ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βαθμίδα αποτυχίας

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται αρχικά ο ορισμός της βαθμίδας αποτυχίας μιας μονάδας, επισημαίνεται η ερμηνεία της, καθώς επίσης περιγράφονται και οι μορφές, με τις οποίες αυτή παρουσιάζεται συνήθως σε πρακτικά προβλήματα. Στη συνέχεια δίνονται παραδείγματα της βαθμίδας αποτυχίας συνεχών και διακριτών κατανομών. Τέλος προτείνονται εκτιμητές της τελευταίας από εμπειρικά δεδομένα.

1.2 Ορισμός της βαθμίδας αποτυχίας

Έστω ότι μια μονάδα έχει λειτουργήσει χωρίς αποτυχία στο χρονικό διάστημα $[0,t]$ για $t \geq 0$. Αν συμβολίσουμε με T το χρόνο ζωής της μονάδας (τυχαία μεταβλητή), τότε η πιθανότητα να λειτουργήσει χωρίς αποτυχία για Δt επιπλέον χρονικές μονάδες, δηλαδή με άλλα λόγια η πιθανότητα να επιβιώσει στο χρονικό διάστημα $(t,t+\Delta t]$ θα είναι ίση με

$$P(T > t + \Delta t \mid T > t) = \frac{P(T > t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)}.$$

Επιπλέον η πιθανότητα αποτυχίας της μονάδας στο ίδιο αυτό διάστημα $(t,t+\Delta t]$ θα είναι

$$P(T \leq t + \Delta t \mid T > t) = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} \tag{1}$$

όπου με $R(t) = P(T > t)$ έχουμε ορίσει την πιθανότητα να ζήσει η μονάδα μέχρι τη χρονική στιγμή t, η οποία ονομάζεται αξιοπιστία της μονάδας τη στιγμή t. Αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης αξιοπιστίας $R(t)$, τότε θα δίνεται από τον τύπο

$$R'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

οπότε

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{R(t)} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) , (2) , (3) παίρνουμε

$$- \frac{R'(t)}{R(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T \le t + x \mid T > t)}{\Delta t}.$$

Ο λόγος

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T \le t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t}$$

είναι η (στιγμιαία) βαθμίδα αποτυχίας (*failure rate*, *hazard rate*, *intensity of failures*), ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\lambda(t) \ge 0 \text{ και } \int_0^\infty \lambda(t)dt = \infty .$$

Συνεπώς η στιγμιαία βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ εκφράζει το δεσμευμένο ρυθμό αποτυχίας της μονάδας στο διάστημα $(t,t+x]$ για $x \to 0$, δεδομένου ότι $T>t$. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί σαν ρυθμός αποτυχίας με την ακόλουθη έννοια. Αν υπάρχει μεγάλος αριθμός μονάδων (έστω $n(t)$) σε λειτουργία τη στιγμή t, τότε η ποσότητα $n(t) \cdot \lambda(t)$ είναι, κατά προσέγγιση, ίση με τον αριθμό αποτυχιών ανά μονάδα χρόνου (εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας είναι, κατά προσέγγιση, ίση με τον αριθμό αποτυχιών ανά μονάδα χρόνου, ανά μονάδα σε κίνδυνο).

Λόγω της στενής της σχέσης με τις διαδικασίες αποτυχιών και τις στρατηγικές συντήρησης, κάποιοι μηχανικοί αξιοπιστίας κατευθύνθηκαν σε μοντελοποίηση των χρόνων αποτυχίας με βάση τη συνάρτηση $\lambda(t)$. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι ισχύει

$$\lambda(t) \cdot \Delta t = P(t \le T \le t + \Delta t / T > t) .$$

Συνεπώς η ποσότητα $\lambda(t) \cdot \Delta t$ είναι ο κίνδυνος αποτυχίας κατά το διάστημα $(t,t+\Delta t]$, δεδομένου ότι η μονάδα λειτουργεί τη χρονική στιγμή t. Στατιστικά η ποσότητα $\lambda(t) \cdot \Delta t$ μπορεί να εκτιμηθεί από το λόγο του αριθμού μονάδων που απέτυχαν στο διάστημα $(t,t+\Delta t]$ προς τον αριθμό των μονάδων που λειτουργούσαν τη στιγμή t.

Η στιγμιαία βαθμίδα αποτυχίας είναι σημαντική έννοια σε μεγάλο αριθμό εφαρμογών και είναι γνωστή με μια πλειάδα ονομάτων. Συγκεκριμένα στον Αναλογισμό χρησιμοποιείται με το όνομα «force of mortality», δηλαδή ένταση θνησιμότητας για τον υπολογισμό πινάκων θνησιμότητας, στη Στατιστική όταν χρησιμοποιείται στην Κανονική κατανομή έχει το όνομα «Mill's ratio», ενώ επιπλέον η στιγμιαία βαθμίδα αποτυχίας διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στον καθορισμό της μορφής κατανομών ακραίων τιμών (extreme value), όπου είναι γνωστή με το όνομα «intensity function» (Barlow, Marshall & Proschan (1963)).

Θα μπορούσαμε στο σημείο αυτό να προσθέσουμε ότι η στιγμιαία βαθμίδα αποτυχίας είναι μια ειδική μορφή της συνάρτησης έντασης τη στιγμή t για μια σημειακή διαδικασία (point process). Με άλλα λόγια η βαθμίδα αποτυχίας είναι μαθηματικά ισοδύναμη με τη συνάρτηση έντασης για μια μη ομογενή διαδικασία Poisson, όπου ο χρόνος αποτυχίας αντιστοιχίζεται με το πρώτο συμβάν στη διαδικασία (Leemis (1986)).

Αν συμβολίσουμε με $F(t)$ την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής T και με $f(t)$ τη συνάρτηση πυκνότητας της ίδιας μεταβλητής, τότε ισχύουν οι σχέσεις

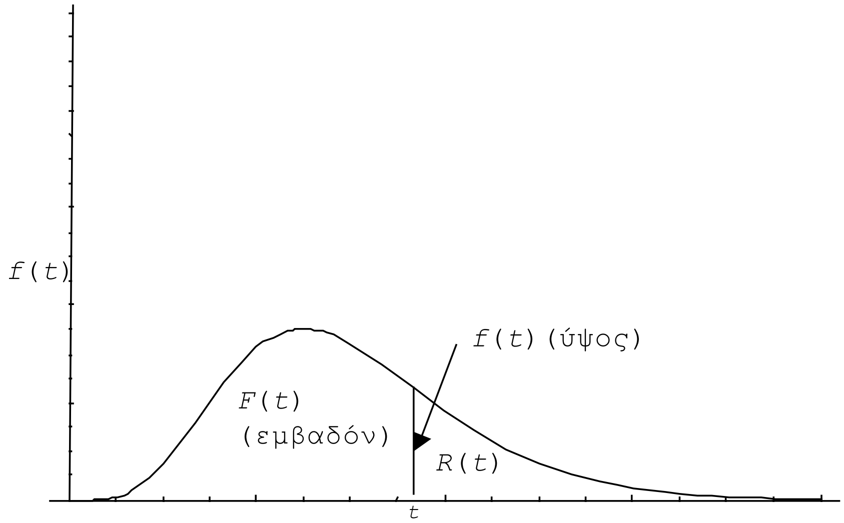
$$F'(t) = f(t)\ ,\ F(t) = P(T \le t)\ \text{και}\ R(t) = 1 - F(t)\,,$$

οπότε για τη βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της τυχαίας μεταβλητής T θα έχουμε

$$\lambda(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)} = \frac{F'(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)}\,.$$

Στο γράφημα που ακολουθεί φαίνεται η σχέση ανάμεσα στις συναρτήσεις $f(t)$,$F(t)$,$R(t)$ και $\lambda(t)$.

ΣΧΗΜΑ 1.1



Συγκεκριμένα η $f(t)$ είναι το ύψος της καμπύλης συχνότητας, η $F(t)$ εκφράζει την περιοχή αριστερά από το t, η $R(t)$ την περιοχή δεξιά από το t και η $\lambda(t)$, που δεν είναι εύκολο να απεικονισθεί, εκφράζει το ύψος της τεταγμένης διαιρούμενο από τη δεξιά περιοχή. Η ιδέα της βαθμίδας αποτυχίας είναι δύσκολο να κατανοηθεί. Συχνά όπως έχουμε αναφέρει, ορίζεται ως ο ρυθμός αποτυχίας ανά μονάδα χρόνου τη στιγμή t, εξαρτώμενο από την επιβίωση μέχρι τη στιγμή t. Όμως αν μια μονάδα δεν έχει επιβιώσει μέχρι τη στιγμή t, τότε είναι ξεκάθαρο ότι δεν έχει πιθανότητα, η οποία να σχετίζεται με αποτυχία ή επιβίωση για κανένα επιπλέον χρονικό διάστημα. Στα πλαίσια της ερμηνείας της βαθμίδας αποτυχίας δίνουμε και το ακόλουθο παράδειγμα που ξεκαθαρίζει τη διαφορά ανάμεσα στην $f(t)$ και $\lambda(t)$. Έστω ότι έχουμε ένα νεογέννητο παιδί. Θέτουμε τις εξής ερωτήσεις:

1. Ποια είναι η πιθανότητα το παιδί να πεθάνει στα πρώτα 60 χρόνια της ζωής του,
2. Ποια η πιθανότητα εάν το παιδί φτάσει στην ηλικία 60 ετών να πεθάνει την επόμενη χρονιά.

Η πρώτη ερώτηση χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $F(t)$ για να απαντηθεί, ενώ η ερώτηση 2 χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $\lambda(t)$ (Grosh (1989)).

Αν ο χρόνος ζωής T μιας μονάδας περιγράφεται από μια συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας $f(t)$, συνάρτηση αξιοπιστίας $R(t)$ και βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$, τότε η μετατοπισμένη τυχαία μεταβλητή $T_\beta = T+\beta$, όπου β είναι μια δεδομένη (συνήθως θετική) σταθερά έχει συνάρτηση αξιοπιστίας

$$R_\beta(t) = \begin{cases} 1, & t < \beta \\ R(\mathrm{t} - \beta), & t \geq \beta \end{cases}$$

και βαθμίδα αποτυχίας που δίνεται από τον τύπο

$$\lambda_\beta(t) = \begin{cases} 0, & t < \beta \\ \lambda(t-\beta), & t \geq \beta \end{cases}$$

Η βαθμίδα αποτυχίας θεωρείται ως η πιο δημοφιλής συνάρτηση στη μοντελοποίηση χρόνων ζωής, εξαιτίας της διαισθητικής ερμηνείας σαν συνολική ποσότητα κινδύνου συσχετιζόμενη με ένα αντικείμενο που έχει επιζήσει τη χρονική στιγμή *t*. Ένας δεύτερος λόγος για τη δημοτικότητά της είναι η χρησιμότητά της στη σύγκριση του τρόπου με τον οποίο ανανεώνονται ή γερνούν διάφοροι πληθυσμοί αντικειμένων. Ένας τρίτος λόγος είναι ότι η βαθμίδα αποτυχίας αποτελεί ειδική περίπτωση της συνάρτησης έντασης σε μια μη ομοιογενή διαδικασία Poisson, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω.

Οι Barlow και Van Zwet (1970) γενίκευσαν τον ορισμό της βαθμίδας αποτυχίας. Για μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση πυκνότητας f, ορίζεται ως γενικευμένη βαθμίδα αποτυχίας $\lambda_{\gamma\varepsilon\nu}(t)$ ο λόγος

$$\lambda_{\gamma\varepsilon\nu}(t) = \frac{f(t)}{g[G^{-1}(F(t))]},$$

όπου οι συναρτήσεις g,G είναι η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής αντίστοιχα.

Αξίζει να επισημανθεί ότι αν η συνάρτηση G είναι η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ=1, τότε η γενικευμένη βαθμίδα αποτυχίας $\lambda_{\gamma\varepsilon\nu}(t)$ ταυτίζεται με τη στιγμιαία βαθμίδα αποτυχίας

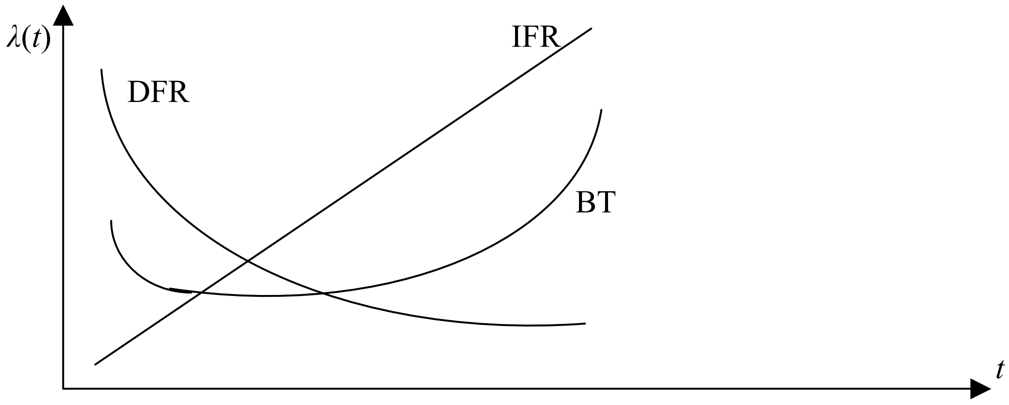
$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}.$$

1.3 Μορφές της βαθμίδας αποτυχίας

Η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας δηλώνει τον τρόπο με τον οποίο ένα αντικείμενο (μονάδα ή σύστημα) γερνάει. Η διαισθητική ερμηνεία της σαν το σύνολο του κινδύνου για ένα αντικείμενο σε μια χρονική στιγμή *t*, δείχνει ότι, όταν η βαθμίδα αποτυχίας είναι μεγάλη, τότε το αντικείμενο είναι σε μεγαλύτερο κίνδυνο, ενώ όταν η βαθμίδα αποτυχίας είναι μικρή τότε το αντικείμενο είναι σε μικρότερο κίνδυνο.

Οι τρεις βαθμίδες αποτυχίας που φαίνονται στο παρακάτω γράφημα ανταποκρίνονται σε μια αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας (*Increasing Failure Rate,* IFR), μια φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας (*Decreasing Failure Rate,* DFR) και μια bathtub-shaped συνάρτηση (BT).

ΣΧΗΜΑ 1.2



Η αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας είναι, πιθανόν, η πιο δημοφιλής περίπτωση. Στην περίπτωση αυτή, όσο περνάει ο χρόνος τα αντικείμενα είναι πιο πιθανόν να αποτύχουν. Με άλλα λόγια τα αντικείμενα υποβαθμίζονται με το χρόνο. Είναι η περίπτωση, για παράδειγμα, μηχανικών αντικειμένων που υποβάλλονται σε κόπωση, η περίπτωση βιοϊατρικών πειραμάτων κ.τ.λ. Αν T είναι ο χρόνος μέχρι ένας όγκος να εμφανισθεί μετά από ένεση μιας ουσίας σε ένα εργαστηριακό ζώο και η ουσία κάνει τον όγκο πιο πιθανό να εμφανισθεί όσο ο χρόνος περνάει, η βαθμίδα αποτυχίας σχετική με το χρόνο T αυξάνει (Leemis (1995)).

Η δεύτερη περίπτωση, η φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας, είναι λιγότερο συνήθης. Στην περίπτωση αυτή το αντικείμενο είναι λιγότερο πιθανό να αποτύχει όσο ο χρόνος περνάει. Αντικείμενα με αυτό τον τύπο βαθμίδας αποτυχίας βελτιώνονται με το χρόνο. Ορισμένα υλικά (μέταλλα, μπετόν κ.τ.λ.) μέσω της χρήσης τους αποκτούν αυξανόμενη δύναμη όσο ο χρόνος περνάει. Τέλος μελέτες, οι οποίες έχουν διεξαχθεί σε διάφορους κοινωνικούς χώρους, έχουν αποδείξει ότι, όσο περισσότερο χρόνο ένας άνθρωπος παραμένει σε μία κατάσταση, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα να ξεφύγει από αυτήν στο άμεσο μέλλον. Η «αδράνεια» αυτού του είδους συσσωρεύεται, για παράδειγμα, στη διάρκεια μίας θητείας σε μία οργάνωση ή διαμονής σε μία κατοικία, στην αποχή από το έγκλημα σε κάποιον άνθρωπο που μόλις έχει αφεθεί ελεύθερος. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις ο ρυθμός συσσώρευσης μειώνεται με το χρόνο (Gerchak (1983)).

Η τρίτη περίπτωση, μια bathtub-shaped βαθμίδα αποτυχίας, συμβαίνει όταν η βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται αρχικά, στη συνέχεια ακολουθεί μια περίοδος, όπου η βαθμίδα μένει σταθερή, ενώ μετά αυξάνεται όσο τα αντικείμενα γερνούν. Τα αντικείμενα αρχικά βελτιώνονται, στη συνέχεια διατηρούν σχεδόν μία σταθερή ποιότητα και τέλος αρχίζουν να υποβαθμίζονται. Αυτή η μορφή βαθμίδας αποτυχίας είναι σημαντική, καθώς οι χρόνοι ζωής ηλεκτρονικών, ηλεκτρομηχανικών και μηχανικών προϊόντων μοντελοποιούνται συχνά με τον τρόπο αυτό (Mi (1993)).

Η πρώτη περίοδος ονομάζεται βρεφική περίοδος (early life period), όπου εδώ συχνά βιομηχανικά, σχεδιαστικά ή συστατικά ελαττώματα προκαλούν πρόωρες αποτυχίες. Η εκτίμηση του μεγέθους της περιόδου, στην οποία αυτές οι πρόωρες αποτυχίες έχουν εξαλειφθεί, είναι εξαιρετικά χρήσιμη για έναν παραγωγό που θέλει να προσδιορίσει μια κατάλληλη χρονική περίοδο εγγύησης. Η δεύτερη περίοδος ονομάζεται χρήσιμη περίοδος (useful period) και εδώ έχουμε μια σταθερή βαθμίδα αποτυχίας. Οι αποτυχίες είναι πιθανόν να συμβούν σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή και ονομάζονται τυχαίες ή καταστροφικές. Τέλος όσο τα αντικείμενα συνεχίζουν να γερνούν, η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνει χωρίς όριο και έχουμε τη λεγόμενη (wear-out) περίοδο φθοράς. Παράδειγμα τέτοιας μορφής βαθμίδας είναι οι χρόνοι ζωής βιομηχανικών προϊόντων.

Θα εξετάσουμε τώρα πως ορίζεται η έννοια της μορφής bathtub(BT) στην περίπτωση της διακριτής κατανομής. Δίνουμε αρχικά τον ορισμό που αφορά ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{\alpha(i)\ ,\ i \geq 1\}$ λέμε ότι έχει μορφή bathtub(BT) ή upside-down bathtub μορφή αν υπάρχουν ακέραιοι $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \infty$ ώστε

$$\alpha(1)>\alpha(2)>...>\alpha(n_1\text{-}1)>\alpha(n_1)=\ldots=\alpha(n_2)<\alpha(n_2+1)<\ldots$$

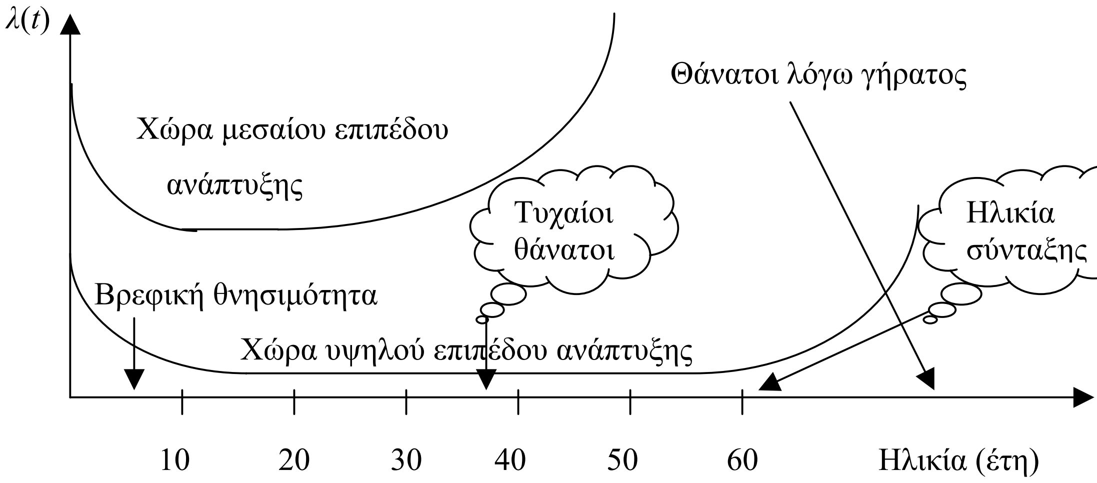
$$\text{ή}\ \ \alpha(1)<\alpha(2)<...<\alpha(n_1\text{-}1)<\alpha(n_1)=\ldots=\alpha(n_2)>\alpha(n_2+1)>\ldots$$

αντίστοιχα. Οι αριθμοί n_1 και n_2 ονομάζονται σημεία αλλαγής της ακολουθίας $\{\alpha(i)\ ,\ i \geq 1\}$. Αν τώρα έχουμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F(t)$, θα λέμε ότι έχει βαθμίδα αποτυχίας bathtub, αν η ακολουθία $\left\{\ (\overline{F}(n))^{1/n}, n \geq 1\right\}$ έχει μορφή bathtub (BT). Στη συνέχεια δίνουμε διάφορα παραδείγματα εφαρμογών της bathtub-shaped βαθμίδας αποτυχίας.

α. Η bathtub-shaped βαθμίδα αποτυχίας εμφανίζεται κατά τη μελέτη του χρόνου ζωής των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η burn-in περίοδος ανταποκρίνεται στις πρώτες εβδομάδες, όπου εμφανίζονται βιομηχανικά, σχεδιαστικά ή συστατικά ελαττώματα. Αποτυχίες εξαιτίας πτώσης του υπολογιστή συμβαίνουν κατά τη διάρκεια της ζωής του. Αν οι αποτυχίες αυτές είναι το ίδιο πιθανές να συμβούν σε οποιαδήποτε στιγμή, η βαθμίδα αποτυχίας θα αυξάνεται κατά μια σταθερά, η οποία θα εκφράζει την πιθανότητα πεσίματος του υπολογιστή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

β. Η bathtub-shaped βαθμίδα αποτυχίας παρατηρείται στους χρόνους ζωής των ανθρώπων. Στην περίπτωση αυτή, οι πρόωρες αποτυχίες είναι γνωστές σαν θάνατοι βρεφικής θνησιμότητας και συμβαίνουν κατά τα πρώτα χρόνια ζωής. Μετά από την περίοδο αυτή, η βαθμίδα αποτυχίας έχει μια πολύ μικρή αύξηση μέσα στην εφηβεία και την ενηλικίωση. Τέλος σε μεταγενέστερα έτη της ζωής του ανθρώπου, η βαθμίδα αποτυχίας αρχίζει να αυξάνει ραγδαία (θάνατοι λόγω γήρατος). Γενικότερα οι περίοδοι μεταβολής της βαθμίδας αποτυχίας εξαρτώνται από παράγοντες όπως το επίπεδο ζωής, το περιβάλλον, το επίπεδο ανάπτυξης της χώρας διαμονής, καθώς και από τις διαθέσιμες ιατρικές παροχές (Dummer & Winton (1968)). Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα.

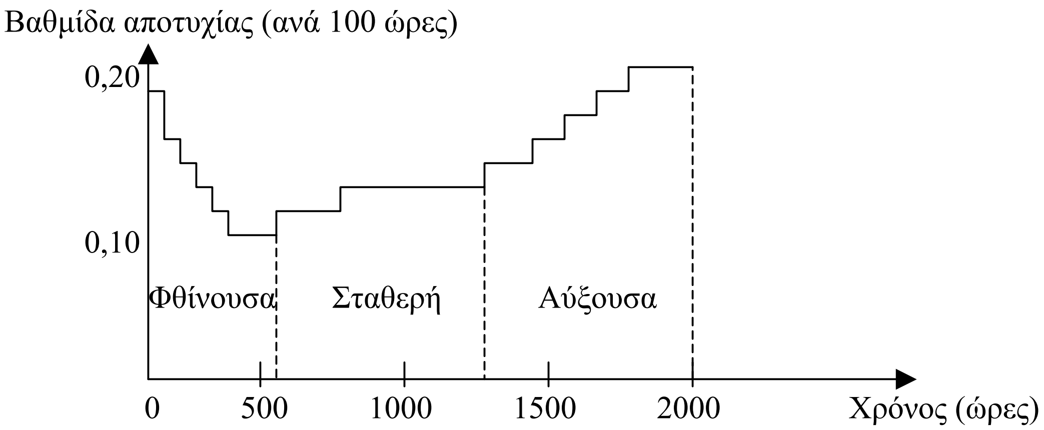
ΣΧΗΜΑ 1.3



γ. Η bathtub-shaped βαθμίδα αποτυχίας εφαρμόζεται επίσης σε ασκήσεις ανθρώπινης επίδοσης, όπως η εγρήγορση. Εδώ ο χρόνος ζωής T είναι ο χρόνος μέχρι το πρώτο σφάλμα. Αν η bathtub-shaped βαθμίδα αποτυχίας εφαρμοσθεί, τότε η burn-in περίοδος (βρεφική και χρήσιμη περίοδος) ανταποκρίνεται στη διαδικασία μάθησης και η περίοδος wear-out ανταποκρίνεται στην κόπωση.

δ. Το ακόλουθο γράφημα παρουσιάζει την εμπειρική απεικόνιση μιας bathtub-shaped βαθμίδας αποτυχίας.

ΣΧΗΜΑ 1.4



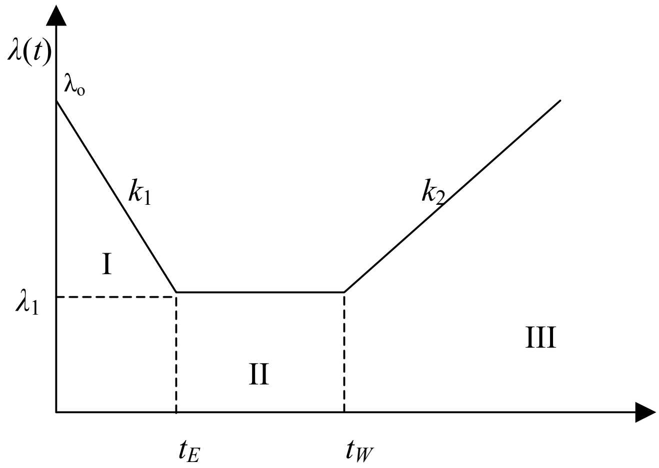
Συγκεκριμένα το σχήμα 1.4 δείχνει την εμπειρική βαθμίδα αποτυχίας ανά 100 ώρες για ένα σύστημα παραγωγής ζεστού αερίου, που χρησιμοποιείται για το ξεκίνημα μηχανών συγκεκριμένου εμπορικού επιβατικού αεροπλάνου. Κατά τη διάρκεια των πρώτων 600 ωρών λειτουργίας του, η παρατηρηθείσα βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται κατά περίπου το μισό. Από την ηλικία των 600 ωρών έως την ηλικία των 1400 ωρών λειτουργίας, η βαθμίδα αποτυχίας φαίνεται να αυξάνει ανεπαίσθητα, ενώ από την ηλικία των 1400 ωρών έχουμε μεγάλη αύξηση, αντικατοπτρίζοντας τη φθορά.

Ένα απλοποιημένο μοντέλο βαθμίδας αποτυχίας που μπορεί να περιγράψει προσεγγιστικά την καμπύλη (bathtub curve) είναι το ακόλουθο

$$\lambda(t)= \begin{cases} \lambda_0 - \kappa_1 t, & 0 \le t \le t_E \\ \lambda_1, & t_E \le t \le t_W \\ \lambda_1 + \kappa_2 (t - t_W), & t_W \le t \end{cases}$$

όπου $\lambda_1 = \lambda_o - \kappa_1 t$. Η μορφή της τελευταίας φαίνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα.

ΣΧΗΜΑ 1.5



1.4 Η βαθμίδα αποτυχίας γνωστών συνεχών κατανομών

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε συγκεκριμένες κατανομές, θα δούμε τη συνάρτηση κατανομής και πυκνότητας τους, καθώς επίσης και τη βαθμίδα αποτυχίας τους.

α. Εκθετική κατανομή

Η μονοπαραμετρική εκθετική κατανομή είναι ειδική περίπτωση της διπαραμετρικής εκθετικής κατανομής $EXP(\theta,\gamma)$, για γ=0. Η τελευταία έχει συνάρτηση κατανομής, πυκνότητας πιθανότητας και βαθμίδα αποτυχίας που δίνονται παρακάτω.

$$F(t;\theta,\gamma)=1\text{-}exp(-\frac{t-\gamma}{\theta})=1\text{-}R(t;\theta,\gamma)$$

$$f(t;\theta,\gamma)=\frac{1}{\theta}\,exp(-\frac{t-\gamma}{\theta})$$

$$\lambda(t;\theta,\gamma)=\frac{1}{\theta}\qquad ,\ t>\gamma$$

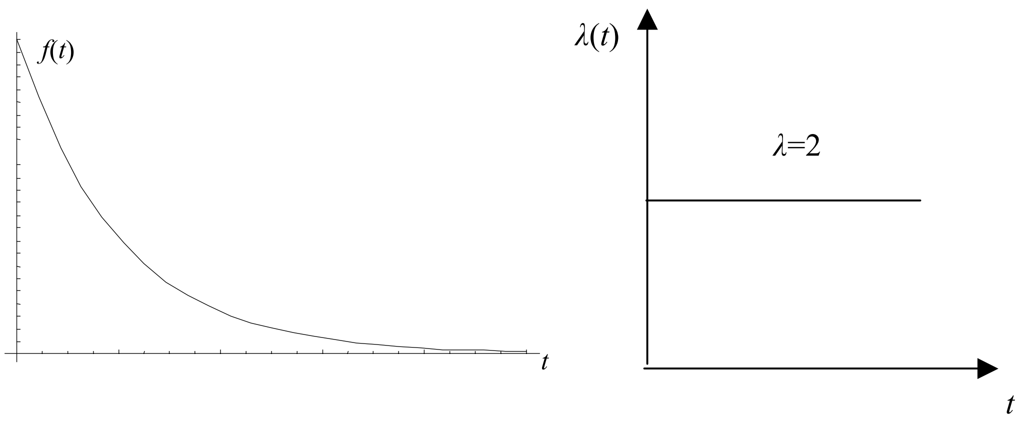
όπου θ>0 είναι μια παράμετρος κλίμακας και γ είναι παράμετρος θέσης.

Η μονοπαραμετρική εκθετική κατανομή είναι η πιο απλή κατανομή που χρησιμοποιείται συχνά στην ανάλυση δεδομένων αξιοπιστίας. Η εκθετική κατανομή έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, δηλαδή δεν εξαρτάται από το χρόνο. Μια σταθερή βαθμίδα αποτυχίας δηλώνει ότι, για μια μονάδα που δεν έχει αποτύχει, η πιθανότητα αποτυχίας στο επόμενο μικρό χρονικό διάστημα είναι ανεξάρτητη από την ηλικία της μονάδας. Από φυσικής απόψεως, μια σταθερή βαθμίδα αποτυχίας σημαίνει ότι ο πληθυσμός των μονάδων που βρίσκεται υπό μελέτη δεν φθείρεται, ή με άλλα λόγια δεν γερνάει. Η εκθετική κατανομή είναι η μόνη συνεχής κατανομή με σταθερή βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)=\lambda$ για $t \geq 0$. Αυτό εκφράζει την **αμνήμονα ιδιότητα** της.

Αφού μια ήδη χρησιμοποιημένη μονάδα είναι τόσο καλή όσο μια καινούρια, δεν υπάρχει κανένα πλεονέκτημα στο να ακολουθήσουμε πολιτική αντικατάστασης μονάδων που ξέρουμε ότι λειτουργούν. Επιπλέον κατά τη στατιστική εκτίμηση μέσης ζωής, ποσοστημορίων, αξιοπιστίας, τα δεδομένα μπορούν να συλλέγονται με καταγραφή του αριθμού ωρών της παρατηρηθείσας ζωής και τον αριθμό των παρατηρηθέντων αποτυχιών, αφού οι ηλικίες των μονάδων υπό παρατήρηση δεν τα επηρεάζουν.

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται γραφήματα για την εκθετική κατανομή.

ΣΧΗΜΑ 1.6



β. Weibull κατανομή $W(\lambda,\alpha)$

Η κατανομή αυτή έχει χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει αποτυχία κόπωσης (Weibul1, 1939), αποτυχία κενού σωλήνα (Kao, 1958) και αποτυχία σε ρουλεμάν (Lieblein και Zelen, 1956). Αποτελεί ίσως τη δημοφιλέστερη παραμετρική οικογένεια χρόνων αποτυχιών. Η συνάρτηση αξιοπιστίας, η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η βαθμίδα αποτυχίας δίνονται από τους τύπους

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} = e^{-\lambda t^{a}}$$

$$F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^{\beta}} \quad , \text{για } \ t \geq 0$$

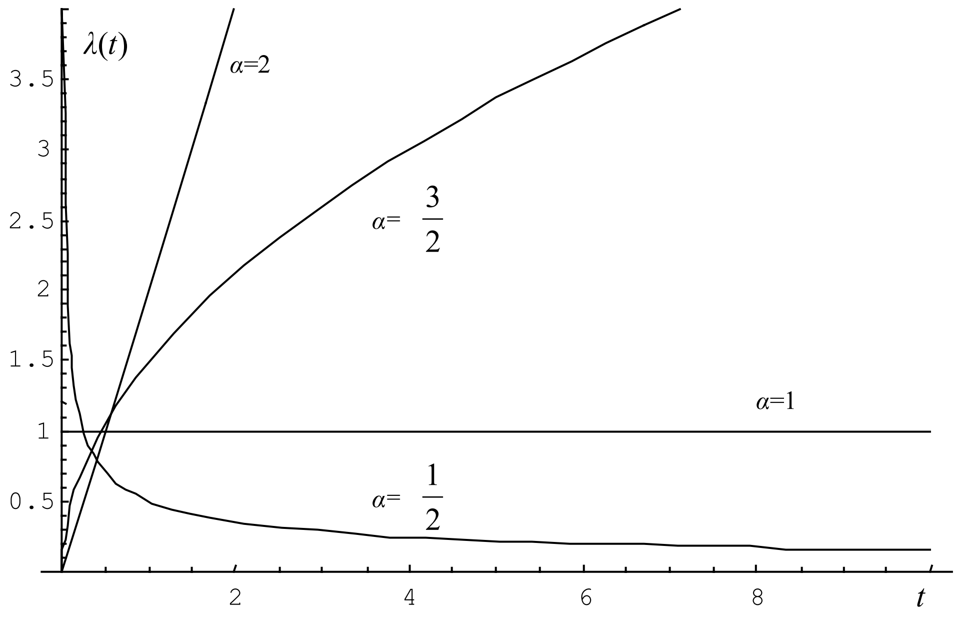
$$f(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^{a}} \quad , \text{για } \ t \geq 0$$

$$\lambda(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1}.$$

Η παράμετρος λ είναι παράμετρος κλίμακας ενώ η α παράμετρος μορφής.

Στο ακόλουθο γράφημα φαίνονται οι καμπύλες της βαθμίδας αποτυχίας για λ=1 και διάφορες τιμές της παραμέτρου α.

ΣΧΗΜΑ 1.7



Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι :

• Για α>1 η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνεται με το χρόνο (η μονάδα γερνάει), δηλαδή έχουμε χρόνους ζωής IFR.

• Για α<1 η βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται με το χρόνο (όσο περνάει ο χρόνος, η μονάδα βελτιώνεται, δηλαδή έχει μικρότερη πιθανότητα να χαλάσει), δηλαδή έχουμε χρόνους ζωής DFR.

• Για α=1 η βαθμίδα αποτυχίας παραμένει σταθερή. Στην περίπτωση αυτή η κατανομή εκφυλίζεται σε μία εκθετική κατανομή.

γ. Κατανομή Γάμμα

Η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον τύπο

$$f(t)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-\lambda t} \quad , \text{για } t\geq 0$$

ενώ για τη συνάρτηση αξιοπιστίας έχουμε

$$R(t)=\int_t^{\infty} f(s)ds=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{\infty} s^{\alpha-1}e^{-\lambda s}ds=\frac{\Gamma(\alpha,\lambda t)}{\Gamma(\alpha)}$$

όπου με $\Gamma(a,x)=\int_x^{\infty} s^{a-1}e^{-s}ds$ συμβολίζουμε τη μη πλήρη συνάρτηση Γάμμα.

Η συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$F(t)=\int_0^t f(x)dx=\frac{\Gamma(a)-\Gamma(a,\lambda t)}{\Gamma(a)} \; .$$

Η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(t)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha,\lambda t)}t^{\alpha-1}e^{-\lambda t} \; .$$

Όταν το α είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε η συνάρτηση κατανομής γράφεται σε κλειστή μορφή ως εξής

$$F(t)=1-\sum_{i=0}^{\alpha-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t} \; .$$

Στην περίπτωση αυτή, όπου η παράμετρος α είναι θετικός ακέραιος αριθμός, η κατανομή συμπίπτει με την κατανομή του αθροίσματος α εκθετικών τυχαίων μεταβλητών, η κάθε μία με βαθμίδα αποτυχίας λ, και είναι γνωστή με την ονομασία Erlang (Erl(α,λ)). Τότε η συνάρτηση αξιοπιστίας γράφεται στη μορφή

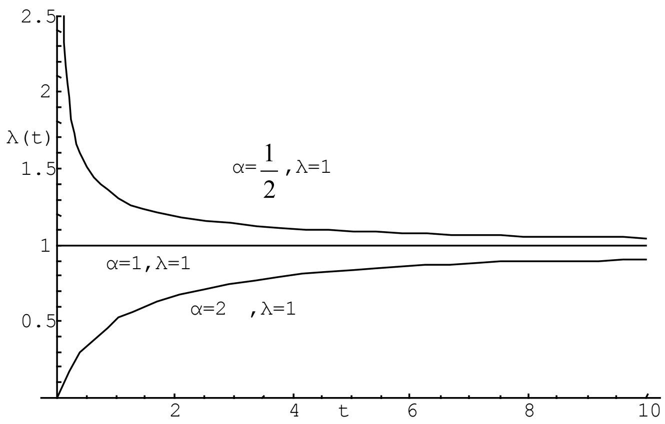
$$R(t)=e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{a-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

και η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{(\alpha-1)!\sum_{\iota=0}^{\alpha-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}}\, t^{\alpha\text{-}1}.$$

Στο ακόλουθο γράφημα φαίνονται οι καμπύλες της βαθμίδας αποτυχίας για λ=1 και διάφορες τιμές της παραμέτρου α.

ΣΧΗΜΑ 1.8



Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι :

- Για α>1 η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνεται με το χρόνο, δηλαδή έχει την ιδιότητα IFR.
- Για α<1 η βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται με το χρόνο, δηλαδή έχει την ιδιότητα DFR.
- Για α=1 η βαθμίδα αποτυχίας παραμένει σταθερή.

δ. Περικομμένη κανονική κατανομή (Truncated normal)

Στη μελέτη χρόνων ζωής, η τυχαία μεταβλητή που χρησιμοποιούμε δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές. Για το λόγο αυτό, όταν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την κανονική κατανομή και ισχύει $\frac{\mu}{\sigma} < 3$, τότε καταφεύγουμε στην περικομμένη κανονική κατανομή, η οποία παίρνει μόνο θετικές τιμές (ή μηδέν).

O Davis (1952), αφού εξέτασε δεδομένα αποτυχιών για μια ευρεία ποικιλία αντικειμένων, έδειξε εμπειρικά ότι, για την προσέγγιση χρόνων ζωής αντικειμένων που είναι αυστηρά ελεγμένα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η περικομμένη κανονική κατανομή.

Η συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$F(t)=\begin{cases} P(X \le t \mid X \ge 0), t \ge 0 \\ \\ 0, \qquad\qquad t < 0. \end{cases}$$

Αφού ισχύει

$$P(X \le 0) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge -\frac{\mu}{\sigma}) = 1 - \Phi(-\frac{\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{\mu}{\sigma})$$

έχουμε ότι

$$F(t) = \frac{P(X \le t, X \ge 0)}{P(X \ge 0)} = \frac{P(0 \le X \le t)}{P(X \ge 0)} = \frac{P(\frac{-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{t-\mu}{\sigma})}{P(X \ge 0)} =$$

$$\frac{\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma}) - \Phi(-\frac{\mu}{\sigma})}{\Phi(\frac{\mu}{\sigma})} = \frac{\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma}) + \Phi(\frac{\mu}{\sigma}) - 1}{\Phi(\frac{\mu}{\sigma})}.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t) = F'(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$f(t)= \frac{1}{\Phi(\frac{\mu}{\sigma})\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

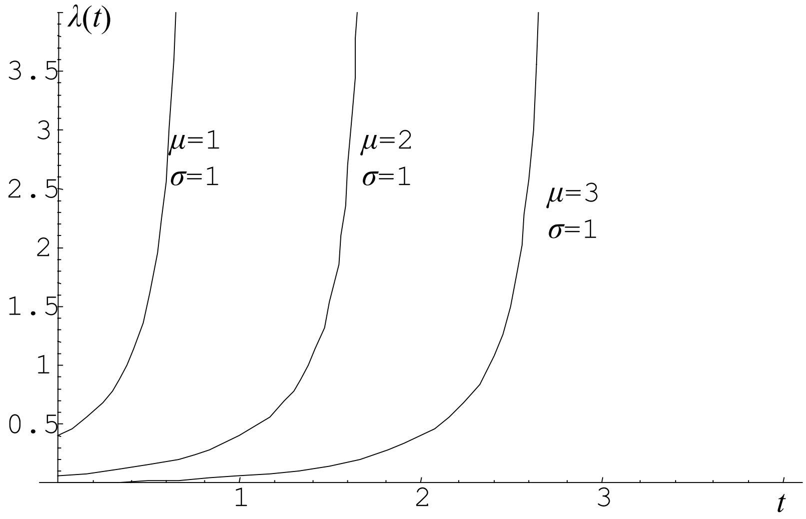
Τέλος η συνάρτηση αξιοπιστίας και η βαθμίδα αποτυχίας δίνονται από τους τύπους

$$R(t)= \frac{1-\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})}{\Phi(\frac{\mu}{\sigma})}$$

$$\lambda(t)= \frac{e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2[1-\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})]}}.$$

Στο ακόλουθο γράφημα φαίνεται η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας της περικομμένης κανονικής κατανομής για σ=1 και διάφορες τιμές του μ.

ΣΧΗΜΑ 1.9



Αξίζει να επισημάνουμε ότι για μ>>3σ έχουμε $\Phi(\frac{\mu}{\sigma}) \cong 1$ και η περικομμένη κανονική είναι σχεδόν ίδια με την συνήθη κανονική κατανομή, επομένως στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται η συνήθης κανονική κατανομή.

ε. Λογαριθμοκανονική κατανομή (Lognormal)

Ως λογαριθμοκανονική κατανομή (συμβολικά $LN(\mu,\sigma^2)$) ορίζουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής *T,* για την οποία ο λογάριθμός της ακολουθεί κανονική κατανομή. Επομένως θα έχουμε $X = \ln T \sim N(\mu,\sigma^2)$, ή ισοδύναμα $T=e^X$ όπου $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Η λογαριθμοκανονική κατανομή είναι ένα σύνηθες μοντέλο για χρόνους αποτυχιών. Εφαρμογή της κατανομής αυτής μπορεί να αιτιολογηθεί για μια τυχαία μεταβλητή που προκύπτει από ένα παραγόμενο πλήθος ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων θετικών τυχαίων ποσοτήτων. Επίσης η λογαριθμοκανονική κατανομή εφαρμόζεται ευρέως για να περιγράψει χρόνο διάσπασης σε μέταλλα (Meeker & Escobar (1997)).

Οι συναρτήσεις κατανομής των τυχαίων μεταβλητών *X* και *T* συνδέονται με τον τύπο

$$F_x(x) = P(X \le x) = P(\ln T \le x) = P(T \le e^x) = F_T(e^x)$$

ή ισοδύναμα

$$F_T(t) = F_X(\ln t), \ \ t \ge 0.$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας θα δίνεται από τον τύπο

$$f(t) == F'_X(\ln t)\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(\ln t\text{-}\mu)^2}{2\sigma^2}}\,, \quad t > 0.$$

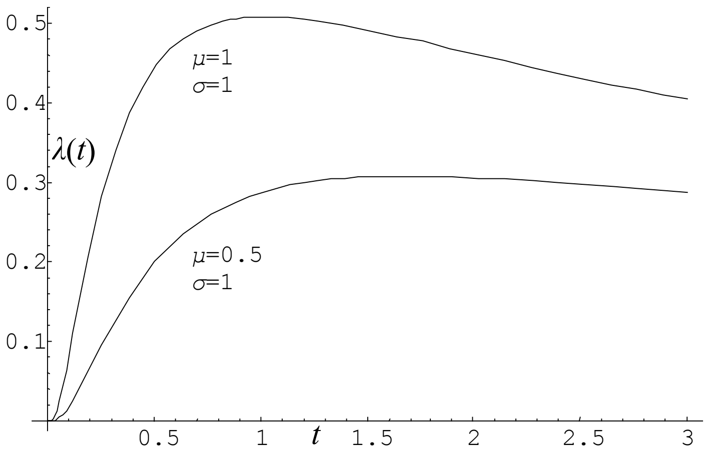
Τέλος οι συναρτήσεις αξιοπιστίας και βαθμίδας αποτυχίας δίνονται από τους τύπους

$$R(t) = P(T \geq t) = P(e^x \geq t) = P(X \geq \log t) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{\log t\text{-}\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\log t\text{-}\mu}{\sigma}\right)$$

$$\lambda(t) = \frac{e^{-(\ln t-\mu)^2/2\sigma^2}}{t\int_t^{\infty}\frac{1}{u}e^{-(\ln u-\mu)^2/2\sigma^2}\,du}.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας της λογαριθμοκανονικής κατανομής, όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα, ξεκινά από το μηδέν , αυξάνει μέχρι ένα χρονικό σημείο και μετά μειώνεται τελικά.

ΣΧΗΜΑ 1.10



Για μεγάλες τιμές του σ, η βαθμίδα αποτυχίας πιάνει ένα μέγιστο νωρίς και μετά μειώνεται.

ζ. Ομοιόμορφη κατανομή (uniform)

Η ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ όπου $0 \leq \alpha < \beta$ έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta\text{-}\alpha}, & t \in [a,\beta] \\[2ex] 0, & t \notin [a,\beta]. \end{cases}$$

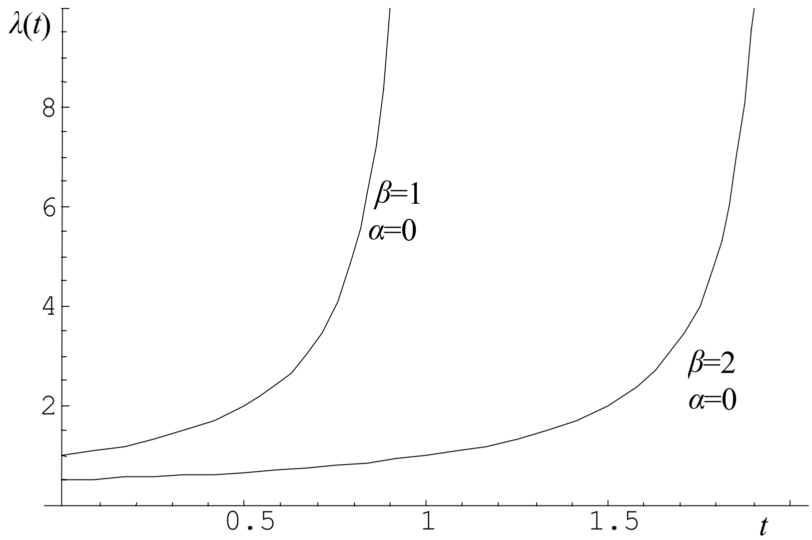
Η συνάρτηση αξιοπιστίας και η βαθμίδα αποτυχίας δίνονται από τους τύπους

$$R(t)=\int_0^{\infty} f(t)dt = \begin{cases} 1, & t < \alpha \\ \dfrac{\beta - t}{\beta - \alpha}, & t \in [\alpha, \beta] \\ 0, & t > \beta \end{cases}$$

$$\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - t}, & t \in [a, \beta) \\ 0, & t \notin [\alpha, \beta). \end{cases}$$

Η μορφή της τελευταίας φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

ΣΧΗΜΑ 1.11



η. Λογιστική κατανομή (Logistic)

Θα λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή Y έχει τη λογιστική κατανομή με παραμέτρους μ και σ,(συμβολικά Y~LOGIS(μ,σ)) αν η συνάρτηση κατανομής της Y δίνεται από τον τύπο

$$F(y;\mu,\sigma)=\Phi_{\text{logis}}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right),$$

όπου $\Phi_{logis}(z) = \dfrac{\exp(z)}{1+\exp(z)}$.

Η συνάρτηση πυκνότητας της Y θα δίνεται από τον τύπο

$$f(y;\mu,\sigma) = F'(y;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\varphi_{\log is}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

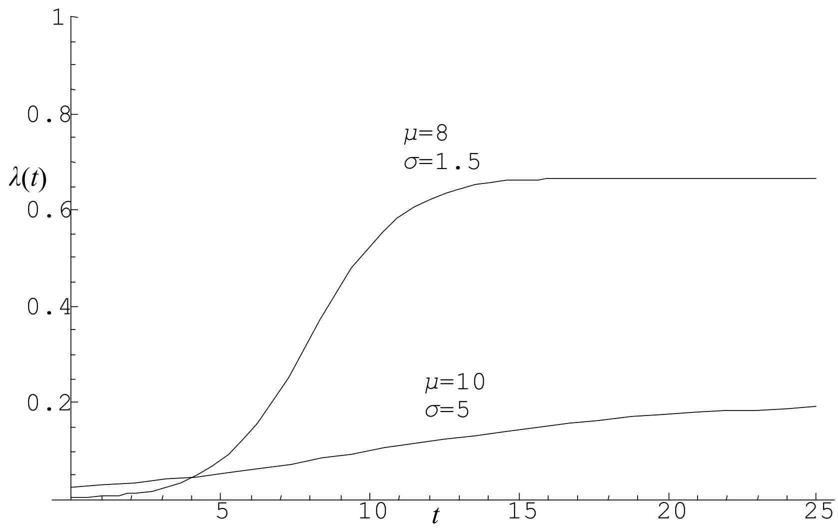
όπου $\varphi_{logis}(z) = \dfrac{\exp(z)}{(1+\exp(z))^2}$.

Η βαθμίδα αποτυχίας της Y δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sigma}\Phi_{\text{logis}}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

και η μορφή της, για διάφορες τιμές του μ και σ, φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

ΣΧΗΜΑ 1.12



Η παράμετρος $\mu \in R$ είναι παράμετρος θέσης και η $\sigma>0$ παράμετρος κλίμακας. Η μορφή της λογιστικής κατανομής είναι παρόμοια με αυτή της κανονικής κατανομής, μόνο που η λογιστική έχει ελαφρώς πιο μακριές ουρές. Η βασική διαφορά μεταξύ των δύο κατανομών εντοπίζεται στη συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας στην άνω ουρά της κατανομής , όπου η λογιστική βαθμίδα αποτυχίας οριζοντιώνεται, προσεγγίζοντας το $1/\sigma$ για μεγάλο y (όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα).

θ. Λογαριθμολογιστική κατανομή (Loglogistic)

Μια τυχαία μεταβλητή T έχει λογαριθμολογιστική κατανομή, (συμβολικά T~LOGLOGIS (μ,σ)) αν και μόνο αν Y=log$T$~LOGIS(μ,σ), δηλαδή έχουμε μια σχέση αντίστοιχη με αυτήν ανάμεσα στη λογαριθμοκανονική και την κανονική κατανομή. Η συνάρτηση κατανομής της T δίνεται από τον τύπο

$$F(t;\mu,\sigma)=\Phi_{logis}(\frac{\log t-\mu}{\sigma})=\frac{\exp(\frac{\log t-\mu}{\sigma})}{1+\exp(\frac{\log t-\mu}{\sigma})}$$

ενώ η συνάρτηση πυκνότητας θα δίνεται από τον τύπο

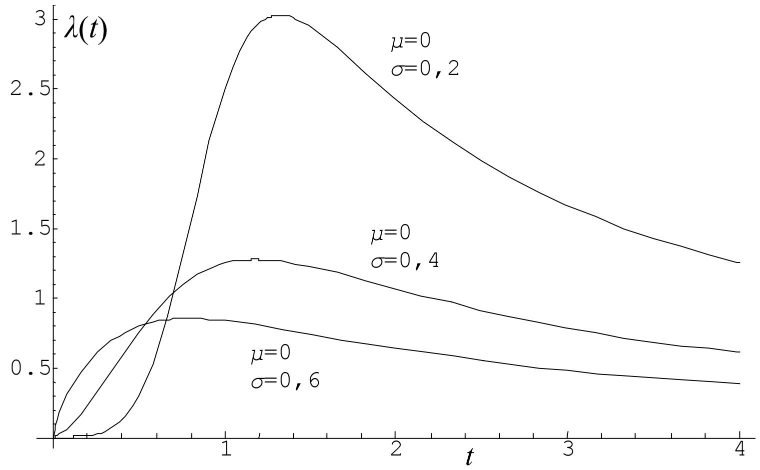
$$f(y;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\phi_{\text{logis}}(\frac{\log(\text{t})-\mu}{\sigma})=\frac{\exp(\frac{\log t-\mu}{\sigma})}{(1+\exp(\frac{\log t-\mu}{\sigma}))^2}.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής είναι

$$\lambda(t)=\frac{1}{\sigma t}\Phi_{\text{logis}}(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma})\ ,\ t>0$$

και η μορφή της φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

ΣΧΗΜΑ 1.13



ι. Gompertz-Makeham κατανομή

Η κατανομή αυτή (*GOMA*) χρησιμοποιείται για μοντελοποίηση ανθρώπινου χρόνου ζωής, ξεκινώντας από τη μέση ηλικία. Η συνάρτηση κατανομής της δίνεται από τον τύπο

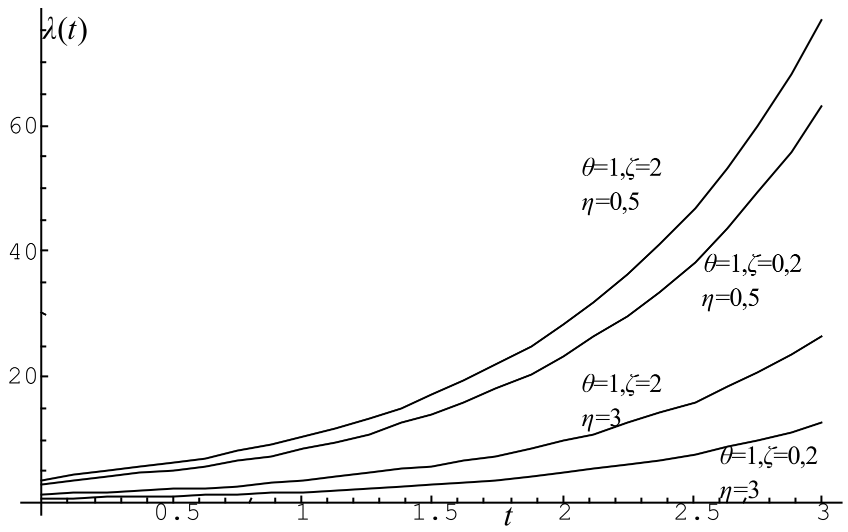
$$F(t;\gamma,\kappa,\lambda) = 1 - \exp(-\frac{\lambda\kappa t + \gamma \exp(\kappa t) - \gamma}{\kappa})$$

όπου $\gamma>0$, $\kappa>0$, $\lambda \geq 0$, t>0, ενώ για τη βαθμίδα αποτυχίας έχουμε

$$\lambda(t) = h(t;\theta,\zeta,\eta) = \frac{\eta}{\theta} + \frac{\exp(-\zeta)}{\theta} \cdot \exp(\frac{t}{\theta}),\ \ t > 0\,,$$

όπου έχει γίνει η αναπαραμέτρηση $(\theta,\zeta,\eta)=(1/\kappa\ , \log(\kappa/\gamma)\ , \lambda/\kappa)$ προκειμένου να γίνει διάκριση ανάμεσα στην παράμετρο κλίμακας και τις παραμέτρους μορφής. Με τη νέα παραμέτρηση, η θ είναι παράμετρος κλίμακας και οι ζ,η είναι παράμετροι μορφής. Η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας φαίνεται στο ακόλουθο γράφημα.

ΣΧΗΜΑ 1.14



κ. Κατανομές ακραίων τιμών (extreme values)

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί γνωστή κατανομή. Αν θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την κατανομή, τότε οι ακραίες τιμές (*extreme values*) του δείγματος, όπως η τιμή $X_{(1)}$ (*minimum*), ή η μέγιστη τιμή $X_{(n)}$ (*maximum*) παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Οι τιμές $X_{(1)}, X_{(n)}$ μπορούν να ορισθούν από τους τύπους

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, ..., X_n)\,,\ X_{(1)} = \min(X_1, X_2, ... X_n)\,.$$

Εάν υπάρχουν διαφορετικά σύνολα δειγμάτων του ίδιου μεγέθους n, τότε το κάθε σύνολο θα έχει διαφορετική ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

Η συνάρτηση κατανομής της ελάχιστης παρατήρησης $X_{(1)}$ και της μέγιστης παρατήρησης $X_{(n)}$ δίνονται από τους τύπους

$$\overline{F}_{X_{(1)}}(y) = P(X_{(1)} > y) = P(X_1 > y, X_2 > y, ..., X_n > y) = 1 - F_{X_{(1)}}(y)$$

$$F_{X_{(n)}}(y) = P(X_{(n)} \le y) = P(X_1 \le y, X_2 \le y, ..., X_n \le y) .$$

Για όμοιες και ανεξάρτητες μονάδες X_i οι παραπάνω συναρτήσεις κατανομής παίρνουν τη μορφή

$$F_{X_{(1)}}(y) = 1 - [1 - F_X(y)]^n \quad , \quad F_{X_{(n)}}(y) = [F_X(y)]^n .$$

Ο Gumbel (1958) κατηγοριοποίησε τις κατανομές αυτές σε τρεις τύπους ασυμπτωτικών κατανομών ακραίων τιμών (*extreme value*), όπως θα δούμε αναλυτικά και παρακάτω. Οι ασυμπτωτικές κατανομές ακραίων τιμών ορίζονται, όπως όλες οι γνωστές κατανομές, με τη βοήθεια της συνάρτησης κατανομής και της συνάρτησης πυκνότητάς τους.

- Τύπος I (*Gumbel*)

Οι κατανομές ακραίων τιμών τύπου I, σε προγενέστερη βιβλιογραφία, ονομάζονταν και διπλές εκθετικές κατανομές. Εφαρμόζονται στη μοντελοποίηση περιβαλλοντικών φαινομένων, όπως, για παράδειγμα, η δύναμη του αέρα, το επίπεδο υγρών κ.τ.λ. Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η βαθμίδα αποτυχίας των extreme value κατανομών τύπου I για την ελάχιστη τιμή δίνονται από τους τύπους

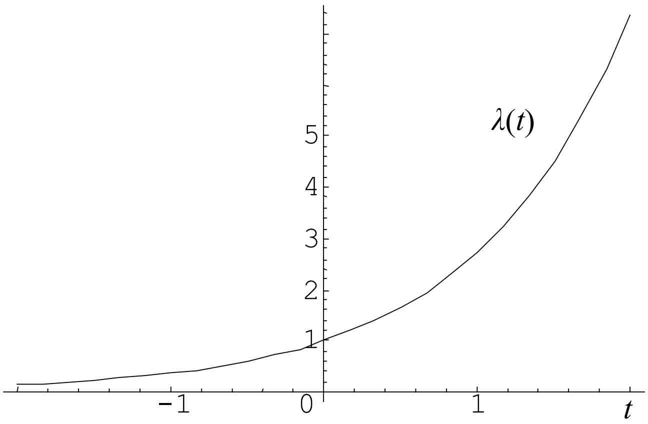
$$F(t) = 1 - e^{-e^t} \quad , \quad t \in R$$

$$f(t) = e^{-e^t + t}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = e^t .$$

Η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

ΣΧΗΜΑ 1.15



Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η βαθμίδα αποτυχίας των κατανομών ακραίων τιμών τύπου Ι για τη μέγιστη τιμή δίνονται από τους τύπους

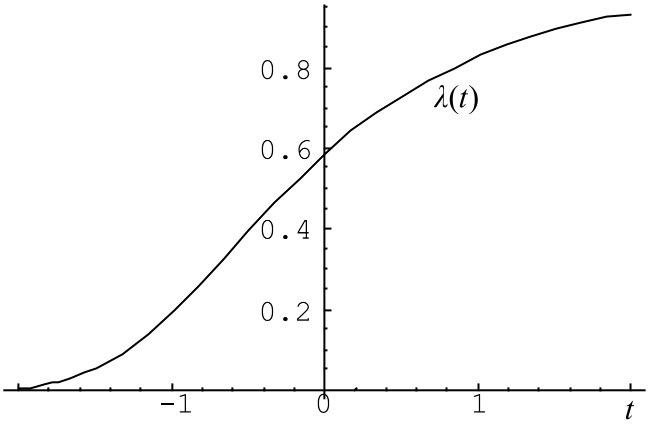
$$F(t) = e^{-e^{-t}}, \ t \in R$$

$$f(t) = e^{-e^{-t} - t}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{e^{-e^{-t}} \cdot e^{-t}}{1 - e^{-e^{-t}}}.$$

Η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

ΣΧΗΜΑ 1.16



• Τύπος II (*Frechet*)

Οι κατανομές ακραίων τιμών τύπου II εφαρμόζονται σε μοντελοποίηση φαινομένων, όπως για παράδειγμα του μεγέθους σεισμών. Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η βαθμίδα αποτυχίας των κατανομών ακραίων τιμών τύπου II για την ελάχιστη τιμή δίνονται από τους τύπους

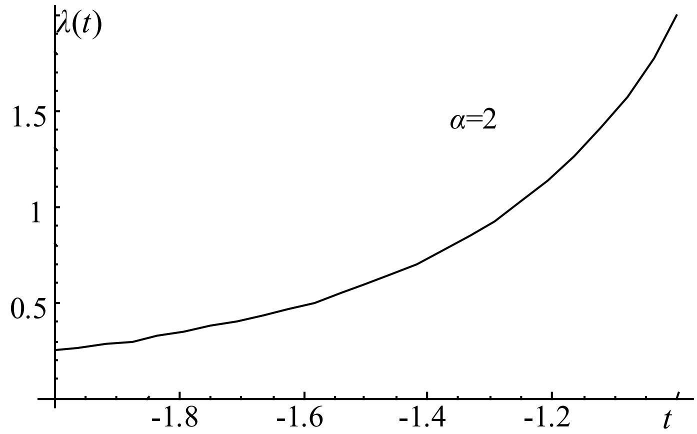
$$F(t) = 1 - e^{-(-t)^{-a}} \quad , t \le 0, \;\; a > 0$$

$$f(t) = a \cdot e^{-(-t)^{-a}} \cdot (-t)^{-1-a}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = a \cdot (-t)^{-1-a} .$$

Η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

ΣΧΗΜΑ 1.17



Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η βαθμίδα αποτυχίας των κατανομών ακραίων τιμών τύπου II για τη μέγιστη τιμή δίνονται από τους τύπους

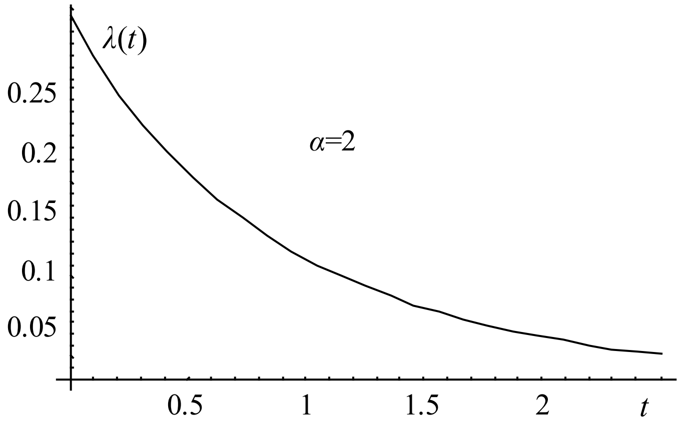
$$F(t) = e^{-t^{-a}} \quad , t \ge 0, \;\; a > 0$$

$$f(t) = a \cdot e^{-t^{-a}} \cdot t^{-1-a}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{a \cdot e^{-t^{-a}}}{1 - e^{-t^{-a}}} .$$

Η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

ΣΧΗΜΑ 1.18



• Τύπος III (*Weibull*)

Οι extreme value κατανομές τύπου III είναι δυνατόν να προκύψουν από τη σύγκλιση των κατανομών που έχουν ένα κάτω όριο. Είναι κατάλληλες για να περιγράψουν την αντοχή υλικών και το χρόνο αποτυχίας ηλεκτρονικών συσκευών. Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η βαθμίδα αποτυχίας των extreme value κατανομών τύπου III για την ελάχιστη τιμή δίνονται από τους τύπους

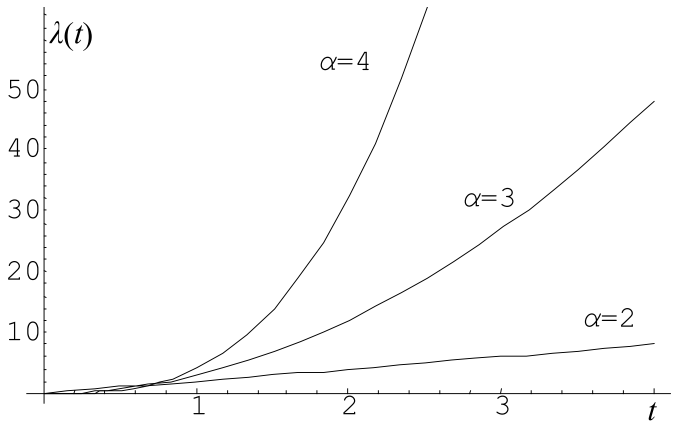
$$F(t) = 1 - e^{-t^a} \quad , t \geq 0, \;\; a > 0$$

$$f(t) = a \cdot e^{-t^a} \cdot t^{-1+a}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = a \cdot t^{a-1}.$$

Η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου α φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

ΣΧΗΜΑ 1.19



Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η βαθμίδα αποτυχίας των extreme value κατανομών τύπου III για την μέγιστη τιμή δίνονται από τους τύπους

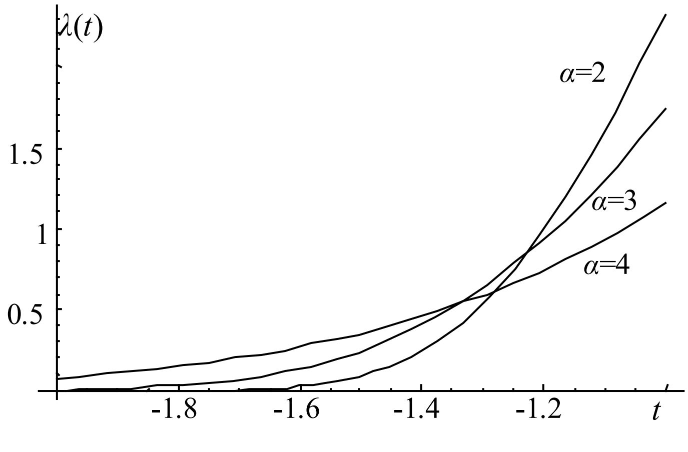
$$F(t) = e^{-(-t)^a} \qquad , t < 0, \quad a > 0$$

$$f(t) = a \cdot e^{-(-t)^a} \cdot (-t)^{-1+a}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{a \cdot e^{-(-t)^a} \cdot (-t)^{-1+a}}{1 - e^{-(-t)^a}}.$$

Η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου α φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

ΣΧΗΜΑ 1.20



Στη μελέτη των extreme value κατανομών ιδιαίτερα χρήσιμα ήταν τα συγγράμματα των Haldar & Sankaran (2000) και Kotz & Nadarajah (2000).

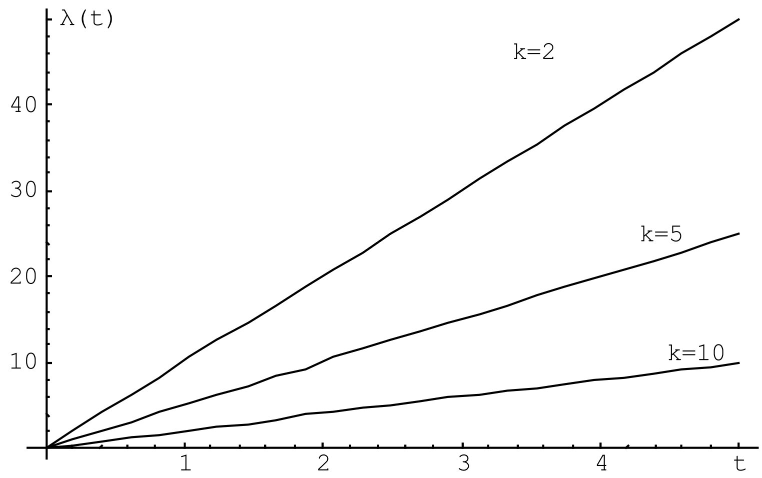
μ. Κατανομή Rayleigh

Αποτελεί ειδική περίπτωση της κατανομής Weibull για α=2, λ=κ/2. Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας, η συνάρτηση αξιοπιστίας και η βαθμίδα αποτυχίας θα δίνονται από τους τύπους

$$f(t) = kte^{-\frac{kt^2}{2}}, \; R(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{kt}^2}{2}}, \; \lambda(t) = kt, \; t>0, \quad k>0.$$

Παρατηρούμε ότι, στην κατανομή αυτή, η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνει γραμμικά. Η μορφή της τελευταίας φαίνεται στο ακόλουθο γράφημα για διάφορες τιμές της παραμέτρου *k*.

ΣΧΗΜΑ 1.21



ν. Γενικευμένη κατανομή Γάμμα (GG3(α,β,γ))

Η τριπαραμετρική αυτή κατανομή έχει εισαχθεί από τον Stacy (1962) και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για κατανομές χρόνων ζωής. Η συνάρτηση πυκνότητας και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της γενικευμένης κατανομής γάμμα δίνονται από τους τύπους

$$f(t;a,\beta,\gamma) = \frac{(\frac{\gamma}{a^{\beta}}) \cdot t^{\beta-1} \cdot e^{-(\frac{t}{a})^{\gamma}}}{\Gamma(\frac{\beta}{\gamma}, t)}$$

$$F(t;\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\int_0^t u^{(\frac{\beta}{\gamma})-1}\cdot e^{-u}du}{\Gamma(\frac{\beta}{\gamma},t)}$$

όπου με $\Gamma(a,x)=\int_x^\infty s^{a-1}e^{-s}ds$ συμβολίζουμε τη μη πλήρη συνάρτηση Γάμμα.

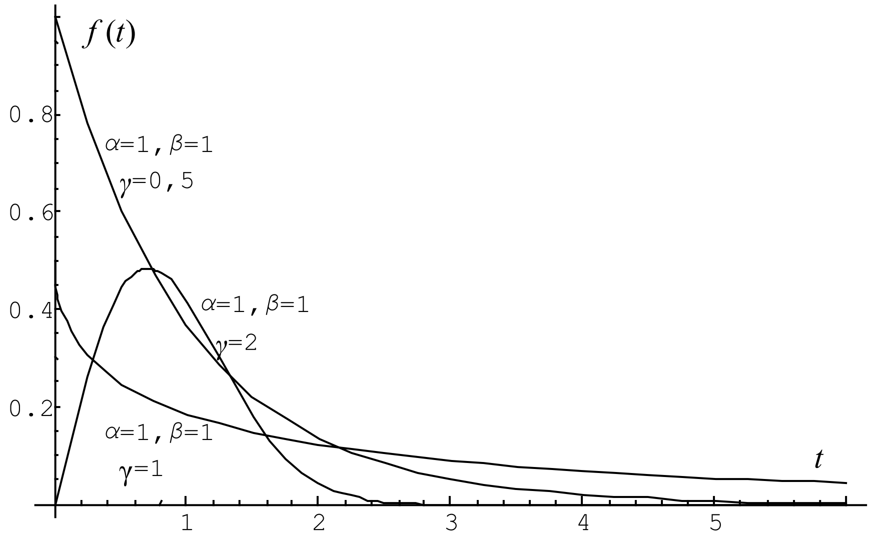
Ειδικές περιπτώσεις της γενικευμένης κατανομής γάμμα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1

		Ειδικές περιπτώσεις της GG3(α,β,γ)			
		α			
		$\frac{1}{2}$	1	2	α_o
γ	1	Διπαραμετρική Γάμμα	Εκθετική	Διπαραμετρική Γάμμα	Διπαραμετρική Γάμμα
	2	Ημι-κανονική	Weibull	Rayleigh	Rayleigh
	γ_o	GG3	X~ Weibull	GG3	GG3

Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας $f(t)$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων α,β,γ.

ΣΧΗΜΑ 1.22



Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ δίνεται από τον τύπο

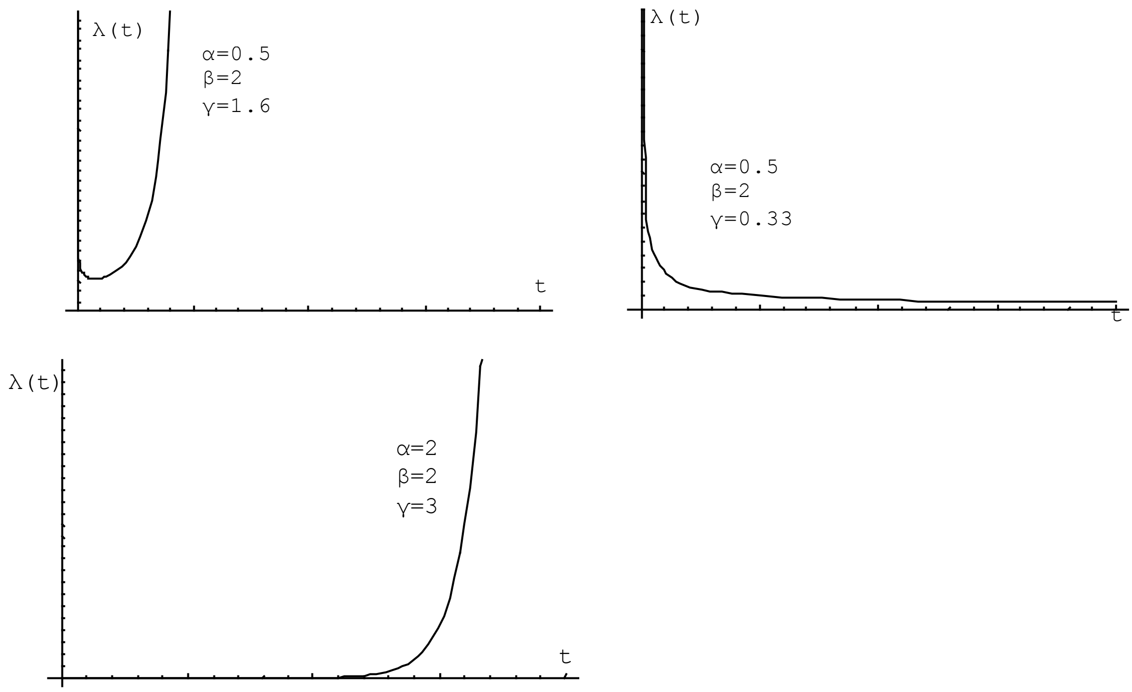
$$\lambda(t) = \frac{(\frac{\gamma}{\beta}) \cdot (\frac{t}{\beta})^{\alpha\gamma-1} \cdot \exp((-\frac{t}{\beta})^{\gamma})}{\Gamma(a,t) - F((\frac{t}{\beta})^{\gamma}; a, \beta, \gamma)}$$

Η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής αυτής μπορεί να έχει διάφορες μορφές, όπως η bathtub ή η upside-down bathtub. Η ιδιότητα αυτή κάνει την τριπαραμετρική κατανομή γάμμα ιδιαίτερα χρήσιμη στη μοντελοποίηση στην αξιοπιστία. Συγκεκριμένα έχουμε τα εξής :

- Για γ=1 έχουμε τη γνωστή διπαραμετρική κατανομή γάμμα, της οποίας η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνει για $a \in (0,1)$, ενώ μειώνεται για $\alpha>1$.

- Για $\gamma \neq 1$ ισχύει ότι αν $(1-\alpha\gamma)/(\gamma(\gamma-1))$ είναι μια θετική σταθερά, τότε η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ είναι της μορφής bathtub για $\gamma>1$, και της μορφής upside-down bathtub για $\gamma \in (0,1)$. Στα ακόλουθα σχήματα δίνεται η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων α,β,γ (Pham & Almhana (1995)).

ΣΧΗΜΑ 1.23



ξ. Κατανομή exponential power

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας και η συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής exponential power δίνονται από τους ακόλουθους τύπους

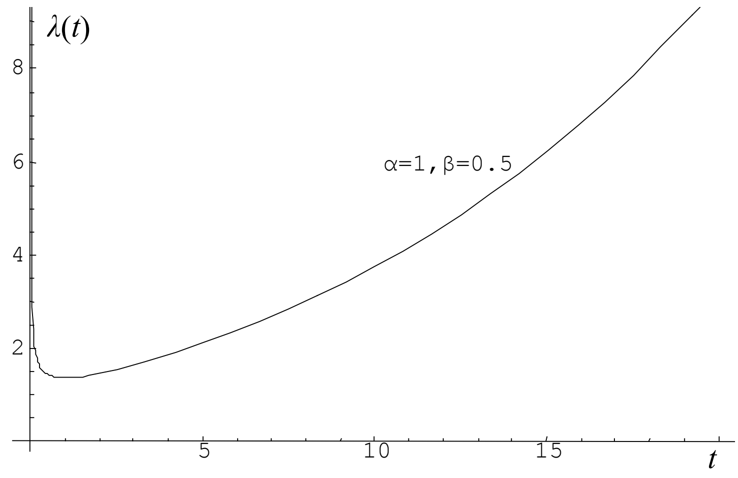
$$F(t) = 1 - e^{1-e^{at^{\beta}}} \quad , \quad f(t) = F'(t) = e^{1-e^{at^{\beta}}} \cdot e^{at^{\beta}} \cdot a \cdot \beta \cdot t^{\beta - 1} \ , \quad R(t) = e^{1-e^{at^{\beta}}} \ .$$

Η κατανομή αυτή έχει βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ που δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta\text{-}1}\exp(\alpha t^{\beta}) \ .$$

Όταν β<1 η βαθμίδα αποτυχίας παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $(\frac{1-\beta}{\alpha\beta})^{1/\beta}$ (Leemis (1986)). Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της βαθμίδας αποτυχίας για α=1 και β=0,5.

ΣΧΗΜΑ 1.24



Όπως φαίνεται από το σχήμα, με κατάλληλη επιλογή παραμέτρων της κατανομής exponential power, μπορούμε να έχουμε περιγραφή χρόνων ζωής που παρουσιάζουν βαθμίδα αποτυχίας της μορφής bathtub.

ο. Κατανομή Pareto (κ,θ)

Είναι μια κατανομή με στήριγμα στο $t \geq \theta$, όπου κ>0 είναι η παράμετρος μορφής και θ>0 είναι παράμετρος κλίμακας. Η συνάρτηση πυκνότητας και η συνάρτηση αξιοπιστίας δίνονται από τους τύπους

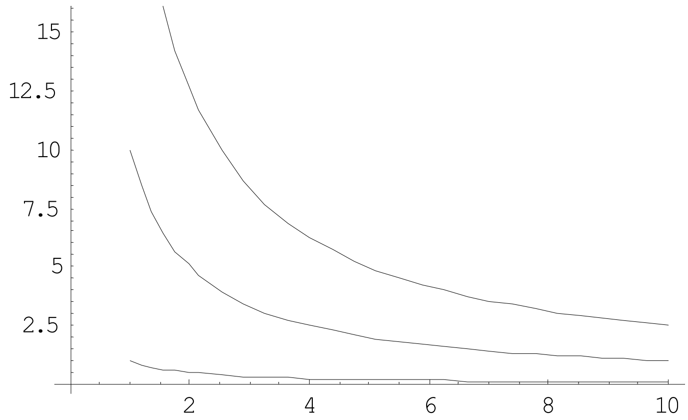
$$f(t) = \frac{\kappa\theta^{\kappa}}{t^{\kappa+1}}\ ,\ R(t) = \left(\frac{\theta}{t}\right)^{\kappa},\quad t \geq \theta.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(t) = \frac{\kappa}{t}\ ,\ \kappa>0\ ,\ \ t \geq \theta.$$

Είναι φανερό ότι η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της κατανομής Pareto ξεκινάει από την τιμή $\lambda(\theta)=\frac{\kappa}{\theta}$, και στη συνέχεια φθίνει φτάνοντας οριακά (για $t \to \infty$) στην τιμή μηδέν. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της βαθμίδας αποτυχίας για θ=1 και για διάφορες τιμές της παραμέτρου κ.

ΣΧΗΜΑ 1.25



1.5 Η βαθμίδα αποτυχίας γνωστών διακριτών κατανομών

Πολλές από τις αρχές που εφαρμόζονται σε συνεχείς κατανομές, εφαρμόζονται επίσης και σε διακριτές κατανομές. Διακριτές κατανομές χρόνου ζωής εφαρμόζονται λιγότερο συχνά από τις συνεχείς κατανομές, μιας και υπάρχουν λιγότερες καταστάσεις στις οποίες οι αποτυχίες μπορούν να συμβούν μόνο σε διακριτά σημεία στο χρόνο. Ως παράδειγμα αναφέρουμε το μηνιαίο μισθοδοτικό πρόγραμμα ή όταν η αποτυχία μπορεί να συμβεί μόνο κάτω από συγκεκριμένη απαίτηση, π.χ όταν ένας κινητήρας δεν ξεκινά, όταν ένας διακόπτης αποτυγχάνει να ανοίξει, όταν ένα φρένο αυτοκινήτου δεν ενεργοποιείται κ.τ.λ. Για την ολοκλήρωση της συγκεκριμένης παραγράφου σημαντικές πηγές αποτέλεσαν τα συγγράμματα Κούτρας (2003) και Δαμιανού (1996).

Στους διακριτούς χρόνους, η συνάρτηση πυκνότητας θα αντικατασταθεί με τη συνάρτηση πιθανότητας

$$f(t_k) = P(T{=}t_k) \ , k{=}1,2,\ldots$$

όπου η μεταβλητή T παίρνει τις τιμές t_1 , t_2 , …, ενώ η συνάρτηση αξιοπιστίας ορίζεται και πάλι για όλες τις μη αρνητικές τιμές του t.

Ας υποθέσουμε ότι ο χρόνος ζωής T μιας μονάδας είναι μια μη αρνητική διακριτή μεταβλητή με τιμές στο $\{ t_i, i\in I_n = \{0,1,2,\ldots,n\} \}$, όπου $t_i \geq 0$ και με $t_i > t_j$ αν $i > j$, δηλαδή $P(T{=}t_i){>}0$ και $\sum_i P(T = t_i) = 1$. Ως βαθμίδα αποτυχίας στην περίπτωση διακριτού χρόνου ορίζουμε το πηλίκο

$$\lambda(t_k) = \frac{f(t_k)}{R(t_k)},$$

όπου εδώ υποθέτουμε ότι $R(t_k)=P(T \geq t_k) \geq P(T = t_k) > 0$.

Για τη βαθμίδα αποτυχίας ισχύει

$$\lambda(t_k) = \frac{f(t_k)}{R(t_k)} = \frac{P(T = t_k)}{R(t_k)} = -\frac{R(t_{k+1}) - R(t_k)}{R(t_k)} = -\frac{\Delta R(t_k)}{R(t_k)},$$

ενώ μπορούμε ακόμη να γράψουμε

$$\lambda(t_k) = \frac{f(t_k)}{R(t_k)} = \frac{P(T = t_k)}{P(T \geq t_k)} = P(T = t_k \mid T \geq t_k).$$

Παρατηρούμε ότι τώρα η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t_k)$ εκφράζει τη δεσμευμένη πιθανότητα αποτυχίας σε χρόνο t_k, δεδομένου ότι η μονάδα έχει επιζήσει χρόνο τουλάχιστον t_k. Για τον υπολογισμό της βαθμίδας αποτυχίας στη διακριτή περίπτωση, είναι συχνά προτιμότερο να προσδιορίζουμε αρχικά την αντίστροφη ποσότητα της $\lambda(t_k)$ από τη σχέση

$$\frac{1}{\lambda(t_k)} = \frac{P(T \geq t_k)}{P(T = t_k)} = \frac{f(t_k) + f(t_{k+1}) + \ldots}{f(t_k)} =$$

$$= 1 + \frac{f(t_{k+1})}{f(t_k)} + \frac{f(t_{k+2})}{f(t_{k+1})} \cdot \frac{f(t_{k+1})}{f(t_k)} + \frac{f(t_{k+3})}{f(t_{k+2})} \cdot \frac{f(t_{k+2})}{f(t_{k+1})} \cdot \frac{f(t_{k+1})}{f(t_k)} + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{u=k}^{i+k} \frac{f(t_{u+1})}{f(t_u)}$$

και ακολούθως να καταλήγουμε στην τιμή της βαθμίδας αποτυχίας (Gupta, Gupta & Tripathi (1997)). Στη συνέχεια Θα δούμε μερικά παραδείγματα διακριτού χρόνου.

α. Γεωμετρική κατανομή G(*p*)

Η συνάρτηση πιθανότητας $f(t_j)$, η συνάρτηση αξιοπιστίας $R(t)$ και η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t_j)$ της γεωμετρικής κατανομής δίνονται από τους ακόλουθους τύπους

$$f(t_j) = p(1-p)^{j-1}$$

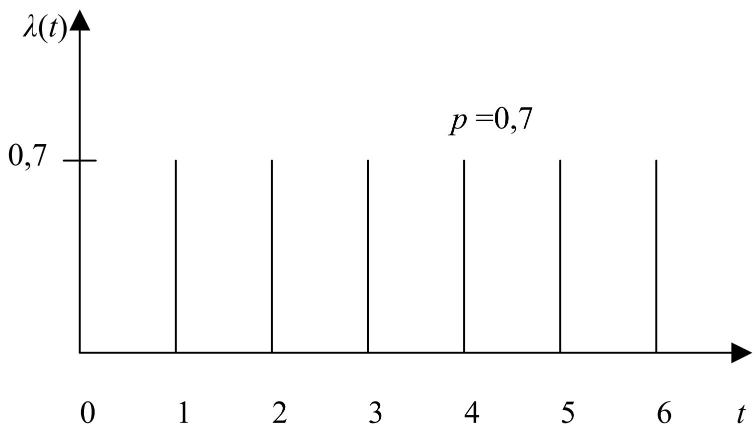
$$R(t) = P(T > t) = \sum_{j/t_j > t} f(t_j) = \sum_{j/t_j > t} p(1-p)^{j-1}$$

$$\lambda(t_j)=\frac{f(t_j)}{R(t_j)}=\frac{p(1-p)^{j-1}}{(1-p)^{j-1}}=p \quad , \ j=1,2,\ldots$$

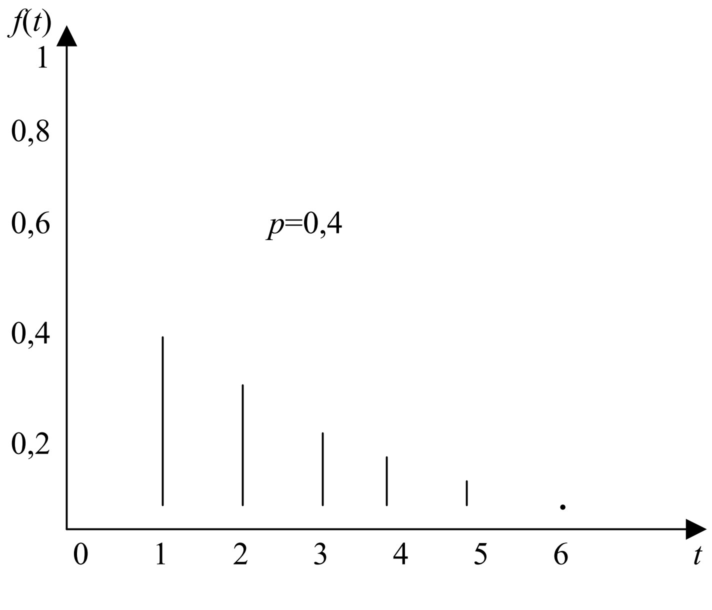
όπου $t_j = j$.

Αφού η βαθμίδα αποτυχίας είναι ανεξάρτητη του χρόνου, η γεωμετρική κατανομή είναι αμνήμων από τον έναν χρόνο t_j στον επόμενο (διακριτό ανάλογο της εκθετικής κατανομής). Η γεωμετρική κατανομή είναι η μοναδική διακριτή κατανομή με την ιδιότητα αυτή. Γραφικά η εικόνα της βαθμίδας αποτυχίας και της συνάρτησης πιθανότητας δίνεται παρακάτω.

ΣΧΗΜΑ 1.26



ΣΧΗΜΑ 1.27



β. Διωνυμική κατανομή b(*n* , *p*)

Η συνάρτηση πιθανότητας $f(t)$, η συνάρτηση αξιοπιστίας $R(t)$ και η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της διωνυμικής κατανομής δίνονται από τους ακόλουθους τύπους

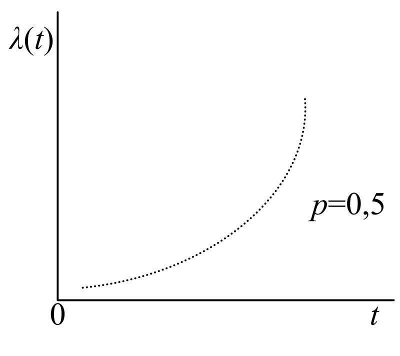
$$f(t) = P(T{=}t) = \binom{m}{t} p^{t}(1-p)^{m-t}\ ,\ t \in \{0,1,2,...,m\}$$

$$R(t) = P(T>t) = \sum_{i=t+1}^{m} \binom{m}{i} p^{i}(1-p)^{m-i}\ ,\ t \in \{0,1,2,...,m-1\}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t+1)}{R(t)} = \frac{\binom{m}{t+1} p^{t+1}(1-p)^{m-t-1}}{\sum_{i=t+1}^{m} \binom{m}{i} p^{i}(1-p)^{m-i}}\quad ,\ t \in \{-1,0,1,2,...,m\text{ -}1\}\,.$$

Γραφικά η εικόνα της βαθμίδας αποτυχίας δίνεται παρακάτω.

ΣΧΗΜΑ 1.28



γ. Κατανομή Poisson P(*λ*)

Η συνάρτηση πιθανότητας $f(t)$, η συνάρτηση αξιοπιστίας $R(t)$ και η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της κατανομής Poisson δίνονται από τους ακόλουθους τύπους

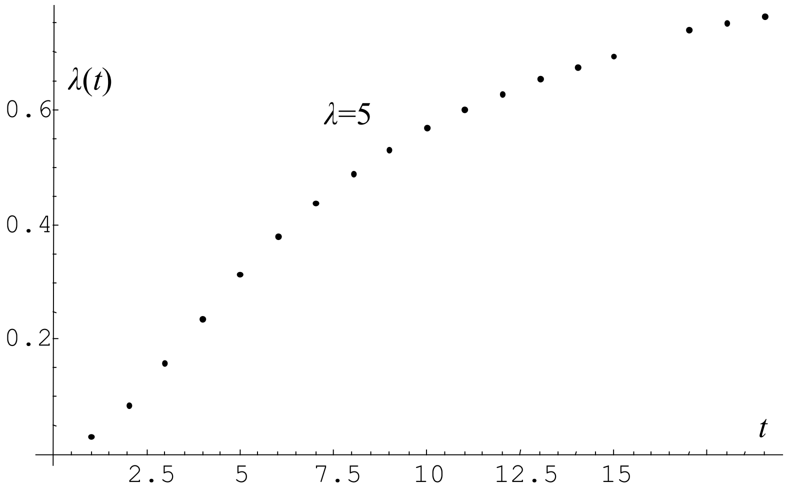
$$f(t) = P(T{=}t) = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{t!}\ ,\ \lambda > 0$$

$$R(t) = P(T>t) = e^{-\lambda} \sum_{i=t+1}^{\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t+1)}{R(t)} = \frac{\lambda^{t+1}/(t+1)!}{\sum_{i=t+1}^{\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!}}.$$

Γραφικά η εικόνα της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

ΣΧΗΜΑ 1.29



δ. Εκθετική-γεωμετρική κατανομή EG

Η εκθετική-γεωμετρική κατανομή είναι μια νέα κατανομή (Adamakis & Loukas (1998)) που μπορεί να εφαρμοσθεί σε πραγματικά δεδομένα. Έστω ότι οι $\{Y_i\}_{i=1}^{Z}$ είναι ισόνομες και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(y;\beta) = \beta e^{-\beta y} \text{ για } \beta, y \in R_+$$

και η μεταβλητή Z μια μεταβλητή που ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(z;p)=(1-p)p^{z-1} \text{ για } z \in N \text{ και } p \in (0,1).$$

Θεωρούμε τη μεταβλητή X=min($\{Y_i\}_{i=1}^{Z}$). Τότε είναι φανερό ότι ισχύει

$$f(x/z;\beta)=\beta z e^{-\beta z x}$$

και

$$f(x;\theta) = \beta(1\text{-}p)e^{-\beta x}(1\text{-}pe^{-\beta x})^{-2} \quad \text{με} \quad \theta=(\beta,p).$$

Η δεύτερη σχέση ορίζει την κατανομή που θα ονομάζουμε εκθετική-γεωμετρική κατανομή (EG). Στην πραγματικότητα, η κατανομή αυτή προέρχεται από συνδυασμό εκθετικής με γεωμετρική. Ειδικότερα είναι εύκολο να δει κανείς ότι, υποθέτοντας ότι η X ακολουθεί εκθετική με παράμετρο γ, και παίρνοντας το γ να συμπεριφέρεται σαν βZ, όπου Z είναι γεωμετρική μεταβλητή με παράμετρο p, τότε η κατανομή της X είναι η EG με συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από την παραπάνω σχέση. Η βαθμίδα αποτυχίας για την κατανομή EG είναι η ακόλουθη

$$\lambda(t;\theta) = \beta(1\text{-}pe^{-\beta t})^{-1}.$$

Από την τελευταία σχέση, είναι φανερό ότι η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα.

1.6 Εκτίμηση της βαθμίδας αποτυχίας

Έστω N όμοιες μονάδες με χρόνους ζωής T_i , i=1,2,…,N όπου T_i είναι μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές, ισόνομες και ανεξάρτητες μεταξύ τους, με $P(T_i \le t) = F(t)$. Ορίζουμε ως $n_s(t)$ το πλήθος των μονάδων που εξακολουθούν να λειτουργούν σε χρόνο t, δεδομένου ότι σε χρόνο t=0 τέθηκαν σε λειτουργία N μονάδες (δηλαδή $n_s(0)=N$) ή ισοδύναμα το $n_s(t)$ εκφράζει το πλήθος των μονάδων των οποίων οι χρόνοι αποτυχίας ανήκουν στο διάστημα $[t,\infty)$. Όπως είναι φανερό, για κάθε τιμή του t, η $n_s(t)$ αποτελεί μια διαφορετική τυχαία μεταβλητή και συνεπώς η οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών $\{n_s(t),\ t \ge 0\}$ αποτελεί μια στοχαστική διαδικασία.

Σε περίπτωση συνεχούς χρόνου ζωής, γνωρίζουμε ότι οι ποσότητες $R(t)$ και $R'(t)$ εκτιμώνται ως εξής

$$\hat{R}(t) = \frac{n_s(t)}{N} \quad , \quad \hat{R}'(t) = \frac{n_s(t+\Delta t) - n_s(t)}{N \cdot \Delta t}.$$

Επομένως η βαθμίδα αποτυχίας θα εκτιμάται από τον ακόλουθο συνεπή εκτιμητή

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{-\hat{R}'(t)}{\hat{R}(t)} = \frac{n_s(t+\Delta t) - n_s(t)}{n_s(t) \cdot \Delta t} = \frac{n_f(t+\Delta t) - n_f(t)}{n_s(t) \cdot \Delta t}.$$

Αν οι χρόνοι ζωής T_i είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές, η ποσότητα

$$\hat{\lambda}(t_i) = \frac{n_s(t_i) - n_s(t_{i+1})}{n_s(t_i)}$$

που ορίζεται για t_i τέτοιο ώστε $n_s(t_i)>0$, είναι αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$.

Οι Watson και Leadbetter (1964) έχουν προτείνει έναν απλό γραφικό εκτιμητή λ_g της βαθμίδας αποτυχίας. Πιο συγκεκριμένα, υπολογίζουμε αρχικά την εμπειρική συνάρτηση κατανομής

$$F_n(x)= \frac{1}{n} \ \{\text{αριθμός παρατηρήσεων μεταξύ των } X_1 , X_2 , ...,X_n \text{ οι οποίες είναι } \leq x\}$$

και μετά χαράσσουμε τη σκαλωτή συνάρτηση $-\ln(1-F_n(x))$. Στη συνέχεια αυτή προσεγγίζεται από μια συνεχή καμπύλη με οποιαδήποτε λογική μέθοδο (π.χ. πολυωνυμική παρεμβολή). Η κλίση της τελευταίας αυτής καμπύλης στο σημείο x είναι μια εκτίμηση της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(x)$, αφού ως γνωστόν ισχύει

$$\lambda(x) = [-\ln(1 - F(x))]'.$$

Έστω τώρα $n(t)$ ο αριθμός των μονάδων που λειτουργούν τη στιγμή t και $n(0)$ ο αριθμός των μονάδων που λειτουργούν τη στιγμή t=0. Θεωρούμε επιπλέον την ποσότητα $-\Delta n = n(t)-n(t+\Delta t)$ που εκφράζει την καταμέτρηση αποτυχιών στο διάστημα Δt, ενώ αν την παραπάνω ποσότητα τη μετατρέψουμε σε αναλογία διαιρώντας με το Δt παίρνουμε την ποσότητα

$$\frac{n(t) - n(t+\Delta t)}{\Delta t} = \frac{-\Delta n}{\Delta t},$$

που εκφράζει την καταμέτρηση αποτυχιών στη μονάδα του χρόνου. Η καταμέτρηση αποτυχιών που ορίστηκε παραπάνω στο διάστημα Δt, αλλά και στη μονάδα του χρόνου, θα μπορούσε να συγκριθεί με τον αρχικό αριθμό $n(t)$ στην αρχή του διαστήματος που μας ενδιαφέρει. Η σκέψη αυτή οδηγεί στη συνάρτηση

$$\lambda^*(t) = \frac{n(t_i) - n(t_i + \Delta t)}{\Delta t_{i+1} \cdot n(t_i)} = \frac{-\Delta n_{i+1}}{\Delta t_{i+1} \cdot n(t_i)}, \quad t_i < t < t_{i+1}$$

η οποία ονομάζεται εμπειρική βαθμίδα αποτυχίας (Lindqvist & Doksum (2002)).

Μια άλλη τεχνική εκτίμησης της βαθμίδας αποτυχίας μπορεί να προκύψει ως εξής. Διαιρούμε το διάστημα $[0,\infty)$ σε κ διαστήματα $[0,\alpha_1)$, $[\alpha_1 ,\alpha_2)$, $[\alpha_2 , \alpha_3)$, ... ,$[\alpha_{\kappa-1}, \infty)$ (θέτουμε επίσης $\alpha_o=0$, $\alpha_\kappa=\infty$). Έστω $I_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$ το πλάτος του j-οστού διαστήματος, n_j ο αριθμός των X_i που αποτυγχάνουν στο διάστημα αυτό και $\alpha_{j-1}+ t_{j-1,\lambda}$ η ηλικία κατά το θάνατο του λ-οστού αντικειμένου μέσα στο j-οστό χρονικό διάστημα, όπου λ=1,2,...,n_j και $0<t_{j-1,\lambda}<I_j$ με $t_{j-1,0}=0$. O Kimball (1960) πρότεινε δύο διαφορετικές δειγματικές διαδικασίες για εκτίμηση.

(i) τα χρονικά διαστήματα να επιλέγονται αυθαίρετα, έτσι ώστε κάθε n_j που σχετίζεται με κάποιο διάστημα να είναι μια τυχαία μεταβλητή και

(ii) τα n_j να προκαθορίζονται και τα διαστήματα να προκύπτουν τυχαία.

Με βάση την πρώτη δειγματική ιδέα, ο αναλογιστικός εκτιμητής $\hat{\lambda}_a(t)$ της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$ για $t\in[\alpha_{j-1},\alpha_j)$ δίνεται από τον τύπο

$$\hat{\lambda}_a(t)=\frac{n_j}{\alpha_j-\alpha_{j-1}}\cdot\frac{1}{n-n_1-...-n_{j-1}-0.5\cdot n_j}.$$

Με λόγια, το $\hat{\lambda}_a(t)$ είναι ο αριθμός αποτυχιών ανά μονάδα χρόνου στο διάστημα $[a_{j-1},a_j]$ διαιρούμενος με το μέσο όρο αποτυχιών στο διάστημα (Singpurwalla & Wong (1983)).

Με βάση τη δεύτερη δειγματική ιδέα, ένας αμερόληπτος, αποτελεσματικός και πλήρης εκτιμητής της βαθμίδας αποτυχίας (Seal (1954)), είναι ο εξής

$$\hat{\lambda}_{s_2}(\alpha_{j-1})=\frac{n_j-1}{\sum_{k=0}^{n_j-1}(n-n_1-...-n_{j-1}-k)(t_{j-1,k+1}-t_{j-1,k})}.$$

Ένας άλλος εκτιμητής της βαθμίδας αποτυχίας, που βασίζεται σε προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα, έχει προταθεί από τον Sacher (1956), ο οποίος χρησιμοποίησε το γεγονός ότι

$$\lambda(t)=-\frac{d}{dt}\ln(1-F(t))\cong\{-\ln[1-F(t+\frac{I}{2})]-\ln[1-F(t-\frac{I}{2})]\}=\frac{1}{I}\ln[\frac{1-F(t-\frac{I}{2})}{1-F(t+\frac{I}{2})}]$$

και κατέληξε στον εκτιμητή

$$\hat{\lambda}_{s_1}(t)=\frac{1}{\alpha_j-\alpha_{j-1}}\ln[\frac{n-n_1-...-n_{j-1}}{n-n_1-...-n_j}].$$

Ο πιο προφανής εκτιμητής για τη βαθμίδα αποτυχίας, που βασίζεται σε ένα τυχαίο δείγμα $T_1,T_2,...,T_n$, είναι αυτός που συνδυάζει τους εκτιμητές των $f(t)$ και $F(t)$. Συγκεκριμένα, αν

$$\hat{f}_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_n(t-T_i)\quad,\ \hat{F}_n(t)=\int_0^t\hat{f}_n(x)dx$$

όπου $\delta_n(\ )$ είναι μία ακολουθία συναρτήσεων, η οποία, για $n \to \infty$, δίνεται από τον τύπο

$$\delta_n(z) = \begin{cases} \delta(1-\delta|z|), & |z| \le \dfrac{1}{\delta} \\ 0, & |z| > \dfrac{1}{\delta} \end{cases}$$

και δ είναι μια σταθερά, τότε κατ'αναλογία προς τον τύπο $\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)}$ παίρνουμε για τη βαθμίδα αποτυχίας τον εκτιμητή

$$\hat{\lambda}_n(x) = \frac{\hat{f}_n(t)}{1-\hat{F}_n(t)}.$$

Ένας εκτιμητής για τη βαθμίδα αποτυχίας, ο οποίος βασίζεται στο διατεταγμένο δείγμα $T_{(1)}, T_{(2)},..., T_{(n)}$, είναι ο ακόλουθος

$$\tilde{\lambda}_n(t) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\delta_n(t-T_{(r)})}{n-r+1}.$$

Τέλος ο εκτιμητής Kaplan-Meier (*product limit estimator*) για τη συνάρτηση αξιοπιστίας δίνεται από τον τύπο

$$\hat{R}(t) = \prod_{i:t_i \le t} (1-\frac{1}{n_i}),$$

όπου n_i είναι ο αριθμός των μονάδων που λειτουργούν στην αρχή του i-οστού διαστήματος $[t_{i-1}, t_i)$. Συνεπώς με τη βοήθεια του παραπάνω εκτιμητή, παίρνουμε εκτίμηση για την αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ (*hazard function or cumulative failure rate*)

$$\hat{\Lambda}(t) = -\log \hat{R}(t) \ .$$

Κλείνοντας σημειώνουμε ότι η μονάδα μέτρησης για μια βαθμίδα αποτυχίας είναι τυπικά αποτυχίες ανά χρονική μονάδα. Ωστόσο τα βιομηχανικά προϊόντα είναι συχνά τόσο αξιόπιστα, ώστε για να αποφεύγουμε μικρές τιμές για τη βαθμίδα αποτυχίας, οι μονάδες μετατρέπονται σε αποτυχίες ανά χρόνο (1 χρόνος = 8760 ώρες). Ο Hecht (2004) δίνει αναλυτικά παραδείγματα εφαρμογών στον κλάδο της Αξιοπιστίας, με τα οποία τονίζεται η σημασία της επιλογής των μονάδων που χρησιμοποιούνται για τη βαθμίδα αποτυχίας.