ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ταξινόμηση κατανομών χρόνων ζωής

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε διάφορες κλάσεις χρόνων ζωής. Οι κατανομές ταξινομούνται στις διάφορες κλάσεις με βάση τη μορφή της βαθμίδας αποτυχίας τους, ή το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής. Σε κάθε μία από τις κλάσεις αυτές, δίνουμε ισοδυναμίες, οι οποίες εξασφαλίζουν ότι μια κατανομή ανήκει σε μια συγκεκριμένη κλάση, καθώς επίσης και παραδείγματα γνωστών κατανομών που ανήκουν σε αυτές.

2.2 Η οικογένεια IFR

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε κατανομές, στις οποίες η βαθμίδα αποτυχίας ήταν αύξουσα. Η οικογένεια των κατανομών με την παραπάνω ιδιότητα είναι η οικογένεια *IFR*. Στη συνέχεια θα εισάγουμε την οικογένεια αυτή με λίγο διαφορετικό τρόπο, ο οποίος βοηθά να καλύψουμε διακριτή και συνεχή περίπτωση. Παράλληλα θα διαπιστώσουμε την ισοδυναμία μεταξύ των διαφορετικών ορισμών της οικογένειας *IFR* που θα διατυπωθούν.

Ορισμός 1. *Μια μη διακριτή κατανομή F είναι IFR αν και μόνο αν ο λόγος*

$$\frac{F(t+x)-F(t)}{\overline{F}(t)}$$

αυξάνει ως προς t *για* $t \geq 0$ *και για* $x>0$ *ώστε* $F(t)<1$.

Ο ορισμός αυτός έχει και την αντίστοιχη διακριτή περίπτωση.

Ορισμός 1΄. *Μια διακριτή κατανομή* $f(t_j)$ *είναι IFR αν και μόνο αν ο λόγος*

$$\frac{f(t_j)}{\sum_{i=j}^{\infty} f(t_i)}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση για j=0,1,2,...

Εναλλακτικά ο ορισμός της οικογένειας *IFR* μπορεί να δοθεί με βάση τη συνάρτηση αξιοπιστίας $R(t)$ της κατανομής *F*.

Ορισμός 2. *Μια κατανομή F είναι IFR αν και μόνο αν η συνάρτηση*

$$\mu(t;x)=\frac{R(t)-R(t+x)}{R(t)}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του t, όπου R(t) η συνάρτηση αξιοπιστίας.
(ο Ορισμός 2 ισχύει τόσο για συνεχείς, όσο και διακριτές κατανομές)

Ένας ισοδύναμος ορισμός για την ιδιότητα *IFR* μιας κατανομής *F* διατυπώνεται ως εξής.

Ορισμός 3. *Μια τυχαία μεταβλητή T (ή η αντίστοιχη κατανομή F) θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα IFR (increasing failure rate) αν και μόνο αν η βαθμίδα αποτυχίας* $\lambda(t)$ *είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου t. Συμβολικά γράφουμε* $T \in IFR$ *ή* $F \in IFR$.

Για να αποδείξουμε την ισοδυναμία μεταξύ των Ορισμών 1 και 3, ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή *T* με συνάρτηση κατανομής $F(t)$ (όπου $F(0^-)=0$), συνάρτηση πυκνότητας $f(t)$ και βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$. Υποθέτουμε ότι η $\lambda(t)$ είναι αύξουσα και θα δείξουμε ότι η *F* είναι *IFR* με βάση τον Ορισμό 1. Για $t_1 \le t_2$ έχουμε ότι $\lambda(t_1) \le \lambda(t_2)$, συνεπώς

$$\int_0^z \lambda(t_1+u)du \le \int_0^x \lambda(t_1+u)du \Rightarrow \exp[-\int_{t_2}^{t_2+x} \lambda(u)du] \le \exp[-\int_{t_1}^{t_1+x} \lambda(u)du],$$

δηλαδή

$$\frac{F(x+t_2)-F(t_2)}{\overline{F}(t_2)} \ge \frac{F(x+t_1)-F(t_1)}{\overline{F}(t_1)}$$

και τελικά πράγματι δείξαμε ότι ο λόγος

$$\frac{F(t+x)-F(t)}{\overline{F}(t)}$$

αυξάνει ως προς *t*.
Ένας ισοδύναμος ορισμός για την ιδιότητα *IFR* μιας κατανομής *F* διατυπώνεται ως εξής.

Ορισμός 4. *Μια κατανομή F είναι IFR αν η συνάρτηση*

$$\overline{F}(x/t)=\frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)}$$

είναι φθίνουσα στο $0<t<\infty$ *για κάθε* $x\geq 0$.

Θα αποδείξουμε την ισοδυναμία του τελευταίου ορισμού με τον Ορισμό 3. Έστω ότι η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου *t*. Τότε ισχύει

$$\frac{d\overline{F}(x/t)}{dt}=\overline{F}(x/t)[-\lambda(t+x)+\lambda(t)]\leq 0 \Leftrightarrow \lambda(t)\leq\lambda(t+x)\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση

$$\overline{F}(x/t)=\exp(-\int_t^{t+x}\lambda(u)du\ )$$

είναι φθίνουσα ως προς $t\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση της ισοδυναμίας των δύο ορισμών υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\overline{F}(x/t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου *t* και θα αποδείξουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα. Πράγματι στην περίπτωση αυτή είναι φανερό ότι η συνάρτηση

$$\lambda(t)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot(1-\frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)})$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου $t\geq 0$.

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να επισημάνουμε ότι η παραπάνω ισοδυναμία ισχύει μόνο αν υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας $f(t)$, καθώς ο Ορισμός 4 προϋποθέτει την ύπαρξη της.

Στην περίπτωση διακριτού χρόνου ζωής οι Salvia και Bollinger (1982) ανέπτυξαν αποτελέσματα για διακριτά μοντέλα αποτυχίας ανάλογα με αυτά των συνεχών μοντέλων. Αν υποθέσουμε ότι μια διακριτή μεταβλητή *T* έχει συνάρτηση πιθανότητας $f(t)$ και βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$, τότε είναι φανερό ότι ισχύει

$$f(0)=\lambda(0)$$

$$f(j)=\lambda(0)\cdot(1-\lambda(0))\cdot(1-\lambda(1))...(1-\lambda(j-1))\quad ,j=1,2,...$$

Με βάση τους τελευταίους τύπους, συμπεραίνουμε ότι η διακριτή κατανομή *F* της μεταβλητής *T* είναι *IFR* αν η βαθμίδα αποτυχίας είναι της μορφής

$$\lambda(t) = \frac{1-c}{j+1} \ , \ 0 \le c \le 1 \ , \ j = 0,1,2,...$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση πιθανότητας της μεταβλητής *T* γράφεται στη μορφή

$$f(j) = \frac{(j-c+1)c^j}{(j+1)!} .$$

Το παραπάνω *IFR* μοντέλο δεν έχει μεγάλο εύρος εφαρμογών. Ωστόσο το μοντέλο αυτό γενικεύτηκε (Padgett & Spurrier (1985)) με την προσθήκη μιας δεύτερης παραμέτρου *α*. Το νέο αυτό διακριτό *IFR* μοντέλο έχει συνάρτηση πιθανότητας και βαθμίδα αποτυχίας που δίνονται από τους τύπους

$$f(j) = \frac{(aj-c+1)c^j}{\prod_{i=0}^{j} (ia+1)}$$

$$\lambda(j) = \frac{1-c}{aj+1}$$

όπου $j = 0,1,2,... \quad , \quad 0 \le c \le 1, \quad a \ge 0$.

(Για *α*=1 τότε το γενικευμένο τελευταίο *IFR* μοντέλο ταυτίζεται με αυτό των Salvia και Bollinger)

Στη συνέχεια, με αφορμή την παρατήρηση ότι για μια κατανομή *IFR* η γραφική παράσταση της αθροιστικής βαθμίδας αποτυχίας Λ(*t*)

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$$

έναντι του χρόνου *t* παρουσιάζει κυρτότητα, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι στην πράξη, κάνοντας το γράφημα της εμπειρικής αθροιστικής βαθμίδας αποτυχίας

$$\hat{\Lambda}(\mathrm{t}) = -\log\hat{\mathrm{R}}(\mathrm{t})$$

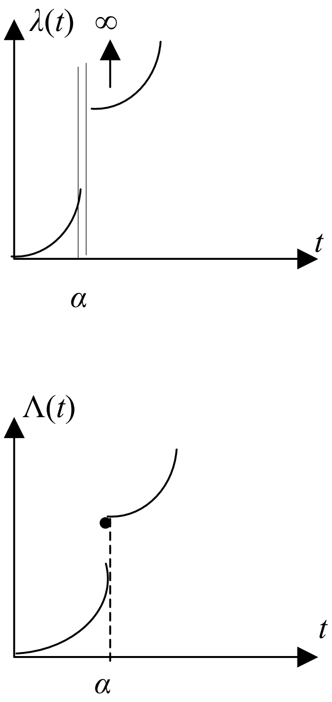
μπορούμε να διακρίνουμε αν η κατανομή που μελετούμε είναι πράγματι *IFR*. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει και από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1. *Μια κατανομή F είναι IFR αν και μόνο αν η αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας Λ*(t) *είναι κυρτή στο διάστημα , στο οποίο ορίζεται.*

Η απόδειξη παραλείπεται (Barlow & Proschan (1965)).

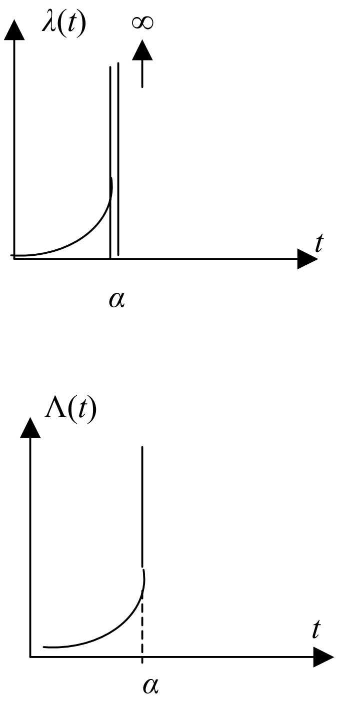
Στη συνέχεια δίνονται παραδείγματα κατανομών, στα οποία φαίνεται γραφικά η σχέση ανάμεσα στην ιδιότητα *IFR* και την κυρτότητα της συνάρτησης *Λ*(t) (Kaufmann, Grouchko & Cruon (1977)).

ΣΧΗΜΑ 2.1



Παράδειγμα κατανομής, της οποίας η αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας Λ(t) δεν είναι ούτε κοίλη ούτε κυρτή, ενώ η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ δεν είναι ούτε *IFR* ούτε *DFR*. (η $\lambda(t)$ είναι μη πεπερασμένη για $t=\alpha$)

ΣΧΗΜΑ 2.2



Παράδειγμα κατανομής *IFR*, της οποίας η αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας Λ(t) είναι κυρτή στο [0,α), διάστημα στο οποίο ορίζεται η $\lambda(t)$.

Στη συνέχεια ακολουθούν προτάσεις, οι οποίες συνδέουν την ιδιότητα *IFR* μιας κατανομής *F* με άλλες ιδιότητες της ίδιας κατανομής.

Πρόταση 2. *Έστω μια τυχαία μεταβλητή T με συνάρτηση κατανομής F όπου* $F(0^-) = 0$ *. Τότε η κατανομή F είναι IFR αν και μόνο αν η συνάρτηση*

$$\log(\overline{F}(t)) = \log(1 - F(t))$$

είναι κοίλη ως προς t στο σύνολο $\{t \,/\, F(t){<}1, t \geq 0\}$.

Απόδειξη. Έστω $\Lambda(t)$ η αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας της μεταβλητής *T*. Τότε ισχύει

$$\overline{F}(t) = 1 - F(t) = e^{-\Lambda(t)},$$

ενώ είναι φανερό ότι ισχύει

$$\frac{F(t+\Delta) - F(t)}{\overline{F}(t)} = 1 - e^{-[\Lambda(t+\Delta) - \Lambda(t)]},$$

συνεπώς η κατανομή *F* είναι *IFR* αν και μόνο αν η συνάρτηση

$$\Lambda(t+\Delta) - \Lambda(t)$$

είναι αύξουσα ως προς *t* για όλα τα $\Delta>0$, ή ισοδύναμα έχουμε ότι η *F* είναι *IFR* αν και μόνο αν $\Lambda(t)$ είναι κυρτή, δηλαδή αν η $\log \overline{F}(t)$ είναι κοίλη.

■

Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι μια συνεχής κατανομή *F,* που είναι *IFR* ή *DFR,* δεν μπορεί να έχει πήδημα στο εσωτερικό του στηρίγματος της. Ανάλογη πρόταση μπορεί να διατυπωθεί και για μια διακριτή κατανομή *IFR* ή *DFR* (Barlow & Proschan (1965)).

Η επόμενη πρόταση συνδέει την ιδιότητα *IFR* μιας κατανομής *F* με την ιδιότητα των *Pólya frequency* συναρτήσεων (PF_2). Πρώτα θα δώσουμε τον ορισμό της κλάσης των συναρτήσεων συχνοτήτων *Pólya* τάξης 2 (PF_2).

Ορισμός. *Μια συνάρτηση* $h(x)$ *για* $-\infty < x < \infty$ *είναι* PF_2 *αν*

α. $h(x) \geq 0$ *για* $-\infty < x < \infty$

β. Για $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$ *και* $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$ *ισχύει*

$$\begin{vmatrix} h(x_1 - y_1) & h(x_1 - y_2) \\ h(x_2 - y_1) & h(x_2 - y_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

Η κλάση των συναρτήσεων PF_2 οφείλει το όνομα της στον Schoenberg, ο οποίος απέδωσε στην κλάση αυτή το όνομα του Μαθηματικού *Pólya*, λόγω της πληθώρας των ερευνών του τελευταίου πάνω στις συγκεκριμένες συναρτήσεις. Η κλάση PF_2 έχει πολλές εφαρμογές στη Στατιστική, στη Θεωρία Αξιοπιστίας, στη Θεωρία Παιγνίων, στην Οικονομική Επιστήμη και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους. Κάθε συνάρτηση PF_2 είναι της μορφής

$$f(x) = e^{-\psi(x)} \ ,$$

όπου $\psi(x)$ είναι κυρτή συνάρτηση (Karlin (1968)).

Στη συνέχεια δίνουμε μία πρόταση, που αφορά κατανομές *IFR*.

Πρόταση 3. *Έστω T μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

α. Η F είναι IFR

β. Η $\overline{F}(t)$ *είναι* PF_2 .

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση κατανομής F είναι *IFR* αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} \overline{F}(t_1) - \overline{F}(t_1 + x) & \overline{F}(t_2) - \overline{F}(t_2 + x) \\ \overline{F}(t_1) & \overline{F}(t_2) \end{vmatrix} \leq 0$$

για $t_1 \leq t_2$ και $x \geq 0$. Αφαιρώντας την πρώτη από τη δεύτερη γραμμή, η τελευταία ορίζουσα αποδεικνύει ότι η συνάρτηση $\overline{F}(t)$ είναι PF_2.

■

Στη συνέχεια θα επισημάνουμε την ισοδυναμία ανάμεσα στην ιδιότητα *IFR* μιας κατανομής F και την ιδιότητα *log concave.* Πρώτα θα δώσουμε τον ορισμό της κλάσης των λογαριθμικά κοίλων συναρτήσεων (*log concave*).

Ορισμός. *Έστω A ένα κυρτό σύνολο στο* R^n *και f μια μη αρνητική συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο A. Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι λογαριθμικά κοίλη* (*log concave*) *στο A, αν ισχύει η ακόλουθη σχέση για όλα τα* $0<\lambda<1$ *και* $\mathbf{x},\mathbf{y} \in A$

$$f[\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}] \geq f^{\lambda}(\mathbf{x})\, f^{1-\lambda}(\mathbf{y}).$$

Πρόταση 4. (Savits (1985)) *Μια τυχαία μεταβλητή T είναι IFR αν και μόνο αν η* $E[h(x,t)]$ *είναι log concave στο x για όλες τις συναρτήσεις* $h(x,t)$, *οι οποίες είναι log concave ως προς* (x,t) *και αύξουσες ως προς t για κάθε δεδομένο* $x \geq 0$.

Η επόμενη πρόταση θεμελιώνει μια ενδιαφέρουσα συνθήκη, ώστε μια κατανομή να έχει την ιδιότητα *IFR*.

Πρόταση 5. (Glaser (1980)) Έστω *μια τυχαία μεταβλητή T με συνάρτηση πυκνότητας f και βαθμίδα αποτυχίας λ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και δύο φορές διαφορίσιμη, τότε για τη συνάρτηση* $\eta(t)$, *που ορίζεται από τη σχέση*

$$\eta(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)},$$

ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή

$$\eta'(t) > 0, \quad \forall t > 0 \Rightarrow \quad F \in IFR.$$

Απόδειξη. Έστω η συνάρτηση $g(t)$ που ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$g(t) = \frac{1}{\lambda(t)} = \frac{R(t)}{f(t)}. \qquad (1)$$

Η συνάρτηση $g(t)$ είναι συνεχής, δύο φορές διαφορίσιμη στο $(0,\infty)$ και παίρνει μόνο θετικές τιμές. Για την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $g(t)$ ισχύει ότι

$$g^{'}(t) = g(t)n(t) - 1 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε

$$g^{'}(t) = \int_t^{\infty} [f(y)/f(t)]n(t)dy - 1 =$$

$$= \int_t^{\infty} [f(y)/f(t)][n(t)-n(y)]dy + \int_t^{\infty} [f(y)/f(t)]n(y)dy - 1.$$

Ωστόσο ισχύουν οι σχέσεις

$$-\int_t^{\infty} f'(y)dy / f(t) = \int_t^{\infty} [f(y)/f(t)]n(y)dy,$$

$$\int_t^{\infty} f'(y)dy = \int_0^{\infty} f'(k+t)dk = (d/dt)\int_0^{\infty} f(k+t)dk = (d/dt)\int_t^{\infty} f(y)dy = -f(t).$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$g'(t) = \int_t^{\infty} [f(y)/f(t)][n(t)-n(y)]dy. \qquad (3)$$

Αν $\eta'(t) > 0$, τότε, από τη σχέση (3), συνεπάγεται ότι $g'(t) < 0$ και τελικά από τη σχέση (1) παίρνουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα, άρα η κατανομή *F* είναι *IFR*.

■

Τέλος, παραδείγματα γνωστών κατανομών, που έχουν την ιδιότητα *IFR,* είναι η εκθετική κατανομή, η κατανομή *Weibull* (για $\alpha \geq 1$), η κατανομή Γάμμα (για α>1), η κανονική κατανομή, η κατανομή *Gompertz-Makeham*, η ομοιόμορφη κατανομή, η Διωνυμική και η κατανομή *Poisson*.

Ολοκληρώνοντας την παράγραφο αυτή, θα εισάγουμε δύο ακόμη κατανομές με την ιδιότητα *IFR*.

- Μια νέα κατανομή με δύο παραμέτρους που έχει βαθμίδα αποτυχίας *IFR* (ή μορφής bathtub) προτάθηκε από τον Zhenmin Chen (2000). Η αθροιστική συνάρτηση *F*(*t*) της κατανομής αυτής δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda(1-e^{x^{\beta}})}, x > 0$$

όπου λ,β είναι οι δύο παράμετροι. Η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από την ακόλουθη σχέση

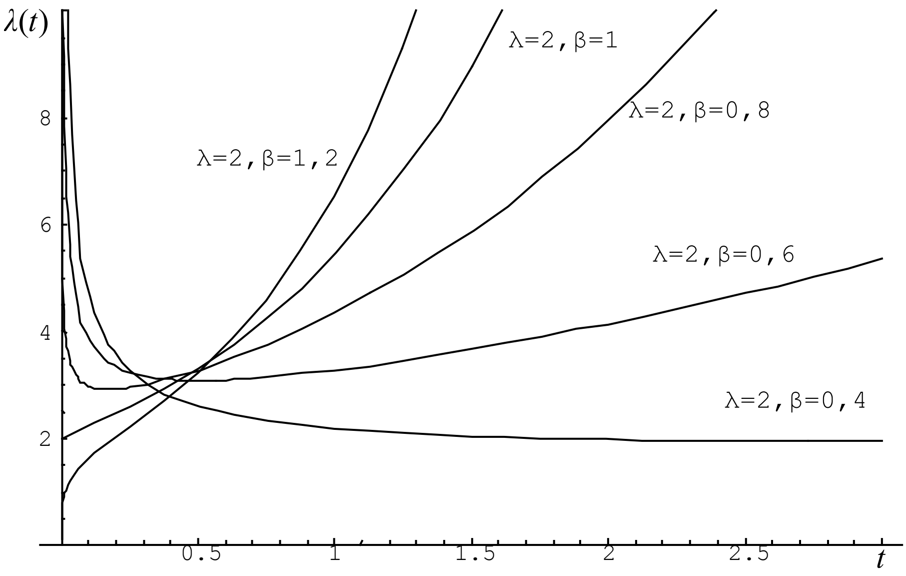
$$\lambda(x) = \lambda\beta x^{\beta-1} e^{x^{\beta}} .$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε τη σχέση

$$\lambda'(x) = \lambda\beta x^{\beta-2} e^{x^{\beta}} ((\beta-1) + \beta x^{\beta}),$$

συνεπώς αν β<1, τότε η βαθμίδα αποτυχίας έχει μορφή bathtub, ενώ για $\beta \geq 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι *IFR*. Η μορφή της τελευταίας για διάφορες τιμές του β φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

ΣΧΗΜΑ 2.3



Η κατανομή αυτή, σε σύγκριση με άλλες κατανομές που έχουν προταθεί για να εφαρμοσθούν σε πραγματικά δεδομένα με βαθμίδα αποτυχίας της μορφής bathtub (όπως η κατανομή exponential power), έχει το συγκριτικό πλεονέκτημα ότι για τις παραμέτρους της συγκεκριμένης κατανομής είναι δυνατόν να κατασκευασθούν από κοινού διαστήματα εμπιστοσύνης (Chen (2000)).

- Ας υποθέσουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας για μια κατανομή *F,* δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \alpha + \beta t \ , \text{ για } \alpha, \beta \geq 0$$

δηλαδή η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνεται γραμμικά. Τότε από τη σχέση

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

συμπεραίνουμε για τη συνάρτηση αξιοπιστίας $R(t)$ ότι ισχύει

$$R(t) = \exp\{-\alpha t - \beta t^2/2\} \ , \ t \geq 0 \, .$$

Ένα τέτοιο μοντέλο χρήζει ιδιαίτερης προσοχής, κυρίως σε εφαρμογές στην αξιοπιστία. Καταρχήν μπορεί να θεωρηθεί μια πρώτη προσέγγιση ενός πιο γενικού *IFR* μοντέλου, και επιπλέον προσφέρει το πλεονέκτημα, έχοντας γνωστές παραμέτρους α,β (ή εκτιμώντας αυτές με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ή τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας), να αναπτύξουμε στατιστική συμπερασματολογία.

2.3 Η οικογένεια DFR

Ορισμός 1. *Μια μη διακριτή κατανομή F είναι DFR αν και μόνο αν ο λόγος*

$$\frac{F(t+x)-F(t)}{\overline{F}(t)}$$

μειώνεται ως προς t *για* $t\geq 0$ *και για x>0 ώστε* $F(t)<1$.

Ο ορισμός αυτός έχει και την αντίστοιχη διακριτή περίπτωση.

Ορισμός 1΄. *Μια διακριτή κατανομή* $f(t_j)$ *είναι DFR αν και μόνο αν ο λόγος*

$$\frac{f(t_j)}{\sum_{i=j}^{\infty} f(t_i)}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση για $j=0,1,2,...$

Εναλλακτικά ο ορισμός της οικογένειας *IFR* μπορεί να δοθεί με βάση τη συνάρτηση αξιοπιστίας $R(t)$ της κατανομής *F*.

Ορισμός 2. *Μια κατανομή F είναι DFR αν και μόνο αν η συνάρτηση*

$$\mu(t;x)=\frac{R(t)-R(t+x)}{R(t)}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του t, όπου $R(t)$ *η συνάρτηση αξιοπιστίας.*

(ο Ορισμός 2 ισχύει τόσο για συνεχείς, όσο και διακριτές κατανομές)

Ένας ισοδύναμος ορισμός για την ιδιότητα *DFR* μιας κατανομής *F* διατυπώνεται ως εξής.

Ορισμός 3. *Μια τυχαία μεταβλητή T* (*ή η αντίστοιχη κατανομή F*) *θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα DFR* (*decreasing failure rate*) *αν και μόνο αν η βαθμίδα αποτυχίας* $\lambda(t)$ *είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου t. Συμβολικά γράφουμε* $T\in DFR$ *ή* $F\in DFR$.

Ένας ισοδύναμος ορισμός για την ιδιότητα *DFR* μιας κατανομής *F* διατυπώνεται ως εξής.

Ορισμός 4. *Μια κατανομή F είναι DFR αν η συνάρτηση*

$$\overline{F}(x/t)=\frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)}$$

είναι αύξουσα *στο* $-\infty < t < \infty$ *για κάθε* $x \geq 0$.

Η επόμενη πρόταση συνδέει την ιδιότητα *DFR* μιας κατανομής με την αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας.

Πρόταση 1. *Μια κατανομή F είναι DFR αν και μόνο αν η αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας* $\Lambda(t)$ *είναι κοίλη στο διάστημα , στο οποίο ορίζεται.*

Η απόδειξη παραλείπεται (Barlow & Proschan (1965)).

Στη συνέχεια ακολουθούν προτάσεις, οι οποίες συνδέουν την ιδιότητα *DFR* μιας κατανομής *F* με άλλες ιδιότητες της ίδιας κατανομής.

Πρόταση 2. *Έστω μια τυχαία μεταβλητή T με συνάρτηση κατανομής F όπου* $F(0^-) = 0$. *Τότε η κατανομή F είναι DFR αν και μόνο αν η συνάρτηση*

$$\log(\overline{F}(t)) = \log(1 - F(t))$$

είναι κυρτή ως προς t στο σύνολο $\{t \,/\, F(t) < 1, t \geq 0\}$.

Η απόδειξη είναι ανάλογη με τη απόδειξη της Πρότασης 2 της Παραγράφου 2.2.

Η επόμενη πρόταση συνδέει την ιδιότητα *DFR* μιας κατανομή *F* με την ιδιότητα των *Totally Positive* συναρτήσεων τάξης 2 (TP_2). Πρώτα θα δώσουμε τον ορισμό της κλάσης των συναρτήσεων ολικά θετικών συναρτήσεων τάξης 2.

Ορισμός. *Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών x,y* $h(x,y)$ *είναι* TP_2 *στο* $A \times B$ *αν*

$$\begin{vmatrix} h(x_1, y_1) & h(x_1, y_2) \\ h(x_2, y_1) & h(x_2, y_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

για όλα τα x_1, x_2 *που ανήκουν σε ένα υποσύνολο A της ευθείας των πραγματικών αριθμών και για όλα τα* y_1, y_2 *που ανήκουν σε ένα υποσύνολο B της ευθείας των πραγματικών αριθμών.*

Η κλάση των ολικά θετικών συναρτήσεων τάξης 2 (TP_2) διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο σε διάφορες περιοχές των Μαθηματικών, της Στατιστικής και της Μηχανολογίας. Στα Μαθηματικά, οι συναρτήσεις TP_2 εμφανίζονται σε προβλήματα, τα οποία ασχολούνται με την κυρτότητα, τις ροπές, τις ιδιοτιμές και την ταλάντευση των ιδιοτήτων των λύσεων γραμμικών, διαφορικών εξισώσεων, όπως επίσης και σε περιοχές της Πραγματικής Ανάλυσης. Στη Στατιστική, η θεωρία των συναρτήσεων TP_2 είναι θεμελιώδης στην κατανόηση στατιστικών αποφάσεων και ελέγχου υποθέσεων, που περιέχουν πραγματικές παραμέτρους. Τέλος, η έννοια της ολικής θετικότητας (Total Positivity) έχει ιδιαίτερη σημασία στην εκτίμηση της αξιοπιστίας μονότονων συστημάτων και την ανάλυση στοχαστικών διαδικασιών (Karlin (1968)).

Στη συνέχεια διατυπώνουμε δύο ακόμη προτάσεις για *DFR* κατανομές.

Πρόταση 3. *Μια κατανομή F είναι DFR αν και μόνο αν το στήριγμά της είναι το* $[0,\infty)$ *και η* $1\text{-}F(x+y)$ *είναι* TP_2 *για* $x+y\geq 0$.

Η απόδειξη παραλείπεται (Barlow, Marshall & Proschan (1963)).

Πρόταση 4. (Glaser (1980)) Έστω *μια τυχαία μεταβλητή T με συνάρτηση πυκνότητας f και βαθμίδα αποτυχίας λ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και δύο φορές διαφορίσιμη, τότε για τη συνάρτηση* $\eta(t)$*, που ορίζεται από τη σχέση*

$$\eta(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)}$$

ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή

$$\eta'(t) < 0, \quad \forall t > 0 \Rightarrow \quad F \in DFR.$$

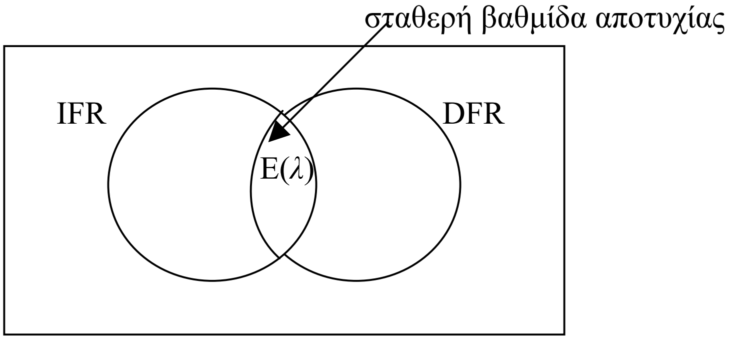
Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη της Πρότασης 5 της Παραγράφου 2.2.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι αν μια τυχαία μεταβλητή $T \in DFR$ εκφράζει χρόνο ζωής μιας μονάδας, τότε η βαθμίδα αποτυχίας βελτιώνεται όσο αυξάνεται η ηλικία της. Η οικογένεια κατανομών *DFR* μπορεί να εφαρμοσθεί σε αρκετές περιπτώσεις, όπως σε ορισμένα μέταλλα τα οποία αυξάνουν τη δύναμη τους όσο περισσότερο δουλεύονται, σε μίξεις εκθετικών κατανομών, σε συσκευές ή ακόμη και στον ανθρώπινο οργανισμό, ο οποίος παρουσιάζει, μετά από την πρώτη φάση της ζωής του, μια φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας.

Μιλώντας θεωρητικά είναι πολύ πιο δύσκολο να εξηγήσει κανείς γιατί ο χρόνος ζωής μιας μονάδας έχει μια φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας (*DFR*), αντί μιας αντίστοιχης αύξουσας. Συνήθως μια φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας, φαίνεται να ανταποκρίνεται σε φυσικούς μηχανισμούς που βελτιώνονται με το χρόνο, έτσι ώστε όσο περισσότερο χρόνο μια μονάδα επιβιώνει, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα αποτυχίας της στην επόμενη μονάδα του χρόνου (Proschan (1963)). Ωστόσο υπάρχουν καταστάσεις στις οποίες, αν και καμιά διαδικασία βελτίωσης δεν αναμειγνύεται, παρατηρείται φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας (για παράδειγμα οι ημιαγωγοί). Μια λογική εξήγηση θα μπορούσε να είναι ότι οι μονάδες, μέσα σε μια δεδομένη παραγωγική σοδειά, έχουν σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, ενώ οι ημιαγωγοί δεν δείχνουν να φθείρονται, αλλά αντίθετα η βαθμίδα αποτυχίας ποικίλει από σοδειά σε σοδειά σαν αποτέλεσμα μιας αναπότρεπτης κατασκευαστικής μεταβλητότητας.

Τέλος να επισημάνουμε ότι η εκθετική κατανομή, η οποία έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, λειτουργεί σαν σύνορο ανάμεσα στην κλάση κατανομών *IFR* και *DFR*. Η βαθμίδα αποτυχίας της εκθετικής είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα για όλα τα t, συνεπώς ανήκει και στις δύο αυτές κλάσεις. Όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα *Venn*

ΣΧΗΜΑ 2.4



ο ορισμός των *IFR*, *DFR* που έχει δοθεί, ταξινομεί όλες τις κατανομές χρόνων ζωής στην κλάση κατανομών με σταθερή βαθμίδα αποτυχίας (τομή των *IFR*, *DFR*), ή με γνήσια αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, ή με αυστηρά φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας, ή με κάποια μη μονότονη μορφή βαθμίδας αποτυχίας.

Τέλος, παραδείγματα γνωστών κατανομών, που έχουν την ιδιότητα *DFR,* είναι η εκθετική κατανομή, η κατανομή *Weibull* (για $0<\alpha<1$), η κατανομή Γάμμα (για $\alpha<1$), η κατανομή *Pareto* και η εκθετική-γεωμετρική κατανομή.

2.4 Η οικογένεια IFRA

Η κλάση *IFRA* περιλαμβάνει την εκθετική κατανομή και είναι κλειστή ως προς το σχηματισμό μονότονων συστημάτων (το θέμα αυτό θα αναπτυχθεί διεξοδικά σε επόμενο κεφάλαιο). Διαισθητικά αν μια κατανομή είναι *IFRA,* τότε η βαθμίδα αποτυχίας της αυξάνει, όχι συνεχώς (όπως στην περίπτωση μιας *IFR* κατανομής), αλλά «κατά μέσο όρο». Συνεπώς η κλάση *IFRA* απαιτεί λιγότερα πράγματα από τη βαθμίδα αποτυχίας, συγκριτικά με την κλάση *IFR*, δηλαδή κάθε *IFR* κατανομή είναι και *IFRA.* Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό της *IFRA* κλάσης κατανομών.

Ορισμός 1. *Μια κατανομή F(t) λέμε ότι είναι IFRA (increasing failure rate on average) ($F \in IFRA$) αν για t>0 ο λόγος* $\dfrac{\Lambda(t)}{t}$ *αυξάνει ως προς το t.*

Έστω ότι η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση για $t \geq 0$. Τότε η μέση τιμή της στο διάστημα $[0,t]$ ορίζεται ως το κλάσμα

$$\frac{\int_0^t \lambda(s)}{t} = \frac{\Lambda(t)}{t}.$$

(από το Θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, γνωρίζουμε ότι υπάρχει πάντοτε ένας αριθμός $\xi \in [0,t]$, τέτοιος ώστε

$$\frac{\int_0^t \lambda(s)}{t} = \lambda(\xi).$$

Επειδή όμως ισχύει ότι $\Lambda(t) = -\log \overline{F}(t)$, ο Ορισμός 1 μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα στην ακόλουθη μορφή.

Ορισμός 1΄. *Μια κατανομή F(t) λέμε ότι είναι IFRA (increasing failure rate on average) αν ο λόγος* $\dfrac{-\log \overline{F}(t)}{t}$ *αυξάνει με το t.*

Ο τελευταίος ορισμός για μια κατανομή *IFRA* δίνεται, όταν δεν έχει ορισθεί η βαθμίδα αποτυχίας.

Πρόταση 1. *Έστω μία τυχαία μεταβλητή T με συνάρτηση κατανομής F(t), η οποία έχει την ιδιότητα IFRA. Τότε η βαθμίδα αποτυχίας λ(t) ικανοποιεί τη σχέση*

$$\lambda(ax) \leq a\lambda(x)$$

για $0 \leq a \leq 1$ *και* $x \geq 0$ *(ισοδύναμα λέμε ότι η λ(t) είναι της μορφής star-shaped).*

Πρόταση 2. *Μια κατανομή F είναι IFRA αν και μόνο αν ισχύει η σχέση*

$$\overline{F}(at) \geq \overline{F}^{a}(t)$$

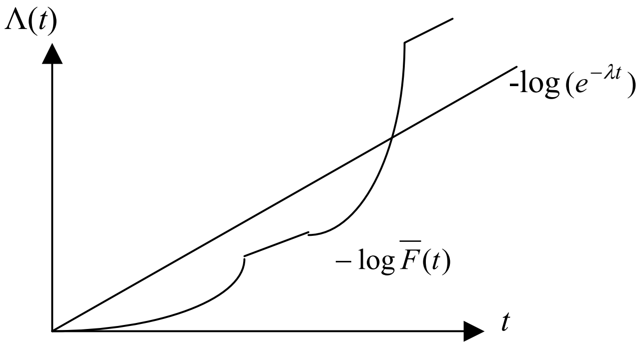
για $a \in (0,1)$ *και* $t \geq 0$.

Πρόταση 3. *Μία κατανομή F είναι IFRA αν και μόνο αν για κάθε λ>0 η συνάρτηση* $\overline{F}(t) - e^{-\lambda t}$ *έχει το πολύ μια αλλαγή προσήμου, και συγκεκριμένα αν συμβαίνει μία τέτοια αλλαγή, τότε το πρόσημο να αλλάζει από θετικό σε αρνητικό.*

Οι αποδείξεις των τριών τελευταίων προτάσεων παραλείπονται (Barlow & Proschan (1975)).

Στο επόμενο σχήμα διαπιστώνεται γραφικά ότι για μια κατανομή *IFRA,* η αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας Λ(*t*) της κατανομής αυτής, τέμνει την αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας της εκθετικής κατανομής (ευθεία γραμμή) το πολύ μια φορά, διαπερνώντας την από κάτω προς τα πάνω.

ΣΧΗΜΑ 2.5



Πρόταση 4. *Έστω T μια τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση αξιοπιστίας R. Αν ορίσουμε τη συνάρτηση g με τύπο*

$$g(t) = [R(t)]^{1/t} \quad , \text{για } t>0$$

τότε η T είναι IFRA αν και μόνο αν η g είναι φθίνουσα .

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\frac{\int_0^t \lambda(s)ds}{t} = \frac{\Lambda(t)}{t} = -\frac{\log R(t)}{t} = -\frac{1}{t}\ln R(t) = -\ln[R(t)]^{1/t} = -\ln g(t)\,.$$

Συνεπώς είναι φανερό ότι ο λόγος $\frac{\Lambda(t)}{t}$ είναι αύξουσα συνάρτηση αν και μόνο αν η συνάρτηση *g* είναι φθίνουσα, οπότε προκύπτει η ζητούμενη ισοδυναμία. ■

Πρόταση 5. *Έστω T μια τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση αξιοπιστίας R. Τότε ισχύει η ισοδυναμία*

$$T \in IFRA \text{ αν και μόνο αν } R(\theta t) \geq R^{\theta}(t) \text{ , για κάθε } 0<\theta<1 \text{ και } t>0.$$

Η απόδειξη παραλείπεται (Barlow & Proschan (1975)).

Πρόταση 6. *Η κλάση IFR είναι μικρότερη από την οικογένεια IFRA, δηλαδή ισχύει ότι αν* $T \in IFR$ *τότε* $T \in IFRA$.

Απόδειξη. Έστω ότι $T \in IFR$. Τότε η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ είναι αύξουσα και ισχύει η σχέση

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds \leq \int_0^t \lambda(t)dt = \lambda(t)t$$

Συνεπώς

$$\lambda(t)\cdot t - \Lambda(t) \geq 0 \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\left(\frac{\Lambda(t)}{t}\right)' = \frac{\Lambda'(t)t - \Lambda(t)}{t^2} = \frac{\lambda(t)t - \Lambda(t)}{t^2},$$

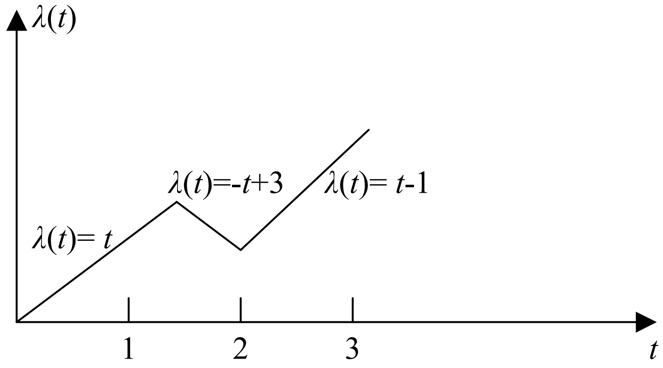
οπότε προκύπτει ότι

$$\left(\frac{\Lambda(t)}{t}\right)' \geq 0 \text{ , για κάθε t>0}$$

συνεπώς η συνάρτηση $\frac{\Lambda(t)}{t}$ είναι αύξουσα, δηλαδή $\text{T} \in IFRA$. ■

Το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύει, δηλαδή η οικογένεια *IFRA* είναι γνήσια μεγαλύτερη από την οικογένεια *IFR*. Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να διαπιστωθεί με το επόμενο αντιπαράδειγμα. Έστω *T* ο χρόνος ζωής μιας μονάδας με βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$, η μορφή της οποίας φαίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί.

ΣΧΗΜΑ 2.6



Είναι προφανές ότι η T δεν έχει την ιδιότητα *IFR,* ούτε την ιδιότητα *DFR*. Για τη αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας έχουμε

$$\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(s)ds=\begin{cases}\dfrac{t^2}{2}, & t\le 1.5\\[2ex] -\dfrac{t^2}{2}+3t-\dfrac{9}{4}, & 1.5<t\le 2\\[2ex] \dfrac{t^2}{2}-t+\dfrac{7}{4}, & t\ge 2\end{cases}$$

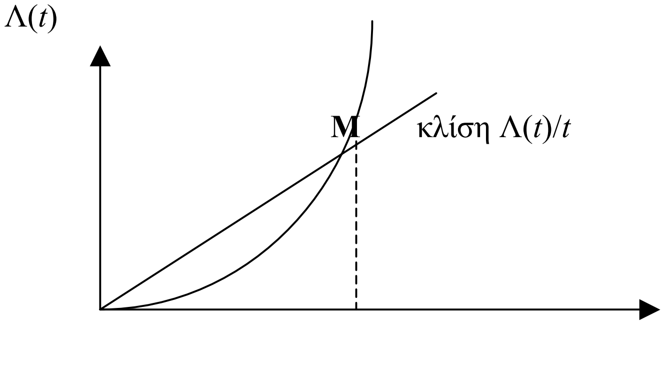
συνεπώς

$$\frac{\Lambda(t)}{t}=\begin{cases}\dfrac{t}{2}, & 0<t\le\dfrac{3}{2}\\[2ex] -\dfrac{t}{2}+3-\dfrac{9}{4t}, & \dfrac{3}{2}\le t\le 2\\[2ex] \dfrac{t}{2}-1+\dfrac{7}{4t}, & t\ge 2\end{cases}$$

Ο λόγος $\dfrac{\Lambda(t)}{t}$ είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση σε όλο το διάστημα $[0,+\infty)$, άρα $T\in IFRA$, ενώ $T\notin IFR$.

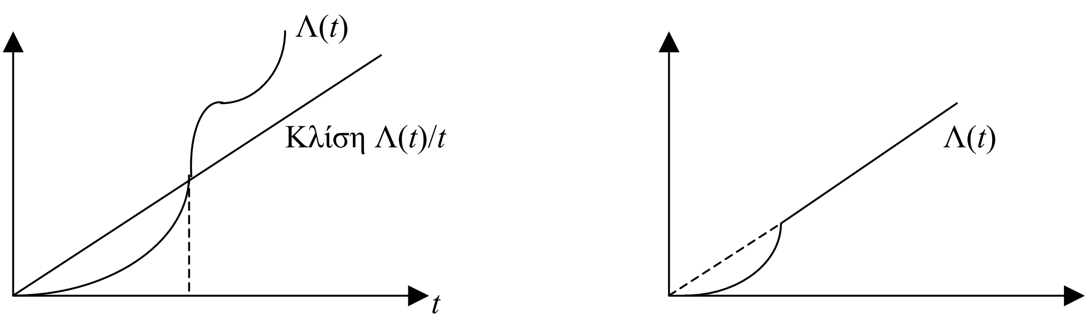
Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει την αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας(συνάρτηση κινδύνου) για μια *IFR* συνάρτηση. Για ένα σημείο Μ με τετμημένη *t,* τυχαία τοποθετημένο στην καμπύλη, η κλίση της ευθείας ΟΜ είναι ο λόγος $\frac{\Lambda(t)}{t}$, ενώ είναι ξεκάθαρο ότι η $\Lambda(t)$ είναι κυρτή, επομένως η κλίση αυτή είναι αύξουσα.

ΣΧΗΜΑ 2.7



Το συμπέρασμα αυτό δεν ισχύει για μια *IFRA* κατανομή. Τα ακόλουθα σχήματα δίνουν δύο παραδείγματα συναρτήσεων *IFRA,* που δεν είναι όμως *IFR*.

ΣΧΗΜΑ 2.8



Πρόταση 7. (Birnbaum, Esary & Marshall (1966)) *Έστω Τ μια τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής F. Αν η κατανομή είναι IFRA, τότε για* $x \geq 0$ *και για κατάλληλο λ ώστε να ισχύει η σχέση*

$$\overline{F}(x) = \exp(-\lambda x),$$

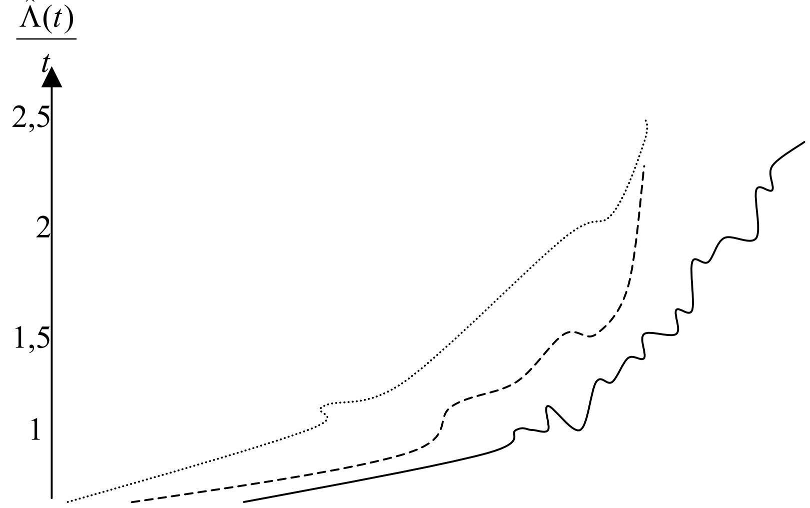
η συνάρτηση $\overline{F}(t)$ *ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη*

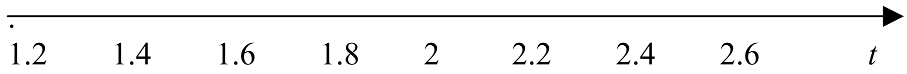
$$\begin{Bmatrix} \overline{F}(t) \geq \exp(-\lambda t), & t \leq x \\ \\ \overline{F}(t) \leq \exp(-\lambda t), & t \geq x \end{Bmatrix}$$

Η παραπάνω πρόταση ερμηνεύεται ως εξής. Αν μια *IFRA* διάταξη και μια διάταξη που δεν φθίνει, έχουν την ίδια πιθανότητα επιβίωσης για κάποια ορισμένη χρονική περίοδο [0,*x*], τότε η *IFRA* διάταξη έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα επιβίωσης σε οποιαδήποτε μικρότερη περίοδο, και τη μικρότερη πιθανότητα επιβίωσης σε οποιαδήποτε μεγαλύτερη περίοδο.

Η κλάση *IFRA* εφαρμόζεται όταν γεγονότα συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, κάθε ένα από τα οποία προκαλεί ανεξάρτητα τυχαία ζημιά σε μια μονάδα, οι ζημιές πολλαπλασιάζονται μέχρι ένα κρίσιμο όριο να ξεπερασθεί, οπότε και η μονάδα αποτυγχάνει. Αυτός ο χρόνος αποτυχίας περιγράφεται από μια *IFRA* κατανομή. Επιπλέον ένα ευδιάκριτο χαρακτηριστικό ορισμένων τύπων ινωδών συνθέσεων, είναι ότι οι κατανομές της δύναμής τους, παρουσιάζουν μια αύξουσα κατά μέσο όρο βαθμίδα αποτυχίας, ή στην ορολογία της Θεωρίας Αξιοπιστίας θα λέγαμε ότι η κατανομή τους είναι *IFRA* (Durham, Lynch and Padgett (1989)). Μια εμπειρική απόδειξη για το γεγονός αυτό φαίνεται στο παρακάτω γράφημα, όπου έχουν παρασταθεί εμπειρικές κατά μέσο όρο βαθμίδες αποτυχίας ($\frac{\hat{\Lambda}(t)}{t}$) για ινώδεις συνθέσεις.

ΣΧΗΜΑ 2.9



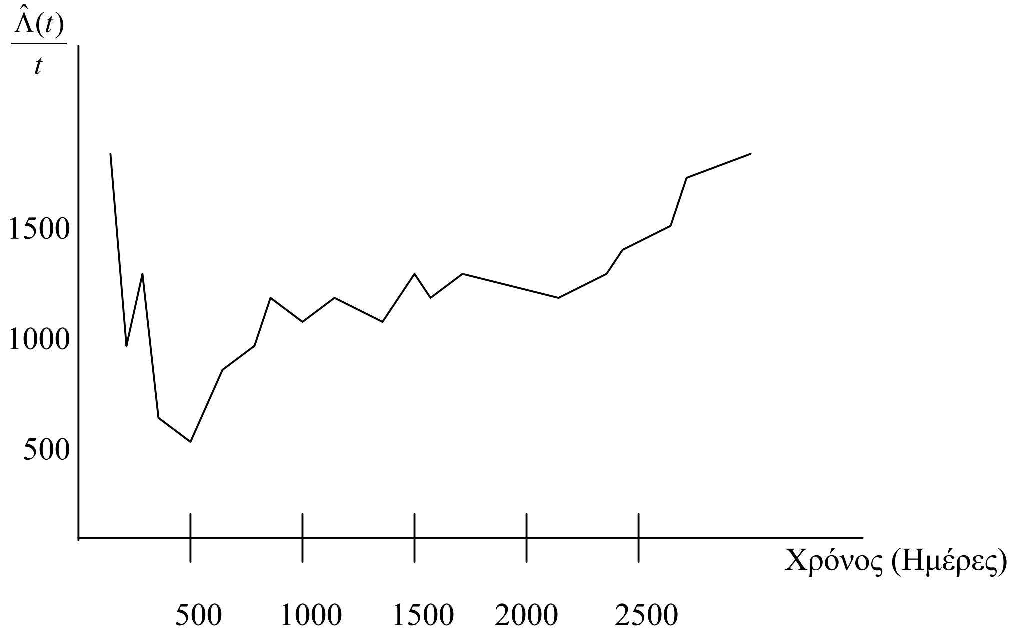


Στο σημείο αυτό παραθέτουμε ένα παράδειγμα (Bryson & Siddiqui (1969)), βασισμένο σε πραγματικά δεδομένα, στο οποίο θα υπολογίσουμε το συνεχές ανάλογο του μέσου όρου, δηλαδή το κλάσμα $\frac{\Lambda(t)}{t}$. Η εμπειρική εκτίμηση του θα γίνει με βάση τη σχέση

$$\frac{\hat{\Lambda}(t)}{t} = \frac{-\log \frac{S}{n}}{t},$$

όπου S είναι η τυχαία μεταβλητή, που δηλώνει τον αριθμό των διασωθέντων μονάδων από ένα αρχικό πληθυσμό μεγέθους n τη στιγμή t. Ο εκτιμητής αυτός εφαρμόσθηκε σε δεδομένα από το Εθνικό Ινστιτούτο Καρκίνου των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής, όπου οι χρόνοι ζωής είναι χρόνοι ζωής ασθενών, οι οποίοι υποφέρουν από χρόνια λευχαιμία, ενώ η χρονική στιγμή t=0 έχει καθορισθεί σαν η ημερομηνία που έχει γίνει η διάγνωση. Το αποτέλεσμα της ανάλυσης δίνεται γραφικά στο ακόλουθο διάγραμμα, στο οποίο βλέπουμε ότι εμφανίζεται μια αυξητική τάση της συνάρτησης $\frac{\hat{\Lambda}(t)}{t}$, όμως αυτή η τάση δεν είναι ιδιαίτερα εμφανής.

ΣΧΗΜΑ 2.10



2.5 Η οικογένεια DFRA

Ορισμός 1. *Μια κατανομή $F(t)$ λέμε ότι είναι DFRA (decreasing failure rate on average) ($F \in DFRA$) αν για t>0 ο λόγος $\frac{\Lambda(t)}{t}$ μειώνεται ως προς t.*

Έστω ότι η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση για $t \geq 0$. Τότε η μέση τιμή της στο διάστημα $[0,t]$ ορίζεται ως το κλάσμα

$$\frac{\int_0^t \lambda(s)}{t} = \frac{\Lambda(t)}{t}.$$

Επειδή όμως ισχύει ότι $\Lambda(t) = -\log \overline{F}(t)$, ο Ορισμός 1 μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα στην ακόλουθη μορφή.

Ορισμός 1΄. *Μια κατανομή $F(t)$ λέμε ότι είναι DFRA (decreasing failure rate on average) αν ο λόγος $\frac{-\log \overline{F}(t)}{t}$ μειώνεται ως προς t.*

Πρόταση 1. *Μια κατανομή F είναι DFRA αν και μόνο αν ισχύει η σχέση*

$$\overline{F}(at) \leq \overline{F}^{a}(t)$$

για $a \in (0,1)$ και $t \geq 0$.

Πρόταση 2. *Μία κατανομή F είναι DFRA αν και μόνο αν για κάθε λ>0 η συνάρτηση $\overline{F}(t) - e^{-\lambda t}$ έχει το πολύ μια αλλαγή προσήμου, και συγκεκριμένα αν συμβαίνει μία τέτοια αλλαγή, τότε το πρόσημο να αλλάζει από αρνητικό σε θετικό.*

Πρόταση 3. *Έστω T μια τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση αξιοπιστίας R. Αν ορίσουμε τη συνάρτηση g με τύπο*

$$g(t) = [R(t)]^{1/t} \quad , \text{για } t>0$$

τότε η T είναι DFRA αν και μόνο αν η g είναι αύξουσα .

Πρόταση 4. *Έστω T μια τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση αξιοπιστίας R. Τότε ισχύει η ισοδυναμία*

$$T \in DFRA \text{ αν και μόνο αν } R(\theta t) \leq R^{\theta}(t) \text{ , για κάθε } 0<\theta<1 \text{ και } t>0.$$

Οι αποδείξεις των τελευταίων προτάσεων παραλείπονται (Barlow and Proschan (1975)).

2.6 Άλλες οικογένειες χρόνων ζωής

- Οικογένεια κατανομών *NBU* (*new better than used*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F(t) είναι NBU αν και μόνο αν*

$$\overline{F}(x+y) \leq \overline{F}(x)\overline{F}(y) \quad \text{για } x, y \geq 0 .$$

Η ιδιότητα *NBU* δηλώνει ότι η πιθανότητα επιβίωσης πέρα από την ηλικία *x+y,* δεδομένου ότι η μονάδα λειτουργεί τη χρονική στιγμή *t,* η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\overline{F}(x+y)/\overline{F}(x)$$

είναι μικρότερη ή ίση από την πιθανότητα επιβίωσης χρόνου *y* για μια καινούρια μονάδα. (η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής). Συνεπώς ισοδύναμα ο ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με την ακόλουθη μορφή.

Ορισμός . *Ο χρόνος ζωής T λέμε ότι έχει την ιδιότητα NBU («καλύτερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο») αν ισχύει*

$$R(x/t) \leq R(x) \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και για } t \geq 0$$

όπου R(x/t) είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας μιας μονάδας με ηλικία t. (Συμβολικά $T \in NBU$)

- Οικογένεια κατανομών *NWU* (*new worse than used*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F(t) είναι NWU αν και μόνο αν*

$$\overline{F}(x+y) \geq \overline{F}(x)\overline{F}(y) \quad \text{για } x, y \geq 0 .$$

Η παραπάνω ανίσωση είναι ισοδύναμη με το ότι η πιθανότητα επιβίωσης $\overline{F}(x+y)/\overline{F}(x)$ μιας μονάδας με ηλικία *x* είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα επιβίωσης $\overline{F}(y)$ μιας καινούριας μονάδας. Ισοδύναμα ο ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με την ακόλουθη μορφή.

Ορισμός . *Ο χρόνος ζωής T λέμε ότι έχει την ιδιότητα NWU («χειρότερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο») αν ισχύει*

$$R(x/t) \geq R(x) \;\; \text{για κάθε } x \geq 0 \;\; \text{και για } t \geq 0$$

όπου R(x/t) είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας μιας μονάδας με ηλικία t. (*Συμβολικά* $T \in NWU$)

- Οικογένεια κατανομών *NBUE* (*new better than used in expectation*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F(t) είναι NBUE αν* $\mu_t \leq E(\tau)$ *για t>0,*

όπου

$$E(\tau)=\int_0^\infty \overline{F}(x)dx$$

είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας καινούριας μονάδας, και

$$\mu_t = \int_0^\infty \overline{F}(x/t)dx = \frac{\int_0^\infty \overline{F}(x+t)dx}{\overline{F}(t)} = \frac{\int_t^\infty \overline{F}(y)dy}{\overline{F}(t)}$$

είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας με ηλικία t.

Πρακτικά ο ορισμός λέει ότι, στην περίπτωση της *NBUE* κατανομής, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας χρησιμοποιημένης μονάδας δεν υπερβαίνει το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής μιας καινούριας μονάδας. Ισοδύναμα ο ορισμός μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Ορισμός . *Ο χρόνος ζωής T θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα NBUE* («*καλύτερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά μέση τιμή* ») *αν ισχύει* $\mu_t \leq E(T)$ *για κάθε* $t \geq 0$. (*Συμβολικά* $T \in NBUE$)

Εναλλακτικά ο ορισμός μπορεί να διατυπωθεί ως εξής **.**

Ορισμός . *Μία κατανομή F στο* [0,+∞) *με F*(0)<1 *και πεπερασμένο μέσο μ λέμε ότι είναι NBUE αν*

$$E(\,X\text{-}t\,/\,X>t\,) \leq \mu \;\; \text{για όλα τα } t \geq 0.$$

- Οικογένεια κατανομών *NWUE* (*new worse than used in expectation*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F(t) είναι NWUE* («*χειρότερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά μέση τιμή* ») *αν*

$$\mu_t \geq E(\tau) \quad \text{για } t>0$$

όπου $E(\tau)=\int_0^\infty \overline{F}(x)dx$ *είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας καινούριας μονάδας και*

$$\mu_t = \int_0^\infty \overline{F}(x/t)dx = \frac{\int_0^\infty \overline{F}(x+t)dx}{\overline{F}(t)} = \frac{\int_0^\infty \overline{F}(y)dy}{\overline{F}(t)}$$

είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας με ηλικία t.

Πρακτικά ο ορισμός λέει ότι στην περίπτωση της κατανομής *NWUE* ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας καινούριας μονάδας δεν υπερβαίνει τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής μιας χρησιμοποιημένης μονάδας.

- Οικογένεια κατανομών *IMRL* (*increasing mean remaining life*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής T*) *λέμε ότι είναι IMRL αν ο λόγος*

$$\frac{\int_t^\infty \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(t)}$$

αυξάνεται ως προς το χρόνο t>0.

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι αν η κατανομή *F* είναι *IMRL,* τότε ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας ηλικίας *t* που λειτουργεί έχει έναν μέσο που *αυξάνεται* ως προς *t*.

- Οικογένεια κατανομών *DMRL* (*decreasing mean remaining life*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή T*) *λέμε ότι είναι DMRL αν ο λόγος*

$$\mu(t) = \frac{\int_t^\infty \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(t)}$$

μειώνεται ως προς το χρόνο t>0.

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι, αν η κατανομή *F* είναι *DMRL,* τότε ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας ηλικίας *t* που λειτουργεί έχει έναν μέσο που μειώνεται ως προς *t*.

- Οικογένεια κατανομών *DMRLA* (*decreasing mean remaining life average*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή T*) *λέμε ότι είναι DMRLA αν ο λόγος*

$$\frac{\int_0^t \mu(y)dy}{t}$$

μειώνεται ως προς το χρόνο t>0.

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι, αν η κατανομή *F* είναι *DMRLA,* τότε η μέση τιμή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής $\mu(y)$ μιας μονάδας που λειτουργεί, μειώνεται κατά μέσο όρο ως προς *t*.

- Οικογένεια κατανομών *IMRLA* (*increasing mean remaining life average*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή T*) *λέμε ότι είναι IMRLA αν ο λόγος*

$$\frac{\int_0^t \mu(y)dy}{t}$$

αυξάνεται ως προς το χρόνο t>0.

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι, αν η κατανομή *F* είναι *IMRLA,* τότε ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας που λειτουργεί, αυξάνεται κατά μέσο όρο ως προς το χρόνο.

- Οικογένεια κατανομών *NBAMRL* (*new better than average mean remaining life*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή T*) *λέμε ότι είναι NBAMRL αν ισχύει η σχέση*

$$\mu(0) \geq \frac{\int_0^t \mu(y)dy}{t}.$$

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι, αν η κατανομή *F* είναι *NBAMRL,* τότε η μέση τιμή του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μιας μονάδας που λειτουργεί είναι μικρότερη από τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής μιας καινούριας μονάδας.

- Οικογένεια κατανομών *NBUMRL* (*new better than used mean remaining life*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή T*) *λέμε ότι είναι NBUMRL αν ισχύει η σχέση*

$$\mu(t) \le \mu \Leftrightarrow \frac{\int_t^\infty \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(t)} \le \mu$$

όπου $\mu = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx.$

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι, αν η κατανομή *F* είναι *NBUMRL,* τότε ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας με ηλικία *t* είναι μικρότερος από τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής μιας καινούριας μονάδας.

- Οικογένεια κατανομών *NBAFR* (*new better than average in failure rate*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής T*) *λέμε ότι είναι NBAFR αν το όριο*

$$L = \lim_{s \to 0} s^{-1} \log \overline{F}(s)$$

υπάρχει και για t>0 ισχύει

$$t^{-1} \log \overline{F}(t) \le L.$$

Η κλάση αυτή έχει μετονομαστεί σε *NBUFRA* (*new better than used in failure rate average*), ονομασία η οποία ταιριάζει περισσότερο στη γενικότερη ονοματολογία των κλάσεων κατανομών (Desphande, Kochar & Singh (1986)).

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$, για $0 \le t < \infty$, είναι μεγαλύτερη, κατά μέσο όρο, από τη βαθμίδα αποτυχίας για t=0, δηλαδή

$$\lambda(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \lambda(u)du \ge \lambda(0)\,,\; 0 \le t < \infty\,.$$

- Οικογένεια κατανομών *NWAFR* (*new worse than average in failure rate*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής T*) *λέμε ότι είναι NWAFR αν το όριο*

$$L = \lim_{s\to 0} s^{-1} \log \overline{F}(s)$$

υπάρχει και για t>0 ισχύει

$$t^{-1} \log \overline{F}(t) \geq L .$$

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι η βαθμίδα αποτυχίας *λ*(*t*), για $0 \leq t < \infty$, είναι μεγαλύτερη, κατά μέσο όρο, από τη βαθμίδα αποτυχίας για *t*=0, δηλαδή

$$\lambda(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \lambda(u)du \leq \lambda(0)\,,\ 0 \leq t < \infty .$$

- Οικογένεια κατανομών *HNBUE* (*harmonic new better than used in expectation*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής T*) *λέμε ότι είναι HNBUE* («*αρμονικά καλύτερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά μέση τιμή* ») *αν*

$$\int_t^\infty \overline{F}(x)dx \leq \mu \exp(-t/\mu) \quad \text{για } t>0,$$

όπου $\mu = \int_0^\infty \overline{F}(t)dt$ *είναι ο μέσος της κατανομής F* (Klefsjo (1982)).

Αν ο χρόνος ζωής T_1 μιας μονάδας έχει κατανομή $F(t) \in HNBUE$, αυτό σημαίνει ότι είναι στοχαστικά μικρότερη από το χρόνο ζωής T_2 μιας μονάδας με εκθετική κατανομή $Exp(\mu)$, δηλαδή για τις δύο τυχαίες μεταβλητές T_1, T_2 ισχύει ότι

$$E(\varphi(T_1)) \leq E(\varphi(T_2))$$

για όλες τις κυρτές συναρτήσεις $\varphi : R \to R$ (Shaked & Shanthikumar (1994)).

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος ζωής μιας *HNBUE* μονάδας παρουσιάζει μικρότερη μεταβλητότητα από το χρόνο ζωής μιας εκθετικής μονάδας.

- Οικογένεια κατανομών *HNWUE* (*harmonic new worse than used in expectation*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής T*) *λέμε ότι είναι HNWUE* («*αρμονικά χειρότερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά μέση τιμή* ») *αν*

$$\int_t^{\infty} \overline{F}(x)dx \geq \mu \exp(-t/\mu) \quad \text{για } t>0.$$

όπου $\mu = \int_0^{\infty} \overline{F}(t)dt$ *είναι ο μέσος της κατανομής F.*

Αν ο χρόνος ζωής T_1 μιας μονάδας έχει κατανομή $F(t) \in HNWUE$, αυτό σημαίνει ότι είναι στοχαστικά μεγαλύτερος από το χρόνο ζωής T_2 μιας μονάδας με εκθετική κατανομή $Exp(\mu)$, δηλαδή για τις δύο τυχαίες μεταβλητές T_1, T_2 ισχύει ότι

$$E(\varphi(T_1)) \geq E(\varphi(T_2))$$

για όλες τις κυρτές συναρτήσεις $\varphi : R \to R$ (Shaked & Shanthikumar (1994)).

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος ζωής μιας $HNBUE$ μονάδας παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα από το χρόνο ζωής μιας εκθετικής μονάδας με παράμετρο μ.

- Οικογένεια κατανομών *NBUFR* (*new better than used in failure rate*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής T*) *λέμε ότι είναι NBUFR* («*καλύτερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά βαθμίδα αποτυχίας* ») *αν το όριο*

$$L = \lim_{s \to 0} s^{-1} \log \overline{F}(s)$$

υπάρχει και για t>0 ισχύει

$$\frac{d}{dt} \log \overline{F}(t) \leq L.$$

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι η βαθμίδα αποτυχίας *λ*(*t*), για $0 \leq t < \infty$, είναι μεγαλύτερη από τη βαθμίδα αποτυχίας για *t*=0, δηλαδή

$$\lambda(t) \geq \lambda(0), \quad 0 \leq t < \infty.$$

- Οικογένεια κατανομών *NWUFR* (*new worse than used in failure rate*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής T*) *λέμε ότι είναι NWUFR* (*χειρότερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά βαθμίδα αποτυχίας* ») *αν το όριο*

$$L = \lim_{s \to 0} s^{-1} \log \overline{F}(s)$$

υπάρχει και για $t>0$ *ισχύει*

$$\frac{d}{dt}\log \overline{F}(t) \geq L\,.$$

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$, για $0 \leq t < \infty$, είναι μικρότερη από τη βαθμίδα αποτυχίας για t=0, δηλαδή

$$\lambda(t) \leq \lambda(0), \quad 0 \leq t < \infty\,.$$

- Οικογένεια κατανομών *UBA* (*used better than aged*)

Ορισμός . *Μια κατανομή* $F(t)$ (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής* T) *λέμε ότι είναι UBA αν για* $0 < \lambda(\infty) < \infty$, $\forall t \geq 0$ *και* $x \geq 0$ *ισχύει ότι*

$$\overline{F}(x+t) \geq \overline{F}(t)e^{-x/\lambda(\infty)}$$

όπου $\lambda(\infty) = \lim_{x\to\infty}\lambda(x)$, *με* $\lambda(x)$ *να είναι η βαθμίδα αποτυχίας.* (Willmot & Cai (2000))

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας ηλικίας t να υπερβαίνει τη χρονική στιγμή x είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πιθανότητα όταν $t \to \infty$ (Alzaid (1994)), δηλαδή

$$P(T-t > x) \geq \lim_{t\to\infty} P(T-t > x)\,.$$

- Οικογένεια κατανομών *UWA* (*used worse than aged*)

Ορισμός . *Μια κατανομή* $F(t)$ (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής* T) *λέμε ότι είναι UWA αν για* $0 < \lambda(\infty) < \infty$, $\forall t \geq 0$ *και* $x \geq 0$ *ισχύει ότι*

$$\overline{F}(x+t) \leq \overline{F}(t)e^{-x/\lambda(\infty)}$$

όπου $\lambda(\infty) = \lim_{x\to\infty}\lambda(x)$, *με* $\lambda(x)$ *να είναι η βαθμίδα αποτυχίας.*

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας ηλικίας t να υπερβαίνει τη χρονική στιγμή x είναι μικρότερη από την αντίστοιχη πιθανότητα όταν $t \to \infty$ (Alzaid (1994)), δηλαδή

$$P(T-t > x) \leq \lim_{t\to\infty} P(T-t > x)\,.$$

- Οικογένεια κατανομών *UBAE* (*used better than aged in expectation*)

Ορισμός . *Μια κατανομή $F(t)$ (ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής T) λέμε ότι είναι UBAE αν για $0 < \lambda(\infty) < \infty$ και για όλα τα $t \geq 0$ ισχύει ότι*

$$\mu(t) \geq \mu(\infty)$$

όπου $\mu(\infty) = \lim_{t\to\infty} \mu(t)$*, με* $\mu(t)$ *να είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής, δηλαδή*

$$\mu(t) = \int_t^\infty \overline{F}(u)du / \overline{F}(t).$$

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας ηλικίας t υπερβαίνει τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής μιας μονάδας με ηλικία $t \to \infty$.

- Οικογένεια κατανομών *UWAE* (*used worse than aged in expectation*)

Ορισμός . *Μια κατανομή $F(t)$ (ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής T) λέμε ότι είναι UWAE αν για $0 < \lambda(\infty) < \infty$ και για όλα τα $x \geq 0$ ισχύει ότι*

$$\mu(t) \leq \mu(\infty)$$

όπου $\mu(\infty) = \lim_{t\to\infty} \mu(t)$*, με* $\mu(t)$ *να είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής, δηλαδή*

$$\mu(t) = \int_t^\infty \overline{F}(u)du / \overline{F}(t).$$

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας ηλικίας t υπερβαίνει τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής μιας μονάδας με ηλικία $t \to \infty$.

- Οικογένεια κατανομών *NBUC* (*new better than used in convex ordering*)

Ορισμός . *Μια κατανομή $F(t)$ (ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής x) λέμε ότι είναι NBUC αν*

$$\int_x^\infty \overline{F}(t+u)du \leq \overline{F}(t)\int_x^\infty \overline{F}(u)du,\ x,t \geq 0.$$

Αν μια κατανομή $F(t) \in NBUC$, αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος ζωής T_1 μιας νέας μονάδας είναι στοχαστικά μικρότερος από το χρόνο ζωής T_2 μιας μονάδας με ηλικία t, δηλαδή για τις δύο τυχαίες μεταβλητές T_1, T_2 ισχύει ότι

$$E(\varphi(T_2)) \geq E(\varphi(T_1))$$

για όλες τις κυρτές συναρτήσεις $\varphi : R \to R$ (Shaked & Shanthikumar (1994)).

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος ζωής μιας μονάδας με ηλικία t παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα από το χρόνο ζωής μιας νέας μονάδας.

- Οικογένεια κατανομών *NWUC* (*new worse than used in convex ordering*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής x*) *λέμε ότι είναι NWUC αν*

$$\int_x^\infty \overline{F}(t+u)du \geq \overline{F}(t)\int_x^\infty \overline{F}(u)du,\ x,t \geq 0 .$$

Αν μια κατανομή $F(t) \in NWUC$, αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος ζωής T_1 μιας νέας μονάδας είναι στοχαστικά μεγαλύτερος από το χρόνο ζωής T_2 μιας μονάδας με ηλικία t, δηλαδή για τις δύο τυχαίες μεταβλητές T_1, T_2 ισχύει ότι

$$E(\varphi(T_1)) \geq E(\varphi(T_2))$$

για όλες τις κυρτές συναρτήσεις $\varphi : R \to R$ (Shaked & Shanthikumar (1994)).

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος ζωής μιας μονάδας με ηλικία t παρουσιάζει μικρότερη μεταβλητότητα από το χρόνο ζωής μιας νέας μονάδας.

- Οικογένεια κατανομών *SIFR* (*stochastically increasing failure rate*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής Y*) *λέμε ότι είναι SIFR αν*

$$P(Y \geq \sum_{i=0}^{k+1} X_i / Y \geq \sum_{i=0}^{k} X_i) \leq P(Y \geq \sum_{i=0}^{k} X_i / Y \geq \sum_{i=0}^{k-1} X_i)\text{, για όλα τα } k = 1,2,3,...$$

όπου $Y \sim F(t)$ *με μέσο* $\mu = \int_0^\infty \overline{F}(t)dt$ *και* X_k *είναι μια ακολουθία εκθετικών τυχαίων μεταβλητών, η κάθε μια από τις οποίες έχει μέσο μ, ενώ* $X_0 = 0$ *(η τυχαία μεταβλητή Y είναι ανεξάρτητη των* X_k *).*

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα μια μονάδα με κατανομή F να μην αποτύχει πριν από τον τυχαίο χρόνο $\sum_{i=0}^{k} X_i$, δεδομένου ότι δεν έχει αποτύχει πριν τον τυχαίο χρόνο $\sum_{i=0}^{k-1} X_i$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς k, όπου $k = 1,2,3,...$

Ο ορισμός μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στην ακόλουθη μορφή

$$P(\sum_{i=0}^{k} X_i \le Y < \sum_{i=0}^{k+1} X_i / Y \ge \sum_{i=0}^{k} X_i) \ge P(\sum_{i=0}^{k-1} X_i \le Y < \sum_{i=0}^{k} X_i / Y \ge \sum_{i=0}^{k-1} X_i) \text{ , για όλα τα } k = 1,2,3,...$$

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα μια μονάδα με κατανομή F να αποτύχει στο τυχαίο διάστημα $(\sum_{i=0}^{k-1} X_i, \sum_{i=0}^{k} X_i)$, δεδομένου ότι έχει επιβιώσει μέχρι τον τυχαίο χρόνο $\sum_{i=0}^{k-1} X_i$ αυξάνει ως προς k, όπου $k = 1,2,3,...$ (Singh & Deshpande (1985)).

- Οικογένεια κατανομών *SDFR* (*stochastically decreasing failure rate*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής Y*) *λέμε ότι είναι SDFR αν*

$$P(Y \ge \sum_{i=0}^{k+1} X_i / Y \ge \sum_{i=0}^{k} X_i) \ge P(Y \ge \sum_{i=0}^{k} X_i / Y \ge \sum_{i=0}^{k-1} X_i) \text{, για όλα τα } k = 1,2,3,...$$

όπου $Y \sim F(t)$ *με μέσο* $\mu = \int_0^\infty \overline{F}(t)dt$ *και* X_k *είναι μια ακολουθία εκθετικών τυχαίων μεταβλητών, η κάθε μια από τις οποίες έχει μέσο μ, ενώ* $X_0 = 0$ *(η τυχαία μεταβλητή Y είναι ανεξάρτητη των* X_k *).*

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα μια μονάδα με κατανομή F να μην αποτύχει πριν από τον τυχαίο χρόνο $\sum_{i=0}^{k} X_i$, δεδομένου ότι δεν έχει αποτύχει πριν τον τυχαίο χρόνο $\sum_{i=0}^{k-1} X_i$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς k, όπου $k = 1,2,3,...$

- Οικογένεια κατανομών *SNBU* (*stochastically new better than used*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής Y*) *λέμε ότι είναι SNBU αν*

$$P(Y \geq \sum_{i=0}^{k+1} X_i / Y \geq \sum_{i=0}^{k} X_i) \leq P(Y \geq X_{k+1}), \text{ για όλα τα } k = 1,2,3,...$$

όπου $Y \sim F(t)$ *με μέσο* $\mu = \int_0^\infty \overline{F}(t)dt$ *και* X_k *είναι μια ακολουθία εκθετικών τυχαίων μεταβλητών, η κάθε μια από τις οποίες έχει μέσο μ, ενώ* $X_0 = 0$ (*η τυχαία μεταβλητή Y είναι ανεξάρτητη των* X_k).

Δεδομένου ότι μια μονάδα με κατανομή F έχει επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή $\sum_{i=0}^{k} X_i$, ο παραπάνω ορισμός δηλώνει ότι η πιθανότητα η μονάδα να μην αποτύχει στις επόμενες X_{k+1} μονάδες χρόνου, δεν υπερβαίνει την πιθανότητα ότι μια καινούρια μονάδα με κατανομή F δεν αποτυγχάνει σε χρόνο X_{k+1}, για όλα τα $k = 1,2,3,...$

- Οικογένεια κατανομών *SNWU* (*stochastically new worse than used*)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) (*ή η τυχαία μεταβλητή χρόνου ζωής Y*) *λέμε ότι είναι SNWU αν*

$$P(Y \geq \sum_{i=0}^{k+1} X_i / Y \geq \sum_{i=0}^{k} X_i) \geq P(Y \geq X_{k+1}), \text{ για όλα τα } k = 1,2,3,...$$

όπου $Y \sim F(t)$ *με μέσο* $\mu = \int_0^\infty \overline{F}(t)dt$ *και* X_k *είναι μια ακολουθία εκθετικών τυχαίων μεταβλητών, η κάθε μια από τις οποίες έχει μέσο μ, ενώ* $X_0 = 0$ (*η τυχαία μεταβλητή Y είναι ανεξάρτητη των* X_k).

Δεδομένου ότι μια μονάδα με κατανομή F έχει επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή $\sum_{i=0}^{k} X_i$, ο παραπάνω ορισμός δηλώνει ότι η πιθανότητα η μονάδα να μην αποτύχει στις επόμενες X_{k+1} μονάδες χρόνου, υπερβαίνει την πιθανότητα ότι μια καινούρια μονάδα με κατανομή F δεν αποτυγχάνει σε χρόνο X_{k+1}, για όλα τα $k = 1,2,3,...$

- Οικογένεια κατανομών *IFR*(2) (*increasing failure rate of order* 2)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) *λέμε ότι είναι IFR*(2) (*increasing failure rate of order* 2) *αν για όλα τα* $0 \le t_1 < t_2 < \infty$ *ισχύει ότι*

$$\int_0^x F_{t_1}(t)dt \le \int_0^x F_{t_2}(t)dt, \ \forall x.$$

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι για κάθε κοίλη συνάρτηση $u(T)$, οι μέσες τιμές $E_{F_{t_1}}, E_{F_{t_2}}$ διατάσσονται ως εξής

$$E_{F_{t_1}}[u(T)] \ge E_{F_{t_2}}[u(T)].$$

- Οικογένεια κατανομών *NBU*(2) (*new better than used of order* 2)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) *λέμε ότι είναι NBU* (2) (*new better than used of order* 2) *αν για όλα τα* $0 \le y < \infty$ *ισχύει ότι*

$$\int_0^x F(t)dt \le \int_0^x F_y(t)dt, \ \forall y.$$

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι για κάθε κοίλη συνάρτηση $u(T)$, οι μέσες τιμές E_F, E_{F_y} διατάσσονται ως εξής

$$E_F[u(T)] \ge E_{F_y}[u(T)].$$

- Οικογένεια κατανομών *HNBUE*(3) (*harmonic new better than used in expectation of order* 3)

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) *λέμε ότι είναι HNBUE* (3) (*harmonic new better than used in expectation of order* 3) *αν ισχύει ότι*

$$\int_x^\infty \int_t^\infty \overline{G}(u)dudt \ge \int_x^\infty \int_t^\infty \overline{F}(u)dudt, \quad \text{για} \quad 0 \le x < \infty.$$

όπου G είναι η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής με ίδιο μέσο με αυτόν της κατανομής F.

- Οικογένεια L -κατανομών

Ορισμός . *Μια κατανομή F*(*t*) *λέμε ότι είναι* L -κατανομή *αν ισχύει ότι*

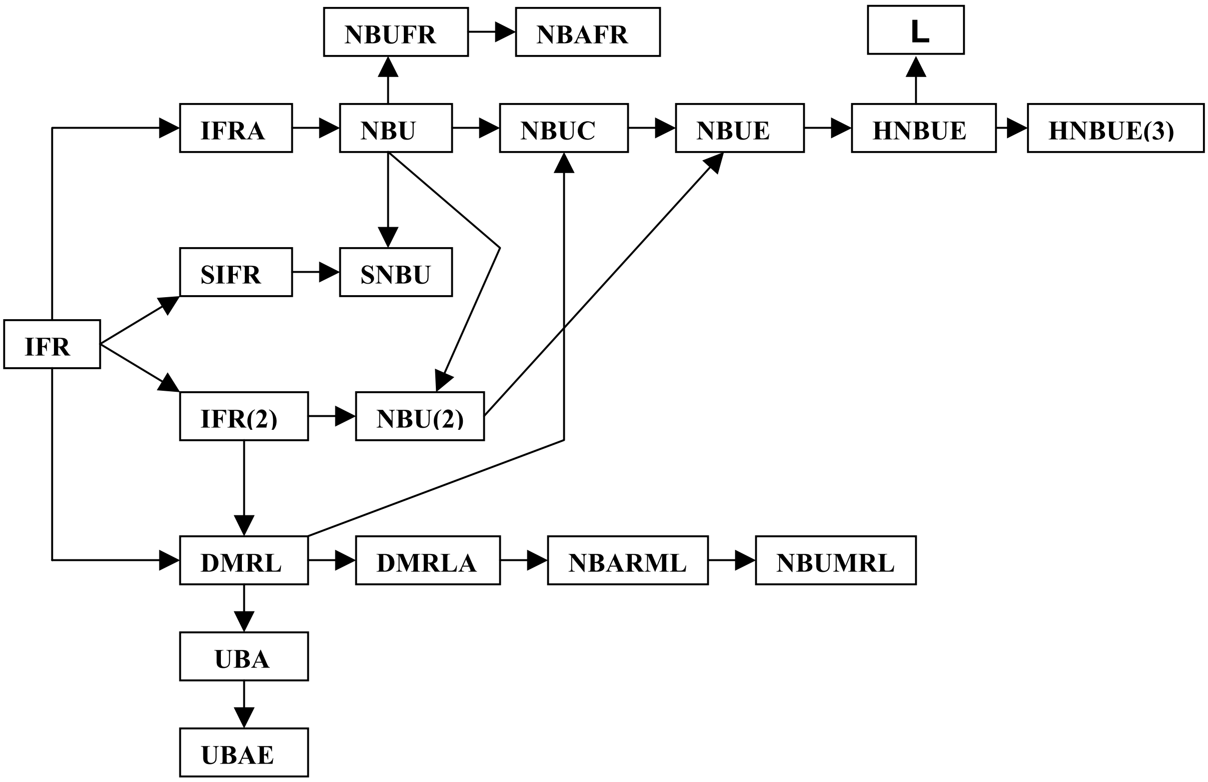
$$\int_0^\infty e^{-st}\overline{F}(t)dt \geq \frac{\mu}{1+s\mu}, s \geq 0 \text{ και } \mu \text{ ο μέσος της κατανομής } F.$$

Διαισθητικά η παραπάνω ανίσωση μπορεί να ερμηνευθεί με διάφορους τρόπους. Αρχικά, ας θεωρήσουμε τρεις μονάδες 1,2,3, οι οποίες έχουν τυχαίους χρόνους αποτυχίας t_1, t_2, t_3 αντίστοιχα (Klefsjo (1983)). Αν ο χρόνος t_1 έχει συνάρτηση αξιοπιστίας $\overline{F}(t)$ και οι χρόνοι t_2, t_3 ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέσους $\int_0^\infty \overline{F}(t)$ και $\frac{1}{s}$ αντίστοιχα, τότε η παραπάνω ανίσωση δηλώνει ότι η αναμενόμενη τιμή του ελαχίστου $\min(t_1, t_3)$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο με την αναμενόμενη τιμή του ελαχίστου $\min(t_2, t_3)$.

Μια δεύτερη ερμηνεία μπορεί να δοθεί αν θεωρήσουμε μια μηχανή παραγωγής με συνάρτηση αξιοπιστίας $\overline{F}(t)$, η οποία παράγει c μονάδες ανά μονάδα χρόνου. Τότε η ποσότητα $c\int_0^\infty e^{-st}\overline{F}(t)dt$ εκφράζει τη συνολική παραγωγή της μηχανής. Συνεπώς η παραπάνω ανίσωση είναι μια σύγκριση ανάμεσα στα παραγωγικά αποτελέσματα δύο μηχανών.

Για τις παραπάνω κλάσεις κατανομών υπάρχουν μεταξύ τους σχέσεις διάταξης, οι οποίες συνοψίζονται στο επόμενο διάγραμμα.

ΣΧΗΜΑ 2.11



Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι υπάρχουν παραδείγματα κατανομών που ανήκουν σε μια κλάση, αλλά δεν ανήκουν στην προηγούμενη. Τα παραδείγματα αυτά επιβεβαιώνουν ότι, για τις σχέσεις διάταξης μεταξύ των κλάσεων, που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, η αντίστροφη κατεύθυνση δεν ισχύει. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση κατανομής $F(t)$, της οποίας ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής δίνεται από τη σχέση

$$\mu(t) = \begin{cases} \exp(2-t), & 0 \le t \le 1 \\ 3.8 - t, & 1 < t \le 3.8 \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι ισχύει

$$\mu(0) \ge \mu(t) \ , \ \forall t > 0 .$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $F(t)$ είναι *NBUMRL*, ενώ δεν είναι *DMRL* (Abouammoh (1988)).

Η συνάρτηση κατανομής χρόνου ζωής που δίνεται από τον τύπο

$$F(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ 1/2, & t\in[1,3)\\ 1, & t\geq 3\end{cases}$$

είναι *NBUE,* αλλά δεν είναι $NBU(2)$, συνεπώς $NBUE \not\Rightarrow NBU(2)$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την παραμετρική οικογένεια κατανομών που δίνεται από τη σχέση

$$\overline{F}(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,a]\\ r, & t\in[a,b]\\ s, & t\in[b,c]\\ 0, & t\geq c\end{cases}$$

όπου $r,s\in(0,1), r>s>r^2, 0<a<b\leq 2a(r/(r+s))$ και $2a<c\leq a+b.$

Η $F_{(a,b,c,r,s)}(t)$ δεν ανήκει στην κλάση *NBU,* επειδή

$$\overline{F}_{(a,b,c,r,s)}(a+a)=s>r^2=\overline{F}_{(a,b,c,r,s)}(a)\overline{F}_{(a,b,c,r,s)}(a),$$

ωστόσο μπορεί να αποδειχθεί ότι η $F_{(a,b,c,r,s)}(t)$ ανήκει στην κλάση $NBU(2)$ (Franco, Ruiz & Ruiz (2001)). Τέλος, χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραμετρική οικογένεια κατανομών, μπούμε να αποδείξουμε ότι $NBU(2) \not\Rightarrow IFR(2)$. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε $t_0'=a$ και $\varepsilon>0$, τέτοιο ώστε $y_0=\frac{1}{2}\varepsilon\in[0,a), t_0=a-\frac{1}{4}\varepsilon\in[0,a), t_0+y_0=a+\frac{1}{4}\varepsilon\in[a,b)$ και $t_0'+y_0=a+\frac{1}{2}\varepsilon\in[a,b)$. Συνεπώς

$$\frac{1}{\overline{F}_{(a,b,c,r,s)}(t_0)} \int_{t_0}^{t_0+y_0} \overline{F}_{(a,b,c,r,s)}(x)dx = a - t_0 + r(t_0 + y_0 - a) = \frac{1}{4}\varepsilon(1+r)$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon = y_0$$

$$= \frac{1}{\overline{F}_{(a,b,c,r,s)}(t_0')} \int_{t_0'}^{t_0'+y_0} \overline{F}_{(a,b,c,r,s)}(x)dx$$

και από τον ορισμό της κλάσης *IFR*(2), συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $F_{(a,b,c,r,s)}(t)$ δεν ανήκει στην κλάση αυτή.

Για να αποδείξουμε ότι **L** $\not\Rightarrow$ *HNBUE*, θεωρούμε την ακόλουθη συνάρτηση

$$\overline{F}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 0.3 \\ 0.7, & 0.3 \le t < 3 \\ 0, & t \ge 3 \end{cases}$$

η οποία ανήκει στην κλάση **L**, αλλά δεν ανήκει στην κλάση *HNBUE* (Klefsjo (1983)) .

Για να αποδείξουμε ότι *SNBU* $\not\Rightarrow$ *NBU*, θεωρούμε την ακόλουθη συνάρτηση

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 0.45 \\ 0.99, & 0.45 \le t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

με μέσο $\mu = 0.9945$. Η κατανομή αυτή δεν ανήκει στην κλάση *NBU*, αλλά ανήκει στην κλάση *SNBU*. Πράγματι αν θέσουμε

$$J_k = \int_0^\infty t^{k-1}\exp(-t/\mu)\overline{F}(t)dt\,,$$

παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό φθίνει ως προς k $(J_1 = 0.63, J_2 = 0.264, J_3 = 0.161, J_4 = 0.115, ...)$, ενώ ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$J_{k+1} \le (k \cdot J_1) J_k ,$$

καθώς $k \cdot J_1 \ge 1$, για $k = 2,3,...$ και συνεπώς $\overline{F} \in SNBU$.

Για να αποδείξουμε ότι $SNBU \not\Rightarrow SIFR$ θεωρούμε δύο ανεξάρτητες εκθετικές μεταβλητές Z,W με μέσους 1 και ½ αντίστοιχα. Έστω ότι $Y = \max(Z,W)$, η οποία ακολουθεί την κατανομή με ουρά

$$\overline{F}(t) = e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}$$

με μέσο που δίνεται από τη σχέση

$$\mu = \int_0^\infty \overline{F}(t) dt = \frac{7}{6}.$$

Γνωρίζουμε ότι $\overline{F} \in NBU \Rightarrow \overline{F} \in SNBU$ (Barlow & Proschan (1975)).

Επιπλέον ισχύουν τα ακόλουθα

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty t^{k-1} \exp(-6t/7) \overline{F}(t) dt = 7^k I_k ,$$

όπου

$$I_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{20}\right)^k - \left(\frac{1}{27}\right)^k , k = 1,2,3,...$$

Η κατανομή $\overline{F}$ ανήκει στην κλάση $SIFR$ αν ισχύουν οι σχέσεις

$$I_2 \le I_1^2 ,\ I_{k+1} I_{k-1} \le I_k^2 .$$

Ωστόσο για $k = 4$ η τελευταία σχέση δεν ισχύει, συνεπώς $\overline{F} \notin SIFR$.