

Η συνάρτησης αξιοπιστίας

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε βασικές και απαραίτητες έννοιες της θεωρίας αξιοπιστίας. Θα ορίσουμε αρχικώς τη συνάρτηση δομής ενός συστήματος, διαμέσου των καταστάσεων των μονάδων του. Έπειτα θα επικεντρωθούμε στη μορφή των μονότονων συστημάτων, καθώς είναι τα μόνα με τα οποία θα ασχοληθούμε, στα πλαίσια της εργασίας. Έννοιες όπως τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας και διακοπής, το δυϊκό σύστημα, η διάσπαση σε *modules* κ.α., εξηγούνται αναλυτικώς. Ο ορισμός της συνάρτησης αξιοπιστίας, θα μας δώσει τη δυνατότητα να μελετήσουμε μια πτυχή, της στοχαστικής συμπεριφοράς των συστημάτων. Θα δούμε τύπους και μεθόδους υπολογισμού της, που εφαρμόζονται σε οποιοδήποτε σύστημα ή σε συγκεκριμένα συστήματα, ενώ αν το πλήθος των μονάδων γίνεται πολύ μεγάλο, θα καταλάβουμε πόσο δύσκολος είναι ο ακριβής προσδιορισμός της. Ο προγραμματισμός στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, θα γίνει μέσω του πακέτου *Mathematica 4.1*. Οι αποδείξεις των θεωρημάτων και των προτάσεων, που έχουν συμπεριληφθεί στο κεφάλαιο αυτό, δεν θα δοθούν αναλυτικά αφού ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί εύκολα να τις αναζητήσει σε οποιοδήποτε εγχειρίδιο θεωρίας αξιοπιστίας, για παράδειγμα στο *Barlow & Proschan (1975)*.

1.1 Συνάρτηση Δομής

Όπως είχαμε επισημάνει και στην εισαγωγή, τα συστήματα που θα μας απασχολήσουν αποτελούνται από μονάδες, οι οποίες είναι δυνατόν να βρίσκονται μόνο σε κατάσταση λειτουργίας ή μη λειτουργίας. Για να προσδιορίζουμε λοιπόν την κατάσταση μιας μονάδος, θα χρησιμοποιούμε τις δείκτριες μεταβλητές x_i όπου,

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{εάν η } i \text{ μονάδα λειτουργεί} \\ 0, & \text{εάν η } i \text{ μονάδα δεν λειτουργεί} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

για $i=1,2, \dots, n$, με n να είναι το πλήθος των μονάδων του συστήματος. Οι x_i δεν γράφονται συναρτήσει του χρόνου, κάτι που θα ήταν και περισσότερο ρεαλιστικό, διότι θα μελετήσουμε τα συστήματα, σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Χρησιμοποιώντας ένα διάνυσμα \mathbf{x} , το οποίο θα έχει για συντεταγμένες τις καταστάσεις των n μονάδων, δηλαδή

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

θα μπορούμε να βλέπουμε για τη στιγμή που ενδιαφερόμαστε, την κατάσταση λειτουργίας όλων των μονάδων. Για δυο διαφορετικά διανύσματα καταστάσεων \mathbf{x} και \mathbf{y} , θα λμμε ότι

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \text{ όταν } x_i \geq y_i \text{ για κάθε } i=1,2,\dots, n \text{ και}$$

$$\mathbf{x} > \mathbf{y} \text{ όταν } x_i \geq y_i \text{ για κάθε } i \text{ και ταυτόχρονα, υπάρχει τουλάχιστον ένα } j, \text{ με } x_j > y_j.$$

Παράλληλα με τις μονάδες και ολόκληρο το σύστημα, θα έχει τις ίδιες δυνατές καταστάσεις και έτσι εάν συμβολίσουμε με ϕ , τη μεταβλητή που φανερώνει την κατάσταση του συστήματος, θα έχουμε,

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{εάν το σύστημα λειτουργεί} \\ 0, & \text{εάν το σύστημα δεν λειτουργεί} \end{cases}.$$

Μια ακόμη από τις βασικές υποθέσεις που κάνουμε, είναι ότι η κατάσταση του συστήματος, επηρεάζεται μόνο από τις αντίστοιχες των μονάδων. Τότε είναι λογικό να γράφουμε,

$$\phi = \phi(\mathbf{x})$$

με \mathbf{x} το διάνυσμα καταστάσεων των μονάδων, όπου η $\phi(\mathbf{x})$ ορίζεται ως η συνάρτηση δομής του συστήματος (*structure function*). Το παρακάτω παράδειγμα θα ξεκαθαρίσει το ρόλο της $\phi(\mathbf{x})$.

Παράδειγμα 1.1.1

➤ Το **σειριακό σύστημα** γνωρίζουμε ότι λειτουργεί, αν και μόνο αν όλες οι μονάδες του λειτουργούν. Τότε αν για τη j μονάδα, έχουμε $x_j=0$, συνεπάγεται ότι και $\phi(\mathbf{x})=0$, ενώ αν για κάθε i είναι $x_i=1$, παίρνουμε $\phi(\mathbf{x})=1$. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση δομής του σειριακού συστήματος δίδεται από τη σχέση,

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i = \min \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

➤ Αντίστοιχα, για το **παράλληλο σύστημα** ξέρουμε ότι $\phi(\mathbf{x})=1$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα j τέτοιο ώστε, $x_j=1$. Άρα,

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = \max \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}.$$

Η ποσότητα όπου το $1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$ συμβολίζεται συνήθως με $\prod_{i=1}^n x_i$.

➤ Το **k από τα n : G**, λειτουργεί εάν k τουλάχιστον μονάδες δουλεύουν. Έτσι,

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0, & \text{εάν } \sum_{i=1}^n x_i < k \end{cases}$$

(το άθροισμα $\sum_{i=1}^n x_i$, δίνει το πλήθος των μονάδων που δουλεύουν, λόγω της (1.1.1))

➤ Το **k από τα n : F**, που αποτυγχάνει όταν k τουλάχιστον μονάδες χαλάσουν, έχει συνάρτηση δομής που δίνεται από τον τύπο

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } \sum_{i=1}^n x_i > n - k \\ 0, & \text{εάν } \sum_{i=1}^n x_i \leq n - k \end{cases}$$

αφού

$$[\text{Πλήθος χαλασμένων μονάδων}] \geq k \Leftrightarrow n - [\text{Πλήθος μονάδων σε λειτουργία}] \geq k \Leftrightarrow$$

$$[\text{Πλήθος μονάδων σε λειτουργία}] \leq n - k$$

➤ Τέλος η $\phi(\mathbf{x})$ του Γραμμικού συνεχόμενο- k -από- n : F είναι,

$$\phi(\mathbf{x}) = [1-(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_k)] [1-(1-x_2)(1-x_3)\dots(1-x_{k+1})] \dots [1-(1-x_{n-k+1})(1-x_{n-k+2})\dots(1-x_n)]$$

διότι για να αποτύχει το σύστημα πρέπει να έχουμε k συνεχόμενες μονάδες με $x_i=0$, για κάθε μια απ' αυτές. Έτσι εάν σε κάθε k συνεχόμενες μονάδες, συναντάμε μια τουλάχιστον μονάδα που να λειτουργεί, τότε και $\phi(\mathbf{x})=1$. ■

Η $\phi(\mathbf{x})$, σαν μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\{0,1\}^n$ και πεδίο τιμών το $\{0,1\}$, έχει αρκετά χρήσιμες ιδιότητες και η παρακάτω πρόταση μας δίνει μια από τις σημαντικότερες.

Πρόταση 1.1.1.(Pivotal Decomposition) Αν $\phi(\mathbf{x})$ είναι η συνάρτηση δομής ενός συστήματος αξιοπιστίας, με n μονάδες, τότε

$$\phi(\mathbf{x}) = x_i \phi(1_i, \mathbf{x}) + (1-x_i) \phi(0_i, \mathbf{x})$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ και για κάθε $i \in \{1,2,\dots,n\}$, όπου το διάνυσμα $(1_i, \mathbf{x})$ είναι το \mathbf{x} , με άσσο στην θέση i (αντίστοιχα το $(0_i, \mathbf{x})$).

Η χρησιμότητα της παραπάνω πρότασης έγκειται στο ότι ανάγει τη μελέτη ενός συστήματος με n μονάδες, στη μελέτη συστήματος $n-1$ μονάδων (εκείνου που έχει την i μονάδα είτε πάντα χαλασμένη, είτε πάντα σε λειτουργία). Άμεσο επακόλουθο της Πρότασης 1.1.1 είναι το παρακάτω.

Λήμμα 1.1.1. Αν $\phi(\mathbf{x})$ είναι η συνάρτηση δομής ενός συστήματος αξιοπιστίας με n μονάδες, τότε

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}} \prod_{j=1}^n [x_j^{y_j} (1-x_j)^{1-y_j}] \phi(\mathbf{y})$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σ' όλα τα διανύσματα $\mathbf{y} \in \{0,1\}^n$ (το πλήθος των προσθετέων του αθροίσματος είναι 2^n).

Βέβαια ο υπολογισμός της $\phi(\mathbf{x})$ μέσω της παραπάνω σχέσης είναι πολύ δύσκολος, διότι απαιτείται να γνωρίζουμε τις τιμές της, για 2^n διανύσματα. Έτσι για ένα σύστημα με εννέα μονάδες, πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα 512 όρων.

Παράδειγμα 1.1.2. Έστω ένα σύστημα αξιοπιστίας με τρεις μονάδες, όπου για κάθε διάνυσμα κατάστασης \mathbf{y} , η $\phi(\mathbf{y})$ δίνεται στον Πίνακα 1.1.1. Τότε από το Λήμμα 1.1.1 έχουμε,

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{y}} \left[\prod_{j=1}^3 x_j^{y_j} (1-x_j)^{1-y_j} \phi(\mathbf{y}) \right] \\
&= (x_1^0 (1-x_1)^1 x_2^0 (1-x_2)^1 x_3^0 (1-x_3)^1) \phi(0,0,0) + \\
&\quad (x_1^0 (1-x_1)^1 x_2^0 (1-x_2)^1 x_3^1 (1-x_3)^0) \phi(0,0,1) + \dots + \\
&\quad (x_1^1 (1-x_1)^0 x_2^1 (1-x_2)^0 x_3^1 (1-x_3)^0) \phi(1,1,1) \\
&= (1-x_1) x_2 (1-x_3) + (1-x_1) (1-x_2) x_3 + x_1 (1-x_2) x_3 + x_1 x_2 x_3 \\
&= x_2 + x_3 - 2x_2 x_3 - x_1 x_2 + 2x_1 x_2 x_3
\end{aligned}$$

Πίνακας 1.1.1

\mathbf{y}			$\phi(\mathbf{y})$
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	1

■

Είναι πιθανόν σε κάποια συστήματα, μερικές μονάδες να μην παίζουν σημαντικό ή κανένα ρόλο, στη διαμόρφωση των τιμών της $\phi(\mathbf{x})$. Από τη παρατήρηση αυτή προκύπτει το εξής,

Ορισμός 1.1.1. Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση δομής $\phi(\mathbf{x})$. Η i μονάδα θα ονομάζεται **μη σχετική** (*irrelevant*) για το σύστημα εάν ισχύει,

$$\phi(1_i, \mathbf{x}) = \phi(0_i, \mathbf{x}), \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \{0,1\}^{n-1}$$

στην αντίθετη περίπτωση θα λέγεται **σχετική**.

Δηλαδή η αλλαγή κατάστασης σε μια μη σχετική μονάδα, δεν αλλάζει την κατάσταση του συστήματος και ουσιαστικά, δεν επηρεάζει τη λειτουργία του.

1.2 Μονότονα Συστήματα

Ας φανταστούμε ένα σύστημα το οποίο έχει κάποιες μονάδες χαλασμένες. Τότε αντικαθιστώντας τις μονάδες αυτές με αντίστοιχες που λειτουργούν, το λιγότερο που θα περιμέναμε είναι το σύστημα να παραμείνει στην ίδια κατάσταση ή να βελτιωθεί. Αν αυτό δεν συμβαίνει, σίγουρα έχουμε να κάνουμε με ένα σύστημα με κακή σχεδίαση. Οι προηγούμενες σκέψεις δικαιολογούν γιατί στην εργασία θα περιοριστούμε σε μια κλάση συστημάτων (με ιδιότητες όχι σαν τη προαναφερθείσα), τα οποία προσδιορίζονται από ένα είδος μονοτονίας.

Ορισμός 1.2.1. Ένα σύστημα με συνάρτηση δομής $\phi(x)$, καλείται **μονότονο** (*coherent*) εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες,

- κάθε μονάδα του είναι σχετική και
- για κάθε $x > y$ ισχύει $\phi(x) \geq \phi(y)$.

Το 1961 όταν οι *Birnbaum et al* (1961), πρωτοεισήγαγαν την έννοια του μονότονου συστήματος, το όρισαν ως ένα σύστημα για το οποίο, ισχύουν τα εξής:

- $x > y \Rightarrow \phi(x) \geq \phi(y)$,
- $\phi(\mathbf{0})=0$ και $\phi(\mathbf{1})=1$.

Επίσης όρισαν ως *semi-coherent* το σύστημα που ικανοποιεί μόνο την πρώτη ιδιότητα. Βέβαια ένα μονότονο σύστημα (μέσω του Ορισμού 1.2.1) αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί τη δεύτερη συνθήκη, των *Birnbaum et al* (τα μόνα συστήματα που είναι *semi-coherent* και όχι *coherent*, είναι τα τετριμμένα $\phi(x)=1$ ή $\phi(x)=0$ για κάθε x). Να σημειώσουμε ότι όλα τα συστήματα που έχουμε αναφέρει στην Εισαγωγή, είναι μονότονα. Ο μοναδικός τρόπος (και καθόλου εύκολος) για να ελέγξουμε εάν κάποιο σύστημα είναι μονότονο, είναι να βρούμε τις τιμές της $\phi(x)$ για όλα τα διανύσματα κατάστασης και να εξακριβώσουμε την ισχύ των δυο προϋποθέσεων.

Επιπλέον για κάθε συνάρτηση, $\phi: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες του Ορισμού 1.2.1, υπάρχει τουλάχιστον ένα μονότονο σύστημα, με συνάρτηση δομής ϕ .

Θεώρημα 1.2.1. Έστω ένα μονότονο σύστημα με n μονάδες και συνάρτηση δομής ϕ . Τότε,

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \phi(\mathbf{x}) \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$.

Το θεώρημα αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι, μας φανερώνει ότι οποιοδήποτε μονότονο σύστημα έχει καλύτερη λειτουργία από ένα σειριακό και χειρότερη από ένα παράλληλο, όταν όλα χρησιμοποιούν τις ίδιες μονάδες.

Θεώρημα 1.2.2. Για ένα μονότονο σύστημα με n μονάδες, ισχύουν

- $\phi(\mathbf{0})=0$ και $\phi(\mathbf{1})=1$
- $\phi(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{y}) \geq \prod \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})$
- $\phi(\mathbf{x} \mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x})$,

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, $\mathbf{x} \sqcup \mathbf{y} = (\prod x_1 y_1, \prod x_2 y_2, \dots, \prod x_n y_n)$ και

$\mathbf{x} \mathbf{y} = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$ (υπενθυμίζεται ότι: $\prod x_1 y_1 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)$).

Επομένως (χρησιμοποιώντας τη δεύτερη σχέση) αν έχω στη διάθεση μου $2n$ μονάδες (n με διάλυμα κατάστασης \mathbf{x} και n με \mathbf{y}), επιθυμώντας να φτιάξω μονότονα συστήματα με συγκεκριμένη μορφή (ή συνάρτηση δομής), τότε είναι προτιμότερο να θεωρήσω σαν μια μονάδα, δυο παράλληλα συνδεδεμένες μονάδες (μια x_i και μια y_i), παρά να συνδέσω παράλληλα, δυο όμοια συστήματα με n μονάδες το κάθε ένα (κάτι παρόμοιο ισχύει και για την τρίτη σχέση).

Παράδειγμα 1.2.1. Έστω ότι έχω έξι όμοιες μονάδες και θέλω να φτιάξω ένα σειριακό σύστημα (δηλαδή ένα σύστημα που θα δουλεύει όταν λειτουργούν και οι έξι μονάδες). Τότε εάν συμβολίσω με $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, τις τρεις πρώτες και με $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, τις υπόλοιπες, το σύστημα του Σχήματος 1.2.1, με συνάρτηση δομής,

$$\phi(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^3 [1 - (1 - x_i)(1 - y_i)]$$

είναι καλύτερο από το αντίστοιχο του Σχήματος 1.2.2, του οποίου η συνάρτηση δομής είναι,

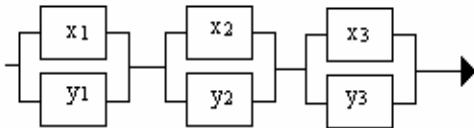
$$\phi'(x,y) = \prod \phi(x)\phi(y) = 1 - (1 - \phi(x))(1 - \phi(y))$$

(η ϕ στην περίπτωση μας δίδεται από τη σχέση,

$$\phi(w) = 1 - \prod_{i=1}^3 (1 - w_i)$$

Ασφαλώς και τα δυο συστήματα είναι χειρότερα ή το πολύ ίδια, με το «απλό» σειριακό σύστημα, λαμβάνοντας υπόψη το Θεώρημα 1.2.1.

Σχήμα 1.2.1



Σχήμα 1.2.2



□

1.3 Ελάχιστα Σύνολα Λειτουργίας και Διακοπής

Η μελέτη των μονότονων συστημάτων, γίνεται τις περισσότερες φορές ευκολότερη και πιο ενδιαφέρουσα, χρησιμοποιώντας τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας και τα ελάχιστα σύνολα διακοπής. Θεμελιώδης εργασία, όπου καθιερώθηκαν και αναδείχθηκε ο ρόλος των παραπάνω συνόλων, είναι αυτή των *Birnbaum et al* (1961). Για να καταλάβουμε τι ακριβώς είναι αυτά τα σύνολα, θα εισάγουμε δυο έννοιες, άμεσα συνδεδεμένες μ' αυτά.

Ορισμός 1.3.1. Έστω ϕ η συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος, με n μονάδες. Τότε,

- ένα διάνυσμα κατάστασης $x \in \{0,1\}^n$ θα καλείται **διάνυσμα λειτουργίας** (*path vector*) αν $\phi(x)=1$,
- ένα διάνυσμα κατάστασης $x \in \{0,1\}^n$ θα λέγεται **ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας** (*minimal path vector*) αν

$$\phi(x)=1 \text{ και } \phi(y)=0 \text{ για κάθε } y < x.$$

Επιπλέον,

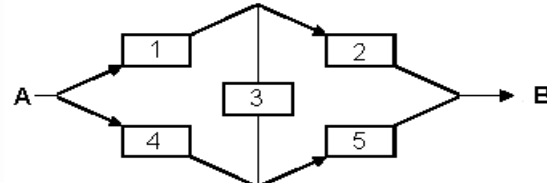
- ένα διάνυσμα κατάστασης $x \in \{0,1\}^n$ θα καλείται **διάνυσμα διακοπής** (*cut vector*) αν $\phi(x)=0$,
- ένα διάνυσμα κατάστασης $x \in \{0,1\}^n$ θα λέγεται **ελάχιστο διάνυσμα διακοπής** (*minimal cut vector*) αν

$$\phi(x)=0 \text{ και } \phi(y)=1 \text{ για κάθε } y > x.$$

Από τον παραπάνω ορισμό και τη μονοτονία του συστήματος, συμπεραίνουμε ότι εάν ένα x είναι διάνυσμα λειτουργίας, τότε και κάθε $y > x$, είναι επίσης διάνυσμα λειτουργίας. Όμοια, εάν το x ήταν διάνυσμα διακοπής, το ίδιο θα ίσχυε και για κάθε $y < x$. Να επισημάνουμε ότι και εδώ για την εύρεση των ελάχιστων διανυσμάτων διακοπής ή λειτουργίας, θα πρέπει να εξετάσουμε τις τιμές της $\phi(x)$, για κάθε ένα από τα 2^n διανύσματα κατάστασης.

Παράδειγμα 1.3.1. Το σειριακό σύστημα λειτουργεί εάν όλες οι μονάδες του δουλεύουν. Οπότε το μοναδικό διάνυσμα λειτουργίας του είναι το $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1)$, το οποίο είναι και ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας (ε.δ.λ.). Στο παράλληλο σύστημα, αρκεί να δουλεύει μόνο μια μονάδα, άρα τα n διανύσματα που έχουν μόνο ένα άσσο, είναι τα ε.δ.λ. του συστήματος. Για τη γέφυρα, παρατηρούμε ότι το $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 0, 0)$

είναι διάνυσμα λειτουργίας και μάλιστα βλέπουμε ότι για κάθε $\mathbf{y} < \mathbf{x}$ ισχύει, $\phi(\mathbf{y})=0$, οπότε είναι και ε.δ.λ. . Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι τα ε.δ.λ. της γέφυρας είναι τα εξής,



$$\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0, 0, 0), \mathbf{x}_2 = (0, 0, 0, 1, 1), \mathbf{x}_3 = (1, 0, 1, 0, 1) \text{ και } \mathbf{x}_4 = (0, 1, 1, 1, 0).$$

Ακόμη εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα ελάχιστα διανύσματα διακοπής (ε.δ.δ.) του είναι,

$$\mathbf{y}_1 = (0, 1, 1, 0, 1), \mathbf{y}_2 = (1, 0, 1, 1, 0), \mathbf{y}_3 = (0, 1, 0, 1, 0) \text{ και } \mathbf{y}_4 = (1, 0, 0, 0, 1). \quad \blacksquare$$

Ορισμός 1.3.2. Έστω ϕ η συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος, με n μονάδες.

- Αν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, είναι ένα διάνυσμα λειτουργίας, τότε το σύνολο

$$P_{\mathbf{x}} = \{i: x_i=1\}, \text{ με } 1 \leq i \leq n$$

καλείται **σύνολο λειτουργίας** (*path set*), ενώ αν το \mathbf{x} ήταν ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας, το $P_{\mathbf{x}}$ θα λέγεται **ελάχιστο σύνολο λειτουργίας** (*minimal path set*). Το σύνολο όλων των ελάχιστων συνόλων λειτουργίας (ε.σ.λ.), θα συμβολίζεται με \mathbf{P} .

- Αν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, είναι ένα διάνυσμα διακοπής, τότε το σύνολο

$$C_{\mathbf{x}} = \{i: x_i=0\}, \text{ με } 1 \leq i \leq n$$

καλείται **σύνολο διακοπής** (*cut set*), ενώ αν το \mathbf{x} ήταν ελάχιστο διάνυσμα διακοπής, το $C_{\mathbf{x}}$ θα λέγεται **ελάχιστο σύνολο διακοπής** (*minimal cut set*). Το σύνολο όλων των ελάχιστων συνόλων διακοπής (ε.σ.δ.), θα συμβολίζεται με \mathbf{C} .

Αποδεικνύεται εύκολα ότι για κάθε σ.λ., υπάρχει ένα ε.σ.λ., που είναι υποσύνολό του. Έτσι γίνεται φανερό, ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη λειτουργία ενός συστήματος (εννοούμε πάντα μονότονου), είναι η λειτουργία όλων των μονάδων κάποιου ε.σ.λ. Αντιθέτως, η ύπαρξη

ενός ε.σ.δ. με όλες τις μονάδες χαλασμένες, αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την αποτυχία του συστήματος. Ασφαλώς, οποιοδήποτε υπερσύνολο, ενός συνόλου λειτουργίας (διακοπής) είναι και αυτό σύνολο λειτουργίας (διακοπής). Τέλος, κάθε υποσύνολο ενός ε.σ.λ. (ε.σ.δ.) είναι σύνολο διακοπής (λειτουργίας).

Παράδειγμα 1.3.2. Τα ε.σ.δ. ενός $C_L(k, n; F)$ είναι τα $n-k+1$ παρακάτω σύνολα,

$$\{1, 2, \dots, k\}, \{2, 3, \dots, k+1\}, \{3, 4, \dots, k+2\}, \dots, \{n-k+1, n-k+2, \dots, n\}.$$

Για το Διδιάστατο συνεχόμενα- (r, s) -από- (m, n) : $F(2D-C(r, s; m, n; F))$ γνωρίζουμε ότι δεν λειτουργεί αν βρεθεί ένα υποπίνακας του $m \times n$, διαστάσεως τουλάχιστον $r \times s$, με όλες τις μονάδες του χαλασμένες. Έστω ότι η μονάδα

στην i γραμμή και j στήλη, συμβολίζεται με (i, j) . Τότε οι μονάδες του άνω αριστερά υποπίνακα διατάσεως $r \times s$, είναι όλα τα στοιχεία του Καρτεσιανού γινομένου,

$$A_i \times B_j,$$

όπου,

$A_i = \{1, 2, 3, \dots, r\}$ και $B_j = \{1, 2, \dots, s\}$. Το πλήθος των υποπινάκων με διάσταση $r \times s$, είναι

$$(n-s+1)(m-r+1),$$

όσα είναι δηλαδή και τα ε.σ.δ. Έτσι τα ε.σ.δ. περιγράφονται από τη σχέση,

$$C_{(i,j)} = \{(i, j): (i, j) \in A_i \times B_j\},$$

όπου,

$$A_i = \{t, t+1, t+2, \dots, t+r-1\}, \text{ για } t=1, 2, \dots, m-r+1 \text{ και}$$

$$B_j = \{f, f+1, f+2, \dots, f+s-1\}, \text{ για } f=1, 2, \dots, n-s+1. \quad \blacksquare$$

Ένα χρήσιμο θεώρημα που συνδέει τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας, με το εάν μια μονάδα είναι σχετική ή όχι, είναι το ακόλουθο (Birnbbaum et al (1961), σελ. 64).

Σχήμα 1.3.1

(1,1)	(1,2)	(1,3)	...	(1,s)	...	(1,n)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	...	(2,s)	...	(2,n)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	...	(3,s)	...	(3,n)
⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
(r,1)	(r,2)	(r,3)	...	(r,s)	...	(r,n)
⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
(m,1)	(m,2)	(m,3)	...	(m,s)	...	(m,n)

Θεώρημα 1.3.1. Μια μονάδα είναι σχετική εάν και μόνο εάν, περιέχεται σε τουλάχιστον ένα ελάχιστο σύνολο λειτουργίας ή διακοπής.

Τα ε.σ.λ. και ε.σ.δ. μπορούν να χρησιμοποιηθούν, για την αναπαράσταση οποιοδήποτε μονότονου, συστήματος. Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, ένα σύστημα θα λειτουργεί μόνο εάν υπάρχει κάποιο ε.σ.λ. με όλες τις μονάδες του να δουλεύουν. Δηλαδή, εάν για κάθε ε.σ.λ. P_i , υπολογίσουμε τις ποσότητες $\pi_i = \prod_{j \in P_i} P_j$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τα ε.σ.λ. σαν απλές μονάδες (με αξιοπιστίες π_i), με το σύστημα να λειτουργεί, αν μία από αυτές δουλεύει. Η μορφή του συστήματος έτσι, παριστάνεται ισοδύναμα με ένα παράλληλο ιδεατό σύστημα με μονάδες τα ε.σ.λ. (ιδεατό διότι οι μονάδες που υπάρχουν σε παραπάνω από ένα ε.σ.λ., θεωρούνται ως διαφορετικές, που όμως βρίσκονται πάντα στην ίδια κατάσταση-γεγονός που είναι δύσκολο να συμβαίνει). Παρόμοια, χρησιμοποιώντας τα ε.σ.δ. λέμε ότι το σύστημα θα αποτύχει εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα ε.σ.δ. με όλες τις μονάδες του χαλασμένες. Εάν λοιπόν, μεταχειριστούμε πάλι τα ε.σ.δ. σαν απλές μονάδες, ανάγουμε το σύστημα σε ένα ιδεατό σειριακό σύστημα.

Αναλυτικά, για ένα σύστημα με ε.σ.λ. $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_M\}$ και ε.σ.δ. $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\}$ ορίζουμε, τις συναρτήσεις,

$$\gamma_j = \begin{cases} 1, & \text{όταν όλες οι μονάδες του } P_j \text{ λειτουργούν} \\ 0, & \text{όταν τουλάχιστον μια μονάδα του } P_j \text{ αποτύχει} \end{cases}, \text{ για } j=1, \dots, M$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{όταν τουλάχιστον μια μονάδα του } C_j \text{ λειτουργεί} \\ 0, & \text{όταν όλες οι μονάδες του } C_j \text{ αποτύχουν} \end{cases}, \text{ για } j=1, \dots, N$$

ή ισοδύναμα,

$$\gamma_j = \prod_{i \in P_j} x_i \text{ και } \delta_j = 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i).$$

Τότε για τη η συνάρτηση δομής του συστήματος έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.3.2. Για ένα μονότονο σύστημα με ε.σ.λ. τα $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_M\}$ και ε.σ.δ. $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\}$ ισχύει,

$$\phi(x) = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \gamma_j) = \prod_{j=1}^N \delta_j, \text{ για κάθε } x \in \{0, 1\}^n.$$

ή ισοδύναμα,

$$\phi(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq j \leq M} \gamma_j = \max_{1 \leq j \leq M} \min_{i \in P_j} x_i \quad \text{και} \quad \phi(\mathbf{x}) = \min_{1 \leq j \leq N} \delta_j = \min_{1 \leq j \leq N} \max_{i \in C_j} x_i .$$

Ως εκ τούτου, κάθε σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί σαν παράλληλο ή σειριακό, γνωρίζοντας όλα τα ε.σ.λ. ή ε.δ.δ., αντίστοιχα.

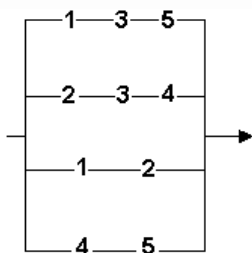
Παράδειγμα 1.3.3. Έχοντας βρει στο Παράδειγμα 1.3.1 τα ε.δ.δ. και τα ε.δ.λ. της γέφυρας, παίρνουμε ότι,

$$P_1 = \{1,2\}, P_2 = \{4,5\}, P_3 = \{1,3,5\} \text{ και } P_4 = \{2,3,4\}$$

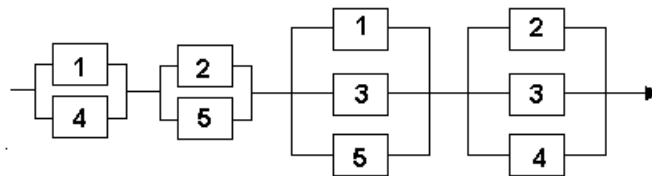
$$C_1 = \{1,4\} \quad C_2 = \{2,5\} \quad C_3 = \{1,3,5\} \text{ και } C_4 = \{2,3,4\}$$

Επομένως δυο ισοδύναμες αναπαραστάσεις της γέφυρας είναι,

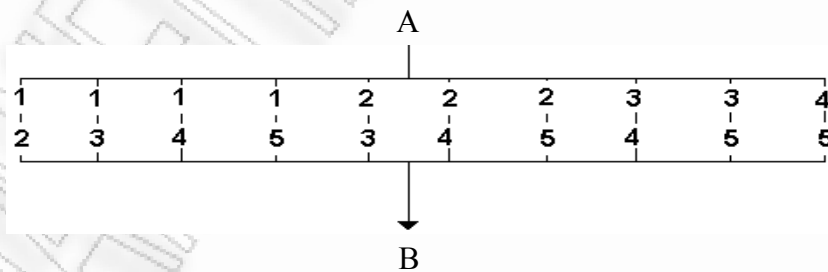
Αναπαράσταση μεσω των Ε.Σ.Λ.



Αναπαράσταση μεσω των Ε.Δ.Δ.



Παράδειγμα 1.3.4. Το k από τα n : G λειτουργεί εάν υπάρχουν k μονάδες που να δουλεύουν. Επομένως τα ε.σ.λ. του, είναι όλα τα υποσύνολα του $\{1,2,\dots, n\}$, με πληθάρημο k . Ειδικά για το 2 από τα 5: G η ισοδύναμη αναπαράσταση του είναι,



1.4 Δυϊκό Σύστημα

Γνωρίζουμε ότι για κάθε συνάρτηση $\phi: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες του Ορισμού 1.2.1, υπάρχει ένα μονότονο σύστημα, με συνάρτηση δομής την ϕ . Ας πάρουμε τώρα ένα μονότονο σύστημα (n μονάδων) με συνάρτηση δομής ϕ . Τότε η συνάρτηση ϕ^D που ορίζεται από τη σχέση,

$$\phi^D(\mathbf{x}) = 1 - \phi(\mathbf{1} - \mathbf{x})$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ και $\mathbf{1} - \mathbf{x} = (1 - x_1, 1 - x_2, 1 - x_3, \dots, 1 - x_n)$, αποδεικνύεται ότι είναι συνάρτηση δομής, ενός μονότονου συστήματος. Το σύστημα, στο οποίο αντιστοιχείται η ϕ^D , ονομάζεται *δυϊκό (dual system)*, του αρχικού συστήματος (του *πρωτεύοντος*). Εύκολα μπορούν να αποδειχθούν τα παρακάτω,

- το \mathbf{x} είναι ε.δ.λ.(δ.λ.) του πρωτεύοντος αν και μόνο αν το $\mathbf{1} - \mathbf{x}$ είναι ε.δ.δ.(δ.δ.) του δυϊκού,
- το \mathbf{x} είναι ε.δ.δ.(δ.δ.) του πρωτεύοντος αν και μόνο αν το $\mathbf{1} - \mathbf{x}$ είναι ε.δ.λ.(δ.λ.) του δυϊκού.

Άμεσα εξάγουμε και τα ακόλουθα,

- κάθε ε.σ.λ.(σ.λ.) του πρωτεύοντος είναι ε.σ.δ.(σ.δ.) του δυϊκού
- κάθε ε.σ.δ.(σ.δ.) του πρωτεύοντος είναι ε.σ.λ.(σ.λ.) του δυϊκού.

Επομένως αν γνωρίζουμε τα ε.σ.δ. ή ε.σ.λ. ενός συστήματος, τότε χωρίς δυσκολία μπορούμε να κατασκευάσουμε το δυϊκό του. Ακόμη, ισχύει ότι $(\phi^D)^D = \phi$, δηλαδή το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύον. Όπως θα δούμε και στο παράδειγμα 1.4.3. το δυϊκό μερικών συστημάτων, είναι το ίδιο το σύστημα.

Παράδειγμα 1.4.1. Έστω το k από τα n : F το οποίο έχει συνάρτηση δομής,

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } \sum_{i=1}^n x_i > n - k \\ 0, & \text{εάν } \sum_{i=1}^n x_i \leq n - k \end{cases}$$

τότε για το δυϊκό του ισχύει,

$$\phi^D(\mathbf{x}) = 1 \Leftrightarrow 1 - \phi(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1 \Leftrightarrow \phi(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (1 - x_i) \leq n - k \Leftrightarrow n - \sum_{i=1}^n x_i \leq n - k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq k$$

ενώ,

$$\phi^D(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow 1 - \phi(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \phi(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (1 - x_i) > n - k \Leftrightarrow n - \sum_{i=1}^n x_i > n - k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i < k.$$

Άρα,

$$\phi^D(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0, & \text{εάν } \sum_{i=1}^n x_i < k \end{cases}$$

(δηλαδή είναι το k από τα n : G). ■

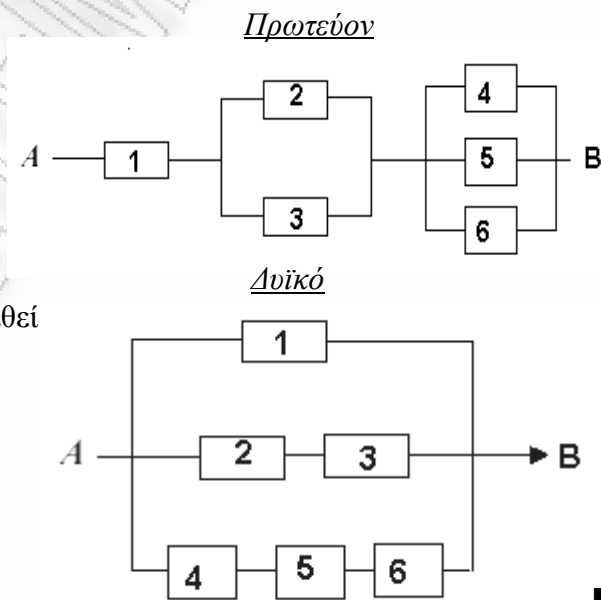
Παράδειγμα 1.4.2. Το διπλανό σύστημα έχει ε.σ.δ. τα,

$C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2, 3\}$ και $C_3 = \{4, 5, 6\}$,

οπότε τα ε.σ.λ. του δυϊκού συστήματος θα είναι,

$P_1^D = \{1\}$, $P_2^D = \{2, 3\}$ και $P_3^D = \{4, 5, 6\}$.

Επομένως γραφικά το δυϊκό μπορεί να παρασταθεί από το διπλανό σχήμα. Δηλαδή οι παράλληλες συνδέσεις έγιναν σειριακές και αντίστροφα.

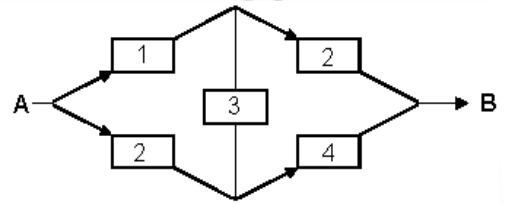


Παράδειγμα 1.4.3. Τα ε.σ.λ. και ε.σ.δ του διπλανού συστήματος (το οποίο

είναι μονότονο), είναι

$P_1=\{1,2\}$, $P_2=\{2,4\}$, $P_3=\{1,3,4\}$ και $P_4=\{2,3\}$,

$C_1=\{1,2\}$ $C_2=\{2,4\}$ $C_3=\{1,3,4\}$ και $C_4=\{2,3\}$.



Επομένως, επειδή τα ε.σ.λ. του συστήματος, ταυτίζονται με τα ε.σ.δ., έχουμε,

$$\phi^D(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \prod_{i \in P_j^D} x_i) = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \prod_{i \in C_j} x_i) = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \prod_{i \in P_j} x_i) \Rightarrow$$

$$\phi^D(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}). \quad \blacksquare$$

Τέλος αναφέρουμε ενδεικτικώς, ότι τα δικά των Γραμμικό (Κυκλικό) συνεχόμενα- k -από- n : F και του Γραμμικό (Κυκλικό) συνεχόμενα- k -από- r -από- n : F , είναι τα Γραμμικό (Κυκλικό) συνεχόμενα- k -από- n : G και Γραμμικό (Κυκλικό) συνεχόμενα- k -από- r -από- n : G , αντίστοιχα.

1.5 Διάσπαση σε Modules

Το 1965 οι *Birnbaum & Esary*, παρέθεσαν μια νέα μέθοδο υπολογισμού της συνάρτησης δομής ενός συστήματος. Αυτή βασιζόταν στη διάσπαση του αρχικού συστήματος, σε ένα αριθμό μικρότερων υποσυστημάτων, τα *modules*. Το 1970 ο *Bodin*, χρησιμοποίησε τα *modules*, για τη βελτίωση των φραγμάτων της συνάρτησης αξιοπιστίας.

Ορισμός 1.5.1. Έστω ένα μονότονο σύστημα με συνάρτηση δομής ϕ και σύνολο μονάδων $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Ακόμη θεωρούμε τα σύνολα $\{M_i, i=1, \dots, r\}$, τα οποία αποτελούν μια διαμέριση του I_n , δηλαδή,

$$M_i \cap M_j = \emptyset \text{ για } i \neq j \text{ και } \cup M_i = I_n.$$

Τότε εάν οι μονάδες κάθε M_i ξεχωριστά, είναι συνδεδεμένες έτσι ώστε να αποτελούν ένα μονότονο σύστημα με συνάρτηση δομής $\psi_i(x^{M_i})$ (όπου το x^{M_i} είναι το διάνυσμα με συντεταγμένες τις δείκτριες των μονάδων, που ανήκουν στο M_i) και επιπλέον η συνάρτηση ϕ μπορεί να γράφει στη μορφή,

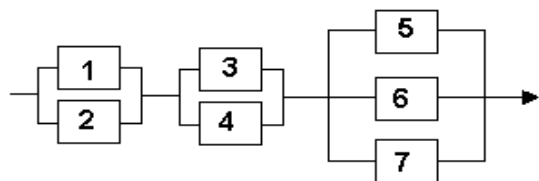
$$\phi(x) = \psi(\psi_1(x^{M_1}), \psi_2(x^{M_2}), \dots, \psi_r(x^{M_r}))$$

όπου ψ είναι μια συνάρτηση δομής, με διάνυσμα καταστάσεων το $y(x) = (\psi_1(x^{M_1}), \psi_2(x^{M_2}), \dots, \psi_r(x^{M_r}))$, θα λέμε ότι έχουμε μια **διάσπαση σε modules** (*modular decomposition*) του αρχικού συστήματος.

Η μέθοδος της *modular decomposition* είναι πολύ χρήσιμη κυρίως σε μεγάλα συστήματα. Μας δίδεται η δυνατότητα να υπολογίσουμε τη συνάρτηση δομής, μικρών συστημάτων και ύστερα αντιμετωπίζοντάς τα σαν μονάδες, βρίσκουμε τη συνάρτηση δομής ολόκληρου του συστήματος.

Παράδειγμα 1.5.1. Έστω το μονότονο σύστημα του παρακάτω σχήματος. Κατευθείαν, σαν μια εύκολη διαμέριση των μονάδων, παίρνουμε την,

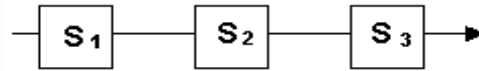
$$M_1 = \{1, 2\}, M_2 = \{3, 4\} \text{ και } M_3 = \{5, 6, 7\}.$$



Κάθε M_i δημιουργεί ένα παράλληλο υποσύστημα, με

$$\psi_1(x^{M_1})=1-(1-x_1)(1-x_2), \psi_2(x^{M_2})=1-(1-x_3)(1-x_4) \text{ και } \psi_3(x^{M_3})=1-(1-x_5)(1-x_6)(1-x_7)$$

Έτσι το σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί ισοδύναμα ως,



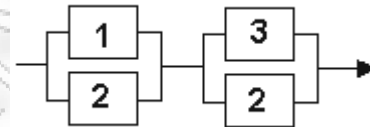
όπου η δείκτρια συνάρτηση για τη μονάδα S_i είναι η $\psi_i(x^{M_i})$, για κάθε $i=\{1,2,3\}$. Άρα η συνάρτηση δομής του συστήματος είναι,

$$\phi(x)=\psi(\psi_1(x^{M_1}), \psi_2(x^{M_2}), \psi_3(x^{M_3})) = \prod_{i=1}^3 \psi_i(x^{M_i}) \Rightarrow$$

$$\phi(x)=[1-(1-x_1)(1-x_2)] [1-(1-x_3)(1-x_4)] [1-(1-x_5)(1-x_6)(1-x_7)]. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 1.5.2. Ας θεωρήσουμε το σύστημα του διπλανού σχήματος. Ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να γίνει η διάσπασή του σε *modules*, δεν είναι εμφανής άμεσα.

Όμως το ισοδύναμο μ' αυτό σύστημα, κάνοντας χρήση των ε.σ.λ. δίδεται στο επόμενο σχήμα.



Έτσι μια διαμέριση των μονάδων είναι,

$$M_1=\{1,3\} \text{ και } M_2=\{2\}$$

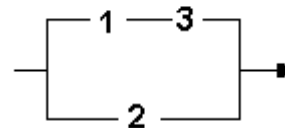
με,

$$\psi_1(x^{M_1})=x_1x_3 \text{ και } \psi_2(x^{M_2})=x_2.$$

Άρα,

$$\phi(x)=\psi(\psi_1(x^{M_1}), \psi_2(x^{M_2})) = \prod_{i=1}^2 \psi_i(x^{M_i}) \Rightarrow \phi(x)=1-(1-x_1x_3)(1-x_2). \quad \blacksquare$$

Αναπαράσταση μέσω Ε.Σ.Λ



Είναι αναμενόμενο σε μερικά συστήματα να μην μπορεί να γίνει *modular decomposition*. Τέτοιου είδους παραδείγματα είναι το k από τα $n:F$ ή G (για $2 < k < n$) και η γέφυρα. Γενικώς, εάν ένα σύστημα έχει ε.σ.δ. (ή ε.σ.λ.) ξένα ανά δυο, τότε μπορεί να διασπαστεί σε *modules*.

1.6 Ορισμός και Ιδιότητες της Συνάρτησης Αξιοπιστίας

Μέχρι στιγμής προσπαθήσαμε να περιγράψουμε ένα σύστημα, μέσω της συνάρτησης δομής του. Θεωρώντας ότι μπορούμε να εξασφαλίζουμε τη λειτουργία κάποιων μονάδων, εξετάζουμε τι γίνεται με την κατάσταση ολόκληρου του συστήματος. Όμως μια τέτοια, ντετερμινιστική αντιμετώπιση του φαινομένου, δεν είναι καθόλου ρεαλιστική, καθώς η λειτουργία κάθε συστήματος από τη φύση της, περικλείει μια στοχαστικότητα. Επομένως, θα παίρναμε μια ορθότερη αξιολόγηση της ικανότητάς του, εάν εκλαμβάναμε την κατάσταση μιας μονάδος αλλά και του συστήματος, σαν μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.).

Έτσι για κάθε μια από τις $i=\{1, \dots, n\}$ μονάδες ενός μονότονου συστήματος, ορίζουμε τις τ.μ.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{οταν η } i \text{ μονάδα λειτουργεί (με συγκεκριμενη πιθανότητα)} \\ 0, & \text{οταν η } i \text{ μονάδα δε λειτουργεί} \end{cases}$$

Συμβολίζοντας με p_i την πιθανότητα λειτουργίας της i μονάδας, θα έχουμε $P(X_i=1)=p_i (=E(X_i))$ και $P(X_i=0)=1-p_i=q_i$. Το διάνυσμα κατάστασης, $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα, ενώ για τις τ.μ. X_i , θα υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητες. Η πιθανότητα p_i καλείται *αξιοπιστία της i μονάδος*.

Όμοια και για το σύστημα, θα έχουμε

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } R \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 1 - R \end{cases}$$

δηλαδή τώρα η συνάρτηση δομής παίρνει την τιμή ένα ή μηδέν, με αντίστοιχες πιθανότητες R και $1-R$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η ϕ επηρεάζεται μόνο από τις καταστάσεις των μονάδων, γράφουμε,

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } R \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 1 - R \end{cases}$$

και θα ισχύει $P(\phi(\mathbf{X})=1)=R =E(\phi(\mathbf{X}))$ Η πιθανότητα R , θα καλείται *αξιοπιστία του συστήματος* και τις ιδιότητες της, θα προσπαθήσουμε να ερευνήσουμε.

Η R στην περίπτωση μας, που δουλεύουμε μόνο με ανεξάρτητες μονάδες, αποδεικνύεται ότι γράφεται μόνο συναρτήσει των πιθανοτήτων p_i . Επομένως,

$$R=R(\mathbf{p}), \text{ με } \mathbf{p}=(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Πολλές φορές όμως, η υπόθεση της ανεξαρτησίας είναι αρκετά δεσμευτική και αδύνατο να ισχύει σε μερικά συστήματα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το σύστημα, το οποίο χρησιμοποιεί κάποιες μονάδες, που φροντίζουν για τη συνεχή και ομαλή τροφοδότηση με ηλεκτρικό ρεύμα, των υπόλοιπων μονάδων. Τότε συμπεραίνουμε ότι μια αποτυχία στις συγκεκριμένες ομάδες, είναι πιθανόν να επηρεάσει και τις υπόλοιπες. Παρόλα αυτά υπάρχουν και περιπτώσεις, που η υπόθεση της ανεξαρτησίας είναι λογική και αυτές θα μελετήσουμε.

Παράδειγμα 1.6.1. Για το σειριακό και το παράλληλο σύστημα είδαμε(αντίστοιχα) ότι,

$$\phi_S(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i \quad \text{και} \quad \phi_P(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

έτσι αντικαθιστώντας τις δείκτριες x_i με τις αντίστοιχες τ.μ., παίρνουμε

$$\phi_S(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n X_i \quad \text{και} \quad \phi_P(\mathbf{X}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i).$$

Η αξιοπιστία λοιπόν των συστημάτων θα είναι,

$$R_S(\mathbf{p}) = E(\phi_S(\mathbf{X})) = E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n p_i \quad \text{και} \quad R_P(\mathbf{p}) = E\left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i)\right) = 1 - E\left(\prod_{i=1}^n (1 - X_i)\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$$

λόγω ανεξαρτησίας των μονάδων. Στην περίπτωση των *iid* μονάδων έχουμε,

$$R_S(\mathbf{p}) = R_S(p) = p^n \quad \text{και} \quad R_P(\mathbf{p}) = R_P(p) = 1 - (1-p)^n.$$

Για το k από τα n : $G(S(k, n; G))$ με *iid* μονάδες, ισχύει

$$R_{Sk}(p) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

ενώ για το $C_L(2, 5; G)$,

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 - (1-x_1 x_2)(1-x_2 x_3)(1-x_3 x_4)(1-x_4 x_5) \Rightarrow$$

$$\phi(\mathbf{x}) = x_2 x_1 + x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 - x_4 x_5 - x_1 x_2 x_4 x_5 - x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

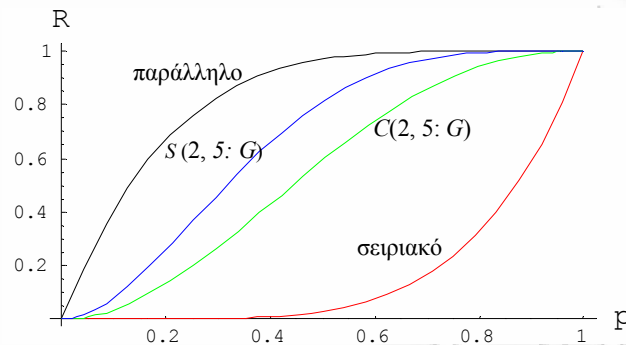
άρα,

$$R_{con}(\mathbf{p}) = p_2 p_1 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3 + p_3 p_4 + p_2 p_3 p_4 - p_4 p_5 - p_1 p_2 p_4 p_5 - p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$$

και (*iid*),

$$R_{con}(p) = 4p^2 - 3p^3 - p^4 + p^5.$$

Σχήμα 1.6.1

Γραφική παράσταση των $R_s, R_p, R_{sk}, R_{con}$ 

Στο σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων αξιοπιστίας (με *iid* μονάδες), των τεσσάρων διαφορετικών συστημάτων, για $n=5$ (και $k=2$). Το παράλληλο έχει την καλύτερη συνάρτηση, το σειριακό τη χειρότερη ενώ το $S(2, 5: G)$ είναι περισσότερο αξιόπιστο από το $C_L(2, 5: G)$. Πρέπει να παρατηρήσουμε πόσο δύσκολος γίνεται ο ακριβής υπολογισμός της συνάρτησης αξιοπιστίας, τόσο για το $S(k, n: G)$ όσο και για το $C_L(k, n: F)$, καθώς το n γίνεται πολύ μεγάλο, ακόμη και όταν έχουμε *iid* μονάδες. Συγκεκριμένα για την R_{sk} πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα $n-k+1$ όρων, όπου καθ' ένας από αυτούς είναι γινόμενο τριών αριθμών, εκ των οποίων ένας διωνυμικός συντελεστής. ■

Σαν αποτέλεσμα της Πρότασης 1.1.1 και της ανεξαρτησίας των μονάδων, προκύπτει το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 1.6.1. Για κάθε συνάρτηση αξιοπιστίας R ισχύει,

$$R(\mathbf{p}) = p_i R(1_i, \mathbf{p}) + (1-p_i) R(0_i, \mathbf{p}),$$

για οποιοδήποτε $i \in \{1, \dots, n\}$, όπου $(1_i, \mathbf{p}) = (p_1, p_2, \dots, 1_i, \dots, p_n)$ και $(0_i, \mathbf{p}) = (p_1, p_2, \dots, 0_i, \dots, p_n)$.

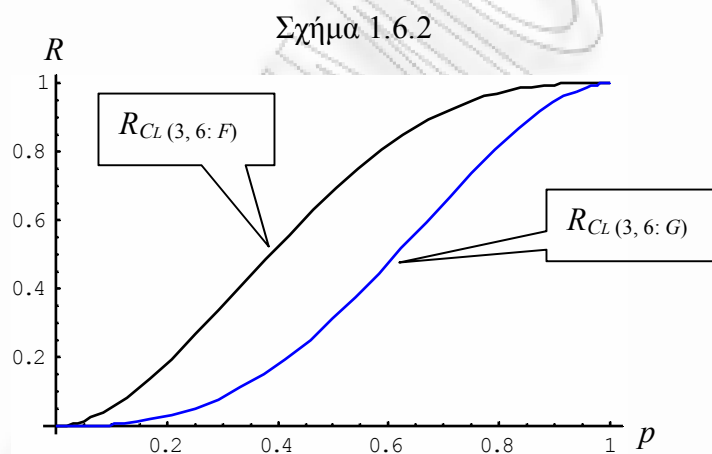
Μερικές ακόμη από τις ιδιότητες της συνάρτησης αξιοπιστίας είναι οι παρακάτω,

- η $R(\mathbf{p})$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, ως προς κάθε μια από τις n μεταβλητές, p_1, p_2, \dots, p_n ,
- όταν έχουμε *iid* μονάδες, τότε η $R(p)$ είναι πολυώνυμο το πολύ n βαθμού, ως προς p ,
- ισχύει, $R(\mathbf{0})=0$ και $R(\mathbf{1})=1$,
- η αξιοπιστία του δυϊκού συστήματος είναι, $R^D(\mathbf{p})=1-R(\mathbf{1}-\mathbf{p})$.

Παράδειγμα 1.6.2. Έστω το $C_L(3, 6: F)$, του οποίου το δυϊκό γνωρίζουμε ότι είναι το $C_L(3, 6: G)$. Άρα ισχύει, για την *iid* περίπτωση,

$$R_{C_L(3, 6: G)}(p) = 1 - R_{C_L(3, 6: F)}(1-p).$$

και η γραφική παράσταση των δυο συναρτήσεων είναι,

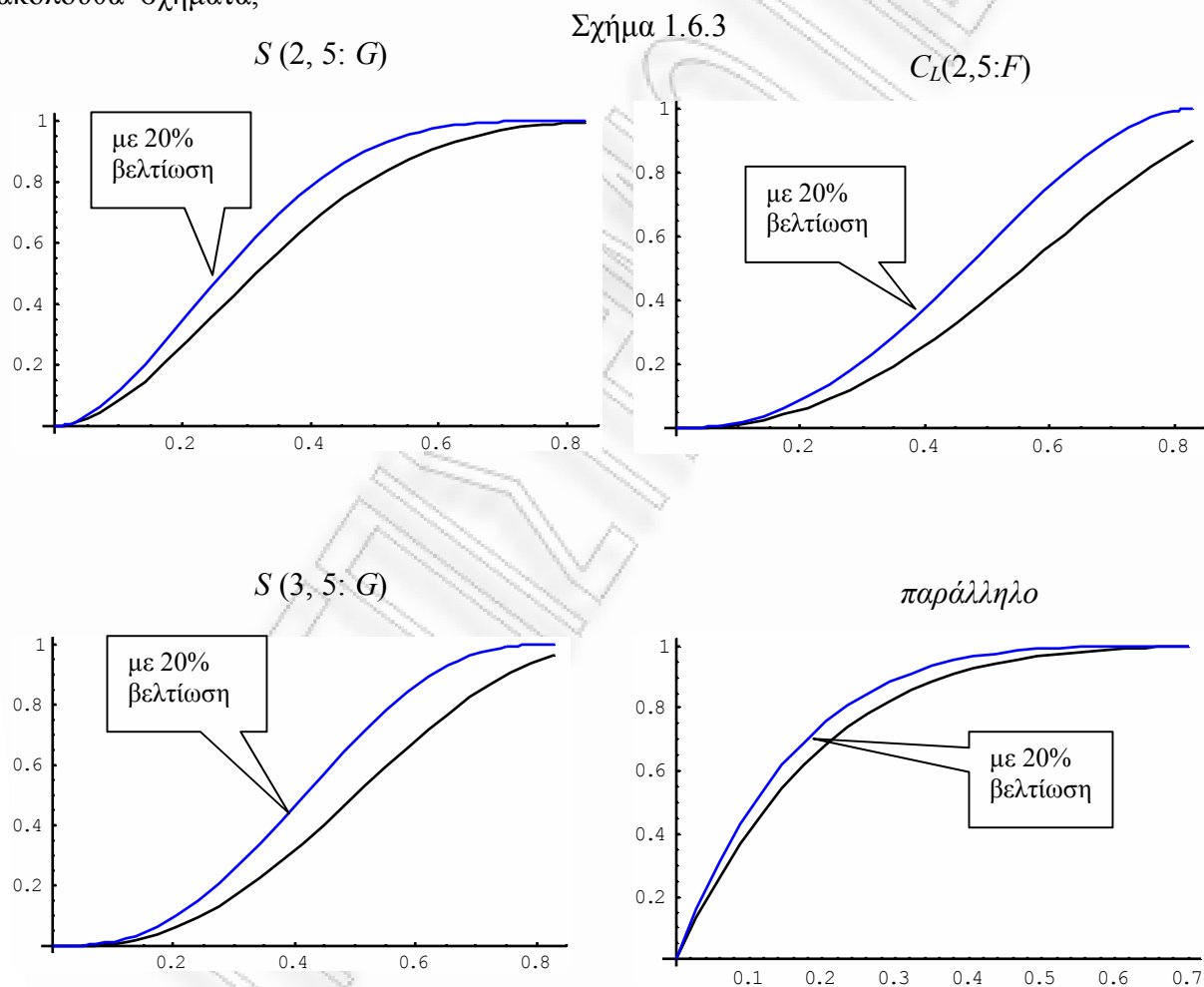


Σκεφτόμενοι τι έχουμε αναφέρει για ένα μονότονο σύστημα, μας φαίνεται πολύ λογικό να υποθέσουμε, ότι χρησιμοποιώντας καλύτερες μονάδες, δηλαδή περισσότερο αξιόπιστες, να καταλήξουμε σε σύστημα με ανάλογα αποτελέσματα. Το θεώρημα λοιπόν που ακολουθεί, έρχεται να επιβεβαιώσει το συλλογισμό μας.

Θεώρημα 1.6.1. Έστω ένα μονότονο σύστημα με n μονάδες. Τότε η συνάρτηση αξιοπιστίας του είναι αύξουσα, ως προς κάθε p_i και επιπλέον είναι γνησίως αύξουσα, αν $0 < p_i < 1$, για κάθε i . Αντίστοιχα η R , για *iid* μονάδες, είναι αύξουσα ως προς p και γνησίως αύξουσα, όταν $0 < p < 1$.

Παράλληλα, μπορεί η αύξηση της αξιοπιστίας των μονάδων, να αντανακλάται θετικά στην αντίστοιχη του συστήματος, ο τρόπος όμως και το πόσο επηρεάζεται η τελευταία, εξαρτάται από το σύστημα (εξαρτάται δηλαδή και από τη συνδεσμολογία αλλά και από το πλήθος των μονάδων).

Παράδειγμα 1.6.3. Έστω ότι έχουμε πέντε ανεξάρτητες μονάδες, με αξιοπιστία ίση με p . Με τις συγκεκριμένες μονάδες κατασκευάζουμε, 4 διαφορετικά συστήματα, ένα παράλληλο, ένα $S(2, 5: G)$, ένα $S(3, 5: G)$ και ένα $C_L(2, 5: F)$. Η διαφορά που θα επιφέρει στην αξιοπιστία των συστημάτων, μια βελτίωση κατά 20% της αξιοπιστίας των μονάδων, φαίνεται γραφικά, στα ακόλουθα σχήματα,



Παρατηρούμε λοιπόν πόσο διαφορετικά αλλά και σε ποιο βαθμό, επηρεάζονται τα συστήματα, στην ίδια αλλαγή του p . ■

Τώρα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.2.2. μπορούμε να αποδείξουμε το ανάλογο για τις συναρτήσεις αξιοπιστίας.

Θεώρημα 1.6.2. Η αξιοπιστία R ενός μονότονου συστήματος, ικανοποιεί τις σχέσεις

- $R(p_1 \sqcup p_2) \geq \prod R(p_1) R(p_2)$
- $R(p_1 p_2) \leq R(p_1) R(p_2)$

όπου, $p_1 = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n})$, $p_2 = (p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2n})$, $(p_1 \sqcup p_2) = (\prod p_{11} p_{21}, \prod p_{12} p_{22}, \dots, \prod p_{1n} p_{2n})$

και $(p_1 p_2) = (p_{11} p_{21}, p_{12} p_{22}, \dots, p_{1n} p_{2n})$.

Παράδειγμα 1.6.4. Ας υποθέσουμε ότι για την πραγματοποίηση κάποιας διαδικασίας, χρησιμοποιούμε πέντε μονάδες, με αξιοπιστίες,

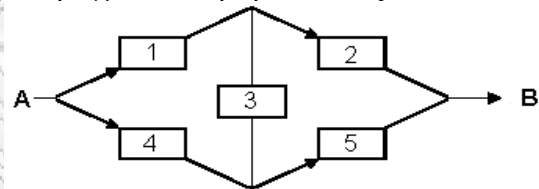
$$p_1 = (p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}),$$

οι οποίες είναι συνδεδεμένες σε μορφή γέφυρας

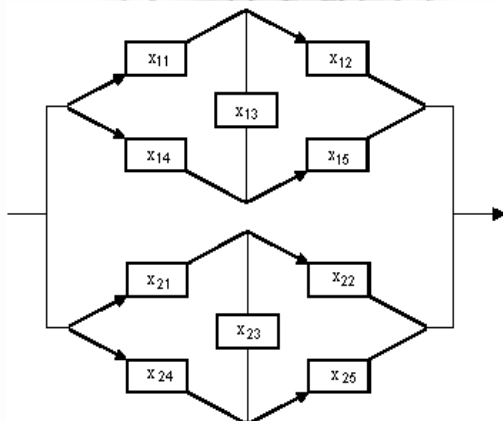
(όπως το σχήμα). Έστω ακόμη ότι για λόγους βελτίωσης της αξιοπιστίας του συστήματος, έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε άλλες πέντε μονάδες, με

$$p_2 = (p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}, p_{25}),$$

χωρίς βέβαια να αλλάξουμε τη μορφή του συστήματος. Τότε εάν έχω να επιλέξω μεταξύ του να συνδέσω παράλληλα (Σχήμα 1.6.5) ακόμη μια γέφυρα (σχηματισμένη από τις πέντε νέες μονάδες) ή να συνδέσω σε κάθε μια μονάδα, του υπάρχοντος συστήματος, ακόμη μια παράλληλα σ' αυτή (Σχήμα 1.6.4), σίγουρα θα επιλέξω τον δεύτερο τρόπο (Θεώρημα 1.6.2.). Αρκεί να παρατηρήσω ότι το διάνυσμα $(p_1 \sqcup p_2)$, έχει για συντεταγμένες, τις αξιοπιστίες των παράλληλων υποσυστημάτων του σχήματος 1.6.4.

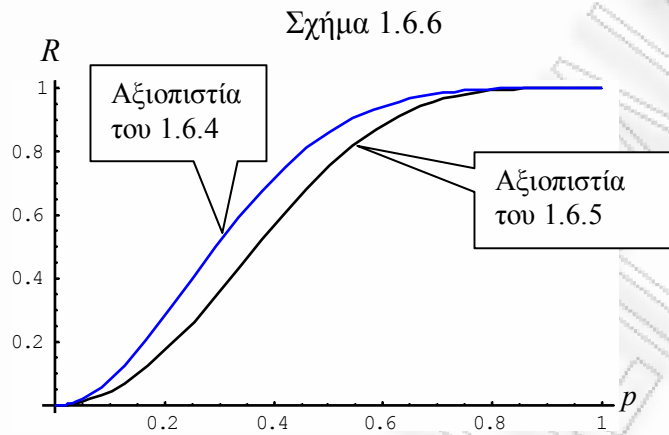


Σχήμα 1.6.5



Σχήμα 1.6.4

Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων αξιοπιστίας, για κάθε σύστημα, φανερώνει ότι ακριβώς περιμέναμε,



Ακόμη αξίζει να επισημάνουμε ότι η συνάρτηση αξιοπιστίας, ενός μονότονου συστήματος με *iid* μονάδες, ανήκει στην κατηγορία των *S-Shaped* συναρτήσεων. Με απλά λόγια, η γραφική της παράσταση τέμνεται μόνο μια φορά με την ευθεία $y = x$ με κατεύθυνση από κάτω προς τα πάνω. Η ιδιότητα αυτή αποδίδεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.6.3. Έστω η ότι η $R(p)$ είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας ενός μονότονου συστήματος, με *iid* μονάδες. Εάν $R(p_0) = p_0$ για κάποιο $0 < p_0 < 1$, τότε ισχύει,

$$R(p) < p \text{ για κάθε } 0 < p < p_0$$

ενώ,

$$R(p) > p \text{ για κάθε } p_0 < p < 1.$$

Αν το σύστημα δεν έχει σύνολα λειτουργίας και διακοπής, που να αποτελούνται από μια μονάδα, τότε σίγουρα υπάρχει ένα τουλάχιστον p_0 , με την ιδιότητα $R(p_0) = p_0$ ($0 < p_0 < 1$).

Επομένως και από εδώ φαίνεται πως, είναι δυνατόν να φτιάξουμε περισσότερο αξιόπιστα συστήματα, απ' ό,τι οι μονάδες που χρησιμοποιούμε. Για το σκοπό αυτό αρκεί να πάρουμε μονάδες, με αξιοπιστία μεγαλύτερη του p_0 και τότε θα ισχύει σίγουρα $R(p) > p$. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι, η αξιοπιστία του συστήματος με n μονάδες, τείνει στην τιμή ένα, καθώς το $n \rightarrow +\infty$, όταν το $p > p_0$ (βέβαια η λύση p_0 , δεν πρέπει να εξαρτάται από το n - Barlow & Proschan (1975), σελ. 49).

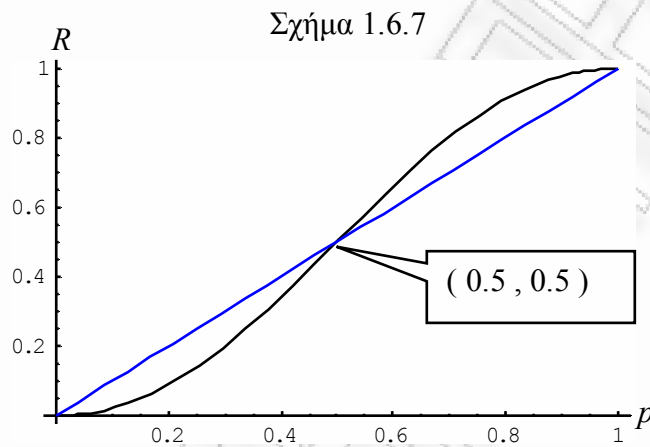
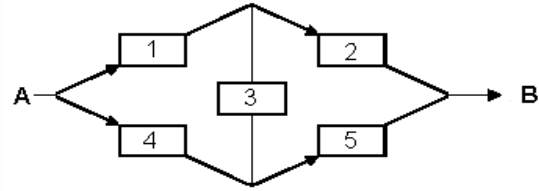
Παράδειγμα 1.6.5. Η συνάρτηση αξιοπιστίας της γέφυρας, με *iid* μονάδες, είναι

$$R(p) = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5 .$$

Η εξίσωση,

$$R(p) = p$$

έχει λύση στο διάστημα $(0,1)$, την $p_0 = 0.5$, άρα για κάθε $p > 0.5$ περιμένουμε ότι, $R(p) > p$ (και σίγουρα, $R(p) > 0.5$). Αυτό φαίνεται και στην επόμενη γραφική παράσταση.



1.7 Υπολογισμός της Συνάρτησης Αξιοπιστίας

Ο ακριβής υπολογισμός της αξιοπιστίας ενός συστήματος, τις περισσότερες φορές, είναι πολύ δύσκολο έως και ακατόρθωτο, να επιτευχθεί. Οι μέθοδοι που υπάρχουν, όταν εφαρμόζονται σε πολύπλοκα συστήματα ή πολύ μεγάλα, δεν είναι πάντα εφικτό να δώσουν αποτελέσματα, σε πραγματικό χρόνο (γενικώς έχουμε να κάνουμε με ένα πρόβλημα *NP-complete*). Σημαντική λοιπόν έρευνα έχει πραγματοποιηθεί σ' αυτό το κομμάτι, της θεωρίας αξιοπιστίας, επιδιώκοντας την εύρεση διαδικασιών, που θα βοηθήσουν στη μελέτη της αξιοπιστίας μεγάλων συστημάτων. Όμως, όπως θα δούμε και αργότερα, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται κυρίως στη μελέτη συστημάτων, συγκεκριμένης μορφής. Παρόλα αυτά, στην παράγραφο αυτή θα προσπαθήσουμε να συμπεριλάβουμε και όλες εκείνες τις τεχνικές, που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας, οποιουδήποτε μονότονου συστήματος.

Από τον ορισμό της συνάρτησης αξιοπιστίας και μόνο, θα μπορούσε να πει κάποιος ότι ο υπολογισμός της δεν θα είναι κάτι δύσκολο, καθώς αρκεί να βρούμε τη συνάρτηση δομής και έπειτα τη μέση τιμή της. Αυτό όμως προϋποθέτει, είτε την εύρεση της $\phi(\mathbf{x})$ για κάθε δυνατό διάνυσμα κατάστασης, είτε τη γνώση των ε.σ.δ. ή ε.σ.λ. και παράλληλα, να βρεθεί μια μορφή της συνάρτησης δομής τέτοια ώστε, να μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της. Αν θα μπορούσε να συμβεί κάτι τέτοιο, που σίγουρα δεν είναι καθόλου εύκολο τις περισσότερες φορές, θα υπολογίζαμε της $R(\mathbf{p})$ μέσω της σχέσης (η οποία προκύπτει από το Λήμμα 1.1.1 και από συνεχείς εφαρμογές της σχέσεως του Λήμματος 1.6.1),

$$R(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{x}} \left[\phi(\mathbf{x}) \prod_i p_i^{x_i} q_i^{(1-x_i)} \right] \quad (1.7.1)$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ και $q_i = 1 - p_i$ ($0^0 \equiv 1$). Έτσι λοιπόν για κάθε ένα από τα 2^n (n το πλήθος των μονάδων), διανύσματα κατάστασης θα πρέπει να υπολογίσουμε την $\phi(\mathbf{x})$, προκειμένου να πάρουμε το άθροισμα του τύπου (1.7.1), όπου κάθε όρος αποτελείται από n γινόμενα. Έτσι ακόμη και για ένα μικρό σύστημα με 10 μονάδες, χρειάζεται να δούμε πως επηρεάζουν το σύστημα, 1024 διαφορετικά διανύσματα κατάστασης.

Στην περίπτωση που γνωρίζουμε τα ε.σ.δ. ή τα ε.σ.λ., του συστήματος έχουμε τη δυνατότητα να δουλέψουμε με διαφορετικές μεθόδους. Βέβαια, γενικώς για να προσδιορίσουμε τα σύνολα αυτά, η γενική τεχνική που υπάρχει είναι να εξετάσουμε για κάθε διάνυσμα κατάστασης, εάν ικανοποιεί τις αντίστοιχες συνθήκες. Σε πολλά από τα συστήματα όμως, με τα οποία θα ασχοληθούμε, τα ελάχιστα σύνολα διακοπής και λειτουργίας είναι εύκολο να προσδιοριστούν, με χαρακτηριστικά παραδείγματα, το $C_L(k, n: F \text{ ή } G)$, το $2D-C(r, s; m, n: F \text{ ή } G)$ και το $k / 2D-C(r, s; m, n: F \text{ ή } G)$. Εάν το σύστημα έχει ε.σ.λ. τα, $\mathbf{P}=\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_M\}$ τότε,

$$R(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^M (-1)^{r-1} \sum_{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}} \prod_{i \in \cup_{j=1}^r P_{\alpha_j}} p_i \quad (1.7.2)$$

όπου το άθροισμα, $\sum_{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}} \prod_{i \in \cup_{j=1}^r P_{\alpha_j}} p_i$, εκτείνεται σ' όλα τα δυνατά υποσύνολα του \mathbf{P} , μεγέθους r . Με χρήση των ε.σ.δ., $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\}$, ο αντίστοιχος τύπος έχει τη μορφή,

$$R(\mathbf{p}) = 1 - \sum_{r=1}^N (-1)^{r-1} \sum_{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}} \prod_{i \in \cup_{j=1}^r C_{\alpha_j}} (1 - p_i). \quad (1.7.3)$$

Ο (1.7.2.), προέκυψε με βάση την έκφραση της $\phi(\mathbf{X})$ ως

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = \sum_{r=1}^M (-1)^{r-1} \sum_{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}} \prod_{i \in \cup_{j=1}^r P_{\alpha_j}} x_i$$

και της ανεξαρτησίας των μονάδων (όμοια και ο (1.7.3)). Σίγουρα και οι δυο τελευταίοι τύποι δεν είναι καθόλου εύκολοι στον υπολογισμό τους, αφού για κάθε ένα από τα r αθροίσματα, $r=1, \dots, M$, (για την περίπτωση του (1.7.2.)) απαιτούνται $\binom{M}{r}$ άλλα αθροίσματα (συνολικά

έχουμε $\sum_{r=1}^M \binom{M}{r} = 2^M - 1$ όρους). Οπότε όταν έχουμε πολλά ε.σ.λ., αντιμετωπίζουμε πάλι σοβαρό πρόβλημα.

Παράδειγμα 1.7.1. Έστω το $C_L(3, 7: F)$. Τότε τα ε.σ.δ. του συστήματος είναι τα,

$$C_1 = \{1, 2, 3\}, C_2 = \{2, 3, 4\}, C_3 = \{3, 4, 5\}, C_4 = \{4, 5, 6\} \text{ και } C_5 = \{5, 6, 7\}.$$

Η αξιοπιστία μέσω του (1.7.3) είναι (μέσω του (1.7.2.) είναι πιο πολύπλοκη),

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{p}) &= 1 - \sum_{r=1}^5 (-1)^{r-1} \sum_{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}} \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^r C_{\alpha_j}} (1-p_i) \Rightarrow \\
1-R(\mathbf{p}) &= \sum_{\{\alpha_1\}} \prod_{i \in C_{\alpha_1}} (1-p_i) + \sum_{\{\alpha_1, \alpha_2\}} \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^2 C_{\alpha_j}} (1-p_i) + \sum_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}} \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^3 C_{\alpha_j}} (1-p_i) \\
&\quad + \sum_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}} \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^4 C_{\alpha_j}} (1-p_i) + \sum_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}} \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^5 C_{\alpha_j}} (1-p_i) \Rightarrow \\
R(\mathbf{p}) &= 1 - [(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) + (1-p_2)(1-p_3)(1-p_4) + \dots + (1-p_5)(1-p_6)(1-p_7) - \\
&\quad (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4) - (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5) - \dots - (1-p_4)(1-p_5)(1-p_6)(1-p_7) \\
&\quad + \dots + (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)(1-p_6)(1-p_7)].
\end{aligned}$$

και στην *iid* γίνεται,

$$R(\mathbf{p}) = 1 - 5(1-p)^3 + 4(1-p)^4 + (1-p)^6 - (1-p)^7 \quad \blacksquare$$

Ένας πιο διαδεδομένος τρόπος υπολογισμού της R είναι μέσω της αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (*Inclusion-Exclusion*). Η μέθοδος αυτή, η οποία όπως θα δούμε έχει εφαρμογές και στην εύρεση φραγμάτων αξιοπιστίας, απαιτεί τη γνώση των ε.σ.δ. ή ε.σ.λ.. Υποθέτοντας ότι τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας και διακοπής του συστήματος είναι τα,

$$\mathbf{P} = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_M\} \text{ και } \mathbf{C} = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\},$$

μπορούμε να γράψουμε,

$$R(\mathbf{p}) = P \left[\bigcup_{r=1}^M E_r \right] \text{ ή } R(\mathbf{p}) = 1 - P \left[\bigcup_{r=1}^N A_r \right]$$

όπου, E_r είναι το ενδεχόμενο όλες οι μονάδες του r ε.σ.λ. να δουλεύουν και A_r , το ενδεχόμενο όλες οι μονάδες του r ε.σ.δ., να αποτύχουν. Έτσι ισχύει,

$$P[E_r] = \prod_{i \in P_r} p_i \text{ και } P[A_r] = \prod_{i \in C_r} (1-p_i)$$

Αν συμβολίσουμε με S_k το άθροισμα,

$$S_k = \sum_{\{a_1, a_2, \dots, a_k\}} P[E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap E_{a_3} \dots \cap E_{a_k}]$$

(άθροισμα ως προς όλα τα υποσύνολα του $\{1, 2, \dots, M\}$, μεγέθους k) με βάση την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (*Inclusion-Exclusion (IE)*), παίρνουμε,

$$R(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^M (-1)^{k-1} S_k \quad (1.7.4)$$

Ενώ αντίστοιχα,

$$R(\mathbf{p}) = 1 - \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} S'_k \quad (1.7.5)$$

όπου,

$$S'_k = \sum_{\{a_1, a_2, \dots, a_k\}} P[A_{a_1} \cap A_{a_2} \cap A_{a_3} \dots \cap A_{a_k}]$$

Ακόμη αξίζει να σημειώσουμε ότι,

$$P[E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap E_{a_3} \dots \cap E_{a_k}] = \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^k A_j} p_i$$

και,

$$P[A_{a_1} \cap A_{a_2} \cap A_{a_3} \dots \cap A_{a_k}] = \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^k C_{a_j}} (1 - p_i)$$

Οι νέοι τύποι, μέσω της αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, παρουσιάζουν τα ίδια μειονεκτήματα, με τους (1.7.2.) και (1.7.3.), αφού ουσιαστικά αν αντικαταστήσουμε τις τελευταίες σχέσεις, στα S_k , καταλήγουμε στις ίδιες ακριβώς εκφράσεις. Όμως πρέπει να δούμε ότι εάν δυο διαφορετικές ενώσεις, περιέχουν τις ίδιες μονάδες και έχουν αντίθετο πρόσημο, τότε διαγράφονται. Τέτοια ζευγάρια, υπάρχουν αρκετά, σε ένα μεγάλο σύστημα, με αποτέλεσμα να κερδίζουμε τόσο σε χώρο αποθήκευσης (δουλεύοντας με H/Y) αλλά και σε χρόνο. Πολλοί συγγραφείς ασχολήθηκαν με τα πλεονεκτήματα, από την ύπαρξη τέτοιων όρων, με πρώτους τους *Satyanaarayana & Prabhakar* (1978). Έπειτα, εφαρμόζοντας τη μέθοδο σε συγκεκριμένα συστήματα, εξήχθησαν χρήσιμα συμπεράσματα, όπως στο άρθρο του *Heidtmann* (1982), μελετώντας το σύστημα k από τα n .

Είδαμε ότι η διάσπαση σε *modules*, ενός συστήματος είναι ικανή να βοηθήσει στον να υπολογίσουμε ευκολότερα, τη συνάρτηση δομής. Τον ίδιο ακριβώς αντίκτυπο, έχει και στη εύρεση της αξιοπιστίας. Αν δηλαδή υπολογίσουμε τις αξιοπιστίες των υποσυστημάτων και τα αντιμετωπίσουμε σαν μονάδες, μπορούμε να χωρίσουμε τον υπολογισμό της R , σε μικρότερα επιμέρους κομμάτια. Αποδεικνύεται ότι αν,

$$\phi(\mathbf{x}) = \psi(\psi_1(\mathbf{x}^{M_1}), \psi_2(\mathbf{x}^{M_2}), \dots, \psi_r(\mathbf{x}^{M_r}))$$

μέσω μιας συγκεκριμένης διάσπασης σε *modules*, τότε

$$R(\mathbf{p}) = R_\psi(R_{\psi_1}(\mathbf{p}^{M_1}), R_{\psi_2}(\mathbf{p}^{M_2}), \dots, R_{\psi_r}(\mathbf{p}^{M_r}))$$

όπου η R_ψ είναι ο τύπος της αξιοπιστίας για το σύστημα με συνάρτησης δομής ψ και R_{ψ_i} οι αξιοπιστίες των *modules*.

Μια άλλη συνήθης πρακτική είναι ο υπολογισμός της R μέσω αναδρομικών τύπων, όπου αυτό είναι εφικτό. Με τον τρόπο αυτό, η αξιοπιστία ενός συστήματος με n μονάδες, μπορεί να βρεθεί βήμα-βήμα, υπολογίζοντας ευκολότερες πιθανότητες. Πολλές φορές η μέθοδος αυτή αποδίδει αρκετά, διότι οδηγεί στην εύρεση της R , γρηγορότερα (με μικρότερες υπολογιστικές απαιτήσεις), σε σχέση με τους κλειστούς τύπους. Δυο γνωστές αναδρομικές διαδικασίες είναι η *Recursive Disjoint Products* και η *Recursive Inclusion-Exclusion*, οι οποίες εξηγούνται και συγκρίνονται από τον Locks (1980). Αναλυτικά για ένα σύστημα με M ε.σ.λ. (τα P_i) ισχύουν,

$$R_j = R_{j-1} + Pr [P_j \cap (\bigcup_{i=1}^{j-1} P_i)], \text{ για } j=1, \dots, M \quad (\text{Recursive Disjoint Products})$$

όπου $R = R_M$ (με $Pr [P_j \cap (\bigcup_{i=1}^{j-1} P_i)]$, συμβολίστηκε η πιθανότητα να λειτουργούν όλες οι μονάδες του συνόλου $P_j \cap (\bigcup_{i=1}^{j-1} P_i)$). Επίσης,

$$R_j = R_{j-1} + Pr[P_j] - Pr [P_j \cap (\bigcup_{i=1}^{j-1} P_i)], \text{ για } j=1, \dots, M \quad (\text{Recursive Inclusion-Exclusion})$$

όπου $R = R_M$. Μάλιστα στο ίδιο άρθρο αποδεικνύεται ότι, οι δυο αναδρομικοί τύποι είναι ισοδύναμοι, καθώς σε κάθε βήμα προστίθεται η ίδια ποσότητα.

Συνοψίζοντας, οι τρόποι για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας, οι οποίοι εφαρμόζονται σε οποιοδήποτε μονότονο σύστημα είναι οι εξής,

- μέσω της συνάρτησης δομής και του τύπου (1.7.1.),
- μέσω της αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (*Inclusion- Exclusion*),

- από τους τύπους (1.7.2.) και (1.7.3.) με διάσπαση σε *modules* και
- με χρήση αναδρομικών τύπων.

Θα προσπαθήσουμε τώρα μέσα από κάποια παραδείγματα, να αναδείξουμε τα μειονεκτήματα που εμφανίζονται, αν προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τις συγκεκριμένες μεθόδους, σε μεγάλα συστήματα, όπου οι απαιτήσεις τόσο σε αποθηκευτικό χώρο, όσο και σε χρόνο, μερικές φορές γίνονται εξωπραγματικές.

Παράδειγμα 1.7.2. Έστω ότι μια εταιρεία στοιχημάτων προσφέρει ένα παιχνίδι, το οποίο ορίζεται ως εξής,

«Σε ένα κουπόνι με 15 αγώνες, από διάφορα αθλήματα, δίνεται η δυνατότητα επιλογής στους παίχτες ανάμεσα σε δυο αποτελέσματα ($X=1 \equiv$ νίκη ή $X=0 \equiv$ ήττα). Αν κάποιος καταφέρει να προβλέψει σωστά 5 συνεχόμενες ήττες, τότε παίρνει τα λεφτά του, με προκαθορισμένη απόδοση »

Σε κάποια στιγμή λοιπόν, οι υπεύθυνοι της εταιρείας, πιστεύουν ότι οι αγώνες που έχουν συμπεριλάβει, δίνουν μεγάλη πιθανότητα, να εμφανιστούν τέτοιου είδους πεντάδες (κάτι που σίγουρα δεν τους βολεύει). Είναι εμφανές ότι το παιχνίδι είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα $C(5,15; F)$, από την πλευρά της εταιρείας. Εάν υποθέσουμε ότι με κάποιο τρόπο, οι πιθανότητες των ενδεχόμενων νίκης, είναι γνωστές (ή έχουν εκτιμηθεί) για την εταιρεία, έστω

$$P = (p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_{15}),$$

και ότι το αποτέλεσμα ενός αγώνα είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα, τότε μπορούμε να μελετήσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα, με τις μεθόδους που έχουμε ήδη συμπεριλάβει. Τα ε.σ.δ. του συστήματος είναι,

$$C_i = \{i, i+1, i+2, i+3, i+4\}, \text{ για } i=1, \dots, 11.$$

Αυτό που θέλει η εταιρεία να εξετάσει, είναι η πιθανότητα να εμφανιστούν πέντε συνεχόμενες ήττες, ή αλλιώς, η πιθανότητα το σύστημα να αποτύχει $(1-R)$. Αυτή η πιθανότητα επιθυμεί να είναι όσο πιο μικρή γίνεται, δηλαδή επιθυμεί το σύστημα να έχει μεγάλη αξιοπιστία. Αυτό που θα κάνουμε είναι να γράψουμε τη συνάρτηση δομής του συστήματος και να βρούμε την R , μεσω, αρχικά, του τύπου (1.7.1.). Έχοντας 15 μονάδες (αγώνες) πρέπει να βρούμε την τιμή της $\phi(x)$, για $2^{15} = 32.768$ διανύσματα κατάστασης, και για κάθε ένα από τα διανύσματα, να υπολογίσουμε ένα γινόμενο $n (=15)$ παραγόντων. Έτσι καταλαβαίνουμε ότι αυτό όχι μόνο δεν είναι δυνατό να γίνει

χωρίς H/Y, αλλά και με χρήση υπολογιστή θα είναι αρκετά δύσκολο. Πράγματι, θέλοντας να βρούμε την R για κάποιο τυχαίο διάνυσμα \mathbf{p} , ο υπολογιστής που χρησιμοποιήσαμε* (και το πακέτο *Mathematika* 4.1), έτρεχε τον αλγόριθμο για δυο ώρες χωρίς να βγάλει αποτέλεσμα (απαιτεί σίγουρα πολλαπλάσιο χρόνο).

Προσπαθώντας με τη μέθοδο *IE* και τον τύπο (1.7.3.), τα αποτελέσματα είναι καλύτερα. Εδώ πρέπει να αθροίσουμε $2^{11}-1$ όρους (2047), όπου κάθε ένας περιέχει γινόμενο, το πολύ n παραγόντων (όσες οι μονάδες κάθε διαφορετικής τομής, των ε.σ.δ.). Τρέχοντας το αντίστοιχο πρόγραμμα (είναι διαθέσιμο στο Παράρτημα 1.7.1) στον H/Y, παίρνουμε αποτέλεσμα μετά από περίπου επτά δευτερόλεπτα (για ένα τυχαίο διάνυσμα πιθανοτήτων). ■

Τα πράγματα όμως γίνονται πάλι πολύ δύσκολα, αν φανταστούμε ότι έχουμε ένα σύστημα πολύ μεγαλύτερο, όπως συμβαίνει στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.7.3. Ας υποθέσουμε ότι για το φωτισμό ενός εθνικού δικτύου, 500 χιλιομέτρων, χρησιμοποιείται ένας αριθμός από κολώνες φωτισμού. Συγκεκριμένα, τοποθετήθηκαν κολώνες ανά 80 μέτρα, δηλαδή συνολικά 6250 κολώνες, των οποίων η λειτουργία, εκτός από την παροχή ηλεκτρικού ρεύματος, εξαρτάται και από τη λειτουργία ενός εξαρτήματος, ζωτικής σημασίας. Οι υπεύθυνοι για το φωτισμό λοιπόν, θεωρούν ότι ο φωτισμός του δικτύου, χαρακτηρίζεται ως επαρκής-μη επικίνδυνος, εάν δεν υπάρχουν δέκα συνεχόμενες χαλασμένες κολώνες (των οποίων η αποτυχία οφείλεται αποκλειστικά στο προαναφερθέν εξάρτημα). Οπότε το σύστημα είναι ένα $C_L(10, 6250: F)$ και αν παράλληλα αναφέρουμε ότι οι δυνατές καταστάσεις του εξαρτήματος είναι δυο (λειτουργίας και μη) και αυτές είναι ανεξάρτητες για διαφορετικές κολώνες, τότε η αξιοπιστία του συστήματος, μπορεί να αξιολογηθεί από τις γνωστές μεθόδους. Με τον τύπο (1.7.1) δεν επιχειρήσαμε να το δοκιμάσουμε (για ευνόητους λόγους), ενώ με τη μέθοδο *IE* και τον τύπο (1.7.3.), ξέρουμε ότι θα χρειαστεί να βρεθεί το άθροισμα $2^{6241}-1$ όρων, που ο καθένας θα είναι το γινόμενο το πολύ 6250 παραγόντων! Γίνεται κατανοητό έτσι, ότι το πρόγραμμα πρέπει να τρέχει για αρκετές ώρες, ώστε να δώσει κάποιο αποτέλεσμα.

* Intel Pentium III 733 MHz, Ram: 320MB, HD: 20 GB

1.8 Μελέτη Συγκεκριμένων Συστημάτων

Είναι φυσικό μερικά συστήματα, να ξεχωρίζουν από τα υπόλοιπα, όσον αφορά την προσοχή που τους έχει δοθεί. Οι λόγοι είναι κυρίως οι εφαρμογές τους και τυχόν χρήσιμες και σημαντικές ιδιότητες που εμφανίζει η αξιοπιστία τους. Στην παράγραφο λοιπόν αυτή θα κάνουμε μια μικρή αναδρομή στην έρευνα που έχει διεξαχθεί για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας, ειδικών συστημάτων (για τα οποία έχουμε μιλήσει και στην εισαγωγή). Επίσης, θα επικεντρωθούμε στην εύρεση της R , όταν τα συστήματα γίνονται πολύ μεγάλα.

1.8.1 Συνεχόμενα- k -από- n

Με τον όρο, Συνεχόμενα- k -από- n θα αναφερόμαστε στη συνέχεια σε όλα εκείνα τα συστήματα που αποτελούνται από n μονάδες, οι οποίες είναι συνδεδεμένες σε σειρά ή κυκλικά. Τα συστήματα αυτά θα αποτυγχάνουν ή θα λειτουργούν, μόνο εάν υπάρχουν k συνεχόμενες χαλασμένες ή καλές μονάδες, αντίστοιχα. Είναι αρκετά διαδεδομένα συστήματα και πάρα πολλοί συγγραφείς έχουν ασχοληθεί με τις ιδιότητες τους. Να σημειώσουμε ότι και το σειριακό και το παράλληλο σύστημα, είναι ειδικές περιπτώσεις του Συνεχόμενα- k -από- n (για $k=1$ και $k=n$, αντίστοιχα).

➤ Όπως γνωρίζουμε, το πρώτο σύστημα που μελετήθηκε, αυτής της μορφής, ήταν το $C_L(k, n; F)$ και είναι αυτό για το οποίο, έχουν δημοσιευθεί οι περισσότερες εργασίες. Ο πρώτος που αναφέρεται συγκεκριμένα, στον υπολογισμό της αξιοπιστίας του, είναι ο *Kontoleon* (1980) (στο άρθρο, που πρωτοεμφανίστηκε το σύστημα) που έδωσε αλγόριθμο για μονάδες ανεξάρτητες, όχι κατ' ανάγκη ισόνομες. Έπειτα οι *Chiang & Niu* (1981), έδωσαν ένα κλειστό τύπο για την περίπτωση του $C_L(2, n; F)$, με *iid* μονάδες, τον

$$R(2, n; F) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n-j+1}{j} (1-p)^j p^{n-j}, \quad (1.8.1.1)$$

όπου $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού $(n+1)/2$ και p η αξιοπιστία των μονάδων. Ο τύπος προέκυψε από την παρατήρηση ότι, εάν έχουμε j χαλασμένες μονάδες τότε οι δυνατές n -

αδες, χωρίς δυο συνεχόμενες χαλασμένες, είναι $\binom{n-j+1}{j}$. Επίσης, ανέφεραν και ένα αναδρομικό τύπο για το γενικότερο σύστημα $C_L(k, n; F)$,

$$R(k, n; F) = \begin{cases} 1, & \text{για } 0 \leq n < k \\ 1 - (1-p)^n, & \text{για } n = k \\ p^{n-k+1} + \sum_{r=1}^{n-k+1} \sum_{m=r+1}^{r+k-1} R(k, n-m) p^r (1-p)^{m-r}, & \text{για } n > k \end{cases}, \quad (1.8.1.2)$$

όπου $R(k, n-m)$ είναι η αξιοπιστία του συστήματος $C_L(k, n-m; F)$, το οποίο αποτελείται από τις πρώτες $n-m$ μονάδες του αρχικού (θέτουμε $R(k, n-m)=0$, όταν $n-m < 0$). Για τον τύπο (1.8.1.2), θα καταλάβουμε πως προκύπτει εάν ορίσουμε δυο τ.μ. την N και M , που εκφράζουν τη θέση του πρώτου μηδενικού και τη θέση του πρώτου άσσου, μετά την εμφάνιση του πρώτου μηδενικού (σε ένα διάλυμα κατάστασης), αντίστοιχα. Τότε γράφοντας την R , ως

$$R(k, n; F) = \sum_r \sum_m \Pr(\text{το σύστημα λειτουργεί} | N=r, M=m) \Pr(N=r, M=m)$$

έχουμε το ζητούμενο. Οι *Derman et al* (1982), εξέφρασαν την R , με βοήθεια της συνδυαστικής και γενικεύοντας κατά κάποιο τρόπο τη σχέση 1.8.1.1. Έτσι πάλι για την *iid* περίπτωση, έδειξαν ότι ισχύει

$$R(k, n; F) = \sum_{j=0}^n N(j, n-j+1, k-1) p^{n-j} (1-p)^j, \quad (1.8.1.3)$$

με το $N(j, n-j+1, k-1)$ να εκφράζει τους τρόπους με τους οποίους μπορούν j χαλασμένες μονάδες, να τοποθετηθούν σε $n-j+1$ διαφορετικές θέσεις, έτσι ώστε να υπάρχουν το πολύ $k-1$ συνεχόμενες.

Οι ποσότητες $N(j, r, m)$, ικανοποιούν την αναδρομική σχέση,

$$N(j, r, m) = \sum_{i=0}^r N(j-mi, r-i, m-1), \text{ για } m \geq 2.$$

με αρχικές συνθήκες,

$$N(j, r, 1) = \begin{cases} 0, & \text{για } j > r \\ \binom{r}{j}, & \text{για } 0 \leq j \leq r. \end{cases}$$

Επιπλέον και οι *Bollinger & Salvia* (1982), απέδειξαν τον παρόμοιο τύπο,

$$R(k, n; F) = 1 - \sum_{i=0}^{n-k} r_{i,k,n} p^{n-(k+i)} (1-p)^{k+i}, \quad (1.8.1.4)$$

όπου, $r_{i,k,n} = \sum_{j=0}^i N(k+i, k+j, n)$ και $N(k+i, k+j, n)$ είναι οι τρόποι με τους οποίους $k+i$ αποτυχίες, τοποθετούνται σε n θέσεις, ώστε να υπάρχουν $k+j$ συνεχόμενες. Οι συγγραφείς δίνουν επίσης και μια μέθοδο ώστε να υπολογίζονται οι συντελεστές $r_{i,k,n}$. Αργότερα, αυτή η μέθοδος αντικαθίσταται με μια καλύτερη από τον *Bollinger* (1982) (η οποία δίνει τα r , σαν διαφορά ενός διωνυμικού συντελεστή και ενός στοιχείου, κάποιου πίνακα). Ο *Shanthikumar* (1982) κατάφερε να δώσει μια αναδρομική σχέση, για την περίπτωση που οι μονάδες δεν είναι *iid* (το σκεπτικό του ήταν ανάλογο μ' αυτό των *Chiang & Niu* (1981)). Αναλυτικά, διαπίστωσε ότι

$$R(k, n; F) = \begin{cases} 1, & \text{για } n < k \\ 1 - \prod_{i=1}^n (1-p_i), & \text{για } n = k \\ R(k, n-1) - R(k, n-k-1)p_{n-k}Q(n-k+1, n), & \text{για } n > k \end{cases} \quad (1.8.1.5)$$

όπου, $Q(x, y) = \prod_{i=x}^y p_i$ και $R(k, m)$ η αξιοπιστία του συστήματος $C_L(k, m; F)$, το οποίο αποτελείται από τις πρώτες m μονάδες του αρχικού. Για *iid* μονάδες ο τύπος (1.8.1.5) γίνεται,

$$R(k, n; F) = \begin{cases} 1, & \text{για } n < k \\ 1 - (1-p)^n, & \text{για } n = k \\ R(k, n-1) - R(k, n-k-1)p (1-p)^k, & \text{για } n > k \end{cases} \quad (1.8.1.6)$$

και,

$$R(k, n; F) = 1 - (1-p)^k - (n-k)p(1-p)^k, \quad (1.8.1.7)$$

όταν $k \leq n \leq 2k$. Ο *Hwang* (1982) εξέφρασε την αξιοπιστία του συστήματος με τρόπο, για τον οποίο απέδειξε ότι είναι γρηγορότερος από τους αντίστοιχους των (1.8.1.1), (1.8.1.3) και είναι,

$$R(k, n : F) = \begin{cases} 1, & \text{για } n < k \\ 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i), & \text{για } n = k \\ \sum_{i=n-k+1}^n p_i \left(\prod_{j=i+1}^n q_j \right) R(k, i-1), & \text{για } n > k \end{cases} \quad (1.8.1.8)$$

με $q_j = 1 - p_j$.

Το 1984 οι *Chao & Lin* (1984) κινήθηκαν προς μια νέα κατεύθυνση, μελετώντας τα χαρακτηριστικά του $C_L(k, n : F)$ με τεχνικές των Μαρκοβιανών Αλυσίδων (*Markov Chains*). Συγκεκριμένα θεώρησαν τα διανύσματα καταστάσεως, που σχηματίζονται από τις συνεχόμενες k -αδες, σαν τ.μ., φτιάχνοντας έτσι μια στάσιμη Μαρκοβιανή Αλυσίδα, με χώρο καταστάσεων 2^k . Έτσι διαπίστωσαν ότι (*iid components*),

$$R(k, n; F) = \mathbf{a}_k \mathbf{Q}_k^{n-k} \mathbf{1}_k^T \quad (1.8.1.9)$$

με τους πίνακες να ορίζονται κατάλληλα (\mathbf{Q}_k είναι ο πίνακας μετάβασης, με διαγραμμένη την τελευταία γραμμή και στήλη). Αργότερα όμως, ο *Fu* (1986b), κατάφερε να μειώσει τη διάσταση του χώρου των καταστάσεων από 2^k , σε $(k+1)$ και ως επακόλουθο, οι *Fu & Hu* (1987) και *Chao & Fu* (1991, 1989), δημιούργησαν τον απλό τύπο, για τη γενική περίπτωση των μη ισόνομων μονάδων,

$$R(k, n; F) = \boldsymbol{\pi}_0 \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{M}_i \right) \mathbf{U}^T \quad (1.8.1.10)$$

και στην *iid*,

$$R(k, n; F) = \boldsymbol{\pi}_0 \mathbf{M}^n \mathbf{U}^T \quad (1.8.1.11)$$

όπου

$$\boldsymbol{\pi}_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)_{1 \times (k+1)}, \quad \mathbf{U} = (1, 1, \dots, 1, 0)_{1 \times (k+1)} \quad \text{και} \quad \mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} p_i & q_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_i & 0 & q_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_i & 0 & 0 & \dots & 0 & q_i \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(k+1) \times (k+1)}$$

(και ο (1.8.1.1) και ο (1.8.1.2), είναι ειδικές περιπτώσεις του (1.8.1.11)). Η έκφραση αυτή της αξιοπιστίας, βοήθησε πολύ στη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του συστήματος.

Με το παρακάτω παράδειγμα έχουμε πάλι ως σκοπό να παρουσιάσουμε μερικά από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε, όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε την αξιοπιστία μεγάλων συστημάτων. Όταν μιλάμε για συστήματα της τάξεως των εκατοντάδων χιλιάδων ή ακόμη και εκατομμυρίων μονάδων, δεν πρέπει να θεωρείται κάτι που δεν συναντιέται στην πράξη. Αρκεί να σκεφτούμε ότι τα συστήματα που έχουμε αναφέρει και ειδικά το Συνεχόμενο k από τα n , έχουν ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, όπως στις διαδικασίες ποιοτικού ελέγχου που εκτείνονται σε πολλές διαφορετικές βιομηχανίες (για παράδειγμα στην επόπτευση μιας διαδικασίας, απ' όπου δημιουργούνται χιλιάδες βίδες, ημερησίως), στην κατασκευή ηλεκτρονικών υπολογιστών, και αλλού. Έτσι είναι χρήσιμο και για τη συνεχεία της εργασίας, να καταλάβουμε ότι πραγματικά, μερικές φορές δεν καθίσταται δυνατόν να υπολογιστεί η ακριβής τιμή της R , λόγω κυρίως της πολυπλοκότητας ή/και του μεγέθους του συστήματος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αναζητούμε προσεγγιστικές τιμές ή φράγματα, που να υπολογίζονται πιο εύκολα και ταυτόχρονα, να είμαστε πολύ κοντά στην πραγματικότητα.

Παράδειγμα 1.8.1.1. Έστω ότι έχουμε ένα $C_L(2, n; F)$, για το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε την αξιοπιστία του, για διάφορες τιμές του n . Ο τύπος που θα χρησιμοποιήσουμε αρχικώς είναι ο (1.8.1.1), υποθέτοντας ότι έχουμε *iid* μονάδες. Πρέπει λοιπόν να βρούμε το άθροισμα $[(n+1)/2]$ όρων, οι οποίοι αποτελούνται από γινόμενο ενός διωνυμικού συντελεστή και n ακόμη παραγόντων. Προκειμένου να παρατηρήσουμε πως αυξάνεται ο χρόνος υπολογισμού, αυξάνοντας το n (με σταθερό $k=2$), παραθέτουμε τα επόμενα αποτελέσματα (ο αλγόριθμος στο Παράρτημα 1.8.1.1),

Πίνακας 1.8.1.1

n	<i>Computing Time</i>
1.000	0.18 <i>sec</i>
10.000	71.623 <i>sec</i>
20.000	444.529 <i>sec</i> (~7.4 <i>min</i>)
100.000	>50 <i>min</i>

Να σημειώσουμε ότι, αν για παράδειγμα προσπαθούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (1.7.3), που προκύπτει από τη μέθοδο IE , για τον υπολογισμό της R του $C_L(2, 15: F)$, τότε ο αντίστοιχος αλγόριθμος θα χρειαστεί 5.79 min !

Χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο (1.8.1.6.) (*iid components*) θα δούμε τι γίνεται όταν μεταβάλλεται και το k . Η εφαρμογή του τύπου αυτού απαιτεί $k+1$ πολλαπλασιασμούς και μια αφαίρεση, για να βρεθεί η αξιοπιστία του $C_L(k, n: F)$, εάν γνωρίζουμε τις $R(k, n-1: F)$ και $R(k, n-k-1: F)$. Τα αποτελέσματα, μέσω του αντίστοιχου αλγόριθμου (Παράρτημα 1.8.1.2) είναι,

Πίνακας 1.8.1.2

n	k	Computing Time
40	2	11 sec
80	13	21.5 sec
100	18	29.8 sec
1000	2	~2 hours

Εδώ ορίζουμε πρώτα τις k αρχικές συνθήκες του αλγόριθμου, έπειτα χρειαζόμαστε $k+1$ πολλαπλασιασμούς και μια αφαίρεση, για κάθε ένα από τα $n-k$ βήματα, που πρέπει να γίνουν ώστε να φθάσουμε στην $R(k, n: F)$.

Τέλος ο (1.8.1.11) για να χρησιμοποιηθεί, καθορίζονται οι τιμές τριών πινάκων διαστάσεως $1 \times (k+1)$ οι δυο και $(k+1) \times (k+1)$ ο τρίτος (συνολικά $2(k+1) + (k+1)^2$, στοιχεία). Επιπλέον για να υπολογίσουμε την R , γίνεται ο πολλαπλασιασμός n φορές ενός πίνακα $(k+1) \times (k+1)$ (εύκολα φανταζόμαστε ότι οι πράξεις που γίνονται είναι απίστευτα πολλές, ειδικά για μεγάλα n και k). ■

Το **Κυκλικό συνεχόμενα- k -από-τα- n : F** ($C_C(k, n: F)$) διαφοροποιείται από το κλασικό $C_L(k, n: F)$, στ' ότι έχει τις μονάδες συνδεδεμένες κυκλικά (έτσι η n -οστη μονάδα είναι γειτονική με την 1^n). Μελετήθηκε πρώτη φορά από τους *Derman et al* (1982), οι οποίοι υπολόγισαν την αξιοπιστία του, μέσω της αντίστοιχης του $C_L(k, n: F)$ (με *iid components*), από τον τύπο

$$R_c(k, n: F) = p^2 \sum_{j=0}^{k-1} (j+1) q^j R(k, n-j-2)$$

Από την άλλη, ο *Hwang* (1986) κατάφερε να εκφράσει την R_c από έναν κλειστό τύπο ο οποίος χρειάζεται την άθροιση μόνο $[n/k]$ όρων. Αναλυτικά είναι,

$$R_c(k, n: F) = \sum_{i=0}^{[n/k]} (-pq^k)^i \binom{n-ki}{i} - q^n + k \sum_{i=0}^{[n/k]} (-pq^k)^{i+1} \binom{n-k(i+1)-1}{i}$$

(για $n \geq k$) ενώ για την περίπτωση, $R_c(2, n: F)$, έχουμε

$$R_c(2, n: F) = np^n \frac{(1 + \sqrt{1+4q/p})^n + (1 - \sqrt{1+4q/p})^n}{2^n}$$

Ο *Hwang* (1982) είχε δώσει επίσης ένα αλγόριθμο για την εύρεση της R , που όμως δεν είναι τόσο γρήγορος όσο ο αντίστοιχος των *Antonopoulou & Papastavridis* (1987). Ο τελευταίος έχει ως εξής, (μη ισόνομες μονάδες)

$$R_c(k, n: F) = \begin{cases} 1, & n < k \\ 1 - \prod_{i=1}^n q_i, & n = k \\ 1 - \prod_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^n p_i \left(\prod_{j=i+1}^{i-1} q_j \right), & n = k+1 \\ p_n R_L(k, n-1) + q_n R_c(k, n-1) - \\ \sum_{i=0}^{k-1} p_{n-k+i} \left(\prod_{j=n-k+i+1}^i q_j \right) p_{i+1} R'_L(i+2, n-k+i-1), & n > k+1 \end{cases}$$

όπου $R'(i+2, n-k+i-1)$ είναι η αξιοπιστία του $C_L(k, n: F)$, το οποίο απαρτίζεται από τις μονάδες $i+2$ έως $n-k+i-1$. Τέλος, οι *Du & Hwang* (1988) απέδειξαν μια αναδρομική σχέση, η οποία περιέχει μόνο αξιοπιστίες κυκλικών συστημάτων και ισχύει για μερικές επιλογές των n και k . Η σχέση αυτή είναι,

$$R_c(k, n: F) = \sum_{i=0}^{k-1} pq^i R_c(k, n-i-1),$$

για $n \geq 2k$ και,

$$R_c(k, n: F) = R_c(k, n-1) - pq^k R_c(k, n-k-1),$$

για $n \geq 2k+1$.

1.8.2 Συνεχόμενα- k -από- r -από- n

Ένα σύστημα, συνεχόμενα- k -από- r -από- n αποτελείται από n μονάδες, οι οποίες είναι συνδεδεμένες σε σειρά ή κυκλικά. Το σύστημα θα αποτυγχάνει (ή θα λειτουργεί) εάν ανάμεσα σε r συνεχόμενες μονάδες, τουλάχιστον k δεν λειτουργούν (ή λειτουργούν). Ο *Tong* (1985), αναφέρθηκε για πρώτη φορά σ' αυτό, ενώ μια προσπάθεια για τη μελέτη της αξιοπιστίας του έγινε από τους *Sfakianakis, Kounias & Hillaris* (1992). Οι τελευταίοι κατάφεραν να δώσουν κλειστούς τύπους, μόνο για μερικές περιπτώσεις των k , r και n , με *iid* μονάδες. Αναλυτικά,

$$R(2, r, n) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n+r-1)/r \rfloor} \binom{n-(j-1)(r-1)}{j} q^j p^{n-j}$$

και (για το κυκλικό),

$$R_c(2, r, n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/r \rfloor} \frac{n}{n-j(r-1)} \binom{n-j(r-1)}{j} q^j p^{n-j}$$

Επίσης, απέδειξαν και μια αναδρομική σχέση, όταν το $n = r + \lambda$, με $\lambda \leq r$. Συγκεκριμένα,

$$R(k, r, n) = \sum_{x=1}^k R(x, \lambda, 2\lambda) \binom{r-\lambda}{k-x} p^{r-\lambda-k+x} q^{k-x}$$

με $R(x, \lambda, 2\lambda) = 1$ όταν $x > \lambda$.

1.8.3 Διδιάστατο συνεχόμενα- k -από- (r, s) -από- (m, n)

Τα συστήματα αυτά είναι γενικεύσεις του Διδιάστατου συνεχόμενα- k -από- (r,s) -από- (m,n) , καθώς αποτυγχάνουν εάν υπάρχουν k τουλάχιστον χαλασμένες μονάδες, σε ένα υποπίνακα (του $m \times n$ πίνακα) διαστάσεως $r \times s$, με $k \leq r^2$ (επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε κύλινδρο και όχι πίνακα). Ας θεωρήσουμε τώρα τις τ.μ. X_{ij} όπου,

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{εάν η } (i, j) \text{ μονάδα λειτουργεί} \\ 0, & \text{εάν η } (i, j) \text{ μονάδα δεν λειτουργεί} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \text{ και } j = 1, 2, \dots, n$$

και με (i, j) συμβολίζουμε τη μονάδα που είναι στη θέση (i, j) του πίνακα. Επίσης ορίζουμε τις Y_{ij} , ως

$$Y_{ij} = \sum_{a=i}^i \sum_{r+1}^{j+s-1} X_{ab}, \quad i = r, r+1, \dots, m \text{ και } j = 1, 2, \dots, n \quad s+1$$

δηλαδή οι Y_{ij} εκφράζουν το πλήθος των μονάδων που δουλεύουν, στον υποπίνακα διάστασης $r \times s$, που έχει σαν κάτω αριστερό στοιχείο την μονάδα (i, j) . Η αξιοπιστία του συστήματος γράφεται (Akiba & Yamamoto (2001)),

$$R(k, r, s, m, n: F) = \Pr \left\{ \bigcap_{i=r}^m \bigcap_{j=1}^{n-s+1} \{Y_{ij} < k\} \right\}$$

(ενώ για την περίπτωση που οι μονάδες είναι συνδεδεμένες κυλινδρικά,

$$R_C(k, r, s, m, n: F) = \Pr \left\{ \bigcap_{i=r}^m \bigcap_{j=1}^n \{Y_{ij} < k\} \right\}.$$

Με βάση λοιπόν αυτό το σκεπτικό, στο αποδεικνύονται (στο ίδιο άρθρο) και κάποιες πολύπλοκες αναδρομικές σχέσεις για τον ακριβή υπολογισμό της R (οι οποίες απαιτούν υπολογιστικό χρόνο τάξης $\min\{\mathbf{O}(m k^{r(n-s)}), \mathbf{O}(n k^{s(m-r)})\}$).

Όπως είδαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, η αξιοπιστία ενός συστήματος αποτελεί ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά της στοχαστικής του συμπεριφοράς. Υπάρχουν και έχουμε αναφέρει πολλούς τρόπους για τον ακριβή προσδιορισμό της, που όμως μερικές φορές, δυστυχώς, κανένας απ' αυτούς δεν είναι ικανός να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία. Παρατηρήσαμε ότι αν τα υπο μελέτη συστήματα, γίνονται όλο και πιο μεγάλα, τότε ο αριθμός των πράξεων που απαιτείται, με οποιαδήποτε μέθοδο και αν δουλεύουμε, αυξάνεται δραματικά (*Ball (1980), Rosenthal (1977)*). Η ανάγκη έτσι για να βρίσκουμε προσεγγιστικές τιμές για την αξιοπιστία, έγινε φανερή αρκετά νωρίς, με αποτέλεσμα πολύ να ασχολούνται με την εύρεση φραγμάτων, που να είναι πολύ κοντά στις ακριβείς τιμές και συνάμα, να υπολογίζονται μέσα από απλές παραστάσεις (και σίγουρα απλούστερες, από τις αντίστοιχες για τον προσδιορισμό της R).

Η πρώτη σημαντική δουλειά πάνω στα φράγματα αξιοπιστίας αποδίδεται στους *Esary* και *Proschan*, οι οποίοι το 1963 δημιούργησαν ίσως τα πιο γνωστά και διαδεδομένα, μέχρι σήμερα, φράγματα (*EP bounds*). Η απλότητα των εκφράσεων τους, σε συνδυασμό με την αρκετά καλή προσέγγιση που προσφέρουν, είναι οι λόγοι που κατέστησαν τα συγκεκριμένα φράγματα πολύ δημοφιλή. Δυο επόμενες προσπάθειες ήταν εκείνες των *Messinger & Shooman (1967)* και *Jensen (1969)*, οι οποίοι πρότειναν κάποια φράγματα, τα οποία γενικώς δεν ήταν καλύτερα από τα *EP bounds*. Μετέπειτα, το 1975 οι *Barlow & Proschan* πρότειναν τα *minimax bounds* (αρκετά απλά στον υπολογισμό τους) για τα οποία υποστήριξαν ότι για συστήματα με υψηλά αξιόπιστες μονάδες, δίνουν καλύτερο άνω φράγμα από τα *EP bounds*, αλλά χειρότερο κάτω φράγμα. Με αυτές τις υποθέσεις ασχολήθηκε ο *Maymin (1987)* και απέδειξε την ισχύ τους, κάτω όμως από ορισμένες συνθήκες. Αργότερα ο *Shogan (1976)*, χρησιμοποιώντας αποτελέσματα από τη θεωρία των *associated random variables*, αλλά και έννοιες γνωστές από τη μελέτη των δικτύων, όπως

των ισχυρά συνεκτικών μονάδων (*strongly connected components*) και της ακολουθιακής διάσπασης ενός δικτύου (*sequential decomposition of a network*), κατάφερε να δώσει ένα αλγόριθμο (για μια κλάση συστημάτων) με τον οποίο παίρνουμε φράγματα καλύτερα από τα *EP bounds*. Πάνω στο ίδιο σκεπτικό ο *Shogan* (1977), βελτίωσε τον προηγούμενο αλγόριθμο του, τόσο σε ακρίβεια όσο και σε απλότητα υπολογισμών. Ωστόσο σε καμία περίπτωση δεν μπορούμε να μιλήσουμε για ένα εύκολο τρόπο εύρεσης προσεγγιστικών τιμών της *R*. Μέσα από το άρθρο του *Shanthikumar* (1988), παρουσιάστηκε επίσης ένας αλγόριθμος, με τη βοήθεια των διαδοχικών ε.σ.δ. (*consecutive minimal cut sets*). Με τον τρόπο αυτό προέκυψε ένα άνω φράγμα καλύτερο από το αντίστοιχο του *Shogan* (1977) (δεν ισχύει το ίδιο για το κάτω φράγμα), όμως, το μεγάλο μειονέκτημα της συγκεκριμένης μεθόδου είναι ότι πολλά από τα μονότονα συστήματα, δεν έχουν την ιδιότητα ύπαρξης διαδοχικών ε.σ.δ.

Οι *Fu* και *Koutras* (1995), χρησιμοποιώντας τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας και διακοπής, δημιούργησαν κάποια φράγματα τα οποία σε συνδυασμό με τα *EP bounds*, καταφέρνουν να δώσουν πολύ καλές προσεγγίσεις για την *R*. Ένα χαρακτηριστικό της παραπάνω μεθόδου, είναι ότι ο υπολογισμός των φραγμάτων στηρίζεται σε μια διάταξη των ε.σ.λ. και ε.σ.δ., με αποτέλεσμα για δυο διαφορετικές διατάξεις, να έχουμε εν δυνάμει διαφορετικά φράγματα. Με την ιδιαιτερότητα αυτή αλλά και γενικότερα με τα τελευταία φράγματα, θα ασχοληθούμε στο 3^ο Κεφάλαιο. Το 1996 όπου οι *Koutras, Papastavridis & Petakos*, πρότειναν μια νέα κλάση φραγμάτων, εισάγοντας κάποιες καινούργιες έννοιες (όπως οι, *α -cut/path structures* οι οποίες οδηγούν σε μια γενίκευση των φραγμάτων των *Fu* και *Koutras*), με τα *FK bounds* να είναι μια ειδική περίπτωση αυτών. Επίσης και σ' αυτή την περίπτωση, τα νέα φράγματα σε συνδυασμό με τα *EP bounds*, παράγουν πολύ καλά αποτελέσματα, ενώ τα γενικότερα χαρακτηριστικά τους, είναι παρόμοια με εκείνα των αρχικών φραγμάτων. Στην εργασία των *Boutsikas & Koutras* (2000b), χρησιμοποιώντας πολλά αποτελέσματα που αφορούν τις *associated random variables* αλλά και διαμερίσεις του συνόλου των ε.σ.δ. (ή ε.σ.λ.), επιτυγχάνεται μια γενίκευση τεσσάρων κλάσεων, υπάρχοντων φραγμάτων. Μέσα από πολλά παραδείγματα και εκτενή αριθμητική μελέτη, διαπιστώνεται μια καλύτερη συμπεριφορά των προτεινόμενων προσεγγίσεων, σε σχέση με προηγούμενα φράγματα. Η πιο πρόσφατη δουλειά, πάνω στα φράγματα αξιοπιστίας (που απευθύνεται σε οποιοδήποτε μονότονο σύστημα) είναι του *Hsieh* (2003), στην οποία ένα σύστημα διασπάται σε επιμέρους Γραμμικά συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*: *F/G* συστήματα και με

βάση τις αξιοπιστίες τους, εξάγονται τα φράγματα, τα οποία είναι υποπεριπτώσεις των φραγμαατων που προτάθηκαν από τους *Boutsikas & Koutras* (2000b). Επίσης ο συγγραφέας αποδεικνύει ότι οι νέες προσεγγίσεις, είναι πάντα καλύτερες από τις αντίστοιχες των *EP bounds*.

Μια μεγάλη κατηγορία φραγμάτων δημιουργείται μέσω της αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (*Inclusion- Exclusion*). Δουλεύοντας πάλι, με τα ελάχιστα σύνολα διακοπής και λειτουργίας και κάνοντας χρήση των πρώτων όρων, που προκύπτουν από τη μέθοδο Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, προκύπτουν κάποιες ανισότητες γνωστές με την ονομασία *Bonferroni*. Οι ανισότητες αυτές κυρίως, αποτέλεσαν το εργαλείο που βοήθησε πολλούς συγγραφείς να δώσουν κάποια φράγματα για διάφορα συστήματα (τα οποία ωστόσο μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές, όπως και μεγαλύτερες της μονάδος). Ενδεικτικά αναφέρουμε τα άρθρα των *Papastavridis & Koutras* (1993b), *Heidtmann* (1982), *Habib & Szantai* (2000), *Boros & Prekopa* (1989), *Sfakianakis, Kounias & Hillaris* (1992) και *Lai* (1993).

Ο υπολογισμός όλων των φραγμάτων που έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα, στηρίζεται είτε στα ελάχιστα σύνολα διακοπής/λειτουργίας, είτε στις τιμές της συνάρτησης δομής, για όλα τα δυνατά διανύσματα κατάστασης. Το 1989 όμως, οι *Arratia et al* (1989) εφάρμοσαν τη μέθοδο *Chen-Stein* (*Chen* (1975)) για την προσέγγιση της συνάρτησης αξιοπιστίας. Έκτοτε, αυτή η μέθοδος υιοθετήθηκε και απ' άλλους ερευνητές, οι οποίοι έδωσαν φράγματα για συγκεκριμένα συστήματα (ή γενικώς μελέτησαν τις ιδιότητες τους), όπως οι *Koutras et al* (1993) και οι *Koutras & Papastavridis* (1993). Η μέθοδος αυτή, με την αρωγή και άλλων φραγμάτων, μπορεί να δώσει φράγματα που προσεγγίζουν ικανοποιητικά την R , ενώ ένα μειονέκτημα της είναι ότι, μπορεί να δώσει κάτω φράγμα μικρότερο του μηδενός και άνω, μεγαλύτερο της μονάδος. Οι *Barbour et al* (1996) πρότειναν μια παραλλαγή της παραπάνω μεθόδου, ώστε να αντιμετωπίσουν κάποια ιδιαίτερη περίπτωση. Τέλος, ο *Bodin* (1970) αποδεικνύει ότι μέσα από τη διάσπαση σε *modules* του συστήματος (που είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί, κάτω από ορισμένες συνθήκες- *Birnbaum & Esary* (1965)), μπορούμε να βελτιώσουμε την προσέγγιση, των *EP bounds*.

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλύσουμε και θα συγκρίνουμε διάφορα φράγματα, με σκοπό να εντοπίσουμε εκείνα που προσφέρουν την καλύτερη προσέγγιση, με όσο το δυνατόν ευκολότερους υπολογισμούς. Θα επικεντρωθούμε κυρίως στα πολλαπλασιαστικά

φράγματα, αυτά δηλαδή που συνήθως έχουν σαν βάση τα ε.σ.δ/ε.σ.λ και υπολογίζονται μεσω κλειστών πολλαπλασιαστικών τύπων, και όχι μ' αυτά που εξάγονται από τη μέθοδο *Chen-stein* ή τις ανισότητες *Bonferroni*.

2.1 Φράγματα Minimax

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή των φραγμάτων *minimax* (*MM bounds*), θα αναφέρουμε την παρακάτω Πρόταση, από την οποία παίρνουμε κάποια πολύ απλά φράγματα για τη συνάρτηση αξιοπιστίας, ενός μονότονου συστήματος (για τις αποδείξεις, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε οποιοδήποτε βιβλίο αξιοπιστίας, π.χ. των *Barlow* και *Proschan* (1975)).

Πρόταση 2.1.1. Για κάθε μονότονο σύστημα με n μονάδες, ισχύει

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq R(\mathbf{p}) \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$$

όπου \mathbf{p} το $1 \times n$ διάνυσμα με τις αξιοπιστίες των μονάδων ($\mathbf{p}=(p_1, p_2, \dots, p_n)$).

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης προκύπτει άμεσα, λαμβάνοντας υπόψη το Θεώρημα 1.2.1. Έτσι η αξιοπιστία ενός συστήματος είναι σίγουρα μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του σειριακού, με τις ίδιες μονάδες και πάντα χειρότερη, απ' αυτή του παράλληλου. Μπορεί να θεωρείται ως αναμενόμενο, ότι τα παραπάνω φράγματα δεν επιτυγχάνουν καμία αξιοπρόσεχτη προσέγγιση, αν σκεφτούμε ότι δεν συνεκτιμάται πουθενά, η δομή του εκάστοτε συστήματος. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, όταν το πλήθος των μονάδων γίνεται πολύ μεγάλο, οι πληροφορίες που παίρνουμε από τα συγκεκριμένα φράγματα είναι ουσιαστικά ανύπαρκτες, διότι το κάτω φράγμα πλησιάζει πολύ το μηδέν και το άνω, τη μονάδα.

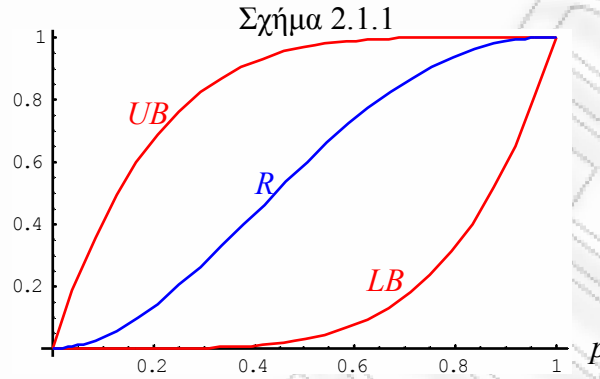
Παράδειγμα 2.1.1. Έστω το $C_L(2, 6: F)$, με *iid* μονάδες και $p=0.7$. Τότε τα φράγματα που προκύπτουν είναι,

$$LB = p^n = 0.7^{15} = 0.117649 \quad \text{και} \quad UB = 1 - (1-p)^n = 1 - 0.3^{15} = 0.999271$$

ενώ τα ίδια φράγματα θα προκύψουν και για οποιαδήποτε άλλη τιμή του k (αλλά και για όλα τα συστήματα με 6 μονάδες). Αν τώρα έχουμε το $C_L(2, 25: F)$, με $p=0.7$, θα πάρουμε

$$LB = 0.7^{25} = 0.00013 \quad \text{και} \quad UB = 1 - 0.4^{25} = 0.99999$$

το οποίο εντέλει, μας οδηγεί στη γνωστή σχέση, $0 \leq R \leq 1$. Για το σύστημα $C_L(2, 5: F)$, μπορούμε να δούμε ποια είναι η συμπεριφορά των φραγμάτων σε σχέση με την ακριβή τιμή της R , για διάφορες τιμές του p , μέσω του παρακάτω γραφήματος,



Τα *MM bounds*, που όπως αναφέρθηκε προτάθηκαν από τους *Barlow & Proschan* (1975), δημιουργούν άνω και κάτω φράγμα, με τη βοήθεια των ελάχιστων συνόλων διακοπής και λειτουργίας, αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.1.1. Έστω ένα μονότονο σύστημα με ε.σ.λ. τα $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_M\}$ και ε.σ.δ. $\{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\}$. Τότε ισχύει,

$$\max_{1 \leq r \leq M} P \left[\min_{i \in P_r} X_i = 1 \right] \leq R \leq \min_{1 \leq s \leq N} P \left[\max_{i \in C_s} X_i = 1 \right]$$

Επιπρόσθετα, αν οι μονάδες είναι ανεξάρτητες καταλήγουμε στη σχέση,

$$\max_{1 \leq r \leq M} \prod_{i \in P_r} p_i \leq R \leq \min_{1 \leq s \leq N} \prod_{i \in C_s} p_i$$

Όπως είναι αναμενόμενο και παράλληλα αποδεικνύεται πολύ εύκολα, οι προσεγγίσεις που παίρνουμε από τα παραπάνω φράγματα, είναι πάντα καλύτερες από τις αντίστοιχες της Πρότασης 2.1.1. Δηλαδή,

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq \max_{1 \leq r \leq M} \prod_{i \in P_r} p_i \leq R \leq \min_{1 \leq s \leq N} \prod_{i \in C_s} p_i \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i).$$

Να σημειώσουμε ότι όταν έχουμε *iid* μονάδες, ισχύει

$$p \left(\min_{1 \leq r \leq M} |P_r| \right) \leq R \leq 1 - (1 - p) \left(\min_{1 \leq s \leq N} |C_s| \right)$$

όπου $|C_i|$ ο πληθάριθμος του C_i (όμοια το $|P_i|$). Έχοντας λοιπόν στη διάθεση μας τα φράγματα *minimax* θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε πως συμπεριφέρονται τόσο σε ακρίβεια (πόσο καλά προσεγγίζουν την R), όσο και στις περιπτώσεις των μεγάλων συστημάτων (αν υπάρχουν μεγάλες δυσκολίες στον υπολογισμό τους).

Παράδειγμα 2.1.2. Ας πάρουμε σαν υπό μελέτη σύστημα τη γέφυρα, με *iid* μονάδες. Τότε είναι γνωστό ότι,

$$P_1=\{1,2\}, P_2=\{4,5\}, P_3=\{1,3,5\} \text{ και } P_4=\{2,3,4\},$$

$$C_1=\{1,4\} \ C_2=\{2,5\} \ C_3=\{1,3,5\} \text{ και } C_4=\{2,3,4\}.$$

Η ακριβής τιμή της αξιοπιστίας δίδεται από τη σχέση,

$$R(p) = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5.$$

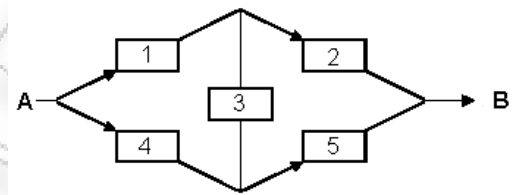
ενώ,

$$LB_{MM} = \max_{1 \leq r \leq M} \prod_{i \in P_r} p_i = p^2 \text{ και } UB_{MM} = \min_{1 \leq s \leq N} \prod_{i \in C_s} p_i = 1 - (1 - p)^2$$

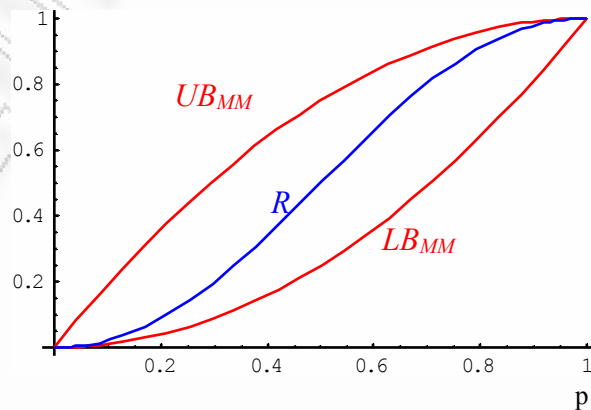
Έτσι για διάφορες τιμές του p έχουμε,

Πίνακας 2.1.1

p	LB_{MM}	R	UB_{MM}	εύρος
0.10	0.01	0.021	0.19	0.18
0.20	0.04	0.089	0.36	0.32
0.30	0.09	0.198	0.51	0.42
0.40	0.16	0.340	0.64	0.48
0.50	0.25	0.500	0.75	0.50
0.60	0.36	0.659	0.84	0.48
0.70	0.49	0.802	0.91	0.42
0.80	0.64	0.911	0.96	0.32
0.90	0.81	0.978	0.99	0.18



Σχήμα 2.1.2



Βασική λοιπόν προϋπόθεση για τον υπολογισμό των *minimax* φραγμάτων, είναι η γνώση των ε.σ.δ και ε.σ.λ. Από τη στιγμή αυτή και μετά, θα πρέπει να βρεθούν τα M (πλήθος ε.σ.λ.) και N (πλήθος ε.σ.δ.) γινόμενα, που το καθένα θα περιέχει το πολύ n όρους, και έπειτα να πραγματοποιηθούν $(N-1)+(M-1)$ συγκρίσεις. Ειδικά για *iid* συστήματα, χρειάζεται μόνο να

γνωρίζουμε ποιος είναι ο μεγαλύτερος πληθάρηθος που αντιστοιχεί σε ε.σ.δ. και ο μικρότερος από αυτούς που αντιστοιχούν σε ε.σ.λ.

Παράδειγμα 2.1.3. Για το σύστημα $C_L(2, 10.000: F)$ γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 9.999 ε.σ.δ. Η εύρεση του UB_{MM} απαιτεί τον υπολογισμό 9.999 γινομένων, από δυο όρους το καθένα, αλλά και τη σύγκριση πάλι 9.999 αριθμών. Βέβαια στην *iid* περίπτωση, προκύπτει άμεσα ότι $UB_{MM} = 1 - (1-p)^2$. Τα πράγματα όμως περιπλέκονται αν θελήσουμε να προχωρήσουμε στον προσδιορισμό του LB_{MM} , καθώς τα ε.σ.λ. είναι δύσκολο να περιγραφούν. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να βρούμε κάποιο κάτω φράγμα, που και αυτό να στηρίζεται στα ε.σ.δ. (όπως είναι το *EP bound*, που θα δούμε αργότερα), ώστε να πάρουμε μια πιο εύκολη προσέγγιση. Για το $C_L(2, 6: F)$ τα ε.σ.λ. είναι,

$$P_1=\{1,3,5\}, P_2=\{2,3,5\}, P_3=\{2,4,5\}, P_4=\{2,4,6\} \text{ και } P_5=\{1,3,4,6\},$$

οπότε (*iid components*),

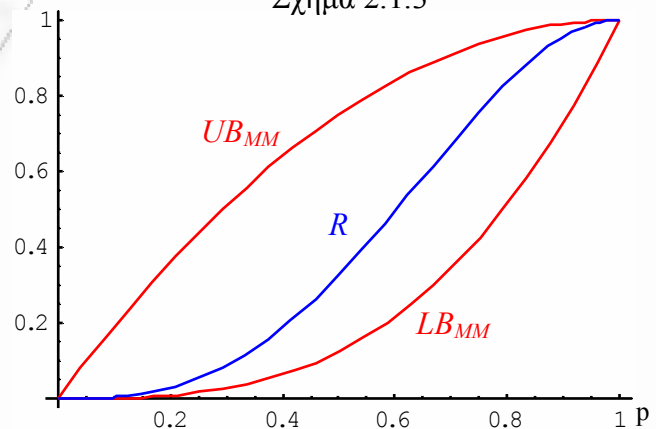
$$LB_{MM} = \max_{1 \leq r \leq M} \prod_{i \in P_r} p_i = p^3 \text{ και } UB_{MM} = \min_{1 \leq s \leq N} \prod_{i \in C_s} p_i = 1 - (1-p)^2.$$

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τιμές των φραγμάτων για διάφορες τιμές της αξιοπιστίας των μονάδων, όπως και η ακριβής τιμή της αξιοπιστίας του συστήματος (R). Επίσης τα αποτελέσματα αυτά απεικονίζονται και γραφικά στο σχήμα που ακολουθεί.

Πίνακας 2.1.2

p	LB_{MM}	R	UB_{MM}	εύρος
0.10	0.001	0.0038	0.19	0.189
0.20	0.008	0.0282	0.36	0.352
0.30	0.027	0.0877	0.51	0.483
0.40	0.064	0.1884	0.64	0.576
0.50	0.125	0.3281	0.75	0.625
0.60	0.216	0.4959	0.84	0.624
0.70	0.343	0.6733	0.91	0.567
0.80	0.512	0.8356	0.96	0.448
0.90	0.729	0.9543	0.99	0.261

Σχήμα 2.1.3



2.2 Φράγματα Esary-Proschan

Ίσως τα πιο διαδεδομένα πολλαπλασιαστικά φράγματα, που βρίσκονται σχεδόν σε κάθε βιβλίο αξιοπιστίας, είναι αυτά που πρότειναν οι *Esary* και *Proschan* το 1963. Αποτελούν ένα σημείο αναφοράς και όλα τα νέα φράγματα, σίγουρα δεν αποφεύγουν τη σύγκριση μαζί τους.

Θεώρημα 2.2.1. Για κάθε μονότονο σύστημα με ανεξάρτητες μονάδες και συνάρτηση αξιοπιστίας $R(\mathbf{p})$, ισχύει

$$LB_{EP} = \prod_{j=1}^N [1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i)] \leq R(\mathbf{p}) \leq 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \prod_{i \in P_j} p_i) = UB_{EP}$$

όπου είναι N και M , είναι το πλήθος των ε.σ.δ. και ε.σ.λ., αντίστοιχα.

Απόδειξη Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα,

Γ_j : μια τουλάχιστον μονάδα του ε.σ.λ. P_j είναι χαλασμένη

για $j = 1, \dots, M$. Τότε η παρακάτω σχέση είναι προφανής,

$$1 - R = P(\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \dots \cap \Gamma_M) = P(\Gamma_1)P(\Gamma_2 | \Gamma_1)P(\Gamma_3 | \Gamma_1 \cap \Gamma_2) \dots P(\Gamma_M | \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \dots \cap \Gamma_{M-1}).$$

Όμως από τις ανισότητες,

$$P(\Gamma_2 | \Gamma_1) \geq P(\Gamma_2)$$

$$P(\Gamma_3 | \Gamma_1 \cap \Gamma_2) \geq P(\Gamma_3)$$

⋮

$$P(\Gamma_M | \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \dots \cap \Gamma_{M-1}) \geq P(\Gamma_M)$$

καταλήγουμε στην,

$$1 - R \geq P(\Gamma_1) P(\Gamma_2) P(\Gamma_3) \dots P(\Gamma_M),$$

όπου,

$$P(\Gamma_j) = 1 - P(\Gamma_j^c) = 1 - P(\text{όλες οι μονάδες του ε.σ.λ. λειτουργούν}) = 1 - \prod_{i \in P_j} p_i.$$

Έτσι παίρνουμε τη δεξιά ανισότητα και όμοια, χρησιμοποιώντας τα

Δ_j : μια τουλάχιστον μονάδα του ε.σ.δ. C_j λειτουργεί

αποδεικνύουμε και την αριστερή. ■

Σε αντίθεση με τα φράγματα *minimax*, τα *EP Bounds* έχουν κάτω φράγμα, που στηρίζεται στα ε.σ.δ. και άνω φράγμα που βασίζεται στα ε.σ.λ. Οι *Barlow* και *Proschan* (1975), είχαν υποστηρίξει ότι για μονάδες με πολύ υψηλές αξιοπιστίες, το LB_{EP} είναι καλύτερο από το LB_{MM} , ενώ από την άλλη, το UB_{MM} υπερέχει του UB_{EP} . Ο *Maymin* (1987) απέδειξε ότι ο πρώτος ισχυρισμός είναι όντως αληθής, ενώ η ορθότητα του δεύτερου προϋποθέτει ότι ο αριθμός των μονάδων σε κάθε ε.σ.δ., είναι μικρότερος από το πλήθος των ε.σ.λ. του συστήματος. Στην *iid* περίπτωση όμως (με υψηλά αξιόπιστες μονάδες), η ύπαρξη μόνο ενός ε.σ.δ. με την παραπάνω ιδιότητα, είναι αρκετή. Γενικώς, έχει παρατηρηθεί ότι το LB_{EP} επιτυγχάνει καλές προσεγγίσεις, όταν οι μονάδες είναι υψηλά αξιόπιστες, σε αντίθεση με το UB_{EP} .

Παράδειγμα 2.2.1. Το σύστημα $C_L(2, 8: F)$ έχει ε.σ.δ. και ε.σ.λ. τα,

$$P_1=\{2,4,6,8\}, P_2=\{2,4,6,7\}, P_3=\{2,4,5,7\}, P_4=\{2,3,5,7\}, P_5=\{2,3,5,6,8\}, P_6=\{1,3,5,7\},$$

$$P_7=\{1,3,5,6,8\}, P_8=\{1,3,4,6,8\} \text{ και } P_9=\{1,3,4,6,7\},$$

$$C_1=\{1,2\}, C_2=\{2,3\}, C_3=\{3,4\}, C_4=\{4,5\}, C_5=\{5,6\}, C_6=\{6,7\} \text{ και } C_7=\{7,8\}.$$

Έτσι, αν οι αξιοπιστίες των μονάδων είναι

$$p_i = 0.7 \text{ για } i \text{ άρτιο και } p_i = 0.8 \text{ για } i \text{ περιττό}$$

τότε,

$$LB_{EP} = \prod_{j=1}^N [1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i)] = [1 - (1 - 0.8)(1 - 0.7)]^7 = 0.94^7 = 0.648478$$

$$UB_{EP} = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \prod_{i \in P_j} p_i) = 1 - (1 - 0.7^4) * (1 - 0.7^3 * 0.8) * (1 - 0.7^2 * 0.8^2) * (1 - 0.7 * 0.8^3) * (1 - 0.7^3 * 0.8^2) * (1 - 0.8^4) * (1 - 0.7^2 * 0.8^3) * (1 - 0.7^3 * 0.8^2) * (1 - 0.7^2 * 0.8^3) = 0.950992,$$

ενώ $R = 0.692811$. Αξίζει να παρατηρήσουμε το πόσο κοντά στην ακριβή τιμή της αξιοπιστίας είναι το LB_{EP} (εδώ έχουμε αρκετά αξιόπιστες μονάδες). Αν θέλαμε να βρούμε για ένα πολύ μεγάλο σύστημα, π.χ. το $C(10, 6250: F)$, την αξιοπιστία του, είναι γνωστό ότι απαιτείται, αρκετός χρόνος (εκτός αν χρησιμοποιήσουμε ένα αναδρομικό τύπο, όπως τον (1.8.1.5)). Επομένως για μια πρώτη και πιο γρήγορη εικόνα για την R , θα ήταν θεμιτό να βρούμε το LB_{EP} , από το γινόμενο $6250 \cdot 10 = 62.500$, όρων (ο υπολογιστικός χρόνος που χρειάζεται είναι περίπου 1.5 sec). Οπότε εάν, $p_i = 0.6$ για i άρτιο και $p_i = 0.7$ για i περιττό, είναι

$$LB_{EP} = \prod_{j=1}^{6241} [1 - \prod_{i=j}^{j+9} (1 - p_i)] = 0.85616$$

με $R = 0.90396$ (ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό της R δίνεται στο Παράρτημα 2.2.1). ■

Παράδειγμα 2.2.2. Για το $C_L(2, 6; F)$ τα ε.σ.λ. είναι,

$$P_1 = \{1, 3, 5\}, P_2 = \{2, 3, 5\}, P_3 = \{2, 4, 5\}, P_4 = \{2, 4, 6\} \text{ και } P_5 = \{1, 3, 4, 6\}.$$

Οπότε (*iid components*),

$$LB_{EP} = \prod_{j=1}^N [1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i)] = \prod_{j=1}^5 [1 - (1 - p)^{|C_j|}] = \prod_{j=1}^5 [1 - (1 - p)^2] = [1 - (1 - p)^2]^5$$

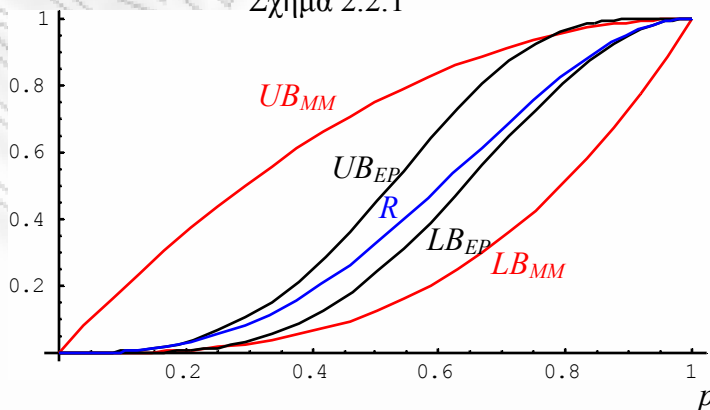
$$UB_{EP} = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \prod_{i \in P_j} p_i) = 1 - \prod_{j=1}^5 (1 - p^{|P_j|}) = 1 - (1 - p^3)^4 (1 - p^4)$$

(όπου $|A|$, ο πληθάριθμος του συνόλου A). Για διάφορες τιμές του p , προκύπτει ο επόμενος πίνακας

Πίνακας 2.2.1

p	LB_{MM}	LB_{EP}	R	UB_{EP}	UB_{MM}	εύρος MM	εύρος EP
0	0	0	0	0	0	0	0
0.10	0.001	0.00024	0.0038	0.0041	0.19	0.189	0.0038
0.20	0.008	0.00604	0.0282	0.0331	0.36	0.352	0.0271
0.30	0.027	0.03450	0.0877	0.1109	0.51	0.483	0.0765
0.40	0.064	0.10737	0.1884	0.2521	0.64	0.576	0.1447
0.50	0.125	0.2373	0.3281	0.4504	0.75	0.625	0.2131
0.60	0.216	0.41821	0.4959	0.6711	0.84	0.624	0.2529
0.70	0.343	0.62403	0.6733	0.8584	0.91	0.567	0.2344
0.80	0.512	0.81537	0.8356	0.9665	0.96	0.448	0.1511
0.90	0.729	0.95099	0.9543	0.9981	0.99	0.261	0.0471

Σχήμα 2.2.1



Παρατηρούμε γενικώς ότι οι προσεγγίσεις των *EP bounds*, είναι καλύτερες από τις αντίστοιχες των *minimax*. Καθώς και οι προϋποθέσεις του *Maymin* ικανοποιούνται, τα αποτελέσματα συμφωνούν και με τους ισχυρισμούς, των *Barlow* και *Proschan*. ■

Μερικές φορές είναι πολύ δύσκολο, έως ακατόρθωτο να προσδιορίσουμε και τα ε.σ.δ. και τα ε.σ.λ. ενός συστήματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το Γραμμικό συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*: *F*, του οποίου τα ε.σ.δ. είναι πολύ εύκολο να περιγράψουν, κάτι που σίγουρα δεν συμβαίνει και με τα ε.σ.λ. Έτσι αν γνωρίζαμε μόνο ένα από τα δυο σύνολα, τότε θα ήταν καλό να μπορούσαμε να βρούμε φράγματα (άνω και κάτω) που να στηρίζονται μόνο στο συγκεκριμένο σύνολο. Ο συνδυασμός λοιπόν των *minimax* και *EP bounds*, μας προσφέρει μια τέτοια δυνατότητα, διότι αν για παράδειγμα γνωρίζαμε τα ε.σ.λ., θα χρησιμοποιούσαμε το UB_{EP} και το LB_{MM} . Επίσης ένα βελτιωμένο ζεύγος φραγμάτων θα προέκυπτε από τη σχέση,

$$Lower\ Bound = \max \{LB_{MM}, LB_{EP}\} \text{ και } Upper\ Bound = \min \{UB_{MM}, UB_{EP}\}.$$

Παράδειγμα 2.2.3. Ας πάρουμε το σύστημα $C_L(10, 20.000: F)$, και δουλεύοντας μόνο με τα ε.σ.δ. του, ας προσπαθήσουμε να βρούμε φράγματα για την *R*. Τα ε.σ.δ. είναι τα σύνολα,

$$C_i = \{i, \dots, i+9\}, \text{ για } i=1, 2, \dots, 19991$$

και τα αντίστοιχα φράγματα είναι,

$$LB_{EP} = \prod_{j=1}^N [1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i)] = \prod_{j=1}^{19991} [1 - \prod_{i=j}^{j+9} (1 - p_i)]$$

και

$$UB_{MM} = \min_{1 \leq s \leq N} \prod_{i \in C_s} p_i = \min_{1 \leq s \leq 19991} (1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i)) = \min \{1 - \prod_{j=i}^{i+9} (1 - p_j) : i=1, \dots, 19991\}.$$

Αν οι αξιοπιστίες των μονάδων είναι, $p_i = 0.7$ για i άρτιο και $p_i = 0.8$ για i περιττό, τότε έχουμε

$$LB_{EP} = 0.984 \text{ και } UB_{MM} = 0.999$$

(με τον υπολογιστή να κάνει περίπου 60 *sec*, για να δώσει αποτέλεσμα). Στο Παράδειγμα 1.8.1.1., χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο (1.8.1.6), πήραμε τους χρόνους που απαιτούνται για τον υπολογισμό της *R*, οι οποίοι μαζί με τους αντίστοιχους για τα φράγματα, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (περίπτωση *iid*),

Πίνακας 2.2.2

n	k	<i>Computing Time(R)</i>	<i>Computing Time(Bounds)</i>
40	2	11 sec	0.00001 sec
80	13	21.5 sec	0.0002 sec
100	18	29.8 sec	0.0003 sec

Ενώ με τον τύπο (1.8.1.1) (Παράδειγμα 1.8.1.1), τα αντίστοιχα αποτελέσματα, σε συνδυασμό με τα φράγματα είναι (*iid* και $k=2$),

Πίνακας 2.2.3

n	<i>Computing Time(R)</i>	<i>Computing Time(Bounds)</i>
1.000	0.18 sec	0.00001Sec
10.000	71.623 sec	0.00004Sec
20.000	444.529 sec	0.0005Sec

Σε μερικές περιπτώσεις βέβαια (εξαρτάται και από τις τιμές των p_i) ένα από τα δυο φράγματα δεν προσφέρει καμία χρήσιμη πληροφορία, διότι βρίσκεται πολύ κοντά στα φυσιολογικά όρια της αξιοπιστίας (το μηδέν ή τη μονάδα). ■

2.3 Τροποποιημένα Πολλαπλασιαστικά Φράγματα

Οι *Fu and Koutras* (1995), δημιούργησαν κάποια νέα πολλαπλασιαστικά φράγματα, παρακινούμενοι από το γεγονός, ότι το LB_{EP} επιτυγχάνει καλές προσεγγίσεις, όταν οι μονάδες είναι υψηλά αξιόπιστες, ενώ το UB_{EP} όταν έχουμε χαμηλές αξιοπιστίες. Σκοπός τους ήταν λοιπόν, να δώσουν φράγματα με τις αντίστροφες ιδιότητες, έτσι ώστε ο συνδυασμός αυτών με τα EP bounds, να προσφέρει πάντα καλές προσεγγίσεις (τόσο σε χαμηλές όσο και σε υψηλές αξιοπιστίες).

Ο ορισμός των νέων τροποποιημένων φραγμάτων βασίζεται τόσο στη διάταξη των ε.σ.δ. και των ε.σ.λ., όσο και σε δυο νέες οικογένειες συνόλων (για τις αποδείξεις των θεωρημάτων, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο *Fu & Koutras* (1995)). Συγκεκριμένα για την κατασκευή του άνω φράγματος (UB_{FK}), ενός συστήματος με ε.σ.δ.,

$$C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\},$$

ορίζουμε αρχικά τα σύνολα,

$$L_1^* = \emptyset$$

$$L_j^* = \{i: C_i \cap C_j \neq \emptyset, 1 \leq i < j\}, \text{ για } j=2, \dots, N.$$

Δηλαδή, το L_j^* περιέχει όλους τους δείκτες των C_i , που έχουν κοινές μονάδες με το C_j και ταυτόχρονα είναι, $i < j$. Με τη βοήθεια των L_j^* , παίρνουμε τα L_j τα οποία ικανοποιούν τις ιδιότητες,

$$L_j \cap C_i \neq \emptyset \text{ για κάθε } i \in L_j^*$$

$$L_j \cap C_j = \emptyset \text{ (εάν } L_j^* = \emptyset \Rightarrow L_j = \emptyset).$$

Για κάθε μονότονο σύστημα, μπορούν να ορισθούν σύνολα L_j , με τις παραπάνω ιδιότητες, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τα,

$$L_j = \bigcup_{i=1}^{j-1} (C_i \cap C_j'), \text{ για } j=2, \dots, N,$$

όπου η επιλογή αυτή των L_j συνήθως δεν είναι η καλύτερη δυνατή (όπου C_j' το συμπληρωματικό σύνολο του C_j). Αντίθετα, στις πιο πολλές περιπτώσεις υπάρχει η δυνατότητα να διαλέξουμε πολύ μικρότερα σύνολα δεικτών L_j , παίρνοντας έτσι πολύ καλύτερα φράγματα.

Θεώρημα 2.3.1. Για κάθε μονότονο σύστημα με ανεξάρτητες μονάδες και ε.σ.δ. $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\}$, ισχύει

$$\prod_{j=1}^N [1 - P(\delta_j = 0)] \leq R \leq \prod_{j=1}^N \left[1 - \left(\prod_{i \in L_j} p_i \right) P(\delta_j = 0) \right],$$

όπου δ_j είναι η συνάρτηση δομής του συστήματος που δημιουργείται αν συνδέσουμε όλες τις μονάδες του C_j , παράλληλα.

Το κάτω φράγμα που δίνεται παραπάνω είναι το γνωστό LB_{EP} . Στην περίπτωση ανεξάρτητων μονάδων έχουμε,

$$LB_{EP} = \prod_{j=1}^N [1 - P(\delta_j = 0)] = \prod_{j=1}^N [1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i)],$$

και

$$UB_{FK} = \prod_{j=1}^N \left[1 - \left(\prod_{i \in L_j} p_i \right) \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right].$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ένα κάτω φράγμα (LB_{FK}), ορίζοντας τα αντίστοιχα σύνολα. Έτσι εάν το σύστημα έχει τα ε.σ.λ. $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_M\}$, θεωρούμε τα σύνολα,

$$K_1^* = \emptyset, \quad K_j^* = \{i: P_i \cap P_j \neq \emptyset, 1 \leq i < j\}, \text{ για } j = 2, \dots, M.$$

και στη συνέχεια τα $K_j, j=1, \dots, M$ με τις ακόλουθες δυο ιδιότητες

$$K_j \cap P_i \neq \emptyset \text{ για κάθε } i \in K_j^*$$

$$K_j \cap P_j = \emptyset \text{ (εάν } K_j^* = \emptyset \Rightarrow K_j = \emptyset).$$

Τότε ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.2 Για κάθε μονότονο σύστημα με ανεξάρτητες μονάδες και ε.σ.λ. $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_M\}$, ισχύει

$$1 - \prod_{j=1}^M \left[1 - \left(\prod_{i \in K_j} q_i \right) P(\gamma_j = 1) \right] \leq R \leq 1 - \prod_{j=1}^M [1 - P(\gamma_j = 1)],$$

όπου γ_j είναι η συνάρτηση δομής του συστήματος που δημιουργείται αν συνδέσουμε όλες τις μονάδες του P_j , σειριακά.

Και εδώ, το άνω φράγμα είναι το γνωστό UB_{EP} . Όταν οι μονάδες είναι ανεξάρτητες, προκύπτει

$$UB_{EP} = 1 - \prod_{j=1}^M [1 - P(\gamma_j = 1)] = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \prod_{i \in P_j} p_i),$$

και,

$$LB_{FK} = 1 - \prod_{j=1}^M \left[1 - \left(\prod_{i \in K_j} q_i \right) P(\gamma_j = 1) \right] = 1 - \prod_{j=1}^M \left[1 - \left(\prod_{i \in K_j} q_i \right) \prod_{i \in P_j} p_i \right].$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τα νέα φράγματα, με τα EP bounds, παίρνουμε πολύ καλές προσεγγίσεις. Συγκεκριμένα, αν οι αξιοπιστίες των μονάδων είναι αρκετά υψηλές, τότε αναμένεται η διαφορά των LB_{EP} και UB_{FK} , να είναι μικρή. Αυτό μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί, αν σκεφτούμε ότι αν τα p_i είναι κοντά στη μονάδα, τότε το ίδιο θα συμβαίνει και για την ποσότητα $\prod_{i \in L_j} p_i$, με αποτέλεσμα το εύρος του διαστήματος (LB_{EP} , UB_{FK}), να γίνεται μικρό. Αντίστοιχα όταν οι αξιοπιστίες είναι χαμηλές, τα φράγματα LB_{FK} , UB_{EP} θα βρίσκονται αρκετά κοντά. Αυτό που έχουμε ήδη επισημάνει, είναι ότι ο προσδιορισμός των συνόλων L_j , στηρίζεται στο ποιο από τα ε.σ.δ. θα θεωρηθεί ως C_1 , ποιο C_2 κοκ, δηλαδή στη διάταξη των ε.σ.δ. (ισχύουν τα αντίστοιχα για τα K_j). Ένα ερώτημα που προκύπτει, χωρίς να έχει δοθεί μέχρι στιγμής συστηματική απάντηση, είναι ποια απ' όλες τις δυνατές διατάξεις των ε.σ.δ., δίνει το ελάχιστο άνω φράγμα και ποια διάταξη των ε.σ.λ., το μέγιστο κάτω φράγμα. Επίσης είδαμε ότι, δεδομένης μια διάταξης, η επιλογή των συνόλων L_j και K_j , δεν είναι μοναδική, με αποτέλεσμα να μη γνωρίζουμε ποια είναι η βέλτιστη. Οι Koutras, Tsitmidelis, & Zissimopoulos (2003) έδωσαν μια απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα, αντιμετωπίζοντάς το σαν ένα πρόβλημα κάλυψης συνόλων (*set covering problem, SCP*), ενώ περισσότερα πάνω σ' αυτά τα δυο τελευταία ζητήματα, θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

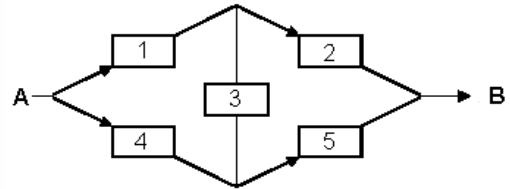
Παράδειγμα 2.3.1. Αρχικώς, θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά των φραγμάτων στο σύστημα της γέφυρας, θεωρώντας τις επόμενες διατάξεις των ε.σ.δ. και ε.σ.λ.,

$$P_1 = \{1,2\}, P_2 = \{4,5\}, P_3 = \{1,3,5\} \text{ και } P_4 = \{2,3,4\},$$

$$C_1 = \{1,4\} \ C_2 = \{2,5\} \ C_3 = \{1,3,5\} \text{ και } C_4 = \{2,3,4\},$$

θα έχουμε,

$$L_1^* = L_2^* = \emptyset, \ L_3^* = \{1,2\}, \ L_4^* = \{1,2,3\}$$



οπότε, $L_1=L_2=\emptyset$. Το L_3 πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες,

$$L_3 \cap C_i \neq \emptyset \text{ για κάθε } i=1, 2 \text{ και } L_3 \cap C_3 = \emptyset.$$

οπότε, $L_3 = \{2,4\}$. Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε $L_4 = \{1,5\}$ και καταλήγουμε στα φράγματα,

$$LB_{EP} = (1-q_1q_4) (1-q_2q_5) (1-q_1q_3q_5) (1-q_2q_3q_4)$$

$$UB_{FK} = (1-q_1q_4) (1-q_2q_5) (1-p_2 p_4 q_1q_3q_5) (1-p_1 p_5 q_2q_3q_4).$$

($q_i = 1-p_i$). Όμοια, δουλεύοντας με τα ε.σ.λ. έχουμε,

$$LB_{FK} = 1-(1-p_1p_2) (1-p_4p_5) (1-p_1p_3p_5 q_2q_4) (1-q_1q_5p_2p_3p_4)$$

$$UB_{EP} = 1-(1-p_1p_2) (1-p_4p_5) (1-p_1p_3p_5) (1-p_2p_3p_4).$$

Στην *iid* περίπτωση ($p_i=p$ για κάθε i), μπορούμε εύκολα να πάρουμε τα επόμενα αριθμητικά αποτελέσματα.

Πίνακας 2.3.1

p	LB_{EP}	LB_{FK}	R	UB_{EP}	UB_{FK}	εύρος		
						$FK-EP$	EP	FK
0.05	0.0002	0.0052	0.0052	0.0052	0.0095	0	0.0050	0.0042
0.10	0.0026	0.0215	0.0215	0.0219	0.0356	0.0004	0.0192	0.0141
0.15	0.0115	0.0491	0.0494	0.0509	0.0749	0.0018	0.0395	0.0257
0.20	0.0309	0.0878	0.0886	0.0931	0.1243	0.0053	0.0622	0.0365
0.25	0.0639	0.1365	0.1387	0.1483	0.1814	0.0119	0.0844	0.0450
0.30	0.1123	0.1937	0.1984	0.2160	0.2443	0.0223	0.1037	0.0506
0.35	0.1755	0.2576	0.2662	0.2946	0.3114	0.0370	0.1191	0.0538
0.40	0.2518	0.3265	0.3405	0.3818	0.3818	0.0553	0.1301	0.0552
0.60	0.6182	0.6182	0.6595	0.7482	0.6735	0.0553	0.1301	0.0552
0.65	0.7054	0.6885	0.7338	0.8245	0.7424	0.0370	0.1191	0.0538
0.70	0.7840	0.7557	0.8016	0.8877	0.8063	0.0223	0.1037	0.0506
0.75	0.8517	0.8185	0.8613	0.9360	0.8635	0.0119	0.0844	0.0450
0.80	0.9069	0.8756	0.9114	0.9691	0.9122	0.0053	0.0622	0.0365
0.85	0.9491	0.9251	0.9506	0.9885	0.9509	0.0018	0.0395	0.0257
0.90	0.9781	0.9644	0.9785	0.9973	0.9785	0.0004	0.0192	0.0141
0.95	0.9948	0.9905	0.9948	0.9998	0.9948	0	0.0050	0.0043

Παρατηρώντας τον πίνακα (με έντονα γράμματα (*bold*) είναι είτε το μεγαλύτερο κάτω φράγμα, είτε το μικρότερο άνω φράγμα), για τιμές του p από 0.05 έως 0.40 (χαμηλές αξιοπιστίες), πράγματι το LB_{FK} είναι καλύτερο του LB_{EP} , ενώ το UB_{EP} υπερέρχει του UB_{FK} . Τα αντίστροφα ακριβώς συμβαίνουν, όταν το p πάρει μεγάλες τιμές (από 0.60 έως 0.95). Στη στήλη «εύρος», διαπιστώνουμε ότι τα προτεινόμενα φράγματα (δηλαδή για μικρό p , τα $LB_{FK} - UB_{EP}$, ενώ για

μεγάλο τα $LB_{EP} - UB_{FK}$ δημιουργούν διαστήματα με εύρος ($FK-EP$), κατά πολύ μικρότερο των φραγμάτων EP ($LB_{EP} - UB_{EP}$) και των τροποποιημένων φραγμάτων ($LB_{FK} - UB_{FK}$). Ακόμη τα τροποποιημένα φράγματα παρουσιάζουν πάντα μικρότερο εύρος, από τα φράγματα EP , μιλώντας πάντα για το συγκεκριμένο παράδειγμα. ■

Στο παραπάνω παράδειγμα είδαμε ότι ως C_1 πήραμε το $\{1,4\}$, ως C_2 το $\{2,5\}$ κτλ. Αν αλλάζαμε τη διάταξη, δηλαδή θεωρούσαμε ως C_1 το $\{2,5\}$, ως C_2 το $\{1,3,5\}$, ως C_3 το $\{1,4\}$ και ως C_4 το $\{2,3,4\}$, τότε πιθανότατα να καταλήγαμε και σε διαφορετικό UB_{FK} (όμοια και για το LB_{FK}).

Παράδειγμα 2.3.2. Για το σύστημα της γέφυρας, ας θεωρήσουμε της επόμενες διατάξεις των ε.σ.δ. και ε.σ.λ.,

$$P_1=\{4,5\}, P_2=\{1,3,5\}, P_3=\{1,2\} \text{ και } P_4=\{2,3,4\}, \\ C_1=\{2,5\} \ C_2=\{1,3,5\} \ C_3=\{2,3,4\} \text{ και } C_4=\{1,4\},$$

θα έχουμε,

$$L_1^*=\emptyset, L_2^*=\{1\}, L_3^*=\{1, 2\}, L_4^*=\{2,3\}$$

οπότε, $L_1 = \emptyset$. Το L_2 πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες,

$$L_2 \cap C_1 \neq \emptyset \text{ και } L_2 \cap C_2 = \emptyset.$$

οπότε, $L_2 = \{2\}$. Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε $L_3 = \{1\}$ και $L_4 = \{3\}$ καταλήγουμε στα φράγματα,

$$LB_{EP} = (1 - q_1 q_4) (1 - q_2 q_5) (1 - q_1 q_3 q_5) (1 - q_2 q_3 q_4)$$

$$UB_{FK} = (1 - q_2 q_5) (1 - p_2 q_1 q_3 q_5) (1 - p_1 q_2 q_3 q_4) (1 - p_3 q_1 q_4).$$

($q_i = 1 - p_i$). Όμοια, δουλεύοντας με τα ε.σ.λ. έχουμε,

$$LB_{FK} = 1 - (1 - p_4 p_5) (1 - q_4 p_1 p_3 p_5) (1 - q_3 p_1 p_2) (1 - q_1 q_5 p_2 p_3 p_4)$$

$$UB_{EP} = 1 - (1 - p_1 p_2) (1 - p_4 p_5) (1 - p_1 p_3 p_5) (1 - p_2 p_3 p_4).$$

Στην *iid* περίπτωση ($p_i = p$ για κάθε i), παίρνουμε εύκολα τον Πίνακα 2.3.2, όπου με $LB_{FK}(\pi)$ και $UB_{FK}(\pi)$, συμβολίζουμε τα φράγματα που προέκυψαν με τη διάταξη του Παραδείγματος 2.3.1.

Πίνακα 2.3.2

p	LB_{EP}	LB_{FK}	$LB_{FK}(\pi)$	R	UB_{EP}	$UB_{FK}(\pi)$	UB_{FK}
0.05	0.0002	0.0051	0.0052	0.0052	0.0052	0.0095	0.0853
0.10	0.0027	0.0206	0.0215	0.0215	0.0219	0.0356	0.1501
0.15	0.0115	0.0462	0.0491	0.0494	0.0509	0.0749	0.2040
0.20	0.0309	0.0814	0.0878	0.0886	0.0931	0.1243	0.2529
0.25	0.0639	0.1246	0.1365	0.1387	0.1483	0.1814	0.3008
0.30	0.1123	0.1745	0.1937	0.1984	0.2160	0.2443	0.3501
0.35	0.1755	0.2291	0.2576	0.2662	0.2946	0.3114	0.4020
0.40	0.2518	0.2866	0.3265	0.3405	0.3818	0.3818	0.4572
0.60	0.6182	0.5167	0.6182	0.6595	0.7482	0.6735	0.7021
0.65	0.7054	0.5701	0.6885	0.7338	0.8245	0.7424	0.7632
0.70	0.7840	0.6217	0.7557	0.8016	0.8877	0.8063	0.8207
0.75	0.8517	0.6725	0.8185	0.8613	0.9360	0.8635	0.8727
0.80	0.9069	0.7239	0.8756	0.9114	0.9691	0.9122	0.9174
0.85	0.9491	0.7784	0.9251	0.9506	0.9885	0.9509	0.9533
0.90	0.9781	0.8392	0.9644	0.9785	0.9973	0.9785	0.9793
0.95	0.9948	0.9111	0.9905	0.9948	0.9998	0.9948	0.9949

Παρατηρούμε ότι και με τις δυο διατάξεις παίρνουμε κάτω φράγμα πάντα καλύτερο από το αντίστοιχο EP , για τιμές της αξιοπιστίας από 0.05 έως 0.40. Επιπλέον με τη διάταξη του Παραδείγματος 2.3.2., προκύπτει για όλες τις περιπτώσεις, μεγαλύτερο κάτω φράγμα, σε σχέση με αυτό που πήραμε από το συγκεκριμένο παράδειγμα. Παρόμοια είναι και τα συμπεράσματα για τα άνω φράγματα, διότι πάλι το $UB_{FK}(\pi)$ είναι μικρότερο του UB_{FK} (για όλα τα p), ενώ και τα δυο είναι καλύτερα από το UB_{EP} , για $p \in (0.60, 0.95)$. ■

Παράδειγμα 2.3.3. Ας θεωρήσουμε τώρα το σύστημα $C_L(2, n: F)$, όπου το n μπορεί να πάρει διάφορες τιμές. Σκοπός μας είναι να συγκρίνουμε τους χρόνους υπολογισμού των φραγμάτων (εδώ θα βρούμε μόνο τα LB_{EP}, UB_{FK} , λόγω δυσκολίας περιγραφής των ε.σ.λ.) με αυτούς για την R . Εύκολα διαπιστώνουμε τα εξής,

$$C_j = \{j, j+1\}, \quad j=1, 2, \dots, n-1$$

$$L_1^* = \emptyset, \quad L_j^* = \{j-1\} \text{ για } j=2, \dots, n-1$$

και

$$L_1 = \emptyset, \quad L_j = \{j-1\} \text{ για } j=2, \dots, n-1.$$

Τα φράγματα LB_{EP} και UB_{FK} , παίρνουν τη μορφή

$$LB_{EP} = \prod_{j=1}^{n-1} [1 - (1-p_j)(1-p_{j+1})] \text{ και } UB_{FK} = \prod_{j=1}^{n-1} [1 - p_{j-1}(1-p_j)(1-p_{j+1})]$$

όπου $p_0=1$, ενώ όταν οι μονάδες είναι *iid*, γίνονται

$$LB_{EP} = [1-(1-p)^2]^{n-1} \text{ και } UB_{FK} = [1-(1-p)^2] [1-p (1-p)^2]^{n-2}.$$

Προκειμένου λοιπόν να συγκρίνουμε τους χρόνους, για διάφορα n έχουμε (*iid*),

Πίνακας 2.3.3

n	<i>Computing Time</i> (R)	<i>Computing Time</i> (<i>iid</i>) $LB_{EP} - UB_{FK}$
1.000	0.18 <i>sec</i>	0.00001 <i>Sec</i>
10.000	71.623 <i>sec</i>	0.0002 <i>Sec</i>
20.000	444.529 <i>sec</i>	0.0003 <i>Sec</i>

Γενικά, για να βρούμε το UB_{FK} (LB_{FK}), χρειάζεται να υπολογίσουμε το γινόμενο $N(M)$ όρων, όπου κάθε όρος θα είναι με τη σειρά του, γινόμενο το πολύ $n \cdot (n-1)$, παραγόντων. ■

2.4 Μια γενίκευση των Τροποποιημένων Φραγμάτων

Μια νέα κλάση φραγμάτων δημιουργήθηκε από τους *Koutras, Papastavridis & Petakos* (1996), η οποία σαν μια ειδική περίπτωση, περιέχει τα τροποποιημένα φράγματα (στο ίδιο άρθρο, προτείνεται και μια βελτίωση των τελευταίων). Πρωταγωνιστικό ρόλο στα νέα φράγματα, παίζουν δυο καινούργιες έννοιες, η α-δομή διακοπής (*a-cut structure*) και η α-δομή λειτουργίας (*a-path structure*) (οι αποδείξεις των παρακάτω προτάσεων και θεωρημάτων, υπάρχουν στο αντίστοιχο άρθρο).

Ας εισάγουμε πάλι τα σύνολα L_j^*, K_j^* όπως αυτά ορίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, δηλαδή

$$L_1^* = \emptyset, \quad L_j^* = \{i: C_i \cap C_j \neq \emptyset, 1 \leq i < j\}, \text{ για } j=2, \dots, N$$

$$K_1^* = \emptyset, \quad K_j^* = \{i: P_i \cap P_j \neq \emptyset, 1 \leq i < j\}, \text{ για } j=2, \dots, M$$

και ας συμβολίσουμε με δ_j (γ_j) τη συνάρτηση δομής του συστήματος που δημιουργείται αν συνδέσουμε όλες τις μονάδες του C_j (P_j) παράλληλα (σειριακά.). Επιπλέον, θα συμβολίζουμε με δ_j^* (γ_j^*) την συνάρτηση δομής του συστήματος, το οποίο θα έχει ε.σ.δ.(ε.σ.λ.) τα C_i , $i \in L_j^*$ (τα P_i , $i \in K_j^*$). Έτσι,

$$\delta_j^* = \prod_{i \in L_j^*} \delta_i = \prod_{i \in L_j^*} [1 - \prod_{r \in C_i} (1 - X_r)] \quad \text{και} \quad \gamma_j^* = 1 - \prod_{i \in K_j^*} (1 - \gamma_i) = 1 - \prod_{i \in K_j^*} (1 - \prod_{r \in P_i} X_r)$$

ενώ, για $L_j^* = \emptyset$ ή $K_j^* = \emptyset$, θέτουμε $\delta_j^* = 1$ ή $\gamma_j^* = 1$, αντίστοιχα.

Ορισμός 2.4.1. Μια οικογένεια από αύξουσες δίτιμες συναρτήσεις $\{\alpha_j = \alpha_j(X_1, X_2, \dots, X_n): j=1, 2, \dots, N\}$, θα καλείται **α-δομή διακοπής** για το σύστημα (I, C) (όπου $I = \{1, 2, \dots, n\}$ το σύνολο των μονάδων και C το σύνολο των ε.σ.δ.), εάν $\alpha_1 = 1$ και οι ακόλουθες συνθήκες ικανοποιούνται, για κάθε $j=2, \dots, N$,

- οι τιμές των συναρτήσεων α_j , δεν επηρεάζονται από τις X_k , όπου $k \in C_j$
- ισχύει $\alpha_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \delta_j^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, για κάθε διάνυσμα κατάστασης $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$

Από τη δεύτερη συνθήκη καταλαβαίνουμε ότι εάν η α_j πάρει την τιμή ένα, τότε υπάρχει τουλάχιστον μονάδα σε λειτουργία, σε κάθε C_i , $i \in L_j^*$. Βέβαια το σύνολο των α -δομή διακοπής, βασίζεται στη διάταξη των ε.σ.δ. (μεσω του δ_j^*), ούτως ώστε μια διαφορετική διάταξη, εν δυνάμει να παράγει διαφορετικές οικογένειες.

Ορισμός 2.4.2. Μια οικογένεια από αύξουσες δίτιμες συναρτήσεις $\{\alpha_j = \alpha_j(X_1, X_2, \dots, X_n) : j=1, 2, \dots, M\}$, θα καλείται **α -δομή λειτουργίας** για το σύστημα (I, P) , εάν $\alpha_1=1$ και οι ακόλουθες συνθήκες ικανοποιούνται, για κάθε $j=2, \dots, M$,

- οι τιμές των συναρτήσεων α_j , δεν επηρεάζονται από τις X_k , όπου $k \in P_j$
- ισχύει $\alpha_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \gamma_j^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, για κάθε διάνυσμα κατάστασης $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$

Οι παρατηρήσεις που έχουμε να κάνουμε, είναι ανάλογες μ' αυτές του προηγούμενου ορισμού, ενώ είμαστε σε θέση τώρα, να δώσουμε τα νέα φράγματα.

Θεώρημα 2.4.1.

- Εάν η $\{\alpha_j : j=1, 2, \dots, N\}$, είναι μια **α -δομή διακοπής** για το σύστημα (I, C) , τότε

$$R \leq \prod_{j=1}^N [1 - P(\alpha_j = 1)P(\delta_j = 0)] = UB_{KP}$$

- Εάν η $\{\alpha_j : j=1, 2, \dots, M\}$, είναι μια **α -δομή λειτουργίας** για το σύστημα (I, P) , τότε

$$R \geq 1 - \prod_{j=1}^M [1 - P(\alpha_j = 0)P(\gamma_j = 1)] = LB_{KP}.$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι συναρτήσεις,

$$\alpha_j = \prod_{i \in L_j} X_i \text{ και } \alpha_j = 1 - \prod_{i \in K_j} (1 - X_i),$$

που χρησιμοποιήθηκαν από τους *Fu* και *Koutras*, αποτελούν μια α -δομή διακοπής και μια α -δομή λειτουργίας, αντίστοιχα. Προκειμένου να πάρουμε ένα νέο βελτιωμένο ζεύγος φραγμάτων, με τη νέα μέθοδο, αρκεί να βρούμε παραπάνω από μια α -δομή διακοπής και α -δομή λειτουργίας και να εφαρμόσουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.4.1. Εάν οι $\{\alpha_j^{(r)} : j=1,2,\dots,N\}$, $r=1,\dots,m$, είναι m α-δομές διακοπής για το σύστημα (\mathbf{I}, \mathbf{C}) , τότε θα ισχύει η ανισότητα,

$$R \leq \prod_{j=1}^N [1 - P(\alpha_j^{(r)} = 1 \text{ για τουλάχιστον ένα } r : 1 \leq r \leq m) P(\delta_j = 0)]$$

Εάν οι $\{\alpha_j^{(r)} : j=1,2,\dots,M\}$, $r=1,\dots,m$, είναι m α-δομές λειτουργίας για το σύστημα (\mathbf{I}, \mathbf{P}) , τότε θα ισχύει η ανισότητα

$$1 - \prod_{j=1}^M [1 - P(\alpha_j^{(r)} = 0 \text{ για τουλάχιστον ένα } r : 1 \leq r \leq m) P(\gamma_j = 1)] \leq R.$$

Παράδειγμα 2.4.1. Έστω το σύστημα $C_L(2, 8: F)$ με,

$$C_1 = \{1,2\}, C_2 = \{2,3\}, C_3 = \{3,4\}, C_4 = \{4,5\}, C_5 = \{5,6\}, C_6 = \{6,7\}, C_7 = \{7,8\},$$

και,

$$P_1 = \{2,4,6,8\}, P_2 = \{2,4,6,7\}, P_3 = \{2,4,5,7\}, P_4 = \{2,3,5,7\}, P_5 = \{2,3,5,6,8\}, P_6 = \{1,3,5,7\},$$

$$P_7 = \{1,3,5,6,8\}, P_8 = \{1,3,4,6,8\}, P_9 = \{1,3,4,6,7\}.$$

Τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι,

$$L_1^* = \emptyset, \quad L_j^* = \{j-1\} \text{ για } j=2,\dots,7$$

$$\delta_j = 1 - (1-X_j)(1-X_{j+1}), \text{ για } j=2,\dots,7$$

$$\delta_1^* = 1, \quad \delta_j^* = \delta_{j-1}, \text{ για } j=2,\dots,7.$$

Μια α-δομή διακοπής δημιουργείται από τη σχέση,

$$\alpha_j = X_{j-2} X_{j-1}$$

για $j=1,2,\dots,7$ (παραδοχή: $X_{-1}=X_0=1$). Επομένως από το Θεώρημα 2.4.1, θα έχουμε

$$UB_{KP} = \prod_{j=1}^N [1 - P(\alpha_j = 1) P(\delta_j = 0)] = \prod_{j=1}^7 [1 - P(X_{j-2} = X_{j-1} = 1) P(\delta_j = 0)]$$

οπότε προκύπτει το άνω φράγμα αξιοπιστίας,

$$UB_{KP} = \prod_{j=1}^7 [1 - p_{j-2} p_{j-1} P(\delta_j = 0)] = \prod_{j=1}^7 [1 - p_{j-2} p_{j-1} (1 - p_j)(1 - p_{j+1})]$$

(παραδοχή: $p_{-1}=p_0=1$). Από την άλλη θα μπορούσαμε να πάρουμε σαν μια α -δομή λειτουργίας, την

$$\alpha_1=1, \alpha_2=X_8, \alpha_3=X_6, \alpha_4=X_4, \alpha_5=X_7X_4, \alpha_6=X_2, \alpha_7=X_2X_7, \alpha_8=X_2X_5, \alpha_9=X_2X_5X_8.$$

Άρα, πάλι από το Θεώρημα 2.4.1, έχουμε

$$\begin{aligned} LB_{KP}=1- \prod_{j=1}^9 [1-P(\alpha_j=0)P(\gamma_j=1)] &= 1-(1-1*P(\gamma_1=1))*(1-P(X_8=0)P(\gamma_2=1)) \\ &* (1-P(X_6=0)P(\gamma_3=1))* (1-P(X_4=0)P(\gamma_4=1)) \\ &* (1-P(X_7=X_4=0)P(\gamma_5=1))* (1-P(X_2=0)P(\gamma_6=1)) \\ &* (1-P(X_7=X_2=0)P(\gamma_7=1))* (1-P(X_5=X_2=0)P(\gamma_8=1)) \\ &* (1-P(X_2=X_5=X_8=0)P(\gamma_9=1)) \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει το κάτω φράγμα αξιοπιστίας

$$\begin{aligned} LB_{KP}=1-(1-p_2p_4p_6p_8)* (1-(1-p_8)p_2p_4p_6p_7) \\ * (1-(1-p_6)p_2p_4p_5p_7)* (1-(1-p_4)p_2p_3p_5p_7) \\ * (1-(1-p_7)(1-p_4)p_2p_3p_5p_6p_8)* (1-(1-p_2)p_1p_3p_5p_7) \\ * (1-(1-p_7)(1-p_2)p_1p_3p_5p_6p_8)* (1-(1-p_5)(1-p_2)p_1p_3p_4p_6p_8) \\ * (1-(1-p_2)(1-p_5)(1-p_8)p_1p_3p_4p_6p_7). \end{aligned}$$

Όταν έχουμε *iid* μονάδες, τα φράγματα γίνονται,

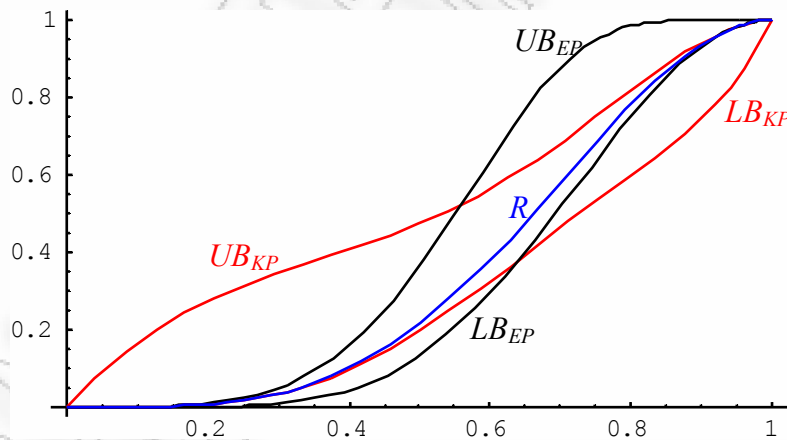
$$\begin{aligned} UB_{KP} &= \prod_{j=1}^7 [1-p_{j-2}p_{j-1}(1-p_j)(1-p_{j+1})] = (1-(1-p)^2)(1-p(1-p)^2) \prod_{j=3}^7 [1-p^2(1-p)^2] \Rightarrow \\ UB_{KP} &= (1-(1-p)^2)(1-p(1-p)^2)[1-p^2(1-p)^2]^5, \\ LB_{KP} &= 1-[1-p^4][1-p^4(1-p)]^4 [1-p^5(1-p)^2]^3 [1-p^5(1-p)^3]. \end{aligned}$$

Παρακάτω παρουσιάζονται οι τιμές των φραγμάτων LB_{KP} , LB_{EP} , UB_{EP} , UB_{KP} , για διάφορες τιμές του p , όπως και η αντίστοιχη γραφική παράσταση.

Πίνακας 2.4.1

p	LB_{KP}	LB_{EP}	R	UB_{EP}	UB_{KP}
0.10	0.0005	0	0.0005	0.00054	0.1676
0.15	0.0024	0.0001	0.0024	0.0028	0.2279
0.20	0.0075	0.0008	0.0075	0.0092	0.2757
0.25	0.0175	0.0031	0.0177	0.0232	0.3144
0.30	0.0347	0.0090	0.0352	0.0491	0.3472
0.35	0.0605	0.0214	0.0621	0.0921	0.3773
0.40	0.0961	0.0440	0.1003	0.1570	0.4072
0.45	0.1418	0.0803	0.1510	0.2471	0.4393
0.50	0.1967	0.1335	0.2148	0.3622	0.4752
0.55	0.2588	0.2052	0.2914	0.4966	0.5166
0.60	0.3258	0.2951	0.3793	0.6386	0.5644
0.65	0.3950	0.4006	0.4760	0.7715	0.6192
0.70	0.4641	0.5168	0.5781	0.8786	0.6805
0.75	0.5316	0.6365	0.6810	0.9495	0.7471
0.80	0.5979	0.7514	0.7792	0.9853	0.8163
0.85	0.6657	0.8527	0.8666	0.9976	0.8834
0.90	0.7426	0.9321	0.9368	0.9999	0.9420
0.95	0.8438	0.9826	0.983308	0.9999	0.9839

Σχήμα 2.4.1



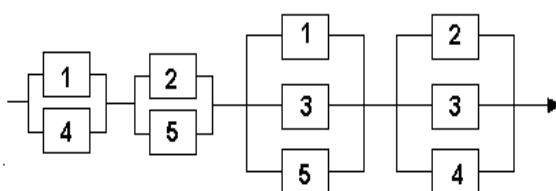
Οι παρατηρήσεις που έχουμε να κάνουμε είναι παρόμοιες μ' αυτές των τροποποιημένων πολλαπλασιαστικών φραγμάτων LB_{FK} , UB_{FK} . Συγκεκριμένα, για τιμές του p από 0.05 έως 0.60, το LB_{KP} είναι καλύτερο του LB_{EP} , ενώ το UB_{EP} υπερέχει του UB_{KP} (όταν όμως το p πάρει μεγάλες τιμές, από 0.60 έως 0.95, ισχύουν τα αντίστροφα). Οπότε για μικρό p , τα φράγματα που προτείνονται (και από τους συγγραφείς) είναι τα $LB_{FK} - UB_{EP}$, ενώ για μεγάλο, τα $LB_{EP} - UB_{FK}$. ■

2.5 Γενικευμένα Φράγματα Αξιοπιστίας

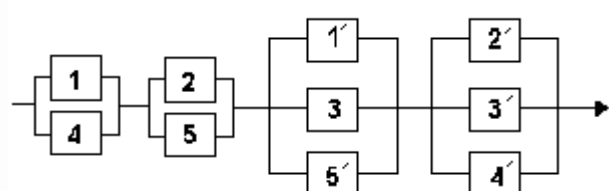
Οι *Boutsikas & Koutras* (2000b), ασχολήθηκαν με τη γενίκευση (ή βελτίωση) κάποιων φραγμάτων, που υπήρχαν ήδη στη βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, μελέτησαν τρία από τα προαναφερθέντα φράγματα, τα *EP*, τα τροποποιημένα πολλαπλασιαστικά και τα *MM*, αλλά και κάποια φράγματα τα οποία είχαν οι ίδιοι εισάγει, σε ένα προηγούμενο άρθρο τους (*Boutsikas & Koutras* (2000a)). Σ' αυτή την ενότητα θα συμπεριλάβουμε μερικά από τα σημαντικά αποτελέσματα της εργασίας, χωρίς να σταθούμε σε αποδείξεις (οι οποίες μπορούν να βρεθούν στο αρχικό άρθρο).

Όπως γνωρίζουμε, μια ιδεατή αναπαράσταση ενός συστήματος προκύπτει, εάν συνδέσουμε σε σειρά τα ελάχιστα σύνολα διακοπής του (ενώ οι μονάδες κάθε ε.σ.δ., είναι συνδεδεμένες παράλληλα). Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι στην περίπτωση που δεν υπάρχουν κοινές μονάδες ανάμεσα στα ε.σ.δ. τότε η τιμή του LB_{EP} , ταυτίζεται με την αξιοπιστία. Επομένως για κάποιο σύστημα με N ε.σ.δ., είναι ορθό να πούμε πως, το LB_{EP} εκφράζει την αξιοπιστία του συγκεκριμένου συστήματος, αν αντικαταστήσουμε τις μονάδες που περιέχονται σε παραπάνω από ένα ε.σ.δ., με νέες, με τις ίδιες αξιοπιστίες, οι οποίες όμως θα είναι ανεξάρτητες μ' όλες τις άλλες. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.5.1 υπάρχει η αναπαράσταση της γέφυρας, με χρήση των ε.σ.δ. Το φράγμα LB_{EP} εκφράζει την αξιοπιστία του συστήματος του Σχήματος 2.5.2, όπου οι μονάδες $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ έχουν τις ίδιες αξιοπιστίες με τις 1, 2, 3, 4, 5, αντίστοιχα και ταυτόχρονα όλες μαζί, αποτελούν ένα σύνολο από 10 ανεξάρτητες μονάδες.

Σχήμα 2.5.1



Σχήμα 2.5.2



Οι *Boutsikas & Koutras* (2000b) απέδειξαν ότι αντί να θεωρούμε κάθε ε.σ.δ. σαν ένα ξεχωριστό υποσύστημα, θα ήταν καλύτερο να αντιμετωπίζαμε σαν υποσυστήματα, δυο ή

περισσότερα ε.σ.δ. μαζί (τα ανάλογα ισχύουν και για τα ε.σ.λ.). Πιο συγκεκριμένα θεώρησαν δυο διαμερίσεις $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v\}$ και $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\mu\}$, των συνόλων,

$$C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\} \text{ και } P = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_M\}$$

όπου,

$$\Omega_s \subset C, \text{ για κάθε } s=1, \dots, v,$$

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ για } i \neq j \text{ και } \bigcup_{s=1}^v \Omega_s = C \text{ (όμοια για τα } \Delta_i).$$

Έτσι οδηγούμαστε στο παρακάτω θεώρημα, καταλήγοντας στα γενικευμένα φράγματα EP .

Θεώρημα 2.5.1. *Η αξιοπιστία R οποιοδήποτε μονότονου συστήματος, φράσσεται μέσω της σχέσεως,*

$$LB_{EP}^G = \prod_{s=1}^v R_c(\Omega_s) \leq R \leq 1 - \prod_{s=1}^{\mu} [1 - R_p(\Delta_s)] = UB_{EP}^G \text{ ή}$$

$$\prod_{s=1}^v \left[E \left[\prod_{A \in \Omega_s} (1 - \prod_{i \in A} (1 - X_r)) \right] \right] \leq R \leq 1 - \prod_{s=1}^{\mu} \left[1 - E \left(\prod_{A \in \Delta_s} 1 - \prod_{i \in A} X_r \right) \right].$$

Παράδειγμα 2.5.1. Για το σύστημα $C_L(2, 5; F)$ γνωρίζουμε ότι,

$$C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$$

όπου, $C_1 = \{1,2\}$ $C_2 = \{2,3\}$ $C_3 = \{3,4\}$, $C_4 = \{4,5\}$. Θεωρώντας τη διαμέριση του C ,

$$\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2\}$$

με $\Omega_1 = \{C_1, C_2\}$ και $\Omega_2 = \{C_3, C_4\}$, προκύπτει το επόμενο κάτω φράγμα,

$$LB_{EP}^G = \prod_{s=1}^2 R_c(\Omega_s).$$

Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι η $R_c(\Omega_1)$, μπορεί να θεωρηθεί ως την αξιοπιστία ενός $C(2, 3; F)$, με μονάδες τις τρεις πρώτες του αρχικού συστήματος (του $C(2, 5; F)$). Όμοια και η $R_c(\Omega_2)$, που τώρα όμως έχει ως μονάδες τις τρεις τελευταίες. Άρα,

$$R_c(\Omega_1) = p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3$$

$$R_c(\Omega_2) = p_4 + p_1 p_5 - p_3 p_4 p_5$$

και τελικά θα έχουμε

$$LB_{EP}^G = (p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3) \cdot (p_4 + p_1 p_5 - p_3 p_4 p_5). \quad \blacksquare$$

Στην ακραία περίπτωση $\nu = N$, το LB_{EP}^G είναι ακριβώς το LB_{EP} , ενώ όταν $\nu = 1$, το γενικευμένο φράγμα ισούται με την αξιοπιστία. Αποδεικνύεται ότι πηγαίνοντας σταδιακά από την κατάσταση $\nu = N$ στην $\nu = 1$, εμφανίζεται μια μονότονη βελτίωση των φραγμάτων (όμοια αποτελέσματα έχουμε και για το UB_{EP}^G).

Αν ορίσουμε τα σύνολα ,

$$\Delta_s^* = \{D \in \bigcup_{l < s} \Delta_s : D \cap (\bigcup_{P \in \Delta_s} P) \neq \emptyset\}, s = 2, \dots, \mu \quad (\Delta_1^* = \emptyset)$$

και,

$$\Omega_s^* = \{D \in \bigcup_{l < s} \Omega_s : D \cap (\bigcup_{C \in \Omega_s} C) \neq \emptyset\}, s = 2, \dots, \nu \quad (\Omega_1^* = \emptyset)$$

τότε το επόμενο θεώρημα δίνει τις γενικεύσεις των τροποποιημένων πολλαπλασιαστικών φραγμάτων.

Θεώρημα 2.5.2. Η αξιοπιστία R οποιουδήποτε μονότονου συστήματος, φράσσεται από κάτω και άνω, από τα

$$LB_{FK}^G = 1 - (1 - R_P(\Delta_1)) \prod_{s=2}^{\mu} \left[1 - [R_P(\Delta_s^* \cup \Delta_s) - R_P(\Delta_s^*)] \right]$$

και

$$UB_{FK}^G = R_C(\Omega_1) \prod_{s=2}^{\nu} \left[1 - [R_C(\Omega_s^*) - R_C(\Omega_s^* \cup \Omega_s)] \right],$$

αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.5.2. Έστω το $C_L(3, 10: F)$ με ε.σ.δ.,

$$C_i = \{i, i+1, i+2\}, i=1, \dots, 8.$$

Ως διαμέριση του \mathbf{C} θα μπορούσε να θεωρηθεί η $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ με,

$$\Omega_1 = \{C_1, C_2, C_3\}, \quad \Omega_2 = \{C_4, C_5, C_6\} \quad \text{και} \quad \Omega_3 = \{C_7, C_8\}.$$

Επομένως ($\Omega_1^* = \emptyset$),

$$\begin{aligned} \Omega_2^* &= \{D \in \Omega_1 : D \cap (\bigcup_{C \in \Omega_2} C) \neq \emptyset\} = \{D \in \Omega_1 : D \cap \{4,5,6,7,8\} \neq \emptyset\} \\ &= \{\{2,3,4\}, \{3,4,5\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_3^* &= \{D \in \Omega_1 \cup \Omega_2 : D \cap (\bigcup_{C \in \Omega_3} C) \neq \emptyset\} = \{D \in \Omega_1 \cup \Omega_2 : D \cap \{7,8,9,10\} \neq \emptyset\} \\ &= \{\{5,6,7\}, \{6,7,8\}\}.\end{aligned}$$

Επειδή πολλές φορές ο υπολογισμός των γενικευμένων τροποποιημένων πολλαπλασιαστικών φραγμάτων γίνεται πολύπλοκος, προτάθηκε μια «παραλλαγή» των φραγμάτων με απλούστερες εκφράσεις, με κάποιο όμως κόστος στην ακρίβεια. Έτσι από τη στιγμή που έχουν βρεθεί τα σύνολα Δ_s^* , Ω_s^* εισάγουμε δυο οικογένειες δίτιμων συναρτήσεων (ανάλογες των α-δομή διακοπής και α-δομή λειτουργίας), τις $\{\alpha_j = \alpha_j(X_1, X_2, \dots, X_n) : j=1, 2, \dots, \nu\}$ και $\{\alpha_j' = \alpha_j'(X_1, X_2, \dots, X_n) : j=1, 2, \dots, \mu\}$, με τις ακόλουθες ιδιότητες,

- οι α_j είναι ανεξάρτητες από τις $\delta_c(\Omega_s)$ και οι α_j' είναι ανεξάρτητες από τις $\delta_P(\Delta_s)$
- $\alpha_j \leq \delta_c(\Omega_s^*)$ και $\alpha_j' \geq \delta_P(\Delta_s^*)$

όπου,

$$\delta_c(\Omega_s^*) = \prod_{D \in \Omega_s^*} (1 - \prod_{i \in D} (1 - X_i)) \text{ και } \delta_P(\Delta_s^*) = 1 - \prod_{D \in \Delta_s^*} (1 - \prod_{i \in D} X_i).$$

Πρόταση 2.5.1. Εάν υπάρχουν δίτιμες συναρτήσεις α_j και α_j' , που να ικανοποιούν τις παραπάνω δυο ιδιότητες, τότε για την αξιοπιστία R ενός μονότονου συστήματος, ισχύει

$$1 - (1 - R_P(\Delta_1)) \prod_{s=2}^{\mu} \left[1 - P(\alpha_s' = 0)(R_P(\Delta_s)) \right] \leq R$$

και

$$R \geq R_c(\Omega_1) \prod_{s=2}^{\nu} \left[1 - P(\alpha_s = 1)(1 - R_c(\Omega_s)) \right].$$

Να παρατηρήσουμε ότι στη ακραία κατάσταση όπου $\nu = N$ και $\mu = M$, οι συναρτήσεις α_j και α_j' , ταυτίζονται με τις α-δομή διακοπής και α-δομή λειτουργίας, ενώ τα φράγματα που εξάγουμε είναι ακριβώς τα γενικευμένα τροποποιημένα πολλαπλασιαστικά φράγματα. Επιπλέον, εάν ο υπολογισμός των πιθανοτήτων $P(\alpha_j=1)$ ή $P(\alpha_j'=0)$, είναι δύσκολος, προτείνεται η αντικατάστασή τους από κατάλληλα κάτω και άνω φράγματα, αντίστοιχα (όπως τα φράγματα EP). Ακόμη, στο ίδιο άρθρο ορίζεται και η βέλτιστη επιλογή των συναρτήσεων α_j και α_j' .

Με το παρακάτω θεώρημα παίρνουμε τη γενίκευση των φραγμάτων *minimax*.

Θεώρημα 2.5.3. Για την αξιοπιστία R ενός μονότονου συστήματος, ισχύει

$$\max_{1 \leq s \leq \mu} R_p(\Delta_s) \leq R \leq \min_{1 \leq s \leq \nu} R_c(\Omega_s).$$

Παράδειγμα 2.5.3. Ας θεωρήσουμε το σύστημα, Διδιάστατο συνεχόμενα- (k_1, k_2) -από- (n_1, n_2) : F , του οποίου τα ε.σ.δ. (τα οποία σε πλήθος είναι $(n_1-k_1+1)(n_2-k_2+1)$) περιγράφονται από τις σχέσεις,

$$C_{ij} = \{(u, v) : u = i, i+1, \dots, i+k_1-1, v = j, j+1, \dots, j+k_2-1\}, i=1, \dots, N_1, j=1, \dots, N_2$$

όπου, με (u, v) συμβολίζονται οι μονάδες του συστήματος, και $N_1 = n_1 - k_1 + 1$, $N_2 = n_2 - k_2 + 1$ (το C_{ij} είναι ο υποπίνακας διαστάσεως $k_1 \times k_2$, όπου η μονάδα (i, j) βρίσκεται στο πάνω αριστερό του άκρο). Η διαμέριση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η $\Omega = \{\Omega_s : s = 1, \dots, N_1\}$ όπου,

$$\Omega_s = \{C_{sj} : j = 1, \dots, N_2\}$$

δηλαδή, το Ω_s αποτελείται απ' όλα τα ε.σ.δ. που έχουν άνω αριστερό άκρο, πάνω στη γραμμή s . Έτσι έχουμε,

$$LB_{EP}^G = \prod_{s=1}^{N_1} R_c(\Omega_s)$$

με

$$R_c(\Omega_s) = E \left[\prod_{C_{sj} \in \Omega_s} (1 - \prod_{(u,v) \in C_{sj}} (1 - X_{uv})) \right] =$$

$$E \left[\prod_{j=1}^{N_2} (1 - \prod_{u=s}^{s+k_1-1} \prod_{v=j}^{j+k_2-1} (1 - X_{uv})) \right] = E \left[\prod_{j=1}^{N_2} (1 - \prod_{v=j}^{j+k_2-1} (1 - Y_v(s))) \right],$$

όπου

$$Y_v(s) = 1 - \prod_{u=s}^{s+k_1-1} (1 - X_{uv}), v = 1, 2, \dots, n_2.$$

Επειδή όμως οι τ.μ. $Y_v(s)$, είναι ανεξάρτητες, η $R_c(\Omega_s)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η αξιοπιστία ενός $C(k_2, n_2; F)$, με

$$p_v = E[Y_v(s)] = 1 - E \left(\prod_{u=s}^{s+k_1-1} (1 - X_{uv}) \right) = 1 - \prod_{u=s}^{s+k_1-1} q_{uv}, v = 1, 2, \dots, n_2$$

να είναι οι αξιοπιστίες των μονάδων. Άρα,

$$LB_{EP}^G = \prod_{s=1}^{n_1-k_1+1} R_c(\Omega_s) = \prod_{s=1}^{n_1-k_1+1} R_{(k_2, n_2)}(1 - \prod_{u=s}^{s+k_1-1} q_{u1}, \dots, 1 - \prod_{u=s}^{s+k_1-1} q_{un_2})$$

όπου $R_{(k_2, n_2)}(\mathbf{p})$ είναι η αξιοπιστία του $C(k_2, n_2; F)$, με $\mathbf{p}=(p_1, \dots, p_n)$. Στην *iid* περίπτωση, $E[Y_{i(s)}]=1-q^{k_1}$ και

$$LB_{EP}^G = \left(R_{(k_2, n_2)}(1-q^{k_1}) \right)^{N_1}.$$

Προσπαθώντας τώρα να υπολογίσουμε το UB_{FK}^G , θα πάρουμε μια νέα διαμέριση του C , την $\Omega = \{ \{C\} : C \in C \}$. Διαλέγοντας τη βέλτιστη επιλογή των συναρτήσεων α_s , καταλήγουμε στο

$$UB_{FK}^G = R_c(\Omega_1) = \prod_{s=2}^{N_1 N_2} (1 - R(\Omega_s^{**})(1 - R(\Omega_s)) =$$

$$\left(1 - \prod_{\alpha \in C_{11}} q_\alpha \right) \prod_{s \in I_0 \setminus \{(1,1)\}} \left(1 - E \left(\prod_{C \in \Omega_s^{**}} (1 - \prod_{\alpha \in C} (1 - X_\alpha)) \right) \prod_{\alpha \in C_s} q_\alpha \right)$$

όπου, $\Omega_s^{**} = \text{minimal} \{ C_\alpha \setminus C_s : C_\alpha \cap C_s \neq \emptyset, \alpha < s \}$. Αν τώρα προσεγγίσουμε τη μέση τιμή, της ποσότητας που υπάρχει στην παραπάνω παράσταση, με το κάτω φράγμα των *EP bounds*, θα έχουμε,

$$UB_{FK}^{G*} = \left(1 - \prod_{\alpha \in C_{11}} q_\alpha \right) \prod_{s \in I_0 \setminus \{(1,1)\}} \left(1 - \prod_{C \in \Omega_s^{**}} (1 - \prod_{\alpha \in C} q_\alpha) \prod_{\alpha \in C_s} q_\alpha \right).$$

Επίσης αν χρησιμοποιήσουμε την πρώτη διαμέριση(αυτή που είχαμε πάρει για το LB_{EP}^G), τότε με την ίδια τακτική θα καταλήγαμε στο (περίπτωση *iid*),

$$U_{YM} = R_{(k_2, n_2)}(1-q^{k_1}) [1 - R_{(k_2, n_2)}(1-q) \cdot (1 - R_{(k_2, n_2)}(1-q^{k_1}))]^{N_1-1}.$$

Εκτός από τα παραπάνω φράγματα, στη συγκεκριμένη εργασία υπολογίζονται και οι αντίστοιχες προσεγγίσεις των *Makri & Psillakis* (1997) (τύπου *Bonferroni*), των *Koutras et al* (1993) (φράγματα *Chen-Stein bounds*), των *Barbour et al* (1996) (προσεγγίσεις *compound Poisson*), τα $LB_{EP}-UB_{FK}$, κ.α. Εξετάζονται πολλά διαφορετικά συστήματα(με *iid* μονάδες ή όχι), καταλήγοντας ότι τα LB_{EP}^G και UB_{FK}^{G*} , εμφανίζουν την καλύτερη προσαρμογή απ' όλα τα φράγματα που έχουν συμπεριληφθεί. Συγκεκριμένα, το UB_{FK}^{G*} είναι πάντα καλύτερο, σε όλες τις περιπτώσεις, ενώ το LB_{EP}^G για υψηλά p , γίνεται λίγο χειρότερο από το αντίστοιχο των *Barbour et*

al (1996). Μερικά από τα αποτελέσματα, δίνονται στους παρακάτω πίνακες (*Lbonf*, *Ubonf*: *Makri & Psillakis* (1997), *LPo*, *UPo*: *Koutras et al* (1993), *LCP*, *UCP*: *Barbour et al* (1996)), όπως αυτοί δημοσιεύτηκαν στο άρθρο των *Boutsikas & Koutras* (2000b).

Πίνακας 2.5.1

$n_1=n_2=50, k_1=k_2=3(iid\ case)$												
p	<i>LBonf</i>	<i>LPo</i>	<i>LCP</i>	<i>LB_{EP}</i>	<i>LB_{EP}^G</i>	<i>R</i>	<i>UB_{FK}^{G*}</i>	<i>UB_{FK}</i>	<i>UB_{YM}</i>	<i>UCP</i>	<i>UPo</i>	<i>UBonf</i>
0.5	-3.49	-.794	-1.77	.0111	.0188	.0326	.0431	.3095	.8631	1.831	.8165	.2710
0.55	-.742	-.260	-.109	.1748	.2036	.2375	.2537	.5795	.8975	.5740	.6098	.4507
0.6	.3963	.3945	.5319	.5466	.5675	.5893	.5966	.7997	.9282	.6420	.6988	.6733
0.65	.8184	.7994	.8390	.8339	.8403	.8476	.8483	.9245	.9593	.8535	.8685	.8530
0.7	.9547	.9502	.9572	.9557	.9568	<i>.9580</i>	.9582	.9776	.9830	.9586	.9611	.9584
0.75	.99121	.99065	.99146	.99125	.99138	<i>.9915</i>	.99153	.99500	.99514	.99156	.99184	.99154

Πίνακας 2.5.2

$n_1=10, n_2=100, k_1=2, k_2=3(iid\ case)$									
p	<i>LB_{EP}</i>	<i>LB_{EP}^G</i>	<i>R</i>	<i>UB_{FK}^{G*}</i>	<i>UB_{FK}</i>	<i>UB_{CB}</i>	<i>UB_{CB}^G</i>	<i>UB_{YM}</i>	
.55	.0006	.0025	.0041	.0077	.0871	2.737	1.100	.5094	
.6	.0268	.0461	.0556	.0674	.2447	1.029	.4160	.6909	
.65	.1973	.2387	.2559	.2662	.4818	.5186	.3456	.8067	
.7	.5256	.5560	.5677	.5704	.7178	.6124	.5814	.8744	
.75	.8063	.8170	.8196	.8208	.8816	.8249	.8216	.9267	
.8	.9451	.9472	.9477	.9478	.9635	.9480	.9478	.9692	
.85	.9900	.9902	.9903	.9903	.9926	.9903	.9903	.9924	

Πίνακας 2.5.3

<i>(non-iid case)*</i>								
n_1	n_2	k_1	k_2	<i>LB_{EP}</i>	<i>LB_{EP}^G</i>	<i>R</i>	<i>UB_{FK}^{G*}</i>	<i>UB_{FK}</i>
5	10	2	3	.8237	.8491	.8606	.8710	.9212
5	50	2	3	.8236	.8490	.8615	.8709	.9212
10	10	4	2	.9266	.9291	.9393	.9414	.9723
10	50	3	4	.9967	.9969	.9969	.9970	.9986
10	100	3	2	.6256	.6482	.6990	.7232	.8470
50	100	3	4	.9789	.9803	.9809	.9812	.9922
5	1000	2	4	.9680	.9723	.9737	.9741	.9849

* $q_{ij}=1/|i-j|$ εάν $|i-j|>1$, $q_{ij}=0.5$ αλλιώς

2.6 Φράγματα Hsieh

Το 2003 ο Hsieh, δίνει κάποια φράγματα, τα οποία βασίζονται σε ένα νέο τρόπο αναπαράστασης, ενός μονότονου συστήματος. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει αρκετές φορές, συνδέοντας σε σειρά όλα τα ε.σ.δ. ενός συστήματος (με τις μονάδες του παράλληλα συνδεδεμένες), καταλήγουμε σε ένα ισοδύναμο σύστημα. Ο συγγραφέας, στην περίπτωση που τα ε.σ.δ. έχουν κοινά στοιχεία μεταξύ τους, καταφέρνει να αναπαραστήσει το σύστημα μέσα από $C(k, n: F)$ συστήματα, που είναι σειριακώς συνδεδεμένα. Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν αν δουλέψουμε με τα ε.σ.λ., συνδέοντας τώρα παράλληλα, $C(k, n: G)$ συστήματα. Έτσι λοιπόν μέσα από τις αξιοπιστίες των $C(k, n: F/G)$, καταλήγουμε σε φράγματα που είναι πάντα καλύτερα από τα αντίστοιχα *EP bounds*.

Το σκεπτικό για τη δημιουργία των νέων προσεγγίσεων (φράγματα *HS*) είναι το εξής: «Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα με δυο ε.σ.δ. τα $C_1 = \{A, C\}$ και $C_2 = \{B, C\}$, όπου τα A, B, C είναι σύνολα από ανεξάρτητες μονάδες και συνάμα, είναι ξένα ανά δυο. Οι Esary και Proschan βρίσκουν φράγματα για την R , αντιμετωπίζοντας τα C_1 και C_2 , σαν ανεξάρτητα σύνολα (που σίγουρα δεν είναι). Αν συμβολίσουμε με E_A, E_B, E_C , τα (ανεξάρτητα) ενδεχόμενα, όλες οι μονάδες του A, B, C χαλάσουν, αντίστοιχα, τότε το σύστημα δε θα λειτουργεί εάν συμβεί το,

$$\{E_A \text{ και } E_C\} \text{ ή } \{E_C \text{ και } E_B\} \quad (\text{ακόμη : } 1-R = P(E_C) * P(E_A \text{ ή } E_B))$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να συμβούν δυο συνεχόμενα γεγονότα από τα $E_A E_C E_B$ »

Ο αλγόριθμος λοιπόν που χρησιμοποιείται για την εύρεση των φραγμάτων είναι ο εξής;

Βήμα 1^ο : Βρες τα ε.σ.δ. και ε.σ.λ. του συστήματος.

Βήμα 2^ο : i) Σύνδεσε τα ε.σ.δ. σειριακά, δημιουργώντας $C_L(k, n: F)$ συστήματα, εάν αυτά έχουν κοινές μονάδες
ii) Σύνδεσε τα ε.σ.λ. παράλληλα, δημιουργώντας $C_L(k, n: G)$ συστήματα, εάν αυτά έχουν κοινές μονάδες.

Βήμα 3^ο : i) Υπολόγισε την αξιοπιστία ενός $C_L(k, n: F)$, για να βρεις ένα κάτω φράγμα
ii) Υπολόγισε την αξιοπιστία ενός $C_L(k, n: G)$ για να βρεις ένα άνω φράγμα.

Η απόδειξη ότι τα *HS bounds* είναι πάντα καλύτερα από τα *EP bounds*, στηρίζεται στο παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 2.6.1. Αν φ είναι η συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος, τότε για κάθε $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$P(\varphi=1) = P(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_N=1) \geq P(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_j=1) P(\varphi_{j+1} \varphi_{j+2} \dots \varphi_N=1) \geq P(\varphi_1=1) P(\varphi_2=1) \dots P(\varphi_N=1)$$

όπου $\varphi_i, i=1, \dots, N$, οι συναρτήσεις δομής των N ε.σ.δ.

Παράδειγμα 2.6.1. Έστω το σύστημα της γέφυρας, όπου

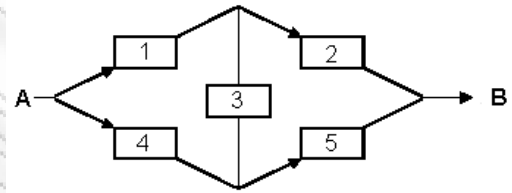
$$P_1=\{1,2\}, P_2=\{4,5\}, P_3=\{1,3,5\} \text{ και } P_4=\{2,3,4\},$$

$$C_1=\{1,4\} \ C_2=\{2,5\} \ C_3=\{1,3,5\} \text{ και } C_4=\{2,3,4\}.$$

Παρατηρούμε ότι,

$$C_1 \cap C_3 = \{1\}, \ C_2 \cap C_4 = \{2\}$$

$$P_1 \cap P_3 = \{1\}, \ P_2 \cap P_4 = \{4\}.$$



Επομένως, με την τακτική που περιγράψαμε μπορούμε να αναπαραστήσουμε το σύστημα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6.1. Έχουμε

δηλαδή δυο υποσυστήματα σειριακώς συνδεδεμένα, όπου το πρώτο κατασκευάστηκε με βάση τη σχέση των C_1, C_3 και το δεύτερο από C_2, C_4 .

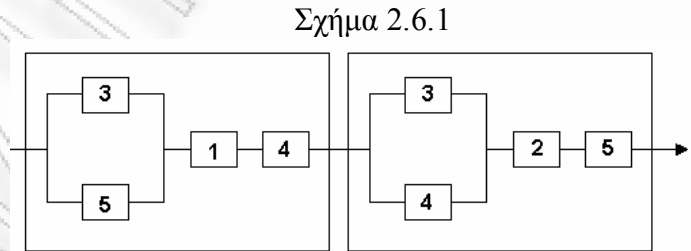
Είναι εμφανές ότι αν αντιμετωπίσουμε

τις $\{3,5\}$, σαν μια μονάδα (με πιθανότητα λειτουργίας $p_{35}=1-(1-p_3)(1-p_5)$), τότε η πιθανότητα να λειτουργεί το C_1 και το C_3 , είναι ίση με την αξιοπιστία ενός $C(2, 3: F)$, με διάνυσμα πιθανοτήτων $\mathbf{p}=(p_{35}, p_1, p_4)$. Ομοια και τα C_2, C_4 , δημιουργούν ένα $C(2, 3: F)$, με διάνυσμα πιθανοτήτων $\mathbf{p}=(p_{34}, p_2, p_5)$. Άρα από τη σχέση,

$$R=P(\text{να λειτουργεί το } C_1 \text{ και το } C_2 \text{ και το } C_3 \text{ και το } C_4) \geq$$

$$P(\text{να λειτουργεί το } C_1 \text{ και το } C_3) \cdot P(\text{να λειτουργεί το } C_2 \text{ και το } C_4) =$$

$$R_{(2,3)}(p_{35}, p_1, p_4) \cdot R_{(2,3)}(p_{34}, p_2, p_5)$$



όπου $R_{(2,3)}(\mathbf{p})$ η αξιοπιστία ενός $C_L(2, 3: F)$, με διάνυσμα πιθανοτήτων \mathbf{p} . Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε ένα κάτω φράγμα, ενώ για άνω, δουλεύουμε με τα ε.σ.λ. Πράγματι, αν αναπαραστήσουμε το σύστημα με τον τρόπο του Σχήματος 2.6.2, θα καταλάβουμε ότι έχουμε συνδέσει παράλληλα, δυο $C_L(2, 3: G)$ (το πρώτο με βάση τα P_1, P_3 και το δεύτερο με τα P_2, P_4).

Η πιθανότητα να λειτουργεί το P_1 ή το P_3 ,

είναι ίση με την αξιοπιστία ενός $C_L(2, 3: G)$,

με διάνυσμα πιθανοτήτων $\mathbf{p}=(p_{35}, p_1, p_2)$.

Όμοια, η πιθανότητα να λειτουργεί το P_2 ή το P_4 ,

είναι ίση με την αξιοπιστία ενός $C_L(2, 3: G)$,

με διάνυσμα πιθανοτήτων $\mathbf{p}=(p_{35}, p_1, p_2)$.

Άρα η παρακάτω σχέση μας δίνει ένα άνω φράγμα,

$$1-R=P(\text{να μην λειτουργεί το } P_1 \text{ και το } P_2 \text{ και το } P_3 \text{ και το } P_4) \geq$$

$$P(\text{να μην λειτουργεί το } P_1 \text{ και το } P_3) \cdot P(\text{να μην λειτουργεί το } P_2 \text{ και το } P_4) =$$

$$[1-R_{(2,3)}^G(p_{35}, p_1, p_2)] \cdot [1-R_{(2,3)}^G(p_{23}, p_4, p_5)]$$

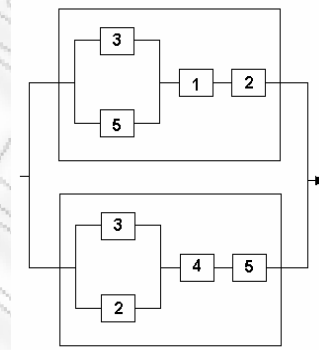
όπου $R_{(2,3)}^G(\mathbf{p})$ η αξιοπιστία ενός $C_L(2, 3: G)$, με διάνυσμα πιθανοτήτων \mathbf{p} . ■

Αξίζει να αναφέρουμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές αναπαραστάσεις (δηλαδή να διασπάσουμε το σύστημα με βάση τις σχέσεις άλλων ε.σ.δ. ή .ε.σ.λ.), τότε καταλήγουμε σε εν γενεί διαφορετικά φράγματα. Επιπλέον, έπειτα από εφαρμογές σε αρκετά συστήματα, ο ερευνητής συμπέρανε τα εξής,

- τα νέα φράγματα είναι πάντα καλύτερα από τα *EP bounds* (αναμενόμενο)
- για μικρές αξιοπιστίες το νέο άνω φράγμα (UB_{HS}) είναι καλύτερο από το UB_{FK} (αντίστροφα για μεγάλες αξιοπιστίες)
- για υψηλές αξιοπιστίες το νέο κάτω φράγμα (LB_{HS}) είναι καλύτερο από το LB_{FK} (αντίστροφα για μικρές αξιοπιστίες).

Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα φράγματα αυτά μπορεί να θεωρηθούν σαν ειδική περίπτωση των γενικευμένων φραγμάτων (παράγραφος 2.5).

Σχήμα 2.6.2



2.7 Φράγματα για συγκεκριμένα συστήματα

Όπως έχουμε παρατηρήσει από το προηγούμενο κεφάλαιο, ένα μεγάλο κομμάτι από την έρευνα που αφορά τον ακριβή υπολογισμό της R , απευθύνεται σε συγκεκριμένα συστήματα. Παρόμοιες περίπου συνθήκες συναντάμε και στο ερευνητικό πεδίο των φραγμάτων αξιοπιστίας, και μερικές από αυτές τις εργασίες θα συμπεριλάβουμε σ' αυτή την παράγραφο. Έτσι τα συστήματα που θα δώσουμε περισσότερο προσοχή είναι το Συνεχόμενα- k -από- n , το Διδιάστατο συνεχόμενα- k -από- n και το Συνεχόμενα- k -από- r -από- n .

2.7.1 Συνεχόμενα $-k$ -από- n

Οι *Chiang & Niu* (1981) στο άρθρο τους, εκτός από ένα αναδρομικό τύπο για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας (όταν έχουμε *iid* μονάδες), συμπεριέλαβαν και δυο φράγματα για την R . Το κάτω φράγμα είναι ακριβώς το LB_{EP} , ενώ μέσα από μια διαμέριση του συστήματος, καταλήγουμε στο άνω φράγμα. Αναλυτικά, ένα $C_L(k, n; F)$ το χωρίζουμε σε $[n/k]+1$ υποσυστήματα (με $[n/k]$ συμβολίζεται το ακέραιο μέρος του αριθμού n/k), όπου κάθε ένα απ' αυτά αποτελείται από k συνεχόμενες μονάδες, εκτός του τελευταίου που έχει $n - k [n/k] (< k)$. Τότε, αν το σύστημα λειτουργεί, σημαίνει ότι λειτουργούν και τα $[n/k]$ συστήματα, ενώ το αντίστροφο σίγουρα δεν ισχύει (το τελευταίο σύστημα σίγουρα δεν μπορεί να αποτύχει διότι έχει λιγότερες από k μονάδες). Άρα, ισχύει

$$R \leq P(\text{το σύστημα με τις } k \text{ μονάδες λειτουργεί})^{[n/k]}$$

Όμως η πιθανότητα $P(\text{το σύστημα με τις } k \text{ μονάδες λειτουργεί})$ είναι ίση με $1-(1-p)^k$ (αναφερόμαστε πάντα στην *iid* περίπτωση). Έτσι,

$$R \leq [1-(1-p)^k]^{[n/k]} = UB_{CN}.$$

Επίσης και οι *Derman et al* (1982), βρήκαν ένα άνω φράγμα, που ωστόσο δεν είναι και τόσο εύχρηστο. Η απόδειξη τους βασίστηκε στην παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.7.1.1. Για κάθε θετική τ.μ. Y ισχύει,

$$P(Y > 0) \geq E^2(Y) / E(Y^2).$$

Έτσι ορίζοντας την τ.μ. N , η οποία εκφράζει το πλήθος των ε.σ.δ., που έχουν όλες τις μονάδες τους χαλασμένες, κατέληξαν στη σχέση,

$$R \leq 1 - \frac{E^2(N)}{E(N^2)}.$$

Αν $\varphi_i, i=1, \dots, N$, είναι οι συναρτήσεις δομής των N ε.σ.δ., έχουμε

$$E(N) = \sum_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=i}^{i+k-1} q_j \text{ και } E(N^2) = \sum_{i=1}^N E(\varphi_i) + \sum_{i \neq j} E(\varphi_i \varphi_j).$$

Στην εργασία του Fu (1986), μελετάται η συμπεριφορά μεγάλων $C_L(k, n: F)$ συστημάτων (στη περίπτωση βέβαια όπου οι αξιοπιστίες των μονάδων, είναι συναρτήσεις του πλήθους τους- του n), και επιπλέον δίδονται δυο φράγματα (άνω και κάτω) για τη συνάρτηση αξιοπιστίας. Ουσιαστικά πάλι έχουμε να κάνουμε με ένα νέο άνω φράγμα, καθώς το άλλο ταυτίζεται με το αντίστοιχο των φραγμάτων EP . Έτσι αποδεικνύεται ότι,

$$R \leq \prod_{i=k}^n (1 - b_{i,k,n})$$

όπου,

$$b_{i,k,n} = \prod_{j=i-k+1}^i q_{j,n} - \frac{q_{i-k,n}}{p_{i-k,n}} \prod_{j=i-k+1}^i q_{j,n}.$$

2.7.2 Διδιάστατο συνεχόμενα- k -από- n

Είναι αρκετά εύκολο να καταλάβουμε πόσο δύσκολος γίνεται ο υπολογισμός της αξιοπιστίας ενός μεγάλου $2D-C(k, n: F)$, παίρνοντας υπόψη τις ανάλογες περιπτώσεις, για συστήματα, με πολύ πιο απλή δομή. Όταν οι Salvia&Lasher (1990), εισήγαγαν για πρώτη φορά το $2D-C(k, n: F)$ πραγματοποιούσαν παράλληλα και την πρώτη προσπάθεια για την εύρεση φραγμάτων, αποκλειστικά για το συγκεκριμένο σύστημα. Οι προσεγγιστικές εκφράσεις που έδωσαν, υπολογίζονται μέσα από τις αξιοπιστίες μονοδιάστατων $C_L(k, n: F)$, μολονότι αργότερα ο Ksir (1992), απέδειξε ότι το άνω φράγμα ήταν λανθασμένο. Το κάτω φράγμα που πρότειναν οι Salvia&Lasher δίδεται από (για iid μονάδες)

$$LB_{SL} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} [1 - R(k, n)]^i R(k, n)^{n-i} \leq R(R(k, n) \text{ η αξιοπιστία του } C_L(k, n: F)).$$

Η απόδειξη του είναι άμεση, αν σκεφτούμε ότι το σύστημα θα λειτουργεί σίγουρα αν υπάρχουν το πολύ $k-1$ γραμμές, με k συνεχόμενες χαλασμένες μονάδες. Επειδή όμως κάτω από ορισμένες

συνθήκες, μπορεί να υπάρχουν και k ή περισσότερες γραμμές, με k συνεχόμενες χαλασμένες μονάδες, και το σύστημα πάλι να λειτουργεί, η ποσότητα LB_{SL} είναι όντως ένα κάτω φράγμα.

Οι *Koutras et al* (1993), χρησιμοποιώντας τη μέθοδο *Chen-Stein* προσεγγίζουν την R , μέσα από ένα εκθετικό όρο, δίνοντας και μια εκτίμηση του σφάλματος. Τα ε.σ.δ. του συστήματος $\{C_{ij}, i=1, \dots, n-k+1 \text{ και } j=1, \dots, n-k+1\}$, είναι όλοι οι υποπίνακες διαστάσεως $k \times k$, με

$$C_{ij} = \{(i+x-1, j+y-1) : x=1, \dots, k \text{ και } y=1, \dots, k\}, \text{ με } i, j=1, \dots, n-k+1.$$

Θεώρημα 2.7.2.1. Έστω ένα $2D-C(k, n; F)$ σύστημα με $n \geq k \geq 2$. Τότε για την αξιοπιστία του ισχύει,

$$|R - e^{-\varphi}| \leq (1 - e^{-\varphi})[(2k-1)^2 q^{k^2} + 4 Q(k)],$$

όπου

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=1}^{n-k+1} \prod_{(k,m) \in C_{ij}} q_{km}, \quad q = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{q_{ij}\} \text{ και } Q(k) = \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q^{k^2 - ij} \right) - 1.$$

(η απόδειξη, υπάρχει στο αντίστοιχο άρθρο)

Από το Θεώρημα 2.7.2.1 προκύπτει ότι,

$$e^{-\varphi} - (1 - e^{-\varphi})[(2k-1)^2 q^{k^2} + 4 Q(k)] \leq R \leq e^{-\varphi} + (1 - e^{-\varphi})[(2k-1)^2 q^{k^2} + 4 Q(k)],$$

και όπως οι ίδιοι οι συγγραφείς υποστηρίζουν, τα παραπάνω φράγματα προσφέρουν καλές προσεγγίσεις τουλάχιστον στην περίπτωση των πολύ αξιόπιστων μονάδων. Αριθμητικές συγκρίσεις σε πολλά συστήματα έδειξαν ότι, το κάτω φράγμα είναι σχεδόν πάντα χειρότερο από το LB_{EP} , όπου

$$LB_{EP} = \prod_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=1}^{n-k+1} \left(1 - \prod_{m=i}^{i+k-1} \prod_{v=j}^{j+k-1} q_{mv} \right).$$

Επίσης, στο άρθρο των *Koutras et al* (1997), αποδεικνύεται ένα άνω φράγμα για την R χρησιμοποιώντας αξιοπιστίες των μονοδιάστατων $C_L(k, n; F)$. Συγκεκριμένα, προκύπτει το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.7.2.2. Για την αξιοπιστία ενός $2D-C(k, n: F)$, με ανεξάρτητες αλλά όχι απαραίτητα, ισόνομες μονάδες, ισχύει,

$$R \leq R(k, n, Q_{kj}) \prod_{i=k+1}^n \{1 - [1 - R(k, n, Q_{ij})]R(k, n, q_{i-k,j})\} = UB_{KP2}$$

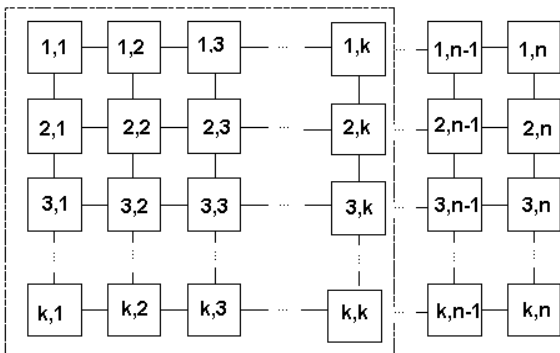
όπου, $R(k, n, Q_{ij})$ είναι η αξιοπιστία του $C_L(k, n: F)$ με τις πιθανότητες αποτυχίας των n μονάδων του, να είναι

$$Q_{ij} = \prod_{\mu=i-k+1}^i q_{\mu j}, j=1, 2, \dots, n$$

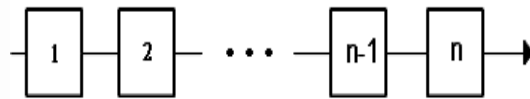
ενώ $R(k, n, q_{i-k,j})$ είναι αξιοπιστία του $C_L(k, n: F)$ με τις πιθανότητες αποτυχίας των n μονάδων του, να είναι $q_{i-k,j}, j=1, \dots, n$ (με $q_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, συμβολίζονται οι αναξιοπιστίες των n^2 μονάδων).

Στην πρόσφατη εργασία των Hsieh & Chen (2004), παρουσιάστηκε μια μέθοδος, η οποία ανάγοντας τη μελέτη ενός $2D-C(k, n: F)$, σε ένα γενικότερο $C_L(k, n: F)$, χρησιμοποιώντας τεχνητές-τέλειες μονάδες (*artificial perfect components*), υπολογίζει ένα κάτω φράγμα για την αξιοπιστία. Για να περιγράψουμε αναλυτικά τη μέθοδο, ας θεωρήσουμε ότι από ένα $2D-C(k, n: F)$ σύστημα, απομονώνουμε το επόμενο υποσύστημα που αποτελείται από τις k πρώτες γραμμές και τις n στήλες του συστήματος (Σχήμα 2.7.2.1).

Σχήμα 2.7.2.1



Σχήμα 2.7.2.2



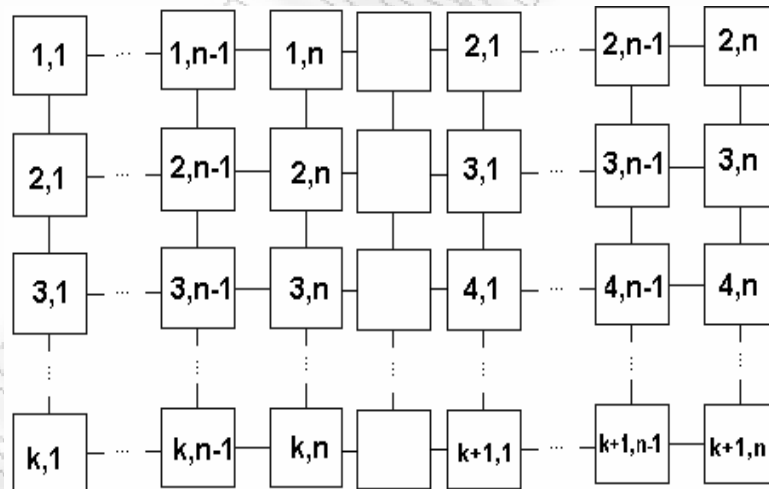
Τότε αν αντιμετωπίσουμε κάθε στήλη του σαν μια μονάδα, με πιθανότητα λειτουργίας,

$$P_i = 1 - (1 - p_{1,i})(1 - p_{2,i}) \cdots (1 - p_{k,i}), i=1, \dots, n$$

συμπεραίνουμε ότι η αξιοπιστία του υποσυστήματος είναι ίση με την αξιοπιστία ενός $C_L(k,n:F)$ (Σχήμα 2.7.2.2). Η τελευταία υπολογίζεται εύκολα, με κάποιο από τους τύπους που είχαμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 1 (Παράγραφος 1.8.1.).

Ας χρησιμοποιήσουμε τώρα k τεχνητές-τέλειες μονάδες (δηλαδή η πιθανότητα λειτουργίας τους είναι 1), τις οποίες θα συνδέσουμε στη τελευταία στήλη, του υποσυστήματος. Έπειτα, δίπλα σ' αυτές θα συνδέσουμε το υποσύστημα που δημιουργείται από τις γραμμές $\{2,3,\dots,k+1\}$ και τις n στήλες (σχήμα 2.7.2.3). Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο (μέχρι να ενώσουμε όλα τα υποσυστήματα με k συνεχόμενες γραμμές και n στήλες), θα κατασκευάσουμε ένα σύστημα με k γραμμές και $(n-k+1)n + (n-k)$ στήλες (οι $n-k$ στήλες θα σχηματίζονται από τέλειες μονάδες). Να σημειώσουμε ότι, το νέο σύστημα έχει τα ίδια ε.σ.δ. με το αρχικό. Οπότε, αν κάθε στήλη τη θεωρήσουμε σαν μια μονάδα, έχουμε ένα $C_L(k, (n-k+1)n+(n-k): F)$, όπου η αξιοπιστία του, αν υποθέσουμε ότι οι μονάδες του είναι ανεξάρτητες (κάτι που σίγουρα δεν ισχύει), αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το $2D-C(k, n: F)$.

Σχήμα 2.7.2.3



2.7.3 Συνεχόμενα $-k$ -από- r -από- τ - n

Δυο σημαντικές δουλειές, πάνω στα φράγματα αξιοπιστίας του συγκεκριμένο συστήματος, είναι των *Sfakianakis et al* (1992) και *Habib & Szantai* (2000). Οι πρώτοι, εκτός από το να δώσουν κλειστούς τύπους για την R , για μερικές περιπτώσεις των k , r και n (με *iid* μονάδες), συμπεριέλαβαν και δυο τύπους φραγμάτων. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις βελτιωμένες

ανισότητες *Bonferroni* των *Kounias & Sotirakoglou* (1986) (με ροπές μέχρι τρίτης τάξεως) και δεσμευμένες πιθανότητες, κατάφεραν να προσεγγίσουν την R , με όχι όμως και τόσο απλές εκφράσεις.

Από τη δική τους μεριά, οι *Habib & Szantai*, έχουν ως κύριο σκοπό τη βελτίωση των φραγμάτων που πρότειναν οι *Sfakianakis et al* (1992), με χρήση ροπών και τέταρτης τάξεως αλλά και εφαρμογή της μεθόδου *Hunter-Worsley*. Με τη μέθοδο αυτή, υπολογίζοντας μόνο τις ροπές πρώτης τάξεως και μερικές δευτέρας, παίρνουν άνω φράγμα πάντα καλύτερο από το αντίστοιχο μέσω των ανισοτήτων *Bonferroni*, ενώ σε πολλές περιπτώσεις είναι καλύτερο ακόμη και από εκείνο που περιέχει και τρίτης τάξεως ροπές. Στην ενότητα αυτή δεν θα αναλύσουμε κάποια απ' αυτές τις μεθόδους, γιατί όπως έχουμε αναφέρει, θέλουμε να επικεντρωθούμε στα πολλαπλασιαστικά φράγματα.

2.7.4 Διάφορα συστήματα

Επιδίωξη μας εδώ θα είναι να κάνουμε μια μικρή αναφορά, σε μερικές από τις εργασίες που αφορούν τα συστήματα, Διδιάστατο συνεχόμενα- (r, s) -από- (m, n) , Διδιάστατο συνεχόμενα- k -από- r -από- n , Διδιάστατο συνεχόμενα- k -από- (r, s) -από- (m, n) και k από τα n . Για το πρώτο σύστημα, που είναι εμφανώς μια γενίκευση του $2D-C(k, n: F)$, οι *Malinowski & Preuss* (1996), απέδειξαν κάποια φράγματα, χρησιμοποιώντας τις ανισότητες *Bonferroni*. Από την άλλη, οι *Yamamoto & Miyakawa* (1995), βασίστηκαν στις αξιοπιστίες των $C_L(r, m: F)$, ώστε να προσεγγίσουν την R (με *iid* μονάδες).

Επίσης μέσα από τις βελτιωμένες ανισότητες *Bonferroni* των *Kounias & Sotirakoglou* (1986), οι *Makri & Psillakis* (1997), κατέληξαν σε άνω και κάτω φράγματα, για το Διδιάστατο συνεχόμενα- k -από- (r, s) -από- (m, n) (με *iid* μονάδες). Η συμπεριφορά των φραγμάτων είναι πολύ καλή στις περιπτώσεις, που το p είναι κοντά στη μονάδα, το μέγεθος του πίνακα (r, s) δεν διαφέρει σημαντικά από το μέγεθος του (m, n) και όταν το k έχει τιμή κοντά στο rs .

Με την ίδια μεθοδολογία πάλι, οι *Makri & Psillakis* (1996), μελέτησαν το Διδιάστατο συνεχόμενα- k -από- r -από- n , δίνοντας φράγματα, όταν έχουμε *iid* μονάδες. Οι προσεγγίσεις που προσφέρουν είναι αρκετά καλές (όχι όμως μέσα από πολύ απλές εκφράσεις), ενώ στη περίπτωση που το $k = r$, τα φράγματα είναι περισσότερο ακριβή από εκείνα των *Koutras et al* (1993).

Τέλος, με τα φράγματα ενός k από τα n συστήματος, ασχολήθηκαν οι *Lai* (1993), *Heidtmann* (1982), *Lipow* (1994) και *Boros & Prekora* (1989). Τα εργαλεία που χρησιμοποίησαν ήταν, είτε οι ανισότητες *Bonferroni*, είτε η μέθοδος του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (και με διάφορες βελτιώσεις της).

2.8 Η προσέγγιση του Bodin

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο ο Bodin (1970), κατέφερε μέσα από την ανάλυση σε *modules* του συστήματος, να βελτιώσει τις προσεγγίσεις των φραγμάτων *EP* (για τις αποδείξεις, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο Barlow & Proschan (1975)). Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι για ένα σύστημα με συνάρτηση δομής ϕ και σύνολο μονάδων $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, παίρνουμε μια *modular decomposition* με σύνολα $\{\mathbf{M}_i, i=1, \dots, r\}$. Έτσι ισχύει,

$$\phi(\mathbf{x}) = \psi(\psi_1(\mathbf{x}^{\mathbf{M}_1}), \psi_2(\mathbf{x}^{\mathbf{M}_2}), \dots, \psi_r(\mathbf{x}^{\mathbf{M}_r}))$$

και

$$R(\mathbf{p}) = R_\psi(R_{\psi_1}, R_{\psi_2}, \dots, R_{\psi_r})$$

όπου η R_ψ είναι ο τύπος της αξιοπιστίας για το σύστημα με συνάρτηση δομής ψ και R_{ψ_i} οι αξιοπιστίες των *modules*. Επίσης, θα συμβολίζουμε με LB_{EP}^ψ και UB_{EP}^ψ , το κάτω και άνω φράγμα (των Esary και Proschan), που υπολογίζεται για το σύστημα με συνάρτηση δομής ψ , αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.8.1. Έστω ένα μονότονο σύστημα, με ανεξάρτητες μονάδες, συνάρτηση δομής ϕ και διάσπαση σε *modules* $\{\mathbf{M}_i, i=1, \dots, r\}$. Τότε για την αξιοπιστία του ισχύει,

$$R(\mathbf{p}) \geq \left\{ \begin{array}{l} LB_{EP}^\psi(R_{\psi_1}, R_{\psi_2}, \dots, R_{\psi_r}) \\ R_\psi(LB_{EP}^{\psi_1}, LB_{EP}^{\psi_2}, \dots, LB_{EP}^{\psi_r}) \end{array} \right\} \geq LB_{EP}^\psi(LB_{EP}^{\psi_1}, LB_{EP}^{\psi_2}, \dots, LB_{EP}^{\psi_r}) \geq LB_{EP}^\phi(\mathbf{p})$$

και

$$R(\mathbf{p}) \leq \left\{ \begin{array}{l} UB_{EP}^\psi(R_{\psi_1}, R_{\psi_2}, \dots, R_{\psi_r}) \\ R_\psi(UB_{EP}^{\psi_1}, UB_{EP}^{\psi_2}, \dots, UB_{EP}^{\psi_r}) \end{array} \right\} \leq UB_{EP}^\psi(UB_{EP}^{\psi_1}, UB_{EP}^{\psi_2}, \dots, UB_{EP}^{\psi_r}) \leq UB_{EP}^\phi(\mathbf{p}).$$

Επομένως αν θεωρήσουμε τα *modules* σαν απλές μονάδες, με πιθανότητα λειτουργίας ίση με την αξιοπιστία τους (R_{ψ_i}), τότε το κάτω φράγμα LB_{EP} του συστήματος, θα είναι καλύτερο από το αντίστοιχο φράγμα, του αρχικού (δηλαδή, $LB_{EP}^\psi(R_{\psi_1}, R_{\psi_2}, \dots, R_{\psi_r}) \geq LB_{EP}^\phi(\mathbf{p})$). Ακόμη, αν στον τύπο της αξιοπιστίας του συστήματος, με συνάρτηση δομής ψ , αντικαταστήσουμε τις πιθανότητες λειτουργίας των *modules*, με τα κάτω φράγματα αυτών (τα

3.1 Εύρεση των βέλτιστων L_j και K_j

$LB_{EP}^{\Psi_i}$), θα πάρουμε πάλι ένα φράγμα καλύτερο από το LB_{EP}^{ϕ} (δηλαδή, $R_{\Psi}(LB_{EP}^{\Psi_1}, LB_{EP}^{\Psi_2}, \dots, LB_{EP}^{\Psi_r}) \geq LB_{EP}^{\phi}(\mathbf{p})$). Επιπλέον, αν δεν είναι δυνατόν να βρούμε τις αξιοπιστίες των *modules*, τότε χρησιμοποιώντας τα κάτω φράγματα τους, η ποσότητα, $LB_{EP}^{\Psi}(LB_{EP}^{\Psi_1}, LB_{EP}^{\Psi_2}, \dots, LB_{EP}^{\Psi_r})$ προσεγγίζει καλύτερα την R , απ' ό τι η LB_{EP}^{ϕ} .

Μελέτη των τροποποιημένων πολλαπλασιαστικών φραγμάτων

Μελετώντας τα τροποποιημένα πολλαπλασιαστικά φράγματα (ΤΠΦ) LB_{FK} , UB_{FK} , διαπιστώσαμε (Παράγραφος 2.3) ότι ο υπολογισμός τους επηρεάζεται τόσο από τη διάταξη των ε.σ.λ. και ε.σ.δ., όσο και από την επιλογή των συνόλων L_j και K_j , καθώς αυτά δεν ορίζονται μονοσήμαντα. Συγκεκριμένα για ένα σύστημα μπορούσαμε να υπολογίσουμε μια οικογένεια συνόλων $\{L_j: j=1, \dots, N\}$, εφόσον είχαμε καθορίσει ποιά θα είναι η διάταξη των N ε.σ.δ. (αντίστοιχος ισχυρισμός ισχύει και για το K_j , χρησιμοποιώντας τα ε.σ.λ.). Επομένως, τα ερωτήματα που προέκυπταν, μέσα απ' αυτή διαδικασία, ήταν δυο:

- Γνωρίζοντας τη διάταξη των ε.σ.δ. (ε.σ.λ.), ποιά είναι η βέλτιστη επιλογή των L_j (K_j) ?
- Αφού για κάθε διάταξη των ε.σ.δ. (ε.σ.λ.), παίρνουμε εν δυνάμει διαφορετική, βέλτιστη επιλογή L_j (K_j), ποιά είναι εκείνη η διάταξη, που θα δίνει το καλύτερο αποτέλεσμα, δηλαδή το ελάχιστο άνω φράγμα (το μέγιστο κάτω φράγμα)?

Μια απάντηση στο πρώτο ερώτημα δόθηκε από τους *Koutras et al* (2003), οι οποίοι κατάφεραν να εκφράσουν όλες τις δυνατές συνθήκες, μέσα από ένα ισοδύναμο πρόβλημα κάλυψης συνόλων (*set covering problem*, *SCP*). Έτσι στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, αφού εξηγήσουμε τη μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε, θα ασχοληθούμε με το δεύτερο ζήτημα, προσπαθώντας να δώσουμε ένα τρόπο εύρεσης των καλύτερων φραγμάτων (αυτού του τύπου).

3.1 Εύρεση των βέλτιστων L_j και K_j

Ας θεωρήσουμε ότι ένα σύστημα έχει ε.σ.δ. $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\}$ και ε.σ.λ. $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_M\}$. Αυτό που είχαμε παρατηρήσει είναι ότι η τιμή των συγκεκριμένων φραγμάτων, επηρεάζεται από το ποιά απ' όλα τα ε.σ.δ. θα είναι το C_1 , ποιά το C_2 , κοκ, και επίσης ποιά από τα ε.σ.λ. θα είναι το P_1 , ποιά το P_2 κοκ. Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι πρέπει να υπάρχει μια δεδομένη διάταξη των N ε.σ.δ. και των M ε.σ.λ., ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός των ΤΠΦ. Επομένως, πριν από την εύρεση των συγκεκριμένων φραγμάτων, είναι απαραίτητο να καθορίζεται η διάταξη που θα χρησιμοποιήσουμε.

Τα φράγματα που μελετάμε, δίνονται από τις σχέσεις (μόνο αν τα ε.σ.δ. και ε.σ.λ. είναι διατεταγμένα ως $C_1 C_2 C_3 \dots C_N$ και $P_1 P_2 P_3 \dots P_M$, αντίστοιχα),

$$LB_{FK} = 1 - \prod_{j=1}^M \left[1 - \left(\prod_{i \in K_j} q_i \right) P(\gamma_j = 1) \right], \quad UB_{FK} = \prod_{j=1}^N \left[1 - \left(\prod_{i \in L_j} p_i \right) P(\delta_j = 0) \right].$$

Τα παραπάνω φράγματα σε συνδυασμό με τα EP , μπορούν να δώσουν καλές προσεγγίσεις, είτε για υψηλές ή χαμηλές αξιοπιστίες. Συγκεκριμένα όταν οι μονάδες έχουν υψηλές αξιοπιστίες, προτείνεται ο συνδυασμός,

$$LB_{EP} = \prod_{j=1}^N [1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i)] \leq R \leq \prod_{j=1}^N \left[1 - \left(\prod_{i \in L_j} p_i \right) \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right] = UB_{FK},$$

ενώ στην αντίθετη περίπτωση, ο συνδυασμός

$$LB_{FK} = 1 - \prod_{j=1}^M \left[1 - \left(\prod_{i \in K_j} q_i \right) \prod_{i \in P_j} p_i \right] \leq R \leq 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \prod_{i \in P_j} p_i) = UB_{EP}.$$

Παρατηρώντας το UB_{FK} , μπορούμε να καταλάβουμε ότι αν η οικογένεια συνόλων $\{L_j, j=1, \dots, N\}$, επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε, κάθε ένα από τα N γινόμενα της μορφής,

$$\prod_{i \in L_j} p_i,$$

για $j=1, \dots, N$, να έχει τιμή κοντά στη μονάδα, τότε η διαφορά ανάμεσα στο UB_{FK} και LB_{EP} , γίνεται πολύ μικρή (με αποτέλεσμα να προσεγγίζεται ικανοποιητικά η R). Οπότε, ως κριτήριο

3.1 Εύρεση των βέλτιστων L_j και K_j

για τη βέλτιστη επιλογή των L_j (τα οποία βέβαια είναι υποσύνολα, του συνόλου των μονάδων), θα πρέπει να θεωρηθεί η μεγιστοποίηση των ποσοτήτων $\prod_{i \in L_j} p_i$, ή ισοδύναμα η ελαχιστοποίηση των,

$$-\ln \left(\prod_{i \in L_j} p_i \right) = \sum_{i \in L_j} (-\ln p_i).$$

Από το 2^ο Κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι τα L_j , υπολογίζονται με τη βοήθεια των L_j^* , όπου

$$L_1^* = \emptyset, \quad L_j^* = \{i: C_i \cap C_j \neq \emptyset, 1 \leq i < j\}, \text{ για } j=2, \dots, N$$

(μόνο όταν διάταξη είναι $C_1 C_2 \dots C_N$), ενώ οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα L_j , είναι

$$\underline{\Sigma 1.} \quad L_j \cap C_i \neq \emptyset \text{ για κάθε } i \in L_j^*$$

$$\underline{\Sigma 2.} \quad L_j \cap C_j = \emptyset \text{ (εάν } L_j^* = \emptyset \text{ τότε θέτουμε } L_j = \emptyset).$$

Για μικρά συστήματα είναι εύκολο για κάθε j , να βρούμε όλα τα διαφορετικά L_j , και να επιλέξουμε εκείνο που μεγιστοποιεί το γινόμενο $\prod_{i \in L_j} p_i$. Σημαντικό πρόβλημα δημιουργείται όταν έχουμε μεγάλα συστήματα (δεν είναι πλέον δυνατόν να εξετάσουμε όλα τα διαφορετικά L_j), με αποτέλεσμα να χρειαζόμαστε μια εύχρηστη υπολογιστική διαδικασία.

Για κάθε $j > 1$, λαμβάνοντας υπόψη τη 2^η συνθήκη, ισχύει $L_j \subseteq C_j'$, όπου C_j' το συμπληρωματικό σύνολο του C_j . Άρα, αν συμβολίσουμε με,

$$C_j' = \{w_1, w_2, \dots, w_{n-|C_j|}\}$$

($|C_j| = 0$ πληθάρημος του C_j) τότε το σύνολο L_j , καθορίζεται μονοσήμαντα από το διάνυσμα,

$$\mathbf{x} = (x_{w_1}, x_{w_2}, \dots, x_{w_{n-|C_j|}})$$

με

$$x_{w_s} = \begin{cases} 1, & \text{εάν η } w_s \text{ μονάδα ανήκει στο } L_j, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}, \quad s = 1, 2, \dots, n - |C_j|.$$

Ακόμη ας δημιουργήσουμε τον πίνακα $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})_{N \times n}$, με βάση τη σχέση,

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{εάν η } k \text{ μονάδα ανήκει στο } C_i, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N \text{ και } k = 1, \dots, n.$$

Τότε η 1^η και η 2^η συνθήκη, ενσωματώνονται στην επόμενη σχέση,

3.1 Εύρεση των βέλτιστων L_j και K_j

$$\sum_{k \in C_j} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_j^*.$$

Οπότε, κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-|C_j|}})$, που ικανοποιεί τις παραπάνω $|L_j^*|$ το πλήθος ανισότητες, δημιουργεί ένα L_j , με

$$L_j = \{i \in C_j^* : x_i = 1\}.$$

Συνοψίζοντας, η βέλτιστη επιλογή των L_j , θα προκύπτει από το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^{n-|C_j|}$, το οποίο θα ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση,

$$f_j(\mathbf{x}) = \sum_{k \in C_j^*} (-\ln p_k) x_k,$$

ικανοποιώντας ταυτόχρονα τις συνθήκες,

$$\sum_{k \in C_j^*} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_j^*.$$

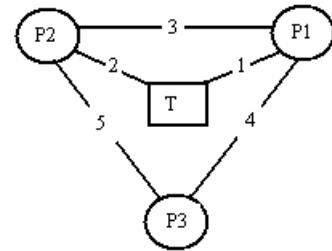
Τέτοιας μορφής προβλήματα, στα οποία προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε μια γραμμική συνάρτηση, κάτω από συγκεκριμένες (γραμμικές) ανισότητες, δηλαδή

<u>ελαχιστοποίηση</u>	$\sum_{t \in T} c_t x_t,$
<u>κάτω από τις συνθήκες</u>	$\sum_{t \in T} \alpha_{ut} x_t \geq 1, \text{ για καθε } u \in V.$

όπου, $\mathbf{A}=(\alpha_{ij})$ είναι ένας πίνακας διαστάσεως $|V| \times |T|$ ($\alpha_{ij} \in \{0,1\}$), ονομάζονται προβλήματα κάλυψης συνόλων (*set covering problem, SCP*).

Παράδειγμα 3.1.1. Το διπλανό σύστημα λειτουργεί εάν υπάρχει τρόπος να μετακινηθούμε από το σημείο T , σε κάθε ένα από τα P_1 , P_2 και P_3 , διαμέσου των 5 συνδέσεων (μονάδων). Τα ε.σ.δ. είναι (δεν παίζει ρόλο η ονομασία των ε.σ.δ., αλλά η θέση που θα κατέχει κάθε ένα απ' αυτά, όταν τα διατάξουμε),

$$C_1 = \{1,2\}, C_2 = \{4,5\}, C_3 = \{2,3,5\} \text{ και } C_4 = \{1,3,4\}.$$



3.1 Εύρεση των βέλτιστων L_j και K_j

και η διάταξη που θα χρησιμοποιήσω είναι η, $C_1 C_2 C_3 C_4$. Το πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε τα σύνολα L_j^* , τα οποία στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι τα εξής :

$$L_1^* = \emptyset, L_2^* = \{i: C_i \cap C_j \neq \emptyset, 1 \leq i < 2\} = \emptyset,$$

$$L_3^* = \{i: C_i \cap C_j \neq \emptyset, 1 \leq i < 3\} = \{1,2\} \text{ και } L_4^* = \{i: C_i \cap C_j \neq \emptyset, 1 \leq i < 3\} = \{1,2,3\}.$$

Ο πίνακας \mathbf{A} είναι,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ, $C_2' = \{1,2,3\}$, $C_3' = \{1,4\}$ και $C_4' = \{2,5\}$. Για το σύνολο L_2 (ισχύει πάντα $L_1 = \emptyset$) οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται είναι,

$$\sum_{k \in C_2'} a_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_2^*$$

και επειδή $L_2^* = \emptyset$, θα θεωρήσουμε επίσης ότι $L_2 = \emptyset$. Για το σύνολο L_3 έχουμε,

$$\left\{ \sum_{k \in C_3'} a_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_3^* \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in C_3'} a_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in \{1,2\} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_4 \geq 1 \end{cases}$$

και η βέλτιστη επιλογή για το L_3 είναι η $L_3 = \{1,4\}$. Τέλος για το L_4 , έχουμε

$$\left\{ \sum_{k \in C_4'} a_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_4^* \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in C_4'} a_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in \{1,2,3\} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \geq 1 \\ x_5 \geq 1 \\ x_2 + x_5 \geq 1 \end{cases}$$

οπότε αρκεί να θεωρήσουμε το $L_4 = \{2,5\}$. Έτσι,

$$UB_{FK} = \prod_{j=1}^4 \left[1 - \left(\prod_{i \in L_j} p_i \right) \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right] = \left[1 - \prod_{i \in C_1} (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - \prod_{i \in C_2} (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - (p_1 p_4) \prod_{i \in C_3} (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - (p_2 p_5) \prod_{i \in C_4} (1 - p_i) \right] \Rightarrow$$

3.1 Εύρεση των βέλτιστων L_j και K_j

απ' όπου προκύπτει,

$$UB_{FK} = [1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] \cdot [1 - (1 - p_4)(1 - p_5)] \cdot [1 - (p_1 p_4)(1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_5)] \cdot [1 - (p_2 p_5)(1 - p_1)(1 - p_3)(1 - p_4)].$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οι συνθήκες όριζαν μονοσήμαντα τα σύνολα $\{L_j: j=1,2,3,4\}$, και το οποίο δεν συμβαίνει πάντα. Αν π.χ. για το L_2 , υπήρχαν παραπάνω από μια δυνατές λύσεις (δηλαδή υπήρχε παραπάνω από ένα διάνυσμα x , που ικανοποιούσε τις αντίστοιχες συνθήκες) τότε θα επιλέγαμε εκείνη που θα έδινε τη μικρότερη τιμή στη συνάρτηση,

$$f_2(\mathbf{x}) = \sum_{k \in C_2'} (-\ln p_k) x_k = -(\ln p_1) x_1 - (\ln p_2) x_2 - (\ln p_3) x_3.$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε μια άλλη διάταξη των ε.σ.δ., θα πάρουμε πιθανότατα διαφορετικά αποτελέσματα (γιατί όπως θα δούμε αργότερα, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, μπορεί να καταλήξουμε στα ίδια σύνολα). Για παράδειγμα ας πάρουμε τη διάταξη $C_4 C_1 C_2 C_3$, και ας θεωρήσουμε τη μετονομασία που προκύπτει από τις ανισότητες $C_4 \equiv M_1$, $C_1 \equiv M_2$, $C_2 \equiv M_3$, $C_3 \equiv M_4$. Τότε η διάταξη των ε.σ.δ. παίρνει τη μορφή $M_1 M_2 M_3 M_4$ και θα έχουμε

$$M_2' = \{3,4,5\}, M_3' = \{1,2,3\} \text{ και } M_4' = \{1,4\}.$$

Η μετονομασία σε M_1 , του ε.σ.δ. που κατέχει την πρώτη θέση, σε M_2 εκείνου που κατέχει τη δεύτερη θέση, κοκ, επιβάλλεται να γίνει διότι, οι τύποι για την εύρεση των L_j^* , προϋποθέτουν τον παραπάνω συμβολισμό (όπως και ο τύπος εύρεσης του UB_{FK}). Ο πίνακας \mathbf{A} παίρνει τώρα τη μορφή (αφορά τα M_i),

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και θα έχουμε

$$L_1^* = \emptyset, L_2^* = \{i: M_i \cap M_j \neq \emptyset, 1 \leq i < 2\} = \{1\},$$

$$L_3^* = \{i: M_i \cap M_j \neq \emptyset, 1 \leq i < 3\} = \{1\} \text{ και } L_4^* = \{i: M_i \cap M_j \neq \emptyset, 1 \leq i < 3\} = \{1,2,3\}.$$

Επομένως το UB_{FK} θα δίδεται από τον τύπο,

3.1 Εύρεση των βέλτιστων L_j και K_j

$$UB_{FK} = \prod_{j=1}^4 \left[1 - \left(\prod_{i \in L_j} p_i \right) \prod_{i \in M_j} (1-p_i) \right] = \left[1 - \prod_{i \in C_4} (1-p_i) \right] \cdot \left[1 - \left(\prod_{i \in L_2} p_i \right) \prod_{i \in C_1} (1-p_i) \right] \cdot \left[1 - \left(\prod_{i \in L_3} p_i \right) \prod_{i \in C_2} (1-p_i) \right] \cdot \left[1 - \left(\prod_{i \in L_4} p_i \right) \prod_{i \in C_3} (1-p_i) \right].$$

Έτσι οι συνθήκες για το L_2 έχουν ως εξής,

$$\left\{ \sum_{k \in M_2} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_2^* \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in M_2} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in \{1\} \right\} \Rightarrow x_3 + x_4 \geq 1$$

και υπάρχουν τρεις εφικτές λύσεις ($x_3=1$ ή $x_4=1$ ή $x_3=x_4=1$), οι οποίες αντιστοιχούν στα σύνολα

$$L_2 = \{3\} \text{ ή } L_2 = \{4\} \text{ ή } L_2 = \{3, 4\}.$$

Αυτή που θα επιλεγεί, θα πρέπει να ελαχιστοποιεί την τιμή της συνάρτησης,

$$f_2(x) = \sum_{k \in M_2} (-\ln p_k) x_k = -(\ln p_1) x_1 - (\ln p_3) x_3 - (\ln p_4) x_4$$

(σίγουρα θα είναι μια από τις $L_2 = \{3\}$ ή $L_2 = \{4\}$). Ομοια, το L_3 , έχουμε,

$$\left\{ \sum_{k \in M_3} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_3^* \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in M_3} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in \{1\} \right\} \Rightarrow x_1 + x_3 \geq 1$$

με εφικτές λύσεις,

$$L_3 = \{1\} \text{ ή } L_3 = \{3\} \text{ ή } L_3 = \{1, 3\},$$

Ενώ τέλος για το L_4 προκύπτει

$$\left\{ \sum_{k \in M_4} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_4^* \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in M_4} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in \{1,2,3\} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 1 \\ x_4 \geq 1 \\ x_1 + x_4 \geq 1 \end{array} \right\}$$

οπότε $L_4 = \{1,4\}$. ■

Ο προσδιορισμός των K_j γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο (χρησιμοποιώντας τώρα τα ε.σ.λ.), καθώς παρατηρώντας τον τύπο του LB_{FK} , σε σχέση με τον αντίστοιχο του UB_{EP} , καταλαβαίνουμε

ότι η βέλτιστη επιλογή θα είναι εκείνη που μεγιστοποιεί το γινόμενο, $\prod_{i \in K_j} q_i$.

Είναι φανερό ότι η εύρεση των L_j (K_j), στις περιπτώσεις που έχουμε μεγάλα συστήματα, γίνεται πολύ δύσκολη, καθώς αυξάνεται το πλήθος των συνθηκών (το αντίστοιχο SCP είναι NP -complete). Ως επακόλουθο, στο άρθρο των Koutras et al (2003), προτείνεται ο γενετικός αλγόριθμος (*Genetic Algorithm*) των Beasley και Chu (1996), ο οποίος μας δίνει προσεγγιστικές λύσεις, υψηλής ακρίβειας. Η λειτουργία του αλγόριθμου, βασίζεται στα εξής βήματα (να επισημάνουμε ότι, η αναλυτική περιγραφή ή εφαρμογή του συγκεκριμένου αλγόριθμου, είναι πέρα από τους σκοπούς της εργασίας):

- 1^ο βήμα: Παράγονται K διανύσματα $x \in \{0,1\}^n$ (με κάποιο τυχαίο τρόπο),
- 2^ο βήμα: Από τα K αρχικά διανύσματα επιλέγουμε τυχαία 2 (χρησιμοποιώντας μια τεχνική που ονομάζεται *binary tournament selection*),
- 3^ο βήμα: Από τα δυο επιλεγμένα διανύσματα, δημιουργούμε ένα τρίτο διάνυσμα, εφαρμόζοντας μια διαδικασία «αναπαραγωγής» (*crossover reproduction mechanism*),
- 4^ο βήμα: Προσθέτουμε άσους στο το νέο διάνυσμα ώστε να γίνει εφικτή λύση, στην περίπτωση που δεν είναι,
- 5^ο βήμα: Αντικαθιστούμε τυχαία ένα από τα K αρχικά διανύσματα, με το νέο διάνυσμα,
- 6^ο βήμα: Ελέγχουμε αν ικανοποιείται κάποιο κριτήριο για τη συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε (ή γενικότερα, οποιοδήποτε κριτήριο που μπορεί να έχουμε θέσει),
- 7^ο βήμα: Αν τα κριτήρια ικανοποιούνται σταματάμε, ειδάλλως συνεχίζουμε από το 2^ο βήμα.

Παράδειγμα 3.1.2. Έστω το συνεχόμενο-4-από-τα-7: F με ε.σ.δ.,

$$C_1 = \{1,2,3,4\}, C_2 = \{2,3,4,5\}, C_3 = \{3,4,5,6\} \text{ και } C_4 = \{4,5,6,7\}.$$

και διάταξη $C_1 C_2 C_3 C_4$. Διαπιστώνουμε ότι κάθε ε.σ.δ. έχει τομή διάφορη του κενού με όλα τα υπόλοιπα, με αποτέλεσμα να έχουμε,

$$L_1^* = \emptyset, L_2^* = \{i: C_i \cap C_j \neq \emptyset, 1 \leq i < 2\} = \{1\},$$

$$L_3^* = \{i: C_i \cap C_j \neq \emptyset, 1 \leq i < 3\} = \{1,2\}, L_4^* = \{i: C_i \cap C_j \neq \emptyset, 1 \leq i < 4\} = \{1,2,3\}.$$

και

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Οπότε παίρνουμε $L_1 = \emptyset$ ενώ για τα L_2, L_3, L_4 προκύπτει ότι

$$\left\{ \sum_{k \in C_2} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_2^* \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in C_2} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in \{1\} \right\} \Rightarrow x_1 \geq 1 \Rightarrow L_2 = \{1\},$$

$$\left\{ \sum_{k \in C_3} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_3^* \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in C_3} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in \{1, 2\} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases},$$

$$\left\{ \sum_{k \in C_4} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_4^* \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in C_4} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in \{1, 2, 3\} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases}.$$

Έτσι οι δυνατές λύσεις για το L_3 και L_4 είναι,

$$L_3 = \{2\} \text{ ή } L_3 = \{1, 2\}$$

$$L_4 = \{3\} \text{ ή } L_4 = \{2, 3\} \text{ ή } L_4 = \{1, 3\} \text{ ή } L_4 = \{1, 2, 3\}.$$

Οι συναρτήσεις τις οποίες πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε (για να βρούμε τη βέλτιστη λύση), είναι,

$$f_3(\mathbf{x}) = \sum_{k \in C_3} (-\ln p_k) x_k = -(\ln p_1) x_1 - (\ln p_2) x_2 - (\ln p_7) x_7, \text{ για το } L_3$$

$$f_4(\mathbf{x}) = \sum_{k \in C_4} (-\ln p_k) x_k = -(\ln p_1) x_1 - (\ln p_2) x_2 - (\ln p_3) x_3, \text{ για το } L_4$$

και άμεσα καταλήγουμε ότι, $L_3 = \{2\}$ και $L_4 = \{3\}$, ανεξάρτητα από τις αξιοπιστίες p_i (αρκεί μόνο να θυμηθούμε ότι $-\ln(p_i) > 0$, για κάθε i). Το UB_{FK} θα έχει τη μορφή,

3.1 Εύρεση των βέλτιστων L_j και K_j

$$UB_{FK} = \prod_{j=1}^4 \left[1 - \left(\prod_{i \in L_j} p_i \right) \prod_{i \in C_j} (1-p_i) \right] = \left[1 - \prod_{i \in C_1} (1-p_i) \right] \cdot \left[1 - p_1 \prod_{i \in C_2} (1-p_i) \right] \cdot \left[1 - p_2 \prod_{i \in C_3} (1-p_i) \right] \cdot \left[1 - p_3 \prod_{i \in C_4} (1-p_i) \right]$$

απ'οπου προκύπτει

$$UB_{FK} = \left[1 - \prod_{i=1}^4 (1-p_i) \right] \cdot \left[1 - p_1 \prod_{i=2}^5 (1-p_i) \right] \cdot \left[1 - p_2 \prod_{i=3}^6 (1-p_i) \right] \cdot \left[1 - p_3 \prod_{i=4}^7 (1-p_i) \right]$$

Έστω τώρα ότι χρησιμοποιώ τη διάταξη, $C_3 C_1 C_4 C_2$ ή ισοδύναμα την $M_1 M_2 M_3 M_4$, όπου $C_3 \equiv M_1$, $C_1 \equiv M_2$, $C_4 \equiv M_3$, $C_2 \equiv M_4$. Τότε θα έχουμε,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$L_1^* = \emptyset, \quad L_2^* = \{i: M_i \cap M_j \neq \emptyset, 1 \leq i < 2\} = \{1\},$$

$$L_3^* = \{i: M_i \cap M_j \neq \emptyset, 1 \leq i < 3\} = \{1,2\}, \quad L_4^* = \{i: M_i \cap M_j \neq \emptyset, 1 \leq i < 3\} = \{1,2,3\}.$$

Το UB_{FK} θα είναι,

$$UB_{FK} = \prod_{j=1}^4 \left[1 - \left(\prod_{i \in L_j} p_i \right) \prod_{i \in M_j} (1-p_i) \right] = \left[1 - \prod_{i \in C_3} (1-p_i) \right] \cdot \left[1 - \left(\prod_{i \in L_2} p_i \right) \prod_{i \in C_1} (1-p_i) \right] \cdot \left[1 - \left(\prod_{i \in L_3} p_i \right) \prod_{i \in C_4} (1-p_i) \right] \cdot \left[1 - \left(\prod_{i \in L_4} p_i \right) \prod_{i \in C_2} (1-p_i) \right]$$

και αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, εάν ισχύουν οι παρακάτω ισότητες, θα έχουμε ίδιο άνω φράγμα και από τις δυο διαφορετικές διατάξεις,

$$\prod_{i \in L_1} p_i = p_2, \quad \prod_{i \in L_2} p_i = 1$$

$$\prod_{i \in L_3} p_i = p_3, \quad \prod_{i \in L_4} p_i = p_1.$$

Όμως $L_1 = \emptyset$ οπότε $\prod_{i \in L_1} p_i = 1$ και επομένως θα πρέπει $p_2 = 1$. Για τα L_2, L_3, L_4 έχουμε τις συνθήκες

$$\left\{ \sum_{k \in M'_2} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_2^* \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in M'_2} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in \{1\} \right\} \Rightarrow x_5 + x_6 \geq 1,$$

$$\left\{ \sum_{k \in M'_3} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_3^* \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in M'_3} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in \{1,2\} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases},$$

$$\left\{ \sum_{k \in M'_4} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_4^* \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in M'_4} \alpha_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in \{1,2,3\} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_6 \geq 1 \\ x_6 + x_7 \geq 1 \end{cases}.$$

Έτσι οι δυνατές λύσεις για τα L_2, L_3 και L_4 είναι,

- $L_2 = \{5\}$ ή $L_2 = \{6\}$ ή $L_2 = \{5, 6\}$
- $L_3 = \{3\}$ ή $L_3 = \{3, 1\}$ ή $L_3 = \{3, 2\}$ ή $L_3 = \{1, 2, 3\}$
- $L_4 = \{1, 6\}$ ή $L_4 = \{1, 6, 7\}$.

Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι οι βέλτιστες επιλογές είναι οι $L_3 = \{3\}$ και $L_4 = \{1, 6\}$, ενώ $L_2 = \{5\}$ εάν $p_5 > p_6$ και $L_2 = \{6\}$, εάν $p_5 < p_6$. Επομένως το UB_{FK} θα έχει τη μορφή,

$$UB_{FK} = \left[1 - \prod_{i \in M_1} (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - \max\{p_5, p_6\} \prod_{i \in M_2} (1 - p_i) \right] \cdot$$

$$\left[1 - p_3 \prod_{i \in M_3} (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - (p_1 p_6) \prod_{i \in M_4} (1 - p_i) \right] \Rightarrow$$

$$UB_{FK} = \left[1 - \prod_{i=3}^6 (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - \max\{p_5, p_6\} \prod_{i=1}^4 (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - p_3 \prod_{i=4}^7 (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - (p_1 p_6) \prod_{i=2}^5 (1 - p_i) \right].$$

Για τις δυο διαφορετικές μεταθέσεις που θεωρήσαμε, πήραμε,

1^η Διάταξη:

$$UB_{FK} = \left[1 - \prod_{i=1}^4 (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - p_1 \prod_{i=2}^5 (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - p_2 \prod_{i=3}^6 (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - p_3 \prod_{i=4}^7 (1 - p_i) \right].$$

2^η Διάταξη:

$$UB_{FK} = \left[1 - \prod_{i=3}^6 (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - \max\{p_5, p_6\} \prod_{i=1}^4 (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - p_3 \prod_{i=4}^7 (1 - p_i) \right] \cdot \left[1 - (p_1 p_6) \prod_{i=2}^5 (1 - p_i) \right].$$

Δηλαδή καταλήξαμε σε δυο διαφορετικά φράγματα, αλλάζοντας μόνο τη διάταξη των ε.σ.δ. Η συμπεριφορά των δυο φραγμάτων, για διάφορες τιμές των p_i , φαίνεται στον επόμενο πίνακα

Πίνακας 3.1.1

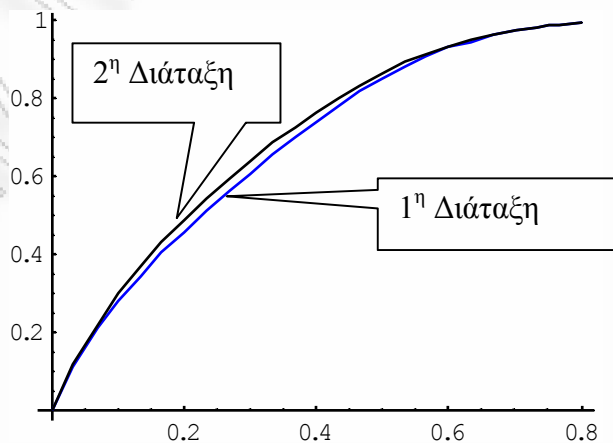
Αξιοπιστίες Μονάδων	1 ^η Διάταξη ($UB_{FK}^{\Delta_1}$)	2 ^η Διάταξη ($UB_{FK}^{\Delta_2}$)
$p_1=p_2=p_3=p_4=0.7, p_5=0.8, p_6=0.75, p_7=0.65$	0.981418	0.982621
$p_1=p_2=p_3=p_4=0.6, p_5=0.9, p_6=0.75, p_7=0.75$	0.966876	0.968794
$p_1=p_2=0.5, p_3=p_4=0.6, p_5=0.6, p_6=0.55, p_7=0.75$	0.920982	0.929403
$p_1=p_2=0.9, p_3=p_4=0.7, p_5=0.6, p_6=0.65, p_7=0.75$	0.977333	0.977506
$p_1=p_2=0.9, p_3=p_4=0.7, p_5=0.8, p_6=0.85, p_7=0.55$	0.992237	0.992344

Για συστήματα με όμοιες μονάδες έχουμε τα επόμενα αποτελέσματα, τα οποία δείχνονται γραφικά στο αντίστοιχο σχήμα,

Πίνακας 3.1.2

p	$UB_{FK}^{\Delta_1}$	$UB_{FK}^{\Delta_2}$	UB_{EP}
0.1	0.2805	0.2983	0.1527
0.2	0.4569	0.4895	0.3738
0.3	0.6072	0.6402	0.6025
0.4	0.7419	0.7662	0.7892
0.5	0.8523	0.8661	0.9110
0.6	0.9302	0.9360	0.9725
0.7	0.9751	0.9768	0.9947
0.8	0.9946	0.9948	0.9996

Σχήμα 3.1.1



3.1 Εύρεση των βέλτιστων L_j και K_j

Φαίνεται μέσα από τις συγκρίσεις ότι, η πρώτη διάταξη, παράγει καλύτερη προσέγγιση (μικρότερο φράγμα), σ' όλες τις περιπτώσεις που είδαμε (ενώ το UB_{EP} είναι καλύτερο για μικρά p). Ειδικότερα, για την *iid* περίπτωση, αποδεικνύεται εύκολα ότι, για κάθε $p \in [0, 1]$,

$$\text{είναι } \frac{UB_{FK}^{\Delta_1}}{UB_{FK}^{\Delta_2}} \leq 1 . \quad \blacksquare$$

Η μορφή λοιπόν των βέλτιστων φραγμάτων FK , πολλές φορές δεν είναι δυνατόν να καθοριστεί μονοσήμαντα, εάν δε γνωρίζουμε τις αξιοπιστίες των μονάδων. Έτσι για ένα συγκεκριμένο σύστημα, μπορεί να έχουμε δυο ή περισσότερα διαφορετικά φράγματα (για μια διάταξη), ανάλογα με τις τιμές των p_i (παράδειγμα 3.1.2). Οπότε ένα επιπλέον χαρακτηριστικό στοιχείο του συστήματος, επηρεάζει τη μορφή των φραγμάτων, κάτι που πιθανότατα, θα μας προσφέρει μεγαλύτερη ακρίβεια.

3.2 Εύρεση των βέλτιστων ΤΠΦ

Στην προηγούμενη παράγραφο, χρησιμοποιώντας ως κριτήριο τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων f_j καταφέραμε να βρούμε τις βέλτιστες επιλογές των $\{L_j: j=1, \dots, N\}$ (δεδομένης μιας συγκεκριμένης διάταξης), αφού είχαμε ανάγει το πρόβλημα σε ένα ισοδύναμο SCP . Επιδίωξη μας τώρα είναι, να προσδιορίσουμε τη διάταξη που θα μας δώσει το ελάχιστο άνω φράγμα και εκείνη που θα «παράγει» το μέγιστο κάτω φράγμα. Θα ασχοληθούμε κυρίως με την πρώτη περίπτωση, καθώς οι διαδικασίες δεν διαφοροποιούνται σημαντικά, για το κάτω φράγμα.

3.2.1. Προσδιορισμός όλων των δυνατών φραγμάτων

Έστω πάλι ότι έχουμε ένα μονότονο σύστημα με ε.σ.δ., $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\}$. Για τον υπολογισμό του άνω φράγματος, διατάσσουμε τυχαία τα ε.σ.δ. και έπειτα, μετονομάζουμε αυτό που κατείχε την πρώτη θέση σε M_1 , αυτό που κατείχε τη δεύτερη θέση σε M_2 κ.ο.κ. Σε κάθε ε.σ.δ. αντιστοιχεί ένα SCP , το οποίο εξαρτάται, από τη διάταξη των ε.σ.δ. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της μορφής των SCP , είναι ότι η συνάρτηση που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί, παραμένει ίδια για κάθε ε.σ.δ., ανεξαρτήτως της διάταξης. Για παράδειγμα, αν το C_m κατέχει τη δεύτερη θέση, στη διάταξη π , τότε το αντίστοιχο SCP (θα το συμβολίζουμε με $SC_m^{(\pi)}$), θα είναι,

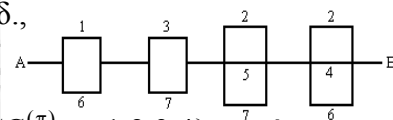
$$SC_m^{(\pi)} : \begin{cases} \text{ελαχιστοποίηση:} & \sum_{t \in M_2} c_t x_t \equiv \sum_{t \in C_m} c_t x_t \\ \text{κατω απο τις συνθήκες:} & \sum_{k \in M_2} a_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_2^* \end{cases}$$

ενώ αν είναι στη τρίτη θέση, σε μια τυχαία διάταξη π_1 , θα είχαμε

$$SC_m^{(\pi_1)} : \begin{cases} \text{ελαχιστοποίηση:} & \sum_{t \in M_3} c_t x_t \equiv \sum_{t \in C_m} c_t x_t \\ \text{κατω απο τις συνθήκες:} & \sum_{k \in M_3} a_{ik} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_3^*. \end{cases}$$

Ουσιαστικά, αυτό που αλλάζει ανάμεσα στις διαφορετικές μεταθέσεις, είναι οι ανισότητες (τα L_j^* και ο πίνακας A), τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί κάθε εφικτή λύση. Οπότε, αρχικά θα μας απασχολήσει το πώς μεταβάλλεται το σύνολο των ανισοτήτων, από μια διάταξη σε μια άλλη. Στο παρακάτω παράδειγμα, θα αποκτήσουμε μια πρώτη εικόνα για το πρόβλημα, υπολογίζοντας για όλες τις δυνατές μεταθέσεις, το πλήθος των ανισοτήτων και ας συμβολίσουμε με $S_j^{(\pi)}$ το σύνολο που περιλαμβάνει όλες τις ανισότητες του $SC_j^{(\pi)}$.

Παράδειγμα 3.2.1.1. Το σύστημα του διπλανού σχήματος, έχει ε. σ.δ.,



$$C_1=\{1,6\}, C_2=\{3,7\}, C_3=\{2,5,7\} \text{ και } C_4=\{2,4,6\}.$$

Έστω $\{S_j^{(\pi)}, j=1,2,3,4\}$ το σύνολο των ανισοτήτων, για τα $SCP \{SC_j^{(\pi)}, j=1,2,3,4\}$, αντίστοιχα, για τη διάταξη π . Στον παρακάτω πίνακα υπάρχουν τα $S_j^{(\pi)}$, για όλες τις δυνατές μεταθέσεις των ε.σ.δ. (συνολικά $4!=24$).

Πίνακας 3.2.1

	$C_1C_2C_3C_4$	$C_4C_1C_2C_3$	$C_3C_4C_1C_2$	$C_2C_3C_4C_1$	
$S_1^{(\pi)}$	\emptyset	$x_2+x_4 \geq 1$	$x_2+x_4 \geq 1$	$x_2+x_4 \geq 1$	
$S_2^{(\pi)}$	\emptyset	\emptyset	$x_2+x_5 \geq 1$	\emptyset	
$S_3^{(\pi)}$	$x_3 \geq 1$	$x_3 \geq 1$ $x_4+x_6 \geq 1$	\emptyset	$x_3 \geq 1$	
$S_4^{(\pi)}$	$x_1 \geq 1$ $x_5+x_7 \geq 1$	\emptyset	$x_5+x_7 \geq 1$	$x_5+x_7 \geq 1$	
	$C_1C_4C_2C_3$	$C_1C_3C_4C_2$	$C_1C_3C_2C_4$	$C_1C_4C_3C_2$	$C_1C_2C_4C_3$
$S_1^{(\pi)}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$S_2^{(\pi)}$	\emptyset	$x_2+x_5 \geq 1$	$x_2+x_5 \geq 1$	$x_2+x_5 \geq 1$	\emptyset
$S_3^{(\pi)}$	$x_3 \geq 1$ $x_4+x_6 \geq 1$	\emptyset	\emptyset	$x_4+x_6 \geq 1$	$x_3 \geq 1$ $x_4+x_6 \geq 1$
$S_4^{(\pi)}$	$x_1 \geq 1$	$x_1 \geq 1$ $x_5+x_7 \geq 1$	$x_1 \geq 1$ $x_5+x_7 \geq 1$	$x_1 \geq 1$	$x_1 \geq 1$
	$C_4C_3C_1C_2$	$C_4C_2C_3C_1$	$C_4C_2C_1C_3$	$C_4C_3C_2C_1$	$C_4C_1C_3C_2$
$S_1^{(\pi)}$	$x_2+x_4 \geq 1$	$x_2+x_4 \geq 1$	$x_2+x_4 \geq 1$	$x_2+x_4 \geq 1$	$x_2+x_4 \geq 1$
$S_2^{(\pi)}$	$x_2+x_5 \geq 1$	\emptyset	\emptyset	$x_2+x_5 \geq 1$	$x_2+x_5 \geq 1$
$S_3^{(\pi)}$	$x_4+x_6 \geq 1$	$x_3 \geq 1$ $x_4+x_6 \geq 1$	$x_3 \geq 1$ $x_4+x_6 \geq 1$	$x_4+x_6 \geq 1$	$x_4+x_6 \geq 1$
$S_4^{(\pi)}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

	$C_3C_2C_4C_1$	$C_3C_1C_2C_4$	$C_3C_1C_4C_2$	$C_3C_2C_4C_1$	$C_3C_4C_2C_1$
$S_1^{(\pi)}$	$x_2+x_4 \geq 1$	\emptyset	\emptyset	$x_2+x_4 \geq 1$	$x_2+x_4 \geq 1$
$S_2^{(\pi)}$	$x_2+x_5 \geq 1$	$x_2+x_5 \geq 1$	$x_2+x_5 \geq 1$	$x_2+x_5 \geq 1$	$x_2+x_5 \geq 1$
$S_3^{(\pi)}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$S_4^{(\pi)}$	$x_5+x_7 \geq 1$	$x_1 \geq 1$ $x_5+x_7 \geq 1$	$x_1 \geq 1$ $x_5+x_7 \geq 1$	$x_5+x_7 \geq 1$	$x_5+x_7 \geq 1$
	$C_2C_1C_3C_4$	$C_2C_4C_1C_3$	$C_2C_4C_3C_1$	$C_2C_1C_4C_3$	$C_2C_3C_1C_4$
$S_1^{(\pi)}$	\emptyset	$x_2+x_4 \geq 1$	$x_2+x_4 \geq 1$	\emptyset	\emptyset
$S_2^{(\pi)}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$S_3^{(\pi)}$	$x_3 \geq 1$	$x_3 \geq 1$ $x_4+x_6 \geq 1$	$x_3 \geq 1$ $x_6+x_4 \geq 1$	$x_3 \geq 1$ $x_4+x_6 \geq 1$	$x_3 \geq 1$
$S_4^{(\pi)}$	$x_1 \geq 1$ $x_5+x_7 \geq 1$	\emptyset	\emptyset	$x_1 \geq 1$	$x_1 \geq 1$ $x_5+x_7 \geq 1$

Βλέποντας όλες τις μεταθέσεις των ε.σ.δ., παρατηρούμε ότι οι δυνατές τιμές για κάθε $S_i^{(\pi)}$, είναι

$$S_1^{(\pi)} = \begin{cases} \emptyset, \\ x_2 + x_4 \geq 1 \end{cases}, S_2^{(\pi)} = \begin{cases} \emptyset, \\ x_2 + x_5 \geq 1 \end{cases}, S_3^{(\pi)} = \begin{cases} \emptyset, \\ x_3 \geq 1, \\ x_4 + x_6 \geq 1, \\ x_3 \geq 1, x_4 + x_6 \geq 1 \end{cases}, \text{ και } S_4^{(\pi)} = \begin{cases} \emptyset, \\ x_1 \geq 1, \\ x_5 + x_7 \geq 1, \\ x_1 \geq 1, x_5 + x_7 \geq 1 \end{cases}.$$

□

Λήμμα 3.2.1.1. Για ένα μονότονο σύστημα με N ε.σ.δ. και n μονάδες, το σύνολο των συνθηκών (ανισοτήτων) για το $SC_m^{(\pi)}$, όταν το C_m αυτό κατέχει τη θέση j , δίδεται από τη σχέση,

$$\sum_{k \in (M_i \cap M_j^*)} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_j^*.$$

Απόδειξη Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ας χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη, $C_1C_2C_3 \dots C_N$ (οπότε $C_1 \equiv M_1, C_2 \equiv M_2, C_3 \equiv M_3, \dots, C_N \equiv M_N$). Όπως γνωρίζουμε, για τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{A} = (\alpha_{ik})_{N \times n} (\alpha_{ik} \in \{0, 1\})$ ισχύει,

$$\alpha_{ik} = 1 \Leftrightarrow \eta \ k \ \mu\text{ονάδα ανήκει στο } C_i.$$

Οπότε για το παρακάτω γινόμενο, έχουμε

$$\alpha_{ik}x_k = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \notin C_i \\ x_k, & \text{αν } k \in C_i \end{cases}, \text{ με } k \in \{1, 2, \dots, n\}, i \in \{1, 2, \dots, N\},$$

όπου x_k οποιαδήποτε μεταβλητή. Άρα, για κάθε i θα ισχύει η ισότητα,

$$\sum_{k \in C'_j} \alpha_{ik} x_k = \sum_{k \in (C_i \cap C'_j)} x_k,$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. ■

Για μια συγκεκριμένη μετάθεση π , των N ε.σ.δ., η συνάρτηση,

$$\pi(j): \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\},$$

παίρνει σαν τιμή τη θέση του C_j , στη μετάθεση π , για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Παράδειγμα 3.2.1.2. Ας υποθέσουμε ότι ένα σύστημα έχει 5 ε.σ.δ., $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$.

Τότε για τη διάταξη,

$$C_1 C_4 C_2 C_5 C_3$$

ισχύει,

$$\pi(1)=1, \pi(2)=3, \pi(3)=5, \pi(4)=2 \text{ και } \pi(5)=4,$$

ενώ για τη διάταξη,

$$C_4 C_2 C_1 C_3 C_5$$

έχουμε,

$$\pi(1)=3, \pi(2)=2, \pi(3)=4, \pi(4)=1 \text{ και } \pi(5)=5. \quad \blacksquare$$

Ορισμός 3.2.1.1. Έστω ένα μονότονο σύστημα με ε.σ.δ. $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\}$. Για κάθε μετάθεση π , των αριθμών $\{1, 2, \dots, N\}$, ορίζουμε τα σύνολα,

$$L_j^{(\pi)} = \{r : \pi(r) < \pi(j) \text{ και } C_r \cap C_j \neq \emptyset, r \in \{1, 2, \dots, N\}\}, j = 1, 2, \dots, N,$$

και συμβολίζουμε με $UB_{FK}^{(\pi)}$ το άνω φράγμα που αντιστοιχεί στη μετάθεση π .

Με λόγια, το σύνολο $L_j^{(\pi)} (\subseteq \{1, 2, \dots, N\})$, περιέχει όλους τους δείκτες των ε.σ.δ., που έχουν κοινά στοιχεία με το C_j , και ταυτόχρονα, κατέχουν κάποια θέση που βρίσκεται αριστερά του C_j ,

στη μετάθεση π . Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, το L_j^* απευθύνεται στο ε.σ.δ., που είναι στη $j^{\text{η}}$ θέση (το M_j), ενώ το $L_j^{(\pi)}$ στο C_j .

Παράδειγμα 3.2.1.3. Στο Παράδειγμα 3.2.1.1. είδαμε ότι το σύστημα είχε τα εξής ε.σ.δ.,

$$C_1=\{1,6\}, C_2=\{3,7\}, C_3=\{2,5,7\} \text{ και } C_4=\{2,4,6\}.$$

Είναι φανερό ότι,

- το C_1 έχει τομή διάφορη του κενού μόνο με το C_4 ,
- το C_2 έχει τομή διάφορη του κενού μόνο με το C_3 ,
- το C_3 έχει τομή διάφορη του κενού μόνο με τα C_4 και C_2 ,
- το C_4 έχει τομή διάφορη του κενού μόνο με τα C_1 και C_3 .

Άμεσα λοιπόν παίρνουμε ότι για τη διάταξη π_1 , που ορίζεται ως εξής

$$C_1 C_2 C_3 C_4$$

ισχύει,

$$L_1^{(\pi_1)} = \emptyset \text{ (το } C_1 \text{ είναι πρώτο),}$$

$$L_2^{(\pi_1)} = \emptyset \text{ (γιατί το } C_2 \text{ δεν έχει κοινό στοιχείο με το } C_1, \text{ που είναι το μόνο αριστερά του),}$$

$$L_3^{(\pi_1)} = \{2\} \text{ και } L_4^{(\pi_1)} = \{1, 3\}.$$

Όμοια, για τη διάταξη π_2 που προκύπτει από την τοποθέτηση

$$C_3 C_1 C_4 C_2$$

παίρνουμε,

$$L_1^{(\pi_2)} = \emptyset \text{ (αφού } C_1 \cap C_3 = \emptyset),$$

$$L_2^{(\pi_2)} = \{3\},$$

$$L_3^{(\pi_2)} = \emptyset \text{ (είναι πρώτο) και } L_4^{(\pi_2)} = \{1, 3\}. \quad \blacksquare$$

Φαίνεται, και μέσα από το προηγούμενο παράδειγμα, ότι ενώ για κάθε $i \in L_j^*$, είχαμε $i < j$, κάτι τέτοιο σίγουρα δεν υφίσταται στα $L_j^{(\pi)}$.

Πρόταση 3.2.1.1. Έστω ένα μονότονο σύστημα με ε.σ.δ. $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\}$. Αν το C_m ($m \in \{1, \dots, N\}$) κατέχει τη $j^{\text{η}}$ θέση ($1 \leq j \leq N$), στη μετάθεση π (δηλαδή $\pi(m) = j$), το αντίστοιχο SCP ($SC_m^{(\pi)}$) θα έχει τη μορφή,

$$SC_m^{(\pi)} : \begin{cases} \text{ελαχιστοποίηση:} & \sum_{t \in C_m} c_t x_t \\ \text{κατω απο τις συνθήκες:} & \sum_{k \in (C_v \cap C_m)} x_k \geq 1, \text{ για καθε } v \in L_m^{(\pi)}. \end{cases}$$

Απόδειξη Έστω ότι η μετάθεση π είναι,

$$\underbrace{C_k C_l \dots C_m \dots C_s}_{j} \text{ ή } M_1 M_2 \dots M_j \dots M_N$$

όπου $M_1 \equiv C_k, M_2 \equiv C_l, \dots, M_j \equiv C_m, \dots, M_N \equiv C_s$ ($k, l, m, s \in \{1, 2, \dots, N\}$).

Έχουμε αναφέρει ότι το $SC_m^{(\pi)}$, όταν το C_m κατέχει $j^{\text{η}}$ θέση ($\pi(m) = j$), έχει τη μορφή

$$SC_m^{(\pi)} : \begin{cases} \text{ελαχιστοποίηση:} & \sum_{t \in C_m} c_t x_t \\ \text{κατω απο τις συνθήκες:} & \sum_{k \in (M_i \cap M_j)} x_k \geq 1, \text{ για καθε } i \in L_j^*. \end{cases}$$

όπου, $L_j^* = \{i: M_i \cap M_j \neq \emptyset, 1 \leq i < j\}$. Όμως,

$$i \in L_j^* \Leftrightarrow M_i \cap M_j \neq \emptyset \text{ και } 1 \leq i < j \Leftrightarrow C_v \cap C_m \neq \emptyset \text{ και } 1 \leq \pi(v) < \pi(m), \text{ όπου } \pi(v) = i \Leftrightarrow v \in L_m^{(\pi)}, \text{ όπου } \pi(v) = i.$$

Άρα, το $SC_m^{(\pi)}$ γίνεται

$$SC_m^{(\pi)} : \begin{cases} \text{ελαχιστοποίηση} & \sum_{t \in C_m} c_t x_t \\ \text{κατω απο τις συνθήκες} & \sum_{k \in (C_v \cap C_m)} x_k \geq 1, \text{ για καθε } v \in L_m^{(\pi)}. \end{cases} \blacksquare$$

Βλέποντας λοιπόν τη μορφή των $SC_m^{(\pi)}$, όπως αυτή δόθηκε μέσα από την Πρόταση 3.2.2., καταλαβαίνουμε ότι το μόνο που επηρεάζεται από τη θέση του ε.σ.δ. C_m , είναι το σύνολο $L_m^{(\pi)}$.

Πρόταση 3.2.1.2. Ας θεωρήσουμε ότι $C_1 C_2 C_3 \dots C_{N-1} C_N$, είναι μια συγκεκριμένη μετάθεση (π) των N ε.σ.δ., ενός μονότονου συστήματος και $\{SC_j^{(\pi)}, j=1, \dots, N\}$, είναι τα αντίστοιχα SCP. Δηλαδή,

$$SC_j^{(\pi)} : \begin{cases} \text{ελαχιστοποίηση} & \sum_{t \in C_j} c_t x_t \\ \text{κατω απο τις συνθήκες} & \sum_{k \in (C_N \cap C_j)} x_k \geq 1, \text{ για καθε } v \in L_j^{(\pi)}. \end{cases}$$

για $j=2, 3, \dots, N$ (γνωρίζουμε ότι $SC_1^{(\pi)} \equiv \emptyset$). Τότε, για τα SCP $\{SC_j^{(\pi_1)}, j=1, \dots, N\}$ που αντιστοιχούν στη διάταξη (π_1),

$$C_N C_1 C_2 C_3 \dots C_{N-1}$$

ισχύει,

- $SC_j^{(\pi_1)} = SC_j^{(\pi)}$, εάν $C_N \cap C_j = \emptyset$, για $j=1, \dots, N-1$ (ενώ $SC_N^{(\pi_1)} \equiv \emptyset$)

$$\bullet \quad SC_j^{(\pi_1)} : \begin{cases} \text{ελαχιστοποίηση} : & \sum_{t \in C_j} c_t x_t \\ \text{κατω απο τις συνθήκες} : & \begin{cases} \sum_{k \in (C_N \cap C_j)} x_k \geq 1, \text{ για καθε } v \in L_j^{(\pi)}, \\ \sum_{k \in (C_N \cap C_j)} x_k \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

εάν $C_N \cap C_j \neq \emptyset$, για $j=1, \dots, N-1$ ($SC_N^{(\pi_1)} \equiv \emptyset$).

Απόδειξη Για τη μετάθεση $C_1 C_2 C_3 \dots C_N$ (π), γνωρίζουμε ότι τα σύνολα $L_j^{(\pi)}$ είναι,

$$L_j^{(\pi)} = \{r : \pi(r) < \pi(j) \text{ και } C_r \cap C_j \neq \emptyset\}, j = 2, \dots, N,$$

και $L_1^{(\pi)} = \emptyset$. Ομοια, για τη μετάθεση $C_N C_1 C_2 C_3 \dots C_{N-1}$ (π_1),

$$L_j^{(\pi_1)} = \{r : \pi_1(r) < \pi_1(j) \text{ και } C_r \cap C_j \neq \emptyset\}, j = 1, \dots, N-1,$$

και $L_N^{(\pi_1)} = \emptyset$.

- Εάν $C_N \cap C_j = \emptyset$, για κάποιο $j \in \{1, \dots, N-1\}$, τότε,

$$L_j^{(\pi)} = L_j^{(\pi_1)} \Rightarrow SC_j^{(\pi)} = SC_j^{(\pi_1)}.$$

- Εάν $C_N \cap C_j \neq \emptyset$, για κάποιο $j \in \{1, \dots, N-1\}$, τότε,

$$L_j^{(\pi_1)} = L_j^{(\pi)} \cup \{N\}$$

το οποίο συνεπάγεται μια επιπλέον συνθήκη, στο $SC_j^{(\pi_1)}$, πιο συγκεκριμένα την

$$\sum_{k \in (C_N \cap C_j)} x_k \geq 1. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 3.2.1.4. Ας πάρουμε το σύστημα, συνεχόμενο 4 από τα 7:F με ε.σ.δ.,

$$C_1 = \{1, 2, 3, 4\}, C_2 = \{2, 3, 4, 5\}, C_3 = \{3, 4, 5, 6\} \text{ και } C_4 = \{4, 5, 6, 7\}.$$

Για τη διάταξη(π) $C_1 C_2 C_3 C_4$, ισχύει($S_1^{(\pi)} \equiv \emptyset$),

$$S_2^{(\pi)} : \left\{ \sum_{k \in (C_N \cap C_2)} x_k \geq 1, \text{ για κάθε } v \in L_2^{(\pi)} \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in (C_1 \cap C_2)} x_k \geq 1, \right\} \Rightarrow x_1 \geq 1$$

$$S_3^{(\pi)} : \left\{ \sum_{k \in (C_N \cap C_3)} x_k \geq 1, \text{ για κάθε } v \in L_3^{(\pi)} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in (C_1 \cap C_3)} x_k \geq 1, \\ \sum_{k \in (C_2 \cap C_3)} x_k \geq 1, \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \end{array} \right\}$$

$$S_4^{(\pi)} : \left\{ \sum_{k \in (C_N \cap C_4)} x_k \geq 1, \text{ για κάθε } v \in L_4^{(\pi)} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in (C_1 \cap C_4)} x_k \geq 1 \\ \sum_{k \in (C_2 \cap C_4)} x_k \geq 1 \\ \sum_{k \in (C_3 \cap C_4)} x_k \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_3 \geq 1 \end{array} \right\}.$$

Για τη $C_4 C_1 C_2 C_3$ (π_1), επειδή το C_4 έχει κοινά στοιχεία με όλα τα ε.σ.δ., τα $S_j^{(\pi_1)}$ θα έχουν όλα μια επιπλέον συνθήκη, σε σχέση με τα $S_j^{(\pi)}$, για κάθε $j=1, 2, 3$ ($S_4^{(\pi_1)} \equiv \emptyset$). Πράγματι, είναι

$$S_1^{(\pi)} : \left\{ \sum_{k \in (C_v \cap C_1)} x_k \geq 1, \text{ για καθε } v \in L_1^{(\pi)} \right\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k \in (C_4 \cap C_1)} x_k \geq 1, \right\} \Rightarrow x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$$

$$S_2^{(\pi)} : \left\{ \sum_{k \in (C_v \cap C_2)} x_k \geq 1, \text{ για καθε } v \in L_2^{(\pi)} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in (C_1 \cap C_2)} x_k \geq 1 \\ \sum_{k \in (C_4 \cap C_2)} x_k \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 1 \\ x_6 + x_7 \geq 1 \end{array} \right\}$$

$$S_3^{(\pi)} : \left\{ \sum_{k \in (C_v \cap C_3)} x_k \geq 1, \text{ για καθε } v \in L_3^{(\pi)} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in (C_1 \cap C_3)} x_k \geq 1, \\ \sum_{k \in (C_2 \cap C_3)} x_k \geq 1, \\ \sum_{k \in (C_4 \cap C_3)} x_k \geq 1, \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ x_7 \geq 1 \end{array} \right\}.$$

Δηλαδή η επιπλέον συνθήκη είναι,

$$\sum_{k \in (C_4 \cap C_j)} x_k \geq 1, \text{ για } j=1, 2, 3.$$

Ένα ακόμη χρήσιμο «εργαλείο» για την επίλυση των SCP, αποτελεί το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.2.1.2. Έστω ότι η βέλτιστη λύση για κάποιο SCP, είναι η $\mathbf{x}^{(0)}$. Τότε η προσθήκη μιας συνθήκης στο SCP, που ήδη ικανοποιείται από το $\mathbf{x}^{(0)}$, δεν αλλάζει τη λύση του προβλήματος.

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι για το παρακάτω SCP (για τη διάταξη π),

$$SC_j^{(\pi)} : \left\{ \begin{array}{l} \text{ελαχιστοποίηση: } \sum_{t \in C_j} c_t x_t \\ \text{κατω απο τις συνθήκες: } \sum_{k \in (C_v \cap C_j)} x_k \geq 1, \text{ για καθε } v \in L_j^{(\pi)}. \end{array} \right.$$

η λύση δίδεται από το διάνυσμα,

$$\mathbf{x}^{(0)} = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-|C_j|}}),$$

με, $x_{j_{m1}} = 1, x_{j_{m2}} = 1, \dots, x_{j_{mk}} = 1$, όπου $m_i \in \{1, 2, \dots, n - |C_j|\}$, με $1 \leq i \leq k \leq |L_j^{(\pi)}|$. Έστω τώρα ότι η λύση του,

$$SC_j^{(\pi)+1} : \begin{cases} \text{ελαχιστοποίηση : } \sum_{t \in C_j} c_t x_t \\ \text{κατω απο τις συνθήκες : } \begin{cases} \sum_{k \in (C_v \cap C_j)} x_k \geq 1, \text{ για καθε } v \in L_j^{(\pi)}. \\ \sum_{k \in (C_h \cap C_j)} x_k \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

είναι διαφορετική από τη $\mathbf{x}^{(0)}$ ενώ παράλληλα, η $\mathbf{x}^{(0)}$ ικανοποιεί την, $\sum_{k \in (C_h \cap C_j)} x_k \geq 1$. Ας

συμβολίσουμε με $\mathbf{x}^{(0)*}$, τη λύση του $SC_j^{(\pi)+1}$, όπου

$$\mathbf{x}^{(0)*} = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-|C_j|}}),$$

με, $x_{j_{r1}} = 1, x_{j_{r2}} = 1, \dots, x_{j_{rl}} = 1$, όπου $r_i \in \{1, 2, \dots, n - |C_j|\}$, με $1 \leq i \leq l \leq |L_j^{(\pi)}| + 1$.

Ισχύει,

$$\sum_{i=1}^l c_{j_{ri}} x_{j_{ri}} \leq \sum_{i=1}^k c_{j_{mi}} x_{j_{mi}} \quad (3.2.1)$$

Όμως, ισχύει και

$$\sum_{i=1}^k c_{j_{mi}} x_{j_{mi}} \leq \sum_{i=1}^l c_{j_{ri}} x_{j_{ri}} \quad (3.2.2)$$

αφού η $\mathbf{x}^{(0)*}$ είναι λύση και του $SC_j^{(\pi)}$. Άρα από 3.2.1 και 3.2.2 παίρνουμε,

$$\sum_{i=1}^k c_{j_{mi}} x_{j_{mi}} = \sum_{i=1}^l c_{j_{ri}} x_{j_{ri}}$$

το οποίο δείχνει ότι η βέλτιστη λύση του $SC_j^{(\pi)}$ αποτελεί βέλτιστη λύση και του $SC_j^{(\pi)+1}$. ■

Επίσης μπορούμε εύκολα να καταλαβαίνουμε το παραπάνω αν προσέξουμε ότι το σύνολο των εφικτών λύσεων του νέου SCP (με μια συνθήκη παραπάνω) είναι υποσύνολο των εφικτών λύσεων του παλαιού.

Πρόταση 3.2.1.3. Έστω π και σ , δυο διαφορετικές μεταθέσεις των N ε.σ.δ., ενός μονότονου συστήματος. Εάν,

$$L_j^{(\pi)} = L_j^{(\sigma)}, \text{ για κάθε } j=1,2,\dots,N$$

τότε,

$$UB_{FK}^{(\pi)} = UB_{FK}^{(\sigma)}.$$

Τις μεταθέσεις για τις οποίες ισχύει $L_j^{(\pi)} = L_j^{(\sigma)}$, για κάθε $j=1,2,\dots,N$, θα τις καλούμε **ισοδύναμες**.

Απόδειξη Η απόδειξη είναι άμεση αν σκεφτούμε ότι, αν για κάθε $j=1,2,\dots,N$, ισχύει

$$L_j^{(\pi)} = L_j^{(\sigma)}$$

αυτό συνεπάγεται,

$$SC_j^{(\pi)} = SC_j^{(\sigma)}.$$

Άρα και τα δυο SCP θα δίνουν τα ίδια L_j , δηλαδή, ίσα άνω φράγματα (να θυμηθούμε ότι τα $SC_j^{(\pi)}, SC_j^{(\sigma)}$, αφορούν τα C_j και όχι τα M_j - αυτά δηλαδή που κατέχουν τη $j^{\text{η}}$ θέση). ■

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι, στη διαμόρφωση ενός SCP , έστω του $SC_j^{(\pi)}$, ο μοναδικός παράγοντας που παίζει ρόλο, είναι η θέση των ε.σ.δ. που έχουν κοινά στοιχεία με το C_j . Επιπλέον, δεν μας ενδιαφέρει ποια είναι η ακριβής θέση όλων των ε.σ.δ., αλλά μόνο ποιά είναι αριστερά του C_j , δηλαδή η σχετική τους θέση.

Παράδειγμα 3.2.1.5. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα προσπαθήσουμε να βρούμε ποιες διατάξεις, δίνουν σίγουρα το ίδιο άνω φράγμα (ανεξάρτητα από τις τιμές που έχουν οι αξιοπιστίες των μονάδων), δηλαδή, θα αναζητήσουμε τις ισοδύναμες μεταθέσεις. Ας θεωρήσουμε το σύστημα του Παραδείγματος 3.2.1.1. όπου,

$$C_1=\{1,6\}, C_2=\{3,7\}, C_3=\{2,5,7\} \text{ και } C_4=\{2,4,6\}.$$

Βλέπουμε ότι το

$$\begin{aligned} C_1 &\xrightarrow{\text{τομή} \neq \emptyset} C_4, & C_2 &\xrightarrow{\text{τομή} \neq \emptyset} C_3, \\ C_3 &\xrightarrow{\text{τομή} \neq \emptyset} C_2 \text{ και } C_4, & C_4 &\xrightarrow{\text{τομή} \neq \emptyset} C_1 \text{ και } C_3. \end{aligned}$$

Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι,

$$C_1 C_2 C_3 C_4 \xrightarrow{\text{ισοδύναμη με}} \{C_2 C_1 C_3 C_4, C_2 C_3 C_1 C_4\}, C_3 C_2 C_4 C_1 \xrightarrow{\text{ισοδύναμη με}} \{C_3 C_4 C_2 C_1, C_3 C_4 C_1 C_2\},$$

$$C_1C_3C_2C_4 \xrightarrow{\text{ισοδύναμη με}} \{C_3C_1C_2C_4, C_3C_2C_1C_4, C_3C_1C_4C_2, C_1C_3C_4C_2\}$$

$$C_4C_1C_3C_2 \xrightarrow{\text{ισοδύναμη με}} \{C_4C_3C_1C_2, C_4C_3C_2C_1\}, C_1C_2C_4C_3 \xrightarrow{\text{ισοδύναμη με}} \{C_2C_1C_4C_3, C_1C_4C_2C_3\}$$

$$C_4C_1C_2C_3 \xrightarrow{\text{ισοδύναμη με}} \{C_2C_4C_1C_3, C_4C_2C_1C_3, C_4C_2C_3C_1, C_2C_4C_3C_1\}$$

ενώ οι $C_2C_3C_4C_1$ και $C_1C_4C_3C_2$ δεν έχουν ισοδύναμες μεταθέσεις. Αν πάρουμε για παράδειγμα, τις μεταθέσεις $C_1C_2C_3C_4$ και $C_2C_1C_3C_4$, θα έχουμε τα επόμενα SCP

$C_1C_2C_3C_4(\pi)$			$C_2C_1C_3C_4(\pi_1)$		
j	$L_j^{(\pi)}$	$S_j^{(\pi)}$	j	$L_j^{(\pi_1)}$	$S_j^{(\pi_1)}$
1	\emptyset	\emptyset	1	\emptyset	\emptyset
2	\emptyset	\emptyset	2	\emptyset	\emptyset
3	$\{2\}$	$x_3 \geq 1$	3	$\{2\}$	$x_3 \geq 1$
4	$\{1,3\}$	$x_1 \geq 1$ $x_5 + x_7 \geq 1$	4	$\{1,3\}$	$x_1 \geq 1$ $x_5 + x_7 \geq 1$

απ' όπου γίνεται φανερή η ύπαρξη ισοδυναμίας μεταξύ τους. ■

Να σημειώσουμε ότι οι ισοδύναμες μεταθέσεις, «παράγουν» το ίδιο άνω φράγμα, χωρίς να είναι οι μοναδικές με αυτή την ιδιότητα. Αυτό συμβαίνει διότι, ενώ είναι δυνατόν να καταλήξουμε σε διαφορετικά L_j , μπορεί οι τιμές για τις αξιοπιστίες να είναι τέτοιες, που τελικά να πάρουμε το ίδιο φράγμα (οι ισοδύναμες μεταθέσεις δίνουν το ίδιο φράγμα, ανεξάρτητα από τις αξιοπιστίες).

Επομένως, εξετάζοντας όλες τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το $L_j^{(\pi)}$ (για κάθε j), μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων, ποια θα είναι όλα τα διαφορετικά SCP, που θα κληθούμε να λύσουμε. Εάν συμβολίσουμε με T_j το σύνολο,

$$T_j = \{t : C_t \cap C_j \neq \emptyset, t \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{j\}\} \text{ για } j=1, \dots, N,$$

τότε το σύνολο των διαφορετικών $L_j^{(\pi)}$, ταυτίζεται με το δυναμοσύνολο του T_j .

Παράδειγμα 3.2.1.6. Το συνεχόμενο-4-από-τα-7: F , έχει ε.σ.δ. τα $C_1=\{1,2,3,4\}$, $C_2=\{2,3,4,5\}$, $C_3=\{3,4,5,6\}$ και $C_4=\{4,5,6,7\}$. Κάθε ε.σ.δ. έχει τομή διάφορη του κενού με όλα τα υπόλοιπα. Αξίζει να αναφέρουμε ότι, επειδή όλες οι τομές ανάμεσα στα ε.σ.δ. είναι διάφορες του κενού,

έχουμε 24 (=4!) εν δυνάμει διαφορετικά UB_{FK} (δεν υπάρχουν ισοδύναμες διατάξεις). Επομένως παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα (συμβολίζουμε P_{L_j} το $\prod_{i \in L_j} p_i$),

Πίνακας 3.2.2

C_1				C_2			
$L_1^{(\pi)}$	S_1	L_1	P_{L_1}	$L_2^{(\pi)}$	S_2	L_2	P_{L_2}
\emptyset	\emptyset	\emptyset	1	\emptyset	\emptyset	\emptyset	1
{2}	$x_5 \geq 1$	{5}	p_5	{1}	$x_1 \geq 1$	{1}	p_1
{3}	$x_5 + x_6 \geq 1$	{5} ή {6}	p_5 ή p_6	{3}	$x_6 \geq 1$	{6}	p_6
{4}	$x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$	{5} ή {6} ή {7}	p_5 ή p_6 ή p_7	{4}	$x_6 + x_7 \geq 1$	{6} ή {7}	p_6 ή p_7
{2, 3}	$x_5 + x_6 \geq 1$ $x_5 \geq 1$	{5}	p_5	{1,3}	$x_1 \geq 1$ $x_6 \geq 1$	{1,6}	$p_1 p_6$
{2, 4}	$x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$ $x_5 \geq 1$	{5}	p_5	{1,4}	$x_1 \geq 1$, $x_6 + x_7 \geq 1$	{1,6} ή {1,7}	$p_1 p_6$ ή $p_1 p_7$
{3, 4}	$x_5 + x_6 \geq 1$ $x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$	{5} ή {6}	p_5 ή p_6	{3,4}	$x_6 \geq 1$ $x_6 + x_7 \geq 1$	{6}	p_6
{2, 3, 4}	$x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$ $x_5 + x_6 \geq 1$ $x_5 \geq 1$	{5}	p_5	{1,3,4}	$x_1 \geq 1$ $x_6 \geq 1$ $x_6 + x_7 \geq 1$	{1,6}	$p_1 p_6$
C_3				C_4			
$L_3^{(\pi)}$	S_3	L_3	P_{L_3}	$L_4^{(\pi)}$	S_4	L_4	P_{L_4}
\emptyset	\emptyset	\emptyset	1	\emptyset	\emptyset	\emptyset	1
{1}	$x_1 + x_2 \geq 1$	{1} ή {2}	p_1 ή p_2	{1}	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$	{1} ή {2} ή {3}	p_1 ή p_2 ή p_3
{2}	$x_2 \geq 1$	{2}	p_2	{2}	$x_2 + x_3 \geq 1$	{2} ή {3}	p_2 ή p_3
{4}	$x_7 \geq 1$	{7}	p_7	{3}	$x_3 \geq 1$	{3}	p_3
{1,2}	$x_2 \geq 1$ $x_1 + x_2 \geq 1$	{2}	p_2	{1,2}	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$ $x_2 + x_3 \geq 1$	{2} ή {3}	p_2 ή p_3
{1,4}	$x_1 + x_2 \geq 1$ $x_7 \geq 1$	{7,1} ή {7,2}	$p_1 p_7$ ή $p_2 p_7$	{1,3}	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$ $x_3 \geq 1$	{3}	p_3
{2,4}	$x_2 \geq 1$ $x_7 \geq 1$	{2,7}	$p_2 p_7$	{2,3}	$x_2 + x_3 \geq 1$ $x_3 \geq 1$	{3}	p_3
{1,2,4}	$x_2 \geq 1$ $x_7 \geq 1$ $x_1 + x_2 \geq 1$	{2,7}	$p_2 p_7$	{1,2,3}	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$ $x_3 \geq 1$ $x_2 + x_3 \geq 1$	{3}	p_3

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε όλες τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το P_{L_j} , για κάθε j . Η μέγιστη τιμή των P_{L_j} είναι η μονάδα, που όμως για να πάρουν ταυτόχρονα όλα την τιμή ένα (δεδομένου ότι οι αξιοπιστιες των μονάδων είναι διάφορες της μονάδος), πρέπει όλα τα ε.σ.δ. να είναι ξένα μεταξύ τους, κάτι που δεν συμβαίνει συχνά (στην περίπτωση αυτή το άνω φράγμα θα ταυτίζεται με την R). Έτσι, αυτό που εμείς ψάχνουμε, είναι οι μέγιστες «εφικτές» τιμές των P_{L_j} , εννοώντας αυτές που μπορούν να δοθούν, μέσα από μια διάταξη. Στο παραπάνω παράδειγμα, κάθε P_{L_j} μπορούσε να πάρει τιμές με 8 διαφορετικούς τρόπους, αλλά από τις 8^4 τετράδες της μορφής,

$$\{P_{L_1}, P_{L_2}, P_{L_3}, P_{L_4}\}$$

μόνο οι $4!$ είναι εφικτές (αφού τόσες είναι όλες οι δυνατές μεταθέσεις των 4 ε.σ.δ.).

Παράδειγμα 3.2.1.7. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι το σύστημα του Παραδείγματος 3.2.1.1. όπου,

$$C_1 = \{1,6\}, C_2 = \{3,7\}, C_3 = \{2,5,7\} \text{ και } C_4 = \{2,4,6\}.$$

Εύκολα μπορούμε να εξάγουμε, τον παρακάτω πίνακα

Πίνακας 3.2.3

	$L_j^{(\pi)}$	$S_j^{(\pi)}$	L_j	P_{L_j}	$P_{L_j} (iid)$
C_1	\emptyset	\emptyset	\emptyset	1	1
	$\{4\}$	$x_2 + x_4 \geq 1$	$\{2\}$ ή $\{4\}$	p_2 ή p_4	p
C_2	\emptyset	\emptyset	\emptyset	1	1
	$\{3\}$	$x_2 + x_5 \geq 1$	$\{2\}$ ή $\{5\}$	p_2 ή p_5	p
C_3	\emptyset	\emptyset	\emptyset	1	1
	$\{2\}$	$x_3 \geq 1$	$\{3\}$	p_3	p
	$\{4\}$	$x_4 + x_6 \geq 1$	$\{4\}$ ή $\{6\}$	p_4 ή p_6	p
	$\{2,4\}$	$x_3 \geq 1$ $x_4 + x_6 \geq 1$	$\{3,4\}$ ή $\{3,6\}$	$p_3 p_4$ ή $p_3 p_6$	p^2

	$L_j^{(\pi)}$	$S_j^{(\pi)}$	L_j	P_{L_j}	$P_{L_j} (iid)$
C_4	\emptyset	\emptyset	\emptyset	1	1
	$\{1\}$	$x_1 \geq 1$	$\{1\}$	p_1	p
	$\{3\}$	$x_5 + x_7 \geq 1$	$\{5\}$ ή $\{7\}$	p_5 ή p_7	p
	$\{1,3\}$	$x_1 \geq 1$ $x_5 + x_7 \geq 1$	$\{1,5\}$ ή $\{1,7\}$	$p_1 p_5$ ή $p_1 p_7$	p^2

Όπως ξέρουμε το UB_{FK} δίδεται από τη σχέση (μόνο για τη διάταξη $C_1 C_2 C_3 C_4$),

$$UB_{FK} = \prod_{j=1}^4 \left[1 - \left(\prod_{i \in L_j} p_i \right) \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right] = \prod_{j=1}^4 \left[1 - P_{L_j} \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right],$$

όπου το P_{L_j} εξαρτάται από τη θέση του C_j , ενώ το γινόμενο $\prod_{i \in C_j} (1 - p_i)$, όχι. Έτσι, για *iid*

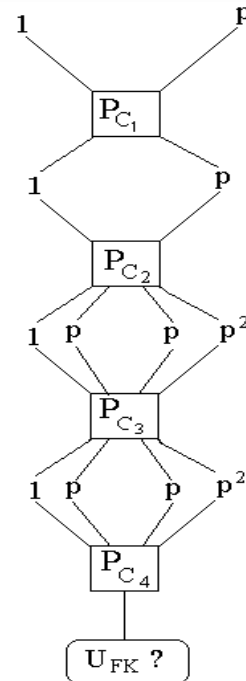
μονάδες, θα έχουμε

$$P_{L_1} \in \{1, p\}, P_{L_2} \in \{1, p\}, P_{L_3} \in \{1, p, p^2\} \text{ και } P_{L_4} \in \{1, p, p^2\}.$$

Ακόμη, όλα τα πιθανά φράγματα, μπορούν να αναπαρασταθούν σαν «διαδρομές» του διπλανού σχήματος ($P_{C_j} = \prod_{i \in C_j} (1 - p_i)$, $j=1,2,3,4$). Το ερώτημα λοιπόν που γεννάται είναι, ποιες απ' όλες τις «διαδρομές» είναι εφικτά φράγματα, και ποια από τις εφικτές διαδρομές δίνει το ελάχιστο UB_{FK} . Εξετάζοντας λοιπόν το σύστημα βλέπουμε ότι η μικρότερη τιμή του γινομένου,

$$\prod_{j=1}^4 [1 - P_{L_j} P_{C_j}]$$

επιτυγχάνεται για τη «διαδρομή», $P_{L_1} = P_{L_2} = P_{L_3} = P_{L_4} = 1$, που όμως σίγουρα δεν είναι εφικτή λύση (γιατί τότε θα έπρεπε τα ε.σ.δ. να είναι ξένα ανά δυο). Στη συνέχεια πηγαίνουμε στην αμέσως μεγαλύτερη τιμή και εξετάζουμε εάν υπάρχει διάταξη που να την παράγει, κ.ο.κ. Μ' αυτή τη διαδικασία, στην *iid* περίπτωση,



το ελάχιστο εφικτό UB_{FK} δίνεται για,

$$P_{L_1} = P_{L_2} = 1, P_{L_3} = p, P_{L_4} = p^2$$

με διάταξη,

$$C_2 C_1 C_3 C_4$$

(ασφαλώς και οι ισοδύναμες μ' αυτή $\{C_1 C_2 C_3 C_4, C_2 C_3 C_1 C_4\}$, δίνουν το ίδιο φράγμα και όχι μόνο). ■

Για μικρά συστήματα (όπως το παραπάνω), τόσο ο έλεγχος για το αν μια «διαδρομή» είναι εφικτή λύση, όσο και η μετάβαση από μια τιμή της παράστασης $\prod_{j=1}^4 [1 - P_{L_j} P_{C_j}]$, στην αμέσως μεγαλύτερη, γίνεται με σχετικά εύκολο τρόπο. Προκειμένου να αντεπεξέλθουμε και στις υπολογιστικές απαιτήσεις των μεγάλων συστημάτων, πρέπει να εισάγουμε μια διαδικασία με την οποία να ελέγχουμε γρήγορα κάθε «διαδρομή», για το αν οδηγεί σε εφικτό φράγμα και επιπλέον, ένα αλγόριθμο που να μας οδηγεί στη βέλτιστη λύση, ή τουλάχιστον να την προσεγγίζει ικανοποιητικά (γενικώς το πρόβλημα είναι *NP-Complete*).

3.2.2 Έλεγχος διαδρόμων, με χρήση πινάκων

Όπως αναφέραμε ο έλεγχος για το αν μια «διαδρομή» (έστω $P_{L_1} = p_1, P_{L_2} = p_2, \dots, P_{L_N} = p_N$) είναι εφικτή λύση (δηλαδή υπάρχει διάταξη που να δίνει τα συγκεκριμένα P_{L_i}) ή όχι, είναι μια διαδικασία πολύ δύσκολη, ειδικά για μεγάλα συστήματα. Προκειμένου να βρεθεί ένας εύχρηστος τρόπος εύχρηστος, θα χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα διανύσματα, τα οποία θα χαρακτηρίζουν κάθε μια από τις διαφορετικές τιμές, ενός $L_j^{(\pi)}$ ($j=1, \dots, N$).

Όπως γνωρίζουμε, το $L_j^{(\pi)}$ (για οποιοδήποτε j) μπορεί να είναι κάποιο από τα $|T_j|$ διαφορετικά υποσύνολα (όπου $T_j = \{t : C_t \cap C_j \neq \emptyset, t \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{j\}\}$). Σε κάθε μια από τις τιμές αυτές (τις $L_{jz}^{(\pi)}$, $z=1, \dots, |T_j|$) αντιστοιχούμε ένα διάνυσμα,

$$Y_{jz} = (y_{jz1}, y_{jz2}, \dots, y_{jzN}), \text{ με } j=1, 2, \dots, N, z=1, \dots, |T_j|,$$

με τιμές $y_{jzw} \in \{1, 0, -1\}$, ($w=1, \dots, N$) οι οποίες ορίζονται ως εξής,

$$y_{jzw} = \begin{cases} 1, & \text{όταν το } w \in L_j^{(\pi)}, \\ -1, & \text{όταν το } w \notin L_j^{(\pi)} \text{ ενώ } w \in T_j, w=1, \dots, N. \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

Παράδειγμα 3.2.2.1. Γνωρίζουμε ότι για τη γέφυρα ισχύει,

$$C_1=\{1,4\}, C_2=\{2,5\}, C_3=\{1,3,5\}, C_4=\{2,3,4\}$$

και,

$$C_1 \xrightarrow{\text{τομή} \neq \emptyset} \begin{cases} C_3 \\ C_4 \end{cases}, \quad C_2 \xrightarrow{\text{τομή} \neq \emptyset} \begin{cases} C_3 \\ C_4 \end{cases}, \quad C_3 \xrightarrow{\text{τομή} \neq \emptyset} \begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ C_4 \end{cases} \quad \text{και} \quad C_4 \xrightarrow{\text{τομή} \neq \emptyset} \begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{cases}$$

Στον επόμενο πίνακα δίδονται όλα τα διανύσματα Y_{jz} που προκύπτουν από το συγκεκριμένο πρόβλημα

Πίνακας 3.2.4

z	$L_{1z}^{(\pi)}$	$S_{1z}^{(\pi)}$	Y_{1z}	$P_{L_{1z}}$	$L_{2z}^{(\pi)}$	$S_{2z}^{(\pi)}$	Y_{2z}	$P_{L_{2z}}$
1	\emptyset	\emptyset	(0,0,-1,-1)	1	\emptyset	\emptyset	(0,0,-1,-1)	1
2	{3}	$x_5+x_3 \geq 1$	(0,0,1,-1)	p_5 ή p_3	{3}	$x_1+x_3 \geq 1$	(0,0,1,-1)	p_1 ή p_3
3	{4}	$x_3+x_4 \geq 1$	(0,0,-1,1)	p_3 ή p_4	{4}	$x_2+x_3 \geq 1$	(0,0,-1,1)	p_2 ή p_3
4	{3,4}	$x_5+x_3 \geq 1$ $x_3+x_4 \geq 1$	(0,0,1,1)	p_3	{3,4}	$x_1+x_3 \geq 1$ $x_2+x_3 \geq 1$	(0,0,1,1)	p_3

z	$L_{3z}^{(\pi)}$	$S_{3z}^{(\pi)}$	Y_{3z}	$P_{L_{3z}}$	$L_{4z}^{(\pi)}$	$S_{4z}^{(\pi)}$	Y_{4z}	$P_{L_{4z}}$
1	\emptyset	\emptyset	(-1,-1,0,-1)	1	\emptyset	\emptyset	(-1,-1,-1,0)	1
2	{1}	$x_2 \geq 1$	(1,-1,0,-1)	p_2	{1}	$x_1 \geq 1$	(1,-1,-1,0)	p_1
3	{2}	$x_4 \geq 1$	(-1,1,0,-1)	p_4	{2}	$x_5 \geq 1$	(-1,1,-1,0)	p_5
4	{4}	$x_2+x_4 \geq 1$	(-1,-1,0,1)	p_2 ή p_3	{3}	$x_1+x_5 \geq 1$	(-1,-1,1,0)	p_1 ή p_5
5	{1,2}	$x_2 \geq 1$ $x_4 \geq 1$	(1,1,0,-1)	$p_2 p_4$	{1,2}	$x_1 \geq 1$ $x_5 \geq 1$	(1,1,-1,0)	$p_1 p_5$
6	{1,4}	$x_4+x_2 \geq 1$ $x_2 \geq 1$	(1,-1,0,1)	p_2	{1,3}	$x_1+x_5 \geq 1$ $x_1 \geq 1$	(1,-1,1,0)	p_1
7	{2,4}	$x_4 \geq 1$ $x_4+x_2 \geq 1$	(-1,1,0,1)	p_4	{2,3}	$x_1+x_5 \geq 1$ $x_1 \geq 1$	(-1,1,1,0)	p_1
8	{1,2,4}	$x_2 \geq 1$ $x_4 \geq 1$ $x_4+x_2 \geq 1$	(1,1,0,1)	$p_2 p_4$	{1,2,3}	$x_1 \geq 1$ $x_5 \geq 1$ $x_1+x_5 \geq 1$	(1,1,1,0)	$p_1 p_5$

Αφού ορίσουμε τα διανύσματα Y_{jz} , για κάθε j , μπορούμε για οποιαδήποτε «διαδρομή», να ελέγξουμε άμεσα, εάν είναι εφικτή λύση. Η διαδικασία που θα ακολουθούμε είναι η εξής:

3.2 Εύρεση των βέλτιστων ΤΠΦ

- Έστω ότι θέλουμε να εξετάσουμε εάν τα,

$$P_{L_1} = P_{L_1Z_1}, P_{L_2} = P_{L_2Z_2}, \dots, P_{L_N} = P_{L_NZ_N},$$

για κάποια τυχαία $P_{L_j Z_j}$ (όπου $z_j \in [1, |T_j|]$). Σχηματίζουμε τον πίνακα διάστασης $N \times N$,

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{1Z_1} \\ Y_{2Z_2} \\ \vdots \\ Y_{NZ_N} \end{bmatrix},$$

του οποίου η πρώτη γραμμή αποτελείται από το διάνυσμα Y_{1Z_1} , που αντιστοιχεί στην περίπτωση $P_{L_1} = p_1$ και όμοια για τις υπόλοιπες N γραμμές του (δηλαδή ο πίνακας Y έχει σαν γραμμές τα διανύσματα που αντιστοιχούν στη «διαδρομή», $P_{L_1} = P_{L_1Z_1}, P_{L_2} = P_{L_2Z_2}, \dots, P_{L_N} = P_{L_NZ_N}$).

Παράδειγμα 3.2.2.2. Έστω ότι στο σύστημα της γέφυρας, θέλουμε να εξετάσουμε εάν η «διαδρομή» $\{P_{L_{13}}, P_{L_{24}}, P_{L_{32}}, P_{L_{45}}\}$, είναι εφικτή λύση.

Πίνακας 3.2.5

z	$L_{1z}^{(\pi)}$	$S_{1z}^{(\pi)}$	Y_{1z}	$P_{L_{1z}}$	$L_{2z}^{(\pi)}$	$S_{2z}^{(\pi)}$	Y_{2z}	$P_{L_{2z}}$
1	\emptyset	\emptyset	(0,0,-1,-1)	1	\emptyset	\emptyset	(0,0,-1,-1)	1
2	{3}	$x_5+x_3 \geq 1$	(0,0,1,-1)	p_5 ή p_3	{3}	$x_1+x_3 \geq 1$	(0,0,1,-1)	p_1 ή p_3
3	{4}	$x_3+x_4 \geq 1$	(0,0,-1,1)	p_3 ή p_4	{4}	$x_2+x_3 \geq 1$	(0,0,-1,1)	p_2 ή p_3
4	{3,4}	$x_5+x_3 \geq 1$ $x_3+x_4 \geq 1$	(0,0,1,1)	p_3	{3,4}	$x_1+x_3 \geq 1$ $x_2+x_3 \geq 1$	(0,0,1,1)	p_3
z	$L_{3z}^{(\pi)}$	$S_{3z}^{(\pi)}$	Y_{3z}	$P_{L_{3z}}$	$L_{4z}^{(\pi)}$	$S_{4z}^{(\pi)}$	Y_{4z}	$P_{L_{4z}}$
1	\emptyset	\emptyset	(-1,-1,0,-1)	1	\emptyset	\emptyset	(-1,-1,-1,0)	1
2	{1}	$x_2 \geq 1$	(1,-1,0,-1)	p_2	{1}	$x_1 \geq 1$	(1,-1,-1,0)	p_1
3	{2}	$x_4 \geq 1$	(-1,1,0,-1)	p_4	{2}	$x_5 \geq 1$	(-1,1,-1,0)	p_5
4	{4}	$x_2+x_4 \geq 1$	(-1,-1,0,1)	p_2 ή p_3	{3}	$x_1+x_5 \geq 1$	(-1,-1,1,0)	p_1 ή p_5
5	{1,2}	$x_2 \geq 1$ $x_4 \geq 1$	(1,1,0,-1)	$p_2 p_4$	{1,2}	$x_1 \geq 1$ $x_5 \geq 1$	(1,1,-1,0)	$p_1 p_5$
6	{1,4}	$x_4+x_2 \geq 1$ $x_2 \geq 1$	(1,-1,0,1)	p_2	{1,3}	$x_1+x_5 \geq 1$ $x_1 \geq 1$	(1,-1,1,0)	p_1
7	{2,4}	$x_4 \geq 1$ $x_4+x_2 \geq 1$	(-1,1,0,1)	p_4	{2,3}	$x_1+x_5 \geq 1$ $x_1 \geq 1$	(-1,1,1,0)	p_1
8	{1,2,4}	$x_2 \geq 1$ $x_4 \geq 1$ $x_4+x_2 \geq 1$	(1,1,0,1)	$p_2 p_4$	{1,2,3}	$x_1 \geq 1$ $x_5 \geq 1$ $x_1+x_5 \geq 1$	(1,1,1,0)	$p_1 p_5$

Ο πίνακας $Y_{4 \times 4}$ που θα δημιουργήσουμε είναι ο,

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αφού κατασκευάσουμε τον πίνακα Y , θα εξετάσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις,

1^η. Εάν για τον Y ισχύει,

$$Y^T + Y \neq \mathbf{0}$$

(εάν δηλαδή δεν είναι αντισυμμετρικός) τότε η συγκεκριμένη «διαδρομή» δεν είναι εφικτή λύση.

2^η. Εάν για τον $Y=(y_{ij})$ ισχύει,

$$Y^T + Y = \mathbf{0} \quad (y_{ij} = 1 \Leftrightarrow y_{ji} = -1 \text{ και } y_{ij} = 0 \Leftrightarrow y_{ji} = 0)$$

και για όλα τα $i \in \{1, \dots, N\}$ ισχύει,

$$y_{rs} \neq 1, \text{ για κάθε } (r, s) \in K_+^i \times K_-^i,$$

όπου

$$K_+^i = \{s : y_{is} = 1, s \in \{1, 2, \dots, N\}\} \quad K_-^i = \{s : y_{is} = -1, s \in \{1, 2, \dots, N\}\}$$

(για $i=1, \dots, N$) τότε η «διαδρομή» είναι εφικτή λύση.

Παράδειγμα 3.2.2.3. Ας πάρουμε πάλι τη γέφυρα και τον πίνακα,

Πίνακας 3.2.6

z	Y_{1z}	P_{L1Z}	Y_{2z}	P_{L2Z}
1	(0,0,-1,-1)	1	(0,0,-1,-1)	1
2	(0,0,1,-1)	p_5 ή p_3	(0,0,1,-1)	p_1 ή p_3
3	(0,0,-1,1)	p_3 ή p_4	(0,0,-1,1)	p_2 ή p_3
4	(0,0,1,1)	p_3	(0,0,1,1)	p_3
z	Y_{3z}	P_{L3Z}	Y_{4z}	P_{L4Z}
1	(-1,-1,0,-1)	1	(-1,-1,-1,0)	1
2	(1,-1,0,-1)	p_2	(1,-1,-1,0)	p_1
3	(-1,1,0,-1)	p_4	(-1,1,-1,0)	p_5
4	(-1,-1,0,1)	p_2 ή p_3	(-1,-1,1,0)	p_1 ή p_5
5	(1,1,0,-1)	$p_2 p_4$	(1,1,-1,0)	$p_1 p_5$
6	(1,-1,0,1)	p_2	(1,-1,1,0)	p_1
7	(-1,1,0,1)	p_4	(-1,1,1,0)	p_1

8	(1,1,0,1)	$p_2 p_4$	(1,1,1,0)	$p_1 p_5$
---	-----------	-----------	-----------	-----------

Θέλοντας να ελέγξουμε τη «διαδρομή» $\{P_{L_{13}}, P_{L_{24}}, P_{L_{32}}, P_{L_{45}}\}$, θεωρούμε τον πίνακα \mathbf{Y} , οποίος είναι ίσος με,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

και παρατηρούμε ότι ισχύει, $\mathbf{Y}^T + \mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$. Άρα δεν είναι εφικτή λύση. Για τη «διαδρομή» $\{P_{L_{12}}, P_{L_{22}}, P_{L_{35}}, P_{L_{43}}\}$, έχουμε

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ και πάλι ισχύει $\mathbf{Y}^T + \mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$ (ή ισοδύναμα δεν είναι εφικτή λύση). Να παρατηρήσουμε ότι το P_{L_1} για να πάρει την τιμή p_5 ή p_3 , πρέπει να έχει αριστερά του (σε μια συγκεκριμένη διάταξη) το C_3 . Όμως για να πάρει και το P_{L_3} , ταυτόχρονα την τιμή $p_2 p_4$, πρέπει να έχει αριστερά του (στην ίδια διάταξη) το C_1 , κάτι που όμως είναι αδύνατον να συμβαίνει. Για τη «διαδρομή» $\{P_{L_{11}}, P_{L_{23}}, P_{L_{38}}, P_{L_{42}}\}$, είναι

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

με $\mathbf{Y}^T + \mathbf{Y} = \mathbf{0}$. Τα σύνολα K_+^i, K_-^i για $i=1, \dots, 4$ είναι,

$$K_+^1 = \emptyset, \quad K_-^1 = \{3, 4\},$$

$$K_+^2 = \{4\}, \quad K_-^2 = \{3\},$$

$$K_+^3 = \{1, 2, 4\}, \quad K_-^3 = \emptyset,$$

$$K_+^4 = \{1\}, \quad K_-^4 = \{2, 3\},$$

και οι συνθήκες

$$y_{rs} \neq 1, \text{ για κάθε } (r, s) \in K_+^i \times K_-^i \text{ και για κάθε } i \in \{1, \dots, 4\},$$

ικανοποιούνται. Άρα η συγκεκριμένη διαδρομή είναι εφικτή λύση, και η διάταξη που δίνει τις παραπάνω τιμές για τα P_{Li} είναι η,

$$C_1 C_4 C_2 C_3$$

(έχουμε δει ότι μπορεί να υπάρχουν και παραπάνω από μια διατάξεις με τις συγκεκριμένες τιμές για τα P_{Li}). ■

Για τους πίνακες Y , που δημιουργούνται με τη διαδικασία που έχουμε περιγράψει, ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις, οι οποίες αποδεικνύονται στο Παράρτημα 3.2.1.1.:

Πρόταση 3.2.2.1. Κάθε μετάθεση των ε.σ.δ., δημιουργεί-παράγει ένα μοναδικό πίνακα $Y=(y_{ij})$, με τις παρακάτω δυο ιδιότητες,

1. $Y^T + Y = 0$,
2. $y_{rs} \neq 1$, για κάθε $(r, s) \in K_+^i \times K_-^i$ και για κάθε $i \in \{1, \dots, N\}$.

Πρόταση 3.2.2.2. Κάθε πίνακας Y , με τις δυο ιδιότητες της Πρότασης 3.2.1.1, δημιουργεί μια τουλάχιστον μετάθεση.

Πρόταση 3.2.2.3. Δυο διατάξεις, Δ_1 και Δ_2 , έχουν τον ίδιο πίνακα Y , αν και μόνο αν είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 3.2.2.4. Θα χρησιμοποιήσουμε το σύστημα συνεχόμενο-4-από-τα-7: F . Τα ε.σ.δ. του συστήματος είναι,

$$C_1 = \{1, 2, 3, 4\}, C_2 = \{2, 3, 4, 5\}, C_3 = \{3, 4, 5, 6\} \text{ και } C_4 = \{4, 5, 6, 7\}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, επειδή όλες οι τομές ανάμεσα στα ε.σ.δ., είναι διάφορες του κενού, έχουμε $24(=4!)$ εν δυνάμει διαφορετικά UB_{FK} (δεν υπάρχουν ισοδύναμες διατάξεις). Επομένως παίρνουμε τον Πίνακα 3.2.7.

Πίνακας 3.2.7

z	$L_{1z}^{(\pi)}$	$S_{1z}^{(\pi)}$	$P_{L_{1Z}}$	$L_{2z}^{(\pi)}$	$S_{2z}^{(\pi)}$	$P_{L_{2Z}}$
1	\emptyset	\emptyset	1	\emptyset	\emptyset	1
2	{2}	$x_5 \geq 1$	p_5	{1}	$x_1 \geq 1$	p_1
3	{3}	$x_5 + x_6 \geq 1$	p_5 ή p_6	{3}	$x_6 \geq 1$	p_6
4	{4}	$x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$	p_5 ή p_6 ή p_7	{4}	$x_6 + x_7 \geq 1$	p_6 ή p_7
5	{2,3}	$x_5 + x_6 \geq 1$ $x_5 \geq 1$	p_5	{1,3}	$x_1 \geq 1$ $x_6 \geq 1$	$p_1 p_6$
6	{2,4}	$x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$ $x_5 \geq 1$	p_5	{1,4}	$x_1 \geq 1$, $x_6 + x_7 \geq 1$	$p_1 p_6$ ή $p_1 p_7$
7	{3,4}	$x_5 + x_6 \geq 1$ $x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$	p_5 ή p_6	{3,4}	$x_6 \geq 1$ $x_6 + x_7 \geq 1$	p_6
8	{2,3,4}	$x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$ $x_5 + x_6 \geq 1$ $x_5 \geq 1$	p_5	{1,3,4}	$x_1 \geq 1$ $x_6 \geq 1$ $x_6 + x_7 \geq 1$	$p_1 p_6$
z	$L_{3z}^{(\pi)}$	$S_{3z}^{(\pi)}$	$P_{L_{3Z}}$	$L_{4z}^{(\pi)}$	$S_{4z}^{(\pi)}$	$P_{L_{4Z}}$
1	\emptyset	\emptyset	1	\emptyset	\emptyset	1
2	{1}	$x_1 + x_2 \geq 1$	p_1 ή p_2	{1}	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$	p_1 ή p_2 ή p_3
3	{2}	$x_2 \geq 1$	p_2	{2}	$x_2 + x_3 \geq 1$	p_2 ή p_3
4	{4}	$x_7 \geq 1$	p_7	{3}	$x_3 \geq 1$	p_3
5	{1,2}	$x_2 \geq 1$ $x_1 + x_2 \geq 1$	p_2	{1,2}	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$ $x_2 + x_3 \geq 1$	p_2 ή p_3
6	{1,4}	$x_1 + x_2 \geq 1$ $x_7 \geq 1$	$p_1 p_7$ ή $p_2 p_7$	{1,3}	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$ $x_3 \geq 1$	p_3
7	{2,4}	$x_2 \geq 1$ $x_7 \geq 1$	$p_2 p_7$	{2,3}	$x_2 + x_3 \geq 1$ $x_3 \geq 1$	p_3
8	{1,2,4}	$x_2 \geq 1$ $x_7 \geq 1$ $x_1 + x_2 \geq 1$	$p_2 p_7$	{1,2,3}	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$ $x_3 \geq 1$ $x_2 + x_3 \geq 1$	p_3

Κάνοντας χρήση των διανυσμάτων Y_{iz} , βρίσκουμε τα επόμενα αποτελέσματα

Πίνακας 3.2.8

z	$L_{1z}^{(\pi)}$	$P_{L_{1Z}}$	Y_{1z}	$L_{2z}^{(\pi)}$	$P_{L_{2Z}}$	Y_{2z}
1	\emptyset	1	(0,-1,-1,-1)	\emptyset	1	(-1,0,-1,-1)
2	{2}	p_5	(0,1,-1,-1)	{1}	p_1	(1,0,-1,-1)
3	{3}	p_5 ή p_6	(0,-1,1,-1)	{3}	p_6	(-1,0,1,-1)
4	{4}	p_5 ή p_6 ή p_7	(0,-1,-1,1)	{4}	p_6 ή p_7	(-1,0,-1,1)
5	{2,3}	p_5	(0,1,1,-1)	{1,3}	$p_1 p_6$	(1,0,1,-1)
6	{2,4}	p_5	(0,1,-1,1)	{1,4}	$p_1 p_6$ ή $p_1 p_7$	(1,0,-1,1)
7	{3,4}	p_5 ή p_6	(0,-1,1,1)	{3,4}	p_6	(-1,0,1,1)
8	{2,3,4}	p_5	(0,1,1,1)	{1,3,4}	$p_1 p_6$	(1,0,1,1)
z	$L_{3z}^{(\pi)}$	$P_{L_{3Z}}$	Y_{3z}	$L_{4z}^{(\pi)}$	$P_{L_{4Z}}$	Y_{4z}
1	\emptyset	1	(-1,-1,0,-1)	\emptyset	1	(-1,-1,-1,0)
2	{1}	p_1 ή p_2	(1,-1,0,-1)	{1}	p_1 ή p_2 ή p_3	(1,-1,-1,0)
3	{2}	p_2	(-1,1,0,-1)	{2}	p_2 ή p_3	(-1,1,-1,0)
4	{4}	p_7	(-1,-1,0,1)	{3}	p_3	(-1,-1,1,0)
5	{1,2}	p_2	(1,1,0,-1)	{1,2}	p_2 ή p_3	(1,1,-1,0)
6	{1,4}	$p_1 p_7$ ή $p_2 p_7$	(1,-1,0,1)	{1,3}	p_3	(1,-1,1,0)
7	{2,4}	$p_2 p_7$	(-1,1,0,1)	{2,3}	p_3	(-1,1,1,0)
8	{1,2,4}	$p_2 p_7$	(1,1,0,1)	{1,2,3}	p_3	(1,1,1,0)

Έτσι η περίπτωση,

$$\{P_{L_{11}}, P_{L_{21}}, P_{L_{31}}, P_{L_{41}}\}$$

(όπου $P_{L_{11}} = P_{L_{21}} = P_{L_{31}} = P_{L_{41}} = 1$) δημιουργεί τον πίνακα Y , με

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ο οποίος δεν είναι αντισυμμετρικός, που σημαίνει ότι η «διαδρομή» δεν είναι εφικτό φράγμα. Το ίδιο συμβαίνει και όταν,

$$\{P_{L_{12}}, P_{L_{21}}, P_{L_{31}}, P_{L_{41}}\}$$

($P_{L_{12}} = p_5$, $P_{L_{21}} = P_{L_{31}} = P_{L_{41}} = 1$) αφού,

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και $Y^T + Y \neq \mathbf{0}$. Στην *iid* περίπτωση, βρίσκουμε τα επόμενα αποτελέσματα

Πίνακας 3.2.9

$P_{L_{1z}}$	Y_{1z}	$P_{L_{2z}}$	Y_{2z}	$P_{L_{3z}}$	Y_{3z}	$P_{L_{4z}}$	Y_{4z}
1	(0,-1,-1,-1)	1	(-1,0,-1,-1)	1	(-1,-1,0,-1)	1	(-1,-1,-1,0)
p	(0,1,-1,-1)	p	(1,0,-1,-1)	p	(1,-1,0,-1)	p	(1,-1,-1,0)
p	(0,-1,1,-1)	p	(-1,0,1,-1)	p	(-1,1,0,-1)	p	(-1,1,-1,0)
p	(0,-1,-1,1)	p	(-1,0,-1,1)	p	(-1,-1,0,1)	p	(-1,-1,1,0)
p	(0,1,1,-1)	p^2	(1,0,1,-1)	p	(1,1,0,-1)	p	(1,1,-1,0)
p	(0,1,-1,1)	p^2	(1,0,-1,1)	p^2	(1,-1,0,1)	p	(1,-1,1,0)
p	(0,-1,1,1)	p	(-1,0,1,1)	p^2	(-1,1,0,1)	p	(-1,1,1,0)
p	(0,1,1,1)	p^2	(1,0,1,1)	p^2	(1,1,0,1)	p	(1,1,1,0)

Το ελάχιστο εφικτό άνω φράγμα επιτυγχάνεται για,

$$P_{L_2} = 1, P_{L_3} = P_{L_4} = P_{L_1} = p$$

με αντίστοιχα μετάθεση την

$$C_1 C_2 C_3 C_4$$

(και οι διατάξεις: $C_2 C_3 C_4 C_1$, $C_3 C_2 C_4 C_1$, $C_4 C_3 C_2 C_1$ δίνουν επίσης το ίδιο φράγμα). ■

Συνοψίζοντας, τα βήματα τα οποία οδηγούν στο βέλτιστο άνω φράγμα, είναι τα εξής:

- Υπολογίζουμε τα σύνολα T_j , για κάθε $j=1,2, \dots, N$.
- Για κάθε ένα από τα διαφορετικά $L_{jz}^{(\pi)}$, $j=1,2, \dots, N$, $z=1,2, \dots, |T_j|$, λύνουμε το αντίστοιχο SCP.
- Αναζητούμε εκείνη τη «διαδρομή» που δίνει το ελάχιστο άνω φράγμα, ξεκινώντας από την
- περίπτωση όπου $P_{L_{jz}} = 1$, για κάθε j . Εάν αυτή δεν είναι εφικτή λύση (το οποίο ελέγχεται με τη χρήση των πινάκων Y), θεωρούμε την αμέσως μεγαλύτερη (αυτή που δίνει την αμέσως μεγαλύτερη τιμή στο πιθανό άνω φράγμα). Εξετάζουμε πάλι εάν είναι εφικτή λύση ή όχι, και ενεργούμε ανάλογα.

Το πως γίνεται η μετάβαση από μια διαδρομή, σ' αυτή με την αμέσως μεγαλύτερη τιμή, είναι γενικώς μια πολύ δύσκολη διαδικασία. Αυτό που ίσως να βοηθούσε, είναι η αλλαγή στη μορφή του πίνακα που περιέχει τις τιμές $P_{L,jZ}$ και τα αντίστοιχα διανύσματα, Y_{jz} . Δηλαδή, θα ήταν χρήσιμο αν είχαμε διαμόρφωση τον πίνακα έτσι ώστε, για κάθε j οι τιμές $P_{L,jZ}$ να βρίσκονται σε φθίνουσα σειρά. Οπότε ο πίνακας έχει την επόμενη μορφή,

P_{L_1}	Y_1	P_{L_2}	Y_2	P_{L_3}	Y_3	...	P_{L_N}	Y_N
1	Y_{11}	1	Y_{21}	1	Y_{31}	...	1	Y_{41}
$P_{L_{12}}$	Y_{12}	$P_{L_{22}}$	Y_{22}	$P_{L_{32}}$	Y_{32}	...	$P_{L_{N2}}$	Y_{42}
$P_{L_{13}}$	Y_{13}	$P_{L_{23}}$	Y_{23}	$P_{L_{33}}$	Y_{33}	...	$P_{L_{N3}}$	Y_{43}
$P_{L_{14}}$	Y_{14}	$P_{L_{24}}$	Y_{24}	$P_{L_{34}}$	Y_{34}	...	$P_{L_{N4}}$	Y_{44}
...
$P_{L_{1 T_1 }}$	$Y_{1 T_1 }$	$P_{L_{2 T_2 }}$	$Y_{2 T_2 }$	$P_{L_{3 T_3 }}$	$Y_{3 T_3 }$...	$P_{L_{N T_N }}$	$Y_{N T_N }$

όπου για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, ισχύει $p_{ji} \leq p_{j(i+1)}$, με $i \in \{1, 2, \dots, |T_j|\}$. Είναι εύκολο να δείξουμε, ότι εάν βρισκόμαστε σε μια οποιαδήποτε διαδρομή, π.χ. $\{P_{L_{12}}, P_{L_{22}}, P_{L_{31}}, \dots, P_{L_{N2}}\}$, τότε μια από τις,

$$\{ \underline{P_{L_{13}}}, P_{L_{22}}, P_{L_{31}}, \dots, P_{L_{N2}} \}, \{ P_{L_{12}}, \underline{P_{L_{23}}}, P_{L_{31}}, \dots, P_{L_{N2}} \}, \dots, \{ P_{L_{12}}, P_{L_{22}}, P_{L_{31}}, \dots, \underline{P_{L_{N3}}} \}$$

δηλαδή, μια από αυτές που προκύπτουν αν για ένα j , πάρουμε την αμέσως μικρότερη τιμή P_{L_j} , σίγουρα θα είχε μικρότερη τιμή, απ' όλες που προκύπτουν αν για δυο ή παραπάνω j , παίρναμε τις αμέσως μικρότερες τιμές.

Παράδειγμα 3.2.2.5 Ας πάρουμε πάλι το $C_I(4,7:F)$, όταν οι μονάδες είναι *iid* με $p=0.65$. Εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε τον Πίνακα 3.2.10 (Παράδειγμα 3.2.2.4)

Πίνακας 3.2.10

$C_1=\{1,2,3,4\}$		$C_2=\{2,3,4,5\}$		$C_3=\{3,4,5,6\}$		$C_4=\{4,5,6,7\}$	
P_{L_1}	Y_1	P_{L_2}	Y_2	P_{L_3}	Y_3	P_{L_4}	Y_4
1	(0,-1,-1,-1)	1	(-1,0,-1,-1)	1	(-1,-1,0,-1)	1	(-1,-1,-1,0)
p	(0,1,-1,-1)	p	(1,0,-1,-1)	p	(1,-1,0,-1)	p	(1,-1,-1,0)
p	(0,-1,1,-1)	p	(-1,0,1,-1)	p	(-1,1,0,-1)	p	(-1,1,-1,0)
p	(0,-1,-1,1)	p	(-1,0,-1,1)	p	(-1,-1,0,1)	p	(-1,-1,1,0)
p	(0,1,1,-1)	p	(-1,0,1,1)	p	(1,1,0,-1)	p	(1,1,-1,0)
p	(0,1,-1,1)	p^2	(1,0,-1,1)	p^2	(1,-1,0,1)	p	(1,-1,1,0)
p	(0,-1,1,1)	p^2	(1,0,1,-1)	p^2	(-1,1,0,1)	p	(-1,1,1,0)
p	(0,1,1,1)	p^2	(1,0,1,1)	p^2	(1,1,0,1)	p	(1,1,1,0)

Η τιμή της παράστασης(που δεν ξέρουμε ακόμη εάν είναι άνω φράγμα),

$$\prod_{j=1}^4 \left[1 - \left(\prod_{i \in L_j} p_i \right) \prod_{i \in C_j} (1-p_i) \right] = \prod_{j=1}^4 \left[1 - P_{L_j} \prod_{i \in C_j} (1-p_i) \right] = \prod_{j=1}^4 \left[1 - P_{L_j} (1-p)^4 \right], \quad (3.2.2.1)$$

για $P_{L_1}=P_{L_2}=P_{L_3}=P_{L_4}=1$, είναι

$$\prod_{j=1}^4 \left[1 - 1 \cdot (1-p)^4 \right] = 0.9413,$$

που όμως δεν είναι εφικτή λύση, εάν δούμε τον αντίστοιχο πίνακα Y . Η αμέσως μεγαλύτερη τιμή (για την (3.2.2.1))έρχεται για,

$$\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{21}}=1, P_{L_{31}}=1, P_{L_{42}}=p\} \text{ ή } \{P_{L_{11}}=1, P_{L_{21}}=1, P_{L_{32}}=p, P_{L_{41}}=1\} \text{ ή}$$

$$\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{22}}=p, P_{L_{31}}=1, P_{L_{41}}=1\} \text{ ή } \{P_{L_{12}}=p, P_{L_{21}}=1, P_{L_{31}}=1, P_{L_{41}}=1\}$$

και είναι 0.9463. Πάλι, καμία από τις παραπάνω διαδρομές δεν είναι εφικτό φράγμα, βλέποντας τους πίνακες Y , για κάθε περίπτωση.

Επίσης, την ίδια τιμή μπορούν να δώσουν και οι διαδρομές,

$$\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{21}}=1, P_{L_{31}}=1, P_{L_{43}}=p\} \text{ ή } \{P_{L_{11}}=1, P_{L_{21}}=1, P_{L_{33}}=p, P_{L_{41}}=1\} \text{ ή}$$

$$\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{23}}=p, P_{L_{31}}=1, P_{L_{41}}=1\} \text{ ή } \{P_{L_{13}}=p, P_{L_{21}}=1, P_{L_{31}}=1, P_{L_{41}}=1\},$$

όμως καμία δεν είναι εφικτή λύση. Όμοια, οι

$$\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{21}}=1, P_{L_{31}}=1, P_{L_{44}}=p\} \text{ ή } \{P_{L_{11}}=1, P_{L_{21}}=1, P_{L_{34}}=p, P_{L_{41}}=1\} \text{ ή}$$

$$\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{24}}=p, P_{L_{31}}=1, P_{L_{41}}=1\} \text{ ή } \{P_{L_{14}}=p, P_{L_{21}}=1, P_{L_{31}}=1, P_{L_{41}}=1\},$$

και,

$$\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{21}}=1, P_{L_{31}}=1, P_{L_{45}}=p\} \text{ ή } \{P_{L_{11}}=1, P_{L_{21}}=1, P_{L_{35}}=p, P_{L_{41}}=1\} \text{ ή}$$

$$\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{25}}=p, P_{L_{31}}=1, P_{L_{41}}=1\} \text{ ή } \{P_{L_{15}}=p, P_{L_{21}}=1, P_{L_{31}}=1, P_{L_{41}}=1\},$$

δεν είναι εφικτές λύσεις, οπότε η τιμή 0.9463 δεν μπορεί με κανένα τρόπο να αποτελέσει ένα άνω φράγμα.

Η επόμενη μεγαλύτερη τιμή είναι η 0.9496, και επιτυγχάνεται από τις διαδρομές,

$$\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{26}}=p^2, P_{L_{31}}=1, P_{L_{45}}=1\} \text{ ή } \{P_{L_{11}}=1, P_{L_{21}}=1, P_{L_{36}}=p^2, P_{L_{41}}=1\}$$

οι οποίες δεν είναι εφικτές λύσεις. Το επόμενο πιθανό φράγμα, έχει τιμή 0.9514, και «παράγεται» από διαδρομές που αντιστοιχούν σε, μη εφικτές λύσεις (μια από αυτές είναι η $\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{21}}=1, P_{L_{32}}=p, P_{L_{42}}=p\}$). Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι η διαδρομή (όχι μοναδική),

$$\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{22}}=p, P_{L_{35}}=p, P_{L_{48}}=p\}$$

δίνει το ελάχιστο άνω φράγμα, με τιμή 0.9564, ενώ η αντίστοιχη διάταξη των ε.σ.δ. είναι

$$C_1 C_2 C_3 C_4$$

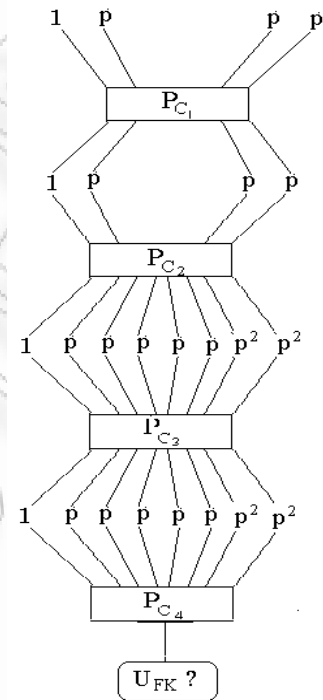
(επίσης και οι διατάξεις, $C_2 C_3 C_4 C_1$, $C_3 C_2 C_4 C_1$, $C_4 C_3 C_2 C_1$ δίνουν το ίδιο φράγμα - χωρίς να είναι ισοδύναμες). Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, επειδή όλα τα ε.σ.δ. είχαν κοινά στοιχεία, κάθε εφικτή λύση δεν θα μπορούσε να δίνει $P_{L_j} = 1$, για παραπάνω από ένα j . ■

Παράδειγμα 3.2.2.6 Γνωρίζουμε για τη γέφυρα ότι,

$$C_1=\{1,2\}, C_2=\{4,5\}, C_3=\{1,3,5\}, C_4=\{2,3,4\},$$

Στην iid περίπτωση ($p=0.6$) έχουμε (Παράδειγμα 3.2.2.3) τα επόμενα αποτελέσματα

Y_1	P_{L_1}	Y_2	P_{L_2}
(0,0,-1,-1)	1	(0,0,-1,-1)	1
(0,0,1,-1)	p	(0,0,1,-1)	p
(0,0,-1,1)	p	(0,0,-1,1)	p
(0,0,1,1)	p	(0,0,1,1)	p
Y_3	P_{L_3}	Y_4	P_{L_4}
(-1,-1,0,-1)	1	(-1,-1,-1,0)	1
(1,-1,0,-1)	p	(1,-1,-1,0)	p
(-1,1,0,-1)	p	(-1,1,-1,0)	p
(-1,-1,0,1)	p	(-1,-1,1,0)	p
(1,-1,0,1)	p	(1,-1,1,0)	p
(-1,1,0,1)	p	(-1,1,1,0)	p
(1,1,0,-1)	p^2	(1,1,-1,0)	p^2
(1,1,0,1)	p^2	(1,1,1,0)	p^2



Επειδή υπάρχουν τομές διάφορες του κενού, η περίπτωση που έχουμε

$$P_{L_1} = P_{L_2} = P_{L_3} = P_{L_4} = 1$$

απορρίπτεται αμέσως. Εξετάζοντας όλες τις δυνατές περιπτώσεις (βήμα-βήμα), έχουμε ότι το μικρότερο άνω φράγμα είναι 0.6734 (η πραγματική τιμή της αξιοπιστίας είναι ίση με $R=0.6595$) και επιτυγχάνεται με

$$P_{L_1} = P_{L_2} = 1, P_{L_3} = P_{L_4} = p^2$$

και αντίστοιχη μετάθεση την

$$C_1 C_2 C_3 C_4$$

(αλλά και η $C_1 C_2 C_4 C_3$ δίνει το ίδιο). ■

Προσέγγιση του βέλτιστου άνω φράγματος

Η διαδικασία που έχει περιγραφεί, για την εύρεση του μικρότερου άνω φράγματος, είναι αρκετά πολύπλοκη, όπως φάνηκε και μέσα από τα δυο τελευταία παραδείγματα. Δυστυχώς, ακόμη δεν έχει εντοπιστεί ένας πιο απλός αλγόριθμος, και αυτό που θα προσπαθήσουμε εδώ να κάνουμε, είναι να περιγράψουμε ένα τρόπο που θα μας επιτρέψει να προσεγγίσουμε το βέλτιστο άνω φράγμα.

Έστω ένα σύστημα με ε.σ.δ. $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_N\}$, και ας χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό,

$$P_{C_j} = \prod_{i \in C_j} (1 - p_i), \quad j=1,2,\dots,N.$$

- Τότε πρώτο στη διάταξη θα μπαίνει το ε.σ.δ. με το μέγιστο P_{C_j} , δηλαδή,

$$M_1 = C_j, \text{ όπου } P_{C_j} = \max\{P_{C_1}, P_{C_2}, P_{C_3}, \dots, P_{C_N}\}.$$

- Δεύτερο θα είναι το ε.σ.δ. C_m , για το οποίο ισχύει,

$$P_{L_m}^{(j)} P_{C_m} = \max\{P_{L_1}^{(j)} P_{C_1}, P_{L_2}^{(j)} P_{C_2}, \dots, P_{L_N}^{(j)} P_{C_N}\},$$

όπου το $P_{L_i}^{(j)}$, $i \in \{1,2,\dots,N\} \setminus j$, είναι το μεγαλύτερο P_{L_i} που υπάρχει για κάθε i , με μόνο το C_j , αριστερά του C_i (σ' όλες τις δυνατές μεταθέσεις). Σίγουρα, εάν το C_j έχει τομή το κενό σύνολο με κάποιο ε.σ.δ., έστω το C_n , τότε το $P_{L_n}^{(j)}$ θα είναι ίσο με τη μονάδα.

- Όμοια, τρίτο θα είναι το ε.σ.δ. C_v , όπου,

$$P_{L_v}^{(jm)} P_{C_v} = \max\{P_{L_1}^{(jm)} P_{C_1}, P_{L_2}^{(jm)} P_{C_2}, \dots, P_{L_N}^{(jm)} P_{C_N}\},$$

όπου το $P_{L_i}^{(jm)}$, $i \in \{1,2,\dots,N\} \setminus \{j,m\}$, είναι το μεγαλύτερο P_{L_i} που υπάρχει για κάθε i , με μόνο το C_j και το C_m , αριστερά του C_i (σε όλες τις δυνατές μεταθέσεις). Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται έως ότου, κάθε ε.σ.δ. να πάρει μια θέση (δηλαδή θα χρειαστούν $N-1$ βήματα).

- Τέλος εάν σε κάποιο βήμα, υπάρξουν δυο ή περισσότερα ε.σ.δ. με ίσα γινόμενα (όπως αυτά που είδαμε παραπάνω), τότε η ίδια διαδικασία πρέπει να γίνει, για κάθε μια από τις διαφορετικές περιπτώσεις (εάν για παράδειγμα δυο ε.σ.δ., τα C_1 και C_2 , έχουν ίσα γινόμενα, στο βήμα που καθορίζει τη τρίτη θέση, τότε θα πρέπει η ίδια διαδικασία να επαναληφθεί δυο φορές-μια με το C_1 τρίτο και μια με το C_2).

Παράδειγμα 3.2.2.7. Θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε πως δουλεύει ο αλγόριθμος που μόλις περιγράψαμε, για τα συστήματα που μελετήσαμε στα Παραδείγματα 3.2.2.5 και 3.2.2.6.

Αρχικά για το $C(4,7:F)$, όταν οι μονάδες είναι *iid*, έχουμε

$$P_{C_j} = \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) = (1 - p)^4, \quad j=1,2,\dots,N,$$

και επομένως πρώτο μπορεί να μπει οποιοδήποτε από τα 4 ε.σ.δ.

- Ας ξεκινήσουμε με την περίπτωση όπου πρώτο είναι το C_1 . Παρατηρούμε ότι,

$$P_{L_2}^{(1)} P_{C_2} = P_{L_3}^{(1)} P_{C_3} = P_{L_4}^{(1)} P_{C_4} = p (1-p)^4$$

οπότε δεύτερο μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα $C_i, i=2,3,4$.

Αν πάρουμε δεύτερο το C_2 , θα έχουμε,

$$P_{L_3}^{(12)} P_{C_3} = P_{L_4}^{(12)} P_{C_4} = p (1-p)^4$$

και τρίτο θα είναι είτε το C_3 είτε το C_4 . Εάν θεωρηθεί τρίτο το C_3 τότε θα καταλήξουμε πάλι στη διάταξη, $C_1 C_2 C_3 C_4$ με $\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{22}}=p, P_{L_{35}}=p, P_{L_{48}}=p\}$ (η οποία μας δίνει το μικρότερο άνω φράγμα, με τιμή 0.9564, για $p=0.65$). Εάν θεωρηθεί τρίτο το C_4 , τότε θα καταλήξουμε στη διάταξη $C_1 C_2 C_4 C_3$ με $\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{22}}=p, P_{L_{38}}=p^2, P_{L_{45}}=p\}$.

Αν πάρουμε δεύτερο το C_3 , θα έχουμε

$$P_{L_2}^{(13)} P_{C_2} = p^2 (1-p)^4, \quad P_{L_4}^{(13)} P_{C_4} = p (1-p)^4$$

οπότε τρίτο είναι το C_4 και προκύπτει η διάταξη, $C_1 C_3 C_4 C_2$ με $\{P_{L_{11}}=1, P_{L_{28}}=p^2, P_{L_{32}}=p, P_{L_{46}}=p\}$.

Αν πάρουμε δεύτερο το C_4 , θα έχουμε,

$$P_{L_2}^{(14)} P_{C_2} = p^2 (1-p)^4, \quad P_{L_3}^{(14)} P_{C_3} = p^2 (1-p)^4$$

οπότε είτε το C_3 πάρει τη τρίτη θέση είτε το C_4 , είναι το ίδιο. Οι διατάξεις που θα πάρουμε, αντίστοιχα, είναι,

$$C_1 C_4 C_3 C_2 \text{ ή } C_1 C_4 C_2 C_3$$

ενώ και στις δυο περιπτώσεις ισχύει $\{P_{L_1}=1, P_{L_2}=p^2, P_{L_3}=p^2, P_{L_4}=p\}$. Επομένως για $p=0.65$, είναι

Διάταξη	UB_{FK}	Διάταξη	UB_{FK}
$C_1C_2C_3C_4$	0.9564	$C_1C_2C_4C_3$	0.9597
$C_1C_3C_4C_2$	0.9597	$C_1C_4C_3C_2$	0.9631

• Την ίδια ακριβώς διαδικασία πρέπει να επαναλάβουμε, όταν σαν πρώτο πάρουμε το C_2 ή το C_3 ή το C_4 . Ενεργώντας με τον ίδιο τρόπο θα καταλήξουμε πάλι στην ίδια (ελάχιστη) τιμή για το άνω φράγμα.

Για το σύστημα της γέφυρας με όμοιες μονάδες γνωρίζουμε ότι,

$$P_{C_1} = P_{C_2} = (1-p)^2, \quad P_{C_3} = P_{C_4} = (1-p)^3,$$

οπότε πρώτο μπορεί να μπει το C_1 ή το C_2 .

• Όταν πρώτο είναι το C_1 , παρατηρούμε ότι,

$$P_{L_2}^{(1)} P_{C_2} = (1-p)^2, \quad P_{L_3}^{(1)} P_{C_3} = P_{L_4}^{(1)} P_{C_4} = p(1-p)^3$$

οπότε δεύτερο θα είναι το C_2 . Για την τρίτη θέση είναι,

$$P_{L_3}^{(12)} P_{C_3} = P_{L_4}^{(12)} P_{C_4} = p^2(1-p)^3$$

με αποτέλεσμα να καταλήξουμε στη διάταξη, $C_1C_2C_3C_4$ ή $C_1C_2C_4C_3$.

Και στις δυο περιπτώσεις έχουμε,

$$P_{L_1} = P_{L_2} = 1, \quad P_{L_3} = P_{L_4} = p^2$$

φθάνοντας έτσι στο μικρότερο άνω φράγμα, με τιμή 0.6734, για $p=0.6$.

• Όταν πρώτο είναι το C_2 ,

$$P_{L_1}^{(2)} P_{C_1} = (1-p)^2, \quad P_{L_3}^{(2)} P_{C_3} = P_{L_4}^{(2)} P_{C_4} = p(1-p)^3$$

άρα δεύτερο θα είναι το C_1 . Για την τρίτη θέση είναι,

$$P_{L_3}^{(12)} P_{C_3} = P_{L_4}^{(12)} P_{C_4} = p^2(1-p)^3$$

με αποτέλεσμα να καταλήξουμε στη διάταξη, $C_2C_1C_3C_4$ ή $C_2C_1C_4C_3$.

Και στις δυο περιπτώσεις έχουμε,

$$\{P_{L_1} = P_{L_2} = 1, P_{L_3} = P_{L_4} = p^2\}$$

Έτσι χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη διαδικασία, φθάνουμε και στις δυο περιπτώσεις, στο μικρότερο άνω φράγμα. ■