ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Π1 Εντολές στο Mathematica

Στο παράρτημα αυτό δίνονται οι εντολές, οι οποίες έχουν υλοποιηθεί στο μαθηματικό πακέτο *Mathematica,* προκειμένου να κατασκευαστούν οι γραφικές παραστάσεις που περιέχονται στη διπλωματική εργασία.

- *Κατασκευή του σχήματος 1.6*

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`;
   << Graphics`Graphics`
Expon = ExponentialDistribution@5D;
Plot@PDF@Expon, tD, 8t, 0, 1<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.7*

```
f1@t_D := 2  t^1;
f2@t_D := H3ê2L  t^H1ê2L;
f3@t_D := 1  t^0;
f4@t_D := H1ê2L  t^H-1ê2L;
Plot@8f1@tD, f2@tD, f3@tD, f4@tD<, 8t, 0, 10<, PlotRange → 80, 4<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.8*

```
f1@t_D := HH1^2L  tLêH1 + tL;
f2@t_D := 1;
f3@t_D := Ht^H-1ê2L  Exp@-tDL í ‡_t^∞ Hs^H-1ê2LL Exp@-sD ăs;
Plot@8f1@tD, f2@tD, f3@tD<, 8t, 0, 10<, PlotRange → 80, 2.5<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.9*

```
                                             t-1
f1@t_D := Exp@H-Ht - 1L^2Lê2D ì J è 2 π  1  J1 - ‡    Exp@-y^2ê2D ăyNN;
                                            -∞
                                             t-2
f2@t_D := Exp@H-Ht - 2L^2Lê2D ì J è 2 π  1  J1 - ‡    Exp@-y^2ê2D ăyNN;
                                            -∞
                                             t-3
f3@t_D := Exp@H-Ht - 3L^2Lê2D ì J è 2 π  1  J1 - ‡    Exp@-y^2ê2D ăyNN;
                                            -∞
Plot@8f1@tD, f2@tD, f3@tD<, 8t, 0, 4<, PlotRange → 80, 4<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.10*

```
                                                    ∞
f1@t_D := Exp@H-HLog@Exp@1D, tD - 1L^2Lê2D í Jt  NA‡  H1êuL
                                                  t
        Exp@H-HLog@Exp@1D, uD - 1L^2Lê2D ăuEN;
                                                      ∞
f2@t_D := Exp@H-HLog@Exp@1D, tD - 0.5L^2Lê2D í Jt  NA‡  H1êuL
                                                    t
        Exp@H-HLog@Exp@1D, uD - 0.5L^2Lê2D ăuEN;
Plot@8f1@tD, f2@tD<, 8t, 0, 3<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.11*

```
f1@t_D := 1êH1 - tL;
f2@t_D := 1êH2 - tL;
Plot@8f1@tD, f2@tD<, 8t, 0, 2<, PlotRange → 80, 10<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.12*

```
f1@t_D := H1ê5L  HExp@Ht - 10Lê5DêH1 + Exp@Ht - 10Lê5DLL;
f2@t_D := H1ê1.5L  HExp@Ht - 8Lê1.5DêH1 + Exp@Ht - 8Lê1.5DLL;
Plot@8f1@tD, f2@tD<, 8t, 0, 25<, PlotRange → 80, 1<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.13*

```
               1
f21@t_D := -------  HExp@Log@tD ê 0.2D ê H1 + Exp@Log@tD ê 0.2DLL;
            t 0.2
               1
f22@t_D := -------  HExp@Log@tD ê 0.4D ê H1 + Exp@Log@tD ê 0.4DLL;
            t 0.4
               1
f23@t_D := -------  HExp@Log@tD ê 0.6D ê H1 + Exp@Log@tD ê 0.6DLL;
            t 0.6
Plot@8f21@tD, f22@tD, f23@tD,<, 8t, 0, 4<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.14*

```
f32@t_D := H0.5 + Exp@-0.2DL  Exp@tD;
f33@t_D := H0.5 + Exp@-2DL  Exp@tD;
f34@t_D := H3 + Exp@-0.2DL  Exp@tD;
f35@t_D := H3 + Exp@-2DL  Exp@tD;
Plot@8f32@tD, f33@tD, f34@tD, f35@tD<, 8t, 0, 3<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.15*

```
f@t_D := Exp@tD;
Plot@f@tD, 8t, -2, 2<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.16*

```
f@t_D := Exp@-Exp@-tDD  Exp@-tD ê H1 - Exp@-Exp@-tDDL;
Plot@f@tD, 8t, -2, 2<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.17*

```
f@t_D := 2  H-tL ^H-3L;
Plot@f@tD, 8t, -2, -1<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.18*

```
f@t_D := 2  Exp@-t - 2D ê H1 - Exp@-t - 2DL;
Plot@f@tD, 8t, 0, 2.5<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.19*

```
f1@t_D := 2  t^1; f2@t_D := 3  t^2; f3@t_D := 4  t^3;
Plot@8f1@tD, f2@tD, f3@tD<, 8t, 0, 4<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.20*

```
f1@t_D := 2  Exp@-H-tL^2D  H-tL^H-1 + 2L ê H1 - Exp@-H-tL^2DL;
f2@t_D := 3  Exp@-H-tL^3D  H-tL^H-1 + 3L ê H1 - Exp@-H-tL^3DL;
f4@t_D := 4  Exp@-H-tL^4D  H-tL^H-1 + 4L ê H1 - Exp@-H-tL^4DL;
Plot@8f1@tD, f2@tD, f4@tD<, 8t, -2, -1<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.21*

```
f1@t_D := 2  t; f2@t_D := 5  t; f3@t_D := 10  t;
Plot@8f1@tD, f2@tD, f3@tD<, 8t, 0, 5<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.22*

```
f1@t_D := Exp@-tD;
        ∞
NA‡  t^1  Exp@-tD ătE
   0
1.
```

```
f@t_D := H0.5ê1L  t^0  Exp@-t^0.5D;
      ∞
NA‡    t^H-0.5L  Exp@-tD ătE
      0
1.77245
f2@t_D := H2ê1L  t^1  Exp@-t^2D ê1.77245;
Plot@8f@tD, f1@tD, f2@tD<, 8t, 0, 6<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.23*

```
         H2 tL^1.6
a1 = ‡             u^HH2ê1.6L - 1L  Exp@-uD ău
        0
0.906402 - Gamma@1.25, 3.03143 t^1.6D
        ∞
b1 = ‡   t^H2ê1.6 - 1L  Exp@-tD ăt
        0
0.906402
c1 = a1êb1
1.10326 H0.906402 - Gamma@1.25, 3.03143 t^1.6DL
f1@t_D := H1.6ê2L  Htê2L^H0.5  1.6 - 1L  Exp@Htê2L^1.6DêHb1 - c1L;
Plot@f1@tD, 8t, 0, 4<, PlotRange → 80, 15<D
         H2 tL^0.33
a2 = ‡              u^HH2ê0.33L - 1L  Exp@-uD ău
        0
133.116 - Gamma@6.06061, 1.25701 t^0.33D
        ∞
b2 = ‡   t^H2ê0.33 - 1L  Exp@-tD ăt
        0
133.116
c2 = a2êb2
0.00751222 H133.116 - Gamma@6.06061, 1.25701 t^0.33DL
f2@t_D := H0.33ê2L  Htê2L^H0.5  0.33 - 1L  Exp@Htê2L^0.33DêHb2 - c2L;
Plot@f2@tD, 8t, 0, 4<D
         Htê2L^3
a3 = ‡            u^HH2ê3L - 1L  Exp@-uD ău
        0
                                                    t^3/8
IfBt > 0, GammaB 2/3 F - GammaB 2/3 , t^3/8 F, ‡            Ą^-u / u^1ê3  ă uF
                                                    0
        ∞
b3 = ‡   t^H2ê3 - 1L  Exp@-tD ăt
        0
GammaB 2/3 F
c3 = a3êb3
                                                  t^3/8
IfBt > 0, GammaA 2/3 E - GammaB 2/3 , t^3/8 F, Ÿ          Ą^-u / u^1ê3  ă uF
                                                  0
-------------------------------------------------------------------------
                         GammaA 2/3 E
```

```
f3@t_D := H3ê2L  Htê2L^H2  3 - 1L  Exp@Htê2L^3DêHb3 - c3L;
Plot@f3@tD, 8t, 0, 4<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.24*

```
f11@t_D := 1  0.5  t^H-0.5L  Exp@1  t^0.5D;
Plot@f11@tD, 8t, 0, 20<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.25*

```
f1@t_D := 1ê t; f2@t_D := 10ê t; f3@t_D := 25ê t;
Plot@8f1@tD, f2@tD, f3@tD<, 8t, 1, 10<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 1.29*

```
               5^t
               t!
f13@t_D := ─────────── ;
           /∞    5^i
            i=t  i!

ListPlot@8f13@1D, f13@2D, f13@3D, f13@4D, f13@5D, f13@6D, f13@7D,
  f13@8D, f13@9D, f13@10D, f13@11D, f13@12D, f13@13D, f13@14D,
  f13@15D, f13@16D, f13@17D, f13@18D, f13@19D, f13@20D<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 2.3*

```
f23@t_D := 2  1.2  t^H1.2 - 1L  Exp@t^1.2D;
f24@t_D := 2  1  t^H1 - 1L  Exp@t^1D;
f25@t_D := 2  0.8  t^H0.8 - 1L  Exp@t^0.8D;
f26@t_D := 2  0.6  t^H0.6 - 1L  Exp@t^0.6D;
f27@t_D := 2  0.4  t^H0.4 - 1L  Exp@t^0.4D;
Plot@8f23@tD, f24@tD, f25@tD, f26@tD, f27@tD<, 8t, 0, 3<, PlotRange → 80, 10<D
```

- *Κατασκευή του σχήματος 3.2*

```
f1@p_D := p^1;
     f2@p_D := p^10;
    f3@p_D := p^25;
   f4@p_D := p^50;
   f5@p_D := p^100
   f6@p_D := p^200;
  f7@p_D := p^400;
Plot@8f1@pD, f2@pD, f3@pD, f4@pD, f5@pD, f6@pD, f7@pD<, 8p, 0.980, 1<,
 FrameLabel → 8"p", "RHpL"<, Frame → TrueD
```

- *Κατασκευή του σχήματος 3.4*

```
f1@p_D := 1 - H1 - pL;
f2@p_D := 1 - H1 - pL^2;
f3@p_D := 1 - H1 - pL^3;
f4@p_D := 1 - H1 - pL^4;
f5@p_D := 1 - H1 - pL^5;
Plot@8f1@pD, f2@pD, f3@pD, f4@pD, f5@pD<, 8p, 0.5, 1<, Frame → TrueD
```

- *Κατασκευή του σχήματος 4.1*

```
          0.4 Ą^H-0.4 tL + 0.6 Ą^H-0.6 tL - Ą^H-tL
f@t_D := ------------------------------------------ ;
               Ą^H-0.4 tL + Ą^H-0.6 tL - Ą^H-tL
Plot@f@tD, 8t, 0, 20<, PlotRange → 80, 0.5<D
```

Π2 Αποδείξεις Λημμάτων

Λήμμα 1. *Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας* $f(t)$. *Τότε η* $X \in IFR(2)$ *αν και μόνο αν ισχύει*

$$\frac{f(t)}{(1-F(t))(F(t+y)-F(t))}\int_t^{t+y}(1-F(x))dx \le 1,$$

για κάθε $y > 0$ *και* $t > 0$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της κλάσης $IFR(2)$, είναι φανερό ότι $X \in IFR(2)$ αν και μόνο αν

$$\frac{1}{1-F(t)}\int_t^{t+y}(1-F(x))dx \text{ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς } t \text{, για όλα τα } y > 0.$$

Παραγωγίζοντας ως προς t, παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Λήμμα 2. *Αν* $g(u,\upsilon) = (1+u+...+u^{n-1})(\upsilon^n - u^n) - nu^{n-1}(1+\upsilon+...+\upsilon^{n-1})(\upsilon - u)$ για όλα τα $u \le \upsilon$, όπου $u,\upsilon \in [0,1]$ και $n \ge 2$, τότε $g(u,\upsilon) \ge 0$.

Απόδειξη. Για $n = 2$ η ζητούμενη ανίσωση είναι προφανής, διότι

$$g(u,\upsilon) = (1+u)(\upsilon^2 - u^2) - 2u(1+\upsilon)(\upsilon - u) = (\upsilon - u)^2(1-u) \ge 0.$$

Αν $n \ge 3$ τότε για κάθε $u \in [0,1]$ έχουμε ότι $g(u,\upsilon) = \lim_{\upsilon \to u} g(u,\upsilon) = 0$. Συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε ότι η $g(u,\upsilon)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς υ, για κάθε $u \in [0,1]$. Πράγματι έχουμε

$$\frac{\partial g(u,\upsilon)}{\partial \upsilon} = n\upsilon^{n-1}(1+u+...+u^{n-1}) - nu^{n-1}(1+2\upsilon+...+(n-1)\upsilon^{n-2})(\upsilon - u) -$$
$$- nu^{n-1}(1+\upsilon+...+\upsilon^{n-1})$$

Η τελεταία σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\frac{\partial g(u,\upsilon)}{\partial \upsilon} = n\upsilon^{n-1}(1+u+...+u^{n-2}+(1-n)u^{n-1}) - nu^{n-1}(1+2\upsilon+...+(n-1)\upsilon^{n-2})(1-u).$$

Ομοίως,

$$\left.\frac{\partial g(u,\upsilon)}{\partial \upsilon}\right|_{\upsilon=u} = \lim_{\upsilon\to u}\frac{\partial g(u,\upsilon)}{\partial \upsilon} = 0 .$$

Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\frac{\partial g(u,\upsilon)}{\partial \upsilon}$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς υ, για κάθε $u \in [0,1]$, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 g(u,\upsilon)}{\partial \upsilon^2} = n(n-1)\upsilon^{n-2}(1+u+...+u^{n-2}+(1-n)u^{n-1}) - \\ - nu^{n-1}(1-u)(2+6\upsilon+...+(n-1)(n-2)\upsilon^{n-3}) \tag{1}$$

Η σχέση (1) για $n=3$ παίρνει τη μορφή

$$\upsilon(1+u-2u^2) \geq u^2(1-u) ,$$

που ισχύει για όλα τα $u \leq \upsilon$, καθώς $\upsilon \geq u \geq u^2$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αν η σχέση (1) ισχύει για n, τότε θα ισχύει και για $n+1$ (επαγωγική απόδειξη). Από τη σχέση (1) έχουμε

$$\frac{1}{n+1}\frac{\partial^2 g(u,\upsilon)}{\partial \upsilon^2} = n\upsilon^{n-1}(1+u+...+u^{n-1}-nu^n) - \\ - u^n(1-u)(2+6\upsilon+...+(n-1)(n-2)\upsilon^{n-3}+n(n-1)\upsilon^{n-2}) =$$

$$= (n-1)\upsilon^{n-1}(1+u+...+(1-n)u^{n-1}) + \\ + n(n-1)\upsilon^{n-1}(u^{n-1}-u^n)) + \upsilon^{n-1}(1+u+...+u^{n-1}-nu^n) - \\ - u^n(1-u)(2+6\upsilon+...+(n-1)(n-2)\upsilon^{n-3}) - n(n-1)u^n(1-u)\upsilon^{n-2}$$

Επειδή $\upsilon \geq u$, ισχύει ότι

$$\frac{1}{n+1}\frac{\partial^2 g(u,\upsilon)}{\partial \upsilon^2} \geq u[(n-1)\upsilon^{n-2}(1+u+...+u^{n-1}) - \\ - u^{n-1}(1-u)(2+6\upsilon+...+(n-1)(n-2)\upsilon^{n-3})] + n(n-1)\upsilon^{n-1}u^{n-1}(1-u) + \\ + \upsilon^{n-1}(1+u+...+u^{n-1}-nu^n) - n(n-1)u^n(1-u)\upsilon^{n-2} =$$

$$= u[(n-1)\upsilon^{n-2}(1+u+...+(1-n)u^{n-1}) - \\ - u^{n-1}(1-u)(2+6\upsilon+...+(n-1)(n-2)\upsilon^{n-3})] + n(n-1)\upsilon^{n-2}u^{n-1}(1-u)(\upsilon-u) +$$

$$+\upsilon^{n-1}(1+u+...+u^{n-1}-nu^{n}) . \qquad \blacksquare$$

Λήμμα 3. *Μια συνάρτηση κατανομής* F *ανήκει στην κλάση* $NBU(2)$ *αν και μόνο αν για κάθε μη αρνητική, αύξουσα και κοίλη συνάρτηση* g *και* $a \geq 0$, *ισχύει η ανίσωση*

$$\int_a^\infty g(x-a)dF(x) \leq \overline{F}(a)\int_0^\infty g(x)dF(x) .$$

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η παραπάνω ανίσωση. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $F \in NBU(2)$. Θεωρούμε τη μη αρνητική, αύξουσα και κοίλη συνάρτηση $g(x) = \min(x,b) \equiv x \wedge b$, για όλα τα $b \geq 0$ και έχουμε

$$\int_a^\infty g(x-a)dF(x) = \int_a^\infty (x-a) \wedge b dF(x) = \int_{(a+b)}^\infty b dF(x) + \int_a^{a+b} (x-a)dF(x) =$$

$$= b\overline{F}(a+b) + \int_a^{a+b} (x-a)dF(x) = b\overline{F}(a+b) + \int_0^b x dF(x+a) =$$

$$= b\overline{F}(a+b) + bF(a+b) - \int_0^b F(x+a)dx = \int_0^b \overline{F}(x+a)dx .$$

Ομοίως έχουμε

$$\int_0^\infty g(x)dF(x) = \int_0^b \overline{F}(x)dx ,$$

οπότε η υπόθεση γίνεται

$$\int_0^b \overline{F}(x+a)dx \leq \overline{F}(a)\int_0^b \overline{F}(x)dx ,$$

και συμπεραίνουμε ότι $F \in NBU(2)$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή την αναγκαία συνθήκη. Ωστόσο, από τα προηγούμενα, έχουμε ότι αν $F \in NBU(2)$, τότε η ανίσωση ισχύει για τη συνάρτηση $g(x) = \min(x,b) \equiv x \wedge b$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η παραπάνω ανίσωση ισχύει για κάθε σταθερή συνάρτηση g, όπως επίσης και για κάθε σταθμισμένο άθροισμα συναρτήσεων των δύο παραπάνω μορφών και επειδή γνωρίζουμε ότι κάθε μη αρνητική, αύξουσα και κοίλη συνάρτηση είναι ένα όριο συναρτήσεων που γράφονται σαν αθροίσματα του είδους αυτού, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η ζητούμενη ανίσωση.

■

Λήμμα 4. *Μια συνάρτηση κατανομής F ανήκει στην κλάση $NBU(2)$ αν και μόνο αν για κάθε μη αρνητική, αύξουσα και κοίλη συνάρτηση g και $a \geq 0$, $y \geq 0$ ισχύει η ανίσωση*

$$\int_a^\infty g(\max(x,y))dF(x) \leq \overline{F}(a)\int_0^\infty g(\max(x,y))dF(x).$$

Η απόδειξη παραλείπεται (Li (2004)).

Λήμμα 5. *Έστω X_1, X_2 δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F_1, F_2 αντίστοιχα και $\overline{F}(t) = P(\max(X_1, X_2) \geq t)$*. Τότε ισχύει

$$\overline{F_1}(t)F_2(t) + F_1(t)\overline{F_2}(t) \leq \overline{F}(t) \leq \overline{F_1}(t) + \overline{F_2}(t).$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\overline{F}(t) = 1 - P(\max(X_1, X_2) < t) = 1 - F_1(t)F_2(t) = \overline{F_1}(t) + \overline{F_2}(t)F_1(t) = \overline{F_1}(t)F_2(t) + \overline{F_2}(t).$$

Όμως ισχύει

$$F_1(t) \leq 1, \quad F_2(t) \leq 1,$$

οπότε εξάγεται το συμπέρασμα.

■