



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**Π.Μ.Σ. ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΣΤΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ  
ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΥ ΚΑΙ ΑΓΟΡΑΙΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**MULTIVARIATE EXTREME VALUE THEORY: AN APPLICATION TO OPERATIONAL AND  
MARKET RISK MEASUREMENT**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΤΟΥ ΦΟΙΤΗΤΗ**

**ΓΕΩΡΓΟΥΛΙΑ Κ. ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ**

**ΑΕΜ: ΜΑΕ 11007**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΜΕΛΟΣ ΔΕΠ: ΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ, ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ**

**ΠΕΙΡΑΙΑΣ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2013**

### Περίληψη:

.....  
Στην εργασία αυτή αναλύουμε την μονομεταβλητή και την πολυμεταβλητή θεωρία ακραίων τιμών, με την σύνδεσή τους να επιτυγχάνεται μέσω των copulas. Εν συνεχεία, υπολογίζουμε τις 95% και 99% αξίες σε κίνδυνο, για τον κίνδυνο αγοράς, με βάση την θεωρία ακραίων τιμών, για κάθε σειρά ξεχωριστά αλλά και σε επίπεδο χαρτοφυλακίου, και τις συγκρίνουμε με πιο κλασσικά οικονομετρικά μοντέλα. Τέλος, δημιουργούμε μεγάλες λειτουργικές ζημίες με βάση τις ζημιοκατανομές που χρησιμοποιούν τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και υπολογίζουμε τις ενδεχόμενες απώλειες, τόσο με πιθανότητα 95% όσο με 99%, με την t copula να μοντελοποιεί την σχέση συσχέτισης των μεταβλητών.  
.....

### Abstract

.....  
In this paper, we focus on the univariate and multivariate extreme value theory (EVT) employing copulas. We calculate the 95% and 99% VaR, based on EVT, for the market risk, both at individual and portfolio level and we compare them with those of standard econometric methods. Finally, we generate extreme operational losses, through widely used loss distributions, and we calculate the possible losses at both the 95% and 99% level, with variables' dependence modeled via the t copula.  
.....

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....</b>	<b>5</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ.....</b>	<b>6</b>
2.1.: BLOCK MAXIMA MODEL.....	6
2.1.1.: ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ – BLOCK MAXIMA MODEL .....	9
2.1.2.: ΕΛΕΓΧΟΙ ΚΑΛΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ.....	10
2.1.3.: ΑΞΙΑ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ ΜΕ ΤΗΝ GENERALIZED EXTREME VALUE.....	12
2.2.: PEAK – OVER – THRESHOLD MODEL.....	13
2.2.1.: ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ.....	14
2.2.2.: ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ.....	15
2.2.3.: ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΤΑΘΙΣΜΕΝΩΝ ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΡΟΠΩΝ.....	16
2.2.4.: ΝΕΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΗΣ GPD.....	16
2.2.5.: ΕΛΕΓΧΟΙ ΚΑΛΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ.....	17
2.2.6.: ΑΞΙΑ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ ΜΕ ΤΗΝ GENERALIZED PARETO DISTRIBUTION.....	17
2.2.7.: THE HILL ESTIMATOR.....	17
2.3.: EVT ΓΙΑ ΜΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΚΑΙ ΙΣΟΝΟΜΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ.....	19
2.3.1.: ΟΜΟΙΟΓΕΝΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ POISSON.....	19
2.3.2.: ΜΗ ΟΜΟΙΟΓΕΝΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ POISSON.....	21
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ.....</b>	<b>22</b>
3.1.: COPULAS.....	22
3.1.1.: ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ.....	22
3.1.2.: FUNDAMENTAL COPULAS.....	24
3.1.3.: ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ.....	25
3.1.4.: ΕΙΔΗ COPULAS.....	29
3.2.: MULTIVARIATE VALUE THEORY.....	41
3.2.1.: MULTIVARIATE BLOCK MAXIMA.....	41
3.2.2.: MULTIVARIATE THRESHOLD EXCEEDANCES.....	47
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΧΕΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>51</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΓΟΡΑΣ.....</b>	<b>57</b>
5.1.: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ.....	57
5.1.1.: ΑΞΙΑ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ.....	57
5.1.2.: BACKTESTING A MODEL.....	63
5.2.: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ – ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ.....	66
5.2.1.: ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΞΙΑΣ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ .....	66
5.2.2.: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΞΙΑΣ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ EVT.....	74
5.2.3.: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	81
5.3.: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ.....	82
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ.....</b>	<b>87</b>
6.1.: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ.....	87
6.1.1.: ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ.....	87

6.1.2.: ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΦΟΔΡΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ.....	91
6.1.3.: ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΖΗΜΙΩΝ.....	94
6.1.4.: ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	96
<b>6.2.: ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>97</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>101</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>102</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α .....</b>	<b>107</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β .....</b>	<b>123</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ .....</b>	<b>126</b>

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή

Η μέτρηση των κινδύνων στους οποίους ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα είναι εκτεθειμένο, αποτελεί τον πιο σημαντικό στόχο για την επιβίωση τους. Αρκετές από τις ενδεχόμενες ζημιές μπορεί να είναι μικρές και η αστοχία στην μοντελοποίηση τους, να μην αποβεί καταστροφική. Από την άλλη μεριά, μεγάλες απρόβλεπτες ζημιές μπορούν να αποφέρουν ακόμη και την χρεοκοπία. Η ανάπτυξη της Θεωρίας Ακραίων Τιμών έχει οδηγήσει στην μείωση τέτοιων φαινομένων, δίνοντας μία νέα διάσταση στην προσαρμογή ζημιών, ονομαζόμενες και ως «Μαύροι Κύκνοι» (Black Swans). Στόχος της εργασίας είναι η ανάπτυξη της Θεωρίας Ακραίων Τιμών μέσα σε ένα ρεαλιστικό περιβάλλον για την ποσοτικοποίηση του αγοραίου και του λειτουργικού κινδύνου. Επιπλέον, διερευνούμε την ικανότητα προσαρμογής της στα δεδομένα, συγκρίνοντας την με οικονομετρικά μοντέλα υπολογισμού ενδεχόμενων απωλειών τόσο σε επίπεδο μίας, μεμονωμένης σειράς αποδόσεων όσο και σε επίπεδο χαρτοφυλακίου. Πιο αναλυτικά, στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο αναπτύσσουμε την θεωρία ακραίων τιμών για την μονομεταβλητή περίπτωση εξηγώντας τις μεθόδους με τις οποίες εκείνη μπορεί να προσαρμοστεί καθώς επίσης και το πώς, για κάθε μία από αυτές εξάγει την αξία σε κίνδυνο, που είναι και το ζητούμενο. Στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, προχωράμε σε μία επέκταση της παραπάνω θεωρίας, αρχικά σε επίπεδο δύο μεταβλητών και έπειτα σε περισσότερων δίνοντας παράλληλα τον ορισμό, τις ιδιότητες και τα είδη των *copulas*, οι οποίες αποτελούν τον συνδυαστικό κρίκο για τη μετάβαση αυτή. Στο 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο αναφέρουμε τη σχετική βιβλιογραφία, δίνοντας έμφαση στο πότε η θεωρία ακραίων τιμών εφαρμόστηκε καθώς και το πόσο, αλλά και πότε, εκείνη μπορεί να αποβεί αποτελεσματική. Στο 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, αφού αναπτύσσουμε θεωρία γύρω από τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο, εκτός από την θεωρία ακραίων τιμών, αλλά και το πώς ένα μοντέλο ευσταθεί στην εφαρμογή του, υπολογίσαμε την 95% αλλά και 99% αξία σε κίνδυνο, για τον κίνδυνο αγοράς, για τις σειρές των αποδόσεων του χρυσού, του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 και του μονοετούς αμερικανικού ομολόγου. Αρχικά προσαρμόσαμε ARCH – GARCH μοντέλα για τον υπολογισμό της διακύμανσης και εφαρμόσαμε οικονομετρικές μεθόδους και τις συγκρίναμε με μεθόδους της θεωρίας ακραίων τιμών και σε μονομεταβλητό και σε πολυμεταβλητό επίπεδο. Στην τελευταία περίπτωση, συγκεκριμένα, προχωρούμε σε μία σύγκριση μοντέλων που έχουν προσαρμοσθεί με κοινές μεθόδους συσχέτισης έναντι εκείνων που η συσχέτιση των μεταβλητών τους παριστάνεται από *t copula*. Τέλος, στο 6<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, επικεντρωνόμαστε στον λειτουργικό κίνδυνο όπου και αναπτύσσουμε τις μεθόδους που αποδίδουν στην μέτρησή του, τους τρόπους για την μοντελοποίηση του καθώς και στον υπολογισμό ενδεχόμενων λειτουργικών απωλειών μέσω προσομοίωσης τους από τα μοντέλα κατανομών Poisson – Exponential και Poisson – Gamma.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Μονομεταβλητή Θεωρία Ακραίων Τιμών

Η EVT ξεκίνησε να χρησιμοποιείται ως μία λύση πάνω σε περιβαλλοντολογικές έρευνες για θέματα πάνω σε μετρίαση ζημιών από σεισμούς, σε σειсмоγενείς κυρίως χώρες, ηφαιστειακές εκρήξεις κ.λ.π. . Ωστόσο, γρήγορα η εφαρμογή της επεκτάθηκε και στον χρηματοοικονομικό τομέα και τους κινδύνους που τον διέπουν. Ζημιές από αλλαγές στις τιμές επιτοκίων, ομολόγων, μετοχών ξεκίνησαν να μοντελοποιούνται με την Θεωρία Ακραίων Τιμών περίπου πριν από μία 10ετία. Από τον κίνδυνο αγοράς η εφαρμογή της επεκτάθηκε και στον πιστωτικό αλλά και στον λειτουργικό κίνδυνο.

Για κάθε έναν από τους παραπάνω αναγραφόμενους χρηματοοικονομικούς κινδύνους, υπάρχει και μία διαφορετική διαχείριση των υποθέσεων και των ιδιοτήτων που χρησιμοποιεί η Θεωρία Ακραίων Τιμών. Ωστόσο, υπάρχουν κάποιοι τρόποι, που περιγράφουν την συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής που περιγράφει τις ακραίες ζημιές από τους κινδύνους εκείνους, και είναι η κοινή συνισταμένη στην απανταχού εφαρμογή της Θεωρίας Ακραίων Τιμών.

Στην περίπτωση αυτή, θα ορίσουμε τους τρόπους που χρησιμοποιούνται για να περιγραφεί η συμπεριφορά της **μίας** τυχαίας μεταβλητής που δηλώνει την ακραία ζημία που προκύπτει από τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους.

### 2.1. Block Maxima Model

Ένας πρώτος τρόπος είναι η μέθοδος **block maxima model**. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, χωρίζουμε το δείγμα μας σε  $n$  μικρότερα δείγματα. Προφανώς, ο αριθμός των παρατηρήσεων σε κάθε ένα από τα  $n$  δείγματα θα πρέπει να είναι ο ίδιος. Για κάθε ένα από αυτά τα δείγματα ως ακραίες τιμές, ανάλογα με την θέση που έχει ο επενδυτής, επιλέγονται οι μέγιστες ή ελάχιστες τιμές κάθε ενός από τα  $n$  δείγματα.

Έστω  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  τυχαίες μεταβλητές που παριστάνουν τις ζημιές από τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους. Καθώς, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, έχουμε χωρίσει το δείγμα μας σε  $n$  μικρότερα, η σειρά  $X_1 = \max(Y_1, \dots, Y_n)$ ,  $X_2 = \max(Y_{n+1}, \dots, Y_{2n})$ , ...,  $X_n = \max(Y_{n-k}, \dots, Y_k)$  παριστάνει τις ακραίες τιμές. Συνεπώς, για να είμαστε σε θέση να μετρήσουμε τον κίνδυνο που απορρέει από τις ακραίες εκείνες τιμές, το πρόβλημα από την εύρεση των ακραίων ζημιών, μετατοπίστηκε στην εύρεση της κατανομής εκείνων.

Μία άρρηκτα συνδεδεμένη με την Θεωρία Ακραίων Τιμών είναι η **Generalized Extreme Value** (GEV). Οι Fisher, Tippet (1928) και Gnedenko (1943) απέδειξαν ότι αν οι τυχαίες μεταβλητές  $X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, η GEV έχει συνάρτηση κατανομής :

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left[-(1 + \xi x)^{\frac{1}{\xi}}\right], & \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)), & \xi = 0 \end{cases} \text{ όπου } (1 + \xi x) > 0.$$

Η παραπάνω συνάρτηση κατανομής, με κατάλληλη κανονικοποίηση, μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή:

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left[-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\xi}}\right], \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right), \xi = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

όπου  $\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right) > 0$  όπως επίσης

$$x > \mu - \frac{\sigma}{\xi}, \text{ όταν ισχύει ότι } \xi > 0,$$

$$x < \mu - \frac{\sigma}{\xi}, \text{ όταν } \xi < 0,$$

$$-\infty < x < +\infty, \text{ όταν } \xi = 0.$$

Η παράμετρος  $\mu$  ονομάζεται παράμετρος θέσης όπου μας δίνει μία εικόνα για την θέση του μέσου. Μικρές τιμές της τιμής της  $\mu$  δείχνει μικρές απώλειες για το χρηματοοικονομικό ίδρυμα και αντιστρόφως. Η παράμετρος  $\sigma$  ονομάζεται παράμετρος κλίμακας και υποδηλώνει το πόσο μία κατανομή εκτείνεται γύρω από τον μέσο. Είναι προφανές ότι μεγάλες τιμές της παραμέτρου  $\sigma$ , δείχνουν και μεγάλες αποκλίσεις από το  $\mu$  αλλά και αντιστρόφως, μικρές τιμές εξάγουν μία κατανομή λιγότερο αποκλίνουσα από την παράμετρο της θέσης. Ωστόσο, η μελέτη της κατανομής της GEV έχει ως σκοπό την μελέτη των ακραίων ζημιών, όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω. Συνεπώς, απαραίτητη είναι η μελέτη της παραμέτρου εκείνης που θα μας δίνει πληροφορίες για τις ουρές της ζημιοκατανομής που προσαρμόζουμε καθώς, μία κατανομή με βαριές ουρές δίνει και μεγαλύτερες πιθανότητες ένα χρηματοοικονομικό ίδρυμα, ή και ένας επενδυτής, να υποστεί μεγαλύτερες ακραίες ζημιές από μία κατανομή που θα έχει λεπτές ουρές. Η παράμετρος  $\xi$  της κατανομής GEV είναι εκείνη που διαμορφώνει την ουρά στην κατανομή και μάλιστα, όπως προκύπτει από τα παραπάνω, η μελέτη της είναι και η πιο σημαντική. Είναι και αυτή, μάλιστα, που συμβάλλει και σε ερευνητικό πεδίο καθώς, μέσω εκείνης, μπορούμε να διακρίνουμε τις κατάλληλες κατανομές για την μελέτη και την εξαγωγή αποτελεσμάτων για τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους.

Πιο συγκεκριμένα, αν η παράμετρος  $\xi^1$  είναι αρνητική, τότε η GEV οδηγεί στην οικογένεια κατανομών Fréchet. Αντιθέτως, αν η παράμετρος  $\xi$  είναι θετική, τότε οδηγούμαστε σε κατανομή Weibull. Στην περίπτωση όπου, ωστόσο, η παράμετρος μορφής είναι ίση με το μηδέν, τότε η οικογένεια κατανομών που προκύπτει είναι η Gumbel.

---

<sup>1</sup>Έχει αποδειχθεί ότι η παράμετρος σχήματος  $\xi$ , στην πράξη, ανήκει στο διάστημα  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

Ξεκινώντας την ανάλυσή μας από την οικογένεια κατανομών Frechet. Ένα χαρακτηριστικό που έχει αποδειχθεί είναι ότι οι κατανομές που ανήκουν στην οικογένεια εκείνη έχουν ουρές που φθίνουν με εκθετικά, με ρυθμό ίσο με  $\frac{1}{\xi}$ . Εξαιτίας αυτού, αν

πραγματοποιήσουμε την σύγκριση με τις άλλες δύο οικογένειες κατανομών που αναφέραμε προηγουμένως, η Frechet έχουν και τις πιο βαριές ουρές, γεγονός που σηματοδοτεί και την δημοφιλία τους, ως προς την χρήση της, στην θεωρία των ακραίων τιμών και ειδικότερα στις χρηματοοικονομικές εφαρμογές.

Η οικογένεια κατανομών Weibull. Καθώς έχει την πιο λεπτή ουρά από τις 3 οικογένειες, η μελέτη της, στην θεωρία ακραίων τιμών, η οικογένεια αυτή, χρησιμοποιείται, ως επί των πλείστων για ακαδημαϊκούς σκοπούς και όχι τόσο για χρηματοοικονομικές εφαρμογές. Ένας ακόμη λόγος, είναι και το γεγονός ότι, αν παρατηρήσουμε το γράφημα της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής μίας Weibull, είναι φανερό ότι στα παρουσιάζει ένα δεξί όριο, κάτι που τόσο οι Frechet κατανομές όσο και οι Gumbel, που χαρακτηριστικά τους θα αναφέρουμε παρακάτω, τείνουν προς το άπειρο, από δεξιά, είναι ασύμπτωτες. Αυτό, από μόνο του οδηγεί και σε μεγάλες ουρές, όσον αφορά τις τελευταίες, και λεπτότερες για τις Weibull. Και εδώ είναι που οδηγούμαστε και σε ένα οξύμωρο αποτέλεσμα.

Η αρχική εφαρμογή της θεωρίας ακραίων τιμών αφορούσε ζημίες που μπορούσαν να προκύψουν, κυρίως, από περιβαλλοντολογικά και γεωλογικά γεγονότα. Ωστόσο, η χρήση της επεκτάθηκε και στον χρηματοπιστωτικό – ασφαλιστικό τομέα. Οι ζημίες, όπως είναι προφανές, αν και αρκετές φορές ενδέχεται να είναι μεγαλύτερες των προσδοκώμενων, είναι γενικά πεπερασμένες. Η λογική, συνεπώς, θα ήταν, να εφαρμόζεται, μία κατανομή που θα προσαρμοζότανε πιο κοντά στην πραγματικότητα. Ωστόσο, η χρήση κατανομών που δεν έχουν «δεξί όριο» είναι μία μέθοδος αρκετά διαδεδομένη, τουλάχιστον σε ότι αφορά τους κινδύνους λειτουργίας και αγοράς<sup>2</sup>, καθώς τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα επιθυμούν να προβλέπουν, με τρόπους που θα παραθέσουμε αργότερα, με μεγαλύτερη ακρίβεια τις ενδεχόμενες ζημίες τους, δίχως να περιορισμούς, που πιθανόν να δημιουργήσουν σε αντίθετα αποτελέσματα.

Τέλος, η οικογένεια κατανομών Gumbel. Αν λέγαμε ότι μπορούμε να κατατάξουμε τις 3 οικογένειες σε σειρά, ανάλογα με το πάχος της δεξιάς ουράς τους, η οικογένεια αυτή θα ήταν στην μέση. Κατά αυτόν τον τρόπο, οι κατανομές που ανήκουν στην Gumbel, έχουν χαρακτηριστικά τόσο από την Frechet όσο και από την Weibull, δηλαδή περιέχει κατανομές και με ελαφριές αλλά και παχιές ουρές. Και αν δεν έχουμε επάρκεια στα δεδομένα μας, δεν θα είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε αν η κατανομή που ανήκει στην Gumbel, για παράδειγμα, έχει πιο βαριές ουρές από μία αντίστοιχη από την οικογένεια κατανομών Frechet. Αυτός, άλλωστε, είναι και ο λόγος όπου οι κατανομές Gumbel είναι και πιο περιπλοκές, ως προς την εφαρμογή και την κατανόηση, από εκείνες της Frechet. Ωστόσο, ένα λάθος στο οποίο πάρα πολλοί εκπίπτουν, είναι ότι, λόγω ότι οι κατανομές της τελευταίας έχουν πιο βαριές ουρές, θεωρούν ότι είναι και εκείνες που μόνο μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Ωστόσο, και η οικογένεια Gumbel, περιέχει κατανομές με βαριές ουρές,

---

<sup>2</sup> Στον πιστωτικό κίνδυνο, σε αρκετές περιπτώσεις, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται μία κατανομή που να μην απειρίζεται προς τα δεξιά.



σε σχέση με την κανονική κατανομή<sup>3</sup>, που μπορούν να προσαρμοστούν για την μελέτη των ακραίων τιμών.

### 2.1.1. Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων – Block Maxima Model

Ωστόσο, προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την GEV, για να υπολογίσουμε και τις ζημιές από τους κινδύνους, θα πρέπει να εκτιμήσουμε τις τρεις παραμέτρους. Υπάρχουν πάρα πολλοί τρόποι για να επιτευχθεί αυτό.

#### Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας είναι μία μέθοδος που χρησιμοποιείται και πιο συχνά. Σε αυτή την μέθοδο, χρειάζεται η συνάρτηση πιθανοφάνειας, πολλαπλασιάζοντας την συνάρτηση πυκνότητας για κάθε μία παρατήρηση από το τυχαίο δείγμα<sup>4</sup> των παρατηρήσεων. Αν  $f(x_i; \theta)$  η συνάρτηση πυκνότητας του τυχαίου δείγματος, τότε, και αν συμβολίσουμε με  $L(\theta)$  την συνάρτηση πιθανοφάνειας, τότε :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (2.2)$$

Προφανώς, το  $\theta$ , είναι το διάνυσμα των παραμέτρων  $\mu$ ,  $\sigma$  και  $\xi$ .

Ωστόσο, έχοντας πλέον υπολογίσει την συνάρτηση αυτή, έχει αποδειχθεί ότι, ισοδύναμα<sup>5</sup>, λαμβάνουμε υπόψη τον λογάριθμο της πιθανοφάνειας. Συνεπώς, η (2.2) γίνεται :

$$\ln(L(\theta)) = \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i; \theta)) \quad (2.3)$$

Για την GEV, η αναλυτική μορφή της (2.3), όπως έχει διατυπωθεί από τους McNeil, Frey και Embrechts (2005), παριστάνεται, παρακάτω, από την σχέση (2.4).

$$\ln(L(\mu, \sigma, \xi)) = -n \ln(\sigma) - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \cdot \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \xi \cdot \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \cdot \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\xi}} \quad (2.4)$$

Παίρνοντας, κάθε φορά, την μερική παράγωγο της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας, την (3), ως προς την παράμετρο που θέλουμε να υπολογίσουμε (συνεπώς θα έχουμε υπολογίσει 3 μερικές παραγώγους), τις θέτουμε ίσες με το μηδέν. Οι τιμές εκείνες που θα προκύψουν, θα αποτελούν και τις εκτιμήσεις των τριών παραμέτρων της κατανομής GEV. Ωστόσο, για να αποδειχθεί ότι είναι και οι μέγιστες, αρκεί να υπολογιστεί

<sup>3</sup> Η σύγκριση με την κανονική κατανομή γίνεται καθώς είναι ένα ιδανικό παράδειγμα συμμετρικής κατανομής με λεπτές ουρές.

<sup>4</sup> Μέσα σε ένα τυχαίο δείγμα όλες οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, στοιχείο απαραίτητο για να συνεχίσουμε. Ωστόσο, σε κάποιες έρευνες, πάνω στην Θεωρία των Ακραίων Τιμών, ενδέχεται να παρατηρηθεί μία χαλαρότητα ως προς την κατανομή.

<sup>5</sup> Εξαιτίας του γεγονότος ότι η συνάρτηση του λογαρίθμου είναι γνησίως αύξουσα, οι εκτιμητές που μεγιστοποιούν την λογαριθμική συνάρτηση της πιθανοφάνειας, θα μεγιστοποιούν και εκείνη της πιθανοφάνειας.

και η δεύτερη μερική παράγωγος των παραμέτρων να είναι θετική. Συγκεκριμένα, υπάρχει και ο περιορισμός ότι  $1 + \xi \cdot \frac{x_i - \mu}{\sigma} > 0$  για κάθε παρατήρηση του τυχαίου δείγματος.

### **Μέθοδος Ροπών Σταθμισμένων Με Πιθανότητες (PWM)**

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, θα πρέπει να υπολογίσουμε, τόσες ροπές, όσες και οι προς εκτίμηση παράμετροι της, εκάστοτε, κατανομής. Συνεπώς, για την GEV, που είναι τριπαραμετρική, αρκεί να υπολογιστούν η μηδενική, η πρώτη αλλά κι η δεύτερη ροπή. Από τον τύπο (1), στην περίπτωση όπου  $\xi \neq 0$ , σύμφωνα με τους Hosking, Wails και Wood (1985), και συμβολίζοντας με  $M_r$  τις ροπές της κατανομής, τότε έχουμε ότι :

- Η παράμετρος σχήματος  $\xi$  προκύπτει ως η λύση της εξίσωσης :

$$\frac{3M_2 - M_0}{2M_1 - M_0} = \frac{1 - 3^{-\xi}}{1 - 2^{-\xi}} \Leftrightarrow \hat{\xi} = 7.859c + 2.955c^2, \text{ όπου } c = \frac{2M_1 - M_0}{3M_1 - M_0} \cdot \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Δηλαδή, παρά την φύση της εξίσωσης, με προφανή την χρήση αριθμητικών μεθόδων, κατά αυτόν τον τρόπο, οι συγγραφείς, απέδειξαν, ότι για τις τιμές τις παραμέτρου σχήματος  $\xi$ , που χρησιμοποιούνται στην πράξη, όπως και έχει αναφερθεί παραπάνω, η εξίσωση άγεται, περίπου σε πολυωνυμική.

- Η παράμετρος κλίμακας  $\sigma$  εκτιμάται από τον τύπο :

$$\hat{\sigma} = \frac{(2M_1 - M_0) \cdot \hat{\xi}}{\Gamma(1 + \hat{\xi}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{\hat{\xi}}}\right)} \quad (2.5)$$

- Η παράμετρος θέσης  $\mu$ , σύμφωνα με το ίδιο άρθρο, εκτιμάται από τον τύπο :

$$\hat{\mu} = M_0 + \frac{\hat{\sigma} \cdot [\Gamma(1 + \hat{\xi}) - 1]}{\hat{\xi}} \quad (2.6)$$

Δηλαδή, η μέθοδος αυτή εξισώνει τις θεωρητικές με τις δειγματικές ροπές έτσι ώστε να εκτιμήσει τις παραμέτρους.

Οι μέθοδοι που αναφέρονται παραπάνω, είναι και οι πιο γνωστές, και δημοφιλείς, για την εκτίμηση των 3 παραμέτρων. Ειδικά η μέθοδος των ροπών σταθμισμένων με πιθανότητες, χρησιμοποιείται, επί τον πλείστον, για ερευνητικούς σκοπούς.

Ωστόσο, αν και όπως είναι προφανές, είναι εύκολο να εκτιμηθούν οι παράμετροι, καθώς παρέχονται τα απαραίτητα εργαλεία, ένα σημαντικό κομμάτι στην διαδικασία αυτή είναι και, κατά πόσο, η εκτιμώμενη κατανομή GEV, είναι ικανή να μοντελοποιήσει τα, εκάστοτε, δεδομένα των ζημιών, που είναι και ο στόχος. Συνεπώς, θα πρέπει να προχωρήσουμε σε έναν έλεγχο **καλής προσαρμογής** της κατανομής.

#### **2.1.2. Έλεγχοι Καλής Προσαρμογής**

Κατά τους καιρούς, έχουν αναπτυχθεί διάφοροι έλεγχοι για την προσαρμογή των κατανομών. Οι δημοφιλέστεροι είναι: Ο  $\chi^2$  έλεγχος του Pearson, ο έλεγχος των Kolmogorov – Smirnov αλλά και των Anderson – Darling, οι οποίοι πραγματοποιούν τον έλεγχο

**$H_0$ : Τα δεδομένα προέρχονται από την GEV έναντι της  $H_1$ : τα δεδομένα μας ακολουθούν διαφορετική κατανομή. (2.α)**

### Ο έλεγχος $\chi^2$ του Pearson

Στην block maxima method, έχουμε χωρίσει σε ομάδες τις παρατηρήσεις, όπου η μεγαλύτερη είναι και η, υπό εξέταση, ακραία τιμή. Όπως έχουμε αναφέρει από την αρχή της ενότητας της συγκεκριμένης μεθόδου, έχουμε χωρίσει το δείγμα σε η ισοπληθή μικρότερα δείγματα. Συνεπώς, έχουμε η ακραίες τιμές. Για την διεκπεραίωση του συγκεκριμένου ελέγχου, θεωρούμε ότι μεταξύ της μίας από την άλλη ακραία τιμή, είναι ένα διάστημα, όπου, το καθένα, το χωρίζουμε σε κ υποδιαστήματα. Για κάθε ένα από αυτά τα υποδιαστήματα υπολογίζουμε την παρατηρούμενη ( $O_i$ ) και την εμπειρική ( $E_i$ ) συχνότητα, δηλαδή το πόσες παρατηρήσεις έχουμε σε κάθε υποδιάστημα και πόσες θα επιθυμούσαμε

να έχουμε. Υπολογίζοντας συνεπώς, το πηλίκο  $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$  για κάθε ένα από τα κ

υποδιαστήματα, το άθροισμα αυτών δίνει την συνάρτηση για τον **έλεγχο (2.α)**. Στην ειδική περίπτωση όπου τα κ υποδιαστήματα κατασκευαστούν με τρόπο τέτοιο, έτσι ώστε η

εμπειρική πιθανότητα να είναι ίδια σε όλα και ίση με  $\frac{n}{\kappa}$ , τότε η ελεγχουσυνάρτηση παίρνει

$$\text{την μορφή: } X^2 = \frac{\kappa}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} O_i^2 - n.$$

Σε κάθε περίπτωση, για ένα συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , η  $H_0$  του ελέγχου 2.α απορρίπτεται αν η ελεγχουσυνάρτηση είναι μεγαλύτερη από την τιμή της  $\alpha\%$  ποσοστημόριο της κατανομής  $\chi^2$  με  $\kappa-1$ -m βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή από την ποσότητα  $X_{\kappa-1-m;\alpha}^2$ . Το κ παριστάνει τον αριθμό των υποδιαστημάτων και m των αριθμό των προς εκτίμηση παραμέτρων (όπου στην περίπτωση της GEV m = 3).

### Ο έλεγχος Kolmogorov – Smirnov

Το κριτήριο, όπως καλείται, των Kolmogorov – Smirnov, στηρίζεται στη μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή απόκλιση της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής F, του δείγματος, από την υποθετική  $F_0$ , όπου στην περίπτωσή μας είναι η GEV, δηλαδή στη ελεγχουσυνάρτηση :

$D_N = \max |F(x) - F_0(x)|$ . Ο έλεγχος απορρίπτεται αν η ποσότητα  $D_N$  είναι μεγαλύτερη από έναν αριθμό  $\kappa_\alpha$  που ικανοποιεί την σχέση  $P(D_N > \kappa_\alpha | H_0) = \alpha$ , όπου  $\alpha =$  το επίπεδο σημαντικότητας κατά το οποίο και ο έλεγχος διενεργείται. Όπως είναι προφανές, και σε σχέση και με τον  $\chi^2$  του Pearson, ο έλεγχος, υπό την  $H_0$ , είναι ελεύθερος κατανομής.

### Ο έλεγχος των Anderson – Darling

Όπως και ο έλεγχος των Kolmogorov - Smirnov, συγκρίνει την θεωρητική κατανομή με την εμπειρική δίνοντας περισσότερη έμφαση και βαρύτητα στις ουρές. Το γεγονός αυτό είναι και ο λόγος για τον οποίον, πάνω στην θεωρία ακραίων τιμών, θέλοντας να ελέγξουμε την προσαρμογή της GEV, ο έλεγχος των Anderson – Darling (1952), με συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο :

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [(2i-1) \cdot \log F(x_i) + (2n+1-2i) \cdot \log(1-F(x_i))], \text{ με } F(x_i) \text{ να είναι η}$$

εμπειρική κατανομή και  $n$  το μέγεθος του δείγματος, είναι και εκείνος που προτιμάται. Σύμφωνα, συνεπώς, με τον έλεγχο αυτό, η  $H_0$  απορρίπτεται αν το  $p$ -value του ελέγχου είναι μικρότερο από το επίπεδο σημαντικότητας του ελέγχου. Το, δε,  $p$  value, συνδέεται με την ελεγχοσυνάρτηση, μέσα από την σχέση :  $p - value = (\sin c)^2$  με

$$c = -1.128 + 0.5708 \cdot A_n^2 - \frac{0.1867}{\sqrt{(A_n^2)^3}} + \frac{0.8145}{A_n^2} - 0.0737 \cdot \frac{A_n^2}{\sqrt{n}} + \frac{0.1399}{A_n^2 \cdot \sqrt{n}}, \text{ γεγονός που}$$

υποδεικνύει ότι και ο έλεγχος των Anderson – Darling είναι, όπως των Kolmogorov – Smirnov, ελεύθερος κατανομής.

### 2.1.3. Αξία Σε Κίνδυνο με την Generalized Extreme Value

Ωστόσο, όλη η παραπάνω διαδικασία έγινε με πρωταρχικό σκοπό τον υπολογισμό των ακραίων ζημιών. Στόχος, που, έχοντας εκτιμήσει τις παραμέτρους της GEV αλλά και προχωρήσει σε έλεγχο καλής προσαρμογής, η πρόβλεψη είναι εύκολος να επιτευχθεί μέσω της **αξίας σε κίνδυνο**<sup>6</sup>, που υπολογίζεται ως ένα ποσοστημόριο της προσαρμοσμένης, στο δείγμα των ακραίων ζημιών, GEV και θα δίνεται από τον τύπο :

$$VaR = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \cdot \left[ 1 - (-n \cdot \ln(1-p))^{\hat{\xi}} \right], \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} + \hat{\sigma} \ln(-n \cdot \ln(1-p)), \hat{\xi} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

όπου  $p$  είναι η πιθανότητα που το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή ο επενδυτής θέτει για την εκτίμηση της προβλεπόμενης μέγιστης ζημίας.

Ωστόσο, η μέθοδος του block maxima έχει ένα πολύ μεγάλο μειονέκτημα. Τα αποτελέσματα που εξάγονται εξαρτώνται, σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό, από τις πόσες ομάδες θα χωριστούν τα δεδομένα μας. Εάν το  $n$ , για παράδειγμα είναι πολύ μεγάλο, τότε ενδέχεται να έχουμε λίγες ακραίες τιμές οι οποίες θα είναι αρκετά περισσότερο ακραίες από ότι κάποιος θα θεωρούσε. Επίσης, είναι πιθανό να συμβεί και το αντίστροφο, δηλαδή να δημιουργηθεί ένας μικρός αριθμός  $n$  ομάδων και οι ακραίες τιμές να είναι πολλές σε πλήθος χωρίς απαραίτητα να αντιπροσωπεύουν τον όρο «ακραίες». Συνεπώς, η αυθαίρετη συμπεριφορά του αριθμού  $n$  δημιουργεί σημαντικό πρόβλημα και για να επιλυθεί, ίσως να χρειαστούν αρκετές προσομοιώσεις, για διάφορες τιμές του, στην κατανομή των ακραίων ζημιών. Το αρνητικό αυτό έρχεται να το επικαλύψει η μέθοδος **peak – over – threshold**.

<sup>6</sup> Ως αξία σε κίνδυνο (Value At Risk) ορίζουμε την μέγιστη ζημία που ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή ένας επενδυτής είναι δυνατό να υποστεί

## 2.2. Peak – over – threshold model

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, ως ακραίες τιμές θα θεωρούνται εκείνες που θα ξεπερνάνε ένα συγκεκριμένο, υψηλό, όριο, που θα καλείται **κατώφλι**. Παρότι, με το πρώτο άκουσμα του μοντέλου, κάποιος ενδέχεται να αναρωτηθεί ότι και εδώ ελλοχεύει μία αυθαίρετη επιλογή, ως προς την επιλογή του ορίου εκείνου, στοιχείο που έχει αναλυθεί από αρκετούς καθώς, για παράδειγμα στα χρηματοοικονομικά, κάθε χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή επενδυτής έχει διαφορετική συμπεριφορά απέναντι στον, εκάστοτε κίνδυνο. Ωστόσο, όπως θα αναφέρουμε και αργότερα, έχει δοθεί μία συνάρτηση από τους McNeil, Frey και Embrechts το 2005.

Στόχος, συνεπώς, όπως και στην περίπτωση του μοντέλου block maxima, είναι η εύρεση της κατανομής των ακραίων τιμών, έτσι ώστε να είμαστε σε θέση να προβούμε σε μία πρόβλεψη της κατανομής, μέσω της αξίας σε κίνδυνο, που θα υπολογιστεί ως ένα ποσοστημόριο της προσαρμοσμένης, εκείνης, κατανομής.

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  το τυχαίο δείγμα των τιμών που ξεπερνάνε το κατώφλι. Η κατανομή που προσομοιάζει καλύτερα τις ακραίες αυτές τιμές είναι η **Generalized Pareto Distribution** (GPD). Η συνάρτηση κατανομής της δίνεται από τον τύπο :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right), & \xi = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

όπου θα ισχύει ότι :  $\sigma > 0$  πάντα, καθώς αποτελεί την παράμετρο κλίμακας.

Για την τυχαία μεταβλητή  $x$  θα ισχύει ότι :  $\begin{cases} x \geq 0, & \xi \geq 0 \\ 0 \leq x \leq -\frac{\sigma}{\xi}, & \xi < 0 \end{cases}$  . Όπως και στην

περίπτωση της GEV, η παράμετρος  $\xi$  καλείται παράμετρος σχήματος και είναι εκείνη, που ανάλογα με την τιμή που θα πάρει, που καθορίζει την κατανομή, προερχόμενη από την οικογένεια της GPD. Πιο συγκεκριμένα, αν  $\xi > 0$ , τότε η συνάρτηση κατανομής (2.8) δίνει μία

Pareto με  $\alpha = \frac{1}{\xi}$  και  $\beta = \frac{\sigma}{\xi}$ . Θυμίζουμε ότι μία κατανομή Pareto είναι διπαραμετρική.

Στην περίπτωση όπου  $\xi = 0$ , τότε η (2.8) δίνει την εκθετική κατανομή με μέση τιμή ίση με  $\sigma$ , ενώ για αρνητικές τιμές της παραμέτρου σχήματος ( $\xi < 0$ ), η (2.8) δίνει την κατανομή Pareto II με ελαφριές ουρές.

Ωστόσο, όπως έχουμε αναφέρει και νωρίτερα, και στην περίπτωση του υπό συζήτηση μοντέλου ενδέχεται κάποιος να βρει ψεγάδια αυθαίρετων επιλογών, σε ότι έχει να κάνει με την επιλογή του «κατωφλιού». Οι McNeil, Frey και Embrechts το 2005, έχοντας βρει την κατανομή των ζημιών δοθέντος ότι έχουν περάσει το κατώφλι, που θα δίνεται από την συνάρτηση κατανομής, αν υποθέσουμε ότι  $u$  είναι το κατώφλι,

$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$ , αποδείχθηκε ότι το κατώφλι μπορεί να

βρεθεί από την μέση τιμή της συνάρτησης αυτής, την **excess mean function**, η οποία δίνεται από την σχέση :  $e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}$  (2.9), με  $0 \leq u < \infty$  όταν η

παράμετρος σχήματος ανήκει στο διάστημα  $[0,1)$  και  $0 \leq u < -\frac{\sigma}{\xi}$ , όταν  $\xi \in (-\infty, 0)$ .

Συνεπώς, για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $\xi$ , η mean excess function είναι μία γραμμική συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα, αν  $N_u$  ο αριθμός των υπερβάσεων, τότε η (2.9)

παίρνει την ακόλουθη μορφή :  $e(u) = \frac{1}{N_u} \cdot \sum_{i=1}^{N_u} (X_i - u)$  (2.10). Πραγματοποιώντας, για

κάθε τιμή  $N_i$  για  $i = 1, \dots, u$ , ένα scatter plot, το οποίο, σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα πρέπει να είναι γραμμικό ως προς το «κατώφλι», μπορεί να υπολογιστεί το κατώφλι  $u$ .

Έχοντας καθορίσει, συνεπώς, το κατώφλι, για να μοντελοποιηθούν οι ακραίες ζημιές, αρκεί να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της Generalized Pareto. Όπως αναφέραμε και στην περίπτωση της GEV, στην block maxima μέθοδο, έτσι και σε αυτό το μοντέλο που πραγματεύεται η θεωρία ακραίων τιμών, υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι για την εκτίμηση εκείνων. Αν και η πιο δημοφιλής μέθοδος είναι εκείνης της μέγιστης πιθανοφάνειας, υπάρχουν και άλλοι μέθοδοι οι οποίες είναι άξιες αναφοράς<sup>7</sup>.

### 2.2.1. Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Για το τυχαίο δείγμα των παρατηρήσεων που περνάνε το κατώφλι, η συνάρτηση

πιθανοφάνειας, δίνεται από τον τύπο :  $L(\underline{x}; \sigma, \xi) = \sigma^{-n} + \left[ \sum_{i=1}^n \left( 1 - \xi \cdot \frac{x_i}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\xi}} \right]^{(1-\xi)}$  (2.11)

και η λογαριθμική συνάρτησή της δίνεται από την σχέση :

$\ln L(\underline{x}; \sigma, \xi) = -n \ln \sigma - (1 - \xi) \cdot \sum_{i=1}^n \left( -\frac{1}{\xi} \cdot \ln \left( 1 - \xi \cdot \frac{x_i}{\sigma} \right) \right)$  (2.12). Καθώς η λογαριθμική

συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, η μεγιστοποίηση των παραμέτρων της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας συνεπάγεται εκείνη και της απλής συνάρτησης πιθανοφάνειας.

Παίρνοντας, συνεπώς, την μερική παράγωγο της (2.12), για κάθε μία από τις παραμέτρους, και θέτοντάς τες ίσες με το μηδέν, οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας θα υπολογίζονται από τις εξισώσεις :

$$\begin{cases} n \cdot (\xi - 1) = \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 - \xi \frac{x_i}{\sigma} \right) + (\xi - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \left( 1 - \xi \frac{x_i}{\sigma} \right)^{-1} \\ \xi = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 - \xi \frac{x_i}{\sigma} \right) \end{cases} \quad (\text{eq.1})$$

<sup>7</sup> Ειδικά για την GPD, οι Hosking και Wallis το 1987 ανέπτυξαν τις διάφορες μεθόδους εκτίμησης των παραμέτρων της αλλά και των ποσοστημορίων της.

Ωστόσο, ο Davison το 1984 διατύπωσε ότι οι δύο αυτές εξισώσεις εξαρτώνται από έναν κοινό παράγοντα, που τον συμβόλισε με  $\theta$ , και είναι ίσος με  $\frac{\xi}{\sigma}$  με  $\theta < \frac{1}{\max(X_1, \dots, X_n)}$ .

Το αποτέλεσμα αυτό απλοποίησε την διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων της GPD καθώς, πλέον, η (2.9) εξαρτάται από μία παράμετρο, την  $\theta$ , έχοντας την ακόλουθη μορφή :

$$\ln L(\underline{x}; \theta) = -n - \sum_{i=1}^n \ln(1 - \theta \cdot x_i) - n \ln \left[ -\frac{1}{n\theta} \cdot \sum_{i=1}^n (\ln(1 - \theta \cdot x_i)) \right] \quad (2.13.α)$$

Οπότε, παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση και θέτοντας την ίση με το μηδέν, βρίσκουμε τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας για τον παράγοντα  $\theta$ . Κατά αυτόν τον τρόπο, και η εξίσωση για την παράμετρο σχήματος της (eq.1) παίρνοντας την μορφή

$$\hat{\xi} = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(1 - \hat{\theta} x_i) \quad (2.13.β),$$

υπολογίζουμε, με έναν διαφορετικό τρόπο τον εκτιμητή

μέγιστης πιθανοφάνειας για την παράμετρο  $\xi$ . Όσον αφορά την παράμετρο κλίμακας  $\sigma$ ,

καθώς ισχύει ότι  $\theta = \frac{\xi}{\sigma}$ , άμεσα, θα προκύπτει ότι :  $\hat{\theta} = \frac{\hat{\xi}}{\hat{\sigma}} \Leftrightarrow \hat{\sigma} = \frac{\hat{\xi}}{\hat{\theta}}$  (2.13.γ). Ωστόσο, ένα

μειονέκτημα της απλοποιημένης μεθόδου αυτής, είναι ότι όσο το  $\theta$  πλησιάζει το άνω όριο του ( Rem: Ο αντίστροφος της μεγαλύτερης ακραίας ζημίας), τόσο πιο πολλά προβλήματα μετατρεψιμότητας ενδέχεται να προκύψουν. Επίσης, η 1<sup>η</sup> παράγωγος της (2.13.α) είναι πιθανό να μηδενίζεται για περισσότερες από μία τιμές.

Την ίδια χρονιά, ο Smith, απέδειξε ότι οι εκτιμητές, όπως εκείνοι προκύπτουν από την παράγωγο της (2.13.α), ασυμπτωτικά, κατανέμονται κανονικά. Πιο συγκεκριμένα, έδειξε ότι

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma} \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} \sigma \\ \xi \end{bmatrix}, \frac{1}{n} \cdot \begin{bmatrix} 2\sigma^2(1-\xi) & \sigma(1-\xi) \\ \sigma(1-\xi) & (1-\xi)^2 \end{bmatrix} \right), \text{ με } \xi < \frac{1}{2}.$$

Ο λόγος που ισχύει το τελευταίο

είναι ότι κατά αυτόν τον τρόπο οι εκτιμητές πληρούνται οι ασυμπτωτικές ιδιότητες της κανονικής κατανομής.

Τέλος, άξιο αναφοράς είναι και το γεγονός ότι όλοι οι παραπάνω υπολογισμοί, για τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας, έγιναν υπό την προϋπόθεση ότι  $\xi \leq 1$ , καθώς, σε αντίθετη περίπτωση, η συνάρτηση πιθανοφάνειας, όταν η τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $x$  θα προσέγγιζε τον παράγοντα  $\theta$ , θα απειρίζοταν.

### 2.2.2. Μέθοδος των Ροπών

Οι ροπές της γενικευμένης Pareto δίνονται από τον τύπο  $E \left( 1 - \xi \frac{X}{\sigma} \right)^r = \frac{1}{1 + r\xi}$  με την

προϋπόθεση ότι  $1 + r\xi > 0$  καθώς, κατά αυτόν τον τρόπο, δεν θα απειρίζονται. Εξισώνοντας τις θεωρητικές ροπές, όπως εκείνες παριστάνονται από τις σχέσεις (2.14) και (2.15) αντιστοίχως παρακάτω, με τις δειγματικές ροπές, οι εκτιμητές των ροπών, ανά παράμετρο θα είναι ίσες με :

$$\mu = \frac{\sigma}{1+\xi} \quad (14), \quad \text{var} = \frac{\sigma^2}{(1+\xi)^2 \cdot (1+2\xi)} \quad (2.15)$$

και

$$\hat{\xi} = \frac{\bar{x}}{2(s^2-1)}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{x}^{-3}}{2(s^2+1)}. \quad (2.16)$$

όπου  $\bar{x}$ ,  $s^2$  ο δειγματικός μέσος και, δειγματική, διακύμανση αντιστοίχως. Στην ειδική περίπτωση, μάλιστα, όπου  $\xi > -\frac{1}{4}$ <sup>8</sup>, οι εκτιμητές της σχέσης (2.15) έχουν ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή με διακύμανση :

$$\frac{(1+\xi)^2}{(1+2\xi) \cdot (1+3\xi) \cdot (1+4\xi)} \cdot \begin{bmatrix} 2\sigma^2 \cdot (1+6\xi+12\xi^2) & \sigma \cdot (1+2\xi) \cdot (1+4\xi+12\xi^2) \\ \sigma \cdot (1+2\xi) \cdot (1+4\xi+12\xi^2) & (1+2\xi)^2 \cdot (1+\xi+6\xi^2) \end{bmatrix}.$$

### 2.2.3. Μέθοδος των Σταθμισμένων με Πιθανότητες Ροπών

Η συγκεκριμένη μέθοδος, στηρίζεται στον αριθμό των ως προς εκτίμηση παραμέτρων. Καθώς η GPD είναι διπαραμετρική, χρειάζονται μόνο η μηδενική και η πρώτη ροπή. Συνεπώς, όπως εφαρμόζοντας την αντίστοιχη με του block maxima μοντέλου μέθοδο, έχουμε ότι :

$$\hat{\xi} = \frac{M_0}{M_0 - 2M_1} - 2, \quad \hat{\sigma} = \frac{2M_0M_1}{M_0 - 2M_1} \quad (2.17)$$

Όπως και στις άλλες δύο μεθόδους, έτσι και εδώ, για ορισμένες τιμές της παραμέτρου σχήματος  $\xi$ , και συγκεκριμένα για  $\xi > -\frac{1}{2}$ , οι εκτιμητές της σχέσης (2.17), ασυμπτωτικά, κατανέμονται κανονικά με διακύμανση :

$$\frac{1}{(1+2\xi) \cdot (3+2\xi)} \cdot \begin{bmatrix} \sigma^2 \cdot (7+18\xi+11\xi^2+2\xi^3) & \sigma \cdot (2+\xi) \cdot (2+6\xi+7\xi^2+2\xi^3) \\ \sigma \cdot (2+\xi) \cdot (2+6\xi+7\xi^2+2\xi^3) & (1+\xi) \cdot (1+2\xi)^2 \cdot (1+\xi+2\xi^2) \end{bmatrix}.$$

### 2.2.4. Νέες μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων της GPD

Παρόλα αυτά, ανά τα χρόνια, πολλοί επιστήμονες έχουν αναπτύξει διάφορες νέες μεθόδους για την εκτίμηση των παραμέτρων της GPD. Πιο πρόσφατη, αποτελεί το εκείνη του Wang(2011) που, συνδυάζοντας την συνάρτηση του ελέγχου καλής προσαρμογής των Anderson Darling, όπου εκείνη είναι η ίδια που έχουμε αναφέρει και στο προηγούμενο μοντέλο περιγραφής ακραίων τιμών, αλλά και την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας, ελαχιστοποίησε την πρώτη παράγωγο της, συνδυασμένης, εκείνης, συνάρτησης :

<sup>8</sup> Στην περίπτωση όπου  $\xi \leq -\frac{1}{4}$ , η δειγματική διακύμανση απειρίζεται ενώ για  $\xi = 0$  οι ασύμπτωτοι εκτιμητές ροπών και μέγιστης πιθανοφάνειας είναι οι ίδιοι.



$$G(\underline{x}; \theta) = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ (2i-1) \cdot \ln \left[ 1 - (1 - \theta \cdot x_i)^{\frac{n}{\sum_j \ln(1 - \theta \cdot x_j)}} \right] - n \cdot (2n+1-2i) \cdot \frac{\ln(1 - \theta \cdot x_i)}{\sum_j \ln(1 - \theta \cdot x_j)} \right\}$$

και υπολόγισε μία νέα παράμετρο για τον παράγοντα  $\theta = \frac{\xi}{\sigma}$ , οπότε, χρησιμοποιώντας τους τύπους (2.13.β) και (2.13.γ), υπολόγισε τους νέους εκτιμητές της κατανομής GPD.

### 2.2.5. Έλεγχοι Καλής Προσαρμογής

Ωστόσο, σημαντικό ρόλο στην εύρεση της κατανομής, παίζει και ο έλεγχος καλής προσαρμογής της κατανομής στα δεδομένα. Οι έλεγχοι που αναφέρθηκαν και στο μοντέλο block maxima, ισχύουν και στην περίπτωση της peak over threshold με όλες τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά τους που αναφέρθηκαν στην αντίστοιχη εκείνη ενότητα. Λόγω της ιδιότητας που έχει ο έλεγχος Anderson – Darling να δίνει έμφαση στις ουρές τις κατανομές, φέρεται ως ο επικρατέστερος, όταν τουλάχιστον τα δεδομένα πραγματεύονται την Θεωρία Ακραίων Τιμών.

Οπότε, ο στόχος της πρόβλεψης των ακραίων ζημιών, είναι δυνατό να επιτευχθεί με περισσότερη ευκολία καθώς, σε ένα τυχαίο δείγμα, όπως στην περίπτωση αυτή με τις ακραίες ζημιές, που έχουμε προσαρμόσει μία συγκεκριμένη κατανομή, στην περίπτωση μας την GPD, η αξία σε κίνδυνο, που αποτελεί ένα γνωστό και κοινό μέσο πρόβλεψης που χρησιμοποιούν αρκετά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα ή επενδυτές, υπολογίζεται απλά ως ένα ποσοστημόριο της προσαρμοσμένης κατανομής.

### 2.2.6. Αξία Σε Κίνδυνο με την Generalized Pareto Distribution

Πράγματι, η αξία σε κίνδυνο, για το peak over threshold μοντέλο, δίνεται από την σχέση :

$$VaR = u - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \cdot \left( 1 - \left( \frac{N_u}{n \cdot (1-p)} \right)^{\hat{\xi}} \right) \quad (2.18)$$

όπου

$u$  : το κατώφλι, όπως εκείνο έχει υπολογιστεί από την excess mean function

$N_u$  : το πλήθος των παρατηρήσεων που περνάνε το κατώφλι

$p$  : η πιθανότητα, με την οποία, το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα θέλει να υπολογίσει την μέγιστη ζημία που αναμένεται να υποστεί.

### 2.2.7. The Hill Estimator

Ένας άλλος τρόπος για να εκτιμηθεί η κατανομή των παρατηρήσεων που ξεπερνάνε το κατώφλι, είναι ο *Hill estimator*. Γενικά, ο εκτιμητής αυτός είναι ένας αμερόληπτος και συνεπής για τις δεξιές ουρές των κατανομών με βαριές ουρές και αυτός είναι ο λόγος που, στην εκτίμηση της κατανομής των ακραίων ζημιών σε αυτήν την περίπτωση, προσαρμόζουμε κατανομές με μεγάλες ουρές.

Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενη ενότητα, υπάρχουν 2 οικογένειες κατανομών με βαριές ουρές με την Frechet να χαρακτηρίζεται ως εκείνη με τις πιο βαριές, και, κατά συνέπεια, χρησιμοποιείται στην εύρεση του hill estimator. Η δεξιά ουρά της οικογένειας αυτής, δίνεται από τον τύπο :  $\bar{F}(x) = L(x) \cdot x^{-a}$  (2.19), όπου  $a$ , η ένδειξη κατά πόσο, εκθετικά, φθίνει η δεξιά ουρά, είναι θετικός αριθμός. Στόχος είναι εκτίμηση εκείνου του δείκτη, αντί για την εκτίμηση της παραμέτρου σχήματος  $\xi$ , γεγονός που διαχωρίζει την μέθοδο εκείνη από την επιλογή της GPD για το τυχαίο δείγμα των ζημιών που ξεπερνάνε το όριο. Η συνάρτηση  $L(x)$  θεωρείται μία εκθετική συνάρτηση, όπως καλείται slowly varying, δηλαδή συνάρτηση που, σε σχέση με άλλες εκθετικές συναρτήσεις, όσο οι τιμές του  $x$  μεγαλώνουν αλλάζουν, όπως τονίζει και το όνομά τους, μορφή αρκετά αργά.

Ως ο συνηθέστερος αλλά και πιο εύκολος στην διατύπωση, είναι μέσω της excess mean function, όπως εκείνη έχει αποδοθεί από τον τύπο (2.9), για τον λογάριθμο των τυχαίων μεταβλητών  $X_1, \dots, X_n$  των ακραίων ζημιών. Έχουμε, δηλαδή :

$$e(\ln u) = E(\ln X - \ln u | \ln X > \ln u) = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^{\infty} (\ln x - \ln u) f(x) dx = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^{\infty} \frac{\bar{F}(x)}{x} dx \quad \text{όπου}$$

αντικαθιστώντας την σχέση (2.19), έχουμε ότι :

$$e(\ln u) = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^{\infty} L(x) x^{-a+1} dx \quad (2.20)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Karamata<sup>9</sup> (1930), προκύπτει ότι, για μεγάλες τιμές του ορίου,  $u \rightarrow \infty$ ,  $e(\ln u) \sim \frac{L(u) \cdot u^{-a} \cdot a^{-1}}{\bar{F}(u)} = a^{-1}$ , οπότε για το τυχαίο δείγμα των ακραίων

ζημιών θα ισχύει ακριβώς το ίδιο. Κατά αυτόν τον τρόπο, απορρέει η εκτίμηση για τον δείκτη  $a$ , που αποτελεί και τον Hill estimator, και δίνεται από την σχέση :

$$\hat{a}_{k,n} = \left( \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^k \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1} \quad (2.21), \text{ με τον δείκτη } k \text{ να υποδηλώνει την στατιστική}$$

διάταξη των παρατηρήσεων εκείνων.

Ο παραπάνω δείκτης, ειδικά στην Θεωρία Ακραίων Τιμών, αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο. Συνήθως, η εύρεση χρηματοοικονομικών αλλά και άλλων μέτρων, στην πράξη, γίνονται μέσω προγραμματισμού. Οι ασυμπτωτικές ιδιότητες του έχουν ερευνηθεί διεξοδικώς, δίνοντας πολλές και χρήσιμες πληροφορίες, σε χρηματοπιστωτικά ιδρύματα ή/και επενδυτές, για το καταλληλότερο μοντέλο που προσαρμόζεται πάνω στις ακραίες τιμές, συμπεριλαμβανομένου πολλά ARCH – GARCH μοντέλα.

<sup>9</sup> Σύμφωνα με τον Karamata, αν έχουμε μία συνάρτηση που ανήκει στον χώρο  $R_p$  με  $\sigma > -(1+p)$  τότε

ισχύει ότι :  $\frac{x^{\rho+1} \cdot f(x)}{\int_a^x t^{\sigma} \cdot f(t) dt} \rightarrow \sigma + \rho + 1$  για μεγάλες τιμές της τυχαίας μεταβλητής  $x$ , δηλαδή για

$x \rightarrow \infty$ .

Ωστόσο, άξιο αναφοράς είναι και το γεγονός ότι, σε πρακτικές διοικητικές κινδύνου (risk managerial decisions), ο Hill estimator απλοποιείται καθώς η συνάρτηση  $L(x)$ , για πολύ ακραίες τιμές, αντικαθίσταται από μία σταθερά, έστω  $C$ , με αποτέλεσμα, το πρόβλημα να μετατοπίζεται στην εκτίμηση της σταθεράς εκείνης. Το γεγονός της απλότητας, και της χρησιμότητας στον τομέα της διοικητικής κινδύνου, έγκειται στο γεγονός ότι, κατά αυτόν τον τρόπο, ο hill estimator, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, δίνει μία εκτίμηση για τον αριθμό των παρατηρήσεων που αναμένεται να περάσουν το «κατώφλι», στοιχείο που δείχνει μία, πρώτη, εικόνα για το πώς αναμένεται να κινηθούν οι παρατηρήσεις πάνω από το όριο  $u$ , δίνοντας αρκετές πληροφορίες για την συμπεριφορά τους στο χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή στον επενδυτή.

### **2.3. EVT για μη ανεξάρτητα και ισόνομα δεδομένα**

Οι διαδικασίες, οι μέθοδοι αλλά και οι προβλέψεις για τις ακραίες τιμές που αναφέραμε παραπάνω, πραγματεύονται ένα ιδεατό περιβάλλον κατά το οποίο όλες οι τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την ίδια κατανομή. Κατά αυτόν τον τρόπο είναι αρκετά πιο εύκολο μία κατανομή να προσαρμοστεί και να εξαχθούν διάφορα αποτελέσματα για την συμπεριφορά των τυχαίων εκείνων μεταβλητών. Ωστόσο, οι αποδόσεις μετοχών, ομολόγων, ισοτιμιών κλπ, χαρακτηρίζονται ως σειρές στάσιμες, δηλαδή, παραβιάζεται τόσο η ανεξαρτησία όσο και το κριτήριο της ίδιας κατανομής. Η συμπεριφορά τους είναι διαφορετική και, κατά αυτόν τον τρόπο, θα πρέπει να γίνει ειδική μνεία για το πώς τα μοντέλα block maxima και peak over threshold, ανταποκρίνονται στην περίπτωση αυτή.

Στην περίπτωση του μοντέλου block maxima, οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σε μία στάσιμη χρονοσειρά, δεν διαφέρουν με εκείνες που χρησιμοποιήθηκαν και αναφέρθηκαν παραπάνω στην μελέτη ενός τυχαίου δείγματος. Συνεπώς, όλοι οι εκτιμητές, αλλά και ποσοστημόρια - μέτρα είναι ακριβώς οι ίδια καθώς οι σχέσεις που τα διέπουν δεν μεταβάλλονται. Κάτι που, ωστόσο, δεν συμβαίνει με το έτερο μοντέλο.

Σε στάσιμες σειρές, οι τυχαίες μεταβλητές που ξεπερνάνε το κατώφλι περιγράφονται από μία δισδιάστατη Poisson, ένα αποτέλεσμα που προκύπτει από την συνδυασμό της σχέσης (2.8) και της συνάρτησης κατανομής εκείνων, όπως δίνεται από την σχέση :

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2.22)$$

Ωστόσο, η εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο, αλλά και για άλλα ποσοστημόρια, είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την φύση των παραμέτρων της διαδικασίας Poisson. Ενδέχεται είτε να είναι σταθερές, οπότε τα δεδομένα περιγράφονται από μία **ομοιογενή διαδικασία Poisson**, είτε να μεταβάλλονται μέσα στον χρόνο, και κατά συνέπεια η διαδικασία Poisson που περιγράφεται, να χαρακτηρίζεται ως **μη ομοιογενή**.

#### **2.3.1. Ομοιογενή Διαδικασία Poisson**

Η μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων, στην ενότητα αυτή, είναι αρκετά όμοια με εκείνη της block maxima με την διαφορά, ωστόσο, ότι δεν υπάρχει κάποιος διαχωρισμός σε ομάδες αλλά ένα συγκεκριμένο όριο, «κατώφλι».

$$\text{Η χρονοσειρά έχει μέτρο ίσο με } \frac{T_2 - T_1}{T} \cdot \max\left(0, \left[1 + \frac{\xi \cdot (r - \mu)}{\sigma}\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right) \quad (2.23) \text{ με}$$

$0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T$ , όπου  $T_1, T_2$  αποτελούν το μεσοδιάστημα μεταξύ 2 «ακραίων» αποδόσεων και  $T$  το σύνολο των ημερών<sup>10</sup> που διαπραγματεύονται οι τίτλοι μέσα σε ένα έτος. Η τελευταία, μπορεί να περιγραφεί από ως το ακέραιο μέρος της συνάρτησης πυκνότητας ως ολοκληρώσιμη συνάρτηση μέσα στο διάστημα  $[T_1, T_2]$  για κάθε μία από τις αποδόσεις, δηλαδή, μέσω της σχέσης :

$$\frac{T_2 - T_1}{T} \cdot \max\left(0, \left[1 + \frac{\xi \cdot (r - \mu)}{\sigma}\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right) = \int_{T_1}^{T_2} \int_r^\infty \eta(t, z; \xi, \sigma, \mu) \cdot dz \cdot dt \quad (2.24)$$

με την προς ολοκλήρωση συνάρτηση να είναι ίση με :

$$\eta(t, z; \xi, \mu, \sigma) = \frac{1}{T} \cdot g(z; \xi, \mu, \sigma) \quad (2.25)$$

$$\text{όπου : } g(z; \xi, \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{z - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1+\xi}{\xi}} & \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{z - \mu}{\sigma}\right) & \xi = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας, πλέον, στο διδιάστατο χωρίο  $[0, S] \times (u, \infty)$  δίνεται από τον τύπο :

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{N_u} \frac{1}{T} \cdot g(r_i; \underline{\theta}) \cdot \exp\left(-\frac{S}{T} \cdot \max\left(0, \left[1 + \frac{\xi \cdot (r - \mu)}{\sigma}\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right)\right) \quad (2.27)$$

με το  $\underline{\theta} = (\xi, \mu, \sigma)$  και  $r_i$  : οι αποδόσεις των παρατηρήσεων που υπερβαίνουν το κατώφλι  $u$ .

Ωστόσο, όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενες ενότητες, που χρησιμοποιείται η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας, είναι προτιμότερο, να μεγιστοποιείται η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας :

<sup>10</sup> Προφανώς τα δεδομένα θα μπορούσαν να ήταν και εβδομαδιαία, μηνιαία, ετήσια κλπ

$$\ln L(\underline{\theta}) = -\ln T \cdot + \sum_{i=1}^{N_u} \ln g(r_i; \underline{\theta}) - \frac{S}{T} \cdot \max \left( 0, \left[ 1 + \frac{\xi \cdot (r - \mu)}{\sigma} \right]^{\frac{1}{\xi}} \right) \quad (2.28)$$

Παίρνοντας, συνεπώς, τις μερικές παραγώγους της (2.28), και θέτοντάς τες ίσες με το μηδέν, έχουμε τις εκτιμήσεις για τις  $\xi$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$  για την **ομοιογενή διαδικασία Poisson**. Συνεπώς, έχοντας τις εκτιμήσεις αυτές, η αξία σε κίνδυνο για τις στάσιμες χρονοσειρές, σε αυτήν την περίπτωση, υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο :

$$VaR = \begin{cases} \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \cdot \left[ 1 - (-T \cdot \ln(1-p))^{\hat{\xi}} \right], & \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} + \hat{\sigma} \ln(-T \cdot \ln(1-p)), & \hat{\xi} = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

όπου  $p$  : η πιθανότητα που το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή ο επενδυτής θέλει να υπολογίσει την μέγιστη ζημία που αναμένεται να υποστεί.

Όπως είναι προφανές, η σχέση (2.29) είναι όμοια με την (2.7) που δίνει την αξία σε κίνδυνο στην περίπτωση της GEV στο μοντέλο block maxima, με την διαφορά ότι στην εξεταζόμενη περίπτωση υπάρχει «κατώφλι» και όχι ομάδες, και αυτός είναι ο λόγος που στην αξία σε κίνδυνο για την ομοιογενή διαδικασία Poisson υπάρχει ο αριθμός των εργάσιμων, σε ένα έτος, ημερών.

### 2.3.2. Μη ομοιογενής διαδικασία Poisson

Για την εύρεση της αξίας σε κίνδυνο, στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιείται η σχέση (2.29). Ωστόσο, η εκτίμηση των παραμέτρων, εξαιτίας του γεγονότος ότι μεταβάλλονται μέσα στον χρόνο, γίνεται μέσω κάποιων τυχαίων βοηθητικών μεταβλητών, που ενδεχομένως να είναι οι τιμές του δείκτη Χρηματιστηρίου, η τάση ενός τίτλου μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, ένα ποιοτικό μέτρο για τη μεταβλητότητα (volatility) των αποδόσεων κλπ.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Πολυμεταβλητή Ανάλυση Θεωρίας Ακραίων Τιμών

Τόσο τα φυσικά φαινόμενα, από τα οποία και ξεκίνησε η μελέτη της EVT, όσο και τα χρηματοοικονομικά, αλλά κυρίως, οι επιπτώσεις που ενδέχεται εκείνα να έχουν σε ένα, παραδείγματος χάρη, χαρτοφυλάκιο ενός επενδυτή ή ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος, είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων. Κατά αυτόν τον τρόπο, η μελέτη της μονομεταβλητής θεωρίας των ακραίων τιμών, αποτελεί, έναν ακρογωνιαίο λίθο τόσο για ακαδημαϊκούς σκοπούς, όσο και για την μελέτη της πολυμεταβλητής ανάλυσης. Συνεπώς, για να είμαστε σε θέση να εξετάσουμε τις ακραίες ζημιές, θα πρέπει να υπολογίσουμε την από κοινού κατανομή του διανύσματος των τυχαίων μεταβλητών των παραγόντων εκείνων.

Όπως είναι γνωστό, η από κοινού συνάρτηση κατανομής παρέχει πληροφορίες όχι μόνο για την κάθε μεταβλητή ξεχωριστά αλλά και για την σχέση μεταξύ τους. Καθώς η σχέση αυτή είναι και το στοιχείο που χρειάζεται να επικεντρωθούμε, κατά καιρούς έχουν αναπτυχθεί αρκετοί τρόποι για να μοντελοποιηθεί. Στην διεθνή βιβλιογραφία, αλλά και στις ακαδημαϊκές έρευνες, έχει επικρατήσει η μεθοδολογία των **copulas**.

Το ερώτημα, ωστόσο, που ενδέχεται να δημιουργηθεί είναι, γιατί οι copulas; Η απάντηση έρχεται μέσα από τις ιδιότητες και τα πλεονεκτήματά τους. Οι copulas έχουν το χαρακτηριστικό να εμβαθύνουν στην μελέτη την σχέσης εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών συμβάλλοντας, κατά αυτόν τον τρόπο, στην εύρεση εναλλακτικών μέτρων μέτρησης της εξάρτησης αυτής. Επίσης, έχουν την ιδιότητα να εκφράζουν την σχέση εκείνη σε όρους ποσοστών χαρακτηρίζοντας, συνεπώς, την μέθοδο αυτή πολύ πρακτική, ειδικότερα στον χρηματοπιστωτικό τομέα που και η αξία σε κίνδυνο εκφράζεται κατά παρόμοιο τρόπο. Όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, οι copulas δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στις περιθώριες κατανομές, γεγονός που καθίσταται από μόνο του ως ένα από τα ισχυρότερα πλεονεκτήματα καθώς, στις περισσότερες των περιπτώσεων στην διοικητική κινδύνου, θα είναι γνωστή η κατανομή των ζημιών που θα προκαλούνται από κάθε παράγοντα ξεχωριστά συμβάλλοντας, κατά αυτόν τον τρόπο, σε έναν αποτελεσματικότερο σχεδιασμό ενός πολυμεταβλητού μοντέλου.

#### 3.1. **Copulas**

##### 3.1.1. **Ορισμός και Ιδιότητες**

Σύμφωνα με το πώς τις χαρακτηρίζει ο Nelsen (2006, σελ. 12) ως copula μπορεί να χαρακτηριστεί μία συνάρτηση η οποία και «παντρεύουν, φέρνουν μαζί πολυμεταβλητές συναρτήσεις κατανομής με τις περιθώριές τους». Από μία διαφορετική άποψη, « οι copulas είναι πολυμεταβλητές συναρτήσεις κατανομής των οποίων η περιθώρια συνάρτηση κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα (0,1)». Σαν συμπέρασμα, συνεπώς, η copula αποτελεί μία πολυμεταβλητή συνάρτηση που συμβάλλει στην μετατροπή μιας πολυμεταβλητής από κοινού συνάρτησης κατανομής σε όλες τις περιθώριες κατανομές της.

Συνεπώς, και ακολουθώντας τα παραπάνω, αναφερόμενοι στην διδιάστατη περίπτωση για ευκολία<sup>11</sup>, ως *copula* δύο διαστάσεων θεωρείται η συνάρτηση :  $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  για την οποία ισχύει

- $\forall x \in [0,1]^2, C(0, x) = C(x, 0) = 0$
- $\forall x \in [0,1]^2, C(1, x) = C(x, 1) = x$
- για κάθε ζεύγος  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in [0,1] \times [0,1]$  έτσι ώστε  $x_1 \leq y_1$  και  $x_2 \leq y_2$  να ισχύει :  $C(x_2, y_2) - C(x_1, y_2) - C(x_2, y_1) + C(x_1, y_1) \geq 0$

αλλά και :

Η συνάρτηση  $C$  καλείται *copula* ενός διδιάστατου διανύσματος  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$  αν και μόνο αν αποτελεί την από κοινού συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$ , όπου  $U_i$  να αποτελούν τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομής  $F_i$  των  $X_i$ .

Όσον αφορά τον πρώτο ορισμό, η πρώτη ιδιότητα αποτελεί προαπαιτούμενο για κάθε πολυμεταβλητή συνάρτηση κατανομής ενώ η δεύτερη για ομοιόμορφες περιθώριες συναρτήσεις κατανομής. Η τρίτη αποτελεί και την πιο βασική καθώς αν ισχύει, εξασφαλίζει ότι ισχύει  $P(x_1 < U_1 < y_1, x_2 < U_2 < y_2) \geq 0$ .

Ο δεύτερος ορισμός, είναι και εκείνος που εισάγει και ένα από τα βασικότερα θεωρήματα στην θεωρία των Copulas.

### **Θεώρημα του Sklar**

Έστω  $H$  μία διδιάστατη από κοινού συνάρτηση κατανομής και  $F_1, F_2$  οι δύο περιθώριες κατανομές. Αν  $\forall x \in \mathbb{R}^d$  υπάρχει *copula*  $C$ , θα ισχύει ότι :

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

Αν οι περιθώριες  $F_1, F_2$  είναι συνεχείς, τότε η συνάρτηση  $H$  είναι *copula*, η οποία και καλείται **μοναδική (unique)**. Σε αντίθετη περίπτωση αποτελεί από κοινού συνάρτηση κατανομής με περιθώριες τις  $F_1, F_2$ .

Συνεπώς, με το θεώρημα αυτό, ο Sklar κατόρθωσε να αποδείξει ότι κάθε συνεχής πολυμεταβλητή συνάρτηση κατανομής, εμπεριέχει μέσα της *copulas*, ενισχύοντας, κατά αυτόν τον τρόπο ότι οι τελευταίες, με την σειρά τους, σε συνδυασμό με μονομεταβλητές συναρτήσεις κατανομής, μπορούν να αποδώσουν, όπως έχουμε αναφέρει και στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, ένα πολυμεταβλητό μοντέλο. Επιπλέον, μέσω της ιδιότητας της **invariance**, κατά την οποία και ισχύει ότι :

«Αν ένα τυχαίο διάνυσμα  $(X_1, X_2)$  έχει *copula*  $C$ , τότε και για μία αύξουσα συνάρτηση  $\Psi$ , το διάνυσμα  $(\Psi_1(X_1), \Psi_2(X_2))$  έχει και εκείνο την ίδια *copula*.»

<sup>11</sup> Η μετάβαση από την διδιάστατη στην πολυδιάστατη περίπτωση, αποτελεί ένα ζήτημα εύκολο στην θεωρητική του πλευρά αλλά δύσκολο στην πρακτική του. Για τον ορισμό ενός  $d$  – διάστατου διανύσματος, βλέπε McNeil, Embrechts, Frey (2005), σελ. 185.

, ανέδειξε τις copulas ως ένα από τα πιο φυσικά μέτρα για την εξάρτηση μεταβλητών μέσα σε μία πολυμεταβλητή συνάρτηση κατανομής.

Άξιο αναφοράς είναι το γεγονός ότι η συνάρτηση  $H$  είναι copula όταν οι περιθώριες είναι συνεχείς συναρτήσεις κατανομής. Άλλωστε αυτό δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα τυχαίο γεγονός καθώς οι κίνδυνοι, οι ζημίες αλλά και τα δεδομένα αποτελούν στοιχεία μία χρονοσειράς, δηλαδή μίας συνεχούς ροής γεγονότων. Κατά αυτόν τον τρόπο, η χρήση των copulas σε διακριτές κατανομές, δεν θα ήταν τόσο ρεαλιστική σε μία πολυμεταβλητή, αντίστοιχη δηλαδή των πραγματικών γεγονότων, ανάλυση, και γι' αυτόν τον λόγο δεν γίνεται και περαιτέρω αναφορά.

Ωστόσο, οι copulas κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τον μαθηματικό τους τύπο αλλά και την χρήση τους. Οι βασικές, ή όπως είναι η ονομασία τους *fundamental*, αποτελούν copulas που χρησιμεύουν για την περιγραφή της σχέσης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών, στοιχείο που είναι και το εξεταζόμενο, οι *implicit copulas* που αναπαράγονται από το θεώρημα του Sklar με μειονέκτημα ωστόσο την πολυπλοκότητα στους τύπους τους αλλά και τις *explicit copulas* που η αναπαραγωγή τους από πολυμεταβλητά μοντέλα αποδίδει έναν πιο εύκολο και κατανοητό μαθηματικό τύπο σε σχέση με τις *implicit*. Προφανώς, καθώς εμείς θέλουμε να εξετάσουμε την σχέση εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών της από κοινού συνάρτησης κατανομής για να είμαστε σε θέση να την αποδώσουμε, με τον όσο δυνατό καλύτερο τρόπο, μέσω μίας copula, θα επικεντρωθούμε στις *fundamental copulas*.

### 3.1.2. Fundamental Copulas

Οι copulas αυτές αποδίδουν την σχέση εξάρτησης που ενδεχομένως να υπάρχει μέσα στο διάνυσμα των τυχαίων μεταβλητών ανάλογα με τον τύπο που ικανοποιούν. Πιο αναλυτικά, αν οι συντεταγμένες του διανύσματος των παραγόντων ικανοποιούν την σχέση :

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d x_i \quad (3.1)$$

Τότε, η copula που θα προκύψει από το Θεώρημα του Sklar, τότε θα έχει **ανεξάρτητη δομή** και οι copulas αυτές καλούνται **independence copulas**.

Άλλη μία copula που ανήκει στην κατηγορία αυτή είναι η comonotonicity copula. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι copulas οι οποίες επαληθεύουν το άνω όριο της Frechet copulas<sup>12</sup>, δηλαδή ισχύει ότι  $F(\underline{u}) \leq \min\{F(u_1), \dots, F(u_d)\}$  (3.2). Η τελευταία σχέση, σε συνδυασμό με το θεώρημα του Sklar, δίνει μία τέλεια θετική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών. Το ακριβώς αντίθετο, πλήρης αρνητική δηλαδή, δίνουν οι countercomonotonicity copulas οι οποίες επαληθεύουν το κάτω όριο των Frechet copulas, όπως αυτό φαίνεται στην 2<sup>η</sup> αναφορά

<sup>12</sup> Μία copula χαρακτηρίζεται ως Frechet αν ισχύει ότι

$$\left( \sum_{i=1}^d F(x_i) + 1 - d \right)_+ \leq F(\underline{x}) \leq \min\{F(x_1), \dots, F(x_d)\} \quad (3.1.1), \text{ όπου } F(x) \text{ είναι η από κοινού}$$

συνάρτηση κατανομής του διανύσματος των παραγόντων.



### 3.1.3. Σχέσεις Εξάρτησης

Μέσα από την προηγούμενη ενότητα, και την κατηγοριοποίηση σε κάποιες ειδικές *corulas*, αναφερθήκαμε σε πλήρως θετικά ή αρνητικά συσχετισμένες μεταβλητές αλλά και ασυσχέτιστες. Ο σκοπός μας, από την αρχή του κεφαλαίου αυτού είναι να μοντελοποιήσουμε την σχέση αυτή καθώς είναι και εκείνη που αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για την μετάβαση από την μονομεταβλητή στην πολυμεταβλητή ανάλυση.

Μέσα από *corulas*, συνεπώς, υπάρχουν τρόποι να μοντελοποιηθεί αυτή η σχέση. Ωστόσο, ένας από τους πιο διαδεδομένους δείκτες μελέτης συσχέτισης, και μάλιστα γραμμικής, στην στατιστική βιβλιογραφία, είναι ο δείκτης του **Pearson**.

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε δύο μεταβλητές, τότε ο δείκτης συσχέτισης δίνεται από τον τύπο :  $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$ , όπου  $Cov(X, Y)$  αποτελεί την συνδιακύμανση των δύο

εκείνων μεταβλητών. Προφανώς ισχύει ότι  $\rho \in [-1, 1]$ , με  $\rho=1$  οι μεταβλητές να είναι πλήρως θετικά συσχετισμένες, με  $\rho = -1$  πλήρως αρνητικά ενώ αν  $\rho = 0$  τότε οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες. Καθώς, ο δείκτης του Pearson μετράει την γραμμικότητα, σε περίπτωση που δεν υπάρχει γραμμικότητα, προκύπτει μία απρόβλεπτη συσχέτιση των 2 μεταβλητών, κάτι που είναι σύνηθες όταν αποτελούν ακραίες τιμές. Τέλος, για κάθε ένα γραμμικό μετασχηματισμό των 2 αυτών μεταβλητών, ο δείκτης του Pearson παραμένει σταθερός και ίσος με  $\rho$ .

Παρόλα αυτά, ο δείκτης του Pearson έχει αρκετά μειονεκτήματα που, κατά συνέπεια, οδηγούν και στην μη τόσο διαδεδομένη χρήση του από τους ερευνητές. Πιο συγκεκριμένα, ο δείκτης του Pearson το μόνο που αποδίδει είναι η γραμμική ή μη σχέση των δύο μεταβλητών αυτών αλλά δεν δίνει καμία πληροφορία για το πώς προέρχεται αυτή η σχέση. Παράλληλα, αν προκύψει γραμμική σχέση, είναι πολύ πιθανό να οφείλεται στον τρόπο που έχει διαμορφωθεί και επιλεγθεί το τυχαίο δείγμα που εξετάζεται. Επιπλέον, η συσχέτιση, είτε μετριέται σε όρους γραμμικής, όπως είδαμε και παραπάνω, αλλά και σε άλλες μορφές, που θα εξεταστούν παρακάτω, αναφέρονται κατανομές που είναι ελλειπτικές<sup>13</sup>. Κατά αυτόν τον τρόπο εννοούμε ότι οι *corulas* που θα περιγράψουν την σχέση εξάρτησης εκείνη θα εξαρτώνται μόνο από τον μέσο, την πίνακα διακύμανσης – συνδιακύμανσης αλλά και την ροπογεννήτρια των περιθώριων κατανομών. Στην πράξη, όμως, οι περισσότερες από κοινού συναρτήσεις κατανομής δεν είναι ελλειπτικές κάτι που, σε ότι αφορά την γραμμική συσχέτιση, να οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτελέσματα. Σε αποτελέσματα που μπορούμε να οδηγηθούμε αν και οι μεταβλητές έχουν 2<sup>η</sup> ροπή που απειρίζεται. Κατά αυτόν τον τρόπο έχουν αναπτυχθεί και άλλες μετρήσεις, πέρα της γραμμικής, για την μέτρηση της εξάρτησης.

---

<sup>13</sup> Σε παρακάτω ενότητα που αναφερόμαστε για τα διάφορα είδη των *corulas* που υπάρχουν και πως εκείνες χρησιμεύουν, υπάρχει μεγαλύτερη ανάλυση για το τι είναι ελλειπτικές κατανομές και ελλειπτικές *corulas*.

### Rank Correlation

Όπως γίνεται κατανοητό, από τα μειονεκτήματα της γραμμικής συσχέτισης, ο δείκτης του Pearson στηρίζεται τόσο στην από κοινού όσο και στην περιθώρια κατανομή των τυχαίων μεταβλητών που παρομοιάζουν τους παράγοντες, κάτι που στις περισσότερες περιπτώσεις οδηγεί σε λάθος συμπεράσματα. Κατά αυτόν τον τρόπο, υπολογίστηκαν μέτρα τα οποία και βασίζονται περισσότερο στην επίδραση, στην σημαντικότητα, που έχει ένας παράγοντας στο χαρτοφυλάκιο ενός επενδυτή ή ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος και λιγότερο στην κατανομή που εκείνος ακολουθεί.

Δύο δείκτες έχουν αναπτυχθεί με βάση την τάξη των μεταβλητών, αποτελώντας, παράλληλα, και την εναλλακτική σε περίπτωση που οι κατανομές δεν είναι ελλειπτικές, κάτι, που όπως έχουμε αναφέρει και νωρίτερα, είναι συχνό φαινόμενο.

### Kendall's tau rank correlation coefficient

Έστω οι ζημιές  $X, Y$  που αναπαριστούν τις ζημιές που ενδεχομένως ένας επενδυτής ή ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα να υποστεί, με  $\underline{X} = (x_1, \dots, x_n)$  και  $\underline{Y} = (y_1, \dots, y_n)$  τα αντίστοιχα διανύσματα με συντεταγμένες τους παράγοντες που επιδρούν σε αυτές. Αν θεωρήσουμε τα ζεύγη  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , θα θεωρούμε ότι τα ζεύγη αυτά θα είναι **ταξινομημένα με την ίδια σειρά** αν ισχύει ότι για κάθε  $x_i > x_j$  τότε και  $y_i > y_j$  ή και αν  $x_i < x_j$  τότε  $y_i < y_j$ . Σε αντίθετη περίπτωση, τότε οι ζημιές θα θεωρούνται ότι, όσον αφορά τους παράγοντες που τις επηρεάζουν, **δεν είναι ταξινομημένα με την ίδια σειρά**. Ο δείκτης του Kendall για την τάξη των μεταβλητών, δίνεται από την σχέση (3.2) όπως εκείνη αναφέρεται ακριβώς παρακάτω :

$$\tau = \frac{\text{πλήθος όμοια ταξινομημένων ζεύγων} - \text{πλήθος μη όμοια ταξινομημένων ζεύγων}}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Όπως και ο δείκτης γραμμικής συσχέτισης του Pearson έτσι και ο δείκτης αυτός κυμαίνεται μέσα στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Προφανώς, για  $\tau = -1$  τότε οι μεταβλητές είναι πλήρως αρνητικά συσχετισμένες, για  $\tau = 1$  πλήρως θετικά ενώ για  $\tau = 0$  οι μεταβλητές είναι ασυσχέτιστες. Ο δείκτης αυτός, προφανώς, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για παραπάνω από δύο μεταβλητές, που είναι και το ζητούμενο.

### Spearman's rank correlation

Ο δείκτης του Spearman είναι παρόμοιος με εκείνον του Pearson με την διαφορά, ωστόσο, ότι αναφέρεται και σε κατανομές που δεν είναι ελλειπτικές καθώς βασίζεται στην τάξη των παραγόντων των ζημιών, όπως και έχουμε αναφέρει στην αρχή της ενότητας αυτής.

Εστιάζοντας, πάλι, στην περίπτωση όπου έχουμε δύο ζημίες,  $X, Y$  με  $\underline{X} = (x_1, \dots, x_n)$  και  $\underline{Y} = (y_1, \dots, y_n)$  οι παράγοντες που επιδρούν σε αυτές αντίστοιχα, ο δείκτης του Spearman

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.3)$$

Ωστόσο, στην πράξη, χρησιμοποιείται μία πιο απλή μορφή της σχέσης (3.3). Πιο συγκεκριμένα, και αν θέσουμε όπου  $d_i = R_{x_i} - R_{y_i}$  για κάθε τάξη μεταξύ των 2 διανυσμάτων, τότε :

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^n d_i^2}{n \cdot (n-1) \cdot (n+1)} \quad (3.4)$$

Και στην περίπτωση του δείκτη του Spearman, οι τιμές που θα παίρνει θα είναι μέσα στο διάστημα  $[-1, 1]$  με  $\rho = -1$  τότε οι μεταβλητές να είναι πλήρως αρνητικά συσχετισμένες, για  $\rho = 1$  πλήρως θετικά ενώ για  $\rho = 0$  οι μεταβλητές είναι ασυσχέτιστες.

Άξιο, ωστόσο, παρατήρησης, είναι ότι ο δείκτης του Spearman χρησιμοποιείται στην Θεωρία Ακραίων Τιμών καθώς, όταν παρατηρείται μεγάλη διαφορά μεταξύ των τάξεων των 2 παρατηρήσεων, κάτι που συμβαίνει μόνο όταν υπάρχουν στο δείγμα ακραίες παρατηρήσεις.

### **Tail Dependence**

Από τις σχέσεις συσχέτισης που ενδέχεται να υπάρχουν μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών των παραγόντων των ζημιών, ίσως να είναι και η πιο σημαντική, σε άποψη μελέτης, καθώς με αυτή είναι που ασχολείται η πολυμεταβλητή Θεωρία Ακραίων Τιμών καθώς, μέσω εκείνης και των copulas που αναπτύσσονται γύρω από αυτή, όπως θα αναφέρουμε και σε παρακάτω ενότητες, για την εκτίμηση παραμέτρων για τον υπολογισμό της οικονομικής, εκείνης, ζημίας.

Η σχέση εξάρτησης στην ουρά της από κοινού συνάρτησης κατανομής των παραγόντων, έχει να κάνει είτε για την «δεξιά» είτε για την «αριστερή» ουρά της και έχει να κάνει με το πόσο δυνατή, μπορεί να, θεωρείται. Στην περίπτωση που μελετάμε για την δεξιά ουρά, οι δείκτες έχουν να κάνουν αν το κάποιος παράγοντας ξεπερνά ένα συγκεκριμένο ποσοστημόριο της κατανομής, έστω  $q$ , δοθέντος ότι και οι υπόλοιποι παράγοντες το έχουν ξεπεράσει. Όπως είναι προφανές, αν η μελέτη της σχέσης συσχέτισης γίνεται στην περιοχή του  $1-q$  ποσοστημορίου, τότε οι δείκτες συσχέτισης αναφέρονται στις ακραίες τιμές της περίπτωσης αυτής, δηλαδή για τιμές των παραγόντων που είναι μικρότερες από το  $1-q$ , δοθέντος ότι και οι υπόλοιποι ακολουθούν την ίδια συμπεριφορά.

Όπως γίνεται, από τα παραπάνω λεγόμενα, πλήρως κατανοητό, οι δείκτες συσχέτισης που αφορούν την ουρά της από κοινού κατανομής, είναι εκφρασμένοι σε όρους ποσοστών. Στην διεθνή βιβλιογραφία έχουν αποδοθεί πάρα πολλοί ορισμοί για εκείνους. Από τους πιο

γνωστούς και κοινούς ορισμούς αποδόθηκε από τους Sibuya και Joe το 1960 και 1997 αντίστοιχα, για δύο μεταβλητές, ο οποίος, κατά συνέπεια, μπορεί να επεκταθεί και για περισσότερες. Αν υποθέσουμε ότι οι ζημιές επηρεάζονται, συνεπώς, από δύο παράγοντες  $X, Y$ , με από κοινού συνάρτηση κατανομής  $F$  και περιθώριες  $F_X(x)$  και  $F_Y(y)$  αντίστοιχα. Ο δείκτης εξάρτησης για την δεξιά ουρά, ή αλλιώς για το άνω ποσοστημόριο  $q$ , δίνεται από τον τύπο :

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} P\{F_X(x) > t \mid F_Y(y) > t\} \quad (3.5)$$

Γίνεται προφανές, ότι για την μελέτη της συσχέτισης, μέσα από τον δείκτη αυτό, για την δεξιά ουρά, θα πρέπει το παραπάνω όριο να ορίζεται, να υπάρχει.

Για τον δείκτη  $\lambda_U$  ισχύει ότι ανήκει στο διάστημα  $[0, 1]$ . Στην περίπτωση, μάλιστα, όπου ο δείκτης  $\lambda_U$  είναι θετικός, δηλαδή  $\lambda_U \in (0, 1]$ , τότε η copula των δύο μεταβλητών είναι συσχετισμένη στο άνω ποσοστημόριο, ενώ αν  $\lambda_U$  είναι ίσος με το μηδέν, οι παράγοντες θεωρούνται ανεξάρτητοι. Αναπτύσσοντας την πιθανότητα της παραπάνω σχέσης ως ακολούθως :

$$P\{F_X(x) > t \mid F_Y(y) > t\} = \frac{1 - P\{F_Y(y) \leq t\} - P\{F_X(x) \leq t\} + P\{F_X(x) \leq t, F_Y(y) \leq t\}}{1 - P\{F_Y(y) \leq t\}}, \text{ ο}$$

Joe έδωσε, για συνεχείς κατανομές ωστόσο, ότι ο δείκτης  $\lambda_U$  μπορεί να πάρει την μορφή :

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \left( \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \right) \quad (3.6)$$

με  $C$  μία διδιάστατη copula. Προφανώς, σε ότι αφορά το συμπέρασμα το οποίο μπορεί να εξαχθεί, ως προς την συσχέτιση ή μη των δύο μεταβλητών, ισχύουν ακριβώς τα ίδια πράγματα. Πιο συγκεκριμένα, αν  $\lambda_U \in (0, 1]$ , τότε η copula  $C$  θεωρείται συσχετισμένη στο άνω ποσοστημόριο  $q$ , ενώ για  $\lambda_U = 0$  ασυσχέτιστη. Στην ειδική περίπτωση όπου η copula  $C$  έχει την ιδιότητα των exchangeable copulas<sup>14</sup>, τότε, για τις δύο εκείνες μεταβλητές θα ισχύει :  $C(x, y) = C(y, x)$  και η σχέση (3.6), έχει αποδειχθεί ότι παίρνει την μορφή :

$$\lambda_U = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 1} P\{X > t \mid Y = t\} \quad (3.7)$$

Στην αντίθετη, τώρα, περίπτωση, δηλαδή για την εξάρτηση σε ποσοστημόριο  $1 - q$ , η σχέση εξάρτησης μπορεί να εκφραστεί όπως και παραπάνω. Δηλαδή, μία copula θα είναι συσχετισμένη στο  $1 - q$ , αν και μόνο αν ισχύει ότι :

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} P\{F_X(x) < t \mid F_Y(y) < t\}, \quad (3.8)$$

<sup>14</sup> Μία Copula χαρακτηρίζεται ως exchangeable αν και μόνο αν για μία εικόνα  $(\Pi(1), \dots, \Pi(d))$ , ισχύει ότι  $C(u_1, \dots, u_d) = C(u_{\Pi(1)}, \dots, u_{\Pi(d)})$ . (McNeil 2005).

το όριο να υπάρχει και να ισχύει ότι  $\lambda_L \in (0,1]$ . Αν  $\lambda_L = 0$ , τότε είναι ασυσχέτιστη. Στην περίπτωση, και πάλι, μίας exchangeable copula, ο δείκτης συσχέτισης ουράς, που δίνεται από την (3.8), παίρνει την μορφή :

$$\lambda_L = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} P\{X < t \mid Y = t\} \quad (3.9)$$

### **Perfect Dependence**

Μία τελευταία σχέση συσχέτισης, είναι η τέλεια εξάρτηση που ενδέχεται να έχουν οι παράγοντες μεταξύ τους, και μπορεί να μελετηθεί μέσω των copulas. Η πλήρης εξάρτηση, ή αλλιώς, πλήρης συσχέτιση, έχει άμεση σύνδεση με την copula Frechet, την οποία και έχουμε περιγράψει παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα, για οποιαδήποτε copula C, ισχύει η σχέση (3.1.1). Ωστόσο, υπάρχουν κάποιες βασικές ιδιότητες που διέπουν τις copulas, απόρροια του ορισμού όπως εκείνος έχει αποδοθεί στην ενότητα 3.1.

Όπως αναφέρουμε και στην σχέση 3.1.1, η  $F(x)$  αποτελεί την από κοινού συνάρτηση κατανομής του διανύσματος των παραγόντων. Για κάθε τέτοια συνάρτηση, ισχύει ότι η αντίστροφή της θα δίνεται από τον τύπο :  $F^{-1}(y) = \min\{x : F(x) \geq y\}$ . Αν υποθέσουμε ότι έχουμε μία τυχαία μεταβλητή U για την οποία ισχύει ότι :  $U \sim U(0,1)$ , τότε η συνάρτησης κατανομής της αντίστροφης για την τυχαία μεταβλητή U, έχει αποδειχθεί ότι θα δίνεται από την συνάρτηση κατανομής  $F(x)$ , δηλαδή  $P(F^{-1}(U) \leq x) = F(x)$ , ιδιότητα που αποδίδεται ως **ποσοστιαίος μετασχηματισμός**. Μία δεύτερη ιδιότητα είναι και ο **πιθανοτικός μετασχηματισμός**. Με αυτόν σημαίνει ότι κάθε τυχαία μεταβλητή Y που έχει μία συνεχή συνάρτηση κατανομής F, τότε έχει αποδειχθεί ότι η  $F(Y) \sim U(0,1)$ .

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι και εκείνες που αποτελούν και τον βασικό πυλώνα της τέλειας εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αν το διάνυσμα της σχέσης 3.1.1 των παραγόντων είναι διδιάστατο, με τις μεταβλητές να ακολουθούν την ομοιόμορφη στο (0,1), τότε το άνω και το κάτω όριο της Frechet copula αποτελούν και εκείνα copula. Ειδικότερα, το κάτω όριο θα περιγράφει μία **τέλεια αρνητική συσχέτιση**, και οι μεταβλητές σε αυτή την περίπτωση καλούνται **counter – comonotonic**, ενώ το άνω μία **τέλεια θετική συσχέτιση** μεταξύ των μεταβλητών αυτών, ή όπως αλλιώς καλούνται, **comonotonic**.

#### **3.1.4. Είδη Copulas**

Όλη η αναφορά η οποία και προηγήθηκε, έγινε με σκοπό να συνδέσουμε την μονομεταβλητή με την πολυμεταβλητή θεωρία ακραίων τιμών μέσω των σχέσεων εξάρτησης των συντεταγμένων του διανύσματος των παραγόντων που επηρεάζουν και επιφέρουν την κάθε ζημία. Υπάρχουν πάρα πολλά είδη copulas που μπορούν να συμβάλλουν σε αυτό, το κάθε ένα με τις ιδιότητες του, άλλο καλύτερα και άλλο όχι και τόσο.

Στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου αυτού, έχουμε αναφερθεί στις ιδιότητες αλλά και στην συμπεριφορά των copulas σε ένα πολυμεταβλητό μοντέλο. Πολλές από εκείνες τις ιδιότητες, αποτελούν και κάποια από τα χαρακτηριστικά των οικογενειών των copulas που

υπάρχουν ή ακόμη περισσότερο, εκείνο που ενδεχομένως να τις κάνει να ξεχωρίζουν από τις άλλες οικογένειες copulas.

### **Elliptical Copulas**

Η πιο γνωστή αλλά και πιο χρήσιμη οικογένεια copulas είναι οι ελλειπτικές. Όπως έχουμε αναφέρει και στην ενότητα των μέτρων συσχέτισης, πολλά από αυτά έχουν κατασκευαστεί και διαμορφωθεί έτσι ώστε να έχουν μία πιο απλοϊκή αλλά και διαχειρίσιμη μορφή για ελλειπτικές κατανομές. Άλλωστε είναι και εκείνες που πολύ εύκολα μπορούν να προσομοιωθούν και να χρησιμοποιηθούν σε δεδομένα.

### **Elliptical Distribution**

Έστω ένα διάνυσμα  $X$  με διάσταση  $n$ . Για κάθε έναν αριθμό  $\mu \in \mathfrak{R}$ , η χαρακτηριστική συνάρτηση του διανύσματος  $X - \mu$ , θα δίνεται από την σχέση :

$$\varphi_{X-\mu}(t) = \varphi(t^T \cdot \Sigma t), \quad (3.10)$$

όπου  $\varphi(t)$  : η χαρακτηριστική συνάρτηση,  $t^T$  : είναι το ανάστροφο διάνυσμα των τιμών της χαρακτηριστικής συνάρτησης ενώ  $\Sigma$ , αποτελεί έναν τετραγωνικό συμμετρικό πίνακα διαστάσεων όσο και του διανύσματος. Αν, συνεπώς, ισχύει η σχέση (3.10), τότε η κατανομή του διανύσματος  $X$  καλείται **ελλειπτική** με παραμέτρους, αν οι πρώτες δύο ροπές ορίζονται και υπάρχουν, τις  $\mu$ ,  $\Sigma$  και την χαρακτηριστική συνάρτηση  $\varphi$ .

Η κανονική κατανομή, όπως και η  $t$  – Student, αποτελούν κατανομές που ανήκουν στην οικογένεια των ελλειπτικών, κάτι που οφείλεται στο γεγονός ότι η διάσταση του διανύσματος  $X$  είναι ίση με 1, δηλαδή αποτελεί μία τυχαία μεταβλητή, και ο συμμετρικός τετραγωνικός πίνακας, κατ' επέκταση, είναι ένα διάνυσμα  $1 \times 1$ .

Ένα χαρακτηριστικό το οποίο έχουν οι ελλειπτικές κατανομές είναι ότι για κάθε διάνυσμα που ικανοποιεί την σχέση (3.10), οι συντεταγμένες του είναι ασυσχέτιστες. Στην περίπτωση που είναι και ανεξάρτητες, αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα  $X$  ακολουθεί την  $n$  – διάστατη κανονική κατανομή με μέση τιμή την παράμετρο  $\mu$  και διακύμανση τον πίνακα  $\Sigma$ , καθώς οι έννοιες της συσχέτισης και της ανεξαρτησίας ταυτίζονται μόνο στην κανονική κατανομή. Δηλαδή θα ισχύει ότι :  $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \Sigma)$ . Μάλιστα, στην περίπτωση αυτή, η χαρακτηριστική

συνάρτηση, για κάθε μία από τις συντεταγμένες του διανύσματος, είναι ίση με  $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ .

Ωστόσο, οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά αυτών των κατανομών μπορούν να αποδοθούν μόνο μέσω κάποιας στοχαστικής απεικόνισης. Οι Cambanis, Huang και Simons (1981), απέδειξαν ότι ένα διάνυσμα  $\mathbf{X}$  έχει ελλειπτική κατανομή με παραμέτρους  $\mu$ ,  $\Sigma$ ,  $\varphi$  αν και μόνο αν ισχύει ότι :

$$\mathbf{X} = \mu + RAU, \quad (3.11)$$

όπου  $A$  : είναι ένας πίνακας  $n \times k$  έτσι ώστε να ισχύει ότι  $AA' = \Sigma$ ,  $U$  ένα διάνυσμα διαστάσεων  $k \times 1$  το οποίο και κατανέμεται ομοιόμορφα μέσα στον πολυχώρο  $\{z \in \mathcal{R}^k \mid z'z = 1\}$  και  $R$  μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από το  $U$ .

### Μέτρα Συσχέτισης και Elliptical Distributions

Όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, οι ελλειπτικές κατανομές έχουν ως πλεονέκτημά τους τον εύκολο υπολογισμό, αλλά και την προσιτή μορφή, των συντελεστών σχέσης εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών.

Όσον αφορά τον δείκτη συσχέτισης του Pearson, θα πρέπει να ισχύει ότι η διακύμανση των 2 μεταβλητών, αν υποθέσουμε, για ακόμη μία φορά, ότι το διάνυσμα των παραγόντων είναι διδιάστατο, είναι πεπερασμένη, κάτι το οποίο, από τον ορισμό της ελλειπτικής κατανομής για ένα τυχαίο διάνυσμα  $X$  πρέπει να ισχύει για να ανήκει στην οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών, γεγονός που εξασφαλίζει ότι ο δείκτης δεν θα απειρίζεται άρα και θα υπάρχει.

Για τον υπολογισμό του Pearson, απαιτείται και ο υπολογισμός της συνδιακύμανσης. Οι Cambanis, Huang και Simons (1979), έδειξαν ότι αν ένα διάνυσμα  $X$  περιγράφεται πλήρως από μία ελλειπτική κατανομή, και κατά συνέπεια από τις παραμέτρους  $\mu$ ,  $\Sigma$  και  $\phi$ , και σε συνδυασμό με την σχέση (3.11), με ένα κατάλληλο όρισμα της χαρακτηριστικής συνάρτησης, τότε η συνδιακύμανση των συντεταγμένων, του διανύσματος εκείνου, θα εκφράζεται από τον τετραγωνικό συμμετρικό πίνακα  $\Sigma$ . Κατά συνέπεια, ο δείκτης του Pearson, για ελλειπτικές κατανομές, και για διδιάστατο διάνυσμα, δίνεται από την σχέση :

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i) \cdot Var(X_j)}} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_i \cdot \Sigma_j}} \quad (3.12)$$

Από την τελευταία σχέση απορρέει ότι η γραμμική σχέση συσχέτισης μεταξύ των παραγόντων – συντεταγμένων του διανύσματος ενός διανύσματος  $X$ , με ελλειπτική από κοινού συνάρτηση κατανομής, μπορεί να περιγραφεί με απόλυτη ακρίβεια από τον δείκτη του Pearson. Εξαιτίας του γεγονότος αυτού, η παράμετρος  $R$ , αναφέρεται στην διεθνή βιβλιογραφία, ως **πίνακας γραμμικής συσχέτισης**. Ωστόσο, είναι και αυτό που αποτελεί και ένα από τα ελαττώματα των ελλειπτικών κατανομών, ειδικότερα στην κατασκευή ενός πολυμεταβλητού μοντέλου. Η πηγή του προβλήματος έγκειται στο γεγονός ότι για ένα διάνυσμα  $X$  που έχει ελλειπτική κατανομή, οι περιθώριες κατανομές του, δηλαδή οι συναρτήσεις κατανομής των συντεταγμένων του, είναι και αυτές ελλειπτικής μορφής<sup>15</sup>, κάτι που στην πράξη δεν είναι δυνατόν. Συνεπώς, μέσα σε ένα ρεαλιστικό περιβάλλον, οι περιθώριες κατανομές θα είναι μη ελλειπτικές, γεγονός που επηρεάζει την εκτίμηση του  $R$ , καθώς δεν θα μπορεί να ανταποκριθεί σε γραμμικά συσχετισμένους εκτιμητές, όπως είναι εκείνος του Pearson.

Ένας από τους δείκτες που δεν επηρεάζονται από τις κατανομές, αλλά από την σημαντικότητα των παραγόντων, είναι εκείνος του Kendall. Όπως είναι προφανές, σε

<sup>15</sup> Τον ισχυρισμό αυτόν τον έχουν αποδείξει οι Fang, Kotz και Ng το 1987.

περιπτώσεις σαν και εκείνη που περιγράφεται παραπάνω, θα αποτελεί και την κατάλληλη λύση. Οι Lindskog, McNeil και Schmock, το 2001, απέδειξαν ότι η παράμετρος R, είναι δυνατό να συνδεθεί με τον δείκτη συσχέτισης Kendall – tau, με βάση τον τύπο :

$$\tau(X_i, X_j) = \left( 1 - \sum_{x \in \mathbb{R}} (P(X_i = \mu_i))^2 \right) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin(R_{ij}), \quad (3.13)$$

όπου  $\tau(X_i, X_j)$ : ο δείκτης του Kendall και  $\arcsin(\cdot)$ : το τόξο της συνάρτησης ημιτόνου, που αποτελεί και την αντίστροφη συνάρτηση της  $\sin x$ . Καθώς, ο δείκτης εκείνος, όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, βασίζεται στην τάξη των παραγόντων, αν ισχύει ότι η τάξη του συμμετρικού τετραγωνικού πίνακα  $\Sigma$ , από 2 και πάνω, δηλαδή να ισχύει ότι :  $rank(\Sigma) \geq 2$ , τότε η 3.13 απλοποιείται, και παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\tau(X_i, X_j) = (1 - (P(X_i = \mu_i))^2) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin(R_{ij}) \quad (3.14)$$

Στην ειδική περίπτωση, μάλιστα, όπου το υπό εξέταση πολυμεταβλητό μοντέλο πραγματεύεται με συμμετρικές κατανομές, όπως είναι η κανονική και η t – student, η πιθανότητα  $P(X_i = \mu_i) = 0$ , και συνεπώς, η σχέση (3.13), μέσα από την (3.14), απλοποιείται ακόμη περισσότερο, και γίνεται :

$$\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin(R_{ij}) \quad (3.15)$$

Η τελευταία σχέση, καθώς οι αναφερόμενες κατανομές είναι δυνατόν να παράγουν elliptical copulas, είναι και εκείνη που και για ελλειπτικές αλλά και για μη ελλειπτικές κατανομές με elliptical copulas, αποδίδει τον εκτιμητή για το  $R^{16}$ , συνεπώς, σε ένα περιβάλλον ρεαλιστικό. Ιδιότητα, που η απόδειξή της βασίστηκε στο γεγονός ότι ο εκτιμητής αυτός είναι άμεση συνάρτηση ενός ακριβή δείκτη, του Kendall, με μηδενική βάση στις κατανομές αλλά και ιδιότητες με μεγάλη ισχύ.

### **Gaussian Copulas**

Μία copula θα χαρακτηρίζεται ως Gauss copula, αν επαληθεύει την σχέση :

$$C_R^{Ga}(u) = \Phi_R^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), \quad (3.16)$$

όπου  $\Phi_R^n$ : η από κοινού συνάρτηση κατανομής της n – διάστατης κανονικής κατανομής και R : ο γραμμικός πίνακας συσχέτισης, όπως και αναφέρεται σε ελλειπτικές κατανομές.

Μέσα από την διεθνή βιβλιογραφία, ωστόσο, η μετάβαση από την μία μεταβλητή στο μοντέλο των πολλών, γίνεται μέσα από την αναφορά της διδιάστατης περίπτωσης και την

<sup>16</sup> Λύνοντας ως προς την αντίστροφη συνάρτηση  $\arcsin$  και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αντιστρόφου ( $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ ), προκύπτει ότι  $\sin\left(\frac{\pi \cdot \tau(X_i, X_j)}{2}\right) = R_{ij}$  (3.1.2).



γενίκευση των αποτελεσμάτων της. Κατά αυτόν τον τρόπο, η σχέση 3.16, για 2 μεταβλητές παίρνει την μορφή :

$$C_R^{Ga}(u) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-R_{12}^2)}} \cdot \exp\left\{-\frac{s_1^2 - 2 \cdot R_{12} \cdot s_1 \cdot s_2 + s_2^2}{2(1-R_{12}^2)}\right\} ds_1 ds_2 \quad (3.17)$$

Στην ειδική, μάλιστα, περίπτωση, όπου  $R_{12} = -1$ , τότε είναι ίση με το κάτω άκρο της Fréchet copula με το διάνυσμα  $\mathbf{X}$  να είναι διδιάστατο.

Για τις Gaussian copulas, στην προηγούμενη ενότητα, δείξαμε την μορφή που παίρνει ένας από τους δείκτες συσχέτισης, που βασίζονται στην τάξη των μεταβλητών, τον δείκτη του Kendall.

Ο έτερος δείκτης τάξης, του Spearman, έχει αποδειχθεί ότι είναι τριπλάσιος από του Kendall. Πιο συγκεκριμένα, για τον δείκτη του Spearman ισχύει ότι :

$$\tau(X_i, X_j) = 4P(X_i - \mu_i, X_j - \mu_j) - 1, \quad (3.18)$$

από όπου προκύπτει η σχέση (3.15). Συνεπώς για τον δείκτη του Spearman θα ισχύει ότι :

$$\rho_S(X_i, X_j) = 3 \cdot (4P(X_i - \mu_i, X_j - \mu_j) - 1) \quad (3.19)$$

άρα και :

$$\rho_S(X_i, X_j) = \frac{6}{\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{R_{ij}}{2}\right)^{17} \quad (3.20)$$

Ωστόσο, αυτό που ενδιαφέρει, όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, είναι η μελέτη στις ουρές των κατανομών, όπου και οι ακραίες τιμές – ζημίες παριστάνονται.

Από τις ιδιότητες των copulas, είναι φανερό ότι κάθε Copula αποτελεί μία αύξουσα συνεχή συνάρτηση, από τον Nelsen (1999), προκύπτει ότι :

$$C_{X_2|X_1}(x_2 | x_1) = P(X_2 \leq x_2 | X_1 = x_1) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(x_1 + \delta, x_2)}{\delta} = \frac{\partial C(x_1, x_2)}{\partial x_1} \quad (3.21)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του De L'Hopital στην παραπάνω σχέση και παίρνοντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, καθώς στην κανονική κατανομή υπάρχει συμμετρία, παίρνοντας την σχέση (3.7) για τον δείκτη συσχέτισης της άνω ουράς, για την περίπτωση της Gaussian Copula, έχει αποδειχθεί ότι ισχύει :

$$\lambda = 2 \cdot \lim_{q \rightarrow 0^+} P(U_2 \leq q | U_1 = q), \quad (3.22)$$

<sup>17</sup> Λύνοντας ως προς την αντίστροφη συνάρτηση  $\arcsin$  και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αντιστρόφου ( $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ ), προκύπτει ότι  $2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \tau(X_i, X_j)}{6}\right) = R_{ij}$  (3.1.3).

με  $U_1$  και  $U_2$  συντεταγμένες του διανύσματος με copula  $C(u_1, u_2)$  είναι μία normal copula. Αν ισχύει, για το διδιάστατο διάνυσμα  $(X_1, X_2) = (\Phi^{-1}(U_1), \Phi^{-1}(U_2))$ , τότε προκύπτει ότι:

$$\lambda = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X_2 \leq x | X_1 = x) \quad (3.23)$$

Αν  $(X_1, X_2)$  ακολουθεί την διδιάστατη κανονική κατανομή έτσι ώστε  $X_2 | X_1 = x \sim N(\rho x, 1 - \rho^2)$ , τότε ο συντελεστής δεξιάς ουράς, από την 3.23, είναι ίσος με μηδέν, αποδεικνύοντας κατά αυτόν τον τρόπο ότι οι ουρές στις Gaussian Copulas είναι ασυμπτωτικά ανεξάρτητες. Αυτό, ωστόσο, δεν αποτελεί και παράδειγμα για όλες τις ελλειπτικές copulas καθώς, όπως θα αναφέρουμε και σε επόμενη ενότητα, στην t copula υπάρχει συσχέτιση στις ουρές.

### **t – Copulas**

Μία copula θα χαρακτηρίζεται ως t – Copula, αν, για το διάνυσμα των παραγόντων  $\mathbf{X}$ , ισχύει η σχέση :

$$C_{\nu, R}^t(\mathbf{X}) = t_{\nu, R}^n(t_{\nu}^{-1}(x_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(x_n)), \quad (3.24)$$

όπου  $R = R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_i \cdot \Sigma_j}}$  ο δείκτης συσχέτισης και  $t_{\nu}^n$ : η n-διαστάσεων κατανομή t της

τυχαίας μεταβλητής  $\frac{\sqrt{\nu} \mathbf{X}}{\sqrt{S}}$  με  $S \sim X_{\nu}^2$  και  $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{0}, R)$ , με S και  $\mathbf{X}$  ανεξάρτητα μεταξύ τους. Γενικά, λέμε ότι ένα τυχαίο διάνυσμα  $\mathbf{X}$  ακολουθεί την πολυδιάστατη (n) t κατανομή, με μέσο  $\mu$  και πίνακα συνδιακυμάνσεων  $\frac{\nu}{\nu - 2} \cdot \Sigma$  (για  $\nu > 2$ ), αν και μόνο αν ισχύει ότι :

$$\mathbf{X} = \mu + \sqrt{\frac{\nu}{S}} \cdot \mathbf{Z}, \quad (3.25)$$

όπου  $\mu \in \mathfrak{R}^n$ ,  $S \sim X_{\nu}^2$  και  $\mathbf{Z} \sim N_n(\mathbf{0}, \Sigma)$ , με S και  $\mathbf{Z}$  ανεξάρτητες. Για  $\nu \leq 2$ , η ο πίνακας συνδιακυμάνσεων δεν ορίζεται.

Καθώς, η πολυμεταβλητή t κατανομή δίνεται από τον τύπο :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu + d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \cdot \sqrt{(\pi \cdot \nu)^d \cdot |\Sigma|}} \cdot \left(1 + \frac{(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu + d}{2}}, \quad (3.26)$$

χρησιμοποιώντας την σχέση 3.24, η t copula θα δίνεται από την σχέση :

$$C_{\nu,R}^t(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \cdot \sqrt{(\pi \cdot \nu)^d \cdot |P|}} \cdot \left(1 + \frac{(\mathbf{x})^T P^{-1} \cdot \mathbf{x}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} d\mathbf{x}, \quad (3.27)$$

όπου P : ο πίνακας συσχέτισης που προκύπτει από την διαμέριση του τετραγωνικού συμμετρικού πίνακα Σ.

Στην ειδική περίπτωση, μάλιστα, όπου το διάνυσμα των παραγόντων έχει μόνο δύο συντεταγμένες, τότε η t corula θα έχει την παρακάτω μορφή :

$$C_{\nu,R}^t(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-R_{12}^2)}} \cdot \left\{1 + \frac{s_1^2 - 2 \cdot R_{12} \cdot s_1 \cdot s_2 + s_2^2}{\nu(1-R_{12}^2)}\right\}^{-\frac{\nu+2}{2}} ds_1 ds_2 \quad (3.28)$$

Όπως και για την Gaussian corula, έτσι και για τις t – corula, οι δείκτες γραμμικής συσχέτισης του Pearson, του Spearman και του Kendall, θα υπολογίζονται από τους τύπους (3.12), (3.15) και (3.20) αντίστοιχα. Ακόμη και για τον δείκτη συσχέτισης στην ουρά υπάρχουν κάποια κοινά σημεία. Αρχικά, όπως είναι γνωστό, η t κατανομή είναι, και εκείνη, συμμετρική. Χρησιμοποιώντας, συνεπώς, χωρίς βλάβη της γενικότητας, τον δείκτη συσχέτισης για την άνω ουρά, όπως εκείνος δίνεται από την σχέση 3.7, και εφαρμόζοντας το Θεώρημα De L' Hopital στην σχέση 3.21, έχει αποδειχθεί ότι δίνεται από την σχέση :

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{t}_{\nu+1} \cdot \left( \left( \frac{\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu+x^2}} \right) \cdot \left( \frac{x - R_{12} \cdot x}{\sqrt{1+R_{12}}} \right) \right) = \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{t}_{\nu+1} \cdot \left( \left( \frac{\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\frac{\nu}{x^2} + 1}} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}} \right) \right) \quad , \quad (3.29)^{18} \end{aligned}$$

οπότε, βάζοντας την τιμή του ορίου μέσα στην παράσταση, στην τελευταία σχέση, προκύπτει ότι :

$$\lambda = 2 \cdot \bar{t}_{\nu+1} \cdot \left( \sqrt{(\nu+1)} \cdot \frac{1-R_{12}}{1+R_{12}} \right) \quad (3.30)$$

Από προηγούμενες σχέσεις, αλλά και όταν έγινε η αναφορά για εκείνον, ο δείκτης συσχέτισης  $R_{12}$  παίρνει τιμές στο διάστημα [-1, 1]. Για κάθε τιμή μεγαλύτερη από -1, έχει αποδειχθεί ότι, οι t corulas, αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διδιάστατο διάνυσμα παραγόντων, εμφανίζουν ασυμπτωτικά σχέση συσχέτισης (εξάρτησης) στην ουρά, γεγονός

<sup>18</sup> Έχει αποδειχθεί ότι αν ένα διάνυσμα  $(X_1, X_2) \sim t_2(\nu, \mathbf{0}, P)$ , τότε για την κατανομή της τυχαίας

μεταβλητής  $X_2 \leq x | X_1 = x$ , έχουμε ότι  $\sqrt{\left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2}\right)} \cdot \frac{X_2 - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim t_1(\nu+1, 0, 1)$ .

που αποτελεί μία διαφορετική συμπεριφορά από τις Gaussian. Ωστόσο, αν οι βαθμοί ελευθερίας της κατανομής  $t$  απειριστούν, δηλαδή  $\nu = +\infty$ , η συμπεριφορά στην ουρά της πολυμεταβλητής κατανομής  $t$ , είναι ακριβώς η ίδια με τις Gaussian. Το γεγονός αυτό συμβαίνει καθώς η κατανομή  $t$  έχει μετατραπεί σε Gaussian.

Οι δείκτες για την ουρά, τόσο στην περίπτωση των Gaussian που αναφέραμε προηγουμένως, όσο και για τις  $t$  copulas, είναι εκφρασμένες σε όρους ασυμπτωτικών ποσοτήτων. Για να μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην πράξη, θα πρέπει να εξεταστούν οι πιθανότητες οι συντεταγμένες του διανύσματος των παραγόντων να ξεπερνάνε ένα συγκεκριμένο κατώφλι, μέσα από την από κοινού συνάρτηση κατανομής τους ή όπως εκείνα λέγονται, **joint quantile exceedance probabilities**. Σε παρακάτω ενότητα, όπου για κάθε μία από τις copulas παρατίθενται παραδείγματα, θα αναλύσουμε περαιτέρω την χρησιμότητά τους, ειδικά στις περιπτώσεις των elliptical copulas, Gauss και  $t$ , καθώς και οι δύο έχουν πεπερασμένες ουρές.

### **Archimedean Copulas**

Οι περισσότερες copulas, όπως και οι ελλειπτικές που εξετάσαμε στις παραπάνω ενότητες, βασίζονται στο θεώρημα του Sklar, καθώς αποτελούν τις συναρτήσεις κατανομής των συντεταγμένων ενός διανύσματος που είναι κατανεμημένες με μία εκ των ελλειπτικών κατανομών. Το γεγονός εκείνο είναι που τις κάνει και έχουν και έναν πολύ εύκολο τρόπο στο να προσαρμοστούν σε δεδομένα. Ωστόσο, οι μεγάλες και καθόλου εύχρηστες εκφράσεις των τύπων τους αλλά και η συμμετρία στην ουρά που έχουν, αποτέλεσαν προβλήματα, κυρίως στην μελέτη των ακραίων χρηματοοικονομικών φαινομένων. Για την αντιμετώπιση, συνεπώς, των μειονεκτημάτων εκείνων, αναπτύχθηκαν οι *Archimedean Copulas*.

Η διαφορετικότητά τους, έναντι των προηγούμενων, έγκειται, αρχικά, στο γεγονός ότι η ανάπτυξή τους δεν βασίζεται στο θεώρημα του Sklar. Παράλληλα, η πιο εύχρηστη μορφή των σχέσεων τους δίνει την δυνατότητα να εξεταστούν περισσότερες από ένα είδος συσχέτισης. Ωστόσο, αυτό ενδεχομένως να εγκυμονεί κάποιες δυσκολίες στην εφαρμογή τους καθώς η μετάβαση από την διδιάστατη στην πολυδιάστατη περίπτωση ενδεχομένως να απαιτεί περισσότερη τεχνική επεξεργασία, κάτι που δεν ήταν εμφανίσιμο στις ελλειπτικές κατανομές αλλά και δεν αφήνουν περιθώριο στον ερευνητή να θέσει ελεύθερα τις παραμέτρους που επιθυμεί στον πίνακα συσχετίσεων καθώς αρκετές από εκείνες, εξαιτίας της δομής των copula αυτών, είναι υποχρεωτικό να είναι ίδιες με κάποιες που ενδεχομένως να προϋπάρχουν μέσα. Πότε, ωστόσο, χαρακτηρίζεται μία copula ως Archimedean;

Αν για μία copula, υπάρχει μία συνάρτηση που καλείται **γεννήτρια**, για την οποία και θα ισχύει :

$$C(\mathbf{u}) = \varphi\left(\varphi^{(-1)}(u_1), \dots, \varphi^{(-1)}(u_d)\right), \quad (3.31)$$

με  $d$  : η διάσταση του διανύσματος  $\mathbf{u} \in I^d$ , καλείται **Archimedean Copula** και συμβολίζεται  $C_\varphi(\mathbf{u})$ .

Ως γεννήτρια, θεωρείται μία συνάρτηση  $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow I$  η οποία είναι συνεχής φθίνουσα με  $\varphi(0) = 1$ . Μάλιστα θα λέμε ότι θα είναι και γνησίως (φθίνουσα) σε ένα διάστημα  $[0, t_0]$  αν και μόνο αν ισχύει  $t_0 := \min\{t > 0 : \varphi(t) = 0\}$ .

Αν η γεννήτρια είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της, τότε θα καλείται και **γνήσια**, δηλαδή θα ισχύει ότι  $\varphi(t) > 0$  για κάθε  $t$  και σε αυτή την περίπτωση, οι Archimedean Copulas θα καλούνται **γνήσιες Archimedean Copulas**. Συνεπώς, η σχέση 3.31 θα πάρει την μορφή :

$$C(\mathbf{u}) = \varphi(\varphi^{-1}(u_1), \dots, \varphi^{-1}(u_d)) \quad (3.32)$$

Η 3.32 προκύπτει, με προφανή τρόπο, από τον ορισμό της συνάρτησης  $\varphi^{(-1)}$ . Για την **pseudo αντίστροφη συνάρτηση**, όπως καλείται, ισχύει ότι :

$$\varphi^{(-1)}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) < t \leq +\infty \end{cases} \quad (3.33)$$

Από τους δείκτες συσχέτισης, που εξετάστηκαν σε παραπάνω ενότητα, εκείνος του Kendall συμβάλλει στην καλύτερη προσαρμογή των Archimedean Copulas σε εμπειρικά δεδομένα. Πιο συγκεκριμένα, όπως έχει αποδειχθεί από τον Nelsen, το 1999, ο δείκτης του Kendall, για την διδιάστατη περίπτωση των Archimedean Copulas, θα δίνεται από την σχέση :

$$\rho_T(X, Y) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{d(\ln(\varphi(t)))}{dt} dt \quad (3.34)$$

Στην οικογένεια των Archimedean Copulas ανήκουν αρκετές από τις γνωστές, στην διεθνή βιβλιογραφία, copulas. Για κάθε μία συγκεκριμένη μορφή της γεννήτριας συνάρτησης, προκύπτει και μία copula.

### **The Gumbel – Hougaard Copulas**

Οι Gumbel, όπως είναι γνωστές, copulas, θα δίνονται από τον τύπο :

$$C_\theta^{GH}(\mathbf{u}) = \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^d (-\ln(u_i))^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right), \quad (3.35)$$

όπου για την παράμετρο  $\theta$  θα πρέπει να ισχύει ότι :  $\theta \geq 1$  και εκφράζει την σχέση συσχέτισης. Στην περίπτωση, μάλιστα, όπου η  $\theta = 1$ , τότε λέμε ότι υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των συντεταγμένων του διανύσματος ενώ αν  $\theta \rightarrow +\infty$ , υπάρχει πλήρης εξάρτηση. Η γεννήτρια συνάρτηση, σε αυτή την περίπτωση, δίνεται από την σχέση :

$$\varphi(t) = \exp\left(-t^{\frac{1}{\theta}}\right) \quad (3.36)$$

Αν το διάνυσμα των παραγόντων αποτελείται μόνο από δύο συντεταγμένες, τότε για  $d=2$ , η σχέση 3.35 παίρνει την μορφή :

$$C_{\theta}^{GH}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^{\theta} + (-\ln u_2)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) \quad (3.37)$$

Οι Gumbel copulas είναι συνεχείς και χαρακτηρίζονται ως copula ακραίων τιμών η οποία πιάνει διαφορετικές σχέσεις εξάρτησης σε περιόδους κρίσης. Για τις συσχετίσεις στην ουρά, μελετώντας την διδιάστατη περίπτωση, έχει αποδειχθεί ότι στην κάτω ουρά ισχύει ότι  $\lambda_L(X, Y) = 0$  και για την άνω ουρά, ισχύει ότι  $\lambda_U(X, Y) = 2 - \sqrt[2]{2}$ . Κατά αυτόν τον τρόπο, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι οι Gumbel Copulas παρουσιάζουν μία σχέση εξάρτησης στην άνω, δεξιά, ουρά.

Τέλος, όσον αφορά τις Gumbel Copulas, χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.34), ο δείκτης συσχέτισης του Kendall είναι ίσος με :

$$\tau(\theta) = 1 - \frac{1}{\theta} \quad (3.38)$$

### **The Clayton Copulas**

Μία Copula θα λέμε ότι ανήκει σε αυτόν τον τύπο των Archimedean Copulas, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση :

$$C_{\theta}^{CL}(\mathbf{u}) = \left(\sum_{i=1}^d \frac{1}{u_i^{\theta}} - (d-1)\right)_{+}^{-\frac{1}{\theta}}, \quad (3.39)$$

όπου για την παράμετρο συσχέτισης  $\theta$  θα πρέπει να ισχύει :  $\theta \geq -\frac{1}{d-1}$ . Στην περίπτωση όπου  $\theta = 0$ , τότε η Clayton Copula παρουσιάζει συμπεριφορά πλήρους ανεξαρτησίας ενώ για  $\theta \rightarrow +\infty$  το ακριβώς αντίθετο.

Όπως φαίνεται και από τον τύπο των Copula αυτών, 3.39, οι Clayton Copulas αποτελούν αποτέλεσμα του της «μείξης» του τύπου 3.32 με την γεννήτρια συνάρτηση :

$$\varphi_{\theta}(t) = (1 + \theta \cdot t)_{+}^{-\frac{1}{\theta}} \quad (3.40)$$

Στην διδιάστατη περίπτωση, ο τύπος της (3.39), γίνεται :

$$C_{\theta}^{CL}(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1) \quad (3.41)$$

Η συσχέτιση που υπάρχει στην ουρά ακολουθεί την αντίθετη, από τις Gumbel, συμπεριφορά. Πιο αναλυτικά, εξετάζοντας, και πάλι, την διδιάστατη περίπτωση : Εξαιτίας του γεγονότος ότι ο συντελεστής της άνω ουράς είναι ίσος με μηδέν, παρουσιάζουν

μηδενική εξάρτηση των μεταβλητών στο σημείο εκείνο. Παράλληλα, ο δείκτης συσχέτισης της κάτω, αριστερής, ουράς, που δίνεται από την σχέση :

$$\lambda_U(X, Y) = \sqrt[3]{2}, \quad (3.42)$$

καταδεικνύει ότι οι Gumbel Copulas εμφανίζουν σχέση εξάρτησης – συσχέτισης στην κάτω αριστερή ουρά.

Ο δείκτης συσχέτισης του Kendall σε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιώντας, για ακόμη μία φορά την σχέση (3.34), προκύπτει ότι είναι ίσος με :

$$\tau(\theta) = \frac{\theta}{\theta + 2} \quad (3.43)$$

### **Frank Copulas**

Μία ακόμη οικογένεια των Archimedean Copulas είναι οι Frank Copulas. Η σχέση η οποία της διέπει είναι η ακόλουθη :

$$C_{\theta}^{Fr}(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\theta} \cdot \ln \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^d (e^{-\theta \cdot u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{d-1}} \right) \quad (3.44)$$

με την παράμετρο συσχέτισης  $\theta$  να είναι αυστηρά θετική. Στην περίπτωση όπου είναι ίση με μηδέν, τότε οι Frank Copulas παρουσιάζουν συμπεριφορά ανεξαρτησίας.

Η γεννήτρια, σε αυτήν την περίπτωση, είναι ίση με :

$$\varphi_{\theta}(t) = -\frac{1}{\theta} \ln(1 - (1 - e^{-\theta}) \cdot e^{-t}) \quad (3.45)$$

Ένα κύριο χαρακτηριστικό των Frank copulas είναι ότι αποτελούν, κατά μία έννοια, την σύνδεση των Archimedean με τις Gaussian. Η εξήγηση που μπορεί να αποδοθεί, έγκειται στο γεγονός ότι, όπως και οι Gaussian, έτσι και οι Frank Copulas παρουσιάζουν συμμετρία στις ουρές. Συνεπώς, χωρίς βλάβη της γενικότητας, αν πάρουμε τον τύπο για τον δείκτη εξάρτησης της κάτω, αριστερής, ουράς, όπως εκείνος δίνεται από την σχέση (3.8) ή (3.9) αν αναφερόμαστε σε περίπτωση exchangeable copulas, προκύπτει ότι  $\lambda_L(X, Y) = 0$ . Κατά αυτόν τον τρόπο, οι Frank Copulas αποτελούν, όπως και οι Gaussian, παράδειγμα συμμετρικών copulas, κάτι που καθιστά, και εκείνες, ως ένα μη πολύτιμο εργαλείο, ειδικά στον τομέα της μελέτης των συσχετίσεων μεταξύ των χρηματοοικονομικών – χρηματιστηριακών αποδόσεων.

Φυσικά, όπως και στις προηγούμενες copulas, η παραπάνω ανάλυση συνδέεται άρρηκτα με την διδιάστατη περίπτωση, όπου η σχέση (3.40) γίνεται :

$$C_{\theta}^{FR}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \cdot \ln\left(1 + \frac{(e^{-u_1 \cdot \theta} - 1) \cdot (e^{-u_2 \cdot \theta} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right) \quad (3.46)$$

με την παράμετρο συσχέτισης, στην περίπτωση αυτή, να μπορεί να πάρει και αυστηρά αρνητικές τιμές.

Για τον δείκτη συσχέτισης του Kendall, με βάση την σχέση (3.34), έχει υπολογιστεί ίσος με :

$$\tau(\theta) = 1 - \frac{4}{\theta} + \frac{4}{\theta^2} \int_0^{\theta} \frac{t}{e^t - 1} dt \quad (3.47)$$

Ωστόσο, το ολοκλήρωμα που υπάρχει στην παραπάνω σχέση, αποτελεί την **Debye function**, της οποίας το όρισμα είναι και το ακόλουθο :

$$D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{t}{e^t - 1} dt \quad (3.48)$$

Κατά αυτόν τον τρόπο, η σχέση για τον δείκτη συσχέτισης του Kendall για την Frank Copula γίνεται :

$$\tau(\theta) = 1 - \frac{4}{\theta} + \frac{4}{\theta} D_1(\theta) \quad (3.49)$$

### **Symmetrised Joe – Clayton Copula**

Μέσα από έρευνες (Ang and Chen (2002)), αλλά και από την μελέτη των χρηματαγορών, έχει παρατηρηθεί το φαινόμενο της ασύμμετρης συσχέτισης των μεταβλητών στην ουρά της κατανομής<sup>19</sup>. Κατά αυτόν τον τρόπο, θα πρέπει να μελετηθεί αν εμφανίζεται η όχι το φαινόμενο εκείνο της ασυμμετρίας.

Η Joe – Clayton Copula, όπως εκείνη αποδείχθηκε από τον Patton το 2003 για να μοντελοποιήσει την ασυμμετρία που υπήρχε μέσα στην ισοτιμία Ιαπωνικού Γιεν και Αμερικάνικου Δολαρίου, αποτελεί μία copula που εμφανίζει ασυμμετρία ακόμη και στην περίπτωση όπου υπάρχει πλήρης συμμετρία. Πιο αναλυτικά :

Αν ισχύει η σχέση :

$$C_{JC}(u_1, u_2 | \lambda_U, \lambda_L) = 1 - \left( \left\{ \left[ 1 - (1 - u_1)^{\kappa} \right]^{\gamma} + \left[ 1 - (1 - u_2)^{\kappa} \right]^{\gamma} - 1 \right\}^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad (3.50)$$

<sup>19</sup> Πιο συγκεκριμένα, έχει αποδειχθεί ότι η συμπεριφορά των αποδόσεων δύο χρηματοοικονομικών προϊόντων γίνεται πιο έντονα ασύμμετρη σε περιόδους κρίσης. Το γεγονός αυτό μπορεί να φανεί ακόμη πιο πολύ στον πιστωτικό κίνδυνο όπου ο δείκτης συσχέτισης μεταξύ, για παράδειγμα, εταιριών **του ίδιου κλάδου**, αγγίζει την μέγιστη τιμή του (η οποία είναι 24, με ελάχιστη την 12).



τότε η Copula χαρακτηρίζεται ως **Joe – Clayton Copula**. Το χαρακτηριστικό της σχέσης 3.50, ωστόσο, είναι ότι αποτελεί το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα μίας υποσυνθήκη copula<sup>20</sup>, καθώς, ο τύπος της είναι δεσμευμένος ως προς τους δείκτες εξάρτησης για την άνω και την κάτω ουρά και γι' αυτόν τον λόγο οι παράμετροι  $\kappa$ ,  $\gamma$  που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση, συνδέονται άμεσα με εκείνους. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι :

$$\kappa = (\log_2(2 - \lambda_U))^{-1}$$

$$\gamma = -\frac{1}{\log_2(\lambda_L)}$$

με τους δείκτες συσχέτισης  $\lambda_U$  και  $\lambda_L$  να ανήκουν στο διάστημα (0, 1).

Ωστόσο, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η ασυμμετρία που έγκειται ακόμη και αν υπάρχει πλήρης συσχέτιση, δηλαδή αν ίσχυε ότι  $\lambda_U = \lambda_L$ , ενδεχομένως να οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτελέσματα. Διαπιστώνοντας την αδυναμία αυτή, ο Patton, το 2006, δημιούργησε την **symmetrised Joe – Clayton Copula** για την οποία ισχύει ότι :

$$C_{SJC}(u_1, u_2 | \lambda_U, \lambda_L) = \frac{1}{2} \cdot [C_{JC}(u_1, u_2 | \lambda_U, \lambda_L) + C_{JC}(1 - u_1, 1 - u_2 | \lambda_U, \lambda_L)] + u_1 + u_2 - 1.$$

Με την Copula εκείνη, η οποία, όπως είναι προφανές, αποτελεί μία τροποποίηση της σχέσης (3.50), εξαλείφοντας το μειονέκτημά της να δηλώνει ασυμμετρία ακόμη και όταν δεν υπάρχει.

### 3.2. Multivariate Extreme Value Theory

Όπως έχουμε περιγράψει και στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, θα ασχοληθούμε με την μετάβαση από την μονομεταβλητή στην πολυμεταβλητή ανάλυση της θεωρίας των ακραίων τιμών, με τον πιο διαδεδομένο τρόπο, μέσω των copulas, όπως εκείνες αναλύθηκαν ακριβώς παραπάνω. Και σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει ο διαχωρισμός των τρόπων υπολογισμού των ακραίων τιμών σε **block maxima** και **threshold exceedances**.

#### 3.2.1. Multivariate Block Maxima

Όπως και στην μονομεταβλητή, έτσι και σε αυτή την περίπτωση, η διαδικασία παραμένει η ίδια. Χωρίζουμε το υπό μελέτη δείγμα σε  $m$  ομάδες, και βρίσκουμε το μέγιστο κάθε μία από τις ομάδες που έχουν δημιουργηθεί. Ωστόσο, το μέγιστο αυτό θα αποτελεί ένα διάνυσμα από τα μέγιστα για τον κάθε παράγοντα.

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα με περιθώριες συναρτήσεις κατανομής  $F_1, \dots, F_d$ . Για κάθε έναν από τους παράγοντες, συνεπώς, και για κάθε υποομάδα που έχει δημιουργηθεί, το

<sup>20</sup> Έστω οι μεταβλητές  $X, Y, W$ . Αν ισχύει ότι  $X | W \sim F$  και  $Y | W \sim G$ , τότε ως Conditional (υποσυνθήκη) Copula των μεταβλητών  $U, V$ , που αποτελούν τις συναρτήσεις  $F, G$  των παραπάνω τυχαίων μεταβλητών αντίστοιχα, καλείται η από κοινού συνάρτηση κατανομής των  $U, V$  δοθέντος της τυχαίας μεταβλητής  $W$ . Το Θεώρημα αυτό καλείται και **Υποσυνθήκη (Conditional) Θεώρημα του Sklar**.

διάνυσμα  $M_{n,j} = \max(X_{1,j}, \dots, X_{n,j})$ , με τον υποδείκτη  $j$  να δηλώνει τον παράγοντα και να παίρνει τιμές  $j = 1, \dots, d$ . Σκοπός, συνεπώς, είναι η μοντελοποίηση του τυχαίου διανύσματος  $M_n = (M_{n,1}, \dots, M_{n,d})$ . Παράλληλα, υποθέσουμε δύο διανύσματα  $\alpha_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,d})$  και  $\beta_n = (\beta_{n,1}, \dots, \beta_{n,d})$ . Κατά αυτόν τον τρόπο το διάνυσμα  $M_n$  παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\frac{M_n - \beta_n}{a_n} = \left( \frac{M_{n,1} - \beta_{n,1}}{a_{n,1}}, \dots, \frac{M_{n,d} - \beta_{n,d}}{a_{n,d}} \right), \quad (3.51)$$

μετατρέποντάς το σε «κανονικό», υποδηλώνοντας, ταυτοχρόνως, ότι το διάνυσμα  $\alpha_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,d})$  θα πρέπει να είναι αυστηρά θετικό.

Σκοπός, συνεπώς, είναι να βρεθεί η κατανομή για το διάνυσμα της σχέσης (3.51). Υποθέτοντας ότι η από κοινού συνάρτηση κατανομής του συμβολίζεται με  $H$ , έχει αποδειχθεί ότι η κατανομή αυτή καλείται **Multivariate Extreme Value (MEV)**, που αποτελεί την γενίκευση της μονομεταβλήτης **Generalized Extreme Value**, όπως εκείνη προσαρμόστηκε στο αντίστοιχο κεφάλαιο, και ισχύει ότι :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - \beta_n}{a_n} \leq x\right) = F^n(a_n \cdot x + \beta_n) = H(x) \quad (3.52)$$

Μάλιστα, η συνάρτηση κατανομής  $H(x)$  είναι πιθανό να ανήκει σε μία από τις οικογένειες κατανομών Frechet, Gumbel και Weibull αν και μόνο αν, η συνάρτηση αυτή κάθε αυτή, δεν έχει μάζα πιθανότητας σε ένα σημείο. Πιο συγκεκριμένα, οι Fisher, Tippett (1928) και ο Gnedenko (1943), απέδειξαν ότι, για την ιδιότητα της  $H(x)$  παραπάνω και για τα διανύσματα που συμβάλλουν στην κανονικοποίηση του διανύσματος  $M_n = (M_{n,1}, \dots, M_{n,d})$ ,  $\alpha_n$ , το οποίο και πρέπει να είναι θετικό, και  $\beta_n$ , ισχύει ότι :

$$a_n \cdot (M_n - \beta_n) \xrightarrow{d} H, \quad (3.53)$$

τότε η  $H(x)$  αποτελεί μέλος των παραπάνω αναφερόμενων οικογενειών κατανομών, όπου για κάθε μία, και με βάση την σχέση 3.52, παίρνει την εξής μορφή :

### Frechet

$$\Phi_a(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-a}), & x, a > 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

### Gumbel

$$\Psi_a(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{-a}), & x \leq 0, a > 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

### Weibull

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathfrak{R}, \quad (3.56)$$

με τις  $\Lambda(x)$ ,  $\Phi_\alpha(x)$  και  $\Psi_\alpha(x)$  να καλούνται **standard extreme value distributions** και μπορούν να παρασταθούν από την GEV, όπως εκείνη αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο της μονομεταβλητής ανάλυσης.

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό σε συνδυασμό με το θεώρημα του Sklar, προκύπτει ότι, για κάθε διάνυσμα που ακολουθεί την GEV, υπάρχει μία και μοναδική Copula για την οποία και θα ισχύει ότι :

$$C(\mathbf{u}^T) = C^T(\mathbf{u}) \quad (3.57)$$

Η Copula που πληροί την παραπάνω σχέση, καλείται **Extreme Value Copula** και είναι εκείνες που χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση της MEV. Μάλιστα, στην ειδική περίπτωση όπου το διάνυσμα των παραγόντων είναι διδιάστατο, μία Copula θα θεωρείται extreme value, αν και μόνο αν ισχύει :

$$C(u_1, u_2) = \exp\left\{\ln(u_1, u_2) \cdot A\left(\frac{\ln u_1}{\ln u_1 + \ln u_2}\right)\right\}^{21}, \quad (3.58)$$

με την συνάρτηση  $A : [0,1] \rightarrow [0,1]$  να καλείται **συνάρτηση συσχέτισης (dependence function)** και να ορίζεται ως ακολούθως :

$$A(w) = \int_0^1 \max((1-x)w, (1-w)x) dH(x) \quad (3.59)$$

Η παραπάνω σχέση, και λόγω των ορίων των ιδιοτήτων της σχέσης (3.1.4) της αναφοράς 21, έχει αποδειχθεί ότι μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή :

$$A(w) = -\ln C(e^{-w}, e^{-(1-w)}), \quad w \in [0,1] \quad (3.60)$$

για κάθε copula που ικανοποιεί την σχέση (3.58)

<sup>21</sup> Η σχέση (3.58) προκύπτει ως μία ειδική περίπτωση της πολυμεταβλητής αναπαράστασης των

$$\text{Extreme Value Copulas, } C(u_1, \dots, u_d) = \exp\left(\left(\sum_{i=1}^d \ln u_i\right) \cdot B\left(\frac{\ln u_1}{\sum_{i=1}^d \ln u_i}, \dots, \frac{\ln u_d}{\sum_{i=1}^d \ln u_i}\right)\right) \quad (3.1.4),$$

όπως εκείνη αποδείχθηκε από τον **Pickands (1975)**. Για το όρισμα της συνάρτησης  $B(w)$  ισχύει ότι :

$$B(w) = \int_{S_d} \max(x_1 w_1, \dots, x_d w_d) dH(x), \quad (3.1.5)$$

$$\text{με } S_d := \left\{ \mathbf{x} : \sum_{i=1}^d x_i = 1, \forall x_i > 0 \right\}.$$

<sup>22</sup> Για την συνάρτηση αυτή, είναι απαραίτητο να ισχύει ότι :

$$\max(w, 1-w) \leq A(w) \leq 1, \quad 0 \leq w \leq 1. \quad (3.1.6)$$

Πολλές από τις οικογένειες των copulas, που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, και με την κατάλληλη μορφή της dependence function της σχέσης (3.60), μπορούν να οδηγήσουν σε EV – Copulas. Οι πιο διαδεδομένες είναι οι : t – EV, Gumbel EV και Galambos EV<sup>23</sup>.

Όσον αφορά την t – EV copula, αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (3.28) με τις ιδιότητες που την διέπουν, η (3.58) θα παριστάνει μία t – EV Copula αν και μόνο αν ισχύει :

$$A(w) = \left( w \left( \frac{\sqrt[\nu]{\left(\frac{w}{1-w}\right) - \rho}}{\sqrt{1-\rho^2}} \sqrt{\nu+1} \right) + (1-w) \left( \frac{\sqrt[\nu]{\left(\frac{w}{1-w}\right) - \rho}}{\sqrt{1-\rho^2}} \sqrt{\nu+1} \right) \right) \cdot t_{\nu+1} \quad (3.61)$$

Στην περίπτωση όπου :

$$A(w) = (1-a)w + (1-w)(1-\beta) + \varrho \sqrt{(aw)^\theta + (\beta(1-w))^\theta}, \quad (3.62)$$

τότε χρησιμοποιώντας την σχέση (3.58), αλλά και τον τύπο (3.37) για την Gumbel Copula, προκύπτει ότι η Gumbel EV Copula, θα δίνεται από την σχέση :

$$C(u_1, u_2) = u_1^{1-a} u_2^{1-\beta} \exp \left\{ - \varrho \sqrt{(-a \ln u_1)^\theta + (-\beta \ln u_2)^{1-\theta}} \right\} \quad (3.63)$$

Τέλος, όσον αφορά την Galambos EV Copula, εκείνη προκύπτει αν η (3.59) διαμορφωθεί ως εξής :

$$A(w) = 1 - \left( \varrho \sqrt{(aw)^{-\theta} + (\beta(1-w))^{-\theta}} \right)^{-1}, \quad (3.64)$$

τότε προκύπτει ότι :

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 \exp \left\{ \left( \varrho \sqrt{(-a \ln u_1)^{-\theta} + (-\beta \ln u_2)^{-\theta}} \right)^{-1} \right\} \quad (3.65)$$

Όπως είναι προφανές, η t – EV Copula έχει ένα πολύπλοκο τύπο σε αντίθεση με τις Galambos – Gumbel EV Copulas. Μάλιστα, για τις τελευταίες, όπως μπορεί εύκολα να γίνει αντιληπτό μέσω των σχέσεων (3.63) και (3.65), έχουν ισοδύναμη δομή, γεγονός που διευκολύνει όσον αφορά την εκτίμηση των παραμέτρων των συναρτήσεων των copulas αυτών με την μέθοδο της **μεγίστης πιθανοφάνειας**, όπου όπως και στην περίπτωση της μονομεταβλητής Θεωρίας Ακραίων Τιμών, έτσι και εδώ, για την εκτίμηση των παραμέτρων της κάθε copula, θα μεγιστοποιήσουμε ισοδύναμα την λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας, κάτι το οποίο μπορεί να γίνει και παραμετρικά αλλά και μη.

#### **Παραμετρικός και Μη Τρόπος Εκτίμησης Μέγιστης Πιθανοφάνειας**

<sup>23</sup> Για λόγους ευκολίας, όπως έχουμε κάνει και σε άλλες περιπτώσεις, θα χρησιμοποιήσουμε την διδιάστατη περίπτωση.

Ο παραμετρικός τρόπος, όπως θεμελιώθηκε από τους McLeish, Small το 1988 και αναπτύχθηκε ενδελεχώς από τον Joe το 1997, επικεντρώνεται στην μεγιστοποίηση της συνάρτησης :

$$l(\vartheta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1,t}; \vartheta_1), F_2(x_{2,t}; \vartheta_2); \vartheta) + \sum_{t=1}^T (\ln f_1(x_{1,t}; \vartheta_1) + \ln f_2(x_{2,t}; \vartheta_2)) \quad (3.66)$$

όπου παραγωγίζοντας και θέτοντας την ίση με το μηδέν, προκύπτει ο εκτιμητής ίσος με :

$$\hat{\vartheta} = \arg \max_{\vartheta} l(\vartheta) \quad (3.67)$$

Ωστόσο, λόγω της πολυπλοκότητάς της για μεγάλες διαστάσεις του διανύσματος των παραγόντων, οι Shih, Louis (1995) και Joe, Xu (1996) ανέπτυξαν την *inference function for margin* (IMF), κατά την οποία μεγιστοποιείται η παραπάνω συνάρτηση **δοθέντος** των περιθώριων συναρτήσεων μέσα σε δύο φάσεις. Αρχικά εκτιμώνται οι παράμετροι της περιθώριας κατανομής και μετά, σε δεύτερη φάση, οι παράμετροι της copula που συνδέονται με εκείνες της περιθώριας κατανομής. Το πλεονέκτημά της, πέρα από την εφαρμογή της σε διανύσματα πολλαπλών διαστάσεων, έγκειται και στο γεγονός ότι έχει αποδειχθεί η ιδιότητα της συνέπειας και της ασυμπτωτικής κανονικότητας κάτω από φυσιολογικές συνθήκες.

Παρά το θεωρητικό υπόβαθρο των δύο παραπάνω παραμετρικών μεθόδων, στην πράξη δεν χρησιμοποιούνται καθώς θέτει την προϋπόθεση είναι γνωστή η περιθώρια κατανομή ή copula. Η μη παραμετρική μέθοδος<sup>24</sup>, αρκετά όμοια με την προηγούμενη αλλά εκτιμά μη παραμετρικά τις παραμέτρους της περιθώριας κατανομής, βασιζόμενη στο θεώρημα του Sklar, δημιουργεί ένα pseudo sample  $\hat{U}_i = (\hat{U}_{i,1}, \dots, \hat{U}_{i,d})$  όπου και εκτιμά τις συντεταγμένες του με μία pseudo συνάρτηση πιθανοφάνειας, που δίνεται από την σχέση :

$$\hat{F}_j(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_{i,j} \leq x\}}, \quad (3.68)$$

εκτιμά τις παραμέτρους, μεγιστοποιώντας την λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας :

$$l(\vartheta; \hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n) = \sum_{i=1}^n \log c_{\vartheta}(\hat{U}_i) \quad (3.69)$$

### **Conditional Case**

Μία ακόμη εφαρμόσιμη μέθοδος θεωρείται η περίπτωση εκτίμησης παραμέτρων μέσω της υποσυνθήκης συνάρτησης πιθανοφάνειας κατά την οποία και βασικό ρόλο έχει το υποσυνθήκη θεώρημα του Sklar.

Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα που περιγράφεται στην αναφορά 20, θα ισχύει ότι :

<sup>24</sup> Όπως εκείνη αναπτύχθηκε από τους Genest et al το 1995

$$H(x_1, x_2 | w) = C(F_1(x_1 | w), F_2(x_2 | w) | w) \quad (3.70)$$

Συνεπώς, με βάση το Θεώρημα του Sklar, και παραγωγίζοντας, με βάση την σχέση

$$c(u_1, u_2 | w) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2 | w)}{\partial u_1 \partial u_2} \quad (3.71)$$

θα ισχύει ότι :

$$c(F_1(x_1 | w), F_2(x_2 | w) | w) \cdot f_1(x_1 | w) \cdot f_2(x_2 | w) \quad (3.72)$$

όπου  $f_i(x_i | w)$  οι συναρτήσεις πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών  $X_i | \mathbf{W} = \mathbf{w}$ .

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας θα βρεθεί από την παραγωγή της :

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1,t}; \theta_1 | w_t), \dots, F_n(x_{n,t}; \theta_n | w_t); \theta | w_t) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^2 \ln f_i(x_{i,t}; \theta_i | w_t) \quad (3.73)$$

με την εκτίμηση των παραμέτρων μα πραγματοποιείται με όποια από τις προαναφερόμενες μεθόδους μέγιστης πιθανοφάνειας.

### **Maximum Domain of Attraction**

Έχοντας πραγματοποιήσει την παραπάνω έρευνα, για τις copulas που ικανοποιούν την σχέση (3.52), είναι απόλυτα εμφανές ότι έχουμε προσεγγίσει τις περιθώριες κατανομές της H και όχι την extreme value copula της. Για να πραγματοποιηθεί αυτό, θα πρέπει οι περιθώριες εκείνες να αποτελούν και την Maximum Domain of Attraction της. Σύμφωνα με τον Galambos (1987), αυτό μπορεί να συμβεί αν υπάρχει μία Copula C για την οποία και να ισχύει :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C^t(\sqrt[t]{\mathbf{u}}) = C_0(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in [0,1]^d \quad (3.74)$$

Με την σχέση, πλέον, (3.74), η εύρεση της extreme value copula για την συνάρτηση της (3.52) εξαρτάται, αποκλειστικά και μόνο από την Copula  $C^{25}$ . Συνεπώς, και σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό, η Copula C χαρακτηρίζεται ως Copula Domain of Attraction.

**Ορισμός :** Αν για κάποια γνωστή Copula C και την extreme value copula της  $C_0$  ισχύει ότι :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1 - C(1 - sx_1, \dots, 1 - sx_d)}{s} = -\ln C_0(e^{-x_1}, \dots, e^{-x_d}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}_+^d \quad (3.75)$$

τότε η C χαρακτηρίζεται ως **copula domain of attraction** και συμβολίζουμε  $C \in CDA(C_0)$ .

<sup>25</sup> Ωστόσο, δεν αποτελεί και την μοναδική απεικόνιση. Πολλές περισσότερες έχουν αποδοθεί από τον Takahashi το 1994. Απλά, η συγκεκριμένη αποτελεί και την πιο διαδεδομένη.

Έχει αποδειχθεί, μάλιστα, ότι σε αυτή την περίπτωση, ο δείκτης συσχέτισης της άνω ουράς, αποτελεί και τον αντίστοιχο για την extreme value Copula  $C_0$ , αποτέλεσμα το οποίο είναι

σημαντικό καθώς αν  $\lambda_U = 0$ , τότε για την independence function  $A(w)^{26}$  ισχύει ότι

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

και, άρα, η extreme value Copula  $C_0$  αποτελεί μία independence Copula.

### 3.2.2. Multivariate Threshold Exceedances

Όπως έχουμε αναφέρει και στην περίπτωση της μονομεταβλητής θεωρίας ακραίων τιμών, έτσι και στην πολυμεταβλητή, είναι περισσότερο εμφανές ότι η μέθοδος της block maxima αποτελεί μία σπατάλη δεδομένων. Αυτός είναι και ο λόγος που αναπτύχθηκε ένα πιο ευέλικτο μοντέλο, που αποτελεί και την γενίκευση του αντίστοιχου μονομεταβλητού, η μέθοδος του **κατωφλιού** ή όπως είναι γνωστή **peak over threshold**. Για ακόμη μία φορά, σημαντικό ρόλο στην ανάλυση της μεθόδου αυτής κατέχει η Generalized Pareto Distribution. Η διαφορά, προφανώς, που έγκειται είναι ότι το κατώφλι θα αποτελεί, και εκείνο, ένα διάνυσμα, και μάλιστα της μορφής :  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ .

#### Parametric Methods

Μία συνήθης πρακτική είναι η μοντελοποίηση ενός τυχαίου πολυδιάστατου δείγματος με συνάρτηση κατανομής  $F$  που πληροί την ιδιότητα του Domain of Attraction για την MEV, όπως εκείνο έχει αναφερθεί παραπάνω. Έστω, συνεπώς, το διάνυσμα  $\mathbf{M}_n = (M_n^{(1)}, \dots, M_n^{(d)}) = (\max(X_i^{(1)}), \dots, \max(X_i^{(d)}))$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  όπου οι τις τυχαίες μεταβλητές  $X_i$  κατανέμονται με την συνάρτηση κατανομής  $F$ . Το διάνυσμα των μέγιστων τιμών για κάθε διάνυσμα, πραγματοποιώντας τυποποίηση, όπως και στην περίπτωση της block maxima, τότε θα ισχύει ότι :

$$P\left[\frac{M_n^{(i)} - \beta_n^{(i)}}{a_n^{(i)}} \leq x^{(i)}, 1 \leq i \leq d\right] = F^n(a_n^{(1)}x^{(1)} + \beta_n^{(1)}, \dots, a_n^{(d)}x^{(d)} + \beta_n^{(d)}) \rightarrow G(x) \quad (3.76)$$

Από την σχέση (3.52), η  $G(x)$  αποτελεί μία EV κατανομή και έχει την μορφή :

$$G(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \gamma_i \frac{x - \mu_i}{\sigma_i}\right)_+^{\frac{1}{\gamma_i}}\right), & \gamma_i \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mu_i}{\sigma_i}\right)\right), & \gamma_i = 0 \end{cases}, \quad (3.77)$$

με την παράμετρο  $\gamma$ , όπως και στην περίπτωση της μονομεταβλητής ανάλυσης, να αποτελεί την παράμετρο μορφής.

<sup>26</sup> Ο συντελεστής συσχέτισης της άνω ουράς και η συνάρτηση  $A(w)$  συνδέονται με την σχέση :

$$\lambda_U = 2 \cdot \left(1 - A\left(\frac{1}{2}\right)\right) \quad (3.1.7) \quad (\text{McNeil et al, 2005})$$

Από την σχέση (3.75) και για μεγάλο  $s$ , έχει αποδειχθεί από τους Smith, Tawn και Coles (1997) ότι για την κατανομή  $F$ , αν εκείνη έχει περιθώριες κατανομές από την Frechet κατανομή, ισχύει ότι :

$$F(x_1, \dots, x_d) \approx 1 + \ln G(x_1, \dots, x_d) \quad (3.78)$$

Ωστόσο, το πρόβλημα που δημιουργείται είναι όταν η  $F$  είναι ασυμπτωτικά ανεξάρτητη καθώς μπορεί να σπάσει η ιδιότητα της αμεροληψίας κατά την διαδικασία της εκτίμησης των παραμέτρων της. Στην περίπτωση αυτή, οι Tawn και Ledford το (1996), απέδειξαν ότι, χρησιμοποιώντας την σχέση (3.74), για την κατανομή  $F$  μπορεί να ισχύει :

$$F(x_1, \dots, x_d) \approx G(x_1, \dots, x_d) \quad (3.79)$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση 3.77, αποδεικνύεται ότι η περιθώρια κατανομή  $F$  δίνεται από την τύπο :

$$F_j(x) = 1 - \lambda_j \left\{ 1 + \xi_j \left( \frac{x - u_j}{\sigma_j} \right) \right\}_+^{-\frac{1}{\xi_j}} \quad (3.80)$$

με  $\lambda_j = \bar{F}_j(u_j)$ , με  $u_j$  να αποτελεί το κατώφλι για την  $j$  περιθώρια κατανομή. Όπως, ωστόσο, έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, η  $F$  έχουμε υποθέσει ότι ανήκει στην οικογένεια κατανομών Frechet. Την αμεροληψία την διατηρήσανε, αποδεικνύοντας ότι η σχέση (3.80) παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$F(x_1, \dots, x_d) = 1 - V \left\{ \lambda_1^{-1} \left( 1 + \xi_1 \frac{x_1 - u_1}{\sigma_1} \right)_+^{\frac{1}{\xi_1}}, \dots, \lambda_d^{-1} \left( 1 + \xi_d \frac{x_d - u_d}{\sigma_d} \right)_+^{\frac{1}{\xi_d}} \right\} \quad (3.81)$$

όπου η συνάρτηση  $V(\mathbf{x})$  δίνεται από την σχέση :

$$V(\mathbf{x}) = \int_{R^d} \max_{j=1, \dots, d} \left( \frac{w_j}{x_j} \right) dH(w) \quad (3.82)$$

για τιμές  $x$  που ξεπερνάνε το κατώφλι  $u_j$ . Η συνάρτηση  $H(w)$  αποτελεί ένα θετικό μετρό εξάρτησης που υπόκειται στην σχέση :

$$\int_{R^d} w_j dH(w) = 1 \quad (3.83)$$

Για την εκτίμηση, συνεπώς, των παραμέτρων της συνάρτησης  $G$ , αρκεί η μεγιστοποίησής της κάθε  $j$  περιθώριας κατανομής  $F$ , μέσω της μέγιστης πιθανοφάνειας, μέσω της σχέσης :

$$l_i = \frac{\partial^m F(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \Big|_{\{x_j = \max(u_j, y_j), j=1, \dots, d\}} \quad (3.84)$$



Όπως και στην περίπτωση της μονομεταβλητής ανάλυσης, ενδέχεται να μην υπάρχει δείγμα που να πληροί τις ιδιότητες iid, κάτι που συγκροτεί, άλλωστε, και ένα ρεαλιστικό περιβάλλον.

Οι Coles και Tawn (1991), αποδείξανε ότι αν οι παρατηρήσεις – αποδόσεις, έρχονται με μία διαδικασία Poisson, όπου για πολλές παρατηρήσεις, η διαδικασία εκείνη είναι μη ομοιογενής. Σε αυτή την περίπτωση, μοντελοποιούνται οι τιμές εκείνες που δεν ξεπερνάνε τις τιμές του διανύσματος του κατωφλιού  $\underline{u}$ . Δηλαδή, για τις τιμές του διανύσματος  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  που ανήκουν στο διάστημα  $A = (\mathbf{0}, \mathbf{u}]^d$ , για να εκτιμηθούν οι παράμετροι της κατανομής τους, και κατά συνέπεια να υπολογίσουμε και αξία σε κίνδυνο αλλά και έτερους δείκτες μέτρησης κινδύνου, μεγιστοποιείται η παρακάτω συνάρτηση πιθανοφάνειας :

$$L = \exp\left\{-\mu(\tilde{A})\right\} \prod_{i=1}^n \mu\left(dH\left(\tilde{X}_{(i)}\right)\right), \quad (3.85)$$

όπου  $\tilde{A} = \frac{A}{n}$ ,  $\tilde{X}_{(i)} = \frac{X_{(i)}}{n}$  και την συνάρτηση  $\mu(dx)$  να δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mu(dx) = \frac{dr}{r^2} dH(w) \quad (3.86)$$

Για το διάστημα που έχουμε ορίσει, ο Tawn έχει αποδείξει ότι ισχύει :

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^d x_j^{-1} \quad (3.87)$$

με την παράμετρο  $\mu$  να μπορεί να εκτιμηθεί, και πάλι με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας, αν η συνάρτηση  $H(w)$ , για την οποία και ισχύει η σχέση (3.83), εκτιμάται με παραμετρικές μεθόδους.

### **Parametric Methods and Copulas**

Ευρέως διαδεδομένη είναι και η χρησιμοποίηση copulas και στην περίπτωση αυτή. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας την Copula Domain of Attraction, όπως δίνεται από την σχέση (3.75), έχει αποδειχθεί<sup>27</sup> ότι για τις ακραίες τιμές που υπερβαίνουν το κατώφλι  $\underline{u}$ , η συνάρτηση κατανομής της Generalized Pareto, (3.80), έχει copula που δίνεται από την σχέση :

$$F(\mathbf{x}) = C_0(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad \mathbf{x} \geq \underline{u} \quad (3.88)$$

με την  $C_0$  να αποτελεί την EV Copula.

<sup>27</sup> Αρχικά από τον Resnick το 1987, αργότερα από τους Ledford και Coles το 1996 αλλά και προσφάτως από τους McNeil et al το 2005.

Κατά αυτόν τον τρόπο, για να μοντελοποιήσουμε την, κάθε μία, περιθώρια συνάρτηση κατανομής  $F$ , αρκεί να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους  $\lambda$ ,  $\sigma$  και  $\xi$  αλλά και την παράμετρο, ή διάνυσμα παραμέτρων,  $\theta$  της Copula, μεγιστοποιώντας την σχέση (3.88) :

$$L_i = L_i(\underline{\xi}, \underline{\sigma}, \underline{\lambda}; X_i) = \frac{\partial^{m_i} F(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{m_i}}} \Bigg|_{\max(X_i, \mathbf{u})} \quad (3.89)$$

με τις  $x_{j_1}, \dots, x_{j_d}$  να αποτελούν τις τιμές των τυχαίων μεταβλητών που υπερβαίνουν το, αντίστοιχο, κατώφλι, από το διάνυσμα  $\mathbf{u}$ .

Χρησιμοποιώντας την τελευταία τεχνική, έχει αποδειχθεί ότι προκύπτουν ισοδύναμα αποτελέσματα, αν μοντελοποιήσουμε την περιθώριες συναρτήσεις κατανομής  $F$  εκτιμώντας αρχικά τις παραμέτρους εκείνης, μέσω της πιθανοφάνειας και όπως εκφράστηκε στην αντίστοιχη ενότητα της μονομεταβλητής ανάλυσης, και εκ των υστέρων, εκτιμώντας το  $\theta$  από την παραπάνω σχέση.

### **Semi – Parametric Method**

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις, έχουν αναπτυχθεί με τον περιορισμό ότι η  $F$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών Fréchet. Στην πράξη, ωστόσο, αποτελεί σπάνιο φαινόμενο να είμαστε γνώστες της περιθώριας κατανομής αυτής. Αυτό οδηγεί στην ημιπαραμετρική προσέγγιση και εκτίμηση των παραμέτρων της.

Υποθέτοντας ότι η εμπειρική συνάρτηση των περιθώριων κατανομών  $F$  θα είναι μία Generalized Pareto, που θα δίνεται από τον τύπο :

$$F_j(x_j) = \begin{cases} 1 - \lambda_j \left\{ 1 + \xi_j \left( \frac{x_j - u_j}{\sigma_j} \right) \right\}_+^{\frac{1}{\xi_j}} & x_j > u_j \\ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I_{(X_{i,j} \leq x_j)} & x_j \leq u_j \end{cases} \quad (3.90)$$

με  $\lambda_j, \sigma_j > 0$  και  $\xi_j \in \mathfrak{R}$  να αποτελούν οι άγνωστες παράμετροι που μπορούν να εκτιμηθούν είτε μέσω της σχέση (3.84), που συνδυάζει και τις περιθώριες αλλά και τις παραμέτρους συσχέτισης, είτε μέσω της σχέσης (3.89) κατά την οποία πρώτα εκτιμούνται οι περιθώριες και μετά η παράμετρος (ή το διάνυσμα παραμέτρων) της εξάρτησης  $\theta$ .

Τέλος, άξιο αναφοράς είναι ότι οι ημιπαραμετρικές μέθοδοι συνδέονται με τις παραμετρικές αν μετασχηματίσουμε την συνάρτηση  $F$  ως ακολούθως :

$$F_j^{new}(X_{i,j}) = -\frac{1}{\log(F_j(X_{i,j}))} \quad (3.91)$$

με  $1 \leq i \leq n$  και  $1 \leq j \leq d$ , κάτι που ισχύει για όλες τις σχέσεις που έχουμε αναφέρει στην ενότητα μας.

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Σχετική Βιβλιογραφία

Στις προηγούμενες ενότητες, ασχοληθήκαμε με την θεωρητική προσέγγιση της θεωρίας ακραίων τιμών καθώς και τα θεωρήματα τα οποία, μέσα από έρευνες, έχουν αποδειχθεί. Ωστόσο, όπως και έχουμε αναφέρει κατά την εργασία αυτή, η πρακτική εφαρμογή της θεωρίας ακραίων τιμών, είναι ένα κομμάτι το οποίο και είναι άξιο έρευνας και αναφοράς.

Η χρήση της σε πολλούς τομείς μέσα στο ακαδημαϊκό αλλά και επιχειρησιακό περιβάλλον είναι πλέον κάτι συνηθισμένο, δίνοντας, ολοένα και περισσότερο, λύσεις και ιδέες για επέκταση εκείνων, σε ανθρώπους ειδικούς στον χειρισμό των αποτελεσμάτων εκείνων.

Στην ενότητα αυτή θα παραθέσουμε μερικά από τα κυριότερα αποτελέσματα που αναπτύχθηκαν και αποτέλεσαν τον συνδυαστικό κρίκο ανάμεσα στην υπάρχουσα θεωρία και τις χρηματοοικονομικές, και όχι μόνο, εφαρμογές. Παράλληλα αποδίδουμε και αναφορές που μπορούν να οδηγήσουν σε μεγαλύτερη κατανόηση εκείνων αλλά και αρωγό στην προσπάθεια για μεγαλύτερη και βαθύτερη έρευνα.

Ένα από τους πιο συνηθισμένους δείκτες μέτρησης του κινδύνου είναι η αξία σε κίνδυνο. Ωστόσο, σε ποια κατανομή παρουσιάζει τα καλύτερα αποτελέσματα; Υπάρχει κάποιο όριο μέχρι το οποίο η προβλεπτική ικανότητά του δεν είναι και τόσο επαρκής;

Γενικά, ένα από τα μειονεκτήματα τα οποία η αξία σε κίνδυνο έχει, και αποτέλεσε και έναν από τους λόγους που εξαπλώθηκε η χρηματοπιστωτική κρίση του 2007, είναι και η αδυναμία του να προβλέπει πέρα από την μία ημέρα αλλά και καταστροφικά φαινόμενα, γεγονός που το παρουσιάζουν και οι Degen et al το 2007. Η σύνδεση με την εργασία αυτή έχει να κάνει με την κατανομή που προσαρμόσανε στην εφαρμογή της, την Generalized Pareto Distribution. Πιο συγκεκριμένα, οι Degen et al το 2007 αποδείξανε ότι για την παράμετρο σχήματος  $\xi < 1$ , η αξία σε κίνδυνο για ακραίες τιμές, δηλαδή για μεγάλο επίπεδο σημαντικότητας, είναι αξιόπιστο. Ωστόσο, ένα παράδειγμα που αφορούσε τις ζημιές μεταξύ των γραμμών παραγωγής<sup>28</sup> (business lines) όπως εκείνο αναφέρθηκε και αναπτύχθηκε από τους Gourier Elise και Farkas Walter το 2009<sup>29</sup>, ανατρέπει τον ισχυρισμό αυτό. Υπολογίζοντας την αξία σε κίνδυνο για διάφορα επίπεδα εμπιστοσύνης, 10%, 5%, 1% και 0.1% διαπιστώσανε ότι στην ακραία περίπτωση, η 3<sup>η</sup> γραμμή παραγωγής απέδιδε την μεγαλύτερη αξία σε κίνδυνο, όπως φαίνεται στον πίνακα 4.1, έχοντας, κατά συνέπεια, και την μεγαλύτερη επίδραση στην κεφαλαιακή επάρκεια ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος.

Business Lines	Confidence Level			
	0.90	0.95	0.99	0.999
BL1	1,846	2,696	7,963	48,430
BL3	43,865	138,513	2,134,864	107,031,623
BL6	3,905	6,197	23,118	200,134
BL7	25,546	42,798	184,316	1,967,351
BL8	2,691	2,897	3,396	4,486

<sup>28</sup> Οι γραμμές παραγωγής είναι 8, όπου σύμφωνα με το σύμφωνο της Βασιλείας και παρουσιάζονται αναλυτικά στον πίνακα 6.1.α σε παρακάτω ενότητα.

<sup>29</sup> Καθώς τα δεδομένα για τους λειτουργικούς κανόνες δεν είναι διαθέσιμα, η έρευνά τους επικεντρώθηκε στις γραμμές παραγωγής 1, 3, 6, 7, 8 όπου και είχαν από 250 και πάνω δεδομένα.

- Πίνακας 4. 1: Αναλυτικά Αποτελέσματα της έρευνας των Gourier Elise και Farkas Walter -

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι η αξία σε κίνδυνο είναι ένα μέτρο το οποίο πρέπει να τεθεί υπό αμφισβήτηση καθώς οδηγεί σε υπερεκτίμηση των κεφαλαίων, σε αντίθεση με όσα είχαν αναπτύξει οι Degen et al, γεγονός που το ενισχύει ακόμη ένα εμπειρικό αποτέλεσμα από τους Chapelle, Crama, Hubner και Peters το 2004. Αφού εξέτασαν δεδομένα λειτουργικού κινδύνου για μία Ευρωπαϊκή τράπεζα, 61, 2033, 23, 66, 118, 693 από τις γραμμές παραγωγής 2, 3, 4, 5, 6 και 7 αντίστοιχα, απέδειξαν ότι η αξία σε κίνδυνο για τον λειτουργικό κίνδυνο, στην περίπτωση όπου υπάρχει μία θετική συσχέτιση, την οποία και μοντελοποίησαν με copulas, υπερεκτιμάται. Ωστόσο, το γεγονός της φύσεως των δεδομένων του τελευταίου παραδείγματος, λειτουργικού κινδύνου, ενδεχομένως να αποτελεί και την αιτία των υπερεκτιμήσεων αυτών. Η παρακάτω έρευνα έρχεται να επιβεβαιώσει και τον ανωτέρω ισχυρισμό αλλά και τους Degen et al.

Το 2004 ο Moscadelli επεξεργάστηκε δεδομένα από τράπεζες έτσι ώστε να μοντελοποιήσει τον λειτουργικό κίνδυνο και απέδειξε ότι η GPD αποτελεί την κατανομή με την καλύτερη προσαρμοστικότητα. Καθώς το πλήθος των δεδομένων που είχε στην διάθεσή του ήταν αρκετά, όπως δείχνει και η δεύτερη στήλη του πίνακα 4.2, επιλέγοντας το κατάλληλο κατώφλι, για κάθε μία από τις γραμμές παραγωγής, εξήγαγε το αποτέλεσμα ότι η κατανομή αυτή μπορεί να οδηγήσει σε μία επαρκή μέτρηση του κινδύνου, με εκείνη να γίνεται σε επίπεδο εμπιστοσύνης 10%<sup>30</sup>.

Business Lines	Αριθμός Δεδομένων	Πλήθος Ακραίων Παρατηρήσεων
BL1	423	42
BL2	5132	512
BL3	28882	1000
BL4	3414	315
BL5	1852	187
BL6	1490	158
BL7	1109	107
BL8	3267	326

- Πίνακας 4.2 : Ακραίες Παρατηρήσεις για κάθε Business Line, Moscadelli (2004) -

Ένα ακόμη παράδειγμα αποτέλεσε και η μελέτη των Chavez – Demoulin και Embrechts, το 2004, όπου και αναλύσανε δεδομένα, και πάλι, λειτουργικού κινδύνου για μία περίοδο 10 ετών. Λόγω του μεγάλου χρονικού περιθωρίου, η κατανομή GPD αποδείχθηκε καλής προσαρμογής, ενισχύοντας, κατά αυτόν τον τρόπο, τον ισχυρισμό για έλλειψη δεδομένων στα προηγούμενα, θεωρούμενα και ως, «αντιπαραδείγματα».

<sup>30</sup> Είναι αρκετά σύνηθες, σε πραγματικές συνθήκες, να επιλέγεται το 10% έτσι ώστε να μην υποπίπτουν σε σφάλματα τύπου I ή II κατά τους υπολογισμούς της αξίας σε κίνδυνο.

	Type 1	Type 2	Type 3
<b>1. GPD Parameter Estimates</b>			
<b>u</b>	0.4	0.4	0.4
<b>ξ</b>	0.7	0.7	0.3
<b>β</b>	1.0	1.8	1.3
<b>2. VaR and CVaR</b>			
<b>99% VaR</b>	40.4	48.4	11.9
<b>99% CVaR</b>	166.4	148.5	18.8

- Πίνακας 4.3 : Εκτίμηση παραμέτρων GPD της μελέτης των Chavez, Demoulin and Embrechts (2004) -

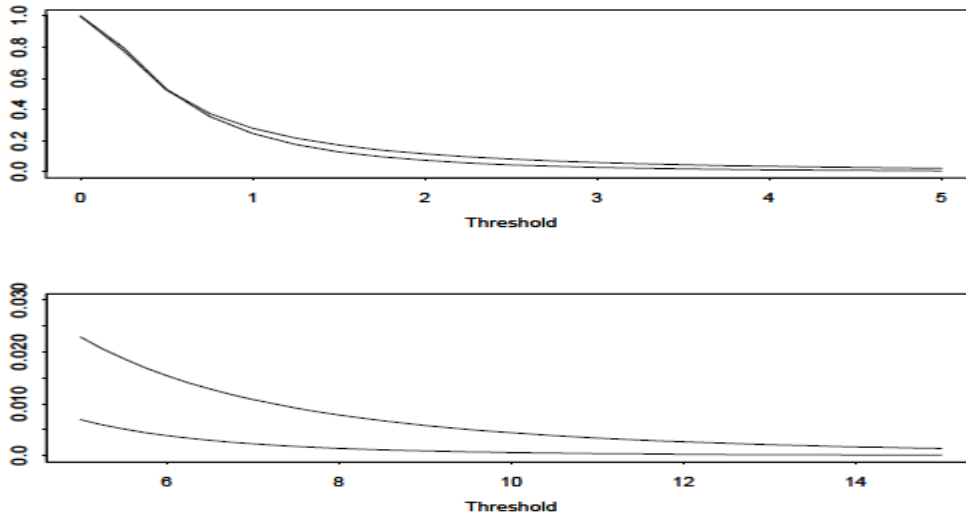
Γενικεύοντας την χρήση της EVT, οι Embrechts P., Lindskog F. και McNeil A. τον Σεπτέμβριο του 2001 μοντελοποίησαν, με την βοήθεια της Θεωρίας Ακραίων Τιμών και των Copulas, τις καταστροφικές ζημιές για ασφαλισμούς και μη κινδύνους. Πιο συγκεκριμένα, ασχολήθηκε με τον ασφαλιστικό και τον αγοραίο κίνδυνο. Για τον πρώτο, υποθέσανε ότι η ασφαλιστική εταιρία έχει συνάψει μια αντασφαλιστική συμφωνία υπερβάλλοντος ποσού. Σκοπός είναι η μοντελοποίηση του ποσού πληρωμής από την αντασφαλιστική εταιρία, γεγονός που συμβαίνει όταν υπάρχει μία ακραία ζημία. Επί της ουσίας είναι σαν να έχει τεθεί ένα κατώφλι και οι ζημιές που ξεπερνάνε εκείνο να είναι οι, θεωρούμενες και ως, ακραίες. Αποδείξανε ότι εκείνες μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσω της Survival Copula και συγκεκριμένα από την σχέση :

$$\bar{H}(u_1, \dots, u_d) = \hat{C}(\bar{F}_1(u_1), \dots, \bar{F}_d(u_d)) \quad (4.1)$$

με  $\bar{H}$  να αποτελεί την από κοινού συνάρτηση επιβίωσης των δεδομένων. Εκφράζοντας παράλληλα τα  $u_i$  ως ποσοστημόρια της συνάρτησης κατανομής  $F$  των δεδομένων,  $u_i = F_i^{-1}(a_i)$ , όπου  $a$  είναι το επίπεδο σημαντικότητας, η σχέση (4.1) παίρνει την μορφή

$$\bar{H}(u_1, \dots, u_d) = \hat{C}(1 - a_1, \dots, 1 - a_d) \quad (4.2)$$

Χρησιμοποιώντας, για μεγαλύτερη ευκολία ότι η  $F$  ακολουθεί την τυπική λογαριθμοκανονική κατανομή, προσαρμόσανε στην παραπάνω σχέση την Gaussian, και γενικά τις ελλειπτικές copulas, όπως επίσης και την Gumbel Copula πάνω σε πέντε από τις γραμμές παραγωγής και διάφορες τιμές για το κατώφλι  $u$ , δείξανε ότι η προσαρμογή μίας Copula, για παράδειγμα την Gaussian, ενώ η πραγματική εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών περιγράφεται καλύτερα από την εταιρία, Gumbel, οδηγεί σε υποεκτίμηση της πιθανότητας οι ζημιές να περάσουν το κατώφλι εκείνο, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε λάθος επιχειρηματική απόφαση.



- Διάγραμμα 4.4. : Η συσχέτιση των μεταβλητών με βάση μία Gaussian (πάνω) και μία Gumbel Copula (κάτω) για τα δεδομένα των Embrechts, Lindskog, McNeil (2001) -

Όσον αφορά τον κίνδυνο αγοράς, θεωρούν και πάλι ένα χαρτοφυλάκιο κατά το οποίο η μεταβολή της αξίας του θα δίνεται από την σχέση :

$$\Delta_{t+1} = \sum_{i=1}^n \gamma_{i,t} \delta_{i,t+1} \quad (4.3)$$

όπου ο δείκτης  $\gamma$  να αποτελεί το ποσοστό συμμετοχής του επενδυτή για τον χρηματιστηριακό τίτλο με αξία, την επόμενη μέρα,  $S$  και  $\delta$ , η μεταβολή του κάθε τίτλου ξεχωριστά.

Με βάση το παράδειγμα δείξαν ότι οι μετοχές, όπως και γενικά οι χρηματιστηριακοί τίτλοι, παρουσιάζουν μία εξάρτηση στην ουρά, με αποτέλεσμα οι ελλειπτικές copulas, όπως είναι και οι Gaussian, δεν αποτελούν και την κατάλληλη επιλογή για την μοντελοποίηση τους στο πολυμεταβλητό μοντέλο. Δηλαδή, αν  $\Delta \sim N(\gamma^T \mu, \gamma^T \Sigma \gamma)$ , τότε για το χαρτοφυλάκιο δεν είναι δυνατό να μοντελοποιηθεί ο κίνδυνος<sup>31</sup>. Ωστόσο, ο ίδιος ο Embrechts, το 2001, μαζί με τους Juri και Hoing απέδειξαν ότι λύση και γι' αυτό το πρόβλημα, δίνοντας κατά αυτόν τον τρόπο την ευχέρεια στην χρησιμοποίηση των Gaussian Copulas και στους αγοραίους κινδύνους, εκτός από τον πιστωτικό, που σύμφωνα με την διεθνή βιβλιογραφία είναι πιο διαδεδομένη η χρήση της. Θεωρώντας μία νέα μεταβλητή  $\Delta_s \sim N(\gamma^T \mu_s, \gamma^T \Sigma_s \gamma)$  έχει αποδειχθεί ότι μπορεί να μοντελοποιήσει τα δεδομένα αυτά, αν και ακόμη ενδέχεται να υπάρχουν θέματα υποεκτίμησης των ζημιών αυτών.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, οι Gaussian Copulas αποτελούν την πρώτη επιλογή για την μοντελοποίηση του πιστωτικού κινδύνου, όπως και αυτή αν αναπτύσσεται. Ωστόσο, οι McNeil et al το 2005, ανέπτυξαν κάποια εναλλακτικά μοντέλα για την μοντελοποίηση του. Σύμφωνα με τους διεθνείς οίκους αξιολόγησης, οι αναγνωρισμένοι τρόποι μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου, Credit Metrics και KMV, μπορούν να μοντελοποιηθούν με κάθε μοντέλο που μπορούν να μοντελοποιήσουν οποιαδήποτε σχέση συσχέτισης. Αυτό είναι και το μεγάλο πλεονέκτημα του πιστωτικού κινδύνου καθώς αφήνει περιθώριο για ανάπτυξη

<sup>31</sup> Όπως έχει αναπτυχθεί και δείχθει από τους Embrechts, Mikosch, Kluppelberg το 1997.

και καινούργιων τρόπων μοντελοποίησης τους μέσα σε ένα χαρτοφυλάκιο κάτι που χρίζει επιτακτικής ανάγκης καθώς τα μοντέλα εκείνα, όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, μπορούν να οδηγήσουν σε υποεκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο, γεγονός που μπορεί να επιφέρει πολλές ανατροπές στα μοντέλα διοικητικής κινδύνου. Κατά συνέπεια, έδειξαν ότι αν η πιθανότητα να έχουμε ακραία ζημία στον πιστωτικό κίνδυνο είναι ίση με  $\pi$ , τότε αν προσαρμοστεί μία Archimedean Copula, και πιο συγκεκριμένα η Clayton, είναι πολύ εύκολο να μοντελοποιηθεί πλέον και η σχέση μεταξύ των ζημιών αυτών, φέρνοντας μία νέα μέθοδο και έναν νέο τρόπο υπολογισμού, πέρα από τις ελλειπτικές Copulas, και του αναμενόμενου χρόνου αθέτησης μίας υποχρέωσης από τον εκδότη κάποιου τίτλου μέσα στο χαρτοφυλάκιο, μέσω της σχέσης :

$$\pi_k = (k\pi^{-\theta} - k + 1)^{-\frac{1}{\theta}} \quad (4.4)$$

βασιζόμενοι, προφανώς, στην γεννήτρια της Clayton Copula. Ο δείκτης  $k$ , υποδηλώνει τον αριθμό των τίτλων που (αναμένεται να) κάνουν default. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε McNeil, Frey and Embrechts (2005).

Ένα από τα κυριότερα αποτελέσματα, όπως εκείνο έχει να κάνει με την πολυμεταβλητή θεωρία ακραίων τιμών, είναι εκείνη της εκτίμησης των παραμέτρων της MEV μέσω της μεγιστοποίησης της πιθανοφάνειας με το μοντέλο των Husler και Reiss, όπως εκείνο αναπτύχθηκε το 1960.

Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για δύο διανύσματα  $U$  και  $V$ ,  $a$  και  $b$  διαστάσεων, ισχύει ότι το διάνυσμα  $U|V$  ακολουθεί την πολυδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους  $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mathbf{v}$  και  $\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ <sup>32</sup>, σε συνδυασμό με τη σχέση για την από κοινού συνάρτηση, όπως και περιγράφεται από τον Bayes, θα ισχύει για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των  $U, V$  η σχέση :

$$f_{U,V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mathbf{v}; \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}) \cdot \varphi(\mathbf{v}; \Sigma_{22}) \quad (4.5)$$

Συνεπώς, η εκτίμηση των παραμέτρων θα προκύπτει από την σχέση :

$$\frac{\partial^d \bar{\Phi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \Sigma)}{\partial u_1 \cdots \partial u_d} = (-1)^d \Phi(\mathbf{u} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mathbf{v}; \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}) \cdot \varphi(\mathbf{v}; \Sigma_{22}) \quad (4.6)$$

με την  $\bar{\Phi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \Sigma)$  να αποτελεί την συνάρτηση επιβίωσης της συνάρτησης πυκνότητας της σχέσης (4.5) και  $d$  το πλήθος των παραγόντων.

Παρά το γεγονός ότι αποτέλεσε η μέθοδος εκείνη αποτέλεσε μία καλύτερη προσέγγιση των παραμέτρων της MEV, δεν διαφέρει με την κλασική μέθοδο μεγιστοποίησης της συνάρτησης πιθανοφάνειας όταν έχει να κάνει με αρκετά μεγάλο αριθμό  $d$ . Όπως και η τελευταία, έτσι και η μέθοδος των Husler και Reiss είναι λιγότερο πρακτική για 4 ή

<sup>32</sup> Τα  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$ ,  $\Sigma_{21}$  και  $\Sigma_{22}$  αποτελούν πίνακες διαστάσεων  $a \times a$ ,  $a \times b$ ,  $b \times a$  και  $b \times b$  αντιστοίχως.

παραπάνω παράγοντες όπου και η αντίληψή της γίνεται ολοένα και πολυπλοκότερη. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Husler και Reiss (1989).

Ένας από τους σημαντικότερους δείκτες, πάνω στην θεωρία ακραίων τιμών, όπως έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 2, είναι ο Hill Estimator. Την σημαντικότητά του ήρθαν να επιβεβαιώσουν το 1998, οι Christoffersen P., Diebold F. και Schuermann T. Απέδειξαν ότι μέσω εκείνου, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα είναι ικανά να πραγματοποιήσουν προβλέψεις για περίοδο μεγαλύτερη από δύο εβδομάδες με μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς, κατά αυτόν τον τρόπο, απαλείφεται η μη ικανότητα του volatility να προβλεφθεί για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, όπως και διαφαίνεται στο παράδειγμα παρακάτω, ένα φαινόμενο που κυρίως εμφανίζεται στους ακραίους κινδύνους αγοράς, που έχουμε αναφέρει και προηγουμένως.

Πιο αναλυτικά, εφαρμόζοντας την κλασική θεωρία υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο με μοντέλα ARCH, προσαρμόζεται η θεωρία ακραίων τιμών, και υπολογίζεται ο hill estimator πάνω στα κατάλοιπα του παραπάνω στοχαστικού μοντέλου. Κατά αυτόν τον τρόπο όχι μόνο η πρόβλεψη για την επόμενη μέρα γίνεται ακριβέστερη αλλά και για μεγαλύτερο χρονικό ορίζοντα, που αποτελεί και το επικείμενο θέμα. Επί της ουσίας, μοντελοποίησαν μέσω Unconditional τρόπων. Για περισσότερες λεπτομέρειες αλλά και εμπειρικά αποτελέσματα πάνω σε δεδομένα του δείκτη S&P500, βλέπε McNeil and Fey (2000) αλλά και Gilli and Kellezi (2006).

Όπως έχει γίνει αντιληπτό, η θεωρία ακραίων τιμών προσαρμόζεται ολοένα και καλύτερα σε δεδομένα αγοραίου κινδύνου. Ολοένα και περισσότερες έρευνες έχουν αναπτυχθεί και περισσότερες από μία εφαρμογές θίγουν τον τομέα αυτό. Ειδικότερη μνεία δίνεται στον συστημικό κίνδυνο στον τραπεζικό κλάδο, όπου, όπως αποδεικνύεται από τους Bae, Karolyi, Stultz (2003), Chan-Lau, Mathieson, and Yao (2004), Forbes and Rigobon (2001), Hartmann, Straetmans, and de Vries (2004), Longin and Solnik (2001), Poon, Rockinger, and Tawn (2004), Quintos et al (2001), and Starica (1999), μέσω των copulas και μη παραμετρικών μεθόδων της πολυμεταβλητής Θεωρίας Ακραίων Τιμών, εφαρμογή που μπορεί να απαντηθεί και για τον πιστωτικό κίνδυνο, όπως καταδεικνύουν για τις επιδράσεις στις βρετανικές τράπεζες οι Chan – Lau, Mitra και Ong Lian Li σε έκθεση για το διεθνές νομισματικό ταμείο το 2007.

Τέλος, καθώς η θεωρία ακραίων τιμών, όπως αναφέρεται και στο εισαγωγικό κομμάτι της εργασίας αυτής, αποτέλεσε έναν ακρογωνιαίο λίθο στην μελέτη περιβαλλοντολογικών φαινομένων, υπάρχουν πάρα πολλά αποτελέσματα για την εφαρμογή της και σε ζητήματα του τομέα αυτού. Ενδεικτικά, κανείς μπορεί να ανατρέξει στις μελέτες που έχουν γίνει για την καλύτερη copulas σε δεδομένα υδρολογίας (αδημοσίευτο αρχείο *Tail of Copulas, Use of Gaussian Copula for Multivariate Extreme Value Analysis : Some Case Studies in Hydrology*) αλλά και για γενικότερα θέματα του αντίστοιχου τομέα (*Multivariate Extreme Value Distributions With Applications to Environmental Data – The Canadian Journal of Statistics, Volume 22, No 1, 1994, Comparison of Probability weighted moments and maximum likelihood methods used in flood frequency analysis for Ceyhan river basin – The Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 35, Number 1B, 2009*), όπως και σε θέματα μηχανικής και μηχανολογίας.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Εμπειρική Ανάλυση – Κίνδυνος Αγοράς

Για την πρακτική εφαρμογή, όσον αφορά τον αγοραίο κίνδυνο, έχουμε επιλέξει τις αποδόσεις τριών σειρών, του χρυσού, του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 και του μονοετούς αμερικανικού ομολόγου. Τα δεδομένα είναι εβδομαδιαία με ημερομηνία έναρξης 1/9/1980 μέχρι και τις 26/12/2012. Ωστόσο, για την καλύτερη κατανόηση, πέρα από το θεωρητικό υπόβαθρο που έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια, είναι αναγκαία και η αναφορά σε χρηματοοικονομικές έννοιες που χρησιμοποιούνται.

### 5.1. Θεωρητικό Υπόβαθρο

#### 5.1.1. Αξία Σε Κίνδυνο

##### Ορισμός και Μέθοδοι Υπολογισμού

Ένα εργαλείο το οποίο χρησιμοποιούν για να μετρήσουν οι επενδυτές ή και τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα την έκθεση που ενδεχομένως έχουν στον αγοραίο ή και στον λειτουργικό κίνδυνο, είναι η **αξία σε κίνδυνο (VaR)**. Ως αξία σε κίνδυνο ορίζεται η **μέγιστη ζημία που το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή ο επενδυτής που είναι πιθανό να υποστεί σε επίπεδο σημαντικότητας α%**. Τα συνηθέστερα επίπεδα σημαντικότητας είναι 1%, 5% και 10%. Ωστόσο, η αξία σε κίνδυνο, ισοδύναμα μπορεί να ερμηνευτεί και ως η **ελάχιστη ζημία που ενδεχομένως να υποστεί ένας επενδυτής ή και ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα σε επίπεδο σημαντικότητας (1-α)%**.

Όπως διαφαίνεται και από τον ορισμό της, η αξία σε κίνδυνο αποτελεί ένας ημερήσιος δείκτης μέτρησης κινδύνου. Παρά την απλότητα που, σε μερικές εκ των περιπτώσεων στους υπολογισμούς, τον διέπει, θεωρείται ένας «ρηχός» δείκτης μέτρησης κινδύνου καθώς δεν είναι δυνατόν να υπολογίζει τις απώλειες από τα Black Swan Events. Ένα, χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί εκείνο της ελβετικής τράπεζας UBS το 2007. Το ημερήσιο όριο είχε ξεπεραστεί συνολικά 23 φορές ωστόσο το 2006 με  $VAR = 1\%$  δεν υπήρχε καμία υπέρβαση με αποτέλεσμα η τράπεζα να μην κρατήσει ικανοποιητικά κεφάλαια για την αντιμετώπιση των κινδύνων. Δείχνει, δηλαδή, την ημερήσια απώλεια και την ανάγκη η επιχείρηση να τους αντιμετωπίσει μέσα στην ίδια μέρα ή σε ένα εύλογο διάστημα. Συνεπώς, η ρηχότητα του έχει να κάνει με την έλλειψη προοπτικής ικανότητας καθώς στηρίζεται σε ιστορικά, παρελθοντικά γεγονότα δίχως να προσβλέπει ενδεχόμενες κρίσεις ή οικονομικές μελλοντικές αναταράξεις. Επιπροσθέτως, δεν αποτελεί και έναν συνεπή δείκτη<sup>33</sup> γεγονός που έχει αποτελέσει το έναυσμα για την εφευρεθεί ο δείκτης Conditional Value at Risk που αποτελεί και την μέση τιμή των απαιτήσεων δεδομένου ότι οι απαιτήσεις έχουν ξεπεράσει την αξία σε κίνδυνο. Ορίζεται και διέπεται από την σχέση :

<sup>33</sup> Ένας δείκτης  $\rho$  καλείται συνεπής αν και μόνο αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

1. Η επένδυση ενός ποσού  $c$  σε έναν τραπεζικό λογαριασμό με απόδοση  $r$  μειώνει τον κίνδυνο κατά το ποσό  $c$  αυτό, δηλαδή :  $\rho(X + c \cdot r) = \rho(X) - c$ .
2. Η επένδυση σε ένα χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να έχει μικρότερο κίνδυνο σε σύγκριση με το άθροισμα των κινδύνων που υφίστανται για κάθε μεμονωμένη θέση, δηλαδή αν  $X_1, X_2$  οι δύο κίνδυνοι, θα πρέπει να ισχύει ότι :  $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$ .
3. Ο κίνδυνος της θέσης είναι ανάλογος του μεγέθους της, δηλαδή :  $\rho(a \cdot X) = a \cdot \rho(X)$ .
4. Αν για δύο κινδύνους ισχύει ότι  $X_1 \leq X_2$ , για τον δείκτη  $\rho$  ισχύει ότι  $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$ .

$$CVaR = E[X | X > VaR] \quad (5.1)$$

όπου και προσδιορίζει ότι και ο δείκτης **expected shortfall**.

Στην διεθνή βιβλιογραφία, τα πιο συνηθισμένα μοντέλα για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο είναι οι **Μέθοδος Variance Covariance**, η **Historical Simulation**, η **Exponentially Weighted Moving Average**. Κάθε μία από αυτές έχει τα δικά της χαρακτηριστικά και δικές της ιδιομορφίες. Είναι αναπόφευκτο, εξάλλου, ότι δεν θα εξάγουν όλες τα ίδια αποτελέσματα. Κάποια θα είναι περισσότερο αποτελεσματική από τις άλλες, άλλη θα είναι πιο πρακτική. Ωστόσο, αυτό είναι κάτι που εξετάζεται, πιο σχολαστικά, στον έλεγχο που κάθε μοντέλο υπόκειται, μετά την εφαρμογή του, το επονομαζόμενο και ως **backtesting**, όπως και θα αναφέρουμε στην επόμενη ενότητα.

#### **A. Μέθοδος Variance Covariance**

Η μέθοδος αυτή χαρακτηρίζεται ως η πιο άμεση καθώς υπολογίζει την μέγιστη ζημιά ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα και με συγκεκριμένη πιθανότητα. Το χαρακτηριστικό της είναι ότι παρατηρεί τις κινήσεις των στοιχείων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο και χρησιμοποιώντας την τυπική απόκλιση των κινήσεων αυτών, υποθέτοντας παράλληλα κανονική κατανομή, υπολογίζει την μέγιστη απώλεια μέσα σε ένα προκαθορισμένο διάστημα εμπιστοσύνης (συνήθως 95%) βασιζόμενο, όπως γίνεται αντιληπτό, στο volatility του χαρτοφυλακίου. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη το volatility κάθε στοιχείου ξεχωριστά, δεν είναι δυνατό να βγάλεις ασφαλή συμπεράσματα για ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο. Κατά αυτόν τον τρόπο, κάτι που θα πρέπει να εξετάζεται είναι και η συσχέτιση που έχουν τα volatility των στοιχείων που συγκροτούν ένα χαρτοφυλάκιο. Για παράδειγμα, αν όλα τα στοιχεία αντιδρούν με τον ίδιο τρόπο τότε λέμε πως έχουν πλήρη θετική συσχέτιση. Αν τα πράγματα πηγαίνουν καλά, τότε έχουμε ένα θετικό αποτέλεσμα στο χαρτοφυλάκιο μας. Αν όμως πέσει η αξία των στοιχείων, τότε τα άσχημα νέα είναι αναπόφευκτα. Αντιθέτως, αν τα στοιχεία δεν είναι θετικά συσχετισμένα, τότε μία θετική κίνηση στο ένα στοιχείο θα αποτελέσει μία άσχημη κίνηση σε ένα άλλο. Συνεπώς, είναι σημαντική η επίγνωση και της συσχέτισης των στοιχείων, κάτι που η μέθοδος **Variance Covariance** παρέχει.

#### **B. Historical Simulation**

Σε αντίθεση με την μέθοδο Variance Covariance, η ιστορική προσομοίωση δεν υποθέτει την ύπαρξη κάποιας κατανομής, για τον υπολογισμό του VaR αλλά βασίζεται στα κέρδη και τις ζημίες που έχει ο οργανισμός, όπως αυτά καταγράφονται, ιστορικά (εξ' ου και το όνομά της), από το ίδιο το ίδρυμα. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, η συγκεκριμένη μέθοδος είναι πιο «πρακτική» σε σχέση με την προηγούμενη καθώς δεν απαιτεί πολλές πράξεις και, σχετικά, χρονοβόρες διαδικασίες και γι' αυτό και είναι και η πιο διαδεδομένη, στο κομμάτι της χρήσης, από τα πιστωτικά ιδρύματα. Ωστόσο, υπάρχουν κάποια σημεία που διέπουν την μέθοδο και που είναι μη συμβατά με την πραγματικότητα, όπως η υπόθεση της ανεξαρτησίας των ημερήσιων αποδόσεων των στοιχείων, αλλά και όλου, του χαρτοφυλακίου που, όπως έχει αποδειχθεί από εμπειρικές έρευνες εμφανίζουν το φαινόμενο του **volatility clustering** (μεγάλες αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες αλλαγές και μικρές μεταβολές από άλλες μικρές). Επίσης, η μέθοδος της ιστορικής

προσομοίωσης υποθέτει ότι η θέση μας παραμένει σταθερή ως προς τον χρόνο, κάτι το οποίο δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα λόγω των μεταβολών στην απόδοση που έχει το χαρτοφυλάκιο. Τέλος, δεν παρέχει την δυνατότητα να υπολογίσει και τις καταστροφικές ζημιές, που ενδέχεται να συμβούν, και την επίδρασή τους στο εισόδημα του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος.

### C. Exponentially Weighted Moving Average

Η μέθοδος αυτή έχει πολλές ομοιότητες με την μέθοδο Variance Covariance με την διαφορά ότι δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στις τελευταίες παρατηρήσεις. Η Variance Covariance υπέθετε την ίδια βαρύτητα στο υπολογιστικό κομμάτι της διακύμανσης των αποδόσεων. Κατά αυτόν τον τρόπο, για παράδειγμα, οι αποδόσεις μία μέρα πριν δεν θα έχουν παραπάνω επίδραση από αυτές που υπήρχαν έναν μήνα πριν. Σε αυτό το πρόβλημα έρχεται να δώσει λύση η Exponentially Weighted Moving Average δίνοντας μεγαλύτερη βαρύτητα στις τελευταίες, πιο πρόσφατες, παρατηρήσεις. Το υπόδειγμα έχει την γενική μορφή:

$$\hat{y}_{T+1} = \lambda y_T + \lambda (1 - \lambda) y_{T-1} + \lambda (1 - \lambda)^2 y_{T-2} + \dots$$

εδώ το  $\lambda$  είναι ένας αριθμός μεταξύ του 0 και του 1 που δείχνει πόσο περισσότερο βάρος δίνεται στις πρόσφατες τιμές σε σχέση με τις περισσότερο απομακρυσμένες προς το παρελθόν. Για  $\lambda = 1$ , για παράδειγμα, η πρόβλεψη που γίνεται είναι η  $\hat{y}_{T+1} = y_T$  στην οποία αγνοούνται οποιοσδήποτε τιμές της  $y_t$  που συνέβησαν πριν τη  $y_T$ . Καθώς το  $\lambda$  γίνεται μικρότερο, δίνουμε μεγαλύτερη έμφαση στις πιο απομακρυσμένες τιμές.

Όμως με τέτοιου είδους υποδείγματα εμφανίζεται το εξής πρόβλημα: αν υπάρχει μια ανοδική (καθοδική) τάση τότε το EWMA θα υποεκτιμά (υπερεκτιμά) τις μελλοντικές τιμές της  $y_t$ . Αυτό συμβαίνει, αφού το υπόδειγμα σταθμίζει τις παρελθούσες τιμές της  $y_t$  ώστε να δώσει μια πρόβλεψη. Αν η  $y_t$  μειώνεται σταθερά, η πρόβλεψη του υποδείγματος EWMA για τη  $\hat{y}_{T+1}$  θα είναι επομένως μικρότερη από την πιο πρόσφατη τιμή  $y_T$ , και αν μεγαλώνει σταθερά, η  $\hat{y}_{T+1}$  θα είναι μια υποεκτίμηση της αληθινής τιμής της  $y_{T+1}$ .

Από τα ανωτέρω γίνεται σαφές ότι η EWMA δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες περιόδους, υποθέτοντας ότι οι συντελεστές βαρύτητας ακολουθούν μια εκθετική κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι η συνεισφορά ιστορικών δεδομένων από κάποια περίοδο και έπειτα είναι σχεδόν μηδενική, ανάλογα με την τιμή του συντελεστή  $\lambda$ . Όσο μειώνεται η τιμή του συντελεστή  $\lambda$  τόσο μεγαλύτερη σημασία δίνεται στις πιο πρόσφατες περιόδους και το αντίστροφο. Η παράμετρος **εξομάλυνσης**, όπως ονομάζεται, είναι, συνήθως, ίση με 0.94 (94%).

Συγκριτικό πλεονέκτημα έναντι των προηγούμενων μεθόδων είναι η ευκολία των υπολογισμών και το γεγονός ότι απαιτεί λιγότερα ιστορικά δεδομένα. Η μέθοδος EWMA, όπως αναφέραμε στην αρχή, έχει πολλές ομοιότητες με τη μέθοδο VARIANCE-COVARIANCE. Η κύρια διαφοροποίηση είναι ότι οι τιμές των προηγούμενων χρονικών περιόδων που συμμετέχουν στον υπολογισμό έχουν διαφορετική βαρύτητα. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται χαμηλότερη σε προγενέστερες χρονικές περιόδους και μεγαλύτερη

σε περιόδους κοντινές στην υπό εξέταση περίοδο πρόβλεψης. Έτσι, οι συντελεστές βαρύτητας προοδευτικά μειώνονται όσο κινούμαστε πίσω στο παρελθόν και το αντίστροφο. Με αυτόν τον τρόπο συγκεκριμένες τάσεις (αύξησης ή μείωσης) του πρόσφατου παρελθόντος αποτυπώνονται καλύτερα και δεν αλλοιώνονται σε μεγάλο βαθμό από πολύ προγενέστερες τιμές. Δεν υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος περιορισμός ως προς τον προσδιορισμό των συντελεστών βαρύτητας, οι τιμές των οποίων καθορίζονται από αυτόν που διενεργεί την πρόβλεψη.

### **Υπολογισμός Αξίας Σε Κίνδυνο σε Επίπεδο Χρηματοσειράς**

Όπως είναι φανερό, υπάρχουν ποικίλοι τρόποι για την εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο. Η πρακτική εφαρμογή των ανωτέρω, μπορεί να μεταφραστεί σε μεθόδους τυπικούς και απλούς αλλά και σε λίγο πιο σύνθετους. Για τους πρώτους, εφαρμόζεται μία τυποποιημένη μέθοδος κατά την οποία χωρίς περαιτέρω υποθέσεις και περιορισμούς, εν αντιθέσει με τις τελευταίες όπου, για κάθε μία από τις υπό μελέτη σειρές, θα πρέπει να εκτιμηθεί ένα κατάλληλο μοντέλο, συνδυαστικά, για τον μέσο και την διακύμανση, μέσω AR και ARCH – GARCH μοντέλα. (Ένα κατάλληλο μοντέλο θεωρείται εκείνο που εξαλείφει, στον καλύτερο δυνατό βαθμό, την πληροφορία που αφήνουν τα κατάλοιπα από την μοντελοποίηση του μέσου αλλά και τα τετραγωνισμένα από εκείνη της διακυμάνσεως). Σε κάθε περίπτωση, και αφού εκτιμηθεί η διακύμανση με τον τρόπο εκείνον που το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή ο επενδυτής επιλέξει, χωρίζεται το δείγμα σε in sample και out of sample, για κάθε μία από τις παρατήσεις του τελευταίου, υπολογίζεται η αξία σε κίνδυνο.

#### **A. Risk Metrics Method**

Αναπτύχθηκε από την JP Morgan και αποτελεί επί της ουσίας ένα μοντέλο EWMA, όπως εκείνη περιγράφηκε από πάνω. Χρησιμοποιεί την υπόθεση της κανονικότητας στην μοντελοποίηση της διακύμανσης, καθώς, ανεξάρτητα καταλληλότητας μοντέλου, εκείνη θα προσομοιώνεται πάντα από ένα IGARCH(1,1) μοντέλο<sup>34</sup>. Όπως είναι εμφανές, στηρίζεται αποκλειστικά και μόνο στην πρόβλεψη και εκτίμηση της διακυμάνσεως, από ένα τυποποιημένο μοντέλο, γεγονός που την καθιστά ως ένα απλό και κατανοητό μοντέλο αλλά οδηγεί σε υπερεκτιμημένο κίνδυνο. Επιπροσθέτως, δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε αποδόσεις που εμφανίζουν στην κατανομή τους παχιές ουρές καθώς η υπόθεση της κανονικότητας δεν μπορεί να προσαρμοστεί σε αυτά τα δεδομένα. Η σχέση που διέπει τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο, στην περίπτωση της Risk Metrics, είναι η :

$$VaR = z_a \cdot \sqrt{\sigma_{t+1}^2}, \quad (5.2)$$

πολλαπλασιαζόμενη, προφανώς, και με την θέση του επενδυτή ή και του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος, όπου  $z_a$  : το ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής σε

<sup>34</sup> Ένα IGARCH(1,1) μοντέλο, περιγράφεται από την εξίσωση :  $\sigma_t^2 = a_0 + \beta_1 \cdot \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) \cdot a_{t-1}^2$ , με τα  $a_t^2$  να αποτελούν τα τετραγωνισμένα κατάλοιπα για τα οποία και ισχύει ότι  $a_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t$ , με  $\varepsilon_t \sim Normal$ . Προφανώς όλοι οι συντελεστές  $a_0$  και  $\beta_1$  θα πρέπει να είναι θετικοί καθώς η μοντελοποίηση αφορά διακύμανση.

επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , όπου και υπολογίζεται και η αξία σε κίνδυνο και  $\sigma_{n+1}^2$  η πρόβλεψη για την διακύμανση την επόμενη παρατήρηση. Καθότι στο υπολογιστικό κομμάτι θα ασχοληθούμε με την 95% και 99% αξία σε κίνδυνο, τα ποσοστημόρια των 5% και 1% για την κανονική κατανομή είναι ίσα με 1.65 και 2.32 αντίστοιχα.

## B. Οικονομετρικά Μοντέλα

Για την εξομάλυνση των μειονεκτημάτων όπως εκείνα προκύπτουν από την μέθοδο Risk Metrics, τα οικονομετρικά μοντέλα χρησιμοποιούν στον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο την εκτίμηση και από την μοντελοποίηση του μέσου των αποδόσεων, μέσω μοντέλων AR, ARMA, γεγονός που τις καθιστά ως πιο αξιόπιστες, ως προς την εκτίμηση κινδύνου, μεθόδους παρά το γεγονός ότι θεωρούνται ως πιο σύνθετα και δυσνόητα μοντέλα για τους ανθρώπους της αγοράς. Η διακύμανσή τους εκτιμάται, τις περισσότερες φορές, μέσα από μοντέλα ARCH, GARCH και EGARCH, σύμφωνα με τις εξισώσεις :

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \cdot a_{t-1}^2 + \dots + a_m \cdot a_{t-m}^2,$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \cdot a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \cdot \sigma_{t-j}^2 \text{ και}$$

$$\ln(\sigma_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \cdot \frac{|a_{t-i}| + \gamma_i \cdot a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^s \beta_j \cdot \ln(\sigma_{t-j}^2) \text{ αντιστοίχως,}$$

όπου  $a_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t$  με  $\varepsilon_t$  να αποτελούν τυχαίες ανεξάρτητες και ισόνομες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση 1,  $\sum_{ij}^{\max(s,m)} (a_i + \beta_j) < 1$  και  $\gamma_i$  να αποτελεί ένας συντελεστής

μόγλευσης που είναι πάντα αρνητικός καθώς υποδηλώνει το πόσο ασύμμετρα αντιδρά το volatility στα θετικά και στα αρνητικά shocks που επέρχονται στην σειρά. Άξιο αναφοράς είναι ότι η δημιουργία του τελευταίου μοντέλου διακύμανσης, EGARCH, οφείλεται, εμμέσως, στα socks αυτά καθώς το μειονέκτημα μοντελοποίησης της διακύμανσης με ARCH μοντέλα έγκειται στην υπερεκτίμηση της εκτίμησης και στην αδυναμία τους να μην διακρίνουν τα αρνητικά από τα θετικά shocks λόγω της συμμετρίας που τα διέπουν.

$$VaR = \hat{r}_{n+1} + z_\alpha \sqrt{\hat{\sigma}_{n+1}^2} \quad (5.3.1)$$

με  $z_\alpha$  : το  $\alpha\%$  ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής

Στην περίπτωση των οικονομετρικών μεθόδων, η κατανομή των καταλοίπων  $\varepsilon_t$  αποτελεί βαρόμετρο καθώς για διαφορετική κατανομή προκύπτει και διαφορετική αξία σε κίνδυνο. Πιο συγκεκριμένα, για τις συνηθέστερες κατανομές, κανονική και t student, η αξία σε κίνδυνο δίνεται από τις σχέσεις (5.3.1) και (5.3.2) αντίστοιχα.

$$VaR_{-T} = \hat{r}_{n+1} + t_{v,\alpha} \sqrt{\frac{v-2}{v}} \cdot \hat{\sigma}_{n+1} \quad (5.3.2)$$

με  $t_{v,\alpha}$  : το  $\alpha\%$  ποσοστημόριο της  $t$  κατανομής για  $v$  βαθμούς ελευθερίας και  $r_{n+1}$ , η πρόβλεψη του μέσου των αποδόσεων της σειράς.

### Υπολογισμός Αξίας σε Κίνδυνο σε Επίπεδο Χαρτοφυλακίου

Μέσα σε ένα ρεαλιστικό οικονομικό περιβάλλον, η εφαρμογή των πρακτικών διοικητικής κινδύνου γίνεται σε επίπεδο χαρτοφυλακίου καθώς ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή και ένας επενδυτής, όπως επιτάσσει η λογική των επενδύσεων, πραγματοποιεί επενδύσεις σε διάφορους τίτλους έτσι ώστε οι αρνητικές επιδράσεις από έναν τίτλο να εξομαλύνονται από τις θετικές ενός έτερου. Συνεπώς, η ανάγκη για γνώση της μέγιστης απώλειας, για μία συγκεκριμένα πιθανότητα  $p$ , κρίνεται αναγκαία. Αν  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_i, X_j, \dots, X_n)$  το διάνυσμα των επενδυόμενων θέσεων, με αντίστοιχες αξίες σε κίνδυνο  $VaR = (VaR_1, \dots, VaR_i, VaR_j, \dots, VaR_n)$ , η αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται από την σχέση :

$$VaR = \sqrt{\sum_{i=1}^n VaR_i^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} \cdot VaR_i \cdot VaR_j} \quad (5.4)$$

με  $\rho_{ij}$  : ο δείκτης αυτοσυσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων των  $i$  και  $j$  επενδυόμενων τίτλων.

Στην ειδική περίπτωση όπου οι υπό επένδυση τίτλοι είναι δύο ή τρεις, η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή (5.4.1) και (5.4.2) αντίστοιχα.

$$VaR = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2 \cdot \rho_{12} \cdot VaR_1 \cdot VaR_2} \quad (5.4.1)$$

$$VaR = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + VaR_3^2 + 2 \cdot \rho_{12} \cdot VaR_1 \cdot VaR_2 + 2 \cdot \rho_{13} \cdot VaR_1 \cdot VaR_3 + 2 \cdot \rho_{23} \cdot VaR_2 \cdot VaR_3} \quad (5.4.2)$$

Όπως είναι προφανές, εκτός από την διακύμανση, θα πρέπει να εκτιμηθεί και η συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών. Ένας τρόπος είναι οι copulas, όπως και έχουν αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Ωστόσο, η εκτίμηση εκείνη είναι δυνατόν να συμβεί και μέσα από πολυμεταβλητά μοντέλα εκτίμησης της διακυμάνσεως, όπως τα μοντέλα BEKK και CCC.

#### **1. BEKK Model**

Το 1985, οι Engle και Kroner, εισήγαγαν το 1985, ένα μοντέλο για την εκτίμηση των διακυμάνσεων αλλά και των συνδιακυμάνσεων των τυχαιών μεταβλητών, για μοντέλα με μεταβλητές από δύο και πάνω. Αν  $\Sigma_t$  ο τετραγωνικός πίνακας  $n \times n$ , όπου  $n$  : το πλήθος των μεταβλητών του μοντέλου, των διακυμάνσεων, η εκτίμηση εκείνων και των συνδιακυμάνσεων, υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση πινάκων :

$$\Sigma_t = \mathbf{A}\mathbf{A}' + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i (\alpha_{t-i} \alpha'_{t-i}) \mathbf{A}_i' + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j \Sigma_{t-j} \mathbf{B}_j' \quad (5.5)$$

με τον πίνακα  $\mathbf{A}$  να αποτελεί ένα κάτω τριγωνικό πίνακα,  $\mathbf{A}_i$  και  $\mathbf{B}_j$  δύο  $n \times n$  τετραγωνικούς πίνακες των εκτιμήσεων των παραμέτρων και  $\alpha$  το διάνυσμα των σφαλμάτων από την μοντελοποίηση του μέσου. Το πλεονέκτημα του μοντέλου, όπως εκείνο παριστάνεται από την σχέση (5.5), έγκειται στο γεγονός ότι επιτρέπει την δυναμική εξάρτηση μεταξύ των

σειρών των διακυμάνσεων. Ωστόσο, όσο μεγαλύτερες είναι και οι διαστάσεις των πινάκων, τόσο πιο πολύπλοκη η εκτίμηση των παραμέτρων, οι οποίοι και αυξάνονται σύμφωνα με την σχέση :  $\frac{n^2(m+s)+n \cdot (n+1)}{2}$  οι οποίοι και δεν έχουν άμεση αναπαράσταση, όπως και πραγματοποιείται στα μονομεταβλητά μοντέλα, αλλά και οι περισσότεροι προκύπτουν στατιστικά σημαντικοί καθώς τα p value των εκτιμήσεων είναι μεγαλύτερα ακόμη και από το πιο ελαστικό επίπεδο, στατιστικής, σημαντικότητας, 10%.

## 2. Constant Conditional Correlation Models

Το μοντέλο CCC αποτελεί το πιο απλό μοντέλο από Conditional Correlation Models στα οποία η μη υποσυνθήκη διακύμανση από την μονομεταβλητή προσομοίωση των αποδόσεων μεταβάλλεται ομαλά κατά την διάρκεια του χρόνου. Αν υποθέσουμε ότι  $\mathbf{D}_t$  αποτελεί έναν πίνακα από υποσυνθήκη ετεροσκεδαστικές και καθορισμένα εξαρτώμενες, από τον χρόνο, μεταβλητές, έτσι ώστε να ισχύει :  $\mathbf{D}_t = \mathbf{S}_t \mathbf{G}_t$ , με  $\mathbf{S}_t$  να αποτελεί τον διαγώνιο πίνακα των υποσυνθήκη τυπικών αποκλίσεων και  $\mathbf{G}_t$  ο πίνακας με τις ντετερμινιστικές μεταβλητές, έτσι ώστε να ισχύει :  $g_{it} = 1 + \sum_{j=1}^r \delta_{ij} G_{ij} \left( \frac{t}{T}; \gamma_{ij}, \mathbf{c}_{ij} \right)$  με τον συντελεστή  $\gamma_{ij}$  να είναι θετικός για όλες τις τυχαίες μεταβλητές  $i=1, \dots, N$  του μοντέλου,  $T$  = οι συνολικές μέρες διαπραγμάτευσης των τίτλων μέσα σε ένα έτος και η συνάρτηση  $G_{ij} \left( \frac{t}{T}; \gamma_{ij}, \mathbf{c}_{ij} \right)$  αποτελεί την **γενικευμένη λογιστική συνάρτηση** που ορίζεται από τον τύπο

$$G_{ij} \left( \frac{t}{T}; \gamma_{ij}, \mathbf{c}_{ij} \right) = \left( 1 + \exp \left\{ -\gamma_{ij} \prod_{d=1}^k \left( \frac{t}{T} - c_{ijd} \right) \right\} \right)^{-1} \quad (5.6)$$

και για τον πίνακα των διακυμάνσεων  $\Sigma_t$  των διακυμάνσεων ισχύει ότι :

$$\Sigma_t = \mathbf{S}_t \mathbf{G}_t \mathbf{P}_t \mathbf{G}_t \mathbf{S}_t, \quad (5.7)$$

με  $\mathbf{P}_t$  ο πίνακας συσχετίσεων των μεταβλητών, η διακύμανση θα μοντελοποιείται από το μοντέλο CCC – GARCH **αν και μόνο αν** ισχύει ότι ο πίνακας των συσχετίσεων είναι ίδιος για κάθε  $t$  και ο  $\mathbf{G}_t$  ίσος με τον μοναδιαίο διαγώνιο, ίσος με το πλήθος των μεταβλητών μέγεθος, πίνακα, με την διακύμανση να υπολογίζεται από την σχέση :

$$\Sigma_t = \mathbf{S}_t \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_t. \quad (5.8)$$

### 5.1.2. Backtesting a Model

Όπως είναι φανερό, η αξία σε κίνδυνο, είναι δυνατό να υπολογιστεί με ποικιλία μεθόδων. Ωστόσο, το πιο σημαντικό κομμάτι της διοικητικής κινδύνου αποτελεί η επιλογή τις πιο κατάλληλης μέσω της αξιολόγησης και του ελέγχου για την αξιοπιστία των μοντέλων. Για κάθε, όμως, χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή και επενδυτή, η αξιολόγηση των μοντέλων που χρησιμοποιεί διαμορφώνεται ανάλογα με την συμπεριφορά του απέναντι στον κίνδυνο (risk lovers, risk neutrals και risk averse) αλλά και τα κεφάλαια που είναι διατεθειμένο/

διατεθειμένος να δαπανήσει. Η κοινή λογική, πάλι, επιλέγει ως κατάλληλο μοντέλο εκτίμησης της αξίας σε κίνδυνο εκείνο που παρέχει την μεγαλύτερη κάλυψη με το μικρότερο δυνατό κόστος κεφαλαίου. Κατά αυτόν τον τρόπο, θεσπίστηκε μία κοινή συνισταμένη για την εφαρμογή του **backtesting**, όπως καλείται η παραπάνω διαδικασία, με στόχο την μέτρηση των μοντέλων ως προς τον έλεγχο παραβίασης των ζημιών από ένα προκαθορισμένο, από τις εποπτικές αρχές και ειδικότερα από τα σύμφωνα της Βασιλείας, επιτρεπόμενο ποσοστό αλλά και από την συμπεριφορά των μοντέλων αυτών όταν πραγματοποιούνται οι παραβάσεις και την προσαρμοστικότητα τους στις συνθήκες της αγοράς. Πάνω στις προαναφερθείσες αρχές, έχουν αναπτυχθεί αρκετά μοντέλα εξέτασης των μοντέλων όπως το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, το απόλυτο σφάλμα, η προσέγγιση του ποσοστημορίου από τους Engle και Manganelli (2004), αλλά και τα κριτήρια του Cristoffersen (1998). Στην μελέτη μας, θα χρησιμοποιήσουμε τα τελευταία, τα οποία και αναλύονται στο unconditional test, στο independence test και στο conditional test. Πριν, ωστόσο, την εκτενή αναφορά των ελέγχων εκείνων, είναι σημαντικό να αποδοθεί μαθηματικά και ο όρος παραβίασης. Έχοντας υπολογίσει την αξία σε κίνδυνο, και συγκρίνοντάς την με τις αποδόσεις του δείγματος  $r_t$ , μία παραβίαση ορίζεται, ως ακολούθως, από μία δείκτρια συνάρτηση :

$$I_t = \begin{cases} 1, & r_t < VaR_t(p) \\ 0, & r_t > VaR_t(p) \end{cases} \quad (5.9)$$

όπου  $p$  : η πιθανότητα υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο, με την δείκτρια να ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με μέση τιμή  $q = 1 - p$ .

### Unconditional Coverage Crterion

Όπως έχει γίνει κατανοητό από τα παραπάνω, ένα τέλειο μοντέλο θα αποτελεί εκείνο που οι παραβιάσεις του θα ανέρχονται σε ποσοστό **ακριβώς**  $1-p$ . Για να είναι σε θέση να το αποδείξει στατιστικώς, ο Cristoffersen ανέπτυξε τον έλεγχο :  $H_0$ : ο αναμενόμενος αριθμός των παραβιάσεων να είναι ίσος με  $q$ , δηλαδή  $E(I_t) = q$  έναντι της  $H_1$ :  $E(I_t) > q$ , με την ελεγχουσυνάρτηση να δίνεται από την σχέση :

$$LR_{UC} = -2 \ln \left( \frac{(1-q)^{T_0} \cdot q^{T_1}}{\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)^{T_0} \cdot \left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1}} \right), \quad (5.10.1)$$

όπου  $T$  : το συνολικό πλήθος του δείγματος,  $T_0$  : το πλήθος των αποδόσεων που δεν ξεπέρασαν την αξία σε κίνδυνο και  $T_1$ : ο αριθμός των παραβιάσεων της αξίας σε κίνδυνο.

Για την εξαγωγή συμπεράσματος καλής ή όχι αξιολόγησης του μοντέλου, ο Cristoffersen υπέθεσε ότι η ελεγχουσυνάρτηση (5.10.1), κάτω από την  $H_0$ , ακολουθεί την  $\chi^2$  κατανομή με 1 βαθμό ελευθερίας. Συνεπώς, αν  $LR_{UC} > X_{1,\alpha}^2$ , με  $\alpha$  το επίπεδο σημαντικότητας



διεξαγωγής του ελέγχου, το μοντέλο θεωρείται μη κατάλληλο. Σε αντίθετη περίπτωση, αποτελεί ένα ιδανικό, αρχικά<sup>35</sup>, μοντέλο εκτίμησης και υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο.

### **The Independency Criterion**

Πέρα από το γεγονός του πλήθους των παραβιάσεων, σημαντικό ρόλο στην διοικητική κινδύνου αποτελεί και το διαθέσιμο κεφάλαιο για την αντιμετώπιση κινδύνων. Σύμφωνα με το κριτήριο, ένα ιδανικό μοντέλο θα προσαρμοζότανε άμεσα στις τάσεις της αγοράς μη δίνοντας, κατά αυτόν τον τρόπο, την δυνατότητα στον αριθμό των υπερβάσεων να συσσωρευτούν, αυξάνοντας το κόστος διαχείρισής τους, σε μία βραχυπρόθεσμη περίοδο. Ο Cristoffersen έκανε την υπόθεση ότι η σειρά των παραβιάσεων εκείνων θα αποτελεί μία αλυσίδα Markov, πρώτης τάξης, καθώς, κατά αυτόν τον τρόπο, όχι μόνο απλοποιεί την πρακτική εφαρμογή του κριτηρίου, αλλά και περιορίζει την υπό εξέταση συσχέτιση μόνο σε συνεχόμενες, και όχι σε όλες, τις παραβιάσεις. Ως μηδενική υπόθεση θεωρεί εκείνη του ιδανικού μοντέλου για το κριτήριο αυτό, έναντι της εναλλακτικής,  $H_1$ : το μοντέλο να παρουσιάζει αργά αντανakλαστικά στις διακυμάνσεις του οικονομικού κύκλου και το κριτήριο απόρριψης ή αποδοχής του μοντέλου αποτελεί αν η ελεγχουσυνάρτηση :

$$LR_{IND} = -2 \ln \left( \left( 1 - \frac{T_1}{T} \right)^{T_0} \cdot \left( \frac{T_1}{T} \right)^{T_1} \right) + 2 \ln \left( (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \cdot \pi_{01}^{T_{01}} \cdot (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \cdot \pi_{11}^{T_{11}} \right) \quad (5.10.2) ,$$

όπου  $T$  : το συνολικό πλήθος του δείγματος,  $T_0$  : το πλήθος των αποδόσεων που δεν ξεπέρασαν την αξία σε κίνδυνο και  $T_1$ : ο αριθμός των παραβιάσεων της αξίας σε κίνδυνο,  $T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}$  : για την  $i$  παρατήρηση που δεν περνάει την αξία σε κίνδυνο η  $j$  επίσης, για την  $i$  παρατήρηση που δεν περνάει την αξία σε κίνδυνο η  $j$  αποτελεί παραβίαση, για την  $i$  παρατήρηση που περνάει την αξία σε κίνδυνο η  $j$  όχι, για την  $i$  παρατήρηση που αποτελεί παραβίαση η  $j$  επίσης, αντιστοίχως με πιθανότητες  $\pi_{00}, \pi_{01}, \pi_{10}, \pi_{11}$  αντίστοιχα. Το μοντέλο υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο, σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, απορρίπτεται αν  $LR_{IND} > X_{1,\alpha}^2$  με  $\alpha$  το επίπεδο σημαντικότητας διεξαγωγής του ελέγχου και  $X^2$  κατανομή με 1 βαθμό ελευθερίας η κατανομή της ελεγχουσυνάρτησης υπό την  $H_0$ .

### **The Conditional Coverage Criterion**

Όπως έχει αναφερθεί στην εισαγωγή της συγκεκριμένης ενότητας, το ιδανικό μοντέλο για την εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο αποτελεί εκείνο που επιτυγχάνει τον μικρότερο αριθμό παραβιάσεων με όσο το δυνατό μικρότερο κόστος. Ο Cristoffersen ανέπτυξε δύο κριτήρια κατά τα οποία ελεγχόταν αν το μοντέλο ήταν επαρκές, σε ότι να κάνει με το πλήθος των παραβιάσεων της αξίας σε κίνδυνο (unconditional coverage criterion) και με την ικανότητά του να ακολουθεί τις τάσεις των χρηματαγορών (independency criterion) ξεχωριστά. Κατά συνέπεια, ανέπτυξε και ένα τρίτο κατά το οποίο, η μηδενική υπόθεση περιγράφει το ιδανικό μοντέλο ως εκείνο που θα δίνει τον επιτρεπόμενο αριθμό παραβιάσεων οι οποίες και θα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Όπως είναι εμφανές, δεν αποτελεί ένα αμιγές κριτήριο αλλά έναν συνδυασμό των δύο παραπάνω, με την μηδενική υπόθεση να

<sup>35</sup> Η τελική απόφαση για την θετική ή όχι αξιολόγηση ενός μοντέλου, είναι μία συνισταμένη και των τριών κριτηρίων του Cristoffersen.

απορρίπτεται, με αποτέλεσμα και το μοντέλο, αν η ελεγχουσυνάρτηση  $LR_{CC} = LR_{UC} + LR_{IND}$ , που υπό την  $H_0$  ακολουθεί την  $\chi^2$  με δύο βαθμούς ελευθερίας, είναι μεγαλύτερη από το  $\alpha$  ποσοστημόριο της  $\chi^2_2$ . Άξιο αναφοράς, ωστόσο, αποτελεί και το γεγονός ότι ένα μοντέλο που μπορεί να απορριφθεί, οριακά, με **ένα** από τα δύο παραπάνω κριτήρια, και κρίνεται αποδεκτό από το συνδυαστικό (conditional), θεωρείται, και, γενικώς αποδεκτό και κατάλληλο.

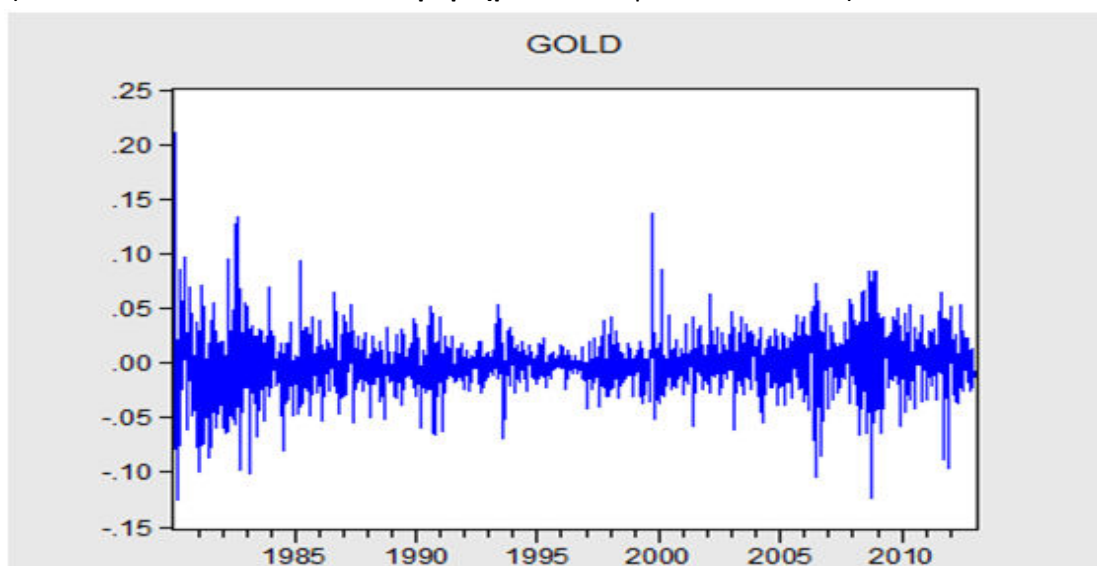
Και για τα τρία παραπάνω κριτήρια, στο υπολογιστικό κομμάτι, χρησιμοποιούμε επίπεδο σημαντικότητας 10% για τους ελέγχους, συνεπώς η σύγκριση των ελεγχουσυναρτήσεων γίνεται με τα ποσοστημόρια  $\chi^2_{1,0.1} = 6.635$  και  $\chi^2_{2,0.1} = 9.210$ . Η αιτία χρησιμοποίησης ελαστικού ελέγχου επαφίεται στην ανάγκη αποφυγής σφάλματα τύπου I και II που είναι πολύ πιθανό να πραγματοποιηθούν μέσα σε ένα πιο αυστηρό, στατιστικά, περιβάλλον.

## 5.2. Αποτελέσματα - Μονομεταβλητής Ανάλυσης

### 5.2.1. Οικονομετρικά Μοντέλα – Υπολογισμός Αξίας σε Κίνδυνο

Όπως είναι εμφανές, από την παραπάνω θεωρητική ενότητα, η μοντελοποίηση της διακύμανσης είναι απαραίτητη. Ξεκινήσαμε, συνεπώς, με την προσαρμογή ενός μοντέλου για την μοντελοποίηση των εβδομαδιαίων αποδόσεων του **χρυσού, του δείκτη χρηματιστηρίου S&P500, και του μονοετές αμερικανικού ομολόγου** για την χρονική περίοδο 1/9/1980 έως και τις 26/12/2012.

Για τις αποδόσεις του χρυσού, από το διάγραμμα των αποδόσεων της, αλλά και από την πληροφορία που περιέχουν τα απλά κατάλοιπα, και κατ' επέκταση τα τετραγωνισμένα, ένα κατάλληλο μοντέλο για την μοντελοποίηση τους είναι ένα  $AR(12)^{36} - EGARCH(1,1)$ , όπως φαίνεται και στον **Πίνακα Β1 – Παράρτημα Β** και παριστάνεται από την



- Διάγραμμα 5.1 : Γράφημα Αποδόσεων του Χρυσού -

<sup>36</sup> Μέσα σε ένα ρεαλιστικό περιβάλλον, οι υστερήσεις δεν πάνε πιο πίσω από 1 μήνα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, το μοντέλο εκείνο πληρούσε όλες τις προϋποθέσεις, που αναφέρουμε, για την καταλληλότητα ως προς την μοντελοποίηση της διακύμανσης.

ακόλουθη εξίσωση :  $return_t = 0.102075 \cdot return_{t-12} + a_t$ ,  $a = \varepsilon_t \cdot \sigma_t$ , με  $\varepsilon_t \sim t_{4.700122}$  και

$$\log(\sigma_t^2) = -0.296937 + 0.215986 \cdot \frac{|a_{t-1}| - 0.053856 \cdot a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0.981889 \cdot \log(\sigma_{t-1}^2).$$

Ωστόσο, άξιο αναφοράς είναι να γίνει κατανοητό το πώς καταλήξαμε σε ένα τέτοιο συμπέρασμα για την, καταρχήν, έγκριση του μοντέλου αυτού. Ο σκοπός είναι να ελέγξουμε την πληροφορία, την αυτοσυσχέτιση που υπάρχει μεταξύ των καταλοίπων, απλών (όσον αφορά για τον μέσο) και των τετραγωνισμένων (σε συνδυασμό με την μοντελοποίηση της διακυμάνσεως), όπως φαίνονται στον **Πίνακα Γ1 – Παράρτημα Γ**, με την βοήθεια του ελέγχου  $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_k = 0$  έναντι της  $H_1$ : ένα τουλάχιστον να είναι διαφορετικό του μηδενός, με  $k$  να αποτελεί την εξεταζόμενη υστέρηση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, το  $p$  value της 7<sup>ης</sup> υστέρησης είναι  $0.488 > 0.05$ , που αποτελεί το επίπεδο σημαντικότητας του ελέγχου, με αποτέλεσμα να απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση, άρα το μοντέλο μας είναι, καταρχήν<sup>37</sup>, δεκτό. Με αυτή την διαδικασία αυτή έχουμε εγκρίνει και τα μοντέλα για τις επόμενες σειρές, όπως θα δούμε και παρακάτω. Για την αξία σε κίνδυνο, και αφού χωρίσαμε το δείγμα μας σε insample και out of sample σε ποσοστό  $\frac{2}{3}$  και  $\frac{1}{3}$  αντίστοιχα, όπου στις 1721

παρατηρήσεις αντιστοιχούν σε 1147 και 574 αντίστοιχα, για τις τελευταίες, υπολογίζουμε την αξία σε κίνδυνο, σύμφωνα με τον τύπο (5.3.2), καθώς η κατανομή των καταλοίπων είναι η  $t$ , και το **Πρόγραμμα A1 – Παράρτημα A**, τόσο σε επίπεδο 95% όσο και σε 99% και αφού τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες αποδόσεις για εκείνες τις ημέρες, χρησιμοποιούμε τα κριτήρια του Cristoffersen για τον επανέλεγχο του μοντέλου μας, όπως και έχουμε αναφέρει και στο θεωρητικό κομμάτι της ενότητάς μας. Για την σειρά του χρυσού, όπως και φαίνεται από τον πίνακα 5.2, έχουμε 27 παραβάσεις για την 95% αξία σε κίνδυνο και 4 για την 99%, με αποτέλεσμα να μην απορριφθεί το μοντέλο το οποίο και προσαρμόσαμε, όπως και φαίνεται από τον πίνακα 5.3 και με τα 3 κριτήρια.

GARCH t - student			
5%		1%	
$T_0$	546	$T_0$	569
$T_1$	27	$T_1$	4
$T_{00}$	519	$T_{00}$	565
$T_{01}$	27	$T_{01}$	4
$T_{10}$	27	$T_{10}$	4
$T_{11}$	0	$T_{11}$	0
$\pi$	0.047120419	$\pi$	0.006980803
$\pi_{01}$	0.049450549	$\pi_{01}$	0.007029877
$\pi_{11}$	0.000000001	$\pi_{11}$	0.000000000
$LR_{uc}$	0.101901166	$LR_{uc}$	0.589901259
$LR_{ind}$	2.671419	$LR_{ind}$	0.056239478
$LR_{cc}$	2.773320166	$LR_{cc}$	0.646140737

- Πίνακας 5.2 : Έλεγχος των παραβιάσεων της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο –

<sup>37</sup> Λέμε καταρχήν καθώς μετά πρέπει να γίνει και ο έλεγχος του Cristoffersen, όπως θα δούμε αργότερα.

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
LR <sub>uc</sub>	Don't Reject VaR Model	LR <sub>uc</sub>	Don't Reject VaR Model
LR <sub>ind</sub>	Don't Reject VaR Model	LR <sub>ind</sub>	Don't Reject VaR Model
LR <sub>cc</sub>	Don't Reject VaR Model	LR <sub>cc</sub>	Don't Reject VaR Model

- Πίνακας 5.3 : Τα αποτελέσματα των κριτηρίων του Cristoffersen για την ευστάθεια του μοντέλου –

Ωστόσο, όπως έχουμε αναφέρει στην θεωρία παραπάνω, τα οικονομετρικά μοντέλα αποτελούν μία σύνθετη «πηγή» υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο. Κατά αυτόν τον τρόπο, όχι μόνο στην σειρά των αποδόσεων του χρυσού αλλά και στις μετέπειτα, υπολογίσαμε την αξία σε κίνδυνο και με την μέθοδο των Risk Metrics, χρησιμοποιώντας τον τύπο (2) και το **Πρόγραμμα A2 – Παράρτημα Α**, πραγματοποιώντας και τους ελέγχους των κριτηρίων του Cristoffersen για την αξιολόγηση του μοντέλου, εξάγουμε το αποτέλεσμα ότι το μοντέλο αποτελεί ένα καλό μοντέλο, όπως δείχνουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.5, καθώς, όσον αφορά την 95% αξία σε κίνδυνο, η συμπεριφορά φαίνεται να είναι παρόμοια με εκείνη του οικονομετρικού μοντέλου (Πίνακας 5.4). Ωστόσο, η 99% αξία σε κίνδυνο αποδίδει περισσότερες παραβιάσεις, γεγονός που καταδεικνύει την υποεκτίμηση του κινδύνου που το χαρακτηρίζει ως μοντέλο.

GARCH t - student			
5%		1%	
T <sub>0</sub>	546	T <sub>0</sub>	563
T <sub>1</sub>	27	T <sub>1</sub>	10
T <sub>00</sub>	520	T <sub>00</sub>	553
T <sub>01</sub>	26	T <sub>01</sub>	10
T <sub>10</sub>	26	T <sub>10</sub>	10
T <sub>11</sub>	1	T <sub>11</sub>	0
π	0.047120419	π	0.017452007
π <sub>01</sub>	0.047619048	π <sub>01</sub>	0.017761989
π <sub>11</sub>	0.037037037	π <sub>11</sub>	0.000000000
LR <sub>uc</sub>	0.101901166	LR <sub>uc</sub>	2.629613681
LR <sub>ind</sub>	0.068810792	LR <sub>ind</sub>	0.355258466
LR <sub>cc</sub>	0.170711958	LR <sub>cc</sub>	2.984872147

- Πίνακας 5.4: Έλεγχος των παραβιάσεων της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο με την Risk Metrics –

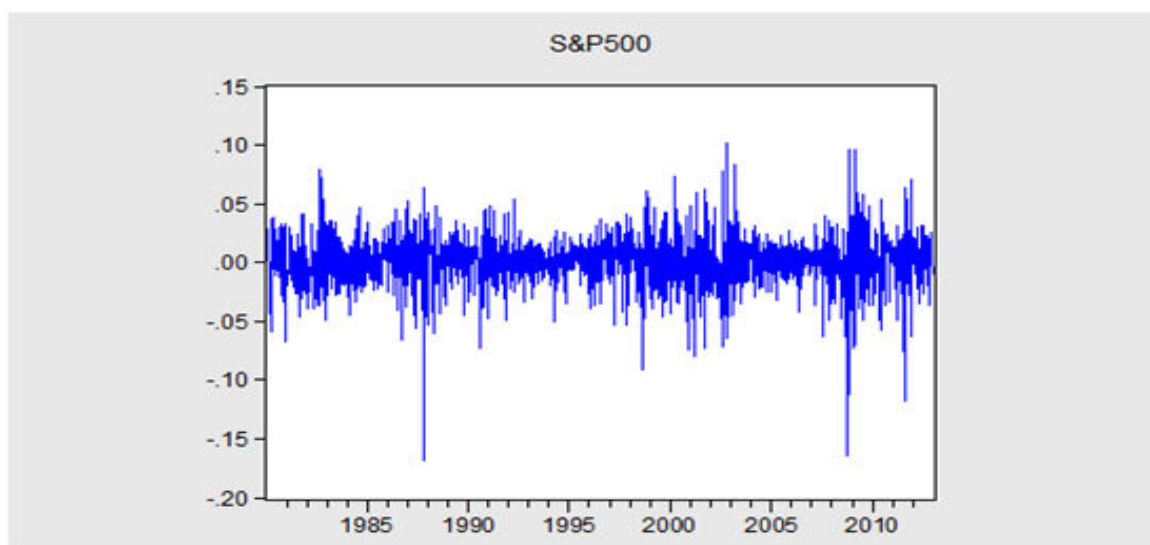
Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
LR <sub>uc</sub>	Don't Reject VaR Model	LR <sub>uc</sub>	Don't Reject VaR Model
LR <sub>ind</sub>	Don't Reject VaR Model	LR <sub>ind</sub>	Don't Reject VaR Model
LR <sub>cc</sub>	Don't Reject VaR Model	LR <sub>cc</sub>	Don't Reject VaR Model

- Πίνακας 5.5 : Τα αποτελέσματα των κριτηρίων του Cristoffersen για την ευστάθεια του μοντέλου –

Η ίδια διαδικασία πραγματοποιήθηκε και για τις επόμενες δύο σειρές των αποδόσεων. Για την σειρά του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500, που οι αποδόσεις του για το υπό μελέτη δείγμα απεικονίζονται στο Διάγραμμα 5.6 παρακάτω, ο Πίνακας B2 – Παράρτημα B απεικονίζει το μοντέλο C – GARCH(1,1) που προσαρμόσαμε, όπου μαθηματικά δίνεται από :

$$returns_t = 0.001585 + a_t,$$

$a_t = \varepsilon_t \cdot \sigma_t$ , με  $\varepsilon_t \sim t_{6,904326}$  και  $\sigma_t^2 = 0.00001305 + 0.102399 \cdot a_{t-1}^2 + 0.875325 \cdot \sigma_{t-1}^2$ , με  $0.102399 + 0.875325 < 1$ . Έχοντας προσαρμόσει το κατάλληλο μοντέλο και χρησιμοποιώντας την σχέση (3.2), καθώς η t student αποδείχθηκε ως η καταλληλότερη κατανομή και σε αυτά τα δεδομένα, και με το Πρόγραμμα A5 – Παράρτημα A για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο, πραγματοποιήσαμε διαδικασίες backtesting. Τα κριτήρια του Cristoffersen έδειξαν ότι το μοντέλο αυτό είναι αποδεκτό, τόσο για την 95% όσο και για την 99% αξία σε κίνδυνο, καθώς, και τα τρία κριτήρια συντελούν στην απόφαση αυτή. Η μόνη εξαίρεση είναι ο έλεγχος των παραβιάσεων, unconditional coverage, για την 99% αξία σε κίνδυνο, όπου αποτελεί και ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα απόρριψης του μοντέλου από ενός εκ των conditional ή independency coverage αλλά συνολικής αποδοχής του λόγω των αποτελεσμάτων του συνδυαστικού, conditional, ελέγχου.



- Διάγραμμα 5.6 : Γράφημα Αποδόσεων του Χρηματιστηριακού Δείκτη S&P500 –

GARCH t - student			
5%		1%	
$T_0$	539	$T_0$	562
$T_1$	34	$T_1$	11
$T_{00}$	508	$T_{00}$	551
$T_{01}$	31	$T_{01}$	11
$T_{10}$	31	$T_{10}$	11
$T_{11}$	3	$T_{11}$	0
$\pi$	0.059336824	$\pi$	0.019197208
$\pi_{01}$	0.057513915	$\pi_{01}$	0.019572954
$\pi_{11}$	0.088235294	$\pi_{11}$	0.000010000
$LR_{uc}$	0.99483571	$LR_{uc}$	3.857065518
$LR_{ind}$	0.478466955	$LR_{ind}$	0.430412479
$LR_{cc}$	1.473302666	$LR_{cc}$	4.287477998

- Πίνακας 5.7 : Έλεγχος των παραβιάσεων της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο για τον S&P500

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model

- Πίνακας 5.8 : Τα αποτελέσματα των κριτηρίων του Cristoffersen για την ευστάθεια του οικονομετρικού μοντέλου για τον S&P 500 –

Προσαρμόζοντας τα δεδομένα σε ένα IGARCH(1,1) μοντέλο, για την εφαρμογή του Risk Metrics υποδείγματος, όπως και διαφαίνεται στο **Πρόγραμμα Α6 – Παράρτημα Α**, για την 95% αξία σε κίνδυνο του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500, το μοντέλο δείχνει να προσαρμόζεται στους διεθνείς κανόνες ως προς το πλήθος των παραβιάσεων της, ωστόσο δεν αποδίδει τα μέγιστα ως προς την δυνατότητά του να προσαρμοστεί το ίδιο καλά στις τάσεις της αγοράς, με αποτέλεσμα να αυξάνεται το κόστος διαχείρισης του κινδύνου και το μοντέλο να μην γίνεται αποδεκτό από το συνδυαστικό και τον έλεγχο ανεξαρτησίας των παραβιάσεων. Το αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο, μη αποδοχή του μοντέλου, και στην περίπτωση της 99% αξίας σε κίνδυνο, ωστόσο το πρόβλημα δημιουργείται από την μη ικανότητα του μοντέλου να παρουσιάσει τον επιθυμητό αριθμό παραβιάσεων. Όλα τα παραπάνω, για την μέθοδο Risk Metrics στην σειρά αποδόσεων S&P 500, συνοψίζονται στους πίνακες 5.9 και 5.10.

GARCH t - student			
5%		1%	
T <sub>0</sub>	539	T <sub>0</sub>	558
T <sub>1</sub>	34	T <sub>1</sub>	15
T <sub>00</sub>	511	T <sub>00</sub>	544
T <sub>01</sub>	28	T <sub>01</sub>	14
T <sub>10</sub>	28	T <sub>10</sub>	14
T <sub>11</sub>	6	T <sub>11</sub>	1
π	0.059336824	π	0.02617801
π <sub>01</sub>	0.051948052	π <sub>01</sub>	0.025089606
π <sub>11</sub>	0.176470588	π <sub>11</sub>	0.066666667
LR <sub>uc</sub>	0.99483571	LR <sub>uc</sub>	10.48235709
LR <sub>ind</sub>	6.180969086	LR <sub>ind</sub>	0.706806292
LR <sub>cc</sub>	7.175804796	LR <sub>cc</sub>	11.18916338

- Πίνακας 5.9 : Έλεγχος των παραβιάσεων της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο για τον S&P500 με την μέθοδο Risk Metrics–

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
LR <sub>uc</sub>	Don't Reject VaR Model	LR <sub>uc</sub>	Reject VaR Model
LR <sub>ind</sub>	Reject VaR Model	LR <sub>ind</sub>	Don't Reject VaR Model
LR <sub>cc</sub>	Reject VaR Model	LR <sub>cc</sub>	Reject VaR Model

- Πίνακας 5.10 : Τα αποτελέσματα των κριτηρίων του Cristoffersen για την ευστάθεια του μοντέλου Risk Metrics για τον S&P 500 –

Για την σειρά των αποδόσεων του μονοετούς αμερικανικού ομολόγου, που οι αποδόσεις του για το υπό μελέτη δείγμα απεικονίζονται στο Διάγραμμα 5.11 παρακάτω, ο Πίνακας Β3 – Παράρτημα Β απεικονίζει το μοντέλο AR(4) – EGARCH(1,1) που προσαρμόσαμε, που μαθηματικά δίνεται από την ακόλουθη σχέση :

$$return_t = 0.000017 + 0.067331 \cdot return_{t-1} + 0.059557 \cdot return_{t-3} + 0.094485 \cdot return_{t-4} + a_t$$

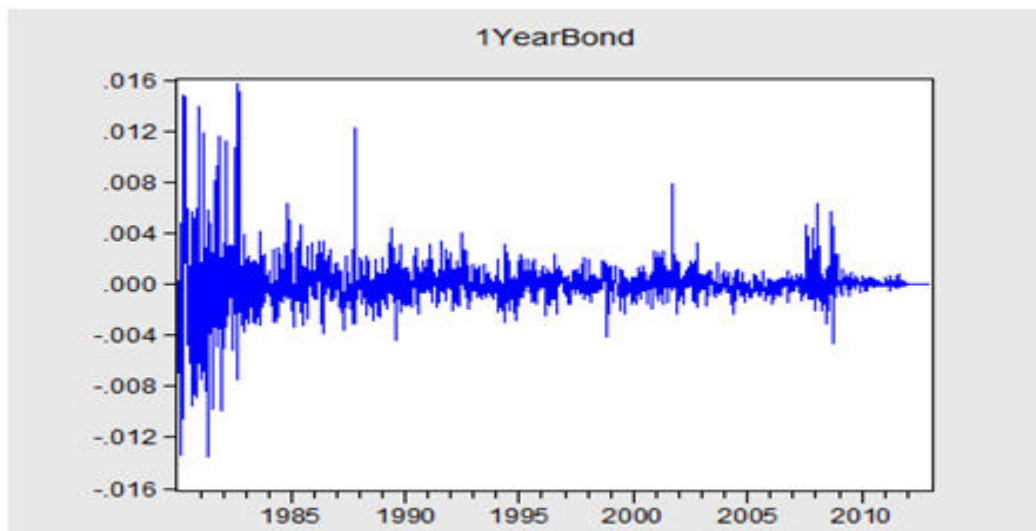
$$a = \varepsilon_t \cdot \sigma_t$$

$$\text{με } \varepsilon_t \sim t_{5,323931}$$

$$\text{και } \log(\sigma_t^2) = -0.222474 + 0.323479 \cdot \frac{|a_{t-1}| - 0.041498 \cdot a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 1.001688 \cdot \log(\sigma_{t-1}^2),$$

Έχοντας προσαρμόσει το κατάλληλο μοντέλο και χρησιμοποιώντας την σχέση (3.2), καθώς η t student αποδείχθηκε ως η καταλληλότερη κατανομή και σε αυτά τα δεδομένα, και με το Πρόγραμμα Α9 – Παράρτημα Α για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο,

πραγματοποιήσαμε διαδικασίες backtesting με την βοήθεια, για ακόμη μία φορά, των κριτηρίων του Cristoffersen.



- Διάγραμμα 5.11 : Γράφημα Αποδόσεων του αμερικανικού μονοετούς ομολόγου –

Τα κριτήρια του Cristoffersen έδειξαν ότι το μοντέλο αυτό δεν μπορεί να είναι αποδεκτό, καθώς τόσο για την 95% όσο και για την 99% αξία σε κίνδυνο, ο έλεγχος των παραβιάσεων αλλά και ο συνδυαστικός, δεν αποδέχονται τις υποθέσεις για έναν μικρό αριθμό παραβιάσεων με το μικρότερο δυνατό κόστος.

GARCH t - student			
5%		1%	
$T_0$	555	$T_0$	572
$T_1$	18	$T_1$	1
$T_{00}$	538	$T_{00}$	571
$T_{01}$	17	$T_{01}$	1
$T_{10}$	17	$T_{10}$	1
$T_{11}$	1	$T_{11}$	0
$\pi$	0.031413613	$\pi$	0.001745201
$\pi_{01}$	0.030630631	$\pi_{01}$	0.001748252
$\pi_{11}$	0.055555556	$\pi_{11}$	0.000001000
$LR_{uc}$	4.774876806	$LR_{uc}$	6.007899372
$LR_{ind}$	0.293370399	$LR_{ind}$	0.003494505
$LR_{cc}$	5.068247205	$LR_{cc}$	6.011393877

- Πίνακας 5.12 : Έλεγχος των παραβιάσεων της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο για το μονοετές αμερικανικό ομόλογο με οικονομετρικά μοντέλα–



Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Reject VaR Model

- Πίνακας 5.13 : Τα αποτελέσματα των κριτηρίων του Cristoffersen για την ευστάθεια του οικονομετρικού μοντέλου για το μονοετές αμερικανικό ομόλογο–

Προσαρμόζοντας τα δεδομένα στο υπόδειγμα του Risk Metrics, όπως και διαφαίνεται στο **Πρόγραμμα A10 – Παράρτημα Α**, για την 95% αξία σε κίνδυνο, το μοντέλο δείχνει να μην μπορεί να προσαρμοστεί στον κανόνα των παραβιάσεων, καθώς το conditional test, αμιγώς το απορρίπτει, ωστόσο να γίνεται αποδεκτό από τον συνδυαστικό και τον έλεγχο της ανεξαρτησίας, υποδεικνύοντας το ως ένα ιδανικό μοντέλο αποτελεσματικής και με μικρότερο κόστος διαχείρισης κινδύνου. Τα αποτελέσματα για την 99% αξία σε κίνδυνο συνθέτουν ένα ακόμη πιο ισχυρό περιβάλλον αποδοχής του μοντέλου, καθώς και οι τρεις έλεγχοι εγκρίνουν το μοντέλο Risk Metrics.

GARCH t - student			
5%		1%	
$T_0$	553	$T_0$	567
$T_1$	20	$T_1$	6
$T_{00}$	534	$T_{00}$	561
$T_{01}$	19	$T_{01}$	6
$T_{10}$	19	$T_{10}$	6
$T_{11}$	1	$T_{11}$	0
$\pi$	0.034904014	$\pi$	0.010471204
$\pi_{01}$	0.034358047	$\pi_{01}$	0.010582011
$\pi_{11}$	0.05	$\pi_{11}$	0.000001000
$LR_{uc}$	3.059883806	$LR_{uc}$	0.012655793
$LR_{ind}$	0.12466853	$LR_{ind}$	0.126974497
$LR_{cc}$	3.184552335	$LR_{cc}$	0.13963029

- Πίνακας 5.14 : Έλεγχος των παραβιάσεων της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο για το μονοετές αμερικανικό ομόλογο με την μέθοδο Risk Metrics–

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model

- Πίνακας 5.15 : Τα αποτελέσματα των κριτηρίων του Cristoffersen για την ευστάθεια του μοντέλου Risk Metrics για το μονοετές αμερικανικό ομόλογο–

Ωστόσο, η επεξεργασία των δεδομένων μας έχει να κάνει με την αξία σε κίνδυνο, με βάση την θεωρία των ακραίων τιμών, και το πώς εκείνη μπορεί να εφαρμοστεί μέσα σε ένα χαρτοφυλάκιο. Για να μπορέσουμε να πραγματοποιήσουμε την ανάλυση εκείνη, θα πρέπει να παρατηρήσουμε την ακραία συμπεριφορά για την κάθε μεταβλητή ξεχωριστά. Για την μελέτη αυτή, όπως και έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 2, υπάρχουν δύο μέθοδοι, με την μέθοδο της block maxima και με την μέθοδο του κατωφλιού.

### 5.2.2. Υπολογισμός της Αξίας σε Κίνδυνο με Εφαρμογή της EVT

Για την block maxima, προσαρμόσαμε, στις σειρές, την κατανομή της Generalized Extreme Value, σύμφωνα με το πακέτο “evir” ενώ για την μέθοδο του κατωφλιού, προσαρμόσαμε την κατανομή της Generalized Pareto, βρίσκοντας πρώτα ένα ιδανικό κατώφλι, με την βοήθεια του πακέτου “POT”. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε μία από τις παρατηρήσεις του out of sample μέρους του δείγματος, εκτιμούμε τις παραμέτρους σχήματος  $\xi$ , μορφής  $\mu$  και κλίμακας  $\sigma$  της κατανομής και αφού υπολογίσαμε την 95% και 99% αξία σε κίνδυνο, με βάση τον τύπο (2.7), για την GEV και τον τύπο (2.18) για την GPD, τις συγκρίναμε με τις αποδόσεις για να μπορέσουμε να εξετάσουμε το μοντέλο μας με τα κριτήρια του Cristoffersen. Άξιο αναφοράς είναι ότι για την εκτίμηση των παραμέτρων χρησιμοποιείται η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας που είναι και η πιο συνηθισμένη στην πράξη, όπως και αναφέρουμε στο θεωρητικό αντίστοιχο κομμάτι.

Για την σειρά των αποδόσεων του χρυσού, η προσαρμογή της κατανομής και ο υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο έγιναν με βάση το **Πρόγραμμα A3 – Παράρτημα A**. Τα κριτήρια του Cristoffersen δείχνουν ότι η προσαρμογή της γεν καθιστά τις παραβιάσεις της αξίας σε κίνδυνο ένα συχνό φαινόμενο με αποτέλεσμα την απόρριψή του τόσο στην 95% όσο και στην 99% αξία σε κίνδυνο. Άξιο αναφοράς, όπως φαίνεται και από τον πίνακα 5.16, είναι ότι στην 99% αξία σε κίνδυνο καμία από τις παρατηρήσεις δεν βρίσκεται κάτω από την εκτιμώμενη αξία σε κίνδυνο, με αποτέλεσμα να θέσουμε στην θέση  $T_0 = 0.00000001$  για την ευστάθεια των υπολογισμών.

Αντίστοιχα αποτελέσματα εξάγουμε και με την προσαρμογή της Generalized Pareto Distribution. Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να βρεθεί και ένα κατάλληλο κατώφλι έτσι ώστε να μας εξασφαλίσει τόσες παρατηρήσεις όσες να είναι κατάλληλες για την καλύτερη προσαρμογή του μοντέλου. Σε αυτό συμβάλλει, όπως έχουμε αναφέρει και

στο αντίστοιχο θεωρητικό κεφάλαιο, η mean excess function. Για να πληρούνται τα στοιχεία και τα δεδομένα που αναφέρουμε παραπάνω, επιλέγουμε ως κατώφλι το 0.03. Ο υπολογισμός των αξιών σε κίνδυνο αποτυπώνεται στο **Πρόγραμμα A4 – Παράρτημα Α**.

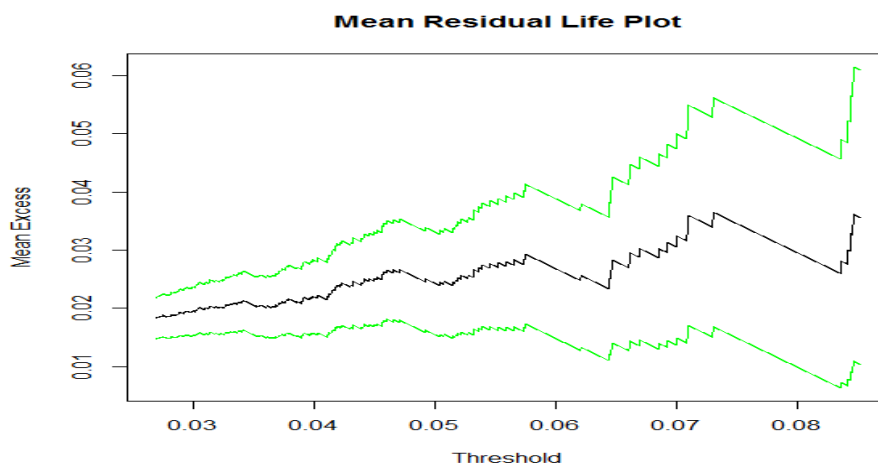
GARCH t - student			
5%		1%	
$T_0$	10	$T_0$	0.000000001
$T_1$	563	$T_1$	573
$T_{00}$	1	$T_{00}$	0.0000001
$T_{01}$	9	$T_{01}$	-0.000000099
$T_{10}$	9	$T_{10}$	0
$T_{11}$	554	$T_{11}$	573
$\pi$	0.982547993	$\pi$	1
$\pi_{01}$	0.9	$\pi_{01}$	0.00000001
$\pi_{11}$	0.98401421	$\pi_{11}$	1.000000000
$LR_{uc}$	3273.429938	$LR_{uc}$	5277.525033
$LR_{ind}$	1.984462765	$LR_{ind}$	3.7023E-06
$LR_{cc}$	3275.4144	$LR_{cc}$	5277.525037

- Πίνακας 5.16 : Αναλυτικά αποτελέσματα σύγκρισης αποδόσεων των 95% και 99% αξιών σε κίνδυνο με τις αποδόσεις του χρυσού με την προσαρμογή της GEV –

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Reject VaR Model

- Πίνακας 5.20 : Αποτελέσματα ελέγχου του Cristoffersen για τις αποδόσεις του χρυσού με την GEV –

Η σύγκριση των τελευταίων με τις αποδόσεις, δείχνουν ότι (και) αυτό το μοντέλο κρίνεται ως ακατάλληλο καθώς, πέρα από τον έλεγχο ανεξαρτησίας, ο έλεγχος των παραβιάσεων αλλά και ο συνδυαστικός έλεγχος του Cristoffersen, το απορρίπτουν, όπως και φαίνεται από τους πίνακες 5.19 και 5.20



- Διάγραμμα 5.18 : Mean Residual Plot για τις αποδόσεις του χρυσού –

GARCH t - student			
5%		1%	
$T_0$	154	$T_0$	154
$T_1$	419	$T_1$	419
$T_{00}$	39	$T_{00}$	39
$T_{01}$	115	$T_{01}$	115
$T_{10}$	115	$T_{10}$	115
$T_{11}$	304	$T_{11}$	304
$\pi$	0.731239092	$\pi$	0.731239092
$\pi_{01}$	0.746753247	$\pi_{01}$	0.746753247
$\pi_{11}$	0.725536993	$\pi_{11}$	0.725536993
$LR_{uc}$	1859.224181	$LR_{uc}$	3195.23032
$LR_{ind}$	0.259996379	$LR_{ind}$	0.259996379
$LR_{cc}$	1859.484177	$LR_{cc}$	3195.490317

- Πίνακας 5.19 : Αναλυτικά αποτελέσματα σύγκρισης αποδόσεων των 95% και 99% αξιών σε κίνδυνο με τις αποδόσεις του χρυσού με την προσαρμογή της GPD –

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Reject VaR Model

- Πίνακας 5.20 : Αποτελέσματα ελέγχου του Cristoffersen για τις αποδόσεις του χρυσού με την GPD –

Από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι εμφανές ότι τα μοντέλα της Θεωρίας Ακραίων Τιμών δεν αποτελεί ένα κατάλληλο μοντέλο για την προσαρμογή των αποδόσεων του χρυσού με αποτέλεσμα, για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο αποτελεί το οικονομετρικό μοντέλο που έχουμε προσαρμόσει παραπάνω.

Τα αποτελέσματα δεν διαφοροποιούνται, ως προς την προσομοίωση της EVT, και στην περίπτωση των αποδόσεων του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500. Η προσαρμογή της GEV, **Πρόγραμμα A7 – Παράρτημα A**, σύμφωνα με τα κριτήρια του Cristoffersen, από τα unconditional και conditional ελέγχων, κρίνεται ως ένα απορριπτέο μοντέλο, καθώς όλες οι παρατηρήσεις ξεπερνάνε την αξία σε κίνδυνο, και όσον αφορά την 95% και την 99%.

GARCH t - student			
5%		1%	
$T_0$	0.00000001	$T_0$	0.00000001
$T_1$	573	$T_1$	573
$T_{00}$	0.000000001	$T_{00}$	0.000000001
$T_{01}$	0.000000001	$T_{01}$	0.000000001
$T_{10}$	0.000000001	$T_{10}$	0.000000001
$T_{11}$	573	$T_{11}$	573
$\pi$	1	$\pi$	1
$\pi_{01}$	0.1	$\pi_{01}$	0.1
$\pi_{11}$	1	$\pi_{11}$	1.000000000
$LR_{uc}$	3433.109185	$LR_{uc}$	5277.525033
$LR_{ind}$	-4.81589E-09	$LR_{ind}$	-6.71238E-09
$LR_{cc}$	3433.109185	$LR_{cc}$	5277.525033

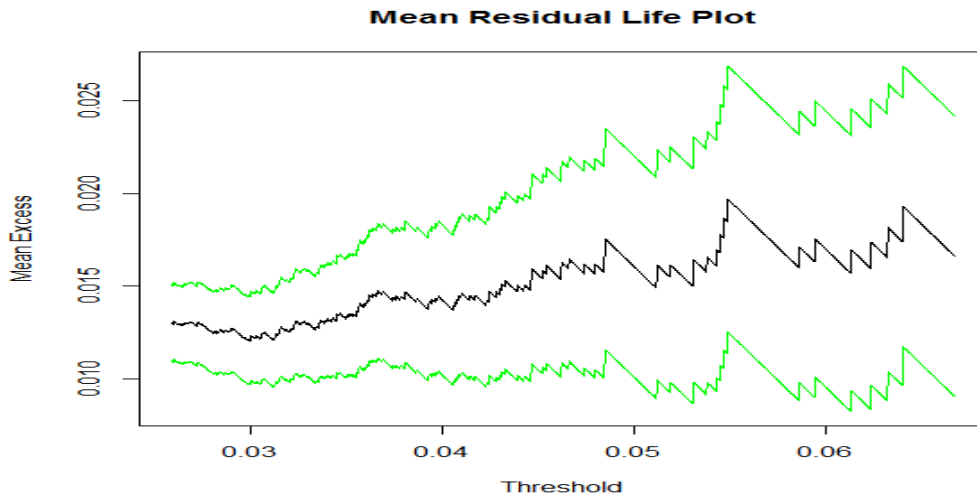
- Πίνακας 5.21 : Αναλυτικά αποτελέσματα σύγκρισης αποδόσεων των 95% και 99% αξιών σε κίνδυνο με τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 με την προσαρμογή της GEV –

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Reject VaR Model

- Πίνακας 5.22 : Αποτελέσματα ελέγχου του Cristoffersen για τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 με την GEV –

Για την μέθοδο Peak Over Threshold, για την επιλογή του κατωφλιού, λαμβάνοντας για ακόμη μία φορά τον παράγοντα επαρκής αριθμός, χρησιμοποιούμε, την συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου και θέτουμε όπου  $u=0.04$ , οπότε χρησιμοποιώντας (2.18) και το

**Πρόγραμμα A8 – Παράρτημα A**, υπολογίζουμε τα 95% και 99% VaR για τις αποδόσεις του δείκτη και μέσω της *gpd*. Τα κριτήρια του Cristoffersen, και σε αυτή την περίπτωση, εξάγουν ένα αρνητικό αποτέλεσμα ως προς την καταλληλότητα του μοντέλου, αποτέλεσμα που προκύπτει, όπως και στις ως τώρα εφαρμογές της EVT, από τον έλεγχο των παραβιάσεων και του συνδυαστικού ελέγχου παραβατικότητας και ανεξαρτησίας, και για τις δύο εκτιμώμενες αξίες σε κίνδυνο.



- Διάγραμμα 5.23 : Mean Residual Plot για τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 –

GARCH t - student			
5%		1%	
$T_0$	185	$T_0$	180
$T_1$	388	$T_1$	393
$T_{00}$	57	$T_{00}$	55
$T_{01}$	128	$T_{01}$	125
$T_{10}$	128	$T_{10}$	125
$T_{11}$	260	$T_{11}$	268
$\pi$	0.677137871	$\pi$	0.685863874
$\pi_{01}$	0.691891892	$\pi_{01}$	0.694444444
$\pi_{11}$	0.670103093	$\pi_{11}$	0.681933842
$LR_{uc}$	1622.823531	$LR_{uc}$	2910.045677
$LR_{ind}$	0.27322149	$LR_{ind}$	0.089929436
$LR_{cc}$	1623.096752	$LR_{cc}$	2910.135606

- Πίνακας 5.24 : Αναλυτικά αποτελέσματα σύγκρισης αποδόσεων των 95% και 99% αξιών σε κίνδυνο με τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 με την προσαρμογή της GPD –

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
LR <sub>uc</sub>	Reject VaR Model	LR <sub>uc</sub>	Reject VaR Model
LR <sub>ind</sub>	Don't Reject VaR Model	LR <sub>ind</sub>	Don't Reject VaR Model
LR <sub>cc</sub>	Reject VaR Model	LR <sub>cc</sub>	Reject VaR Model

- Πίνακας 5.25 : Αποτελέσματα ελέγχου του Cristoffersen για τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 με την GPD –

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή της μελέτης για τις αποδόσεις του S&P500, τα αποτελέσματα θα επιβεβαιώνανε ότι η θεωρία των ακραίων τιμών θα αποτελεί ένα ακατάλληλο μοντέλο, διατηρώντας, και σε αυτή την περίπτωση, το συμβατικό μοντέλο ARCH – GARCH που έχουμε προσαρμόσει.

Τέλος, προσαρμόσαμε την Θεωρία Ακραίων Τιμών και για την σειρά του μονοετούς αμερικανικού ομολόγου. Για ακόμη μία φορά, για την μέθοδο της block maxima, προσαρμόσαμε την Generalized Extreme Value κατανομή, με βάση το **Πρόγραμμα A11 – Παράρτημα Α**, και υπολογίσαμε την 95% και 99% με βάση την σχέση (2.7). Ο  $\chi^2$  έλεγχος για τα κριτήρια του Cristoffersen, για ακόμη μία φορά, ως προς την παραβατικότητα της αξίας σε κίνδυνο αλλά και τον συνδυαστικό, conditional, επέφεραν ένα αρνητικό αποτέλεσμα για την προσαρμογή της GEV και στην σειρά των αποδόσεων εκείνη, όπως και φαίνεται στον πίνακα 5.26 , με το πλήθος των παραβιάσεων των εκτιμώμενων VaR, και στον Πίνακα 5.27.

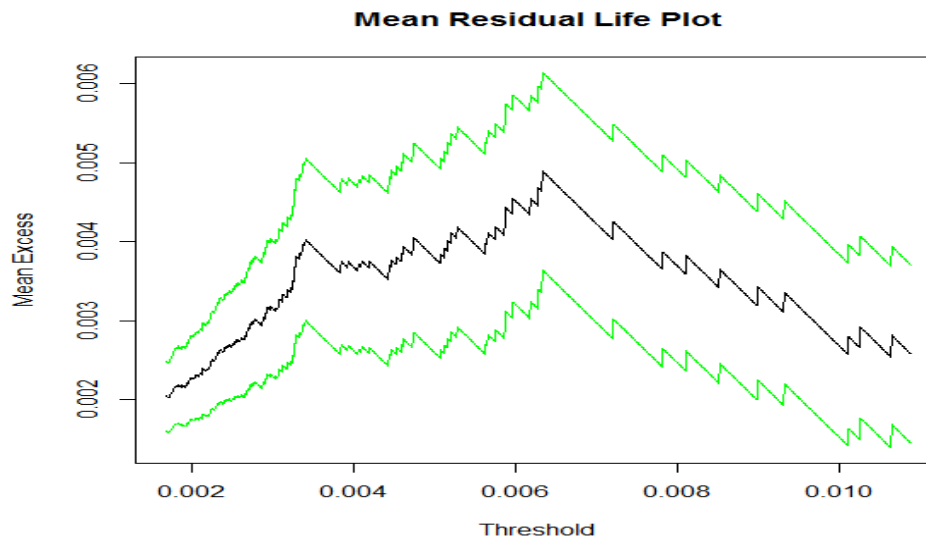
GARCH t - student			
5%		1%	
T <sub>0</sub>	2	T <sub>0</sub>	0.000000001
T <sub>1</sub>	571	T <sub>1</sub>	573
T <sub>00</sub>	0.0000001	T <sub>00</sub>	0.000000001
T <sub>01</sub>	1.9999999	T <sub>01</sub>	1E-10
T <sub>10</sub>	2	T <sub>10</sub>	0.00000001
T <sub>11</sub>	569	T <sub>11</sub>	573
$\pi$	0.996509599	$\pi$	1
$\pi_{01}$	0.99999995	$\pi_{01}$	0.1
$\pi_{11}$	0.996497373	$\pi_{11}$	1.000000000
LR <sub>uc</sub>	3394.707464	LR <sub>uc</sub>	5277.525033
LR <sub>ind</sub>	0.014006974	LR <sub>ind</sub>	-4.59954E-07
LR <sub>cc</sub>	3394.721471	LR <sub>cc</sub>	5277.525033

- Πίνακας 5.26 : Αναλυτικά αποτελέσματα σύγκρισης αποδόσεων των 95% και 99% αξιών σε κίνδυνο με τις αποδόσεις του μονοετούς ομολόγου με την προσαρμογή της GEV –

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Reject VaR Model

- Πίνακας 5.27 : Αποτελέσματα ελέγχου του Cristoffersen για τις αποδόσεις του μονοετούς ομολόγου με την GEV –

Όπως και στις προηγούμενες σειρές, έτσι και σε αυτή, για την μέθοδο Peak Over The Threshold, προσαρμόσαμε την GPD με τιμή για το κατώφλι  $u = 0.0027$ , όπως επιλέχθηκε, με τα ίδια κριτήρια όπως και προηγουμένως, από το διάγραμμα της mean excess function. Με βάση, συνεπώς, **Πρόγραμμα A12 – Παράρτημα Α**, και την σχέση (2.18), υπολογίσαμε την 95% και 99% αξία σε κίνδυνο και στην περίπτωση αυτή. Το συμπέρασμα που εξήχθη και για την σειρά των αποδόσεων του μονοετούς ομολόγου ήταν ότι και με την μέθοδο αυτή, η Θεωρία Ακραίων Τιμών αποτελεί ένα μη ουσιώδες μοντέλο προσαρμογής, όπως και το μοντέλο ARCH-GARCH, με αποτέλεσμα το μοντέλο Risk Metrics, με την επιφύλαξη που ελλοχεύει λόγω των ισχυρών μειονεκτημάτων του, που προσαρμόσαμε παραπάνω, να αποτελεί και την ιδανική λύση για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο και την χρησιμοποίησή του για την λήψη επιχειρησιακών αλλά και επενδυτικών αποφάσεων.



- Διάγραμμα 5.28 : Mean Residual Plot για τις αποδόσεις του μονοετούς ομολόγου –

Άξιο αναφοράς, ωστόσο, αποτελεί και το γεγονός ότι στην περίπτωση των αποδόσεων του αμερικανικού ομολόγου, και τα 3 κριτήρια οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα, καθώς και ο έλεγχος της ανεξαρτησίας δεν αποδέχεται το μοντέλο, γεγονός που ενδεχομένως να



οφείλεται στα μη γρήγορα αντανακλαστικά της σειράς στις ξαφνικές αλλαγές της οικονομίας, όπως εκείνες αποτυπώνεται εντονότερα τα τελευταία χρόνια της ύφεσης, τμήμα του οποίου αποτελεί και το εξεταζόμενο out of sample μέρος του δείγματος.

GARCH t - student			
5%		1%	
$T_0$	473	$T_0$	468
$T_1$	100	$T_1$	105
$T_{00}$	406	$T_{00}$	399
$T_{01}$	67	$T_{01}$	69
$T_{10}$	67	$T_{10}$	69
$T_{11}$	33	$T_{11}$	36
$\pi$	0.17452007	$\pi$	0.183246073
$\pi_{01}$	0.141649049	$\pi_{01}$	0.147435897
$\pi_{11}$	0.33	$\pi_{11}$	0.342857143
$LR_{uc}$	117.0931546	$LR_{uc}$	430.6758206
$LR_{ind}$	17.82436858	$LR_{ind}$	19.33700385
$LR_{cc}$	134.9175231	$LR_{cc}$	450.0128244

- Πίνακας 5.29 : Αναλυτικά αποτελέσματα σύγκρισης αποδόσεων των 95% και 99% αξιών σε κίνδυνο με τις αποδόσεις του μονοετούς ομολόγου με την προσαρμογή της GPD –

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Reject VaR Model

- Πίνακας 5.30: Αποτελέσματα ελέγχου του Cristoffersen για τις αποδόσεις του μονοετούς ομολόγου με την GPD –

### 5.2.3. Συμπεράσματα

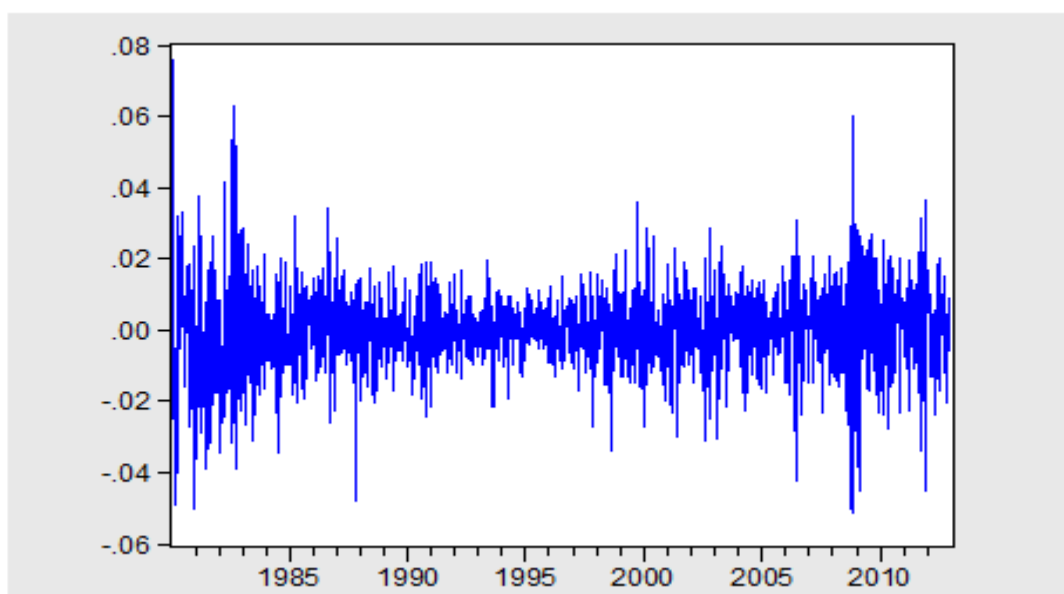
Όπως γίνεται αντιληπτό από την παραπάνω ανάλυση, τουλάχιστον σε επίπεδο των μεμονωμένων σειρών, η θεωρία ακραίων τιμών δεν αποτελεί το ιδανικό μοντέλο, με καμία από τις δύο μεθόδους που την έχουμε αναπτύξει. Τα συμβατικά, οικονομετρικά και μη, μοντέλα, δείχνουν να προσαρμόζονται καλύτερα πάνω στα δεδομένα μας, αν και σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως στην σειρά των αποδόσεων του μονοετούς αμερικανικού ομολόγου, παρουσιάζεται ένας βαθμός δυσκολίας. Η συμπεριφορά εκείνη είναι πιθανό να

οφείλεται και στο γεγονός ότι τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα στις διεθνείς χρηματαγορές δεν χρησιμοποιούν την Θεωρία Ακραίων Τιμών για την προσομοίωση των πιθανών τους ζημιών αλλά την πιο απλούστερη εκ των συμβατικών, ελάχιστοι χρησιμοποιούν οικονομετρικές μεθόδους, μοντέλα, κατατάσσοντας, κατά αυτόν τον τρόπο, την EVT ως ένα χρήσιμο εργαλείο για ακαδημαϊκούς σκοπούς μόνο. Επιπρόσθετα, όπως κάλλιστα μπορεί να φανερωθεί από τα διαγράμματα των αποδόσεων, οι σειρές, άλλες σε μεγάλο άλλες σε μικρό βαθμό, χαρακτηρίζονται από στασιμότητα, καθώς, στις περισσότερες περιπτώσεις, με την έλευση μίας ξαφνικής ζημίας, shock, οι αποδόσεις δείχνουν να επιστρέφουν πίσω στην μέση τιμή τους, μην αφήνοντας, κατά αυτόν τον τρόπο περιθώριο στην ανάπτυξη πολλών ακραίων παρατηρήσεων, στοιχείο απαραίτητο στην Θεωρία Ακραίων Τιμών, έτσι ώστε η EVT να προσαρμοστεί κατάλληλα. Στο τελευταίο ισχυρισμό, μάλιστα, έρχονται να προστεθούν τα αρκετά μεγάλα σφάλματα που προκύπτανε από τις εκτιμήσεις κατά την διάρκεια των διαφόρων προγραμμάτων της θεωρίας αυτής.

### 5.3. Αποτελέσματα Πολυμεταβλητής Ανάλυσης

Όπως και παραπάνω, στην μονομεταβλητή περίπτωση, η μεθοδολογία αποτελεί την εύρεση της αξίας σε κίνδυνο για το μέρος out of sample του δείγματος, και τον έλεγχο για την επάρκεια του μοντέλου μέσω των κριτηρίων του Cristoffersen. Οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου, που αποτελεί και το υπό εξέταση δείγμα για την πολυμεταβλητή ανάλυση, υπολογίζονται ως ο μέσος όρος των αποδόσεων των τριών μεμονωμένων σειρών, που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Πραγματοποιούμε την υπόθεση, συνεπώς, ότι οι επενδύσεις είναι ισοβαρείς μέσα στο χαρτοφυλάκιο, δηλαδή οι αποδόσεις του

χαρτοφυλακίου δίνονται από την σχέση :  $r_{portfolio} = \frac{1}{3}r_{gold} + \frac{1}{3}r_{lybond} + \frac{1}{3}r_{S\&P500}$  .



- Διάγραμμα 5.31 : Γράφημα αποδόσεων του χαρτοφυλακίου -

Για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο, αρχικά, εφαρμόσαμε το μοντέλο BEKK, όπως το αντίστοιχο πρόγραμμα φαίνεται στο **Πρόγραμμα A13 - Παράρτημα A** το αντίστοιχο πρόγραμμα, με την κατανομή των καταλοίπων να είναι η t – student, όπως είχε

προσαρμοσθεί και μεμονωμένα στις αποδόσεις του χρυσού, του S&P500 και του μονοετούς αμερικανικού ομολόγου. Τα κριτήρια του Cristoffersen, πίνακας 5.33, τόσο για την 95% όσο και για την 99% αξία σε κίνδυνο, συγκλίνουν στο αποτέλεσμα του ιδανικού μοντέλου καθώς συνδυάζει τα χαμηλά επίπεδα παραβίασης της αξίας σε κίνδυνο με το δυνατότερο χαμηλό κόστος διαχείρισης.

GARCH t - student			
5%		1%	
$T_0$	548	$T_0$	569
$T_1$	25	$T_1$	4
$T_{00}$	525	$T_{00}$	565
$T_{01}$	23	$T_{01}$	4
$T_{10}$	23	$T_{10}$	4
$T_{11}$	2	$T_{11}$	0
$\pi$	0.043630017	$\pi$	0.006980803
$\pi_{01}$	0.041970803	$\pi_{01}$	0.007029877
$\pi_{11}$	0.08	$\pi_{11}$	0.000000010
$LR_{uc}$	0.51053871	$LR_{uc}$	0.589901259
$LR_{ind}$	0.678252187	$LR_{ind}$	0.056239399
$LR_{cc}$	1.188790897	$LR_{cc}$	0.646140658

- Πίνακας 5.32 : Αναλυτικά αποτελέσματα σύγκρισης των 95% και 99% αξιών σε κίνδυνο με τις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου με το μοντέλο BEKK –

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model

- Πίνακας 5.33 : Αποτελέσματα ελέγχου του Cristoffersen για τις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου με το μοντέλο BEKK –

Στην περίπτωση μοντελοποίησης των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου με το CCC μοντέλο, οι υπολογισμοί των 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο φαίνονται στο **Πρόγραμμα A14 – Παράρτημα Α**, το μοντέλο κρίνεται ανεπαρκές για την πρώτη καθώς το πρώτο κριτήριο, των παραβιάσεων, αλλά και ο συνδυαστικός δείχνουν ότι η  $H_0$ : το μοντέλο δίνει την ιδανική αξία σε κίνδυνο, απορρίπτεται οριακά, ενώ για την δεύτερη, την 99%, αποτελεί το ιδανικό μοντέλο καθώς και το ποσοστό των παραβιάσεων είναι μικρότερο από 1% με χαμηλό

κόστος, όπως καταδεικνύει και το τρίτο, και συνδυαστικό, κριτήριο του Cristoffersen, στον πίνακα 5.35. Το γεγονός ότι στην 95% το μοντέλο απορρίπτεται ενδεχομένως και να οφείλεται, συγκριτικά με το μοντέλο BEKK, στην απλότητα που το διακρίνει ειδικότερα στο γεγονός οι συσχετίσεις εκφράζονται από ένα μοναδιαίο διαγώνιο πίνακα.

GARCH t - student			
5%		1%	
$T_0$	525	$T_0$	567
$T_1$	48	$T_1$	6
$T_{00}$	482	$T_{00}$	561
$T_{01}$	43	$T_{01}$	6
$T_{10}$	43	$T_{10}$	6
$T_{11}$	5	$T_{11}$	0
$\pi$	0.083769634	$\pi$	0.010471204
$\pi_{01}$	0.081904762	$\pi_{01}$	0.010582011
$\pi_{11}$	0.104166667	$\pi_{11}$	0.000000001
$LR_{uc}$	11.53669878	$LR_{uc}$	0.012655793
$LR_{ind}$	0.267010787	$LR_{ind}$	0.126986485
$LR_{cc}$	11.80370957	$LR_{cc}$	0.139642278

- Πίνακας 5.34 : Αναλυτικά αποτελέσματα σύγκρισης των 95% και 99% αξιών σε κίνδυνο με τις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου με το μοντέλο CCC-

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model

- Πίνακας 5.35 : Αποτελέσματα ελέγχου του Cristoffersen για τις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου με το μοντέλο CCC -

Όπως και στην μονομεταβλητή περίπτωση, έτσι και στην πολυμεταβλητή θα πραγματοποιήσουμε σύγκριση μεταξύ των προηγούμενων προσαρμοσμένων μοντέλων με την προσαρμογή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου με την Θεωρία Ακραίων Τιμών. Όπως έχουμε αναφέρει και στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, η Multivariate Extreme Value (MEV) Distribution, όπως και η GEV, οδηγεί σε μία «σπατάλη» δεδομένων. Εξαιτίας του γεγονότος αυτού, επιλέγουμε να υπολογίσουμε την αξία σε κίνδυνο, στο χαρτοφυλάκιο, μόνο με την κατανομή της Generalized Pareto (GPD) και σύμφωνα με τον τύπο (5.4.2). Μάλιστα, τους

δείκτες συσχέτισης τους υπολογίζουμε με την προσαρμογή της  $t$  copula η χρήση της οποίας, παρά το γεγονός ότι η  $t$  copula, και γενικά οι elliptical copulas, χαρακτηρίζεται από συμμετρία και πολύπλοκο τύπο, είναι πολύ συχνή στον τομέα του Risk Management. Ξεκινώντας, συνεπώς, από αυτή, τη μοντελοποίηση της συσχέτισης μεταξύ των δεδομένων μας, αφού προσαρμόσαμε μία pseudo συνάρτηση πιθανοφάνειας στα δεδομένα μας, και χρησιμοποιώντας την εντολή fitcopula, από το πακέτο βιβλιοθήκης R : copula, για την  $t$  copula με 10 βαθμούς ελευθερίας, δείξαμε ότι οι σειρές του χρυσού, του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 και του μονοετούς αμερικανικού ομολόγου έχουν συσχέτιση που φαίνεται από τον πίνακα 5.36 παρακάτω.

	S&P 500	GOLD	1 YEAR BOND
S&P 500	1.0000		
GOLD	0.06582	1.0000	
1 YEAR BOND	0.07496	0.08653	1.0000

- Πίνακας 5.36: Δείκτες συσχέτισης με την προσαρμογή  $t$  copula –

Εφόσον υπολογίσαμε την μεταξύ τους συσχέτιση, χρησιμοποιώντας τις αξίες σε κίνδυνο για την GPD, όπως εκείνες έχουν υπολογιστεί από τα αντίστοιχα προγράμματα στην μονομεταβλητή περίπτωση, χρησιμοποιούμε το **Πρόγραμμα A15 – Παράρτημα Α**, και υπολογίζουμε την 95% αλλά και την 99% αξία σε κίνδυνο για κάθε μία από τις out of sample παρατηρήσεις. Έχοντας συγκρίνει τις αξίες, αυτές, σε κίνδυνο, με τις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου, εφαρμόζουμε τα κριτήρια του Cristoffersen για τον έλεγχο του μοντέλου αυτού, τα αναλυτικά αποτελέσματα του οποίου φαίνονται στους πίνακες 5.37 και 5.38. Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσει κάποιος ότι και το χαρτοφυλάκιο ακολουθεί την συμπεριφορά των σειρών μεμονωμένα, και απορρίπτει την Θεωρία Ακραίων Τιμών τόσο κατά τον κανόνα των παραβιάσεων όσο και με τον συνδυαστικό έλεγχο και στις δύο περιπτώσεις – αξίες σε κίνδυνο.

GARCH t - student			
5%		1%	
$T_0$	127	$T_0$	123
$T_1$	446	$T_1$	450
$T_{00}$	33	$T_{00}$	31
$T_{01}$	94	$T_{01}$	92
$T_{10}$	94	$T_{10}$	92
$T_{11}$	352	$T_{11}$	358
$\pi$	0.778359511	$\pi$	0.785340314
$\pi_{01}$	0.74015748	$\pi_{01}$	0.74796748
$\pi_{11}$	0.789237668	$\pi_{11}$	0.795555556
$LR_{uc}$	2079.014679	$LR_{uc}$	3551.130695
$LR_{ind}$	1.343665842	$LR_{ind}$	1.261700831
$LR_{cc}$	2080.358344	$LR_{cc}$	3552.392395

- Πίνακας 5.37: Αναλυτικά Αποτελέσματα για τις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου με GPD κατανομή και εξάρτηση από την  $t$  copula –

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Reject VaR Model

- Πίνακας 5.38: Αποτελέσματα των κριτηρίων του Cristoffersen για το χαρτοφυλάκιο με GPD κατανομή και εξάρτηση από την  $t$  copula -

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Εμπειρική Ανάλυση – Λειτουργικός Κίνδυνος

Ο λειτουργικός κίνδυνος αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος καθώς ο ορισμός, η μέτρηση αλλά και οι πρακτικές για την προστασία έναντι εκείνου ήταν ελάχιστα προηγμένες. Γενικά, μπορεί να θεωρηθεί ακόμη ότι, ως τομέας διοικητικής κινδύνου, ότι βρίσκεται σε στάδιο άνηθης και ανάπτυξης. Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί σύμφωνα για την αντιμετώπισή του τόσο για τράπεζες όσο και για ασφαλιστικές εταιρίες και παρεμφερή ιδρύματα. Οι κανόνες εκείνοι διέπουν κάθε οικονομικού μεγέθους χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και έχουν ως κοινή συνισταμένη την εύρεση των καταλλήλων μοντέλων για την συγκέντρωση των απαραίτητων ελαχίστων κεφαλαίων για την προστασία τους έναντι σε ενδεχόμενες οικονομικές απώλειες τόσο από αναμενόμενες όσο και από μη λειτουργικές ζημιές<sup>38</sup>.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα παρουσιάσουμε τους κανόνες που διέπουν τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα μέσα από το σύμφωνο της Βασιλείας II<sup>39</sup>, θα επικεντρωθούμε στον κανόνα με τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο, που χρησιμοποιείται τόσο για την κεφαλαιακή επάρκεια όσο και για τον υπολογισμό ενδεχόμενων ζημιών, προσαρμόζοντας κατανομές τόσο για την συχνότητα όσο και την σφοδρότητα των ζημιών και θα περιγράψουμε μεθόδους για την διαμόρφωση του συλλογικού μοντέλου, που θα συμβάλλει στον υπολογισμό εκείνον. Τέλος, θα προσομοιώσουμε δεδομένα επιλέγοντας τις κατάλληλες κατανομές που περιγράφουμε και θα υπολογίσουμε την αξία σε κίνδυνο σε επίπεδο χαρτοφυλακίου

### 6.1. Θεωρητικό Υπόβαθρο

**Ορισμός** : Ως λειτουργικός κίνδυνος θεωρούντο ο κίνδυνος που απομένει όταν ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή/και ένας επενδυτής έχει μετρήσει τον πιστωτικό και τον αγοραίο κίνδυνο. Ωστόσο, σύμφωνα με τον σύμφωνο της Βασιλείας το 2001, ως λειτουργικός κίνδυνος θεωρείται εκείνος που απορρέει από αναποτελεσματική εσωτερική διακυβέρνηση, ανθρώπινο λάθος ή δόλο ή/και από λοιπούς εξωγενείς λειτουργικούς παράγοντες όπως οι πολιτικές εξελίξεις σε μία χώρα, φυσικά φαινόμενα. Όπως μπορεί να γίνει αντιληπτό, ορισμένα από τα παραπάνω συμβάντα αποτελούν γεγονότα καθημερινότητας και ρουτίνας και άλλα που η πρόβλεψή τους δεν είναι δυνατή.

#### 6.1.1. Μέθοδοι Μέτρησης Λειτουργικού Κινδύνου

##### Ο βασικός δείκτης

Ο πιο απλός τρόπος υπολογισμού των απαραίτητων κεφαλαίων για τον λειτουργικό κίνδυνο, αποτελεί ο **βασικός δείκτης (basic indicator approach)**. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, τα κεφάλαια δίνονται από έναν τετριμμένο τύπο που λαμβάνει υπόψη τα θετικά λειτουργικά έξοδα των τελευταίων τριών οικονομικών ετών. Πιο συγκεκριμένα, τα

<sup>38</sup> Ωστόσο μία οικονομική ζημία αποτελεί ένα από τα αποτελέσματα που μπορεί να επιφέρει ένα **γεγονός** που αποτελεί, με την σειρά του, αποτέλεσμα ενός ή πολλών παραγόντων που μπορούν να αυξήσουν την πιθανότητα εμφάνισης του (**κίνδυνος**).

<sup>39</sup> Τα τελευταία 3 χρόνια έχει αναπτυχθεί το σύμφωνο της Βασιλείας III και γίνεται η προσπάθεια για την εφαρμογή του μέχρι το 2019.

κεφάλαια για την προστασία από τον λειτουργικό κίνδυνο υπολογίζονται ως το 8% του μέσου όρου των θετικών ακαθάριστων λειτουργικών εσόδων μέσα στα τελευταία 3 χρόνια, και δίνεται από την σχέση :

$$Capital_{BLA} = a \cdot \frac{\sum_{j=1}^n GI_j}{n}, \quad (6.1)$$

όπου  $a$  = το προκαθορισμένο και σταθερό ποσοστό 8%,  $n$  : ο αριθμός των ετών, μέσα στα τρία χρόνια, όπου τα ακαθάριστα λειτουργικά έσοδα ήταν θετικά και  $GI$  : τα ακαθάριστα λειτουργικά έσοδα. Η απλότητα που διέπει την προσέγγιση αυτή αλλά και το γεγονός ότι δεν απαιτεί ιδιαίτερο χρόνο και πολύπλοκα μοντέλα για την εφαρμογή του, είναι τα χαρακτηριστικά που συμβάλλουν στην χρήση του από μικρομεσαία χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Ωστόσο οδηγεί σε υπερεκτίμηση των απαιτούμενων κεφαλαίων καθώς το χαρακτηριστικό ο τετριμμένος δείκτης 8% του προδίδει μία γενικότητα και καμία ευαισθησία σε κινδύνους και οικονομικές απώλειες που ενδεχομένως να προέρχονται από διαφορετικές γραμμές παραγωγής (business lines).

### **Standardized Approach**

Λόγω της έλλειψης της ευαισθησίας του βασικού δείκτη, το σύμφωνο της βασιλείας δημιούργησε μία νέα μέθοδο υπολογισμού της κεφαλαιακής επάρκειας του λειτουργικού κινδύνου. Η **τυπική προσέγγιση**, όπως και καλείται, διακρίνεται στην **γενική** και στην **εναλλακτική**, με την δεύτερη να βρίσκει εφαρμογή κυρίως στο τραπεζικό σύστημα, όπου υπολογίζονται οι λειτουργικές ζημίες όπως και στην τυπική απλά με έναν διαχωρισμό σε εταιρική και λιανική τραπεζική. Σύμφωνα με την γενική τυπική προσέγγιση, η κεφαλαιακή επάρκεια, υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας τον μέσο όρο των ακαθάριστων λειτουργικών εσόδων, για κάθε γραμμή παραγωγής ξεχωριστά, των τριών τελευταίων ετών, ανεξαρτήτου θετικού ή αρνητικού (οικονομικού) αποτελέσματος, με έναν συντελεστή, που είναι διαφορετικός για κάθε γραμμή παραγωγής. Κατά αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνεται να υπάρχει ευαισθησία στον κίνδυνο, καθώς στην κάθε γραμμή παραγωγής δίνεται η απαιτούμενη προσοχή, διατηρώντας παράλληλα και την απλότητα στους υπολογισμούς που διέπει και τον βασικό δείκτη. Ωστόσο, δεν μπορεί να θεωρηθεί και πλήρως ευαίσθητος, ως προς τον κίνδυνο, δείκτη καθώς, και στην περίπτωση αυτή, οι δείκτες που διέπουν τις γραμμές παραγωγής είναι προκαθορισμένοι, οδηγώντας, κατά αυτόν τον τρόπο σε πλήρη συσχέτιση μεταξύ τους, γεγονός που σε ένα ρεαλιστικό περιβάλλον δεν υφίσταται. Μαθηματικά, εκφράζεται από την σχέση :

$$Capital_{TSA} = \frac{\sum_{j=1}^3 GI_j \cdot b_j}{3}, \quad (6.2)$$

όπου  $GI_j$  : τα ακαθάριστα λειτουργικά έσοδα των τριών τελευταίων ετών, για κάθε γραμμή παραγωγής και  $b_j$  : οι δείκτες – ποσοστά για κάθε γραμμή παραγωγής, όπως εκείνοι δίνονται στον πίνακα 6.1.α παρακάτω.



Γραμμή Παραγωγής	Ποσοστό
Εταιρική Χρηματοδότηση	18%
Αγοραπωλησία Τίτλων	18%
Λιανική Τραπεζική	12%
Εμπορική Τραπεζική	15%
Πληρωμές και Διακανονισμοί	18%
Υπηρεσίες Αντιπροσώπευσης	15%
Διαχείριση Περιουσιακών Στοιχείων	12%
Λιανική Χρηματομεσιτεία	12%

- Πίνακας 6.1.α : Ποσοστά ευαισθησίας σε κίνδυνο για κάθε γραμμή παραγωγής –

Γεγονότα – Events
Εσωτερική Απάτη
Απάτη από Εξωτερικούς παράγοντες
Αναποτελεσματική Αναφορά
Μη κατάλληλες επιχειρηματικές πρακτικές
Ανεπαρκή Συστήματα
Φυσικές Καταστροφές
Διάφορα Γεγονότα

- Πίνακας 6.1.β.: Αριθμός γεγονότων σύμφωνα με το σύμφωνο της Βασιλείας -

### Εξελιγμένη Μέθοδο Μέτρησης

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα υπολογίζουν τις κεφαλαιακές απαιτήσεις με βάση μεθοδολογίες που τα ίδια έχουν αναπτύξει με δικά τους μοντέλα. Η εφαρμογή της απαιτεί την εκπλήρωση ποιοτικών στοιχείων, όπως εκείνα έχουν να κάνουν με την καταγραφή όλων των λειτουργικών γεγονότων μέσα στα τελευταία 5 χρόνια, την ύπαρξη ενός ανεξάρτητου τμήματος που θα ασχολείται με την διαχείριση του λειτουργικού κινδύνου αλλά και τον εσωτερικό έλεγχο για την ποιότητα των μοντέλων και των δεδομένων που χρησιμοποιούνται. Διακρίνεται σε τρεις υποκατηγορίες. Κατά την πρώτη, **την εσωτερική μέτρηση**, κατά την οποία η κεφαλαιακή επάρκεια, υπολογίζεται ως το άθροισμα του γινομένου του δείκτη του κινδύνου, που αναδεικνύει το μέγεθος του κινδύνου, της πιθανότητας εμφάνισης του γεγονότος και της απώλειας που ενδεχομένως να συμβεί σε περίπτωση που το γεγονός επέλθει, για κάθε μία από τις 8 γραμμές παραγωγής και κάθε ένα από τα 7 γεγονότα<sup>40</sup>. Παρά το γεγονός ότι ο δείκτης εκείνος είναι ευαίσθητος απέναντι στους κινδύνους, υποθέτει μία πλήρη εξάρτηση μεταξύ των γραμμών παραγωγής και γεγονότων αλλά και μία γραμμική σχέση μεταξύ προβλεπόμενων και μη ζημιών, στοιχείο που δεν αποτελεί ρεαλιστικό. Στην δεύτερη υποκατηγορία, τις σκοροκάρτες, ο κίνδυνος είναι δυνατό να μετρηθεί με βάση ποιοτικά στοιχεία μεταξύ των γραμμών παραγωγής. Ο τρόπος αυτός χαρακτηρίζεται από υποκειμενικότητα καθώς βασίζεται στην αίσθηση που έχει για τον κίνδυνο το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα και όχι σε κάποια συγκεκριμένη μεθοδολογία ή μοντέλο κατανομών. Πιο συγκεκριμένα, με βάση το σκορ που θα προκύψει από το άθροισμα για κάθε γραμμή παραγωγής του γινομένου του αρχικού κεφαλαίου επί έναν δείκτη που δείχνει την αντίληψη του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος εκείνη, όπου μαθηματικά δίνεται από την σχέση :

<sup>40</sup> Αναλυτικά τα γεγονότα (events), όπως εκείνα ορίζονται από το σύμφωνο της Βασιλείας, παρουσιάζονται αναλυτικά στον πίνακα 6.1.β.

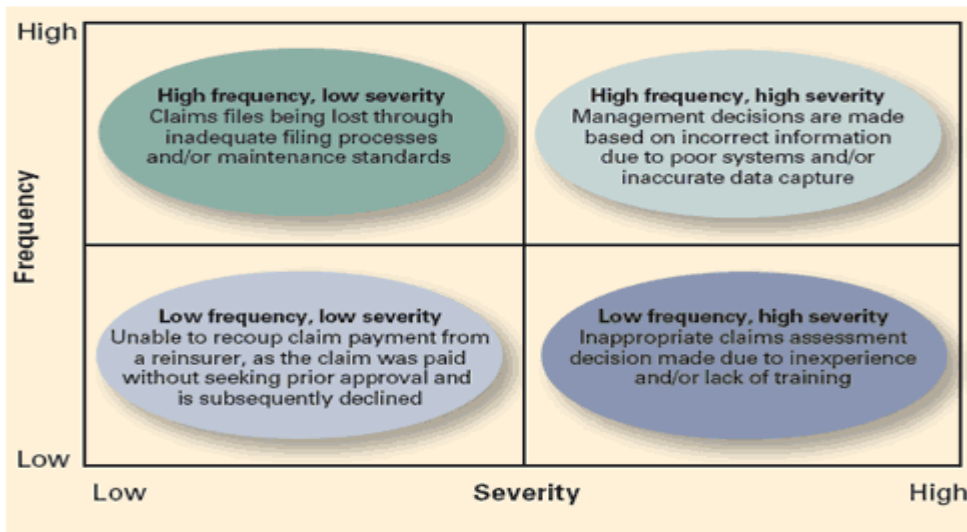
$$Capital_{ScA} = \sum_{j=1}^8 K_j \cdot r_j, \quad (6.3)$$

με  $r_j$  : τον δείκτη που δείχνει την αντίληψη της τράπεζας για τον κίνδυνο που ελλοχεύει από συγκεκριμένο πελάτη. Η τελευταία περίπτωση της εξελιγμένης μεθόδου αποτελεί και την πιο ποιοτική. Στοχεύει στην μοντελοποίηση των μη αναμενόμενων προβλεπόμενων ζημιών, μέσω της αξίας σε κίνδυνο. Η κατανομή τους προέρχεται από ζημιοκατανομές και η κεφαλαιακή επάρκεια τους επάρκεια προκύπτει από το άθροισμα των αξιών σε κίνδυνο για κάθε μία από τις 8 γραμμές παραγωγής και, κάθε ένα από τα 7 γεγονότα. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος αυτή διέπεται από την σχέση :

$$Capital_{LDA} = \sum_{j=1}^8 \sum_{i=1}^7 VaR_{jk} \quad (6.4)$$

και όπως μπορεί, εύκολα να γίνει αντιληπτό, είναι ένας δείκτης με υψηλή ευαισθησία στον κίνδυνο με μοντέλα που, ανάλογα με την ποιότητα των δεδομένων, μπορούν να εξάγουν ένα ακριβές αποτέλεσμα, χωρίς να εννοεί οποιαδήποτε σχέση μεταξύ των προβλεπόμενων και μη ζημιών, φέρνοντας την πιο κοντά στα πραγματικά δεδομένα. Ωστόσο, η εφαρμογή της είναι δυνατή σε μεγάλα, σε οικονομικό μέγεθος ιδρύματα, καθώς απαιτεί μεγάλο κόστος προσομοίωσης των ζημιοκατανομών. Παράλληλα, η εκτίμηση των παραμέτρων των τελευταίων συντελεί μία πολύπλοκη διαδικασία που ενδεχομένως να αποβεί και λανθασμένη (model risk). Το γεγονός, επιπροσθέτως, ότι βασίζεται στην αξία σε κίνδυνο, της προσδίδει χαρακτήρα μη προοπτικού μοντέλου έχοντας παράλληλα, μικρά, στοιχεία υποκειμενισμού, καθώς δεν ορίζεται μία συγκεκριμένη πιθανότητα υπολογισμού της, δίνοντας, κάθε φορά, και διαφορετική εκτίμηση του κινδύνου.

Μέσα στην ανάλυση που ακολουθεί στην παρακάτω ενότητα, επί της ουσίας, χρησιμοποιούμε στοιχεία από την τελευταία μέθοδο. Συνεπώς, ένα απαραίτητο στοιχείο είναι η αναφορά για τις κατανομές που χρησιμοποιούνται και το πώς προσαρμόζονται στον λειτουργικό κίνδυνο. Σημαντικό ρόλο έχει η συχνότητα και η σφοδρότητα των ζημιών όπως και φαίνεται από το διάγραμμα 6.2. Ανάλογα με το πώς χαρακτηρίζεται η απώλεια – ζημιά (HFLS, γεγονότα δηλαδή που εμφανίζονται συχνά με πολύ μικρές οικονομικές απώλειες, LFLS, γεγονότα που και η εμφάνισή τους αλλά και η οικονομική απώλεια που αποφέρουν είναι μικρή, LFHS, γεγονότα που αν και η εμφάνισή τους είναι σπάνια επιφέρουν μεγάλες οικονομικές απώλειες και HFHS, γεγονότα που η εμφάνισή τους επιφέρει και το κλείσιμο του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος) το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα δίνει την δέουσα προσοχή και είτε λαμβάνει προληπτικά μέτρα για την μείωση του κεφαλαίου που πρέπει να διαθέσει, όπως για παράδειγμα σύναψη ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου για μία HFLS ζημιά, είτε να προβεί σε ενέργειες για την όσο πιο δυνατό μικρή απώλεια κεφαλαίου για ζημιές τύπου LFHS. Συνεπώς, είναι απαραίτητη η προσαρμογή της κατάλληλης κατανομής για την σφοδρότητα και την συχνότητα των ζημιών.



- Διάγραμμα 6.2 : Κατανομή Λειτουργικών Γεγονότων -

### 6.1.2. Κατανομές για την Σφοδρότητα Των Ζημιών

#### Κανονική Κατανομή

Μία από τις κλασικές κατανομές για την σφοδρότητα των ζημιών που χρησιμοποιείται για όρους σύγκρισης μεταξύ άλλων προτεινόμενων κατανομών, όπως, για παράδειγμα, ο έλεγχος Jacque Berra. Χαρακτηρίζεται για την συμμετρία της γύρω από το μέσο της και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right), \quad (6.5)$$

με  $\mu$  : η παράμετρος θέσης,  $\sigma$  : η παράμετρος κλίμακας και  $-\infty < x < \infty$ . Στην ειδική περίπτωση όπου η παράμετρος θέσης είναι ίση με μηδέν και κλίμακας ίση με 1, τότε η κατανομή είναι η τυπική κανονική. Για την πρώτη μάλιστα, η εκτίμηση της δίνεται, με βάση την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας, αλλά και των ροπών, από τον δειγματικό μέσο και γίνεται περισσότερο ακριβής όταν ο αριθμός είναι αρκετά μεγάλος, όπου εμπειρικά έχει προκύψει μεγαλύτερο από 30.

#### Κατανομή Βήτα

Όταν οι ζημιές είναι εκφρασμένες σε ποσοστιαία μορφή ως προς την μέγιστη τιμή, μία κατάλληλη κατανομή αποτελεί η Βήτα, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad (6.6)$$

με μέση τιμή ίση με  $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$  και διακύμανση  $\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$ ,  $B(\alpha, \beta)$  : η συνάρτηση βήτα, και  $\alpha, \beta$  να αποτελούν παραμέτρους μορφής με εκτιμητές, που αποτελούν πιο κοντά

στις πραγματικές τιμές όταν το εξεταζόμενο δείγμα αυξάνεται<sup>41</sup>, όπως προέκυψαν από την μέθοδο των ροπών, να δίνονται από τις σχέσεις :

$$\hat{\alpha} = \bar{X} \left[ \left( \frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{S^2} \right) - 1 \right] \quad (6.7)$$

$$\hat{\beta} = (1 - \bar{X}) \left[ \left( \frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{S^2} \right) - 1 \right] \quad (6.8)$$

### **Κατανομή Weibull**

Προσομοιάζει συνεχείς και θετικές ζημιές και διέπεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f(x) = \left( \frac{\beta x^{\beta-1}}{a^\beta} \right) \exp\left(-\frac{x}{a}\right)^\beta \quad (6.9)$$

με  $\alpha > 0$  να αποτελεί την παράμετρο κλίμακας και  $\beta > 0$  την παράμετρο. Για την εκτίμηση των παραμέτρων, χρησιμοποιείται μία πιο εύκολη μορφή της (6.9) που προκύπτει θέτοντας όπου  $\gamma = \beta$  και  $c = a^\beta$  και έχει εξίσωση :

$$f(x) = c \cdot \gamma \cdot x^{\gamma-1} \exp(-c \cdot x^\gamma) \quad (6.10)$$

και χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ποσοστημορίων, θέτοντας ως  $Q1 =$  το 25% και  $Q3 =$  το 75% των παρατηρήσεων, λύνουμε το σύστημα  $\begin{cases} F(Q1) = 0.25 \\ F(Q3) = 0.75 \end{cases}$  με  $F(x) = 1 - \exp(-cx^\gamma)$ .

Ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου  $\gamma$ , η ουρά της είναι πιο βαριά ( $\gamma < 1$ ) ή πιο ελαφριά ( $\gamma > 1$ ) από της εκθετικής.

### **Κατανομή Erlang – Gamma Κατανομή**

Η κατανομή Erlang αφορά συνεχείς και θετικές ζημιές και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\frac{x}{a}\right)}{a \cdot (\beta - 1)!} \quad (6.11)$$

με μέση τιμή  $a\beta$  και διακύμανση  $a^2\beta$ . Οι εκτιμητές των παραμέτρων κλίμακας  $a$  και μορφής  $\beta$ , για τους οποίους και ισχύει ότι πρέπει να είναι αυστηρά θετικοί, δίνονται αντίστοιχα, όπως έχουν προκύψει από την μέθοδο των ροπών, ίσοι με  $\frac{S^2}{\bar{X}}$  και  $\left(\frac{\bar{X}}{S}\right)^2$  και προσεγγίζουν τις πραγματικές τιμές όσο αυξάνει ο αριθμός του δείγματος. Η κατανομή Erlang, επί της ουσίας, είναι μία Γάμμα απλά με θετική ακέραια την παράμετρο μορφής  $\beta$ . Η τελευταία,

<sup>41</sup> Ισχύει ο κανόνας των 30 παρατηρήσεων όπως και στην περίπτωση της κανονικής κατανομής.

μάλιστα, έχει αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με την (6.9) με την διαφορά ότι στον παρανομαστή υπάρχει η συνάρτηση Γάμμα με  $\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\beta-1} du$ .

### **Εκθετική Κατανομή**

Η εκθετική κατανομή αποτελεί ειδική περίπτωση της κατανομής Erlang θέτοντας, απλά, όπου  $\beta = 1$ . Χρησιμοποιείται για συνεχείς θετικές ζημίες και η εκτίμηση της παραμέτρου κλίμακας  $\alpha$  είναι ίση με  $\frac{1}{\bar{X}}$ .

### **Κατανομή LogNormal**

Αν η τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και διακύμανση  $\sigma^2$ , τότε η τυχαία μεταβλητή  $Y = e^X \sim \text{LogNormal}$  με μέση τιμή  $\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$  και διακύμανση  $\exp(2\mu + \sigma^2) \cdot [\exp(\sigma^2) - 1]$  και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6.12)$$

και εκτιμητές για την παράμετρο κλίμακας και σχήματος να δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις :

$$\hat{\mu} = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \quad (6.13)$$

$$\hat{\sigma}^2 = S_y^2 \quad (6.14)$$

### **Κατανομή Pareto**

Αποτελεί την κατανομή με τις πιο βαριά δεξιά ουρά από τις προηγούμενες καθώς συνάρτηση επιβίωσής της μειώνεται με πολύ γρήγορο ρυθμό στο 0. Έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από την σχέση :

$$f(x) = \frac{a\lambda^a}{(\lambda + x)^{a+1}} \quad (6.15)$$

με μέση τιμή  $\frac{\lambda}{a-1}$ ,  $a > 1$  και διακύμανση  $\frac{a\lambda^2}{(a-1)^2(a-2)}$ ,  $a > 2$ . Η εκτίμηση της παραμέτρου  $\alpha$ , με βάση την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας, είναι ίση με :

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\lambda} + x_i}}{\frac{n}{\hat{\lambda}} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\lambda} + x_i}} \quad (6.16)$$

με την εκτίμηση της παραμέτρου  $\lambda$  να προκύπτει από αριθμητικές μεθόδους, που εφαρμόζονται σε συνάρτηση που προκύπτει από την λύση του συστήματος της (6.16) και της μεγιστοποίησης της λογαριθμικής συνάρτησης ως προς  $\lambda$ .

Πέρα από την κανονική κατανομή, την οποία και την χρησιμοποιούμε για σκοπούς εμπειρικούς και ως μία συγκρίσιμη ποσότητα, έτσι ώστε να ελέγξουμε, αρχικά, αν τα δεδομένα μας είναι συμμετρικά ή όχι, αποτελούν μία ευρύτερη οικογένεια των ζημιοκατανομών. Η επιλογή της κατάλληλης, έτσι ώστε σε συνδυασμό με την κατάλληλη για την συχνότητα, όπως και θα εξετάσουμε παρακάτω, να αποδώσει την αξία σε κίνδυνο για την κεφαλαιακή επάρκεια και την προστασία έναντι του λειτουργικού κινδύνου, γίνεται με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι μέσα από τους ελέγχους των Kolmogorov Smirnov και Anderson Darling, όπως εκείνοι έχουν αναλυθεί στην ενότητα 2.1.2, με  $H_0$  : η κατανομή των δεδομένων να αποτελεί μία εκ των ζημιοκατανομών έναντι της υπόθεσης να μην κατανέμονται με μία από εκείνες. Στην ειδική περίπτωση, μάλιστα, όπου οι έλεγχοι δείξουν ότι παραπάνω από μία κατανομές είναι κατάλληλες για τα δεδομένα, ως κριτήριο χρησιμοποιείται η λογαριθμική πιθανοφάνεια, όπου και επιλέγεται εκείνη με την μεγαλύτερη τιμή. Ο δεύτερος τρόπος, το διάγραμμα πιθανότητας (probability plot) το οποίο απεικονίζει όλα τα δεδομένα και μία ευθεία γραμμή, την γραμμή αναφοράς. Αν τα δεδομένα προέρχονται από την εμπειρική κατανομή, τότε τα δεδομένα θα βρίσκονται γύρω ή και πάνω από την γραμμή εκείνη αναφοράς.

### **6.1.3. Κατανομές για την Συχνότητα των Ζημιών**

Στο μοντέλο του συλλογικού κινδύνου, κατά το οποίο και προσαρμόζουμε τις λειτουργικές ζημίες, η κατανομή που περιγράφει την συχνότητα των ζημιών ανήκει στην κατηγορία των διακριτών. Με την επιλογή της κατάλληλης κατανομής, μέσω του ελέγχου  $\chi^2$ , όπως και εκείνος έχει περιγραφεί στην ενότητα 2.1.2, διαμορφώνουμε το συλλογικό μοντέλο για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο. Οι κυριότερες κατανομές, όσον αφορά την συχνότητα, αποτελούν οι διωνυμική, αρνητική διωνυμική, γεωμετρική και Poisson.

#### **Διωνυμική Κατανομή**

Η διωνυμική κατανομή εκφράζει τον αριθμό επιτυχιών μέσα σε  $N$  δοκιμές. Πιο συγκεκριμένα, έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, \quad (6.17)$$

με  $x$  : ο αριθμός επιτυχιών με πιθανότητα  $p$ . Η μέση τιμή και η διακύμανση είναι ίσες με  $Np$  και  $Np(1-p)$  αντίστοιχα και η εκτίμηση της πιθανότητας επιτυχίας δίνεται από την σχέση

$$\hat{p} = \frac{x}{N} \quad (6.18)$$

### Κατανομή Poisson

Αποτελεί κατανομή που είναι ιδανική για την καταμέτρηση γεγονότων, όπως εσωτερικές απάτες σε ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα, τηλεφωνικές κλήσεις σε ένα κέντρο κλπ. Έχει συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από την σχέση :

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad (6.19)$$

με  $x \geq 0$ , μέση τιμή και διακύμανση να είναι ίσες με την παράμετρο  $\lambda$ , της οποίας η εκτίμηση είναι ίση με :

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot N_i}{\sum_{i=0}^{\infty} N_i} \quad (6.20)$$

με  $N_i$  να αποτελούν τον συνολικό αριθμό παρατηρήσεων. Το  $\infty$ , στην πράξη, δεν υπολογίζεται και θέτουμε ένα πάνω όριο κ. Άξιο αναφοράς, ωστόσο, αποτελεί και το γεγονός ότι η Εκθετική κατανομή συνδέονται με την κατανομή Poisson καθώς οι ενδιάμεσοι χρόνοι της πρώτης κατανέμονται με την διαδικασία Poisson με  $\alpha = \lambda$ .

### Γεωμετρική Κατανομή

Η γεωμετρική κατανομή αποτελεί μία εκ των δύο κατανομών που χαρακτηρίζονται ως κατανομές αναμονής καθώς θα πρέπει να γίνουν τόσες δοκιμές έτσι ώστε να συμπληρωθεί μία επιτυχία. Η συνάρτηση πιθανότητάς της δίνεται από την σχέση :

$$f(x) = p \cdot q^{x-1}, \quad (6.21)$$

με  $x \geq 1$ , μέση τιμή ίση με  $\frac{1}{p}$  και διακύμανση  $\frac{q}{p^2}$ ,  $q = 1 - p$ , με την εκτίμηση της πιθανότητας επιτυχίας  $p$  να είναι ίση με :

$$\hat{p} = \frac{1}{x} \quad (6.22)$$

### Αρνητική Διωνυμική Κατανομή

Η δεύτερη εκ των κατανομών αναμονής καθώς, στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να πραγματοποιηθούν τόσες δοκιμές έτσι ώστε να συμπληρωθούν  $r$  επιτυχίες. Αποτελεί την «γενίκευση» της γεωμετρικής κατανομής, με συνάρτηση πιθανότητας :

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r \cdot q^{x-r} \quad (6.23)$$

με  $x \geq 1$ , μέση τιμή  $\frac{r}{p}$  και διακύμανση  $r \cdot \frac{q}{p^2}$ ,  $q = 1 - p$ , με την εκτίμηση της πιθανότητας επιτυχίας  $p$  να είναι ίση με :

$$\hat{p} = \frac{x}{x \cdot (x - 1)} \quad (6.24)$$

Η αρνητική διωνυμική είναι, όπως υποδηλώνει και ο ορισμός της, είναι όμοια και με την διωνυμική κατανομή, με την διαφορά, ωστόσο, ότι ο αριθμός των δοκιμών είναι προκαθορισμένος.

#### **6.1.4. Μέθοδοι Συγκρότησης του Συλλογικού Μοντέλου**

Έχοντας επιλέξει την κατάλληλη κατανομή για την μοντελοποίηση της σφοδρότητας των ζημιών αλλά και για την συχνότητα, δημιουργούμε την συλλογικό μοντέλο μέσω της μεθόδου Monte Carlo. Η μέθοδος χαρακτηρίζεται ως η πιο απλή και άμεση για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται πολλές φορές, συνήθως 5000, έτσι ώστε το μοντέλο να είναι σε θέση να μοντελοποιήσει τις τελικές ζημιές σε μία εμπειρική σύνθετη κατανομή απώλειας. Είναι άξιο αναφοράς, ωστόσο, ότι ο αριθμός των επαναλήψεων ενδέχεται να φτάσει σε επίπεδα δεκάδων χιλιάδων, κάτι που οφείλεται αποκλειστικά και μόνο από τον αριθμό των παραμέτρων που επιθυμούμε να έχει το μοντέλο μας. Η αξία σε κίνδυνο προκύπτει ως ποσοστημόριο της συνολικής κατανομής που προέκυψε. Για να κατανοήσουμε την παραπάνω διαδικασία, ας πάρουμε ένα παράδειγμα. Ξεκινώντας από μία μηχανή παραγωγής τυχαίων αριθμών, υποθέτουμε ότι αυτοί οι αριθμοί θα ακολουθούν μία ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0%, 100%). Οι αριθμοί αυτοί, σε επόμενη φάση, χρησιμοποιώντας μία κατάλληλη συνάρτηση, «μετατρέπονται» από ομοιόμορφη σε μία κανονική κατανομή. Κατά αυτόν τον τρόπο ο εκάστοτε risk manager έχει ένα ιστόγραμμα των ζημιών από κανονική κατανομή. Αν έχει στην διάθεση του, ο risk manager, 100000 δεδομένα και έχει 1000 παρατηρήσεις στο διάστημα 0% - 1%, αυτές τις παρατηρήσεις τις προσομοιώνει στην σωρευτική κατανομή και έτσι μπορούμε να έχουμε τις μεταβολές στην αξία του χαρτοφυλακίου. Το ίδιο γίνεται για κάθε ένα από τα διαστήματα της ομοιόμορφης.

Όπως είναι προφανές, η μέθοδος Monte Carlo, πέρα από το γεγονός ότι είναι πιο πρακτική, προσφέρει, επίσης, την δυνατότητα επίγνωσης όχι μόνο της άφιξης οποιουδήποτε γεγονότος αλλά και την πιθανότητα εμφάνισης του, καθιστώντας την ως μία αμεσώτατη μέθοδος εξαγωγής της αξίας σε κίνδυνο, διαμορφώνοντας, κατά αυτόν τον τρόπο, ένα δυνατό συνδυασμό ταχύτητας και αποτελεσματικότητας, συνιστώσες που αποτελούν κίνητρο για την χρήση της από πολλά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα καθώς οι ρυθμοί που μία αγορά κινείται είναι φρενήρεις.

Άξιο αναφοράς αποτελεί η περίπτωση εύρεσης της συνολικής κατανομής με βάση τον αναδρομικό τύπο του Panjer, κατά τον οποίο οι κατανομές που έχουμε αναφέρει για την προσομοίωση της συχνότητας των ζημιών έχουν την μορφή :  $p_n = \left( a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1}$ , με  $n = 1, 2, \dots$  με τις παραμέτρους  $a, b$  για την κάθε κατανομή να δίνονται από τον Πίνακα 6.3. Η



αναδρομική σχέση έχει οδηγήσει στην εξαγωγή πολλών και σημαντικών αποτελεσμάτων στην θεωρία Κινδύνου.

Κατανομή Συχνότητας Ζημιών	Παράμετρος α	Παράμετρος b
Poisson ( $\lambda$ )	0	$\lambda$
Διωνυμική ( $n, p$ )	$-\frac{p}{(1-p)}$	$\frac{(n+1)p}{(1-p)}$
Αρνητική Διωνυμική ( $r, p$ )	q	$(r-1)q$
Γεωμετρική ( $p$ )	q	0

- Πίνακας 6.3. : Παράμετροι αναδρομικής σχέσης του Panjer –

## 6.2. Εμπειρικά Αποτελέσματα

Για την πρακτική εφαρμογή, η εύρεση πραγματικών δεδομένων από τράπεζες ή από διάφορους χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς είναι πολλή δύσκολη εξαιτίας, κυρίως, της δυσπραγίας των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων να κρατήσουν ένα ικανό αρχείο από τις λειτουργικές ζημίες, καθώς, όπως έχουμε αναφέρει και στο θεωρητικό υπόβαθρο η μέτρησή του είναι σχετικά ένα πρόσφατο μέτρο για την διαχείριση κινδύνου. Κατά συνέπεια, χρησιμοποιήσαμε στοιχεία από μία εργασία των Dalla Valle, Dean Fantazzini και Paolo Giudici (2005) κατά την οποία και προσάρμοσαν κατανομές για την συχνότητα και την σφοδρότητα για την εύρεση της αξίας σε κίνδυνο, τόσο της 95% όσο και της 99%, για τον λειτουργικό κίνδυνο. Πιο συγκεκριμένα, πήραν δεδομένα από δύο γραμμές παραγωγής (business lines) υποθέτοντας ότι για κάθε μία από αυτές συμβαίνουν 4 από τα 7 γεγονότα, που έχουμε περιγράψει στον πίνακα 6.1.β., από μία μεγάλη ευρωπαϊκή τράπεζα, της οποίας το όνομα για λόγους ασφαλείας και προστασίας ιδιωτικών δεδομένων, το όνομά της δεν αναφέρεται, για το χρονικό διάστημα του Ιανουαρίου 1999 έως τον Δεκέμβριο του 2004. Οι συνολικές ζημίες που αναφέρθηκαν ήταν 407 και είχαν τα ακόλουθα περιγραφικά μέτρα :

<b>Minimum Loss (Date of Occurrence)</b>	0 € (September 2001)
<b>Average Loss</b>	202,158 €
<b>Maximum Loss (Date of Occurrence)</b>	4,570,852 € (July 2003)

Αφού προσαρμόσανε τις κατανομές Poisson και Αρνητική Διωνυμική (Negative Binomial) για την κατανομή των συχνοτήτων αλλά και τις Gamma, Exponential και Pareto για την κατανομή της σφοδρότητας, με τις παραμέτρους των κατανομών που εκτιμήθηκαν να δίνονται στον πίνακα 6.4, μοντελοποίησανε, μέσω της μεθόδου Monte Carlo, την συνολική κατανομή για την ζημία και εκτιμήσανε τόσο την 95% όσο και την 99% αξία σε κίνδυνο. Για την αυτοσυσχέτιση, μάλιστα, χρησιμοποίησανε τρεις μεθόδους, την πλήρη αυτοσυσχέτιση, μέσω t-Corula, με 9 βαθμούς ελευθερίας και μέσω Normal Corula. Αποδείξανε ότι ο τρόπος που προσομοιάζεται η συσχέτιση μεταξύ των 8 περιπτώσεων είναι μία αμελητέα ποσότητα καθώς σημαντικό ρόλο έχει η προσαρμογή της κατανομής για την σφοδρότητα των ζημιών. Για την τελευταία, αποδείξανε ότι οι αξίες σε κίνδυνο παρουσιάζουν καλύτερα αποτελέσματα με την Gamma και την Pareto, με την πρώτη να υπερέχει λόγω της τάσης των ροπών της να απειρίζονται αλλά και της καλύτερης προσαρμογής της για πάρα πολύ μεγάλο (πάνω από 5000) επαναλήψεις της Monte Carlo.

	Κατανομές Συχνότητας			Κατανομές Σφοδρότητας				
	Poisson	Negative Binomial		Expon.	Gamma		Pareto	
	$\lambda$	$p$	$\theta$	$\alpha$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
1	1.40	0.59	2.01	9,844	0.15	64,848	2.36	13,368
2	2.19	0.40	1.49	21,721	0.20	109,321	2.50	32,494
3	0.08	0.80	0.33	153,304	0.20	759,717	2.51	230,817
4	0.46	0.92	5.26	206,162	0.11	1,827,627	2.25	258,588
5	0.10	0.84	0.52	96,873	0.20	495,701	2.49	143,933
6	0.63	0.33	0.31	7,596	0.38	19,734	3.25	17,105
7	0.68	0.42	0.49	12,623	0.06	211,098	2.13	14,229
8	0.11	0.88	0.80	35,678	0.26	135,643	2.71	61,146

- Πίνακας 6.4. : Εκτίμηση Παραμέτρων για τους Λειτουργικούς Κινδύνους –

Μέσα από την μελέτη αυτή, προσομοιώσαμε μέσω της μεθόδου της Monte Carlo, με 5000 επαναλήψεις, και «γεννήσαμε» λειτουργικές ζημιές και συνολικές λειτουργικές ζημιές από κατανομή Poisson, για την κατανομή της συχνότητας, και κατανομή Gamma και Εκθετική (Exponential) για την κατανομή των συχνοτήτων σύμφωνα με τις αντίστοιχες παραμέτρους από τον πίνακα 6.4. Υποθέσαμε, όπως και στην παραπάνω μελέτη, ότι έχουμε συνολικές ζημιές, ανά περίπτωση, 407 όπως επίσης, προσαρμόσαμε την μελέτη μας, σε δύο γραμμές παραγωγής με 4 γεγονότα για την κάθε μία, έχοντας, συνεπώς, 8 περιπτώσεις. Για την κάθε μία περίπτωση ξεχωριστά, η 95% αλλά και η 99% αξία σε κίνδυνο υπολογίζεται ως ποσοστημόριο της συνολικής κατανομής ζημιών που προσαρμόζεται. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, η 99% αξία σε κίνδυνο, για την 3<sup>η</sup> περίπτωση, υπολογίζεται από την εντολή “@quantile(losses, 0.99)”. Για κάθε μία περίπτωση, οι αξίες σε κίνδυνο αναφέρονται αναλυτικά στον πίνακα 6.5.

Περιπτώσεις	Κατανομή Συχνότητας - Σφοδρότητας	95% VaR	99% VaR
1	Poisson - Exponential	6,160,122	6,419,503
	Poisson – Gamma	5,932,940	6,087,873
2	Poisson – Exponential	20,857,136	21,506,520
	Poisson – Gamma	20,540,930	21,046,153
3	Poisson – Exponential	7,177,027	8,196,017
	Poisson – Gamma	6,382,315	7,142,425
4	Poisson – Exponential	45,192,428	48,145,711
	Poisson – Gamma	42,220,787	44,428,125
5	Poisson – Exponential	5,459,011	6,142,355
	Poisson – Gamma	5,058,075	5,553,485
6	Poisson – Exponential	2,238,245	2,368,518
	Poisson – Gamma	2,122,004	2,211,396
7	Poisson – Exponential	3,997,994	4,230,833
	Poisson – Gamma	3,862,360	4,014,664
8	Poisson – Exponential	2,185,337	2,467,480
	Poisson – Gamma	1,975,039	2,168,652

- Πίνακας 6.5. : Οι 95% και 99% Αξίες σε Κίνδυνο για κάθε περίπτωση –

Όπως γίνεται αντιληπτό, ο υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο υπερεκτιμάται αν η κατανομή της σφοδρότητας είναι η εκθετική οδηγώντας στην επιλογή της Gamma, καθώς, κατά αυτόν

τον τρόπο ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα μπορεί να λάβει παραπάνω πληροφορίες για τον κίνδυνο.

Εφόσον υπολογίσαμε την 95% και 99% αξία σε κίνδυνο, για κάθε μία από τις περιπτώσεις, θα προχωρήσουμε με τον υπολογισμό της συνολικής αξίας σε κίνδυνο για τις περιπτώσεις Poisson – Exponential και Poisson – Gamma. Ένας από τους συνηθέστερους τρόπους αποτελεί η απλή πρόσθεση των επιμέρους VaR, που υποθέτει, προφανώς μία πλήρη εξάρτηση – συσχέτιση, μεταξύ των 8 περιπτώσεων, ωστόσο, το ενδεχόμενο αυτό δεν αποτελεί ένα ρεαλιστικό σενάριο. Κατά αυτόν τον τρόπο, προσαρμόζουμε την συσχέτιση μεταξύ των συνολικών απωλειών με μία  $t$  –  $coruila$  με 10 βαθμούς ελευθερίας, με τους συντελεστές να διαφαίνονται στους πίνακες 6.6 και 6.7 παρακάτω, μία μέθοδος που οδηγεί στην δέσμευση λιγότερων κεφαλαίων για την προστασία έναντι του λειτουργικού κινδύνου.

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5	Case 6	Case 7	Case 8
Case 1	1.0000							
Case 2	0.01254	1.0000						
Case 3	0.00448	0.01887	1.0000					
Case 4	0.00728	0.00362	0.0179	1.0000				
Case 5	-0.00954	-0.00166	0.0007	0.0134	1.0000			
Case 6	0.000241	0.01306	-0.0086	-0.0099	0.01568	1.0000		
Case 7	0.00237	-0.03045	0.00478	0.01602	-0.00198	0.00953	1.0000	
Case 8	0.00533	-0.0201	0.00744	-0.0109	-0.01342	0.00713	0.0068	1.0000

- Πίνακας 6.6. : Συντελεστές Συσχέτισης των Συνολικών Ζημιών με  $T$ -  $Coruila(df=10)$ , για το μοντέλο Poisson – Exponential –

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5	Case 6	Case 7	Case 8
Case 1	1.0000							
Case 2	-0.03167	1.0000						
Case 3	-0.00315	0.00617	1.0000					
Case 4	0.00723	-0.0131	0.00448	1.0000				
Case 5	0.0043	0.00366	0.0063	0.0151	1.0000			
Case 6	0.00649	0.00781	-0.0073	0.0133	-0.0026	1.0000		
Case 7	-0.0088	0.00077	0.0126	0.008	-0.0132	0.0085	1.0000	
Case 8	-0.0188	0.00163	0.0154	0.0008	-0.0025	-0.0141	-0.025	1.0000

- Πίνακας 6.7. : Συντελεστές Συσχέτισης των Συνολικών Ζημιών με  $T$ -  $Coruila(df=10)$ , για το μοντέλο Poisson – Gamma –

Έχοντας, πλέον τις συσχετίσεις, με την βοήθεια του τύπου (5.4) για  $n = 8$ , εξάγουμε τα αποτελέσματα για τα συνολικά κεφάλαια που θα πρέπει να δεσμευτούν:

	95% VaR	99% VaR
Poisson – Exponential	51,542,048	54,736,343
Poisson - Gamma	48,160,396	50,516,913

- Πίνακας 6.8. : Συνολική Αξία Σε Κίνδυνο για τα δύο προσαρμοσμένα μοντέλα –

Όπως και προηγουμένως, έτσι και στις συνολική αξία σε κίνδυνο, τόσο για την 95% όσο και για την 99%, είναι προφανές ότι η κατανομή Gamma δίνει λιγότερα κεφάλαια προς δέσμευση σε σχέση με την προσαρμογή της εκθετικής, για την σφοδρότητα. Τα αποτελέσματα, συνεπώς, δείχνουν ότι η Gamma είναι μία κατανομή που χρησιμοποιείται

σε μοντέλα που βασίζονται σε εξελιγμένες μεθόδους μέτρησης του λειτουργικού κινδύνου, σε αντίθεση με την εκθετική που μπορεί να συνδεθεί με τον βασικό δείκτη, παρέχοντας την ελάχιστη, σε ποιότητα, προστασία στο χρηματοπιστωτικό ίδρυμα, χωρίς να δίνει σε εκείνο λεπτομέρειες και περισσότερες πληροφορίες για εκείνες, οδηγώντας, κατά αυτόν τον τρόπο, και στην υπερεκτίμησή τους.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Συμπεράσματα

Η Θεωρία Ακραίων Τιμών (EVT), μπορεί να προσφέρει αρκετές επιλογές και μεθόδους για την μοντελοποίηση του αγοραίου και λειτουργικού κινδύνου. Μέσα από τις εκτιμήσεις των παραμέτρων τους, κυρίως μέσα από την GEV στην Block Maxima και της GPD από την POT, ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα είναι ικανό να υπολογίσει μία ενδεχόμενη απώλεια. Παράλληλα οι οικογένειες των Copulas δίνουν την δυνατότητα επέκτασης των μοντέλων αυτών για την περιγραφή της συμπεριφοράς περισσότερων από ενός παραγόντων, με την t Copula να αποτελεί την καλύτερη επιλογή, όπως η διεθνής βιβλιογραφία δείχνει. Ωστόσο, η EVT δεν αποτέλεσε την καλύτερη επιλογή για τα δεδομένα του χρυσού, του δείκτη S&P500 και το μονοετούς αμερικανικού ομολόγου. Η MEV εμφάνισε και σε αυτές τις σειρές την σημαντικότερη από τις αδυναμίες της, δηλαδή την σπατάλη πολλών δεδομένων. Η GPD δεν προσαρμόστηκε καλά δεδομένου ότι όσο και να θεωρούσαμε μικρότερα ποσοστημόρια ως ακραίες τιμές, για την εύρεση ενός καταλλήλου κατωφλιού, μέσω της απεικόνισης του mean residual plot, τα δεδομένα δεν αποτελούσαν τον επαρκή αριθμό έτσι ώστε η EVT να δώσει εκτιμήσεις που τα σφάλματά τους να ήταν μικρά. Μέσω, συνεπώς των κριτηρίων του Cristoffersen, ο επανέλεγχος (backtesting) της EVT, καθώς και όλων των συγκρινόμενων με την EVT μοντέλων υπολογισμού αξίας σε κίνδυνο, έκρινε ότι τα οικονομετρικά ARCH – GARCH μοντέλα που προσαρμόστηκαν στις αποδόσεις του χρυσού, του S&P500 και η Risk Metrics για το μονοετές ομόλογο, δείχνουν να προσαρμόζονται καλύτερα στις αρχές της αποτελεσματικής διαχείρισης των κινδύνων με όσο δυνατό μικρότερο κόστος, συνδυασμός που έκρινε το μοντέλο κατανομής των λειτουργικών κινδύνων Poisson – Gamma ως το καταλληλότερο. Η ύπαρξη της Poisson στην μοντελοποίηση της κατανομής των συχνοτήτων είναι η συνηθέστερη σε ένα ρεαλιστικό περιβάλλον όπου με την κατανομή Gamma, για την σφοδρότητα των ζημιών, δίνει ένα μεγαλύτερο βάθος στις λειτουργικές ζημιές και περισσότερες πληροφορίες για την εκτίμηση τους μη οδηγώντας, κατά αυτόν τον τρόπο, σε μη απόσυρση περισσότερων κεφαλαίων από την αγορά, τονώνοντας, παράλληλα, έναν εύθραυστο τομέα, την ρευστότητα.

## **Βιβλιογραφία**

Amado C., Terasvrita T., (May, 2011), Research Paper, *Conditional Correlation Models of Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Nonstationary GARCH Equations*, pages: 4, 5

Ang A., Chen J., (2002), *Asymmetric Correlation of equity portfolios*, Journal of Financial Economics, 63, pages: 443 – 494.

Balkema G., Embrechts P., (2004), *Multivariate Excess Distribution*, Survey Paper

Basel Committee on Banking Supervision, (November, 2005), Updated Issue of *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*, pages: 140 – 144

Bae, Stultz, Karolyi, (2003), *A new approach to measuring financial contagion*, The Review of Financial Studies, Volume 16, No 3, pages: 717 - 763

Cambanis S., Huang S., Simons G., (1979), *On the Theory of Elliptically Contoured Distributions*, University of North Carolina

Chan – Lau, Mathieson, Yao, (2004), *Extreme Contagion in Equity Markets*, IMF Staff Papers, Volume 51, pages: 386 – 408

Chan – Lau, Mitra, Ong Lian Li, (2007), *Contagion Risk in the International Banking System and Implications for London as a Global Financial Center*, IMF Staff Paper

Chapelle A., Crama Y., Hubner G., Peters J., (2004), *Basel II and Operational Risk: Implications for Risk Measurement and Management in the Financial Sector*, Technical Report, National Bank of Belgium

Chavez – Demoulin V., Embrechts P., (2004), *Advanced Extremal Models for Operational Risk*, Working Paper, Department of Mathematics – Zurich, URL: <http://www.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/opriskevt.pdf>

Chernobai A.S., Rachev S.T., Fabozzi F.J., (2007), *Operational Risk: A Guide to Basel II Capital Requirements, Models and Analysis*, John Willey & Sons

Christoffersen F. Peter, (November, 1998), *Evaluating interval forecasts*, International Economic Review, Volume 39, No. 4, pages : 841 – 848

Christoffersen P., Diebold F., Schuermann T., (1998), *Horizon Problem and Extreme Events in Financial Risk Management*, FRBNY Economic Review

Coles S.G. and Tawn J.A., (1991), *Modeling Extreme Multivariate Events*, pages : 378 – 381

Coles S.G., (2001), *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, pages : 154 – 158

Demarta S., McNeil A., (2004), *The t Copula and Related Copulas*, Department of Mathematics, Federal Institute of Technology – Zurich, Switzerland

Duffie, D and J.Pan, (1997), *An Overview of Value at Risk*, Journal of Derivatives 4 (Spring), pages : 7 – 49

Dupius D.J., Jones B.L.,(2006), *Analysis of Multivariate Extreme Values with Actuarial Applications*, North American Actuarial Journal, Volume 10, Number 4

Embrechts P., Lindskog F., McNeil A., (2001), *Modelling Dependence With Copulas and Applications to Risk Management*, Department of Mathematics – Zurich, Switzerland

Embrechts P., Klouoelberg C., Mikosch T., (1997), *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer

Fang K.T., Kotz S., Ng K.W., (1987), *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman & Hall, London

Fisher R. A., Tippett L.H.C., (1928), *Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, pages: 24, 180 – 190.

Forbes, Rigobon, (2001), *No Contagion, Only Independence: Measuring Stock Market Comovements*, Journal of Finance, Volume 57, pages: 2223 - 2261

Galambos J., (1987), *Asymptotic theory of extreme order statistics*, 2<sup>nd</sup> Edition, Krieger, Malabar, Florida

Genest C., Ghouli K., Rivest L.P., (1995), *A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions*, Biometrika, 82, pages: 543 - 552

Gilly, Kellezi, (2006), *An application of the Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk*, Computational Economics, 27, Volume 1, pages: 207 – 223

Gnedenko B.V., (1943), *Sur la Distribution Limite du Terme Maximum d'une Serie Aleatoire*, Annals of Mathematics, 44, pages: 423 – 453.

Hartmann P., Straetmans S., De Vries C., (2004), *Fundamentals and joint crises*, Working Paper, Series 324, European Central Bank

Hocking J.R.M., Wallis J.R., (1987), *Estimation of the Generalized Pareto Distribution*, page : 341

Hocking J.R.M., Wallis J.R., Wood E.F., (1985), *Estimation of the Generalized Extreme Value Distribution by the Method of Probability – Weighted Moments*, pages: 252 – 253

Husler, Reiss, (1960), *The extremes of a triangular array of normal random variables*, Annals of Applied Probability, Volume 6, No 2, pages: 671 – 686

Joe H., (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman and Hall, London

Joe H., Smith and Weissman, (1992), *Bivariate threshold models for Extremes*, Journal of Royal Statistical Society, pages : 171 – 183

Joe H., Xu J.J., (1996), *The estimation method of inference functions for margins for multivariate models*, Technical Report no 166, Department of Statistics, University of British Columbia

Juri A., Hoing A., Embrechts P., (2001), *Using Copulae to bound the value at risk for functions of dependent risks*, Finance and Stochastics, 7, pages: 145 – 167

Karl G., (April 30, 2011), *The Gaussian Copula Model*, Presentation at Texas A&M University

Ledford A.W. and Tawn J.A., (1996), *Statistics for Near Independence in Multivariate Extreme Values*, Biometrika 83, pages : 169 – 187

Lindskog F., McNeil A., Schmnoek, (2001), *Kendalls' tau for elliptical Distributions*, Research Paper, <http://www.math.kth.se/~lindskog/papers/KendallsTau.pdf>

Longin, Solnik, (2001), *Extreme Correlation of International Equity Markets*, Journal of Finance, Volume 56, pages: 649 - 676

McLeish D.L., Small C.G., (1988), *Generalizations of Ancillarity, Completeness and Sufficiency in an Inference Function Space*, Annals of Statistics, Volume 16, Number 2, pages: 534 – 551

McNeil A., Frey R., (2000), *Estimation of tail related measures for heteroskedasticity financial time series: an extreme value approach*, Journal of Empirical Finance, 7, pages: 271 – 300

McNeil A., Frey R., Embrechts P., (2005), *Quantitative Risk Management - Concepts, Techniques and Tools*, pages : 184 – 210, 220 – 236, 264 – 269, 271 – 272, 275 – 280, 286 - 287, 318 – 326

Moscadelli M., (2004), *The Modeling of Operational Risk: Experience with the Analysis of the Data collected by the Basle Committee*, Bank of Italy, Technical Report, no 517

Nelsen R.B., (1999 – 1<sup>st</sup> Edition, 2006 – 2<sup>nd</sup> Edition), *An Introduction to Copulas*, Springer

Nesil S., Seckin, Recep Yurtal, Tefaruk Haktanin, Ahmet Dogan, (2009), *Comparison of Probability weighted moments and maximum likelihood methods used in flood frequency analysis for Ceyhan river basin – The Arabian Journal for Science and Engineering*, Volume 35, Number 1B, pages : 7 – 10

Patton A., (2006), *Modeling asymmetric exchange rate dependence*, International Economic Review, 47, pages: 527 – 556.

Pickands J., (1981), *Multivariate extreme value distributions*, Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the 43<sup>rd</sup> Section, pages: 859 – 878.

Poon, Rockinger, Tawn, (2004), *Modeling Extreme Value Dependence in Financial Markets: Diagnostics, models and financial implications*, The Review of Financial Studies 17(2), pages: 581 – 610



Quintos C., Fan Z., Phillips P.C.B., (2001), *Structural Change test in tail behavior and the Asian Crisis*, The Review of Economic Studies 68(3), pages: 633 – 663

Rootzen H., Nader Tajvidi, (2006), *Multivariate Generalized Pareto Distributions*, Bernoulli (5), pages: 917 – 930

Sempi C., (June, 2011), *An Introduction to Copulas*, Presentation at Department of Mathematics, University of Salento, Lecce Italy

Shih J.H., Louis A., (1995), *Inferences on the association parameter in copula models for bivariate Survival data*, Biometrics, 51, pages: 1384 – 1399.

Sibuya M., (1960), *Bivariate Extreme Statistics*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 11, pages: 195 – 210.

Smith R.L., (June, 1993), *Multivariate Threshold Methods*, Departments of Statistics, Chapel Hill, North Carolina

Smith R.L., Tawn J.A. and Coles S.G. (1997), *Markov Chain Models for Threshold Exceedances*. Biometrika 84, pages: 249 – 268

Starica C., (1999), *Multivariate extremes for models with constant conditional correlations*, Journal of Empirical Finance, 6, pages: 515 - 553

Takahashi D., (1994), *Sluicing in Japanese*, Journal of East Asian Linguistics 3, pages: 265 – 300

Tawn J.A., (1988), *Bivariate extreme Value Theory : Models and Estimation*, Biometrika 75, pages : 397 – 415

Tsay R. S., (2010), *Willey Series in Probability and Statistics : Analysis of Financial Time Series*, Third Edition, pages : 109 - 149, 325 – 338, 363 – 365, 371, 513, 514 Willey, Hoboken, New Jersey

Wang Chulmin, (2011), *A new hybrid estimation method for GPD*, presentation, Department of Mathematics and Statistics, University of Calgary, URL: [http://www.stats.uwo.ca/gradwebs/jlee/sosqssd2011/files/presentations/Chunlin\\_Wang\\_S\\_OSGSSD2011.pdf](http://www.stats.uwo.ca/gradwebs/jlee/sosqssd2011/files/presentations/Chunlin_Wang_S_OSGSSD2011.pdf)

Wiener Zvi, (May 18, 1997), *Introduction to VaR (Value at Risk)*, Working Paper, Business School, The Hebrew University of Jerusalem

Γναρδέλλης Χαράλαμπος, (2009), *Ανάλυση Δεδομένων με το PASW Statistics 17.0*, pages : 376 – 378, Εκδόσεις Παπαζήση

[http://en.wikipedia.org/wiki/Extreme\\_value\\_theory#History](http://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theory#History)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Kolmogorov%E2%80%93Smirnov\\_test](http://en.wikipedia.org/wiki/Kolmogorov%E2%80%93Smirnov_test)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Anderson-Darling\\_test](http://en.wikipedia.org/wiki/Anderson-Darling_test)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Kendall%27s\\_tau](http://en.wikipedia.org/wiki/Kendall%27s_tau)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Spearman%27s\\_rank\\_correlation\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Spearman%27s_rank_correlation_coefficient)

---

# Παράρτημα Α

---

**Προγράμματα Υπολογισμού 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο με Risk Metrics, Οικονομετρικά Μοντέλα και EVT**

**Πρόγραμμα A1** : Υπολογισμός της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο των αποδόσεων του χρυσού – οικονομετρική μέθοδος.

```

'in-sample observations
!s=1147

'out-of-sample observations
!u=574
'Expected Shortfall Sample
!ES=1000
'benchmark model forecast
series var_gold_95
series var_gold_99
series var
series returns_rf
series returns_garch_rf
series result_gold_95
series result_gold_99
matrix(!u,2) E_S = na

for !j=1 to !u
  smpl @first @first+!s-1+!j-1

  equation eq.arch(egarch, tdist) g g(-12)
  eq.makegarch garch_new1
  eq.makesesid res_new1
  'Calculating the expected returns
  returns_rf(!s+!j) = eq.c(1)*g(!s+!j-12)
  'Calculating the expected variances
  returns_garch_rf(!s+!j)=@exp(eq.c(2)+(eq.c(3)*@abs(res_new1(!s+!j-1)))/@sqrt(garch_new1(!s+!j-1)))+(eq.c(4)
  *res_new1(!s+!j-1))/@sqrt(garch_new1(!s+!j-1))+ eq.c(5)*@log(garch_new1(!s+!j-1)))
  'Calculating the standard deviation of the expected variances
  var(!s+!j)=@sqrt(returns_garch_rf(!s+!j))
  'Calculating the 95%VaR via GARCH method
  var_gold_95(!s+!j) =returns_rf(!s+!j)+ var(!s+!j)*(@qtdist(0.05, eq.c(6))/@sqrt(eq.c(6)/(eq.c(6)-2)))
  'Calculating the 99%VaR via GARCH method
  var_gold_99(!s+!j) =returns_rf(!s+!j)+ var(!s+!j)*(@qtdist(0.01, eq.c(6))/@sqrt(eq.c(6)/(eq.c(6)-2)))

  'Backtesting for GARCH(1, 1) Method
  '95% VaR
  if var_gold_95(!s+!j) > g(!j+!s) then
    result_gold_95(!j) = 1
  else
    result_gold_95(!j) = 0
  endif
  '99% VaR
  if var_gold_99(!s+!j) > g(!j+!s) then
    result_gold_99(!j) = 1
  else
    result_gold_99(!j) = 0
  endif
  vector(!ES) ExS=na
  !step1 = (1-0.95)/(!ES+1)
  !step2 = 0.05
  for !kk=1 to !ES
    !step2 = !step2-!step1
    ExS(!kk) = var(!s+!j)*@qtdist(!step2, eq.c(6))
  next
  E_S(!j,1)=@mean(ExS)
  vector(!ES) ExS=na
  !step1 = (1-0.99)/(!ES+1)
  !step2 = 0.01
  for !kk=1 to !ES
    !step2 = !step2-!step1
    ExS(!kk) = var(!s+!j)*@qtdist(!step2, eq.c(6))
  next
  E_S(!j,2)=@mean(ExS)
next

```

**Πρόγραμμα A2** : Υπολογισμός της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο των αποδόσεων του χρυσού – Risk Metrics Method.

```

'in-sample observations
!s=1147

'out-of-sample observations
!u=574
'Expected Shortfall Sample
!ES=1000

'benchmark model forecast
series var_gold_95_RM
series var_gold_99_RM
series var
series returns_garch_rf
series result_gold_95
series result_gold_99
matrix(!u,2) E_S = na

for !i=1 to !u
  smpl @first @first+!s-1+!i-1

  equation eq.arch(integrated) g
  eq.makegarch garch_new1
  eq.makesetid res_new1

  'Calculating the expected variances
  returns_garch_rf(!s+!i)=eq.c(1)*res_new1(!s+!i-1)^2+(1-eq.c(1))*garch_new1(!s+!i-1)
  'Calculating the standard deviation of the expected variances
  var(!s+!i)=@sqrt(returns_garch_rf(!s+!i))
  'Calculating the Risk Metrics 95% VaR
  var_gold_95_RM(!s+!i)=@qnorm(0.05)*var(!s+!i)
  'Calculating the Risk Metrics 99% VaR
  var_gold_99_RM(!s+!i)=@qnorm(0.01)*var(!s+!i)

  'Backtesting for Risk Metrics Method
  '95% VaR
  if var_gold_95_RM(!s+!i) > g(!i+!s) then
    result_gold_95(!i) = 1
  else
    result_gold_95(!i) = 0
  endif
  '99% VaR
  if var_gold_99_RM(!s+!i) > g(!i+!s) then
    result_gold_99(!i) = 1
  else
    result_gold_99(!i) = 0
  endif
  vector(!ES) ExS=na
  !step1 = (1-0.95)/(!ES+1)
  !step2 = 0.05
  for !kk=1 to !ES
    !step2 = !step2-!step1
    ExS(!kk) = var(!s+!i)*@qnorm(!step2)
  next
  E_S(!i,1)=@mean(ExS)
  vector(!ES) ExS=na
  !step1 = (1-0.99)/(!ES+1)
  !step2 = 0.01
  for !kk=1 to !ES
    !step2 = !step2-!step1
    ExS(!kk) = var(!s+!i)*@qnorm(!step2)
  next
  E_S(!i,2)=@mean(ExS)
next

```

**Πρόγραμμα A3** : Υπολογισμός της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο των αποδόσεων του χρυσού – EVT - GEV.

```
data<-read.table("data all.txt", header=TRUE)
x<-data[[2]]

ins=1147
os=574
zp95<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)
zp99<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)
r95<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)
r99<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)
y<-NULL

for(i in 1:ins)
{
  y[i]<-x[i]
}

for(j in 1:os)
{
  y[ins+j]<-x[ins+j]
  a<-gev(y)
  mu<-a$par.ests[3]
  sigma<-a$par.ests[2]
  x1<-a$par.ests[1]
  ### 95% VaR ###
  p1=0.05
  w=-log(-log(1-p1))
  zp95[j]<-mu-sigma/x1*(1-exp(x1*w))
  ##### 99% VaR #####
  p2=0.01
  w=-log(-log(1-p2))
  zp99[j]<-mu-sigma/x1*(1-exp(x1*w))
  ## Backtesting the 95% VaR ##
  if (zp95[j]>y[ins+j])
    r95[j]<-1 else
    r95[j]<-0
  ## Backtesting the 99% VaR ##
  if (zp99[j]>y[ins+j])
    r99[j]<-1 else
    r99[j]<-0
}
```

**Πρόγραμμα A4** : Υπολογισμός της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο των αποδόσεων του χρυσού – EVT – GPD.

```
data<-read.table("gold.txt", header=TRUE)
x<-data[[1]]

vr95<-NULL
vr99<-NULL
y<-NULL
ins=1147
os=574
r95<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)
r99<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)

for(i in 1:ins)
{
  y[i]<-x[i]
}

for(j in 1:os)
{
  y[ins+j]<-x[ins+j]
  a<-gpd.fit(y,0.03)
  s<-a$mle[1]
  z<-a$mle[2]
  k<-length(y)
  ## 95% VaR ##
  p1<-0.05
  v1<-(a$nextc[1]/k*(1-p1))^a$mle[2]
  vr95[j]<-a$threshold[1]-(a$mle[1]/a$mle[2])*(1-v1)
  ## 99% VaR ##
  p2<-0.01
  v2<-(a$nextc[1]/k*(1-p2))^a$mle[2]
  vr99[j]<-a$threshold[1]-(a$mle[1]/a$mle[2])*(1-v2)
  ## Backtesting the 95% VaR ##
  if (vr95[j]>y[ins+j])
  r95[j]<-1 else
  r95[j]<-0
  ## Backtesting the 99% VaR ##
  if (vr99[j]>y[ins+j])
  r99[j]<-1 else
  r99[j]<-0
}
```

**Πρόγραμμα A5** : Υπολογισμός της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο των αποδόσεων του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 – οικονομετρική μέθοδος.

```

'in-sample observations
!s=1147

'out-of-sample observations
!u=574
'Expected Shortfall Sample
!ES=1000
'benchmark model forecast
series var_sp_95
series var_sp_99
series var
series returns_rf
series returns_garch_rf
series result_sp_95
series result_sp_99
matrix(!u,2) E_S = na
for !i=1 to !u
  smpl @first @first+!s-1+!i-1

equation eq.arch(backast=0.7,deriv=aa,tdist) sp c
eq.makegarch garch_new1
eq.makesid res_new1
'Calculating the expected variances
returns_garch_rf(!s+!i)=eq.c(2)+eq.c(3)*res_new1(!s+!i-1)^2+eq.c(4)*garch_new1(!s+!i-1)
'Calculating the standard deviation of the expected variances
var(!s+!i)=@sqrt(returns_garch_rf(!s+!i))
'Calculating the 95%VaR via GARCH method
var_sp_95(!s+!i) =eq.c(1)+ var(!s+!i)*(@qtdist(0.05, eq.c(5))/@sqrt(eq.c(5)/(eq.c(5)-2)))
'Calculating the 99%VaR via GARCH method
var_sp_99(!s+!i) =eq.c(1)+ var(!s+!i)*(@qtdist(0.01, eq.c(5))/@sqrt(eq.c(5)/(eq.c(5)-2)))
'Backtesting for GARCH(1, 1) Method
'95% VaR
if var_sp_95(!s+!i) > sp(!i+!s) then
  result_sp_95(!i) = 1
else
  result_sp_95(!i) = 0
endif
'99% VaR
if var_sp_99(!s+!i) > sp(!i+!s) then
  result_sp_99(!i) = 1
else
  result_sp_99(!i) = 0
endif
vector(!ES) ExS=na
!step1 = (1-0.95)/(!ES+1)
!step2 = 0.05
for !kk=1 to !ES
  !step2 = !step2-!step1
  ExS(!kk) = var(!s+!i)*@qtdist(!step2, eq.c(5))
next
E_S(!i,1)=@mean(ExS)
vector(!ES) ExS=na
!step1 = (1-0.99)/(!ES+1)
!step2 = 0.01
for !kk=1 to !ES
  !step2 = !step2-!step1
  ExS(!kk) = var(!s+!i)*@qtdist(!step2, eq.c(5))
next
E_S(!i,2)=@mean(ExS)
next

```



**Πρόγραμμα A6** : Υπολογισμός της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο των αποδόσεων του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 – Risk Metrics Method.

```

'in-sample observations
!s=1147

'out-of-sample observations
!u=574
'Expected Shortfall Sample
!ES=1000
'benchmark model forecast
series var_sp_95_RM
series var_sp_99_RM
series var
series returns_garch_rf
series result_sp_95_RM
series result_sp_99_RM
matrix(!u,2) E_S = na
for !i=1 to !u
  smpl @first @first+!s-1+!i-1

equation eq.arch(integrated) sp
eq.makegarch garch_new1
eq.makesid res_new1
'Calculating the expected variances
returns_garch_rf(!s+!i)=eq.c(1)*res_new1(!s+!i-1)^2+(1-eq.c(1))*garch_new1(!s+!i-1)
'Calculating the standard deviation of the expected variances
var(!s+!i)=@sqrt(returns_garch_rf(!s+!i))
'Calculating the Risk Metrics 95% VaR
var_sp_95_RM(!s+!i)=@qnorm(0.05)*var(!s+!i)
'Calculating the Risk Metrics 99% VaR
var_sp_99_RM(!s+!i)=@qnorm(0.01)*var(!s+!i)
'Backtesting for Risk Metrics Method
'95% VaR
if var_sp_95_RM(!s+!i) > sp(!i+!s) then
  result_sp_95_RM(!i) = 1
else
  result_sp_95_RM(!i) = 0
endif
'99% VaR
if var_sp_99_RM(!s+!i) > sp(!i+!s) then
  result_sp_99_RM(!i) = 1
else
  result_sp_99_RM(!i) = 0
endif
vector(!ES) ExS=na
!step1 = (1-0.95)/(!ES+1)
!step2 = 0.05
for !kk=1 to !ES
  !step2 = !step2-!step1
  ExS(!kk) = var(!s+!i)*@qnorm(!step2)
next
E_S(!i,1)=@mean(ExS)
vector(!ES) ExS=na
!step1 = (1-0.99)/(!ES+1)
!step2 = 0.01
for !kk=1 to !ES
  !step2 = !step2-!step1
  ExS(!kk) = var(!s+!i)*@qnorm(!step2)
next
E_S(!i,2)=@mean(ExS)
next

```

**Πρόγραμμα A7** : Υπολογισμός της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο των αποδόσεων του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 – EVT - GEV.

```
data<-read.table("data all.txt", header=TRUE)
x<-data[[1]]

zp95<-NULL
zp99<-NULL
y<-NULL
ins=1147
os=574
r95<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)
r99<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)

for(i in 1:ins)
{
  y[i]<-x[i]
}

for(j in 1:os)
{
  y[ins+j]<-x[ins+j]
  a<-gev(y)
  mu<-a$par.ests[3]
  sigma<-a$par.ests[2]
  x1<-a$par.ests[1]
  p1=0.05
  w<-log(-log(1-p1))
  ## 95% VaR ###
  zp95[j]<-mu-sigma/x1*(1-exp(x1*w))
  ## 99% VaR ##
  p2=0.01
  w<-log(-log(1-p2))
  zp99[j]<-mu-sigma/x1*(1-exp(x1*w))
  ## Backtesting the 95% VaR ##
  if (zp95[j]>y[ins+j])
  r95[j]<-1 else
  r95[j]<-0

  ## Backtesting the 99% VaR ##
  if (zp99[j]>y[ins+j])
  r99[j]<-1 else
  r99[j]<-0
}
```

**Πρόγραμμα A8** : Υπολογισμός της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο των αποδόσεων του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 - EVT – GPD.

```

data<-read.table("S&P500.txt", header=TRUE)
x<-data[[2]]

vr95<-NULL
vr99<-NULL
y<-NULL
ins=1147
os=574
r95<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)
r99<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)

for(i in 1:ins)
{
  y[i]<-x[i]
}

for(j in 1:os)
{
  y[ins+j]<-x[ins+j]
  a<-gpd.fit(y,0.04)
  s<-a$mle[1]
  z<-a$mle[2]
  k<-length(y)
  ## 95% VaR ##
  p1<-0.05
  v1<-(a$nextc[1]/k*(1-p1))^a$mle[2]
  vr95[j]<-a$threshold[1]-(a$mle[1]/a$mle[2])*(1-v1)
  ## 99% VaR ##
  p2<-0.01
  v2<-(a$nextc[1]/k*(1-p2))^a$mle[2]
  vr99[j]<-a$threshold[1]-(a$mle[1]/a$mle[2])*(1-v2)
  ## Backtesting the 95% VaR ##
  if (vr95[j]>y[ins+j])
  r95[j]<-1 else
  r95[j]<-0

  ## Backtesting the 99% VaR ##
  if (vr99[j]>y[ins+j])
  r99[j]<-1 else
  r99[j]<-0
}

```

**Πρόγραμμα A9** : Υπολογισμός της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο των αποδόσεων του αμερικανικού μονοετούς ομολόγου – οικονομετρική μέθοδος.

```

|in-sample observations
!s=1147

'out-of-sample observations
!u=574
'Expected Shortfall Sample
!ES=1000
'benchmark model forecast
series var_b1y_95
series var_b1y_99
series var
series returns_rf
series returns_garch_rf
series result_b1y_95
series result_b1y_99
matrix(!u,2) E_S = na

for !i=1 to !u
smpl @first @first+!s-1+!i-1

equation eq.arch(egarch, tdist, c=0.01, backcast=0.4) b1y c b1y(-1) b1y(-3) b1y(-4)
eq.makegarch garch_new1
eq.makesresid res_new1
'Calculating the expected returns
returns_rf(!s+!i) = eq.c(1) + eq.c(2)*b1y(!s+!i-1) + eq.c(3)*b1y(!s+!i-3) + eq.c(4)*b1y(!s+!i-4)
'Calculating the expected variances
returns_garch_rf(!s+!i)=@exp(eq.c(5)+(eq.c(6)*@abs(res_new1(!s+!i-1)))/@sqrt(garch_new1(!s+!i-1)))+(eq.c(7)*res_new1(!s+!i-1))/@sqrt(garch_new1(!s+!i-1))+ eq.c(8)*@log(garch_new1(!s+!i-1)))
'Calculating the standard deviation of the expected variances
var(!s+!i)=@sqrt(returns_garch_rf(!s+!i))
'Calculating the 95%VaR via GARCH method
var_b1y_95(!s+!i) = returns_rf(!s+!i) + var(!s+!i)*(@qtdist(0.05, eq.c(9))/@sqrt(eq.c(9)/(eq.c(9)-2)))
'Calculating the 99%VaR via GARCH method
var_b1y_99(!s+!i) = returns_rf(!s+!i) + var(!s+!i)*(@qtdist(0.01, eq.c(9))/@sqrt(eq.c(9)/(eq.c(9)-2)))

'Backtesting for GARCH(1, 1) Method
'95% VaR
if var_b1y_95(!s+!i) > b1y(!i+!s) then
result_b1y_95(!i) = 1
else
result_b1y_95(!i) = 0
endif
'99% VaR
if var_b1y_99(!s+!i) > b1y(!i+!s) then
result_b1y_99(!i) = 1
else
result_b1y_99(!i) = 0
endif
vector(!ES) ExS=na
!step1 = (1-0.95)/(!ES+1)
!step2 = 0.05
for !kk=1 to !ES
!step2 = !step2-!step1
ExS(!kk) = var(!s+!i)*@qtdist(!step2, eq.c(9))
next
E_S(!i,1)=@mean(ExS)
vector(!ES) ExS=na
!step1 = (1-0.99)/(!ES+1)
!step2 = 0.01
for !kk=1 to !ES
!step2 = !step2-!step1
ExS(!kk) = var(!s+!i)*@qtdist(!step2, eq.c(9))
next
E_S(!i,2)=@mean(ExS)
next

```

**Πρόγραμμα A10** : Υπολογισμός της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο των αποδόσεων του αμερικανικού μονοετούς ομολόγου – Risk Metrics Method.

```

'in-sample observations
!s=1147

'out-of-sample observations
!u=574
'Expected Shortfall Sample
!ES=1000

'benchmark model forecast
series var_b1y_95_RM
series var_b1y_99_RM
series var
series returns_garch_rf
series result_b1y_95
series result_b1y_99
matrix(!u,2) E_S = na

for !i=1 to !u
  smpl @first @first+!s-1+!i-1

  equation eq.arch(integrated) b1y
  eq.makegarch garch_new1
  eq.makesresid res_new1
  'Calculating the expected variances
  returns_garch_rf(!s+!i)=eq.c(1)*res_new1(!s+!i-1)^2+(1-eq.c(1))*garch_new1(!s+!i-1)
  'Calculating the standard deviation of the expected variances
  var(!s+!i)=@sqrt(returns_garch_rf(!s+!i))
  'Calculating the Risk Metrics 95% VaR
  var_b1y_95_RM(!s+!i)=@qnorm(0.05)*var(!s+!i)
  'Calculating the Risk Metrics 99% VaR
  var_b1y_99_RM(!s+!i)=@qnorm(0.01)*var(!s+!i)

  'Backtesting for GARCH(1, 1) Method
  '95% VaR
  if var_b1y_95_RM(!s+!i) > b1y(!i+!s) then
    result_b1y_95(!i) = 1
  else
    result_b1y_95(!i) = 0
  endif
  '99% VaR
  if var_b1y_99_RM(!s+!i) > b1y(!i+!s) then
    result_b1y_99(!i) = 1
  else
    result_b1y_99(!i) = 0
  endif
  vector(!ES) ExS=na
  !step1 = (1-0.95)/(!ES+1)
  !step2 = 0.05
  for !kk=1 to !ES
    !step2 = !step2-!step1
    ExS(!kk) = var(!s+!i)*@qnorm(!step2)
  next
  E_S(!i,1)=@mean(ExS)
  vector(!ES) ExS=na
  !step1 = (1-0.99)/(!ES+1)
  !step2 = 0.01
  for !kk=1 to !ES
    !step2 = !step2-!step1
    ExS(!kk) = var(!s+!i)*@qnorm(!step2)
  next
  E_S(!i,2)=@mean(ExS)
next

```

**Πρόγραμμα A11** : Υπολογισμός της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο των αποδόσεων του αμερικανικού μονοετούς ομολόγου – EVT - GEV.

```
data<-read.table("lybond.txt", header=TRUE)
x<-data[[2]]

zp95<-NULL
zp99<-NULL
y<-NULL
ins=1147
os=574
r95<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)
r99<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)

for(i in 1:ins)
{
  y[i]<-x[i]
}

for(j in 1:os)
{
  y[ins+j]<-x[ins+j]
  a<-gev(y)
  mu<-a$par.ests[3]
  sigma<-a$par.ests[2]
  x1<-a$par.ests[1]
  ## 95% VaR ##
  p1=0.05
  w=-log(-log(1-p1))
  zp95[j]<-mu-sigma/x1*(1-exp(x1*w))
  ## 99% VaR ##
  p2=0.01
  w=-log(-log(1-p2))
  zp99[j]<-mu-sigma/x1*(1-exp(x1*w))
  ## Backtesting the 95% VaR ##
  if (zp95[j]>y[ins+j])
  r95[j]<-1 else
  r95[j]<-0

  ## Backtesting the 99% VaR ##
  if (zp99[j]>y[ins+j])
  r99[j]<-1 else
  r99[j]<-0
}
```

**Πρόγραμμα A12** : Υπολογισμός της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο των αποδόσεων του αμερικανικού μονοετούς ομολόγου - EVT – GPD.

```
data<-read.table("lybond.txt", header=TRUE)
x<-data[[2]]

vr95<-NULL
vr99<-NULL
y<-NULL
ins=1147
os=574
r95<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)
r99<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)

for(i in 1:ins)
{
  y[i]<-x[i]
}

for(j in 1:os)
{
  y[ins+j]<-x[ins+j]
  a<-gpd.fit(y,0.0027)
  s<-a$mle[1]
  z<-a$mle[2]
  k<-length(y)
  ## 95% VaR ##
  p1<-0.05
  v1<-(a$next[1]/k*(1-p1))^a$mle[2]
  vr95[j]<-a$threshold[1]-(a$mle[1]/a$mle[2])*(1-v1)
  ## 99% VaR ##
  p2<-0.01
  v2<-(a$next[1]/k*(1-p2))^a$mle[2]
  vr99[j]<-a$threshold[1]-(a$mle[1]/a$mle[2])*(1-v2)
  ## Backtesting the 95% VaR ##
  if (vr95[j]>y[ins+j])
  r95[j]<-1 else
  r95[j]<-0
  ## Backtesting the 99% VaR ##
  if (vr99[j]>y[ins+j])
  r99[j]<-1 else
  r99[j]<-0
}
```

**Πρόγραμμα A13** : Υπολογισμός Αξίας σε Κίνδυνο, σε επίπεδο χαρτοφυλακίου, με το μοντέλο BEKK.

```

smpl @all

!sample = @obssmpl
!recursive=1147
!repeat = 574
!w1=1/3
!w2=1/3
!w3=1/3
series rp=!w1*rt1+!w2*rt2+!w3*rt3
matrix(!repeat,2) VaR_bekk_t = na
matrix(!repeat,2) result_bekk_t = na

for li = 1 to !repeat
system ste
ste.append rt1=c(1)
ste.append rt2=c(2)
ste.append rt3=c(3)
ste.arch(b, m=200, tdist, c = 0.001) @diagbekk c arch(1) garch(1)
ste.makegarch
ste.makesids res1 res2 res3

smpl !i !i+!recursive-1
!c1 = ste.c(1)
!c2 = ste.c(2)
!c3 = ste.c(3)
!c4 = ste.c(4)
!c5 = ste.c(5)
!c6 =ste.c(6)
!c7 = ste.c(7)
!c8 = ste.c(8)
!c9 =ste.c(9)
!c10=ste.c(10)
!c11=ste.c(11)
!c12=ste.c(12)
!c13=ste.c(13)
!c14=ste.c(14)
!c15=ste.c(15)
!c16=ste.c(16)

coef(1) sig1 = !c4+!c10^2*(res1(!i+!recursive-1)^2)+!c13^2*garch_01(!i+!recursive-1)
coef(1) sig2 = !c6+!c11^2*(res2(!i+!recursive-1)^2)+!c14^2*garch_02(!i+!recursive-1)
coef(1) sig3 = !c9+!c12^2*(res3(!i+!recursive-1)^2)+!c15^2*garch_03(!i+!recursive-1)
coef(1) sig12 = !c5+!c10*!c11*(res1(!i+!recursive-1)^2)*(res2(!i+!recursive-1)^2)+!c13*!c14
*garch_01_02(!i+!recursive-1)
coef(1) sig13 = !c7+!c10*!c12*(res1(!i+!recursive-1)^2)*(res3(!i+!recursive-1)^2)+!c13*!c15
*garch_01_03(!i+!recursive-1)
coef(1) sig23 = !c8+!c11*!c12*(res2(!i+!recursive-1)^2)*(res3(!i+!recursive-1)^2)+!c14*!c15
*garch_02_03(!i+!recursive-1)
coef(1) var1=@sqrt(!w1^2*sig1+!w2^2*sig2+!w3^2*sig3+2*!w1*!w2*sig12+2*!w1*!w3*sig13+2
*!w2*!w3*sig23)

VaR_bekk_t(!i,1) = !w1*!c1+!w2*!c2+!w3*!c3+var1(1)*@qtdist(0.05, !c16)
VaR_bekk_t(!i,2) = !w1*!c1+!w2*!c2+!w3*!c3+var1(1)*@qtdist(0.01, !c16)
if VaR_bekk_t(!i,1) > rp(!i+!recursive) then
result_bekk_t(!i,1) = 1
else
result_bekk_t(!i,1) = 0
endif
if VaR_bekk_t(!i,2) > rp(!i+!recursive) then
result_bekk_t(!i,2) = 1
else
result_bekk_t(!i,2) = 0
endif
Statusline bekk t !i
next

```



**Πρόγραμμα A14** : Υπολογισμός Αξίας σε Κίνδυνο, σε επίπεδο χαρτοφυλακίου, με το μοντέλο CCC.

```

smpl @all

!sample = @obssmpl
!recursive=1147
!repeat = 574
!w1=1/3
!w2=1/3
!w3=1/3
series rp=!w1*rt1+!w2*rt2+!w3*rt3
matrix(!repeat,2) VaR_ccc_t = na
matrix(!repeat,2) result_ccc_t = na

for !i = 1 to !repeat
system ste
ste.append rt1=c(1)
ste.append rt2=c(2)
ste.append rt3=c(3)
ste.arch(b, m=200, tdist, c = 0.001) @ccc c arch(1) garch(1)
ste.makegarch
ste.makeresids res1 res2 res3

smpl !i !i+!recursive-1
!c1 = ste.c(1)
!c2 = ste.c(2)
!c3 = ste.c(3)
!c4 = ste.c(4)
!c5 = ste.c(5)
!c6 =ste.c(6)
!c7 = ste.c(7)
!c8 = ste.c(8)
!c9 =ste.c(9)
!c10=ste.c(10)
!c11=ste.c(11)
!c12=ste.c(12)
!c13=ste.c(13)
!c14=ste.c(14)
!c15=ste.c(15)
!c16=ste.c(16)

coef(1) sig1 = !c4+!c5*(res1(!i+!recursive-1)^2)+!c6*garch_01(!i+!recursive-1)
coef(1) sig2 = !c7+!c8*(res2(!i+!recursive-1)^2)+!c9*garch_02(!i+!recursive-1)
coef(1) sig3 = !c10+!c11*(res3(!i+!recursive-1)^2)+!c12*garch_03(!i+!recursive-1)
coef(1) sig12 = !c13*@sqrt(sig1*sig2)
coef(1) sig13 = !c14*@sqrt(sig1*sig3)
coef(1) sig23 = !c15*@sqrt(sig2*sig3)
coef(1) var1=@sqrt(!w1^2*sig1+!w2^2*sig2+!w3^2*sig3+2*!w1*!w2*sig12+2*!w1*!w3*sig13+2*!w2*!w3*sig23)

VaR_ccc_t(!i,1) = !w1*!c1+!w2*!c2+var1(1)*@qtdist(0.05, !c16)/@sqrt(!c16/(!c16-2))
VaR_ccc_t(!i,2) = !w1*!c1+!w2*!c2+var1(1)*@qtdist(0.01, !c16)/@sqrt(!c16/(!c16-2))
if VaR_ccc_t(!i,1) > rp(!i+!recursive) then
result_ccc_t(!i,1) = 1
else
result_ccc_t(!i,1) = 0
endif
if VaR_ccc_t(!i,2) > rp(!i+!recursive) then
result_ccc_t(!i,2) = 1
else
result_ccc_t(!i,2) = 0
endif
Statusline ccc t !i
next

```

**Πρόγραμμα A15** : Υπολογισμός Αξίας σε κίνδυνο, σε επίπεδο χαρτοφυλακίου, με την μοντελοποίηση της εξάρτησης μέσω t copula και GPD για τις σειρές.

```
'in-sample observations
```

```
!s=1147
```

```
'out-of-sample observations
```

```
!u=574
```

```
'Expected Shortfall Sample
```

```
!ES=1000
```

```
'benchmark model forecast
```

```
series rp
```

```
series varp95
```

```
series varp99
```

```
scalar r12 = 0.06582
```

```
scalar r13 = 0.07496
```

```
scalar r23 = 0.08653
```

```
series results_p95
```

```
series results_p99
```

```
'Portfolio Returns
```

```
rp=1/3*(g+b1y+sp)
```

```
for li=1 to !u
```

```
smpl @first @first+!s-1+!i-1
```

```
!c1 = varg95(!s+!i)
```

```
!c2 = varg99(!s+!i)
```

```
!c3 = varsp95(!s+!i)
```

```
!c4 = varsp99(!s+!i)
```

```
!c5 = varb1y95(!s+!i)
```

```
!c6 = varb1y99(!s+!i)
```

```
'95% Portfolio VaR
```

```
varp95(li)=@sqrt((!c1)^2+(!c3)^2+(!c5)^2+2*r12*(!c1)*(!c3)+2*r13*(!c1)*(!c5)+2*r23*(!c3)*(!c5))
```

```
'99% Portfolio VaR
```

```
varp99(li)=@sqrt((!c2)^2+(!c4)^2+(!c6)^2+2*r12*(!c2)*(!c4)+2*r13*(!c2)*(!c6)+2*r23*(!c4)*(!c6))
```

```
'Backtesting 95% VaR
```

```
'95% VaR
```

```
if varp95(li) > rp(li+!s) then
```

```
results_p95(li) = 1
```

```
else
```

```
results_p95(li) = 0
```

```
endif
```

```
'Backtesting 99% VaR
```

```
if varp99(li) > rp(li+!s) then
```

```
results_p99(li) = 1
```

```
else
```

```
results_p99(li) = 0
```

```
endif
```

```
next
```

---

# Παράρτημα Β

---

**Απεικονίσεις των μοντέλων περιγραφής του μέσου και της  
διακυμάνσεως των αποδόσεων των σειρών**

**Πίνακας Β1** : Το μοντέλο AR(12) – EGARCH(1,1) περιγραφής του μέσου και της διακύμανσης των αποδόσεων του χρυσού.

Dependent Variable: G  
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Student's t distribution  
Date: 05/02/13 Time: 14:57  
Sample (adjusted): 4/02/1980 12/26/2001  
Included observations: 1135 after adjustments  
Convergence achieved after 16 iterations  
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
LOG(GARCH) = C(2) + C(3)\*ABS(RESID(-1))/@SQRT(GARCH(-1))) + C(4)\*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(5)\*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
G(-12)	0.102075	0.025322	4.031037	0.0001
Variance Equation				
C(2)	-0.296937	0.065347	-4.544035	0.0000
C(3)	0.215986	0.037499	5.759723	0.0000
C(4)	0.053856	0.021747	2.476446	0.0133
C(5)	0.981889	0.006666	147.2991	0.0000
T-DIST. DOF	4.700122	0.657155	7.152227	0.0000
R-squared	-0.001952	Mean dependent var		-0.001792
Adjusted R-squared	-0.006389	S.D. dependent var		0.023477
S.E. of regression	0.023552	Akaike info criterion		-5.085870
Sum squared resid	0.626263	Schwarz criterion		-5.059256
Log likelihood	2892.231	Hannan-Quinn criter.		-5.075817
Durbin-Watson stat	1.976142			

**Πίνακας Β2** : Το μοντέλο C – GARCH(1,1) περιγραφής του μέσου και της διακύμανσης των αποδόσεων του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500.

Dependent Variable: S\_P500  
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Student's t distribution  
Date: 04/23/13 Time: 01:10  
Sample: 1/09/1980 12/26/2012  
Included observations: 1721  
Convergence achieved after 12 iterations  
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
GARCH = C(2) + C(3)\*RESID(-1)^2 + C(4)\*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001585	0.000443	3.580486	0.0003
Variance Equation				
C	1.30E-05	4.23E-06	3.074697	0.0021
RESID(-1)^2	0.102399	0.018416	5.560457	0.0000
GARCH(-1)	0.875325	0.021250	41.19215	0.0000
T-DIST. DOF	6.904326	0.938390	7.357627	0.0000
R-squared	-0.002003	Mean dependent var		0.000555
Adjusted R-squared	-0.004339	S.D. dependent var		0.023030
S.E. of regression	0.023080	Akaike info criterion		-4.930398
Sum squared resid	0.914071	Schwarz criterion		-4.914562
Log likelihood	4247.607	Hannan-Quinn criter.		-4.924539
Durbin-Watson stat	2.065456			

**Πίνακας Β3 :** Το μοντέλο AR(4) – EGARCH(1,1) περιγραφής του μέσου και της διακύμανσης των αποδόσεων του μονοετούς αμερικανικού ομολόγου.

Dependent Variable: B1Y  
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Student's t distribution  
Date: 04/23/13 Time: 12:48  
Sample (adjusted): 2/06/1980 12/26/2012  
Included observations: 1717 after adjustments  
Convergence achieved after 10 iterations  
Presample variance: backcast (parameter = 0.4)  
LOG(GARCH) = C(5) + C(6)\*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(7)  
\*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(8)\*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-1.70E-05	1.52E-06	-11.17757	0.0000
B1Y(-1)	0.067331	0.024417	2.757603	0.0058
B1Y(-3)	0.059557	0.023266	2.559862	0.0105
B1Y(-4)	0.094485	0.022053	4.284497	0.0000
Variance Equation				
C(5)	-0.222474	0.045746	-4.863200	0.0000
C(6)	0.323479	0.030095	10.74877	0.0000
C(7)	-0.041498	0.018949	-2.189981	0.0285
C(8)	1.001688	0.002493	401.7513	0.0000
T-DIST. DOF	5.323931	0.591430	9.001802	0.0000
R-squared	0.028068	Mean dependent var	5.82E-05	
Adjusted R-squared	0.023516	S.D. dependent var	0.002039	
S.E. of regression	0.002015	Akaike info criterion	-10.92110	
Sum squared resid	0.006933	Schwarz criterion	-10.89254	
Log likelihood	9384.761	Hannan-Quinn criter.	-10.91053	
F-statistic	6.165620	Durbin-Watson stat	1.850309	
Prob(F-statistic)	0.000000			

---

# Παράρτημα Γ

---

**Απεικονίσεις των πινάκων Correlogram των επιλεγμένων μοντέλων  
για την διακύμανση, σε μονομεταβλητό επίπεδο**

**Πίνακας Γ1 :** Correlogram των απλών (δεξιά) και των τετραγωνισμένων (αριστερά) καταλοίπων των αποδόσεων του χρυσού.

Correlogram of Standardized Residuals						Correlogram of Standardized Residuals Squared							
Date: 04/23/13 Time: 12:00 Sample: 4/02/1980 12/26/2012 Included observations: 1709						Date: 04/23/13 Time: 12:02 Sample: 4/02/1980 12/26/2012 Included observations: 1709							
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob		
		1	0.028	0.028	1.3658	0.243			1	0.003	0.003	0.0139	0.906
		2	-0.019	-0.020	1.9716	0.373			2	-0.034	-0.034	1.9842	0.371
		3	0.020	0.021	2.6434	0.450			3	0.026	0.026	3.1027	0.376
		4	0.028	0.026	3.9455	0.413			4	0.012	0.011	3.3491	0.501
		5	-0.028	-0.029	5.3163	0.379			5	0.010	0.011	3.5082	0.622
		6	-0.026	-0.023	6.4357	0.376			6	0.002	0.002	3.5177	0.742
		7	0.004	0.003	6.4568	0.488			7	0.001	0.001	3.5195	0.833
		8	0.041	0.040	9.3350	0.315			8	0.007	0.006	3.5976	0.891
		9	-0.017	-0.017	9.8301	0.364			9	-0.024	-0.024	4.5654	0.870
		10	-0.004	-0.001	9.8544	0.453			10	-0.020	-0.020	5.2689	0.873
		11	-0.028	-0.032	11.252	0.422			11	-0.007	-0.009	5.3467	0.913
		12	-0.009	-0.010	11.400	0.495			12	0.006	0.005	5.4008	0.943
		13	0.019	0.022	12.023	0.526			13	0.012	0.013	5.6650	0.958
		14	0.031	0.032	13.704	0.472			14	0.001	0.002	5.6658	0.974
		15	-0.007	-0.007	13.779	0.542			15	-0.014	-0.013	6.0279	0.979
		16	0.032	0.029	15.494	0.489			16	0.009	0.009	6.1624	0.986
		17	0.015	0.010	15.859	0.534			17	-0.011	-0.012	6.3606	0.990
		18	-0.047	-0.047	19.632	0.354			18	-0.008	-0.008	6.4774	0.994
		19	0.033	0.041	21.524	0.309			19	0.084	0.083	18.737	0.474
		20	-0.029	-0.034	22.967	0.290			20	0.037	0.036	21.110	0.391
		21	0.043	0.047	26.108	0.202			21	-0.008	-0.003	21.228	0.445
		22	0.032	0.029	27.873	0.180			22	0.007	0.006	21.311	0.502
		23	0.009	0.007	28.006	0.216			23	-0.019	-0.022	21.905	0.526
		24	-0.007	-0.009	28.103	0.256			24	-0.005	-0.007	21.947	0.582
		25	0.012	0.012	28.351	0.292			25	-0.025	-0.028	23.001	0.577
		26	-0.008	-0.006	28.461	0.336			26	0.011	0.011	23.216	0.621
		27	-0.033	-0.033	30.372	0.298			27	-0.006	-0.009	23.279	0.670
		28	-0.007	0.002	30.450	0.342			28	0.010	0.017	23.464	0.709
		29	0.047	0.038	34.351	0.227			29	-0.007	-0.002	23.549	0.751
		30	0.044	0.042	37.735	0.157			30	-0.016	-0.012	24.010	0.772
		31	-0.009	-0.008	37.883	0.184			31	-0.028	-0.029	25.409	0.749
		32	0.037	0.040	40.265	0.150			32	-0.002	-0.006	25.416	0.789
		33	0.074	0.065	49.722	0.031			33	0.006	0.003	25.478	0.822
		34	0.016	0.020	50.187	0.036			34	-0.015	-0.013	25.877	0.840
		35	0.000	0.002	50.187	0.046			35	-0.000	0.001	25.878	0.869
		36	0.011	0.005	50.418	0.056							

**Πίνακας Γ2 :** Correlogramm των απλών (δεξιά) και των τετραγωνισμένων (αριστερά) καταλοίπων των αποδόσεων του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500.

Correlogram of Standardized Residuals							Correlogram of Standardized Residuals Squared						
Date: 05/07/13 Time: 13:22 Sample: 1/09/1980 12/26/2012 Included observations: 1721							Date: 05/07/13 Time: 13:23 Sample: 1/09/1980 12/26/2012 Included observations: 1721						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob		Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.032	-0.032	1.7418	0.187			1	0.045	0.045	3.5110	0.061
		2	0.017	0.016	2.2142	0.331			2	-0.000	-0.002	3.5113	0.173
		3	0.015	0.016	2.6090	0.456			3	0.013	0.014	3.8255	0.281
		4	0.002	0.003	2.6164	0.624			4	0.012	0.011	4.0797	0.395
		5	-0.023	-0.023	3.5033	0.623			5	-0.007	-0.008	4.1604	0.527
		6	0.016	0.014	3.9435	0.684			6	-0.017	-0.016	4.6579	0.588
		7	-0.020	-0.018	4.6345	0.704			7	0.006	0.007	4.7111	0.695
		8	-0.007	-0.008	4.7224	0.787			8	-0.037	-0.038	7.0826	0.528
		9	0.028	0.028	6.0897	0.731			9	-0.002	0.002	7.0922	0.628
		10	-0.013	-0.011	6.3732	0.783			10	-0.005	-0.005	7.1413	0.712
		11	-0.002	-0.002	6.3772	0.847			11	0.009	0.010	7.2824	0.776
		12	-0.032	-0.034	8.1972	0.770			12	-0.007	-0.007	7.3628	0.833
		13	0.030	0.029	9.7954	0.711			13	-0.040	-0.040	10.127	0.684
		14	0.010	0.014	9.9741	0.764			14	0.028	0.030	11.443	0.651
		15	0.029	0.028	11.390	0.724			15	-0.006	-0.009	11.511	0.716
		16	-0.029	-0.028	12.866	0.683			16	0.005	0.006	11.556	0.774
		17	0.040	0.035	15.597	0.553			17	-0.006	-0.006	11.617	0.823
		18	-0.023	-0.020	16.540	0.555			18	-0.027	-0.029	12.897	0.798
		19	-0.009	-0.012	16.693	0.611			19	-0.030	-0.028	14.450	0.757
		20	0.020	0.020	17.362	0.629			20	-0.007	-0.003	14.530	0.803
		21	0.010	0.013	17.526	0.679			21	0.024	0.022	15.571	0.793
		22	0.044	0.046	20.955	0.524			22	0.019	0.021	16.226	0.805
		23	0.014	0.013	21.287	0.564			23	-0.013	-0.015	16.512	0.832
		24	0.011	0.009	21.501	0.609			24	0.006	0.007	16.567	0.867
		25	-0.022	-0.018	22.310	0.618			25	-0.023	-0.027	17.490	0.863
		26	0.012	0.007	22.572	0.657			26	0.009	0.008	17.623	0.889
		27	-0.029	-0.024	24.079	0.626			27	0.014	0.014	17.950	0.905
		28	-0.017	-0.021	24.579	0.651			28	-0.033	-0.036	19.823	0.871
		29	0.011	0.014	24.789	0.689			29	-0.006	-0.001	19.895	0.896



**Πίνακας Γ3 :** Correlogramm των απλών (δεξιά) και των τετραγωνισμένων (αριστερά) καταλοίπων των αποδόσεων του μονοετούς αμερικανικού ομολόγου.

Correlogram of Standardized Residuals						
Date: 04/23/13 Time: 12:50 Sample: 2/06/1980 12/26/2012 Included observations: 1717						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
1	0.009	0.009	0.1384	0.710		
2	0.029	0.029	1.5692	0.456		
3	0.016	0.015	1.9893	0.575		
4	0.006	0.005	2.0545	0.726		
5	0.020	0.019	2.7319	0.741		
6	0.003	0.002	2.7436	0.840		
7	0.011	0.010	2.9468	0.890		
8	-0.008	-0.009	3.0686	0.930		
9	-0.009	-0.010	3.2224	0.955		
10	0.037	0.037	5.5335	0.853		
11	-0.037	-0.037	7.8993	0.722		
12	0.004	0.003	7.9334	0.790		
13	0.065	0.066	15.180	0.296		
14	0.052	0.052	19.856	0.135		
15	0.002	-0.003	19.865	0.177		
16	0.029	0.026	21.316	0.167		
17	0.006	0.002	21.371	0.210		
18	-0.037	-0.040	23.698	0.165		
19	-0.024	-0.027	24.692	0.171		
20	0.015	0.013	25.058	0.199		
21	0.012	0.016	25.306	0.234		
22	0.006	0.006	25.367	0.280		
23	0.038	0.035	27.841	0.222		
24	0.001	0.003	27.844	0.267		
25	-0.017	-0.016	28.368	0.291		
26	0.015	0.007	28.779	0.321		
27	0.034	0.028	30.807	0.279		
28	0.027	0.025	32.069	0.272		
29	0.026	0.019	33.250	0.268		
30	0.025	0.018	34.375	0.266		
31	0.023	0.026	35.306	0.272		
32	-0.036	-0.033	37.593	0.228		
33	0.016	0.011	38.066	0.250		
34	0.020	0.021	38.766	0.263		
35	0.001	0.000	38.767	0.304		

Correlogram of Standardized Residuals Squared						
Date: 04/23/13 Time: 12:51 Sample: 2/06/1980 12/26/2012 Included observations: 1717						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
1	0.015	0.015	0.4130	0.520		
2	-0.018	-0.018	0.9857	0.611		
3	-0.012	-0.011	1.2362	0.744		
4	0.003	0.003	1.2568	0.869		
5	-0.015	-0.016	1.6486	0.895		
6	0.004	0.005	1.6802	0.947		
7	-0.005	-0.006	1.7253	0.973		
8	-0.009	-0.009	1.8758	0.985		
9	0.007	0.008	1.9716	0.992		
10	-0.015	-0.016	2.3819	0.992		
11	-0.017	-0.016	2.8778	0.992		
12	0.041	0.041	5.7934	0.926		
13	0.002	-0.000	5.8042	0.953		
14	0.004	0.006	5.8360	0.970		
15	-0.035	-0.035	7.9710	0.925		
16	-0.029	-0.029	9.4535	0.894		
17	-0.006	-0.005	9.5266	0.922		
18	-0.016	-0.018	9.9607	0.933		
19	-0.011	-0.011	10.175	0.949		
20	-0.010	-0.011	10.366	0.961		
21	-0.024	-0.026	11.361	0.955		
22	-0.014	-0.013	11.697	0.963		
23	0.015	0.014	12.093	0.969		
24	0.011	0.008	12.305	0.976		
25	0.005	0.004	12.348	0.984		
26	0.003	0.000	12.365	0.989		
27	-0.007	-0.005	12.443	0.992		
28	-0.028	-0.026	13.794	0.989		
29	0.006	0.006	13.859	0.992		
30	0.006	0.005	13.922	0.995		
31	-0.007	-0.009	13.997	0.996		
32	-0.011	-0.012	14.205	0.997		
33	-0.012	-0.012	14.440	0.998		
34	-0.007	-0.007	14.531	0.999		
35	-0.000	-0.003	14.531	0.999		