

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

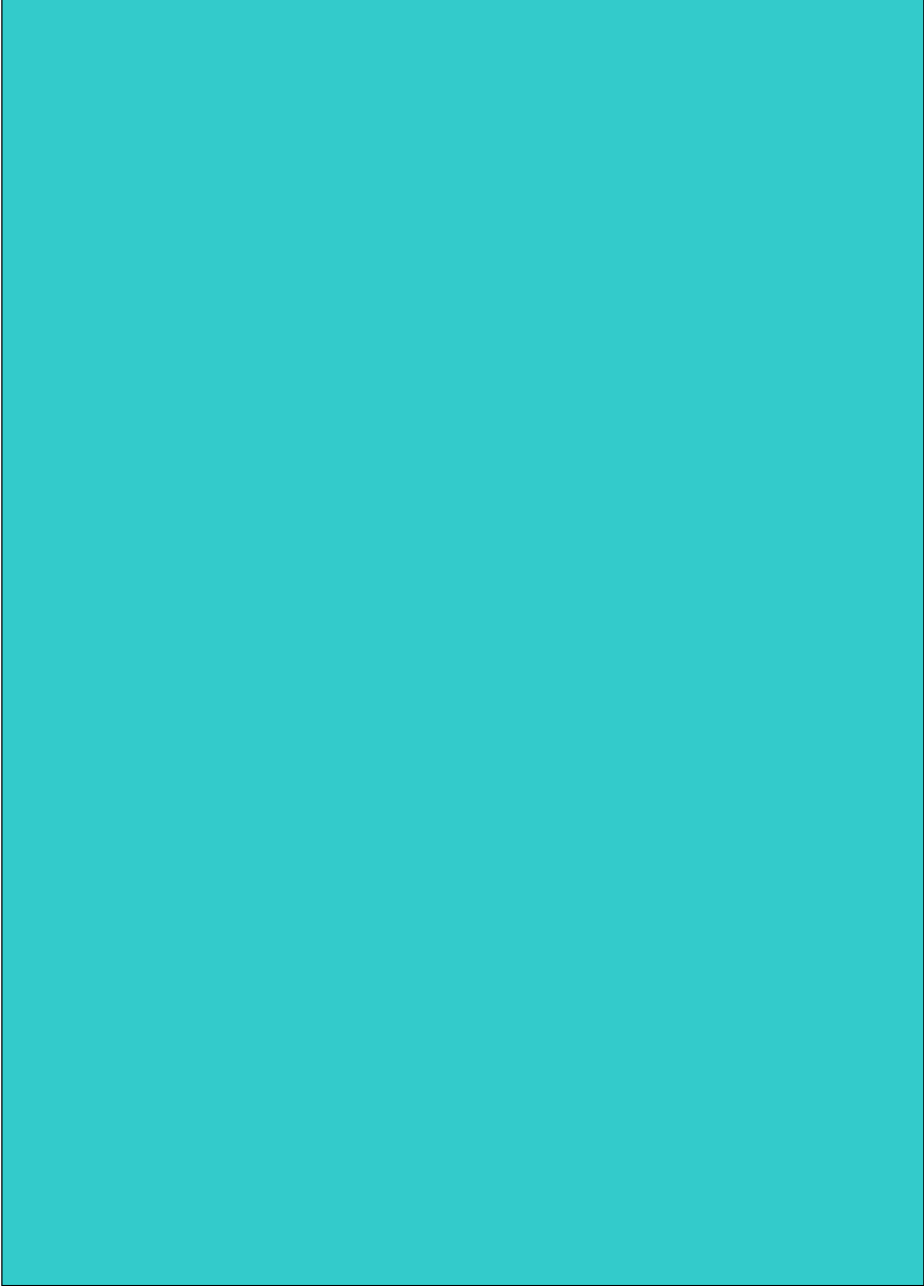
**ΦΡΑΓΜΑΤΑ  
ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ**

Φώτιος Σ. Μηλιένος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς  
Νοέμβριος 2004



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΦΡΑΓΜΑΤΑ  
ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ**

**Φώτιος Σ. Μηλιένος**

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς  
Νοέμβριος 2004

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- ..... (Επιβλέπων)
- .....
- .....

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

**RELIABILITY  
BOUNDS**

By

**Fotios S. Milienos**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance  
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of  
the requirements for the degree of Master of Science in  
Applied Statistics

Piraeus, Greece  
November 2004



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

*Στους γονείς μου  
Στέργιο και Δέσποινα  
και στην αδερφή μου  
Παρασκευή*

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, η οποία αποτέλεσε ένα ουσιαστικό συμπαραστάτη και αρωγό, σε όλες μου τις αποφάσεις. Επίσης, να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κούτρα Μάρκο, για την άψογη συνεργασία που είχαμε αλλά και για τις σημαντικές του παρατηρήσεις, οι οποίες βοήθησαν πραγματικά στην ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας, όπως και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ.κ. Αντζουλάκο Δημήτριο, Μπούτσικα Μιχαήλ, για την επίβλεψη της παρούσας εργασίας.



## Περίληψη

Τα σημερινά συστήματα αξιοπιστίας έχουν φτάσει σε τέτοιο βαθμό πολυπλοκότητας που είναι σχεδόν ανέφικτος ο υπολογισμός της ακριβούς τιμής της αξιοπιστίας τους (πιθανότητα επιβίωσης). Για το λόγο αυτό, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η ανάπτυξη απλών (κατά το δυνατόν) φραγμάτων με τα οποία να μπορεί να γίνει μια καλή προσέγγιση της “άγνωστης” αξιοπιστίας τους. Από τα φράγματα που έχουν παρουσιαστεί στη διεθνή βιβλιογραφία τα πλέον διαδεδομένα είναι τα πολλαπλασιαστικά φράγματα (*Esary* και *Proschan*) και τα εκθετικά (τύπου *Poisson*). Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι

- α. να εξηγηθεί μέσω παραδειγμάτων γιατί ακόμη και σε μετρίου μεγέθους συστήματα ο υπολογισμός της αξιοπιστίας τους μπορεί να είναι ανέφικτος ή εξαιρετικά χρονοβόρος
- β. να παρουσιαστούν τα σημαντικότερα φράγματα αξιοπιστίας
- γ. να γίνουν αριθμητικοί υπολογισμοί και συγκρίσεις των διαφόρων φραγμάτων για συγκεκριμένες κλάσεις συστημάτων και
- δ. να δοθούν απαντήσεις για κάποια ανοικτά ζητήματα, μιας συγκεκριμένης κλάσης φραγμάτων.

## Abstract

The contemporary reliability systems have reached such a level of complexity that the evaluation of the exact system reliability (survival probability), is almost computationally intractable. Therefore special attention has been given in the development of simple reliability bounds which provide also efficient approximations of the exact value. The most favorable reliability bounds appearing in the international bibliography are the multiplicative bounds (Esary and Proschan) and the exponential bounds (Poisson type). The purpose of the present dissertation is

- a. to explain, by the aid of specific examples, why the evaluation of the exact system reliability is infeasible or extremely time consuming, even for middle size systems
- b. to present the most important bounds of the reliability literature
- c. to carry out numerical calculations and comparisons of several bounds, for specific classes of systems and
- d. to deal with some open questions of a specific class of bounds.

## Περιεχόμενα

Περίληψη	
<i>Abstract</i>	
Κατάλογος Πινάκων	xv
Κατάλογος Σχημάτων	xvii
Κατάλογος Συντομογραφιών	xix
Εισαγωγή	1
<b>1. Η συνάρτηση αξιοπιστίας</b>	<b>11</b>
1.1 Συνάρτηση Δομής	11
1.2 Μονότονα Συστήματα	16
1.3 Ελάχιστα Σύνολα Λειτουργίας και Διακοπής	19
1.4 Δυϊκό Σύστημα	24
1.5 Διάσπαση σε <i>Modules</i>	27
1.6 Ορισμός και Ιδιότητες της Συνάρτησης Αξιοπιστίας	29
1.7 Υπολογισμός της Συνάρτησης Αξιοπιστίας	37
1.8 Μελέτη Συγκεκριμένων Συστημάτων	44
1.8.1 Συνεχόμενα- $k$ -από- $n$	44
1.8.2 Συνεχόμενα- $k$ -από- $r$ -από- $n$	51
1.8.3 Διδιάστατο συνεχόμενα- $k$ -από- $(r,s)$ -από- $(m,n)$	51
<b>2. Φράγματα αξιοπιστίας</b>	<b>53</b>
2.1 Φράγματα <i>Minimax</i>	56
2.2 Φράγματα <i>Esary-Proschan</i>	60
2.3 Τροποποιημένα Πολλαπλασιαστικά Φράγματα	65
2.4 Μια γενίκευση των τροποποιημένων φραγμάτων	72
2.5 Γενικευμένα Φράγματα	77
2.6 Φράγματα <i>Hsieh</i>	84
2.7 Φράγματα για συγκεκριμένα συστήματα	87
2.7.1 Συνεχόμενα $k$ από τα $n$	87
2.7.2 Διδιάστατο συνεχόμενα $k$ από $n$	88

2.7.3 Συνεχόμενα $k$ από $r$ από τα $n$	91
2.7.4 Διάφορα συστήματα	92
<b>2.8</b> Η προσέγγιση του <i>Bodin</i>	94
<b>3.Μελέτη των Τροποποιημένων Πολλαπλασιαστικών Φραγμάτων</b>	97
<b>3.1</b> Εύρεση των βέλτιστων $L_i$ και $K_i$ .	98
<b>3.2</b> Εύρεση των βέλτιστων ΤΠΦ.	110
3.2.1 Προσδιορισμός όλων των δυνατών φραγμάτων	110
3.2.2 Έλεγχος «διαδρόμων», με χρήση πινάκων.	125
<b>Παράρτημα</b>	143
<b>Βιβλιογραφία</b>	147

## Κατάλογος Πινάκων

1.8.1.1	Χρόνοι υπολογισμού της $R(2, n: F)$ , χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.8.1.1.)	48
1.8.1.2	Χρόνοι υπολογισμού της $R(k, n: F)$ , χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.8.1.6.)	49
2.1.1	Τιμές των $UB_{MM}, LB_{MM}$ και της αξιοπιστίας της γέφυρας ( <i>iid</i> )	58
2.1.2	Τιμές των $UB_{MM}, LB_{MM}$ και $R(2, 6: F)$ ( <i>iid</i> )	59
2.2.1	Τιμές των $UB_{MM}, LB_{MM}, UB_{EP}, LB_{EP}$ και $R(2, 6: F)$ ( <i>iid</i> )	62
2.2.2	Σύγκριση χρόνων υπολογισμού της αξιοπιστίας (για $R(k, n: F)$ ), με αντίστοιχους φραγμάτων	64
2.2.3	Σύγκριση χρόνων υπολογισμού της αξιοπιστίας (για $R(2, n: F)$ ) χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.8.1.1)), με αντίστοιχους φραγμάτων	64
2.3.1	Τιμές των $UB_{FK}, LB_{FK}, UB_{EP}, LB_{EP}$ και της αξιοπιστίας της γέφυρας ( <i>iid</i> )	68
2.3.2	Τιμές των $UB_{FK}, LB_{FK}, UB_{FK}^{\Delta 1}, LB_{FK}^{\Delta 1}, UB_{EP}, LB_{EP}$ και της αξιοπιστίας της γέφυρας ( <i>iid</i> )	70
2.3.3	Σύγκριση χρόνων υπολογισμού της αξιοπιστίας (για $R(2, n: F)$ ) χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.8.1.1)), με τους αντίστοιχους των φραγμάτων $LB_{EP}, UB_{FK}$	71
2.4.1	Τιμές των $UB_{KP}, LB_{KP}, UB_{EP}, LB_{EP}$ και $R(2, 8: F)$ ( <i>iid</i> )	76
2.5.1	Τιμές διαφόρων φραγμάτων για συστήματα $C_L(k, n: F)$	83
2.5.2	Τιμές διαφόρων φραγμάτων για συστήματα $C_L(k, n: F)$	83
2.5.3	Τιμές διαφόρων φραγμάτων για συστήματα $C_L(k, n: F)$	83
3.1.1	Τιμές του $UB_{FK}$ για το $C_L(4, 7: F)$ , για δυο διαφορετικές διατάξεις	108
3.1.2	Τιμές του $UB_{FK}$ για το $C_L(4, 7: F)$ , για δυο διαφορετικές διατάξεις (περίπτωση <i>iid</i> )	108
3.2.1	Όλα τα δυνατά $S_j^{(\pi)}$ , για το σύστημα του παραδείγματος 3.2.1	111
3.2.2	Όλα τα δυνατά $L_j^{(\pi)}$ και $L_j$ για το $C_L(4, 7: F)$	122

3.2.3	Όλα τα δυνατά $L_j^{(\pi)}$ και $L_j$ , για το σύστημα του παραδείγματος 3.2.1	123
3.2.4	Όλα τα δυνατά $L_j^{(\pi)}$ $L_j$ και $Y_j$ για το σύστημα της γέφυρας	126
3.2.5	Όλα τα δυνατά $L_j^{(\pi)}$ $L_j$ και $Y_j$ για το $C_L(4, 7: F)$	127

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑΣ

## Κατάλογος Σχημάτων

1.	Σειριακό Σύστημα	5
2.	Σύστημα Γέφυρας	5
3.	Κυκλικό συνεχόμενο	5
4.	Παράλληλο Σύστημα	5
5.	Διδιάστατο συνεχόμενο- $k$ -από-τα- $n$	8
1.6.1.	Γραφική παράσταση των συναρτήσεων αξιοπιστίας των συστημάτων, παράλληλο, σειριακό, $S(2, 5: G)$ και $C_L(2, 5: G)$ (περίπτωση <i>iid</i> )	31
1.6.2.	Γραφική παράσταση των συναρτήσεων αξιοπιστίας των συστημάτων, $C_L(2, 5: G)$ και $C_L(2, 5: F)$ (περίπτωση <i>iid</i> )	32
1.6.3.	Γραφική παράσταση των συναρτήσεων αξιοπιστίας των συστημάτων, $S(2, 5: G)$ , $S(3, 5: G)$ , $C_L(2, 5: F)$ και παράλληλο, για αξιοπιστία μονάδων $p$ και $(1+20\%)p$ (περίπτωση <i>iid</i> )	33
1.6.4.	Παράλληλα υποσυστήματα δυο μονάδων, συνδεδεμένα σε σύστημα γέφυρας	34
1.6.5.	Παράλληλη σύνδεση δυο γεφυρών	34
1.6.6.	Γραφική παράσταση της αξιοπιστίας των συστημάτων των σχημάτων 1.6.4. και 1.6.5.	35
1.6.7.	Γραφική παράσταση της αξιοπιστίας της γέφυρας	36
2.1.1.	Γραφική παράσταση των $UB_{MM}$ , $LB_{MM}$ και $R(2, 5: F)$	57
2.1.2.	Γραφική παράσταση των $UB_{MM}$ , $LB_{MM}$ και της συνάρτησης αξιοπιστίας της γέφυρας	58
2.1.3.	Γραφική παράσταση των $UB_{MM}$ , $LB_{MM}$ και $R(2, 6: F)$	59
2.2.1.	Γραφική παράσταση των $UB_{MM}$ , $LB_{MM}$ , $UB_{EP}$ , $LB_{EP}$ και $R(2, 6: F)$	62
2.4.1.	Γραφική παράσταση των $LB_{KP}$ , $LB_{EP}$ , $UB_{EP}$ , $UB_{KP}$ και $R(2, 8: F)$	76
3.1.1.	Γραφική παράσταση του $UB_{FK}$ για το $C_L(4, 7: F)$ ( <i>iid</i> ), για δυο διαφορετικές διατάξεις,	106

## Κατάλογος Συντομογραφιών

$iid$	<i>identically, independently distributed</i>
$R$	Αξιοπιστία ενός συστήματος
$X_i$	Η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τη κατάσταση της $i$ μονάδος
$p_i$	Αξιοπιστία της $i$ μονάδος
$q_i$	Αναξιοπιστία της $i$ μονάδος ( $1-p_i$ )
$\mathbf{x}$	Διάνυσμα κατάστασης
$\mathbf{p}$	Διάνυσμα αξιοπιστίας των μονάδων
$\phi(\mathbf{x})$	Συνάρτηση δομής
$\phi^D(\mathbf{x})$	Συνάρτηση δομής του δυϊκού συστήματος
$p$	Αξιοπιστία μονάδων, στην περίπτωση <i>iid</i>
$R(\mathbf{p})$ ( $R(p)$ )	Αξιοπιστία ενός συστήματος, συναρτήσει του διανύσματος $\mathbf{p}$ (του $p$ )
ε.σ.δ.(ε.σ.λ.)	Ελάχιστα σύνολα διακοπής (λειτουργίας)
ε.δ.δ.(ε.δ.λ.)	Ελάχιστα διανύσματα διακοπής (λειτουργίας)
$C_j$	Ελάχιστο σύνολο διακοπής $j$
$P_j$	Ελάχιστο σύνολο λειτουργίας $j$
$\gamma_j$	Συνάρτηση δομής του $j$ ε.σ.λ.
$\delta_j$	Συνάρτηση δομής του $j$ ε.δ.δ.
$n, N, M$	Πλήθος των μονάδων, των ε.σ.δ. και ε.δ.δ. ενός συστήματος, αντίστοιχα
$S(k, n: G/F)$	Σύστημα $k$ από τα $n: G/F$
$C_L(k, n: F/G)$	Γραμμικό συνεχόμενα- $k$ -από-τα- $n: F/G$
$C_C(k, n: F/G)$	Κυκλικό συνεχόμενα- $k$ -από-τα- $n: F/G$
$2D-C(r, s; m, n: F/G)$	Διδιάστατο συνεχόμενα- $(r,s)$ -από- $(m,n): F/G$
$k/2D-C(r, s; m, n: F/G)$	Διδιάστατο συνεχόμενα- $k$ -από- $r$ -από- $n: F/G$
$2D-C(k, n: F/G)$	Διδιάστατο συνεχόμενα- $k$ -από- $n: F/G$
$R(k, n: F/G)$	Αξιοπιστία του Γραμμικού συνεχόμενα- $k$ -από-τα- $n: F/G$
$R(k, n)$	Αξιοπιστία του Γραμμικού συνεχόμενα- $k$ -από-τα- $n: F$
$IE$	Μέθοδος εγκλεισμού-αποκλεισμού
$ A $	Πλήθος στοιχείων του συνόλου $A$



$EP$ bounds	Φράγματα των <i>Esary</i> και <i>Proschan</i>
$MM$ bounds	Φράγματα <i>minimax</i>
$HS$ bounds	Φράγματα <i>Hsieh</i>
ΤΠΦ	Τροποποιημένα πολλαπλασιαστικά φράγματα
$LB_{MM}, UB_{MM}$	Κάτω και άνω <i>minimax</i> φράγμα, αντίστοιχα
$LB_{EP}, UB_{EP}$	Κάτω και άνω φράγμα των <i>EP bounds</i> , αντίστοιχα
$LB_{FK}, UB_{FK}$	Κάτω και άνω φράγμα των ΤΠΦ
$LB_{KP}, UB_{KP}$	Κάτω και άνω φράγμα, μέσω μια γενίκευσης των τροποποιημένων πολλαπλασιαστικών φραγμάτων
$LB_{HS}, UB_{HS}$	Κάτω και άνω φράγμα, των <i>HS bounds</i> , αντίστοιχα
$UB_{FK}^{(\pi)}$	Άνω φράγμα των ΤΠΦ, με βάση τη διάταξη $\pi$
$SCP$	<i>Set covering problem</i>
$SCP_m^{(\pi)}$	<i>Set covering problem</i> του $m$ ε.σ.δ., για τη διάταξη $\pi$
$S_m^{(\pi)}$	Σύνολο ανισοτήτων (συνθηκών) του $SCP_m^{(\pi)}$