Παράρτημα 1.7.1. (Παράδειγμα 1.7.2., σελ. 42)

```
<<DiscreteMath`Combinatorica`
n =15;                                                    (σύστημα C (a, n: F))
a =5;
NC =n-a+1;                                                (πλήθος ε.σ.δ.)

Do[c[i] ={i, i+1, i+2, i+3, i+4}, {i, 1, NC}]
l =Range [NC];
S=0;

Do [
   m = KSubsets [l, r]; k=0;
   If[r>1,
                     Do [U= {};
                       Do [U=Union [U, c [m [[i, j]]]], {j, 1, r}];
                        g=Product [1-p [U [[w]]], {w, 1, Length [U]}];
                        k= k + g;
                     , {i, 1, Length[m]}],
    k= Sum [Product [1-p [c [i][[j]]], {j, 1, Length[c[i]]}], {i,1,NC}]];
  S= S + (-1) ^(r-1)*k;
  , {r, 1, NC}];
```

Παράρτημα 1.8.1.1 (Παράδειγμα 1.8.1.1., σελ. 47)

```
Timing [                                                  (σύστημα C (2, n: F))
n =6;
R = Sum [Binomial [n-j+1, j]*((1-p) ^j)*((p) ^ (n-j)), {j, 0, IntegerPart [(n+1)/2]}];]
```

Παράρτημα 1.8.1.2. (Παράδειγμα 1.8.1.1., σελ. 48)

```
Timing [
  p=0.9;                                                    (σύστημα C (k, n: F))
  n=100;
  k=18;
  Do[R[i] =1, {i, 0, k-1}];
  R[k] =1-(1-p) ^k;
  Do[R[j] =R [j-1]-R [j-k-1]*p*(1-p) ^ k , {j, k+1, n}];]
```

Παράρτημα 2.2.1. (Παράδειγμα 2.2.1., σελ. 60)

```
n=6250;                                                     (σύστημα C (k, n: F))
k=10;
Do [p[2*w] = 0.6; p[2*w+1] =0.7, {w, 0, IntegerPart[n/2]}];
Timing [
  Do[R[i] =1, {i, 0, k-1}];
  R[k] =1- Product[1-p[m],{m,1,k}];
  Do[ R[j ] = R[j-1] - R[j-k-1] * p[j-k] * Product[1-p[h], {h, j-k+1, j}] ,{j, k+1, n}];]
```

Παράρτημα 3.2.2.1.

Απόδειξη της Πρότασης 3.2.2.1. Έστω ότι για μια τυχαία διάταξη των N ε.σ.δ. κατασκευάζουμε τον πίνακα $\boldsymbol{Y} = (y_{ij})$ (με τον τρόπο που έχουμε περιγράψει). Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ο πίνακας είναι αντισυμμετρικός, δηλαδή ότι ισχύει

$$y_{ij} = -y_{ji} \text{ για κάθε } j, i \in \{1,..,N\} .$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν i και j, τέτοια ώστε,

$$y_{ji} = y_{ji} \neq 0$$

ή αλλιώς

$$y_{ji} = y_{ji} = 1 \text{ (ή } y_{ji} = y_{ji} = -1).$$

Άρα σ΄ αυτή τη διάταξη το C_i είναι αριστερά (δεξιά) του C_j και ταυτόχρονα το C_j αριστερά (δεξιά) του C_i, κάτι που είναι αδύνατον να συμβαίνει. Επίσης,

$$y_{ij}=0 \Leftrightarrow y_{ji}=0 \text{ (αφού } C_i \cap C_j = \emptyset \Leftrightarrow C_j \cap C_i = \emptyset)$$

οπότε

$$y_{ij} = -y_{ji} \text{ για κάθε } j,\ i\epsilon\{1,..,N\}$$

ή

$$y_{ij} = 1 \Leftrightarrow y_{ji} = -1 \text{ και } y_{ij} = 0 \Leftrightarrow y_{ji} = 0.$$

ή

$$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Y} = \mathbf{0}.$$

Τώρα έστω ότι υπάρχει i, τέτοιο ώστε για κάποιο από τα

$$(r,\ s)\epsilon\ K_+^i \times K_-^i$$

να ισχύει, $y_{rs} = 1$. Αυτό σημαίνει ότι,

το C_i θέλει αριστερά του το C_s και δεξιά του το C_r

και επιπλέον το C_s θέλει αριστερά του το C_r,

κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει. Άρα $y_{rs} = -1$ ή 0. Το ότι ο πίνακας είναι μοναδικός, είναι εμφανές (αφού τα $\boldsymbol{Y}_{iz}$ είναι μοναδικά). ■

Απόδειξη της Πρότασης 3.2.2.2. Ο πίνακας $\boldsymbol{Y}$, δεν θα δημιουργούσε διάταξη, εάν ένα τουλάχιστον C_j θα έπρεπε να βρίσκεται ταυτόχρονα σε δυο αντιφατικές θέσεις. Δηλαδή να καταλήγαμε στο ότι το C_j πρέπει να είναι δεξιά και αριστερά από κάποιο C_k (όπου βέβαια $C_j \cap C_\kappa \neq \emptyset$). Αυτό μπορεί να γίνει με δυο τρόπους: άμεσα ή έμμεσα.

Άμεσα όταν υπάρχουν C_k και C_j με $C_j \cap C_k \neq \emptyset$ και

$$y_{kj} = y_{jk} = 1 (\text{ή } -1) \Rightarrow \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Y} \neq \mathbf{0}.$$

Έμμεσα, όταν υπάρχουν C_k, C_λ και C_j με $C_j \cap C_k \neq \emptyset$, $C_j \cap C_\lambda \neq \emptyset$, $C_\lambda \cap C_k \neq \emptyset$ και έστω ότι

{έπρεπε να είναι, αριστερά του C_k το C_λ και δεξιά του το C_j,

ενώ ταυτόχρονα C_j αριστερά του C_λ}

αυτό συνεπάγεται ότι,

$$\exists\ \lambda, j, k:\ y_{\lambda j} = 1 \text{ με } (\lambda,\ j)\epsilon\ K_+^k \times K_-^k$$

Εφόσον όμως ο $\boldsymbol{Y}$ έχει τις ιδιότητες

$$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Y} = \mathbf{0},$$

$$y_{rs} \neq 1, \text{ για κάθε } (r,\ s)\epsilon\ K_+^i \times K_-^i \text{ και για κάθε } i\epsilon\{1,\ldots,N\},$$

παράγει τουλάχιστον μια διάταξη. ■

Απόδειξη της Πρότασης 3.2.2.3. Γνωρίζουμε ότι τα y_{ij} δίνονται από τη σχέση,

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ όταν το } j \in L_i^{(\pi)}, \\ -1, \text{όταν το } j \notin L_i^{(\pi)} \text{ ενώ } j \in T_i \\ 0, \text{ διαφορετικά}, \end{cases} \quad i, j=1,\ldots,N.$$

Έτσι οι πίνακες $\boldsymbol{Y}$ που αντιστοιχούν στις διατάξεις, Δ_1 και Δ_2 , έστω $\boldsymbol{Y}^{\Delta 1} = (\, y_{ij}^{\Delta 1} \,)$ και $\boldsymbol{Y}^{\Delta 2} = (\, y_{ij}^{\Delta 2} \,)$, αντίστοιχα, είναι ίδιοι αν και μόνο αν

$$\{\, y_{ij}^{\Delta 1} = y_{ij}^{\Delta 2} \text{, για κάθε } i, j\} \Leftrightarrow \{\, L_i^{(\Delta 1)} = L_i^{(\Delta 2)} \text{ για κάθε } i\}$$

$$\Leftrightarrow \Delta_1 \text{ και } \Delta_2 \text{ ισοδύναμες.}$$

Άρα,

$$\mathbf{Y}^{\Delta 1} = \mathbf{Y}^{\Delta 2} \Leftrightarrow \Delta_1 \text{ και } \Delta_2 \text{ ισοδύναμες.} \qquad \blacksquare$$