k_n} ||(L^n \chi_{]\!]T_{n,i-1},T_{n,i}]\!]} \bullet M)_\infty||_{L^2(Q)} \\
&\leq 4k_n \leq n\alpha
\end{aligned}$$

όπου η 4η ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα Doob. Τώρα, από την ανισότητα Tchebycheff προκύπτει $Q[(L^n \bullet M)^* \chi_{B^c} \geq n] \leq \alpha^2$, το οποίο συνεπάγεται $Q[B^c \cap \{L^n \bullet M)^* \geq n\}] \leq \alpha^2 \leq \alpha$ και άρα

$$Q[B] \geq Q[(L^n \bullet M)^* \geq n] - Q[B^c \cap \{(L^n \bullet M)^* \geq n\}] \overset{(ii)}{>} 7\alpha - \alpha = 6\alpha.$$

Για $n \geq N$ και $i = 1, \ldots, k_n$, οι τ.μ. $f_{n,i}$ είναι φραγμένες κατά $L^2(Q)$-νόρμα από το 2 και στον $L^0(Q)$ ικανοποιούν την $Q[|f_{n,i}| \geq 1] > 6\alpha$.Αυτό θα μας επιτρέψει να αποκτήσουμε ένα κάτω $L^0(Q)$ εκτιμητή για την $f^-_{n,i}$. Έστω $\beta = \alpha^2$ και $B_{n,i} := \{f_{n,i} \geq \alpha\}$. Θα δείξουμε ότι $Q[B_{n,i}] > \beta$.
Η ιδιότητα martingale συνεπάγεται ότι

$$\mathbb{E}_Q[f^-_{n,i}] = \mathbb{E}_Q[f^+_{n,i}] = \frac{\mathbb{E}_Q[|f_{n,i}|]}{2} > 3\alpha.$$

Άρα αφού η $f^-_{n,i}$ είναι φραγμένη από το α έξω από το $B_{n,i}$, προκύπτει

$$\mathbb{E}_Q[f^-_{n,i}\chi_{B_{n,i}}] \geq \mathbb{E}_Q[f^-_{n,i}] - \alpha > 2\alpha. \qquad (1)$$

Από την άλλη μεριά η ανισότητα Cauchy-Schwarz δίνει

$$\mathbb{E}_Q[f^-_{n,i}\chi_{B_{n,i}}] \leq ||f_{n,i}||_{L^2(Q)} Q[B_{n,i}]^{\frac{1}{2}} \leq 2Q[B_{n,i}]^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει
$Q[B_{n,i}] > \alpha^2 = \beta$.
Επιστρέφουμε στο $L^n \bullet A$. Επειδή $L^n \dot{S} = L^n \bullet M + L^n \bullet A$ και επειδή γνωρίζουμε ότι η $L^n \bullet S$ είναι μικρή (λόγω της (v)) και το αρνητικό μέρος της $L^n \bullet M$ είναι μεγάλο, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα θετικά μέρη της $L^n \bullet A$ είναι επίσης μεγάλα. Ας διατυπώσουμε αυτή την ιδέα: από τον ορισμό του λ συμπεραίνουμε ότι για όλα τα i

$$||(L^n \bullet S)_{T_{n,i}} - (L^n \bullet S)_{T_{n,i-1}}||_{L^2(Q)} \leq \frac{2\lambda}{n^2}.$$

Η ανισότητα Tchebycheff συνεπάγεται ότι

$$Q[|(L^n \bullet S)_{T_{n,i}} - (L^n \bullet S)_{T_{n,i-1}}| \geq \frac{2\lambda}{n}] \leq \big(\frac{2\lambda}{n^2}\big)^2 \frac{n^2}{4\lambda^2} = n^{-2}.$$

Επειδή $Q[((L^n \bullet S)_{T_{n,i}} - (L^n \bullet S)_{T_{n,i-1}})^- \geq \alpha] \geq \beta$ θα έχουμε κατ' ανάγκη ότι $[(L^n \bullet A)_{T_{n,i}} - (L^n \bullet A)_{T_{n,i-1}} \geq \alpha - \frac{2\lambda}{n}] > \beta - n^2$ και αυτό ισχύει για όλα τα $i < k$ και $n \geq N$.

Θα κατασκευάσουμε τώρα μία στρατηγική που μας επιτρέπει να πάρουμε απολαβή (κερδος) αυτών των k_n θετικών διαφορών. Η σ.δ. $L^n \bullet A$ είνα φραγμένης κύμανσης. Η ανάλυση Hahn του μέτρου που ορίζει η κύμανση της $L^n \bullet A$ (βλέπε τη συζήτηση πριν τον Ορισμό 7.1.6), παράγει μία διαμέριση του $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ σε δύο προβλέψιμα σύνολα B_+^n και B_-^n επάνω στα οποία αυτό το μέτρο είναι αντίστοιχα θετικό και αρνητικό. Οι σ.δ. $(L^n \chi_{B_+^n} \bullet A)$ και $-(L^n \chi_{B_-^n} \bullet A)$ είναι επομένως αύξουσες. Έστω $R^n := L^n \chi_{B_+^n \cap [\![0, T_{n,k_n}]\!]}$.

Η σ.δ. $(R^n \bullet A) = (L^n \chi_{B_+^n \cap [\![0, T_{n,k_n}]\!]} \bullet A)$ ικανοποιεί την

$$(R^n \bullet A)_{T_{n,i}} - (R^n \bullet A)_{T_{n,i-1}} \geq (L^n \bullet A)_{T_{n,i}} - (L^n \bullet A)_{T_{n,i-1}}$$

και άρα

$$Q[(R^n \bullet A)_{T_{n,i}} - (R^n \bullet A)_{T_{n,i-1}}] \geq \alpha - \frac{2\lambda}{n}] > \beta - n^{-2}$$

για $i - 1, \ldots, k_n$ και για όλα τα $n \geq N$.

Δυστυχώς δε γνωρίζουμε ότι η R^n είναι 1-αποδεκτή ή ακόμα αποδεκτή. Ένα τελικό επιχείρημα χ.δ. και μερικές εκτιμήσεις θα μας επιτρέψουν να "ελέγξουμε την αποδεκτικότητα" της R^n. Τα άλματα της $R^n \bullet S$ είναι μέρος των αλμάτων της $L^n \bullet S$ και επομένως

$$\Delta(R^n \bullet S) \geq \Delta(L^n \bullet S) \overset{(iv)}{\geq} -\frac{n+1}{n^2} \geq -\frac{2}{n}.$$

Ένα άνω φράγμα για την $(R^n \bullet M)$ προκύπτει από τις

$$\begin{aligned} ||(R^n \bullet M)_{T_{n,k_n}}||^2_{L^2(Q)} &\leq ||(L^n \bullet M)_{T_{n,k_n}}||^2_{L^2(Q)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n} ||f_{n,i}||^2_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Για $n \geq N$ αυτό είναι μικρότερο του $4k_n$. Εφαρμόζοντας τη μεγιστική ανισότητα του Doob στο $L^2(Q)$-martingale $(R^n \bullet M)^{T_{n,k_n}}$ παίρνουμε

$$|| \sup_{t \leq 0} |(R^n \bullet M)_t| ||_{L^2(Q)} \leq 4\sqrt{k_n}.$$

Αυτή η ανισότητα θα μας δείξει ότι το $R^n \bullet S$ δε θα γίνει πολύ αρνητικό σε μεγάλα σύνολα. Αρχικά παρατηρούμε ότι μπορούμε να φράξουμε την $R^n \bullet S$ από την $R^n \bullet M$. Πράγματι, $R^n \bullet S = R^n \bullet M + R^n \bullet A \geq R^n \bullet M$ αφού η $R^n \bullet A$ είναι αύξουσα και ως εκ τούτου θετική. Τέλος ισχύουν τα εξής φράγματα

$$\begin{aligned} Q[\inf_{t\geq 0}(R^n \bullet S)_t \leq -k_n n^{-\frac{1}{4}}] &\leq Q[\sup_{t\geq 0}|(R^n \bullet S)_t| \leq k_n n^{-\frac{1}{4}}] \\ &\leq 16\frac{\sqrt{n}}{k_n} \leq 64\alpha\frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

όπου η 2η την ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα Tchebycheff και το παραπάνω φράγμα. Έστω τώρα $U_n = \inf\{t : (R^n \bullet S)_t < -k_n n^{-\frac{1}{4}}\}$. Η προηγούμενη ανισότητα μας λέει ότι $Q[U_n < \infty] \leq 64\alpha\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ορίζουμε ακόμα μία προς ολοκλήρωση σ.δ.

$$V^n := \frac{1}{k_n}R^n\chi_{[\![0,U_n]\!]}.$$

Τα άλματα της $V^n \bullet S$ είναι φραγμένα από κάτω από το $\frac{-2}{nk_n}$ και η σ.δ. $(V^n \bullet S)$ είναι ως εκ τούτου φραγμένη από κάτω από το $-n^{-\frac{1}{4}} - \frac{2}{nk_n}$. Τότε η σ.δ V^n είναι αποδεκτή και το ομοιόμορφο κάτω φράγμα της τείνει στο 0. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η $(V^n \bullet S)_\infty$ είναι θετική με μεγάλη πιθανότητα.

Πράγματι, από την $Q[(R^n\bullet A)_{T_{n,i}} - (R^n\bullet A)_{T_{n,i-1}} \geq \alpha - \frac{2\lambda}{n}] > \beta - n^{-2}$ και το Πόρισμα Β΄.4.7 λαμβάνουμε

$$Q[(R^n \bullet A)_{T_{n,k_n}} \geq \frac{k_n}{2}(\alpha - \frac{2\lambda}{n})(\beta - n^{-2})] > \frac{\beta - n^{-2}}{2}.$$

Ακολούθως έχουμε

$$Q[(V^n \bullet A)_{T_{n,k_n}} \geq \frac{1}{2}(\alpha - \frac{2\lambda}{n})(\beta - n^{-2})] > \frac{\beta - n^{-2}}{2} - Q[U_n < \infty]$$

ή

$$Q[(V^n \bullet A)_\infty \geq (\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{n})(\beta - n^{-2})] > \frac{\beta - n^{-2}}{2} - 64\alpha\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Αφού το $(\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{n})(\beta - n^{-2})$ συγκλίνει στο $\gamma = \frac{\alpha\beta}{2}$ λαμβάνουμε ότι για μεγάλα n, π.χ. $n \geq N'$, έχουμε

$$Q[(V^n \bullet A)_\infty \geq \frac{\gamma}{2}] > \frac{\beta}{4}.$$

Ας δούμε τώρα την $(V^n\bullet S)_\infty = (V^n\bullet M)_\infty + (V^n\bullet A)_\infty$. Το πρώτο μέρος $(V^n\bullet M)_\infty$ συγκλίνει στο 0 στον $L^2(Q)$. Πράγματι

$$||(V^n \bullet M)_\infty||_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{k_n}||(R^n \bullet M)_{T,k_n}||_{L^2(Q)} \leq 2\frac{1}{\sqrt{k_n}} \longrightarrow 0.$$

Το δεύτερο μέρος ικανοποιεί την $Q[(V^n \bullet A)_\infty > \frac{\gamma}{2}] > \frac{\beta}{4}$.

Η ανισότητα Tchebysheff τότε μας δίνει για μεγάλα n, π.χ. $n \geq N''$ ότι

$$Q[(V^n \bullet S)_\infty > \frac{\gamma}{4}] \geq \frac{\beta}{4} - Q[(R^n \bullet M)_{T_n,k_n} > \frac{\gamma}{4}] \geq \frac{\beta}{8}.$$

Οι συναρτήσεις $g_n = (V^n \bullet S)_\infty$ έχουνε τα αρνητικά τους μέρη να πηγαίνουν στο 0 στη νόρμα του L^∞. Αυτό αντιφάσκει με το Πόρισμα 7.2.8. $\square$

Το επόμενο βήμα για την απόδειξή μας είναι να βρουμε κυρτούς συνδυασμούς $L^n \in conv\{H^n : n \geq 1\}$ τέτοιους ώστε τα τοπικά martingales $L^n \bullet M$ να συγκλίνουν στην ημί-martingale τοπολογία. Αν γνωρίζαμε ότι τα στοιχεία $H^n \bullet M$ είναι φραγμένα στον $L^2(Q)$ τότε θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε ως εξής: παίρνοντας κυρτούς συνδυασμούς, τα στοιχεία H^n μπορούν να αντικατασταθούν από στοιχεία L^n τέτοια ώστε η $L^n \bullet M$ να συγκλίνει στην $L^2(Q)$ τοπολογία, και ώς εκ τούτου και στην ημί-martingale τοπολογία. Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στις σ.δ. $L^n \bullet A$. Δυστυχώς δεν διαθέτουμε ένα $L^2(Q)$ φράγμα αλλά μόνο ένα L^0-φράγμα και μια ελάχιστα πιο ακριβή πληροφορία που μας δίνεται από το προηγούμενο λήμμα. Αυτό μας οδηγεί στο να σταματήσουμε τα τοπικά martingales $H^n \bullet M$ όταν περάσουνε το επιπέδο $c > 0$, εφαρμόζοντας το Πόρισμα 7.1.5 για να ελέγξουμε τα τελικά άλματα στον $L^2(Q)$ και να εφαρμόσουμε ένα L^2-επιχείρημα επάνω στα έτσι αποκτηθέντα L^2-φραγμένα martingales. Στη συνέχεια θα πρέπει να προσέξουμε τα επόμενα μέρη της απόδειξης και να αφήσουμε το c να τείνει στο ∞. Και πάλι η ιδέα είναι απλούστερη από την τεχνική. Ας εισάγουμε τη παρακάτω ακολουθία χ.δ. (υποτίθεται πως $c > 0$)

$$T_c^n = inf\{t : |(H^n \bullet M)_t| \geq c\}.$$

Τα τοπικά martingales $(H^n \bullet M)$ θα διακοπούν σε χρόνο T_c^n, δημιουργώντας ένα σφάλμα $K_c^n \bullet M$ όπου $K_c^n = H^n \chi_{]\!]T_c^n,\infty[\![}$.

Λήμμα 7.3.8. *Για κάθε $\varepsilon > 0$,υπάρχει $c_0 > 0$ τέτοιο ώστε για αυθαίρετο n, για όλα τα κυρτά βάρη $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ και όλα τα $c \geq c_0$, να έχουμε*

$$Q\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i \bullet M\right)^* > \varepsilon\right] < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα του λήμματος. Τότε υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα c_0 να υπάρχουν βάρη $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ και $c \geq c_0$, έτσι ώστε

$$Q\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i \bullet M\right)^* > \alpha\right] > \alpha.$$

Από αυτο θα συμπεράνουμε την ύπαρξη ακολουθίας 1-αποδεκτών συναρτήσεων προς ολοκλήρωση L^n τέτοιων ώστε το $\sup_n ||(L^n \bullet S)^*||_{L^2(Q)}$ να είναι φραγμένο και το $(L^n \bullet M)^*$ να είναι μη φραγμένο στο $L^0(Q)$. Αυτό θα αντιτίθεται στο Λήμμα 7.3.7.

Έστω N αρκετά μεγάλο ώστε $Q[q > N] < \frac{\alpha}{4}$ (υπενθ. $q = \sup_n \sup_t |(H^n \bullet S)_t|$). Αυτό είναι εύκολο αφού το q είναι πεπερασμένο σ.β.. Αν ορίσουμε τον χ.δ.

$$\tau := \inf\{t : \text{για κάποια } n \geq 1 : |(H^n \bullet S)_t| > N\}$$

προφανώς έχουμε $Q[\tau < \infty] < \frac{\alpha}{4}$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.3.7 για $\lambda = \sup_n ||(H^n \bullet S)^*||_{L^2(Q)}$, λαμβάνουμε ότι $\lim_{c\to\infty} \sup_n Q[T_c^n < \infty] \leq \lim_{c\to\infty} \sup_n Q[(H^n \bullet M)^* \geq c] = 0$. Για $0 < \delta < \frac{\alpha}{4}$, έστω c_1 επιλεγμένο έτσι ώστε για όλα τα n και όλα τα $c \geq c_1$ να έχουμε $Q[T_c^n < \infty] < \delta^2$. Για κάθε n έχουμε

$$\begin{aligned} ||(K_c^n \bullet S)^*||_{L^2(Q)} &\leq ||2(H^n \bullet S)^* \chi_{\{T_c^n < \infty\}}||_{L^2(Q)} \\ &\leq 2||q||_{L^2(Q)} Q[T_c^n < \infty]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Έτσι συνεπάγεται ότι υπάρχει c_2 τέτοιο ώστε για όλα τα n και όλα τα $c \geq c_2$ να έχουμε

$$||(K_n^c \bullet S)^*||_{L^2(Q)} \leq \delta.$$

Για $c \geq max(c_1, c_2)$ παίρνουμε $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ για ένα κυρτό συνδυασμό που εξασφαλίζει ότι $Q[(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i \bullet M)^* > \alpha] > \alpha$. Έστω

$$\sigma = \inf\{t : (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i \bullet M)_t| \geq \alpha\}.$$

Θέτουμε $K := (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i) \chi_{[\![0, \min(\tau,\sigma)]\!]}$.

Σαφώς $Q[(K \bullet M)^* \geq \alpha] > \alpha - Q[\tau < \infty] = \frac{3\alpha}{4}$ και από την ανισότητα $(K \bullet S)^* \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (K_c^i \bullet S)^*$ προκύπτει $||(K \bullet S)^*||_{L^2(Q)} \leq \delta$. Ας ερευνήσουμε τώρα αν η K είναι αποδεκτή σ.δ.

$$\begin{aligned}
(K \bullet S)_t &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{\{t > T_c^i\}} ((H^i \bullet S)_{min(t,\tau,\sigma)} - (H^i \bullet S)_{min(T_c^i,\tau,\sigma)}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{\{t > T_c^i\}} (-1 - N) \\
&\geq -(N+1) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{\{t > T_c^i\}} \\
&\geq -(N+1) F_t
\end{aligned}$$

όπου F είναι η σ.δ. $F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{]\!]T_c^i,\infty[\![}$. Η F είναι μία αύξουσα, προσαρμοσμένη και αριστερα συνεχής σ.δ. και ως εκ τούτου προβλέψιμη. Από τη κατασκευή της έχουμε ότι $\mathbb{E}_Q[F_\infty] \leq \delta^2$ και ως εκ τούτου $Q[F_\infty > \delta] \leq \delta$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο χ.δ. ν που ορίζεται ως $\nu := \inf\{t : F_t > \delta\}$, ικανοποιεί την $Q[\nu < \infty] < \delta < \frac{\alpha}{4}$. Συνεπώς η $K' = K\chi_{[\![0,\nu]\!]}$, ικανοποιεί την

$$||(K' \bullet S)^*||_{L^2(Q)} \leq \delta,$$

την

$$Q[(K' \bullet M)^* > \alpha] > \alpha - Q[\tau < \infty] - Q(\nu < \infty) \geq \frac{\alpha}{2},$$

καθώς επίσης και την

$$(K' \bullet S) \geq -(N+1)\delta.$$

Έτσι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση $L^\delta := \frac{K'}{(N+1)\delta}$ θα είναι 1-αποδεκτή και θα ισχύει

$$||(L^\delta \bullet S)^*||_{L^2(Q)} \leq (\frac{1}{N+1}).$$

Επιπρόσθετα έχουμε $Q[(L^\delta \bullet M)^* > \frac{\alpha}{(N+1)\delta}] > \frac{\alpha}{2}$.
Παίρνοντας δ να τείνει στο 0 και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.3.7 καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Το ακόλουθο Λήμμα συνδέει, στην L^0-τοπολογία, τη μεγιστική συνάρτηση ενός τοπικού martingale με τη μεγιστική συνάρτηση ενός στοχαστικού ολοκληρώματος για μία προς ολοκλήρωση συνάρτηση που είναι φραγμένη από το 1.

Λήμμα 7.3.9. *Με τους ίδιους συμβολισμούς όπως στο Λήμμα 7.3.8, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $c_0 > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα προβλέψιμα h με $|h| \leq 1$, όλα τα κυρτά βάρη $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ και όλα τα $c \geq c_0$ έχουμε*

$$Q\Big\{\Big[\Big(h\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_c^i\Big)\bullet M\Big]^* > \varepsilon\Big\} < \varepsilon.$$

Ειδικώτερα ισχύει $D(\sum \lambda_i K_c^i \bullet M)^* < 2\varepsilon$ όπου D η ημινόρμα που έχει εισαχθεί στη ενότητα 7.2 και επάγει την ημί-martingale τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και c_0 όπως στο Λήμμα 7.3.8 ώστε

$$Q[(\sum \lambda_i K_c^i \bullet M)^* > \varepsilon] < \varepsilon$$

για όλους τους $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ κυρτούς συνδυασμούς και όλα τα $c \geq c_0$. Μεγαλώνοντας το c_0 επιτρέπεται επίσης να υποθέσουμε ότι $\sup_n ||(K_c^n \bullet S)^*||_{L^2(Q)} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (βλ. απόδειξη Λήμματος 7.3.8). Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 7.1.5 θα έχουμε ότι για όλα τα n και για κάθε χ.δ. σ ισχύει

$$||\Delta(K_c^n \bullet M)_\sigma||_{L^2(Q)} \leq \varepsilon.$$

Έστω τώρα h προβλέψιμη και φραγμένη από το 1, $c \geq c_0$ και ένας $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ κυρτός συνδυασμός. Ορίζουμε τον χ.δ. σ ως εξής

$$\sigma := \inf\{t : (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (K_c^i \bullet M)_t)| > \varepsilon\}.$$

Τότε ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\sup_{t\leq\sigma} |(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i) \bullet M|_t \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\Delta(K_c^i \bullet M)_\sigma|.$$

Τότε η L^2-νόρμα του αριστερού μέλους θα είναι μικρότερη από 2ε και θα έχουμε ένα L^2-martingale. Από αυτό συνεπάγεται ότι το martingale $(h\sum \lambda_i K_c^i)\chi_{[\![0,\sigma]\!]} \bullet M$ είναι στον L^2 και η νόρμα του είναι μικρότερη από 2ε. Ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} Q[((h\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_c^i)\bullet M)^* > \sqrt{\varepsilon}] &\leq Q[((h\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_c^i)\chi_{]\!]0,\sigma[\![}\bullet M)^* > \sqrt{\varepsilon}] + Q[\sigma < \infty] \\ &\leq \frac{4\varepsilon^2}{\varepsilon} + \varepsilon = 5\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 7.3.10. *Υπάρχει ακολουθία κυρτών συνδυασμών $L^n \in conv\{H^k, k \geq n\}$ τέτοια ώστε η $(L^n \bullet M)$ να συγκλίνει ως προς την ημί-martingale τοπολογία.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τους ορισμούς τους Λήμματος 7.3.8. Για $\varepsilon = \frac{1}{n}$ εφαρμόζουμε το Λήμμα 7.3.9. για να βρούμε c_n τέτοιο ώστε

$$D((\sum_{i=1}^{m}\lambda_i K_{c_n}^i)\bullet M) \leq \frac{1}{n} \text{ για όλα τα κυρτα βάρη } \lambda_1,\ldots,\lambda_m.$$

Για κάθε n και κάθε k έχουμε $(H^k\chi_{[\![,T_{c_n}^k]\!]}\bullet M)^* \leq c_n + |\Delta(H^k \bullet M)_{T_{c_n}^k}|$ και εφαρμόζοντας το Πόρισμα 7.1.5 παίρνουμε ότι κάθε $H^k\chi_{[\![0,T_{c_n}^k]\!]}\bullet M$ είναι ένα $L^2(Q)$-martingale με φράγμα $c_n + 3||q||_{L^2(Q)}$. Ένα επιχείρημα τυπικής διαγωνιοποίησης μας δείχνει την ύπαρξη κυρτών βαρών $\lambda_0^k, \lambda_1^k, \ldots, \lambda_{N_k}^k$, τέτοιων ώστε η

$$Y_n^k = \sum_{j=0}^{N_k}\lambda_j^k H^{k+j}\chi_{[\![o,T_{c_n}^k]\!]}\bullet M$$

να συγκλίνει για κάθε n στο χώρο των $L^2(Q)$- martingales. Ένας εύκολος τρόπος να αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό είναι μέσω του παρακάτω αποτελέσματων στους χώρους Hilbert.

Έστω $\mathcal{M}^2$ ο χώρος Hilbert των $L^2(Q)$-martingales και έστω $\mathfrak{h} = (\Sigma \oplus \mathcal{M}^2)_{l^2}$ το l^2-άθροισμα (βλ. [22] ή [4]). Ένα στοιχείο αυτού του χώρου είναι η ακολουθία $X = \{X\}_{n\in\mathbb{N}}$ όπου κάθε X_n ανήκει στον $\mathcal{M}^2$. Αυτός ο χώρος είναι επίσης ένας χώρος Hilbert όταν είναι εφοδιασμένο με τη νόρμα $||X||^2 = \sum_{n\geq 1}||X_n||_2^2$. Η ακολουθία X^k, που ορίζεται από τα,

$$X_n^k = \frac{1}{2^n(c_n + 3||q||_{L^2(Q)})}(H^k\chi_{[\![0,T_{c_n}^k]\!]}\bullet M)$$

είναι φραγμένη στο χώρο Hilbert $\mathfrak{h}$ και ως εκ τούτου υπάρχουν κυρτοί συνδυασμοί $Y^k \in conv\{X^k, X^{k+1}, \ldots\}$ οι οποίοι συγκλίνουν υπό τη νόρμα του $\mathfrak{h}$. Από αυτό συνεπάγεται ότι κάθε X_n^k συγκλίνει στον $\mathcal{M}^2$. Συνεπώς θα έχουμε την ύπαρξη κυρτών βαρών $\lambda_0^k, \lambda_1^k, \ldots, \lambda_{N_k}^k$, τέτοιων ώστε η

$$Y_n^k = \sum_{j=0}^{N_k} \lambda_j^k H^{k+j} \chi_{[\![o, T_{c_n}^k]\!]} \bullet M$$

να συγκλίνει για κάθε n στο χώρο των $L^2(Q)$-martingales.

Η ακολουθία $L^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{N_k} \lambda_j^k H^{k+j} \bullet M$ είναι τώρα μια ακολουθία Cauchy στο χώρο των ημί-martingales . Πράγαμτι για δοσμένο $\varepsilon > 0$ παίρνουμε N τέτοιο ώστε $\frac{1}{N} < \varepsilon$ και βρίσκουμε ότι για k, l ισχύει

$$\begin{aligned} D((L^k - L^l) \bullet M) &\leq D(Y_N^k - Y_N^l) + D(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k K_{c_N}^{k+j} \bullet M) + D(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^l K_{c_N}^{l+j} \bullet M) \\ &\leq D(Y_N^k - Y_N^l) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Για k και l αρκετά μεγάλα αυτό είναι μικρότερο από 3ε. □

Λήμμα 7.3.11. *Η ακολουθία $\{L^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ του Λήμματος 7.3.10 είναι τέτοια ώστε η $L^k \bullet A$ να συγκλίνει ως προς την ημί-martingale τοπολογία.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $L^k \bullet S \geq -1$ και ότι το $(L^k \bullet M)$ συγκλίνει στην ημί-martinagle τοπολογία. Για να δείξουμε ότι το $(L^k \bullet A)$ συγκλίνει στην ημί-martingale τοπολογία θα πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $t \geq 0$ η ολική κύμανση $\int_0^t |d((L^k - L^m) \bullet A)|$ συγκλίνει στο 0 κατά πιθανότητα καθώς τα k και m τείνουν στο ∞. Θα αποδείξουμε τον ισχυρότερο ισχυρισμό ότι το $\int_0^\infty |d((L^k - L^m) \bullet A)|$ συγκλίνει στο 0 κατά πιθανότητα καθώς τα k και m τείνουν στο ∞. Αν δεν ίσχυε αυτό αυτό τότε από την ανάλυση Hahn που περιγράψαμε στη ενότητα 7.1, θα μπορούσαμε να βρούμε μία h^k προβλέψιμη με τιμές στο $\{+1, -1\}$, $\alpha > 0$ και δύο αύξουσες ακολουθίες $(i_k, j_k)_{k\geq 1}$ τέτοιες ώστε $Q[\varphi_k > \alpha] > \alpha$ όπου

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \int_{[0,\infty)} h_u^k d((L^{i_k} - L^{j_k}) \bullet A)_u \\ &= \int_{[0,\infty)} h_u^k (L_u^{i_k} - L_u^{j_k}) dA_u \\ &= \int_{[0,\infty)} |L_u^{i_k} - L_u^{j_k}| \; |dA_u|. \end{aligned}$$

Θα ορισουμε τώρα τη συνάρτηση προς ολοκλήρωση R^k ως

$$
\begin{aligned}
R^k &:= \big(L^{j_k} + \frac{1}{2}(1+h^k)(L^{i_k} - L^{j_k})\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(L^{i_k} + L^{j_k} + h^k(L^{i_k} - L^{j_k})\big).
\end{aligned}
$$

Η ιδέα είναι απλή αν $h^k = 1$, δηλαδή αν $(L^{i_k} - L^{j_k}) \bullet dA \geq 0$, παίρνουμε το L^i_k, αν $h^k = -1$,δηλαδή αν $(L^{i_k} - L^{J_k})dA \leq 0$ παίρνουμε το L^{j_k}. Κατά μία έννοια η R^k παίρνει το καλύτερο και από τα δύο. Ισχυριζόμαστε ότι οι σ.δ. $(R^k - L^{i_k}) \bullet A$ και $(R^k - L^{j_k}) \bullet A$ ορίζουν θετικά μέτρα και ως εκ τούτου είναι αύξουσες.
Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
(R^k - L^{i_k}) \bullet A &= \big((L^{j_k} - L^{i_k}) + \frac{1}{2}(1+h^k)(L^{i_k} - L^{j_k})\big) \bullet A \\
&= \frac{1}{2}\big((h^k - 1)(L^{i_k} - L^{j_k})\big) \bullet A \text{ και} \\
(R^k - L^{j_k}) \bullet A &= \frac{1}{2}\big((h^k - 1)(L^{i_k} - L^{j_k})\big) \bullet A.
\end{aligned}
$$

Και τα δύο μέτρα είναι θετικά από τη κατασκευή του h^k. Επίσης

$$
\varphi_k = \big((R^k - L^{i_k}) \bullet A)_\infty + \big((R^k - L^{j_k}) \bullet A)_\infty.
$$

Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Q[((R^k - L^{i_k}) \bullet A)_\infty > \frac{\alpha}{2}] > \frac{\alpha}{2}$ (αν είναι απαραίτητο εναλλάσουμε τα i_k και j_k και παίρνουμε υπακολουθίες για να τις διατυρήσουμε αύξουσες). Επειδή $(R^k - L^{i_k}) \bullet M = \frac{1}{2}((h^k - 1)(L^{i_k} - L^{j_k}) \bullet M)$ και επειδή $(L^{i_k} - L^{j_k}) \bullet M$ τείνει στο 0 στην ημί-martingale τοπολογία επάνω στο $[0, \infty)$, συμπεραίνουμε ότι οι μεγιστικές συναρτήσεις $((R^k - L^{i_k}) \bullet M)^*$ τείνουν στο 0 κατά πιθανότητα. Το ίδιο ισχύει για το $((R^k - L^{j_k}) \bullet M)^*$.Έστω τώρα $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία αυστηρά θετικών αριθμών που τείνει στο 0. Παίρνοντας υπακολουθίες και χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Q[((R^k - L^{i_k}) \bullet M)^* > \delta_k \;\text{ ή }\; ((R^k - L^{j_k}) \bullet M)^* > \delta_k] < \delta_k$ ισχύει για όλα τα k. Αυτό συνεπάγεται ότι ο χ.δ. τ_k ορισμένος ως

$$
\tau_k := \inf\{t : (R^k \bullet M)_t \leq max\{(L^{i_k} \bullet M)_t, (L^{j_k} \bullet M)_t\} - \delta_k\}
$$

ικανοποιεί την $Q[\tau_k < \infty] < \delta_k$. Ορίζουμε $\widetilde{R}^k = R^k \chi_{[\![0,\tau_k]\!]}$. Έτσι έχουμε ότι οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις $\widetilde{R}^k$ είναι $(1 + \delta_k)$-αποδεκτές!

Πράγματι για $t < \tau_k$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(\widetilde{R}^k \bullet S)_t &= (R^k \bullet S)_t \\
&= (R^k \bullet A)_t + (R^k \bullet M)_t \\
&\geq max\{(L^{i_k} \bullet A)_t, (L^{j_k} \bullet A)_t\} + (R^k \bullet M)_t \\
&\geq max\{(L^{i_k} \bullet A)_t, (L^{j_k} \bullet A)_t\} + max\{(L^{i_k} \bullet M)_t, (L^{j_k} \bullet M)_t\} - \delta_k \\
&\geq max\big((L^{i_k} \bullet S)_t, (L^{j_k} \bullet S)_t\big) - \delta_k \\
&\geq -1 - \delta_k
\end{aligned}$$

Στο χρόνο τ_k το άλμα $\Delta(\widetilde{R}^k \bullet S)$ είναι είτε $\Delta(L^{i_k} \bullet S)$ είτε $\Delta(L^{j_k} \bullet S)$ και ως εκ τούτου $(R^k \bullet S)_{\tau_k} \geq -1 - \delta_k$ αφού το αριστερό όριο της $(\widetilde{R}^k \bullet S)$ στον τ_k είναι τουλάχιστον $\max\{(L^{i_k} \bullet S)_{\tau_k -}, (L^{j_k} \bullet S)_{\tau_k -}\} - \delta_k$.
Οι σ.δ. προς ολοκλήρωση $(1+\delta_k)^{-1}\widetilde{R}^k$ είναι 1-αποδεκτές. Θα τις χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε μια αντίφαση στη μεγιστική ιδιότητα της $f_0 = \lim\limits_{k\to\infty}(L^{j_k} \bullet S)_\infty = \lim\limits_{m\to\infty}(H^m \bullet S)_\infty$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\widetilde{R}^k}{1+\delta_k} \bullet S - L^{i_k} \bullet S\right)_\infty &= \frac{1}{1+\delta_k}\big((\widetilde{R}^k - L^{i_k}) \bullet S\big)_\infty - \frac{\delta_k}{1+\delta_k}(L^{i_k} \bullet S)_\infty \\
&= \left(\frac{1}{1+\delta_k}\right)\big((\widetilde{R}^k - L^{i_k}) \bullet A\big)_\infty \\
&\quad + \frac{1}{1+\delta_k}\big((\widetilde{R}^k - L^{i_k}) \bullet M\big)_\infty - \frac{\delta_k}{1+\delta_k}(L^{i_k} \bullet S)_\infty .
\end{aligned}$$

Το πρώτο μέρος φράσεται από κάτω αφού

$$Q\big[\big((\widetilde{R}^k - L^{i_k}) \bullet A\big)_\infty > \frac{\alpha}{2}\big] > \frac{\alpha}{2} \quad \text{και} \quad \big((\widetilde{R}^k - L^{i_k}) \bullet A\big)_\infty \geq 0.$$

Το δεύτερο μέρος φράσεται από πάνω αφού

$$Q\big[\big((\widetilde{R}^k - L^{i_k}) \bullet M\big)_\infty \leq -\delta_k\big] < \delta_k \quad \text{και} \quad \big((\widetilde{R}^k - L^{i_k}) \bullet M\big)_\infty \longrightarrow 0.$$

Το τρίτο μέρος τείνει στο 0 αφου $\delta_k \longrightarrow 0$. Από το Λήμμα Β΄.4.1 γνωρίζουμε ότι υπάρχουν κυρτοί συνδυασμοί $V^k \in conv\{\widetilde{R}^k, \widetilde{R}^{k+1}, \ldots\}$ τέτοιο ώστε $(V^k \bullet S)_\infty$ να συγκλίνει σε μία συνάρτηση g. Επειδή $(L^{i_k} \bullet S)_\infty \longrightarrow f_0$ και επειδή ισχύει $Q\big[\big((\widetilde{R}^k - L^{i_k}) \bullet S\big)_\infty > \frac{\alpha}{2} - \delta_k\big] > \frac{\alpha}{2} - \delta_k$, από το Λήμμα Β΄.4.6 έπεται ότι $Q[g > f_0] > 0$. Επίσης έπεται $g \geq f_0$, μία αντίφαση στη κατασκευή της f_0.

□

Τελευταίο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 7.3.2. Από τα Λήμματα 7.3.11 και 7.3.10 προκύπτει η ύπαρξη 1-αποδεκτών συναρτήσεων προς ολοκλήρωση $L^k \in conv\{H^k, H^{k+1}, \cdots\}$ τέτοιων ώστε οι $L^k \bullet M$ και $L^k \bullet A$ να συγκλίνουν ως προς την ημί-martingale τοπολογία. Η ακολουθία $\{L^k \bullet S\}_{k\in\mathbb{N}}$ θα είναι ως εκ τούτου συγκλίνουσα ως προς την ημί-martingale τοπολογία. Από το θεώρημα του Memin τώρα (βλ. [?]) συμπεραίνουμε την ύπαρξη μιας προβλέψιμης σ.δ. L τέτοια ώστε $L^k \bullet S \longrightarrow L \bullet S$ στην ημί-martingale τοπολογία. Ειδικότερα η L είναι 1-αποδεκτή και η τελική τιμή της ικανοποιεί το εξής

$$\begin{aligned}(L \bullet S)_\infty &= \lim_{t\to\infty}(L \bullet S)_t = \lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty}(L^n \bullet S)_t \\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty}(L^n \bullet S)_t = \lim_{n\to\infty}(L^n \bullet S)_\infty = f_0.\end{aligned}$$

Η εναλλαγή των ορίων μας επιτρέπεται από το γεγονός ότι σχεδόν βέβαια έχουμε $(L^n \bullet S)_t \longrightarrow (L \bullet S)_t$ ομοιόμορφα στο t, από το Λήμμα 7.3.6. Πράγματι η $(H^n \bullet S)_t$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}_+$ και οι κυρτοί συνδυασμοί $L^k \in conv\{H^k, H^{K+1}, \ldots\}$ διατηρούν αυτή την ομοιόμορφη σύγκλιση. Αυτό μας δείχνει ότι $f_0 \in K_0$ και όπως παρατηρήσαμε στο Λήμμα 7.3.6 αυτό συνεπάγεται το Θεώρημα 7.3.2. □

Το Κύριο Θεώρημα 7.3.3 έχει επεκταθεί για μή τοπικά φραγμένες σ.δ. τιμών από τούς Delbaen-Schahermayer [20] το (1998).

Παράρτημα Α΄

Στοιχεία Γενικής Τοπολογίας

Ορισμός Α΄.1. *Ένα ζεύγος* $(\Omega, \mathcal{T})$ *καλείται* ***τοπολογικός χώρος*** *αν* Ω *σύνολο και* $\mathcal{T}$ *οικογένεια υποσυνόλων του* Ω *με τις ιδιότητες*

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{T}$,

(ii) για κάθε $A, B \in \mathcal{T}$ *ισχύει* $A \cap B \in \mathcal{T}$ *και*

(iii) για κάθε $\{A_i\}_{i \in I \neq \emptyset}$ *στο* $\mathcal{T}$ *ισχύει* $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Τα στοιχεία του Ω *ονομάζονται ανοικτά σύνολα.*

Ορισμοί Α΄.2. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *ένας τοπολογικός χώρος.*

(a) *Μια οικογένεια* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ *ονομάζεται μία* ***βάση*** *για την* $\mathcal{T}$ *αν κάθε μη κενό στοιχείο της* $\mathcal{T}$ *είναι ένωση μιας υποοικογένειας της* $\mathcal{B}$.

(b) *Μια οικογένεια* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ *ονομάζεται μία* ***υποβάση*** *για την* $\mathcal{T}$, *αν η οικογένεια όλων των πεπερασμένων τομών* $U_1 \cap \cdots \cap U_k$, *όπου* $U_i \in \mathcal{S}$ *για* $i = 1, \cdots, k$ *είναι μία βάση για την* $\mathcal{T}$.

(c) *Αν για κάποιο* $x \in X$ *και* $U \in \mathcal{T}$ *ισχύει* $x \in U$, *τότε λέμε ότι το* U *είναι μία* ***περιοχή*** *του* x.

(d) *Μία οικογένεια* $\mathcal{B}(x)$ *περιοχών του* $x \in X$ *ονομάζεται* ***βάση για την*** $\mathcal{T}$ ***στο*** x, *αν για κάθε περιοχή* V *του* x *υπάρχει ένα σύνολο* $U \in \mathcal{B}(x)$ *ώστε* $x \in U \subseteq V$.

Ορισμός Α΄.3. *Ένας τ.χ.* $(\Omega, \mathcal{T})$ *ονομάζεται **Hausdorff τοπολογικός χώρος** αν για κάθε* $x, y \in \Omega$ *με* $x \neq y$ *υπάρχουν* $A, B \in \mathcal{T}$ *ώστε*

$$x \in A,\ y \in B, \text{ και } A \cap B = \emptyset.$$

Ορισμός Α΄.4. *Έστω μη κενό σύνολο. Μία συνάρτηση* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *θα λέγεται **μετρική** στο* X *αν ικανοποιεί τα εξής:*

(i) $d(\chi, \psi) \geq 0$ *για κάθε* $\chi, \psi \in X$ *και* $d(\chi, \psi) = 0$ *αν και μόνο αν* $\chi = \psi$.

(ii) $d(\chi, \psi) = d(\psi, \chi)$, *για κάθε* $\chi, \psi \in X$.

(iii) $d(\chi, \psi) \leq d(\chi, \omega) + d(\omega, \psi)$, *για κάθε* $\chi, \psi, \omega \in X$

Τότε το ζευγάρι (X, d) *λέγεται **μετρικός χώρος**. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο σύνολο* X *μπορεί να ορίζονται πολλές και πολύ διαφορετικές μετρικές.*

Ορισμός Α΄.5. *Έστω* (X, d) *και* (Y, σ) *μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση* $f : X \longrightarrow Y$ *λέγεται **ομοιόμορφα συνεχής** αν*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0\ \forall \chi, \psi \in X\ [d(\chi, \psi) < \delta(\epsilon) \Longrightarrow \sigma(f(\chi), f(\psi)) < \epsilon]$$

Ορισμός Α΄.6. *Αν* C *είναι ένα μη κενό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^d$ *τότε το σύνολο*

$$\overline{C} = \{\psi \in \mathbb{R}^d \mid \exists (\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C \text{ τέτοιο ώστε } \lim_{n \longrightarrow \infty} \chi_n = \psi\}$$

*ονομάζεται **κλειστή θήκη ή κλειστότητα (closure)** του* C. *Χρήσιμες συνέπειες:*

- *Το σύνολο* C *είναι κλειστό, αν και μόνο αν* $\overline{C} = C$.
- *Αν το* C *είναι κυρτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^d$, *τότε και το* $\overline{C}$ *είναι κυρτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός Α΄.7. *Έστω* $a : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{R}_+$ *ώστε* $a(x, y) := [\sum_{i=1}^{d} (\chi_i - \psi_i)^2]^{\frac{1}{2}}$ *για κάθε* $\chi, \psi \in \mathbb{R}^d$. *Η συνάρτηση* a *ονομάζεται **Ευκλείδια μετρική ή Ευκλείδια απόσταση**.*

Η συνάρτηση $||\ ||: \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{R}_+$ *ώστε* $||x|| := [\sum_{i=1}^{d} x_i]^{\frac{1}{2}}$ *για κάθε* $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ *ονομάζεται **Ευκλείδια νόρμα**.*

Παράρτημα Β΄

Χρήσιμα στοιχεία Θεωρίας Μέτρου και Πιθανοτήτων

Β΄.1 Βασικές έννοιες θεωρίας μέτρου και πιθανοτήτων

Ορισμός Β΄.1.1. *Μια τετράδα $(\Omega, \mathcal{T}, \Sigma, P)$ ονομάζεται ένας* ***τοπολογικός χώρος πιθανότητας*** *αν η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π., το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{T} \subseteq \Sigma$. Τότε πορκύπτει ότι $\mathfrak{B} \subseteq \Sigma)$, όπου με $\mathfrak{B}(\Omega)$ συμβολίζεται η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω παράγεται από την $\mathcal{T}$.*

Ορισμός Β΄.1.2. *Έστω $(\Omega, \mathcal{T}, \Sigma, P)$ ένας Hausdorff τοπολογικός χ.π.. Το P θα λέγεται* ***εσωτερικα κανονικό ως προς τα συμπαγή σύνολα*** *αν για κάθε $A \in \Sigma$ ισχύει $P(A) = sup\{P(K) : K \subseteq A,\ K \text{ συμπαγές}\}$.*

Πρόταση Β΄.1.3. *Έστω $(\Omega, \mathcal{T}, \Sigma, P)$ ένας Hausdorff τοπολογικός χ.π. ώστε το P να είναι εσωτερικα κανονικό ως προς τα συμπαγη σύνολα. Τότε η ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του Ω μηδενικής πιθανότητας P είναι ένα ανοικτό σύνολο μηδενικής πιθανότητας P.*

Απόδειξη. Έστω $U := \bigcup\{G : G \in \mathcal{T}, P(G) = 0\}$. Σαφώς ισχύει $U \in \mathcal{T}$. Έστω K συμπαγές υποσύνολο του U. Αφού η οικογένεια $\mathcal{G} := \{G : G \in \mathcal{T}; P(G) = 0\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του K, υπάρχουν $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. Τότε

$P(K) \leq \sum_{i=1}^{n} P(G_i) = 0.$ και από την εσωτερική κανονικότητα του P προκύπτει ότι

$$P(U) = sup\{P(K) : K \subseteq U,\ K \text{ συμπαγής}\} = 0.$$

$\square$

Παρατήρηση και ορισμός Β΄.1.4. *Από την απόδειξη της παραπάνω πρότασης προκύπτει, ότι το U είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του Ω μηδενικού μέτρου. Επομένως το U^c, δηλαδή το $F = \bigcap\{A : A \text{ κλειστό}, P(A^c) = 0\}$ είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του Ω του οποίου το συμπλήρωμα έχει P-μέτρο 0. Το F ονομάζεται **φορέας (support)** του P και συμβολίζεται με $supp(P)$. Προφανώς $supp(P) = supp(P|\mathfrak{B}(\Omega))$ και $supp(P) = \Omega$ αν και μόνο αν $P(G) > 0$ για κάθε $G \in \mathcal{T}$.*

Ορισμός Β΄.1.5. *Μια οικογένεια $\mathcal{V}$ συναρτήσεων από ένα σύνολο Ω στον $\mathbb{R}$ ονομάζεται **μονότονη κλάση ή μονότονος διανυσματικός χώρος** αν ισχύουν τα εξής (βλ. [49] σελ. 7)*

(**i**) *η $\mathcal{V}$ είναι διανυσματικός χώρος*

(**ii**) *η $\mathcal{V}$ περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις και*

(**iii**) *αν $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{V}$ με $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ και f είναι φραγμένη, τότε $f \in \mathcal{V}$.*

Ορισμός Β΄.1.6. *Μια οικογένεια $\mathcal{M}$ συναρτήσεων από ένα σύνολο Ω στον $\mathbb{R}$ ονομάζεται **πολλαπλασιαστική**, αν $f, g \in \mathcal{M}$ συνεπάγεται $fg \in \mathcal{M}$ (βλ. [49] σελ. 7).*

Θεώρημα μονότονης κλάσης για συναρτήσεις Β΄.1.7. *Έστω $\mathcal{V}$ μία μονότονη κλάση συναρτήσεων από ένα σύνολο Ω στον $\mathbb{R}$ και $\mathcal{M}$ μία πολλαπλασιαστική κλάση ώστε $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$. Τότε η $\mathcal{V}$ περιέχει όλες τις φραγμένες $\sigma(\mathcal{M})$-μετρήσιμες συναρτήσεις (βλ. [49] σελ. 7).*

Λήμμα Β΄.1.8. *Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μια οικογένεια στοιχείων του Ω. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα* *(i)* **(Dyn1')** $\Omega \in \mathcal{D}$

(Dyn2') $B \setminus A \in \mathcal{D}$, *για* $A, B \in \mathcal{D}$ *και* $A \subseteq B$

(Dyn3') $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, *για κάθε αύξουσα ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *υποσυνόλων στο* $\mathcal{D}$.

(ii) **(Dyn1)** $\emptyset \in \mathcal{D}$

(Dyn2) $\Omega \setminus A \in \mathcal{D}$, *για κάθε* $A \in \mathcal{D}$

(Dyn3) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, *για κάθε ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ξένων ανα δύο υποσυνόλων στο* $\mathcal{D}$.

Ορισμός Β΄.1.9. *Αν ένα σύνολο* $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *ικανοποιεί της συνθήκες (i) ή (ii) του Λήμματος (Β΄.1.8) τότε λέγεται* ***κλάση Dynkin*** *υποσυνόλων του* Ω.

Θεώρημα μονότονης κλάσης για σύνολα Β΄.1.10. *Έστω* Ω *ένα σύνολο και* $\mathcal{D}$ *μία κλάση Dynkin υποσυνόλων του* Ω. *Υποθέτουμε ότι το σύνολο* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$ *είναι τέτοιο, ώστε* $I \cap J \in \mathcal{I}$ *για όλα τα* $I, J \in \mathcal{I}$. *Τότε η* $\mathcal{D}$ *περιέχει την* $\sigma(\mathcal{I})$ *(βλ. [33] Λήμμα 136A Θεώρημα 136B).*

Ορισμοί Β΄.1.11. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ και (Θ, T, ν) χ.μ.. Ένα σύνολο $R \subseteq \Omega \times \Theta$ ονομάζεται ***μετρήσιμο ορθογώνιο (του*** $\Omega\times\Theta$*)*, αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επί πλέον, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται σ***-άλγεβρα γινόμενο*** των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma\otimes T$. Έστω επίσης ο χ.μ. $(\Omega\times\Theta, \Sigma\otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται ***μέτρο γινόμενο των*** μ ***και*** ν και συμβολίζεται με $\mu \otimes \nu$ αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Εαν I είναι ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο δεικτών και $\{(\Omega_i, \Sigma_i, P_i)\}_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\emptyset \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον ***χ.π.-γινόμενο***

$$\otimes_{i\in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := \Big(\prod_{i\in J}\Omega_i, \otimes_{i\in J}\Sigma_i, \otimes_{i\in J}P_i\Big).$$

Αν $\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με P^I την ***πιθανότητα-γινόμενο*** στον Ω^I και με Σ^I το πεδίο ορισμού της P^I.

Ορισμός Β΄.1.12. Αν $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{G} \subseteq \Sigma$ μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω τότε μία ***δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθείσας της σ-άλγεβρας $\mathcal{G}$*** (δ.μ.τ. για συντομία) είναι μία τ.μ. $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) :\longrightarrow \mathbb{R}$, με τις εξής ιδιότητες:

(i) η $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ να είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη,

(ii) $\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})dP = \int_A XdP$ για κάθε $A \in \mathcal{G}$.

Μια δ.μ.τ. της X δοσμένης της τ.μ. Y συμβολίζεται με $\mathbb{E}[X|Y]$ και είναι η $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$.

Β΄.2 Σύγκλιση ακολουθιών τ.μ. P-σ.β. , στον L^p , κατά πιθανότητα και κατά κατανομή

Ορισμοί Β΄.2.1. *Έστω η στοχαστική βάση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ και $X := \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ μία οικογένεια από σ.δ.. Τότε ορίζουμε:*

(i) *Η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στη X με πιθανότητα 1 ή σ.β., αν*

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

ή εν συντομία $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$.

(ii) *Η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον L^p ή κατά p-ροπή, αν $\mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$$

ή εν συντομία $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

(iii) *Η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στη X κατά πιθανότητα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει ότι*

$$P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0$$

ή εν συντομία $X_n \xrightarrow{P} X$.

(iv) *Η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στη X κατά κατανομή ή νόμο, αν για κάθε σημείο συνέχειας της σ.κ. F_X της X ισχύει*

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

ή εν συντομία $X_n \xrightarrow{D} X$.

Στη συνέχεια θα ελέγξουμε τη σχέση των διαφόρων τύπων συγκλίσεων.

Πρόταση Β΄.2.2. Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τ.μ. και X μία τ.μ.. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $X_n \xrightarrow{P} X$, τότε $X_n \xrightarrow{D} X$.

(ii) Αν $X_n \xrightarrow{\text{σ.β.}} X$, τότε $X_n \xrightarrow{P} X$.

(iii) Για κάθε $p \geq 1$, $X_n \xrightarrow{L^p} X$ τότε $X_n \xrightarrow{P} X$.

(iv) Για κάθε $p > q \geq 1$, $X_n \xrightarrow{L^p} X$ τότε $X_n \xrightarrow{L^q} X$.

Οι αντίστροφες συνεπαγωγές δεν ισχύουν πάντοτε, όπως αυτό μπορεί να διαπιστωθεί με αντιπαραδείγματα.

Β΄.3 Μετρήσιμες επιλογές

Θεώρημα Μετρήσιμων επιλογών Β΄.3.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ πλήρης χ.π., $(E, \mathcal{E})$ ένας πολωνικός χώρος και $\Gamma \subset \Omega \times E$ ένα στοιχείο της σ-άλγεβρας $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathcal{E})$. Τότε η προβολή $pr_\Omega(\Gamma)$ του Γ στο Ω είναι ένα στοιχείο της $\mathcal{F}$, και υπάρχει μία τ.μ. ξ με τιμές στο E τέτοιο ώστε $\xi(\omega) \in \Gamma_\omega$ για όλες τις μη κενές ω-τομές Γ_ω του Γ. (βλ. [41] Θεώρημα 5.4.1).*

Β΄.4 Αποτελέσματα χρήσιμα για το κεφάλαιο 7

Λήμμα Β΄.4.1. *Έστω $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές στο $\mathbb{R}_+$ επάνω στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Τότε υπάρχει $g_n \in conv\{f_n, f_{n+1}, \dots, \}$, τέτοια ώστε η $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει σ.β. σε μία συνάρτηση g με τιμές στο $\mathbb{R}_+$. Αν $conv\{f_n; n \geq 1\}$ είναι φραγμένο στο L^0 τότε η g είναι πεπερασμένη σ.β.. Αν υπάρχουν $\alpha > 0$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα n να ισχύει $P[f_n > \alpha] > \delta$, τότε $P[g > 0] > 0$.*

Απόδειξη. Έστω $u : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \longmapsto [0, 1]$ με $u(x) := 1 - e^{-x}$. Οι οικονομολόγοι μπορεί να δουν τη u ως συνάρτηση ωφελιμότητας αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο. Ορίζουμε s_n ως εξής

$$s_n := \sup\{\mathbb{E}[u(g)] | g \in conv\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}\}$$

και επιλέγουμε $g_n \in conv\{f_n, f_{n+1}, \cdots\}$ έτσι ώστε

$$\mathbb{E}[u(g_n)] \geq s_n - \frac{1}{n}.$$

Η s_n ξεκάθαρα φθίνει στο $s_0 \geq 0$ και $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[u(g_n)] = s_0$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα σε μία συνάρτηση g. Θα εργαστούμε στο συμπαγή (μετρήσιμο) χώρο $[0, \infty]$. Η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $[0, \infty]$ είναι Cauchy στον $[0, \infty]$ αν και μόνο αν για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για όλα τα $n, m \geq n_0$ έχουμε $|x_n - x_m| \leq \alpha$ ή $min(x_n, x_m) \geq \alpha^{-1}$. Από τις ιδιότητες του u συνεπάγεται ότι για $\alpha > 0$ υπάρχει $\beta > 0$, τέτοιο ώστε $|x - y| > \alpha$ και $min(x, y) \leq \alpha^{-1}$, να συνεπάγεται ότι $u(\frac{x+y}{2}) > \frac{1}{2}(u(x) + u(y)) + \beta$.

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην απόδειξη του λήμματος. Από την παρατήρηση της τοπολογίας του $[0, \infty]$ θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{n,m\to\infty} P[|g_n - g_m| > \alpha \ \text{ και } \ min(g_n, g_m) \leq \alpha^{-1}] = 0.$$

Για δοσμένο $\alpha > 0$ παίρνουμε β όπως παραπάνω και έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[u\big(\frac{g_n + g_m}{2}\big)\big] \ &\geq \ \frac{1}{2}\mathbb{E}[u(g_n)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[u(g_m)] \\ &\quad + \beta P[|g_n \overset{-?}{+} g_m| > \alpha \text{ και } min\{g_n, g_m\} < \alpha^{-1}]. \end{aligned}$$

Από τη κατασκευή έχουμε $\mathbb{E}\big[u\big(\frac{g_n+g_m}{2}\big)\big] \leq s_n$, αλλά αφού η u είναι κοίλη έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\big[u\big(\frac{g_n + g_m}{2}\big)\big] \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[u(g_n)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[u(g_m)].$$

Από αυτό συνεπάγεται ότι

$$\begin{gathered} \beta P[|g_n - g_m| \geq \alpha \text{ και } min\{g_n, g_m\} < \alpha^{-1}] \\ \leq \mathbb{E}\big[u\big(\frac{g_n + g_m}{2}\big)\big] - \frac{1}{2}\bigg(\mathbb{E}[u(g_n)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[u(g_m)]\bigg). \end{gathered}$$

Η επιλογή της ακολουθίας $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μας δίνει ότι το δεξιό μέλος συγκλίνει στο 0. Αποδείξαμε επίσης περαιτέρω ότι η $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία Cauchy ακολουθία κατά πιθανότητα και ως εκ τούτου υπάρχει μία συνάρτηση $g : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ τέτοιο ώστε η g_n να συγκλίνει στο g κατά πιθανότητα. Αν κάποιος θέλει μία ακολουθία να συγκλίνει σ.β. θα πρέπει να περάσει σε μία υπακολουθία.

Αν $conv\{f_n; n \leq 1\}$ είναι φραγμένος στο L^0 τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε $P[h > N] < \varepsilon$ για όλα τα $h \in conv\{f_n; n \geq 1\}$. Για την ακρίβεια, αυτό συνεπάγεται ότι $P[g_n > N] < \varepsilon$ και ως εκ τούτου $P[g > N] \leq \varepsilon$. Άρα η g είναι πεπερασμένη σ.β.

Αν $P[f_n > \alpha] > \delta > 0$ για κάθε n και σταθερό $\alpha > 0$, παίρνουμε ότι $\mathbb{E}[u(g_n)] \geq \delta u(\alpha) > 0$. Αφού g_n συγκλίνει στο g, βρίσκουμε $u(g_n) \longrightarrow u(g)$ και από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης πέρνουμε ότι $\mathbb{E}[u(g)] \geq \delta u(\alpha) > 0$ και κατ' επέκταση $P[g > 0] > 0$.

□

Παρατήρηση Β΄.4.2. *Αν $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων με τιμές στο $[0,\infty]$, τότε μπορούμε και πάλι να εξάγουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Η απόδειξη είναι ίδια εκτός από μικρές αλλαγές.*

Παρατήρηση Β΄.4.3. *Αν $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων με τιμές στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε το σύνολο $conv\{f_n^-; n \in \mathbb{N}\}$ να είναι φραγμένο στον L^0, τότε υπάρχουν $g_n \in conv\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ τέτοια ώστε η $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει σχεδόν βέβαια σε μια μετρήσιμη συνάρτηση g με τιμές στο $(-\infty, +\infty]$.*

Απόδειξη. Αρχικά παίρνουμε κυρτούς συνδυασμούς του συνόλου $\{f_n^-; n \in \mathbb{N}\}$ οι οποίοι συγκλίνουν σ.β. σύμφωνα με το Λήμμα Β΄.4.1. Αφού το σύνολο $conv\{f_n^-; n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο στον L^0, το όριο είναι πεπερασμένο σχεδόν βέβαια. Εφαρμόζοντας τώρα το λήμμα στον ίδιο κυρτό συνδυασμο των f_n^+, παράγουμε κυρτούς συνδυασμούς της αρχικής ακολουθίας $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, οι οποίοι συγκλίνουν σχεδόν βέβαια σε μία συνάρτηση με τιμές στο $(-\infty, +\infty]$. □

Παρατήρηση Β΄.4.4. *Αν στην προηγούμενη παρατήρηση απαιτήσουμε μόνο το $conv\{f_n^-; n \in \mathbb{N}\}$ να είναι φραγμένο στον L^0, τότε το συμπέρασμα δεν ισχύει. Πράγματι, έστω $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία από 1-ευσταθείς (βλ. π.χ. [45] για ορισμό) ανεξάρτητες τ.μ.. Αν υπήρχαν κυρτοί συνδυασμοί που να συγκλίνουν σ.β. θα μπορούσαμε να φτιάξουμε τους κυρτούς συνδυασμούς με τέτοιο τρόπο ώστε $g_k \in conv\{f_{n_k+1}, \ldots, f_{n_{k+1}}\}$, όπου $n_1 < n_2 \ldots$ Αυτό συνεπάγεται ότι η $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*

είναι ανεξάρτητη ακολουθία. Αφού οι κυρτοί συνδυασμοί από ανεξάρτητες 1-ευσταθείς μεταβλητές είναι 1-ευσταθείς, αυτό θα παρήγαγε μία ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία συγκλίνουσα σ.β., άτοπο.

Παρατήρηση Β΄.4.5. *Αν στους ορισμούς του Λήμματος Β΄.4.1 η ακολουθία $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον L^0, αλλά το σύνολο $conv\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι φραγμένο στον L^0, τότε η σ.δ. που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη δεν μας δίνει μια συνάρτηση g η οποία να είναι πεπερασμένη σ.β. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι υπάρχει μία ακολουθία $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη στον L^0 και τέτοια ώστε κάθε g που είναι όριο συναρτήσεων $g_n \in conv\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$, είναι ίση με το ∞. Πριν παραθέσουμε τη κατασκευή, ας θυμηθούμε κάποια αποτελέσματα από τη θεωρία της κίνησης Brown (βλ. [50]). Αν $\{B_t\}_{0\leq t}$ είναι η τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown , ας συμβολίσουμε με T_β το χ.δ. $T_\beta = inf\{t : B_t = \beta\}$. Είναι γνωστό (βλ. [50], σελ 67) ότι για $\beta > 0, T_\beta < \infty$ σ.β και για κάθε $u \geq 0$ ισχύει*

$$\mathbb{E}[exp(-uT_\beta)] = exp(-\beta\sqrt{2u}).$$

Από αυτό συνεπάγεται ότι αν η f έχει την ίδια κατανομή με τον T_β, τότε για $\lambda > 0$, η λf θα έχει την ίδια κατανομή με τον $T_{(\lambda)^{\frac{1}{2}}\beta}$. Αν οι $f_1, \ldots, f_N$ είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια κατανομή με τις $T_{\beta_1}, \ldots, T_{\beta_N}$, τότε η $f_1 + \cdots + f_N$ θα έχει την ίδια κατανομή με την $T_{\beta_1+\ldots+\beta_N}$, (αυτό έπεται εύκολα από την αναπαράσταση της f_n ως το χρόνο χτυπήματος (hitting time) της β_n). Παίρνουμε τώρα $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων μεταβλητών, όπου η κάθε μία ακολουθεί την ίδια κατανομή T_1. Υποθέτουμε ότι $g_n \in conv\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$ και $g_n \longrightarrow g$. Θα δείξουμε ότι $g = +\infty$ σ.β.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις g_n είναι ανεξάρτητες και τελικά παίρνουμε υπακολουθίες. Κάθε g_n έχει κατανομή της μορφής

$$\lambda_1^n f_1 + \cdots \lambda_{N_n}^n f_{N_n}$$

όπου$(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_{N_n}^n)$ είναι κυρτός συνδυασμός. Έτσι έπεται ότι η κατανομή της g_n είναι η T_{α_n}, όπου $\alpha_n = \sum_{i=1}^{N_n} \sqrt{\lambda_i^n} \geq 1$. Από το νόμο $0-1$ έπεται ότι είτε $g = +\infty$, είτε $P[g < \infty] = 1$. Σε αυτή τη περίπτωση καταλήγουμε στο ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός α τέτοιος ώστε $\alpha_n \longrightarrow \alpha \geq 1$ και η g έχει την *ίδια κατανομή T_α. Από το νόμο $0-1$ συνεπάγεται εκ νέου ότι η κατανομή της g είναι εκφυλισμένη (degenerate), αδύνατο αν $\alpha \geq 1$. Ως εκ τούτου $g = +\infty$.*

Το επόμενο Λήμμα είναι σχετικά απλό και χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Λήμματος 7.3.7.

Λήμμα B΄.4.6. *Έστω $\{g_k\}_{1\leq k\leq n}$ μη αρνητικές συναρτήσεις, ορισμένες στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί $\{\alpha_k\}_{1\leq k\leq n}$ και $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε k να ισχύει $P[\{g_k \geq \alpha_k\}] \geq \delta > 0$ Αν $g = \sum_{j=1}^{n} g_j$, τότε για όλα τα $0 < \eta < 1$ έχουμε $P[\{g \geq \eta(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)\delta\}] \geq \dfrac{\delta(1-\eta)}{1-\eta\delta}$.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{g \geq (\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)\delta\eta\}$. Ξεκάθαρα έχουμε

$$\mathbb{E}[g\chi_{A^c}] \leq (\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)\delta\eta P[A^c] = (\sum_{j-1}^{n}\alpha_j)\delta\eta(1-P[A]).$$

Από την άλλη έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g\chi_{A^c}] &= \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[g_j\chi_{A^c}] \\
&\geq \sum_{j=1}^{n}\alpha_j P[A^c \cap \{g_j \geq \alpha_j\}] \\
&\geq \sum_{j=1}^{n}\alpha_j (P[g_j \geq \alpha_j] - P[A]) \\
&\geq (\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)\delta - (\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)P[A].
\end{aligned}$$

Οι δύο ανισότητες μας δίνουν

$$\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\Big)P[A](1-\delta\eta) \geq \Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\Big)\delta(1-\eta).$$

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j > 0$ και από αυτό συνεπάγεται το επιθυμητό αποτέλεσμα $P[A] \geq \frac{\delta(1-\eta)}{1-\delta\eta}$. $\square$

Πόρισμα Β΄.4.7. *Αν* $\{g_j\}_{1\leq j\leq n}$ *ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων που ορίζονται στο χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *και αν για* $j = 1, \ldots, n$, *έχουμε ότι* $P[g_j \geq a] \geq b$, *όπου* $a, b > 0$, *τότε για* $g = \sum_{j=1}^{n} g_j$ *έχουμε* $P[g \geq \frac{nab}{2}] \geq \frac{b}{2}$.

Ορισμός (Προσημασμένα μέτρα) Β΄.4.8. *(βλ. [15] ,σελ 113-117) Έστω* (Ω, Σ) *ένας μ.χ. και έστω* $\mu : \Sigma \longmapsto [-\infty, +\infty]$ *μία συνολοσυνάρτηση. Η* μ *είναι* ***σ-προσθετική*** *αν για κάθε ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ανά δύο ξένων στοιχείων της* Σ *ισχύει*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Αν το μ *είναι σ-προσθετικό και ισχύει* $\mu(\emptyset) = 0$ *τότε αυτό ονομάζεται* ***προσημασμένο (signed) μέτρο*** *.*

Ορισμοί Β΄.4.9. *Έστω* μ *ένα προσημασμένο μέτρο επάνω στο μ.χ.* $\Omega, \mathcal{F})$. *Ένα υποσύνολο* A *του* Ω *είναι ένα* ***θετικό σύνολο*** *για το* μ, *αν* $A \in \Sigma$ *και κάθε υποσύνολο* E *του* A *με* $E \in \Sigma$ *ικανοποιεί την* $\mu(E) \geq 0$. *Ομοίως ένα σύνολο* B *είναι ένα* ***αρνητικό σύνολο*** *για το* μ, *αν* $B \in \Sigma$ *και κάθε υποσύνολο* F *του* B *με* $F \in \Sigma$, *ικανοποιεί την* $\mu(F) \leq 0$.

Το παρακάτω θεώρημα και το πόρισμά του μας δίνουν την τυπική ανάλυση προσημασμένων μέτρων.

Θεώρημα Β΄.4.10. *Έστω* $\Omega, \mathcal{F})$ *ένας μ.χ και έστω* μ *ένα προσημασμένο μέτρο στον* $\Omega, \mathcal{F})$. *Τότε υπάρχουν ξένα υποσύνολα* P *και* N *του* Ω *έτσι ώστε το* P *να είναι θετικό σύνολο για το* μ, *το* N *να είναι αρνητικό σύνολο για το* μ *και να ισχύει* $X = P \cup N$. *Για την απόδειξη βλ. [15] σελ. 116.*

Πόρισμα (Θεώρημα ανάλυσης του Jordan) Β΄.4.11. *Κάθε προσημασμένο μέτρο είναι διαφορά δύο θετικών μέτρων, από τα οποία τουλάχιστον ένα είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη. Έστω μ προσημασμένο μέτρο στον χ.μ. $(\Omega, \mathcal{F})$. Επιλέγουμε ανάλυση Hahn (P, N) για το μ και ορίζουμε μ^+ και μ^- στην $\mathcal{F}$ ως

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap P)$$

και

$$\mu^-(A) = -\mu(A \cap N).$$

Προφανώς μ^+ και μ^- είναι θετικά μέτρα τέτοια ώστε $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Αφού τα $+\infty$ και $-\infty$ δεν μπορούν και τα δύο να επιτευχθούν από τις τιμές του μ, τουλάχιστον μία από τις τιμές $\mu(P)$ και $\mu(N)$ θα πρέπει να είναι πεπερασμένη. $\square$

Παράρτημα Γ′

Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης

Γ′.1 Τελεστές και συναρτησοειδή

Ορισμός Γ′.1.1. *Έστω X γραμμικός χώρος (επί του σώματος των πραγματικών αριθμών).*
(a) *Μία* ***νόρμα*** *στον X είναι μία συνάρτηση*

$$|| \ || : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

με τις εξής ιδιότητες:

(i) $||\chi|| \geq 0$ *και* $||\chi|| = 0 \Longleftrightarrow \chi = 0$

(ii) $||\lambda\chi|| = |\lambda| \cdot ||\chi||$

(iii) $||\chi + \psi|| \leq ||\chi|| + ||\psi||$ *(τριγωνική ανισότητα)*

για $\chi, \psi \in X, \lambda \in \mathbb{R}$. Το ζεύγος $(X, || \ ||)$ είναι ***χώρος με νόρμα.***
(b) *Μία* ***ημινόρμα*** *είναι μία συνάρτηση*

$$p : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

ώστε

(i) $p(x) \geq 0$

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$

(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

για όλα τα $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ορισμοί Γ΄.1.2.

(i) *Μια ακολουθία* (x_n) *στον* X *λέγεται* ***ακολουθία Cauchy*** *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *με την ιδιότητα*

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad [m, n \geq n_0 \Longrightarrow ||x_n - x_m|| < \varepsilon].$$

(ii) *Ο* X *λέγεται* ***πλήρης*** *αν κάθε ακολουθία Cauchy στον* X *συγκλίνει ώς προς τη νόρμα.*

(iii) ***Χώρος Banach*** *είναι ένας πλήρης χώρος με νόρμα.*

Ορισμοί Γ΄.1.3. *Έστω* X *και* Y *δύο χώροι με νόρμα.*

(i) ***Γραμμικός τελεστής*** *από τον* X *στον* Y *είναι μία απεικόνιση* $: X \longmapsto Y$ *που ικανοποιεί την*

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in X$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) *Ο* ***πυρήνας*** *του* T *είναι το σύνολο* $Ker(T) = \{x \in X : T(x) = 0\}$ *και η* ***εικόνα*** *του* T *είναι το σύνολο* $R(T) = \{y \in Y ; \exists x \in X : T(x) = y\} = \{T(x) : x \in X\}$*.Ο πυρήνας και η εικόνα ενός γραμμικού τελεστή* $T : X \longrightarrow Y$ *είναι γραμμικοί υπόχωροι των* X *και* Y *αντίστοιχα.*

(iii) *Ένας γραμμικός τελεστής λέγεται* ***φραγμένος*** *αν υπάρχει σταθερά* $c > 0$ *τέτοια ώστε*

$$||T(x)||_Y \leq c||x||_X$$

για κάθε $x \in X$.

(iv) *Αν ο* T *είναι φραγμένος, ορίζουμε τη νόρμα* $||T||$ *ως εξής:*

$$||T|| := min\{c > 0 : \forall x \in X : ||T(x)||_Y \leq c||x||_X\}.$$

Θεώρημα Γ΄.1.4. *Αν* X, Y *γραμμικοί χώροι και* $T : X \longrightarrow Y$ *γραμμική απεικόνιση τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η* T *είναι φραγμένη.*

(ii) Η T ειναι ομοιόμορφα συνεχής.

(iii) Η T είναι συνεχής.

(iv) Η T ειναι συνεχής σε κάποιο σημείο.

Πρόταση Γ'.1.5. *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Τότε*

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup_{x \in B_X} ||Tx|| = \sup_{||x||=1} ||Tx||,$$

όπου $B_X = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ η κλειστή σφαίρα με κέντρο 0 και ακτίνα 1.

Πρόταση Γ'.1.6. *Έστω $B(X,Y)$ το σύνολο των φραγμένων τελεστών $T : X \longrightarrow Y$. Το $B(X,Y)$ είναι γραμικός χώρος και η συνάρτηση $|| \cdot || : B(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $T \longrightarrow ||T||$ είναι νόρμα.*

Ορισμοί Γ'.1.7. *Έστω X γραμμικός χώρος.*

*(i) **Γραμμικό συναρτησοειδές** είναι ένας γραμμικός τελεστής $F : X \longmapsto \mathbb{R}$.*

*(ii) Το F λέγεται **υπογραμμικό συναρτησοειδές** αν ικανοποιεί τα εξής:*

(α) $F(x+y) \leq F(x) + F(y)$ για κάθε $x, y \in X$

(β) $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ για κάθε $\lambda \geq 0$ και κάθε $x \in X$.

*(iii) Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε το γραμμικό συναρτησοειδές F λέγεται **φραγμένο** αν είναι φραγμένος τελεστής από τον $(X, || \cdot ||)$ στον $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.*

Θεώρημα Γ'.1.8. *Έστω X χώρος με νόρμα και $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές. Το F είναι φραγμένο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in X$ να ισχύει*

$$|F(x)| \leq c||x||.$$

Η νόρμα του F είναι η μικρότερη τέτοια σταθερά και ισούται με

$$||F|| = \sup_{||x||=1} |F(x)|.$$

Ορισμός Γ'.1.9. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ο **δυϊκός χώρος** του X είναι ο γραμμικός χώρος X^* των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Δηλαδή*

$$X^* = B(X, \mathbb{R}).$$

Το επόμενο θεώρημα απαντά στο ερώτημα: Πότε ο $B(X,Y)$ είναι πλήρης;

Θεώρημα Γ'.1.10. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν ο Y είναι χώρος Banach, τότε ο $B(X,Y)$ είναι χώρος Banach.*

Πόρισμα Γ'.1.11. *Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε ο X^* με νόρμα την $||F|| = \sup\limits_{||x||=1} |F(x)|$ είναι χώρος Banach.*

Ορισμοί Γ'.1.12. *(i) Η απεικόνιση $T : X \longrightarrow Y$ λέγεται **ισομορφισμός** αν είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής, και οι $T : X \longrightarrow Y$, $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ είναι φραγμένοι τελεστές.*

*(ii) Ο $T : X \longrightarrow Y$ λέγεται **ισομετρικός ισομορφισμός** αν είναι ισομορφισμός και επιπλέον για κάθε $x \in X$ ισχύει $||Tx|| = ||x||$.*

Γ'.2 Ασθενείς τοπολογίες

Ορισμοί Γ'.2.1. *Έστω X ένας γραμμικός χώρος πάνω στον $\mathbb{R}$.*

*(i) Ένα μη κενό υποσύνολο A του X λέγεται **ισορροπημένο** αν για κάθε $x \in A$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| \leq 1$ ισχύει $\lambda x \in A$*

*(ii) Το A λέγεται **απορροφούν** αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $tx \in A$ για κάθε $t \in [0, \varepsilon_x)$.*

*(iii) Αν $\alpha \in A$, το A λέγεται **απορροφούν στο α** αν το σύνολο A-α είναι απορροφούν, δηλαδή αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $\alpha + tx \in A$ για κάθε $t \in [0, \varepsilon_x)$.*

Λήμμα Γ΄.2.2. *Έστω $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ μια ημινόρμα. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Τότε το A είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφουν σε κάθε σημείο του.*

Πρόταση Γ΄.2.3. *Έστω X γραμμικός χώρος πάνω στον $\mathbb{R}$ και έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του X, το οποίο είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφουν σε κάθε σημείο του. Τότε υπάρχει μοναδική ημινόρμα $p_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $A = \{x \in X : p(x) < 1\}$.*

Παρατήρηση (Συναρτησοειδές Minkowski) Γ΄.2.4. *Έστω X γραμμικός χώρος πάνω στον $\mathbb{R}$ και έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του X, το οποίο είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφουν σε κάθε σημείο του. Ορίζουμε την $p_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ως εξής*

$$p_A(x) := inf\{t \geq 0 : x \in tA\}.$$

Τότε η p_A ορίζεται καλά, είναι ημινόρμα και $\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subseteq A$ χωρίς να ισχύει απαραίτητα η ισότητα.

Πρόταση Γ΄.2.5. *Έστω X γραμμικός χώρος πάνω στον $\mathbb{R}$ και έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του, το οποίο είναι κυρτό και απορροφούν. Τότε, το συναρτησοειδές Minkowski $p_A : X \longmapsto \mathbb{R}$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές και*

$$\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X : p(x) \leq 1\}.$$

Ορισμός Γ΄.2.6. ***Τοπολογικός γραμμικός χώρος*** *είναι ένας γραμμικός χώρος επάνω στον $\mathbb{R}$ εφοδιασμένος με μια τοπολογία $\mathcal{T}$ ώστε τα μονοσύνολα να είναι κλειστά σύνολα και οι πράξεις του γραμμικού χώρου*

(α) $+ : X \times X \longrightarrow X$ *με* $(x, y) \longmapsto x + y$

(β) $\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ *με* $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$

να είναι συνεχείς ως προς τις αντίστοιχες (σε κάθε περίπτωση) τοπολογίες.

Ορισμός Γ΄.2.7. *Έστω X ένας γραμμικός χώρος πάνω στον $\mathbb{R}$. Μια οικογένεια $\mathcal{P}$ από ημινόρμες $p : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$,* ***διαχωρίζει τα σημεία του*** *X αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $p \in \mathcal{P}$ ώστε $p(x-y) > 0$.*
Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A}_0 := \{A = \{x \in X : p(x) < \varepsilon\} : p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}.$$

Η $\mathcal{A}_0$ γινεται υποβάση για μια τοπολογία στον X, με τον εξής τρόπο: Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{(x_1 + A_1) \cap \cdots \cap (x_n + A_n) : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}_0, x_i \in X\} \cup \{X\}.$$

Τότε

(i) η $\mathcal{B}$ είναι μία βάση για μία τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X: η $\mathcal{T}$ είναι η οικογένεια όλων των ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{B}$ και

(ii) ο $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος.

Αν $x_0 \in X$, μία βάση περιοχών του x_0 για την $\mathcal{T}$ είναι η οικογένεια

$$\mathcal{B}_{x_0} = \{(x_0 + A_1) \cap \cdots \cap (x_0 + A_n) : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}_0\}.$$

Με άλλα λόγια, ένα μη κενό σύνολο $U \subseteq X$ είναι $\mathcal{T}$-ανοικτό αν για κάθε $x_0 \in U$ υπάρχουν $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ και $\varepsilon_!, \ldots, \varepsilon_n > 0$ ώστε

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x - x_0) < \varepsilon_i\} \subseteq U.$$

Η υπόθεση ότι η $\mathcal{P}$ διαχωρίζει τα σημεία του X, μας εξασφαλίζει ότι η τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι Hausdorff: αν $x, y \in X$ και $x \neq y$, τότε υπάρχει $p \in \mathcal{P}$ με $p(x-y) > 0$. Έπεται ότι τα $\{z \in X : p(z-x) < p(x-y)/2\}$ και $\{z \in X : p(z-y) < p(x-y)/2\}$ είναι ξένες $\mathcal{T}$-ανοικτές περιοχές των x, y αντίστοιχα.

Ορισμός Γ΄.2.8. ***Τοπικά κυρτός χώρος*** *είναι ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με μία τοπολογία $\mathcal{T}$ η οποία ορίζεται από μια οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P}$ που διαχωρίζει τα σημεία του X.*
Θα μας απασχολήσουν δύο παραδείγματα τοπικά κυρτών χώρων:
(a)(X, w). *Έστω ένας χώρος με νόρμα. Κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $x^* : X \to \mathbb{R}$ ορίζει με φυσιολογικό τρόπο την ημινόρμα $p_{x^*} : X \to \mathbb{R}^+$ με*

$$p_{x^*}(x) := |x^*(x)|.$$

Η οικογένεια $\mathcal{P} = \{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$ *διαχωρίζει τα σημεία του* X*: Από το θεώρημα Hahn-Banach (βλ. παρακάτω), αν* $x, y \in X$ *και* $x \neq y$, *τότε υπάρχει* $x^* \in X^*$ *με* $x^*(x-y) \neq 0$, *δηλαδή*

$$p_{x^*}(x-y) = |x^*(x-y)| > 0.$$

Συνεπώς, η $\mathcal{P}$ *ορίζει τοπικά κυρτή τοπολογία στον* X, *την οποία συμβολίζουμε με* w. *Η* w *είναι η* ***ασθενής τοπολογία*** *στον* X. *Αν* $x_0 \in X$, *μια βάση* w*-περιοχών του* x_0 *αποτελείται από τα σύνολα της μορφής*

$$\{x \in X : |x_i^*(x) - x_i^*(x_0)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\},$$

όπου $n \in \mathbb{N}, x_i^* \in X^*$ *και* $\varepsilon > 0$.
Μια βάση περιοχών του 0 *αποτελείται από τα σύνολα της μορφής*

$$B(x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) := \{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon, \ i = 1, \dots, n\}$$

όπου $n \in \mathbb{N}, x_i^* \in X^*$ *και* $\varepsilon > 0$.
(b)(X^*, w^*). *Έστω* X *ένας χώρος με νόρμα και έστω* X^* *ο δυϊκός του. Κάθε* $x \in X$ *ορίζει με φυσιολογικό τρόπο την ημινόρμα* $p_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *με*

$$p_x(x^*) := |x^*(x)|.$$

Η οικογένεια $\mathcal{P} = \{p_x : x \in X\}$ *διαχωρίζει τα σημεία του* X^**: αν* $x^*, y^* \in X^*$ *και* $x^* \neq y^*$, *τότε υπάρχει* $x \in X$ *με* $x^*(x) \neq y^*(x)$, *δηλαδή*

$$p_x(x^* - y^*) = |x^*(x) - y^*(x)| > 0.$$

Συνεπώς, η $\mathcal{P}$ *ορίζει τοπικά κυρτή τοπολογία στον* X^*, *την οποία συμβολίζουμε με* w^*. *Η* w^* *είναι η* ***ασθενής* τοπολογία*** *στον* X^*. *Αν* $x_0^* \in X^*$, *μια βάση* w^**-περιοχών του* x_0^* *αποτελείται από τα σύνολα της μορφής*

$$\{x^* \in X^* : |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\},$$

όπου $n \in \mathbb{N}, x_i \in X$ *και* $\varepsilon > 0$.

Πρόταση Γ΄.2.9. *Κάθε* w*-ανοκτό σύνολο είναι* $|| \cdot ||$*-ανοικτό.*

Πρόταση Γ΄.2.10. *Έστω* (x_i) *δίκτυο στον* X *και* $x \in X$. *Τότε,* $x_i \xrightarrow{w} x$ *αν και μόνο αν* $x^*(x_i) \longrightarrow x^*(x)$ *για κάθε* $x^* \in X^*$.

Θεώρημα Γ'.2.11. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα $\|\ \|$.Έστω $(X,w)^*$ ο γραμμικός χώρος των w-συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $f : X \to \mathbb{R}$ και X^* ο δυϊκός του $(X, \|\cdot\|)$ των $\|\cdot\|$-φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών. Τότε*

$$(X,w)^* = X^*.$$

Ορισμοί Γ'.2.12. *Έστω $A \subseteq X$. Ορίζουμε*

(i) $\overline{A}^{\|\cdot\|} = \bigcap\{B \subseteq X : A \subseteq B \text{ και } B\ \|\cdot\|\text{-κλειστό}\}$

(ii) $\overline{A}^{w} = \bigcap\{B \subseteq X : A \subseteq B \text{ και } B\ w\text{-κλειστό}\}$.

Παρατηρούμε ότι αφού η w-τοπολογία είναι μικρότερη από την $\|\cdot\|$-τοπολογία, έχουμε

$$\overline{A}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{A}^{w}.$$

Θεώρημα Mazur Γ'.2.13. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω A κυρτό υποσύνολο του X.Τότε,*

$$\overline{A}^{\|\cdot\|} = \overline{A}^{w}.$$

Πόρισμα Γ'.2.14. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ένα κυρτό υποσύνολο του X είναι ασθενώς κλειστό αν και μόνο αν είναι $\|\cdot\|$-κλειστό.*

Πόρισμα Γ'.2.15. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y ένας γραμμικός υπόχωρος του X. Τότε*

$$\overline{Y}^{\|\cdot\|} = \overline{Y}^{w}.$$

Πόρισμα Γ'.2.16. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \xrightarrow{w} 0$. Τότε υπάρχει ακολουθία (y_k) κυρτών συνδυασμών των x_n ώστε $\|y_k\| \longrightarrow 0$.*

Παράρτημα Δ′

Οι L^p-χώροι και οι δυϊκοί τους

Ορισμός Δ′.1. *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *χ.π. και* $p \in \mathbb{R}$ *με* $1 \leq p < \infty$. *Τότε το* $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ *είναι το σύνολο όλων των* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμων συναρτήσεων* $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ *ώστε η* $|f|^p$ *να είναι ολοκληρώσιμη.*
Εύκολα αποσδεικνύεται, ότι ο $\mathcal{L}^p(P)$ *είναι διανυσματικός χώρος. Η συνάρτηση* $||\ ||_p : \mathcal{L}^p(P) \mapsto \mathbb{R}$ *που ορίζεται από τον τύπο*

$$||f||_p := \Big(\int |f|^p dP \Big)^{\frac{1}{p}}$$

είναι μία ημινόρμα (βλ. π.χ.[15] Cor. 3.3.4).
Για $p = \infty$ *το* $\mathcal{L}^\infty(P) := \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{R})$ *είναι το σύνολο όλων των φραγμένων* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμων συναρτήσεων* $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *και ο χώρος* $\mathcal{L}^\infty(P)$ *είναι διανυσματικός χώρος. Η συνάρτηση*

$$||\ ||_\infty : \mathcal{L}^\infty(P) \longmapsto \mathbb{R}$$

που ορίζεται από τον τύπο

$$||f||_\infty := inf\{M \geq 0 : P(\{f \geq M\}) = 0$$

είναι μία ημινόρμα (βλ. επίσης [15] Cor. 3.3.4).

Ορισμός Δ′.2. *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *χ.π. και* $p \in \mathbb{R}$ *με* $1 \leq p \leq \infty$, *και έστω*

$$\mathcal{N}^p(P) := \mathcal{N}^p(\Omega, \mathcal{F}, P) := \{f \in \mathcal{L}^p(P) : ||f||_p = 0\}.$$

Είναι σαφές ότι ο $\mathcal{N}^p(P)$ *είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του* $\mathcal{L}^p(P)$. *Ορίζουμε τον χώρο*

$$L^p(P) := \{\dot{f} : f \in \mathcal{L}^p(P)\} := \mathcal{L}^p(P) \setminus \mathcal{N}^p(P),$$

όπου $\overset{\bullet}{f} := \{g \in \mathcal{L}^p(P) : P(\{f \neq g\}) = 0\}$. *Τότε ο* $L^p(P)$ *είναι ένας πλήρης διανισματικός χώρος με νόρμα την* $|| \, ||_p$ *(βλ. π.χ. [15], Θεώρημα 3.4.1).*

Παρατήρηση Δ΄.3. *(βλ. π.χ [15], Prop. 3.5.5) Έστω* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *χ.π. και* $p, q \in \mathbb{R}$ *ώστε* $1 \leq p < \infty$ *και* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Για κάθε* $g \in \mathcal{L}^q(P)$ *σταθερό ορίζουμε την συνάρτηση*

$$T_g : \mathcal{L}^p(P) \longmapsto \mathbb{R}$$

ώστε $T_g(f) := \int fg \, dP$. *Είναι σαφές, ότι αν* $f, h \in \mathcal{L}^p(P)$ *και* $P(\{f \neq h\}) = 0$ *τότε* $T_g(f) = T_g(h)$. *Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο* $\overset{\bullet}{T}_g(\overset{\bullet}{f}) := T_g(f)$ *για να ορίσουμε ένα συναρτησοειδές* $\overset{\bullet}{T}_g : L^p(P) \longmapsto \mathbb{R}$, *το οποίο από εδώ και πέρα θα συμβολίζουμε επίσης με* T_g.

Πρόταση Δ΄.4. *Έστω* $\Omega, \mathcal{F}, P)$ *χ.π. και* $p, q \in \mathbb{R}$ *ώστε* $1 \leq p < \infty$ *και* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Τότε η απεικόνιση* $T : \mathcal{L}^q(P) \longmapsto L^p(P)^*$ *ώστε* $T(g) := T_g$ *όπως ορίστηκε στην παρατήρηση Δ΄.3 επάγει μία ισομετρία του* $L^q(P)$ *στον* $L^p(P)^*$.

Ορισμός Δ΄.5. *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F})$ *μ.χ. και* $\mathcal{I}$ *ένα γνήσιο σ-Ιδεώδες (proper σ-ideal), δηλ. (i)* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$ *,(ii) αν* $C \subseteq A$, $C \in \mathcal{F}$ *και* $A \in \mathcal{I}$ *τότε* $C \in \mathcal{I}$, *(iii)* $\Omega \notin \mathcal{I}$ *και (iv) για κάθε ακολουθία* $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *στο* $\mathcal{I}$ *ισχύει* $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{I}$. *Έστω* $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{I}) := \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{I})$ *το σύνολο όλων των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων από το* Ω *στπ* $\mathbb{R}$. *Ορίζουμε τη συνάρτηση* $|| \, ||_\infty : \mathcal{L}^\infty(\mathcal{I}) \longmapsto \mathbb{R}$ *ώστε*

$$||f||_\infty := inf\{M \geq 0 : \{g \geq M\} \in \mathcal{I}\}.$$

Πρόταση Δ΄.6. *(βλ. K.P.S Bhaskara Rao and M. Baskara Rao [10], Prop 4.7.9) Ο χώρος* $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{I})$ *είναι ένας γραμμικός χώρος και η συνάρτηση* $|| \, ||_\infty$ *είναι μία ημινόρμα, ως προς την οποία ο* $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{I})$ *είναι πλήρης.*

Ορισμός Δ΄.7. *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F})$ *μ.χ. κια* $\mathcal{I}$ *ένα γνήσιο σ-ιδεώδες. Ορίζουμε*

$$\mathcal{N}^\infty(\mathcal{I}) := \mathcal{N}^\infty \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{I}) := \{f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{I}) : ||f||_\infty = 0\}.$$

Τότε ο $\mathcal{N}^\infty(\mathcal{I})$ *είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του* $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{I})$. *Έστω*

$$L^\infty(\mathcal{I}) := L^\infty \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{I}) := \{\overset{\bullet}{f} : f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{I})\},$$

όπου $\overset{\bullet}{f} := \{g \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{I}) : \{f \neq g\} \in \mathcal{I}\}$. *Τότε ο* $L^\infty(\mathcal{I})$ *είναι ένας πλήρης χώρος με νόρμα, που συμβολίζεται πάλι με* $|| \, ||_\infty$ *(βλ. [10] p.138).*

Ο χώρος $ba(\Omega, \mathcal{F})$ **Δ΄.8.** *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F})$ *μ.χ.. Ο χώρος όλων των φραγμένων πεπερασμένως προσθετικών μέτρων επάνω στην* $\mathcal{F}$ *συμβολίζεται με* $ba(\Omega, \mathcal{F})$*. Ο* $ba(\Omega, \mathcal{F})$ *είναι ένας γραμμικός χώρος, στον οποίο μπορούμε να ορίσουμε μία νόρμα* $|| \, ||$*, ώστε ο* $(ba(\Omega, \mathcal{F}), || \, ||)$ *να είναι ένας χώρος Banach (βλ. [10], Θεώρημα 2.2.1).*

Πρόταση Δ΄.9. *Ο δυϊκός του* $L^\infty(P)$ *είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον χώρο* $ba(\Omega, \mathcal{F})$*, δηλ. με τον χώρο όλων των φραγμένων πεπερασμένως προσθετικών μέτρων επάνω στην* $\mathcal{F}$*.*

Απόδειξη. Αφού το $\mathcal{F}_0$ είναι γνήσιο σ-ιδεώδες, προκύπτει ότι $L^\infty(P) = L^\infty(\mathcal{F}_0)$. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το [10], Corollary 4.7.11 για να έχουμε το αποτέλεσμα της Πρότασης Δ΄.9. $\square$

Σε όλη τη Δ.Ε. για λόγους απλοποίησης θα ταυτίζουμε μία συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^p(P)$, $1 \leq p \leq \infty$, με την αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας $\dot{f}$ για κάθε $1 \leq p \leq \infty$. Αν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης γράφουμε L^p αντί $L^p(P)$.

Παράρτημα Ε΄

Το Θεώρημα Hahn Banach

Αναλυτικές μορφές του Θεωρήματος Hahn Banach Ε΄.1.

(α) Έστω U γραμμικός χώρος και $p : U \longmapsto [0, \infty)$ υπογραμμική συνάρτηση. Τότε για κάθε $u_0 \in U$ υπάρχει γραμμική συνάρτηση $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(u_0) = p(u_0)$ και $f(u) \leq p(u)$ για κάθε $u \in U$.

(β) Έστω U χώρος με νόρμα και V γραμμικός υπόχωρος του U. Τότε για κάθε $f \in V^*$ υπαχει $g \in U^*$, που επεκτείνει την f, με $||g|| = ||f||$.

(γ) Αν U χώρος με νόρμα και $u \in U$ τότε υπάρχει $f \in U^*$, τέτοια ώστε $||f|| \leq 1$ και $f(u) = ||u||$.

(δ) Αν U χώρος με νόρμα και $V \subseteq U$ είναι γραμμικός υπόχωρος που δεν είναι πυκνός, τότε υπάρχει μία μη μηδενική $f \in U^*$ τέτοια ώστε $f(u) = 0$ για κάθε $u \in V$.

(ε) Αν U είναι χώρος με νόρμα, τότε το U^* διαχωρίζει τα σημεία του U.

Ορισμός Ε΄.2. *Έστω U ένας γραμμικός χώρος. Ένας **κώνος** C με κορυφή 0 είναι ένα υποσύνολο του U, ώστε για κάθε $x \in C$ και κάθε $\lambda > 0$ να ισχύει $\lambda x \in C$. Καλούμε **κυρτό κώνο** (με κορυφή το 0) το σύνολο $C \subseteq U$ για το οποίο $\alpha u + \beta v \in C$ για κάθε $u, v \in C$ και $\alpha, \beta \geq 0$. Η τομή κάθε οικογένειας κυρτών κώνων είναι κυρτός κώνος, συνεπώς για κάθε υποσύνολο A του U υπάρχει ένας ελάχιστος κυρτός κώνος που περιέχει το A.*

Ορισμός Ε΄.3. *Έστω U γραμμικός χώρος. Ένα υποσύνολο C του U ονομάζεται **κυρτό**, αν για κάθε $\chi, \psi \in C$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει $\lambda\chi + (1-\lambda)\psi \in C$.*

Ορισμός Ε΄.4. *Η **κυρτή θήκη** ενός υποσυνόλου A ενός γραμμικού χώρου U είναι το σύνολο όλων των **κυρτών συνδυασμών** στοιχείων του A, δηλ. το σύνολο*

$$conv(A) := \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ : x_k \in A,\ \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Η κυρτή θήκη του A είναι κυρτό σύνολο και είναι η τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το A.

Παρατήρηση Ε΄.5. *Έστω U ένας γραμμικός χώρος. Ένας κώνος $C \subseteq U$ είναι κυρτός αν και μόνον αν είναι κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Πράγματι έστω $C \subseteq U$ είναι κυρτός κώνος. Έστω οι συνθήκες

(a) Για κάθε $u, v \in C$ και κάθε $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει $\alpha u + \beta v \in C$.

(b) Για κάθε $u, v \in C$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει $\lambda u + (1-\lambda)v \in C$.

$(a) \implies (b)$ Προφανές για $\alpha = \lambda, \beta = 1-\lambda$.

$(b) \implies (a)$ Έστω ότι ισχύει η (b). Έστω $u, v \in C$ και κάθε $\alpha, \beta \geq 0$. Αν $k := \alpha + \beta$ τότε $\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k} \geq 0$ και $\frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k} = 1$ συνεπώς από τη (b) έχω $\frac{\alpha}{k}u + \frac{\beta}{k}v \in C$ και αφού C κώνος έχουμε $k\big(\frac{\alpha}{k}u + \frac{\beta}{k}v\big) = \alpha u + \beta v \in C$. □

Πρόταση Ε΄.6. *Έστω U χώρος με νόρμα. Τότε η κλειστή θήκη ενώς κυρτού κώνου είναι κυρτός κώνος, και η κλειστή θήκη ενός γραμμικού υπόχωρου είναι γραμμικός υπόχωρος.*

Γεωμετρικές μορφές του Hahn Banach Theorem Ε΄.7.

(α) Έστω U χώρος με νόρμα και $C \subseteq U$ ένα κυρτό σύνολο τέτοιο ώστε $||u|| \geq 1$ για κάθε $u \in C$. Τότε υπάρχει μία $f \in U^*$ τέτοια ώστε $||f|| \leq 1$ και $f(u) \geq 1$ για κάθε $u \in C$.

(β) Έστω U χώρος με νόρμα και $B \subseteq U$ ένα μη κενό κυρτό σύνολο τέτοιο ώστε $0 \notin \overline{B}$. Τότε υπάρχει μία $f \in U^*$ τέτοια ώστε $\inf\limits_{u \in B} f(u) > 0$.

(γ) Έστω U χώρος με νόρμα, B κλειστό κυρτό υποσύνολο του U που περιέχει το 0, και u ένα σημείο του $U \backslash B$. Τότε υπάρχει μία $f \in U^*$ τέτοια ώστε $f(u) > 1$ και $f(v) \leq 1$ για κάθε $v \in B$.

Πρόταση (Διαχωρισμός από πεπερασμένα παραγόμενους κώνους) Ε΄.8. *Έστω U γραμμικός χώρος επάνω στο $\mathbb{R}$ και $u, v_0, \ldots, v_n$ σημεία του U τέτοια ώστε το u να μην ανήκει στο κυρτό κώνο που παράγεται από τα $\{v_0, \ldots, v_n\}$. Τότε υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(v_i) \geq 0$ για κάθε i και $f(u) < 0$.*

Ορισμός Ε΄.9. *Ένα υποσύνολο του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^d$ της μορφής*

$$H(f, a) = \{\chi \in \mathbb{R}^d | f \cdot \chi = \alpha\}$$

, για κάποια $f \in \mathbb{R}^d$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, ονομάζεται ***υπερεπίπεδο****.*

Ορισμός Ε΄.10. *Τα υποσύνολα K, M του $\mathbb{R}^d$ λέγεται ότι* ***διαχωρίζονται*** *από το υπερεπίπεδο $H(f, \alpha)$ αν για κάθε $\chi \in K$, $\psi \in M$ ισχύει*

$$f \cdot \chi \leq \alpha \leq f \cdot \psi.$$

Ορισμός Ε΄.11. *Τα υποσύνολα K, M του $\mathbb{R}^d$ λέγεται ότι* ***διαχωρίζονται πλήρως*** *από το υπερεπίπεδο $H(f, \alpha)$ αν για κάθε $\chi \in K$, $\psi \in M$ υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$f \cdot \chi \leq \alpha < \alpha + \epsilon \leq f \cdot \psi.$$

Το παρακάτω λήμμα αναφέρεται στο [29], Λήμμα 3.1.2.

Λήμμα Ε΄.12. *Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που δε περιέχει το μηδενικό διάνυσμα. Τότε υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\phi \in \mathbb{R}^d$ η οποία έχει ένα αυστηρά θετικό κάτω φράγμα στο C.*

Απόδειξη. **(a)** Έστω κλειστή σφαίρα $B = B(0, r)$ με το κέντρο την αρχή των αξόνων του $\mathbb{R}^n$ και $r > 0$ τέτοιο ώστε η B να τέμνει το C. Τότε το $B \cap C$ είναι μη κενό, κλειστό και φραγμένο και κατά συνέπεια συμπαγές. Επομένως η συνεχής απεικόνιση $x \longrightarrow ||x||_n$ θα έχει ελάχιστο στο $B \cap C$ σε κάποιο $z \in B \cap C$ (όπου

$||x|| = ||x||_n$ η ευκλείδια νόρμα του x στο $\mathbb{R}^n$).

(b) *Για κάθε* $x \in C$ *ισχύει* $x \cdot z \geq ||z||^2 > 0$.
Πράγματι για κάθε $x \notin B$ θα έχουμε ότι $||x|| > r \geq ||z||$ και για κάθε $x \in C \cap B$ θα έχουμε $||x|| \geq ||z||$. Άρα για κάθε $x \in C$ θα ισχύει $||x|| \geq ||z||$. Ειδικότερα, αφού το C είναι κυρτό, το $y = \lambda x + (1-\lambda)z$ θα είναι στο C για κάθε $x \in C$ και $0 \leq \lambda \leq 1$, και επομένως $||y|| \geq ||z||$. Κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}
&||\lambda x + (1-\lambda)z||^2 \geq ||z||^2 \\
&\iff \lambda^2 x \cdot x + 2\lambda(1-\lambda)x \cdot z + (1-\lambda)^2 z \cdot z \geq z \cdot z \\
&\iff \lambda^2 x \cdot x + 2\lambda(1-\lambda)x \cdot z - 2\lambda z \cdot z + \lambda^2 z \cdot z \geq 0 \\
&\iff \lambda x \cdot x + 2(1-\lambda)x \cdot z - 2z \cdot z + \lambda z \cdot z \geq 0
\end{aligned}$$

και για $\lambda \longrightarrow 0$

$$x \cdot z \geq z \cdot z = ||z||^2 > 0.$$

(c) Έστω $\phi : C \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\phi(x) := x \cdot z$ για κάθε $x \in C$. Τότε η $\phi(x)$ είναι κάτω φραγμένη στο C από το θετικό αριθμό $||z||^2$. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ϕ είναι και άνω φραγμένη καθώς κάθε γραμμική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη. □

Το παρακάτω Θεώρημα αναφέρεται στο [29], Theorem 3.1.1.

Θεώρημα (διαχωρισμού από υπερεπίπεδο) Ε΄.13. *Έστω* L *γραμμικός υπόχωρος του* $\mathbb{R}^n$ *και* K *συμπαγές κυρτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$ *με* $K \cap L = \emptyset$.*Τότε μπορούμε να διαχωρίσουμε πλήρως τα* L *και* K *από ένα υπερεπίπεδο που περιέχει το* L. *Δηλαδή υπάρχει* $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *φραγμένη γραμμική συνάρτηση τέτοιο ώστε* $\phi(x) = 0$ *για κάθε* $x \in L$ *αλλά* $\phi(x) > 0$ *για κάθε* $x \in K$.

Απόδειξη. Έστω L γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και K συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $K \cap L = \emptyset$. Θεωρούμε

$$C = K - L = \{x \in \mathbb{R}^n : x = k - l \ ; \ k \in K, \ l \in L\}.$$

(a) *Το* C *είναι κυρτό.*
Πράγματι, έστω $x, y \in C$ και $\lambda, \mu \in [0,1]$ με $\lambda + \mu = 1$. Αφού $x, y \in C$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
x &= x_1 - x_2 \ ; \ x_1 \in K, \ x_2 \in L \ \text{ και} \\
y &= y_1 - y_2 \ ; \ y_1 \in K, \ y_2 \in L
\end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda(x_1 - x_2) + \mu(y_1 - y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1) - (\lambda x_2 + \mu y_2) \ \in C. \end{aligned}$$

Συνεπώς το C είναι κυρτό.

(b) *Το C είναι κλειστό.*
Πράγματι, έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (k_n - l_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$ με $x_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}^n$. Θ.δ.ο $x \in C$.

($\boldsymbol{b_1}$) Έστω (x_{n_r}) συγκλίνουσα υπακολουθία της (x_n). Τότε $\lim\limits_{r\to\infty} x_{n_r} = x$.

($\boldsymbol{b_2}$) Αφού το K είναι συμπαγές, η (k_n) θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (k_{n_r}) με $\lim\limits_{r\to\infty} k_{n_r} = k \in K$.

($\boldsymbol{b_3}$) Το L είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ως γραμμικός υπόχωρος σε χώρο πεπερασμένης διάστασης (βλ. π.χ. [4], Πόρισμα 1.3.7)

Από τα (b_1) και (b_2) έχω $l_{n_r} = k_{n_r} - x_{n_r} \longrightarrow k - x$ για $r \to \infty$ και αφού το L είναι κλειστό θα έχουμε $l := k - x \in L$. Συνεπώς $x = k - l \in C$.

(c) *Το C δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα.*
Προφανώς, αφού $K \cap L = \emptyset$.

(d) *Υπάρχει μια φραγμένη γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\phi(x) = 0$ για κάθε $x \in L$ αλλά $\phi(x) > 0$ για κάθε $x \in K$.*
Πράγματι από τα (a),(b),(c) προκύπτει ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα Ε΄.12 στο C και να κατασκευάσουμε μια φραγμένη γραμμική συνάρτηση ϕ : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να έχει ένα αυστηρά θετικό κάτω φράγμα στο C. Δηλαδή $\phi(x) \geq ||z||^2 > 0$ για κάθε $x \in C$ και για z όπως στο Λήμμα Ε΄.12

($\boldsymbol{d_1}$) *Ισχύει ότι $\phi(x) > 0$ για κάθε $x \in K$.*
Πράγματι για κάθε $x \in C$ ισχύει $x = k - l$ με $k \in K$ και $l \in L$ και καθώς η ϕ γραμμική συνάρτηση θα έχουμε $\phi(k) - \phi(l) \geq ||z||^2 > 0$ με $k \in K$ και $l \in L$. Άρα για κάθε $x \in K$ ισχύει $\phi(x) = \phi(x - 0) = \phi(x) - \phi(0) > 0$.

($\boldsymbol{d_2}$) *Ισχύει ότι $\phi(l) = 0$ για κάθε $l \in L$.*
Πράγματι, σταθεροποιούμε το $k \in K$ και αντικαθιστούμε το l με το λl για οποιοδήποτε $\lambda > 0$ αν $\phi(l) \geq 0$, και με το λl για οποιοδήποτε $\lambda < 0$ αν $\phi(l) < 0$. Το ισχυει ότι $\lambda l \in L$, αφού ο L είναι γραμμικός υπόχωρος και

- αν $\phi(l) > 0$ τότε για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει $\phi(k) - \lambda\phi(l) > 0$, συπεπώς και $\phi(k) - \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\phi(l) \geq 0$ δηλαδή $\phi(k) - \infty \geq 0$, άτοπο
- αν $\phi(l) < 0$ τότε για κάθε $\lambda < 0$ ισχύει $\phi(k) - \lambda\phi(l) > 0$, συνεπώς και $\phi(k) - \lim\limits_{\lambda\longrightarrow-\infty} \lambda\phi(l) \geq 0$ δηλαδή $\phi(k) - \infty \geq 0$, άτοπο.

Συνεπώς $\phi(l) = 0$ για κάθε $l \in L$.

(e) $L \subseteq Ker(\phi)$.

Πράγματι, από το (d_2) έχουμε ότι $\phi(l) = 0$ για κάθε $l \in L$ συνεπώς $L \subseteq Ker(\phi)$. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Γιαννακόπουλος, Α. (2003): Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Τόμος Ι, *Παναπιστήμιο Αιγαίου*

[2] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2014): Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης, *Πανεπιστήμιο Πειραιώς*

[3] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2014): Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης, *Πανεπιστήμιο Πειραιώς*

[4] Νεγρεπόντης, Σ. (2007): Μεταπτυχιακή Ανάλυση ΙΙ, *Πανεπιστήμιο Αθηνών*

[5] Ansel, J. & Stricker, Ch. (1993): Lois de martingale, densités et dëcomposition de Föllmer-Schweizer, *Annales de l'Institut Henri Poincaré– Probabilités et Statistiques*, vol. 28, no. 3, pp. 375-392

[6] Ansel, J. & Stricker, Ch. (1994): Couverture des actifs contingents et prix maximum., *Annales de l'Institute Henri Poincaré-Probabilités et Statistiques*, vol. 30, pp. 303-315.

[7] Ash, R. (1972): Measure, Integration and Functional Analysis, *Academic Press Inc.*

[8] Bachelier, L. (1900): Théorie de la Spéculation, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, vol. 17, pp. 21-86, Αγγλική μετάφραση: The Random Character of stock market prices (1964) (P. Cootner, επιμελητής), *MIT Press*

[9] BacK, K. & Pliska, S. (1987): Arbitrage and martingales in markets with positive wealth constraints, *Preprint*

[10] Bhaskara Rao, K. & Bhaskara Rao M. (1970): Theory of charges, *Academic Press*

[11] Bichteler, K. (1981): Stochastic integration and L^p-theory of semi martingales, *Annals of Probability*, vol. 9, pp. 49-89

[12] Billingsley, P. (1968): Convergence of Probability Measures, *John Wiley* & *Sons, Inc.*

[13] Black, F. & Scholes, M. (1973): The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, vol. 81, pp. 637-659

[14] Chou, C. & Meyer, P. & Stricker, S. (1980): Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés, *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 784, pp. 128-139

[15] Cohn, D. (2010): Measure Theory, *Springer Science and Business Media*

[16] Dalang, R. & Morton, A. & Willinger,W. (1990): Equivalent Martingale measures and no arbitrage in stochastic securities market model, *Stochastics and Stochastic Reports*, vol. 29, pp. 185-201

[17] Delbaen, F. (1992): Representing Martingale Measures when Asset Prices are Continuous and Bounded, *Mathematical Finance*, vol. 2, pp. 107-130

[18] Delbaen, F. & Schachermayer, W. (2006): The Mathematics of Arbitrage, *Springer*

[19] Delbaen, F.& Schachermayer, W. (1994): A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing, *Mathematische Annalen*, vol. 300, pp. 463-520

[20] Delbaen, F.& Schachermayer, W. (1998): The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes, *Mathematische Annalen*, vol. 312, pp. 215-250

[21] Delbaen, F. & Schachermayer, W. (1994): Arbitrage and free lunch with bounded Risk for unbounded continuous Processes, *Mathematical Finance*, vol. 4, pp. 343-348

[22] Diestel, J.(1975): Geometry of Banach spaces-selected topics, *Springer*

[23] Dellacherie, C. (1980): Un survol de la theorie de I'integrale stochastique, *Université de Rouen*

[24] Dellacherie, C. (1972): Capacités et Processus Stochastiques. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, *Springer*

[25] Dellacherie, C. & Meyer, P. (1980): Probabilités et Potentiel, Chapitres V a VIII. Thëorie des martingales, *Hermann*

[26] Dellacherie, C. & Meyer, P. (1982): Probabilities and Potentiel B, *North-Holland*

[27] Dugundji, J. (1966): Topology, *Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics*

[28] Dybvig, Ph.& Ross, S. (1987): Arbitrage, included in: J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman (eds.), The new Palgrave dictionary of economics, vol. 1, *Macmillan*

[29] Elliott, R & Kopp, E. (2005): Mathematics of Financial Markets, *Springer Science and Business Media*

[30] Emery, M.(1979), Une topologie sur l'espace des semi-martingales, *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 721, pp. 260-280

[31] Emery, M. (1980): Compensation de processus á variation finie non localement intégrables. In: J. Azéma, M. Yor (eds.), Séminaire de Probabilités XIV, *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 784, pp. 152-160

[32] Föllmer, H. & Schweizer, H. (1991): Hedging of Contingent Claims Under Incomplete Information, *Gordon and Breach*, vol. 5, pp. 389-414

[33] Fremlin, D. (2000): Measure Theory Volume 1 (The Irreducible Minimum), *Torres Fremlin*

[34] Fremlin, D. (2001): Measure Theory Volume 2 (Broad Foundations), *Torres Fremlin*

[35] Fremlin, D. (2002): Measure Theory Volume 3 (Measure Algebras), *Torres Fremlin*

[36] Harrison, J. & Kreps, D.(1979): Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, *Journal of Economic Theory*, vol. 20, pp. 381-408

[37] Harrison, J. & Pliska, S. (1981): Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continous Trading, *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 11, pp. 215-260

[38] Itô, K. (1944): Stochastic integral *Proc. Imperial Acad.*, vol. 20, pp. 519-524

[39] Jacod, J. (1979): Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales, Lecture Notes in Mathematics 714, *Springer*

[40] Jacod, J. & Shiryaev, A. (2002): Limit Theorems for stochastic Processes, *Springer*

[41] Kabanov, Y. & Safarian, M. (2009): Markets with Transaction Costs: Mathematical Theory, *Springer*

[42] Kakutani, S. (1948): On Equivalence of Infinite Product Measures, *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 49, No 1, pp 214-224

[43] Karatzas, I. & Shreve, S. (1988): Brownian Motion and Stochastic Calculus, *Springer-Verlag*

[44] Kreps, D. (1981): Arbitrage and Equilibrium in Economics with infinitely many Commodities, *Journal of Mathematical Economics*, vol. 8, pp. 15-35

[45] Loéve, M. (1978): Probability theory. 4th edn., *Springer*

[46] McBeth, D. (1991): On the existence of equivalent martingale measures, *Thesis Cornell University*

[47] Mémin, J. (1980): Espaces de semi Martingales et changement de probabilité, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, vol. 52, pp. 9–39

[48] Meyer, P. (1976): Un tours sur les integrales stochastiques, in: Seminaire de Probabilitè X, *Springer Lecture Notes in Mathematics 511*, pp. 245-400.

[49] Protter, P. (1990): Stochastic Integration and Differential Equations. A new approach. Applications of Mathematics (vol. 21), *Springer-Verlag*

[50] Revuz, D. & Yor, M. (1991): Continuous Martingales and Brownian Motion, *Springer*

[51] Rockafellar, R. (1970): Convex Analysis, *Princeton University Press*

[52] Rogers, L. & Williams, D. (2000): Diffusions, Markov Processes and Martingales. Volume 1 and 2, *Cambridge University Press*

[53] Samuelson, P. (1965): Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly, *Industrial Management Review*, vol. 6, pp. 41-50

[54] Schachermayer, W. (1994): Martingale Measures for Discrete time Processes with Infinite Horizon, *Mathematical Finance*, vol. 4, no. 1, pp. 25-56

[55] Schaefer, H. (1999): Topological Vector Spaces, *Springer*

[56] Shreve, S.E (2004): Stochastic Calculus for Finance II: Continuous Time Models, *Springer*

[57] Stricker, Ch (1990): Arbitrage et Lois de Martingale, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, vol. 26, pp. 451-460

[58] Taqqu, M. & Willinger, W. (1987): The analysis of finite security markets using martingales, *Adv. Appl. Probl. 19*, pp 1-25

[59] Weizsäcker, Heinrich, Von & Winkler, G. (2001): Stochastic Integrals, *Springer*

[60] Willinger, W. & Taqqu, M. (1988): Pathwise approximations of processes based on the fine structure of their filtrations, in: Semn de Probabilites XXII, *Springer Lecture Notes in Mathematics 1321*, pp 542-599

[61] Yan, J. (1980): Caractérisation d' une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1, *Springer Lecture Notes in Mathematics 784*, pp. 220-222

Ευρετήριο Όρων

Ευρετήριο Συμβόλων