

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



## ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

### ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

# ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΣΤΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΕΛΕΓΧΟ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΜΟΣΧΟΝΑΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς,

Σεπτέμβριος 2013



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



## ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

### ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

# ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΣΤΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΕΛΕΓΧΟ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΜΟΣΧΟΝΑΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς,

Σεπτέμβριος 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της τριμελούς επιτροπής ήταν:

Δημήτριος Αντζουλάκος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Επιβλέπων

Γεώργιος Τζαβελάς, Επίκουρος Καθηγητής

Σωτήριος Μπερσίμης, Λέκτορας

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

**ESTIMATION OF STANDARD DEVIATION IN  
STATISTICAL QUALITY CONTROL**

By

**Georgios Moschonas**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science  
of the University of Piraeus in partial fulfillment of the  
requirements for the degree of Master of Science in Applied  
Statistics.

Piraeus, Greece

September 2013



# Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Δημήτριο Αντζουλάκο, για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε καθ'όλη την πορεία της διπλωματικής μου εργασίας. Η συμβολή του υπήρξε καταλυτική, ώστε η παρούσα διπλωματική εργασία να πάρει την τελική της μορφή.





## Περίληψη

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελεί μια μέθοδο για τον έλεγχο των παραγωγικών διεργασιών η οποία στοχεύει τόσο στην διατήρηση όσο και στη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Τα διαγράμματα ελέγχου αποτελούν μία τεχνική η οποία χρησιμοποιείται στο Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας. Στην παρούσα διπλωματική εργασία ασχοληθήκαμε με διάφορους εκτιμητές της τυπικής απόκλισης της στατιστικής συνάρτησης που απεικονίζεται στο διάγραμμα που είναι από τα σημαντικότερα θέματα στην κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου. Η αποτελεσματικότητα ενός διαγράμματος ελέγχου καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τον εκτιμητή που θα επιλεγεί. Η έρευνα περιλαμβάνει τόσο την περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων όσο και την περίπτωση των ορθολογικών δειγμάτων.

Στην περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων μελετήθηκαν έξι εκτιμητές ( $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_4, \hat{\sigma}_5, \hat{\sigma}_6$ ), αμερόληπτοι και μεροληπτικοί. Η σύγκριση των εκτιμητών έγινε με βάση τη σχετική αποτελεσματικότητά τους. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν βάσει της σχετικής αποτελεσματικότητας δείχνουν ότι οι εκτιμητές που βασίζονται στο δειγματικό εύρος είναι λιγότερο αποδοτικοί. Επιπλέον το ίδιο φαίνεται να ισχύει και για τους αμερόληπτους εκτιμητές. Τέλος ανάμεσα στους μη αμερόληπτους εκτιμητές ( $\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_5, \hat{\sigma}_6$ ), οι οποίοι βασίζονται στη δειγματική τυπική απόκλιση, ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_5$  είναι ελαφρώς πιο αποδοτικός.

Αντίστοιχα για την περίπτωση των ορθολογικών δειγμάτων μελετήθηκαν έξι εκτιμητές ( $\hat{\sigma}_7, \hat{\sigma}_8, \hat{\sigma}_9, \hat{\sigma}_{10}, \hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{12}$ ), αμερόληπτοι και μεροληπτικοί. Βάσει της σχετικής αποτελεσματικότητας τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι εκτιμητές οι οποίοι βασίζονται στα δειγματικά εύρη δεν συνιστανται για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης. Γενικά φαίνεται ότι οι εκτιμητές οι οποίοι βασίζονται στη σταθμισμένη δειγματική απόκλιση υπερτερούν έναντι των υπολοίπων εκτιμητών. Επίσης φαίνεται ότι οι μη αμερόληπτοι εκτιμητές υπερτερούν συγκριτικά με τους αμερόληπτους εκτιμητές. Τέλος υπάρχει μια ελαφριά υπεροχή του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$  ανάμεσα στους τρεις αποδοτικότερους εκτιμητές ( $\hat{\sigma}_{10}, \hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{12}$ ).



# Abstract

Statistical Quality Control is a method to control the production processes which aims at the conservation and in improving the quality of the derived product line. Control charts are a technique used in Statistical Quality Control. In this MSc dissertation we deal with various estimators of the standard deviation of the plotted statistic on the chart which is one of the major problems in the construction of control charts. The effectiveness of a control chart is mainly determined by the estimator to be selected. The research includes both the case of the individual observations and the case of rational subgroups.

In the case of individual observations we study six estimators ( $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_4, \hat{\sigma}_5, \hat{\sigma}_6$ ), unbiased and biased. The comparison of the estimators was based on their relative efficiency. The results obtained from the relative efficiency study show that the estimators based on the range of the samples range are less efficient. Moreover, the same seems to be true for the unbiased estimators. Finally among the non-unbiased estimators ( $\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_5, \hat{\sigma}_6$ ), which are based on the sample standard deviation, estimator  $\hat{\sigma}_5$  is slightly more efficient.

Similarly in the case of rational subgroups we study six estimators ( $\hat{\sigma}_7, \hat{\sigma}_8, \hat{\sigma}_9, \hat{\sigma}_{10}, \hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{12}$ ), unbiased and biased. Based on the relative efficiency results, we observed that the estimators based on the sample range are not recommended for the estimation of standard deviation. Generally, it appears that the estimators that are based on the pooled sample standard deviation outperform the other estimators. It also appears that the non-unbiased estimators are superior in comparison with the biased estimators. Finally there is a slight superiority of estimator  $\hat{\sigma}_{10}$  among the three more efficient estimators ( $\hat{\sigma}_{10}, \hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{12}$ ).



# Περιεχόμενα

<b>Κατάλογος Πινάκων</b>	xiii
<b>Κατάλογος Διαγραμμάτων</b>	xv
<b>Κατάλογος Συντομογραφιών</b>	xvii
<b>1. Εκτιμητές της τυπικής απόκλισης</b>	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Κατανομή του Εύρους $R$ και της Δειγματικής Τυπικής Απόκλισης $S$	5
1.2.1 Κατανομή του Εύρους $R$	6
1.2.2 Κατανομή του $S$	9
1.3 Εκτίμηση της Μέσης τιμής και της Διακύμανσης	13
1.3.1 Η Περίπτωση των Μεμονωμένων Παρατηρήσεων	13
1.3.2 Η Περίπτωση των Δειγμάτων	16
<b>2. Σύγκριση Εκτιμητών της Τυπικής απόκλισης για Μεμονωμένες Παρατηρήσεις</b>	21
2.1 Μέσο τετραγωνικό σφάλμα των εκτιμητών	21
2.2 Σχετική αποτελεσματικότητα	24
2.3 Σύγκριση εκτιμητών	27
2.4 Συμπεράσματα	40
<b>3. Σύγκριση Εκτιμητών της Τυπικής απόκλισης για Δείγματα</b>	41
3.1 Μέσο τετραγωνικό σφάλμα των εκτιμητών	41
3.2 Σχετική αποτελεσματικότητα	44
3.3 Σύγκριση εκτιμητών	50
3.3 Συμπεράσματα	71
<b>Βιβλιογραφία</b>	73



## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1.1.	Ενδεικτικές τιμές ποσοτήτων $d_2(n)$ , $d_3(n)$ και $c_4(n)$	12
Πίνακας 1.2.	Εκτιμητές της Τυπικής Απόκλισης: Ένα δείγμα	15
Πίνακας 1.3.	Εκτιμητές της Τυπικής Απόκλισης: Πολλά Δείγματα	19
Πίνακας 2.1.	<i>MSE</i> Εκτιμητών της Τυπικής Απόκλισης: Ένα δείγμα	25
Πίνακας 2.2.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_1$	28
Πίνακας 2.3.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_2$	30
Πίνακας 2.4.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_3$	32
Πίνακας 2.5.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_4$	34
Πίνακας 2.6.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_5$	36
Πίνακας 2.7.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_6$	38
Πίνακας 3.1.	<i>MSE</i> Εκτιμητών της Τυπικής Απόκλισης: Πολλά Δείγματα	44
Πίνακας 3.2.	Ενδεικτικές τιμές των ποσοτήτων $c_4(n)$ και $c_4(n+1)$ : $m = 20$	47
Πίνακας 3.3.	Ενδεικτικές τιμές των ποσοτήτων $c_4(n)$ και $c_4(n+1)$ : $m = 25$	48
Πίνακας 3.4.	Ενδεικτικές τιμές των ποσοτήτων $c_4(n)$ και $c_4(n+1)$ : $m = 30$	49
Πίνακας 3.5.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_7$ : $m = 20$	50
Πίνακας 3.5.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_7$ : $m = 25$	50
Πίνακας 3.5.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_7$ : $m = 30$	51
Πίνακας 3.6.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_8$ : $m = 20$	54
Πίνακας 3.6.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_8$ : $m = 25$	54
Πίνακας 3.6.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_8$ : $m = 30$	55
Πίνακας 3.7.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_9$ : $m = 20$	57
Πίνακας 3.7.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_9$ : $m = 25$	58
Πίνακας 3.7.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_9$ : $m = 30$	58
Πίνακας 3.8.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{10}$ : $m = 20$	61
Πίνακας 3.8.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{10}$ : $m = 25$	61
Πίνακας 3.8.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{10}$ : $m = 30$	62
Πίνακας 3.9.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{11}$ : $m = 20$	64

Πίνακας 3.9.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{11}$ : $m = 25$	65
Πίνακας 3.9.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{11}$ : $m = 30$	65
Πίνακας 3.10.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{12}$ : $m = 20$	68
Πίνακας 3.10.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{12}$ : $m = 25$	68
Πίνακας 3.10.	Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{12}$ : $m = 30$	69



## Κατάλογος Διαγραμμάτων

Διάγραμμα 1.1.	Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart	3
Διάγραμμα 2.1.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_1$	29
Διάγραμμα 2.2.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_2$	31
Διάγραμμα 2.3.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_3$	33
Διάγραμμα 2.4.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_4$	35
Διάγραμμα 2.5.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_5$	37
Διάγραμμα 2.6.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_6$	39
Διάγραμμα 3.1.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_7: m = 20$	51
Διάγραμμα 3.2.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_7: m = 25$	52
Διάγραμμα 3.3.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_7: m = 30$	52
Διάγραμμα 3.4.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας $RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_9)$ για $m = 20, 25, 30$	53
Διάγραμμα 3.5.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_8: m = 20$	55
Διάγραμμα 3.6.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_8: m = 25$	56
Διάγραμμα 3.7.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_8: m = 30$	56

Διάγραμμα 3.8.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_9$ : $m = 20$	59
Διάγραμμα 3.9.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_9$ : $m = 25$	59
Διάγραμμα 3.10.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_9$ : $m = 30$	60
Διάγραμμα 3.11.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{10}$ : $m = 20$	62
Διάγραμμα 3.12.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{10}$ : $m = 25$	63
Διάγραμμα 3.13.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{10}$ : $m = 30$	63
Διάγραμμα 3.14.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{11}$ : $m = 20$	66
Διάγραμμα 3.15.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{11}$ : $m = 25$	66
Διάγραμμα 3.16.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{11}$ : $m = 30$	67
Διάγραμμα 3.17.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{12}$ : $m = 20$	69
Διάγραμμα 3.18.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{12}$ : $m = 25$	70
Διάγραμμα 3.19.	Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή $\hat{\sigma}_{12}$ : $m = 30$	70

# Κατάλογος Συντομογραφιών

δ.ε.	διάγραμμα ελέγχου ή διαγράμματα ελέγχου
σ.κ.	συνάρτηση κατανομής
σ.π.	συνάρτηση πυκνότητας
σ.σ.	στατιστική συνάρτηση
τ.δ.	τυχαίο δείγμα ή τυχαία δείγματα
CL	κεντρική γραμμή
LCL	κάτω όριο ελέγχου
UCL	άνω όριο ελέγχου
MSE	μέσο τετραγωνικό σφάλμα
RE	σχετική αποτελεσματικότητα



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Εκτιμητές της Τυπικής Απόκλισης

### 1.1 Εισαγωγή

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελεί την παλαιότερη μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών για τη διατήρηση ή και βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Είναι γνωστό ότι σε κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά σχεδιασμένη είναι και το πόσο προσεκτικά επιβλέπεται και συντηρείται, θα υπάρχει πάντα μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας που θα τη συνοδεύει. Έτσι, όσο καλά ρυθμισμένα και να είναι τα μηχανήματα, όσο ικανοί και να είναι οι χειριστές των μηχανημάτων, όσο ικανοποιητική και να είναι η πρώτη ύλη, ποτέ δύο παραγόμενα προϊόντα ή υπηρεσίες δεν θα είναι τα ίδια (θα υπάρχει κάποιο μετρήσιμο μέγεθος του προϊόντος του οποίου η τιμή θα είναι διαφορετική στα δύο προϊόντα). Αυτή η φυσική μεταβλητότητα αποτελεί τη συνισταμένη πολλών μικρών αιτιών οι οποίες αναφέρονται ως κοινές ή τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας (*common or chance causes of variation*). Η φυσική μεταβλητότητα είναι συνήθως μικρή σε μέγεθος και δεν μπορεί να μειωθεί ή να εξαφανιστεί. Μια διεργασία (σύστημα) η οποία λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εντός (στατιστικού) ελέγχου διεργασία (*in control process*), ή ότι λειτουργεί σε ευσταθή κατάσταση (*stable state*).

Όμως σε μια διεργασία μπορεί να εμφανίζονται περιστασιακά και άλλες μορφές μεταβλητότητας οι οποίες δεν οφείλονται σε τυχαίες αιτίες αλλά αφορούν τη συστηματική αλλαγή στο επίπεδο κάποιου ή κάποιων παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος. Αυτές οι μορφές μεταβλητότητας οφείλονται συνήθως στους ακόλουθους λόγους: (α) λανθασμένα ρυθμισμένες μηχανές, (β) λάθη των χειριστών των μηχανημάτων, και (γ) κακής ποιότητας ή ελαττωματική πρώτη ύλη. Η μεταβλητότητα που οφείλεται στους παραπάνω λόγους είναι σε μέγεθος πολύ μεγαλύτερη της φυσικής μεταβλητότητας και η παρουσία της οδηγεί συνήθως σε μη αποδεκτά επίπεδα λειτουργίας της παραγωγικής διεργασίας. Αυτή η μεταβλητότητα αναφέρεται ως ειδική μεταβλητότητα και οι αιτίες που οδηγούν σε αυτή ονομάζονται ειδικές ή συστηματικές αιτίες μεταβλητότητας (*special or*

*assignable causes of variation*). Μια διεργασία (σύστημα) η οποία λειτουργεί με την παρουσία ειδικής μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εκτός (στατιστικού) ελέγχου διεργασία (*out of control process*) ή ότι λειτουργεί σε ασταθή κατάσταση (*unstable state*).

Κάνοντας χρήση στατιστικών μεθόδων, επομένως, ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αναλύει την παραγωγική διαδικασία, με βασικότερο στόχο την έγκαιρη ανακάλυψη ειδικών αιτιών μεταβλητότητας, οι οποίες διαφοροποιούν την ποιότητα του προϊόντος, σε σχέση με τις προδιαγραφές παραγωγής και, φυσικά, τη λήψη διορθωτικών ενεργειών για την απομάκρυνση αυτών των αιτιών.

Μία τεχνική, που χρησιμοποιείται ευρέως στο Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας για την ανίχνευση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας, είναι τα διαγράμματα ελέγχου (*control charts*). Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι στις παραγωγικές διεργασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού  $X$  (τυχαία μεταβλητή) των προϊόντων που παράγονται (για παράδειγμα το χαρακτηριστικό  $X$  μπορεί να είναι μήκος, βάρος, όγκος προϊόντων κ.λ.π., και η κρίσιμη ποσότητα η μέση τιμή της  $X$ , η μεταβλητότητα των τιμών της  $X$ , το ποσοστό των ελαττωματικών, κτλ.). Η διαδικασία παρακολούθησης της κρίσιμης ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού  $X$  (τυχαία μεταβλητή), όπως προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων προϊόντων από την παραγωγή σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα (τ.δ.) τιμών του χαρακτηριστικού  $X$ , έστω τα  $X_1, X_2, \dots$ . Χρησιμοποιώντας τα τ.δ.  $X_1, X_2, \dots$ , υπολογίζουμε την τιμή  $W_i = g(X_i), i = 1, 2, \dots$ , μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης  $g(\cdot)$  (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια) την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει. Έτσι η (διαχρονική) παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση (σ.σ)  $W$  στα διάφορα δείγματα.

Ένα τυπικό δ.ε. τύπου Shewhart είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή.

## Διάγραμμα 1.1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart



Στο παραπάνω σχήμα, εκτός από τις παρατηρούμενες τιμές της  $W$  που έχουν συνδεθεί με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουν σχεδιαστεί και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή (*center line, CL*) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*mean value*) της  $W$  όπως αυτή προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός ελέγχου διεργασίας ή την τιμή στόχο του προϊόντος. Οι δύο ακραίες γραμμές που εμφανίζονται ονομάζονται άνω και κάτω όρια ελέγχου (*upper and lower control limits, UCL and LCL*). Όσο οι τιμές (σημεία, δεδομένα) της  $W$  εμφανίζονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι “τυχαία” μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου και δεν χρειάζεται να προβούμε σε κάποια διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου οπότε αντιμετωπίζουμε κατάσταση συναγερμού (*alarm*) και πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που είναι υπεύθυνες για αυτή τη συμπεριφορά και αν κριθεί απαραίτητο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση που όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Τα δ.ε. μπορούμε να διακρίνουμε δύο βασικές κατηγορίες ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που περιγράφει το ποιοτικό χαρακτηριστικό του προϊόντος που μας ενδιαφέρει.

- Διαγράμματα ελέγχου για συνεχή χαρακτηριστικά – μεταβλητές (control charts for variables)

- Διαγράμματα ελέγχου για διακριτά χαρακτηριστικά – ιδιότητες (control charts for attributes)

Ένα γενικό μοντέλο, το μοντέλο ορίων σίγμα (sigma limits model), για την κατασκευή των γραμμών ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο

<b>Μοντέλο ορίων <math>L</math> σίγμα</b>
$UCL = \mu_W + L\sigma_W$
$Center\ Line = \mu_W$
$LCL = \mu_W - L\sigma_W$

Το  $\mu_W$  και το  $\sigma_W$  δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης  $W$  που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, η οποία εκτιμά την κρίσιμη ποσότητα ενός προϊόντος που θέλουμε να παρακολουθήσουμε, ενώ ο αριθμός  $L$  δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Όταν το  $L = 3$  ομιλούμε για κατασκευή ορίων ελέγχου τριών σίγμα (*three sigma control limits,  $3\sigma$* ). Η κατανομή που υποθέτουμε για να περιγράψει την τυχαία μεταβλητή  $W$  είναι συνήθως η κανονική κατανομή

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν δύο φάσεις (phases) για τον έλεγχο μια παραγωγικής διεργασίας με τη χρήση διαγραμμάτων ελέγχου, η Φάση I και η Φάση II.

Στη Φάση I (Phase I) τα δ.ε. χρησιμοποιούνται αναδρομικά για να ελέγξουν αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου εξετάζοντας δείγματα που συλλέχθηκαν σε παρελθόντα χρόνο. Σε αυτή την φάση τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν τον διαχειριστή της διαδικασίας να φέρει τη διεργασία εντός στατιστικού ελέγχου. Όταν αυτό επιτευχθεί τα διαγράμματα που προκύπτουν (κεντρική γραμμή και όρια ελέγχου) είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας. Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρεται και ως αναδρομική (retrospective). Εννοείται ότι σε αυτή τη φάση η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει είναι άγνωστη και επομένως άγνωστη είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλισή του.

Στη Φάση II (Phase II) τα δ.ε. χρησιμοποιούνται, προκειμένου να ελέγχουμε συνεχώς αν η διαδικασία παραμένει εντός στατιστικού ελέγχου. Στη φάση αυτή ο διαχειριστής έχει στα χέρια του ένα πολύτιμο εργαλείο μέσω του οποίου είναι δυνατόν να παρακολουθεί συνεχώς



την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει εγκαίρως μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Σε αυτή την φάση ο διαχειριστής ενδιαφέρει για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας είχε εκτιμηθεί, ή αν αυτό ήταν εκ των προτέρων γνωστό. Επομένως σε αυτή τη φάση η μέση τιμή ή/και η τυπική απόκλιση του ποιοτικού χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει θεωρούνται γνωστά.

Πολλές φορές η Φάση II χαρακτηρίζεται ως On-Line Control Phase ή ως Control to Standard Phase, ενώ η Φάση I χαρακτηρίζεται ως Off-Line Control Phase ή ως Initial Study Phase.

Επίσης μια σημαντική διάκριση των διαγραμμάτων ελέγχου έχει να κάνει με το μέγεθος των δειγμάτων που παίρνουμε ανά τακτά χρονικά διαστήματα από το προϊόν. Αν από την παραγωγική διεργασία λαμβάνονται δείγματα μετρήσεων μεγέθους μεγαλύτερου της μονάδος αναφερόμαστε σε δ.ε. για ομάδες (*control charts for rational subgroups*), ενώ αν λαμβάνονται δείγματα μετρήσεων μεγέθους ένα αναφερόμαστε σε δ.ε. για μεμονωμένες παρατηρήσεις (*control charts for individual observations*).

Στην παρούσα διπλωματική θα μας απασχολήσει η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης  $\sigma_w$  (αλλά και της μέσης τιμής  $\mu_w$ ), η οποία είναι από σημαντικότερα προβλήματα στην κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart και όχι μόνο. Η έρευνα έχει δείξει ότι η «λανθασμένη» εκτίμηση στην Φάση I των διαγραμμάτων ελέγχου μπορεί να οδηγήσει σε μειωμένη απόδοση στην Φάση II (βλέπε Jensen et al. (2006)). Επομένως, μια «σωστή» εκτίμηση της τυπικής απόκλισης βοηθά σε σημαντικό βαθμό στην αποτελεσματικότητα ενός διαγράμματος ελέγχου.

## **1.2 Κατανομή του Εύρους $R$ και της Δειγματικής Τυπικής Απόκλισης $S$**

Προτού ξεκινήσουμε να παρουσιάζουμε μεθόδους εκτίμησης για τη μέση τιμή  $\mu$  και την τυπική απόκλιση  $\sigma$  ενός πληθυσμού θα μελετήσουμε την κατανομή του εύρους  $R$  και της δειγματικής τυπικής απόκλισης  $S$ .

### 1.2.1 Κατανομή του Εύρους $R$

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τ.δ. από ένα συνεχή πληθυσμό, με συνάρτηση πυκνότητας (σ.π.)  $f$  και συνάρτηση κατανομής  $F$ . Θέτουμε

$$X = X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

$$Y = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ζεύγους  $(X, Y)$  δίνεται από τον τύπο (Κούτρας (2005))

$$f_{X,Y}(x, y) = n(n-1)f(x)f(y)[F(y) - F(x)]^{n-2}, \quad -\infty < x < y < \infty.$$

Θέτοντας  $V = g(X, Y)$  και  $R = h(X, Y)$ , όπου  $g$  και  $h$  δύο πραγματικές συναρτήσεις, και χρησιμοποιώντας τη θεωρία του μετασχηματισμού δύο τυχαίων μεταβλητών παίρνουμε ότι η από κοινού κατανομή του ζεύγους  $(V, R)$  δίνεται από τον τύπο

$$f_{V,R}(v, r) = f_{X,Y}(g^*(v, r), h^*(v, r)) \cdot |J|$$

όπου  $x = g^*(v, r)$  και  $y = h^*(v, r)$  είναι η μοναδική λύση του συστήματος  $v = g(x, y)$  και  $r = h(x, y)$ , και  $|J|$  είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού. Θέτοντας  $V = X = g(X, Y)$  και  $R = X_{(n)} - X_{(1)} = Y - X = h(X, Y)$ , παίρνουμε ότι ( $J = 1$ )

$$f_{V,R}(v, r) = f_{X,Y}(v, v+r) = n(n-1)f(v)f(v+r)[F(v+r) - F(v)]^{n-2}$$

για  $-\infty < v < \infty$  και  $r > 0$ .

Συνεπώς για  $r > 0$  προκύπτει άμεσα ότι

$$f_R(r) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(v)f(v+r)[F(v+r) - F(v)]^{n-2} dv$$

και

$$\begin{aligned} F_R(r) &= \int_0^r f_R(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} n f(v) \left( \int_0^r (n-1) [F(v+t) - F(v)]^{n-2} f(v+t) dt \right) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} n f(v) \left( \int_0^r \frac{d}{dt} \{ [F(v+t) - F(v)]^{n-1} \} dt \right) dv \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} n f(v) [F(v+r) - F(v)]^{n-1} dv.$$

Έτσι αποδείξαμε την ακόλουθη πρόταση (βλέπε Αντζουλάκος (2006)).

**Πρόταση 1.1.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από ένα συνεχή πληθυσμό με σ.π.  $f$  και συνάρτηση κατανομής  $F$ . Η σ.π. και η συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) του εύρους  $R$  του δείγματος για  $r > 0$  δίνονται από τις σχέσεις

$$f_R(r) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(v) f(v+r) [F(v+r) - F(v)]^{n-2} dv,$$

$$F_R(r) = \int_{-\infty}^{\infty} n f(v) [F(v+r) - F(v)]^{n-1} dv.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το τυχαίο δείγμα  $X_1, X_2, \dots, X_n$  προέρχεται από ένα κανονικό πληθυσμό  $N(\mu, \sigma^2)$ . Θέτοντας  $W = R/\sigma$ , προκύπτει ότι η τυχαία μεταβλητή  $W$  δηλώνει το εύρος του τυχαίου δείγματος

$$\frac{X_1 - \mu}{\sigma}, \frac{X_2 - \mu}{\sigma}, \dots, \frac{X_n - \mu}{\sigma}$$

αφού

$$W = \frac{R}{\sigma} = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\sigma} = \frac{(X_{(n)} - \mu) - (X_{(1)} - \mu)}{\sigma} = \frac{X_{(n)} - \mu}{\sigma} - \frac{X_{(1)} - \mu}{\sigma}.$$

Συμβολίζοντας με  $\varphi$  και  $\Phi$  τη συνάρτηση πυκνότητας και τη συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, αντίστοιχα, έχουμε ότι

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} n \varphi(v) [\Phi(v+w) - \Phi(v)]^{n-1} dv.$$

Έτσι, για  $r > 0$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_R(r) &= P(R \leq r) = P\left(\frac{R}{\sigma} \leq \frac{r}{\sigma}\right) = P\left(W \leq \frac{r}{\sigma}\right) = F_W\left(\frac{r}{\sigma}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} n \varphi(v) \left[\Phi\left(v + \frac{r}{\sigma}\right) - \Phi(v)\right]^{n-1} dv \end{aligned}$$

και

$$f_R(r) = \frac{d}{dr} F_R(r) = n(n-1) \sigma^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) \left[\Phi\left(v + \frac{r}{\sigma}\right) - \Phi(v)\right]^{n-2} \varphi\left(v + \frac{r}{\sigma}\right) dv.$$

Έτσι αποδείξαμε την ακόλουθη πρόταση (βλέπε Αντζουλάκος (2006)).

**Πρόταση 1.2.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από ένα κανονικό πληθυσμό  $N(\mu, \sigma^2)$ . Η σ.π. και η σ.κ. του εύρους  $R$  του δείγματος για  $r > 0$  δίνονται από τις σχέσεις

$$f_R(r) = n(n-1)\sigma^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) \left[ \Phi\left(v + \frac{r}{\sigma}\right) - \Phi(v) \right]^{n-2} \varphi\left(v + \frac{r}{\sigma}\right) dv,$$

$$F_R(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} n\varphi(v) \left[ \Phi\left(v + \frac{r}{\sigma}\right) - \Phi(v) \right]^{n-1} dv.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.2 παίρνουμε ότι

$$E(R) = \int_0^{+\infty} r f_R(r) dr$$

$$= n(n-1) \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r}{\sigma} \varphi(v) \left[ \Phi\left(v + \frac{r}{\sigma}\right) - \Phi(v) \right]^{n-2} \varphi\left(v + \frac{r}{\sigma}\right) dv dr.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $u = r/\sigma$ , παίρνουμε

$$E(R) = \sigma n(n-1) \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \varphi(v) [\Phi(v+u) - \Phi(v)]^{n-2} \varphi(v+u) dv du.$$

Επομένως, θέτοντας

$$d_2(n) = n(n-1) \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \varphi(v) [\Phi(v+u) - \Phi(v)]^{n-2} \varphi(v+u) dv du$$

προκύπτει ότι

$$\mu_R = E(R) = \sigma d_2(n)$$

(και  $\mu_W = E(W) = d_2(n)$ ).

Επίσης

$$Var(R) = \int_0^{+\infty} (r - \mu_R)^2 f_R(r) dr$$

$$= n(n-1)\sigma^{-1} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [r - \sigma d_2(n)]^2 \varphi(v) \left[ \Phi\left(v + \frac{r}{\sigma}\right) - \Phi(v) \right]^{n-2} \varphi\left(v + \frac{r}{\sigma}\right) dv dr$$

και με την αλλαγή μεταβλητής  $u = r/\sigma$  παίρνουμε

$$Var(R) = \sigma^2 n(n-1) \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [u - d_2(n)]^2 \varphi(v) [\Phi(v+u) - \Phi(v)]^{n-2} \varphi(v+u) dv du.$$

Συνεπώς, θέτοντας

$$d_3^2(n) = n(n-1) \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u - d_2(n))^2 \varphi(v) [\Phi(v+u) - \Phi(v)]^{n-2} \varphi(v+u) dv du$$

προκύπτει ότι

$$\text{Var}(R) = \sigma_R^2 = \sigma^2 d_3^2(n)$$

(και  $\text{Var}(W) = d_3^2(n)$ ). Επομένως,

$$\sigma_R = \sqrt{\text{Var}(R)} = \sigma d_3(n).$$

Έτσι αποδείξαμε την ακόλουθη πρόταση (βλέπε Αντζουλάκος (2006)).

**Πρόταση 1.3.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τ.δ. από ένα κανονικό πληθυσμό  $N(\mu, \sigma^2)$ . Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του εύρους  $R$  του δείγματος δίνονται από τις σχέσεις

$$\mu_R = E(R) = \sigma d_2(n), \quad \sigma_R = \sqrt{\text{Var}(R)} = \sigma d_3(n)$$

όπου

$$d_2(n) = n(n-1) \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \varphi(v) [\Phi(v+u) - \Phi(v)]^{n-2} \varphi(v+u) dv du$$

και

$$d_3^2(n) = n(n-1) \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u - d_2(n))^2 \varphi(v) [\Phi(v+u) - \Phi(v)]^{n-2} \varphi(v+u) dv du.$$

## 1.2.2 Κατανομή του $S$

Έστω μία τυχαία μεταβλητή  $X$  που ακολουθεί την κατανομή χι τετράγωνο με  $n$  βαθμούς ελευθερίας (συμβολισμός  $\chi_n^2$ ). Η συνάρτηση πυκνότητας της  $X$  δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-x/2} x^{(n/2)-1}, \quad x > 0.$$

Έτσι, παίρνουμε άμεσα ότι

$$E(X^k) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} e^{-x/2} x^{(n/2)+k-1} dx$$

και με την αλλαγή μεταβλητής  $t = x/2$ , προκύπτει ότι

$$E(X^k) = \frac{2^{(n/2)+k}}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(n/2)+k-1} dt = \frac{2^k \Gamma(\frac{n}{2} + k)}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $Y = g(X) = \sqrt{X}$  ονομάζεται χι κατανομή με  $n$  βαθμούς ελευθερίας και συμβολίζεται με  $\chi_n$ . Με εφαρμογή γνωστού θεωρήματος της θεωρίας πιθανοτήτων προκύπτει εύκολα ότι

$$f(y) = \frac{2^{1-n/2}}{\Gamma(\frac{k}{2})} e^{-y^2/2} y^{n-1}, \quad y > 0.$$

Επίσης για τις ροπές της τυχαίας μεταβλητής  $Y$  έχουμε ότι

$$E(Y^k) = E(X^{k/2}) = \frac{2^{k/2} \Gamma(\frac{n+k}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Έστω, τώρα ένα τ.δ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  που προέρχεται από τον κανονικό πληθυσμό  $N(\mu, \sigma^2)$ . Είναι γνωστό ότι για τη δειγματική διακύμανση

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

ισχύει ότι

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

και επομένως

$$\mu_{S^2} = E(S^2) = \sigma^2$$

και

$$\sigma_{S^2}^2 = \text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για ένα τυχαίο δείγμα από οποιονδήποτε πληθυσμό (όχι κατ'ανάγκη κανονικό) με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$  ισχύει ότι

$$E(S^2) = \sigma^2, \quad \text{Var}(S^2) = \frac{1}{n} \left( E(X - \mu)^4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right).$$

Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, έχουμε ότι η τυχαία μεταβλητή  $S\sqrt{n-1}/\sigma$  ακολουθεί τη χι κατανομή με  $n-1$  βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή

$$\frac{S\sqrt{n-1}}{\sigma} \sim \chi_{n-1}$$

και επομένως

$$E \left[ \left( \frac{S\sqrt{n-1}}{\sigma} \right)^k \right] = E \left[ \left( \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \right)^{k/2} \right] = \frac{2^{k/2} \Gamma(\frac{n-1+k}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

οπότε

$$E(S^k) = \sigma^k \left( \frac{2}{n-1} \right)^{k/2} \frac{\Gamma(\frac{n-1+k}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}.$$

Η παραπάνω σχέση για  $k = 1$  δίνει

$$\mu_S = E(S) = \sigma c_4(n),$$

όπου

$$c_4(n) = \left( \frac{2}{n-1} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

(στον Πίνακα1 δίνονται ενδεικτικές τιμές της ποσότητας  $c_4(n)$ ). Επίσης, κάνοντας χρήση του αποτελέσματος  $E(S^2) = \sigma^2$ , παίρνουμε

$$Var(S) = E(S^2) - (E(S))^2 = \sigma^2 - \sigma^2 c_4^2(n) = \sigma^2(1 - c_4^2(n))$$

δηλαδή

$$\sigma_S = \sqrt{Var(S)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2(n)}.$$

Έτσι έχουμε την ακόλουθη πρόταση (βλέπε Αντζουλάκος (2006)).

**Πρόταση 1.4.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από ένα κανονικό πληθυσμό  $N(\mu, \sigma^2)$  και έστω  $S^2$  η δειγματική διακύμανση. Τότε, η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης μεταβλητή  $S\sqrt{n-1}/\sigma$  είναι η  $\chi$  κατανομή με  $n-1$  βαθμούς ελευθερίας,

$$\mu_S = E(S) = \sigma c_4(n)$$

και

$$\sigma_S = \sqrt{Var(S)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2(n)},$$

όπου

$$c_4(n) = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Στον ακόλουθο Πίνακα 1.1 δίνονται ενδεικτικές τιμές των ποσοτήτων  $d_2(n)$  και  $d_3(n)$  και  $c_4(n)$  για  $n = 2, 3, \dots, 30$ .

**Πίνακας 1.1. Ενδεικτικές τιμές ποσοτήτων  $d_2(n)$ ,  $d_3(n)$  και  $c_4(n)$**

$n$	$d_2(n)$	$d_3(n)$	$c_4(n)$
2	1.128379166	0.852502469	0.797884561
3	1.692568763	0.888368011	0.886226925
4	2.058750674	0.879808201	0.921317732
5	2.325928906	0.864081940	0.939985603
6	2.534412552	0.848037554	0.951532862
7	2.704356826	0.833205334	0.959368789
8	2.847200570	0.819831481	0.965030456
9	2.970026451	0.807834267	0.969310700
10	3.077502553	0.797050664	0.972659274
11	3.172872718	0.787314611	0.975350077
12	3.258455206	0.778478329	0.977559352
13	3.335980370	0.770416191	0.979405604
14	3.406763117	0.763023082	0.980971437
15	3.471769993	0.756211411	0.982316177
16	3.531982178	0.749908210	0.983483532
17	3.587883651	0.744051799	0.984506405
18	3.640055951	0.738590832	0.985410044
19	3.688959032	0.733481457	0.986214137
20	3.734948102	0.728686315	0.986934268
21	3.778334696	0.724173307	0.987582929
22	3.819384109	0.719914747	0.988170253
23	3.858323140	0.715886437	0.988704545
24	3.895347970	0.712067997	0.989192675
25	3.930629126	0.708440650	0.989640376
26	3.964315700	0.704988251	0.990052469
27	3.996538600	0.701696518	0.990433039
28	4.027413793	0.698552754	0.990785570
29	4.057044199	0.695545632	0.991113048
30	4.085521640	0.692665049	0.991418053



## 1.3 Εκτίμηση της Μέσης τιμής και της Διακύμανσης

### 1.3.1 Η Περίπτωση των Μεμονωμένων Παρατηρήσεων

Στην περίπτωση ενός τυχαίου δείγματος μεγέθους  $n$ , έστω το  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , από έναν πληθυσμό με άγνωστη μέση τιμή  $\mu$  και άγνωστη διακύμανση  $\sigma^2$ , ένας αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής  $\mu$  είναι ο δειγματικός μέσος

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

και ένας αμερόληπτος εκτιμητής της διακύμανσης  $\sigma^2$  του πληθυσμού είναι η δειγματική διακύμανση

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Στην περίπτωση που το τυχαίο δείγμα  $X_1, X_2, \dots, X_n$  προέρχεται από κανονικό πληθυσμό  $N(\mu, \sigma^2)$  μπορούμε να βρούμε αμερόληπτους εκτιμητές για την τυπική απόκλιση  $\sigma$  σύμφωνα με αυτά που παραθέσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Έτσι προκύπτουν οι δύο ακόλουθες εκτιμήσεις

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{R}{d_2(n)}$$

και

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{S}{c_4(n)}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι  $E(\hat{\sigma}_1) = E(\hat{\sigma}_2) = \sigma$ .

Επίσης, στην πράξη συνηθίζεται να χρησιμοποιείται ως εκτίμηση του  $\sigma$  η δειγματική τυπική απόκλιση

$$\hat{\sigma}_3 = S$$

αν και δεν αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή του  $\sigma$ , αφού  $E(\hat{\sigma}_3) = \sigma c_4(n)$ .

Έχει αναφερθεί (Montgomery (2005), σελίδα 725) ότι η σταθερά  $c_4(n)$  μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά για  $n > 25$  από τον ακόλουθο τύπο

$$c_4(n) \approx \frac{4(n-1)}{4n-3}.$$

Η προσέγγιση αυτή, με τη σειρά της, οδηγεί στην ακόλουθη προσέγγιση της διακύμανσης του  $S$

$$\sigma_S^2 = Var(S) \approx \frac{(8n-7)}{(4n-3)^2} \sigma^2.$$

Για τους τρεις παραπάνω εκτιμητές της τυπικής απόκλισης έχουμε ότι

$$Var(\hat{\sigma}_1) = Var\left(\frac{R}{d_2(n)}\right) = \frac{1}{d_2^2(n)} Var(R) = \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \sigma^2,$$

$$Var(\hat{\sigma}_2) = Var\left(\frac{S}{c_4(n)}\right) = \frac{1}{c_4^2(n)} Var(S) = \frac{1-c_4^2(n)}{c_4^2(n)} \sigma^2,$$

$$Var(\hat{\sigma}_3) = Var(S) = (1-c_4^2(n))\sigma^2.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι για  $n=2$  έχουμε ότι  $2S^2 = R$ , οπότε

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2 = \frac{R}{1.1284}, \quad \hat{\sigma}_3 = \frac{R}{1.4142}.$$

Ο Vardeman (1999) μελέτησε δύο ακόμα μεροληπτικούς εκτιμητές, συγκεκριμένα τους

$$\hat{\sigma}_4 = \frac{d_2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} R$$

Και

$$\hat{\sigma}_5 = c_4(n)S.$$

Η μέση τιμή του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_4$  είναι ίση με

$$E(\hat{\sigma}_4) = E\left(\frac{d_2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} R\right) = \frac{d_2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} E(R) = \frac{d_2^2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} \sigma$$

και η διακύμανσή του ισούται με

$$Var(\hat{\sigma}_4) = Var\left(\frac{d_2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} R\right) = \left(\frac{d_2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)}\right)^2 Var(R) = \left(\frac{d_2(n)d_3(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)}\right)^2 \sigma^2.$$

Αντίστοιχα η μέση τιμή του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_5$  ισούται με

$$E(\hat{\sigma}_5) = E(c_4(n)S) = c_4(n)E(S) = c_4^2(n)\sigma$$

και η διακύμανσή του με

$$Var(\hat{\sigma}_5) = Var(c_4(n)S) = c_4^2(n)Var(S) = c_4^2(n)(1-c_4^2(n))\sigma^2.$$

Τέλος, για να γίνει πιο ολοκληρωμένη η μελέτη μας θα χρησιμοποιηθεί και ο μη αμερόληπτος εκτιμητής (βλέπε Mahmoud et al (2010))

$$\hat{\sigma}_6 = \left( \sqrt{\frac{(n-1)}{n}} \right) S$$

η μέση τιμή του οποίου ισούται με

$$E(\hat{\sigma}_6) = E \left[ \left( \sqrt{\frac{(n-1)}{n}} \right) S \right] = \left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} E(S) = \left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} c_4(n) \sigma$$

και η διακύμανσή του είναι ίση με

$$Var(\hat{\sigma}_6) = Var \left[ \left( \sqrt{\frac{(n-1)}{n}} \right) S \right] = \frac{n-1}{n} Var(S) = \frac{n-1}{n} (1 - c_4^2(n)) \sigma^2.$$

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τους παραπάνω εκτιμητές καθώς επίσης και τις μέσες τιμές και διακυμάνσεις τους.

**Πίνακας 1.2. Εκτιμητές της Τυπικής Απόκλισης: Ένα δείγμα**

Εκτιμητής	Τύπος	Μέση τιμή	Διακύμανση
$\hat{\sigma}_1$	$\frac{R}{d_2(n)}$	$\sigma$	$\frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \sigma^2$
$\hat{\sigma}_2$	$\frac{S}{c_4(n)}$	$\sigma$	$\frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)} \sigma^2$
$\hat{\sigma}_3$	$S$	$c_4(n)\sigma$	$(1 - c_4^2(n))\sigma^2$
$\hat{\sigma}_4$	$\frac{d_2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} R$	$\frac{d_2^2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} \sigma$	$\left( \frac{d_2(n)d_3(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} \right)^2 \sigma^2$
$\hat{\sigma}_5$	$c_4(n)S$	$c_4^2(n)\sigma$	$c_4^2(n)(1 - c_4^2(n))\sigma^2$
$\hat{\sigma}_6$	$\left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} S$	$\left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} c_4(n)\sigma$	$\frac{n-1}{n} (1 - c_4^2(n))\sigma^2$

### 1.3.2 Η Περίπτωση των Δειγμάτων

Έστω ότι έχουμε  $m$  ανεξάρτητα τυχαία δείγματα, μεγέθους  $n$  το καθένα, τα  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ,  $1 \leq i \leq m$ , από ένα κανονικό πληθυσμό  $N(\mu, \sigma^2)$  με άγνωστη μέση τιμή  $\mu$  και άγνωστη διακύμανση  $\sigma^2$ .

Έστω  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$  οι δειγματικοί μέσοι των  $m$  δειγμάτων και έστω

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}.$$

Η στατιστική συνάρτηση

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$$

ακολουθεί την κατανομή  $N(\mu, \sigma^2/mn)$  και είναι αμερόληπτος εκτιμητής του  $\mu$ , δηλαδή

$$E(\hat{\mu}) = E(\bar{\bar{X}}) = \mu.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι

$$E(\bar{\bar{X}}) = \mu, \quad \text{Var}(\bar{\bar{X}}) = \frac{\sigma^2}{mn}$$

ανεξάρτητα από την κατανομή του πληθυσμού  $X$ .

Για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης έχουμε διάφορους τρόπους εκτίμησής της. Η «μέθοδος  $S$ » εκτιμά την τυπική απόκλιση  $\sigma$ , χρησιμοποιώντας τις δειγματικές τυπικές αποκλίσεις

$$S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτοντας

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις  $\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4(n)$ , για  $1 \leq i \leq m$  (δείτε Παράγραφο 1.2.2) προκύπτει ότι  $E(\bar{S}) = \sigma c_4(n)$ . Επομένως η στατιστική συνάρτηση

$$\hat{\sigma}_7 = \frac{\bar{S}}{c_4(n)}$$

αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή της τυπικής απόκλισης  $\sigma$ . Επίσης

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_7) = \frac{\text{Var}(S)/m}{c_4^2(n)} = \frac{\sigma^2}{m} \cdot \frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)}.$$

Η «μέθοδος  $R$ » εκτιμά την τυπική απόκλιση  $\sigma$ , χρησιμοποιώντας τα εύρη

$$R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτοντας

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις  $\mu_{R_i} = E(R_i) = \sigma d_2(n)$  για  $1 \leq i \leq m$  (δείτε Παράγραφο 1.2.1) προκύπτει ότι  $E(\bar{R}) = \sigma d_2(n)$ . Επομένως η στατιστική συνάρτηση

$$\hat{\sigma}_8 = \frac{\bar{R}}{d_2(n)}$$

αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή της τυπικής απόκλισης  $\sigma$ . Επίσης,

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_8) = \frac{\text{Var}(R)/m}{d_2^2(n)} = \frac{\sigma^2}{m} \cdot \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)}.$$

Ένας εναλλακτικός, μη αμερόληπτος εκτιμητής του  $\sigma$ , είναι ο

$$\hat{\sigma}_9 = c_4(n)\bar{S}.$$

Ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_9$  στην περίπτωση των πολλαπλών δειγμάτων αντιπροσωπεύει τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_5$ , όταν  $m = 1$ , για τον οποίο ισχύει ότι

$$E(\hat{\sigma}_9) = c_4(n)E(S) = \sigma c_4^2(n)$$

και

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_9) = c_4^2(n) \frac{\text{Var}(S)}{m} = \frac{\sigma^2}{m} c_4^2(n)(1 - c_4^2(n)).$$

Μία ακόμα μέθοδος για να συνδυαστούν οι ατομικοί εκτιμητές της τυπικής απόκλισης από  $m$  διαφορετικά δείγματα σε ένα, είναι μέσω της χρήσης της σταθμισμένης (pooled) δειγματικής τυπικής απόκλισης, η οποία ορίζεται ως

$$S_{pooled} = \sqrt{S_{pooled}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^m (n_i - 1)}}$$

όπου  $S_i^2$  είναι η  $i$ -οστή δειγματική διακύμανση και  $n_i$  είναι το μέγεθος του  $i$  δείγματος. Για  $m = 1$ , η  $S_{pooled}$  ανάγεται στον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_3$ , δηλαδή στη δειγματική τυπική απόκλιση. Υποθέτοντας κανονική κατανομή ισχύει ότι

$$\frac{\nu S_{pooled}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{\nu}^2$$

όπου  $\nu = \sum_{i=1}^m (n_i - 1)$ . Επομένως, σε όρους εκτίμησης του  $\sigma$ , μπορούμε να σκεφτούμε την  $S_{pooled}$  σαν την δειγματική τυπική απόκλιση ενός απλού δείγματος με " $n$ " =  $\nu + 1$ . Ο Vademman (1999) έδειξε ότι ο βέλτιστος με βάση την τυπική απόκλιση εκτιμητής του  $\sigma$  από την άποψη του μέτρου του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE) δίνεται από τον τύπο

$$\hat{\sigma}_{10} = c_4(\nu + 1)S_{pooled}$$

της τυπικής απόκλισης ( $\nu = \sum_{i=1}^m (n_i - 1) = m(n - 1)$  όταν όλα τα δείγματα έχουν το ίδιο μέγεθος  $n$ ).

Για τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$ , ισχύει ότι

$$E(\hat{\sigma}_{10}) = c_4(\nu + 1)E(S_{pooled}) = \sigma c_4^2(\nu + 1)$$

και

$$Var(\hat{\sigma}_{10}) = c_4^2(\nu + 1)Var(S_{pooled}) = \sigma^2[1 - c_4^2(\nu + 1)]c_4^2(\nu + 1).$$

Αφού ακόμη και για μικρές τιμές του  $m$  και  $n$  το  $c_4(\nu + 1)$  είναι κοντά στο 1, είναι εύλογο να θεωρήσουμε και τον ακόλουθο μεροληπτικό εκτιμητή του  $\sigma$  (βλέπε Mahmoud et al (2010))

$$\hat{\sigma}_{11} = S_{pooled}$$

για τον οποίο ισχύει ότι

$$E(\hat{\sigma}_{11}) = E(S_{pooled}) = \sigma c_4(\nu + 1)$$

και

$$Var(\hat{\sigma}_{11}) = Var(S_{pooled}) = \sigma^2[1 - c_4^2(\nu + 1)].$$

Τέλος, στην παρούσα μελέτη θα συμπεριληφθεί και ο αμερόληπτος εκτιμητής του  $\sigma$

$$\hat{\sigma}_{12} = \frac{S_{pooled}}{c_4(\nu + 1)}$$

για τον οποίο ισχύει ότι

$$E(\hat{\sigma}_{12}) = E\left(\frac{S_{pooled}}{c_4(\nu + 1)}\right) = \sigma$$

και

$$Var(\hat{\sigma}_{12}) = Var\left(\frac{S_{pooled}}{c_4(\nu + 1)}\right) = \frac{1}{c_4^2(\nu + 1)}Var(S_{pooled}) = \frac{\sigma^2[1 - c_4^2(\nu + 1)]}{c_4^2(\nu + 1)}.$$

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τους παραπάνω εκτιμητές καθώς επίσης τις μέσες τιμές και διακυμάνσεις τους.

**Πίνακας 1.3. Εκτιμητές της Τυπικής Απόκλισης: Πολλά Δείγματα**

Εκτιμητής	Τύπος	Μέση τιμή	Διακύμανση
$\hat{\sigma}_7$	$\frac{\bar{S}}{c_4(n)}$	$\sigma$	$\frac{\sigma^2}{m} \cdot \frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)}$
$\hat{\sigma}_8$	$\frac{\bar{R}}{d_2(n)}$	$\sigma$	$\frac{\sigma^2}{m} \cdot \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)}$
$\hat{\sigma}_9$	$c_4(n)\bar{S}$	$\sigma c_4^2(n)$	$\frac{\sigma^2}{m} c_4^2(n)(1 - c_4^2(n))$
$\hat{\sigma}_{10}$	$c_4(\nu + 1)S_{pooled}$	$\sigma c_4^2(\nu + 1)$	$\sigma^2[1 - c_4^2(\nu + 1)]c_4^2(\nu + 1)$
$\hat{\sigma}_{11}$	$S_{pooled}$	$\sigma c_4(\nu + 1)$	$\sigma^2[1 - c_4^2(\nu + 1)]$
$\hat{\sigma}_{12}$	$\frac{S_{pooled}}{c_4(\nu + 1)}$	$\sigma$	$\frac{\sigma^2[1 - c_4^2(\nu + 1)]}{c_4^2(\nu + 1)}$





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Σύγκριση Εκτιμητών της Τυπικής απόκλισης για Μεμονωμένες Παρατηρήσεις

### 2.1 Μέσο τετραγωνικό σφάλμα των εκτιμητών

Έστω  $\theta$  μια παράμετρος ενός πληθυσμού. Η κατανομή του πληθυσμού θεωρείται, συνήθως, ότι προσεγγίζεται ικανοποιητικά από ένα γνωστό πρότυπο κατανομής ( κανονική, εκθετική, Poisson κτλ.). Η εκτίμηση της παραμέτρου  $\theta$  μπορεί να γίνει μέσω κάποιας στατιστικής συνάρτησης  $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , η οποία παίρνει τιμές στον παραμετρικό χώρο και αξιοποιεί κατάλληλα της πληροφορίες για την  $\theta$ , που περιέχονται σε ένα τυχαίο δείγμα  $X_1, X_2, \dots, X_n$  από τον πληθυσμό. Η εκτίμηση μιας παραμέτρου  $\theta$  μπορεί να βασιστεί σε διαφορετικές εκτιμήτριες. Η αξιολόγηση των διαφορετικών εκτιμητριών, για επιλογή της καταλληλότερης, στηρίζεται σε ορισμένα κριτήρια και επιθυμητές ιδιότητες των εκτιμητριών.

Έστω  $\hat{\theta}$  μια εκτιμήτρια της παραμέτρου του πληθυσμού  $\theta$ , που βασίζεται σε ένα τυχαίο δείγμα  $X_1, X_2, \dots, X_n$  από τον πληθυσμό. Η διαφορά  $\hat{\theta} - \theta$  λέγεται εκτιμητικό σφάλμα της  $\hat{\theta}$ . Το εκτιμητικό σφάλμα είναι μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί να παρατηρηθεί μόνο μετά την παρατήρηση του τυχαίου δείγματος, και δεν είναι δυνατό να διασφαλιστεί προκαταβολικά ότι σε κάθε επιλογή τυχαίου δείγματος η τιμή του θα είναι μικρή.

Ένα πολύ χρήσιμο στατιστικό μέτρο του εκτιμητικού σφάλματος είναι η μέση τιμή του τετραγώνου του, που ονομάζεται μέσο τετραγωνικό σφάλμα της  $\hat{\theta}$ . Αν συμβολίσουμε με  $\mu_{\hat{\theta}}$  τη μέση τιμή της σ.σ.  $\hat{\theta}$ , είναι

$$E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - \mu_{\hat{\theta}} + \mu_{\hat{\theta}} - \theta)^2] = \text{Var}(\hat{\theta}) + (\mu_{\hat{\theta}} - \theta)^2 + 2(\mu_{\hat{\theta}} - \theta)E(\hat{\theta} - \mu_{\hat{\theta}}).$$

Όμως, ο τρίτος όρος στο δεξιό μέρος της προηγούμενης σχέσης μηδενίζεται αφού  $E(\hat{\theta} - \mu_{\hat{\theta}}) = 0$ . Επομένως το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean square error, MSE) της  $\hat{\theta}$  δίνεται από τη σχέση

$$MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \text{Var}(\hat{\theta}) + (\mu_{\hat{\theta}} - \theta)^2 = \text{Var}(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta})$$

δηλαδή, από το άθροισμα της διασποράς της  $\hat{\theta}$  και του τετραγώνου της απόστασης της μέσης τιμής της  $\hat{\theta}$  από την τιμή της παραμέτρου  $\theta$ . Η διαφορά  $\mu_{\hat{\theta}} - \theta$ , η οποία συμβολίζεται με  $B(\hat{\theta})$  λέγεται μεροληψία (bias) του εκτιμητή  $\hat{\theta}$ . Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι

$$MSE(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta})$$

Είναι προφανές ότι, για να είναι μικρό το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μια εκτιμήτριας  $\hat{\theta}$  θα πρέπει να είναι μικρή η διασπορά της  $\hat{\theta}$  και, ταυτόχρονα, μικρή η απόλυτη τιμή της μεροληψίας της  $\hat{\theta}$ .

Είναι λογικό να σκεφτεί κανείς ότι η επιλογή, μεταξύ συγκεκριμένων εκτιμητριών, μιας παραμέτρου  $\theta$ , θα μπορούσε να γίνει με κριτήριο το μέγεθος του μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Δηλαδή, να επιλέγεται η εκτιμήτρια με το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Ωστόσο πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτό δεν είναι πάντοτε δυνατό, δεδομένου ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μια εκτιμήτριας  $\hat{\theta}$  της  $\theta$  εξαρτάται, εκτός των άλλων, και από την πραγματική τιμή της ίδιας της παραμέτρου  $\theta$ . Έτσι, μπορεί μια εκτιμήτρια  $\hat{\theta}_1$  να έχει μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα από αυτό μιας δεύτερης εκτιμήτριας  $\hat{\theta}_2$ , για ορισμένες τιμές της  $\theta$ , αλλά να συμβαίνει το αντίθετο για τις υπόλοιπες τιμές της  $\theta$ , μέσα στον παραμετρικό χώρο (δείτε Κουτρουβέλη (2000)).

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 1.2 θα προβούμε στον υπολογισμό του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των εκτιμητών της τυπικής απόκλισης, για μεμονωμένες παρατηρήσεις. Έτσι, για τον αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1 = \frac{R}{d_2(n)}$  έχουμε

$$MSE(\hat{\sigma}_1) = \text{Var}(\hat{\sigma}_1) + [B(\hat{\sigma}_1)]^2 = \text{Var}(\hat{\sigma}_1) = \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \sigma^2,$$

ενώ, για τον αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2 = \frac{S}{c_4(n)}$ , έχουμε

$$MSE(\hat{\sigma}_2) = Var(\hat{\sigma}_2) + [B(\hat{\sigma}_2)]^2 = Var(\hat{\sigma}_2) = \frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)} \sigma^2.$$

Για τον μη αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_3 = S$  έχουμε

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\sigma}_3) &= Var(\hat{\sigma}_3) + [B(\hat{\sigma}_3)]^2 = Var(S) + [E(S) - \sigma]^2 \\ &= \sigma^2(1 - c_4^2(n)) + (\sigma c_4(n) - \sigma)^2 \\ &= 2\sigma^2(1 - c_4(n)). \end{aligned}$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, για τον μη αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_4 = \frac{d_2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} R$ , υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\sigma}_4) &= Var(\hat{\sigma}_4) + [B(\hat{\sigma}_4)]^2 \\ &= Var\left(\frac{d_2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} R\right) + \left[E\left(\frac{d_2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} R\right) - \sigma\right]^2 \\ &= \left(\frac{d_2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)}\right)^2 \sigma^2 d_3^2(n) + \left[\frac{\sigma d_2^2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} - \sigma\right]^2 \\ &= \sigma^2 \left[ \left(\frac{d_2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)}\right)^2 d_3^2(n) + \left(\frac{d_2^2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} - 1\right)^2 \right] \\ &= \sigma^2 \left( \frac{d_2^2(n)d_3^2(n) + d_2^4(n) - 2d_2^4(n) - 2d_2^2(n)d_3^2(n) + d_2^4(n) + 2d_2^2(n)d_3^2(n) + d_3^4(n)}{(d_2^2(n) + d_3^2(n))^2} \right) \\ &= \sigma^2 \left( \frac{d_3^2(n)(d_2^2(n) + d_3^2(n))}{(d_2^2(n) + d_3^2(n))^2} \right) = \sigma^2 \left( \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} \right). \end{aligned}$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, για τον μη αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_5 = c_4(n)S$ , υπολογίζεται ως εξής

$$MSE(\hat{\sigma}_5) = Var(\hat{\sigma}_5) + [B(\hat{\sigma}_5)]^2 = c_4^2(n)(1 - c_4^2(n))\sigma^2 + [\sigma c_4^2(n)E(S) - \sigma]^2 = \sigma^2(1 - c_4^2(n)).$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, για τον μη αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_6 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} S$ , υπολογίζεται ως εξής

$$MSE(\hat{\sigma}_6) = Var(\hat{\sigma}_6) + [B(\hat{\sigma}_6)]^2 = \frac{n-1}{n}(1 - c_4^2(n))\sigma^2 + \left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} c_4(n)\sigma - \sigma\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n-1}{n} (1 - c_4^2(n)) \sigma^2 + \left( \left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} c_4(n) - 1 \right) \sigma^2 \\
&= \frac{n-1}{n} \sigma^2 + \left( 1 - 2 \left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} c_4(n) \right) \sigma^2 \\
&= \sigma^2 \left( 2 - 2 \left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} c_4(n) - \frac{1}{n} \right).
\end{aligned}$$

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τους παραπάνω εκτιμητές, καθώς και τα μέσα τετραγωνικά σφάλματά τους.

**Πίνακας 2.1. MSE Εκτιμητών της Τυπικής Απόκλισης: Ένα δείγμα**

Εκτιμητής	Τύπος	MSE
$\hat{\sigma}_1$	$\frac{R}{d_2}$	$\frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \sigma^2$
$\hat{\sigma}_2$	$\frac{S}{c_4(n)}$	$\frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)} \sigma^2$
$\hat{\sigma}_3$	$S$	$2(1 - c_4(n)) \sigma^2$
$\hat{\sigma}_4$	$\frac{d_2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} R$	$\left( \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} \right) \sigma^2$
$\hat{\sigma}_5$	$c_4(n) S$	$(1 - c_4^2(n)) \sigma^2$
$\hat{\sigma}_6$	$\left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} S$	$\left( 2 - 2 \left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} c_4(n) - \frac{1}{n} \right) \sigma^2$

## 2.2 Σχετική αποτελεσματικότητα

Η σχετική αποτελεσματικότητα (Relative Efficiency, RE) του εκτιμητή  $\hat{\theta}_1$ , ως προς τον εκτιμητή  $\hat{\theta}_2$ , ορίζεται από τον τύπο

$$RE \left( \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} \right) = \frac{MSE(\hat{\theta}_2)}{MSE(\hat{\theta}_1)}.$$

Φυσικά, για αμερόληπτους εκτιμητές ισχύει ότι

$$RE\left(\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2}\right) = \frac{Var(\hat{\theta}_2)}{Var(\hat{\theta}_1)}.$$

Επειδή θεωρούμε ότι μεταξύ δύο εκτιμητών μιας παραμέτρου, βέλτιστος είναι εκείνος που έχει το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα, τότε θα προτιμούμε τον εκτιμητή  $\hat{\theta}_2$ , έναντι του εκτιμητή  $\hat{\theta}_1$ , όταν  $RE(\hat{\theta}_1/\hat{\theta}_2) < 1$ . Η χρήση της σχετικής αποτελεσματικότητας για την επιλογή του αποδοτικότερου εκτιμητή της τυπικής απόκλισης ανάγεται στον Shewhart (1931) και στους Davies και Pearson (1934).

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2.1 έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για τη σχετική αποτελεσματικότητα των εκτιμητών της τυπικής απόκλισης, για μεμονωμένες παρατηρήσεις:

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_2)}{MSE(\hat{\sigma}_1)} = \frac{\frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)} \sigma^2}{\left(\frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)}\right) \sigma^2} = \frac{d_2^2(n)(1 - c_4^2(n))}{d_3^2(n)c_4^2(n)},$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_3}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_3)}{MSE(\hat{\sigma}_1)} = \frac{2(1 - c_4(n))\sigma^2}{\left(\frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)}\right) \sigma^2} = \frac{2(1 - c_4(n))d_2^2(n)}{d_3^2(n)},$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_4}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_4)}{MSE(\hat{\sigma}_1)} = \frac{\left(\frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)}\right) \sigma^2}{\left(\frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)}\right) \sigma^2} = \frac{d_2^2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)},$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_5}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_5)}{MSE(\hat{\sigma}_1)} = \frac{(1 - c_4^2(n))\sigma^2}{\left(\frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)}\right) \sigma^2} = \frac{d_2^2(n)(1 - c_4^2(n))}{d_3^2(n)},$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_6}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_6)}{MSE(\hat{\sigma}_1)} = \frac{\left(2 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} c_4(n) - \frac{1}{n}\right) \sigma^2}{\left(\frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)}\right) \sigma^2} = \frac{d_2^2(n) \left(2 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} c_4(n) - \frac{1}{n}\right)}{d_3^2(n)},$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_2}{\hat{\sigma}_3}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_3)}{MSE(\hat{\sigma}_2)} = \frac{2(1 - c_4(n))\sigma^2}{\frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)}\sigma^2} = \frac{2c_4^2(n)}{(1 + c_4(n))},$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_2}{\hat{\sigma}_4}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_4)}{MSE(\hat{\sigma}_2)} = \frac{\frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)}\sigma^2}{\frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)}\sigma^2} = \frac{c_4^2(n)d_3^2(n)}{(1 - c_4^2(n))(d_2^2(n) + d_3^2(n))},$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_2}{\hat{\sigma}_5}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_5)}{MSE(\hat{\sigma}_2)} = \frac{(1 - c_4^2(n))\sigma^2}{\frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)}\sigma^2} = c_4^2(n),$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_2}{\hat{\sigma}_6}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_6)}{MSE(\hat{\sigma}_2)} = \frac{\left(2 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}c_4(n) - \frac{1}{n}\right)\sigma^2}{\frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)}\sigma^2} = \frac{\left(2 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}c_4(n) - \frac{1}{n}\right)c_4^2(n)}{(1 - c_4^2(n))},$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_3}{\hat{\sigma}_4}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_4)}{MSE(\hat{\sigma}_3)} = \frac{\left(\frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)}\right)\sigma^2}{2(1 - c_4(n))\sigma^2} = \frac{d_3^2(n)}{2(1 - c_4(n))(d_2^2(n) + d_3^2(n))},$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_3}{\hat{\sigma}_5}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_5)}{MSE(\hat{\sigma}_3)} = \frac{(1 - c_4^2(n))\sigma^2}{2(1 - c_4(n))\sigma^2} = \frac{1 + c_4(n)}{2},$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_3}{\hat{\sigma}_6}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_6)}{MSE(\hat{\sigma}_3)} = \frac{\left(2 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}c_4(n) - \frac{1}{n}\right)\sigma^2}{2(1 - c_4(n))\sigma^2} = \frac{\left(2 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}c_4(n) - \frac{1}{n}\right)}{2(1 - c_4(n))},$$

$$RE \left( \frac{\hat{\sigma}_4}{\hat{\sigma}_5} \right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_5)}{MSE(\hat{\sigma}_4)} = \frac{(1 - c_4^2(n))\sigma^2}{\left( \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} \right) \sigma^2} = \frac{(1 - c_4^2(n))(d_2^2(n) + d_3^2(n))}{d_3^2(n)},$$

$$RE \left( \frac{\hat{\sigma}_4}{\hat{\sigma}_6} \right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_6)}{MSE(\hat{\sigma}_4)} = \frac{\left( 2 - 2 \left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} c_4(n) - \frac{1}{n} \right) \sigma^2}{\frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n) + d_3^2(n)} \sigma^2}$$

$$= \frac{\left( 2 - 2 \left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} c_4(n) - \frac{1}{n} \right) (d_2^2(n) + d_3^2(n))}{d_3^2(n)},$$

$$RE \left( \frac{\hat{\sigma}_5}{\hat{\sigma}_6} \right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_6)}{MSE(\hat{\sigma}_5)} = \frac{\left( 2 - 2 \left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} c_4(n) - \frac{1}{n} \right) \sigma^2}{(1 - c_4^2(n))\sigma^2} = \frac{\left( 2 - 2 \left( \frac{n-1}{n} \right)^{1/2} c_4(n) - \frac{1}{n} \right)}{(1 - c_4^2(n))}.$$

### 2.3 Σύγκριση εκτιμητών

Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών  $\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_6$ .

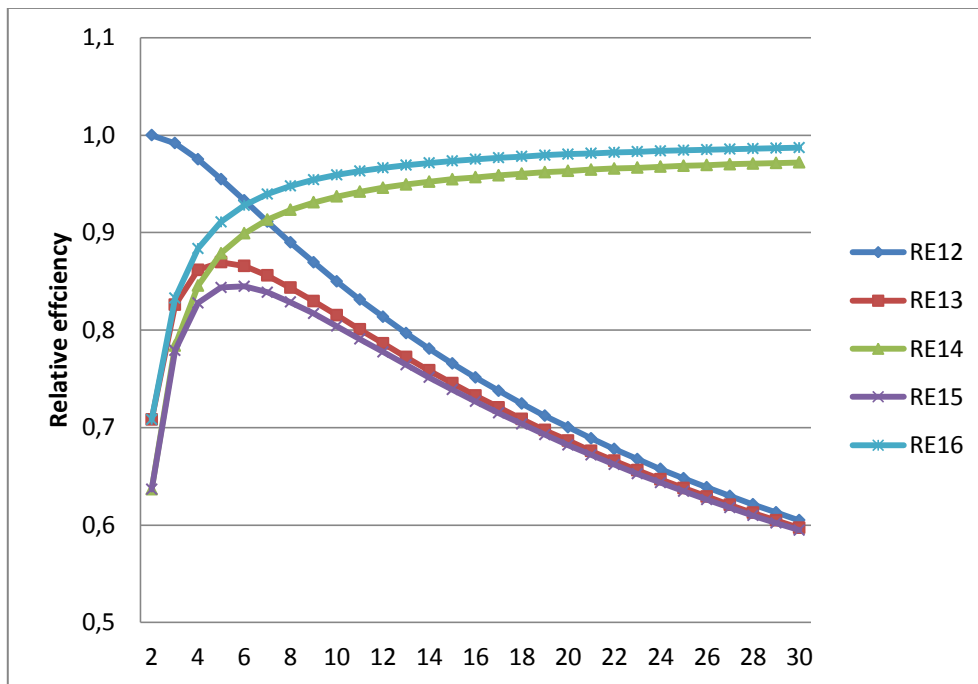
**Πίνακας 2.2. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1$**

<b><math>n</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_2)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_3)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_4)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_5)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_6)</math></b>
2	0.999999991	0.708187590	0.636619771	0.636619767	0.708187596
3	0.991859996	0.825992894	0.784017354	0.779005019	0.832771659
4	0.975188785	0.861664821	0.845574090	0.827765950	0.883587706
5	0.954760769	0.869697974	0.878725323	0.843600774	0.910906692
6	0.933039679	0.865768585	0.899310286	0.844787922	0.927901144
7	0.911231420	0.856078652	0.913305387	0.838686896	0.939474466
8	0.889947029	0.843542380	0.923436774	0.828793234	0.947856842
9	0.869463392	0.829646471	0.931114621	0.816915836	0.954205178
10	0.849895726	0.815201605	0.937139307	0.804057503	0.959178380
11	0.831279889	0.800671262	0.941998210	0.790803020	0.963178916
12	0.813596565	0.786313704	0.946003891	0.777491010	0.966466352
13	0.796810147	0.772280778	0.949366524	0.764328450	0.969215541
14	0.780872275	0.758655324	0.952232294	0.751437264	0.971548547
15	0.765705787	0.745455275	0.954704652	0.738864026	0.973553142
16	0.751332863	0.732770482	0.956864993	0.726719092	0.975294064
17	0.737628983	0.720530809	0.958767202	0.714949002	0.976820089
18	0.724566951	0.708748693	0.960456998	0.703578387	0.978168674
19	0.712109806	0.697418302	0.961969510	0.692611046	0.979369048
20	0.700210638	0.686517572	0.963331931	0.682032645	0.980444361
21	0.688831662	0.676028472	0.964566319	0.671831325	0.981413180
22	0.677938050	0.665932156	0.965690574	0.661993251	0.982290573
23	0.667497835	0.656209709	0.966719373	0.652503615	0.983088895
24	0.657480479	0.646841374	0.967664814	0.643346062	0.983818371
25	0.647859688	0.637809787	0.968537077	0.634506052	0.984487534
26	0.638610584	0.629097563	0.969344703	0.625968580	0.985103566
27	0.629710185	0.620688044	0.970094928	0.617718995	0.985672550
28	0.621137431	0.612565536	0.970793940	0.609743314	0.986199680
29	0.612873140	0.604715434	0.971447055	0.602028395	0.986689405
30	0.604899331	0.597123696	0.972058863	0.594561454	0.987145571

Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται γραφικά η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών  $\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_6$ .



**Διάγραμμα 2.1. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1$**



Από τον Πίνακα 2.2 και το Διάγραμμα 2.1, φαίνεται ότι ο αμερόληπτος εκτιμητής  $\hat{\sigma}_1$  είναι λιγότερο αποτελεσματικός, για την εκτίμηση της τυπική απόκλισης μιας διεργασίας, σε σύγκριση με τους υπόλοιπους εκτιμητές. Συγκεκριμένα, φαίνεται ότι σε σχέση με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_4$  και  $\hat{\sigma}_6$ , για δείγματα μεγέθους  $n = 2$  είναι 64% και 71% περίπου λιγότερο αποδοτικός, αντίστοιχα. Ωστόσο, καθώς μεγαλώνει το δείγμα, η αποδοτικότητα των τριών αυτών εκτιμητών φαίνεται να εξισώνεται. Το αντίθετο παρατηρείται, σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2$ , όπου η αποδοτικότητα των δύο εκτιμητών είναι περίπου ίση για μικρά δείγματα ( $n \leq 7$ ), ωστόσο, καθώς το δείγμα μεγαλώνει, η αποδοτικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1$  μειώνεται, φθάνοντας σε αποδοτικότητα 60% περίπου, για  $n = 30$ . Τέλος, η αποδοτικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1$  είναι σαφώς μικρότερη, ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος, σε σχέση με τους μη αμερόληπτους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_3$  και  $\hat{\sigma}_5$ .

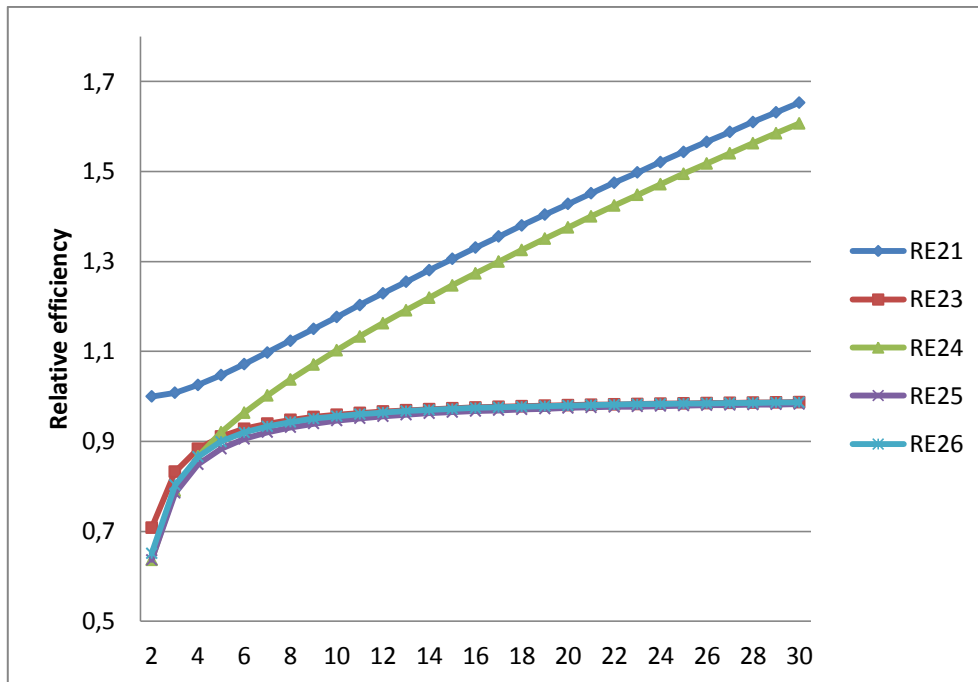
Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

**Πίνακας 2.3. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2$**

$n$	$RE(\hat{\sigma}_2/\hat{\sigma}_1)$	$RE(\hat{\sigma}_2/\hat{\sigma}_3)$	$RE(\hat{\sigma}_2/\hat{\sigma}_4)$	$RE(\hat{\sigma}_2/\hat{\sigma}_5)$	$RE(\hat{\sigma}_2/\hat{\sigma}_6)$
2	1.000000009	0.708187596	0.636619776	0.636619773	0.651056806
3	1.008206807	0.832771659	0.790451634	0.785398163	0.803193247
4	1.025442474	0.883587706	0.867087586	0.848826363	0.865992499
5	1.047382792	0.910906692	0.920361782	0.883572934	0.899324568
6	1.071765781	0.927901144	0.963849991	0.905414787	0.919723200
7	1.097416066	0.939474466	1.002276004	0.920388473	0.933400542
8	1.123662384	0.947856842	1.037631167	0.931283781	0.943170960
9	1.150134680	0.954205178	1.070907216	0.939563233	0.950481932
10	1.176614930	0.959178380	1.102652100	0.946066063	0.956149578
11	1.202964264	0.963178916	1.133190183	0.951307773	0.960667285
12	1.229110401	0.966466352	1.162743222	0.955622287	0.964350106
13	1.255004099	0.969215541	1.191458879	0.959235337	0.967408280
14	1.280619164	0.971548547	1.219446924	0.962304960	0.969987301
15	1.305984644	0.973553142	1.246829615	0.964945072	0.972190941
16	1.330968002	0.975294064	1.273556688	0.967239858	0.974095166
17	1.355695103	0.976820089	1.299796000	0.969252861	0.975756815
18	1.380134712	0.978168674	1.325560043	0.971032955	0.977219265
19	1.404277813	0.979369048	1.350872439	0.972618324	0.978516156
20	1.428141683	0.980444361	1.375774486	0.974039249	0.979673991
21	1.451733500	0.981413180	1.400293239	0.975320042	0.980713915
22	1.475061033	0.982290573	1.424452535	0.976480449	0.981653008
23	1.498132201	0.983088895	1.448273422	0.977536677	0.982505214
24	1.520957703	0.983818371	1.471777253	0.978502148	0.983282023
25	1.543544101	0.984487534	1.494979693	0.979388074	0.983992990
26	1.565899509	0.985103566	1.517896393	0.980203891	0.984646121
27	1.588032119	0.985672550	1.540541904	0.980957605	0.985248183
28	1.609949667	0.986199680	1.562929380	0.981656046	0.985804931
29	1.631659040	0.986689405	1.585070369	0.982305074	0.986321277
30	1.653167641	0.987145571	1.606976256	0.982909756	0.986801461

Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται γραφικά η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

**Διάγραμμα 2.2. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2$**



Από τον Πίνακα 2.3 και το Διάγραμμα 2.2 φαίνεται ότι ο αμερόληπτος εκτιμητής  $\hat{\sigma}_2$  είναι πιο αποδοτικός, σε σύγκριση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1$ , για κάθε μέγεθος δείγματος, φθάνοντας να είναι 65% πιο αποδοτικός για  $n = 30$ . Σε σχέση με τον αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_4$  φαίνεται ότι ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_2$  είναι λιγότερο αποδοτικός για δείγματα μεγέθους μέχρι  $n = 6$ . Ωστόσο, για  $n \geq 7$ , η απόδοση του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2$  αυξάνεται, όπου για  $n = 30$  είναι μέχρι και 61% περίπου πιο αποδοτικός, σε σύγκριση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_4$ . Τέλος, φαίνεται ότι ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_2$  είναι λιγότερο αποδοτικός, σε σχέση με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_3$ ,  $\hat{\sigma}_5$  και  $\hat{\sigma}_6$ , ειδικά για μικρό μέγεθος δείγματος ( $n \leq 4$ ). Παρ' όλα αυτά, καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται, φαίνεται ότι η αποδοτικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2$ , σε σύγκριση με τους τρεις αυτούς εκτιμητές, σχεδόν εξισώνεται.

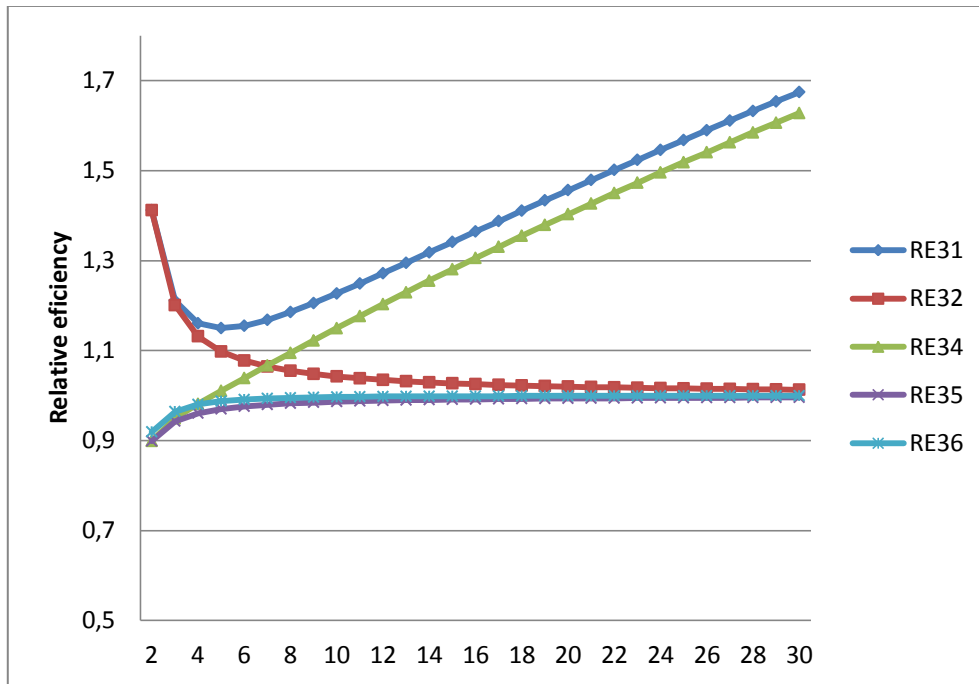
Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_3$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

**Πίνακας 2.4. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_3$**

$n$	$RE(\hat{\sigma}_3/\hat{\sigma}_1)$	$RE(\hat{\sigma}_3/\hat{\sigma}_2)$	$RE(\hat{\sigma}_3/\hat{\sigma}_4)$	$RE(\hat{\sigma}_3/\hat{\sigma}_5)$	$RE(\hat{\sigma}_3/\hat{\sigma}_6)$
2	1.412055245	1.412055232	0.898942286	0.898942281	0.919328168
3	1.210664168	1.200809357	0.949181718	0.943113463	0.964481967
4	1.160544072	1.131749563	0.981325997	0.960658866	0.980086633
5	1.149824456	1.097807283	1.010379867	0.969992802	0.987285060
6	1.155043065	1.077701010	1.038742109	0.975766431	0.991186622
7	1.168116969	1.064424885	1.066847520	0.979684395	0.993534764
8	1.185476893	1.055011639	1.094712958	0.982515228	0.995056340
9	1.205332675	1.047992637	1.122302877	0.984655350	0.996098066
10	1.226690421	1.042558945	1.149579810	0.986329637	0.996842295
11	1.248952032	1.038228707	1.176510578	0.987675039	0.997392353
12	1.271757054	1.034697170	1.203087121	0.988779676	0.997810326
13	1.294865843	1.031762242	1.229302284	0.989702802	0.998135336
14	1.318121640	1.029284644	1.255157993	0.990485719	0.998393034
15	1.341462101	1.027165294	1.280700108	0.991158089	0.998600794
16	1.364683792	1.025331781	1.305818147	0.991741766	0.998770731
17	1.387865707	1.023729970	1.330640120	0.992253203	0.998911495
18	1.410937346	1.022318570	1.355144648	0.992705022	0.999029402
19	1.433859704	1.021065555	1.379329316	0.993107069	0.999129142
20	1.456626954	1.019945690	1.403215257	0.993467134	0.999214265
21	1.479227638	1.018938832	1.426813158	0.993791465	0.999287492
22	1.501654472	1.018028705	1.450133569	0.994085127	0.999350941
23	1.523903085	1.017202009	1.473186636	0.994352273	0.999406278
24	1.545974083	1.016447781	1.495984723	0.994596338	0.999454831
25	1.567865562	1.015756894	1.518535930	0.994820188	0.999497663
26	1.589578562	1.015121694	1.540849558	0.995026235	0.999535638
27	1.611115292	1.014535709	1.562934773	0.995216520	0.999569465
28	1.632478391	1.013993434	1.584800130	0.995392785	0.999599727
29	1.653670378	1.013490157	1.606453218	0.995556524	0.999626906
30	1.674694887	1.013021817	1.627902007	0.995709027	0.999651409

Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται γραφικά η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_3$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

**Διάγραμμα 2.3. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_3$**



Ο μεροληπτικός εκτιμητής  $\hat{\sigma}_3$ , όπως φαίνεται από τον Πίνακα 2.4 και το Διάγραμμα 2.3, είναι σαφώς πιο αποδοτικός από τον αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1$ , για κάθε μέγεθος δείγματος. Το ίδιο συμβαίνει και σε σύγκριση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2$ , ειδικά για μικρά μεγέθη δειγμάτων, με την αποδοτικότητα των δύο εκτιμητών σχεδόν να εξισώνεται, καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται. Σε σύγκριση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_4$ , φαίνεται ότι για  $n = 2,3,4$  ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_3$  είναι λιγότερο αποδοτικός, ωστόσο, για  $n \geq 5$  η αποδοτικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_3$  αυξάνεται, φθάνοντας να είναι έως και 63% περίπου πιο αποδοτικός για  $n = 30$ . Τέλος, συγκριτικά με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_5$  και  $\hat{\sigma}_6$ , είναι λιγότερο αποδοτικός, κυρίως για μικρά μεγέθη δειγμάτων.

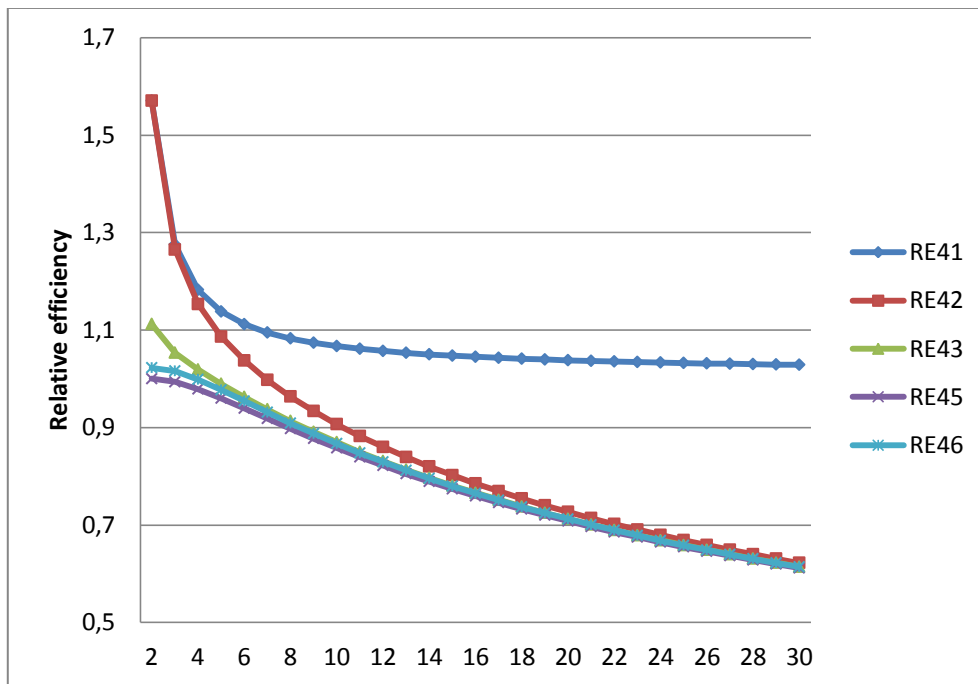
Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_4$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

**Πίνακας 2.5. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_4$**

$n$	$RE(\hat{\sigma}_4/\hat{\sigma}_1)$	$RE(\hat{\sigma}_4/\hat{\sigma}_2)$	$RE(\hat{\sigma}_4/\hat{\sigma}_3)$	$RE(\hat{\sigma}_4/\hat{\sigma}_5)$	$RE(\hat{\sigma}_4/\hat{\sigma}_6)$
2	1.570796331	1.570796317	1.112418468	0.999999994	1.022677632
3	1.275481970	1.265099542	1.053539044	0.993606856	1.016119410
4	1.182628479	1.153286030	1.019029357	0.978939587	0.998737052
5	1.138012043	1.086529254	0.989726768	0.960027840	0.977142451
6	1.111963263	1.037505846	0.962702861	0.939373135	0.954218197
7	1.094924014	0.997729164	0.937341074	0.918298422	0.931280942
8	1.082911173	0.963733581	0.913481468	0.897509453	0.908965527
9	1.073981632	0.933787713	0.891025071	0.877352603	0.887548350
10	1.067077213	0.906904362	0.869883057	0.857991440	0.867136223
11	1.061573143	0.882464405	0.849971108	0.839495247	0.847754684
12	1.057078105	0.860035115	0.831195000	0.821868723	0.829374954
13	1.053333960	0.839307187	0.813469570	0.805093112	0.811952722
14	1.050163921	0.820043890	0.796712450	0.789132303	0.795432160
15	1.047444357	0.802034206	0.780822921	0.773918954	0.779730389
16	1.045079512	0.785202582	0.765803418	0.759479234	0.764862040
17	1.043006058	0.769351498	0.751517999	0.745696141	0.750699967
18	1.041171028	0.754398117	0.737928605	0.732545432	0.737212373
19	1.039533987	0.740262345	0.724990028	0.719992722	0.724358665
20	1.038063795	0.726863313	0.712649036	0.707993395	0.712089083
21	1.036735349	0.714136134	0.700862614	0.696511284	0.700363244
22	1.035528385	0.702024094	0.689591650	0.685512802	0.689144064
23	1.034426357	0.690477354	0.678800619	0.674966938	0.678397600
24	1.033415689	0.679450642	0.668456024	0.664843913	0.668091602
25	1.032484995	0.668905407	0.658529035	0.655117978	0.658198231
26	1.031624764	0.658806493	0.648992625	0.645764688	0.648691258
27	1.030826954	0.649122233	0.639821966	0.636761390	0.639546500
28	1.030084716	0.639824174	0.630994396	0.628087269	0.630741826
29	1.029392179	0.630886817	0.622489338	0.619723322	0.622257091
30	1.028744286	0.622286730	0.614287590	0.611651698	0.614073454

Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται γραφικά η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_4$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

**Διάγραμμα 2.4. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_4$**



Ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_4$ , όπως αποτυπώνεται στον Πίνακα 2.5 και στο αντίστοιχο Διάγραμμα 2.4, είναι πιο αποδοτικός, σε σύγκριση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1$ , για κάθε  $n$ , με την αποδοτικότητα των δύο εκτιμητών σχεδόν να εξισώνεται, καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται. Συγκριτικά με τους υπόλοιπους τέσσερις εκτιμητές, φαίνεται ότι είναι λιγότερο αποδοτικός, για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης, ειδικά για μεγέθη δείγματος μεγαλύτερα του 6. Συγκεκριμένα, για μέγεθος δείγματος  $n \leq 6$ , ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_4$  είναι πιο αποδοτικός, σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2$ , έως και 57%, για  $n = 2$ . Σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_3$ , είναι ελαφρώς πιο αποδοτικός για  $n = 2,3,4$ , ενώ είναι πιο αποδοτικός από τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_6$ , για  $n = 2,3$ .

Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_5$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

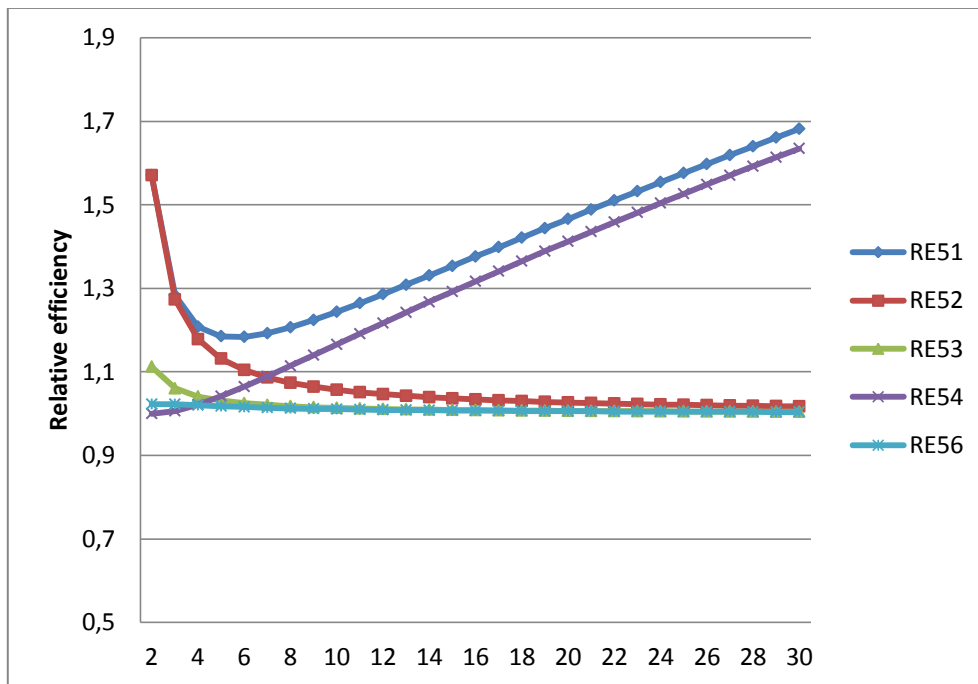
**Πίνακας 2.6. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_5$**

$n$	$RE(\hat{\sigma}_5/\hat{\sigma}_1)$	$RE(\hat{\sigma}_5/\hat{\sigma}_2)$	$RE(\hat{\sigma}_5/\hat{\sigma}_3)$	$RE(\hat{\sigma}_5/\hat{\sigma}_4)$	$RE(\hat{\sigma}_5/\hat{\sigma}_6)$
2	1.570796341	1.570796326	1.112418474	1.000000006	1.022677638
3	1.283688777	1.273239546	1.060317809	1.006434279	1.022657406
4	1.208070953	1.178097245	1.040952242	1.021513497	1.020223378
5	1.185394835	1.131768484	1.030935486	1.041636459	1.017827203
6	1.183729044	1.104466167	1.024835420	1.064539705	1.015803158
7	1.192340080	1.086497744	1.020736888	1.088970618	1.014137583
8	1.206573556	1.073786552	1.017795930	1.114194393	1.012764293
9	1.224116312	1.064324321	1.015583778	1.139792595	1.011621037
10	1.243692144	1.057008637	1.013859832	1.165512793	1.010658362
11	1.264537407	1.051184515	1.012478762	1.191191973	1.009838575
12	1.286188506	1.046438550	1.011347648	1.216739331	1.009133126
13	1.308338059	1.042497040	1.010404333	1.242092355	1.008520269
14	1.330783085	1.039171615	1.009605673	1.267214630	1.007983270
15	1.353429001	1.036328419	1.008920788	1.292124963	1.007509100
16	1.376047515	1.033869719	1.008327000	1.316691695	1.007087496
17	1.398701161	1.031722515	1.007807279	1.341028799	1.006710275
18	1.421305740	1.029831166	1.007348586	1.365103045	1.006370855
19	1.443811799	1.028152540	1.006940774	1.388902929	1.006063871
20	1.466205478	1.026652674	1.006575825	1.412442555	1.005784923
21	1.488468850	1.025304472	1.006247322	1.435726920	1.005530363
22	1.510589418	1.024086044	1.005950067	1.458761961	1.005297146
23	1.532558558	1.022979519	1.005679805	1.481554049	1.005082712
24	1.554373392	1.021970163	1.005433021	1.504112439	1.004884890
25	1.576029097	1.021045719	1.005206782	1.526442615	1.004701830
26	1.597524273	1.020195909	1.004998628	1.548551691	1.004531945
27	1.618859073	1.019412047	1.004806472	1.570446976	1.004373868
28	1.640034382	1.018686743	1.004628540	1.592135440	1.004226414
29	1.661051219	1.018013677	1.004463309	1.613623314	1.004088549
30	1.681911926	1.017387399	1.004309465	1.634917394	1.003959372

Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται γραφικά η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_5$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.



**Διάγραμμα 2.5. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_5$**



Από τον Πίνακα 2.6 και το αντίστοιχο Διάγραμμα 2.5, φαίνεται ότι ο μη αμερόληπτος εκτιμητής  $\hat{\sigma}_5$  είναι πιο αποδοτικός για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης συγκριτικά με όλους τους υπόλοιπους εκτιμητές. Συγκεκριμένα, σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1$ , είναι 57% πιο αποδοτικός, για δείγμα μεγέθους  $n = 2$  και ξεπερνάει το 68% για  $n = 30$ . Το αντίστοιχο συμβαίνει και σε σύγκριση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_4$ , όπου, για  $n = 30$  ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_5$  είναι 63% πιο αποδοτικός, ωστόσο πολύ μικρές τιμές του  $n$  φαίνεται να έχουν περίπου την ίδια αποδοτικότητα. Συγκριτικά με τον αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2$  φαίνεται ότι ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_5$  είναι κατά 57% πιο αποδοτικός για δείγμα μεγέθους  $n = 2$ , όμως, καθώς αυξάνει το μέγεθος του δείγματος φαίνεται να εξισώνεται η αποδοτικότητα των δύο αυτών εκτιμητών. Τέλος, συγκριτικά με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_3$  και  $\hat{\sigma}_6$ , φαίνεται ότι ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_5$  είναι ελαφρώς πιο αποδοτικός, ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος.

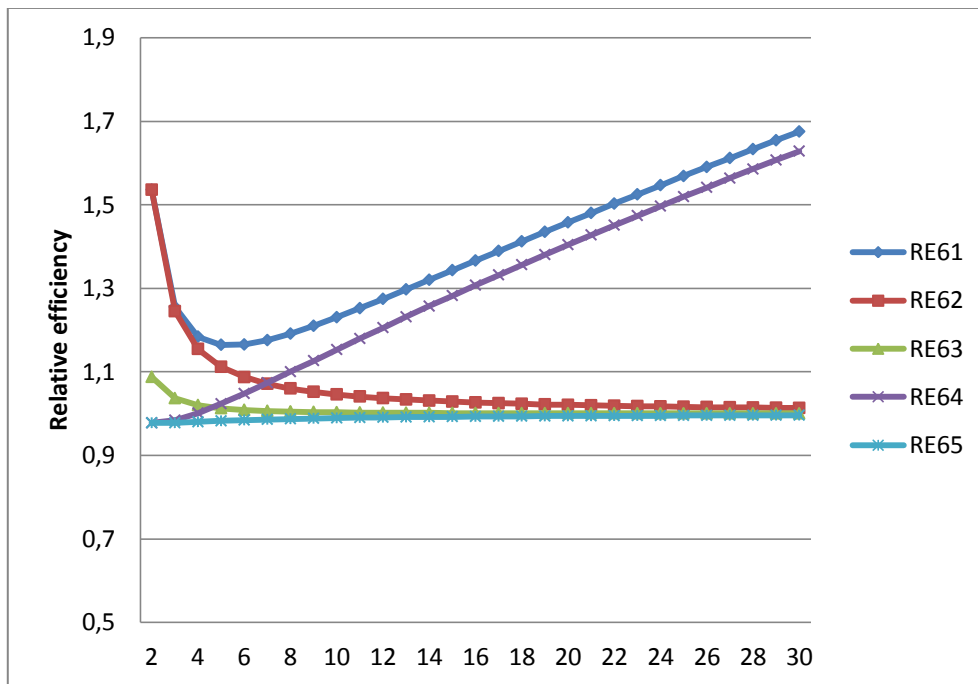
Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_6$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

**Πίνακας 2.7. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_6$**

$n$	$RE(\hat{\sigma}_6/\hat{\sigma}_1)$	$RE(\hat{\sigma}_6/\hat{\sigma}_2)$	$RE(\hat{\sigma}_6/\hat{\sigma}_3)$	$RE(\hat{\sigma}_6/\hat{\sigma}_4)$	$RE(\hat{\sigma}_6/\hat{\sigma}_5)$
2	1.535964298	1.535964284	1.087750854	0.977825239	0.977825233
3	1.255248112	1.245030387	1.036826021	0.984136304	0.977844579
4	1.184123967	1.154744412	1.020317966	1.001264545	0.980177500
5	1.164632692	1.111945605	1.012878692	1.023392238	0.982485040
6	1.165313413	1.087283652	1.008891744	1.047978338	0.984442697
7	1.175718266	1.071351425	1.006507308	1.073789825	0.986059502
8	1.191366604	1.060253170	1.004968221	1.100151734	0.987396581
9	1.210054227	1.052097853	1.003917219	1.126699182	0.988512460
10	1.230576217	1.045861467	1.003167707	1.153221343	0.989454041
11	1.252217372	1.040943119	1.002614464	1.179586523	0.990257280
12	1.274547899	1.036967792	1.002194480	1.205727271	0.990949533
13	1.297284843	1.033689726	1.001868148	1.231598802	0.991551713
14	1.320243226	1.030941332	1.001609553	1.257178236	0.992079957
15	1.343341714	1.028604524	1.001401167	1.282494583	0.992546866
16	1.366363420	1.026593741	1.001230782	1.307425324	0.992962384
17	1.389378052	1.024845520	1.001089692	1.332090107	0.993334452
18	1.412308130	1.023311795	1.000971541	1.356461227	0.993669476
19	1.435109481	1.021955533	1.000871617	1.380531564	0.993972678
20	1.457772377	1.020747727	1.000786353	1.404318679	0.994248350
21	1.480282351	1.019665352	1.000713016	1.427830499	0.994500054
22	1.502629769	1.018689895	1.000649481	1.451075403	0.994730766
23	1.524808397	1.017806303	1.000594074	1.474061818	0.994942992
24	1.546817360	1.017002220	1.000545467	1.496800733	0.995138857
25	1.568653555	1.016267403	1.000502589	1.519299130	0.995320174
26	1.590317044	1.015593296	1.000464577	1.541565402	0.995488501
27	1.611809233	1.014972691	1.000430721	1.563607962	0.995645180
28	1.633132089	1.014399471	1.000400433	1.585434736	0.995791373
29	1.654287582	1.013868426	1.000373233	1.607052800	0.995928099
30	1.675278875	1.013375071	1.000348713	1.628469677	0.996056243

Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται γραφικά η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_6$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

**Διάγραμμα 2.6. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_6$**



Ολοκληρώνοντας την ανάλυση των αποτελεσμάτων από τον Πίνακα 2.7 και το Διάγραμμα 2.6, φαίνεται ότι ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_6$  είναι σαφώς πιο αποδοτικός από τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1$  ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος, με αποδοτικότητα 54%, περίπου, για  $n = 2$  και αγγίζοντας το 68%, για  $n = 30$ . Για μέγεθος δείγματος  $n = 2,3$  ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_4$  φαίνεται να είναι ελαφρώς πιο αποδοτικός από τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_6$ , ωστόσο, η εικόνα αυτή αλλάζει, καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει, με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_6$  να είναι 63% πιο αποδοτικός, για  $n = 30$ . Συγκριτικά με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2$ , φαίνεται ότι ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_6$  είναι πιο αποδοτικός, για κάθε μέγεθος δείγματος, ιδιαίτερα, όμως,  $n = 2,3$ , όπου η αποδοτικότητα του εκτιμητή είναι μέχρι και 54% μεγαλύτερη του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_2$ . Ελαφρώς πιο αποδοτικός φαίνεται να είναι και σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_3$ , ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος, ενώ το αντίθετο φαίνεται να συμβαίνει με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_5$ , δηλαδή, ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_5$  φαίνεται να είναι ελαφρώς πιο αποδοτικός, ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος.

## 2.4 Συμπεράσματα

Βάσει των παραπάνω δεδομένων, φαίνεται ότι ο αμερόληπτος εκτιμητής  $\hat{\sigma}_1$  είναι ο λιγότερο αποδοτικός εκτιμητής ανάμεσα στους έξι εκτιμητές, για κάθε μέγεθος δείγματος. Αντίστοιχα, το ίδιο συμβαίνει και με τον μη αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_4$ , με εξαίρεση, φυσικά, τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_1$ . Επιπλέον, φαίνεται ότι ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_4$  είναι πιο αποδοτικός, σε σχέση με κάποιους εκτιμητές, αλλά μόνο για μικρά μεγέθη δείγματος ( $n \leq 6$ ). Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι οι παραπάνω εκτιμητές, οι οποίοι βασίζονται στο δειγματικό εύρος ( $R$ ), δεν προτιμούνται, ανάμεσα στους υπόλοιπους εκτιμητές, οι οποίοι βασίζονται στην δειγματική τυπική απόκλιση ( $S$ ). Στην συνέχεια, έχοντας απορρίψει τους εκτιμητές που βασίζονται στο δειγματικό εύρος, φαίνεται ότι ο αμερόληπτος εκτιμητής  $\hat{\sigma}_2$  είναι λιγότερο αποδοτικός, σε σχέση με τους υπόλοιπους τρεις εκτιμητές ( $\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_5, \hat{\sigma}_6$ ), ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος. Ειδικότερα, φαίνεται να είναι λιγότερο αποδοτικός, για μικρά μεγέθη δείγματος ( $n \leq 4$ ), ωστόσο, καθώς μεγαλώνει το μέγεθος του δείγματος, η αποδοτικότητα των τεσσάρων αυτών εκτιμητών αρχίζει να εξισώνεται. Με βάση τα παραπάνω, φαίνεται ότι και οι αμερόληπτοι εκτιμητές ( $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ ) δεν προτιμούνται, ανάμεσα στους υπό ανάλυση εκτιμητές. Τέλος, φαίνεται ότι ανάμεσα στους τρεις μη αμερόληπτους εκτιμητές ( $\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_5, \hat{\sigma}_6$ ), οι οποίοι βασίζονται στη δειγματική τυπική απόκλιση, υπερισχύει ελαφρώς ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_5$ . Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_3$  είναι λιγότερο αποδοτικός, συγκριτικά με τους άλλους δύο εκτιμητές, για κάθε μέγεθος δείγματος και, ειδικότερα, για  $n = 2$ . Φυσικά, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος, η αποδοτικότητα των τριών εκτιμητών φαίνεται να εξισώνεται. Επιπλέον, ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_5$  είναι ελαφρώς πιο αποδοτικός από τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_6$ , για κάθε μέγεθος δείγματος. Συνοψίζοντας, φαίνεται ότι ενώ το δειγματικό εύρος προτείνεται συχνά για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης (βλέπε Montgomery (2009), Ott (1975) και Grant and Leavenworth (1996)), λόγω μεγαλύτερης ευκολίας στον υπολογισμό και στην κατανόησή του, οι εκτιμητές, οι οποίοι βασίζονται στην δειγματική τυπική απόκλιση είναι αποδοτικότεροι. Τέλος, ενώ η διαφορά στην αποδοτικότητα ανάμεσα στους εκτιμητές ( $\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_5, \hat{\sigma}_6$ ) είναι σχετικά μικρή, προτείνεται η χρήση του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_5$ , καθώς εκτιμά αποτελεσματικότερα την τυπική απόκλιση για κάθε  $n$ . Τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται ότι βρίσκονται σε αντιστοιχία με την δημοσίευση Mahmoud et al (2010).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Σύγκριση Εκτιμητών της Τυπικής απόκλισης για Δείγματα

### 3.1 Μέσο τετραγωνικό σφάλμα των εκτιμητών

Έστω ότι έχουμε  $m$  ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  το καθένα, τα  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ,  $1 \leq i \leq m$ , από ένα πληθυσμό που η κατανομή του εξαρτάται από μια άγνωστη παράμετρο  $\theta$ . Επίσης έστω  $\hat{\theta}_i = h(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ,  $1 \leq i \leq m$ , μια εκτίμηση της παραμέτρου  $\theta$  βασισμένη στο  $i$ -στο δείγμα. Στο Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητα συνηθίζεται να λαμβάνεται ως εκτίμηση της παραμέτρου  $\theta$  η στατιστική συνάρτηση

$$\bar{\theta} = \frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \dots + \hat{\theta}_m}{m}.$$

Σε αυτή την περίπτωση το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της  $\hat{\theta}$ . Αν συμβολίσουμε με  $\mu_{\bar{\theta}}$  τη μέση τιμή της σ.σ.  $\bar{\theta}$ , είναι

$$\begin{aligned} MSE(\bar{\theta}) &= E[(\bar{\theta} - \theta)^2] = E[(\bar{\theta} - \mu_{\bar{\theta}} + \mu_{\bar{\theta}} - \theta)^2] \\ &= Var(\bar{\theta}) + (\mu_{\bar{\theta}} - \theta)^2 + 2(\mu_{\bar{\theta}} - \theta)E(\bar{\theta} - \mu_{\bar{\theta}}) \\ &= Var\left(\frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \dots + \hat{\theta}_m}{m}\right) + \left(E\left(\frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \dots + \hat{\theta}_m}{m}\right) - \theta\right)^2 \\ &= \frac{Var(\hat{\theta}_i)}{m} + (E(\hat{\theta}_i) - \theta)^2 = \frac{Var(\hat{\theta}_i)}{m} + B^2(\hat{\theta}_i), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$MSE(\bar{\theta}) = \frac{Var(\hat{\theta}_i)}{m} + B^2(\hat{\theta}_i).$$

Παρατηρούμε ότι το  $MSE(\bar{\theta})$  συγκλίνει στο  $B^2(\hat{\theta}_i)$  καθώς το  $m$  αυξάνεται. Φυσικά, στην περίπτωση των αμερόληπτων εκτιμητών το  $MSE$  θα προσεγγίζει το μηδέν καθώς θα αυξάνεται η τιμή του  $m$ .

Χρησιμοποιώντας τους Πίνακες 1.2, 1.3 και τον τύπο  $MSE(\bar{\theta}) = (1/m)Var(\hat{\theta}_i) + B^2(\hat{\theta}_i)$  μπορούμε να υπολογίσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα των εκτιμητών  $\hat{\sigma}_7$ ,  $\hat{\sigma}_8$  και  $\hat{\sigma}_9$  της τυπικής απόκλισης από αντίστοιχες πληροφορίες που αφορούν τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_2$ ,  $\hat{\sigma}_1$ , και  $\hat{\sigma}_5$  αντιστοίχως. Σημειώνουμε ότι οι εκτιμητές,  $\hat{\sigma}_1$  και  $\hat{\sigma}_2$  είναι αμερόληπτοι εκτιμητές της τυπικής απόκλισης και επομένως  $B(\hat{\sigma}_1) = B(\hat{\sigma}_2) = 0$ .

Πιο συγκεκριμένα, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_7 = \frac{\bar{S}}{c_4(n)}$  δίνεται από τον τύπο

$$MSE(\hat{\sigma}_7) = \frac{1}{m}Var(\hat{\sigma}_2) + [B(\hat{\sigma}_2)]^2 = \frac{1}{m}Var(\hat{\sigma}_2) = \frac{\sigma^2}{m} \cdot \frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)}.$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8 = \frac{\bar{R}}{d_2(n)}$  δίνεται από τον τύπο

$$MSE(\hat{\sigma}_8) = \frac{1}{m}Var(\hat{\sigma}_1) + [B(\hat{\sigma}_1)]^2 = \frac{1}{m}Var(\hat{\sigma}_1) = \frac{\sigma^2}{m} \cdot \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)}.$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, για τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9 = c_4\bar{S}$  δίνεται από τον τύπο

$$MSE(\hat{\sigma}_9) = \frac{1}{m}Var(\hat{\sigma}_5) + [B(\hat{\sigma}_5)]^2.$$

Όμως

$$B(\hat{\sigma}_5) = [E(c_4(n)S) - \sigma]^2 = [1 - c_4^2(n)]^2\sigma^2.$$

Έτσι

$$MSE(\hat{\sigma}_9) = \frac{1}{m}Var(\hat{\sigma}_5) + [B(\hat{\sigma}_5)]^2 = \frac{\sigma^2}{m} \cdot c_4^2(n)[1 - c_4^2(n)] + \sigma^2[1 - c_4^2(n)]^2.$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των εκτιμητών  $\hat{\sigma}_{10}$ ,  $\hat{\sigma}_{11}$  και  $\hat{\sigma}_{12}$  χρησιμοποιώντας το γενικό τύπο

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta}).$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10} = c_4(v+1)S_{pooled}$  δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\sigma}_{10}) &= Var(\hat{\sigma}_{10}) + B^2(\hat{\sigma}_{10}) = Var(c_4(\nu + 1)S_{pooled}) + [E(c_4(\nu + 1)S_{pooled}) - \sigma]^2 \\
&= \sigma^2 c_4^2(\nu + 1)[1 - c_4^2(\nu + 1)] + \sigma^2 [1 - c_4^2(\nu + 1)]^2 \\
&= \sigma^2 [1 - c_4^2(\nu + 1)].
\end{aligned}$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για το μη αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{11} = S_{pooled}$  δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\sigma}_{11}) &= Var(\hat{\sigma}_{11}) + B^2(\hat{\sigma}_{11}) = Var(S_{pooled}) + [E(S_{pooled}) - \sigma]^2 \\
&= \sigma^2 [1 - c_4^2(\nu + 1)] + \sigma^2 [1 - c_4(\nu + 1)]^2 \\
&= 2\sigma^2 [1 - c_4(\nu + 1)].
\end{aligned}$$

Τέλος, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για τον αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{12} = \frac{S_{pooled}}{c_4(\nu+1)}$  της τυπικής απόκλισης δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\sigma}_{12}) &= Var(\hat{\sigma}_{12}) + B^2(\hat{\sigma}_{12}) = Var\left(\frac{S_{pooled}}{c_4(\nu + 1)}\right) + \left[E\left(\frac{S_{pooled}}{c_4(\nu + 1)}\right) - \sigma\right]^2 \\
&= \frac{Var(S_{pooled})}{c_4^2(\nu + 1)} = \frac{\sigma^2(1 - c_4^2(\nu + 1))}{c_4^2(\nu + 1)}.
\end{aligned}$$

Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζονται συνοπτικά οι παραπάνω εκτιμητές, καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα τους.

Πίνακας 3.1. MSE Εκτιμητών της Τυπικής Απόκλισης: Πολλά Δείγματα

Εκτιμητής	Τύπος	MSE
$\hat{\sigma}_7$	$\frac{\bar{S}}{c_4(n)}$	$\frac{\sigma^2}{m} \cdot \frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)}$
$\hat{\sigma}_8$	$\frac{\bar{R}}{d_2(n)}$	$\frac{\sigma^2}{m} \cdot \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)}$
$\hat{\sigma}_9$	$c_4(n)\bar{S}$	$\frac{\sigma^2}{m} \cdot c_4^2(n)[1 - c_4^2(n)] + \sigma^2[1 - c_4^2(n)]^2$
$\hat{\sigma}_{10}$	$c_4(v+1)S_{pooled}$	$\sigma^2[1 - c_4^2(v+1)]$
$\hat{\sigma}_{11}$	$S_{pooled}$	$2\sigma^2[1 - c_4(v+1)]$
$\hat{\sigma}_{12}$	$\frac{S_{pooled}}{c_4(v+1)}$	$\frac{\sigma^2(1 - c_4^2(v+1))}{c_4^2(v+1)}$

### 3.2 Σχετική αποτελεσματικότητα

Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 3.1, έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για τη σχετική αποτελεσματικότητα των εκτιμητών της τυπικής απόκλισης στην περίπτωση των πολλαπλών δειγμάτων:

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_7}{\hat{\sigma}_8}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_8)}{MSE(\hat{\sigma}_7)} = \frac{\left(\frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)}\right)\left(\frac{\sigma^2}{m}\right)}{\frac{(1 - c_4^2(n))}{c_4^2(n)}\left(\frac{\sigma^2}{m}\right)} = \frac{c_4^2(n)d_3^2(n)}{(1 - c_4^2(n))d_2^2(n)}$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_7}{\hat{\sigma}_9}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_9)}{MSE(\hat{\sigma}_7)} = \frac{c_4^2(n)(1 - c_4^2(n))\frac{\sigma^2}{m} + (1 - c_4^2(n))^2\sigma^2}{\frac{(1 - c_4^2(n))}{c_4^2(n)}\left(\frac{\sigma^2}{m}\right)} = c_4^4(n) + mc_4^2(n)(1 - c_4^2(n)),$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_7}{\hat{\sigma}_{10}}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_{10})}{MSE(\hat{\sigma}_7)} = \frac{[1 - c_4^2(v+1)]\sigma^2}{\frac{(1 - c_4^2(n))}{c_4^2(n)}\left(\frac{\sigma^2}{m}\right)} = \frac{mc_4^2(n)[1 - c_4^2(v+1)]}{(1 - c_4^2(n))},$$



$$RE \left( \frac{\hat{\sigma}_7}{\hat{\sigma}_{11}} \right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_{11})}{MSE(\hat{\sigma}_7)} = \frac{2[1 - c_4(\nu + 1)]\sigma^2}{\frac{(1 - c_4^2(n))}{c_4^2(n)} \left( \frac{\sigma^2}{m} \right)} = \frac{2mc_4^2(n)[1 - c_4(\nu + 1)]}{(1 - c_4^2(n))},$$

$$RE \left( \frac{\hat{\sigma}_7}{\hat{\sigma}_{12}} \right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_{12})}{MSE(\hat{\sigma}_7)} = \frac{\left[ \frac{(1 - c_4^2(\nu + 1))}{c_4^2(\nu + 1)} \right] \sigma^2}{\frac{(1 - c_4^2(n))}{c_4^2(n)} \left( \frac{\sigma^2}{m} \right)} = \frac{mc_4^2(n)(1 - c_4^2(\nu + 1))}{(1 - c_4^2(n))c_4^2(\nu + 1)},$$

$$\begin{aligned} RE \left( \frac{\hat{\sigma}_8}{\hat{\sigma}_9} \right) &= \frac{MSE(\hat{\sigma}_9)}{MSE(\hat{\sigma}_8)} = \frac{c_4^2(n)(1 - c_4^2(n)) \frac{\sigma^2}{m} + (1 - c_4^2(n))^2 \sigma^2}{\left( \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \right) \left( \frac{\sigma^2}{m} \right)} \\ &= \frac{c_4^2(n)(1 - c_4^2(n))}{\left( \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \right)} + \frac{m(1 - c_4^2(n))^2}{\left( \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \right)}, \end{aligned}$$

$$RE \left( \frac{\hat{\sigma}_8}{\hat{\sigma}_{10}} \right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_{10})}{MSE(\hat{\sigma}_8)} = \frac{[1 - c_4^2(\nu + 1)]\sigma^2}{\left( \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \right) \left( \frac{\sigma^2}{m} \right)} = \frac{[1 - c_4^2(\nu + 1)]}{\left( \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \right) \left( \frac{1}{m} \right)},$$

$$RE \left( \frac{\hat{\sigma}_8}{\hat{\sigma}_{11}} \right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_{11})}{MSE(\hat{\sigma}_8)} = \frac{2[1 - c_4(\nu + 1)]\sigma^2}{\left( \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \right) \left( \frac{\sigma^2}{m} \right)} = \frac{2[1 - c_4(\nu + 1)]}{\left( \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \right) \left( \frac{1}{m} \right)},$$

$$RE \left( \frac{\hat{\sigma}_8}{\hat{\sigma}_{12}} \right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_{12})}{MSE(\hat{\sigma}_8)} = \frac{\left[ \frac{(1 - c_4^2(\nu + 1))}{c_4^2(\nu + 1)} \right] \sigma^2}{\left( \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \right) \left( \frac{\sigma^2}{m} \right)} = \frac{\left[ \frac{(1 - c_4^2(\nu + 1))}{c_4^2(\nu + 1)} \right]}{\left( \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \right) \left( \frac{1}{m} \right)},$$

$$RE \left( \frac{\hat{\sigma}_9}{\hat{\sigma}_{10}} \right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_{10})}{MSE(\hat{\sigma}_9)} = \frac{[1 - c_4^2(\nu + 1)]\sigma^2}{c_4^2(n)(1 - c_4^2(n)) \frac{\sigma^2}{m} + (1 - c_4^2(n))^2 \sigma^2}$$

$$= \frac{[1 - c_4^2(\nu + 1)]}{c_4^2(n)(1 - c_4^2(n))\frac{1}{m} + (1 - c_4^2(n))^2},$$

$$\begin{aligned} RE\left(\frac{\hat{\sigma}_9}{\hat{\sigma}_{11}}\right) &= \frac{MSE(\hat{\sigma}_{11})}{MSE(\hat{\sigma}_9)} = \frac{2[1 - c_4(\nu + 1)]\sigma^2}{c_4^2(n)(1 - c_4^2(n))\frac{\sigma^2}{m} + (1 - c_4^2(n))^2\sigma^2} \\ &= \frac{2[1 - c_4(\nu + 1)]}{c_4^2(n)(1 - c_4^2(n))\frac{1}{m} + (1 - c_4^2(n))^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RE\left(\frac{\hat{\sigma}_9}{\hat{\sigma}_{12}}\right) &= \frac{MSE(\hat{\sigma}_{12})}{MSE(\hat{\sigma}_9)} = \frac{\left[\frac{(1 - c_4^2(\nu + 1))}{c_4^2(\nu + 1)}\right]\sigma^2}{c_4^2(n)(1 - c_4^2(n))\frac{\sigma^2}{m} + (1 - c_4^2(n))^2\sigma^2} \\ &= \frac{\left[\frac{(1 - c_4^2(\nu + 1))}{c_4^2(\nu + 1)}\right]}{c_4^2(n)(1 - c_4^2(n))\frac{1}{m} + (1 - c_4^2(n))^2}, \end{aligned}$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_{10}}{\hat{\sigma}_{11}}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_{11})}{MSE(\hat{\sigma}_{10})} = \frac{2[1 - c_4(\nu + 1)]\sigma^2}{[1 - c_4^2(\nu + 1)]\sigma^2} = \frac{2[1 - c_4(\nu + 1)]}{[1 - c_4^2(\nu + 1)]},$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_{10}}{\hat{\sigma}_{12}}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_{12})}{MSE(\hat{\sigma}_{10})} = \frac{\left[\frac{(1 - c_4^2(\nu + 1))}{c_4^2(\nu + 1)}\right]\sigma^2}{[1 - c_4^2(\nu + 1)]\sigma^2} = \frac{1}{c_4^2(\nu + 1)},$$

$$RE\left(\frac{\hat{\sigma}_{11}}{\hat{\sigma}_{12}}\right) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_{12})}{MSE(\hat{\sigma}_{11})} = \frac{\left[\frac{(1 - c_4^2(\nu + 1))}{c_4^2(\nu + 1)}\right]\sigma^2}{2[1 - c_4(\nu + 1)]\sigma^2} = \frac{(1 - c_4^2(\nu + 1))}{2[1 - c_4(\nu + 1)]c_4^2(\nu + 1)}.$$

Για τον υπολογισμό της σχετικής αποτελεσματικότητας στην περίπτωση που εμπλέκεται η ποσότητα  $S_{pooled}$  είναι απαραίτητο να υπάρχουν πίνακες για την ποσότητα  $c_4(\nu + 1)$ . Ενδεικτικές τιμές της ποσότητας  $c_4(\nu + 1)$  δίνονται στους ακόλουθους πίνακες.

**Πίνακας 3.2. Ενδεικτικές τιμές των ποσοτήτων  $c_4(n)$  και  $c_4(v + 1)$ :  $m = 20$**

$n$	$m$	$v + 1$	$c_4(n)$	$c_4(v + 1)$
2	20	21	0.797884561	0.987582929
3	20	41	0.886226925	0.993770137
4	20	61	0.921317732	0.995842194
5	20	81	0.939985603	0.996879959
6	20	101	0.951532862	0.997503164
7	20	121	0.959368789	0.997918859
8	20	141	0.965030456	0.998215894
9	20	161	0.969310700	0.998438730
10	20	181	0.972659274	0.998612082
11	20	201	0.975350077	0.998750786
12	20	221	0.977559352	0.998864286
13	20	241	0.979405604	0.998958879
14	20	261	0.980971437	0.999038926
15	20	281	0.982316177	0.999107543
16	20	301	0.983483532	0.999167015
17	20	321	0.984506405	0.999219056
18	20	341	0.985410044	0.999264977
19	20	361	0.986214137	0.999305798
20	20	381	0.986934268	0.999342322
21	20	401	0.987582929	0.999375196
22	20	421	0.988170253	0.999404940
23	20	441	0.988704545	0.999431980
24	20	461	0.989192675	0.999456670
25	20	481	0.989640376	0.999479303
26	20	501	0.990052469	0.999500125
27	20	521	0.990433039	0.999519347
28	20	541	0.990785570	0.999537144
29	20	561	0.991113048	0.999553671
30	20	581	0.991418053	0.999569059

**Πίνακας 3.3. Ενδεικτικές τιμές των ποσοτήτων  $c_4(n)$  και  $c_4(\nu + 1)$ :  $m = 25$**

$n$	$m$	$\nu + 1$	$c_4(n)$	$c_4(\nu + 1)$
2	25	26	0.797884561	0.990052469
3	25	51	0.886226925	0.995012811
4	25	76	0.921317732	0.996672314
5	25	101	0.939985603	0.997503164
6	25	126	0.951532862	0.998002020
7	25	151	0.959368789	0.998334734
8	25	176	0.965030456	0.998572456
9	25	201	0.969310700	0.998750786
10	25	226	0.972659274	0.998889510
11	25	251	0.975350077	0.999000502
12	25	276	0.977559352	0.999091324
13	25	301	0.979405604	0.999167015
14	25	326	0.980971437	0.999231066
15	25	351	0.982316177	0.999285970
16	25	376	0.983483532	0.999333556
17	25	401	0.984506405	0.999375196
18	25	426	0.985410044	0.999411938
19	25	451	0.986214137	0.999444599
20	25	476	0.986934268	0.999473823
21	25	501	0.987582929	0.999500125
22	25	526	0.988170253	0.999523923
23	25	551	0.988704545	0.999545558
24	25	576	0.989192675	0.999565312
25	25	601	0.989640376	0.999583420
26	25	626	0.990052469	0.999600080
27	25	651	0.990433039	0.999615459
28	25	676	0.990785570	0.999629698
29	25	701	0.991113048	0.999642921
30	25	726	0.991418053	0.999655232

**Πίνακας 3.4. Ενδεικτικές τιμές των ποσοτήτων  $c_4(n)$  και  $c_4(v + 1)$ :  $m = 30$**

$n$	$m$	$v + 1$	$c_4(n)$	$c_4(v + 1)$
2	30	31	0.797884561	0.991702821
3	30	61	0.886226925	0.995842194
4	30	91	0.921317732	0.997226134
5	30	121	0.939985603	0.997918859
6	30	151	0.951532862	0.998334734
7	30	181	0.959368789	0.998612082
8	30	211	0.965030456	0.998810237
9	30	241	0.969310700	0.998958879
10	30	271	0.972659274	0.999074505
11	30	301	0.975350077	0.999167015
12	30	331	0.977559352	0.999242712
13	30	361	0.979405604	0.999305798
14	30	391	0.980971437	0.999359180
15	30	421	0.982316177	0.999404940
16	30	451	0.983483532	0.999444599
17	30	481	0.984506405	0.999479303
18	30	511	0.985410044	0.999509924
19	30	541	0.986214137	0.999537144
20	30	571	0.986934268	0.999561500
21	30	601	0.987582929	0.999583420
22	30	631	0.988170253	0.999603253
23	30	661	0.988704545	0.999621284
24	30	691	0.989192675	0.999637747
25	30	721	0.989640376	0.999652838
26	30	751	0.990052469	0.999666722
27	30	781	0.990433039	0.999679539
28	30	811	0.990785570	0.999691406
29	30	841	0.991113048	0.999702425
30	30	871	0.991418053	0.999712685

### 3.3 Σύγκριση εκτιμητών

Στους ακόλουθους πίνακες δίνεται η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_7$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών για  $m = 20, 25$  και  $30$ .

**Πίνακας 3.5. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_7$ :  $m = 20$**

$n$	$m$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_8)$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_9)$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_{10})$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_{11})$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_{12})$
2	20	1.000000009	5.031985489	0.864755333	0.870157738	0.886637510
3	20	1.008206807	3.987808050	0.909159380	0.912000198	0.920593999
4	20	1.025442474	3.286909560	0.931886920	0.933828258	0.939684729
5	20	1.047382792	2.838137218	0.945650606	0.947128145	0.951579275
6	20	1.071765781	2.532552939	0.954842691	0.956036224	0.959628780
7	20	1.097416066	2.312585572	0.961400992	0.962402440	0.965415141
8	20	1.123662384	2.147175486	0.966308596	0.967171364	0.969765839
9	20	1.150134680	2.018462351	0.970115936	0.970873834	0.973152271
10	20	1.176614930	1.915542340	0.973154186	0.973829984	0.975861137
15	20	1.305984644	1.607640599	0.982215903	0.982654392	0.983971424
20	20	1.428141683	1.454488261	0.986710344	0.987034919	0.988009500
30	20	1.653167641	1.302074943	0.991173304	0.991386919	0.992028131

**Πίνακας 3.5. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_7$ :  $m = 25$**

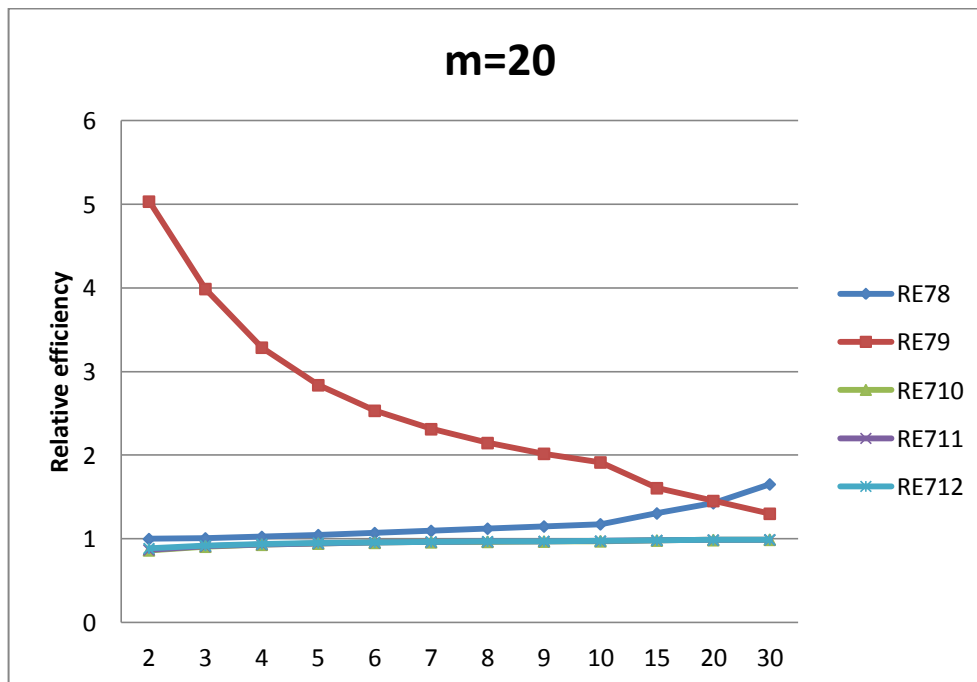
$n$	$m$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_8)$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_9)$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_{10})$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_{11})$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_{12})$
2	25	1.000000009	6.188660678	0.867039070	0.871373075	0.884549712
3	25	1.008206807	4.830547493	0.910328143	0.912603807	0.919476480
4	25	1.025442474	3.928510402	0.932678452	0.934232869	0.938916896
5	25	1.047382792	3.352496240	0.946250130	0.947432922	0.950993149
6	25	1.071765781	2.960747190	0.955325582	0.956280897	0.959154496
7	25	1.097416066	2.678953230	0.961805109	0.962606607	0.965016451
8	25	1.123662384	2.467146987	0.966656541	0.967347006	0.969422351
9	25	1.150134680	2.302383171	0.970421231	0.971027742	0.972850309
10	25	1.176614930	2.170667675	0.973425665	0.973966455	0.975591230
15	25	1.305984644	1.776771001	0.982392174	0.982743028	0.983796593
20	25	1.428141683	1.580922211	0.986840134	0.987099828	0.987879459
30	25	1.653167641	1.386065782	0.991259722	0.991430629	0.991943585

Πίνακας 3.5. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_7$ :  $m = 30$

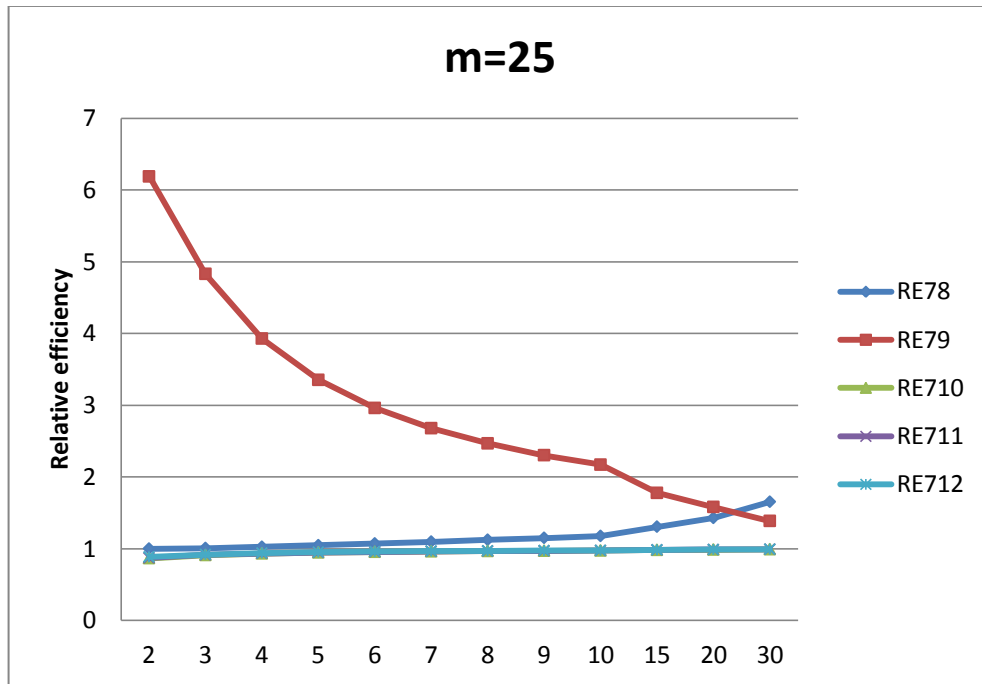
$n$	$m$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_8)$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_9)$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_{10})$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_{11})$	$RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_{12})$
2	30	1.000000009	7.345335866	0.868550518	0.872168788	0.883144943
3	30	1.008206807	5.673286937	0.911104352	0.913002395	0.918728257
4	30	1.025442474	4.570111243	0.933204386	0.934500475	0.938403175
5	30	1.047382792	3.866855262	0.946649165	0.947635247	0.950601721
6	30	1.071765781	3.388941440	0.955646880	0.956443246	0.958837660
7	30	1.097416066	3.045320887	0.962074691	0.962742795	0.964750823
8	30	1.123662384	2.787118488	0.966887761	0.967463287	0.969192608
9	30	1.150134680	2.586303991	0.970624193	0.971129725	0.972648428
10	30	1.176614930	2.425793011	0.973606926	0.974057669	0.975411568
15	30	1.305984644	1.945901403	0.982508421	0.982800834	0.983678768
20	30	1.428141683	1.707356161	0.986926545	0.987142976	0.987792649
30	30	1.653167641	1.470056620	0.991316954	0.991459385	0.991886840

Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνεται γραφικά η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_7$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

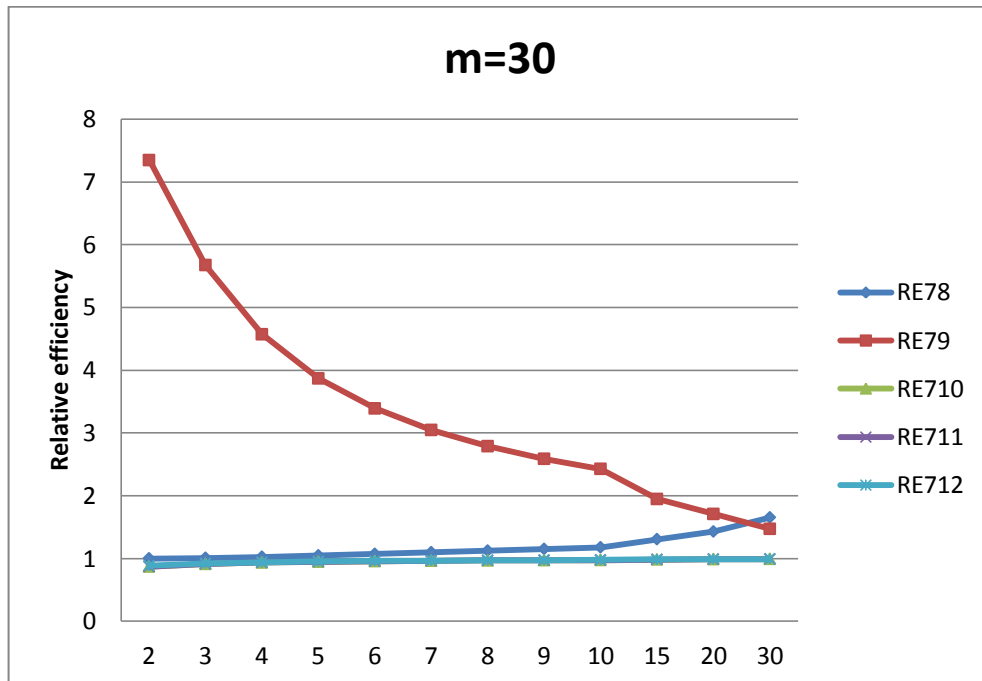
Διάγραμμα 3.1. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_7$ :  $m = 20$



**Διάγραμμα 3.2. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_7$ :  $m = 25$**



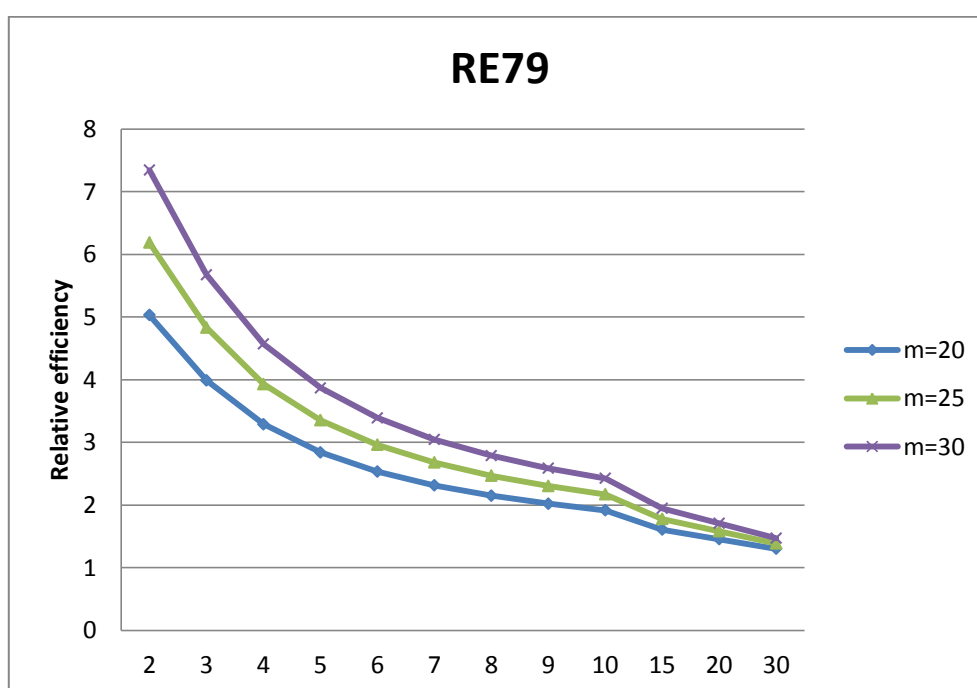
**Διάγραμμα 3.3. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_7$ :  $m = 30$**





Με βάση τους τρεις παραπάνω πίνακες και διαγράμματα φαίνεται ότι ο αμερόληπτος εκτιμητής της τυπικής απόκλισης  $\hat{\sigma}_7$  είναι λιγότερο αποτελεσματικός, συγκριτικά με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_{10}, \hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{12}$ , για όλες τις τιμές των  $m, n$ , και ειδικότερα για μικρές τιμές του  $n$  ( $n \leq 5$ ) που είναι ιδιαίτερα δημοφιλείς στους ερευνητές. Η σχετική αποτελεσματικότητα είναι σχεδόν ίδια, και αυτό φαίνεται από τα διαγράμματα αφού οι τρεις καμπύλες RE710, RE711 και RE712 πέφτουν η μια πάνω στην άλλη. Ωστόσο, καθώς αυξάνεται το μέγεθος των ανεξάρτητων δειγμάτων φαίνεται να έχουν την ίδια αποδοτικότητα οι τέσσερις αυτοί εκτιμητές. Αντίθετα, ο αμερόληπτος εκτιμητής της τυπικής απόκλισης  $\hat{\sigma}_7$  είναι πολύ πιο αποδοτικός, συγκριτικά με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$ , για κάθε  $m, n$ . Η σχετική αποτελεσματικότητά του αυξάνεται με την αύξηση του  $m$ , όπως ενδεικτικά φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

**Διάγραμμα 3.4. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας  $RE(\hat{\sigma}_7/\hat{\sigma}_9)$  για  $m = 20, 25, 30$**



Τέλος, ο αμερόληπτος εκτιμητής  $\hat{\sigma}_7$  φαίνεται ότι είναι αποδοτικότερος σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$ , για κάθε συνδυασμό  $m, n$  και, ειδικότερα, για  $n = 30$  και  $m = 20, 25, 30$ , ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_7$  είναι 65% πιο αποδοτικός. Ωστόσο, για  $n \leq 7$  η αποδοτικότητα των δύο εκτιμητών είναι σχεδόν ίδια. Επίσης φαίνεται ότι η σχετική αποτελεσματικότητα για τους δύο παραπάνω εκτιμητές είναι ανεξάρτητη του  $m$ .

Στους ακόλουθους πίνακες δίνεται η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών για  $m = 20, 25$  και  $30$ .

**Πίνακας 3.6. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$ :  $m = 20$**

<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_9)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_{10})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_{11})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_{12})</math></b>
2	20	0.999999991	5.031985442	0.864755325	0.870157730	0.886637501
3	20	0.991859996	3.955347277	0.901758819	0.904576513	0.913100361
4	20	0.975188785	3.205357341	0.908765673	0.910658845	0.916370009
5	20	0.954760769	2.709742074	0.902870100	0.904280796	0.908530561
6	20	0.933039679	2.362972381	0.890906118	0.892019731	0.895371729
7	20	0.911231420	2.107300635	0.876058791	0.876971342	0.879716610
8	20	0.889947029	1.910872445	0.859963464	0.860731282	0.863040228
9	20	0.869463392	1.754979122	0.843480292	0.844139257	0.846120274
10	20	0.849895726	1.628011247	0.827079583	0.827653941	0.829380209
15	20	0.765705787	1.230979711	0.752088402	0.752424155	0.753432614
20	20	0.700210638	1.018448154	0.690905080	0.691132351	0.691814763
30	20	0.604899331	0.787624262	0.599560069	0.599689284	0.600077153

**Πίνακας 3.6. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$ :  $m = 25$**

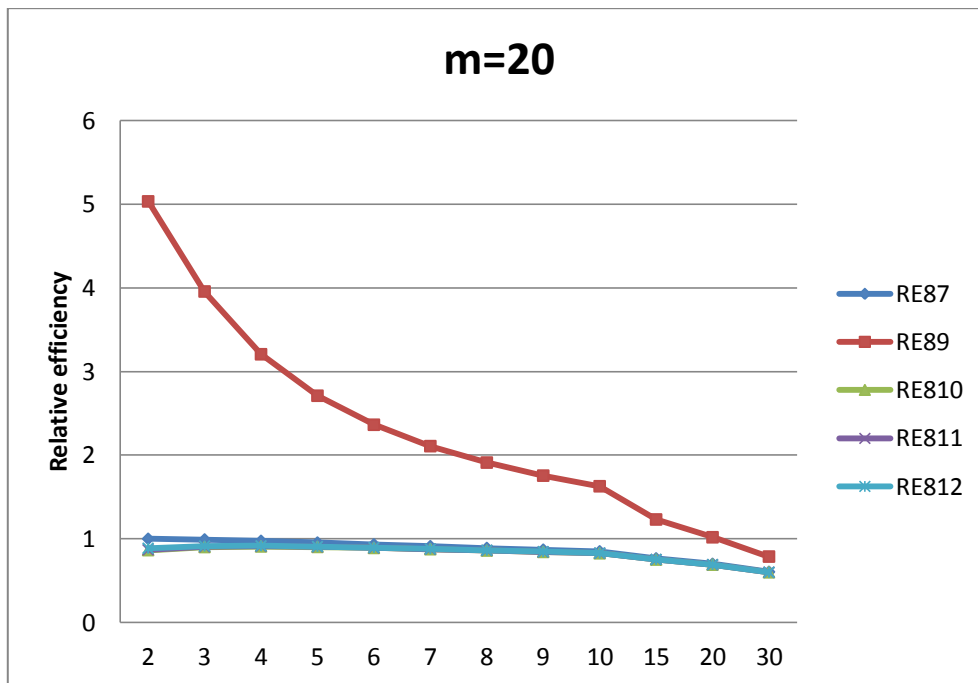
<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_9)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_{10})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_{11})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_{12})</math></b>
2	25	0.999999991	6.188660620	0.867039062	0.871373067	0.884549704
3	25	0.991859996	4.791226819	0.902918069	0.905175209	0.911991938
4	25	0.975188785	3.831039286	0.909537566	0.911053416	0.915621227
5	25	0.954760769	3.200831889	0.903442502	0.904571786	0.907970951
6	25	0.933039679	2.762494606	0.891356674	0.892248020	0.894929202
7	25	0.911231420	2.441146356	0.876427035	0.877157385	0.879353311
8	25	0.889947029	2.195630131	0.860273117	0.860887594	0.862734541
9	25	0.869463392	2.001837882	0.843745735	0.844273074	0.845857730
10	25	0.849895726	1.844841179	0.827310312	0.827769927	0.829150817
15	25	0.765705787	1.360483838	0.752223373	0.752492024	0.753298745
20	25	0.700210638	1.106978551	0.690995960	0.691177801	0.691723707
30	25	0.604899331	0.838430264	0.599612343	0.599715724	0.600026011

Πίνακας 3.6. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$ :  $m = 30$

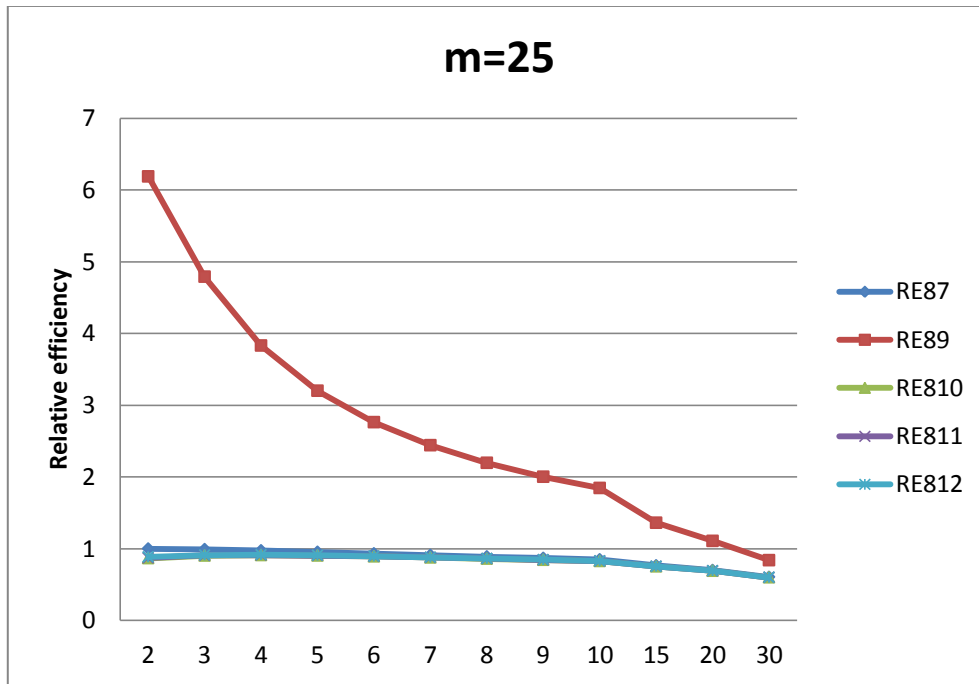
n	m	$RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_7)$	$RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_9)$	$RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_{10})$	$RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_{11})$	$RE(\hat{\sigma}_8/\hat{\sigma}_{12})$
2	30	0.999999991	7.345335798	0.868550510	0.872168780	0.883144935
3	30	0.991859996	5.627106361	0.903687959	0.905570552	0.911249806
4	30	0.975188785	4.456721231	0.910050451	0.911314383	0.915120252
5	30	0.954760769	3.691921705	0.903823485	0.904764957	0.907597230
6	30	0.933039679	3.162016832	0.891656457	0.892399499	0.894633582
7	30	0.911231420	2.774992077	0.876672687	0.877281485	0.879111262
8	30	0.889947029	2.480387818	0.860478891	0.860991078	0.862530082
9	30	0.869463392	2.248696642	0.843922203	0.844361745	0.845682202
10	30	0.849895726	2.061671111	0.827464365	0.827847450	0.828998122
15	30	0.765705787	1.489987966	0.752312384	0.752536286	0.753208526
20	30	0.700210638	1.195508948	0.691056466	0.691208013	0.691662921
30	30	0.604899331	0.889236266	0.599646963	0.599733119	0.599991686

Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνεται γραφικά η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

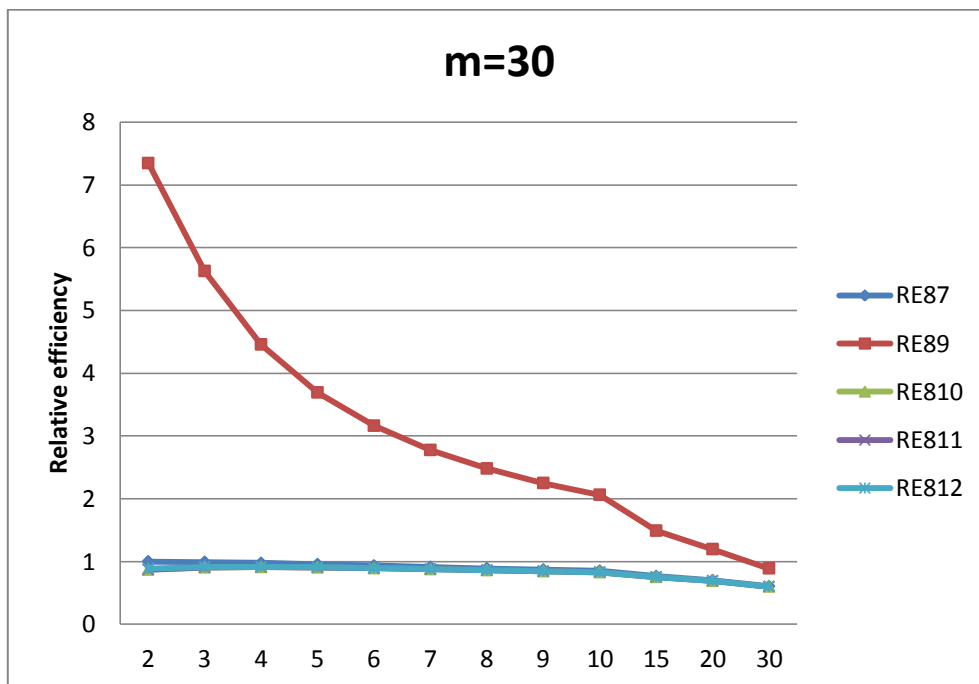
Διάγραμμα 3.5. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$ :  $m = 20$



Διάγραμμα 3.6. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$ :  $m = 25$



Διάγραμμα 3.7. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$ :  $m = 30$



Στη συνέχεια, από τους παραπάνω πίνακες και διαγράμματα, φαίνεται ότι ο αμερόληπτος εκτιμητής  $\hat{\sigma}_8$  είναι λιγότερο αποδοτικός, για κάθε συνδυασμό  $m, n$ , συγκριτικά με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_{10}, \hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{12}$ , αγγίζοντας το 60%, για  $n = 30$ . Επίσης, ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_8$  είναι λιγότερο αποδοτικός, σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_7$  για κάθε  $m, n$ , παρόλα αυτά, για  $n \leq 7$  η αποδοτικότητα των δύο εκτιμητών είναι σχεδόν ταυτόσημη. Τέλος, ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_8$  είναι πολύ πιο αποδοτικός, συγκριτικά με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$ , ιδιαίτερα, για μικρές τιμές του  $n$ . Η εικόνα αυτή αλλάζει, μόνο στην περίπτωση, στην οποία τα ανεξάρτητα δείγματα έχουν μέγεθος  $n = 30$ , όπου ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_8$  γίνεται αποδοτικότερος από τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$ .

Στους παρακάτω πίνακες δίνεται η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών για  $m = 20, 25$  και  $30$ .

**Πίνακας 3.7. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$ :  $m = 20$**

<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_8)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_{10})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_{11})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_{12})</math></b>
2	20	0.198728713	0.198728715	0.171851714	0.172925327	0.176200331
3	20	0.250764327	0.252822301	0.227984740	0.228697115	0.230852134
4	20	0.304237151	0.311977697	0.283514621	0.284105249	0.285887005
5	20	0.352343782	0.369038814	0.333194111	0.333714712	0.335283040
6	20	0.394858478	0.423195806	0.377027732	0.377499009	0.378917560
7	20	0.432416431	0.474540739	0.415725586	0.416158628	0.417461370
8	20	0.465728119	0.523321168	0.450037085	0.450438900	0.451647220
9	20	0.495426630	0.569807348	0.480621269	0.480996752	0.482125550
10	20	0.522045365	0.614246371	0.508030632	0.508383430	0.509443784
15	20	0.622029576	0.812361074	0.610967342	0.611240095	0.612059328
20	20	0.687527034	0.981886016	0.678390036	0.678613191	0.679283242
30	20	0.768004949	1.269640930	0.761226003	0.761390060	0.761882514

**Πίνακας 3.7. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$ :  $m = 25$**

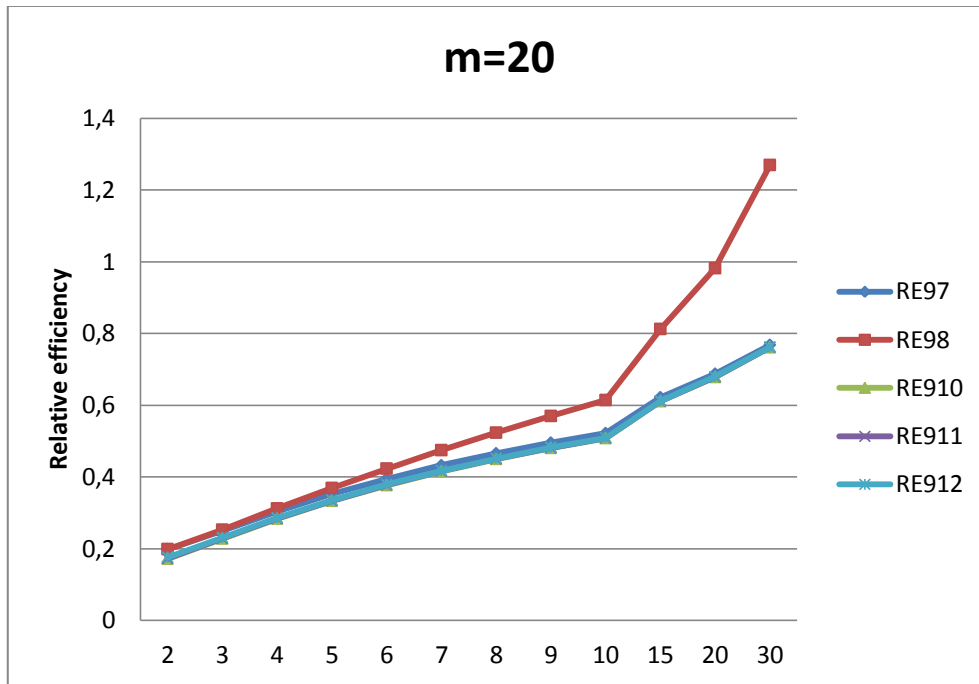
<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_8)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_{10})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_{11})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_{12})</math></b>
2	25	0.161585851	0.161585852	0.140101246	0.140801560	0.142930718
3	25	0.207015872	0.208714811	0.188452374	0.188923473	0.190346225
4	25	0.254549409	0.261025775	0.237412748	0.237808424	0.239000741
5	25	0.298285197	0.312418782	0.282252406	0.282605215	0.283667178
6	25	0.337752579	0.361991657	0.322663679	0.322986339	0.323956905
7	25	0.373280126	0.409643608	0.359022733	0.359321916	0.360221463
8	25	0.405326478	0.455450117	0.391811491	0.392091355	0.392932548
9	25	0.434332570	0.499540951	0.421485547	0.421748975	0.422540575
10	25	0.460687747	0.542052081	0.448445276	0.448694411	0.449442926
15	25	0.562818731	0.735032620	0.552908716	0.553106184	0.553699150
20	25	0.632542191	0.903359870	0.624218021	0.624382289	0.624875438
30	25	0.721466480	1.192705038	0.715160662	0.715283965	0.715654046

**Πίνακας 3.7. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$ :  $m = 30$**

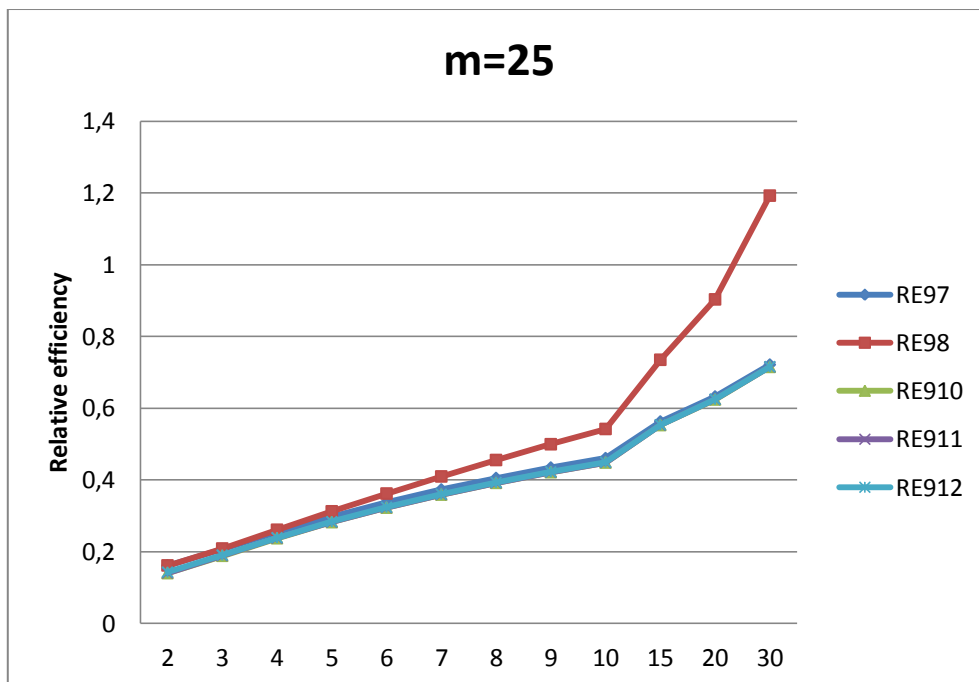
<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_8)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_{10})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_{11})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_9/\hat{\sigma}_{12})</math></b>
2	30	0.136140813	0.136140815	0.118245174	0.118737768	0.120232071
3	30	0.176264661	0.177711231	0.160595500	0.160930058	0.161939325
4	30	0.218813054	0.224380200	0.204197302	0.204480903	0.205334865
5	30	0.258608076	0.270861649	0.244811119	0.245066128	0.245833282
6	30	0.295077391	0.316253851	0.281989788	0.282224778	0.282931316
7	30	0.328372621	0.360361389	0.315918987	0.316138375	0.316797756
8	30	0.358793501	0.403162761	0.346913045	0.347119540	0.347740009
9	30	0.386652150	0.444702047	0.375293932	0.375489396	0.376076606
10	30	0.412236327	0.485043417	0.401356143	0.401541955	0.402100082
15	30	0.513900652	0.671146360	0.504911718	0.505061989	0.505513161
20	30	0.585700876	0.836463836	0.578043742	0.578170506	0.578551020
30	30	0.680245908	1.124560522	0.674339301	0.674436189	0.674726964

Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνεται γραφικά η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

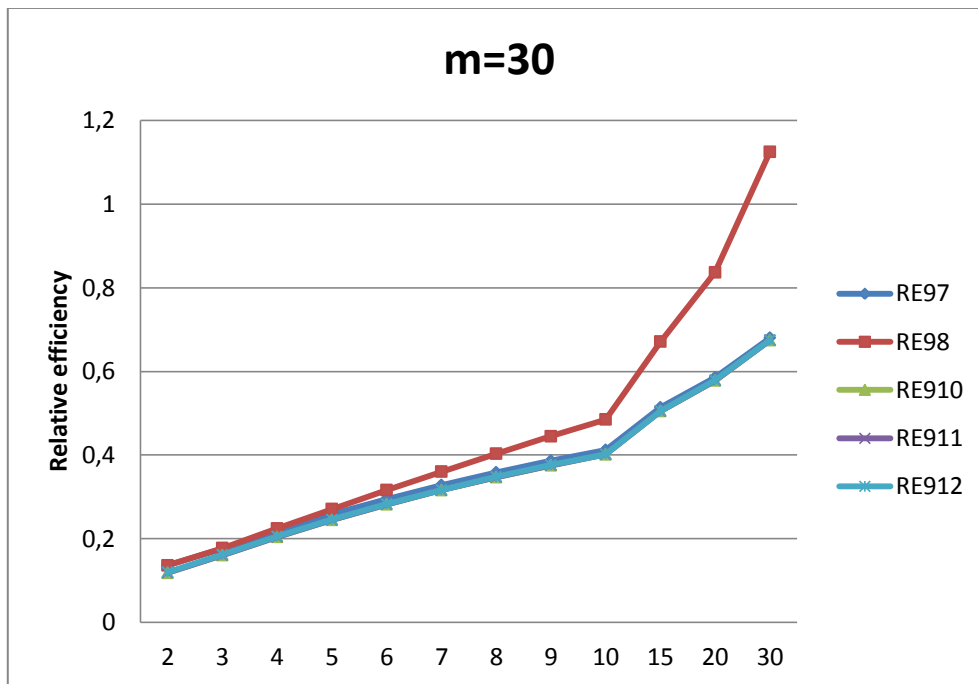
**Διάγραμμα 3.8. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$ :  $m = 20$**



**Διάγραμμα 3.9. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$ :  $m = 25$**



**Διάγραμμα 3.10. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$ :  $m = 30$**



Από τους παραπάνω πίνακες και διαγράμματα, βλέπουμε ότι ο μη αμερόληπτος εκτιμητής  $\hat{\sigma}_9$  είναι λιγότερο αποδοτικός, συγκριτικά με τους υπόλοιπους πέντε εκτιμητές, σχεδόν για κάθε συνδυασμό  $m, n$ . Η μόνη εξαίρεση είναι για  $n = 30$ , όπου ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_9$  είναι ελαφρώς πιο αποδοτικός, σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$ .

Στους παρακάτω πίνακες δίνεται η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών για  $m = 20, 25$  και  $30$ .



**Πίνακας 3.8. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$ :  $m = 20$**

<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_8)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_9)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_{11})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_{12})</math></b>
2	20	1.156396453	1.156396464	5.818970173	1.006247322	1.025304472
3	20	1.099917157	1.108943965	4.386258493	1.003124665	1.012577134
4	20	1.073091572	1.100393676	3.527154948	1.002083234	1.008367763
5	20	1.057473018	1.107579042	3.001253529	1.001562458	1.006269408
6	20	1.047292930	1.122452725	2.652324789	1.001249978	1.005012437
7	20	1.040148708	1.141475903	2.405432896	1.001041654	1.004175312
8	20	1.034866092	1.162840099	2.222039103	1.000892849	1.003577784
9	20	1.030804632	1.185564155	2.080640340	1.000781245	1.003129868
10	20	1.027586393	1.209073492	1.968385243	1.000694441	1.002781626
15	20	1.018106097	1.329630929	1.636748696	1.000446428	1.001787306
20	20	1.013468650	1.447376824	1.474078254	1.000328947	1.001316655
30	20	1.008905300	1.667889595	1.313670311	1.000215517	1.000862439

**Πίνακας 3.8. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$ :  $m = 25$**

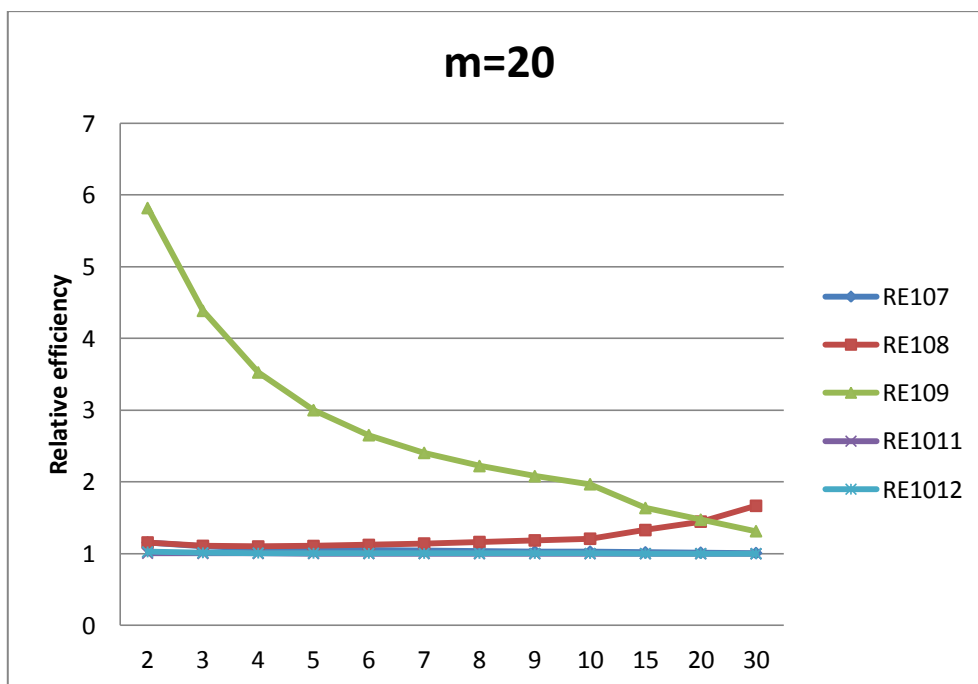
<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_8)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_9)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_{11})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_{12})</math></b>
2	25	1,153350564	1,153350574	7,137695280	1,004998628	1,020195909
3	25	1,098504981	1,107520200	5,306380483	1,002499828	1,010049493
4	25	1,072180877	1,099459810	4,212073726	1,001666616	1,006688740
5	25	1,056803025	1,106877303	3,542928169	1,001249978	1,005012437
6	25	1,046763553	1,121885357	3,099202248	1,000999989	1,004007968
7	25	1,039711674	1,140996295	2,785338948	1,000833327	1,003338870
8	25	1,034493595	1,162421539	2,552247756	1,000714282	1,002861213
9	25	1,030480340	1,185191176	2,372560593	1,000624997	1,002503117
10	25	1,027299809	1,208736294	2,229926489	1,000555553	1,002224685
15	25	1,017923419	1,329392354	1,808616812	1,000357143	1,001429591
20	25	1,013335358	1,447186464	1,602004375	1,000263158	1,001053185
30	25	1,008817344	1,667744189	1,398287201	1,000172414	1,000689893

Πίνακας 3.8. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$ :  $m = 30$

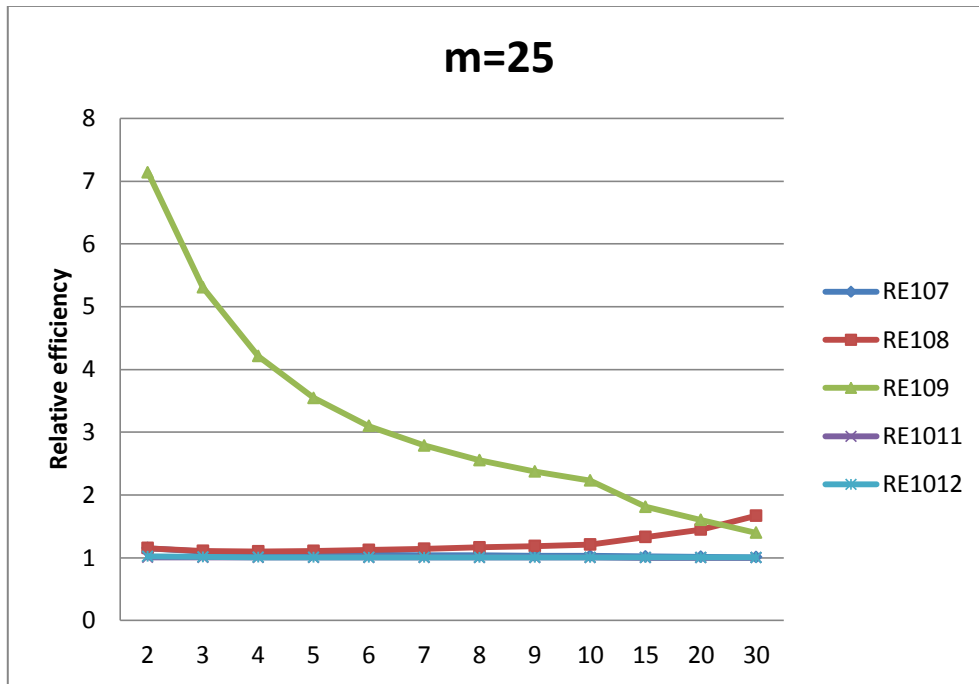
n	m	$RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_7)$	$RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_8)$	$RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_9)$	$RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_{11})$	$RE(\hat{\sigma}_{10}/\hat{\sigma}_{12})$
2	30	1.151343508	1.151343518	8.457004762	1.004165872	1.016803196
3	30	1.097569118	1.106576656	6.226824541	1.002083234	1.008367763
4	30	1.071576619	1.098840178	4.897224352	1.001388859	1.005570901
5	30	1.056357557	1.106410727	4.084781779	1.001041654	1.004175312
6	30	1.046411621	1.121508168	3.546227705	1.000833327	1.003338870
7	30	1.039420337	1.140676577	3.165368463	1.000694441	1.002781626
8	30	1.034246207	1.162143559	2.882566726	1.000595236	1.002383779
9	30	1.030264862	1.184943347	2.664578124	1.000520832	1.002085498
10	30	1.027108552	1.208511257	2.491552746	1.000462962	1.001853563
15	30	1.017802981	1.329235064	1.980544250	1.000297619	1.001191183
20	30	1.013246634	1.447059754	1.729972884	1.000219298	1.000877577
30	30	1.008759101	1.667647904	1.482932995	1.000143678	1.000574878

Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνεται γραφικά η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

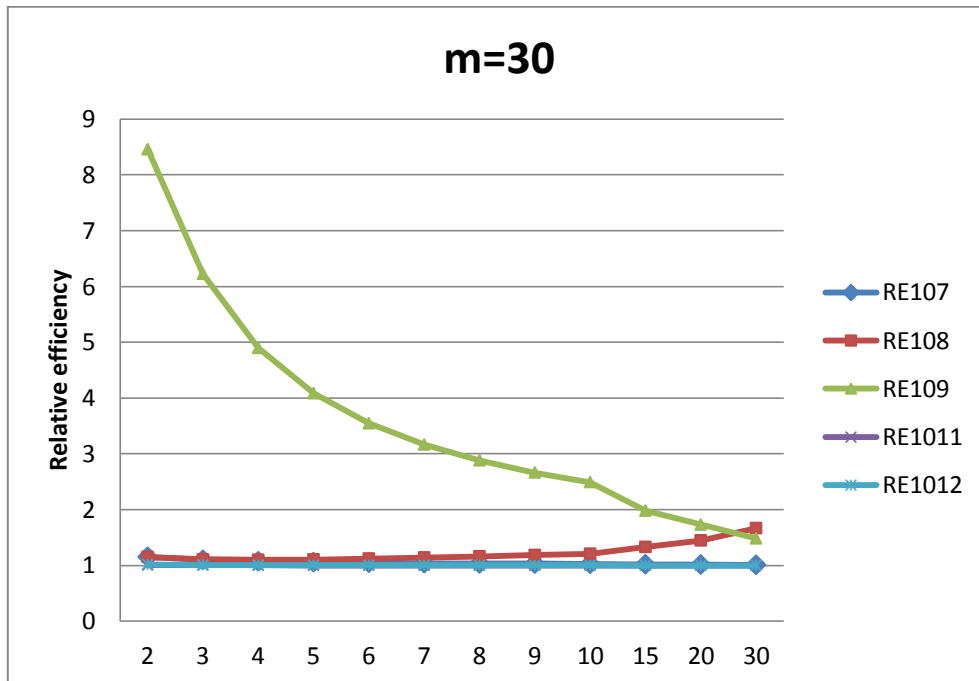
Διάγραμμα 3.11. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$ :  $m = 20$



Διάγραμμα 3.12. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$ :  $m = 25$



Διάγραμμα 3.13. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$ :  $m = 30$



Οι παραπάνω πίνακες και τα αντίστοιχα διαγράμματα, δείχνουν ότι ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_{10}$  είναι απόδοτικότερος, συγκριτικά και με τους πέντε άλλους εκτιμητές. Συγκεκριμένα, φαίνεται να είναι σαφώς πιο αποδοτικός, σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$ . Επιπλέον, υπερτερεί με ελάχιστη διαφορά στην αποδοτικότητα για κάθε  $m, n$ , συγκριτικά με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_{11}$  και  $\hat{\sigma}_{12}$ . Επίσης πρέπει να αναφερθεί ότι η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$  σε σχέση με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_{11}$  και  $\hat{\sigma}_{12}$  δεν εξαρτάται από το  $m$ . Το ίδιο, περίπου, συμβαίνει και με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_7$ , με εξαίρεση τις τιμές  $n = 2, 3$ . Τέλος, αποδοτικότερος είναι και σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$ , αγγίζοντας το 67%, για  $n = 30$ .

Στους ακόλουθους πίνακες δίνεται η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{11}$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών για  $m = 20, 25$  και  $30$ .

**Πίνακας 3.9. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{11}$ :  $m = 20$**

<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_8)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_9)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_{10})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_{12})</math></b>
2	20	1.149216925	1.149216936	5.782842890	0.993791464	1.018938832
3	20	1.096490990	1.105489680	4.372595598	0.996885069	1.009423026
4	20	1.070860719	1.098106065	3.519822335	0.997921097	1.006271464
5	20	1.055823338	1.105851196	2.996571512	0.998439980	1.004699607
6	20	1.045985471	1.121051435	2.649013579	0.998751582	1.003757761
7	20	1.039066360	1.140288117	2.402929873	0.998959429	1.003130396
8	20	1.033942936	1.161802784	2.220056926	0.999107947	1.002682539
9	20	1.029999950	1.184638662	2.079016119	0.999219365	1.002346790
10	20	1.026873290	1.208234445	1.967019264	0.999306041	1.002085736
15	20	1.017651789	1.329037610	1.636018332	0.999553772	1.001340280
20	20	1.013135382	1.446900870	1.473593520	0.999671161	1.000987383
30	20	1.008687911	1.667530214	1.313387254	0.999784529	1.000646783

**Πίνακας 3.9. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{11}$ :  $m = 25$**

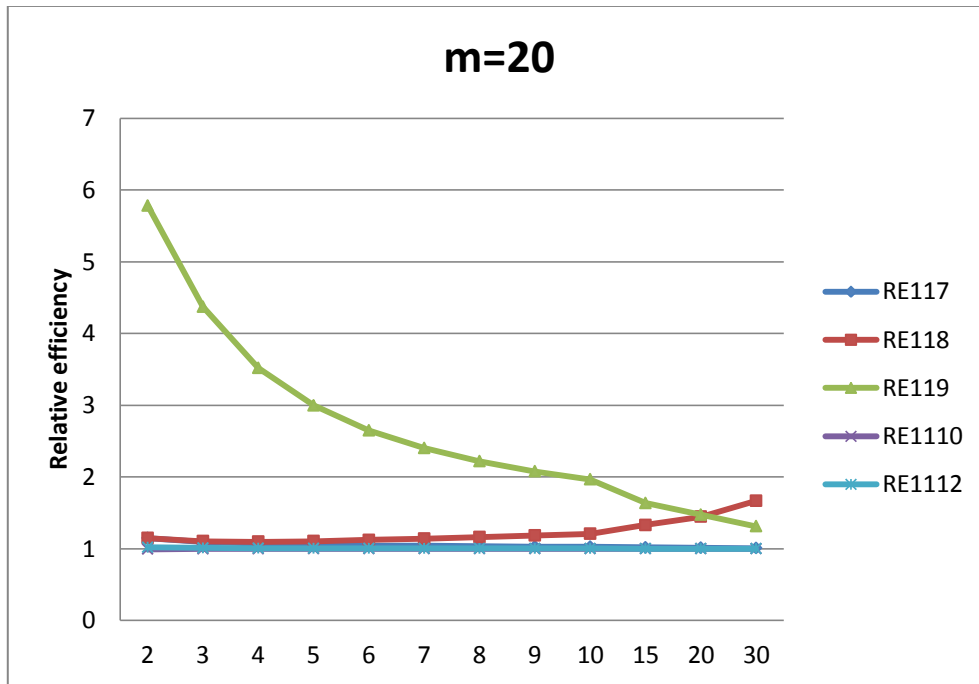
<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_8)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_9)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_{10})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_{12})</math></b>
2	25	1.147614068	1.147614079	7.102194058	0.995026235	1.015121694
3	25	1.095765755	1.104758493	5.293148522	0.997506406	1.007530840
4	25	1.070396936	1.097630482	4.205065497	0.998336157	1.005013768
5	25	1.055483694	1.105495458	3.538505114	0.998751582	1.003757761
6	25	1.045717847	1.120764605	3.096106176	0.999001010	1.003004974
7	25	1.038845976	1.140046264	2.783019783	0.999167367	1.002503457
8	25	1.033755203	1.161591835	2.550426033	0.999286228	1.002145399
9	25	1.029836695	1.184450897	2.371078675	0.999375393	1.001876947
10	25	1.026729406	1.208065149	2.228688334	0.999444755	1.001668205
15	25	1.017560005	1.328917741	1.807971109	0.999642985	1.001072066
20	25	1.013068761	1.446805726	1.601582906	0.999736911	1.000789820
30	25	1.008643440	1.667456697	1.398046158	0.999827616	1.000517390

**Πίνακας 3.9. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{11}$ :  $m = 30$**

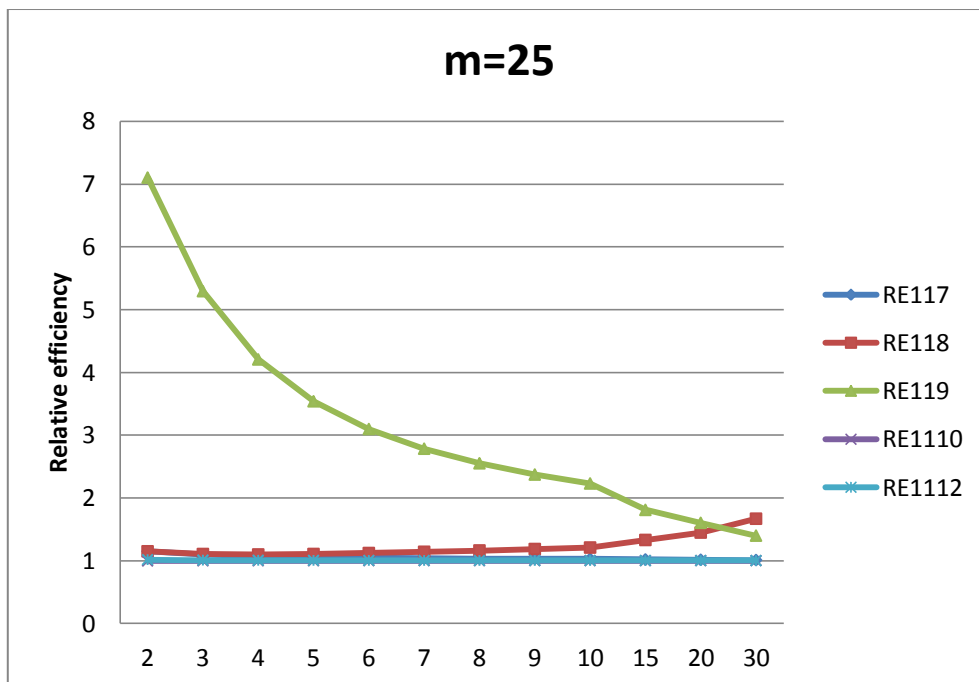
<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_8)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_9)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_{10})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{11}/\hat{\sigma}_{12})</math></b>
2	30	1.146567056	1.146567067	8.421920121	0.995851410	1.012584897
3	30	1.095287378	1.104276191	6.213879577	0.997921097	1.006271464
4	30	1.070090414	1.097316161	4.890432230	0.998613067	1.004176241
5	30	1.055258343	1.105259429	4.080531276	0.998959429	1.003130396
6	30	1.045540344	1.120574363	3.543274998	0.999167367	1.002503457
7	30	1.038699022	1.139884994	3.163171827	0.999306041	1.002085736
8	30	1.033630954	1.161452221	2.880851940	0.999405118	1.001787480
9	30	1.029728547	1.184326512	2.663191050	0.999479440	1.001563852
10	30	1.026633260	1.207952021	2.490399786	0.999537253	1.001389958
15	30	1.017500154	1.328839577	1.979954978	0.999702470	1.000893299
20	30	1.013024480	1.446742486	1.729593588	0.999780750	1.000658135
30	30	1.008614185	1.667408333	1.482719961	0.999856342	1.000431138

Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνεται γραφικά η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{11}$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

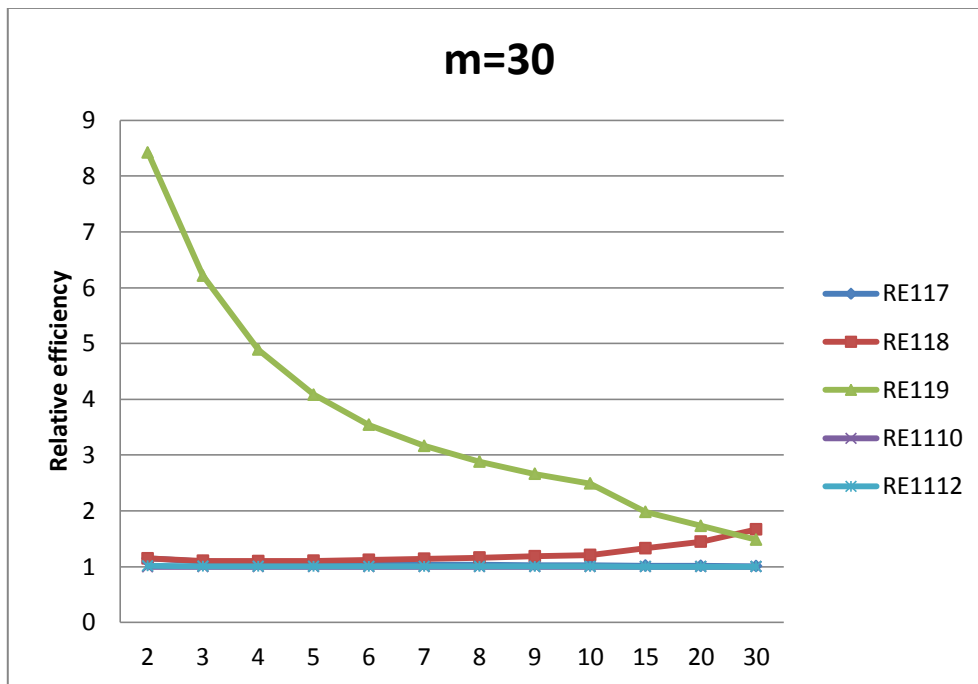
Διάγραμμα 3.14. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{11}$ :  $m = 20$



Διάγραμμα 3.15. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{11}$ :  $m = 25$



**Διάγραμμα 3.16. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{11}$ :  $m = 30$**



Οι παραπάνω πίνακες και διαγράμματα, δείχνουν ότι εκτιμητής  $\hat{\sigma}_{11}$  είναι αποδοτικότερος, συγκριτικά και με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_7, \hat{\sigma}_8, \hat{\sigma}_9, \hat{\sigma}_{12}$ . Συγκεκριμένα, φαίνεται να είναι σαφώς πιο αποδοτικός, σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$ . Επιπλέον, είναι ελαφρώς πιο αποδοτικός, με σχεδόν ίση αποδοτικότητα για κάθε  $m, n$ , συγκριτικά με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{12}$ . Επίσης φαίνεται ότι για τους δύο αυτούς εκτιμητές η σχετική αποτελεσματικότητα δεν εξαρτάται από το  $m$ . Ανάλογα, περίπου, κινείται κι ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_7$ , με εξαίρεση τις τιμές  $n = 2, 3$ . Αποδοτικότερος φαίνεται πως είναι και σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$ , αγγίζοντας το 67%, για  $n = 30$ . Τέλος, μειονεκτεί, με μικρή διαφορά στην αποδοτικότητα, για κάθε  $m, n$ , σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$ .

Στους ακόλουθους πίνακες δίνεται η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{12}$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών για  $m = 20, 25$  και  $30$ .

**Πίνακας 3.10. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{12}$ :  $m = 20$**

<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_8)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_9)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_{10})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_{11})</math></b>
2	20	1.127856637	1.127856648	5.675358231	0.975320042	0.981413180
3	20	1.086255180	1.095169866	4.331777149	0.987579085	0.990664939
4	20	1.064186710	1.091262252	3.497885471	0.991701675	0.993767622
5	20	1.050884594	1.100678440	2.982554677	0.993769653	0.995322376
6	20	1.042069622	1.116854562	2.639096484	0.995012562	0.996256306
7	20	1.035823821	1.136729703	2.395431224	0.995842049	0.996879372
8	20	1.031176764	1.158694541	2.214117469	0.996434971	0.997324637
9	20	1.027588416	1.181865073	2.074148529	0.996879898	0.997658705
10	20	1.024735961	1.205719631	1.962925120	0.997226090	0.997918605
15	20	1.016289676	1.327258711	1.633828544	0.998215882	0.998661514
20	20	1.012136016	1.445473634	1.472139954	0.998685077	0.999013591
30	20	1.008035930	1.666452381	1.312538326	0.999138304	0.999353635

**Πίνακας 3.10. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{12}$ :  $m = 25$**

<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_8)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_9)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_{10})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_{11})</math></b>
2	25	1.130518710	1.130518721	6.996396689	0.980203891	0.985103566
3	25	1.087575399	1.096500921	5.253584619	0.990050494	0.992525450
4	25	1.065056987	1.092154671	4.184087451	0.993355701	0.995011244
5	25	1.051532286	1.101356821	3.525258035	0.995012562	0.996256306
6	25	1.042584906	1.117406827	3.086830331	0.996008032	0.997004029
7	25	1.036251765	1.137199335	2.776070011	0.996672241	0.997502795
8	25	1.031542133	1.159105092	2.544966065	0.997146950	0.997859194
9	25	1.027907367	1.182231910	2.366636624	0.997503133	0.998126569
10	25	1.025019464	1.206053205	2.224976617	0.997780253	0.998334573
15	25	1.016470282	1.327494579	1.806034921	0.998572450	0.998929083
20	25	1.012269251	1.445663912	1.600318942	0.998947923	0.999210804
30	25	1.008121848	1.666594418	1.397323198	0.999310583	0.999482878

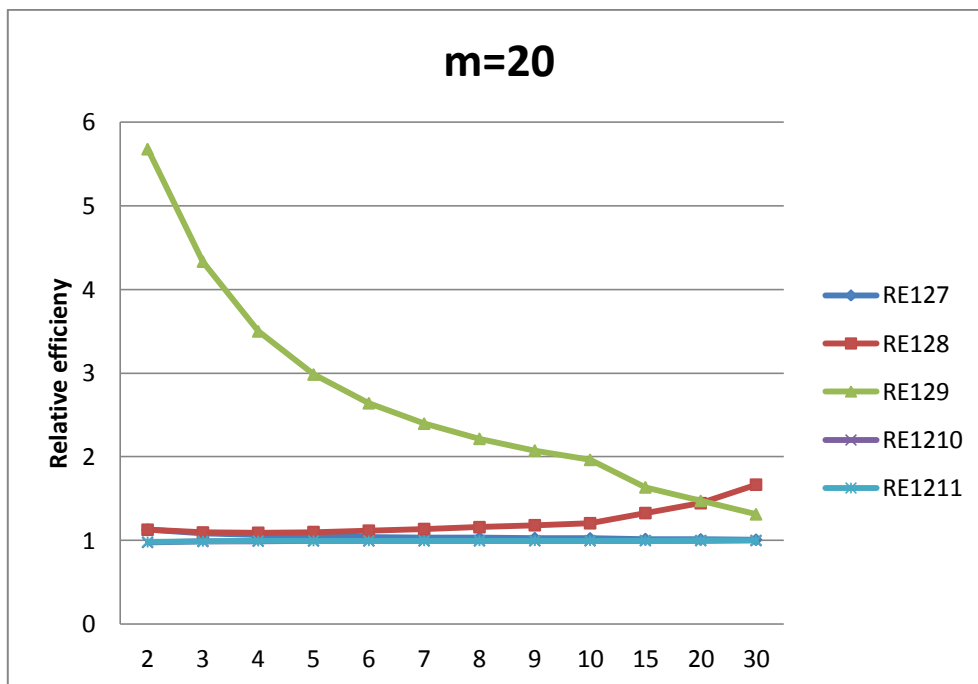


**Πίνακας 3.10. Σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{12}$ :  $m = 30$**

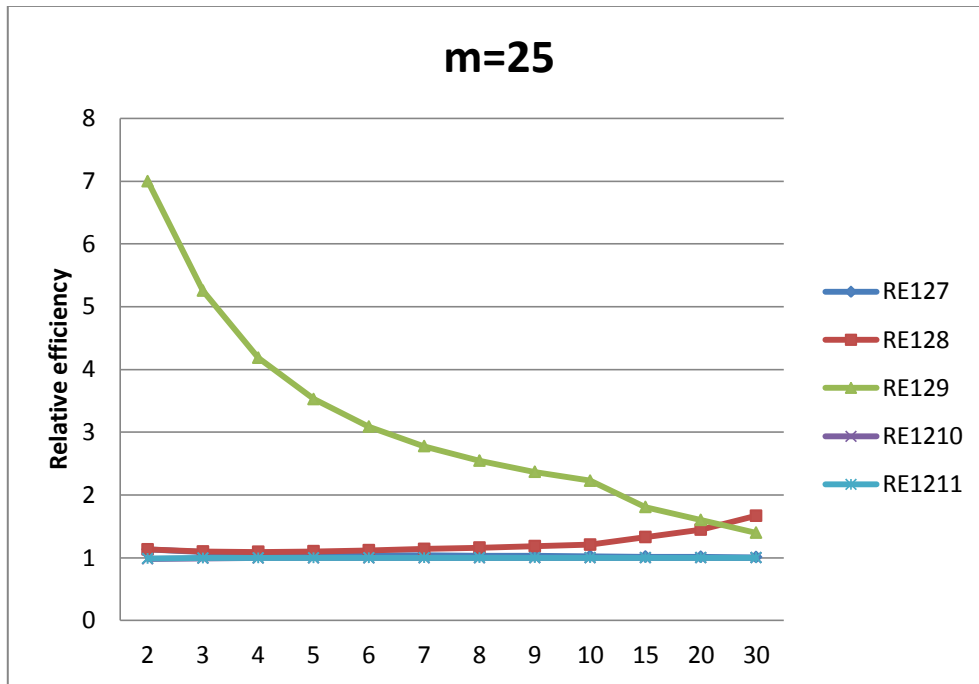
<b>n</b>	<b>m</b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_7)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_8)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_9)</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_{10})</math></b>	<b><math>RE(\hat{\sigma}_{12}/\hat{\sigma}_{11})</math></b>
2	30	1.132316964	1.132316974	8.317248404	0.983474485	0.987571514
3	30	1.088461133	1.097393924	6.175152330	0.991701675	0.993767622
4	30	1.065640044	1.092752562	4.870093545	0.994459962	0.995841127
5	30	1.051965275	1.101810326	4.067797457	0.995842049	0.996879372
6	30	1.042929415	1.117776059	3.534426714	0.996672241	0.997502795
7	30	1.036537079	1.137512443	3.156588017	0.997226090	0.997918605
8	30	1.031786656	1.159379853	2.875711664	0.997621890	0.998215710
9	30	1.028120718	1.182477292	2.659032716	0.997918842	0.998438590
10	30	1.025208264	1.206275350	2.486943041	0.998149867	0.998611972
15	30	1.016592034	1.327653586	1.978187866	0.998810234	0.999107499
20	30	1.012358212	1.445790961	1.728456031	0.999123192	0.999342298
30	30	1.008179521	1.666689761	1.482080980	0.999425453	0.999569048

Στα ακόλουθα διαγράμματα δίνεται γραφικά η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{12}$  έναντι των υπόλοιπων εκτιμητών.

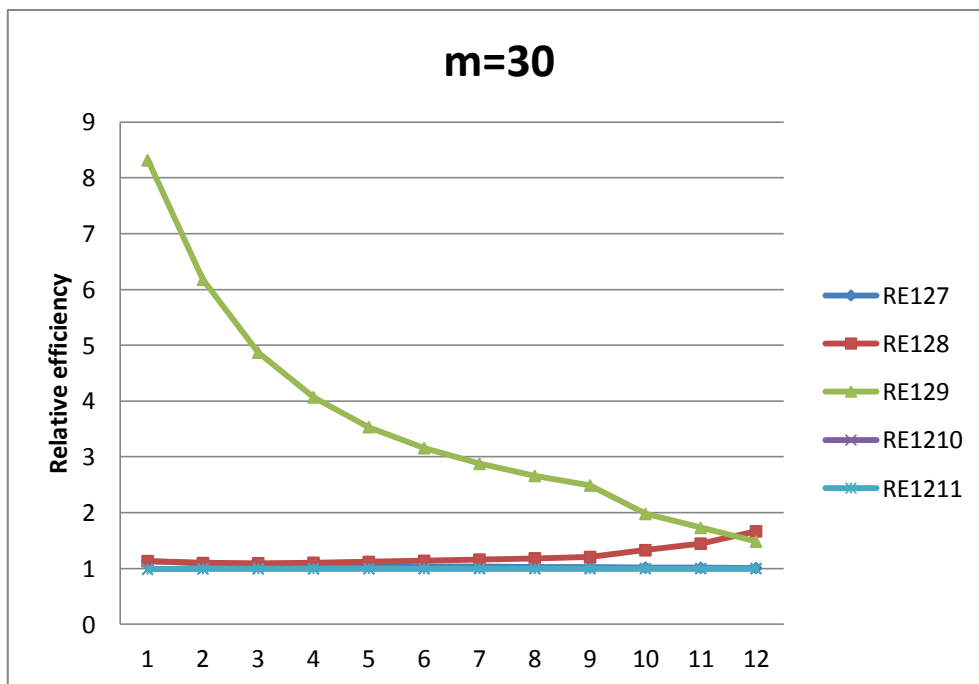
**Διάγραμμα 3.17. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{12}$ :  $m = 20$**



Διάγραμμα 3.18. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{12}$ :  $m = 25$



Διάγραμμα 3.19. Γραφική παράσταση της σχετικής αποτελεσματικότητας του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{12}$ :  $m = 30$



Οι παραπάνω πίνακες, καθώς και τα αντίστοιχα διαγράμματα, δείχνουν ότι εκτιμητής  $\hat{\sigma}_{12}$  είναι αποδοτικότερος, συγκριτικά και με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_7, \hat{\sigma}_8, \hat{\sigma}_9$ . Συγκεκριμένα, φαίνεται να είναι σαφώς πιο αποδοτικός, σε σχέση με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_9$ , ενώ, υπερτερεί, με μικρή διαφορά στην αποδοτικότητα για κάθε  $m, n$ , συγκριτικά με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_7$ , με εξαίρεση τις τιμές  $n = 2, 3$ . Επιπλέον, αποδοτικότερος φαίνεται, σε σχέση και με τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$ , αγγίζοντας το 67%, για  $n = 30$ . Τέλος, μειονεκτεί με μικρή διαφορά στην αποδοτικότητα, για κάθε  $m, n$ , σε σχέση με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_{10}$  και  $\hat{\sigma}_{11}$ .

### 3.3 Συμπεράσματα

Με βάση την παραπάνω ανάλυση, είναι εμφανές ότι ο μη αμερόληπτος εκτιμητής  $\hat{\sigma}_9$ , ο οποίος βασίζεται στις δειγματικές τυπικές αποκλίσεις, είναι σαφώς λιγότερο αποδοτικός, συγκριτικά και με τους πέντε υπό μελέτη εκτιμητές και, ιδιαίτερα, σε μικρότερα μεγέθη δειγμάτων. Η μοναδική εξαίρεση έγκειται στην περίπτωση, όπου τα ανεξάρτητα δείγματα έχουν μέγεθος  $n = 30$ , στην οποία ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_9$  είναι αποδοτικότερος, σε σχέση με τον αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\sigma}_8$ . Ο αμερόληπτος εκτιμητής  $\hat{\sigma}_8$ , επίσης, είναι λιγότερο αποδοτικός σε σύγκριση με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_7, \hat{\sigma}_{10}, \hat{\sigma}_{11}$  και  $\hat{\sigma}_{12}$ , ιδιαίτερα για μεγαλύτερες τιμές του  $n$ . Αυτό συνεπάγεται ότι τα δειγματικά εύρη, στα οποία βασίζεται ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_8$ , δεν συνιστώνται για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης. Ο αμερόληπτος εκτιμητής  $\hat{\sigma}_7$ , ο οποίος βασίζεται στις δειγματικές τυπικές αποκλίσεις, είναι λιγότερο αποδοτικός, συγκριτικά με τους εκτιμητές  $\hat{\sigma}_{10}, \hat{\sigma}_{11}$  και  $\hat{\sigma}_{12}$ , ιδιαίτερα, για μεγέθη δειγμάτων  $n = 2, 3$ . Αυτό, με τη σειρά του, δείχνει ότι οι εκτιμητές, που στηρίζονται στη σταθμισμένη ( pooled ) δειγματική απόκλιση, υπερτερούν έναντι των άλλων εκτιμητών. Τέλος, φαίνεται ότι ανάμεσα στους τρεις εκτιμητές ( $\hat{\sigma}_{10}, \hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{12}$ ), οι οποίοι βασίζονται στη σταθμισμένη δειγματική τυπική απόκλιση, υπερισχύει ελαφρώς ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_{10}$ . Το συμπέρασμα, αυτό, προκύπτει από το γεγονός ότι ο αμερόληπτος εκτιμητής  $\hat{\sigma}_{12}$  είναι λιγότερο αποδοτικός, συγκριτικά με τους άλλους δύο εκτιμητές, για κάθε συνδυασμό  $m, n$ . Φυσικά, καθώς αυξάνονται τα μεγέθη των δειγμάτων, η αποδοτικότητα των τριών εκτιμητών φαίνεται να εξισώνεται. Αυτό δείχνει και μία υπεροχή των μη αμερόληπτων εκτιμητών, σε σχέση με τους αμερόληπτους. Επιπλέον, ο εκτιμητής  $\hat{\sigma}_{11}$  είναι ελαφρώς πιο αποδοτικός από τον εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{12}$ , για κάθε συνδυασμό  $m, n$ . Συνοψίζοντας, φαίνεται ότι οι εκτιμητές που βασίζονται στην σταθμισμένη δειγματική απόκλιση υπερισχύουν, έναντι των

άλλων εκτιμητών, ανεξάρτητα από την τιμή του  $m$ , ειδικότερα σε σύγκριση με τους εκτιμητές που βασίζονται στα δειγματικά εύρη. Τέλος, ενώ η διαφορά στην αποδοτικότητα ανάμεσα στους εκτιμητές  $(\hat{\sigma}_{10}, \hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{12})$  είναι σχετικά μικρή για κάθε  $m$  και  $n$ , προτείνεται η χρήση του εκτιμητή  $\hat{\sigma}_{10}$ , καθώς εκτιμά αποτελεσματικότερα την τυπική απόκλιση. Τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται ότι βρίσκονται σε αντιστοιχία με την δημοσίευση Mahmoud et al (2010).

# Βιβλιογραφία

## Ελληνική

Αντζουλάκος, Δ. (2006). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Πανεπιστημιακές σημειώσεις για το ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική», Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστική Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Κούτρας, Μ. (2005). Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές, μέρος II, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, Αθήνα.

Κουτρουβέλης, Ι.Α. (2000). Πιθανότητες και Στατιστική II, Βασικά εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο της Ποιότητας, Τόμος Β', Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα.

## Ξένη

GRANT, E. L. and LEAVENWORTH, R. S. (1996). *Statistical Quality Control*, 7<sup>th</sup> edition. New York, NY: McGraw-Hill Book Companies.

DAVIES, O. L. and PEARSON, E. S. (1934). Methods of Estimating from Samples the Population Standard Deviation. *Journal of the Royal Statistical Society* 1, pp. 76-93.

JENSEN, W. A.; JONES-FARMER, L.A.; CHAMP, C. W.; and WOODALL, W. H. (2006). Effects of Parameter Estimation on Control Chart Properties: A Literature Review. *Journal of Quality Technology* 38(4), pp. 349-364.

MAHMOUD, M., HENDERSON, G., EPPRECHT, E., AND WOODALL, W. (2010). Estimating the Standard Deviation in Quality-Control Applications. *Journal of Quality Technology*, 42(4), pp. 348-357

MONTGOMERY, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*, 6<sup>th</sup> edition. New York, NY: John Wiley & Sons.

OTT, E. R. (1975). *Process Quality Control: Troubleshooting and Interpretation of Data*. New York, NY: McGraw-Hill.

SHEWHART, W. A. (1931). Economic Control of Quality of Manufactured Product, republished edition, 50<sup>th</sup> Anniversary Commemorative Reissue by American Society for Quality Control, Milwaukee, WI.

VADERMAN, S. B. (1999). A Brief Tutorial on the Estimation of the process Standard Deviation. *IIE Transactions* 31, pp. 503-507

