ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κίνδυνου»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Τιμολόγηση Συμβολαίων Μέσω Arbitrage & Το Θεώρημα Του Arbitrage»

Ειρήνη Α. Βελέντζα

Πειραιάς,

Ιούνιος 2015

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE & STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
&
INSURANCE SCIENCE

M.Sc. in "Actuarial Science and Risk Management"

DISSERTATION THESIS

"Option Pricing Via Arbitrage
&
The Theorem Of Arbitrage"

Eirini A. Velentza

Piraeus,

June 2015

Στους γονείς μου, Ανάργυρο και

Νεκταρία και στον αδερφό μου Βασίλη.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κύριο Σεβρόγλου Βασίλειο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την σημαντική υποστήριξη, βοήθεια και κατανόηση σε όλη τη διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας. Ήταν πάντα διαθέσιμος να μου προσφέρει τις γνώσεις του για την βαθύτερη κατανόηση των χρηματοοικονομικών μαθηματικών.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Μαχαιρά Νικόλαο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς καθώς και την κυρία Βερροπούλου Γεωργία, Επίκουρη Καθηγήτρια του ιδίου Τμήματος, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, τον αδερφό μου και τον Δημήτριο Χρυσούλη για την αμέριστη συμπαράσταση τους καθ’ όλη τη διάρκεια των ακαδημαϊκών μου σπουδών καθώς η πίστη τους στις δυνατότητες μου αποτέλεσε αρωγός σε όλους τους στόχους και τα όνειρα μου.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης μέσω της έννοιας του *arbitrage* (βέβαιο κέρδος). Θα τοποθετήσουμε το θεωρητικό πλαίσιο και βασικές έννοιες για τα χρηματοοικονομικά παράγωγα και θα δώσουμε το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο για την κατανόηση της έννοιας του *arbitrage*. Θα μελετήσουμε και θα αποδείξουμε το θεώρημα του *arbitrage*, καθώς επίσης και εφαρμογές του στο μοντέλο Black-Scholes αλλά και σε άλλα χρηματοοικονομικά μοντέλα τιμολόγησης. Τέλος, δείχνουμε πως αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσει μοναδικές τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης υπό συνθήκες απουσίας *arbitrage* σε διάφορες περιπτώσεις, όπως αυτό του διωνυμικού μοντέλου μίας ή πολλών χρονικών περιόδων.

Abstract

In this paper, we are going to study the option pricing via *Arbitrage*. We will set the essentially fundamental theoretical part and basic concepts for the financial derivatives and we will mention the needed mathematical background for the understanding of the meaning of arbitrage. We will present and prove the theorem of Arbitrage as well as its implementations in the Black & Scholes model along with other pricing models. We will demonstrate the way that this theorem can be used to determine the unique option prices under the absence of arbitrage in different circumstances, as the binomial model for one-period or multi-period.

Εισαγωγή

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη του βέβαιου κέρδους και η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης υπό συνθήκες απουσίας του. Θα παρουσιαστούν κάποια μοντέλα τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης όπου έχουν ως στόχο την εύρεση της μοναδικής τιμής των δικαιωμάτων που δεν οδηγεί σε βέβαιο κέρδος.

Ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν είναι ένας οικονομικός τίτλος του οποίου η αποπληρωμή εξαρτάται από την αξία του υποκείμενου τίτλου του. Υποκείμενος τίτλος μπορεί να είναι μία μετοχή, ένας δείκτης, ένα νόμισμα και πολλά άλλα. Η αποπληρωμή δεν ακολουθεί συγκεκριμένο μοτίβο καθώς ανάλογα με τον υποκείμενο τίτλο αλλάζουν και οι ημερομηνίες και οι χρηματορροές. Υπάρχουν διάφοροι τύποι παραγώγων, εμείς θα ασχοληθούμε εκτενώς με τα δικαιώματα προαίρεσης.

Η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης αποτελεί το μεγαλύτερο πεδίο έρευνας της οικονομικής θεωρίας. Έχουν αναπτυχθεί πολλά μοντέλα, το καθένα από τα οποία έχει πλεονεκτήματα και αδυναμίες. Ένα κοινό χαρακτηριστικό που διαθέτουν όλα αυτά τα μοντέλα αποτελεί το ότι τα αντικείμενα διαπραγμάτευσης τους (δικαιώματα αγοράς και δικαιώματα πώλησης), συναλλάσσονται ως αμοιβαία αντίθετες θέσεις. Οι τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης αντικατοπτρίζουν την συμπεριφορά των συμμετεχόντων της αγοράς. Συνεπώς, θεωρείται αναγκαίο εάν υπάρχει διαφορετική συμπεριφορά μεταξύ των αγοραστών/πωλητών των δικαιωμάτων αγοράς και των αγοραστών/πωλητών των δικαιωμάτων πώλησης, αυτή να αντανακλάται στην τιμολόγηση των συμβολαίων.

Στην χρηματοοικονομική θεωρία το βέβαιο κέρδος (arbitrage) αποτελεί μία πρακτική κατά την οποία εκμεταλλευόμαστε την διαφορά των τιμών μεταξύ δύο ή περισσότερων αγορών. Μια συναλλαγή βέβαιου κέρδους περιέχει μη αρνητικές χρηματορροές, σε οποιαδήποτε πιθανολογική ή χρονική στιγμή, και κάποια θετική χρηματορροή σε τουλάχιστον μία περίπτωση. Εάν οι τιμές της αγοράς δεν επιτρέπουν την ύπαρξη βέβαιου κέρδους, τότε η αγορά καλείται arbitrage equilibrium ή arbitrage-free. Η ύπαρξη ισορροπίας του βέβαιου κέρδους είναι προαπαιτούμενη για την οικονομική ισορροπία. Η υπόθεση της απουσίας του arbitrage χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε την μοναδική τιμή ουδέτερου κινδύνου των παραγώγων. Ουσιαστικά, η έλλειψη του βέβαιου κέρδους σημαίνει ότι όλες οι επενδύσεις μηδενικού κινδύνου μας αποφέρουν μηδενικού ρίσκου αποδόσεις και ότι δεν υπάρχουν επενδυτικές ευκαιρίες που να απαιτούν μηδενικό αρχικό κεφάλαιο και που να αποδίδουν θετικές αποδόσεις.

Οι αγορές είναι υποχρεωμένες για την εξασφάλιση της εύρυθμης λειτουργίας τους, να εξαλείφουν άμεσα οποιαδήποτε ευκαιρία βέβαιου κέρδους εμφανιστεί. Ένα θεμελιώδες κομμάτι της οικονομικής θεωρίας έχει δημιουργηθεί θέτοντας ως βάση την υπόθεση ότι τα αξιόγραφα συναλλάσσονται μόνο με τιμές οι οποίες καθιστούν αδύνατο το βέβαιο κέρδος. Συγκεκριμένα μόνο όταν δεν υπάρχει arbitrage, υπάρχει ένα ουδέτερου κινδύνου μοντέλο τιμολόγησης και το αντίστροφο.

Η δομή της εργασίας έχει ως κάτωθι:

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα. Δίνεται μία ιστορική αναδρομή των παραγώγων και έπειτα αναλύονται οι αγορές, οι τύποι, οι υποκείμενοι τίτλοι καθώς και στρατηγικές που ακολουθούνται από τις τρείς κατηγορίες συναλλασσόμενων. Έπειτα περιγράφονται τα μοντέλα αποτίμησης των παραγώγων και το πως αυτά εφαρμόζονται. Με την δομή του πρώτου κεφαλαίου προσδοκάται η διευκόλυνση του αναγνώστη για την κατανόηση των ακόλουθων κεφαλαίων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο πραγματοποιείται εκτενής ανάλυση στις ιδιότητες των δικαιωμάτων προαίρεσης και στις στρατηγικές αγοραπωλησιών επί αυτών. Έπειτα, παρατίθεται η σχέση ισοτιμίας πώλησης- αγοράς των δικαιωμάτων, που παράγεται από τις προεκτάσεις του βέβαιου κέρδους και παραδείγματα τιμολόγησης μέσω αυτής επί διαφόρων κατηγοριών δικαιωμάτων. Η συνθήκη αυτή δημιουργεί σχέσεις μεταξύ της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς, της τιμής ενός πανομοιότυπου δικαιώματος πώλησης, της τιμής του υποκείμενου τους τίτλου και της παρούσας αξίας της τιμής εξάσκησης τους. Ουσιαστικά, παράγονται μέσω αυτής τα φράγματα της θεωρητικής τιμής των δικαιωμάτων έτσι ώστε να διασφαλίζεται η απουσία του βέβαιου κέρδους. Η σχέση ισοτιμίας αναπτύχθηκε μεταξύ άλλων από τους Merton (1973) [42], Cox & Ross (1976) [20,21],Cox & Rubinstein (1985) [10], Finucane (1991) [34] και Klemkosky & Resnick (1979) [36].

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται το βέβαιο κέρδος, οι συνθήκες για να επιτευχθεί, οι κίνδυνοι που εμπεριέχει, τα πλεονεκτήματα του και οι επιπτώσεις του στις αγορές. Έπειτα, παρουσιάζεται και αποδεικνύεται το θεώρημα του Arbitrage καθώς και το θεώρημα τιμολόγησης μέσω Arbitrage (Arbitrage Pricing Theory), τα οποία αναπτύχθηκαν από τον Ross (1976) [43]. Ιδιαίτερης σημασίας ήταν και οι επεκτάσεις των θεωρημάτων αυτών από τους Shanken (1982) [44] και Burmeister (1986) [29]. Στη συνέχεια, εφαρμόζεται το μοντέλο τιμολόγησης Black & Scholes επί διαφόρων τύπων δικαιωμάτων προαίρεσης. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται από την πλειοψηφία των διαπραγματευτών παραγώγων προϊόντων και εξάγει τη μοναδική θεωρητική τιμή του χρεογράφου που δεν καταλήγει σε ευκαιρία βέβαιου κέρδους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο πραγματοποιείται η τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης μέσω διωνυμικών μοντέλων, η οποία είναι μία από τις απλούστερες αλλά και από τις πιο αποτελεσματικές τεχνικές για την τιμολόγηση σύνθετων δικαιωμάτων. Βασίζεται στην υπόθεση της απουσίας του arbitrage και αναπτύχθηκε από τους Cox (1977) [20], Ross & Rubinstein (1979) [12]. Επίσης, για την κατανόηση της πρακτικής του Διωνυμικού μοντέλου επεξηγείται η μέθοδος επαναπροσέγγισης χαρτοφυλακίου και οι διαφορές και ιδιότητες των ουδέτερου ρίσκου πιθανοτήτων και των πραγματικών πιθανοτήτων. Στο τέλος, παρουσιάζονται οι περιπτώσεις δύο εναλλακτικών διωνυμικών δέντρων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

Κάθε εμπορεύσιμο αντικείμενο, εμπεριέχει κινδύνους όταν γίνεται άσκηση της εμπορευσιμότητας του [48]. Ο κυριότερος κίνδυνος αφορά την αβεβαιότητα που υπάρχει για την αξία του αντικειμένου στο μέλλον. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι προσπάθειες να επικεντρωθούν στην πρόβλεψη της αξίας αυτής, δημιουργώντας έτσι πληθώρα από μοντέλα προβλεψιμότητας (forecasting models) τα αποτελέσματα των οποίων έχουν πάντα απόκλιση από την πραγματική μελλοντική τιμή του αντικειμένου [48]. Η δημιουργία κινδύνων προέρχεται από την μεταβλητότητα των τιμών, τέτοιος κίνδυνος είναι αυτός της εμπορευσιμότητας, και προστασία από τέτοιου είδους κινδύνους παρέχουν τα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα.

Με τον όρο *παράγωγο προϊόν,* περιγράφουμε τα χρηματοοικονομικά προϊόντα που παράγονται από απλούστερης μορφής υποκείμενα προϊόντα (underlying assets) [17]. Πρακτικά είναι συμβόλαια, τα οποία περιγράφουν μια μελλοντική συναλλαγή. Η αγορά των παραγώγων έχει τεράστια δυναμική, η οποία γίνεται εμφανής από το γεγονός ότι το μέγεθος της παραδείγματος χάριν το έτος 2012 ανερχόταν στα 746 τρισεκατομμύρια δολάρια.

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια ιστορική αναδρομή των παραγώγων μέχρι την σημερινή τους πορεία. Ακόμη, θα εξηγηθεί το τι είναι ακριβώς τα παράγωγα προϊόντα, ποιά τα πλεονεκτήματα τους, τους τρόπους που κατηγοριοποιούνται, τα είδη αυτών καθώς και κάποια μοντέλα αποτίμησης τους.

1.1 Ιστορία των Παραγώγων Χρηματοοικονομικών Προϊόντων

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα δεν ανήκουν στην σύγχρονη ιστορία των χρηματαγορών. Η ύπαρξη τους ξεκινάει από την αρχαιότητα όταν οι Έλληνες έκαναν χρήση τους καθώς πωλούσαν φορτία πλοίων με προκαθορισμένη τιμή και παράδοση στο μέλλον.

Η πρώτη περιγραφή ενός χρηματοοικονομικού δικαιώματος βρίσκεται στα γραπτά του Αριστοτέλη [26], μέσω της διήγησης μίας ιστορίας του Θαλή από την Μίλητο. Ο Θαλής ήταν φιλόσοφος και τα χρήματα που είχε δεν κάλυπταν ούτε τις βασικές του ανάγκες, το γεγονός αυτό τον έφερε αντιμέτωπο με τους χλευασμούς των κοντινών του ανθρώπων. Αυτοί θεωρούσαν πως η οικονομική κατάσταση στην οποία βρισκόταν οφειλόταν στο ότι η φιλοσοφία που τόσο υποστήριζε δεν είχε νόημα καθώς και καμία πρακτική αξία. Εκείνος όμως παρατηρώντας ότι υπήρχαν κατάλληλες καιρικές συνθήκες προέβλεψε ότι η παραγωγή ελαιών θα ήταν μεγάλη και βασιζόμενος στην πρόβλεψη του αυτή, επένδυσε τα ελάχιστα χρήματα που διέθετε ως προκαταβολή για την μίσθωση όλων των ελαιοτριβείων της Μιλήτου. Με αυτή του την κίνηση κατάφερε να έχει αποκλειστικά στην κατοχή του την χρήση όλων των διαθέσιμων ελαιοτριβείων όταν η σοδειά θα ήταν έτοιμη. Το πιο σημαντικό ήταν ότι οι όροι μίσθωσης των ελαιοτριβείων ήταν πολύ ευνοϊκοί καθώς ο συνδυασμός της μη ύπαρξης άλλων ενδιαφερόμενων, αφού η σοδειά ήταν μελλοντική και επίσης της επιθυμίας των ιδιοκτητών των ελαιοτριβείων να αντισταθμίσουν την πιθανότητα ζημίας ή μικρού εισοδήματος που τους οδήγησε στην υπενοικίαση τους. Όντως η σοδειά ήταν όπως την είχε προβλέψει ο Θαλής, έτσι η ζήτηση ελαιοτριβείων αυξήθηκε κατακόρυφα και εκείνος με την σειρά του τα εκμίσθωσε σε πολύ υψηλότερη τιμή. Ουσιαστικά ο Θαλής επήλθε σε αγορά ένα είδους παραγώγου από τους ιδιοκτήτες των ελαιοτριβείων παρέχοντας προκαταβολικά μέρος του μισθώματος για να εξασφαλίσει το μελλοντικό μίσθωμα των ελαιοτριβείων σε συγκεκριμένη τιμή. Έπειτα, έκανε άσκηση του δικαιώματος του μισθώνοντας τα ελαιοτριβεία στη συμφωνηθείσα τιμή και έτσι απέκτησε κέρδος που ισούταν με τη διαφορά του μισθώματος που κατέβαλε και του μισθώματος που του κατέβαλαν οι καινούριοι μισθωτές. Αξιοσημείωτο είναι ότι ο Θαλής δεν υποχρεούνταν να ασκήσει το δικαίωμα του, εάν οι προβλέψεις του δεν επαληθεύονταν και έτσι η ζημιά θα περιορίζονταν στα χρήματα που είχε προκαταβάλει ως μίσθωση.

Η εποχή της αναγέννησης στην Ευρώπη, έφερε νέες ιδέες στις χρηματαγορές του Βελγίου και της Ολλανδίας που εκείνη την εποχή αποτελούσαν την καρδιά του Ευρωπαϊκού εμπορίου [17]. Η χρησιμοποίηση προθεσμιακών συμβολαίων (futures) στις συναλλαγές ήταν ευρέως διαδεδομένη κατά τη δεκαετία του 1630 στο Άμστερνταμ της Ολλανδίας. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την απίστευτη αύξηση της τιμής των βολβών τουλίπας μέσα σε σύντομο χρονικό διάστημα. Αυτό επέφερε τον οικονομικό μαρασμό ολόκληρης της Ολλανδικής οικονομίας καθώς την απότομη και ανεξέλεγκτη αύξηση ακολούθησε η αντίστοιχη πτώση των τιμών [17].

Στις δεκαετίες του 1970 και του 1980 συνέβησαν ριζικές αλλαγές στον τομέα των χρηματοοικονομικών Παραγώγων [17]. Αρχικά ακαδημαϊκοί τιμολόγησαν τα προϊόντα θέτοντας συγκεκριμένα όρια και έπειτα επήλθε η απελευθέρωση των αγορών συναλλάγματος καθώς ο οποιοσδήποτε μπορούσε να συμμετάσχει, αυτά είχαν ως αποτέλεσμα να διευρυνθεί η χρήση τους. Υπήρξε ταχύτατη ανάπτυξη της αγοράς όταν επιβλήθηκαν κανόνες συναλλαγών που εξάλειφαν τον κίνδυνο αθέτησης των υποσχέσεων των συμβαλλομένων μερών. Το πρώτο χρηματιστήριο Παραγώγων ιδρύθηκε το 1973, το Chicago Board Options Exchange [17]. Έπειτα ακολούθησαν το New York Stock Exchange, το Australia Stock exchange καθώς και χρηματιστήρια στο Toronto και στο Sydney.

Τα τελευταία χρόνια υπήρξε ραγδαία ανάπτυξη των Παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Εφαλτήριο υπήρξε η Αμερική και η εξάπλωση έφτασε γρήγορα και στην Ευρώπη. Παρακολουθώντας την πορεία των γεγονότων με τη σειρά της και η Ελλάδα, κατά το έτος 1999, καθιέρωσε τα Δικαιώματα Προαίρεσης (Options) και τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Futures) ως απαραίτητα εργαλεία για την οικονομική ανάπτυξη της [26].

1.2 Εισαγωγή στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

Το χρηματιστήριο αποτελεί έναν οργανισμό του οποίου η λειτουργία του γίνεται κάτω από συγκεκριμένους κανόνες και κυριότερος σκοπός του είναι η χρηματοδότηση των επιχειρήσεων μέσω της διάθεσης ομολόγων και μετοχών αυτών, στο επενδυτικό κοινό. Η χρηματιστηριακή αγορά χαρακτηρίζεται από τη μεταβλητότητα των τιμών της ζήτησης και της προσφοράς. Ο κίνδυνος που προέρχεται από την μεταβλητότητα των τιμών αντισταθμίζεται από τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα.

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα χρησιμοποιούνται από τους επενδυτές για [48]:

- Να εξασφαλίσουν την μόχλευση, καθώς μια μικρή κίνηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου μπορεί να δημιουργήσει τεράστια μεταβολή στην τιμή του παραγώγου.
- Να επιτύχουν κερδοσκοπία εάν η τιμή του υποκείμενου τίτλου κινηθεί κατά αναμενόμενο τρόπο.
- Να αντισταθμίσουν ή να μειώσουν τον κίνδυνο που προκύπτει από τους υποκείμενους τίτλους.

Η χρήση των παραγώγων θεσπίστηκε από τους επενδυτές που επιθυμούν τη μείωση των κινδύνων που εμπεριέχουν οι επενδύσεις τους [23]. Η προστασία που παρέχεται στους επενδυτές εξαρτάται από την ιδιότητα τους, για παράδειγμα οι κάτοχοι μετοχών προστατεύονται από την πτώση των τιμών, οι δανειολήπτες από την αύξηση του επιτοκίου, οι εισαγωγείς από την μεταβολή των συναλλαγματικών ισοτιμιών. Τα παράγωγα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως πληροφοριοδότες της αγοράς για τη μελλοντική πορεία των υποκείμενων προϊόντων στα οποία αναφέρονται [55].

Ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν δεν είναι από μόνο του ένας τίτλος, αφού αυτούσιο δεν έχει καμία αξία. Όμως, οι πιο κοινοί τύποι παραγώγων συναλλάσσονται στις αγορές πριν από την ημερομηνία λήξης τους σαν να ήταν τίτλοι.

Ταυτόχρονα με τα χρηματιστήρια αξίων, λειτουργούν και τα Χρηματιστήρια Παραγώγων. Ο ακριβής ορισμός των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων είναι ότι αποτελούν συμβόλαια μεταξύ δυο αντισυμβαλλόμενων, των οποίων η αξία εξαρτάται από την τιμή άλλων χρηματοοικονομικών προϊόντων, όπως είναι τα ομόλογα, οι μετοχές, τα νομίσματα, οι χρηματιστηριακοί δείκτες (FTSE 20, FTSE 40), τα εμπορεύματα ή διάφορα άλλα χρεόγραφα. Η αξία τους είναι άρρηκτα συνδεδεμένη και εξαρτημένη από την τιμή του υποκείμενου χρηματοοικονομικού προϊόντος [23].

1.2.1 Αγορές Παραγώγων

Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα συναλλάσσονται με δύο βασικούς τρόπους: σε οργανωμένα Χρηματιστήρια Αξιών και με εξωχρηματιστηριακές συναλλαγές [12]. Τα οργανωμένα Χρηματιστήρια Αξιών λειτουργούν βάση προκαθορισμένων κανόνων, απαιτούν ένα συγκεκριμένο βαθμό τυποποίησης των διαπραγματεύσιμων μέσων (τιμή πώλησης, ημερομηνία λήξης, μέγεθος συμβολαίου κλπ.) και ένα φυσικό χώρο στον οποίο να πραγματοποιούνται οι συναλλαγές [12]. Μερικά παραδείγματα είναι το Chicago Board Options Exchange (OTC), που συμπτωματικά ιδρύθηκε τον Απρίλιο του 1973, την ίδια χρονιά οπού εκδόθηκαν τα μοντέλα των Black & Scholes και Merton που ήταν σχετικά με την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης [12].

Οι συναλλαγές του OTC πραγματοποιούνταν μέσω υπολογιστών και τηλεφώνων μεταξύ διαφόρων επενδυτικών και εμπορικών τραπεζών (επικεφαλείς των συναλλαγών αυτών ήταν ινστιτούτα όπως η Goldman Sachs, Citibank, Deutsche Bank, και Bankers Trust). Λόγω της αυξανόμενης ποικιλίας επενδυτών και της ασταμάτητης απαίτησης τους για πολύπλοκα προϊόντα, το OTC δημιούργησε χρηματοοικονομικά προϊόντα φτιαγμένα στα μέτρα του κάθε επενδυτή, η πράξη αυτή είχε ως αποτέλεσμα το μέγεθος της συγκεκριμένης αγοράς να αυξάνεται σε μεγαλύτερο βαθμό από τα περισσότερα Χρηματιστήρια Αξιών [12].

1.2.2 Τύποι των Παραγώγων Χρηματοοικονομικών Προϊόντων

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα χωρίζονται σε κατηγορίες ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους. Υπάρχουν ποικίλοι και διαφορετικοί τρόποι ταξινόμησης αυτών. Μερικοί από αυτούς είναι [12]:

- Ανάλογα με το είδος της υποκείμενης αξίας.
- Ανάλογα με το αν διαπραγματεύονται σε οργανωμένη αγορά.
- Ανάλογα με το αν πραγματεύονται σε είδος ή χρήμα.
- Ανάλογα με το είδος των υποχρεώσεων και των δικαιωμάτων που αποκτούν οι συμβαλλόμενοι.

Ο πιο σωστός διαχωρισμός είναι αυτός που έχει ως βάση το είδος των υποχρεώσεων και των δικαιωμάτων που αποκτούν οι συμβαλλόμενοι. Σε γενικούς όρους τα παράγωγα μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες σύμφωνα με τον τρόπο που συναλλάσσονται στις αγορές [54]:

- Παράγωγα που συναλλάσσονται σε εξωχρηματιστηριακές αγορές (*over-the-counter)*. Τα συγκεκριμένα παράγωγα είναι συμφωνίες που διαπραγματεύονται ιδιωτικά, απευθείας μεταξύ των δύο πλευρών, χωρίς να διέρχονται από χρηματιστήρια αξιών ή από άλλους διαμεσολαβητές. Προϊόντα όπως οι συμβάσεις ανταλλαγής και τα εξωτικά δικαιώματα προαίρεσης συναλλάσσονται σχεδόν πάντα με αυτό τον τρόπο. Η εξωχρηματιστηριακή αγορά είναι η μεγαλύτερη αγορά παραγώγων, και είναι σε μεγάλο βαθμό ανεξέλεγκτη σε σχέση με την αποκάλυψη πληροφοριών μεταξύ των αντισυμβαλλόμενων, καθώς αυτή η αγορά αποτελείται από τράπεζες και άλλα επιμορφωμένα μέρη. Το να υπολογίσουμε τα συνολικά ποσά που διακινούνται σε αυτή την αγορά είναι κάτι αδύνατο, καθώς οι συναλλαγές είναι ιδιωτικές, χωρίς οι δραστηριότητες να είναι ορατές.
- Παράγωγα που συναλλάσσονται εντός χρηματιστηριακών αγορών *(exchanged-traded derivatives)*. Τα παράγωγα αυτά συναλλάσσονται μέσω ειδικών Χρηματιστηρίων Παραγώγων ή άλλων χρηματιστηρίων. Ένα Χρηματιστήριο Παραγώγων είναι μια αγορά όπου άτομα συναλλάσσονται μέσω τυποποιημένων συμβολαίων που προσδιορίζονται από το χρηματιστήριο. Λειτουργεί σαν διαμεσολαβητής για όλες τις σχετικές συναλλαγές, λαμβάνει το *αρχικό περιθώριο* (initial margin) και από τα δύο μέρη που συναλλάσσονται και δρα ως εγγυητής. Το μεγαλύτερο Χρηματιστήριο Παραγώγων στον κόσμο σύμφωνα με τον όγκο συναλλαγών που διαχειρίζεται είναι αυτό της Κορέας (KOSPI Index Futures & Options).

1.2.3 Υποκείμενοι Τίτλοι Παραγώγων (Underlying Assets)

1.2.3.1 Μετοχές

Η βάση της καινούριας οικονομικής ζωής – ή του καπιταλιστικού συστήματος – είναι οι εταιρίες περιορισμένης ευθύνης (limited liability company) [55]. Οι εταιρίες που ανήκουν σε αυτή τη κατηγορία ανήκουν στους κατόχους των μετοχών. Οι μετοχές:

- Παρέχουν τμηματική ιδιοκτησία της εταιρίας, κατά αναλογία της επένδυσης.
- Έχουν αξία, η οποία αντανακλάται στην αξία των πραγματικών περιουσιακών στοιχείων της εταιρίας και στα κέρδη από τα μερίσματα της εταιρίας.

Με τις εισηγμένες στο χρηματιστήριο εταιρίες, οι μετοχές εισάγονται και αποτελούν αντικείμενα διαπραγμάτευσης στα Χρηματιστήρια Αξιών. Οι μετοχές αποτελούν τον γενικό όρο για τα περιουσιακά στοιχεία που φυλάσσονται με την μορφή χρεογράφου.

1.2.3.2 Επιτόκια

Η αξία κάποιων χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων, εξαρτάται αποκλειστικά από το επίπεδο των επιτοκίων, για παράδειγμα τα εταιρικά και δημοτικά ομόλογα [6]. Αυτά αποτελούν χρεόγραφα σταθερού εισοδήματος μέσω των οποίων εθνικές και τοπικές κυβερνήσεις, όπως και μεγάλου βεληνεκούς εταιρίες, τμηματικά χρηματοδοτούν την οικονομική τους δραστηριότητα. Τα χρεόγραφα σταθερού εισοδήματος απαιτούν την πληρωμή του επιτοκίου στην μορφή ενός σταθερού χρηματικού ποσού σε προκαθορισμένες χρονικές στιγμές, καθώς και επαναπληρωμή του αρχικού κεφαλαίου στη λήξη του χρεογράφου. Τα επιτόκια αυτά κάθε αυτά είναι τεκμαρτά περιουσιακά στοιχεία, τα οποία δεν μπορούν να παραδοθούν. Η αντιστάθμιση της έκθεσης στα επιτόκια είναι περισσότερο περίπλοκη συγκριτικά με την αντιστάθμιση της έκθεσης στις κινήσεις των τιμών μιας συγκεκριμένης μετοχής.

1.2.3.3 Νομισματικές Μονάδες

Η νομισματική μονάδα είναι η ονομασία των εθνικών μονάδων πληρωμής (χρημάτων) και αποτελεί ένα χρηματοοικονομικό περιουσιακό στοιχείο. Το τέλος των σταθερών συναλλαγματικών ισοτιμιών και η υιοθέτηση των κυμαινόμενων είχε ως αποτέλεσμα μία τεράστια αύξηση στην μεταβλητότητα τους. Το διεθνές εμπόριο, η οικονομική δραστηριότητα που εμπεριέχεται σε αυτό και οι περισσότερες βιομηχανίες, εκτελούν συναλλαγές σε περισσότερα από ένα νομίσματα. Μία εταιρία η οποία επιθυμεί να αντισταθμίσει δυσμενείς κινήσεις μη εγχώριων νομισμάτων, χρησιμοποιεί παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα [54].

1.2.3.4 Δείκτες

Ένας δείκτης παρακολουθεί την τιμή ενός υποθετικού συνόλου μετοχών (FT-SE100, S&P-500), ομολόγων (REX) και πολλών ακόμα χρηματοοικονομικών προϊόντων. Οι δείκτες δεν αποτελούν αυτά κάθε αυτά περιουσιακά στοιχεία [55]. Η χρήση παραγώγων μέσων σε δείκτες χρησιμοποιείται συνήθως για να την αντιστάθμιση του κινδύνου εάν και εφόσον τα εν λόγω μέσα είναι διαθέσιμα και εάν η συσχέτιση μεταξύ της κίνησης του δείκτη και του περιουσιακού στοιχείου είναι σημαντική. Επιπροσθέτως, τα θεσμικά κεφάλαια (όπως αμοιβαία κεφάλαια και συνταξιοδοτικά κεφάλαια), τα οποία διαχειρίζονται μεγάλου όγκου συναλλαγές και τα διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια, προσπαθούν να μιμηθούν συγκεκριμένους δείκτες μετοχών και χρησιμοποιούν παράγωγα επί δεικτών μετοχών ως εργαλείο διαχείρισης του χαρτοφυλακίου [55].

Ένας νέος τύπος δείκτη δημιουργήθηκε με τον Δείκτη Καταστροφικών Απωλειών (CAT-Index) από το Chicago Board of Trade (CBOT) . O συνεχόμενος και αυξανόμενος αριθμός των φυσικών καταστροφών (όπως ο τυφώνας στο Andrew 1992 και ο σεισμός στο Kobe), οδήγησε την βιομηχανία των ασφαλιστικών εταιριών στην εύρεση νέων τρόπων αύξησης της ικανότητα τους να ανταπεξέρχονται σε υψηλά ρίσκα. Το CBOT προσπάθησε να επωφεληθεί από αυτό το πρόβλημα λανσάροντας μία αγορά με παράγωγα ασφάλισης.

Τα παράγωγα είναι εξορισμού περιουσιακά στοιχεία τα οποία συναλλάσσονται, έχουν αξία κλπ. – και έτσι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία για νέες ενδεχόμενες απαιτήσεις: χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαίρεσης σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (option on futures) [55].

1.2.4 Αντιστάθμιση και Παράγωγα (Hedging)

Τα παράγωγα μπορούν να θεωρηθούν ως μια μορφή ασφάλισης της αντιστάθμισης, η οποία από μόνη της αποτελεί μια τεχνική που προσπαθεί να μειώσει τον κίνδυνο [17]. Τα παράγωγα επιτρέπουν στον κίνδυνο που σχετίζεται με την τιμή του υποκείμενου τίτλου να μεταφέρεται από τον ένα συναλλασσόμενο στον άλλον. Για παράδειγμα, ένας ιδιοκτήτης μύλου και ένας παραγωγός αλευριού υπογράφουν ένα προθεσμιακό συμβόλαιο για να ανταλλάξουν ένα συγκεκριμένο ποσό μετρητών για μία συγκεκριμένη ποσότητα αλευριού στο μέλλον. Και τα δύο μέρη έχουν μειώσει το μελλοντικό κίνδυνο, για τον παραγωγό την αβεβαιότητα της τιμής και για τον ιδιοκτήτη του μύλου την διαθεσιμότητα του αλευριού. Όμως, παρόλο που ο μελλοντικός κίνδυνος έχει μειωθεί είναι ακόμα υπαρκτός καθώς μπορεί να υπάρξει πρόβλημα στην παραγωγή του αλευριού από παράγοντες που δεν αναφέρονται στην συμφωνία όπως για παράδειγμα ο καιρός ή το ένα μέρος να ανακαλέσει το συμβόλαιο. Πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχει ένα τρίτο μέρος που καλείται *γραφείο εκκαθαρίσεων* (clearing house) το οποίο εξασφαλίζει τα προθεσμιακά συμβόλαια. Βέβαια δεν ασφαλίζονται όλα τα παράγωγα έναντι στον κίνδυνο του αντισυμβαλλομένου [17].

Από διαφορετική σκοπιά και ο παραγωγός και ο ιδιοκτήτης του μύλου μειώνουν κάποιον κίνδυνο συνάπτοντας τη συμφωνία, διαφορετικό για τον καθένα, και αποκτούν κάποιον καινούριο. Συγκεκριμένα, αυτός που έχει το μύλο μειώνει τον κίνδυνο που προκύπτει από το να πέσει η τιμή του αλευριού κάτω από τη προσυμφωνημένη τιμή και αποκτά τον κίνδυνο να είναι η τιμή του αλευριού υψηλότερη από τη συμφωνημένη τιμή. Από την άλλη ο ιδιοκτήτης, αποκτά τον κίνδυνο η τιμή του αλευριού να είναι χαμηλότερη από την προσυμφωνημένη και έτσι εκείνος να αγοράσει ακριβά το εμπόρευμα.

Η αντιστάθμιση μπορεί να προκύψει και όταν ένα άτομο ή ένα θεσμικό όργανο αγοράζει ένα τίτλο (όπως ένα εμπόρευμα, μία μετοχή που πληρώνει μερίσματα κ.α.), και τον πουλάει μέσω προθεσμιακού συμβολαίου [17]. Έτσι το άτομο ή το θεσμικό όργανο, έχει πρόσβαση στον τίτλο για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και μπορεί να το πουλήσει στο μέλλον σε συγκεκριμένη τιμή σύμφωνα με τους όρους του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης. Φυσικά, αυτό επιτρέπει στο άτομο ή στο θεσμικό όργανο να κρατήσει τον τίτλο, ενώ μειώνεται ο κίνδυνος της απρόσμενης απόκλισης της μελλοντικής τιμής πώλησης από την τρέχουσα εκτίμηση της αγοράς για την μελλοντική τιμή του τίτλου.

1.2.5 Κερδοσκοπία και Βέβαιο Κέρδος

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναλάβουμε ρίσκο, εκτός από το να ασφαλιστούμε έναντι κινδύνων [14]. Έτσι, κάποιοι επενδυτές εισέρχονται σε ένα συμβόλαιο παραγώγων για να κερδοσκοπήσουν επί της αξίας του υποκείμενου τίτλου, στοιχηματίζοντας ότι το μέρος που αναζητεί ασφάλεια θα έχει λάθος γνώμη για την μελλοντική αξία. Οι κερδοσκόποι ψάχνουν να αγοράσουν έναν τίτλο στο μέλλον σε χαμηλή τιμή, σύμφωνα με ένα συμβόλαιο παραγώγων, όταν η μελλοντική τιμή στην αγορά είναι υψηλή ή να πουλήσουν στο μέλλον σε υψηλή τιμή όταν η μελλοντική τιμή στην αγορά είναι χαμηλή.

Οι κερδοσκοπικές συναλλαγές επί παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων απέκτησαν μεγάλη φήμη το 1995 όταν ο Nick Leeson, ένας συναλλασσόμενος στην τράπεζα Barings, έκανε φτωχές και μη εξουσιοδοτημένες επενδύσεις επί μελλοντικών συμβολαίων εκπλήρωσης. Μέσω του συνδυασμού της χαμηλής κριτικής ικανότητας, της έλλειψης επίβλεψης και ρύθμισης της τράπεζας, από το τμήμα διαχείρισης και κάποιων ατυχών γεγονότων όπως ο σεισμός στο Kobe, ο Leeson, κατάφερε να αποκτήσει \$1,3 τρις και έτσι να χρεοκοπήσει η τράπεζα.

1.2.6 Τιμή Αγοράς και Arbitrage free price

Η τιμή αγοράς είναι η τιμή κατά την οποία οι συναλλασσόμενοι είναι πρόθυμοι να αγοράσουν ή να πουλήσουν το συμβόλαιο τους [14]. Για τα παράγωγα που συναλλάσσονται σε Χρηματιστήρια Αξιών, η τιμή αγοράς συνήθως ανακοινώνεται (συχνά δημοσιεύεται σε ζωντανό χρόνο από το χρηματιστήριο και διαμορφώνεται ανάλογα με την προσφορά και τη ζήτηση του συγκεκριμένου συμβολαίου). Επιπλοκές μπορεί να δημιουργηθούν για τα παράγωγα που συναλλάσσονται σε εξωχρηματιστηριακές αγορές, καθώς δεν υπάρχει ένα κεντρικό χρηματιστήριο που να ελέγχει και να δημοσιεύει τις τιμές [14].

Τιμή χωρίς βέβαιο κέρδος, σημαίνει ότι η απόκτηση κερδών χωρίς κίνδυνο δεν μπορούν να επιτευχθούν μέσω συναλλαγής συμβολαίων. Η arbitrage free price για ένα συμβόλαιο παραγώγων είναι σύνθετη καθώς υπάρχουν πολλές και διαφορετικές μεταβλητές που πρέπει να ληφθούν υπόψη. Η τιμολόγηση arbitrage free αποτελεί κεντρικό θέμα των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Η πιο σημαντική εξίσωση για την θεωρητική εκτίμηση της τιμής είναι αυτή των Black & Scholes, που στηρίζεται στην υπόθεση ότι οι χρηματοροές ενός Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος επί μιας μετοχής, μπορούν να επανασυγκροτηθούν από μια στρατηγική κατά την οποία αγοράζεις και πουλάς συνεχώς χρησιμοποιώντας τη μετοχή [12]. Μια απλοποιημένη μορφή αυτής της εκτιμητικής τεχνικής είναι το διωνυμικό μοντέλο [12].

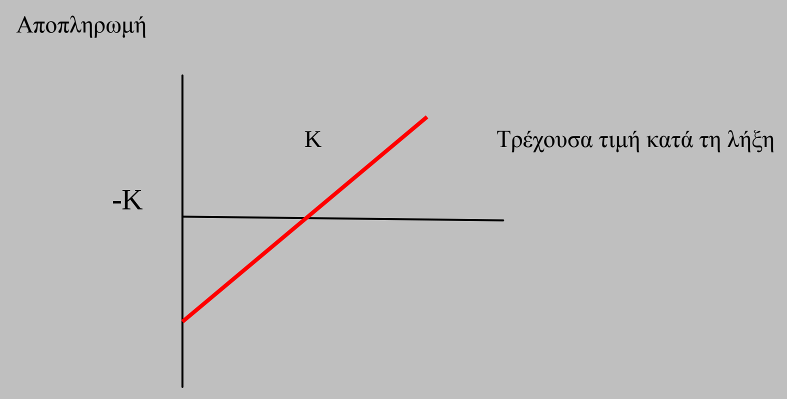
1.3 Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts)

Τα προθεσμιακά συμβόλαια είναι συμφωνίες που πραγματοποιούνται σήμερα αλλά αφορούν την υποχρέωση για αγοραπωλησία ενός τίτλου σε μία προκαθορισμένη χρονική στιγμή στο μέλλον (maturity) και σε μία προσυμφωνημένη τιμή (delivery price) [17]. Αποτελούν την απλούστερη μορφή παραγώγου. Το προϊόν μπορεί να είναι συνάλλαγμα, δείκτες ή εμπόρευμα. Στο χρονικό διάστημα της σύναψης της συμφωνίας δεν απαιτείται πληρωμή, αλλά οι δύο αντισυμβαλλόμενοι αναλαμβάνουν αντίστοιχα την υποχρέωση της τήρησης της συμφωνίας στην λήξη της. Αυτός ο τύπος συμβολαίου δεν διαπραγματεύεται σε χρηματιστήριο αλλά στην εξωχρηματιστηριακή αγορά (OTC) και αντιπροσωπεύει μια πράξη σχεδιασμένη να καλύψει τις ανάγκες των δύο συμβαλλόμενων μερών [17].

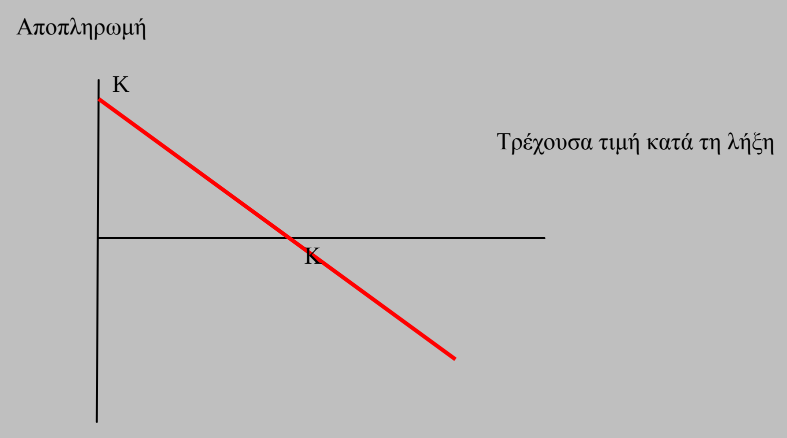
Η τιμή του υποκείμενου τίτλου, οποιασδήποτε μορφής, πληρώνεται πριν γίνει έλεγχος των μεταβολών του τίτλου. Αυτή είναι μία από τις πολλές μορφές εντολών αγοράς πώλησης κατά τις οποίες ο χρόνος συναλλαγής δεν είναι ο χρόνος όπου συναλλάσσονται τα χρεόγραφα [17].

Τα προθεσμιακά συμβόλαια όπως και άλλα χρηματοοικονομικά παράγωγα, χρησιμοποιούνται για να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο (συνήθως τον συναλλαγματικό κίνδυνο), ως μέσα κερδοσκοπίας ή για να επιτρέψουν στο ένα συναλλασσόμενο μέρος να εκμεταλλευτεί έναν υποκείμενο τίτλο ο οποίος είναι ευαίσθητος ως προς το χρόνο [17].

Η ζημία ή το κέρδος των προθεσμιακών συμβολαίων εξαρτώνται από την τιμή του υποκείμενου τίτλου κατά τη στιγμή της λήξης τους, ενώ ο κίνδυνος που αντιμετωπίζουν πιο συχνά τα συμβόλαια αυτά είναι ο αντισυμβαλλόμενος να μην τηρήσει την υπόσχεση του, κυρίως αν η ζημία για αυτόν είναι μεγάλη [17]. Το κέρδος του αγοραστή δίνεται από τον τύπο $S_T – K$, όπου K η προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής και S_T η τιμή του υποκείμενου προϊόντος στη λήξη του συμβολαίου. Αντίστοιχα, το κέρδος του πωλητή δίνεται από τον τύπο $K – S_T$. Τέλος, οι προθεσμιακές πράξεις δεν είναι τυποποιημένες ως προς την ημερομηνία παράδοσης και ως προς το μέγεθος του συμβολαίου. Ακολουθούν τα διαγράμματα αποπληρωμής των θέσεων αγοράς και πώλησης.



Διάγραμμα 1:1: Αποπληρωμή Θέσης Αγοράς



Διάγραμμα 1:2: Αποπληρωμή Θέσης Πώλησης

1.4 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Futures)

Τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ) είναι συμφωνίες ανάμεσα σε δύο μέρη για την υποχρεωτική αγοραπωλησία ενός αγαθού ή τίτλου η οποία θα πραγματοποιηθεί σε προκαθορισμένο χρονικό διάστημα στο μέλλον και σε προσυμφωνημένη τιμή [17]. Αφορούν ομόλογα, χρηματιστηριακούς δείκτες, έντοκα γραμμάτια του δημοσίου, επιτόκια και νομίσματα. Τα ΣΜΕ διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο και κατά συνέπεια είναι τυποποιημένα ως προς το μέρος, την ημερομηνία παράδοσης, την ποσότητα και την ποιότητα του υποκείμενου αγαθού. Τα προθεσμιακά συμβόλαια (forwards) είναι και αυτά ΣΜΕ, που όμως δεν διαπραγματεύονται σε οργανωμένες αγορές [17].

Η τιμή ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης καθορίζεται από την στιγμιαία ισορροπία των δυνάμεων προσφοράς και ζήτησης, μεταξύ εντολών αγοράς και πώλησης που εκτελούνται στα χρηματιστήρια αξίων κατά τη στιγμή της αγοράς ή της πώλησης του συμβολαίου. Η ημερομηνία λήξης του συμβολαίου καλείται *ημερομηνία παράδοσης* [17]. Η επίσημη τιμή των συμβολαίων στο τέλος της ημερήσιας συναλλαγής σε ένα χρηματιστήριο αξιών καλείται *τιμή διακανονισμού*.

Ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης δίνει την υποχρέωση στον κάτοχο του να εκτελέσει την παράδοση υπό τους όρους του συμβολαίου [17]. Αντίθετα, παραχωρεί στον αγοραστή του το δικαίωμα να δημιουργήσει μία θέση που κρατείται από τον πωλητή του αλλά δεν τον υποχρεώνει να την τηρήσει. Με άλλα λόγια, ο κάτοχος ενός δικαιώματος προαίρεσης ίσως εξασκήσει τη θέση του, σε αντίθεση και οι δύο πλευρές σε ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης πρέπει να εκπληρώσουν το συμβόλαιο στην ημερομηνία διακανονισμού [17]. Ο πωλητής παραδίδει τον υποκείμενο τίτλο στον αγοραστή ή τα αντίστοιχα μετρητά. Για να αποχωρήσει κάποιος από την υποχρέωση πριν την ημερομηνία διακανονισμού, πρέπει ο κάτοχος του συμβολαίου να αντισταθμίσει τη θέση του είτε πουλώντας τη θέση αγοράς είτε αγοράζοντας μια θέση πώλησης, με αυτό τον τρόπο κλείνει αποτελεσματικά την θέση του και τις υποχρεώσεις του.

Δεν αντιπροσωπεύουν περιουσιακό στοιχείο, και η αξία τους ανεβαίνει καθώς η προθεσμιακή τους τιμή μεταβάλλεται. Η χρηματορροή από μία θέση σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο είναι ίδια με την χρηματορροή σε μια προθεσμιακή πράξη. Η μόνη διαφορά είναι η χρονική στιγμή που επέρχονται οι χρηματορροές εξαιτίας της ημερομηνίας εκκαθάρισης συναλλαγών που μπορεί να εφαρμοστεί στα προθεσμιακά συμβόλαια (marking to market - ημερήσιος διακανονισμός) [17].

Στην αγορά των futures όλες οι συναλλαγές αναλαμβάνονται από έναν οργανισμό, ο οποίος εγγυάται την εξασφάλιση της αγοράς συνδέοντας τους επενδυτές που θα διαπραγματευτούν [17]. Ο οργανισμός αυτός καλείται *Εταιρεία Εκκαθάρισης (Clearing House)* και συνήθως αποτελεί τμήμα του χρηματιστηρίου είτε ξεχωριστή νομική προσωπικότητα. Οι κυριότερες αρμοδιότητες του είναι η εγγύηση εκπλήρωσης των συμβολαίων, η εκκαθάριση και η διεκπεραίωση των παραδόσεων. Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης δίνουν στον κάτοχο την υποχρέωση να κάνει ή να δεχθεί την παράδοση υπό συγκεκριμένους όρους που αναφέρονται στο συμβόλαιο.

1.4.1 Τυποποίηση Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης

Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ) διασφαλίζουν την ρευστότητα τους όντας υψηλά τυποποιημένα, συνήθως με τον καθορισμό [17]:

- Του υποκείμενου τίτλου. Ο υποκείμενος τίτλος μπορεί να είναι οποιασδήποτε μορφής, από ένα βαρέλι πετρέλαιο μέχρι επιτόκια.
- Του τύπου του διακανονισμού. Μπορεί να έχει δύο μορφές είτε διακανονισμός μετρητών είτε διακανονισμός παράδοσης.
- Του ποσού και των μονάδων του υποκείμενου τίτλου ανά συμβόλαιο. Αυτό μπορεί να είναι η ονομαστική αξία ομολόγων, ένας συγκεκριμένος αριθμός βαρελιών πετρελαίου, μονάδες από ξένα νομίσματα και άλλα.
- Του νομίσματος με το οποία τα συμβόλαια συνάπτονται.
- Του βαθμού του παραδοτέου. Στην περίπτωση των ομολόγων, καθορίζεται ποια ομόλογα θα παραδοθούν. Στην περίπτωση φυσικών εμπορευμάτων,

καθορίζεται όχι μόνο η ποιότητα των υλικών αγαθών αλλά διευθετείται και ο τρόπος και η τοποθεσία παράδοσης.

- Της τελικής ημερομηνίας συναλλαγής.
- Άλλων πληροφοριών όπως η ελάχιστη επιτρεπόμενη διακύμανση της τιμής.

1.4.2 Ημερήσια Αποτίμηση Αξίας των ΣΜΕ

Στην διαδικασία marking to market τα κέρδη ή οι ζημιές εκκαθαρίζονται για τους διαπραγματευτές σε ημερήσια βάση. Όταν ξεκινάει μια συναλλαγή με περιεχόμενο ΣΜΕ ορίζεται ένα περιθώριο ασφάλισης που καλείται *margin account* [12]. Το περιθώριο είναι ένας λογαριασμός ασφαλείας που ανοίγεται από τον διαπραγματευτή και αποτελείται από μετρητά. Η χρησιμότητα του περιθωρίου έγκειται στην εξασφάλιση ότι ο εμπλεκόμενος είναι ικανός να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του. Χρήση του περιθωρίου γίνεται και από τα δύο μέρη των προθεσμιακών συμβολαίων, καθώς και οι δύο βρίσκονται εκτεθειμένοι σε ζημιές.

Ο λογαριασμός αυτός καθημερινά αυξομειώνεται ανάλογα με την πορεία της αγοράς, παράλληλα δίνεται η δυνατότητα στον αγοραστή/πωλητή να προβεί σε θέση αγοράς/πώλησης πριν τη συμφωνημένη ημερομηνία λήξης του συμβολαίου. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται κέρδος χωρίς ρίσκο. Βεβαίως, ο διαπραγματευτής μπορεί να μην έκανε την πιο κερδοφόρα κίνηση, αφού η επόμενη μέρα ίσως να αποδεικνυόταν καλύτερη, φυσικά ίσως να συνέβαινε και το αντίθετο.

1.4.3 Περιθώριο Ασφάλισης

Για να ελαχιστοποιηθεί ο πιστωτικός κίνδυνος στο χρηματιστήριο, οι συναλλασσόμενοι τοποθετούν ένα *περιθώριο ασφάλισης (margin)* ή μία εγγύηση καλής εκτέλεσης της σύμβασης, που η αξία τους κυμαίνεται μεταξύ του 5% - 15% της αξίας του συμβολαίου.

Για να ελαχιστοποιηθεί ο κίνδυνος του αντισυμβαλλομένου, οι συναλλαγές εκτελούνται σε καθορισμένα χρηματιστήρια προθεσμιακών συναλλαγών που είναι ελεγμένα από την εταιρία εκκαθάρισης [17]. Η εταιρία εκκαθάρισης έχει το ρόλο του αγοραστή για κάθε πωλητή και του πωλητή για κάθε αγοραστή, έτσι ώστε σε περίπτωση που κάποιος αντισυμβαλλόμενος αθετήσει το συμβόλαιο του, η εταιρία να αναλαμβάνει τον κίνδυνο απώλειας. Με αυτή τη διαδικασία δίνεται η δυνατότητα στους συναλλασσόμενους να συναλλάσσονται χωρίς τη σκέψη του αν το άλλο μέρος θα αθετήσει την υπόσχεση του [17].

Περιθώριο συμψηφισμού (clearing margin) είναι οι χρηματοοικονομικές εγγυήσεις που διασφαλίζουν ότι οι εταιρίες ή οι επιχειρήσεις εκτελούν τις ανοιχτές θέσεις των πελατών τους επί των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης και των δικαιωμάτων προαίρεσης [14].

Περιθώριο πελάτη (customer margin). Μέσα στη βιομηχανία των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, απαιτούνται χρηματοοικονομικές εγγυήσεις και από τον πωλητή και από τον αγοραστή των συμβολαίων έτσι ώστε να διασφαλίζεται η τήρηση και από τους δύο των υποχρεώσεων τους έναντι της συμφωνίας. Η Futures Commission Merchants είναι υπεύθυνη για την επίβλεψη των λογαριασμών περιθωρίου ασφάλισης του πελάτη. Τα περιθώρια ασφάλισης καθορίζονται από την αξία του συμβολαίου και του κινδύνου αγοράς [14].

Αρχικό περιθώριο ασφάλισης (initial margin) είναι το ίδιο κεφάλαιο που απαιτείται για να ξεκινήσει μια θέση επί ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης. Αυτό το περιθώριο ασφάλισης είναι μια εγγύηση καλής εκτελέσεως. Η μέγιστη έκθεση δεν περιορίζεται στο ποσό του αρχικού περιθωρίου ασφάλισης, ωστόσο το απαιτούμενο αρχικό περιθώριο υπολογίζεται βάσει της μέγιστης εκτιμώμενης αλλαγής της αξίας του συμβολαίου εντός μίας ημέρας συναλλαγής. Το αρχικό περιθώριο ορίζεται από το χρηματιστήριο [14].

Σε περίπτωση απώλειας ή εάν η τιμή του αρχικού περιθωρίου διαβρώνεται ο χρηματιστής πρέπει να εκτελέσει κοινοποίηση *απαίτησης περιθωρίου* (*margin call*) έτσι ώστε να επιδιορθώσει το ποσό του διαθέσιμου αρχικού περιθωρίου. Συχνά αναφέρεται ως *περιθώριο διαφορών αποτίμησης (variation margin)* [14].

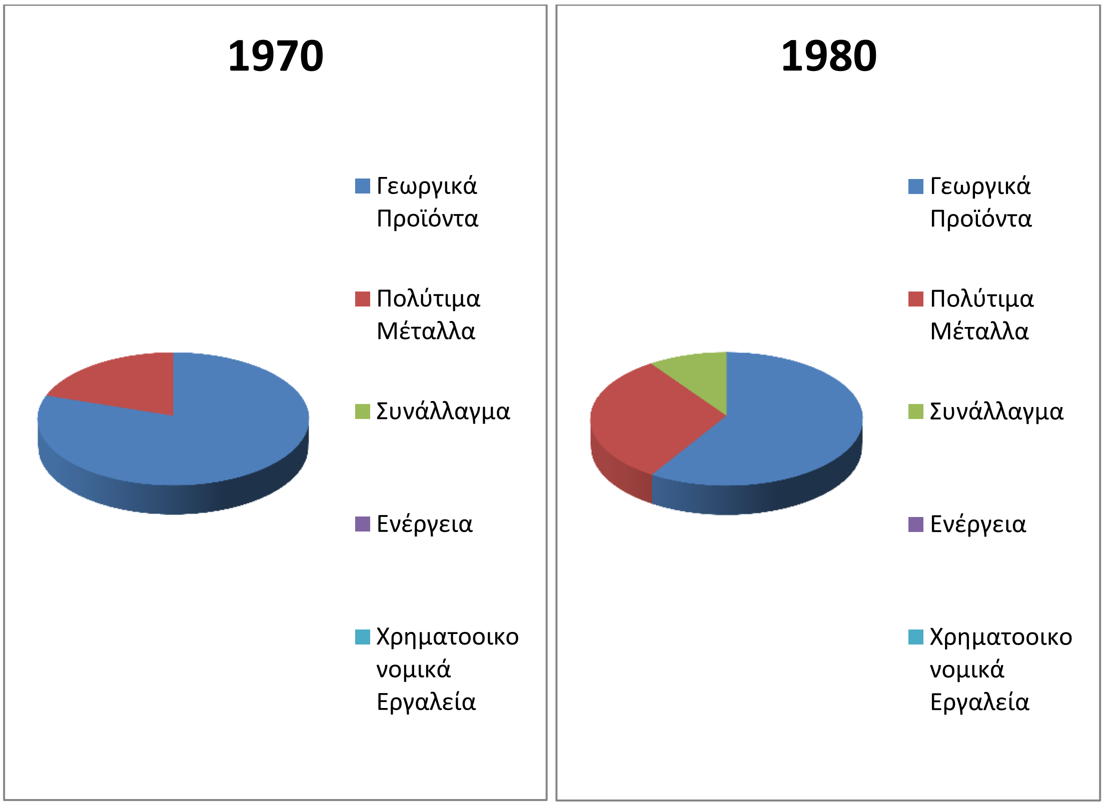
Η απαίτηση του περιθωρίου, συνήθως αναμένεται να πληρωθεί ή να ληφθεί την ίδια μέρα. Εάν δεν συμβεί αυτό, ο χρηματιστής έχει το δικαίωμα να κλείσει θέσεις που είναι επαρκείς για να καλυφθεί το ποσό της απαίτησης [14].

Η απαίτηση του αρχικού περιθωρίου ασφάλισης δημοσιεύεται από το χρηματιστήριο συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, σε αντίθεση με τα αρχικά περιθώρια που συνδέονται με άλλα χρεόγραφα [14].

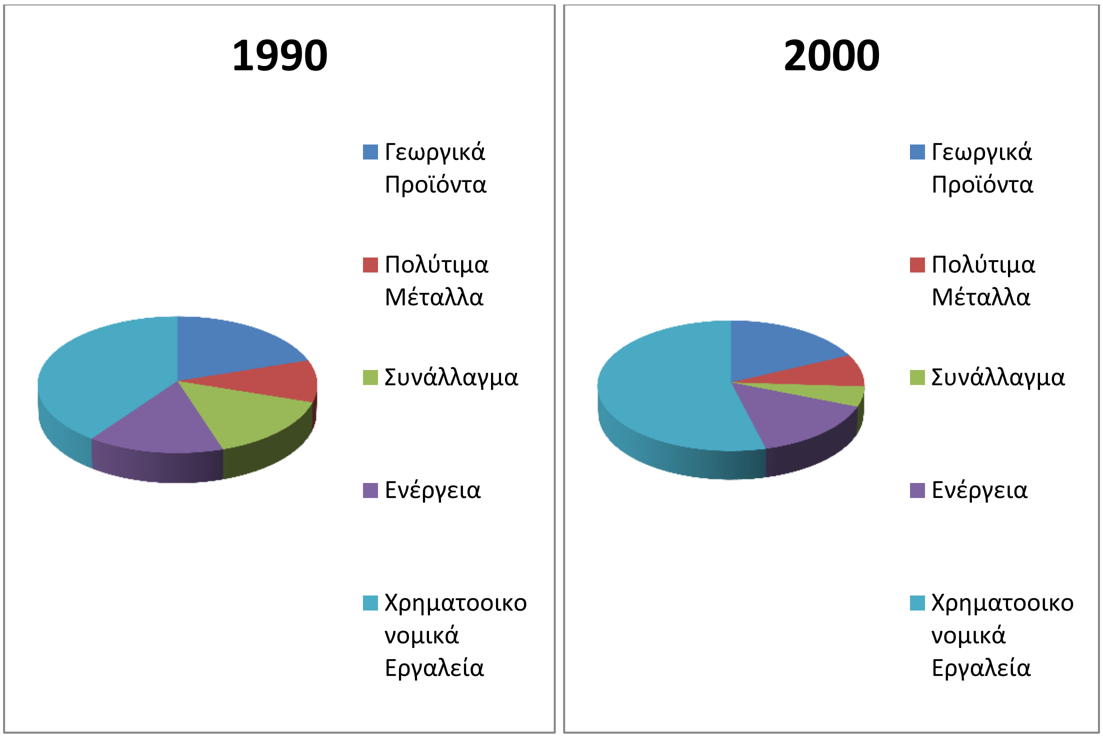
Περιθώριο συντήρησης (maintenance margin) στην πραγματικότητα καθορίζεται από το πόσο μπορεί να μειωθεί η αξία του αρχικού περιθωρίου ασφάλισης πριν εκτελεσθεί ένα margin call. Ουσιαστικά είναι το ελάχιστο περιθώριο για συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωση που πρέπει ο πελάτης να διατηρήσει στον λογαριασμό περιθωρίου ασφάλισης [14].

Περιθώριο αναλογίας ιδίων κεφαλαίων (margin-equity ratio,) είναι ένας όρος που συνήθως χρησιμοποιείται από κερδοσκόπους και αντιπροσωπεύει το ποσό του κεφαλαίου τους που κρατείται ως περιθώριο ασφάλισης σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Οι χαμηλές απαιτήσεις περιθωρίου για τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, συντελεί στην σημαντική μόχλευση της επένδυσης. Όμως, τα χρηματιστήρια απαιτούν ένα ελάχιστο περιθώριο ασφάλισης που ποικίλει και εξαρτάται από το συμβόλαιο και τον συναλλασσόμενο. Ο χρηματιστής πολλές φορές θέτει το περιθώριο υψηλότερα από το απαιτούμενο, αλλά ποτέ δεν θέτει χαμηλότερη τιμή [14].

Στους παρακάτω πίνακες παρατηρούμε τον τρόπο κατά τον οποίο έχει αλλάξει η σύνθεση των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης μέσα σε 4 δεκαετίες[11]:



Διάγραμμα 1:3 Σύνθεση ΣΜΕ 1970-1980



Διάγραμμα 1:4 Σύνθεση ΣΜΕ 1990-2000

1.4.4 Διακανονισμός Φυσικής Παράδοσης και Παράδοσης Μετρητών

Ο διακανονισμός παράδοσης είναι η πράξη ολοκλήρωσης του συμβολαίου και μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους [17]:

- *Φυσική παράδοση,* η ποσότητα του υποκείμενου τίτλου που καθορίζεται στο συμβόλαιο, παραδίδεται από τον πωλητή του συμβολαίου στο χρηματιστήριο και από το χρηματιστήριο στον αγοραστή του συμβολαίου. Η φυσική παράδοση είναι ευρέως διαδεδομένη στα εμπορεύματα και στα ομόλογα. Στην πράξη αποτελεί την μειονότητα των συμβολαίων. Τα περισσότερα ακυρώνονται με την αγορά μιας θέσης κάλυψης (covering position) – η οποία είναι η αγορά ενός συμβολαίου που ακυρώνει μια προηγούμενη πώληση ή η πώληση του συμβολαίου έτσι ώστε να ρευστοποιηθεί μια προηγούμενη αγορά.
- *Παράδοση μετρητών,* είναι μία πληρωμή μετρητών η οποία γίνεται με βάση το επιτόκιο αναφοράς του υποκείμενου τίτλου. Οι αντισυμβαλλόμενοι εκπληρώνουν τις θέσεις τους πληρώνοντας ή λαμβάνοντας τη ζημία ή το κέρδος, που σχετίζεται με το συμβόλαιο, σε μετρητά όταν το συμβόλαιο λήξει.

1.4.5 Τιμολόγηση ΣΜΕ μέσω Βέβαιου Κέρδους

Τα επιχειρήματα βέβαιου κέρδους (arbitrage arguments) ή αλλιώς *η ορθολογική τιμολόγηση (rational pricing)* εφαρμόζεται όταν ο παραδοτέος τίτλος υπάρχει σε αφθονία ή δημιουργείται χωρίς κάποιον περιορισμό [43]. Εδώ η forward price εκπροσωπεί την αναμενόμενη μελλοντική τιμή του υποκείμενου τίτλου προεξοφλημένη με επιτόκιο μηδενικού κινδύνου- καθώς κάθε παρέκκλιση από τη θεωρητική τιμή παρέχει στους επενδυτές μία ευκαιρία κέρδους χωρίς ανάληψη κινδύνου [43].

Έτσι, για έναν απλό υποκείμενο τίτλο που δεν πληρώνει μερίσματα, η τιμή του F(t), βρίσκεται με τον ανατοκισμό την παρούσας αξίας S(t) κατά τον χρόνο t μέχρι τη λήξη T με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r [21], $F(t) = S(t) \times (1 + r)^{(T - t)}$ ή με συνεχή ανατοκισμό $F(t) = S(t) \times e^{r\,(T - t)}$.

Σε μία ιδανική αγορά η σχέση μεταξύ της futures price και της τιμής άμεσης παράδοσης εξαρτάται μόνο από τις παραπάνω μεταβλητές. Στην πράξη υπάρχουν πολλές ατέλειες επί της αγοράς (κόστη συναλλαγής, διαφορετικά επιτόκια δανεισμού, περιορισμοί στην ελεύθερη πώληση) που παρεμποδίζουν το απόλυτο βέβαιο κέρδος [16]. Έτσι, η τιμή των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης κυμαίνεται ανάμεσα στα όρια της εξισορροπητικής κερδοσκοπίας γύρω από την θεωρητική τιμή.

1.4.6 Τιμολόγηση ΣΜΕ μέσω Προσδοκίας

Όταν ο παραδοτέος τίτλος δεν βρίσκεται σε αφθονία και υπάρχουν περιορισμοί στην δημιουργία του, η ορθολογική τιμολόγηση δεν μπορεί να εφαρμοσθεί, καθώς ο μηχανισμός της εξισορροπητικής κερδοσκοπίας δεν είναι εφικτός. Εδώ η τιμή των μελλοντικών συμβολαίων εκπλήρωσης καθορίζεται από την σημερινή ζήτηση και προσφορά των υποκείμενων τίτλων [16, 31].

Σε μία βαθιά και ρευστή αγορά, η προσφορά και η ζήτηση αναμένεται να ισορροπήσει σε μία τιμή η όποια θα αντιπροσωπεύει μια αμερόληπτη προσδοκία της τιμής του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης του πραγματικού τίτλου και δίνεται από την απλή σχέση, $F(\,t\,) = E_t\{\,S(\,T\,)\,\}$.

Αντίθετα σε μία ρηχή και μη ρευστή αγορά (όταν οι τίτλοι δεν μετατρέπονται εύκολα σε μετρητά), η τιμή εκκαθάρισης για τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης θα εξακολουθούσε να αντιπροσωπεύει την ισορροπία μεταξύ προσφοράς και ζήτησης αλλά η σχέση μεταξύ της τιμής και της αναμενόμενης τιμής του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης του τίτλου θα κατέρρεε [31].

1.5 Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

Το *δικαίωμα προαίρεσης* είναι ένα συμβόλαιο ανάμεσα σε δύο αντισυμβαλλόμενους, πωλητή και αγοραστή του δικαιώματος, το οποίο συνδιαλλάσσεται με την μεσολάβηση του Χρηματιστηρίου Παραγώγων [14]. Με το συμβόλαιο αυτό ο αγοραστής αποκτά το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πουλήσει (αντίστοιχα με την θέση του δικαιώματος) ένα συγκεκριμένο προϊόν ή τίτλο στην προσυμφωνημένη τιμή του συμβολαίου κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου ή σε κάποια προκαθορισμένη στιγμή στο μέλλον [14].

Γενικά, τα δικαιώματα προαίρεσης είναι από τα πιο σύνθετα παράγωγα κι αυτό οφείλεται στο ότι ο αγοραστής τους δικαιώματος δεν υποχρεούται να τα εξασκήσει παρά μόνο εάν είναι συμφέρον για αυτόν. Αντίθετα, ο πωλητής του δικαιώματος πρέπει να ακολουθήσει την απόφαση του αγοραστή και είναι υποχρεωμένος να πράξει ανάλογα, αγοράσει ή πουλήσει το προϊόν [14]. Την πλεονεκτική θέση κατέχει ο αγοραστής και γι' αυτό είναι υποχρεωμένος για να αποκτήσει το δικαίωμα να καταβάλει ένα αντίτιμο μαζί με την αγορά του δικαιώματος, το οποίο ονομάζεται *ασφάλιστρο* ή *τιμή δικαιώματος στον πωλητή*, καθώς αυτός είναι ο μόνος που αναλαμβάνει κίνδυνο [14].

Τα κύρια χαρακτηριστικά ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι τα εξής [14]:

- *Το μέγεθος του συμβολαίου* (π.χ. ένα δικαίωμα προαίρεσης το οποίο έχει ως υποκείμενο τίτλο την μετοχή της Apple, είναι δυνατόν να αντιστοιχεί σε 1200 μετοχές της εταιρίας αυτής).
- *Η ημερομηνία λήξης (exercise date)* εξαρτάται από τον χρόνο εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης. Με βάση την ημερομηνία λήξης έχουμε δύο κατηγορίες δικαιωμάτων αυτά του Ευρωπαϊκού τύπου και του Αμερικανικού τύπου.
- *Η τιμή εξάσκησης (striking price)* είναι η τιμή η οποία έχει αποφασιστεί ανάμεσα στους αντισυμβαλλόμενους και στην οποία ο αγοραστής του δικαιώματος θα αγοράσει ή πουλήσει αντίστοιχα το αγαθό στο οποίο αναφέρεται το δικαίωμα, εφόσον επιλέξει να ασκήσει το δικαίωμα του.
- *Η τιμή δικαιώματος ή ασφάλιστρο (option price-option premium)* είναι η τιμή που καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή για να αποκτήσει το δικαίωμα. Σε περίπτωση που ο αγοραστής επιλέξει να ασκήσει το δικαίωμα του, ο πωλητής που έχει αποκομίσει το premium, έχει την υποχρέωση να πραγματοποιήσει τη συναλλαγή που

περιγράφεται στο συμβόλαιο. Εάν ο αγοραστής επιλέξει να μην ασκήσει το δικαίωμα του ο πωλητής αποκομίζει μόνο το premium.

- *Το είδος του δικαιώματος,* υποδεικνύει την θέση του αγοραστή και του πωλητή και μπορεί να είναι δικαίωμα αγοράς (call option) ή πώλησης (put option). Σε κάθε περίπτωση μπορεί να πωληθεί ή να αγοραστεί ένα call option (short ή long call αντίστοιχα). Επίσης μπορεί να πωληθεί ή να αγοραστεί ένα put option (short ή long put αντίστοιχα).
- *Ο υποκείμενος τίτλος,* είναι ουσιαστικά το αντικείμενο το οποίο αφορά το δικαίωμα. Για παράδειγμα χρυσός, ασήμι, μετοχές ακόμα και χρηματιστηριακούς δείκτες.

Η επίδραση των παραπάνω χαρακτηριστικών είναι διαφορετική ανάλογα με το είδος του δικαιώματος (αγοράς ή πώλησης).

Όσο πιο ψηλά βρίσκεται η τρέχουσα τιμή, τόσο αυξημένη είναι η πιθανότητα εύρεσης του δικαιώματος εντός της χρηματικής αξίας. Συνεπώς, όσο μεγαλύτερη είναι η αύξηση της τρέχουσας αξίας τόσο αυξάνεται και η τιμή του δικαιώματος αγοράς, καθώς είναι πιο πιθανό για τον αγοραστή να καταφέρει να καλύψει το κόστος για την αγορά του δικαιώματος. Αντίστοιχα, αυξάνονται οι πιθανότητες του πωλητή να υποστεί ζημιά. Αντίθετα, όσο αυξημένη είναι η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα για το δικαίωμα να βρεθεί εκτός της χρηματικής του αξίας. Έτσι, μία μεγάλη τιμή εξάσκησης συνεπάγεται μειωμένη τιμή του δικαιώματος. Η επίδραση της τιμής του υποκείμενου τίτλου και της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος, είναι αντίθετη για τα δικαιώματα πώλησης και τα δικαιώματα αγοράς. Συγκεκριμένα για τα δικαιώματα πώλησης, η τιμή τους μειώνεται με την αύξηση της τρέχουσας τιμής του τίτλου και αυξάνεται με την αύξηση της τιμής εξάσκησης.

1.5.1 Τύποι Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Οι βασικοί τύποι δικαιωμάτων προαίρεσης τα διαχωρίζουν σε αυτά που συναλλάσσονται σε χρηματιστηριακές αγορές και σε αυτά που συναλλάσσονται σε εξωχρηματιστηριακές αγορές.

Τα δικαιώματα που συναλλάσσονται σε χρηματιστηριακές αγορές είναι γνωστά ως *listed options*, έχουν τυποποιημένα συμβόλαια και διακανονίζονται μέσω μιας εταιρίας εκκαθάρισης η οποία διασφαλίζει την περάτωση τους. Αφού είναι τυποποιημένα συμβόλαια, υπάρχουν ακριβή μοντέλα τιμολόγησης. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι εξής τύποι δικαιωμάτων προαίρεσης [14]:

- Δικαιώματα επί μετοχών.
- Δικαιώματα επί εμπορευμάτων.

- Δικαιώματα επί χρηματιστηριακών δεικτών.
- Δικαιώματα επί συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης.
- Δικαιώματα επί ομολόγων.

Τα δικαιώματα που συναλλάσσονται σε εξωχρηματιστηριακές αγορές (Over-The-Counter options) είναι γνωστά ως dealer options και εκτελούνται μεταξύ ιδιωτών [14]. Οι κανόνες ενός OTC δικαιώματος είναι απεριόριστοι και διαμορφώνονται από το κάθε μέρος έτσι ώστε να ικανοποιεί τις ανάγκες του. Γενικά ισχύει ότι τουλάχιστον ένας από τους συναλλασσόμενους επί ενός OTC δικαιώματος είναι μια καλά κεφαλαιοποιημένη εταιρία. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι εξής τύποι δικαιωμάτων προαίρεσης [14]:

- Δικαιώματα επί επιτοκίων.
- Δικαιώματα επί συμβάσεων ανταλλαγής.
- Δικαιώματα επί συναλλαγμάτων.

Μερικές κατηγορίες δικαιωμάτων προαίρεσης που διακρίνονται με βάση τις ιδιότητες τους είναι οι εξής [14]:

- Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα – γίνεται να ασκηθεί μόνο κατά την ημερομηνία λήξης του.
- Αμερικανικού τύπου δικαίωμα – εξασκείται οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι την λήξης του.
- Εξωτικό δικαίωμα – οποιοδήποτε δικαίωμα που περιέχει σύνθετες χρηματοοικονομικές δομές.
- Δικαιώματα τύπου Βανίλια – οποιοδήποτε δικαίωμα δεν είναι εξωτικό.
- Δικαίωμα τύπου Βερμούδες – μπορεί να ασκηθεί μόνο σε συγκεκριμένες ημερομηνίες πριν και κατά την ημερομηνία λήξης.
- Δικαίωμα Barrier – κάθε δικαίωμα για να ασκηθεί πρέπει η τιμή του υποκείμενου τίτλου να αυξηθεί ή μειωθεί πέρα από μία συγκεκριμένη τιμή.

1.5.2 Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού Τύπου Δικαιώματα Προαίρεσης

Τα *options* με βάση την ημερομηνία λήξης (exercise date), διακρίνονται σε Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου. Ένα *Ευρωπαϊκού τύπου* δικαίωμα χαρακτηρίζεται έτσι όταν είναι δυνατόν να εξασκηθεί μόνο κατά την ημερομηνία λήξης του. Ο επενδυτής με την αγορά αυτού του δικαιώματος θεωρεί ότι σε μια συγκεκριμένη στιγμή στο μέλλον, η αξία του υποκείμενου τίτλου θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη, ανάλογα με το είδος του δικαιώματος, από την τιμή άσκησης . Ένα δικαίωμα χαρακτηρίζεται ως *Αμερικανικού τύπου* όταν μπορεί να ασκηθεί πριν ή κατά την ημερομηνία λήξης του. Τα Αμερικανικού τύπου δικαιώματα διαπραγματεύονται σε υψηλότερη τιμή από αυτά του Ευρωπαϊκού τύπου, καθώς δίνουν το πλεονέκτημα της πρόωρης εξάσκησης [14].

Η τιμή των δικαιωμάτων προαίρεσης Αμερικανικού τύπου είναι ανάλογη με τον χρόνο που έχουν μέχρι τη λήξη τους. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε δυο δικαιώματα τα οποία είναι ίδια και διαφέρουν μόνο ως προς το χρόνο λήξης τους. Ο αγοραστής του δικαιώματος με την μεγαλύτερη ημερομηνία λήξης θα έχει περισσότερες ευκαιρίες για εξάσκηση αυτού του δικαιώματος από ότι ο κάτοχος του δικαιώματος με την κοντινότερη ημερομηνία λήξης. Η τιμή των δικαιωμάτων προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου δεν εξαρτάται από την χρονική απόσταση μέχρι την ημερομηνία λήξης, καθώς ο αγοραστής τους δεν έχει περισσότερες ευκαιρίες για να εξασκήσει τα δικαιώματα [14].

1.5.3 Δικαιώματα Τύπου «Όχι Βανίλια»

Τα δικαιώματα Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου θεωρούνται δικαιώματα vanilla. Ο όρος *vanilla* αναφέρεται στα δικαιώματα αυτά που δεν παρουσιάζουν ιδιαιτερότητες και συνήθως διαπραγματεύονται μαζικά στα Χρηματιστήρια Παραγώγων. Ωστόσο, σήμερα ολοένα και πιο πολλά δικαιώματα εμφανίζονται στις αγορές, τα οποία δεν έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά με τα δικαιώματα που διαπραγματεύονταν μέχρι σήμερα [16].

Ένα παράδειγμα ενός non-vanilla δικαιώματος είναι το *δικαίωμα Βερμούδων*. Το δικαίωμα αυτό δίνει στον αγοραστή του τη δυνατότητα να το ασκήσει σε συγκεκριμένες ημερομηνίες. Διευκρινίζεται δηλαδή από την αγορά του ότι σε συγκεκριμένες ημερομηνίες στο μέλλον θα μπορεί ο αγοραστής αν το επιθυμεί να το ασκήσει. Άλλο ένα non-vanilla δικαίωμα είναι το *δικαίωμα Κανάριου τύπου* [16]. Το δικαίωμα αυτό δίνει τη δυνατότητα στον αγοραστή του να το ασκήσει ανά τακτά χρονικά διαστήματα, αλλά όχι πριν παρέλθει ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα από τη συγγραφή του δικαιώματος. Για παράδειγμα μπορεί να δίνει τη δυνατότητα άσκησης του συμβολαίου μια συγκεκριμένη μέρα ανά δύο μήνες έπειτα από την πάροδο δύο ετών από την συγγραφή του.

1.5.4 Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Η θεωρητική τιμή ενός δικαιώματος αποτιμάται σύμφωνα με κάποια μαθηματικά μοντέλα. Αυτά τα μοντέλα αναπτύσσονται μέσω της ποσοτικής ανάλυσης και προσπαθούν να προβλέψουν τον τρόπο με τον οποίο η τιμή του δικαιώματος μεταβάλλεται σε σχέση με τις μεταβαλλόμενες συνθήκες [12]. Για παράδειγμα, η μεταβολή της τιμής ανάλογα με την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος ή την επίδραση μιας αύξησης της μεταβλητότητας στην αξία του δικαιώματος. Επιπλέον, οι κίνδυνοι που σχετίζονται με την απόκτηση, την παροχή ή τη συναλλαγή των δικαιωμάτων μπορούν να ποσοτικοποιηθούν και να διαχειριστούν με μεγάλη ακρίβεια σε σύγκριση με άλλες επενδύσεις[12]. Τα δικαιώματα προαίρεσης που συναλλάσσονται σε χρηματιστηριακές αγορές συγκροτούν μια σημαντική κατηγορία δικαιωμάτων τα οποία έχουν τυποποιημένα χαρακτηριστικά και αφού διακινούνται μέσω χρηματιστηρίων εξυπηρετούν συναλλαγές μεταξύ ανεξάρτητων μερών. Τα εξωχρηματιστηριακά παράγωγα (over-the-counter) συναλλάσσονται μεταξύ ιδιωτικών προσώπων.

1.5.5 Μοντέλα Αποτίμησης

Η αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας μια ποικιλία από τεχνικές ποσοτικής ανάλυσης βασισμένες στη θεωρία της τιμολόγησης ουδέτερου κινδύνου και χρησιμοποιώντας στοχαστικούς υπολογισμούς [51]. Το πιο βασικό μοντέλο είναι αυτό των Black & Scholes [19]. Γενικά τα τυποποιημένα μοντέλα αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης εξαρτώνται από τους ακόλουθους παράγοντες:

- Την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου προϊόντος στο δικαίωμα.
- Τον χρόνο που απομένει μέχρι τη λήξη, μαζί με οποιοδήποτε περιορισμό υπάρχει για το χρόνο που επιτρέπεται να ασκηθεί το δικαίωμα.
- Την τιμή άσκησης του δικαιώματος, συγκεκριμένα σε σχέση με την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου.
- Το κόστος κράτησης της θέσης επί του υποκείμενου χρεογράφου, συμπεριλαμβανομένων των επιτοκίων και των μερισμάτων.
- Την εκτίμηση της μελλοντικής μεταβλητότητας της τιμής του υποκείμενου τίτλου κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος.

1.5.5.1 Black & Scholes

Ακολουθώντας τις εργασίες των Edward Thorp και Louis Bachelier, ο Fischer Black και ο Myron Scholes δημιούργησαν μια τεράστιας σημασίας καινοτομία με τη δημιουργία μιας διαφορικής εξίσωσης που πρέπει να ικανοποιείται από την τιμή οποιουδήποτε παράγωγου προϊόντος που εξαρτάται από μία μετοχή που δεν πληρώνει μερίσματα [19]. Οι Black & Scholes δημιούργησαν μία λύση κλειστού τύπου για την θεωρητική τιμή ενός Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος μέσω της εφαρμογής μιας τεχνικής κατασκευής ενός χαρτοφυλακίου ουδέτερου κινδύνου που αντιγράφει τις αποδόσεις που έχει κάποιος όταν κρατά ένα δικαίωμα προαίρεσης[19]. Την ίδια στιγμή, το μοντέλο παράγει παραμέτρους αντιστάθμισης που είναι αναγκαίες για την αποτελεσματική διαχείριση του κινδύνου που αναλαμβάνει κάποιος όταν κρατά θέση επί ενός δικαιώματος.

Οι ιδέες πίσω από το μοντέλο Black & Scholes ήταν καινοτόμες και αυτό οδήγησε τους δημιουργούς του στη βράβευση από πολλούς οργανισμούς, ο σημαντικότερος από αυτούς ήταν η Κεντρική Τράπεζα της Σουηδίας. Ωστόσο, η εφαρμογή του μοντέλου σε πραγματικό περιβάλλον συναλλαγής δικαιωμάτων προαίρεσης είναι κακότεχνη εξαιτίας της υπόθεσης ότι υπάρχουν συνεχείς (ή καθόλου) πληρωμές μερισμάτων, σταθερή μεταβλητότητα και σταθερό επιτόκιο. Το μοντέλο Black & Scholes αποτελεί μέχρι και σήμερα την πιο σημαντική μέθοδο αποτίμησης για την χρηματοοικονομική αγορά της οποίας τα αποτελέσματα βρίσκονται μεταξύ λογικού εύρους [19].

1.5.5.2 Στοχαστικά Μοντέλα Μεταβλητότητας

Έπειτα από το κραχ της αγοράς το 1987, παρατηρήθηκε ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα των δικαιωμάτων προαίρεσης που έχουν χαμηλές τιμές εξάσκησης είναι συνήθως υψηλότερη από αυτά με υψηλές τιμές εξάσκησης [55]. Με αυτή την παρατήρηση οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η μεταβλητότητα είναι στοχαστική και μεταβάλλεται ανάλογα με τον χρόνο και την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Ένα από τα πιο γνωστά στοχαστικά μοντέλα μεταβλητότητας είναι αυτό του Heston, του οποίου το κυριότερο πλεονέκτημα είναι ότι έχει λύση σε κλειστή μορφή ενώ τα άλλα απαιτούν σύνθετες αριθμητικές μεθόδους.

1.5.6 Εφαρμογή Μοντέλων

Όταν επιλέξουμε το μοντέλο αποτίμησης που θα χρησιμοποιήσουμε, υπάρχει ένα πλήθος διαφορετικών τεχνικών που μπορούν να εφαρμοστούν σε αυτό. Οι τεχνικές αυτές είναι το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης, το μοντέλο Monte Carlo, αναλυτικές τεχνικές και το μοντέλο πεπερασμένων διαφορών [14].

1.5.6.1 Αναλυτικές Τεχνικές

Σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορούμε να πάρουμε ένα μαθηματικό μοντέλο και να χρησιμοποιήσουμε αναλυτικές μεθόδους έτσι ώστε να βρούμε κλειστού τύπου λύσεις, όπως στο μοντέλο Black & Scholes. Οι λύσεις είναι εύκολα υπολογίσιμες και γνωστές ως ‘Greeks’.

1.5.6.2 Μοντέλο Monte Carlo

Για πολλές κατηγορίες δικαιωμάτων προαίρεσης, οι παραδοσιακές τεχνικές αποτίμησης είναι δύσχρηστες λόγω της πολυπλοκότητας των υποκείμενων τίτλων. Σε αυτές τις περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση Monte Carlo, η οποία χρησιμοποιεί προσομοίωση για να παράγει τυχαίες διαδρομές της τιμής του υποκείμενου τίτλου όπου κάθε μία διαδρομή έχει ως αποτέλεσμα μια πληρωμή του δικαιώματος, αντί να προσπαθεί να λύσει διαφορικές εξισώσεις κίνησης που περιγράφουν την σχέση ανάμεσα στην τιμή του δικαιώματος και στην τιμή του υποκείμενου αξιόγραφου. Ο μέσος όρος αυτών των πληρωμών προεξοφλείται έτσι ώστε να μας δώσει την αναμενόμενη τιμή του δικαιώματος.

1.5.6.3 Διωνυμικό Μοντέλο Τιμολόγησης

Οι Stephen Ross, Mark Rubinstein και John Cox στηριζόμενοι στο μοντέλο Black & Scholes, ανέπτυξαν το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης [10]. Μέσω του μοντέλου αυτού μοντελοποιείται η δυναμική της θεωρητικής τιμής του δικαιώματος προαίρεσης για διακριτά χρονικά διαστήματα κατά τη διάρκεια ζωής του. Το μοντέλο ξεκινάει με ένα διωνυμικό δέντρο με μελλοντικές διακριτές πιθανές τιμές της υποκείμενης μετοχής. Μπορούμε να βρούμε έναν απλό τύπο ο οποίος θα μας υπολογίζει την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης σε κάθε κόμβο του δέντρου κατασκευάζοντας ένα χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο ενός δικαιώματος και μιας μετοχή. Αυτή η τιμή μπορεί να προσεγγίζει την θεωρητική τιμή που παράγεται από το μοντέλο Black & Scholes, στον επιθυμητό βαθμό ακριβείας[10].

Το διωνυμικό μοντέλο θεωρείται πιο ακριβές από το μοντέλο Black & Scholes, καθώς είναι πιο ευέλικτο και έτσι χρησιμοποιείται από επαγγελματίες συναλλασσόμενους. Το τριωνυμικό δέντρο είναι ένα παρόμοιο μοντέλο, και θεωρείται πιο ακριβές κυρίως όταν μοντελοποιούνται λιγότεροι χρονικοί κόμβοι. Βέβαια δεν χρησιμοποιείται συχνά καθώς η εφαρμογή του είναι πολύ σύνθετη[10].

1.5.6.4 Μοντέλο Πεπερασμένων Διαφορών

Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν ένα δικαίωμα προαίρεσης συνήθως είναι μερικές διαφορικές εξισώσεις[10]. Όταν μοντελοποιούμε μέσω μερικών διαφορικών εξισώσεων, παράγεται ένα μοντέλο πεπερασμένων διαφορών και έτσι μπορούμε να αποτιμήσουμε το δικαίωμα. Υπάρχει ένα πλήθος από μοντέλα πεπερασμένων διαφορών που αποτιμά δικαιώματα προαίρεσης όπως οι *σύνθετες ή πεπλεγμένες* περασμένες διαφορές, οι *άμεσες ή ρητές* πεπερασμένες διαφορές και η μέθοδος *Crank-Nicholson* [10]. Η προσέγγιση μέσω πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιείται συνήθως όταν τα δεδομένα μας, όπως η μεταβλητότητα και το επιτόκιο, αλλάζουν κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος.

1.6 Συμβάσεις Ανταλλαγής (Swaps)

Τα *swaps* είναι ένα είδος παραγώγου, το οποίο αποτελείται από μία διμερή συμφωνία για ανταλλαγή συγκεκριμένων πληρωμών εντός τακτών χρονικών διαστημάτων, με τρόπο ο οποίος καθορίζεται κατά τη σύναψη του συμβολαίου [16]. Ο όρος *συγκριτικό πλεονέκτημα* αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της θεωρίας του διεθνούς εμπορίου και σημαίνει ότι εάν δύο εταιρίες δανειστούν η καθεμία στην αγορά που διαθέτει συγκριτικό πλεονέκτημα, και ανταλλάξουν υποχρεώσεις μεταξύ τους, θα βγουν κερδισμένες και οι δύο σε σχέση με την περίπτωση οπού η καθεμία θα δανειζόταν στην αγορά που θα προτιμούσε.

Τα πλεονεκτήματα εξαρτώνται από τον τύπο των οικονομικών εργαλείων που χρησιμοποιούνται. Για παράδειγμα, στην περίπτωση μιας σύμβασης ανταλλαγής που περιλαμβάνει δύο ομόλογα, τα πλεονεκτήματα προκύπτουν από τις περιοδικές πληρωμές τόκων που συνδέονται με τα ομόλογα. Συγκεκριμένα, οι δύο πλευρές συμφωνούν να ανταλλάξουν ένα ρεύμα χρηματοροών ενάντια σε ένα άλλο ρεύμα. Αυτές οι μελλοντικές χρηματοροές καλούνται *legs*[16]. Η συμφωνία μιας σύμβασης ανταλλαγής καθορίζει το πότε πρέπει να πληρωθούν οι χρηματοροές και τον τρόπο με τον οποίο θα υπολογιστούν. Συνήθως, κατά τη χρονική στιγμή που το συμβόλαιο συνάπτεται τουλάχιστον μία από τις χρηματοροές καθορίζεται από μία τυχαία μεταβλητή όπως το επιτόκιο, η συναλλαγματική ισοτιμία κ.α..

Οι χρηματοροές υπολογίζονται επί ένα αρχικό πλασματικό κεφάλαιο, το οποίο συνήθως δεν ανταλλάσσεται μεταξύ των δύο πλευρών [16]. Έτσι, οι συμβάσεις ανταλλαγής μπορεί να είναι επί μετρητών ή επί εγγυήσεων.

Η εφαρμογή τους συνιστά μέσω αντιστάθμισης συγκεκριμένων κινδύνων, όπως τον κίνδυνο του επιτοκίου. Στην αγορά υπάρχουν τόσα είδη συμβάσεων ανταλλαγής όσα και υποκείμενα προϊόντα για παράδειγμα συμβάσεις ανταλλαγής μετοχών, συναλλάγματος και χρηματιστηριακών δεικτών. Η αγορά των swaps δημιουργήθηκε το 1981, έκτοτε η τεχνική των swaps γνώρισε μεγάλη ανάπτυξη[16]. Σήμερα, οι συμβάσεις ανταλλαγής αποτελούν ένα από τα πιο διαδεδομένα χρηματοοικονομικά συμβόλαια, το σύνολο των συμβάσεων ανταλλαγής επιτοκίων και νομισμάτων ξεπερνούσε το ποσό των $ 524,7 τρις το 2009 σύμφωνα με την International Swaps and Derivatives Association.

1.6.1 Αγορά Συμβάσεων Ανταλλαγής

Η πλειοψηφία των συμβάσεων ανταλλαγής δεν διαπραγματεύονται σε οργανωμένες αγορές και ονομάζονται *over-the-counter* (OTC) [16]. Κάποιοι τύποι των συμβάσεων ανταλλαγής διαπραγματεύονται σε προθεσμιακές αγορές όπως οι Chicago Mercantile Exchange Holdings, Chicago Board Options Exchange, Intercontinental Exchange και Frankfurt-based Eurex.

Η Τράπεζα Διεθνών Διακανονισμών (Bank for International Settlements) δημοσίευσε στατιστικές έρευνες που αφορούσαν υποθετικά – ονομαστικά κεφάλαια επί της OTC αγοράς Παραγώγων. Στο τέλος του 2006, ήταν €415 τρις, 8 φορές μεγαλύτερο από το παγκόσμιο ακαθάριστο προϊόν. Το μεγαλύτερο τμήμα του ποσού αυτού ίσου με $295 τρις προερχόταν από συμβάσεις ανταλλαγής επιτοκίου.

Ονομαστικά Κεφάλαια σε τρις Δολαρίων							
Νόμισμα	Τέλος 2000	Τέλος 2001	Τέλος 2002	Τέλος 2003	Τέλος 2004	Τέλος 2005	Τέλος 2006
Ευρώ	16.6	20,9	31,5	44,7	59,3	81,4	112,1
Δολάριο	13	18,9	23,7	33,4	44,8	74,4	97,6
Γιέν	11.1	10,1	12,8	17,4	21,5	25,6	38
Λίρα Αγγλίας	4	5	6,2	7,9	11,6	15,1	22,3
Ελβετικό Φράγκο	1.1	1,2	1,5	2	2,7	3,3	3,5
Σύνολο	48.8	58.9	79.2	11,2	147,4	212	292

Πίνακας 1:1: Ονομαστικά Κεφάλαια Παραγώγων επί της αγοράς OTC [3]

1.6.2 Τύποι Συμβάσεων Ανταλλαγής

Οι Συμβάσεις Ανταλλαγής χρησιμοποιούνται από τους επενδυτές ως κάλυψη έναντι του κινδύνου που προκύπτει από τη μεταβλητότητα των τιμών. Το απλό swap είναι η βασικότερη μορφή αυτών των συμφωνιών αλλά υπάρχουν επίσης άλλα τρία βασικά είδη [16]:

- **Προθεσμιακές Συμβάσεις Ανταλλαγής (Forward swap)**: δημιουργούνται από τη σύνθεση δύο διαφορετικών συμβάσεων ανταλλαγής, των οποίων η διαφορά τους έγκειται στη χρονική διάρκεια. Για παράδειγμα, εάν ένας επενδυτής ο οποίος θέλει να προστατευθεί από τον κίνδυνο της αγοράς για ένα χρονικό διάστημα 6 ετών, το οποίο ξεκινάει σε ένα χρόνο από σήμερα, έχει την δυνατότητα να εξασφαλίσει δύο συμφωνίες ανταλλαγής, με διάρκεια 1 και 7 έτη αντίστοιχα. Έτσι το forward swap προσαρμόζεται στο χαρτοφυλάκιο του και τον προστατεύει.
- **Συμβάσεις Ανταλλαγής Νομισμάτων (Currency swap)**: είναι συμβάσεις ανταλλαγής με τις οποίες δύο επενδυτές συμφωνούν την ανταλλαγή κεφαλαίου και τόκων σε ένα άλλο νόμισμα. Οι συμφωνίες ανταλλαγής νομισμάτων υποκινούνται και αυτές από τα συγκριτικά πλεονεκτήματα.
- **Συμβάσεις Ανταλλαγής Επιτοκίων (Interest rate swap)**: είναι συμβάσεις δύο επενδυτών για ανταλλαγή πληρωμών σταθερού επιτοκίου σε συγκεκριμένες ημερομηνίες με πληρωμές κυμαινόμενου επιτοκίου. Οι πληρωμές είναι στο ίδιο νόμισμα και υπολογίζονται με ένα προσυμφωνημένο αρχικό κεφάλαιο. Το κυμαινόμενο επιτόκιο είναι, συνήθως, το επιτόκιο LIBOR(London Inter Bank Offer

Rate). Η ανταλλαγή του ποσού του κεφαλαίου δεν μπορεί να γίνει με φυσικό τρόπο αλλά μόνο με χρηματικά ποσά από τις καθαρές πληρωμές των επιτοκίων. Η χρήση αυτού του swap δημιουργεί τον μετασχηματισμό των πληρωμών σταθερού επιτοκίου σε πληρωμές κυμαινόμενου επιτόκιο, αν και υπάρχει δυνατότητα ανταλλαγής κυμαινόμενων επιτοκίων. Για το λόγο αυτό τα interest rate swaps διακρίνονται [16]:

- o ***Cross currency basis swap***: σε αυτό το swap ανταλλάσσονται δυο διαφορετικά κυμαινόμενα επιτόκια δύο διαφορετικών νομισμάτων.
- o ***Cross currency swap:*** σε αυτό το swap οι πληρωμές του επιτοκίου εκφράζονται σε διαφορετικά νομίσματα και ανταλλάσσεται σταθερό προς κυμαινόμενο επιτόκιο.

- **Συμβάσεις Ανταλλαγής Συνδεόμενη Με Μετοχές (Equity Swap):** είναι συμφωνίες ανταλλαγής που ο υποκείμενος τίτλος είναι είτε μία μετοχή είτε ένα σύνολο μετοχών ή ένας δείκτης μετοχών. Στην περίπτωση αυτή δεν απαιτείται εκ των προτέρων πληρωμή, όμως δεν υπάρχουν και τα δικαιώματα που έχουν οι κάτοχοι των μετοχών [11].
- **Συμβάσεις Ανταλλαγής Κινδύνου Αθέτησης (Credit Default Risk):** είναι συμφωνίες κατά τις οποίες ο αγοραστής των CDS κάνει μια σειρά πληρωμών στον πωλητή και σε αντάλλαγμα λαμβάνει ως αποπληρωμή ,εάν κάποιος πιστωτικός τίτλος, – συνήθως δάνειο ή ομόλογο – αδυνατεί να πληρώσει. Οι συμβάσεις ανταλλαγής κινδύνου συγκρίνονται με τις ασφαλίσεις, καθώς ο αγοραστής πληρώνει ασφάλιστρο και σε αντάλλαγμα λαμβάνει ένα ποσό χρημάτων εφόσον εμφανιστεί κάποιο γεγονός που αναφέρεται στο συμβόλαιο. Σε αντίθεση με την πραγματική ασφάλιση επιτρέπεται στον αγοραστή να αποκομίσει κέρδος από τη συμφωνία και να καλύψει ένα περιουσιακό στοιχείο στο οποίο δεν εκτίθεται άμεσα [11].

1.6.3 Βέβαιο Κέρδος Συμβάσεων Ανταλλαγής

Όταν δεν υπάρχει βέβαιος κίνδυνος, σύμφωνα με τους κανόνες μιας σύμβασης ανταλλαγής, η καθαρή παρούσα αξία αυτών των μελλοντικών χρηματικών ροών είναι μηδενική και συνεπώς το βέβαιο κέρδος μπορεί να επιτευχθεί [11].

Για παράδειγμα, έστω μία σύμβαση ανταλλαγής επιτοκίου όπου το πρώτο μέρος πληρώνει σταθερό επιτόκιο και το δεύτερο μέρος πληρώνει κυμαινόμενο επιτόκιο. Σε μία τέτοια συμφωνία το σταθερό επιτόκιο θα είναι τέτοιο ώστε η παρούσα αξία των μελλοντικών πληρωμών σταθερού επιτοκίου από το πρώτο μέρος να είναι ίσες με την παρούσα αξία των αναμενόμενων μελλοντικών πληρωμών κυμαινόμενου επιτοκίου. Ένας εξισορροπητικός κερδοσκόπος (arbitrageur) θα μπορούσε [11]:

i. Να μαντέψει τη θέση με την χαμηλότερη παρούσα αξία πληρωμών και να δανειστεί κεφάλαια ίσα με την παρούσα αξία.

ii. Να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις των χρηματοροών επί της θέσης του, με το να χρησιμοποιήσει τα κεφάλαια που έχει δανειστεί και να λάβει τις αντίστοιχες πληρωμές, οι οποίες θα έχουν υψηλότερη παρούσα αξία.

iii. Να χρησιμοποιήσει τις πληρωμές που έλαβε για να αποπληρώσει το δάνειο του.

iv. Να αποταμιεύσει τη διαφορά, που προκύπτει από την παρούσα αξία του δανείου και την παρούσα αξία των εισερχόμενων χρηματοροών. Η διαφορά αυτή είναι *το βέβαιο κέρδος*.

1.7 Πιστοποιητικό Επιλογής (Warrant)

Τα πιστοποιητικά επιλογής δίνουν το δικαίωμα στον αγοραστή να επιλέξει την αγορά μετοχών σε προκαθορισμένη τιμή [7]. Η *θεωρητική αξία* ενός δικαιώματος αγοράς μετοχών είναι η χαμηλότερη τιμή πώλησής του και υπολογίζεται εάν αφαιρέσουμε τη συμφωνημένη τιμή από την τιμή της μετοχής και το υπόλοιπο το πολλαπλασιάσουμε με τους όρους του τίτλου. Ένα πιστοποιητικό επιλογής είναι ένα χρεόγραφο που δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο να αγοράσει την υποκείμενη μετοχή της εταιρίας που την εκδίδει σε μία συγκεκριμένη τιμή μέχρι την ημερομηνία λήξης.

Τα πιστοποιητικά επιλογής και τα δικαιώματα προαίρεσης έχουν αρκετές ομοιότητες καθώς και τα δύο χρηματοοικονομικά αυτά εργαλεία δίνουν στον κάτοχο δικαιώματα για αγορά χρεογράφων [14]. Η αγγλική σημασιολογία της λέξης warrant είναι ‘προικίζω με το δικαίωμα’, που είναι η μοναδική διαφορά από την έννοια του δικαιώματος προαίρεσης.

Τα πιστοποιητικά επιλογής συχνά συνδέονται με ομόλογα ή με μετοχές, και επιτρέπουν στον εκδότη να πληρώνει χαμηλότερο επιτόκιο ή μέρισμα. Χρησιμοποιούνται για να ενδυναμώσουν την απόδοση του ομολόγου και να το κάνουν πιο θελκτικό στους πιθανούς αγοραστές [14]. Επίσης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ιδιωτικές συμφωνίες. Πολλά από αυτά τα πιστοποιητικά είναι αφαιρούμενα και μπορούν να πωληθούν ανεξάρτητα από το ομόλογο ή τη μετοχή.

Στην περίπτωση που τα πιστοποιητικά αυτά εκδίδονται με προνομιούχες μετοχές, οι κάτοχοι των μετοχών συνήθως αφαιρούν και πουλούν το δικαίωμα πριν να εισπράξουν τις πληρωμές μερισμάτων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, μερικές φορές να είναι επωφελές να αφαιρούμε και να πουλάμε το πιστοποιητικό επιλογής όσο πιο γρήγορα αυτό είναι εφικτό έτσι ώστε ο επενδυτής να κερδίσει τα μερίσματα [14].

Η χρήση τους είναι διαδεδομένη λόγω του χαμηλού τους κόστους, της δυνατότητας μόχλευσης και της προστασίας του χαρτοφυλακίου καθώς για παράδειγμα τα πιστοποιητικά επιλογής πώλησης επιτρέπουν στον κάτοχο να προστατέψει την αξία του χαρτοφυλακίου του από την πτώση της αγοράς ή συγκεκριμένων μετοχών. Συναλλάσσονται ενεργά σε χρηματοοικονομικές αγορές όπως η Deutsche Borse και στην αγορά του Hong Kong. Στο χρηματιστήριο του Hong Kong, τα δικαιώματα αυτά αποτελούν το 14% του συνολικού τζίρου, το πρώτο τετράμηνο το 2015.

1.7.1 Τύποι Πιστοποιητικών Επιλογής

Υπάρχουν πολλά είδη πιστοποιητικών επιλογής και οι λόγοι που επενδύουμε σε ένα συγκεκριμένο τύπο είναι γιατί υπάρχουν σημαντικές διαφορές από τους υπόλοιπους [14]. Κάποια από τα είδη αυτά είναι τα κάτωθι:

- *Τα πιστοποιητικά επιλογής ιδίων κεφαλαίων*, διακρίνονται σε ανακλητά και επιστρέψιμα.
- Τα *ανακλητά πιστοποιητικά επιλογής (callable warrants)* σου δίνουν το δικαίωμα να αγοράσεις τα υποκείμενα αξιόγραφα.
- Τα *επιστρέψιμα πιστοποιητικά επιλογής (putable warrants)* σου δίνουν το δικαίωμα να πουλήσεις τα υποκείμενα αξιόγραφα.
- Τα *καλυμμένα πιστοποιητικά επιλογής (covered warrants)*, έχουν μια υποστήριξη από τον υποκείμενο τίτλο. Για παράδειγμα ο εκδότης θα αγοράσει από πριν τη μετοχή ή θα χρησιμοποιήσει άλλα χρηματοοικονομικά εργαλεία για να καλύψει το δικαίωμα προαίρεσης.
- Τα *πιστοποιητικά επιλογής δεικτών (index warrants)*, χρησιμοποιούν έναν δείκτη ως υποκείμενο τίτλο. Τιμολογούνται μέσω σημείων των δεικτών και έτσι συναλλάσσονται με μετρητά και όχι απευθείας με μερίδια.
- Τα *αφαιρούμενα πιστοποιητικά επιλογής (Detachable warrants)*, το μερίδιο του πιστοποιητικού επιλογής του αξιόγραφο μπορεί να αφαιρεθεί από το χρεωστικό ομόλογο ή τη χρεωστική μετοχή και να συναλλαχθεί ξεχωριστά.
- Τα *γυμνά πιστοποιητικά επιλογής (Naked warrants)*, εκδίδονται χωρίς τη συνοδεία ομολόγου ή μετοχής και συναλλάσσονται στα χρηματιστήρια.

1.7.2 Δομή και Ιδιότητες Πιστοποιητικών Επιλογής

Τα πιστοποιητικά επιλογής έχουν παρόμοια χαρακτηριστικά με τα χρηματοοικονομικά μέσα που προέρχονται από μετοχές, όπως τα δικαιώματα προαίρεσης και είναι τα εξής [14]:

- *Ασφάλιστρο*: Το ασφάλιστρο ενός πιστοποιητικού επιλογής μας δείχνει το πόσο περισσότερα χρήματα πρέπει να πληρώσουμε για τις μετοχές όταν τις αγοράζουμε μέσω ενός πιστοποιητικού σε σύγκριση με το να τις αγοράζαμε από μόνες τους.
- *Χρηματοοικονομική μόχλευση*: Η μόχλευση ενός πιστοποιητικού επιλογής (gearing) είναι ο τρόπος να εξακριβώσουμε πόσο περισσότερη έκθεση έχουν οι υποκείμενες μετοχές χρησιμοποιώντας το πιστοποιητικό σε σύγκριση με την έκθεση που θα είχαμε ένα αγοράζαμε τις μετοχές μέσω της αγοράς.
- *Ημερομηνία λήξης*: Είναι η ημερομηνία που λήγει το πιστοποιητικό επιλογής. Εάν σχεδιάζουμε να ασκήσουμε το πιστοποιητικό αυτό πρέπει να γίνει πριν την ημερομηνία λήξης, Όσο περισσότερος χρόνος μένει μέχρι τη λήξη, τόσο περισσότερος χρόνος έχουμε να εκτιμήσουμε τον υποκείμενο τίτλο πράγμα που αυξάνει την τιμή του πιστοποιητικού.
- *Περιορισμοί στην άσκηση*: Όπως στα δικαιώματα προαίρεσης έτσι και στα πιστοποιητικά επιλογής, υπάρχουν διαφορετικοί τύποι εξάσκησης που σχετίζονται με τα πιστοποιητικά όπως για παράδειγμα τα πιστοποιητικά επιλογής Αμερικανικού τύπου (ο κάτοχος μπορεί να τα εξασκήσει οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν τη λήξη τους) και τα Ευρωπαϊκού τύπου (που ο κάτοχος μπορεί να τα εξασκήσει μόνο στη λήξη τους).
- *Εξάσκηση*: Ένα πιστοποιητικό επιλογής εξασκείται όταν ο κάτοχος του ενημερώνει τον εκδότη για την πρόθεση του να αγοράσει τις υποκείμενες μετοχές.

1.7.3 Τιμολόγηση Πιστοποιητικών Επιλογής

Υπάρχουν πολλά μοντέλα εκτίμησης της θεωρητικής τιμής των πιστοποιητικών επιλογής, συμπεριλαμβανομένου του μοντέλου Black & Scholes. Ωστόσο, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι υπάρχουν πολλοί παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή τους. Η αγοραία τιμή του μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη [14]:

- *Εσωτερική αξία (intrinsic value)*: Ουσιαστικά είναι η διαφορά μεταξύ της τρέχουσας τιμής της υποκείμενης μετοχής και της τιμής εξάσκησης. Συνήθως τα πιστοποιητικά επιλογής χαρακτηρίζονται ως εντός τιμής (in-the-money) ή εκτός τιμής (out-of-the-money), και αυτό εξαρτάται από τη σχέση ανάμεσα στην τιμή εξάσκησης και στην τρέχουσα τιμή της μετοχής. Για παράδειγμα, για ένα πιστοποιητικό αγοράς, εάν τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι χαμηλότερη από την τιμή εξάσκησης δεν υπάρχει εσωτερική αξία. Αντίθετα, αν η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι υψηλότερη από την τιμή εξάσκησης λέγεται ότι είναι εντός τιμής.

- *Αξία χρόνου (time value)* : Η αξία χρόνου μπορεί να θεωρηθεί ως η αξία της συνεχόμενης έκθεσης στην κίνηση του υποκείμενου τίτλου που παρέχει το πιστοποιητικό επιλογής. Η αξία χρόνου είναι μικρότερη όσο πλησιάζει η ημερομηνία λήξης του πιστοποιητικού. Αυτή η μεταβολή της αξίας χρόνου καλείται *φθορά χρόνου (time decay).* Δεν είναι σταθερή και αυξάνεται ραγδαία όσο πλησιάζουμε στη λήξη. Η αξία χρόνου ενός πιστοποιητικού επιλογής επηρεάζεται από τους ακόλουθους παράγοντες:
    - *Χρόνος μέχρι τη λήξη:* Όσο αργότερα είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη, τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία χρόνου. Αυτό συμβαίνει επειδή η αξία του υποκείμενου τίτλου έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να βρίσκεται εντός τιμής, η οποία κάνει το πιστοποιητικό πιο πολύτιμο.
    - *Μεταβλητότητα:* Όσο μεγαλύτερη μεταβλητότητα έχει ο υποκείμενος τίτλος, τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του πιστοποιητικού.
    - *Μερίσματα:* Το να συμπεριλάβουμε τον παράγοντα της λήψης μερισμάτων, εξαρτάται από το αν ο κάτοχος του πιστοποιητικού έχει την άδεια να λάβει μερίσματα από τον υποκείμενο τίτλο.
    - *Επιτόκια:* Μία αύξηση στα επιτόκια οδηγεί σε πιο ακριβά πιστοποιητικά επιλογής αγοράς και πιο φθηνά πιστοποιητικά επιλογής πώλησης.

1.8 Σύγκριση Forward και Future

Η κύρια διαφορά των προθεσμιακών συμβολαίων και των ΣΜΕ σε ότι αφορά τη λειτουργία τους, είναι η ημερήσια εκκαθάριση των συναλλαγών. Τα προθεσμιακά συμβόλαια κρατούνται ως τη λήξη και δεν μεταφέρονται κεφάλαια μέχρι εκείνη την ημέρα, όμως τα συμβόλαια μπορεί να διαπραγματεύονται [48].

Οι υπόλοιπες διαφορές σχετίζονται με τον τρόπο διαπραγμάτευσης των συμβολαίων και τις ιδιότητες τους. Στα futures παρουσιάζεται το περιθώριο ασφαλείας, προσφέροντας ασφάλεια στον κάθε διαπραγματευόμενο για την εκπλήρωση του αντισυμβαλλομένου του. Τέτοιο είδος ασφάλειας δεν υπάρχει στις προθεσμιακές πράξεις [48]. Τα forwards ανήκουν στην εξωχρηματιστηριακή αγορά, σε αντίθεση με τα futuresπου υπόκεινται σε διαπραγμάτευση σε ώρες συναλλαγών χρηματιστηρίου. Στα futures υπάρχουν ανώτατα όρια τιμών σε ημερήσια βάση, κάτι που δεν ισχύει στα forwards. Στα futures παρεμβάλλεται ο Οργανισμός Εκκαθάρισης ενώ στα forwards κάθε μέρος έχει απόλυτη ευθύνη έναντι του άλλου. Τα forwards είναι τυποποιημένα συμβόλαια ως προς το μέγεθος τους, την παράδοση, τη χρονική διάρκεια και τον διακανονισμό ενώ τα futures είναι φτιαγμένα έτσι ώστε να ικανοποιούν τις ανάγκες των χρηστών. Τα futures έχουν υψηλή ρευστότητα, λόγω του μεγάλου αριθμού των επενδυτών που δρουν στην αγορά τους ενώ τα forwards έχουν περιορισμένη ρευστότητα καθώς είναι ιδιωτικές συμφωνίες. Τέλος στα forwardsυπάρχει μία μόνο πληρωμή κατά τη λήξη του συμβολαίου ενώ στα futures τα κέρδη καθημερινά πιστώνονται στους λογαριασμούς με κερδοφόρες θέσεις ενώ οι ζημιές χρεώνονται καθημερινά στους λογαριασμούς που έχουν ζημιογόνες θέσεις [48].

1.9 Κατηγορίες Συναλλασσόμενων

Οι συναλλασσόμενοι σε χρηματιστηριακές αγορές μπορεί να κατηγοριοποιηθούν σε αντισταθμιστές, κερδοσκόπους και εξισορροπητικούς κερδοσκόπους ανάλογα με τη συμπεριφορά τους.

1.9.1 Αντισταθμιστές (Hedgers)

Οι αντισταθμιστές κινδύνου (hedgers) χρησιμοποιούν την αγορά των παραγώγων για να επιτύχουν αντιστάθμιση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου τους από τις θέσεις που έχουν πάρει. Για παράδειγμα, τα παράγωγα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κάλυψη των θέσεων σε μετοχές από πιθανή πτώση τιμών. Ουσιαστικά σκοπός τους είναι η εξάλειψη των κινδύνων που αντιμετωπίζουν [48].

Οι επιτυχημένες εταιρίες επικεντρώνονται σε οικονομικές δραστηριότητες μέσω των οποίων βγάζουν κέρδος. Χρησιμοποιούν τις αγορές έτσι ώστε να εξασφαλίσουν τον εαυτό τους ενάντια σε δυσμενείς κινήσεις των τιμών, των συναλλαγματικών δεικτών, των επιτοκίων και άλλων. Η αντιστάθμιση είναι μία προσπάθεια να μειώσουν την έκθεση σε ρίσκα που ήδη αντιμετωπίζει η εταιρία [48]. Το χρηματοοικονομικό λεξικό της Οξφόρδης μεταφράζει την αντιστάθμιση (hedge) ως την κάλυψη κάποιου ενάντια στις ζημίες.

1.9.2 Κερδοσκόποι (Speculators)

Οι κερδοσκόποι λαμβάνουν θέσεις στην αγορά παραγώγων και τα χρησιμοποιούν για να επιτύχουν κέρδος. Αυτό γίνεται με την προσαρμογή των στρατηγικών στις προσδοκίες για την αγορά. Στρατηγικές όπως το κέρδος σε καθοδική αγορά (bear market), δεν χρειάζονται πολύπλοκα προϊόντα και μπορούν να επιτευχθούν με δικαιώματα και συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης [48]. Ο στόχος των υψηλών κερδών για τους κερδοσκόπους σημαίνει ότι αναλαμβάνουν τις θέσεις έχοντας γνώσει των κινδύνων που αναλαμβάνουν. Η εκμετάλλευση από αυτούς των ευκαιριών για υψηλά κέρδη δημιουργεί ρευστότητα στην αγορά, κάτι που διευκολύνει και τους αντισταθμιστές κινδύνου στην προσπάθειά τους για προστασία από τον κίνδυνο.

Οι κερδοσκόποι λαμβάνουν τις αντίθετες θέσεις στην αγορά από αυτές που λαμβάνουν οι αντισταθμιστές. Στη κερδοσκοπία τα διαθέσιμα κεφάλαια επενδύονται καιροσκοπικά με την ελπίδα απόκτησης κέρδους. Τα υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία που χρησιμοποιούνται είναι ανεξάρτητα από τον επενδυτή καθώς εκείνος ενδιαφέρεται μόνο για τη δυναμική της συναλλαγής και όχι για τη συναλλαγή αυτή κάθε αυτή. Αντιθέτως, η αντιστάθμιση είναι τυπικά συνδεδεμένη με τις εταιρίες οι οποίες συχνά αντιμετωπίζουν εγγενώς επικίνδυνα περιουσιακά στοιχεία όπως οι ξένες ισοτιμίες επόμενης χρονιάς κλ. [48]. Προτιμούν να παραιτηθούν από την ευκαιρία απόκτησης μεγάλων κερδών όταν οι μελλοντικές επενδύσεις τους, που είναι αβέβαιες, λειτουργούν προς όφελος τους προστατεύοντας τους έναντι μεγάλων απωλειών. Αυτή η κίνηση τους, προστατεύει την οικονομική τους βάση και τους δίνει την δυνατότητα να επικεντρώσουν τις προσπάθειες τους σε άλλους τομείς. Για τους κερδοσκόπους, από την άλλη πλευρά, οι αγορές (forex, εμπορεύματα) αποτελούν τον κύριο τομέα της οικονομικής τους δραστηριότητας. Δηλαδή, τα παράγωγα προϊόντα διευκολύνουν την μεταφορά του κινδύνου ανάμεσα στους αντισυμβαλλόμενους και τις διαφορετικές κατηγορίες επενδυτών [48].

1.9.3 Εξισορροπητικοί Κερδοσκόποι (Arbitrageurs)

Οι αρμπιτραζέρς προσπαθούν να αποκτήσουν κέρδος χωρίς ρίσκο με το να λαμβάνουν συγχρόνως μέρος σε συναλλαγές σε δύο οι περισσότερες αγορές. Το μικρό ποσοστό των επενδυτών που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία αποτελεί απόδειξη ότι η ύπαρξη arbitrage ευκαιριών (ευκαιριών βέβαιου κέρδους) είναι μηδαμινή στις περισσότερες χρηματοοικονομικές αγορές [48]. Αυτή η κατηγορία επενδυτών, οι εξισορροπητικοί κερδοσκόποι, επιδιώκει το κέρδος από την διαφορά ανάμεσα στις τιμές του ίδιου προϊόντος που συναλλάσσεται σε διαφορετικές αγορές. Για την επίτευξη αυτού του κέρδους, η διαφορά στις τιμές του προϊόντος πρέπει βρίσκεται εντός συγκεκριμένων ορίων (φραγμάτων). Στην περίπτωση που η απόκλιση των τιμών είναι πολύ μεγάλη, οι αρμπιτραζέρς παίρνουν θέση στην αγορά αναλαμβάνοντας μηδενικό κίνδυνο. Οι συναλλαγές των αρμπιτραζέρς βοηθούν έτσι ώστε να ισορροπήσουν οι δύο αγορές (equilibrium market) μεταξύ τους. Για την επίτευξη της καθαρής εξισορροπητικής κερδοσκοπίας, του καθαρού βέβαιου κέρδους (pure arbitrage) ο επενδυτής πρέπει να ενεργεί γρήγορα και άρα απαιτείται άμεση πρόσβαση στο σύστημα συναλλαγών [48].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Σχέση Ισοτιμίας και Ιδιότητες Τιμολόγησης Δικαιωμάτων

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα είναι οικονομικά εργαλεία που παράγουν την αξία τους μέσω της αξίας άλλων περιουσιακών στοιχείων [19, 49]. Μία ευκαιρία βέβαιου κέρδους (arbitrage opportunity), μας δίνει τη δυνατότητα να διεξάγουμε μια χρηματοοικονομική πράξη, χωρίς καμία επένδυση, η οποία μας αποφέρει κέρδος χωρίς να αναλαμβάνουμε κίνδυνο. Στις σύγχρονές αγορές υπάρχουν τέτοιες ευκαιρίες, όμως από θεωρητική σκοπιά ένα ευαίσθητο μοντέλο αγοράς πρέπει να αποφεύγει τέτοιου είδους κέρδος. Το αξίωμα του *μη βέβαιου κέρδους* χρησιμοποιείται ως βασικό κριτήριο για την τιμολόγηση των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Η σχέση *ισοτιμίας πώλησης-αγοράς*, παράγεται από τις προεκτάσεις του βέβαιου κέρδους και μας αποδίδει μία σχέση μεταξύ των τιμών πώλησης και αγοράς τον δικαιωμάτων καθώς και άνω και κάτω εκτιμήσεις (φράγματα) των τιμών αυτών. Η συγκεκριμένη σχέση είναι ‘παγκόσμια’, καθώς εφαρμόζεται χωρίς περιορισμούς σε όλες τις αγορές. Ουσιαστικά είναι ανεξάρτητη από το μοντέλο αγοράς και στηρίζεται μόνο στην γενική θεωρία της απουσίας βέβαιου κέρδους.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε το βασικό λεξιλόγιο των δικαιωμάτων προαίρεσης, θα τιμολογήσουμε τα δικαιώματα μέσω της σχέσης ισοτιμίας πώλησης-αγοράς και τέλος θα αναφέρουμε κάποιες ιδιότητες τιμολόγησης για συγκεκριμένες κατηγορίες δικαιωμάτων.

2.1 Σύνοψη Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο είναι η υποχρέωση να αγοράσεις ή να πουλήσεις κάποιο περιουσιακό στοιχείο σε προκαθορισμένη χρονική στιγμή, γνωστή ως ημερομηνία λήξης και σε προσυμφωνημένη τιμή, γνωστή ως τιμή παράδοσης [49]. Βασικό πλεονέκτημα των προθεσμιακών συμβολαίων είναι ότι δεν απαιτούν αρχικό κεφάλαιο. Ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι μία συμφωνία η οποία δίνει στον κάτοχο της το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει έναν υποκείμενο τίτλο, αλλά δεν τον υποχρεώνει να το κάνει, σε προσυμφωνημένη τιμή και σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Τα υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία περιλαμβάνουν μετοχές, ισοτιμίες και ομόλογα. Στην πλειοψηφία τους τα δικαιώματα προαίρεσης συναλλάσσονται σε χρηματιστήρια [49].

Υπάρχουν δύο τύποι δικαιωμάτων προαίρεσης το δικαίωμα αγοράς και το δικαίωμα πώλησης. Το δικαίωμα αγοράς δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο του να το περιουσιακό στοιχείο και αντίστοιχα το δικαίωμα πώλησης του δίνει το δικαίωμα να το πουλήσει. Η συναλλαγή τους περιλαμβάνει δύο μέρη, τον αγοραστή και των πωλητή. Ο αγοραστής ή ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς κατέχει το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο σε συγκεκριμένη τιμή πληρώνοντας ένα ασφάλιστρο (premium) στον πωλητή του δικαιώματος, που υποθετικά έχει την υποχρέωση να πουλήσει / αγοράσει το στοιχείο αυτό εάν επιλέξει να το ασκήσει [19]. Ο αγοραστής του δικαιώματος προαίρεσης λέγεται ότι παίρνει long θέση ενώ ο πωλητής παίρνει short θέση. Η πρακτική της ανοιχτής πώλησης ή ακάλυπτης πώλησης (short–sale) ενός δικαιώματος προαίρεσης εμπεριέχει δανεισμό του περιουσιακού στοιχείου και έπειτα πώληση του λαμβάνοντας έτσι μετρητά [19, 49]. Αργότερα, αγοράζουμε ξανά το περιουσιακό στοιχείο πληρώνοντας σε μετρητά για την απόκτηση του και το επιστρέφουμε στον δανειστή. Η τιμή άσκησης K είναι η καθορισμένη τιμή που περιγράφεται στο συμβόλαιο μέσω του οποίου ο κάτοχος μπορεί να αγοράσει/ πουλήσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο. Η ημερομηνία λήξης είναι η τελική ημερομηνία κατά την οποία το συμβόλαιο είναι εν ισχύ. Υπάρχου δύο τύποι ασκούμενων δικαιωμάτων προαίρεσης, του Ευρωπαϊκού και του Αμερικανικού τύπου και η κύρια διαφορά τους έγκειται στο ότι στον πρώτο τύπο η εξάσκηση του δικαιώματος γίνεται μόνο κατά την ημερομηνία λήξης ενώ στον δεύτερο όποια στιγμή επιθυμούμε μέχρι την ημερομηνία λήξης [10].

Η αποπληρωμή ή η θεωρητική αξία ενός δικαιώματος αγοράς κατά την ημερομηνία λήξης είναι μία συνάρτηση της τιμής άσκησης K και της τρέχουσας τιμής S_T του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου κατά την ημερομηνία παράδοσης και ισούται με το $\max\{\,0, S_T - K\}$ [51, 52]. Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι εάν ένα δικαίωμα αγοράς κρατείται μέχρι την ημερομηνία λήξης (Ευρωπαϊκού τύπου), τότε ασκείται αν και μόνο αν $S_T > K$, στην περίπτωση αυτή ο κάτοχος θα λάβει πληρωμή $S_T - K > 0$, και ο αγοραστής $K - S_T < 0$. Αντιστοίχως η αποπληρωμή ενός δικαιώματος πώλησης κατά την ημερομηνία λήξης μας δίνεται από τον τύπο $\max\{\,0, K - S_T\}$. Επομένως ένα δικαίωμα πώλησης που κρατείται εώς την ημερομηνία λήξης ασκείται εάν και μόνο εάν $S_T < K$, συνεπώς ο ιδιοκτήτης του δικαιώματος λαμβάνει $K - S_T > 0$ και ο αγοραστής $S_T - K < 0$.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε την επίδραση που έχει η αύξηση σε κάθε μία από τις παραμέτρους στην τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης επί μετοχών που δεν πληρώνουν μέρισμα (η αύξηση γίνεται σε μία παράμετρο την φορά και παράλληλα οι άλλες μεταβλητές παραμένουν σταθερές).

Παράμετρος	**Αγορά**	**Πώληση**
Τιμή μετοχής	Θετική	Αρνητική
Τιμή εξάσκησης	Αρνητική	Θετική
Μεταβλητότητα	Θετική	Θετική
Επιτόκιο	Θετική	Αρνητική
Χρόνος μέχρι τη λήξη	Θετική	Θετική

Πίνακας 2:1: Επίδραση παραμέτρων

Παράδειγμα 2.1

Έστω ότι αγοράζουμε ένα δικαίωμα αγοράς με ημερομηνία λήξης σε 6 μήνες, τιμή άσκησης €90 και έστω ότι οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων σε 6 μήνες θα είναι €100, 110, 90, 50. Η αποπληρωμή βρίσκεται από τον τύπο:

Αποπληρωμή του δικαιώματος αγοράς = max {0, τρέχουσα τιμή κατά την ημερομηνία λήξης – τιμή άσκησης}

Συνεπώς:

Τιμή περιουσιακού στοιχείου κατά τη λήξη	**Τιμή άσκησης**	**Αποπληρωμή**
100	90	10
110	90	20
90	90	0
50	90	0

Πίνακας 2:2: Αποπληρωμή δικαιώματος αγοράς

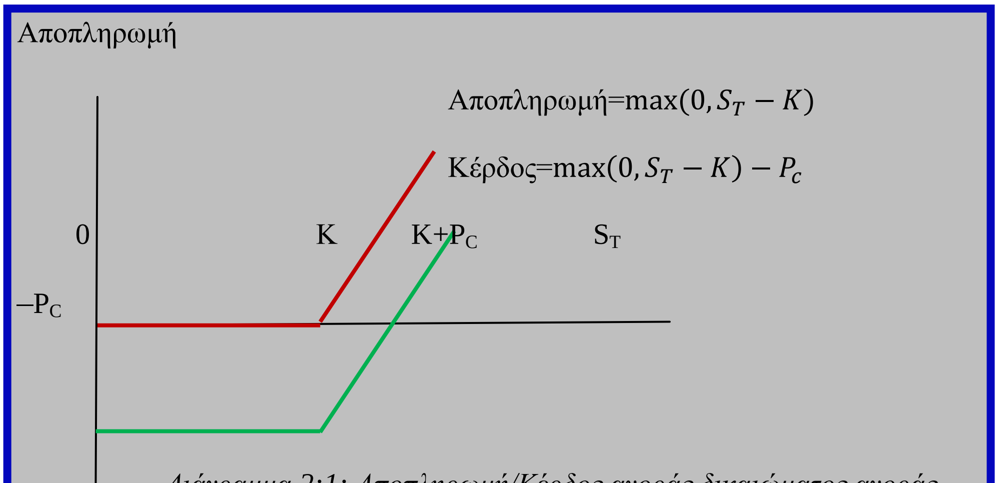
Η αποπληρωμή δεν συμπεριλαμβάνει το ασφάλιστρο που απαιτείται για την απόκτηση του δικαιώματος προαίρεσης. Επομένως, η πληρωμή ενός δικαιώματος δεν είναι καθαρά το κέρδος ή η ζημιά. Για ένα δικαίωμα αγοράς το κέρδος που έχει ο ιδιοκτήτης είναι ίσο με:

Κέρδος αγοραστή δικαιώματος αγοράς = αποπληρωμή αγοραστή δικαιώματος αγοράς – μελλοντική τιμή του ασφάλιστρου

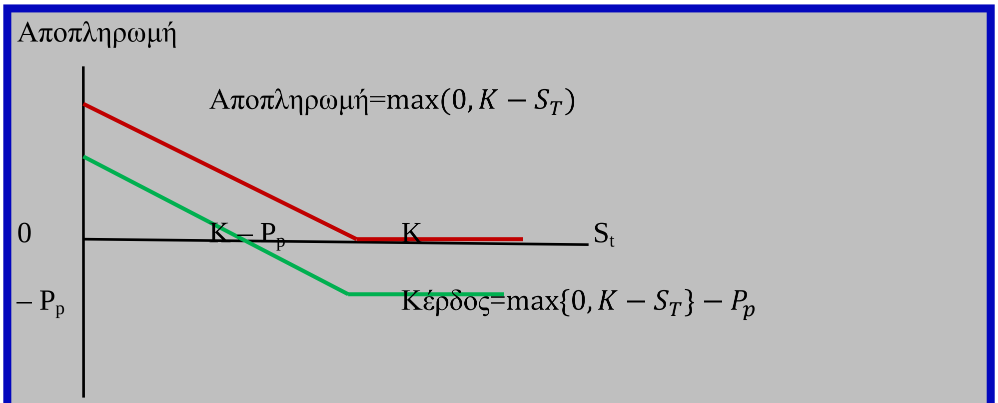
Αντίστοιχα, για ένα δικαίωμα πώλησης το κέρδος είναι ίσο με:

Κέρδος αγοραστή δικαιώματος πώλησης = αποπληρωμή αγοραστή δικαιώματος πώλησης – μελλοντική τιμή του ασφαλίστρου.

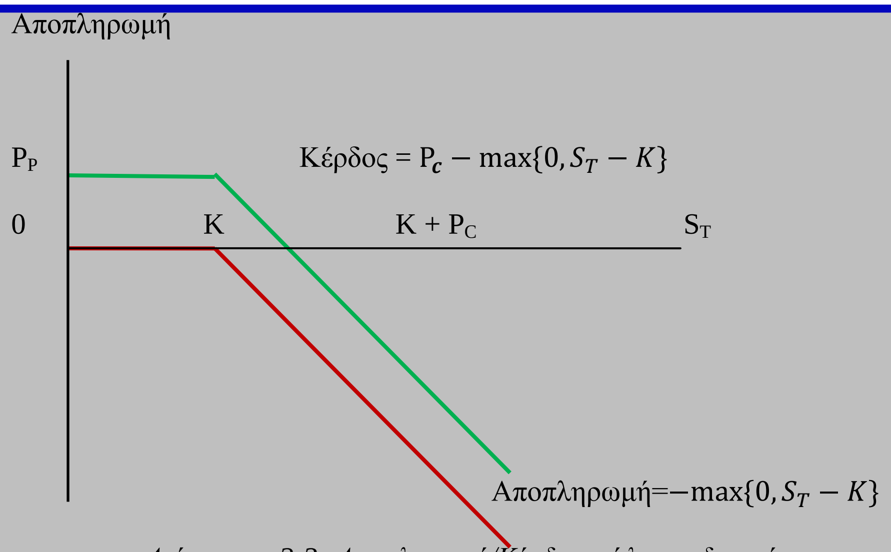
Στα παρακάτω διαγράμματα πληρωμής και κέρδους ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης τα P_c και P_p αντιπροσωπεύουν την μελλοντική αξία του ασφαλίστρου αντιστοίχως [49]



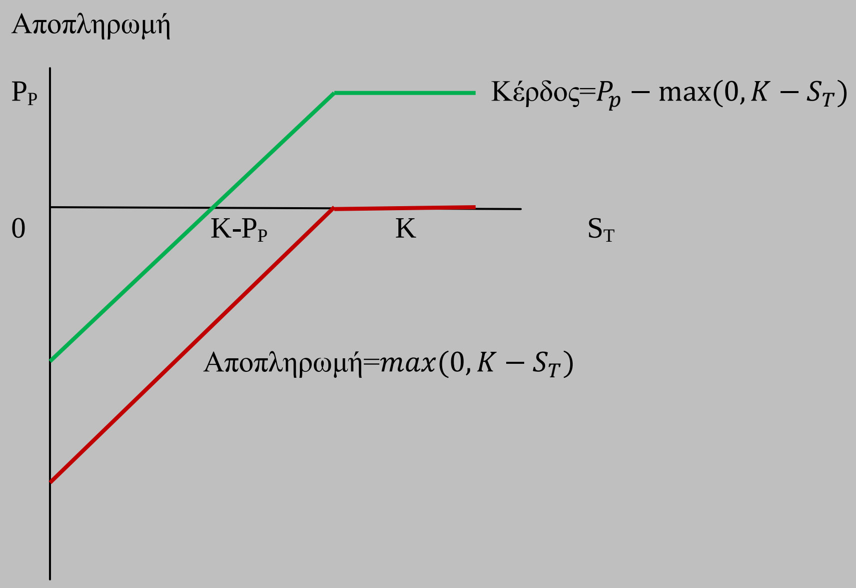
Διάγραμμα 2:1: Αποπληρωμή/Κέρδος αγοράς δικαιώματος αγοράς



Διάγραμμα 2:2: Αποπληρωμή /Κέρδος αγοράς δικαιώματος πώλησης



Διάγραμμα 2:3: Αποπληρωμή/Κέρδος πώλησης δικαιώματος αγοράς



Διάγραμμα 2:4: Αποπληρωμή/Κέρδος πώλησης δικαιώματος πώλησης

Κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει δικαιώματα προαίρεσης έτσι ώστε να ασφαλίσει περιουσιακά στοιχεία που του ανήκουν ή περιουσιακά στοιχεία που έχει σε ανοιχτή πώληση [52, 57]. Ένας επενδυτής που του ανήκει ένα υποκείμενο προϊόν (έχει long θέση), και θέλει να προστατευθεί σε ενδεχόμενη πτώση της τιμής του, μπορεί να το ασφαλίσει αγοράζοντας ένα δικαίωμα πώλησης με επιθυμητή τιμή άσκησης. Ο συνδυασμός της ιδιοκτησίας ενός περιουσιακού στοιχείου και ενός δικαιώματος αγοράς πάνω στο στοιχείο αυτό καλείται **floor.**

Το δικαίωμα πώλησης μας εξασφαλίζει μία ελάχιστη τιμή πώλησης του στοιχείου ίση με της τιμή άσκησης του.

Παράδειγμα 2.2

Έστω ότι αγοράζουμε μία μετοχή με τιμή άσκησης S και ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή άσκησης K και χρόνο μέχρι τη λήξη T, το οποίο έχει αποπληρωμή ίση με την αποπληρωμή της αγοράς μίας ομολογίας μηδενικού τοκομεριδίου (zero-coupon bond) ονομαστικής αξίας *K*. Επίσης, αγοράζουμε ένα δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής με τιμή άσκησης *K* και λήξη T.

		Αποπληρωμή κατά τη λήξη Τα	
Συναλλαγή	Αποπληρωμή στο χρόνο 0	$S_T < K$	$S_T \geq K$
Αγορά μετοχής	–S	S_T	S_T
Αγορά δικαιώματος πώλησης	–P	$K – S_T$	0
Σύνολο	–S –P	K	S_T

Πίνακας 2:4: Αποπληρωμή αγοράς δικαιώματος πώλησης

		Αποπληρωμή κατά τη λήξη Τα	
Συναλλαγή	Αποπληρωμή στο χρόνο 0	$S_T \leq K$	$S_T > K$
Αγορά ομολογίας	$–PV_{0,T}$ (K)	K	K
Αγορά δικαιώματος αγοράς	–C	0	$S_T – K$
Σύνολο	$–PV_{0,T}$ (K) – C	K	S_T

Πίνακας 2:5: Αποπληρωμή ομολογίας

Παρατηρούμε ότι και οι δύο θέσεις ασφαλίζουν μία πληρωμή $max\{K, S_t\}$. Σύμφωνα με την αρχή της *μη ύπαρξης βέβαιου κέρδους* πρέπει να έχουν τις ίδιες πληρωμές στο χρόνο $t = 0$. Κατά συνέπεια πρέπει να ισχύει:

$$P + S = C + PV_{0,T}(K).$$

Ένα δικαίωμα προαίρεσης λέμε ότι είναι *εντός τιμής* (in-the-money) εάν η άμεση άσκηση του παράγει θετική χρηματοροή. Έτσι ένα δικαίωμα πώλησης βρίσκεται εντός τιμής εφόσον η τιμή άσκησης του ξεπερνά την τρέχουσα τιμή του ή την τιμή αγοράς του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Αντιστοίχως ένα δικαίωμα αγοράς βρίσκεται εντός τιμής εάν η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου προϊόντος ξεπερνά την τιμή άσκησης. Επιπροσθέτως ένα δικαίωμα προαίρεσης που δεν είναι εντός τιμής λέμε ότι είναι *εκτός τιμής* (out-of-the-money). Τέλος, ένα δικαίωμα προαίρεσης λέμε ότι είναι *στην τιμή του* εάν η άμεση άσκηση του παράγει μηδενική χρηματοροή.

	Δικαίωμα Αγοράς	**Δικαίωμα Πώλησης**
$S_T > K$	Εντός τιμής	Εκτός τιμής
$S_T = K$	Στην τιμή του	Στην τιμή του
$S_T < K$	Εκτός τιμής	Εντός τιμής

Πίνακας 2:6: Δικαιώματα προαίρεσης και moneyness

Η περίπτωση κατά την οποία η τιμή άσκησης είναι σημαντικά υψηλότερη (για δικαίωμα πώλησης) ή χαμηλότερη (για δικαίωμα αγοράς) από την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου, καλείται *deep in-the-money*. Η αντίθετη περίπτωση δηλαδή όταν η τιμή άσκησης είναι σημαντικά μεγαλύτερη (για δικαίωμα αγοράς) ή μικρότερη (για δικαίωμα πώλησης) σε σύγκριση με την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου, καλείται *deep out-of-the-money*.

2.2 Στρατηγικές Αγοραπωλησιών Δικαιωμάτων

2.2.1 Περίπτωση Cap

Όταν έχεις θέση ανοιχτής πώλησης ενός τίτλου, δανείζεσαι τον τίτλο και τον πουλάς, προσδοκώντας να τον αντικαταστήσεις σε χαμηλότερη τιμή και να βγάλεις κέρδος από την πτώση [50, 52]. Συνεπώς, ένας πωλητής ανοιχτής θέσης πώλησης έχει ζημία εάν η τιμή αυξηθεί. Μπορεί να ασφαλίσει τη θέση του αγοράζοντας ένα δικαίωμα αγοράς για να προστατευθεί από την πιθανότητα εμφάνισης υψηλότερης τιμής της επαναγοράς του τίτλου. Αυτός ο συνδυασμός ανοιχτής πώλησης και δικαιώματος αγοράς καλείται *cap* [50, 52].

2.2.2 Καλυπτόμενο Δικαίωμα Αγοράς

Η πώληση ενός δικαιώματος προαίρεσης που καλύπτεται από ένα υποκείμενο τίτλο (όπως η απόκτηση ενός τίτλου στην περίπτωση δικαιώματος αγοράς ή η πώληση του σε περίπτωση δικαιώματος πώλησης) καλείται καλυμμένη πώληση δικαιώματος [52]. Η πιο κοινή περίπτωση που χρησιμοποιούμε είναι η καλυπτόμενη πώληση έτσι ώστε να δημιουργήσουμε πρόσθετο εισόδημα μέσω ασφαλίστρων.

Ένα καλυπτόμενο δικαιώματα αγοράς είναι ένα δικαίωμα αγοράς το οποίο πουλήθηκε από κάποιον επενδύτη που είχε στην κατοχή του τους υποκείμενους τίτλους. Το ρίσκο του επενδυτή είναι περιορισμένο όταν πουλάει καλυπτόμενα δικαιώματα αγοράς, καθώς ο επενδύτης έχει ήδη στην κατοχή του τον υποκείμενο τίτλο για να καλύψει το δικαίωμα προαίρεσης σε περίπτωση που το καλυπτόμενο δικαίωμα αγοράς ασκηθεί [10]. Με την πώληση ενός καλυπτόμενου δικαιώματος αγοράς ο επενδυτής προσπαθεί να κεφαλαιοποιήσει σε ουδέτερη ή καθοδική τιμή του υποκείμενου τίτλου. Όταν το καλυπτόμενο δικαίωμα αγοράς λήξει χωρίς να ασκηθεί (σε περίπτωση καθοδικής αγοράς), ο επενδυτής κρατά το ασφάλιστρο που παράγεται από την πώληση του. Το αντίθετο του καλυπτόμενου δικαιώματος αγοράς είναι το ακάλυπτο δικαίωμα αγοράς (naked call), όπου ένα δικαίωμα αγοράς πωλείται χωρίς ιδιόκτητους τίτλους να το καλύπτουν εάν ασκηθεί [52].

2.2.3 Καλυπτόμενο Δικαίωμα Πώλησης

Ένα καλυπτόμενο δικαίωμα πώλησης είναι ένα δικαίωμα πώλησης το οποίο πωλείται από κάποιον επενδυτή και το οποίο καλύπτεται από θέση ανοιχτής πώλησης ενός υποκείμενου τίτλου ή από μετρητά ισοδύναμης αξία με την τιμή άσκησης της τιμής του καλυπτόμενου δικαιώματος πώλησης. Το αντίθετο του καλυπτόμενου δικαιώματος πώλησης καλείται *ακάλυπτο δικαίωμα πώλησης*.

2.2.4 Ανοδικό Άνοιγμα

Ο επενδυτής που ακολουθεί ένα ανοδικό άνοιγμα (bull spread) προσδοκά αύξηση της τιμής της μετοχής [19, 49]. Η στρατηγική αυτή αφορά αγορά δικαιώματος αγοράς επί μίας μετοχής με τιμή εξάσκησης K_1 και ταυτόχρονα την πώληση δικαιώματος αγοράς επί του ίδιου τίτλου και με την ίδια ημερομηνία λήξης και τιμή άσκησης K_2. Θα ισχύει $0 < K_1 < K_2$ και έστω S_T η τιμή κατά την ημερομηνία λήξης των δικαιωμάτων και C_1, C_2 οι τιμές των δικαιωμάτων ($C_2 < C_1$). Το συνολικό κέρδος ισούται με:

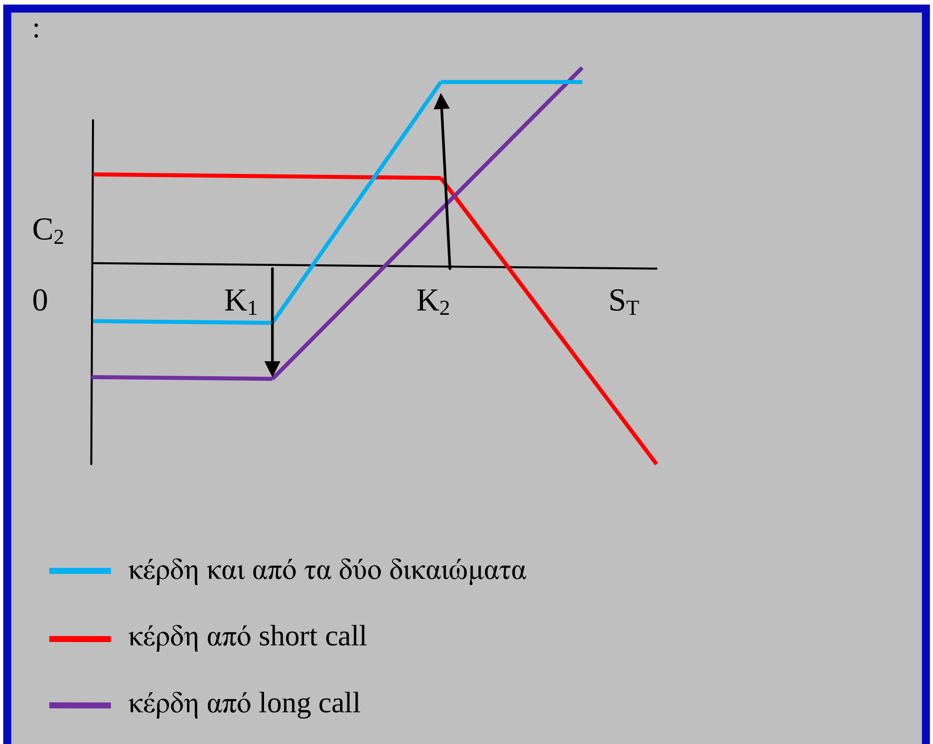
$$(S_T - K_1) - C_1 + C_2 - (S_T - K_2) = \begin{cases} C_2 - C_1, & S_T < K \\ (S_T - K) + C_2 - C_1, & K_1 \leq S_T \leq K_2 \\ K_2 - K_1 + C_2 - C_1, & K_2 < S_T \end{cases}$$

κι έτσι καταλήγουμε στο ότι:

$$(S_T - K_1) - (S_T - K_2) = \begin{cases} 0, & S_T < K_1 \\ (S_T - K_1), & K_1 \leq S_T \leq K_2 \\ K_2 - K_1, & K_2 < S_T \end{cases}$$

μείον το αρχικό καταβληθέν ποσό $C_1 - C_2$. Μέσω της στρατηγικής αυτής ο επενδυτής περιορίζει τη μεγαλύτερη του απώλεια στο αρχικό ποσό που κατέβαλε και το μεγαλύτερο κέρδος του στην διαφορά των τιμών εξάσκησης μείον την αρχική του επένδυση $[(K_2 - K_1) - (C_1 - C_2)]$.

Το διάγραμμα κέρδους είναι το ακόλουθο[49]:



Διάγραμμα 2:5: Ανοδικό Άνοιγμα

Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η στρατηγική μπορεί να εφαρμοστεί και με αγορά δικαιώματος πώλησης επί ενός τίτλου με τιμή άσκησης K_1 και ταυτόχρονη πώληση δικαιώματος πώλησης επί του ίδιου τίτλου και με ίδια ημερομηνία λήξης με τιμή άσκησης K_2 (ισχύει $0 < K_1 < K_2$). Με τον τρόπο αυτό παράγουμε συνάρτηση κέρδους όμοια με την προαναπτυχθείσα.

2.2.5 Καθοδικό Άνοιγμα

Ο επενδυτής που ακολουθεί ένα καθοδικό άνοιγμα (bear spread) προσδοκά μείωση της τιμής της μετοχής [19, 49]. Ακολουθούμε την ίδια στρατηγική του ανοδικού ανοίγματος, δηλαδή αγοράζουμε ένα δικαίωμα αγοράς επί μίας μετοχής με τιμή εξάσκησης K_1 και ταυτόχρονα πουλάμε ένα δικαίωμα αγοράς επί της ίδιας μετοχής και με την ίδια ημερομηνία λήξης και τιμή εξάσκησης K_2. Η κύρια διαφορά ανάμεσα στις δύο στρατηγικές είναι ότι τώρα ισχύει ότι $0 < K_2 < K_1$ και κατ` επέκταση $C_2 > C_1$. Έτσι το κέρδος από αυτή την τοποθέτηση ισούται με:

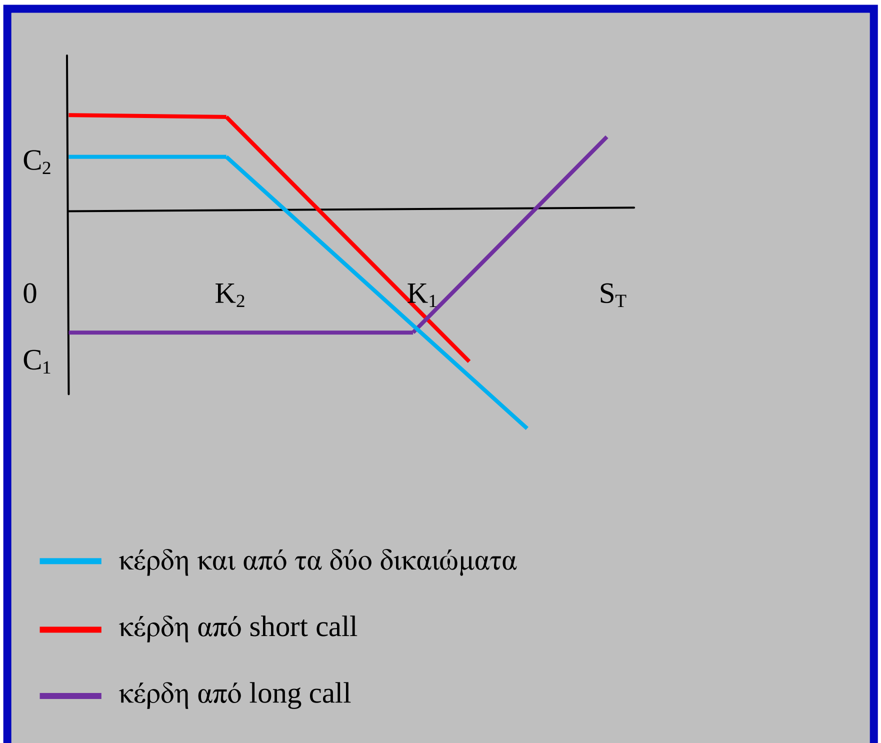
$$(S_T - K_1) - C_1 + C_2 - (S_T - K_2) = \begin{cases} C_2 - C_1, & S_T < K_2 \\ -(S_T - K_2) + C_2 - C_1, & K_2 \leq S_T \leq K_1 \\ K_2 - K_1 + C_2 - C_1, & K_1 < S_T \end{cases}$$

δηλαδή ισχύει:

$$(S_T - K_1) - (S_T - K_2) = \begin{cases} 0, & S_T < K_2 \\ -(S_T - K_2), & K_2 \leq S_T \leq K_1 \\ K_2 - K_1, & K_1 < S_T \end{cases}$$

συν το ποσό $C_2 - C_1$ οπού είναι η αρχική είσπραξη του.

Το διάγραμμα κέρδους είναι το ακόλουθο [49]



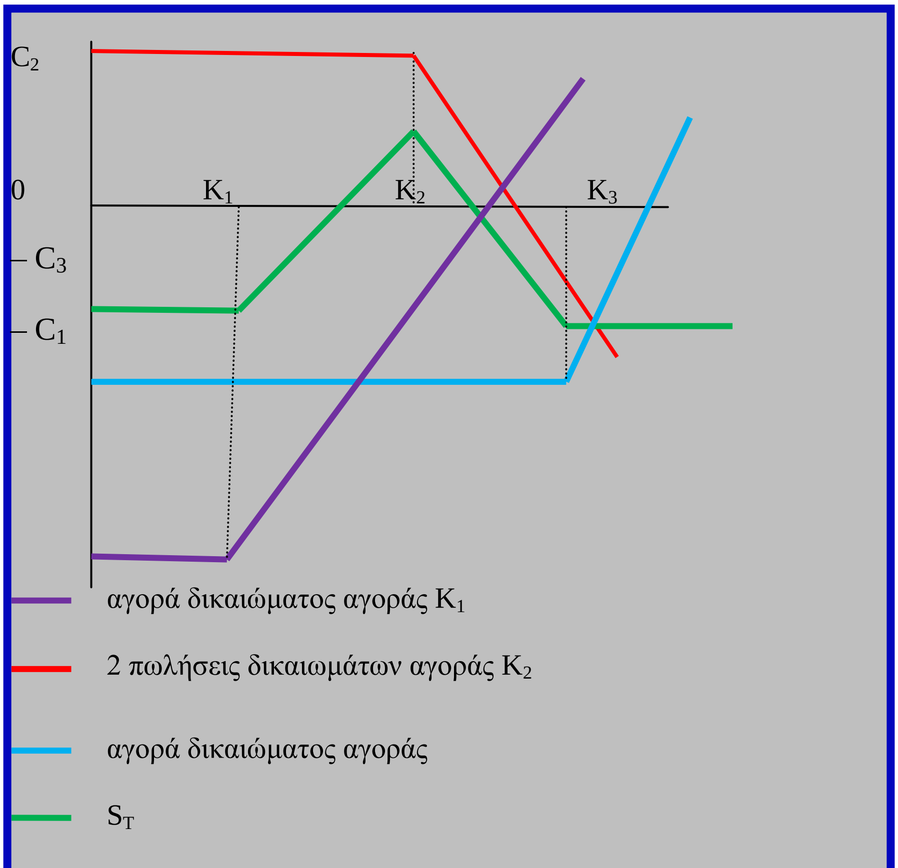
Διάγραμμα 2:6: Καθοδικό Άνοιγμα

Με τη χρήση της στρατηγικής αυτής ο επενδυτής μπορεί να λάβει μέγιστο κέρδος ίσο με την αρχική του είσπραξη και να εξασφαλίσει ότι η μέγιστη ζημία του θα είναι η διαφορά των τιμών εξάσκησης συν την αρχική του είσπραξη *[(K_2 – K_1) + (C_2 – C_1)]*. Αντίστοιχα, η στρατηγική αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και με δικαιώματα πώλησης.

2.2.6 Spread Πεταλούδας

Ο επενδυτής που ακολουθεί ένα butterfly spread προσδοκά μικρές διακυμάνσεις της τιμής της μετοχής [52]. Η στρατηγική αυτή περιέχει αγορά 2 δικαιωμάτων αγοράς με τιμές εξάσκησης K_1 και K_3 οπού ισχύει $0 < K_1 < K_3$, και ταυτόχρονη πώληση 2 δικαιωμάτων αγοράς επί της ίδιας μετοχής, με ίδια ημερομηνία λήξης και με τιμή εξάσκησης K_2. Συνήθως ισχύει $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$ και κατ' επέκταση ισχύει $0 < K_1 < K_2 < K_3$ και $C_2 < C_3 < C_1$.

Το κέρδος που προκύπτει από αυτή τη τοποθέτηση δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα[49]:



Διάγραμμα 2:7: Spread Πεταλούδας

Όπως παρατηρούμε από το σχήμα η στρατηγική αυτή μας δίνει θετική απόδοση όταν η τιμή της μετοχής S_T κατά τη λήξη του βρίσκεται κοντά στην τιμή του K_2. Αντίθετα αν υπάρχουν διακυμάνσεις στην τιμή (μεγάλη άνοδος ή πτώση) τότε υπάρχει ζημία, η οποία όπως και το κέρδος είναι φραγμένη [52].

2.2.7 Ασύμμετρο Spread Πεταλούδας

Η στρατηγική που ακολουθείται είναι πανομοιότυπη αυτή του butterfly spread. Η μόνη διαφορά είναι ότι η τιμή άσκησης K_2 δεν είναι ο μέσος όρος των τιμών K_1 και K_3 [52]. Ο επενδυτής μπορεί να δημιουργήσει το άνοιγμα αυτό με το μέγιστο να έχει κλίση ή προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά. Ισχύει η σχέση $0 < K_1 < K_2 < K_3$, και το λ δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$$

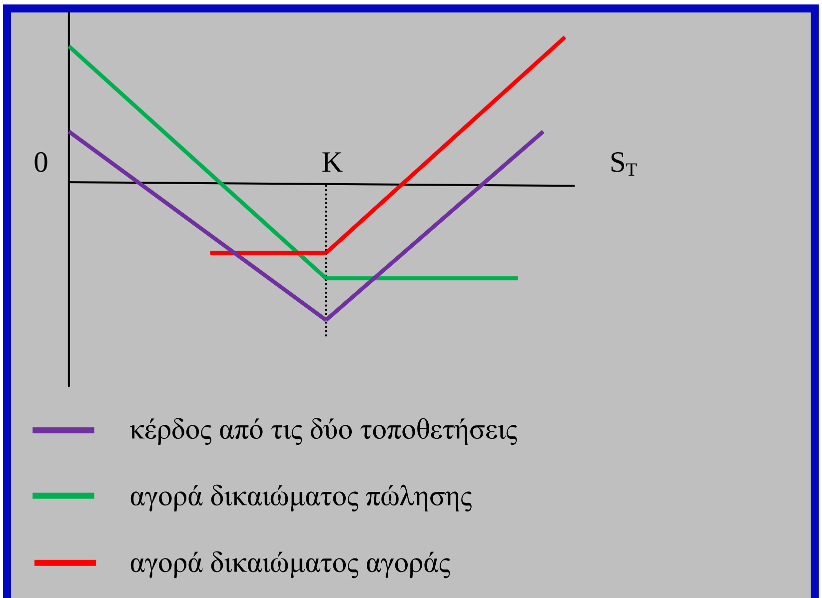
κατ' επέκταση το λ ικανοποιεί τη σχέση:

$$K_2 = \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3$$

Για κάθε πώληση δικαιώματος αγοράς με K_2 τιμή εξάσκησης θα υπάρχει αγορά λ δικαιωμάτων αγοράς με τιμή K_1 και $(1\text{-}\lambda)$ δικαιωμάτων αγοράς με τιμή K_3 [52].

2.2.8 Straddle

Ο επενδυτής που επιλέγει να ακολουθήσει την στρατηγική straddle προσδοκά διακυμάνσεις της τιμής της υποκείμενης μετοχής άλλα δεν έχει γνώση της πορείας τους, δηλαδή αν θα υπάρχει πτώση ή άνοδος της τιμής [52]. Η τοποθέτηση αυτή περιλαμβάνει δύο αγορές, ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης επί της ίδιας μετοχής, με ίδιες ημερομηνίες λήξης και τιμές εξάσκησης *K*. Το παρακάτω διάγραμμα προσδιορίζει το κέρδος [49] .

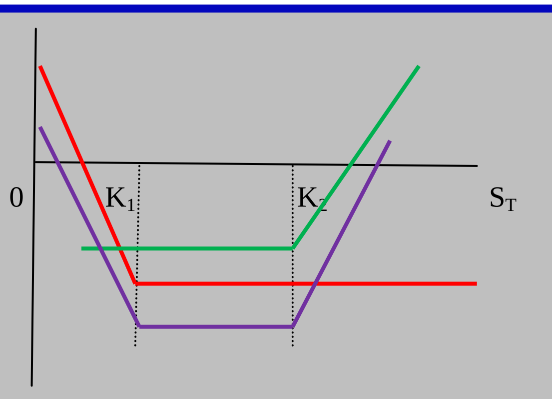


Διάγραμμα 2:8: Στρατηγική Straddle

Όπως παρατηρούμε η στρατηγική αυτή αποδίδει κέρδος όταν η τιμή S_T της μετοχής στην ημερομηνία λήξης δεν βρίσκεται πλησίον της τιμής εξάσκησης *K*. Κατ' επέκταση όσο πιο μακριά βρίσκεται η S_T από την *K* τόσο μεγαλύτερο κέρδος έχουμε, και όσο παραμένει κοντά τότε υπάρχει ζημία. Πρέπει να τονίσουμε ότι το κέρδος είναι μη φραγμένο ενώ η απώλεια είναι φραγμένη.

2.2.9 Strangle

Ο επενδυτής που επιλέγει να ακολουθήσει την στρατηγική strangle (όπως και στη straddle) προσδοκά διακυμάνσεις της τιμής της υποκείμενης μετοχής άλλα δεν έχει γνώση της πορείας τους, δηλαδή αν θα υπάρχει πτώση ή άνοδος της τιμής [52]. Η τοποθέτηση είναι ίδια με της straddle δηλαδή αγορά δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης επί της ίδιας μετοχής και με την ίδια ημερομηνία λήξης [52]. Η διαφορά έγκειται στις τιμές εξάσκησης καθώς στην περίπτωση αυτή ισχύει $0 < K_1 < K_2$. Το κέρδος απεικονίζεται στο κάτωθι διάγραμμα[49]



κέρδος και από τις δύο τοποθετήσεις.

αγορά δικαιώματος αγοράς

αγορά δικαιώματος πώλησης

Διάγραμμα 2:9: Στρατηγική Strangle

Παρατηρούμε ότι η στρατηγική αυτή επιφέρει κέρδος όταν η τιμή S_T της μετοχής κατά την ημερομηνία λήξης είναι μακριά από τις τιμές K_1, K_2.

2.3 Σχέση Ισοτιμίας Πώλησης-Αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου Δικαιωμάτων

Η σχέση ισοτιμίας πώλησης - αγοράς (put–call parity) χαρακτηρίζεται ως ένα από τα σημαντικότερα κεφάλαια στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης [34, 36, 42]. Με τη σχέση αυτή δηλώνεται ότι μέσω του ασφάλιστρου ενός δικαιώματος αγοράς επιτυγχάνεται μία συγκεκριμένη δίκαιη τιμή για το αντίστοιχο δικαίωμα πώλησης που έχει ίδια τιμή άσκησης και ίδια ημερομηνία λήξης και αντιστρόφως.

Έστω ένας επενδυτής που αγοράζει ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης *K* και ημερομηνία λήξης T για την τιμή *C (K, T)* και πουλάει ένα δικαίωμα πώλησης με την ίδια τιμή εξάσκησης, την ίδια ημερομηνία λήξης για την τιμή *P (K, T)* [34]. Εάν η τρέχουσα τιμή κατά τη λήξη είναι μεγαλύτερη από *K*, το δικαίωμα πώλησης δεν ασκείται αλλά ο επενδυτής θα ασκήσει το δικαίωμα αγοράς κατά συνέπεια θα αγοράσει τον τίτλο με τιμή *K*. Αντιστοίχως, εάν η τρέχουσα τιμή κατά την ημερομηνία λήξης είναι μικρότερη από *K*, το δικαίωμα αγοράς δεν θα ασκηθεί και εφόσον ο κάτοχος του δικαιώματος πώλησης επιθυμεί να το πουλήσει, τότε ο επενδυτής είναι υποχρεωμένος να αγοράσει τον τίτλο με τιμή K [37]. Με τον ένα ή τον άλλο τρόπο ο επενδυτής είναι υποχρεωμένος να αγοράσει τον τίτλο πληρώνοντας K και ο συνδυασμός αυτός επιφέρει θέση αγοράς ενός προθεσμιακού συμβολαίου που είναι συνθετικό, εφόσον κατασκευάζεται από δικαιώματα προαίρεσης [42].

Το χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και πώληση ενός δικαιώματος πώλησης, έχει ως αποτέλεσμα την αγορά της μετοχής. Η αποπληρωμή του στον χρόνο *t=0* είναι *P (K, T) – C (K, T)* [37, 53]. Το χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από αγορά της μετοχής μέσω αγοράς προθεσμιακού συμβολαίου και δανεισμό $PV_{0,T}\ (K)$, έχει ως αποπληρωμή στο χρόνο *t=0* ίση με $PV_{0,T}\ (K)\ –\ PV_{o,T}\ (F_{0,T})$, όπου $F_{0,T}$ η τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου. Χρησιμοποιώντας τη *θεωρία τιμολόγησης μη βέβαιου κέρδους* (*no-arbitrage pricing theory*), που ισχυρίζεται ότι η απόκτηση ενός τίτλου στον χρόνο T πρέπει να κοστίζει το ίδιο με οποιονδήποτε τρόπο και αν το αποκτήσεις, καταλήγουμε στο ότι το καθαρό κέρδος της απόκτησης του τίτλου πρέπει να είναι το ίδιο είτε αποκτήθηκε μέσω των δικαιωμάτων προαίρεσης είτε μέσω του προθεσμιακού συμβολαίου και έτσι:

$$P(K,T) - C\ (K,T) = PV_{0,T}\big(K - F_{0,T}\big)$$

$$C(K,T) - P(K,T) = PV_{0,T}\big(F_{0,T} - K\big) \tag{2.1}$$

όπου $PV_{0,T}\ (F_{0,T})$, είναι η προπληρωμένη τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου για τον υποκείμενο τίτλο και $PV_{o,T}\ (K)$ η προπληρωμένη τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου της μετοχής.

Η εξίσωση (2.1) είναι γνωστή ως σχέση *ισοτιμίας δικαιωμάτων πώλησης – αγοράς* και συνεπάγεται ότι πουλώντας ένα δικαίωμα πώλησης και αγοράζοντας ένα δικαίωμα αγοράς με ίδια τιμή άσκησης *K* και ίδια ημερομηνία λήξης *T* δημιουργείται ένα συνθετικό προθεσμιακό συμβόλαιο αγοράς με τιμή $F_{0,T}$ και καθαρό ασφάλιστρο *P (K, T) – C (K, T)* [37]. Για να αντιγραφεί πλήρως ένα πραγματικό προθεσμιακό συμβόλαιο, το ασφάλιστρο της αγοράς και της πώλησης πρέπει να είναι ίσα. Αξίζει να αναφέρουμε ότι στα Αμερικανικού τύπου δικαιώματα προαίρεσης που επιτρέπουν άσκηση πριν τη λήξη δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συγκεκριμένη σχέση. Επίσης εάν η τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου είναι υψηλότερη από την τιμή άσκησης των δικαιωμάτων, η αγορά θα είναι πιο ακριβή σε σχέση με την πώληση και αντίστροφα [42].

Πρόταση 2.1

Σε μετοχές που δεν πληρώνουν μερίσματα στον χρόνο t=0 ισχύει $PV_{0,T}(F_{0,T}) = S_0$.

Παράδειγμα 2.3

Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής που δεν πληρώνει μερίσματα είναι €95. Ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα προαίρεσης που λήγει σε 6 μήνες με τιμή εξάσκησης €100 πωλείται για €15. Το συνεχές χωρίς κίνδυνο ονομαστικό επιτόκιο είναι 8%. Για να βρούμε την τιμή του κοντινότερου Ευρωπαϊκού δικαιώματος που λήγει σε έξι μήνες και έχει τιμή εξάσκησης €95 θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.1) και έχουμε ότι C = €15, T = 0,5, K = 100, S_0 = 95 και r = 0,08

$$P = C - PV_{0,T}(F_{0,T}) + PV_{0,T}(K) = 15 - S_0 + e^{-rT}K = €16{,}07.$$

2.4 Σχέση Ισοτιμίας Πώλησης-Αγοράς Δικαιωμάτων Προαίρεσης Μετοχών

Ένα προπληρωμένο προθεσμιακό συμβόλαιο επί μιας μετοχής είναι ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με πληρωμή που γίνεται στον χρόνο $t = 0$ [36]. Η τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου είναι η μελλοντική τιμή της προπληρωμένης τιμής του προθεσμιακού συμβολαίου και αυτό είναι αληθές ανεξάρτητα από το εάν υπάρχουν διακριτά ή συνεχή μερίσματα ή ακόμα και με την πλήρη απουσία μερισμάτων[36].

Έστω *T* η ημερομηνία λήξης τότε για μία μετοχή που δεν μας αποφέρει μερίσματα η μελλοντική τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου μας δίνεται από τον τύπο

(2.2) $$F_{0,T} = FV_{0,T}(S_0)$$

όπου S_0 η τιμή της μετοχής για $t = 0$.

Στην περίπτωση που λαμβάνουμε διακριτά μερίσματα η μελλοντική τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου είναι:

$$F_{0,T}^{P} = S_0 - PV_{0,T}(Div)$$

και

$$F_{0,T} = FV_{0,T}\left(F_{0,T}^{P}\right) = FV_{0,T}\left(S_0 - PV_{0,T}(Div)\right).$$

Συγκεκριμένα εάν τα μερίσματα $D_1, \ldots, D_n$ μας δίνονται στους χρόνους $t_1, \ldots, t_n$ πριν από την ημερομηνία λήξης T, ισχύει

$$F_{0,T} = FV_{0,T}(S_0 - \sum_{i=1}^{n} PV_{O,t_i}(D_i)) =$$

$$FV_{0,T}(S_0) - FV_{0,T}(\sum_{i=1}^{n} PV_{O,t_i} D_i)$$

Συνεπώς ο τύπος (2.1) παίρνει τη μορφή

(2.3) $$C(K,T) - P(K,T) = S_0 - PV_{0,T}(Div) - PV_{0,T}(K)$$

και στην περίπτωση του συνεχόμενου χωρίς κίνδυνο ονομαστικού επιτοκίου r

(2.4) $$C(K,T) - P(K,T) = S_0 - \sum_{i=1}^{n} D_i e^{-rt_i} - e^{-rT}K$$

Παράδειγμα 2.4

Έστω ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς διάρκειας 1 έτους με τιμή εξάσκησης Κ επί μιας μετοχής με τρέχουσα τιμή €13,45, ενώ ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα πώλησης με την ίδια τιμή εξάσκησης κοστίζει €6,45. Το μερίδιο της μετοχής πληρώνει μέρισμα €5 σε 6 μήνες από τώρα και €7 σε 1 έτος από τώρα. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι €100 και το συνεχόμενο χωρίς κίνδυνο ονομαστικό επιτόκιο είναι 6%. Για να βρούμε την τιμή εξάσκησης της μετοχής εργαζόμαστε ως εξής:

γνωρίζουμε ότι $C=13{,}45$, $P=6{,}45$, $T=1$, $S_0 = 100$, $D_1 = 5$, $t_1 = \frac{6}{12}$, $D_2 = 7$, $t_2 = 1$, $r = 0{,}06$.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο (2.4.) και λύνουμε ως προς K:

$$K = \frac{-C(K,T)+P(K,T)+S_0-\sum_{i=1}^{n} D_i e^{-rt_i}}{e^{-rT}} = -13{,}45 + 6{,}45 + 100 - 5 \times e^{\wedge}(-0{,}06 \times 6/12) -$$

$$7 \times e^{\wedge}(-0{,}06 \times 1) = €94{,}7401.$$

Για μετοχή που μας δίνει συνεχόμενα μερίσματα ισχύει ο τύπος

(2.5) $$F_{0,T} = FV_{0,T}\left(S_0 e^{-\delta T}\right)$$

όπου δ είναι η συνεχόμενη σύνθετη απόδοση μετοχών και ο τύπος (2.1) γίνεται

(2.6) $$C(K,T) - P(K,T) = S_0 e^{-\delta T} - PV_{0,T}(K).$$

Παράδειγμα 2.5

Ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς και ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα πώλησης επί μιας μετοχής έχουν τιμή άσκησης €110 και ημερομηνία λήξης σε 9 μήνες. Πωλούνται για €13,45 και €6,45 αντίστοιχα. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι €109 και η μετοχή πληρώνει συνεχόμενη σύνθετη απόδοση 3%. Για να βρούμε το συνεχόμενο χωρίς ρίσκο ονομαστικό επιτόκιο εργαζόμαστε ως εξής:

Η σχέση ισοτιμίας αγοράς-πώλησης για δικαιώματα προαίρεσης μετοχών με συνεχή μερίσματα είναι ο (2.6) και δοθέντος ότι $C=13{,}45$, $P=6{,}45$, $K=110$, $T= 9/12$, $S_0 = 109$ και $\delta=0{,}03$ αντικαθιστούμε και λύνουμε ως προς r:

$$C - P = S_0 e^{-\delta T} - e^{-rT} K \rightarrow r = 13{,}27\% \,.$$

Η ισοτιμία μας παρέχει ένα τρόπο για τη δημιουργία μιας συνθετικής μετοχής. Χρησιμοποιώντας την ισοτιμία αγοράς πώλησης και τον τύπο (2.3) έχουμε

(2.7) $$-S_0 = -C(K,T) + P(K,T) - PV_{0,T}(Div) - PV_{0,T}(K) \,.$$

Η παραπάνω εξίσωση σημαίνει ότι αγοράζοντας ένα δικαίωμα πώλησης, πουλώντας ένα δικαίωμα πώλησης και δανείζοντας την παρούσα αξία του τίτλου και τα μερίσματα που πρέπει να καταβληθούν κατά τη διάρκεια του δικαιώματος προαίρεσης είναι ισότιμη κίνηση με την άμεση αγορά της μετοχής. Η άμεση αγορά προκύπτει όταν ένας επενδυτής πληρώνει S_0 και επί τόπου γίνεται κάτοχος της μετοχής.

Παράδειγμα 2.6

Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης επί μιας μετοχής με τιμή εξάσκησης €110 και ημερομηνία λήξης σε 8 μήνες τα οποία πουλάμε για €13,67 και €7,31 αντιστοίχως. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι €109 και το συνεχόμενο χωρίς ρίσκο ονομαστικό επιτόκιο είναι 13%. Επιπλέον λαμβάνουμε μέρισμα ανά 8 μήνες ίσο με €2. Για να υπολογίσουμε το συνολικό ποσό χρημάτων που πρέπει να δανείσουμε έτσι ώστε να αντιγράψουμε τη μετοχή χρησιμοποιούμε τον τύπο (2.7). Γνωρίζουμε ότι πρέπει να δανείσουμε ποσό ίσο με $PV_{0,T}\ (Div) + PV_{0,T}\ (K)$ και έχουμε $C=13{,}67$, $P=7{,}31$, $K=110$, $T= 8/12$, $S_0 = 109$ και $r = 0{,}13$. Συνεπώς:

$$PV_{0,T}(Div) + PV_{0,T}(K) = S_0 + P - C = €102{,}64.$$

Η σχέση ισοτιμίας αποτελεί ένα τεστ για την θεωρία τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης. Οποιοδήποτε μοντέλο τιμολόγησης που παράγει τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης που παραβιάζουν τη σχέση ισοτιμίας θεωρείται ελαττωματικό και οδηγεί σε *βέβαιο κέρδος* (arbitrage) [53].

Παράδειγμα 2.7

Έστω ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης επί της ίδιας μετοχής, η οποία δεν πληρώνει μερίσματα, με την ίδια ημερομηνία λήξης έστω 3 μηνών, με ίδια τιμή εξάσκησης €50 και ότι και τα δύο πωλούνται για €7. Επίσης το συνεχόμενο χωρίς ρίσκο ονομαστικό επιτόκιο είναι r = 9% και η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι $S_0 = 57$. Για να υπολογίσουμε το *βέβαιο κέρδος* ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Αρχικά γνωρίζουμε ότι $C=P=7$, $r = 0{,}09$, $T= 3/12$, $K=50$ και $S_0= 57$. Αντικαθιστώντας τις τιμές στη σχέση ισοτιμίας αγοράς-πώλησης έχουμε:

$$C - P = S_0 - Ke^{-rT} \rightarrow 0 = 8{,}1124.$$

Προφανώς, η σχέση δεν ισχύει άρα υπάρχει πιθανότητα βέβαιου κέρδους. Το βέβαιο κέρδος αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί ως εξής: δανειζόμαστε €7 (P) με συνεχόμενο χωρίς ρίσκο ονομαστικό επιτόκιο 9% και αγοράζουμε το δικαίωμα αγοράς. Έπειτα πουλάμε τη μετοχή και επενδύουμε τα €57 (S_0) στο χωρίς ρίσκο επιτόκιο. Σε τρείς μήνες (ημερομηνία λήξης|), αγοράζουμε τη μετοχή €50 (K) και πληρώνουμε τους δανειστές μας $P \times e^{rT} = €7{,}15$. Συνεπώς το βέβαιο κέρδος μας θα είναι

$$S_0 e^{rT} - K - \mathrm{P} \times e^{rT} = €1{,}14\,.$$

2.5 Σχέση Ισοτιμίας Πώλησης-Αγοράς Δικαιωμάτων Συναλλάγματος

Η συγκεκριμένη σχέση ισοτιμίας εφαρμόζεται σε δικαιώματα προαίρεσης που έχουν ως υποκείμενο τίτλο νομίσματα [35]. Τα νομίσματα συναλλάσσονται με *τιμές συναλλάγματος*. Για παράδειγμα, έστω ότι η αγορά σήμερα τοποθετεί την τιμή συναλλάγματος μεταξύ λίρας £ και ευρώ € σε €1 = £0,89 και £1 = €1,27. Η συναλλαγματική ισοτιμία μεταξύ νομισμάτων παρουσιάζει διακυμάνσεις στο χρόνο. Επιπλέον, είναι χρήσιμο για επιχειρήσεις που εμπλέκονται με διεθνείς αγορές να συναλλάσσονται με αξιόγραφα που σχετίζονται με νομίσματα έτσι ώστε να ασφαλίζονται από τις πιθανές διακυμάνσεις της συναλλαγματικής ισοτιμίας [35]. Ένα τέτοιο αξιόγραφο είναι το προθεσμιακό συμβόλαιο συναλλάγματος (currency forward contract).

Η χρήση των συναλλαγματικών συμβολαίων είναι ευρέως διαδεδομένη καθώς αντισταθμίζουν τον κίνδυνο των αλλαγών στις συναλλαγματικές ισοτιμίες. Ένα *προθεσμιακό συμβόλαιο συναλλάγματος* αποτελεί μια συμφωνία αγοράς ή πώλησης ενός συγκεκριμένου ποσού συναλλάγματος σε προκαθορισμένη τιμή στο μέλλον [35]. Σε αντίθεση ένα προθεσμιακό προπληρωμένο συμβόλαιο συναλλάγματος είναι μία συμφωνία η οποία σου επιτρέπει να πληρώσεις σήμερα έτσι ώστε να αποκτήσεις το συνάλλαγμα σε κάποια στιγμή στο μέλλον.

Έστω ότι στο χρόνο Τ θέλουμε να αποκτήσουμε €1 και $r_€$ το εκφρασμένο σε ευρώ επιτόκιο και χ_0 η συναλλαγματική ισοτιμία σήμερα σε £/€ δηλαδή €1=£χ_0. Εάν θέλουμε €1 στο χρόνο T πρέπει να έχουμε $e^{-r_€ T}$ σε ευρώ σήμερα. Έτσι, η προπληρωμένη προθεσμιακή τιμή σε ευρώ είναι

(2.8) $$F_{0,T}^{P} = x_0 e^{-r_€ T}$$

Παράδειγμα 2.8

Έστω ότι το επιτόκιο σε ευρώ είναι $r_€ = 6\%$ και η συναλλαγματική ισοτιμία σήμερα είναι $\chi_0 = £0,89/€$. Το ποσό που θα πρέπει να επενδύσουμε σε λίρες σήμερα έτσι ώστε να έχουμε €1 σε ένα χρόνο ισούται με $F_{0,T}^{P} = x_0 e^{-r_€ T} = 0,89 e^{-0,06\times 1} = £0,8381.$

Η προπληρωμένη προθεσμιακή τιμή είναι το κόστος σε λίρες που απαιτείται για να αποκτήσουμε €1 στο μέλλον και δίνεται από τον τύπο

(2.9) $$F_{0,T} = x_0 e^{(r_£ - r_€)T}$$

όπου $r_£$ το επιτόκιο που εκφράζει τις λίρες.

Παράδειγμα 2.9

Έστω $r_€ = 6\%$, $r_£ = 9\%$, $T=1$ και $\chi_0 = £0,89/€$. Για να βρούμε την προθεσμιακή συναλλαγματική ισοτιμία που θα υπάρχει ένα χρόνο μετά χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.9)

$$F_{0,T} = x_0 e^{(r_£ - r_€)T} = 0,89 e^{(0,09-0,06)\times 1} = £0,91/€\,.$$

Ένα ακόμη συναλλαγματικό συμβόλαιο που αντισταθμίζει τον κίνδυνο των διακυμάνσεων της συναλλαγματικής ισοτιμίας είναι το ***συναλλαγματικό δικαίωμα προαίρεσης***. Ένα τέτοιο δικαίωμα δίνει το δικαίωμα στο κάτοχο του να πουλήσει ή να αγοράσει ένα συγκεκριμένο αριθμό ξένου συναλλάγματος σε προκαθορισμένη τιμή και ημερομηνία. Υπάρχουν δύο κατηγορίες, τα δικαιώματα προαίρεσης που είναι εκφρασμένα σε δολάρια *dollar-denominated* ή αυτά που είναι εκφρασμένα σε άλλα συναλλάγματα *foreign-currency denominated* [35].

Ένα *dollar-denominated* δικαίωμα προαίρεσης επί ενός ξένου νομίσματος δίνει στους επενδυτές την επιλογή να αγοράσουν ή να πουλήσουν το ξένο νόμισμα σε κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον για συγκεκριμένο ποσό δολαρίων [51]. Για παράδειγμα, ένα *dollar-denominated* δικαίωμα αγοράς σε ευρώ δίνει σε έναν επενδυτή την επιλογή να αποκτήσει ευρώ σε κάποια στιγμή στο μέλλον για συγκεκριμένο αριθμό δολαρίων. Έτσι, ένα τριετές τέτοιο δικαίωμα με τιμή $0,89/€ δίνει στον κάτοχο του την επιλογή σε 3 έτη να αγοράσει €1 για $0,89. Είναι προφανές ότι θα ασκήσει το δικαίωμα του, αν σε 3 χρόνια από τώρα η τιμή συναλλαγματικής ισοτιμίας θα είναι πιο μεγάλη από $0,89/€. Αντίστοιχα, ένα *dollar-denominated* δικαίωμα πώλησης επί ευρώ δίνει στον επενδυτή την επιλογή να πουλήσει ευρώ σε κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον για συγκεκριμένο ποσό δολαρίων [51]. Έτσι, ένα τριετές δικαίωμα με τιμή πώλησης $0,89/€ δίνει στον κάτοχο του την επιλογή σε 3 έτη να πουλήσει €1 για $0,89, το δικαίωμα αυτό θα ασκηθεί εφόσον σε 3 έτη η τιμή συναλλαγματικής ισοτιμίας είναι μικρότερη από $0,89/€.

Η αποπληρωμή ενός δικαιώματος αγοράς επί συναλλάγματος ακολουθεί τους ίδιους τύπους που ισχύουν για ένα δικαίωμα αγοράς επί μετοχών, με την διαφορά ότι όπου S_T θα έχουμε x_T , που είναι η τιμή της συναλλαγματικής ισοτιμίας κατά την ημερομηνία λήξης. Η αποπληρωμή για ένα συναλλαγματικό δικαίωμα αγοράς είναι $\max\{0, x_T - K\}$ και για ένα συναλλαγματικό δικαίωμα πώλησης $\max\{0, K - x_T\}$. Από τον τύπο (2.9) η σχέση ισοτιμίας πώλησης – αγοράς $P(K,T) - C(K,T) = e^{-rT}K - e^{-rT}F_{0,T}$, γίνεται

$$P(K,T) - C(K,T) = e^{-rT}K - x_0 e^{-rT}$$

Παρατηρούμε ότι η αγορά ενός δικαιώματος αγοράς επί ευρώ και η πώληση ενός δικαιώματος πώλησης επί ευρώ έχει την ίδια αποπληρωμή με το να δανείζουμε ευρώ και να δανειζόμαστε δολάρια.

$$C(K,T) - P(K,T) = x_0 e^{-r_€ T} - e^{-rT}K \tag{2.10}$$

Παράδειγμα 2.10

Έστω η τρέχουσα συναλλαγματική ισοτιμία \$1,34/€, το συνεχόμενο ονομαστικό επιτόκιο ως προς τα ευρώ είναι 5% και ως προς τα δολάρια είναι 7% και η τιμή εξάσκησης ενός διετούς \$1.30 Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης επί ευρώ είναι \$0,25. Για να βρούμε την τιμή εξάσκησης ενός διετούς \$1,30 Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς επί ευρώ χρησιμοποιούμε την σχέση ισοτιμίας πώλησης αγοράς για δικαιώματα προαίρεσης επί νομισμάτων (2.10)

$$C = P + x_0 e^{-r_{€}T} - e^{-rT}K = 0{,}25 + 1{,}34 e^{-0{,}05\times 2} - 1{,}30 e^{-0{,}07\times 2} = \$0{,}330.$$

Ένα δικαίωμα προαίρεσης επί ξένων νομισμάτων (*foreign-currency denominated)* επί δολαρίων καθορίζεται με όμοιο τρόπο με την εναλλαγή δολαρίων με ξένα νομίσματα. Συνεπώς η σχέση ισοτιμίας αγοράς-πώλησης δικαιωμάτων για να αγοράσουμε δολάρια πληρώνοντας με ευρώ δίνεται από τη σχέση

$$(2.11) \qquad C(K,T) - P(K,T) = x_0 e^{-rT} - e^{-r_{€}T}K$$

όπου χ_0 η τιμή συναλλαγματικής ισοτιμίας €/\$.

Παράδειγμα 2.11

Έστω η τρέχουσα συναλλαγματική ισοτιμία €0,79/\$, το συνεχόμενο ονομαστικό επιτόκιο ως προς τα ευρώ είναι 5% και ως προς τα δολάρια είναι 7% και η τιμή εξάσκησης ενός διετούς €0,89 Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης επί δολαρίων είναι €0,12. Για να βρεθεί η τιμή εξάσκησης ενός διετούς €0,89Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς επί ευρώ χρησιμοποιούμε τον τύπο (2.11)

$$C = P + x_0 e^{-rT} - e^{-r_{€}T}K \ = 0{,}12 + 0{,}79 e^{-0{,}07\times 2} - 0{,}89 e^{-0{,}05\times 2} = €0{,}0014\,.$$

2.6 Μετατροπές – Αντίστροφες Μετατροπές

Σε μία *προθεσμιακή μετατροπή* ένας συναλλασσόμενος αγοράζει μία μετοχή και ένα δικαίωμα πώλησης και πουλάει ένα δικαίωμα αγοράς με την ίδια τιμή εξάσκησης και ημερομηνία λήξης [36, 58]. Η τιμή της μετοχής συνήθως είναι κοντά στην τιμή εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης. Εάν η τιμή της μετοχής κατά τη λήξη είναι υψηλότερη από την τιμή εξάσκησης, η πώληση του δικαιώματος αγοράς εξασκείται ενάντια στον συναλλασσόμενο, που αυτόματα αντισταθμίζει τη θέση αγοράς στην μετοχή (η θέση αγοράς δικαιώματος πώλησης λήγει χωρίς να ασκηθεί).

Εάν η τιμή της μετοχής κατά τη λήξη είναι χαμηλότερη από την τιμή εξάσκησης, η θέση αγοράς δικαιώματος πώλησης ασκείται από τον συναλλασσόμενο, που αυτόματα αντισταθμίζει τη θέση αγοράς επί της μετοχής (η θέση πώλησης δικαιώματος αγοράς λήγει χωρίς να ασκηθεί) [58].

Ισχύει η σχέση ισοτιμίας (2.7):

$$-S_0 - P(K,T) + C(K,T) = -PV_{0,T}(Div) - PV_{0,T}(K)$$

Με τον τρόπο αυτό δημιουργήσαμε μία θέση που κοστίζει $PV_{0,T}$ *(Div)* + $PV_{0,T}$ *(K)* και που μας αποδίδει *K* + $FV_{0,T}$ *(Div)* κατά τη λήξη. Αυτή η θέση καλείται συνθετική θέση αγοράς *T-bill (Treasury bill).* Αντίστοιχα, δημιουργείται ένα συνθετικό δικαίωμα πώλησης επί μετοχής (αγορά δικαιώματος πώλησης / πώληση δικαιώματος αγοράς) που αντισταθμίζει τον κίνδυνο μέσω της θέσης αγοράς της μετοχής.

Παράδειγμα 2.12

Έστω η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής €900, το συνεχόμενο χωρίς κίνδυνο ονομαστικό επιτόκιο είναι 5,3% και η σύνθετη απόδοση είναι 0%. Ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς με διάρκεια 1 έτους και τιμή εξάσκησης €925 κοστίζει €85 και ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα πώλησης διάρκειας 1 έτους και τιμή εξάσκησης €925 κοστίζει €55. Η στρατηγική που ακολουθούμε είναι αγορά της μετοχής, πώληση του δικαιώματος αγοράς και αγορά του δικαιώματος πώλησης.

a. Για να βρούμε την απόδοση της θέσης αυτής r αν την κρατήσουμε εώς την λήξη των δικαιωμάτων, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα. Αρχικά υπολογίζουμε το κόστος της αγοράς της μετοχής, της πώλησης του δικαιώματος αγοράς και της αγοράς του δικαιώματος πώλησης

$$-S_0 - P(K,T) + C(K,T) = -900 - 55 + 85 = € - 870$$

Έπειτα από ένα έτος, θα έχουμε σίγουρα €925 επειδή είτε η δέσμευση πώλησης του δικαιώματος αγοράς είτε η αγορά του δικαιώματος πώλησης αντισταθμίζουν την τιμή της μετοχής. Το συνεχές ονομαστικό επιτόκιο των αποδόσεων r ικανοποιεί τη σχέση:

$$-[-S_0 - P(K,T) + C(K,T)] \times e^r = K \rightarrow 870 \times e^r = 925 \rightarrow r = 0{,}061$$

b. Για να υπολογίσουμε το βέβαιο *κέρδος (arbitrage)* που προκύπτει από τη θέση αυτή, εργαζόμαστε ως εξής. Η θέση μετατροπής (6,1%) πληρώνει περισσότερο επιτόκιο από το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο (5,3%). Ως εκ τούτου μπορούμε να δανείσουμε χρήματα με 5% και να αγοράσουμε ένα μεγάλο ποσό από την συνολική θέση a, παράγοντας έτσι σίγουρη απόδοση (*6,1 – 5,3 = 0,8%*). Έτσι δανειζόμαστε από μία τράπεζα $-[-S_0 - P(K,T) + C(K,T)] = €870$ για να αγοράσουμε μία θέση. Έπειτα από 1 έτος θα οφείλουμε στην τράπεζα $€870 \times e^{0,053} = €917{,}35$. Συνεπώς από αυτή τη θέση έχουμε βέβαιο κέρδος *K – €917,35 = 925 – 917,35 = €7,65*.

Μία *αντίστροφη μετατροπή (reverse conversion)* είναι μία στρατηγική κατά την οποία ο συναλλασσόμενος λαμβάνει θέση ανοιχτής πώλησης μιας μετοχής, πουλάει ένα δικαίωμα πώλησης και αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς με την ίδια τιμή εξάσκησης και ημερομηνία λήξης [53, 58]. Η θέση ανοιχτής πώλησης ενός τίτλου είναι η πώληση ενός τίτλου τον οποίο έχουμε δανειστεί από τρίτους (συνήθως από χρηματιστές), με την πρόθεση να αγοράσουμε έναν πανομοιότυπο τίτλο στο μέλλον για να τον επιστρέψουμε στον δανειστή μας. Η τιμή της μετοχής είναι συνήθως πλησίον της τιμής της εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης.

Αν η τιμή της μετοχής κατά την ημερομηνία λήξης είναι υψηλότερη από την τιμή εξάσκησης, η αγορά του δικαιώματος αγοράς εξασκείται από τον συναλλασσόμενο, που ταυτόχρονα αντισταθμίζει την θέση πώλησης επί της μετοχής (η πώληση του δικαιώματος πώλησης λήγει χωρίς να ασκηθεί) [58]. Αν η τιμή της μετοχής κατά την ημερομηνία λήξης είναι χαμηλότερη από την τιμή εξάσκησης, ασκούμε τη πώληση του δικαιώματος πώλησης, ταυτόχρονα αντισταθμίζεται η θέση πώλησης επί της μετοχής (η αγορά του δικαιώματος αγοράς λήγει χωρίς να ασκηθεί).

Η σχέση ισοτιμίας που ισχύει είναι $+S_0 + P(K,T) - C(K,T) = +PV_{0,T}(Div) + PV_{0,T}(K)$. Η αντίστροφη μετατροπή δημιουργεί μία θέση πώλησης συνθετικού Treasury-bill που πωλείται για $PV_{0,T}(Div) + PV_{0,T}(K)$. Επίσης μπορούμε να δημιουργήσουμε μία αντίστροφη μετατροπή με το να πουλήσουμε ένα ομόλογο με ονομαστική αξία $K + FV_{0,T}(Div)$ για τιμή ίση με $PV_{0,T}(Div) + PV_{0,T}(K)$.

Παράδειγμα 2.13

Έστω μία αντίστροφη μετατροπή που δημιουργήθηκε μέσω της πώλησης μίας μετοχής που δεν αποδίδει μερίσματα για €54, της αγοράς ενός τριετούς Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης €62 για €20 και τέλος της πώλησης ενός τριετούς Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης €62 για €P. Το συνεχόμενο χωρίς ρίσκο ονομαστικό επιτόκιο είναι 11%. Για να βρούμε το P λύνουμε τη σχέση ισοτιμίας ως προς P και αφού η μετοχή δεν αποδίδει μερίσματα $PV_{0,T}(Div) = 0$. Άρα:

$$P(K,T) = -S_0 + C(K,T) + PV_{0,T}(K) = -54 + 20 + 62e^{-0{,}11\times 3} = €10{,}57.$$

Συγκεντρωτικά, η σχέση ισοτιμίας πώλησης – αγοράς μπορεί να αναδιαμορφωθεί έτσι ώστε να δημιουργήσει τους παρακάτω συνθετικούς τίτλους.

Συνθετική θέση αγοράς επί μετοχής: αγορά δικαιώματος αγοράς, πώληση δικαιώματος πώλησης, δανεισμός της παρούσας τιμής της τιμής εξάσκησης και των μερισμάτων

$$-S_0 = -C(K,T) + P(K,T) - \left(PV_{0,T}(Div) + PV_{0,T}(K)\right).$$

Συνθετική θέση αγοράς Treasury-bill: πώληση μετοχής, πώληση δικαιώματος αγοράς και αγορά δικαιώματος πώλησης *(μετατροπή, conversion)*

$$-\left(PV_{0,T}(Div) + PV_{0,T}(K)\right) = -S_0 - P(K,T) + C(K,T).$$

Συνθετική θέση πώλησης Treasury-bill: ανοιχτή πώληση μετοχής, αγορά δικαιώματος αγοράς και πώληση δικαιώματος πώλησης *(αντίστροφη μετατροπή, reverse conversion)* .

$$PV_{0,T}(Div) + PV_{0,T}(K) = +S_0 + P(K,T) - C(K,T).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το Θεώρημα του Arbitrage και Εφαρμογές του.

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε την έννοια του βέβαιου κέρδους, που αποτελεί τον θεμέλιο λίθο της θεωρίας τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης. Η προσέγγιση αυτή λειτουργεί υπό ασθενείς υποθέσεις, καθώς δεν απαιτούνται περιορισμοί για τις προτιμήσεις των επενδυτών. Η μόνη ουσιαστική υπόθεση είναι ότι οι επενδυτές προτιμούν περισσότερα από λιγότερα, ή πιο συγκεκριμένα ότι η άνοδος του κέρδους χωρίς την αύξηση του κόστους είναι πάντα αποδεκτή [5].

Έπειτα, θα αναφερθούμε εκτενώς στο θεώρημα του arbitrage καθώς και στο θεώρημα τιμολόγησης μέσω arbitrage και θα εξετάσουμε τις εφαρμογές τους στο μοντέλο Black & Scholes επί διαφόρων τύπων δικαιωμάτων προαίρεσης [19]. Μέσω του μοντέλου Black & Scholes υπολογίζεται η μοναδική τιμή ενός δικαιώματος που δεν οδηγεί σε arbitrage.

3.1 Arbitrage (Βέβαιο Κέρδος)

Οι χρηματοοικονομικές αγορές περιέχουν επικίνδυνους τίτλους, όπως οι μετοχές και ακίνδυνους τίτλους, όπως οι τραπεζικοί λογαριασμοί. Μία γενική αρχή αποτελεί το γεγονός ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο κίνδυνος στον οποίο εκτίθεσαι, τόσο μεγαλύτερη πρέπει να είναι η πιθανή απόδοση της επένδυσης, έτσι ώστε να είναι ελκυστική [5, 45]. Η τεχνική έννοια του βέβαιου κέρδους είναι ότι δεν πρέπει να είναι εφικτό να εξασφαλίζεται κέρδος χωρίς έκθεση στον κίνδυνο. Όπου υπάρχουν ευκαιρίες βέβαιου κέρδους, οι επενδυτές χρησιμοποιούν τις αγορές σαν αντλίες για να εξάγουν μεγάλες ποσότητες κέρδους χωρίς κίνδυνο, αυτή η επιλογή τους έχει ως αποτέλεσμα την ανισορροπία των αγορών. Για την διασφάλιση της ισορροπίας στις αγορές, οι επενδυτές πρέπει να περιορίζονται σε αγορές που δεν έχουν ευκαιρίες βέβαιου κέρδους [18, 45].

Η πρακτική του βέβαιου κέρδους ουσιαστικά έγκειται στην εκμετάλλευση της διαφοράς της τιμής μεταξύ δύο ή περισσότερων αγορών. Συνδυασμοί αντίστοιχων συμφωνιών εξασκούνται και ρευστοποιούνται εκμεταλλευόμενοι την ανισορροπία των αγορών, έτσι το κέρδος ισούται με τη διαφορά μεταξύ των τιμών των αγορών. Η στρατηγική του βέβαιου κέρδους είναι μια συναλλαγή που δεν περιέχει αρνητικές χρηματορροές σε οποιαδήποτε πιθανολογική και χρονική κατάσταση και που περιέχει θετικές χρηματορροές σε τουλάχιστον μία κατάσταση- με απλά λόγια είναι το κέρδος χωρίς την ανάληψη ρίσκου [43].

Αν οι τιμές της αγοράς δεν επιτρέπουν την εμφάνιση βέβαιου κέρδους, οι τιμές αποτελούν μία *αγορά μη βέβαιου κέρδους (arbitrage free market)* [43].

Παράδειγμα 3.1

Έστω μία αγορά στην οποία συναλλάσσονται μόνο τρείς τίτλοι. Ένα ομόλογο B, που δεν περιέχει κίνδυνο, μετοχές S και Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα αγοράς C με τιμή εξάσκησης $K = 2$ επί μετοχών. Ο επενδυτής επενδύει στο χρόνο $t = 0$, και στους τρείς τίτλους, εγκαταλείποντας την επένδυση του μέχρι τον χρόνο $t = T$, όπου T η ημερομηνία λήξης. Έστω ότι οι τρέχουσες τιμές των αξιόγραφων είναι οι εξής *B(0) = 1, S(0) = 1, C(0) = 0,2*

και ότι κατά τη διάρκεια της λήξης υπάρχουν μόνο δύο περιπτώσεις, οι τιμές να είναι ανοδικές και να ισχύει: B(T, u) = 1,25, S(T, u) = 1,75, C(T, u) = 0,75

ή οι τιμές να είναι καθοδικές και να ισχύει: B(T, u) = 1,25, S(T, u) = 0,75, C(T, u) = 0.

Τώρα υποθέτουμε ότι το αρχικό κεφάλαιο που διαθέτει ο επενδυτής είναι €25 και το διαθέτει σε τίτλους σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα [3.1]:

Αξιόγραφο	Αριθμός Τίτλων	Σύνολο σε €
Ομόλογο	*10*	*10*
Μετοχή	*10*	*10*
Δικαίωμα Αγοράς	*25*	*5*

Πίνακας 3.1 Αρχικό Χαρτοφυλάκιο

Ανάλογα από την πορεία των τιμών των τίτλων, ο επενδυτής λαμβάνει τις ακόλουθες αποδόσεις:

Πορεία	Ομόλογο	Μετοχή	Δικαίωμα Αγοράς	Σύνολο σε €
Ανοδική	*12,5*	*17,5*	*18,75*	*48,75*
Καθοδική	*12,5*	*7,5*	*0*	*20*

Πίνακας 3.2 Αποδόσεις Αρχικού Χαρτοφυλακίου

Το αναδιαρθρωμένο χαρτοφυλάκιο και οι αποδόσεις του δίνονται στους κάτωθι πίνακες [3.3] και [3.4]

Αξιόγραφο	Αριθμός Τίτλων	Σύνολο σε €
Ομόλογο	*11,8*	*11,8*
Μετοχή	*7*	*7*
Δικαίωμα Αγοράς	*29*	*5,8*

Πίνακας 3.3 Αναδιαρθρωμένο Χαρτοφυλάκιο

Πορεία	**Ομόλογο**	**Μετοχή**	**Δικαίωμα Αγοράς**	**Σύνολο σε €**
Ανοδική	*14,75*	*12,25*	*21,75*	*48,75*
Καθοδική	*14,75*	*5,25*	*0*	*20*

Πίνακας 3.4 Αποδόσεις Αναδιαρθρωμένου Χαρτοφυλακίου

Το αναδιαρθρωμένο χαρτοφυλάκιο απαιτεί επένδυση €24,6 και παράγει στο χρόνο $t = T$ ίδια απόδοση με το αρχικό χαρτοφυλάκιο και έτσι αποταμιεύουμε €0,4. Στο παράδειγμα αυτό ο επενδυτής αναδιάρθρωσε το αρχικό του χαρτοφυλάκιο επιτυγχάνοντας ίδια απόδοση με χαμηλότερο κόστος, ανεξάρτητα από την πορεία των τιμών.

Παρατηρούμε ότι η διαφορά των δύο χαρτοφυλακίων είναι -1,8 ομόλογα, +3 μετοχές και -4 δικαιώματα αγοράς. Έστω, ότι επιχειρούμε ανοιχτή πώληση των 3 μετοχών, αγορά 4 δικαιωμάτων αγοράς και αποταμίευση €1,8 στον τραπεζικό μας λογαριασμό. Το εναπομείναν κεφάλαιο είναι πάλι €0,4. Στον παρακάτω πίνακα μας παρουσιάζονται οι στρατηγικές που μπορεί να ακολουθήσει ο επενδυτής:

Ανοδική Πορεία		Καθοδική Πορεία	
Εξασκώ το δικαίωμα	*+3*	**Δεν εξασκώ το δικαίωμα**	*0*
Αγορά 3 μετοχών με €1,75	*– 5,25*	**Αγορά 3 μετοχών με €0,75**	*– 2,25*
Πώληση ομολόγου	*+2,25*	**Πώληση ομολόγου**	*+2,25*
Σύνολο	*0*	**Σύνολο**	*0*

Πίνακας 3.4 Διαφορετικές Στρατηγικές Ανάλογα Με Την Πορεία Των Τιμών

Όπως είναι προφανές το αναδιαρθρωμένο χαρτοφυλάκιο αποτελεί μία *ευκαιρία βέβαιου κέρδους (arbitrage opportunity)* [43].

3.1.1 Συνθήκες Arbitrage

Το βέβαιο κέρδος είναι πραγματοποιήσιμο όταν μία από τις παρακάτω συνθήκες ικανοποιούνται [44]:

- Το ίδιο περιουσιακό στοιχείο δεν συναλλάσσεται με ίδια τιμή σε όλες τις αγορές, συνεπώς δεν ακολουθεί τον *'νόμο της μίας τιμής' (the law of one price).*
- Δύο περιουσιακά στοιχεία με πανομοιότυπες χρηματορροές δεν συναλλάσσονται στην ίδια τιμή.
- Ένα περιουσιακό στοιχείο με γνωστή μελλοντική τιμή δεν συναλλάσσεται σήμερα, καθώς η μελλοντική τιμή του προεξοφλείται με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ή ο τίτλος αυτός δεν έχει αμελητέα κόστη κατοχής.

Το πιο απλό παράδειγμα βέβαιου κέρδους αποτελεί η αγορά ενός αγροτικού προϊόντος από αγροτικές περιοχές εξασφαλίζοντας έτσι χαμηλότερη τιμή και έπειτα η μεταφορά του και η πώληση του στις πόλεις σε υψηλότερη τιμή [4, 5]. Αυτός ο τύπος βέβαιου κέρδους είναι ο πιο διαδεδομένος, όμως στο παράδειγμα αυτό δεν συμπεριλαμβάνονται τα κόστη μεταφοράς, αποθήκευσης, οι φόροι και άλλοι παράγοντες. Το *πραγματικό βέβαιο κέρδος (true arbitrage)* απαιτεί την απουσία ανάληψης οποιουδήποτε κινδύνου [18, 20]. Όταν συναλλάσσονται αξιόγραφα σε περισσότερα από ένα χρηματιστήρια αξιών, το βέβαιο κέρδος εμφανίζεται με την ταυτόχρονη αγορά σε ένα από αυτά και πώληση σε ένα άλλο.

3.1.2 Σύγκλιση Τιμών μέσω Arbitrage

Το βέβαιο κέρδος προκαλεί την σύγκλιση των τιμών διαφορετικών αγορών. Αποτέλεσμα του βέβαιου κέρδους αποτελεί το ότι οι συναλλαγματικές ισοτιμίες, η τιμή των εμπορευμάτων, και η τιμή των αξιόγραφων σε διαφορετικές αγορές τείνουν να συγκλίνουν σε ίδιες τιμές, σε όλες τις αγορές, σε κάθε μία κατηγορία[20]. Μέτρο της αποδοτικότητας της αγοράς είναι η ταχύτητα με την οποία οι τιμές αυτές συγκλίνουν. Το βέβαιο κέρδος τείνει να μειώνει την διαφορά των τιμών με το να ενθαρρύνει τους επενδυτές να αγοράζουν ένα προϊόν όταν η τιμή του είναι χαμηλή και να το πωλούν όταν η τιμή του είναι υψηλή. Η στρατηγική αυτή είναι εφαρμόσιμη μόνο για όσο δεν απαγορεύεται στους αγοραστές να την ακολουθήσουν και για όσο τα κόστη αγοράς , επαναγοράς και κράτησης είναι χαμηλά, συγκριτικά με την διαφορά των τιμών σε διαφορετικές αγορές[20].

Οι διεθνείς ευκαιρίες βέβαιου κέρδους επί εμπορευμάτων, αξιόγραφων και συναλλαγμάτων τείνουν να αλλάζουν τα επιτόκια συναλλαγής μέχρι αυτά να είναι ίσα με την αγοραστική δύναμη. Για παράδειγμα έστω ότι ένα σκάφος αγοράζεται στην Αγγλία σε χαμηλότερη τιμή από ότι στην Ελλάδα. Οι Έλληνες για να εκμεταλλευτούν την ευκαιρία arbitrage αγοράζουν τα σκάφη εκτός συνόρων και την ίδια στιγμή οι Άγγλοι αγοράζουν τα σκάφη τους στη χώρα τους και τα μεταφέρουν στην Ελλάδα για να τα πουλήσουν. Οι έλληνες πρέπει να αγοράσουν λίρες και οι Άγγλοι πρέπει πουλήσουν τα ευρώ που πήραν από την συναλλαγή. Οι δύο αυτές πράξεις συντελούν στην αύξηση της ζήτησης της λίρας και της προσφοράς ευρώ και αυτό έχει ως αποτέλεσμα την υπερτίμηση της λίρας. Κατά επέκταση θα αυξηθεί η τιμή των αγγλικών σκαφών και θα μειωθεί τιμή των αντίστοιχων ελληνικών, έως ότου να μην υπάρχει κίνητρο για την αγορά σκάφους στην Αγγλία και την μεταφορά και πώληση του στην Ελλάδα.

3.1.3 Κίνδυνοι Arbitrage

Οι συναλλαγές βέβαιου κέρδους στις μοντέρνες αγορές αξιόγραφων εμπεριέχουν πολύ χαμηλούς κινδύνους. Σε γενικές γραμμές είναι δυνατή η ολοκλήρωση δύο ή τριών συναλλαγών την ίδια χρονική στιγμή- ως εκ τούτου υπάρχει η πιθανότητα όταν το ένα μέρος της συμφωνίας κλείσει, μία γρήγορη αλλαγή των τιμών να κάνει αδύνατο το κλείσιμο της άλλης σε κερδοφόρα τιμή [44]. Επίσης, υπάρχει ο κίνδυνος του αντισυμβαλλόμενου, ο κίνδυνος αυτός προκύπτει όταν το ένα μέρος αποτυγχάνει να κάνει την παράδοση όπως έχει συμφωνηθεί [44]. Οι κίνδυνοι αυτοί μεγεθύνονται όταν δανειζόμαστε χρήματα ή όταν χρησιμοποιούμε μόχλευση.

Άλλος ένας κίνδυνος προκύπτει, όταν τα προϊόντα που αγοράζονται και πωλούνται δεν είναι πανομοιότυπα και η πρακτική βέβαιου κέρδους διεξάγεται υπό την υπόθεση ότι οι τιμές των προϊόντων σχετίζονται ή είναι προβλέψιμες. Αυτός ο κίνδυνος καλείται *κίνδυνος βέβαιου κέρδους (risk arbitrage)* [44]. Σε σύγκριση με την κλασσική συναλλαγή βέβαιου κέρδους, μία τέτοια πράξη μπορεί να οδηγήσει σε καταστροφικές ζημίες.

Ο κίνδυνος βέβαιου κέρδους την δεκαετία του ΄80 ήταν διαδεδομένος. Στην κερδοσκοπική αυτή μορφή, κάποιος συναλλάσσεται επί ενός τίτλου που είναι υποτιμημένος ή υπερτιμημένος, όταν έχει προβλεφθεί ότι η λάθος αυτή εκτίμηση θα αποκατασταθεί. Ένα παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση όπου μία μετοχή μιας εταιρίας, η οποία πρόκειται να συγχωνευθεί, είναι υποτιμημένη στο χρηματιστήριο αξιών και δίνει τεράστιο κέρδος σε αυτούς που θα την αγοράσουν στην τρέχουσα τιμή της, καθώς όταν η εταιρία συγχωνευθεί η μετοχή της θα αντανακλά την τιμή της καινούργιας εταιρίας. Για αυτόν το λόγο ο κίνδυνος του βέβαιου κέρδους είναι γνωστός και ως *κίνδυνος συγχωνεύσεων (merger arbitrage)* [44].

3.1.4 Πλεονεκτήματα Arbitrage

Υπάρχουν πολλά πλεονεκτήματα όταν κάποιος ακολουθεί τη στρατηγική του βέβαιου κέρδους [43] καθώς ισχύουν τα ακόλουθα:

- η στρατηγική είναι ασφαλής καθώς δεν υπάρχει ο κίνδυνος αγοράς, εφόσον όλες οι μετοχικές θέσεις είναι ολοκληρωτικά αντισταθμισμένες.
- οι πιθανές αποδόσεις είναι υψηλότερες συγκριτικά με άλλες επενδυτικές στρατηγικές που εμπεριέχουν παρόμοιους κινδύνους.
- τα μερίσματα δεν φορολογούνται.
- κεφαλαιοποιούνται ευκαιρίες που προκύπτουν από λανθασμένη τιμολόγηση μεταξύ μετρητών και παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων.

3.1.5 Ρυθμιστικό Arbitrage

Το ρυθμιστικό βέβαιο κέρδος *(regulatory arbitrage)* πραγματοποιείται όταν μία ρυθμιστική εταιρία, όπως ο κολοσσός Goldman Sachs, εκμεταλλεύεται την διαφορά μεταξύ του πραγματικού οικονομικού κινδύνου και της ρυθμιστικής θέσης. Για παράδειγμα, όταν μία τράπεζα λειτουργεί υπό τους κανόνες της Βασιλείας Ι (Basel I), είναι υποχρεωμένη να κρατάει το 8% του κεφαλαίου της για να προστατευθεί από τον κίνδυνο αθέτησης [5]. Στην πραγματικότητα ο πραγματικός κίνδυνος αθέτησης είναι χαμηλότερος, έτσι το να ασφαλίζεις το δάνειο μετακινώντας το χαμηλού ρίσκου δάνειο από το χαρτοφυλάκιο, είναι κερδοφόρο. Από την άλλη πλευρά, εάν το πραγματικό ρίσκο αθέτησης είναι υψηλότερο από τον ρυθμιστικό κίνδυνο τότε είναι κερδοφόρο να εκτελέσει το δάνειο και να το κρατήσει, εξασφαλίζοντας έτσι ότι θα τιμολογηθεί κατάλληλα [5].

Πολλές φορές το ρυθμιστικό βέβαιο κέρδος χρησιμοποιείται σε καταστάσεις οπού μία εταιρία επιλέγει ως φυσική έδρα της ένα μέρος με ρυθμιστικό καθεστώς που τους μειώνει τα κόστη. Για παράδειγμα, μία ασφαλιστική εταιρία συνήθως επιλέγει ως έδρα της τις Βερμούδες λόγω των εξαιρετικών φορολογικών συντελεστών. Αυτό συνήθως προκύπτει όπου οι συναλλαγές δεν έχουν φανερή φυσική τοποθεσία. Πολλά χρηματοοικονομικά προϊόντα συναλλάσσονται έχοντας ακαθόριστη τοποθεσία συναλλαγής [5].

3.2 Το Θεώρημα Arbitrage

Έστω ένα πείραμα με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, ..., m\}$ και n στοιχήματα σε αυτό. Έστω x το χρηματικό ποσό που επενδύουμε στο στοίχημα i, αν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι $j = 1, 2, ..., m$ θα λάβουμε απόδοση ίση με $xr_{i\,j}$. Συνεπώς το $xr_{i\,j}$ *είναι η συνάρτηση απόδοσης* για κάθε μια μονάδα που τοποθετούμε στο στοίχημα i.

Έστω ένα διάνυσμα $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ μέσω του οποίου ακολουθείται η εξής στρατηγική. Επενδύουμε το ποσό x_1 στο στοίχημα n = 1, το ποσό x_2 στο στοίχημα n = 2 και ούτω καθεξής. Αν j το αποτέλεσμα του πειράματος, τότε η απόδοση που λαμβάνουμε μέσω της στρατηγικής x μας δίνεται από τον τύπο [2, 21]:

$$\alpha\pi\acute{o}\delta o\sigma\eta \; x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, r_{i\,j}$$

Συνεπώς, *το θεώρημα του arbitrage* πιστοποιεί την ύπαρξη είτε ενός διανύσματος πιθανοτήτων $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ για το σύνολο των εφικτών αποτελεσμάτων του πειράματος υπό το οποίο η αναμενόμενη απόδοση είναι μηδενική, είτε την ύπαρξη στρατηγικής στοιχήματος που μας αποδίδει θετικό κέρδος για οποιοδήποτε αποτέλεσμα του πειράματος [21].

Οι πιθανότητες για το σύνολο των αποτελεσμάτων ενός πειράματος που καθιστούν όλα τα στοιχήματα ιδανικά ονομάζονται *πιθανότητες ουδέτερες ως προς τον κίνδυνο*[21].

Παράδειγμα 3.2

Έστω ότι το μοναδικό επιτρεπόμενο είδος στοιχήματος είναι η επιλογή ενός από τα αποτελέσματα του πειράματος $i = (1, 2, ..., m)$ και ο στοιχηματισμός επί αυτού, ότι αυτό θα είναι το αποτέλεσμα. Αν τοποθετήσουμε μία μονάδα στο αντίστοιχο στοίχημα θα λάβουμε είτε απόδοση O_i εφόσον το αποτέλεσμα είναι το i που επιλέξαμε, είτε -1 εάν το αποτέλεσμα δεν είναι το προβλεπόμενο. Η συνάρτηση απόδοσης από ένα τέτοιο στοίχημα είναι η ακόλουθη:

$$r_{i\,j} = \begin{cases} O_i, & \alpha\nu \; j = i \\ -1, & \alpha\nu \; j \neq i \end{cases}$$

Έστω ότι οι δοθείσες αποδόσεις είναι οι O_1, O_2, ..., O_n. Η *έλλειψη βέβαιου κέρδους* επιτυγχάνεται όταν υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, τέτοιο ώστε για κάθε αποτέλεσμα i να ισχύει $E_P[r_i(X)] = O_i p_i - (1 - p_i) = 0$. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει $p_i = \frac{1}{1+O_i}$. Συνεπώς αφού το άθροισμα των p_i πρέπει να ισούται με την μονάδα, η *συνθήκη έλλειψης βέβαιου κέρδους* είναι [25]: $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1+O_i} = 1$. Ουσιαστικά αν το προηγούμενο άθροισμα είναι διάφορο της μονάδας τότε υπάρχει ευκαιρία ***arbitrage*** [21].

Έστω ότι έχουμε το εξής πείραμα:

Αποτέλεσμα	Απόδοση
1	1
2	1,5
3	2

ισχύει $\frac{1}{2} + \frac{1}{2,5} + \frac{1}{3} = 1,1 \neq 1$ και συνεπώς υπάρχει ευκαιρία arbitrage. Μία στοιχηματική στρατηγική που μπορούμε να ακολουθήσουμε είναι η ακόλουθη. Να επενδύσουμε -1 στο αποτέλεσμα 1 (αν το αποτέλεσμα δεν είναι το 1 κερδίζουμε 1, αν είναι χάνουμε 1), -0,7 στο αποτέλεσμα 2 (αν η πρόβλεψη μας επιβεβαιωθεί χάνουμε 1,05, αν όχι κερδίζουμε 0,7), -0,6 στο αποτέλεσμα 3 (αν η πρόβλεψη μας είναι αληθής χάνουμε 0,6, αν όχι κερδίζουμε 1,20). Ανάλογα με το αποτέλεσμα του πειράματος εμείς εισπράττουμε τα ακόλουθα:

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ 1	• Κέρδος=-1+0,7+0,6=0,3
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ 2	• Κέρδος=-1,05+1+0,6=0,55
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ 3	• Κέρδος=-1,20+1+0,7=0,5

Συνεπώς ανεξαρτήτως αποτελέσματος εμείς έχουμε arbitrage.

Πρόταση 3.1

Ισχύει μόνο μία από τις παρακάτω προτάσεις:

i. $\sum_{j=1}^{m} p_j r_{i\,j} = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots\ldots, n$

όπου p_j *το διάνυσμα πιθανοτήτων* $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$

ii. $\sum_{i=1}^{n} x_i\, r_{i\,j} > 0, \quad \forall\, j = 1{,}2 \ldots\ldots, m$

όπου x_i *μία επενδυτική στρατηγική* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Δηλαδή είτε υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανοτήτων στο οποίο όλες οι επενδύσεις έχουν μηδενικό αναμενόμενο κέρδος, είτε υπάρχει μία επενδυτική στρατηγική που μας οδηγεί σε βέβαιο κέρδος (arbitrage) [21].

3.2.1 Απόδειξη Θεωρήματος Arbitrage

Το θεώρημα του arbitrage αποδεικνύεται με πληθώρα τρόπων. Εμείς θα ακολουθήσουμε την απόδειξη μέσω του θεωρήματος του δυϊκού προγραμματισμού. Θεωρούμε το πρωτεύον και το αντίστοιχο δυϊκό πρόβλημα [21]:

Πρωτεύον	**Δυϊκό**
$Ax \leq b$	$yA = c$
	$y \geq 0$
$cx \to max$	$yb \to min$

Πίνακας 3:5 Πρωτεύον και Δυϊκό γραμμικό πρόβλημα

Ουσιαστικά, έχουμε δεδομένες σταθερές c_i b_j και $a_{i,j}$ όπου $i=1,2,\ldots.,n$ *και* $j=1,2\ldots..,m$ και καλούμαστε να επιλέξουμε τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \text{ υπό τους περιορισμούς } \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j}\, x_i \leq b_j$$

και να επιλέξουμε τις τιμές $y_1, y_2, \ldots, y_j$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το

$$\sum_{j=1}^{m} b_j y_j \text{ υπό τους περιορισμούς } \sum_{j=1}^{m} a_{i\,j}\, y_j = c_i,\ y_j \geq 0.$$

Ένα πρόβλημα δυϊκού προγραμματισμού καλείται *εφικτό* όταν υπάρχουν οι τιμές που ικανοποιούν και τους δύο περιορισμούς.

Πρόταση 3.2 [«Δυισμού» του γραμμικού προγραμματισμού]

Αν ένα πρωτεύον και το αντίστοιχο του δυϊκό γραμμικό πρόβλημα έχουν εφικτές λύσεις, τότε και τα δύο έχουν βέλτιστες λύσεις και η τιμή μεγιστοποίησης του αρχικού είναι ίση με την τιμή ελαχιστοποίησης του δυϊκού. Αν οποιοδήποτε από τα προβλήματα δεν έχει εφικτή λύση, τότε και το άλλο δεν έχει βέλτιστη λύση [25].

Αξίζει να σημειώσουμε το ότι το πρωτεύον πρόβλημα δεν έχει βέλτιστη λύση όταν το δυϊκό πρόβλημα δεν είναι εφικτό, έγκειται στο ότι όταν συμβαίνει αυτό το πρωτεύον δεν έχει περιορισμούς. Συγκεκριμένα, η ύπαρξη μιας επενδυτικής στρατηγικής x που δίνει θετική εγγυημένη απόδοση υ>0, συνεπάγεται ότι η cx δίνει εγγυημένη απόδοση τουλάχιστον cυ.

Έστω ότι ένας επενδυτής είναι βέβαιος ότι θα κερδίσει ένα ποσό ίσο με x_{n+1}, αν επιλέξει να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική $(x_1, x_2, ..., x_n)$ τότε θα κερδίσει $\sum_{i=1}^{n} x_i\, r_{i,j}$, εφόσον το αποτέλεσμα του πειράματος είναι j. Κατά συνέπεια, θα επιδιώξει εκείνη τη στρατηγική και εκείνο το ποσό έτσι ώστε να *μεγιστοποιηθεί το* x_{n+1} υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_{i\,j} \geq x_{n+1}, \qquad j = 1,2, \ldots\ldots, m$$

Αντικαθιστούμε στο πρωτεύον γραμμικό πρόβλημα όπου $a_{i,j} = -\, r_{i,j}$ και $\alpha_{n+1,j} = 1$. Έτσι το πρόβλημα παίρνει την εξής μορφή: *να μεγιστοποιηθεί το* x_{n+1} *υπό τους περιορισμούς:*

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i a_{i\,j} \leq 0, \qquad j = 1,2, \ldots\ldots, m$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, $c_{n+1} = 1$ και $b_1 = b_2 = \ldots = b_j$. Το αντίστοιχο δυϊκό του πρόβλημα είναι η επιλογή των κατάλληλων $y_1, y_2, \ldots, y_m$ έτσι ώστε *να ελαχιστοποιηθεί το 0 υπό τους περιορισμούς*

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i\,j} y_j = 0, \qquad i = 1,2, \ldots., n$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{n+1\ j}\, y_j = 1, \qquad y_j \geq 0, \quad j = 1,2, \ldots\ldots, m$$

Πραγματοποιούμε την ίδια αντικατάσταση και στο δυϊκό πρόβλημα και παίρνουμε την εξής μορφή: *να ελαχιστοποιηθεί το 0 υπό τους περιορισμούς*

$$\sum_{j=1}^{m} r_{i\,j} y_j = 0, \qquad i = 1,2, \ldots., n$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1, \qquad y_j \geq 0, \quad j = 1,2, \dots\dots, m$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του δυϊσμού του γραμμικού προγραμματισμού, το πρόβλημα μας θα είναι εφικτό και η τιμή ελαχιστοποίησης του θα είναι 0, *αν και μόνο αν,* υπάρχει διάνυσμα πιθανοτήτων $y_1, y_2, \dots, y_m$ μέσω του οποίου όλα τα πιθανά αποτελέσματα του πειράματος θα έχουν μηδενική αναμενόμενη απόδοση. Το πρωτεύον πρόβλημα είναι εφικτό, καθώς η σχέση $x_i = 0$, για $i=1,2,\dots,n+1$ ικανοποιεί τους περιορισμούς του .

Από την πρόταση (3.2) προκύπτει πως αν και το δυϊκό πρόβλημα είναι με τη σειρά του εφικτό, τότε η βέλτιστη τιμή του αρχικού είναι η μηδενική και *δεν υπάρχει δυνατότητα βέβαιου κέρδους*. Στην περίπτωση που το δυϊκό πρόβλημα δεν είναι εφικτό, τότε το πρωτεύον δεν έχει βέλτιστη λύση (το 0 δεν είναι η βέλτιστη λύση) και κατά επέκταση επιβεβαιώνεται η ύπαρξη μιας επενδυτικής στρατηγικής της οποίας *η ελάχιστη απόδοση είναι θετική (βέβαιο κέρδος)*.

3.2.1 Ασθενής Μορφή του Θεωρήματος Arbitrage

Στην στρατηγική ασθενούς βέβαιου κέρδους (arbitrage) ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα [21]:

i. Υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι θετικές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\sum_{j=1}^{m} p_j r_{i\,j} = 0, \qquad \forall\, i = 1, \dots\dots, n$$

ii. Υπάρχει μία επενδυτική στρατηγική $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ για την οποία ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, r_{i\,j} \geq 0, \qquad \forall\, j = 1,2 \dots\dots, m$$

όπου για τουλάχιστον ένα j ισχύει η αυστηρή ανισότητα.

Με άλλα λόγια, βέβαιο κέρδος έχουμε όταν ακολουθείται μια επενδυτική στρατηγική η οποία οδηγεί σε θετικό κέρδος σε οποιαδήποτε περίπτωση [21]. Ασθενές βέβαιο κέρδος, έχουμε όταν ακολουθούμε μια επενδυτική στρατηγική με την οποία ποτέ δεν έχουμε απώλεια και οδηγεί σε θετικό κέρδος τουλάχιστον σε μία περίπτωση. Όταν ισχύει το (i) δεν υπάρχει ασθενές βέβαιο κέρδος καθώς το διάνυσμα αποδίδει θετική πιθανότητα σε κάθε δυνατό αποτέλεσμα του πειράματος και ταυτόχρονα καθιστά όλα τα στοιχήματα ιδανικά [21].

3.3 Το Θεώρημα Τιμολόγησης μέσω Arbitrage

Το θεώρημα Τιμολόγησης Βέβαιου Κέρδους (*Arbitrage Pricing Theory, APT)* αναπτύχθηκε κυρίως από τον Ross (1976) [43, 47]. Αποτελεί ένα μοντέλο μίας περιόδου το οποίο αναφέρει ότι αν οι τιμές ισορροπίας δεν προσφέρουν ευκαιρίες βέβαιου κέρδους , τότε οι αναμενόμενες αποδόσεις έχουν κατά προσέγγιση γραμμική σχέση με τους παράγοντες (οι παράγοντες beta είναι αναλογικοί των συνδιασπορών μεταξύ των αποδόσεων και των παραγόντων) [47]. Βασίζεται στον νόμο της μίας τιμής, δηλαδή στο ότι δύο αξιόγραφα που είναι πανομοιότυπα δεν μπορούν να πουληθούν σε διαφορετικές τιμές και στο ότι αν πωλούνται σε διαφορετικές τιμές, τότε υπάρχει βέβαιο κέρδος. Έτσι οι arbitrageurs αγοράζουν τον τίτλο που είναι φθηνός και τον πωλούν με μεγαλύτερη τιμή έως ότου όλες οι τιμές για των τίτλων να είναι ίσες [47].

Το μοντέλο υποστηρίζει ότι η αναμενόμενη επιστροφή από ένα αξιόγραφο μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω μιας γραμμικής συνάρτησης που αποτελείται από ποικίλους μακροοικονομικούς παράγοντες, όπου η ευαισθησία στις μεταβολές για κάθε παράγοντα μας δίνεται από ένα συγκεκριμένο *συντελεστή βήτα (beta coefficient*) [47]. Μέσω του μοντέλου αυτού παράγεται το ποσοστό απόδοσης το οποίο χρησιμοποιούμε για να τιμολογήσουμε τον τίτλο σωστά. Η τιμή του τίτλου πρέπει να είναι ίση με την αναμενόμενη τιμή στο τέλος της περιόδου προεξοφλημένη με το επιτόκιο που βρίσκουμε από το μοντέλο. Αν η τιμή αποκλίνει, το βέβαιο κέρδος πρέπει να την επαναφέρει στα σωστά επίπεδα [47].

Το μοντέλο στηρίζεται στον αποκλεισμό του βέβαιου κέρδους. Η επίσημη απόδειξη του θεωρήματος αποδεικνύει ότι η γραμμική σχέση τιμολόγησης είναι απαραίτητη συνθήκη για την ισορροπία σε μία αγορά, όπου οι επενδυτές μεγιστοποιούν συγκεκριμένους τύπους ωφελιμότητας. Το APT είναι ένα υποκατάστατο του Capital Asset Pricing Model (CAPM) καθώς και στα δύο υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των αποδόσεων των τίτλων και των συνδιασπορών τους με άλλες μεταβλητές [29]. Η συνδιασπορά παρουσιάζεται σαν ένα μέτρο κινδύνου που οι επενδυτές δεν μπορούν να αποφύγουν μέσω της διαφοροποίησης. Ο συντελεστής κλίσης της γραμμικής αυτής σχέσης, ερμηνεύεται ως ο κίνδυνος του ασφαλίστρου.

Το APT βασίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις [29].

- Οι κεφαλαιαγορές είναι απόλυτα ανταγωνιστικές.
- Οι επενδυτές προτιμούν τον περισσότερο από τον λιγότερο πλούτο.
- Η διαδικασία παραγωγής τιμών προκύπτει από το εκτιμητικό μοντέλο K factor.

- Οι αποδόσεις των μετοχών πρέπει να σχετίζονται γραμμικά με ένα σύνολο δεικτών.
- Οι παράγοντες ασκούν επιρροή στις αποδόσεις των τίτλων(στο μοντέλο CAPM,οι αποδόσεις των τίτλων σχετίζονται μόνο με έναν παράγοντα).
- Οι παράγοντες που ασκούν επιρροή στις αποδόσεις των τίτλων ίσως περιέχουν τον πληθωρισμό, την αύξηση του Α.Ε.Π., μεγάλες πολιτικές αναταραχές και αλλαγές των επιτοκίων.

Το APT προσδιορίζει τις αποδόσεις των τίτλων μέσω μιας γραμμικής συνάρτησης πολλών παραγόντων. Το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης του τίτλου i δίνεται από τον τύπο [29]

$$E(R_i) = R_f + b_1\big(E(R_1) - R_f\big) + b_2\big(E(R_2) - R_f\big) + \cdots + b_n(E(R_n) - R_f)$$

(3.1) $$R_{it} = E(R_{it}) + \textstyle\sum_{k=1}^{K} b_{ik} f_{kt} + \varepsilon_{it}$$

όπου R_{it} οι πραγματικές αποδόσεις που κερδίζονται από τον τίτλο i στην χρονική περίοδο t όπου $i = 1, 2, ..., n$ και $t = 1, 2, ..., T$, όπου Τ η ημερομηνία λήξης. $E(R_{it})$ το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης του τίτλου i στην αρχή της περιόδου t. f_{kt} ο kτος παράγοντας κινδύνου που επηρεάζει την απόδοση του i τίτλου, όπου $k = 1, 2, ..., K$. Όλοι οι παράγοντες κινδύνου αντιπροσωπεύουν τις μη αναμενόμενες κινήσεις των διαβρωτικών οικονομικών δυνάμεων και έχουν αναμενόμενη τιμή ίση με το μηδέν δηλαδή $E(f_{kt}) = 0$. ε_{it} το κανονικά κατανεμημένο τυχαίο σφάλμα χρόνου t που μετράει την υπολειπόμενη απόδοση ενός τίτλου i στην περίοδο t και ισχύει ότι $E(\varepsilon_{it}) = 0$, $E(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) = 0$ για όλα τα $i \neq j$ και $E(\varepsilon_{it} f_{kt}) = 0$

Η εκ των υστέρων απόδοση ενός συναλλασσόμενου αξιόγραφου μπορεί να διασπαστεί σε δύο συνιστώσες. Πρώτη συνιστώσα είναι η απαιτούμενη ή η αναμενόμενη απόδοση $E(R_{it})$, που αποτελεί το ποσό που οι κάτοχοι των μετοχών προσδοκούν ή προβλέπουν. Εκφράζει το σύνολο των πληροφοριών που σχετίζονται με τον τίτλο και έχουν στη διάθεση τους οι επενδυτές. Η *αβέβαιη ή με κίνδυνο απόδοση* U_{it} εκφράζει το ποσό που προκύπτει από μη προσδοκώμενες πληροφορίες. Έτσι οι πραγματικές επιστροφές των αξιόγραφων δίνεται από τον τύπο:

(3.2) $$R_{it} = E(R_{it}) + U_{it}$$

Εφαρμόζοντας στον τύπο τη διάκριση μεταξύ συστηματικού και μη συστηματικού ρίσκου έχουμε:

(3.3) $$R_{it} = E(R_{it}) + S_{it} + \varepsilon_{it}$$

όπου S_{it} οι μη αναμενόμενες αποδόσεις του τίτλου i που παράγονται κατά τη χρονική περίοδο t ως αποτέλεσμα των *παραγόντων συστηματικού ρίσκου*. Όπου ε_{it} οι μη αναμενόμενες του τίτλου *i* που παράγονται κατά τη χρονική περίοδο *t* ως αποτέλεσμα των *παραγόντων μη συστηματικού ρίσκου* [30].

Τον πυρήνα του θεωρήματος APT αποτελεί η παραδοχή ότι μόνο λίγοι συστηματικοί παράγοντες επηρεάζουν μακροπρόθεσμα τη μέση απόδοση των χρηματοοικονομικών τίτλων [30]. Αυτή η παραδοχή δεν αρνείται την ύπαρξη αλληλένδετων δυνάμεων στις οποίες βασίζεται η πραγματική απόδοση των χρηματοοικονομικών τίτλων. Η απόδοση ενός συγκεκριμένου τίτλου μπορεί να έχει στατιστικά σημαντική ευαισθησία ως προς έναν αριθμό παραγόντων, ωστόσο το APT ορίζει ότι ελάχιστοι από αυτούς τους παράγοντες έχουν καθοριστική σημασία στην διαχείριση ενός χαρτοφυλακίου που περιέχει πολλούς τίτλους. Αυτές οι ευαισθησίες δεν μπορούν να διαφοροποιηθούν ανέξοδα και τιμολογούνται στο παρόν, δηλαδή οι επενδυτές απαιτούν ένα ασφάλιστρο (στη μορφή υψηλότερων αναμενόμενων αποδόσεων) έτσι ώστε να ανταπεξέλθουν σε αυτού του είδους τον κίνδυνο. Συνεπώς, το συστηματικό ποσό των μη αναμενόμενων αποδόσεων ενός τίτλου μπορεί να αποσυντεθεί στο άθροισμα ενός περιορισμένου αριθμού σημαντικών παραγόντων [30]:

$$S_{it} = \sum_{k=1}^{K} b_{ik} f_{kt} \tag{3.4}$$

Από τους τύπους (3.3) και (3.4) παράγεται ο (3.1) τύπος του APT. Ο τύπος (3.1) παρέχει μια απλοποιημένη μορφή της διαδικασίας παραγωγής αποδόσεων των υποκείμενων μετοχών. Μείζονος σημασίας στην κατασκευή του τύπου είναι η υπόθεση ότι $K < n$ και ότι οι σχέσεις μεταξύ των τιμολογημένων παραγόντων και των αποδόσεων μπορεί να απλοποιηθεί με μία γραμμική σχέση. Στον τύπο αυτό δεν υπάρχουν περιορισμοί για την σταθερά $E(R_{it})$ και έτσι δίνεται η δυνατότητα σε δύο τίτλους με πανομοιότυπες ευαισθησίες (b_{ik} s) να έχουν διαφορετικές αναμενόμενες αποδόσεις [1].

Σύμφωνα με το APT όλα τα χαρτοφυλάκια μπορούν να κατασκευαστούν από ένα σύνολο αξιόγραφων υπό την προϋπόθεση ότι ικανοποιούν τις εξής συνθήκες. Πρώτον δεν χρησιμοποιείται πλούτος και δεύτερον δεν υπάρχει κίνδυνος, καθώς επίσης δεν πρέπει να αποκτηθούν επιστροφές κατά μέσο όρο. Τα χαρτοφυλάκια που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες καλούνται *χαρτοφυλάκια βέβαιου κέρδους (arbitrage portfolios)* και για τα ποία ισχύει [1]:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 0 \tag{3.5}$$

όπου w_i η τιμή αγοράς που σταθμίζει τον τίτλο *i*.

Ο ισχυρισμός ότι ένα χαρτοφυλάκιο βέβαιου κέρδους δεν χρησιμοποιεί πλούτο βασίζεται στην υπόθεση ότι τα υπερτιμημένα αξιόγραφα πωλούνται με ανοιχτή πώληση έτσι ώστε να αποκτηθούν ταμειακές εισροές. Ένας εξισορροπητικός κερδοσκόπος αγοράζει πανομοιότυπα αξιόγραφα τα οποία είναι υποτιμημένα με τα έσοδα των πωλήσεων των υπερτιμημένων αξιόγραφων. Υποθέτουμε ότι όλα τα έσοδα από τις πωλήσεις επενδύονται ξανά για την αγορά νέων χρεογράφων. Όσον αφορά η δεύτερη συνθήκη ένα χαρτοφυλάκιο βέβαιου κέρδος είναι τέλεια αντισταθμισμένο ενάντια στους κινδύνους λόγω του ότι οποιοδήποτε κέρδος ή ζημία και έχουμε κατά την πώληση του πρώτου τίτλου θα αντισταθμίζεται με ακρίβεια από την αγορά του δεύτερου τίτλου. Αυτή η συνθήκη εκφράζεται μέσω της σχέσης [30]:

$$\sum_{k=1}^{K} w_i b_{ik} = 0 \tag{3.6}$$

Έτσι η συνθήκη η απόκτησης μη θετικών αναμενόμενων αποδόσεων δίνεται από τον τύπο [30]:

$$E(R_{pt}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \; E(R_{it}) = 0 \tag{3.7}$$

Ο λόγος για τον όποιο ένα χαρτοφυλάκιο που ικανοποιεί τους τύπους (3.5) και (3.6) δεν μπορεί να έχει θετικές αποδόσεις έγκειται στο νόμο της μίας τιμής. Εάν υπάρχουν ευκαιρίες βέβαιου κέρδος, τότε η έγκαιρη δράση των εξισορροπητικών κερδοσκόπων θα επηρεάσει το επίπεδο της τιμής, καθώς η τιμή των υποτιμημένων αξιόγραφων θα αυξηθεί και των υπερτιμημένων θα μειωθεί. Δύο χαρτοφυλάκια με την ίδια ευαισθησία σε κάθε ένα συστηματικό παράγοντα, έχουν σχεδόν τις ίδιες ιδιότητες και έτσι θα πρέπει να προσφέρουν στους επενδυτές την ίδια αναμενόμενη τιμή [30].

Για να υπάρχουν ευκαιρίες βέβαιου κέρδους πρέπει όλοι οι κίνδυνοι που προκύπτουν από τους παράγοντες να απομακρυνθούν από το χαρτοφυλάκιο. Στο πρωτότυπο έγγραφο του ο Ross (1976) [43] επικαλέστηκε το *νόμο των μεγάλων αριθμών* για να απομακρύνει αυτούς τους κινδύνους. Υπάρχουν ποικίλες παραλλαγές του θεωρήματος του APT, και η κύρια διαφορά τους συνίσταται στον μηχανισμό που χρησιμοποιούν για να διασφαλίζουν ότι $\varepsilon_{it} = 0$.

Το βέβαιο κέρδος στο μοντέλο APT προέρχεται χρησιμοποιώντας την απλή απόδειξη στην οποία από τον τύπο (3.1), χρησιμοποιώντας την συνθήκη απουσίας βέβαιου κέρδους καταλήγουμε στον τύπο [33]:

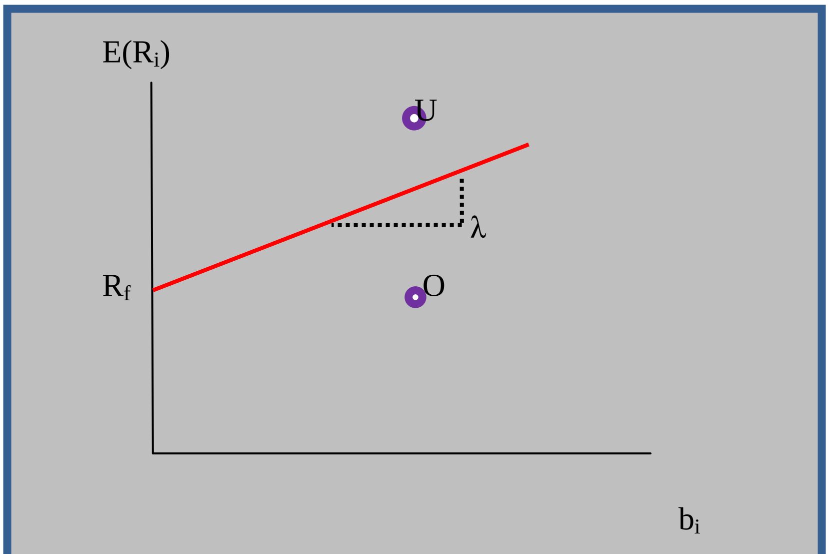
$$E(R_{it}) = \lambda_{0t} + \sum_{\kappa=1}^{K} b_{ik}\lambda_k \tag{3.8}$$

Το λ_{0t} είναι η απόδοση ενός τίτλου που έχει μηδενική ευαισθησία σε όλους τους παράγοντες δηλαδή ισχύει $b_{i1} = 0, \ldots, b_{ik} = 0$ και το λ_k εκφράζει το ασφάλιστρο κινδύνου που απαιτείται έτσι ώστε οι επενδυτές να φέρουν μία μονάδα ευαισθησίας στον παράγοντα k. Κάθε παράγοντας εκφράζει μία ανεξάρτητη πηγή κινδύνου που δεν μπορεί να αφαιρεθεί από το μοντέλο. Η αναμενόμενη ή η απαιτούμενη απόδοση ενός αξιόγραφου είναι ίση με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου συν την αποζημίωση για κάθε τύπο μη διαφοροποιημένου κινδύνου που φέρει το αξιόγραφο. Αντικαθιστώντας το $E(R_{it})$ από τον βασικό τύπο (3.8) του APT στον τύπο (3.1) παίρνουμε τον τύπο που οι Berry, Burmeister και McElroy (1988)[33]αποκαλούν *ολοκληρωμένο APT*:

$$(3.9) \qquad R_{it} = \lambda_{0t} + \sum_{\kappa=1}^{K} b_{ik}\lambda_{\kappa} + \sum_{k=1}^{K} b_{ik} f_{kt} + \varepsilon_{it}$$

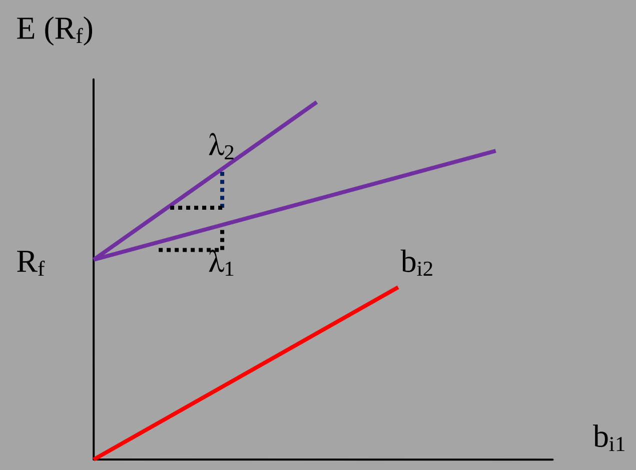
3.3.1 Γραφική Αναπαράσταση APT

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα η κλίση της ευθείας της τιμολόγησης μέσω βέβαιου κέρδους μας δίνει το ασφάλιστρο κινδύνου που σχετίζεται με τον συγκεκριμένο παράγοντα και η τομή της με τον άξονα *ψ* είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου R_f. Όλα τα αξιόγραφα εμπίπτουν στην ευθεία αυτή λόγω της απουσίας ευκαιριών βέβαιου κέρδους. Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε ένα υπερτιμημένο χρεόγραφο *O* και ένα υποτιμημένο χρεόγραφο *U*, αυτή η κατάσταση θα μπορούσε να αξιοποιηθεί από έναν επενδυτή που κρατά ένα χαρτοφυλάκιο βέβαιου κέρδους με τον ακόλουθο τρόπο. Θα πουλούσε το αξιόγραφο *O* και ταυτόχρονα θα αγόραζε μία θέση αγοράς του *U* ίσης νομισματικής αξίας. Αυτή η στρατηγική θα έχει ως αποτέλεσμα οι τιμές και των δύο αξιόγραφων να επιστρέψουν στην ισορροπία, δηλαδή γραφικά να εμπέσουν στην ευθεία τιμολόγησης μέσω βέβαιου κέρδους.



Διάγραμμα 3:1 Τιμολόγηση βέβαιου κέρδους με έναν παράγοντα

Η γραφική αυτή απεικόνιση απεικονίζει την ευθεία τιμολόγησης μέσω βέβαιου κέρδους ενός μόνο παράγοντα. Το αντίστοιχο διάγραμμα πολλών παραγόντων ακολουθεί παρόμοιο μοτίβο. Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται η περίπτωση μοντέλου με δύο παράγοντες. Η ευαισθησία των αποδόσεων των *i* τίτλων στους παράγοντες 1 και 2 παρουσιάζονται ως b_{i1} και b_{i2}:



Διάγραμμα 3:2 Τιμολόγηση βέβαιου κέρδους με δύο παράγοντες

3.3.2 Μηχανισμοί Arbitrage

Στο γενικό πλαίσιο του APT, το βέβαιο κέρδος επιτυγχάνεται με την συναλλαγή δύο τίτλων – με τον ένα τουλάχιστον να είναι λανθασμένα τιμολογημένος. Ένας εξισορροπητικός κερδοσκόπος πουλάει τον τίτλο που είναι πιο ακριβός και χρησιμοποιεί τα έσοδα από την πώληση για να αγοράσει έναν τίτλο που έχει χαμηλή τιμή.

Υπό τους όρους του APT, ένας τίτλος είναι λανθασμένα τιμολογημένος όταν η τρέχουσα τιμή του αποκλίνει από την προβλεπόμενη τιμή του μοντέλου [33]. Η τρέχουσα τιμή του τίτλου πρέπει να ισούται με το άθροισμα όλων των μελλοντικών χρηματοροών προεξοφλημένων με το επιτόκιο του APT, όπου οι αναμενόμενες αποδόσεις του τίτλου είναι μία γραμμική συνάρτηση από πολλούς παράγοντες και η ευαισθησία του κάθε παράγοντα στις αλλαγές παρουσιάζεται από έναν συγκεκριμένο παράγοντα που ονομάζεται συντελεστής beta [33].

Ένας σωστά τιμολογημένος τίτλος συνήθως είναι ένας συνθετικός τίτλος- δηλαδή έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από σωστά τιμολογημένους τίτλους. Το χαρτοφυλάκιο αυτό έχει την ίδια έκθεση σε κάθε έναν μακροοικονομικό παράγοντα, όπως ο λανθασμένα τιμολογημένος τίτλος. Ένας εξισορροπητικός κερδοσκόπος δημιουργεί ένα χαρτοφυλάκιο με τον προσδιορισμό σωστά τιμολογημένων τίτλων και εκτελεί τη στάθμιση των τίτλων έτσι ώστε ο συντελεστής beta να είναι ανά παράγοντα ίδιος για τους λανθασμένα τιμολογημένους τίτλους [33].

Όταν ένας επενδυτής αγοράζει τον τίτλο και πουλάει το χαρτοφυλάκιο (και αντιστρόφως) δημιουργεί μία θέση η οποία έχει θετική αναμενόμενη απόδοση (που είναι η διαφορά μεταξύ της απόδοσης του τίτλου και του χαρτοφυλακίου) και μηδενική έκθεση σε οποιονδήποτε μακροοικονομικό παράγοντα, δηλαδή δεν εμπεριέχει κανέναν κίνδυνο. Ο εξισορροπητικός κερδοσκόπος που κατέχει τέτοια θέση αποκτά κέρδος χωρίς την ανάληψη κινδύνου όταν [33]:

- Η τρέχουσα τιμή είναι πολύ χαμηλή. Στο τέλος της περιόδου, το χαρτοφυλάκιο θα εκτιμηθεί μέσω του επιτοκίου που επιβάλει το APT, ενώ ο λανθασμένα τιμολογημένος τίτλος θα εκτιμηθεί με *μεγαλύτερο* επιτόκιο. Έτσι, ο επενδυτής πρέπει να κάνει ανοιχτή πώληση του χαρτοφυλακίου και να αγοράσει τον λανθασμένα τιμολογημένο τίτλο από τα έσοδα. Έπειτα στο τέλος της περιόδου, θα πουλήσει τον τίτλο και θα χρησιμοποιήσει τα έσοδα για να αγοράσει πίσω το χαρτοφυλάκιο αποταμιεύοντας τη διαφορά.
- Η τρέχουσα τιμή είναι πολύ υψηλή. Στο τέλος της περιόδου το χαρτοφυλάκιο θα εκτιμηθεί μέσω του επιτοκίου που επιβάλει το APT, ενώ ο λανθασμένα τιμολογημένος τίτλος θα εκτιμηθεί με *χαμηλότερο* επιτόκιο. Έτσι, ο επενδυτής πρέπει να κάνει ανοιχτή πώληση του λανθασμένα τιμολογημένου τίτλου και με τα έσοδα από την πώληση να αγοράσει το χαρτοφυλάκιο. Έπειτα, στο τέλος της περιόδου πρέπει να πουλήσει το χαρτοφυλάκιο και να χρησιμοποιήσει τα έσοδα για την αγορά του τίτλου, αποταμιεύοντας τη διαφορά.

3.3.3 Ταυτότητα Παραγόντων APT

Το μοντέλο APT δεν μας αποκαλύπτει την ταυτότητα των τιμολογημένων παραγόντων που χρησιμοποιεί. Ο αριθμός και η φύση των παραγόντων αλλάζουν στον χρόνο και μεταξύ των οικονομιών, αυτό έχει ως αποτέλεσμα το ζήτημα αυτό να είναι σημαντικά εμπειρικό ως προς τη φύση του. Ωστόσο, υπάρχουν κάποιοι a priori κανόνες ως προς τα απαιτούμενα χαρακτηριστικά πιθανών παραγόντων του θεωρήματος. Τα χαρακτηριστικά που πρέπει να πληρούνται από υποψήφιους παράγοντες είναι ότι πρέπει να αντιπροσωπεύουν τις μη αναμενόμενες κινήσεις και τις μη διαφοροποιημένες επιρροές [30]. Ταυτόχρονα, για πρακτικούς λόγους πρέπει να περιέχουν επαρκείς και ακριβείς πληροφορίες για τις μεταβλητές, ενώ οι μεταβλητές πρέπει να δικαιολογούνται από την οικονομική θεωρία (Berry, Sharpe & McElroy) [33].

Οι συντελεστές beta προσδιορίζονται μέσω γραμμικής παλινδρόμησης των ιστορικών δεδομένων από τις επιστροφές των αξιόγραφων. Το θεώρημα APT δεν αποκαλύπτει την ταυτότητα των τιμολογημένων παραγόντων του, καθώς η φύση και ο αριθμός τους αλλάζει στον χρόνο και μεταξύ των οικονομιών. Μερικές κατευθυντήριες γραμμές για τα απαιτούμενα χαρακτηριστικά πιθανών παραγόντων είναι τα εξής:

- Η επιρροή τους στις τιμές των τίτλων πρέπει να υποδηλώνεται μέσω των μη αναμενόμενων κινήσεων τους.
- Πρέπει να αντιπροσωπεύουν μη διαφοροποιημένες επιρροές.
- Ακριβείς και έγκυρες πληροφορίες, για αυτές τις μεταβλητές, είναι απαιτούμενες.
- Η σχέση τους με το μοντέλο πρέπει να δικαιολογείται από την οικονομική θεωρία.

Δεν υπάρχει σωστό σύνολο παραγόντων, καθώς υπάρχουν ποικίλα σύνολα παραγόντων που δίνουν ισοδύναμα εμπειρικά αποτελέσματα. Η επιλογή ενός συνόλου σωστών παραγόντων μπορεί να γίνει με εμπειρική βάση, αφού οι παράγοντες πρέπει να επεξηγούν επαρκώς τις αποδόσεις των αξιόγραφων και να ικανοποιούν τις στατιστικές δοκιμές που είναι απαραίτητες για να καταστήσουν το APT έγκυρο. Ένας τρόπος προσδιορισμού του εάν οι υποψήφιοι παράγοντες ικανοποιούν την οικονομική θεωρία, είναι το *μοντέλο προεξόφλησης μερισμάτων Gordon-Shapiro*[52]:

$$S_0 = \frac{D_1}{k - g}$$

όπου S_0 είναι η τιμή της μετοχής στον χρόνο t = 0, D_1 είναι το αναμενόμενο μέρισμα στον χρόνο $t = 1 = D_0 (1 + g)$, k είναι το κατάλληλο επιτόκιο προεξόφλησης, g το αναμενόμενο σταθερό ποσοστό αύξησης των μερισμάτων, όπου $g < k$.

Οποιαδήποτε μεταβλητή επηρεάζει το μέγεθος των D_0, k, g χρησιμοποιείται σαν εργαλείο επεξήγησης των επιπέδων της τιμής. Το επίπεδο των μερισμάτων σχετίζεται με τα μέτρα μεγέθους των τρεχόντων εσόδων.

3.4 Μοντέλο Black & Scholes

Μέσω του μοντέλου Black & Scholes και υπό την προϋπόθεση ότι η αξία του αξιόγραφου εξελίσσεται σύμφωνα με μία γεωμετρική κίνηση Brown, υπολογίζεται η μοναδική τιμή ενός δικαιώματος αγοράς που *δεν οδηγεί σε βέβαιο κέρδος* [52].

Έστω ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης *T*, έχουμε συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο r και η τρέχουσα αξία του αξιόγραφου ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown, με μεταβλητότητα σ και παράμετρο μετατόπισης *μ*. Έχοντας αυτά τα δεδομένα, ακολουθούμε τα εξής βήματα για να υπολογίσουμε τη μοναδική τιμή του δικαιώματος που δεν οδηγεί σε βέβαιο κέρδος [52].

Έστω S_t η αξία του αξιόγραφου τη χρονική στιγμή t, επειδή ισχύει ότι η S_t με $0\leq t\leq T$ ακολουθεί κίνηση Brown, η προσέγγιση του μοντέλου για n-περιόδους υποθέτει ότι η αξία μεταβάλλεται κατά $T/_n$ μονάδες χρόνου. Ουσιαστικά η καινούργια αξία προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της παλιάς [21]:

είτε με τον παράγοντα $u = e^{\sigma\sqrt{T/n}}$ με πιθανότητα ίση με $p = 1/_2\left(1 + \frac{\mu\sqrt{T/n}}{\sigma}\right)$

είτε με τον παράγοντα $d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}}$ με πιθανότητα ίση με $p = 1/_2\left(1 - \frac{\mu\sqrt{T/n}}{\sigma}\right)$

Είναι φανερό ότι η προσέγγιση του μοντέλου για n-περιόδους είναι ένα διωνυμικό μοντέλο n-περιόδων, κατά το οποίο η αξία σε κάθε χρονική στιγμή $T/_n$ είτε μειώνεται κατά τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα d είτε αυξάνεται κατά τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα u.

Εάν ισχύει $X_i =$
$$\begin{cases} 1, & \text{αν } S_{iT/n} = uS_{(i-1)T/n} \\ 0, & \text{αν } S_{iT/n} = dS_{(i-1)T/n} \end{cases}$$

από το κεφάλαιο 2 και την αναφορά μας στο διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων προκύπτει ότι για να είναι όλα τα στοιχήματα που αφορούν την αγορά του αξιόγραφου ιδανικά, πρέπει να ισχύει ο νόμος πιθανοτήτων όπου οι X_i είναι ανεξάρτητες και ισχύει ότι:

$$p \equiv P\{X_i = 1\} = \frac{1 + \frac{rT}{n} - d}{u - d} = \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{T/n}} + \frac{rT}{n}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}$$

Με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor γύρω από το 0 της e^{X} παίρνουμε ότι:

$$e^{-\sigma\sqrt{T/n}} \approx 1 - \sigma\sqrt{T/_n} + \sigma^2 T/_{2n}$$

$$e^{\sigma\sqrt{T/n}} \approx 1 + \sigma\sqrt{T/_n} + \sigma^2 T/_{2n}$$

Συνεπώς το p παίρνει τη μορφή:

$$p \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{T/n}\right)$$

Καταλήγουμε ότι οι μοναδικές ουδέτερες προς τον κίνδυνο πιθανότητες για το προσεγγιστικό μοντέλο n-περιόδων, στηρίζονται στην αρχική μας υπόθεση ότι η αξία του αξιόγραφου είτε μειώνεται κατά παράγοντα d με πιθανότητα *1-p* είτε αυξάνεται κατά u με πιθανότητα p.

Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι όσο το n→ ∞, ο νόμος των ουδέτερων ως προς τον κίνδυνο πιθανοτήτων προσεγγίζει μια γεωμετρική κίνηση Brown με παράμετρο μετατόπισης $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ και με μεταβλητότητα *σ*. Έτσι το μοντέλο προσέγγισης, όσο το n μεγαλώνει τόσο προσεγγίζει την άνωθεν κίνηση Brown και έτσι αυτή η ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο γεωμετρική κίνηση Brown είναι ο μοναδικός νόμος πιθανοτήτων που καθιστά όλες τις επενδυτικές στρατηγικές ιδανικά στοιχήματα κατά την χρονική εξέλιξη της αξίας του χρεογράφου. Μέσω του θεωρήματος του βέβαιου κέρδους συνεπάγεται ότι είτε τα δικαιώματα θα τιμολογηθούν έτσι ώστε να ισοδυναμούν με ιδανικά στοιχήματα (σύμφωνα με το νόμο πιθανοτήτων ουδέτερου κινδύνου) είτε θα υπάρχει βέβαιο κέρδος [52].

Η γεωμετρική κίνηση Brown υπό ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες, μας δίνει ότι η $\frac{S_T}{S_0}$ είναι λογαριθμοκανονική τυχαία μεταβλητή με διακύμανση $\sigma^2 t$ και μέση τιμή $r - \frac{\sigma^2}{2}$. Εν κατακλείδι, η μοναδική τιμή *C υπό συνθήκες απουσίας βέβαιου κέρδους* τη χρονική στιγμή *t* για τιμή εξάσκησης *K* είναι η:

$$C = e^{-rT}E[(S_T - K)^+] = e^{-rt}E[(S_0 e^w - K)^+]$$

όπου w είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή με τις ιδιότητες ότι η διακύμανση της ισούται με $\sigma^2 T$ και η μέση τιμή της με $r - \frac{\sigma^2}{2}$. Η ακόλουθη έκφραση είναι γνωστή ως *μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων Black & Scholes*:

$$C = S_0\,\Phi(\omega) - Ke^{-rT}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{T})$$

όπου $\omega = \frac{rT + \frac{\sigma^2 T}{2} - \log\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$ και όπου *Φ(χ)* είναι η τυπική κανονική συνάρτηση κατανομής.

Παράδειγμα 3.3

Έστω ότι η τρέχουσα τιμή ενός αξιόγραφου είναι €40 με ετήσια μεταβλητότητα 30% και ετήσιο επιτόκιο 7%. Για να βρούμε την τιμή υπό συνθήκες απουσίας βέβαιου κέρδους ενός δικαιώματος που λήγει σε 4 μήνες με τιμή εξάσκησης €44 ακολουθούμε τα εξής βήματα. Αρχικά τυποποιούμε τις παραμέτρους και έχουμε $S_0 = 40$, $K = 44$, $r = 0{,}07$, $\sigma = 0{,}3$ και $T = 0{,}333$. Έπειτα υπολογίζουμε το:

$$\omega = \frac{0{,}07 \times 0{,}333 + 0{,}0149 - \log 1{,}1}{0{,}3 \times 0{,}5770} = -0{,}3298$$

Άρα η τιμή του δικαιώματος υπό απουσία βέβαιου κέρδους ισούται με

$$C = 40\Phi(-0{,}3298) - 44e^{-0{,}023}\Phi(-0{,}3298) = 0.2835.$$

Παρατήρηση 3.3

Από τη σχέση ισοτιμίας δικαιωμάτων πώλησης-αγοράς που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο προκύπτει ότι η τιμή υπό συνθήκες απουσίας βέβαιου κέρδους ενός Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος πώλησης με =αρχική τιμή S, τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T, είναι η $P(S,T,K) = C(S,T,K) + Ke^{-rT} - S$, όπου $C(S,T,K)$ η τιμή ενός Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος αγοράς επί του ίδιου τίτλου που δεν οδηγεί σε βέβαιο κέρδος.

3.5 Μοντέλο Black & Scholes για Ευρωπαϊκού Τύπου Δικαιώματα

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε το μοντέλο Black & Scholes για Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Αρχικά θα παρουσιάσουμε τις απαιτούμενες υποθέσεις για την λειτουργία του μοντέλου [4, 25]:

- Οι συνεχώς ανατοκιζόμενες αποδόσεις επί της μετοχής είναι κανονικά κατανεμημένες και ανεξάρτητες κατά τη διάρκεια του χρόνου.
- Η μεταβλητότητα των συνεχώς ανατοκιζόμενων αποδόσεων είναι σταθερή και γνωστή.
- Τα μελλοντικά μερίσματα είναι γνωστά.
- Το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο είναι γνωστό και σταθερό.
- Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής και φόροι.
- Η ανοιχτή πώληση επιτρέπεται και δεν κοστίζει.
- Ο δανεισμός γίνεται με επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Έστω X μία τυποποιημένη κανονική τυχαία μεταβλητή και η κατανομή του X είναι κανονική με μέσο 0 και τυπική απόκλιση 1. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του X δίνεται από τον τύπο $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Έστω *N(x)* η αθροιστική συνάρτηση κανονικής κατανομής η οποία ισούται με $N(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Η *N(x)* είναι η περιοχή υπό της τυπικής κανονικής καμπύλης στα αριστερά του x. Για να την υπολογίσουμε συνήθως χρησιμοποιούμε τους πίνακες με τα δεδομένα της τυπικής κανονικής κατανομής ή υπολογιστικά προγράμματα όπως το Excel.

Παράδειγμα 3.4

Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει *N(x) + N(–x) = 1*. Αρχικά γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση *N'(x) = f(x)* είναι άρτια και έτσι ισχύει *N'(–x) = N'(x)* για όλους τους πραγματικούς τους αριθμούς. Ολοκληρώνοντας και τις δύο πλευρές παίρνουμε *N(x) = – N(–x) +C*. Θέτουμε *x = 0* και βρίσκουμε *C = 2N(0) = 2(0,5) = 1*. Συνεπώς καταλήγουμε στο ζητούμενο.

3.5.1 Μοντέλο Black & Scholes για Ευρωπαϊκά Δικαιώματα Αγοράς

Η τιμή ενός Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος αγοράς επί μιας μετοχής που πληρώνει συνεχή μερίσματα, δίνεται από τον τύπο [2, 15]:

$$C(S_t, K, \sigma, r, T-t, \delta) = S_t e^{-\delta(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

όπου d_1 και d_2:

$$d_1 = \frac{\ln\left({S_t}/{K}\right) + (r - \delta + 0{,}5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left({S_t}/{K}\right) + (r - \delta - 0{,}5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

όπου S_t η τιμή της μετοχής στον χρόνο t, K η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης, r το ετήσιο συνεχώς ανατοκιζόμενο μηδενικού κινδύνου επιτόκιο, T ο χρόνος μέχρι τη λήξη, σ η ετήσια τυπική απόκλιση του δείκτη απόδοσης της μετοχής ή η προπληρωμένη forward price της μεταβλητότητας και δ η ετήσια συνεχώς ανατοκιζόμενη μερισματική απόδοση.

Παράδειγμα 3.5

Έστω μία μετοχή με τρέχουσα τιμή €45, η οποία δεν πληρώνει μερίσματα και ένα δικαίωμα αγοράς επί μετοχών με τιμή εξάσκησης €44 και λήξη σε 3 μήνες. Η ετήσια μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής είναι 40% και το συνεχώς ανατοκιζόμενο χωρίς κίνδυνο επιτόκιο είναι 9%. Για να βρούμε την τιμή Black & Scholes του δικαιώματος αγοράς, αρχικά υπολογίζουμε τα $N(d_1)$ και $N(d_2)$.

$$N(d_1) = N\left(\frac{\ln\left({S_t}/{K}\right) + (r - \delta + 0{,}5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$= N\left(\frac{\ln\left({45}/{44}\right) + (0{,}09 - 0 + 0{,}5 \times 0{,}4^2) \times 0{,}25}{0{,}4\sqrt{0{,}25}}\right)$$

$$= N(0{,}324864279) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0{,}324864279} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0{,}627356$$

$$N(d_2) = \left(\frac{\ln\left({S_t}/{K}\right) + (r - \delta - 0{,}5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$= N\left(\frac{\ln\left({45}/{44}\right) + (0{,}09 - 0 - 0{,}5 \times 0{,}4^2) \times 0{,}25}{0{,}4\sqrt{0{,}25}}\right) = N(0{,}124864279)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0{,}124864279} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0{,}549682$$

Άρα η τιμή του δικαιώματος αγοράς ισούται με:

$$C(S_t, K, \sigma, r, T-t, \delta) = C(45{,}44{,}0.4{,}0.09{,}0.25{,}0) = S_t e^{-\delta(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$= 45 \times e^0 \times 0{,}627356 - 44 e^{-0{,}09(0{,}25)} \times 0{,}549682 = €4{,}583121$$

3.5.2 Μοντέλο Black & Scholes για Ευρωπαϊκά Δικαιώματα Πώλησης

Η τιμή ενός Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος πώλησης επί μιας μετοχής που πληρώνει συνεχή μερίσματα, δίνεται από τον τύπο [2, 15]:

$$P(S_t, K, \sigma, r, T-t, \delta) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t e^{-\delta(T-t)} N(-d_1)$$

Πρόταση 3.3

Ο τύπος των Black & Scholes για τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης ικανοποιεί τη σχέση ισοτιμίας αγοράς-πώλησης.

Απόδειξη:

Παίρνουμε τη σχέση και με πράξεις το αποδεικνύουμε:

$$
\begin{aligned}
C(S_t,K,\sigma,r,T-t,\delta) - P(S_t,K,\sigma,r,T-t,\delta) \\
&= S_t e^{-\delta(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) \\
&+ S_t e^{-\delta(T-t)}N(-d_1) \\
&= S_t e^{-\delta(T-t)}[N(d_1)+N(-d_1)] - Ke^{-r(T-t)}[N(d_2)+N(-d_2)] \\
&= S_t e^{-\delta(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 3.6

Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης επί μιας μετοχής για το οποίο ισχύουν: η τιμή της μετοχής είναι €120, η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος είναι σε 6 μήνες, *δ = 0,2*, *σ = 0,4*, η τιμή άσκησης είναι €118 και το συνεχώς ανατοκιζόμενο χωρίς κίνδυνο επιτόκιο είναι *r = 6%*.Για να υπολογίσουμε την τιμή του δικαιώματος μέσω του μοντέλου Black & Scholes ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Στον χρόνο t = 0 έχουμε:

$$
\begin{aligned}
N(-d_1) &= N\left(\frac{\ln\left({S_t}/{K}\right) + (r-\delta+0{,}5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= N\left(\frac{\ln\left({120}/{118}\right) + (0{,}06-0{,}02+0{,}5\times 0{,}4^2)\times 0.5}{0{,}4\sqrt{0{,}5}}\right) \\
&= N(-0{,}206487) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-0{,}206487} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0{,}418207
\end{aligned}
$$

$$
N(-d_2) = N\left(-d_1+\sigma\sqrt{T}\right) = N(0{,}0763557) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0{,}0763557} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx
$$

$$
= 0{,}530433
$$

Τέλος, αντικαθιστώντας στον τύπο παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
P(S_t,K,\sigma,r,T-t,\delta) &= P(120, 118, 0.4, 0.06, 0.5, 0.02) \\
&= 118\times e^{-0{,}06\times 0{,}5}\times 0{,}530433 - 120e^{-0{,}02\times 0{,}5}\times 0{,}418207 \\
&= €11{,}055.
\end{aligned}
$$

3.6 Εφαρμογή Μοντέλου Black & Scholes Σε Άλλα Δικαιώματα

Σε αυτή την ενότητα θα προσαρμόσουμε το μοντέλο Black & Scholes σε δικαιώματα που έχουν ως υποκείμενους τίτλους μετοχές που πληρώνουν διακριτά μερίσματα, συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και συμβόλαια συναλλάγματος [2, 15].

Για τον χρόνο *t= 0* έχουμε $d_1 = \frac{\ln\frac{Se^{-\delta T}}{Ke^{-rT}} + 0,5\,\sigma^2\,T}{\sigma\sqrt{T}}$, όπου $Se^{-\delta T}$ είναι η προπληρωμένη προθεσμιακή τιμή της μετοχής και όπου Ke^{-rT} η προπληρωμένη προθεσμιακή τιμή εξάσκησης. Έτσι έχουμε ότι:

$$d_1 = \frac{\ln\frac{F_{0,T}^P(S)}{F_{0,T}^P(K)} + \ 0,5\,\sigma^2\,T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Ο τύπος των Black & Scholes για προπληρωμένες προθεσμιακές τιμές ενός δικαιώματος αγοράς είναι [25]:

$$C\left(F_{0,T}^P(S), F_{0,T}^P(K)\,, \sigma, T\right) = F_{0,T}^P(S)N(d_1) - F_{0,T}^P(K)N(d_2)$$

και ενός δικαιώματος πώλησης είναι:

$$P\left(F_{0,T}^P(S), F_{0,T}^P(K)\,, \sigma, T\right) = F_{0,T}^P(K)N(-d_2) - F_{0,T}^P(S)N(-d_1)$$

Οι τύποι αυτοί εφαρμόζονται σε δικαιώματα που έχουν ως υποκείμενους τίτλους μετοχές που πληρώνουν διακριτά μερίσματα, συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και συμβόλαια συναλλάγματος. Υπενθυμίζουμε ότι η σχέση ισοτιμίας αγοράς πώλησης μας δίνει τον τύπο:

$$C\left(F_{0,T}^P(S), F_{0,T}^P(K)\,, \sigma, T\right) - P\left(F_{0,T}^P(S), F_{0,T}^P(K)\,, \sigma, T\right) = \ Se^{-\delta T} - Ke^{-rT}$$

Παράδειγμα 3.7

Έστω ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς επί μιας μετοχής που δεν πληρώνει μερίσματα, με ημερομηνία λήξης *T* και τιμή εξάσκησης $S(0)e^{rT}$, όπου *r* το συνεχώς ανατοκιζόμενο μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Όπου *S(0) = €100, T = 11* και *Var [ln S(t)] = 0,4t*. Για να υπολογίσουμε την τιμή του δικαιώματος αγοράς, αρχικά βρίσκουμε τη μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής:

$$\sigma_t^2 = Var\left[\ln\left({}^{S_t}\!/_{S_0}\right)\right] == Var[\ln S_t] = 0,4t$$

Έτσι $\sigma = \sigma_1 = \sqrt{0,4}$. Επίσης έχουμε $Var[\ln S_t] - Var[\ln 100]$ε

$$d_1 = \frac{\ln\frac{F_{0,T}^P(S)}{F_{0,T}^P(K)} + 0{,}5\,\sigma^2\,T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(100/_{100}\right) + 0{,}5 \times 0{,}4 \times 10}{2} = 1$$

και $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 1 - 2 = -1$

Επιπλέον: $N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0{,}8413$ και $N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0{,}1586$

Τότε η Black & Scholes τιμή του δικαιώματος αγοράς ισούται με”

$C\left(F_{0,T}^P(S), F_{0,T}^P(K), \sigma, T\right) = F_{0,T}^P(S)N(d_1) - F_{0,T}^P(K)N(d_2) = 100 \times 0{,}8413 - 100 \times 0{,}1586 = €68{,}2.$

Σε περίπτωση που ο υποκείμενος τίτλος είναι *μετοχή που πληρώνει διακριτά μερίσματα*, τότε η προπληρωμένη προθεσμιακή τιμή είναι $F_{0,T}^P(S) = S_0 - PV_{0,T}(Div)$.

Παράδειγμα 3.8

Έστω μετοχή που πληρώνει μερίσματα των €50 σε δύο έτη και €42 σε έξι έτη. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι €250 , το ετήσιο συνεχώς ανατοκιζόμενο μηδενικού κινδύνου επιτόκιο είναι 6% και η ετήσια μεταβλητότητα της τιμής που ικανοποιεί την εξίσωση Black & Scholes είναι 40%. Τέλος, η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς είναι €271 και λήγει σε 8 έτη. Για να υπολογίσουμε την Black & Scholes τιμή ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Αρχικά βρίσκουμε την προπληρωμένη προθεσμιακή τιμή της μετοχής είναι:

$$F_{0,T}^P(S) = S_0 - PV_{0,T}(Div) = 250 - 50e^{-0{,}06\times 2} - 42e^{-0{,}06\times 6} = €176{,}3516$$

Η προπληρωμένη προθεσμιακή τιμή εξάσκησης είναι:

$$F_{0,T}^P(K) = Ke^{-rT} = 271e^{-0{,}06\times 8} = €167.6902$$

Έπειτα υπολογίζουμε τα d_1, d_2:

$$d_1 = \frac{\ln\frac{F_{0,T}^P(S)}{F_{0,T}^P(K)} + 0{,}5\,\sigma^2\,T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(176{,}3516/_{167.6902}\right) + 0{,}5 \times 0{,}4^2 \times 8}{0{,}4\sqrt{8}} = 0{,}6101$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0{,}6101 - 0{,}4\sqrt{8} = -0{,}5212$$

Έτσι, $N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0{,}6101} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0{,}7291$ και $N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-0{,}5212} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0{,}3011$

Τέλος, η Black & Scholes τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι:

$C\left(F_{0,T}^{P}(S), F_{0,T}^{P}(K), \sigma, T\right) = F_{0,T}^{P}(S)N(d_1) - F_{0,T}^{P}(K)N(d_2) = 176{,}3516 \times 0{,}7291 - 167.6902 \times 0{,}3011 = €78{,}0864.$

3.6.1 Black & Scholes Σε Δικαιώματα Επί Συναλλάγματος

Εάν ο υποκείμενος τίτλος είναι ένα ξένο συνάλλαγμα, τότε $F_{0,T}^{P}(x) = x_0 e^{-r_f T}$, όπου r_f είναι το επιτόκιο που αφορά το ξένο νόμισμα και x_0 είναι η τρέχουσα συναλλαγματική ισοτιμία. Σε αυτή την περίπτωση η τιμή Black & Scholes ενός δικαιώματος αγοράς δίνεται από τον τύπο [25]:

$$C\left(x_0, K, \sigma, r, T, r_f\right) = x_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

όπου $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x_0}{K}\right) + \left(r - r_f + 0{,}5\,\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ και $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. Οι τύποι αυτοί είναι γνωστοί ως ***Garman-Kohlhagan.***

Ο τύπος Black & Scholes για ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα πώλησης επί ενός συναλλάγματος είναι:

$$P\left(x_0, K, \sigma, r, T, r_f\right) = K e^{-rT} N(-d_2) - x_0 e^{-r_f T} N(-d_1).$$

Επίσης, τον τύπο αυτό μπορούμε να τον λάβουμε από τη σχέση ισοτιμίας αγοράς-πώλησης,$P\left(x_0, K, \sigma, r, T, r_f\right) = C\left(x_0, K, \sigma, r, T, r_f\right) + K e^{-rT} - x_0 e^{-r_f T}$

Παράδειγμα 3.9

Ένα ευρώ ανταλλάσσεται για \$0,89.Το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο εκφρασμένο σε δολάρια είναι 7% και εκφρασμένο σε ευρώ είναι 3,1%. Η μεταβλητότητα είναι 11%. Για να βρούμε την Black & Scholes τιμή ενός εκφρασμένου σε ευρώ δικαιώματος αγοράς ενός έτους με τιμή εξάσκησης \$0,86/, ακολουθούμε τον εξής τρόπο:

Υπολογίζουμε τα d_1, d_2:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x_0}{K}\right) + \left(r - r_f + 0{,}5\,\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{0{,}89}{0{,}86}\right) + \left(0{,}07 - 0{,}031 + 0{,}5 \times 0{,}11^2\right)}{0{,}11\sqrt{1}} = 0{,}7212$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0{,}7212 - 0{,}11 = 0{,}6112$$

Έπειτα βρίσκουμε τα $N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0{,}7212} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0{,}7646$ και $N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0{,}6112} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0{,}7294$

Η ζητούμενη τιμή είναι ίση με:

$C = x_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) = \left(0{,}89 e^{-0{,}031} \times 0{,}7646\right) - \left(0{,}86 e^{-0{,}07} \times 0{,}7294\right) =$ \$0,07484.

3.6.2 Black & Scholes Σε Δικαιώματα Επί ΣΜΕ

Η προπληρωμένη προθεσμιακή τιμή για ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης είναι ακριβώς η παρούσα αξία της τιμής του. Έστω F η τιμή του ΣΜΕ, έχουμε $F_{0,T}^{P}(F) = Fe^{-rT}$. Ο τύπος Black & Scholes για ένα δικαίωμα αγοράς είναι ο [25]:

$$C(F, K, \sigma, r, T, r) = Fe^{-rT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

όπου $$d_1 = \frac{\ln(F/K) + 0{,}5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

και $$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Η τιμή του δικαιώματος πώλησης δίνεται από τον τύπο:

$$P(F, K, \sigma, r, T, r) = Ke^{-rT}N(-d_2) - Fe^{-rT}N(-d_1)$$

επίσης τον τύπο αυτό μπορούμε να τον λάβουμε από τη σχέση ισοτιμίας αγοράς – πώλησης:

$$P(F, K, \sigma, r, T, r) = C(F, K, \sigma, r, T, r) + Ke^{-rT} - Fe^{-rT}$$

Παράδειγμα 3.10

Έστω ένα ενός έτους Ευρωπαϊκό δικαίωμα επί ενός ΣΜΕ που περιέχει εμπόρευμα χρυσού και κάθε γραμμάριο κοστίζει €480. Η ετήσια μεταβλητότητα της τιμής του ΣΜΕ είναι 30% και το συνεχώς ανατοκιζόμενο μηδενικού κινδύνου επιτόκιο είναι 6%. Για να βρούμε την τιμή Black & Scholes του δικαιώματος αγοράς και πώλησης με τιμή εξάσκησης €470 ακολουθούμε τα τα εξής βήματα.

Αρχικά βρίσκουμε τα d_1,d_2

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + 0{,}5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(480/470) + 0{,}5 \times 0{,}3^2}{0{,}25\sqrt{1}} = 0{,}2642$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0{,}2642 - 0{,}3 = -0{,}0358$$

Έπειτα υπολογίζουμε τα $N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0{,}2642} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0{,}6161$ και $N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-0{,}0358} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0{,}4857$

Άρα η τιμή του δικαιώματος αγοράς ισούται με

$$C = Fe^{-rT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) = 480e^{-0{,}06} \times 0{,}6161 - 470e^{-0{,}06} \times 0{,}4857 = €63{,}52$$

Η τιμή του δικαιώματος πώλησης ισούται με

$$P = C + Ke^{-rT} - Fe^{-rT} = €72{,}93.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

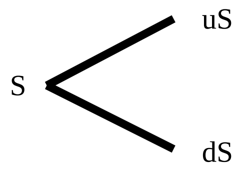
Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης μέσω Διωνυμικών Μοντέλων

Το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης διατυπώθηκε από τους Cox, Ross και Rubenstein το 1979 [10, 21]. Μέσω του μοντέλου αυτού, υπολογίζεται η χωρίς βέβαιο κέρδος (*no-arbitrage)* τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου έχει ακριβώς δύο παγιωμένες τιμές στο τέλος της περιόδου [56]. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται το Διωνυμικό μοντέλο και εφαρμόζεται στον υπολογισμό των τιμών Ευρωπαϊκών και Αμερικανικών δικαιωμάτων προαίρεσης σε μία ποικιλία από υποκείμενους τίτλους.

4.1 Διωνυμικό Μοντέλο Τιμολόγησης Ευρωπαϊκού Τύπου Δικαιωμάτων μίας Περιόδου: Προσέγγιση Ουδέτερου Κινδύνου

Σε αυτό το σημείο θα αναπτύξουμε το διωνυμικό μοντέλο μίας περιόδου για να τιμολογήσουμε μία αγορά δικαιώματος αγοράς. Υποθέτουμε ότι ο υποκείμενος τίτλος είναι ένα μερίδιο μίας μετοχής το οποίο πληρώνει συνεχώς μερίσματα καθώς και ότι δοθέντος μίας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου η τιμή της μετοχής θα κινηθεί είτε ανοδικά είτε καθοδικά. Καμία άλλη πορεία της τιμής της μετοχής δεν είναι αποδεκτή και με τον περιορισμό αυτό δικαιολογείται η εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου [32, 56].

Έστω h η διάρκεια μίας περιόδου και S η τιμή της μετοχής στην αρχή της περιόδου. Προσδιορίζουμε την ανοδική σχέση ως $u = 1 + g = \frac{S_h}{S}$, όπου g το ποσοστό κέρδους του κεφαλαίου και S_h η τιμή της μετοχής στο τέλος της περιόδου. Προσδιορίζουμε την καθοδική σχέση με $d = 1 + l = \frac{S_h}{S}$, όπου l το ποσοστό ζημίας του κεφαλαίου. Όταν η τιμή της μετοχής έχει ανοδική πορεία θα γράφουμε uS και όταν έχει καθοδική πορεία dS. Αυτές οι δύο προτάσεις μπορούν να περιγράφουν με ένα *διωνυμικό δέντρο* [32]:



Σχήμα 4.1

Παράδειγμα 4.1

Έστω S = 200 και η τιμή της μετοχής στο τέλος της περιόδου είναι 275, τότε g = $\frac{S_h}{S} - 1 = \frac{275}{200} - 1 = 37{,}5$ %. Έαν στο τέλος της περιόδου η τιμή της μετοχής πέσει στο 175 τοτε l = $\frac{S_h}{S}$ - 1 = $\frac{175}{200}$ – 1 = - 12,5% .

Έστω K η τιμή εξάσκησης ενός δικαιώματος αγοράς σε μία μετοχή που πληρώνει συνεχώς μερίσματα και λήγει στο τέλος της περιόδου, κατά τη διάρκεια της οποίας υπάρχει ανοδική πορεία στην τιμή του δικαιώματος αγοράς, υπολογίζεται μέσω του τύπου C_u = max $\{0, uS - K\}$ και σε περίπτωση καθοδικής πορείας μέσω του τύπου $C_d = max\ \{0, dS - K\}$. Έστω C η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης στην αρχή της περιόδου και r το ανατοκισμένο μηδενικού κινδύνου ετήσιο ποσοστό, συνεπώς το περιοδικό ποσοστό είναι rh. Έστω δ η απόδοση μερίσματος. Υποθέτουμε ότι τα μερίσματα επαναεπενδύονται έτσι ώστε το ένα μερίδιο στην αρχή της περιόδου να αυξηθεί σε $e^{\delta h}$ στο τέλος της περιόδου.

Το μεγαλύτερο πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε είναι ο προσδιορισμός της τρέχουσας τιμής *C* του δικαιώματος προαίρεσης. Για την εύρεση της τιμής αυτής χρησιμοποιούμε δυο διαφορετικές μεθόδους, την *προσέγγιση ουδέτερου ρίσκου (risk-neutral approach)* και την *replicating portfolio approach* οι οποίες μας δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Η κύρια διαφωνία για την ουδέτερου κινδύνου προσέγγιση έγκειται στο ότι οι επενδυτές είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο. Υποθέτοντας ότι οι επενδυτές ανήκουν στη συγκεκριμένη κατηγορία υπολογίζουμε τις ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες που σχετίζονται με την μετοχή. Αυτές οι πιθανότητες μας δίνουν την αναμενόμενη αποπληρωμή του δικαιώματος προαίρεσης και αυτή η αποπληρωμή προεξοφλείται πίσω στο παρόν και έτσι μας δίνει την τρέχουσα τιμή του [32].

Έστω p_u η ουδέτερου ρίσκου πιθανότητα σε περίπτωση αύξησης της τιμής της μετοχής. Επομένως η πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου (risk-neutral) σε περίπτωση πτώσης της τιμής είναι η $P_d = 1 - p_u$. Έστω *X* η διακριτή τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει την call option τιμή. Το εύρος του X ορίζεται ως $\{C_u, C_d\}$ όπου η τιμή C_u προκύπτει με την πιθανότητα p_u και η C_d με την p_d. Συνεπώς η αναμενόμενη μελλοντική τιμή του δικαιώματος προαίρεσης είναι:

$$p_u C_u + (1 - p_u) C_d$$

Σε αυτή την προσέγγιση, υποθέτουμε ότι η αναμενόμενη τιμή της μετοχής είναι ακριβώς η προθεσμιακή τιμή της μετοχής από τη χρονική στιγμή t έως την $t + h$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τη p_u ώς πιθανότητα για την οποία η αναμενόμενη τιμή της μετοχής είναι η προθεσμιακή τιμή της.

$$p_u uS + (1 - p_u) dS = Se^{(rh - \delta h)}$$

Λύνοντας ως προς p_u καταλήγουμε:

$$p_u = \frac{e^{(rh-\delta h)} - \mathrm{d}}{u-d} \text{ και } p_d = \frac{u- e^{(rh-\delta h)}}{u-d}.$$

Η ισχύουσα τιμή του δικαιώματος προαίρεσης είναι:

$$\text{(4.1)} \qquad \mathrm{C} = e^{-r\,h}\ (p_u\ C_u + (1 - p_u)\ C_d)$$

Πρόταση 4.1

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη $d < e^{(rh - \delta h)} < u$ *οδηγούμαστε στις σχέσεις* $p_u > 0$, $p_d > 0$ *και* $p_u + p_d = 1$ *και καθ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι* p_u, p_d *είναι πιθανότητες.*

Απόδειξη:

Έχω ότι $e^{(rh-\delta h)} - d > 0$ και $u - e^{(rh-\delta h)} > 0$ και $u - d > 0$. Επιπλέον $p_u > 0$, $p_d > 0$. Συνεπώς:

$$\mathrm{p_u} + p_d = \frac{e^{(rh-\delta h)} - d}{u-d} + \frac{u - e^{(rh-\delta h)}}{u-d} = \frac{u-d}{u-d} = 1.$$

Παράδειγμα 4.2.

Έστω ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα προαίρεσης μιας μετοχής με τιμή άσκησης €90 και ημερομηνία λήξης 6 μηνών. Η μετοχή δεν πληρώνει μερίσματα και η τρέχουσα αξία της είναι €100. Το ετήσιο σύνθετο (με ανατοκισμό) χωρίς ρίσκο επιτόκιο είναι 8% Η αναμενόμενη τιμή κατά τη λήξη είναι είτε €140 είτε €85. Συνεπώς η C ισούται:

$$\mathrm{p_u} = \frac{e^{(0{,}08-0)0{,}5} - 0{,}85}{1{,}4 - 0{,}85} = 0{,}34692$$

Αυτή είναι η πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου της μετοχής που η τιμή της αυξήθηκε στα €140 στην ημερομηνία λήξης. Η πιθανότητα σε καθοδική πορεία της τιμής ισούται με $p_d = 1 - p_u = 0.65308$. Δοθέντος ότι η μετοχή έφτασε τα, €140 και η τιμή εξάσκησης του call option είναι τα €90 θα έχουμε πληρωμή, $C_u = 50$ στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής φτάσει τα €85 η πληρωμή C_d θα είναι μηδενική. Ένας επενδυτής ουδέτερου κινδύνου θα έχει 34.6% πιθανότητα να πάρει €50 και 65.4% να μην λάβει χρήματα. Η ουδέτερου κινδύνου τιμή θα είναι:

$$C = e^{-0.08\times 0.5}[0.34692 \times 50 + 0.65308 \times 0] = €16.6658.$$

4.2 Μέθοδος Επανασυγκρότησης Χαρτοφυλακίου

Η μέθοδος επανασυγκρότησης χαρτοφυλακίου (*replicating portfolio)* αναπτύχθηκε από τους Sharpe (1978) και Rendleman και Bartter (1979) (αξίζει να αναφερθεί ότι τα πρωτοποριακά έγγραφα των Black & Scholes (1973) και Merton (1973) [42], που εξέταζαν την τιμολόγηση βέβαιου κέρδους των δικαιωμάτων προαίρεσης σε συνεχές χρονικό πλαίσιο, εκδόθηκαν 5 έτη νωρίτερα). Η ιδέα βρίσκεται στην κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου στο χρόνο 0 το οποίο αντιγράφει με ακρίβεια την τελική πληρωμή ενός δικαιώματος προαίρεσης.

Έστω χαρτοφυλάκιο Α αποτελούμενο από αγορές call option μετοχών και χαρτοφυλάκιο Β αποτελούμενο από D μερίδια μετοχών και δάνεια αξίας €Ε. Οι πίνακες πληρωμών των θέσεων αυτών είναι οι εξής:

Συναλλαγή	Χρόνος 0	Ανοδική Πορεία	Καθοδική Πορεία
Αγορά call	$-C$	C_u	C_d
Σύνολο	$-C$	C_u	C_d

Πίνακας 4:1: Πίνακας Πληρωμών Χαρτοφυλακίου Α

Συναλλαγή	Χρόνος 0	Ανοδική Πορεία	Καθοδική Πορεία
Αγορά Δ μεριδίων	$-\Delta S$	$\Delta e^{\delta h}uS$	$\Delta e^{\delta h}dS$
Δανεισμός €Β	B	$-Be^{rh}$	$-Be^{rh}$
Σύνολο	$-\Delta S + B$	$\Delta e^{\delta h}uS - Be^{rh}$	$\Delta e^{\delta h}dS - Be^{rh}$

Πίνακας 4:2: Πίνακας Πληρωμών Χαρτοφυλακίου Β

Εάν το χαρτοφυλάκιο Β γίνει αντιγραφή του Α πρέπει να ισχύουν:

$$C = \Delta S - B \quad και\ C_u = \Delta e^{\delta h}uS - Be^{rh}\ και\ C_d = \Delta e^{\delta h}dS - Be^{rh}$$

Λύνοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις:

(4.2) $$\Delta = e^{-\delta h}\frac{C_u - C_d}{S\,(u-d)}$$

και

(4.3) $$B = e^{-rh}\ \frac{u\,C_d - dC_u}{d-u}$$

Τέλος:

(4.4) $$C = \Delta S - B = e^{-rh}\left(C_u\ \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} + C_d\ \frac{u - e^{(r-\delta)h}}{u-d}\right)$$

Σημείωση 4.1

Το ΔS είναι η νομισματική αξία των μεριδίων των μετοχών του χρηματοφυλακίου και

$$\Delta = e^{-\delta h}\,\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$$

όπου $S_u = uS$, $S_d = dS$. Όσο το μήκος της περιόδου h πλησιάζει στο μηδέν, τόσο η $S_u - S_d$ πλησιάζει και εκείνη στο μηδέν και μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$. Ως εκ τούτου το Δ μετράει την ευαισθησία του δικαιώματος προαίρεσης στην μεταβολή των τιμών. Συνεπώς εάν η τιμή της μετοχής αυξηθεί κατά €1 τότε η τιμή του δικαιώματος $C = \Delta S - B$ θα μεταβληθεί κατά Δ.

Παράδειγμα 4.3

Έστω ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα προαίρεσης σε μετοχές με τιμή €90 και διάστημα λήξης 6 μηνών. Οι μετοχές δεν πληρώνουν μέρισμα και η τρέχουσα αξία τους είναι €100.Το ετήσιο σύνθετο χωρίς ρίσκο επιτόκιο είναι 9%. Η αναμενόμενη τιμή κατά την ημερομηνία λήξης είναι είτε €140 είτε €85. Άρα έχουμε S = 100, K = 90, r = 0,08, δ = 0, h = 0,5, u = $\frac{140}{100}$ = 1.4 και d = $\frac{85}{100} = 0.85$. Συνεπώς $C_u = 50$ και $C_d = 0$.

$\Delta = e^{-\delta h}\,\frac{C_u - C_d}{S\,(u-d)} = 0.9$, $B = e^{-rh}\ \frac{u\,C_d - dC_u}{d-u} =$ €74.24 και η τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι:

$$C = e^{-rh}\left(C_u\ \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} + C_d\ \frac{u - e^{(r-\delta)h}}{u-d}\right) = €16.6637$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή C είναι η ίδια και στις δύο προσεγγίσεις.

Πρόταση 4.2 (συνθήκη μη βέβαιου κέρδους)

Η συνθήκη μη βέβαιου κέρδους (no-arbitrage) είναι:

(4.5) $$d < e^{(r-\delta)h} < u.$$

<u>Απόδειξη.</u>

Αρχικά υποθέτουμε ότι $e^{(r-\delta)h} \geq u$ αφού $Se^{(r-\delta)h} \geq Su$. Θεωρούμε την ακόλουθη θέση: πώληση short της μετοχής και συγκεντρώνω τα S, έπειτα επενδύω την απόδοση για ένα χρονικό διάστημα h ενώ παράλληλα πληρώνω τα μερίσματα στον πραγματικό κάτοχο της μετοχής. Στο τέλος της περιόδου παίρνω $Se^{(r-\delta)h}$. Στην περίπτωση που στη λήξη της περιόδου, η μετοχή καταλήξει στο S_u, αγοράζω πίσω τη μετοχή και την επιστρέφω στον ιδιοκτήτη της εισπράττοντας τη διαφορά $Se^{(r-\delta)h} - Su \geq 0$. Εάν η τιμή της μετοχής σημειώσει πτώση και φτάσει το dS, η πληρωμή θα είναι ακόμα μεγαλύτερη $Se^{(r-\delta)h} - Sd > Se^{(r-\delta)h} - Su \geq 0$. Συνεπώς, η συνθήκη $e^{(r-\delta)h} \geq u$ αποδεικνύει βέβαιο κέρδος.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $d \geq e^{(r-\delta)h}$ και $Sde^{\delta h} \geq Se^{rh}$. Θεωρούμε την ακόλουθη θέση: δανειζόμαστε €S με επιτόκιο άνευ κινδύνου, τα χρησιμοποιούμε για να αγοράζουμε ένα μερίδιο μίας μετοχής και έπειτα κρατάμε στην κατοχή μας την μετοχή για ένα χρονικό διάστημα h. Εάν η τιμή της μετοχής μειωθεί, συγκεντρώνω τα $Sde^{\delta h}$, που είναι η τιμή πώλησης της μετοχής και τα μερίσματα που έλαβα, ξαναπληρώνω το δάνειο συν το επιτόκιο Se^{rh} και εισπράττω $Sde^{\delta h} - Se^{rh} \geq 0$. Έαν η τιμή της μετοχής έχει ανοδική πορεία φτάνοντας την τιμή S_u, η πληρωμή θα είναι ακόμα μεγαλύτερη $Sue^{\delta h} - Se^{rh} > Sde^{\delta h} - Se^{rh} \geq 0$. Ξανά η συνθήκη $d \geq e^{(r-\delta)h}$ αποδεικνύει μία ευκαιρία σίγουρου κέρδους.

Οι ευκαιρίες βέβαιου κέρδους προκύπτουν εάν τα δικαιώματα προαίρεσης είναι λάθος τιμολογημένα, δηλαδή εάν η πραγματική τιμή του δικαιώματος προαίρεσης διαφέρει από την θεωρητική τιμή του [8, 46]:

- Εάν ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι υπερτιμημένο, που σημαίνει ότι η πραγματική του τιμή είναι υψηλότερη από τη θεωρητική, τότε μπορούμε να το πουλήσουμε. Όμως, ο κίνδυνος έγκειται στο ότι το δικαίωμα μπορεί να είναι στα λεφτά του κατά την ημερομηνία λήξης. Για να αντισταθμίσουμε αυτό τον κίνδυνο, μπορούμε να προβούμε σε αγορά συνθετικού δικαιώματος προαίρεσης την στιγμή που πουλάμε το πραγματικό δικαίωμα.

- Εάν ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι υποτιμημένο, δηλαδή όταν η πραγματική του τιμή είναι χαμηλότερη από τη θεωρητική, τότε μπορούμε να το αγοράσουμε. Το ρίσκο σχετίζεται με την πιθανότητα η τιμή του να μειωθεί στην ημερομηνία λήξης. Για να αντισταθμίσουμε αυτό το ρίσκο, πουλάμε ένα συνθετικό δικαίωμα προαίρεσης την ίδια στιγμή που αγοράζουμε το πραγματικό.

Παράδειγμα 4.4

Θεωρούμε ότι έχουμε τις τιμές του Ευρωπαϊκού δικαιώματος του παραδείγματος 2.3.

i. Υποθέτω παρατηρούμενη τιμή call είναι €18.
ii. Υποθέτω ότι η τιμή call είναι €15

και στις δύο περιπτώσεις ψάχνουμε το βέβαιο κέρδος.

i. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το δικαίωμα προαίρεσης είναι υπερτιμημένο καθώς η παρατηρηθείσα τιμή €18 είναι μεγαλύτερη από τη θεωρητική C = €16,66. Κατ' επέκταση πουλάμε το πραγματικό δικαίωμα για €18 και δημιουργούμε ένα call option αγοράζοντας Δ=0,9 μιας μετοχής και δανειζόμαστε Ε = €74,24. Αυτό το συνθετικό δικαίωμα προαίρεσης αντισταθμίζει τον κίνδυνο με τον ακόλουθο τρόπο:

Τιμή call	**0**	**– 50**
0,9 Αγορασμένες μετοχές	*0,9 * 85 = €76*	*0,9 * 140 = €126*
Αποπληρωμή δανείου	$B * (1 + r)^h = -76$	$B * (1 + r)^h = -76$
Σύνολο	*0*	*0*

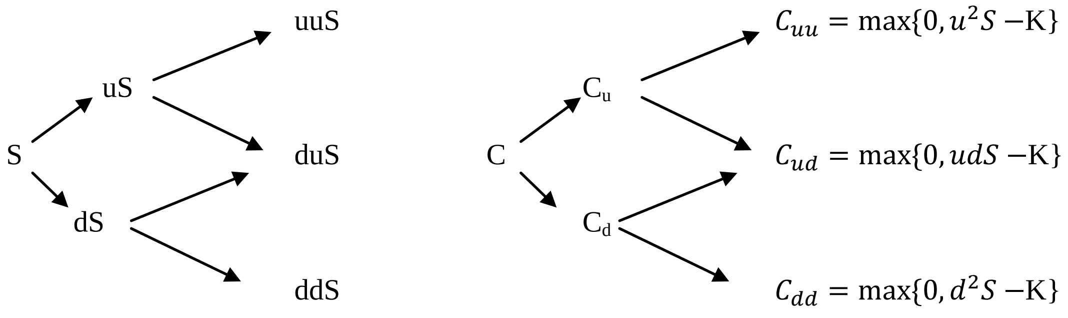
Πίνακας 4:3: Αντιστάθμιση Δικαιώματος Προαίρεσης

και η αρχική χρηματοροή ισούται με €18 – Δ * S + B = €2,24. Συνεπώς κερδίζουμε €2,24 που είναι το συνολικό ποσό που εκτιμήθηκε λανθασμένα.

ii. Παρατηρούμε υποτίμηση του δικαιώματος προαίρεσης και έτσι αγοράζουμε το δικαίωμα και δημιουργούμε συνθετικά μία short θέση σε ένα δικαίωμα. Άρα πουλάμε Δ=0,9 μονάδες της μετοχής και δανείζουμε *B = €74,24*. Η αρχική χρηματοροή είναι *– €15 + 0,9 * 100 – 74,24 = €0,76* οπού είναι το βέβαιο κέρδος.

4.3 Διωνυμικό Μοντέλο Τιμολόγησης Δικαιωμάτων Πολλών Περιόδων

Το Διωνυμικό μοντέλο μίας περιόδου επεκτείνεται εύκολα σε μοντέλο πολλών περιόδων. θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις μοντέλων δύο και τριών περιόδων. Τα Διωνυμικά δέντρα των τιμών των μετοχών όπως και οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς σε μοντέλο δύο περιόδων είναι τα κάτωθι [38, 40]:



Σχέδιο 4.2

Μέσω του σχήματος παρατηρούμε ότι μια αρχική μείωση της τιμής της μετοχής που ακολουθείται από μια αύξηση, παράγει την ίδια τιμή μετοχής με το αν είχαμε αρχικά αύξηση της τιμής ακολουθούμενη από μείωση. Αυτό το διωνυμικό δέντρο καλείται *συνδυαστικό* [38].

Σημειώνεται ότι για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης δουλεύουμε αντίθετα καθώς οι τύποι απαιτούν γνώση των ενδιάμεσων τιμών των δικαιωμάτων. Γνωρίζουμε μόνο την τιμή στην ημερομηνία λήξης και έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή στην πρώτη περίοδο και έπειτα στην 0.

Παράδειγμα 4.5

Μία μετοχή αξίζει €60. Κάθε έτος η τιμή της μπορεί να αυξηθεί κατά 40% ή να μειωθεί κατά 20%. Η τιμή άσκησης του δύο ετών δικαιώματος προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου στην μετοχή είναι €80. Η μετοχή δεν πληρώνει μερίσματα κι το ετήσιο χωρίς κίνδυνο επιτόκιο είναι 8%. Έστω ότι ψάχνουμε την τιμή σήμερα του δικαιώματος αυτού. Έχουμε $r = 0.08$, $u = 1.4$, $d = 0.8$, $h = 1$, $S = 60$, $K = 80$. Το πρώτο έτος η μετοχή θα αξίζει είτε $uS = 1,4 * 60 = €84$, *είτε* $dS = 0,8 * 60 = €48$. Το δεύτερο έτος η τιμή της μετοχής θα είναι $u^2S = €117.6$ *ή* $udS = €67,2$ *ή* $d^2S = €38,4$.

<u>Έτος 2, τιμή μετοχής = €117,6:</u> Αφού είμαστε στην λήξη, η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης είναι $C_{uu} = 117.6 - S = €57,6$.

<u>Έτος 2, τιμή μετοχής = €67,2:</u> Η τιμή του δικαιώματος κατά τη λήξη είναι εκτός τιμής και συνεπώς $C_{uu} = 0$.

<u>Έτος 2, τιμή μετοχής = €38,4:</u> Κατά τη λήξη έχουμε $C_{dd} = 0$.

<u>Έτος 1, τιμή μετοχής = €84:</u> Χρησιμοποιούμε τον (4.4) και υπολογίζουμε την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης.

$$C_u = e^{-0,08\times 1}\left(57,6 \times \frac{e^{(0,08)\times 1} - 0,9}{1,4-0,9} + 0\ \frac{1,4-e^{(0,08)\times 1}}{1,4-0,9}\right) = €19,49.$$

<u>Έτος 1, τιμή μετοχής = €48:</u> Αντίστοιχα υπολογίζουμε και αυτή την τιμή.

$$C_d = e^{-0,08\times1}\left(0\times\frac{e^{(0,08)\times1}-0,9}{1,4-0,9}+0\,\frac{1,4-e^{(0,08)\times1}}{1,4-0,9}\right)=€0.$$

***Έτος 0, τιμή μετοχής* = €60:** Χρησιμοποιώντας ξανά τον (4.4) και υπολογίζουμε την τιμή.

$$C = e^{-0,08\times1}\left(19.49\times\frac{e^{(0,08)\times1}-0,9}{1,4-0,9}+0\,\frac{1,4-e^{(0,08)\times1}}{1,4-0,9}\right)=€6,59.$$

Η μεθοδολογία αυτή μπορεί να εφαρμοστεί για οποιονδήποτε αριθμό περιόδων.

4.4 Διωνυμικό Μοντέλο Τιμολόγησης Πώλησης Ευρωπαϊκού Τύπου Δικαιωμάτων

Το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης που αφορά δικαιώματα πώλησης εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας ακριβώς τις ίδιες διαδικασίες και τύπους που αναπτύχθηκαν για τα Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα αγοράς με μία μόνο βασική διαφορά που προκύπτει κατά τη λήξη [32, 56]. Για τον υπολογισμό της τιμής χρησιμοποιούσαμε τον τύπο $\max\{0, S-K\}$, αντ`αυτού θα χρησιμοποιούμε $\max\{0, K-\Sigma\}$.

Η προσέγγιση επανασυγκρότησης χαρτοφυλακίου συντελείται με τη δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου που αντιγράφει ακριβώς την πραγματική πώληση δικαιώματος πώλησης. Έστω χαρτοφυλάκιο Α που αποτελείται από πωλήσεις ενός δικαιωμάτων πώλησης σε μία μετοχή και χαρτοφυλάκιο Β που αποτελείται από D μερίσματα της μετοχής και δανεισμό €Β. Οι πίνακες πληρωμής των θέσεων αυτών είναι οι ακόλουθες.

Συναλλαγή	**Τιμή στο χρόνο 0**	**Ανοδική πορεία**	**Καθοδική πορεία**
Πώληση δικαιώματος πώλησης	P	$-P_u$	$-P_d$
Σύνολο	P	$-P_u$	$-P_d$

Πίνακας 4:4: Πίνακας Πληρωμής Χαρτοφυλακίου Α

Συναλλαγή	**Τιμή στο χρόνο 0**	**Ανοδική πορεία**	**Καθοδική πορεία**
Πώληση D Μερισμάτων	ΔS	$-\Delta e^{\delta h}uS$	$-\Delta e^{\delta h}dS$
Δάνειο €*B*	$-B$	Be^{rh}	Be^{rh}
Σύνολο	$\Delta S-B$	$-\Delta e^{\delta h}uS+Be^{rh}$	$-\Delta e^{\delta h}dS+Be^{rh}$

Πίνακας 4:5: Πίνακας Πληρωμής Χαρτοφυλακίου Β

Για να αντιγράψει με ακρίβεια το χαρτοφυλάκιο Β το Α πρέπει να ισχύει:

$$P = \Delta S - B$$

$$P_u = \Delta e^{\delta h} uS - Be^{rh}$$

$$P_d = \Delta e^{\delta h} dS - Be^{rh}$$

Λύνοντας τις τελευταίες εξισώσεις καταλήγουμε:

(4.6) $$\Delta = e^{-\delta h} \frac{P_u - P_d}{S(u-d)}$$

(4.7) $$B = e^{-rh} \frac{uP_d - dP_u}{d-u}$$

και συνεπώς η τιμή ισούται με:

(4.8) $$P = \Delta S - B = e^{-rh} \left(P_u \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} \right) + P_d \frac{u - e^{(r-\delta)h}}{u-d}.$$

Εάν έχουμε ουδέτερου ρίσκου πιθανότητα ισχύει:

$$P = e^{-rh} (p_u P_u + (1 - p_u) P_d)$$

Παράδειγμα 4.6

Έστω ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα πώλησης μια μετοχής με τιμή άσκησης €90 και ημερομηνία λήξης σε μισό έτος. Η μετοχή δεν πληρώνει μερίσματα και η τωρινή της αξία είναι €100. Το ετήσιο σύνθετο (με συνεχή ανατοκισμό) χωρίς κίνδυνο επιτόκιο είναι 8%. Η αναμενόμενη αξία σε 6 μήνες είναι είτε €140 είτε €80.

i. Άρα ισχύει ότι S= 100, K= 90, r = 0.08, δ= 0, h=0.5, u= 1.4, d= 0.8, P_u = 0, P_d = 90 – 80 = 10. Κι έτσι:

$$\Delta = e^{-\delta h} \frac{P_u - P_d}{(u-d)} = e^{0} \frac{0 - 10}{100 \times (1{,}4 - 0{,}8)} = -0{,}16$$

$$B = e^{-rh} \frac{uP_d - dP_u}{d-u} = e^{-0{,}04} \frac{1{,}4 \times 10}{0{,}8 - 1{,}4} = -€22{,}41$$

$$P = \Delta S - B = €6{,}41.$$

ii. Έστω ότι η τιμή πώλησης του δικαιώματος είναι €7. Για να βρούμε ποιο είναι το βέβαιο κέρδος, αρχικά παρατηρούμε ότι η θεωρητική τιμή είναι μεγαλύτερη από την παρατηρηθείσα (υπερτίμηση), συνεπώς πουλάμε το πραγματικό δικαίωμα πώλησης και δημιουργούμε μία θέση πώλησης ενός δικαιώματος πώλησης με το να πουλήσουμε 0,16 μονάδες μιας μετοχής και να δανείσουμε €22,41. Το συνθετικό δικαίωμα προαίρεσης αντισταθμίζει το δικαίωμα πώλησης με τον παρακάτω τρόπο:

Συναλλαγή	**80**	**140**
Πώληση Δικαιώματος Πώλησης	*– 10*	*0*
0,16 Πώληση Μεριδίου Μετοχών	*– 12,4*	*– 22,4*
Δανεισμός	*22,4*	*22,4*
Σύνολο	*0*	*0*

Πίνακας 4:6: Αντιστάθμιση Δικαιώματος με Συνθετικό Δικαίωμα

Η αρχική χρηματοροή είναι *7 +ΔS – B = €0,59*. Συνεπώς το βέβαιο κέρδος είναι αυτή η τιμή.

iii. Έστω ότι η τιμή πώλησης του δικαιώματος είναι €5. Για να βρεθεί το σίγουρο κέρδος ακολουθούμε την εξής διαδικασία, προφανώς η πραγματική τιμή είναι χαμηλότερη από τη θεωρητική (έχουμε υποτίμηση) και έτσι αγοράζουμε το δικαίωμα προαίρεσης και συνθετικά δημιουργούμε μια πώληση δικαιώματος πώλησης. Για την κατασκευή του αγοράζουμε 0,16 μονάδες μιας μετοχής κα δανειζόμαστε €22,41.

Η αρχική χρηματοροή στην περίπτωση αυτή ισούται με – 5 – 0,16 * 100 + 22,41 = €1,41. Άρα το σίγουρο κέρδος είναι η τιμή αυτή της λανθασμένης εκτίμησης.

4.5 Διωνυμικό Μοντέλο Τιμολόγησης Δικαιωμάτων Αμερικανικού Τύπου

Η χρήση των Διωνυμικών δέντρων αποτελεί το βασικότερο εργαλείο για την τιμολόγηση Αμερικανικού τύπου δικαιωμάτων προαίρεσης [22]. Κατασκευάζουμε ένα πλέγμα δέντρου που οι διακλαδώσεις του αντιπροσωπεύουν τις κινήσεις της μετοχής και υπολογίζουμε την τιμή του δικαιώματος που σχετίζεται με την τιμή της μετοχής δουλεύοντας προς τα πίσω. Σε κάθε κόμβο, συγκρίνουμε την τιμή του δικαιώματος, εάν αυτό βρισκόταν στην ημερομηνία λήξης, με το κέρδος που θα είχαμε αν το ασκούσαμε άμεσα. Η υψηλότερη από αυτές της τιμές είναι η τιμή του δικαιώματος [28].

Η τιμή αγοράς Αμερικανικού τύπου δικαιώματος σε κάθε κόμβο δίνεται από τον τύπο [28]:

$$C\ (S_t, K, \mathrm{t}) = max\{S_t - \mathrm{K}, \mathrm{e}^{-\mathrm{rh}}[p_u\ C(uS_t, K, t+h) + (1-p_u)C(dS_t, K, t+h)]\}$$

και η τιμή πώλησης [28, 41]:

$$P\ (S_t, K, t) = max\{K - S_t, \mathrm{e}^{-\mathrm{rh}}[p_u\ P(uS_t, K, t+h) + (1-p_u)P(dS_t, K, t+h)]\}$$

όπου *t* ο χρόνος που ισοδυναμεί σε κάθε πλέγμα του δέντρου, S_t η τιμή της μετοχής κατά τον χρόνο t, *h* το μήκος της περιόδου, *r* το συνεχόμενο σύνθετο (με ανατοκισμό) χωρίς κίνδυνο επιτόκιο, *K* η τιμή άσκησης και p_u η ουδετέρου κινδύνου πιθανότητα σε ενδεχόμενη αύξηση της τιμής της μετοχής.

Παράδειγμα 4.7

Έστω ότι ο υποκείμενος τίτλος Αμερικανικού τύπου δικαιώματος είναι η μετοχή για την οποία ισχύουν S = €100, σ = 0.4, r = 0.08, δ = 0.02, K = 90 με ημερομηνία λήξης σε τρία έτη. Θα βρω την τρέχουσα τιμή του δικαιώματος με τον εξής τρόπο.

Αρχικά υπολογίζουμε: $u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} = 1{,}5840$,$d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}} = 0{,}7117$ και

$p_u = \frac{e^{(r-\delta)h}-d}{u-d} = 0{,}4013$. Επομένως:

Έτος 3, τιμή μετοχής = u^3 *S = 397,4344*. Επειδή βρισκόμαστε κατά τη λήξη, η τιμή του δικαιώματος είναι C_{uuu} *= 397,4344 – K = 307,4344*

Έτος 3, τιμή μετοχής = u^2 *dS = 178,5695* και C_{uuu} *= 178,5695 – K = 88,5695*

Έτος 3, τιμή μετοχής = ud^2 *S = 80,2322 και* C_{udd} *= 0*

Έτος 3, τιμή μετοχής = d^3 *S = 36,0488* και C_{ddd} *= 0*

Έτος 2, τιμή μετοχής = u^2 *S = 250,9056* και

Έτος 2, τιμή μετοχής = d^2 S = 50,6516 και

$C_{dd} = max\{50{,}6516 - 90, e^{-0{,}08}\ [0{,}4013 \times 0 + (1 - 0{,}4013) \times 0]\} =$
$\max(-39.3484, 0) = 0$

Έτος 1, τιμή μετοχής = uS = 158,40 και $C_u = max\{158{,}40 - 90, e^{-0{,}08}\ [0{,}4013 \times 162.8386 + (1 - 0{,}4013) \times 32{,}8102]\} = \max(68.4, 78.4561) = 78{,}4561$

Έτος 1, τιμή μετοχής = dS = 71,17 και

$C_d = max\{71{,}17 - 90, e^{-0{,}08}\ [0{,}4013 \times 32{,}8102 + (1 - 0{,}4013) \times 0]\} =$
$\max(-18.83, 12.15)$ =12,15

Έτος 0, τιμή μετοχής = S = 100 και η τρέχουσα τιμή του δικαιώματος προαίρεσης είναι:

$C = max\{100 - 90, e^{-0{,}08}\ [0{,}4013 \times 78{,}4561 + (1 - 0{,}4013) \times 12{,}15]\} =$
$\max(10, 35.7787) = 35{,}7787$.

4.6 Διωνυμικά Δέντρα και Μεταβλητότητα

Ο σκοπός ενός διωνυμικού δέντρου είναι να προσδιορίσει την μελλοντική αβεβαιότητα των κινήσεων της τιμής της μετοχής [38, 56]. Επί της απουσίας της αβεβαιότητας (οι αποδόσεις των μετοχών είναι συγκεκριμένες κατά τη λήξη της περιόδου), μία μετοχή πρέπει να εκτιμηθεί επί του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου μείον το επιτόκιο των μερισμάτων. Συνεπώς, στο χρονικό διάστημα *t, t + h* πρέπει να ισχύει:

$$S_{t+h} = F_{t,t+h} = S_t e^{(r-\delta)h}$$

Με την παρουσία της αβεβαιότητας (δηλαδή όταν η απόδοση της μετοχής στο τέλος της περιόδου είναι αβέβαιη), παρουσιάζεται ένα μέτρο αβεβαιότητας των αποδόσεων της μετοχής που είναι η *μεταβλητότητα (volatility)*, η οποία είναι η ετήσια τυπική απόκλιση των αποδόσεων της μετοχής όταν οι αποδόσεις εκφράζονται με τη χρήση συνεχούς ανατοκισμού [56].

Έστω S_t και S_{t+h+} οι τιμές της μετοχής στους χρόνους t και $t + h$, αντίστοιχα. Το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο αποδόσεων στο διάστημα *[t, t+h]* καθορίζεται από τον τύπο:

$$r_{t,t+h} = \ln\frac{S_{t+h}}{S_t}$$

Παράδειγμα 4.8

Υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής για τρείς διαδοχικές μέρες είναι €120, €123, €117. Το ημερήσιο συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο αποδόσεων επί της μετοχής ισούται με

$$\ln\frac{123}{120} = 0{,}02469 \; \kappa\alpha\iota \; \ln\frac{117}{123} = -0{,}05001.$$

Έστω ότι ισχύει $r_{t+(i-1)h,t+ih}$ είναι το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο αποδόσεων κατά το χρονικό διάστημα *[t + (i – 1)h, t + ih]* με $0 \leq i \leq n$. Τότε το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο αποδόσεων κατά το χρονικό διάστημα *[t, t + nh]* είναι:

(4.9) $$r_{t,t+nh} = \sum_{i=1}^{n} r_{t+(i-1)h,t+ih}$$

Παράδειγμα 4.9

Υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής για τρείς διαδοχικές μέρες είναι €120, €123, €117. Για να βρούμε το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο αποδόσεων επί της μετοχής από την πρώτη μέχρι την μέρα χρησιμοποιούμε τον τύπο (4.7.1)

$$r_{1,3} = \sum_{i=1}^{3} r_{1+(i-1)1,1+i1} = \ln\frac{123}{120} + \ln\frac{117}{123} = 0{,}02469 - 0{,}05001 = -0{,}02532.$$

Τα επιτόκια των αποδόσεων της μετοχής σε τυχαίο χρονικό διάστημα είναι τυχαίες μεταβλητές. Ας υποθέσουμε ότι ένα έτος διασπάται σε n περιόδους μήκους h και $r_{(\,i-1\,)h,ih}$ το επιτόκιο απόδοσης στο χρονικό διάστημα *[(i – h), ih]*. Η τυχαία μεταβλητή $r_{Ετήσια}$ το ετήσιο συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο αποδόσεων για το οποίο ισχύει:

$$r_{Ετήσια} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{r}_{(\,\mathrm{i-h}\,),\mathrm{ih}}.$$

Η διακύμανση της ετήσιας απόδοσης είναι:

$$\sigma^2 = Var\left(r_{Ετήσια}\right) = Var\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{r}_{(\,\mathrm{i-h}\,),\mathrm{ih}}\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(\mathrm{r}_{(\,\mathrm{i-h}\,),\mathrm{ih}}) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{h,i}^2$$

και υποθέτουμε ότι η απόδοση της μιας περιόδου δεν επηρεάζει τις αναμενόμενες αποδόσεις των μετέπειτα περιόδων. Έτσι, οι περιοδικές τιμές είναι *ανεξάρτητες* μεταξύ τους. Τώρα έστω ότι η κάθε περίοδος έχει την ίδια διακύμανση απόδοσης σ_h, τότε ισχύει:$\sigma^2 = n\sigma_h^2 = \frac{\sigma_h^2}{h}$. Η τυπική απόκλιση μίας περιόδου με μήκος h ισούται με: $\sigma_h = \sigma\sqrt{h}$.

Ένας τρόπος να ενσωματώσουμε την αβεβαιότητα στην μελλοντική τιμή της μετοχής είναι να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο:

$$uS_t = F_{t,t+h}\, e^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$dS_t = F_{t,t+h}\, e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

Σημειώνουμε ότι στην απουσία αβεβαιότητας ισχύει $\sigma = 0$ και ως εκ τούτου $uS_t = dS_t = F_{t,t+h}$. Τώρα χρησιμοποιούμε το δεδομένο $F_{t,t+h} = S_t\, e^{(r-\delta)h}$ και καταλήγουμε:

(4.10) $$u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}}$$

(4.11) $$d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}$$

Παρατήρηση 4.1

Από τη σχέση $S_{t+h} = S_t \, e^{(r-\delta)h \pm \sigma\sqrt{h}}$ βρίσκουμε ότι η συνεχώς ανατοκιζόμενη απόδοση είναι ίση με :

$$(r-\delta)h \pm \sigma\sqrt{h}.$$

Καταλαβαίνουμε από την εξίσωση ότι η συνεχώς ανατοκιζόμενη απόδοση αποτελείται από δύο μέρη, το πρώτο *(r – δ)h* είναι βέβαιο και του άλλου η αβεβαιότητα παράγει τις διακυμάνσεις (ανοδική και καθοδική) κίνηση της τιμής της μετοχής $\pm\sigma\sqrt{h}$.

Παράδειγμα 4.10

Έστω η τρέχουσα τιμή της μετοχής €60, η οποία δε πληρώνει μερίσματα. Το ετήσιο συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο είναι 8% και η ετήσια τυπική απόκλιση της συνεχώς ανατοκιζόμενης απόδοσης της μετοχής είναι 30%. Για να βρούμε την τιμή του Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος επί της μετοχής με τιμή εξάσκησης €59 και λήξης σε ένα έτος χρησιμοποιούμε αρχικά τις εξισώσεις (4.7.1) και (4.7.2) και βρίσκουμε:

$uS = Se^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \rightarrow uS = 60e^{(0{,}08-0)\times 1+0{,}3\times\sqrt{1}} = €87{,}737$ $\;dS = 60e^{(0{,}08-0)\times 1-0{,}3\times\sqrt{1}} =$ €48,151

Λύνουμε ως προς u και d. $u = \frac{87{,}737}{60} = 1{,}462$ και $d = \frac{48{,}151}{60} = 0{,}802$

$C_u = uS - K = 87{,}737 - 59 = €28{,}737$ και $C_d = 0$

$$\Delta = e^{-\delta h}\frac{C_u - C_d}{S\,(u-d)} = \frac{28{,}737 - 0}{60 \times (1{,}462 - 0{,}802)} = 0{,}7256$$

$$B = e^{-rh}\,\frac{u\,C_d - dC_u}{d-u} = \frac{1{,}462 \times 0 - 0{,}802 \times 28{,}737}{0{,}802 - 1{,}462} = €34{,}919$$

Η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης μας δίνεται από τον τύπο:

$$C = \Delta S - E = 0{,}7256 \times 60 - 34{,}919 = €8{,}617$$

Τα forward trees της τιμής της μετοχής και της τιμής του δικαιώματος αγοράς είναι:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & uS = €87{,}737 \\ €60 & & \\ & \searrow & dS = €48{,}151 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \nearrow & C_u = €28{,}737 \\ €8{,}617 & & \\ & \searrow & C_d = 0 \end{array}$$

Παρατήρηση 4.2

Η μεταβλητότητα μετράει το πόσο σίγουροι είμαστε ότι η απόδοση της μετοχής θα είναι κοντά στην αναμενόμενη απόδοση. Οι μετοχές που έχουν μεγάλη μεταβλητότητα, έχουν μεγάλη πιθανότητα οι αποδόσεις τους να έχουν διαφορά από τις αναμενόμενες.

Παρατήρηση 4.3

Χρειάζεται προσοχή στην εφαρμογή της μεταβλητότητας όταν ο υποκείμενος τίτλος πληρώνει μερίσματα. Για μία τέτοια μετοχή, η μεταβλητότητα αναφέρεται στην προπληρωμένη προθεσμιακή τιμή $S - PV_{0,T}(Div)$ και όχι στην τιμή της μετοχής. Ο McDonald αναφέρει την ακόλουθη σχέση μεταξύ της μεταβλητότητας της τιμής της μετοχής και της πληρωμένης προθεσμιακής τιμής [19]:

$$\sigma_F = \sigma_{\mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\eta}\varsigma} \times \frac{S}{F^P}$$

Παρατηρούμε ότι όταν η μετοχή δεν πληρώνει μερίσματα τότε $F^P = S$ και $\sigma_F = \sigma_{\mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\eta}\varsigma}$.

4.7 Διωνυμικό Μοντέλο Τιμολόγησης Δικαιωμάτων Συναλλάγματος

Στην περίπτωση των δικαιωμάτων προαίρεσης συναλλάγματος με υποκείμενο τίτλο ένα ξένο νόμισμα και αντικείμενο άσκησης δολάρια, το χαρτοφυλάκιο επανασυγκρότησης αποτελείται από αγορά Δ μονάδων του ξένου νομίσματος και δανεισμό μετρητών του ποσού των Β δολαρίων [27, 56]. Έστω r_f το επιτόκιο που αναφορά το ξένο νόμισμα, μία μονάδα από το ξένο νόμισμα αυξάνεται σε e^{rf^h} μονάδες κατά το τέλος μιας περιόδου. Έτσι, μετά από μία περίοδο, η αποπληρωμή του χαρτοφυλακίου είναι $\Delta * ux * e^{rf^h} - e^{rh}B$ στην περίπτωση ανοδική πορείας και $\Delta * dx \times * -e^{rh}B$ σε περίπτωση καθοδικής πορείας, όπου x είναι η συναλλαγματική ισοτιμία στην αρχή της περιόδου και r είναι το επιτόκιο που αφορά τα δολάρια. Στην περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο αντιγράφει ένα δικαίωμα αγοράς τότε από τη *συνθήκη μη-βέβαιου κέρδους (no-arbitrage)* έχουμε:

$$\Delta * ux * e^{rf^h} - e^{rh}B = C_u$$

και

$$\Delta * dx * e^{rf^h} - e^{rh}B = C_d.$$

Λύνοντας τα σύστημα καταλήγουμε στις σχέσεις

(4.12) $$\Delta = e^{-rf^h} \frac{C_u - C_d}{x(u-d)}$$

(4.13) $$B = e^{-rh} \frac{uC_d - dC_u}{d-u}$$

Η τιμή του δικαιώματος αγοράς στην αρχή τα περιόδου είναι το συνολικό ποσό που επενδύθηκε στο ισοδύναμο χαρτοφυλάκιο.

$$C = \Delta x - E = e^{-rh}\left(C_u \frac{e^{(r-r_f)h}-d}{u-d} + C_d \frac{u-e^{(r-r_f)h}}{u-d}\right). \tag{4.14}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι τρείς αυτές εξισώσεις είναι ίδιες με αυτές των μετοχών, με τη διαφορά ότι το επιτόκιο αποδόσεων αντικαθίσταται με το επιτόκιο που αφορά τα ξένα νομίσματα.

Η πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου μίας ανοδικής κίνησης δίνεται από τον τύπο

$$p_u = \frac{e^{(r-r_f)h} - d}{u-d}$$

Από την προηγούμενη ενότητα γνωρίζουμε ότι $ux = F_{t,t+h}\, e^{\sigma\sqrt{h}}$,$dx = F_{t,t+h}\, e^{-\sigma\sqrt{h}}$, όπου $F_{t,t+h} = xe^{(r-r_f)h}$. Λύνοντας ως προς u και d έχουμε $u = e^{(r-r_f)h+\sigma\sqrt{h}}$ και $d = e^{(r-r_f)h-\sigma\sqrt{h}}$

Παράδειγμα 4.11

Έστω ότι χ = *€0,80/$*, r = 8%, $r_\$$ = 11%, σ = 17%. Για να υπολογίσουμε την τιμή ενός Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος επί δολαρίων, εκφρασμένη σε ευρώ, με τιμή εξάσκησης €0,70, θα χρησιμοποιήσουμε ένα διωνυμικό δέντρο τριών περιόδων.

Αρχικά θα βρούμε το *u*, *d*:

$$u = e^{(r-r_f)h+\sigma\sqrt{h}} = e^{(0{,}08-0{,}11)\times 0{,}25+0{,}17\sqrt{0{,}25}} = 1{,}0805$$

$$d = e^{(r-r_f)h-\sigma\sqrt{h}} = e^{(0{,}08-0{,}11)\times 0{,}25-0{,}17\sqrt{0{,}25}} = 0{,}9116$$

Η ουδέτερου κινδύνου πιθανότητα μιας ανοδικής κίνησης ισούται με

$$p_u = \frac{e^{(r-r_f)h} - d}{u-d} = \frac{e^{(0{,}08-0{,}11)} - 0{,}9116}{1{,}0805 - 0{,}9116} = 0{,}3484$$

Έτσι

Στους 9-μήνες η συναλλαγματική ισοτιμία = u^3 x = 1,0091/$. Εφόσον βρισκόμαστε κατά τη λήξη, η τιμή του δικαιώματος είναι C_{uuu} = u^3 x – K = 1,0091 – 0,70 = €0,3091

Στους 9-μήνες η συναλλαγματική ισοτιμία = u^2 dx = 0,85141/$ και C_{uud} = €0,15141

Στους 9-μήνες η συναλλαγματική ισοτιμία = u d^2 x = 0,71832/$ και C_{udd} = C_{ddu} = 0

Στους 9-μήνες η συναλλαγματική ισοτιμία =d^3 x = 0,6060/$ και C_{ddd} = 0

Στους 6-μήνες η συναλλαγματική ισοτιμία = u^2 x = 0,9339/$ και

$$C_{uu} = e^{-(r-\delta)\times h}(\,p_u \times C_{uuu} + (1-p_u) \times C_{uud}\,) =$$

$$= \; e^{-0{,}08\times 0{,}25}[0{,}3484 \times 0{,}3091 + (1-0{,}3484) \times 0{,}15141] = €0{,}2022$$

Στους 6-μήνες η συναλλαγματική ισοτιμία = udx = 0,7879/€ και

$$C_{ud} = e^{-(r-\delta)\times h}(\,p_u \times C_{uud} + (1-p_u) \times C_{udd}) =$$

$$= \; e^{-0{,}08\times 0{,}25}[0{,}3484 \times 0{,}15141 + (1-0{,}3484) \times 0] = €0{,}05170$$

Στους 6-μήνες η συναλλαγματική ισοτιμία = d^2 x = 0,9849/$ και $C_{dd} = e^{-(r-\delta)\times h}(\,p_u \times C_{udd} + (1-p_u) \times C_{ddd}) = e^{-0{,}08\times 0{,}25}[0{,}3484 \times 0 + (1-0{,}3484) \times 0] = 0$

Στους 3-μήνες η συναλλαγματική ισοτιμία = u x = 0,8644/$ και $C_u = e^{-(r-\delta)\times h}(\,p_u \times C_{uu} + (1-p_u) \times C_{ud}) = e^{-0{,}08\times 0{,}25}[0{,}3484 \times 0{,}2022 + (1-0{,}3484) \times 0{,}05170] =$ €0,10207

Στους 3-μήνες η συναλλαγματική ισοτιμία = d x = 0,72928/$ και $C_d = e^{-(r-\delta)\times h}(\,p_u \times C_{ud} + (1-p_u) \times C_{dd}) = e^{-0{,}08\times 0{,}25}[0{,}3484 \times 0{,}05170 + (1-0{,}3484) \times 0] = €0{,}01765$

Η τρέχουσα τιμή του δικαιώματος είναι:$C = e^{-(r-\delta)\times h}(\,p_u \times C_u + (1-p_u) \times C_d) = e^{-0{,}08\times 0{,}25}[0{,}3484 \times 0{,}10207 + (1-0{,}3484) \times 0{,}01765] =$ €0,0461.

4.8 Διωνυμικό Μοντέλο Τιμολόγησης Δικαιωμάτων με Χαρακτηριστικά ΣΜΕ

Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμόσουμε το διωνυμικό μοντέλο για να τιμολογήσουμε δικαιώματα προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Υπενθυμίζουμε ότι ένα τέτοιο συμβόλαιο είναι μια υπόσχεση αγοράς σε μια στιγμή στο μέλλον ένα συγκεκριμένο ποσό ενός τίτλου σε τιμή που συμφωνείται σήμερα. Για τη σύναψη του δεν απαιτείται αρχική πληρωμή [8]. Κατά την ημερομηνία λήξης, τα μετρητά ανταλλάσσονται για τον τίτλο. Για παράδειγμα ένα εξάμηνο συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης για 120 τόνους αλευριού με εκ των προτέρων καθορισμένη τιμή €200/τόνο είναι μία δέσμευση αγοράς, του ιδιοκτήτη του συμβολαίου, 120 τόνων αλευριού σε μήνες με τιμή €200/τόνο.

Το χαρτοφυλάκιο επανασυγκρότησης (replicating portfolio) αποτελείται από αγορά *Δ* μονάδων συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης και δανεισμό μετρητών του ποσού των *B* ευρώ. Στο τέλος της δοθείσας περιόδου, η αποπληρωμή του συμβολαίου είναι ακριβώς η αλλαγή στην τιμή των συμβολαίων [39]. Έτσι, μετά από μία περίοδο, η αποπληρωμή του χαρτοφυλακίου είναι $\Delta\ (u F - F) + e^{-rh} B$ σε περίπτωση ανοδικής πορείας και $\Delta\ (d F - F) + e^{-rh} B$ σε περίπτωση καθοδικής πορείας της τιμής, όπου F είναι η τιμή παράδοσης του συμβολαίου στην αρχή της περιόδου και r ο συνεχές ανατοκιζόμενο χωρίς ρίσκο επιτόκιο. Στην περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο επανασυγκροτεί ένα δικαίωμα αγοράς επί συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης τότε από τη συνθήκη *μη-βέβαιου κέρδους* πρέπει να ισχύει:

$$\Delta\ (u F - F) + e^{-rh} B = C_u \text{ και}$$

$$\Delta\ (d F - F) + e^{-rh} B = C_d$$

Λύνοντας το σύστημα καταλήγουμε στις εξισώσεις:

(4.15) $$\Delta = \frac{C_u - C_d}{F(u-d)}$$

(4.16) $$B = e^{-rh}\left(C_u \frac{1-d}{u-d} + C_d \frac{u-1}{u-d}\right)$$

Τώρα, η τιμή αγοράς στην αρχή της περιόδου είναι η τιμή 0 αξίας του χαρτοφυλακίου επανασυγκρότησης. Έτσι:

(4.17) $$C = B = e^{-rh}\left(C_u \frac{1-d}{u-d} + C_d \frac{u-1}{u-d}\right)$$

αφού τα Σ.Μ.Ε. δεν απαιτούν αρχικό ασφάλιστρο. Τώρα από τον τύπο (4.9.2) μπορούμε να προσδιορίζουμε την ουδέτερου ρίσκου πιθανότητα μιας ανοδικής πορείας της τιμής

$$p_u = \frac{1-d}{u-d}.$$

Γνωρίζουμε ότι η ανοδική και καθοδική κίνηση της εκ των προτέρων καθορισμένης τιμής μοντελοποιείται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$uF = F_{t,t+h}\, e^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$dF = F_{t,t+h}\, e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

όπου $F_{t,\ t+h} = F$ η εκ των προτέρων καθορισμένη τιμή. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις βρίσκουμε ότι: $u = e^{\sigma\sqrt{h}}$ και $d = e^{-\sigma\sqrt{h}}$

Παράδειγμα 4.12

Έστω ένα δικαίωμα προαίρεσης που έχει ως υποκείμενο τίτλο ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης που διαπραγματεύεται χαλκό. Η τρέχουσα 1-έτους τιμή συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης είναι €250/τόνο, η τιμή άσκησης είναι €230, το συνεχώς ανατοκιζόμενο χωρίς ρίσκο επιτόκιο είναι 8%, η μεταβλητότητα είναι 11% και ο χρόνος λήξης έπειτα από ένα έτος. Για να βρούμε τα *Δ, B, C* θα χρησιμοποιήσουμε το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου.

Αρχικά βρίσκουμε τα $u = e^{\sigma\sqrt{h}} = e^{0,11\sqrt{1}} = 1{,}1162$, $d = e^{-\sigma\sqrt{h}} = e^{-0,11\sqrt{1}} = 0{,}8958$ $C_u = u \times F - K = 1{,}1162 \times 250 - 230 = 49{,}05$ και $C_d = 0$

Έτσι παίρνουμε $\Delta = \frac{C_u - C_d}{F(u-d)} = \frac{49{,}05}{250(1{,}1162-0{,}8958)} = 0{,}8901$και

$$C = B = e^{-rh}\left(C_u \frac{1-d}{u-d} + C_d \frac{u-1}{u-d}\right) = e^{-0{,}08\times 1}\left(49{,}05\frac{1-0{,}8958}{1{,}1162-0{,}8958}\right) = €21{,}4067$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ουδέτερου ρίσκου πιθανότητα μιας ανοδικής κίνησης:

$$p_u = \frac{1-d}{u-d} = \frac{1-0{,}8958}{1{,}1162-0.8958} = 0{,}47277$$

και έπειτα να υπολογίσουμε την τιμή του δικαιώματος αγοράς:

$$C = B = e^{-rh}[p_u\, C_u + (1-p_u)C_d\,] = e^{-0{,}08\times 1}[0{,}47277 \times 49{,}05] = €21{,}4067$$

4.9 Πιθανότητα Ουδέτερου Κινδύνου και Πραγματική Πιθανότητα

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε την προσέγγιση τιμολόγησης ουδέτερου κινδύνου και θα την συγκρίνουμε με την προσέγγιση τιμολόγησης μέσω πραγματικής πιθανότητας [13, 24].

Για να κατανοήσουμε το νόημα της φράσης “ουδέτερο ρίσκο” θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι μας προσφέρονται τα ακόλουθα σενάρια. Στο πρώτο σενάριο, έχουμε εξασφαλισμένοι ότι θα λάβουμε €300. Στο δεύτερο σενάριο, γυρνάμε ένα νόμισμα και εάν έρθουν γράμματα θα πάρουμε €300, εάν όμως έρθει κορώνα δεν θα πάρουμε τίποτα. Η αναμενόμενη αποπληρωμή και στα δύο σενάρια είναι €300. Οι επενδυτές έχουν διαφορετική συμπεριφορά ως προς το ρίσκο που διατίθενται να λάβουν. Ένας *συντηρητικός* επενδυτής (*risk-averse investor*), δηλαδή ο επενδυτής που αποφεύγει την ανάληψη κινδύνου λόγω πιθανής απώλειας θα διαλέξει το πρώτο σενάριο [13]. Ένας *αδιάφορος* επενδυτής (*risk-neutral investor*), δεν έχει προτίμηση μεταξύ της σίγουρής πληρωμής των €300 ή του στοιχήματος καθώς και τα δύο έχουν την ίδια αναμενόμενη πληρωμή. Συνεπώς, ένας αδιάφορος επενδυτής θα ήταν εξίσου ικανοποιημένος και με τα δύο σενάρια.

Συνήθως στις τεχνικές τιμολόγησης θεωρούμε ως δεδομένο ότι ο επενδυτής είναι συντηρητικός. Έστω ότι όλοι οι επενδυτές είναι αδιάφοροι [27]. Συνεπώς το μόνο που τους απασχολεί είναι οι αναμενόμενες αποδόσεις και όχι το επίπεδο του κινδύνου που αναλαμβάνουν. Επιπλέον, οι επενδυτές δεν θα χρεώνουν ή απαιτούν ασφάλιστρο για επικίνδυνους τίτλους και οι επικίνδυνοι τίτλοι θα έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση με τους ακίνδυνους τίτλους. Με άλλα λόγια οι επενδυτές κρατούν τίτλους με αναμενόμενες αποδόσεις ίσες με το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο [27].

Έστω p_u η πιθανότητα η τιμή της μετοχής να κινηθεί ανοδικά, δηλαδή όταν η μετοχή αναμένεται να μας δώσει κέρδος ίσο με το μηδενικού κινδύνου επιτόκιο. Στο διωνυμικό μοντέλο, η p_u για μια περίοδο ικανοποιεί την εξίσωση:

$$p_u\, u\, S\, e^{\delta\, h} + (1 - p_u)\, d\, S\, e^{\delta\, h} = e^{r\, h}\, S$$

Λύνοντας ως προς p_u προκύπτει:

$$p_u = \frac{e^{(r-\delta\,)h} - d}{u - d}$$

Για αυτό στις προηγούμενες ενότητες αναφέραμε την p_u σαν πιθανότητα ουδέτερου ρίσκου. Η τιμή της αγοράς δικαιωμάτων προαίρεσης δίνεται από τον τύπο:

$$C = e^{-rh}[p_u\, C_u + (1 - p_u) C_d]$$

Παράδειγμα 4.13

Έστω μια μετοχή για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: πληρώνει συνεχώς μερίσματα με συνεχή ανατοκιζόμενη απόδοση 5%, το συνεχώς ανατοκιζόμενο χωρίς ρίσκο επιτόκιο είναι 8%, κάθε h έτη η τιμή της μετοχής αυξάνεται κατά 80% ή μειώνεται κατά 70%, η πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου της τιμής της μετοχής που αυξάνεται ανά h έτη είναι 0,64.Για να υπολογίσουμε το h λύνουμε τον τύπο της p_u ως προς h:

$$0{,}64 = \frac{e^{(0{,}08-0{,}05\,)h} - 0{,}3}{1{,}8 - 0{,}3}$$

$$h = 7{,}703 \text{ έτη}.$$

Η τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης σε έναν κόσμο που υπάρχουν μόνο συντηρητικοί επενδυτές είναι τελείως διαφορετική. Έστω p η πραγματική πιθανότητα για την αύξηση της τιμής μιας μετοχής. Έστω α η συνεχώς ανατοκιζόμενη αναμενόμενη απόδοση της μετοχής. Τότε η p θα ικανοποιεί την εξίσωση , $p\, u\, S\, e^{\delta\, h} + (1 - p)\, d\, S\, e^{\delta\, h} = e^{a\, h}\, S$.

Λύνοντας ως προς p παίρνουμε $p = \frac{e^{(a-\delta)h} - d}{u-d}$. Η πραγματική πιθανότητα για την μείωση της τιμής της μετοχής είναι

$$1 - p = \frac{u - e^{(a-\delta)h}}{u-d}$$

Επιβάλλοντας τη συνθήκη $d < e^{(a-\delta)h} < u$ παίρνουμε $0 < p < 1$. Τώρα, χρησιμοποιώντας την p βρίσκουμε την πραγματική αναμενόμενη αποπληρωμή στο τέλος της περιόδου: $p\, C_u + (1-p)\, C_d$

Παράδειγμα 4.14

Έστω μία μετοχή που δεν πληρώνει μερίσματα. Κάθε δύο έτη, η τιμή της μετοχής είτε αυξάνεται κατά 8% είτε μειώνεται κατά 9%. Η ετήσια συνεχώς ανατοκιζόμενη αναμενόμενη απόδοση της μετοχής είναι 2%. Για να βρούμε την πραγματική πιθανότητα να αυξηθεί η τιμή της μετοχής σε 2 έτη αντικαθιστούμε τις τιμές στον τύπο

$$p = \frac{e^{(a-\delta)h} - d}{u-d} = \frac{e^{0,02\times 2} - 0,91}{1,08 - 0,91} = 0,7694\,.$$

Για τις πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου προεξοφλούμε την αναμενόμενη απόδοση με επιτόκιο χωρίς ρίσκο έτσι ώστε να βρούμε την τρέχουσα τιμή του δικαιώματος προαίρεσης. Το ερώτημα είναι με ποιο επιτόκιο που προεξοφλούμε την πραγματική αναμενόμενη αποπληρωμή. Σίγουρα το α απορρίπτεται καθώς το δικαίωμα προαίρεσης είναι ένας τύπος μοχλευμένης επένδυσης έτσι εμπεριέχει περισσότερο κίνδυνο από την μετοχή.

Έστω γ το κατάλληλο ανά περίοδο επιτόκιο προεξόφλησης (αυτό σημαίνει ότι σε ένα διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων, το ανά περίοδο προεξοφλητικό επιτόκιο είναι διαφορετικό σε κάθε κόμβο). Χρησιμοποιούμε τη θεωρία των Brealey και Meyer στην οποία αναφέρεται ότι η απόδοση οποιουδήποτε χαρτοφυλακίου είναι ο σταθμισμένος μέσος όρος των αποδόσεων των τίτλων που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο [5]. Εφαρμόζουμε αυτή τη θεωρία σε ένα χαρτοφυλάκιο μιμούνται την αποπληρωμή ενός δικαιώματος αγοράς, αποτελούμενο από Δ μερίδια μετοχών που δεν πληρώνουν μερίσματα και δάνειο €B και παίρνουμε

$$e^{\gamma h} = \frac{S\,\Delta}{S\,\Delta - B}\, e^{\alpha\, h} - \frac{B}{S\,\Delta - B} e^{rh}$$

Εφόσον ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι ισοδύναμο με ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από αγορά *Δ* μεριδίων και δανείου *€B*, ο παρονομαστής της προηγούμενης σχέσης είναι η τιμή του δικαιώματος. Έτσι η προεξοφλημένη χρηματοροή δεν έχει πρακτική εφαρμογή στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης, όταν η προεξοφλημένη αναμενόμενη αποπληρωμή υπολογισμένη με επιτόκιο γ είναι:

$$C = e^{-\gamma\, h}[\, p\, C_u + (1-p)C_d\,]$$

Πρόταση 4.3

Η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης που υπολογίσθηκε μέσω πραγματικών πιθανοτήτων είναι ίδια με αυτή που υπολογίσθηκε μέσω πιθανοτήτων ουδέτερου ρίσκου.

Απόδειξη

Έχουμε $e^{-\gamma\, h}[\, p\, C_u + (1-p)C_d\,] = \frac{S\Delta - B}{S\Delta e^{\alpha h} - Be^{rh}}\left[C_u \frac{e^{rh}-d}{u-d} + C_d \frac{u-e^{rh}}{u-d} + (C_u - C_d)\frac{e^{\alpha h}-e^{rh}}{u-d}\right]$

όμως $C_u \frac{e^{rh}-d}{u-d} + C_d \frac{u-e^{rh}}{u-d} = e^{rh}\,(S\Delta - B)$ και $(C_u - C_d)\frac{e^{\alpha h}-e^{rh}}{u-d} = \left(e^{\alpha h} - e^{rh}\right)\Delta S.$

Συνεπώς $C_u \frac{e^{rh}-d}{u-d} + C_d \frac{u-e^{rh}}{u-d} + (C_u - C_d)\frac{e^{\alpha h}-e^{rh}}{u-d} = S\Delta e^{\alpha h} - Be^{rh}$ και

$e^{-\gamma\, h}[\, p\, C_u + (1-p)C_d\,] = S\Delta - B.$

Παράδειγμα 4.15

Έστω Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς επί μιας μετοχής, ενός έτους για το οποίο ισχύουν: η τιμή εξάσκησης είναι €50, η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι €51, η αναμενόμενη απόδοση είναι 17%, η μετοχή δεν πληρώνει μερίσματα, το συνεχώς ανατοκιζόμενο χωρίς κίνδυνο επιτόκιο είναι 9% και η μεταβλητότητα είναι 32%

Θα χρησιμοποιήσουμε το διωνυμικό μοντέλο μίας περιόδου για να υπολογίσουμε την τιμή του δικαιώματος αγοράς. Πρώτα θα χρησιμοποιήσουμε πραγματικές πιθανότητες και έπειτα ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες.

Αρχικά υπολογίζουμε τα $u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} = e^{(0{,}09-0)+0{,}32\sqrt{1}} = 1{,}5068$,$d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}} = e^{(0{,}09-0)-0{,}32\sqrt{1}} = 0{,}7945$

Ο αριθμός των μερισμάτων του χαρτοφυλακίου επανασυγκρότησης είναι

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} = \frac{(u \times S - K) - 0}{S(u-d)} = \frac{1{,}5068 \times 51 - 50}{51(1{,}5068 - 0{,}7945)} = 0{,}7390$$

Το ποσό των χρημάτων που δανειζόμαστε είναι

$$B = e^{-rh}\frac{uC_d - dC_u}{d-u} = e^{-(0,09\times 1)}\frac{(1,5068\times 0)-(0,7945\times 26,8468)}{0,7945-1,5068} = €27,3676$$

Η πραγματική πιθανότητα η τιμή της μετοχής να έχει ανοδική πορεία είναι:

$$p = \frac{e^{\alpha h}-d}{u-d} = \frac{e^{(0,17\times 1)}-0,7945}{1,5068-0,7945} = 0,5486$$

$$e^{\gamma h} = \frac{S\Delta}{S\Delta - B}e^{\alpha h} - \frac{B}{S\Delta - B}e^{rh}$$
$$= \frac{51\times 0,7390}{51\times 0,7390-27,3676}e^{0,17} - \frac{27,3676}{51\times 0,7390-27,3676}e^{0,09} = 1,4269$$

Έτσι *γ = ln 1,4269 = 0,3555* .Η τιμή του δικαιώματος είναι:

$$C = e^{-\gamma\, h}[\,p\,C_u + (1-p)C_d\,] =$$
$$= e^{-0,3555}[0,5486 * (1,5068\times 51-50)+(1-0,5486)\times 0] = €10,32$$

Η ουδέτερου ρίσκου πιθανότητα για ανοδική κίνηση της τιμής της μετοχής είναι:

$$p_u = \frac{e^{(r-\delta)h}-d}{u-d} = \frac{e^{(0,09-0)\times 1}-0,7945}{1,5068-0,7945} = 0,42071$$

Η τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι:

$$C = e^{-r\,h}[\,p_u\,C_u + (1-p_u)C_d\,]$$
$$= e^{-0,09}[0,42071 * (1,5068\times 51-50)+(1-0,42071)\times 0]$$
$$= €10,3218$$

4.10 Εναλλακτικά Διωνυμικά Δέντρα

Στις προηγούμενες ενότητες η κατασκευή των διωνυμικών δέντρων στηριζόταν στους 3 εξής τύπους:

$$u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}}$$

$$d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}$$

$$p_u = \frac{e^{(r-\delta)h}-d}{u-d}$$

Σε αυτή την ενότητα, θα αναλύσουμε δύο επιπλέον τρόπους κατασκευής διωνυμικών δέντρων που προσεγγίζουν τη λογαριθμική κατανομή.

4.10.1 Το Cox-Ross-Rubinstein Διωνυμικό Δέντρο

Η κατασκευή του Cox-Ross-Rubinstein διωνυμικού δέντρου στηρίζεται στους τύπους [56]:

$$u = e^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

$$p_u = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d}.$$

Η προσέγγιση Cox-Ross-Rubinstein είναι από τις πιο διαδεδομένες και πιο εφαρμοσμένες. Η αδυναμία αυτής της προσέγγισης είναι ότι εάν ισχύει η συνθήκη $e^{r\,h} > e^{\sigma\,\sqrt{h}}$, εκείνη καταρρίπτεται. Στην πραγματικότητα, το *h* είναι πολύ μικρό με αποτέλεσμα να μην προκύπτουν προβλήματα στην εφαρμογή της προσέγγισης.

Παράδειγμα 4.16

Έστω η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής €1500. Η μεταβλητότητα της τιμής είναι 33%. Για να βρούμε την τιμή της μετοχής στον κόμβο *uud* θα χρησιμοποιήσουμε το CRR τριών περιόδων διωνυμικό δέντρο. Η κάθε περίοδος είναι 2 μήνες.

Έχουμε, $u = e^{\sigma\sqrt{h}} = e^{0{,}33\sqrt{\frac{1}{6}}} = 1{,}1442$ και $d = e^{-\sigma\sqrt{h}} = e^{-0{,}33\sqrt{\frac{1}{6}}} = 0{,}8739$.

Η τιμή της μετοχής στον κόμβο *uud* είναι $u^2\, dS = 1{,}1442^2 * 0{,}8739 * 1500 =$ *€1716,27.*

Παράδειγμα 4.17

Έστω ένα μονοετές Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς επί μιας μετοχής για το οποίο ισχύουν: η τιμή εξάσκησης είναι €55, η τρέχουσα τιμής της μετοχής είναι €52, το συνεχώς ανατοκιζόμενο χωρίς κίνδυνο επιτόκιο είναι 8%, η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής είναι 33% και τέλος ότι η μετοχή δεν πληρώνει μερίσματα.

Για να βρούμε την τρέχουσα τιμή του δικαιώματος αγοράς θα χρησιμοποιήσουμε το CRR διωνυμικό δέντρο μιας περιόδου . $u = e^{\sigma\sqrt{h}} = e^{0{,}33\sqrt{1}} = 1{,}3909$ και $d = e^{-\sigma\sqrt{h}} = e^{-0{,}33\sqrt{1}} = 0{,}7189$. Η πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου είναι

$$p_u = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d} = \frac{e^{(0{,}08-0)\times 1} - 0{,}7189}{1{,}3909 - 0{,}7189} = 0{,}5422$$

Το $C_u = uS - K = 1{,}3909 \times 52 - 55 = 17{,}3268$ και $C_d = 0$. Έτσι η τρέχουσα τιμή του δικαιώματος ισούται με

$$C = e^{-r\,h}[\,p_u\,C_u + (1-p_u)C_d\,] = e^{-0{,}08\times 1}[\,0{,}5422 \times 17{,}3268 + (1-0{,}5422)\times 0\,] = €8{,}6723.$$

4.10.2 Το Jarrow-Rudd (Λογαριθμικό) Διωνυμικό Δέντρο

Η κατασκευή του Jarrow-Rudd διωνυμικού δέντρου βασίζεται στους τύπους [56]:

$$u = e^{(r-\delta-0{,}5\sigma^2)h+\sigma\sqrt{h}}$$

$$d = e^{(r-\delta-0{,}5\sigma^2)h-\sigma\sqrt{h}}$$

$$p_u = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d}.$$

Παράδειγμα 4.18

Έστω ότι οι τιμές των μετοχών μιας εταιρίας μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσω ενός λογαριθμικού δέντρου του οποίου κάθε περίοδος ισοδυναμεί με 5 έτη. Η ετήσια συνεχώς ανατοκιζόμενη απόδοση είναι 9%, η μετοχή πληρώνει συνεχώς μερίσματα με ετήσια συνεχώς ανατοκιζόμενη απόδοση 2%. Η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής είναι 45%. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι €500 ανά μερίδιο. Για να βρούμε την τιμή της μετοχής σε 60 έτη αν ακολουθεί ανοδική πορεία 7 περιόδους και καθοδική πορεία 5 περιόδους πρέπει να υπολογίσουμε το $u^7\,d^5\,S$.

Έχουμε:

$$u = e^{(r-\delta-0{,}5\sigma^2)h+\sigma\sqrt{h}} = e^{(0{,}09-0{,}02-0{,}5\times 0{,}45^2)\times 5+0{,}45\sqrt{5}} = 2{,}3396$$

$$d = e^{(r-\delta-0{,}5\sigma^2)h-\sigma\sqrt{h}} = e^{(0{,}09-0{,}02-0{,}5\times 0{,}45^2)\times 5-0{,}45\sqrt{5}} = 0{,}3127$$

Άρα η τιμή της μετοχής που ψάχνουμε ισούται με $u^7\,d^5\,S = 2{,}3396^7 * 0{,}3127^5 * 500 =$ *€573,5888*.

Παράδειγμα 4.19

Έστω ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς διάρκειας ενός έτους επί μιας μετοχής για το οποίο ισχύει: η τιμή εξάσκησης είναι €52, η τρέχουσα τιμής της μετοχής είναι €56, το συνεχώς ανατοκιζόμενο χωρίς κίνδυνο επιτόκιο είναι 8%, η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής είναι 33%, η μετοχή δεν πληρώνει μερίσματα. Για να βρούμε την τρέχουσα τιμή του δικαιώματος αγοράς θα χρησιμοποιήσουμε ένα λογαριθμικό δέντρο μιας περιόδου:

$$u = e^{(r-\delta-0{,}5\sigma^2)h+\sigma\sqrt{h}} = e^{(0{,}08-0-0{,}5\times 0{,}33^2)\times 1+0{,}33\sqrt{1}} = 1{,}4269$$

$$d = e^{(r-\delta-0,5\sigma^2)h-\sigma\sqrt{h}} = e^{(0,08-0-0,5\times0,33^2)\times1-0,33\sqrt{1}} = 0,7375$$

Η πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου είναι:

$$p_u = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} = \frac{e^{(0,08-0)\times1} - 0,7375}{1,4269 - 0,7375} = 0,5015$$

και $C_u = uS - K = 1,4269 * 52 - 56 = 18,1988$ και $C_d = 0$. Έτσι η τρέχουσα τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι:

$$C = e^{-r\,h}[\,p_u\,C_u + (1-p_u)C_d\,] = e^{-0.08}[\,0,5015 \times 18,1988 + (1-0,5015)\times 0\,]$$
$$= €8,4250.$$

Εύρεση Πινάκων

Πίνακας Διαγραμμάτων

Βιβλιογραφία

A. Βιβλία

[1] Alexander, G., J., Sharpe, W. F., & Bailey, J., V. (1993).*Fundamentals of investments*. Prentice-Hall.

[2] Baxter, M. & Rennie, A. (1996) *Financial Calculus An introduction to derivative pricing*. Cambridge university press.

[3] Benaben, B. (Ed.) (2005) *Inflation-linked products: a guide for investors and asset & liability managers*. Risk Books.

[4] Bodie, Z., Marcus, A. J. & Kane, A. (1996). *Investements*. Irwin.

[5] Brealey, R., & Myers, S. (2000) *Principles of corporate finance*. Boston: McGraw-Hill

[6] Brigo, D., & Mercurio, F. (2007) *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer Science & Business Media.

[7] Chance, D. M., & Brooks, R. (2010) *Derivatives and Risk Management Basics*. New-Delhi: Cengage Learning.

[8] Clewlow, L., & Strickland, C. (1996) *Implementing Derivative Models*. Wiley Series in Financial Engineering.

[9] Copeland, T. & Weston, J. (1983) *Financial Theory and Corporate Policy*. Reading, MA: Addison-Wesley.

[10] Cox, J. C., & Rubinstein, M. (1985) *Options markets*. Prentice Hall.

[11] Deacon, M., Derry, A., & Mirfendereski, D. (2004) *Inflation-indexed securities: bonds, swaps and other derivatives [2nd Edition]*. John Wiley & Sons.

[12] Dubofsky, D., A. & Miller, T. W. (2003) *Derivatives: Valuation and Risk Management*. Oxford University Press.

[13] Durrett, R. (2010) *Probability: theory and examples*. Cambridge university press.

[14] Hull, J. C. (2007) *Options, futures, and other derivatives [6th Edition]*. Pearson Education India.

[15] Klebaner, F. C. (2005) *Introduction to stochastic calculus with applications* (Vol. 57). London: Imperial College Press.

[16] Kolb, Robert W. (1997) *Futures Options and Swaps*, Malden, MA: Blackwell Publishers

[17] Kumar, S. S. S. (2007) *Financial derivatives*. Prentice-Hall of India.

[18] Luenberger, D. G. (1997) *Investment science*. Oxford University Press

[19] McDonald, R., L. (2006) *Derivatives Markets [2nd Edition]*. Pearson.

[20] Ross, S., A. (1977) Return, risk and arbitrage, In: Friend, I. & Bicksler, J. L. (Eds.). (1977). *Risk and return in finance* (Vol. 1). Ballinger Pub. Co.

[21] Ross, S., M. (2007) *Στοιχειώδης εισαγωγή στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά. Δικαιώματα και άλλα θέματα.* Μετάφραση από τα αγγλικά από τον Αστέριο Τούτιο. Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας.

[22] Staunton, M. (2005) Efficient estimates for valuing American options. *The Best of Wilmott 2*, John Wiley & Sons, Chichester, UK. pp. 91-97.

[23] Stulz, R. M. (2003) *Risk management and derivatives*. South-Western Publishing Company.

[24] Uspensky, J. V. (1937) Introduction to mathematical probability. New York: McGraw-Hill.

[25] Wilmott, P., Howison, S. & Dewynne, J. (1995) *The mathematics of financial derivatives*. Cambridge University Press.

[26] Παναγιώτης, Α. (2005) Τα Παράγωγα Προϊόντα & η Ελληνική Χρηματιστηριακή Αγορά Παραγώγων, Εκδόσεις «ΕΛΛΗΝ»

B. Άρθρα

[27] Amin, K. I. (1991) On the computation of continuous time option prices using discrete approximations. *Journal of financial and quantitative analysis*, vol. 26, no. 4, pp. 477-495.

[28] Amin, K., & Khanna, A. (1994) Convergence of American option values from discrete-to continuous-time financial models. *Mathematical Finance*, vol. 4, no. 4, pp. 289-304.

[29] Burmeister, E., & Wall, K. D. (1986) The arbitrage pricing theory and macroeconomic factor measures. *Financial Review*, vol. 21, no. 1, pp. 1-20.

[30] Chen, N. F., Roll, R., & Ross, S. A. (1986) Economic forces and the stock market. *Journal of business*, pp. 383-403.

[31] Derman, E., Kani, I., Ergener, D., & Bardhan, I. (1995) Enhanced numerical methods for options with barriers. *Financial Analysts Journal*, vol. 51, no. 6, pp. 65-74.

[32] Diener, F., & Diener, M. A. R. C. (2004) Asymptotics of the price oscillations of a European call option in a tree model. *Mathematical finance*, vol. 14, no. 2, pp. 271-293.

[33] Dybvig, P. H., & Ross, S. A. (1985). Yes, the APT is testable. *The Journal of Finance*, vol. 40, no. 4, pp. 1173-1188.

[34] Finucane, T. J. (1991) Put-call parity and expected returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 26, no. 4, pp. 445-457.

[35] Kamara, A., & Miller, T. W. (1995) Daily and intradaily tests of European put-call parity. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 30, no. 4, pp. 519-539.

[36] Klemkosky, R. C., & Resnick, B. G. (1979) Put-Call Parity and Market Efficiency. *The Journal of Finance*, vol. 34, no. 5, pp. 1141-1155.

[37] Klemkosky, R. C., & Resnick, B. G. (1980) An ex ante analysis of put-call parity. *Journal of Financial Economics*, vol. 8, no. 4, pp. 363-378.

[38] Korn, R., & Müller, S. (2009) Getting multi-dimensional trees into a new shape. *Wilmott Journal*, vol. 1, no. 3, pp. 145-153.

[39] Korn, R., & Muller, S. (2009) The decoupling approach to binomial pricing of multi-asset options. *Journal of Computational Finance*, vol. 12, no. 3, p 1.

[40] Leisen, D. P., & Reimer, M. (1996) Binomial models for option valuation-examining and improving convergence. *Applied Mathematical Finance*, vol. 3, no. 4, pp. 319-346.

[41] MacMillan, L. W. (1986) Analytic approximation for the American put option. *Advances in futures and options research*, vol. 1, no. 1, pp. 119-139.

[42] Merton, R. C. (1973) The relationship between put and call option prices: Comment. *Journal of Finance*, vol. 28, no. 1, pp. 183-184.

[43] Ross, S., A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of economic theory*, vol. 13, no. 3, pp. 341-360.

[44] Shanken, J. (1982) The arbitrage pricing theory: Is it testable? *The journal of Finance*, vol. 37, no. 5, pp. 1129-1140.

[45] Tamás, D. N. (2002) *Arbitrage Theorem and its Applications*. Club of Economics in Miskolc TMP, vol. 1, pp. 27-32.

[46] Tian, Y. (1999) A flexible binomial option pricing model. *Journal of Futures Markets*, vol. 19, no. 7, pp. 817-843.

[47] Van Rensburg, P. (1997) Investment Basics: XXXIV. The arbitrage pricing theory. *Investment Analysts Journal*, vol. 26, no. 46, pp. 60-64.

Γ. Σημειώσεις

[48] Γκλεζάκος, Μ. (2008) Σημειώσεις για το μάθημα "Αξιόγραφα και χρηματιστηριακές επενδύσεις". Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

[49] Μπούτσικας, Μ. (2005-2007) Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα (Εισαγωγή στη στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση) [Σημειώσεις Παραδόσεων]. Πανεπιστήμιο Πειραιά Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.

Δ. Εργασίες

[50] Finan, M., B. (2007) A Probability Course for the Actuaries: A Preparation for Exam P/1.

[51] Finan, M., B. (2008) A Basic Course in the Theory of Interest and Derivatives Markets: A Preparation for Exam FM/2.

[52] Finan, M., B. (2011). A Discussion of Financial Economics in Actuarial Models A Preparation for the Actuarial Exam MFE/3F. [Preliminary Draft] Last Updated 29th May 2015 Πρόσβαση από: http://faculty.atu.edu/mfinan/actuarieshall/DFEM.pdf

[53] Frangoulis, P. P. (1999) *"Market efficiency & arbitrage opportunities in the FTSE-100 option market: an application on the put-call parity with high frequency data* [Doctoral dissertation, Durham University].

[54] Gibson, R., & Zimmermann, H. (1994, December) *The Benefits and Risks of Derivative Instruments.* Geneva Papers, International Finance and Commodity Institute.

[55] Grossman, S. J. (1989) *An analysis of the implications for stock and futures price volatility of program trading and dynamic hedging strategies*. National Bureau of Economic Research, Working Paper No. w2357

[56] Müller, S. (2009) The binomial approach to option valuation [PhD Thesis] Department of Mathematics University of Kaiserslautern.

[57] SOA/CAS, Exam MFE Sample Questions.

[58] Stolyarov, G. (n.d.) The Actuary’s Free Study Guide for Exam 3F /MFE.