ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Υπογραφή

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε ένα σημαντικό χαρακτηριστικό ενός συστήματος αξιοπιστίας που ονομάζεται υπογραφή (*signature*). Αρχικά δίνονται οι ορισμοί της συνάρτησης δομής και της μονοτονίας ενός συστήματος, οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την περιγραφή και ερμηνεία της υπογραφής του. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι υπογραφές γνωστών συστημάτων και ο τρόπος υπολογισμού τους. Τέλος δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στις εφαρμογές και χρήσεις της έννοιας της υπογραφής στην Αξιοπιστία, όπως για παράδειγμα στη σύγκριση των χρόνων ζωής διαφόρων συστημάτων.

3.2 Βασικές έννοιες της δομικής αξιοπιστίας

Στην παράγραφο αυτή εισάγουμε θεμελιώδεις έννοιες για τη μελέτη συστημάτων Αξιοπιστίας. Για τη συγγραφή της παραγράφου αυτής σημαντικές πηγές αποτέλεσαν οι Esary & Proschan (1963), Κούτρας (2003), Esary & Marshall (1964) και Barlow & Proschan (1975).

Για την περιγραφή της κατάστασης της i-μονάδας (i=1,2,...,n) ενός συστήματος αξιοπιστίας χρησιμοποιείται συνήθως μια δείκτρια συνάρτηση που ορίζεται ως εξής

$$x_i = \begin{cases} 1 & ,\text{αν η } i-\text{μονάδα λειτουργεί} \\ \\ 0 & ,\text{αν η } i-\text{μονάδα δεν λειτουργεί} \end{cases}$$

Όμοια το σύστημα, ανάλογα με το ποιες μονάδες του λειτουργούν και ποιες όχι, δύναται και αυτό να βρεθεί σε δύο καταστάσεις : λειτουργία ή μη λειτουργία. Για την περιγραφή της κατάστασης του συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια αντίστοιχη δείκτρια συνάρτηση που ορίζεται ως εξής

$$\varphi = \begin{cases} 1 & ,\text{αν το σύστημα λειτουργεί} \\ \\ 0 & ,\text{αν το σύστημα δεν λειτουργεί} \end{cases}$$

Η κατάσταση του συστήματος καθορίζεται πλήρως από τις καταστάσεις των μονάδων που το αποτελούν, δηλαδή

$$\varphi=\varphi\,(\mathbf{x})=\varphi\,(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

όπου $\mathbf{x}$ είναι το διάνυσμα κατάστασης των n μονάδων του συστήματος.

Ορισμός. *Η συνάρτηση* $\varphi:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *η οποία σε κάθε διάνυσμα κατάστασης* $\mathbf{x}$ *των μονάδων του συστήματος απεικονίζει την κατάσταση* $\varphi(\mathbf{x})$ *του συστήματος, λέγεται συνάρτηση δομής* (*structure function*) *του συστήματος.*

Ένα φυσικό σύστημα θα ήταν κάπως ασυνήθιστο (ή πιθανόν φτωχά σχεδιασμένο) αν η βελτίωση της απόδοσης μιας μονάδας του (αυτό θα μπορούσε να γίνει με αντικατάσταση μιας μονάδας που απέτυχε με μια μονάδα που λειτουργεί) θα προκαλούσε χειροτέρευση του συστήματος (αυτό θα σήμαινε μετάβαση του συστήματος από κατάσταση λειτουργίας σε κατάσταση αποτυχίας). Για το λόγο αυτό περιορίζουμε το ενδιαφέρον μας σε συναρτήσεις δομής που είναι αύξουσες ως προς κάθε μονάδα, με την έννοια ότι η βελτίωση μιας μονάδας του συστήματος συνεπάγεται και την παράλληλη βελτίωση (ή τουλάχιστον τη μη χειροτέρευση) του συστήματος. Επιπλέον για να αποφύγουμε μελέτη συστημάτων με ελάχιστη αξία και σημασία, δεν θα μελετήσουμε συστήματα, η κατάσταση των οποίων δεν εξαρτάται από την κατάσταση των μονάδων τους. Έχοντας τα παραπάνω υπόψη φτάνουμε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός. *Ένα σύστημα ονομάζεται μονότονο ή μονότονης δομής* (*coherent structure*) *αν ισχύουν τα εξής*

α. *Η συνάρτηση δομής του* $\varphi(\mathbf{x})$ *είναι αύξουσα, δηλαδή*

$$x_i \le y_i\ ,\ i=1,2,\ldots,n\ \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \le \varphi(y_1, y_2, ..., y_n) = \varphi(\mathbf{y})$$

β. *Κάθε μονάδα του επηρεάζει το σύστημα, δηλαδή η φ δεν είναι σταθερή ως προς κάποια συντεταγμένη.*

Όταν για τα διανύσματα $\mathbf{x,y} \in \{0,1\}^n$ ισχύει $x_i \le y_i$, για κάθε $i=1,2,\ldots,n$ θα γράφουμε $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ συνεπώς η συνθήκη (*α*) παίρνει τη μορφή *:* $\mathbf{x} \le \mathbf{y} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \le \varphi(\boldsymbol{y})$.

Συναρτήσεις δομής που είναι αύξουσες (με την έννοια που δίνεται στη συνθήκη (α) του παραπάνω ορισμού) ονομάζονται ημι-μονότονες (*semi-coherent*). Τα μόνα ημι-μονότονα συστήματα που δεν είναι μονότονα είναι οι δύο περιπτώσεις $\varphi(\mathbf{x}) \equiv 1$ και $\varphi(\mathbf{x}) \equiv 0$, δηλαδή ένα σύστημα που δουλεύει πάντα ή ένα σύστημα που δεν δουλεύει ποτέ. Στις περιπτώσεις αυτές οι μονάδες δεν επηρεάζουν προφανώς την κατάσταση του συστήματος και συνεπώς για τέτοια συστήματα δεν ισχύει η συνθήκη (β) του παραπάνω ορισμού (Ramamurthy (1990)).

Η ιδιότητα της συνάρτησης δομής των μονότονων συστημάτων να είναι αύξουσες φαίνεται να περιγράφει πολλά πραγματικά συστήματα: Εάν επαρκείς μονάδες λειτουργούν για να προκαλούν τη λειτουργία του συστήματος, τότε η λειτουργία επιπλέον μονάδων θα μπορούσε να βελτιώσει μόνο τα πράγματα, ενώ αντίθετα εάν επαρκείς μονάδες έχουν αποτύχει στο να προκαλέσουν την αποτυχία του συστήματος, τότε η αποτυχία και επιπλέον μονάδων θα μπορούσε μόνο να κάνει τα πράγματα χειρότερα.

Η συνθήκη (α) είναι ισοδύναμη με το ότι η φ είναι αύξουσα κατά συντεταγμένες, δηλαδή ότι για όλα τα $i=1,2,\ldots,n$ ισχύει

$$\varphi(0_i, \mathbf{x}) \le \varphi(1_i, \mathbf{x}) \text{ για κάθε } \mathbf{x}.$$

Πράγματι αν η φ είναι αύξουσα κατά συντεταγμένες, τότε για κάθε $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ έχουμε

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \le \varphi(y_1, x_2, x_3, ..., x_n) \le \varphi(y_1, y_2, x_3, ..., x_n) \le ... \le \varphi(y_1, y_2, ..., y_n).$$

Για κάθε μονότονο σύστημα ισχύει

$$\varphi(\mathbf{0})=0,\quad \varphi(\mathbf{1})=1.$$

Πράγματι αν $\varphi(\mathbf{0})=1$, τότε λόγω της μονοτονίας της φ θα ισχύει

$$1=\varphi(\mathbf{0}) \le \varphi(\mathbf{x}) \le 1 \Rightarrow \varphi(\mathbf{x})=1 \text{ για κάθε } \mathbf{x},$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω της συνθήκης (β) (αφού τότε οι μονάδες δεν θα επηρεάζουν το σύστημα, μιας και αυτό θα λειτουργεί πάντα).

Αντίστοιχα αν $\varphi(\mathbf{1})$=0, τότε λόγω της μονοτονίας της φ θα ισχύει ότι

$$0=\varphi(\mathbf{1}) \geq \varphi(\mathbf{x}) \geq 0 \Rightarrow \varphi(\mathbf{x})=0 \text{ για κάθε } \mathbf{x},$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω της συνθήκης (β) (αφού τότε οι μονάδες δεν θα επηρεάζουν το σύστημα, μιας και αυτό δεν θα λειτουργεί ποτέ).

Οι δύο ισότητες, που μόλις αποδείξαμε παραπάνω, δηλώνουν ότι ένα μονότονο σύστημα σίγουρα λειτουργεί αν όλες οι μονάδες του λειτουργούν, ενώ σίγουρα δεν λειτουργεί αν όλες οι μονάδες του δεν λειτουργούν. Στη συνέχεια ακολουθεί μια πρόταση, που αναφέρεται στη συνάρτηση δομής τάξης n, δηλαδή στη συνάρτηση δομής ενός συστήματος με n μονάδες.

Πρόταση 1. *Μια συνάρτηση δομής φ τάξης n+1 είναι ημι-μονότονη (semi-coherent) αν και μόνο αν μπορεί να παρουσιασθεί σαν γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων λ, μ τάξης n όπως φαίνεται στην ακόλουθη σχέση*

$$\varphi(\boldsymbol{x},x_{n+1})=x_{n+1}\lambda(\mathbf{x})+(1-x_{n+1})\mu(\mathbf{x})$$

με τις συναρτήσεις λ,μ να είναι ημι-μονότονες και να ισχύει $\lambda(\mathbf{x}) \geq \mu(\mathbf{x})$ για όλα τα **x**.

Επιπλέον η συνάρτηση δομής φ είναι μονότονη αν και μόνο αν ισχύουν τα παραπάνω και επιπρόσθετα έχουμε ή ότι $\lambda(\mathbf{x})=\mu(\mathbf{x})$ για όλα τα **x** και λ να είναι μονότονη ή ότι $\lambda(\mathbf{x})>\mu(\mathbf{x})$ για κάποια **x**. (Για την απόδειξη ο αναγνώστης παραπέμπεται στους Birnbaum, Esary & Saunders (1961)).

Για την επόμενη πρόταση θα χρειαστούμε τις ακόλουθες έννοιες.

- Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ καλείται ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας (*minimal path vector*) αν $\varphi(\mathbf{x})$=1 και $\varphi(\mathbf{y})$=0, για κάθε **y**<**x**.
- Αν το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ είναι ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας (ε.δ.λ) τότε το $P_x=\{i{:}x_i=1\} \subseteq \{1,2,...,n\}$ καλείται ελάχιστο σύνολο λειτουργίας (ε.σ.λ).
- Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ καλείται ελάχιστο διάνυσμα διακοπής (*minimal cut vector*) αν $\varphi(\mathbf{x})$=0 και $\varphi(\mathbf{y})$=1 , για κάθε **y**>**x**.
- Αν το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ είναι ελάχιστο διάνυσμα διακοπής (ε.δ.δ) τότε το $C_x=\{i: x_i=0\} \subseteq \{1,2,...,n\}$ καλείται ελάχιστο σύνολο διακοπής (ε.σ.δ).

Πρόταση 2. *α. Ένα μονότονο σύστημα λειτουργεί ($\varphi(\mathbf{x})$=1) αν και μόνο αν όλες οι μονάδες κάποιου ελάχιστου συνόλου λειτουργίας λειτουργούν (δηλαδή $\exists P : x_i = 1, \forall i \in P$).*

β. *Ένα μονότονο σύστημα δεν λειτουργεί* ($\varphi(\mathbf{x})=0$) *αν και μόνο αν όλες οι μονάδες κάποιου ελάχιστου συνόλου διακοπής δεν λειτουργούν.* ($\exists C : x_i = 0, \forall i \in C$)

Η τελευταία πρόταση ισχύει μόνο για μονότονα συστήματα. Σε αντίθετη περίπτωση δεν είναι βέβαιο ότι ισχύουν τα παραπάνω συμπεράσματα. Το παράδειγμα δομής συστήματος που ακολουθεί επιβεβαιώνει τα παραπάνω.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1

x_1	x_2	x_3	$\varphi(\mathbf{x})$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα η συνάρτηση δομής του συστήματος δεν είναι μονότονη. Επιπλέον παρατηρούμε ότι το διάνυσμα {0,0,1} είναι ε.δ.λ. και το σύνολο P={3} είναι ε.σ.λ. και συνεπώς θα έπρεπε για κάθε $\mathbf{x}>$ {0,0,1} να ισχύει $\varphi(\mathbf{x})=1$, όμως για το διάνυσμα $\mathbf{x}$={0,1,1} το σύστημα δεν λειτουργεί αφού φ(0,1,1)=0 και συνεπώς δεν ισχύει η πρόταση.

Πρόταση 3. (Gertsbakh (1989)) *Αν* $\boldsymbol{P} = \{P_1, P_2, ..., P_M\}$ *είναι η οικογένεια των ελαχίστων συνόλων λειτουργίας (ε.σ.λ.) μιας μονότονης δομής, τότε η συνάρτηση δομής δίνεται από τον τύπο*

$$\varphi(x) = \max_{j \in \{1,2,...,M\}} \prod_{i \in P_j} x_i = \coprod_{j=1}^{M} \prod_{i \in P_j} x_i = 1 - \prod_{j=1}^{M} (1 - \prod_{i \in P_j} x_i) .$$

Απόδειξη. Έστω $\varphi(\mathbf{x})=1$. Τότε το $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ είναι διάνυσμα λειτουργίας και το $P_x = \{i : x_i = 1\} \subseteq \{1,2,...,n\}$ θα είναι ένα σύνολο λειτουργίας. Επομένως θα υπάρχει κάποιο ελάχιστο σύνολο λειτουργίας. Τότε υπάρχει ένα ελάχιστο σύνολο λειτουργίας P_{j_0}, τέτοιο ώστε να ισχύει $P_q \subseteq P_x$. Τότε θα έχουμε

$$\prod_{i \in P_{j_0}} x_i = 1$$

και είναι φανερό ότι ισχύει

$$\max_{j \in \{1,2,\ldots M\}} \prod_{i \in P_j} x_i = 1 .$$

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει

$$\max_{j \in \{1,2,\ldots M\}} \prod_{i \in P_j} x_i = 1 .$$

Τότε θα υπάρχει j_0, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\prod_{i \in P_{j_0}} x_i = 1 ,$$

δηλαδή

$$x_i = 1, \ \forall i \in P_{j_0} .$$

Αν τώρα ορίσουμε το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{y}$ με τον τύπο

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in P_{j_0} \\ 0, & \text{αν } i \notin P_{j_0} \end{cases}$$

θα έχουμε $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$, οπότε

$$1 \leq \varphi(\mathbf{y}) \leq \varphi(\mathbf{x}) \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) = 1.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει η ισότητα

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max_{j \in \{1,2,\ldots M\}} \prod_{i \in P_j} x_i .$$

Αν ορίσουμε τις δίτιμες συναρτήσεις

$$\gamma_j(\mathbf{x}) = \prod_{i \in P_j} x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν όλες οι μονάδες του } P_j \text{ λειτουργούν} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε η συνάρτηση δομής του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max_{j \in \{1,2,\ldots M\}} \gamma_j(\mathbf{x}) = \coprod_{j=1}^{M} \gamma_j(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{M} [1 - \gamma_j(\mathbf{x})] = 1 - \prod_{j=1}^{M} [1 - \prod_{j \in P_j} x_i]. \quad \blacksquare$$

Πρόταση 4. (Gertsbakh (1989)) *Αν* $\boldsymbol{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_N\}$ *είναι η οικογένεια των ελαχίστων συνόλων διακοπής (ε.σ.δ.) μιας μονότονης δομής, τότε η συνάρτηση δομής δίνεται ως ακολούθως*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min_{j \in \{1,2,\ldots,N\}} (1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)) = \prod_{j=1}^{N} (1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)) = \prod_{j=1}^{N} \coprod_{i \in C_j} x_i \ .$$

Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη της Πρότασης 3. Αν ορίσουμε τις δίτιμες συναρτήσεις

$$\delta_j(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i) = \begin{cases} 0, & \text{αν όλες οι μονάδες του } C_j \text{ έχουν χαλάσει} \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε η συνάρτηση δομής του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min_{j \in \{1,2,\ldots \mathrm{N}\}} \delta_j(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{N} \delta_j(\mathbf{x}).$$

Αν φ είναι συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος με $I_n=\{1,2,\ldots,n\}$, είναι εύκολο να δειχθεί ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$\varphi_D(\mathbf{x}) = 1 - \varphi_D(\mathbf{1}-\mathbf{x})$$

είναι επίσης συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος με το ίδιο σύνολο μονάδων I_n . Το τελευταίο σύστημα λέγεται δυϊκό (*dual*) σύστημα του αρχικού, το οποίο θα ονομάζουμε πρωτεύον σύστημα. Με άλλα λόγια ισχύει η ακόλουθη πρόταση

Η συνάρτηση φ *είναι μονότονη* $\Leftrightarrow$ *η συνάρτηση* φ_D *είναι μονότονη.*

Η ιδέα του δυϊκού συστήματος είναι χρήσιμη στη θεωρία Αξιοπιστίας, όπως, για παράδειγμα, στην ανάλυση συστημάτων με μονάδες που εκτίθενται σε δύο είδη αποτυχίας.

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η κατάσταση κάθε μονάδας του συστήματος που μελετάμε, είναι τυχαία μεταβλητή και ότι με βάση κάποια στατιστική μελέτη έχουν εκτιμηθεί οι πιθανότητες λειτουργίας όλων των μονάδων σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Εκείνο που μας ενδιαφέρει τώρα είναι η μελέτη της πιθανότητας λειτουργίας του συστήματος, η οποία ονομάζεται αξιοπιστία (*reliability*) του συστήματος. Αντίστοιχα η πιθανότητα λειτουργίας της i-μονάδας του συστήματος, ονομάζεται και αξιοπιστία της μονάδας και θα συμβολίζεται με p_i , i=1,2,…,n, δηλαδή στόχος μας είναι να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης

$$R = R(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Έστω ένα σύστημα n μονάδων με συνάρτηση δομής φ, και X_i μια τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει την κατάσταση της i-μονάδας του συστήματος, για i=1,2,…,n, κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, δηλαδή

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } i-\text{μονάδα λειτουργεί τη στιγμή } t \\ 0, & \text{αν η } i-\text{μονάδα δεν λειτουργεί τη στιγμή } t \end{cases}$$

Η πιθανότητα λειτουργίας p_i της i-μονάδας του συστήματος, δηλαδή η αξιοπιστία της μονάδας, θα είναι ίση με $P(X_i$=1), ή ισοδύναμα με $E(X_i)$. Άρα έχουμε

$$p_i = P(X_i = 1) = E(X_i).$$

(Στην περίπτωση όπου οι μονάδες του συστήματος είναι ανεξάρτητες και ισχύει ότι p_i=p, για i=1,2,…,n, θα λέμε ότι έχουμε ένα σύστημα i.i.d (*identically*, *independently distributed*), δηλαδή σύστημα με όμοιες και ανεξάρτητες μονάδες).

Το σύστημα, ανάλογα με το ποιες μονάδες του λειτουργούν ή όχι τη χρονική στιγμή t, είτε θα βρίσκεται σε λειτουργία είτε σε μη λειτουργία. Η συνάρτηση δομής για τη χρονική στιγμή t είναι τυχαία μεταβλητή και μάλιστα θα εξαρτάται από τις τυχαίες μεταβλητές X_1,X_2,…X_n , δηλαδή

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{αν το σύστημα λειτουργεί τη στιγμή } t \\ \\ 0, & \text{αν το σύστημα δεν λειτουργεί τη στιγμή } t \end{cases}$$

Αν συμβολίσουμε με $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$ το τυχαίο διάνυσμα κατάστασης των μονάδων και με $\varphi(\boldsymbol{X})=\varphi(X_1,X_2,...,X_n)$ την κατάσταση του συστήματος, η αξιοπιστία R (*reliability)* του συστήματος τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τον τύπο

$$R=E(\varphi(\mathbf{X}))=1\cdot P(\varphi(\mathbf{X})=1)+0\cdot P(\varphi(\mathbf{X})=0)=E(\varphi(X_1, X_2,..., X_n)).$$

Η πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο

$$F=1\text{-}R=1\text{-}E(\varphi(\mathbf{X}))=E(1\text{-}\varphi(\mathbf{X}))=P(\varphi(\mathbf{X})=0)$$

και ονομάζεται αναξιοπιστία του συστήματος.

Πρόταση 5. *Έστω R η αξιοπιστία ενός μονότονου συστήματος με n ανεξάρτητες μονάδες. Τότε η συνάρτηση R είναι αύξουσα ως προς το διάνυσμα* $\mathbf{p}=(p_1, p_2,..., p_n)$, *όπου p_i η αξιοπιστία της i-μονάδας.*

Απόδειξη. (Gertsbakh (1989)) Για τη συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος έχουμε

$$R(\mathbf{p}) = E[\varphi(\boldsymbol{X})] = P(\varphi(\boldsymbol{X})=1) = p_i P(\varphi(\boldsymbol{X})=1 \,/\, X_i=1) + (1\text{-}p_i)\, P(\varphi(\boldsymbol{X})=1 \,/\, X_i=0) =$$

$$p_i P(\varphi(1_i\,;\boldsymbol{X})=1 \,/\, X_i=1) + (1\text{-}p_i)\, P(\varphi(0_i\,;\boldsymbol{X})=1 \,/\, X_i=0) =$$

$$p_i P(\varphi(1_i\,;\boldsymbol{X})=1) + (1\text{-}p_i)\, P(\varphi(0_i\,;\boldsymbol{X})=1) =$$

$$p_i E[\varphi(1_i\,;\boldsymbol{X})\text{-}\,\varphi(0_i\,;\boldsymbol{X})]+E[\varphi(0_i\,;\boldsymbol{X}].$$

Ο συντελεστής του p_i είναι μη αρνητικός επειδή η συνάρτηση φ είναι μια μονότονη συνάρτηση. Συνεπώς από τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι η συνάρτηση $R(\mathbf{p})$ είναι αύξουσα ως προς κάθε p_i .

■

Πρόταση 6. *Η αξιοπιστία R ενός μονότονου i.i.d συστήματος, το οποίο δεν έχει σύνολα λειτουργίας ή διακοπής μεγέθους 1, είναι μια συνάρτηση S-μορφής ως προς την αξιοπιστία p των μονάδων του. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια τιμή p_o με $0<p_o<1$ τέτοια ώστε*

- $R(p_o)=p_o$

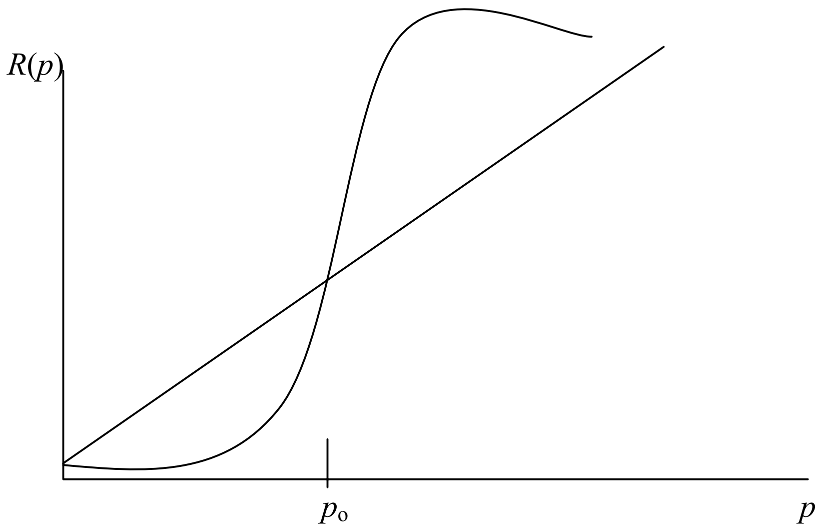
- $R(p) < p$ για $0 < p < p_o$
- $R(p) > p$ για $p_o < p < 1$.

Η απόδειξη παραλείπεται (Barlow and Proschan (1975)).

Η ονομασία της συνάρτησης με S-μορφή οφείλεται στη γραφική της παράσταση, η οποία θυμίζει το λατινικό γράμμα S (σχήμα 3.1). Οι Birnbaum, Esary και Saunders (1961) υπολόγισαν την τιμή p_o για διάφορα συστήματα, λύνοντας την εξίσωση

$$R(p) = p \text{ , για } p \in (0,1).$$

ΣΧΗΜΑ 3.1



3.3 Η έννοια της υπογραφής ενός μονότονου συστήματος

Θεωρούμε ένα μονότονο σύστημα με n ανεξάρτητες και όμοιες μονάδες (i.i.d. system), οι χρόνοι ζωής $X_1, X_2, \ldots, X_n$ των οποίων προέρχονται από μια συνεχή κατανομή F. Αν T είναι ο χρόνος ζωής του συστήματος, τότε η αποτυχία του συστήματος θα συμπίπτει πάντα με το χρόνο ζωής της i-οστής μονάδας για κάποιο $i \in \{1,2,...,n\}$. Συγκεκριμένα αν $X_{(i)}$ δηλώνει τον i-οστό μικρότερο χρόνο ζωής μονάδας, για i=1,2,...,n, τότε έχουμε ότι ο χρόνος ζωής του συστήματος $T \in \{X_{(1)}, X_{(2)},..., X_{(n)}\}$ με πιθανότητα 1.

Ορισμός. *Υπογραφή (signature) ενός μονότονου i.i.d συστήματος με n μονάδες ονομάζεται το διάνυσμα πιθανότητας* $\mathbf{s}$, *όπου* $\mathbf{s}^t = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ *με*

$$s_i = P(T = X_{(i)}), \quad i=1,2,\ldots,n$$

όπου $\{X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}\}$ *είναι το διατεταγμένο τυχαίο δείγμα από τη συνεχή κατανομή* F *των χρόνων ζωής των μονάδων του συστήματος.*

Η ιδέα της υπογραφής ενός συστήματος αναπτύχθηκε φυσιολογικά από μια συγκεκριμένη ιδιότητα των μονότονων συστημάτων, στα οποία οι μονάδες είναι όμοιες και ανεξάρτητες. Για τέτοια συστήματα, η πιθανότητα ότι το σύστημα αποτυγχάνει στην i-οστή αποτυχία μονάδας δεν εξαρτάται από την κατανομή F των χρόνων ζωής των μονάδων. Αντίθετα η πιθανότητα αυτή είναι συνάρτηση μόνο του σχεδιασμού του συστήματος.

Το γεγονός ότι η υπογραφή **s** εξαρτάται μόνο από το σύστημα, και όχι από την κατανομή F, είναι συνέπεια του γεγονότος ότι κάθε μία από τις $n!$ διατάξεις των χρόνων ζωής $X_1, X_2, ..., X_n$ των μονάδων του συστήματος είναι το ίδιο πιθανόν να συμβεί υπό την i.i.d. υπόθεση. Συνεπώς η πιθανότητα ότι η αποτυχία της i-οστής μονάδας είναι μοιραία για το σύστημα εξαρτάται αποκλειστικά από την πιθανότητα ότι η τελευταία μονάδα που λειτουργεί σε ένα ελάχιστο σύνολο διακοπής (ε.σ.δ.) είναι ταυτόχρονα η i-οστή μονάδα που αποτυγχάνει γενικά στο σύστημα. Με άλλα λόγια για να υπολογισθεί η υπογραφή **s** ενός συστήματος αρκεί να εξετασθούν τα ε.σ.δ. και να μετρηθούν πόσοι συνδυασμοί ανάμεσα στις ισοπίθανες μεταθέσεις των $X_1, X_2, ..., X_n$ συμπίπτουν ακριβώς με την αποτυχία κάποιου ε.σ.δ. κατά το συμβάν $X_{(i)}$.

Επομένως εναλλακτικά η υπογραφή **s** ενός μονότονου συστήματος με n μονάδες μπορεί να δοθεί αναφορικά με τις διατάξεις των χρόνων ζωής $X_1, X_2, \ldots, X_n$ των μονάδων του συστήματος ως εξής.

Ορισμός 2. *Υπογραφή (signature) ενός μονότονου i.i.d συστήματος με n μονάδες ονομάζεται το διάνυσμα πιθανότητας* **s**, *όπου* $\mathbf{s^t} = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ *με*

$$s_i = \frac{A}{n!}$$

όπου A *είναι το πλήθος των μεταθέσεων για τις οποίες η* $i-$*οστή αποτυχία προκαλεί αποτυχία του συστήματος.*

Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε την έννοια των ελαχίστων διατεταγμένων συνόλων διακοπής, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε σε ένα διαφορετικό ορισμό της υπογραφής που θα δώσουμε στη συνέχεια αλλά και σε προτάσεις σε επόμενες παραγράφους.

Ορισμός. *Έστω ένα μονότονο σύστημα με n μονάδες και* $C=\{c_1,c_2,...,c_n\}$ *το σύνολο που δηλώνει τις μονάδες αυτές. Ένα υποσύνολο* $K^* =\{c_{\pi(1)},c_{\pi(2)},...,c_{\pi(\kappa)}\}$ *(όπου π είναι κάποια μετάθεση των* $1,2,...,n$ *με* $k \le n$*) του συνόλου C ορίζεται ως διατεταγμένο σύνολο διακοπής αν οι σχέσεις* $X_{(1)}=X_{\pi(1)},...,X_{(\kappa)}=X_{\pi(\kappa)}$ *υποδηλώνουν για το χρόνο ζωής του συστήματος T ότι ισχύει* $T \le X_{\pi(k)}$*. Επιπλέον το σύνολο* K^* *είναι ελάχιστο διατεταγμένο σύνολο διακοπής αν είναι διατεταγμένο σύνολο διακοπής αλλά το σύνολο* $\{c_{\pi(1)},c_{\pi(2)},...,c_{\pi(\kappa-1)}\}$ *δεν είναι.*

Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος στον Ορισμό 2 της υπογραφής που δόθηκε παραπάνω με την ποσότητα $(n-i)!$, προκύπτει ένας ισοδύναμος ορισμός της υπογραφής που χρησιμοποιεί τα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής του συστήματος, όπως φαίνεται στον ακόλουθο τύπο

$$s_i = \frac{\#\ \text{ελαχίστων διατεταγμένων συνόλων διακοπής μεγέθους } i}{(n)_i}$$

όπου $(n)_i = \dfrac{n!}{(n-i)!}$.

Στην εναλλακτική αυτή έκφραση για τις συντεταγμένες s_i της υπογραφής ενός συστήματος λαμβάνονται υπόψη μόνο οι μεταθέσεις των i από τις n μονάδες. Συνεπώς μπορούμε να βλέπουμε την i-οστή συντεταγμένη της υπογραφής ενός συστήματος σαν την αναλογία των διατεταγμένων υποσυνόλων μεγέθους i του $\{1,2,...,n\}$, που είναι ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής. Με άλλα λόγια για να υπολογίσουμε την υπογραφή ενός συστήματος πρέπει πρώτα να βρούμε τα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής και στη συνέχεια με βάση τον τελευταίο τύπο να προσδιορίσουμε όλες τις συντεταγμένες s_i. Τα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής είναι σύνολα που περιέχουν k μονάδες, ώστε ο χρόνος ζωής του συστήματος να μην υπερβαίνει τον k-οστό διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας του συγκεκριμένου συνόλου και ταυτόχρονα αφαιρώντας τη μονάδα με τον k-οστό διατεταγμένο χρόνο, το σύνολο να παύει να είναι διατεταγμένο σύνολο διακοπής. Παράδειγμα υπολογισμού της υπογραφής συστήματος με χρήση του τελευταίου ορισμού δίνεται στην επόμενη παράγραφο.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε μια θεμελιώδη ιδιότητα της υπογραφής **s** ενός συστήματος που δηλώνει ότι αν έχουμε όμοιες και ανεξάρτητες μονάδες από μια κατανομή F, τότε η κατανομή του χρόνου ζωής T του συστήματος μπορεί να εκφρασθεί ως μια συνάρτηση της υπογραφής **s** και της κατανομής F.

Πρόταση 1. (Kochar, Mukerjee & Samaniego (1999)) *Έστω* $X_1, X_2,..., X_n$ *οι χρόνοι ζωής των n όμοιων και ανεξάρτητων μονάδων ενός μονότονου συστήματος και έστω T ο χρόνος ζωής του συστήματος. Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση*

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j}$$

όπου $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$.

Απόδειξη. Έστω π μία μετάθεση των θετικών ακεραίων $\{1,2,...,n\}$ και A_i το σύνολο των μεταθέσεων για τις οποίες $T=X_{(i)}$, δηλαδή για τις οποίες $T= X_{\pi_i}$, όπου $X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < ... < X_{\pi_n}$. Έχουμε τα εξής

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} P(T > t, \pi \in A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi \in A_i} P(T > t, X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < ... < X_{\pi_n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi \in A_i} P(X_{\pi_i} > t, X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < ... < X_{\pi_n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi \in A_i} P(X_{(i)} > t, X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < ... < X_{\pi_n}).$$

Όμως τα ενδεχόμενα $\{X_{(i)}>t\}$ και $\{X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < ... < X_{\pi_n}\}$ που υπάρχουν στην τελευταία ισότητα είναι ανεξάρτητα (Randles & Wolfe (1991)), οπότε η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} P(X_{(i)} > t) \sum_{\pi \in A_i} P(X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < ... < X_{\pi_n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X_{(i)} > t) \cdot P(\pi \in A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot P(X_{(i)} > t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j} .$$ ■

Επειδή το πλήθος των μονότονων συστημάτων με n μονάδες είναι αρκετά μεγάλο (αυξάνεται εκθετικά με το n), αποτελέσματα που αποδεικνύουν σχέσεις ανάμεσα σε συγκεκριμένα συστήματα προσφέρουν σημαντικά για τη μείωση του υπολογιστικού βάρους των υπογραφών όλων των συστημάτων. Η ακόλουθη πρόταση μειώνει το βάρος αυτό στο μισό, δίνοντας μια σχέση που συνδέει την υπογραφή ενός συστήματος με την υπογραφή του αντίστοιχου δυϊκού του.

Πρόταση 2. (Kochar, Mukerjee & Samaniego (1999)) *Έστω* $\mathbf{s}$ *η υπογραφή ενός συστήματος με n όμοιες και ανεξάρτητες μονάδες και συνάρτηση δομής* φ *και έστω το δυϊκό του σύστημα με υπογραφή* $\mathbf{s}^D$ *και συνάρτηση δομής* φ^D. *Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση*

$$s_i = s_{n-i+1}^D, \quad \text{για } i=1,2,\ldots,n.$$

Απόδειξη. Έστω $X_1, X_2,..., X_n$ οι χρόνοι ζωής των μονάδων του συστήματος και T, T^D οι χρόνοι ζωής του πρωτεύοντος και του δυϊκού συστήματος αντίστοιχα. Για να αποδείξουμε την πρόταση αρκεί να δείξουμε την ακόλουθη ισοδυναμία

$$T=X_{(i)} \text{ αν και μόνο αν } T^D=X_{(n-i+1)}.$$

Έστω π μία μετάθεση των θετικών ακεραίων $\{1,2,...,n\}$ και A_i το σύνολο των μεταθέσεων για τις οποίες $T = X_{\pi_i}$, όπου $X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < ... < X_{\pi_n}$. Δηλαδή έχουμε ότι

$$\pi \in A_i \Leftrightarrow T = X_{(i)}.$$

Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο A_i δεν είναι κενό. Για $\pi \in A_i$, θεωρούμε το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}_\pi \in \{0,1\}^n$ των μονάδων του συστήματος τη χρονική στιγμή της αποτυχίας του, δηλαδή το $\mathbf{x}_\pi$ ορίζεται ως εξής

$$x_{\pi_j} = \begin{cases} 1, & \text{αν } j > i \\ 0, & \text{αν } j \le i. \end{cases}$$

Συνεπώς το $\mathbf{x}_\pi$ έχει ακριβώς i το πλήθος μηδενικά και $(n\text{-}i)$ το πλήθος άσσους. Επιπροσθέτως

$$\varphi(\mathbf{x}_\pi)=0 \quad \text{και} \quad \varphi(\mathbf{y})=\begin{cases} 1 & ,\alpha\nu \quad \boldsymbol{y} > \boldsymbol{x}_\pi \\ 0 & ,\alpha\nu \quad \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{x}_\pi \end{cases}$$

Το διάνυσμα (**1-x**$_\pi$) έχει, από τον ορισμό του, (n-i) το πλήθος μηδενικά και i το πλήθος άσσους. Επιπροσθέτως

$$\varphi^D(1-x_\pi) = 1-\varphi(x_\pi) = 1$$

και

$$\varphi^D(\mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{1} & ,\alpha\nu \quad \boldsymbol{y} \geq \mathbf{1}-\boldsymbol{x}_\pi \\ \mathbf{0} & ,\alpha\nu \quad \boldsymbol{y} < \mathbf{1}-\boldsymbol{x}_\pi \end{cases}$$

Από την τελευταία σχέση για τη συνάρτηση δομής φ^D του δυϊκού συστήματος, συμπεραίνουμε ότι η (n-i+1)-οστή αποτυχία μονάδας θα προκαλέσει και την αποτυχία του δυϊκού συστήματος ($T^D = X_{\pi_{n-i+1}}$). Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\pi \in A_i$, θα έχουμε $T^D = X_{(n-i+1)}$. Αυτό σημαίνει ότι αν $s_i = P(T = X_{(i)})$ και $s_i^D = P(T^D = X_{(i)})$ τότε

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = (s_n^D, s_{n-1}^D, ..., s_1^D),$$

δηλαδή

$$s_i = s_{n-i+1}^D \quad \text{για } i=1,2,...,n. \qquad \blacksquare$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια πρόταση, η οποία τεκμηριώνει τη σχέση που έχει η υπογραφή ενός συστήματος με τα σύνολα λειτουργίας του. Για ένα μονότονο σύστημα με χρόνο ζωής T ορίζουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{A}_T = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ όπου

$$a_i = \frac{\#\ \textit{συνόλων λειτουργίας μεγέθους } i}{\binom{n}{i}}$$

Με άλλα λόγια το a_i εκφράζει την αναλογία (ποσοστό) των υποσυνόλων μεγέθους i, τα οποία είναι σύνολα λειτουργίας για το σύστημα.

Πρόταση 3. (Boland (2001)) *Έστω ένα μονότονο i.i.d. σύστημα με n μονάδες και υπογραφή* $\mathbf{s}^t=(s_1,...s_n)$. *Τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος* **s** *συνδέονται με τις αντίστοιχες του διανύσματος* $\boldsymbol{A}_T=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ *με την ακόλουθη σχέση*

$$a_i = \sum_{j=n-i+1}^{n} s_j, \quad i = 1,2,...,n$$

Αντίστροφα, οι ποσότητες s_j εκφράζονται μέσω των a_j από τη σχέση

$$s_{n-j} = a_{j+1} - a_j \quad , j = 0,1,...,n-1 .$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1 της Παραγράφου 3.3 γνωρίζουμε ότι η αξιοπιστία του συστήματος δίνεται ως ακολούθως

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j} ,$$

ή ισοδύναμα

$$P(T > t) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=n-j+1}^{n} s_i) \binom{n}{j} (F(t))^{n-j} (\overline{F}(t))^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=n-j+1}^{n} s_i) \binom{n}{j} (1-p)^{n-j} p^j \tag{1}$$

Όμως από τον ορισμό της ποσότητας a_i συμπεραίνουμε ότι το γινόμενο $a_i \binom{n}{i}$ δηλώνει το πλήθος των συνόλων λειτουργίας μεγέθους *i*, για *i*=1,2,…,*n*. Συνεπώς η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί να εκφρασθεί ως εξής

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \binom{n}{i} (\overline{F}(t))^i (F(t))^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \tag{2}$$

όπου *p* είναι η αξιοπιστία της κάθε μονάδας.

Από τις σχέσεις (1),(2) ταυτίζοντας τους συντελεστές μέσα στα αθροίσματα και λαμβάνοντας υπόψη ότι a_o=0 παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση

$$a_i = \sum_{j=n-i+1}^{n} s_j , \quad i = 1,2,...,n .$$

Η αντίστροφη σχέση

$$s_{n-j} = a_{j+1} - a_j \quad , j = 0,1,\ldots,n-1$$

είναι προφανής, αφού

$$a_{j+1} - a_j = \sum_{i=n-j-1+1}^{n} s_i - \sum_{i=n-j+1}^{n} s_i = \sum_{i=n-j}^{n} s_i - \sum_{i=n-j+1}^{n} s_i =$$

$$= (s_{n-j} + s_{n-j+1} + s_{n-j+2} + \ldots + s_n) - (s_{n-j+1} + s_{n-j+2} + \ldots + s_n) = s_{n-j}\,. \qquad \blacksquare$$

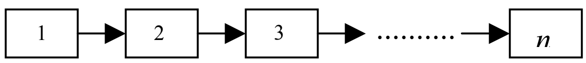
3.4 Η υπογραφή γνωστών συστημάτων

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τον τρόπο υπολογισμού της υπογραφής αρκετών γνωστών συστημάτων, όπως του σειριακού, του παράλληλου, της γέφυρας και άλλων. Για την περάτωση της συγκεκριμένης παραγράφου ιδιαίτερα χρήσιμο υπήρξε το σύγγραμμα των Soyer, Mazzuchi & Singpurwalla (2004).

α. Σειριακό σύστημα (**SS**, *Serial System*)

Το σειριακό σύστημα αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον μία μονάδα του αποτύχει ή ισοδύναμα λειτουργεί όταν όλες οι μονάδες του λειτουργούν. Η διάταξη του σειριακού συστήματος φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

ΣΧΗΜΑ 3.2



Το μοναδικό ε.σ.λ. του σειριακού συστήματος είναι το $\{1,2,\ldots,n\}$, ενώ ε.σ.δ. είναι όλα τα μονοσύνολα $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{n\}$, δηλαδή έχουμε $\mathbf{P} = \{\{1,2,\ldots,n\}\}$ και $\mathbf{C} = \{\{1\}, \{2\},\ldots, \{n\}\}$.

Η συνάρτηση δομής του σειριακού συστήματος δίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης 3 της Παραγράφου 3.2 από τον ακόλουθο τύπο

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{1}(1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = 1 - (1 - x_1 x_2 \ldots x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n\,.$$

Η αξιοπιστία του σειριακού συστήματος δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

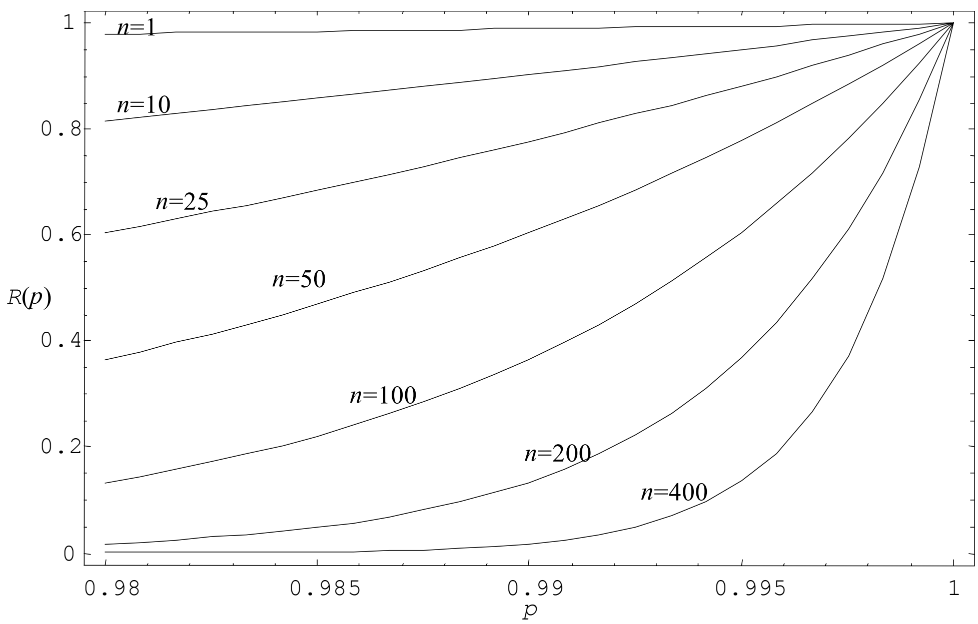
$$R = E(\phi(\mathbf{X})) = E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) = p_1 p_2 \ldots p_n = R_{SS}\,.$$

Στην ειδική περίπτωση ενός i.i.d. σειριακού συστήματος με n μονάδες (οπότε θα ισχύει $p_i = p, \quad i = 1,2,...,n$) η συνάρτηση αξιοπιστίας παίρνει τη μορφή

$$R(p) = R_{SS} = p^n .$$

Η αξιοπιστία ενός τέτοιου συστήματος μπορεί να πάρει υψηλές τιμές μόνο στην περίπτωση όπου οι μονάδες από τις οποίες αποτελείται έχουν πολύ υψηλή αξιοπιστία, ιδιαίτερα αν το πλήθος των μονάδων του είναι μεγάλο. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και γραφικά από το ακόλουθο διάγραμμα, όπου παριστάνεται γραφικά η αξιοπιστία ενός σειριακού συστήματος με n μονάδες ως προς την αξιοπιστία p της κάθε μονάδας του.

ΣΧΗΜΑ 3.3



Επιπλέον να επισημάνουμε ότι σε περίπτωση που έχουμε ένα σειριακό σύστημα n μονάδων με συσχετισμένους χρόνους ζωής, τότε ο υπολογισμός της αξιοπιστίας του συστήματος θα πρέπει να γίνει λαμβάνοντας υπόψη τη n-διάστατη κατανομή τους. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι αν η συσχέτιση ανάμεσα στις n μονάδες είναι θετική, τότε η αξιοπιστία του συστήματος είναι μεγαλύτερη από αυτή του i.i.d σειριακού συστήματος, δηλαδή στην πραγματικότητα υπερβαίνει την αξιοπιστία που προβλέπει το μοντέλο, το οποίο έχει υποθέσει ανεξάρτητες και όμοιες μονάδες (Meeker & Escobar (1998)).

Η υπογραφή **s** του ενός i.i.d. σειριακού συστήματος με n μονάδες δίνεται από τον τύπο

$$s_{SS}^t = (1,0,0,...,0).$$

Πράγματι η πιθανότητα ότι ο χρόνος ζωής του i.i.d σειριακού συστήματος ταυτίζεται με την πρώτη αποτυχία μονάδας του συστήματος είναι ίση με 1 ($P(T = X_{(1)}) = 1$), ενώ η πιθανότητα για το σύστημα να λειτουργεί και μετά από την αποτυχία μιας μονάδας του είναι ίση με 0, συνεπώς και η πιθανότητα ο χρόνος ζωής του συστήματος να ταυτιστεί με τον *i*-οστό διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας είναι ίση με μηδέν για όλα τα $i \geq 2$.

Εναλλακτικά, παρατηρώντας ότι για το σειριακό σύστημα υπάρχει ένα μόνο σύνολο λειτουργίας, το $\{1,2,...,n\}$, θα έχουμε

$$a_1 = 0, a_2 = 0,..., a_{n-1} = 0, a_n = 1,$$

οπότε εφαρμόζοντας την Πρόταση 3 της Παραγράφου 3.3 βρίσκουμε

$$s_n = 0, s_{n-1} = a_2 - a_1 = 0,..., s_2 = a_{n-1} - a_{n-2} = 0, s_1 = a_n - a_{n-1} = 1 - 0 = 1.$$

Επομένως η υπογραφή **s** του ενός i.i.d. σειριακού συστήματος με *n* μονάδες δίνεται από τον τύπο

$$s_{SS}^t = (1,0,0,...,0).$$

Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε την υπογραφή του συστήματος με χρήση των ελαχίστων διατεταγμένων συνόλων διακοπής. Το σειριακό σύστημα με $n = 5$ μονάδες δεν έχει ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής μεγέθους 5,4,3 ή 2. Τα μόνα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής είναι τα μονοσύνολα $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$ και $\{5\}$. Συνεπώς έχουμε

$$s_1 = \frac{5}{\frac{5!}{(5-1)!}} = \frac{5}{\frac{120}{24}} = \frac{5}{5} = 1, s_2 = \frac{0}{\frac{5!}{(5-2)!}} = 0, s_3 = \frac{0}{\frac{5!}{(5-3)!}} = 0, s_4 = \frac{0}{\frac{5!}{(5-4)!}} = 0, s_5 = \frac{0}{\frac{5!}{(5-5)!}} = 0$$

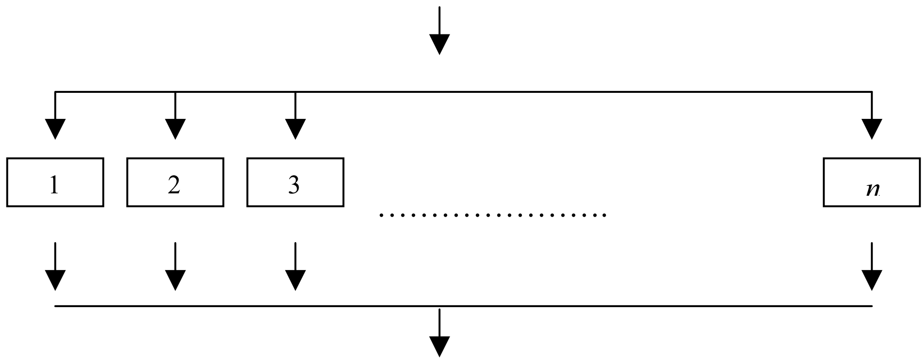
οπότε το διάνυσμα της υπογραφής είναι το ακόλουθο

$$s_{SS}^t = (1,0,0,0,0).$$

β. Παράλληλο σύστημα (**PS**, *Parallel System*)

Το παράλληλο σύστημα αποτυγχάνει όταν όλες οι μονάδες του αποτύχουν ή ισοδύναμα λειτουργεί όταν τουλάχιστον μία μονάδα του λειτουργεί. Η διάταξη του παράλληλου συστήματος φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

ΣΧΗΜΑ 3.4



Τα ε.σ.λ. είναι όλα τα μονοσύνολα {1}, {2}, ..., {*n*}, ενώ το μοναδικό ε.σ.δ. του παράλληλου συστήματος είναι το {1,2,...,*n*}, δηλαδή έχουμε **P** = {{1}, {2}, ..., {*n*}} και **C**={{1,2,...,*n*}}.

Η συνάρτηση δομής του παράλληλου συστήματος δίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης 3 της Παραγράφου 3.2 από τον ακόλουθο τύπο

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = \prod_{j=1}^{1}(1 - \prod_{i \in C_j}(1 - x_i)) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_n) .$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\phi_{\boldsymbol{PS}}(\boldsymbol{x}) = 1 - \phi_{\boldsymbol{SS}}(1 - \boldsymbol{x}) ,$$

συνεπώς το σειριακό είναι το δυϊκό του παράλληλου συστήματος και αντίστροφα.

Η αξιοπιστία του παράλληλου συστήματος δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$R = E(\phi(\mathbf{X})) = E[1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - X_i)] = 1 - E[\prod_{i=1}^{n}(1 - X_i)] = 1 - \prod_{i=1}^{n} E(1 - X_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - E(X_i)] =$$

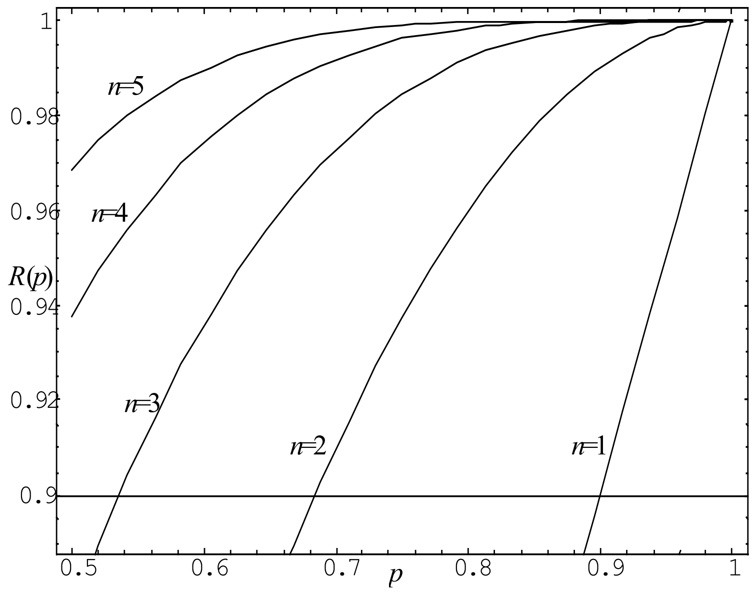
$$= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)...(1 - p_n) = R_{PS} .$$

Στην ειδική περίπτωση ενός i.i.d. παράλληλου συστήματος με n μονάδες (οπότε θα ισχύει $p_i = p, \quad i = 1,2,...,n$) η συνάρτηση αξιοπιστίας θα είναι η εξής

$$R(p) = R_{PS} = 1 - (1-p)^n .$$

Στο ακόλουθο σχήμα, δίνεται γραφικά η αξιοπιστία ενός παράλληλου συστήματος με n μονάδες, ως προς την αξιοπιστία p της κάθε μονάδας του. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το πλήθος των μονάδων του συστήματος, τόσο αυξάνεται και η αξιοπιστία του.

ΣΧΗΜΑ 3.5



Το παράλληλο σύστημα έχει σημαντικά πλεονεκτήματα ως προς την κατασκευή του και την αξιοπιστία του, ωστόσο σε περίπτωση όπου υπάρχει θετική συσχέτιση ανάμεσα στις μονάδες του τα πλεονεκτήματα αυτά υποβαθμίζονται σε μεγάλο βαθμό.

Η υπογραφή **s** του ενός i.i.d. παράλληλου συστήματος με n μονάδες δίνεται από τον τύπο

$$s_{PS}^t = (0,0,0,...,1) .$$

Πράγματι η πιθανότητα ότι ο χρόνος ζωής του i.i.d παράλληλου συστήματος ταυτίζεται με κάποιον χρόνο ζωής X_i μιας μονάδας για όλα τα i: $1 \le i \le n-1$ είναι ίση με μηδέν , δηλαδή $P(T = X_{(i)}) = 0$, όταν $1 \le i \le n-1$, ενώ γνωρίζουμε ότι το σύστημα παύει να λειτουργεί όταν αποτύχει και η τελευταία μονάδα του, συνεπώς η πιθανότητα ότι ο χρόνος ζωής του i.i.d παράλληλου συστήματος ταυτίζεται με τον τελευταίο διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας είναι ίση με 1, δηλαδή $P(T = X_{(n)}) = 1$.

Εναλλακτικά, παρατηρώντας ότι για το παράλληλο σύστημα υπάρχουν $\binom{n}{i}$ σύνολα λειτουργίας, για όλα τα $i = 1,2,...,n$, ενώ για $i = 0$ δεν υπάρχει σύνολο λειτουργίας με μηδενικό μέγεθος, θα έχουμε

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, ..., a_{n-1} = 1, a_n = 1,$$

οπότε εφαρμόζοντας την Πρόταση 3 της Παραγράφου 3.3 βρίσκουμε

$$s_n = a_1 - a_0 = 1 - 0 = 1, s_{n-1} = a_2 - a_1 = 0, ..., s_2 = a_{n-1} - a_{n-2} = 0, s_1 = a_n - a_{n-1} = 0 - 0 = 0.$$

Επομένως η υπογραφή **s** του ενός i.i.d. παράλληλου συστήματος με *n* μονάδες δίνεται από τον τύπο

$$s_{PS}^t = (0,0,0,...,1).$$

Επίσης, παρατηρώντας ότι το παράλληλο σύστημα είναι δυϊκό του σειριακού συστήματος, θα μπορούσαμε με χρήση της Πρότασης 2 της Παραγράφου 3.3 να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες s_i της υπογραφής του παράλληλου συστήματος

$$s_1^{PS} = s_{n-1+1}^{SS} = 0,\ s_2^{PS} = s_{n-2+1}^{SS} = 0, ...,\ s_{n-1}^{PS} = s_{n-n+1+1}^{SS} = 0, s_n^{PS} = s_1^{SS} = 1,$$

οπότε το διάνυσμα της υπογραφής του παράλληλου συστήματος θα δίνεται από τη σχέση

$$s_{PS}^t = (0,0,0,...,1).$$

Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε την υπογραφή του συστήματος με χρήση των ελαχίστων διατεταγμένων συνόλων διακοπής. Το παράλληλο σύστημα με $n = 5$ μονάδες δεν έχει ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής μεγέθους 4,3,2 ή 1. Τα μόνα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής είναι το σύνολο {1,2,3,4,5} και όλες οι δυνατές μεταθέσεις των στοιχείων του, δηλαδή το πλήθος τους είναι 5!. Συνεπώς έχουμε

$$s_1 = \frac{0}{\frac{5!}{(5-1)!}} = 0, s_2 = \frac{0}{\frac{5!}{(5-2)!}} = 0, s_3 = \frac{0}{\frac{5!}{(5-3)!}} = 0, s_4 = \frac{0}{\frac{5!}{(5-4)!}} = 0, s_5 = \frac{5!}{\frac{5!}{(5-5)!}} = 1,$$

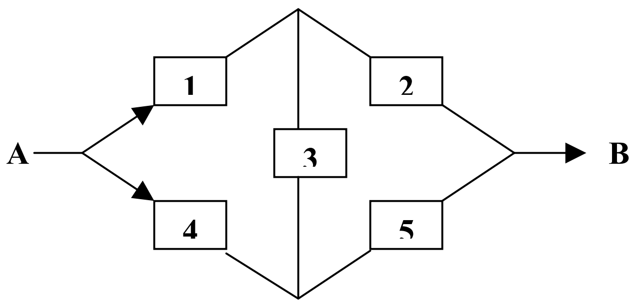
οπότε το διάνυσμα της υπογραφής είναι το ακόλουθο

$$s_{PS}^{t} = (0,0,0,0,1).$$

γ. Γέφυρα (**BS**, *Bridge structure*)

Αποτελείται από n=5 μονάδες και λειτουργεί όταν είναι δυνατή η μετάβαση από τη θέση Α στη θέση Β μέσω μονάδων που λειτουργούν. Η διάταξη της γέφυρας φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

ΣΧΗΜΑ 3.6



Η γέφυρα είναι μια χρήσιμη δομή προκειμένου να αυξήσουμε την αξιοπιστία των συστημάτων. Η συγκεκριμένη δομή εφαρμόζεται συχνά σε δίκτυα υπολογιστών.

Τα ε.σ.λ. είναι τα σύνολα {1,2}, {4,5}, {1,3,5}, {4,3,2}, ενώ τα ε.σ.δ. της γέφυρας είναι τα {1,4}, {2,5}, {1,3,5}, {4,3,2}, δηλαδή έχουμε **P** = {{1,2}, {4,5}, {1,3,5}, {4,3,2}} και **C =** {{1,4}, {2,5}, {1,3,5}, {4,3,2}}.

Η συνάρτηση δομής της γέφυρας δίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης 3 της Παραγράφου 3.2 από τον ακόλουθο τύπο

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{4}(1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_4 x_5)(1 - x_1 x_3 x_5)(1 - x_4 x_3 x_2) = \ldots =$$

$$= x_1 x_2 + x_2 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_5 - x_1 x_2 x_3 x_5 + x_4 x_5 - x_1 x_2 x_4 x_5 - x_1 x_3 x_4 x_5$$

$$- x_2 x_3 x_4 x_5 + 2 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 .$$

Η αξιοπιστία της γέφυρας δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$R = E(\phi(\mathrm{X})) = p_1 p_2 + p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 p_3 p_5 - p_1 p_2 p_3 p_5 + p_4 p_5 - p_1 p_2 p_4 p_5$$

$$- p_1 p_3 p_4 p_5 - p_2 p_3 p_4 p_5 + 2 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 .$$

Στην ειδική περίπτωση μιας i.i.d. γέφυρας με 5 μονάδες (οπότε θα ισχύει $p_i = p, \quad i = 1,2,...,5$) η συνάρτηση αξιοπιστίας θα είναι η εξής

$$R(p) = R_{BS} = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5 .$$

Για τον υπολογισμό της υπογραφής **s** της γέφυρας εργαζόμαστε ως εξής.

Έχοντας ήδη παραπάνω προσδιορίσει τα ε.σ.δ. παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κανένα ε.σ.δ. με μία μόνο μονάδα, δηλαδή είναι ξεκάθαρο ότι η αποτυχία μίας μόνο μονάδας δεν μπορεί να προκαλέσει την αποτυχία του συστήματος, συνεπώς η πρώτη συντεταγμένη του διανύσματος της υπογραφής θα είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $s_1 = 0$.

Για να υπολογίσουμε τη δεύτερη συντεταγμένη s_2 θα πρέπει να βρούμε την πιθανότητα ο χρόνος ζωής του συστήματος να ταυτιστεί με τον δεύτερο διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας, δηλαδή την πιθανότητα η γέφυρα να αποτύχει ταυτόχρονα με την δεύτερη αποτυχία μονάδας (s_2=$P(T = X_{(2)})$). Τα σύνολα διακοπής με δύο μονάδες είναι τα εξής: $\{1,4\},\{2,5\}$, σε κάθε ένα από τα οποία έχουμε 2! δυνατές μεταθέσεις των δύο πρώτων αποτυχιών και η κάθε μία μετάθεση (από τις 4) ακολουθείται από 3! πιθανές μεταθέσεις των 3 μονάδων που απομένουν. Συνεπώς το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το ενδεχόμενο η γέφυρα να αποτύχει μαζί με τη δεύτερη μονάδα που αποτυγχάνει είναι $2!\ \cdot 3!\ + 2!\ \cdot 3!\ = 12 + 12 = 24$. (Διαφορετικά $2!\ \cdot 3!\ + 2!\ \cdot 3!\ = 2 \cdot 2 \cdot 3!\ = 4!\ = 24$).

Δεδομένου ότι το συνολικό πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων για τη σειρά αποτυχίας των 5 μονάδων της γέφυρας είναι το πλήθος των μεταθέσεων των 5 μονάδων, δηλαδή ίσο με 5! , τελικά παίρνουμε για τη ζητούμενη πιθανότητα

$$s_2 = P(T = X_{(2)}) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5} = 0{,}2 .$$

Για να υπολογίσουμε την τρίτη συντεταγμένη s_3 θα πρέπει να βρούμε την πιθανότητα ο χρόνος ζωής του συστήματος να ταυτιστεί με τον τρίτο διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας, δηλαδή την πιθανότητα η γέφυρα να αποτύχει ταυτόχρονα με την τρίτη αποτυχία μονάδας (s_3=$P(T = X_{(3)})$). Για να συμβεί το ενδεχόμενο αυτό θα πρέπει οι 3 πρώτες αποτυχίες να συμπίπτουν με μία μετάθεση μιας εκ των τριάδων $\{1,3,5\},\{4,3,2\}$ οι οποίες αποτελούν (όπως έχουμε δει παραπάνω) τα μόνα ε.σ.δ. με 3 μονάδες, ή να συμπίπτουν με μία εκ των παρακάτω τριάδων $(1,X,2\},\{2,X,1\},\{X,1,2\},\{X,2,1\},\{4,\Psi,5\},\{5,\Psi,4\},\{\Psi,4,5\},\{\Psi,5,4\}$ όπου X είναι μία από τις μονάδες 3,4,5 , και Ψ μία από τις μονάδες 1,2,3. Οι τελευταίες 8 τριάδες προκαλούν αποτυχία του συστήματος κατά την αποτυχία της τρίτης μονάδας, ενώ όπως βλέπουμε οι τριάδες αυτές περιέχουν τα ζεύγη 1,2 ή 4,5(οι δυάδες αυτές είναι ε.σ.δ. της γέφυρας) με τέτοιο τρόπο ώστε η αποτυχία του συστήματος να μην προκαλείται κατά την αποτυχία της δεύτερης κατά σειρά μονάδας, αλλά κατά την αποτυχία της τρίτης κατά σειρά μονάδας. Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το ενδεχόμενο που ζητάμε είναι ίσο με

$$3!\ \cdot 2!\ +\ 3!\ \cdot 2!\ +\ 4\cdot 3\cdot 2!\ +\ 4\cdot 3\cdot 2! = 12+12+48=72\,,$$

όπου οι δύο πρώτοι όροι του αθροίσματος αναφέρονται στα δύο ε.σ.δ, ενώ οι δύο τελευταίοι όροι στις 8 τριάδες που δόθηκαν προηγουμένως. Πιο αναλυτικά έχουμε

$$3!\ \cdot 2! = (\text{πλήθος μεταθέσεων των}1,3,5)\ (\text{πλήθος των εναπομεινάντων } 2,4)$$

$$3!\ \cdot 2! = (\#\ \text{μεταθέσεων των } 4,3,2)\ (\#\ \text{μεταθέσεων των εναπομεινάντων } 1,5)$$

$$4\cdot 3\cdot 2! = (\#\ \text{τριάδων που έχουν τη μονάδα } X)(\#\ \text{επιλογών για τη } X)(\#\ \text{μεταθέσεων των } 1,2)$$

$$4\cdot 3\cdot 2! = (\#\ \text{τριάδων που έχουν τη μονάδα } \Psi)(\#\ \text{επιλογών για τη } \Psi)(\#\ \text{μεταθέσεων των } 4,5)$$

Δεδομένου ότι το συνολικό πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων για τη σειρά αποτυχίας των 5 μονάδων της γέφυρας είναι το πλήθος των μεταθέσεων των 5 μονάδων, δηλαδή ίσο με 5! , τελικά παίρνουμε για τη ζητούμενη πιθανότητα

$$s_3 = P(T = X_{(3)}) = \frac{3!\ \cdot 2!\ +3!\ \cdot 2!\ +4\cdot 3\cdot 2!\ +4\cdot 3\cdot 2!}{5!} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5} = 0{,}6\,.$$

Οι τελευταίες δύο πιθανότητες s_4 , s_5 μπορούν να υπολογισθούν ευκολότερα, μιας και η γέφυρα δεν μπορεί να λειτουργήσει με μόνο μία μονάδα σε ισχύ, ενώ το σύστημα αποτυγχάνει κατά την αποτυχία της τέταρτης κατά σειρά μονάδας αν και μόνο αν οι τελευταίες δύο μονάδες που αποτυγχάνουν είναι οι 1,2 ή οι 4,5, και υπάρχουν 4! μεταθέσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη αυτή. Συνεπώς από τα παραπάνω παίρνουμε για τις ζητούμενες πιθανότητες

$$s_4 = P(T = X_{(4)}) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$s_5 = P(T = X_{(5)}) = 0$$

(Άλλωστε $s_5 = 1 - s_1 - s_2 - s_3 - s_4 = 1 - 0 - 0{,}2 - 0{,}6 - 0{,}2 = 0$).

Συνοψίζοντας, η υπογραφή της γέφυρας με 5 μονάδες είναι το ακόλουθο διάνυσμα

$$\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{BS}}^{\boldsymbol{t}} = (0, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0).$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε την υπογραφή της γέφυρας με τη χρήση της Πρότασης 3 της Παραγράφου 3.3. Σύνολα λειτουργίας μεγέθους $i = 0{,}1$ δεν υπάρχουν, ενώ με μέγεθος $i = 2$ υπάρχουν 2, με μέγεθος $i = 3$ υπάρχουν 8 και τέλος όλα τα σύνολα με 4 ή 5 μονάδες είναι σύνολα λειτουργίας για τη γέφυρα. Συνεπώς έχουμε

$$a_0 = \frac{0}{\binom{5}{0}} = 0, a_1 = \frac{0}{\binom{5}{1}} = 0, a_2 = \frac{2}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{5}, a_3 = \frac{8}{\binom{5}{3}} = \frac{4}{5}, a_4 = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{5}{4}} = 1, a_5 = \frac{\binom{5}{5}}{\binom{5}{5}} = 1.$$

Οπότε για τις συντεταγμένες της υπογραφής της γέφυρας ισχύουν τα ακόλουθα

$$s_5 = a_1 - a_0 = 0, s_4 = a_2 - a_1 = \frac{1}{5}, s_3 = a_3 - a_2 = \frac{3}{5}, s_2 = a_4 - a_3 = \frac{1}{5}, s_1 = 0$$

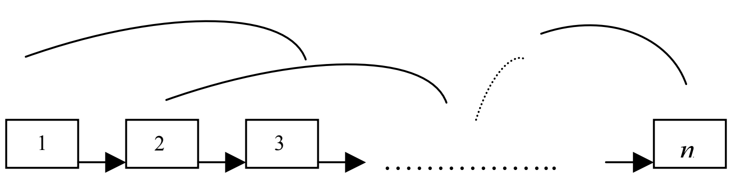
και τελικά η υπογραφή της γέφυρας με 5 μονάδες είναι το ακόλουθο διάνυσμα

$$\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{BS}}^{\boldsymbol{t}} = (0, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0).$$

δ. Σύστημα συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*: F (**C(*n*,*k*):F**, *consecutive k-out-of-n: Fail*)

Το συνεχόμενο *k*-από-τα-*n* : *F* σύστημα αποτυγχάνει όταν αποτύχουν τουλάχιστον *k* συνεχόμενες μονάδες από τις *n*. Η διάταξη του συστήματος αυτού φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

ΣΧΗΜΑ 3.7



Οι δομές αυτές, οι οποίες αρχικά είχαν εισαχθεί από τους Chaing και Niu (1981), εφαρμόζονται συχνά σε συστήματα τηλεπικοινωνιών, σε δίκτυα μεταφοράς υγρών, καθώς και στο σχεδιασμό ολοκληρωμένων κυκλωμάτων.

Τα ε.σ.δ. είναι τα σύνολα $\{1,2,...,k\}$, $\{2,3,...,k+1\}$,…, $\{n\text{-}k+1, n\text{-}k+2,\ldots n\}$, δηλαδή όλα τα υποσύνολα του συνόλου $\{1,2,\ldots,n\}$ με k διαδοχικά στοιχεία. Για την οικογένεια των ε.σ.δ. γράφουμε: $\mathbf{C}=\{\{j,j+1,...,j+k\text{-}1\}, j=1,2,\ldots,n\text{-}k+1\}$.

Η συνάρτηση δομής του συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος δίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης 3 της Παραγράφου 3.2 από τον ακόλουθο τύπο

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \prod_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n-k}+1} (1 - \prod_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{j-k}+1} (1 - \boldsymbol{x_i})).$$

Για παράδειγμα για το συνεχόμενο σύστημα 2-από-τα-3 η συνάρτηση δομής υπολογίζεται ως εξής

$$\varphi(\mathbf{x}) = (1\text{-}(1\text{-}x_1)(1-x_2))(1-(1-x_2)(1-x_3)) =$$

$$= (x_1 + x_2 - x_1x_2)(x_2 + x_3 - x_2x_3) = ... = x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3 .$$

Η αξιοπιστία του συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος με ανεξάρτητες και όμοιες μονάδες που έχουν αξιοπιστία p δίνεται από τον ακόλουθο τύπο (Derman, Lieberman & Ross (1982))

$$R_{C:k/n} = \sum_{j=0}^{n} N(j, n-j+1; k-1) p^{n-j} (1-p)^j ,$$

όπου $N(j, n-j+1; k-1)$ εκφράζει γενικά το πλήθος των τρόπων με τους οποίους j όμοια αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε n-j+1 διαφορετικά κλουβιά, με την προϋπόθεση ότι σε κάθε κλουβί μπορούν να τοποθετηθούν το πολύ k-1 αντικείμενα. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι

$$N(j, r; 1) = \begin{cases} \binom{r}{j} & ,0 \le j \le r \\ 0 & , j > r \end{cases}$$

Ειδικά για το συνεχόμενο 2-από-τα-n σύστημα η αξιοπιστία δίνεται από τον τύπο

$$R_{C:2/n} = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n-j+1}{j} \cdot p^{n-j} (1-p)^j .$$

Αν έχουν χαλάσει j μονάδες(με $j<[(n+1)/2]$) το σύστημα λειτουργεί αν υπάρχει τουλάχιστον μία μονάδα που λειτουργεί μεταξύ κάθε δύο μονάδων που δεν λειτουργούν. Το πλήθος τέτοιων συνδυασμών μεταξύ μονάδων που λειτουργούν και μονάδων που δεν λειτουργούν είναι ίσο με

$$\binom{(j+1)+(n-2j+1)-1}{n-2j+1} = \binom{n-j+1}{j}$$

ενώ για το συνεχόμενο 3-από-τα-n σύστημα η αξιοπιστία έχει την εξής μορφή

$$R_{C:3/n} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n-2j+1}^{n-j+1} \binom{n-j+1}{i} \cdot \binom{n-j+1-i}{j-2i} p^{n-j}(1-p)^{j}$$

Ισοδύναμα η αξιοπιστία του συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος μπορεί να υπολογισθεί ως εξής (Chiang & Niu (1981))

$$R_{C:k/n} = P(\text{το σύστημα λειτουργεί}) =$$

$$= \sum_{r} \sum_{m} P(\text{ το σύστημα λειτουργεί } / \ R=r, M=m) \cdot P(R=r, M=m) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n-k+1} \sum_{m=r+1}^{r+k-1} P(\text{το σύστημα λειτουργεί } / \ R=r, M=m) \cdot p^{r}(1-p)^{m-r} + p^{n-k+1},$$

όπου R είναι μια τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το δείκτη του πρώτου μηδενικού στο διάνυσμα κατάστασης του συστήματος **x**, M είναι μια τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το δείκτη του πρώτου άσσου μετά από τη θέση R στο διάνυσμα κατάστασης του συστήματος **x**, και

$$P(\text{ το σύστημα λειτουργεί } / \ R=r, M=m) = R_{C:k/(n-m)}.$$

Για το συνεχόμενο 2-από-τα-n σύστημα (για $2 \le n \le 8$) η συνάρτηση αξιοπιστίας μπορεί να υπολογισθεί με τη βοήθεια του παραπάνω τύπου, δεδομένου ότι : $R_{C:2/2} \equiv R_{PS} = 2p - p^2$. Πράγματι έχουμε

$$R_{C:2/3} = p + p^2 - p^3$$

$$R_{C:2/4} = 3p^2 - 2p^3$$

$$R_{C:2/5} = p^2 + 3p^3 - 4p^4 + p^5$$

$$R_{C:2/6} = 4p^3 - 2p^4 - 2p^5 + p^6$$

$$R_{C:2/7} = p^3 + 6p^4 - 9p^5 + 3p^6 .$$

Για τον υπολογισμό της υπογραφής **s** ενός συνεχόμενου *k*-από-τα-*n* συστήματος πρέπει να προσδιορίζουμε κάθε φορά το πλήθος εκείνων των μεταθέσεων των μονάδων ως προς τη σειρά αποτυχίας τους, οι οποίες προκαλούν την αποτυχία του συστήματος κατά τον *i*-διατεταγμένο χρόνο ζωής, καταλήγοντας έτσι στη ζητούμενη κάθε φορά πιθανότητα που αντιστοιχεί και σε μία συντεταγμένη του διανύσματος της υπογραφής.

Στο σημείο αυτό θα μελετήσουμε αναλυτικά το συνεχόμενο 2-από-τα-*n* σύστημα, για *n*=2,3,...,8. Πιο συγκεκριμένα το συνεχόμενο 2-από-τα-2 σύστημα με όμοιες μονάδες είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμο με ένα παράλληλο σύστημα δύο μονάδων, μιας και για να αποτύχει το σύστημα αυτό θα πρέπει να αποτύχουν και οι 2 μονάδες του (όπως ακριβώς συμβαίνει και στο παράλληλο). Συνεπώς η υπογραφή του θα είναι

$$s^t_{C:2/2} = (0,1) .$$

Για το συνεχόμενο 2-από-τα-3 σύστημα υπάρχουν $2 \cdot 2! = 4$ δυνατές μεταθέσεις (σειρά αποτυχίας 1,2,3 ή 2,1,3 ή 2,3,1 ή 3,2,1) από τις συνολικά 3! = 6 των 3 μονάδων ως προς τη χρονική σειρά με την οποία αποτυγχάνουν, οι οποίες προκαλούν την αποτυχία του συστήματος με τη δεύτερη αποτυχία μονάδας. Συνεπώς η δεύτερη συντεταγμένη της υπογραφής θα είναι ίση με

$$s_2 = P(T = X_{(2)}) = \frac{2 \cdot 2!}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Επιπλέον οι δυνατές μεταθέσεις οι οποίες προκαλούν την αποτυχία του συστήματος με τη τρίτη αποτυχία μονάδας είναι 2! (σειρά αποτυχίας 1,3,2 ή 3,1,2), άρα

$$s_3 = P(T = X_{(3)}) = \frac{2!}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} .$$

Άρα η υπογραφή του συνεχόμενου 2-από-τα-3 συστήματος είναι ίση με

$$s^t_{C:2/3} = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) .$$

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να γίνει ο υπολογισμός της υπογραφής **s** των συνεχόμενων

2-από-τα-4, 2-από-τα-5, 2-από-τα-6, 2-από-τα-7, 2-από-τα-8 συστημάτων. Η υπογραφή **s** του συνεχόμενου 2-από-τα-n συστήματος για όλα τα $n = 2,3,...,8$ δίνεται συνοπτικά στον ακόλουθο πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2

Σύστημα C: $2 \mid n$	**Υπογραφή s**
C : 2/2	$(0,1)$
C : 2/3	$(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3})$
C : 2/4	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$
C : 2/5	$(0,\frac{4}{10},\frac{5}{10},\frac{1}{10},0)$
C : 2/6	$(0,\frac{5}{15},\frac{7}{15},\frac{3}{15},0,0)$
C : 2/7	$(0,\frac{10}{35},\frac{15}{35},\frac{9}{35},\frac{1}{35},0,0)$
C : 2/8	$(0,\frac{7}{28},\frac{11}{28},\frac{8}{28},\frac{2}{28},0,0,0)$

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε την υπογραφή του συνεχόμενου 2-από-τα-n συστήματος με τη χρήση της Πρότασης 3 της Παραγράφου 3.3, καταλήγοντας σε έναν γενικό τύπο που θα δίνει την υπογραφή του συνεχόμενου 2-από-τα-n συστήματος για κάθε $n \geq 2$.

Αν το πλήθος j των μονάδων που έχουν αποτύχει είναι μεγαλύτερο από $[(n+1)/2]$, ή ισοδύναμα το πλήθος $(n-j)$ των μονάδων που λειτουργούν είναι μικρότερο από $[(n+1)/2]$, τότε θα υπάρχουν οπωσδήποτε δύο συνεχόμενες μονάδες που έχουν αποτύχει και συνεπώς το σύστημα δεν θα λειτουργεί. Αυτό σημαίνει ότι το συνεχόμενο 2-από-τα-n σύστημα δεν έχει σύνολα λειτουργίας με πλήθος μονάδων μικρότερο από $[(n+1)/2]$.

Αν το πλήθος j των μονάδων που έχουν αποτύχει είναι μικρότερο από $[(n+1)/2]$, ή ισοδύναμα το πλήθος $(n-j)$ των μονάδων που λειτουργούν είναι μεγαλύτερο από $[(n+1)/2]$, τότε το σύστημα λειτουργεί αν υπάρχει τουλάχιστον μία μονάδα που λειτουργεί μεταξύ κάθε δύο μονάδων που έχουν αποτύχει. Το πλήθος τέτοιων συνδυασμών ανάμεσα σε μονάδες που λειτουργούν και σε μονάδες που έχουν αποτύχει (όπως έχουμε δει και παραπάνω), δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$\binom{(j+1)+(n-2j+1)-1}{n-2j+1} = \binom{n-j+1}{j}$$

Ο παραπάνω τύπος δίνει το πλήθος των συνόλων λειτουργίας με μέγεθος $(n-j)$ του συνεχόμενου 2-από-τα-n συστήματος, για $j = 0,1,2,...,n$. Οι συντεταγμένες a_{n-j} του διανύσματος $\boldsymbol{A}_T = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ εκφράζουν την αναλογία των υποσυνόλων μεγέθους $(n-j)$, τα οποία είναι σύνολα λειτουργίας για το σύστημα. Με άλλα λόγια δηλώνουν το ποσοστό των συνόλων λειτουργίας, τα οποία περιέχουν $(n-j)$ μονάδες που λειτουργούν για $j = 0,1,2,...,n$, δηλαδή

$$a_{n-j} = \frac{\binom{n-j+1}{j}}{\binom{n}{j}} = \frac{\dfrac{(n-j+1)!}{j!(n-2j+1)!}}{\dfrac{n!}{j!(n-j)!}} = \frac{(n-j+1)!(n-j)!}{n!(n-2j+1)!} = \frac{[(n-j)!]^2(n-j+1)}{n!(n-2j+1)!} =$$

$$= \frac{(n-j+1)!}{[(n-j+1)-j]!} \cdot \frac{(n-j)!}{n!} = \frac{(n-j+1)_j}{(n)_j}$$

Οι συντεταγμένες a_{n-j} δίνονται από τους ακόλουθους τύπους

$$a_n = \frac{(n-0+1)_0}{(n)_0} = 1, \text{ για } j = 0$$

$$a_{n-1} = \frac{(n-1+1)_1}{(n)_1} = 1, \text{ για } j = 1$$

$$a_{n-2}=\frac{(n-2+1)_2}{(n)_2}=\frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)n}=\frac{n-2}{n}, \text{ για } j=2$$

$$a_{n-3}=\frac{(n-3+1)_3}{(n)_3}=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-2)(n-1)n}=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}, \text{ για } j=3$$

$$\vdots$$

$$a_2=\frac{\begin{pmatrix} n-n+2+1 \\ n-2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ n-2 \end{pmatrix}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}}=\frac{\frac{3!}{(n-2!)(5-n)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}}=\frac{2!\cdot 3!}{(5-n)!n!}=\frac{12}{(5-n)!n!}, \text{ για } j=n-2$$

$$a_1=\frac{\begin{pmatrix} n-n+1+1 \\ n-1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ n-1 \end{pmatrix}}{n}=\frac{\frac{2!}{(n-1)!(3-n)!}}{n}=\frac{2}{(3-n)!n!}, \text{ για } j=n-1$$

$$a_0=\frac{\begin{pmatrix} n-n+1 \\ n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}}{1}=0, \text{ για } j=n.$$

Συνεπώς οι συντεταγμένες της υπογραφής ενός συνεχόμενου 2-από-τα-n συστήματος θα δίνονται από τον γενικό τύπο

$$s_j=a_{n-j+1}-a_{n-j}=\frac{\frac{(n-j+1+1)!}{(j-1)!(n-2j+3)!}}{\frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!}}-\frac{\frac{(n-j+1)!}{j!(n-2j+1)!}}{\frac{n!}{j!(n-j)!}}=$$

$$=\frac{\frac{(n-j+2)!}{(n-2j+3)!}}{\frac{n!}{(n-j+1)!}}-\frac{\frac{(n-j+2)!(n-j+1)}{(n-2j+3)!(n2j+2)(n-2j+3)}}{\frac{n!}{(n-j+1)!(n-j)}}=$$

$$= \frac{\frac{(n-j+2)!}{(n-2j+3)!}}{\frac{n!}{(n-j+1)!}} \cdot [1 - \frac{(n-j+1)(n-j)}{(n-2j+2)(n-2j+3)}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s_j = \frac{(n-j+2)_{j-1}}{(n)_{j-1}} \cdot (1 - \frac{(n-j+1)_{j-2}}{(n-j)_{j-2}})$$

Επομένως έχουμε τα ακόλουθα

$$s_1 = a_n - a_{n-1} = 1 - 1 = 0$$

$$s_2 = a_{n-1} - a_{n-2} = 1 - \frac{n-2}{n} = \frac{2}{n}$$

$$s_3 = a_{n-2} - a_{n-3} = \frac{n-2}{n} - \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)} = \frac{(n-2)(n-1)-(n-3)(n-4)}{n(n-1)} = \frac{4n-10}{n(n-1)}$$

$$\vdots$$

$$s_{n-1} = a_2 - a_1 = \frac{12}{(5-n)!n!} - \frac{2}{n!(3-n)!}$$

$$s_n = a_1 - a_0 = \frac{2}{n!(3-n)!} - 0 = \frac{2}{n!(3-n)!}$$

Συνοψίζοντας η υπογραφή ενός συνεχόμενου 2-από-τα-n συστήματος (για κάθε $n \geq 2$) είναι το ακόλουθο διάνυσμα

$$\mathbf{s}^t = (0, \frac{2}{n}, \frac{4n-10}{n(n-1)}, ..., \frac{12}{(5-n)!n!} - \frac{2}{n!(3-n)!}, \frac{2}{n!(3-n)!}).$$

ε. Σύστημα *k*-από-τα-*n*:G (**S(*n*,*k*):G**, *k-out-of-n: Good*)

Το σύστημα αυτό λειτουργεί όταν λειτουργούν *k* μονάδες από τις *n*. Βρίσκει πολλές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα κατά τη διάρκεια συγκεκριμένου σταδίου πτήσης ενός αεροπλάνου, όπου η λειτουργία τριών από τις 4 μηχανές του θα μπορούσε να μην είναι καταστροφική, αλλά η αποτυχία μίας ακόμη μηχανής να προκαλούσε την πτώση του αεροπλάνου. Ειδικές περιπτώσεις της δομής αυτής είναι το σειριακό σύστημα (για *k*=1 οπότε λειτουργεί τουλάχιστον μία μονάδα) και το παράλληλο (για k=n οπότε λειτουργούν όλες οι μονάδες).

Τα ε.σ.λ. είναι τα όλα τα υποσύνολα του συνόλου (1,2,...,n) με k στοιχεία, ενώ τα ε.σ.δ. είναι τα όλα τα υποσύνολα του συνόλου (1,2,...,n} με n-k+1 στοιχεία, δηλαδή έχουμε

$$\mathbf{P} = \{A:A \subseteq \{1,2,...,n\} \;\; \mu\varepsilon \;\; |A| = k\}\} \text{ και } \mathbf{C} = \{A:A \subseteq \{1,2,...,n\} \;\; \mu\varepsilon \;\; |A| = n-k+1\}\}$$

Η συνάρτηση δομής του συστήματος k-από-τα-n δίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης 3 της Παραγράφου 3.2 από τον ακόλουθο τύπο

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{\substack{\{a_1,a_2,...,a_k\} \\ \subseteq\{1,2,...,n\}}} (1-\prod_{i=1}^{k} x_{a\,i}) = \prod_{\substack{\{a_1,...,a_k\} \\ \subseteq\{1,2,...,n\}}} (1-\prod_{i=1}^{n-k+1}(1-x_{a_i}))\,.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ισοδύναμο με την έκφραση

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad \sum_{\iota=1}^{n} x_i \geq k \\ \\ 0, & \text{αν} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i < k\,. \end{cases}$$

Για παράδειγμα για το σύστημα συνεχόμενο 2-από-τα-3 η συνάρτηση δομής υπολογίζεται ως εξής

$$\varphi(\mathbf{x}) = (1\text{-}(1\text{-}\,x_1)(1-x_2))(1-(1-x_2)(1-x_3)) =$$

$$= (x_1 + x_2 - x_1x_2)(x_2 + x_3 - x_2x_3) = ... = x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3\,.$$

Η αξιοπιστία του συστήματος k-από-τα-n δίνεται από τον τύπο

$$R_{k/n} = E(\phi(\,X) = E\,\{1 - \prod_{\substack{\{a_1,a_2,...,a_k\} \\ \subseteq\{1,2,...,n\}}} (1-\prod_{i=1}^{k} x_{a\,i})\} = 1 - E[\prod_{\substack{\{a_1,...,a_k\} \\ \subseteq\{1,2,...,n\}}} (1-\prod_{i=1}^{k} x_{a_i})]\,.$$

Η αξιοπιστία του συστήματος αυτού δεν είναι εύκολο να υπολογισθεί, ιδιαίτερα για μεγάλα n, k, αφού στη γενική περίπτωση εμφανίζεται ένα γινόμενο $\binom{n}{k}$ όρων. Ωστόσο αν οι μονάδες του συστήματος είναι ανεξάρτητες και όμοιες, τότε η αξιοπιστία γράφεται στη μορφή

$$R = P(\sum_{j=1}^{n} X_j \geq k) = P(Y \geq k) = \sum_{i=k}^{n} P(Y = i) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $b(n, p)$.

Η υπογραφή του συστήματος *k*-από-τα-*n* θα υπολογισθεί ως εξής.

Το σύστημα λειτουργεί αν λειτουργούν τουλάχιστον *k* από τις *n* μονάδες, ή ισοδύναμα αποτυγχάνει αν αποτύχουν τουλάχιστον (*n*-*k*+1) μονάδες. Συνεπώς η πιθανότητα ότι ο χρόνος ζωής του συστήματος ταυτίζεται με το χρόνο ζωής $X_{(i)}$ της *i*–διατεταγμένης μονάδας (ως προς τη σειρά αποτυχίας) για όλα τα $i = 1,2,\ldots,n\text{-}k$ είναι ίση με μηδέν, δηλαδή

$$P(T = X_{(i)}) = 0, \quad \gamma\iota\alpha \quad i = 1,2,...,n-k\,.$$

Πράγματι όταν έχουν αποτύχει μέχρι και (*n*-*k*) μονάδες, τότε λειτουργούν τουλάχιστον *k* μονάδες, συνεπώς το σύστημα λειτουργεί, οπότε οι (*n*-*k*) πρώτες συντεταγμένες της υπογραφής **s** του *k*-από-τα-*n* συστήματος πρέπει να είναι όλες ίσες με μηδέν. Επιπλέον η (*n*-*k*+1) συντεταγμένη της υπογραφής εκφράζει την πιθανότητα το σύστημα να αποτύχει κατά την αποτυχία της (*n*-*k*+1) –οστής μονάδας, οπότε τότε το σύστημα παύει να λειτουργεί καθώς μόνο (*k*-1) μονάδες του βρίσκονται σε λειτουργία και άρα

$$s_{n-k+1} = P(T = X_{(n-k+1)}) = 1\,.$$

Η πιθανότητα το σύστημα να αποτύχει ταυτόχρονα με την *i*–οστή μονάδα για όλα τα $i > n\text{-}k+1$ είναι ίση με μηδέν, δηλαδή με άλλα λόγια οι (*k*-1) τελευταίες συντεταγμένες του διανύσματος της υπογραφής είναι μηδενικά.

$$s_i = P(T = X_{(i)}) = 0, \quad \text{για} \quad n-k+1 < i \leq n\,.$$

Τελικά η υπογραφή του *k*-από-τα-*n* συστήματος δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$\mathbf{s}^{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{k/n}} = (\underbrace{0,0,...0}_{n-k},1,\underbrace{0,0,...,0}_{k-1})\,.$$

Για παράδειγμα η υπογραφή του 2-από-τα-4 συστήματος είναι ίση με

$$s^t_{2/4} = (0,0,1,0)\,,$$

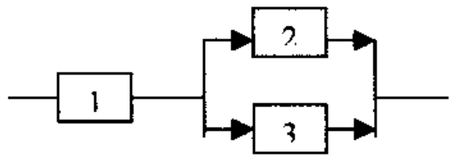
ενώ η υπογραφή του 3-από-τα-4 συστήματος είναι ίση με

$$s_{3/4}^{t} = (0,1,0,0).$$

ζ. Σειριακό-παράλληλο σύστημα (**SP**, *Series-Parallel system*)

Ένα τέτοιο σύστημα με $n = 3$ μονάδες λειτουργεί μόνο αν είναι δυνατή η μετάβαση από το A στο B μέσω μονάδων που λειτουργούν, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.8.

ΣΧΗΜΑ 3.8



Το σύστημα λειτουργεί αν και μόνο αν λειτουργούν οι μονάδες 1 και 2 ή οι μονάδες 1 και 3, ή ισοδύναμα το σύστημα θα αποτύχει αν και μόνο αν αποτύχει η μονάδα 1, ή οι μονάδες 2 και 3. Συνεπώς τα ε.σ.λ. είναι τα $P_1 = \{1,2\}$ και $P_2 = \{1,3\}$, ενώ τα ε.σ.δ. είναι τα $C_1 = \{1\}$ και $C_2 = \{2,3\}$.

Η συνάρτηση δομής του σειριακού-παράλληλου συστήματος δίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης 3 της Παραγράφου 3.2 από τον ακόλουθο τύπο

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{2}(1 - \prod_{i \in P_j} x_i)) = (1-(1-x_1))(1-(1-x_2)(1-x_3)) = x_1(x_2 + x_3 - x_2x_3) =$$

$$= x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3.$$

Η αξιοπιστία του σειριακού-παράλληλου συστήματος με n=3 μονάδες υπολογίζεται ως εξής

$$\boldsymbol{R_{SP}} = \boldsymbol{E}(\phi(\ X)) = E\left\{1 - \prod_{j=1}^{2}(1 - \prod_{i \in P_j} X_i)\right\} = E(X_1X_3 + X_1X_2 - X_1X_2X_3) =$$

$$= E(X_1)E(X_3) + E(X_1)E(X_2) - E(X_1)E(X_2)E(X_3) = p_1p_3 + p_1p_2 - p_1p_2p_3.$$

Ειδικά αν οι μονάδες είναι όμοιες και ανεξάρτητες, δηλαδή το σύστημα είναι i.i.d τότε η συνάρτηση αξιοπιστίας παίρνει τη μορφή

$$R_{SP} = 2p^2 - p^3.$$

Η υπογραφή του σειριακού-παράλληλου συστήματος με n=3 μονάδες θα υπολογισθεί ως εξής.

Πρώτα από όλα θα καταγράψουμε όλες τις δυνατές μεταθέσεις των χρόνων ζωής των τριών μονάδων, προσδιορίζοντας παράλληλα σε κάθε περίπτωση το διατεταγμένο χρόνο που ταυτίζεται με το χρόνο ζωής του συστήματος. Αναλυτικά αυτά δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3

Σειρά χρόνων ζωής των μονάδων	**Χρόνος ζωής του συστήματος**
$X_1<X_2<X_3$	$X_{(1)}$
$X_1<X_3<X_2$	$X_{(1)}$
$X_2<X_1<X_3$	$X_{(2)}$
$X_2<X_3<X_1$	$X_{(2)}$
$X_3<X_1<X_2$	$X_{(2)}$
$X_3<X_2<X_1$	$X_{(2)}$

Συμπεραίνουμε ότι

$$s_1 = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad s_2 = \frac{4}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \qquad s_3 = 0$$

δηλαδή η υπογραφή του συστήματος είναι το ακόλουθο διάνυσμα

$$s_{SP}^t = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0).$$

η. Απλά και έμμεσα συστήματα πλειονότητας (*Simple and indirect majority systems*)

Τα συστήματα πλειονότητας είναι ειδικές περιπτώσεις των *k*-από-τα-*n* συστημάτων και εφαρμόζονται τόσο στον κλάδο της Αξιοπιστίας , όσο και στη Θεωρία Αποφάσεων. Ένα απλό (*simple or direct*) σύστημα πλειονότητας (**SM** system) είναι ένα σύστημα με *n* μονάδες, το οποίο λειτουργεί αν και μόνο αν η πλειονότητα των n μονάδων του λειτουργούν. Όταν το n είναι μονός αριθμός (έστω $n = 2m+1$), τότε η συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$R_{SM} \equiv R_{m/2m+1}(p) = \sum_{i=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{i} p^i (1-p)^{2m+1-i}.$$

Στην περίπτωση όπου το n είναι ζυγός αριθμός (έστω $n = 2m$) κάνουμε τη σύμβαση ότι το σύστημα λειτουργεί αν είτε λειτουργούν περισσότερες από m μονάδες, είτε αν λειτουργούν ακριβώς m μονάδες και το «στρίψιμο» ενός «δίκαιου» νομίσματος προσδιορίζει την απόφαση. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση αξιοπιστίας είναι ίση με $R_{m/2m-1}(p)$, οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας περιορίζουμε την προσοχή μας στην περίπτωση όπου το n είναι μονός αριθμός.

Ο Marquis of Condorcet υπήρξε πρώιμος υποστηρικτής της χρήσης της Θεωρίας των Πιθανοτήτων και των συστημάτων πλειονότητας σε πολιτικά και κοινωνικά ζητήματα. Αυτό που υποστήριξε ήταν ότι υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες είναι προτιμότερο να εμπιστευτούμε για μία απόφαση μία ομάδα ατόμων με μικρότερη επάρκεια (ικανότητα), παρά ένα μόνο άτομο με μεγαλύτερη ικανότητα. Το συμπέρασμα αυτό περιέχεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα (Condorcet Jury Theorem) (Boland (1989))

Έστω $n=2m+1$ ο αριθμός των ατόμων σε ένα σώμα αποφάσεων ή ενόρκων και p η πιθανότητα ότι ένας ένορκος παίρνει τη σωστή απόφαση (ίδια η πιθανότητα αυτή για όλους τους ενόρκους). Αν $R_{2m+1}(p)$ είναι η πιθανότητα ότι μια πλειονότητα ανεξάρτητων ενόρκων παίρνει τη σωστή απόφαση, τότε αν $p>\frac{1}{2}$

και $n \geq 3$ έχουμε

(α) $R_{2m+1}(p) > p$

(β) *Η συνάρτηση $R_{2m+1}(p)$ είναι αύξουσα ως προς p και ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(p) = 1, \quad n = 2m+1.$$

Το θεώρημα αυτό δίνει μια σημαντική ιδιότητα για την αξιοπιστία των συστημάτων πλειονότητας. Επιπλέον μια άλλη μορφή του θεωρήματος Condorcet Jury (Boland, Proschan & Tong (1989)) δηλώνει ότι για $p > \frac{1}{2}$ και $n \geq 3$ ισχύει

$$R_{[(n+1)/2]/n}(p) \geq p \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} R_{[(n+1)/2]/n}(p) = 1.$$

Ωστόσο το θεώρημα αυτό βασίζεται στην υπόθεση της ομοιογένειας μέσα στο σύνολο των μονάδων (ενόρκων) αλλά και ότι οι μονάδες (ένορκοι) είναι ανεξάρτητες. Οι υποθέσεις αυτές είναι δύσκολο να ισχύουν στην πραγματικότητα. Σε περίπτωση που υπάρχει συσχέτιση $r \in [0,1]$ ανάμεσα στις $2m$ μονάδες του συστήματος (X_1, X_2,…, X_{2m}) και την ($2m$+1)-οστή μονάδα του (Corr(X_i ,X_{2m+1})= r, για i=1,2,…,$2m$) , ενώ ταυτόχρονα οι X_1, X_2,…, X_{2m} είναι ανεξάρτητες όταν αυτές λογίζονται ως προς την μονάδα X_{2m+1} (δηλαδή όταν η κατάσταση της μονάδας X_{2m+1} είναι δεδομένη), τότε η αξιοπιστία μπορεί να δοθεί συναρτήσει της αξιοπιστίας των m-από-τα-$2m$ και (m+1)-από-τα-$2m$ συστημάτων ως εξής

$$R^{*}_{SM}(p) = p \cdot R_{m/2m}(p + r(1-p)) + (1-p) \cdot R_{m+1/2m}(p - rp)$$

όπου p είναι η πιθανότητα ότι η i-μονάδα λειτουργεί για i=1,2,...,$2m$+1 και

$$p = P(X_i = 1), \quad i = 1,2,...,2m+1$$

$$P(X_i = 1 \mid X_{2m+1} = 1) = p + r(1-p), \quad i = 1,2,...,2m$$

$$P(X_i = 1 \mid X_{2m+1} = 0) = p - rp, \quad i = 1,2,...,2m$$

Σε πολλές περιπτώσεις απαιτείται ένας πιο πολύπλοκος σχεδιασμός (από αυτόν του απλού συστήματος πλειονότητας) για να εφαρμοσθεί κάποιο σύστημα πλειονότητας. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε 15 μονάδες και αντί να εφαρμόσουμε ένα απλό σύστημα πλειονότητας, διασπούμε τις 15 μονάδες σε 5 ομάδες ή υποσυστήματα των 3 μονάδων το καθένα. Κάθε ένα από τα υποσυστήματα θεωρείται ότι λειτουργεί αν η πλειονότητα των μονάδων τους λειτουργούν (εδώ αν λειτουργούν τουλάχιστον 2 μονάδες σε κάθε υποσύστημα), ενώ ολόκληρο το σύστημα λειτουργεί αν λειτουργεί η πλειονότητα των υποσυστημάτων (εδώ αν λειτουργούν τουλάχιστον 3). Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται 5×3 έμμεσο (*indirect*) σύστημα πλειονότητας, και το σύστημα αυτό είναι δυνατόν να λειτουργήσει με μόνο 6 μονάδες του να λειτουργούν, ενώ αντίθετα είναι δυνατόν να λειτουργούν 9 μονάδες του και το σύστημα να μην λειτουργεί. Γενικότερα για οποιουσδήποτε μονούς ακέραιους αριθμούς r,s ορίζουμε ένα $r \times s$ έμμεσο (*indirect*) σύστημα πλειονότητας να είναι ένα σύστημα, στο οποίο οι $n = r \cdot s$ μονάδες έχουν διασπασθεί σε r ομάδες μεγέθους s και η λογική της πλειονότητας εφαρμόζεται τόσο μέσα σε κάθε ένα από τα υποσυστήματα (*within each group*), όσο και μεταξύ των υποσυστημάτων (*between groups*). Συνεπώς το σύστημα αυτό λειτουργεί αν λειτουργούν τουλάχιστον $\frac{s+1}{2}$ μονάδες σε τουλάχιστον $\frac{r+1}{2}$ υποσυστήματα. Για παράδειγμα η εκλογή του προέδρου των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής είναι μια απόφαση έμμεσης πλειονότητας, όπου στο ρόλο των υποσυστημάτων βρίσκονται οι Πολιτείες της.

Ο ακόλουθος πίνακας δίνει τις υπογραφές τόσο για το 5×3 σύστημα έμμεσης πλειονότητας, όσο και για το 3×5 σύστημα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4

	5×3	3×5
i	s_i	s_i
≤ 5	0	0
6	0,054	0,060
7	0,240	0,220
8	0,412	0,440
9	0,240	0,220
10	0,054	0,060
≥ 11	0	0

Παρατηρούμε ότι οι υπογραφές και των δύο συστημάτων είναι συμμετρικές γύρω από το 8. Ο συγκεκριμένος τύπος συμμετρίας ισχύει γενικά για όλα τα $r\times s$ συστήματα έμμεσης πλειονότητας, συμπέρασμα που δίνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση. (Boland (2001)) *Έστω $T_{r\times s}$ ο χρόνος ζωής ενός $n = r \times s$ συστήματος έμμεσης πλειονότητας. Τότε η υπογραφή* $\mathbf{s}^t$*=(s_1, s_2,…, s_n) του συστήματος είναι συμμετρική γύρω από το* $\frac{1}{2}(n+1)$. *Αυτό σημαίνει ότι ισχύει η σχέση*

$$s_i = P(T_{r\times s} = X_{(i)}) = P(T_{r\times s} = X_{(n-i+1)}) = s_{n-i+1}, \quad \text{για } i = 1,2,...,n .$$

Απόδειξη. Έστω K_i το σύνολο των διατεταγμένων διανυσμάτων των μονάδων του συστήματος, για τα οποία ο χρόνος ζωής του συστήματος να ταυτίζεται με τον i–οστό διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας, δηλαδή για τα οποία ισχύει $T_{r\times s} = X_{(i)}$. Από τον ορισμό της υπογραφής (Ορισμός 2 της Παραγράφου 3.3) συμπεραίνουμε ότι για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα διανύσματα των συνόλων K_i και K_{n-i+1}. Για το τελευταίο αρκεί να δείξουμε ότι ένα διατεταγμένο διάνυσμα ανήκει στο K_i αν και μόνο αν το αντίστροφο του ίδιου διανύσματος ανήκει στο K_{n-i+1}.

Έστω $\mathbf{X}^{\mathbf{t}}=(X_1,\ldots, X_n)$ το διάνυσμα των χρόνων ζωής των μονάδων του συστήματος. Για κάθε μετάθεση π των $1,2,...,n$, το διάνυσμα $(c_{\pi(1)},...,c_{\pi(n)})$ είναι στοιχείο του K_i αν και μόνο αν $T_{r\times s}=X_{(i)}=X_{\pi(i)}$. Ωστόσο αυτό σημαίνει ότι όταν ακριβώς οι $(i$-$1)$ μονάδες $(c_{\pi(1)},...,c_{\pi(i-1)})$ έχουν αποτύχει, τότε ανάμεσα στα r υποσυστήματα θα πρέπει να έχουμε τα εξής

(i) $\frac{1}{2}(r-1)$ υποσυστήματα στα οποία τουλάχιστον $\frac{1}{2}(s+1)$ μονάδες έχουν αποτύχει,

(ii) $\frac{1}{2}(r-1)$ υποσυστήματα στα οποία λιγότερα από $\frac{1}{2}(s+1)$ μονάδες έχουν αποτύχει,

(iii) ένα υποσύστημα (το οποίο περιέχει τη μονάδα $c_{\pi(\mathrm{i})}$) στο οποίο ακριβώς $\frac{1}{2}(s-1)$ έχουν αποτύχει.

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι αν ακριβώς $(n$-$i)$ μονάδες $(c_{\pi(n)},...,c_{\pi(i+1)})$ έχουν αποτύχει, τότε έχουμε τα εξής

(i) $\frac{1}{2}(r-1)$ υποσυστήματα στα οποία λιγότερα από $\frac{1}{2}(s+1)$ μονάδες έχουν αποτύχει,

(ii) $\frac{1}{2}(r-1)$ υποσυστήματα στα οποία τουλάχιστον $\frac{1}{2}(s+1)$ μονάδες έχουν αποτύχει,

(iii) ένα υποσύστημα (το οποίο περιέχει τη μονάδα $c_{\pi(i)}$) στο οποίο ακριβώς $\frac{1}{2}(s-1)$ έχουν αποτύχει.

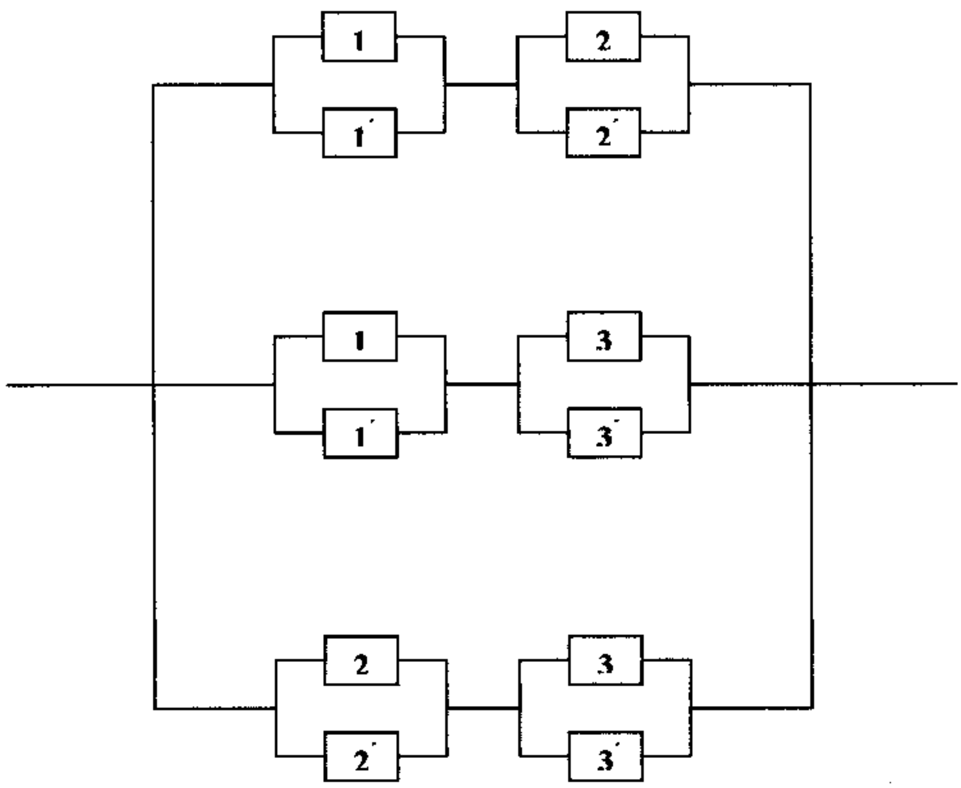
Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι η διάταξη των χρόνων ζωής $X_{\pi(n)}<X_{\pi(n-1)}<...<X_{\pi(1)}$

αντιστοιχεί σε μια διάταξη, όπου $T_{r\times s} = X_{(n-i+1)}$ ή ισοδύναμα ότι το $(c_{\pi(n)},...,c_{\pi(i+1)})$ είναι διάνυσμα που ανήκει στο σύνολο K_{n-i+1}, και αυτό εκφράζει ακριβώς την ιδιότητα της συμμετρίας της υπογραφής, που ήταν και το ζητούμενο. ■

θ. Συστήματα με περίσσεια σε επίπεδο μονάδων ή συστήματος

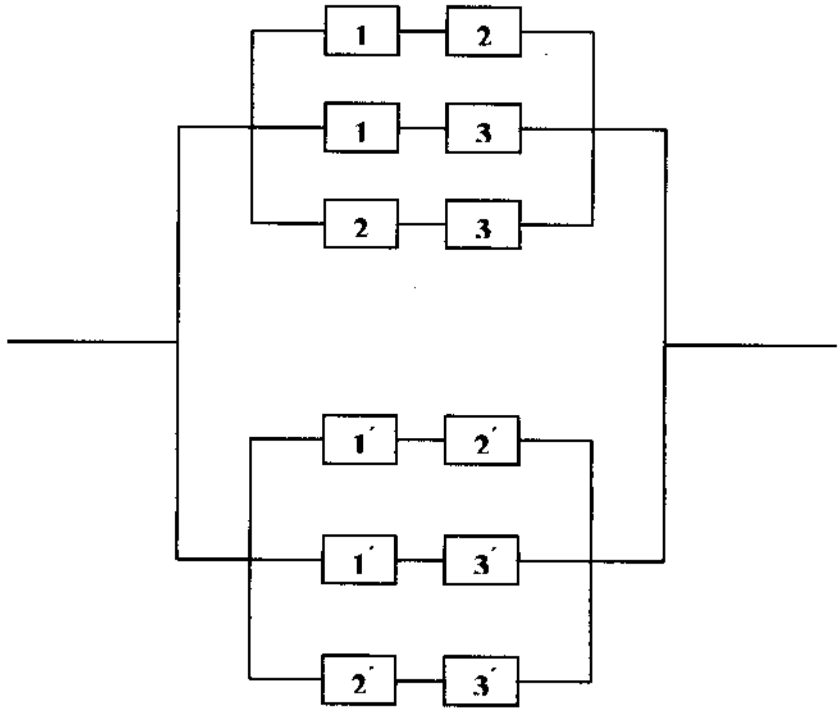
Όταν ένα σύστημα με n μονάδες $(X_1,...,X_n)$ σχεδιάζεται με περίσσεια μονάδων (*system with redundancy at component level*), αυτό σημαίνει ότι για κάθε μία μονάδα X_i από τις n αρχικές υπάρχει μία εφεδρική X_i^*, η οποία συνδέεται παράλληλα με την αρχική X_i , για όλα τα $i=1,2,...,n$. Το ακόλουθο σχήμα δίνει την εικόνα ενός k-από-τα-n συστήματος με περίσσεια σε επίπεδο μονάδων.

ΣΧΗΜΑ 3.9



Όταν ένα σύστημα με n μονάδες $(X_1,...,X_n)$ σχεδιάζεται με περίσσεια σε επίπεδο συστήματος (*system with redundancy at system level*), αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν εφεδρικές X_i^* μονάδες (για όλα τα $i=1,2,..,n$) που σχηματίζουν ένα εφεδρικό σύστημα, το οποίο συνδέεται παράλληλα με το αρχικό. Το ακόλουθο σχήμα δίνει την εικόνα ενός k-από-τα-n συστήματος με περίσσεια σε επίπεδο συστήματος.

ΣΧΗΜΑ 3.10



Πρόταση. *Για το k-από-τα-n σύστημα με περίσσεια σε επίπεδο συστήματος η υπογραφή* $\mathbf{s}^{\mathbf{t}}=(s_1,\ldots,s_{2n})$ *υπολογίζεται ως εξής*

- *Για* $1 \le i < 2n-2k+2$ *και* $2n-k+1 < i \le 2n$ *ισχύει*

$$s_i = 0.$$

- *Για* $r = 0,1,\ldots,k-1$ *ισχύει*

$$s_{2n-2k+2+r} = \frac{\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k-1-r}}{\binom{2n-1}{2k-2-r}}.$$

Απόδειξη. Για $r = 0,1,\ldots,k-1$ δίνουμε μια συνδυαστική απόδειξη που ισχύει για μια αναλογία, η οποία έχει σχηματισθεί από

(i) το πλήθος των μεταθέσεων των $2n$ αποτυχιών των μονάδων για τις οποίες το σύστημα αποτυγχάνει κατά την ($2n$-$2k$+2+r)-οστή αποτυχία, και

(ii) το πλήθος όλων των πιθανών μεταθέσεων (που είναι $(2n)!$).

Αφού η αποτυχία του συστήματος είναι πιθανή, μόνο αν τουλάχιστον (n-k+1) αποτυχίες συμβούν ανάμεσα στις αρχικές και στις εφεδρικές μονάδες, είναι προφανές ότι $s_i = 0$ για $1 \le i \le 2n - 2k + 2$. Επιπλέον ο μέγιστος αριθμός πιθανών αποτυχιών που μπορεί να συμβούν χωρίς να προκαλέσουν αποτυχία του συστήματος είναι $2n$-k. (για παράδειγμα n-k αρχικές μονάδες και k εφεδρικές μονάδες). Συνεπώς είναι ξεκάθαρο ότι $s_i = 0$ για $2n - k + 1 \le i \le 2n$.

Τώρα θεωρούμε τις μεταθέσεις για τις οποίες η ($2n$-$2k$+2+r)-οστή αποτυχία είναι μοιραία για το σύστημα. Το πλήθος τέτοιων μεταθέσεων είναι το γινόμενο των παρακάτω παραγόντων: υπάρχουν 2 τρόποι για να επιλέξουμε το «σύνολο #1», δηλαδή εκείνο το σύνολο των μονάδων από το οποίο θα προέλθει η αποτυχία της μονάδας που θα είναι μοιραία γα το σύστημα. Υπάρχουν $\binom{n}{n-k+1}$ τρόποι για να επιλεγούν οι (n-k+1) μονάδες που αποτυγχάνουν από τις n μονάδες που υπάρχουν στο «σύνολο #1», υπάρχουν $\binom{n}{n-k+1+r}$ τρόποι για να επιλεγούν οι (n-k+1+r) μονάδες που αποτυγχάνουν από τις n μονάδες που υπάρχουν στο «σύνολο #2» πριν την αποτυχία του συστήματος, υπάρχουν (n-k+1) τρόποι για να επιλεγούν οι μονάδες που αποτυγχάνουν και είναι μοιραίες για το σύστημα, υπάρχουν ($2n$-$2k$+1+r)! μεταθέσεις των ($2n$-$2k$+1+r) αποτυχιών των μονάδων που αποτυγχάνουν πριν την αποτυχία του συστήματος και τέλος υπάρχουν ($2k$-r+2)! μεταθέσεις των εναπομείναντων (υποθετικών) αποτυχιών που συμβαίνουν μετά από την αποτυχία του συστήματος. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το γινόμενο όλων των παραπάνω, διαιρούμενο με την ποσότητα $(2n)!$, δίνει την έκφραση για τις συντεταγμένες s_i που θέλαμε να αποδείξουμε. Πράγματι

$$s_{2n-2k+2+r} = \frac{\binom{n}{n-k+1}\binom{n}{n-k+r+1}(n-k+1)(2n-2k+r+1)!(2k-r-2)!}{(2n)!} =$$

$$=\frac{\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}\frac{n!}{(n-k+r+1)!(k-r+1)!}(n-k+1)(2n-2k+r+1)!(2k-2r-2)!}{(2n)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n!}{(k-1-r)!(n-k+1+r)!}\frac{(2k-2-r)!}{(2n-1)!}(2n-2k+r+1)!=$$

$$=\frac{\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k-1-r}}{\binom{2n-1}{2k-2-r}}$$ ■

Παράδειγμα. Θεωρούμε το 3-από-τα-5 σύστημα με περίσσεια σε επίπεδο συστήματος και συμβολίζουμε με $\mathbf{s}^{\mathbf{t}}=(s_1,\ldots,s_{10})$ την υπογραφή του. Τότε, με τη βοήθεια της προηγούμενης Πρότασης, υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος της υπογραφής.

Για $1 \le i < 6$ και για $8 < i \le 10$ ισχύει ότι

$$s_i = 0$$

και για $r = 0,1,2$ έχουμε

$$s_6=\frac{\binom{5-1}{3-1}\binom{5}{3-1-0}}{\binom{2\cdot 5-1}{2\cdot 3-2-0}}=\frac{\binom{4}{2}\binom{5}{2}}{\binom{9}{4}}=\frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}}{\frac{9!}{5!\cdot 4!}}=\frac{60}{126}$$

$$s_7=\frac{\binom{5-1}{3-1}\binom{5}{3-1-1}}{\binom{2\cdot 5-1}{2\cdot 3-2-1}}=\frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{1!\cdot 4!}}{\frac{9!}{6!\cdot 3!}}=\frac{30}{84}$$

$$s_8 = \frac{\binom{5-1}{3-1}\binom{5}{3-1-2}}{\binom{2\cdot 5-1}{2\cdot 3-2-2}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{0!\cdot 5!}}{\frac{9!}{7!\cdot 2!}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Συνεπώς η υπογραφή του 3-από-τα-5 συστήματος με περίσσεια σε επίπεδο συστήματος είναι η εξής

$$\mathbf{s^t} = (0,0,0,0,0,\frac{60}{126},\frac{30}{84},\frac{1}{6},0,0).$$

Πρόταση. *Για το k-από-τα-n σύστημα με περίσσεια σε επίπεδο μονάδων η υπογραφή* $\mathbf{s^t}=(s_1,\ldots,s_{2n})$ *υπολογίζεται ως εξής*

- Για $1 \le i < 2n-2k+2$ *και* $2n-k+1 < i \le 2n$ *ισχύει ότι*

$$s_i = 0.$$

- Για $r = 0,1,...,k-1$ *ισχύει*

$$s_{2n-2k+2+r} = \frac{\binom{n-1}{k-1}\binom{k-1}{r}\cdot 2^r}{\binom{2n-1}{2k-2-r}}.$$

Η απόδειξη παραλείπεται. (ο αναγνώστης παραπέμπεται στην απόδειξη για την υπογραφή του *k*-από-τα-*n* συστήματος με περίσσεια σε επίπεδο συστήματος, που δόθηκε προηγουμένως).

Παράδειγμα. Θεωρούμε το 3-από-τα-5 σύστημα με περίσσεια σε επίπεδο μονάδων και συμβολίζουμε με $\mathbf{s^t}=(s_1,\ldots,s_{10})$ την υπογραφή του. Τότε, με τη βοήθεια της προηγούμενης Πρότασης, υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος της υπογραφής.

Για $1 \le i < 6$ και για $8 < i \le 10$ ισχύει ότι $s_i = 0$

και για $r = 0,1,2$ έχουμε

$$s_6 = \frac{\binom{5-1}{3-1}\binom{3-1}{0}\cdot 2^0}{\binom{2\cdot 5-1}{2\cdot 3-2-0}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{0}}{\binom{9}{4}} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}}{\frac{9!}{5!\cdot 4!}} = \frac{6}{126}$$

$$s_7 = \frac{\binom{5-1}{3-2}\binom{3-1}{1}\cdot 2^1}{\binom{2\cdot 5-1}{2\cdot 3-2-1}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}\cdot 2}{\binom{9}{3}} = \frac{24}{84}$$

$$s_8 = \frac{\binom{5-1}{3-1}\binom{3-1}{2}\cdot 2^2}{\binom{2\cdot 5-1}{2\cdot 3-2-2}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}\cdot 4}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 4}{\frac{9!}{7!\cdot 2!}} = \frac{24}{36} = \frac{4}{6}.$$

Συνεπώς η υπογραφή του 3-από-τα-5 συστήματος με περίσσεια σε επίπεδο μονάδων είναι η εξής

$$\mathbf{s}^{\mathbf{t}} = (0,0,0,0,0,\frac{6}{126},\frac{24}{84},\frac{4}{6},0,0).$$

3.5 Υπολογισμός της συνάρτησης αξιοπιστίας ενός συστήματος μέσω της υπογραφής

Η υπογραφή ενός μονότονου συστήματος μπορεί να βοηθήσει στον υπολογισμό της συνάρτησης αξιοπιστίας του (Boland, Samaniego & Verstup (2001)). Αρχικά θεωρούμε τις συντεταγμένες s_i της υπογραφής του συστήματος. Τότε, για ένα σύστημα που αποτελείται από n όμοιες και ανεξάρτητες μονάδες με αξιοπιστία p, ορίζουμε το διάνυσμα **d,** οι συντεταγμένες του οποίου δίνονται συναρτήσει των s_i από τον ακόλουθο τύπο

$$d_r = \sum_{j=1}^{r}\left\{\sum_{i=n-j+1}^{n} s_i\right\}\binom{n}{j}\binom{n-j}{r-j}(-1)^{r-j}, \quad \gamma\iota\alpha \quad r = 1,2,\ldots,n.$$

Οι συντεταγμένες d_r ονομάζονται *dominations* και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$d_0 = 0, \quad \sum_{r=1}^{n} d_r = 1.$$

Προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες d_r από τον παραπάνω τύπο, στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε την αξιοπιστία $R(p)$ του συστήματος ως εξής

$$R(p) = \sum_{r=1}^{n} d_r p^r \ .$$

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το συνεχόμενο 2-από-τα-5 σύστημα, η υπογραφή του οποίου δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{s}^t = (0, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{1}{10}, 0) \ .$$

Αρχικά υπολογίζουμε τους συντελεστές d_r, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$d_1 = \sum_{j=1}^{1} \{ \sum_{i=6-j}^{5} s_i \} \binom{5}{j} \binom{5-j}{1-j} (-1)^{1-j} = 0 \, ,$$

$$d_2 = \sum_{j=1}^{2} \{ \sum_{i=6-j}^{5} s_i \} \binom{5}{j} \binom{5-j}{2-j} (-1)^{2-j} = 0 + \frac{1}{10} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{0} \cdot (-1)^0 = 1 \, ,$$

$$d_3 = \sum_{j=1}^{3} \{ \sum_{i=6-j}^{5} s_i \} \binom{5}{j} \binom{5-j}{3-j} (-1)^{3-j} = 0 + \frac{1}{10} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot (-1)^1 + \frac{6}{10} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{0} \cdot (-1)^0 = -3 + 6 = 3 \, ,$$

$$d_4 = \sum_{j=1}^{4} \{ \sum_{i=6-j}^{5} s_i \} \binom{5}{j} \binom{5-j}{4-j} (-1)^{4-j} = 0 + \frac{1}{10} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot (-1)^2 + \frac{6}{10} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} \cdot (-1)^1 + \frac{10}{10} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{1}{0} =$$

$$= 3 - 12 + 5 = -4 \ ,$$

$$d_5 = \sum_{j=1}^{5} \{ \sum_{i=6-j}^{5} s_i \} \binom{5}{j} \binom{5-j}{5-j} (-1)^{5-j} = 0 + \frac{1}{10} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} \cdot (-1)^3 + \frac{6}{10} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} \cdot (-1)^2 - \frac{10}{10} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{1}{1} +$$

$$+ \frac{10}{10} \cdot \binom{5}{5} \cdot \binom{0}{0} = -\frac{1}{10} \cdot 10 + \frac{6}{10} \cdot 10 - 5 + 1 = -1 + 6 - 5 + 1 = 1 \, .$$

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε την αξιοπιστία του συνεχόμενου 2-από-τα-5 συστήματος

$$R(p) = \sum_{r=1}^{5} d_r p^r = 0 \cdot p^1 + 1 \cdot p^2 + 3 \cdot p^3 - 4 \cdot p^4 + 1 \cdot p^5 = p^2 + 3 \cdot p^3 - 4 \cdot p^4 + p^5 \, .$$

3.6 Σύγκριση συστημάτων με χρήση της υπογραφής

Όπως θα γίνει αντιληπτό στη συνέχεια, μία βασική χρήση της υπογραφής είναι στη σύγκριση δύο ή περισσοτέρων συστημάτων. Είναι συχνά πιθανό να μπορούμε να κρίνουμε ένα σύστημα σαν καλύτερο από ένα άλλο με μια απλή παρατήρηση των υπογραφών τους. Για παράδειγμα ένα σύστημα 2-από-τα-4 έχει υπογραφή (όπως έχουμε δει και παραπάνω) $\boldsymbol{s}_{2/4}{}^{\boldsymbol{t}} = (0,0,1,0)$, ενώ ένα σύστημα 3-από-τα-4 έχει υπογραφή $\boldsymbol{s}_{3/4}{}^{\boldsymbol{t}} = (0,1,0,0)$.Συνεπώς οι δύο υπογραφές είναι ικανές να ποσοτικοποιήσουν το γεγονός ότι ένα σύστημα 2-από-τα-4 είναι καλύτερο από ένα σύστημα 3-από-τα-4, το οποίο έχει τις ίδιες μονάδες με το πρώτο. Πράγματι αυτό είναι εμφανές, καθώς, σύμφωνα με τα δύο διανύσματα $s_{2/4}{}^{t}$ και $s_{3/4}{}^{t}$, ο χρόνος ζωής του συστήματος 2-από-τα-4 ταυτίζεται, με πιθανότητα 1, με το δεύτερο διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας του συστήματος, ενώ ο χρόνος ζωής του συστήματος 2-από-τα-4 ταυτίζεται, με πιθανότητα 1, με τον τρίτο διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας του, άρα το σύστημα 3-από-τα- 4 τείνει να διαρκέσει περισσότερο από το σύστημα 2-από-τα-4 .

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε πως διάφορες στοχαστικές συγκρίσεις μεταξύ συστημάτων είναι δυνατόν να θεμελιωθούν με τη βοήθεια της σύγκρισης των υπογραφών των δύο συστημάτων. Η ιδέα της στοχαστικής διάταξης είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στη σύγκριση χρόνων ζωής συστημάτων. Υπάρχουν αρκετοί τύποι στοχαστικής σχέσης, ωστόσο εμείς θα περιοριστούμε στη συνήθη στοχαστική διάταξη, στη διάταξη με βάση τη βαθμίδα αποτυχίας (*hazard rate ordering)* και τη διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας (*likelihood ratio ordering)*, οι ορισμοί των οποίων δίνονται παρακάτω.

Ορισμός 1. *Αν* T_1, T_2 *είναι δύο τυχαίοι χρόνοι ζωής* (*ή πιο γενικά δύο τυχαίες μεταβλητές*), *τότε λέμε ότι ο χρόνος* T_2 *είναι μεγαλύτερος από τον* T_1 *στη συνήθη στοχαστική διάταξη* (*συμβολικά* $T_1 \leq_{st} T_2$) *αν ισχύει η σχέση*

$$\overline{F}_{T_1}(t) \leq \overline{F}_{T_2}(t) \text{ για όλα τα } t.$$

Πιο απλά η συγκεκριμένη διάταξη σημαίνει ότι, για κάθε t, ο χρόνος T_2 είναι πιο πιθανόν να υπερβεί την τιμή t από τον T_1.

Ορισμός 2. *Αν* T_1, T_2 *είναι δύο τυχαίοι χρόνοι ζωής* (*ή πιο γενικά δύο τυχαίες μεταβλητές*), *τότε λέμε ότι ο χρόνος* T_2 *είναι μεγαλύτερος από τον* T_1 *στη διάταξη βαθμίδας αποτυχίας* (*συμβολικά* $T_1 \leq_{hr} T_2$) *αν ισχύει η σχέση*

$$\overline{F}_{T_2}(t)/\overline{F}_{T_1}(t) \uparrow t \;\; \text{για όλα τα } t.$$

(δηλαδή αν η συνάρτηση $\overline{F}_{T_2}(t)/\overline{F}_{T_1}(t)$ είναι αύξουσα ως προς *t*.)

Ο ορισμός της διάταξης αυτής είναι ισοδύναμος με την ακόλουθη ανίσωση

$$P\{T_2 - x > t \mid T_2 > x\} \geq P\{T_1 - x > t \mid T_2 > x\}, \quad \forall t, x \geq 0.$$

Συνεπώς διαισθητικά η διάταξη βαθμίδας αποτυχίας σημαίνει ότι ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του T_2 είναι στοχαστικά μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο υπολειπόμενο χρόνο ζωής του T_1, δεδομένου ότι έχουν και οι δύο επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή *t* (Boland & El-Neweihi (1995)).

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η στοχαστική διάταξη αναφέρεται σε δύο καινούριες μονάδες με χρόνους ζωής T_1 και T_2, ενώ η διάταξη βαθμίδας αποτυχίας σε χρόνους ζωής μονάδων με οποιαδήποτε ηλικία.

Ορισμός 3. *Αν* T_1, T_2 *είναι δύο τυχαίοι χρόνοι ζωής* (*ή πιο γενικά δύο τυχαίες μεταβλητές*), *τότε λέμε ότι ο χρόνος* T_2 *είναι μεγαλύτερος από τον* T_1 *στη διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας* (*συμβολικά* $T_1 \leq_{lr} T_2$) *αν ισχύει η σχέση*

$$f_{T_2}(t)/f_{T_1}(t) \uparrow t \;\; \text{για όλα τα } t.$$

(δηλαδή αν η συνάρτηση $f_{T_2}(t)/f_{T_1}(t)$ είναι αύξουσα ως προς *t*).

Από τον ορισμό αυτό έχουμε ότι αν $T_1 \leq_{lr} T_2$, τότε η πιθανότητα

$$P(t \leq T_2 \leq t + \Delta t),$$

η οποία είναι ανάλογη ως προς τη συνάρτηση πυκνότητας $f_{T_2}(t)$, αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό έναντι της πιθανότητας

$$P(t \leq T_1 \leq t + \Delta t),$$

η οποία είναι ανάλογη ως προς τη συνάρτηση πυκνότητας $f_{T_1}(t)$, για το ίδιο πλάτος Δt.

Για τους τρεις παραπάνω τύπους διάταξης ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές

$$T_1 \leq_{st} T_2 \Rightarrow T_1 \leq_{hr} T_2 \Rightarrow T_1 \leq_{lr} T_2.$$

Μολονότι η υπογραφή ενός μονότονου συστήματος $\mathbf{s}^{\mathbf{t}}=(s_1,\ldots s_n)$ είναι ένα διάνυσμα πιθανότητας, το οποίο είναι συνάρτηση του σχεδιασμού του συστήματος, μπορούμε να εισάγουμε στοχαστικές διατάξεις για δύο υπογραφές. Οι ακόλουθοι ορισμοί που αναφέρονται σε διάταξη υπογραφών δίνονται σε αντιστοιχία με τους παραπάνω τρεις ορισμούς για διάταξη τυχαίων χρόνων ζωής.

Ορισμός 1΄. *Αν* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ *είναι οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες , τότε λέμε ότι η υπογραφή* $\boldsymbol{s}_2$ *είναι μεγαλύτερη από τη* $\boldsymbol{s}_1$ *στη συνήθη στοχαστική διάταξη* (*συμβολικά* $\boldsymbol{s}_1 \leq_{\boldsymbol{st}} \boldsymbol{s}_2$) *αν ισχύει η σχέση*

$$\sum_{j=i}^{n} s_{1j} \leq \sum_{j=i}^{n} s_{2j} \text{ για όλα τα } i=1,2,\ldots n.$$

Ορισμός 2΄. *Αν* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ *είναι οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες , τότε λέμε ότι η υπογραφή* $\mathbf{s}_2$ *είναι μεγαλύτερη από τη* $\mathbf{s}_1$ *στη διάταξη βαθμίδας αποτυχίας* (*συμβολικά* $s_1 \leq_{hr} s_2$) *αν ισχύει η σχέση*

$$\sum_{j=i}^{n} s_{2j} \Big/ \sum_{j=i}^{n} s_{1j} \uparrow i \text{ για όλα τα } i=1,2,\ldots n.$$

(δηλαδή αν η συνάρτηση $\sum_{j=i}^{n} s_{2j} / \sum_{j=i}^{n} s_{1j}$ είναι αύξουσα ως προς i)

Ορισμός 3΄. *Αν* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ *είναι οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες , τότε λέμε ότι η υπογραφή* $\mathbf{s}_2$ *είναι μεγαλύτερη από τη* $\mathbf{s}_1$ *στη διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας (συμβολικά* $s_1 \leq_{lr} s_2$*) αν ισχύει η σχέση*

$$s_{2i} / s_{1i} \uparrow i \text{ για όλα τα } i=1,2,\ldots n.$$

(δηλαδή αν η συνάρτηση s_{2i} / s_{1i} είναι αύξουσα ως προς i)

Η σχέση ανάμεσα σε δύο στοχαστικά διατεταγμένες υπογραφές συστημάτων και τους αντίστοιχους χρόνους ζωής τους, τεκμηριώνεται με τα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα 1. (Kochar, Mukerjee & Samaniego (1999)) *Έστω* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ *οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες και* T_1, T_2 *οι αντίστοιχοι χρόνοι ζωής τους. Τότε*

$$\boldsymbol{s}_1 \leq_{\boldsymbol{st}} \boldsymbol{s}_2 \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_2$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1 της Παραγράφου 3.2 έχουμε διαδοχικά ότι

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (\sum_{i=j+1}^{n} s_i) \binom{n}{j} (F(t))^j (1 - F(t))^{n-j} \ .$$

Δεδομένου ότι $\boldsymbol{s}_1 \leq_{\boldsymbol{st}} \boldsymbol{s}_2$ έχουμε

$$P(T_1 > t) = \sum_{j=0}^{n-1} (\sum_{i=j+1}^{n} s_{1i}) \binom{n}{j} (F(t))^j (1 - F(t))^{n-j} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-1} (\sum_{i=j+1}^{n} s_{2i}) \binom{n}{j} (F(t))^j (1 - F(t))^{n-j} = P(T_2 > t), \quad \forall t \geq 0$$

που είναι ισοδύναμο με τη διάταξη $T_1 \leq_{st} T_2$. ■

Για την απόδειξη του θεωρήματος, που θα δώσουμε στη συνέχεια, χρειαζόμαστε το ακόλουθο Λήμμα (Joag-dev, Kochar & Proschan (1995)).

Λήμμα. *Έστω α, β δύο πραγματικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε η β να είναι μη αρνητική και οι α/β και β να είναι αύξουσες. Αν* $X_i \sim F_i, \quad i = 1,2$ *και* $X_1 \leq_{st} X_2$ *τότε*

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} a(x) dF_1(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x) dF_1(x)} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} a(x) dF_2(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x) dF_2(x)} .$$

Θεώρημα 2. (Kochar, Mukerjee & Samaniego (1999)) *Έστω* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ *οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες και* T_1, T_2 *οι αντίστοιχοι χρόνοι ζωής τους. Τότε*

$$\boldsymbol{s}_1 \leq_{\boldsymbol{hr}} \boldsymbol{s}_2 \Rightarrow T_1 \leq_{hr} T_2 .$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση αξιοπιστίας για το χρόνο ζωής T_1 έχει τη μορφή

$$P(T_1 > t) = \sum_i s_{1i} P(X_{(i)} > t) .$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{\sum_i s_{2i} P(X_{(i)} > t_2)}{\sum_i s_{1i} P(X_{(i)} > t_2)} \le \frac{\sum_i s_{2i} P(X_{(i)} > t_1)}{\sum_i s_{1i} P(X_{(i)} > t_1)}, \quad \forall t_1 > t_2$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\sum_i s_{1i} P(X_{(i)} > t_2)}{\sum_i s_{1i} P(X_{(i)} > t_1)} \le \frac{\sum_i s_{2i} P(X_{(i)} > t_2)}{\sum_i s_{2i} P(X_{(i)} > t_1)}, \quad \forall t_1 > t_2.$$

Ορίζοντας $a(i) = P(X_{(i)} > t_2), \beta(i) = P(X_{(i)} > t_1)$ και F_j τη διακριτή κατανομή $\mathbf{s}_j$, j=1,2 και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Λήμμα, έχουμε ότι ο λόγος

$$\frac{a(i)}{\beta(i)} = \frac{P(X_{(i)} > t_2)}{P(X_{(i)} > t_1)}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς i. Πράγματι ισχύει

$$\frac{P(X_{(i+1)} > t_2)}{P(X_{(i+1)} > t_1)} \ge \frac{P(X_{(i)} > t_2)}{P(X_{(i)} > t_1)}, \quad \forall t_1 \le t_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(X_{(i+1)} > t_2)}{P(X_{(i)} > t_2)} \ge \frac{P(X_{(i+1)} > t_1)}{P(X_{(i)} > t_1)}, \quad \forall t_1 \le t_2$$

δηλαδή

$$\frac{\overline{F}_{(i+1)}(t)}{\overline{F}_{(i)}(t)} \text{ είναι αύξουσα συνάρτηση του } t.$$

Η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από το γεγονός ότι ισχύει $X_{(i+1)} \ge_{hr} X_{(i)}$ (το τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει επειδή τα X_i είναι ανεξάρτητα). Επιπλέον η συνάρτηση $\beta(i) = P(X_{(i)} > t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς i, αφού και τα $X_{(i)}$ είναι στοχαστικά διατεταγμένα. Συνεπώς το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα με τη βοήθεια του Λήμματος υπό την υπόθεση ότι $\mathbf{s}_1 \le_{hr} \mathbf{s}_2$. ■

Θεώρημα 3. (Kochar, Mukerjee & Samaniego (1999)) *Έστω* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ *οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες και* T_1, T_2 *οι αντίστοιχοι χρόνοι ζωής τους. Τότε*

$$\boldsymbol{s}_1 \le_{\boldsymbol{lr}} \boldsymbol{s}_2 \;\Rightarrow T_1 \le_{lr} T_2$$

Απόδειξη. Για j=1,2 έχουμε για το χρόνο T_j

$$\overline{F_j}(t) = \sum_{i=1}^{n} s_{ji} P(X_{(i)} > t)$$

και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα δίνεται από τον τύπο

$$f_j(t) = \sum_{i=1}^{n} s_{ji} f_{(i)}(t) \,.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό c η συνάρτηση

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} s_{2i} f_{(i)}(t) - c\sum_{i=1}^{n} s_{1i} f_{(i)}(t) = \sum_{i=1}^{n} [s_{2i} - c \cdot s_{1i}] f_{(i)}(t)$$

έχει το πολύ μία αλλαγή προσήμου από αρνητικό σε θετικό, με το t να κυμαίνεται από 0 έως ∞ . Αφού $\boldsymbol{s}_1 \le_{\boldsymbol{lr}} \boldsymbol{s}_2$, ο λόγος s_{2i} / s_{1i} είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς i, και αυτό έχει σαν συνέπεια η ακολουθία $\{s_{2i} - cs_{1i}\}$ να έχει το πολύ μία αλλαγή προσήμου από αρνητικό σε θετικό, με το i να κυμαίνεται από 1 έως n. Μιας και στη i.i.d. περίπτωση, $X_{(i-1)} <_{lr} X_{(i)}, \forall i$, έχουμε ότι η $f_{(i)}(t) / f_{(i-1)}(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς t. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $f_{(i)}(t)$ είναι ολικά θετική τάξης 2 (*Totally Positive of order* 2, TP_2) για (i,t), και άρα από γνωστή ιδιότητα των TP_2 συναρτήσεων (Karlin (1968)) έχουμε ότι η συνάρτηση $g(t)$ έχει το πολύ μία αλλαγή προσήμου από αρνητικό σε θετικό, με το t να αυξάνει από $-\infty$ έως ∞. Το τελευταίο συμπέρασμα ολοκληρώνει την απόδειξη.

■

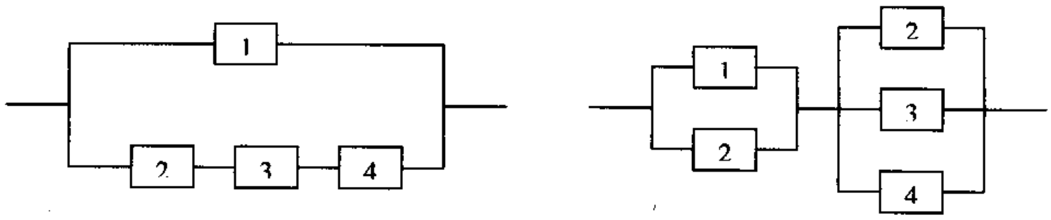
Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι η υπογραφή ενός μονότονου συστήματος έχει άμεση επίδραση στο χρόνο ζωής του. Για τους τρεις τύπους διάταξης δύο υπογραφών ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές (Shaked & Shanthikumar (1994)).

$$\boldsymbol{s}_1 \le_{\boldsymbol{lr}} \boldsymbol{s}_2 \Rightarrow \boldsymbol{s}_1 \le_{\boldsymbol{hr}} \boldsymbol{s}_2 \Rightarrow \boldsymbol{s}_1 \le_{\boldsymbol{st}} \boldsymbol{s}_2 \,.$$

Στη συνέχεια δίνονται παραδείγματα συστημάτων, οι υπογραφές των οποίων ικανοποιούν κάποιες αλλά όχι όλες τις παραπάνω σχέσεις διάταξης.

- Θεωρούμε δύο συστήματα, ο σχεδιασμός των οποίων φαίνεται στο σχήμα 3.11.

ΣΧΗΜΑ 3.11



Σύστημα 1 **Σύστημα 2**

Για τις υπογραφές των παραπάνω συστημάτων έχουμε

$$\boldsymbol{s}_1^t = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \qquad \boldsymbol{s}_2^t = (0, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4})$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$\boldsymbol{s}_1 \leq_{st} \boldsymbol{s}_2 .$$

Ωστόσο για τη διάταξη κατά βαθμίδα αποτυχίας ισχύουν τα ακόλουθα

$$\textit{για } i = 1 \quad \textit{έχουμε } \frac{\sum_{j=1}^{4} s_{2j}}{\sum_{j=1}^{4} s_{1j}} = 1,$$

$$\textit{για } i = 2 \quad \textit{έχουμε } \frac{\sum_{j=2}^{4} s_{2j}}{\sum_{j=2}^{4} s_{1j}} = 1,$$

$$\text{για } i = 3 \quad \text{έχουμε } \frac{\sum_{j=3}^{4} s_{2j}}{\sum_{j=3}^{4} s_{1j}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{10}{12}} = \frac{3}{5},$$

$$\text{για } i = 4 \quad \text{έχουμε } \frac{\sum_{j=4}^{4} s_{2j}}{\sum_{j=4}^{4} s_{1j}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1.$$

συνεπώς η συνάρτηση $\dfrac{\sum_{j=i}^{4} s_{2j}}{\sum_{j=i}^{4} s_{1j}}$ δεν είναι αύξουσα ως προς i και από τον Ορισμό $2'$ συμπεραίνουμε ότι

$$s_1 \not\leq_{hr} s_2 .$$

Επιπλέον για τη διάταξη λόγου πιθανοφάνειας ισχύουν τα παρακάτω

$$\text{για } i = 2 \quad \text{έχουμε } \frac{s_{22}}{s_{12}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = 3 ,$$

$$\text{για } i = 3 \quad \text{έχουμε } \frac{s_{23}}{s_{13}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7} ,$$

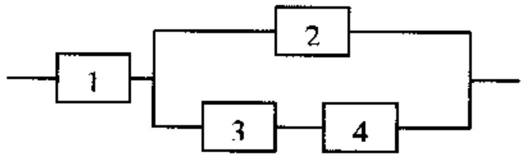
$$\text{για } i = 4 \quad \text{έχουμε } \frac{s_{24}}{s_{14}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1 .$$

Συνεπώς η συνάρτηση $\dfrac{s_{2i}}{s_{1i}}$ δεν είναι αύξουσα ως προς i και από τον Ορισμό $3'$ συμπεραίνουμε

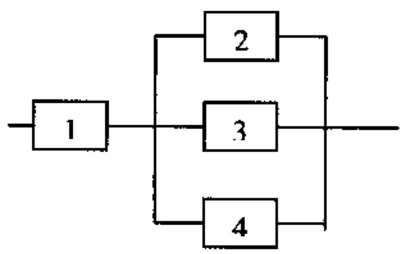
$$s_1 \not\leq_{lr} s_2 .$$

- Θεωρούμε δύο άλλα συστήματα, ο σχεδιασμός των οποίων φαίνεται στο σχήμα 3.12.

ΣΧΗΜΑ 3.12



Σύστημα 3



Σύστημα 4

Για τις υπογραφές των παραπάνω συστημάτων έχουμε

$$\boldsymbol{s}_3^t = (\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0), \qquad \boldsymbol{s}_4^t = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$\boldsymbol{s}_3 \leq_{st} \boldsymbol{s}_4, \quad \boldsymbol{s}_3 \leq_{hr} \boldsymbol{s}_4 .$$

Ωστόσο για τη διάταξη λόγου πιθανοφάνειας ισχύουν τα παρακάτω

$$\text{για } i = 1 \text{ έχουμε } \frac{s_{31}}{s_{41}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1,$$

$$\text{για } i = 2 \text{ έχουμε } \frac{s_{32}}{s_{42}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{3},$$

$$\text{για } i = 3 \text{ έχουμε } \frac{s_{33}}{s_{43}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Συνεπώς η συνάρτηση $\frac{s_{3i}}{s_{4i}}$ δεν είναι αύξουσα ως προς i και από τον Ορισμό 3′ συμπεραίνουμε

$$s_3 \nleq_{lr} s_4 .$$

Στη συνέχεια θα δούμε τη σύγκριση μεταξύ των χρόνων ζωής συστημάτων με περίσσεια συστήματος και μονάδων, η οποία υλοποιείται με τη χρήση των αντίστοιχων υπογραφών τους. Το ακόλουθο θεώρημα συνοψίζει το ζητούμενο συμπέρασμα.

Θεώρημα. *Έστω T_1 ο χρόνος ζωής ενός συστήματος k-από-τα-n με περίσσεια συστήματος και T_2 ο χρόνος ζωής ενός k-από-τα-n συστήματος με περίσσεια μονάδων με $1 \leq k \leq n$. Τότε ισχύει*

$$T_1 \leq_{lr} T_2 .$$

Απόδειξη. Για $r = 0,1,...,k-1$ έχουμε

$$p(r) \equiv \frac{s^{(2)}_{2n-2k+2+r}}{s^{(1)}_{2n-2k+2+r}} = \frac{\binom{k-1}{n}2^r}{\binom{n}{k-r-1}}.$$

Ωστόσο η συνάρτηση $p(r)$ είναι ανάλογη ως προς τη συνάρτηση

$$t(r) = \frac{(n-k+r+1)!2^r}{r!}.$$

Το γεγονός ότι η $p(r)$ είναι αύξουσα ως προς r δηλώνεται από το γεγονός ότι η ανισότητα $\frac{t(r+1)}{t(r)} \geq 1$ ισχύει για όλα τα $r \geq 0$. Δεδομένης της μονοτονίας της συνάρτησης p εξάγεται το συμπέρασμα ότι $T_1 \leq_{lr} T_2$. ■

Στη συνέχεια θα τεκμηριώσουμε τη σύγκριση του συστήματος άμεσης πλειονότητας με το σύστημα έμεσης πλειονότητας, η οποία υλοποιείται με τη βοήθεια των υπογραφών τους.

Θεώρημα. *Έστω $T_{(n+1)/2|n}$ και $T_{r\times s}$ οι χρόνοι ζωής του απλού και έμμεσου i.i.d. συστήματος πλειονότητας αντίστοιχα, όπου $n = r\times s$ με τα r,s να είναι περιττοί ακέραιοι. Αν η συνάρτηση $g_l(i) = E(X^l_{[i]})$ είναι μια κυρτή συνάρτηση του i=1,2,...,n για κάθε ακέραιο $l \geq 1$, τότε $E(T^l_{rxs}) \geq E(T^l_{(n+1)/2|n})$. Συγκεκριμένα αν $E(X_{[i]})$ είναι μια κυρτή συνάρτηση του i, τότε*

$$E(T_{r\times s}) \geq E(T_{(n+1)/2|n}).$$

Απόδειξη. Από τη σχέση

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i P(X_{(i)} > t)$$

είναι φανερό ότι ο χρόνος ζωής T ενός μονότονου συστήματος μπορεί να αντιμετωπισθεί σαν μίξη κατανομών των διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{(1)}, X_{(2)},..., X_{(n)}$. Συνεπώς για κάθε χρόνο ζωής T και για κάθε θετικό ακέραιο l έχουμε

$$E(T^l) = \sum_{i=1}^{n} s_i E(X_{(i)}^l) = \sum_{i=1}^{n} s_i g_l(i).$$

Συγκεκριμένα, επειδή η υπογραφή **s** είναι συμμετρική γύρω από το $\frac{n+1}{2}$, παίρνουμε

$$E(T^l)\sum_{i=1}^{n} s_i g_l(i) \geq g_l\left(\sum_{i=1}^{n} s_i(i)\right) = g_l(\frac{1}{2}(n+1)) = E(X_{((n+1)/2)}^l).$$

Η ανίσωση ισχύει λόγω της κυρτότητας της συνάρτησης g_l. Συνεπώς, παρατηρώντας ότι

$$E(T_{(n+1)/2|n}^l) = E(X_{((n+1)/2)}^l)$$

προκύπτει άμεσα η ζητούμενη ανίσωση

$$E(T_{rxs}) \geq E(T_{(n+1)/2|n}). \qquad \blacksquare$$