ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Μελέτη των μέτρων κινδύνων με εφαρμογές στον υπολογισμό των ασφαλίστρων

Ζαντίγ Κοέν

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Γεώργιος Ψαρράκος

ΠΕΙΡΑΙΑΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2013

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

MSC IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Study of risk measures with applications on premiums calculation

Gentille Cohen

SUPERVISOR: Georgios Psarrakos

PIRAEUS
NOVEMBER 2013

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Ψαρράκο Γεώργιο, για τη πολύτιμη βοήθεια που μου πρόσφερε προκειμένου να ολοκληρώσω την παρούσα διπλωματική εργασία. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω το κ. Πιτσέλη Γεώργιο για τις γνώσεις που μου έδωσε κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω και όλους εκείνους που με βοήθησαν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Στη μνήμη, του Ιάκωβου Φριζή,
ενός ανθρώπου
που εκτιμούσε απεριόριστα
τη γνώση…

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα παρουσιάσουμε ένα διαφορετικό τρόπο υπολογισμού του ασφαλίστρου, ο οποίος βασίζεται στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της κατανομής που ακολουθεί ο κίνδυνος που θέλουμε να ασφαλίσουμε. Με αυτό τον τρόπο υπολογισμού του ασφαλίστρου, δεν ερχόμαστε αντιμέτωποι με την επιλογή συνάρτησης ωφελιμότητας και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η τιμολόγηση να μην εξαρτάται από την υποκειμενικότητα του αναλογιστή. Για την εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου δεν είναι απαραίτητη η γνώση της κατανομής, καθώς μας αρκεί να γνωρίζουμε τις τιμές που έχουν κάποια χαρακτηριστικά της μεγέθη (στατιστικά μεγέθη), τα οποία μπορούν να υπολογιστούν εμπειρικά. Δεδομένου ότι κάποιες φορές είναι δύσκολο να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής που περιγράφει τον κίνδυνο, προτείνονται προσεγγιστικές μέθοδοι για τον υπολογισμό των συνολικών αποζημιώσεων που προκύπτουν από έναν κίνδυνο, οι οποίες με χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων, έχει αποδειχθεί ότι μας δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα. Μια από αυτές τις προσεγγίσεις είναι η Κανονική Δυναμοκατανομή (Normal Power distribution).

ABSTRACT

In the present thesis, it will be presented a different method of pricing policies. This method is based on the particular characteristics of the distribution function of the risk we want to insure. Using this method, we no longer need to choose an utility function. As a result, pricing does not depend on the actuary's subjectivity. In order to apply this method, we only need to know the arithmetical values of statistical measurements. Such measurements can be found using empirical data and therefore, the distribution function is not needed. Since there are times in which is difficult to find the distribution function of the risk, methods of approximation are suggested. Using arithmetical examples, it has been proved, that these methods of approximation are satisfactory. One of these approximations is the approximation of Normal Power distribution.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Βασιζόμενοι στην εργασία του Ramsey (1993), θα αναπτύξουμε μία διαφορετική προσέγγιση για την επιβάρυνση των μικτών ασφαλίστρων και η οποία βασίζεται στη χρήση συναρτήσεων μέτρων κινδύνου.

Στο Κεφάλαιο 1, θα μάθουμε τι είναι ο ασφαλιστικός κίνδυνος και θα δούμε ποιες είναι οι ιδιότητες που πρέπει να έχει μία συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου. Επίσης, θα αναφέρουμε μερικές από τις πιο συνήθεις συναρτήσεις μέτρησης του κινδύνου.

Στο Κεφάλαιο 2, θα δούμε τι ονομάζουμε ασφάλιστρο. Επιπλέον, θα μελετήσουμε τις ιδιότητες που πρέπει να έχει το ασφάλιστρο. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με τη σχέση που έχει η επιβάρυνση του ασφαλίστρου με την επικινδυνότητα και θα δείξουμε ότι η επιβάρυνση του ασφαλίστρου πρέπει να αντανακλά το επίπεδο του κινδύνου.

Στο Κεφάλαιο 3, θα μάθουμε τι είναι ο κίνδυνος της δεξιάς ουράς. Επίσης, θα εισάγουμε την έννοια των ημιαναλλοίωτων (cumulants) και θα δούμε πως από αυτές μπορεί να προκύψει ένα κατάλληλο μέτρο για τους ασφαλιστικούς κινδύνους. Επιπλέον, με χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων θα αποδείξουμε ότι η διασπορά δεν αποτελεί κατάλληλο μέτρο κινδύνου για κατανομές με θετική σκέδαση. Τέλος, θα διαπιστώσουμε ότι στην περίπτωση των ασφαλιστικών κινδύνων προκύπτουν κατάλληλες συναρτήσεις μέτρων κινδύνου αν χρησιμοποιήσουμε τις 3 ή/και τις 4 πρώτες ημιαναλλοίωτες της κατανομής που εκφράζει τον ασφαλιστικό κίνδυνο. Σε αυτό το κεφάλαιο για τις ανάγκες της μελέτης μας θα παρουσιάσουμε παραδείγματα που πραγματοποιήθηκαν με την βοήθεια του προγράμματος Mathematica 6.0.

Πολλές φορές η συνάρτηση κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων είναι δύσκολο να βρεθεί. Σε αυτές τις περιπτώσεις συνήθως χρησιμοποιούμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Ωστόσο, για τους ασφαλιστικούς κινδύνους είναι απαραίτητο να βρούμε κάποιες προσεγγίσεις που έχουν καλύτερη προσαρμογή σε μη συμμετρικές κατανομές. Ως εκ τούτου, στο Κεφάλαιο 4, θα προτείνουμε μερικές προσεγγίσεις οι οποίες με χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων έχει αποδειχθεί ότι έχουν καλύτερη προσαρμογή σε κατανομές με θετική σκέδαση. Στο κεφάλαιο αυτό πολλά από τα παραδείγματα που παρουσιάζονται έχουν πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια του Mathematica 6.0.

Στο Κεφάλαιο 5, θα παρουσιάσουμε τον ορισμό της Κανονικής Δυναμοκατανομής (Normal Power distribution) και θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με την προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής. Επίσης, θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει αυτή η προσέγγιση.

Στο 6^{o} και τελευταίο κεφάλαιο, θα δούμε με πιο τρόπο μπορούν να προκύψουν συναρτήσεις ωφελιμότητας κάνοντας χρήση των μέτρων κινδύνου. Επιπλέον, θα δούμε με ποιο τρόπο μας βοηθάνε τα μέτρα κινδύνου να αποφύγουμε το arbitrage.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ο ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΟΥ

1.1 Η ποσοτικοποίηση του κινδύνου

Προκειμένου να υπολογίσουμε το ασφάλιστρο, είναι απαραίτητο να ποσοτικοποιήσουμε τον κίνδυνο.

Ορισμός 1.1.1

Ποσό σε κίνδυνο X ονομάζεται η παρούσα αξία (π.α.) των μελλοντικών απαιτήσεων και εξόδων, καθώς επίσης και το σύνολο των δαπανών που οφείλονται στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του συμβολαίου. $\bigtriangledown$

Είναι ευρύτερα γνωστό ότι μία από τις πιο σημαντικές εργασίες του αναλογιστή είναι ο υπολογισμός του ασφαλίστρου. Επιπροσθέτως, είναι αποδεκτό ότι τα ασφάλιστρα αποτελούνται από δύο μέρη, το καθαρό ασφάλιστρο και την επιβάρυνση. Όσον αφορά το καθαρό ασφάλιστρο είναι αποδεκτό από όλους, ότι πρέπει να θεωρούμε τη μέση τιμή $\mathrm{E}[X]$ **του ποσού σε κίνδυνο** X (βλ. Ορισμός 1.1.1). Αντιθέτως, όπως θα δούμε και παρακάτω, δεν υπάρχει κοινά αποδεκτός τρόπος για τον υπολογισμό της επιβάρυνσης. Ωστόσο, η επιβάρυνση του ασφαλίστρου είναι απαραίτητη, διότι μας δίνει τη δυνατότητα να είμαστε περισσότερο συντηρητικοί στους υπολογισμούς μας, καθώς μας εξασφαλίζει μεγαλύτερη πιθανότητα επάρκειας του ασφαλίστρου. Επιπλέον, μέρος της επιβάρυνσης του ασφαλίστρου καλύπτει τα έξοδα που προκύπτουν από την ασφάλιση όπως για παράδειγμα έξοδα πρόσκτησης και διοικητικά έξοδα.

Σε αντίθεση με τον υπολογισμό του καθαρού ασφαλίστρου, ο υπολογισμός της επιβάρυνσης μπορεί να γίνει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Μερικές από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους για τον υπολογισμό της επιβάρυνσης του ασφαλίστρου είναι η χρήση των ροπών της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X που εκφράζει τον κίνδυνο, η Θεωρία Ωφελιμότητας, η Θεωρία Χρεοκοπίας, καθώς επίσης η μείωση του κινδύνου μέσω αντασφάλισης και η εκτίμηση των αποδόσεων που έχουν οι επενδύσεις που γίνονται από τα ασφάλιστρα με χρήση σύγχρονων μεθόδων ανάλυσης χαρτοφυλακίου.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η μεταβλητότητα του κινδύνου πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ανεξάρτητα της μεθόδου υπολογισμού της επιβάρυνσης που έχουμε επιλέξει να χρησιμοποιήσουμε.
Επιπλέον, είναι φανερό ότι υπάρχει η αναγκαιότητα ανάπτυξης ενός σαφούς μέτρου για το επίπεδο του κινδύνου X, το οποίο στη συνέχεια θα το χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε την επιβάρυνση του ασφαλίστρου. Επομένως, θα θεωρήσουμε ότι η επιβάρυνση του ασφαλίστρου είναι συνάρτηση του μέτρου κινδύνου, κάτι το οποίο είναι αποδεκτό, δεδομένου ότι η επιβάρυνση του ασφαλίστρου πρέπει να αντανακλά το επίπεδο του ποσού σε κίνδυνο.

Στην περίπτωση που επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε μέτρα κινδύνου για τον υπολογισμό του μικτού ασφαλίστρου, απαιτείται ο αναλογιστής να ακολουθήσει την παρακάτω διαδικασία προκειμένου να υπολογιστεί η εφάπαξ επιβάρυνση του μικτού ασφαλίστρου, το οποίο από δω και πέρα θα το συμβολίζουμε $\Pi[X]$.

Αρχικά, υπολογίζεται η μέση τιμή του κινδύνου X, δηλαδή το $\mu = \mathrm{E}[X]$. Στη συνέχεια επιλέγεται η συνάρτηση $R[X]$ την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για τη μέτρηση του κινδύνου X και από την οποία θα υπολογίσουμε το επίπεδο της επικινδυνότητας r που σχετίζεται με τον ασφαλιστικό κίνδυνο X. Ακολούθως, θα γίνει η επιλογή της συνάρτησης επιβάρυνσης του κινδύνου (risk loading function) $\theta(\cdot,\cdot;\cdot)$ και τέλος θα γίνει ο υπολογισμός του εφάπαξ μικτού ασφαλίστρου $\Pi[X]$ χρησιμοποιώντας την αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου

$$\Pi[X] = \mu + \theta(r, \mu; R).$$

Στην παραπάνω διαδικασία, το σημαντικότερο είναι η επιλογή της συνάρτησης κινδύνου $R[X] = r$, καθώς όλοι οι υπολογισμοί που θα πραγματοποιηθούν στη συνέχεια θα βασίζονται στην επιλεγμένη συνάρτηση κινδύνου $R[X]$. Μετά την επιλογή του $R[X]$ ακολουθεί η επιλογή του θ.

Ο όρος «**κίνδυνος»** στην ασφαλιστική επιστήμη δεν εκφράζει μόνο την ύπαρξη κινδύνου, καθώς χρησιμοποιείται και για να εκφράσουμε το ενδεχόμενο ζημιάς, τη διασπορά που υπάρχει ανάμεσα σε πιθανές ζημιές ή ακόμα και την αβεβαιότητα που αφορά τις ζημιές.

Το βέβαιο είναι ότι υπάρχει μία ισχυρή σχέση μεταξύ του κινδύνου και της αβεβαιότητας, αυτό όμως το οποίο αλλάζει, είναι ο τρόπος που ο καθένας αντιλαμβάνεται τον κίνδυνο και κατ' επέκταση την αβεβαιότητα. Για παράδειγμα σύμφωνα με τον Freifelder (1976) η αβεβαιότητα είναι η έλλειψη της βεβαιότητας, δηλαδή η ύπαρξη αμφιβολίας ως προς την πραγματική έκβαση ενός γεγονότος, μίας δοκιμής ή ενός πειράματος. Επιπροσθέτως, ορίζει τον κίνδυνο ως την ατομική αξιολόγηση της αβεβαιότητας που περικλείει ο κάθε κίνδυνος, δηλαδή, θεωρεί ότι ο κίνδυνος αξιολογείται υποκειμενικά. Φυσικά, υπάρχουν και άλλες απόψεις όσον αφορά τον ορισμό του κινδύνου, όπως για π.χ. αυτή των Kaplan και Garrick (1976), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι ο κίνδυνος είναι το άθροισμα της ζημιάς και της αβεβαιότητας. Για εμάς ο όρος «**ασφαλιστικός κίνδυνος**» θα χρησιμοποιηθεί σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.1.2

Ένας **ασφαλιστικός κίνδυνος** X είναι μία μη αρνητική πραγματική τ.μ. η οποία αναπαριστά την παρούσα αξία (π.α) των συνολικών οικονομικών δαπανών του ασφαλιστή για όλη τη διάρκεια του συμβολαίου (policy). $\triangledown$

Στον παραπάνω ορισμό, με τον όρο δαπάνες, δεν εννοούμε μόνο τις απαιτήσεις που θα προκύψουν από το ασφαλιστήριο συμβόλαιο, αλλά και όλα τα έξοδα που θα προκύψουν κατά τη διάρκεια του και σχετίζονται με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του, όπως για παράδειγμα, εγγυήσεις επιτοκίου, προμήθειες, εγγυήσεις για ακύρωση συμβολαίου, απαλλαγή από ασφάλιστρα κ.α. Οι παραπάνω παρούσες αξίες, υποθέτουμε ότι έχουν υπολογιστεί στη γενική περίπτωση συμπεριλαμβανομένου ενός στοχαστικού επιτοκίου, αν και στην πράξη τα επιτόκια που χρησιμοποιούνται για το καθορισμό του μικτού ασφαλίστρου θεωρούνται μη στοχαστικά.

1.2 Η ταξινόμηση των κινδύνων

Σύμφωνα με την Society of Actuaries Committee on Valuation and Related Matters, οι πιο διαδεδομένοι κίνδυνοι που καλύπτουν οι ασφαλιστικές εταιρίες, χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες: C-1, C-2, C-3.

Οι κίνδυνοι C-1 αφορούν κινδύνους κατά τους οποίους μία περιουσία χάνει την αξία της λόγω πτώχευσης του οφειλέτη, οι κίνδυνοι C-2 οφείλονται σε μη επαρκή τιμολόγηση του ασφαλίστρου και οι κίνδυνοι C-3 σε κακό συντονισμό των χρηματοροών της περιουσίας και των υποχρεώσεων.

Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με τους C-2 κινδύνους, δηλαδή με κινδύνους που οφείλονται σε ανεπαρκή τιμολόγηση.

1.3 Τα περιοδικά ασφάλιστρα

Ορισμός 1.3.1

Μία βασική ασφαλιστική σύμβαση αποτελείται από ένα εφάπαξ ασφάλιστρο Π, το οποίο πληρώνεται στην αρχή του συμβολαίου και ασφαλίζει τον κίνδυνο X. Το ασφαλιστήριο συμβόλαιο μπορεί να διαρκεί για μία περίοδο ή για πολλές περιόδους.

$\triangledown$

Οι δύο παραπάνω ορισμοί (βλ. Ορισμό 1.1.2 και Ορισμό 1.3.1) ίσως να δείχνουν καταλληλότεροι για ασφαλίσεις ζημιών, όπου τα συμβόλαια είναι μικρής διάρκειας και το ασφάλιστρο πληρώνεται εφάπαξ, από ότι για ασφαλίσεις ζωής όπου τα ασφάλιστρα πληρώνονται σε δόσεις και έχουν αρκετά μεγάλη διάρκεια. Επιπλέον, στις ασφαλίσεις ζωής τα ασφάλιστρα μπορεί να είναι σταθερά ή μεταβλητά, μη στοχαστικά ή στοχαστικά. Σε οποιαδήποτε από τις παραπάνω περιπτώσεις, η π.α. του ασφαλίστρου ως εισόδημα είναι μία τ.μ. Y και επομένως ο αναλογιστής βρίσκεται αντιμέτωπος με δύο πηγές κινδύνου την τ.μ. X και την τ.μ. Y.

Έστω G_κ το περιοδικό μικτό ασφάλιστρο που καταβάλλεται σε διαδοχικές χρονικές στιγμές t_κ, $\kappa = 0,1,2....$ με $t_o = 0$. Τότε το Y, δηλαδή η π.α. του ασφαλίστρου ως εισόδημα, δίνεται από τη σχέση

$$Y=\sum_{\kappa=0}^{\mathrm{K}} G_\kappa \cdot {}_\kappa v_0 ,$$

όπου

$\mathrm{K}+1$: το πλήθος των ασφαλίστρων που πληρώνονται πριν από τη λήξη του συμβολαίου,

${}_\kappa v_0$: ο παράγοντας προεξόφλησης ${}_\kappa v_0 = \exp\left[-\int_0^{t_\kappa} \delta(s)\,ds\right]$,

$\delta(s)$: η στοχαστική ένταση επιτοκίου κατά τη χρονική στιγμή s.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε μερικούς ορισμούς (βλ. Κουτσόπουλος, 2009), τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε για να δούμε πως προκύπτει ο τύπος για τον **παράγοντα προεξόφλησης** ${}_\kappa v_0$.

Ορισμός 1.3.2

Ορίζουμε ως **ανατοκιστική συνάρτηση** $C(t)$, κάθε συνεχή πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το θετικό άξονα ή αρχικό τμήμα αυτού και για την οποία ισχύει ότι:

α) $C(0)=1$ και $C(t)>0$ για κάθε $t \geq 0$,

β) η παράγωγος $C'(t)$ υπάρχει, εκτός ενδεχομένως από τα σημεία $t_1, t_2 \ldots t_\kappa$, και, σε περίπτωση ύπαρξης τέτοιων σημείων, η $C(t)$ είναι συνεχής σε κάθε ανοικτό διάστημα (t_{i-1}, t_i), $i=1,2\ldots n$ και $t_0=0$.

▽

Ορισμός 1.3.3

Το πηλίκο $\delta(t)=\dfrac{C'(t)}{C(t)}$, όπου $C(t)$ η ανατοκιστική συνάρτηση, ονομάζεται **ένταση ανατοκισμού** ▽

Ορισμός 1.3.4

Το πηλίκο ${}_h v_t = \dfrac{C(t)}{C(t+h)}$, όπου $C(t)$ η ανατοκιστική συνάρτηση, ονομάζεται **παράγοντας προεξόφλησης** για το διάστημα $[t, t+h]$. ▽

Πρόταση 1.3.5

Ο παράγοντας προεξόφλησης συνδέεται με την ένταση ανατοκισμού σύμφωνα με την σχέση

$$_{\kappa}v_{o} = \exp\left[-\int_0^{\kappa} \delta(s)\, ds\right].$$

Απόδειξη

Από τον τύπο της έντασης ανατοκισμού έχουμε

$$\delta(t) = \frac{C'(t)}{C(t)}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t \delta(t)\, ds = \ln C(t)$$

$$\Leftrightarrow C(t) = \exp\left[\int_0^t \delta(t)\, ds\right].$$

Επιπλέον, από τον τύπο του παράγοντα προεξόφλησης για την περίοδο $[t, t+h]$ θα έχουμε

$$_{h}v_{t} = \frac{C(t)}{C(t+h)} = \frac{\exp\left[\int_0^t \delta(s)\, ds\right]}{\exp\left[\int_0^{t+h} \delta(s)\, ds\right]} = \exp\left[-\int_t^h \delta(s)\, ds\right].$$

Αν τώρα, θέσουμε στην παραπάνω σχέση $t = 0$ και $h = \kappa$, θα είναι

$$_{\kappa}v_{0} = \exp\left[-\int_0^{t_\kappa} \delta(s)\, ds\right] \text{ όπου } \kappa = 0,1,2\ldots,$$

δηλαδή ο τύπος για τον **παράγοντα προεξόφλησης**. □

Παρατήρηση 1.3.6

Η ένταση ανατοκισμού $\delta(t)$ υπάρχει σ' όλα τα σημεία στα οποία $C(t) > 0$ και ταυτόχρονα υπάρχει και η παράγωγος $C'(t)$. Επιπλέον, η συνάρτηση $\delta(t)$ είναι συνεχής σε όλα τα σημεία συνέχειας της $C'(t)$. ▽

Για τον υπολογισμό των ασφαλίστρων G_κ, θα χρησιμοποιήσουμε την εξής διαδικασία. Αρχικά, θα γίνει ο υπολογισμός του εφάπαξ ασφαλίστρου $\Pi[X]$ κάνοντας χρήση της εξίσωσης $\Pi[X] = \mu + \theta(r, \mu; R)$ και στη συνέχεια θα υπολογιστεί το $\Pi[Y]$ χρησιμοποιώντας την ίδια εξίσωση. Στη συνέχεια, θέτουμε $\Pi[X]=\Pi[Y]$ και επιλύουμε ως προς G_κ. Φυσικά, για να γίνει αυτό, θα πρέπει να είναι γνωστά όλα τα άλλα μεγέθη, δηλαδή πρέπει να είναι γνωστά η μέση τιμή, η επιβάρυνση του ασφαλίστρου καθώς επίσης και το μέτρο του κινδύνου. Στο σημείο αυτό, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου R που χρησιμοποιείται τόσο για τον υπολογισμό του $\Pi[X]$ όσο και του $\Pi[Y]$ είναι η ίδια.

Η παραπάνω διαδικασία ισχύει και στην περίπτωση που το ασφαλιστήριο συμβόλαιο έχει διάρκεια παραπάνω από μία περιόδους. Εμείς, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρήσουμε ότι τα ασφαλιστήρια συμβόλαια που μελετάμε έχουν διάρκεια μία περίοδο.

1.4 Οι ιδιότητες των συναρτήσεων μέτρησης κινδύνου

Για δεδομένο χαρτοφυλάκιο Ω, ο αναλογιστής επιλέγει μία πραγματική συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου $R[X]$, η οποία μετράει το επίπεδο του κινδύνου που σχετίζεται με την τ.μ. X, όπου $X \in \Omega$. Όπως αναφέραμε και νωρίτερα, η επιλογή της $R[X]$ είναι πολύ σημαντική, διότι όλοι οι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν χρησιμοποιώντας την ίδια συνάρτηση κινδύνου $R[X]$. Στη συνέχεια, θα δώσουμε κάποιους ορισμούς, που θα μας χρειαστούν στην περεταίρω μελέτη μας.

Ορισμός 1.4.1

Ονομάζουμε **χαρτοφυλάκιο κινδύνου** Ω το σύνολο $\Omega=\{X : X \geq 0 \text{ είναι τ.μ.}\}$, στο οποίο κάθε τ.μ. X είναι ένας ασφαλιστικός κίνδυνος. $\triangledown$

Ορισμός 1.4.2

Η τ.μ. X όπου $X \in \Omega$ ονομάζεται **ακίνδυνη**, αν και μόνο αν η X είναι μία σταθερά με πιθανότητα 1. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία σταθερά μ για την οποία ισχύει $P[X=\mu]=1$. $\triangledown$

Ορισμός 1.4.3

Για κάθε ασφαλιστικό κίνδυνο X, η συνάρτηση $R[X]$ ονομάζεται **συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου** αν και μόνο αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. ***Μη-επικινδυνότητα***: Αν $X \in \Omega$ ακίνδυνη, τότε ισχύει ότι $R[X]=0$.
2. ***Μη-αρνητικότητα***: Για κάθε $X \in \Omega$ πρέπει να ισχύει $R[X] \geq 0$.
3. ***Υποαθροιστικότητα***: Αν $X_1, X_2 \in \Omega$ ανεξάρτητοι κίνδυνοι, τότε θα ισχύει ότι $R[X_1+X_2] \leq R[X_1]+R[X_2]$.
4. ***Συνέπεια***: Για κάθε $X \in \Omega$ και $c=\sigma\tau\alpha\theta.$ ισχύει ότι $R[X+c]=R[X]$.
5. ***Αντικειμενικότητα***: Το $R[X]$ εξαρτάται από το X μόνο μέσω της συνάρτησης κατανομής (σ.κ.) F_X.

$\bigtriangledown$

Αν μία συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου $R[X]$ έχει τις παραπάνω ιδιότητες, τότε μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα.

1. Για να υπάρχει κίνδυνος θα πρέπει απαραιτήτως να υπάρχει πιθανότητα απόκλισης από αυτό που αναμένουμε (Ιδιότητα 1).
2. Σε περίπτωση συγκέντρωσης (pooling) ανεξάρτητων κινδύνων, δεν πρέπει να αυξάνεται το συνολικό επίπεδο του κινδύνου, ενώ ίσως και να μειώνεται (Ιδιότητα 3). Αυτό το χαρακτηριστικό της συνάρτησης μέτρησης του κινδύνου, αντανακλά τη θεμελιώδη αρχή της ασφάλισης.
3. Αν σε ένα χαρτοφυλάκιο προσθέσουμε κάποια «*σίγουρα γεγονότα*», δηλαδή αν πραγματοποιήσουμε ασφαλίσεις που δεν εμπεριέχουν κίνδυνο, τότε το συνολικό επίπεδο του κινδύνου στο χαρτοφυλάκιο δε μπορεί να αλλάξει (Ιδιότητα 4).
4. Η γνώση της σ.κ. F_X μας εξασφαλίζει ότι έχουμε όλες τις απαιτούμενες πληροφορίες για την τ.μ. X που θα χρησιμοποιήσουμε για να μετρήσουμε το επίπεδο κινδύνου της X (Ιδιότητα 5). Ωστόσο, κάποιοι υποστηρίζουν ότι ο κίνδυνος είναι υποκειμενικός και ότι η υποκειμενικότητα στον κίνδυνο εκφράζεται μέσω της επιλογής της συνάρτησης κινδύνου από τον αναλογιστή. Επιπλέον, η συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου εκφράζει τη συμπεριφορά του

απέναντι στον κίνδυνο. Εντούτοις, μόλις γίνει η επιλογή του $R[X]$, η εκτίμηση του κινδύνου θα πρέπει να βασίζεται στην F_X. Πρακτικά, το πρόβλημα με το οποίο έρχονται αντιμέτωποι οι αναλογιστές, είναι ότι πολλές φορές, η σ.κ. δεν είναι πλήρως γνωστή.

1.5 Συνήθεις συναρτήσεις μέτρων κινδύνου

Τα πιο γνωστά **μέτρα κινδύνου** είναι τα εξής:

1. ***Διασπορά***: $R_1[X] = Var[X]$.
2. ***Τυπική απόκλιση***: $R_2[X] = \sqrt{Var[X]}$.
3. ***Θετική ημιδιασπορά***: $R_3[X] = Var_+[X] = \int_{\mu}^{\infty} (x-\mu)^2 \, dF_X(x)$.
4. ***Συντελεστής μεταβλητότητας***: $R_4[X] = \dfrac{\sqrt{Var[X]}}{\mathrm{E}[X]}$.
5. ***Απόλυτη απόκλιση από το μέσο***: $R_5[X] = \mathrm{E}\big[|X - \mathrm{E}[X]|\big]$.

<u>Παρατηρήσεις για τη διασπορά και την τυπική απόκλιση</u>

Η διασπορά είναι το πιο συνηθισμένο μέτρο κινδύνου και έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς τόσο στα οικονομικά, όσο και στα χρηματοοικονομικά. Τόσο η μελέτη του Markowitz (1959), όσο και του Tobin (1958) βοήθησαν στη σταθεροποίηση της χρήσης της διασποράς σαν μέτρο κινδύνου. Παρόλα αυτά κάποιοι, μεταξύ άλλων ο Borch (1969) και ο Feldstein (1969), θεωρούν ότι η διασπορά δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται σαν μέτρο κινδύνου λόγω έλλειψης πληροφορίας. Αυτό συμβαίνει διότι αν χρησιμοποιήσουμε τη διασπορά σαν μέτρο κινδύνου, χρησιμοποιούμε μόνο τις δύο πρώτες ροπές με αποτέλεσμα να χάνουμε την πληροφορία που προκύπτει από τις ροπές ανώτερης τάξης. Επομένως, χάνουμε την πληροφορία που προκύπτει από τη σκέδαση και την κύρτωση και η οποία σχετίζεται άμεσα με την ουρά της κατανομής. Αυτό σημαίνει ότι χάνουμε πληροφορία για τις ζημιές που θα έχουν μεγάλες αποζημιώσεις. Ωστόσο, η διασπορά μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις όπου η ωφελιμότητα ακολουθεί την Κανονική κατανομή. Επιπλέον, ο Markowitz (1959) θεωρεί πως ένα από τα προβλήματα που προκύπτουν στη χρήση της διασποράς, είναι το γεγονός ότι εξετάζει υπερβολικά υψηλές ή υπερβολικά χαμηλές αποδόσεις σαν ισοδύναμα ανεπιθύμητα ενδεχόμενα. Επιπροσθέτως, ο Brockett (1987) απέδειξε ότι η αποστροφή στον κίνδυνο δεν οδηγεί πάντα σε ελαχιστοποίηση της διασποράς όταν πρέπει να γίνει επιλογή μεταξύ ισοδύναμων αναμενόμενων αποδόσεων. Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι η διασπορά δεν αποτελεί καλό μέτρο κινδύνου για την ασφαλιστική επιστήμη, αν και ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που αναφέραμε προηγουμένως, διότι δε μας παρέχει πληροφορίες για το βαθμό ασυμμετρίας (σκέδαση) και επομένως δε μας παρέχει πληροφορίες για τις μεγάλες ζημιές.

Παρατηρήσεις για τη θετική ημιδιασπορά

Η θετική ημιδιασπορά μετράει τις αποκλίσεις που υπερβαίνουν από το μέσο μ. Το μέτρο αυτό, δεν θεωρείται κατάλληλο για τους ασφαλιστικούς κινδύνους, καθώς στη γενική περίπτωση δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της υποαθροιστικότητας.

Παρατηρήσεις για το συντελεστή μεταβλητότητας

Το συντελεστή μεταβλητότητας τον ονομάζουμε και μέτρο «σχετικού» κινδύνου, σε αντίθεση με τη διασπορά και την τυπική απόκλιση που τα ονομάζουμε μέτρα «απόλυτου» κινδύνου. Το «σχετικό» μέτρο κίνδυνου έχει το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι δεν έχει διαστάσεις, δηλαδή είναι ένα μέτρο το οποίο είναι ανεξάρτητο της κλίμακας. Παρόλα αυτά, αυτό το μέτρο δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της συνέπειας και επομένως στην περίπτωση ετερογενούς χαρτοφυλακίου είναι συχνά δύσκολο να καταλήξουμε σε αξιόπιστα συμπεράσματα. Ο Stone (1973) θεωρεί ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μέτρο «χωρητικότητας» του κινδύνου που μπορεί να δεχτεί ένα χαρτοφυλάκιο, καθώς όσο πιο μικρός είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας, τόσο πιο μεγάλη είναι η χωρητικότητα του χαρτοφυλακίου σε κίνδυνο.

Παρατηρήσεις για την απόλυτη απόκλιση από το μέσο

Το μέτρο αυτό είναι παρόμοιο με τη διασπορά και την τυπική απόκλιση όσον αφορά την αντιστοίχιση ίσων βαρών στις αποκλίσεις πάνω και κάτω από το μέσο. Το πρόβλημα που υπάρχει μ’ αυτό το μέτρο κινδύνου είναι ότι δεν μπορούμε να το διαχειριστούμε μαθηματικά αν και ικανοποιεί όλες τις προαναφερθείσες ιδιότητες.

Παράδειγμα 1.5.1

Να ελεγχθεί αν η διασπορά, ο συντελεστής μεταβλητότητας και η απόλυτη απόκλιση από το μέσο ικανοποιούν τις ιδιότητες που αναφέρονται στον Ορισμό 1.4.3.

Λύση

$\alpha)$ **Διασπορά**: $R_1[X] = Var[X]$.

1. ***Μη-επικινδυνότητα***

Αν η τ.μ. X είναι ακίνδυνη, τότε θα είναι $X = c$ και επομένως, θα ισχύει ότι

$$R_1[X] = Var[X] = Var[c] = 0.$$

2. ***Μη-αρνητικότητα***

Είναι γνωστό ότι η διασπορά είναι ένας μη αρνητικός αριθμός. Ως εκ τούτου, θα είναι και

$$R_1[X] \geq 0.$$

3. ***Υποαθροιστικότητα***

Έστω $X_1, X_2 \in \Omega$ δύο ανεξάρτητοι κίνδυνοι, τότε για το μέτρο κινδύνου $R_1[X]$ έχουμε

$$R_1[X_1 + X_2] = Var[X_1 + X_2] \overset{X_1, X_2 \text{ ανεξάρτητες τ.μ.}}{=} Var[X_1] + Var[X_2] = R[X_1] + R[X_2].$$

4. **Συνέπεια**

Έστω $X \in \Omega$ και $c = \sigma\tau\alpha\theta$. Τότε θα είναι

$$R_1[X + c] = Var[X + c] = Var[X].$$

5. ***Αντικειμενικότητα***

Η διασπορά εξαρτάται από την 1$^{\eta}$ και τη 2$^{\eta}$ κεντρική ροπή της τ.μ X. Τα μεγέθη αυτά είναι χαρακτηριστικά της κάθε συνάρτησης, δηλαδή για συγκεκριμένη τ.μ. τα παραπάνω μεγέθη έχουν συγκεκριμένη τιμή. Ως εκ τούτου, συμπεραίνουμε ότι η διασπορά εξαρτάται από τη X μόνο μέσω της σ.κ. F_X.

Από τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η **διασπορά** ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που αναφέρονται στον Ορισμό 1.4.3.

β) **Συντελεστής μεταβλητότητας:** $R_4\left[X\right]=\dfrac{\sqrt{Var\left[X\right]}}{\mathrm{E}[X]}$.

1. ***Μη-επικινδυνότητα***

Αν η τ.μ. X είναι ακίνδυνη, τότε θα είναι $X=c$, όπου $c=\sigma\tau\alpha\theta$. Σε αυτή την περίπτωση θα είναι $Var\left[X\right]=Var\left[c\right]=0$, καθώς επίσης και $\mathrm{E}\left[X\right]=\mathrm{E}\left[c\right]=c$. Συνεπώς, θα ισχύει ότι

$$R_4\left[X\right]=0.$$

2. ***Μη-αρνητικότητα***

Ισχύει ότι $\sqrt{Var\left[X\right]}\geq 0$. Επιπροσθέτως, αφού η τ.μ. X εκφράζει έναν ασφαλιστικό κίνδυνο, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.2 θα ισχύει ότι $X\geq 0$. Άρα, θα είναι και $\mathrm{E}\left[X\right]\geq 0$. Επομένως είναι

$$R_4\left[X\right]\geq 0.$$

3. ***Υποαθροιστικότητα***

Έστω $X_1,X_2\in\Omega$ δύο ανεξάρτητοι κίνδυνοι. Τότε θα ισχύει ότι

$$R_4\left[X_1+X_2\right]=\frac{\sqrt{Var\left[X_1+X_2\right]}}{\mathrm{E}\left[X_1+X_2\right]}=\frac{\sqrt{Var\left[X_1\right]+Var\left[X_2\right]}}{\mathrm{E}\left[X_1\right]+E\left[X_2\right]}.$$

Θυμίζουμε ότι για κάθε $\alpha,\beta\geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha+\beta}\leq\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$. Επομένως, θα είναι και $\sqrt{Var\left[X_1\right]+Var\left[X_2\right]}\leq\sqrt{Var\left[X_1\right]}+\sqrt{Var\left[X_2\right]}$, αφού η διασπορά σε κάθε περίπτωση είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Άρα, από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}R_4\left[X_1+X_2\right]&=\frac{\sqrt{Var\left[X_1\right]+Var\left[X_2\right]}}{\mathrm{E}\left[X_1\right]+\mathrm{E}\left[X_2\right]}\leq\frac{\sqrt{Var\left[X_1\right]}+\sqrt{Var\left[X_2\right]}}{\mathrm{E}\left[X_1\right]+\mathrm{E}\left[X_2\right]}\\&=\frac{\sqrt{Var\left[X_1\right]}}{\mathrm{E}\left[X_1\right]}\cdot\frac{\mathrm{E}\left[X_1\right]}{\mathrm{E}\left[X_1\right]+\mathrm{E}\left[X_2\right]}+\frac{\sqrt{Var\left[X_2\right]}}{\mathrm{E}\left[X_2\right]}\cdot\frac{\mathrm{E}\left[X_2\right]}{\mathrm{E}\left[X_1\right]+\mathrm{E}\left[X_2\right]}\\&=R_4\left[X_1\right]\cdot\varepsilon_1+R_4\left[X_2\right]\cdot\varepsilon_2,\end{aligned}$$

όπου

$$\varepsilon_i = \frac{\mathrm{E}[X_i]}{\mathrm{E}[X_1]+\mathrm{E}[X_2]} \leq 1 \text{ για } i=1,2, \text{ διότι } \mathrm{E}[X_i]\geq 0 \text{ για } i=1,2.$$

Επομένως, τελικά προκύπτει ότι

$$R_4[X_1+X_2] \leq R_4[X_1]+R_4[X_2].$$

4. ***Συνέπεια***

Έστω $X \in \Omega$ και $c = σταθ.$ Τότε θα είναι

$$R_4[X+c] = \frac{\sqrt{Var[X+c]}}{\mathrm{E}[X+c]} = \frac{\sqrt{Var[X]}}{\mathrm{E}[X]+c} = \frac{\sqrt{Var[X]}}{\mathrm{E}[X]}\cdot\varepsilon,$$

όπου

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{E}[X]}{\mathrm{E}[X]+c} \neq 1 \text{ για κάθε } c \neq 0.$$

Επομένως, τελικά θα είναι

$$R_4[X+c] = R_4[X]\cdot\varepsilon \neq R_4[X].$$

Συμπερασματικά, η ιδιότητα της ***Συνέπειας*** δεν πληρείται από το **συντελεστή μεταβλητότητας** και ως αποτέλεσμα, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.4.3, δεν μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη συνάρτηση μέτρου κινδύνου για έναν ασφαλιστικό κίνδυνο X.

5. ***Αντικειμενικότητα***

Ισχύει ότι

$$R_4[X] = \frac{\sqrt{Var[X]}}{\mathrm{E}[X]} = \frac{\sqrt{\mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}^2[X]}}{\mathrm{E}[X]} = \frac{\sqrt{\rho_2-\rho_1^2}}{\rho_1}.$$

Από τη παραπάνω σχέση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $R_4[X]$ εξαρτάται από την 1η και τη 2η κεντρική ροπή της τ.μ. X. Τα μεγέθη αυτά, όπως αναφέραμε και στην περίπτωση της διασποράς είναι χαρακτηριστικά της κάθε συνάρτησης, δηλαδή για συγκεκριμένη τ.μ. τα παραπάνω μεγέθη έχουν συγκεκριμένη τιμή. Συνεπώς, η $R_4[X]$ εξαρτάται από την X μόνο μέσω της σ.κ. F_X.

γ) **Απόλυτη απόκλιση από το μέσο:** $R_5[X] = \mathrm{E}\big[|X - \mathrm{E}[X]|\big]$.

1. ***Μη-επικινδυνότητα***

Αν η τ.μ X είναι ακίνδυνη, τότε θα είναι $X = c$ και θα ισχύει ότι $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[c] = c$ και επομένως, θα είναι

$$R_5[X] = \mathrm{E}\big[|X - \mathrm{E}[X]|\big] = \mathrm{E}\big[|c - \mathrm{E}[c]|\big] = 0.$$

2. ***Μη-αρνητικότητα***

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής συμπεραίνουμε ότι $|X - \mathrm{E}[X]| \geq 0$. Επιπλέον, η μέση τιμή μίας μη αρνητικής τ.μ. δε μπορεί παρά να είναι και αυτή μη αρνητική. Άρα, θα είναι $\mathrm{E}\big[|X - \mathrm{E}[X]|\big] \geq 0$. Συμπερασματικά, θα ισχύει

$$R_5[X] \geq 0 \text{ για κάθε } X \in \Omega.$$

3. ***Υποαθροιστικότητα***

Έστω $X_1, X_2 \in \Omega$ δύο ανεξάρτητοι κίνδυνοι, τότε θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} R_5[X_1 + X_2] &= \mathrm{E}\big[|X_1 + X_2 - \mathrm{E}[X_1 + X_2]|\big] \\ &\leq \mathrm{E}\big[|X_1 - \mathrm{E}[X_1]|\big] + \mathrm{E}\big[|X_2 - \mathrm{E}[X_2]|\big] \\ &= R_5[X_1] + R_5[X_2]. \end{aligned}$$

(Θυμίζουμε ότι σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα ισχύει ότι $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.)

4. ***Συνέπεια***

Για κάθε $X \in \Omega$ και $c = \sigma\tau\alpha\theta$ έχουμε

$$\begin{aligned} R_5[X + c] &= \mathrm{E}\big[|X + c - \mathrm{E}[X + c]|\big] \\ &= \mathrm{E}\big[|(X - \mathrm{E}[X]) + (c - \mathrm{E}[c])|\big] \\ &= \mathrm{E}\big[|X - \mathrm{E}[X]|\big] = R_5[X]. \end{aligned}$$

5. ***Αντικειμενικότητα***

Ισχύει ότι $R_5\left[X\right]=\mathrm{E}\left[\left|X-\mathrm{E}\left[X\right]\right|\right]=\mathrm{E}\left[\left|X-\mu\right|\right]$ όπου $\mathrm{E}\left[X\right]=\mu$. Αν τώρα, θέσουμε $Y=\left|X-\mu\right|$ όπου $Y\geq 0$, προκύπτει ότι

$$R_4\left[X\right]=E\left[Y\right]=\begin{cases}\int_0^\infty y\cdot f_X\left(y\right)dy, & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι συνεχής}\\ \sum\limits_{y=0}^{\infty} y\cdot f_X\left(y\right), & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι διακριτή}\end{cases}.$$

Επειδή όμως, $f_X\left(y\right)=\dfrac{dF_X\left(y\right)}{dy}$ όπου $y=\begin{cases}x-\mu, & \text{αν } x\geq\mu\\ -\left(x-\mu\right), & \text{αν } x<\mu\end{cases}$ θα είναι

$$f_X\left(y\right)=\frac{dF_X\left(y\right)}{dy}=\frac{dF_X\left(\left|x-\mu\right|\right)}{dy}=\begin{cases}\dfrac{dF_X\left(x-\mu\right)}{dx}, & \text{αν } x\geq\mu\\ \dfrac{-dF_X\left(\mu-x\right)}{dx}, & \text{αν } x<\mu\end{cases}.$$

Εντούτοις, η $R_5\left[X\right]$ εξαρτάται από την τ.μ. X μόνο μέσω της σ.κ. F_X.

Δεδομένου ότι η **απόλυτη απόκλιση από το μέσο**, ικανοποιεί τις παραπάνω 5 ιδιότητες, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συνάρτηση μέτρου κινδύνου για έναν ασφαλιστικό κίνδυνο X.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΒΑΡΥΝΣΗΣ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

2.1 Εισαγωγή

Στις ασφαλίσεις ζημιών το πραγματικό ασφάλιστρο που χρεώνεται για τον κίνδυνο X γράφεται ως εξής

$$\text{Μικτό Ασφάλιστρο} = \mathrm{E}\left[X\right] + \alpha + \rho + \varepsilon ,$$

όπου

$\mathrm{E}\left[X\right]$: το αναμενόμενο κόστος απαιτήσεων και εξόδων,

α : επιβάρυνση του ασφαλίστρου λόγω του κινδύνου που ευθύνεται για την πραγματοποίηση της ζημιάς,

ρ : το κέρδος,

ε : η επιβάρυνση του ασφαλίστρου λόγω εξόδων.

Όσον αφορά τις ασφαλίσεις ζωής, δεν είναι γνωστή η στοχαστική φύση των κινδύνων και γι' αυτό κατά το παρελθόν επινοήθηκαν ντετερμινιστικές τεχνικές για τον υπολογισμό των ασφαλίστρων. Επιπλέον, οι αναλογιστές, προκειμένου να είναι σε θέση να αντισταθμίσουν τις τυχαίες διακυμάνσεις επέλεγαν να είναι συντηρητικοί στους υπολογισμούς, δηλαδή υπέθεταν ότι υπάρχει υψηλότερο επίπεδο θνησιμότητας και εξόδων αλλά και χαμηλότερο επίπεδο επιτοκίων. Ως εκ τούτου, το ασφάλιστρο δεν υπολογιζόταν κάνοντας χρήση του παραπάνω τύπου και φυσικά, κάτι τέτοιο ήταν ασύμφορο για τους ασφαλισμένους διότι η ασφάλιση είχε υψηλότερη τιμολόγηση από αυτή που θα έπρεπε να έχει στην πραγματικότητα, δηλαδή οι αναλογιστές δεν ορίζανε ρητά τον τρόπο υπολογισμού της επιβάρυνσης του ασφαλίστρου. Μοναδική εξαίρεση, αποτελούσε ο τρόπος υπολογισμού του Pollard (1976), στον οποίο η επιβάρυνση του ασφαλίστρου οριζόταν ρητά. Ευτυχώς, στα χρόνια που ακολούθησαν αναπτύχθηκαν διαφορετικές τεχνικές για τον υπολογισμό του μικτού ασφαλίστρου.

Παρατήρηση 2.1.1

Δεδομένου ότι η συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου X είναι συνήθως άγνωστη, πολλές φορές γίνεται χρήση της Θεωρίας Αξιοπιστίας, προκειμένου να διαπιστωθεί πόσο καλή είναι η εκτίμηση της $\mathrm{E}[X]$. Για να εφαρμόσουμε τη Θεωρία Αξιοπιστίας κάνουμε χρήση παρελθοντικών δεδομένων που βασίζονται στον κίνδυνο που εκφράζει η τ.μ. X ή σε παρόμοιους κινδύνους. Επομένως, η Θεωρία της Αξιοπιστίας δεν βασίζεται στη χρήση της σχέσης $\Pi[X]=\mu+\theta(r,\mu;R)$, αλλά εστιάζει στην προσέγγιση του μέσου και της διασποράς (βλ. Venter, 1990). $\triangledown$

2.2 Η αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου

Για δεδομένο χαρτοφυλάκιο κινδύνου Ω, ο αναλογιστής απαιτείται να επιλέξει μία πραγματική συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου $R[X]$, η οποία θα μετράει το επίπεδο του κινδύνου που σχετίζεται με την τ.μ. X, όπου $X\in\Omega$. Όπως αναφέραμε και νωρίτερα η επιλογή της $R[X]$ είναι πολύ σημαντική, διότι όλοι οι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν χρησιμοποιώντας την ίδια συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου.

Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιους ορισμούς, που θα μας χρησιμεύσουν στην περαιτέρω μελέτη μας.

Ορισμός 2.2.1
Ορίζουμε ως **αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου** μία συνάρτηση Π, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε κίνδυνο $X\in\Omega$ ένα μη αρνητικό αριθμό, δηλαδή είναι $\Pi: F_X \to [0,+\infty)$. $\triangledown$

Ιδιότητες 2.2.2
Οι πιο γνωστές ιδιότητες για την αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου είναι οι εξής:

1. ***Αρχή της αναμενόμενης τιμής***: $\Pi[X]=\mathrm{E}[X]$.

   Η **αρχή της αναμενόμενης τιμής (ή αρχή της μαθηματικής ελπίδας)** είναι η πιο παλιά και η πιο διαδεδομένη ακόμα και στις μέρες μας. Η χρήση της δικαιολογείται μέσω του «νόμου των μεγάλων αριθμών», δηλαδή βασίζεται στο γεγονός ότι μπορεί να λειτουργήσει ικανοποιητικά για ένα μεγάλο χαρτοφυλάκιο κινδύνων. Επιπλέον, για μία αρχή είναι πλεονέκτημα να απαιτεί λίγα και απλά στοιχεία από την κατανομή του κινδύνου, δεδομένου ότι σπάνια τη γνωρίζουμε πλήρως, και φυσικά η μέση τιμή ενός κινδύνου είναι το ελάχιστο το οποίο πρέπει να γνωρίζουμε για μία κατανομή.

2. ***Αρχή της τυπικής απόκλισης***: $\Pi[X] = \mathrm{E}[X] + c\sqrt{Var[X]}$, $c > 0$.
3. ***Αρχή της διασποράς***: $\Pi[X] = \mathrm{E}[X] + kVar[X]$, $k > 0$.
4. ***Αρχή της εκθετικής ωφελιμότητας***: $\Pi[X] = \frac{1}{\lambda}\mathrm{M}_X(\lambda)$, όπου M_X η ροπογεννήτρια του X και λ η (θετική) παράμετρος της συνάρτησης ωφελιμότητας $u(x)$.

   Η **αρχή της εκθετικής ωφελιμότητας** είναι ειδική περίπτωση της ωφελιμότητας και προκύπτει όταν η συνάρτηση ωφελιμότητας u είναι η $u(x) = -e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.

$\bigtriangledown$

Ορισμός 2.2.3

Το ασφάλιστρο $\Pi[X]$ λέμε ότι είναι επιβαρυμένο αν και μόνο αν $\Pi[X] \geq \mathrm{E}[X]$, όπου $\Pi[X] - \mathrm{E}[X]$ η επιβάρυνση. $\bigtriangledown$

Ορισμός 2.2.4

Η συνάρτηση Π ονομάζεται αρχή ασφαλίστρου κατά Gerber (1979), αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. ***Μη αρνητική επιβάρυνση***: $\Pi[X] \geq \mathrm{E}[X]$.
2. ***Το ασφάλιστρο δεν ξεπερνά την μέγιστη τιμή του κινδύνου***: $\Pi[X] \leq Max[X]$.
3. ***Συνέπεια***: Για κάθε $c > 0$ ισχύει ότι $\Pi[X + c] = \Pi[X] + c$.
4. ***Αθροιστικότητα***: Για κάθε X_1 και X_2 ανεξάρτητους κινδύνους ισχύει ότι
$$\Pi[X_1 + X_2] = \Pi[X_1] + \Pi[X_2].$$
5. ***Επαναληπτικότητα***: Αν X, Y αυθαίρετοι κίνδυνοι τότε ισχύει ότι
$$\Pi[X] = \Pi\left[\Pi[X|Y]\right].$$
6. ***Αυξανομένου του κινδύνου αυξάνεται και το ασφάλιστρο***: Στην περίπτωση όπου το μ παραμένει σταθερό ενώ το r αυξάνεται, θα πρέπει να αυξηθεί και το

$\theta(r,\mu;R)$. Η ιδιότητα αυτή είναι απαραίτητη προκειμένου να μπορέσουμε να διατυπώσουμε μία λογική προσέγγιση για την ανάληψη των κινδύνων.

$\triangledown$

Μία γενίκευση της ιδιότητας 3 αποτελεί η 3β.

3β. ***Γραμμική συνέπεια***: Για κάθε a , c μη αρνητικές σταθερές ισχύει ότι

$$\Pi\left[aX+c\right]=a\Pi\left[X\right]+c.$$

Η ιδιότητα της **γραμμικής συνέπειας** είναι πάρα πολύ σημαντική, διότι μας εξασφαλίζει την ισοτιμία αγοραστικής δύναμης (purchasing power parity) με αποτέλεσμα να είμαστε σε θέση να μπορούμε να αποτρέψουμε το ακίνδυνο arbitrage στη διεθνή ασφαλιστική αγορά.

Ορισμός 2.2.5 (βλ. Levich, 2001)

Ονομάζουμε **arbitrage** την ταυτόχρονη αγορά και πώληση από μία αγορά σε μία άλλη με την προσδοκία κέρδους χωρίς ρίσκο $\triangledown$

Ορισμός 2.2.6 (βλ. Levich, 2001)

Στην τέλεια αγορά, η ισοτιμία αγοραστικής δύναμης (purchasing power parity - PPP) σημαίνει ότι ισχύει ο νόμος της μίας τιμής, δηλαδή η αξία που έχει ένα καλάθι προϊόντων σε μία χώρα, είναι ίση με την αξία που έχει το ίδιο καλάθι προϊόντων σε μία άλλη χώρα όταν αυτή πολλαπλασιαστεί με την συναλλαγματική ισοτιμία $\triangledown$

Για παράδειγμα αν P_{US} είναι η αξία που έχει το καλάθι προϊόντων στις ΗΠΑ και P_C η αξία που έχει το ίδιο καλάθι προϊόντων στον Καναδά, τότε θα πρέπει να ισχύει $P_{US}=P_C\times spot$ όπου $spot$ η ισοτιμία των δύο νομισμάτων. Σύμφωνα με το παραπάνω, είναι λογικό να ισχυριστούμε ότι για όμοιους κινδύνους τα ασφάλιστρα θα πρέπει να είναι ισοδύναμα. Έτσι λοιπόν, αν θεωρήσουμε την αγορά των ΗΠΑ και του Καναδά και γνωρίζουμε ότι η ισοτιμία μεταξύ \$US και \$CAN είναι $\$1\text{US}=\$p\text{CAN}$, τότε αν το ασφάλιστρο για τον κίνδυνο X στις ΗΠΑ είναι $\$\Pi$ US, αναμένουμε ότι σε μία τέλεια αγορά, το ίδιο ασφάλιστρο στον Καναδά θα κοστίζει $\$\Pi p$ CAN.

Μία γενίκευση της ιδιότητας 4 αποτελεί η 4β.

4β. ***Υποαθροιστικότητα***: Αν X_1 και X_2 δύο ανεξάρτητοι κίνδυνοι, τότε θα ισχύει ότι

$$\Pi\left[X_1 + X_2\right] \leq \Pi\left[X_1\right] + \Pi\left[X_2\right].$$

Παρόλο που ο Gerber (1979) θεωρεί ότι η **αθροιστικότητα** είναι μία από τις ιδιότητες που θα πρέπει να έχει το ασφάλιστρο, ο Reich (1986) προτείνει την χρήση της **υποαθροιστικότητας**, η οποία παρόλο που είναι ασθενέστερη της αθροιστικότητας ταιριάζει περισσότερο με το πνεύμα της ασφάλισης, σύμφωνα με το οποίο η συγκέντρωση ανεξάρτητων κινδύνων σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να αυξάνει το συνολικό ασφάλιστρο, ενώ ίσως και να το μειώνει. Πρακτικά, η ιδιότητα της **υποαθροιστικότητας** σημαίνει ότι το ασφάλιστρο για δύο ανεξάρτητους κινδύνους είναι μικρότερο ή το πολύ ίσο με το άθροισμα των ασφαλίστρων των δύο κινδύνων.

2.3 Τα προβλήματα που οφείλονται στη χρήση της Θεωρίας Ωφελιμότητας

Η Θεωρία Ωφελιμότητας των Von Neumann και Morgenstern (1947) χρησιμοποιείται όταν υπάρχει μία διαδικασία λήψης απόφασης κάτω από αβεβαιότητα. Δεδομένου ότι η διαδικασία υπολογισμού του ασφαλίστρου αποτελεί μία λήψη απόφασης κάτω από αβεβαιότητα, δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς συγγραφείς της αναλογιστικής επιστήμης. Υπολογίζοντας το ασφάλιστρο κάνοντας χρήση της Θεωρίας Ωφελιμότητας λύνονται πολλά προβλήματα, διότι από τη στιγμή που θα οριστεί η συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x)$, είμαστε σε θέση να πάρουμε συνεπείς αποφάσεις. Παρόλα αυτά, υπάρχουν κάποιοι, οι οποίοι έχουν επιφυλάξεις όσον αφορά τη χρήση της Θεωρίας Ωφελιμότητας για τον υπολογισμό του ασφαλίστρου. Για παράδειγμα ο Kahn (1969) υποστηρίζει ότι η Θεωρία Ωφελιμότητας δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προβλέψουμε ποια είναι η ακριβής συμπεριφορά των καταναλωτών, αλλά μόνο για να έχουμε μία ένδειξη για το τι είναι λογικό και τι όχι.

Ένα ακόμα πρόβλημα με το οποίο ερχόμαστε αντιμέτωποι όταν χρησιμοποιούμε τη Θεωρία Ωφελιμότητας, είναι ότι οι συναρτήσεις ωφελιμότητας τόσο των ατόμων όσο και των εταιριών είναι σπανίως γνωστές. Παρόλο που πολλοί συγγραφείς έχουν προτείνει μεθόδους κατασκευής συναρτήσεων ωφελιμότητας, έχει αποδειχθεί από τους McCord και de Neufville (1983) ότι για να εκφράσουμε τη συμπεριφορά των ατόμων όταν είναι αντιμέτωποι με αποφάσεις κάτω από αβεβαιότητα, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε παραπάνω από μία συνάρτηση ωφελιμότητας. Επίσης, έχει αποδειχθεί ότι οι λήπτες αποφάσεων έχουν προτιμήσεις διάταξης, οι οποίες μπορούν να παρασταθούν με συναρτήσεις ωφελιμότητας, οι οποίες είναι σε κάποια διαστήματα κυρτές και σε κάποια διαστήματα κοίλες. Στο συμπέρασμα αυτό κατέληξαν οι Friedman και Savage (1948), οι οποίοι παρατήρησαν ότι οι άνθρωποι που αγοράζουν ασφάλιση είναι επίσης πρόθυμοι να αγοράσουν λαχεία παρόλο που κανένα από τα δύο δεν πωλείται στη δίκαιη αναλογιστική τιμή. Επιπλέον μελέτες, έχουν δείξει πως τα άτομα δεν συμπεριφέρονται όπως περιγράφει η Θεωρία Ωφελιμότητας και πως οι συναρτήσεις ωφελιμότητας που περιγράφουν τη συμπεριφορά τους είναι περισσότερο πολύπλοκες από αυτές που χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη θεωρία. Επίσης, η Θεωρία Ωφελιμότητας χρησιμοποιεί αξιώματα για την περιγραφή της λογικής συμπεριφοράς, τα οποία έχουν αποδειχτεί ότι δεν ισχύουν στην πράξη. Τέλος, ο Allais (1953) έδειξε ότι καλά πληροφορημένα και ευφυή άτομα κάνουν επιλογές που έρχονται σε αντίθεση με τη Θεωρία Ωφελιμότητας (**Το παράδοξο του Allais**).

Ο M. Allais παρουσίασε το παράδοξο του ως ένα αντιπαράδειγμα για το αξίωμα της ανεξαρτησίας. Αυτό σημαίνει ότι χρησιμοποίησε το παραπάνω παράδοξο με κύριο σκοπό να δείξει ότι το αξίωμα της ανεξαρτησίας που αναμένεται στην Θεωρία της Ωφελιμότητας δεν μπορεί να ισχύει. Το παράδοξο του Allais προκύπτει από τη σύγκριση των επιλογών που έχουν οι συμμετέχοντες σε δύο διαφορετικά πειράματα. Κάθε πείραμα αποτελείται από δύο τυχερά παιχνίδια. Έστω ότι οι αποδόσεις των τυχερών παιχνιδιών για κάθε πείραμα είναι οι ακόλουθες.

1^o Τυχερό παιχνίδι

Σε αυτό το τυχερό παιχνίδι οι παίκτες πρέπει να επιλέξουν ανάμεσα στην επιλογή Α η οποία τους δίνει βέβαιο κέρδος 1εκ. ευρώ και στην επιλογή Β η οποία τους δίνει κέρδος 1εκ. ευρώ με πιθανότητα 89% , 5εκ. ευρώ με πιθανότητα 10% ή 0εκ. ευρώ με πιθανότητα 1% .

2ο Τυχερό παιχνίδι

Σε αυτό το τυχερό παιχνίδι οι παίκτες πρέπει να επιλέξουν ανάμεσα στην επιλογή Γ η οποία τους δίνει κέρδος 1εκ. ευρώ με πιθανότητα 11% ή 0εκ. ευρώ με πιθανότητα 89% και στην επιλογή Δ η οποία τους δίνει κέρδος 5εκ. ευρώ με πιθανότητα 10% ή 0εκ. ευρώ με πιθανότητα 90%.

Γράφοντας πιο αναλυτικά τα δεδομένα που έχουμε για τα δύο τυχερά παιχνίδια, έχουμε τα παρακάτω.

1ο Τυχερό παιχνίδι

$$\mathrm{A}:\begin{cases}\text{κέρδος 0εκ. ευρώ με πιθανότητα } 0{,}00\\ \text{κέρδος 1εκ. ευρώ με πιθανότητα } 1{,}00\\ \text{κέρδος 5εκ. ευρώ με πιθανότητα } 0{,}00\end{cases}$$

$$\mathrm{B}:\begin{cases}\text{κέρδος 0εκ. ευρώ με πιθανότητα } 0{,}01\\ \text{κέρδος 1εκ. ευρώ με πιθανότητα } 0{,}89\\ \text{κέρδος 5εκ. ευρώ με πιθανότητα } 0{,}10\end{cases}$$

2ο Τυχερό παιχνίδι

$$\Gamma:\begin{cases}\text{κέρδος 0εκ. ευρώ με πιθανότητα } 0{,}89\\ \text{κέρδος 1εκ. ευρώ με πιθανότητα } 0{,}11\\ \text{κέρδος 5εκ. ευρώ με πιθανότητα } 0{,}00\end{cases}$$

$$\Delta:\begin{cases}\text{κέρδος 0εκ. ευρώ με πιθανότητα } 0{,}90\\ \text{κέρδος 1εκ. ευρώ με πιθανότητα } 0{,}00\\ \text{κέρδος 5εκ. ευρώ με πιθανότητα } 0{,}10\end{cases}$$

Σε μελέτες που έγιναν και αφορούσαν κέρδος υποθετικών ποσών έδειξαν ότι όταν τα άτομα έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ του Α και του Β, οι περισσότεροι άνθρωποι επέλεγαν το Α, ενώ στην περίπτωση που έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ του Γ και του Δ οι περισσότεροι επέλεγαν το Δ.

Ο Μ. Allais υποστηρίζει ότι θα ήταν λογικό αν κάποιος επιλέξει μόνο το Α ή μόνο το Δ. Ωστόσο, η συμμετοχή και στα δύο πειράματα με ταυτόχρονη επιλογή του Α και του Δ από το ίδιο άτομο έρχεται σε αντίθεση με την Θεωρία της Ωφελιμότητας, καθώς σύμφωνα με αυτή, το άτομο θα έπρεπε να επιλέξει είτε το Α και Γ είτε το Β και Δ.

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε την αναμενόμενη ωφελιμότητα για κάθε μία από τις δυνατές περιπτώσεις. Είναι

$$u(\mathrm{A}) = u(1),$$

$$u(\mathrm{B}) = 0,01u(0) + 0,89u(1) + 0,10u(5),$$

$$u(\Gamma) = 0,89u(0) + 0,11u(1)$$

και

$$u(\Delta) = 0,90u(0) + 0,10u(5).$$

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα, οι περισσότεροι θα επιλέξουν τα Α και Δ. Στην περίπτωση που κάποιο άτομο κάνει αυτές τις επιλογές, η ωφελιμότητα του θα είναι

$$u(\mathrm{A}) + u(\Delta) = u(1) + 0,90u(0) + 0,10u(5)$$

$$\Leftrightarrow u(\mathrm{A}) + u(\Delta) = 0,90u(0) + u(1) + 0,10u(5) \qquad (2.1)$$

ενώ, στην περίπτωση που κάποιο άτομο επιλέξει το Β και Γ η ωφελιμότητα του θα είναι

$$u(\mathrm{B}) + u(\Gamma) = 0,01u(0) + 0,89u(1) + 0,10u(5) + 0,89u(0) + 0,11u(1)$$

$$\Leftrightarrow u(\mathrm{B}) + u(\Gamma) = 0,90u(0) + u(1) + 0,10u(5) \ . \qquad (2.2)$$

Από τις σχέσεις (2.1) και (2.2) συμπεραίνουμε ότι $u(\mathrm{A}) + u(\Delta) = u(\mathrm{B}) + u(\Gamma)$. Επομένως, η ταυτόχρονη επιλογή των Α και Δ οδηγεί στην ίδια ωφελιμότητα με την ταυτόχρονη επιλογή των Β και Γ.

Τώρα, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το άτομο συμμετέχει μόνο στο ένα από τα δύο τυχερά παιχνίδια. Όσον αφορά το ***1^{o} Τυχερό παιχνίδι***, οι περισσότεροι επιλέγουν το Α από το Β. Αυτό σημαίνει ότι οι παίχτες υποστηρίζουν πως $u(\mathrm{A}) > u(\mathrm{B})$ και κατά συνεπεία προτιμούν το βέβαιο κέρδος από τον τζόγο. Όσον αφορά το ***2^{o} Τυχερό παιχνίδι***, οι περισσότεροι επιλέγουν το Δ από το Γ με αποτέλεσμα να υποστηρίζουν ότι $u(\Delta) > u(\Gamma)$. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι προτιμούν να επιλέξουν το μεγαλύτερο πιθανό κέρδος παρόλο που έχουν μικρότερη πιθανότητα για να το κερδίσουν.

Ας υποθέσουμε ότι τα δύο παραπάνω ισχύουν. Τότε, προκύπτουν τα παρακάτω.

$$u(\mathrm{A}) > u(\mathrm{B}) \Leftrightarrow u(1) > 0,01u(0) + 0,89u(1) + 0,10u(5)$$

$$\Leftrightarrow 0,11u(1) > 0,01u(0) + 0,10u(5).$$

Αν τώρα, προσθέσουμε και στα δύο μέλη της παραπάνω ανίσωσης το $0,89u(0)$ έχουμε

$$0,89u(0) + 0,11u(1) > 0,89u(0) + 0,01u(0) + 0,10u(5)$$

$$\Leftrightarrow 0,89u(0) + 0,11u(1) > 0,90u(0) + 0,10u(5)$$

$$\Leftrightarrow u(\Gamma) > u(\Delta) \qquad \text{άτοπο.}$$

Η σχέση στην οποία καταλήξαμε μας οδηγεί σε άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι $u(\Delta) > u(\Gamma)$. Ως εκ τούτου, συμπεραίνουμε ότι παραβιάζεται το αξίωμα της ανεξαρτησίας, το οποίο δηλώνει ότι δύο πανομοιότυπα αποτελέσματα σε ένα τυχερό παιχνίδι, θα πρέπει να θεωρούνται ανεξάρτητα ως προς την συνολική ανάλυση του πειράματος. Εντούτοις, αυτό παραβλέπει την έννοια της συμπληρωματικότητας, δηλαδή παραβλέπει το γεγονός ότι η επιλογή που γίνεται στο ένα τυχερό παιχνίδι μπορεί να εξαρτάται από την πιθανή έκβαση που θα έχει το άλλο τυχερό παιχνίδι.

Στο ***1^ο^ Τυχερό παιχνίδι*** η επιλογή του Β έχει 1% πιθανότητα μηδενικού κέρδους. Συνεπώς, αυτή η επιλογή εμπεριέχει μία δόση απογοήτευσης στην περίπτωση που το άτομο επιλέξει το Β και χάσει. Αντιθέτως, στην περίπτωση που το άτομο επιλέξει το Α θα έχει σίγουρο κέρδος. Ωστόσο, το συναίσθημα της απογοήτευσης εξαρτάται και από το αποτέλεσμα του ***2^ου^ Τυχερού παιχνιδιού***. Ως εκ τούτου, ο M. Allais υποστηρίζει ότι δεν είναι δυνατόν να αξιολογηθούν μερικώς οι επιλογές που προκύπτουν στα τυχερά παιχνίδια, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες επιλογές που παρουσιάζονται, όπως άλλωστε απαιτείται από το αξίωμα της ανεξαρτησίας. Συμπερασματικά, η Θεωρία της Ωφελιμότητας δε μπορεί να αποτελεί τρόπο με τον οποίο κρίνουμε την ορθολογική ικανότητα των ατόμων που συμμετέχουν στα τυχερά παιχνίδια.

Στην περίπτωση μας, ανεξαρτησία σημαίνει ότι αν ένας παίχτης παραμένει αδιάφορος μεταξύ των δύο πειραμάτων σε περίπτωση συμμετοχής, μόνο στο ***1^ο^ Τυχερό παιχνίδι*** ή μόνο στο ***2^ο^ Τυχερό παιχνίδι***, τότε θα πρέπει να παραμένει αδιάφορος και στην περίπτωση μίξης του ***1^ου^ Τυχερού παιχνιδιού*** με ένα ***3^ο^ Τυχερό παιχνίδι*** με πιθανότητα ρ, καθώς επίσης και στην περίπτωση μίξης του ***2^ου^ Τυχερού παιχνιδιού*** με το ***3^ο^ Τυχερό παιχνίδι*** με την ίδια πιθανότητα ρ.

Παρατήρηση 2.3.1

Η Θεωρία Ωφελιμότητας των Von Neumann και Morgenstern δεν υπολογίζει ρητά το επίπεδο κινδύνου X όπως απαιτείται από την εξίσωση $\Pi[X] = \mu + \theta(r, \mu; R)$ όπου $\mu = \mathrm{E}[\mathrm{X}]$ και επομένως δεν θα την αναφέρουμε ξανά. $\triangledown$

2.4 Η συνάρτηση επιβάρυνσης του κινδύνου

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις μέτρησης του κινδύνου, καθώς επίσης και τις αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου προκειμένου να διερευνήσουμε τη συναρτησιακή μορφή του θ.

Θεώρημα 2.4.1

Για κάθε συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου R που ικανοποιεί τις ιδιότητες 1-5 του Ορισμού 1.4.3 και για κάθε αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου Π που ικανοποιεί τις ιδιότητες 1, 2 και 3β του Ορισμού 2.2.4, η συνάρτηση επιβάρυνσης του κινδύνου ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$\alpha)$ $\theta(0, \mu; R) = 0$ και

$\beta)$ θ ανεξάρτητο του μ, όπου μ η μέση τιμή της τ.μ. X.

Απόδειξη

$\alpha)$ Από τις ιδιότητες 1 και 2 του ασφαλίστρου (βλ. Ορισμό 2.2.4) προκύπτει ότι για $X = c$ είναι

$$\Pi[c] = c.$$

Επίσης για $X = c$, δηλαδή στην περίπτωση όπου ο κίνδυνος δεν είναι τυχαίος, θα ισχύει ότι

$$\mathrm{E}[X]=\mathrm{E}[c]=c \text{ και κατά συνέπεια θα είναι } \mu=c.$$

Επιπροσθέτως, θα ισχύει ότι

$$r=R[X]=R[c]=0 \Rightarrow r=0.$$

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι $R[X]=0 \Leftrightarrow X$ ακίνδυνη. Συνεπώς, από τη σχέση $\Pi[X]=\mu+\theta(r,\mu;R)$ για $X=c$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mu=c$, θα έχουμε

$$\Pi[X]=\mu+\theta(0,\mu;R) \Rightarrow \theta(0,\mu;R)=0.$$

β) Για να αποδείξουμε ότι το θ είναι ανεξάρτητο του μ, θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της συνέπειας για το μέτρο κινδύνου, καθώς επίσης και την ιδιότητα της γραμμικής συνέπειας για το ασφάλιστρο.

Σύμφωνα με την ιδιότητα της συνέπειας για κάθε $X \in \Omega$ και $c=\sigma\tau\alpha\theta.$ ισχύει ότι

$$R[X+c]=R[X]$$

και επομένως θα ισχύει και

$$R[\alpha X+c]=R[\alpha X].$$

Έστω τώρα, ότι θέτουμε

$$R[\alpha X]=\rho(r,\alpha),$$

τότε η επικινδυνότητα r θα είναι

$$r=R[X]=\rho(r,1).$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση $\Pi[X]=\mu+\theta(r,\mu;R)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\Pi[\alpha X+c]&=\mathrm{E}[\alpha X+c]+\theta(\rho(r,\alpha),\mathrm{E}[\alpha X+c];R)\\&=\alpha\mathrm{E}[X]+c+\theta(\rho(r,\alpha),\alpha\mathrm{E}[X]+c;R)\\&=\alpha\mu+c+\theta(\rho(r,\alpha),\alpha\mu+c;R)\,. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Επιπροσθέτως, από τη σχέση (2.3) και από την ιδιότητα της γραμμικής συνέπειας του ασφαλίστρου προκύπτει ότι

$$\Pi[\alpha X + c] = \alpha \Pi[X] + c$$

$$\Leftrightarrow \alpha\mu + c + \theta(\rho(r,\alpha), \alpha\mu + c; R) = \alpha(\mu + \theta(r,\mu;R)) + c$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\alpha\mu} + \cancel{c} + \theta(\rho(r,\alpha), \alpha\mu + c; R) = \cancel{\alpha\mu} + \alpha\theta(r,\mu;R) + \cancel{c}$$

$$\Leftrightarrow \theta(\rho(r,\alpha), \alpha\mu + c; R) = \alpha\theta(r,\mu;R) \ . \qquad (2.4)$$

Αν στη συνέχεια, θέσουμε $\rho(r,\alpha) = \rho$ και $\alpha\mu + c = m(\mu)$ για κάθε c, τότε από τη σχέση (2.4) προκύπτει ότι

$$\theta(\rho, m(\mu); R) = \alpha\theta(r,\mu;R) \ . \qquad (2.5)$$

Για $\mu = \mu_1$ από τη σχέση (2.5) είναι

$$\theta(\rho, m(\mu_1); R) = \alpha\theta(r,\mu_1;R) \qquad (2.6)$$

ενώ, για $\mu = \mu_2 = \mu_1 + \kappa$ όπου $\mu_2 > \mu_1$ και $\kappa > 0$ από (2.5) είναι

$$\theta(\rho, m(\mu_2); R) = \alpha\theta(r,\mu_2;R) \ . \qquad (2.7)$$

Όμως,

$$\theta(\rho, m(\mu_2); R) = \theta(\rho, \alpha\mu_2 + c; R) = \theta(\rho, \alpha(\mu_1 + \kappa) + c; R)$$

$$= \theta(\rho, \alpha\mu_1 + \alpha\kappa + c; R) \overset{C=\alpha\kappa+c}{=} \theta(\rho, \alpha\mu_1 + C; R)$$

$$= \theta(\rho, m(\mu_1); R) \overset{(2.6)}{=} \alpha\theta(r,\mu_1;R).$$

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\theta(\rho, m(\mu_2); R) = \alpha\theta(r,\mu_1;R) \ . \qquad (2.8)$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (2.7) και (2.8) παρατηρούμε ότι

$$\theta(r,\mu_2;R) = \theta(r,\mu_1;R)$$

για κάθε $\mu_2 > \mu_1$ και επομένως το $\theta(r,\mu;R)$ είναι ανεξάρτητο του μ. Συνεπώς, είναι

$$\theta(r,\mu;R) = \theta(r;R)$$

και η εξίσωση $\Pi[X]=\mu+\theta(r,\mu;R)$ παίρνει τη μορφή

$$\Pi[X]=\mu+\theta(r) \ . \qquad (2.9)$$

Τονίζουμε ότι στη σχέση (2.6), καταλήξαμε κάνοντας την υπόθεση ότι ισχύει η γραμμική συνέπεια. Επομένως, σε κάθε περίπτωση όπου ισχύει η σχέση (2.6), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει και η υπόθεση της γραμμικής συνέπειας. Επιπροσθέτως, δείξαμε ότι η συνάρτηση επιβάρυνσης του ασφαλίστρου, είναι ανεξάρτητη του μ. Επομένως, η σχέση (2.6) μπορεί να γραφτεί

$$\theta(\rho;R)=\alpha\theta(r;R) \qquad (2.10)$$

ή ακόμα και

$$\theta(\rho)=\alpha\theta(r) \ . \qquad (2.11)$$

Ως εκ τούτου, συμπεραίνουμε ότι αν ισχύει η σχέση (2.10) ή η σχέση (2.11) θα ισχύει και η ιδιότητα της γραμμικής συνέπειας για το ασφάλιστρο $\Pi[X]$. $\square$

Παρατήρηση 2.4.2

Σύμφωνα με τα παραπάνω για τη συνάρτηση επιβάρυνσης παρατηρούμε τα εξής:

1. Για $\alpha=1$ είναι $\rho=\rho(r,\alpha)=\rho(r,1)=r$ και $m(\mu)=\mu+c$. Άρα, από τη σχέση (2.5) προκύπτει ότι

$$\theta(r,\mu+c;R)=\theta(r,\mu;R)$$

και επομένως συμπεραίνουμε ότι αν το μ αυξηθεί κατά $c=\sigma\tau\alpha\theta$, δηλαδή αν μετατοπιστεί ο μέσος κατά c, τότε το περιθώριο ασφαλείας θ παραμένει το ίδιο.

2. Για $c=0$ είναι $m(\mu)=\alpha\mu$. Άρα, από τη σχέση (2.5) προκύπτει ότι

$$\theta(\rho,\alpha\mu;R)=\alpha\theta(r,\mu;R).$$

Επομένως, η επιβάρυνση του κινδύνου αX είναι α φορές η επιβάρυνση του κινδύνου X.

$\triangledown$

Θεώρημα 2.4.3

Όταν η διασπορά χρησιμοποιείται σαν μέτρο κινδύνου και τα ασφάλιστρα είναι προσθετικά τότε:

α) Προκύπτει η αρχή της διασποράς $\Pi[X]=\mathrm{E}[X]+kVar[X]$, όπου $k \geq 0$.

β) Η ιδιότητα της γραμμικής συνέπειας δεν ικανοποιείται.

Απόδειξη

α) Έστω ότι για τον κίνδυνο X_1 είναι $\mathrm{E}[X_1]=\mu_1$ και η επιβάρυνση του ασφαλίστρου είναι $\theta(r_1)$, ενώ για τον κίνδυνο X_2 είναι $\mathrm{E}[X_2]=\mu_2$ και η επιβάρυνση του ασφαλίστρου είναι $\theta(r_2)$. (Θεωρούμε ότι έχουμε επιλέξει την ίδια συνάρτηση θ και για τους δύο κινδύνους, διότι το θ είναι ανεξάρτητο του μ). Τότε, θα ισχύει ότι

$$\Pi[X_1+X_2]=\Pi[X_1]+\Pi[X_2]$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}[X_1+X_2]+\theta(r_1+r_2)=\mathrm{E}[X_1]+\theta(r_1)+\mathrm{E}[X_2]+\theta(r_2)$$

$$\Rightarrow \cancel{\mu_1}+\cancel{\mu_2}+\theta(r_1+r_2)=\cancel{\mu_1}+\theta(r_1)+\cancel{\mu_2}+\theta(r_2)$$

$$\Rightarrow \theta(r_1+r_2)=\theta(r_1)+\theta(r_2) \ . \tag{2.12}$$

Αν στη συνέχεια υποθέσουμε ότι $r_2>0$, τότε από τη σχέση (2.12) προκύπτει ότι

$$\theta(r_1+r_2)-\theta(r_1)=\theta(r_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\theta(r_1+r_2)-\theta(r_1)}{r_2}=\frac{\theta(r_2)-\theta(0)}{r_2} \ . \tag{2.13}$$

(Δεδομένου ότι για $r=0$ η X είναι ακίνδυνη, θα ισχύει ότι $\theta(0)=0$.)

Παίρνοντας τώρα το όριο της σχέσης (2.13) για $r_2 \to 0$ θα είναι

$$\lim_{r_2\to 0}\frac{\theta(r_1+r_2)-\theta(r_1)}{r_2}=\lim_{r_2\to 0}\frac{\theta(r_2)-\theta(0)}{r_2}$$

$$\Rightarrow \theta'(r_1)=\theta'(0)$$

και επειδή το $\theta'(0)$ είναι αριθμός, μπορούμε να θέσουμε $\theta'(0)=k$, $k\in\mathbb{R}$. Άρα, θα είναι

$$\theta'(r_1) = \theta'(0)$$

$$\Rightarrow \theta(r_1) = k$$

$$\Rightarrow \theta(r_1) = k \cdot r_1 + \lambda \, .$$

Αν τώρα, στην παραπάνω σχέση θέσουμε $r_1 = 0$ θα είναι $\theta(0) = \lambda$ και επειδή $\theta(0) = 0$ προκύπτει ότι $\lambda = 0$. Επομένως, θα είναι $\theta(r_1) = k \cdot r_1$ και στη γενική περίπτωση $\theta(r) = k \cdot r$. Επιπλέον, επειδή $\theta(r) \geq 0$ και $r \geq 0$ θα πρέπει να ισχύει και $k > 0$. Άρα, τελικά είναι

$$\theta(r) = kr, \; k > 0 \, .$$

Όμως, από την υπόθεση του θεωρήματος χρησιμοποιούμε σαν μέτρο κινδύνου τη διασπορά και συνεπώς είναι $r = R[X] = Var[X]$. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\theta(r) = k \cdot V\alpha r[X].$$

Άρα, σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η αρχή της διασποράς η οποία είναι

$$\Pi[X] = \mathrm{E}[X] + kV\alpha r[X], \text{ όπου } k \geq 0 \, .$$

β) Τώρα, θα αποδείξουμε ότι η ιδιότητα της γραμμικής συνέπειας δεν ικανοποιείται, δηλαδή, θα αποδείξουμε ότι δεν ισχύει η σχέση $\Pi[\alpha X + c] = \alpha \Pi[X] + c$, όπου α, c θετικές σταθερές.

Θυμίζουμε ότι νωρίτερα θέσαμε

$$\rho(r, \alpha) = R[\alpha X] \, , \tag{2.14}$$

με αποτέλεσμα η επικινδυνότητα να είναι

$$r = R[X] = \rho(r, 1) \, .$$

Δεδομένου της υπόθεσης ότι $r = R[X] = Var[X]$ θα ισχύει ότι

$$R[\alpha X] = Var[\alpha X] = \alpha^2 Var[X] = \alpha^2 r \, . \tag{2.15}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.14), (2.15) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι $\rho(r,\alpha)=\alpha^2 r$.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι αν ισχύει η σχέση $\rho(r,\alpha)=\alpha^2 r$, η σχέση (2.10) δεν ικανοποιείται. Έστω ότι η σχέση (2.10) ισχύει. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} &\theta\big(\rho(r,\alpha);R\big)=\alpha\theta(r;R) \\ &\Leftrightarrow \theta\big(\rho(r,\alpha)\big)=\alpha\theta(r) \\ &\Leftrightarrow \theta\big(\alpha^2 r\big)=\alpha\theta(r)\ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Επειδή $\theta(r)=k\cdot r$ με $k>0$ θα είναι $\theta\big(\alpha^2 r\big)=k\cdot\alpha^2 r$. Ως εκ τούτου, από τη σχέση (2.16) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &k\alpha^2 r=\alpha k r \\ &\overset{\alpha,k>0}{\Leftrightarrow} \alpha r=r \\ &\Leftrightarrow r(\alpha-1)=0 \\ &r=0 \text{ ή } \alpha=1. \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε καταλήξει σε άτοπο, καθώς η σχέση $\theta\big(\rho(r,\alpha);R\big)=\alpha\theta(\rho;R)$ δεν ισχύει για κάθε α και για κάθε r. Συμπερασματικά, δεν ισχύει και η ιδιότητα της γραμμικής συνέπειας. □

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η διασπορά δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάθε περίπτωση ως συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου. Στην πρόταση που ακολουθεί αναφέρουμε κάποιες συνθήκες οι οποίες είναι ικανές για να εξασφαλίσουμε την δυνατότητα χρήσης της διασποράς ως συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου.

Πρόταση 2.4.4

Αν το μέτρο κινδύνου είναι η διασπορά και τα ασφάλιστρα είναι υποαθροιστικά, τότε κάθε αύξουσα, μη αρνητική κοίλη συνάρτηση του r, που περνάει από την αρχή των αξόνων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συνάρτηση επιβάρυνσης του ασφαλίστρου. $\triangledown$

Παράδειγμα 2.4.5

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\theta(r)=cr^t$ με $0<t<1$ και $c>0$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συνάρτηση επιβάρυνσης του ασφαλίστρου, στην περίπτωση όπου τα ασφάλιστρα είναι υποαθροιστικά και το μέτρο κινδύνου είναι η διασπορά.

Λύση

Αν το μέτρο κινδύνου είναι η διασπορά, τότε θα ισχύει ότι $r \geq 0$, καθώς η διασπορά είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Επομένως, για $r_1 \leq r_2$ και $0<t<1$ θα είναι

$$r_1 \leq r_2 \Rightarrow r_1^t \leq r_2^t \overset{c>0}{\Rightarrow} cr_1^t \leq cr_2^t \Rightarrow \theta(r_1) \leq \theta(r_2).$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $\theta(r)$ είναι αύξουσα. Επιπλέον, δεδομένου ότι $r \geq 0$, $0<t<1$ και $c>0$, θα ισχύει ότι $\theta(r)>0$, δηλαδή η συνάρτηση $\theta(r)=cr^t$ είναι μη αρνητική. Επιπροσθέτως, η συνάρτηση $\theta(r)=cr^t$ είναι κοίλη διότι έχει 1η παράγωγο θετική και η οποία είναι ίση με $\theta'(r)=ctr^{t-1} \geq 0$. Τέλος, για $r=0$ θα έχουμε $\theta(0)=0$ και επομένως η συνάρτηση $\theta(r)=cr^t$ περνάει από την αρχή των αξόνων.

Επομένως, σύμφωνα με τη Πρόταση 2.4.4**,** η συνάρτηση $\theta(r)=cr^t$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συνάρτηση επιβάρυνσης του ασφαλίστρου.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι στην περίπτωση όπου το $t=1/2$, προκύπτει η αρχή του ασφαλίστρου που είναι γνωστή ως **αρχή της τυπικής απόκλισης** και η οποία εκφράζεται από τη σχέση

$$\Pi[X]=\mathrm{E}[X]+c\sqrt{Var[X]}, \text{ όπου } c>0. \qquad \square$$

Παράδειγμα 2.4.6

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\theta(r)=b\log(1+r)$ όπου $r \geq 0$ και $b>0$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συνάρτηση επιβάρυνσης του ασφαλίστρου, στην περίπτωση όπου τα ασφάλιστρα είναι υποαθροιστικά και το μέτρο κινδύνου είναι η διασπορά.

Λύση

Αν το μέτρο κινδύνου είναι η διασπορά, τότε θα ισχύει ότι $r \geq 0$, καθώς η διασπορά είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Επομένως, δεδομένου ότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι ένα προς ένα (1-1), για $r_1 \leq r_2$ θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} r_1 \leq r_2 &\Rightarrow 1+r_1 \leq 1+r_2 \\ &\overset{1-1}{\Rightarrow} \log(1+r_1) \leq \log(1+r_2) \\ &\overset{b>0}{\Rightarrow} b\log(1+r_1) \leq b\log(1+r_2) \\ &\Rightarrow \theta(r_1) \leq \theta(r_2) \end{aligned}$$

και επομένως η συνάρτηση $\theta(r)$ είναι αύξουσα.

Επιπλέον, δεδομένου ότι

$$r > 0 \Rightarrow r+1 > 1 \Rightarrow \log(1+r) > 0 \text{ και } b \geq 0,$$

θα ισχύει ότι $\theta(r) \geq 0$, δηλαδή η συνάρτηση $\theta(r) = b\log(1+r)$ είναι μη αρνητική. Επίσης, η συνάρτηση $\theta(r) = b\log(1+r)$ είναι κοίλη διότι έχει 1η παράγωγο θετική και η οποία είναι ίση με $\theta'(r) = \dfrac{b}{1+r} > 0$. Τέλος, για $r = 0$ θα έχουμε $\theta(0) = 0$ και επομένως η συνάρτηση $\theta(r) = cr^t$ περνάει από την αρχή των αξόνων.

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.4 η συνάρτηση $\theta(r) = b\log(1+r)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συνάρτηση επιβάρυνσης του ασφαλίστρου.

Αναφέρουμε ότι από την παραπάνω συνάρτηση επιβάρυνσης του ασφαλίστρου, προκύπτει μία αρχή του ασφαλίστρου που είναι γνωστή ως **αρχή υπολογισμού της log-διασποράς** (log-variance principle) και εκφράζεται από τη σχέση

$$\Pi[X] = \mathrm{E}[X] + b\log(1+Var[X]), \text{ όπου } b > 0. \qquad \square$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ο ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΗΜΙΑΝΑΛΟΙΩΤΩΝ

3.1 Η επιβάρυνση του ασφαλίστρου σε σχέση με την επικινδυνότητα

Είναι απαραίτητο να καταλάβουμε πόσο σημαντική είναι η επίδραση που έχουν στην επιβάρυνση του ασφαλίστρου, τόσο η ιδιότητα της συνέπειας που αφορά το μέτρο κινδύνου, όσο και της γραμμικής συνέπειας που αφορά το ασφάλιστρο. Ο λόγος οφείλεται στο γεγονός ότι καταργούν κάθε εξάρτηση της επιβάρυνσης του ασφαλίστρου από τη μέση τιμή του κινδύνου. Ως εκ τούτου, αν χρησιμοποιήσουμε τη διασπορά ή την τυπική απόκλιση ως συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου, θα πρέπει να τιμολογούμε με τον ίδιο τρόπο όλους τους κινδύνους που έχουν την ίδια μέση τιμή και την ίδια διασπορά. Πρακτικά, αυτό σημαίνει πως στην περίπτωση δύο ανεξάρτητων κίνδυνων X_1 και X_2 για τους οποίους ισχύει

$$\mathrm{E}\left[X_1\right]=\mathrm{E}\left[X_2\right]=\mu \text{ και } Var\left[X_1\right]=Var\left[X_2\right]=\sigma^2,$$

θα πρέπει να ισχύει και

$$\Pi\left[X_1\right]=\Pi\left[X_2\right],$$

δηλαδή οι δύο κίνδυνοι θα πρέπει να έχουν τιμολογηθεί με το ίδιο ασφάλιστρο. Ωστόσο, κάτι τέτοιο δε μπορεί να θεωρηθεί σωστό, διότι μπορεί ο ένας από τους δύο κινδύνους να είναι πιο επικίνδυνος από τον άλλον. Αναφέρουμε ότι μία συνάρτηση κατανομής λέγεται **πιο επικίνδυνη** από μία άλλη αν υπάρχει μία σχετικά μεγαλύτερη πιθανότητα για πολύ μεγάλες απαιτήσεις.

Παρατήρηση 3.1.1

Η μέση τιμή και η διασπορά δεν αντανακλούν το επίπεδο του κινδύνου της X, διότι δε διαθέτουν καμία πληροφορία για την δεξιά ουρά της κατανομής, η οποία εν μέρει, περιέχει τις πληροφορίες για τις πιθανότητες πραγματοποίησης ζημιών με πολύ μεγάλες απαιτήσεις, δηλαδή μας παρέχει πληροφορίες οι οποίες σχετίζονται με τον αποκαλούμενο **κίνδυνο της δεξιάς ουράς**. $\triangledown$

Ορισμός 3.1.2

Κίνδυνος δεξιάς ουράς ονομάζεται ο κίνδυνος που σχετίζεται με την ακραία δεξιά ουρά μίας κατανομής. Επομένως, ο κίνδυνος της δεξιάς ουράς σχετίζεται με τις απαιτήσεις που είναι πολύ μεγαλύτερες από το μέσο και κατά συνεπεία εκφράζει τον κίνδυνο που σχετίζεται με τις καταστροφικές ζημιές. $\triangledown$

Μία ασφαλιστική εταιρεία είναι απαραίτητο να κάνει σωστή τιμολόγηση, διότι σε περίπτωση μη σωστής τιμολόγησης θα αντιμετωπίσει πρόβλημα αφερεγγυότητας. Συνήθως, οι ασφαλιστικές απαιτήσεις έχουν θετική σκέδαση και σχετικά βαριά ουρά. Αυτό σημαίνει ότι ζημιές με μικρές απαιτήσεις έχουν μεγάλες πιθανότητες να πραγματοποιηθούν, ενώ οι ζημίες με πολύ μεγάλες απαιτήσεις έχουν πολύ μικρή πιθανότητα να πραγματοποιηθούν. Ωστόσο, σε περίπτωση που πραγματοποιηθεί μία πολύ μεγάλη ζημιά, η ασφαλιστική εταιρεία θα πρέπει να είναι σε θέση να καλύψει την απαιτούμενη αποζημίωση. Ως εκ τούτου, αν τα ασφάλιστρα υπολογιστούν κάνοντας χρήση μόνο της μέσης τιμής και της διασποράς θα είναι ανεπαρκή, διότι δεν λαμβάνουν υπόψη τον κίνδυνο της δεξιάς ουράς. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού του ασφαλίστρου τείνει να υποτιμά τους κινδύνους βαριάς ουράς και να υπερτιμά τους κινδύνους ελαφριάς ουράς. Αυτό σημαίνει πως στην περίπτωση βαριάς ουράς, υποτιμούνται κίνδυνοι με πάρα πολύ μικρή πιθανότητα (π.χ. καταστροφικά γεγονότα), οι οποίοι όμως αν πραγματοποιηθούν, θα προκαλέσουν πάρα πολύ μεγάλες απαιτήσεις και θα θέσουν σε κίνδυνο τη φερεγγυότητα της ασφαλιστικής εταιρείας. Επιπλέον, εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι αυτός ο κίνδυνος είναι ιδιαίτερα σημαντικός για τους αντασφαλιστές καθώς ένα μεγάλο μέρος των εργασιών τους σχετίζεται με την τιμολόγηση και την αποδοχή των κινδύνων της δεξιάς ουράς (right-tail risks).

Στα παραδείγματα που ακολουθούν και τα οποία θα πραγματοποιηθούν με τη βοήθεια του Mathematica, θα δείξουμε ότι υπάρχουν κατανομές που έχουν την ίδια μέση τιμή και την ίδια διασπορά, αλλά έχουν διαφορετική σκέδαση και κύρτωση και επομένως είναι απαιτητή η διαφορετική τιμολόγηση τους. Πριν όμως, θα δώσουμε τον ορισμό μερικών εννοιών που είναι απαραίτητες για την περαιτέρω μελέτη μας (βλ. Χαραλαμπίδης, 1993).

Ορισμός 3.1.3

Έστω X μία τ.μ. και μ η μέση τιμή της. Τότε, ορίζουμε ως

$$\mu_j = \mathrm{E}\left[\left(X-\mu\right)^j\right] \text{ τη } j\text{-τάξης κεντρική ροπή}$$

και ως

$$\rho_j = \mathrm{E}\left[X^j\right] \text{ τη } j\text{-τάξης ροπή περί την αρχή.} \qquad \triangledown$$

Ορισμός 3.1.4

Έστω X τ.μ. με $\mu = \mathrm{E}\left[X\right]$ και $\sigma^2 = Var\left[X\right]$. Τότε ορίζουμε:

α) **συντελεστή λοξότητας** ή λοξότητα ή σκέδαση (skewness) της τ.μ. X το πηλίκο

$$\beta = \frac{\mathrm{E}\left[\left(X-\mu\right)^3\right]}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Αν $\beta > 0$ λέμε ότι η τ.μ. X έχει θετική λοξότητα (δηλαδή είναι λοξή προς τα δεξιά), αν $\beta = 0$ λέμε ότι είναι συμμετρική, ενώ αν $\beta < 0$ λέμε ότι έχει αρνητική λοξότητα (δηλαδή είναι λοξή προς τα αριστερά).

β) **συντελεστής κύρτωσης** ή κυρτότητα (kirtosis) της τ.μ. X το πηλίκο

$$\gamma = \frac{\mathrm{E}\left[\left(X-\mu\right)^4\right]}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$

Αν $\gamma > 3$ λέμε ότι η τ.μ. X είναι λεπτόκυρτη, αν $\gamma = 3$ λέμε ότι η τ.μ. X είναι μεσόκυρτη, ενώ αν $\gamma < 3$ λέμε ότι η τ. μ. X είναι πλατύκυρτη.

$\triangledown$

Παράδειγμα 3.1.5

Για τις τ.μ. X_1, X_2, X_3 που ορίζονται παρακάτω, να υπολογιστούν η μέση τιμή, η διασπορά, η σκέδαση και η κύρτωση.

$$X_1 = \begin{cases} 0\text{, με πιθανότητα } 3/4 \\ 4\text{, με πιθανότητα } 1/4 \end{cases}$$

$$X_2 \sim \text{Γάμμα}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$X_3 \sim \text{Pareto}\left(2,3\right) \qquad \text{(Lomax)}$$

Λύση

Για την τ.μ. X_1 ισχύει ότι $f_1(0)=\dfrac{3}{4}$ και $f_1(4)=\dfrac{1}{4}$.

Επιπλέον, η $X_2 \sim \text{Γάμμα}\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ και επομένως θα είναι $f_2(x)=\dfrac{(1/3)^{1/3}\, x^{-2/3} e^{-(1/3)x}}{\Gamma(1/3)}$.

Τέλος, η X_3 είναι Pareto τύπου Lomax και επομένως θα είναι $f_3(x)=\dfrac{24}{(2+x)^4}$.

<u>Υπολογισμός της μέσης τιμής</u>

1) $\mathrm{E}[X_1]=0\cdot\dfrac{3}{4}+4\cdot\dfrac{1}{4}\Rightarrow \mathrm{E}[X_1]=1$.

2) $\mathrm{E}[X_2]=\dfrac{\alpha}{\lambda}=\dfrac{1/3}{1/3}\Rightarrow \mathrm{E}[X_2]=1$ (βλ. Χαραλαμπίδης, 1993).

3) $\mathrm{E}[X_3]=\dfrac{x_0\Gamma(2)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}=\dfrac{x_0\Gamma(2)\Gamma(3-1)}{\Gamma(3)}=1$ (βλ. Klugman *et al.*, 2004).

Τελικά, είναι $\mathrm{E}[X_1]=\mathrm{E}[X_2]=\mathrm{E}[X_3]=1$.

<u>Υπολογισμός της διασποράς</u>

1) Για τη X_1 είναι

$$\mathrm{E}\left[X_1^{\,2}\right]=0^2\cdot\frac{3}{4}+4^2\cdot\frac{1}{4}=4$$

και επομένως, προκύπτει ότι

$$Var[X_1]=\mathrm{E}\left[X_1^{\,2}\right]-\mathrm{E}^2[X_1]=4-1=3.$$

2) Για τη X_2 έχουμε

$$Var[X_2]=\frac{\alpha}{\lambda^2}=\frac{1/3}{(1/3)^2}=3 \text{ (βλ. Χαραλαμπίδης, 1993).}$$

3) Για τη X_3 ισχύει ότι $\mathrm{E}\left[X_3^{\,2}\right]=\dfrac{x_0^{\,2}\Gamma(3)\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)}=\dfrac{x_0^{\,2}\Gamma(3)\Gamma(3-2)}{\Gamma(3)}=x_0^{\,2}=4$ (βλ. Klugman *et al.*, 2004) και επομένως θα είναι

$$Var\left[X_3\right]=\mathrm{E}\left[X_3^{\,2}\right]-\mathrm{E}^2\left[X_3\right]=4-1=3.$$

Συνεπώς, είναι $Var\left[X_1\right]=Var\left[X_2\right]=Var\left[X_3\right]=3$.

Υπολογισμός της σκέδασης

Για να υπολογίσουμε τη σκέδαση (ή λοξότητα), είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του μ_3, δηλαδή ο υπολογισμός της 3ης κεντρικής ροπής για κάθε μία από τις τ.μ. Όπως αναφέραμε προηγουμένως η j-τάξης κεντρική ροπή είναι $\mu_j=\mathrm{E}\left[\left(X-\mu\right)^j\right]$. Άρα, για $j=3$ θα έχουμε

$$\mu_3=\mathrm{E}\left[\left(X-\mu\right)^3\right]=\mathrm{E}\left[X^3\right]-3\mu\mathrm{E}\left[X^2\right]+2\mu^3\ . \qquad (3.1)$$

Όπως θα δείξουμε και παρακάτω, οι τ.μ. X_1, X_2, X_3 έχουν διαφορετικά μ_3. Επομένως, και η σκέδαση θα είναι διαφορετική για κάθε μία από αυτές.

1) Η 3η ροπή της X_1 είναι

$$\mathrm{E}\left[X_1^3\right]=0^3\cdot\frac{3}{4}+4^3\cdot\frac{1}{4}=16$$

και επομένως, αν αντικαταστήσουμε τις τρεις πρώτες ροπές της X_1 στη σχέση (3.1), προκύπτει ότι

$$\mu_{3,X_1}=16-3\cdot1\cdot4+2\cdot1^3=6.$$

Άρα, η σκέδαση είναι

$$\beta_{X_1}=\frac{\mu_{3,X_1}}{\sigma_{X_1}^3}=\frac{6}{\left(\sqrt{3}\right)^3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=1{,}1547>0$$

και επομένως η X_1 έχει θετική σκέδαση.

2) Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την 3η ροπή της X_2. Ισχύει ότι $\mathrm{E}\left[X_2^{\,3}\right]=\dfrac{\alpha\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)}{\beta^3}$ (βλ. Χαραλαμπίδης, 1993) και επομένως, για $\alpha=1/3$ θα έχουμε

$$\mathrm{E}\left[X_2^{\,3}\right]=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}+2\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=28 .$$

Αν τώρα, αντικαταστήσουμε τις τρεις πρώτες ροπές τις X_2 στη σχέση (3.1), προκύπτει ότι

$$\mu_{3,X_2}=28-3\cdot1\cdot4+2\cdot1^3=18$$

και επομένως η σκέδαση της X_2 θα είναι

$$\beta_{X_2}=\frac{\mu_{3,X_2}}{\sigma^3}\ \frac{18}{\left(\sqrt{3}\right)^3}=2\sqrt{3}=3,464>0 .$$

Συνεπώς και η τ.μ. X_2 έχει θετική σκέδαση.

3) Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η Pareto που μελετάμε είναι τύπου Lomax, δηλαδή είναι της μορφής $f(x)=\dfrac{\alpha x_o^{\ \alpha}}{\left(x_o+x\right)^{\alpha+1}}$ με $x_o=2$ και $\alpha=3$. Οι ροπές της Pareto ορίζονται από τη σχέση $\mathrm{E}\left[X^{\nu}\right]=\dfrac{x_o^{\ \nu}\Gamma(\alpha-\nu)\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(\alpha)}$ με $-1<\nu<\alpha$, όπου $\Gamma(\nu)=(\nu-1)!$ αν $\nu\in\mathbb{N}$. Ως εκ τούτου, συμπεραίνουμε ότι για τη Pareto Lomax ορίζονται ροπές έως και $\alpha-1$ τάξης (βλ. Klugman *et al.*, 2004). Επομένως, στην περίπτωση μας, ορίζονται μόνο οι ροπές 1ης και 2ης τάξης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην μπορούμε να ορίσουμε τη σκέδαση και κατ' επέκταση την κύρτωση αυτής της κατανομής.

<u>Υπολογισμός της κύρτωσης</u>

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε την 4η κεντρική ροπή μόνο για τις τ.μ. X_1 και X_2, καθώς από όσα αναφέραμε παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για την τ.μ. X_3 δεν ορίζεται η 4η κεντρική ροπή.

Για $j=4$ από τη σχέση $\mu_j=\mathrm{E}\left[\left(X-\mu\right)^j\right]$ θα έχουμε

$$\mu_4=\mathrm{E}\left[\left(X-\mu\right)^4\right]=\mathrm{E}\left[X^4\right]-4\mu\mathrm{E}\left[X^3\right]+6\mu^2\mathrm{E}\left[X^2\right]-3\mu^4 . \qquad (3.2)$$

Οι X_1, X_2 έχουν διαφορετικές ροπές 3ης και 4ης τάξης και επομένως, θα έχουν και διαφορετικές κεντρικές ροπές 4ης τάξης.

1) Για την τ.μ. X_1 είναι

$$\mathrm{E}\left[X_1^{\,4}\right]=0^4\cdot\frac{3}{4}+4^4\cdot\frac{1}{4}=64$$

και επομένως από τη σχέση (3.2) θα έχουμε

$$\mu_{4,X_1}=64-4\cdot1\cdot16+6\cdot1^2\cdot4-3\cdot1^4=21.$$

Ως εκ τούτου, θα είναι

$$\gamma_{X_1}=\frac{\mu_{4,X_1}}{\sigma_{X_1}^{\;4}}=\frac{21}{\left(\sqrt{3}\right)^4}=\frac{7}{3}=2,33<3$$

και επομένως συμπεραίνουμε ότι η X_1 είναι πλατύκυρτη.

2) Για τη τ.μ. X_2 είναι $\mathrm{E}\left[X_2^{\,3}\right]=\dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\beta^3}$ (βλ. Χαραλαμπίδης, 1993)

και επομένως είναι

$$\mathrm{E}\left[X_2^{\,4}\right]=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}+2\right)\left(\frac{1}{3}+3\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^4}=\frac{\frac{280}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=280\,.$$

Επομένως, από τη σχέση (3.2) προκύπτει ότι

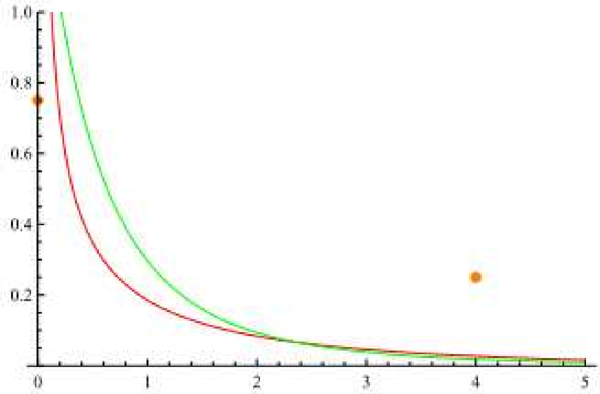
$$\mu_{4,X_2}=280-4\cdot1\cdot28+6\cdot1^2\cdot4-3\cdot1^4=189\,.$$

Άρα, θα είναι

$$\gamma_{X_2}=\frac{\mu_{4,X_2}}{\sigma_{X_2}^{\;4}}=\frac{189}{\left(\sqrt{3}\right)^4}=\frac{189}{9}\Rightarrow\gamma_{X_2}=21>3$$

και επομένως η X_2 είναι λεπτόκυρτη.

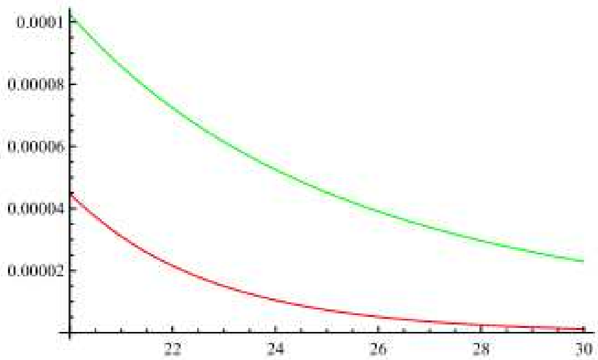
Στο Σχήμα 3.1 θα παραστήσουμε γραφικά και τις τρεις συναρτήσεις. Αναφέρουμε ότι με κόκκινο χρώμα έχουμε παραστήσει την τ.μ. f_2 ενώ με πράσινο χρώμα έχουμε παραστήσει την τ.μ. f_3. Επιπλέον, οι πορτοκαλί κουκκίδες παρουσιάζουν την τ.μ. f_1.



Σχήμα 3.1: Γραφική Παράσταση των σ.π.π. των κατανομών f_1 (πορτοκαλί χρώμα), f_2 (κόκκινο χρώμα) και f_3 (πράσινο χρώμα) στο διάστημα $(0,5)$.

Από το παραπάνω σχήμα είναι φανερό ότι οι κίνδυνοι που αντιστοιχούν στις παραπάνω κατανομές δεν μπορούν να τιμολογηθούν με τον ίδιο τρόπο. Καταρχήν, στην περίπτωση πραγματοποίησης του κινδύνου που αντιστοιχεί στην τ.μ. X_1, οι αποζημιώσεις είναι φραγμένες καθώς η μέγιστη αποζημίωση που μπορεί να απαιτηθεί δεν ξεπερνά τις 4 ν.μ. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι υπάρχουν διαστήματα στα οποία η f_2 παίρνει μεγαλύτερες τιμές από την f_3 καθώς επίσης και διαστήματα στα οποία η f_2 παίρνει μικρότερες τιμές από την f_3.

Ας δούμε τώρα πως συμπεριφέρονται οι ουρές των κατανομών X_2 και X_3.



Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση των ουρών των κατανομών f_2 (κόκκινο χρώμα) και f_3 (πράσινο χρώμα) στο διάστημα $(20,30)$.

Από το Σχήμα 3.2 είναι φανερό ότι η f_3 έχει πιο βαριά ουρά από την f_2. Αυτό σημαίνει ότι η f_3 παρουσιάζει μεγαλύτερη πιθανότητα πραγματοποίησης μεγάλων ζημιών. Επιπροσθέτως, από το παραπάνω σχήμα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί κίνδυνος από την f_2 ο οποίος θα προκαλέσει ζημιά πάνω από 30 ν.μ. είναι πρακτικά μηδέν.

Ενδεικτικά, θα υπολογίσουμε τις τιμές των δύο συναρτήσεων για διάφορες τιμές του x. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω συνοπτικό πίνακα.

x	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_3(x)/f_2(x)$
1	0,1854522	0,2962963	1,5976963
5	0,0167183	0,0099958	0,5978957
10	0,0019892	0,0011574	0,5818419
15	0,0002870	0,0002873	1,0010453
20	0,0000447	0,0001024	2,2908277
25	0,0000072	0,0000451	6,2638889
30	0,0000012	0,0000228	19,0000000

Πίνακας 3.1: Υπολογισμός του λόγου $f_3(x)/f_2(x)$ για διάφορες τιμές του x.

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι ενώ αρχικά υπάρχει μία μείωση του λόγου $f_3(x)/f_2(x)$, στη συνέχεια ο λόγος αυτός αυξάνεται συνεχώς. Ως εκ τούτου, συμπεραίνουμε ότι ο κίνδυνος που αντιστοιχεί στην τ.μ. X_3 είναι μεγαλύτερος από τον κίνδυνο που αντιστοιχεί στη τ.μ. X_2, δεδομένου ότι έχει μεγαλύτερη πιθανότητα πραγματοποίησης μεγάλων ζημιών. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε ότι η X_3 θα πρέπει να τιμολογηθεί με υψηλότερο ασφάλιστρο από την X_2 και κατ' επέκταση από την X_1. □

Παρατήρηση 3.1.6 (βλ. Χαραλαμπίδης, 1993)

Αν η τ.μ $Y \sim$ Γάμμα(α, λ) τότε η σκέδαση είναι ίση με $\beta = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ και η κύρτωση είναι ίση με $\gamma = 3 + \frac{6}{\alpha}$. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση της κατανομής Γάμμα, τόσο η σκέδαση όσο και η κύρτωση εξαρτώνται μόνο από την πρώτη παράμετρο της κατανομής. Άρα, στην περίπτωση της X_2 είναι αναμενόμενο ότι $\beta_{X_2} = 2\sqrt{3}$ και $\gamma_{X_2} = 21$. ▽

Παράδειγμα 3.1.7

Για τις τ.μ. X_1, X_2, X_3 που ορίζονται παρακάτω να υπολογιστούν η μέση τιμή, η διασπορά, ο συντελεστής λοξότητας και ο συντελεστής κύρτωσης.

$$X_1 = \begin{cases} 0\text{ , με πιθανότητα } 2/3 \\ 3\text{ , με πιθανότητα } 1/3 \end{cases}$$

$$X_2 \sim \text{Γάμμα}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$X_3 \sim \text{Pareto}(3,4) \qquad \text{(Lomax)}$$

Λύση

Για την τ.μ. X_1 ισχύει ότι $g_1(0) = \dfrac{2}{3}$ και $g_1(3) = \dfrac{1}{3}$.

Επίσης, η $X_2 \sim \text{Γάμμα}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Άρα θα είναι $g_2(x) = \dfrac{(1/2)^{1/2} x^{-1/2} e^{-(1/2)x}}{\Gamma(1/2)}$.

Τέλος, η X_3 είναι Pareto τύπου Lomax, Επομένως, θα είναι $g_3(x) = \dfrac{4 \cdot 3^4}{(3+x)^5} = \dfrac{324}{(3+x)^5}$.

Όμοια με το Παράδειγμα 3.1.5, θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή, τη διασπορά, τη σκέδαση και την κύρτωση για κάθε μία από τις παραπάνω κατανομές.

Για να πραγματοποιηθούν οι παραπάνω υπολογισμοί είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τις 4 πρώτες ροπές των τ.μ. X_1, X_2, X_3. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι

$$\mathrm{E}[X_1] = \mathrm{E}[X_2] = \mathrm{E}[X_3] = 1$$

και

$$\mathrm{E}\left[X_1^2\right] = \mathrm{E}\left[X_2^2\right] = \mathrm{E}\left[X_3^2\right] = 3.$$

Επομένως, ισχύει ότι

$$Var\left[X_1\right]=Var\left[X_2\right]=Var\left[X_3\right]=2.$$

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι

$$\mathrm{E}\left[X_1^{\ 3}\right]=9,\ \mathrm{E}\left[X_2^{\ 3}\right]=15,\ \mathrm{E}\left[X_3^{\ 3}\right]=27$$

και

$$\mathrm{E}\left[X_1^{\ 4}\right]=27,\ \mathrm{E}\left[X_2^{\ 4}\right]=105.$$

Επομένως, η 3η κεντρική ροπή για κάθε μία από τις τ.μ. X_1, X_2 και X_3 είναι αντιστοίχως

$$\mu_{3,X_1}=9-3\cdot 1\cdot 3+2\cdot 1^3=2,$$

$$\mu_{3,X_2}=15-3\cdot 1\cdot 3+2\cdot 1^3=8$$

και

$$\mu_{3,X_3}=27-3\cdot 1\cdot 3+2\cdot 1^3=20,$$

ενώ η 4η κεντρική ροπή των τ.μ. X_1 και X_2 είναι αντιστοίχως

$$\mu_{4,X_1}=27-4\cdot 1\cdot 9+6\cdot 1^2\cdot 3-3\cdot 1^4=6$$

και

$$\mu_{4,X_2}=105-4\cdot 1\cdot 15+6\cdot 1^2\cdot 3-3\cdot 1^4=60.$$

Θυμίζουμε ότι για την τ.μ. X_3, δεν ορίζεται η 4η κεντρική ροπή, καθώς είναι κατανομή Pareto τύπου Lomax και επομένως ορίζονται μόνο οι τρεις πρώτες ροπές, διότι είναι $\alpha-1=3$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η σκέδαση των τ.μ. X_1, X_2, X_3 είναι

$$\beta_{X_1}=\frac{\mu_{3,X_1}}{\sigma_{X_1}^{\ 3}}=\frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^3}=0,707>0,$$

$$\beta_{X_2}=\frac{\mu_{3,X_2}}{\sigma_{X_2}^{\ 3}}=\frac{8}{\left(\sqrt{2}\right)^3}=2\sqrt{2}=2,828>0$$

και

$$\beta_{X_3}=\frac{\mu_{3,X_3}}{\sigma_{X_3}^{\ 3}}=\frac{20}{\left(\sqrt{2}\right)^3}=5\sqrt{2}=7,071>0.$$

Συνεπώς, και οι τρεις τ.μ. έχουν θετική σκέδαση.

Ενώ, η κύρτωση για τις τ.μ. X_1 και X_2 είναι αντιστοίχως

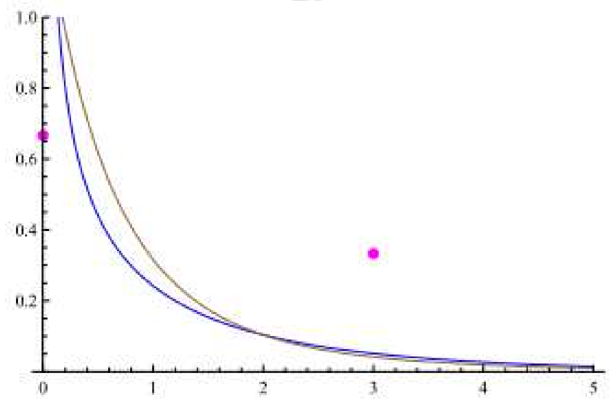
$$\gamma_{X_1} = \frac{\mu_{4,X_1}}{\sigma_{X_1}^{\ 4}} = \frac{6}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = 1,5 = 1,5 < 3$$

και

$$\gamma_{X_2} = \frac{\mu_{4,X_2}}{\sigma_{X_2}^{\ 4}} = \frac{60}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = 15 > 3$$

και επομένως η X_1 είναι πλατύκυρτη ενώ η X_2 είναι λεπτόκυρτη. Αναφέρουμε ότι η σκέδαση δεν ορίζεται για την τ.μ. X_3, διότι για αυτήν ορίζονται μόνο οι τρεις πρώτες ροπές.

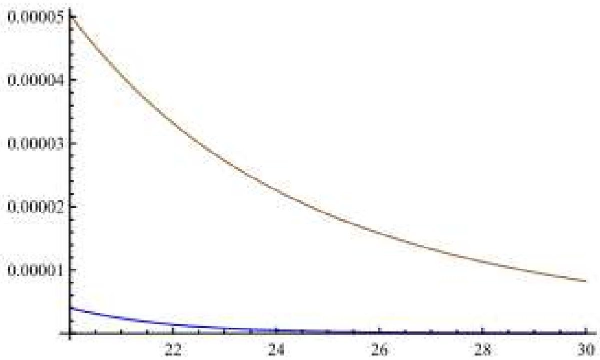
Στη συνέχεια, στο Σχήμα 3.3, θα παραστήσουμε γραφικά και τις τρεις συναρτήσεις. Αναφέρουμε ότι με μπλε χρώμα έχουμε παραστήσει την τ.μ. g_2 ενώ με καφέ χρώμα έχουμε παραστήσει την g_3. Τέλος, οι φούξια κουκκίδες παρουσιάζουν την τ.μ. g_1.



Σχήμα 3.3: Γραφική Παράσταση των σ.π.π. των κατανομών g_1 (φούξια χρώμα), g_2 (μπλε χρώμα) και g_3 (καφέ χρώμα) στο διάστημα $(0,5)$.

Από το παραπάνω σχήμα είναι φανερό ότι οι κίνδυνοι που αντιστοιχούν στις παραπάνω κατανομές δεν μπορούν να τιμολογηθούν με τον ίδιο τρόπο. Όπως και στο Παράδειγμα 3.1.5, στην περίπτωση πραγματοποίησης κινδύνου που αντιστοιχεί στην τ.μ. X_1 οι αποζημιώσεις είναι φραγμένες, καθώς η μέγιστη αποζημίωση που μπορεί να απαιτηθεί δεν ξεπερνά τις 3 ν.μ. Επίσης και σε αυτό το παράδειγμα, υπάρχουν διαστήματα στα οποία η g_2 παίρνει μεγαλύτερες τιμές από την g_3, καθώς επίσης και διαστήματα στα οποία η g_2 παίρνει μικρότερες τιμές από την g_3.

Το Σχήμα 3.4 που ακολουθεί, θα μας βοηθήσει να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τις ουρές των κατανομών X_2 και X_3.



Σχήμα 3.4: Γραφική παράσταση των ουρών των κατανομών g_2 (μπλε χρώμα) και g_3 (καφέ χρώμα) στο διάστημα $(20,30)$.

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από το παραπάνω σχήμα η g_3 έχει πιο βαριά ουρά από την g_2. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η g_2 να παρουσιάζει μικρότερη πιθανότητα πραγματοποίησης μεγάλων ζημιών σε σχέση με την g_3. Άρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η X_2 είναι λιγότερο επικίνδυνη από τη X_3.

Ενδεικτικά, θα υπολογίσουμε τις τιμές των δύο συναρτήσεων για διάφορες τιμές του x. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα αποτελέσματα που προκύπτουν.

x	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_3(x)/g_2(x)$
1	0,2419707	0,3164063	1,3076224
5	0,0146450	0,0098877	0,6751588
10	0,0008500	0,0008726	1,0265882
15	0,0000570	0,0001715	3,0087719
20	0,0000041	0,0000503	12,2682927
25	0,0000003	0,0000188	62,6666667

Πίνακας 3.2: Υπολογισμός του λόγου $g_3(x)/g_2(x)$ για διάφορες τιμές του x.

Από τον Πίνακα 3.2 συμπεραίνουμε ότι το πηλίκο $g_3(x)/g_2(x)$ αρχικά μειώνεται, ενώ στη συνέχεια συνεχώς αυξάνεται. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για $x \geq 10$ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ζημιά που να οφείλεται στην κατανομή X_3 είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να συμβεί ζημιά που να οφείλεται στην κατανομή X_2 και επομένως ο κίνδυνος που αντιστοιχεί στην τ.μ. X_3 είναι μεγαλύτερος από αυτόν που αντιστοιχεί στην τ.μ. X_2. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι καθώς η τιμή του x αυξάνεται, αμβλύνεται και η διαφορά μεταξύ των αντίστοιχων πιθανοτήτων. Εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι το πηλίκο $g_3(x)/g_2(x)$ αυξάνεται με πολύ πιο γρήγορους ρυθμούς από το πηλίκο $f_3(x)/f_2(x)$.

Από όσα αναφέρονται παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι ο κίνδυνος που αντιστοιχεί στην τ.μ. X_3 είναι μεγαλύτερος από τον κίνδυνο που αντιστοιχεί στην τ.μ. X_2, δεδομένου ότι έχει μεγαλύτερη πιθανότητα πραγματοποίησης μεγάλων ζημιών. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε ότι θα πρέπει να τιμολογηθεί με υψηλότερο ασφάλιστρο από την X_2 και κατ' επέκταση από την X_1.

□

Παρατήρηση 3.1.8

Όμοια με το Παράδειγμα 3.1.5, για την κατανομή X_2 είναι αναμενόμενο η σκέδαση να είναι ίση με $\beta_{X_2} = 2\sqrt{2}$ και η κύρτωση να είναι ίση με $\gamma_{X_2} = 15$, καθώς η τ.μ. X_2 ακολουθεί κατανομή Γάμμα με $\alpha = 1/2$. ▽

Παρατήρηση 3.1.9 (βλ. Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_distribution)

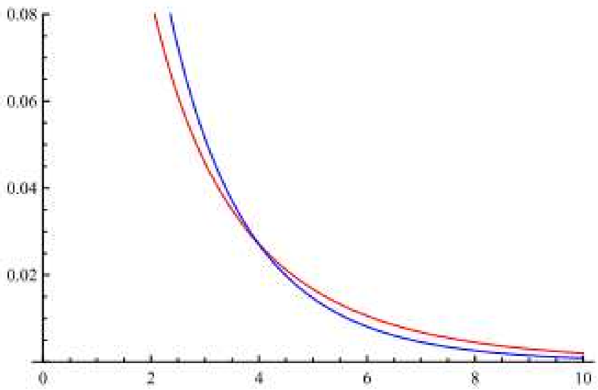
Στην περίπτωση όπου μία κατανομή ακολουθεί Pareto τύπου Lomax, δηλαδή αν $Y \sim \text{Pareto}(x_o, \alpha)$, τότε θα έχει σκέδαση $\beta = \dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha-3}\sqrt{\dfrac{\alpha-2}{\alpha}}$ με $\alpha > 3$ και επομένως είναι αναμενόμενο το γεγονός ότι η τιμή της σκέδασης για τη X_3 είναι $\beta_{X_3} = 5\sqrt{2}$. ▽

Παράδειγμα 3.1.10

Να συγκριθεί η f_2 με την g_2 προκειμένου να διαπιστωθεί με ποιο τρόπο επηρεάζουν οι παράμετροι την ουρά της κατανομής Γάμμα. Στη συνέχεια, να συγκριθούν οι κατανομές f_3 και g_3 για να διαπιστωθεί με ποιο τρόπο επηρεάζουν οι παράμετροι την ουρά της κατανομής Pareto.

Λύση

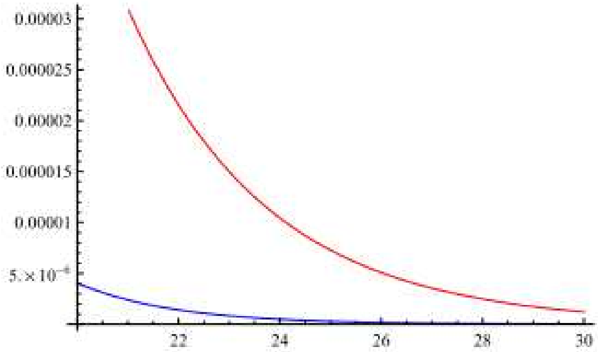
α) Αρχικά, θα σχεδιάσουμε στους ίδιους άξονες τις γραφικές παραστάσεις των f_2 και g_2 προκειμένου να διαπιστώσουμε τη συμπεριφορά των δύο κατανομών.



Σχήμα 3.5: Γραφική παράσταση των σ.π.π. των κατανομών
f_2 (κόκκινο χρώμα) και g_2 (μπλε χρώμα) στο διάστημα $(0,10)$.

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από το παραπάνω σχήμα, υπάρχουν διαστήματα στα οποία η g_2 παίρνει μεγαλύτερες τιμές από την f_2 καθώς επίσης και διαστήματα στα οποία g_2 παίρνει μικρότερες τιμές από την f_2.

Στη συνέχεια, θα δούμε πως συμπεριφέρονται οι ουρές των δύο κατανομών.



Σχήμα 3.6: Γραφική παράσταση των ουρών των κατανομών
f_2 (κόκκινο χρώμα) και g_2 (μπλε χρώμα) στο διάστημα $(20,30)$.

Από το παραπάνω σχήμα, διαπιστώνουμε ότι η κατανομή της g_2 έχει πιο ελαφριά ουρά από την f_2. Δεδομένου ότι η κατανομή της f_2 έχει πιο μικρές παραμέτρους από την g_2, συμπεραίνουμε ότι η ταυτόχρονη αύξηση και των δύο παραμέτρων μίας κατανομής Γάμμα, οδηγεί σε συνάρτηση με ελαφρύτερη ουρά και κατ' επέκταση σε μικρότερες πιθανότητες πραγματοποίησης μεγάλων ζημιών.

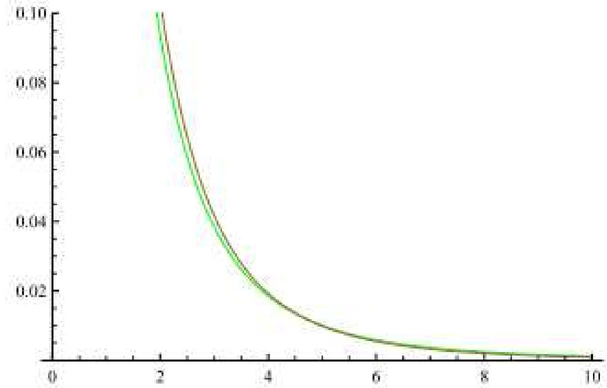
Στο παραπάνω συμπέρασμα, μπορούμε να καταλήξουμε ακόμα και αν συγκρίνουμε τις τιμές των κατανομών για διάφορες τιμές του x, δηλαδή για διάφορες τιμές του ύψους των αποζημιώσεων. Ενδεικτικά, θα υπολογίσουμε τις τιμές των f_2 και g_2 για διάφορες τιμές του x. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$f_2(x)$	$g_2(x)$	$f_2(x)/g_2(x)$
1	0,18545221	0,24197072	0,76642
5	0,01671832	0,01464498	1,14157
10	0,00198922	0,00085003	2,34018
15	0,00028672	0,00005697	5,03282
20	0,00004470	0,00000404	11,06436
25	0,00000727	0,00000029	25,06897
30	0,00000121	0,00000002	60,50000

Πίνακας 3.3: Υπολογισμός του λόγου $f_2(x)/g_2(x)$ για διάφορες τιμές του x.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, συμπεραίνουμε ότι όσο αυξάνεται το ποσό της αποζημίωσης αμβλύνεται και η διαφορά μεταξύ των αντίστοιχων πιθανοτήτων. Για παράδειγμα η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μία ζημιά ύψους 20 ν.μ. από τον κίνδυνο που αντιστοιχεί στην f_2 είναι 11,06436 φορές μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πιθανότητα της g_2, διότι $\frac{f_2(20)}{g_2(20)} = \frac{0,00004470}{0,00000404} = 11,06436$.

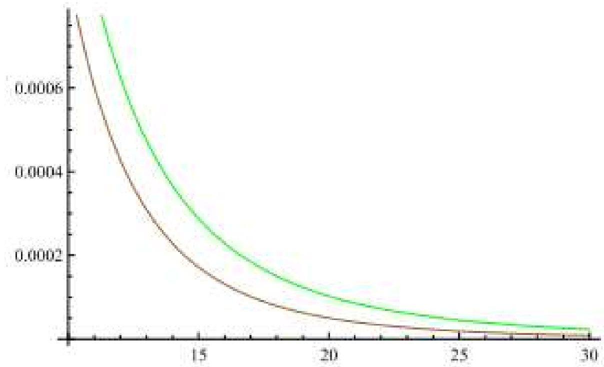
β) Στη συνέχεια, θα κάνουμε σύγκριση μεταξύ των κατανομών f_3 και g_3 για να δούμε πως συμπεριφέρεται η κατανομή Pareto όταν αυξάνονται οι παράμετροι της. Όπως στην περίπτωση της κατανομής Γάμμα, θα σχηματίσουμε στους ίδιους άξονες τις γραφικές παραστάσεις των f_3 και g_3 προκειμένου να διαπιστώσουμε την συμπεριφορά των δύο κατανομών.



Σχήμα 3.7: Γραφική παράσταση των σ.π.π. των κατανομών f_3 (πράσινο χρώμα) και g_3 (καφέ χρώμα) στο διάστημα $(0,10)$.

Από το παραπάνω σχήμα, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και στην περίπτωση των δύο Pareto υπάρχουν διαστήματα στα οποία παίρνει μεγαλύτερες τιμές η f_3 και διαστήματα στα οποία παίρνει μεγαλύτερες τιμές η g_3.

Ας δούμε τώρα, πως συμπεριφέρονται οι ουρές των δύο κατανομών.



Σχήμα 3.8: Γραφική παράσταση των ουρών των κατανομών f_3 (πράσινο χρώμα) και g_3 (καφέ χρώμα) στο διάστημα $(10, 30)$.

Από το Σχήμα 3.8, συμπεραίνουμε ότι η ταυτόχρονη αύξηση και των 2 παραμέτρων της κατανομής Pareto οδηγεί σε πιο ελαφριά ούρα και κατά συνέπεια σε πιο μικρές πιθανότητες πραγματοποίησης μεγάλων ζημιών. Ενδεικτικά, θα υπολογίσουμε τις τιμές των δύο κατανομών για διάφορες τιμές του x.

x	$f_3(x)$	$g_3(x)$	$f_3(x)/g_3(x)$
1	0,29629630	0,31640625	0,93644
5	0,00999584	0,00988769	1,01094
10	0,00115741	0,00087263	1,32635
15	0,00028735	0,00017147	1,67580
20	0,00010245	0,00005034	2,03516
25	0,00004516	0,00001883	2,39830
30	0,00002289	0,00000827	2,76784
35	0,00001281	0,00000408	3,13971
40	0,00000771	0,00000220	3,50455
45	0,00000491	0,00000127	3,86614
50	0,00000328	0,00000077	4,25974
100	0,00000022	0,00000003	7,33333

Πίνακας 3.4: Υπολογισμός του λόγου $f_3(x)/g_3(x)$ για διάφορες τιμές του x.

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα, η αύξηση των παραμέτρων οδηγεί σε μία πιο ελαφριά ουρά. Για παράδειγμα, η πιθανότητα να υπάρξει απαίτηση 20 ν.μ. για μία ζημιά που προέρχεται από τον κίνδυνο που αντιστοιχεί στην κατανομή f_3 είναι περίπου δύο φόρες μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πιθανότητα της g_3, διότι είναι $\frac{f_3(20)}{g_3(20)} = \frac{0,00010245}{0,00005034} = 2,03516$.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα με τα αποτελέσματα που προκύπτουν για την κατανομή Γάμμα (βλ. Πίνακα 3.3), διαπιστώνουμε ότι στην περίπτωση των δύο Pareto, η ταυτόχρονη αύξηση των παραμέτρων δεν οδηγεί σε πολύ μεγάλες διαφορές μεταξύ των κατανομών f_3 και g_3. Αντιθέτως, η αύξηση και των δύο παραμέτρων στην κατανομή Γάμμα έχει σαν αποτέλεσμα να παρουσιάζονται πολύ μεγάλες διαφορές μεταξύ των αποζημιώσεων που προκύπτουν από την f_2 και την g_2. Θυμίζουμε ότι $\frac{f_2(20)}{g_2(20)} = 11,06436$. Επίσης, πολύ εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι ακόμα και στην περίπτωση όπου το ύψος των αποζημιώσεων που αφορά τις δύο Pareto είναι 100 ν.μ. το πηλίκο $f_3(x)/g_3(x)$ είναι ίσο με 7,33333. Το νούμερο αυτό είναι εξαιρετικά μικρό, αν λάβουμε υπόψη ότι το πηλίκο $f_2(x)/g_2(x)$ για 30 μόλις ν.μ. είναι 60,50000. □

3.2 Οι ημιαναλλοίωτες

Ο λόγος για τον οποίο θα ασχοληθούμε με τις **ημιαναλλοίωτες (cumulants)** είναι το γεγονός ότι η διασπορά δεν αποτελεί ένα επαρκές μέτρο κινδύνου για κατανομές με θετική σκέδαση. Αντιθέτως, είναι επαρκές μέτρο για την Κανονική κατανομή καθώς επίσης και για τις κατανομές που είναι σχεδόν κανονικές, δηλαδή για κατανομές που έχουν σχεδόν μηδενική σκέδαση. Επειδή λοιπόν, οι κίνδυνοι εκφράζονται με τυχαίες μεταβλητές που έχουν συνήθως θετική σκέδαση, είναι απαραίτητο να βρούμε ένα μέτρο που να μπορεί να προσαρμόζει την διασπορά.

Ορισμός 3.2.1 (βλ. Κάκουλλος, 1995)

Έστω ότι $\kappa_j[X]$, $j = 1, 2\ldots$ είναι οι ημιαναλλοίωτες της τ.μ. X. Τότε το άθροισμα

$$\mathrm{K}_X(t) = \ln \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j[X] \frac{t^j}{j!} \tag{3.3}$$

ονομάζεται **γεννήτρια συνάρτηση των ημιαναλλοίωτων** ή **2η χαρακτηριστική συνάρτηση** της τ.μ. X . $\bigtriangledown$

Τα κ_j, $j=1,2\ldots$ εκφράζουν μία ακολουθία πραγματικών αριθμών της οποίας οι 4 πρώτοι όροι είναι οι εξής: $\kappa_1=\mu$, $\kappa_2=\sigma^3$, $\kappa_3=\mu_3$, $\kappa_4=\mu_4-3\sigma^4$. (Σε περίπτωση που δεν υπάρχει λόγος σύγχυσης μπορούμε να γράψουμε κ_j αντί για $\kappa_j\left[X\right]$). Ο όρος **ημιαναλλοίωτες** προέρχεται από το γεγονός ότι τα κ_j, εκτός του κ_1, δεν μεταβάλλονται από **μετασχηματισμούς μεταφοράς** (αλλαγή της αρχής) της τ.μ. X , δηλαδή όταν $X \to X+c=Y$ όπου $c=\sigma\tau\alpha\theta.$, οι κ_j με $j=2,3\ldots$ δε μεταβάλλονται (βλ. Κάκουλλος, 1995).

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των ημιαναλλοίωτων είναι ότι για ανεξάρτητους κινδύνους ακολουθούν την προσθετική ιδιότητα, δηλαδή για X_1, X_2 ανεξάρτητους κινδύνους ισχύει ότι $\kappa_j\left[X_1+X_2\right]=\kappa_j\left[X_1\right]+\kappa_j\left[X_2\right]$. Συνεπώς, εξαιτίας της συγκεκριμένης ιδιότητας, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι οι ημιαναλλοίωτες υπερέχουν έναντι των κεντρικών ροπών (βλ. Κουτσόπουλος, 1999).

Στη συνέχεια της μελέτης μας, θα δώσουμε μερικούς ορισμούς (βλ. Χαραλαμπίδης, 1996), οι οποίοι θα μας βοηθήσουν να καταλάβουμε τι είναι οι **ημιαναλλοίωτες** και με ποιο τρόπο προκύπτουν.

Ορισμός 3.2.2
Έστω α_j, $j=0,1,2....$ μία ακολουθία πραγματικών (ή μιγαδικών) αριθμών. Τότε, το άθροισμα

$$\mathrm{A}\left(t\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\cdot t^j$$

καλείται **(συνήθης) γεννήτρια συνάρτηση,** ενώ το άθροισμα

$$\mathrm{E}\left(t\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\cdot\frac{t^j}{j!}$$

καλείται **εκθετική γεννήτρια συνάρτηση** της ακολουθίας α_j, $j=0,1,2....$ $\bigtriangledown$

Ορισμός 3.2.3

Ονομάζουμε **ροπογεννήτρια**, τη γεννήτρια της μορφής

$$\mathrm{M}_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j \cdot \frac{t^j}{j!},$$

όπου $\rho_j = \mathrm{E}\left[X^j\right]$ είναι οι j-τάξεις ροπές περί την αρχή. Η $\mathrm{M}_X(t)$ ονομάζεται ροπογεννήτρια, διότι οι παράγωγοι της για $t=0$ μας δίνουν τις j-τάξεις ροπές περί την αρχή. ▽

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι η σχέση $\mathrm{M}_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j \cdot \frac{t^j}{j!}$ μπορεί να προκύψει πολύ εύκολα από την ισότητα

$$\mathrm{M}_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{tX}\right]. \tag{3.4}$$

Είναι γνωστό ότι ισχύει

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Leftrightarrow e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots \tag{3.5}$$

(βλ. Νεγρεπόντης, 1993). Επομένως, αν εφαρμόσουμε τη σχέση (3.5) στην (3.4) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_X(t) &= \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j X^j}{j!}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[1 + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + \frac{t^3 X^3}{3!} + \cdots + \frac{t^j X^j}{j!} + \cdots\right] \\
&= 1 + \frac{t\mathrm{E}[X]}{1!} + \frac{t^2\mathrm{E}\left[X^2\right]}{2!} + \frac{t^3\mathrm{E}\left[X^3\right]}{3!} \cdots + \frac{t^j\mathrm{E}\left[X^j\right]}{j!} + \cdots \\
&= 1 + \rho_1 \frac{t}{1!} + \rho_2 \frac{t^2}{2!} + \rho_3 \frac{t^3}{3!} + \cdots + \rho_j \frac{t^j}{j!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j \cdot \frac{t^j}{j!}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.6), αποδεικνύεται άμεσα ότι οι παράγωγοι της ροπογεννήτριας $\mathrm{M}_X(t)$ μας δίνουν τις j-τάξεις ροπές περί την αρχή. Αυτό θα γίνει, λαμβάνοντας τις πρώτες παραγώγους και θέτοντας $t=0$. Επομένως, προκύπτει ότι

$$\left.\frac{d\mathrm{M}_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \rho_1 + \rho_2\frac{2t}{2!} + \cdots + \rho_j\frac{jt^{j-1}}{j!} + \cdots\Bigg|_{t=0} = \rho_1,$$

$$\left.\frac{d^2\mathrm{M}_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \rho_2 + \rho_3\frac{6t}{3!} + \cdots + \rho_j\frac{j(j-1)t^{j-2}}{j!} + \cdots\Bigg|_{t=0} = \rho_2$$

και γενικά

$$\left.\frac{d^j\mathrm{M}_X(t)}{dt^j}\right|_{t=0} = \rho_j + \rho_{j+1}\frac{(j+1)j\ldots 2t}{j!} + \cdots\Bigg|_{t=0} = \rho_j.$$

Τέλος, αναφέρουμε ότι η ροπογεννήτρια $\mathrm{M}_X(t)$ χαρακτηρίζει την κατανομή που ακολουθεί η τ.μ. X.

Όπως θα δούμε και παρακάτω, ο ορισμός των ημιαναλλοίωτων δεν είναι τίποτα περισσότερο από την αρχική σχέση μεταξύ των συντελεστών του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης $\mathrm{M}_X(t)$ με $\mathrm{M}_X(0)=1$ και των συντελεστών του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης $\ln\mathrm{M}_X(t)$. Εξάλλου, συγκρίνοντας τον Ορισμό 3.2.1 με τον Ορισμό 3.2.3 είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $\mathrm{K}_X(t) = \ln\mathrm{M}_X(t)$.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε τη σχέση που έχουν οι ημιαναλλοίωτες με τις ροπές της κατανομής.

Για κάθε $-1 < x < 1$ ισχύει ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{3.7}$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε τη σχέση (3.7) στην (3.6) θα έχουμε ότι

$$\mathrm{M}_X(t) = 1 + \left[\rho_1 t + \rho_2\frac{t^2}{2!} + \rho_3\frac{t^3}{3!} + \cdots\right] = \ln\left(1 + \left[\rho_1 t + \rho_2\frac{t^2}{2!} + \rho_3\frac{t^3}{3!} + \cdots\right]\right)$$

$$= \left[\rho_1 t + \rho_2\frac{t^2}{2!} + \rho_3\frac{t^3}{3!} + \cdots\right] - \frac{1}{2!}\left[\rho_1 t + \rho_2\frac{t^2}{2!} + \rho_3\frac{t^3}{3!} + \cdots\right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[\rho_1 t + \rho_2\frac{t^2}{2!} + \rho_3\frac{t^3}{3!} - \cdots\right]^3 - \cdots$$

Μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned}\ln \mathrm{M}_X(t) &= \rho_1 t + \left(\frac{\rho_2-\rho_1^2}{2}\right)t^2 + \left(\frac{\rho_3}{6} - \frac{\rho_1\rho_2}{2} + \frac{\rho_1^3}{3}\right)t^3 + \cdots \\ &= \rho_1 t + \left(\rho_2-\rho_1^2\right)\frac{t^2}{2} + \left(\rho_3 - 3\rho_1\rho_2 + 2\rho_1^3\right)\frac{t^3}{6} + \\ &+ \left(\rho_4 - 4\rho_3\rho_1 - 3\rho_2^2 + 12\rho_1^2\rho_2 - 6\rho_1^4\right)\frac{t^4}{24} + \\ &+ \left(\rho_5 - 5\rho_1\rho_4 - 10\rho_3\rho_2 + 20\rho_3\rho_1^2 + 30\rho_2^2\rho_1 - 60\rho_2\rho_1^3 + 24\rho_1^5\right)\frac{t^5}{120} + \ldots\end{aligned}$$

Αν ονομάσουμε $\kappa_j,\ j=1,2\ldots$ τους παραπάνω συντελεστές θα είναι

$$\kappa_1 = \rho_1 = \mu,$$

$$\kappa_2 = \rho_2 - \rho_1^2 = \sigma^2$$

και

$$\kappa_3 = \rho_3 - 3\rho_1\rho_2 + 2\rho_1^3.$$

Όμως από τη σχέση (3.1) γνωρίζουμε ότι $\mu_3 = \rho_3 - 3\rho_1\rho_2 + 2\rho_1^3$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι

$$\kappa_3 = \mu_3.$$

Συνεπώς, οι τρεις πρώτες ημιαναλλοίωτες ταυτίζονται με τις τρεις πρώτες κεντρικές ροπές της κατανομής. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αυτό δεν ισχύει για τις ημιαναλλοίωτες ανώτερης τάξης.

Η ημιαναλλοίωτη 4ης τάξης είναι

$$\kappa_4 = \rho_4 - 4\rho_3\rho_1 - 3\rho_2^2 + 12\rho_1^2\rho_2 - 6\rho_1^4.$$

Όμως από τη σχέση (3.2) γνωρίζουμε ότι $\mu_4 = \rho_4 - 4\rho_3\rho_1 + 6\rho_2\rho_1^2 - 3\rho_1^4$. Επομένως, θα είναι

$$\begin{aligned}\kappa_4 - \mu_4 &= \rho_4 - 4\rho_3\rho_1 - 3\rho_2^2 + 12\rho_1^2\rho_2 - 6\rho_1^4 - \left(\rho_4 - 4\rho_3\rho_1 + 6\rho_2\rho_1^2 - 3\rho_1^4\right) \\ &= 6\rho_1^2\rho_2 - 3\rho_1^4 - 3\rho_2^2 = -3\left(\rho_2-\rho_1^2\right)^2 = -3\sigma^4\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια ισχύει ότι

$$\kappa_4 = \mu_4 - 3\sigma^4.$$

Τέλος, η ημιαναλλοίωτη 5ης τάξης θα είναι ίση με

$$\kappa_5 = \rho_5 - 5\rho_1\rho_4 - 10\rho_3\rho_2 + 20\rho_3\rho_1^{\ 2} + 30\rho_2^{\ 2}\rho_1 - 60\rho_2\rho_1^{\ 3} + 24\rho_1^{\ 5}$$

και επειδή είναι

$$\mu_5 = \mathrm{E}\left[\left(X-\mu\right)^5\right] = \mathrm{E}\left[X^5 - 5X^4\mu + 10X^3\mu^2 - 10X^2\mu^3 + 5X\mu^4 - \mu^5\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[X^5\right] - 5\mathrm{E}\left[X^4\right]\mu + 10\mathrm{E}\left[X^3\right]\mu^2 - 10\mathrm{E}\left[X^2\right]\mu^3 + 5\mathrm{E}\left[X\right]\mu^4 - \mu^5$$

$$= \rho_5 - 5\rho_4\rho_1 + 10\rho_3\rho_1^{\ 2} - 10\rho_2\rho_1^{\ 3} + 5\rho_1\rho_1^{\ 4} - \rho_1^{\ 5},$$

προκύπτει ότι

$$\kappa_5 \neq \mu_5.$$

Από τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\ln \mathrm{M}_X\left(t\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{t^j}{j!} = \mathrm{K}_X\left(t\right).$$

Παρατήρηση 3.2.4

Στα κ_j, $j=1,2\ldots$ τα γινόμενα των ρ_i, $i=1,2\ldots$ είναι όλοι οι δυνατοί τρόποι που μπορούμε να γράψουμε το j. Άλλωστε, αυτή είναι και η λογική του διωνυμικού αναπτύγματος. Για παράδειγμα, ο αριθμός 4 μπορεί να γραφτεί ως εξής: 4, 3+1, 2+2, 1+1+2, 1+1+1+1. Επομένως, τα γινόμενα που εμφανίζονται κατά τον υπολογισμό του κ_4 είναι τα εξής: ρ_4, $\rho_3\rho_1$, $\rho_2^{\ 2}$, $\rho_1^{\ 2}\rho_2$, $\rho_1^{\ 4}$. $\triangledown$

Πρόταση 3.2.5

Αν X_1, X_2 ανεξάρτητοι κίνδυνοι, ισχύει ότι $\kappa_j\left[X_1+X_2\right] = \kappa_j\left[X_1\right] + \kappa_j\left[X_2\right]$.

Απόδειξη

Έστω ότι $Y = X_1 + X_2$. Τότε θα είναι

$$\mathrm{E}\left[e^{tY}\right] = \mathrm{M}_Y\left(t\right) \overset{Y=X_1+X_2}{=} \mathrm{M}_{X_1+X_2}\left(t\right) = \mathrm{M}_{X_1}\left(t\right)\cdot\mathrm{M}_{X_2}\left(t\right) = \mathrm{E}\left[e^{tX_1}\right]\mathrm{E}\left[e^{tX_2}\right].$$

Άρα, θα έχουμε

$$\mathrm{E}\left[e^{tY}\right] = \mathrm{E}\left[e^{tX_1}\right]\mathrm{E}\left[e^{tX_2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \ln \mathrm{E}\left[e^{tY}\right] = \ln \mathrm{E}\left[e^{tX_1}\right] + \ln \mathrm{E}\left[e^{tX_2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j [Y] \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\kappa_j [X_1] + \kappa_j [X_2] \right] \frac{t^j}{j!}$$

$$\Leftrightarrow \kappa_1 [Y] \frac{t^1}{1!} + \kappa_2 [Y] \frac{t^2}{2!} + ... = \left[\kappa_1 [X_1] + \kappa_1 [X_2] \right] \frac{t^1}{1!} + \left[\kappa_2 [X_1] + \kappa_2 [X_2] \right] \frac{t^2}{2!} + ..., \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\kappa_1 [Y] - \left[\kappa_1 [X_1] + \kappa_1 [X_2] \right] \right] \frac{t^1}{1!} + \left[\kappa_2 [Y] - \left[\kappa_2 [X_1] + \kappa_2 [X_2] \right] \right] \frac{t^2}{2!} + ... = 0, \ \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \kappa_1 [Y] - \left[\kappa_1 [X_1] + \kappa_1 [X_2] \right] = 0 \\ \kappa_2 [Y] - \left[\kappa_2 [X_1] + \kappa_2 [X_2] \right] = 0 \\ \quad \quad \quad \quad . \\ \quad \quad \quad \quad . \\ \quad \quad \quad \quad . \quad \quad \quad \quad \quad \forall t \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \kappa_j [Y] = \kappa_j [X_1] + \kappa_j [X_2] \text{ για κάθε } j = 1,2,3... \tag{3.8}$$

και επομένως αποδείξαμε ότι σε περίπτωση ανεξάρτητων κινδύνων, οι ημιαναλλοίωτες ακολουθούν την προσθετική ιδιότητα. □

Πρόταση 3.2.6

Αν $c > 1$, τότε ισχύει ότι $\kappa_j = [cX] = c^j \kappa_j [X]$ για κάθε $j = 2,3\ldots$

Απόδειξη

Από τη σχέση (3.3) για $Y = cX$ όπου $c = \sigma\tau\alpha\theta.$ προκύπτει ότι

$$\mathrm{K}_Y (t) = \mathrm{K}_{cX} (t) = \ln \mathrm{E}\left[e^{tcX} \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j [X] \frac{(ct)^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j [X] c^j \frac{t^j}{j!} . \tag{3.9}$$

Επιπλέον, από τον ορισμό των ημιαναλλοίωτων ισχύει ότι

$$\mathrm{K}_Y (t) = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j [Y] \frac{t^j}{j!} . \tag{3.10}$$

Άρα, από τις σχέσεις (3.9) και (3.10) προκύπτει ότι

$$\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j [Y] \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j [X] c^j \frac{t^j}{j!}$$

$$\Rightarrow \kappa_1 [Y] t + \kappa_2 [Y] \frac{t^2}{2!} + \kappa_3 [Y] \frac{t^3}{3!} + ... = \kappa_1 [X] ct + \kappa_2 [X] c^2 \frac{t^2}{2!} + \kappa_3 [X] c^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots, \ \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow\left(\kappa_1[Y]-c\kappa_1[X]\right)t+\left(\kappa_2[Y]-c^2\kappa_2[X]\right)\frac{t^2}{2!}+\left(\kappa_3[Y]-c^3\kappa_3[X]\right)\frac{t^3}{3!}+\ldots=0,\ \forall t\geq 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \kappa_1[Y]-c\kappa_1[X]=0 \\ \kappa_2[Y]-c^2\kappa_2[X]=0 \\ \kappa_3[Y]-c^3\kappa_3[X]=0 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \qquad\qquad \forall t\geq 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \kappa_j[Y]=c^j\kappa_j[X] \text{ για } j=1,2,3\ldots$$

Επειδή όμως, $Y=cX$ τελικά θα είναι

$$\kappa_j[cX]=c^j\kappa_j[X] \text{ για } j=1,2,3\ldots \tag{3.11}$$

□

Παράδειγμα 3.2.7

Αν $X\sim \mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ τότε η ροπογεννήτρια της τ.μ. X είναι $\mathrm{M}_X(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$. Να υπολογιστούν τα κ_j, $j=1,2\ldots$

Λύση

Ισχύει ότι

$$\mathrm{M}_X(t)=e^{\mu t+\sigma^2\frac{t^2}{2}}\Leftrightarrow \ln\mathrm{M}_X(t)=\mu t+\sigma^2\frac{t^2}{2}.$$

Επομένως, προκύπτει ότι

$$\kappa_1=\mu,\ \kappa_2=\sigma^2 \text{ και } \kappa_j=0 \text{ για κάθε } j=3,4\ldots$$

□

Παρατήρηση 3.2.8 (βλ. Baumann και Hegerfeldt, 1985)

Ο Marcinkiewicz (1935) απέδειξε ότι η **Κανονική κατανομή** είναι η μόνη κατανομή η οποία έχει πολυώνυμο ως γεννήτρια συνάρτηση ημιαναλλοίωτων, δηλαδή είναι η μόνη κατανομή που έχει πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών ημιαναλλοίωτων. ▽

Παράδειγμα 3.2.9

Αν η τ.μ. X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $b>0$, να υπολογιστούν τα κ_j, $j=1,2...$

Λύση

Αφού η τ.μ X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $b>0$, θα είναι $f(x)=be^{-bx}$, $x\geq 0$ με $b>0$. Επιπροσθέτως, στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής ισχύει ότι

$$\rho_j = \mathrm{E}\left(X^j\right) = \frac{j!}{b^j}$$

και επομένως η 1η και η 2η ημιαναλλοίωτη θα είναι

$$\kappa_1 = \rho_1 = \frac{1}{b} = \frac{(1-1)!}{b}$$

και

$$\kappa_2 = \rho_2 - \rho_1^2 = \frac{2}{b^2} - \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{b^2} = \frac{(2-1)!}{b^2}.$$

Επιπλέον, η 3η ημιαναλλοίωτη είναι

$$\kappa_3 = \rho_3 - 3\rho_1\rho_2 + 2\rho_1^3 = \frac{3!}{b^3} - 3\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{2!}{b^2} + 2\frac{1}{b^3} = \frac{2}{b^3} = \frac{(3-1)!}{b^3},$$

ενώ, η 4η ημιαναλλοίωτη είναι

$$\begin{aligned}\kappa_4 &= \rho_4 - 4\rho_3\rho_1 - 3\rho_2^2 + 12\rho_1^2\rho_2 - 6\rho_1^4 \\ &= \frac{4!}{b^4} - 4\cdot\frac{3!}{b^3}\frac{1}{b} - 3\left(\frac{2!}{b^2}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{b}\right)^2\frac{2!}{b^2} - 6\left(\frac{1}{b}\right)^4 = \frac{6}{b^4} = \frac{(4-1)!}{b^4}.\end{aligned}$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι θα είναι $\kappa_j = \dfrac{(j-1)!}{b^j}$ για κάθε $j=1,2\ldots$ (Θυμίζουμε ότι $0!=1$). □

Παράδειγμα 3.2.10

Αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, δηλαδή αν $f(x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ όπου $x=0,1,2...$ και $\lambda>0$, να υπολογιστούν τα κ_j, $j=1,2...$

Λύση

Στην περίπτωση της κατανομής Poisson ισχύει ότι

$$\mathrm{M}_X(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}.$$

Άρα, είναι

$$\ln \mathrm{M}_X(t) = \lambda\left(e^t - 1\right) = \lambda\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots - 1\right) = \lambda t + \frac{\lambda t^2}{2!} + \frac{\lambda t^3}{3!} + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda t^j}{j!}.$$

Ως εκ τούτου, θα είναι $\kappa_j = \lambda$ για κάθε $j = 1, 2\ldots$ □

Παράδειγμα 3.2.11

Να βρεθούν τα κ_j, $j = 1, 2\ldots$ στην περίπτωση όπου η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων S ακολουθεί τη σύνθετη κατανομή Poisson.

Λύση

Πριν υπολογίσουμε τα κ_j, ας θυμίσουμε τον ορισμό της σύνθετης κατανομής Poisson.

Έστω S η συνολική αποζημίωση που προκύπτει από N το πλήθος ανεξάρτητων ζημιών X_1, X_2, … X_N που ακολουθούν την ίδια κατανομή, δηλαδή είναι

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Στην περίπτωση όπου η N ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$, τότε η S ακολουθεί σύνθετη κατανομή Poisson, δηλαδή $S \sim CP(\lambda, X)$ όπου η X ακολουθεί την ίδια κατανομή με τα X_1 για $i = 1, 2\ldots, N$ (βλ. Κάκουλλος, 1995).

Αφού λοιπόν, $S \sim CP(\lambda, X)$ θα ισχύει ότι $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ και επομένως, θα είναι $\mathrm{M}_N(z) = e^{\lambda\left(e^z - 1\right)}$. Επιπροσθέτως, από τις ιδιότητες των ροπών γνωρίζουμε ότι $\mathrm{M}_S(z) = \mathrm{M}_N\left[\ln \mathrm{M}_X(z)\right]$ (βλ. Κουτσόπουλος, 1999). Επομένως, θα ισχύει ότι

$$\mathrm{M}_S(z) = \mathrm{M}_N\left[\ln \mathrm{M}_X(z)\right] = e^{\lambda\left(\mathrm{M}_X(z) - 1\right)}.$$

Λογαριθμίζοντας, την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\ln \mathrm{M}_S(z) = \lambda\left(\mathrm{M}_X(z) - 1\right). \qquad (3.12)$$

Όμως, από τον ορισμό των ροπών έχουμε

$$\mathrm{M}_X(z)=1+\rho_1 z+\frac{\rho_2 z^2}{2!}+\rho_3\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

και επομένως η σχέση (3.12) παίρνει τη μορφή

$$\ln \mathrm{M}_S(z)=\lambda\left(\rho_1 z+\rho_2\frac{z^2}{2!}+\rho_3\frac{z^3}{3!}+\rho_4\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)$$

$$=(\lambda\rho_1)z+(\lambda\rho_2)\frac{z^2}{2!}+(\lambda\rho_3)\frac{z^3}{3!}+(\lambda\rho_4)\frac{z^4}{4!}+\cdots \qquad (3.13)$$

Επομένως, από τον ορισμό των ημιαναλλοίωτων και την σχέση (3.13) συμπεραίνουμε ότι θα είναι

$$\kappa_1=\lambda\rho_1,\ \kappa_2=\lambda\rho_2,\kappa_3=\lambda\rho_3,\ \kappa_4=\lambda\rho_4,$$

δηλαδή,

$$\kappa_j=\lambda\rho_j \text{ για κάθε } j=1,2,3...$$

Νωρίτερα δείξαμε ότι $\kappa_1=\mu$, $\kappa_2=\sigma^2$, και $\kappa_3=\mu_3$. Ως εκ τούτου, στην περίπτωση της σύνθετης κατανομής Poisson ισχύει ότι

$$\mu=\lambda\rho_1,\ \sigma^2=\lambda\rho_2 \text{ και } \mathrm{E}\left[\left(S-\mathrm{E}(S)\right)^3\right]=\lambda\rho_3. \qquad \square$$

Παρατήρηση 3.2.12

Οι τρεις πρώτες ημιαναλλοίωτες ταυτίζονται με τις αντίστοιχες κεντρικές ροπές. Εντούτοις, αυτό δεν ισχύει για τις ημιαναλλοίωτες ανώτερης τάξης. Οι ημιαναλλοίωτες έχουν εισαχθεί από τον Thiele (1889), μόνο και μόνο διότι είναι αθροιστικές για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (βλ. Lauritzen, 2002). Επομένως, το ασφάλιστρο $\Pi[X]$ που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\Pi[X]:=\sum_{j=1}^{\infty} w_j\kappa_j[X], \text{ όπου } w_j\geq 0 \text{ για κάθε } j=1,2...$$

ικανοποιεί την προσθετική ιδιότητα. Αυτό σημαίνει ότι αν X_1 και X_2 ανεξάρτητοι κίνδυνοι τότε θα ισχύει ότι

$$\Pi[X_1+X_2]=\Pi[X_1]+\Pi[X_2]. \qquad \triangledown$$

Πρόταση 3.2.13

Αν X_1 και X_2 δύο ανεξάρτητοι κίνδυνοι, οι οποίοι έχουν ασφάλιστρο που ορίζεται από τη σχέση $\Pi[X] := \sum_{j=1}^{\infty} w_j \kappa_j [X]$ όπου $w_j \geq 0$, τότε θα ισχύει ότι $\Pi[X_1 + X_2] = \Pi[X_1] + \Pi[X_2]$.

Απόδειξη

Για κάθε X_1 και X_2 δύο ανεξάρτητους κίνδυνους έχουμε

$$\begin{aligned}\Pi[X_1 + X_2] &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j \kappa_j [X_1 + X_2] \\ &\overset{(3.8)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} w_j \kappa_j [X_1] + \sum_{j=1} w_j \kappa_j [X_2] \\ &= \Pi[X_1] + \Pi[X_2]\end{aligned}$$

και επομένως έχουμε δείξει το ζητούμενο. □

Στην περίπτωση που επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα απόλυτο μέτρο κινδύνου, θα έχουμε

$$R[X] = Var[X] \cdot (\text{κίνδυνος δεξιάς ουράς})$$

ενώ, στην περίπτωση που επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σχετικό μέτρο κινδύνου θα έχουμε

$$R[X] = Var[X] \cdot (1\text{+σχετικό μέτρο κινδύνου δεξιάς ουράς}).$$

Αν στη συνέχεια θέσουμε

$$\zeta = 1 + (\text{σχετικό μέτρο κινδύνου δεξιάς ουράς}),$$

τότε το σχετικό μέτρο κινδύνου παίρνει την μορφή

$$R[X] = Var[X] \cdot \zeta,$$

όπου ζ ο συντελεστής προσαρμογής της διασποράς.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι στην περίπτωση ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, για να προκύψουν ικανοποιητικές προσεγγίσεις για τις συναρτήσεις κατανομών, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε τουλάχιστον 3 ή 4 ημιαναλλοίωτες. Όπως θα δούμε και παρακάτω, αυτό είναι απαραίτητο προκειμένου να έχουμε πληροφορίες για τον κίνδυνο της δεξιάς ουράς και κατ' επέκταση των μεγάλων αποζημιώσεων.

3.3 Η χρησιμότητα των ημιαναλλοίωτων

Ένας πολύ σημαντικός λόγος, για τον οποίο ο Ramsay (1993) εισάγει τη χρήση των **ημιαναλλοίωτων** για τον υπολογισμό του ασφαλίστρου, είναι η ιδιότητα της **αντικειμενικότητας** που απαιτούμε για τη συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου $R[X]$ (βλ. Ορισμό 1.4.3). Θυμίζουμε ότι για να ισχύει η ιδιότητα της αντικειμενικότητας θα πρέπει η $R[X]$ να εξαρτάται από την τ.μ. X μόνο μέσω της σ.κ. F_X και φυσικά η χρήση των ημιαναλλοίωτων μας βοηθά να το επιβεβαιώσουμε.

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου, μία γενική συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου θα ορίζεται ως

$$R[X]=r(\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4).$$

Για παράδειγμα μία συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου μπορεί να είναι η

$$R[X]=\kappa_2+w_3\kappa_3^{\alpha_3}+w_4\kappa_4^{\alpha_4} \text{ όπου } w_j\geq 0 \text{ και } 0\leq\alpha_j\leq 1 \text{ για } j=3,4.$$

Επιπλέον, θυμίζουμε ότι $\kappa_2=\sigma^2$, $\kappa_3=\mu_3$ και $\kappa_4=\mu_4-3\sigma^4$. Όπως θα διαπιστώσουμε και παρακάτω, αυτή η συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που αναφέρονται στον Ορισμό 1.4.3. Πριν όμως, θα δούμε τι πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη κατά την επιλογή ενός μέτρου κινδύνου $R[X]$.

Παρατήρηση 3.3.1

Σε κάθε συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου $R[X]$ είναι απαραίτητο να λαμβάνουμε υπόψη τα παρακάτω:

1. Η χρήση των κλασματικών εκθετών $(0\leq\alpha_j\leq 1,\ j=3,4)$ μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα, διότι το κ_3 μπορεί να είναι αρνητικό. Άρα, θα ήταν καλό να αποφύγουμε τους κλασματικούς εκθέτες.
2. Για να αποφύγουμε προβλήματα που μπορεί να προκύψουν από αρνητικούς εκθέτες, μπορούμε να λαμβάνουμε υπόψη μόνο κινδύνους που έχουν μη αρνητική σκέδαση, δηλαδή μόνο κινδύνους που ανήκουν στο σύνολο

$$\Omega^{+}=\left\{X: X\in\Omega \text{ και } \kappa_3\left[X\right]\geq 0\right\}.$$

Κάτι τέτοιο είναι λογικό, διότι οι περισσότεροι ασφαλιστικοί κίνδυνοι δεν έχουν αρνητική σκέδαση.

3. Στην περίπτωση όπου η τ.μ. X έχει αρνητική σκέδαση, το κ_3 είναι αρνητικό και επειδή θεωρούμε ότι η διασπορά δεν αποτελεί αρκετά αξιόπιστο μέτρο κινδύνου, θα επιλέξουμε ως μέτρο κινδύνου το

$$R\left[X\right]=\kappa_2+w_4\kappa_4^{\alpha_4},$$

το οποίο θα μας δώσει καλύτερα αποτελέσματα από το

$$R\left[X\right]=\kappa_2.$$

Επισημαίνουμε ότι στην περίπτωση που επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε το κ_3, θα προκύψει ένα μέτρο κινδύνου το οποίο θα είναι λιγότερο αξιόπιστο ακόμα και από τη διασπορά.

$\triangledown$

Θεώρημα 3.3.2

Αν $X\in\Omega^{+}$ είναι η συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου που ορίζεται από την εξίσωση $R\left[X\right]=\kappa_2+w_3\kappa_3^{\alpha_3}+w_4\kappa_4^{\alpha_4}$ όπου $w_j\geq 0$ και $0\leq\alpha_j\leq 1$ για $j=3,4$, τότε ικανοποιούνται όλες οι ιδιότητες των μέτρων κινδύνου.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι η $R\left[X\right]=\kappa_2+w_3\kappa_3^{\alpha_3}+w_4\kappa_4^{\alpha_4}$ με $w_j\geq 0$, $0\leq\alpha_j\leq 1$ και $j=3,4$ ικανοποιεί τις ιδιότητες 1 ως 5, έτσι όπως ορίζονται στον Ορισμό 1.4.3.

1. ***Μη-επικινδυνότητα***

Αν η συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου X είναι ακίνδυνη θα ισχύει ότι $X=c$ όπου $c=\sigma\tau\alpha\theta.$ και επομένως θα είναι $\mathrm{E}\left[c^r\right]=c^r$ για κάθε $r=1,2,3\ldots$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τα $\kappa_j\left[c\right]$ για $j=2,3,4$. Είναι

$$\kappa_2\left[c\right]=Var\left[c\right]=\mathrm{E}\left[c^2\right]-\mathrm{E}^2\left[c\right]=0,$$

$$\kappa_3\left[c\right]=\mathrm{E}\left[c^3\right]-3\mathrm{E}\left[c\right]\mathrm{E}\left[c^2\right]+2\mathrm{E}^3\left[c\right]=c^3-3cc^2+2c^3=0$$

και

$$\kappa_4[c] = \mathrm{E}\left[c^4\right] - 4\mathrm{E}\left[c^3\right]\mathrm{E}[c] - 3\mathrm{E}^2\left[c^2\right] + 12\mathrm{E}^2[c]\mathrm{E}\left[c^2\right] - 6\mathrm{E}^4[c]$$

$$= c^4 - 4c^3c - 3\left(c^2\right)^2 + 12c^2c^2 - 6c^4 = 0\,.$$

Άρα, είναι

$$\kappa_j[c] = 0 \text{ για } j = 2,3,4$$

και τελικά θα ισχύει ότι

$$R[X] = R[c] = 0\,.$$

2. ***Μη-αρνητικότητα***

Ισχύει ότι $R[X] = \kappa_2 + w_3\kappa_3^{\alpha_3} + w_4\kappa_4^{\alpha_4} \geq 0$, διότι $w_3, w_4 \geq 0$, $\kappa_2 = \sigma^2 \geq 0$, $\kappa_3 \geq 0$ (αφού $X \in \Omega^+$) και $\kappa_4 \geq 0$.

3. ***Υποαθροιστικότητα***

Είναι

$$\left.\begin{aligned} R[X_1] &= \kappa_2[X_1] + w_3\kappa_3[X_1]^{\alpha_3} + w_4\kappa_4[X_1]^{\alpha_4} \\ R[X_2] &= \kappa_2[X_2] + w_3\kappa_3[X_2]^{\alpha_3} + w_4\kappa_4[X_2]^{\alpha_4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$R[X_1] + R[X_2] = \kappa_2[X_1] + \kappa_2[X_2] + w_3\left[\kappa_3[X_1]^{\alpha_3} + \kappa_3[X_2]^{\alpha_3}\right] + w_4\left[\kappa_4[X_1]^{\alpha_4} + \kappa_4[X_2]^{\alpha_4}\right] \quad (3.14)$$

και

$$R[X_1 + X_2] = \kappa_2[X_1 + X_2] + w_3\left[\kappa_3[X_1 + X_2]\right]^{\alpha_3} + w_4\left[\kappa_4[X_1 + X_2]\right]^{\alpha_4}$$

$$= \kappa_2[X_1] + \kappa_2[X_2] + w_3\left[\kappa_3[X_1] + \kappa_3[X_2]\right]^{\alpha_3} + w_4\left[\kappa_4[x_1] + \kappa_4[X_2]\right]^{\alpha_4} \quad (3.15)\,.$$

Για να ισχύει η ιδιότητα της υποαθροιστικότητας, θα πρέπει

$$R[X_1 + X_2] \leq R[X_1] + R[X_2]$$

$$\overset{(3.14),(3.15)}{\Leftrightarrow} \cancel{\kappa_2[X_1]} + \cancel{\kappa_2[X_2]} + w_3\left[\kappa_3[X_1] + \kappa_3[X_2]\right]^{\alpha_3} + w_4\left[\kappa_4[X_1] + \kappa_4[X_2]\right]^{\alpha_4}$$

$$\leq \cancel{\kappa_2[X_1]} + \cancel{\kappa_2[X_2]} + w_3\left[\kappa_3[X_1]^{\alpha_3} + \kappa_3[X_2]^{\alpha_3}\right] + w_4\left[\kappa_4[X_1]^{\alpha_4} + \kappa_4[X_2]^{\alpha_4}\right]$$

$$\Leftrightarrow w_3\left[\kappa_3\left[X_1\right]+\kappa_3\left[X_2\right]\right]^{\alpha_3}+w_4\left[\kappa_4\left[X_1\right]+\kappa_4\left[X_2\right]\right]^{\alpha_4}\leq$$

$$w_3\left[\kappa_3\left[X_1\right]^{\alpha_3}+\kappa_3\left[X_2\right]^{\alpha_3}\right]+w_4\left[\kappa_4\left[X_1\right]^{\alpha_4}+\kappa_4\left[X_2\right]^{\alpha_4}\right] \qquad (3.16)\ .$$

Για να ισχύει η σχέση (3.16), αρκεί να ισχύει

$$\left[\kappa_j\left[X_1\right]+\kappa_j\left[X_2\right]\right]^{\alpha_j}\leq\kappa_j\left[X_1\right]^{\alpha_j}+\kappa_j\left[X_2\right]^{\alpha_j} \text{ για } 0\leq\alpha_j\leq 1 \text{ και } j=3,4.$$

Προφανώς, η παραπάνω σχέση ισχύει και μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας την ανισότητα Minkowski (βλ. Τσουλομήτης, 2012).

4. ***Συνέπεια***

Θυμίζουμε ότι για δύο ανεξάρτητους κινδύνους X_1 και X_2 ισχύει ότι

$$\kappa_j\left[X_1+X_2\right]=\kappa_j\left[X_1\right]+\kappa_j\left[X_2\right] \text{ για κάθε } j=1,2,3,\ldots$$

Επομένως για $Y = X + c$ θα είναι

$$\kappa_j\left[Y\right]=\kappa_j\left[X+c\right]=\kappa_j\left[X\right]+\kappa_j\left[c\right] \text{ για κάθε } j=1,2,3,\ldots$$

Νωρίτερα, δείξαμε ότι $\kappa_j\left[c\right]=0$ για $j=2,3,4$. Επομένως, για $j=2,3,4$ ισχύει ότι

$$\kappa_j\left[Y\right]=\kappa_j\left[X+c\right]=\kappa_j\left[X\right]+\kappa_j\left[c\right]=\kappa_j\left[X\right].$$

Ως εκ τούτου, θα έχουμε

$$R\left[Y\right]=\kappa_2\left[Y\right]+w_3\kappa_3\left[Y\right]^{\alpha_3}+w_4\kappa_4\left[Y\right]^{\alpha_4}=\kappa_2\left[X\right]+w_3\kappa_3\left[X\right]^{\alpha_3}+w_4\kappa_4\left[X\right]^{\alpha_4}=R\left[X\right]$$

και επειδή $Y = X + c$, τελικά θα είναι

$$R\left[X+c\right]=R\left[X\right].$$

5. ***Αντικειμενικότητα***

Η $R\left[X\right]=\kappa_2+w_3\kappa_3^{\alpha_3}+w_4\kappa_4^{\alpha_4}$ εξαρτάται από τα κ_2, κ_3, κ_4, δηλαδή εξαρτάται από τα μεγέθη $\rho_j=\mathrm{E}\left[X^j\right]$ και $\mu_j=\mathrm{E}\left[\left(X-\mu\right)^j\right]$ όπου $\mu=\rho_1$. Τα μεγέθη κ_j, ρ_j, μ_j είναι χαρακτηριστικά της κάθε τ.μ., δηλαδή για συγκεκριμένη τ.μ. τα παραπάνω μεγέθη έχουν συγκεκριμένη τιμή. Ως εκ τούτου, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $R\left[X\right]$ εξαρτάται από την X μόνο μέσω της σ.κ. F_X.

□

Παρατήρηση 3.3.3

Από τη σχέση (3.11) συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση όπου η τ.μ. X πολλαπλασιαστεί με $c>1$ (αλλαγή κλίμακας), τότε δίνουμε μία αδικαιολόγητα υπερβολική βαρύτητα στις ημιαναλλοίωτες υψηλότερης τάξης. Για το λόγο αυτό, επιλέγουμε $0 \le \alpha_3, \alpha_4 \le 1$ προκειμένου να αντιμετωπίσουμε αυτού του είδους την εκτροπή. $\bigtriangledown$

Παράδειγμα 3.3.4

Έστω το μέτρο κινδύνου το οποίο δίνεται από τον εξής τύπο $R[X] = \kappa_2 + w_3\kappa_3^{2/3} + w_4\kappa_4^{1/2}$, όπου w_3, w_4 δύο μη αρνητικές σταθερές και $\kappa_2 > 0$ $\kappa_3, \kappa_4 \ge 0$. Να αποδειχθεί ότι:

α) Το μέτρο κινδύνου $R[X]$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $R[X] = Var[X] \cdot \zeta$, όπου $\zeta = 1 + (\text{σχετικό μέτρο κινδύνου δεξιάς ουράς})$.

β) Για το παραπάνω μέτρο κινδύνου ισχύει ότι $R[cX] = c^2 R[X]$, όπου $c = \sigma\tau\alpha\theta.$

Λύση

α) Το παραπάνω μέτρο κινδύνου, μπορεί να γραφτεί και ως εξής

$$R[X] = \kappa_2 + w_3\kappa_3^{2/3} + w_4\kappa_4^{1/2}$$

$$= \kappa_2 \left(1 + w_3 \frac{\kappa_3^{2/3}}{\kappa_2} + w_4 \frac{\kappa_4^{1/2}}{\kappa_2} \right). \tag{3.17}$$

Αν στη συνέχεια, συμβολίσουμε με σ_X, β_X, γ_X την τυπική απόκλιση, τη σκέδαση και την κύρτωση της τ.μ. X έχουμε $\beta_X = \dfrac{\mu_3[X]}{\sigma_X^3}$ και $\gamma_X = \dfrac{\mu_4[X]}{\sigma_X^4}$ όπου $\sigma_X^2 = \kappa_2[X]$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι

$$\beta_X = \frac{\mu_3[X]}{\sigma_X^3} = \frac{\kappa_3[X]}{(\kappa_2[X])^{3/2}} = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}}$$

$$\Leftrightarrow \beta_X^{2/3} = \frac{\kappa_3^{2/3}}{\kappa_2} \Leftrightarrow \beta_X^{2/3} = \frac{\kappa_3^{2/3}}{\kappa_2} \tag{3.18}$$

και

$$\gamma_X = \frac{\mu_4[X]}{\sigma_X^{\ 4}} = \frac{\kappa_4[X]+3\sigma_X^{\ 4}}{\sigma_X^{\ 4}} = \frac{\kappa_4[X]+3(\kappa_2[X])^2}{(\kappa_2[X])^2} = \frac{\kappa_4[X]}{(\kappa_2[X])^2}+3$$

$$\Leftrightarrow \gamma_X = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^{\ 2}}+3 \Leftrightarrow \frac{\kappa_4}{\kappa_2^{\ 2}} = \gamma_X - 3 \underset{\kappa_2=\sigma^2>0}{\overset{\kappa_4\geq 0}{\Leftrightarrow}} \frac{\kappa_4^{\ 1/2}}{\kappa_2} = (\gamma_X-3)^{1/2} \ . \qquad (3.19)$$

Άρα, η σχέση (3.17) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.18) και (3.19) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} R[X] &= \sigma^2\left[1+w_3\beta_X^{\ 2/3}+w_4(\gamma_X-3)^{1/2}\right] \\ &= \sigma^2\left[1+w_3\beta_X^{\ 2/3}+w_4\frac{(\gamma_X-3)^{1/2}}{\gamma_X^{\ 1/2}}\gamma_X^{\ 1/2}\right] \\ &= Var[X]\cdot\left[1+w_3\beta_X^{\ 2/3}+w_4'\gamma_X^{\ 1/2}\right] , \end{aligned} \qquad (3.20)$$

όπου

$$\beta_X = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{\ 3/2}} \text{ και } \gamma_X = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^{\ 2}}+3 .$$

Επιπλέον, από υπόθεση ισχύει ότι $\kappa_3, \kappa_4 \geq 0$, $\kappa_2 = \sigma^2 > 0$ και $w_3, w_4 \geq 0$. Ως εκ τούτου, θα είναι $\gamma_X - 3 \geq 0$ και επομένως θα είναι και $w_4' = w_4\dfrac{(\gamma_X-3)^{1/2}}{\gamma_X^{\ 1/2}} \geq 0$.

Η σχέση (3.20) μπορεί να γραφτεί και ως

$$R[X] = Var[X]\cdot\zeta \text{ , όπου } \zeta = 1+w_3\beta_X^{\ 2/3}+w_4'\gamma_X^{\ 1/2}$$

ο συντελεστής προσαρμογής της διασποράς και $w_3\beta_X^{\ 2/3}+w_4'\gamma_X^{\ 1/2}$ το σχετικό μέτρο κινδύνου δεξιάς ουράς. Επομένως, αυτό που προτείνει η εξίσωση (3.20) είναι ένας γενικός τρόπος για να αποφύγουμε την εκτροπή που προκύπτει σε περίπτωση όπου $c>1$. Αυτό θα γίνει, αν απλά ορίσουμε

$$R[X] = Var[X]\cdot(1+h(\beta,\gamma)) \ , \qquad (3.21)$$

όπου $h(\cdot,\cdot)\geq 0$ ο σχετικός κίνδυνος δεξιάς ουράς (relative right-tail risk) $h:\mathbb{R}X\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$. Η συνάρτηση h επιλέγεται από τον αναλογιστή και η μοναδική συνθήκη η οποία απαιτείται, είναι η συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου $R[X]$ στην οποία καταλήγει να ικανοποιεί τις ιδιότητες 1 ως 5 του Ορισμού 1.4.3**.**

β) Έστω ότι $Y = cX$ (δηλαδή αλλαγή κλίμακας) όπου $c = \sigma\tau\alpha\theta$. Τότε θα είναι

$$\sigma_Y{}^2 = \kappa_2[Y] = \kappa_2[cX] = c^2\kappa_2[X] = c^2\kappa_2 = c^2\sigma_X{}^2,$$

$$\beta_Y = \frac{\kappa_3[Y]}{(\kappa_2[Y])^{3/2}} = \frac{\kappa_3[cX]}{(\kappa_2[cX])^{3/2}} = \frac{c^3\kappa_3[X]}{\sqrt{(\kappa_2[cX])^3}} = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} = \beta_X$$

και

$$\gamma_Y = \frac{\mu_4[Y]}{(\kappa_2[Y])^2} = \frac{\kappa_4[Y]+3\sigma_Y{}^4}{(\kappa_2[Y])^2} = \frac{\kappa_4[Y]+3(\kappa_2[Y])^2}{(\kappa_2[Y])^2} = \frac{\kappa_4[cX]+3(\kappa_2[cX])^2}{(\kappa_2[cX])^2}$$

$$\frac{c^4\kappa_4[X]+3(c^2\kappa_2[X])^2}{(c^2\kappa_2[X])^2} = \frac{\kappa_4[X]+3(\kappa_2[X])^2}{(\kappa_2[X])^2} = \frac{\mu_4[X]}{(\kappa_2[X])^2} = \gamma_X.$$

Άρα, από την σχέση (3.20) για $Y = cX$ θα έχουμε

$$R_3[Y] = \sigma_Y^2\left[1+w_3\beta_Y^{2/3}+w_4'\gamma_Y^{1/2}\right] = c^2\sigma_X{}^2\left[1+w_3\beta_X{}^{2/3}+w_4'\gamma_X{}^{1/2}\right] = c^2R_3[X].$$

□

Παρατήρηση 3.3.5

Η σχέση

$$R[X] = Var[X]\cdot(1+h(\beta,\gamma))$$

είναι αντίστοιχη της σχέσης

$$\Pi[X] = \mathrm{E}[X](1+\theta).$$

Αυτό σημαίνει ότι το $h(\beta,\gamma)$ εκφράζει το περιθώριο ασφαλείας για το μέτρο κινδύνου $R[X]$, όπως ακριβώς και το θ εκφράζει το περιθώριο ασφαλείας του ασφαλίστρου $\Pi[X]$, και εξαρτάται από τη σκέδαση και την κύρτωση της τ.μ X. Κατά συνέπεια εξαρτάται από τις ημιαναλλοίωτες 3ης και 4ης τάξης της τ.μ. X. ▽

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΕΩΝ S

4.1 Η χρήση των προσεγγίσεων στον υπολογισμό των συνολικών αποζημιώσεων

Έστω S οι συνολικές αποζημιώσεις, X_i το μέγεθος της ζημιάς i, όπου $i = 1, 2, 3...$ και N το πλήθος των ζημιών, τότε

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \text{, όπου } S = 0 \text{ αν } N = 0.$$

Στη συνέχεια, θα υποθέσουμε ότι οι μη αρνητικές τ.μ. X_1, $X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με σ.κ. $G(x) = P[X_i \le x]$. Είναι γνωστό ότι η σ.κ. της S δίνεται από τη σχέση

$$F(s) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} p_\kappa G^{*(\kappa)}(s), \; x \ge 0$$

όπου $G(x)$ είναι η σ.κ. της X_i και $G^{*(\kappa)}(x)$ είναι η κ-οστή συνέλιξη της G με $G^{*(0)}(x) = 1$ για $x \ge 0$ και $p_\kappa = P[N = \kappa]$ (βλ. Κουτσόπουλος, 1999).

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι ο υπολογισμός της σ.κ. $F(s)$, πολλές φορές δεν είναι εφικτός. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, να είναι απαραίτητη η χρήση προσεγγίσεων για τον υπολογισμό της $F(s)$. Αν σκεφτούμε την S σαν άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού τ.μ. θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για να την προσεγγίσουμε (βλ. Κάκουλλος, 1995). Εντούτοις, μία τέτοια προσέγγιση συνήθως δεν είναι ικανοποιητική στην αναλογιστική επιστήμη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η γνώση της μέσης τιμής και της διασποράς δε μας αρκούν προκειμένου να βγάλουμε συμπεράσματα τα οποία σχετίζονται με την ουρά της κατανομής. Εξάλλου, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.1.5 και στο Παράδειγμα 3.1.7, υπάρχουν κατανομές που παρουσιάζουν την ίδια μέση τιμή και την ίδια διασπορά αλλά διαφοροποιούνται στη σκέδαση και στην κύρτωση. Ως εκ τούτου, έχει ιδιαίτερη σημασία να λάβουμε υπόψη μας αυτή τη διαφοροποίηση, διότι η ουρά μίας κατανομής εξαρτάται από τη σκέδαση και την κύρτωση. Η αναλογιστική επιστήμη δείχνει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την ουρά μίας κατανομής, δεδομένου ότι σχετίζεται με τις μεγάλες ζημιές. Η πληροφορία που παίρνουμε από την ουρά μίας κατανομής είναι πάρα πολύ σημαντική, καθώς μας δείχνει μέχρι ποια τιμή μπορεί να φτάσει η αποζημίωση για μία ζημιά. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η 3η ροπή της S είναι συνήθως θετική και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η S να έχει θετική σκέδαση. Αυτό σημαίνει ότι οι πολύ μεγάλες ζημιές έχουν πολύ μικρή πιθανότητα πραγματοποίησης. Βέβαια, αν η S έχει βαριά ουρά, αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα να υπάρχει πιθανότητα, έστω και μικρή, να πραγματοποιηθούν πάρα πολύ μεγάλες ζημιές οι οποίες όμως, θα είναι ικανές να κλονίσουν τη φερεγγυότητα της ασφαλιστικής εταιρείας σε περίπτωση όπου κατά την τιμολόγηση του κινδύνου δεν είχε λάβει υπόψη της τον κίνδυνο της δεξιάς ουράς.

Το γεγονός ότι η S έχει συνήθως θετική σκέδαση, κάνει μη επιτρεπτή τη χρήση της Κανονικής κατανομής η οποία, λόγω του γεγονότος ότι έχει μηδενική 3η ροπή, παρουσιάζει συμμετρία και όχι θετική σκέδαση. Ως αποτέλεσμα των παραπάνω, αντί της χρήσης του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω προσεγγίσεις:

1. Προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα (Translated Gamma approximation).
2. Προσέγγιση του Edgeworth (Edgeworth approximation).
3. Προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής (Normal Power approximation).

Με τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων έχει διαπιστωθεί ότι οι παραπάνω προσεγγίσεις είναι περισσότερο ακριβείς από την προσέγγιση που παίρνουμε από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Στη συνέχεια, θα δούμε αναλυτικά κάθε μία από τις παραπάνω προσεγγίσεις.

4.2 Η προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα

Συνήθως, οι κατανομές που εκφράζουν τις συνολικές αποζημιώσεις έχουν σχήμα παρόμοιο μ' αυτό της κατανομής Γάμμα, δηλαδή έχουν θετική σκέδαση ($\beta > 0$), θετικό πεδίο ορισμού και επιπλέον είναι μονοκόρυφες. Συνεπώς, είναι λογικό να προσεγγίσουμε την S χρησιμοποιώντας μία κατανομή Γάμμα.

Για να ορίσουμε την παραπάνω προσέγγιση, εκτός από τις συνήθεις παραμέτρους a και b που έχει η κατανομή Γάμμα, ορίζουμε και μία 3η η οποία μας επιτρέπει μία μετατόπιση κατά x_o. Η βασική ιδέα της προσέγγισης της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα είναι να προσεγγίσουμε τη σ.κ. της S με τη σ.κ. της $Y + x_o$ όπου $Y \sim \text{Γάμμα}(a,b)$. Η επιλογή των a, b και x_0 γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η προσεγγιστική τ.μ. να έχει τις 3 πρώτες ροπές της ίσες μ' αυτές της S.

Σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$F_S(s) \approx G(s - x_0; a, b),$$

όπου $G(x;a,b)$ η σ.κ. της Γάμμα και επομένως ισχύει ότι

$$G(x;a,b) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x y^{a-1} b^a e^{-by} dy \text{ με } x \geq 0 .$$

Δεδομένου ότι οι τρεις πρώτες ροπές της G και της F_S πρέπει να ταυτίζονται, η επιλογή των a, b και x_0 γίνονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$\mu = x_0 + \frac{a}{b}, \ \sigma^2 = \frac{a}{b^2} \text{ και } \beta = \frac{2}{\sqrt{a}}.$$

Θυμίζουμε ότι μ, σ^2 και β είναι η μέση τιμή, η διασπορά και η σκέδαση της τ.μ. S που εκφράζει το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων. Επομένως, αν λύσουμε το σύστημα των τριών παραπάνω εξισώσεων ως προς a, b και x_0 έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \mu = x_0 + \dfrac{a}{b} \\ \sigma^2 = \dfrac{a}{b^2} \\ \beta = \dfrac{2}{\sqrt{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = \mu - \dfrac{a}{b} \\ b^2 = \dfrac{a}{\sigma^2} \\ a = \dfrac{4}{\beta^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = \mu - \dfrac{a}{b} \\ b^2 = \left(\dfrac{2}{\beta\sigma}\right)^2 \\ a = \dfrac{4}{\beta^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0 = \mu - \dfrac{2\sigma}{\beta} \\ b = \dfrac{2}{\sigma\beta} \\ a = \dfrac{4}{\beta^2} \end{array}.$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η παραπάνω προσέγγιση είναι ικανοποιητική μόνο στην περίπτωση όπου η σκέδαση είναι αυστηρά θετική. Σε περιπτώσεις όπου η σκέδαση τείνει στο μηδέν ($\beta \to 0$) η παραπάνω προσέγγιση δε μας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, χρησιμοποιείται η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής την οποία και θα μελετήσουμε παρακάτω.

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα, η προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα είναι εφικτή μόνο αν οι τρεις πρώτες ροπές είναι ίσες. Σ' αυτή την περίπτωση η διαφορά που προκύπτει μεταξύ των δύο σ.κ. είναι πολύ μικρή.

Έχει αποδειχθεί ότι στην περίπτωση όπου $Y \sim \text{Γάμμα}(a,b)$ με $a \geq 1/4$ τότε η κατανομή $\sqrt{4bY} - \sqrt{4a-1}$ ακολουθεί περίπου $N(0,1)$ (βλ Dhaene και Vyncke, 2004). Επομένως, αν προσεγγίσουμε τις συνολικές αποζημιώσεις χρησιμοποιώντας τη μετατοπισμένη κατανομή Γάμμα, αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$\mathrm{P}\left[\frac{S-\mu}{\sigma} \leq y + \frac{\beta}{8}\left(y^2-1\right) - y\left(1-\sqrt{1-\frac{\beta^2}{16}}\right)\right] \approx \Phi(y),$$

όπου Φ η σ.κ. της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής (βλ Dhaene και Vyncke, 2004). Το δεξιό μέρος της ανίσωσης στον τύπο της πιθανότητας είναι το y συν ένας διορθωτικός παράγοντας που αντισταθμίζει τη σκέδαση. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση όπου το $\beta \to 0$, ο διορθωτικός παράγοντας εξαφανίζεται με αποτέλεσμα η παραπάνω σχέση να παίρνει τη μορφή

$$\mathrm{P}\left[\frac{S-\mu}{\sigma} \leq y\right] \approx \Phi(y),$$

δηλαδή σ' αυτή την περίπτωση έχουμε την Κανονική προσέγγιση.

Παράδειγμα 4.2.1

α) Να υπολογιστεί η σ.π.π. των συνολικών αποζημιώσεων S στην περίπτωση όπου $X \sim \mathrm{Exp}(1)$ και $N \sim \mathrm{Poisson}(2)$.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων να είναι το πολύ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20 ή 25 ν.μ.

Λύση

α) Αφού $X \sim \mathrm{Exp}(1)$ και $N \sim \mathrm{Poisson}(2)$, θα έχουμε $X \sim e^{-x}$, $x > 0$ και $N \sim e^{-2}\dfrac{2^n}{n!}$, $n = 0,1,2...$ Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η σ.π.π. των συνολικών αποζημιώσεων S είναι

$$f_S(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(N=n)\, g^{*(n)}(x), & x > 0 \\ \mathrm{P}(N=0), & x = 0 \end{cases}$$

Επομένως, θα πρέπει αρχικά να υπολογιστεί το $g^{*(n)}(x)$, δηλαδή η n-οστή συνέλιξη της εκθετικής κατανομής με παράμετρο 1. Έχουμε

$$g^{*(2)}(x) = \int_0^x g(y)\, g(x-y)\, dy = \int_0^x e^{-y} e^{-x+y} dy = xe^{-x} \sim \text{Γάμμα}(2,1),$$

$$g^{*(3)}(x) = \int_0^{\kappa} g^{*(2)}(y)\, g(x-y)\, dy = \int_0^x ye^{-y} e^{-x+y} dy = e^{-x}\int_0^x y dy = \frac{x^2}{2!} e^{-x} \sim \text{Γάμμα}(3,1)$$

και

$$g^{*(4)}(x) = \int_0^x g^{*(3)}(y)\, g(x-y)\, dy = \int_0^x \frac{y^2}{2!} e^{-y} e^{-x+y} dy = e^{-x}\int_0^x \left(\frac{y^3}{6}\right)' dy = \frac{x^3}{3!} e^{-x} \sim \text{Γάμμα}(4,1).$$

Έστω ότι $g^{*(n)}(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x}$, θα αποδείξουμε ότι ισχύει και $g^{*(n+1)}(x) = \dfrac{x^n}{n!} e^{-x}$.

Είναι

$$g^{*(n+1)}(x) = \int_0^x g^{*(n)}(y)\, g(x-y)\, dy = \int_0^x \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-y} e^{-x+y} dy$$

$$= e^{-x}\int_0^x \left(\frac{y^n}{n!}\right)' dy = \frac{x^n}{n!} e^{-x} \sim \text{Γάμμα}(n+1).$$

Άρα, επαγωγικά, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $g^{*(n)}(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$.

Κατά συνέπεια, προκύπτει ότι για $x > 0$ είναι

$$f_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(N=n) g^{*(n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2}\frac{2^n}{n!}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} = 2e^{-(2+x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{n-1}}{n!(n-1)!}$$

ενώ, στην περίπτωση όπου $x = 0$ θα είναι

$$f_S\left(0\right) = \mathrm{P}\left(N = 0\right) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2}.$$

Από τον παραπάνω τύπο, είναι φανερό ότι είναι ιδιαίτερα δύσκολος ο υπολογισμός της σ.π.π. της S. Ως εκ τούτου, για την περίπτωση όπου $x > 0$ θα κάνουμε τους περαιτέρω υπολογισμούς χρησιμοποιώντας το Mathematica. Επομένως, έχουμε

$$\texttt{f[x\_] := 2 * Exp[-(x + 2)] * }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2 * x)^{n-1}}{(n-1)!\, * n!}$$

```
f[x]
```

$$\frac{\sqrt{2}\; e^{-2-x}\, \texttt{BesselI}\left[1,\ 2\sqrt{2}\,\sqrt{x}\right]}{\sqrt{x}}$$

Αναφέρουμε ότι η συνάρτηση Bessel, που προκύπτει κατά τον παραπάνω υπολογισμό, ορίζεται ως η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \lambda^2\right)y = 0,$$

όπου λ μία σταθερά (βλ. Boyce και Diprima, 1999).

β) Αναφέρουμε ότι η πιθανότητα να πληρώσουμε το πολύ x ν.μ δίνεται από τη σχέση

$$F_S\left(x\right) = \mathrm{P}\left(0 \le S \le x\right) = \mathrm{P}\left(S = 0\right) + \mathrm{P}\left(0 < S \le x\right).$$

Κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς με τη βοήθεια του Mathematica, προκύπτουν τα παρακάτω συνοπτικά αποτελέσματα. Διευκρινίζουμε ότι στον παρακάτω πίνακα, για λόγους απλότητας, συμβολίζουμε την πιθανότητα $\mathrm{P}\left(S = 0\right)$ με $\mathrm{P}\left(0 < S \le 0\right)$. Επομένως, για παράδειγμα η πιθανότητα να πληρώσουμε 1 το πολύ ν.μ. είναι

$$F_S\left(1\right) = \mathrm{P}\left(0 \le S \le 1\right) = \mathrm{P}\left(S = 0\right) + \mathrm{P}\left(0 < S \le 1\right) = 0{,}135335 + 0{,}258962 = 0{,}394297.$$

x	$\mathrm{P}(0<S\le x)$	$F_S(x)$
0	0,135335	0,135335
1	0,258962	0,394297
2	0,468166	0,603501
3	0,617676	0,753011
4	0,716601	0,851936
5	0,778599	0,913934
6	0,815896	0,951231
7	0,837619	0,972954
8	0,849941	0,985276
9	0,856778	0,992113
10	0,860500	0,995835
15	0,864520	0,999855
20	0,864661	0,999996
25	0,864665	1,000000

Πίνακας 4.1: Υπολογισμός της σ.κ των συνολικών αποζημιώσεων για διάφορες τιμές του ύψους των συνολικών αποζημιώσεων.

□

Παράδειγμα 4.2.2

Για τη σ.π.π. των συνολικών αποζημιώσεων που ορίστηκε στο Παράδειγμα 4.2.1, να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα, προκειμένου να υπολογιστεί η πιθανότητα το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων να είναι το πολύ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20 ή 25 ν.μ.

Λύση

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα η προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα προκύπτει από τη σχέση

$$F_S(s)=G(s-x_0;a,b),$$

όπου

$$G(x;a,b)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x y^{a-1}b^a e^{-by}dy \ \text{ με } \ x\ge 0 .$$

Για να πραγματοποιηθεί ο παραπάνω υπολογισμός αρκεί να υπολογιστούν τα x_o, a και b. Όμως, για τον υπολογισμό των τριών παραπάνω παραμέτρων απαιτείται ο υπολογισμός της διασποράς και της κύρτωσης της τ.μ S που εκφράζει το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων.

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα η $X \sim \mathrm{Exp}(1)$, επομένως έχουμε

$$\rho_k = E\left[X^k\right] = \frac{k!}{1^k} = k! \text{ για κάθε } k = 1, 2, \ldots .$$

Άρα, θα είναι

$$\rho_1 = E\left[X\right] = 1! = 1,$$

$$\rho_2 = E\left[X^2\right] = 2! = 2$$

και

$$\rho_3 = E\left[X^3\right] = 3! = 6.$$

Επιπλέον, αφού η $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, θα ισχύει ότι $S \sim CP(\lambda, X)$. Επομένως, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.2.11 είναι $\kappa_1 = \lambda\rho_1$, $\kappa_2 = \lambda\rho_2$ και $\kappa_3 = \lambda\rho_3$, όπου λ η παράμετρος της Poisson και ρ_1, ρ_2 και ρ_3, η $1^{η}$, $2^{η}$ και $3^{η}$ ροπή περί την αρχή της τ.μ. X. Επίσης, νωρίτερα δείξαμε ότι $\mu_1 = \kappa_1$, $\mu_2 = \kappa_2$ και $\mu_3 = \kappa_3$. Άρα, για την τ.μ. S των συνολικών αποζημιώσεων θα έχουμε

$$\mu_1 = \kappa_1 = \lambda\rho_1 = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$\mu_2 = \kappa_2 = \lambda\rho_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

και

$$\mu_3 = \kappa_3 = \lambda\rho_3 = 2 \cdot 6 = 12.$$

Συμπερασματικά, για την κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων, η μέση τιμή, η διασπορά και η σκέδαση θα είναι αντίστοιχα

$$\mu = \mu_1 = 2, \ \sigma^2 = \mu_2 = 4 \text{ και } \beta = \frac{\kappa_3}{\sigma^3} = \frac{12}{2^3} = \frac{3}{2}.$$

Τώρα, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τα x_o, a και b. Νωρίτερα, δείξαμε ότι

$$x_o = \mu - \frac{2\sigma}{\beta}, \ a = \frac{4}{\beta^2} \text{ και } b = \frac{2}{\sigma\beta}.$$

Άρα, θα είναι

$$x_0 = -\frac{2}{3},\ a = \frac{16}{9} \text{ και } b = \frac{2}{3}.$$

Αν υποθέσουμε ότι το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων είναι το πολύ $s = 0$, τότε θα έχουμε

$$s - x_o = 0 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

και επομένως αν στη συνέχεια θέσουμε $s_o = s - x_o$ θα είναι

$$s_o = \frac{2}{3}.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό πακέτο Mathematica προκύπτει ότι

```
a = 16 / 9; b = 2 / 3; so = 2 / 3;
```

$$\mathtt{G[s_o;\ a;\ b]} = \frac{1}{\mathtt{Gamma[a]}} * \int_0^{s_o} \mathtt{y^{a-1} * b^a * Exp[-b * y]\ dy}$$

$$\frac{-\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^{5/9}}{3\, e^{4/3}} + \mathrm{Gamma}\left[\frac{16}{9}\right] - \frac{7}{9}\,\mathrm{Gamma}\left[\frac{7}{9},\ \frac{4}{9}\right]}{\mathrm{Gamma}\left[\frac{16}{9}\right]}$$

$$\mathtt{N}\left[\frac{-\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^{5/9}}{3\, e^{4/3}} + \mathrm{Gamma}\left[\frac{16}{9}\right] - \frac{7}{9}\,\mathrm{Gamma}\left[\frac{7}{9},\ \frac{4}{9}\right]}{\mathrm{Gamma}\left[\frac{16}{9}\right]}\right]$$

```
0.108815
```

και επομένως η πιθανότητα το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων να είναι το πολύ 0 ν.μ., δηλαδή η πιθανότητα να μη προκύψουν απαιτήσεις από ζημιές που αφορούν το συγκεκριμένο κίνδυνο είναι 0,108815, δηλαδή είναι

$$F_S(0) = G\left(\frac{2}{3}; \frac{16}{9}, \frac{2}{3}\right) = 0{,}108815.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο θα γίνουν οι υπολογισμοί για τις υπόλοιπες τιμές. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

s	$G(s-x_o;a,b)$
0	0,108815
1	0,374240
2	0,599648
3	0,756239
4	0,856126
5	0,916881
6	0,952727
7	0,973434
8	0,985211
9	0,991830
10	0,995515
15	0,999791
20	0,999991
25	1,000000

Πίνακας 4.2: Προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα για διάφορες τιμές του ύψους των συνολικών αποζημιώσεων.

Παρατηρούμε ότι οι αντίστοιχες τιμές που προκύπτουν από την προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα είναι μεγαλύτερες από αυτές που προκύπτουν αν χρησιμοποιήσουμε τη σ.κ των συνολικών αποζημιώσεων. □

4.3 Η προσέγγιση του Edgeworth

Η προσέγγιση του Edgeworth δεν είναι σειρά με την αυστηρή έννοια του όρου. Πιο συγκεκριμένα, είναι ένα ανάπτυγμα που έχει τη μορφή σειράς, αλλά συχνά αποκλίνει. Εντούτοις, αν γίνει σωστή επιλογή του πλήθους των πρώτων όρων που θα χρησιμοποιηθούν, μπορεί να προκύψουν καλές προσεγγίσεις. Σημειώνουμε ότι σε περιπτώσεις όπου η σειρά αποκλίνει, η χρήση επιπλέον όρων δεν σημαίνει απαραίτητα ότι βελτιώνει την προσέγγιση. Εμπειρικά, αποδεικνύεται ότι η προσέγγιση του Edgeworth δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στην περιοχή του μέσου, ωστόσο τα αποτελέσματα που προκύπτουν και αφορούν την ουρά της κατανομής δεν είναι ιδιαιτέρως αξιόπιστα (βλ. Beard *et al.*, 1984).

Ένα μειονέκτημα της προσέγγισης του Edgeworth, είναι ότι για μικρές τιμές του s η σ.κ. $F_S\left[s\right]$ παίρνει αρνητικές τιμές, ενώ για μεγάλες τιμές του s η σ.κ $F_S\left[s\right]$ παίρνει τιμές που ξεπερνούν το 1 (βλ. Λέκου, 2010).

Έστω S οι συνολικές αποζημιώσεις. Τότε θα είναι

$$Z = \frac{S - \mathrm{E}\left(S\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}} \sim N\left(0,1\right),$$

όπου $\mathrm{E}\left[S\right]$ η μέση τιμή και $Var\left[S\right]$ η διασπορά της S .

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η σειρά του Edgeworth προκύπτει από την επεξεργασία της ροπογεννήτριας της τ.μ. Z . Επισημαίνουμε ότι για $S \le s$ έχουμε

$$S \le s \Leftrightarrow S - \mu \le s - \mu \overset{\sigma>0}{\Leftrightarrow} \frac{S-\mu}{\sigma} \le \frac{s-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow Z \le z .$$

Επομένως, ισχύει ότι $\mathrm{P}\left[S \le s\right] = \mathrm{P}\left[Z \le z\right]$, άρα και $F_S\left[s\right] = F_Z\left[z\right]$.

Αν $\mathrm{M}_Z\left(t\right)$ είναι η ροπογεννήτρια της Z στο t τότε χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor προκύπτει ότι

$$\ln \mathrm{M}_Z\left(t\right) = \kappa_1 t + \kappa_2 \frac{t^2}{2!} + \kappa_3 \frac{t^3}{3!} + \kappa_4 \frac{t^4}{4!} + \ldots \qquad (4.1)$$

όπου,

$$\kappa_j = \left.\frac{d^j \ln \mathrm{M}_Z\left(t\right)}{dt^j}\right|_{t=0} .$$

Θυμίζουμε ότι κ_j είναι η j-τάξης ημιαναλλοίωτη της κατανομής Z. Επίσης, στο Κεφάλαιο 3 δείξαμε ότι $\kappa_1 = \mu$, $\kappa_2 = \sigma^2$, $\kappa_3 = \mu_3$, $\kappa_4 = \mu_4 - 3\sigma^4$. Άρα, στην περίπτωση όπου $Z \sim N\left(0,1\right)$ θα ισχύει ότι

$$\kappa_1 = 0,\ \kappa_2 = 1,\ \kappa_3 = \mu_3 \text{ και } \kappa_4 = \mu_4 - 3\cdot 1^4 \Leftrightarrow \mu_4 = \kappa_4 + 3 .$$

Επιπλέον, είναι

$$\beta = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \mu_3 \text{ και } \gamma = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \mu_4 .$$

Όμως, $\mu_4 = \kappa_4 + 3$. Ως εκ τούτου, τελικά θα είναι

$$\gamma = \kappa_4 + 3.$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τους όρους του αναπτύγματος Taylor ως $4^{ου}$ βαθμού, από την σχέση (4.1) προκύπτει ότι

$$\ln \mathrm{M}_Z(t) \approx \kappa_1 t + \kappa_2 \frac{t^2}{2!} + \kappa_3 \frac{t^3}{3!} + \kappa_4 \frac{t^4}{4!} = \frac{t^2}{2!} + \beta \frac{t^3}{3!} + (\gamma - 3)\frac{t^4}{4!}$$

και επομένως θα είναι

$$\mathrm{M}_Z(t) \approx \exp\left[\frac{t^2}{2} + \beta\frac{t^3}{6} + (\gamma-3)\frac{t^4}{24}\right] = e^{\frac{t^2}{2}} e^{\frac{\beta t^3}{6} + \frac{(\gamma-3)t^4}{24}} . \tag{4.2}$$

Όμως, ισχύει ότι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

και επομένως στην περίπτωση όπου

$$x = \frac{\beta t^3}{6} + \frac{(\gamma-3)t^4}{24}$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned}
e^{\beta\frac{t^3}{6} + (\gamma-3)\frac{t^4}{24}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta t^3}{6} + \frac{(\gamma-3)t^4}{24}\right)^n}{n!} \\
&= 1 + \frac{\left(\frac{\beta t^3}{6} + \frac{(\gamma-3)t^4}{24}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{\beta t^3}{6} + \frac{(\gamma-3)t^4}{24}\right)^2}{2!} + \ldots \\
&= 1 + \frac{\beta t^3}{6} + \frac{(\gamma-3)t^4}{24} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\beta t^3}{6}\right)^2 + 2\cdot\frac{\beta t^3}{6}\cdot\frac{(\gamma-3)t^4}{24} + \left(\frac{(\gamma-3)t^4}{24}\right)^2\right] + \ldots \\
&= 1 + \frac{\beta t^3}{6} + \frac{(\gamma-3)t^4}{24} + \frac{\beta^2 t^6}{72} + \frac{\beta(\gamma-3)t^7}{144} + \frac{(\gamma-3)^2 t^8}{1152} + \ldots \\
&\approx 1 + \frac{\beta t^3}{6} + \frac{(\gamma-3)t^4}{24} + \frac{\beta^2 t^6}{72}.
\end{aligned}$$

Τελικά, η σχέση (4.2) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_Z(t) &\approx e^{t^2/2}\left(1+\frac{\beta t^3}{6}+\frac{(\gamma-3)t^4}{24}+\frac{\beta^2 t^6}{72}\right) \\ &\approx e^{t^2/2}+\frac{\beta}{6}e^{t^2/2}t^3+\frac{(\gamma-3)}{24}e^{t^2/2}t^4+\frac{\beta^2}{72}e^{t^2/2}t^6 \ . \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Στην περίπτωση όπου $Z \sim N(0,1)$, γνωρίζουμε ότι η σ.κ. της Z είναι

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}dt$$

και η σ.π.π θα είναι

$$\varphi(z)=\Phi'(z)=\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \text{ όπου } z\in\mathbb{R}.$$

Επιπλέον, η ροπογεννήτρια της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής είναι

$$\mathrm{M}_Z(t)=e^{t^2/2}.$$

Όμως, από τον ορισμό της ροπογεννήτριας γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{M}_Z(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi(z)\ dz$$

και επομένως, συμπεραίνουμε ότι θα ισχύει και

$$e^{t^2/2}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi(z)\ dz .$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε το $\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\varphi'(x)\ dx$ εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Είναι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi'(z)\ dz &= e^{tz}\varphi(z)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{tz}\right)'\varphi(z)\ dz \\ &= \lim_{z\to\infty} e^{tz}\varphi(z)-\lim_{z\to-\infty} e^{tz}\varphi(z)-\int_{-\infty}^{\infty} te^{tz}\varphi(z)\ dz \\ &= -t\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi(z)\ dz \\ &= -te^{t^2/2}. \end{aligned}$$

Ακολούθως, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επαγωγής θα αποδείξουμε ότι $(-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(k)}(z)\,dz = t^k e^{t^2/2}$, όπου $\varphi^{(k)}(z)$ η k-οστή παράγωγος της $\varphi(x)$, για κάθε $k = 1, 2, 3...$

Έστω ότι ισχύει $(-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(k)}(z)\,dz = t^k e^{t^2/2}$, θα δείξουμε ότι ισχύει και $(-1)^{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(k+1)}(z)\,dz = t^{k+1} e^{t^2/2}$. Η απόδειξη θα γίνει εφαρμόζοντας πάλι ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
(-1)^{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(k+1)}(z)\,dz &= (-1)^{k+1}\left[e^{tz}\left(\varphi^{(k)}(z)\right)'\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{tz}\right)' \varphi^{(k)}(z)\,dz \right] \\
&= (-1)^{k+1}\left[\lim_{z\to\infty} e^{tz}\left(\varphi^{(k)}(z)\right)' - \lim_{z\to-\infty} e^{tz}\left(\varphi^{(k)}(z)\right)' - \int_{-\infty}^{\infty} t e^{tz}\varphi^{(k)}(z)\,dz \right] \\
&= (-1)^{k+2}\, t \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(k)}(z)\,dz \\
&= t(-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(k)}(z)\,dz \\
&= t^{k+1} e^{t^2/2}.
\end{aligned}
$$

Επομένως, για κάθε $k = 1, 2, 3...$ ισχύει ότι

$$(-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(k)}(z)\,dz = t^k e^{t^2/2} \quad . \tag{4.4}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει και για $k = 0$, αν βέβαια θεωρήσουμε ότι $\varphi^{(0)}(z) = \varphi(z)$.

Από τη σχέση (4.4) για $k = 0, 3, 4, 6$ προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi(z)\,dz = e^{t^2/2},$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(3)}(z)\,dz = t^3 e^{t^2/2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(4)}(z)\,dz = t^4 e^{t^2/2}$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(6)}(z)\,dz = t^6 e^{t^2/2}.$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις παραπάνω ισότητες στη σχέση (4.3) προκύπτει ότι

$$\mathrm{M}_Z(t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\varphi(z)\,dz - \frac{\beta}{6}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(3)}(z)\,dz + \frac{(\gamma-3)}{24}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(4)}(z)\,dz + \frac{\beta^2}{72}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\varphi^{(6)}(z)\,dz$$

και επομένως, θα είναι

$$f_Z(z) \approx \varphi(z) - \frac{\beta}{6}\varphi^{(3)}(z) + \frac{(\gamma-3)}{24}\varphi^{(4)}(z) + \frac{\beta^2}{72}\varphi^{(6)}(z)$$

και

$$F_Z(z) \approx \Phi(z) - \frac{\beta}{6}\Phi^{(3)}(z) + \frac{(\gamma-3)}{24}\Phi^{(4)}(z) + \frac{\beta^2}{72}\Phi^{(6)}(z),$$

όπου $\Phi^{(3)}(z)$, $\Phi^{(4)}(z)$ και $\Phi^{(6)}(z)$ η 3η, 4η και 6η παράγωγος της σ.κ. της τ.μ. Z (βλ. Κουτσόπουλος, 1999).

Τέλος, επειδή $\beta = \kappa_3$ και $\gamma - 3 = \kappa_4$, θα είναι

$$F_Z(z) \approx \Phi(z) - \frac{\kappa_3}{6}\Phi^{(3)}(z) + \frac{\kappa_4}{24}\Phi^{(4)}(z) + \frac{\kappa_3^{\,2}}{72}\Phi^{(6)}(z)$$

και επομένως θα είναι

$$F_S(s) \approx \Phi(z) - \frac{\kappa_3}{6}\Phi^{(3)}(z) + \frac{\kappa_4}{24}\Phi^{(4)}(z) + \frac{\kappa_3^{\,2}}{72}\Phi^{(6)}(z)\ , \tag{4.5}$$

όπου $\Phi^{(3)}(z)$, $\Phi^{(4)}(z)$ και $\Phi^{(6)}(z)$ η 3η, 4η και 6η παράγωγος της σ.κ. της τ.μ. Z, αφού όπως αναφέραμε και νωρίτερα $F_S(s) = F_Z(z)$. Η ισότητα (4.5) ονομάζεται προσέγγιση του Edgeworth (βλ. Schmidli, 2006).

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τις παραπάνω παραγώγους.

$$\Phi^{(2)}(z) = (\Phi'(z))' = \left(\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)' = -z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} = -z\Phi'(z)\ , \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{(3)}(z) &= (-z\Phi'(z))' = (-z)'\,\Phi'(z) + (-z)\Phi''(z)\\ &= -\Phi'(z) - z(-z\Phi'(z)) = (z^2-1)\Phi'(z)\ ,\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\Phi^{(4)}(z) = \left(\Phi^{(3)}(z)\right)' = \left((z^2-1)\Phi'(z)\right)'$$

$$= 2z\Phi'(z) + (z^2 - 1)(-z)\Phi'(z)$$
$$= (-z^3 + 3z)\Phi'(z) \ , \qquad (4.8)$$

$$\Phi^{(5)}(z) = \left(\Phi^{(4)}(z)\right)' = \left[(-z^3 + 3z)\Phi'(z)\right]'$$
$$= (-3z^2 + 3)\Phi'(z) + (-z^3 + 3z)(-z\Phi'(z))$$
$$= (z^4 - 6z^2 + 3)\Phi'(z) \ , \qquad (4.9)$$

$$\Phi^{(6)}(z) = \left(\Phi^{(5)}(z)\right)' = \left[(z^4 - 6z^2 + 3)\Phi'(z)\right]'$$
$$= (4z^3 - 12z)\Phi'(z) + (z^4 - 6z^2 + 3)(-z\Phi'(z))$$
$$= (-z^5 + 10z^3 - 15z)\Phi'(z) \ . \qquad (4.10)$$

Από τις σχέσεις (4.6) έως και (4.10) συμπεραίνουμε ότι οι παράγωγοι της $\Phi(z)$ είναι πολυώνυμα πολλαπλασιασμένα με την 1^{η} παράγωγο της $\Phi(z)$.

Είναι απαραίτητο να θυμίσουμε ότι η χρήση επιπλέον όρων στο ανάπτυγμα του Edgeworth, δεν βελτιώνει πάντα το αποτέλεσμα. Ως εκ τούτου, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τους 2 ή μόνο τους 3 πρώτους όρους της προσέγγισης του Edgeworth. Επιπροσθέτως, αναφέρουμε ότι η χρήση όρων που περιλαμβάνουν ροπές τάξης 3 ή μεγαλύτερη, είναι δύσκολο να εκτιμηθούν σε περίπτωση όπου το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό, και φυσικά αυτό ενισχύει την άποψη ότι η χρήση επιπλέον όρων δεν βελτιώνει πάντα το αποτέλεσμα (βλ. Λέκου, 2010). Επομένως, στην περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε μόνο 2 ή 3 όρους προκύπτουν οι παρακάτω προσεγγίσεις αντιστοίχως.

$$F_Z(z) \approx \Phi(z) - \frac{\kappa_3}{6}\Phi^{(3)}(z) \qquad (4.11)$$

$$F_Z(z) \approx \Phi(z) - \frac{\kappa_3}{6}\Phi^{(3)}(z) + \frac{\kappa_4}{24}\Phi^{(4)}(z) \qquad (4.12)$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η αύξηση του μεγέθους του δείγματος μειώνει σημαντικά το σφάλμα. Επίσης, η χρήση των 2 πρώτων όρων μας δίνει ικανοποιητικό αποτέλεσμα ακόμα και για μικρό μέγεθος δείγματος. Τέλος, είναι εύκολο κανείς να διαπιστώσει ότι στην περίπτωση που χρησιμοποιηθεί μόνο ο πρώτος όρος της προσέγγισης του Edgeworth προκύπτει η Κανονική κατανομή.

Παράδειγμα 4.3.1

Να βρεθεί η προσέγγιση του Edgeworth στην περίπτωση όπου η S ακολουθεί σύνθετη κατανομή Poisson.

Λύση

Θυμίζουμε ότι στην περίπτωση όπου η S ακολουθεί τη σύνθετη κατανομή Poisson ισχύει ότι $\mathrm{E}(S)=\lambda\rho_1$, $Var(S)=\lambda\rho_2$, $\kappa_3=\lambda\rho_3$ και $\kappa_4=\lambda\rho_4$ (βλ. Παράδειγμα 3.2.11). Συνεπώς, θα είναι $Z=\dfrac{S-\lambda\rho_1}{\sqrt{\lambda\rho_2}}$ και $z=\dfrac{s-\lambda\rho_1}{\sqrt{\lambda\rho_2}}$. Επομένως, από τη σχέση (4.5) προκύπτει ότι

$$F_S[s]=F_Z[z]\approx\Phi\left(\frac{s-\lambda\rho_1}{\sqrt{\lambda\rho_2}}\right)-\frac{\lambda\rho_3}{6}\Phi^{(3)}\left(\frac{s-\lambda\rho_1}{\sqrt{\lambda\rho_2}}\right)+\frac{\lambda\rho_4}{24}\Phi^{(4)}\left(\frac{s-\lambda\rho_1}{\sqrt{\lambda\rho_2}}\right)$$
$$+\frac{(\lambda\rho_3)^2}{72}\Phi^{(6)}\left(\frac{s-\lambda\rho_1}{\sqrt{\lambda\rho_2}}\right) \qquad (4.13)\ .$$

Η σχέση (4.13) είναι η προσέγγιση του Edgeworth με 4 όρους. □

Παράδειγμα 4.3.2

Για τη σ.π.π. των συνολικών αποζημιώσεων S του Παραδείγματος 4.2.1, να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση του Edgeworth, προκειμένου να υπολογιστεί η πιθανότητα το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων να είναι το πολύ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20 ή 25 ν.μ. (Οι υπολογισμοί να γίνουν χρησιμοποιώντας και τις 3 προσεγγίσεις που αναφέρθηκαν προηγουμένως.)

Λύση

Στο Παράδειγμα 4.2.2, υπολογίσαμε τις τρεις πρώτες ροπές της κατανομής X, οι οποίες θυμίζουμε ότι είναι $\rho_1=1$, $\rho_2=2$ και $\rho_3=6$, ενώ η 4η ροπή θα είναι ίση με $\rho_4=4!=24$. Επίσης, θυμίζουμε ότι η παράμετρος της κατανομής Poisson είναι $\lambda=2$.

Στην περίπτωση όπου $s = 0$ θα είναι

$$z = \frac{s-\lambda\rho_1}{\sqrt{\lambda\rho_2}} = \frac{0-2\cdot 1}{\sqrt{2\cdot 2}} = -1 .$$

Άρα, θα είναι $F_S(0) = F_Z(-1)$ και επομένως μας αρκεί να υπολογίσουμε το $F_Z(-1)$.

Χρησιμοποιώντας τους 2 πρώτους όρους της σχέσης (4.13) θα έχουμε

$$F_Z(-1) \approx \Phi(-1) - \frac{2\cdot \cancel{6}}{\cancel{6}}\Phi^{(3)}(-1) = \Phi(-1) - 2\Phi^{(3)}(-1). \qquad (4.14)$$

Αρκεί τώρα, να υπολογίσουμε την 1η και την 3η παράγωγο της $\Phi(z)$ για $z=-1$. Είναι

$$\Phi'(-1) = \frac{e^{-(-1)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{0,60653}{2,50663} = 0,241971$$

και

$$\Phi^{(3)}(-1) = \left((-1)^2 - 1\right)\Phi'(-1) = 0 .$$

Επιπλέον, από τον πίνακα τιμών της Κανονικής κατανομής βρίσκουμε ότι $\Phi(1) = 0,841345$. Άρα, θα είναι $\Phi(-1) = 1-\Phi(1) = 1-0,841345 = 0,158655$.

Επομένως, από τη σχέση (4.14) έχουμε

$$F_Z(-1) \approx \Phi(-1) - 2\Phi^{(3)}(-1) = \Phi(-1) = 0,158655 .$$

Άρα, στην περίπτωση που επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε τους 2 πρώτους όρους της προσέγγισης του Edgeworth θα είναι $F_S(0) \approx 0,158655$.

Στη συνέχεια, θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία, χρησιμοποιώντας τους 3 πρώτους όρους της σχέσης (4.13) θα έχουμε

$$F_Z(-1) \approx \Phi(-1) - \frac{2\cdot \cancel{6}}{\cancel{6}}\Phi^{(3)}(-1) + \frac{2\cdot \cancel{24}}{\cancel{24}}\Phi^{(4)}(-1)$$

$$= \Phi(-1) - 2\Phi^{(3)}(-1) + 2\Phi^{(4)}(-1) . \qquad (4.15)$$

Αρκεί τώρα, να υπολογίσουμε την 4^{η} παράγωγο της $\Phi(z)$ στο $z=-1$. Είναι

$$\Phi^{(4)}(-1)=\left(-(-1)^{3}+3\cdot(-1)\right)\Phi'(-1)=-2\cdot\Phi'(-1).$$

Άρα, από την σχέση (4.15) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}F_Z(-1)&\approx\Phi(-1)-2\Phi^{(3)}(-1)+2\Phi^{(4)}(-1)\\&=\Phi(-1)-2\cdot0+2\cdot(-2)\Phi'(-1)\\&=\Phi(-1)-4\Phi'(-1)\\&=0{,}158655-4\cdot0{,}241971\\&=-0{,}809229.\end{aligned}$$

Επομένως, στην περίπτωση χρήσης των 3 πρώτων όρων της προσέγγισης θα έχουμε $F_S(0)\approx-0{,}809229$.

Τέλος, χρησιμοποιώντας και τους 4 πρώτους όρους της σχέσης (4.13) θα έχουμε

$$\begin{aligned}F_Z(-1)&\approx\Phi(-1)-\frac{2\cdot\cancel{6}}{\cancel{6}}\Phi^{(3)}(-1)+\frac{2\cdot\cancel{24}}{\cancel{24}}\Phi^{(4)}(-1)+\frac{(2\cdot6)^{2}}{72}\Phi^{(6)}(-1)\\&=\Phi(-1)-2\Phi^{(3)}(-1)+2\Phi^{(4)}(-1)+2\Phi^{(6)}(-1)\;.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Αρκεί τώρα, να υπολογίσουμε την 6^{η} παράγωγο της $\Phi(z)$ στο $z=-1$. Είναι

$$\Phi^{(6)}(-1)=\left(-(-1)^{5}+10\cdot(-1)^{3}-15\cdot(-1)\right)\Phi'(-1)=6\cdot\Phi'(-1).$$

Άρα, από την σχέση (4.16) έχουμε

$$\begin{aligned}F_Z(-1)&\approx\Phi(-1)-2\Phi^{(3)}(-1)+2\Phi^{(4)}(-1)+2\Phi^{(6)}(-1)\\&=\Phi(-1)-2\cdot0+2\cdot(-2)\Phi'(-1)+2\cdot6\cdot\Phi'(-1)\\&=\Phi(-1)+8\cdot\Phi'(-1)\\&=0{,}158655+8\cdot0{,}241971\\&=2{,}094423.\end{aligned}$$

Άρα, σε αυτή τη περίπτωση είναι $F_S(0) \approx 2,094423$.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα και των τριών προσεγγίσεων συμπεραίνουμε ότι το αποτέλεσμα της πρώτης προσέγγισης είναι ικανοποιητικό, ωστόσο δεν μπορούμε να πούμε το ίδιο και για τις άλλες δύο προσεγγίσεις καθώς το αποτέλεσμα που προκύπτει, όχι μόνο δεν είναι κοντά στην τιμή που μας δίνει η σ.κ. των συνολικών αποζημιώσεων S, αλλά είναι και εκτός του διαστήματος $[0,1]$.

Κατά τον ίδιο τρόπο που έγιναν οι υπολογισμοί για $s=0$ μπορούν να πραγματοποιηθούν οι υπολογισμοί και για τις υπόλοιπες τιμές. Στον παρακάτω συνοπτικό πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των παραπάνω υπολογισμών, χρησιμοποιώντας 2 ή 3 ή 4 όρους της προσέγγισης.

	Προσέγγιση του Edgeworth		
s	με χρήση 2 όρων	με χρήση 3 όρων	με χρήση 4 όρων
0	0,158655	-0,809229	2,094423
1	0,836636	-0,131544	4,291276
2	1,298086	1,298086	1,298086
3	1,219560	2,187740	-2,235080
4	0,841345	1,809227	-1,094413
5	0,609399	0,900813	1,847911
6	0,653304	0,437340	2,381014
7	0,809742	0,524908	1,264384
8	0,927740	0,768194	0,608648
9	0,980131	0,923625	0,663621
10	0,995954	0,982036	0,863194
15	1,000000	1,000000	0,999996
20	1,000000	1,000000	1,000000
25	1,000000	1,000000	1,000000

Πίνακας 4.3: Προσέγγιση του Edgeworth για διάφορες τιμές του ύψους των συνολικών αποζημιώσεων.

Από τον παραπάνω πίνακα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι στην περίπτωση που γίνει χρήση των προσεγγίσεων που έχουν 3 ή 4 όρους, υπάρχουν τιμές για τις οποίες η προσέγγιση παίρνει τιμές εκτός του διαστήματος $[0,1]$. Επιπροσθέτως, παρατηρούμε ότι η χρήση επιπλέον όρων δεν βελτιώνει το αποτέλεσμα, καθώς υπάρχουν περιπτώσεις όπου η χρήση επιπλέον όρων μας οδηγεί σε μεγαλύτερο σφάλμα. Στο συμπέρασμα αυτό μπορούμε να καταλήξουμε πολύ εύκολα αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα με αυτά του Πίνακα 4.1. □

4.4 Η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής

Η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής (Normal Power approximation) είναι παρόμοια με την προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα, βέβαια, όπως θα δούμε παρακάτω, αυτή η προσέγγιση είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από αυτή της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα. Επιπλέον, η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής αποτελεί μία μέθοδο για τη βελτίωση της προσέγγισης του Edgeworth.

Θυμίζουμε ότι στην περίπτωση που συμβολίσουμε με S την κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων, είναι $\mathrm{E}(S)=\mu$ η μέση τιμή, $Var(S)=\sigma^2$ η διασπορά και β η σκέδαση. Επιπροσθέτως, θυμίζουμε ότι αν $Z=\dfrac{S-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ τότε θα είναι και $\mathrm{P}[S\le s]=\mathrm{P}[Z\le z]$.

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι για $s\ge 1$ είναι

$$P\left[\frac{S-\mu}{\sigma}\le s+\frac{\beta}{6}\left(s^2-1\right)\right]\approx\Phi(s)$$

(βλ. Dhaene και Vyncke, 2004).

Αν στη συνέχεια θέσουμε $z=s+\frac{\beta}{6}\left(s^2-1\right)$ θα είναι

$$z=s+\frac{\beta}{6}\left(s^2-1\right)$$

$$\Leftrightarrow s^2+\frac{6}{\beta}s=\frac{6}{\beta}z+1$$

$$\Leftrightarrow s^2+2\left(\frac{3}{\beta}\right)s+\left(\frac{3}{\beta}\right)^2=\frac{6}{\beta}z+1+\left(\frac{3}{\beta}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(s+\frac{3}{\beta} \right)^2 = \frac{9}{\beta^2}+\frac{6}{\beta}z+1$$

$$\Leftrightarrow s+\frac{3}{\beta} = \pm\sqrt{\frac{9}{\beta^2}+\frac{6}{\beta}z+1}\ . \qquad (4.17)$$

Δεδομένου ότι $s \geq 1$ και $\beta \geq 1$, θα είναι και $s+\frac{3}{\beta}>0$. Επομένως, από τη σχέση (4.17) θα έχουμε

$$s=\sqrt{\frac{9}{\beta^2}+\frac{6}{\beta}z+1}-\frac{3}{\beta}.$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι

$$\mathrm{P}\left[\frac{S-\mu}{\sigma}\leq z\right]\approx\Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2}+\frac{6z}{\beta}+1}-\frac{3}{\beta}\right] \qquad (4.18)$$

και επειδή

$$Z=\frac{S-\mu}{\sigma}\sim N(0,1) \text{ και } z=\frac{s-\mu}{\sigma},$$

θα είναι

$$\mathrm{P}[Z\leq z]\approx\Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2}+\frac{6z}{\beta}+1}-\frac{3}{\beta}\right],$$

δηλαδή,

$$F_Z(z)\approx\Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2}+\frac{6z}{\beta}+1}-\frac{3}{\beta}\right].$$

Επομένως, τελικά θα είναι

$$F_S(s)=\Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2}+\frac{6(s-\mu)}{\beta\sigma}+1}-\frac{3}{\beta}\right], \qquad (4.19)$$

αφού, όπως αναφέραμε και νωρίτερα ισχύει ότι $F_S(s)=F_Z(z)$.

Τέλος, επειδή $s\geq 1$ και $1+\frac{3}{\beta}>0$ αποδεικνύεται ότι θα είναι και $z\geq 1$ (βλ. Dhaene και Vyncke, 2004).

Παρατήρηση 4.4.1

Στην περίπτωση όπου $s<1$, άρα και $z<1$, ο όρος $\frac{\beta}{6}\left(s^2-1\right)$ ο οποίος ονομάζεται παράγοντας διόρθωσης, γίνεται αρνητικός. $\triangledown$

Παράδειγμα 4.4.2

Να υπολογιστεί η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής στην περίπτωση όπου η S ακολουθεί σύνθετη κατανομή Poisson.

Λύση

Θυμίζουμε ότι στην περίπτωση όπου η S ακολουθεί σύνθετη κατανομή Poisson, ισχύει ότι

$$\mathrm{E}\left[S\right]=\lambda\rho_1,$$

$$Var\left[S\right]=\lambda\rho_2=\sigma^2$$

και

$$\mathrm{E}\left[\left(S-\mathrm{E}\left[S\right]\right)^3\right]=\lambda\rho_3,$$

όπου ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι τρεις πρώτες ροπές της X. Επιπλέον, στην περίπτωση της σύνθετης κατανομής Poisson η σκέδαση θα είναι

$$\beta=\frac{\kappa_3}{\sigma^3}=\frac{\mathrm{E}\left[\left(S-\mathrm{E}\left[S\right]\right)^3\right]}{\left(\sqrt{Var\left[X\right]}\right)^3}\frac{\rho_3}{\sqrt{\lambda}\rho_2^{3/2}}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (4.19) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}F_S\left(s\right)&\approx\Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\left(\frac{\rho_3}{\sqrt{\lambda}\rho_2^{3/2}}\right)^2}+\frac{6\left(s-\lambda\rho_1\right)}{\frac{\rho_3}{\sqrt{\lambda}\rho_2^{3/2}}\sqrt{\lambda\rho_2}}+1}-\frac{3}{\frac{\rho_3}{\sqrt{\lambda}\rho_2^{3/2}}}\right]\\&=\Phi\left[\sqrt{\frac{9\lambda\rho_2^3}{\rho_3^2}+\frac{6\left(s-\lambda\rho_1\right)\rho_2}{\rho_3}+1}-\frac{3\sqrt{\lambda}\rho_2^{3/2}}{\rho_3}\right].\end{aligned}\qquad(4.20)$$

Επομένως, στην περίπτωση όπου η συνάρτηση κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων ακολουθεί τη σύνθετη κατανομή Poisson, η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής δίνεται από τον τύπο (4.20). □

Παράδειγμα 4.4.3

Για τη σ.π.π. των συνολικών αποζημιώσεων S που ορίστηκε στο Παράδειγμα 4.2.1, να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής προκειμένου να υπολογιστεί η πιθανότητα το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων να είναι το πολύ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20 ή 25 ν.μ.

Λύση

Στο Παράδειγμα 4.2.1 η σ.π.π. των συνολικών αποζημιώσεων S ακολουθεί σύνθετη κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 2$. Επομένως, για τους υπολογισμούς μας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (4.20). Ακόμα, από το ίδιο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι $X \sim \mathrm{Exp}(1)$ και επομένως θα είναι $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = 6$, $\rho_4 = 24$ (βλ. Παράδειγμα 4.2.2).

Άρα, για $s = 0$ από τη σχέση (4.20) έχουμε

$$F_S(0) \approx \Phi\left[\sqrt{\frac{9\cdot 2\cdot 2^3}{6^2} + \frac{\cancel{6}(0-2\cdot 1)2}{\cancel{6}} + 1} - \frac{3\sqrt{2}\cdot 2^{3/2}}{6}\right] = \Phi(-1) .$$

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα το $\Phi(-1) = 0{,}158655$ (βλ. Παράδειγμα 4.3.2). Επομένως, θα είναι

$$F_S(0) \approx 0{,}158655 .$$

Ομοίως, πραγματοποιούμε τους απαιτούμενους υπολογισμούς και για τις υπόλοιπες τιμές του s. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

s	$F_S(s)$
0	0,158655
1	0,394369
2	0,593310
3	0,740780
4	0,841345
5	0,906018
6	0,945814
7	0,969465
8	0,983127
9	0,990835
10	0,995097
15	0,999820
20	0,999995
25	1,000000

Πίνακας 4.4: Προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής για διάφορες τιμές του ύψους των συνολικών αποζημιώσεων.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα με αυτά του Πίνακα 4.1, συμπεραίνουμε ότι η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής μας δίνει τιμές που είναι πολύ κοντά σε αυτές που μας δίνει η σ.κ. της S. Για παράδειγμα, κάνοντας χρήση της σ.κ. των συνολικών αποζημιώσεων, συμπεραίνουμε ότι οι συνολικές αποζημιώσεις είναι το πολύ 10 ν.μ. με πιθανότητα 0,995835, ενώ χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η αντίστοιχη πιθανότητα είναι 0,995097. □

Παράδειγμα 4.4.4

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τα παραδείγματα 4.2.1. 4.2.2, 4.3.2 και 4.4.3, τι συμπεράσματα προκύπτουν για τις τρεις προσεγγίσεις;

Λύση

Προκειμένου να διαπιστώσουμε τις διαφορές που προκύπτουν κάνοντας χρήση των τριών προσεγγίσεων που αναφέραμε νωρίτερα, θα συγκεντρώσουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν ανά περίπτωση σε ένα συγκεντρωτικό πίνακα.

ύψος συνολικών αποζημιώσεων	*συνάρτηση κατανομής*	*προσέγγιση μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα*	*προσέγγιση Edgeworth (με χρήση 2 όρων)*	*προσέγγιση Κανονικής Δυναμοκατανομής*
0	0,135335	0,108815	0,158655	0,158655
1	0,394297	0,374240	0,836636	0,394369
2	0,603501	0,599648	1,298086	0,593310
3	0,753011	0,756239	1,219560	0,740780
4	0,851936	0,856126	0,841345	0,841345
5	0,913934	0,916881	0,609399	0,906018
6	0,951231	0,952727	0,653304	0,945814
7	0,972954	0,973434	0,809742	0,969465
8	0,985276	0,985211	0,927740	0,983127
9	0,992113	0,991830	0,980131	0,990835
10	0,995835	0,995515	0,995954	0,995097
15	0,999855	0,999791	1,000000	0,999820
20	0,999996	0,999991	1,000000	0,999995
25	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

Πίνακας 4.5: Σύνοψη των αποτελεσμάτων που προκύπτουν
από τις τρεις προσεγγίσεις.

Από τον παραπάνω πίνακα είναι εύκολο κανείς να διαπιστώσει ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την προσέγγιση του Edgeworth παρουσιάζουν μεγάλη απόκλιση στην περίπτωση όπου το ύψος των αποζημιώσεων είναι μικρό. Όσον αφορά την προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα και την προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής, παρατηρούμε ότι μας δίνουν αποτελέσματα τα οποία είναι πολύ κοντά στο αποτέλεσμα που παίρνουμε από τη σ.κ. που εκφράζει τις συνολικές αποζημιώσεις. Παρόλα αυτά είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι οι τιμές που προκύπτουν χρησιμοποιώντας την Κανονική Δυναμοκατανομή παρουσιάζουν μικρότερη απόκλιση από αυτές της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα σε σχέση με το αποτέλεσμα που προκύπτει από τη σ.κ. των συνολικών αποζημιώσεων. Επίσης, η Κανονική Δυναμοκατανομή μας δίνει πολύ καλές προσεγγίσεις, ακόμα και στην περίπτωση όπου το ύψος των αποζημιώσεων είναι μικρό. Αντιθέτως, η μετατοπισμένη κατανομή Γάμμα δε μας δίνει καλές προσεγγίσεις σε αντίστοιχες περιπτώσεις. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι στην περίπτωση όπου οι συνολικές αποζημιώσεις είναι 1 ν.μ. η προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα παρουσιάζει απόκλιση από την πραγματική τιμή ύψους $\frac{0,374240-0,394297}{0,394297}=-5,0868\%$, σε αντίθεση η Κανονική Δυναμοκατανομή παρουσιάζει απόκλιση σε σχέση με την πραγματική τιμή μόνο $\frac{0,394369-0,394297}{0,394297}=0,0183\%$. □

Παράδειγμα 4.4.5

Έστω ότι οι συνολικές αποζημιώσεις ακολουθούν σύνθετη κατανομή Poisson με $\lambda=1$ και $X\sim e^{-x}$. Να βρεθεί το ασφάλιστρο Π για το οποίο οι συνολικές αποζημιώσεις της S είναι μεγαλύτερες από Π με πιθανότητα το πολύ 5%.

Λύση

Αν $X\sim be^{-bx}$ τότε $\rho_k=\mathrm{E}\left[X^k\right]=\frac{k!}{b^k}$, $k=1,2...$ Άρα, για $b=1$ προκύπτει ότι $\rho_k=k!$ για κάθε $k=1,2,\ldots$, και επομένως θα είναι

$$\rho_1=1,\ \rho_2=2 \text{ και } \rho_3=6.$$

Άρα, από τη σχέση (4.20) έχουμε

$$\begin{aligned} F_S(s) &\approx \Phi\left[\sqrt{\frac{9\cdot1\cdot2^3}{6^2}+\frac{6\cdot(s-1\cdot1)\cdot2}{6}}+\frac{3\sqrt{1}\cdot2^{3/2}}{6}\right] \\ &=\Phi\left[\sqrt{2s+1}-\sqrt{2}\right]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Για $s=\Pi$ θα είναι

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left[S>\Pi\right]\le0,05 \\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{P}\left[S\le\Pi\right]\ge0,95 \\ \Leftrightarrow\ &F_S(\Pi)\ge0,95 \\ \overset{(4.21)}{\Leftrightarrow}\ &\Phi\left[\sqrt{2\Pi+1}-\sqrt{2}\right]\ge0,95. \end{aligned}$$

Επιπλέον, από τον πίνακα τιμών της Κανονικής κατανομής είναι $\Phi(1,65)=0,9505$. Συνεπώς, θα είναι

$$\sqrt{2\Pi+1}-\sqrt{2}=1,65$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2\Pi+1}\right)^2 = \left(1,65+\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \Pi = 4{,}19470\,.$$

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο ασφάλιστρο είναι 4,19470 ν.μ. ☐

Παράδειγμα 4.4.6

Έστω ότι οι συνολικές αποζημιώσεις ακολουθούν σύνθετη κατανομή Poisson με $\lambda = 1$ και $X \sim \text{Γάμμα}(2,1)$. Να βρεθεί το ασφάλιστρο Π για το οποίο οι συνολικές αποζημιώσεις S είναι μεγαλύτερες από Π με πιθανότητα το πολύ 5%.

Λύση

Δεδομένου ότι $X \sim \text{Γάμμα}(2,1)$ θα είναι $f_X(x) = xe^{-x}$. Επιπροσθέτως, γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση της κατανομής Γάμμα, οι k-τάξεις ροπές περί την αρχή υπολογίζονται από τη σχέση

$$\rho_k = \mathrm{E}\left[X^k\right] = \frac{a(a+1)...(a+k-1)}{b^k}$$

για κάθε $k = 1, 2...$, όπου a, b η 1^{η} και η 2^{η} παράμετρος της κατανομής Γάμμα. Ως εκ τούτου, για $a = 2$ και $b = 1$ θα ισχύει ότι

$$\rho_k = \mathrm{E}\left[X^k\right] = \frac{2...(2+k-1)}{1^k} = 2...(2+k-1)$$

και επομένως είναι

$$\rho_1 = \mathrm{E}[X] = 2\,,$$

$$\rho_2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] = 2\cdot 3 = 6$$

και

$$\rho_3 = \mathrm{E}\left[X^3\right] = 2\cdot 3\cdot 4 = 24\,.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (4.20) θα έχουμε

$$F_S(s) \approx \Phi\left[\sqrt{\frac{9\cdot 1\cdot 6^3}{24^2} + \frac{6\cdot(s-1\cdot 2)\cdot 6}{24} + +1} - \frac{3\sqrt{1}\cdot 6^{3/2}}{24}\right]$$

$$= \Phi\left[\sqrt{1{,}375+1{,}5s} - 0{,}75\sqrt{6}\right]\,. \qquad (4.22)$$

Για $s = \Pi$ θα είναι

$$\mathrm{P}[S > \Pi] \leq 0,05 \Leftrightarrow \mathrm{P}[S \leq \Pi] \geq 0,95 \Leftrightarrow F_S(\Pi) \geq 0,95$$

και επιπλέον από τον πίνακα τιμών της Κανονικής κατανομής είναι $\Phi(1,65) = 0,9505$. Ως εκ τούτου, από τη σχέση (4.22) θα είναι

$$\sqrt{1,375 + 1,5\Pi} - 0,75\sqrt{6} = 1,65$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1,375 + 1,5\Pi}\right)^2 = \left(1,65 + 0,75\sqrt{6}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \Pi = 7,18999$$

και επομένως το ζητούμενο ασφάλιστρο είναι $7,18999$ ν.μ. □

Παράδειγμα 4.4.7

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής, να βρεθεί το ασφάλιστρο Π για το οποίο οι συνολικές αποζημιώσεις S είναι μεγαλύτερες από Π με πιθανότητα το πολύ 5%.

α) $S \sim \mathrm{Exp}(1)$,

β) $S \sim \text{Γάμμα}(2,2)$,

γ) $S \sim \mathrm{Pareto}(1,4)$ τύπου Lomax,

δ) $S : f_s(1) = f_s(2) = f_s(3) = 1/3$,

ε) $S : f_s(1) = f_s(2) = f_s(5) = 1/3$,

Λύση

Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος θα γίνει με τη βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου Mathematica. Οι φόρμες υπολογισμού που χρησιμοποιήθηκαν παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα.

Στο παρακάτω πίνακα παραθέτουμε τα αποτελέσματα των υπολογισμών που πραγματοποιήθηκαν. Διευκρινίζουμε ότι με ρ_1, ρ_2 και ρ_3 έχουμε συμβολίσει την 1η, 2η και 3η ροπή, ενώ με μ_3 έχουμε συμβολίσει την 3η κεντρική ροπή. Επίσης, με σ και β έχουμε συμβολίσει την τυπική απόκλιση και τη σκέδαση αντιστοίχως. Τέλος, με Π έχουμε συμβολίσει το ασφάλιστρο.

σ.π.π.	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ	μ_3	β	Π
$f_s(s)=e^{-x}$	1	2	6	1	2	2	1,91832
$f_s(s)=4xe^{-2x}$	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	1,65601
$f_s(s)=4/(1+x)^5$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{20}{27}$	$5\sqrt{2}$	0,727765
$f_s(s)=1/3,\ s=1,2,3$	2	$\frac{14}{3}$	12	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	0	0	δε μπορεί να υπολογιστεί με αυτή τη μέθοδο
$f_s(s)=1/3,\ s=1,2,5$	$\frac{8}{3}$	10	$\frac{134}{3}$	$\frac{\sqrt{26}}{3}$	$\frac{70}{27}$	$\frac{35\sqrt{26}}{328}$	4,26776

Πίνακας 4.6: Αποτελέσματα υπολογισμών για κάθε μία
από τις περιπτώσεις του παραδείγματος.

Αναφέρουμε ότι στην περίπτωση δ) δεν είναι εφικτός ο υπολογισμός του ασφαλίστρου χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής, διότι είναι αδύνατο να αντικαταστήσουμε την τιμή της σκέδασης στον παρανομαστή.

□

4.5 Η ακρίβεια των προσεγγίσεων

Η Κανονική κατανομή είναι συμμετρική και ως αποτέλεσμα δεν είναι ικανή να προσεγγίσει κατανομές με σκέδαση. Αυτό σημαίνει ότι δε μπορεί να προσεγγίσει μη συμμετρικές κατανομές. Σαφώς, το ανάπτυγμα του Edgeworth είναι καλύτερο, ωστόσο δεν είναι τόσο αποτελεσματικό όσο η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής, η οποία ακόμα και για μικρό αριθμό ζημιών, π.χ. 25 ζημιές, μας δίνει μία ικανοποιητική προσέγγιση σε όλο το πεδίο ορισμού.

Όσον αφορά, τις εφαρμογές τις οποίες μας ενδιαφέρουν, δηλαδή τη μελέτη χαρτοφυλακίων ασφαλιστικών εταιριών, τόσο η προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα όσο και της Κανονικής Δυναμοκατανομής, μας δίνουν περίπου τις ίδιες τιμές. Οι τιμές μεταξύ των δύο προσεγγίσεων αρχίζουν να αποκλίνουν στην περίπτωση όπου η σκέδαση πλησιάζει την τιμή 2. Βέβαια, στην περίπτωση αυτή και οι δύο προσεγγίσεις μας δίνουν αναξιόπιστα αποτελέσματα. Επιπλέον, όσον αφορά την κατανομή Γάμμα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι δεν ορίζεται για τιμές που είναι μικρότερες του $-2/\beta$ (ή τις ορίζουμε να είναι 0). Η χρήση των δύο παραπάνω προσεγγίσεων μας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι και οι δύο έχουν την ίδια ικανοποιητική προσαρμογή. Ως εκ τούτου, η επιλογή μεταξύ των δύο κατανομών εξαρτάται αποκλειστικά από το χρήστη της κάθε εφαρμογής.

Είναι σαφές ότι η επιλογή της κατανομής εξαρτάται από το πλήθος των ζημιών n. Στην πράξη, το μέγεθος του χαρτοφυλακίου των ασφαλιστικών εταιριών κάνει την παράμετρο της σκέδασης μικρή, δεδομένου ότι ο αριθμός των ζημιών n επηρεάζει την τυπική απόκλιση, η οποία μπαίνει στον παρονομαστή του τύπου υπολογισμού της σκέδασης. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η σκέδαση είναι της τάξης του 0,1-0,4 ή ακόμα μικρότερη. Εμπειρικά, έχει αποδειχθεί ότι η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις, όπως αυτές που αναφέραμε παραπάνω.

Η προσέγγιση μέσω της Κανονικής Δυναμοκατανομής είναι προτιμητέα για μεγάλο αριθμό ζημιών n και για μικρή σκέδαση. Επιπλέον, είναι κατάλληλη για μέτριο αριθμό ζημιών n που όμως παρουσιάζουν σημαντική σκέδαση. Στην περίπτωση όπου ο αριθμός των ζημιών είναι σχετικά μικρός, ακόμα και η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής αποτυγχάνει και γι’ αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε άλλες μεθόδους όπως για παράδειγμα η χρήση αναδρομικών τύπων και η προσομοίωση. Εντούτοις, αυτοί οι ακριβείς μέθοδοι δεν είναι κατάλληλοι για αριθμητικούς υπολογισμούς στην περίπτωση όπου ο αριθμός των ζημιών n είναι μεγάλος και η συνάρτηση κατανομής του μεγέθους των ζημιών δεν έχει απλή μορφή (βλ. Beard *et al.*, 1984).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Η ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΔΥΝΑΜΟΚΑΤΑΝΟΜΗ ΩΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

5.1 Εισαγωγή

Το 1969 οι L. Kauppi και P. Ojantakanren πρότειναν μία διόρθωση της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής $Z = \frac{S-\mu}{\sigma}$, η οποία θα μετασχημάτιζε την Z σε μία περίπου Κανονική κατανομή, την οποία από δω και πέρα θα τη συμβολίζουμε με Y (βλ. Beard *et al.*, 1984).

Είναι γνωστό ότι σε πολλές περιπτώσεις η τ.μ. S τείνει να γίνει Κανονική κατανομή όταν ο πληθυσμός που αφορά την τ.μ. S είναι πολύ μεγάλος, δηλαδή όταν το πλήθος των ζημιών γίνει πολύ μεγάλο. Ωστόσο, αν ο πληθυσμός δεν είναι μεγάλος ή αν έχουμε θεωρήσει μία στρεβλή κατανομή, υπάρχει μεγάλη απόκλιση από την τυποποιημένη Κανονική κατανομή και επομένως είναι απαραίτητο να βρεθεί μία άλλη προσέγγιση για αυτές τις κατανομές. Η βασική ιδέα της προσέγγισης μέσω της Κανονικής Δυναμοκατανομής (Normal Power – NP) βασίζεται στην ιδέα να βρεθεί ένας μετασχηματισμός, ο οποίος θα μετατρέπει την τ.μ. Z σε μία άλλη τ.μ. Y, η οποία θα έχει καλύτερη προσαρμογή στις μη συμμετρικές κατανομές. Επιπλέον, θα ήταν βολικό να προσπαθήσουμε να βρούμε μία συνάρτηση $y = p(z)$, η οποία θα περιέχει και μερικές παραμέτρους.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι ένας κατάλληλος μετασχηματισμός p πολυωνυμικής μορφής, μπορεί να προκύψει από το ανάπτυγμα του Edgeworth, το οποίο θυμίζουμε ότι δίνεται από τον τύπο

$$F_Z(z) = \mathrm{P}[Z \le z] \approx \Phi(z) - \frac{\kappa_3}{6}\Phi^{(3)}(z) + \frac{\kappa_4}{24}\Phi^{(4)}(z) + \frac{\kappa_3^{\ 2}}{72}\Phi^{(6)}(z).$$

Αρκεί λοιπόν, να βρούμε μία συνάρτηση $Q(z)$, για την οποία θα ισχύει ότι

$$Q(z)=\Phi(z)-\frac{\kappa_3}{6}\Phi^{(3)}(z)+\frac{\kappa_4}{24}\Phi^{(4)}(z)+\frac{\kappa_3^{\ 2}}{72}\Phi^{(6)}(z)$$

και επομένως θα είναι

$$F_Z(z)\approx Q(z).$$

Ο υπολογισμός της προσέγγισης $Q(z)$ απαιτεί τον υπολογισμό των $\Phi^{(\kappa)}(z)$ για $\kappa=0,3,4,6$. Ως εκ τούτου, αναζητούμε συνάρτηση $p(z)$ τέτοια ώστε η τιμή της $Q(z)$ να προκύπτει μόνο από τη σ.κ. της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής $\Phi(z)$ ως $Q(z)=\Phi\left(p(z)\right)$. Η διαδικασία αναζήτησης της $p(z)$ γίνεται μέσω της μεθόδου του Newton, σύμφωνα με την οποία η λύση μίας εξίσωσης μπορεί να βρεθεί αν είναι γνωστή κάποια προσεγγιστική λύση. Αν λοιπόν z_t είναι μία προσεγγιστική λύση, τότε σύμφωνα με τη μέθοδο του Newton 2ης τάξης, η λύση της εξίσωσης $f(z)=0$ όπου $f(z)=F_Z'(z)$, θα είναι

$$z_{t+1}=z_t-\frac{f(z_t)}{f'(z_t)}-\frac{1}{2}\left[\frac{f(z_t)}{f'(z_t)}\right]^2\frac{f''(z_t)}{f'(z_t)}\ . \qquad (5.1)$$

Από τη σχέση (5.1) αποδεικνύεται ότι (βλ. Κουτσόπουλος, 1999)

$$72p+12\beta\left(p^2-1\right)+\left[\left(3\gamma-4\beta^2\right)p^3-\left(9\gamma-10\beta^2\right)p\right]=72z\ . \qquad (5.2)$$

Στην περίπτωση όπου το $p(z)$ είναι λύση της (5.2), το $\Phi\left(p(z)\right)$ θα είναι η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής 3ης τάξης για τη σ.κ. $F_Z(z)$ της σχέσης (5.1). Αν στη σχέση (5.2) παραλείψουμε τον 3ο όρο, δηλαδή τη μεγάλη αγκύλη, τότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&72p+12\beta\left(p^2-1\right)=72z\\
&\Leftrightarrow 72p+12\beta p^2-12\beta=72z\\
&\Leftrightarrow \beta p^2+6p-\beta-6z=0\\
&\Leftrightarrow \beta p^2+6p-\left(\beta+6z\right)=0\ . \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Από την επίλυση της σχέσης (5.3) προκύπτει ότι

$$p(z)=\sqrt{\frac{9}{\beta^2}+\frac{6z}{\beta}+1}-\frac{3}{\beta}$$

και επομένως η ποσότητα

$$\Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2}+\frac{6z}{\beta}+1}-\frac{3}{\beta}\right]$$

είναι η προσέγγιση 2^{ης} τάξης της Κανονικής Δυναμοκατανομής. Συνεπώς, θα είναι

$$F_Z(z)\approx\Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2}+\frac{6z}{\beta}+1}-\frac{3}{\beta}\right].$$

Στη συνέχεια, για να προσεγγίσουμε τη σ.κ. της αρχικής μη μετατοπισμένης τ.μ. S, αντικαθιστούμε το z με $\dfrac{s-\mu}{\sigma}$ και έχουμε

$$F_Z(z)\approx\Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2}+\frac{6(s-\mu)}{\beta\sigma}+1}-\frac{3}{\beta}\right].$$

Νωρίτερα, αποδείξαμε ότι $\mathrm{P}[S\le s]=\mathrm{P}[Z\le z]$ και επομένως θα ισχύει και $F_Z(z)=F_S(s)$. Άρα, τελικά θα είναι

$$F_S(s)\approx\Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2}+\frac{6(s-\mu)}{\beta\sigma}+1}-\frac{3}{\beta}\right].$$

Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις $z\to p(z)$ και $p(z)\to z$ είναι μοναδικά ορισμένες για όλες τις πραγματικές τιμές αυτών των τ.μ. Κατά συνέπεια ο μετασχηματισμός $p(z)$ είναι μοναδικός και επομένως κατασκευάσαμε μία νέα σ.κ. η οποία είναι η $\Phi\left(p^{-1}(z)\right)$ (βλ. Beard *et al.*, 1984).

Στην περίπτωση της short version, δηλαδή στην περίπτωση όπου

$$z=y+\frac{1}{6}\beta\left(y^2-1\right),$$

ο παραπάνω μετασχηματισμός περιλαμβάνει μόνο μία παράμετρο, τη σκέδαση β. Επομένως, είναι βολικό να εισάγουμε τους συμβολισμούς

$$p_\beta(z)\ \text{και}\ \Phi_\beta(z)=\Phi\left(p_\beta^{-1}(z)\right).$$

Άρα, μπορούμε να πούμε ότι η Z ακολουθεί την Κανονική Δυναμοκατανομή την οποία θα συμβολίσουμε $\mathrm{NP}(0,1,\beta)$, όπου 0, 1 και β είναι η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και η σκέδαση αντιστοίχως. Αφού λοιπόν $Z \sim \mathrm{NP}(0,1,\beta)$ και $Z = \dfrac{S-\mu}{\sigma}$ θα είναι $\dfrac{S-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{NP}(0,1,\beta)$ και $S \sim \mathrm{NP}(\mu,\sigma,\beta)$ όπου μ, σ, β είναι κατά προσέγγιση η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και η σκέδαση. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η Z και η S έχουν την ίδια σκέδαση καθώς ισχύει ότι $Z = \dfrac{S-\mu}{\sigma} \Rightarrow S = \mu + \sigma Z$, δηλαδή η S είναι γραμμικός μετασχηματισμός της Z. Εντούτοις, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η S είναι $\mathrm{NP}(\mu,\sigma,\beta)$ κατανεμημένη και έχει συνάρτηση κατανομής $\Phi_\beta\left[\dfrac{S-\mu}{\sigma}\right]$. Άρα λοιπόν, η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων προσεγγίζεται τόσο από τη $N(\mu,\sigma^2)$ όσο και από τη $\mathrm{NP}(\mu,\sigma,\beta)$ (βλ. Beard *et al.*, 1984).

Το πλεονέκτημα της Κανονικής Δυναμοκατανομής είναι ότι έχει τρεις παραμέτρους, σε αντίθεση με την Κανονική κατανομή, η οποία έχει δύο μόνο παραμέτρους. Στην πραγματικότητα, η Κανονική κατανομή επεκτείνεται σε μία οικογένεια συναρτήσεων, στην οποία είναι διαθέσιμη μία επιπλέον πληροφορία, η σκέδαση. Στην περίπτωση, όπου η Κανονική Δυναμοκατανομή έχει σκέδαση $\beta = 0$, τότε εκφυλίζεται σε Κανονική κατανομή. Συνεπώς, η παραπάνω προσέγγιση είναι εφικτό να χρησιμοποιηθεί μόνο στην περίπτωση όπου το β είναι αυστηρά θετικό, ενώ στην περίπτωση όπου $\beta = 0$ χρησιμοποιείται η προσέγγιση της Κανονικής κατανομής.

Η απόδειξη του παραπάνω βασίζεται στην υπόθεση ότι η F_S μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα πεπερασμένο αριθμό των πρώτων όρων του αναπτύγματος του Edgeworth. Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν αναμένουμε να είναι καλύτερο από αυτό το οποίο επιτυγχάνουμε από την απευθείας χρήση του τύπου (βλ. Beard *et al.*, 1984)

$$F_S(s) \approx F_Z(z) = \Phi(z) - \frac{\beta}{6}\Phi^{(3)}(z) + \frac{(\gamma-3)}{24}\Phi^{(4)}(z) + \frac{\beta^2}{72}\Phi^{(6)}(z) + R(z)\ , \quad (5.4)$$

όπου $R(z)$, το ανάπτυγμα των Abramowitz και Stegun (1970). Εντούτοις, αποδεικνύεται ότι η παραπάνω άποψη είναι λανθασμένη, καθώς έχει αποδειχτεί ότι η εφαρμογή της σχέσης

$$F_S(s) \approx \Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2}+\frac{6}{\beta}\frac{(s-\mu)}{\sigma}+1}-\frac{3}{\beta}\right]$$

δίνει αποτελέσματα τα οποία είναι περισσότερο ικανοποιητικά, στην περίπτωση όπου το β δεν είναι μεγάλο, ενώ το ανάπτυγμα του Edgeworth δίνει συνήθως μία ικανοποιητική απόκλιση. Εκ πρώτης όψεως, το παραπάνω ίσως να φαίνεται παράλογο, διότι δεν αναμένουμε ένας μη ακριβής τύπος να βελτιώνεται κάνοντας χρήση περισσότερων όρων όταν τον αντιστρέφουμε. Όμως, το ανάπτυγμα του Edgeworth δεν είναι συγκλίνουσα, αλλά αποκλίνουσα σειρά και επομένως η προσαρμογή τόσο του αναπτύγματος όσο και του αντίστροφου αναπτύγματος εξαρτάται, μεταξύ άλλων, από το πλήθος των όρων που είναι αποδεκτοί για την προσέγγιση. Αναφέρουμε ότι ένα πολύ γνωστό χαρακτηριστικό των ημισυγκλινουσών σειρών, είναι ότι οι πρώτοι όροι ενός αναπτύγματος ενδεχομένως να δίνουν πιο ακριβείς προσεγγίσεις από αυτές που θα έδιναν περισσότεροι όροι του ίδιου αναπτύγματος.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η Κανονική Δυναμοκατανομή, περιλαμβάνει σαν παραμέτρους μόνο την μέση τιμή μ, την τυπική απόκλιση σ και τη σκέδαση β της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων S. Τόσο η κατανομή που εκφράζει τον αριθμό των ζημιών, όσο και η κατανομή που εκφράζει το μέγεθος των ζημιών δεν χρειάζονται άμεσα. Οι δύο αυτές κατανομές επηρεάζουν μόνο μέσω των ροπών, οι οποίες ορίζουν τις παραμέτρους της Κανονικής Δυναμοκατανομής. Εντούτοις, για τους υπολογισμούς μας είναι απαραίτητη μόνο η γνώση των παραπάνω χαρακτηριστικών. Το γεγονός αυτό, είναι ιδιαίτερα σημαντικό, καθώς είναι σύνηθες οι ροπές να μπορούν να υπολογιστούν κατευθείαν κάνοντας χρήση εμπειρικών δεδομένων. Ως αποτέλεσμα, δεν απαιτείται να γνωρίζουμε τις δύο κατανομές, αφού η γνώση μόνο των ροπών επαρκούν για τους υπολογισμούς μας. Επιπροσθέτως, στην περίπτωση όπου γίνει προσπάθεια να χρησιμοποιηθεί κάποια κατανομή, μπορεί να οδηγηθούμε σε λάθη τα οποία είναι δύσκολο να ελέγξουμε.

5.2 Η Κανονική Δυναμοκατανομή ως συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου

Στη συνέχεια, θα δούμε πως ορίζεται η Κανονική Δυναμοκατανομή.

Ορισμός 5.2.1 (βλ. Freeman και Modarres, 2006)
Η τ.μ. X λέμε ότι ακολουθεί την Κανονική Δυναμοκατανομή (Normal Power distribution-NP) και τη συμβολίζουμε με $X \sim \mathrm{NP}\left(\lambda, \mu, \sigma^2\right)$ αν έχει σ.π.π.

$$f\left(x \middle| \lambda, \mu, \sigma^2\right) = \frac{1}{\mathrm{K}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} X^{\lambda-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_\lambda(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \text{ με } x > 0 \ , \qquad (5.5)$$

όπου $0 \le \lambda \le 1$ και

$$\rho_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{x^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \ln x, & \lambda = 0 \end{cases}.$$

Το K είναι η σταθερά κανονικοποίησης η οποία αντιστοιχεί στην περιοχή πάνω ή κάτω από το σημείο αποκοπής (point of truncation), το οποίο είναι το $-1/\lambda$, δηλαδή είναι

$$\mathrm{K} = \begin{cases} \Phi(\mathrm{T}), & \text{αν } \lambda > 0 \\ 1 \ , & \text{αν } \lambda = 0 \\ \Phi(-\mathrm{T}), & \text{αν } \lambda < 0 \end{cases}, \text{ όπου } \mathrm{T} = \frac{1}{\lambda\sigma} + \frac{\mu}{\sigma}. \qquad \triangledown$$

Η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής χρησιμοποιείται για να μας παρέχει μία σχετική συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου την οποία στο Κεφάλαιο 3 την συμβολίσαμε με h. Για μία τ.μ. με μέτρια θετική σκέδαση, η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής δηλώνει ότι όταν η S τυποποιηθεί, μπορεί να προσεγγιστεί από:

α) την short version $Z \approx Y + \frac{1}{6}\beta\left(Y^2 - 1\right)$ και

β) την long version $Z \approx Y + \frac{1}{6}\beta\left(Y^2 - 1\right) + \frac{1}{24}\gamma\left(Y^3 - 3Y\right) - \frac{1}{36}\beta^2\left(2Y^3 - 5Y\right)$,

όπου $Y \sim N(0,1)$ και $Z = \dfrac{S-\mu}{\sigma}$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο με τον οποίο ορίσαμε την τ.μ. Z , αναμένουμε να ισχύει ότι $Var\left[Z\right]=1$. Εντούτοις, ισχύει ότι

$$Var\left[Z\right]=\zeta_{NP},$$

όπου

$$\zeta_{NP}=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{18}\beta^2, & \text{short version} \\ 1+\left(\dfrac{5}{36}\beta^2-\dfrac{1}{10}\gamma\right)^2+\dfrac{1}{2400}\gamma^2, & \text{long version} \end{cases}.$$

Είναι προφανές ότι και στις δύο περιπτώσεις είναι

$$Var\left[Z\right]\geq 1.$$

Επομένως, η προσαρμοσμένη διασπορά της S είναι

$$\text{Adjusted}Var\left[S\right]=\sigma^2\zeta_{NP}$$

και αυτό υπονοεί ότι έχουμε μία νέα συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου η οποία θα δίνεται από τη σχέση

$$R\left[S\right]=\sigma^2\zeta_{NP}.$$

Εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι αυτό το μέτρο κινδύνου χρησιμοποιεί ρητά τις 3 ή τις 4 πρώτες ημιαναλλοίωτες. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι αυτό το μέτρο κινδύνου είναι το μοναδικό στην αναλογιστική επιστήμη που χρησιμοποιεί παραπάνω από τις δύο πρώτες ημιαναλλοίωτες.

Για τις ανάγκες της περαιτέρω μελέτης μας, θα εισάγουμε τους δύο παρακάτω ορισμούς (βλ. Τσουλομήτης, 2012).

Ορισμός 5.2.2

Έστω ότι το K είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το K λέγεται κυρτό αν και μόνο αν για οποιαδήποτε δύο σημεία του x, y, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα x, y βρίσκεται εξολοκλήρου μέσα στο K. Επομένως,

K Κυρτό $\Leftrightarrow$ για κάθε $x, y\in K$ και για κάθε $\lambda\in\left[0,1\right]$ ισχύει ότι $\left(1-\lambda\right)x+\lambda y\in K$.

$\bigtriangledown$

Ορισμός 5.2.3

Μία συνάρτηση $f: K \to \mathbb{R}$ λέγεται κυρτή αν το K είναι κυρτό και ισχύει ότι

$$f\left[(1-\lambda)x+\lambda y\right] \le (1-\lambda) f(x)+\lambda f(y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\lambda \in [0,1]$. $\triangledown$

Θεώρημα 5.2.4

Για κάθε $X \in \Omega^{+}$ η

$$R_{NP}[X] = \sigma^2\left(1+\frac{1}{18}\beta^2\right)$$

είναι μία συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες 1-5, που αναφέραμε στον ορισμό της συνάρτησης μέτρησης κινδύνου. (βλ. Ορισμό 1.4.3)

Απόδειξη

1. ***Μη-επικινδυνότητα***

Αν η X είναι ακίνδυνη τότε θα είναι $X = c$ όπου $c = \sigma\tau\alpha\theta$. Επομένως, θα είναι

$$Var[X] = Var[c] = 0$$

και ως αποτέλεσμα θα ισχύει ότι

$$R_{NP}[X] = 0\,.$$

2. ***Μη-αρνητικότητα***

Ισχύει ότι $\sigma^2 \ge 0$ καθώς επίσης και $1+\frac{1}{18}\beta^2 \ge 0$. Επομένως, θα ισχύει και

$$R_{NP}[X] = \sigma^2\left(1+\frac{1}{18}\beta^2\right) \ge 0\,.$$

3. ***Υποαθροιστικότητα***

Έστω ότι $Y = X_1 + X_2$, όπου σ_Y, $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}$ η τυπική απόκλιση και β_Y, β_{X_1} β_{X_2} η σκέδαση των κατανομών Y, X_1, X_2 αντιστοίχως. Επιπλέον, θυμίζουμε ότι για ανεξάρτητους κινδύνους ισχύει ότι $\kappa_j[X_1+X_2] = \kappa_j[X_1]+\kappa_j[X_2]$ (βλ. Πρόταση 3.2.5). Στη συνέχεια, αν χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση που προκύπτει από τη short version θα είναι

$$R_{NP}[Y] = \sigma_Y{}^2\left(1+\frac{1}{18}\beta_Y{}^2\right)$$

όπου,

$$\sigma_Y^{\,2} = \kappa_2\left[Y\right] = \kappa_2\left[X_1 + X_2\right] = \kappa_2\left[X_1\right] + \kappa_2\left[X_2\right] = \sigma_{X_1}^{\,2} + \sigma_{X_2}^{\,2}$$

και

$$\beta_Y = \frac{\kappa_3\left[Y\right]}{\kappa_2\left[Y\right]^{3/2}} = \frac{\kappa_3\left[X_1\right] + \kappa_3\left[X_2\right]}{\left(\sqrt{\kappa_2\left[X_1\right] + \kappa_2\left[X_1\right]}\right)^3} \Rightarrow \beta_Y^{\,2} = \frac{\left(\kappa_3\left[X_1\right] + \kappa_3\left[X_2\right]\right)^2}{\left(\kappa_2\left[X_1\right] + \kappa_2\left[X_1\right]\right)^3}.$$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι $\beta_Y^{\,2} \le \beta_{X_1}^{\,2} + \beta_{X_2}^{\,2}$. Είναι

$$\beta_Y^{\,2} = \left[\frac{\kappa_3\left[Y\right]}{\left(\kappa_2\left[Y\right]\right)^{3/2}}\right]^2 = \left[\frac{\kappa_3\left[X_1 + X_2\right]}{\left(\kappa_2\left[X_1 + X_2\right]\right)^{3/2}}\right]^2 = \left[\frac{\kappa_3\left[X_1\right] + \kappa_3\left[X_2\right]}{\left(\kappa_2\left[X_1\right] + \kappa_2\left[X_2\right]\right)^{3/2}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\kappa_3\left[X_1\right]}{\left(\kappa_2\left[X_1\right] + \kappa_2\left[X_2\right]\right)^{3/2}} + \frac{\kappa_3\left[X_2\right]}{\left(\kappa_2\left[X_1\right] + \kappa_2\left[X_2\right]\right)^{3/2}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\kappa_3\left[X_1\right]}{\kappa_2\left[X_1\right]^{3/2}} \cdot \frac{\kappa_2\left[X_1\right]^{3/2}}{\left(\kappa_2\left[X_1\right] + \kappa_2\left[X_2\right]\right)^{3/2}} + \frac{\kappa_3\left[X_2\right]}{\kappa_2\left[X_2\right]^{3/2}} \cdot \frac{\kappa_2\left[X_2\right]^{3/2}}{\left(\kappa_2\left[X_1\right] + \kappa_2\left[X_2\right]\right)^{3/2}}\right]^2$$

$$= \left[\beta_{X_1}\left(\cdot \frac{\kappa_2\left[X_1\right]}{\left(\kappa_2\left[X_1\right] + \kappa_2\left[X_2\right]\right)}\right)^{3/2} + \beta_{X_2} \cdot \left(\frac{\kappa_2\left[X_2\right]}{\left(\kappa_2\left[X_1\right] + \kappa_2\left[X_2\right]\right)}\right)^{3/2}\right]^2. \quad (5.6)$$

Αν στη συνέχεια θέσουμε $r_i = \dfrac{\kappa_2\left[X_i\right]}{\kappa_2\left[X_1\right] + \kappa_2\left[X_2\right]}$ για $i = 1, 2$, θα ισχύει ότι $0 \le r_i \le 1$ καθώς επίσης και $r_1 + r_2 = 1$. Άρα, από τη σχέση (5.6) θα έχουμε

$$\beta_Y^{\,2} = \left[\beta_{X_1} \cdot r_1^{3/2} + \beta_{X_2} \cdot r_2^{3/2}\right]^2$$

$$= \beta_{X_1}^{\,2} \cdot r_1^3 + 2 \cdot \beta_{X_1} \cdot r_1^{3/2} \cdot \beta_{X_2} \cdot r_2^{3/2} + \beta_{X_2}^{\,2} \cdot r_2^3. \quad (5.7)$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, ισχύει ότι $0 \le r_i \le 1$. Επομένως, θα είναι $0 \le r_i^2 \le r_i^{3/2} \le r_i \le \sqrt{r_i} \le 1$ και επειδή η σκέδαση είναι μία θετική ποσότητα, τελικά προκύπτει ότι $\beta_{X_i} r_i^2 \le \beta_{X_i} r_i^{3/2} \le \beta_{X_i} r_i \le \beta_{X_i}\sqrt{r_i}$. Συνεπώς, από τη σχέση (5.7) έχουμε

$$\begin{aligned}\beta_Y{}^2 &= \beta_{X_1}{}^2 \cdot r_1^3 + 2\cdot\beta_{X_1}\cdot r_1^{3/2}\cdot\beta_{X_2}\cdot r_2^{3/2} + \beta_{X_1}{}^2\cdot r_2^3\\ &\le \left(\beta_{X_1} r_1\right)^2 + 2\beta_{X_1}\cdot r_1\cdot\beta_{X_2}\cdot r_2 + \left(\beta_{X_2} r_2\right)^2\\ &= \left(\beta_{X_1}\cdot r_1 + \beta_{X_2}\cdot r_2\right)^2. \qquad (5.8)\end{aligned}$$

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2$ με $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή. Άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.2.3 θα ισχύει ότι $f\left[(1-\lambda)x+\lambda y\right]\le(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και για κάθε $\lambda\in[0,1]$. Δεδομένου ότι $r_1+r_2=1$, αν τώρα θέσουμε όπου x το β_{X_1} και όπου y το β_{X_2}, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}& f\left[(1-r_2)\cdot\beta_{X_1}+r_2\cdot\beta_{X_2}\right]\le(1-r_2)\,f\left(\beta_{X_1}\right)+r_2 f\left(\beta_{X_2}\right)\\ \Leftrightarrow\ & f\left[r_1\cdot\beta_{X_1}+r_2\cdot\beta_{X_2}\right]\le r_1 f\left(\beta_{X_1}\right)+r_2 f\left(\beta_{X_2}\right)\\ \Leftrightarrow\ & \left(r_1\cdot\beta_{X_1}+r_2\cdot\beta_{X_2}\right)^2\le r_1\cdot\beta_{X_1}{}^2+r_2\cdot\beta_{X_2}{}^2\\ \Leftrightarrow\ & \left(\beta_{X_1}\cdot r_1+\beta_{X_2}\cdot r_2\right)^2\le\beta_{X_1}{}^2\cdot r_1+\beta_{X_2}{}^2\cdot r_2\ . \qquad (5.9)\end{aligned}$$

Τελικά, από τις σχέσεις (5.8) και (5.9) προκύπτει ότι

$$\beta_Y{}^2\le\beta_{X_1}{}^2\cdot r_1+\beta_{X_2}{}^2\cdot r_2\ . \qquad (5.10)$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, ισχύει ότι $0\le r_i\le 1$ για $i=1,2$. Άρα, θα είναι $\beta_{X_1}{}^2\cdot r_1+\beta_{X_2}{}^2\cdot r_2\le\beta_{X_1}{}^2+\beta_{X_2}{}^2$ και τελικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\beta_Y{}^2\le\beta_{X_1}{}^2+\beta_{X_2}{}^2\ . \qquad (5.11)$$

Επομένως, είναι

$$\begin{aligned}R_{NP}[Y]&=\sigma_Y{}^2\left[1+\frac{1}{18}\beta_Y{}^2\right]\overset{(5.11)}{\le}\sigma_Y{}^2\left[1+\frac{1}{18}\left(\beta_{X_1}{}^2+\beta_{X_2}{}^2\right)\right]\\ &\le\sigma_{X_1}{}^2\left[1+\frac{1}{18}\beta_{X_1}{}^2\right]+\sigma_{X_2}{}^2\left[1+\frac{1}{18}\beta_{X_2}{}^2\right]\\ &=R_{NP}[X_1]+R_{NP}[X_2].\end{aligned}$$

Τελικά λοιπόν, θα ισχύει ότι

$$R_{NP}[X_1+X_2]\le R_{NP}[X_1]+R_{NP}[X_2].$$

4. ***Συνέπεια***

Έστω $Y = X + c$, τότε για την Y θα ισχύει ότι

$$\sigma_Y{}^2 = Var[Y] = Var[X + c] = Var[X] = \kappa_2[X] = \sigma_X{}^2$$

καθώς επίσης και

$$\beta_Y = \frac{\kappa_3[Y]}{\kappa_2[Y]^{3/2}} = \frac{\kappa_3[X+c]}{\left(\kappa_2[X+c]\right)^{3/2}} = \frac{\kappa_3[X]+\kappa_3[c]}{\left(\kappa_2[X]+\kappa_2[c]\right)^{3/2}} = \frac{\kappa_3[X]}{\kappa_2[X]^{3/2}} = \beta_X$$

όπου $\sigma_X{}^2$ και β_X η διασπορά και η σκέδαση της X .

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η Y έχει την ίδια σκέδαση με την X , το οποίο βέβαια ήταν αναμενόμενο, διότι η Y είναι γραμμικός μετασχηματισμός της X .

Τελικά, θα είναι

$$R_{NP}[Y] = R_{NP}[X+c] = \sigma_Y{}^2\left(1+\frac{1}{18}\beta_Y{}^2\right) = \sigma_X{}^2\left(1+\frac{1}{18}\beta_X{}^2\right) = R_{NP}[X]$$

και επομένως, δείξαμε ότι $R_{NP}[X+c] = R_{NP}[X]$.

5. ***Αντικειμενικότητα***

Αφού είναι $R_{NP}[X] = \sigma^2\left(1+\frac{1}{18}\beta^2\right)$, η $R_{NP}[X]$ εξαρτάται από το σ (τυπική απόκλιση) και από το β (σκέδαση). Όμως, η σκέδαση υπολογίζεται από τη σχέση $\beta = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, όπου $\mu_3 = \rho_3 - 3\rho_1\rho_2 + 2\rho_1^3$. Επομένως, η $R_{NP}[X]$ εξαρτάται από τα μεγέθη ρ_1, ρ_2, ρ_3, μ_3, σ^2. Τα μεγέθη αυτά είναι χαρακτηριστικά της κάθε συνάρτησης, δηλαδή για συγκεκριμένη τ.μ. τα παραπάνω μεγέθη έχουν συγκεκριμένη τιμή. Ως εκ τούτου, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $R_{NP}[X]$ εξαρτάται από την X μόνο μέσω της σ.κ. F_X .

□

Παρατήρηση 5.2.5

Στην περίπτωση που θέλουμε να κάνουμε χρήση της long version προσέγγισης, δηλαδή της προσέγγισης όπου

$$\zeta_{NP} = 1 + \left(\frac{5}{36}\beta^2 - \frac{1}{10}\gamma \right)^2 + \frac{1}{2400}\gamma^2, \qquad (5.12)$$

γενικά παράγεται μέτρο κινδύνου το οποίο δεν ικανοποιεί την υποαθροιστική ιδιότητα. Όμως, η υποαθροιστική ιδιότητα ικανοποιείται στην ειδική περίπτωση όπου οι κίνδυνοι ανήκουν σε ομογενές χαρτοφυλάκιο, δηλαδή σε χαρτοφυλάκιο που περιέχει ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., καθώς επίσης και στην περίπτωση όπου το χαρτοφυλάκιο περιέχει κινδύνους που είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί ανεξάρτητων και ισόνομων μεταβλητών. Επισημαίνουμε ότι η χρήση της long version βελτιώνει την προσέγγιση, αλλά αν η χρήση της δεν γίνει με προσοχή μπορεί να παράγει χειρότερα αποτελέσματα. ▽

Παρατήρηση 5.2.6

Στη γενική περίπτωση η τ.μ. X θα μπορούσε να έχει αρνητική σκέδαση, δηλαδή θα μπορούσε να είναι $\beta < 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση θέτουμε $\beta = \gamma = 0$ και επομένως από τη σχέση (5.12) προκύπτει ότι

$$\zeta_{NP} = 1.$$

Συνεπώς, θα είναι

$$R_{NP}[X] = \sigma^2 \zeta_{NP} \Rightarrow R_{NP}[X] = \sigma^2$$

και σαν αποτέλεσμα θα προκύψει ένα συντηρητικό μέτρο κινδύνου. ▽

5.3 Η αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου της Κανονικής Δυναμοκατανομής

Θυμίζουμε ότι η αρχή της διασποράς είναι

$$\Pi[X] = \mathrm{E}[X] + \alpha Var[X], \text{ όπου } \alpha > 0.$$

Από τη γενίκευση αυτής της αρχής, προκύπτει η αρχή υπολογισμού του NP-ασφαλίστρου, η οποία είναι

$$\Pi[X] = \mathrm{E}[X] + zR_{NP}[X], \text{ όπου } z > 0.$$

Επομένως, στην περίπτωση της short version θα είναι

$$\Pi_{NP}[X] = \mathrm{E}[X] + z\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{18}\beta^2 \right), \text{ όπου } z > 0 \text{ μία σταθερά.}$$

Διευκρινίζουμε ότι ως NP-ασφάλιστρο, θεωρούμε το ασφάλιστρο που προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε ως μέτρο κινδύνου την Κανονική Δυναμοκατανομή.

Πρόταση 5.3.1

Το ασφάλιστρο που προκύπτει με τη χρήση της Κανονικής Δυναμοκατανομής, δηλαδή το ασφάλιστρο $\Pi_{NP}\left[X\right]$, είναι υποαθροιστικό αλλά όχι γραμμικά συνεπές.

Απόδειξη

Για να είναι το ασφάλιστρο $\Pi_{NP}\left[X\right]$ υποαθροιστικό, αρκεί για X_1, X_2 ανεξάρτητους κινδύνους να ισχύει ότι

$$\Pi_{NP}\left[X_1+X_2\right]\leq \Pi_{NP}\left[X_1\right]+\Pi_{NP}\left[X_2\right].$$

Έστω ότι $Y=X_1+X_2$, τότε θα είναι

$$\mathrm{E}[Y]=\mathrm{E}\left[X_1+X_2\right]=\mathrm{E}\left[X_1\right]+\mathrm{E}\left[X_2\right]=\mu_{X_1}+\mu_{X_2}.$$

Επομένως, θα είναι

$$\Pi_{NP}\left[Y\right]=\mathrm{E}\left[Y\right]+zR_{NP}\left[Y\right]=\mu_Y+zR_{NP}\left[Y\right]=\mu_{X_1}+\mu_{X_2}+zR_{NP}\left[Y\right],$$

όμως από το Θεώρημα 5.2.4 γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$R_{NP}\left[X_1+X_2\right]\leq R_{NP}\left[X_1\right]+R_{NP}\left[X_2\right].$$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned}\Pi_{NP}\left[Y\right]&=\Pi_{NP}\left[X_1+X_2\right]=\mu_{X_1}+\mu_{X_2}+zR_{NP}\left[X_1\right]+zR_{NP}\left[X_2\right]\\&=\left(\mu_{X_1}+zR_{NP}\left[X_1\right]\right)+\left(\mu_{X_2}+zR_{NP}\left[X_2\right]\right)=\Pi_{NP}\left[X_1\right]+\Pi_{NP}\left[X_2\right]\end{aligned}$$

και επομένως δείξαμε ότι

$$\Pi_{NP}\left[X_1+X_2\right]\leq \Pi_{NP}\left[X_1\right]+\Pi_{NP}\left[X_2\right].$$

Άρα, αποδείξαμε ότι το ασφάλιστρο που προκύπτει με τη χρήση της Κανονικής Δυναμοκατανομής, δηλαδή το ασφάλιστρο $\Pi_{NP}\left[X\right]$ είναι υποαθροιστικό.

Για να ισχύει η γραμμική συνέπεια, μας αρκεί να δείξουμε ότι

$$\Pi_{NP}\left[\alpha X+c\right]=\alpha\Pi_{NP}\left[X\right]+c\text{, όπου }\alpha,c>0.$$

Θυμίζουμε ότι

$$\Pi_{NP}\left[X\right]=\mu_X+z_X\sigma_X{}^2\left(1+\frac{1}{18}\beta_X{}^2\right).$$

Έστω ότι $Y = \alpha X + c$, τότε θα είναι

$$\Pi_{NP}\left[Y\right] = \Pi_{NP}\left[\alpha X + c\right] = \mu_Y + z_Y \sigma_Y{}^2 \left(1 + \frac{1}{18}\beta_Y{}^2\right) \tag{5.13}$$

όπου

$$\mu_Y = \mathrm{E}\left[Y\right] = \mathrm{E}\left[\alpha X + c\right] = \alpha \mathrm{E}\left[X\right] + c = \alpha \mu_X + c\,,$$

$$\sigma_Y{}^2 = Var\left[Y\right] = Var\left[\alpha X + c\right] = \alpha^2 Var\left[X\right] = \alpha^2 \sigma_X{}^2$$

και

$$\beta_Y{}^2 = \frac{\kappa_3\left[Y\right]}{\kappa_2\left[Y\right]^{3/2}} = \frac{\kappa_3\left[\alpha X + c\right]}{\left(\kappa_2\left[\alpha X + c\right]\right)^{3/2}} = \frac{\kappa_3\left[\alpha X\right] + \kappa_3\left[c\right]}{\left(\kappa_2\left[\alpha X\right] + \kappa_2\left[c\right]\right)^{3/2}} = \frac{\alpha^3 \kappa_3\left[X\right]}{\left(\alpha^2 \kappa_2\left[X\right]\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\cancel{\alpha^3} \kappa_3\left[X\right]}{\cancel{\alpha^3} \kappa_2\left[X\right]^{3/2}} = \frac{\kappa_3\left[X\right]}{\kappa_2\left[X\right]^{3/2}} = \beta_X{}^2 .$$

Άρα, από τη σχέση (5.13) προκύπτει ότι

$$\Pi_{NP}\left[Y\right] = \alpha \mu_X + c + z_Y \alpha^2 \sigma_X{}^2 \left(1 + \frac{1}{18}\beta_X{}^2\right) = \alpha \mu_X + z_Y \alpha^2 \sigma_X{}^2 \left(1 + \frac{1}{18}\beta_X{}^2\right) + c$$

$$= \alpha\left[\mu_X + z_Y \alpha \sigma_X{}^2 \left(1 + \frac{1}{18}\beta_X{}^2\right)\right] + c \neq \alpha \Pi_{NP}\left[X\right] + c\,,$$

διότι στην γενική περίπτωση είναι $z_Y \alpha \neq z_X$. Άρα, το ασφάλιστρο που προκύπτει με τη χρήση της Κανονικής Δυναμοκατανομής δεν είναι γραμμικά συνεπές και επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.4 το $\Pi_{NP}\left[X\right]$ δεν είναι αρχή ασφαλίστρου κατά Gerber.

Τέλος, αναφέρουμε ότι αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την τυπική απόκλιση αντί για τη διασπορά το ασφάλιστρο που προκύπτει όταν χρησιμοποιούμε την προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής είναι

$$\Pi_{NP}\left[X\right] = \mu + z'\sigma\sqrt{1 + \frac{1}{18}\beta^2}\ , \text{ όπου } z' > 0 \text{ μία σταθερά,}$$

που καθορίζεται από τον αναλογιστή. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΠΟΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΟΥ

6.1 Η δημιουργία μέτρων κινδύνου χρησιμοποιώντας συναρτήσεις ωφελιμότητας

Σύμφωνα με τον Carriere (1993) οι συναρτήσεις ωφελιμότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία μέτρων κινδύνου σαν αυτά που προτείνει ο Ramsay (1993). Αυτό σημαίνει πως ξεκινώντας από τη συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x)$ μίας τ.μ. μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα μέτρο κινδύνου της μορφής $R[X]=\kappa_2+w_3{\kappa_3}^a+w_4{\kappa_4}^b$, όπου $w_3,w_4\geq 0$ και $0\leq a,b\leq 1$.

Παράδειγμα 6.1.1

Έστω ότι $u(x)=-\exp(-\lambda x)$, $\lambda>0$ η συνάρτηση ωφελιμότητας ενός ασφαλιστή με αρχική περιουσία w. Να βρεθεί:

$\alpha)$ Το ελάχιστο ασφάλιστρο P που δέχεται ο ασφαλιστής για να καλύψει τον κίνδυνο για την τ.μ. X.

$\beta)$ Ένα μέτρο κινδύνου της μορφής $R[X]=\kappa_2+w_3{\kappa_3}^a+w_4{\kappa_4}^b$, όπου $w_3,w_4\geq 0$ και $0\leq a,b\leq 1$.

Λύση

$\alpha)$ Το ελάχιστο ασφάλιστρο που δέχεται ο ασφαλιστής για να ασφαλίσει τον κίνδυνο X, θα το βρούμε λύνοντας την εξίσωση $u(w)=\mathrm{E}\left[u(w+P-X)\right]$. Έχουμε

$$\begin{aligned} u(w)&=\mathrm{E}\left[u(w+P-X)\right]\\ \Leftrightarrow -e^{-\lambda w}&=\mathrm{E}\left[-e^{-\lambda(w+P-X)}\right]\\ \Leftrightarrow e^{\lambda P}&=\mathrm{E}\left[e^{\lambda X}\right]\\ \Leftrightarrow P&=\lambda^{-1}\ln\mathrm{E}\left[e^{\lambda X}\right]. \qquad (6.1)\end{aligned}$$

Όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο 4, ισχύει ότι $\mathrm{K}_X(t) = \ln \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j [X] \frac{t^j}{j!}$,

συνεπώς για $t = \lambda$ έχουμε

$$\mathrm{K}_X(\lambda) = \ln \mathrm{E}\left[e^{\lambda X}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j [X] \frac{\lambda^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{\lambda^j}{j!} . \qquad (6.2)$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (6.1) και (6.2) προκύπτει ότι

$$P = \lambda^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \cdot \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^{-1} \left(\kappa_1 \cdot \frac{\lambda^1}{1!} + \kappa_2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} + \kappa_3 \cdot \frac{\lambda^3}{3!} + \kappa_4 \cdot \frac{\lambda^4}{4!} + \ldots \right)$$

$$= \kappa_1 + \kappa_2 \cdot \frac{\lambda}{2} + \kappa_3 \cdot \frac{\lambda^2}{6} + \kappa_4 \cdot \frac{\lambda^3}{24} \ldots \qquad (6.3).$$

Επομένως, το ελάχιστο ασφάλιστρο που δέχεται ο ασφαλιστής για να ασφαλίσει τον κίνδυνο δίνεται από τη σχέση (6.3). Φυσικά, σε αυτή τη περίπτωση ο υπολογισμός του ασφαλίστρου θα γίνει προσεγγιστικά.

$\beta)$ Από την παραπάνω σχέση, χρησιμοποιώντας μόνο τους 4 πρώτους όρους, προκύπτει μία προσέγγιση του ελάχιστου ασφαλίστρου. Είναι

$$P \simeq \kappa_1 + \kappa_2 \frac{\lambda}{2} + \kappa_3 \frac{\lambda^2}{6} + \kappa_4 \frac{\lambda^3}{24} = \mu + \frac{\lambda}{2} \left(\kappa_2 + \frac{\lambda}{3} \kappa_3 + \frac{\lambda^2}{12} \kappa_4 \right) . \qquad (6.4)$$

Η σχέση (6.4) μας δίνει μία προσέγγιση του ασφαλίστρου χρησιμοποιώντας τις 4 πρώτες ημιαναλλοίωτες της τ.μ. Επιπλέον, θέτοντας $\frac{\lambda}{2} = \omega$ προκύπτει ότι $\frac{\lambda}{3} = \frac{2\omega}{3}$ και $\frac{\lambda^2}{12} = \frac{4\omega^2}{12} = \frac{\omega^2}{3}$ και επομένως, η σχέση (6.4) γράφεται ως εξής

$$P \simeq \mu + \omega \left(\kappa_2 + \frac{2\omega}{3} \kappa_3 + \frac{\omega^2}{3} \kappa_4 \right),$$

δηλαδή το ασφάλιστρο είναι της μορφής

$$P \simeq \mu + \omega R_u [X],$$

όπου

$$R_u [X] = \kappa_2 + \frac{2\omega}{3} \kappa_3 + \frac{\omega^2}{3} \kappa_4 .$$

Συνεπώς, η συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου είναι της μορφής

$$R\left[X\right]=\kappa_2+w_3\kappa_3{}^a+w_4\kappa_4{}^b,$$

όπου $a=b=1$, $w_3=\dfrac{2\omega}{3}$ και $w_4=\dfrac{\omega^2}{3}$.

Εξαιτίας της σχέσης $P=\lambda^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j\dfrac{\lambda^j}{j!}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το P θα είναι συνάρτηση των ημιαναλλοίωτων κ_1, κ_2, κ_3..., οι οποίες και καθορίζονται από τη συνάρτηση ωφελιμότητας.

□

Παράδειγμα 6.1.2

Έστω ότι η συνάρτηση ωφελιμότητας του ασφαλιστή είναι $u(x)=-k^x$, $0<k<1$ και ότι η αρχική του περιουσία είναι w. Να βρεθεί:

α) Το ελάχιστο ασφάλιστρο P που δέχεται ο ασφαλιστής για να καλύψει τον κίνδυνο για την τ.μ. X .

β) Ένα μέτρο κινδύνου της μορφής $R\left[X\right]=\kappa_2+w_3\kappa_3{}^a+w_4\kappa_4{}^b$, όπου $w_3,w_4\geq 0$ και $0\leq a,b\leq 1$.

Λύση

α) Το ελάχιστο ασφάλιστρο που δέχεται ο ασφαλιστής για να ασφαλίσει τον κίνδυνο X , θα το βρούμε λύνοντας την εξίσωση $u(w)=\mathrm{E}\left[u(w+P-x)\right]$. (Θυμίζουμε ότι $u(x)=-k^x=-\mathrm{e}^{x\ln k}$.)

$$u(w)=\mathrm{E}\left[u(w+P-X)\right]$$

$$\Leftrightarrow -e^{w\ln k}=\mathrm{E}\left[-e^{(w+P-X)\ln k}\right]$$

$$\Leftrightarrow e^{-P\ln k}=\mathrm{E}\left[e^{-X\ln k}\right]$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{-P\ln k}=\ln\mathrm{E}\left[e^{-X\ln k}\right]$$

$$\Leftrightarrow P=(-\ln k)^{-1}\ln\mathrm{E}\left[e^{(-\ln k)X}\right]. \qquad (6.5)$$

Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο παράδειγμα ισχύει ότι $\mathrm{K}_X(t) = \ln \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j [X] \frac{t^j}{j!}$, άρα για $t = -\ln k$ έχουμε

$$\mathrm{K}_X(-\ln k) = \ln \mathrm{E}\left[e^{(-\ln k)X}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j [X] \frac{(-\ln k)^j}{j!} \; . \qquad (6.6)$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (6.5) και (6.6) έχουμε

$$\begin{aligned} P &= (-\ln k)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \cdot \frac{(-\ln k)^j}{j!} \\ &= (-\ln k)^{-1} \left(\kappa_1 \cdot \frac{(-\ln k)^1}{1!} + \kappa_2 \cdot \frac{(-\ln k)^2}{2!} + \kappa_3 \cdot \frac{(-\ln k)^3}{3!} + \kappa_4 \cdot \frac{(-\ln k)^4}{4!} + \ldots \right) \\ &= \kappa_1 - \kappa_2 \cdot \frac{\ln k}{2!} + \kappa_3 \cdot \frac{(\ln k)^2}{3!} - \kappa_4 \cdot \frac{(\ln k)^3}{4!} + .. \qquad (6.7) \end{aligned}$$

Η σχέση (6.7) μας δίνει το ελάχιστο ασφάλιστρο που δέχεται ο ασφαλιστής προκειμένου να ασφαλίσει τον κίνδυνο. Ο υπολογισμός του ασφαλίστρου θα γίνει προσεγγιστικά όπως άλλωστε και στο προηγούμενο παράδειγμα.

Στη συνέχεια θα βρούμε μία προσέγγιση του ασφαλίστρου χρησιμοποιώντας τους 4 πρώτους όρους του αναπτύγματος. Επομένως, από τη σχέση (6.7) προκύπτει ότι

$$P \simeq \kappa_1 - \kappa_2 \frac{\ln k}{2} + \kappa_3 \frac{(\ln k)^2}{6} - \kappa_4 \frac{(\ln k)^3}{24} = \mu - \frac{\ln k}{2} \left(\kappa_2 - \frac{\ln k}{3} \kappa_3 + \frac{(\ln k)^2}{12} \kappa_4 \right) . \quad (6.8)$$

Η σχέση (6.8) μας δίνει μία προσέγγιση του ασφαλίστρου, χρησιμοποιώντας τις 4 πρώτες ημιαναλλοίωτες της τ.μ. Επιπλέον, θέτοντας $-\frac{\ln k}{2} = \omega$ προκύπτει ότι $-\frac{\ln k}{3} = \frac{2\omega}{3}$ και $\frac{(\ln k)^2}{12} = \frac{4\omega^2}{12} = \frac{\omega^2}{3}$ και επομένως η σχέση (6.8) μπορεί να γραφτεί και ως εξής

$$P \simeq \mu + \omega \left(\kappa_2 + \frac{2\omega}{3} \kappa_3 + \frac{\omega^2}{3} \kappa_4 \right),$$

δηλαδή το ασφάλιστρο είναι της μορφής

$$P \simeq \mu + \omega R_u \left[X \right],$$

όπου

$$R_u \left[X \right] = \kappa_2 + \frac{2\omega}{3}\kappa_3 + \frac{\omega^2}{3}\kappa_4 .$$

Συνεπώς, η $R_u \left[x \right]$ είναι της μορφής

$$R\left[x \right] = \kappa_2 + w_3 {\kappa_3}^{\alpha} + w_4 {\kappa_4}^{b},$$

όπου $\alpha = b = 1$ και $w_3 = \frac{2\omega}{3}$, $w_3 = \frac{4\omega^2}{12}$. Σημειώνουμε ότι $0 < k < 1 \Leftrightarrow \ln k < 0$ και επομένως ικανοποιείται και η υπόθεση ότι $w_3 \geq 0$.

□

6.2 Το arbitrage και η γραμμική συνέπεια του ασφαλίστρου

Είναι πολύ γνωστό πως η διασπορά είναι ένα πολύ φτωχό μέτρο κινδύνου για μία κατανομή με βαριά ουρά. Σύμφωνα με τον Ramsay (1993), ο J. Garrido θεωρεί πολύ ενδιαφέρουσα την αξιωματική προσέγγιση της μέτρησης του κινδύνου, καθώς προκύπτουν πολλές προοπτικές για την εκτίμηση της υποτιμολόγησης που οφείλεται στη χρήση αρχών υπολογισμού του ασφαλίστρου που βασίζονται στη διασπορά και αφορούν κινδύνους με θετική σκέδαση. Επιπλέον, ο J. Garrido υποστηρίζει ότι η αξιωματική προσέγγιση της μέτρησης του κινδύνου, εξηγεί με πολύ καλό τρόπο την αποφυγή του ακίνδυνου arbitrage, καθώς στη διεθνή ασφαλιστική αγορά απαιτείται τα ασφάλιστρα να είναι γραμμικά συνεπή, δηλαδή απαιτείται να ισχύει η σχέση $\Pi\left[\alpha X + c \right] = \alpha \Pi \left[X \right] + c$, όπου $\alpha, c = \sigma\tau\alpha\theta$. Αυτό σημαίνει ότι ένας κίνδυνος πρέπει να έχει την ίδια τιμολόγηση ανεξάρτητα από το νόμισμα που χρησιμοποιείται.

Έστω για παράδειγμα ότι $R\left[X \right]$ είναι ο δείκτης κινδύνου που προκύπτει εν γένει από τον κίνδυνο X. Διαισθητικά η $R\left[X \right]$ δεν θα πρέπει να επηρεάζεται από το νόμισμα, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει $R\left[\alpha X \right] = R\left[X \right]$ για κάθε $\alpha = \sigma\tau\alpha\theta.$ και X θετικό κίνδυνο. Η παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με την ιδιότητα της συνέπειας, η οποία λέει ότι για κάθε κίνδυνο $X \in \Omega$ και $c = \sigma\tau\alpha\theta.$ θα ισχύει $R\left[X + c \right] = R\left[X \right]$, μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η $R[X]$ θα πρέπει να είναι αναλλοίωτη της κλίμακας και της μετατόπισης, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει $R[\alpha X + c] = R[X]$. Επομένως, πρέπει να ελέγξουμε αν κάποιο από τα μέτρα που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα είναι ταυτόχρονα αναλλοίωτα ως προς την κλίμακα και τη μετατόπιση.

Παράδειγμα 6.2.1

Να ελεγχθεί αν η διασπορά είναι μέτρο κινδύνου το οποίο παραμένει αναλλοίωτο ως προς την κλίμακα και τη μετατόπιση.

Λύση

Αφού στην προκειμένη περίπτωση το μέτρο κινδύνου είναι η διασπορά θα ισχύει ότι $R[X] = Var[X]$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι

$$R[\alpha X] = Var[\alpha X] = \alpha^2 Var[X] = \alpha^2 R[X] \Rightarrow R[\alpha X] = \alpha^2 R[X]$$

(κλίμακα)

και

$$R[X + c] = Var[X + c] = Var[X] = R[X] \Rightarrow R[X + c] = R[X]$$

(μετατόπιση).

Επομένως, σ’ αυτή την περίπτωση ισχύει μόνο η σχέση που απαιτείται για τη μετατόπιση. Ως εκ τούτου, η διασπορά είναι αναλλοίωτη μόνο ως προς την μετατόπιση. □

Παράδειγμα 6.2.2

Να ελεγχθεί αν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι μέτρο κινδύνου το οποίο παραμένει αναλλοίωτο ως προς την κλίμακα και τη μετατόπιση.

Λύση

Θυμίζουμε ότι ως συντελεστή μεταβλητότητας (coefficient of variation) ορίζουμε το πηλίκο $R[X] = \dfrac{Var[X]}{\mathrm{E}[X]}$. Συνεπώς έχουμε

$$R[\alpha X] = \frac{Var[\alpha X]}{\mathrm{E}[\alpha X]} = \alpha\left(\frac{Var[X]}{\mathrm{E}[X]}\right) = \alpha R[X] \neq R[X]$$

(κλίμακα)

και

$$R[X+c] = \frac{Var[X+c]}{\mathrm{E}[X]+c} = \frac{Var[X]}{\mathrm{E}[X]+c} = \frac{Var[X]}{\mathrm{E}[X]}\frac{\mathrm{E}[X]}{\mathrm{E}[X]+c} = R[X]\frac{\mathrm{E}[X]}{\mathrm{E}[X]+c} \neq R[X]$$

(μετατόπιση).

Επομένως, αποδείξαμε ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν είναι αναλλοίωτος ούτε ως προς την κλίμακα ούτε ως προς τη μετατόπιση. $\square$

Γενικότερα, μπορεί να αποδειχθεί ότι κανένα από τα μέτρα κινδύνου που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 1, δεν είναι αναλλοίωτο κάτω από το μετασχηματισμό κλίμακας και μετατόπισης ταυτοχρόνως. Αυτό ίσως να είναι αρκετό για να αποδείξουμε ότι δεν είναι εφικτό, ένα μέτρο κινδύνου να είναι ανεξάρτητο ως προς την κλίμακα και τη μετατόπιση ταυτοχρόνως. Ωστόσο, είναι απαραίτητο να βρεθεί κάποιος τρόπος να σχετίσουμε την ιδιότητα της γραμμικής συνέπειας, $\Pi[\alpha X + c] = \alpha\Pi[X] + c$ που απαιτείται να ισχύει για τα ασφάλιστρα, με το μέτρο κινδύνου $R[X]$. Όσον αφορά τις επιπλέον ιδιότητες που πρέπει να έχει η $R[X]$ μπορούμε να τις βρούμε από τη μερική διάταξη που περιλαμβάνουν οι κίνδυνοι διότι η τιμή της συνάρτησης μέτρησης του κινδύνου $R[X]$ μπορεί να μας δώσει πολλές πληροφορίες όταν συγκρίνεται με την τιμή μίας άλλης συνάρτησης κινδύνου. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να ορίζεται μία επιπλέον ιδιότητα για τις συναρτήσεις μέτρησης του κινδύνου, σύμφωνα με την οποία, μία σχέση διάταξης ορίζεται αν η τιμή της $R[X]$ συγκρίνεται μ' αυτή ενός άλλου κινδύνου, δηλαδή θα λέμε ότι η τ.μ. X είναι πιο επικίνδυνη από την τ.μ. Y αν $R[X] > R[Y]$. Ως εκ τούτου, ένα «απόλυτο» μέτρο κινδύνου όπως η $R[X]$ μας παρέχει πληροφόρηση, μόνο όταν δίνεται αναφορικά με κάποιο σταθερό μέτρο όπως για παράδειγμα μία κλίμακα αναφοράς ή το «απόλυτο» μέτρο κινδύνου $R[Y]$ ενός άλλου κινδύνου Y. Ένα απλό παράδειγμα στο οποίο η συνάρτηση μέτρησης του κινδύνου εξαρτάται από μία κλίμακα αναφοράς, είναι η εξάρτηση του μέτρου κινδύνου από την ισοτιμία των νομισμάτων.

Επίσης, σύμφωνα με τον J. Carrido είναι απαραίτητο να γίνει διαχωρισμός μεταξύ της έννοιας του απόλυτου μέτρου κινδύνου $R[X]$ και της έννοιας του σχετικού μέτρου κινδύνου, το οποίο από εδώ και πέρα θα το συμβολίζουμε με $RR[X]$ και το οποίο φυσικά θα ορίζεται μέσω του $R[X]$. Το σχετικό μέτρο κινδύνου εκφράζει την επικινδυνότητα του κινδύνου X σε σχέση με κάποια κλίμακα ή με κάποιο άλλο μέτρο κινδύνου Y. Για παράδειγμα, ένα σχετικό μέτρο κινδύνου είναι ο λόγος του $R[X]$ προς το ασφάλιστρο $\Pi[X]$, δηλαδή $RR[X]=\dfrac{R[X]}{\Pi[X]}$. Ένα ακόμα σχετικό μέτρο κινδύνου προκύπτει από το κλάσμα $\dfrac{X}{\Pi[X]}$, το οποίο εκφράζει έναν κίνδυνο που είναι ένα ποσοστό του κινδύνου X. Η αναμενόμενη τιμή του παραπάνω κινδύνου, δηλαδή το κλάσμα $\dfrac{\mathrm{E}[X]}{\Pi[X]}$, είναι ένα σχετικό μέτρο κινδύνου το οποίο ονομάζεται δείκτης ζημιών (loss ratio). Αξίζει να αναφέρουμε ότι τόσο το μέτρο κινδύνου $\dfrac{X}{\Pi[X]}$, όσο και το σχετικό μέτρο κινδύνου $\dfrac{\mathrm{E}[X]}{\Pi[X]}$ δεν είναι μέτρα κινδύνου με την έννοια που εννοεί ο Ramsay (1993), καθώς δεν ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες του Ορισμού 1.4.3.

Τέλος, ο J. Carrido θεωρεί ότι ανεξάρτητο της κλίμακας θα πρέπει να είναι το σχετικό μέτρο κινδύνου και όχι το απόλυτο μέτρο κινδύνου. Επομένως, υποστηρίζει ότι αυτό το οποίο θα πρέπει να ισχύει είναι η σχέση $RR[\alpha X]=RR[X]$ και όχι η σχέση $R[\alpha X]=R[X]$.

Πρόταση 6.2.3

Έστω $R[X]$ ένα απόλυτο μέτρο κινδύνου για τον κίνδυνο X και $\Pi[X]$ το ασφάλιστρο που αντιστοιχεί σε αυτό τον κίνδυνο. Τότε, το πηλίκο $RR[X]=\dfrac{R[X]}{\Pi[X]}$ είναι ένα σχετικό μέτρο κινδύνου, το οποίο αποτελεί μία απλή γενίκευση του αναμενόμενου δείκτη ζημιών και το οποίο ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που αναφέρονται στον Ορισμό 1.4.3, με εξαίρεση αυτή της συνέπειας.

Απόδειξη

1. ***Επικινδυνότητα***

Αν $X \in \Omega$ ακίνδυνο$\Rightarrow$ X δεν είναι τυχαίος κίνδυνος$\Rightarrow$ $X = c$, $c = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow$ $R[X] = R[c] = 0 \Rightarrow RR[X] = 0$.

2. ***Μη αρνητικότητα***

Το $R[X]$ είναι ένα απόλυτο μέτρο κινδύνου και επομένως θα είναι $R[X] \geq 0$. Άρα, θα ισχύει και

$$RR[X] = \frac{R[X]}{\Pi[X]} \geq 0, \text{ διότι } \Pi[X] > 0 .$$

3. ***Υποαθροιστικότητα***

Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.4.3 για X_1 και X_2 ανεξάρτητους κινδύνους θα ισχύει ότι

$$R[X_1 + X_2] \leq R[X_1] + R[X_2].$$

Επομένως θα είναι

$$RR[X_1 + X_2] = \frac{R[X_1 + X_2]}{\Pi[X_1 + X_2]} \leq \frac{R[X_1] + R[X_2]}{\Pi[X_1 + X_2]} = \frac{R[X_1]}{\Pi[X_1 + X_2]} + \frac{R[X_2]}{\Pi[X_1 + X_2]} . \quad (6.9)$$

Δεδομένου ότι $\Pi[X_i] \geq 0$ για $i = 1,2$, θα είναι

$$\Pi[X_i] \leq \Pi[X_1] + \Pi[X_2]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Pi[X_1] + \Pi[X_2]} \leq \frac{1}{\Pi[X_i]}$$

$$\overset{R[X_i]>0}{\Rightarrow} \frac{R[X_i]}{\Pi[X_1] + \Pi[X_2]} \leq \frac{R[X_i]}{\Pi[X_i]} \text{ για κάθε } i = 1,2 . \quad (6.10)$$

Επομένως, από τις σχέσεις (6.9) και (6.10) συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$RR[X_1 + X_2] \leq \frac{R[X_1]}{\Pi[X_1]} + \frac{R[X_2]}{\Pi[X_2]} \Rightarrow RR[X_1 + X_2] \leq RR[X_1] + RR[X_2].$$

4. ***Συνέπεια***

Για να ισχύει η ιδιότητα της συνέπειας, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $RR[X + c] = RR[X]$ για κάθε $c = \sigma\tau\alpha\theta.$ Από υπόθεση το $R[X]$ είναι μέτρο κινδύνου και επομένως, θα ισχύει $R\left[X+c\right]=R\left[X\right]$, όπου $c=\sigma\tau\alpha\theta.$ Επομένως, για το σχετικό μέτρο κινδύνου ισχύει ότι

$$RR\left[X+c\right]=\frac{R\left[X+c\right]}{\Pi\left[X+c\right]}=\frac{R\left[X\right]}{\Pi\left[X\right]+c}=\frac{\Pi\left[X\right]}{\Pi\left[X\right]+c}\frac{R\left[X\right]}{\Pi\left[X\right]}=\left(\frac{\Pi\left[X\right]}{\Pi\left[X\right]+c}\right)RR\left[X\right]$$

και επομένως στη γενική περίπτωση είναι

$$RR\left[X+c\right]\neq RR\left[X\right].$$

Ως εκ τούτου, συμπεραίνουμε ότι το σχετικό μέτρο κινδύνου δεν είναι ανεξάρτητο της μετατόπισης.

Δεδομένου ότι δεν ισχύει η ιδιότητα της Συνέπειας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το σχετικό μέτρο κινδύνου δεν είναι ανεξάρτητο της μετατόπισης.

5. ***Αντικειμενικότητα***

Το σχετικό μέτρο κινδύνου $RR\left[X\right]$ εξαρτάται από το $R\left[X\right]$ και το $\Pi\left[X\right]$. Όμως τα μεγέθη $R\left[X\right]$ και $\Pi\left[X\right]$ εξαρτώνται από τις ημιαναλλοίωτες, οι οποίες αποτελούν ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό για κάθε τ.μ. X και επομένως, το σχετικό μέτρο κινδύνου εξαρτάται από τη σ.κ. F_X.

□

6.3 Το κατάλληλο αξίωμα για τη μίξη των κινδύνων

Ο Ramsay (1993) αναφέρει ότι ο S.D. Promislow θεωρεί ότι στην περίπτωση αξιωματικής προσέγγισης του κινδύνου, είναι απαραίτητο να βρεθεί ένα αξίωμα το οποίο θα είναι κατάλληλο για να καλύψει τη μίξη των κινδύνων. Αυτό θεωρεί ότι είναι απαραίτητο, διότι τα άτομα δείχνουν ασυνέπεια σε επιλογές που αφορούν τη μίξη, με αποτέλεσμα να αναγκαζόμαστε να επανεξετάσουμε την κλασική Θεωρία της Ωφελιμότητας.

Για τη μίξη θα σκεφτούμε μία πιο ασθενής εκδοχή της αθροιστικότητας, δηλαδή, αν

$X=\begin{cases} X_1 \text{ με πιθανότητα } \rho \\ X_2 \text{ με πιθανότητα } 1\text{-}\rho \end{cases}$, τότε θα είναι $R\left[X\right]\geq\rho R\left[X_1\right]+\left(1-\rho\right)R\left[X_2\right]$.

Η παραπάνω σχέση βασίζεται στην ιδέα ότι το μέτρο κινδύνου που προκύπτει από τη μίξη δύο τ.μ. είναι τουλάχιστον όσο και η μίξη των αντίστοιχων μέτρων κινδύνου και ίσως και περισσότερο εξαιτίας της αβεβαιότητας που προκύπτει από το γεγονός ότι δεν γνωρίζουμε ποια από τις δύο τ.μ. X_1 και X_2 θα πραγματοποιηθεί. Το αξίωμα ισχυροποιείται αν θεωρήσουμε ότι η αβεβαιότητα εξαρτάται μόνο από τη μέση τιμή των τ.μ X_1 και X_2. Φυσικά, η παραπάνω ιδιότητα απαιτείται να ισχύει και στην περίπτωση μίξης περισσότερων των δύο κατανομών.

Το σίγουρο είναι ότι μία συνάρτηση μέτρησης κινδύνου, θα πρέπει να έχει κάποια χαρακτηριστικά. Τα χαρακτηριστικά αυτά μπορούμε να τα εισάγουμε με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι να τα εισάγουμε σαν αξιώματα και ο δεύτερος τρόπος είναι να εισάγουμε κάποια αξιώματα, μέσα από τα οποία να συμπεράνουμε τα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων μέτρησης κινδύνου.

Ο Stoyan (1983) αναφέρει τα παρακάτω αξιώματα για τις συναρτήσεις μέτρησης των κινδύνων.

1. Η σύγκριση των κινδύνων πρέπει να είναι ανεξάρτητη από τις μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιούνται, ως εκ τούτου αν ισχύει $R[X] \leq R[Y]$, θα πρέπει να ισχύει και $R[cX] \leq R[cY]$ για κάθε $c > 0$.
2. Κατά την πρόσθεση ανεξάρτητων όρων ίσως επηρεάζεται ο σχετικός κίνδυνος. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι X και Z ανεξάρτητες τ.μ. καθώς επίσης και Y και Z ανεξάρτητες τ.μ., τότε αν ισχύει $R[X] \leq R[Y]$ απαιτούμε να ισχύει και $R[X+Z] \leq R[Y+Z]$.
3. Για αξιωματικά συστήματα απαιτείται η ύπαρξη κάποιου είδους συνέχειας για να αποκτήσουμε τα κατάλληλα θεωρήματα αναπαράστασης. Άρα, υποθέτουμε ότι για μία ακολουθία F_n που αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση κατανομής που συγκλίνει ασθενώς σε μία συνάρτηση κατανομής F, η $R[F_n]$ θα συγκλίνει στην $R[F]$. Το παραπάνω απαιτείται προκειμένου να ισχύει η ιδιότητα της αντικειμενικότητας, σύμφωνα με την οποία η $R[X]$ εξαρτάται από την τ.μ. X μόνο μέσω της σ.κ. F_X.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η χρήση των μέτρων κινδύνου στον υπολογισμό του ασφαλίστρου παρουσιάζει ιδιαίτερο επιστημονικό ενδιαφέρον. Ο κυριότερος λόγος οφείλεται στο γεγονός ότι μας δίνουν τη δυνατότητα να κάνουμε υπολογισμούς χωρίς τη χρήση συναρτήσεων ωφελιμότητας. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, αφενός διότι ο υπολογισμός συναρτήσεων ωφελιμότητας είναι πολύ δύσκολος και αφετέρου διότι έχει αποδειχτεί πως τα άτομα κάνουν επιλογές που έρχονται σε αντίθεση με τα αξιώματα της Θεωρίας Ωφελιμότητας. Επιπλέον, ο υπολογισμός του ασφαλίστρου με χρήση μέτρων κινδύνου βασίζεται μόνο στην κατανομή του κινδύνου και όχι στην υποκειμενικότητα του αναλογιστή για τον κίνδυνο.

Το πιο διαδεδομένο μέτρο κινδύνου είναι αυτό της διασποράς. Εντούτοις, δεν αποτελεί αξιόπιστο μέτρο κινδύνου για ασφαλιστικούς κινδύνους, καθώς οι ασφαλιστικοί κίνδυνοι συνήθως περιγράφονται από κατανομές με θετική σκέδαση. Αυτό σημαίνει ότι ζημιές με πολύ μεγάλες απαιτήσεις έχουν πολύ μικρή πιθανότητα να συμβούν. Ωστόσο, σε περιπτώσεις όπου η συνάρτηση κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων έχει βαριά ουρά, η πραγματοποίηση μεγάλων ζημιών μπορεί να κλονίσει τη φερεγγυότητα της εταιρείας. Άλλωστε, η διασπορά όπως και η μέση τιμή δεν μας παρέχουν καμία πληροφορία για τη δεξιά ουρά της κατανομής, η οποία μας παρέχει σημαντικές πληροφορίες για τις πιθανότητες πραγματοποίησης πολύ μεγάλων ζημιών. Ο κίνδυνος της δεξιάς ουράς σχετίζεται με τις απαιτήσεις που είναι πολύ μεγαλύτερες από το μέσο και επομένως σχετίζεται με τις καταστροφικές ζημιές.

Δεδομένου ότι η Κανονική κατανομή αποτελεί επαρκές μέτρο μόνο για συμμετρικές ή σχεδόν συμμετρικές κατανομές, είναι απαραίτητο να βρεθεί κάποιο άλλο μέτρο κινδύνου για τους ασφαλιστικούς κινδύνους. Για την εύρεση ενός τέτοιου μέτρου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ημιαναλλοίωτες οι οποίες, παρόλο που προκύπτουν μέσω των ροπών υπερέχουν από αυτές.

Η χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για την προσέγγιση των συνολικών αποζημιώσεων δεν μας δίνει ικανοποιητικό αποτέλεσμα ούτε στην περίπτωση μεγάλου πλήθους ζημιών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι υπολογισμοί βασίζονται μόνο στην $1^{η}$ και στη $2^{η}$ ροπή, με αποτέλεσμα να αγνοεί πληροφορίες που σχετίζονται με τη σκέδαση και την κύρτωση. Επομένως, δεν λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι υπάρχουν ζημιές που έχουν ίδιες τις δύο πρώτες ροπές, αλλά διαφοροποιούνται στις ροπές ανώτερης τάξης. Λόγω των όσων αναφέρονται παραπάνω, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα, την προσέγγιση του Edgeworth ή την προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής. Με χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων έχει αποδειχθεί ότι οι παραπάνω προσεγγίσεις είναι περισσότερο ακριβείς από την προσέγγιση που μας δίνει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Όσον αφορά τη μελέτη χαρτοφυλακίων ασφαλιστικών εταιριών, τόσο η προσέγγιση της μετατοπισμένης κατανομής Γάμμα όσο και της Κανονικής Δυναμοκατανομής, μας δίνουν περίπου τις ίδιες τιμές στην περίπτωση όπου η σκέδαση είναι μέχρι και 0,4, ενώ, στην περίπτωση όπου η τιμή της σκέδασης πλησιάζει την τιμή 2, οι τιμές των δύο προσεγγίσεων αποκλίνουν. Φυσικά, η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής είναι πιο κοντά στην τιμή που προκύπτει από την σ.κ των συνολικών αποζημιώσεων. Επίσης, έχει αποδειχθεί ότι η προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής δίνει ικανοποιητική προσέγγιση ακόμα και στην περίπτωση λίγων ζημιών. Αυτό άλλωστε είναι και το αναμενόμενο αν σκεφτούμε τον τρόπο με τον οποίο προέκυψε αυτή η προσέγγιση, προέκυψε από την ιδέα να βρεθεί ένας μετασχηματισμός ο οποίος θα δίνει καλύτερη προσαρμογή στις κατανομές με θετική σκέδαση από αυτή που δίνει η Κανονική κατανομή. Γι' αυτό άλλωστε χρησιμοποιήθηκαν τρεις παράμετροι για να την ορίσουμε, σε αντίθεση με την Κανονική κατανομή στην οποία χρησιμοποιούμε μονό δύο. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η Κανονική Δυναμοκατανομή αποτελεί μία γενικευμένη μορφή της Κανονικής κατανομής, διότι στην περίπτωση που η σκέδαση είναι μηδέν η Κανονική Δυναμοκατανομή εκφυλίζεται σε Κανονική κατανομή.

Ένα ακόμα πλεονέκτημα των παραπάνω προσεγγίσεων είναι ότι για να τις χρησιμοποιήσουμε, δεν είναι απαραίτητη ούτε η γνώση της κατανομής των αποζημιώσεων αλλά ούτε και η γνώση της κατανομής του αριθμού των ζημιών. Μας αρκεί να γνωρίζουμε μόνο τις τιμές των ροπών οι οποίες άλλωστε μπορούν να υπολογιστούν κάνοντας χρήση εμπειρικών δεδομένων.

Μέχρι σήμερα, υπάρχουν επιστήμονες που έχουν αντιρρήσεις για τη χρήση της Θεωρίας Ωφελιμότητας. Ως εκ τούτου, θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο να μελετηθεί περαιτέρω η χρήση των μέτρων κινδύνου στον υπολογισμό του ασφαλίστρου, καθώς η ανάπτυξη αυτής της θεωρίας θα μας βοηθήσει να κάνουμε υπολογισμούς που δε θα οφείλονται στην υποκειμενικότητα των ατόμων για τον κίνδυνο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζονται αναλυτικά οι τύποι που χρησιμοποιήθηκαν στο Mathematica προκειμένου να πραγματοποιηθούν όλοι οι απαιτούμενοι υπολογισμοί για το Παράδειγμα 4.4.7.

α) Αφού είναι $S \sim \text{Exp}(1)$ θα είναι

```
f1[x_] := Exp[-x]
f1[x]
e^-x

p1 := Integrate[x * Exp[-x], {x, 0, Infinity}]
p1
1

p2 := Integrate[x^2 * Exp[-x], {x, 0, Infinity}]
p2
2

Var[S] := p2 - p1^2
Var[S]
1

σ := √Var[S]
σ
1

p3 := Integrate[x^3 * Exp[-x], {x, 0, Infinity}]
p3
6

μ3 := p3 - 3 * p1 * p2 + 2 * p1^3
μ3
2

β := μ3 / σ^3
β
2
```

$$F_S[s\_] := \Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2} + \frac{6*(s - p_1)}{\sigma*\beta} + 1} - \frac{3}{\beta}\right]$$

$F_S[s]$

$$\Phi\left[-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{13}{4} + 3\,(-1 + s)}\right]$$

$$\text{Solve}\left[-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{13}{4} + 3\,(-1 + \Pi)} == 0.9505\right]$$

$\{\{\Pi \to 1.91832\}\}$

β) Στην περίπτωση όπου $S \sim \Gamma\acute{\alpha}\mu\mu\alpha(2,2)$ θα είναι

$$f_2[x\_] := 2^2 * x^{2-1} * \mathrm{Exp}[-2*x]$$
$$f_2[x]$$
$$4\, e^{-2x}\, x$$

$$p_1 := \mathrm{Integrate}[x * f_2[x], \{x, 0, \mathrm{Infinity}\}]$$
$$p_1$$
$$1$$

$$p_2 := \mathrm{Integrate}[x^2 * f_2[x], \{x, 0, \mathrm{Infinity}\}]$$
$$p_2$$
$$\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{Var}[S] := p_2 - p_1^2$$
$$\mathrm{Var}[S]$$
$$\frac{1}{2}$$

$$\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[S]}$$
$$\sigma$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$p_3 := \mathrm{Integrate}[x^3 * f_2[x], \{x, 0, \mathrm{Infinity}\}]$$
$$p_3$$
$$3$$

$$\mu_3 := p_3 - 3 * p_1 * p_2 + 2 * p_1^3$$
$$\mu_3$$
$$\frac{1}{2}$$

$$\beta := \mu_3 / \sigma^3$$
$$\beta$$
$$\sqrt{2}$$

$$F_S[s\_] := \Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2} + \frac{6 * (s - p_1)}{\sigma * \beta} + 1} - \frac{3}{\beta}\right]$$
$$F_S[s]$$

$$\Phi\left[-\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{11}{2} + 6\,(-1+s)}\right]$$

$$\mathrm{Solve}\left[-\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{11}{2} + 6\,(-1+\Pi)} == 0.9505\right]$$
$$\{\{\Pi \to 1.65601\}\}$$

γ) Στην περίπτωση όπου $S \sim \text{Pareto}(1,4)$ τύπου Lomax ισχύει ότι

$$f[x\_] := \frac{4}{(1+x)^5}$$

f[x]

$$\frac{4}{(1+x)^5}$$

$$p_1 := \text{Integrate}\left[x * \frac{4}{(1+x)^5}, \{x, 0, \text{Infinity}\}\right]$$

p_1

$$\frac{1}{3}$$

$$p_2 := \text{Integrate}\left[x^2 * \frac{4}{(1+x)^5}, \{x, 0, \text{Infinity}\}\right]$$

p_2

$$\frac{1}{3}$$

$\text{Var}[S] := p_2 - p_1^2$

Var[S]

$$\frac{2}{9}$$

$\sigma := \sqrt{\text{Var}[x]}$

σ

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$p_3 := \text{Integrate}\left[x^3 * \frac{4}{(1+x)^5}, \{x, 0, \text{Infinity}\}\right]$$

p_3

1

$\mu_3 := p_3 - 3 * p_1 * p_2 + 2 * p_1^3$

μ_3

$$\frac{20}{27}$$

$\beta := \mu_3 / \sigma^3$

β

$5\sqrt{2}$

$$F_S[s\_] := \Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2} + \frac{6 * (s - p_1)}{\sigma * \beta} + 1} - \frac{3}{\beta}\right]$$

$F_S[s]$

$$\Phi\left[-\frac{3}{5\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{59}{50} + \frac{9}{5}\left(-\frac{1}{3} + s\right)}\right]$$

$$\text{Solve}\left[-\frac{3}{5\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{59}{50}+\frac{9}{5}\left(-\frac{1}{3}+\Pi\right)}==0.9505\right]$$

$\{\{\Pi \to 0.727765\}\}$

$\delta)\ \ S: f_s(1)=f_s(2)=f_s(3)=1/3$

Η παραπάνω συνάρτηση, είναι συνάρτηση κατανομής καθώς ισχύει ότι

$$\sum_{x=1}^{3} f[x]$$

1

Θα υπολογίσουμε τώρα τα μεγέθη που απαιτούνται για τους υπολογισμούς μας.

$$p_1 := \sum_{x=1}^{3} x * f[x]$$

p_1

2

$$p_2 := \sum_{x=1}^{3} x^2 * f[x]$$

p_2

$\frac{14}{3}$

$$\sigma := \sqrt{p_2 - p_1^2}$$

σ

$\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$p_3 := \sum_{x=1}^{3} x^3 * f[x]$$

p_3

12

$$\mu_3 := p_3 - 3 * p_1 * p_2 + 2 * p_1^3$$

μ_3

0

$$\beta := \mu_3 / \sigma^3$$

β

0

```
Fs[s_] := Φ[Sqrt[9/β^2 + (6*(s - p1))/(σ*β) + 1] - 3/β]
Fs[s]
```

Power::infy : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

Power::infy : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

∞::indet : Indeterminate expression 1 + ComplexInfinity + ComplexInfinity encountered. ≫

Power::infy : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

General::stop : Further output of Power::infy will be suppressed during this calculation. ≫

```
Φ[Indeterminate]
```

Ως αποτέλεσμα, σε αυτή την περίπτωση δεν είναι εφικτός ο υπολογισμός του ασφαλίστρου χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Κανονικής Δυναμοκατανομής.

$\varepsilon)\ S: f_s(1) = f_s(2) = f_s(5) = 1/3$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι συνάρτηση κατανομής καθώς ισχύει ότι

```
f[1] := 1 / 3; f[2] := 1 / 3; f[5] := 1 / 3;
f[1] + f[2] + f[5]

1
```

Θα υπολογίσουμε τώρα τα μεγέθη που απαιτούνται για τους υπολογισμούς μας.

```
p1 := 1 * f[1] + 2 * f[2] + 5 * f[5]
p1
```

$\frac{8}{3}$

```
p2 := 1^2 * f[1] + 2^2 * f[2] + 5^2 * f[5]
p2
10
```

```
σ := Sqrt[p2 - p1^2]
σ
```

$\frac{\sqrt{26}}{3}$

```
p3 := 1^3 * f[1] + 2^3 * f[2] + 5^3 * f[5]
p3
```

$\frac{134}{3}$

$\mu_3 := p_3 - 3 * p_1 * p_2 + 2 * p_1{}^3$

μ_3

$$\frac{70}{27}$$

$\beta := \mu_3 / \sigma^3$

β

$$\frac{35}{13\sqrt{26}}$$

$$F_S[s\_] := \Phi\left[\sqrt{\frac{9}{\beta^2} + \frac{6 * (s - p_1)}{\sigma * \beta} + 1} - \frac{3}{\beta}\right]$$

$F_S[s]$

$$\Phi\left[-\frac{39\sqrt{26}}{35} + \sqrt{\frac{40771}{1225} + \frac{234}{35}\left(-\frac{8}{3} + s\right)}\right]$$

$$\text{Solve}\left[-\frac{39\sqrt{26}}{35} + \sqrt{\frac{40771}{1225} + \frac{234}{35}\left(-\frac{8}{3} + \Pi\right)} == 0.9505\right]$$

$\{\{\Pi \to 4.26776\}\}$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

[1] Κάκουλλος Θ. Ν., 1995, *Αναλογισμός - Τόμος I*, Αθήνα, Εκδόσεις συμμετρία.

[2] Κουτσόπουλος Κ., 1999, *Αναλογιστικά Μαθηματικά - Μέρος I*, Αθήνα, Εκδόσεις συμμετρία.

[3] Κουτσόπουλος Κ., 2009, *Σημειώσεις στο μάθημα Οικονομικά και Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά*, Π.Μ.Σ. Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, Αθήνα, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

[4] Λέκου Δ. Ι., 2010, *Προσδιορισμός αξιοπιστίας στο σχεδιασμό κατασκευών από σύνθετα υλικά (Διδακτορική Διατριβή)*, Πάτρα, Πανεπιστήμιο Πατρών.

[5] Νεγρεπόντης Σ., 1993, *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων μίας Μεταβλητής*, Αθήνα, Συμμετρία.

[6] Τσουλομήτης Α., 2012, *Σημειώσεις για το Μάθημα Κυρτή Γεωμετρία*, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών, Σάμος, Πανεπιστήμιο Σάμου.

[7] Χαραλαμπίδης Χ., 1993, *Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές - Τεύχος I*, Αθήνα, Εκδόσεις συμμετρία.

[8] Χαραλαμπίδης Χ., 1996, *Συνδυαστική - Τεύχος I*, Αθήνα, Εκδόσεις συμμετρία.

Ξένη

[1] Allais M., 1953, *Le comportement de l'homme rational devant le risque: critique des postulats et axioms de l'ecole Américaine*, Econometrica 21:503-46.

[2] Baumann K. and Hegerfeldt G. C, 1985, *A Noncumulative Marcinkiewicz Theorem*, Publications RIMS, Kyoto University 21:199-204.

[3] Beard R. E., Pentikäinen T., Pesonen E., 1984, *Risk Theory: The Stochastic Basis Of Insurance* (3rd edition), New York, N.Y.: Chapman and Hall.

[4] Borch K., 1969, *A note on Uncertainty Curves and Indifference Curves*, Review of Economics Studies, 36: 1-4.

[5] Boyce W. E. and Diprima R. C., 1997 (6th Edition), *Elementary Differential Equations and Boundary*, John Wiley and Sons, (σε μετάφραση στα ελληνικά από την Ομάδα Μεταπτυχιακών φοιτητών Τομέα Μαθηματικών Τ.Ε.Μ.Φ.Ε Ε.Μ.Π. με ευθύνη του Γραμμένου Θ. από τις Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π.)

[6] Brockett P. L., 1987, *Risk Aversion Is Not Aversion to Variance*, Working paper 87/88-2-10, University of Texas at Austin, Tex.: Department of Finance.

[7] Dhaene J. and Vyncke D., 2004, *The Individual Risk Model*, Encyclopedia of Actuarial Science, vol II, Wiley, 871-875.

[8] Feldestein M. S., 1969, *Mean-Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection*, Review of Economic Studies 36:5-12.

[9] Freeman J. and Modarres R., 2006, *Inverse Box- Cox: The Power-normal distribution,* Statistics & Probability Letters 76:764-772.

[10] Freifelder L. R., 1976, *A Decision Theoretic Approach to Insurance Ratemaking*, Philadelphia, Pa: The S.S. Huebner Foundation, Irwin Inc., Homewood, III.

[11] Friedman M. and Salvage L. J., 1948, *The Utility Analysis of Choices Involving Risk*, Journal of Political Economy 56: 279-304.

[12] Gerber H. U., 1979, *An introduction to Mathematical Risk Theory, Philadelphia*, Pa: The S.S. Huebner Foundation, distributed by Irwin. Inc., Homewood, III.

[13] Kaplan S. and Garrick B. J., 1981, *On the Quantitative Definition of Risk*, Risk Analysis I, no. 1:11-27.

[14] Kahn P. M., *Utility Theory,* 1969, TSA XXI: D353-61.

[15] Klugman S. A., Panjer H. H., Willmot G. E., 2004, Loss models from data to decisions (2nd edition), Wiley.

[16] Lauritzen S. L., 2002, *Theile: Pioneer in Statistics*, N.Y.: Oxford University Press Inc.

[17] Levich R. M., 2001, *International Financial Markets: Prices and Policies* (2nd edition), Mc Graw-Hill International Edition.

[18] Markowitz H., 1959, *Portfolio Selection*. New Haven, Conn: Yale University Press.

[19] McCord M. and Neufville R., 1983, *Fundamental Deficiency of Expected Utility Decision Analysis, In Multi-Objective Decision Making,* edited by S. French, L. C. Thomas, R. Hartley, and D. J. White. London: Academic Press.

[20] Newmann J. Von and Morgenstern O., 1947, *Theory of Games and Economic Behavior* (2nd edition). Princeton, N.Y: Princeton University Press.

[21] Pollard J. H., 1976, *Premiums Loading for Non-participating Business*, Journal of the Institute of Actuaries 103: 205-212.

[22] Promislow S. D., 1987, *Comparing Risks, Actuarial Science*, edited by I.B. MacNeill and G. J. Umphrey. New York, N.Y.: D. Reidel Publishing Co.

[23] Ramsay C. M., 1993, *Loading gross premiums for risk without using utility theory*, Transactions of Society of Actuaries (vol. 45).

[24] Reich A., 1986, *Properties of Premium Calculation Principles*, Insurance: Mathematics and Economics 5, no I: 97-101.

[25] Schmidli H., 2006, *Lecture notes on Risk Theory*, Institute of Mathematics, University of Cologne.

[26] Stone J. M., 1973, *A Theory of Capacity and the Insurance of Catastrophe Risks (Part I)*, Journal of Risk and Insurance 40, no.2: 231-243.

[27] Stoyan D., 1983, *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, New York, N.Y.: Wiley and Sons.

[28] Tobin J., 1958, *Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*, Review of Economics Studies 25: 65-86.

[29] Venter G. G., 1990, *Credibility*, Chapter 7 in Foundations of Casualty Actuarial Science, New York, N.Y.: Casualty Actuarial Society.

[30] Wicks M. A., 1998, *Cumulants*, University of Chicago.

Ιστοσελίδες

[1] Wikipaidia, http://en.wikipedia.org/wiki/Allais_paradox

[2] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_distribution

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

π.α.: παρούσα αξία

σ.κ.: συνάρτηση κατανομής

σ.π.π.: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

τ.μ.: τυχαία μεταβλητή