



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Κ' ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ Κ' ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**Μέθοδοι Αποθεματοποίησης
Γενικών Ασφαλειών:
Σύγκριση των micro και
των macro προσεγγίσεων**

ΚΥΡΙΑΚΗ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΥ

Α.Μ. Μ.Α.Ε. 10018

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΜΕΛΟΣ Δ.Ε.Π.

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΡΟΝΤΟΣ

ΛΕΚΤΟΡΑΣ ΤΜΗΜΑΤΟΣ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Κ' ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2013

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Κ' ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ Κ' ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Μέθοδοι Αποθεματοποίησης
Γενικών Ασφαλειών:
Σύγκριση των micro και
των macro προσεγγίσεων

(Reserving methods in General Insurance: Comparison of micro and macro approaches)

ΚΥΡΙΑΚΗ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΥ
Α.Μ. Μ.Α.Ε. 10018

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΜΕΛΟΣ Δ.Ε.Π.
ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΡΟΝΤΟΣ
ΛΕΚΤΟΡΑΣ ΤΜΗΜΑΤΟΣ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Κ' ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από την ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμό συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

-Σπυρίδων Βρόντος (Επιβλέπων)

-Μηλιτιάδης Νεκτάριος

-Πλάτων Τήνιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

*Στον πατέρα μου Αθανάσιο που μου λείπει...
και στην μητέρα μου Παναγιώτα που εκτιμώ και που αγαπώ τόσο πολύ.*

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που συνέβαλαν στην διεκπεραίωση της.

Ξεκινώ με τον επιβλέποντα μου κ. Σπυρίδων Βρόντο, Λέκτορα του Πανεπιστημίου Πειραιώς. Είναι από τους καθηγητές που αξίζουν καθώς έχει την διάθεση να μεταδώσει τις γνώσεις του και να αφιερώσει χρόνο στους φοιτητές του. Τον ευχαριστώ ολόψυχα για όσα μου προσέφερε και του εύχομαι καλή συνέχεια και προσωπική ευτυχία.

Ευχαριστώ τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής, κύριο Μιλτιάδη Νεκτάριο, αναπληρωτή καθηγητή του Πανεπιστημίου Πειραιώς και τον κύριο Πλάτωνα Τήνιο, επίκουρο καθηγητή του Πανεπιστημίου Πειραιώς. Ευχαριστώ όμως και όλους τους καθηγητές για τις γνώσεις που μου προσέφεραν κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Τέλος, θα ήθελα δώσω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου, στην μητέρα μου Παναγιώτα, στην αδερφή μου Δήμητρα και στην οικογένειά της, στον σύντροφο μου Παναγιώτη και στους φίλους μου για την παντοτινή τους αγάπη και αδιάκοπη στήριξη.

Κυριακή Ανδρικοπούλου

Πειραιάς, Ιούνιος 2013

Περίληψη

Για την κάλυψη πιθανών μελλοντικών απαιτήσεων, οι εταιρείες γενικών ασφαλίσεων πρέπει να διαθέτουν το απαραίτητο αποθεματικό κεφάλαιο, σύμφωνα με τις απαιτήσεις της ευρωπαϊκής οδηγίας Solvency II. Για το λόγο αυτό, είναι εξαιρετικά σημαντική η αξιόπιστη πρόβλεψη των μελλοντικών χρηματικών ροών με τη βοήθεια των αναλογιστικών μεθόδων αποθεματοποίησης. Γενικά, οι περισσότερες μέθοδοι βασίζονται σε συγκεντρωτικά τρίγωνα run-off και παρουσιάζουν σημαντικά μειονεκτήματα. Πρόσφατα ωστόσο έχουν προταθεί η λεγόμενη μέθοδος "μικρο" (micro), οι οποίες, αντί να βασίζονται σε συγκεντρωτικά δεδομένα, εκμεταλλεύονται τα αναλυτικά δεδομένα που τηρούν οι ασφαλιστικές εταιρείες στα αρχεία τους σχετικά με τις απαιτήσεις που καλύφθηκαν στο παρελθόν. Επιλέγοντας κατάλληλα στατιστικά μοντέλα με βάση το ιστορικό της ασφαλιστικής εταιρείας, η μέθοδος "μικρο" υπόσχεται πιο αξιόπιστη πρόβλεψη των μελλοντικών απαιτήσεων.

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του μεθόδου "μικρο" και η σύγκρισή της με τις κλασικές μεθόδους συγκεντρωτικών τριγώνων run-off. Αφού δικαιολογηθεί η αναγκαιότητα ασφαλούς πρόβλεψης του αποθεματικού, αρχικά παρουσιάζονται οι κλασικές μέθοδοι Chain Ladder και οι επεκτάσεις αυτής, η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson και οι μέθοδοι αποθεματοποίησης που κάνουν χρήση γενικευμένων γραμμικών μοντέλων. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται η νέα μέθοδος "μικρο" που έχει προταθεί πρόσφατα στη βιβλιογραφία. Τέλος, τα πλεονεκτήματα της νέας μεθόδου παρουσιάζεται μέσα από μια εφαρμογή στο στατιστικό πακέτο R, χρησιμοποιώντας δεδομένα που προέκυψαν μέσω προσομοίωσης.

Abstract

In order to meet future liabilities, general insurance companies must set up reserves, in accordance with EU's directive Solvency II. Therefore, it is very important to predict future cash flows reliably, using appropriate actuarial loss reserving methods. In general, most methods are based on aggregated run-off triangles and present several important disadvantages. However, new method called "micro-level" method has been recently proposed, which take advantage of the detailed historical data set of the insurance companies, instead of relying exclusively on aggregated data. Thus, by fitting these detailed data to appropriately selected statistical models, the new method could provide the actuary with more detailed and valuable reserve calculations.

In this thesis, the "micro-level" loss reserving method is presented and compared with the conventional aggregate run-off triangles. After justifying the need for more precise reserve calculations, conventional chain ladder techniques, the Bornhuetter-Ferguson method and generalized linear reserving methods are presented. Moreover, the recently proposed "micro-level" method is presented. Finally, the advantages of the new method are demonstrated through computer simulations using the well known statistics package R.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή	1
Κεφάλαιο 2: Οι macro προσεγγίσεις της αποθεματοποίησης	3
2.1 Η μέθοδος της Chain Ladder	3
2.2 Η τροποποιημένη μέθοδος της Chain Ladder	6
2.3 Οι πολλαπλασιαστικές μέθοδοι	7
2.3.1 Μοντέλο χωρίς πληθωρισμό	7
2.3.2 Μοντέλο με σταθερό πληθωρισμό	9
2.3.3 Γενικό μοντέλο	10
2.3.4 Ειδική περίπτωση: Μοντέλο διαχωρισμού	11
2.4 Η μέθοδος Bornhuetter –Ferguson	17
2.4.1 Εκτίμηση του προτύπου εξέλιξης	20
2.4.2 Εκτίμηση του <i>εκ των προτέρων</i> τελικού δείκτη αποζημίωσης	21
2.5 Γενικευμένα γραμμικά μοντέλα	26
2.5.1 Το μοντέλο Over-dispersed Poisson	27
2.5.2 Το μοντέλο Negative Binomial	34
2.5.3 Η κανονική προσέγγιση του Negative Binomial model	34
2.5.4 Το μοντέλο Mack-Ελευθερο κατανομής	35
2.5.5 Το μοντέλο Log-Normal	39
2.5.6 Το μοντέλο Gamma	40
Κεφάλαιο 3: Η micro level προσέγγιση της αποθεματοποίησης	41
3.1 Εισαγωγή	41
3.2 Το στατιστικό μοντέλο	49
3.3 Οι υποθέσεις της κατανομής	53
3.4 Η πρόβλεψη των μελλοντικών ροών	55
Κεφάλαιο 4: Εφαρμογή των macro προσεγγίσεων και της micro προσέγγισης	60
4.1 Η εφαρμογή της Chain Ladder	60
4.2 Η εφαρμογή της Mack Chain Ladder	69
4.3 Η εφαρμογή της Bootstrap Chain Ladder	77
4.3.1 Με κατανομή Gamma	77
4.3.2 Με κατανομή Over-dispersed Poisson	82

4.4	Η εφαρμογή σε γενικευμένα γραμμικά μοντέλα	84
4.4.1	Over Dispersed Poisson Model	84
4.4.2	Κατανομή Gamma.....	86
4.5	Η Micro Level προσέγγιση.....	89
	Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα	94
	Βιβλιογραφία.....	95

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Η ακριβής εκτίμηση των εκκρεμών αποζημιώσεων είναι μεγάλης σημασίας. Η ασφαλιστική εταιρεία δεν γνωρίζει το πραγματικό κόστος των προϊόντων που πουλάει κατά την διάρκεια μιας περιόδου αναφοράς μέχρι και για αρκετά χρόνια αργότερα. Η ασφαλιστική εταιρεία πουλάει την υπόσχεση να αποζημιώσει τον ασφαλιζόμενο όταν συμβεί ένα περιστατικό που καλύπτεται από κάποιο ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Για κάποια ασφαλιστικά γεγονότα δεν ξέρει το τελικό ποσό αποζημίωσης για χρόνια, ίσως και για δεκαετίες. Ωστόσο, πρέπει να αναφέρει τα οικονομικά της αποτελέσματα σε τακτική βάση. Τα αποθέματα των αποζημιώσεων αναπαριστούν την εκτίμηση της ασφαλιστικής για τις τρέχουσες υποχρεώσεις αποζημιώσεων που συνέβησαν κατά ή πριν την ημερομηνία αποτίμησης και δεν έχουν πληρωθεί. Οι αναλογιστές προσπαθούν να ποσοτικοποιήσουν, να αξιολογήσουν και να παρακολουθήσουν τις εκτιμήσεις των οφειλόμενων απαιτήσεων.

Η ασφαλιστική εταιρεία στο τέλος κάθε χρόνου κλείνει τα βιβλία της. Αυτό προκαλεί σοβαρά προβλήματα αφού εκείνη την στιγμή πολλές αποζημιώσεις δεν έχουν ακόμα εκκαθαριστεί και μεγάλα ποσά πρέπει να κρατηθούν ως προβλέψεις. Εκτός από αυτά που έχουν αναγγελθεί και δεν έχουν εκκαθαριστεί ή δεν έχουν πληρωθεί, υπάρχουν και οι αποζημιώσεις που δεν έχουν ακόμα αναγγελθεί στην ασφαλιστική εταιρεία (I.N.B.R. – Incurred But Not Reported). Στην περίπτωση αποζημίωσης λόγω σωματικής βλάβης, ή ανταμοιβής από προσωρινή ανικανότητα, η ασφαλιστική εταιρεία χρειάζεται χρόνο για να ορίσει την ακριβή υποχρέωση που έχει στον ασφαλισμένο της, καθώς πρέπει να αποφασίσουν οι ειδικοί και να αξιολογήσουν τα δικαστήρια για την ποσότητα της ζημιάς. Η εκκαθάριση της αποζημίωσης χρειάζεται ενδεχομένως πολλά χρόνια για να ολοκληρωθεί. Επομένως, είναι αναγκαίο να διαθέτει αποθέματα για τις εκκρεμείς αποζημιώσεις. Το ύψος του ποσού που θα κρατηθεί για τις προβλέψεις των υποχρεώσεων είναι πολύ σημαντική. Έτσι η ελλιπής εκτίμηση των προβλέψεων μπορεί να έχει δραματικά αποτελέσματα στην διαδικασία της έκδοσης ασφαλιστηρίων συμβολαίων (underwriting) από την ασφαλιστική εταιρεία. Ο αναλογιστής που πρέπει να εκτιμήσει τις ποσότητες αυτές αντιμετωπίζει ένα λεπτό και κρίσιμο πρόβλημα. Ο ορισμός ωστόσο των προβλέψεων είναι πολύπλοκο θέμα εξαιτίας των εξωτερικών παραγόντων. Η πιο συνηθισμένη τεχνική είναι η κατά περίπτωση (case-by-case) εκτίμηση, δηλαδή η ανά φάκελο (file-by-file) εκτίμηση του κόστους κάθε εκκρεμούς αποζημίωσης από έναν έμπειρο υπάλληλο που λαμβάνει πληροφορίες για την αποζημίωση, το οικονομικό κλίμα

και την πιθανή γενναιοδωρία των δικαστηρίων. Η μέθοδος αυτή έχει δεχτεί πολλές κριτικές. Θεωρείται ότι είναι πολύ ακριβή και βασίζεται αποκλειστικά στην κρίση ενός ατόμου. Οι προβλέψεις μπορεί να είναι λανθασμένες και να οδηγήσουν σε συσσωρευτικά προβλήματα. Γι' αυτό καθιερώθηκε ο μέσος όρος του κόστους των αποζημιώσεων να περιορίζεται από μία δοθείσα οροφή που διαμορφώνεται από το ένα έτος στο άλλο, με συνηθισμένο τρόπο. Αυτές οι δοθείσες οροφές για την εκτίμηση των αποζημιώσεων διαφέρουν από την μία εταιρεία στην άλλη, και γενικά επιτρέπει την εκτίμηση στο 90 με 95% των αποζημιώσεων, αλλά αυτό δεν απεικονίζει στις περισσότερες περιπτώσεις περισσότερο από 33 με 50% του συνολικού κόστους αποζημιώσεων.

Επιπρόσθετα με την ανά φάκελο μέθοδο (file-by-file technique) και την μέθοδο μέσων απαιτήσεων (average claim technique), έχουν εμφανιστεί μεγάλος αριθμός στατιστικών μεθόδων. Υπάρχουν πολλές μέθοδοι που βασίζονται στο τρίγωνο των ροών (run-off triangle). Στην εργασία θα αναπτυχθεί η μέθοδος της Chain Ladder που είναι η κυριότερη macro προσέγγιση και εφαρμόζεται ευρέως για την εκτίμηση των αποθεματικών και οι επεκτάσεις της, όπως η τροποποιημένη μέθοδος της Chain Ladder. Η μέθοδος της Chain Ladder χρησιμοποιεί δεδομένα σε ένα δισδιάστατο πίνακα που παριστάνουν το συμβάν και την εξέλιξη των αποζημιώσεων. Το πάνω τριγωνικό μέρος του πίνακα περιέχει γνωστές τιμές (από το παρελθόν) που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των υπολειπόμενων αποζημιώσεων. Στη συνέχεια αναπτύσσεται η πολλαπλασιαστική μέθοδος και η ειδική περίπτωση της separation. Θα αναπτυχθεί η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson η οποία είναι μία Bayesian τεχνική. Αυτό σημαίνει ότι ενσωματώνει μία ανεξάρτητη προγενέστερη εκτίμηση των τελικών αναμενόμενων αποζημιώσεων καθώς επίσης και εκτιμήσεις που παράγονται από πίνακες δισδιάστατους που χρησιμοποιούνται στην μέθοδο της Chain Ladder. Αυτά σταθμίζονται του παράγοντα φερεγγυότητας, ιδανικά δίνοντας προτίμηση στην πιο αξιόπιστη πρόβλεψη, αλλά λαμβάνοντας υπόψη και τις δύο εκτιμήσεις. Αναπτύσσονται επίσης μέθοδοι αποθεματοποίησης που κάνουν χρήση γενικευμένων γραμμικών μοντέλων. Στη συνέχεια θα εξεταστεί αναλυτικά η micro προσέγγιση η οποία έχει προταθεί πρόσφατα στη διεθνή βιβλιογραφία ως ένας εναλλακτικός τρόπος αποθεματοποίησης. Γίνεται σύγκριση μεταξύ της μεθόδου αυτής και των κυριότερων macro προσεγγίσεων.

Κεφάλαιο 2: Οι macro προσεγγίσεις της αποθεματοποίησης

2.1 Η μέθοδος της Chain Ladder

Η Chain Ladder μέθοδος, τριγωνική μέθοδος εξέλιξης ζημιών (development method) είναι μία από τις παλαιότερες αναλογιστικές τεχνικές που εφαρμόζεται ευρέως για την εκτίμηση των αποθεματικών. Η μέθοδος αυτή είναι βασισμένη στο τρίγωνο αθροιστικών ζημιών (run-off triangle). Το τρίγωνο των αθροιστικών ζημιών, που καταρτίζεται μέσω ενός πίνακα διπλής εισόδου, ανάλογα με το έτος προέλευσης και το έτος πληρωμής των απαιτήσεων που έχουν πληρωθεί μέχρι σήμερα, παρουσιάζεται στον πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1 Τρίγωνο αθροιστικών ζημιών. Σωρευτικές πληρωμές

Έτος προέλευσης (i)	Έτος εξέλιξης (j)				
	1	2	3	...	k
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	...	C_{1k}
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	...	
3	C_{31}	C_{31}
...
k	C_{k1}

Όπου C_{ij} είναι το ποσό, δηλαδή οι συνολικές ποσότητες αποζημιώσεων, που έχουν καταβληθεί μέχρι το τέλος του έτους j για αποζημιώσεις του έτους προέλευσης i , δηλαδή

$$C_{ij} = \sum_{h=1}^j C_{ih}. \quad (2.1)$$

Οι διαγώνιοι παριστάνουν τα ημερολογιακά έτη. Όλες οι πληρωμές που βρίσκονται στην ίδια διαγώνιο έχουν γίνει κατά την διάρκεια του ίδιου λογιστικού έτους. Οι τιμές κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι άγνωστες, αφού αφορούν τη μελλοντική εξέλιξη των αποζημιώσεων.

Η πρόβλεψη των εκκρεμών ζημιών συμβολίζεται με R_i και οι συνολικές αποζημιώσεις (οι οποίες είναι άγνωστες) του έτους i συμβολίζονται με $C_{i\infty}$. Συνεπώς οι συνολικές προβλέψεις στο τέλος του έτους k γράφονται ως

$$R = \sum_{i=1}^k R_i = \sum_{i=1}^k (C_{i\infty} - C_{i,k-i+1}). \quad (2.2)$$

Στόχος των μεθόδων είναι να συμπληρωθεί το τρίγωνο των αθροιστικών ζημιών και να εκτιμηθεί το $C_{i\infty}$, $i=1, \dots, k$ και κατά συνέπεια οι προβλέψεις R_i .

Η εκτίμηση της πρόβλεψης για το έτος i , ιδανικά είναι η τιμή του δεσμευμένου μέσου των εκκρεμών αποζημιώσεων του έτους, λαμβάνοντας τις πληροφορίες για τις αποζημιώσεις που έχουν δοθεί μέχρι τότε:

$$R_i = E[C_{i\infty} - C_{i,k-i+1} / C_{i,k-i+1}]. \quad (2.3)$$

Οι μέθοδοι που μελετάμε είναι όλες βασισμένες στις ίδιες αρχές οι οποίες είναι:

- Ανάλυση των παρελθοντικών δεδομένων
- Εκτίμηση των παραμέτρων των μοντέλων
- Προβολή των αποτελεσμάτων στο μέλλον.

Σε όλες τις μεθόδους χρειαζόμαστε την εκτίμηση του $C_{i\infty}$. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε την πρόβλεψη του νεότερου έτους σε καλό βαθμό ακριβείας (ή υποθέτουμε ότι k είναι σχετικά υψηλό, $C_{1\infty}$ είναι κοντά στο C_{1k}).

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτής της μεθόδου είναι ότι οι τελικές απαιτήσεις για κάθε έτος ατυχήματος προέρχονται από καταγεγραμμένες τιμές, υποθέτοντας ότι οι μελλοντικές απαιτήσεις είναι παρόμοιες με τις απαιτήσεις των προηγούμενων ετών. Ο αναλογιστής χρησιμοποιεί τα τρίγωνα αθροιστικών ζημιών για να δει την ιστορική εξέλιξη κάποιων κατηγοριών απαιτήσεων. Η βασική παραδοχή στην μέθοδο της Chain Ladder είναι ότι οι απαιτήσεις που έχουν καταγραφεί θα συνεχιστούν να αναπτύσσονται με τον ίδιο τρόπο και στο μέλλον, δηλαδή ότι το παρελθόν είναι ενδεικτικό του μέλλοντος. Με άλλα λόγια, η μέθοδος αυτή υποθέτει ότι η σχετική αλλαγή των απαιτήσεων ενός δοθέντος έτους από ένα σημείο αξιολόγησης στο επόμενο, είναι παρόμοια με την σχετική αλλαγή των απαιτήσεων των προγενέστερων ετών μεταξύ παρόμοιων σημείων αξιολόγησης. Έμμεση υπόθεση είναι ότι οι απαιτήσεις που έχουν παρατηρηθεί μέχρι τώρα, είναι σχετικές με τις απαιτήσεις που θα

παρατηρηθούν. Άλλες βασικές υποθέσεις για την μέθοδο Chain Ladder είναι η αναλογία των απαιτήσεων παραμένει σταθερή μεταξύ των διαδοχικών ετών, η πολιτική της εταιρείας παραμένει σταθερή ως προς τα όρια των αποζημιώσεων. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται σε όλους τους κλάδους ασφάλισης.

Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι υπάρχει απουσία άλλων εξωτερικών παραγόντων, για παράδειγμα υποθέτουμε μηδενικό πληθωρισμό, σταθερότητα στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου, στο ρυθμό της εκκαθάρισης, σταθερό νομοθετικό πλαίσιο, η κατανομή της καθυστέρησης μεταξύ του συμβάντος και της εκκαθάρισης είναι σταθερή στο χρόνο. Οι στήλες του τριγώνου είναι αναλογικές, εκτός της τυχαίας διακύμανσης. Οπότε εισάγονται οι υποθέσεις:

$$C_{i,j+1} = m_j C_{ij} \quad i=1,\dots,k; j=1,\dots,k-1, \quad (2.4)$$

$$C_{i\infty} = M_k C_{ik} \quad i=1,\dots,k. \quad (2.5)$$

Η m_j είναι τυχαία μεταβλητή που παριστάνει την μεταβολή των πληρωμών των αποζημιώσεων μεταξύ των ετών πληρωμής j και $j+1$, ενώ M_k είναι η μεταβολή των αποζημιώσεων ενός δοθέντος αρχικού έτους που θα έχουν μετά από τα πρώτα k έτη πληρωμής. Αυτές οι μεταβλητές δεν εξαρτώνται από το αρχικό έτος i .

Ένας τρόπος εκτίμησης των m_j και M_k είναι ο ακόλουθος :

$$m_j = \frac{\sum_{i=1}^{k-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{k-j} C_{ij}}, \quad j=1,\dots,k-1, \quad (2.6)$$

$$M_k = \frac{C_{1\infty}}{C_{1k}}. \quad (2.7)$$

Για την εκτίμηση των προβλέψεων R_i πρέπει να υπολογίσουμε τους εκτιμητές M_j της μεταβολής των αποζημιώσεων μετά από j έτη

$$M_j = \left(\prod_{h=j}^{k-1} m_h \right) M_k \quad (2.8)$$

Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι

$$C_{i\infty} = C_{i,k-i+1} M_{k-i+1}, \quad (2.9)$$

και

$$R_i = C_{i,k-i+1} (M_{k-i+1} - 1). \quad (2.10)$$

Είναι υψίστης σημασίας, για την μέθοδο Chain Ladder, οι εξωγενείς επιρροές να μην είναι μεγάλες. Αν αυτή η υπόθεση δεν ισχύει, τότε το συμπέρασμα ότι οι στήλες του τριγώνου είναι αναλογικές είναι εσφαλμένη και η Chain Ladder δίνει παραπλανητικά αποτελέσματα. Ένας τρόπος να ξεπεραστεί η αδυναμία αυτή να αναγνωρίσουμε την διακύμανση στον λόγο $C_{i,j+1}/C_{ij}$, να εξετάσουμε την τάση αυτού του λόγου και να προβάλλουμε τη τάση αυτή. Αυτή η τροποποίηση έχει ένα μειονέκτημα: ότι μπορεί η τάση να προέρχεται εξολοκλήρου από το νομισματικό πληθωρισμό, και αν ο πληθωρισμός στο παρελθόν παρουσίασε σημαντικές διακυμάνσεις, δεν θα υπάρξει εξομαλυσμένη τάση. Επιπλέον αν ο ρυθμός μεταβολής του πληθωρισμού μειωθεί στα επόμενα χρόνια δεν είναι σαφές πως αυτή η τάση θα εκφραστεί στην ακολουθία των λόγων $C_{i,h+1}/C_{ih}$.

2.2 Η τροποποιημένη μέθοδος της Chain Ladder

Χρησιμοποιώντας τις τιμές C_{ij} λαμβάνουμε υπόψη την διαφορά που μπορεί να υπάρχει στον ρυθμό εκκαθάρισης διαφορετικών ετών

$$C_{ij} = C_{ij} \frac{n_i}{n_{ij}}. \quad (2.11)$$

Το n_{ij} είναι ο συνολικός αριθμός των αποζημιώσεων του αρχικού έτους i που έχουν εκκαθαριστεί μέχρι το έτος πληρωμής j και το n_i είναι ο συνολικός αριθμός αποζημιώσεων του έτους συμβάντος i . Οι αθροιστικές ποσότητες αποζημιώσεων διαιρούνται με τις αναλογία των εκκαθαρισμένων αποζημιώσεων.

Στην πράξη το n_i είναι γνωστό με βεβαιότητα μετά την αναφορά όλων των αποζημιώσεων που έχουν συμβεί αλλά δεν έχουν αναφερθεί, και την εξάλειψη των αποζημιώσεων χωρίς υποχρέωση. Είναι φυσικό να επιλέξουμε ως τιμή του n_i τον αριθμό των εκκαθαρισμένων αποζημιώσεων συν την εκτίμηση εκκρεμών αποζημιώσεων που προέρχεται από το τελευταίο διαθέσιμο έτος, με σκοπό την ελαχιστοποίηση του περιθωρίου σφάλματος. Για να

τοποθετήσουμε όλα τα έτη σε ίδια βάση, παίρνουμε ως εκτίμηση του n_i τον αριθμό των αποζημιώσεων που έχουν αναφερθεί στο τέλος του αρχικού έτους συν την εκτίμηση των IBNR αποζημιώσεων στο τέλος του έτους αυτού.

2.3 Οι πολλαπλασιαστικές μέθοδοι

Θεωρούμε την (μη αθροιστική) ποσότητα c_{ij} που έχει πληρωθεί κατά την διάρκεια του έτους πληρωμής j για αποζημιώσεις του έτους προέλευσης i και διατυπώνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

- Οι c_{ij} είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές
- Οι c_{ij} μπορούν να γραφτούν στην εξής μορφή

$$c_{ij} = x_i p_j \lambda_{i+j-1} \quad (2.12)$$

Έτσι, η ποσότητα (2.12) αποτελείται από τρεις όρους που εξαρτώνται από το έτος προέλευσης, από το έτος πληρωμής και από το ημερολογιακό έτος αντίστοιχα. Το x_i είναι η συνολική ποσότητα αποζημιώσεων του έτους προέλευσης i , εκφρασμένο σε σταθερές χρηματικές τιμές. Δηλαδή, σε προσαρμοσμένες τιμές που χρησιμοποιούνται για να συγκρίνουν τιμές από μία περίοδο σε μία άλλη.

Το p_j είναι η αναλογία των x_i που έχουν πληρωθεί κατά την διάρκεια του έτους j . Η κατανομή $(p_j \quad j=1, \dots, k)$ των πληρωμών κατά την διάρκεια των πρώτων k ετών πληρωμής υποθέτουμε ότι είναι σταθερή στον χρόνο και ανεξάρτητη από το έτος προέλευσης. Το λ_{i+j-1} είναι ένα μέτρο του πληθωρισμού και των εξωτερικών παραγόντων. Αποτελεί έναν δείκτη του κόστους των αποζημιώσεων για το λογιστικό έτος $i+j-1$.

2.3.1 Μοντέλο χωρίς πληθωρισμό

Χωρίς πληθωρισμό, το μοντέλο της (2.12) απλοποιείται στην ακόλουθη μορφή:

$$c_{ij} = x_i p_j \quad (2.13)$$

Μπορούμε να εκτιμήσουμε τους παραμέτρους με διάφορες μεθόδους.

Με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ελαχιστοποιούμε την ποσότητα

$$\sum_{(i,j)} \omega_{ij} (x_i p_j - c_{ij})^2, \quad (2.14)$$

όπου ω_{ij} είναι συντελεστές στάθμισης, οι οποίοι μπορούν να είναι ίσοι με 1, ή να διαφέρουν ανάλογα με την βαρύτητα, την ηλικία, την αξιοπιστία κτλ. των δεδομένων. Το άθροισμα λαμβάνεται ως προς όλα τα στοιχεία του τριγώνου. Το πλεονέκτημα είναι ότι με την μέθοδο αυτή δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε όλα τα στοιχεία του τριγώνου. Εάν για παράδειγμα, η πολιτική εκκαθάρισης της εταιρείας έχει μεταβληθεί μέσα σε ένα έτος, είναι πιθανόν να αγνοήσουμε τις παλιότερες πληροφορίες και να αναλύσουμε το τρίγωνο εξαιρώντας τις πρώτες διαγωνίους. Το μειονέκτημα του μοντέλου είναι ότι η λύση δεν είναι μοναδική. Η ασάφεια αυτή μπορεί να απαλειφθεί χρησιμοποιώντας τον περιορισμό

$$\sum_j p_j = 1, \quad (2.15)$$

ο οποίος ωστόσο δεν θεωρείται και απαραίτητος, αφού το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στο γινόμενο $c_{ij} = x_i p_j$.

Θέτοντας τις παραγώγους πρώτης τάξης ως προς x_i και p_j ίσες με το μηδέν, λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα που λύνεται με διαδοχικές προσεγγίσεις.

$$x_i = \frac{\sum_j \omega_{ij} c_{ij} p_j}{\sum_j \omega_{ij} p_j^2}, \quad (2.16)$$

$$p_j = \frac{\sum_i \omega_{ij} c_{ij} x_i}{\sum_i \omega_{ij} x_i^2}. \quad (2.17)$$

Προσθέτοντας τον περιορισμό $\sum_{j=1}^k p_j = 1$ δεν έχουμε μεγάλη διαφορά στο πρόβλημα εκτίμησης. Πράγματι, εφαρμόζοντας την μέθοδο Lagrange για την ελαχιστοποίηση της (2.14) υπό τον περιορισμό (2.15), καταλήγουμε στην ακόλουθη λύση:

$$x_i = \frac{\sum_{j=1}^k \omega_{ij} c_{ij} p_j}{\sum_{j=1}^k \omega_{ij} p_j^2} \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.18)$$

$$p_j = \frac{\sum_{i=1}^k \omega_{ij} c_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^k \omega_{ij} x_i^2} \quad j=1, \dots, k, \quad (2.19)$$

$$\sum_{i=1}^k p_j = 1. \quad (2.20)$$

2.3.2 Μοντέλο με σταθερό πληθωρισμό

Στο μοντέλο αυτό υποθέτουμε ότι έχουμε $\lambda_{i+j-1} = \lambda^{i+j-1}$ και ελαχιστοποιούμε την ποσότητα

$$\sum_{(ij)} \omega_{ij} (x_i p_j \lambda^{i+j-1} - c_{ij})^2. \quad (2.21)$$

Η λύση επίσης δεν είναι μοναδικά καθορισμένη. Το μοντέλο αυτό αποτελεί γενίκευση του προηγούμενου μοντέλου. Εάν (x_i, p_j) είναι η λύση του μοντέλου χωρίς πληθωρισμό, τότε $(x_i, p_j, \lambda = 1)$ είναι η λύση του μοντέλου με σταθερό πληθωρισμό.

Πράγματι, έστω ότι δεν είναι αυτή η λύση και υπάρχει άλλη λύση του μοντέλου με σταθερό πληθωρισμό, έστω (x'_i, p'_j, λ') , τέτοια ώστε

$$\sum_{(ij)} \omega_{ij} (x'_i p'_j \lambda'^{i+j-1} - c_{ij})^2 < \sum_{(ij)} \omega_{ij} (x_i p_j - c_{ij})^2. \quad (2.22)$$

Θέτοντας $x'' = x'_i \lambda'^i$ και $p'' = p'_j \lambda'^{j-1}$ προκύπτει

$$\sum_{(ij)} \omega_{ij} (x''_i p''_j - c_{ij})^2 < \sum_{(ij)} \omega_{ij} (x_i p_j - c_{ij})^2, \quad (2.23)$$

το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση ότι (x_i, p_j) είναι η λύση στο πρώτο πρόβλημα.

Στην πράξη, επαρκεί να βρούμε μία λύση (x_i, p_j) για το πρώτο μοντέλο και με βάση την ιδιότητα της μη μοναδικότητας, μία λύση για το δεύτερο μοντέλο είναι η $(x'_i = B\lambda^{-i} x_i, p'_j = B^{-1} \lambda^{-(j-1)} p_j, \lambda)$.

Το μοντέλο χωρίς πληθωρισμό έμμεσα περιλαμβάνει ένα παράγοντα σταθερού πληθωρισμού. Μια από τις συνέπειες της μη μοναδικότητας της λύσης είναι ότι το μοντέλο δεν μας επιτρέπει να αποκτήσουμε μία εκτίμηση της επίδρασης του πληθωρισμού. Οι προβλέψεις που αποκτάμε δεν εξαρτώνται από το λ . Αξίζει να επισημανθεί ότι και σε αυτήν την περίπτωση,

είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι, εισάγοντας έναν περιορισμό και χρησιμοποιώντας την μέθοδο Lagrange, δεν θα πετύχουμε κάτι καινούργιο στο πρόβλημα εκτίμησης, αφού θα καταλήξουμε στο ίδιο σύστημα εξισώσεων.

2.3.3 Γενικό μοντέλο

Το γενικό μοντέλο, $c_{ij} = x_i p_j \lambda_{i+j-1}$ παρουσιάζει την ίδια έλλειψη μοναδικής λύσης όπως και το προηγούμενο μοντέλο. Μηδενίζοντας τις παραγώγους πρώτης τάξης της $\sum_{(ij)} \omega_{ij} (x_i p_j \lambda_{i+j-1} - c_{ij})^2$

οδηγούμαστε στο σύστημα

$$x_i = \frac{\sum_j \omega_{ij} c_{ij} p_j \lambda_{i+j-1}}{\sum_j \omega_{ij} p_j^2 \lambda_{i+j-1}^2}, \quad (2.24)$$

$$p_j = \frac{\sum_i \omega_{ij} c_{ij} x_i \lambda_{i+j-1}}{\sum_i \omega_{ij} c_{ij} x_i^2 \lambda_{i+j-1}^2}, \quad (2.25)$$

$$\lambda_l = \frac{\sum_i \omega_{i,l-i+1} c_{i,l-i+1} x_i p_{l-i+1}}{\sum_i \omega_{i,l-i+1} x_i^2 p_{l-i+1}^2}. \quad (2.26)$$

το οποίο λύνεται με διαδοχικές προσεγγίσεις. Ένα μεγάλο μειονέκτημα του γενικού μοντέλου είναι ο αριθμός των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν.

2.3.3.1 Σύνδεση της πολλαπλασιαστικής μεθόδου και της Chain Ladder

Το μοντέλο της Chain Ladder γράφεται ως

$$C_{i\infty} = C_{ij} M_j, \quad (2.27)$$

όπου

$$M_j = \left(\prod_{h=j}^{k-1} m_h \right) M_k. \quad (2.28)$$

Οπότε από την (2.27)

$$C_{ij} = C_{i\infty} \frac{1}{M_j}. \quad (2.29)$$

Όπου το $C_{i\infty}$ είναι οι συνολικές αποζημιώσεις που συνέβησαν το έτος i , και $1/M_j$ ορίζεται ως παράγοντας υστέρησης, και δίνεται από την αναλογία του κόστους που θα πληρωθεί μετά από j έτη πληρωμής.

Το πολλαπλασιαστικό μοντέλο με το σταθερό πληθωρισμό γράφεται ως

$$C_{ij} = \sum_{h=1}^j c_{ih} = x_i \left(\sum_{h=1}^j p_h \right), \quad (2.30)$$

όπου x_i είναι η συνολική ποσότητα σε τρέχουσες τιμές, για αποζημιώσεις του έτους i και $\sum_{h=1}^j p_h$ είναι η αναλογία του κόστους των αποζημιώσεων μετά τα πρώτα έτη πληρωμής j .

Θέτοντας $M_j = 1 / \sum_{h=1}^j p_h$ η (2.30) γράφεται

$$C_{ij} = x_i \frac{1}{M_j}. \quad (2.31)$$

Η μέθοδος Chain Ladder και η πολλαπλασιαστική μέθοδος έχουν παρόμοιο τύπο. Δεν είναι περίεργο οι προβλέψεις που θα έχουμε θα είναι πολύ κοντά, αφού μόνο η τεχνική μέθοδος εκτίμησης διαφέρει. Η πολλαπλασιαστική μέθοδος έχει το πλεονέκτημα να χρησιμοποιεί όλες τις παρατηρήσεις με σκοπό την εκτίμηση των παραγόντων μεταβολής. Κατά συνέπεια, τα αποτελέσματα παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευστάθεια έναντι μικρών διακυμάνσεων των παρατηρήσεων, δηλαδή μικρές διακυμάνσεις στις παρατηρήσεις δεν μπορούν να οδηγήσουν σε μεγάλες διακυμάνσεις των εκτιμώμενων μεγεθών.

2.3.4 Ειδική περίπτωση: Μοντέλο διαχωρισμού

Σαφώς, είναι προτιμότερο να διαχωριστεί η στάσιμη κατανομή των καθυστερημένων αποζημιώσεων από τις εξωγενείς επιρροές που διαταράσσουν την στασιμότητα.

Το πρόβλημα είναι πώς θα ξεχωρίσουμε τα p_1, \dots, p_k από τα $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Η ακόλουθη πολλαπλασιαστική μέθοδος, που ονομάζεται *μέθοδος διαχωρισμού* (*separation method*) ή *μέθοδος του Taylor* δεν χρησιμοποιεί το τρίγωνο των C_{ij} , αλλά αυτό με τα $s_{ij} = c_{ij} / n_i$ όπως φαίνεται στον πίνακα 2.2. Το μοντέλο έχει την εξής μορφή :

$$s_{ij} = p_j \lambda_{i+j-1}.$$

Ο Taylor (1978) πρότεινε την ακόλουθη μέθοδο εκτίμησης. Θεωρώντας ότι

$$d_h = \sum_{l=1}^h s_{l,h-l+1} = \lambda_h \sum_{i=1}^h p_i \quad h=1, \dots, k, \quad (2.32)$$

είναι το άθροισμα των όρων μιας διαγωνίου (δηλαδή όλες οι ποσότητες που έχουν πληρωθεί κατά την διάρκεια του ημερολογιακού έτους h) και

$$v_j = \sum_{i=1}^{k-j+1} s_{ij} = p_j \sum_{l=j}^k \lambda_l, \quad (2.33)$$

είναι το άθροισμα των όρων της στήλης j , προκύπτει ότι

$$d_k = \lambda_k (p_1 + p_2 + \dots + p_k), \quad (2.34)$$

αφού εξ' ορισμού

$$\sum_{j=1}^k p_j = 1, \quad (2.35)$$

$$\lambda_k = d_k. \quad (2.36)$$

Από το $s_{ij} = p_j \lambda_{i+j-1}$ προκύπτει $s_{1k} = p_k \lambda_k = v_k$,

$$p_k = \frac{v_k}{\lambda_k}. \quad (2.37)$$

Τότε $d_{k-1} = \lambda_{k-1}(p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}) = \lambda_{k-1}(1 - p_k)$.

Πίνακας 2.2 Separation model

Έτος προέλ. (i)	Έτος εξέλιξης (j)				
	1	2	3	...	k
1	$p_1 \lambda_1$	$p_2 \lambda_2$	$p_3 \lambda_3$...	$p_k \lambda_k$
2	$p_1 \lambda_2$	$p_2 \lambda_3$	$p_3 \lambda_4$...	
3	$p_1 \lambda_3$...			
...	...				
k	$p_1 \lambda_k$				

Συνεπώς

$$\lambda_{k-1} = \frac{d_{k-1}}{(1-p_k)}. \quad (2.38)$$

Τότε $s_{1k-1} + s_{2k-1} = p_{k-1}(\lambda_{k-1} + \lambda_k) = v_{k-1}$ και $p_{k-1} = \frac{s_{1k-1} + s_{2k-1}}{\lambda_{k-1} + \lambda_k} = \frac{v_{k-1}}{\lambda_{k-1} + \lambda_k}$.

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\lambda_h = \frac{d_h}{\left(1 - \sum_{j=1}^{k-h} p_{h+j}\right)} \quad h=1, \dots, k, \quad (2.39)$$

$$p_j = \frac{v_j}{\sum_{l=j}^k \lambda_l} \quad j=1, \dots, k. \quad (2.40)$$

Αυτοί οι εκτιμητές προκύπτουν με πρακτικό τρόπο. Ακόμα, μπορεί να δειχτεί ότι κάτω από γενικές συνθήκες όπως η πιθανότητα κατανομής της s_{ij} , οι εκτιμητές συμπίπτουν με τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας.

Ένα παρόμοιο μοντέλο μπορεί να μελετηθεί και στην περίπτωση της συνθήκης της αντασφάλισης υπερβάλλοντος ποσού ζημιάς με την οποία ο αντασφαλιστής υποχρεούται να πληρώσει, για κάθε αποζημίωση που το ποσό της είναι μεγαλύτερο από το ποσό της ίδιας κράτησης x_0 . Το πρόβλημα της εκτίμησης των προβλέψεων είναι πολύ σημαντικό για τον αντασφαλιστή, γιατί μπορεί να περάσουν πολλά χρόνια μέχρι να αναφερθεί σε αυτόν η υποχρέωση για αποζημίωση. Πράγματι, το ποσό μιας αποζημίωσης που αρχικά είναι μικρότερο από το ποσό της ίδιας κράτησης μπορεί λόγω του πληθωρισμού να χρειάζεται την επέμβαση του αντασφαλιστή μετά από κάποια χρόνια. Για τον αντασφαλιστή, η εκτίμηση του αριθμού των αποζημιώσεων που αναφέρονται είναι εξίσου σημαντική όσο η εκτίμηση του ποσού της αποζημίωσης.

Θεωρώντας την συνθήκη της υπερβάλλοντος ποσού ζημιάς που έχει ολοκληρωθεί k χρόνια πριν, και θεωρώντας n_{ij} να είναι ο αριθμός των αποζημιώσεων που είναι πάνω από το ποσό x_0 , που έχουν συμβεί το έτος i και έχουν αναφερθεί το έτος j .

Υποθέτουμε ότι

1. Ο αριθμός των αποζημιώσεων που αναφέρονται στην ασφαλίστρια εταιρεία ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο a (ανεξάρτητη του i , του έτους προέλευσης).
2. Κάθε αποζημίωση έχει πιθανότητα p_1 να αναφερθεί στο έτος προέλευσης της, πιθανότητα p_2 στο επόμενο έτος, και ούτω καθεξής, μέχρι την πιθανότητα p_k σε k έτη. Εφόσον όλες οι αποζημιώσεις έχουν αναφερθεί σε k έτη, ισχύει $\sum_{j=1}^k p_j = 1$, και η κατανομή της πιθανότητας δεν εξαρτάται από το έτος προέλευσης.
3. Κάθε ημερολογιακό έτος (κάθε διαγώνιος του τριγώνου), συνδέεται με μία κατανομή των ποσών αποζημίωσης, η οποία κατανομή γράφεται $F_h(x)$, $h=1, \dots, k$. Αυτές οι μεταβλητές δεν σχετίζονται με την μεταβλητή της υστέρησης αναφοράς.

Πίνακας 2.3 Observed Run –off Triangle. Reinsurance model

	Έτος εξέλιξης (j)				
Έτος προέλευσης (i)	1	2	...	k-1	k
1	n_{11}	n_{12}	...	$n_{1,k-1}$	n_{1k}
2	n_{21}	n_{22}	...		
3	n_{31}	...			
...	...				
k	n_{k1}				

Συνέπεια αυτών των υποθέσεων είναι ότι κάθε στοιχείο του τριγώνου είναι μια πραγματοποίηση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson. Για το πρώτο ημερολογιακό έτος, η παράμετρος της μεταβλητής που υπολογίζει τις αποζημιώσεις που ξεπερνούν το ποσό υπερβάλλουσας ζημιάς x_o είναι ίση με $\lambda_1 = \alpha[1 - F_1(x_o)]$. Αφού η αποζημίωση έχει πιθανότητα p_1 να αναφερθεί στο έτος προέλευσης, η παράμετρος Poisson που αντιστοιχεί στο στοιχείο n_{11} του πίνακα 2.3 είναι $p_1 \lambda_1$. Η αποζημίωση υπερβάλλοντος ποσού στο δεύτερο ημερολογιακό έτος έχει παράμετρο Poisson $\lambda_2 = \alpha[1 - F_2(x_o)]$. Συνεπώς η παράμετρος $p_1 \lambda_2$ αντιστοιχεί στο στοιχείο n_{21} . Άρα έχουμε με την μέθοδο διαχωρισμού ότι

$$P[n_{11}, \dots, n_{1k}, \dots, n_{k1} / p_1, \dots, p_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k], \quad (2.41)$$

$$= \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{k-i+1} \frac{(p_j \lambda_{i+j-1})^{n_{ij}} e^{-p_j \lambda_{i+j-1}}}{n_{ij}!}.$$

Παίρνοντας την συνάρτηση πιθανοφάνειας, εισάγοντας τον περιορισμό $\sum_{j=1}^k p_j = 1$ και θέτοντας τις παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης Lagrange ίσες με μηδέν αναφορικά με όλους τους αγνώστους και χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς $v_j = \sum_{i=1}^{k+1-j} n_{ij}$ και $d_j = \sum_{i=1}^j n_{i,j+1-i}$, καταλήγουμε στο απλοποιημένο σύστημα:

$$\lambda_k = d_k$$

$$p_k \lambda_k = v_k$$

$$\lambda_{k-1} - p_k \lambda_{k-1} = d_{k-1}$$

$$p_{k-1} \lambda_{k-1} + p_{k-1} \lambda_k = v_{k-1}$$

... ..

$$\lambda_1 - \lambda_1 p_2 - \dots - \lambda_1 p_{k-1} - \lambda_1 p_k = d_1$$

$$p_1 \lambda_1 + p_1 \lambda_2 + \dots + p_1 \lambda_{k-1} + p_1 \lambda_k = v_1,$$

η λύση του οποίου δίνει τους ίδιους εκτιμητές όπως αυτούς που προτείνει ο Taylor.

Πίνακας 2.4 Run-off triangle. Reinsurance model

	Έτος εξέλιξης (j)				
Έτος προέλευσης (i)	1	2	3	...	k
1	$p_1 \lambda_1$	$p_2 \lambda_2$	$p_3 \lambda_3$...	$p_k \lambda_k$
2	$p_1 \lambda_2$	$p_2 \lambda_3$	$p_3 \lambda_4$...	
3	$p_1 \lambda_3$...			
...	...				
k	$p_1 \lambda_k$				

Σημειώνεται ότι αυτό το μοντέλο λαμβάνει υπόψη μόνο τον αριθμό των αποζημιώσεων. Ωστόσο, μπορεί εύκολα να επεκταθεί και στα ύψη των αποζημιώσεων. Με την εκτίμηση των λ_h ($h=1, \dots, k$) και των p_j ($j=1, \dots, k$) που διαθέτουμε, μπορούμε να υπολογίσουμε το τρίγωνο

$\hat{s}_{ij} = p_j \lambda_{i+j-1}$. Αυτό μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τις παρατηρήσεις s_{ij} με τις εκτιμήσεις \hat{s}_{ij} , ελέγχοντας με αυτό τον τρόπο την εγκυρότητα του μοντέλου (το chi-square πράγματι έχει κατασκευαστεί γι' αυτό τον λόγο).

Για να ολοκληρωθεί το τρίγωνο των s_{ij} , είναι απαραίτητο σε αυτό το στάδιο της μεθόδου να εκτιμηθεί η επίδραση της μελλοντικής μεταβολής προεκτείνοντας (extrapolating) την λ_h . Μπορούμε να τις επιλέξουμε a priori ή να τις αποκτήσουμε με κάποια μέθοδο εκτίμησης. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την γραμμική προσαρμογή ή να υποθέσουμε ότι ισχύει ο τύπος προέκτασης (extrapolation formula).

$$\lambda_h = \lambda_k (1+a)^{h-k} \quad h = k+1, k+2, \dots, \quad (2.42)$$

όπου ο ετήσιος ρυθμός της αύξησης a προκύπτει μέσω των εκτιμήσεων $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα των $\hat{s}_{ij} = p_j \lambda_{i+j-1}$.

Στη συνέχεια ορίζουμε

$$s_{i,k+} = \sum_{j=k+1}^{\infty} s_{ij}, \quad (2.43)$$

ως το άθροισμα των πληρωμών που θα γίνουν από το έτος εκκαθάρισης ($k+1$) και μετέπειτα.

Αυτές οι ποσότητες εκτιμώνται από τον τύπο

$$\hat{s}_{1,k+} = \frac{C_{1,\infty} - C_{1k}}{n_1}. \quad (2.44)$$

Ειδικότερα, στην περίπτωση που ο ρυθμός αύξησης της μεταβολής είναι σταθερός ισχύει ότι

$$\hat{s}_{i,k+} = \hat{s}_{1,k} (1+a)^{i-1} \quad i = 2, \dots, k, \quad (2.45)$$

ενώ σε άλλες περιπτώσεις

$$\hat{s}_{i,k+} = \hat{s}_{1,k+} \frac{\lambda_{k+i-1}}{\lambda_k} = \hat{s}_{i-1,k+} \frac{\lambda_{k+i-1}}{\lambda_{k+i-2}}. \quad (2.46)$$

Συνεπώς

$$M_{k-i+1} = \frac{\sum_{j=1}^k \hat{s}_{ij} + \hat{s}_{i,k+1}}{\sum_{j=1}^{k-i+1} \hat{s}_{ij}}, \quad (2.47)$$

είναι ο εκτιμητής του $C_{i\infty} / C_{i,k-i+1}$, και η μέθοδος τελειώνει με τον ίδιο τρόπο όπως η μέθοδος Chain Ladder

$$C_{i\infty} = C_{i,k-i+1} M_{k-i+1}, \quad (2.48)$$

και

$$R_i = C_{i,k-i+1} (M_{k-i+1} - 1). \quad (2.49)$$

Η μέθοδος διαχωρισμού μερικές φορές έχει καλύτερα αποτελέσματα όταν τα d_h και v_j αποκτώνται από γινόμενο όχι από άθροισμα (γεωμετρική μέθοδο διαχωρισμού).

Αξίζει να σημειώσουμε ότι αυτές οι μέθοδοι δεν πρέπει να ακολουθούνται τυφλά. Η πρόβλεψη του μέλλοντος από το παρελθόν μπορεί να γίνει αξιόπιστα όταν αφορά την εξέλιξη μιας φυσικής διαδικασίας. Ωστόσο, όταν πρόκειται για οικονομική διαδικασία με ανθρώπινες αποφάσεις, πρέπει να έχουμε υπόψη ότι μπορεί εύκολα να προκύψει εσφαλμένη πρόβλεψη.

Επίσης το γεγονός κάποιων μεγάλων αποζημιώσεων μπορεί να διακυβεύει την αξιοπιστία αυτών των μεθόδων. Σε μερικές ομάδες κινδύνων η τιμή της τυπικής απόκλισης της κατανομής μπορεί να φτάσει επτά ή οκτώ φορές του μέσου όρου του κόστους εξαιτίας ακραία μεγάλων αποζημιώσεων. Είναι, σε κάποιες περιπτώσεις, καλύτερο να μελετώνται οι μεγάλες αποζημιώσεις ξεχωριστά και να υπολογίζουμε το τρίγωνο των αθροιστικών τιμών αφού αφαιρεθούν οι μεγάλες αποζημιώσεις.

2.4 Η μέθοδος Bornhuetter –Ferguson

Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson (BF) αποτελείται από την επιλογή ενός πρότυπου ανάπτυξης (development pattern), για κάθε έτος ατυχήματος, ένος εκ των προτέρων τελικό δείκτη αποζημιώσεων (initial ultimate loss ratio). Από αυτά προκύπτει η εκτίμηση του αποθέματος. Ο συνήθης τρόπος να αποκτηθεί το πρότυπο ανάπτυξης είναι η σύνδεση των αναλογιών της μεθόδου Chain Ladder. Ωστόσο, αυτός ο τρόπος έχει δεχτεί κριτική γιατί

υποθέτει πολλαπλασιαστική συνάρτηση σύνδεσης μεταξύ των αποζημιώσεων του παρελθόντος και του μέλλοντος.

Συμβολίζουμε με C_{ik} τις αθροιστικές ζημιές (πληρωθείσες ή επισυμβάσεις) με έτος προέλευσης (ή ατυχήματος) i μετά από k έτη εξέλιξης, $1 \leq i, k \leq n$, και v_i είναι το ασφάλιστρο για το έτος προέλευσης i . Το $C_{i,n+1-i}$ υποδηλώνει το τρέχον ποσό αποζημίωσης του έτους i . Επιπλέον $S_{i,k} = C_{i,k} - C_{i,k-1}$ είναι το ατομικό ποσό αποζημίωσης (incremental loss amount) (με $C_{i,0} = 0$) και το U_i είναι το (άγνωστο) τελικό ποσό αποζημίωσης του έτους i .

Τότε $R_i = U_i - C_{i,n+1-i}$ είναι το απόθεμα αποζημιώσεων για το έτος i το οποίο είναι άγνωστο και πρέπει να εκτιμηθεί.

Αυτή η μέθοδος εκτίμησης του R_i προτάθηκε από τους Bornhuetter-Ferguson (1972) για να αποφευχθούν κάποια από τα μειονεκτήματα της μεθόδου Chain Ladder. Ένα από τα μειονεκτήματα αυτά είναι ότι η Chain Ladder χρησιμοποιεί την συνάρτηση σύνδεσης των αναλογιών f_k με σκοπό να προβλεφθεί από το τρέχον ποσό αποζημίωσης $C_{i,n+1-i}$ το συνολικό ποσό. Δηλαδή εκτιμώνται οι τελικές αποζημιώσεις

$$U_i^{CL} = C_{i,n+1-i} f_{n+2-i} \cdots f_{n-1} f_n.$$

Έτσι το απόθεμα της Chain Ladder είναι

$$R_i^{CL} = U_i^{CL} - C_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i} (f_{n+2-i} \cdots f_n - 1). \quad (2.50)$$

Αυτό σημαίνει ότι το απόθεμα εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το τρέχον ποσό αποζημίωσης $C_{i,n+1-i}$ και μπορεί να οδηγήσει σε μη λογική τιμή του αποθέματος $R_i^{CL} = 0$ για τα έτη στα οποία δεν έχουν πληρωθεί, ούτε αναφερθεί αποζημιώσεις, το οποίο δεν είναι ασυνήθιστο για τις αντασφαλίσεις υπερβάλλοντος ποσού ζημίας των πιο πρόσφατων ετών ατυχήματος.

Η μέθοδος της BF αποφεύγει την εξάρτηση από το τρέχον ποσό αποζημίωσης $C_{i,n+1-i}$. Το απόθεμα της BF ορίζεται ως εξής :

$$R_i^{BF} = (1 - \hat{b}_{n+1-i}) U_i, \quad (2.51)$$

όπου
$$U_i = v_i q_i, \quad (2.52)$$

και q_i είναι η εκ των προτέρων εκτίμηση του λόγου τελικών αποζημιώσεων (ultimate loss ratio - ULR) $q_i = U_i/v_i$ για το έτος προέλευσης i , και b_k όπου $\in [0,1]$ είναι το ποσοστό των τελικών αποζημιώσεων που αναμένεται να γίνουν γνωστές μετά από το έτος εξέλιξης k .

Πρέπει να σημειωθεί ότι q_i είναι η εκ των προτέρων, εκτίμηση του ULR, σε αντίθεση με την εκ των υστέρων εκτίμηση του ULR, που είναι $\left(C_{i,n+1-i} + R_i^{BF}\right)/v_i$. Αυτή η εκ των προτέρων εκτίμηση είναι διαφορετική από την εκ των υστέρων εάν και μόνο αν $C_{i,n+1-i} \neq \hat{b}_{n+1-i}v_i q_i$. Τα ποσοστά (b_1, b_2, \dots, b_n) αποτελούν το αναμενόμενο αθροιστικό πρότυπο εξέλιξης (με $b_n = 1$ εξαιτίας της αρχικής υπόθεσης αναφορικά με το n) και $1 - \hat{b}_{n+1-i}$ είναι το αναμενόμενο ποσοστό εκκρεμών αποζημιώσεων του έτους ατυχήματος i .

Επομένως, για να εφαρμόσει ο αναλογιστής την μέθοδο BF πρέπει να εκτιμήσει τις παραμέτρους q_i και b_k για τα όλα τα i και k . Στην πράξη, τα b_k προέρχονται από την συνάρτηση σύνδεσης των αναλογιών της Chain Ladder με τον ακόλουθο τρόπο.

$$b_n = 1, \hat{b}_{n-1} = f_n^{-1}, \hat{b}_{n-2} = (f_{n-1}f_n)^{-1}, \dots, \hat{b}_1 = (f_2 \dots f_n)^{-1},$$

Η μέθοδος από μόνη της δεν παρέχει μία αντικειμενική προσέγγιση για τον καθορισμό μίας εκ των προτέρων εκτίμησης q_i . Στην πράξη, το q_i εκτιμάται με διαφορετικούς τρόπους και συχνά βασίζεται στην εκτίμηση του τελευταίου έτους και/ή από την διαδικασία τιμολόγησης καθώς και από πληροφορίες που αφορούν την αγορά. Στην χειρότερη περίπτωση, με αυτή την πρακτική μπορεί να φανεί ότι η εκτίμηση q_i χειραγωγείται με σκοπό να πετύχουμε το επιθυμητό απόθεμα. Στην καλύτερη περίπτωση, η χρήση του προτύπου της Chain Ladder δεν μας επιτρέπει να δούμε την μέθοδο BF σαν μία αυτόνομη μέθοδο αποθεματοποίησης.

Επιπλέον, η χρήση της αναλογιών της Chain Ladder υποθέτει ότι οι άγνωστες αποζημιώσεις είναι έμμεσο πολλαπλάσιο των ήδη γνωστών αποζημιώσεων σε κάθε σημείο της εξέλιξης. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την βασική ιδέα της ανεξαρτησίας μεταξύ $C_{i,n+1-i}$ και R_i^{BF} που είναι και η θεμελιώδης αρχή στην οποία βασίζεται η μέθοδος BF.

Για το λόγο αυτό αναπτύσσεται μία εναλλακτική προσέγγιση για την εκτίμηση των παραμέτρων q_i και b_k χωρίς να χρησιμοποιείται η λογική της CL μαζί με μια μεθοδολογία

για την εκ των προτέρων εκτίμηση του λόγου της τελικής αποζημίωσης (ultimate loss ratio) q_i .

2.4.1 Εκτίμηση του προτύπου εξέλιξης

Αν έχουμε μια εκ των προτέρων εκτίμηση της U_i (π.χ. από την παραδοσιακή προσέγγιση που περιεγράφηκε παραπάνω), (2.52), είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε το κατάλληλο πρότυπο εξέλιξης. Από τον τύπο αποθέματος της BF (2.51), συμπεραίνουμε ότι

$$\hat{b}_{n+1-i} = 1 - \frac{R_i}{U_i} = \frac{U_i - R_i}{U_i} \approx \frac{C_{i,n+1-i}}{U_i}. \quad (2.53)$$

Θα έχουμε αυστηρή ισότητα εάν και μόνο αν η εκ των προτέρων εκτίμηση U_i ισούται με την εκ των υστέρων $C_{i,n+1-i} + R_i$, δηλαδή εάν $C_{i,n+1-i} = \hat{b}_{n+1-i} U_i$. Αυτό δεν θα ισχύει για όλα τα i , αλλά θα πρέπει να είναι αληθές κατά μέσο όρο, έστω και κατά προσέγγιση, διαφορετικά το πρότυπο $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots$ δεν θα έχει καλή προσαρμογή στα δεδομένα.

Συνεπώς, από την προηγούμενη εξίσωση (2.53) προτείνεται ο εκτιμητής

$$\hat{b}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} C_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} U_i}, \quad (2.54)$$

ως σταθμισμένο μέσος όρος των δεικτών $C_{i,k}/U_i$. Αυτός ο άμεσος τρόπος εκτίμησης του αθροιστικού προτύπου b_1, b_2, \dots μπορεί να οδηγήσει σε αναστροφή, δηλαδή $\hat{b}_k > \hat{b}_{k+1}$, γιατί κάθε \hat{b}_k βασίζεται σε διαφορετικό αριθμό ετών προέλευσης. Για να αποφευχθούν τέτοιες αναστροφές χρησιμοποιούμε τις αντίστοιχες προσαυξήσεις

$$\beta_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} U_i}, \quad (2.55)$$

και λαμβάνουμε το \hat{b}_k προσθέτοντας τα β_k , δηλαδή

$$\hat{b}_k = \beta_1 + \dots + \beta_k, \quad (2.56)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{b}_{n+1} = 1$.

Θα πρέπει τα β_k να εξομαλυνθούν και να βαίνουν μειούμενα στο μηδέν.

2.4.2 Εκτίμηση του εκ των προτέρων τελικού δείκτη αποζημίωσης

Για την εκτίμηση του q_i , το οποίο δεν εξαρτάται άμεσα από τις αποζημιώσεις $C_{i,n+1-i}$ που είναι γνωστές μέχρι σήμερα στην μέθοδο BF, προτείνονται τα ακόλουθα τρία βήματα.

Το πρώτο βήμα είναι να ληφθεί υπόψη ο μέσος όρος των λόγων ατομικών αποζημιώσεων (ILR) (Incremental loss ratio)

$$m_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i}, \quad (2.57)$$

του έτους εξέλιξης k που έχει παρατηρηθεί μέχρι σήμερα. Το άθροισμα $m_1 + \dots + m_n$ όλων των μέσων όρων των ILRs είναι μία εκ των προτέρων εκτίμηση του τελικού λόγου αποζημίωσης για ένα μέσο έτος ατυχημάτων (εάν η εξέλιξη υποθέτουμε ότι θα ολοκληρωθεί μετά από n έτη). Πρέπει να σημειωθεί ότι για να οριστεί αυτή η εκ των προτέρων εκτίμηση, η αποζημίωση $C_{i,n+1-i}$ για κάθε δεδομένο έτος ατυχήματος i λαμβάνεται υπόψη μόνο οριακά (σε αντίθεση με την εκτίμηση της CL για το U_i).

Το δεύτερο βήμα είναι να χρησιμοποιηθεί το γεγονός ότι ο συνολικός δείκτης αποζημίωσης q_i του έτους ατυχήματος i επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από το επίπεδο της επάρκειας του ρυθμού (rate adequacy) του συγκεκριμένου έτους. Η επάρκεια του ρυθμού ορίζεται από δύο παράγοντες, το επίπεδο ρυθμού (rate level) και το επίπεδο αποζημίωσης (loss level), και από τα δύο μαζί προκύπτει το επίπεδο του δείκτη αποζημίωσης. Για λόγους αποθεματοποίησης είναι αρκετό να εξεταστεί το σχετικό επίπεδο της επάρκειας ρυθμού ενός έτους προέλευσης συγκρίνοντας το με άλλα έτη προέλευσης. Με αυτήν την πληροφορία μπορούμε να μεταφράσουμε το (σχεδόν) γνωστό δείκτη αποζημιώσεων παλιότερων ετών ατυχήματος σε προβλέψεις πιο πρόσφατων ετών ατυχήματος. Έτσι, πρέπει να εκτιμήσουμε μόνο την αλλαγή του επιπέδου ρυθμού και την τάση του κόστους αποζημιώσεων. Αυτό είναι ευκολότερο γιατί την στιγμή της αποθεματοποίησης γνωρίζουμε το βαθμό με τον οποίο οι αλλαγές του δείκτη πραγματοποιούνται και ξέρουμε ήδη μέρος των αποζημιώσεων κάθε έτους ατυχήματος. Αυτή η πληροφορία άρα χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της επάρκειας ρυθμού, επιπλέον της πληροφορίας τιμολόγησης.

Συνεπώς, αναλύουμε τις πληροφορίες για την επάρκεια ρυθμού που παίρνουμε από τα δεδομένα αθροιστικών ζημιών (run-off data). Εάν στο έτος ατυχήματος i έχουμε χαμηλότερο μέσο όρο επαρκούς ρυθμού (συγκρινόμενο με άλλα έτη ατυχήματος που έχουν ληφθεί

υπόψη), τότε το ποσό του ασφαλιστρού v_i , θα είναι μικρότερο από ότι έπρεπε να είναι για ένα μέσο έτος ατυχήματος. Συνεπώς, περισσότεροι από τους παρατηρήσιμους λόγους ατομικών αποζημιώσεων προσάξησης (observed individual incremental loss ratios)

$$\frac{S_{i,1}}{v_i}, \frac{S_{i,2}}{v_i}, \dots, \frac{S_{i,n+1-i}}{v_i},$$

θα είναι υψηλότεροι από τους αντίστοιχους μέσους όρους $m_1, m_2, \dots, m_{n+1-i}$ τουλάχιστον μετά την εξάλειψη κάθε ασυνήθιστα μεγάλης ατομικής αποζημίωσης, όπως είναι φυσικό να γίνεται σε κάθε μέθοδο αποθεματοποίησης. Για να φτάσουμε στην εκτίμηση της σχετικής επάρκειας του ρυθμού του έτους i χρησιμοποιούμε τον σταθμισμένο μέσο όρο

$$r_i = \frac{\sum_{k=1}^{n+1-i} m_k}{\sum m_j} \cdot \frac{S_{ik}/v_i}{m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n+1-i} S_{ik}}{\sum_{k=1}^{n+1-i} (v_i m_k)} = \frac{C_{i,n+1-i}/v_i}{\sum_{k=1}^{n+1-i} m_k}, \quad (2.58)$$

των λόγων $S_{i,k}/v_i$ και m_k . Έτσι r_i είναι ο λόγος των λόγων τρεχουσών ατομικών αποζημιώσεων $C_{i,n+1-i}/v_i$ του έτους ατυχήματος i διαιρεμένος με τους αντίστοιχους εκ των προτέρων μέσους όρους δεικτών αποζημιώσεων. Ο δείκτης r_i ονομάζεται δείκτης ζημιών (loss ratio index).

Από την οπτική γωνία του ασφαλιστρού, το r_i δείχνει τον παράγοντα με το οποίο το ασφάλιστρο v_i πρέπει να πολλαπλασιαστεί με σκοπό να προσαρμοστεί με το μέσο όρο του επιπέδου επαρκούς ρυθμού, θεωρώντας έτη ατυχημάτων $i=1,2,\dots,n$. Από αυτή την άποψη, το r_i μπορεί να ονομαστεί *on-level premium factor*. Ο παράγοντας r_i δεν είναι απαραίτητο να μετατρέψει το v_i σε ικανοποιητικά απόλυτο μέγεθος, αυτό που επιτυγχάνεται, σχετικά με το $v_i r_i$ αντί του v_i , είναι ότι όλα τα έτη ατυχήματος έχουν περίπου το ίδιο τελικό δείκτη αποζημιώσεων $U_i / (v_i r_i) \approx m_1 + \dots + m_n$.

Σε αυτό το σημείο, έχουμε υπολογίσει τα r_i και τα m_k και συνεπώς $(m_1 + \dots + m_n)r_i$ είναι μία λογική εκ των προτέρων εκτίμηση του δείκτη τελικών αποζημιώσεων $q_i = U_i/v_i$, με την υπόθεση ότι η εξέλιξη έχει ολοκληρωθεί σε n έτη.

Ως τρίτο βήμα θα πρέπει να ελέγξουμε την εκτίμηση r_i . Αρχικά πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι από τα δεδομένα των πληρωθεισών και από τα δεδομένα των

επισυμβασών προκύπτουν διαφορετικές τιμές για τα r_i . Αλλά φυσικά πρέπει να είναι ταυτόσημα διότι σχετίζονται με το ίδιο ασφάλιστρο v_i και τις αποζημιώσεις U_i για οποιοδήποτε σύνολο δεδομένων. Θα χρησιμοποιήσουμε τον αριθμητικό μέσο όρο $(r_i^{paid} + r_i^{inc})/2$ ή το γεωμετρικό μέσο $\bar{r}_i = \sqrt{r_i^{paid} r_i^{inc}}$.

Ο υπολογισμός των r_i πρέπει να προέρχονται από δεδομένα μεγάλου χαρτοφυλακίου κινδύνων για να είναι όσο το δυνατόν αξιόπιστα. Το χαρτοφυλάκιο αυτό μπορεί να αποτελείται από διάφορα τρίγωνα αθροιστικών ζημιών. Για το καθένα η αποθεματοποίηση γίνεται ξεχωριστά, αλλά έχουμε υποθέσει ότι έχουν συμβεί παρόμοιες αλλαγές στο επίπεδο της επάρκειας του ρυθμού (rate adequacy level).

Κανονικά έχουμε και πληροφορίες από την διαδικασία τιμολόγησης, δηλαδή την αλλαγή του ρυθμού και την εκτίμηση της τάσης αποζημιώσεων. Ο λόγος r_i/r_{i-1} οποιονδήποτε συνεχόμενων ετών πρέπει να ελέγχεται ενάντια στο λόγο της τάσης των απωλειών και την αποτελεσματική αλλαγή ρυθμού που εμποδίζεται από v_i . Για παράδειγμα, εάν για το έτος $i-1$ προς το έτος i αναμένεται μία αύξηση 10% αλλά ο ρυθμός αλλαγής που έχει επιτευχθεί είναι μόνο 5%, ο λόγος r_i/r_{i-1} πρέπει να είναι κοντά σε $1.10/1.05$ υποδεικνύοντας μία επιδείνωση του δείκτη απωλειών κατά 4.8% ($=1.10/1.05-1$). Αν δεν συμβαίνει αυτό πρέπει να πάρουμε την απόφαση ανάμεσα στους δύο δείκτες, για παράδειγμα σχηματίζοντας ένα αξιόπιστο σταθμισμένο μέσο όρο των δύο τιμών.

Για τα πιο πρόσφατα έτη ατυχήματος $i=n$ και $i=n-1$ είναι πιθανόν να εμπιστευτούμε τις πληροφορίες των τιμών περισσότερο από την r_i εκτίμηση των δεδομένων, αφού τα τελευταία μόνο βασίζονται σε ένα ή δύο καταχωρήσεις ενός τριγώνου. Σε ακραίες περιπτώσεις τα r_i μπορεί να είναι μηδέν, το οποίο είναι παράλογο και πρέπει προφανώς να διορθωθεί. Το μέγεθος των r_i για το πρώτο έτος ατυχήματος μπορεί θεωρητικά να επιλεγθεί αυθαίρετα, εξαιτίας του επιπέδου της επάρκειας ρυθμού (loss ratio level) θα υπολογιστεί σε μία επακόλουθη προσαρμογή των m_k . Συνεπώς μπορεί να μείνει όπως προκύπτει από τον τύπο με σκοπό να παραμείνουν τα m_k σε διαισθητική αύξηση του επιπέδου δείκτη αποζημιώσεων (at the intuitive incremental loss ratio).

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι οι λόγοι r_i/r_{i-1} . Γι' αυτό πρώτα επιλέγουμε τις τιμές για αυτούς τους λόγους που βασίζονται σε όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες και μετά, ξεκινώντας

με την επιλογή r_i^* , προερχόμενα από αυτά τα αποτελέσματα της επιλογής r_i^* για κάθε έτος ατυχήματος i . Με αυτά τα επιλεγμένα r_i^* όλα τα προσαρμοσμένα ασφάλιστρα $v_i r_i^*, 1 \leq i \leq n$, πρέπει στο τέλος να οδηγούν (περίπου) στην ίδια επάρκεια ρυθμού, δηλαδή προκύπτουν παρόμοιες τιμές με $U_i / (v_i r_i)$.

Στον υπολογισμό του αποθέματος του επόμενου έτους, τα δεδομένα του τριγώνου θα περιλαμβάνουν μία επιπλέον διαγώνιο η οποία θα οδηγήσει σε αλλαγές στα r_i . Αλλά οι λόγοι r_i / r_{i-1} θα έχουν την ίδια ερμηνεία με προηγουμένως. Γι' αυτό εξαιτίας της αυθαιρεσίας των r_i^* , μπορούμε να κρατήσουμε τα παλιά r_i^* και όσο δεν υπάρχουν αλλαγές στο λόγο r_i^* / r_{i-1}^* , κρατάμε τα r_i^* και μονάχα προσθέτουμε το r_{n+1}^* που βασίζεται στο λόγο r_{n+1}^* / r_n^* .

Πριν χρησιμοποιήσουμε το r_i^* για την εκτίμηση του q_i πρέπει να προσαρμόσουμε το μέσο όρο δείκτη προσαυξημένων αποζημιώσεων m_k γιατί είναι βασισμένα στα μη προσαρμοσμένα ασφάλιστρα v_i . Αντικαταστήσουμε τα m_k με το ακόλουθο τύπο

$$m_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} (v_i r_i^*)}. \quad (2.59)$$

Αυτό συνήθως θα καταλήξει σε μικρές αλλαγές. Σημαντικές αλλαγές μπορεί να συμβούν για τα τελευταία δύο ή τρία έτη εξέλιξης ή γενικά για τα δεδομένα όπου τα v_i και τα r_i αλλάζουν σημαντικά.

Τα τροποποιημένα Incremental Loss Ratios ILR'S m_k των ελάχιστων τελευταίων ετών εξέλιξης μπορεί επίσης να παράγουν αυθαίρετα αποτελέσματα, ξανά εξαιτίας των περιορισμένων δεδομένων. Φυσικά αυτές οι προσαυξήσεις πρέπει να εξομαλυνθούν και να τείνουν στο μηδέν. Γι' αυτό μία εξομαλυσμένη προσέγγιση είναι λογική και δείχνει ότι τα ILRs επιλέγονται με τα m_k^* .

Σε αυτό το σημείο εγκαταλείπεται η μη ρεαλιστική υπόθεση ότι δεν υπάρχει έτος εξέλιξης πέρα του n . Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας ένα μέσο όρο λόγων tail m_{n+1}^* (που μπορεί να είναι μηδέν ή και αρνητικό, όπως οποιοδήποτε άλλο m_k^*), για να συμπληρώσει τα ILRs $m_k^*, 1 \leq k \leq n$, που έχουν ήδη επιλεγθεί.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα ILRs, έχουμε

$$m^* = m_1^* + \dots + m_n^* + m_{n+1}^*,$$

ως μια τροποποιημένη εκτίμηση για τα ULR με μέσο όρο επίπεδου επάρκειας ρυθμού. Φυσικά οι πληρωθείσες και οι επισυμβάσεις ζημιές έχουν την ίδια εκτίμηση ULR m^* . Αν δεν συμβαίνει αυτό πρέπει να γίνει τροποποίηση του m_k^* ειδικά του m_{n+1}^* , ώστε να $m_{paid}^* = m_{inc}^*$. Έτσι τελικά προκύπτει η *a priori* εκτίμηση $q_i = r_i^* m^*$ για τα ULR του έτους i και την αντίστοιχη ποσότητα $U_i = v_i r_i^* m^*$.

Σε αντίθεση με την παραδοσιακή μέθοδο BF, αυτή η διαδικασία δίνει την δυνατότητα στον αναλογιστή να συνενώσει την γενική τιμολόγηση και τις πληροφορίες της αγοράς που είναι διαθέσιμες με την τάση και τους λόγους που περιέχεται στα τρίγωνα με τις πληρωθείσες και τις επισυμβάσεις ζημιές. Επιπλέον, αυτή η διαδικασία χρησιμοποιεί μια λεπτομερή ανάλυση του *a priori* Ultimate Loss Ratio $q_i = r_i^* (m_1^* + \dots + m_{n+1}^*)$ στα συστατικά, επάρκεια ρυθμού και πρότυπο ανάπτυξης. Αυτό κάνει την διαδικασία πιο εύκολη για να παρακολουθηθεί και να αξιολογηθεί από συναδέλφους αναλογιστές.

Εκτίμηση του προτύπου εξέλιξης. Οπότε εισάγουμε τον τύπο $U_i = v_i r_i^* m^*$ στην σχέση που προέρχεται από τα β_k αποκτάμε

$$\beta_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} U_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i r_i^* m^*} = \frac{m_k}{m^*}. \quad (2.60)$$

Εδώ μπορούμε να δούμε τον αριθμητή m_k ότι μπορεί να διαφέρει από αυτό που τελικά θα επιλεγεί, καθώς ο παρονομαστής εκφράζει τα επιλεγμένα ILRS.

Άρα είναι εύλογο να επιλεγθεί

$$\beta_k^* = \frac{m_k^*}{m^*}, \quad (2.61)$$

Αυτό τελικά οδηγεί σε

$$\hat{b}_k^* = \beta_1^* + \dots + \beta_k^* = \frac{m_1^* + \dots + m_k^*}{m_1^* + \dots + m_{n+1}^*}. \quad (2.62)$$

Αυτό είναι το αυθεντικό BF πρότυπο εξέλιξης το οποίο διαφέρει από το πρότυπο του CL.

Ο υπολογισμός με αυτό τον τρόπο των παραμέτρων q_i και b_k είναι μία πραγματικά αυτόνομη μέθοδος υπολογισμού των αποθεμάτων, η οποία είναι τελείως ανεξάρτητη της μεθόδου CL.

2.5 Γενικευμένα γραμμικά μοντέλα

Η μέθοδος της Chain Ladder, στην απλούστερη της μορφή, περιλαμβάνει μόνο τον τρόπο που θα αποκτηθούν οι προβλέψεις των τελικών αποζημιώσεων. Και ως τελικές αποζημιώσεις εννοούνται οι αποζημιώσεις που έχουν παρατηρηθεί μέχρι το τελευταίο έτος καθυστέρησης, και δεν περιλαμβάνει κανένα παράγοντα ουράς (tail factor). Από στατιστικής πλευράς, δοθέντος της σημειακής εκτιμήσεως, το επόμενο βήμα είναι να αναπτυχθούν εκτιμήσεις πιθανής ευαισθησίας ή μεταβλητότητας στα αποτελέσματα έτσι ώστε οι εκτιμήσεις να αποτελούνται από επιπλέον αποθέματα που μπορεί να κρατηθούν από σύνεση, και είναι μεγαλύτερα από τις προβλεπόμενες τιμές. Το μέτρο της μεταβλητότητας που συνήθως χρησιμοποιείται είναι το σφάλμα πρόβλεψης, ορίζεται ως τυπικό σφάλμα της κατανομής των πιθανών αποτελεσμάτων των αποθεμάτων. Είναι επιθυμητό να λάβουμε υπόψη και άλλους παράγοντες, όπως την πιθανότητα των απρόσμενων γεγονότων τα οποία όταν συμβαίνουν αυξάνουν την αβεβαιότητα, τα οποία είναι δύσκολο να μοντελοποιηθούν. Το πρώτο βήμα για να αποκτήσουμε το σφάλμα πρόβλεψης είναι να σχηματίσουμε ένα στατιστικό μοντέλο κάνοντας υποθέσεις σχετικά με τα δεδομένα. Εάν ο στόχος είναι να παρέχει ένα στοχαστικό μοντέλο που είναι ανάλογο με την μέθοδο Chain Ladder, τότε είναι προφανές ότι η πρώτη προϋπόθεση είναι οι προβλεπόμενες τιμές να είναι ίδιες με την μέθοδο Chain Ladder. Υπάρχουν δύο τρόποι με το οποίο αυτό επιχειρείται: προσδιορίζοντας κατανομές από τα δεδομένα, ή απλά προσδιορίζοντας τις δύο πρώτες ροπές. Λαμβάνοντας υπόψη μοντέλα τα οποία προσδιορίζουν κατανομές από τα δεδομένα, λαμβάνουμε υπόψη την over-dispersed κατανομή Poisson, την αρνητική διωνυμική κατανομή και την κανονική κατανομή. Σκοπός αυτών των μοντέλων είναι να λάβουμε εκτιμήσεις αποθεμάτων όπως στην μέθοδο Chain Ladder. Το μοντέλο της αρνητικής διωνυμικής προέρχεται από το μοντέλο Poisson. Τα δύο

μοντέλα είναι στενά συσχετισμένα αλλά έχουν διαφορετική παραμετροποίηση. Επίσης το κανονικό μοντέλο προσεγγίζει το μοντέλο της διωνυμικής κατανομής.

2.5.1 Το μοντέλο Over-dispersed Poisson

Το μοντέλο αυτής διαφέρει από την κατανομή Poisson στο ότι η διακύμανση δεν είναι ίση με τον μέσο, αλλά αντίθετα είναι ανάλογη του μέσου. Στην αποθεματοποίηση των αποζημιώσεων, το μοντέλο της κατανομής της υπερ-διασποράς (over-dispersed) Poisson υποθέτει ότι οι ατομικές αποζημιώσεις (incremental claims) c_{ij} κατανέμονται ως ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές υπερ-διασποράς Poisson, με μέσο και διακύμανση:

$$E[c_{ij}] = m_{ij} = x_i y_j \text{ και } \text{Var}[c_{ij}] = \varphi x_i y_j, \quad (2.63)$$

$$\text{όπου } \sum_{k=1}^n y_k = 1. \quad (2.64)$$

Όπου x_i είναι οι αναμενόμενες τελικές αποζημιώσεις (όπου τελικές αποζημιώσεις είναι οι αποζημιώσεις ως το τελευταίο έτος εξέλιξης που έχουν παρατηρηθεί στο τρίγωνο), και y_j είναι η αναλογία των τελικών αποζημιώσεων που προκύπτει από κάθε έτος εξέλιξης. Η υπερ-διασπορά εισάγεται μέσω της παραμέτρου φ , η οποία είναι άγνωστη και εκτιμάται από τα δεδομένα. Επιτρέποντας την υπερ-διασπορά δεν επηρεάζεται η εκτίμηση των παραμέτρων, αλλά οδηγεί στην αύξηση των τυπικών τους σφαλμάτων.

Πρέπει να σημειωθεί ότι εφόσον η y_i εμφανίζεται στην διακύμανση, ο περιορισμός ότι το y_i πρέπει να είναι θετικός είναι αυτόματα επιβαλλόμενος. Αυτό υπονοεί ότι το άθροισμα των αυξανόμενων αποζημιώσεων στην στήλη j πρέπει να είναι επίσης θετική, που είναι ο περιορισμός του μοντέλου. Σημειώνεται ότι κάποιες αρνητικές αυξήσεις αποζημιώσεων επιτρέπονται, εφόσον το άθροισμα κάθε στήλης δεν είναι αρνητικό.

Σε αυτό το ανάπτυγμα, ο μέσος όρος έχει μία πολλαπλασιαστική δομή, η οποία είναι το γινόμενο της επιρροής της γραμμής και της επιρροής της στήλης. Η επιρροή της γραμμής και της στήλης έχει συγκεκριμένη ερμηνεία, (είναι οι αναμενόμενες τελικές αποζημιώσεις σε κάθε αρχικό έτος και η αναλογία των τελικών που προκύπτουν για κάθε έτος εξέλιξης, αντίστοιχα), και είναι μερικές φορές χρήσιμο να παραμείνει το μοντέλο σε αυτόν τον τύπο.

Ωστόσο, για λόγους εκτίμησης, είναι συχνά καλύτερο να επαναπαραμετροποιήσουμε το μοντέλο, έτσι ώστε ο μέσος να έχει ένα γραμμικό τύπο. Στην ορολογία των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων, χρησιμοποιούμε μια λογαριθμική συνάρτηση σύνδεσης, έτσι ώστε

$$\log(m_{ij}) = c + a_i + \beta_j. \quad (2.65)$$

Αυτός ο εκτιμητής είναι επίσης τύπος Chain Ladder, με την έννοια ότι υπάρχει μία παράμετρος για κάθε γραμμή i , και μία παράμετρος για κάθε στήλη j . Υπάρχουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα σε αυτό τον τύπο του μοντέλου. Σαν γενικευμένο γραμμικό μοντέλο, είναι εύκολο να εκτιμηθεί από τα γνωστά στατιστικά πακέτα. Ωστόσο, οι τιμές των παραμέτρων είναι δύσκολο να ερμηνευτούν, κάνοντας απαραίτητο να μετατραπούν σε πιο γνωστές ποσότητες. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για το σύνολο των παραμέτρων, οι οποίοι μπορούν να πάρουν πλήθος διαφορετικών μορφών. Για παράδειγμα, οι περιορισμοί corner θέτουν $a_1 = \beta_1 = 0$.

Παρόλο που το μοντέλο βασίζεται σε κατανομή Poisson, αυτό δεν σημαίνει ότι είναι μόνο κατάλληλο για δεδομένα που αποτελούνται από θετικούς ακέραιους αριθμούς. Αυτός ο περιορισμός μπορεί να ξεπεραστεί χρησιμοποιώντας μία quasi-likelihood προσέγγιση, η οποία μπορεί να ισχύει και για μη-ακέραιους αριθμούς, θετικούς και αρνητικούς. Με την quasi likelihood προσέγγιση, σε αυτό το κείμενο, η πιθανοφάνεια είναι η ίδια με την πιθανοφάνεια Poisson όταν γίνεται χρήση της αναλογικότητας. Για δεδομένα που αποτελούνται εξ' ολοκλήρου από θετικούς ακέραιους αριθμούς, όμοιες εκτιμήσεις παραμέτρων αποκτώνται χρησιμοποιώντας ολόκληρη ή την σχετική πιθανότητα. Πολλά στατιστικά πακέτα που εφαρμόζουν τα GLM χρησιμοποιούν εξορισμού την σχετική πιθανότητα, και οι χρήστες είναι εντελώς απληροφόρητοι. Σε όρους μοντελοποίησης, η σημαντική υπόθεση είναι ότι η διακύμανση είναι ανάλογη του μέσου, και τα δεδομένα δεν είναι αυστηρά θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Σε αυτό το σημείο θα περιγράψουμε την σχέση που έχει η τεχνική Chain Ladder και το ακόλουθο στατιστικό μοντέλο για αυξανόμενες αποζημιώσεις y_{ij} ή (c_{ij}) :

$$Y_{ij} \sim \text{Poisson}(m_{ij}), \quad Y_{ij} \text{ ανεξάρτητες } \forall i, j, \quad (2.66)$$

όπου $\log m_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$ και $a_1 = \beta_1 = 0$.

Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n-j+1} y_{ij} \geq 0 \text{ για όλα τα } j. \quad (2.67)$$

Σημειώνεται ότι δεν υποθέτουμε ότι όλες οι αυξανόμενες αποζημιώσεις είναι μη-αρνητικές, αλλά ότι όλες οι στήλες είναι μη-αρνητικές. Οι αυξανόμενες αποζημιώσεις είναι πλήθος τυχαίων μεταβλητών, γι' αυτό χρησιμοποιούμε την ανωτέρω υπόθεση για τα y_{ij} . Υπάρχει ένα πλήθος θεμάτων που πρέπει να γίνουν στο μοντέλο αυτό. Αρχικά η δομή είναι η ίδια με αυτή του Kremer (1982), εκτός του ότι ενσωματώνονται σε μία διαφορετική μοντελοποίηση κατανομής; ο Kremer χρησιμοποίησε μια lognormal κατανομή. Δευτερευόντως, φαίνεται παράξενο να χρησιμοποιείται κατανομή Poisson για την μοντελοποίηση αποζημιώσεων και αυτό αντανakλάται και στα αποτελέσματα. Τρίτον, ο ορισμός μίας Poisson κατανομής μοντελοποίησης δεν σημαίνει ότι το μοντέλο εφαρμόζεται σε δεδομένα που είναι θετικοί ακέραιοι. Είναι εύκολο να γραφτεί η quasi-likelihood η οποία έχει όλα τα χαρακτηριστικά της Poisson πιθανοφάνειας, χωρίς στην πραγματικότητα να αναφέρεται άμεσα στην συνάρτηση πιθανότητας για τυχαία μεταβλητή της Poisson. Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί στις αρνητικά αυξανόμενες αποζημιώσεις, κτλ. και τα αποτελέσματα είναι πάντα τα ίδια με αυτά της τεχνικής της Chain Ladder (όπου $\sum_{i=1}^{n-j+1} y_{ij} > 0$ για όλα τα j).

Το βρίσκουμε ευκολότερο να παραμείνει η υπόθεση ότι τα δεδομένα ακολουθούν Poisson κατανομή αυτήν την στιγμή, παρόλο που στην συνέχεια μόνο η συνάρτηση της πιθανότητας είναι σημαντική. Προφανώς, αυτό το μοντέλο είναι λογικό όταν το τρίγωνο αποτελείται από τον αριθμό των αποζημιώσεων παρά την ποσότητα των αποζημιώσεων. Με σκοπό να δειχτεί η ισοδυναμία με την Chain Ladder, πρώτα υποθέτουμε ότι το τρίγωνο αποτελείται από αριθμό αποζημιώσεων, ταξινομημένων με βάση το έτος ατυχήματος i , και την καθυστέρηση αναφοράς j .

Η πιθανότητα μεγίστης πιθανοφάνειας που εκτιμάται για το μοντέλο που δίνεται από την (2.66) και την $\log m_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$ αποκτάται χρησιμοποιώντας τα GLM. Η συνολική εκτίμηση για τον συνολικό αριθμό των αποζημιώσεων σε κάθε έτος ατυχήματος μπορεί να αποκτηθεί από τα αθροίσματα:

$$C_{in} = C_{i,n-i+1} + \sum_{j=n-i+2}^n e^{\mu+\alpha_i+\beta_j}, \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (2.68)$$

Όπου μ , α_i και β_j είναι οι εκτιμήσεις μεγίστης πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους.

Οι ίδιες εκτιμήσεις της $\{C_{in} : i=2,3,\dots,n\}$ αποκτώνται χρησιμοποιώντας την ακόλουθη δεσμευμένη πιθανοφάνεια. Υποδηλώνοντας με $p_{(i)j}$ την δεσμευμένη πιθανότητα μίας αποζημίωσης ενός έτους ατυχήματος με δείκτη i , που ξέρουμε ότι έχει αναφερθεί, με καθυστέρηση j . Για το έτος ατυχήματος i , αυτή είναι η πιθανότητα για δοθέντα δείκτη καθυστέρησης j , ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος με $n-i+1$. Η συνήθης υπόθεση της στασιμότητας για την διαδικασία αναφοράς υπονοεί ότι η πιθανότητα η αποζημίωση να έχει αναφερθεί για κάθε έτος καθυστέρησης δεν εξαρτάται από το έτος ατυχήματος. Τότε:

$$p_{(i)j} = \frac{p_j}{\sum_{k=1}^{n-i+1} p_k}. \quad (2.69)$$

όπου p_j είναι η πιθανότητα για την αποζημίωση που έχει αναφερθεί με έτος καθυστέρησης j και $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

Αυτή η τελευταία υπόθεση υπονοεί ότι όλες οι αποζημιώσεις έχουν αναφερθεί μέχρι το τέλος του έτους καθυστέρησης n . Ισοδυναμεί με την υπόθεση της Chain Ladder ότι δεν μας ενδιαφέρει η εκτίμηση πέρα από C_{in} , δηλαδή πέρα από το τελευταίο έτος καθυστέρησης που έχουμε ήδη παρατηρήσει. Αυτό εξηγεί επίσης γιατί ο περιορισμός (2.67) είναι απαραίτητος, αφού διαφορετικά δεν θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πιθανότητες.

Η δεσμευμένη πιθανότητα L_c για αυτά τα δεδομένα μπορεί να αποκτηθεί χρησιμοποιώντας την πολυμεταβλητή κατανομή, και δίνεται από:

$$L_c = \prod_{i=1}^n \left(\frac{C_{i,n-i+1}!}{\prod_{j=1}^{n-i+1} y_{ij}!} \prod_{j=1}^{n-i+1} p_{(i)j}^{y_{ij}} \right). \quad (2.70)$$

Αυτή είναι μία δεσμευμένη πιθανότητα, δεδομένου ότι υπάρχει δεύσμευση ως προς το άθροισμα των γραμμών, $C_{i,n-i+1}$. Το γεγονός ότι είναι μια δεσμευμένη πιθανότητα και ότι είναι ισοδύναμο με ένα μοντέλο Poisson είναι πολύ σημαντικό σημείο, και αυτό έχει συχνά σημειωθεί στα σύνολα των τελευταίων γραμμών. Μεγιστοποιώντας την πιθανοφάνεια δίνει τις ακόλουθες εκτιμήσεις για το συνολικό αριθμό των αποζημιώσεων:

$$C_{in} = \frac{C_{i,n-i+1}}{1 - \sum_{j=n-i+2}^n p_j}, (i = 2, 3, \dots, n), \quad (2.71)$$

όπου p_j είναι η εκτίμηση της p_j που αποκτάται μεγιστοποιώντας την L_c .

Μπορεί να δειχτεί ότι το μοντέλο Poisson μπορεί να δώσει τις ίδιες εκτιμήσεις όπως η δεσμευμένη πιθανοφάνεια. Δηλαδή οι εξισώσεις (2.68) και (2.71) δίνουν τα ίδια αποτελέσματα.

Είναι μερικές φορές ευκολότερο να υπολογιστεί η εκτίμηση για το έτος ατυχήματος το οποίο έχει αναφερθεί μέχρι τον δείκτη καθυστέρησης j σε αντίθεση με την εξίσωση (2.71). Η εκτίμηση των τελικών αθροιστικών αποζημιώσεων για το έτος ατυχήματος $n - j + 1$ είναι:

$$C_{n-j+1,n} = \frac{C_{n-j+1,j}}{1 - \sum_{k=j+1}^n p_k}. \quad (2.72)$$

Αυτό μπορεί να συγκριθεί με τις εκτιμήσεις της Chain Ladder:

$$C_{n-j+1,n} = C_{n-j+1,j} \lambda_{j+1} \lambda_{j+2} \dots \lambda_n, \quad (2.73)$$

όπου

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}}. \quad (2.74)$$

Ο Rosenberg (1990) συνάγει μία απλή τεχνική για την απόκτηση εκτιμήσεων $\{p_j : j = 1, 2, \dots, n\}$, η οποία είναι αναδρομική. Αυτό μπορεί να γραφτεί εύκολα ως εξής: Υποθέτουμε ότι μπορούμε να έχουμε εκτιμήσεις των $p_n, p_{n-1}, \dots, p_{j+1}$. τότε η εκτίμηση των p_j είναι p_j , όπου :

$$p_j = \frac{y_{1j} + y_{2j} + \dots + y_{n-j+1,j}}{C_{1n} + \frac{C_{2,n-1}}{1-p_n} + \dots + \frac{C_{n-j+1,j}}{1-p_{j+1} - \dots - p_n}} = \frac{y_{1j} + y_{2j} + \dots + y_{n-j+1,j}}{C_{1n} + C_{2,n} + \dots + C_{n-j+1,n}}. \quad (2.75)$$

Σημειώνεται ότι $p_n = \frac{y_{1n}}{C_{1n}}$.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων $\{p_j : j=1,2,\dots,n\}$ είναι εκτιμήσεις μέγιστης πιθανοφάνειας για την πιθανοφάνεια L_c .

Τώρα θα δείξουμε ότι η τεχνική του Rosenberg είναι ισοδύναμη με την τεχνική της Chain Ladder. Αυτό θα δείξει ότι η τεχνική του Chain Ladder είναι ένας απλός τρόπος να βρεθούν οι εκτιμήσεις μέγιστης πιθανοφάνειας για την δεσμευμένη πιθανοφάνεια L_c , και συνεπώς και για το μοντέλο Poisson (2.66) και $\log m_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$ και $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Μπορεί να δειχτεί από τις εξισώσεις (2.72) και (2.73) ότι:

$$\lambda_{j+1}\lambda_{j+2}\dots\lambda_n = \frac{1}{1-p_{j+1}-p_{j+2}-\dots-p_n}, \quad (2.76)$$

και
$$\lambda_j\lambda_{j+1}\dots\lambda_n = \frac{1}{1-p_j-p_{j+1}-\dots-p_n}, \quad (2.77)$$

δηλαδή:

$$\lambda_j\lambda_{j+1}\dots\lambda_n = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_{j+1}\lambda_{j+2}\dots\lambda_n} - p_j}. \quad (2.78)$$

και
$$\lambda_j = \frac{1}{1-p_j\lambda_{j+1}\lambda_{j+2}\dots\lambda_n}. \quad (2.79)$$

Δείξαμε, με όπισθεν επαγωγή, ότι η εκτίμηση των λ_j , που αποκτώνται από την εξίσωση (2.79) χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.75), είναι ίδια που δίνεται από την εξίσωση (2.74). Αυτό είναι αληθές καθώς :

$$\lambda_n = \frac{1}{1-p_n} = \frac{1}{1-\frac{y_{1n}}{C_{1n}}} = \frac{C_{1n}}{C_{1n}-y_{1n}} = \frac{C_{1n}}{C_{1,n-1}}, \quad (2.80)$$

(χρησιμοποιώντας της (2.78) και (2.74)).

Όπου είναι η ίδια εξίσωση με την εξίσωση (2.74), όπου $j = n$.

Τώρα υποθέτουμε ότι τα αποτελέσματα περιορίζονται από $j+1, j+2, \dots, n$. Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (2.75) ως εξής :

$$p_j = \frac{y_{1j} + y_{2j} + \dots + y_{n-j+1,j}}{C_{1n} + C_{2,n-1}\lambda_n + \dots + C_{n-j+1,j}\lambda_{j+1}\dots\lambda_n}. \quad (2.81)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.79)

$$\lambda_j = \frac{1}{1 - \frac{y_{1j} + y_{2j} + \dots + y_{n-j+1,j}}{C_{1n} + C_{2,n-1}\lambda_n + \dots + C_{n-j+1,j}\lambda_{j+1}\dots\lambda_n} \lambda_{j+1}\lambda_{j+2}\dots\lambda_n}. \quad (2.82)$$

$$C_{1n} + C_{2,n-1}\lambda_n + \dots + C_{n-j+1,j}\lambda_{j+1}\dots\lambda_n = \lambda_{j+1}\dots\lambda_n \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}. \quad (2.83)$$

Συνεπώς, η εξίσωση (2.82) μπορεί να ξαναγραφτεί ως:

$$\lambda_j = \frac{1}{1 - \frac{y_{1j} + y_{2j} + \dots + y_{n-j+1,j}}{\lambda_{j+1}\dots\lambda_n \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}} \lambda_{j+1}\lambda_{j+2}\dots\lambda_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} - (y_{1j} + y_{2j} + \dots + y_{n-j+1,j})} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}}, \quad (2.84)$$

η οποία είναι η εκτίμηση του Chain Ladder. Συνεπώς, μπορεί να αποδειχτεί ότι με την επαγωγή η τεχνική του Rosenberg είναι ίση με την τεχνική του Chain Ladder.

Δείξαμε λοιπόν ότι με η τεχνική του Chain Ladder δίνει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα όπως το μοντέλο (2.66), $\log m_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$ και $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, υπό την υπόθεση (2.67). Έχουμε ένα αριθμό με διαφορετικούς τρόπους να αποκτήσουμε τις ίδιες εκτιμήσεις των $\{C_{1n} : i = 2, 3, \dots, n\}$: η τεχνική της Chain Ladder, η τεχνική του Rosenberg, και η εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας στα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα. Θα μπορούσαμε δικαίως να επιλέξουμε το γενικευμένο γραμμικό μοντέλο της Chain Ladder υπό την υπόθεση (2.67). Ωστόσο, επιλέγουμε να χαλαρώσουμε την υπόθεση ότι τα δεδομένα ακολουθούν Poisson κατανομή ενώ παραμένει ο ίδιος τύπος για το μοντέλο και την πιθανότητα. Δηλαδή, αποκτούμε τα ίδια αποτελέσματα, αλλά αποφεύγουμε να συγκεκριμενοποιήσουμε την κατανομή των δεδομένων. Αυτό σημαίνει ότι είναι πιθανόν να εφαρμόσουμε το γραμμικό μοντέλο της Chain Ladder στις ποσότητες αποζημιώσεων (προτιμότερο από τον αριθμό αποζημιώσεων). Επιπλέον, το γραμμικό μοντέλο μπορεί να χειριστεί αρνητικές αυξανόμενες αποζημιώσεις, υπό την συνθήκη (2.67).

2.5.2 Το μοντέλο Negative Binomial

Ένα μοντέλο που είναι σχετικά κοντά στο μοντέλο υπερ-διασποράς Poisson είναι το αρνητικό διωνυμικό μοντέλο. Αυτό το μοντέλο είναι το πιο ευκολονόητο για την μέθοδο της Chain Ladder, εφόσον οι παράμετροι είναι περισσότερο όμοιοι με τους παράγοντες εξέλιξης του Chain Ladder. Το αρνητικό διωνυμικό μοντέλο μπορεί να εκφραστεί ως μοντέλο αθροιστικών αποζημιώσεων. Το C_{ij} ακολουθεί μία αρνητική διωνυμική με υπερδιασπορά κατανομή, με μέση τιμή και διασπορά, αντίστοιχα:

$$(\lambda_j - 1)D_{i,j-1} \text{ και } \phi\lambda_j(\lambda_j - 1)D_{i,j-1}, \quad (2.85)$$

όπου λ_j είναι ανάλογο του τυπικού παράγοντα εξέλιξης της Chain Ladder. Υπάρχει επίσης μία άγνωστη παράμετρος ϕ στην διασπορά, μετατρέποντας έτσι την κατανομή σε κατανομή με υπερδιασπορά.

Σημειώνεται ότι $D_{ij} = D_{i,j-1} + C_{ij}$, και υποθέτοντας ότι σε αυτήν την προσέγγιση ότι το D_{ij} είναι γνωστό. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε αυτό το μοντέλο σε όρους αθροιστικών αποζημιώσεων. Η D_{ij} ακολουθεί μία αρνητική διωνυμική κατανομή με υπερδιασπορά, με μέσο και διακύμανση αντίστοιχα:

$$\lambda_j D_{i,j-1} \text{ και } \phi\lambda_j(\lambda_j - 1)D_{i,j-1}. \quad (2.86)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι γνωρίζουμε την διακύμανση μόνο όπου το $D_{i,j-1}$ είναι γνωστό. Το μοντέλο της αρνητικής διωνυμικής κατανομής αρχικά προήλθε από τον Verrall (2000), ενσωματώνοντας τις παραμέτρους της γραμμής από το μοντέλο Poisson. Εφόσον η αρνητική διωνυμική κατανομή προέρχεται από το μοντέλο Poisson, οι κατανομές πρόβλεψης (predictive distributions) είναι ουσιαστικά ίδιες, και δίνουν παρόμοιες τιμές πρόβλεψης.

2.5.3 Η κανονική προσέγγιση του Negative Binomial model

Παρατηρώντας ότι $\lambda_j < 1$, η διακύμανση των αυξανόμενων αποζημιώσεων, όπως φαίνεται από την δεύτερη σχέση της (2.86), είναι αρνητική, και το αρνητικό διωνυμικό μοντέλο δεν ευσταθεί. Το $\lambda_j < 1$ υποδηλώνει ότι το άθροισμα αυξανόμενων τιμών των αποζημιώσεων στην στήλη j είναι αρνητικό. Για να κάνουμε κάποια πρόοδο στην περίπτωση αυτή, είναι απαραίτητη η χρήση κατανομής της οποίας η βοήθεια δεν περιορίζεται στους θετικούς

πραγματικούς αριθμούς, και η καταλληλότερη κατανομή για αυτό το λόγο είναι η κανονική κατανομή. Κάποιες βελτιώσεις είναι πιθανόν να προταθούν, για να επιτραπεί το γεγονός ότι η κατανομή των δεδομένων είναι απίθανο να είναι συμμετρική. Ωστόσο το πρώτο στάδιο είναι να αντικαταστήσουμε την αρνητική διωνυμική κατανομή με την κανονική κατανομή, της οποίας ο μέσος όρος είναι ίδιος, και της οποίας η διακύμανση είναι τροποποιημένη για να διευκολύνει την περίπτωση που το $\lambda_j < 1$. Διατηρώντας όσο περισσότερο μπορούμε το $\lambda_j(\lambda_j - 1)D_{i,j-1}$, περιμένουμε την διακύμανση να είναι αναλογική του $D_{i,j-1}$, με την σταθερά της αναλογικότητας να εξαρτάται από το j . Χρησιμοποιώντας την κανονική προσέγγιση για την κατανομή των αυξανόμενων αποζημιώσεων C_{ij} τότε είναι κατά προσέγγιση κανονικά κατανεμημένα, με μέση τιμή και διακύμανση αντίστοιχα

$$D_{i,j-1}(\lambda_j - 1) \text{ και } \varphi_j D_{i,j-1}, \quad (2.87)$$

ή η D_{ij} είναι κατά προσέγγιση κανονικά κατανεμημένα με μέση τιμή και διακύμανση αντίστοιχα

$$\lambda_j D_{i,j-1} \text{ και } \varphi_j D_{i,j-1}. \quad (2.88)$$

Αυτά τα μοντέλα έχουν άγνωστες παραμέτρους στην διακύμανση, οι οποίες μπορούν να προβλεφθούν χρησιμοποιώντας μία επαναληπτική διαδικασία η οποία περιλαμβάνει εκτίμηση των παραμέτρων για το μέσο και την διασπορά, η οποία αποκλίνει από την συνήθης πρακτική της μοντελοποίησης μόνο του μέσου.

Το μοντέλο της αρνητικής διωνυμικής και της κανονικής προσέγγισης είναι μοντέλα αναδρομικά. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανοφάνεια γράφεται παίρνοντας τα δεδομένα με συγκεκριμένη (προφανής) σειρά. Ένα ακόμα μοντέλο που χρησιμοποιεί παρόμοια αναδρομική προσέγγιση, και είναι σχετική με την κανονική προσέγγιση και την αρνητικής διωνυμικής είναι το μοντέλο του Mack.

2.5.4 Το μοντέλο Mack-Ελευθερο κατανομής

Ένα από τα παλιότερα στοχαστικά μοντέλα που αναπαράγει τις εκτιμήσεις της Chain Ladder είναι το μοντέλο του Mack (1993), το οποίο κάνει περιορισμένες υποθέσεις για την κατανομή των υποκείμενων δεδομένων, χρησιμοποιώντας απλά τις δύο πρώτες ροπές. Σύμφωνα με τον Mack (1993), ο μέσος όρος και η διακύμανση είναι αντίστοιχα

$$\lambda_j D_{i,j-1} \text{ και } \sigma^2 D_{i,j-1}. \quad (2.89)$$

Ο Mack κατασκεύασε εκτιμητές για τις άγνωστες παραμέτρους λ_j και σ_j^2 και κάνοντας επιπλέον υποθέσεις παρείχε τύπο για τα σφάλματα εκτίμησης των προβλεπόμενων πληρωμών και των εκτιμήσεων των αποθεμάτων.

Ο Mack θεωρεί το μοντέλο να είναι ελεύθερο κατανομής, εφόσον η πλήρης κατανομή των υποκειμένων δεδομένων δεν είναι συγκεκριμένη. Ενώ αυτό έχει ως πλεονέκτημα την απλότητα, περιορίζει την ανάλυση της κατανομής των αποθεμάτων εκκρεμών ζημιών στις δύο πρώτες ροπές. Επιπλέον υποθέσεις είναι απαραίτητες αν τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται σε μία άσκηση δυναμικής οικονομικής ανάλυσης όπου η κατανομή αποθεμάτων εκκρεμών ζημιών μπορεί να προσομοιωθεί.

Συγκρίνοντας τον μέσο όρο και την διακύμανση της D_{ij} με τον μέσο όρο και την διακύμανση της D_{ij} της κανονικής προσέγγισης της αρνητικής διωνυμικής αποκαλύπτεται εντυπωσιακή ομοιότητα, με τις άγνωστες παραμέτρους κλίμακας φ_j της κανονικής προσέγγισης που αντικαταστάθηκε από την σ_j^2 του Mack μοντέλου. Στην πραγματικότητα οι εκτιμήσεις των παραμέτρων, οι προβλεπόμενες τιμές, τα σφάλματα πρόβλεψης που παρέχονται από τα δύο μοντέλα είναι όμοια.

Το στοχαστικό μοντέλο ελευθέρως κατανομής για την πρωτότυπη Chain Ladder είναι το ακόλουθο:

Με σκοπό να βρούμε ένα στοχαστικό μοντέλο υποκρυπτόμενου της μεθόδου Chain Ladder πρέπει να μετατρέψουμε την κεντρική σχέση της Chain Ladder

$$C_{ik} = C_{i,n+1-i} f_{n+1-i} x \dots x f_{k-1}, \quad i+k > n+1, \quad (2.90)$$

χρησιμοποιώντας στοχαστικούς όρους. Ένας τρόπος να γίνει αυτό φαίνεται παρακάτω.

Από την σχέση (2.90) έχουμε ότι

$$C_{i,k+1} = C_{ik} f_k, \quad k > n+1-i, \quad (2.91)$$

και αυτό γενικεύεται στο στοχαστικό μοντέλο

$$E(C_{i,k+1}) = E(C_{ik}) f_k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.92)$$

όπου C_{ik} είναι τυχαίες μεταβλητές και f_1, f_2, \dots, f_{n-1} είναι άγνωστες παράμετροι.

Οι αυξανόμενες ποσότητες είναι $S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$, $1 \leq i, k \leq n$ και με το περιορισμό $C_{i0} = 0$, το μοντέλο (2.92) είναι αντίστοιχο με το μοντέλο της S_{ik}

$$E(S_{ik}) = x_i y_k, \quad 1 \leq i, k \leq n, \quad (2.93)$$

με άγνωστες παραμέτρους x_i , $1 \leq i \leq n$ και y_k , $1 \leq k \leq n$, με $y_1 + \dots + y_n = 1$.

Υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές S_{ik} είναι ανεξάρτητες. Οι παράμετροι x_i , y_k μπορούν να εκτιμηθούν (με την μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας) υποθέτοντας οποιαδήποτε κατανομή για την S_{ik} . Τα στοχαστικά αυτά μοντέλα δεν μας οδηγούν σε ένα μοντέλο που να οδηγεί στην ίδιο τύπο αποθεμάτων όπως η πρωτότυπη Chain Ladder.

Αν συγκρίνουμε το μοντέλο (2.92) με την εκτίμηση της Chain Ladder (2.90), έχουμε ότι

$$C_{i,n+2-i} = C_{i,n+1-i} f_{n+1-i}. \quad (2.94)$$

Ενώ από την σχέση (2.92) έχουμε ότι:

$$C_{i,n+2-i} = E(C_{i,n+1-i}) f_{n+1-i}. \quad (2.95)$$

Η βασική διαφορά μεταξύ της σχέσης (2.94) και της σχέσης (2.95) είναι το γεγονός ότι στην σχέση (2.94) χρησιμοποιεί και την πραγματική παρατήρηση $C_{i,n+1-i}$ ως βάση της εκτίμησης ενώ η σχέση (2.95) λαμβάνει υπόψη την αναμενόμενη τιμή. Αυτό σημαίνει έμμεσα ότι η μέθοδος Chain Ladder πρέπει να χρησιμοποιήσει την υπόθεση η οποία ορίζει ότι η πληροφορία που περιέχεται στην πιο πρόσφατη παρατήρηση $C_{i,n+1-i}$ είναι πιο σχετική από τον μέσο όρο $E(C_{i,n+1-i})$. Αυτό δεόντως λαμβάνεται υπόψη από το μοντέλο

$$E(C_{i,k+1} / C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} f_k, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.96)$$

το οποίο είναι πιο περιοριστικό από ότι στην σχέση (2.92). Ωστόσο, χρησιμοποιώντας την σχέση (2.96) είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή $E(C_{ik} / D)$, $i+k > n+1$, δοθέντων των δεδομένων $D = \{C_{ik} / i+k \leq n+1\}$ που έχουν παρατηρηθεί μέχρι τώρα, και γνωρίζοντας την δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή είναι πιο χρήσιμη από την γνωστή μη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή $E(C_{ik})$ που αγνοεί την παρατήρηση D . Τελικά με το θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι χρησιμοποιώντας την σχέση (2.96) το μόνο που χρειαζόμαστε είναι να υποθέσουμε την ανεξαρτησία των ετών ατυχήματος, δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$\{C_{i1}, \dots, C_{in}\}, \{C_{j1}, \dots, C_{jn}\}, i \neq j, \quad (2.97)$$

είναι ανεξάρτητες.

Κάτω από τις υποθέσεις (2.96) και την (2.97) έχουμε για $k > n+1-i$

$$E(C_{ik} / D) = C_{i,n+1-i} f_{n+1-i} \times \dots \times f_{k-1}. \quad (2.98)$$

Το θεώρημα δείχνει ότι το στοχαστικό μοντέλο (2.96) παράγει ακριβώς τα ίδια αποθέματα όπως η αρχική Chain Ladder εάν εκτιμήσουμε τις παραμέτρους f_k με την σχέση

$$f_k = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{jk}}, 1 \leq k \leq n-1. \text{ Ωστόσο, βλέπουμε ότι η βάση πρόβλεψης } C_{i,n+1-i} \text{ στην σχέση}$$

(2.98) και την (2.90) δεν είναι η εκτίμηση της παραμέτρου $E(C_{i,n+1-i})$, αλλά προκύπτει δουλεύοντας την συνθήκη των δεδομένων που έχουν παρατηρηθεί μέχρι τώρα. Συνολικά, το μοντέλο (2.96) χρησιμοποιεί μόνο $n-1$ παραμέτρους f_1, \dots, f_{n-1} . Το τίμημα έχοντας λιγότερους παραμέτρους από ότι τα μοντέλα (2.92) ή (2.93) είναι το γεγονός ότι στο μοντέλο (2.96) δεν έχουμε καλό εκτιμητή για την $E(C_{in})$, οι οποίοι είναι οι επιπλέον παράμετροι των μοντέλων (2.92) ή (2.93).

Αλλά ακόμα και αν τα μοντέλα (2.93) δεν χρησιμοποιούν το $E(C_{in})$ ως εκτιμητή του τελικού ποσού αποζημιώσεων εξαιτίας του ότι δεν έχει νόημα δεδομένου ότι η γνώση της $E(C_{in})$ δεν είναι χρήσιμη (επειδή ήδη γνωρίζουμε την ακριβή C_{in}) και ότι κάποιος μπορεί να έχει $E(C_{in}) < C_{i,n+1-i}$ (για παράδειγμα για $i=2$) το οποίο οδηγεί σε αρνητικό απόθεμα αποζημίωσης. Τα μοντέλα (2.93) εκτιμάνε το ποσό των τελικών αποζημιώσεων εκτιμώντας

$$C_{i,n+1-i} + E(S_{i,n+2-i} + \dots + S_{in}), \quad (2.99)$$

Δηλαδή εκτιμάται το απόθεμα των αποζημιώσεων $R_i = C_{in} - C_{i,n+1-i} = S_{i,n+2-i} + S_{in}$ εκτιμώντας $E(R_i) = E(S_{i,n+2-i} + \dots + S_{in})$. Αν υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις πραγματικές παραμέτρους x_i, y_k του μοντέλου (2.93) και f_k του μοντέλου (2.96), μπορούμε να ξεκαθαρίσουμε την βασική διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων με τον ακόλουθο τρόπο: το απόθεμα των αποζημιώσεων του μοντέλου (2.93) θα είναι

$$E(R_i) = x_i (y_{n+2-i} + \dots + y_n). \quad (2.100)$$

Ανεξαρτήτως των παρατηρούμενων δεδομένων D , δηλαδή αυτό δεν θα αλλάξει αν προσομοιώσουμε διαφορετικές ομάδες δεδομένων από την υποκείμενη κατανομή. Από την άλλη πλευρά, εξαιτίας του προηγούμενου θεωρήματος, το μοντέλο (2.96) οδηγεί κάθε φορά σε ένα διαφορετικό απόθεμα αποζημιώσεων

$$E(R_i / D) = C_{i,n+1-i} (f_{n+1-i} x \dots x f_{n-1} - 1), \quad (2.101)$$

καθώς $C_{i,n+1-i}$ οι αλλαγές από την μία προσομοίωση με την επόμενη.

Στην πράξη, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιούμε την μέθοδο Chain Ladder (2.90) ή την (2.96) εάν πιστεύουμε ότι η απόκλιση

$$C_{i,n+1-i} - E(C_{i,n+1-i}), \quad (2.102)$$

είναι ενδεικτική για την μελλοντική εξέλιξη των αποζημιώσεων.

2.5.5 Το μοντέλο Log-Normal

Τα μοντέλα στοχαστικής αποθεματοποίησης δεν περιορίζονται στην μοντελοποίηση κατανομών που προαναφέρθηκαν. Η κατανομή Log-Normal, η οποία χρησιμοποιήθηκε στην αρχική εργασία της στοχαστικής αποθεματοποίησης αποζημιώσεων, έχει λάβει σημαντική προσοχή.

Η πρώτη εργασία πάνω στα στοχαστικά μοντέλα για την τεχνική Chain Ladder εστίασε στον λογάριθμο των ποσών των αυξανόμενων αποζημιώσεων $Y_{ij} = \log(c_{ij})$ και στην τάξη των log-normal μοντέλων $Y_{ij} = m_{ij} + \varepsilon_{ij}$, όπου ε_{ij} είναι ανεξάρτητα κανονικά τυχαία σφάλματα. Δηλαδή έχουμε ότι

$$\varepsilon_{ij} \sim IN(0, \sigma^2) \text{ ή } Y_{ij} \sim IN(m_{ij}, \sigma^2). \quad (2.103)$$

Η χρήση της λογαριθμικής μετατροπής αμέσως επιβάλλει ένα περιορισμό στην τάξη των μοντέλων καθώς οι αυξανόμενες αποζημιώσεις θα πρέπει να είναι θετικές. Οι τιμές Y_{ij} διαχωρίζονται σε ντετερμινιστικά, μη τυχαία, συστατικά με μέσο $m_{ij} = \eta_{ij}$ και σε κανονικά κατανομημένα συστατικά τυχαίου σφάλματος με μηδενικό μέσο. Χρησιμοποιώντας τον τύπο της Chain Ladder για τον μέσο, δίνεται ότι :

$$\eta_{ij} = c + a_i + \beta_l. \quad (2.104)$$

Αυτό το λογαριθμικό μοντέλο παρουσιάστηκε από τον Kremer (1982) και χρησιμοποιήθηκε από τον Renshaw (1989), Verrall (1989), Zehnwirth (1989) και Christofides (1989), μεταξύ άλλων. Η χρήση αυτών των μοντέλων συνήθως παράγει προβλεπόμενες τιμές κοντά σε αυτές της απλής Chain Ladder μέθοδου.

Η Log-Normal κατανομή έχει ως πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σχετικά εύκολα. Ένα ακόμα πλεονέκτημα είναι ότι άλλες στατιστικές τεχνικές μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθούν για να επιτραπεί η χρήση διαφορετικών υποθέσεων αναφορικά με το σχήμα αθροιστικών ζημιών και τις συνδέσεις μεταξύ των αρχικών ετών. Αφού Y_{ij} είναι κανονικά κατανομημένη, είναι πιθανόν να εφαρμοστεί το φίλτρο του Kalman. Το φίλτρο του Kalman επιτρέπει για παράδειγμα, ένα τρόπο να εξομαλύνουμε τις παραμέτρους των γραμμών, σε αντίθεση με τη μεταχείριση των γραμμών ως εντελώς ξεχωριστές οντότητες.

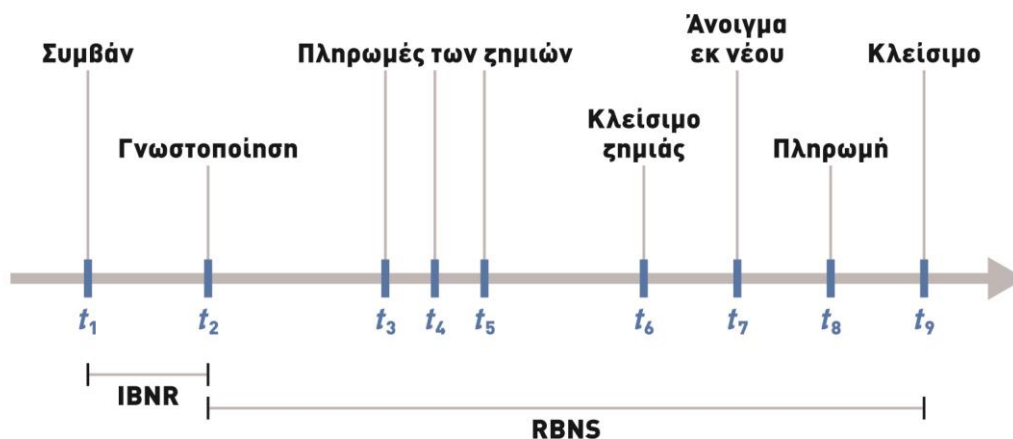
2.5.6 Το μοντέλο Gamma

Ο Mack (1991) πρότεινε να χρησιμοποιηθεί ο ίδιος γραμμικός εκτιμητής όπως του Kremer, αλλά πρότεινε να χρησιμοποιηθεί η Gamma κατανομή για τα ποσά των αποζημιώσεων. Οι Renshaw και Verrall (1998) σημείωσαν ότι το ίδιο μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί χρησιμοποιώντας GLM όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 2.5.1, αλλά αντικαθιστούμε την $Var[C_{ij}] = \phi m_{ij}$ με την $Var[C_{ij}] = \phi m_{ij}^2$. Οι προβλεπόμενες τιμές που προκύπτουν από το μοντέλο είναι συνήθως κοντά στις εκτιμήσεις της Chain Ladder.

Κεφάλαιο 3: Η micro level προσέγγιση της αποθεματοποίησης

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το σημείο θα αναπτυχθεί ένα micro-level στοχαστικό μοντέλο για τις ροές των αποζημιώσεων των γενικών ασφαλίσεων. Στην σχήμα 3.1 απεικονίζεται η διαδικασία της ροής (ή της εξέλιξης) μίας απαίτησης γενικών ασφαλίσεων. Στην εικόνα φαίνεται ότι η απαίτηση συμβαίνει σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή (t_1), στη συνέχεια δηλώνεται στην ασφαλιστική την χρονική στιγμή (t_2) (πιθανώς μετά από μία περίοδο καθυστέρησης) και ακολουθούν μία ή περισσότερες πληρωμές μέχρι την εκκαθάριση της απαίτησης (ή το κλείσιμο της απαίτησης). Η απαίτηση μπορεί να ανοίξει πάλι και να γίνουν και άλλες πληρωμές μέχρι την τελική εκκαθάριση της απαίτησης. Αυτό εξαρτάται από την φύση της επιχείρησης και της απαίτησης. Την παρούσα στιγμή (ας την ονομάσουμε t) ο ασφαλιστής πρέπει να κρατήσει απόθεμα για να ικανοποιήσει τις μελλοντικές του υποχρεώσεις. Η ασφαλιστική εταιρεία, οι μέτοχοι, το ρυθμιστικό σώμα, και η φορολογική αρχή ενδιαφέρεται για μία αυστηρή εικόνα της κατανομής των μελλοντικών πληρωμών που αντιστοιχεί στις ανοιχτές απαιτήσεις (δηλαδή όχι των εκκαθαρισμένων) μέσα από μια αποθεματοποίηση των απαιτήσεων. Οι ασφαλιστικές εταιρείες γενικών ασφαλίσεων κάνουν διάκριση των αποθεμάτων σε αποθέματα Reported But Not Settled και σε αποθέματα Incured But Not Reported. Οι απαιτήσεις RBNS είναι αυτές που έχουν αναφερθεί αλλά δεν έχουν εκκαθαριστεί, ενώ οι IBNR έχουν συμβεί αλλά δεν έχουν αναφερθεί. Για την απαίτηση RBNS, το περιστατικό και η δήλωση έχει συμβεί πριν την τρέχουσα στιγμή και η εκκαθάριση γίνεται μετά (δηλαδή $t \geq t_2$ και $t < t_6$ (ή t_9) στο σχήμα 3.1. Η IBNR απαίτηση έχει συμβεί πριν την τρέχουσα στιγμή t , αλλά η δήλωση και η εκκαθάριση γίνεται κατόπιν (δηλαδή $t \in [t_1, t_2)$ στο σχήμα 3.1). Το διάστημα $[t_1, t_2]$ παριστάνει την ονομαζόμενη καθυστέρηση αναφοράς (reporting delay). Το διάστημα $[t_2, t_6]$ (ή $[t_2, t_9]$) συχνά αναφέρεται ως καθυστέρηση εκκαθάρισης (settlement delay). Οι βάσεις δεδομένων των εταιριών γενικών ασφαλίσεων τυπικά περιέχουν λεπτομερείς πληροφορίες σχετικά με την ροή της διαδικασίας των ιστορικών και τρέχοντων απαιτήσεων. Η κατασκευή του σχήματος 3.1 είναι κοινή για το είδος των πληροφοριών που είναι διαθέσιμες. Χρησιμοποιούμε την ονομασία micro-level δεδομένα για να υποδηλώσουμε αυτό το είδος της κατασκευής δεδομένων.



Σχήμα 3-1: Εξέλιξη μίας τυχαίας απαίτησης

Με την εισαγωγή του Solvency 2 (το 2012) και του International Financial Reporting Standards 4 φάση 2 (το 2013) οι ασφαλιστικές εταιρίες αντιμετωπίζουν μεγαλύτερες προκλήσεις. Στο IFRS 4 φάση 2 ορίζεται ένα νέο υπολογιστικό μοντέλο για τα ασφαλιστικά συμβόλαια, που βασίζεται στην τιμή αγοράς των υποχρεώσεων. Στο έγγραφο “Preliminary Views on Insurance Contracts” (IAS, May 2007) το International Accounting Standards Board καθορίζει ότι ο ασφαλιστής πρέπει να βασίζει τις μετρήσεις του για όλες τις ασφαλιστικές υποχρεώσεις (για την αποθεματοποίηση) στις ‘καλύτερες εκτιμήσεις’ των ροών που προέρχονται από συμβάσεις, προεξοφλώντας με το τρέχον προεξοφλητικό επιτόκιο. Επιπλέον, πρέπει να προστεθεί ένα περιθώριο που αναμένεται να χρειαστούν οι συμμετέχοντες στην αγορά για την αντιμετώπιση πιθανών κινδύνων. Το Solvency 2 οδηγεί σε αλλαγή της νομοθεσίας, αυτό σημαίνει ότι οι ασφαλιστές χρειάζονται να υποβάλλουν το κεφάλαιο φερεγγυότητας. Ανάλογα με το είδος της επιχείρησης, αυτήν την στιγμή το κεφάλαιο που απαιτείται είναι ένα σταθερό ποσοστό του αποθέματος, του risk capital, των ασφαλιστρών ή των απαιτήσεων. Στο Solvency 2, το ονομαζόμενο Solvency Capital Requirement, είναι βασισμένο στο κίνδυνο, και οι τιμές της αγοράς των περιουσιακών στοιχείων και οι απαιτήσεις θα είναι η βάση σε αυτούς τους υπολογισμούς. Η μέτρηση των μελλοντικών ροών και η αβεβαιότητα γίνεται όλο και περισσότερο σημαντική. Αυτό μας οδηγεί στην ερώτηση εάν οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται μπορούν να βελτιωθούν. Προς το παρόν, η αποθεματοποίηση για τις γενικές ασφαλίσεις βασίζεται σε συνολικά δεδομένα τριγωνικών ροών. Σε ένα τρίγωνο ροών οι παρατηρήσιμες μεταβλητές συνοψίζονται σε ένα συνδυασμό έτους άφιξης και τους έτους εξέλιξης. Ο όρος έτος άφιξης ή έτος συμβάντος

χρησιμοποιείται στις γενικές ασφαλίσεις για να υποδείξει το έτος που συμβαίνει το ατύχημα. Για την απαίτηση του έτους άφιξης t , το πρώτο έτος εξέλιξης θα είναι το ίδιο το έτος t , το δεύτερο έτος εξέλιξης θα είναι το $t+1$ και ούτω καθεξής. Μία τεράστια βιβλιογραφία υπάρχει για τις τεχνικές της αποθεματοποίησης, κατά κύριο λόγο σχεδιασμένες για την εφαρμογή των τριγωνικών απωλειών. Αυτές οι τεχνικές που ισχύουν για τα τρίγωνα ροών περιέχουν πληρωθείσες απώλειες ή επισυμβάσεις απώλειες (δηλαδή το άθροισμα των πληρωθεισών απωλειών και των εκτιμώμενων αποθεμάτων). Η πιο γνωστή προσέγγιση είναι το μοντέλο της Chain Ladder, που έχουμε ήδη αναφέρει, κυρίως λόγω πρακτικότητας. Για το στοχαστικό μοντέλο της Chain Ladder ισχύει ένα μοντέλο παλινδρόμησης Poisson των παρατηρήσεων σε ένα τρίγωνο ροών, μέσω του οποίου το έτος άφιξης και εξέλιξης χρησιμοποιούνται ως κατηγορικές μεταβλητές. Η χρήση των συνολικών δεδομένων σε συνδυασμό με την προσέγγιση Chain Ladder οδηγεί σε διάφορα θέματα. Ολόκληρη βιβλιογραφία έχει αναπτυχθεί για να λύσει τα παρακάτω θέματα:

1. Διαφορετικά αποτελέσματα των εκτιμήσεων που βασίζονται σε πληρωθείσες και επισυμβάσεις αποζημιώσεις, δημοσιευμένο από τους Quarg και Mack(2008), Postuma et al (2008) και Halliwell (2009).
2. Έλλειψη ευστάθειας, Verdonck et al, 2009.
3. Η ύπαρξη της διαστρέβλωσης της Chain Ladder, Halliwell (2007) και Taylor (2003).
4. Η αβεβαιότητα των τελικών αποζημιώσεων στα πιο πρόσφατα έτη άφιξης, Bornhuetter και Ferguson (1972)
5. Μοντελοποίηση των αρνητικών και μηδενικών κελιών σε ένα στοχαστικό περιβάλλον, Kunkler (2004)
6. Η ενσωμάτωση των επιδράσεων των ημερολογιακών ετών, Verbeek (1972) και Zehnwirth (1994).
7. Η πιθανή διαφορετική αντιμετώπιση των μικρών και μεγάλων αποζημιώσεων , Wuthrich και Alai (2009)
8. Η ανάγκη να συμπεριληφθεί ένας παράγοντας ουράς, Mack (1999).
9. Υπερ-παραμετροποίηση της Chain Ladder, Wright (1990) και Renshaw (1994).
10. Ξεχωριστή εκτίμηση των IBNR και των RBNS αποζημιώσεων, Schnieper (1991) και Liu & Verall (2009).
11. Η πραγματοποίηση της Poisson κατανομής υποκείμενη της Chain Ladder

12. Όταν χρησιμοποιούμε αθροιστικά δεδομένα, πολλές χρήσιμες πληροφορίες των δεδομένων των αποζημιώσεων παραμένουν ανεκμετάλλευτα, Enland&Verall (2002) και Taylor και λοιποί (2008).

Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες, οι παραπάνω αναφορές παρουσιάζουν χρήσιμες προσθήκες ή σχόλια της μεθόδου Chain Ladder, αλλά αυτές οι προσθήκες δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα. Το πιο σημαντικό είναι ότι η ύπαρξη αυτών των θεμάτων και η βιβλιογραφία σχετικά με αυτά δείχνει ότι η χρήση των συνολικών δεδομένων σε συνδυασμό με την τεχνική του Chain Ladder δεν είναι πάντα κατάλληλα να συλλάβουν την πολυπλοκότητα της στοχαστικής αποθεματοποίησης των γενικών ασφαλίσεων. Οι England και Verall (2002) και ο Taylor (2008) αμφισβητούν την χρήση των συνολικών δεδομένων όταν εκτενή micro-level δεδομένα είναι επίσης διαθέσιμα. Με τα συνολικά δεδομένα πολλές χρήσιμες πληροφορίες για τις απαιτήσεις παραμένουν αχρησιμοποίητες. Πληροφορίες από κατηγορικές μεταβλητές για το συμβόλαιο, το κάτοχο του συμβολαίου ή την διαδικασία εξέλιξης του παρελθόντος δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο παραδοσιακό στοχαστικό μοντέλο, εφόσον κάθε κελί του τριγώνου είναι ένα συνολικός αριθμός.

Ως αποτέλεσμα των παρατηρήσεων που αναφέρθηκαν προηγουμένως, υπάρχει μικρή δραστηριότητα στην βιβλιογραφία που προβάλλει την στοχαστική αποθεματοποίηση σε ατομικό επίπεδο απαιτήσεων. Οι Arjas (1989), Norberg (1993) και Norberg (1999) διατυπώνουν ένα μαθηματικό πλαίσιο για την εξέλιξη ατομικών απαιτήσεων. Χρησιμοποιώντας ιδέες από την θεωρία στιγματικών ανεξίτητων (martingale theory) και τις σημειακές διαδικασίες (point processes), αυτοί οι συγγραφείς παρουσιάζουν ένα πιθανοθεωρητικό πλαίσιο για την αποθεματοποίηση των ατομικών απαιτήσεων. Οι Haastруп και Arjas (1996) συνέχισαν την δουλειά του Norberg και παρουσίασαν την πρώτη λεπτομερή εφαρμογή ενός micro-level στοχαστικού μοντέλου για την αποθεματοποίηση χρησιμοποιώντας μη παραμετρικές μπευζιανές τεχνικές. Επιπλέον, η εξεταζόμενη περίπτωση είναι βασισμένη σε μικρό σύνολο δεδομένων με σταθερές ποσότητες απαιτήσεων. Πρόσφατα, ο Larsen (2007), επανεξέτασε την δουλειά του Norberg, Haastруп και Arjas σε μία μικρή μελέτη περιπτώσεων. Ο Zhao (2009) και ο Zhao και Zhou (2010) παρουσίασαν ένα μοντέλο με την ατομική εξέλιξη απαιτήσεων (ημί-παραμετρικών) τεχνικών από ανάλυση επιβίωσης και μεθόδων σύζευξης.

Ένα micro-level στοχαστικό μοντέλο θα αναπτυχθεί για να εκτιμηθεί το απόθεμα και την αβεβαιότητα του για ένα ρεαλιστικό χαρτοφυλάκιο υποχρεώσεων γενικών ασφαλίσεων. Στοχαστικές διαδικασίες για τον χρόνο του περιστατικού, την καθυστέρηση αναφοράς, την διαδικασία εξέλιξης και τις πληρωμές εφαρμόζονται σε ιστορικά ατομικά δεδομένα του χαρτοφυλακίου και χρησιμοποιούνται για πρόβλεψη των μελλοντικών απαιτήσεων και της αβεβαιότητας τους. Το απόθεμα IBNR και το απόθεμα RBNS θα εκτιμηθούν και τα αποτελέσματά τους θα συγκριθούν με τις παραδοσιακές αναλογιστικές τεχνικές.

Θα εξετάσουμε εάν η ποιότητα των αποθεμάτων και της αβεβαιότητας τους βελτιώνεται χρησιμοποιώντας περισσότερο λεπτομερή δεδομένα απαιτήσεων σε αντίθεση με τα κλασικά τρίγωνα ροών. Πράγματι, η micro-level προσέγγιση επιτρέπει πλησιέστερη μοντελοποίηση της διαδικασίας απαιτήσεων. Για παράδειγμα, πληροφόρηση ανεξάρτητων μεταβλητών (αφαιρετέα ποσά, όρια συμβολαίων, ημερολογιακό έτος) μπορεί να περιληφθεί στην πρόβλεψη των ροών όταν οι απαιτήσεις μοντελοποιούνται σε ατομικό επίπεδο. Με την χρήση πολλών δεδομένων αποφεύγεται τα προβλήματα ευστάθειας και η υπερπαραμετροποίηση. Επίσης το πρόβλημα με τα μηδενικά ή αρνητικά κελιά και ο ορισμός του παράγοντα ουράς παρακάμπτονται, όπως επίσης μικρές και μεγάλες απαιτήσεις μπορούν να διαχειρίζονται ταυτόχρονα. Επιπλέον, η μοντελοποίηση ατομικών απαιτήσεων μπορεί να δώσει μία φυσική λύση του διλήμματος που υπάρχει στην παραδοσιακή βιβλιογραφία εάν τα τρίγωνα πρέπει να περιλαμβάνουν πληρωθείσες απαιτήσεις ή επισυμβάσεις απαιτήσεις. Οι πραγματοποιημένες πληρωμές είναι άθροισμα των πληρωμένων απωλειών και των αποθεμάτων τους. Χρησιμοποιώντας τα micro-level δεδομένα χρησιμοποιούμε το *εκ των προτέρων* απόθεμα ως ανεξάρτητη μεταβλητή στην διαδικασία εκτίμησης των μελλοντικών ροών.

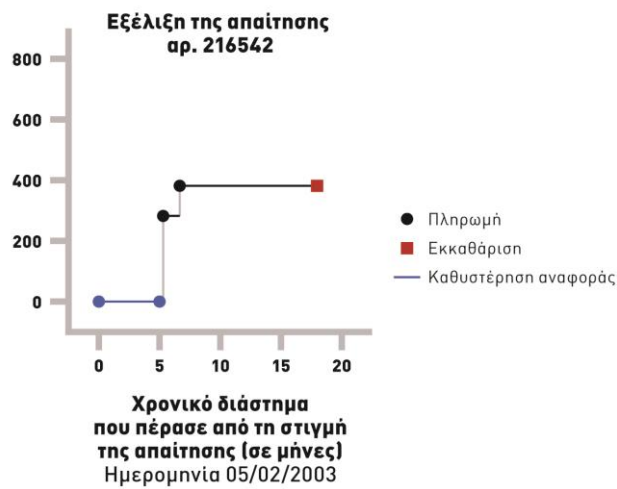
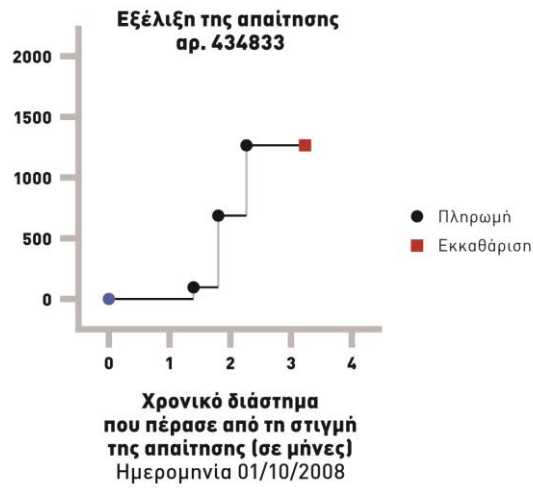
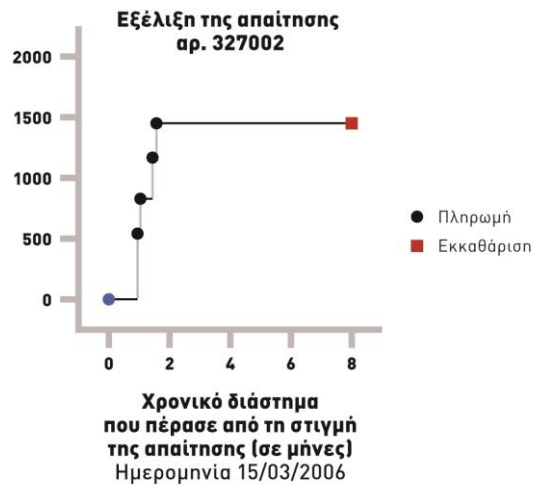
Το σύνολο των δεδομένων στο παράδειγμα που χρησιμοποιήθηκε στην δημοσίευση των Kartien Antonio and Richard Plat (2010) περιέχει πληροφορίες σχετικά με το χαρτοφυλάκιο υποχρεώσεων γενικής ασφάλισης (για ιδιώτες) μίας Ευρωπαϊκής ασφαλιστικής εταιρείας. Τα δεδομένα απαρτίζονται από την έκθεση στον κίνδυνο ανά μήνα από τον Ιανουάριο 2000 μέχρι τον Αύγουστο 2009, καθώς επίσης και από ένα αρχείο απαιτήσεων που παρέχει την καταχώρηση κάθε αρχειοθετημένης απαίτησης με τον ασφαλιστή από τον Ιανουάριο 1997 μέχρι τον Αύγουστο 2009. Πρέπει να σημειωθεί ότι λείπουν οι πληροφορίες της έκθεσης στον κίνδυνο για την περίοδο από τον Ιανουάριο 1997 μέχρι το Δεκέμβριο 1999, αλλά η επίδραση της έλλειψης αυτής στους υπολογισμούς του αποθέματός είναι αμελητέα.

Η έκθεση. Η έκθεση δεν είναι ο αριθμός των συμβολαίων, αλλά η συνολική έκθεση. Αυτό υπονοεί ότι δύο συμβόλαια που είναι και τα δύο ασφαλισμένα για την μισή περίοδο υπολογίζονται ως ένα.

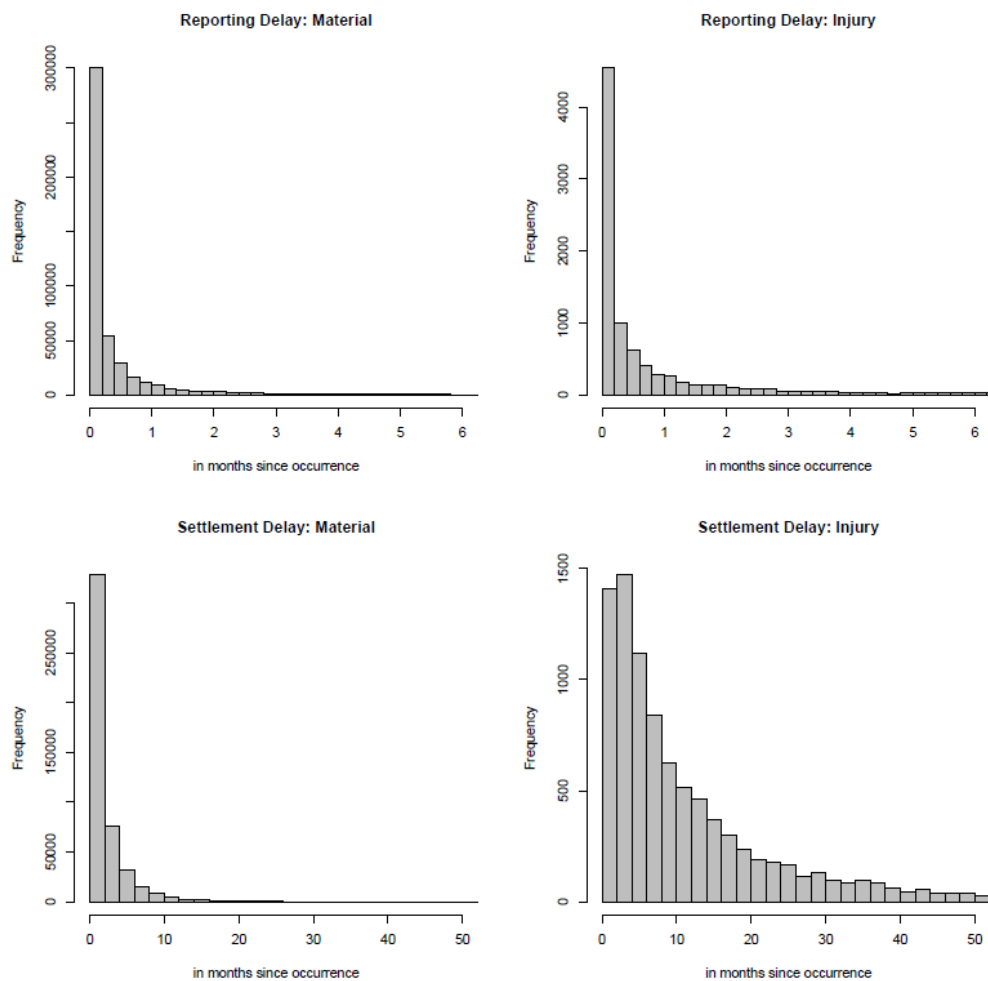
Οι τυχαίες διαδικασίες εξέλιξης. Το σχήμα 3.2 δείχνει την εξέλιξη τριών τυχαίων απαιτήσεων. Δείχνει πότε συμβαίνουν χρονικά τα γεγονότα καθώς επίσης και το κόστος των αντίστοιχων πληρωμών (αν υπάρχουν). Αυτές φαίνονται σαν άλματα στην εικόνα. Σημείο εκκίνησης της διαδικασίας εξέλιξης είναι η ημερομηνία του ατυχήματος που αντιστοιχεί στο $x=0$. Ο άξονας των x είναι σε μήνες. Ο άξονας των y αναπαριστάει το συσσωρευτικό ποσό πληρωμών για την απαίτηση.

Το είδος και ο αριθμός απαιτήσεων. Στο χαρτοφυλάκιο γενικών απαιτήσεων, αντιμετωπίζουμε δύο τύπους απαιτήσεων: τις υλικές ζημιές και της σωματικές βλάβες. Παρακολουθείται ο αριθμός των απαιτήσεων για κάθε έτος άφιξης, δηλαδή αν έχουν κλείσει ή είναι ακόμα ανοιχτές οι απαιτήσεις την χρονική στιγμή που τις μελετάμε. Το πρότυπο εξέλιξης καθώς και η κατανομή απώλειας αυτών των τύπων των απαιτήσεων είναι συνήθως διαφορετικές. Στην πράξη αντιμετωπίζονται ξεχωριστά σε τρίγωνα ροών. Ακολουθώντας αυτήν την προσέγγιση, θα πρέπει να τις μεταχειριστούμε επίσης ξεχωριστά.

Η καθυστέρηση αναφοράς και η καθυστέρηση εκκαθάρισης. Σημαντικοί οδηγοί για τα αποθέματα IBNR και RBNS είναι οι καθυστερήσεις αναφοράς και οι καθυστερήσεις εκκαθάρισης. Στο σχήμα 3.3 φαίνονται οι καθυστερήσεις αναφοράς και οι καθυστερήσεις εκκαθάρισης για τις υλικές και σωματικές βλάβες, του παραδείγματος του Katrien A. and Plat R. (2010) Η καθυστέρηση αναφοράς είναι ο χρόνος που πέρασε μεταξύ της ημέρας γεγονότος και της ημέρας που έγινε η αναφορά στην ασφαλιστική εταιρεία. Μετριέται σε μήνες στο παράδειγμα του Katrien A. and Plat R. (2010) από τότε που συνέβη η απαίτηση. Η καθυστέρηση αναφοράς είναι διαθέσιμη για αποζημιώσεις που έχουν αναφερθεί στον ασφαλιστή μέχρι την τρέχουσα στιγμή. Η καθυστέρηση εκκαθάρισης είναι ο χρόνος που περνάει μεταξύ την ημερομηνίας αναφοράς και της ημερομηνίας της τελικής εκκαθάρισης από την ασφαλιστική εταιρεία. Στο σχήμα 3.3 φαίνεται ότι οι παρατηρούμενες καθυστερήσεις αναφοράς είναι παρόμοιου μήκους για υλικές και σωματικές βλάβες. Ωστόσο, η καθυστέρηση εκκαθάρισης είναι πολύ διαφορετική. Η καθυστέρηση εκκαθάρισης είναι πιο ασύμμετρη για τις σωματικές βλάβες από ότι στις υλικές βλάβες.



Σχήμα 3-2 Εξέλιξη τυχαίων απαιτήσεων



Σχήμα 3-3 Καθυστερήσεις αναφοράς και καθυστερήσεις εκκαθάρισης για τις υλικές και σωματικές βλάβες

Τα γεγονότα εξέλιξης. Διακρίνουμε τρεις τύπους γεγονότων που μπορεί να συμβούν κατά την διάρκεια εξέλιξης της απαίτησης. Γεγονότα τύπου 1, υπονοεί την εκκαθάριση των απαιτήσεων χωρίς πληρωμή. Γεγονότα τύπου 2, αναφερόμαστε σε πληρωμή και εκκαθάριση την ίδια στιγμή. Γεγονότα τύπου 3, είναι ενδιάμεσες πληρωμές (χωρίς εκκαθάριση). Για τα micro-level δεδομένα το πρώτο τρίμηνο εξέλιξης είναι η περίοδος των τριών μηνών που ακολουθεί την ημερομηνία αποτίμησης της απαίτησης, το δεύτερο τρίμηνο είναι η περίοδος των τριών μηνών που ακολουθεί το πρώτο τρίμηνο εξέλιξης και ούτω καθεξής. Στο τελευταίο τρίμηνο εξέλιξης συλλέγουμε το υπόλοιπο της εξέλιξης. Συνήθως η αναλογία κάθε τύπου γεγονότος είναι σταθερή στα τρίμηνα εξέλιξης για τις σωματικές βλάβες. Για τις υλικές απαιτήσεις, η αναλογία των γεγονότων τύπου 2 μειώνεται τα τελευταία τρίμηνα εξέλιξης, ενώ η αναλογία των γεγονότων τύπου 3 αυξάνεται.

Οι πληρωμές. Τα γεγονότα τύπου 2 και τύπου 3 έχουν πληρωμές. Η κατανομή αυτών των πληρωμών διαφέρει ουσιαστικά για τους διάφορους τύπους των απαιτήσεων. Στις πληρωμές γίνεται προεξόφληση στις 1-1-1997 με την τιμή πληθωρισμού, αποκλείοντας την επίδραση του πληθωρισμού στην κατανομή των πληρωμών.

Εκ των προτέρων εκτιμήσεις. Όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως οι εκτιμήσεις που βασίζονται σε πληρωμένες απώλειες είναι διαφορετικές από τις εκτιμήσεις που βασίζονται σε επισυμβάσεις απώλειες. Σε αυτό το πρόβλημα αναφέρθηκαν πρόσφατα οι Mack και Quarg (2008), Postuma και λοιποί (2008) και Halliwell (2009), οι οποίοι ταυτόχρονα μοντελοποίησαν πληρωμένες και επισυμβάσεις απώλειες. Μειονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι ότι τα μοντέλα που βασίζονται σε επισυμβάσεις απώλειες μπορεί να είναι ασταθή εξαιτίας του γεγονότος ότι οι μέθοδοι που ορίζουν τα εκτιμώμενα αποθέματα αλλάζουν συχνά (για παράδειγμα, ως αποτέλεσμα της επάρκειας των αποτελεσμάτων των ελέγχων ή τα κέρδη των συμβολαίων της εταιρίας). Τα μοντέλα αποθεματοποίησης που βασίζονται άμεσα πάνω σε αυτά τα εκτιμώμενα αποθέματα μπορεί να είναι ασταθή. Ωστόσο, τα εκτιμώμενα αποθέματα μπορεί να προστεθούν ως επεξηγηματική μεταβλητή όταν εκτιμώνται οι μελλοντικές πληρωμές. Έχουμε ορίσει διαφορετικές κατηγορίες *εκ των προτέρων* εκτιμώμενων αποθεμάτων (ξεχωριστά για υλικές και για σωματικές απαιτήσεις) που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως επεξηγηματικές μεταβλητές. Ο αριθμός των απαιτήσεων, ο μέσος όρος της καθυστέρησης εκκαθάρισης (σε μήνες) και ο μέσος όρος αθροιστικών πληρωθεισών ποσών για αυτές τις κατηγορίες, οι διαφορές στην καθυστέρηση εκκαθάρισης και στις αθροιστικές πληρωμές για τις διαφορετικές *εκ των προτέρων* κατηγορίες αποθεμάτων. Ίσως αξίζει να περιλάβουμε αυτές τις κατηγορίες ως επεξηγηματικές μεταβλητές στην ρουτίνα πρόβλεψης.

3.2 Το στατιστικό μοντέλο

Με μια απαίτηση i γίνεται κατανοητός ο συνδυασμός του χρόνου του περιστατικού T_i , της καθυστέρησης της αναφοράς U_i και της διαδικασίας εξέλιξης X_i . Με X_i συμβολίζεται το $((E_i(v), P_i(v)), v \in [0, V_i])$. Το $E_i(v_{ij}) = E_{ij}$ είναι ο τύπος του j -οστού γεγονότος της εξέλιξης της απαίτησης i . Το γεγονός αυτό που συμβαίνει την χρονική στιγμή v_{ij} , είναι εκφρασμένο σε χρονικές μονάδες μετά την ειδοποίηση της απαίτησης. Το V_{ij} είναι ο συνολικός χρόνος αναμονής από την ειδοποίηση μέχρι την εκκαθάριση της απαίτησης i . Εάν το γεγονός

περιλαμβάνει πληρωμή, η αντίστοιχη σφοδρότητα δίνεται από το $P_i(v_{ij}) = P_{ij}$. Οι διάφοροι τύποι γεγονότων προσδιορίστηκαν προηγουμένως.

Η διαδικασία εξέλιξης του X_i είναι μία διαδικασία με άλματα. Μοντελοποιείται με δύο ξεχωριστά σημεία: τη χρονική ρύθμιση και τον τύπο των γεγονότων και οι αντίστοιχες σφοδρότητες. Μια ολοκληρωμένη περιγραφή μίας απαίτησης δίνει από:

$$(T_i, U_i, X_i) \text{ με } X_i = (E_i(v), P_i(v)), v \in [0, V_i]. \quad (2.105)$$

Υποθέτουμε ότι οι εκκρεμείς υποχρεώσεις είναι να προβλεφθούν το ημερολογιακό έτος τ . Διαχωρίζουμε τα IBNR, τα RBNS και τα εκκαθαρισμένες απαιτήσεις.

Για μια IBNR απαίτηση: $T_i + U_i > \tau$ και $T_i < \tau$.

Για μία RBNS απαίτηση: $T_i + U_i \leq \tau$ και η εξέλιξη της απαίτησης περιορίζεται σε

$$(\tau - T_i - U_i), \text{ δηλαδή μόνο } (E_i(v), P_i(v)), v \in [0, \tau - T_i - U_i].$$

Για μία εκκαθαρισμένη απαίτηση $T_i + U_i \leq \tau$ και $(E_i(v), P_i(v)), v \in [0, V_i]$.

Εξαρτώμενη από την θέση διαδικασία Poisson. Ακολουθώντας την προσέγγιση των Arjas (1989) και του Norberg (1993) χειριζόμαστε την διαδικασία απαίτησης σαν μία εξαρτώμενη από την θέση διαδικασία Poisson (PDMPP). Σε αυτήν την εφαρμογή το σημείο στο χρόνο εκφράζει το χρόνο συμβάντος και το σχετικό σημείο (mark) εκφράζει το συνδυασμό του χρόνου καθυστέρησης και της απαίτησης της εξέλιξης. Υποδηλώνουμε το μέτρο της έντασης με την διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και την σχετική σημειακή κατανομή με την $(P_{z/t}), t \geq 0$. Στο πλαίσιο εξέλιξης απαιτήσεων η κατανομή $(P_{z/t})$ δίνεται από την κατανομή της καθυστέρησης αναφοράς $(P_{U/t})$, δίνοντας την στιγμή γεγονότος t , και η κατανομή της εξέλιξης $(P_{X/t,u}), t \geq 0$, δοθέντος της χρονικής στιγμής γεγονότος t και της καθυστέρησης αναφοράς u . Η ολοκληρωμένη διαδικασία εξέλιξης τότε είναι Poisson διαδικασία αποζημίωσης με διάστημα $c = [0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathcal{X}$ με μέτρο έντασης:

$$\lambda(dt) \times P_{U/t}(du) \times P_{X/t,u}(dx) \text{ με } (t, u, x) \in c. \quad (2.106)$$

Οι απαιτήσεις που έχουν αναφερθεί (αλλά που δεν έχουν απαραίτητα εκκαθαριστεί) ανήκουν στο σύνολο :

$$C^r = \{(t, u, x) \in c / t + u \leq \tau\}, \quad (2.107)$$

ενώ οι απαιτήσεις που δεν έχουν αναφερθεί IBNR ανήκουν στο:

$$C^i = \{(t, u, x) \in c / t \leq \tau, t + u > \tau\}. \quad (2.108)$$

Εφόσον τα δύο σύνολα είναι ξένα, οι δύο διαδικασίες είναι ανεξάρτητες. Η διαδικασία των αναφερθεισών απαιτήσεων είναι μία Poisson στο c με μέτρο

$$\lambda(dt) \times P_{U/t}(du) \times P_{X/t,u}(dx) \times 1_{\{(t,u,x) \in C^i\}} = \underbrace{\lambda(dt) P_{U/t}(\tau-t) 1_{\{t \in [0, \tau]\}}}_a \times \underbrace{\frac{P_{U/t}(du) 1_{\{u \leq \tau-t\}}}{P_{U/t}(\tau-t)}}_\beta \times \underbrace{P_{X/t,u}(dx)}_\gamma. \quad (2.109)$$

Το (α) μέρος είναι το μέτρο των περιστατικών. Το mark αυτής της απαίτησης αποτελείται από την καθυστέρηση αναφοράς, δοθέντος του χρόνου γεγονότος (της οποίας εξαρτημένης κατανομής δίνεται από το δεύτερο τμήμα), και της εξαρτημένης κατανομής της εξέλιξης, δοθέντος του χρόνου γεγονότος και της καθυστέρησης αναφοράς. Ομοίως για την διαδικασία των IBNR απαιτήσεων το μέτρο είναι μια Poisson διαδικασία :

$$\underbrace{\lambda(dt)(1 - P_{U/t}(\tau-t)) 1_{\{t \in [0, \tau]\}}}_\alpha \times \underbrace{\frac{P_{U/t}(du) 1_{\{u > \tau-t\}}}{1 - P_{U/t}(\tau-t)}}_\beta \times \underbrace{P_{X/t,u}(dx)}_\gamma, \quad (2.110)$$

όπου παρόμοια συστατικά μπορούν να αναγνωριστούν όπως στην σχέση (2.109).

Η πιθανοφάνεια. Η προσέγγιση που ακολουθεί είναι παραμετρική. Συνεπώς, θα βελτιστοποιήσουμε την έκφραση της πιθανοφάνειας για τα παρατηρηθέντα δεδομένα γύρω από τους άγνωστους παραμέτρους που χρησιμοποιούνται στην έκφραση αυτή. Το παρατηρούμενο μέρος της διαδικασίας των αποζημιώσεων αποτελείται από την εξέλιξη μέχρι το χρόνο τ των αποζημιώσεων που έχουν αναφερθεί πριν το τ . Αναπαριστούμε αυτές τις παρατηρηθείσες αποζημιώσεις όπως ακολουθεί:

$$(T_i^0, U_i^0, X_i^0), i \geq 1,$$

όπου η εξέλιξη της αποζημίωσης i περιορίζεται από $\tau - T_i^0 - U_i^0$ μονάδες χρόνου μετά την ειδοποίηση. Η πιθανοφάνεια της διαδικασίας των παρατηρούμενων αποζημιώσεων μπορεί να γραφτεί ως:

$$\Lambda(obs) \propto \left\{ \prod_{i \geq 1} \lambda(T_i^0) P_{U/t}(\tau - T_i^0) \exp\left(-\int_0^\tau w(t) \lambda(t) P_{U/t}(\tau - t) dt\right) \right\} \times \left\{ \prod_{i \geq 1} \frac{P_{U/t}(dU_i^0)}{P_{U/t}(\tau - T_i^0)} \right\} \times \prod_{i \geq 1} P_{X/t,u}^{\tau - T_i^0 - U_i^0}(dX_i^0). \quad (2.111)$$

Ο εκθέτης στον τελευταίο όρο αυτής της πιθανοφάνειας υποδεικνύει τον περιορισμό της εξέλιξης αυτής της αποζημίωσης σε $\tau - T_i^0 - U_i^0$ χρονικές μονάδες μετά την αναφορά. Η συνάρτηση $w(t)$ δίνει την έκθεση στον χρόνο t .

Για την καθυστέρηση αναφοράς και για την διαδικασία εξέλιξης χρησιμοποιούμε τεχνικές από ανάλυση επιβίωσης. Η καθυστέρηση αναφοράς είναι μιας και μόνο φοράς μοναδικού γεγονότος (one-time single event) το οποίο μπορεί να μοντελοποιηθεί χρησιμοποιώντας κατανομές από την ανάλυση επιβίωσης. Για την διαδικασία εξέλιξης θα χρησιμοποιηθεί το στατιστικό πλαίσιο επαναλαμβανόμενων γεγονότων. Ο Cook και ο Lawless (2007) παρέχει μία πρόσφατη περίληψη για στατιστικές τεχνικές για την ανάλυση επαναλαμβανόμενων γεγονότων. Αυτές οι τεχνικές πρωταρχικά χρησιμοποιούν την μοντελοποίηση της σφοδρότητας του γεγονότος (βαθμός κινδύνου).

Καθώς αναφέρεται στην (2.105) για κάθε αποζημίωση i κάθε διαδικασία εξέλιξης αποτελείται από:

$$X_i = (E_i(v), P_i(v)), v \in [0, V_i]. \quad (2.112)$$

Εδώ $E_i(v_{ij}) = E_{ij}$ είναι ο τύπος του j -οστού γεγονότος της εξέλιξης της αποζημίωσης i , που συμβαίνει στο χρόνο v_{ij} . Η V_j είναι ο συνολικός χρόνος αναμονής από την ενημέρωση μέχρι την εκκαθάριση της αποζημίωσης i . Εάν ένα γεγονός περιλαμβάνει πληρωμή, η αντίστοιχη σφοδρότητα δίνεται από $P_i(v_{ij}) = P_{ij}$. Για να μοντελοποιήσουμε το συμβάν των διαφορετικών γεγονότων καθορίζεται ένας βαθμός κινδύνου για κάθε τύπο. Οι βαθμοί κινδύνου h_{se}, h_{sep} , και h_p αντιστοιχούν στον τύπο 1 (εκκαθάριση χωρίς πληρωμή), στον τύπο 2 (εκκαθάριση με πληρωμή την ίδια στιγμή) και στον τύπο 3 (πληρωμή χωρίς εκκαθάριση).

Γεγονότα των τύπων 2 και 3 εμπεριέχουν πληρωμή. Υποδηλώνουμε την πυκνότητα της έντασης της πληρωμής με την P_p . Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό η πιθανοφάνεια της διαδικασίας εξέλιξης της αποζημίωσης i δίνεται από :

$$\left\{ \prod_{j=1}^{N_i} (h_{se}^{\delta_{ij}1}(V_{ij}) \times h_{sep}^{\delta_{ij}2}(V_{ij}) \times h_p^{\delta_{ij}3}(V_{ij})) \right\} \times \exp\left(-\int_0^{\tau_i} (h_{se}(v) + h_{sep}(v) + h_p(v)) du\right) \times \prod_j P_p(dV_{ij}). \quad (2.113)$$

Εδώ δ_{ijk} είναι δείκτης τυχαίας μεταβλητής η οποία είναι 1 εάν το j -οστό γεγονός στην εξέλιξη της αποζημίωσης i είναι τύπου k . Το N_i είναι ο συνολικός αριθμός των γεγονότων, που έχουν γραφτεί σε παρατηρούμενη περίοδο για την αποζημίωση i . Αυτό το διάστημα παρατηρήσεως είναι το $[0, \tau_i]$ με $\tau_i = \min(\tau - T_i - U_i, V_i)$.

Συνδυάζοντας την (2.111) και την (2.113) δίνεται η πιθανοφάνεια για τα παρατηρηθέντα δεδομένα:

$$\begin{aligned} \Lambda(obs) \propto & \left\{ \prod_{i \geq 1} \lambda(T_i^0) P_{U/t}(\tau - T_i^0) \exp\left(-\int_0^\tau w(t) \lambda(t) P_{U/t}(\tau - t) dt\right) \right\} \times \\ & \left\{ \prod_{i \geq 1} \frac{P_{U/t}(dU_i^0)}{P_{U/t}(\tau - T_i^0)} \right\} \times \prod_{i \geq 1} \left\{ \prod_{j=1}^{N_i} \left(h_{se}^{\delta_{ij1}}(V_{ij}) \times h_{sep}^{\delta_{ij2}}(V_{ij}) \times h_p^{\delta_{ij3}}(V_{ij}) \right) \right\} \quad (2.114) \\ & \times \exp\left(-\int_0^{\tau_i} (h_{se}(u) + h_{sep}(v) + h_p(v)) du\right) \times \prod_{i \geq 1} \prod_j P_p(dV_{ij}). \end{aligned}$$

3.3 Οι υποθέσεις της κατανομής

Αναφέραμε την πιθανοφάνεια στην (2.114) με περισσότερη λεπτομέρεια. Υποθέσεις κατανομής για τα διάφορα θεμέλια, τα οποία είναι η καθυστέρηση αναφοράς, οι χρόνοι γεγονότων-δοθέντος της κατανομής της καθυστέρησης αναφοράς- και την διαδικασία εξέλιξης, παρουσιάζονται. Σε κάθε στάδιο είναι πιθανόν να συμπεριληφθούν πληροφορίες μέσω των συμμεταβλητών όπως και οι εκ των προτέρων κλάσεις αποθεμάτων απωλειών.

Η καθυστέρηση της αναφοράς. Η ειδοποίηση της αποζημίωσης είναι ένα γεγονός μοναδικού τύπου, το οποίο μπορεί να μοντελοποιηθεί χρησιμοποιώντας συνήθεις κατανομές για την ανάλυση επιβίωσης (όπως η Εκθετική, η Weibull ή η Gompertz κατανομή). Το σχήμα 3.3 υποδεικνύει ότι το μεγαλύτερο μέρος των αποζημιώσεων θα αναφερθεί στις πρώτες λίγες ημέρες μετά το γεγονός. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε ένα μίγμα από μια συγκεκριμένη τυπική κατανομή με μία ή με περισσότερες εκφυλισμένες κατανομές για την ειδοποίηση κατά την διάρκεια των πρώτων ημερών. Για παράδειγμα, για μία μίξη κατανομής επιβίωσης f_u με n εκφυλισμένα μέρη η πυκνότητα δίνεται από:

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k I_{\{k\}}(v) + \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k\right) f_{U/U > n-1}(u), \quad (2.115)$$

όπου $I_{\{k\}} = 1$ για την k οστή μέρα μετά το χρόνο t που έγινε το γεγονός και $I_{\{k\}} = 0$ διαφορετικά.

Η διαδικασία γεγονότος. Όταν βελτιστοποιούμε την πιθανοφάνεια για την διαδικασία του γεγονότος, χρησιμοποιούνται η κατανομή της καθυστέρησης της αναφοράς και οι παράμετροι (που έχουν αποκτηθεί σε προηγούμενο στάδιο). Η πιθανοφάνεια

$$L \propto \left\{ \prod_{i \geq 1} \lambda(T_i^0) P_{U/t}(\tau - T_i^0) \right\} \exp \left(- \int_0^{\tau} w(t) \lambda(t) P_{U/t}(\tau - t) dt \right), \quad (2.116)$$

χρειάζεται να βελτιστοποιηθεί πάνω στην $\lambda(t)$. Χρησιμοποιούμε ένα συνεχές κατά τμήματα ορισμό για το ρυθμό του γεγονότος:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1 & 0 \leq t < d_1 \\ \lambda_2 & d_1 \leq t < d_2 \\ \vdots & \\ \lambda_m & d_{m-1} \leq t < d_m, \end{cases} \quad (2.117)$$

Με διαστήματα όπως αυτά το $\tau \in [d_{m-1}, d_m)$ και $w(t) = w_l$ για $d_{l-1} \leq t \leq d_l$.

Ας ορίσουμε τον δείκτη $\delta_l(l, t_i)$ να είναι 1 εάν $d_{l-1} \leq t_i < d_l$, με t_i το χρόνο γεγονότος της αποζημίωσης i . Ο αριθμός των αποζημιώσεων στο διάστημα $[d_{l-1}, d_l)$ μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$N_{oc}(l) = \sum_i \delta_l(l, t_i). \quad (2.118)$$

Η πιθανοφάνεια που αντιστοιχεί στις χρονικές στιγμές γεγονότων δίνεται από:

$$\begin{aligned} L \propto & \lambda_1^{N_{oc}(1)} \lambda_2^{N_{oc}(2)} \dots \lambda_m^{N_{oc}(m)} \prod_{i \geq 1} P_{U/t}(\tau - t_i) \\ & \times \exp \left(- \lambda_1 w_1 \int_0^{d_1} P_{U/t}(\tau - t) dt \right) \exp \left(- \lambda_2 w_2 \int_{d_1}^{d_2} P_{U/t}(\tau - t) dt \right) \\ & \times \dots \exp \left(- \lambda_m w_m \int_{d_{m-1}}^{d_m} P_{U/t}(\tau - t) dt \right). \end{aligned} \quad (2.119)$$

Βελτιστοποιώντας πάνω στην λ_l (με $l = 1, \dots, m$) οδηγεί σε:

$$\lambda_l = \frac{N_{oc}(l)}{w_l \int_{d_{l-1}}^{d_l} P_{U/t}(\tau - t) dt}. \quad (2.120)$$

Η διαδικασία εξέλιξης. Ένας κατά τμήματα σταθερός ορισμός χρησιμοποιείται για το βαθμό κινδύνου. Αυτό υπονοεί :

$$h_{(se,sep,p)}(t) = \begin{cases} h_{(se,sep,p);1} & \text{για } 0 \leq t < a_1 \\ h_{(se,sep,p);2} & \text{για } a_1 \leq t < a_2 \\ \vdots & \\ h_{(se,sep,p);d} & \text{για } a_{d-1} \leq t < a_d \end{cases} . \quad (2.121)$$

Αυτός ο κατά τμήματα σταθερός ορισμός μπορεί να ενσωματωθεί σε ένα εύκολο τρόπο καθορισμού της πιθανοφάνειας (2.114), παρόλο που η τελική έκφραση είναι περίπλοκη σημειολογικά. Η βελτιστοποίηση της έκφρασης πιθανοφάνειας μπορεί να γίνει αναλυτικά ή αριθμητικά. Μπορεί να είναι αξιόλογο να καθορίσουμε ένα ξεχωριστό βαθμό κινδύνου για τα πρώτα γεγονότα της εξέλιξης και τα τελευταία γεγονότα.

Οι πληρωμές. Γεγονότα των τύπων 2 και 3 συνοδεύονται από μία πληρωμή. Φαίνεται ότι η παρατηρούμενη κατανομή αποζημιώσεων έχει ομοιότητες με την Log-normal κατανομή, αλλά μπορεί να υπάρχουν πιο κατάλληλες κατανομές που ταιριάζουν τα ιστορικά δεδομένα .

3.4 Η πρόβλεψη των μελλοντικών ροών

Για να προβλέψουμε τις εκκρεμείς υποχρεώσεις ως προς το χαρτοφυλάκιο των υποχρεώσεων των αποζημιώσεων, κάνουμε διάκριση μεταξύ IBNR και RBNS αποζημιώσεων. Η ακόλουθη προσέγγιση βήμα προς βήμα επιτρέπει να αποκτηθούν τυχαία σχεδιαγράμματα των κατανομών των IBNR και RBNS αποζημιώσεων.

Προβλέποντας τις IBNR αποζημιώσεις. Οι IBNR αποζημιώσεις όπως έχει αναφερθεί είναι αυτές που έχουν συμβεί ήδη αλλά δεν έχουν αναφερθεί στον ασφαλιστή. Γι' αυτό το λόγο, $T_i + U_i > \tau$ και $T_i < \tau$ με T_i την χρονική στιγμή του γεγονότος για την αποζημίωση και U_i είναι η καθυστέρηση αναφοράς. Τα T_i είναι δεδομένα που λείπουν: είναι ορισμένα στην διαδικασία εξέλιξης αλλά είναι άγνωστα στον αναλογιστή τον χρόνο τ . Η διαδικασία πρόβλεψης για τις IBNR αποζημιώσεις απαιτούν τα ακόλουθα βήματα:

α) Προσομοιώνω τον αριθμό των IBNR αποζημιώσεων στο διάστημα $[0, \tau]$ και τις αντίστοιχες στιγμές γεγονότων.

Οι IBNR αποζημιώσεις διέπονται από Poisson διαδικασία με μη-ομοιογενή ένταση ή ρυθμό γεγονότος:

$$w(t)\lambda(t)(1-P_{U/t}(\tau-t)), \quad (2.122)$$

όπου $\lambda(t)$ είναι κατά τμήματα σταθερή σύμφωνα με τον ορισμό (2.117). Η ακόλουθη ιδιότητα προκύπτει από τον ορισμό των μη-ομογενών διαδικασιών Poisson.

$$N_{IBNR}(l) \sim Poisson \left(\lambda_l w_l \int_{d_{l-1}}^{d_l} (1-P_{U/t}(\tau-t)) dt \right), \quad (2.123)$$

όπου $N_{IBNR}(l)$ είναι ο αριθμός των IBNR αποζημιώσεων στο διάστημα $[d_{l-1}, d_l)$. Σημειώνεται ότι το ολοκλήρωμα έχει ήδη εκτιμηθεί (αριθμητικώς) στην διαδικασία προσαρμογής. Δίνοντας το προσομοιωμένο αριθμό των IBNR αποζημιώσεων $n_{IBNR}(l)$ για κάθε διάστημα $[d_{l-1}, d_l)$, οι χρονικές στιγμές γεγονότων των αποζημιώσεων είναι κατανεμημένες ομοιόμορφα στο διάστημα $[d_{l-1}, d_l)$.

β) Προσομοίωση την καθυστέρηση αναφοράς για κάθε αποζημίωση IBNR

Δοθέντος του προσομοιωμένου χρονικού γεγονότος t_i μιας αποζημίωσης IBNR, της οποίας η καθυστέρηση αναφοράς είναι προσομοιωμένη από την αντίστροφη κατανομή:

$$P(U \leq u / U > \tau - t_i) = \frac{P(\tau - t_i < U \leq u)}{1 - P(U \leq \tau - t_i)}. \quad (2.124)$$

Στην περίπτωση της υποτιθέμενης μίξης μίας Weibull κατανομή και 9 εκφυλισμένων κατανομές αυτή η έκφραση πρέπει να εκτιμηθεί αριθμητικώς.

γ) Προσομοίωση του *εκ των προτέρων* αποθέματος

Για κάθε IBNR αποζημίωση ένα *εκ των προτέρων* απόθεμα πρέπει να προσομοιωθεί για την χρήση της διαδικασίας ανάπτυξης. Δίνοντας m κατηγορίες *εκ των προτέρων* αποθεμάτων, η πυκνότητα πιθανότητας για την *εκ των προτέρων* αποθεμάτων είναι:

$$f(c) = \begin{cases} p_c & \text{για } c=1,2,\dots,m-1 \\ 1 - \sum_{k=1}^{m-1} p_k & \text{για } c=m \end{cases}. \quad (2.125)$$

Οι πιθανότητες που χρησιμοποιούνται στην (2.125) είναι εμπειρικά παρατηρούμενα ποσοστά των συμβολαίων σε μια συγκεκριμένη κατηγορία *εκ των προτέρων* αποθέματος.

δ) Προσομοίωση της διαδικασίας πληρωμής για καθεμία από της IBNR αποζημιώσεις.

Αυτό το βήμα είναι κοινό με την διαδικασία των RBNS αποζημιώσεων που θα εξηγηθεί στην παρακάτω παράγραφο.

Εκτιμώντας τις αποζημιώσεις RBNS. Δεδομένου των αποζημιώσεων RBNS και τις προσομοιωμένες IBNR, η διαδικασία εξελίσσεται όπως θα φανεί παρακάτω.

ε) Προσομοιώνοντας την ακριβής στιγμή του επόμενου γεγονότος.

Στην περίπτωση των RBNS αποζημιώσεων, ο χρόνος του περιορισμού c_i της αποζημίωσης i είναι γνωστή. Για τις αποζημιώσεις IBNR ο χρόνος περιορισμού $c_i = 0$. Το επόμενο γεγονός – στην στιγμή $u_{i,next}$ - μπορεί να συμβεί σε κάθε στιγμή $u_{i,next} > c_i$. Για να προσομοιώσουμε την ακριβή στιγμή πρέπει να κανούμε αντιστροφή: (με p τυχαία από την ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$).

$$\begin{aligned} P(V < u_{i,next} / V > c_i) &= p \\ \Downarrow & \\ \frac{P(c_i < V \leq u_{i,next})}{1 - P(V \leq c_i)} &= p. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Για την σχέση μεταξύ του βαθμού κινδύνου και της σ.κ., γνωρίζουμε:

$$P(V \leq u_{i,next}) = 1 - \exp\left(- \int_0^{u_{i,next}} \sum_e h_e(t) dt\right), \quad (2.127)$$

με $e \in \{se, sep, p\}$. Για παράδειγμα με τον ορισμό Weibull για τον βαθμό κινδύνου αυτή η εξίσωση θα αντιστραφεί αριθμητικώς. Ωστόσο, κλειστοί τύποι εκφράσεων είναι διαθέσιμοι. Το βήμα (ε) πρέπει να αντικατασταθεί από (ε1)-(ε2):

ε1) Προσομοιώνουμε το χρονικό διάστημα του επόμενου γεγονότος

Στην περίπτωση των αποζημιώσεων RBNS, ο χρόνος του περιορισμού c_i της αποζημίωσης i ανήκει σε ένα συγκεκριμένο διάστημα $[a_{k-1}, a_k)$. Το επόμενο γεγονός – της χρονικής στιγμής $u_{i,next} > c_i$ - μπορεί να συμβεί σε κάθε διάστημα $[a_{k-1}, a_k)$. Η πιθανότητα το $u_{i,next}$ να ανήκει στο συγκεκριμένο διάστημα $[a_{k-1}, a_k)$ δίνεται από:

$$P(a_{k-1} \leq V < a_k / V > c_i) = \begin{cases} \frac{P(c_i < V < a_k)}{1 - P(V \leq c_i)} & \text{εάν } c_i \in [a_{k-1}, a_k) \\ \frac{P(a_{k-1} \leq V < a_k)}{1 - P(V \leq c_i)} & \text{εάν } c_i \notin [a_{k-1}, a_k). \end{cases} \quad (2.128)$$

ε2) Προσομοιώνοντας τον ακριβή χρόνο για το επόμενο γεγονός

Δεδομένου του χρονικού διαστήματος του επόμενου γεγονότος, $[a_{k-1}, a_k)$, προσομοιώνουμε τον ακριβή χρόνο αντιστρέφοντας την ακόλουθη εξίσωση για την $u_{i,next}$

$$\begin{aligned} P(V < u_{i,next} / c_i < V < a_k) &= p \text{ εάν } c_i \in [a_{k-1}, a_k]; \\ P(V < u_{i,next} / a_{k-1} < V < a_k) &= p \text{ διαφορετικά,} \end{aligned} \quad (2.129)$$

όπου p είναι τυχαία επιλεγμένη από την ομοιόμορφη κατανομή, $U(0,1)$.

ζ) Προσομοιώνουμε τον τύπο του γεγονότος

Δεδομένου του ακριβή χρόνου του επόμενου γεγονότος, κάθε τύπος είναι προσομοιωμένος χρησιμοποιώντας ότι:

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} P(E = e / u \leq V < u + \Delta u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{P(u \leq V < u + \Delta u \cap E = e)}{\frac{\Delta u}{P(u \leq V < u + \Delta u)}} = \frac{h_e(u)}{\sum_e h_e(u)}, \quad (2.130)$$

όπου $e \in \{se, sep, p\}$.

η) Προσομοιώνοντας την αντίστοιχη πληρωμή. Δοθείσης της ανεξάρτητης πληροφορίας για την αποζημίωση i , η πληρωμή μπορεί να παρθεί από την κατάλληλη Log-Normal κατανομή. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι αθροιστικές πληρωμές στο σύνολό τους δεν μπορούν να υπερβαίνουν το όριο ασφαλιστικής κάλυψης για κάθε απαίτηση.

θ) Στάση ή συνέχεια. Εξαρτώντας από το τύπο του γεγονότος στο βήμα (ζ), η πρόβλεψη σταματάει ή συνεχίζεται.

Αυτή η διαδικασία προβλέψεων θα εφαρμοστεί ξεχωριστά για τις υλικές αποζημιώσεις και τις σωματικές αποζημιώσεις.

Σχόλιο για την παράμετρο της αβεβαιότητας. Λαμβάνοντας υπόψη την αβεβαιότητα των προβλέψεων πρέπει να γίνει μια διάκριση μεταξύ της αβεβαιότητας της διαδικασίας και της αβεβαιότητας της παραμέτρου. Η αβεβαιότητα της διαδικασίας λαμβάνεται υπόψη με δειγματοληψία από τις κατανομές που προτείνονται στο 3.4. Για να συμπεριλάβουμε και την αβεβαιότητα των παραμέτρων η μέθοδος bootstrap ή ιδέες από την Bayesian στατιστική μπορεί να χρησιμοποιηθούν. Ενώ η Bayesian προσέγγιση είναι πολύ κομψή, γενικά οδηγεί σημαντικά μεγαλύτερη πολυπλοκότητα, η οποία δεν συνεισφέρει στην δυνατότητα

πρόσβασης και στην εφαρμοσιμότητα. Εφαρμόζοντας μια διαδικασία bootstrap είναι πιθανή, αλλά είναι υπολογιστικά μεγάλης έντασης, αφού το δείγμα μας είναι μεγάλο και αρκετές στοχαστικές διαδικασίες χρησιμοποιούνται. Για να αποφύγουμε τα υπολογιστικά προβλήματα όταν διαχειριζόμαστε την αβεβαιότητα των παραμέτρων, χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτική κανονική κατανομή για την μέγιστη πιθανοφάνεια των εκτιμητών. Για κάθε επανάληψη της ρουτίνας πρόβλεψης παίρνουμε δείγμα για κάθε παράμετρο από την αντίστοιχη ασυμπτωτική κανονική κατανομή. Σημειώνεται- εξαιτίας του μεγάλου δείγματος- τα διαστήματα εμπιστοσύνης είναι στενά. Αυτό ισχύει σε αντίθεση με τα τρίγωνα των ροών όπου το μέγεθος των δειγμάτων είναι συνήθως πολύ μικρά και η αβεβαιότητα των παραμέτρων είναι μεγάλη.

Κεφάλαιο 4: Εφαρμογή των macro προσέγγισεων και της micro προσέγγισης

Έστω ότι το σύνολο των ασφαλισμένων είναι 1000 άτομα. Θεωρούμε ότι ο αριθμός των ζημιών ακολουθεί $N_i \sim Poisson(0.10)$, το ύψος των αποζημιώσεων X_i ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1000 και το ύψος των IBNR ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1000f$ όπου η f ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή $U \sim (0.40, 0.60)$. Με βάση την διαδικασία αυτή προσομοιώνω τα δεδομένα. Από τα δεδομένα αυτά για τις macro μεθόδους κατασκευάζουμε το τρίγωνο εξέλιξης των ζημιών.

Πίνακας 4.1 Πίνακας ατομικών αποζημιώσεων

	Εξέλιξη								
Προέλευση	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1991	95603	56501	26762	12599	6982	2906	1740	887	524
1992	73780	35556	16741	7268	4187	1977	859	398	NA
1993	88674	42825	21380	10594	6343	3451	1970	NA	NA
1994	90441	37337	21908	10046	4421	2441	NA	NA	NA
1995	93076	55648	25716	12548	7023	NA	NA	NA	NA
1996	112077	48534	25431	12834	NA	NA	NA	NA	NA
1997	69646	38441	15434	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1998	103935	51425	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1999	95707	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA

4.1 Η εφαρμογή της Chain Ladder

Όπως έχουμε αναφέρει η Chain Ladder είναι ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος για να προβλεφθούν οι αποζημιώσεις που βασίζονται σε ιστορικά δεδομένα. Υποθέτουμε ότι οι αναλογικές εξελίξεις των αποζημιώσεων από το ένα έτος εξέλιξης στο επόμενο είναι το ίδιο για όλα τα έτη προέλευσης. Σαν πρώτο βήμα είναι να υπολογιστούν οι ανά έτος συντελεστές εξέλιξης (age-to-age link ratios) ως μέση σταθμισμένη ποσότητα συντελεστών εξέλιξης αθροιστικών απωλειών του τριγώνου εξέλιξης από το ένα έτος εξέλιξης στο επόμενο. Το τρίγωνο εξέλιξης των ατομικών δεδομένων ανά έτος ατυχήματος και ανά έτος εξέλιξης και το τρίγωνο των συσσωρευμένων δεδομένων που διαθέτουμε παρουσιάζονται στους πίνακες 4.1 και 4.2 αντίστοιχα.

Τα προσομοιωμένα δεδομένα μας παρουσιάζονται με την μορφή ενός τριγώνου, δείχνοντας την εξέλιξη των αποζημιώσεων σταδιακά για κάθε έτος προέλευσης. Το έτος προέλευσης

μπορεί να είναι το έτος που πουλήθηκε το συμβόλαιο, ή το έτος ατυχήματος. Φυσικά η περίοδος έκθεσης δεν είναι ανάγκη να είναι ετήσια, για παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί το τρίμηνο ή ο μήνας ως περίοδος προέλευσης. Στο παράδειγμα μας ορίζεται το έτος ως περίοδος προέλευσης.

Ο πίνακας 4.2 δείχνει τις γνωστές τιμές των απωλειών για κάθε έτος προέλευσης στο τέλος του έτους προέλευσης και τις ετήσιες εκτιμήσεις από εκεί και έπειτα. Για παράδειγμα, οι γνωστές τιμές των απωλειών που προέρχεται από την 1998 ως περίοδο προέλευσης είναι 103935 και 155360 στο τέλος των ετών 1998 και 1999 αντίστοιχα. Η τελευταία διαγώνιος – δηλαδή, το διάνυσμα 204504, 140766, 175237, 166594, 194011, 198876, 123521, 155360, 95707 από πάνω δεξιά προς τα κάτω αριστερά-δείχνει την πιο πρόσφατη εκτίμηση που είναι διαθέσιμη. Οι στήλες με τις επικεφαλίδες -1,2,3,...,9- διατηρεί το χρονικό διάστημα (σε έτη) των παρατηρήσεων σε μία στήλη σχετική με την αρχή της περιόδου έκθεσης. Για παράδειγμα, για το έτος 1997, το έτος με την τιμή 69646 που έχει εκτιμηθεί στις 31-12-1997, είναι τρία έτη. Ο στόχος της άσκησης αποθεματοποίησης είναι να εκτιμηθεί η εξέλιξη των μελλοντικές αποζημιώσεων και να συμπληρωθεί το κάτω μέρος του τριγώνου. Στο τέλος όλες οι αποζημιώσεις θα εκκαθαριστούν, αλλά δεν είναι πάντα προφανές πόσα χρόνια ή ακόμα και δεκαετίες θα χρειαστούν.

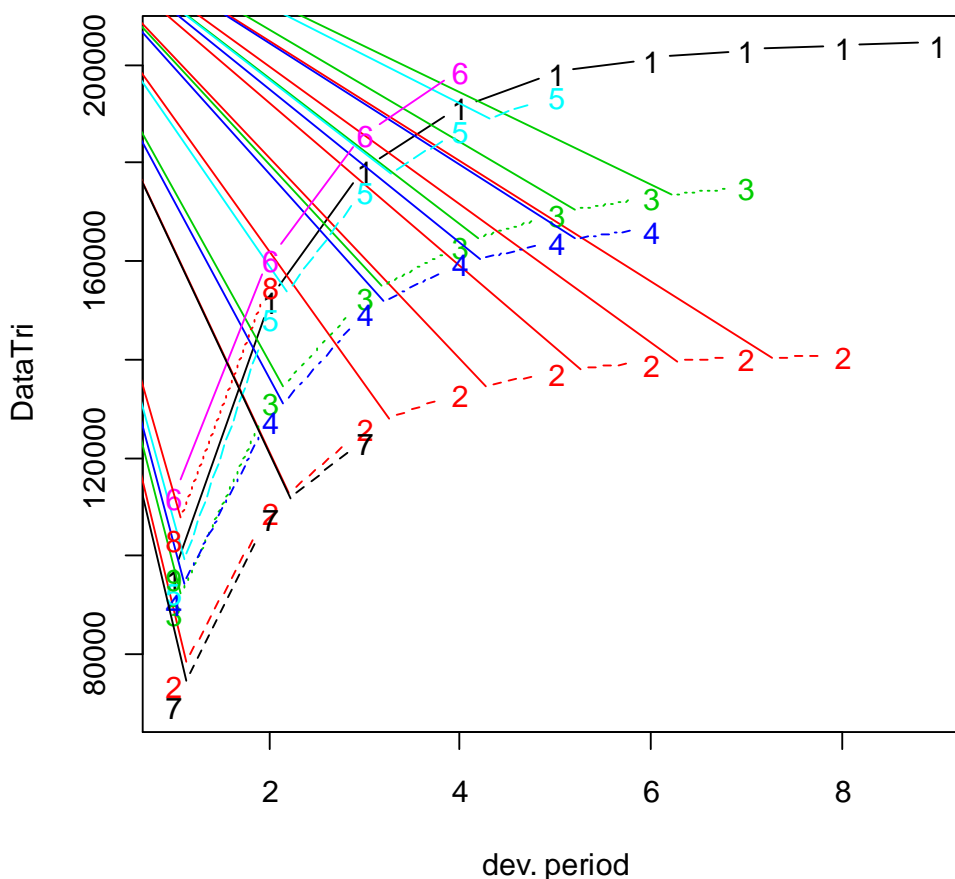
Πίνακας 4.2 Πίνακας σωρευτικών αποζημιώσεων

	Εξέλιξη								
Προέλευση	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1991	95603	152104	178866	191465	198447	201353	203093	203980	204504
1992	73780	109336	126077	133345	137532	139509	140368	140766	NA
1993	88674	131499	152879	163473	169816	173267	175237	NA	NA
1994	90441	127778	149686	159732	164153	166594	NA	NA	NA
1995	93076	148724	174440	186988	194011	NA	NA	NA	NA
1996	112077	160611	186042	198876	NA	NA	NA	NA	NA
1997	69646	108087	123521	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1998	103935	155360	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
1999	95707	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA

Οι σωρευτικές αποζημιώσεις της ασφαλιστικής υπολογίζονται μέσω του τύπου:

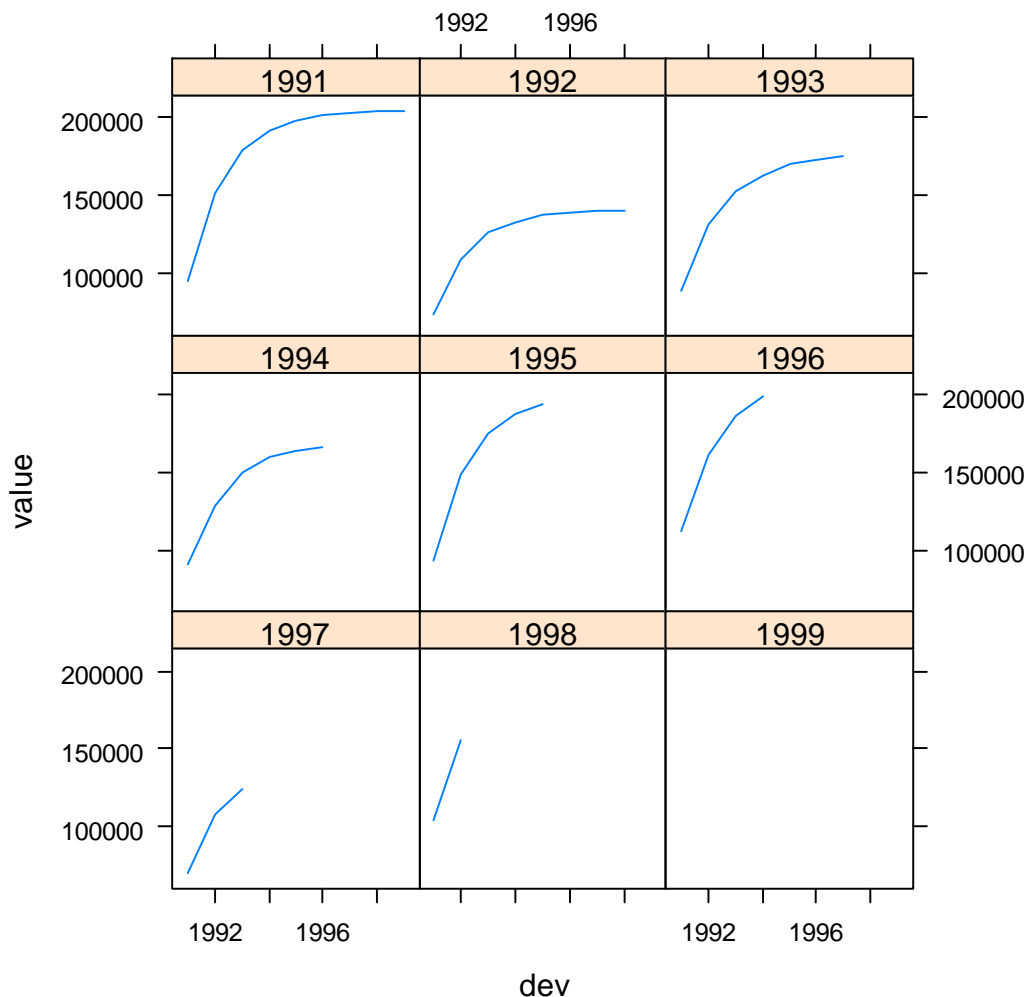
$$C_{ij} = \sum_{h=1}^j C_{ih}$$

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να γίνει είναι να κάνουμε γραφική απεικόνιση των δεδομένων για να δούμε μία εικόνα τους. Στο σχήμα 4.1 φαίνεται η εξέλιξη των σωρευτικών αποζημιώσεων του τριγώνου. Κάθε γραμμή αντιστοιχεί στα δεδομένα ενός έτους προέλευσης κατά τα έτη εξέλιξης. Στο παράδειγμα μας η γραμμή 1 αντιστοιχεί στις τιμές του έτους προέλευσης 1991 κατά τα έτη εξέλιξης (95603, 152104, 178866, 191465, 198447, 201353, 203093, 203980, και 204504) και δείχνει πως εξελίσσονται οι αποζημιώσεις του έτους προέλευσης 1991 κατά τα έτη εξέλιξης.



Σχήμα 4-1 Το διάγραμμα της εξέλιξης του τριγώνου των αποζημιώσεων του τριγώνου, με μία γραμμή για κάθε έτος προέλευσης.

Στο σχήμα 4.2 του τριγώνου απεικονίζεται η εξέλιξη των δεδομένων σε ατομικό πίνακα για κάθε έτος προέλευσης. Στο πρώτο πίνακα από αριστερά απεικονίζονται οι σωρευτικές αποζημιώσεις για το έτος 1991 στα έτη εξέλιξης, δηλαδή οι τιμές 95603, 152104, 178866, 191465, 198447, 201353, 203093, 203980, και 204504. Στο δεύτερο πίνακα από αριστερά απεικονίζονται οι σωρευτικές αποζημιώσεις για το έτος 1992 στα έτη εξέλιξης, δηλαδή απεικονίζονται οι ζημιές 73780, 109336, 126077, 133345, 137532, 139509, 140368 και 140076. Το έτος 1992 το ύψος των αποζημιώσεων διατηρείται στα πιο χαμηλά επίπεδα σε σχέση με τις άλλες χρονιές. Το έτος 1997 ξεκινάει το ποσό των αποζημιώσεων από το χαμηλότερο επίπεδο σε σχέση με τα άλλα έτη.



Σχήμα 4-2 Ατομικά διαγράμματα για κάθε έτος προέλευσης

Τα ανά έτος συντελεστές εξέλιξης (age-to age link ratios) υπολογίζονται ως η ποσότητα των σταθμισμένων μέσων όρων των δεικτών εξέλιξης των αθροιστικών αποζημιώσεων από μια περίοδο εξέλιξης στην επόμενη $C_{ij}, i, j = 1, \dots, k$, δηλαδή

$$f_j = \frac{\sum_{i=1}^{k-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{k-j} C_{i,j}} \quad (3.1)$$

Και προκύπτουν τα αποτελέσματα του πίνακα 4.3.

Πίνακας 4.3 Οι συντελεστές εξέλιξης

Έτος εξέλιξης	1-2	2-3	3-4	4-5
Συντελεστές εξέλιξης	1,503645	1,163485	1,068068	1,034678
Έτος εξέλιξης	5-6	6-7	7-8	8-9
Συντελεστές εξέλιξης	1,016083	1,008887	1,003741	1,002569

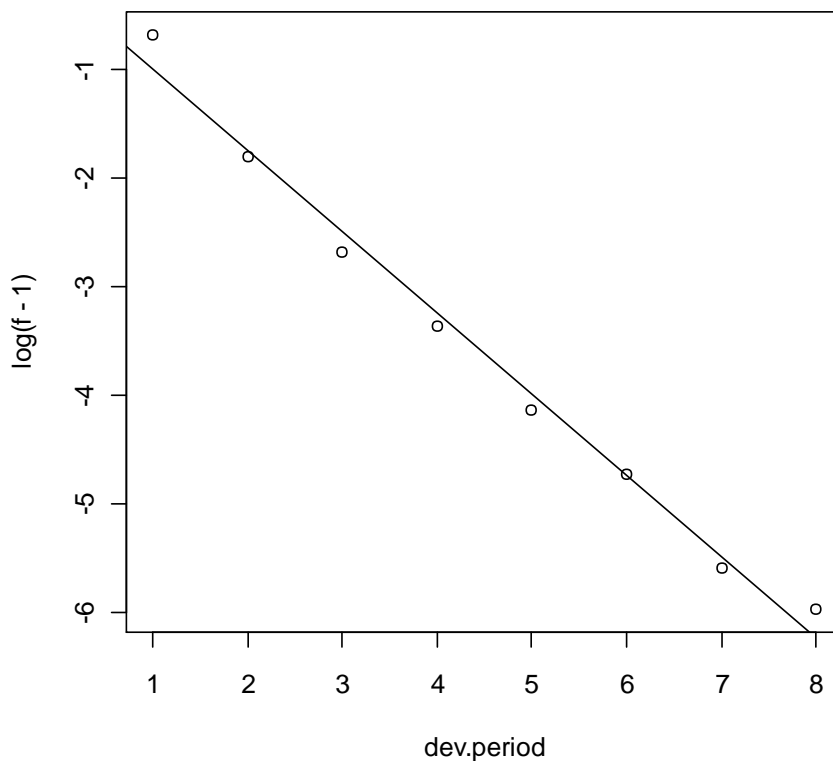
Για παράδειγμα ο συντελεστής εξέλιξης 1-2 προκύπτει ως εξής:

Προσθέτουμε τις σωρευτικές αποζημιώσεις του έτους 2 και τις σωρευτικές απώλειες του έτους 1, και τις διαιρούμε, δηλαδή,

$$(109336+131499+127778+148724+160611+108087+155360/73780+88674+90441+93076+12077+69646+103935)=(1093499/727232)=\mathbf{1,503645}$$

Συχνά δεν είναι κατάλληλο να υποθέτουμε ότι το παλιότερο έτος προέλευσης είναι πλήρως αναπτυγμένο. Μία τυπική προσέγγιση είναι να προεκτείνει (extrapolate) τους δείκτες ανάπτυξης (development ratios), για παράδειγμα υποθέτοντας ένα λογαριθμικό γραμμικό, log-linear μοντέλο. Οπότε η f_{tail} προκύπτει ότι είναι 1.00084.

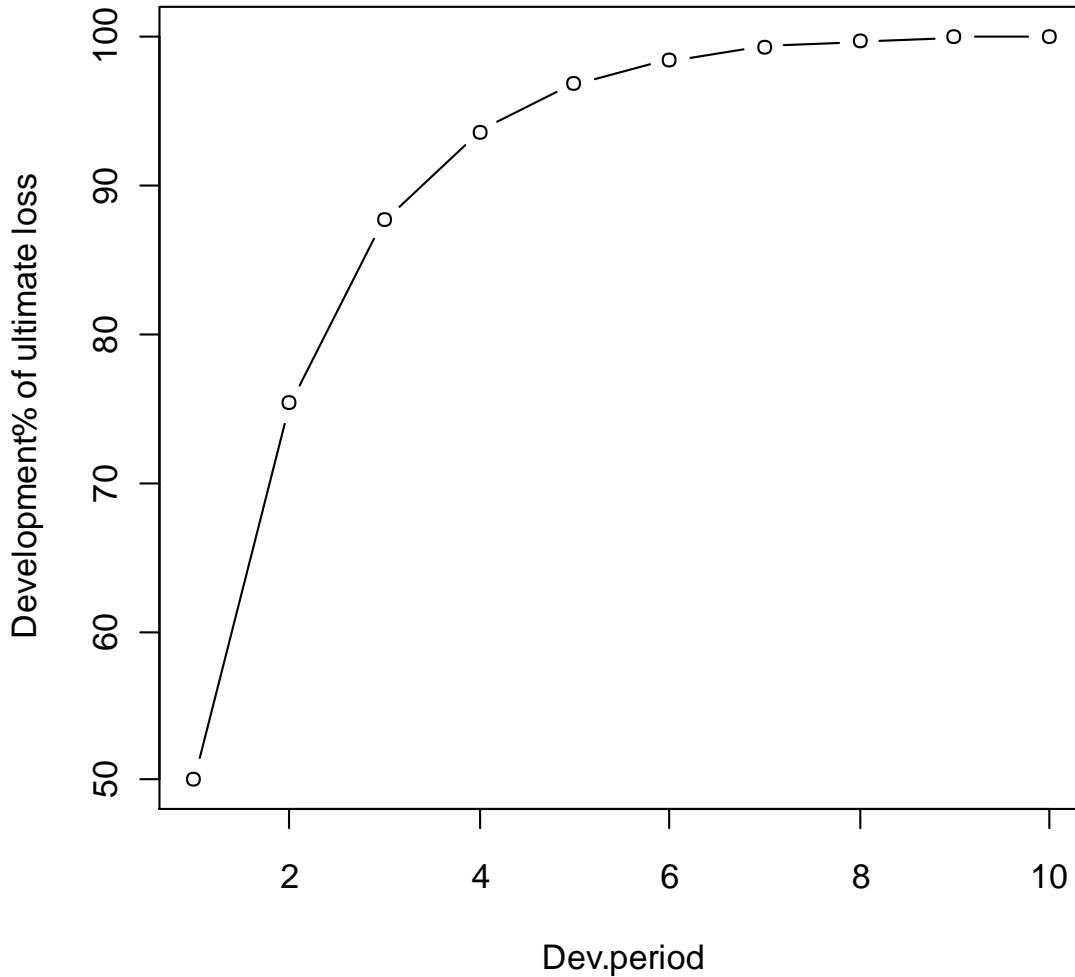
Log-linear extrapolation of age-to-age factors



Σχήμα 4-3 Λογαριθμική γραμμική προέκταση των ανα έτος παραγόντων εξέλιξης

Οι ανά έτος παράγοντες (age-to-age factors) μας επιτρέπουν να σχεδιάσουμε τις αναμενόμενες αποζημιώσεις του υποδείγματος εξέλιξης (expected claims development patterns). Οι συντελεστές εξέλιξης εφαρμόζονται στα πιο πρόσφατα γνωστές ποσότητες αθροιστικών αποζημιώσεων για να προβλεφθεί η επόμενη περίοδος εξέλιξης. Συμπληρώνεται έτσι όλο το τετράγωνο και προστίθεται μία στήλη με τις ultimate αποζημιώσεις που περιέχει την αναμενόμενη εξέλιξη πέρα του έτους (9) του τριγώνου εξαιτίας του παράγοντα ουράς (1,00084).

Expected claims development pattern



Σχήμα 4-4 Αναμενόμενες αποζημιώσεις του υποδείγματος εξέλιξης

Η συνολική εκτίμηση εκκρεμών ζημιών IBNR υπό αυτή την μέθοδο της Chain Ladder είναι 188.094. Από τον πίνακα 4.4 προκύπτει το συνολικό πραγματικό ποσό πληρωθεισών αποζημιώσεων (Latest) που είναι 1.454.576 και το εκτιμώμενο τελικό κόστος των αποζημιώσεων (Ultimate) που είναι 1.642.671. Αυτή η προσέγγιση ονομάζεται επίσης μέθοδος συντελεστών εξέλιξης (Loss C_{ik} Development Factor –LDF method).

Πίνακας 4.4 Συμπληρωμένο τρίγωνο με τις εκτιμήσεις των αποζημιώσεων

Προέλευση	Εξέλιξη									Ult
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1991	95603	152104	178866	191465	198447	201353	203093	203980	204504	204676
1992	73780	109336	126077	133345	137532	139509	140368	140766	141128	141246
1993	88674	131499	152879	163473	169816	173267	175237	175893	176344	176493
1994	90441	127778	149686	159732	164153	166594	168075	168703	169137	169279
1995	93076	148724	174440	186988	194011	197131	198883	199627	200140	200308
1996	112077	160611	186042	198876	205773	209082	210940	211729	212273	212452
1997	69646	108087	123521	131929	136504	138699	139932	140455	140816	140934
1998	103935	155360	180759	193063	199758	202971	204775	205541	206069	206242
1999	95707	143909	167436	178834	185035	188011	189682	190392	190881	191041

4.2 Η εφαρμογή της Mack Chain Ladder

Η μέθοδος της Mack Chain Ladder εκτιμάει τα τυπικά σφάλματα των εκτιμήσεων της Chain Ladder χωρίς να υποθέτει κατανομή κάτω από τρεις υποθέσεις. Με τα C_{ij} ορίζουμε τα αθροιστικά ποσά αποζημιώσεων της περιόδου προέλευσης $i=1, \dots, m$ με γνωστές απώλειες για την περίοδο εξέλιξης $k \leq n+1-i$. Για την πρόβλεψη ποσών για $k > n+1-i$ το μοντέλο της Mack Chain Ladder υποθέτει:

$$E[F_{ik} / C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{ik}] = f_k \text{ με } F_{ik} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \quad (3.2)$$

$$\text{Var}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} / C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{ik}\right) = \frac{\sigma_k^2}{w_{ik} C_{ik}^\alpha} \quad (3.3)$$

$$\{C_{i1}, \dots, C_{in}\}, \{C_{j1}, \dots, C_{jn}\} \text{ είναι ανεξάρτητα για την περίοδο προέλευσης } i \neq j \quad (3.4)$$

με $w_{ik} \in [0;1]$, $\alpha \in \{0,1,2\}$. Αν αυτές οι υποθέσεις ισχύουν, η Mack Chain Ladder δίνει ένα αμερόληπτο εκτιμητή για τις IBNR αποζημιώσεις. Το Mack Chain Ladder μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί ως μία σταθμισμένη γραμμική παλινδρόμηση για κάθε έτος προέλευσης κάθε έτους εξέλιξης: $\text{lm}(y \sim x+0, \text{weights} = w/x^{(2-\alpha)})$, όπου y είναι το διάνυσμα των αποζημιώσεων στην περίοδο εξέλιξης $k+1$ και x είναι ένα διάνυσμα των αποζημιώσεων με έτος εξέλιξης k . Η μέθοδος Mack εφαρμόζεται στο Chain Ladder package μέσω της συνάρτησης MackChainLadder.

Πίνακας 4.5. Αποτελέσματα από την μέθοδο MackChainLadder

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E.	CV(IBNR)
1991	204504	1.000	204504	0	0	NaN
1992	140766	0.997	141128	362	92.3	0.2553
1993	175237	0.994	176344	1107	252.10	0.2276
1994	166594	0.985	169137	2543	544.8	0.2143
1995	194011	0.969	200140	6129	849.3	0.1386
1996	198876	0.937	212273	13397	1306.8	0.0975
1997	123521	0.877	140816	17295	1269.2	0.0734
1998	155360	0.754	206069	50709	2593.9	0.0512
1999	95707	0.501	190881	95174	9520.9	0.1000

Στον πίνακα 4.5 παρουσιάζεται το τελικό πραγματικό κόστος αποζημιώσεων, η εξέλιξη Chain Ladder ανά έτος, το εκτιμώμενο τελικό κόστος αποζημιώσεων, οι εκτιμώμενες IBNR, η εκτίμηση του τυπικού σφάλματος των IBNR, και το CV(IBNR), τον συντελεστή μεταβλητότητας, $CV = \text{Mack.S.E.}/\text{IBNR}$.

Πίνακας 4.6 Συγκεντρωτικός πίνακας της MackChainLadder

	Totals
Latest:	1454576.00
Dev:	0.89
Ultimate:	1641291.60
IBNR:	186715.60
Mack SE:	10479.62
CV(IBNR):	0.0561261150727825

Η εκτίμηση εκκρεμών ζημιών IBNR υπό αυτή την μέθοδο της Mack Chain Ladder είναι **186.715,60**. Από τον πίνακα 4.6 προκύπτει το συνολικό πραγματικό ποσό πληρωθεισών αποζημιώσεων (Latest) που είναι **1.454.576** και το εκτιμώμενο τελικό κόστος των αποζημιώσεων (Ultimate) που είναι **1.641.291,60**.

Οι παράγοντες εξέλιξης και το ολοκληρωμένο τρίγωνο με τις εκτιμήσεις προκύπτει ως εξής στους πίνακες 4.7 και 4.8. Στον πίνακα 4.9 παρουσιάζονται τα τυπικά σφάλματα των πραγματικών Chain Ladder ανά έτος παραγόντων (ρίζα της διακύμανσης της υπόθεσης (3.3)). Η παράμετρος sigma της υπόθεσης (3.3) παρουσιάζεται στον πίνακα 4.10.

Στη συνέχεια στον πίνακα 4.11 φαίνεται η μεταβλητότητα της εκτίμησης των μελλοντικών αποζημιώσεων όχι με την εξήγηση της μεταβλητότητας των εκτιμητών των συντελεστών εξέλιξης (μη εξηγήσιμη μεταβλητότητα). Ενώ στον πίνακα 4.12 παρουσιάζεται η μεταβλητότητα της εκτίμησης των μελλοντικών απωλειών με την μεταβλητότητα των εκτιμητών των παραγόντων εξέλιξης μονάχα (explained variation). Στον πίνακα 4.13 παρουσιάζεται η συνολική πρόβλεψη των μελλοντικών αποζημιώσεων από την μέθοδο της Chain Ladder, την τετραγωνική ρίζα του μέσου τυπικού σφάλματος (the mean square error) της εκτίμησης της Chain Ladder. Η συνολική διακύμανση των προβλεπόμενων απωλειών συνδυασμένη για όλα είναι 10479.62

Πίνακας 4.7. Συμπληρωμένο τρίγωνο με τις εκτιμήσεις με την μέθοδο της Mack Chain Ladder

	Εξέλιξη								
Προέλευση	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1991	95603	152104.0	178866.0	191465.0	198447.0	201353.0	203093.0	203980.0	204504.0
1992	73780	109336.0	126077.0	133345.0	137532.0	139509.0	140368.0	140766.0	141127.6
1993	88674	131499.0	152879.0	163473.0	169816.0	173267.0	175237.0	175892.6	176344.5
1994	90441	127778.0	149686.0	159732.0	164153.0	166594.0	168074.5	168703.3	169136.7
1995	93076	148724.0	174440.0	186988.0	194011.0	197131.3	198883.2	199627.3	200140.1
1996	112077	160611.0	186042.0	198876.0	205772.6	209082.1	210940.2	211729.4	212273.3
1997	69646	108087.0	123521.0	131928.8	136503.8	138699.2	139931.8	140455.4	140816.2
1998	103935	155360.0	180759.1	193063.0	199758.0	202970.7	204774.5	205540.6	206068.6
1999	95707	143909.4	167436.5	178833.5	185035.0	188011.0	189681.9	190391.5	190880.6

4.8. Παράγοντες εξέλιξης και το τυπικό σφάλμα των συντελεστών εξέλιξης

	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
f	1,503645	1,163485	1,068068	1,034678	1,016083
f.se	0.0246929721	0.0043669039	0.0019190763	0.0020622150	0.0014291852
	6-7	7-8	8-9		
f	1,008887	1,003741	1,002569		
f.se	0.0014357596	0.0007531439	0.0004190075		

Πίνακας 4.9 Πίνακας με τα τυπικά σφάλματα

	Εξέλιξη							
Προέλευση	1	2	3	4	5	6	7	8
1991	0.06810423	0.01084518	0.004464407	0.004306587	0.002625952	0.002294239	0.0009794205	0.0004190075
1992	0.07752478	0.01279162	0.005317527	0.005160474	0.003154330	0.002756238	0.0011781012	0.0005043902
1993	0.07071503	0.01166396	0.004828962	0.004660741	0.002838702	0.002473203	0.0010543960	0.0004512235
1994	0.07002082	0.01183257	0.004880194	0.004715003	0.002887252	0.002522250	0.0010766282	0.0004607377
1995	0.06902255	0.01096773	0.004520689	0.004357838	0.002655803	0.002318675	0.0009897319	0.0004235509
1996	0.06290014	0.01055406	0.004377460	0.004225584	0.002578786	0.002251435	0.0009610302	0.0004112681
1997	0.07979244	0.01286532	0.005372263	0.005188098	0.003166188	0.002764272	0.0011799358	0.0005049477
1998	0.06531741	0.01073094	0.004440968	0.004288728	0.002617321	0.002285078	0.0009753910	0.0004174137
1999	0.06806722	0.01114969	0.004614266	0.004456086	0.002719456	0.002374248	0.0010134534	0.0004337023

Πίνακας 4.10 Η παράμετρος sigma

sigma	21.0576477	4.2296773	1.8881117	1.8844211	1.1697931	1.0294797	0.4413841	0.1892411
--------------	------------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Πίνακας 4.11 Μη αναμενόμενη μεταβλητότητα

	Εξέλιξη								
Προέλευση	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1991	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
1992	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	71.0010
1993	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	184.7692	201.5301
1994	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.000	420.1917	458.9433	466.6413
1995	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	515.255	692.2086	722.1435	728.9191
1996	0	0.000	0.000	0.0000	840.3673	1005.335	1118.1833	1140.5273	1146.7680
1997	0	0.000	0.000	663.5873	969.4860	1075.720	1151.0125	1167.0574	1172.2030
1998	0	0.000	1667.158	1953.2210	2183.9943	2279.879	2346.4348	2363.6677	2371.2923
1999	0	6514.509	7747.511	8310.8569	8635.9049	8789.215	8878.5523	8913.8429	8937.1230

Πίνακας 4.12 Η αναμενόμενη μεταβλητότητα

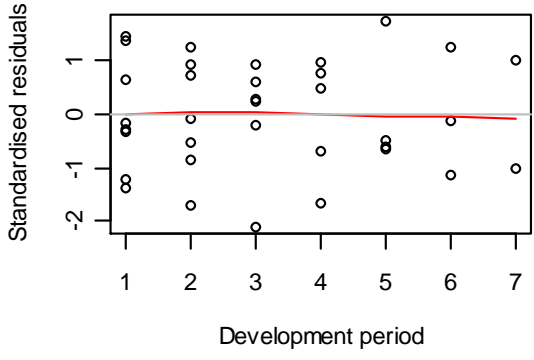
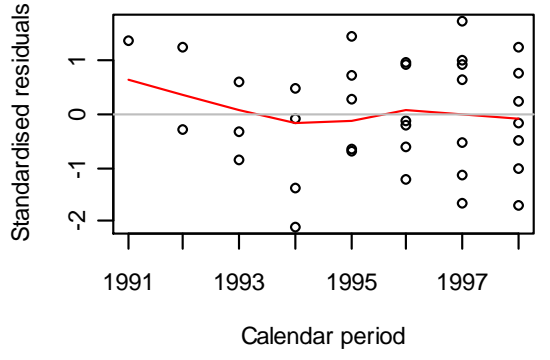
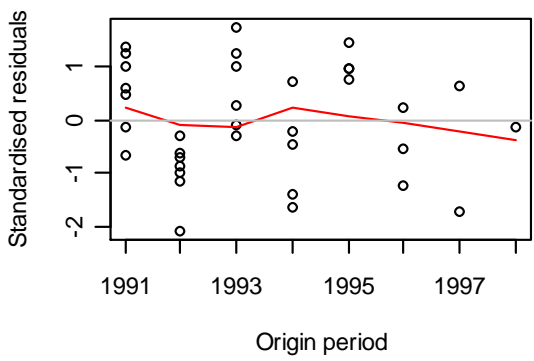
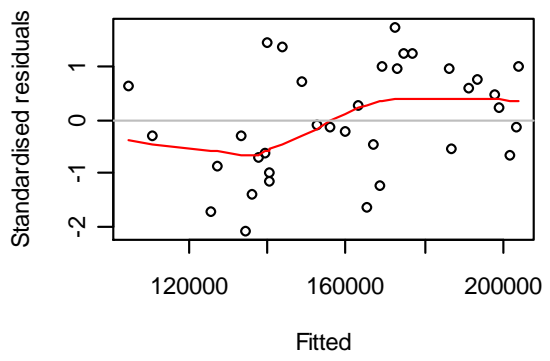
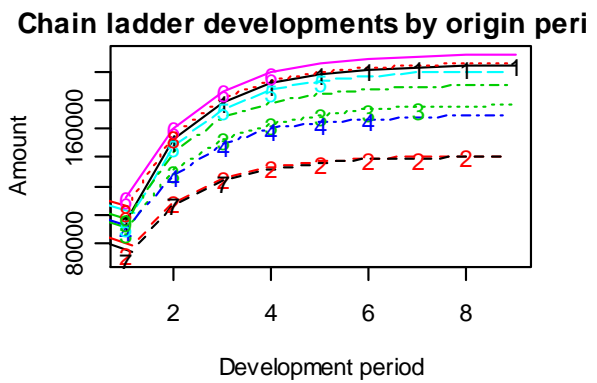
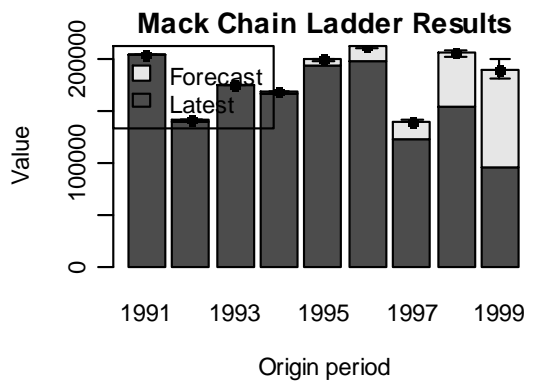
	Εξέλιξη								
Προέλευση	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1991	0	0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1992	0	0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	58.9820
1993	0	0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	131.9787	151.4586
1994	0	0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	239.1889	271.4108	281.1397
1995	0	0.00	0.0000	0.0000	0.0000	277.2776	397.9488	426.5991	435.7976
1996	0	0.00	0.0000	0.0000	410.1251	510.0430	595.7374	618.7106	626.6120
1997	0	0.00	0.0000	237.0462	366.2995	420.2211	468.3957	481.8154	486.6250
1998	0	0.00	678.4422	803.3744	921.6630	979.0362	1029.8291	1045.1238	1051.3420
1999	0	2363.29	2820.5549	3029.6320	3156.3123	3217.9608	3257.7613	3273.0687	3282.4464

Πίνακας 4.13 Η ρίζα του μέσου τυπικού σφάλματος της εκτίμησης ChainLadder

	Εξέλιξη								
Προέλευση	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1991	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.00000
1992	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	92.30394
1993	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	227.0639	252.09938
1994	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	483.5001	533.1911	544.78773
1995	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	585.1244	798.4460	838.7360	849.26005
1996	0	0.000	0.000	0.0000	935.1041	1127.3166	1266.9794	1297.5382	1306.79739
1997	0	0.000	0.000	704.553	1036.3775	1154.8850	1242.6682	1262.6041	1269.19806
1998	0	0.000	1799.917	2111.9855	2370.5049	2481.2010	2562.4801	2584.4165	2593.90577
1999	0	6929.933	8244.966	8845.8472	9194.6267	9359.7850	9457.3622	9495.7662	9520.85195

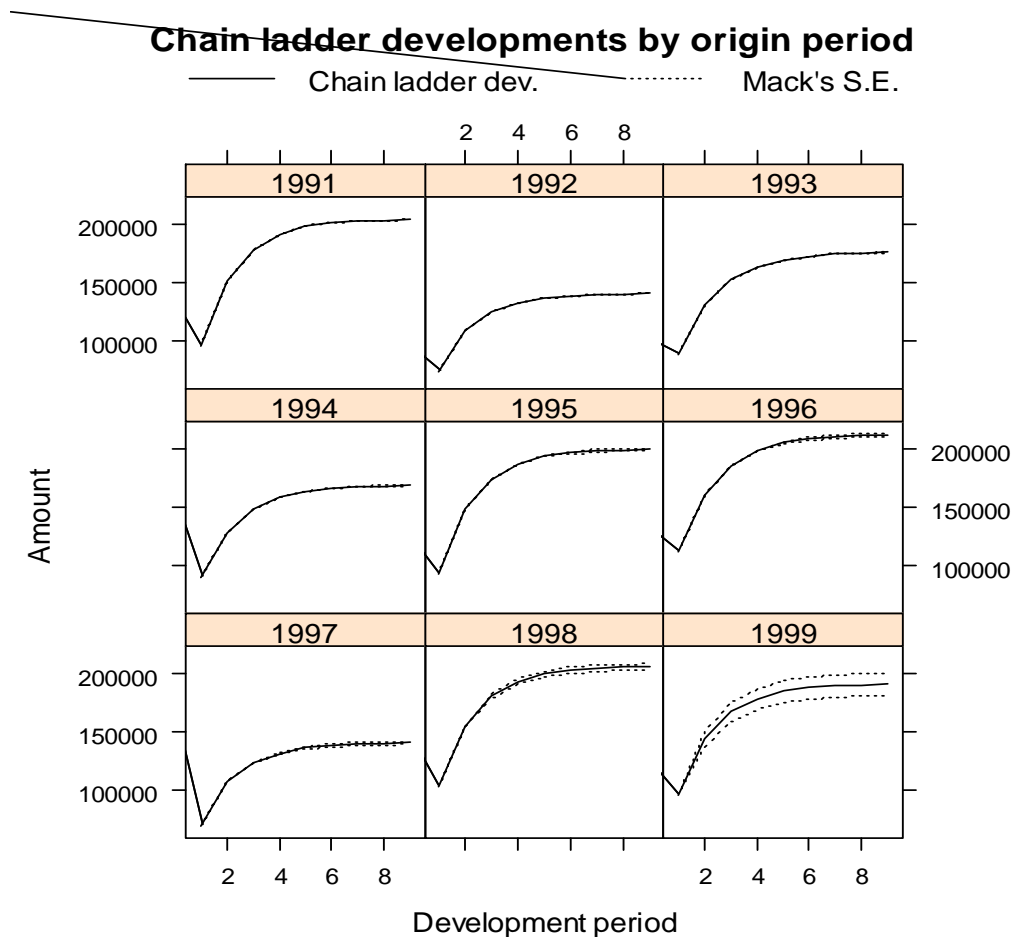
Για να ελεγχθεί ότι η υπόθεση του Mack ισχύει ελέγχουμε τα διαγράμματα καταλοίπων, στα οποία θα πρέπει να μην υπάρχει τάση σε κανένα από αυτά.

Στο ακόλουθο σχήμα 4.5 παρουσιάζονται 6 γραφήματα, στο πρώτο γράφημα αριστερά το ιστόγραμμα των τελικών αποζημιώσεων συν τα IBNR και το τυπικό σφάλμα του Mack δίπλα στην περίοδο προέλευσης. Με το σκούρο γκρι απεικονίζονται οι τελικές σωρευτικές αποζημιώσεις και με το ανοιχτό γκρι οι τελικές εκτιμώμενες αποζημιώσεις. Το επόμενο σχήμα δεξιά είναι ένα διάγραμμα των εκτιμώμενων υποδειγμάτων όλων των περιόδων προέλευσης (με το ένα να είναι ο αριθμός για την παλαιότερη περίοδο προέλευσης). Ακολουθούν 4 διαγράμματα καταλοίπων. Τα διαγράμματα καταλοίπων δείχνουν τα τυποποιημένα κατάλοιπα ενάντια στις προσαρμοσμένες τιμές, στην περίοδο προέλευσης, στο ημερολογιακό έτος και στην περίοδο εξέλιξης. Σε όλα τα διαγράμματα των καταλοίπων για να είναι κατάλληλη η μέθοδος της Mack πρέπει να μην φαίνονται κατευθύνσεις ή ακολουθίες.



Σχήμα 4-5 Ιστόγραμμα τελικών αποζημιώσεων ,οι τελικές εκτιμώμενες αποζημιώσεις ανα έτος και τα διαγράμματα των καταλοίπων με την MackChainLadder

Μπορούμε επίσης να σχεδιάσουμε την εξέλιξη, περιλαμβάνοντας τις εκτιμήσεις και τα εκτιμώμενα τυπικά σφάλματα από την περίοδο προέλευσης.



Σχήμα 4-6 . Ατομικά διαγράμματα με εκτιμήσεις και τυπικά σφάλματα ανά έτος προέλευσης.

4.3 Η εφαρμογή της Bootstrap Chain Ladder

4.3.1 Με κατανομή Gamma

Με τη συνάρτηση `BootChainLadder` χρησιμοποιούνται δύο στάδια ακολουθώντας την δημοσίευση Enland και Verall (2002). Στο πρώτο στάδιο μία τυπική Chain Ladder μέθοδος εφαρμόζεται στα αθροιστικά δεδομένα του τριγώνου. Από αυτά υπολογίζονται τα κλιμακωτά κατάλοιπα του Pearson για τα οποία κάνουμε Bootstrap R φορές για να εκτιμηθούν οι μελλοντικές αυξανόμενες πληρωμές μέσω της τυπικής μεθόδου της Chain Ladder. Στο δεύτερο στάδιο προσομοιώνουμε το σφάλμα της

διαδικασίας με την τιμή Bootstrap ως μέσο και χρησιμοποιούμε την υποτιθέμενη κατανομή της διαδικασίας. Η ομάδα των αποθεμάτων που προκύπτει με αυτό τον τρόπο δίνει μορφή στην κατανομή πρόβλεψης, από την οποία προέρχονται τα στατιστικά όπως ο μέσος, το προβλεπόμενο σφάλμα ή τα ποσοστημόρια. Η BootChainLadder παρέχει μια προβλεπόμενη κατανομή των αποθεμάτων ή των IBNRs για τις αθροιστικές αποζημιώσεις του τριγώνου εξέλιξης.

Μπορούμε να πάρουμε δύο πίνακες 4.14 και 4.15 την περίληψη, το μέσο και τα ποσοστημόρια στατιστικά της περιόδου προέλευσης και την περίληψη, τον μέσο, τα ποσοστημόρια στατιστικά για όλα τα έτη προέλευσης.

Πίνακας 4.14 Στατιστικά στοιχεία

BootChainLadder(Triangle = DataTri, R = 999, process.distr = "gamma")						
	Latest	Mean Ultimate	Mean IBNR	SD IBNR	IBNR 75%	IBNR 95%
1991	204504	204,504	0	0	0	0
1992	140766	141,124	358	381	532	1,004
1993	175237	176,336	1,099	615	1,467	2,245
1994	166594	169,091	2,497	845	3,046	3,958
1995	194,011	200,232	6,221	1,380	7,130	8,552
1996	198,876	212,348	13,472	2,008	14,749	16,983
1997	123,521	140,927	17,406	2,101	18,752	20,922
1998	155,36	206,011	50,651	3,974	53,125	57,690
1999	95,707	190,629	94,922	6,775	99,596	105,509

Πίνακας 4.15 Συνολικά στατιστικά στοιχεία

Totals	
Latest:	1,454,576
Mean Ultimate:	1,641,202
Mean IBNR:	186,626
SD IBNR:	9,958
Total IBNR 75%	193,520
Total IBNR 95%	203,580

Η συνολική εκτίμηση των IBNR εκκρεμών ζημιών υπό αυτή την μέθοδο είναι 186.626. Το εκτιμώμενο τελικό κόστος αποζημιώσεων 1.641.202. Το τελικό πραγματικό κόστος είναι 1.454.576.

Πίνακας 4.16 Οι παράγοντες της Chain Ladder με Bootstrap

Έτος εξέλιξης	1-2	2-3	3-4	4-5
Συντελεστές εξέλιξης	1,503645	1,163485	1,068068	1,034678
Έτος εξέλιξης	5-6	6-7	7-8	8-9
Συντελεστές εξέλιξης	1,016083	1,008887	1,003741	1,002569

Πίνακας 4.17. Οι εκτιμήσεις των εκκρεμών ζημιών

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max
150000	179600	186500	186600	193500	222100

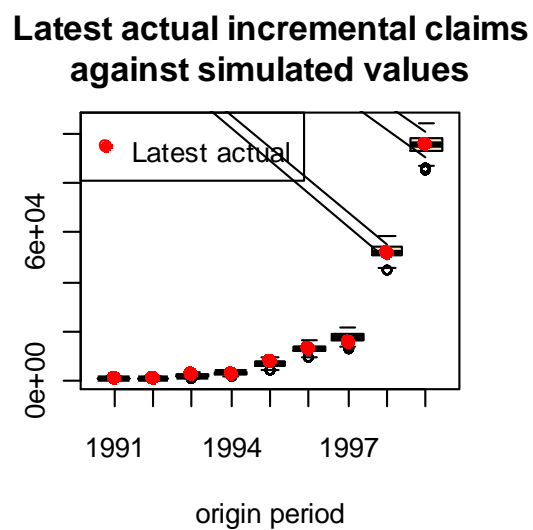
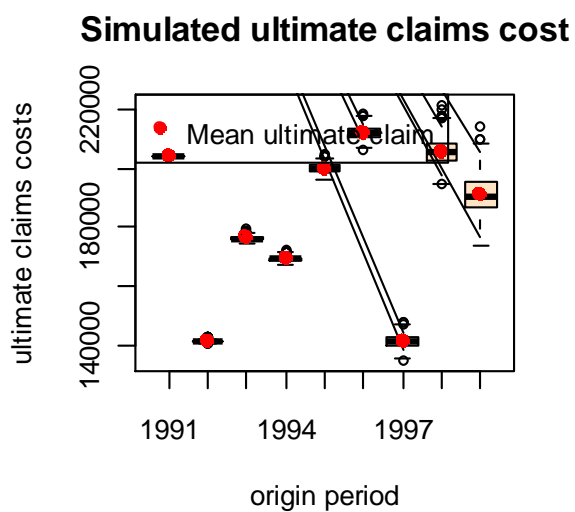
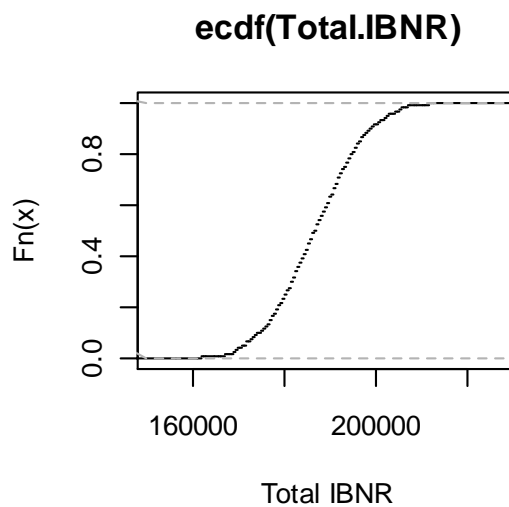
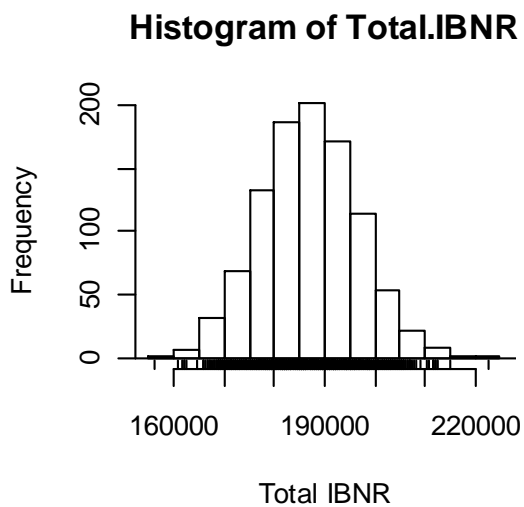
Πίνακας 4. Τα ποσοστημόρια των εκτιμήσεων των εκκρεμών ζημιών ανά έτος γεγονότος

	IBNR 75%	IBNR 95%	IBNR 99%	IBNR 99,5%
1991	0.0000	0.000	0.000	0.000
1992	532,0388	1133,645	1661,384	1753,849
1993	1466,8941	2245,436	2767,330	2994,370
1994	3045,9313	3958,188	4603,158	4768,140
1995	7130,2065	8552,189	9869,956	10111,788
1996	14749,1452	16983,271	18319,508	18981,364
1997	18752,0939	20921,587	22943,653	23680,244
1998	53125,4692	57690,143	60590,949	61363,310
1999	99595,5980	105508,602	109938,767	112582,964

Πίνακας 4.18 Συνολικά στοιχεία των IBNR

Totals	
IBNR 75%	193520,2
IBNR 95%	203579,8
IBNR 99%	210184,3
IBNR 99,5%	212246,3

Το σχήμα 4.7 δείχνει 4 διαγράμματα. Αρχικά απεικονίζεται το ιστόγραμμα των συνολικών προσομοιωμένων εκτιμήσεων των εκκρεμών ζημιών από όλα τα έτη προέλευσης. Στη συνέχεια μπορούμε να δούμε την εμπειρική αθροιστική κατανομή (empirical cumulative distribution function) των IBNR όλων των ετών προέλευσης Ένα γράφημα πλαισίου απολήξεων των προσομοιωμένων τελικών ποσών αποζημιώσεων απέναντι στην αρχική περίοδο. Ένα γράφημα πλαισίου απολήξεων των ατομικών ποσών των απαιτήσεων για το τελευταίο διαθέσιμο ημερολογικό έτος ενάντια στις πραγματικές ατομικές απαιτήσεις της ίδιας περιόδου. Τα προσομοιωμένα δεδομένα πρέπει να ακολουθούν την ίδια τάση όπως τα πραγματικά δεδομένα, διαφορετικά τα πραγματικά δεδομένα μπορεί να έχουν ενδογενες τάση που δεν απεικονίζεται στο μοντέλο.



Σχήμα 4-7 Διαγράμματα Bootstrap ChainLadder με Gamma κατανομή

4.3.2 Με κατανομή Over-dispersed Poisson

Πίνακας 4.19 Τα στατιστικά στοιχεία με την Over-dispersed Poisson

BootChainLadder(Triangle = DataTri, R = 999, process.distr = "od.pois")						
	Latest	Mean Ultimate	Mean IBNR	SD IBNR	IBNR 75%	IBNR 95%
1991	204,504	204,504	0	0	0	0
1992	140,766	141,127	361	356	542	1,059
1993	175,237	176,336	1,099	623	1,478	2,147
1994	166,594	169,134	2540	899	3,15	4,113
1995	194,011	200,198	6,187	1,319	7,018	8,486
1996	198,876	212,274	13,398	1,96	14,67	16,698
1997	123,521	140,873	17,352	2,18	18,666	21,119
1998	155,36	205,88	50520	4,114	53,359	57,185
1999	95,707	190,882	95,175	6,882	99,735	106,338

Πίνακας 4.20 Συνολικά στατιστικά στοιχεία

Totals	
Latest:	1,454,576
Mean Ultimate:	1,641,208
Mean IBNR:	186,632
SD IBNR:	10,084
Total IBNR 75%	192,999
Total IBNR 95%	203,349

Η συνολική εκτίμηση εκκρεμών ζημιών υπό αυτή την μέθοδο είναι 186.632.

Το εκτιμώμενο τελικό κόστος αποζημιώσεων 1.641.208. Το τελικό πραγματικό κόστος είναι 1.454.576.

Πίνακας 4.21 Οι παράγοντες της Chain Ladder

Έτος εξέλιξης	1-2	2-3	3-4	4-5
Συντελεστές εξέλιξης	1,503645	1,163485	1,068068	1,034678
Έτος εξέλιξης	5-6	6-7	7-8	8-9
Συντελεστές εξέλιξης	1,016083	1,008887	1,003741	1,002569

Πίνακας 4.22 Οι εκτιμήσεις των εκκρεμών ζημιών

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max
147200	179700	186300	186600	193000	222900

Πίνακας 4.23 Τα ποσοστημόρια των εκτιμήσεων των εκκρεμών ζημιών ανά έτος γεγονότος

	IBNR 75%	IBNR 95%	IBNR 99%	IBNR 99,5%
1991	0.0000	0.00000	0.0000	0.0000
1992	542,0	1059,10	1488,48	1753,14
1993	1477,5	2147,3	2774,44	2976,34
1994	3150,5	4113,1	4848,20	5065,69
1995	7017,5	8485,6	9637,84	9727,03
1996	14670,5	16697,6	18176,32	18564,66
1997	18665,5	21119,3	22974,08	23265,71
1998	53359,0	57184,7	60397,24	61413,55
1999	99734,5	106337,8	111989,44	112868,64

Πίνακας 4.24 Συνολικά στοιχεία των IBNR

Totals	
IBNR 75%	192999,0
IBNR 95%	203349,10
IBNR 99%	211423,3
IBNR 99,5\$	212356,2

Σχήμα 4-8 Διαγράμματα Bootstrap ChainLadder με Over-dispersed Poisson

4.4 Η εφαρμογή σε γενικευμένα γραμμικά μοντέλα

Τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί το ενδιαφέρον για την χρησιμοποίηση των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων για την αποθεματοποίηση απωλειών ασφαλειών. Η συνάρτηση glmReserve λαμβάνει ένα τρίγωνο απωλειών ασφαλίσεων και τις μετατρέπει σε ατομικές αποζημιώσεις και προσαρμόζει τα αποτελέσματα με ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο όπου ο τύπος του μέσου περιλαμβάνει το έτος ατυχήματος (έτος προέλευσης) και την εξέλιξη development lag effects. Στη συνέχεια προσαρμόζουμε την Over dispersed Poisson και την Gamma. Τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε φαίνονται στους πίνακες 4.25, 4.26 και 4.27 για την over dispersed Poisson Model και τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε από τους πίνακες 4.28, 4.29 και 4.30 είναι για την Gamma.

4.4.1 Over Dispersed Poisson Model

Πίνακας 4.25 Αποτελέσματα από την χρήση GLM, Over- dispersed Poisson model

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	S.E	CV
1992	140766	0.9974350	141128	362	356.5740	0.98501102
1993	175237	0.9937225	176344	1107	618.3420	0.55857453
1994	166594	0.9849649	169137	2543	881.1213	0.34648890
1995	194011	0.9693764	200140	6129	1358.4628	0.22164510
1996	198876	0.9368879	212273	13397	1985.6079	0.14821288
1997	123521	0.8771801	140816	17295	2188.9456	0.12656523
1998	155360	0.7539222	206069	50709	4095.8408	0.08077148
1999	95707	0.5013962	190881	95174	6729.7367	0.07070982
total	1250072	0.8700462	1436788	186716	9880.0692	0.05291496

Η συνολική εκτίμηση εκκρεμών ζημιών υπό αυτή την μέθοδο είναι 186716.

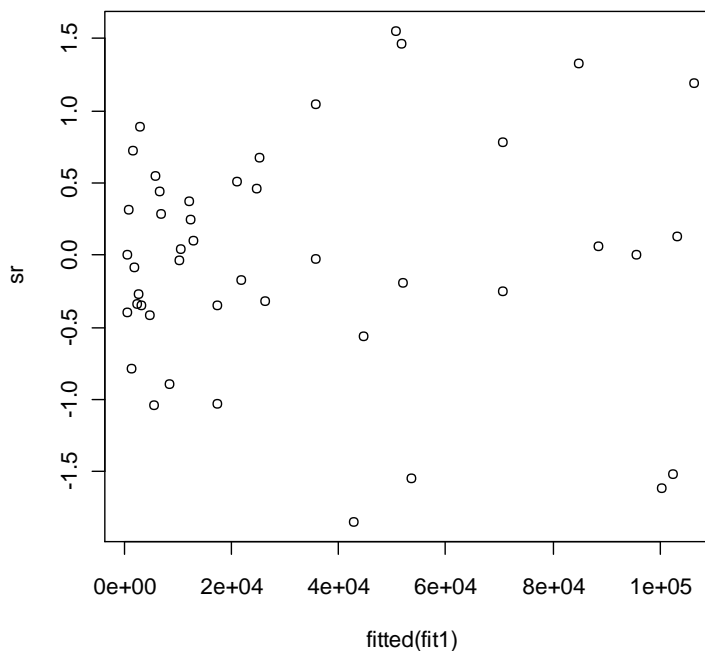
Πίνακας 4.26. Απόκλιση καταλοίπων

Deviance Residuals:					
	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-26.582	-5.078	0.000	6.624	22.351

Πίνακας 4.27. Συντελεστές και τυπικά σφάλματα.

Coefficients:				
	Estimate	Std.Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	11.537986	0.034302	336.363	<2,00e-16
factor(origin)1992	-0.370923	0.049914	-7.431	4.30e-08
factor(origin)1993	-0.148148	0.046943	-3.156	0.003806
factor(origin)1994	-0.189880	0.047631	-3.987	0.000436
factor(origin)1995	-0.021570	0.045799	-0.471	0.641315
factor(origin)1996	0.037287	0.045604	0.818	0.420476
factor(origin)1997	-0.373132	0.052249	-7.141	9.02e-08
factor(origin)1998	0.007622	0.049160	0.155	0.877902
factor(origin)1999	-0.068939	0.057834	-1.192	0.243259
factor(dev)1992	-0.685883	0.029187	-23.500	< 2e-16
factor(dev)1993	-1,403139	0.040862	-34.338	< 2e-16
factor(dev)1994	-2,127938	0.059079	-36.018	< 2e-16
factor(dev)1995	-2,736494	0.086920	-31.483	< 2e-16
factor(dev)1996	-3,470718	0.140416	-24.717	< 2e-16
factor(dev)1997	-4,047971	0.214414	-18.879	< 2e-16
factor(dev)1998	-4,904258	0.402797	-12.176	1.06e-12
factor(dev)1999	-5.276494	0.630224	-8.372	4.16e-09
Dispersion parameter for Tweedie family taken to be 207.5066				
Null Deviance	1546436.9 on 44 degree of freedom			
Residual deviance	5849.9 on 28 degree of freedom			
Number of Fisher Scoring Iterations:4				

Στο σχήμα 4.9 είναι το διάγραμμα καταλοίπων δεν έχει μία προκαθορισμένη σειρά σε σχέση με τις εκτιμηθείσες τιμές (είναι τυχαία τοποθετημένα) το οποίο σημαίνει ότι τα κατάλοιπα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.



Σχήμα 4-9 Διάγραμμα καταλοίπων

4.4.2 Κατανομή Gamma

Αντίστοιχα παραθέτουμε τα αποτελέσματα του γενικευμένου γραμμικού μοντέλου χρησιμοποιώντας την κατανομή Gamma.

Πίνακας 4.28 Αποτελέσματα από την χρήση GLM, κατανομή Gamma

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	S.E	CV
1992	140766	0.9977814	141079	313	53.43129	0.17070701
1993	175237	0.9932888	176421	1184	140.22944	0.11843703
1994	166594	0.9861134	168940	2346	242.62656	0.10342138
1995	194011	0.9686166	200297	6286	610.37119	0.09710009
1996	198876	0.9387408	211854	12978	1264.20494	0.09741138
1997	123521	0.8804816	140288	16767	1687.44771	0.10064100
1998	155360	0.7570117	205228	49868	5559.09531	0.11147620
1999	95707	0.5039863	189900	94193	13178.73.556	0.13991205
total	1250072	0.8717341	1434006	183934	14891.97483	0.08096369

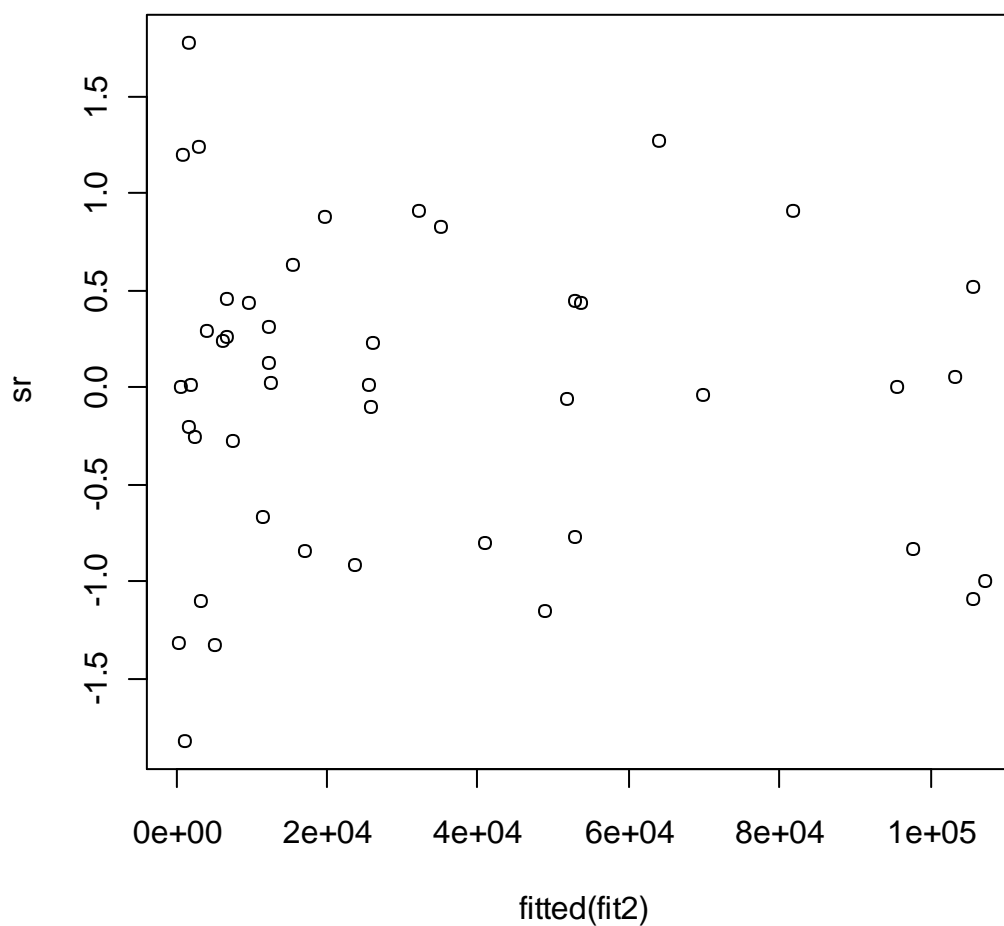
Πίνακας 4.29 Deviance κατάλοιπα

Deviance Residuals:				
Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.206586	-0.087169	0.001716	0.050090	0.201575

Πίνακας 4.30 Συντελεστές και τυπικά σφάλματα.

Coefficients:				
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	11.583270	0.05805	199.534	<2,00e-16
factor(origin)1992	-0.51491	0.05688	-9.052	8.26e-10
factor(origin)1993	-0.09387	0.05985	-1.568	0.12804
factor(origin)1994	-0.27266	0.06319	-4.315	0.00018
factor(origin)1995	-0.01550	0.06732	-0.230	0.81954
factor(origin)1996	-0.01416	0.07286	-0.194	0.84735
factor(origin)1997	-0.42795	0.08104	-5.281	1.29e-05
factor(origin)1998	-0.03823	0.09504	-0.402	0.69057
factor(origin)1999	-0.11422	0.12772	-0.894	0.37878
factor(dev)1992	-0.69064	0.05688	-12.142	1.13e-12
factor(dev)1993	-1,413980	0.05985	-23.625	<2,00e-16
factor(dev)1994	-2.145070	0.06319	-33.947	<2,00e-16
factor(dev)1995	-2.761660	0.06732	-41.022	<2,00e-16
factor(dev)1996	-3.480740	0.07286	-47.773	<2,00e-16
factor(dev)1997	-4.098640	0.08104	-50.578	<2,00e-16
factor(dev)1998	-4.928440	0.09504	-51.858	<2,00e-16
factor(dev)1999	-5.321770	0.12772	-41.668	<2,00e-16
Null deviance:	75.43222 on 44 degree of freedom			
Residual deviance	0.36525 on 28 degree of freedom			
Number of Fisher Scoring Iterations:5				

Στο σχήμα 4.10 είναι το διάγραμμα καταλοίπων δεν έχει μία προκαθορισμένη σειρά σε σχέση με τις εκτιμηθείσες τιμές (είναι τυχαία τοποθετημένα) το οποίο σημαίνει ότι τα κατάλοιπα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.



Σχήμα 4-10 Διάγραμμα καταλοίπων

4.5 Η Micro Level προσεγγιση

Χρησιμοποιούμε τα αναλυτικά δεδομένα που προσομοιώθηκαν με βάση την διαδικασία της παραγράφου 4. Δηλαδή το σύνολο των ασφαλισμένων είναι 1000 άτομα. Θεωρούμε ότι ο αριθμός των ζημιών ακολουθεί $N_i \sim Poisson(0.10)$, το ύψος των αποζημιώσεων X_i ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1000 και το ύψος των IBNR ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1000f$ όπου η f ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή $U \sim (0.40, 0.60)$. Με βάση την διαδικασία αυτή προσομοιώνω τα δεδομένα.

Στην συνέχεια θεωρούμε δηλαδή ότι εξετάζονται οι κατανομές που ακολουθούν ο χρόνος συμβάντος T_i , η καθυστέρηση αναφοράς του συμβάντος U_i , και η στοχαστική διαδικασία της εξέλιξης του συμβάντος, δηλαδή των πληρωμών στα επόμενα χρόνια X_i . Θεωρούμε ως γνωστό ότι η καθυστέρηση αναφοράς ακολουθεί $U_i(0.5, 1.5)$ και έχουμε μόνο IBNR συμβάντα. Το ύψος της IBNR απαίτησης όπως έχουμε ήδη αναφέρει θεωρούμε ότι είναι $X_{t+1} = f X_t$, όπου f ακολουθεί $U(0.4, 0.6)$. Δηλαδή θεωρούμε ότι το άθροισμα των πληρωμών για το έτος $t+1$ που πρέπει να γίνουν λόγω των συμβάντων του έτους που εξετάζουμε είναι κατά μέσο όρο ίσο με το ήμισυ των συνολικών πληρωμών του έτους t .

Το απόθεμα IBNR θα εκτιμηθεί και τα αποτελέσματα θα συγκριθούν με τις παραδοσιακές αναλογιστικές τεχνικές.

Πίνακας 4.31 Εκτιμήσεις ατομικών αποζημιώσεων

	Εξέλιξη								
Προέλ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1991	95603	56501	26762	12599	6982	2906	1740	887	524
1992	73780	35556	16741	7268	4187	1977	859	398	203
1993	88674	42825	21380	10594	6343	3451	1970	980	488
1994	90441	37337	21908	10046	4421	2441	1228	606	301
1995	93076	55648	25716	12548	7023	3511	1755	882	436
1996	112077	48535	25431	12834	6402	3223	1649	824	407
1997	69646	38441	15437	7708	3829	1896	962	488	245
1998	103935	51425	26204	13047	6597	3287	1642	804	413
1999	95707	47723	23812	12267	6105	3024	1559	775	391

Πίνακας 4.32 Εκτιμήσεις συσσωρευμένων αποζημιώσεων

	Εξέλιξη								
Προέλ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1991	95603	152104	178866	191465	198447	201353	203093	203980	204504
1992	73780	109336	126077	133345	137532	139509	140368	140766	140969
1993	88674	131499	152879	163473	169816	173267	175237	176217	176705
1994	90441	127778	149686	159732	164153	166594	167822	168428	168729
1995	93076	148724	174440	186988	194011	197522	199277	200158	200594
1996	112077	160612	186043	198877	205279	208502	210151	210975	211382
1997	69646	108087	123524	131232	135061	136957	137920	138408	138653
1998	103935	155360	181564	194611	201209	204496	206138	206942	207354
1999	95707	143430	167241	179508	185613	188637	190196	190971	191361

Πίνακας 4.33 Το συνολικό πραγματικό ποσό πληρωθεισών αποζημιώσεων

Latest									
1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	
204504	140766	175237	166594	194011	198877	123524	155360	95707	

Πίνακας 4.34 Το εκτιμώμενο τελικό ποσό των αποζημιώσεων

Ultimate									
1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	
204763	141070	176956	168882	200814	211586	138775	207557	191558	

Πίνακας 4.35 Οι εκτιμήσεις των εκκρεμών αποζημιώσεων

IBNR									
1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	
259	304	1719	2288	6803	12709	15251	52197	95851	

Πίνακας 4.36 Τα αθροίσματα των πραγματικών, των εκτιμώμενων τελικών και των εκκρεμών ζημιών

Αθροισμα πληρωθεισών Αποζημιώσεων(Latest)	Αθροισμα τελικών αποζημιώσεων (Ultimate)	Αθροισμα εκκρεμών αποζημιώσεων (IBNR)
1454580	1641961	187122

Από τους πίνακες 4.37 και 4.38 που ακολουθούν προκύπτουν κάποια συμπεράσματα για τις macro προσεγγίσεις και την micro προσέγγιση. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα της micro προσέγγισης είναι πολύ κοντα με τις macro προσεγγίσεις. Τα αποτελέσματα τόσο των μεθόδων της micro προσέγγισης όσο και των macro προσεγγίσεων δεν διαφέρουν σημαντικά λόγω των υποθέσεων που έχουν γίνει και αφορά την εξέλιξη των ζημιών και ιδιαίτερα των IBNR ζημιών. Το μεγαλύτερο απόθεμα που κρατάει η εταιρεία είναι με την μέθοδο της Chain Ladder, την Mack Chain Ladder και στην συνέχεια με την micro προσέγγιση. Εν γένει η μέθοδος micro προσφέρει καλύτερη ανάλυση τόσο ανα ζημιά ή ανα ασφαλισμένο διότι έχουμε πιο αναλυτικά δεδομένα όσο και στο σύνολο.

Πίνακας 4.37. Το εκτιμώμενο τελικό ποσό των αποζημιώσεων

Ultimate	Chain Ladder	Mack Chain Ladder	Bootstrap Chain Ladder -Gamma	Bootstrap Chain Ladder -Over Dispersed Poisson	Micro
1991	204676	204504	204504	204504	204763
1992	141246	141128	141,124	141127	141070
1993	176493	176344	176336	176336	176956
1994	169279	169137	169091	169,134	168882
1995	200308	200140	200232	200198	200814
1996	212452	212273	212348	212274	211586
1997	140934	140816	140927	140873	138775
1998	206242	206069	206011	205880	207557
1999	191041	190881	190629	190882	191558
	1.642.671	1.641.292	1.500.219,12	1.472.243,13	1.641.961

Πίνακας 4.38 Οι εκτιμήσεις των εκκρεμών αποζημιώσεων

IBNR	Chain Ladder	Mack Chain Ladder	Bootstrap Chain Ladder -Gamma	Bootstrap Chain Ladder -Over Dispersed Poisson	Micro
1991	173	0	0	0	259
1992	480	362	358	361	304
1993	1256	1107	1099	1099	1719
1994	2685	2543	2497	2540	2288
1995	6297	6129	6221	6,187	6803
1996	13576	13397	13472	13398	12709
1997	17413	17295	17406	17352	15251
1998	50802	50709	50651	50520	52194
1999	95334	95174	94922	95175	95851
	188016	186715.6	186626	186632	187378

Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα

Με την εισαγωγή του Solvency 2 (το 2012) και του International Financial Reporting Standards 4 φάση 2 (το 2013) οι ασφαλιστικές εταιρίες αντιμετωπίζουν μεγαλύτερες προκλήσεις. Η μέτρηση των μελλοντικών ροών και η αβεβαιότητα γίνεται όλο και περισσότερο σημαντική. Αυτό μας οδηγεί στην ερώτηση εάν οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται μπορούν να βελτιωθούν. Το μοντέλο micro επιτρέπει πλησιέστερη μοντελοποίηση της διαδικασίας απαιτήσεων. Πολλα από τα προβλήματα που αναφέρθηκαν για την μέθοδο Chain Ladder και για τις άλλες macro μεθόδους δεν υπάρχουν χρησιμοποιώντας την προσέγγιση micro, εξαιτίας της δυνατότητας πολλών δεδομένων. Για παράδειγμα, πληροφόρηση ανεξάρτητων μεταβλητών όπως αναφέραμε μπορεί να περιληφθεί στην πρόβλεψη των ροών όταν οι απαιτήσεις μοντελοποιούνται σε ατομικό επίπεδο. Πληροφορίες από κατηγορικές μεταβλητές για το συμβόλαιο, το κάτοχο του συμβολαίου ή την διαδικασία εξέλιξης του παρελθόντος δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο παραδοσιακό στοχαστικό μοντέλο, εφόσον κάθε κελί του τριγώνου είναι ένα συνολικός αριθμός. Η ποιότητα των αποθεμάτων και της αβεβαιότητας τους βελτιώνεται χρησιμοποιώντας περισσότερο λεπτομερή δεδομένα απαιτήσεων σε αντίθεση με τα κλασσικά τρίγωνα ροών. Με την χρήση πολλών δεδομένων αποφεύγεται τα προβλήματα ευστάθειας και η υπερπαραμετροποίηση. Επίσης το πρόβλημα με τα μηδενικά ή αρνητικά κελιά και ο ορισμός του παράγοντα ουράς παρακάμπτονται, όπως επίσης μικρές και μεγάλες απαιτήσεις μπορούν να διαχειρίζονται ταυτόχρονα. Επιπλέον, η μοντελοποίηση ατομικών απαιτήσεων μπορεί να δώσει μία φυσική λύση του διλήμματος που υπάρχει στην παραδοσιακή βιβλιογραφία εάν τα τρίγωνα πρέπει να περιλαμβάνουν πληρωθείσες απαιτήσεις ή επισυμβάσεις απαιτήσεις. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το παράδειγμα της δημοσίευσης του Katrien A. and Plat R. (2010) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αξίζει να γίνει περισσότερη έρευνα της χρήσης των micro-level δεδομένων για την αποθεματοποίηση.

Βιβλιογραφία

- [1] Arjas E. *The claim reserving problem in non-life insurance:some structural ideas*. Astin Bulletin, 19(2):139-152,1989
- [2] **England P.D. and Verrall R.J.**, *Stochastic Claims Reserving in General Insurance*, Actuarial Journal, 8:443-544, 2002.
- [3] **Friedland J., Dutil R. and Lam E.**, *Estimating unpaid claims using basic techniques*, Casualty Academic Society, 2010.
- [4] **Gesmann M., Murphy D., and Zhang W.**, *Claims reserving with R: Chain Ladder-0.1.5-6 Package Vignette Draft*, 2013.
- [5] **Katrien A. and Plat R.**, *Micro-Level stochastic loss reserving for General insurance*, 2010.
- [6] **Lemaire J.**, *Automobile insurance: Actuary models*, Kluwer-Nijhoff, 1985.
- [7] **Mack Th.**, *Which Stochastic model is underlying the Chain Ladder Model? Insurance: Mathematics and Economics*, 15, 133-138.
- [8] **Mack Th.**, *Parameter Estimation for Bornhuetter/Ferguson*, Casualty Actuarial Society Forum, Fall 2006.
- [9] **Norberg R.**, *Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance*. Astin Bulletin, 23(1):95-115,1993
- [10] **Norberg R.** *Prediction of outstanding liabilities ii. Model extensions variations and extensions*, Astin Bulletin, 29(1):5-25,1999
- [11] **Renshaw A.E. and Verrall R.J.**, *A stochastic model underlying the Chain Ladder Technic*,*B.A.J.* 4, 903-923.
- [12] **Pigeon M., Katrien A., and Denuit M.**, *Individual Loss Reserving with the Multivariate Skew Normal Model*, Department of Accountancy, Finance and Insurance, 2011
- [13] **Schmidt D. K. and Zocher M.**, *The Bornhuetter-Ferguson Principle*, Casualty Actuarial Society.

[14] **Taylor G. C.**, *Loss Reserving: an actuarial perspective*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[15] **Taylor G. C.**, *Separation and inflation and other effects from the distribution of non-life insurance claim delays*, Macquarie University, Sydney, Australia and Government Actuary's Department, London, U.K., *The Astin Bulletin*, Vol. IX, Part 1 and 2, page.219.(1978)

[16] **Taylor G. C., Mc Guire, and Sullivan**, *Individual claim loss reserving conditioned by case estimates*. *Annals of Actuarial Science*, 3(1-2):215-256,2008

Ιστότοποι:

[1] <http://www.inside-r.org/>

[2] <http://www.actuaries.org.uk/>

