ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΙΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΦΑΛΕΙΕΣ ΚΑΙ ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑ ΙΙ

Φωτεινάκης Παναγιώτης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς, Ιούνιος 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Βρόντος Σπυρίδων …………… (Επιβλέπων)
- Σεβρόγλου Βασίλειος……………………….
- Τήνιος Πλάτων………………………………

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Reserving Methods in General Insurance and Solvency II

Foteinakis Panagiotis

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, June 2013

Στην οικογένεια μου

και στην Ευγενία

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Σπυρίδων Βρόντο για τη βοήθεια του, την καθοδήγηση του και την στήριξη του κατά τη διάρκεια συγγραφής της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Ευχαριστώ, επίσης, τόσο τους καθηγητές μου στο τμήμα «Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης» όσο και στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου» για τις πολύτιμες γνώσεις που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την αμέριστη συμπαράσταση και υποστήριξη τους σε κάθε μου προσπάθεια.

Περίληψη

Ο σκοπός της παρούσας διατριβής είναι να εξετάσουμε τη φερεγγυότητα των ασφαλιστικών εταιριών υπό το πρίσμα της κοινοτικής οδηγίας Solvency II. Αρχικά, μοντελοποιούμε τον κίνδυνο αποθεμάτων για μια ασφαλιστική εταιρία που δραστηριοποιείται στον κλάδο των γενικών ασφαλειών και στη συνέχεια εκτιμούμε τα απαραίτητα κεφάλαια (SCR) που χρειάζεται να διαθέτει υπό τη νέα οδηγία Solvency II. Εφαρμόζουμε πολλαπλές μεθόδους σε πραγματικά δεδομένα και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα αυτών.

Abstract

In this thesis we attempt to answer the question of how to ensure the solvency of an insurance company. The purpose of this paper is twofold : to model the reserve risk of a part of non-life portfolio and to evaluate the necessary capital to cover it (SCR) under Solvency II project. In order to do so, we apply various methodologies using real insurance data and we compare their results.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο το οποίο είναι εισαγωγικό αναπτύσσονται κάποιες βασικές έννοιες της ασφάλειας. Το πρώτο βήμα είναι να δώσουμε μια ερμηνεία στον όρο *κίνδυνο (risk)* καθώς αποτελεί το κυριότερο αντικείμενο της ασφάλειας. Με τον όρο κίνδυνο αναφερόμαστε σε οποιαδήποτε αβέβαιη μελλοντική ζημιά. Αυτό που διαχωρίζει τον κίνδυνο από οποιαδήποτε άλλη δαπάνη/απώλεια είναι η αβεβαιότητα τόσο για χρόνο που θα πραγματοποιηθεί αυτή η ζημιά όσο και για το μέγεθος αυτής. Για τον περιορισμό αυτής της αβεβαιότητας έχουν σχηματιστεί οι ασφαλιστικές εταιρίες οι οποίες, έναντι αμοιβής, μεταβιβάζουν τον κίνδυνο πιθανής ζημιάς μεταξύ δύο συμβαλλομένων μερών. Όταν χειριζόμαστε ένα μεγάλο αριθμό ανεξάρτητων κινδύνων μειώνεται το σφάλμα της εκτίμησης της μέσης τιμής των ζημιών αυτών και συνεπώς διαχειρίζονται ευκολότερα.

Υπάρχουν πολλοί κίνδυνοι στους οποίους βρίσκεται εκτεθειμένη μια ασφαλιστική εταιρία και πολλοί από αυτούς τους κινδύνους είναι γενικοί υπό την έννοια ότι έχουν αντίκτυπο σε ένα ευρύ φάσμα εταιριών. Παραδείγματα είναι ο λειτουργικός κίνδυνος, ο κίνδυνος αγοράς και άλλοι. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετήσουμε τον ασφαλιστικό κίνδυνο. Όταν ένας πελάτης αγοράζει ασφάλιση, ο κίνδυνος μεταβιβάζεται από τον ασφαλισμένο στην ασφαλιστική εταιρία. Αυτό σημαίνει πως ο ασφαλιστής είναι υποχρεωμένος να καλύψει τις απώλειες που προέρχονται από ένα συγκεκριμένο κίνδυνο για ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα. Προφανώς ο ασφαλιστής δεν προσφέρει τις υπηρεσίες του δωρεάν και ο ασφαλισμένος οφείλει να καταβάλει το ασφάλιστρο προκειμένου ο ασφαλιστής να αναλάβει τον κίνδυνο και σε περίπτωση που επέλθει το ζημιογόνο γεγονός να καταβάλει την αποζημίωση, που έχει συμφωνηθεί στην ασφαλιστική σύμβαση, στον ασφαλισμένο. Ανάλογα τον τύπο της ασφαλιστικής σύμβασης, ο καθορισμός του ύψους της τελικής αποζημίωσης είναι σε πολλές περιπτώσεις αρκετά δύσκολος και απαιτεί πολύ χρόνο. Παράγοντες όπως η καθυστέρηση μεταξύ της πραγματοποίησης και του διακανονισμού/αποπληρωμή της ζημίας, το γεγονός ότι τις περισσότερες φορές η ημερομηνία είσπραξης των ασφαλίστρων και η ημερομηνία καταβολής των αποζημιώσεων δεν συμπίπτουν και τέλος το γεγονός πως σε αρκετές περιπτώσεις προκύπτουν νέες απαιτήσεις από τις ήδη αποπληρωμένες ζημίες (reopen claims), καθιστά τον ακριβή υπολογισμό των αποθεμάτων ένα δύσκολο εγχείρημα.

Τα περιουσιακά στοιχεία για μια ασφαλιστική εταιρία που δραστηριοποιείται στον κλάδο των γενικών ασφαλειών προέρχονται κυρίως από τα ασφάλιστρα που εισπράττει από τους πελάτες. Τα περιουσιακά στοιχεία είναι ντετερμινιστικά με αποτέλεσμα η αποτίμηση τους να αποτελεί μια σχετικά απλή διαδικασία για την ασφαλιστική εταιρία. Το μοναδικό μεταβλητό μέρος είναι ο αριθμός των ασφαλιστηρίων συμβολαίων που πουλιούνται. Σε αντίθεση με τα περιουσιακά στοιχεία, οι υποχρεώσεις της ασφαλιστικής εταιρίας είναι τυχαίες μεταβλητές.

Η διαφορά μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων και των υποχρεώσεων της ασφαλιστικής εταιρίας, μας εισάγει στην έννοια του αποθεματικού. Το αποθεματικό ορίζεται ως τα περιουσιακά στοιχεία μείον τις υποχρεώσεις και χρησιμοποιείται από τις ασφαλιστικές εταιρίες σε διάφορες διεργασίες, μεταξύ άλλων, για την αγορά αντασφάλισης, για την επένδυση του με στόχο τη δημιουργία κέρδους, για την αντιμετώπιση έκτακτων καταστάσεων ή ακραίων ζημιών. Εάν το αποθεματικό πέσει κάτω από ένα προκαθορισμένο επίπεδο (minimum capital requirement), η ασφαλιστική εταιρία καθίσταται αφερέγγυα. Θεωρητικά η ασφαλιστική εταιρία καταστρέφεται εάν συμβεί αυτό το σενάριο. Ωστόσο στην πραγματικότητα το σύνολο των υποχρεώσεων της μεταβιβάζεται είτε στο κράτος είτε σε μια άλλη ασφαλιστική εταιρία, ή δανείζεται μέχρι να επανέλθει σε κερδοφορία αν αυτό είναι δυνατό.

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίζεται το περιθώριο φερεγγυότητας, γίνεται μια ιστορική αναδρομή στα προηγούμενα εποπτικά πλαίσια και περιγράφεται πως οδηγηθήκαμε σταδιακά στην εφαρμογή του νέου συστήματος φερεγγυότητας των ασφαλιστικών εταιριών Solvency II. Γίνεται εκτενής αναφορά στη δομή του Solvency II καθώς και στους κινδύνους που είναι εκτεθειμένη μια ασφαλιστική εταιρία που δραστηριοποιείται στον κλάδο των γενικών ασφαλειών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά οι βασικές ντετερμινιστικές και στοχαστικές μέθοδοι εκτίμησης των αποθεμάτων. Συγκεκριμένα γίνεται ανάλυση των ακόλουθων ντετερμινιστικών μεθόδων: Chain Ladder, της μεθόδου Bornhuetter-Ferguson, της Μεθόδου Διαχωρισμού και της μεθόδου Cape-Cod. Παράλληλα στο δεύτερο κεφάλαιο, ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις στοχαστικές μεθόδους αποθεματοποίησης και ιδιαίτερα στο μοντέλο του Mack, στα δειγματοληπτικά μοντέλα Bootstrap, στα Γενικευμένα Γραμμικά Μοντέλα (GLM) και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μια αναφορά στα Μπευζιανά μοντέλα. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην μελέτη των τυπικών σφαλμάτων που προκύπτουν κατά τη διαδικασία αποθεματοποίησης.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα αναλύσουμε τον συντελεστή εξέλιξης ζημιών CDR (claims development result), ο οποίος χρησιμοποιείται ιδιαίτερα στο Solvency II καθώς αποδίδει μια ετήσια εικόνα της μεταβλητότητας του αποθέματος σε αντίθεση με άλλες μεθόδους που αποδίδουν μια συνολική εικόνα της μεταβλητότητας της ζημίας. Παρουσιάζει δηλαδή κατά πόσο θα μεταβληθούν οι εκτιμώμενες τελικές ζημιές μέσα σε ένα έτος. Και σε αυτό το κεφάλαιο δίνεται έμφαση στη μελέτη των τυπικών σφαλμάτων καθώς και στο τυχαίο σφάλμα (process variance) και στο σφάλμα εκτίμησης (estimation variance). Στη συνέχεια, εξετάζονται οι έννοιες της βέλτιστης εκτίμησης (best estimate), του περιθωρίου κινδύνου (risk margin) και της δίκαιης τιμής (fair value) ενώ αναλύεται και η έννοια του κινδύνου αποθέματος.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή της Chain Ladder και των κυριότερων στοχαστικών μεθόδων σε πραγματικό σετ δεδομένων (τρίγωνο εξέλιξης ζημιών). Εκθέτονται οι εκτιμήσεις των τελικών ζημιών, των εκτιμώμενων αποθεμάτων κάθε έτος και συνολικά καθώς και τα τυπικά σφάλματα των εκτιμήσεων και γίνεται σύγκριση υπό το πρίσμα του Solvency II. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις σημαντικότερες ποσότητες του Solvency II, όπως το περιθώριο κινδύνου, τον κίνδυνο αποθεμάτων, τη βέλτιστη εκτίμηση και άλλα. Η εργασία ολοκληρώνεται με το πέμπτο κεφάλαιο όπου γίνεται σύγκριση μεταξύ των μεθόδων και την εξαγωγή συμπερασμάτων

1º Κεφάλαιο: Κεφαλαιακές απαιτήσεις για ασφαλιστικές εταιρίες που δραστηριοποιούνται στον κλάδο των γενικών ασφαλειών

1.1 Περιθώριο Φερεγγυότητας (Solvency)

Το περιθώριο φερεγγυότητας, που στην Ελλάδα καθιερώθηκε από το 1985, αποτελεί μια δικλείδα ασφαλείας για την εξασφάλιση της φερεγγυότητας της ασφαλιστικής εταιρίας, ιδιαίτερα κάτω από δύσκολες και απρόβλεπτες οικονομικές συνθήκες. Μετά από την προσαρμογή της Ελληνικής νομοθεσίας στο κοινοτικό δίκαιο, αναγνωρίστηκε η ανάγκη οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις να διαθέτουν, πέραν των Τεχνικών τους Αποθεμάτων που αφορούν στην αντιμετώπιση των συμβατικών τους υποχρεώσεων και ένα επιπλέον αποθεματικό το οποίο ονομάζεται περιθώριο φερεγγυότητας και το οποίο αντιστοιχεί στην ελεύθερη βαρών περιουσία τους για την αντιμετώπιση επιχειρηματικών κινδύνων. Καθώς αυτό το περιθώριο φερεγγυότητας αποτελείται από κεφάλαια τα οποία χρειάζεται να πληρούν κάποιες συγκεκριμένες προδιαγραφές, ένα μεγαλύτερο περιθώριο φερεγγυότητας περιέχει και μεγαλύτερο κόστος. Σύμφωνα με τον Sandstrom (2006), το περιθώριο φερεγγυότητας ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων και των υποχρεώσεων της ασφαλιστικής εταιρίας και καθώς αποτελεί κεφάλαιο που πρέπει να διαθέτουν οι μέτοχοι των εταιριών, είναι ιδιαίτερα σημαντικό για αυτούς να διατηρείται σε όσο το δυνατόν χαμηλότερα επίπεδα εφαρμόζοντας παράλληλα την νομοθεσία.

1.2 Ιστορική Αναδρομή

1.2.1 Solvency 0

Ο σκοπός του περιθωρίου φερεγγυότητας είναι να περιορίσει την πιθανότητα μια ασφαλιστική εταιρία να αδυνατεί να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις της, δηλαδή οι υποχρεώσεις της να είναι μεγαλύτερες από τα περιουσιακά της στοιχεία, και για αυτό τον λόγο πρέπει να λάβει υπόψη της όλους εκείνους τους παράγοντες που ενδέχεται να μειώσουν την αξία των περιουσιακών στοιχείων και να αυξήσουν την αξία των υποχρεώσεων. Αυτοί οι παράγοντες είναι πολλοί και απαιτείται η χρήση σύνθετων τεχνικών για τον καθορισμό του περιθωρίου φερεγγυότητας. Ωστόσο στη δεκαετία του 70 αναπτύχτηκαν απλά μοντέλα που καθόριζαν το απαιτούμενο περιθώριο φερεγγυότητας.

Αρχικά το περιθώριο φερεγγυότητας (solvency margin) υπολογιζόταν σύμφωνα με τον μεγαλύτερο από τους ακόλουθους δείκτες (Schulte 1979):

- Ελεύθερα περιουσιακά στοιχεία προς τα ασφάλιστρα του τελευταίου έτους.
- Ελεύθερα περιουσιακά στοιχεία προς τον μέσο όρο των ζημιών των τελευταίων τριών ετών.
- Ελεύθερα περιουσιακά στοιχεία προς τα τεχνικά αποθέματα.

Ορισμένες χώρες θεωρούσαν πως τα παραπάνω ποσοστά για το περιθώριο φερεγγυότητας ήταν πολύ υψηλά ενώ άλλες θεωρούσαν πως ήταν συντηρητικά υπολογισμένα. Τελικά συμφωνήθηκε το 1979 πως το ελάχιστο περιθώριο φερεγγυότητας θα είναι το μεγαλύτερο ποσό μεταξύ δύο δεικτών, του δείκτη ασφαλίστρων και του δείκτη αποζημιώσεων. Ο Sandstrom (2006) αναφέρει πως ο δείκτης ασφαλίστρων είναι:

- 18% του συνόλου των ασφαλίστρων που εισπράττει η ασφαλιστική εταιρία κάθε οικονομικό έτος με όριο τα 10 εκατομμύρια ευρώ, και
- 16% του συνόλου των ασφαλίστρων που εισπράττει η ασφαλιστική εταιρία κάθε οικονομικό έτος για ποσά άνω των 10 εκατομμύριων ευρώ,

και ο δείκτης αποζημιώσεων είναι:

- 26% των ζημιών που πληρώθηκαν τα τελευταία τρία έτη με όριο τα 7 εκατομμύρια ευρώ, και
- 23% των ζημιών που πληρώθηκαν τα τελευταία τρία έτη για ποσά άνω των 7 εκατομμυρίων ευρώ.

1.2.2 Το περιθώριο φερεγγυότητας υπό το πρίσμα του Solvency I

Οι οδηγίες του Solvency I έχουν κοινά χαρακτηριστικά με τις πρώτες οδηγίες που αναπτύχθηκαν στην Ευρώπη, όμως χρησιμοποιούν ένα πιο σύνθετο μοντέλο για τον καθορισμό του περιθωρίου φερεγγυότητας. Συνεπώς, τα περιουσιακά στοιχεία που περιλαμβάνονται στο περιθώριο φερεγγυότητας προσδιορίζονται με λεπτομέρεια με το περιθώριο φερεγγυότητας να απαιτείται να είναι μεγαλύτερο από το εγγυητικό κεφάλαιο των ασφαλιστικών εταιριών, το οποίο είναι ένα συγκεκριμένο κεφάλαιο που εξαρτάται από τον ασφαλιστικό κλάδο που δραστηριοποιείται η εκάστοτε ασφαλιστική εταιρία.

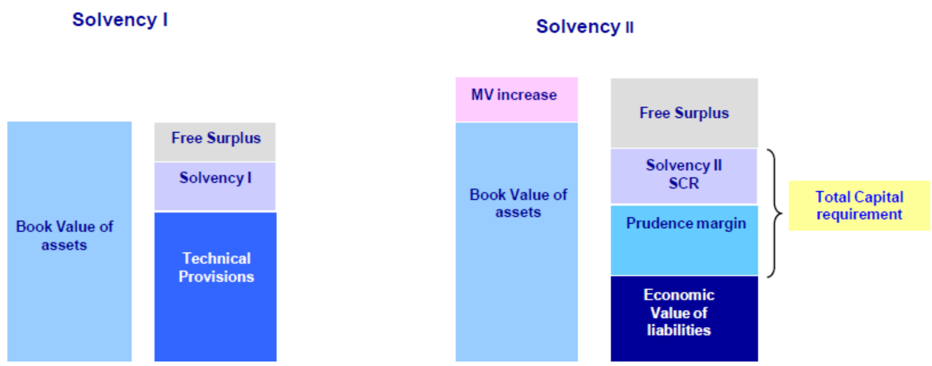
Στις ασφαλίσεις ζημιών το ελάχιστο περιθώριο φερεγγυότητας καθορίζεται σαν συνάρτηση δύο δεικτών ασφαλείας που στηρίζονται ο ένας στα ασφάλιστρα και ο άλλος στις αποζημιώσεις και καταρτίζεται ίσο με το μεγαλύτερο από τα δυο. Συνεπώς, εάν το εγγυητικό κεφάλαιο είναι μεγαλύτερο από τους παραπάνω δείκτες, τότε το εγγυητικό κεφάλαιο θα χρησιμοποιείται ως το απαιτούμενο περιθώριο φερεγγυότητας, που οφείλει να έχει μια ασφαλιστική εταιρία ανάλογα με τον κύκλο εργασιών της (Sandstrom, 2006).

Η οδηγία Solvency I δεν άλλαξε δραματικά τον τρόπο υπολογισμού του περιθωρίου φερεγγυότητας των ασφαλιστικών εταιριών όμως αύξησε την εποπτεία δίνοντας το δικαίωμα στις Εποπτικές Αρχές κάθε χώρας να επεμβαίνει σε περιπτώσεις που το περιθώριο φερεγγυότητας δεν κυμαίνεται στα επιθυμητά επίπεδα. Παράλληλα, θέσπισε κανόνες για τον υπολογισμό των ελαχίστων απαιτήσεων χωρίς όμως να αντικατοπτρίζει τον πραγματικό κίνδυνο που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρίες και τούτο διότι δεν λαμβάνεται υπόψη η φύση των κινδύνων του χαρτοφυλακίου κάθε εταιρίας, δεν λαμβάνεται υπόψη η αντασφάλιση και κυρίως αγνοούνται οι επενδύσεις του χαρτοφυλακίου των εταιριών παρόλο που αποτελούν σημαντικό παράγοντα για τον κίνδυνο χρεοκοπίας. Πιο συγκεκριμένα η οδηγία Solvency I επικεντρώνεται κυρίως στον κίνδυνο του underwriting αγνοώντας όμως τον κίνδυνο της αγοράς. Σαν αποτέλεσμα της τακτικής αυτής , πολλές εταιρίες έχουν αναγκαστεί να υιοθετήσουν αρκετά αυστηρούς κανόνες διαχείρισης κινδύνων, αυστηρότερους ίσως από ότι είναι αναγκαίο. Επιπλέον, μέχρι σήμερα οι μέθοδοι αποτίμησης των στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού και κυρίως των τεχνικών προβλέψεων διαφέρουν σημαντικά από χώρα σε χώρα με αποτέλεσμα να υπάρχουν εμπόδια για την αξιολόγηση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρίες σε σχέση με την ενιαία αγορά. Συνεπώς για να υπάρξει σύγκλιση χρειάστηκε να αναθεωρηθεί το Solvency I και να μπουν οι βάσεις για το Solvency II.

1.3 Λόγοι δημιουργίας του Solvency II

Η κίνηση για την αλλαγή του νομικού πλαισίου ξεκίνησε από την ίδια την ασφαλιστική αγορά. Είναι γεγονός, ότι ορισμένες φορές, η εφαρμογή της απλουστευμένης προσέγγισης του υφιστάμενου νομικού πλαισίου δεν επιτρέπει στις εταιρίες την απελευθέρωση κάποιων κεφαλαίων που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη τους. Ουσιαστικά, με το υπάρχον πλαίσιο δεν διευκολύνεται η βέλτιστη κατανομή κεφαλαίων με αποτέλεσμα οι μέτοχοι των ασφαλιστικών εταιριών θέλοντας να εμφανίζουν κέρδος και παράλληλα να κρατούν χαμηλά τις κεφαλαιακές απαιτήσεις να μην γνωρίζουν σε τι ασφαλιστικό κλάδο τους συμφέρει να επενδύσουν τα κεφαλαία τους. Πολλές εταιρίες, ιδιαίτερα σε προηγμένες ασφαλιστικά χώρες, έχουν ήδη αναπτύξει δικά τους μοντέλα μέτρησης των κινδύνων που φέρουν και κατ ' επέκταση, των κεφαλαιακών αναγκών που απορρέουν από τους κινδύνους αυτούς. Η μέτρηση αυτή γίνεται με σαφώς ασφαλέστερες και ακριβέστερες μεθόδους από αυτή που προβλέπει το Solvency I. Η ιδέα πίσω από το Solvency II είναι να επιτρέπεται στις ασφαλιστικές εταιρίες να κατασκευάζουν δικά τους εσωτερικά μοντέλα και να διασφαλίζεται μέσω της εποπτείας πως τα μοντέλα αυτά βασίζονται σε ένα σύστημα διαχείρισης κινδύνων, το οποίο θα έχει αναπτυχθεί από την ασφαλιστική εταιρία με σκοπό την ανάλυση και την ποσοτικοποίηση των κινδύνων. Η ασφαλιστική εταιρία πρέπει να μπορεί να εξηγήσει στην εποπτική αρχή το μοντέλου που χρησιμοποιεί και αυτή με τη σειρά της να το κατανοήσει και να εγκρίνει. Με άλλα λόγια, με το Solvency II η ασφαλιστική εταιρία είναι ελεύθερη να επενδύσει τα κεφαλαία της όπου επιθυμεί αρκεί να κατανοεί τον κίνδυνο που αναλαμβάνει και να μπορεί να τον μετρά, κρατώντας όμως τα απαραίτητα κεφάλαια και έχοντας την ευθύνη της διοίκησης και της διαχείρισης της ασφαλιστικής εταιρίας. Όσες ασφαλιστικές εταιρίες δεν έχουν την δυνατότητα ή τους πόρους να αναπτύξουν δικά τους μοντέλα, με το Solvency II έχει προβλεφθεί η τυποποιημένη μεθοδολογία η οποία περιγράφεται παρακάτω.

Επιπλέον, με την εφαρμογή του Solvency II επιδιώκεται να δίνεται έγκαιρη προειδοποίηση στις Εποπτικές Αρχές για να επέμβουν εάν τα κεφάλαια της ασφαλιστικής εταιρίας πέσουν κάτω από ένα επίπεδο και ως εκ τούτου να μειωθεί ο κίνδυνος της αθέτησης από την μεριά της ασφαλιστικής εταιρίας της τήρησης των υποχρεώσεων της προς τους ασφαλισμένους και σε περίπτωση που η ασφαλιστική εταιρία δεν θα μπορέσει να αποζημιώσει τους ασφαλισμένους πλήρως στόχος είναι ο περιορισμός των απωλειών που θα υποστούν οι ασφαλισμένοι.



Γράφημα 1.1 Solvency I vs. Solvency II, Πηγή: Deloitte

Το παραπάνω γράφημα απεικονίζει το πώς διαφέρει το Solvency II από το Solvency I.

1.3.1 Δομή Solvency II

Σύμφωνα με τη νέα Ευρωπαϊκή οδηγία η φερεγγυότητα των ασφαλιστικών εταιριών θα βασίζεται σε τρείς πυλώνες, κατά αντιστοιχία της οδηγίας Basel II (Βασιλεία ΙΙ) που εφαρμόζεται στον τραπεζικό τομέα για αυτό λοιπόν το Solvency II καλείται συχνά και Βασιλεία για τους ασφαλιστές. Ακολουθεί η ανάλυση της δομής των τριών Πυλώνων του Solvency II.

Ο **Πυλώνας** Ι θέτει τις ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις που θα πρέπει να διαθέτει κάθε ασφαλιστική εταιρία για την προστασία των συμφερόντων των ασφαλισμένων. Συγκεκριμένα, ορίζει τον τρόπο υπολογισμού στοιχείων του ενεργητικού μιας ασφαλιστικής εταιρίας όπως επίσης και τον τρόπο υπολογισμού των υποχρεώσεων (τεχνικές προβλέψεις). Με βάση τον Πυλώνα Ι υπάρχουν δύο κεφαλαιακές απαιτήσεις που χρειάζεται να διαθέτει κάθε ασφαλιστική εταιρία : το Solvency Capital Requirement (SCR) και το Minimum Capital Requirement (MCR). Το MCR είναι το ελάχιστο κεφαλαίο που απαιτείται να έχει κάθε ασφαλιστική εταιρία και υπάρχει ένα κατώτατο όριο, το οποίο εάν το παραβιάσει η ασφαλιστική εταιρία θα βρεθεί αντιμέτωπη με σοβαρές ποινικές ευθύνες μέχρι και ανάκληση της άδειας λειτουργίας. Το SCR μπορεί να υπολογιστεί είτε χρησιμοποιώντας την τυπική προσέγγιση είτε με κάποιο εσωτερικό μοντέλο από την ίδια την ασφαλιστική εταιρία, αφού πρώτα εγκριθεί από την Εποπτική Αρχή. Τόσο το SCR όσο και το MCR αντιστοιχούν σε κεφάλαια που πρέπει να έχει στη διάθεση της η ασφαλιστική εταιρία πέρα των τεχνικών προβλέψεων. Επιπλέον στον Πυλώνα Ι ρυθμίζονται οι επενδύσεις, καθορίζονται τα περιουσιακά στοιχεία καθώς και η ποιότητα των κεφαλαίων που θα στο σύνολο τους εξασφαλίζουν την επιθυμητή φερεγγυότητα για τις ασφαλιστικές εταιρίες (Sandstrom, 2006).

Ο **Πυλώνας ΙΙ** αποτελείται από κανόνες που ισχύουν για την εποπτεία των ασφαλιστικών εταιριών σύμφωνα με τους οποίους οι Εποπτικές Αρχές μπορεί να αποφασίσουν πως η εταιρία χρειάζεται να κρατήσει επιπλέον κεφάλαια για κινδύνους που είτε δεν λήφθηκαν υπόψη στον Πυλώνα Ι είτε υπολογίστηκαν ανεπαρκώς. Κάθε ασφαλιστική εταιρία είναι υποχρεωμένη να διεξάγει μια διαδικασία εσωτερικής αξιολόγησης που καλείται Εσωτερική Εκτίμηση Κινδύνου και Φερεγγυότητας (Own Risks and Solvency Assessment (ORSA)). Το ORSA είναι μια διαδικασία που κάθε ασφαλιστική εταιρία θα πρέπει να κάνει προκειμένου να αναγνωρίσει τους κινδύνους στους οποίους βρίσκεται εκτεθειμένη και να τους ποσοτικοποιεί κάτω από ακραία σενάρια προκειμένου να ελέγξει αν συμμορφώνεται με το MCR και το SCR και το κατά πόσο αποκλίνει προκειμένου να κάνει τις απαραίτητες διορθώσεις (αύξηση μετοχικού κεφαλαίου).

Τέλος ο **Πυλώνας ΙΙΙ** καθορίζει τις απαιτήσεις δημοσίευσης και διαφάνειας των στοιχείων, εποπτικών και οικονομικών. Μέσα στα πλαίσια της απαιτούμενης διαφάνειας οι ασφαλιστικές εταιρίες θα πρέπει να δημοσιοποιούν το κατά πόσον διατηρούν ή όχι το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) ή το κατά πόσον οι εποπτικές αρχές τους επέβαλαν προσθήκες κεφαλαίων κατά την περίοδο αναφοράς.

Οι τρείς Πυλώνες αναλύονται στις παρακάτω ενότητες.

Πυλώνας Ι

Τεχνικές Προβλέψεις και Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φερεγγυότητας

Η νέα οδηγία υιοθετεί διαφορετική προσέγγιση στον τρόπο υπολογισμού των τεχνικών προβλέψεων για τις γενικές ασφαλίσεις. Οι ασφαλιστικές εταιρίες είναι υποχρεωμένες να σχηματίζουν τεχνικές προβλέψεις προκειμένου να εξασφαλιστούν οι μελλοντικές πληρωμές των αποζημιώσεων και γενικότερα υποχρεώσεις που εγείρονται από τα ασφαλιστήρια συμβόλαια καθώς δεν είναι εκ των πρότερων γνωστό το χρονικό σημείο που ένα ασφαλιστήριο θα εγείρει απαίτηση ούτε είναι γνωστό το ύψος της απαίτησης αυτής, οπότε οι μελλοντικές πληρωμές θα υπολογιστούν με ορισμένες πιθανότητες. Τα ποσά των πληρωμών αυτών θα προεξοφλούνται με χρήση της καμπύλης του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο προκειμένου να βρούμε την παρούσα αξία τους. Η αξία των τεχνικών προβλέψεων θα ισούται με το άθροισμα της βέλτιστης εκτίμησης (best estimate) των μελλοντικών χρηματικών ροών συν ένα περιθώριο ασφαλείας (risk margin), το οποίο θα απεικονίζει την αβεβαιότητα στον υπολογισμό των προβλέψεων.

Οι τεχνικές προβλέψεις για ασφαλιστικούς κινδύνους, θα πρέπει να απεικονίζονται με μια προσέγγιση συνεπή στις συνθήκες της αγοράς. Ιδανικά, οι προβλέψεις αυτές θα έπρεπε να διαμορφώνονται στο επίπεδο εύλογης αξίας (fair value), που είναι η βέλτιστη εκτίμηση των μελλοντικών χρηματικών ροών (best estimate) συν ένα περιθώριο ασφαλείας, δηλαδή, την ανταμοιβή που θέλει ένας πιθανός αγοραστής προκειμένου να αναλάβει τον κίνδυνο των υποχρεώσεων του χαρτοφυλακίου μας. Συμπερασματικά, το ύψος των τεχνικών προβλέψεων πρέπει να ανταποκρίνεται στο ποσό που θα ήταν διατεθειμένη να δαπανήσει μια άλλη ασφαλιστική εταιρία προκειμένου να αγοράσει τις υποχρεώσεις της δικά μας ασφαλιστικής εταιρίας.

Σύμφωνα με την νέα οδηγία κάθε ασφαλιστική εταιρία υποχρεούται να κρατά κεφάλαια για κινδύνους που μπορεί να πραγματοποιηθούν άμεσα. Ως κεφαλαιακές απαιτήσεις ορίζονται τα κεφάλαια αυτά που απαιτούνται για να καλύψουν πιθανές ζημίες στο άμεσο διάστημα, οι οποίες ζημίες μπορεί να προέρχονται είτε από μείωση του ενεργητικού (υποτίμηση της αξίας των επενδύσεων) είτε από αύξηση του παθητικού μιας ασφαλιστικής εταιρίας (αύξηση ζημιών και κατά συνέπεια αύξηση των αποζημιώσεων).

MCR: Minimum Capital Requirement

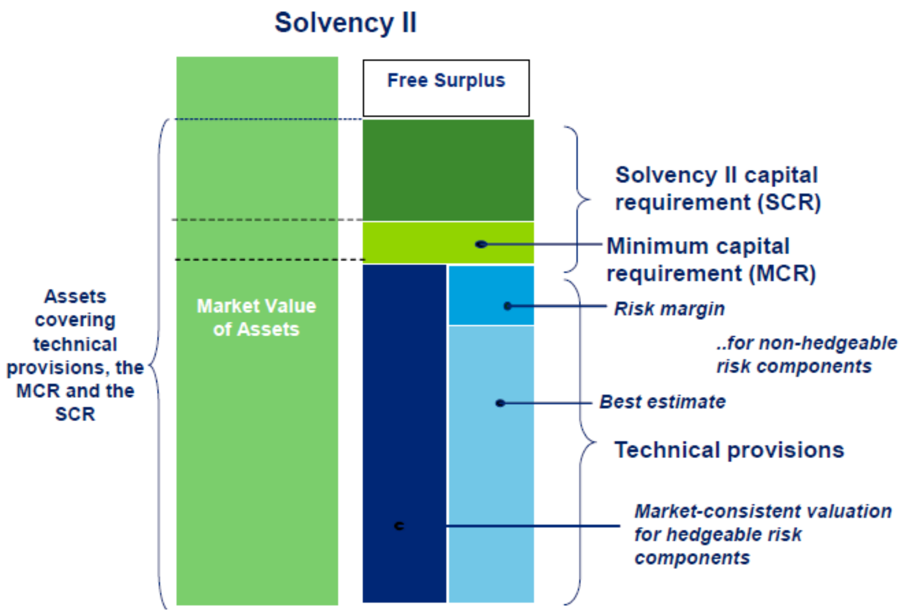
MCR είναι το ελάχιστο κεφάλαιο που οφείλει να έχει κάθε ασφαλιστική εταιρία για να διατηρήσει την φερεγγυότητα της. Σε περίπτωση μη συμμόρφωσης της ασφαλιστικής εταιρίας, δίνεται η δυνατότητα στην Εποπτική Αρχή να ανακαλέσει την άδεια λειτουργίας της. Ο υπολογισμός του MCR είναι σχετικά απλός και είναι εύκολο να υιοθετηθεί από τις ασφαλιστικές εταιρίες αλλά και να υποστεί έλεγχο από την Εποπτική Αρχή καθώς είναι ένα ποσοστό μεταξύ 25% και 45% του SCR και υπολογίζεται κάθε τρίμηνο.

SCR: Solvency Capital Requirement

Το SCR λαμβάνει υπόψη όλους τους κινδύνους που αντιμετωπίζει μια ασφαλιστική εταιρία και δύναται να ποσοτικοποιηθούν, δηλαδή τον ασφαλιστικό κίνδυνο, τον κίνδυνο αγοράς αλλά και τον λειτουργικό κίνδυνο. Το SCR υπολογίζεται τουλάχιστον μια φορά τον χρόνο και παρακολουθείται σε συνεχή βάση και σε περίπτωση που το προφίλ των κινδύνων διαφοροποιηθεί σημαντικά, υπάρχει δυνατότητα επαναϋπολογισμού. Το SCR είναι το επιθυμητό κεφάλαιο που θα πρέπει να κατέχει μια ασφαλιστική εταιρία, προκειμένου να μην κινδυνεύει με χρεοκοπία με ποσοστό εμπιστοσύνης 99.5% σε χρονικό ορίζοντα ενός έτους.

Για τον υπολογισμό του SCR υπάρχουν δύο επιλογές:

1. **Τυπική προσέγγιση (standard approach):** Εφαρμόζεται η τυποποιημένη μέθοδος υπολογισμού ανεξάρτητα από το μέγεθος της επιχείρησης. Με την τυπική προσέγγιση γίνεται μια απλοποίηση ή γενίκευση στην αποτίμηση των διαφόρων κινδύνων, δηλαδή θα χρειάζεται να υπολογίσουμε μεγαλύτερα επίπεδα επάρκειας .
2. **Προσέγγιση με τη χρήση εσωτερικού υποδείγματος (internal modeling approach):** Οι ασφαλιστικές εταιρίες θα μπορούν να χρησιμοποιήσουν εσωτερικό μοντέλο για τον υπολογισμό του SCR όπου γίνεται υπολογισμός των επιμέρους κινδύνων ξεχωριστά και στο τέλος αθροίζονται λαμβάνοντας υπόψη τις συσχετίσεις μεταξύ των επιμέρους κινδύνων. Με την χρήση του εσωτερικού υποδείγματος η ασφαλιστική επιτυγχάνει μικρότερα επίπεδα επάρκειας και κατά συνέπεια είναι υποχρεωμένη να κρατάει λιγότερα κεφάλαια. Ωστόσο προκειμένου να χρησιμοποιήσει το εσωτερικό μοντέλο, η ασφαλιστική εταιρία υποχρεούται να υποβάλλει αίτημα στην Εποπτική Αρχή και αυτή να το εξετάσει και είτε να το εγκρίνει είτε όχι.



Γράφημα 1.2 Solvency II, Πυλώνας Ι, Πηγή: Deloitte

Οι βασικοί κίνδυνοι στους οποίους είναι εκτεθειμένη μια ασφαλιστική εταιρία που δραστηριοποιείται στον κλάδο των γενικών ασφαλίσεων και για τους οποίους χρειάζεται να κρατάει κεφάλαια είναι οι ακόλουθοι:

- Ασφαλιστικός Κίνδυνος (Insurance Risk)
- Κίνδυνος Αγοράς (Market Risk)
- Λειτουργικός Κίνδυνος (Operational Risk)

Θα εξετάσουμε τους παραπάνω κινδύνους αναλυτικά.

Ασφαλιστικός Κίνδυνος Ζημιών

Ο ασφαλιστικός κίνδυνος ζημιών σχετίζεται κυρίως με τον υπολογισμό των ασφαλίστρων, τις απαιτήσεις τεχνικών αποθεμάτων και γενικότερα με την αξιολόγηση των ασφαλισμένων των ασφαλιστικών εταιριών σχετικά με τη διατηρισιμότητα των ασφαλιστηρίων συμβολαίων. Ο κίνδυνος ζημιών διακρίνεται σε κίνδυνο ασφαλίστρων (premium risk) και σε κίνδυνο αποθεμάτων (reserve risk) προκειμένου να διαχωρίσουμε για το εάν μελετάμε συμβόλαια που είναι σε ισχύ ή συμβόλαια που έχουν λήξη.

Ο κίνδυνος ασφαλίστρων συνδέεται με μελλοντικές απαιτήσεις και οφείλεται είτε στο γεγονός πως οι απαιτήσεις που δημιουργήθηκαν ήταν μεγαλύτερες από τις εκτιμώμενες, είτε στη διαφορά στη συχνότητα των απαιτήσεων. Ο κίνδυνος αποθεμάτων πηγάζει από την λανθασμένη εκτίμηση των μελλοντικών αποζημιώσεων και την χρονική στιγμή που θα πληρωθούν αυτές οι αποζημιώσεις.

Κίνδυνος καταστροφής είναι ο κίνδυνος ένα ακραίο φαινόμενο ή μια σειρά ακραίων φαινομένων εξαιρετικά μεγάλου μεγέθους να προκαλέσουν στην πράξη απαιτήσεις (actual claims) με σημαντική απόκλιση από τις αναμενόμενες απαιτήσεις (expected claims).

Τέτοια φαινόμενα είναι οι φυσικές καταστροφές, τρομοκρατικές επιθέσεις και γενικότερα ατυχήματα που γίνονται με ευθύνη του ανθρώπου (man-made catastrophes).

Κίνδυνος άσκησης δικαιωμάτων (lapse risk) είναι ο κίνδυνος μεγαλύτερο ποσοστό ασφαλισμένων από το αναμενόμενο (expected) να ασκήσουν το δικαίωμα πρόωρου τερματισμού του ασφαλιστηρίου συμβολαίου τους.

Κίνδυνος Αγοράς

Ο κίνδυνος αγοράς συνδέεται με την μεταβλητότητα των αγοραίων τιμών των περιουσιακών στοιχείων και περιλαμβάνει την έκθεση στον κίνδυνο από τις μεταβολές στις τιμές των επιτοκίων, των μετοχών, τις τιμές των ακινήτων και των τιμών του συναλλάγματος.

Ο κίνδυνος αγοράς περιλαμβάνει τις εξής υποκατηγορίες κινδύνων:

- Κίνδυνο επιτοκίων (Interest rate risk)
- Κίνδυνο μετοχών (Equity risk)
- Κίνδυνο ακινήτων (Property risk)
- Συναλλαγματικό Κίνδυνο (Exchange risk)
- Κίνδυνο συγκέντρωσης (Concentration risk)
- Κίνδυνο διαφοράς (Spread risk)

Θα εξετάσουμε τον κίνδυνο που προέρχεται από την μεταβλητότητα των μελλοντικών χρηματικών ροών της ασφαλιστικής εταιρίας, ο οποίος ονομάζεται asset-liability mismatch risk (A/L risk). Είναι απαραίτητο να αναφέρουμε πως ο κίνδυνος αγοράς επηρεάζει τόσο τα στοιχεία του Ενεργητικού μιας ασφαλιστικής εταιρίας όσο και τα στοιχεία του Παθητικού της. Για παράδειγμα μία αλλαγή στις τιμές των επιτοκίων επηρεάζει τα στοιχεία του Ενεργητικού (assets) όπως επίσης και τα στοιχεία του Παθητικού, καθώς προεξοφλούνται οι χρηματικές ροές με διαφορετικά επιτόκια. Συνεπώς, οι ασφαλιστικές εταιρίες είναι υποχρεωμένες να λαμβάνουν υπόψη τους αυτές τις μεταβολές στις αγοραίες τιμές και να τις αντιμετωπίζουν με κατάλληλες επενδυτικές στρατηγικές.

Ειδικότερα σε περιπτώσεις όπου υπάρχει ο κίνδυνος αλλαγής στις τιμές των επιτοκίων στην αγορά η ασφαλιστική εταιρία θα μπορούσε να αγοράσει ένα swap, με παρόμοιες χρηματικές ροές ανταλλάσοντας τα επιτόκια αγοράς με πιστωτικά ενώ εάν έχει επενδύσει σε μετοχές για να αντισταθμίσει αυτόν το κίνδυνο, μπορεί να αγοράσει δικαιώματα προαίρεσης πώλησης και αγοράς. Στη συνέχεια σε περίπτωση που η ασφαλιστική έχει στην κατοχή της κάποιο ομόλογο θα πρέπει να προσπαθήσει να ταιριάξει τις χρηματικές ροές του ομολόγου αυτού με τις χρηματικές ροές που πρέπει να καταβάλει στους ασφαλισμένους.

Κάνοντας τις παραπάνω επενδυτικές στρατηγικές η ασφαλιστική εταιρία θα περιορίσει σημαντικά τον κίνδυνο αγοράς και θα καταφέρει να μειώσει τις κεφαλαιακές απαιτήσεις SCR.

Λειτουργικός Κίνδυνος

Ο λειτουργικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος εμφάνισης ζημιών λόγω προβλημάτων στα λειτουργικά συστήματα της ασφαλιστικής εταιρίας, λόγω προβλημάτων στο προσωπικό, λόγω απάτης είτε λόγω προβλημάτων στις εσωτερικές διαδικασίες διοίκησης .

Η τυπική προσέγγιση υπολογίζει τις κεφαλαιακές απαιτήσεις λειτουργικού κινδύνου με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που υπολογίζεται στη Βασιλεία ΙΙ. Στη παρούσα εργασία δεν θα επικεντρωθούμε στον υπολογισμό κεφαλαιακών απαιτήσεων λειτουργικού κινδύνου.

Πυλώνας ΙΙ

Ι)Σύστημα Διακυβέρνησης

Σύμφωνα με το Solvency II απαιτείται από τις ασφαλιστικές εταιρίες να διαθέτουν ένα σύστημα διακυβέρνησης το οποίο θα εγγυάται την συνετή διαχείριση των δραστηριοτήτων τους . Συνεπώς απαιτείται να διαθέτουν τμήματα διαχείρισης κινδύνων(risk management), αναλογιστικά τμήματα, συστήματα εσωτερικού ελέγχου, συστήματα εσωτερικής επιθεώρησης ,δηλαδή να υπάρχει έλεγχος των διαδικασιών από άτομα ανεξάρτητα του Διοικητικού Συμβούλιου της ασφαλιστικής εταιρίας τα οποία όμως θα λογοδοτούν στο Διοικητικό Συμβούλιο και τέλος να απαιτείται να διαθέτουν . Συνεπώς απαιτείται να υπάρχει σαφής κατανομή των αρμοδιοτήτων για την ομαλή λειτουργία του συστήματος.

ΙΙ) ORSA

Εκτός από τον υπολογισμό του MCR και του SCR που είχαμε στον Πυλώνα Ι, κάθε ασφαλιστική εταιρία είναι υποχρεωμένη να διεξάγει μια διαδικασία εσωτερικής αξιολόγησης που καλείται Εσωτερική Εκτίμηση Κινδύνου και Φερεγγυότητας (ORSA-Own Risks and Solvency Assessment). Το ORSA είναι μια διαδικασία όπου η κάθε ασφαλιστική εταιρία θα πρέπει να κάνει προκειμένου να αναγνωρίσει τους κινδύνους στους οποίους βρίσκεται εκτεθειμένη και δεν τους έχει υπολογίσει στον Πυλώνα Ι και να τους ποσοτικοποιεί κάτω από ακραία σενάρια. Τέτοιος κίνδυνος είναι ο κίνδυνος φήμης (reputation risk). Το ORSA είναι από τα κύρια στοιχεία που ελέγχει η Εποπτική Αρχή για να προσδιορίσει εάν θα χρειαστεί η ασφαλιστική εταιρία να προβεί σε αύξηση μετοχικού κεφαλαίου. Οι ασφαλιστικές εταιρίες χρειάζεται να αποδείξουν στις Εποπτικές Αρχές πως το ORSA λαμβάνεται υπόψη από την διοίκηση και πως τα αποτελέσματα του ORSA λαμβάνονται υπόψη στη λήψη αποφάσεων όσο αφορά τις μελλοντικές δραστηριότητες της ασφαλιστικής εταιρίας. Οι εποπτικές αρχές μπορούν να αποφασίσουν αν μια επιχείρηση θα πρέπει να διαθέτει επιπλέον κεφάλαια για την κάλυψη τυχόν κινδύνων που δεν καλύπτονται επαρκώς στον πρώτο Πυλώνα Ι.

Πυλώνας ΙΙΙ

Σύμφωνα με τις οδηγίες του Solvency II οι ασφαλιστικές εταιρίες υποχρεούνται να δημοσιοποιούν μια έκθεση σχετικά με την Φερεγγυότητα τους και την χρηματοοικονομική τους κατάσταση. Η έκθεση αυτή περιλαμβάνει μεταξύ άλλων την δραστηριότητα και τις επιδόσεις της επιχείρησης, την περιγραφή του συστήματος διακυβέρνησης και την εκτίμηση καταλληλότητας του για το προφίλ κινδύνου της επιχείρησης, την περιγραφή ανά κατηγορία των κινδύνων της επιχείρησης (έκθεση, συγκέντρωση, μείωση και ευαισθησία), την περιγραφή των στοιχείων του ενεργητικού και των τεχνικών προβλέψεων, την περιγραφή της διαχείρισης των κεφαλαίων κλπ. Τέλος, δημοσιεύονται και οι κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας της ασφαλιστικής επιχείρησης.

Παράλληλα οι ασφαλιστικές εταιρίες οφείλουν να υποβάλλουν στις Εποπτικές Αρχές όλες τις πληροφορίες προκείμενου αυτές να αξιολογήσουν την κατάσταση της εταιρίας και να πάρουν αποφάσεις σχετικά με το εάν έχουν τα απαραίτητα κεφάλαια ή χρειάζεται να προβούν σε αύξηση μετοχικού κεφαλαίου προκειμένου να εναρμονιστούν με τις οδηγίες του Solvency II.

2ο Κεφάλαιο: Μέθοδοι εκτίμησης αποθεμάτων ζημιών

Εισαγωγή

Κάθε ασφαλιστική επιχείρηση έχει ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλισμένων, κάποιοι από τους οποίους δεν θα προκαλέσουν ποτέ απαίτηση (ζημιά) ενώ κάποιοι άλλοι θα προκαλέσουν μία ή και περισσότερες απαιτήσεις. Ως εκ τούτου η ασφαλιστική επιχείρηση είναι υποχρεωμένη να κρατά αποθέματα προκειμένου να μπορεί να καλύψει τις μελλοντικές αποζημιώσεις που απορρέουν από ασφαλιστικά συμβόλαια που έχουν δημιουργηθεί στο παρελθόν. Είναι πολύ σημαντικό αυτά τα αποθέματα να υπολογίζονται με ακρίβεια. Εάν υπάρχει ανεπαρκής αποθεματοποίηση τότε η ασφαλιστική επιχείρηση δε θα μπορεί να πληρώσει τις μελλοντικές αποζημιώσεις ενώ εάν υπάρχει περισσότερη αποθεματοποίηση από την προβλεπόμενη, η ασφαλιστική εταιρία κρατά αδικαιολόγητα κεφάλαια τα οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει κάνοντας νέες επενδύσεις.

Στον κλάδο των γενικών ασφαλίσεων τα ασφαλιστήρια συμβόλαια είναι συνήθως ετήσια. Μετά την λήξη του ασφαλιστηρίου συμβολαίου, αυτό μπορεί είτε να ανανεωθεί είτε να τερματιστεί. Αυτό δεν σημαίνει όμως πως παύει να ισχύει η υποχρέωση του ασφαλιστή. Τα αποθέματα ζημιών διαιρούνται σε δύο κατηγορίες, στα *αποθέματα γνωστών απαιτήσεων* τα οποία αντιπροσωπεύουν το ποσό που απαιτείται για μελλοντικές πληρωμές ζημιών που ήδη έχουν αναγγελθεί στην ασφαλιστική επιχείρηση και στα *αποθέματα άγνωστων απαιτήσεων* τα οποία αντιπροσωπεύουν το ποσό που απαιτείται για ζημίες που έχουν γίνει και δεν έχουν ακόμα αναγγελθεί (IBNR-Incurred But Not Reported). Στη παρούσα διπλωματική εργασία θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τα αποθέματα που προκύπτουν από τις IBNR ζημιές.

Ο υπολογισμός του αποθέματος είναι μια διαδικασία ιδιαίτερα σημαντική για τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις και απαιτείται ακρίβεια στους υπολογισμούς καθώς συνδέεται άμεσα με την οικονομική σταθερότητα της εταιρίας και με την προστασία των συμφερόντων των ασφαλισμένων, την ικανότητα της δηλαδή να καταβάλλει τις αποζημιώσεις στους ασφαλισμένους. Ιδιαιτέρα υπό την νέα κοινοτική οδηγία Solvency II οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις που δραστηριοποιούνται στον κλάδο των γενικών ασφαλίσεων είναι υποχρεωμένες να υπολογίζουν αποθέματα, κάθε τριάντα ημέρες, για το σύνολο του χαρτοφυλακίου τους με τρόπο αξιόπιστο.

Οι μέθοδοι αποθεματοποίησης που χρησιμοποιούντα στην πράξη είναι κατά κύριο λόγο ντετερμινιστικές. Η πιο δημοφιλής μέθοδος για τον υπολογισμό των IBNR είναι η μέθοδος Chain Ladder ή μέθοδος τριγώνου εξέλιξης ζημιών, η όποια αρχικά ξεκίνησε ως ντετερμινιστική (Taylor, 2000), όμως στην πορεία επεκτάθηκε και πήρε στοχαστική μορφή. Η μέθοδος αυτή βασίζεται σε ένα αλγόριθμο για τον υπολογισμό των μελλοντικών καθώς και των εκκρεμών ζημιών μέσω της ιστορικής εξέλιξης της ζημιάς. Παρόλο που η μέθοδος Chain Ladder χρησιμοποιείται ευρέως στις γενικές ασφαλίσεις, είναι μια απλοϊκή μέθοδος με το σημαντικότερο μειονέκτημα της να είναι πως δεν δίνει καμία πληροφορία για την ακρίβεια του αποτελέσματος.

Με την πάροδο των ετών και με την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, οι αναλογιστές άρχισαν να χρησιμοποιούν στοχαστικές μεθόδους όπως τα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα (Generalised Linear Models), τα Μπεϋζιανά μοντέλα(Bayesian models), μοντέλα αξιοπιστίας (Credibility Models) και δειγματοληπτικά μοντέλα bootstrap (bootstrap models). Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα των στοχαστικών μεθόδων αποθεματοποίησης είναι πως δίνουν ακρίβεια στους υπολογισμούς των αποθεμάτων και παράλληλα δίνουν πληροφορίες για το σφάλμα πρόβλεψης (prediction error)των εκτιμήσεων των αποθεμάτων. Με άλλα λόγια, ο στόχος των στοχαστικών μεθόδων είναι να κατασκευάσουν ένα μοντέλο ή μια μέθοδο που να υπολογίζει πως τα αποθέματα θα είναι τουλάχιστον ίσα με το best estimate και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουν αυτό το μοντέλο προκειμένου να εκτιμήσουν την μεταβλητότητα αυτής της εκτίμησης. Ο όρος best estimate αντιστοιχεί στην αναμενόμενη τιμή της κατανομής των μελλοντικών χρηματικών εκροών (unpaid liabilities). Ειδικότερα σύμφωνα με τους England & Verall (2002), γίνεται προσπάθεια να βρεθούν μοντέλα που να δίνουν αποτελέσματα best estimate όμοια με αυτά της μεθόδου chain ladder. Περαιτέρω ανάλυση του όρου best estimate θα γίνει σε επόμενη παράγραφο.

2.1. Ντετερμινιστικοί Μέθοδοι

2.1.1. Η μέθοδος Chain ladder (distribution free model)

Η μέθοδος chain ladder ή μέθοδος τριγωνικής εξέλιξης ζημιών πιθανότατα είναι η πιο δημοφιλής μέθοδος αποθεματοποίησης που χρησιμοποιείται από τους αναλογιστές για την εκτίμηση των αποθεμάτων. Η μέθοδος αυτή ξεκίνησε ως ντετερμινιστική, όμως προκειμένου να εκτιμήσει την μεταβλητότητα του αποτελέσματος που απέδιδε, εξελίχθηκε σε στοχαστική μέθοδο. Ο Taylor (2000) παρουσιάζει μεθόδους που παράγονται από την chain ladder · η μία είναι ντετερμινιστική ενώ μια άλλη βασίζεται στην υπόθεση πως οι προσαυξητικές απαιτήσεις (incremental claims) ακολουθούν την κατανομή Poisson. Παράλληλα, ο Verall (2000) παρουσιάζει μοντέλα που δίνουν ίδια αποτελέσματα με αυτά της μεθόδου chain ladder.

Αρχικά, θα ορίσουμε τις προσαυξητικές απαιτήσεις ως C_{ij} όπου είναι οι ζημιές που πραγματικά πλήρωσε η ασφαλιστική εταιρία *μέσα* στο έτος εξέλιξης j, όπου το i αντιπροσωπεύει το έτος ατυχήματος ή το ασφαλιστικό έτος και το j αντιπροσωπεύει το έτος εξέλιξης, δηλαδή το έτος μετά από το έτος που πραγματοποιήθηκε το ατύχημα. Τα δεδομένα μας εισάγονται σε ένα τρίγωνο εξέλιξης ζημιών, στο οποίο κάθε γραμμή του τριγώνου παριστάνει το έτος ατυχήματος (accident year) και κάθε στήλη το έτος εξέλιξης (development year). Το τρίγωνο εξέλιξης έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 2.1 -Τρίγωνο εξέλιξης ζημιών-Incremental data

Έτος εξέλιξης						
Έτος ατυχήματος	1	2	3	…	n-1	m
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	…	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	…	$C_{2,n-1}$	
..	…	…	…	…		
	…	…	…			
n-1	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$				
n	$C_{n,1}$					

Στη συνέχεια, ορίζουμε τις σωρευτικές ζημιές ή πληρωμές (cumulative claims) για το έτος ατυχήματος i και για το έτος εξέλιξης j ορίζονται ως D_{ij} και είναι οι ζημιές που πληρώθηκαν *μέχρι* το έτος εξέλιξης j όπου :

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{j} C_{ik} \text{ , i=1,…n} \tag{2.1}$$

Το τρίγωνο εξέλιξης με τις σωρευτικές ζημιές έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 2.2 Τρίγωνο εξέλιξης ζημιών-Cumulative data

Έτος εξέλιξης						
Έτος ατυχήματος	1	2	3	…	n-1	n
1	D_{11}	D_{12}	D_{13}	…	$D_{1,n-1}$	$D_{1,n}$
2	D_{21}	D_{22}	D_{23}	…	$D_{2,n-1}$	
..	…	…	…	…		
	…	…	…			
n-1	$D_{n-1,1}$	$D_{n-1,2}$				
n	$D_{n,1}$					

Τα στοιχεία της διαγωνίου (κάτω αριστερά έως πάνω δεξιά) αντιπροσωπεύουν τα ποσά που πλήρωσε η ασφαλιστική εταιρία σε αποζημιώσεις κάθε έτος. Στόχος της μεθόδου είναι να εκτιμήσει τις μελλοντικές ζημιές που θα παρουσιαστούν στην ασφαλιστική εταιρία. Τελικά όλες οι ζημιές για την συγκεκριμένη χρονική περίοδο θα πληρωθούν ή θα διακανονιστούν αλλά είναι άγνωστο πόσα χρόνια θα χρειαστούν για να γίνει αυτό.

Για να γίνει αυτό εκτιμούμε τους ατομικούς συντελεστές εξέλιξης ως το πηλίκο δύο διαδοχικών σωρευτικών απαιτήσεων, δηλαδή παίρνουμε :

$$f_{ij} = \frac{Dij}{D_{i,j-1}} \text{ , για j=2,…n .} \tag{2.2}$$

Οι ατομικοί συντελεστές εξέλιξης f_{ij} παρουσιάζονται στον πίνακα 2.3 και δουλεύοντας όπως παραπάνω προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τα κενά στοιχεία του τριγώνου εξέλιξης, να υπολογίσουμε δηλαδή τους μελλοντικούς δείκτες εξέλιξης.

Πίνακας 2.3 – Ατομικοί Συντελεστές Εξέλιξης

f_{12}	f_{13}	f_{14}
f_{22}	f_{23}	
f_{32}		

Έπειτα, εκτιμούμε τον συντελεστή εξέλιξης chain ladder (*chain ladder development factor*) $\hat{f}_j$ ως εξής :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{i,j-1}}, \qquad \text{για j=2,…n} \tag{2.3}$$

Από την σχέση (2.3) συμπεραίνουμε πως ο συντελεστή εξέλιξης chain ladder προκύπτει ως το πηλίκο της διαίρεσης δύο διαδοχικών ποσών ζημιών .

Έπειτα οι συντελεστές της σχέσης (2.3), πολλαπλασιάζονται με τις σωρευτικές ζημίες κάθε γραμμής ($D_{i,n-i+1}$) προκειμένου να πάρουμε τις μελλοντικές εκτιμώμενες αποζημιώσεις σύμφωνα με την παρακάτω σχέση :

$$\hat{D}_{i,n} = D_{i,n-i+1} \cdot \prod_{j=n-i++2}^{n} \hat{f}_j \text{ , για i=2,…n.} \tag{2.4}$$

Οι σχέσεις (2.3) και (2.4) αποτελούν τη βάση για το μοντέλο chain ladder. Η τελευταία σωρευτική ζημία $D_{i,n-i+1}$ χρησιμοποιείται ως βάση για όλες τις μελλοντικές εκτιμήσεις για το έτος ατυχήματος i από το οποίο άμεσα προκύπτει πως για από τα προηγούμενα έτη ατυχήματος δεν αντλούμε πληροφορίες για την εκτίμηση των μελλοντικών αποζημιώσεων.

Τέλος για να εκτιμήσουμε το απόθεμα που πρέπει να κρατάει η ασφαλιστική εταιρία ανά έτος ατυχήματος, θα πρέπει να αφαιρέσουμε τις πληρωθείσες ζημιές από τις τελικές εκτιμήσεις των ζημιών. Δηλαδή, παίρνουμε :

Η εκτίμηση αποθέματος ζημιών είναι ίση με τη διαφορά των εκτιμώμενων τελικών ζημιών και των πληρωθεισών ζημιών , δηλαδή

$$\hat{R}_i = \hat{D}_{i,n} - D_{i,n-i+1}, \text{ για i=2,…n.,} \qquad \hat{R} = \sum_{i=2}^{n} \hat{R}_i .$$

Προκειμένου να είμαστε συμβατοί με τις οδηγίες του Solvency II, τα παραπάνω αποτελέσματα τα φέρνουμε σε παρούσες αξίες, τα προεξοφλούμε δηλαδή, χρησιμοποιώντας την καμπύλη επιτοκίων, όπως εκείνη παρέχεται από την EIOPA (Εποπτική Αρχή για τις Ασφαλίσεις και τα Συνταξιοδοτικά Ταμεία).

2.1.2. Προσαρμοσμένες τιμές

Εφαρμόζοντας τους ατομικούς συντελεστές εξέλιξης f δουλεύοντας αναδρομικά προς τα πίσω και ξεκινώντας από τα στοιχεία της τελευταίας διαγωνίου, μπορούμε να πάρουμε τις προσαρμοσμένες τιμές (fitted values) των σωρευτικών πληρωθεισών ζημιών των ετών του παρελθόντος, οι οποίες για $i = 1, \ldots, n$ δίνονται από:

$$\hat{D}_{i,n-i+1} = D_{i,n-i+1},$$

$$\hat{D}_{i,k-1} = \frac{\hat{D}_{ik}}{f_k}.$$

Ακόμα, οι εκτιμώμενες προσαυξητικές πληρωθείσες ζημίες (estimated incremental payments) προκύπτουν από τις διαφορές:

$$\hat{C}_{ij} = \hat{D}_{ij} - \hat{D}_{i,j-1}, \; i = 1, \ldots, n \quad j = 2, \ldots, n$$

$$\hat{C}_{i1} = \hat{D}_{i1}, \; i = 1, \ldots, n$$

2.1.3. Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson

Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson χρησιμοποιεί τους δείκτες εξέλιξης που χρησιμοποιήσαμε και στη μέθοδο Chain Ladder, σε συνδυασμό με τον δείκτη ζημιών. Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις όπου οι τελικές πληρωθείσες ζημιές στα αρχικά έτη παρουσιάζουν ανομοιομορφία γεγονός που καθιστά την μέθοδο chain ladder αναποτελεσματική στην παραγωγή ασφαλών εκτιμήσεων για τις μελλοντικές πληρωθείσες ζημιές. Ο σκοπός της μεθόδου είναι να σταθεροποιήσει αυτά τα μη ικανοποιητικά αποτελέσματα, χρησιμοποιώντας τις τελικές εκτιμώμενες ζημίες κάθε έτους, (οι οποίες προκύπτουν σαν το γινόμενο του δείκτη ζημιών επί το δεδουλευμένο ασφάλιστρο), σε συνδυασμό με τους συντελεστές εξέλιξης της μεθόδου chain ladder προκειμένου να εκτιμήσει τα αποθέματα ζημιών. Οι εκτιμώμενες τελικές ζημίες U^{BF} κάθε έτους θα μπορούσαν να θεωρηθούν σαν χρήση εξωτερικής πληροφορίας για την εκτίμηση των αποθεμάτων, γεγονός που κάνει τη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson να θεωρείται από αρκετούς πως ακολουθεί τη Bayesian μεθοδολογία.

Συνοπτικά, η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson ακολουθεί τα εξής βήματα για την εκτίμηση των αποθεμάτων ζημιών :

- Αρχικά, υπολογίζουμε τις εκτιμώμενες τελικές ζημίες κάθε έτους ατυχήματος ως το γινόμενο του Αναμενόμενου Δείκτη Ζημιών επί το Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο.

Εκτιμώμενες τελικές ζημιές = Αναμενόμενος Δείκτης ζημιών · Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο

- Στη συνέχεια, έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές εξέλιξης chain ladder και σε συνδυασμό με τις εκτιμώμενες τελικές ζημίες που υπολογίσαμε παραπάνω, παίρνουμε τα εκτιμώμενα αποθέματα ζημιών.

$$\text{Εκτιμώμενα αποθέματα ζημιών} = (U_i^{(BF)}) \cdot (1 - \frac{1}{f_{ult}}) \tag{2.5}$$

Όπου $U_i^{(\mathrm{BF})}$ισούται με τις εκτιμώμενες τελικές ζημιές και $f_{ult} = \prod_{j=n-i+2}^{n} \quad f_j = f_{n-i+2} \cdot f_{n-i+3} \cdots f_n$.

Σύμφωνα με τη μέθοδο chain ladder υπολογίσαμε το εκτιμώμενο απόθεμα ζημιών ως εξής:

$U_i^{(CL)} - D_{i,n-i+1} = U_i^{(CL)} \cdot \frac{1}{f_{n-i+2} \cdot f_{n-i+3} \cdots f_n} (f_{n-i+2} \cdot f_{n-i+3} \cdots f_n - 1) = U_i^{(CL)} (1 - \frac{1}{f_{n-i+2} \cdot f_{n-i+3} \cdots f_n})$.

Όπου $U_i^{(\mathrm{CL})}$ είναι οι εκτιμώμενες τελικές ζημίες που υπολογίσαμε με τη μέθοδο την chain ladder. Συνεπώς :

$$U_i^{(CL)} = D_{i,n-i+1} \cdot \prod_{j=n-i+2}^{n} f_j \,.$$

Ενώ με την μέθοδο Bornhuetter-Ferguson βρήκαμε πως το εκτιμώμενο απόθεμα ζημιών υπολογίζεται ως εξής:

$$U_i^{(BF)} \cdot (1 - \frac{1}{\prod_{j=n-i+2}^{n} f_j}) \,.$$

Οι εκτιμώμενες τελικές ζημίες ($U_i^{(\mathrm{BF})}$) προέκυψαν από τη χρήση κάποια εξωτερικής πληροφορίας.

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η μόνο διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων είναι πως στη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson προκειμένου να εκτιμήσουμε το απόθεμα ζημιών, χρησιμοποιούμε τις εκτιμώμενες τελικές ζημιές $U_i^{(\mathrm{BF})}$, χρησιμοποιούμε δηλαδή μια εξωτερική πληροφορία. (από σχέσεις (2.4) και (2.5)).

2.1.4. Μέθοδος Διαχωρισμού

H Separation Method ξεκίνησε, όπως και η μέθοδος chain ladder χωρίς να κάνει κάποια υπόθεση για την κατανομή των δεδομένων (ζημιών). Σε αυτή τη μέθοδο υποθέτουμε πως οι προσαυξητικές απαιτήσεις (incremental claims) προκύπτουν από συντελεστές οι οποίοι εξαρτώνται από το έτος συμβάντος, το έτος εξέλιξης και το ημερολογιακό έτος. Ορίζουμε λοιπόν ως c το μέσο ποσό ζημίας, ως r_j ορίζουμε το αναμενόμενο ποσοστό ζημιών στο έτος εξέλιξης j (απαιτώντας $\sum_j r_j = 1$), ως n_i ορίζουμε τον αριθμό ζημιών που παρατηρήθηκαν στο έτος συμβάντος i και τέλος ως λ_{i+j} ορίζουμε την επίδραση κάποιου παράγοντα (π.χ. του πληθωρισμού)στο ημερολογιακό έτος.

Συνεπώς παίρνουμε :

$$E(D_{\text{ij}}) = c \cdot r_j \cdot n_i \cdot \lambda_{i+j} \tag{2.6}$$

$$\frac{E(D_{\text{ij}})}{n_i} = c \cdot r_j \cdot \lambda_{i+j} \tag{2.7}$$

όπου τα D_{ij} παριστάνουν τις αθροιστικές ζημιές για το έτος συμβάντος i και για το έτος εξέλιξης j. Η παραπάνω σχέση μπορεί να θεωρηθεί και ως η τιμή του στοιχείου(i,j) ενός τριγωνικού πίνακα.

Πίνακας 2.4 – Τρίγωνο Εξέλιξης

Έτος εξέλιξης					
Έτος ατυχήματος	0	1	…	k-1	k
0	$c\, r_0\, \lambda_0$	$c\, r_1\, \lambda_1$		$c\, r_{k-1}\lambda_{k-1}$	$cr_k\, \lambda_k$
1	$c\, r_0\, \lambda_1$	$c\, r_1\, \lambda_2$		$c\, r_{k-1}\lambda_k$	
.	…	…	…		
.	….	…	…		
.	…	…			
k-1	$cr_0\, \lambda_{k-1}$	$c\, r_1\lambda_k$			
k	$cr_0\lambda_k$				

Για αυτόν το τριγωνικό πίνακα τα αθροίσματα των διαγωνίων είναι:

$d_0 = c \cdot r_0 \cdot \lambda_0$

$d_1 = c \cdot r_0 \cdot \lambda_1 + c \cdot r_1 \cdot \lambda_1 = c \cdot \lambda_1. (r_0 + r_1)$

$d_2 = c \cdot r_0 \cdot \lambda_2 + c \cdot r_1 \cdot \lambda_2 + c \cdot r_2 \cdot \lambda_2 = c \cdot \lambda_2 \cdot (r_0 + r_1 + r_2)$

…

$d_{k-1} = c \cdot \lambda_{k-1} \cdot (r_0 + r_1 + \cdots + r_{k-1}) = c \cdot \lambda_{k-1} \cdot (1 - r_k)$

$d_k = c \cdot \lambda_k \cdot (r_0 + r_1 + \cdots + r_k) = c \cdot \lambda_k$

Στη συνέχεια, ορίζουμε την ποσότητα $B_{ij} = D_{ij} / \hat{n}_i$ όπου D_{ij} οι ζημιές που έχουμε παρατηρήσει (δηλαδή οι αποζημιώσεις που χρειάζεται να πληρώσουμε) και $\hat{n}_i$ ο εκτιμώμενος αριθμό ζημιών. Ξεκινώντας από την τελευταία σχέση και δουλεύοντας αναδρομικά, υπολογίζουμε τα εκτιμώμενα c $\hat{\lambda}_{i+j}$ και $\hat{r}_j$.

$c \cdot \hat{\lambda}_k = \hat{d}_k$

$\hat{r}_k = B_{1\,k}/(c \cdot \hat{\lambda}_k)$

$c \cdot \hat{\lambda}_{k-1} = \hat{d}_{k-1}/(1- \hat{r}_k)$

$\hat{r}_{k-1} = (B_{1\,k-1} + B_{2\,k-1})/(c\cdot \hat{\lambda}_k + c\cdot \hat{\lambda}_{k-1})$

$c\cdot \hat{\lambda}_{k-2} = \hat{d}_{k-2}/(1- \hat{r}_k - \hat{r}_{k-1})$

$\hat{r}_{k-2} = (B_{1\,k-2} + B_{2\,k-2} + B_{3\,k-2})/(c \cdot \hat{\lambda}_k + c \cdot \hat{\lambda}_{k-1} + c\cdot \hat{\lambda}_{k-2})$

Συνεπώς, το εκτιμώμενο απόθεμα είναι το άθροισμα των εκτιμώμενων ζημιών $\hat{D}_{ij}$. Ουσιαστικά, με την Separation Method κάνουμε την υπόθεση πως σε κάθε έτος ατυχήματος η ασφαλιστική εταιρία πληρώνει ένα σταθερό ποσοστό των συνολικών ζημιών και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

2.1.5. Η μέθοδος Cape-Cod

Μια ακόμα μέθοδος αποθεματοποίησης που έχει αναπτυχθεί στη βιβλιογραφία είναι η μέθοδος Cape-Cod. Η μέθοδος αυτή έχει αρκετά κοινά χαρακτηριστικά με την μέθοδο Bornhuetter-Ferguson. Αντί να προϋποθέτει την ύπαρξη ενός συντελεστή loss ratio, εκτιμά ένα χρησιμοποιώντας το ύψος των τελικών ζημιών και ένα μέτρο έκθεσης στον κίνδυνο. Ο συντελεστής αυτός ονομάζεται Cape-Cod συντελεστής ζημιών και αποτελεί ένα εκτιμητή του αναμενόμενου τελευταίου συντελεστή ζημιών, ο οποίος παραμένει σταθερός σε όλα τα χρόνια ατυχήματος. Ο συντελεστής αυτός ερμηνεύεται σαν ένας σταθμισμένος μέσος όρος των τελικών ζημιών για κάθε έτος ατυχήματος

$$\hat{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \{ (D_{i,n-i+1} \cdot F_{n-i+1}) / P_i) \cdot (P_i / F_{n-i+1}) \}}{\sum_{i=1}^{n} (P_i / F_{n-i+1})} \tag{2.8}$$

όπου :

- $\hat{L}$ είναι ο αναμενόμενος συντελεστής ζημιών με την μέθοδο Cape-Cod
- $D_{i,m-i+1}$ είναι οι πληρωθείσες ζημιές
- F_{n-i+1} είναι οι δείκτες εξέλιξης από το έτος ατυχήματος i στο συνολικό (ultimate)

- P_i είναι ένα μέτρο έκθεσης στον κίνδυνο που είναι γνωστό (ασφάλιστρα ή κάποια άλλα μέτρα έκθεσης στον κίνδυνο)

Παρατηρούμε ότι τα βάρη που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του συντελεστή Cape-Cod είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ζημιών (exposure) και αντιστρόφως ανάλογα προς τον δείκτη εξέλιξης. Αυτό γίνεται διότι δίνεται περισσότερο βάρος δίνεται στα έτη με μεγαλύτερο αριθμό ζημιών.

Το εκτιμώμενο απόθεμα των IBNR ζημιών δίνεται από την σχέση (2.9) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson, μόνο που σε αυτή τη μέθοδο ο δείκτης ζημιών προέρχεται από ζημιές που έχουν υποστεί διόρθωση στην τάση τους. Συνεπώς το εκτιμώμενο απόθεμα των IBNR ζημιών είναι :

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i = \hat{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{F_{m-i+1}}\right) \cdot P_i \tag{2.9}$$

2.2. Στοχαστικές Μέθοδοι

2.2.1. Εισαγωγή

Η εκτίμηση των μελλοντικών ζημιών είναι ιδιαίτερα σημαντική για το σύνολο των ασφαλιστικών εταιριών και ένας μεγάλος αριθμός ντετερμινιστικών μεθόδων έχουν αναπτυχθεί προκειμένου να δώσουν ασφαλής εκτιμήσεις για τα αποθέματα που χρειάζεται να διαθέτουν οι ασφαλιστικές εταιρίες προκειμένου να καλύψουν τις μελλοντικές αποζημιώσεις που ενδέχεται να δημιουργηθούν. Όμως τα τελευταία χρόνια, και σύμφωνα με τις οδηγίες του Solvency II, οι αναλογιστές των εταιριών πέρα από την εκτίμηση του αποθέματος, χρειάζεται να δίνουν πληροφορίες τόσο για την μεταβλητότητα των εκτιμήσεων όσο για και για τις υποθέσεις που έχουν γίνει στα μοντέλα και για την μεταβλητότητα των παραμέτρων που έχουν χρησιμοποιηθεί. Οι στοχαστικές μέθοδοι αποθεματοποίησης επεκτείνουν τις παραδοσιακές τεχνικές που αναφέραμε παραπάνω προκειμένου να μας δώσουν αυτές τις επιπλέον πληροφορίες, χωρίς αυτό να σημαίνει πως θα λύσουν προβλήματα στα οποία αποτυγχάνουν να δώσουν λύσεις οι ντετερμινιστικές μέθοδοι. Η χρησιμότητα των μεθόδων αυτών είναι πως, σε πολλές περιπτώσεις, μπορούν να δώσουν επιπλέον πληροφορίες οι οποίες μπορούν να φανούν χρήσιμες στις ασφαλιστικές εταιρίες, τόσο στην αποθεματοποίηση όσο και στην κατάρτιση επιχειρηματικών σχεδίων (αγορά αντασφάλισης, τιμολόγηση προϊόντων).

Στο άρθρο των England και Verall, (England & Verall, 2002) παρουσιάζονται τα πιο σημαντικά στοχαστικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται στην αποθεματοποίηση. Σύμφωνα με τους συγγραφείς τα στοχαστικά μοντέλα χωρίζονται στις ακόλουθες κατηγορίες:

Στα chain ladder models τα οποία αναπαράγουν τις εκτιμήσεις για τα αποθέματα ζημιών που δίνει και η ντετερμινιστική μέθοδος Chain Ladder. Αυτό επιτυγχάνεται με δύο τρόπους · είτε καθορίζοντας την κατανομή των δεδομένων είτε καθορίζοντας της δύο πρώτες ροπές της κατανομής. Τα μοντέλα που ανήκουν στην πρώτη κατηγορία είναι το μοντέλο Over-Dispersed Poisson model (ODP), το μοντέλο Negative Binomial και η προσέγγιση του μοντέλου Negative Binomial από την κανονική κατανομή.

Άλλα παραμετρικά μοντέλα(Other parametric models) τα οποία χρησιμοποιούνται για να περιορίσουν το πρόβλημα που παρουσιάζουν τα μοντέλα Chain Ladder, χρησιμοποιούν πολλές παραμέτρους (μια παράμετρος για κάθε έτος ατυχήματος και για κάθε έτος εξέλιξης). Ένα από αυτά τα μοντέλα αυτά είναι το μοντέλο Hoerl Curve το οποίο προσαρμόζει μια καμπύλη στο τρίγωνο εξέλιξης των ζημιών (run off triangle). Ένα άλλο μοντέλο είναι το μοντέλο του Wright, το οποίο υποθέτει πως ο αριθμός των ζημιών (claim number) ακολουθεί την κατανομή Poisson ενώ τα ποσά των ζημιών (claim amount) ακολουθούν την κατανομή Gamma.

Η τελευταία κατηγορία είναι τα *non-parametric smoothing models* τα οποία είναι μια μίξη των μοντέλων chain ladder και των parametric μοντέλων, αποτελεί δηλαδή μια ενδιαφέρουσα εναλλακτική στα καθιερωμένα ντετερμινιστικά και παραμετρικά μοντέλα. Τα *non-parametric smoothing models* κάνουν χρήση των γενικευμένων προσθετικών μοντέλων (Generalised

Additive Models, GAMs) τα οποία είναι μια επέκταση των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων (Generalised Linear Models, GLMs).

Μέχρι σήμερα δύο μοντέλα αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία που δίνουν εκτιμήσεις αποθεμάτων ζημιών ίδια με τα αποθέματα που προκύπτουν από την μέθοδο chain ladder και συγχρόνως επιτρέπουν την μελέτη της μεταβλητότητας των εκτιμήσεων. Αυτά τα μοντέλα είναι το μοντέλο του Mack (1994) και η προσέγγιση των Renshaw and Verall (1994) για την χρήση γενικευμένων γραμμικών μοντέλων (GLM) στην εκτίμηση του αποθέματος ζημιών. Υπάρχουν πολλά ακόμη μοντέλα που δίνουν αποτελέσματα κοντά με αυτά που προκύπτουν από τη μέθοδο chain ladder αλλά όχι ακριβώς τα ίδια. Στη παρούσα διπλωματική εργασία θα παρουσιάσουμε τα παραπάνω μοντέλα αναλυτικά και θα κάνουμε εκτενή αναφορά στη μέθοδο bootstrap.

2.2.2. Είδη σφαλμάτων (Error types)

Πριν μελετήσουμε τα διάφορα στοχαστικά μοντέλα, χρειάζεται να αναφέρουμε τα είδη σφαλμάτων που παίζουν σημαντικό ρόλο στην αποθεματοποίηση και κατ' επέκταση στην ανάλυση μας.

Σύμφωνα με τους Daykin et al (1994), τα σφάλματα χωρίζονται στις τρείς κατηγορίες που ακολουθούν:

- **Model errors** προκύπτουν όταν οι μέθοδοι αποθεματοποίησης που υιοθετούμε δεν ανταποκρίνονται στην πραγματική κατανομή των ζημιών που προσπαθούν να μοντελοποιήσουν.
- **Parameter errors (process variance)** προκύπτουν όταν δεν έχουμε παρατηρήσει αρκετά δεδομένα-απαιτήσεις, επομένως υπάρχει αβεβαιότητα στην εκτίμηση των παραμέτρων.
- **Process errors (stochastic error)** προκύπτουν καθώς οι εκτιμήσεις των αποθεμάτων γίνονται με βάση τις απαιτήσεις που καταβάλλονται στο μέλλον με αποτέλεσμα τα ακριβή ποσά αποζημιώσεων που θα καταβάλλει τελικά η ασφαλιστική εταιρία, να περιέχουν μεγάλο βαθμό αβεβαιότητας.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα επικεντρωθούμε στα δύο τελευταία σφάλματα ·το Parameter errors ή σφάλμα εκτίμησης και στο process error ή τυχαίο σφάλμα. Το άθροισμα του σφάλματος εκτίμησης και του τυχαίου σφάλματος, ονομάζεται σφάλμα πρόβλεψης και αποτελεί ένα μέτρο μέτρησης της μεταβλητότητας της εκτίμησης.

Έστω ότι έχουμε μια παράμετρο y και έναν εκτιμητή, έστω $\hat{y}$. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης (MSEP) είναι :

$$E[(y-\hat{y})^2] = E[((y-E(y)-(\hat{y}-E(y)))^2]$$

Επεκτείνοντας την παραπάνω σχέση και θέτοντας τον εκτιμητή $\hat{y}$ αντί για y παίρνουμε:

$$E[(y-\hat{y})^2] \approx E[(y-E(y))^2] - 2E[(y-E(y))((\hat{y}-E(\hat{y}))] + E[(\hat{y}-E(\hat{y}))^2]$$

Στη συνέχεια, υποθέτοντας πως οι μελλοντικές παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες από αυτές που παρατηρήσαμε στο παρελθόν παίρνουμε :

$$E[(y - \hat{y})^2] \approx E[(y - E(y))^2] + E[(\hat{y} - E(\hat{y}))^2]$$

Δηλαδή, το τυπικό σφάλμα πρόβλεψης = τυχαίο σφάλμα + σφάλμα εκτίμησης.

2.2.3. Το μοντέλο του Mack

Το έργο που είχε την μεγαλύτερη επιρροή στα πρώτα στάδια της ανάπτυξης των στοχαστικών μεθόδων αποθεματοποίησης, ήταν το άρθρο του Mack (1994), όπου παρουσιάστηκαν οι πρώτες απόπειρες για τον σχηματισμό στοχαστικών μοντέλων αποθεματοποίησης. Ο Mack παρουσίασε για πρώτη φορά ένα στοχαστικό μοντέλο το οποίο έδινε τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα για τις εκτιμήσεις των αποθεμάτων με αυτά που προέκυπταν από τη μέθοδο chain ladder.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, συμβολίζουμε με D_{ij} τις αθροιστικές ζημιές-πληρωμές (cumulative claims) για το έτος ατυχήματος i και για το έτος εξέλιξης j. Ο Mack υπέθεσε πως τα χρόνια έτη ατυχήματος i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ακόμη δεν υιοθέτησε την υπόθεση κάποιας κατανομής για τα δεδομένα, παρά μόνο αρκέστηκε στη χρήση των δύο πρώτων ροπών των δεδομένων. Συνεπώς, σύμφωνα με τον Mack η μέση τιμή και η διακύμανση των αθροιστικών ζημιών D_{ij} είναι $f_j \cdot D_{i,j-1}$ και ${\sigma^2}_j \cdot D_{i,j-1}$ αντίστοιχα.

Επιπλέον, ο Mack υπολόγισε τους παρακάτω εκτιμητές που δίνονται από τη σχέση (2.10) για τα τις άγνωστες παραμέτρους f_j και ${\sigma^2}_j$ και κατόπιν εκτίμησε το σφάλμα που υφίσταται στην πρόβλεψη των πληρωμών και στην εκτίμηση των αποθεμάτων.

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{\mathrm{ij}} \cdot \lambda_{\mathrm{ij}}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{\mathrm{ij}}}, \text{ όπου } w_{\mathrm{ij}} = D_{i,j-1} \text{ και } \lambda_{\mathrm{ij}} = \frac{D_{i,j}}{D_{i,j-1}}$$

$$\text{και} \tag{2.10}$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} \cdot (\lambda_{\mathrm{ij}} - \hat{f}_j)$$

με $\hat{\sigma}_n^2 := \min(\hat{\sigma}_{n-1}^2, \hat{\sigma}_{n-2,}^2 \hat{\sigma}_{n-3,}^2)$.

Στο μοντέλο του Mack ο εκτιμητής $\hat{f}_j$, είναι ο ίδιος με τον συντελεστή εξέλιξης ζημιών που είχαμε στην μέθοδο chain ladder. Παράλληλα υποθέτουμε ανεξαρτησία μεταξύ των ετών ατυχήματος.

Ακόμη, σύμφωνα με τον Mack, οι εκτιμητές $\hat{f}_j$ είναι αμερόληπτοι εκτιμητές των συντελεστών εξέλιξης ζημιών f_j και ταυτόχρονα είναι και ασυσχέτιστοι μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει πως εάν μετά από ένα έτος εξέλιξης όπου παρατηρήσαμε ένα μεγάλο αριθμό ζημιών, στο επόμενο έτος παρατηρήσουμε ένα μικρό αριθμό ζημιών, ο συντελεστής εξέλιξης ζημιών της μεθόδου chain ladder δεν θα δώσει ασφαλείς προβλέψεις για την εκτίμηση των μελλοντικών ζημιών. Με άλλα λόγια, εάν σε ένα έτος εξέλιξης παρατηρήσουμε ένα υψηλό-μεγάλο συντελεστή εξέλιξης ζημιών δεν υπάρχει κάποια ένδειξη πως ο ακόλουθος-επόμενος συντελεστής θα είναι ιδιαίτερα χαμηλός.

Ο δείκτης εξέλιξης ζημιών της μεθόδου Chain Ladder είναι η μέση τιμή των συντελεστών εξέλιξης ζημιών. Ο παραπάνω δείκτης είναι αμερόληπτος και η πιο χρήσιμη ιδιότητα ενός εκτιμητή είναι να έχει όσο το δυνατόν μικρότερη διακύμανση. Η μέθοδος μέσω των ατομικών παραγόντων εξέλιξης παράγει και αυτή αμερόληπτους εκτιμητές, όμως με μεγαλύτερη διακύμανση. Οπότε συμπεραίνουμε πως στη μελέτη μας χρησιμοποιούμε τον δείκτη εξέλιξης της μεθόδου chain ladder καθώς είναι ο αμερόληπτος εκτιμητής με την μικρότερη διακύμανση.

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στις τρείς υποθέσεις που έκανε ο Mack για να ορίσει το μοντέλο. Έχουμε λοιπόν:

1. $E(D_{\mathrm{ij}}|D_{i,j-1}) = f_j \cdot D_{i,j-1}$, για j=2,…,n
2. $\mathrm{Var}(D_{\mathrm{ij}}|D_{i,j-1}) = \sigma^2{}_j \cdot D_{i,j-1}$, για j=2,…,n και,
3. Τα D_{ij} και D_{gh} είναι ανεξάρτητα για $i \neq g$

Οι εκτιμώμενες μελλοντικές αποζημιώσεις $\hat{D}_{\mathrm{ik}}$, υπολογίζονται όπως ακριβώς υπολογίζονται και στη μέθοδο chain ladder, πολλαπλασιάζοντας δηλαδή τα στοιχεία της τελευταίας διαγωνίου με τους μελλοντικούς δείκτες εξέλιξης ζημιών. Παίρνουμε λοιπόν,

$$\hat{D}_{\mathrm{ik}} = D_{i,n-i+1} \prod_{j=n-i+1}^{n} \hat{f}_j$$

Ενώ η εκτίμηση του αποθέματος ζημιών σε κάθε έτος ατυχήματος δίνεται από τη σχέση

$$\hat{R}_i = \hat{D}_{\mathrm{i,k}} - D_{i,n-i+1}$$

και το συνολικό απόθεμα δίνεται από τη σχέση

$$\hat{R} = R_2 + R_3 + \ldots + R_n$$

Υποθέτοντας ανεξαρτησία μεταξύ των ετών ατυχημάτων, το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης $\mathrm{MSEP}[\hat{D}_{\mathrm{ij}}]$ (Mean square error of prediction) για το ποσό των πληρωθεισών ζημιών ενός έτους ατυχήματος δίνεται από την σχέση :

$$\mathrm{MSEP}[\hat{D}_{\mathrm{ij}}] = E[(D_{\mathrm{ij}} - \hat{D}_{\mathrm{ij}})^2] = E[D_{\mathrm{ij}} - E[D_{\mathrm{ij}}]^2] + E[\hat{D}_{\mathrm{ij}} - E[\hat{D}_{\mathrm{ij}}]^2]$$

όπου για λόγους εκτίμησης προσεγγίζεται από :

$$\mathrm{MSEP}[\hat{D}_{\mathrm{ij}}] = \mathrm{Var}[D_{\mathrm{ij}}] + \mathrm{Var}[\hat{D}_{\mathrm{ij}}]$$

Με τον όρο $\mathrm{Var}[D_{\mathrm{ij}}]$ να συμβολίζει το τυχαίο σφάλμα και τον όρο $\mathrm{Var}[\hat{D}_{\mathrm{ij}}]$ να συμβολίζει το σφάλμα της εκτίμησης .

Με βάση τα παραπάνω, ο Mack (1993) υπολόγισε το τυχαίο σφάλμα για το απόθεμα R_i για το έτος ατυχήματος i ως:

$$\mathrm{Var}[R_i] = \hat{D}^2{}_{\mathrm{in}} \cdot \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}^2{}_{k+1}}{\hat{f}^2{}_{k+1} \cdot \hat{D}_{\mathrm{ik}}} \tag{2.11}$$

και το σφάλμα της εκτίμησης του αποθέματος $\hat{R}_i$ ως:

$$\mathrm{Var}[\hat{R}_i] = \hat{D}^2{}_{\mathrm{in}} \cdot \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}^2{}_{k+1}}{\hat{f}^2{}_{k+1} \sum_{q=1}^{n-k} D_{\mathrm{qk}}} \tag{2.12}$$

Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης του αποθέματος (standard error for the reserve estimate) για το έτος ατυχήματος i, $\hat{R}_i$ δίνεται από τη σχέση :

$$MSEP(\hat{R}_i) = E[(R_i - \hat{R}_i)^2] = \hat{D}_{in}^2 \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_{k+1}^2}{\hat{f}^2_{k+1}} \left(\frac{1}{\hat{D}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{q=1}^{n-k} D_{qk}} \right).$$

Ενώ το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης του αποθέματος για όλα τα έτη ατυχήματος, $\hat{R}$ δίνεται από τη σχέση :

$$MSEP[\hat{R}] = \sum_{i=2}^{n} \{MSEP[\hat{R}_i] + \hat{D}_{in} (\sum_{q=i+1}^{n} D_{qn}) \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{2 \cdot \hat{\sigma}^2_{k+1}}{\hat{\mathrm{f}}^2_{k+1} \cdot \sum_{q=1}^{n-k} D_{qk}} \}.$$

2.2.4. Bootstrapping

Η τεχνική bootstrap είναι μια ιδιαίτερα χρήσιμη αλλά ταυτόχρονα αρκετά απλή τεχνική, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην μέτρηση της μεταβλητότητας των εκτιμήσεων των αποθεμάτων ζημιών. Μέσω της τεχνικής αυτής αντλούμε πληροφορίες για ένα δείγμα δεδομένων χωρίς να χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε σύνθετες αναλυτικές τεχνικές. Η bootstrap βασίζεται στην τυχαία επιλογή δεδομένων (με επανάθεση) από το δείγμα που εξετάζουμε με στόχο τη δημιουργία νέων δεδομένων (pseudo data), η κατανομή των οποίων θα είναι συνεπής με την κατανομή των αρχικών μας δεδομένων.

Εφαρμόζοντας την τεχνική bootstrap έχουμε δύο δυνατότητες :

- Paired bootstrap – Η δειγματοληψία γίνεται στα δεδομένα του δείγματος που εξετάζουμε, τα οποία θεωρούνται πως είναι ανεξάρτητα και ισόνομα.
- Residual bootstrap – Η δειγματοληψία γίνεται στα κατάλοιπα του μοντέλου ενώ τα δεδομένα θεωρούνται ανεξάρτητα αλλά όχι απαραίτητα ισόνομα. Τα κατάλοιπα ωστόσο είναι ανεξάρτητα και ισόνομα.

Σε προβλήματα παλινδρόμησης, όπως μπορεί να θεωρηθεί η αποθεματοποίηση, είναι σύνηθες να χρησιμοποιούμε bootstrap στα κατάλοιπα, παρόλο που η τεχνική paired bootstrap είναι πιο ανθεκτική (robust) και τούτο διότι υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των δεδομένων και των παραμέτρων του μοντέλου, γεγονός που δεν επιτρέπει τη χρήση της πρώτης τεχνικής bootstrap.

Πριν μελετήσουμε αναλυτικά την τεχνική bootstrap θα χρειαστεί να αναφερθούμε στην κατανομή Over-Dispersed Poisson και στα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα (GLM), καθώς η τεχνική bootstrap χρησιμοποιεί πολλά στοιχεία των παραπάνω μοντέλων.

Μεθοδολογία bootstrap

Σύμφωνα με τους England και Verall (England & Verall,1999) οι αυξητικές ζημιές (incremental claims) μοντελοποιούνται από μια Over-Dispersed Poisson κατανομή. Εάν συμβολίσουμε με C_{ij} τις αυξητικές πληρωθείσες ζημιές, όπου i το έτος ατυχήματος και j το έτος εξέλιξης, έχουμε

$$\begin{gathered} E[C_{ij}] = m_{ij} \text{ και } \mathrm{Var}[C_{ij}] = \varphi \cdot \mathrm{E}[C_{ij}] = \varphi \cdot \mathrm{m}_{ij} \\ \log(m_{ij}) = \eta_{ij} \\ \eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0 \end{gathered} \tag{2.13}$$

Η σχέση (2.13) ορίζει ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο στο οποίο οι C_{ij} μοντελοποιούνται από μια λογαριθμική συνάρτηση σύνδεσης και η διακύμανση είναι μεγαλύτερη της μέσης τιμής (για αυτό και ονομάζεται Over-Dispersed Poisson). Χρησιμοποιούμε τη λογαριθμική συνάρτηση σύνδεσης προκειμένου να αλλάξουμε παραμέτρους στο μοντέλο ώστε ο λογάριθμος της μέσης τιμή να έχει γραμμική μορφή αντί για πολλαπλασιαστική. Συνεπώς το μοντέλο μας έχει μορφή ανάλογη με αυτή της μεθόδου chain ladder, καθώς υπάρχει μια παράμετρος για κάθε γραμμή i και μία παράμετρος για κάθε στήλη j. Το φ είναι μια άγνωστη παράμετρος κλίμακας η οποία εκτιμάται.

Σύμφωνα με τους England και Verall (England & Verall,1999) το μοντέλο είναι ανθεκτικό για ένα μικρό αριθμό αρνητικών αυξητικών ζημιών, με την προϋπόθεση όμως ότι το άθροισμα των αυξητικών ζημιών σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του τριγώνου ζημιών θα είναι πάντα θετικό. Εξαιτίας της λογαριθμικής συνάρτηση σύνδεσης, οι προσαρμοσμένες τιμές που θα προκύψουν θα έχουν πάντα θετικές τιμές.

Επιπλέον σύμφωνα με τους England και Verall (England & Verall,1999) πρέπει τα κατάλοιπα να έχουν μια συγκεκριμένη μορφή για να είναι κατάλληλα για το γενικευμένο γραμμικό μοντέλο. Τα πιο συνήθη κατάλοιπα που εξετάζονται είναι τα Deviance κατάλοιπα και τα Pearson κατάλοιπα, ενώ υπάρχουν και τα Anscombe κατάλοιπα τα οποία δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στη διαδικασία bootstrap. Θα μελετήσουμε τα είδη των καταλοίπων τα οποία είναι κατάλληλα για το γενικευμένο γραμμικό μοντέλο :

- unscaled (χωρίς μετασχηματισμό) Deviance κατάλοιπα

$$r_D = \text{sign}(C-m)\sqrt{2(\text{Clog}(C/m) - C + m}$$

- unscaled Pearson κατάλοιπα

$$r_p = \frac{C-\text{m}}{\sqrt{\text{m}}} \tag{2.14}$$

- unscaled Anscombe κατάλοιπα

$$r_A = \frac{\frac{3}{2}(C^{2/3} - m^{2/3})}{m^{1/6}}$$

Όπως αναφέραμε παραπάνω η διαδικασία bootstrap που θα μελετήσουμε περιλαμβάνει δειγματοληψία, με επανατοποθέτηση, από τα κατάλοιπα. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα νέα κατάλοιπα που προέκυψαν από την δειγματοληψία και τις προσαρμοσμένες προσαυξητικές ζημιές παίρνουμε ένα δείγμα bootstrap. Δεδομένων των r και m, παρατηρεί κανείς πως είναι ιδιαίτερα δύσκολο να λυθούν αναλυτικά οι σχέσεις

$$r_D = \text{sign}(C-m)\sqrt{2(\text{Clog}(C/m) - C + m} \text{ και}$$

$$r_A = \frac{\frac{3}{2}(C^{2/3} - m^{2/3})}{m^{1/6}}.$$

Όμως είναι αρκετά εύκολο να λύσουμε την εξίσωση $r_p = \frac{C-m}{\sqrt{\text{m}}}$ ως προς C, όπου m είναι οι προσαρμοσμένες προσαυξητικές ζημιές (fitted incremental claims). Τα νέα δεδομένα που προκύπτουν από την μέθοδο bootstrap δίνονται από τον τύπο :

$$C^* = {r_p}^* \cdot \sqrt{m} + \text{m} \tag{2.15}$$

όπου το ${r_p}^*$ είναι τα κατάλοιπα που προκύπτουν από την τυχαία δειγματοληψία .

Συνεπώς έχοντας αποκτήσει το νέο δείγμα bootstrap με τις προσαυξητικές ζημίες, προσαρμόζουμε τα δεδομένα μας στον τριγωνικό πίνακα εξέλιξης ζημιών και παίρνουμε νέο δείγμα bootstrap με τις συσσωρευμένες ζημιές και τους νέους συντελεστές εξέλιξης ζημιών, εφαρμόζοντας τη μέθοδο chain ladder στα δεδομένα bootstrap. Στη συνέχεια, οι μελλοντικές πληρωμές που θα προκύψουν όπως και ο υπολογισμός του αποθέματος γίνεται με τον τρόπο που αναφέραμε σε παραπάνω ενότητες.

Η διαδικασία ολοκληρώνεται με δειγματοληψία από τα κατάλοιπα πολλές φορές (έστω N φορές) κάθε φορά δημιουργώντας ένα νέο δείγμα bootstrap και κατά συνέπεια ένα νέο bootstrap απόθεμα. Τα τυπικά σφάλματα bootstrap είναι οι τυπικές αποκλίσεις των N bootstrap εκτιμήσεων αποθεμάτων. (England & Verall, 1999)

Στο σημείο αυτό χρειάζεται να αναφερθούμε στη παράμετρο κλίμακας Pearson η οποία δεν χρειάστηκε να την υπολογίσουμε μέχρι τώρα στη διαδικασία bootstrap, αλλά είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό του process error. Συμβολίζουμε με φ_P και δίνεται από τη σχέση :

$$\varphi_P = \frac{\sum {r_P}^2}{n-p} \tag{2.16}$$

όπου n είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων στο δείγμα και p ο αριθμός των παραμέτρων προς εκτίμηση.

Σύμφωνα με τους England και Verall (1999) το σφάλμα εκτίμησης του αποθέματος δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{PE_{bs}}(R) = \sqrt{\varphi_P \cdot R + \frac{n}{n-p}(\mathrm{SE_{bs}}(R))^2},$$

όπου R είναι το συνολικό απόθεμα ενός έτους ατυχήματος, και $\mathrm{SE_{bs}}(R)$ είναι το τυπικό σφάλμα των εκτιμώμενων αποθεμάτων όπως υπολογίστηκαν με την διαδικασία bootstrap.Το τυχαίο σφάλμα $\varphi_P R$, υπολογίζεται αναλυτικά και προστίθεται στο σφάλμα εκτίμησης το οποίο το έχουμε μετασχηματίσει προκειμένου να λάβουμε υπόψη μας και τους βαθμούς ελευθερίας.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε:

$$\text{Process variance} = \varphi_P R$$

$$\text{Estimation variance} = \mathrm{SE_{bs}}(R)$$

$$\text{Prediction error} = \mathrm{PE_{bs}}(R) = \sqrt{\varphi_P R + \frac{n}{n-p}(\mathrm{SE_{bs}}(R))^2}\text{ , όπου}$$

$\mathrm{SE_{bs}}(R) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (\hat{R}_{\mathrm{bs}} - R)^2}$ με το $\hat{R}_{\mathrm{bs}}$ να συμβολίζει το εκτιμώμενο απόθεμα που προκύπτει με τη μέθοδο bootstrap.

Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή της μεθόδου bootstrap με τη χρήση προσομοίωσης με στόχο την πρόβλεψη της κατανομής των μελλοντικών δεδομένων. Η διαδικασία πραγματοποιείται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Τοποθετούμε τις συσσωρευμένες απαιτήσεις σε ένα τρίγωνο ζημιών .
- Από τις συσσωρευμένες απαιτήσεις, υπολογίζουμε τους συντελεστές εξέλιξης.
- Υπολογίζουμε τις προσαρμοσμένες συσσωρευμένες απαιτήσεις για το τελευταίο τρίγωνο, δουλεύοντας αναδρομικά προς τα πίσω .
- Υπολογίζουμε τις προσαρμοσμένες αυξητικές απαιτήσεις, m ,για το τελευταίο τρίγωνο, παίρνοντας τις διαφορές, δηλαδή αφαιρούμε τις προσαρμοσμένες συσσωρευμένες απαιτήσεις δύο διαδοχικών ετών εξέλιξης.
- Υπολογίζουμε τα κατάλοιπα του Pearson , με σύμφωνα τη σχέση (2.14).
- Υπολογίζουμε την παράμετρο κλίμακας Pearson, σύμφωνα με τη σχέση (2.16).

- Στο σημείο αυτό θα ξεκινήσουμε μια επαναληπτική διαδικασία loop την οποία θα την επαναλάβουμε N φορές:
    - Στα προσαρμοσμένα unscaled Pearson κατάλοιπα εφαρμόζουμε τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση, δημιουργώντας ένα νέο τρίγωνο κατάλοιπων.
    - Λύνοντας τη σχέση (2.14) ως προς C παίρνουμε ένα νέα ομάδα αυξητικών απαιτήσεων C^* , τα προσαυξητικά δεδομένα bootstrap, όπως φαίνεται και από τη σχέση (2.15).
    - Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε στα συσσωρευμένα bootstrap δεδομένα τη μέθοδο chain ladder και εκτιμούμε τις μελλοντικές πληρωμές.
    - Έπειτα, σε κάθε κελί (i,j) βρίσκουμε τις αυξητικές πληρωμές παίρνοντας τις διαφορές , οι οποίες στις προσομοίωση θα χρησιμοποιηθούν ως μέση τιμή.
    - Για κάθε κελί του τριγώνου προσομοιώνουμε μια απαίτηση από τη διαδικασία Over-Dispersed Poisson.
    - Τελικά αθροίζουμε τις μελλοντικές πληρωμές και παίρνουμε το απόθεμα κάθε έτους ατυχήματος αλλά και το συνολικό απόθεμα. Αποθηκεύουμε τα αποτελέσματα και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

Τα αποτελέσματα που συλλέξαμε θα μας δώσουν την κατανομή πρόβλεψης των μελλοντικών δεδομένων. Η μέση τιμή της κατανομής θα πρέπει να συγκριθεί με τα αποθέματα που εκτιμήσαμε με τη μέθοδο chain ladder. Η τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων δίνει μια εκτίμηση για το σφάλμα πρόβλεψης.

2.2.5. Γενικευμένα Γραμμικά Μοντέλα (GLM)

Τα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα εφαρμόζονται μεταξύ πολλών άλλων και στην αποθεματοποίηση. Περιλαμβάνουν σαν ειδική περίπτωση, την γραμμική παλινδρόμηση, την ανάλυση διασποράς, τα log- linear μοντέλα και τα πολυωνυμικά μοντέλα καθώς και κάποια μοντέλα ανάλυσης επιβίωσης. Αποδεικνύεται πως αυτά τα μοντέλα μοιράζονται κάποιες κοινές ιδιότητες, καθώς και έχουν κοινή μέθοδο εκτίμησης παραμέτρων. Οι McCullagh και Nelder (1989) παρείχαν μια λεπτομερή εισαγωγή στα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα, ενώ στα άρθρα του Renshaw (1989), του Verall (1999) και των Taylor και McGuire (2004) παρατίθενται πολλά παραδείγματα εφαρμογών της μεθόδου στις γενικές ασφαλίσεις.

Περιγραφή του μοντέλου

Τα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα αποτελούν μια γενίκευση του κλασσικού γραμμικού μοντέλου σύμφωνα με το οποίο ο μέσος ενός πληθυσμού εξαρτάται από ένα γραμμικό εκτιμητή μέσω μιας συνάρτησης σύνδεσης.

Ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο αποτελείται από τις τρεις ακόλουθες συνιστώσες:

1) Την Y της οποίας η συνάρτηση πιθανότητας (αν είναι διακριτή) ή συνάρτηση πυκνότητας (αν είναι συνεχής) μπορεί να εκφραστεί ως :

$$f(y;\theta,\varphi) = \exp\{\int \frac{[y-\mu(\theta)]}{\varphi V(\varphi)} d\mu(\theta) + c(y,\varphi)\}$$

όπου $\mu(\theta)$, $V(\varphi)$ είναι γνωστές συναρτήσεις που καθορίζουν την συγκεκριμένη κατανομή. Θα λέμε πως η Y ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών.

Το θ ονομάζεται κανονική παράμετρος και είναι παράμετρος κεντρικής τάσης, το φ είναι παράμετρος κλίμακας (scale) και ονομάζεται παράμετρος διασποράς. Για σταθερό φ έχουμε την εκθετική οικογένεια κατανομών μιας παραμέτρου.

2) Για ένα τυχαίο δείγμα $Y_1,\ldots,Y_n$ έχουμε ένα σύνολο από παραμέτρους β και μεταβλητές X τέτοιες ώστε:

$$n_i = X_i{}'\beta, \text{ για i=1,…,n}$$

3) Μια μονότονη διαφορίσιμη συνάρτηση σύνδεσης g τέτοια ώστε :

$$g(\mu_i) = X_i{}'\beta, \text{ για i=1,…,n}$$

$$\text{όπου } \mu_i = E(Y_i)$$

Για την εκτίμηση των παραμέτρων στη στατιστική χρησιμοποιείται συνήθως η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας. Αυτή τη μέθοδο θα χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να εκτιμήσουμε της παραμέτρου β. Έστω ότι έχουμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $Y_1,\ldots,Y_n$ με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f(y_1, y_2, \ldots, y_N; \theta_1, \ldots, \theta_\rho)$ η οποία εξαρτάται από τις παραμέτρους $(\theta_1, \ldots, \theta_\rho)$. Εάν πάρουμε τον λογάριθμο της συνάρτησης πιθανοφάνειας της β έχουμε:

$$l(\beta) = \ln L(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \{ \int \frac{[y_i - \mu_\iota(\theta)]}{\phi \cdot \mathrm{V}(\mu_\mathrm{i})} d\mu_i(\theta) + c(y_i, \phi) \}$$

και παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$\frac{dl(\beta)}{d(\beta)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dl(\beta)}{d\mu_i} \cdot \frac{d\mu_i}{d(\beta)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \mu_i)}{\phi \cdot \mathrm{V}(\mu_\mathrm{i})} \frac{d\mu_i}{dX_i\beta} \frac{dX_i\beta}{d(\beta)}$$

όπου $\frac{d\mu_i}{\mathrm{dX}_i\beta} = \frac{\mathrm{dg}^{-1}(X_i\beta)}{\mathrm{dX}_i\beta} = \frac{1}{g'(\mu_i)}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως η σχέση γράφεται :

$$\frac{dl(\beta)}{d(\beta)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \mu_\mathrm{i})}{\phi \cdot \mathrm{V}(\mu_\mathrm{i})} \cdot \frac{1}{g^{'}(\mu_\mathrm{i})} \cdot X_i^{'}$$

Γενικευμένο γραμμικό μοντέλο και αποθεματοποίηση

Όπως αναφέραμε παραπάνω η πλειοψηφία των στοχαστικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται στην αποθεματοποίηση, μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσω των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων. Η δομή των μοντέλων αυτών δίνεται από

$$Y_{\mathrm{ij}} \sim f(y; \mu_{\mathrm{ij}}, \varphi)$$

με τα Y_{ij} να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, $\mu_{\mathrm{ij}} = E(y_{\mathrm{ij}})$, όπου $f(\mathrm{y})$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των Y_{ij} , η οποία ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών, και φ να είναι μια παράμετρος κλίμακας. Ακόμη,

$$\eta_{\mathrm{ij}} = g(\mu_{\mathrm{ij}})$$

και

$$\eta_{\mathrm{ij}} = c + \alpha_i + \beta_j$$

με $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ προκειμένου να αποφύγουμε την υπερβολική παραμετροποίηση.

Η πρώτη και σημαντικότερη σχέση προϋποθέτει ανεξαρτησία των αυξητικών ζημιών πράγμα που δεν πραγματοποιείται πάντα.
Στην αποθεματοποίηση υποθέτουμε πως οι προσαυξητικές ζημιές C_{ij} ακολουθούν μία εκ των κατανομών lognormal, Gamma ή Poisson. Για μοντέλα που βασίζονται στις κατανομές Gamma ή Poisson, οι σχέσεις 1 και 3 ορίζουν ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο με $Y_{\mathrm{ij}} = C_{\mathrm{ij}}$ να υποδηλώνει τις προσαυξητικές ζημιές. Η συνάρτηση σύνδεσης είναι $\eta_{\mathrm{ij}} = \ln(\mu_{\mathrm{ij}})$.

Όταν υποθέτουμε πως οι προσαυξητικές ζημιές ακολουθούν την lognormal κατανομή, βλέπε Kremer (1982), έχουμε πως οι $Y_{\mathrm{ij}} = \ln(C_{\mathrm{ij}})$ ακολουθούν την κανονική κατανομή και επομένως οι σχέσεις 1,2,3 ορίζουν ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο για τους λογαρίθμους των αυξητικών ζημιών. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση σύνδεσης είναι $\eta_{\mathrm{ij}} = m_{\mathrm{ij}}$ και η παράμετρος κλίμακας είναι η διακύμανση της κανονικής κατανομής, δηλαδή $\varphi = \sigma^2$.

Όταν ορίζουμε ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο, μπορούμε να παραλείψουμε την κατανομή των Y_{ij} και να ορίσουμε μόνο την variance function και να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους με X^2 μεθόδους πιθανοφάνειας. Οι εκτιμητές παραμένουν συνεπής. Με αυτή την διαμόρφωση, αντικαθιστούμε την υπόθεση για την κατανομή με $\mathrm{var}(Y_{\mathrm{ij}}) = \varphi V(m_{\mathrm{ij}})$ με την $V(\,\cdot\,)$ να συμβολίζει την variance function. Για την κανονική κατανομή έχουμε ότι $V(m_{\mathrm{ij}}) = 1$, για την κατανομή Poisson (ή over dispersed αν $\varphi>1$) $V(m_{\mathrm{ij}}) = m_{\mathrm{ij}}$ ενώ για την κατανομή Gamma έχουμε $V(m_{\mathrm{ij}}) = {m_{\mathrm{ij}}}^2$.

Σύμφωνα με τους England και Verall (England & Verall,1999) ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο με την γραμμική σχέση που δίνεται από την 3 και με $V(m_{\mathrm{ij}}) = m_{\mathrm{ij}}$, δηλαδή μία over dispersed Poisson κατανομή, δίνει εκτιμήσεις αποθεμάτων ακριβώς ίδιες με αυτές που παίρνουμε από την μέθοδο chain ladder. Ωστόσο εάν χρησιμοποιήσουμε την X^2 over dispersed Poisson κατανομή χρειάζεται να θέσουμε τον περιορισμό πως το άθροισμα των στοιχειών σε κάθε στήλη θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο του μηδενός.

Από τη σχέση 3 μπορούμε να πάρουμε τις εκτιμήσεις των μελλοντικών πληρωμών

$$\hat{m}_{\mathrm{ij}} = \hat{c} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j$$

και το απόθεμα σε κάθε έτος ατυχήματος δίνεται από την σχέση

$$\hat{R}_i = \sum_{j=n-i+2}^{n} \hat{m}_{\mathrm{ij}}$$

Ενώ το συνολικό απόθεμα δίνεται από την σχέση

$$\hat{R} = \sum_{i=2}^{n} \hat{R}_i$$

Για τον υπολογισμό των predictions errors θα εργαστούμε όπως ακριβώς το κάναμε και στο μοντέλο του Mack. Συνεπώς, το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης για τις εκτιμώμενες αυξητικές ζημίες είναι:

$$\text{MSEP}[\hat{Y}_{\text{ij}}] = E[(Y_{\text{ij}} - \hat{m}_{\text{ij}})^2] \approx \text{var}[Y_{\text{ij}}] + \text{var}[\hat{m}_{\text{ij}}] \approx \varphi V(\mu_{\text{ij}}) + m_{\text{ij}}{}^2\text{var}[\hat{\eta}_{\text{ij}}]$$

Η παραπάνω σχέση υπολογίζεται εύκολα και μέσω λογισμικών πακέτων χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.

Σύμφωνα με τον Renshaw (1994), το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης για το απόθεμα στο έτος ατυχήματος i δίνεται :

$$\text{MSEP}[\hat{R}_i] \approx \sum_j \varphi V(m_{\text{ij}}) + \sum_j m_{\text{ij}}{}^2\text{var}(\hat{\eta}_{\text{ij}}) + 2 \sum_{\substack{\text{j1,j2} \\ \text{j2>j1}}} m_{\text{ij}_1} m_{\text{ij}_2} \text{Cov}(\hat{\eta}_{\text{ij}_1}, \hat{\eta}_{\text{ij}_2})$$

και για το συνολικό απόθεμα για όλα τα έτη το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης είναι:

$$\text{MSEP}[\hat{R}] \approx \sum_{i,j} \varphi V(m_{\text{ij}}) + \sum_{i,j} m_{\text{ij}}{}^2\text{var}(\hat{\eta}_{\text{ij}}) + 2 \sum_{\substack{\text{i1,j1} \\ \text{i2j2} \\ \text{i1,j1}\neq\text{i2j2}}} m_{\text{ij}_1} m_{\text{ij}_2} \text{Cov}(\hat{\eta}_{\text{ij}_1}, \hat{\eta}_{\text{ij}_2})$$

Οι παραπάνω εκτιμήσεις είναι δύσκολο να υπολογιστούν αναλυτικά ακόμα και αν έχουμε ορίσει σωστά το μοντέλο μας. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος που σε τέτοια προβλήματα χρησιμοποιούμε την διαδικασία bootstrap.

2.2.6. Bayesian Method

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε το άρθρο του Verall (2004), όπου περιγράφει ένα Μπευζιανό (Bayesian) παραμετρικό μοντέλο κάτω από το πρίσμα των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων (GLM) , για να εξετάσει το πρόβλημα της αποθεματοποίησης. Ακόμα, στα έργα των Jewell (1989,1990), Ntzoufras and Dellaportas (2002) και de Alba (2002) γίνεται παρόμοια προσέγγιση μέσω των Μπευζιανών μοντέλων για την εκτίμηση του αποθέματος.

Όπως αναφέρεται και στην ενότητα 2.2.2 η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson μπορεί να θεωρηθεί και ως μια απλή μπευζιανή μέθοδος εκτίμησης του αποθέματος καθώς παρέχει μία εκ των προτέρων (prior) πληροφορία για το τελικό ύψος των ζημιών (ultimate claim). Ωστόσο προκειμένου να θεωρηθεί μια πραγματική μπευζιανή μέθοδος, θα πρέπει να θεωρηθεί μια εκ των προτέρων κατανομή για το ύψος ή για τον αριθμό των ζημιών, αντί για μια ντετερμινιστική τιμή.

Περιγραφή του μοντέλου

Πηγαίνοντας πίσω στο μοντέλο της over dispersed Poisson κατανομής που περιγράψαμε στην ενότητα των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων, δεν έγινε λόγος σε κάποια ενσωματωμένη πληροφορία όταν εκτιμούσαμε τις παραμέτρους των γραμμών (row parameters). Θυμίζουμε την γραμμική σχέση που χρησιμοποιήθηκε:

$$\eta_{\mathrm{ij}} = c + \alpha_i + \beta_j$$

Παρ όλα αυτά, μπορούμε να υποθέσουμε πως τα έτη ατυχήματος (rows) έχουν μια εκ των προτέρων (prior) κατανομή. Αρκετές prior κατανομές θα μπορούσαν να παίξουν αυτό τον ρόλο, όμως η κατανομή Gamma είναι αυτή που θα χρησιμοποιηθεί. Καθώς στα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα το exp (c $+\alpha_i$) ερμηνεύεται ως το συνολικό ποσό (ultimate aggregate loss) που πληρώνεται για τις ζημιές που έχουν έτος προέλευσης i και το $\exp(\beta_j)$ ερμηνεύεται ως το ανάλογο των συνολικών ζημιών του j έτους ανάπτυξης, η χρήση της κατανομής Gamma φαντάζει λογική. Συνεπώς, υποθέτουμε πως κάθε έτος ατυχήματος (row) έχει την παρακάτω prior κατανομή :

$$\alpha_i|\gamma_i,\tau_i \sim \text{ανεξάρτητη Gamma}(\gamma_i,\tau_i)$$

έτσι ώστε

$$E[\alpha_i] = U_i^{(\mathrm{BF})} = \frac{\gamma_i}{\tau_i}$$

Για να εκτιμήσουμε την παράμετρο β_j του μοντέλου και να προβλέψουμε τις μελλοντικές ζημιές ακολουθούμε την μπευζιανή προσέγγιση. Επικεντρωνόμαστε σε ένα έτος ατυχήματος i. Χρησιμοποιώντας τη μπευζιανή προσέγγιση και γνωρίζοντας πως τα έτη ατυχήματος έχουν μια prior κατανομή Gamma, εκτιμάται η παράμετρος φ και τα έτη εξέλιξης έχουν μια παράμετρο β_j η οποία εκτιμάται από τους συντελεστές εξέλιξης της Chain Ladder, τότε η εκ των υστέρων (posterior) κατανομή των αυξητικών ζημιών C_{ij} είναι μια over-dispersed negative binomial κατανομή, με μέση τιμή:

$$[Z_{\mathrm{ij}}D_{i,j-1} + (1 - Z_{\mathrm{ij}})\frac{\gamma_i}{\tau_i}\frac{1}{f_j f_{j+1} \cdots f_n}](f_j - 1)$$

όπου :

$$Z_{\mathrm{ij}} = \frac{\frac{1}{f_j f_{j+1} \cdots f_n}}{\tau_i \varphi + \frac{1}{f_j f_{j+1} \cdots f_n}}.$$

Η παραπάνω μορφή του μοντέλου αποτελεί μορφή του μοντέλου αξιοπιστίας (credibility). Με άλλα λόγια χρησιμοποιεί μια σχέση μεταξύ δύο «ανταγωνιστικών» εκτιμητών:

$$D_{i,j-1} \text{ και } \frac{\gamma_i}{\tau_i}\frac{1}{f_j f_{j+1} \cdots f_n}](f_j - 1) = U_i^{\mathrm{BF}}\frac{1}{f_j f_{j+1} \cdots f_n}.$$

Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς πως όταν η prior δεν έχει καθόλου διακύμανση, τότε το μοντέλο που εξετάζουμε μετατρέπεται στη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson. Από την άλλη, όταν δεν δίνεται καθόλου βάρος στην prior, δηλαδή η prior έχει άπειρη διακύμανση, τότε το μοντέλο που εξετάζουμε μετατρέπεται στη μέθοδο εκτίμησης chain ladder. Δηλαδή είναι σαν να λέμε πως το μπευζιανό μοντέλο έχει δύο ακραία σενάρια. Το πρώτο σενάριο είναι η μέθοδος Chain Ladder (καμία πληροφορία για τις παραμέτρους των γραμμών) και το δεύτερο σενάριο είναι η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson (τέλεια πληροφορία για τις παραμέτρους των γραμμών χωρίς να χρησιμοποιεί τα δεδομένα για να τις εκτιμήσει). Στην πράξη θα ήταν προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε κάποια μέθοδο μεταξύ της μεθόδου Bornhuetter-Ferguson και της μεθόδου chain ladder.

Ακόμη, ο παράγοντας αξιοπιστίας Z_{ij} δηλώνει τη σχέση μεταξύ της μέσης τιμής της prior και των δεδομένων. Παρατηρούμε πως όσο πιο μακριά είμαστε στο τρίγωνο εξέλιξης των ζημιών, τόσο μεγαλύτερο γίνεται το πηλίκο $\frac{1}{f_j f_{j+1} \cdots f_n}$, με αποτέλεσμα να δίνεται μεγαλύτερο βάρος στην εκτίμηση των ζημιών με τη μέθοδο chain ladder (Verall,2002). Ιδιαίτερα σημαντικό είναι να κατανοήσει κανείς πως το βάρος (weight) που δίνουμε σε οποιαδήποτε από τις εκτιμήσεις, επηρεάζεται άμεσα από την prior παράμετρο τ_i που επιλέγουμε.

Η χρήση των Μπεϋζιανών GLM περιέχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα στα οποία αξίζει να αναφερθεί κανείς. Το κυριότερα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι πως επιτρέπει στον χρήστη να χρησιμοποιήσει prior πληροφορία, όπως την prior εκτίμηση των συνολικών απωλειών και στη συνέχεια να εκτιμήσει τις μελλοντικές απώλειες βασιζόμενος στην εκτίμηση που παρέχεται από την μέθοδο chain ladder και από τη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson. Το σημαντικότερο μειονέκτημα του Μπεϋζιανού μοντέλου είναι πως αντιμετωπίζει προβλήματα με τις αρνητικές προσαυξητικές ζημιές της στήλης j ενώ αποτυγχάνει πλήρως όταν το άθροισμα των στηλών των προσαυξητικών ζημιών είναι αρνητικό (Verall,2002).

3ο Κεφάλαιο: Κίνδυνος αποθεμάτων υπό το πρίσμα του Solvency II

3.1 Εισαγωγή

Το νέο εποπτικό πλαίσιο Solvency II αποτελείται από μια σειρά οδηγιών που απαιτείται να εφαρμόσουν όλες οι ασφαλιστικές εταιρίες που δραστηριοποιούνται στην Ευρωπαϊκή Ένωση και παράλληλα εισάγει μεγαλύτερα επίπεδα επάρκειας (prudence levels) από τα υπάρχοντα (Solvency I). Οι νέες αυτές οδηγίες του Solvency είναι πιο πολύπλοκες από τις οδηγίες του παρελθόντος ενώ είναι και πιο ευαίσθητες στον κίνδυνο. Έτσι, το Solvency Capital Requirement (SCR) είναι το Value-at-Risk των βασικών ιδίων κεφαλαίων σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99.5% για περίοδο ενός έτους. Το Solvency Capital Requirement λαμβάνει υπόψη του όλους τους κινδύνους που δύναται να ποσοτικοποιηθούν συμπεριλαμβανομένου και του ασφαλιστικού κινδύνου. Ο ασφαλιστικός κίνδυνος πηγάζει από την αβεβαιότητα που αντιμετωπίζει η ασφαλιστική εταιρία για το εάν θα είναι σε θέση να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις της.

Μια από τις σημαντικότερες πηγές αβεβαιότητας για μια ασφαλιστική εταιρία που δραστηριοποιείται στον κλάδο των γενικών ασφαλίσεων είναι η εκτίμηση των αποθεμάτων ζημιών. Σύμφωνα με το Solvency II τα αποθέματα ζημιών πρέπει να αποτιμούνται με βάση την αρχή της βέλτιστης εκτίμησης. Η βέλτιστη εκτίμηση αντιστοιχεί στην αναμενόμενη τιμή των μελλοντικών χρηματικών ροών λαμβάνοντας υπόψη την χρονική αξία του χρήματος. Η αβεβαιότητα που σχετίζεται με αυτή την εκτίμηση πηγάζει από το γεγονός πως το ακριβές ποσό των μελλοντικών αποζημιώσεων που θα δοθούν για την αποπληρωμή των ζημιών είναι άγνωστο-αβέβαιο την στιγμή της αποτίμησης.

Σύμφωνα με τις οδηγίες του Solvency II, οι ασφαλιστικές εταιρίες υποχρεούνται να είναι σε θέση να μετρούν την μεταβλητότητα στα αποθέματα ζημιών σε περίοδο ενός έτους, (*over one year time horizon*). Όπως αναφέραμε στην παραπάνω ενότητες οι ασφαλιστικές εταιρίες χρησιμοποιούν στοχαστικές μεθόδους για να υπολογίσουν την μεταβλητότητα στην βέλτιστη εκτίμηση. Αναφέραμε πως οι πιο δημοφιλείς μέθοδοι είναι το μοντέλο του Mack (1993) και η μεθοδολογία bootstrap. Ωστόσο, οι παραπάνω μέθοδοι δίνουν μια συνολική εικόνα για την μεταβλητότητα των αποθεμάτων και όχι μια ετήσια (*one –year view*) όπως απαιτείται από το Solvency II.

Το μοντέλο των Wüthrich et al. (2008) είναι το πρώτο μοντέλο που υπολογίζει την μεταβλητότητα των αποθεμάτων σε περίοδο ενός έτους.

3.1.1 Το πρόβλημα

Σε αυτή την ενότητα αναφερόμαστε στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρίες που δραστηριοποιούνται στον κλάδο των γενικών ασφαλίσεων, που έχει να κάνει με την αβεβαιότητα για την εξέλιξη των αποθεμάτων που έχουν δημιουργηθεί σε παρελθόντα έτη ατυχήματος. Ας υποθέσουμε πως βρισκόμαστε στο έτος t=I και θέλουμε να μελετήσουμε το επόμενο έτος t=I+1. Τότε η ζημίες στον χρόνο I και τα κέρδη στον χρόνο I+1 παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 3.1 Ποσά σε χιλιάδες ευρώ, Πηγή: Wüthrich

	Budget Values την 1η Ιανουαρίου (έτος I)	Κέρδη/Ζημιές 31η Δεκεμβρίου (έτος I)
(α)Δεδουλευμένα ασφάλιστρα	4.00.000	4.020.000
(β)Πληρωθείσες ζημιές στο τρέχον έτος ατυχήματος	-3.200.000	-3.240.000
(γ)Ζημιές προηγούμενων ετών ατυχήματος	0	-40.000
(δ)Έξοδα πρόσκτησης κλπ έξοδα	-1.000.000	-990.000
(ε)Έσοδα επενδύσεων	600.000	610.000
Κέρδη προ φόρων	400.000	360.000

Τα ποσά (α) και (β) αντιστοιχούν στα ασφάλιστρα που εισέπραξε η ασφαλιστική εταιρία και στις αποζημιώσεις που κατέβαλε στους δικαιούχους ασφαλιστήριων συμβολαίων τα έτη που εξετάζουμε. Τα ποσά (δ) αντιστοιχούν στα διοικητικά έξοδα, σε έξοδα πρόσκτησης και διάφορα άλλα γενικά έξοδα, ενώ τα ποσά (ε) αντιστοιχούν στα κέρδη της ασφαλιστικής εταιρίας λόγω επενδύσεων. Τα παραπάνω έσοδα-έξοδα, είναι σχετικά απλό να τα ποσοτικοποιηθούν και να μετρηθεί η μεταβλητότητα του αποτελέσματος στο οικονομικό έτος I.

Η ποσότητα των ζημιών προηγούμενων ετών ατυχήματος αναφέρεται στη διαφορά μεταξύ των αποθεμάτων ζημιών τον χρόνο t=I και τον χρόνο t=I+1, προσαρμοσμένα για τις πληρωμές κατά τη διάρκεια του οικονομικού έτους (I,I+1] για ζημιές που πραγματοποιήθηκαν πριν από οικονομικό έτος I. Η παραπάνω διαφορά αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως run off profit and loss, κέρδος ή ζημιά για τα προηγούμενα έτη ή εξέλιξη των αποθεμάτων για τα προηγούμενα έτη κλπ. Σύμφωνα με τους Wüthrich et al (2008) αναφερόμαστε στην ποσότητα (γ) ζημιές προηγούμενων ετών ατυχημάτων years ως claims development result (CDR) και στην παρούσα ενότητα θα προσπαθήσουμε να την μελετήσουμε μέσα από το πρίσμα της μεθόδου Chain Ladder.

3.1.2 Αποθεματοποίηση και αβεβαιότητα

Σύμφωνα με τους Wüthrich et al (2008), όταν οι πληρούνται οι υποθέσεις της μεθόδου του Mack Chain Ladder και τα αποθέματα ζημιών υπολογίζονται με την παραπάνω μέθοδο (χωρίς την υπόθεση κάποιας κατανομής για τα δεδομένα-distribution free), παίρνουμε εκτιμήσεις οι οποίες ποσοτικοποιούν την μεταβλητότητα του CDR. Τα δύο στοιχεία που συμβάλουν στην μεταβλητότητα του CDR είναι το τυχαίο σφάλμα, το οποίο προκύπτει καθώς κάνουμε εκτιμήσεις για τις μελλοντικές πληρωμές, που αποτελούν τυχαίες μεταβλητές και το δεύτερο σφάλμα είναι το σφάλμα εκτίμησης το οποίο προκύπτει καθώς δεν γνωρίζουμε τις παραμέτρους του μοντέλου και κάνουμε κάποια εκτίμηση για αυτές βασιζόμενοι στις πληροφορίες που έχουμε στα χρόνια I και I+1. Για παράδειγμα για την ποσότητα (γ) επιθυμούμε να γνωρίζουμε αν το αρνητικό CDR -40,000 € προέρχεται από λανθασμένη εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου ή αν προέρχεται από κάποιο σφάλμα-έλλειμμα στον δείκτη εξέλιξης ζημιών.

3.1.3 Short-term versus long-term view

Στη διεθνή βιβλιογραφία έχει μελετηθεί μέχρι και σήμερα η μεταβλητότητα του αποτελέσματος γύρω από το εκτιμώμενο απόθεμα, μέχρι να διακανονιστούν ή να πληρωθούν το σύνολο των ζημιών. Για την μέθοδο Chain Ladder αυτό έγινε για πρώτη φορά από τον Mack (1993) και ζητούμενο ήταν βρεθεί η ποσότητα $\mathrm{MSEP}[\hat{D}_{\mathrm{ij}}]$ η οποία αντιστοιχεί στο τυχαίο σφάλμα της εκτίμησης για το ποσό ζημιών ενός έτους ατυχήματος. Η μελέτη της παραπάνω μεταβλητότητας μπορεί να θεωρηθεί ως μακροπρόθεσμη προσέγγιση (long-term view) ωστόσο το νέο εποπτικό πλαίσιο Solvency II απαιτεί την εφαρμογή μιας βραχυπρόθεσμης προσέγγισης (short-term view) για την μελέτη της μεταβλητότητας των εκτιμήσεων των αποθεμάτων. Η βραχυπρόθεσμη προσέγγιση (short-term view) είναι ιδιαίτερα σημαντική για τους παρακάτω λόγους:

- Εάν η βραχυπρόθεσμη προσέγγιση (short-term view) είναι αναποτελεσματική τότε η ασφαλιστική εταιρία δεν θα φτάσει ποτέ στο σημείο να μελετήσει μακροπρόθεσμα τα αποτελέσματα.
- Η βραχυπρόθεσμη προσέγγιση είναι ιδιαίτερα σημαντική στην κατάρτιση επιχειρηματικών πλάνων, καθώς απαιτείται η λήψη αποφάσεων σε τακτά χρονικά διαστήματα.
- Μέσα από τις ετήσιες οικονομικές καταστάσεις και εκθέσεις, αποτυπώνεται η βραχυπρόθεσμη (short-term) πορεία της ασφαλιστικής εταιρίας με αποτέλεσμα κάθε ενδιαφερόμενος είτε είναι πελάτης, είτε η εποπτική αρχή είτε κάποιος επενδυτής να είναι σε θέση ανά πάση χρονική στιγμή να ελέγχει-γνωρίζει την πορεία της ασφαλιστικής εταιρίας.

3.2 Μεθοδολογία

3.2.1 Συμβολισμοί

Όπως περιγράψαμε και σε προηγούμενες ενότητες, συμβολίζουμε με D_{ij} τις αθροιστικές πληρωμές από το έτος ατυχήματος $i \in \{0,\dots,I\}$ μέχρι το έτος εξέλιξης $j \in \{0,\dots,J\}$ όπου το έτος ατυχήματος αναφέρεται στο έτος που πραγματοποιήθηκε η ζημιά. Για λόγους απλότητας θεωρούμε πως I=J, ωστόσο η μεθοδολογία λειτουργεί και σε περιπτώσεις όπου το τελευταίο έτος ατυχήματος για το οποίο έχουμε παρατηρήσει δεδομένα είναι μεγαλύτερο από το έτος εξέλιξης, δηλαδή I>J.

Σύμφωνα με τους Wüthrich et al (2008) θα μελετήσουμε την αποθεματοποίηση και το CDR μέσα από το πλαίσιο της μεθόδου του Mack Chain Ladder. Έτσι, ορίζουμε το μοντέλο χρονολογικής σειράς κάνοντας τις παρακάτω υποθέσεις:

- Οι αθροιστικές πληρωμές D_{ij} σε διαφορετικά έτη ατυχήματος $i \in \{0, \ldots, I\}$ είναι ανεξάρτητες.
- Υπάρχουν σταθερές $f_l > 0$, $\sigma_l > 0$ $(l = 0, \ldots, J-1)$, τέτοιες ώστε για όλα τα $1 \leq j \leq J$ και $0 \leq i \leq I$ να έχουμε

$$D_{i,j} = f_{j-1} \cdot D_{i,j-1} + \sigma_{j-1}\sqrt{D_{i,j-1}} \cdot \varepsilon_{i,j}.$$

- Δοθέντος $B_0 = \{D_{0,0}, \ldots, D_{I,0}\}$ με $D_{i,0} > 0$ τα $\varepsilon_{i,j}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $E[\varepsilon_{i,j}|B_0] = 0$, $E[\varepsilon^2{}_{i,j}|B_0] = 1$ και $P[D_{i,j} > 0|B_0] = 1$ για όλα τα $i \in \{0, \ldots, I\}$ και για όλα τα $j \in \{0, \ldots, J\}$.

Οι παραπάνω υποθέσεις για το μοντέλο χρονολογικής σειράς είναι ισχυρότερες από τις υποθέσεις του μοντέλου του Mack όπου χρησιμοποιήσαμε τις δύο πρώτες ροπές για την μελέτη των αθροιστικών πληρωμών D_{ij}.

Οι δείκτες εξέλιξης (development factors) που εκτιμήθηκαν με την μέθοδο chain ladder τον χρόνο *t=I* δίνονται από

$$\hat{f}_j^{\,I} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} D_{i,j+1}}{S_j^I},$$

με

$$S_j^I = \sum_{i=0}^{I-j-1} D_{i,j}.$$

Τον χρόνο t=I+1,οι δείκτες εξέλιξης της μεθόδου chain ladder λαμβάνουν υπόψη τους τις νέες πληροφορίες για την εξέλιξη των ζημιών με αποτέλεσμα ο εκτιμητής με την μέθοδο chain ladder δίνεται από

$$\hat{f}_j^{\,I+1} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} D_{i,j+1}}{S_j^{I+1}},$$

με

$$S_j^{I+1} = \sum_{i=0}^{I-j} D_{i,j}.$$

Ο αμερόληπτος εκτιμητής του $(\sigma_j)^2$ που εισήγαγε ο Mack (1993) και χρησιμοποιείται και από τους Wüthrich et al (2008) είναι $(\hat{\sigma}^{I}_{j-1})^2 = \frac{1}{I-j}\sum_{i=0}^{I-j} D_{i,j-1}\cdot(\frac{D_{i,j}}{D_{i,j-1}} - \hat{f}^{I+1}_{j-1})^2$.

3.3 Αποτέλεσμα Εξέλιξης Ζημιών (CDR)

Στο πλαίσιο του Solvency II είναι απαραίτητο να μπορούμε να μετράμε την αβεβαιότητα γύρω από την εκτίμηση του best estimate μεταξύ του χρόνου I και I+1. Συνεπώς, δεν θα μας απασχολήσουν πλέον οι πληρωμές μέχρι την αποπληρωμή της ζημίας αλλά η ποσότητα Claims Development Result. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως το CDR συμβολίζει κατά πόσο θα αλλάξουν οι εκτιμώμενες τελικές ζημιές μέσα στον επόμενο χρόνο. Η εκτίμηση του best estimate γίνεται βάση δύο ειδών πληροφορίας. Συμβολίζουμε με D_I τις διαθέσιμες πληροφορίες τον χρόνο t=I (πίνακας 2.2). Μετά από ένα έτος και με την εμφάνιση νέων δεδομένων (κάτω μέρος τριγώνου) έχουμε νέες διαθέσιμες πληροφορίες. Αυτές τις πληροφορίες τον χρόνο t=I+1 τις συμβολίζουμε με D_{I+1}.

3.3.1 Πραγματικό CDR

Το πραγματικό Claims Development Result για έτος ατυχήματος $i \in \{0,\dots,I\}$ στο οικονομικό έτος (accounting year) (I,I+1] δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$\mathrm{CDR}_i(I+1) = E[R_i^I|D_I] - (C_{i,I-i+1} + E[R_i^{I+1}|D_{I+1}]),$$

όπου

- $R_i^I = C_{i,I} - C_{i,I-i}$ είναι το εκτιμώμενο απόθεμα που εξαρτάται από τις πληροφορίες D_I, για έτος ατυχήματος i.
- $R_i^{I+1} = C_{i,I} - C_{i,I-i+1}$ το εκτιμώμενο απόθεμα που εξαρτάται από τις πληροφορίες D_{I+1}, για έτος ατυχήματος i.
- $C_{i,I-i+1} = D_{i,I-i+1} - D_{i,I-i}$ δηλώνουν τις προσαυξητικές πληρωμές (incremental) μεταξύ του χρόνου I και I+1 για έτος ατυχήματος i.

Το πραγματικό Claims Development Result για όλα τα έτη ατυχήματος αθροιστικά δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{CDR}(I+1) = \sum_{i=1}^{I} \mathrm{CDR}_i(I+1).$$

Παρατηρούμε πως το πραγματικό CDR μπορεί να γραφτεί ως η διαφορά μεταξύ δύο εκτιμώμενων τελικών ζημιών δηλαδή

$$\mathrm{CDR}_i(I+1) = E[D_{i,j}|D_I] - E[D_{i,j}|D_{I+1}].$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των martingales $(E[D_{i,j}|D_t])_{t\in N_0}$ αντιλαμβανόμαστε ότι

$$E[\mathrm{CDR}_i(I+1)|D_I] = 0.$$

Αυτό σημαίνει πως όταν γνωρίζουμε τους συντελεστές εξέλιξης Chain Ladder f_j το αναμενόμενο CDR (όταν εξετάζεται την χρονική στιγμή I) είναι ίσο με το μηδέν. Συνεπώς, όταν είναι γνωστοί οι συντελεστές εξέλιξης Chain Ladder αναφερόμαστε στο $\mathrm{CDR}_i(I+1)$ ως το πραγματικό CDR. Αυτό επιβεβαιώνει το γεγονός πως στον πίνακα 3.1 στην ποσότητα (γ) αντιστοιχούν 0 ευρώ.

Γενικότερα, οι τιμές των συντελεστών εξέλιξης Chain Ladder f_j είναι άγνωστές και ως εκ τούτου χρειάζεται να τις εκτιμήσουμε μέσω των $\hat{f}_j^{\,I}$ και $\hat{f}_j^{\,I+1}$ αντίστοιχα. Συνεπώς, εάν αντικαταστήσουμε τις αναμενόμενες τελικές ζημιές $E[D_{i,j}|D_I]$ και $E[D_{i,j}|D_{I+1}]$ με τους εκτιμητές τους $\hat{D}_{i,J}^{I}$ και $\hat{D}_{i,J}^{I+1}$ αντίστοιχα, το πραγματικό CDR για έτος ατυχήματος i στο οικονομικό έτος (I,I+1) εκτιμάται από το CDR που αναλύεται παρακάτω.

3.3.2 Παρατηρούμενο CDR

Το πραγματικό CDR που ορίσαμε παραπάνω δεν είναι αυτό που παρατηρήσαμε στην πράξη καθώς οι πραγματικοί δείκτες εξέλιξης της μεθόδου chain ladder είναι άγνωστοι. Το CDR που βασίζεται στην εκτίμηση των αναμενόμενων τελικών ζημιών που προκύπτουν από την μέθοδο chain ladder, ονομάζεται παρατηρούμενο CDR. Αναφέρεται στη διαφορά μεταξύ του εκτιμώμενου αποθέματος στην αρχή του έτους και στο άθροισμα των πληρωμών μέσα στο έτος και στο εκτιμώμενο απόθεμα στο τέλος του έτους και ορίζεται από

$$\widehat{\mathrm{CDR}}_i(I+1) = \hat{R}_i^{D_I} - (\mathrm{C}_{i,I-i+1} + \hat{R}_i^{D_{I+1}}) = \hat{D}_{i,J}^{I} - \hat{D}_{i,J}^{I+1},$$

Όπου τα $\hat{R}_i^{D_I}$ και $\hat{R}_i^{D_{I+1}}$ είναι οι βέλτιστες εκτιμήσεις των αποθεμάτων στο τέλος του έτους t=I και t=I+1 αντίστοιχα και $\hat{D}_{i,J}^{I}$ και $\hat{D}_{i,J}^{I+1}$ είναι οι αναμενόμενες τελικές ζημιές στο έτος t=I και t=I+1.

Επιπλέον, το συνολικό observable CDR δίνεται από τη σχέση $\sum_{i=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)$.

Η ποσότητα $\widehat{CDR}_i(I+1)$ αναφέρεται ως πρόβλεψη του $\mathrm{CDR}_i(I+1)$ υπό την έννοια πως οι αναμενόμενες τιμές των εκκρεμών ζημιών τον χρόνο t=I και t=I+1, αντικαθίσταται από τις ποσότητες $\hat{R}_i^{D_I}$ και $\hat{R}_i^{D_{I+1}}$. Ωστόσο, έχοντας παρατηρήσει ζημιές μέχρι και τον χρόνο t=I, δεν είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την ποσότητα $\widehat{CDR}_i(I+1)$ παρά μόνο στο τέλος του οικονομικού έτους (I,I+1] όταν θα έχουμε διαθέσιμες τις πληροφορίες D_{I+1}.

Την χρονική στιγμή t=I+1,το $\widehat{CDR}_i(I+1)$ είναι η ποσότητα -40,000€ του πίνακα 3.1. Σε αυτό το σημείο εγείρονται δύο ερωτήματα: (1) Το observable CDR τη χρονική στιγμή I+1 διαφέρει σημαντικά από το αναμενόμενο CDR τη χρονική στιγμή I; και (2) Εάν γνωρίζαμε τους πραγματικούς συντελεστές εξέλιξης Chain Ladder f_j υπάρχει περίπτωση να βρούμε θετικό CDR την χρονική στιγμή I+1; Θα απαντήσουμε στα δύο αυτά ερωτήματα στις ενότητες που ακολουθούν.

3.3.3 Σφάλματα εκτίμησης

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη μεταβλητότητα του αναμενόμενου CDR στον χρόνο t=I. Εάν γνωρίζουμε τους συντελεστές εξέλιξης Chain Ladder f_j, τότε η μεταβλητότητα είναι ίση με τη process variance (καθώς οι μελλοντικές χρηματικές ροές είναι τυχαίες μεταβλητές).

Εάν τώρα δε γνωρίζουμε τους πραγματικούς συντελεστές Chain Ladder, χρειάζεται να πάρουμε τους εκτιμητές τους $\hat{f}_j^{I}$ και $\hat{f}_j^{I+1}$ τη χρονική στιγμή I και I+1 αντίστοιχα. Συνεπώς, εκτός από την process variance θα έχουμε και σφάλμα εκτίμησης (estimation error). Θα μελετήσουμε το σφάλμα εκτίμησης του CDR τη χρονική στιγμή t=I.

Σύμφωνα με τους Wüthrich et al (2008) ο στόχος μας είναι να μετρήσουμε τη μεταβλητότητα μεταξύ του observable CDR για όλα τα έτη ατυχήματος τη χρονική στιγμή I+1 γύρω από το πραγματικό (true) CDR για όλα τα έτη ατυχήματος (aggregate) τη χρονική στιγμή I+1.

Αρχικά, υπολογίζουμε την υπό συνθήκη διακύμανση του πραγματικού CDR. Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία μεταξύ των ετών ατυχήματος παίρνουμε:

$$Var(\sum_{i=1}^{I} CDR_i(I+1) \mid D_I) = \sum_{i=1}^{I} E[C_{i,j} \mid D_I]^2 \cdot \frac{\sigma_{\text{I-i}}^2 / f_{I-i}^2}{D_{I,I-i}}.$$

Στον χρόνο t=I η παραπάνω μπορεί να εκτιμηθεί ως:

$$\hat{Var}(\sum_{i=1}^{I} CDR_i(I+1) \mid D_I) = \sum_{i=1}^{I} \hat{D}_{i,J}^{2} \cdot \frac{(\hat{\sigma}_{I-i}^{I})^2 / (\hat{f}_{I-i}^{I})^2}{D_{I,I-i}}.$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει μια εκτίμηση για την μεταβλητότητα του συνολικού πραγματικού CDR (έχοντας τους συντελεστές εξέλιξης Chain Ladder f_j)

Ωστόσο επειδή οι πραγματικοί συντελεστές εξέλιξης Chain Ladder f_j μας είναι άγνωστοι, δεν θα είμαστε σε θέση να παρατηρήσουμε το πραγματικό συνολικό CDR παρά μόνο το observable συνολικό CDR (με το f_j να εκτιμάται από τα $\hat{f}_j^{I}$ και $\hat{f}_j^{I+1}$ τη χρονική στιγμή I και I+1 αντίστοιχα).

Υπολογίζουμε τη μεταβλητότητα μεταξύ του πραγματικού συνολικού CDR και του observable συνολικού CDR παίρνοντας το υπό συνθήκη σφάλμα εκτίμησης που δίνεται από τη σχέση:

$$MSEP_{D_I}(\sum_{i=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)) = E[(\sum_{i=1}^{I} CDR_i(I+1) - \sum_{i=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1))^2 \mid D_I].$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί μια αναδρομική σχέση και αντικατοπτρίζει την διαφορά που υπάρχει μεταξύ του πραγματικού αθροιστικού CDR (όταν είναι γνωστοί οι συντελεστές εξέλιξης chain ladder), $\sum_{i=1}^{I} \mathrm{CDR}_i(I+1)$, και της εκτιμήτριας συνάρτησης αυτού, το παρατηρούμενο συνολικό CDR, $\sum_{i=1}^{I} \widehat{\mathrm{CDR}}_i(I+1)$, δοθέντος της πληροφορίας D_I. Δηλαδή, μπορεί να απαντήσει στο ερώτημα κατά πόσο μπορεί το πραγματικό CDR να είναι θετικό (εάν γνωρίζουμε τους συντελεστές εξέλιξης Chain Ladder) όταν έχουμε παρατηρήσει observable CDR -40,000€ (Πίνακας 3.1). Ουσιαστικά, αυτή η αναδρομική σχέση διαχωρίζει το σφάλμα διαδικασίας από την αβεβαιότητα σχετικά με την εκτίμηση των παραμέτρων.

Σύμφωνα με τους Wüthrich et al (2008) προκειμένου να παρακάμψουμε το πρόβλημα των άγνωστων συντελεστών εξέλιξης ζημιών Chain Ladder, θα υπολογίσουμε αρχικά το υπό συνθήκη τυπικό σφάλμα του CDR για ένα έτος ατυχήματος.

Ένα έτος ατυχήματος

Όταν θέλουμε να μετρήσουμε την μεταβλητότητα για ένα μόνο έτος ατυχήματος $i \in \{0, \ldots, I\}$ τότε το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης δοθέντος την πληροφορία D_I, ορίζεται ως

$$\mathrm{MSEP}_{D_I}(\widehat{\mathrm{CDR}}_i(I+1)) = E[(\mathrm{CDR}_i(I+1) - \widehat{\mathrm{CDR}}_i(I+1))^2 | D_I],$$

ή ισοδύναμα

$$\mathrm{MSEP}_{D_I}(\widehat{CDR}_i(I+1)) = \Phi_{i,j}^{I} + (E[\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I])^2,$$

όπου,

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j}^{I} &= \mathrm{Var}(\mathrm{CDR}_i(I+1) - \widehat{\mathrm{CDR}}_i(I+1)|D_I) \\ &= \mathrm{Var}(\mathrm{CDR}_i(I+1)|D_I) + \mathrm{Var}(\widehat{\mathrm{CDR}}_i(I+1)|D_I) \\ &\quad -2 \cdot \mathrm{Cov}(\widehat{\mathrm{CDR}}_i(I+1), \mathrm{CDR}_i(I+1)|D_I). \end{aligned}$$

Ο όρος $\mathrm{Var}(\mathrm{CDR}_i(I+1)|D_I)$ δηλώνει το υπό συνθήκη τυχαίο σφάλμα του πραγματικού CDR, ενώ ο όρος $\mathrm{Var}(\widehat{\mathrm{CDR}}_i(I+1)|D_I)$ ερμηνεύεται ως το υπό συνθήκη τυχαίο σφάλμα του παρατηρούμενου CDR (καθώς το παρατηρούμενο CDR στον χρόνο t=I+1 είναι τυχαία μεταβλητή στον χρόνο t=I) και ο όρος με την συνδιακύμανση δείχνει πως συνδέονται τα πραγματικά CDR, $\mathrm{CDR}_i(I+1)$ με τα παρατηρούμενα CDR, $\widehat{\mathrm{CDR}}_i(I+1)$.

Ο δεύτερος όρος της εξίσωσης $(E[\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I])^2$ δηλώνει το σφάλμα της εκτίμησης. Την αβεβαιότητα που προέρχεται από την εκτίμηση των πραγματικών δεικτών εξέλιξης Chain Ladder f_j.

Επιπλέον, χρειάζεται να αναφερθούμε και στο τυπικό σφάλμα της εκτίμησης που προκύπτει μεταξύ του παρατηρούμενου CDR και σε περίπτωση που το πραγματικό CDR είναι 0 (βλέπε Πίνακα 3.1 ποσότητα (γ)). Παίρνουμε λοιπόν την σχέση:

$$
\begin{aligned}
MSEP_{D_I} &= E[(\sum_{i=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1) - 0)^2 \mid D_I] \\
&= \hat{E}_{D_I}[(E[\sum_{i=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1) \mid D_I])^2] + \hat{V}ar(\sum_{i=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1) \mid D_I)
\end{aligned}
$$

Ο πρώτος όρος της σχέσης, ονομάζεται $(\text{u-bias})^2$ και αποτελεί την αναμενόμενη μεροληψία που παρατηρείται μεταξύ του παρατηρούμενου CDR και του εκτιμητή του (την τιμή 0). Ο δεύτερος όρος, που είναι η διακύμανση του observable CDR , αποτελεί το σφάλμα διαδικασίας (*process error*) που συνδέεται με την πρόβλεψη προκύπτει διότι είναι η μεταβλητή που εκτιμάται είναι τυχαία, στην προκειμένη περίπτωση το observable CDR.

Υπό συνθήκη MSE για ένα έτος ατυχήματος

Εκτιμούμε το υπό συνθήκη τυπικό σφάλμα της εκτίμησης MSE του εκτιμητή του CDR στο χρόνο t=I+1 για το οικονομικό έτος (I,I+1] και για κάθε έτος ατυχήματος $i \in \{0,\ldots,I\}$ σύμφωνα με την σχέση:

$$\hat{MSEP}_{D_I}(\hat{CDR}_i(I+1)) = \hat{\Phi}_{i,J}^{I} + (\hat{D}_{i,J}^{I})^2 \cdot \hat{\Delta}_{i,J}^{I},$$

όπου $\hat{\Phi}_{1,J}^{I} = 0$ και για $i > 1$ έχουμε

$$\hat{\Phi}_{i,J}^{I} = (\hat{D}_{i,J}^{I})^2 \cdot [1 + \frac{(\hat{\sigma}_{\mathrm{I-i}}^{\mathrm{I}})^2 / (\hat{f}_{I-i}^{I})^2}{D_{I,I-i}} \cdot (\prod_{l=I-i+1}^{J-1} (1 + \frac{(\hat{\sigma}_l^{I})^2 / (\hat{f}_l^{I})^2}{(S_l^{I+1})^2} \cdot D_{I-l,l}) - 1),$$

$$\hat{\Delta}_{i,J}^{I} = \frac{(\hat{\sigma}_{\mathrm{I-i}}^{\mathrm{I}})^2 / (\hat{f}_{I-i}^{I})^2}{S_{I-i}^{I}} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} (\frac{D_{I-j,j}}{S_j^{I+1}})^2 \cdot \frac{(\hat{\sigma}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{I}})^2 / (\hat{f}_j^{I})^2}{S_j^{I}}.$$

Ο όρος $\hat{\Phi}_{i,J}^{I}$ εκτιμά την διακύμανση που συμβολίζει ο όρος $\Phi_{i,j}^{I}$. Ο όρος $(\hat{D}_{i,J}^{I})^2 \cdot \hat{\Delta}_{i,J}^{I}$ αποτελεί μια εκτίμηση της μεροληψίας $(E[\hat{CDR}_i(I+1) \mid D_I])^2$).

Συνολική Εκτίμηση για τα προηγούμενα έτη ζημιών

Όταν συγκεντρώνουμε στοιχεία με βάση τα έτη του παρελθόντος, χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μας της συσχετίσεις μεταξύ των διαφορετικών ετών ατυχήματος, καθώς οι ίδιες παρατηρήσεις χρησιμοποιούνται προκειμένου να εκτιμηθούν οι συντελεστές εξέλιξης Chain Ladder. Σύμφωνα με τον ορισμό της υποθετικής MSE του συνολικού εκτιμητή CDR το αποτέλεσμα που ακολουθεί συνοψίζει τον ορισμό υπό το πρίσμα της μεθόδου Chain Ladder.

Εκτιμούμε το υποθετικό τυπικό σφάλμα της εκτίμησης για το συγκεντρωτικό εκτιμητή του CDR στο χρόνο t=I+1 για το οικονομικό έτος (I,I+1] ως:

$$M\hat{S}EP_{D_I}\left(\sum_{i=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)\right) = \sum_{i=1}^{I} M\hat{S}EP(C\hat{D}R_i(I+1)) + 2\sum_{i>k>0}(\hat{\Psi}^{I}_{i,k} + \hat{D}^{I}_{i,j}\cdot\hat{D}^{I}_{k,j} + \hat{\Lambda}^{I}_{k,j}),$$

,

Όπου για $i > k > 1$

$$\hat{\Psi}^{I}_{i,k} = \frac{\hat{D}^{I}_{i,J}}{\hat{D}^{I}_{k,J}} \cdot \left(1 + \frac{(\hat{\sigma}^{I}{}_{I-k})^2/(\hat{f}^{I}{}_{I-k})^2}{S^{I+1}_{I-k}}\right) \cdot \left(1 + \frac{(\hat{\sigma}^{I}{}_{I-k})^2/(\hat{f}^{I}{}_{I-k})^2}{C_{k,I-k}}\right)^{-1} \cdot \hat{\Phi}^{I}_{k,J},$$

$$\hat{\Lambda}^{I}_{k,J} = \frac{C_{k,I-k}}{S^{I+1}_{I-k}} \cdot \frac{(\hat{\sigma}^{I}_{I-k})^2/(\hat{f}^{I}_{I-k})^2}{S^{I}_{I-k}} + \sum_{j=I-k+1}^{J-1}\left(\frac{D_{I-j,j}}{S^{I+1}_{j}}\right)^2 \cdot \frac{(\hat{\sigma}^{I}_{j})^2/(\hat{f}^{I}_{j})^2}{S^{I}_{j}}$$

Και $\hat{\Phi}^{I}_{i,1} = 0$ για $i > 1$.

Σύμφωνα με το Solvency II λοιπόν είναι απαραίτητο να υπολογίζουμε το CDR με στόχο τον υπολογισμό της κατανομής των αναμενόμενων υποχρεώσεων μετά από ένα έτος. Ιδιαίτερα για τον κίνδυνο των αποθεμάτων (reserve risk) είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της κατανομής των κερδών/ζημιών σε περίοδο ενός έτους. Αυτή η προσέγγιση αποθεματοποίησης είναι αρκετά διαφορετική από την τυπική προσέγγιση που εφαρμόζεται ως τώρα, η οποία έχει ως στόχο την εκτίμηση του τελικού ύψους ζημιών (π.χ. Mack 1993, England &Verall 1999, 2002).

Η μέθοδος των Wüthrich et al (2008) γίνεται ολοένα και πιο δημοφιλής ωστόσο δεν παύει να έχει περιορισμούς. Αρχικά, δεν απαντάει στο ερώτημα σχετικά με το τι θα προέκυπτε εάν δεν χρησιμοποιούσαμε τις υποθέσεις του μοντέλου του Mack αλλά κάποιο άλλο μοντέλο. Επιπλέον, με την μεθοδολογία που αναπτύξαμε δεν είμαστε σε θέση να μελετήσουμε την κατανομή του CDR παρά μόνο την τυπική του απόκλιση.

3.4 Αποθέματα και κεφαλαιακές απαιτήσεις

3.4.1 Βέλτιστη εκτίμηση και περιθώριο κινδύνου

Θεωρούμε πως είμαστε στον χρόνο t σε μια ασφαλιστική εταιρία που δραστηριοποιείται στον κλάδο των γενικών ασφαλίσεων και ας συμβολίσουμε πως L τις εκκρεμείς υποχρεώσεις της ασφαλιστικής (outstanding loss liabilities) προς τους ασφαλισμένους. Ας θεωρήσουμε πως το σύνολο των υποχρεώσεων θα αποπληρωθεί σε ένα μελλοντικό διάστημα T.

Το απαιτούμενο απόθεμα ή το ύψος των τεχνικών προβλέψεων $R^{\star}$ που οφείλει να διατηρεί μια ασφαλιστική εταιρία ορίζεται ως το άθροισμα της βέλτιστης εκτίμησης (best estimate) $\bar{L}$ και ενός (μη αρνητικού) περιθωρίου κινδύνου (risk margin) δ τέτοιο ώστε:

$$R^{\star} = \bar{L} + \delta \tag{3.1}$$

Στο σημείο αυτό χρειάζεται να ορίσουμε τις έννοιες της βέλτιστης εκτίμησης και του περιθωρίου κινδύνου.

Βέλτιστη Εκτίμηση

Η βέλτιστη εκτίμηση (BE) αντιστοιχεί στην αναμενόμενη τιμή $E(L)$ των ζημιών-υποχρεώσεων που δεν έχουν αποπληρωθεί ακόμα λαμβάνοντας υπόψη τη χρονική αξία του χρήματος (παρούσα αξία των μελλοντικών χρηματικών ροών). Αξίζει να σημειώσουμε πως σε πρακτικά προβλήματα μπορούμε να δουλέψουμε και με την εκτιμώμενη τιμή $\hat{L}$ η οποία προέρχεται μέσα από τα δεδομένα που παρατηρήσαμε.

Περιθώριο Κινδύνου

Ενώ η ερμηνεία της βέλτιστης εκτίμησης $\bar{L}$ ως η αναμενόμενη τιμή $E(L)$ είναι ευρέως αποδεκτή, δεν μπορούμε να πούμε το ίδιο και για την ερμηνεία του περιθωρίου κινδύνου (risk margin). Σκοπός του περιθώριο κινδύνου (RM) στα πλαίσια της σωφροσύνης είναι να απορροφά την αβεβαιότητα στις υποχρεώσεις που δεν έχουν αποπληρωθεί ακόμα. Παρόλα αυτά το περιθώριο κινδύνου δεν πρέπει να είναι υπερβολικά υψηλό αλλά πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να εξασφαλίζει ότι η αξία των τεχνικών προβλέψεων $R^{\star}$ να ισοδυναμεί με το επιπρόσθετο ποσό το οποίο άλλες ασφαλιστικές επιχειρήσεις αναμένεται να απαιτήσουν προκειμένου να αναλάβουν το σύνολο του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου της δική μας ασφαλιστικής επιχείρησης. Καθώς όμως δεν υπάρχει αγοραία αξία για τις ασφαλιστικές υποχρεώσεις πρέπει να κατασκευαστεί ένα μοντέλο που να αποδίδει την αγοραία αξία των υποχρεώσεων. Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία, αυτός που θα αγοράσει το σύνολο των υποχρεώσεων της ασφαλιστικής μας εταιρίας θα απαιτήσει ένα επιπλέον ποσό από την βέλτιστη εκτίμηση των υποχρεώσεων προκειμένου να αναλάβει τον κίνδυνο. Το ποσό αυτό θεωρείται ως ένα είδος ανταμοιβής που επιθυμεί αυτός που εξαγοράζει τις υποχρεώσεις για να αναλάβει να πληρώσει τις μελλοντικές αποζημιώσεις οι οποίες ενέχουν μεγάλο βαθμό αβεβαιότητας. Η παραπάνω ερμηνεία του περιθωρίου κινδύνου είναι απόλυτα συμβατή με τον ορισμό της δίκαιης τιμής (fair value) V, δηλαδή στην αποτίμηση των υποχρεώσεων του συνόλου του χαρτοφυλακίου σε τιμές της αγοράς (mark-to-market). Ορίζουμε ως $V(t; X_T)$

την δίκαιη τιμή τη χρονική στιγμή t των μελλοντικών χρηματικών ροών X_T που θα αποπληρωθούν την χρονική στιγμή T. Συνεπώς, η δίκαιη τιμή για το σύνολο των υποχρεώσεων (outstanding loss liabilities) είναι

$$V = V(t; L) \tag{3.2}$$

Το απαιτούμενο απόθεμα υπό το πρίσμα της δίκαιης τιμής, ορίζεται ως η δίκαιη τιμή των υποχρεώσεων:

$$R^{\star} = V(t; L) \tag{3.3}$$

Όταν το απαιτούμενο απόθεμα είναι μεγαλύτερο από την δίκαιη τιμή, το θετικό επιπλέον τμήμα (loading) $E = R^{\star} - V$ συμβολίζει, στο χρόνο t, την αξία των μελλοντικών κερδών που προέρχονται από την επένδυση του $R^{\star}$. Συχνά αναφέρεται και ως *Value of Business In Force (VBIF)* και αποτελεί σημαντικό στοιχείο της εσωτερικής αξίας ενός χαρτοφυλακίου.

Στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές για τον καθορισμό του περιθωρίου κινδύνου RM μεταξύ αυτών η προσέγγιση του κόστους κεφαλαίου (CoC approach) και η προσέγγιση των ποσοστημορίων (quantile methods).

Σύμφωνα με την προσέγγιση των ποσοστημορίων, το περιθώριο κινδύνου καθορίζεται ως η διαφορά μεταξύ ενός ποσοστημορίου (75%) και της βέλτιστης εκτίμησης ενώ σύμφωνα με τη προσέγγιση του κόστους κεφαλαίου το περιθώριο κινδύνου καθορίζεται βάσει του κόστους που έχει η διακράτηση κεφαλαίων για τις πληρωμές των υποχρεώσεων. Περαιτέρω ανάλυση της μεθόδου γίνεται στην ενότητα 4.3.

3.4.2 Προσαρμοσμένες στον κίνδυνο υποχρεώσεις

Σύμφωνα με τον ορισμό του περιθωρίου κινδύνου που δώσαμε στην παραπάνω ενότητα, το απαιτούμενο απόθεμα δεν είναι πάντα αρκετό για τα δεδομένα του Solvency. Προκειμένου να εξασφαλιστεί φερεγγυότητα με ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης, καθορίζεται μια προσαρμοσμένη στον κίνδυνο αξία (Risk Adjusted Value, RAV) για τις υποχρεώσεις. Η προσαρμοσμένη στον κίνδυνο αξία για το L ερμηνεύεται ως ένας αρκετά συντηρητικός υπολογισμός $W(L)$ (δηλαδή η χειρότερη περίπτωση) των υποχρεώσεων που δεν έχουν ακόμα αποπληρωθεί. Για παράδειγμα, το $W(L)$ δεν θα ξεπεράσει την τιμή των υποχρεώσεων L για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Έτσι παίρνουμε την ακόλουθη ανισότητα:

$$\bar{L} < R^{\star} < W(L) \tag{3.4}$$

Το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας που απαιτείται να έχει στη κατοχή η ασφαλιστική εταιρία είναι το ποσό K και ορίζεται ως:

$$K = W(L) - R^{\star} = W(L) - \bar{L} - \delta \tag{3.5}$$

Το ποσό αυτό αναφέρεται ως *reserve risk capital,* σε κάποιο δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Βέβαια, υπάρχει και ο κίνδυνος των ασφαλίστρων (*premium risk*) που σχετίζεται με τον κίνδυνο οι μελλοντικές αποζημιώσεις που καλείται να καταβάλει η ασφαλιστική εταιρία να είναι μεγαλύτερες από τα ασφάλιστρα που θα εισπράξει. Συγκεκριμένα, συμβολίζουμε με P_{n+1} τα δεδουλευμένα ασφάλιστρα που θα εισπράξει στο έτος n+1 από τα νέα ασφαλιστήρια συμβόλαια και ως $\hat{U}'_{n+1}$ συμβολίζουμε τις εκτιμώμενες τελικές ζημιές που προκύπτουν από τη μέθοδο Chain Ladder. Τότε ο κίνδυνος των ασφαλίστρων K^P εκφράζεται ως:

$$P[\hat{U}'_{n+1} - P_{n+1} \leqslant K^P] = p.$$

Η διαφορά $\hat{U}'_{n+1} - P_{n+1}$ συμβολίζει την πιθανή απώλεια που θα υποστεί η ασφαλιστική εταιρία, εάν οι εκτιμώμενες τελικές ζημιές στο τέλος του έτους είναι μεγαλύτερες από τα δεδουλευμένα ασφάλιστρα.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, δεν εξετάζουμε τον κίνδυνο των ασφαλίστρων παρά μόνο την ανεπάρκεια του αποθέματος οπότε θα αναφερόμαστε στο *reserve risk capital ως risk capital (RC).* Στα πλαίσια του Solvency II το κεφάλαιο κινδύνου (risk capital) αναφέρεται συνήθως ως Solvency Capital Requirement (SCR) για τον κίνδυνο του αποθέματος (reserve risk).

Όταν αναφερόμαστε στη τυχαία μεταβλητή X ως ένα τυχαίο ποσό και αφού έχουμε ορίσει το RAV $W(X)$, είναι χρήσιμο να ορίσουμε την προσαρμοσμένη στη μέχρι σήμερα πληροφορία τιμή της X ως την διαφορά:

$$U(X) = W(X) - E(X) \tag{3.6}$$

Στη συνέχεια, μέσω των σχέσεων (3.5) και (3.6) παίρνουμε το κεφάλαιο κινδύνου :

$$K = U(L) - \delta \tag{3.7}$$

ως unanticipated loss μείον το περιθώριο κινδύνου (RM).

Σημειώνουμε πως η $E(L)$ είναι η μέση τιμή των ζημιών και εύκολα προκύπτει πως το απαιτούμενο απόθεμα $R^{\star}$ (τεχνικές προβλέψεις) δίνεται από το άθροισμα του *anticipated* loss και του περιθωρίου κινδύνου (RM).

Από τα παραπάνω προκύπτει πως οι εκκρεμείς υποχρεώσεις της ασφαλιστικής εταιρίας, αποτελούνται από δύο μέρη, από το απαιτούμενο απόθεμα $R^{\star}$ και από το κεφάλαιο κινδύνου K. Εύλογα συμπεραίνουμε (υπό το πρίσμα της δίκαιης τιμής) πως το πρώτο μέρος αντικατοπτρίζει την αγοραία αξία των υποχρεώσεων και κατά κανόνα καλύπτεται από τους κατόχους ασφαλιστηρίων συμβολαίων μέσω των ασφαλίστρων που αποδίδουν και το δεύτερο μέρος καλύπτεται από τους μετόχους της ασφαλιστικής εταιρίας οι οποίοι αναζητούν μια ανταμοιβή για την δέσμευση των κεφαλαίων τους.

Κόστος του κεφαλαίου κινδύνου

Συμβολίζουμε με h την απόδοση που ζητούν οι μέτοχοι στον χρόνο t προκειμένου να επενδύσουν σε ένα προϊόν υψηλού κινδύνου και συμβολίζουμε με i το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk free rate) που υπάρχει στην αγορά την χρονική στιγμή t. Το κόστος για το reserve risk capital δίνεται από

$$\kappa = s \cdot K \tag{3.8}$$

όπου $s = h - i$ είναι το spread μεταξύ της απόδοσης που ζητούν οι μέτοχοι και του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο.

3.4.3 Περιθώριο Κινδύνου-Η προσέγγιση του κόστους κεφαλαίου

Σε μια αποτελεσματική αγορά η υπερβάλλουσα απόδοση s είναι μια ποσότητα μη αρνητική και απεικονίζει το *risk premium*, δηλαδή την επιπλέον απόδοση που αναζητούν οι μέτοχοι για να επενδύσουν στην ασφαλιστική εταιρία. Συνεπώς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κόστος κ για το reserve risk capital αντί για το περιθώριο κινδύνου δ. Θέτοντας $\delta = \kappa = s \cdot K$ στη σχέση (3.7) παίρνουμε $K = U(L) - s \cdot K$ από την οποία προκύπτει:

$$K = \frac{W(L) - \bar{L}}{1 + s} \tag{3.9}$$

και

$$\delta = \frac{s}{1 + s}[W(L) - \bar{L}] \tag{3.10}$$

Έχουμε αναφέρει το απαιτούμενο απόθεμα-τεχνικές προβλέψεις ως $R^{\star} = \bar{L} + \delta$, οπότε μπορούμε να το φέρουμε στη μορφή:

$$R^{\star} = \frac{\bar{L} + s \cdot W(L)}{1 + s}. \tag{3.11}$$

Με την προσέγγιση του κόστους κεφαλαίου, το πρόβλημα αποθεματοποίησης (reserve problem) και το πρόβλημα κεφαλαίου (capital problem) μετατρέπονται σε ένα κοινό πρόβλημα. Τόσο το risk capital όσο και το περιθώριο κινδύνου (RM) εκφράζονται μέσω των σχέσεων (3.9) και (3.10) αφού πρώτα ορίσουμε το RAV $W(L)$ και το s . Ακόμα, το απαιτούμενο απόθεμα- τεχνικές προβλέψεις είναι ο σταθμισμένος μέσος όρος της βέλτιστης εκτίμησης $\bar{L}$ και των RAV των υποχρεώσεων, με βάρη $\frac{1}{1+s}$ και $\frac{s}{1+s}$ αντίστοιχα.

Με άλλα λόγια η προσέγγιση του κόστους κεφαλαίου βασίζεται στο γεγονός πως οι ασφαλιστές χρειάζονται κεφάλαια για να λειτουργήσουν και αυτοί που παρέχουν το κεφάλαιο απαιτούν αποζημίωση για τον κίνδυνο απομείωσης του κεφαλαίου τους. Κάνοντας την παραδοχή πως το κόστος κεφαλαίου (CoC-Cost of Capital) είναι σταθερό και ίσο με 6%, όπως αναφέρεται στην QIS-5 κατευθυντήρια οδηγία, το περιθώριο κινδύνου την χρονική στιγμή t=0 και ορίζεται ως :

$$\mathrm{RM}_t = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{\mathrm{CoC} \cdot \mathrm{SCR}_t}{(1+i)^{t+1}} \tag{3.12}$$

όπου *SCR* είναι το απαιτούμενο περιθώριο φερεγγυότητας και *i* το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

3.4.4 Κίνδυνος αποθεμάτων: Ορισμός και μέτρηση

Ο κίνδυνος του αποθέματος ορίζεται ως ο κίνδυνος ανεπάρκειας των τεχνικών προβλέψεων που έχουν σχηματιστεί για απαιτήσεις που έχουν πραγματοποιηθεί την ημερομηνία αποτίμησης. Χρησιμοποιείται συνήθως η περίοδος ενός έτους

Υποθέτουμε πως μια ασφαλιστική εταιρία αντιμετωπίζει μόνο τον κίνδυνο αποθεμάτων. Για χάρην απλότητας δεν θα λάβουμε υπόψη μας κάποιο Risk Margin και την φορολογία. Ορίζουμε την βέλτιστη εκτίμηση ως την αναμενόμενη τιμή των μελλοντικών χρηματικών ροών, χωρίς τη χρήση προεξόφλησης και περιθωρίου ασφαλείας.

Συνεπώς, η NAV(Net Asset Value) δίνεται από :

$$\mathrm{NAV}(I) = A(I) - \hat{R}_i^I = A(I) - (\hat{D}_{i,I_{\mathrm{ult}}}^I - D_{i,I-i}),$$

και

$$\mathrm{NAV}(I+1) = A(I+1) - \hat{R}_i^{I+1} = A(I) - C_{i,I-i+1} - (\hat{D}_{i,I_{\mathrm{ult}}}^{I+1} - D_{i,I-i} - C_{i,I-i+1}),$$

Όπου

- $A(I)$: Σύνολο περιουσιακών στοιχείων της εταιρίας τη χρονική στιγμή t=I,
- $\mathrm{NAV}(I)$: Σύνολο ιδίων κεφαλαίων της εταιρίας τη χρονική στιγμή t=I,
- $\mathrm{NAV}(I+1)$: Σύνολο ιδίων κεφαλαίων της εταιρίας τη χρονική στιγμή t=I+1,
- $\hat{D}_{i,I_{\mathrm{ult}}}^I$: Βέλτιστη εκτίμηση των συνολικών εκτιμώμενων τελικών ζημιών για το έτος ατυχήματος i, δοθέντος τις πληροφορίες που έχουμε τη χρονική στιγμή t=I,
- $\hat{R}_i^I$: Βέλτιστη εκτίμηση των εκτιμώμενων αποθεμάτων για το έτος ατυχήματος i, δοθέντος τις πληροφορίες που έχουμε τη χρονική στιγμή t=I,
- $\hat{D}_{i,I_{\mathrm{ult}}}^{I+1}$: Βέλτιστη εκτίμηση των συνολικών εκτιμώμενων τελικών ζημιών για το έτος ατυχήματος i, δοθέντος τις πληροφορίες που έχουμε τη χρονική στιγμή t=I+1,
- $\hat{R}_i^{I+1}$: Βέλτιστη εκτίμηση των εκτιμώμενων αποθεμάτων για το έτος ατυχήματος i, δοθέντος τις πληροφορίες που έχουμε τη χρονική στιγμή t=I+1,
- $C_{i,I-i+1}$: Προσαυξητικές πληρωμές μεταξύ των ετών t=I και t=I+1 για έτος ατυχήματος i,
- $D_{i,I-i}$: Σωρευτικές πληρωμές στο έτος t=I για έτος ατυχήματος i.

Η ασφαλιστική εταιρία αντιμετωπίζει μόνο τον κίνδυνο αποθεμάτων. Συνεπώς έχουμε:

$$\mathrm{SCR}_{\mathrm{reserve}} = \mathrm{NAV}(I) - \mathrm{VaR}_{0,5\%}(\mathrm{NAV}(I+1)),$$

$$\mathrm{SCR}_{\mathrm{reserve}} = A(I) - (\hat{D}_{i,I_{\mathrm{ult}}}^I - D_{i,I-i}) - \mathrm{VaR}_{0,5\%}(A(I) - C_{i,I-i+1} - (\hat{D}_{i,I_{\mathrm{ult}}}^{I+1} - D_{i,I-i} - C_{i,I-i+1})),$$

$\mathrm{SCR}_{\mathrm{reserve}} = \mathrm{VaR}_{99,5\%}(\hat{D}^{I}_{i,I_{\mathrm{ult}}} - \hat{D}^{I+1}_{i,I_{\mathrm{ult}}})$,

$\mathrm{SCR}_{\mathrm{reserve}} = \mathrm{VaR}_{99,5\%}(\hat{R}^{I}_{i} - (\hat{R}^{I+1}_{i} + C_{i,I-i+1}))$.

Η ποσότητα $\hat{D}^{I}_{i,I_{\mathrm{ult}}} - \hat{D}^{I+1}_{i,I_{\mathrm{ult}}} = \hat{R}^{I}_{i} - (\hat{R}^{I+1}_{i} + C_{i,I-i+1})$ αντιστοιχεί στο $\widehat{\mathrm{CDR}}_i(I+1)$. Συνεπώς, το SCR για τον κίνδυνο των αποθεμάτων είναι το 99,5% ποσοστημόριο της κατανομής του CDR. Ο υπολογισμός των κεφαλαιακών απαιτήσεων μπορεί να γίνει είτε με την τυπική προσέγγιση είτε με τη χρήση εσωτερικού μοντέλου. Στην παρούσα διπλωματική εργασία ο υπολογισμός του SCR θα γίνει με τη χρήση εσωτερικού μοντέλου.

Τυπική Προσέγγιση

Σύμφωνα με την τυπική προσέγγιση ο ασφαλιστικός κίνδυνος ζημιών αποτελείται από τον κίνδυνο ασφαλίστρων και των κίνδυνο αποθεμάτων. Η τυπική προσέγγιση υπολογίζει τις κεφαλαιακές απαιτήσεις του κινδύνου ασφαλίστρων και αποθεμάτων βασιζόμενη σε ένα μέτρο έκθεσης σε κίνδυνο και σε μια συνάρτηση τυπικών αποκλίσεων (μεταβλητότητα) ανά κλάδο εργασιών (line of business). Για τον κίνδυνο αποθεμάτων το μέτρο έκθεσης στον κίνδυνο είναι η βέλτιστη εκτίμηση των αποθεμάτων. Η βέλτιστη εκτίμηση πρέπει να αποτιμάται για κάθε κλάδο εργασιών.

Με βάση τα παραπάνω η τυπική προσέγγιση υπολογίζει τις κεφαλαιακές απαιτήσεις του κινδύνου των αποθεμάτων ως ακολούθως :

$$\mathrm{SCR} = f(\sigma) \cdot V.$$

Όπου:

V: Η έκθεση στον κίνδυνο που αντιστοιχεί στη βέλτιστη εκτίμηση.

σ: Η τυπική απόκλιση των συνολικών αποθεμάτων (ανά γραμμή εργασιών), που εκφράζει μεταβλητότητα, υποθέτοντας ότι ο κίνδυνος ακολουθεί τη lognormal κατανομή.

f: Συνάρτηση της τυπικής απόκλισης.

f (σ): Δημιουργείται έτσι ώστε οι κεφαλαιακές απαιτήσεις να είναι με το 99,5% του VaR.

Για λόγους απλοποίησης παίρνουμε ότι: f (σ)=3˙σ.

Η συνάρτηση υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$f(\sigma) = \frac{\exp(N_{0.995} \cdot \sqrt{\log(\sigma^2+1)})}{\sqrt{(\sigma^2+1)}} - 1.$$

Όπου, $N_{0.995}$ συμβολίζει το 99,5% ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής.

Οι τυπικές αποκλίσεις σ και τα μέτρα έκθεσης σε κίνδυνο V για τον κίνδυνο των αποθεμάτων για το σύνολο των εργασιών συγκεντρώνονται και σχηματίζουν ένα συνολικό σ_{global} και ένα συνολικό V, τέτοια ώστε:

$$\sigma_{\text{global}} = \sqrt{\frac{1}{V_{global}^2} \cdot \sum_{i,j=1}^{2} \rho_{\text{i,j}} \cdot \sigma_{\text{i}} \cdot \sigma_j \cdot V_i \cdot V_j} \cdot .$$

Όπου:

V_{global} : Η συνολική βέλτιστη εκτίμηση είναι το άθροισμα των βέλτιστων εκτιμήσεων των διαφορετικών παραρτημάτων.

V_i (V_j): Η βέλτιστη εκτίμηση για το παράρτημα i (j) για τον κίνδυνο αποθεμάτων.

$\rho_{i,j}$: Ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των παραρτημάτων i και j. Ο συντελεστής καθορίζεται ως ένας πίνακας συσχετίσεων μεταξύ διαφορετικών τμημάτων των παραρτημάτων.

Ο κίνδυνος αποθεμάτων για το σύνολο του χαρτοφυλακίου ορίζεται ως:

$$\text{SCR}_{\text{aggregate}} = f(\sigma_{\text{global})} \cdot V_{\text{global}}$$

Εσωτερικό μοντέλο

Για το έτος ατυχήματος i, το CDR ορίζεται ως εξής :

$$C\hat{D}R_i(I+1) = \hat{D}_{i,I_{\text{ult}}}^{I} - \hat{D}_{i,I_{\text{ult}}}^{I+1} = \hat{R}_i^I - (\hat{R}_i^{I+1} + C_{i,I-i+1}).$$

Οι κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον κίνδυνο των αποθεμάτων, για το έτος ατυχήματος i δίνονται από τη σχέση:

$$\text{SCR}^{i}{}_{\text{reserve}} = \text{VaR}_{99,5\%}(C\hat{D}R_i(I+1)),$$

ενώ για όλα τα έτη ατυχήματος συνολικά οι κεφαλαιακές απαιτήσεις δίνονται από τη σχέση:

$$\text{SCR}_{\text{reserve}} = \text{VaR}_{99,5\%}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{I} C\hat{D}R_i(I+1)\right) = \text{VaR}_{99,5\%}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{I} \text{C}\hat{\text{D}}\text{R}(I+1)\right).$$

Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό μοντέλο, στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε το 0,5% ποσοστημόριο της κατανομής του $\text{C}\hat{\text{D}}\text{R}(I+1)$.

4ο Κεφάλαιο: Εφαρμογή των μεθόδων αποθεματοποίησης

4.1 Παρουσίαση δεδομένων

Τα δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουμε για την εφαρμογή των μοντέλων προέρχονται από τα δεδομένα που παρουσιάστηκαν από τους Merz & Wuthrich (2008). Η αναμενόμενη τιμή, η τυπική απόκλιση ή το τυπικό σφάλμα της πρόβλεψης υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις μεθόδους αποθεματοποίησης που μελετήσαμε στα παραπάνω κεφάλαια.

Οι προσαυξητικές ζημιές (C_{ij}) ανά έτος ατυχήματος και ανά έτος εξέλιξης παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1 (run off triangle).

Πίνακας 4.1 - Προσαυξητικές αποζημιώσεις (incremental)

	Έτος εξέλιξης								
Έτος Ατυχήματος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2202584	1007865	257673	76948	76557	23009	24376	5499	4122
2	2350650	1202373	230823	56221	25120	13557	19537	4144	
3	2321885	1102305	276686	97322	56557	24238	19832		
4	2171487	993787	230567	70612	49250	32719			
5	2140328	1016751	242183	101258	85292				
6	2290664	1047533	212135	90704					
7	2148216	1071559	208560						
8	2143728	1014853							
9	2144738								

Χρησιμοποιούμε τις μεθόδους αποθεματοποίησης για να εκτιμήσουμε το κάτω δεξιά τρίγωνο που είναι κενό, το άθροισμα του οποίου είναι οι εκκρεμείς ζημιές (*outstanding claims liabilities*) και να υπολογίσουμε την μεταβλητότητα ή την αβεβαιότητα κάτω από αυτή τη μέτρηση. Υποθέτουμε πως όλες οι ζημιές θα διακανονιστούν σε 9 περιόδους και ακόμα υπάρχουν 9 περίοδοι παρελθόντων ζημιών (δηλαδή n=9). Βέβαια, τα δεδομένα που έχουμε παρατηρήσει δεν είναι απαραίτητο να δίνονται σε ετήσια βάση καθώς μπορούν να είναι και μηνιαία ή τριμηνιαία.

Οι αθροιστικές ζημιές (D_{ij}) υπολογίζονται μέσω της σχέσης $D_{ij} = \sum_{k=1}^{j} C_{ik}$ και δίνονται από τον πίνακα 4.2, (i=1,…,9 και j=1,…,9).

Πίνακας 4.2 - Σωρευτικές αποζημιώσεις (cumulative)

	Έτος εξέλιξης								
Έτος Ατυχήματος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2202584	3210449	3468122	3545070	3621627	3644636	3669012	3674511	3678633
2	2350650	3553023	3783846	3840067	3865187	3878744	3898281	3902425	
3	2321885	3424190	3700876	3798198	3854755	3878993	3898825		
4	2171487	3165274	3395841	3466453	3515703	3548422			
5	2140328	3157079	3399262	3500520	3585812				
6	2290664	3338197	3550332	3641036					
7	2148216	3219775	3428335						
8	2143728	3158581							
9	2144738								

Κάθε ασφαλιστική εταιρία που δραστηριοποιείται στον κλάδο των γενικών ασφαλίσεων, έχει την δυνατότητα να χρησιμοποιήσει διάφορα προγράμματα για να εφαρμόσει τις μεθόδους που περιγράψαμε στα παραπάνω κεφάλαια. Τα κύρια προγράμματα που εφαρμόζονται είναι το Excel και το στατιστικό πακέτο R. Η χρήση του Excel για την εφαρμογή των μεθόδων αποθεματοποίησης θεωρείται μέχρι σήμερα ως η πιο συνήθης λόγω της ευρείας χρήσης του προγράμματος από την πλειοψηφία των χρηστών, ωστόσο δεν είναι το ιδανικότερο για την εφαρμογή των στοχαστικών μεθόδων που αναλύσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια. Συνεπώς, είναι αναγκαία η χρήση περισσότερο σύνθετων στατιστικών προγραμμάτων, όπως το R, για την εφαρμογή των στοχαστικών μεθόδων αλλά και για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Το στατιστικό πακέτο R περιέχει υλοποιημένες τις περισσότερες μεθόδους και υπολογισμούς που απαιτούνται στη στατιστική υπό μορφή εντολών. Μας δίνει επίσης τη δυνατότητα, γράφοντας απλό κώδικα, να υλοποιήσουμε οποιονδήποτε στατιστικό υπολογισμό επιθυμούμε. Το R διατίθεται ελεύθερα για χρήση και υποστήριξη μέσα από το Internet. Παράλληλα, μας εφοδιάζει μεταξύ των άλλων, με αποτελεσματικό χειρισμό και αποθήκευση δεδομένων, με αποτελεσματικό χειρισμό πινάκων πολλών διαστάσεων και με εργαλεία ανάλυσης δεδομένων και δημιουργίας γραφημάτων. Υπάρχουν πολλά διαθέσιμα πακέτα (packages) που υποστηρίζονται από το R και τα οποία υλοποιούν πολλές κλασσικές και μοντέρνες στατιστικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται στην αποθεματοποίηση.

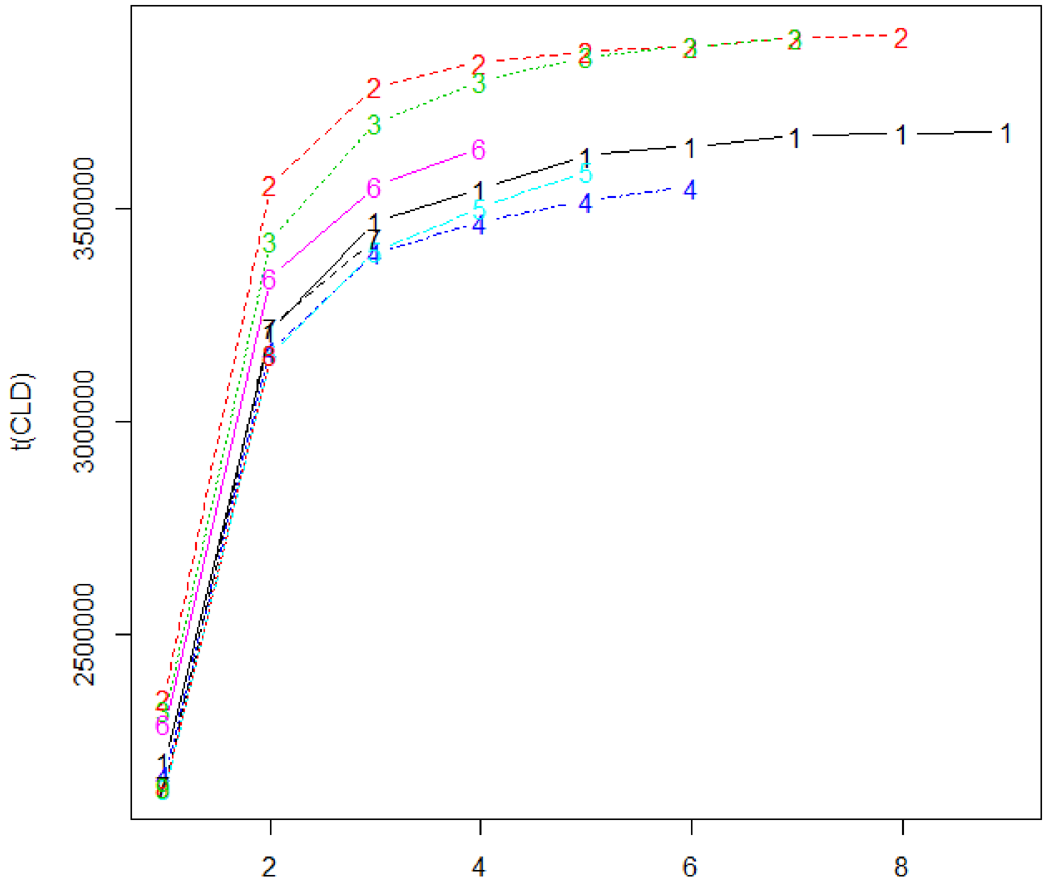
4.2 Εφαρμογή της μεθόδου Chain Ladder

Στον πίνακα 4.2 παρουσιάζεται το τρίγωνο εξέλιξης των αποζημιώσεων της ασφαλιστικής εταιρίας στην αρχή του έτους που περιέχει τα ποσά των αθροιστικών αποζημιώσεων ανά έτος ατυχήματος και έτος εξέλιξης. Εισάγουμε τα δεδομένα και έχουμε:

```
    dev
origin
  1 2202584 3210449 3468122 3545070 3621627 3644636 3669012 3674511 3678633
  2 2350650 3553023 3783846 3840067 3865187 3878744 3898281 3902425      NA
  3 2321885 3424190 3700876 3798198 3854755 3878993 3898825      NA      NA
  4 2171487 3165274 3395841 3466453 3515703 3548422      NA      NA      NA
  5 2140328 3157079 3399262 3500520 3585812      NA      NA      NA      NA
  6 2290664 3338197 3550332 3641036      NA      NA      NA      NA      NA
  7 2148216 3219775 3428335      NA      NA      NA      NA      NA      NA
  8 2143728 3158581      NA      NA      NA      NA      NA      NA      NA
  9 2144738      NA      NA      NA      NA      NA      NA      NA      NA
```

Τα παραπάνω δεδομένα από το τρίγωνο ζημιών θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια με σκοπό την εκτίμηση του αποθέματος .

Στη συνέχεια είμαστε σε θέση να μπορούμε να πάρουμε μια εικόνα για τον τρόπο που εξελίχθηκαν οι απαιτήσεις μέσα στο χρόνο. Πράγματι έχουμε, την απεικόνιση των αθροιστικών ζημιών-αποζημιώσεων στο παραπάνω γράφημα 4.1 το οποίο παρουσιάζει πως εξελίσσονται οι ζημιές-αποζημιώσεις κάθε έτους ατυχήματος κατά τα έτη εξέλιξης.



Γράφημα 4.1

Παρατηρούμε πως τη μεγαλύτερη αύξηση στις ζημιές την έχουμε κατά το δεύτερο έτος ατυχήματος ενώ η μικρότερη καταγράφεται στο τέταρτο έτος ατυχήματος. Ακόμα, ο ρυθμός διακανονισμού των ζημιών αρχίζει και σταθεροποιείται κατά το 4^{o} και 5^{o} έτος εξέλιξης μέχρι που σταδιακά οι απαιτήσεις αρχίζουν να γίνονται παράλληλες στον άξονα του χρόνου γεγονός που αποδεικνύει πως σταδιακά αποπληρώνεται το σύνολο των ζημιών.

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την μέθοδο Chain Ladder, χρειάζεται αρχικά να υπολογίσουμε τους συντελεστές εξέλιξης ζημιών. Όπως αναφέραμε στο 2^{o} κεφάλαιο της εργασίας, οι συντελεστές εξέλιξης ζημιών από το ένα έτος εξέλιξης στο επόμενο έτος υπολογίζονται από μέσω της σχέσης:

$$\hat{f}_j^{\,I} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} D_{i,j+1}}{S_j^I}, \text{ όπου } S_j^I = \sum_{i=0}^{I-j-1} D_{i,j}.$$

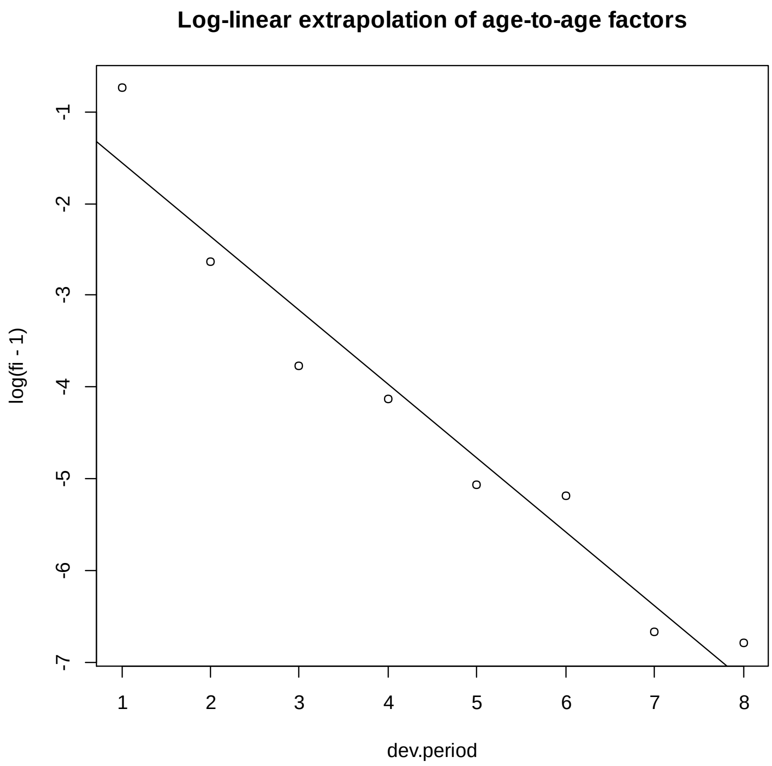
Δηλαδή, από το πηλίκο του αθροίσματος δύο διαδοχικών ποσών ζημιών.

Παίρνουμε συνεπώς τους παρακάτω εκτιμώμενους συντελεστές εξέλιξης ζημιών ανά έτος εξέλιξης.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{f}_j$	1.4759	1.0719	1.0232	1.0161	1.0063	1.0056	1.0013	1.0011

Ωστόσο, σε αρκετές περιπτώσεις, δεν είναι ορθό να υποθέσουμε πως ο συντελεστής εξέλιξης του τελευταίου έτους εξέλιξης έχει αναπτυχθεί πλήρως. Συνεπώς μπορούμε να ερμηνεύσουμε τους συντελεστές εξέλιξης μέσω ενός λογαριθμικού μοντέλου (log-linear model) και να υπολογίσουμε την ουρά. Υπολογίζουμε δηλαδή ότι η ουρά είναι ίση με 1,000255.

Η γραφική απεικόνιση των λογαρίθμων των συντελεστών εξέλιξης παρουσιάζεται στο γράφημα 4.2.



Γράφημα 4.2

Παρατηρεί κανείς πως υπάρχει ραγδαία μείωση στις τιμές των συντελεστών εξέλιξης με την πάροδο του χρόνου και αυτό συμβαίνει διότι οι απαιτήσεις στα πρώτα έτη ατυχήματος είναι περισσότερες ενώ στη συνέχεια σταδιακά οι ζημιές διακανονίζονται και αυτό επηρεάζει άμεσα τις τιμές των συντελεστών εξέλιξης.

Μέσω του στατιστικού πακέτου R έχουμε δυνατότητα να αντλήσουμε διάφορα στατιστικά στοιχεία εκτός από τις τιμές των συντελεστών εξέλιξης, όπως είναι το τυπικό σφάλμα των συντελεστών που συνδεόνται με τις διακυμάνσεις των απαιτήσεων $D_{i,j}$, τον συντελεστή προσδιορισμού R^2 και την τιμή p-value.

Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4.3 - Συγκεντρωτικά Στοιχεία

Έτος εξέλιξης	Συντελεστής εξέλιξης Chain Ladder	Συντελεστής προσδιορισμού R^2	Τυπικό σφάλμα εκτίμησης (s.e)
1	1.4759	0.9998352	30.19
2	1.0719	0.9999570	13.78
3	1.0232	0.9999781	9.89
4	1.0161	0.9999618	13.37
5	1.0063	0.9999959	4.54
6	1.0056	0.9999994	1.80
7	1.0013	1.0000000	0.59
8	1.0011	1.0000000	-

Από τον παραπάνω πίνακα αντιλαμβανόμαστε πως υπάρχει γραμμικότητα στα δεδομένα που εξετάζουμε καθώς ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 είναι πολύ κοντά στη μονάδα σε όλα τα έτη εξέλιξης. Σε αντίθετη περίπτωση θα βρισκόταν κοντά στο μηδέν. Παράλληλα, προκύπτει πως το τυπικό σφάλμα των συντελεστών εξέλιξης μειώνεται με την πάροδο των ετών και τούτο διότι οι ίδιοι οι συντελεστές εξέλιξης μειώνονται σταδιακά από το ένα έτος στο επόμενο.

Στο σημείο αυτό, έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές εξέλιξης με την μέθοδο Chain Ladder, εφαρμόζουμε τους συντελεστές αυτούς στις σωρευτικές απαιτήσεις του πίνακα 4.2 προκειμένου να εκτιμήσουμε τις απαιτήσεις της επόμενης περιόδου. Το τρίγωνο συμπληρώνεται και η τελευταία στήλη (Ultimate) αποτυπώνει τις τελικές εκτιμώμενες απαιτήσεις. Άρα έχουμε:

Πίνακας 4.4 – Εκτιμώμενες Απαιτήσεις t=I

	Έτος εξέλιξης								
Έτος Ατυχήματος	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									3.678.633
2								3.902.425	3.907.108
3							3.898.825	3.921.828	3.926.534
4						3.548.422	3.570.422	3.591.488	3.595.797
5					3.585.812	3.643.544	3.666.134	3.687.764	3.692.189
6				3.641.036	3.699.657	3.722.595	3.744.558	3.749.051	3.753.175
7			3.428.335	3.507.701	3.564.175	3.586.273	3.607.432	3.611.761	3.615.734
8		3.158.581	3.385.683	3.464.062	3.519.833	3.541.656	3.562.552	3.566.827	3.570.750
9	2.144.738	3.165.419	3.393.012	3.471.561	3.527.453	3.549.323	3.570.264	3.574.548	3.578.480

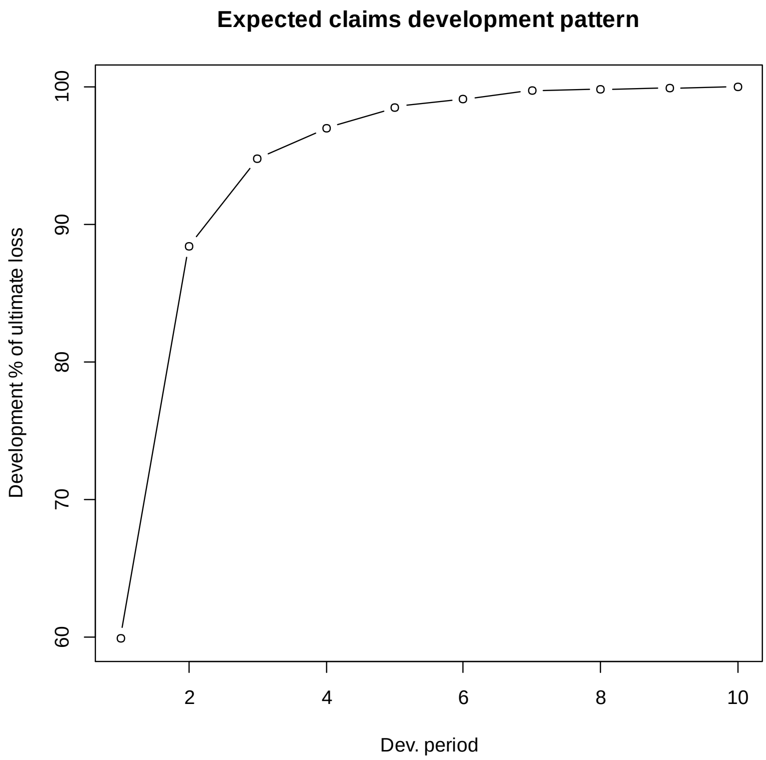
Στον πίνακα 4.5 παραθέτουμε τις εκτιμώμενες τελικές ζημιές, τις πληρωθείσες καθώς και τα εκτιμώμενα αποθέματα σε κάθε έτος ατυχήματος με την μέθοδο Chain Ladder.

Πίνακας 4.5-Εκτιμώμενα αποθέματα t=I

Έτος Ατυχήματος	Πληρωθείσες Ζημιές	Τελικές Εκτιμώμενες Ζημιές	Αποθέματα $\hat{R}_i^{D_I}$
1	3.678.633	3.678.633	0
2	3.902.425	3.907.108	4.683
3	3.898.825	3.926.534	27.709
4	3.548.422	3.595.797	47.375
5	3.585.812	3.692.189	106.377
6	3.641.036	3.753.175	112.139
7	3.428.335	3.615.734	187.399
8	3.158.581	3.570.750	412.830
9	2.144.738	3.578.480	412.169
Σύνολο	**30.986.807 €**	**33.318.401 €**	**2.331.594 €**

Παρατηρούμε πως το σύνολο των πληρωθεισών ζημιών (στοιχεία της διαγωνίου) ανέρχονται σε 30.986.807€ ενώ το σύνολο των εκτιμώμενων τελικών ζημιών (στοιχεία δεξιά της διαγωνίου) ανέρχονται σε 33.318.401€. Η διαφορά των δύο ποσοτήτων μας δίνει απόθεμα ίσο με 2.331.594€. Το εκτιμώμενο απόθεμα αυξάνεται κατά τα έτη ατυχήματος και τούτο διότι οι απαιτήσεις που αναμένει στο μέλλον είναι, σε κάθε έτος ατυχήματος, μεγαλύτερες από αυτές που έχει αποπληρώσει η ασφαλιστική εταιρία έως σήμερα. Συνεπώς, προκειμένου να είναι συνεπής στις υποχρεώσεις της απέναντι στους κατόχους ασφαλιστηρίων συμβολαίων, απαιτείται να σχηματίσει απόθεμα ίσο με 2.331.594€.

Θα έχουμε μια πιο ξεκάθαρη εικόνα για την πορεία των αναμενόμενων απαιτήσεων μελετώντας το γράφημα 4.3.



Γράφημα 4.3

Παρατηρούμε λοιπόν πως στα πρώτα έτη ατυχήματος, οι μελλοντικές απαιτήσεις αυξάνονται με ραγδαίο ρυθμό και μάλιστα στο δεύτερο και τρίτο έτος ατυχήματος αποκτούν την μέγιστη τιμή τους. Στα επόμενα έτη ατυχήματος οι μελλοντικές απαιτήσεις αρχίζουν να σταθεροποιούνται και σταδιακά γίνονται παράλληλες με τον άξονα του χρόνου. Αυτό συμβαίνει γιατί στα συγκεκριμένα έτη ατυχήματος οι τιμές των συντελεστών εξέλιξης ζημιάς είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και πλησιάζουν τη μονάδα.

Με την παραπάνω διαδικασία υπολογίσαμε τους συντελεστές εξέλιξης, τις εκτιμώμενες τελικές αποζημιώσεις και το απόθεμα στην αρχή του έτους (I). Σύμφωνα με τις οδηγίες του Solvency 2 και όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 3, προκειμένου να υπολογίσουμε τον δείκτη εξέλιξης ζημιών CDR είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τους συντελεστές εξέλιξης, τις εκτιμώμενες τελικές αποζημιώσεις και το απόθεμα στην αρχή του έτους (I+1).

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω έχουμε τα δεδομένα του τριγώνου.

```
      dev
origin
      1 2202584 3210449 3468122 3545070 3621627 3644636 3669012 3674511 3678633
      2 2350650 3553023 3783846 3840067 3865187 3878744 3898281 3902425 3906738
      3 2321885 3424190 3700876 3798198 3854755 3878993 3898825 3902130      NA
      4 2171487 3165274 3395841 3466453 3515703 3548422 3564470      NA      NA
      5 2140328 3157079 3399262 3500520 3585812 3624784      NA      NA      NA
      6 2290664 3338197 3550332 3641036 3679909      NA      NA      NA      NA
      7 2148216 3219775 3428335 3511860      NA      NA      NA      NA      NA
      8 2143728 3158581 3376375      NA      NA      NA      NA      NA      NA
      9 2144738 3218196      NA      NA      NA      NA      NA      NA      NA
```

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τους συντελεστές εξέλιξης, λαμβάνοντας υπόψη τις νέες πληροφορίες για την εξέλιξη των ζημιών με αποτέλεσμα ο εκτιμώμενος συντελεστής εξέλιξης ζημίας να δίνεται από τη σχέση: $\hat{f}_j^{I+1} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} D_{i,j+1}}{S_j^{I+1}}$ με $S_j^{I+1} = \sum_{i=0}^{I-j} D_{i,j}$. Συνεπώς έχουμε:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{f}_j^{I+1}$	1.4785	1.0715	1.0233	1.0152	1.0071	1.0053	1.0011	1.0011

Δηλαδή στο τέλος έτους, την χρονική στιγμή Ι+1, ο συντελεστής εξέλιξης βασίζεται στην νέα παρατήρηση που εμφανίζεται ,την $D_{I-j,j+1}$. Παρατηρούμε πως οι συντελεστές αυτοί δεν διαφέρουν σημαντικά από τους συντελεστές που υπολογίσαμε την χρονική στιγμή t=I.

Το συμπληρωμένο τρίγωνο ζημιών με βάση τους συντελεστές εξέλιξης ένα έτος μετά, οι νέες εκτιμώμενες τελικές ζημιές και το απόθεμα μετά από ένα έτος παρουσιάζονται παρακάτω:

Πίνακας 4.6- Εκτιμώμενες Απαιτήσεις t=I+1

	j=1	2	3	4	5	6	7	8	9
i=1	2.202.584	3.210.449	3.468.122	3.545.070	3.621.627	3.644.636	3.669.012	3.674.511	3.678.633
2	2.350.650	3.553.023	3.783.846	3.840.067	3.865.187	3.878.744	3.898.281	3.902.425	3.906.738
3	2.321.885	3.424.190	3.700.876	3.798.198	3.854.755	3.878.993	3.898.825	3.902.130	3.906.473
4	2.171.487	3.165.274	3.395.841	3.466.453	3.515.703	3.548.422	3.564.470	3.568.494	3.572.466
5	2.140.328	3.157.079	3.399.262	3.500.520	3.585.812	3.624.784	3.644.129	3.648.244	3.652.304
6	2.290.664	3.338.197	3.550.332	3.641.036	3.679.909	3.706.345	3.726.126	3.730.333	3.734.485
7	2.148.216	3.219.775	3.428.335	3.511.860	3.565.307	3.590.920	3.610.085	3.614.161	3.618.183
8	2.143.728	3.158.581	3.376.375	3.455.109	3.507.692	3.532.891	3.551.746	3.555.756	3.55.9714
9	2.144.738	3.218.196	3.448.448	3.528.863	3.582.568	3.608.306	3.627.563	3.631.659	3.635.701

Στον πίνακα 4.7 παραθέτουμε τις εκτιμώμενες τελικές ζημιές, τις πληρωθείσες καθώς και τα εκτιμώμενα αποθέματα σε κάθε έτος ατυχήματος με την μέθοδο Chain Ladder χρονική στιγμή t=I+1.

Πίνακας 4.7- Εκτιμώμενα αποθέματα t=I+1

Έτος Ατυχήματος	Πληρωθείσες Ζημιές	Τελικές Εκτιμώμενες Ζημιές	Αποθέματα $\hat{R}_i^{D_I}$
1			0
2	3.906.738	3906738	0
3	3.902.130	3.906.473	4.343
4	3.564.470	3.572.466.	7.996
5	3.624.784	3.652.304 €	27.520
6	3.679.909	3.734.485 €	54.576
7	3.511.860	3.618.183 €	106.323
8	3.376.375	3.559.714 €	183.339
9	3.218.196	3.635.701 €	417.505
Σύνολο	**28.784.462 €**	**29.586.064 €**	**801.602 €**

Παρατηρούμε πως το σύνολο των πληρωθεισών ζημιών (στοιχεία της διαγωνίου) ανέρχονται σε 28.784.462€ ενώ το σύνολο των εκτιμώμενων τελικών ζημιών (στοιχεία δεξιά της διαγωνίου) ανέρχονται σε 29.586.064 €. Η διαφορά των δύο ποσοτήτων μας δίνει απόθεμα ίσο με 801.602€. Το εκτιμώμενο απόθεμα αυξάνεται κατά τα έτη ατυχήματος και τούτο διότι οι απαιτήσεις που αναμένει στο μέλλον είναι, σε κάθε έτος ατυχήματος, μεγαλύτερες από αυτές που έχει αποπληρώσει η ασφαλιστική εταιρία έως σήμερα. Συνεπώς, προκειμένου να είναι συνεπής στις υποχρεώσεις της απέναντι στους κατόχους ασφαλιστηρίων συμβολαίων, απαιτείται να σχηματίσει απόθεμα ίσο με 801.602€.

Συγκεντρωτικά, το τρίγωνο εξέλιξης αθροιστικών πληρωμών, οι συντελεστές εξέλιξης ζημιών στην αρχή και στο τέλος του έτους αντίστοιχα και τα εκτιμώμενα αποθέματα στην αρχή και στο τέλος του έτους παρουσιάζονται στον πίνακα 4.8.

Πίνακας 4.8-Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

	j=1	2	3	4	5	6	7	8	9
i=1	2.202.584	3.210.449	3.468.122	3.545.070	3.621.627	3.644.636	3.669.012	3.674.511	3.678.633
2	2.350.650	3.553.023	3.783.846	3.840.067	3.865.187	3.878.744	3.898.281	3.902.425	3.906.738
3	2.321.885	3.424.190	3.700.876	3.798.198	3.854.755	3.878.993	3.898.825	3.902.130	
4	2.171.487	3.165.274	3.395.841	3.466.453	3.515.703	3.548.422	3.564.470		
5	2.140.328	3.157.079	3.399.262	3.500.520	3.585.812	3.624.784			
6	2.290.664	3.338.197	3.550.332	3.641.036	3.679.909				
7	2.148.216	3.219.775	3.428.335	3.511.860					
8	2.143.728	3.158.581	3.376.375						
9	2.144.738	3.218.196							
$\hat{f}_j^{I}$	1,4759	1,0719	1,0232	1,0161	1,0063	1,0056	1,0013	1,0011	
$\hat{f}_j^{I+1}$	1,4785	1,0715	1,0233	1,0152	1,0072	1,0053	1,0011	1,0101	
$\hat{R}_i^{D_I}$	2.331.594€.								
$\hat{R}_i^{D_{I+1}}$	801.602€								

4.3 Chain Ladder μέσω του μοντέλου του Mack

Η εκτίμηση των τόσο των συντελεστών εξέλιξης, όσο και των αποθεμάτων αλλά και η εκτίμηση των τυπικών σφαλμάτων των αποθεμάτων μπορεί να γίνει χωρίς τη χρήση των σύνθετων εντολών που παρουσιάσαμε στην παραπάνω ενότητα εφαρμόζοντας πιο απλά την μέθοδο MackChainLadder. Όπως αναφέραμε και στην ενότητα 2, όταν ισχύουν οι τρείς υποθέσεις του μοντέλου του Mack, το μοντέλο αποδίδει παρόμοια αποτελέσματα με αυτά της μεθόδου Chain Ladder.

Το μοντέλο του Mack μπορεί να ερμηνευτεί ως σταθμισμένη γραμμική παλινδρόμηση μεταξύ των ετών εξέλιξης:

$$\text{lm}\ (y \sim x + 0,\ \text{weights}= w/x^{(2\text{-alpha})}),$$

όπου y είναι ο πίνακας εξέλιξης των ζημιών –πληρωμών την περίοδο k+1(ή j) και x είναι ο πίνακας εξέλιξης των απαιτήσεων ή πληρωμών την περίοδο k (ή j-1) και το alpha ∈ {0, 1, 2}.

Έχουμε λοιπόν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Πίνακας 4.9 - Αποτελέσματα μεθόδου Mack

Έτος Ατυχήματος	Τελικές πληρωθείσες αποζημιώσεις	Τελικές εκτιμώμενες απαιτήσεις	IBNR απόθεμα	Τυπικό Σφάλμα (s.e)	%s.e
1	3.678.633	3.678.633			
2	3.902.425	3.906.803	4.378	566	13%
3	3.898.825	3.908.172	9.347	1.564	17%
4	3.548.422	3.576.814	28.392	4.157	15%
5	3.548.812	3.637.256	51.444	10.536	20%
6	3.641.036	3.752.847	111.811	30.319	27%
7	3.428.335	3.615.419	187.084	35.967	19%
8	3.158.581	3.570.445	411.864	45.090	11%
9	2.144.738	3.578.243	1.433.505	69.552	5%
Σύνολο	***30.986.807€***	***33.224.633€***	***2.237.826 €***	***108.401***	***4.85%***

Παρατηρούμε πως οι συνολικές πληρωθείσες αποζημιώσεις (τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα 4.2) ανέρχονται σε 30.986.807€, ενώ οι απαιτήσεις που θα παρουσιαστούν στην ασφαλιστική εταιρία ανέρχονται σε 33.224.633€. Συνεπώς, η ασφαλιστική εταιρία χρειάζεται να διαθέτει απόθεμα ίσο με 2.237.826 € προκειμένου να είναι σε θέση να ανταποκριθεί στις μελλοντικές απαιτήσεις που θα παρουσιαστούν.

Παράλληλα, παρατηρούμε πως το σφάλμα πρόβλεψης σαν ποσοστό του αποθέματος στα πρώτη έτη ατυχήματος είναι μεγαλύτερο και μετά το έκτο έτος μειώνεται, ενώ το συνολικό σφάλμα πρόβλεψης για το σύνολο του τριγώνου εξέλιξης ανέρχεται σε 108.401 ή 4.85% του αποθέματος. Παρατηρούμε πως το σφάλμα πρόβλεψης δίνεται από τα πιο πρόσφατα έτη.

Η διαφορά μεταξύ του συνολικού 75% ποσοστημορίου και του συνολικού εκτιμώμενου αποθέματος ονομάζεται περιθώριο κινδύνου (risk margin, βλέπε 3^{ο} κεφάλαιο) και αντιστοιχεί στο ποσό των 71.571€ ή σε 3% της βέλτιστης εκτίμησης.

Βρίσκουμε τους συντελεστές εξέλιξης ζημιών ανά έτος ατυχήματος ως τη μέση τιμή των συντελεστών εξέλιξης απαιτήσεων όπως φαίνεται και από τη σχέση $\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{i,j-1}}$ και στη συνέχεια συμπληρώνουμε το τρίγωνο εξέλιξης ζημιών.

Οι συντελεστές εξέλιξης δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{f}_j$	1.4759	1.0719	1.0232	1.0161	1.0063	1.0056	1.0013	1.0011

Παρατηρούμε πως η τιμή των συντελεστών εξέλιξης μειώνεται κατά την πάροδο των ετών, μέχρι που γίνονται περίπου ίσοι με τη μονάδα. Αυτό σημαίνει πως στα πρώτα έτη εξέλιξης οι σωρευτικές απαιτήσεις ήταν μεγάλες και με την πάροδο των ετών ήρθαν σε διακανονισμό ή αποπληρώθηκαν.

Όσον αφορά τις εκτιμώμενες μελλοντικές απαιτήσεις αυτές αποτυπώνονται στο κάτω δεξιό μέρος του τριγώνου και προκύπτουν ως το γινόμενο των συντελεστών εξέλιξης κάθε έτους με τις τελικές πληρωθείσες αποζημιώσεις κάθε έτους (κύρια διαγώνιος του τριγώνου).

```
      dev
origin       1       2       3       4       5       6       7       8       9
     1 2202584 3210449 3468122 3545070 3621627 3644636 3669012 3674511 3678633
     2 2350650 3553023 3783846 3840067 3865187 3878744 3898281 3902425 3906803
     3 2321885 3424190 3700876 3798198 3854755 3878993 3898825 3903793 3908172
     4 2171487 3165274 3395841 3466453 3515703 3548422 3568259 3572806 3576814
     5 2140328 3157079 3399262 3500520 3585812 3608384 3628557 3633180 3637256
     6 2290664 3338197 3550332 3641036 3699768 3723057 3743871 3748642 3752847
     7 2148216 3219775 3428335 3507703 3564284 3586720 3606772 3611368 3615419
     8 2143728 3158581 3385688 3464069 3519946 3542103 3561906 3566444 3570445
     9 2144738 3165479 3393083 3471634 3527634 3549839 3569685 3574233 3578243
```

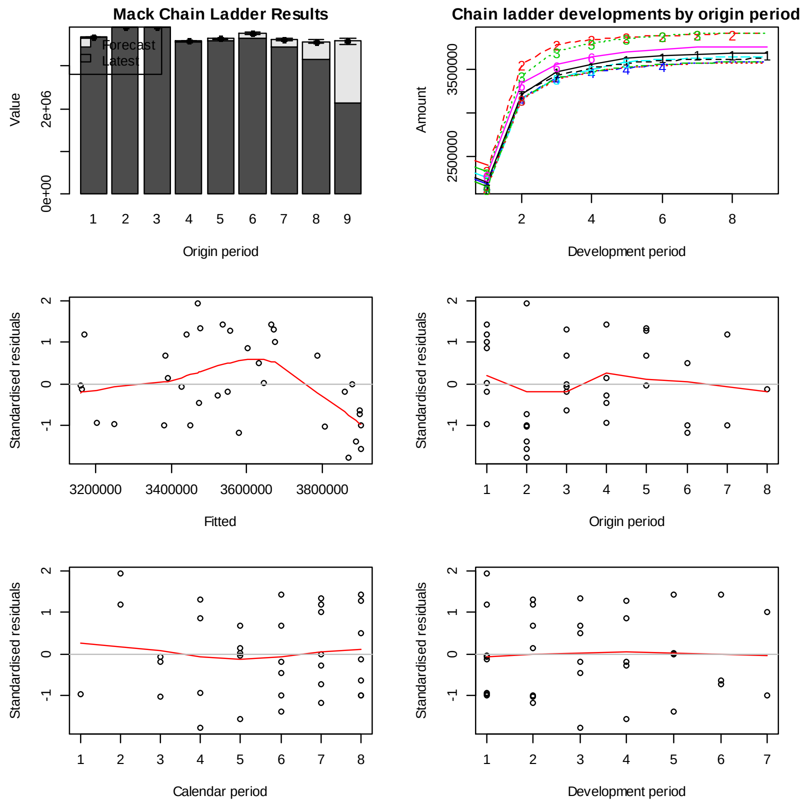
Στη συνέχεια χρειάζεται να υπολογίσουμε τους συντελεστές σ^2, που αναπαριστούν το τυπικό σφάλμα των συντελεστών εξέλιξης του Mack. Καθώς δεν έχουμε αρκετές πληροφορίες για να εκτιμήσουμε το $\hat{\sigma}_8^2$ (καθώς τα έτη ατυχήματος είναι ίσα με τα έτη εξέλιξης), θα χρησιμοποιήσουμε $\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min(\hat{\sigma}_{n-2}^4/\hat{\sigma}_{n-3}^2, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2))$.

Πράγματι παίρνουμε:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{\sigma}_j^2$	911.43	189.82	97.81	178.75	20.64	3.23	0.36	0.04

Παρατηρούμε πως το σφάλμα είναι ιδιαιτέρως μεγάλο στα πρώτη έτη και στη συνέχεια μειώνεται ραγδαία.

Προκειμένου να ελέγξουμε πως ισχύουν οι τρείς υποθέσεις του μοντέλου του Mack, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να μελετήσουμε το γράφημα των καταλοίπων (residuals) και να επιβεβαιώσουμε πως δεν υπάρχουν αποκλίσεις (trends) σε κανένα από τα γραφήματα.

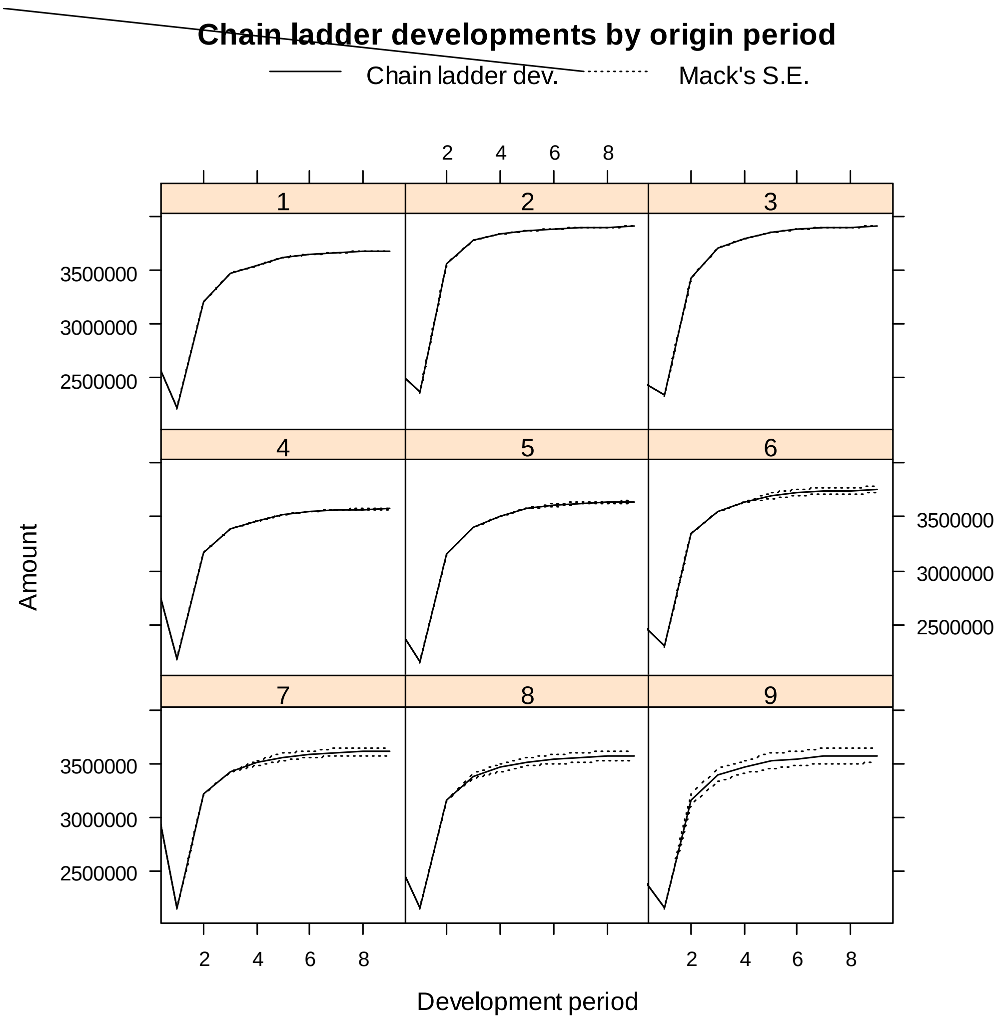


Γράφημα 4.4

Το πρώτο γράφημα απεικονίζει τις ζημίες που πραγματοποιήθηκαν στα προηγούμενα έτη και πως αυτές θα εξελιχθούν στο μέλλον. Συγκεκριμένα, με σκούρο χρώμα απεικονίζονται οι τελικές πληρωθείσες αποζημιώσεις μέχρι και το τελευταίο έτος ατυχήματος (στοιχεία της κύριας διαγωνίου) και με το γκρι χρώμα απεικονίζονται οι τελικές εκτιμώμενες αποζημιώσεις (ultimate claims) όπως προκύπτουν από το μοντέλο του Mack. Η διαφορά των δύο (τελικές πληρωθείσες αποζημιώσεις μείον τελικές εκτιμώμενες αποζημιώσεις) μας δίνει το απόθεμα που χρειάζεται να κρατάει η ασφαλιστική εταιρία κάθε έτος ατυχήματος.

Από το παραπάνω γράφημα (4.4) αντιλαμβάνεται κάποιος πως το μεγαλύτερο απόθεμα προκύπτει στο τελευταίο έτος ατυχήματος. Δεξιότερα, παρουσιάζεται η εξέλιξη των ζημιών ανά έτος ατυχήματος και ανά έτος εξέλιξης. Παρατηρούμε, πως είναι παρόμοιο με το γράφημα 4.1 που πήραμε εφαρμόζοντας στα δεδομένα την μέθοδο Chain Ladder. Ακολουθεί η ανάλυση των προσαρμοσμένων καταλοίπων (κατά ημερολογιακό έτος, κατά έτος ατυχήματος και κατά έτος εξέλιξης) από το οποία δεν προκύπτει πως σε κάποιο έτος υπάρχουν έκτροπες τιμές. Συνεπώς, το μοντέλο του Mack προσαρμόζεται καλά στα δεδομένα.

Στη συνέχεια, έχουμε την δυνατότητα να μελετήσουμε το γράφημα στο οποίο παρουσιάζονται η εξέλιξη των μελλοντικών ζημιών και τα τυπικά σφάλματα που έχουν εκτιμηθεί με τη μέθοδο Mack ανά έτος ατυχήματος.



Γράφημα 4.5

Συγκεντρωτικά με τη μέθοδο του Mack παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον πίνακα 4.10.

Πίνακας 4.10 - Αποτελέσματα μεθόδου Mack

Έτος Ατυχήματος	Μελλοντικές Χρηματικές Ροές	Τυπικό Σφάλμα (s.e)	%s.e
1			
2	4.378	566	13%
3	9.347	1.564	17%
4	28.392	4.157	15%
5	51.444	10.536	20%
6	111.811	30.319	27%
7	187.084	35.967	19%
8	411.864	45.090	11%
9	1.433.505	69.552	5%
Σύνολο	***2.237.826 €***	***108.401***	***4.85%***

Το συνολικό εκτιμώμενο απόθεμα είναι το άθροισμα όλων των μελλοντικών χρηματικών ροών που θα πρέπει να καταβάλει η ασφαλιστική εταιρία από το πρώτο έτος ατυχήματος και μέχρι να αποπληρωθεί η ζημιά. Παράλληλα, από τον πίνακα παίρνουμε το τυπικό σφάλμα για κάθε έτος ατυχήματος αλλά και συνολικά και τέλος πως εκφράζεται το τυπικό σφάλμα ως ποσοστό του αποθέματος. Παρατηρούμε πως στα πρώτα έτη ατυχήματος το τυπικό σφάλμα είναι μικρό και με την πάροδο των ετών αυξάνεται. Αυτό είναι απόλυτα λογικό εάν αναλογιστεί κανείς πως η αβεβαιότητα με την πάροδο του χρόνου αυξάνεται με αποτέλεσμα η ασφαλιστική εταιρία να αδυνατεί να προβλέψει με απόλυτη ακρίβεια το τι θα συμβεί οκτώ χρόνια μετά την ημερομηνία αποτίμησης. Ωστόσο, προκύπτει πως το τυπικό σφάλμα ως ποσοστό επί του συνόλου εκτίμησης των μελλοντικών χρηματικών ροών είναι μόλις 4.85% και δίνεται από τα πιο πρόσφατα έτη.

Επιπλέον είναι ιδιαίτερα σημαντικό να διαχωρίσουμε την αβεβαιότητα σε σφάλμα διαδικασίας και σε σφάλμα εκτίμησης. Αυτό είναι και ένα από τα σημαντικότερα θέματα της νέας κοινοτικής οδηγίας Solvency II, καθώς οι ασφαλιστικές εταιρίες χρειάζεται να γνωρίζουν ποιο μέρος της αβεβαιότητας προέρχεται από την διαδικασία και ποιο από τα σφάλματα εκτίμησης. Τα σφάλματα εκτίμησης μπορούν να ερμηνευτούν ως η απάντηση στο ερώτημα « κατά πόσο μπορεί ο αναλογιστής να προβλέψει τις πραγματικές παραμέτρους ενός μοντέλου». Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα σφάλματα εκτίμησης, τα σφάλματα διαδικασίας ανά έτος ατυχήματος αλλά και συνολικά και παράλληλα οι δύο ποσότητες εκφράζονται ως ποσοστό του τυπικού σφάλματος. Παρατηρούμε πως το σφάλμα εκτίμησης δεν συμβάλει σημαντικά στην μεταβλητότητα δηλαδή δεν υπάρχει μεγάλη μεταβλητότητα στις παραμέτρους του μοντέλου. Αντίθετα, το σφάλμα διαδικασίας πηγάζει από το γεγονός πως κάνουμε πρόβλεψη στις μελλοντικές πληρωμές και συνεπώς περιέχει μεγαλύτερη αβεβαιότητα.

Πίνακας 4.11 - Μεταβλητότητα των εκτιμήσεων μεθόδου Mack σε χιλιάδες ευρώ

Έτος ατυχήματος i	$\hat{R}_i^{D_I}$	Process variance	Estimation Error	S.E($\hat{R}_i^{D_I}$)
1		0	0	0
2	4.378	394	406	567
3	9.347	1.248	942	1.564
4	28.392	3.599	2.081	4.147
5	51.444	9.401	4.757	10.536
6	111.811	27.583	12.587	30.319
7	187.084	33.004	14.296	35.967
8	411.864	41.743	17.048	45.090
9	1.433.505	65.147	24.360	69.552
Σύνολο	***2.237.826 €***	***89.105 €***	***61.734 €***	***108.401 €***

$\hat{R}_i^{D_I}$	Εκτιμώμενα αποθέματα στο χρόνο t=I με τη μέθοδο Mack Chain Ladder
Process variance $=\mathrm{Var}[R_i^{D_I}]^{1/2}$	Εκτιμώμενη τυπική απόκλιση του πραγματικού αποθέματος, (σχέση 2.11)
Estimation Error $=\mathrm{Var}[\hat{R}_i^{D_I}]^{1/2}$	Εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα του εκτιμώμενου αποθέματος, (σχέση 2.12)
S.E($\hat{R}_i^{D_I}$)	Τυπικό σφάλμα του αποθέματος (τετραγωνική ρίζα του MSE)

4.4 Chain Ladder μέσω τεχνικής Bootstrap

Όπως αναφέραμε και στο δεύτερο κεφάλαιο η δειγματοληπτική τεχνική bootstrap αποτελείται από δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο εφαρμόζουμε την μέθοδο Chain Ladder στο τρίγωνο αθροιστικών ζημιών- αποζημιώσεων. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα Pearson κατάλοιπα τα οποία τα προσομοιώνουμε R φόρες προκειμένου να εκτιμήσουμε τις μελλοντικές προσαυξητικές ζημιές μέσω της μεθόδου Chain Ladder. Στο δεύτερο στάδιο προσομοιώνουμε για κάθε κελί του τριγώνου εξέλιξης, μια απαίτηση από την Over-Dispersed Poisson κατανομή με τη μέση τιμή να είναι ίση με τις μελλοντικές προσαυξητικές απαιτήσεις που προέκυψαν μέσω προσομοίωσης. Τα αποθέματα που προκύπτουν από αυτή την διαδικασία, σχηματίζουν την μελλοντική κατανομή από την οποία μπορούμε να αντλήσουμε πολλές πληροφορίες όπως είναι η μέση τιμή, το σφάλμα πρόβλεψης (prediction error) και για τα ποσοστημόρια (quantiles). Θα υποθέσουμε πως τα αθροιστικά(cumulative) δεδομένα μας ακολουθούν την κατανομή Over-Dispersed Poisson και την κατανομή Gamma και θα πραγματοποιήσουμε 1.000 προσομοιώσεις. Θα εφαρμόσουμε αναλυτικά την διαδικασία που περιγράψαμε στο 2^o κεφάλαιο ενώ μέσω του R θα βρούμε την μέση τιμή, τα ποσοστημόρια και την τυπική απόκλιση της μελλοντικής κατανομής των αποθεμάτων και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δύο κατανομών.

Στο πρώτο τρίγωνο παρουσιάζονται οι αθροιστικές πληρωμές καθώς και οι συντελεστές εξέλιξης υπολογισμένοι με την μέθοδο Chain Ladder.

Τρίγωνο 1 – Παρατηρούμενα Συσσωρευμένα Δεδομένα

2202584	3210449	3468122	3545070	3621627	3644636	3669012	3674511	3678633
2350650	3553023	3783846	3840067	3865187	3878744	3898281	3902425	
2321885	3424190	3700876	3798198	3854755	3878993	3898825		
2171487	3165274	3395841	3466453	3515703	3548422			
2140328	3157079	3399262	3500520	3585812				
2290664	3338197	3550332	3641036					
2148216	3219775	3428335						
2143728	3158581							
2144738								
Δείκτες εξέλιξης								
1,4759	1,0719	1,02315	1,0161	1,0062	1,0059	1,0012	1,0011	

Το πρώτο στάδιο της μεθόδου είναι να πάρουμε τις προσαρμοσμένες (fitted) αθροιστικές πληρωμές ξεκινώντας από τα στοιχεία της τελευταίας διαγωνίου και διαιρώντας τις τιμές των στοιχείων αυτών με τους αντίστοιχους συντελεστές Chain Ladder σύμφωνα με τη σχέση $\hat{D}_{i,k-1} = \hat{D}_{i,k}/f_k$. Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας παρουσιάζονται στο τρίγωνο 2..

Τρίγωνο 2 – Προσαρμοσμένα Συσσωρευμένα Δεδομένα

2204763,829	3254011	3487974	3568721	3626177	3648660	3670187	3674591	3678633
2341464,834	3455768	3704238	3789991	3851010	3874886	3897748	3902425	3906718
2342111,99	3456723	3705261	3791038	3852074	3875957	3898825	3903504	3907797
2144193,556	3164615	3392151	3470679	3526557	3548422	3569358	3573641	3577572
2180221,172	3217788	3449147	3528995	3585812	3608044	3629331	3633687	3637684
2249440,244	3319949	3558653	3641036	3699657	3722595	3744558	3749051	3753175
2167065,553	3198372	3428335	3507701	3564175	3586273	3607432	3611761	3615734
2140105,021	3158581	3385683	3464062	3519833	3541656	3562552	3566827	3570750
2144738	3165419	3393012	3471561	3527453	3549323	3570264	3574548	3578480
Δείκτες εξέλιξης(υπολογισμένοι από τα προσαρμοσμένα δεδομένα)								
0,67755268	1,0719	1,02315	1,0161	1,0062	1,0059	1,0012	1,0011	

Τις προσαυξητικές (incremental fitted) προσαρμοσμένες πληρωμές τις παίρνουμε σύμφωνα με τον τύπο $\hat{C}_{\text{ij}} = \hat{D}_{\text{ij}} - \hat{D}_{i,j-1}$, $i = 1, \dots, n \quad j = 2, \dots, n$. Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στο τρίγωνο 3.

Τρίγωνο 3 – Προσαρμοσμένα προσαυξητικά

2204763,829	1049247	233963,4	80746,61	57456,41	22482,3	21527,09	4404,224	4042,05
2341464,834	1114303	248469,7	85753,1	61018,85	23876,26	22861,83	4677,2972	4292,668
2342111,99	1114611	248538,4	85776,8	61035,72	23882,86	22868,145	4678,59	4293,854
2144193,556	1020422	227535,8	78528,3	55877,94	21864,656	20935,69	4283,229	3931,005
2180221,172	1037567	231359	79847,76	56816,822	22232,03	21287,46	4355,198	3997,055
2249440,244	1070509	238704,3	82382,821	58620,68	22937,87	21963,31	4493,469	4123,956
2167065,553	1031306	229962,95	79365,96	56473,99	22097,88	21159,01	4328,918	3972,937
2140105,021	1018476	227102	78378,56	55771,39	21822,96	20895,77	4275,062	3923,509
2144738	1020681	227593,6	78548,24	55892,13	21870,21	20941,01	4284,317	3932,003

Τα unscaled κατάλοιπα Pearson που παρουσιάζονται στο τρίγωνο 4, προέρχονται από τη σχέση σε συνδυασμό με τις προσαυξητικές ζημιές (προσαρμοσμένες και παρατηρούμενες).

Τρίγωνο 4 – Κατάλοιπα του Pearson

-1,46805209	-40,3993	49,01743	-13,3679	79,68519	3,512719	19,41716	16,49645	1,257527
6,002652639	83,43068	-35,4019	-100,848	-145,328	-66,7829	-21,9894	-7,7978	
-13,21683402	-11,6562	56,46051	39,41998	-18,1285	2,298042	-20,0774		
18,63916014	-26,3668	6,354542	-28,2494	-28,0387	73,40612			
-27,01769459	-20,4359	22,50324	75,76875	119,4615				
27,48592318	-22,2061	-54,3814	28,99122					
-12,80457095	39,63684	-44,6318						
2,476556919	-3,58997							
0								

Ιδιαίτερα σημαντικό βήμα κατά την διαδικασία bootstrap είναι η δειγματοληψία με επανατοποθέτηση των καταλοίπων. Ένα τέτοιο *τυχαίο* δείγμα παρουσιάζεται στο τρίγωνο 5. Χρειάζεται να τονίσουμε πως όλα τα κατάλοιπα πρέπει να έχουν την ίδια πιθανότητα να επιλεγούν.

Τρίγωνο 5 – Κατάλοιπα με επανάθεση

-28,66793	-28,6679331	51,17093974	50,89097692	154,22414	-36,1978398	-10,06691098	8,203678	-57,6194
-15,04815	-23,4037745	97,81703189	-15,04814606	-70,20608	107,7085391	-23,40377452	-34,0395	
-10,06691	4,534900497	-70,20607884	-34,03945194	94,766896	-45,7037175	-17,25783994		
8,2036785	-34,8796937	-130,1948525	-10,06691098	-4,634628	-57,6194467			
-36,4698	1,623460609	-17,25783994	1,623460609	154,22414				
-187,6173	-26,3826768	25,06744911	21,29682742					
51,17094	50,89097692	94,76689575						
63,281229	-17,2578399							
-28,3882								

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα resampled residuals του τριγώνου 5 και τις προσαυξητικές προσαρμοσμένες ζημιές (incremental fitted) που παρουσιάζονται στο τρίγωνο 3, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα bootstrap δείγμα χρησιμοποιώντας τη σχέση $C^* = r_p{}^* \cdot \sqrt{m} + \mathrm{m}$. Το bootstrap δείγμα παρουσιάζεται στο τρίγωνο 6 ενώ στο τρίγωνο 7 παρουσιάζεται το αθροιστικό bootstrap δείγμα.

Τρίγωνο 6 - Προσαυξητικά Δεδομένα

2240493,7	915884,9209	308561,2337	82035,24049	74928,237	33411,52846	20847,09402	-4236,07	1136,339
2289378,2	1153811,799	222472,0226	75539,06125	70264,192	40519,32357	21339,69686	2291,848	
2506948,7	1141076,092	246227,8601	117322,1324	70282,335	19452,49346	30606,32612		
2287427,7	1028708,735	239014,0863	89016,57149	51844,532	19341,62137			
2324653,6	1037567,256	235304,9401	110283,3377	57897,774				
2144144,2	1032774,989	221019,0079	84607,08296					
2144913,2	943750,954	241983,9083						
2152106,3	1008316,496							
2094887,5								

Τρίγωνο 7 - Συσσωρευμένα Δεδομένα

2240493,7	3156378,646	3464939,88	3546975,12	3621903,4	3655314,886	3676161,98	3671926	3673062
2289378,2	3443189,989	3665662,011	3741201,072	3811465,3	3851984,588	3873324,285	3875616	
2506948,7	3648024,802	3894252,662	4011574,794	4081857,1	4101309,622	4131915,948		
2287427,7	3316136,408	3555150,495	3644167,066	3696011,6	3715353,219			
2324653,6	3362220,87	3597525,81	3707809,148	3765706,9				
2144144,2	3176919,215	3397938,223	3482545,306					
2144913,2	3088664,197	3330648,105						
2152106,3	3160422,758							
2094887,5								

Resampled Development Factors

1,4567087	1,07393142	1,025899943	1,017436298	1,0074106	1,006270615	0,99974247	1,000309

Ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία υπολογίζουμε *ένα* bootstrap απόθεμα για κάθε έτος ατυχήματος αλλά και συνολικά.

Απόθεμα Bootstrap	
i=1	
i=2	4.504
i=3	10.079
i=4	33.256

i=5	53.146
i=6	112.816
i=7	194.542
i=8	429.862
i=9	1.312.328
Σύνολο	**2.150.533 €**

Καθώς έχουμε n=45 παρατηρήσεις και p=18 παραμέτρους, οι βαθμοί ελευθερίας f είναι 27. Στη συνέχεια για τον υπολογισμό της process variance είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε την παράμετρο κλίμακας Pearson $\varphi_P = \frac{\Sigma {r_P}^2}{n-p}$ η οποία είναι 3.707 και στη συνέχεια χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε αυτή την ποσότητα με το απόθεμα που υπολογίσαμε με την μέθοδο Chain Ladder. Το estimation error δεν είναι τίποτα άλλο παρά το τυπικό σφάλμα των εκτιμώμενων αποθεμάτων όπως υπολογίστηκαν με την διαδικασία bootstrap πολλαπλασιασμένο με $\sqrt{45/27}$ βαθμούς ελευθερίας. Το bootstrap σφάλμα πρόβλεψης είναι η τετραγωνική ρίζα του τυχαίου σφάλματος και του σφάλματος εκτίμησης και δίνεται από τη σχέση $\mathrm{PE_{bs}}(R) = \sqrt{\varphi_P R + \frac{n}{n-p}(\mathrm{SE_{bs}}(R))^2}$.

Θα μπορούσαμε να παρακάμψουμε την παραπάνω σύνθετη διαδικασία μέσω του στατιστικού προγράμματος R όπου μπορούμε ευκολότερα να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της μελλοντικής κατανομής των αποθεμάτων κάνοντας την υπόθεση της Over–Dispersed Poisson κατανομής για τις προσαυξητικές απαιτήσεις. Παίρνουμε λοιπόν:

```
    Latest Mean Ultimate Mean IBNR SD IBNR  IBNR 75%  IBNR 95%

1 3,678,633     3,678,633          0        0         0         0

2 3,902,425     3,906,745      4,320    6,043     6,392    16,308

3 3,898,825     3,908,512      9,687    8,484    14,700    24,501

4 3,548,422     3,576,066     27,644   11,793    34,710    48,997

5 3,585,812     3,637,669     51,857   16,060    61,547    80,068

6 3,641,036     3,752,279    111,243   23,067   125,461   151,306

7 3,428,335     3,616,269    187,934   29,369   207,697   242,047

8 3,158,581     3,571,577    412,996   42,972   440,119   484,280

9 2,144,738     3,576,447  1,431,709   98,072 1,496,687 1,589,944

                    Totals

Latest:         30,986,807

Mean Ultimate:  33,224,196
```

```
Mean IBNR:       2,237,389
SD IBNR:           129,887
Total IBNR 75%:  2,325,541
Total IBNR 95%:  2,450,871
```

Παρατηρούμε πως το εκτιμώμενο απόθεμα (Mean IBNR) ανέρχεται σε 2.237.389 € και είναι πολύ κοντά στο απόθεμα που εκτιμήσαμε με τη μέθοδο Mack αλλά και την αναλυτική μέθοδο bootstrap. Ακόμα, από τα αποτελέσματα προκύπτει πως η τυπική απόκλιση του αποθέματος (SD IBNR) είναι 129.887. Μπορούμε να ορίσουμε την εκτίμηση του αποθέματος με τέτοιο τρόπο ώστε 75%, 95% ή 99,5% φορές των περιπτώσεων τα εκτιμώμενα αποθέματα ζημιών να είναι αρκετά προκειμένου να απορροφήσουν οποιοδήποτε σφάλμα.

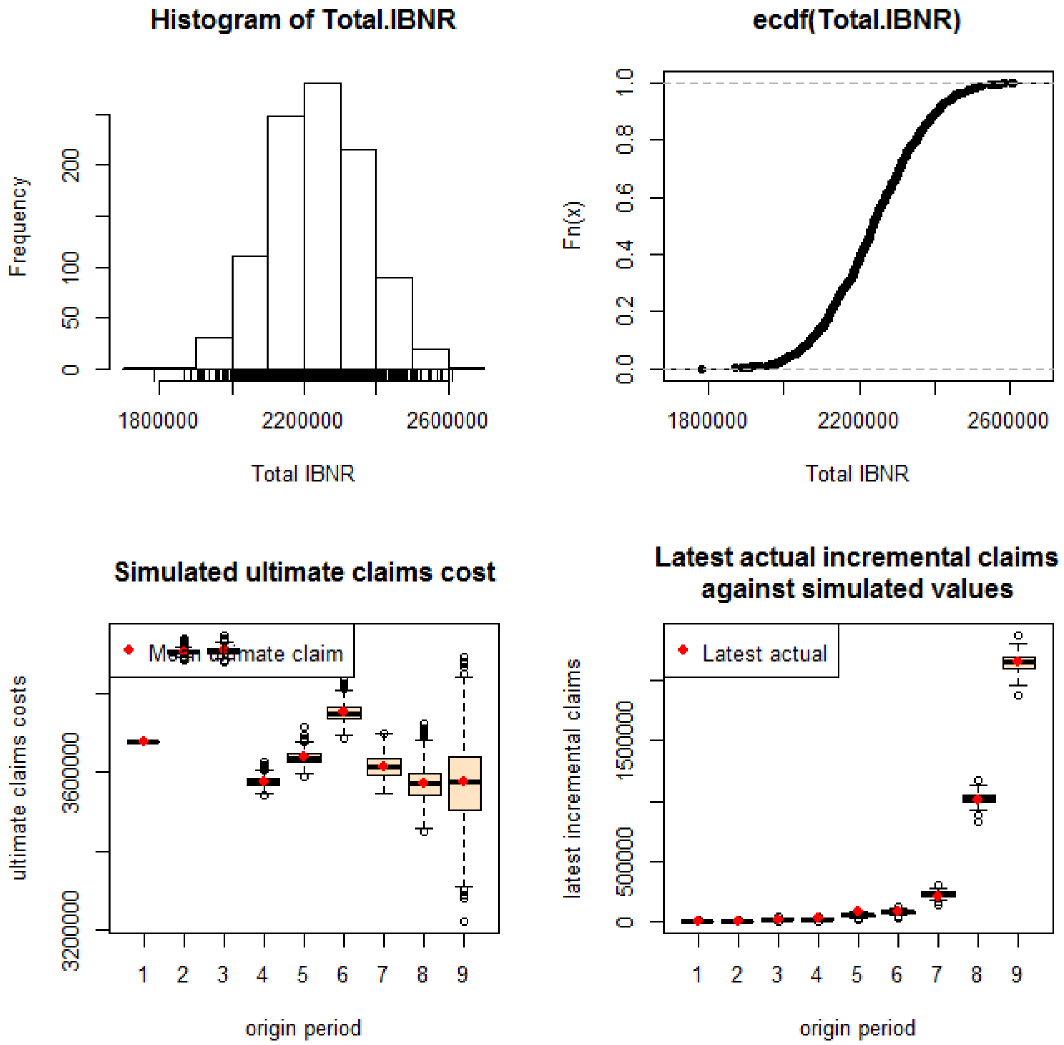
Συνεπώς 99.5% φορές των περιπτώσεων το απόθεμα που θα πρέπει να διαθέτει η ασφαλιστική εταιρία θα είναι μικρότερο ή ίσο με 2.569.563€ ή αντίστοιχα 75% φορές των περιπτώσεων το απαιτούμενο απόθεμα θα είναι μικρότερο ή ίσο με 2.325.541€.

Πίνακας 4.12-Συγκεντρωτικά bootstrap αποθέματα για ODP

Έτος ατυχήματος i	Mean IBNR	S.D/Prediction Error	75% ποσοστημόριο	95% ποσοστημόριο	99.5% ποσοστημόριο
1		0	0	0	0
2	4.320	6.043	6.392	28.064	28.605
3	9.687	8.484	14.699	38.075	38.076
4	27.644	11.793	34.710	62.035	62.035
5	51.857	16.060	61.546	96.671	96.671
6	111.243	23.067	125.460	17.6955	176.956
7	187.934	29.369	207.696	266.546	266.546
8	412.996	42.972	440.119	484.280	544.000
9	1.431.709	98.072	1.496.687	1.589.944	1.696.145
Σύνολο	***2.237.389 €***	***129.887 €***	***2.325.541 €***	***2.450.871 €***	**2.569.563 €**

Η διαφορά μεταξύ του συνολικού 75% ποσοστημορίου και του συνολικού αποθέματος μας δίνει το περιθώριο κινδύνου) το οποίο αντιστοιχεί σε 87,715€ ή 4% της βέλτιστης εκτίμησης.

Όπως σε όλες τις μεθόδους έτσι και στη δειγματοληπτική μέθοδο bootstrap είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να μελετήσουμε τα γραφήματα των αποθεμάτων τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω.



Γράφημα 4.6

Το πρώτο γράφημα απεικονίζει το ιστόγραμμα των συνολικών IBNR αποθεμάτων που προκύπτουν μέσω προσομοίωσης για όλα τα έτη ατυχήματος. Το επόμενο γράφημα απεικονίζει την εμπειρική κατανομή (empirical distribution) ή την πραγματική κατανομή που ακολουθεί το δείγμα των δεδομένων μας. Ουσιαστικά, αποτελεί την κατανομή που ακολουθούν τα IBNR αποθέματα που παρατηρήσαμε. Από το γράφημα φαίνεται πως ακολουθούν την λογαριθμοκανονική (log-normal) κατανομή.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ένα box-plot των τελικών ζημιών που προκύπτουν μέσω προσομοίωσης σε κάθε έτος ατυχήματος και στο τέλος έχουμε ένα box-plot που παρουσιάζει τις προσαυξητικές απαιτήσεις που προκύπτουν μέσω προσομοίωσης για κάθε έτος ατυχήματος σε σχέση με τις πραγματικές προσαυξητικές απαιτήσεις του έτους ατυχήματος. Παρατηρούμε πως οι πραγματικές προσαυξητικές απαιτήσεις και οι προσαυξητικές απαιτήσεις που προκύπτουν μέσω προσομοίωσης έχουν την ίδια τάση (trend).

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με παραπάνω και υποθέτοντας πως οι προσαυξητικές απαιτήσεις ακολουθούν την κατανομή Gamma, παίρνουμε τα αποτελέσματα του πίνακα 4.13

Πίνακας 4.13-Συγκεντρωτικά bootstrap αποθέματα για Gamma

Έτος ατυχήματος i	Mean IBNR	S.D/Prediction Error	75% ποσοστημόριο	95% ποσοστημόριο	99.5% ποσοστημόριο
1		0	0	0	0
2	4.252	5.872	6.723	15.002	25.342
3	9.493	7.699	13.940	23.697	33.029
4	28.155	12.129	35.480	50.391	65.006
5	51.803	16.043	61.552	80.249	101.656
6	111.329	22.234	124.751	151.696	175.101
7	186.906	30.025	205.146	237.511	275.589
8	412.394	44.072	440.622	488.703	529.145
9	1.432.920	99.631	1.496.728	1.604.034	1.713.927
Σύνολο	***2.237.252€***	***131.967***	***2.322.985 €***	***2.450.506 €***	**2.625.385€**

Αρχικά, παρατηρούμε πως και τα δύο μοντέλα είναι αρκετά κοντά στις εκτιμήσεις τους με αυτό της Gamma να απαιτεί μικρότερο απόθεμα μόλις κατά 137 €. Ωστόσο η τυπική απόκλιση των αποθεμάτων αποτελεί το 5,89% του αποθέματος με την κατανομή Gamma ενώ με την ODP αποτελεί το 5,81%. Στη συνέχεια, παρατηρούμε πως και στα δύο μοντέλα το VaR αυξάνεται από έτος ατυχήματος σε έτος ατυχήματος. Αυτό ερμηνεύεται από το γεγονός πως τα πιο πρόσφατα έτη ατυχήματος περιέχουν μεγαλύτερο επίπεδο αβεβαιότητας και κατά συνέπεια χρειάζεται να δεσμεύεις περισσότερα κεφάλαια.

4.5 Υπολογισμός Claims Development Result (CDR)

Στην ενότητα αυτή, συνοψίζουμε τους υπολογισμούς που κάναμε παραπάνω για τους συντελεστές εξέλιξης των ζημιών αλλά και για τα $\hat{\sigma}_j^2$. Έχουμε λοιπόν τα στοιχεία που παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{f}_j^{I}$	1.4759	1.0719	1.0232	1.0161	1.0063	1.0056	1.0013	1.0011
$\hat{f}_j^{I+1}$	1.4785	1.0715	1.0233	1.0152	1.0072	1.0053	1.0011	1.0101
$\hat{\sigma}_j^2$	911.43	189.82	97.81	178.75	20.64	3.23	0.36	0.04

Η εκτίμηση του CDR γίνεται μέσω της σχέσης $\widehat{\mathrm{CDR}}_i(I+1) = \hat{R}_i^{D_I} - (\mathrm{C}_{i,I-i+1} + \hat{R}_i^{D_{I+1}})$ όπου $\hat{R}_i^{D_I}$ και $\hat{R}_i^{D_{I+1}}$ είναι τα εκτιμώμενα αποθέματα στο τέλος του έτους t=I και t=I+1 αντίστοιχα, ενώ $\mathrm{C}_{i,I-i+1}$ δηλώνουν τις προσαυξητικές ζημιές μεταξύ του έτους I και I+1 για έτος ατυχήματος i. Ο υπολογισμός των αποθεμάτων μπορεί να γίνει με οποιαδήποτε από τις μεθόδους που αναφέραμε παραπάνω με τα αποτελέσματα που προκύπτουν να έχουν μικρές διαφορές. Στην προκειμένη περίπτωση εμείς θα υπολογίσουμε τα αποθέματα με την μέθοδο Mack.

Έχουμε ήδη υπολογίσει τα αποθέματα με τη μέθοδο Mack στο τέλος του έτους t=I και μας απομένει να υπολογίσουμε τα αποθέματα στο τέλος του έτους t=I+1. Με βάση τις πληροφορίες που παίρνουμε από τον πίνακα 4.8 έχουμε:

Πίνακας 4.14 - Αποτελέσματα μεθόδου Mack t=I+1

Έτος Ατυχήματος	Τελικές πληρωθείσες αποζημιώσεις	Τελικές εκτιμώμενες απαιτήσεις	IBNR απόθεμα	Τυπικό Σφάλμα (s.e)	%s.e
1	3.678.633	3.678.633	0	0	-
2	3.906.738	3.906.738	0	554	-
3	3.902.130	3.906.474	4.344	1.472	39%
4	3.564.470	3.572.468	7.998	3.998	50%
5	3.624.784	3.652.306	27.522	12.223	44%
6	3.679.909	3.734.487	54.578	29.304	53,7%
7	3.511.860	3.618.186	106.326	34.138	32,1%
8	3.376.375	3.559.715	183.340	42.403	23,1%
9	3.218.196	3.635.701	417.505	68.527	16,4%
Σύνολο	***32.463.095€***	***33.264.708€***	***801.613 €***	***103.698***	***13%***

Παρατηρούμε ότι οι τελικές πληρωθείσες αποζημιώσεις στο τέλος του έτους t=I+1, ανέρχονται σε 32.463.095€ ενώ οι τελικές εκτιμώμενες απαιτήσεις ανέρχονται σε 33.264.078€. Συνεπώς, στο τέλος του έτους t=I+1 η ασφαλιστική εταιρία θα πρέπει να διαθέτει επιπλέον απόθεμα ίσο με 801.613€ για να είναι σε θέση να καλύψει τις υποχρεώσεις της. Επιπλέον, παρατηρούμε πως το τυπικό σφάλμα αυξάνεται και καταλήγει να είναι 103.698 (ή 13% του αποθέματος).

Συνεπώς έχοντας υπολογίσει τα αποθέματα ανά έτος ατυχήματος για τα έτη t=I και t=I+1 και είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τις προσαυξητικές πληρωμές μεταξύ του έτους I και I+1 για το έτος ατυχήματος i, οι οποίες προκύπτουν από τη σχέση $C_{i,I-i+1} = D_{i,I-i+1} - D_{i,I-i}$. Οι προσαυξητικές πληρωμές είναι χρωματισμένες με κόκκινο χρώμα.

```
[1,] 2202584 1007865 257673  76948 76557 23009 24376 5499 4122
[2,] 2350650 1202373 230823  56221 25120 13557 19537 4144 4313
[3,] 2321885 1102305 276686  97322 56557 24238 19832 3305   NA
[4,] 2171487  993787 230567  70612 49250 32719 16048   NA   NA
[5,] 2140328 1016751 242183 101258 85292 38972    NA   NA   NA
[6,] 2290664 1047533 212135  90704 38873    NA    NA   NA   NA
[7,] 2148216 1071559 208560  83525    NA    NA    NA   NA   NA
[8,] 2143728 1014853 217794     NA    NA    NA    NA   NA   NA
[9,] 2144738 1073458      NA     NA    NA    NA    NA   NA   NA
```

Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας που παρουσιάζει τα αποθέματα και το CDR την χρονική στιγμή t=I+1.

Πίνακας 4.15-CDR

	$\hat{R}_i^{D_I}$	$C_{i,I-i+1}+\hat{R}_i^{D_{I+1}}$	$\widehat{\mathrm{CDR}}_i(I+1)$
1	0	0	0
2	4.378	4.313	65
3	9.347	7.649	1.698
4	28.392	24.046	4.347
5	51.444	66.494	-15.050
6	111.811	93.451	18.360
7	187.084	189.851	-2.767
8	411.864	401.134	10.731
9	1.433.505	1.490.962	-57.458
Σύνολο	**2.237.826 €**	**2.277.900 €**	**-40.074 €**

Παρατηρούμε πως το CDR στον χρόνο t=I+1 είναι αρνητικό και ανέρχεται στις 40.000€ όπως ακριβώς είχαμε παρατηρήσει και στον πίνακα 3.1 του τρίτου κεφαλαίου. Επιπλέον, επιβεβαιώνεται πως το CDR μπορεί να προκύψει εύκολα ως η διαφορά των εκτιμώμενων τελικών απαιτήσεων (ultimate) μεταξύ του χρόνου t=I και t=I+1 (δηλαδή. 33.224.633.11-33.264.707.95= -40.074€).

Ωστόσο παραμένει το ερώτημα κατά πόσο θα μπορούσε το πραγματικό αθροιστικό CDR να ήταν θετικό εάν γνωρίζαμε τους συντελεστές εξέλιξης Chain Ladder f_j στο χρόνο t=I.

Για αυτό τον λόγο πραγματοποιούμε ανάλυση των διακυμάνσεων αλλά και των MSE χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του κεφαλαίου 3. Ο πίνακας 4.16 παρουσιάζει τα αποτελέσματα για κάθε έτος ατυχήματος αλλά και συνολικά.

Παρατηρούμε, πως η εκτιμώμενη τυπική απόκλιση του πραγματικού συνολικού CDR ανέρχεται στις 65.412€, πράγμα που σημαίνει πως είναι δεν είναι απίθανο να έχουμε παρατηρήσει πραγματικό συνολικό CDR μέσα στο εύρος ± 40.000€. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί στο σφάλμα διαδικασίας του CDR. Παράλληλα παρατηρούμε πως το σφάλμα εκτίμησης του παρατηρούμε συνολικού CDR είναι 47.908 €. Αυτό σημαίνει πως είναι πιθανό το πραγματικό CDR να έχει το ίδιο πρόσημο με το observable CDR που είναι 40.000€. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως ακόμα και να γνωρίζαμε τους πραγματικούς συντελεστές εξέλιξης Chain Ladder θα παίρναμε και πάλι αρνητική τιμή στο CDR.

Παράλληλα από τον πίνακα 4.16 προκύπτει πως το τυπικό σφάλμα του συνολικού CDR ανέρχεται σε 81.081 γεγονός που δεν αποκλείει να έχουμε παρατηρούμενο CDR -40.000€. Δηλαδή η παρατήρηση μας -40.000€ είναι μέσα στα λογικά πλαίσια και όχι έκτροπη (outlier). Σημειώνουμε πως εξετάζουμε μόνο την αβεβαιότητα στην εξέλιξη των ζημιών μόνο για ένα έτος. Αυτό ακριβώς είναι το short term view που αναφέραμε στο κεφάλαιο 3 που θα μας οδηγήσει σταδιακά στο long term view.

Πίνακας 4.16 - Μεταβλητότητα των εκτιμήσεων σε χιλιάδες ευρώ

i	$\hat{R}_i^{D_I}$	Process variance CDR	Estimation Error CDR	s.e(CDR)
1		0	0	0
2	4.378	395	407	566
3	9.347	1.185	900	1.487
4	28.392	3.395	1.966	3.923
5	51.444	8.673	4.395	9.723
6	111.811	25.877	11.804	28.443
7	187.084	18.875	9.100	20.954
8	411.864	25.822	11.131	28.119
9	1.433.505	49.978	18.581	53.321
Σύνολο	***2.237.826 €***	***65.412 €***	***47.908 €***	***81.081 €***

$\hat{R}_i^{D_I}$	Εκτιμώμενα αποθέματα στο χρόνο t=I με τη μέθοδο Mack Chain Ladder
Process variance CDR=$\hat{Var}(\mathrm{CDR}_i(I+1))^{1/2}$	Εκτιμώμενη τυπική απόκλιση του πραγματικού CDR.
Estimation Error CDR=$\hat{MSEP}_{D_I}{}^{1/2}$	Εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα εκτίμησης μεταξύ πραγματικού και observable CDR.
S.E(CDR)	Τυπικό σφάλμα του CDR (τετραγωνική ρίζα του MSE του εκτιμώμενου $\hat{\mathrm{CDR}}$)

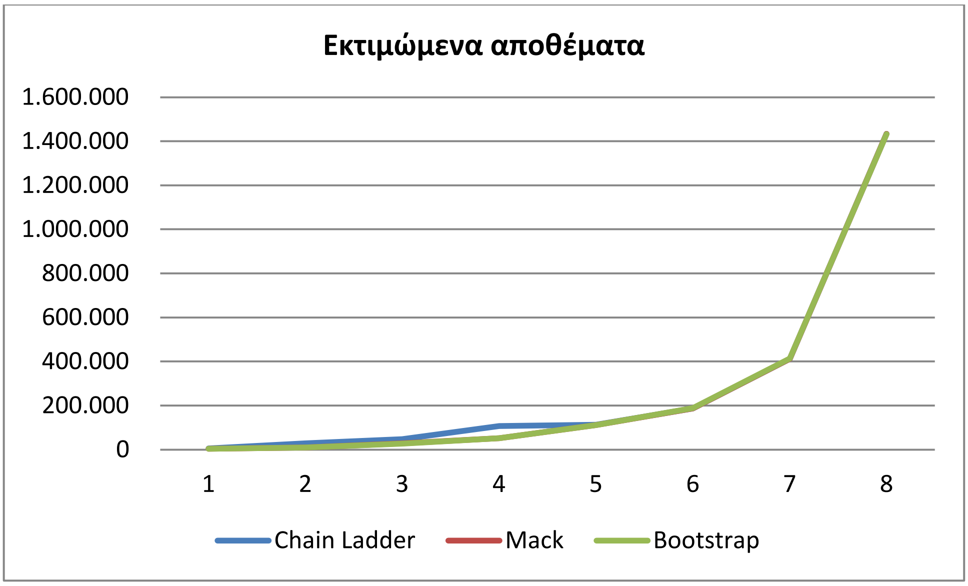
4.6 Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ των μεθόδων

Προκειμένου να εξάγουμε συμπεράσματα παραθέτουμε στον παρακάτω πίνακα τα εκτιμώμενα αποθέματα ανά έτος ατυχήματος αλλά και συνολικά που προκύπτουν από την μέθοδο Chain Ladder, την μέθοδο Mack και την δειγματοληπτική μέθοδο bootstrap. Παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα μεταξύ των τριών μεθόδων είναι αρκετά κοντά και τούτο διότι και οι τρείς μεθοδολογίες βασίζονται στους δείκτες εξέλιξης.

Πίνακας 4.17 -Σύγκριση Αποθεμάτων

Έτος Ατυχήματος	Chain Ladder	Mack	Bootstrap Chain Ladder
1	0	0	0
2	4.682	4.378	4.320
3	27.709	9.347	9.687
4	47.375	28.392	27.644
5	106.377	51.444	51.857
6	112.139	111.811	111.243
7	187.398	187.084	187.934
8	412.169	411.864	412.996
9	1.433.742	1.433.505	1.431.709
Σύνολο	**2.331.594 €**	***2.237.826€***	***2.237.389€***

Από τον πίνακα 4.17 συμπεραίνουμε πως το συνολικό εκτιμώμενο απόθεμα με την μέθοδο Chain Ladder είναι 2.331.594€, ποσό μεγαλύτερο από το αντίστοιχο απόθεμα που χρειάζεται να σχηματιστεί με το μοντέλο του Mack αλλά και με την δειγματοληπτική μέθοδο Bootstrap. Πιο συγκεκριμένα, στα πρώτα έτη ατυχήματος και ιδιαίτερα στο 3^{ο},4^{ο} και 5^{ο} έτος ατυχήματος παρατηρείται μια αξιοσημείωτη διαφορά στα εκτιμώμενα αποθέματα μεταξύ της μεθόδου Chain Ladder και των υπόλοιπων μεθόδων. Ωστόσο, στα υπόλοιπα έτη ατυχήματος οι διαφορές μεταξύ των μεθόδων είναι σημαντικά μικρότερες. Επιπλέον προκύπτει πως μεταξύ του μοντέλου του Mack και της δειγματοληπτικής μεθόδου Bootstrap τα εκτιμώμενα αποθέματα είναι πάρα πολύ κοντά μεταξύ τους, καθώς διαφέρουν στο σύνολο τους μόλις κατά 437€. Αυτό δεν είναι παράξενο καθώς τόσο η μέθοδος Mack όσο και η μέθοδος Bootstrap βασίζονται στην ντετερμινιστική μέθοδο Chain Ladder. Το παρακάτω γράφημα συνοψίζει τα παραπάνω αποτελέσματα καθώς αποτελεί μια σύγκριση των τριών μεθόδων. Παρατηρούμε πως καθώς οι μέθοδοι αποδίδουν αποτελέσματα που δεν απέχουν σημαντικά μεταξύ τους, υπάρχει δυσκολία να αποτυπωθεί στο γράφημα η εξέλιξη τους . Ωστόσο, είμαστε σε θέση να επισημάνουμε πως το μοντέλο του Mack βρίσκεται πιο κοντά στις εκτιμήσεις της μεθόδου Chain Ladder καθώς οι δύο γραμμές είναι κοντά η μία στην άλλη. Στο σημείο αυτό πρέπει να συνυπολογίσουμε πως οι εκτιμήσεις με τη μέθοδο Chain Ladder δεν είναι παρά απλές τιμές ενώ οι στοχαστικές προσεγγίσεις είναι σε θέση να προσφέρουν και συμπληρωματικές πληροφορίες, πέρα από αυτές της μεθόδου Chain Ladder,όπως είναι τα τυπικά σφάλματα των παραμέτρων, των αποθεμάτων κλπ.



Γράφημα 4.7

Πράγματι, ιδιαίτερη σημασία πρέπει να δοθεί στα συνολικά τυπικά σφάλματα επί του συνολικού εκτιμώμενου αποθέματος τα οποία θα βοηθήσουν να μετρήσουμε την αβεβαιότητα/μεταβλητότητα στους υπολογισμούς μας. Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε τα τυπικά σφάλματα της μεθόδου του Mack, της δειγματοληπτικής μεθόδου bootstrap καθώς και του CDR σαν ποσοστό των εκτιμώμενων αποθεμάτων τόσο ανά έτος ατυχήματος όσο και συνολικά.

Πίνακας 4.18 - Τυπικά Σφάλματα σαν ποσοστό των αποθεμάτων

Έτος ατυχήματος i	Τυπικό Σφάλμα (s.e %) Mack	Τυπικό Σφάλμα (s.e %) Bootstrap	Τυπικό Σφάλμα (s.e %)CDR
1			
2	13%	140%	12.93%
3	17%	87.58%	15.90%
4	15%	42.66%	13.82%
5	20%	31%	18.90%
6	27%	20.75%	25.44%
7	19%	15.63%	11.20%
8	11%	10.40%	6.83%
9	5%	6.85%	3.72%
Σύνολο	***4.85%***	***5.81%***	***3.62%***

Παρόλο που τα σφάλματα σαν ποσοστό επί του συνολικού αποθέματος μεταξύ των μεταξύ των μεθόδων Mack και Bootstrap είναι πολύ κοντά (1% διαφορά επί του συνολικού αποθέματος), παρατηρούμε σημαντικές διαφορές μεταξύ των ετών ατυχήματος. Συγκεκριμένα η μεγαλύτερη διαφορά προκύπτει στο 2ο έτος ατυχήματος όπου η δειγματοληπτική μέθοδος bootstrap αποδίδει ένα μεγάλο τυπικό σφάλμα που ανέρχεται σε 140%. Σημειώνουμε πως καθώς το εκτιμώμενο απόθεμα στο 2ο έτος ατυχήματος είναι μικρό, δεν αποκλείεται η ύπαρξη ενός μεγάλου τυπικού σφάλματος. Ακόμα προκύπτει πως ο δείκτης μεταξύ του CDR για ένα έτος και του συνολικού τριγώνου εξέλιξης με την μέθοδο Mack είναι 75% ενώ με την μέθοδο Bootstrap είναι 63% πάντα μέσα στα πλαίσια του [50%,95%] βάση της μελέτης AISAM-ACME 2007.

Επιπλέον, παρατηρούμε πως το μικρότερο τυπικό σφάλμα σαν ποσοστό επί του συνολικού αποθέματος τόσο σε κάθε έτος ατυχήματος όσο και συνολικά, το έχουμε με τη μέθοδο CDR όπου και εξετάζει την one-year view. Από τους πίνακες 4.16 και 4.18 παρατηρούμε πως η πληροφορία στο επόμενο οικονομικό έτος (διαγώνιος I+1) συμβάλει σημαντικά στην συνολική αβεβαιότητα των ζημιών που προέρχονται από προηγούμενα έτη. Δηλαδή η αβεβαιότητα στο επόμενο οικονομικό έτος είναι 81.080 ενώ η συνολική αβεβαιότητα είναι 108.401 με την μέθοδο Mack και 129.887 με την δειγματοληπτική μέθοδο bootstrap. Συνεπώς, όταν επιλέγουμε short tailed business (δηλαδή οι ζημιές διακανονίζονται σε σύντομο χρονικό διάστημα) είναι λογικό ένα μεγάλο μερίδιο της αβεβαιότητας να εμπεριέχεται ήδη στο επόμενο οικονομικό έτος. Εάν επιλέξουμε long tailed business ο κίνδυνος ενός έτους είναι περίπου τα 2/3 του συνολικού κινδύνου.

4.7 Σχηματισμός Τεχνικών Προβλέψεων

Για τον σχηματισμό των τεχνικών προβλέψεων θα χρειαστεί να υπολογίσουμε ξεχωριστά την βέλτιστη εκτίμηση των μελλοντικών χρηματικών ροών και το περιθώριο κινδύνου RM για τον ασφαλιστικό κίνδυνο. Αρχικά, οι βέλτιστες εκτιμήσεις προκύπτουν από τις εκτιμήσεις των αποθεμάτων που έχουμε υπολογίσει με κάθε μέθοδο Ο υπολογισμός του περιθωρίου κινδύνου απαιτεί αρχικά τον υπολογισμό τον υπολογισμό του κεφαλαίου φερεγγυότητας (SCR). Όπως έχει αναφερθεί στο 3^o κεφάλαιο ο υπολογισμός του γίνεται θεωρώντας την διαφορά ενός ακραίου σεναρίου (quantile p=99.5%) και της μέση τιμή της βέλτιστης εκτίμησης, δηλαδή $SCR=VaR_{99,5\%}$-Best Estimate. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4.19 – $SCR_{reserve}$ με μέθοδο ποσοστημορίων

Έτος ατυχήματος	Μέση τιμή	99.5% ποσοστημόριο	Chain Ladder εκτίμηση	$SCR=VaR_{99,5\%}$-Best Estimate	%SCR
1	0	0	0	0	
2	4.320	28.604	4.682	24.284	518.67%
3	9.687	38.075	27.709	28.388	102.45%
4	27.644	62.035	47.375	34.391	72.59%
5	51.857	96.671	106.377	44.814	42.13%
6	111.243	176.955	112.139	65.712	58.60%
7	187.934	266.546	187.398	78.612	41.95%
8	412.996	544.000	412.169	131.004	31.78%
9	1.431.709	1.696.145	1.433.742	264.436	18.44%
Σύνολο	***2.237.389 €***	***2.569.563 €***	***2.331.594 €***	***332.174 €***	***14.25%***

Παρατηρούμε πως η ασφαλιστική εταιρία χρειάζεται να διαθέτει συνολικό κεφάλαιο φερεγγυότητας ίσο με 332.174€ σήμερα (t=0) προκείμενου να είναι φερέγγυα απέναντι στις εποπτικές αρχές. Είναι δηλαδή το επιπλέον ποσό που απαιτείται για να καλυφθούν με 99,5% πιθανότητα οι ακραίες ζημιές. Ακόμα, το άθροισμα των κεφαλαίων φερεγγυότητας σε κάθε έτος ατυχήματος i είναι ίσο με 671.641 €. Η διαφορά 339.467 = 671.641 - 332.174 εκφράζει το όφελος που έχει η ασφαλιστική εταιρία λόγω διαφοροποίησης (Diversification benefit) μεταξύ των κλάδων εργασιών. Πράγματι, συνδυάζοντας ένα κίνδυνο με κάποιον άλλο κίνδυνο, με το οποίο δεν είναι τέλεια συσχετισμένοι, έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση του συνολικού επιπέδου του κινδύνου και κατά συνέπεια τη μείωση των απαιτούμενων κεφαλαίων φερεγγυότητας. Πρακτικά, αυτό σημαίνει πως δεν είναι πιθανό και στα εννέα έτη ατυχήματος να συμβούν ακραίες ζημιές και να απαιτείται από την ασφαλιστική εταιρία να δεσμεύει κεφάλαια ίσα με αυτό του VaR προκειμένου να καλύψει τον κίνδυνο των αποθεμάτων.

Όσον αφορά το περιθώριο κινδύνου, αυτό υπολογίζεται με δύο τρόπους. Είτε με την μέθοδο των ποσοστημορίων είτε με τη μέθοδο του κόστους κεφαλαίου. Όπως αναφέραμε και στο 3^o κεφάλαιο, το περιθώριο κινδύνου σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή δίνεται από τη σχέση RM=$VaR_{75\%}$-Best Estimate και ανέρχεται σε 87.715 € ή σε 4% της βέλτιστης εκτίμησης.

Για τον υπολογισμό του περιθωρίου κινδύνου σύμφωνα με τη μέθοδο του κόστους κεφαλαίου θα χρειαστούμε τα επιτόκια από την καμπύλη επιτοκίων QIS-5 για τα πρώτα εννέα χρόνια και έπειτα θα υπολογίσουμε τους συντελεστές προεξόφλησης σύμφωνα με την πράξη: $\frac{V_{t-1}}{(1+i_t)}$ όπου V_{t-1} : ο συντελεστής προεξόφλησης του προηγούμενου έτους και i_t το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο για την χρονική στιγμή που υπολογίζουμε τον συντελεστή προεξόφλησης. Το περιθώριο κινδύνου συνεπώς υπολογίζεται σύμφωνα με την σχέση (3.12) του κεφαλαίου 3 και προκύπτει ο πίνακας 4.20 όπου το RM για τον ασφαλιστικό κίνδυνο στο t=0 είναι ίσο με 34.940€.

Πίνακας 4.20 –Risk Margin με CoC

Έτος	Spot	Discount factor	SCR	RMt	RM
1		1	0		34.941€
2	1.21%	0.988043	24.284	1439.618	
3	1.79%	0.970703	28.388	1653.379	
4	2.19%	0.949869	34.391	1960.016	
5	2.51%	0.92665	44.814	2491.614	
6	2.76%	0.90179	65.712	3555.506	
7	2.97%	0.875779	78.612	4130.805	
8	3.16%	0.848973	131.004	6673.128	
9	3.32%	0.821656	264.436	13036.53	

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του κεφαλαίου φερεγγυότητας είναι μέσω του CDR, δηλαδή από τη σχέση $\mathrm{SCR}^{i}_{\mathrm{reserve}} = \mathrm{VaR}_{99.5\%}(\widehat{CDR}_i(I+1))$ για κάθε έτος ατυχήματος και ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία υπολογίζουμε το περιθώριο κινδύνου αλλά και το κεφάλαιο φερεγγυότητας σαν ποσοστό του αποθέματος. Συγκεντρωτικά τα στοιχεία παρουσιάζονται στον πίνακα 4.21.

Πίνακας 4.21-$SCR_{reserve}$ με CDR

Έτος	Chain Ladder εκτίμηση	SCR	%SCR	RM
1	0	0		36.574€
2	4.682	24.292	519%	
3	27.709	32.742	118%	
4	47.375	40.507	86%	
5	106.377	38.523	36%	
6	112.139	92.438	82%	
7	187.398	91.683	49%	
8	412.169	162.883	40%	

9	1.433.742	216.230	15%
Σύνολο	***2.331.591 €***	**337.543€**	**14.58%**

Παρατηρούμε και πως οι δύο μέθοδοι μας έδωσαν αποτελέσματα με μικρές αποκλίσεις τόσο κατά τον υπολογισμό του SCR όσο και κατά τον υπολογισμό του περιθωρίου κινδύνου. Και στις δύο μεθόδους το SCR αυξάνεται όσο πλησιάζουμε στα πιο πρόσφατα έτη ατυχήματος και τούτο διότι τα πιο πρόσφατα έτη ατυχήματος περιέχουν μεγαλύτερα επίπεδα αβεβαιότητας και κατά συνέπεια χρειάζεται να διαθέτεις περισσότερα κεφάλαια για να τα αντιμετωπίσεις.

Ένα άλλο στοιχείο που προκύπτει από τους παραπάνω πίνακες είναι πως το SCR με τη μέθοδο των ποσοστημορίων ανέρχεται σε 14,25% της βέλτιστης εκτίμησης ενώ με τη μέθοδο του CDR το αντίστοιχο ποσοστό είναι 14,58%.

Όσον αφορά τα περιθώρια κινδύνου και σε αυτά οι διαφορές είναι μικρές. Στην πρώτη περίπτωση όπου υπολογίσαμε το Risk Margin ίσο με 34.941 (1,5% της βέλτιστης εκτίμησης) ενώ στη δεύτερη υπολογίσαμε Risk Margin ίσο με 36.574 € (1,56% της βέλτιστης εκτίμησης).

Στον πίνακα 4.22 παρουσιάζεται το ύψος της τεχνικής πρόβλεψης αναλυόμενο σε βέλτιστη εκτίμηση και περιθώριο κινδύνου.

Πίνακας 4.22-Τεχνικές Προβλέψεις

Values	
Εκτιμήσεις BE	2.331.591 €
Risk Margin	36.574 €
Τεχνικές Προβλέψεις	2.366.604 €
SCR	337.543 €

5ο Κεφάλαιο: Συμπεράσματα

Στόχος της εφαρμογής ήταν ο υπολογισμός των αποθεμάτων με διάφορες στοχαστικές μεθόδους και ο υπολογισμός του απαιτούμενου κεφαλαίου φερεγγυότητας (SCR) για τον κίνδυνο των αποθεμάτων σύμφωνα με την κοινοτική οδηγία Solvency II.

Για τον υπολογισμό των αποθεμάτων αναπτύχθηκαν το μοντέλο του Mack και το δειγματοληπτικό μοντέλο bootstrap και συγκρίναμε τα αποτελέσματα αυτών τον μοντέλων με τη παραδοσιακή μέθοδο Chain Ladder. Οι διαφορές μεταξύ των μεθόδων ήταν πολύ μικρές και τούτο διότι οι μέθοδοι αυτοί αναπαράγουν τους ιστορικούς εκτιμητές της αποθεματοποίησης ζημιών της μεθόδου Chain Ladder. Ωστόσο, τα στοχαστικά μοντέλα παρέχουν και ένα μέτρο για το λάθος της εκτίμησης, μια πληροφορία ιδιαίτερα σημαντική για την διαδικασία αποθεματοποίησης αλλά και γενικότερα για την διοίκηση της ασφαλιστικής εταιρίας ενώ η Chain Ladder κάνει μόνο πρόβλεψη για το ύψος των μελλοντικών απαιτήσεων. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να τονίσουμε πως δεν υπάρχει συγκεκριμένη απάντηση στο ερώτημα ποια μέθοδος αποτελεί την πιο κατάλληλη για την εκτίμηση των αποθεμάτων. Τα αποτελέσματα κάθε μεθόδου εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ποιότητα των δεδομένων που έχουμε στη διάθεση μας.

Σε αυτό το σημείο χρειάζεται να αναφέρουμε πως το μοντέλο του Mack και το bootstrap μελετούν τη μεταβλητότητα του αποτελέσματος γύρω από το εκτιμώμενο απόθεμα μέχρι να διακανονιστεί το σύνολο των ζημιών. Η μελέτη της παραπάνω μεταβλητότητας θεωρείται μακροπρόθεσμη προσέγγιση. Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε την βραχυπρόθεσμη προσέγγιση της μεταβλητότητας που αντικατοπτρίζεται στον Claims Development Result, μια έννοια που εισάγει το Solvency II.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας με την μέθοδο των ποσοστημορίων και με τον Claims Development Result. Και σε αυτή την περίπτωση οι δύο μέθοδοι έδωσαν παρόμοια αποτελέσματα και αυτό γιατί χρησιμοποιούν ως βάση τη μέθοδο Value at Risk. Η εφαρμογή ολοκληρώνεται με τον υπολογισμό του περιθωρίου κινδύνου (Risk Margin) με τη μέθοδο του κόστους κεφαλαίου και με τον σχηματισμό της τεχνικής πρόβλεψης.

Στο μέλλον θα μπορούσε να εξετάσει κανείς τον υπολογισμό του SCR για τον κίνδυνο ανεπάρκειας των ασφαλίστρων αλλά και για τον κίνδυνο αγοράς με τη χρήση εσωτερικού μοντέλου. Τα εσωτερικά μοντέλα μοντελοποιούν τους κινδύνους κάθε ασφαλιστικής κάθε ασφαλιστικής εταιρίας ξεχωριστά και υπολογίζουν τις απαιτήσεις φερεγγυότητας με μεγαλύτερη ακρίβεια από την τυποποιημένη μέθοδο. Ιδιαίτερα στον κλάδο των γενικών ασφαλειών το τοπίο δεν είναι ξεκάθαρο όσον αφορά τον υπολογισμό του SCR με τη χρήση της τυποποιημένης μεθόδου και για αυτό το λόγο αναμένεται ένα μεγάλο ποσοστό εταιριών να σχηματίσει εσωτερικά ή μερικώς εσωτερικά μοντέλα για τον υπολογισμό των κεφαλαιακών τους απαιτήσεων.

Βιβλιογραφία

[1] AISAM-ACME.. (2007). *AISAM-ACME study on non-life long tail liabilities. Reserve risk and risk margin assessment under Solvency II.*

[2] Boumezoued. A.. Angoua. Y.. Devineau. L.. Boisseau. J.. (2011). *One-year reserve risk including a tail factor: closed formula and bootstrap approaches.* Working paper submitted to ASTIN

[3] CEIOPS. (2010). *QIS5 Technical Specifications.*

[4] Dahl. P.. (2003). *Introduction to Reserving.* Corrected edition.

[5] Daykin. C. D.. Pentikainen. T. and Pesonen. M. (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries.* London: Chapman and Hall.

[6] De Felice.M.. Moriconi.F.. (2003). *Risk Based Capital in P&C Loss Reserving or Stressing the Triangle.* Working paper n.1

[7] Eling. M.. Diers. D.. Linde. M.. Kraus. C.. (2011). *The multi-year non-life insurance risk.* Working papers on Risk Management and Insurance No. **96**.

[8] England. P.D.. Verall. R.J.. (1999). *Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving.* Insurance: Mathematics and Economics. **25**. 281-293.

[9] England. P.D.. Verall. R.J.. (2002). *Stochastic Claims Reserving in General Insurance.* British Actuarial Journal 8. **3**.443-518.

[10]England. P.D.. (2010). *Reserving risk. risk margins. and solvency: Re-tuning your mind.* EMB Solvency II Briefing.

[11]Forte. S.. Ialenti. M.. Pirra. M.. (2010). *A reserve risk model for a non-life insurance company.*

[12]Mack. T.. (1993). *Distribution-free calculation of the standard error of the chain-*ladder *reserve estimates.* ASTIN Bulletin. **23**.213-225.

[13]Mack. T.. (1994). *Measuring the variability of chain-ladder reserve estimates.* Casualty Actuarial Society. Spring Forum.

[14]Merz. M.. Wüthrich. M.V.. (2008). *Modeling the claims development result for Solvency purposes.* Casualty Actuarial Society E-Forum. Fall 2008. 542-568.

[15]Pinheiro. Paulo J.R.. Andrade e Silva. João M. & Centeno. Maria de Lourdes (2003). *Bootstrap Methodology in Claims Reserving.* Risk and Insurance. **70**. 701-714.

[16]Robbin. I.. (2012). *A practical way to estimate one-year reserve risk*. Casualty Actuarial Society E-Forum. Summer 2012.

[17]Sandstrom. A.. (2006*). Models. Assessment and Regulation.* Chapman & Hall/CRC.

[18]Taylor. G. C.. (2000). *Loss reserving: an actuarial perspective*. Kluwer Academic Publishers.

[19]Wüthrich. M.V.. Merz. M.. Lysenko. N.. (2009). *Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method.* Scandinavian Actuarial Journal. 2009. **1**. 63-84.

[20]Zhou. J.. Garrido. J.. (2006). *A loss reserving model within the framework of generalized linear models.* (NSERC) Discovery Grant 36860–06.