

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ
ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ
ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ ΤΗ
ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΥ
ΧΡΟΝΟΥ ΖΩΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΤΑΣΗ
ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

Μιχαήλ Γ. Βαρούχας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Δεκέμβριος 2015

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ
ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ
ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ ΤΗ
ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΥ
ΧΡΟΝΟΥ ΖΩΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΤΑΣΗ
ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

Μιχαήλ Γ. Βαρούχας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Δεκέμβριος 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

..... (Επιβλέπων)

.....

.....

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND ACTUARIAL
SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL
SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

**PARAMETRIC MODELS BY
RELATIONSHIPS BETWEEN MEAN
RESIDUAL LIFETIME AND HAZZARD RATE**

**By
Michail G. Varouchas**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of
the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for
the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk
Management

Piraeus
December 2015

Στους γονείς μου

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον Επίκουρο Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης Ψαρράκο Γεώργιο , ο οποίος με καθοδήγησε αποτελεσματικά κατά την εκπόνησή της παρούσας εργασίας καθώς και όλους τους καθηγητές που είχα την τιμή να γνωρίσω κατά την διάρκεια σπουδών μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου.

Υπογραφή:

Μιχαήλ Βαρούχας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Μιχαήλ Γ. Βαρούχας

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΖΩΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΤΑΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρούμε έναν συνδυασμό στοιχείων της ακαδημαϊκής βιβλιογραφίας για τον χαρακτηρισμό κατανομών από ιδιότητες όπως η ένταση κινδύνου ή ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής. Επιπλέον, γίνονται χαρακτηρισμοί κατανομών από σχέσεις των παραπάνω δύο ιδιοτήτων. Τέλος, μελετάμε την έννοια της διασποράς του υπολειπόμενου χρόνου ζωής, συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτή η συνάρτηση χαρακτηρίζει την κατανομή και παρουσιάζουμε σχέσεις αυτής της συνάρτησης με την συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και την συνάρτηση της έντασης κινδύνου.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

Michail G. Varouchas

PARAMETRIC MODELS BY RELATIONSHIPS BETWEEN
MEAN RESIDUAL LIFETIME AND HAZZARD RATE

Abstract

The present thesis analyzes several distribution characterizations through their corresponding mean residual life or failure rate function. These characterizations are obtained through relationships between the mean residual lifetime function and the failure rate function. The aim of the thesis is to study the concept of variance of the residual life and single out the conditions under which the variance of the residual life uniquely determines the distribution. This function is expressed in terms of mean residual life and failure rate.

Numerical examples are provided to evaluate our results.

Περιεχόμενα

Επεξηγηματικοί πίνακες συμβόλων που χρησιμοποιούνται στην εργασία	xii
1 Εισαγωγή	3
1.1 Στόχος αυτής της εργασίας	3
1.2 Σύντομη περιγραφή της εργασίας	4
2 Έννοιες και εφαρμογές που αφορούν τη γήρανση	7
2.1 Εισαγωγή	7
2.2 Χαρακτηρισμοί κατανομών χρόνου ζωής	8
2.2.1 Μορφές της συνάρτησης έντασης κινδύνου	9
2.3 Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής	15
2.3.1 Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής και κάποιες ιδιότητες γήρανσης	16
2.3.2 Μορφές της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής	16
2.4 Σύνδεση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με την ένταση κινδύνου	18
2.5 Κατανομές χρόνου ζωής	18
2.5.1 Εκθετική	19
2.5.2 Γάμμα	19
2.5.3 Περικεκομμένη Κανονική	20
2.5.4 Weibull	21
2.5.5 Λογαριθμοκανονική	22
2.5.6 Αντίστροφη Γκαουσιανή	23
2.5.7 Gompertz	24
2.5.8 Makeham	24
2.5.9 Γραμμική ένταση κινδύνου	25

2.5.10	Lomax	26
3	Μελέτη της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής στην περίπτωση που το μοντέλο εκτίθεται σε έναν επιπλέον σταθερό κίνδυνο	27
3.1	Εισαγωγικές έννοιες	28
3.2	Υπολογισμός των συναρτήσεων υπολειπόμενου χρόνου ζωής στην παρουσία ενός σταθερού κινδύνου	29
3.2.1	Εκθετική	31
3.2.2	Γάμμα	32
3.2.3	Λογαριθμοκανονική	33
3.2.4	Γραμμική συνάρτηση έντασης κινδύνου	33
3.2.5	Lomax	34
3.3	Σύγκριση των συναρτήσεων του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και των σημείων καμπής τους	35
3.3.1	Παράδειγμα με την χρήση της κατανομής Hjorth	37
3.4	Δύο γενικεύσεις της κατανομής Weibull	38
3.5	Συμπεράσματα	42
4	Τρόποι εξάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με την ένταση κινδύνου και αποτελέσματα χαρακτηρισμών	44
4.1	Παράσταση της έντασης κινδύνου συναρτήσει του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής	45
4.2	Παράσταση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής σε όρους έντασης κινδύνου	49
4.2.1	Μια γενικευμένη οικογένεια κατανομών που περιλαμβάνει την οικογένεια Pearson	50
4.2.2	Η οικογένεια Pearson	50
4.2.3	Η κατανομή Βήτα	51
4.2.4	Η κατανομή Γάμμα	52
4.2.5	Η κανονική κατανομή	53
4.2.6	Η κατανομή Maxwell	53
4.3	Χαρακτηρισμός κατανομών από σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων $r(x)$ και $\mu(x)$	54

4.4	Εφαρμογές	58
4.4.1	Συνεχείς κατανομές	59
4.4.2	Διακριτές κατανομές	63
4.5	Συμπεράσματα	65
5	Χαρακτηρισμοί συνεχών κατανομών από ιδιότητες της δεσμευμένης συνάρτησης διασποράς	67
5.1	Εισαγωγή	67
5.2	Διασπορά υπολειπόμενου χρόνου ζωής	69
5.3	Ένα κάτω φράγμα για την συνάρτηση της διασποράς υπο- λειπόμενου χρόνου ζωής	80
	Βιβλιογραφία	84

Κατάλογος Πινάκων

1	Χρήσιμες έννοιες	1
2	Συντομογραφίες	2
4.1	Συνοπτικός πίνακας για τις συνεχείς κατανομές	65
4.2	Συνοπτικός πίνακας για τις διακριτές κατανομές	65

Σύμβολο	Περιγραφή
X	τ.μ. που περιγράφει την συνολική διάρκεια ζωής
$F(x)$	Συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X
$S(x) = 1 - F(x)$	Συνάρτηση αξιοπιστίας της τ.μ. X
$f(x) = F'(x)$	Συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X
$\Gamma(x)$	Συνάρτηση Γάμμα
$\mu = E(X)$	Μέση τιμή της τ.μ. X
$T_x = X - x X > x$	τ.μ. υπολειπόμενου χρόνου ζωής αντικειμένου ηλικίας x
$\mu(x) = E(X - x X > x)$	Συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής
$F(t x)$	Συνάρτηση κατανομής της τ.μ. T
$S(t x) = 1 - F(t x)$	Συνάρτηση αξιοπιστίας της τ.μ. T
\log	Φυσικός λογάριθμος
Φ	Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής

Πίνακας 1: Χρήσιμες έννοιες

Συντομογραφία	Ανάπτυξη στα Αγγλικά
MRL	Mean Residual Life
FR	Failure Rate
IFR (DFR)	Increasing (Decreasing) Failure Rate
NBU (NWU)	New Better (Worse) than Used
IMRL (DMRL)	Increasing (Decreasing) Mean Residual Life
DIMRL (IDMRL)	Decreasing (Increasing) then Increasing (Decreasing) Mean Residual Life
BT (UBT)	Bathtub shaped (Upside-down Bathtub shape)
MBT	Modified Bathtub shaped FR

Πίνακας 2: Συντομογραφίες

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Στόχος αυτής της εργασίας

Όπως δηλώνει και ο τίτλος αυτής της διπλωματικής εργασίας, ο στόχος εδώ είναι να χαρακτηρίσουμε κατανομές βάση κάποιων ιδιοτήτων που έχουν. Συγκεκριμένα, το ενδιαφέρον αυτής της εργασίας είναι ο χαρακτηρισμός κατανομών από τη συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής, από την ένταση κινδύνου καθώς και από σχέσεις που συνδέουν τις δύο παραπάνω συναρτήσεις. Όπως θα παρατηρήσουμε στη συνέχεια, η γήρανση συνήθως έχει αρνητική επίδραση στην διάρκεια ζωής ενός αντικειμένου. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου η γήρανση επιδρά θετικά στην διάρκεια ζωής. Τα παραπάνω έχουν άμεση επίδραση στα δύο μέτρα αξιοπιστίας που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτήν την εργασία για να περιγράψουμε την διάρκεια ζωής ενός αντικειμένου. Το πρώτο μέτρο αξιοπιστίας που θα δούμε είναι η ένταση κινδύνου (FR-Failure Rate) ενώ το δεύτερο είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής (MRL-Mean Residual Life).

Βλέποντας τα παραπάνω από μια άλλη οπτική, οι παραπάνω έννοιες που περιγράφουν την γήρανση ορίστηκαν σε πρώτο επίπεδο από τα χαρακτηριστικά τους και κυρίως το σχήμα τους.

Η παρούσα εργασία παρουσιάζει τους διαφορετικούς τρόπους γήρανσης αντικειμένων από τη σκοπιά της θεωρίας αξιοπιστίας και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις FR και MRL τη σημαντικότητα των οποίων θα δούμε στη συνέχεια στο Κεφάλαιο 2.

Στο Κεφάλαιο 3 θα δούμε τι συμβαίνει στη συνάρτηση του μέσου

υπολειπόμενου χρόνου ζωής αν προσθέσουμε μια σταθερά στην αντίστοιχη συνάρτηση έντασης κινδύνου. Στο Κεφάλαιο 4 θα μελετήσουμε σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και της έντασης κινδύνου και τέλος στο Κεφάλαιο ?? θα μελετήσουμε την σχέση των συναρτήσεων FR και MRL με την συνάρτηση της διασποράς του υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

1.2 Σύντομη περιγραφή της εργασίας

Κεφάλαιο 1- Εισαγωγή

Περιγράφονται συνοπτικά τα θέματα που θα αναλυθούν στα κεφάλαια που ακολουθούν.

Κεφάλαιο 2- Έννοιες και εφαρμογές που αφορούν την γήρανση

Το κεφάλαιο ξεκινάει δίνοντας το ορισμό της έντασης κινδύνου FR η οποία είναι και ένας πυλώνας της ανάλυσης αξιοπιστίας και επιβίωσης. Στη συνέχεια παρουσιάζονται διάφορες έννοιες γήρατος βασισμένες στα χαρακτηριστικά αξιοπιστίας όπως είναι η συνάρτηση επιβίωσης και η συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Δίνεται μια σειρά από σχέσεις μεταξύ αυτών και στη συνέχεια μερικά παραδείγματα κατανομών ζωής μαζί με τις ιδιότητες γήρανσής τους.

Κεφάλαιο 3- Μελέτη της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής στην περίπτωση που το μοντέλο εκτίθεται σε έναν σταθερό κίνδυνο

Όταν ένας σταθερός κίνδυνος προστίθεται στη συνάρτηση έντασης κινδύνου δεν οδηγεί απαραίτητα στην απλή αφαίρεση μιας σταθεράς από την αντίστοιχη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Η μελέτη αυτή έχει μεγάλη σημασία καθώς αυτός ο σταθερός κίνδυνος μπορεί να θεωρηθεί για παράδειγμα σαν μια ένταση επιτοκίου

δημιουργώντας έτσι έναν προεξοφλητικό παράγοντα για τη συνάρτηση αξιοπιστίας ή ακόμα να θεωρηθεί σαν ένας πραγματικός σταθερός κίνδυνος ο οποίος μπορεί να εμφανίζεται με κάποια περιοδικότητα. Εδώ θα διαπιστώσουμε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η μορφή της συνάρτησης MRL εξαρτάται από το μέγεθος αυτού του σταθερού κινδύνου. Μόνο στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής η συνάρτηση MRL μειώνεται κατα μία σταθερά η οποία όμως εξαρτάται από το μέγεθος του σταθερού αυτού κινδύνου.

Κεφάλαιο 4- Χαρακτηρισμοί κατανομών από σχέσεις μεταξύ της συνάρτησης του υπολειπόμενου χρόνου ζωής και της έντασης κινδύνου

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια προσπάθεια να βρεθούν σχέσεις μεταξύ του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και της έντασης κινδύνου. Στην αρχή εκφράζουμε την ένταση κινδύνου σαν μια συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής και της παραγώγου της και στη συνέχεια ορίζουμε μια οικογένεια κατανομών, η οποία περιλαμβάνει την οικογένεια κατανομών του Pearson, για την οποία μπορούμε να γράψουμε το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής συναρτήσει της έντασης κινδύνου, μιας πραγματικής συνάρτησης και μιας σταθεράς. Παρατηρούμε ότι αυτές οι πραγματικές συναρτήσεις με τη σειρά τους χαρακτηρίζουν την κατανομή υπο κάποιες προϋποθέσεις και τέλος υπολογίζουμε αυτές τις συναρτήσεις για μερικές γνωστές κατανομές.

Κεφάλαιο 5- Χαρακτηρισμοί συνεχών κατανομών από ιδιότητες της δεσμευμένης συνάρτησης διασποράς

Εδώ αναζητούμε επιπλέον χαρακτηρισμούς κατανομών χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση της διασποράς του υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Μελετάμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτή η συνάρτηση χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή. Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται ένα βήμα παρακάτω και στην ουσία χαρακτηρίζουμε κατανομές από

σχέσεις μεταξύ δεσμευμένων ροπών δεύτερης τάξης και της έντασης κινδύνου της τυχαίας μεταβλητής που μελετάμε.

Κεφάλαιο 2

Έννοιες και εφαρμογές που αφορούν τη γήρανση

2.1 Εισαγωγή

Η έννοια της γήρανσης είναι πολύ σημαντική στην θεωρία αξιοπιστίας. Όταν δεν υπάρχει γήρανση τότε αυτό σημαίνει αυτόματα ότι η ηλικία του αντικειμένου δεν έχει καμία επίδραση στην κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής του. Εδώ με τον όρο «γήρανση» περιγράφεται μια κατάσταση στην οποία ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής τείνει να μειώνεται με το χρόνο σε στοχαστικό επίπεδο. Αυτή η κατάσταση είναι συνηθισμένη στην μηχανική αξιοπιστία καθώς τα εξαρτήματα χειροτερεύουν με το χρόνο εξαιτίας της φθοράς από τη χρήση. Με τον όρο «αντίστροφη γήρανση» θα εννοούμε την κατάσταση κατά την οποία ο χρόνος έχει τα αντίστροφα αποτελέσματα στην κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής του. Είναι μια λιγότερο συνηθισμένη κατάσταση, ωστόσο εμφανίζεται σε κάποια χρονικά διαστήματα στη ζωή τόσο αντικειμένων όσο και ανθρώπων.

Οι έννοιες της γήρανσης περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο η κατάσταση ενός αντικειμένου βελτιώνεται ή χειροτερεύει με το χρόνο. Πολλές κλάσεις κατανομών ζωής στη βιβλιογραφία κατηγοριοποιούνται βάση ιδιοτήτων γήρανσης. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι η εκθετική κατανομή είναι σχεδόν πάντα μέλος σε κάθε κλάση. Η έννοια της στοχαστικής γήρανσης έχει σημαντική θέση στην θεωρία αξιοπιστίας.

Με τον όρο «κατανομές ζωής» εννοούμε εκείνες τις κατανομές που ορίζονται στο $[0, \infty)$. Η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή παριστάνει το συνολικό χρόνο ζωής ενός αντικειμένου.

Στο παρόν κεφάλαιο, μελετάμε κλάσεις συνεχών κατανομών βασισμένες στις διαφορετικές μορφές της έντασης κινδύνου FR.

Εφαρμογές της στατιστικής θεωρίας κατανομών ζωής έχουν γίνει στον τομέα της μηχανικής, της βιομετρίας ακόμα και στον τομέα της οικονομετρίας.

Αυτό το κεφάλαιο έχει γραφτεί χρησιμοποιώντας σημαντικά αποτελέσματα από το Βιβλίο των [Lai and Xie \[2006\]](#).

2.2 Χαρακτηρισμοί κατανομών χρόνου ζωής

Αντί για τη συνάρτηση κατανομής $F(x)$ συχνά θεωρούμε τη συνάρτηση αξιοπιστίας $S(x) = P(X > x)$. Έτσι η τ.μ. X δηλώνει τη διάρκεια ζωής ενός αντικειμένου ή αλλιώς το χρόνο μέχρι την πρώτη αποτυχία. Η μέση τιμή της τ.μ. X συμβολίζεται με μ . Η συνάρτηση

$$S(t|x) = \frac{S(x+t)}{S(x)}, \quad x, t \geq 0, \quad (2.1)$$

παριστάνει τη συνάρτηση αξιοπιστίας αντικειμένου ηλικίας x ή διαφορετικά τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι ένα αντικείμενο ηλικίας x θα επιβιώσει για ακόμα t έτη. Η μέση τιμή της υπολειπόμενης διάρκειας ζωής είναι συνάρτηση του x και συμβολίζεται με $\mu(x)$ όπου:

$$\mu(x) = E(X - x | X \geq x) = \int_0^{\infty} S(t|x) dt, \quad x \geq 0. \quad (2.2)$$

Προφανώς ισχύει $\mu(0) = \mu$. Όταν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της F τότε μπορούμε να ορίσουμε την ένταση κινδύνου ως

$$r(x) = \frac{f(x)}{S(x)}, \quad (2.3)$$

για εκείνα τα x ώστε η $S(x) > 0$. Η παραπάνω σχέση μπορεί επίσης να γραφεί

$$r(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x | X \geq x)}{\Delta x}. \quad (2.4)$$

Από την σχέση (2.4) έπεται ότι για μικρά Δx το $r(x)\Delta x$ είναι η πιθανότητα να συμβεί αποτυχία στο $(x, x + \Delta x]$ δοθέντος ότι δεν έχει συμβεί καμία αποτυχία στο $(0, x]$. Αν το $r(x)$ υπάρχει, τότε

$$-\log S(x) = \int_0^x r(t)dt \Leftrightarrow S(x) = \exp\left\{-\int_0^x r(t)dt\right\} = \exp\left\{-H(x)\right\}, \quad x > 0, \quad (2.5)$$

όπου $H(x) = \int_0^x r(t)dt$ η αθροιστική συνάρτηση κινδύνου. Μια κατανομή ζωής μπορεί επίσης να οριστεί μέσω της συνάρτησης του υπολειπόμενου χρόνου ζωής

$$\mu(x) = E(X - x | X \geq x), \quad x \geq 0 \quad (2.6)$$

από τη σχέση

$$S(x) = \frac{\mu}{\mu(x)} \exp\left[-\int_0^x \mu^{-1}(t)dt\right], \quad x \geq 0. \quad (2.7)$$

Παρακάτω θα δούμε τη συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής αναλυτικότερα. Εν κατακλείδι, μια κατανομή ζωής μπορεί να χαρακτηριστεί από την $S(x)$, την $S(t|x)$, την $r(x)$ ή την $\mu(x)$. Επίσης έχει αποδειχθεί ότι οι κατανομές ζωής χαρακτηρίζονται και από τη δεύτερη ροπή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής $E((X - x)^2 | X > x)$.

2.2.1 Μορφές της συνάρτησης έντασης κινδύνου

Υποθέτουμε ότι η ένταση κινδύνου, που ορίστηκε από την (2.3), είναι μια πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση $r(x) : R^+ \rightarrow R^+$. Τότε, το $r(x)$ είναι:

1. γνησίως αύξουσα αν $r'(x) > 0$ για όλα τα x και συμβολίζουμε με I την κλάση των γνησίως αυξουσών συναρτήσεων
2. γνησίως φθίνουσα αν $r'(x) < 0$ για όλα τα x και συμβολίζουμε με D την κλάση των γνησίως φθινουσών συναρτήσεων
3. σχήματος BT αν $r'(x) < 0$ για $x \in (0, x_0)$, $r'(x_0) = 0$, $r'(x) > 0$ για $x > x_0$ και συμβολίζουμε με BT την κλάση αυτών των συναρτήσεων
4. σχήματος UBT αν $r'(x) > 0$ για $x \in (0, x_0)$, $r'(x_0) = 0$, $r'(x) < 0$ για $x > x_0$ και συμβολίζουμε με UBT την κλάση αυτών των συναρτήσεων

5. σχήματος MBT αν η συνάρτηση $r(x)$ είναι αύξουσα στην αρχή και στη συνέχεια είναι σχήματος BT και συμβολίζουμε με MBT την κλάση αυτών των συναρτήσεων
6. σχήματος “Roller-coaster” αν υπάρχουν n διαδοχικά σημεία αλλαγής μονοτονίας $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty$ έτσι ώστε σε κάθε διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ η $r(x)$ είναι γνησίως μονότονη και έχει διαφορετική μονοτονία στο προηγούμενο αλλά και στο επόμενο διάστημα.

Ένας πιο αυστηρός ορισμός για τις κατανομές με αύξουσες ή φθίνουσες συναρτήσεις έντασης κινδύνου είναι ο παρακάτω.

Ορισμός 2.2.1. Λέμε ότι μία κατανομή F είναι IFR (DFR) αν $S(t|x)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) ως προς $x \geq 0, \forall t \geq 0$. Η F είναι IFR (DFR) αν η συνάρτηση $-\log S(x)$ είναι κοίλη (κυρτή).

Παρατήρηση 2.2.1. (Διασαφηνήσεις)

1. Κάποιοι συγγραφείς περιλαμβάνουν σταθερό $r(x)$ στο μεσαίο διάστημα στους ορισμούς τους για τις BT και UBT κατανομές. Δηλαδή η συνάρτηση FR μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα (αύξουσα) για $x \in [0, x_0)$, σταθερή για $x \in [x_0, x_1]$ και γνησίως αύξουσα (φθίνουσα) για $x > x_1$. Για να είμαστε ακριβής πρέπει να πούμε ότι θεωρούμε $0 < x_0 \leq x_1$. Παρατηρούμε ότι για $x_0 = x_1$ το μεσαίο διάστημα γίνεται σημείο.
2. Ένα MTB σχήμα μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση του “Roller-Coaster” σχήματος.
3. Ο πρώτος που προώθησε το “Roller-Coaster” σχήμα ήταν ο [Wong \[1989\]](#) ο οποίος παρατήρησε ότι η ένταση κινδύνου πολλών ηλεκτρονικών συσκευών ήταν γενικά φθίνουσα όμως με κάποια άλματα. Αυτό έδωσε το έναυσμα για την κατασκευή τέτοιων FR.

Για περισσότερη ευκολία, μπορούμε να πούμε ότι μια συνάρτηση $g \in I, D, BT, UBT$ ή MBT όταν το σχήμα της έχει κάποια κατάλληλα χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα $g \in BT$ σημαίνει ότι η g είναι φθίνουσα μέχρι κάποιο σημείο και μετά αύξουσα.

Πολλές συναρτήσεις έντασης κινδύνου έχουν σύνθετους τύπους λόγω του ολοκληρώματος που εμφανίζεται στον παρονομαστή στην (2.3)

και έτσι ο προσδιορισμός του σχήματος της συνάρτησης r γίνεται με έμμεσους τρόπους. Ο Glaser [1980] παρουσίασε μια μέθοδο προσδιορισμού του σχήματος της συνάρτησης r όταν αυτή έχει το πολύ ένα σημείο καμψής. Η μεθοδός του χρησιμοποιεί τη συνάρτηση πυκνότητας αντί της συνάρτησης έντασης κινδύνου.

Ο Glaser [1980] όρισε τη συνάρτηση $\eta(x)$ ως εξής:

$$\eta(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}. \quad (2.8)$$

Αργότερα θα δούμε ότι αυτή η συνάρτηση παίζει σημαντικό ρόλο στην μελέτη της συνάρτησης $r(x)$. Η σχέση της $r(x)$ με την $\eta(x)$ είναι η εξής:

$$\frac{d}{dx} \log(r(x)) = r(x) - \eta(x) \quad (2.9)$$

και

$$\left[\frac{1}{r(x)} \right]' = \frac{\eta(x)}{r(x)} - 1. \quad (2.10)$$

Εδώ προφανώς υποθέτουμε ότι η $f(x)$ είναι μια θετική συνάρτηση πυκνότητας στο $(0, \infty)$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις δηλώνουν ότι το σημείο καμψής της $r(x)$ είναι η λύση της εξίσωσης $\eta(x) = r(x)$. Αποδεικνύεται επίσης ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \eta(x).$$

Θεώρημα 2.2.1. (Glaser [1980]). Έστω $\eta(x)$ όπως ορίζεται στην (2.8).

1. Αν η $\eta(x) \in I$, τότε $r(x) \in I$.
2. Αν η $\eta(x) \in D$, τότε $r(x) \in D$.
3. (i) Αν η $\eta(x) \in BT$ και υπάρχει y_0 έτσι ώστε $r'(y_0) = 0$, τότε $r(x) \in BT$.
(ii) Διαφορετικά $r(x) \in I$.
4. Αν η $\eta(x) \in UBT$ και υπάρχει y_0 έτσι ώστε $r'(y_0) = 0$, τότε $r(x) \in UBT$.
(ii) Διαφορετικά $r(x) \in D$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την αντίστροφη ένταση κινδύνου από τη σχέση

$$g(x) = \frac{1}{r(x)} = \frac{S(x)}{f(x)}, \quad (2.11)$$

και από τη σχέση (2.10) έπεται ότι

$$g'(x) = g(x)\eta(x) - 1, \quad (2.12)$$

με τη συνάρτηση η όπως ορίζεται από την (2.8). Μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε ότι

$$g'(x) = \int_x^\infty \frac{f(y)}{f(x)} [\eta(x) - \eta(y)] dy. \quad (2.13)$$

Εδώ οφείλουμε να τονίσουμε ότι η παραπάνω εξίσωση προϋποθέτει ότι η $f'(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$.

Τώρα προχωράμε στην απόδειξη του θεωρήματος.

1. Αν η $\eta'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ τότε από την (2.13) παρατηρούμε ότι $g'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ και από την (2.11) έπεται ότι $r(x) \in I$.
2. Αν η $\eta'(x) < 0 \Rightarrow g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ συνεπώς $r(x) \in D$.
3. (i) Έστω x_0 το σημείο καμπής της η έτσι ώστε $\eta'(x_0) = 0$. Πρώτα θα δείξουμε ότι $g''(y_0) < 0$.

Αν ισχύει ότι $g''(y_0) < 0$ τότε από την σχέση (2.12) έπεται ότι $\eta'(y_0) < 0 \Leftrightarrow y_0 < x_0$. Δηλαδή το σημείο καμπής της η είναι πριν το σημείο καμπής της r .

Αν ισχύει ότι $g''(y_0) > 0$ τότε από την σχέση (2.12) έπεται ότι $\eta'(y_0) > 0 \Leftrightarrow y_0 > x_0$. Χρησιμοποιώντας και την σχέση (2.13) βλέπουμε ότι $g'(y_0) < 0$ το οποίο είναι άτοπο αφού το y_0 πρέπει να μηδενίζει την ένταση κινδύνου και συνεπώς και την αντίστροφη συνάρτησή της.

Αφού λοιπόν εξασφαλίσαμε ότι $g''(y_0) < 0$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g είναι κοίλη ή ότι συνάρτηση r είναι κυρτή, κάτι που μας εξασφαλίζει ότι μετά το σημείο καμπής της y_0 θα είναι αύξουσα. Καταλήξαμε λοιπόν σε ένα ΒΤ σχήμα για την συνάρτηση της έντασης κινδύνου.

(ii) Εδώ $g'(x) > 0$ ή $g'(x) < 0$ για $x > 0$. Από την (2.13) έχουμε ότι $g'(x) < 0$ για $x \geq x_0$. Συνεπώς $r(x) \in I$.

4. Η απόδειξη είναι όμοια με το προηγούμενο.

□

Έστω $\varepsilon = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\delta = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)\eta(x)$, όπου $g(x) = \frac{1}{r(x)}$.

- Έστω $\eta \in BT$, τότε

1. αν $\varepsilon = 0$ ή $\delta < 1$ τότε $r(x) \in I$.
 2. αν $\varepsilon = \infty$ ή $\delta > 1$ τότε $r(x) \in BT$.
- Έστω $\eta \in UBT$, τότε
 1. αν $\varepsilon = 0$ ή $\delta < 1$ τότε $r(x) \in UBT$.
 2. αν $\varepsilon = \infty$ ή $\delta > 1$ τότε $r(x) \in D$.

Οι [Gupta and Wu \[2001\]](#) χρησιμοποίησαν το θεώρημα του [Glaser \[1980\]](#) για να προσδιορίσουν τα σχήματα διαφόρων κατανομών ζωής όπως της Λογαριθμοκανονικής, της Αντίστροφης Γκαουσιανής, της μείξης Αντίστροφων Γκαουσιανών, της εκθετικής οικογένειας κατανομών, της μείξης Γάμμα και άλλων.

Στην απόδειξη του Θεωρήματος [2.2.1](#), ο Glaser έδειξε ότι το σημείο καμπής της $r(x)$ είναι πριν το σημείο καμπής της $\eta(x)$. Αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό στον προσδιορισμό του σχήματος της $\mu(x)$ μέσω της $r(x)$ όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Επέκταση του αποτελέσματος του Glaser

Οι [Gupta and Warren \[2001\]](#) έκαναν μια γενίκευση του αποτελέσματος του Glaser στη περίπτωση που το $r(x)$ έχει περισσότερα από ένα σημεία καμπής. Για να το πετύχουν αυτό έδωσαν το παρακάτω θεώρημα το οποίο συνδέει τα σημεία καμπής της $\eta(x)$ και της $r(x)$.

Θεώρημα 2.2.2. Έστω $\eta(x)$ έτσι όπως ορίστηκε στην [\(2.8\)](#) και $f(x)$ δύο φορές παραγωγίσιμη θετική πυκνότητα στο $(0, \infty)$. Αν $\eta'(x) = 0$ στα σημεία x_1, x_2, \dots, x_n με $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ τότε, η $r'(x)$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $[x_{k-1}, x_k]$ για $k = 1, 2, \dots, n$ με $x_0 = 0$. Δηλαδή η $r(x)$ έχει το πολύ n αλλαγές μονοτονίας.

Απόδειξη. Από την [\(2.13\)](#) έπεται

$$g'(x)f(x) = \int_x^\infty f(y)[\eta(x) - \eta(y)]dy, \quad x > 0.$$

Επειδή $f(x) > 0$ για όλα τα $x > 0$, το πρόσημο και τα σημεία που μηδενίζεται η g' και κατ' επέκταση η r' , εξαρτάται αποκλειστικά από το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης, έστω

$$s(x) = \int_x^\infty f(y)[\eta(x) - \eta(y)]dy, \quad x > 0. \quad (2.14)$$

Τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η s είναι τα σημεία καμπής της r . Αποδεικνύεται ότι $s'(x) = \eta'(x)S(x)$, δηλαδή τα πρόσημα της η' και της s' είναι ίδια καθώς και τα σημεία που μηδενίζονται. Έχουν δηλαδή την ίδια μονοτονία.

Δοθέντος ότι η η είναι μονότονη στο $[x_{k-1}, x_k]$, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι s και η έχουν την ίδια μονοτονία, τότε και η s είναι μονότονη σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ έτσι ώστε η $s(x) = 0$ να έχει το πολύ μία λύση σε κάθε διάστημα της παραπάνω μορφής. Χρησιμοποιούμε επιπλέον το γεγονός ότι το πρόσημο και τα σημεία που μηδενίζουν την r' προσδιορίζονται από την s και έτσι καταλήγουμε ότι η $r'(x) = 0$ έχει και αυτή το πολύ μία ρίζα στο $[x_{k-1}, x_k]$. \square

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια γενίκευση του Θεωρήματος 2.2.1 από τους [Gupta and Warren \[2001\]](#) και είναι χρήσιμο όταν το σχήμα της η καθώς και ο αριθμός των σημείων καμπής της r είναι γνωστά.

Θεώρημα 2.2.3. [Gupta and Warren \[2001\]](#)

1. Έστω $\eta \in \text{UBT}$. Τότε

(α') Αν δεν υπάρχει x έτσι ώστε $r'(x) = 0$, τότε $r(x) \in \text{I}$.

(β') Αν υπάρχει ακριβώς ένα x ώστε $r'(x) = 0$ τότε η $r(x)$ είναι γνησίως αύξουσα παντού εκτός από εκείνο το x .

(γ') Αν υπάρχουν ακριβώς δύο x ώστε $r'(x) = 0$ τότε η $r(x) \in \text{BT}$.

2. Έστω η συνάρτηση η είναι BT σχήματος στην αρχή και UBT στη συνέχεια. Τότε

(α') Αν δεν υπάρχει x έτσι ώστε $r'(x) = 0$, τότε $r(x) \in \text{I}$.

(β') Αν υπάρχει ακριβώς ένα x ώστε $r'(x) = 0$ τότε η $r(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα παντού εκτός από εκείνο το x ή είναι UBT.

(γ') Αν υπάρχουν ακριβώς δύο x ώστε $r'(x) = 0$ τότε η $r(x)$ είναι BT στην αρχή και UBT στη συνέχεια.

Η απόδειξη παραλείπεται. Βλέπε [Gupta and Warren \[2001\]](#).

Αυτή η γενίκευση του θεωρήματος του Glasser είναι χρήσιμη όπως θα δούμε παρακάτω στην περίπτωση της μείξης Γάμμα κατανομών με κοινή τη δεύτερη παράμετρο.

2.3 Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής

Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής (MRL) είναι μία σημαντική συνάρτηση στην θεωρία αξιοπιστίας, στη στατιστική, στην ανάλυση επιβίωσης αλλά και αλλού. Πολλά χρήσιμα αποτελέσματα έχουν προκύψει από την μελέτη αυτής της συνάρτησης. Θεωρούμε δεδομένη την ηλικία ενός μηχανήματος ή ενός ανθρώπου και συμβολίζουμε με $x \geq 0$ όπως και παραπάνω και θεωρούμε τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής αυτού του μηχανήματος ή του ανθρώπου μια τυχαία μεταβλητή έστω $T_x = X - x | X > x$. Η μέση τιμή αυτής της τυχαίας μεταβλητής ονομάζεται υπολειπόμενος χρόνος ζωής και συμβολίζεται με MRL (Mean Residual Life). Η συνάρτηση αυτή αποτελεί συχνά το βασικό κριτήριο στην εύρεση ενός βέλτιστου χρονικού σημείου για την αντικατάσταση εξαρτημάτων για παράδειγμα.

Έστω $S(x)$ μια συνάρτηση αξιοπιστίας μιας συνεχούς τ.μ. X ορισμένης στο $[0, \infty)$ με πεπερασμένη πρώτη ροπή μ και $F(0) = 0$. Τότε η συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τ.μ. X δίνεται από τη σχέση

$$\mu(x) = E(X - x | X > x) = \frac{\int_x^\infty S(t)dt}{S(x)}, \quad x \geq 0. \quad (2.15)$$

Προφανώς $\mu(0) = \mu = E(X)$. Αν επιπλέον η F έχει πυκνότητα έστω f , τότε μπορούμε να γράψουμε εναλλακτικά

$$\mu(x) = \frac{\int_x^\infty tf(t)dt}{S(x)} - x.$$

Στην μελέτη για αντικατάσταση βιομηχανικών μηχανημάτων η συνάρτηση MRL μπορεί να φανεί πολύ πιο χρήσιμη από τη συνάρτηση FR. Η πρώτη συνοψίζει ολόκληρο τον αναμενόμενο υπολειπόμενο χρόνο ζωής ενός αντικειμένου ενώ η δεύτερη αναφέρεται στον κίνδυνο στιγμιαίας καταστροφής.

Στην μελέτη ανθρώπινης διάρκειας ζωής, η συνάρτηση MRL μπορεί να αναφέρεται και σαν προσδόκιμο ζωής. Προφανώς η μελέτη αυτής της συνάρτησης είναι ζωτικής σημασίας και στην αναλογιστική επιστήμη στις ασφαλίσεις ζωής.

2.3.1 Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής και κάποιες ιδιότητες γήρασης

Οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης MRL έχουν δοθεί από τον Cox (1962), Kotz και Shanbhag (1980), Hall και Wellner (1981) και Bhattacharjee (1982). Η συνάρτηση MRL χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή βλ. Gupta (1975) και Muth (1977).

Όπως και παραπάνω, $r(x)$ είναι η ένταση κινδύνου όπως δόθηκε από τη σχέση (2.3). Μπορεί ναδειχθεί ότι $\mu'(x) = \mu(x)r(x) - 1$. Αν παραγωγίσουμε την τελευταία ως προς x καταλήγουμε στην

$$r'(x) = \frac{\mu''(x)\mu(x) - (\mu'(x) + 1)\mu'(x)}{(\mu(x))^2}, \quad x > 0.$$

Ισχύει ότι

$$\log S(x) = - \int_0^x r(t)dt,$$

όπως είδαμε στην (2.5) και

$$S(x) = \frac{\mu}{\mu(x)} \exp \left[- \int_0^x \mu^{-1}(t)dt \right],$$

όπως είδαμε στην (2.7). Παραγωγίζοντας την τελευταία παίρνουμε

$$f(x) = \frac{\mu(\mu'(x) + 1)}{(\mu(x))^2} \exp \left[- \int_0^x \mu^{-1}(t)dt \right].$$

Έτσι, πράγματι μία κατανομή προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τη συνάρτηση MRL που της αντιστοιχεί. Εδώ μπορούμε να δούμε ότι μια κατανομή είναι εκθετική αν και μόνο αν έχει σταθερό MRL. Αν δηλαδή ισχύει ότι $\mu(x) = \mu, \quad \forall x \geq 0$.

Τονίζουμε ότι γνωρίζοντας μία από τις συναρτήσεις αξιοπιστίας, έντασης κινδύνου και υπολειπόμενου χρόνου ζωής μπορούμε να προσδιορίσουμε και τις άλλες δύο.

2.3.2 Μορφές της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής

Οι περισσότερες κλάσεις κατανομών προκύπτουν από την κατηγοριοποίηση του βάσει ιδιοτήτων της συνάρτησης αξιοπιστίας, την ένταση κινδύνου και τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής. Όλες οι παραπάνω συναρτήσεις περιέχουν πληροφορίες για τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής

και για αυτόν το λόγο αυτό μπορούμε να σχηματίσουμε κλάσεις κατανομών βάση ιδιοτήτων οποιασδήποτε από τις τρεις παραπάνω συναρτήσεις.

Όπως και με τη συνάρτηση της έντασης κινδύνου έτσι και εδώ θα δούμε ότι οι συναρτήσεις αυτές μπορεί να είναι φθίνουσες (DMRL), αύξουσες (IMRL), αύξουσες μέχρι κάποιο σημείο και έπειτα φθίνουσες (IDMRL) ή ακόμα και να έχουν άλλες ιδιότητες όπως της έννοιας του καινούριου να είναι καλύτερο από μεταχειρισμένο (NBU), όπως αυτή ορίζεται στη συνέχεια.

Ορισμός 2.3.1. Λέμε ότι μία κατανομή F είναι DMRL αν η συνάρτηση της μέσης υπολειπόμενης διάρκειας ζωής $\mu(x)$ είναι φθίνουσα ως προς x . Δηλαδή για κάθε $s, t \geq 0$ με $s \leq t$ ισχύει $\mu(s) \geq \mu(t)$. Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνει ηλικία ενός αντικειμένου ή ανθρώπου, μειώνεται η αναμενόμενη υπολειπόμενη διάρκεια ζωής του. Όμοια, λέμε ότι μία κατανομή F είναι IMRL όταν για κάθε $s, t \geq 0$ με $s \leq t$ ισχύει $\mu(s) \leq \mu(t)$.

Ορισμός 2.3.2. Λέμε ότι μία κατανομή F είναι NBU αν $S(t|x) \leq S(t)$. Δηλαδή, για κάθε $x, t \geq 0$ ισχύει $S(x+t) \leq S(x)S(t)$. Αυτό σημαίνει ότι μία συσκευή οποιασδήποτε ηλικίας έχει στοχαστικά μικρότερη υπολειπόμενη διάρκεια ζωής από μια καινούρια συσκευή.

Ορισμός 2.3.3. [Guess et al. \[1986\]](#). Μια κατανομή χρόνου ζωής με πεπερασμένη πρώτη ροπή έχει συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής αύξουσα και μετά φθίνουσα, συμβολίζουμε με $F \in IDMRL$, αν υπάρχει σημείο καμπής έστω τ με $0 < \tau < \infty$, έτσι ώστε

$$\mu(s) = \begin{cases} \leq \mu(x) & \text{για } 0 \leq s \leq x < \tau \\ \geq \mu(x) & \text{για } \tau \leq s \leq x. \end{cases} \quad (2.16)$$

Έτσι γράφουμε $F \in IDMRL$ αν υπάρχει $0 < \tau < \infty$ τέτοιο ώστε η $\mu(x)$ να είναι αύξουσα στο $[0, \tau)$ και φθίνουσα στο $[\tau, \infty)$. Όταν $\tau \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow \infty$) τότε η F γίνεται DMRL (IMRL). Έτσι αυτός ο ορισμός περιλαμβάνει και τις δύο παραπάνω μονότονες κλάσεις κατανομών χρόνου ζωής.

2.4 Σύνδεση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με την ένταση κινδύνου

Εδώ θα κάνουμε το πρώτο βήμα σύγκρισης των συναρτήσεων MRL και FR. Σε πρώτο επίπεδο είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε με κάποιο έμμεσο τρόπο την μορφή της συνάρτησης MRL και συγκεκριμένα στις περιπτώσεις που αυτή η συνάρτηση δεν έχει κλειστό τύπο. Κάτι τέτοιο είναι πράγματι δυνατόν, όταν είναι γνωστή η μορφή της συνάρτησης έντασης κινδύνου.

Θεώρημα 2.4.1. Έστω μια κατανομή $F \in IFR$, τότε $F \in DMRL$. Αντίστοιχα, μια κατανομή $F \in DFR$, τότε $F \in IMRL$.

Απόδειξη. $F \in IFR$ σημαίνει ότι, $S(t|x) = S(t+x)/S(x)$ είναι φθίνουσα του x . Δηλαδή, $S(t+x)/S(x) \leq S(t+y)/S(y)$ για $x \geq y$. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη ως προς t καταλήγουμε ότι $\mu(x) \leq \mu(y)$ για $x \geq y > 0$. Συνεπώς $F \in DMRL$.

Αντίστοιχα η απόδειξη για τη σχέση $F \in DFR \Leftrightarrow F \in IMRL$. □

Θεώρημα 2.4.2. Έστω $r(x)$ είναι σχήματος BT. Τότε

(α') $\mu(x) \in D$ αν $r(0) \leq 1/\mu$.

(β') $\mu(x)$ είναι σχήματος UBT αν $r(0) > 1/\mu$.

διαφορετικά, αν $r(x)$ είναι σχήματος UBT, τότε

(α') $\mu(x) \in I$ αν $r(0) \leq 1/\mu$.

(β') $\mu(x)$ είναι σχήματος BT αν $r(0) > 1/\mu$.

Απόδειξη. Βλέπε [Gupta and Akman \[1995\]](#). □

2.5 Κατανομές χρόνου ζωής

Υπάρχουν πολλές κατανομές που προτείνονται κατά καιρούς για να περιγράψουν τις διάφορες μορφές γήρανσης. Παρακάτω θα δούμε πα-

ραδείγματα συνεχών κατανομών ορισμένων στο $[0, \infty)$ που χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά στην θεωρία αξιοπιστίας. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε κάποιες βασικές ιδιότητες που έχουν αυτές οι κατανομές, ενώ στα επόμενα κεφάλαια θα τις μελετήσουμε αναλυτικότερα.

2.5.1 Εκθετική

Μία εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$ έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

και για κάθε $x \geq 0$ έχει δεσμευμένη συνάρτηση αξιοπιστίας

$$S(t|x) = S(t), \quad t > 0$$

κάτι που σημαίνει ότι η κατανομή αυτή περιγράφει αντικείμενα τα οποία δεν γερνάνε με το χρόνο. Στις περισσότερες περιπτώσεις η κατάσταση δεν είναι αυτή και χρειαζόμαστε κατανομές ζωής που να περιγράφουν τη γήρανση των αντικειμένων. Επίσης έχει σταθερό FR.

$$r(x) = \lambda, \quad \forall x \geq 0.$$

Το ίδιο ισχύει και για το MRL.

$$\mu(x) = \frac{1}{\lambda}, \quad \forall x \geq 0.$$

Αυτό δείχνει την αμνήμωνα ιδιότητα που έχει η εκθετική κατανομή. Αυτή η κατανομή αποτελεί μια ειδική περίπτωση των κατανομών Gamma, Weibull, Gompertz, γραμμικού FR και της εκθετικής-γεωμετρικής που θα δούμε στη συνέχεια.

2.5.2 Γάμμα

Η κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $\alpha, \lambda > 0$ συμβολίζεται με $\text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ και η πυκνότητά της δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Βλέπουμε ότι για $\alpha = 1$ παίρνουμε την εκθετική κατανομή. Αν α θετικός ακέραιος τότε παίρνουμε την κατανομή Erlang. Επιπλέον αν $\alpha = n/2$ τότε παίρνουμε την κατανομή χ -τεράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας.

Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι

$$g(x) = r(x)^{-1} = \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{u}{x}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du.$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι αύξουσα για $0 < \alpha < 1$ και φθίνουσα για $\alpha > 1$. Συνεπώς η $r(x)$ είναι αύξουσα για $\alpha > 1$ και φθίνουσα για $0 < \alpha < 1$. Για $\alpha = 1$ η $r(x)$ γίνεται σταθερή, κάτι το οποίο περιμέναμε αφού στην περίπτωση αυτή έχουμε την εκθετική κατανομή. Το σχήμα της συνάρτησης αυτής μπορεί να προσδιοριστεί εναλλακτικά από την (2.8) μέσω της συνάρτησης του Glasser.

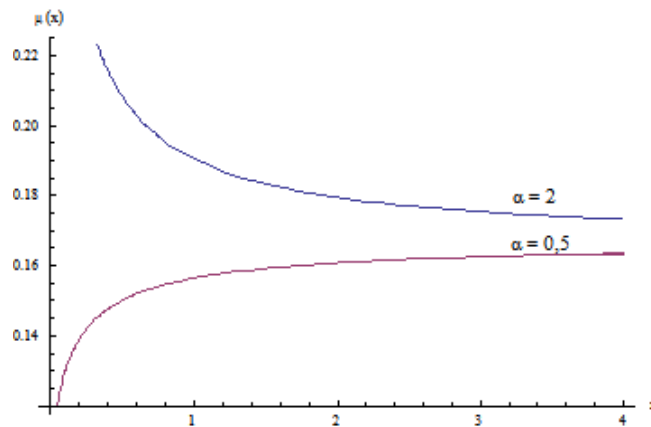
$$\eta(x) = \lambda - \frac{\alpha - 1}{x}.$$

Εδώ η η είναι αύξουσα για $\alpha > 1$, σταθερή για $\alpha = 1$ και φθίνουσα για $0 < \alpha < 1$ και έτσι επιβεβαιώνεται και το σχήμα της r όπως είδαμε παραπάνω.

Οι Govil and Aggarwal [1983] έδειξαν ότι η συνάρτηση MRL της κατανομής Γάμμα δίνεται από τη σχέση

$$\mu(x) = \frac{\lambda^{\alpha-1} x^{\alpha} e^{-t}}{\Gamma(\alpha) S(x)} + \frac{\alpha}{\lambda} - x.$$

Είδαμε ότι η Γάμμα είναι DFR και IMRL για $0 < \alpha \leq 1$ ενώ είναι IFR και DMRL για $\alpha > 1$. Το παραπάνω μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε από την το σχήμα της συνάρτησης MRL.



2.5.3 Περικεκομμένη Κανονική

Η πυκνότητα αυτής της κατανομής δίνεται από

$$f(x) = \frac{1}{\alpha\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad x > 0$$

όπου $\sigma > 0$, $-\infty < \mu < \infty$, $\alpha = \int_0^\infty (1/\sigma\sqrt{2\pi})e^{-(u-\mu)^2/(2\sigma^2)} du$.

Ο [Davis \[1952\]](#), αφού παρατήρησε την ένταση κινδύνου από μια μεγάλη ποικιλία αντικειμένων, έδειξε εμπειρικά ότι τα αντικείμενα που κατασκευάζονται και δοκιμάζονται υπό αυστηρή εποπτεία πιθανώς να έχουν μια τέτοια κατανομή ζωής.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$\log f(x) = -\log(\alpha\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}, \quad x \geq 0 \quad (2.17)$$

είναι κυρτή στο $[0, \infty)$ και έτσι μπορούμε να πούμε ότι αυτή η κατανομή είναι IFR. Βλέπε [Barlow and Proschan \[1981\]](#).

Παρόλο που η αναλυτική έκφραση της $r(x)$ είναι πολύ σύνθετη, οι [Navarro and Hernandez \[2004\]](#) σημείωσαν τα ακόλουθα.

1. $r'(x) = \left(r(x) - \frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)r(x)$.
2. $r(x) > \frac{(x-\mu)}{\sigma^2}$.
3. $r(x) \rightarrow \infty$ για $x \rightarrow \infty$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} r'(x) = \frac{1}{\sigma^2}$.

Για τη συνάρτηση MRL δεν υπάρχει κλειστός τύπος. Μπορούμε όμως να συμπεράνουμε ότι είναι φθίνουσα στο $[0, \infty)$, αφού η συνάρτηση FR είναι αύξουσα. Δηλαδή $F \in DMRL$.

Η Περιεκομμένη Κανονική κατανομή που αναφέρουμε εδώ είναι απλά "κομμένη" από τα κάτω. Υπάρχουν διάφορες άλλες παραλλαγές αυτού του "κοψίματος" της Κανονικής κατανομής.

2.5.4 Weibull

Πήρε το όνομά της από έναν Σουηδό φυσικό του Waloddi Weibull, ο οποίος το 1939 τη χρησιμοποίησε για να μοντελοποιήσει την αντοχή υλικών και το 1951 για διάφορες άλλες εφαρμογές. Είναι ίσως η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη κατανομή ζωής στην θεωρία αξιοπιστίας. Ο [Hallinan \[1993\]](#) έδωσε αναλυτικά τις ιδιότητες αυτής της κατανομής. Η Weibull κατανομή με παραμέτρους $\alpha, \lambda > 0$ έχει συνάρτηση αξιοπιστίας

$$S(x) = e^{-\lambda x^\alpha}, \quad x > 0.$$

Για $\alpha = 1$ παίρνουμε την εκθετική κατανομή.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα είναι ότι η ένταση κινδύνου για αυτήν την κατανομή έχει απλό αναλυτικό τύπο για κάθε ηλικία $x > 0$

$$r(x) = \alpha\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}.$$

Παρατηρούμε ότι για $\alpha > 1$ η κατανομή αυτή είναι IFR ενώ για $\alpha < 1$ είναι DFR, ενώ για $\alpha = 1$ όπως ήδη αναφέραμε είναι η περίπτωση της εκθετικής κατανομής με σταθερή ένταση κινδύνου $r(x) = \lambda$ για κάθε $x \geq 0$.

Ο αναλυτικός τύπος της συνάρτησης MRL αυτής της κατανομής είναι αρκετά σύνθετος, βλέπε [Nassar and Eissa \[2003\]](#). Μπορεί όμως εύκολα κανείς να διαπιστώσει ότι η κατανομή είναι DMRL για $\alpha > 1$ και IMRL για $\alpha < 1$.

Παρακάτω θα δούμε και μείξεις κατανομών Weibull, καθώς και διάφορες τροποποιήσεις αυτής της κατανομής.

2.5.5 Λογαριθμοκανονική

Όταν η τ.μ. $\log X$ ακολουθεί την Κανονική κατανομή τότε η τ.μ. X ακολουθεί την Λογαριθμοκανονική με πυκνότητα που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\log x - \alpha)^2/(2\sigma^2)}, \quad x > 0.$$

Το FR αυτής της κατανομής δίνεται από

$$r(x) = \frac{\left(1/(\sqrt{2\pi}x\sigma)\right) \exp\left(-\frac{[\log(zx)]^2}{2\sigma^2}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\log(zx)}{\sigma}\right)}$$

όπου $z = e^{-\alpha}$.

Παρόλο που η έκφραση του $r(x)$ είναι αρκετά σύνθετη, η συνάρτηση $\eta(x)$ του Glasser έχει πιο απλή μορφή, βλέπε [Lai and Xie \[2006\]](#).

$$\eta(x) = \frac{1}{\sigma^2 x} (\sigma^2 + \log x - \alpha).$$

Η εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2.1 του Glasser δείχνει ότι το FR της κατανομής είναι UBT. Επιπλέον, $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = 0$.

Αφού λοιπόν έχουμε εξασφαλίσει ότι $r(x)$ είναι UBT και επιπλέον το

$\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0 \leq 1/\mu$ συμπεραίνουμε βάση του Θεωρήματος 2.4.2 ότι η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $\mu(x)$ είναι φθίνουσα και συμβολίζουμε $F \in DMRL$.

Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής αυτής της κατανομής δεν έχει κλειστό τύπο και γράφεται με την βοήθεια της συνάρτησης σφάλματος $erfc$, βλέπε Govil and Aggarwal [1983].

$$\mu(x) = \sqrt{e} \frac{erfc\left[\frac{\log(x/e)/\sqrt{2}}{\log x/\sqrt{2}}\right]}{erfc(\log x/\sqrt{2})} - x, \quad x > 0$$

όπου

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Η συνάρτηση σφάλματος μπορεί να οριστεί και μέσω της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής κανονικής με την βοήθεια της σχέσης

$$erfc(x) = 2\Phi(-x\sqrt{2}) = 2(1 - \Phi(x\sqrt{2})).$$

2.5.6 Αντίστροφη Γκαουσιανή

Η συνάρτηση πυκνότητας αυτής της κατανομής με παραμέτρους $\mu, \lambda > 0$ είναι

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\mu^2 x}(x - \mu)^2\right), \quad x > 0.$$

Εδώ και πάλι η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης r είναι σύνθετη. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τη συνάρτηση η του Glasser.

$$\eta(x) = \frac{3\mu^2 x + \lambda(x^2 - \mu^2)}{2\mu^2 x^2}.$$

Από το Θεώρημα 2.2.1 έπεται ότι η συνάρτηση $r(x)$ είναι UBT. Επιπλέον, $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = c > 0$, όπου c μια θετική σταθερά.

Η συνάρτηση MRL δίνεται από τη σχέση (Gupta, 2001)

$$\mu(x) = \frac{(\mu - x)\Phi(\sqrt{\lambda/x})(1 - x/\mu) + (\mu - x)^2 e^{2\lambda/\mu} \Phi(-\sqrt{\lambda/x})(1 + x/\mu)}{\Phi(\sqrt{\lambda/x}(1 - x/\mu)) + e^{2\lambda/\mu} \Phi(-\sqrt{\lambda/x}(1 + x/\mu))}.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μια μικρή ένδειξη του πόσο σύνθετη μπορεί να γίνει η συνάρτηση αυτή.

2.5.7 Gompertz

Θεωρείται ένα από τα πρώτα πιθανοθεωρητικά μοντέλα που περιγράφουν την ανθρώπινη θνησιμότητα. Ο Gompertz το 1825 κατέληξε σε αυτό το μοντέλο κάνοντας την εξής παραδοχή. Η μέση "δύναμη" που έχει κάθε άνθρωπος για να αποφύγει τον θάνατο, και αν υποθέσουμε άπειρα διαστήματα στη διάρκεια ζωής ενός ανθρώπου, τότε η "δύναμη" που θα χάνει σε κάθε τέτοιο διάστημα θα είναι ανάλογη της υπολειπόμενης "δύναμής" του. Κάνοντας αυτήν την παραδοχή κατέληξε στην παρακάτω συνάρτηση έντασης κινδύνου (ή έντασης θνησιμότητας όπως συνηθίζεται να λέγεται όταν αναφερόμαστε σε διάρκεια ανθρώπινης ζωής). Για κάθε ηλικία $x > 0$ η συνάρτηση έντασης κινδύνου είναι

$$r(x) = Bc^x.$$

Θυμίζοντας ότι $r(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = -\frac{(\log S(x))'}{S(x)}$, αν η παραπάνω λυθεί σαν διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς $S(x)$ μας δίνει τη συνάρτηση αξιοπιστίας.

$$S(x) = e^{-B(c^x-1)/(\log c)}, \quad x \geq 0.$$

Βλέπουμε ότι η κατανομή αυτή είναι IFR για $c > 1$ και DFR για $c < 1$. Ενώ όταν $c = 1$ παίρνουμε την εκθετική κατανομή με παράμετρο B .

Μία σημαντική παρατήρηση για αυτήν την κατανομή όπως και για την κατανομή Makeham που ακολουθεί είναι ότι δεν υπάρχει κλειστός τύπος για τη συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Αν κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 2.4.1, παρατηρούμε ότι αυτή η κατανομή είναι DMRL.

Η κατανομή αυτή μοντελοποιεί καλύτερα την ζωή ανθρώπων ενώ η Weibull για παράδειγμα περιγράφει καλά χρόνους ζωής μηχανημάτων.

2.5.8 Makeham

Στην κατανομή Gompertz αν θεωρούμε ότι $c = e^\lambda$ και υποθέσουμε έκθεση σε σταθερό κίνδυνο έστω $A > 0$, τότε προκύπτει η κατανομή Makeham. Η συνάρτηση FR αυτής της κατανομής για $A, B, \lambda > 0$ σε κάθε ηλικία $x > 0$ είναι

$$r(x) = A + Be^{\lambda x}$$

και η συνάρτηση αξιοπιστίας είναι

$$S(x) = \exp\left[-Ax + \frac{B}{\lambda}(e^{\lambda x} - 1)\right], \quad x \geq 0.$$

Εδώ βλέπουμε ότι $r(x) \in I$ ή αλλιώς $F(x) \in IFR$.

2.5.9 Γραμμική ένταση κινδύνου

Για $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ θεωρούμε την παρακάτω ένταση κινδύνου σε κάθε ηλικία $x > 0$

$$r(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x.$$

από την παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση αξιοπιστίας που αντιστοιχεί σε αυτήν είναι

$$S(x) = \exp(-\lambda_1 x - \lambda_2 x^2/2), \quad x \geq 0.$$

Η γραμμική ένταση κινδύνου χρησιμοποιείται συχνά στην θεωρία αξιοπιστίας λόγω της απλής της μορφής. Μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι η κατανομή αυτή είναι IFR.

Από τη συνάρτηση αξιοπιστίας μπορούμε να διαπιστώσουμε τη δυσκολία εύρεσης κλειστού τύπου για τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, όπως αυτή υπολογίζεται από τη σχέση (2.15). Η δυσκολία έγκειται στο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στον αριθμητή αυτής της σχέσης.

Μπορούμε όμως να γράψουμε τη συνάρτηση αξιοπιστίας αυτής της κατανομής διαφορετικά και να την εκφράσουμε μέσω της συνάρτησης πυκνότητας και της συνάρτησης κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής,

$$S(x) = c\phi(\sqrt{\lambda_2}x + \lambda_1/\sqrt{\lambda_2}),$$

όπου c μια σταθερά, βλέπε [Bebbington, Lai, and Zitikis \[2007a\]](#). Τέλος, χρησιμοποιώντας την (2.15) ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής αυτής της κατανομής είναι

$$\mu(x) = \frac{1 - \Phi(\sqrt{\lambda_2}x + \lambda_1/\sqrt{\lambda_2})}{\sqrt{\lambda_2}\phi(\sqrt{\lambda_2}x + \lambda_1/\sqrt{\lambda_2})}.$$

Μπορούμε όμως και πάλι να κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 2.4.1 και να διαπιστώσουμε ότι η κατανομή αυτή είναι DMRL ως IFR.

2.5.10 Lomax

Είναι γνωστή και ως δεύτερου είδους Pareto. Μία τέτοια κατανομή Pareto με παραμέτρους $\alpha, \beta > 0$ συμβολίζουμε με $\text{Pareto}(\alpha, \beta)$ και έχει συνάρτηση αξιοπιστίας

$$S(x) = \left(\frac{1}{1 + \beta x} \right)^\alpha, \quad x \geq 0.$$

Το FR αυτής της κατανομής είναι

$$r(x) = \frac{(\alpha + 1)\beta}{1 + \beta x}.$$

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής Lomax είναι γραμμικός. Για περισσότερη ευκολία, θα αλλάξουμε την παραμετροποίηση και θα θέσουμε $\alpha = 1/(B + 1)$ και $\beta = B/A$ για να καταλήξουμε στην μορφή

$$S(x) = \left[\frac{A}{A + Bx} \right]^{1/(B+1)}, \quad x \geq 0$$

η οποία και είναι ελαφρώς τροποποιημένη σε σχέση με την παραπάνω. Σε αυτήν την μορφή, η κατανομή Lomax έχει μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής

$$\mu(x) = A + Bx.$$

Κεφάλαιο 3

Μελέτη της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής στην περίπτωση που το μοντέλο εκτίθεται σε έναν επιπλέον σταθερό κίνδυνο

Η προσθήκη ενός σταθερού κινδύνου στο μοντέλο είναι συνηθισμένη πρακτική στην θεωρία αξιοπιστίας. Αυτός ο κίνδυνος δεν είναι η κύρια πηγή κινδύνου, αλλά προστίθεται σε αυτήν συνήθως λόγω μιας προσωρινής μεταβολής των συνθηκών που επηρεάζουν την διάρκεια ζωής αντικειμένων ή και ανθρώπων. Αυτό αναφέρεται στην βιβλιογραφία και σαν "ανέβασμα" της συνάρτησης έντασης κινδύνου, διότι δεν αλλάζει το σχήμα της ούτε και τα σημεία καμπής της. "Ανεβάζοντας" τη συνάρτηση έντασης κινδύνου κατά μία σταθερά, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής θα "κατέβει" κατά μία σταθερά, ούτε ότι τα σημεία καμπής της παραμένουν ίδια. Αυτό σημαίνει ότι γενικά η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής αλλάζει σχήμα ακόμα και στην απλή περίπτωση της ύπαρξης ενός σταθερού κινδύνου. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής σε αυτήν την περίπτωση. Αυτά που εξετάζονται σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρονται στην εργασία των

3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Υπάρχουν πολλές επιστημονικές περιοχές (αναλογιστική επιστήμη, οικονομετρία, μηχανική, ιατρική και άλλες) που χρησιμοποιούν τις συναρτήσεις έντασης κινδύνου (FR) και μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής (MRL). Οι μαθηματικές ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων αποκαλύπτουν διάφορα στοιχεία για τα δεδομένα. Είναι επίσης συνηθισμένη η ύπαρξη εξωτερικών κινδύνων, οι οποίοι εμφανίζονται για κάποια χρονικά διαστήματα και αλλάζουν τις συνθήκες κινδύνου στις οποίες εκτίθεται το μοντέλο. Τέτοιες μεταβολές των συνθηκών κινδύνου, αλλά και οι επιπτώσεις τους είναι εξαιρετικά χρήσιμο να μελετηθούν για διάφορους λόγους (π.χ συντήρηση μηχανημάτων ή προσδιορισμός ασφαλιστρού ζωής). Εδώ μας ενδιαφέρει συγκεκριμένα να κατανοήσουμε την μεταβολή στη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής στη παρουσία ενός τέτοιου κινδύνου.

Έστω $F(x)$ μια συνάρτηση κατανομής ζωής. Υποθέτουμε $F(0) = 0$. Τη συνάρτηση επιβίωσης τη συμβολίζουμε με $S(x) = 1 - F(x)$, την ένταση κινδύνου όπως την ορίσαμε στην (2.3) και τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής όπως την ορίσαμε στην (2.15).

Έστω τώρα η καινούργια συνάρτηση έντασης κινδύνου όταν υπάρχει ένας σταθερός κίνδυνος έστω $l > 0$ δίνεται από τη σχέση

$$r_l(x) = r(x) + l. \quad (3.1)$$

Πιο συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει ο τρόπος που συνδέονται οι συναρτήσεις $\mu_l(x)$ και $\mu(x)$ καθώς και η σχέση που έχουν τα σημεία καμπής πριν και μετά την έκθεση σε αυτόν τον σταθερό κίνδυνο.

Οι συνθήκες που ανταποκρίνονται σε κινδύνους της μορφής (3.1) είναι συνήθως μοντέλα με δύο πηγές κινδύνου. Η μία πηγή συνήθως είναι η φυσική φθορά και η δεύτερη (η σταθερή) είναι συνήθως εξωγενείς (π.χ καιρικά φαινόμενα, επιδημίες). Όσον αφορά τώρα τον σταθερό κίνδυνο μπορεί κανείς να τον αντιληφθεί σαν τη συνάρτηση έντασης κινδύνου της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $1/l$.

Στην ενότητα που ακολουθεί θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $\mu_l(x)$ για κάποιες παραμετρικές κατανομές ζωής, παρουσιάζοντας έτσι και την δυσκολία αυτού του εγχειρήματος ακόμα και στις πιο απλές περιπτώσεις. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την απόσταση των συναρτήσεων $\mu_l(x)$ και $\mu(x)$, την μεταβολή των σημείων καμπής καθώς και τη σχέση αυτών με τα σημεία καμπής της συνάρτησης έντασης κινδύνου. Τέλος, θα μελετήσουμε τις συναρτήσεις FR και MRL για δύο πολύ χρήσιμες γενικεύσεις της κατανομής Weibull.

3.2 Υπολογισμός των συναρτήσεων υπολειπόμενου χρόνου ζωής στην παρουσία ενός σταθερού κινδύνου

Υπενθυμίζουμε ότι $S(x) = \exp\{-\int_0^x r(x)dx\}$ και λόγω της (3.1) παίρνουμε $S_l(x) = e^{-lx}S(x)$, όπου η $S_l(x)$ είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας που αντιστοιχεί στη συνάρτηση κινδύνου $r_l(x)$. Η δεσμευμένη συνάρτηση αξιοπιστίας σε κάθε ηλικία $x \geq 0$ είναι

$$S(t|x) = P[X > x + t | X > x] = \frac{S(x+t)}{S(x)}, \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

και η συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής που αντιστοιχεί στη συνάρτηση αξιοπιστίας $S_l(x)$ είναι

$$\mu_l(x) = E[X_l - x | X_l > x] = \frac{\int_x^\infty S_l(t)dt}{S_l(x)} = \int_0^\infty e^{-lt}S(t|x)dx, \quad (3.3)$$

όπου η τ.μ. X_l έχει συνάρτηση αξιοπιστίας την $S_l(x)$. Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες στην τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\mu_l(x) = \frac{1}{l} \left(1 - \int_0^\infty e^{-lt}dF(t|x) \right) = \frac{1}{l} (1 - E[e^{-lT_x}]) \quad (3.4)$$

όπου $T_x = (X - x | X > x)$ είναι η τ.μ. που περιγράφει τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής και έχει συνάρτηση αξιοπιστίας $S(t|x)$. Η μέση τιμή $E[e^{-lT_x}]$ είναι ο ευρέως γνωστός μετασχηματισμός Laplace της τυχαίας μεταβλητής T_x . Όταν $l \rightarrow 0$ τότε $\mu_l(x) \rightarrow E[T_x] = \mu(x)$.

Ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. του υπολειπόμενου χρόνου ζωής T_x , ο οποίος από την (3.4) ισούται με $1 - l\mu_l(x)$, μπορεί να ερμηνευτεί ως το σύνολο των αποζημιώσεων που σχετίζονται με κινδύνους, το σύνολο των εισοδημάτων που σχετίζονται με επενδύσεις, ή τα ασφάλιστρα σε ασφαλίσεις ζωής. Για παράδειγμα, το l μπορεί να είναι ο συντελεστής προεξόφλησης στην μοντελοποίηση ασφαλιστρών και αποθεματικών. Χρησιμοποιώντας την κυρτή συνάρτηση ωφελιμότητας $G(t) = 1 - e^{-t/\theta}$, έχουμε $E[G(T_x)] = 1 - E[e^{-T_x/\theta}]$ και συγκεκριμένα για $x = 0$ έχουμε $E[G(X)] = 1 - E[e^{-X/\theta}]$. Αυτό συνδέει την οικονομετρική συνάρτηση ωφελιμότητας με τους μετασχηματισμούς Laplace.

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα υπολογίσουμε τις συναρτήσεις των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής $\mu(x)$ και $\mu_l(x)$ για έναν αριθμό παραμετρικών κατανομών διάρκειας ζωής, ξεκινώντας από την εκθετική κατανομή. Στη συνέχεια θα είμαστε σε θέση να δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο η έννοια του σταθερού εξωτερικού κινδύνου προκύπτει στην αναλογιστική επιστήμη.

Θεώρημα 3.2.1. Έστω σταθερές $l > 0$ και $c > 0$. Υποθέτουμε δύο συναρτήσεις έντασης κινδύνου έστω $r_*(x)$ και $r(x)$ καθώς και τις αντίστοιχες συναρτήσεις μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $\mu_*(x)$ και $\mu(x)$ έτσι ώστε

$$r_*(x) = r(x) + l \quad \text{και} \quad \mu_*(x) = \mu(x) - c, \quad \forall x \geq 0. \quad (3.5)$$

Τότε η συνάρτηση αξιοπιστίας που αντιστοιχεί στη συνάρτηση έντασης κινδύνου $r(x)$ είναι εκθετική με μέση τιμή

$$\theta(l, c) = \frac{2}{\sqrt{l^2 + 4l/c} - l}.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε

$$\mu_*(x) = \mu(x) + l \Rightarrow \mu'_*(x) - \mu'(x) = 0$$

και επειδή ισχύει ότι $\mu'_*(x) = \mu_*(x)r_*(x) - 1$ και $\mu'(x) = \mu(x)r(x) - 1$ προκύπτει ότι

$$0 = \mu_*(x)r_*(x) - \mu(x)r(x) = l\mu(x) - cr(x) - cl.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $\mu(x) = \frac{\int_x^\infty S(t)dt}{S(x)}$ και αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση προκύπτει

$$l \int_x^\infty S(t)dt + cS'(x) - clS(x) = 0.$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία παίρνουμε

$$S''(x) - lS'(x) - \frac{l}{c}S(x) = 0.$$

Η παραπάνω είναι μια ομογενής, δευτέρας τάξης διαφορική εξίσωση και έχει γενικευμένη λύση την $S(x) = c_1 \exp\{x_1 x\} + c_2 \exp\{x_2 x\}$, με

$$x_1 = \frac{l + \sqrt{l^2 + 4lc^{-1}}}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{l - \sqrt{l^2 + 4lc^{-1}}}{2}.$$

Όμως οι σταθερές c_1 και c_2 πρέπει να είναι τέτοιες ώστε η $S(x)$ να είναι μια συνάρτηση αξιοπιστίας. Πρέπει δηλαδή $\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 0$ δηλαδή το $c_1 = 0$ αφού $x_1 > 0$. Επιπλέον, πρέπει το $S(0) = 1$ δηλαδή $c_2 = 1$. Τελικά, η μοναδική μη-εκφυλισμένη λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας της εκθετικής κατανομής $S(x) = \exp\{x_2 x\}$, αφού το $x_2 < 0$. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την τελευταία στην μορφή $S(x) = \exp\{-\frac{x}{\theta(l,c)}\}$. Εδώ τελειώνει και η απόδειξη του θεωρήματος. \square

3.2.1 Εκθετική

Έστω η συνάρτηση αξιοπιστίας της εκθετικής κατανομής με μέση τιμή $\lambda > 0$, $S(x) = \exp\{-\frac{x}{\lambda}\}$, $x \geq 0$. Η συνάρτηση έντασης κινδύνου για αυτήν την κατανομή είναι όπως έχουμε δει και στο προηγούμενο κεφάλαιο $r(x) = \frac{1}{\lambda}$, έχει την αμνήμονα ιδιότητα $S(t|x) = S(t)$, $\forall x > 0$ κάτι που μας οδηγεί μέσω της (3.3) στη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μετά την προσθήκη του σταθερού κινδύνου $\mu_l(x) = \lambda/(\lambda + 1)$. Άρα

$$r_l(x) = r(x) + l \quad \Leftrightarrow \quad \mu_l(x) = \mu(x) - (l\lambda^2)/(\lambda + 1).$$

Βλέπουμε ότι για την εκθετική κατανομή, όταν προσθέτουμε μια σταθερά στη συνάρτηση έντασης κινδύνου, τότε η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μειώνεται κατά μία άλλη σταθερά, ακριβώς όπως το δείξαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1.

Η εκθετική κατανομή διευκολύνει την ερμηνεία μας για τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $\mu_l(x)$, μέσω των μετασχηματισμών Laplace. Έστω μια τ.μ. E_l που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/l$. Τότε ισχύει $P[T_x \leq E_l] = E[e^{-lT_x}]$. Η ερμηνεία εδώ του μετασχηματισμού Laplace είναι η πιθανότητα ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής να είναι μικρότερος από τον (συνολικό) χρόνο ζωής μιας εκθετικής κατανομής. Έπεται λοιπόν ότι $E[T_x \wedge E_l] = \frac{1}{l}(1 - E[e^{-lT_x}])$.

3.2.2 Γάμμα

Όταν οι συναρτήσεις του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής εκφράζονται στην μορφή ολοκληρωμάτων οδηγούν σε δύσκολες παραστάσεις με ολοκληρώματα. Παρατηρούμε ότι,

$$\mu_l(x) = \frac{\int_x^\infty e^{-lt} S(t) dt}{e^{-lx} S(x)} = \frac{1}{l} \left(1 - \frac{\int_x^\infty e^{-lt} f(t) dt}{e^{-lx} S(x)} \right). \quad (3.6)$$

Παίρνοντας το όριο της παραπάνω καθώς το $l \rightarrow 0$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hospital και λαμβάνουμε

$$\lim_{l \rightarrow 0} \mu_l(x) = \mu(x) = \frac{\int_x^\infty t f(t) dt}{S(x)} - x. \quad (3.7)$$

Τις παραπάνω σχέσεις του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής θα τις χρειαστούμε για να καταλήξουμε σε κάποιες εκφράσεις για τις συναρτήσεις MRL $\mu_l(x)$ και $\mu(x)$ της κατανομής Γάμμα και της Λογαριθμοκανονικής.

Η συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Γάμμα με παραμέτρους $a, b > 0$ δίνεται από $S(x) = \Gamma(a, bx)/\Gamma(a)$, όπου $\Gamma(a) = \Gamma(a, 0)$ είναι η πλήρης συνάρτηση Γάμμα και $\Gamma(n, t)$ είναι η άνω μη-πλήρης συνάρτηση Γάμμα. Η συνάρτηση πυκνότητας αυτής της Γάμμα κατανομής δίνεται από $f(x) = b^a x^{a-1} e^{-bx}/\Gamma(a)$, και κατ' επέκταση η συνάρτηση έντασης κινδύνου δίνεται από $r(x) = b^a x^{a-1} e^{-bx}/\Gamma(a, bx)$. Το δεξί μέρος της τελευταίας

σχέσης μπορεί επίσης να εκφραστεί ως ο αντίστροφος του ολοκληρώματος

$\int_0^\infty (1+t/x)^{a-1} e^{-bt} dt$. Από αυτό φαίνεται ότι η συνάρτηση $r(x)$ είναι γνησίως αύξουσα για $0 < a < 1$, σταθερή για $a = 1$ και γνησίως αύξουσα για $a > 1$. Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $\mu_l(x)$, πρώτα παρατηρούμε ότι ο παράγοντας e^{-lt} που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα της σχέσης (3.6) μπορεί να ενσωματωθεί στη συνάρτηση πυκνότητας της Γάμμα $f(x)$ το οποίο δίνει

$$\mu_l(x) = \frac{1}{l} \left(1 - \frac{e^{lx} \Gamma(a, (b+l)x)}{(1+l/b)^a \Gamma(a, bx)} \right).$$

Ο υπολογισμός της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής συνήθως δεν είναι εύκολο όπως ήδη παρατηρήσαμε.

3.2.3 Λογαριθμοκανονική

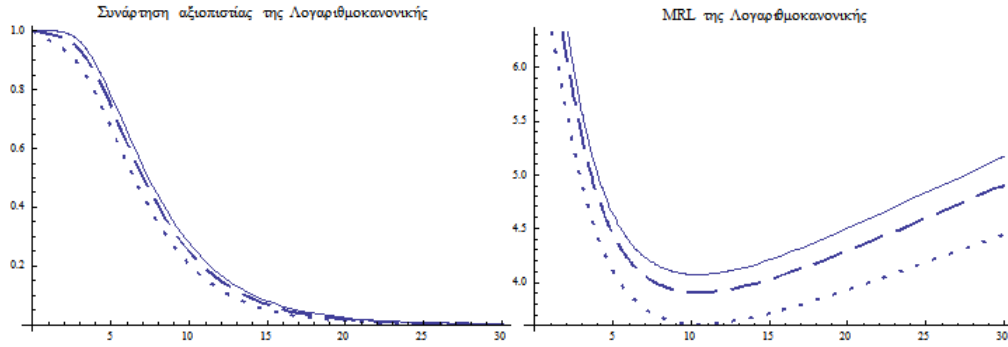
Η συνάρτηση αξιοπιστίας αυτής της κατανομής είναι $S(x) = 1 - \Phi((\log x - \alpha)/\sigma)$, όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής, $\alpha, \sigma > 0$. Ξεκινώντας από τη σχέση (3.7) και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα, όπου t βάζουμε $\exp\{\sigma t + \sigma^2 + \alpha\}$ και παίρνουμε

$$\mu_l(x) = \frac{1 - \Phi((\log x - \alpha)/\sigma - \sigma)}{1 - \Phi((\log x - \alpha)/\sigma)} \exp\{\alpha + \sigma^2/2\}.$$

Στην λογαριθμοκανονική κατανομή η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $\mu_l(x)$ δεν μπορεί να γραφεί αναλυτικά χωρίς την χρήση της συνάρτησης κατανομής της τυπικής κανονικής. Μπορούμε όμως να την δούμε γραφικά στο επόμενο διάγραμμα.

3.2.4 Γραμμική συνάρτηση έντασης κινδύνου

Όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 2, η συνάρτηση αξιοπιστίας αυτής της κατανομής δίνεται από $S(x) = \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 x^2/2\}$, $x \geq 0$, όπου $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ έτσι ώστε τουλάχιστον ένα από αυτά να είναι μη-μηδενικό. Η συνάρτηση έντασης κινδύνου που αντιστοιχεί σε αυτήν είναι $r(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x$. Έτσι, όταν $\lambda_2 > 0$ η συνάρτηση έντασης κινδύνου είναι γνησίως αύξουσα. Πρώτα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αξιοπιστίας $e^{-lx} S(x)$ είναι ίδια με τη συνάρτηση αξιοπιστίας $S(x)$ αν όπου λ_1 βάλουμε $\lambda_1 + l$



Σχήμα 3.1: Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στην κατανομή, η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην κατανομή υπό την έκθεση σε έναν σταθερό κίνδυνο $l=0.01$ και η γραμμή με τις τελείες αντιστοιχεί στην κατανομή υπό την έκθεση σε έναν σταθερό κίνδυνο $l=0.03$.

και αν γράψουμε την $S(x)$ σαν $c\phi(\sqrt{\lambda_2}x + \lambda_1/\sqrt{\lambda_2})$, όπου ϕ η συνάρτηση πυκνότητας της τυπικής κανονικής κατανομής και c μια σταθερά. Έτσι ισχύει ότι $S_l(x) = c\phi(\sqrt{\lambda_2}x + (\lambda_1 + l)/\sqrt{\lambda_2})$ και χρησιμοποιώντας την (3.3) παίρνουμε

$$\mu_l(x) = \frac{1 - \Phi(\sqrt{\lambda_2}x + (\lambda_1 + l)/\sqrt{\lambda_2})}{\sqrt{\lambda_2}\phi(\sqrt{\lambda_2}x + (\lambda_1 + l)/\sqrt{\lambda_2})}$$

όπου $\Phi(u)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής. Για $l = 0$ παίρνουμε την $\mu(x)$.

3.2.5 Lomax

Η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής Lomax με παραμέτρους $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ έχει συνάρτηση αξιοπιστίας $S(x) = (1 + \beta x)^{-\alpha}$, $x \geq 0$ και συνάρτηση έντασης κινδύνου $r(x) = \alpha\beta/(1 + \beta x)$, $x > 0$ γνησίως φθίνουσα. Όπως και με την γραμμική ένταση κινδύνου αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση αξιοπιστίας του υπολειπόμενου χρόνου ζωής $S(t|x)$ είναι επίσης μια Lomax κατανομή $S(x)$ αν αντικαταστήσουμε την παράμετρο β με $\beta/(1 + \beta x)$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση, κάνοντας χρήση της (3.3) και υποθέτοντας ότι $\alpha > 1$ για να υπάρχει η πρώτη ροπή, παίρνουμε

$$\mu_l(x) = \int_0^\infty e^{-lt} \left(\frac{1 + \beta x}{1 + \beta x + \beta t} \right)^\alpha dt = \frac{1}{l} \left(\frac{l}{\beta} + lx \right)^\alpha \exp\left\{ \frac{l}{\beta} + lx \right\} \Gamma\left(1 - \alpha, \frac{l}{\beta} + lx \right)$$

όπου $\Gamma(n, t)$ η άνω μη-πλήρης συνάρτηση Γάμμα. Όταν το $l \rightarrow 0$ και με μια εφαρμογή του κανόνα L'Hospital παίρνουμε τη συνάρτηση

$$\mu(x) = \frac{1}{\beta(\alpha - 1)} + \frac{1}{\alpha - 1}x.$$

Στην Παράγραφο 2.5.10 αναφέραμε αυτήν την κατανομή με μια διαφορετική παραμετροποίηση. Παρατηρούμε ότι ενώ η συνάρτηση $\mu(x)$ είναι γραμμική, η συνάρτηση $\mu_l(x)$ δεν είναι. Η ύπαρξη αυτού του σταθερού κινδύνου αλλάζει το σχήμα της συνάρτησης του υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

3.3 Σύγκριση των συναρτήσεων του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και των σημείων καμπής τους

Από τη σχέση (3.6) βλέπουμε ότι ο παράγοντας e^{-lt} μέσα στο ολοκλήρωμα είναι μικρότερος ή ίσος με e^{-lx} , επομένως ισχύει ότι $\mu_l(x) \leq \mu(x)$ για κάθε $x \geq 0$. Αυτό επιβεβαιώνει το γεγονός ότι αυξάνοντας τη συνάρτηση κινδύνου μειώνουμε τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Αυτή η διάταξη των συναρτήσεων MRL υπάρχει επίσης και σαν γενικό αποτέλεσμα στο βιβλίο των [Lai and Xie \[2006\]](#) στο οποίο αναφέρεται ότι η διάταξη των συναρτήσεων έντασης κινδύνου (FR) είναι ισχυρότερη από την διάταξη των MRL, με την έννοια ότι αν υπάρχουν δύο συναρτήσεις FR έστω r_1, r_2 με $r_1(x) \leq r_2(x)$ τότε ισχύει ότι $\mu_1(x) \geq \mu_2(x)$, όπου μ_1 η συνάρτηση MRL που αντιστοιχεί στην r_1 και μ_2 η συνάρτηση MRL που αντιστοιχεί την r_2 . Επιστρέφουμε τώρα στη συνάρτηση $r_l(x)$ η οποία είναι αυξημένη κατά $l > 0$ σε σχέση με την $r(x)$, μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε το πόσο η συνάρτηση $\mu_l(x)$ μειώθηκε σε σχέση με την $\mu(x)$.

Πρώτα τονίζουμε ότι η συνάρτηση $S(t|x)$ εξαρτάται από το x . Έτσι, η παραπάνω διαφορά θα είναι

$$\mu(x) - \mu_l(x) = \int_0^\infty q_1(t)S(t|x) dt \quad \text{όπου} \quad q_1(t) = 1 - e^{-lt} \quad (3.8)$$

το οποίο επίσης εξαρτάται από το x . Όταν η απόσταση αυτή δεν εξαρτάται από το x , δηλαδή είναι σταθερή, μπορούμε να δούμε μέσω του Θεωρήματος 3.2.1 ότι η $S(x)$ είναι εκθετική (χωρίς μνήμη). Ωστόσο, γενικά η απόσταση μεταξύ των συναρτήσεων $\mu(x)$ και $\mu_l(x)$ δεν είναι σταθερή με την ηλικία x , εκτός από την περίπτωση της εκθετικής κατανομής. Έχει λοιπόν μεγάλο ενδιαφέρον ο προσδιορισμός της μέγιστης απόστασης των δύο αυτών συναρτήσεων ή τουλάχιστον μια εκτίμηση αυτής. Η ύπαρξη αναλυτικών εκφράσεων για αυτές τις συναρτήσεις (όπως είδαμε και στην προηγούμενη ενότητα) φυσικά διευκολύνει τα πράγματα. Γενικά, το πρόβλημα είναι πολύ σύνθετο και εκφράσεις όπως η (3.8) γίνονται πολύ χρήσιμες. Έτσι τη σχέση (3.8) μπορούμε να την γράψουμε

$$\mu(x) - \mu_l(x) = \int_x^\infty q_2(t) \frac{S(t)}{S(x)} dt \quad \text{όπου} \quad q_2(t) = le^{lx} e^{-lt} \mu(t) \quad (3.9)$$

$$= \int_x^\infty q_3(t) S(t|x) dt \quad \text{όπου} \quad q_3(t) = le^{-lt} \mu(t+x). \quad (3.10)$$

Εκφράσεις της μορφής (3.8), (3.9) και (3.10) ποσοτικοποιούν την απόσταση $\mu(x) - \mu_l(x)$ σε όρους $S(x)$, $S(t|x)$ και $\mu(x)$.

Τώρα θα στρέψουμε την προσοχή μας στα σημεία καμπής τα οποία δείχνουν τα διαστήματα στα οποία οι συναρτήσεις FR και MRL είναι μονότονες. Σε αναλογιστικές εφαρμογές, αυτά επιτρέπουν την κατανόηση των καμπυλών θνησιμότητας. Στην θεωρία αξιοπιστίας, παρέχουν πληροφορίες χρήσιμες στη στρατηγική αντικατάστασης. Συγκεκριμένα, θέλουμε να μετρήσουμε την απόσταση των σημείων x_0^* και x_l^* , τα οποία είναι τα σημεία καμπής της $\mu(x)$ και $\mu_l(x)$ αντίστοιχα. Αυτές οι αποστάσεις εξαρτώνται φυσικά από το σχήμα των συναρτήσεων MRL. Πολύ σημαντικά σχήματα για τις MRL συναρτήσεις, εκτός από τις αύξουσες (I) και τις φθίνουσες (D), είναι οι λεκανοειδείς μορφές (BT), οι οποίες είναι φθίνουσες στην αρχή και μετά αύξουσες, και οι ανεστραμμένες λεκανοειδείς μορφές (UBT), οι οποίες είναι αύξουσες στην αρχή και μετά φθίνουσες. Οι Gupta and Akman [1995] κατέληξαν στο αποτέλεσμα που ακολουθεί το οποίο αφορά την δυκότητα των μορφών BT και UBT, κάτι που εδώ παρουσιάζεται με μια πιο απλή μορφή.

Θεώρημα 3.3.1. Έστω μια συνάρτηση έντασης κινδύνου $r(x)$ η οποία είναι διαφορίσιμη και ανήκει στην κλάση BT. Έστω $x_1 \in (0, \infty)$ το σημείο καμπής της $r(x)$. Αν $r(0)E[X] > 1$, τότε η συνάρτηση MRL ανήκει στην κλάση UBT και το σημείο καμπής της έστω x_0^* είναι στο διάστημα $(0, x_1)$. Αν $r(0)E[X] \leq 1$, τότε η συνάρτηση MRL ανήκει στην κλάση D.

3.3.1 Παράδειγμα με την χρήση της κατανομής Hjorth

Η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής Hjorth, για $\delta, \beta, \theta > 0$ δίνεται από

$$S(x) = (1 + \beta x)^{\theta/\beta} e^{-\delta x^2/2}, \quad x \geq 0.$$

Η συνάρτηση της έντασης κινδύνου είναι $r(x) = \delta x + \theta/(1 + \beta x)$. Έτσι, αν $\theta\beta/\delta \leq 1$, τότε η κατανομή είναι IFR, αν $\theta\beta/\delta > 1$, τότε η συνάρτηση έντασης κινδύνου της κατανομής έχει λεκανοειδή μορφή με σημείο καμπής

$$x_1 = \left(\sqrt{\frac{\theta\beta}{\delta}} - 1 \right) \frac{1}{\beta}. \quad (3.11)$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι $\theta\beta/\delta > 1$, τότε από το Θεώρημα 3.3.1 αν $\theta E[X] > 1$, η συνάρτηση MRL της κατανομής αυτής έχει ανεστραμμένη λεκανοειδή μορφή και μοναδικό σημείο καμπής έστω x_0^* μέσα στο διάστημα $(0, x_1)$. Αν τώρα $\theta E[X] \leq 1$, τότε η συνάρτηση MRL ανήκει στην κλάση D.

Έστω τώρα η συνάρτηση $\mu_l(x)$ η οποία αντιστοιχεί στη συνάρτηση $r_l(x) = r(x) + l$. Το σημείο καμπής της τελευταίας δίνεται από την (3.11) και είναι ανεξάρτητο του l . Αν ισχύει

$$(\theta + l) \int_0^\infty \frac{e^{-lt - \delta t^2/2}}{(1 + \beta t)^{\theta/\beta}} dt > 1, \quad (3.12)$$

τότε η συνάρτηση MRL $\mu_l(x)$ ανήκει στην κλάση UBT με μοναδικό σημείο καμπής $x_l^* \in (0, x_1)$. Διαφορετικά, όταν η (3.12) δεν ισχύει, τότε η συνάρτηση $\mu_l(x)$ ανήκει στην κλάση D.

Θεώρημα 3.3.2. Έστω η συνάρτηση MRL $\mu(x)$ ανήκει στην κλάση UBT. Τότε, για κάθε $l > 0$, το σημείο καμπής x_l^* της συνάρτησης MRL $\mu_l(x)$ είναι μεγαλύτερο από το σημείο καμπής x_0^* της συνάρτησης MRL $\mu(x)$.

Αυτό το παράδειγμα μας δείχνει ότι η συνάρτηση MRL $\mu_l(x)$ μπορεί να αλλάξει μορφή και κατ επέκταση και κλάση όσο το l μεταβάλλεται. Πρέπει να τονιστεί ότι το x_l^* στο Θεώρημα 3.3.2 μπορεί να είναι μηδέν, δηλαδή η $\mu_l(x)$ να μην ανήκει πλέον στην κλάση UBT αλλά στην D. Συνοψίζοντας τα Θεωρήματα 3.3.1 και 3.3.2, αν μια συνάρτηση FR είναι διαφορίσιμη, ανήκει στην κλάση BT και ισχύει $r(0)E[X] > 1$, τότε για κάθε $l > 0$ έτσι ώστε $(r(0) + l)E[X] > 1$ τα σημεία καμπής x_0^*, x_l^* και x_1 των συναρτήσεων $\mu(x), \mu_l(x)$ και $r(x)$ αντίστοιχα, ικανοποιούν την $x_0^* < x_l^* < x_1$. Η κατάληξη σε αναλυτικούς τύπους για τα σημεία καμπής x_0^* και x_l^* είναι πολύπλοκη διαδικασία.

3.4 Δύο γενικεύσεις της κατανομής Weibull

Υπάρχει πάντα ένα ενδιαφέρον για κατασκευή νέων κατανομών, ειδικά για κατανομές με λεκανοειδή μορφή στη συνάρτηση έντασης κινδύνου, προκειμένου να μοντελοποιηθούν καλύτερα τα δεδομένα. Οι πιο σύγχρονες κατανομές είναι πιο περίπλοκες μαθηματικά από τις κλασικές κατανομές. Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε αναλυτικά τη συνάρτηση έντασης κινδύνου $r(x)$ και τις συναρτήσεις μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $\mu(x)$ και $\mu_l(x)$ στην περίπτωση δύο παραμετρικών κατανομών. Η πρώτη είναι η Ανηγμένη Προσθετική Weibull (RAW-Reduced Additive Weibull) και η δεύτερη είναι η Προσαρμοσμένη Weibull (FW-Flexible Weibull). Οι [Bebbington, Lai, and Zitikis \[2007b\]](#) είχαν προτείνει μια μείξη των δύο παραπάνω κατανομών για να μοντελοποιήσουν την ανθρώπινη θνησιμότητα, με εξαιρετικά καλή προσαρμογή στα δεδομένα ανδρών και γυναικών από τον Καναδά και την Ινδονησία που είχαν στην διάθεσή τους και κάλυπταν όλο το φάσμα της ανθρώπινης ζωής.

Η κατανομή RAW με $\alpha > 0, \beta > 1$ έχει συνάρτηση αξιοπιστίας

$$S_{RAW}(x) = \exp\{-(\alpha x)^\beta - (\alpha x)^{1/\beta}\}, \quad x \geq 0$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση έντασης κινδύνου

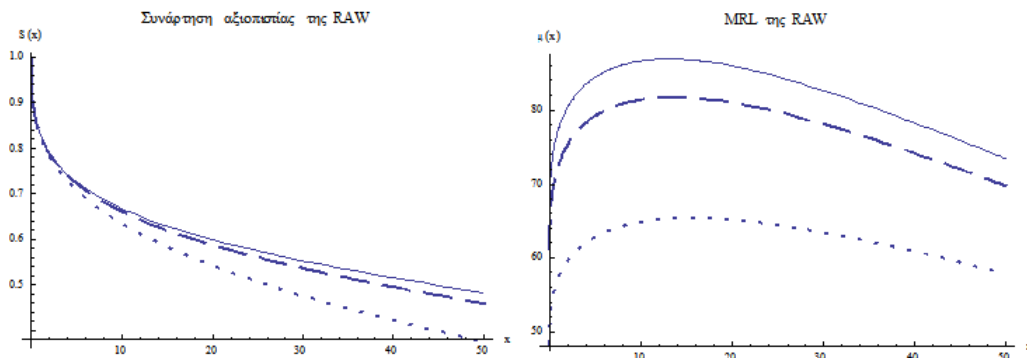
$$r_{RAW}(x) = \alpha\beta(\alpha x)^{\beta-1} + (\alpha/\beta)(\alpha x)^{1/\beta-1} \quad (3.13)$$

Το παρακάτω αποτέλεσμα αφορά στην γεωμετρία της κατανομής RAW και μπορεί να το βρει κανείς από τους [Bebbington, Lai, and Zitikis \[2007b\]](#).

Θεώρημα 3.4.1. Για την κατανομή με συνάρτηση έντασης κινδύνου της μορφής (3.13),

- (i) Το ελάχιστο της συνάρτησης $r_{RAW}(x)$ επιτυγχάνεται στο σημείο $x_0 = \alpha^{-1}\beta^{-3\beta/(\beta^2-1)}$, και η $r_{RAW}(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα για $x < x_0$ και γνησίως αύξουσα για $x > x_0$.
- (ii) Η συνάρτηση έντασης κινδύνου $r_{RAW}(x)$ είναι κοίλη δοθέντος ότι $\beta \geq 2$. Όταν $1 < \beta < 2$, η δεύτερη παράγωγος $r''_{RAW}(x)$ είναι αυστηρά θετική όταν $x < x_1$, όπου $x_1 = \alpha^{-1}[(2\beta - 1)/(2\beta^4 - \beta^5)]^{\beta/(\beta^2-1)}$.

Σημειώνουμε ότι $x_0 < x_1$, έτσι η συνάρτηση $r_{RAW}(x)$ είναι κοίλη για $x < x_1$ και κυρτή για $x > x_1$. Προφανώς το Θεώρημα 3.4.1 εφαρμόζεται και στη συνάρτηση $r_{RAW,l}(x) = r_{RAW}(x) + l$. Οι συναρτήσεις $\mu_{RAW}(x)$ και $\mu_{RAW,l}(x)$ είναι πιο περίπλοκες και έτσι παριστάνονται γραφικά στη συνέχεια.



Σχήμα 3.2: Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στην κατανομή, η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην κατανομή υπό την έκθεση σε έναν σταθερό κίνδυνο $l=0.001$ και η γραμμή με τις τελείες αντιστοιχεί στην κατανομή υπό την έκθεση σε έναν σταθερό κίνδυνο $l=0.005$.

Στο δεξί διάγραμμα παριστάνεται η κίνηση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής όσο μεγαλώνει ο σταθερός κίνδυνος που προσθέσαμε στο μοντέλο μας. Παρατηρούμε ότι οι αποστάσεις

μεταξύ των MRL συναρτήσεων δεν είναι σταθερές αλλά εξαρτώνται από την ηλικία x . Επιπλέον, το σημείο καμψής της MRL μετατοπίζεται δεξιότερα στον οριζόντιο άξονα όσο εμείς προσθέτουμε ολοένα και μεγαλύτερους σταθερούς κινδύνους.

Πρόταση 3.4.1. Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $\mu_{RAW,l}(x)$ ανήκει στην κλάση UBT.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.4.1 συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $r_{RAW}(x)$ ανήκει στην κλάση BT. Επιπλέον, το $\lim_{x \rightarrow 0} r_{RAW}(x) = \infty$, επομένως ισχύει ότι $r_{RAW,l}(x)E[X_l] > 1$. Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα το Θεώρημα 3.3.1 παίρνουμε ότι η συνάρτηση $\mu_{RAW,l}(x)$ ανήκει στην κλάση UBT. \square

Η επόμενη κατανομή που θα δούμε είναι η προσαρμοσμένη Weibull, με συνάρτηση αξιοπιστίας $S_{FW}(x) = \exp\{-e^{\alpha x - \beta/x}\}$, $x \geq 0$ και παραμέτρους $\alpha, \beta > 0$. Η αντίστοιχη συνάρτηση έντασης κινδύνου είναι

$$r_{FW}(x) = (\alpha + \beta/x^2)e^{\alpha x - \beta/x}.$$

Σημειώνουμε ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} r_{FW}(x) = 0$ και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow \infty} r_{FW}(x) = \infty$. Εδώ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση $\mu_{FW}(x)$ είναι κάποιας γνωστής μορφής διότι όπως θα δούμε στην συνέχεια η συνάρτηση $r_{FW}(x)$ δεν ανήκει στην κλάση BT.

Θεώρημα 3.4.2. Η συνάρτηση FR $r_{FW}(x)$ είναι αύξουσα του x αν και μόνο αν $\alpha\beta > \frac{27}{64}$. Όταν $\alpha\beta = \frac{27}{64}$, η συνάρτηση $r_{FW}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα παντού εκτός από το $x = 3/(\delta\alpha)$ όπου και μηδενίζεται η πρώτη της παράγωγος. Όταν $\alpha\beta < \frac{27}{64}$, η συνάρτηση FR $r_{FW}(x)$ ανήκει στην κλάση MBT, δηλαδή είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, x_1)$, γνησίως φθίνουσα στο (x_1, x_2) και γνησίως αύξουσα στο (x_2, ∞) . Τα σημεία x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$ προσδιορίζονται από

$$x_1 = \left(\frac{\sqrt{y}}{2} - \sqrt{-\frac{y}{4} + \frac{d}{2\sqrt{y}}}\right)^2, \quad x_2 = \left(\frac{\sqrt{y}}{2} + \sqrt{-\frac{y}{4} + \frac{d}{2\sqrt{y}}}\right)^2$$

όπου

$$d = -\frac{\sqrt{2\beta}}{\alpha},$$

και

$$y = \left(\frac{\beta}{\alpha^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{64}{27} \alpha \beta} \right) \right)^{1/3} + \left(\frac{\beta}{\alpha^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{64}{27} \alpha \beta} \right) \right)^{1/3}.$$

Απόδειξη. (Αφορά τα σημεία καμπής της κατανομής FW όταν αυτή είναι σχήματος MBT.) Έστω $\alpha\beta < \frac{27}{64}$. Τότε για να βρούμε τα σημεία καμπής της συνάρτησης $r_{FW}(x)$, λύνουμε την εξίσωση $r'_{FW}(x) = 0$ για x πραγματικό. Μετά από πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση $\alpha x^2 - (2\beta x)^{1/2} + \beta = 0$ η οποία με μια αλλαγή μεταβλητής $x = t^2$ γίνεται $t^4 + dt + c$ με $d = -\frac{\sqrt{2\beta}}{\alpha}$ και $c = \beta/\alpha$. Οι τέσσερις ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι (βλέπε [Carpenter \[1966\]](#))

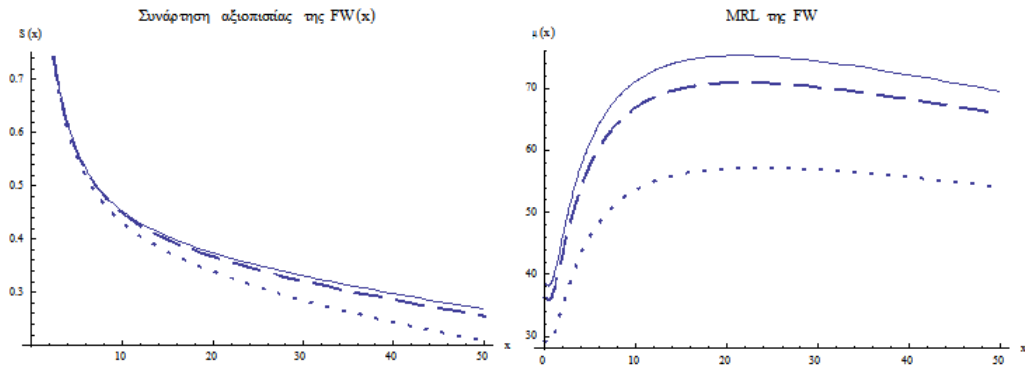
$$\left(\frac{\sqrt{y}}{2} + \varepsilon_1 \sqrt{-\frac{y}{4} + \varepsilon_2 \frac{d}{2\sqrt{y}}} \right)^2, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$$

όπου y είναι μία από τις θετικές ρίζες της $y^3 - 4cy - d^2 = 0$. Αν αυτή γραφτεί σε κανονική μορφή $y^3 + 3py + 2q = 0$ με $p = -4c/3$ και $q = -d^2/2$, έχει διακρίνουσα $\Delta = p^3 + q^2 = (\beta^2/\alpha^4)(1 - (\frac{64}{27})\alpha\beta)$ μη-αρνητική αφού $\alpha\beta < \frac{27}{64}$. Συνεπώς, η παραπάνω εξίσωση έχει μία πραγματική ρίζα την $y = (-q + \sqrt{\Delta})^{1/3} + (-q - \sqrt{\Delta})^{1/3}$ και με μια απλή αντικατάσταση των Δ, q και p ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

Με όλα τα παραπάνω καταφέραμε τελικά να σχηματίσουμε μια σχετικά ολοκληρωμένη εικόνα για την γεωμετρία της συνάρτησης έντασης κινδύνου $r_{FW}(x)$ αλλά και για την $r_{FW,\lambda}(x)$. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις του υπολειπόμενου χρόνου ζωής έχουν αρκετά πιο σύνθετες αναλυτικές εκφράσεις από αυτές της κατανομής RAW Weibull που είδαμε προηγουμένως.

Οι παρατηρήσεις πάνω στο σχήμα στις κατανομής αυτής είναι όμοιες με αυτές της κατανομής RAW με την μόνη διαφορά ότι εδώ έχουμε δύο σημεία καμπής τα οποία κινούνται προς τα δεξιά όσο προσθέτουμε μεγαλύτερους σταθερούς κινδύνους στο μοντέλο.

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε εν συντομία τα σημεία καμπής της συνάρτησης MRL που αντιστοιχεί στις κατάνομές lognormal, RAW και FW. Στα διαγράμματα στις σελίδες [34](#), [39](#) και [42](#) φαίνεται ο τρόπος που μετακινούνται τα σημεία καμπής της συνάρτησης MRL όταν "ανεβάζουμε" τη συνάρτηση FR.



Σχήμα 3.3: Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στην κατανομή, η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην κατανομή υπό την έκθεση σε έναν σταθερό κίνδυνο $l=0.001$ και η γραμμή με τις τελείες αντιστοιχεί στην κατανομή υπό την έκθεση σε έναν σταθερό κίνδυνο $l=0.005$.

Σημειώνουμε ότι συνάρτηση MRL της FW έχει δύο σημεία καμπής. Στην περίπτωση της κατανομής RAW βλέπουμε ότι η συνάρτηση MRL είναι UBT. Έτσι, στο Διάγραμμα 3.2 βλέπουμε ότι η συνάρτηση x_l^* (συνάρτηση ως προς l) είναι μη-φθίνουσα. Στην περίπτωση της λογαριθμοκανονικής κατανομής, όπου η συνάρτηση MRL είναι σχήματος BT, αλλά και στην περίπτωση της FW κατανομής, η οποία έχει συνάρτηση MRL σχήματος BT γύρω από το πρώτο σημείο καμπής της, η συνάρτηση x_l^* είναι αύξουσα με πολύ αργό ρυθμό. Όσον αφορά τώρα το δεύτερο σημείο καμπής της συνάρτησης MRL της κατανομής FW, η συνάρτηση x_l^* είναι προφανώς αύξουσα (3.3), κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο αφού αυτή η συνάρτηση MRL είναι σχήματος UBT γύρω από το σημείο αυτό.

3.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιήσαμε έναν αριθμό από γνωστές κατανομές χρόνου ζωής για να δείξουμε πώς η προσθήκη του πιο απλού κινδύνου στο μοντέλο μπορεί να οδηγήσει σε σύνθετες εκφράσεις για τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Η συνάρτηση MRL, και πιο συγκεκριμένα τα σημεία καμπής της, είναι πολύ σημαντικά τόσο στην αναλογιστική επιστήμη (όταν μιλάμε για ανθρώπινους χρόνους ζωής) όσο και στην θεωρία αξιοπιστίας (όταν μιλάμε

για χρόνους καταστροφής ή αντικατάστασης). Η συνάρτηση MRL έχει βρεθεί (σε κλειστό τύπο) για κάποιες σημαντικές κατανομές αξιοπιστίας μετά από την προσθήκη ενός σταθερού κινδύνου. Ωστόσο, για τις πιο ρεαλιστικές και χρήσιμες κατανομές αυτό το πρόβλημα παραμένει άλυτο, όπως είδαμε στις περιπτώσεις των δύο τροποποιήσεων της κατανομής Weibull. Σε αυτές τις περιπτώσεις το μόνο εργαλείο που υπάρχει για την προσέγγιση αυτών των συναρτήσεων είναι οι αριθμητικές μέθοδοι, κάτι που παράγει εξαιρετικά χρήσιμα αποτελέσματα. Ενδιαφέρον έχει η εύρεση σχετικά απλών εκφράσεων για την μέγιστη μετακίνηση της συνάρτησης MRL και των σημείων καμπής της, οι οποίες εκφράσεις θα εξαρτώνται από πόσο πολύ ή λίγο η συνάρτηση έντασης κινδύνου έχει "ανέβει" ή "κατέβει". Επίσης, μπορεί να είναι χρήσιμη η ανάπτυξη εκφράσεων που να αφορούν την απόσταση των σημείων καμπής πριν και μετά την εμφάνιση αυτού του σταθερού κινδύνου. Τα αποτελέσματα αυτά έχουν άμεση εφαρμογή στην αναλογιστική επιστήμη για την κατανόηση της θνησιμότητας στις διάφορες φάσεις της ανθρώπινης ζωής σε περιβάλλοντα με αυξημένη κατα μία σταθερά ένταση κινδύνου (ένταση θνησιμότητας), αλλά και στην θεωρία αξιοπιστίας με έμφαση στις διαδικασίες αντικατάστασης, κάτω από αυξημένη ή μειωμένη ένταση κινδύνου.

Κεφάλαιο 4

Τρόποι εξάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με την ένταση κινδύνου και αποτελέσματα χαρακτηρισμών

Οι χαρακτηρισμοί κατανομών είναι πολύ σημαντικοί στη στατιστική. Συγκεκριμένα, στην θεωρία αξιοπιστίας, συνήθως έχουμε μια τυχαία μεταβλητή X η οποία παριστάνει τον (συνολικό) χρόνο ζωής και κάποιες συναρτήσεις που αντιστοιχούν σε αυτήν. Αυτές οι συναρτήσεις περιγράφουν την γήρανση και χαρακτηρίζουν την τυχαία μεταβλητή X . Ανάμεσα στις προαναφερθείσες συναρτήσεις είναι η συνάρτηση της έντασης κινδύνου και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Ο στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι ο χαρακτηρισμός της τυχαίας μεταβλητής X προσδιορίζοντας τη συνάρτηση κατανομής της.

4.1 Παράσταση της έντασης κινδύνου συναρτήσεως του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής

Σε αυτήν την ενότητα χρησιμοποιούμε συμπεράσματα από τους Ruiz and Navarro [1994] και προσπαθούμε να παραστήσουμε την ένταση κινδύνου συναρτήσεως του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα μελετήσουμε και το αντίστροφο, την παράσταση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής συναρτήσεως της έντασης κινδύνου, το οποίο έχει και περισσότερο ενδιαφέρον.

Λήμμα 4.1.1. Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή ορισμένη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Τότε

$$r(x) = \frac{\mu'(x) + 1}{\mu(x)}. \quad (4.1)$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε από τον ορισμό της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και παίρνουμε την πρώτη της παράγωγο

$$\mu'(x) = \left[\frac{\int_x^\infty S(t) dt}{S(x)} \right]' = \frac{f(x) \int_x^\infty S(t) dt - S(x)S(x)}{[S(x)]^2} = r(x)\mu(x) - 1.$$

Εδώ ολοκληρώνεται και η απόδειξη. □

Στο θεώρημα που ακολουθεί παρατηρούμε ότι η συνάρτηση κατανομής μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται μονοσήμαντα από το γινόμενο των συναρτήσεων της έντασης κινδύνου και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Θεώρημα 4.1.1. Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη μέση τιμή μ . Τότε η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X έστω $F(x)$ ορίζεται μονοσήμαντα από την $\nu(x) = r(x)\mu(x)$, $x \in D$, όπου $D = \{t \in R : F(t) < 1\}$:

$$F(x) = 1 - \exp \left[- \int_{-\infty}^x \frac{\nu(t)}{I(t) + \mu - t} dt \right], \quad (4.2)$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^t \nu(u) du.$$

Απόδειξη. Για κάθε $x, y \in R$ με $y > x$ ισχύει ότι

$$\mu(y) - \mu(x) = \int_{-\infty}^y \mu'(z) dz - \int_{-\infty}^x \mu'(z) dz. \quad (4.3)$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε την (4.1) παίρνουμε

$$r(x) = \frac{\mu'(x) + 1}{\mu(x)} \Leftrightarrow \mu'(x) = r(x)\mu(x) - 1,$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση $\nu(x) = r(x)\mu(x)$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\mu'(x) = \nu(x) - 1.$$

Έτσι η σχέση (4.3) μπορεί να γραφεί

$$\mu(y) - \mu(x) = \int_{-\infty}^y [\nu(z) - 1] dz - \int_{-\infty}^x [\nu(z) - 1] dz$$

ή ισοδύναμα

$$\mu(y) - \mu(x) = \int_x^y \nu(z) dz - (y - x).$$

Παίρνοντας τώρα τα όρια στην παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας ότι το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\mu(x) + x) = \mu$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\mu(y) - \mu(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\int_x^y \nu(z) dz - (y - x) \right] \Leftrightarrow$$

$$\mu(y) = \mu - y + \int_{-\infty}^y \nu(z) dz = \mu - y + I(y).$$

Τέλος, η υπόθεση $\mu(x) = \nu(x)/r(x)$ μας οδηγεί στην

$$\frac{\nu(y)}{r(y)} = \mu - y + I(y) \Leftrightarrow r(y) = \frac{\nu(y)}{\mu - y + I(y)}.$$

Είναι γνωστό ότι $r(x) = f(x)/S(x) = (-\log S(x))'$. Αν χρησιμοποιήσουμε αυτό και ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της τελευταίας στο διάστημα $(-\infty, x)$ καταληγουμε στη σχέση

$$\int_{-\infty}^x (-\log S(y))' dy = \int_{-\infty}^x \frac{\nu(y)}{\mu - y + I(y)} dy.$$

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη αφού στο πρώτο μέλος μένει τελικά $(-\log S(x))$. Βάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω σαν δύναμη στη σταθερά του Euler και ολοκληρώνουμε την απόδειξη. \square

Σημειώνουμε ότι το $-\infty$ που εμφανίζεται στο κάτω άκρο των ολοκληρωμάτων γίνεται 0 όταν μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε χρόνους ζωής όπου το σύνολο $D = R^+ \cup \{0\}$. Οι Ruiz and Navarro [1994] όμως έδειξαν κάτι γενικότερο, το οποίο και παραθέτουμε αυτούσιο.

Παρατήρηση 4.1.1. Όταν η συνάρτηση $\nu(x) = c$ είναι σταθερή, τότε

(α') Όταν $c = 1$ η σχέση (4.2) δίνει την εκθετική κατανομή.

(β') Όταν $c > 1$ η σχέση (4.2) δίνει κατανομές πεπερασμένου εύρους τιμών (Finite Range Distributions).

(γ') Όταν $0 < c < 1$ η σχέση (4.2) δίνει την κατανομή Pareto.

Όταν η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $p_k = P(X = x_k)$, για $k = \alpha, \alpha + 1, \dots, b$, με $(\alpha, b \in Z \cup \{-\infty, +\infty\})$ τότε ισχύει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.1.2. Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή ορισμένη σε κάποιο αριθμήσιμο σύνολο. Τότε

$$r(x) = \frac{\mu(x) - \mu(x-)}{\mu(x)} \quad (4.4)$$

όπου $\mu(x-) = \lim_{t \rightarrow x-} \mu(t) = E[X - x | X \geq x]$.

Θεώρημα 4.1.2. Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή ορισμένη σε κάποιο αριθμήσιμο σύνολο με πεπερασμένη μέση τιμή μ . Τότε η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X ορίζεται μονοσήμαντα από τη συνάρτηση $\nu(x) = r(x)\mu(x)$:

$$F(x_k) = 1 - \prod_{j=a}^k \left[1 - \frac{\nu(x_j)}{\mu - x_j + \sum_{i=a}^j \nu(x_i)} \right]. \quad (4.5)$$

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\mu(x_k-) = \mu(x_{k-1}) + x_{k-1} - x_k. \quad (4.6)$$

Πράγματι, αφού

$$\begin{aligned} \mu(x_k-) &= E[X - x_k | X \geq x_k] = E[X | X \geq x_k] - x_k = \\ &= E[X | X > x_{k-1}] - x_k - x_{k-1} + x_{k-1} = \mu(x_{k-1}) + x_{k-1} - x_k. \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 4.1.2 και την (4.6) έχουμε ότι

$$\nu(x_i) = \mu(x_i) - \mu(x_i-) = \mu(x_i) - \mu(x_{i-1}) - x_{i-1} + x_i. \quad (4.7)$$

Αθροίζουμε και τα δύο μέλη της (4.7) για $i = j, j+1, \dots, k$

$$\sum_{i=j}^k \nu(x_i) = \mu(x_k) - \mu(x_{j-1}) - x_{j-1} + x_k. \quad (4.8)$$

Όταν $j \rightarrow \alpha$ η (4.8) γίνεται

$$\sum_{i=\alpha}^k \nu(x_i) = \mu(x_k) - \lim_{j \rightarrow \alpha} [\mu(x_{j-1}) - x_{j-1}] + x_k, \quad (4.9)$$

και επειδή ισχύει ότι $\lim_{j \rightarrow \alpha} [\mu(x_{j-1}) - x_{j-1}] = \lim_{j \rightarrow \alpha} [\mu(x_j) - x_j] = \mu$ καταλήγουμε στη σχέση

$$\mu(x_k) = \mu - x_k + \sum_{i=\alpha}^k \nu(x_i). \quad (4.10)$$

Επιπλέον,

$$r(x_k) = \frac{S(x_k) - S(x_{k-1})}{S(x_{k-1})} \Leftrightarrow \frac{S(x_k)}{S(x_{k-1})} = 1 + \frac{\mu(x_k) - \mu(x_{k-1})}{\mu(x_k)}.$$

Χρησιμοποιούμε την (4.6) και η παραπάνω γίνεται

$$\frac{S(x_k)}{S(x_{k-1})} = 1 + \frac{\mu(x_k) - \mu(x_{k-1}) - x_{k-1} + x_k}{\mu(x_k)}. \quad (4.11)$$

Εδώ βλέπουμε ότι στο δεξί μέλος της (4.11) ο αριθμητής είναι ίσος με $\nu(x_k)$ λόγω της (4.7) και ο παρονομαστής ίσος με $\mu - x_k + \sum_{i=\alpha}^k \nu(x_i)$ λόγω της (4.10). Επομένως, η σχέση (4.11) γίνεται

$$\frac{S(x_k)}{S(x_{k-1})} = 1 + \frac{\nu(x_k)}{\mu - x_k + \sum_{i=\alpha}^k \nu(x_i)}.$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι το κλάσμα $\frac{S(x_k)}{S(x_{k-1})}$ είναι η δεσμευμένη πιθανότητα αξιοπιστίας και ισχύει $\prod_{j=a}^k \frac{S(x_j)}{S(x_{j-1})} = S(x_k)$. Σε αυτό το σημείο ολοκληρώθηκε η απόδειξη. \square

Παρατήρηση 4.1.2. Όταν η συνάρτηση $\nu(x) = c$ είναι σταθερή,

(α') Για $c = 1$ η σχέση (4.5) δίνει την Γεωμετρική κατανομή.

(β') Για $c > 0$ η σχέση (4.5) δίνει τις κατανομές Waring και αρνητική υπεργεωμετρική.

4.2 Παράσταση της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής σε όρους έντασης κινδύνου

Στην ανάλυση επιβίωσης ή στη θεωρία αξιοπιστίας, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ή το προσδόκιμο ζωής είναι δυο πολύ σημαντικά χαρακτηριστικά ενός μοντέλου. Ενώ η συνάρτηση της έντασης κινδύνου μπορεί να γραφεί σχετικά εύκολα συναρτήσει του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, το αντίστροφο -η έκφραση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής συναρτήσει της έντασης κινδύνου- συνήθως περιλαμβάνει ένα σύνθετο ολοκλήρωμα. Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε πως καταλήγουμε σε απλές εκφράσεις για το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής, εκφράζοντας τον σε όρους έντασης κινδύνου, για συγκεκριμένες κλάσεις κατανομών στις οποίες περιλαμβάνονται αρκετές από τις συνηθισμένες κατανομές. Η ενότητα αυτή αποτελεί μια μελέτη πάνω στα αποτελέσματα των [Gupta and Bradley \[2003\]](#).

Στις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την αναμενόμενη υπολειπόμενη διάρκεια ζωής ενός αντικειμένου ηλικίας x , τότε αυτό που μας ενδιαφέρει είναι μία συνάρτηση του x και η συνάρτηση αυτή ονομάζεται, όπως είδαμε και στην αρχή του Κεφαλαίου 2, μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής. Όπως και παραπάνω, όταν μια τυχαία μεταβλητή X παριστάνει τον χρόνο ζωής ενός αντικειμένου, τότε ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής του είναι $\mu(x) = E(X - x | X > x)$.

Είναι γνωστό ότι η ένταση κινδύνου μπορεί να εκφραστεί εύκολα συναρτήσει του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής βλέπε (4.1). Ωστόσο, η έκφραση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής συναρτήσει της έντασης κινδύνου είναι αρκετά πιο σύνθετο.

4.2.1 Μια γενικευμένη οικογένεια κατανομών που περιλαμβάνει την οικογένεια Pearson

Έστω η οικογένεια κατανομών με διαφορίσιμη συνάρτηση πυκνότητας f

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\kappa - t}{g(t)} - \frac{g'(t)}{g(t)}, \quad (4.12)$$

όπου κ είναι μια σταθερά και η συνάρτηση g ικανοποιεί την διαφορική γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης,

$$g'(t) + \frac{f'(t)}{f(t)}g(t) = \kappa - x. \quad (4.13)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε την g γνωστή συνάρτηση. Τότε η f ορίζεται μονοσήμαντα από την (4.12). Κάνοντας πράξεις στην (4.12) και ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη παίρνουμε

$$\int_x^\infty tf(t)dt = \kappa S(x) + g(x)f(x), \quad x \geq 0$$

Με άλλα λόγια,

$$E(X|X > x) = \mu(x) + x = \kappa + g(x)r(x), \quad x \geq 0 \quad (4.14)$$

ή ισοδύναμα

$$\mu(x) = \kappa - x + g(x)r(x), \quad x \geq 0. \quad (4.15)$$

Εκφράσαμε λοιπόν το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής σε όρους έντασης κινδύνου, μιας δοθείσης συνάρτησης g και μιας σταθεράς κ . Επιλέγοντας κατάλληλα τη συνάρτηση g στη σχέση (4.15), μπορεί εύκολα κανείς να καταλήξει στις περισσότερες γνωστές κατανομές. Το αποτέλεσμα στο (4.15) θα μελετηθεί αναλυτικότερα στη συνέχεια, εντός του κεφαλαίου.

4.2.2 Η οικογένεια Pearson

Επιλέγοντας τη συνάρτηση g να είναι ένα τριώνυμο της μορφής $g(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ με $\alpha_2 \neq -1/2$ καταλήγουμε στην οικογένεια Pearson, ειδι-

κές περιπτώσεις της οποίας είναι η κατανομή Βήτα, η κατανομή Γάμμα και η Κανονική κατανομή. Από την (4.12) παίρνουμε

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\kappa - t}{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2} - \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 t}{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2} = \frac{t + d}{A_0 + A_1 t + A_2 t^2}, \quad (4.16)$$

όπου $A_j = \alpha_j/(1 + 2\alpha_2)$ για $j = 0, 1, 2$ και $d = (\alpha_1 - \kappa)/(1 + 2\alpha_2)$. Για την οικογένεια Pearson η (4.14) παίρνει την ακόλουθη μορφή,

$$E(X|X > x) = \frac{A_1 - d}{1 - 2A_2} + \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2}{1 - 2A_2} r(x). \quad (4.17)$$

Σημειώνουμε ότι στην (4.17) ισχύει $1 - 2A_2 \neq 0$, διότι $A_2 = \alpha_2/(1 + 2\alpha_2)$.

4.2.3 Η κατανομή Βήτα

Επιλέγοντας τη συνάρτηση g να είναι $g(x) = x(1-x)/(\alpha+b)$ καταλήγουμε στην κατανομή Βήτα τύπου 1, με $\alpha, b > 0$ και συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)} t^{\alpha-1} (1-t)^{b-1}, \quad 0 < t < 1.$$

Ισχύει ότι

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{t + (1-\alpha)/(\alpha+b-2)}{t(1-t)/(\alpha+b-2)} = -\frac{t + (1-\alpha)}{t(1-t)}, \quad \alpha + b \neq 2$$

και έτσι δείξαμε ότι η κατανομή ανήκει στην οικογένεια Pearson που δίνεται από την (4.16) με $d = (1-\alpha)/(\alpha+b-2)$, $A_0 = 0$, $A_1 = -A_2 = 1/(\alpha+b-2)$ και $\alpha+b \neq 2$. Επομένως,

$$E(X|X > x) = \kappa + \frac{x(1-x)}{\alpha+b} r(x), \quad 0 < x < 1$$

όπου $\kappa = \alpha/(\alpha+b)$. Αν $\alpha+b=2$, τότε για $0 < \alpha < 2$ έχουμε

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha-1}, \quad 0 < t < 1$$

και $g(x) = x(1-x)/2$, $\kappa = \alpha/2$. Η σχέση (4.14) δίνει

$$E(X|X > x) = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}x(1-x)r(x), \quad 0 < x < 1.$$

Η κατανομή Βήτα τύπου 2 για $c, \alpha, \beta, \gamma > 0$ έχει συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από

$$f(t) = \frac{ct^{\beta-1}}{(\gamma+t)^{\alpha+\beta}}, \quad t > 0.$$

Ισχύει λοιπόν ότι

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{t + (1-\beta)\gamma/(\alpha+1)}{t^2/(\alpha+1) + \gamma t/(\alpha+1)},$$

δηλαδή η κατανομή ανήκει στην οικογένεια Pearson (4.16) με $d = (1-\beta)\gamma/(1+\alpha)$, $A_0 = 0$, $A_1 = \gamma/(1+\alpha)$ και $A_2 = 1/(1+\alpha)$. Έτσι, για $\alpha \neq 1$ ισχύει

$$E(X|X > x) = \kappa + \left(\frac{x^2 + \gamma x}{\alpha - 1}\right)r(x), \quad x > 0$$

όπου $\kappa = \beta\gamma/(\alpha - 1)$ είναι η μέση τιμή της κατανομής.

4.2.4 Η κατανομή Γάμμα

Έστω $B > 0$. Αν επιλέξουμε τη συνάρτηση g να είναι $g(x) = Bx$ για $x > 0$ τότε παίρνουμε την κατανομή Γάμμα. Η σχέση (4.12) δίνει

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{t + B - \kappa}{Bt},$$

έτσι ώστε η κατανομή f να ανήκει στην οικογένεια Pearson (4.16) με $d = B - \kappa$, $A_0 = 0$, $A_1 = B$ και $A_2 = 0$. Πράγματι, για την κατανομή f ισχύει ότι

$$f(t) = \frac{B^{-\kappa/B}}{\Gamma(\kappa/B)} t^{\kappa/B-1} e^{-t/B}, \quad t > 0$$

που είναι η συνάρτηση πυκνότητας μιας κατανομής Γάμμα με μέση τιμή κ και έτσι η συνάρτηση (4.14) παίρνει την μορφή

$$E(X|X > x) = \kappa + Bxr(x).$$

4.2.5 Η κανονική κατανομή

Έστω $\sigma > 0$. Αν επιλέξουμε τη συνάρτηση g να είναι η σταθερή συνάρτηση $g(t) = \sigma^2$ για $-\infty < t < \infty$ τότε παίρνουμε την κανονική κατανομή. Η σχέση (4.12) δίνει

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\kappa - t}{\sigma^2},$$

έτσι ώστε η κατανομή f να ανήκει στην οικογένεια Pearson (4.16) με $d = -\kappa$, $A_0 = \sigma^2$ και $A_1 = A_2 = 0$. Έπεται ότι

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t - \kappa)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

που είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή κ και διακύμανση σ^2 .

Έτσι η συνάρτηση (4.14) παίρνει την μορφή

$$E(X|X > x) = \kappa + \sigma r(x).$$

4.2.6 Η κατανομή Maxwell

Η κατανομή Maxwell με παράμετρο $b > 0$ έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t) = \frac{4}{b^3\sqrt{\pi}} t^2 \exp\left\{-\frac{t^2}{b^2}\right\}.$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{2}{t} - \frac{2t}{b^2},$$

η οποία μπορεί να γραφτεί στην μορφή (4.16) με $\kappa = 0$ και $g(t) = (1 + b^2/t^2)b^2/2$. Έτσι,

$$E(X|X > x) = \frac{(x^2 + b^2)b^2}{2x^2}r(x).$$

4.3 Χαρακτηρισμός κατανομών από σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων $r(x)$ και $\mu(x)$

Στην ενότητα αυτή υπάρχουν τα αποτελέσματα των [Ruiz and Navarro \[1994\]](#). Θα δούμε χαρακτηρισμούς κατανομών μέσω μιας πραγματικής συνάρτησης $g(x)$ κάτω από κάποιες υποθέσεις.

Λήμμα 4.3.1. Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή και για κάθε $x \in R$ ισχύει $F(x) < 1$, $f(x) \neq 0$ και υπάρχει η $f'(x)$. Τότε,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r'(x) - r^2(x)}{r(x)}. \quad (4.18)$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της έντασης κινδύνου έχουμε

$$\begin{aligned} r(x) = \frac{f(x)}{S(x)} &\Rightarrow r'(x) = \left(\frac{f(x)}{S(x)} \right)' \Leftrightarrow \\ r'(x) = \frac{f'(x)S(x) - S'(x)f(x)}{S^2(x)} &= \frac{f'(x)S(x) + f^2(x)}{S^2(x)} = \frac{f'(x)}{S(x)} + r^2(x) \Leftrightarrow \\ r'(x) - r^2(x) &= \frac{f'(x)}{S(x)}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην τελευταία σχέση το $S(x)$ με $f(x)/r(x)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Θεώρημα 4.3.1. Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή σε ένα ανοιχτό διάστημα (α, b) όπου α μπορεί να πάρει την τιμή $-\infty$ και b μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$, με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ και να υπάρχουν οι συναρτήσεις $f'(x)$ και $\mu(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, b)$. Έστω

κ μια σταθερά και έστω $g(x)$ μια πραγματική παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (α, b) και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (g(x)f(x)) = 0 \text{ και } \int_{\alpha}^b g'(x)f(x)dx < \infty,$$

τότε οι ακόλουθες σχέσεις (4.19) και (4.20) είναι ισοδύναμες

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\kappa - x - g'(x)}{g(x)} \quad (4.19)$$

$$\mu(x) = \kappa - x + g(x)r(x). \quad (4.20)$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε πως πάμε από την (4.19) στην (4.20). Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (4.19) με $f(x)g(x)$

$$f'(x)g(x) = \kappa f(x) - xf(x) - f(x)g'(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (\kappa - x)f(x),$$

παρατηρούμε ότι $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = [f(t)g(t)]'$ και ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη στο (x, ∞)

$$\int_x^{\infty} [f(t)g(t)]' dt = \int_x^{\infty} (\kappa - t)f(t)dt = \kappa S(x) - \int_x^{\infty} S(t)dt + xS(x) \Leftrightarrow$$

$$-f(x)g(x) = (\kappa - x - \mu(x))S(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{S(x)}g(x) = -\kappa + x + \mu(x).$$

Αφού εξ ορισμού ισχύει $f(x)/S(x) = r(x)$ αποδείξαμε το (4.19) \Rightarrow (4.20). Τώρα θα αποδείξουμε το αντίστροφο (4.20) \Rightarrow (4.19). Ξεκινάμε από τη σχέση (4.20) και παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη ως προς x και έχουμε

$$\mu'(x) = \kappa - 1 + g(x)'r(x) + g(x)r'(x) \Leftrightarrow \frac{\mu'(x) + 1}{\mu(x)} = \frac{\kappa + g(x)'r(x) + g(x)r'(x)}{\mu(x)}.$$

Επειδή όμως $(\mu'(x) + 1)/\mu(x) = r(x)$ και $\mu(x) = \kappa - x + g(x)r(x)$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$r(x) = \frac{g'(x)r(x) + g(x)r'(x)}{\kappa - x + g(x)r(x)} \Rightarrow$$

$$\kappa r(x) - xr(x) + g(x)r^2(x) = g'(x)r(x) + g(x)r'(x) \Leftrightarrow$$

$$g(x)r^2(x) + (\kappa - x - g'(x))r(x) - g(x)r'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x) \left[\frac{r^2(x) - r'(x)}{r(x)} \right] = x - \kappa + g'(x).$$

Λόγω της (4.18) ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

Παρατήρηση 4.3.1. Βλέπε Ruiz and Navarro [1994]

1. Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} (g(x)r(x)) = 0$ τότε $\kappa = \mu$ και ισχύουν τα ακόλουθα.

(α') Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.2.4, αν επιλέξουμε τη συνάρτηση $g(x)$ να είναι $g(x) = Bx$ παίρνουμε τα αποτελέσματα για κατανομή Γάμμα και για την εκθετική κατανομή ως ειδική περίπτωση.

(β') Αν επιλέξουμε $g(x) = x(1-x)/(\alpha+b)$ παίρνουμε την κατανομή Βήτα τύπου 1, ενώ για $g(x) = x(1-x)/2$ παίρνουμε την κατανομή Βήτα τύπου 2.

(γ') Αν επιλέξουμε $g(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ με $\alpha_2 \neq -1/2$ παίρνουμε τα αποτελέσματα για την οικογένεια κατανομών του Pearson.

2. Για $\kappa = 0$ το Θεώρημα 4.3.1 αποδεικνύει ότι η συνάρτηση $(\mu(x) + x)/r(x)$ χαρακτηρίζει μονοσήμαντα τη συνάρτηση κατανομής F .

Λήμμα 4.3.2. Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή ορισμένη σε ένα αριθμήσιμο σύνολο. Τότε,

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{r(x_{k+1})}{r(x_k)} (1 - r(x_k)). \quad (4.21)$$

Θεώρημα 4.3.2. Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή ορισμένη σε ένα αριθμήσιμο σύνολο με $\mu(x) < \infty$. Έστω $g : D \rightarrow R$ μια πραγματική συνάρτηση με $g(x_b) = x_b - c$, για $b < +\infty$ ή ισοδύναμα $\lim_{k \rightarrow b} [g(x_k)p_k] = 0$. Τότε οι ακόλουθες σχέσεις (4.22) και (4.23) είναι ισοδύναμες.

$$\frac{p_{k+1} - p_k}{p_k} = -\frac{x_k - c + g(x_{k+1}) - g(x_k)}{g(x_{k+1})} \quad (4.22)$$

$$\mu(x_k-) = c - x_k + g(x_k)r(x_k). \quad (4.23)$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε πως πάμε από την (4.19) στην (4.20). Ξεκινάμε από τη σχέση (4.19)

$$\frac{p_{k+1} - p_k}{p_k} = -\frac{x_k - c + g(x_{k+1}) - g(x_k)}{g(x_{k+1})}.$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω με $p_k g(x_{k+1})$ και παίρνουμε

$$g(x_{k+1})p_{k+1} - g(x_{k+1})p_k = -x_k p_k + c p_k - g(x_{k+1})p_k + g(x_k)p_k \Leftrightarrow$$

$$g(x_{k+1})p_{k+1} - g(x_k)p_k = (c - x_k)p_k.$$

Αθροίζω τις παραπάνω σχέσεις για $k = j, j+1, \dots, b$

$$\sum_{k=j}^b g(x_{k+1})p_{k+1} - \sum_{k=j}^b g(x_k)p_k = \sum_{k=j}^b (c - x_k)p_k \Leftrightarrow$$

$$g(x_{b+1})p_{b+1} - g(x_j)p_j = c \sum_{k=j}^b p_k - \sum_{k=j}^b x_k p_k.$$

Χρησιμοποιούμε την $\mu(x_i-) + x_i = \left(\sum_{k=j}^b x_k p_k \right) / S(x_i-)$ και επιπλέον $p_{b+1} = 0$ και η παραπάνω γίνεται

$$-g(x_i)p_i = cS(x_i-) - [\mu(x_i-) + x_i]S(x_i-) \Leftrightarrow$$

$$\mu(x_i-) = c - x_i + g(x_i) \frac{p_i}{S(x_i-)}.$$

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του (4.19) \Rightarrow (4.20) διότι $p_i/S(x_i-) = r(x_i)$.

Τώρα θα δείξουμε πως πάμε από την (4.20) στην (4.19). Ξεκινάμε από τη σχέση (4.20)

$$\mu(x_{k+1}-) - \mu(x_k-) = [c - x_{k+1} + g(x_{k+1})r(x_{k+1})] - [c - x_k + g(x_k)r(x_k)] \Leftrightarrow$$

$$\mu(x_{k+1}-) - \mu(x_k-) = x_k - x_{k+1} + g(x_{k+1})r(x_{k+1}) - g(x_k)r(x_k).$$

Μέσω της σχέσης (4.6) πάμε στην

$$\mu(x_{k+1}) - \mu(x_k-) = g(x_{k+1})r(x_{k+1}) - g(x_k)r(x_k).$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $\mu(x_k)$ και χρησιμοποιούμε την (4.4)

$$r(x_k)\mu(x_k) = g(x_{k+1})r(x_{k+1}) - g(x_k)r(x_k) \Leftrightarrow$$

$$r(x_k)[\mu(x_k) + g(x_k)] = g(x_{k+1})r(x_{k+1}).$$

Εφαρμόζουμε ξανά τη σχέση (4.6)

$$r(x_k)[\mu(x_{k+1}-) + x_{k+1} - x_k + g(x_k)] = g(x_{k+1})r(x_{k+1})$$

και μέσω της υπόθεσης (4.20) καταλήγουμε ότι

$$[c + g(x_{k+1})r(x_{k+1}) - x_k + g(x_k)]r(x_k) = g(x_{k+1})r(x_{k+1})$$

και μετά από πράξεις η παραπάνω γίνεται

$$\frac{c - x_k + g(x_k)}{g(x_{k+1})} = \frac{r(x_{k+1}) - r(x_{k+1})r(x_k)}{r(x_k)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{c - x_k + g(x_k)}{g(x_{k+1})} = \frac{r(x_{k+1})}{r(x_k)}[1 - r(x_k)].$$

Εδώ τελειώνει η απόδειξη του (4.20) \Rightarrow (4.19) λόγω του Λήμματος 4.21.

□

4.4 Εφαρμογές

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφέρουμε κλειστούς τύπους για την πραγματική συνάρτηση $g(x)$ που περιγράψαμε παραπάνω. Μέχρι εδώ είδαμε ότι όταν η συνάρτηση $g(x)$ είναι ένα τριώνυμο, τότε η κατανομή $F(x)$ ανήκει στην οικογένεια του Pearson. Εδώ θα δούμε παραδείγματα γνωστών κατανομών εντός και εκτός της οικογένειας του Pearson όσον αφορά την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης $g(x)$ η οποία είναι το κλειδί στον προσδιορισμό του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής

συναρτήσει της έντασης κινδύνου. Μαζί με τις εκφράσεις της συνάρτησης $g(x)$ θα δούμε με την βοήθεια διαγραμμάτων τη συνάρτηση της έντασης κινδύνου σε αντιπαραβολή με τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, κάτι που θα μας δώσει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τις συναρτήσεις αυτές.

4.4.1 Συνεχείς κατανομές

Γάμμα

Έστω η συνάρτηση κατανομής της Γάμμα με παραμέτρους $a, b > 0$ και μέση τιμή $\mu = a/b$ είναι

$$F(x) = \frac{\gamma(a, bx)}{\Gamma(a)}, \quad x \geq 0,$$

όπου

$$\gamma(s, t) = \int_0^t u^{s-1} e^{-u} du,$$

είναι η κάτω μη-πλήρης συνάρτηση Γάμμα. Η άνω μη-πλήρης συνάρτηση Γάμμα είναι

$$\Gamma(s, t) = \int_t^\infty u^{s-1} e^{-u} du$$

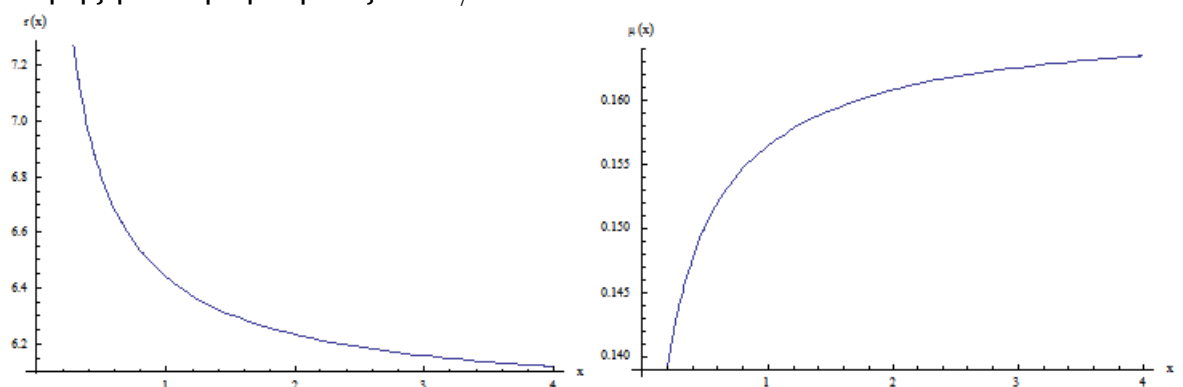
και η μη-πλήρης συνάρτηση Γάμμα είναι

$$\Gamma(s) = \lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(s, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(s, t) = \int_0^\infty u^{s-1} e^{-u} du.$$

Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.2.4, για διαφορετική παραμετροποίηση της κατανομής Γάμμα, τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τη σχέση (4.20) είναι

$$k = \mu, \quad g(x) = x/a.$$

Ας δούμε τώρα γραφικά τις συναρτήσεις $r(x)$ και $\mu(x)$ αυτής της κατανομής με παραμέτρους $a = 1/2$ και $b = 6$.



Περικεκομμένη Κανονική

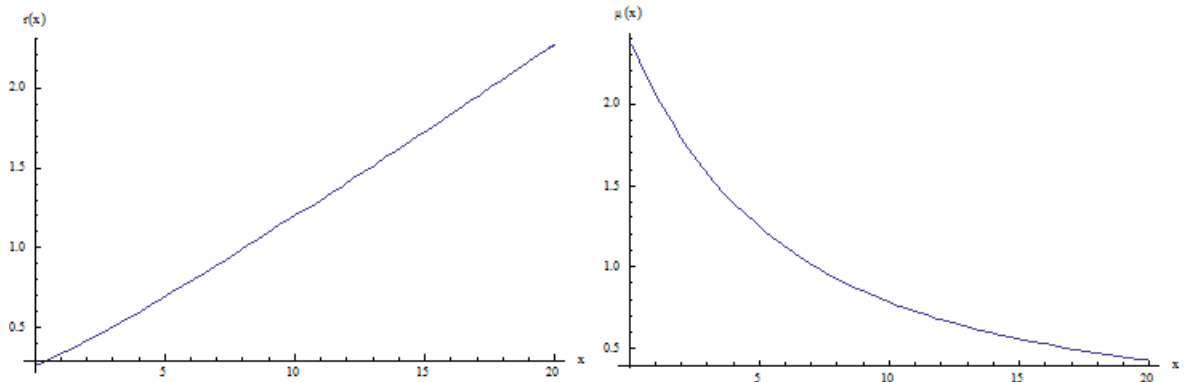
Η συνάρτηση αξιοπιστίας της Περικεκομμένης Κανονικής είναι

$$S(x) = 2\Phi(x/\sigma), \quad x \geq 0$$

και τα αποτελέσματα που παίρνουμε από την (4.20) είναι

$$k = 0, \quad g(x) = \sigma^2.$$

Ας δούμε τώρα γραφικά τις συναρτήσεις $r(x)$ και $\mu(x)$ αυτής της κατανομής με παραμέτρους $\sigma = 3$.



Weibull

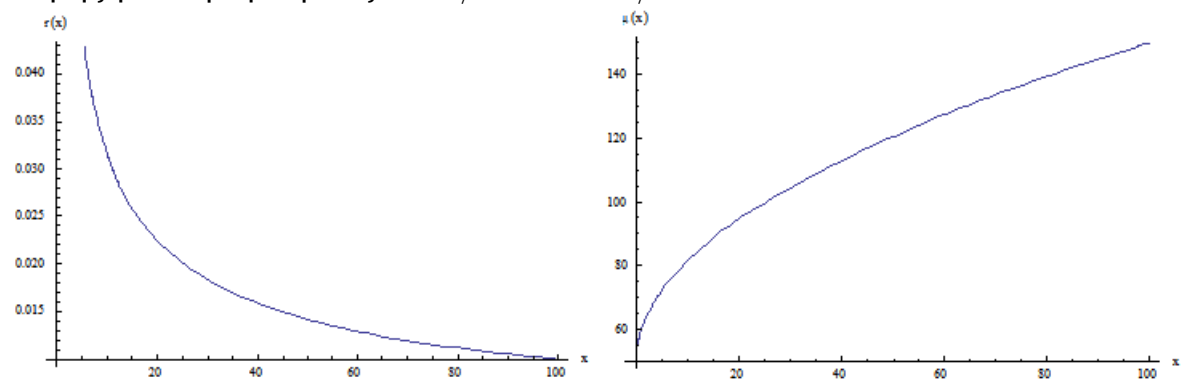
Έστω η συνάρτηση αξιοπιστίας της Weibull με παραμέτρους $a, c > 0$

$$S(x) = \exp\{-ax^c\}, \quad x \geq 0.$$

Τότε λόγω της σχέσης (4.20) ισχύει

$$k = 0, \quad g(x) = \frac{[\Gamma(1 + c^{-1}) + \gamma(1 + c^{-1}, x)] \exp\{(ax)^c\}}{ca^2(ax)^{c-1}}.$$

Ας δούμε τώρα γραφικά τις συναρτήσεις $r(x)$ και $\mu(x)$ αυτής της κατανομής με παραμέτρους $a = 1/5$ και $c = 1/2$.



Pareto

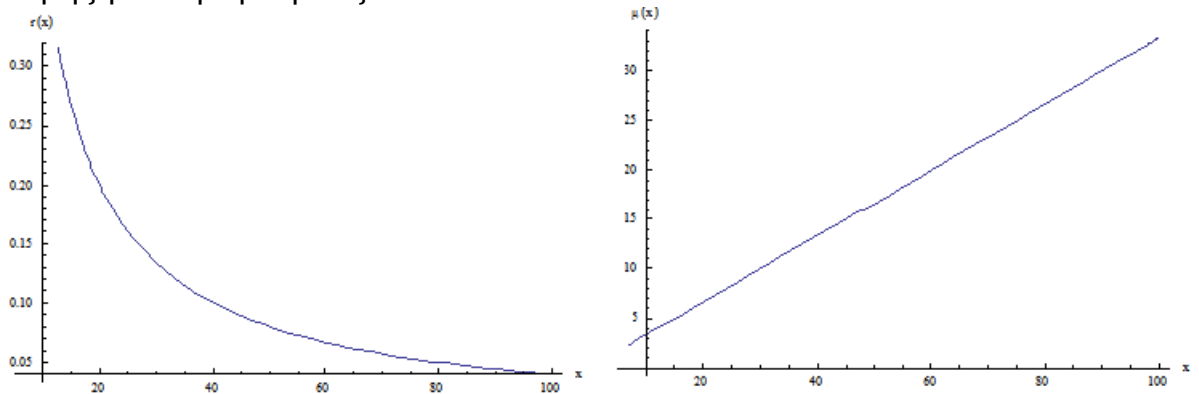
Για την κατανομή Pareto τύπου 1 με παραμέτρους $a > 0$ και $c > 1$ έχει συνάρτηση αξιοπιστίας

$$S(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^c, \quad x \in (a, \infty)$$

και τα αποτελέσματα της σχέσης (4.20) είναι

$$k = \mu, \quad g(x) = (x - a)/(c - 1).$$

Ας δούμε τώρα γραφικά τις συναρτήσεις $r(x)$ και $\mu(x)$ αυτής της κατανομής με παραμέτρους $a = 7$ και $c = 4$.



Laplace

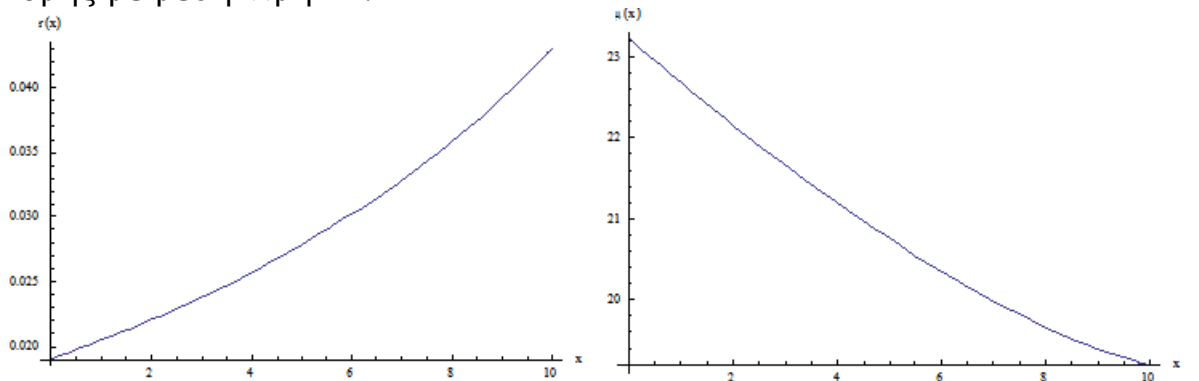
Η κατανομή Laplace έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{2} \exp\{-a|x|\}, \quad x \in R$$

και τα αποτελέσματα που παίρνουμε από την (4.20) είναι

$$k = 0, \quad g(x) = (a|x| + 1)/a^2.$$

Ας δούμε τώρα γραφικά τις συναρτήσεις $r(x)$ και $\mu(x)$ αυτής της κατανομής με μέση τιμή 12.



Δυναμοκατανομή

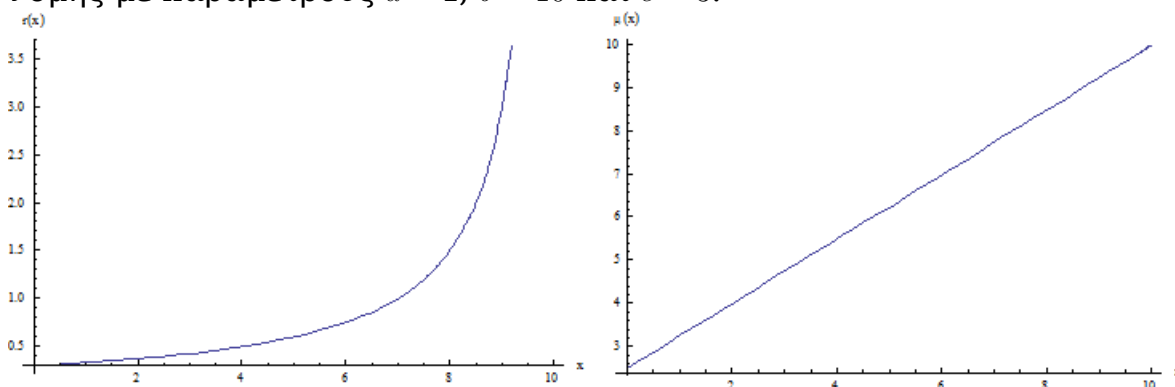
Έστω η συνάρτηση αξιοπιστίας της δυναμοκατανομής με παραμέτρους $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$S(x) = \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^c, \quad x \in (a, b).$$

Τότε λόγω της σχέσης (4.20) ισχύει

$$k = 0, \quad g(x) = \frac{-cx^2 + b(c-1)x + b^2}{c(c+1)}.$$

Ας δούμε τώρα γραφικά τις συναρτήσεις $r(x)$ και $\mu(x)$ αυτής της κατανομής με παραμέτρους $a = 2$, $b = 10$ και $c = 3$.



Ομοιόμορφη

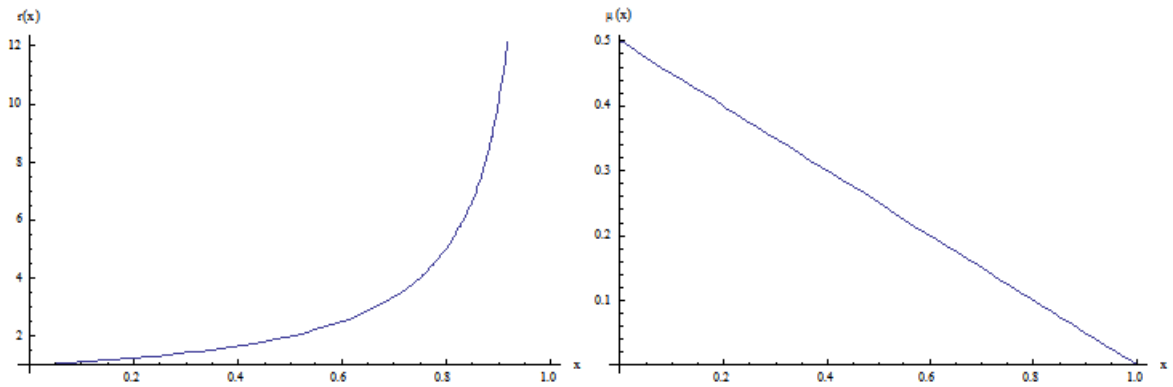
Έστω η συνάρτηση αξιοπιστίας της ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα (a, b) με $a < b$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Σαν ειδική περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι a και b είναι μη-αρνητικοί αν μελετάμε διάρκεια ζωής.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in (a, b).$$

Τότε λόγω της σχέσης (4.20) ισχύει

$$k = 0, \quad g(x) = \frac{1}{2}(b^2 - x^2).$$

Ας δούμε τώρα γραφικά τις συναρτήσεις $r(x)$ και $\mu(x)$ αυτής της κατανομής στο διάστημα $(0, 1)$.



4.4.2 Διακριτές κατανομές

Γεωμετρική

Η συνάρτηση πιθανότητας της Γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο $0 < p < 1$ είναι

$$p_k = p(1 - p)^k, k = 0, 1, \dots$$

Εδώ η σχέση (4.23) μας δίνει τα εξής

$$c = 0, \quad g(k) = (pk + (1 - p))/p^2.$$

Αρνητική διωνυμική

Η αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $0 < p < 1$ και $n \in \mathbb{Z}^+$ έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$p_k = \binom{n + k - 1}{k} p^n (1 - p)^k, k = 0, 1, \dots$$

Εδώ η σχέση (4.23) μας δίνει τα εξής

$$c = \mu, \quad g(k) = k/p.$$

Διωνυμική

Η διωνυμική κατανομή με παράμετρο $0 < p < 1$ έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$$

και η σχέση (4.23) μας δίνει

$$c = \mu, \quad g(k) = (1 - p)k.$$

Poisson

Η κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$ έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

και η σχέση (4.23) μας δίνει

$$c = \mu, \quad g(k) = k.$$

Γενικευμένη Γεωμετρική

Η συνάρτηση πιθανότητας της Γενικευμένης Γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο $0 < p < 1$ είναι

$$p_k = p(1-p)^k, \quad k = az + b, \quad z = 0, 1, \dots,$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ σταθερές και η σχέση (4.23) μας δίνει

$$c = 0, \quad g(k) = (pk(1-p)a)/p^2.$$

Αρνητική υπεργεωμετρική

Η συνάρτηση πιθανότητας της Γενικευμένης Γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο $0 < p < 1$ είναι

$$p_k = \frac{n!a\Gamma(n-k+a)}{(n-k)!\Gamma(n+a+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

και η σχέση (4.23) μας δίνει

$$c = 0, \quad g(k) = (n+ak)(n+a-k)/[a(a+1)].$$

Διακριτή Ομοιόμορφη

Η συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής ομοιόμορφης είναι

$$p_{x_k} = \frac{1}{n}, \quad x_k = ak + b, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

και η σχέση (4.23) μας δίνει

$$c = 0, \quad g(k) = \frac{1}{2}(n-k+1)(x_k + x_n).$$

Κατανομή	$g(x)$	k
Γάμμα	x/a	μ
Περίκεκομμένη Κανονική	σ^2	0
Weibull	$\frac{[\Gamma(1+c^{-1})+\gamma(1+c^{-1},t)]\exp\{(ax)^c\}}{ca^2(ax)^{c-1}}$	0
Pareto	$(x-a)/(c-1)$	μ
Laplace	$(a x +1)/a^2$	0
Δυναμοκατανομή	$\frac{-cx^2+b(c-1)x+b^2}{c(c+1)}$	0
Ομοιόμορφη	$\frac{1}{2}(b^2-x^2)$	0

Πίνακας 4.1: Συνοπτικός πίνακας για τις συνεχείς κατανομές

Κατανομή	$g(k)$	c
Γεωμετρική	$(pk + (1-p))/p^2$	0
Αρνητική Διωνυμική	k/p	0
Διωνυμική	$(1-p)k$	μ
Poisson	k	μ
Γενικευμένη Γεωμετρική	$(pk(1-p)a)/p^2$	0
Αρνητική Υπεργεωμετρική	$(n+ak)(n+a-k)/[a(a+1)]$	0
Διακριτή Ομοιόμορφη	$\frac{1}{2}(n-k+1)(x_k+x_n)$	0

Πίνακας 4.2: Συνοπτικός πίνακας για τις διακριτές κατανομές

4.5 Συμπεράσματα

Αρχικά στην παράγραφο 4.1 είδαμε κάποιες σχέσεις μέσω των οποίων η ένταση κινδύνου εκφράζεται συναρτήσει του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και της πρώτης του παραγώγου. Επιπλέον, δείξαμε ότι η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής που παριστάνει τον χρόνο ζωής ενός αντικειμένου, χαρακτηρίζεται μονοσήμαντα από τη συνάρτηση $\nu(x)$. Αυτή η ενότητα αφορά γνωστά αποτελέσματα των Ruiz and Navarro [1994].

Στη συνέχεια, στην παράγραφο 4.2 μελετάμε το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής συναρτήσει της έντασης κινδύνου. Αρχικά ορίζουμε μια γενικευμένη οικογένεια κατανομών η οποία περιλαμβάνει και την οικογένεια κατανομών του Pearson. Στην συνέχεια βλέπουμε μερικά παραδείγματα κατανομών που ανήκουν σε αυτήν την οικογένεια, βλέ-

πε [Gupta and Bradley \[2003\]](#).

Η παράγραφος 4.3 περιέχει την προσέγγιση των [Ruiz and Navarro \[1994\]](#) όσον αφορά την παράσταση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής συναρτήσει της έντασης κινδύνου. Για τον λόγο αυτό, προσδιορίζονται οι πραγματικές συναρτήσεις $g(x)$ για κάποιες ευρέως γνωστές κατανομές. Αυτές οι συναρτήσεις είναι δύσκολο να βρεθούν σε αρκετές περιπτώσεις, σχεδόν όσο δύσκολος είναι ο υπολογισμός του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Όταν όμως υπάρχουν κλειστοί τύποι για τις συναρτήσεις $g(x)$, τότε εκτός από την ευκολία που μας παρέχουν στον υπολογισμό της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, μας δίνουν και σημαντική πληροφορία για τον τρόπο που μεταβάλλεται η μια συνάρτηση σε σχέση με την άλλη.

Κεφάλαιο 5

Χαρακτηρισμοί συνεχών κατανομών από ιδιότητες της δεσμευμένης συνάρτησης διασποράς

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την συνάρτηση της διασποράς του υπολειπόμενου χρόνου ζωής και τις ιδιότητές της. Όπως είδαμε μέχρι τώρα, σε μια θετική συνεχής τυχαία μεταβλητή αντιστοιχούν η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, η συνάρτηση αξιοπιστίας $S(x)$, η συνάρτηση της έντασης κινδύνου $r(x)$ και η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $\mu(x)$. Εδώ θα μελετήσουμε ακόμα μια συνάρτηση που χαρακτηρίζει την τυχαία μεταβλητή X η οποία ονομάζεται διασπορά υπολειπόμενου χρόνου ζωής (VRL-Variance Residual Life).

5.1 Εισαγωγή

Σε αναλογία με την συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής ορίζουμε την συνάρτηση της διασποράς του υπολειπόμενου χρόνου ζωής ως εξής

$$V(X - x|X > x) = V(X > x) = E(X^2|X > x) - E^2(X|X > x),$$

η οποία περιγράφεται αναλυτικά από τον [Launer \[1984\]](#) ο οποίος κατατάσσει τις κατανομές βάση της μονοτονίας της συνάρτησης διασπο-

ράς του υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Σχέσεις αυτής της συνάρτησης με την συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, συνθήκες κάτω από τις οποίες υφίστανται μονότονες κλάσεις VRL έχουν μελετηθεί από τους [Gupta, Kirmani, and Launer \[1987\]](#). Χαρακτηρισμοί συγκεκριμένων κατανομών ζωής από σχέσεις μεταξύ των VRL και MRL έχει μελετηθεί από τους [Hitcha and Nair \[1989\]](#) και [Mukherjee and Roy \[1986\]](#) ενώ οι [Gupta and Kirmani \[2000\]](#) και [Gupta and Kirmani \[2004\]](#) παρουσιάζουν ιδιότητες της διασποράς του υπολειπόμενου χρόνου ζωής μέσω ενός συντελεστή υπολειπόμενου χρόνου ζωής και προσδιορίζουν τις υποθέσεις κάτω από τις οποίες η συνάρτηση VRL χαρακτηρίζει την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X .

Αυτό που δεν έγινε από τους παραπάνω είναι μια γενίκευση αυτών των αποτελεσμάτων με τον σχηματισμό μιας ταυτότητας που να συνδέει τις συναρτήσεις VRL και MRL για μια κλάση συνεχών κατανομών πιθανότητας. Για μια πραγματική συνάρτηση $h(X)$ της τυχαίας μεταβλητής X , η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{q'(x)}{q(x)} + \frac{\mu_h - h(x)}{\sigma_h q(x)}, \quad (5.1)$$

όπου μ_h και σ_h είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής $h(X)$ αν και μόνο αν

$$m_h(x) = E(h(X)|X > x) = \mu_h + \sigma_h r(x)q(x) \quad (5.2)$$

βλέπε [Nair and Sudheesh \[2006a\]](#).

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη (5.2) για να βρούμε σχέσεις μεταξύ της $V(h(X)|X > x)$ και της $E(h(X)|X > x)$ θα οδηγηθούμε στον χαρακτηρισμό της $f(x)$ σε όρους (5.1). Τα πλεονεκτήματα από την χρήση αυτής της μεθόδου είναι: (i) Η σύνδεση των διάφορων χαρακτηρισμών κατανομών από σχέσεις των δεσμευμένων μέσων τιμών και των εντάσεων κινδύνου. (ii) Μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα κάτω φράγμα για διασπορά του υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Η μελέτη του χρόνου ζωής ενός συστήματος μετά την πάροδο συγκεκριμένου χρόνου είναι πολύ σημαντικό στην θεωρία αξιοπιστίας, και σε αυτήν την περίπτωση, οι δεσμευμένες διασπορές έχουν ρόλο των κλασικών διασπορών σε

άλλα στατιστικά μοντέλα. (iii) Ενώ τα αποτελεσματα από το (i) βοηθάνε στον προσδιορισμό της κατάλληλης κατανομής για τα δεδομένα μέσω της χαρακτηριστικής ιδιότητας, το (ii) περιέχει την κατασκευή αμερόληπτων εκτιμητών για το κάτω φράγμα της διασποράς του υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα καταλήξουμε σε μια έκφραση για την συνδιασπορά μιας απόλυτα συνεχής συνάρτησης και της $h(X)$ δοθέντος ότι $X > x$. Πολλά αποτελέσματα στην βιβλιογραφία αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των αποτελεσμάτων αυτού του κεφαλαίου, τα οποία με την σειρά τους παράγουν χαρακτηριστικές ιδιότητες από οικογένειες κατανομών αλλά και μεμονομένα μοντέλα. Το κάτω φράγμα της δεσμευμένης διασποράς συγκρίνεται με το φράγμα που παράγει η ανισότητα Cramer-Rao και σχολιάζονται τα αποτελέσματα.

5.2 Διασπορά υπολειπόμενου χρόνου ζωής

Έστω $h(X)$ μια πραγματική, μή-σταθερή συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής X ορισμένης στο $(0, \infty)$ με απόλυτα συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)$ έτσι ώστε $E(h^2(X)) < \infty$. Ορίζουμε την συνάρτηση $q(x)$ σαν μια θετική Borrel-μετρήσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την συνθήκη

$$\sigma_h q(x) f(x) = \int_x^\infty (h(t) - \mu_h) f(t) dt \quad (5.3)$$

όπου μ_h και σ_h είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της $h(X)$, βλέπε [Nair and Sudheesh \[2010\]](#).

Ορίζοντας τώρα μια κλάση A απόλυτα συνεχών, μή-σταθερών συναρτήσεων $c(x)$ με παραγώγους $c'(x)$ ορισμένες πάνω στο σύνολο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X , έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.1. Για κάθε συνάρτηση $c(x)$ στο σύνολο A και $x > 0$ η οποία ικανοποιεί την $E(g(X)|c(X)) < \infty$, ισχύει

$$Cov(c(X), h(X)|X > x) = \sigma_h E(c'(X)g(X)|X > x) + (\mu_h - m_h(x))(a(x) - c(x)), \quad (5.4)$$

όπου $a(x) = E(c(X)|X > x)$, κάτω από την υπόθεση της (5.2). Αντίστρο-

φα, αν ικανοποιείται η (5.4) για όλα τα $x > 0$ και υπάρχουν $c(x) \in A$ με $c'(x) \neq 0$ για όλα τα x , τότε ισχύει η (5.2).

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το ευθύ, θεωρούμε

$$\begin{aligned}
 & E[c(X)(h(X) - \mu_h)|X > x] = \\
 & = \left[S(x) \right]^{-1} \left\{ \int_x^\infty [c(t) - c(x)][h(t) - \mu_h]f(t)dt + c(x) \int_x^\infty [h(t) - \mu_h]f(t)dt \right\} \\
 & = \left[S(x) \right]^{-1} \int_x^\infty \left(\int_x^t c'(u)du \right) [h(t) - \mu_h]f(t)dt + c(x)E[(h(X) - \mu_h)|X > x].
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης στον πρώτο όρο στα δεξιά της σχέσης (5.5), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 & \left[S(x) \right]^{-1} \int_x^\infty c'(u) \left(\int_u^\infty [h(t) - \mu_h]f(t)dt \right) du \\
 & = \left[S(x) \right]^{-1} \int_x^\infty c'(u) \left(\int_0^u [\mu_h - h(t)]f(t)dt \right) du \\
 & = \left[S(x) \right]^{-1} \int_x^\infty c'(u)\sigma_h q(u)f(u)du,
 \end{aligned}$$

με την χρήση της (5.3). Έτσι, η (5.5) γίνεται

$$E[c(X)(h(X) - \mu_h)|X > x] = \sigma_h E[c'(X)q(X)|X > x] + c(x)(m_h(x) - \mu_h)$$

ή

$$E[c(X)h(X)|X > x] = \sigma_h E[c'(X)q(X)|X > x] + c(x)(m_h(x) - \mu_h) + \mu_h a(x)$$

το οποίο οδηγεί στο (5.2).

Αντίστροφα τώρα έχουμε

$$E[(c(X) - c(x))(h(X) - \mu_h)|X > x] = \sigma_h E[c'(X)q(X)|X > x].$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με

$$\int_x^\infty c'(u) \left(\int_u^\infty [h(t) - \mu_h] f(t) dt \right) du = \sigma_h \int_x^\infty c'(u) q(u) f(u) du.$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς x ,

$$-c'(x) \left(\int_x^\infty [h(t) - \mu_h] f(t) dt \right) = -\sigma_h c'(x) q(x) f(x).$$

Αφού ισχύει ότι $c'(x) \neq 0$, η τελευταία μας δίνει την (5.3) η οποία είναι ισοδύναμη με την (5.2). Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Πόρισμα 5.2.1. Αν ισχύει η (5.2) και επιπλέον η $h(X) \in A$ ικανοποιεί την $E[q(X)|h'(X)] < \infty$, τότε

$$V(h(X)|X > x) = \sigma_h E[h'(X)q(X)|X > x] + (\mu_h - m_h(x))(m_h(x) - h(x)). \quad (5.6)$$

Επιπλέον, αν υπάρχει $h(x)$ για την οποία $h'(x) \neq 0$ για όλα τα $x > 0$ που ικανοποιούν την (5.6), τότε ισχύει η (5.2). Η απόδειξη έπεται παίρνοντας $c(X) = h(X)$ στην (5.4).

Παρατήρηση 5.2.1. Βλέπουμε από το Πόρισμα 5.2.1 ότι οι συνθήκες (5.2) και (5.6) είναι ισοδύναμες, με την τελευταία να χαρακτηρίζει την κατανομή. Η σχέση (5.1) μπορεί να γραφεί

$$f(x) = \left[q(x) \right]^{-1} \exp \left[\int_0^x \frac{(\mu_h - h(t))}{\sigma_h q(t)} dt \right]. \quad (5.7)$$

Έτσι, για δεδομένη συνάρτηση $q(x)$ που ικανοποιεί την (5.2), η (5.6) χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την $f(x)$ μέσω της (5.7). Οι χαρακτηρισμοί κατανομών μέσω σχέσεων δεσμευμένων διασπορών και της έντασης κινδύνου επεκτείνουν τα γνωστά αποτελέσματα χαρακτηρισμών μέσω σχέσεων δεσμευμένων διασπορών και δεσμευμένων μεσων τιμών.

Ένα επιπλέον στοιχείο του Θεωρήματος 5.2.1 είναι ότι για τους χαρακτηρισμούς κατανομών που μέχρι τώρα έχουν γίνει ξεχωριστά για κάθε κατανομή ή οικογένεια κατανομών, είναι ότι εννοποιεί τους χαρακτηρισμούς αυτούς.

Παρατήρηση 5.2.2. Nair and Sudheesh [2010]

- Όταν $h(X) = X$, προκύπτουν οι χαρακτηρισμοί κατανομών μέσω σχέσεων μεταξύ της συνάρτησης διασποράς υπολειπόμενου χρόνου ζωής και της συνάρτησης υπολειπόμενου χρόνου ζωής $\mu(x)$.
- Στα παραπάνω αποτελέσματα, η συνάρτηση $q(x)$ για συγκεκριμένη επιλογή της $h(X)$ είναι μοναδική και γι αυτό χαρακτηρίζει την κατανομή.
- Αποδεικνύεται ότι μια απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση κατανομής της μορφής

$$F(x) = 1 - \exp(-h(x)/k), \quad a \leq X < c, k > 0 \quad (5.8)$$

όπου η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση από το $[a, c)$ στο $(0, \infty)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη αν και μόνο αν $V(h(X)|X > x) = k^2$, για όλα τα x . Στην παρούσα προσέγγιση από την σχέση (5.8) παίρνουμε

$$m_h(x) = h(x) + k, \quad k(x) = \frac{h'(x)}{k} \text{ και } \mu_h = E(h(X)) = k,$$

έτσι από τις (5.2) και (5.6)

$$V(h(X)|X > x) = km_h(x) + (\mu_h - m_h(x))(m_h(x) - h(x)). \quad (5.9)$$

Αν θεωρήσουμε ότι ισχύει η (5.8) και αντικαταστήσουμε τα $m_h(x)$, μ_h και $h(x)$ στο δεξί μέλος της σχέσης (5.9) παίρνουμε

$$V(h(X)|X > x) = k(h(x) + k) + (k - h(x) - k)(h(x) + k - h(x)) = k^2$$

Αντίστροφα, αν η δεσμευμένη διασπορά είναι $V(h(X)|X > x) = k^2$, από την (5.9) για $x \rightarrow 0$ παίρνουμε $\mu_h = k$. Αντικαθιστούμε το μ_h με k στο δεξί μέλος της (5.9) και εφαρμόζουμε την υπόθεση $V(h(X)|X > x) = k^2$. Τότε

$$km_h(x) + (k - m_h(x))(m_h(x) - h(x)) = k^2$$

$$k(\mu_h(x) - k) - (m_h(x) - k)(m_h(x) - h(x)) = 0$$

$$(m_h(x) - k)(m_h(x) - k - h(x)) = 0,$$

παίρνουμε ρίζες για την συνάρτηση $\mu_h(x)$ τις $m_h(x) = k$ ή $k + h(x)$. Η πρώτη είναι μή-αποδεκτή και η δεύτερη οδηγεί στην (5.8). Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη. Βλέπε [Dallas \[1981\]](#).

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα αποτελέσματα που αφορούν την εκθετική οικογένεια κατανομών, μια γνωστή και μεγάλη οικογένεια κατανομών με την έννοια ότι περιλαμβάνει πολλές από τις γνωστές κατανομές.

Παρατήρηση 5.2.3. Η τυχαία μεταβλητή X ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών

$$f(x; \theta) = \exp[P(x)Q(\theta) + T(x) + Z(\theta)], \quad (5.10)$$

με $P(x)$ και $T(x)$ να είναι πραγματικές μετρήσιμες συναρτήσεις και $Q(\theta)$ και $Z(\theta)$ πραγματικές συναρτήσεις με παραγώγους που δεν απειρίζονται πουθενά, αν και μόνο αν

$$V(P(X)|X > x) = \left[Q'(\theta) \right]^{-1} \frac{\partial m_h(x)}{\partial \theta}. \quad (5.11)$$

Για να το αποδείξουμε το ευθύ, αρχικά παρατηρούμε (βλέπε [Nair and Sudheesh \[2006b\]](#)) ότι για την εκθετική οικογένεια κατανομών (5.10),

$$m_h(x) = \mu_h + \left[Q'(\theta) \right]^{-1} \frac{\partial \log S(x)}{\partial \theta}$$

όταν $h(X) = P(X)$, έτσι

$$\sigma_h q(x) = \left[f(x) Q'(\theta) \right]^{-1} \frac{\partial S(x)}{\partial \theta}.$$

Τώρα, θεωρούμε την παραγωγή υπό την ολοκλήρωση,

$$\sigma_h E[P'(X)q(X)|X > x] = \left[S(x)Q'(\theta) \right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_x^\infty P'(t)S(t)dt,$$

ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες

$$\sigma_h E[P'(X)q(X)|X > x] = \left[S(x)Q'(\theta) \right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(m_h(x) - P(x))S(x) \right]$$

και τελικά παίρνουμε

$$\sigma_h E[P'(X)q(X)|X > x] = \left[Q'(\theta) \right]^{-1} \frac{\partial m_h(x)}{\partial \theta} + (m_h(x) - \mu_h)(m_h(x) - P(x)). \quad (5.12)$$

Έτσι, από την (5.6) καταλήγουμε στο ζητούμενο. Αντίστροφα τώρα υποθέτουμε ότι ισχύει η (5.11). Ακολουθώντας, τα παραπάνω βήματα καταλήγουμε στην (5.12) και έχουμε

$$\sigma_h \int_x^\infty P'(t)q(t)f(t)dt = \left[Q'(\theta) \right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_x^\infty P'(t)S(t)dt.$$

Παραγωγίζοντας ως προς x , βρίσκουμε το $\sigma_h q(x)$ το ίδιο με παραπάνω. Αντικαθιστούμε το $q(x)$ στην (5.8),

$$\log \left[\sigma_h Q'(\theta) \right]^{-1} \frac{\partial S(x)}{\partial \theta} = \int_0^x \left(\frac{\partial S(t)}{\partial \theta} \right)^{-1} (\mu_h - P(t))Q'(t)f(t)dt$$

ή

$$\frac{\partial \log f(x)}{\partial \theta} = (\mu_h - P(x))Q'(\theta).$$

Ολοκληρώνοντας ως προς θ παίρνουμε την μορφή (5.8). Σημειώνουμε ότι με την εισαγωγή της έκφρασης για την $m_h(x)$ στην (5.11) και απλοποιώντας έχουμε

$$V(P(X)|X > x) = \frac{Q''Z' - Q'Z''}{(Q')^3} - \frac{Q''}{(Q')^3} \frac{\partial \log S(x)}{\partial \theta} + \frac{1}{(Q')^2} \frac{\partial^2 \log S(x)}{\partial \theta^2},$$

βλέπε [El-Arshy \[2005\]](#).

Παρατήρηση 5.2.4. Βλέπουμε από την (5.2) ότι αν πάρουμε $h(X) = X^r$,

$$E(X^r|X > x) = E(X^r) + \sigma_h r(x)q(x)$$

και η αντίστοιχη $f(x)$ δίνεται από την (5.8), βλέπε [Nassar and Mahmoud \[1985a\]](#) όπου $f(x)q(x) \rightarrow 0$ όταν $x \rightarrow 0$. Για την κατανομή γάμμα με παραμέτρους $p, m > 0$ και συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{m^p}{\Gamma(p)} e^{-mx} x^{p-1}, \quad x > 0$$

παίρνοντας $h(x) = x^r - \frac{r+p-1}{m}x^{p-1}$, βρίσκουμε $\sigma_h q(x) = \frac{x^r}{m}$ και $\mu_h = 0$.

Χρησιμοποιώντας την (5.2),

$$E\left(X^r - \frac{r+p-1}{m}X^{r-1}|X > x\right) = \frac{x^r}{m}r(x).$$

Εφαρμόζοντας την τελευταία αναδρομικά για r , βρίσκουμε τον χαρακτηρισμό των [Adatia, Law, and Wang \[1991\]](#). Συνεπώς από την (5.6),

$$V(X^r|X > x) = \frac{2r+p-1}{m}E(X^{2r-1}|X > x) - E^2(X^r|X > x) + \frac{x^{2r}}{m}r(x),$$

και συγκεκριμένα,

$$V(X|X > x) = \frac{p+1}{m}m(x) - m_1^2(x) + \frac{x^2}{m}r(x),$$

όπου $m(x) = E(X|X > x)$, χαρακτηρίζει την κατανομή Γάμμα. Όταν το

$r = 1$ έχουμε τον χαρακτηρισμό των S. Osaki και X.Li (1988) και την αντίστοιχη διασπορά από την τελευταία σχέση. Επιπλέον, για $r = 1$ και $g(x) = \sigma_h$ παίρνουμε τα αποτελέσματα των S. Kotz και D.N. Shanbhag (1980) για την κανονική κατανομή αλλάζοντας το στήριγμα της τυχαίας μεταβλητής X σε $(-\infty, +\infty)$. Όμως εδώ μας ενδιαφέρουν μόνο μή-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές και έτσι θεωρούμε την περικεκομμένη κανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_h} \exp\left(-\frac{(x - \mu_h)^2}{2\sigma_h^2}\right), \quad x > 0,$$

η οποία χαρακτηρίζεται από την σχέση

$$V(X|X > x) = \sigma_h^2 + (\mu_h - m(x))(m(x) - x).$$

Η απόδειξη των παραπάνω είναι παρόμοια με την απόδειξη για την εκθετική οικογένεια κατανομών και για τον λόγο αυτόν παραλείπεται.

Παρατήρηση 5.2.5. Οι [Ghitany, El-Saidi, and Khalil \[1995\]](#) έδειξαν για μια πραγματική συνάρτηση $p(x) \neq 0$ την ιδιότητα

$$E\left[1 + \frac{k''(X)p(X)}{(k'(X))^2} - \frac{p'(X)}{k'(X)} | X \geq x\right] = \frac{p(x)}{k'(x)} r(x)$$

για όλα τα $x \geq 0$ η οποία ισχύει για την κλάση των απόλυτα συνεχών συναρτήσεων

$$f(x) = \exp(-k(x)), \quad x \geq 0$$

με $k'(x) \neq 0$. παίρνοντας

$$h(X) = \left(1 + \frac{k''(X)p(X)}{(k'(X))^2} - \frac{p'(X)}{k'(X)} - \mu_h\right),$$

έχουμε $\sigma_h q(x) = p(x)/k'(x)$, και έτσι η δεσμευμένη διασπορά στη σχέση (5.6) ισχύει μέσω της (5.2).

Παρατήρηση 5.2.6. Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας ισχύουν και για μίξεις κατανομών. Από τους [Nassar and Mahmoud \[1985b\]](#) έχουμε ότι η

$$m(x) = x + (a_1^{-1} + a_2^{-1}) - (a_1 a_2)^{-1} r(x) \quad (5.13)$$

είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X μια μίξη εκθετικών κατανομών της μορφής

$$f(x) = \lambda a_1 \exp(-a_1 x) + (1 - \lambda) a_2 \exp(-a_2 x), x > 0$$

όπου $a_1, a_2 > 0$ και $0 < \lambda < 1$. Η συνάρτηση $q(x)$ που προκύπτει από την (5.13) οδηγεί στην

$$V(X|X > x) = a_1^{-2} + a_2^{-2} - (a_1 a_2)^{-2} h^2(x).$$

Για την μίξη κατανομών Lomax, Βήτα ή Γάμμα, προκύπτουν παρόμοιες ταυτότητες ιοθετώντας την παραπάνω διαδικασία.

Παρατήρηση 5.2.7. Για την οικογένεια κατανομών του Pearson

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-(x+d)}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$$

από τους N.U. Nair και P.G. Sankaran (1991) βρίσκουμε $\sigma_h q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, $b_i = a_i / (1 - 2a_2)$, $i = 0, 1, 2$ και $h(x) = x$. Έστω

$$\begin{aligned} & \sigma_h E\left(h'(X)q(X)|X > x\right) + (\mu_h - m_h(x))(m_h(x) - h(x)) \\ &= E\left(b_0 + b_1 X + b_2 X^2|X > x\right) + \mu_h m(x) - \mu_h x - m^2(x) + x m(x) \\ &= [b_0 + (b_1 + \mu_h + x)m(x) - \mu_h x] + b_2 V(X|X > x) - (1 - b_2)m^2(x). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (5.6) έχουμε

$$V(X|X > x) = (1 - b_2)^{-1} [b_0 + (b_1 + \mu_h + x)m(x) - \mu_h x] - m^2(x).$$

Αντίστροφα, όταν ισχύει η τελευταία εργαζόμαστε ανάποδα για να καταλήξουμε στην

$$\sigma_h E(q(X)|X > x) = E\left((b_0 + b_1 X + b_2 X^2)|X > x\right)$$

ή

$$\sigma_h \int_x^\infty q(t)f(t)dt = \int_x^\infty (b_0 + b_1t + b_2t^2)f(t)dt.$$

Παραγωγίζοντας, παίρνουμε $\sigma_h q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ και σύμφωνα με το Πόρισμα 5.2.1,

$$m_h(x) = \mu_h + (b_0 + b_1x + b_2x^2)r(x),$$

έτσι η τυχαία μεταβλητή X ανήκει στην οικογένεια Pearson βλέπε [Nair and Sankaran \[1991\]](#). Μια ειδική περίπτωση της κατανομής Βήτα

$$f(x) = cx^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

όπως την ορίζει ο [Ahmed and DI \[1991\]](#), για την οποία $\sigma_h q(x) = (p+q)^{-1}x(1-x)$. Έτσι,

$$V(X|X > x) = (p+q+1)^{-1}[m(x) - m^2(x) + (p+q)(\mu_h - m(x))(m(x) - x)].$$

Επιπλέον, ενδιαφέρον έχουν οι ειδικές περιπτώσεις του τελευταίου αποτελέσματος στην θεωρία αξιοπιστίας. Η δυναμοκατανομή προκύπτει για $(q = 1)$, η κατανομή πεπερασμένου εύρους τιμών για $(p = 1)$ και η ομοιόμορφη κατανομή για $(p = 1, q = 1)$. Αποτελέσματα υπάρχουν ήδη στην βιβλιογραφία για κάποια μέλη αυτής της οικογένειας κατανομών. Εμείς εδώ θα παρουσιάσουμε μια σχέση για την αντίστροφη Γάμμα κατανομή η οποία για $c, p, q > 0$ έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = cx^{-p} \exp(-q/x), \quad x > 0$$

και ισχύει

$$V(X|X > x) = (3-p)^{-1}[(p-2)m^2(x) + (\mu_h - m(x))(m(x) - x)].$$

Παρατήρηση 5.2.8. Η γενίκευση της οικογένειας Pearson η οποία δίνεται από

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2}{q_0 + q_1x + q_2x^2}, \quad p_2 \neq 0$$

όπου $\sigma_h q(x) = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$, βλέπε [Nair, Sankaran, and Asha \[2005\]](#) και [Sankaran, Nair, and Sindhu \[2003\]](#), όπου b_0 , b_1 και b_2 είναι οι λύσεις του συστήματος

$$-Aq_2 = \mu_h b_2 p_2,$$

$$-(Aq_1 + Bq_2) = \mu_h(p_1 b_1 + b_1 p_2 + 2b_2 q_2)$$

$$(\mu_h - c)q_0 = \mu_h(p_0 b_0 + q_0 b_1)$$

για $h(x) = Ax^2 + Bx + C$. Η οικογένεια αυτή περιέχει όλα τα μέλη της οικογένειας Pearson και επιπλέον περιέχει κάποια νέα μέλη όπως η αντίστροφη Γκαουσιανή, η Maxwell και η Rayleigh. Η αντίστροφη Γκαουσιανή έχει πυκνότητα

$$f(x) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi x^3}} \exp\left[-\frac{\beta(x-\theta)^2}{2\theta^2 x}\right], \quad x > 0$$

έχει $\sigma_h q(x) = 2\theta^2 x^2$ για $h(x) = \beta x^2 - \theta^2 x - \beta\theta^2$ και τελικά

$$V(X|X > x) = \theta^2 \beta^{-1}(\beta + m_h(x) + 2x^2 r(x)) - m_h^2(x).$$

Η κατανομή Rayleigh έχει πυκνότητα

$$f(x) = 2\alpha x \exp(-\alpha x^2), \quad x > 0$$

παρατηρούμε ότι $\sigma_h q(x) = x$ για $h(x) = 2\alpha x^2 - 2$ και

$$V(X|X > x) = (2\alpha)^{-1}(x r(x) + 2) - m^2(x).$$

Οι αποδείξεις των παραπάνω μοιάζουν πολύ με αυτές των προηγούμενων παρατηρήσεων και γι αυτό παραλείπονται.

Όλα τα παραπάνω παραδείγματα αναδεικνύουν την χρησιμότητα των θεωρητικών αποτελεσμάτων αυτής της ενότητας με την δυνατότητα χαρακτηρισμού κατανομών μέσω σχέσεων της δεσμευμένης διασποράς, της έντασης κινδύνου και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

5.3 Ένα κάτω φράγμα για την συνάρτηση της διασποράς υπολειπόμενου χρόνου ζωής

Η ταυτότητα για την συνδιασπορά που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα μας δίνει την δυνατότητα να εισάγουμε ένα φράγμα για την διασπορά χρησιμοποιώντας την γνωστή ανισότητα $Cov^2(c(X), h(X)|X > x) \leq V(c(X)|X > x)V(h(X)|X > x)$. Ακολουθούμε την μεθοδολογία που χρησιμοποιούν οι

[Cacoullos and Papathanasiou \[1997\]](#) για τον χαρακτηρισμό κατανομών μέσω τέτοιων φραγμάτων. Όταν η συνάρτηση $c(X)$ εμφανίζεται σε αυτά τα φράγματα, τότε επιλέγεται σαν εκτιμητής της επιθυμητής παραμετρικής συνάρτησης, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X θα προσδιορίσει τη συνάρτηση $q(x)$ και τα φράγματα έχουν την δυνατότητα να προσδιορίσουν, μέσω μιας διαφορετικής προσέγγισης, τον αμερόληπτο εκτιμητή ελαχίστης διασποράς μέσω πολύ γνωστών θεωρημάτων.

Θεώρημα 5.3.1. Όταν ισχύουν οι συνθήκες του Θεωρήματος [5.2.1](#) τότε για κάθε $c(x) \in A$ ισχύει

$$V(c(X)|X > x) \geq [V(h(X)|X > x)]^{-1}[\sigma_h E[c'(X)q(X)|X > x] + (\mu_h - m_h(x))(a(x) - c(x))]^2 \quad (5.14)$$

αν ισχύει η [\(5.2\)](#), με την ισότητα να πραγματοποιείται όταν η συνάρτηση $c(X)$ είναι γραμική συνάρτηση της $h(X)$. Αντίστροφα, έστω η δεσμευμένη διασπορά που δίνεται από την [\(5.14\)](#), τότε ισχύει η [\(5.2\)](#) δοθέντος ότι η $V(X|X > x)$ είναι όπως στην [\(5.6\)](#).

Απόδειξη. Ξεκινάμε από την ανισότητα

$$Cov^2(c(X), h(X)|X > x) \leq V(c(X)|X > x)V(h(X)|X > x),$$

χρησιμοποιούμε την σχέση [\(5.4\)](#) και οδηγούμαστε στην [\(5.14\)](#). Για να αποδείξουμε το δεύτερο τμήμα του θεωρήματος, υποθέτουμε

$$c(x) = h(x) + \theta l(x)$$

για κάποιο πραγματικό αριθμό θ . Τότε

$$a(x) = m_h(x) + \theta b(x), \quad b(x) = E(l(X)|X > x),$$

έτσι η (5.14) γίνεται

$$V(h(X)|X > x)[V(h(X)|X > x) + \theta^2 V(l(X)|X > x) + 2\theta Cov(l(X), h(X)|X > x)]$$

$$\geq [\sigma_h E[h'(X)q(X)|X > x] + \sigma_h \theta E[l'(X)q(X)|X > x] + \{m_h(x) + \theta b(x) - h(x) - \theta l(x)\}(\mu_h - m_h(x))]$$

Χρησιμοποιούμε την σχέση (5.6) για να απλοποιήσουμε την παραπάνω σχέση

$$\begin{aligned} & \theta^2 \left[V(h(X)|X > x)V(l(X)|X > x) - \left\{ \sigma_h E[l'(X)q(X)|X > x] + (\mu_h - m_h(x))(b(x) - l(x)) \right\}^2 \right] \\ & + 2\theta V(h(X)|X > x) \left[Cov(l(X), h(X)|X > x) \right. \\ & \left. - \left\{ \sigma_h E[l'(X)q(X)|X > x] + (\mu_h - m_h(x))(b(x) - l(x)) \right\} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Για να ισχύει η τελευταία για όλα τα θ , πρέπει

$$Cov(l(X), h(X)|X > x) = \sigma_h E[l'(X)q(X)|X > x] + (\mu_h - m_h(x))(b(x) - l(x)),$$

το οποίο μετά από λίγες πράξεις γίνεται

$$E(l(X)(h(X) - \mu_h)|X > x) = \sigma_h E[l'(X)q(X)|X > x] + l(x)E(h(X) - \mu_h|X > x)$$

ή

$$\int_x^\infty (l(t) - l(x))(h(t) - \mu_h)f(t)dt = \sigma_h \int_x^\infty l'(t)q(t)f(t)dt$$

$$\int_x^\infty \left(\int_x^t l'(u)du \right) (h(t) - \mu_h)f(t)dt = \sigma_h \int_x^\infty l'(t)q(t)f(t)dt$$

Η συνέχεια της απόδειξης είναι ακριβώς όπως στο Θεώρημα 5.2.1. \square

Από την σκοπία τώρα της εκτιμητικής, αξίζει να ερευνηθεί η σχέση που έχει η ανισότητα που κατασκευάσαμε παραπάνω για την δεσμευμένη διασπορά με την γνωστή ανισότητα του θεωρήματος Cramer-Rao. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών. Τότε η τυχαία μεταβλητή $X|X > t$ έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_1(x; \theta) = \exp[P(x)Q(\theta) + T(x) + Z(\theta) - \log S(t)], \quad x > t$$

δηλαδή η τυχαία μεταβλητή $X|X > t$ ανήκει και αυτή στην εκθετική οικογένεια κατανομών, συνεπώς το κάτω φράγμα Cramer-Rao το οποίο εφαρμόζεται στον αμερόληπτο εκτιμητή του

$$E(P(X)|X > x) = m(t)$$

είναι το

$$V(t) = \frac{[m'(t)]^2}{E\left(\frac{\partial \log f_1}{\partial \theta}\right)^2}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε ότι $\frac{\partial \log f_1}{\partial \theta} = Q'(\theta)(P(X) - \mu_h)$ και $m(t) = \mu_h + [Q'(\theta)]^{-1} \frac{\partial \log S_1}{\partial \theta}$,

$$V(t) = \frac{[m'(t)]^2}{[Q'(\theta)]^2 V(p(X)|X > t)} = \frac{m'(t)}{Q'(\theta)},$$

το οποίο είναι το ίδιο με το φράγμα που προκύπτει από το θεώρημα (5.3.1). Έτσι, όταν ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας των Cramer-Rao, τότε οι δύο ανισότητες παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα. Σημειώνουμε ότι για να εφαρμόσουμε το (5.3.1) δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιούνται οι συνθήκες ομαλότητας. Για παράδειγμα, στην ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, \theta)$, $c(X) = 2X$ από το θεώρημα (5.3.1) παίρνουμε

$$V(c(X)|X > x) = (\theta - x)^2/3,$$

η οποία είναι και η πραγματική διασπορά της $h(X)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι το Θεώρημα 5.3.1 μας δίνει ακριβώς τα αποτελέσματα του θεωρήματος Cramer-Rao και επιπλέον μας δίνει εξαιρετικές προσεγγίσεις στις περιπτώσεις που δεν ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας των Cramer-Rao και το φράγμα τους δεν εφαρμόζεται.

Συνοψίζοντας, σε αυτό το κεφάλαιο είδαμε συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορούμε να μελετήσουμε χαρακτηρισμούς κατανομών μέσω της συνάρτησης διασποράς υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Είδαμε επίσης την σύνδεση της συνάρτησης VRL με την συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και επιπλέον είδαμε εφαρμογές σε αρκετές ευρέως γνωστές κατανομές υπό την μορφή παρατηρήσεων. Τέλος, μελετήσαμε ένα κάτω φράγμα για την συνάρτηση διασποράς υπολειπόμενου χρόνου ζωής από τους [Nair and Sudheesh \[2010\]](#) και συγκρίναμε τα αποτελέσματα αυτά με τα γνωστά αποτελέσματα των Cramer-Rao.

Βιβλιογραφία

- A. Adata, A.G. Law, and Q. Wang. Characterization of a mixture of gamma distributions via conditional finite moments. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 20:1937-1949, 1991. [75](#)
- A. Ahmed and H.A. DI. Characterization of beta, binomial and poisson distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, 40:290-293, 1991. [78](#)
- R.E. Barlow and F. Proschan. *Statistical theory of reliability and life testing: Probability models. To begin with*, 1981. [21](#)
- M. Bebbington, C.D. Lai, and R. Zitikis. Reduction in mean residual life in the presence of a constant competing risk. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 24:51-63, 2007a. [25](#), [28](#)
- M. Bebbington, C.D. Lai, and R. Zitikis. Modelling human mortality using mixtures of bathtub shaped failure distributions. *Journal of Theoretical Biology*, 245:528--538, 2007b. [38](#), [39](#)
- T. Cacoullos and V. Papathanasiou. Characterizations of distributions by generalizations of variance bounds and simple proofs of the clt. *Journal of statistical planning and inference*, 63:157-171, 1997. [80](#)
- W.F. Carpenter. On the solution of the real quartic. *Mathematics Magazine*, 39:28-30, 1966. [41](#)
- A.C. Dallas. A characterization using the conditional variance. *Metrika*, 28:151-153, 1981. [73](#)
- D. Davis. An analysis of some failure data. *Journal of the American Statistical Association*, 47:113-150, 1952. [21](#)

- S. El-Arishy. A conditional variance characterization of some discrete probability distributions. *Statistical Papers*, 46:31–45, 2005. [75](#)
- M.E. Ghitany, M.A. El-Saidi, and Z. Khalil. Characterization of a general class of life-testing models. *Journal of applied probability*, 32:548–553, 1995. [76](#)
- R.E. Glaser. Bathtub and related failure rate characterizations. *Journal of the American Statistical Association*, 75:667–672, 1980. [11](#), [13](#)
- K.K. Govil and K.K. Aggarwal. Mean residual life function for normal, gamma and lognormal densities. *Reliability Engineering*, 05:47–51, 1983. [20](#), [23](#)
- F. Guess, M. Hollander, and F. Proschan. Testing exponentiality versus a trend change in mean residual life. *The Annals of Statistics*, 14: 1388–1398, 1986. [17](#)
- R.C. Gupta and H.O. Akman. On the reliability studies of a weighted inverse gaussian model. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 48:69–83, 1995. [18](#), [36](#)
- R.C. Gupta and D.M. Bradley. Representing the mean residual life in terms of the failure rate. *Mathematical and Computer Modelling*, 34: 1271–1280, 2003. [49](#), [66](#)
- R.C. Gupta and S.N.U.A. Kirmani. Residual coefficient of variation and some characterization results. *Journal of statistical planning and inference*, 91:23–31, 2000. [68](#)
- R.C. Gupta and S.N.U.A. Kirmani. Some characterization of distributions by functions of failure rate and mean residual life. 33: 3115–3131, 2004. [68](#)
- R.C. Gupta and R. Warren. Determinations of change points of non-monotonic failure rates. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 30:1903–1920, 2001. [13](#), [14](#)
- R.C. Gupta and H. Wu. Analysing survival data by proportional reversed hazard model. *International Journal of Reliability and Applications*, 02:1–26, 2001. [13](#)

- R.C. Gupta, S.N.U.A. Kirmani, and R.L. Launer. On life distributions having monotone residual variance. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 01:299-307, 1987. [68](#)
- A.J. Hallinan. A review of the weibull distribution. *Journal of Quality Technology*, 25:85-93, 1993. [21](#)
- N. Hitcha and N.U. Nair. Characterization of some models by properties of residual life. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, 38:219-225, 1989. [68](#)
- C.D. Lai and M. Xie. *Stochastic ageing and dependence for reliability*. Springer, 2006. [8](#), [22](#), [35](#)
- R.L. Launer. Inequalities for nbue and nwue life distributions. *Operations Research*, 32:660-667, 1984. [67](#)
- S.P. Mukherjee and D. Roy. Some characterizations of the exponential and related life distributions. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, 35:189-197, 1986. [68](#)
- N.U. Nair and P.G. Sankaran. Characterization of the pearson family of distributions. *Reliability, IEEE Transactions on*, 40:75-77, 1991. [78](#)
- N.U. Nair and K.K. Sudheesh. Characterization of continuous distributions by variance bound and its implications to reliability modeling and catastrophe theory. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 35:1189-1199, 2006a. [68](#)
- N.U. Nair and K.K. Sudheesh. Characterization of continuous distributions by variance bound and its implications to reliability modeling and catastrophe theory. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 35:1189-1199, 2006b. [73](#)
- N.U. Nair and K.K. Sudheesh. Characterization of continuous distributions by properties of conditional variance. *Statistical Methodology*, 07:30-40, 2010. [69](#), [72](#), [83](#)
- N.U. Nair, P.G. Sankaran, and G. Asha. Characterizations of distributions using reliability concepts. *Journal of Applied Statistical Science*, 14:237-241, 2005. [79](#)

- M.M. Nassar and F.H. Eissa. On the exponentiated weibull distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 32:1317-1336, 2003. [22](#)
- M.M. Nassar and M.R. Mahmoud. On characterizations of a mixture of exponential distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, 34: 484-488, 1985a. [75](#)
- M.M. Nassar and M.R. Mahmoud. On characterizations of a mixture of exponential distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, 34: 484-488, 1985b. [76](#)
- J. Navarro and P.J. Hernandez. How to obtain bathtub-shaped failure rate models from normal mixtures. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 18:511-531, 2004. [21](#)
- J.M. Ruiz and J. Navarro. Characterization of distributions by relationships between failure rate and mean residual life. *IEEE Transactions on reliability*, 43:640-644, 1994. [45](#), [47](#), [54](#), [56](#), [65](#), [66](#)
- P.G. Sankaran, N.U. Nair, and T.K. Sindhu. A generalized pearson system useful in reliability analysis. *Statistical papers*, 44:125-130, 2003. [79](#)
- K.L. Wong. The physical basis for the roller-coaster hazard rate curve for electronics. *Quality and Reliability Engineering International*, 07: 489-495, 1989. [10](#)