ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΕΡΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ BLACK–SCHOLES ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

Άγγελος Ν. Χατζηπέρης

Διπλωματική Εργασία

Πειραιάς,
Οκτώβριος 2013

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
&
INSURANCE SCIENCE

M.Sc. in Actuarial Science
and
Risk Management

The Partial Differential Equation of the Black-Scholes Model
&
Applications in Option Pricing Theory

Aggelos N. Chatziperis

Dissertation Thesis

Piraeus,
October 2013

Στους γονείς μου,
Χαρίκλεια και Νεκτάριο
και,
τον αδερφό μου Στυλιανό

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύ σημαντική υποστήριξη, καθοδήγηση, βοήθεια και υπομονή σε όλη τη διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Διευθυντή του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών της Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, κύριο Μιχαήλ Γκλεζάκο, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, καθώς και την κυρία Βερροπούλου, Επίκουρη Καθηγήτρια του ιδίου Τμήματος, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω τον αγαπημένο μου αδερφό Στυλιανό που αποτελεί παράδειγμα και ανεξάντλητη πηγή έμπνευσης, καθώς και τους γονείς μου Χαρίκλεια και Νεκτάριο για την αμέριστη συμπαράστασή τους καθ' όλη τη διάρκεια των ακαδημαϊκών μου σπουδών.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω όλους τους φίλους μου και, ιδιαίτερα τους Ν. Παπαδημητρίου και Αναστασία Μ. οι οποίοι με ενθάρρυναν θετικά σε όλη τη διάρκεια συγγραφής αυτής της εργασίας.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε τη μερική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes, θα αποδείξουμε την γενική της λύση, και στη συνέχεια θα κάνουμε εφαρμογή αυτής στην τιμολόγηση δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου.

Αρχικά τοποθετούμε το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο, το οποίο αποτελεί εργαλείο για την κατανόηση της γεωμετρικής κίνησης Brown, μιας στοχαστικής διαδικασίας, στην οποία στηρίζεται το μοντέλο των Black-Scholes. Στη συνέχεια γίνεται εφαρμογή του μοντέλου στην εύρεση αξιών χρεογράφων και αποτίμησης παραγώγων, και τέλος, δίνονται αριθμητικά παραδείγματα.

Abstract

In this work, the Black & Scholes partial differential equation, and its general solution will be studied. An adaption of this model in the pricing of European options will also be considered. We give the appropriate mathematical background, in order to describe the necessary geometric Brownian motion, which is a stochastic process crucial for the hypothesis in the Black & Scholes model. Finally, applications of the model in the finding of underlying asset's value as well as numerical examples will be presented.

Εισαγωγή

'Αν γίνει σωστή τιμολόγηση των δικαιωμάτων σε μία αγορά, τότε δεν θα πρέπει να είναι εφικτή η επίτευξη κερδών, δημιουργώντας ένα χαρτοφυλάκιο στο οποίο ένας επενδυτής λαμβάνει θέσεις αγοράς και πώλησης πάνω σε δικαιώματα και στον υποκείμενο τίτλο τους αντίστοιχα'.

"Fisher Black & Myron Scholes"

Αυτά είναι τα πρώτα λόγια της περίληψης της εργασίας, που άλλαξε τον κόσμο των χρηματοοικονομικών, από τους *Fisher Black* και *Myron Scholes* το έτος 1973 και αφορούσε την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης [31]. Στα λόγια αυτά, συμπυκνώνεται η βασική ιδέα πως με την απουσία κέρδους χωρίς κίνδυνο (arbitrage), είναι εφικτό να βρει κανείς τη μοναδική τιμή ενός δικαιώματος αγοράς ή πώλησης. Ο τελικός τύπος των Black & Scholes, αποτελεί τον πιο δημοφιλή και πρωτοποριακό τύπο στον κόσμο της χρηματοοικονομίας, οριοθετώντας μία καινούρια εποχή. Έτσι γίνονται αναφορές σε πριν τη Black-Scholes εποχή και στην μετά τη Black-Scholes εποχή.

Αποδίδοντας στους Harry Markowitz, William Sharpe, και Merton Miller το βραβείο Nobel οικονομικής επιστήμης το 1990, η επιτροπή απονομής του βραβείου έφερε στο προσκήνιο το γεγονός ότι τα προηγούμενα σαράντα χρόνια είχαν αρχίσει να γίνονται οι πρώτες ζυμώσεις σε ένα νέο επιστημονικό πεδίο, αυτό της θεωρίας της χρηματοοικονομίας. Η θεωρία αυτή προσπαθεί να ερευνήσει και να καταλάβει με ποιο τρόπο λειτουργούν οι αγορές, πώς να τις κάνει πιο αποτελεσματικές, και πως θα πρέπει να διακανονίζονται. Εξηγεί και ενισχύει το σημαντικό ρόλο που παίζουν οι αγορές στην κατανομή του κεφαλαίου και στη μείωση της έκθεσης στον κίνδυνο προκειμένου να διευκολυνθεί η οικονομική δραστηριότητα. Χωρίς καμία υποβάθμιση της πρακτικότητας της σε θέματα εμπορίου και κανονιστικών πλαισίων, η θεωρία της χρηματοοικονομικής επιστήμης έχει ποσοτικοποιηθεί σε τέτοιο βαθμό στον οποίο προβλήματα που παρουσιάζονται στον τομέα της οικονομίας να οδηγούν σε θέματα έρευνας του μαθηματικού κλάδου.

Ο Harry Markowitz το 1952, στη διδακτορική διατριβή του "Επιλογή Χαρτοφυλακίου" (*Portfolio Selection*), έθεσε τα θεμέλια για την εφαρμογή της μαθηματικής θεωρίας στα χρηματοοικονομικά. Ο Markowitz ανέπτυξε την έννοια της μέσης απόδοσης και της συνδιακύμανσης για κοινές μετοχές, κάτι που του έδωσε τη δυνατότητα την ιδέα της διαφοροποίησης σε μία αγορά. Ο στοχαστικός λογισμός που αναπτύχθηκε από τον Ιάπωνα μαθηματικό Itô [33], συνέβαλε τα μέγιστα στην πορεία για ποσοτικοποίηση και διαχείριση του κινδύνου στη μοντέρνα χρηματοοικονομική θεωρία και πράξη.

Το 1969, ο Robert Merton εισήγαγε το στοχαστικό λογισμό στη μελέτη των χρηματοοικονομικών. Κίνητρο για τον Merton αποτέλεσε η επιθυμία του να καταλάβει πως λαμβάνουν την τελική τους μορφή οι τιμές στις χρηματοοικονομικές αγορές, το ποίο συνάμα αποτελεί και το κλασικό ερώτημα της οικονομικής επιστήμης περί «ισορροπίας», και σε μετέπειτα εργασίες χρησιμοποίησε τον μηχανισμό του στοχαστικού λογισμού προκειμένου να ερευνήσει το θέμα σε βάθος.

Παράλληλα με την εργασία του Merton, και με την βοήθεια του ίδιου, οι Fisher Black και Myron Scholes ανέπτυσσαν τον τύπο τιμολόγησης δικαιωμάτων. Η εργασία αυτή κέρδισε το 1997 το βραβείο Nobel στο τομέα της οικονομικής επιστήμης. Ο τύπος αυτός έδινε μία ικανοποιητική λύση σε σημαντικό πρακτικό πρόβλημα, αυτό της εύρεσης μίας δίκαιης τιμής για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς. Την περίοδο 1979-1983 οι Harrison, Kreps και Pliska χρησιμοποίησαν τη γενική θεωρία στοχαστικών διαδικασιών συνεχούς χρόνου προκειμένου να θέσουν τον τύπο τιμολόγησης δικαιωμάτων των Black-Scholes σε μία σταθερή θεωρητική βάση. Ως αποτέλεσμα αυτού, έδειξαν πώς να γίνεται τιμολόγηση και σε άλλα είδη παραγώγων.

Ο τύπος τιμολόγησης δικαιωμάτων των Black-Scholes, παρείχε για πρώτη φορά μία θεωρητική μέθοδο δίκαιης τιμολόγησης ενός αντισταθμισμένου στον κίνδυνο περιουσιακού στοιχείου. Για παράδειγμα, αν μία επενδυτική τράπεζα προσφέρει ένα παράγωγο προϊόν σε μία τιμή η οποία είναι υψηλότερη της δίκαιης τιμής, τότε είναι λογικό το προϊόν αυτό να έχει μειωμένη ζήτηση. Αν προσφέρει το προϊόν σε μικρότερη τιμή από τη δίκαιη, τότε η τράπεζα διατρέχει τον κίνδυνο σημαντικής απώλειας. Αυτό μπορεί να κάνει την τράπεζα διστακτική στο να προσφέρει αρκετή ποσότητα από το παράγωγο προϊόν που έχει στα χέρια της και με τον τρόπο αυτό να συμβάλλει στην αποτελεσματικότητα της αγοράς. Συγκεκριμένα, η τράπεζα επιθυμεί να προσφέρει παράγωγα προϊόντα των οποίων η δίκαιη τιμή να μπορεί να καθοριστεί από την αρχή. Αν η τράπεζα καταφέρει και λύση το θέμα αυτό και πουλάει ένα τέτοιο προϊόν σε δίκαιη τιμή, ανακύπτει μετά το θέμα της αντιστάθμισης του κινδύνου: με ποιον τρόπο θα πρέπει πλέον να διαχειριστεί τον κίνδυνο που συνοδεύεται από την καινούρια της θέση; Η μαθηματική θεωρία που προέρχεται από τον τύπο τιμολόγησης δικαιωμάτων των Black-Scholes, παρέχει λύσεις τόσο για την τιμολόγηση όσο και για την αντιστάθμιση του κινδύνου [11]. Η μελέτη αυτού του μοντέλου αποτελεί και το θέμα της παρούσης διπλωματικής εργασίας. Ποιο συγκεκριμένα η παρούσα εργασία έχει την παρακάτω δομή.

Στο πρώτο κεφάλαιο, πραγματοποιείται παρουσίαση μερικών βασικών εννοιών των πιθανοτήτων και της στοχαστικής ανάλυσης. Ο ορισμός εννοιών όπως του χώρου πιθανότητας, της τυχαίας μεταβλητής, της μέσης τιμής, της διακύμανσης, της ροπογεννήτριας συνάρτησης και της στοχαστικής διαδικασίας είναι απολύτως απαραίτητες προκειμένου να λειτουργήσουν ως κατάλληλο υπόβαθρο και να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία για την κατανόηση και μελέτη εννοιών που θα δοθούν στα επόμενα κεφάλαια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, δίνεται συνέχεια στη διεύρυνση του μαθηματικού υπόβαθρου με έννοιες όπως οι *διαδικασίες martingale*, η *διήθηση*, οι διαδικασίες και το λήμμα του Itô, και οι διαδικασίες Markov. Έννοιες που όπως θα δούμε στο κεφάλαιο τρία και πέντε συνδράμουν στην ανάπτυξη και κατανόηση δύο πολύ σημαντικών διαδικασιών στον τομέα των χρηματοοικονομικών όπως της *κίνησης Brown* και της *γεωμετρικής κίνησης Brown*.

Στο τρίτο κεφάλαιο, πραγματοποιείται η παρουσίαση της *κίνησης Brown* και των κύριων ιδιοτήτων της. Στη συνέχεια, γίνεται ανάπτυξη του μοντέλου της *γεωμετρικής κίνησης Brown* το οποίο χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση της τιμής μίας μετοχής και η οποία αποτελεί βασική υπόθεση του μοντέλου τιμολόγησης δικαιωμάτων Black-Scholes.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, γίνεται παρουσίαση μερικών εκ των βασικότερων χαρακτηριστικών των δικαιωμάτων προαίρεσης, δίνοντας μεγαλύτερη σημασία στα Ευρωπαϊκά δικαιώματα.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, φτάνουμε με αναλυτικό τρόπο στην εξίσωση των Black-Scholes, βρίσκεται η γενική λύση της εξίσωσης και γίνεται προσαρμογή της στο δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου, εξάγοντας τον τύπο τιμολόγησης αυτών. Τέλος, παρουσιάζονται αριθμητικά παραδείγματα του τύπου.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Δικαιώματα Αγοράς και Πώλησης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Η Μερική Διαφορική Εξίσωση των Black–Scholes

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές Μαθηματικές Έννοιες

1.1 Εισαγωγή

Σκοπός του πρώτου κεφαλαίου της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση βασικών εννοιών από τη θεωρία πιθανοτήτων και της στατιστικής. Ο λόγος που επιλέχτηκε να αφιερωθεί το κεφάλαιο ένα στην επισκόπηση των εννοιών αυτών, είναι ότι αποτελούν τα απαραίτητα συστατικά με τα οποία οικοδομούνται βασικά μοντέλα που θα εξεταστούν στα επόμενα κεφάλαια, όπως οι *διαδικασίες martingale*, η *κίνηση Brown*, η *γεωμετρική κίνηση Brown* και το μοντέλο *Black-Scholes*. Συνεπώς, το πρώτο αυτό βήμα κρίνεται απολύτως απαραίτητο ως προς την προετοιμασία του αναγνώστη έτσι ώστε να είναι έτοιμος να ανταποκριθεί στην μετέπειτα ροή της εργασίας. Προκειμένου ο αναγνώστης να οικειοποιηθεί και να κατανοήσει ακόμα καλύτερα κάθε μία από τις έννοιες αυτές, για κάθε ορισμό που θα γράφεται θα παρατίθενται παραδείγματα.

1.2 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Κατά σειρά ακολουθεί η παρουσίαση της έννοιας του χώρου πιθανότητας, της σ-άλγεβρας, της άλγεβρας-Borel, της τυχαίας μεταβλητής, της μέσης τιμής τυχαίας μεταβλητής, της διακύμανσης τυχαίας μεταβλητής καθώς και η έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης και της στοχαστικής διαδικασίας με τη συνοδεία παραδειγμάτων.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στους ορισμούς και στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν, θα δοθεί σημασία μόνο στην περίπτωση της συνεχούς μεταβλητής καθώς τέτοιου είδους μεταβλητές χρησιμοποιούνται στα μοντέλα της *κίνησης Brown*, της *γεωμετρικής κίνησης Brown* και *Black-Scholes*.

1.2.1 Χώρος Πιθανότητας

Η θεωρία πιθανοτήτων ασχολείται με φαινόμενα στα οποία οι συνθήκες κάτω από τις οποίες εξελίσσονται δεν προκαθορίζουν την έκβαση τους. Σε μια τέτοια περίπτωση θα λέμε ότι έχουμε τυχαία πειράματα ή στοχαστικά φαινόμενα. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται δειγματικός χώρος. Τα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου λέγονται δειγματικά σημεία. Ακόμα, τα ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου. Ενδεχόμενα τα οποία περιέχουν ένα μόνο δειγματικό σημείο ονομάζονται απλά ενδεχόμενα. Αντίστοιχα, ενδεχόμενα τα οποία περιέχουν περισσότερα από ένα δειγματικά σημεία ονομάζονται σύνθετα ενδεχόμενα.

Ορισμός 1.1: Ένας χώρος πιθανότητας που σχετίζεται με ένα τυχαίο πείραμα αποτελείτε από τρία στοιχεία $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, για τα οποία έχουμε τα εξής:

i) Ω είναι το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης και καλείται δειγματικός χώρος.

ii) $\mathcal{F}$ είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του Ω η οποία έχει τη δομή μίας σ-άλγεβρας. Τα χαρακτηριστικά μίας τέτοιας οικογένειας υποσυνόλων παρατίθενται στην επόμενη υποπαράγραφο.

iii) P είναι μία συνάρτηση η οποία σχετίζει έναν αριθμό, έστω $P(A)$ αυτός, σε κάθε σύνολο $A \in \mathcal{F}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$

b) $P(A) = 1$

c) Για κάθε ακολουθία $A_{1,}A_{2,\ldots}$, συνόλων που αποτελούν διαμερίσεις του συνόλου $\mathcal{F}$ (δηλαδή για ξένα ενδεχόμενα, $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \gamma\iota\alpha\ i \neq j$) ισχύει ότι:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Τα στοιχεία που αποτελούν τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ χαρακτηρίζονται με την έννοια του γεγονότος, ενώ η συνάρτηση P καλείται μέτρο πιθανότητας. Κατά αυτό τον τρόπο έχουμε την ακόλουθη ερμηνεία του παραπάνω μοντέλου:

$$P(\mathcal{F}) = \text{"}\pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \nu\alpha\ \sigma\upsilon\mu\beta\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ \gamma\varepsilon\gamma o\nu\acute{o}\varsigma\ \mathcal{F}\text{"}$$

Το ενδεχόμενο $\emptyset$ ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο ενώ, το ενδεχόμενο Ω ονομάζεται βέβαιο γεγονός και για ένα ενδεχόμενο A του δειγματικού χώρου Ω ισχύει πάντα η σχέση:

$$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$$

Η έννοια της σ-άλγεβρας αποτελεί το μαθηματικό εργαλείο μέσα από το οποίο δίνεται ο ορισμός της έννοιας του συμβάντος ή της συλλογής συμβάντων. Αρχικά παρατίθεται ο ορισμός της σ-άλγεβρας και στη συνέχεια δίνονται παραδείγματα ύπαρξης τέτοιων συνόλων αλλά και συνόλου που δεν ανήκει σε αυτή την κατηγορία.

Ορισμός 1.2: Θεωρούμε το σύνολο Ω και $\mathcal{F}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του Ω με τις παρακάτω ιδιότητες:

1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

2) Αν $A \in \mathcal{F}$ τότε και $A^c \equiv \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$

3) Αν $A_1, A_2, \dots, \in \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Η ιδιότητα (1) δείχνει ότι η οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του Ω περιλαμβάνει το κενό σύνολο, ενώ οι ιδιότητες (2) και (3) δηλώνουν ότι η οικογένεια των υποσυνόλων $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα των υποσυνόλων του αλλά και ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις του αντίστοιχα. Το σύνολο Ω καλείται δειγματικός χώρος και η οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του Ω, καλείται *σ-άλγεβρα*.

Προκειμένου ο παραπάνω συλλογισμός να γίνει πιο κατανοητός δίνεται το εξής παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.1: Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{6,7,8\}$.

Τότε για το σύνολο:

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{7\}, \{6,8\}\}$$

παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι τρείς συνθήκες του ορισμού 1.2 και συνεπώς μπορεί να χαρακτηριστεί ως μία σ-άλγεβρα. Στο παράδειγμα 2 που ακολουθεί διαπιστώνεται πώς ένα σύνολο $\mathcal{F}$ με βάση κάποιο αρχικό σύνολο Ω δημιουργεί μία σ-άλγεβρα και πώς το σύνολο αυτό με διαφορετική σύνθεση υποσυνόλων δεν αποτελεί μία σ-άλγεβρα.

Παράδειγμα 1.2: Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{6, 7, 8, 9\}$.

Τότε για το σύνολο:

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{6\}, \{7\}, \{6, 8, 9\}\}$$

Παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες και άρα δεν είναι μία σ-άλγεβρα καθώς ενώ περιέχει τα υποσύνολα $\{6\}$ και $\{7\}$ δεν περιέχει το $\{6, 7\}$.

Όμως το σύνολο:

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{6\}, \{7\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}, \{6, 8, 9\}, \{7, 8, 9\}\}$$

είναι μία σ-άλγεβρα αφού πληροί και τις τρείς προϋποθέσεις του ορισμού 1.2 .

Ακολουθεί ο ορισμός της ελάχιστης σ-άλγεβρας.

Ορισμός 1.3: Η ελάχιστη σ-άλγεβρα που ορίζεται από ένα σύνολο *A*, είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που το περιέχει. Συνήθως συμβολίζεται *σ(A).*

***Παράδειγμα 1.3*:** Έστω ότι έχουμε τρία υποσύνολα του Ω, C_1, C_2, C_3 τέτοια ώστε:

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset, i \neq j \quad \kappa\alpha\iota \quad C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \Omega$$

Τότε η σ-άλγεβρα:

$$\{\emptyset, C_1, C_2, C_3, C_1 \cup C_2, C_2 \cup C_3, C_1 \cup C_3, \Omega\}$$

είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\sigma(C)$ η οποία περιέχει το $C = \{C_1, C_2, C_3\}$.

Ως *δειγματικό χώρο* ορίσαμε το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης. Από τα παραπάνω και με φυσικό τρόπο, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι κάθε σύνολο που παράγεται ως αποτέλεσμα της εκτέλεσης του πειράματος τύχης, είναι ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω και άρα μία σ-άλγεβρα. Πολλές φορές στον κόσμο των πιθανοτήτων η σ-άλγεβρα λαμβάνει τον χαρακτηρισμό του γεγονότος.

Έχοντας δώσει μία καλή περιγραφή της σ-άλγεβρας, θα προχωρήσουμε στον ορισμό της *άλγεβρας Borel*, όντας το είδος των συνόλων πάνω στα οποία ορίζεται η *κίνηση Brown*, με την οποία θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο τρία.

Η εισαγωγή μας στην *άλγεβρα Borel* θα πραγματοποιηθεί παρουσιάζοντας πρώτα δύο αντιπροσωπευτικά παραδείγματα.

***Παράδειγμα 1.4*:** Επιλέγουμε ένα αριθμό τυχαία από το διάστημα [0,2]. Ο δειγματικός χώρος θα είναι το σύνολο Ω = [0,2]. Τότε το $\mathcal{F}$ είναι μία Borel σ-άλγεβρα του διαστήματος [0,2].

***Παράδειγμα 1.5*:** Θεωρούμε ένα πείραμα κατά τα οποίο μετράμε τη διάρκεια ζωής μίας ηλεκτρικής λάμπας. Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο Ω = $[0, \infty]$, μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Τότε το $\mathcal{F}$ είναι μία Borel σ-άλγεβρα του διαστήματος $[0, \infty]$.

Θα δοθεί ο ορισμός μιας ειδικής περίπτωσης σ-άλγεβρας η οποία εμφανίζει μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον στο χώρο των πιθανοτήτων και της στοχαστικής ανάλυσης. Θα χρησιμοποιηθεί η παραδοχή ότι για τον δειγματικό μας χώρο ισχύει ότι Ω = ℝ και σύμφωνα με αυτή θα δημιουργήσουμε ένα υποσύνολο που θα αποτελείται από υποσύνολα του ℝ.

Ορισμός 1.4: Η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του ℝ, που περιέχει την κλάση C όλων των ανοικτών διαστημάτων της μορφής $(-\infty, x)$, ονομάζεται *άλγεβρα Borel* και συμβολίζεται με B(C).

1.2.2 Τυχαίες Μεταβλητές

Μία αρκετά συνηθισμένη περίπτωση κατά τη μελέτη ενός τυχαίου πειράματος είναι το ενδιαφέρον μας για κάποια συνάρτηση του αποτελέσματος και όχι το ίδιο το αποτέλεσμα.

Για παράδειγμα έστω ότι μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το πλήθος X των εύστοχων βολών ενός καλαθοσφαιριστή. Έπειτα από n βολές έχει γίνει καταμέτρηση των εύστοχων και των άστοχων βολών. Ο δειγματικός χώρος Ω, του πειράματος αυτού, μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από όλες τις n-άδες της μορφής $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου $x_i = 1$ ή 0 ανάλογα με το αν η i-στή βολή είναι εύστοχη ή όχι. Συνεπώς, ο δειγματικός χώρος αποτελείται από όλες τις διατάξεις των δύο στοιχείων, $\{0, 1\}$, (που είναι τα δύο πιθανά αποτελέσματα) ανά n με επανάληψη και άρα $|\Omega| = 2^n$.

Εκείνο όμως που μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε δεν είναι ποιες ακριβώς ρίψεις είναι εύστοχες και ποιες όχι, δηλαδή το ακριβές αποτέλεσμα του τυχαίου αυτού πειράματος, αλλά πόσες βολές είναι εύστοχες από τις n. Αυτό που γίνεται είναι η αντιστοίχηση σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο ω του Ω με μία συνάρτηση $X(\omega)$ η οποία εκφράζει το πλήθος των εύστοχων βολών που θα μετρήσουμε αν πραγματοποιηθεί το συγκεκριμένο στοιχειώδες ενδεχόμενο. Για παράδειγμα αν $(1, 0,0,0,0,1)$ είναι ένα στοιχειώδες ενδεχόμενο, στο οποίο έχουμε ότι από τις $n = 6$ βολές μόνο η πρώτη και η τελευταία ήταν εύστοχες, τότε ο αριθμός των εύστοχων βολών που του αντιστοιχεί είναι δύο.

Το αντικείμενο που αποτελεί το ενδιαφέρον μας είναι η μελέτη της πιθανότητας να καταγραφούν για παράδειγμα έξι εύστοχες βολές ή ακόμα, λιγότερες από πέντε εύστοχες βολές. Οι μεταβλητές στις οποίες θα αναφερόμαστε από αυτό το σημείο και ύστερα είναι μεταβλητές των οποίων η τιμή καθορίζεται από το αποτέλεσμα κάποιου πειράματος τύχης. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο καλούνται τυχαίες.

Ακολουθεί ένας ποιο αυστηρός ορισμός της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 1.5: Κάθε απεικόνιση X από το δειγματικό χώρο Ω σε κάποιο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών R, δηλαδή $X: \Omega \to R$, θα ονομάζεται *τυχαία μεταβλητή,* αν για κάθε διάστημα $S \subseteq R$, το σύνολο $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in S\}$ είναι ενδεχόμενο του Ω.

Έχοντας μιλήσει και ορίσει την έννοια της τυχαίας μεταβλητής θα προχωρήσουμε στον ορισμό της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής η οποία θα χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά στο εξής όπως και της συνάρτησης κατανομής και συνάρτησης πυκνότητας αυτής.

Ορισμός 1.6: Έστω X τυχαία μεταβλητή. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει μία μη αρνητική πραγματική συνάρτηση $f: R \to [0, \infty)$ τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο A του R, το οποίο μπορεί να γραφτεί ως ένωση ενός πεπερασμένου ή απείρως αριθμήσιμου πλήθους διαστημάτων, ισχύει:

$$P(X \in A) = \int f(x)dx, \text{ ορισμένο στο υποσύνολο Α}$$

Τότε η τυχαία μεταβλητή X ονομάζεται απολύτως συνεχής ή απλά συνεχής και η συνάρτηση f λέγεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλά συνάρτηση πυκνότητας της X.
Η συνάρτηση πυκνότητας f μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής ικανοποιεί τις εξής δύο συνθήκες:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in R$$

και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Αντίστροφα, αν για μια πραγματική συνάρτηση f ισχύουν οι δύο παραπάνω συνθήκες, τότε αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συνάρτηση πυκνότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X.

Ορισμός 1.7: Η συνάρτηση με τύπο:

$$F(t) = F(X \leq t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\}), \qquad -\infty < t < +\infty$$

ονομάζεται αθροιστική συνάρτηση κατανομής ή απλούστερα συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής είναι συνεχής συνάρτηση, τότε η συνάρτηση κατανομής θα είναι ίση με:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

θα είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της και θα ισχύει ότι:

$$F'(t) = f(t), \qquad \text{για κάθε } t \in R$$

Επισημαίνεται ότι, ακόμη και αν η f δεν είναι συνεχής παντού θα ισχυέι η σχέση $F'(t) = f(t)$ για κάθε σημείο t στο οποίο η f είναι συνεχής.

Η έννοια της στοχαστικής ανεξαρτησίας (μεταβλητών των οποίων η έκβαση των αποτελεσμάτων τους εξαρτώνται από την έκβαση ενός πειράματος τύχης) είναι μία από τις σημαντικότερες της θεωρίας πιθανοτήτων και εισάγεται μέσω της έννοιας της ανεξαρτησίας ενδεχομένων. Το επόμενο παράδειγμα αποτελεί μία εισαγωγή για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας.

Παράδειγμα 1.6: Θεωρούμε τη ρίψη δύο ζαριών και ας ονομάσουμε με X την τυχαία μεταβλητή:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{το πρώτο ζάρι φέρνει άρτιο αριθμό} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και Y την τυχαία μεταβλητή:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{το δεύτερο ζάρι φέρνει περιττό αριθμό} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Από το παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνεται ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες καθώς το αποτέλεσμα που φέρει το πρώτο ζάρι δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα που φέρει το δεύτερο και αντίστροφα.

Πιο συγκεκριμένα δίνεται ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 1.8: Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y χαρακτηρίζονται ως *ανεξάρτητες* όταν τα ενδεχόμενα (σ - άλγεβρες) $\{X \in A\}$ και $\{Y \in B\}$, που παράγονται από τις τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητα για οποιαδήποτε υποσύνολα πραγματικών αριθμών Α, Β. Δηλαδή αν ισχύει:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(\, Y \in B)$$

Θα πρέπει βεβαίως να επισημανθεί ότι στην περίπτωση συνεχών τυχαίων μεταβλητών γίνεται περιορισμός μόνο σε υποσύνολα της μορφής $A, B \subseteq R$ για τα οποία τα σύνολα $\{X \in A\}$ και $\{Y \in B\}$ αποτελούν ενδεχόμενα.

1.2.3 Ροπές Τυχαίας Μεταβλητής

Παράδειγμα 1.7: Θεωρούμε ότι X είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το χρόνο σε λεπτά που απαιτείται για την επισκευή μίας ηλεκτρονικής συσκευής. Η τυχαία μεταβλητή έχει συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2\,, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ο μέσος χρόνος για την επισκευή μίας ηλεκτρονικής συσκευής βρίσκεται κάνοντας τα εξής:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{2} x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} = 1$$

Εύκολα μπορεί να συμπεράνει κανείς τη δομή πάνω στην οποία στηρίζεται ο υπολογισμός της μέσης τιμής και επομένως τον ορισμό της.

Συνεπώς θα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.9: Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X η οποία είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f. Η *μέση ή αναμενόμενη τιμή* της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από τον τύπο:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Βασική προϋπόθεση ύπαρξης της παραπάνω ποσότητας είναι το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξί μέλος να συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < \infty$$

Μία σημαντική και πολύ χρήσιμη έκφραση της μέσης τιμής αποτελεί η δεσμευμένη μέση τιμή ή αλλιώς υπό συνθήκη μέση τιμή. Η υπό συνθήκη μέση τιμή, ανάγει τον υπολογισμό της μέσης τιμής μίας τυχαίας μεταβλητής σε μία διαδικασία υπολογισμού μέσης τιμής, κατά την οποία έχουμε στη διάθεσή μας δύο τυχαίες μεταβλητές, εκ των οποίων η μία παραμένει άγνωστη ενώ για τη δεύτερη γνωρίζουμε ότι λαμβάνει μία συγκεκριμένη τιμή.
Διαισθητικά, η τυχαία μεταβλητή με τη γνωστή τιμή λειτουργεί σαν ένα είδος πληροφορίας βάσει της οποίας επιθυμούμε να βρούμε σε ποια περίπου κατάσταση βρίσκεται η άγνωστη τυχαία μεταβλητή.
Δίνεται παράδειγμα στο οποίο πραγματοποιείται υπολογισμός δεσμευμένης μέσης τιμής συνεχούς τυχαίας μεταβλητής και στη συνέχεια ακολουθεί παράθεση του μαθηματικού ορισμού της.

Παράδειγμα 1.8: Ας υποθέσουμε ότι η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X δοθέντος ότι η τυχαία μεταβλητή $Y=y$, δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X|Y}(x|y) = x(y+1)^2, 1 \leq x < 2$$

Τότε για την δεσμευμένη μέση τιμή θα έχουμε:

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X|Y}(x|y)dx = \int_{1}^{+2} x \cdot x(y+1)^2 dx = (y+1)^2 \int_{1}^{2} x^2 dx = \frac{7(y+1)^2}{3}$$

Επομένως εύκολα μπορούμε να οδηγηθούμε στον παρακάτω ορισμό που αφορά τη δεσμευμένη μέση τιμή.

Ορισμός 1.10: Αν X και Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και $f_{X|Y}(x|y)$ η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δοθέντος Y, τότε η *δεσμευμένη μέση τιμή* της τυχαίας μεταβλητής X δοθέντος της $Y = y$, δηλαδή της $E(X|Y)$, ορίζεται από τη σχέση:

$$E(X|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x|y)dx$$

Στην περίπτωση που επιθυμούμε να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y έχοντας ως γνωστή τη τυχαία μεταβλητή X, αρκεί να είναι γνωστή η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της Y δοθέντος X, δηλαδή της $f_{Y|X}(y|x)$. Τότε η δεσμευμένη τιμή της Y δοθέντος X θα είναι:

$$E(Y|X) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y|x)dy$$

Μία εξαιρετικά σημαντική ποσότητα της θεωρίας πιθανοτήτων και της στατιστικής είναι η διακύμανση μίας τυχαίας μεταβλητής. Η ποσότητα αυτή έχει άμεση σχέση με αυτή της μέσης τιμής μίας τυχαίας μεταβλητής.
Μία διαισθητική ερμηνεία της διακύμανσης, είναι ότι αποτελεί ένα μέτρο το οποίο δείχνει πόσο κοντά στη μέση τιμή βρίσκονται οι τιμές μίας τυχαίας μεταβλητής.
Έπεται παράδειγμα υπολογισμού της διακύμανσης μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.

***Παράδειγμα 1.9*:** Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \frac{2}{x^5}, \qquad x \geq 1$$

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης θα ακολουθηθεί η παρακάτω διαδικασία:

- Αρχικά γίνεται υπολογισμός της μέσης τιμής της τυχαίας μεταβλητής.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{+\infty} x\frac{2}{x^5}dx = 2\int_{1}^{+\infty} x^{-4}\,dx = 2\left[\frac{x^{-4\,+1}}{-4\,+1}\right]_{1}^{+\infty} = \frac{2}{3}$$

- Στη συνέχεια γίνεται υπολογισμός της ροπής δευτέρας τάξεως της τυχαίας μεταβλητής X. Γενικά, ως ροπή τάξεως κ μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ ορίζουμε τον εξής υπολογισμό:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx$$

Συνεπώς για τη ροπή δευτέρας τάξεως θα έχουμε:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{1}^{+\infty} x^2 \frac{2}{x^5} dx = 2\int_{1}^{+\infty} x^{-3}\, dx = 2\left[\frac{x^{-3+1}}{-3\,+\,1}\right]_{1}^{+\infty} = 1$$

- Τέλος η διακύμανση είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής του παρακάτω τύπου:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

Μπορούμε τώρα να παραθέσουμε τον μαθηματικό ορισμό της διακύμανσης μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής *X*.

Ορισμός 1.11: Η μέση τιμή:

$$\begin{aligned} E[(X - E(X))^2] &= E[(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2] \\ &= E(X)^2 - 2E(X)E(X) + (E(x))^2 \\ &= E(X)^2 - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 \\ &= E(X)^2 - (E(X))^2 = Var(X) \end{aligned}$$

καλείται *διασπορά* της τυχαίας μεταβλητής *X*.

Μία εξαιρετικά σημαντική έννοια για την θεωρία πιθανοτήτων και στατιστικής είναι αυτή της ροπογεννήτριας συνάρτησης. Ακολουθεί ο ορισμός της.

Ορισμός 1.12: Έστω μία τυχαία μεταβλητή X για την οποία για την οποία υπάρχει η μέση τιμή $E(e^{tX})$ για κάθε t που ανήκει σε ένα διάστημα της μορφής $(-\delta, \delta),\ \delta > 0$. Τότε η συνάρτηση:

$$M_X(t) = M(t) = E(e^{tX}), \qquad |t| < \delta$$

Θα λέγεται *ροπογεννήτρια συνάρτηση* της τυχαίας μεταβλητής X.

Αν η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, τότε σύμφωνα με όσα έχουν γραφεί προηγουμένως στο κεφάλαιο για τον ορισμό της μέσης τιμής μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, η ροπογεννήτρια συνάρτηση θα δίνεται από τον τύπο:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} f(x)dx, \;\; |t| < \delta$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση ορίζει με μονοσήμαντο τρόπο την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X. Πιο συγκεκριμένα, αν X, Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με ροπογεννήτριες $M_X(t), M_Y(t)$ αντίστοιχα και για κάποιο $\delta > 0$ ισχύει ότι:

$$M_X(t) = M_Y(t), \;\; \text{για κάθε } t \in (-\delta, \delta),$$

Τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y θα έχουν ακριβώς την ίδια κατανομή.

1.2.4 Χαρακτηριστική Συνάρτηση

Ένας βασικός τομέας, που αποτελεί πηγή σημαντικών προβλημάτων για τη θεωρία πιθανοτήτων αφορά τη μελέτη τυχαίων μεταβλητών. Κύριος τρόπος αντιμετώπισης αυτού του είδους προβλημάτων αποτελεί η χρήση των συναρτήσεων κατανομής. Δύο κλάδοι της μαθηματικής επιστήμης που προσφέρουν τρόπους για την καλύτερη μελέτη των συναρτήσεων κατανομής αποτελούν η Πραγματική και η Μιγαδική Ανάλυση. Συχνά για τη μελέτη των συναρτήσεων κατανομής γίνεται χρήση μετασχηματισμών των συναρτήσεων αυτών. Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι από τους πλέον διαδεδομένους τρόπους μετασχηματισμού και μάλιστα με τα περισσότερα πλεονεκτήματα.
Αρχικά δίνεται παράδειγμα υπολογισμού χαρακτηριστικής συνάρτησης μίας τυχαίας μεταβλητής και στη συνέχεια ακολουθεί ο ορισμός της.

***Παράδειγμα 1.10*:** Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, $Exponential\sim(\lambda)$, όπου$\lambda > 0$, δηλαδή πεδίο ορισμού το $(0, \infty)$ και σύνολο τιμών το $0 \le x < \infty$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της X βρίσκεται ως εξής:

$$\varphi(x) = E\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} f(x)\, dx \; = \int_{0}^{\infty} e^{itX} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_{0}^{\infty} e^{itX}\, e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_{0}^{\infty} e^{(it-\lambda)x}\, dx = \lambda \int_{0}^{\infty} e^{-(\lambda\, -\, it)x}\, dx = \lambda\, \frac{1}{-(\lambda - tx)} \left(e^{-(\lambda - tx)\infty} - \, e^{-(\lambda - tx)0}\right)$$

$$= \lambda\, \frac{1}{-(\lambda - tx)} (e^{-\infty} - \, e^{0}) = \lambda\, \frac{1}{-(\lambda - tx)} (0 - \, 1) = \frac{\lambda}{-(\lambda - tx)}$$

Και θέτοντας τον όρο tx ισο με s παίρνουμε τελικά ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή είναι ίση με $\frac{\lambda}{-(\lambda-s)}$.

Ορισμός 1.13: Έστω X τυχαία μεταβλητή η οποία έχει συνάρτηση κατανομής την $F_X(x)$ και έστω iμια φανταστική μονάδα. Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(\kappa)$ της τυχαίας μεταβλητήςX ορίζεται ως η αναμενόμενη τιμή της ποσότητας $e^{i\kappa X}$. Δηλαδή:

$$\varphi_X(\kappa) = E\left[e^{i\kappa X}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa X} dF_X(\kappa)\,, \kappa \in \mathbb{R}$$

Επίσης με τη χρήση συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση γράφεται και ως εξής:

$$\varphi_X(\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa X} f(x) dx$$

1.2.5 Στοχαστική Διαδικασία

Κάθε μεταβλητή της οποίας η τιμή μεταβάλλεται με το πέρασμα του χρόνου με αβέβαιο τρόπο, λέγεται ότι ακολουθεί μία στοχαστική διαδικασία. Οι στοχαστικές διαδικασίες κατηγοριοποιούνται σε διαδικασίες διακριτού χρόνου και σε διαδικασίες συνεχούς χρόνου. Στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου είναι εκείνη στην οποία η τυχαία μεταβλητή μπορεί πάρει κάποια τιμή μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, ενώ στη στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου η τυχαία μεταβλητή μπορεί να πάρει κάποια τιμή οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Οι στοχαστικές διαδικασίες μπορούν ακόμα να διακριθούν σε διαδικασίες διακριτής και συνεχούς τυχαίας μεταβλητής. Σε μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, η τυχαία μεταβλητή μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα συγκεκριμένο πεδίο ορισμού, ενώ στη διαδικασία διακριτής τυχαίας μεταβλητής, η τυχαία μεταβλητή μπορεί να λάβει μόνο συγκεκριμένες διακεκριμένες τιμές.

Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσουν μόνο στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου, συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 1.14: Υποθέτουμε χώρο πιθανότητας $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία τυχαία μεταβλητή, όπου Ω είναι ο δειγματικός χώρος, $\mathcal{F}$ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω, P ένα αριθμήσιμο μη αρνητικό μέτρο πάνω στο χώρο $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ με συνολική μάζα πιθανότητας $P(\Omega) = 1$ και X μία μετρήσιμη συνάρτηση $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\} \in F$, για κάθε *σύνολο Borel* $B \in B(\mathbb{R})$.

Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \in T\}$ ορισμένων στο χώρο πιθανότητας $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ με πραγματική παράμετρο t η οποία συμβολίζει το χρόνο. Η ποσότητα $X_t(\omega)$ είναι η τιμή της διαδικασίας τη χρονική στιγμή t όταν από το δειγματικό χώρο Ω έχει επιλεγεί με τυχαίο τρόπο ένα $\omega \in \Omega$. Το σύνολο T καλείται σύνολο παραμέτρων. Αν το σύνολο T είναι ο άξονας των πραγματικών αριθμών τότε η διαδικασία λέγεται συνεχούς χρόνου, ενώ αν το T είναι το σύνολο ακεραίων τότε η διαδικασία λέγεται διακεκριμένου χρόνου. Επιπλέον η διαδικασία $X_t(\omega)$ λέγεται διακεκριμένης κατάστασης αν οι τιμές της είναι μετρήσιμες (αριθμήσιμες), διαφορετικά λέγεται συνεχούς κατάστασης.

Όπως έχουμε δει έως τώρα, η στοχαστική διαδικασία $X_t(\omega)$ αποτελείται από τις τυχαίες μεταβλητές t και ω. Κρατώντας μια από τις δύο τυχαίες μεταβλητές σταθερή λαμβάνουμε :

- είτε μια τυχαία μεταβλητή, θεωρώντας ότι ο χρόνος tείναι σταθερός.

$$\omega \to \mathrm{X_t}(\omega), \omega \in \Omega$$

- είτε μια συνάρτηση χρόνου, θεωρώντας ότι το $\omega \in \Omega$ είναι σταθερό

$$t \to \mathrm{X_t}(\omega), t \in T$$

η οποία καλείται δειγματική (sample function).

Ακολουθεί παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας σε συνεχή χρόνο.

***Παράδειγμα 1.11*:** Έστω ότι $t \in R^+$ και για κάθε t ορίζουμε μία τυχαία μεταβλητή $\mathrm{X_t}$ η οποία έχει την ακόλουθη κατανομή πιθανότητας:

$$P(\mathrm{X_t} \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

Επομένως, η $\mathrm{X_t}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία και επιπλέον για αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για κάθε $t \in R$ η $\mathrm{X_t}$ είναι μία κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με μέσο μηδέν και διακύμανση t.

Στο παρόν κεφάλαιο ορίστηκαν μερικές από τις βασικότερες έννοιες που προέρχονται από τον τομέα της στατιστικής και των πιθανοτήτων. Μπορεί να θεωρηθεί ως το πρώτο μέρος της προσπάθειάς μας να θέσουμε τη μαθηματική βάση πάνω στην οποία θα τεθεί η ανάπτυξη του κεφαλαίου δύο και τρία. Το κεφάλαιο δύο έρχεται με τη σειρά του, ως δεύτερο μέρος, να συμπληρώσει και συνάμα να ολοκληρώσει την προσπάθεια αυτή.

Κεφάλαιο 2

Στοχαστική Θεωρία

2.1 Εισαγωγή

Μια ειδική κατηγορία των στοχαστικών διαδικασιών αποτελούν οι *διαδικασίες martingale*, οι οποίες διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο τόσο στη θεωρία πιθανοτήτων και τη στοχαστική ανάλυση όσο και στις εφαρμογές αυτών στο πεδίο των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Σε αυτό το κεφάλαιο της εργασίας θα γίνει μία εισαγωγική παρουσίαση του βασικού μέρους της θεωρίας των *martingale* που είναι απαραίτητη για την κατανόηση των διαδικασιών αυτών και τις οποίες θα χρειαστούμε για την ανάπτυξη των θεμάτων που άπτονται του ενδιαφέροντός μας στην παρούσα εργασία. Επιπλέον δίνονται παραδείγματα στα οποία γίνεται διάκριση πότε μία στοχαστική διαδικασία είναι μια *διαδικασία martingale* και πότε δεν είναι. Τέλος, θα πραγματοποιηθεί προσπάθεια παρουσίασης εφαρμογών των ιδιοτήτων των *διαδικασιών martingales* στην οικονομική θεωρία.

2.2 Οι Διαδικασίες Martingale

Αρχικά, ο όρος *martingale* αναφερόταν ως μία κατηγορία στρατηγικών πονταρίσματος σε σχέση με τον στοιχηματισμό και η οποία έκανε την εμφάνισή της στη Γαλλία το δέκατο όγδοο αιώνα. Η πιο απλή από αυτές τις στρατηγικές σχεδιάστηκε για μία μορφή παιχνιδιού στην οποία κατά τη ρίψη ενός νομίσματος, ο συμμετέχοντας κερδίζει αν φέρει *κορώνα* και χάνει αν φέρει *γράμματα*. Η στρατηγική έχει ως εξής: ο συμμετέχοντας στο παιχνίδι, μετά από κάθε ζημιά, διπλασιάζει το ποσό με το οποίο έλαβε μέρος στην προηγούμενη συμμετοχή του, με την προσμονή ότι μία πιθανή νίκη θα καλύψει όλες τις προηγούμενες ζημιές και επιπλέον θα του αποφέρει κέρδος ίσο με το αρχικό ποντάρισμα. Αν γίνει η υπόθεση ότι ο συμμετέχοντας έχει στη διάθεσή του άπειρο μέγεθος περιουσίας, κάτι που μπορεί να του επιτρέψει να ανανεώνει συνέχεια τη συμμετοχή του στο παιχνίδι, τότε μπορεί να θεωρηθεί ως βέβαιο γεγονός η εμφάνιση του αποτελέσματος κεφαλή στη ρίψη του νομίσματος. Συνεπώς, η στρατηγική *martingale* θεωρούνταν από πολλούς ως ένας σίγουρος τρόπος κέρδους σε τέτοιου είδους στοιχήματα. Όμως, ο εκθετικός ρυθμός αύξησης του πονταρίσματος σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κανένας δεν έχει στην κατοχή του απεριόριστη περιουσία είχε σαν συνέπεια εκείνος που θα επέλεγε την συγκεκριμένη στρατηγική να καταλήγει χρεοκοπημένος. Αυτός είναι και ο λόγος άλλωστε που τα καζίνο εφαρμόζουν ανώτατα όρια ανοχής στο ποντάρισμα. Η ιδέα των *martingale* εισήχθηκε για πρώτη φορά στον κλάδο της θεωρίας των πιθανοτήτων από τον *Paul Lévy* παρόλο που δεν ήταν εκείνος που έδωσε το όνομα αυτό. Ο όρος *martingale* δόθηκε αργότερα από τον *Ville* (1939), ο οποίος εισήγαγε και τις συνεχείς διαδικασίες *martingale*. Θα πρέπει να σημειωθεί πως μεγάλη ήταν και η συνεισφορά στην ανάπτυξη της θεωρίας των *martingale* και από τον *Joseph Leo Doob* [22].

Προτού προχωρήσουμε στη μαθηματική διατύπωση του ορισμού μιας *διαδικασίας martingale* θα αναφερθούν οι ορισμοί της *διήθησης* (*filtration*) και της *προσαρμοσμένης διήθησης* (*adapted filtration*).

Ορισμός 2.1: Έστω μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{S_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ όπου t ο χρόνος και S_t η τιμή της τυχαίας μεταβλητής τη χρονική στιγμή *t*. Έστω επίσης $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ μια οικογένεια συνόλων (σ-άλγεβρα) που περιέχουν την πληροφορία η οποία είναι γνωστή τη χρονική στιγμή t. Προφανώς για $s < t < T$ θα ισχύει ότι:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_T$$

καθώς η πληροφορία που γνωρίζουμε τη χρονική στιγμή t, για $t > s$, εμπεριέχει όλη την πληροφορία που γνωρίζαμε κάποια προηγούμενη χρονική στιγμή *s*. Η ακολουθία $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ λέγεται *διήθηση (filtration)*.

Ορισμός 2.2: Έστω $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ ένας χώρος πιθανότητας και $\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+$ μια διήθηση στον $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{S_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ λέγεται *προσαρμοσμένη (adapted) στη διήθηση* αν για κάθε $t = 0,1,2,\ldots$ η S_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη.

Διαισθητικά, μία προσαρμοσμένη διήθηση σημαίνει ότι η πληροφορία που διαθέτουμε εξελίσσεται παράλληλα με τη διαδικασία, ή αλλιώς ότι ο όγκος της πληροφορίας αυξάνεται καθώς ο χρόνος περνάει. Συνεπώς, θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία των τιμών των τυχαίων μεταβλητών S_t είναι *προσαρμοσμένη* (*adapted*) στη διήθηση $\mathcal{F}_t$, αν ισχύει ότι δεδομένης της πληροφορίας που είναι γνωστή τη στιγμή t (μέσω της διήθησης $\mathcal{F}_t$) η τιμή της S_t θα είναι επίσης γνωστή. Χρησιμοποιώντας διαφορετική πληροφορία (δηλαδή διαφορετική διήθηση $\mathcal{F}_t$), καταλήγουμε σε διαφορετική εκτίμηση μίας μελλοντικής τιμής της διαδικασίας $\{S_t\}$, δηλαδή σε διαφορετική πρόβλεψη [4].

Ακολουθούν παραδείγματα μέσα από τα οποία δίνεται μία αρχική κατεύθυνση για το πότε μία στοχαστική διαδικασία είναι μία *διαδικασία martingale* αλλά και πότε δεν πληροί την ιδιότητα αυτή.

***Παράδειγμα 2.1*:** Στο παράδειγμα αυτό θα αποδειχθεί ότι η προτεινόμενη ακολουθία είναι μία *διαδικασία martingale*. Θεωρούμε τις διαδοχικές ρίψεις ενός δίκαιου ζαριού (δηλαδή ενός ζαριού που έχει ίδια πιθανότητα να φέρει ζυγό αριθμό και ίδια πιθανότητα να φέρει περιττό αριθμό) και ορίζουμε για την n-οστή ρίψη ($n \in \mathbb{N}$) την τυχαία μεταβλητή:

$$X_n = \begin{cases} 1, & \acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha\ \acute{\varepsilon}\nu\delta\varepsilon\iota\xi\eta \\ -1, & \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}\ \acute{\varepsilon}\nu\delta\varepsilon\iota\xi\eta \end{cases}$$

Ορίζουμε επίσης και την τυχαία μεταβλητή $Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Παρατηρούμε ακόμα ότι $E(X_n) = 0$. Έστω τώρα ότι θεωρούμε ένα παιχνίδι κατά το οποίο ο συμμετέχων ποντάρει μία νομισματική μονάδα στην περίπτωση επέλευσης του ενδεχομένου να έρθει ζυγός ή περιττός αριθμός (οπότε και θα κερδίσει μία νομισματική μονάδα αν έρθει ζυγός αριθμός και χάνει αντίστοιχα μία στην περίπτωση που έρθει περιττός αριθμός). Τότε η τυχαία μεταβλητή Z_n θα δίνει την περιουσία του συμμετέχοντα στο παιχνίδι κατά την χρονική στιγμή n. Ορίζουμε ως $\mathcal{F}_n$ τη σ-άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$. Διαισθητικά η τυχαία μεταβλητή X_{n+1} είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_n$, δηλαδή της συσσωρευμένης υπάρχουσας πληροφορίας που προέρχεται από τις ενδείξεις των τυχαίων μεταβλητών X_i, $i = 1,2,\dots,n$. Συνεπώς για τον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής της περιουσίας του συμμετέχοντα στην $n+1$ ρίψη θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= E[Z_n + X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= E[Z_n | \mathcal{F}_n] + E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= Z_n + 0 = Z_n \end{aligned}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα συμπεραίνεται ότι ο συμμετέχοντας αναμένεται να έχει στη $n+1$ ρίψη την ίδια περιουσία που είχε και στη n-οστή ρίψη δοθέντος της μέχρι τότε διαθέσιμης πληροφορίας του παιχνιδιού. Θα πρέπει να αναφερθεί πως καταλήξαμε στο παραπάνω αποτέλεσμα έχοντας κάνει χρήση το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή Z_n είναι $\mathcal{F}_n - \mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $E[Z_k | \mathcal{F}_n] = Z_n$ για $\kappa > n$. Εφόσον $E[|Z_n|] < \infty$, η Z_n είναι μία *διαδικασία martingale* ως προς την *διήθηση* $\mathcal{F}_n$.

Παράδειγμα 2.2: Θεωρούμε ένα μη δίκαιο νόμισμα το οποίο σε μία ρίψη του η πιθανότητα να έρθει *κορόνα* είναι ίση με p ενώ η πιθανότητα να έρθει *γράμματα* είναι ίση με $q = 1 - p$. Έστω επίσης ότι $X_{n+1} = X_n \pm 1$ καθώς και ότι $Y_n = (q/p)^{X_n}$. Τότε η διαδικασία $\{Y_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ είναι μία *martingale* δοθέντος της διαδικασίας $\{X_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1} | X_1, \dots, X_n] &= p(q/p)^{X_{n+1}} + q(q/p)^{X_n - 1} \\ &= p(q/p)(q/p)^{X_n} + q(p/q)(q/p)^{X_n} \\ &= q(q/p)^{X_n} + p(q/p)^{X_n} \\ &= (q/p)^{X_n} = Y_n \end{aligned}$$

Η παραπάνω διαδικασία είναι γνωστή και ως *διαδικασία martingale* του *De Moivre*.

Στο επόμενο παράδειγμα δίνεται παράδειγμα ακολουθίας που δεν είναι *διαδικασία* martingale.

***Παράδειγμα 2.3*:** Θεωρούμε ένα σωματίδιο το οποίο πραγματοποιεί είτε ένα βήμα δεξιά με πιθανότητα p είτε ένα βήμα αριστερά με πιθανότητα $q = 1 - p$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X_n η οποία δηλώνει τη θέση του σωματιδίου κάθε χρονική στιγμή. Συνεπώς, για αυτή την τυχαία μεταβλητή θα ισχύει ότι:

$$P(X_n = 1) = p \text{και } P(X_n = -1) = q$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $X_n, n \geq 0$ανεξάρτητες. Έστω $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$η θέση του σωματιδίου μετά από nμετατοπίσεις. Παρατηρώντας ότι $E(|S_n|) \leq n$θα έχουμε ότι:

$$E\left(S_n \middle| X_{1,} \ldots, X_n\right) = E(S_n + X_{n+1} | X_1, \ldots, X_n) = S_n + (p + q)$$

Άρα η ακολουθία $\{S_n, n \geq 0\}$,δεν είναι *martingale*.

Αποτέλεσμα όλων των παραπάνω είναι ο ορισμός που ακολουθεί:

Ορισμός 2.3: Θα λέμε ότι η διαδικασία $\{S_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ είναι μία *διαδικασία martingale* αν ισχύει ότι:

- $E[|S_t|] < \infty$, δηλαδή η μέση τιμή είναι πεπερασμένη και άρα υπάρχει.
- Η S_t είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $\mathcal{F}_t$.
- $E[S_T | \mathcal{F}_t] = E[S_t]$ για $t < T$ με πιθανότητα 1, δηλαδή η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για τη μελλοντική τιμή S_T είναι η τρέχουσα τιμή της S_t.

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι *martingale* είναι μία διαδικασία η οποία αποτελεί πρότυπο μοντέλο για την περιγραφή ενός δίκαιου παιχνιδιού, στο οποίο η γνώση των αποτελεσμάτων που έχουν εμφανιστεί στο παρελθόν δεν παίζει κανένα ρόλο για την πρόβλεψη κατά μέσο όρο των μελλοντικών αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, μία *διαδικασία martingale* είναι μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, δηλαδή μία στοχαστική διαδικασία, για την οποία αν για κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή της διαδικασίας (παρόν) γνωρίζουμε την τιμή της και, θελήσουμε να υπολογίσουμε ποια θα είναι η αναμενόμενη τιμή της διαδικασίας σε κάποια επόμενη χρονική στιγμή, τότε θα καταλήξουμε στο ότι εκείνη θα είναι ίση με την παρατηρούμενη τιμή της διαδικασίας στο παρόν, ακόμα και αν είναι γνωστές όλες οι προηγούμενες τιμές της διαδικασίας.

Γενικά, για μία διαδικασία μπορεί να ισχύει ότι η αναμενόμενη τιμή της σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή ισούται με την αναμενόμενη τιμή της διαδικασίας σε μία μελλοντική χρονική στιγμή ακόμα και αν δεν είναι μία *διαδικασία martingale*. Όμως σε μια τέτοια περίπτωση, η γνώση όλων των τιμών που έχει λάβει η διαδικασία στο παρελθόν μπορεί να αποτελέσει παράγοντα που θα δράσει θετικά ως προς την μείωση της αβεβαιότητας στον υπολογισμό των μελλοντικών αποτελεσμάτων. Συνεπώς, στην περίπτωση που χρησιμοποιείται κάποια στρατηγική κέρδους από έναν παίχτη, η οποία δεν έχει τα χαρακτηριστικά μίας *martingale*, έχοντας στη διάθεσή του τα αποτελέσματα που έχουν προηγηθεί (ιστορία αποτελεσμάτων), μπορεί να περιμένει με μεγαλύτερη ακρίβεια στην πρόβλεψη των μελλοντικών αποτελεσμάτων. Οι διαδικασίες *martingale* αποκλείουν την πιθανότητα εφαρμογής στρατηγικών κέρδους οι οποίες βασίζονται στο ιστορικό των αποτελεσμάτων και για τον λόγο αυτό θεωρούνται ως διαδικασίες που μοντελοποιούν ¨δίκαια παιχνίδια¨.

Θεώρημα 2.1: Έστω ότι η $X = (X_n: n \geq 0)$ είναι μια *διαδικασία martingale* προσαρμοσμένη στη διήθηση $(\mathcal{F}_t: n \geq 0)$ και $D_j = X_j - X_{j-1}$. Τότε:

1. $E\left[D_j \middle| \mathcal{F}_{0,\dots,}\mathcal{F}_{j-1}\right] = 0 \ \gamma\iota\alpha \ j \geq 1$

2. $E\left[D_j\right] = 0 \ \gamma\iota\alpha \ j \geq 1 \ \kappa\alpha\iota \ E[X_n] = E[X_0]$

Αν επιπλέον ισχύει ότι η X_n είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη θα ισχύει ότι:

3. $E\left[D_i D_j\right] = 0 \ \gamma\iota\alpha \ i \neq j \ \kappa\alpha\iota \ E[X_0 D_i] = 0 \ \gamma\iota\alpha \ i \geq 1$

4. $Var(X_n) = Var(X_0) + \sum_{i=1}^{n} Var(\,D_i)$

Απόδειξη: Για το αποτέλεσμα 1 παρατηρούμε το εξής:

$$E\left[D_j \middle| \mathcal{F}_{0,\dots,}\mathcal{F}_{j-1}\right] = E[X_j - X_{j-1} | \mathcal{F}_{0,\dots,}\mathcal{F}_{j-1}]$$

$$= E\left[X_j \middle| \mathcal{F}_{0,\dots,}\mathcal{F}_{j-1}\right] - X_{j-1} = 0$$

Η απόδειξη του αποτελέσματος 2 προκύπτει άμεσα μέσω του αποτελέσματος 1. Για την απόδειξη της 3 υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $i < j$. Τότε:

$$E\left[D_i D_j \middle| \mathcal{F}_{0,\dots,}\mathcal{F}_{j-1}\right] = D_i E\left[D_j \middle| \mathcal{F}_{0,\dots,}\mathcal{F}_{j-1}\right] = 0$$

Συνεπώς $E\left[D_i D_j\right] = 0.$ Με τον ίδιο τρόπο ακολούθως προκύπτει και ότι $E[X_0 D_i] = 0 \ \gamma\iota\alpha \ i \geq 1$. Το 4 προκύπτει απευθείας από το 3 καθώς και από το γεγονός ότι $E[D_i] = 0 \ \gamma\iota\alpha \ i \geq 1$.

Οι στοχαστικές *διαδικασίες martingale* παρουσιάζουν σημαντικές εφαρμογές στην οικονομική επιστήμη. Θα δείξουμε πως η αξία ενός χρεογράφου είναι μία *martingale*, [7].

2.2.1 Η Αξία των Χρεογράφων ως Martingale

Στην χρηματοοικονομική επιστήμη συχνά θεωρείται ότι η αξία των χρεογράφων έχουν την ιδιότητα *martingale*. Κύριος υποστηρικτής της άποψης αυτής ήταν ο Αμερικανός οικονομολόγος *Paul Samuelson* ο οποίος ανέπτυξε και το αντίστοιχο μοντέλο.

Σύμφωνα με την κλασσική θεμελιώδη οικονομική ανάλυση για την αξία ενός χρεογράφου, εκείνη ισούται με την παρούσα αξία των μελλοντικών χρηματοροών που πληρώνει το αξιόγραφο κατά τη διάρκεια της ζωής του. Οι αξίες εμφανίζουν εκτροπές γύρω από την αρχική εκτίμηση της αξίας των χρεογράφων λόγω ποικίλων και τυχαίων διακυμάνσεων, βασικών στοιχείων του οικονομικού περιβάλλοντος, όπως ο πληθωρισμός, η ανεργία, η δημοσιονομική πολιτική ενός κράτους, που επηρεάζουν την πορεία των επιτοκίων και άρα των προεξοφλητικών παραγόντων. Έτσι ένας επενδυτής που έχει στη διάθεσή του την κατάλληλη πληροφόρηση (διήθηση), μπορεί να προχωρήσει σε μία πιο ρεαλιστική εκτίμηση της τιμής και να χαράξει μία πιο επικερδή επενδυτική στρατηγική. Σε κάθε περίπτωση, λόγω των εξισορροπητικών δυνάμεων της αγοράς, η πραγματική αξία του χρεογράφου εν τέλει θα φανεί.

Ακολουθώντας την παραπάνω λογική ως προς το πώς υπολογίζεται η αξία ενός χρεογράφου θα ορίσουμε τα ακόλουθα:

- Έστω ότι το είδος του χρεογράφου που εξετάζεται είναι αυτό μίας μετοχής.
- p_t είναι η τιμή της μετοχής κατά τη χρονική στιγμή t
- p_{t+1} είναι η τιμή της μετοχής κατά τη χρονική στιγμή $t+1$
- d_{t+1} είναι τα μερίσματα που αποδίδει η μετοχή στον κάτοχό της κατά τη χρονική στιγμή $t+1$
- $\mathcal{F}_t$ είναι το ιστορικό των τιμών της μετοχής έως τη χρονική στιγμή t
- r είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο

Τότε για την τιμή μίας μετοχής τη χρονική στιγμή t θα έχουμε ότι εκείνη ισούται με την αναμενόμενη μελλοντική τιμή της συν τα μερίσματα, προεξοφλημένα κατά το παρόν (χρονική στιγμή t), δηλαδή:

$$p_t = (1+r)^{-1}E[p_{t+1} + d_{t+1}|\mathcal{F}_t]$$

Αν ορίσουμε τώρα ως n_t τον αριθμό των χρεογράφων που έχει ένας επενδυτής στο χαρτοφυλάκιο του, τότε για την αξία του χαρτοφυλακίου προεξοφλημένη την χρονική στιγμή $t = 0$ θα έχουμε:

$$V_t = (1+r)^{-1} p_t n_t$$

Θεωρούμε τώρα ότι ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου επανατοποθετεί το εισόδημα που καρπώνεται από μερίσματα των μετοχών σε νέες μετοχές. Τότε η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή $t+1$ θα είναι:

$$p_{t+1} n_{t+1} = (p_{t+1} + d_{t+1}) n_t$$

Αν προβούμε στον υπολογισμό δεσμευμένης μέση τιμής της προεξοφλημένης τιμής του χαρτοφυλακίου του επενδυτή ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$, τη χρονική στιγμή t, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[V_{t+1} | \mathcal{F}_t] &= E[(1+r)^{-t-1} p_{t+1} n_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= E[(1+r)^{-t-1} (p_{t+1} + d_{t+1}) n_t | \mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^{-t} n_t (1+r)^{-1} E[p_{t+1} + d_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^{-t} p_t n_t = V_t \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι η ποσότητα V_t, δηλαδή η αξία του χαρτοφυλακίου των μετοχών είναι μία *martingale*.

2.3 Στοχαστικός Λογισμός κατά Itô

Στην ενότητα αυτή κύριος σκοπός μας είναι η παρουσίαση και απόδειξη ενός πολύ βασικού λήμματος που ονομάζεται λήμμα του Itô. Το λήμμα αυτό ανήκει στον τομέα της στοχαστικής ανάλυσης κατά Itô, του κλάδου των μαθηματικών που αφορά τη στοχαστική ανάλυση. Ο τομέας αυτός της στοχαστικής ανάλυσης πήρε το όνομά του προς τιμή του Ιάπωνα μαθηματικού Kiyoshi Itô (1915-2008) εξαιτίας της σημαντικής συνεισφοράς του σε αυτόν. Το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô, οι σημαντικές ιδιότητές του καθώς και το θεώρημα του Itô γνωστό και ως λήμμα του Itô, άνοιξε νέους δρόμους στην καλύτερη μαθηματικά κατανόηση των τυχαίων γεγονότων, επεκτείνοντας τους τρόπους υπολογισμού και επεξεργασίας των στοχαστικών διαδικασιών, όπως για παράδειγμα της *κίνησης Brown* την οποία θα εξετάσουμε στο κεφάλαιο τρία.

Επιπλέον, όλη αυτή η γνώση που παράχθηκε από τον Itô στον τομέα της στοχαστικής ολοκλήρωσης βρήκε σημαντικές εφαρμογές στον τομέα της χρηματοοικονομικής επιστήμης και συγκεκριμένα σε προβλήματα όπως η τιμολόγηση χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων (όπως παράγωγα συμβόλαια), η βέλτιστη επιλογή χαρτοφυλακίου και αλλού.

Πέρα από την παρουσίαση και απόδειξη του λήμματος του Itô, θα αρκεστούμε στον απλό ορισμό του ολοκληρώματος του Itô και στην περίπτωση που αυτό μετατρέπεται σε στοχαστική διαδικασία, καθώς η πιο ενδελεχής και εις βάθος παρουσίαση θεμάτων που άπτονται στον τομέα αυτό ξεφεύγει από τα πλαίσια του σκοπού της παρούσης διπλωματικής εργασίας.

Ορισμός του Ολοκληρώματος Itô

Θεωρούμε ότι έχουμε μία τυχαία συνάρτηση f η οποία εξαρτάται με κάποιο τρόπο από την έκβαση κάποιας στοχαστικής διαδικασίας και θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα της επάνω στις μεταβολές της διαδικασίας αυτής. Στην περίπτωση αυτή θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_a^b f(t,\omega)dB_t(\omega)$$

Όπου $B_t(\omega)$ είναι η στοχαστική διαδικασία και $f:(0,\infty)\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ και χώρος πιθανότητας είναι ο $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Η εξάρτηση της συνάρτησης από την τυχαία μεταβλητή και συγκεκριμένα από την στοχαστική διαδικασία $B_t(\omega)$ υπάρχει μέσω του ω.

Το Ολοκλήρωμα του Itô ως Στοχαστική Διαδικασία

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος του Itô στην προηγούμενη παράγραφο παρατηρούμε ότι τα όρια της ολοκλήρωσης a και bείναι δεδομένα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρήσουμε ότι το κάτω όριο της ολοκλήρωσης παραμένει σταθερό θέτοντας $a=0$, επιτρέποντας το επάνω όριο της ολοκλήρωσης να μεταβάλλεται και το θέτουμε να είναι $b=t$.

Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t f(t,\omega)dB_t(\omega)$ όπου $0\leq t\leq T$. Για κάθε τιμή του t το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται όπως και παραπάνω αρκεί η στοχαστική διαδικασία f να ανήκει στον κατάλληλο χώρο $M^2([0,T])$. Σύμφωνα με τα όσα έχουν γραφτεί έως τώρα, για κάθε τιμή που μπορεί να λάβει tπαίρνουμε μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και η τιμή της είναι ίση με το ολοκλήρωμα $\int_0^t f(t,\omega)dB_t(\omega)$. Συνεπώς δημιουργήσαμε μία στοχαστική διαδικασία:

$$I_t\coloneqq\int_0^t f(t,\omega)dB_t(\omega)$$

Η παραπάνω στοχαστική διαδικασία ονομάζεται το *αόριστο ολοκλήρωμα του Itô*.

Θεώρημα 2.2: Έστω $f \in M^2([0,T])$ για $0 \leq t \leq T$. Τότε για τη στοχαστική διαδικασία I_t όπως την ορίσαμε προηγουμένως θα ισχύει ότι μια *διαδικασία martingale.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι $E[I_t|\mathcal{F}_s]$=I_s, για $0 \leq t \leq T$. Αρχικά παρατηρούμε ότι η στοχαστική διαδικασία I_t μπορεί να γραφτεί ως αξής:

$$I_t = I_s + \int_s^t f(t')dB_{t'}(\omega)$$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας του ολοκληρώματος του Itô κατά την οποία έχουμε ότι:

$$E\left[\int_a^b f dB_t\right] = 0$$

Καθώς και του γεγονότος της ανεξαρτησίας του ολοκληρώματος $\int_s^t f(t')dB_{t'}(\omega)$ από την διήθηση $\mathcal{F}_s$, θα έχουμε ότι:

$$E\left[\int_s^t f(t')dB_{t'}|\mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t f(t')dB_{t'}\right] = 0$$

Επομένως, σύμφωνα με όλα τα παραπάνω θα έχουμε ότι:

$$E[I_t|\mathcal{F}_s] = E[I_s|\mathcal{F}_s] + E\left[\int_s^t f(t')dB_{t'}|\mathcal{F}_s\right] = I_s$$

Συνεπώς η στοχαστική διαδικασία I_t είναι μία *διαδικασία martingale.*

Το Λήμμα του Itô

Προτού δοθεί το λήμμα του Itô θα ορίσουμε μια νέα κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών κάνοντας χρήση του στοχαστικού ολοκληρώματος του Itô. Οι διαδικασίες αυτές έχουν σημαντικές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά. Το λήμμα του Itô αποτελεί μία ταυτότητα η οποία χρησιμοποιείται στο στοχαστικό λογισμό κατά Itô, για την εύρεση της παραγώγου μίας συνάρτησης στοχαστικής διαδικασίας που εξαρτάται από το χρόνο. Στην ουσία αποτελεί το ανάλογο του τρόπου υπολογισμού μίας παραγώγου μέσω του κανόνα της αλυσίδας. Το λήμμα αυτό, αποτελεί το ανάπτυγμα της σειράς Taylor μέχρι την παράγωγο δευτέρου βαθμού και προσδιορισμού του τετραγώνου μίας προσαύξησης της στοχαστικής διαδικασίας με την προσαύξηση στο χρόνο. Το λήμμα αυτό είναι ευρέως γνωστό για την μεγάλη συνεισφορά του στη δημιουργία της εξίσωσης Black-Scholes για την εύρεση της τιμής ενός δικαιώματος αλλά και στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά γενικότερα.

Ορισμός 2.4: Μία διαδικασία Itô είναι μία στοχαστική διαδικασία X_t της μορφής:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dB_s$$

Όπου για τις g και h έχουμε ότι ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

$$\int_0^t a_s ds < \infty \ \kappa\alpha\iota \int_0^t b_s^2 ds < \infty$$

Η διαδικασία X_t μπορεί να γραφτεί και στην ακόλουθη μορφή:

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t$$

Έχοντας δώσει τον ορισμό των διαδικασιών Itô ένα σημαντικό ερώτημα που εγείρεται είναι τι μορφή μπορεί να έχει μία συνάρτηση μίας διαδικασίας Itô. Δηλαδή αν η συνάρτηση αυτή θα είναι και εκείνη μία διαδικασία Itô και στην περίπτωση που είναι ποια θα είναι η μορφή της. Το θεώρημα του Itô είναι αυτό το οποίο δίνει την απάντηση προσφέροντας έναν κανόνα αλλαγής μεταβλητών τέτοιος ώστε να ισχύει για στοχαστικά ολοκληρώματα.

Θεώρημα 2.3: Έστω μία στοχαστική διαδικασία X_t για την οποία ισχύει ότι $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$ και έστω συνάρτηση $f \in C^{1,2}$. Επιπλέον, ορίζοντας τη διαδικασία Z_t, ως $Z_t = f(X_t, t)$, τότε η Z_t θα έχει στοχαστική διαφορική εξίσωση που θα δίνεται από:

$$dZ_t = df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dX)^2$$

και

$$dt \cdot dt = 0$$

$$dt \cdot dW_t = 0$$

$$dW_t \cdot dW_t = dt$$

Απόδειξη: Το λήμμα του Itô προκύπτει από τη χρήση του αναπτύγματος Taylor δευτέρας τάξεως:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}dtdX$$

όμως έχουμε ότι:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \tag{2.1}$$

και πολλαπλασιάζοντάς την με dt προκύπτει:

$$dtdX_t = \mu X_t (dt)^2 + \sigma X_t dtdW_t$$

Υψώνοντας τη σχέση (2.1) στο τετράγωνο εξάγεται ότι:

$$(dX_t)^2 = \mu^2 X_t^2 (dt)^2 + \sigma^2 X_t^2 (dW_t)^2 + 2\mu\sigma X_t^2\, dtdW_t$$

Αλλά ισχύει ότι καθώς το $dt \rightarrow 0$ θα είναι:

$$dt \cdot dt = 0$$

$$dt \cdot dW_t = 0$$

$$dW_t \cdot dW_t = dt$$

Συνεπώς,

$$(dX_t)^2 = \sigma^2 X_t^2 dt$$

και επομένως,

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX)^2$$

2.4 Ιδιότητα Markov - Ισχυρή Ιδιότητα Markov

Στη θεωρία Πιθανοτήτων και τη Στατιστική, ο όρος *ιδιότητα Markov* αναφέρεται στην αμνήμων ιδιότητα μιας στοχαστικής διαδικασίας. Πήρε το όνομα της από τον Ρώσο Μαθηματικό Andrey Markov. Μία στοχαστική διαδικασία έχει την *ιδιότητα Markov* αν η κατανομή της δεσμευμένης πιθανότητας των μελλοντικών καταστάσεων της διαδικασίας εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση και όχι από την αλληλουχία των γεγονότων που τη διαδέχθηκαν ή θα τη διαδεχτούν. Μια διαδικασία με αυτή την ιδιότητα καλείται *διαδικασία Markov*.

Ορισμός 2.5: Έστω $X(t)$, $t \geq 0$ μία στοχαστική διαδικασία ορισμένη σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και διήθηση $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, +\infty)\}$. Η $X(t)$ θα είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία, αν $\forall\, t$ και $s > 0$ η δεσμευμένη κατανομή της $X(t+s)$ δοθέντος της διήθησης $\mathcal{F}_t$, είναι ίδια με τη δεσμευμένη κατανομή $X(t+s)$ δοθέντος του $X(t)$, δηλαδή:

$$P(X(t+s) \leq y | \mathcal{F}_t) = P(X(t+s) \leq y | X(t))$$

ή ισοδύναμα, αν $\forall t$ και $s > 0$ και κάθε μη-αρνητική *Borel-μετρήσιμη* συνάρτηση *f*, υπάρχει μία άλλη *Borel-μετρήσιμη* συνάρτηση g τέτοια ώστε:

$$E\left[f\big(X(t+s)\big) \middle| \mathcal{F}_t\right] = g(X(t))$$

Ο όρος *ισχυρή ιδιότητα Markov* είναι ίδιος με τον όρο *ιδιότητα Markov*, με εξαίρεση ότι η σημασία του «παρόντος» προσδιορίζεται υπό όρους μιας τυχαίας μεταβλητής γνωστής και ως *χρόνου διακοπής* (*stopping time*). Τόσο ο όρος της *ιδιότητας Markov* όσο και της ισχυρής *ιδιότητας Markov* έχουν χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με μία συγκεκριμένη αμνήμων ιδιότητα της εκθετικής κατανομής.

Προτού δοθεί ο ορισμός της ισχυρής ιδιότητας Markov, θα δοθεί ο ορισμός του χρόνου διακοπής.

Ορισμός 2.6: Ένας τυχαίος χρόνος $T \in [0, \infty]$ ορισμένος σε χώρο πιθανότητας με διήθηση $\mathcal{F}_t$, θα καλείται χρόνος στάσης εάν $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t > 0$.

Διαισθητικά, στις περισσότερες περιπτώσεις ένας χρόνος στάσης είναι η πρώτη φορά κατά την οποία συμβαίνει ένα γεγονός.

Ορισμός 2.7: Έστω ότι $X = (X(t): t \geq 0)$ είναι μια στοχαστική διαδικασία σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και φυσική διήθηση $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0, +\infty)\}$. Τότε η X θα έχει την ισχυρή *ιδιότητα Markov* αν για κάθε μεταβλητή χρόνου διακοπής τ με $\{\tau < \infty\}$, η διαδικασία $X_{\tau+t}$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_\tau \coloneqq \{A \in \mathcal{F}: \tau \cap A \in \mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ και $X_{\tau+t} - X_\tau$ έχουν την ίδια κατανομή με τη $X_t \forall\, t \geq 0$. Η *ισχυρή ιδιότητα Markov* είναι ισχυρότερη από την απλή *ιδιότητα Markov* αφού παίρνοντας για μεταβλητή στάσιμου $\tau = t$, προκύπτει η απλή Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Με το κεφάλαιο δύο έχουμε ολοκληρώσει τη σύνθεση της μαθηματικής βάσης πάνω στην οποία θα προσανατολιστούν όλα όσα θα ακολουθήσουν στα επόμενα κεφάλαια. Ορίσαμε εκείνες τις έννοιες που αφορούν και εξηγούν το στοχαστικό μέρος όλων όσων θα γραφούν στο κεφάλαια τρία κυρίως και πέντε, προκειμένου να γίνει κατανοητή η ανάλυση και η περαιτέρω παράθεση εννοιών που θα πραγματοποιηθεί στα κεφάλαια αυτά.

Κεφάλαιο 3

Η Κίνηση Brown

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, θα πραγματοποιηθεί αρχικά η παρουσίαση μίας εκ των βασικότερων από την κλάση όλων των στοχαστικών διαδικασιών, της *κίνησης Brown*. Κύριος λόγος για τον οποίο θα μιλήσουμε για αυτή τη στοχαστική διαδικασία είναι ότι αποτελεί ένα πολύ σημαντικό εργαλείο που λειτουργεί ως τη βάση για τη μοντελοποίηση της τιμής χρηματοοικονομικών προϊόντων όπως η τιμή μίας μετοχής. Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού, θα προβούμε σε μία ιστορική αναδρομή που σαν σκοπό έχει να αναδείξει τον τρόπο σύλληψης της ιδέας περί ύπαρξης της *κίνησης Brown* αλλά και τον τρόπο με τον οποίο εξελίχθηκε και εδραιώθηκε ως ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της μαθηματικής και οικονομικής επιστήμης. Στη συνέχεια γίνεται παρουσίαση του μαθηματικού ορισμού της *κίνησης Brown*, η διαδικασία γένεσης της *κίνησης Brown* από μία διαδικασία διακριτού χρόνου όπως ο τυχαίος περίπατος καθώς και μερικές εκ των βασικότερων ιδιοτήτων της.

Λόγω της βασικής αδυναμίας του μοντέλου της *κίνησης Brown* να μην αποκλείει τις αρνητικές τιμές που μπορεί να πάρει ο υποκείμενος τίτλος, το μοντέλο αυτό έδωσε τη θέση του στο μοντέλο της *γεωμετρικής κίνησης Brown* η οποία διορθώνει την αδυναμία του αρχικού μοντέλου. Συνεπώς, στο δεύτερο μέρος του παρόντος κεφαλαίου θα γίνει η παρουσίαση του μοντέλου της *γεωμετρικής κίνησης Brown* που αφορά την τιμή ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος, καθώς και ο τρόπος δημιουργίας της *γεωμετρικής κίνησης Brown* μέσω ενός διωνυμικού μοντέλου.

3.2 Ιστορική Αναδρομή της Κίνησης Brown

Η ιδέα πάνω στην οποία βασίζεται ο όρος *"κίνηση Brown"* εισήχθηκε για πρώτη φορά στο ευρύ πεδίο των στοχαστικών διαδικασιών από τον Σκωτσέζο βιολόγο και βοτανολόγο *Robert Brown* το 1827. Καθώς ο Brown μελετούσε με το μικροσκόπιο κόκκους γύρης που επέπλεαν στο νερό, παρατήρησε λεπτά σωματίδιά της που εκτελούσαν ένα είδος ακανόνιστης κίνησης. Επαναλαμβάνοντας το πείραμα με σωματίδια σκόνης από ανόργανα υλικά, κατέληξε στο συμπέρασμα πως η κίνηση δεν οφειλόταν στο ότι στη γύρη υπήρχε κάποιου είδους ζωή. Ωστόσο τα αίτια της κίνησης παρέμεναν ανεξήγητα.

Ο πρώτος που έδωσε μια θεωρία σχετικά με την *κίνηση Brown* ήταν ο μαθηματικός *Louis Bachelier* το 1900 ως διδακτορικός φοιτητής του *Henri Poincaré*. Η διδακτορική διατριβή του *Bachelier*, με την ονομασία "*Theorie de la Speculation*" (*η Θεωρία της κερδοσκοπίας*), παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στις 29 Μαρτίου 1900 και ήρθε ξανά στο φώς της επιστημονικής κοινότητας ύστερα από σχεδόν μισό αιώνα. Αρχικά, οι συνάδελφοι μαθηματικοί του *Bachelier* έδωσαν πολύ μικρή σημασία στο θέμα που πραγματευόταν η διατριβή του. Το ιδιόμορφο, εκκεντρικό και ταυτόχρονα ξένο για την εποχή θέμα της διατριβής του, αφορούσε τη μελέτη του τρόπου τιμολόγησης *δικαιωμάτων* (*options*) σε σχέση με τα κυβερνητικά ομόλογα. Η πρωτόγνωρη αυτή μελέτη, δεν κατάφερε να κεντρίσει το ενδιαφέρον των επιστημόνων της εποχής, αφού όχι μόνο δεν είχαν γνώση της λειτουργίας των μη όψιμων ακόμα χρηματοοικονομικών αγορών, αλλά επιπρόσθετα δεν απολάμβαναν το απαραίτητο υπόβαθρο μαθηματικών γνώσεων για την κατανόηση του θέματος.

Το ενδιαφέρον για την *κίνηση Brown* αναθερμάνθηκε εκ νέου το 1905 από τους φυσικούς *Einstein* και *Smoluchowski*. Οι φυσικοί αυτοί, άρχισαν να συνειδητοποιούν ότι για να ερμηνεύσουν τη κίνηση αυτή, έπρεπε να αποδεχτούν την ιδέα ότι η ύλη αποτελείται από άτομα, μία αποδοχή που μέχρι τότε δεν είχαν κάνει ακόμη. Η ερμηνεία του φαινομένου αυτού δόθηκε από τον *Einstein*. Ο Γερμανός φυσικός *Albert Einstein*, κάνοντας χρήση ενός πιθανοθεωρητικού μοντέλου κατάφερε να εξηγήσει επαρκώς την *κίνηση Brown*. Παρατήρησε ότι η κίνηση μπορεί να ερμηνευθεί θεωρώντας ότι το σωματίδιο "βομβαρδίζεται" από τα μόρια του υγρού ή του αερίου και για αυτό κινείται ακανόνιστα, δηλαδή με "τυχαίο" τρόπο στο χώρο. Αυτός ο τυχαίος βομβαρδισμός από τα μόρια του ρευστού είναι ικανός να προκαλέσει σε ένα μικρό σωματίδιο την κίνηση που είχε περιγράψει αρχικά ο *Brown*. Το 1918 ο Αμερικανός μαθηματικός *Norbert Wiener* όρισε αυστηρά και μελέτησε σε βάθος την ανέλιξη αυτή αποδεικνύοντας πολλές ιδιότητές της (για αυτό και η ανέλιξη είναι γνωστή και ως *Wiener Process*). Η *διαδικασία Wiener* είναι ο μαθηματικός προσδιορισμός μιας φυσικής διαδικασίας ως στοχαστική. Σε γενικές γραμμές οι όροι της *κίνησης Brown* και της *διαδικασίας Wiener* είναι ίδιοι, παρόλο που η *κίνηση Brown* δίνει έμφαση σε θέματα που αφορούν τη φυσική ενώ η *διαδικασία Wiener* σε θέματα που αφορούν τα μαθηματικά.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, το έργο του *Bachelier* αναδύθηκε από την αφάνεια και αναγνωρίστηκε, λαμβάνοντας την πραγματική σημασία που του αρμόζει, ως ένα από τα σημαντικότερα και πρωτοπόρα εγχειρήματα σχεδόν μισό αιώνα αργότερα, ανοίγοντας νέους δρόμους στον τομέα της μαθηματικής χρηματοοικονομικής επιστήμης, χάρη στη μετάφραση και αναδημοσίευσή του από τους *Boness* και *Cootner* ως "*The Random Character of Stock Market Prices*" (1960). Σε αυτή την κατεύθυνση συνέβαλλε επίσης και ο *Feller* ο οποίος εισήγαγε για πρώτη φορά τον όρο της *διαδικασίας Wienner-Bachelier* σαν συνώνυμο της *κίνησης Brown*, επηρεασμένος από τον *Paul Levy*. Η αναγνώριση δεν άργησε να έρθει και από τους *Itô* και *McKean* (1965). Ο *Benoit Mandelbrot* (1989) χαρακτήρισε τον *Bachelier* ως τον *Gregory Mendel* των χρηματοοικονομικών. Οι *M. Davis* και *A. Etheridge* (2006) σημειώνουν ότι ο *Bachelier* όρισε στην ουσία την *κίνηση Brown* και την ιδιότητα *Markov*, κατασκεύασε στην ουσία την εξίσωση *Chapman-Kolmogorov* και θεμελίωσε τη σύνδεση μεταξύ της *κίνησης Brown* και της εξίσωσης της θερμότητας (Heat Equation), με απώτερο σκοπό τη δημιουργία ενός κατάλληλου θεωρητικού πλαισίου, ικανού να χρησιμοποιηθεί για την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων.

Ο *Bachelier* εφηύρε έναν τύπο, ο οποίος δεδομένου του μαθηματικού μοντέλου που διέπει τις τιμές των περιουσιακών στοιχείων (assets) είναι σωστός. Παρά την ορθότητα του μοντέλου του *Bachelier*, αυτό δεν αποκλείει τις αρνητικές τιμές. Οι *Paul Samuelson* και *M.F.M. Osborne* υπέθεσαν πάνω στο αρχικό μοντέλο του *Bachelier*, ως νόμο που διέπει τις τιμές των υποκείμενων τίτλων, την *γεωμετρική κίνηση Brown,* λαμβάνοντας υπόψη το λογάριθμο της τιμής του τίτλου και όχι απλά το αδρό επίπεδο της. Όλες οι υπόλοιπες δημοσιεύσεις που ακολούθησαν (1912, 1914, 1938) μοιράζονταν το ίδιο κεντρικό μήνυμα. Ο *Bachelier* εργάσθηκε μελετώντας την επιρροή της θεωρίας πιθανοτήτων πάνω στη θεμελιώδη αρχή της κλασσικής οικονομικής επιστήμης, ότι σε μία αποτελεσματική αγορά η μη ύπαρξη ανεκμετάλλευτων ευκαιριών κέρδους, σημαίνει ότι το μαθηματικό αναμενόμενο κέρδος ενός κερδοσκόπου (speculator) είναι μηδέν (υπονοώντας ότι οι κερδοσκόποι έχουν ορθολογικές προσδοκίες). Ήταν αυτός που πρώτος ισχυρίστηκε ότι η τωρινή τιμή ενός τίτλου αποτελεί τον καλύτερο δείκτη πρόβλεψης για την μελλοντική του τιμή καθώς και ότι αυτή περιλαμβάνει όλη την απαραίτητη πληροφορία, ισχυρισμοί που αποτελούν προθάλαμο για έννοιες όπως *διήθηση* και τα *martingales*. Αξίζει να σημειωθεί πως η προσέγγιση αυτή συνέβη πέντε χρόνια πριν ο *Einstein* αναπτύξει το φυσικό μοντέλο της *κίνησης Brown,* και είκοσι τρία χρόνια πριν ο *Robert Wiener* παρουσιάσει την πρώτη αυστηρή μαθηματική απεικόνισή της. Για το λόγο αυτό ο *Bachelier* θεωρείται σύμφωνα με πολλούς ο ιδρυτής των σύγχρονων οικονομικών μαθηματικών. Η *κίνηση Brown* αποτελεί έναν ακρογωνιαίο λίθο στη σύγχρονη ποσοτικοποιημένη χρηματοοικονομική επιστήμη [34].

3.3 Ορισμός της Κίνησης Brown (ή Διαδικασίας *Wiener*)

Ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία B_t σαν μια *κίνηση Brown*, αν η συλλογή των τυχαίων μεταβλητών $B_t, t \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1) $B_0 = 0$

2) Η μεταβολή της B_t για μικρές μεταβολές της παραμέτρουtείναι *συνεχής* με πιθανότητα 1, δηλαδή η συνάρτηση B_t είναι *συνεχής* συνάρτηση του t.

3) Οι μεταβολές της B_t είναι *ανεξάρτητες* τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_0} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες για $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$

4) Αν $s, t \geq 0$,τότε:

$$P(B_{t+s} - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \exp(-\frac{|x|^2}{2t}) \ ,$$

όπου A κάποιο σύνολο Borel. Η ιδιότητα αυτή σημαίνει ότι οι μεταβολές τις *κίνησης Brown* είναι *κανονικά κατανεμημένες* τυχαίες μεταβλητές δηλαδή $B_{t+s} - B_t \sim N(0, \sqrt{s})$.

5) Η μεταβολή dB_t κατά τη διάρκεια μίας πολύ μικρής χρονικής περιόδου $\Delta t \to 0$ είναι $dB_t = \varepsilon\sqrt{dt}$, όπου $\varepsilon \sim \varphi(0{,}1)$.

6) Δεν είναι μονότονη σε κανένα χρονικό διάστημα, όσο μικρό και αν είναι αυτό.

7) Δεν είναι παραγωγίσημη σε κανένα σημείο.

Σχολιασμός των Χαρακτηριστικών της Κίνησης Brown:

- Η ιδιότητα (1) της *κίνησης Brown* έχει την ακόλουθη ερμηνεία:

Η *κίνηση Brown* θα έχει ως σημείο εκκίνησης το μηδέν, χωρίς όμως αυτό να αποτελεί δέσμευση για την διαδικασία. Η κίνηση Brown που έχει ως σημείο εκκίνησης το μηδέν αναφέρεται και ως *τυπική κίνηση Brown*.

- Η ιδιότητα (3) της *κίνησης Brown* έχει την ακόλουθη ερμηνεία:

Αν ισχύει $B_0 = 0$ και επίσης γνωρίζουμε την τιμή της διαδικασία κάποια χρονική στιγμη s, δηλαδή $B_s = x_0$, τότε η ανεξαρτησία σημαίνει ότι οποιαδήποτε γνώση και αν έχουμε για τις τιμές της κίνησης σε χρονικές στιγμές πριν τη χρονική στιγμή s, δεν έχει καμία σημασία για την τιμή της κίνησης σε κάποια επόμενη στιγμή, έστω t αυτή με $t > s$. Στην ουσία η ιδιότητα αυτή είναι μία δήλωση της ιδιότητας *Markov* της *κίνησης Brown*.

- Η ιδιότητα (4) της *κίνησης Brown* έχει την ακόλουθη ερμηνεία:

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε στο σημείο *0* της *κίνησης Brown* όπου $B_0 = 0$ και θέλουμε να μάθουμε ποια θα είναι η τιμή της σε μια χρονική στιγμή t_2. Έστω ότι η τιμή της σε εκείνο το σημείο είναι B_{t_2} και ισούται με a, $a \in \mathbb{R}$. Η παραπάνω υπόθεση αποτελεί μία πραγματοποίηση της *κίνησης Brown*. Όμως για τη χρονική στιγμή t_2 αντιστοιχούν πολλές ακόμα πραγματοποιήσεις της *κίνησης Brown*. Εξαιτίας των κανονικά κατανεμημένων μεταβολών της *κίνησης Brown*, είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της. Πιο συγκεκριμένα είναι γνωστό το κέντρο της κατανομής που σημαίνει ότι είναι γνωστή η αναμενόμενη τιμή της, και αυτή θα είναι $E\left[|B_{t_2}|\right] = 0$, αφού

$B_{t_2} \sim N(0, t_2)$. Θα είναι πάντα μηδέν, οπουδήποτε και αν κοιτάξουμε την *κίνηση Brown*. Η κορυφή αυτής της κατανομής έχει κέντρο στο μηδέν, που σημαίνει ότι η *κίνηση Brown* θα κατανέμεται όπως μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση t.

Αντίστοιχα για τη διακύμανση της *κίνησης Brown*, αυτή είναι ανάλογη του χρόνου που σημαίνει ότι αυξάνεται όσο περνάει ο χρόνος.

Χαρακτηρισμός της Κίνησης Brown

Μέχρι τώρα έχουμε αναφερθεί στη γενική μορφή των στοχαστικών διαδικασιών και συγκεκριμένα για μια ειδική κατηγορία αυτών, την *κίνηση Brown*. Ο Paul Levy διατύπωσε ένα θεώρημα ικανό να ελέγχει αν μια συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία ως προς την πληροφορία που παράγει είναι *κίνηση Brown*.

Θεώρημα 3.1: Έστω $X_t, t \geq 0$ μία στοχαστική διαδικασία και $\mathcal{F}_t$ η διήθηση που παράγεται από αυτή. Η X_t αποτελεί μια *κίνηση Brown* αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες

i) $X_0 = 0$ σχεδόν βεβαίως

ii) Οι τροχιές της X_t είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου

iii) Η X_t είναι *martingale* ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$

iv) Η $X_t^2 - t$ είναι *martingale* ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$

Έχοντας ορίσει τη στοχαστική διαδικασία *Brown*, θα ακολουθήσει ενότητα στην οποία θα αναφερθούν μερικές από τις βασικότερες ιδιότητες και χαρακτηριστικά της, γνωρίζοντας με αυτό τον τρόπο ακόμα καλύτερα τη διαδικασία αυτή, [15], [20], [26].

3.3.1 Ιδιότητες της Κίνησης Brown

Ιδιότητες martingale της Κίνησης Brown

Θεώρημα 3.2: Έστω ότι η B_t είναι μία *κίνηση Brown* και έστω διήθηση $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$. Τότε η B_t θα είναι μία *διαδικασία martingale* ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$.

Απόδειξη: Αρχικά θα πρέπει να δείξουμε ότι:

1) $E[|B_t|] < \infty$ και στη συνέχεια ότι:

2) $E[B_t | \mathcal{F}_s] = B_s$

Για το (1) έχουμε: $E[|B_t|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{\frac{-|x|^2}{2t}} dx$ και επειδή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια παίρνουμε:

$$E[|B_t|] = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} x e^{\frac{-x^2}{2t}} dx = \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(-e^{\frac{-x^2}{2t}}\right)' dx$$

$$= \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}} (\lim_{x\to\infty} (-e^{\frac{-x^2}{2t}}) - \lim_{x\to 0} (-e^{\frac{-x^2}{2t}}))$$

$$= \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}} (0+1) = \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi}} < \infty$$

Για το (2) θα έχουμε:

$$E[B_t|\mathcal{F}_s] = E[B_t + B_s - B_s|\mathcal{F}_s]$$

$$= E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + E[B_s|\mathcal{F}_s]$$

$$= E[B_t - B_s] + B_s$$

$$= 0 + B_s = B_s$$

Η ισότητα $E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s]$ ισχύει λόγω της ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων της *κίνησης Brown* και συγχρόνως η ισότητα $E[B_s|\mathcal{F}_s] = B_s$ ισχύει λόγω του ότι η *κίνηση Brown* είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $\mathcal{F}_s$. Δείχθηκε επομένως ότι η στοχαστική διαδικασία B_t είναι μία *διαδικασία martingale*.

Θεώρημα 3.3: Έστω ότι η B_t είναι μία *κίνηση Brown* και έστω διήθηση $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$. Τότε η $(B_t)^2 - t$ θα είναι μία *διαδικασία martingale* ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$.

Απόδειξη: Αρχικά θα υπολογίσουμε την μέση τιμή της ποσότητας $(B_t)^2$ και στη συνέχεια θααποδείξουμε ότι η μέση τιμή της ποσότητας $(B_t)^2 - t$ είναι πεπρασμένη. Θα έχουμε επομένως ότι:

$$E[(B_t)^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{\frac{-|x|^2}{2t}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(-te^{\frac{-x^2}{2t}}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} [x\left(-te^{\frac{-x^2}{2t}}\right)]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} - te^{\frac{-x^2}{2t}} dx$$

Θέτουμε στο ολοκλήρωμα, $\frac{x}{\sqrt{2t}} = y$ και θα έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[\lim_{x\to\infty} x\left(-te^{\frac{-x^2}{2t}}\right) - \lim_{x\to-\infty} x\left(-te^{\frac{-x^2}{2t}}\right)\right] + \frac{t\sqrt{2t}}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = t$$

Από το αποτέλεσμα αυτό θα ισχύει και ότι $E[(B_t - B_s)^2] = t - s$.

Παρατηρούμε ότι τα δύο όρια είναι ίσα με το μηδέν ενώ το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με $\sqrt{\pi}$. Για την μέση τιμή της ποσότητας $(B_t)^2 - t$ θα έχουμε τώρα:

$$E[|(B_t)^2 - t|] \leq E[(B_t)^2] + E[|t|] = t + t = 2t < \infty$$

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε ότι η ποσότητα $(B_t)^2 - t$είναι μία *martingale*. Θα έχουμε ότι:

$$E[(B_t)^2 - t|\mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2E[(B_tB_s)|\mathcal{F}_s] - {B_s}^2 - t$$

$$= (t - s) + 2{B_s}^2 - {B_s}^2 - t = (B_s)^2 - s$$

Συνεπώς, η $(B_t)^2 - t$ είναι μία *martingale*.

Χαρακτηριστική συνάρτηση της Κίνησης Brown

Μία πολύ χρήσιμη ιδιότητα της χαρακτηριστικής συνάρτησης είναι ότι μέσω αυτής μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις πολυωνυμικές ροπές μιας στοχαστικής διαδικασίας και συνεπώς της κίνησης Brown. Με βάση τις ιδιότητες της *κίνησης Brown* υπολογίζονται τόσο η χαρακτηριστική της συνάρτηση όσο και η χαρακτηριστική συνάρτηση των μεταβολών της.

Αρχικά θα υπολογίσουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση των μεταβολών της *κίνησης Brown* και κατόπιν με μηδενισμό της μίας *κίνησης Brown* (μη ύπαρξη μεταβολής) θα προκύψει η *χαρακτηριστική συνάρτηση Brown*. Θα έχουμε επομένως ότι:

$$\varphi_{B_t - B_s}(\lambda) = E\left[e^{(i\lambda(B_t - B_s))}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right)} e^{i\lambda x}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(i\lambda x - \frac{x^2}{2(t-s)}\right)}dx$$

Προκειμένου να απλοποιήσουμε το ολοκλήρωμα μετατρέπουμε τον εκθέτη της βάσης e στη μορφή τέλειου τετραγώνου. Θα έχουμε δηλαδή ότι:

$$i\lambda x-\frac{x^2}{2(t-s)}=-\frac{1}{2(t-s)}[x^2-2i\lambda(t-s)x+i^2\lambda^2(t-s)^2-i^2\lambda^2(t-s)^2]$$
$$=-\frac{1}{2(t-s)}\big(x-i\lambda(t-s)\big)^2-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}$$

όπου $i^2=-1$.

Συνεπώς,

$$\varphi_{B_t-B_s}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{\frac{\lambda^2(t-s)}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(t-s)}\left(x-i\lambda(t-s)\right)^2}dx,$$

και θέτοντας $y=\frac{x-i\lambda(t-s)}{\sqrt{2(t-s)}}$,

προκύπτει το γνωστό ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$.

Επομένως,

$$\varphi_{B_t-B_s}(\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}} \tag{3.1}$$

Για να καταλήξουμε στη χαρακτηριστική συνάρτηση της *κίνησης Brown* δε μένει παρά να θέσουμε $s=0$ και επειδή σύμφωνα με την πρώτη ιδιότητα της *κίνησης Brown* η τυπική *κίνηση Brown,* δηλαδή η διαδικασία που έχει ως σημείο εκκίνησης το σημείο μηδέν είναι ίση με το μηδέν στο σημείο εκείνο, δηλαδή $B_0=0$, η (3.1) γίνεται $\varphi_{B_t}(\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.

Ιδιότητα Markov της Κίνησης Brown

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα της *κίνησης Brown* όπως θα δούμε, είναι ότι έχει την *ιδιότητα Markov* και την *ισχυρή ιδιότητα Markov.* Οι ιδιότητες αυτές παίζουν σημαντικό ρόλο στο ότι διευκολύνουν σημαντικά τον υπολογισμό υπό συνθήκη μέσων τιμών ορισμένων συναρτήσεων της *κίνηση Brown* ως προς συγκεκριμένες σ-άλγεβρες. Τέτοιοι υπολογισμοί συναντώνται συχνά στην τιμολόγηση παράγωγων συμβολαίων.

Θεώρημα 3.4: Έστω $\mathcal{F}_s=\sigma(B_u,u\le s)$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από την *κίνηση Brown* ως τη χρονική στιγμή s. Τότε η κίνηση Brown B_t έχει την *ιδιότητα Markov*, δηλαδή θα ισχύει μία σχέση της μορφής $E[f(B_{t+s})|\mathcal{F}_s]=g(B_t)$.

Απόδειξη: Μπορούμε να δούμε με τη χρήση της ροπογεννήτριας συνάρτησης ότι η υπό συνθήκη κατανομή της *κίνησης Brown* B_{t+s} σε μία χρονική στιγμή

$t+s$ δοθέντος της διήθησης $\mathcal{F}_s$ είναι η ίδια με την υπό συνθήκη κατανομή της B_{t+s} δοθέντος της B_t. Πράγματι θα έχουμε ότι:

$$E[e^{uB_{t+s}}|\mathcal{F}_s] = e^{uB_t}E\left[e^{u\{B_{t+s}-B_t\}}|\mathcal{F}_s\right]$$

$$= e^{uB_t}E\left[e^{u\{B_{t+s}-B_t\}}\right],\ e^{u\{B_{t+s}-B_t\}} \text{ ανεξάρτητο του } \mathcal{F}_s$$

$$= e^{uB_t}E\left[e^{u\{B_{t+s}-B_t\}}|B_t\right],\ e^{u\{B_{t+s}-B_t\}} \text{ ανεξάρτητο του } B_t$$

$$= E\left[e^{u\{B_{t+s}\}}|B_t\right]$$

Διαισθητικά, για το ότι η *κίνηση Brown* έχει την *ιδιότητα Markov*, σημαίνει ότι για κάποιο χρόνο $s \geq o$ η $B_{t+s} - B_t$ είναι μία *κίνηση Brown* η οποία είναι ανεξάρτητη από το ότι συνέβη πριν από τη χρονική στιγμή s. Έτσι, η *κίνηση Brown* “ξεχνάει” εξ’ ολοκλήρου το παρελθόν της και ότι συμβαίνει από το παρόν μας, χρονική στιγμή s, και μετά, εξαρτάται μόνο από την τελική τιμή της *κίνησης Brown* δηλαδή από τη B_s. Θα πρέπει να πούμε επίσης ότι η $B_{t+s} - B_t$ είναι και αυτή μία διαδικασία Brown με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση t, μία ιδιότητα η οποία προέρχεται από τον ορισμό της.

Στην προηγούμενη ενότητα μιλήσαμε για την *ιδιότητα Markov* της *κίνησης Brown*. Όταν ο ντετερμινιστικός χρόνος t αντικατασταθεί από μία συγκεκριμένη κατηγορία τυχαίων χρόνων, υπό την ονομασία «χρόνος διακοπής» που συμβολίζεται με *τ*, τότε η *κίνηση Brown* λέμε ότι αποχτά την *ισχυρή ιδιότητα Markov*.

Στο παρακάτω θεώρημα εξασφαλίζεται ότι η ανεξαρτησία των προσαυξήσεων της *κίνησης Brown* ισχύει όχι μόνο για ντετερμινιστικούς χρόνους αλλά και για χρόνους διακοπής.

Θεώρημα 3.5: Έστω T κάποιος πεπερασμένος χρόνος στάσης και έστω ακόμη B_t μία *κίνηση Brown*. Τότε για την προσαύξηση $\{B_{t+T} - B_T\}$ ισχύει ότι είναι μια *κίνηση Brown* είναι ανεξάρτητη της πληροφορίας (διήθησης) $\mathcal{F}_T$.

όπου $\mathcal{F}_t$ είναι η σ-άλγεβρα που περιέχει τα γεγονότα που σχετίζονται με τη στοχαστική διαδικασία B_t μέχρι το χρόνο στάσης *T, δηλαδή* B_T, και την προσδιορίζουμε στο παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.1: Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_T$ όπου T είναι ένας χρόνος στάσης ορίζεται ως:

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t > 0\}$$

Μη Παραγωγισημότητα της Κίνησης Brown

Μία από τις ιδιότητες της *κίνησης Brown* που μπορεί να προκαλέσει έκπληξη, είναι η μη ύπαρξη παραγώγου της, παρόλο που είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της. Η απόδειξη της ιδιότητας αυτής είναι μαθηματικά πολύπλοκη και για αυτό το λόγο θα παρουσιαστεί μία πιο διαισθητική μορφή της.

Απόδειξη: Θεωρούμε μία πολύ μικρή αύξηση της *κίνησης Brown* $B(t+\Delta t) - B(t)$ η οποία είναι κανονικά κατανεμημένη με μέσο μηδέν και διακύμανση Δt, όπως έχει ήδη οριστεί. Τότε, από τον τύπο της διακύμανσης έχουμε ότι:

$$E[|B(t+\Delta t) - B(t)|^2] = \Delta t$$

Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα της παραπάνω έκφρασης οδηγούμαστε στο ότι το μέγεθος της προσαύξησης $|B(t+\Delta t) - B(t)|$ είναι $\sqrt{\Delta t}$.

Καθώς το $\Delta t \to 0$, έχουμε ότι $\sqrt{\Delta t} \to 0$ το οποίο είναι συνεπές με την συνέχεια των τροχιών της *κίνησης Brown*. Γράφοντας τη μερική παράγωγο της έχουμε ότι:

$$\frac{\partial B_t}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t}$$

και από αυτή μπορούμε να δούμε ότι όταν το Δt είναι πολύ μικρό, τότε ο αριθμητής σε απόλυτη τιμή γίνεται $\sqrt{\Delta t}$ το οποίο είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το Δt. Συνεπώς το όριο δεν υπάρχει. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τροχιά της *κίνησης Brown* B_t δεν σε κανένα σημείο της τροχιάς της παραγωγίσημη.

Ένας συνήθης τρόπος για την κατανόηση της *κίνησης Brown* είναι η προσέγγισή της ως το όριο τυχαίων περιπάτων που αποτελούνται από μικρότερα βήματα που λαμβάνουν χώρα όλο και πιο συχνά. Πιο συγκεκριμένα θα αναπτύξουμε την παρακάτω ενότητα.

3.4 Η Κίνηση Brown ως το Όριο του Τυχαίου Περίπατου

Το 1900, ο Luis Bachelier χρησιμοποίησε το όριο του τυχαίου περίπατου ως ένα μοντέλο για την περιγραφή των τιμών των μετοχών του χρηματιστηρίου του Παρισιού. Αποδεικνύεται ότι το όριο του τυχαίου περίπατου για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα, μετατρέπει το μοντέλο αυτό διακριτού χρόνου σε ένα μοντέλο συνεχούς χρόνου με τα χαρακτηριστικά μίας *κίνησης Brown*. Έτσι ο Bachelier θεωρείται ως ο δημιουργός της *κίνησης Brown*.

Σε αυτή την ενότητα θα αναπτυχθεί ένας μαθηματικός τρόπος σκέψης, σύμφωνα με τους [17], [20], [26], ο οποίος αποδεικνύει πως όταν το μέγεθος του βήματος ενός μονοδιάστατου συμμετρικού τυχαίου περίπατου γίνεται πολύ μικρό, δηλαδή τείνει στο μηδέν, τότε η κατανομή της τιμής του τυχαίου περίπατου κατά το χρόνο t συγκλίνει στην κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση *t*. Θα τείνει δηλαδή στην κατανομή μίας *κίνησης Brown*, $N(o,t)$. Ως t θεωρούμε το μήκος του χρονικού διαστήματος στο οποίο «ταξιδεύουν» ο τυχαίος περίπατος καθώς και η *κίνηση Brown*. Ο τρόπος σκέψης στον οποίο θα βασιστούμε έχει ως εξής: Αν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της οριακής κατανομής του μονοδιάστατου συμμετρικού τυχαίου περίπατου ισούται με τη ροπογεννήτρια της κανονικής κατανομής τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι πιθανοτικές κατανομές είναι στην πραγματικότητα ίδιες. Αν οι κατανομές είναι ίδιες και καθώς το μέγεθος των βημάτων του τυχαίου περίπατου τείνει στο μηδέν (και συνεπώς ο αριθμός των βημάτων ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος τείνει στο άπειρο) τότε, ο τυχαίος περίπατος ο οποίος είναι μία διαδικασία διακριτού χρόνου, συγκλίνει στην *κίνηση Brown* η οποία είναι μία διαδικασία συνεχούς χρόνου.

Στην συνέχεια θα δοθεί ο ορισμός του μονοδιάστατου συμμετρικού τυχαίου περίπατου και ακολούθως θα γίνει προσπάθεια απόδειξης του παραπάνω ισχυρισμού.

Θεωρούμε το χρονικό διάστημα $[0,t]$, όπου $t > 0$. Το χρονικό αυτό διάστημα αποτελείται από t ατομικές χρονικές περιόδους διαιρεμένες σε n υποδιαστήματα ίσου μεγέθους. Ένα παράδειγμα θα μπορούσε να είναι το χρονικό διάστημα [0,2.5] όπου ο χρόνος είναι$t = 2.5$ χρόνια και κάθε χρόνος διαιρείται σε $n = 12$ μήνες. Συνεπώς κάθε χρονικό βήμα που λαμβάνει χώρα μέσα στο χρονικό διάστημα $[0,t]$ έχει μήκος ίσο με $1/n$. Ένας τυχαίος περίπατος ενός αντίστοιχου χρονικού διαστήματος θα αποτελείται από $nt = 30$ χρονικά βήματα. Αν σε κάθε χρονικό βήμα ο τυχαίος περίπατος είτε αυξάνεται κατά ένα με πιθανότητα $1/2$ είτε μειώνεται κατά ένα με πιθανότητα $1/2$, τότε ο τυχαίος περίπατος γίνεται συμμετρικός τυχαίος περίπατος με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ένα. Αν τώρα κάθε προσαύξηση του συμμετρικού τυχαίου περίπατου πολλαπλασιαστεί με μία μονοδιάστατη σταθερά, τότε ο συμμετρικός τυχαίος περίπατος μετατρέπεται σε μονοδιάστατο συμμετρικό τυχαίο περίπατο με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ίση με το τετράγωνο της μονοδιάστατης σταθεράς.

Θα ορίσουμε με k το τέλος κάθε δοθέντος χρονικού βήματος σε ένα μονοδιάστατο συμμετρικό τυχαίο περίπατο τέτοιο ώστε το k να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος μεταξύ του *ενός* και του nt. Άρα το σύνολο τιμών που μπορεί να πάρει το k είναι το:

$$k = \{1,2,3, \dots, (n-1)t, nt\} \tag{3.2}$$

Ορίζουμε με X_k την τυχαία μεταβλητή στο τέλος κάθε χρονικού βήματος k τέτοια ώστε:

$$X_k = \begin{cases} 1, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \\ -1, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Μέτα από n αριθμό βημάτων η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Θα ορίσουμε την μονοδιάστατη σταθερά του τυχαίου περιπάτου ως την τετραγωνική ρίζα του μήκους του χρονικού βήματος. Αν M_0 είναι η τιμή του τυχαίου περιπάτου τη χρονική στιγμή 0 και M_k είναι η τιμή του τυχαίου περιπάτου στο τέλος οποιουδήποτε δοθέντος χρονικού υποδιαστήματος k τότε η εξίσωση που περιγράφει την τιμή του μονοδιάστατου συμμετρικού τυχαίου περίπατου στο τέλος κάθε χρονικού διαστήματος $[0, t]$ είναι:

$$M_t = M_0 + \sum_{k=1}^{nt} \frac{1}{\sqrt{n}} X_k$$

$$= M_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{nt} X_k \tag{3.3}$$

Αν τώρα ορίσουμε η τιμή του τυχαίου περίπατου να είναι ίση με μηδέν κατά τη χρονική στιγμή μηδέν τότε η εξίσωση (3.3) μπορεί να γραφτεί ως:

$$M_t = \sum_{k=1}^{nt} \frac{1}{\sqrt{n}} X_k \tag{3.4}$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση ενός μονοδιάστατου συμμετρικού τυχαίου περίπατου όπως ορίζεται από τη σχέση (3.4) είναι η:

$$\varphi(z) = E[e^{zM_t}] \tag{3.5}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.4) στη σχέση (3.5) έχουμε ότι:

$$\varphi(z) = E\left[exp\left\{\frac{z}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{nt} \frac{1}{\sqrt{n}} X_k\right\}\right] \tag{3.6}$$

Επίσης, η σχέση (3.6) γράφεται και ως:

$$\varphi(z) = E\left[\prod_{k=1}^{nt} \exp\left\{\frac{z}{\sqrt{n}} X_k\right\}\right] \tag{3.7}$$

Επειδή κάθε προσαύξηση του τυχαίου περίπατου είναι ανεξάρτητη η σχέση (3.7) γίνεται:

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{nt} E\left[exp\left\{\frac{z}{\sqrt{n}}X_k\right\}\right] \tag{3.8}$$

Τέλος χρησιμοποιώντας τον τύπο της X_k για να υπολογίσουμε τις ποσότητες $E[X_k]$ παίρνουμε ότι:

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{nt} \left(\frac{1}{2}e^{\frac{z}{\sqrt{n}}} + e^{-\frac{z}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{\frac{z}{\sqrt{n}}} + e^{-\frac{z}{\sqrt{n}}}\right)^{nt} \tag{3.9}$$

Θέλουμε τώρα να βρούμε το όριο της ροπογεννήτριας συνάρτησης όπως ορίστηκε στη σχέση (3.9) καθώς το μήκος του χρονικού βήματος τείνει στο μηδέν. Εφόσον το μέγεθος του βήματος είναι $1/n$ η παραπάνω σκέψη μας οδηγεί στο να υπολογίσουμε το όριο της σχέσης (3.9) καθώς το n τείνει στο άπειρο. Αρχικά παίρνουμε το λογάριθμο της σχέσης (3.9) ο οποίος είναι:

$$\ln\varphi(z) = nt\ln\left(\frac{1}{2}e^{\frac{z}{\sqrt{n}}} + e^{-\frac{z}{\sqrt{n}}}\right) \tag{3.10}$$

Στη συνέχεια κάνουμε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών:

$$x = \frac{1}{\sqrt{n}} \ \textit{τέτοιο ώστε} \ n = \frac{1}{x^2} \tag{3.11}$$

Κάνοντας χρήση της αλλαγής μεταβλητών στη σχέση (3.10) θα έχουμε:

$$ln\,\varphi(z) = t\frac{\ln\left(\frac{1}{2}e^{zx} + \frac{1}{2}e^{-zx}\right)}{x^2} \tag{3.12}$$

Καθώς το n τείνει στο άπειρο η μεταβλητή x, η οποία είναι η τετραγωνική ρίζα του μεγέθους του βήματος, τείνει στο μηδέν. Το όριο της εξίσωσης (3.12) καθώς το n τείνει στο άπειρο και το x στο μηδέν είναι:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\varphi(z) = t\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(\frac{1}{2}e^{zx} + \frac{1}{2}e^{-zx}\right)}{x^2} \tag{3.13}$$

Στο σημείο αυτό εμφανίζεται το εξής πρόβλημα: Καθώς το x τείνει στο μηδέν, αριθμητής και παρονομαστής τείνουν στο μηδέν και παρουσιάζεται μία απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Ορίζουμε τώρα τις ακόλουθες ποσότητες:

$$f(x) = ln\left(\frac{1}{2}e^{zx} + \frac{1}{2}e^{-zx}\right) \text{ και την } \; g(x) = x^2 \qquad (3.14), (3.15)$$

Κάνοντας χρήση του κανόνα του *Del' Hospital* έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \ln \varphi(z) = t \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= t \; \lim_{x\to 0} \frac{f'^{(x)}}{g'^{(x)}} \qquad (3.16)$$

Η παράγωγος του αριθμητή όπως ορίστηκε στη σχέση (3.14) γίνεται:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta x} = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{zx} + \frac{1}{2}e^{-zx}} \times \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{1}{2}e^{zx} + \frac{1}{2}e^{-zx}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}e^{zx} + \frac{1}{2}e^{-zx}} \times \left(\frac{z}{2}e^{zx} - \frac{z}{2}e^{-zx}\right)$$

$$= \frac{\frac{z}{2}e^{zx} - \frac{z}{2}e^{-zx}}{\frac{1}{2}e^{zx} + \frac{1}{2}e^{-zx}} \qquad (3.17)$$

Αντίστοιχα η παράγωγος του παρονομαστή στη σχέση (3.15) γίνεται:

$$\frac{\delta g(x)}{\delta x} = 2x \qquad (3.18)$$

Η σχέση (3.13) πλέον γράφεται ως:

$$\lim_{n\to\infty} \; ln\, \varphi(z) = t \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}e^{zx} + \frac{1}{2}e^{-zx}}\right)\left(\frac{\frac{z}{2}e^{zx} - \frac{z}{2}e^{-zx}}{2x}\right) \qquad (3.19)$$

Επίσης παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}e^{zx} + \frac{1}{2}e^{-zx}}\right) = \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right) = 1 \qquad (3.20)$$

Η εξίσωση (3.19) τώρα γίνεται:

$$\lim_{n\to\infty} \; ln\, \varphi(z) = t \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{z}{2}e^{zx} - \frac{z}{2}e^{-zx}}{2x}\right) \qquad (3.21)$$

Παρατηρούμε ότι πάλι εμφανίζεται το εξής πρόβλημα: Καθώς το x τείνει στο μηδέν, αριθμητής και παρονομαστής της σχέσης (3.21) τείνουν στο μηδέν και παρουσιάζεται μία απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Επαναπροσδιορίζουμε τώρα τις ακόλουθες ποσότητες:

$$f(x) = \frac{z}{2}e^{zx} - \frac{z}{x}e^{-zx} \text{ και την } g(x) = 2x \qquad (3.22), (3.23)$$

Έτσι οι παράγωγοι αριθμητή (σχέση (3.22)) και παρονομαστή (σχέση (3.23)) είναι αντίστοιχα:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta x} = \frac{z^2}{2}e^{zx} + \frac{z^2}{2}e^{-zx} \text{ και } \frac{\delta g(x)}{\delta x} = 2 \qquad (3.24), (3.25)$$

Κάνοντας χρήση του κανόνα του κανόνα του D$el'Hospital$ έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} ln\,\varphi(z) = t \lim_{x\to 0} \frac{\frac{z^2}{2}e^{zx} + \frac{z^2}{2}e^{-zx}}{2} = \frac{1}{2}tz^2 \qquad (3.26)$$

Τώρα έχουμε δύο ποσότητες σε αριθμητή και παρονομαστή θετικές και έτσι μπορούμε πλέον να σταματήσουμε.

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κανονικής κατανομής με μέση τιμή m και διακύμανση v δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi(z) = e^{mz + \frac{1}{2}vz^2} \qquad (3.27)$$

Παίρνοντας το λογάριθμο της παραπάνω σχέσης έχουμε:

$$\ln \varphi(z) = mz + \frac{1}{2}vz^2 \qquad (3.28)$$

Καθώς η μέση τιμή είναι μηδέν και η διακύμανση είναι ίση με το μήκος του χρονικού διαστήματος, η εξίσωση (3.28) γίνεται:

$$\ln \varphi(z) = \frac{1}{2}tz^2 \qquad (3.29)$$

Συμπέρασμα: Αρχικά θέσαμε σαν στόχο να αποδείξουμε ότι καθώς το μέγεθος του βήματος ενός μονοδιάστατου συμμετρικού τυχαίου περίπατου τείνει στο μηδέν, η κατανομή της τιμής του τυχαίου περίπατου τη χρονική στιγμή tσυγκλίνειστην κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση t. Στην περίπτωση που συμβεί αυτό, ο μονοδιάστατος συμμετρικός τυχαίος περίπατος συγκλίνει στην *κίνηση Brown* καθώς το μήκος του κάθε χρονικού βήματος του τυχαίου περίπατου γίνεται ολοένα και πιο μικρό και ο αριθμός των χρονικών βημάτων του τυχαίου περίπατου τείνει στο άπειρο. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (3.25), η οποία είναι η οριακή κατανομή ενός μονοδιάστατου συμμετρικού τυχαίου περίπατου καθώς το μέγεθος του βήματος τείνει στο μηδέν, ισούται με την εξίσωση (3.28), η οποία είναι ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας κανονικής κατανομής με μέσο ίσο με το *μηδέν* και διακύμανση ίση με t. Συνεπώς η υπόθεσή μας αποδείχθηκε. Μπορούμε να πούμε επομένως, πως η *κίνηση Brown* αποτελεί το συνεχούς χρόνου ανάλογο μοντέλο του τυχαίου περίπατου.

3.5 Η Γεωμετρική Κίνηση Brown

Η *γεωμετρική κίνηση Brown* είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου. Ο στοχαστικός λογισμός αποτελεί τον μαθηματικό κλάδο ο οποίος ως κύριο αντικείμενό του έχει την ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας η οποία είναι βασικό χαρακτηριστικό στοιχείο μιας χρηματιστηριακής αγοράς. Οι περισσότεροι οικονομολόγοι προτιμούν τη *γεωμετρική κίνηση Brown* σαν πρότυπο για τη μοντελοποίηση των τιμών των αξιόγραφων που διαπραγματεύονται στις χρηματοοικονομικές αγορές, καθότι αποκλείει τη λήψη αρνητικών τιμών (είναι παντού θετική με πιθανότητα ένα). Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την *τυπική κίνηση Brown*. Επιπρόσθετα, η *γεωμετρική κίνηση Brown* αποτελεί το βασικό νόμο που διέπει τα περιουσιακά στοιχεία (assets) στον κόσμο των *Black & Scholes* το οποίο θα παρουσιαστεί ενδελεχώς στο κεφάλαιο πέντε.

Η χρηματιστηριακή αγορά αποτελεί τη βάση που δίνει τη δυνατότητα στους επενδυτές να έχουν στην κατοχή τους μετοχές εταιριών εισηγμένες σε αυτή. Κατά αυτό τον τρόπο οι επενδυτές γίνονται μέρος των εταιριών αυτών με αποτέλεσμα να μοιράζονται τόσο τα κέρδη όσο και τις ζημιές τους. Οι αλλαγές στις τιμές των μετοχών σε καθημερινή βάση εισάγει, ως ένα από τα πλέον βασικά χαρακτηριστικά τους, τη μεταβλητότητα, με αποτέλεσμα τη δυσκολία της πρόβλεψής τους. Έτσι, αν κάποιος αγοράσει μια μετοχή, δεν θα λάβει εγγυημένη απόδοση. Αυτό, καθιστά την επένδυση σε μετοχές ως μία δραστηριότητα υψηλού κινδύνου. Βεβαίως, όπως είναι λογικό είναι υπαρκτή και η πιθανότητα λήψης υψηλών αποδόσεων. Μία λανθασμένη απόφαση επενδυτικής επιλογής είναι ικανή να οδηγήσει σε σημαντική κεφαλαιακή απώλεια. Η χρησιμοποίηση της *γεωμετρικής κίνησης Brown* ως το βασικό μοντέλο περιγραφής της τιμής μίας μετοχής, συμβάλλει στην άμβλυνση της αδυναμίας πρόβλεψης των μελλοντικών τιμών των μετοχών για σχετικά μικρές χρονικές περιόδους [1]. Κύριο μέλημα των επενδυτών είναι η απόδοση της επένδυσής τους η οποία είναι γνωστή και ως η ποσοστιαία αύξηση της αξίας ενός υποκείμενου τίτλου.

Στην αμέσως επόμενη ενότητα πραγματοποιείται μοντελοποίηση της απόδοσης ενός υποκείμενου τίτλου με βάση τη *γεωμετρική κίνηση Brown* σύμφωνα με τους [4], [11], [29].

3.5.1 Μοντελοποίηση Απόδοσης Υποκείμενου Τίτλου

Θα συμβολίσουμε με S_t την τιμή του υποκείμενου τίτλου την χρονική στιγμή t και με R_t την απόδοση του τίτλου μεταξύ των χρονικών στιγμών t και *t-1* .

Έστω ότι η απόδοση ενός υποκείμενου τίτλου δίνεται από τον παρακάτω γνωστό τύπο απόδοσης:

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{\Delta S_{t-1}}{S_{t-1}} \tag{3.30}$$

Ορίζουμε τους εξής συμβολισμούς:

- S_t είναι η τιμή του τίτλου τη χρονική στιγμή t
- ΔS_t είναι η μεταβολή της τιμής του τίτλου σε χρονικό διάστημα Δt
- μ είναι η μέση τιμή των αποδόσεων του τίτλου
- σ είναι η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του τίτλου
- ε μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή, $N(0,1)$

Η μοντελοποίηση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής του τίτλου σε διακριτό χρόνο και δίχως διανομή μερίσματος δίνεται ως εξής:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{3.31}$$

Οι όροι του παραπάνω τύπου έχουν την ακόλουθη ερμηνεία:

- $\mu \Delta t$ δίνει τη μέση ποσοστιαία μεταβολή της τιμής του υποκείμενου τίτλου σε χρονικό διάστημα Δt.
- $\sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ δίνει τη στοχαστική συνιστώσα της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής του τίτλου.

Από την εξίσωση (3.31) προκύπτει για την κατανομή των ποσοστιαίων αποδόσεων ότι:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} \sim N(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})$$

Από τη σχέση (3.30) προκύπτει για την τιμή του τίτλου τη χρονική στιγμή tη εξίσωση:

$$S_t = S_{t-1} + \Delta S_{t-1} \tag{3.32}$$

Αντικαθιστώντας όπου ΔS_{t-1}, τον όρο $\mu S_{t-1}\Delta t + \sigma \varepsilon S_{t-1}\sqrt{\Delta t}$, έχουμε ότι:

$$S_t = S_{t-1} + [\mu S_{t-1}\Delta t + \sigma \varepsilon S_{t-1}\sqrt{\Delta t}]$$

Για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα όπου $\Delta t \to dt$ θα έχουμε για τη σχέση (3.31):

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu d_t + \sigma dB_t$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει για την κατανομή των ποσοστιαίων αποδόσεων σε συνεχή χρόνο ότι:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} \sim N(\mu dt, \sigma\sqrt{dt})$$

όπου μ, σ είναι σταθερά και $dB_t \sim N(0, dt)$.

Άρα η τιμή του τίτλου σε συνεχή χρόνο, περιγράφεται από στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS_t = \mu S_t d_t + \sigma S_t dB_t$$

όπου με B_t συμβολίζεται η *κίνηση Brown* όπως έχει ήδη παρουσιαστεί στο κεφάλαιο τρία.

Θεώρημα 3.6: Η λύση της εξίσωσης $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ δίνεται από την σχέση:

$$S_T = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma B_T}$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα γίνει χρήση του θεωρήματος του Itô στη συνάρτηση $Z_t = f(t, X_t) = \ln S_t$. Από την εφαρμογή αυτή παίρνουμε ότι η dS_t θα έχει στοχαστική διαφορική εξίσωση την:

$$dZ_t = df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX)^2$$

Εύκολα παρατηρούμε πως οι μερικές παράγωγοι της παραπάνω εξίσωσης δίνουν η καθεμία ξεχωριστά τα εξής:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{S_t} \; \kappa\alpha\iota \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{S_t^2}$$

Επιπλέον,

$$
\begin{aligned}
[dS_t]^2 &= dS_t \cdot dS_t \\
&= (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) \cdot (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) \\
&= (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t)^2 \\
&= \sigma^2 S_t^2 dt
\end{aligned}
$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει διότι τα γινόμενα $dt \cdot dt$ και $dt \cdot dB_t$ είναι εξ' ορισμού ίσα με το μηδέν.

Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
dZ_t &= d(\ln S_t) \\
&= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}[dS_t]^2 \\
&= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2 dt \\
&= \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\
&= (\mu dt + \sigma dB_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$dZ_t = (\mu dt + \sigma dB_t) - \tfrac{1}{2}\sigma^2 dt \tag{3.33}$$

και

$$Z_0 = \ln S_0$$

Ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση της σχέσης (3.33) στο διάστημα $[0, T]$ θα έχουμε ότι

$$\int_0^T dZ_t = \int_0^T \mu dt + \int_0^T \sigma dB_t - \int_0^T \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$Z_T - Z_0 = \mu T + \sigma B_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

$$Z_T = Z_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma B_T$$

Και αφού $Z_T = \ln S_T$ θα έχουμε ότι:

$$ln\, S_T = ln\, S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma B_T$$

$$ln\, S_T - ln\, S_0 = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma B_T$$

$$ln \tfrac{S_T}{S_0} = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma B_T \qquad (3.34)$$

$$S_T = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma B_T}$$

Θέτοντας $T = t$ καταλήγουμε στην σχέση:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t}$$

που είναι η λύση της εξίσωσής μας. Η στοχαστική διαδικασία S_t δεν είναι άλλη από τη *γεωμετρική κίνηση Brown*. Από τη σχέση (3.34) συμπεραίνουμε για το λογάριθμο της τιμής της μετοχής ότι:

$$ln \tfrac{S_T}{S_0} \sim N[\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \right) T, \sigma^2 T)]$$

ή

$$lnS_T - lnS_0 \sim N[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T, \sigma^2 T]$$

ή

$$lnS_T \sim N[lnS_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T, \sigma^2 T]$$

Θέτοντας $\hat{\mu} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ η σχέση για την τιμή της μετοχής θα είναι η:

$$S_t = S_0 e^{\hat{\mu} t + \sigma B_t}$$

Και η κατανομή για το λογάριθμο της τιμής της μετοχής μπορεί να γραφεί ως:

$$ln \tfrac{S_T}{S_0} \sim N[\hat{\mu} T, \sigma^2 T)]$$

ή

$$lnS_T \sim N[lnS_0 + \hat{\mu} T, \sigma^2 T] \qquad (3.35)$$

Από τη σχέση συμπεραίνουμε ότι για την κατανομή της τιμής της μετοχής ισχύει ότι:

$$S_T \sim LN[lnS_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T]$$

ή

$$S_T \sim LN[lnS_0 + \hat{\mu}T, \sigma^2 T] \quad \text{ή} \quad \frac{S_T}{S_0} \sim LN[\hat{\mu}T, \sigma^2 T]$$

Δηλαδή ακολουθεί μία λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή $lnS_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T$ και διακύμανση $\sigma^2 T$.

Μία τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ μηδέν και άπειρου. Συνεπώς, η μοντελοποίηση της τιμής μίας μετοχής με τη *γεωμετρική κίνηση Brown* βελτιώνει το μοντέλο της απλής *κίνησης Brown*, απορρίπτοντας τις αρνητικές τιμές.

Θέτοντας $X_t = \hat{\mu}t + \sigma B_t$ και λαμβάνοντας την παράγωγο ως προς t, θα έχουμε για τη στοχαστική διαδικασία X_t ότι:

$$dX_t = \hat{\mu}dt + \sigma dB_t$$

Συνεπώς, η στοχαστική διαδικασία X_t είναι και μία διαδικασία Itô.

Για το σύνολο των αξιών ενός υποκείμενου τίτλου θα λέμε ότι ακολουθεί την *γεωμετρική κίνηση Brown* αν ισχύει ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 3.2: Έστω S_t, $t \geq 0$ η στοχαστική ανέλιξη η οποία συμβολίζει την εξέλιξη της αξίας ενός υποκείμενου τίτλου στο χρόνο. Για την ανέλιξη αυτή θα λέμε ότι ακολουθεί την *γεωμετρική κίνηση Brown* με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ (μέση τιμή ή τάση) και μεταβλητότητα $\sigma > 0$, αν ισχύει ότι για κάθε $y \geq 0, t > 0$:

i) Η τυχαία μεταβλητή $ln\frac{S_{t+y}}{S_t} \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ και αρχική τιμή $S_0 = 1$

ii) Η τυχαία μεταβλητή $\frac{S_{t+y}}{S_t}$ είναι ανεξάρτητη από τις S_u , $0 \leq u \leq t$

Είναι προφανές ότι αν X_t, $t \geq 0 \sim N(\mu, \sigma^2)$ είναι μία *διαδικασία Brown* τότε ο μετασχηματισμός της X_t στη μορφή e^{X_t}, $t \geq 0 \sim N(\mu, \sigma^2)$ είναι μία *γεωμετρική κίνηση Brown*. Αν δηλαδή S_t, $t \geq 0 \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η S_t ακολουθεί τη *λογαριθμοκανονική κατανομή*, δηλαδή ο λογάριθμός της θα ακολουθεί την κανονική κατανομή. Θα έχουμε δηλαδή ότι:

$$lnS_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$$

όπου μ όπως είδαμε προηγουμένως θα είναι ίσο με: $\mu = lnS_0 + \hat{\mu}$.

Με άλλα λόγια το σύνολο των αξιών ενός υποκείμενου τίτλου θα ακολουθεί τη *γεωμετρική κίνηση Brown*, αν ο λόγος της αξίας του τίτλου σε κάποια χρονική στιγμή t στο μέλλον, S_{t+y}, ως προς την παρούσα αξία του τίτλου, S_y, ακολουθεί μία λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους μt και $\sigma^2 t$.

Επιπλέον, γίνεται κατανοητό από τη δεύτερη ιδιότητα ότι μόνο οι παρούσες αξίες και όχι οι παρελθοντικές διαδραματίζουν ρόλο ως προς τον καθορισμό των πιθανοτήτων για την εύρεση των μελλοντικών αξιών του υποκείμενου τίτλου. Παρατηρούμε πως και η *γεωμετρική κίνηση Brown* μοιράζεται την ίδια ιδιότητα με την *κίνηση Brown* η οποία δεν είναι άλλη από την *ιδιότητα Markov*.

3.5.2 Ροπές της Γεωμετρικής κίνησης Brown

Υπολογισμός Μέσης Τιμής της Γεωμετρικής Κίνησης Brown

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέσο της *γεωμετρικής κίνησης Brown* κάνοντας χρήση της ροπογεννήτριας συνάρτησης της κανονικής κατανομής. Θα ισχύει ότι:

$$E\left[S_0 e^{\hat{\mu}t+\sigma B_t}\right] = S_0 e^{\hat{\mu}t+\frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

Απόδειξη: Για τη μέση τιμή της S_t θα έχουμε τα εξής:

$$E[S_t] = E\left[S_0 e^{\hat{\mu}t+\sigma B_t}\right]$$

$$= S_0 e^{\hat{\mu}t} E[e^{\sigma B_t}]$$

$$= S_0 e^{\hat{\mu}t} E[e^{\sigma B_t u}], \text{ για } u = 1$$

Επειδή ισχύει ότι $B_t \sim N(0,t)$ θα είναι $\sigma B_t \sim N(0,\sigma^2 t)$. Γενικά μία τυχαία μεταβλητή που είναι κανονικά κατανεμημένη, έστω $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$, έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Y(u) = E[e^{Yu}] = e^{\mu u+\frac{(\sigma^2 u^2)}{2}}, \ -\infty < u < \infty$$

Συνεπώς για τον όρο $\sigma B_t \sim N(0,\sigma^2 t)$ με τάση μ (*drift*) ίσο με το μηδέν θα ισχύει ότι :

$$M_{\sigma B_t}(u) = E[e^{\sigma B_t u}] = e^{\frac{(\sigma^2 t u^2)}{2}}, \ -\infty < u < \infty$$

Επομένως για την μέση τιμή της γεωμετρικής κίνησης Brown θα έχουμε:

$$E[S_t] = S_0 e^{\hat{\mu}t} e^{\frac{(\sigma^2 t u^2)}{2}}, \text{ όπου για } u = 1 \text{ έχουμε}$$

$$E[S_t] = S_0 e^{\hat{\mu}t + \frac{(\sigma^2 t)}{2}}$$

Είμαστε σε θέση πλέον να υπολογίσουμε κατά τον ίδιο τρόπο και τη δεύτερη ροπή της γεωμετρικής κίνησης Brown και τελικά να υπολογίσουμε και την διακύμανση της όπως πράττουμε παρακάτω.

Υπολογισμός Διακύμανσης της Γεωμετρικής Κίνησης Brown

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη διακύμανση της *γεωμετρικής κίνησης Brown* χρησιμοποιώντας την ροπογεννήτρια της Κανονικής κατανομής σε συνδυασμό με τον γνωστό τύπο:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

και τη ροπής πρώτης τάξεως που βρήκαμε για την τιμή της μετοχής, $E[S_t]$.

Για την διακύμανση της γεωμετρικής κίνησης Brown ισχύει ότι είναι ίση με:

$$Var\left[S_0 e^{\hat{\mu}t + \sigma B_t}\right] = S_0^2 e^{2\hat{\mu}t + \sigma^2 t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Απόδειξη: Αρχικά θα υπολογιστεί η δεύτερη ροπή της S_t.

$$E[S_t^2] = E\left[S_0^2 e^{(\hat{\mu}t + \sigma B_t)^2}\right]$$

$$= S_0^2 E[e^{2\hat{\mu}t + 2\sigma B_t}]$$

$$= S_0^2 e^{2\hat{\mu}t} E[e^{2\sigma B_t}]$$

$$= S_0^2 e^{2\hat{\mu}t} E[e^{2\sigma B_t u}], \text{ για } u = 1$$

$$= S_0^2 e^{2\hat{\mu}t} E\left[e^{\frac{4\sigma^2 t u^2}{2}}\right], \text{ για } u = 1$$

$$= S_0^2 e^{2\hat{\mu}t + 2\sigma^2 t}$$

Έτσι έχουμε,

$$Var\left[S_0 e^{\hat{\mu}t + \sigma B_t}\right] = S_0^2 e^{2\hat{\mu}t + 2\sigma^2 t} - S_0^2 e^{2\hat{\mu}t + \sigma^2 t}$$

$$= S_0^2 e^{2\hat{\mu}t + \sigma^2 t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα έχει ως συνέπεια η διακύμανση να ξεκινάει από το μηδέν και στη συνέχεια να αυξάνεται, έτσι ώστε η κίνηση να κάνει όλο και πιο μεγάλα ανοίγματα όσο αυξάνεται ο χρόνος.

Η Γεωμετρική Κίνηση Brown ως μια Διαδικασία Markov

Όπως είδαμε στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου, μια χαρακτηριστική ιδιότητα της *κίνησης Brown*, είναι ότι αποτελεί μία *Μαρκοβιανή διαδικασία*. Το ίδιο ισχύει και για την *γεωμετρική κίνηση Brown*. Η μελλοντική κατάσταση της διαδικασίας δοθέντος του παρόντος είναι ανεξάρτητη από το τι έχει συμβεί στο παρελθόν. Συμβολίζουμε με S_{t+h} την τιμή του υποκείμενου τίτλου μετά από χρόνο $t+h$. Η τιμή αυτή θα είναι ανεξάρτητη από την S_n (για $0 \leq n < t$δηλαδή για τιμές που αναφέρονται σε προγενέστερους χρόνους) δοθέντος S_t (όπου t η χρονική στιγμή που αναφέρεται στο παρόν). Προς απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού θα προχωρήσουμε ως εξής:

$$S_{t+h} = S_0 e^{X_{t+h}} = S_0 e^{X_t + X_{t+h} - X_t}$$

$$= S_0 e^{X_t} e^{X_{t+h} - X_t}$$

$$= S_t e^{X_{t+h} - X_t}$$

Επομένως η μελλοντική τιμή S_{t+h} δοθείσης της τιμής S_t εξαρτάται μόνο από την προσαυξήσεις $X_{t+h} - X_t$ της *κίνησης Brown*. Όμως η *κίνηση Brown* έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και άρα κάθε μελλοντική κατάσταση είναι ανεξάρτητη από τι έχει γίνει στο παρελθόν. Έτσι, αποδείχθηκε η Μαρκοβιανή ιδιότητα της *γεωμετρικής κίνησης Brown*.

3.5.3 Η Γεωμετρική Κίνηση Brown ως Όριο του Διωνυμικού Μοντέλου

Σκοπός της ενότητας αυτής, είναι η παρουσίαση του τρόπου σύγκλισης του *διωνυμικού μοντέλου* που περιγράφει την τιμή ενός υποκείμενου τίτλου στο μοντέλο συνεχούς χρόνου της *γεωμετρικής κίνησης Brown*. Στην παρούσα ενότητα δεν θα πραγματοποιηθεί πλήρης και αναλυτική ανάπτυξη του διωνυμικού μοντέλου καθώς και του διωνυμικού μοντέλου n περιόδων. Για την παρουσίαση και τα αποτελέσματα αυτών γίνεται παραπομπή στους J. C. Hull [11] και Μ. Μπούτσικα [21].

Έστω $\sigma \geq 0$ και $r \geq 0$ η μεταβλητότητα και το επιτόκιο (απόδοση) που αφορούν έναν υποκείμενο τίτλο (έστω μετοχή). Θεωρούμε το χρονικό διάστημα $[0, t]$ το οποίο διαιρούμε σε n διαστήματα μήκους *Δt*, δηλαδή $t = n\Delta t$. Θεωρούμε επίσης ότι το *διωνυμικό μοντέλο* είναι αυτό το οποίο περιγράφει την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Στο μοντέλο αυτό, σύμφωνα με τους Hull και Μπούτσικα, έχουμε ότι:

Θεωρούμε *Δ* μια πολύ μικρή αύξηση του χρόνου και έστω ότι για κάθε *Δ* μονάδες του χρόνου συμβαίνουν τα εξής δύο γεγονότα στην αξία ενός οικονομικού τίτλου:

- Είτε αυξάνεται κατά ένα παράγονται u με πιθανότητα *p*.
- Είτε μειώνεται κατά ένα παράγοντα d με πιθανότητα *1-p*.

Για τις ποσότητες u, d και p έχουμε ότι ισούται η καθεμία με

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$$

και

$$p = \frac{1}{2}(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta})$$

Καθώς επίσης και τις κινδυνοουδέτερες πιθανότητες:

$$p = \frac{e^{r\sqrt{\Delta t}} - d}{u - d}, \qquad q = \frac{u - e^{r\sqrt{\Delta t}}}{u - d}$$

Έστω επίσης,

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

Όπου οι τυχαίες μεταβλητές $Y_{1,\dots,}Y_n$ είναι πανομοιότυπα κατανεμημένες και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με:

$$P\{Y_k = 1\} = p, \qquad P\{Y_k = -1\} = q\,, \quad k = 1, \dots, n$$

Αν θεωρήσουμε ως U το πλήθος των φορών που η τιμή της μετοχής κινείται ανοδικά έως το χρόνο t και ως D το πλήθος των φορών που η τιμή της μετοχής κινείται καθοδικά έως το χρόνο t, τότε έπονται τα επόμενα:

$$M_n = U + D$$

$$n = U - D$$

και άρα:

$$U = \frac{n + M_n}{2}, \quad D = \frac{n - M_n}{2}$$

Έτσι για την τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t, θα έχουμε ότι:

$$S_t = S_0 u^{\frac{1}{2}(n+M_n)} d^{\frac{1}{2}(n-M_n)} = S_0 \exp\left\{\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{2}(n+M_n)\right\} \exp\left\{-\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{2}(n-M_n)\right\}$$

$$= S_0 \exp\{\,\sigma\sqrt{\Delta t} M_n\}$$

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι καθώς το $\Delta t \to 0$ ο νόμος της ακολουθίας $\{\sigma\sqrt{\Delta t}M_n\} = \{\sigma\sqrt{\Delta t}M_{\frac{t}{\Delta t}}\}$ συγκλίνει στην κανονική κατανομή με μέσο $\left(r - \frac{1}{2\sigma^2}\right)t$ και διακύμανση $\sigma^2 t$. Έτσι, η οριακή κατανομή της τιμής S_{nt} θα είναι η ίδια με την κατανομή μίας *γεωμετρικής κίνησης Brown* $S_t = S_0 \exp\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\}$ τη χρονική στιγμή t.

Αρχικά θα βρούμε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\sigma\sqrt{\Delta}M_n$ και στη συνέχεια θα βρούμε το όριο της για πολύ μικρά χρονιά διαστήματα δηλαδή για $\lim_{\Delta t \to 0} \varphi_{\frac{t}{\Delta t}}(u)$.

Πρόταση 3.1: Έστω $\varphi_n(u)$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\sigma\sqrt{\Delta t}M_n$.

Τότε:

$$\varphi_n(u) = [e^{u\sigma\sqrt{\Delta t}}\left(\frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right) + e^{-u\sigma\sqrt{\Delta t}}\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right)]^n$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό της ροπογεννήτριας συνάρτησης θα έχουμε το εξής:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(u) &= E\left[e^{u\sigma\sqrt{\Delta t}M_n}\right] \\
&= E[\prod_{k=1}^{n} e^{u\sigma\sqrt{\Delta t}Y_k}] \\
&= \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{u\sigma\sqrt{\Delta t}Y_k}\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} (e^{u\sigma\sqrt{\Delta t}}p + e^{-u\sigma\sqrt{\Delta t}}q) = (e^{u\sigma\sqrt{\Delta t}}p + e^{-u\sigma\sqrt{\Delta t}}q)^n \\
&= [\,e^{u\sigma\sqrt{\Delta}}\left(\frac{e^{r\Delta t} - e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right) + e^{-u\sigma\sqrt{\Delta}}\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right)]^n
\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\{Y_k\}$ είναι ανεξάρτητες.

Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε το όριο της ροπογεννήτριας συνάρτησης που βρήκαμε, όταν ο αριθμός των χρονικών υποδιαστημάτων του διαστήματος $[0, t]$ γίνει πολύ μεγάλος, δηλαδή όταν το $n \to \infty$ και συνεπώς όταν το μήκος των υποδιαστημάτων αυτών γίνει πολύ μικρός, δηλαδή όταν το $\Delta t \to 0$. Γίνεται η παρακάτω πρότασή και η απόδειξή της.

Πρόταση 3.2: Για τον λογάριθμο της ροπογεννήτριας συνάρτησης $\varphi_{\frac{t}{\Delta t}}(u)$ισχύει το εξής αποτέλεσμα:

$$log\varphi_{\frac{t}{\Delta t}}(u) = \frac{t}{\Delta t}\log[cosh\, \sigma u\sqrt{\Delta t} + \frac{(e^{r\Delta t} - \cosh\sigma\sqrt{\Delta t})\sinh\sigma u\sqrt{\Delta t}}{\sinh\sigma\sqrt{\Delta t}}]$$

Απόδειξη: Ξεκινώντας από το αποτέλεσμα της πρότασης 3.1 θα έχουμε:

$$\varphi_n(u) = [e^{u\sigma\sqrt{\Delta t}}\left(\frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right) + e^{-u\sigma\sqrt{\Delta t}}\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right)]^n$$

$$log\varphi_{\frac{t}{\Delta t}}(u) = \frac{t}{\Delta t}log\left[e^{u\sigma\sqrt{\Delta t}}\left(\frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right) + e^{-u\sigma\sqrt{\Delta t}}\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right)\right]$$

$$= \frac{t}{\Delta t}\log\left[2\frac{\left(e^{u\sigma\sqrt{\Delta t}}\left(e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) + e^{-u\sigma\sqrt{\Delta t}}\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}\right)\right)}{\sinh\sigma\sqrt{\Delta t}}\right]$$

$$= \frac{t}{\Delta t}log\left[2\frac{\left(e^{r\Delta t}\left(e^{u\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-u\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) + (e^{u\sigma\sqrt{\Delta} - \sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\left(u\sigma\sqrt{\Delta t} - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)}\right)}{\sinh\sigma\sqrt{\Delta t}}\right]$$

$$= \frac{t}{\Delta t}\log\left[\frac{\left(e^{r\Delta t}\sinh u\sigma\sqrt{\Delta t} - \sinh(\sigma\sqrt{\Delta t}(u-1)\right)}{\sinh\sigma\sqrt{\Delta t}}\right]$$

Λόγω του ότι ισχύει η ταυτότητα:

$$\sinh(A - B) = sinh\, AcosB - cosA\, sinB$$

θα έχουμε για την ποσότητα του αριθμητή $\sinh\left(\sigma\sqrt{\Delta t}(u-1)\right)$ ότι:

$$\sinh\left(\sigma\sqrt{\Delta t}(u-1)\right) = \sinh\left(\sigma\sqrt{\Delta t}u - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

$$= \sinh\left(\sigma\sqrt{\Delta t}u\right)\ \cosh\ \sigma\sqrt{\Delta t} - \cosh\left(\sigma\sqrt{\Delta t}u\right) sinh\,\sigma\sqrt{\Delta t}$$

Οπότε για την ποσότητα $log\varphi_{\frac{t}{\Delta t}}(u)$ θα έχουμε ότι είναι ίση με:

$$= \frac{t}{\Delta t}log\left[\frac{e^{r\Delta t}\sinh\sigma\sqrt{\Delta t}u - sinh\left(\sigma\sqrt{\Delta t}u\right)\cosh\sigma\sqrt{\Delta t} + cosh\left(\sigma\sqrt{\Delta t}u\right)\sinh\sigma\sqrt{\Delta t}}{\sinh\sigma\sqrt{\Delta t}}\right]$$

$$\Rightarrow log\varphi_{\frac{t}{\Delta t}}(u) = \frac{t}{\Delta t}\log[\cosh\ \sigma u\sqrt{\Delta t} + \frac{\left(e^{r\Delta t} - \cosh\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\sinh\ u\sigma\sqrt{\Delta t}\Big)}{\sinh\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

και η πρότασή μας αποδείχτηκε.

Λόγω του ότι ισχύει:

$\cosh z = 1 + \frac{1}{2}z^2 + O(z^4)$ και $\sinh z = z + O(z^3)$, καθώς το $z \to 0$ θα έχουμε ότι:

$$\cosh\sigma u\sqrt{\Delta t} = 1 + \frac{1}{2}u^2\sigma^2\Delta t + O((\Delta t)^2)\,,$$
$$\cosh\sigma\sqrt{\Delta t} = 1 + \tfrac{1}{2}\sigma^2\Delta t + O((\Delta t)^2)\,,$$
$$\sinh u\sigma\sqrt{\Delta t} = u\sigma\Delta t + O\left((\Delta t)^{\frac{3}{2}}\right),$$
$$\sinh\sigma\sqrt{\Delta t} = \sigma\Delta t + O\left((\Delta t)^{\frac{3}{2}}\right)\,,$$
$$e^{r\Delta t} = 1 + r\Delta t + O((\Delta t)^2)\,,$$

Καθώς το $\Delta t \to 0$. Συνεπώς:

$$\cosh\sigma u\sqrt{\Delta t} + \frac{\left(e^{r\Delta t} - \cosh\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\sinh u\sigma\sqrt{\Delta t}\Big)}{\sinh\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}u^2\sigma^2\Delta t + \frac{\left(1 + r\Delta t - 1 - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right)\sigma u\sqrt{\Delta t}}{\sigma\sqrt{\Delta t}} + O((\Delta t)^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}u^2\sigma^2\Delta t + ru\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 u\Delta t + O((\Delta t)^2)$$

Καθώς το $\Delta t \to 0$. Συνεπώς:

$$log\varphi_{\frac{t}{\Delta t}}(u) = \frac{t}{\Delta t}\log[\cosh\sigma u\sqrt{\Delta t} + \frac{\left(e^{r\Delta t} - \cosh\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\sinh u\sigma\sqrt{\Delta t}\Big)}{\sinh\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$= \frac{t}{\Delta t}\log\left[1 + \frac{1}{2}u^2\sigma^2\Delta t + ru\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 u\Delta t + O((\Delta t)^2)\right]$$

$$= \frac{t}{\Delta t}\log\left[\frac{1}{2}u^2\sigma^2\Delta t + ru\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + O((\Delta t)^2)\right] + O((\Delta t)^2)$$

$$= \frac{1}{2}u^2\sigma^2 t + rut - \frac{1}{2}\sigma^2 ut + O(\Delta t)$$

Καθώς το $\Delta t \to 0$. Συνεπώς:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \varphi_{\frac{t}{\Delta t}}(u) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)tu + \frac{tu^2\sigma^2}{2}$$

Που είναι ακριβώς η ροπογεννήτρια συνάρτηση μίας κανονικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής με μέσο $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ και διακύμανση $\sigma^2 t$.

Συνεπώς, ο νόμος της ακολουθίας $\{\sigma\sqrt{\Delta t}M_n\} = \{\sigma\sqrt{\Delta t}M_{\frac{t}{\Delta t}}\}$ συγκλίνει στην κανονική κατανομή με μέσο $\left(r - \frac{1}{2\sigma^2}\right)t$ και διακύμανση $\sigma^2 t$, έτσι ώστε η οριακή κατανομή της τιμής της μετοχής S_t να έχει την ίδια κατανομή με την *γεωμετρική κίνηση Brown*, δηλαδή $S_t = S_0\exp\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\}$ τη χρονική στιγμή *t*.

Ορίζοντας και δίνοντας μερικά βασικά χαρακτηριστικά των δύο πολύ σημαντικών στοχαστικών διαδικασιών, της κίνησης Brown και της γεωμετρικής κίνησης Brown, μένει πλέον να πραγματευτούμε στο τέταρτο κεφάλαιο το βασικό αντικείμενο τιμολόγησης του τύπου των Black-Scholes, που είναι τα δικαιώματα προαίρεσης και, ιδιαίτερα τα δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου.

Κεφάλαιο 4

Δικαιώματα Αγοράς και Πώλησης

4.1 Εισαγωγή

Το παρόν κεφάλαιο αποσκοπεί στην παρουσίαση όλων εκείνων των εισαγωγικών αλλά και πολύ βασικών εννοιών, χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των δικαιωμάτων προαίρεσης. Άλλωστε το δικαίωμα προαίρεσης αποτελεί το βασικό χρηματοοικονομικό εργαλείο πάνω στο οποίο πραγματοποιείται εφαρμογή του μοντέλου Black-Scholes. Επομένως, εύκολα γίνεται αντιληπτό πως το κεφάλαιο αυτό αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι προς τον τελικό σκοπό τούτης της εργασίας, που δεν είναι άλλος από την παρουσίαση του μοντέλου τιμολόγησης δικαιωμάτων καθώς και μερικών εφαρμογών του μοντέλου.

Το κεφάλαιο αυτό έχει διαιρεθεί σε τρία μέρη. Αρχικά γίνεται μία παράθεση ιστορικών στοιχείων γένεσης και ανάπτυξης της οικογένειας των χρηματοοικονομικών παραγώγων, βασικό μέλος της οποίας αποτελούν τα δικαιώματα προαίρεσης. Στην συνέχεια, ακολουθεί παρουσίαση των βασικών εννοιών και χαρακτηριστικών των δικαιωμάτων, με τα οποία θα πρέπει να έχει εφοδιαστεί ο αναγνώστης προκειμένου να είναι σε θέση να κατανοεί βασικές τους λειτουργίες. Στην ενότητα αυτή, εκτός από την παρουσίαση του Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος περιλαμβάνεται και αναφορά στην περίπτωση του τύπου Αμερικάνικου δικαιώματος. Τέλος, παρατίθενται μερικές από τις πιο βασικές ιδιότητες των τιμών των εν λόγω δικαιωμάτων αλλά και κάποια παραδείγματα πάνω στις ιδιότητες αυτές.

4.2 Χρηματοοικονομικά Παράγωγα

Στη χρηματοοικονομική επιστήμη, παράγωγο προϊόν θεωρείται μία διμερής σύμβαση της οποίας η αξία εξαρτάται ή παράγεται από τις τιμές κάποιων άλλων βασικών αξιών που εμπορεύονται στις χρηματιστηριακές αγορές. Οι αξίες αυτές μπορεί να αφορούν την διαμόρφωση της τιμής μίας μετοχής, ενός χρηματιστηριακού δείκτη ή ακόμα και εμπράγματα εμπορεύματα (*commodities*) που διαπραγματεύονται στο περιβάλλον ενός χρηματιστηρίου. Εφόσον το αποτέλεσμα της διμερούς συμφωνίας (ή σύμβασης) καθορίζεται από την εξελικτική πορεία της τιμής του περιουσιακού στοιχείου που ενέχεται σε αυτή, τότε το περιουσιακό αυτό στοιχείο ονομάζεται ως *υποκείμενο* ή *υποκείμενος τίτλος (underlying asset).*

Ο πρώτος σπόρος στην διαμόρφωση της έννοιας του χρηματοοικονομικού παράγωγου έχει την ρίζα του 2.500 χρόνια πριν και οφείλει την χρησιμοποίηση του στο Θαλή τον Μιλήσιο. Ο Θαλής προέβλεψε ότι η σοδειά της ελιάς τον καιρό της συγκομιδής θα ήταν εξαιρετικά καλή. Αυτό τον έκανε να αγοράσει τα δικαιώματα της αποκλειστικής χρήσης των ελαιοτριβείων της περιοχής. Όταν τελικά αποδείχθηκε ότι η σοδειά ήταν τόσο καλή όσο είχε προβλέψει, η ζήτηση για χώρους επεξεργασίας της παραγωγής ανέβηκε κατακόρυφα όπως ήταν φυσικό. Εκείνος, εκμεταλλευόμενος το γεγονός αυτό, προέβει στην ενοικίαση των ελαιοτριβείων με υψηλά ποσά ενοικίασης αποκομίζοντας μεγάλα κέρδη [4]. Είδη χρηματοοικονομικών παραγώγων εμφανίστηκαν αργότερα σε πρώιμο στάδιο στην Ολλανδία όπου είχαν συνδεθεί με το εμπόριο βολβών τουλίπας και στην Ιαπωνία με το εμπόριο ρυζιού κατά τον δέκατο έβδομο αιώνα. Οι αγορές των παραγώγων παρέμειναν για πολλά χρόνια μη αναπτυγμένες. Η κατάσταση αυτή διήρκησε μέχρι και τις αρχές της δεκαετίας του 1970 και συγκεκριμένα μέχρι το 1971, μετά την κατάργηση του συστήματος σταθερών συναλλαγματικών ισοτιμιών Bretton Woods, η οποία σαν αποτέλεσμα είχε την ελεύθερη διακύμανση των συναλλαγματικών ισοτιμιών. Σε εκείνη τη δεκαετία, τα επίπεδα διακύμανσης των επιτοκίων και των τιμών συναλλάγματος αυξήθηκαν απότομα κάνοντας τον όρο *μεταβλητότητα* βασικό αντικείμενο μελέτης των οικονομολόγων. Οι ραγδαίες αυτές αλλαγές, έκαναν επιτακτική την ανάγκη δημιουργίας αποτελεσματικών τρόπων διαχείρισης και αντιστάθμισης των επιπτώσεων των κινδύνων που πηγάζουν από οικονομικές δραστηριότητες.

Στην ανάπτυξη της αγοράς των παραγώγων συνέβαλλε σημαντικά η επιστημονική πρόοδος της οικονομικής επιστήμης στην περιγραφή και τιμολόγησή τους, καθώς και η αλματώδης ανάπτυξη στον κλάδο της πληροφορικής που παρείχε διευκολύνσεις στον τομέα των πολύπλοκων υπολογισμών. Η μίξη όλων των παραπάνω διεργασιών αποτέλεσε την απαρχή για μία νέα εποχή στο χρηματοοικονομικό κλάδο. Την εποχή των παραγώγων.
Σε αυτή, η κατασκευή παράγωγων προϊόντων διαδέχονταν η μία την άλλη. Έως το τέλος της δεκαετίας του 1970, η αγορά παραγώγων κατακλυζόταν από τα καινοτόμα για την εποχή συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης (*options*), προθεσμιακών συμβολαίων (*forwards*) και συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (*futures*).

Αρχικά η διαπραγμάτευση των παραγώγων πραγματοποιείτο σε μορφές αγοράς *over the counter*, δηλαδή σε αγορές με απουσία εποπτείας, διαμεσολάβησης και τεχνολογικής υποστήριξης. Βασικό πλεονέκτημα που απολαμβάνουν οι επενδυτές της αγοράς *over the counter* είναι η ότι έχουν τη δυνατότητα να καθορίζουν τους όρους των συμβολαίων, κάνοντας συμβόλαια στα μέτρα τους, ενώ διασφαλίζουν και μία εμπιστευτικότητα στις συναλλαγές τους. Το 1972 το εμπορικό ανταλλακτήριο του Σικάγο (Chicago Mercantile exchange) ήταν το πρώτο το οποίο ξεκίνησε να εμπορεύεται παράγωγα. Υπό αυτή την σαφώς πιο οργανωμένη μορφή αγοράς, οι συναλλαγές και τα συμμετέχοντα μέλη υπόκεινται σε καθορισμένο κανονιστικό πλαίσιο. Μέσα σε αυτό, με την παροχή κατάλληλου τεχνολογικού υπόβαθρου, διευκολύνεται η ρευστοποίηση των συναλλαγών και υποστηρίζεται η διαφάνεια. Σε μία οργανωμένη αγορά παραγώγων, όλα τα συμμετέχοντα μέλη υπαγορεύονται να τηρούν αυστηρά τις συμφωνίες που συνάπτουν μηδενίζοντας έτσι τον κίνδυνο πιστωτικής αθέτησης μέσω ειδικού για αυτό το σκοπό οργανισμού που εγγυάται την εκκαθάριση των συναλλαγών. Επιπλέον, κάθε προϊόν που διαπραγματεύεται σε οργανωμένη αγορά, έχει ίδια χαρακτηριστικά και αυτή η τυποποίηση τα καθιστά ανταλλάξιμα, τους προσδίδει ρευστότητα και δυνατότητα συμψηφισμού. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό που έρχεται σε αντίθεση με ό,τι ισχύει για παράγωγα προϊόντα που δεν είναι εισηγμένα σε οργανωμένες αγορές.

Το βασικό κέρδος από τη χρήση παράγωγων προϊόντων είναι ότι επιτρέπει σε άτομα και επιχειρήσεις να επιτύχουν πληρωμές που χωρίς την ύπαρξη των εργαλείων αυτών θα ήταν ανέφικτες, ή τουλάχιστον θα ήταν αποτέλεσμα μεγαλύτερου κόστους. Τα παράγωγα επιτρέπουν την πράξη αντιστάθμισης ενός κινδύνου που διαφορετικά θα μπορούσε να μην υπάρξει άλλος τρόπος προκειμένου να πραγματοποιηθεί αυτό. Άμεσο αποτέλεσμα του προηγηθέντος είναι οι οικονομικοί οργανισμοί να αναλαμβάνουν επενδύσεις με μεγαλύτερο κίνδυνο αλλά ταυτόχρονα ικανές να αποδώσουν μεγαλύτερα κέρδη, έχοντας ως ασπίδα την αντιστάθμισή του μέσω της σωστής εκτίμησής του.

Ένα ακόμα πλεονέκτημα που προσδίδουν τα παράγωγα είναι ό,τι αναβαθμίζουν τις αγορές των υποκείμενων τίτλων σε πιο αποτελεσματικές αγορές. Αυτό σημαίνει ότι οι αγορές παραγώγων δημιουργούν πληροφορία. Για παράδειγμα, σε αρκετές χώρες ο μόνος αξιόπιστος τρόπος άντλησης πληροφοριών για τα μακροχρόνια επιτόκια αποκτάται μέσω των συμφωνιών ανταλλαγής (*swap*), λόγω του ότι η αγορά αυτών των συμβολαίων παρουσιάζει μεγαλύτερη ρευστοποίηση και συνεπώς μεγαλύτερο όγκο συναλλαγών με συνέπεια την παραγωγή μεγαλύτερης ροής πληροφορίας από ότι η αγορά των ομολόγων.

Επιπρόσθετα, τα παράγωγα δίνουν τη δυνατότητα στους επενδυτές να διαπραγματεύονται στην αγορά έχοντας εις γνώση τους πληροφορίες που διαφορετικά θα ήταν απαγορευτικά ακριβές για να αποκτηθούν και να αξιοποιηθούν.

Ως παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η περίπτωση της θέσεως ανοιχτής πώλησης (*short selling*). Πιο συγκεκριμένα, κάποιος επιθυμεί να προβεί σε κίνηση *short selling* εφόσον έχει ενδείξεις (πληροφορίες) για πτώση του χρηματιστηριακού δείκτη. Αυτό κάνει τον επενδυτή να επιθυμεί να έχει στην κατοχή του ένα μεγαλύτερο αριθμό μετοχών προκειμένου να προχωρήσει σε πωλήσεις μεγαλύτερου όγκου και να αποκομίσει έτσι μεγαλύτερα κέρδη. Τον επιθυμητό αριθμό μετοχών έρχεται και δανείζει ο χρηματιστηριακός μεσάζοντας του επενδυτή (*broker*), έχοντας όπως ορίζει ο κανονισμός του χρηματιστηρίου αντίστοιχα κεφάλαια σε λογαριασμό προκειμένου να γίνει κάλυψη της θέσης σε περίπτωση μη επαλήθευσης των προσδοκιών του επενδυτή. Όπως γίνεται κατανοητό μία τέτοια δραστηριότητα εμφανίζει δυσκολίες στην πράξη και, σε περίπτωση μη επαλήθευσης της πληροφορίας αποδεικνύεται απαγορευτικά ακριβή. Αποτέλεσμα είναι ο επενδυτής να αποθαρρύνεται από μια ανάλογη πρακτική. Η πληροφορία που κατέχει ενσωματώνεται με αργό ρυθμό στην τιμή της μετοχής και έτσι η χρηματιστηριακή αγορά γίνεται λιγότερο αποτελεσματική. Κάνοντας όμως ο επενδυτής χρήση παράγωγου προϊόντος και πιο συγκεκριμένα ενός δικαιώματος προαίρεσης πώλησης (*put option*), μπορεί να επιτευχθεί προσομοίωση της παραπάνω διαδικασίας με πιο εύκολο τρόπο και με αρκετά μικρότερο κόστος, έχοντας εκμεταλλευτεί τις πληροφοριακές ενδείξεις.

Παρά τις καλές προθέσεις που πρέπει να αναγνωριστούν από τις πρώτες εκείνες σκέψεις για την κατασκευή εργαλείων που σαν σκοπό θα είχαν τη βελτίωση των τεχνικών αντιμετώπισης και διαχείρισης των οικονομικών κινδύνων, η μη συνετή και ορθή χρήση των παραγώγων είναι ικανή να οδηγήσει σε βαριές οικονομικές απώλειες που μπορούν οδηγήσουν ακόμα και σε κατάρρευση ολόκληρων οικονομικών μονάδων. Στο πρόσφατο παρελθόν τα παράγωγα έχουν συνδεθεί με μερικά αρνητικά αξιοσημείωτα γεγονότα, όπως την κατάρρευση της τράπεζας Baring και του επενδυτικού κεφαλαίου Long Term Capital, επικεφαλής του οποίου ήταν οι Myron Scholes και Robert Merton, θεωρούμενοι και ως πατέρες του μοντέλου Black-Scholes που συγκλόνισε τον κόσμο των παραγώγων και αφορούσε την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης Ευρωπαϊκών τύπου (European options). Η κακή χρήση των παράγωγων έπαιξε σημαντικό ρόλο και στην πτώση του επιχειρηματικού κολοσσού της Enron. Δύο χρόνια αργότερα από το γεγονός αυτό, ο φημισμένος επενδυτής Warren Buffett χαρακτήρισε τα παράγωγα ως όπλα μαζικής καταστροφής [8], [10], [27], [28]. Σύμφωνα με ευρήματα εμπειρικών μελετών, στις πράξεις παραγώγων υπεισέρχονται παράγοντες οι οποίοι δημιουργούν προβλήματα στη διοίκηση κινδύνου. Αναφέρονται μερικοί από αυτούς:

- Η περιορισμένη εμπειρία των συμμετεχόντων
- Η περιπλοκότητα των πράξεων επί των παράγωγων
- Η ελκυστικότητα του βραχυχρόνιου κέρδους με αποτέλεσμα την παραγνώριση των κινδύνων

Επειδή στις πράξεις των παράγωγων οι συμμετέχοντες δεν έχουν τη δυνατότητα ή ακόμα και δεν επιθυμούν να ανακαλύψουν τους κινδύνους κρίνεται απαραίτητη η λήψη ορισμένων μέτρων όπως:

- Δημιουργία ενός πιο αυστηρού νομοθετικού πλαισίου για τη θεσμοθέτηση κανόνων λειτουργίας και των πράξεων των παράγωγων

- Διεξαγωγή των πράξεων των παράγωγων μόνο από τράπεζες, με υποχρέωση ανακοίνωσης των πράξεων αυτών στην κεντρική τράπεζα με σύγχρονη αλλαγή στον τρόπο λογιστικοποίησης αυτών

- Ανάπτυξη νέων μεθόδων στις διαδικασίες λήψης αποφάσεων σχετικά με τα παράγωγα, δηλαδή με την κατασκευή εξελιγμένων μοντέλων που θα δίνουν τη δυνατότητα ευκολότερης και καλύτερης ποσοτικής ανάλυσης των κινδύνων

Στην αμέσως επόμενη παράγραφο θα γίνει αναλυτική παρουσίαση ενός εκ των πιο πρόσφατων και ευρέως χρησιμοποιούμενων χρηματοοικονομικών εργαλείων, των *δικαιωμάτων προαίρεσης (options).*

4.3 Χαρακτηριστικά Δικαιώματος Προαίρεσης (*option*)

Ένας τυπικός ορισμός που δίνεται για να περιγραφεί ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι ο εξής:

Ορισμός 4.1: Δικαίωμα προαίρεσης ορίζεται ως μία συμφωνία η οποία δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πουλήσει κάποιο υποκείμενο αγαθό σε μία καθορισμένη τιμή, σε μία συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία ή κατά τη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου.

Το δικαίωμα προαίρεσης (option) αποτελεί ένα από τα πιο σύγχρονα και καινοτόμα εργαλεία που ανήκουν στην κατηγορία των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων και εισήχθηκε στη χρηματιστηριακή αγορά σχετικά πρόσφατα. Αρχικά τα δικαιώματα προαίρεσης εμπορεύονταν σε μη οργανωμένες αγορές (over the counter) έχοντας ως κύρια συναλλακτικά μέρη τραπεζικούς οργανισμούς στα τέλη της δεκαετίας του 1920. Οι πρώτες συναλλαγές με βάση τα δικαιώματα προαίρεσης σε οργανωμένες αγορές πραγματοποιήθηκαν στις Η.Π.Α. και συγκεκριμένα στο ανταλλακτήριο στο του Σικάγο το 1972 (*Chicago Mercantile Exchange*) καθώς και στο ανταλλακτήριο της Φιλαδέλφεια το 1982 (*Philadelphia Stock Exchange*). Από εκείνη τη περίοδο και μετά, οι ολοένα αυξανόμενες ανάγκες των οικονομικών μονάδων και των ατόμων για προστασία ή αντιστάθμιση (*hedging*) των κινδύνων, αλλά και οι νέοι τρόποι που αναδεικνύονταν μέσα από το προϊόν αυτό για κέρδος, το ανέδειξαν σε ένα από τα πιο διαδεδομένα παράγωγα προϊόντα με όγκο συναλλαγών αξίας πολλών εκατομμυρίων δολαρίων σε καθημερινή βάση. Δημιουργήθηκαν ακόμα περισσότερες οργανωμένες αγορές προκειμένου να λαμβάνουν χώρα απρόσκοπτα συναλλαγές με περιεχόμενο τα δικαιώματα.

Επιπρόσθετα, πληθώρα ραγδαίων εξελίξεων στη χρηματοοικονομική επιστήμη, έχουν αναδείξει τα δικαιώματα ως ένα οικονομικό εργαλείο το οποίο έχει αποτελέσει τη βάση για την κατασκευή καινούριων χρηματοοικονομικών προϊόντων που ως θεμέλιο συστατικό τους έχουν τη φιλοσοφία που διέπει τα δικαιώματα προαίρεσης. Παραδείγματα τέτοιου τύπου συμβολαίων είναι τα *rights* ή *warrants* που εύκολα μπορούν να χαρακτηριστούν ως δικαιώματα με διαφορετικό όνομα. Τα συμβόλαια τύπου *cup* και *floor* που διαπραγματεύονται έχοντας τοποθετήσει ένα ανώτατο και ένα κατώτατο όριο αντίστοιχα στην τιμή του υποκείμενου τίτλου καθώς και τα *collars* και *corridors* που αποτελούν συνδυασμούς αγοράς και πώλησης δικαιωμάτων τύπου *cup* και *floor*. Αντικείμενο διαπραγμάτευσης (υποκείμενος τίτλος ή προϊόν) των συμβολαίων δικαιωμάτων προαίρεσης αποτελεί είτε η τιμή ενός χρηματιστηριακού δείκτη (FTSE 100, DOW JONES, INDUSTRIAL 30), είτε η τιμή ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος (μετοχή), είτε η τιμή μίας πρώτης ύλης (ξυλείας, πετρελαίου, χάλυβα), είτε τέλος η τιμή βιομηχανικών και αγροτικών προϊόντων.

Ακολουθούν επεξηγήσεις βασικών όρων του δικαιώματος σύμφωνα με τους [8], [21], [23], [11], [27], [28].

➢ **Ασφάλιστρο Δικαιώματος (*premium*)**

Ως προϊόν, το δικαίωμα έχει μία τιμή, την οποία οφείλει να καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή ως αντιστάθμισμα του γεγονότος ότι ο πωλητής παραχωρεί το πλεονέκτημα του δικαιώματος και παραμένει ο ίδιος εκτεθειμένος στις κινήσεις της αγοράς. Η τιμή αυτή ονομάζεται *premium*και στη βιβλιογραφία συνήθως συμβολίζεται με *P* ή *C ή V*.

➢ **Τιμή Εξάσκησης (*striking price* ή *exercise price*)**

Το δικαίωμα που παραχωρείται από τον πωλητή ενός δικαιώματος να αγοράσει ή να πουλήσει ο αγοραστής του ένα προϊόν (το υποκείμενο προϊόν) σε μία προκαθορισμένη τιμή ονομάζεται τιμή εξασκήσεως. Συνήθως συμβολίζεται με *E* ή *K*.

➢ **Χρόνος Εξάσκησης (*exercise date* ή *expiry date*)**

Ο προκαθορισμένος χρόνος εξάσκησης του δικαιώματος από τον αγοραστή του μπορεί να διακλαδωθεί σε δύο μέρη τα οποία δίνουν από ένα διαφορετικό τύπο δικαιώματος και ως εκ τούτου θα έχουμε :

- *Το Ευρωπαϊκό δικαίωμα* το οποίο δίνει τη δυνατότητα στον κάτοχο του δικαιώματος να πραγματοποιήσει τη συναλλαγή μόνο τη χρονική στιγμή λήξης του δικαιώματος.

- *Το Αμερικάνικο δικαίωμα* το οποίο δίνει τη δυνατότητα στον κάτοχο του δικαιώματος να πραγματοποιήσει τη συναλλαγή οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσα στα όρια ενός καθορισμένου χρονικού διαστήματος, μέχρι και τη λήξη του.

Συνήθως ο χρόνος εξάσκησης συμβολίζεται με *T*.

➢ **Είδη Δικαιωμάτων**

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως ο χρονικός περιορισμός άσκησης ή μη του δικαιώματος όπως αυτός περιέχεται στον ορισμό, αποτελεί ένα σημαντικό χαρακτηριστικό στοιχείο διαχωρισμού του δικαιώματος προαίρεσης σε δύο κατηγορίες.

Επιπλέον ανάλογα με το αν ο επενδυτής προβαίνει σε κίνηση αγοράς ή πώλησης ενός δικαιώματος διακρίνουμε τις εξής δύο κατηγορίες με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Το *Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς* (European type call option)
- Το *Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα πώλησης* (European type put option)
- Το *Αμερικανικού τύπου δικαίωμα αγοράς* (American type call option)
- Το *Αμερικανικού τύπου δικαίωμα πώλησης* (American type put option)

❖ **Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς:** Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, *Call Option*, δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει μία ποσότητα ενός περιουσιακού στοιχείου ή υποκείμενου τίτλου σε μία προσυμφωνημένη τιμή, την τιμή εξάσκησης E και, σε μία προσυμφωνημένη χρονική στιγμή, στη χρονική στιγμή της λήξης του δικαιώματος T.

Αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου τη χρονική στιγμή T, έστω S_T αυτή, είναι μεγαλύτερη της τιμής εξάσκησης E τότε ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμα, δηλαδή θα αγοράσει στην τιμή εξάσκησης E, θα πουλήσει αμέσως στη τιμή S_T και θα εισπράξει το ποσό $(S_T - E)$. Αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου τη χρονική στιγμή T, S_T δηλαδή, είναι μικρότερη ή ίση της τιμής εξάσκησης E, τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα. Έστω C το premium του Ευρωπαϊκού δικαιώματος. Τότε η αποπληρωμή θα είναι ίση με:

$$(S_T - E)_+ = max(S_T - E, 0)$$

Το καθαρό κέρδος ή ζημιά του αγοραστή θα είναι:

$$(S_T - E)_+ - C$$

Ο πωλητής του δικαιώματος έχει την υποχρέωση να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο εφόσον αυτό απαιτηθεί από τον αγοραστή στη συγκεκριμένη τιμή και χρονική στιγμή που αναγράφεται στη συμφωνία.

Αντίστοιχα με τα δικαιώματα αγοράς υπάρχουν και τα δικαιώματα πώλησης.

❖ **Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης:** Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, *Put Option*, δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να πουλήσει μία ποσότητα ενός περιουσιακού στοιχείου ή υποκείμενου τίτλου σε μία προσυμφωνημένη τιμή, την τιμή εξάσκησης E και, σε μία προσυμφωνημένη χρονική στιγμή, στη χρονική στιγμή της λήξης του δικαιώματος T.

Αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου τη χρονική στιγμή T, έστω S_T αυτή, είναι μικρότερη της τιμής εξάσκησης E τότε ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμα, δηλαδή θα αγοράσει στην τιμή εξάσκησης E, θα πουλήσει αμέσως στη τιμή S_T

και θα εισπράξει το ποσό $(E-S_T)$. Αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου τη χρονική στιγμή T, S_T δηλαδή, είναι μικρότερη ή ίση της τιμής εξάσκησης E, τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα. Έστω C το premium του Ευρωπαϊκού δικαιώματος. Τότε η αποπληρωμή θα είναι ίση με:

$$(E-S_T)_+ = max(E-S_T, 0)$$

Το καθαρό κέρδος ή ζημιά του αγοραστή θα είναι:

$$(E-S_T)_+ - C$$

Ο πωλητής του δικαιώματος έχει την υποχρέωση να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο εφόσον αυτό απαιτηθεί από τον αγοραστή στη συγκεκριμένη τιμή και χρονική στιγμή που αναγράφεται στη συμφωνία.

Τα Αμερικανικού τύπου δικαιώματα προαίρεσης ορίζονται με τον ίδιο τρόπο, με τη διαφορά ότι ο κάτοχός τους έχει το δικαίωμα να εξασκήσει το δικαίωμα οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν τη λήξη ή και στη λήξη.

- **Θέσεις Συναλλασσομένων (*position*)**

Όπως κάθε εμπορική συναλλαγή επί οποιουδήποτε προϊόντος διέπεται από δύο πλευρές οι οποίες εκτελούν χρέη πωλητή και αγοραστή, έτσι και η αγορά των δικαιωμάτων δεν μπορεί να υφίσταται χωρίς την ύπαρξη των δύο αυτών μερών. Ο *αγοραστής του δικαιώματος (buyer)* αποκτά το δικαίωμα να πραγματοποιήσει μία συναλλαγή χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι είναι υποχρεωμένος να το εξασκήσει. Η συγκεκριμένη κίνηση στον κόσμο διαπραγμάτευσης των δικαιωμάτων ονομάζεται και ως *long*. Από την άλλη πλευρά ο *πωλητής* του δικαιώματος *(writer ή seller)* εκχωρεί στον αγοραστή την απόφαση του αν θα ασκήσει το δικαίωμα ή όχι. Ο πωλητής του δικαιώματος λέγεται ότι προχωράει σε μία κίνηση που ονομάζεται *short*. Σε κάθε περίπτωση ο αγοραστής του δικαιώματος πάντα θα έχει την επιλογή στο αν θα ασκήσει το δικαίωμα που έχει αγοράσει και ο πωλητής θα είναι πάντα υποχρεωμένος να προχωρήσει στη συναλλαγή αν το ζητήσει ο αγοραστής.

Έχοντας δώσει το πρώτο μέρος όσον αφορά τις θέσεις που λαμβάνονται σε μια συναλλαγή δικαιωμάτων, μένει τώρα να αναφερθούμε στις επιμέρους επιλογές που δίνονται από την κάθε περίπτωση αγοράς και πώλησης. Έτσι λοιπόν θα έχουμε τις εξής περιπτώσεις που δίνονται στους συναλλασσόμενους δικαιωμάτων προαίρεσης:

Αγορά δικαιώματος αγοράς (long a call): Σε αυτή την περίπτωση, ο κάτοχος του συμβολαίου αγοράζει το δικαίωμα να μπορεί να *αγοράσει* το αναγραφόμενο προϊόν σε συγκεκριμένη τιμή που έχει συμφωνηθεί.

Αγορά δικαιώματος πώλησης (long a put): Σε αυτή την περίπτωση, ο κάτοχος του συμβολαίου αγοράζει το δικαίωμα να μπορεί να *πουλήσει* το αναγραφόμενο προϊόν σε συγκεκριμένη τιμή που έχει συμφωνηθεί.

Πώληση δικαιώματος αγοράς (short a call): Σε αυτή την περίπτωση ο πωλητής του συμβολαίου παραχωρεί στον αγοραστή του το δικαίωμα να *αγοράσει* το αναγραφόμενο προϊόν σε συγκεκριμένη τιμή που έχει συμφωνηθεί. Ο πωλητής του δικαιώματος έχει την *υποχρέωση* να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο εφόσον αυτό απαιτηθεί από τον αγοραστή στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και στη συγκεκριμένη τιμή.

Πώληση δικαιώματος πώλησης (short a put): Σε αυτή την περίπτωση ο πωλητής του συμβολαίου παραχωρεί στον αγοραστή του το δικαίωμα να *πουλήσει* το αναγραφόμενο προϊόν σε συγκεκριμένη τιμή που έχει συμφωνηθεί. Ο πωλητής του δικαιώματος έχει την *υποχρέωση* να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο εφόσον αυτό απαιτηθεί από τον αγοραστή στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και στη συγκεκριμένη τιμή.

Ακολουθεί παράδειγμα στο οποίο παρουσιάζεται μία μελέτη περίπτωσης για κάθε μία από τις παραπάνω θέσεις [21].

Παράδειγμα 4.1: Σε μία χρηματιστηριακή αγορά θεωρούμε ότι υπάρχει μία μετοχή με την επωνυμία XYZ, η οποία στις 5 Σεπτεμβρίου έχει χρηματιστηριακή αξία ίση με 35 Ευρώ. Θεωρούμε ακόμη ότι ο επενδυτής ενδιαφέρεται μόνο για παράγωγα δικαιώματα αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου. Το ασφάλιστρο *C* (*premium*) είναι διαφορετικό σε κάθε είδος δικαιώματος. Στο παράδειγμα αυτό θα μελετήσουμε την στρατηγική που μπορεί να ακολουθήσει ένας επενδυτής γύρω από τη μετοχή XYZ, με βάση τις εκτιμήσεις του σε σχέση με την μελλοντική πορεία της τιμής της μετοχής.

1. **Αγορά Δικαιώματος Αγοράς (*Long a call*)**

Στην περίπτωση που ο επενδυτής μας προβλέπει ανοδική τάση στην τιμή της μετοχής XYZ τους επόμενους μήνες και, δεν επιθυμεί να ρισκάρει την αγορά μετοχών, τότε έχει τη δυνατότητα να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής αυτής. Ο επενδυτής αυτός αγοράζει (*long position*) στις 5 Σεπτεμβρίου ένα δικαίωμα αγοράς (*call option*) λήξης Νοεμβρίου επί της μετοχής XYZ, με τιμή άσκησης (*strike price*) $E = 40$ ευρώ καταβάλλοντας αντίτιμο C. Είμαστε σε θέση τώρα να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Στην περίπτωση που η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής XYZ την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος ανέβει στα 60 ευρώ, δηλαδή σε τιμή μεγαλύτερη της τιμής εξάσκησης, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς προφανώς και θα εξασκήσει το δικαίωμα του αγοράζοντας στη συμφωνημένη τιμή των 40 ευρώ. Τότε, ο αγοραστής (επενδυτής) θα έχει κέρδος ίσο με $60 - 40$ ευρώ ανά μετοχή, μείον το ασφάλιστρο C με το οποίο αγόρασε το δικαίωμα από τον πωλητή, διότι θεωρητικά μπορεί να πουλήσει αμέσως τις μετοχές XYZ που αγόρασε με 40 ευρώ στην τιμή των 60 ευρώ.

- Αντίθετα, αν η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής XYZ την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος είναι 30 ευρώ, δηλαδή σε τιμή μικρότερη της τιμής εξάσκησης, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς προφανώς και δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα, αφού έχει τη δυνατότητα να αγοράσει φθηνότερα από την αγορά, δηλαδή στην τιμή των 30 ευρώ. Σε αυτή την περίπτωση ο αγοραστής όχι μόνο δεν θα έχει κάποιο κέρδος αλλά αντίθετα θα έχει ζημία ίση με το ασφάλιστρο C που πλήρωσε για την απόκτηση του δικαιώματος.

Γενικά, αν συμβολίσουμε με S_T την χρηματιστηριακή αξία της μετοχής XYZ στο χρόνο εξάσκησης T, τότε το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος αγοράς (call option) για τον αγοραστή (long position) θα είναι:

$$(S_T - E)_+ = max\{S_T - E.0\} = \begin{cases} S_T - E, & S_T > E \\ 0, & S_T \leq E \end{cases}$$

ενώ αν ληφθεί υπόψη και το ασφάλιστρο C θα είναι $(S_T - E)_+ - C$.

2. **Πώληση Δικαιώματος Αγοράς (*Short a Call*)**

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση στην οποία ο επενδυτής μας είναι κάτοχος ενός αριθμού μετοχών της εταιρίας XYZ και, ότι επιπλέον εκτιμά καθοδική τάση στην τιμή της συγκεκριμένης μετοχής μέσα στους επόμενους μήνες. Προκειμένου να προστατεύσει ή και να αυξήσει την απόδοση του χαρτοφυλακίου του την συγκεκριμένη περίοδο, αποφασίζει να πωλήσει ένα δικαίωμα αγοράς λήξης Νοεμβρίου επί της μετοχής XYZ με τιμή άσκησης (strike price) $E = 40$ ευρώ. Από την κίνηση αυτή θα εισπράξει ασφάλιστρο C. Είμαστε σε θέση τώρα να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Στην περίπτωση που η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής XYZ την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος είναι μικρότερη των 40 ευρώ, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του όπως είναι λογικό και, έτσι ο πωλητής (επενδυτής μας) θα έχει κερδίσει το ασφάλιστρο C.

- Στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής XYZ αυξηθεί πάνω από 40 ευρώ, (για παράδειγμα 60 ευρώ), τότε ο αγοραστής του δικαιώματος θα αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμά του και ο πωλητής (επενδυτής μας) θα υποχρεωθεί να πουλήσει στην τιμή των 40 ευρώ. Έτσι, θα χάσει $60 - 40$ ευρώ, αφού θα μπορούσε να είχε πουλήσει τις μετοχές που έχει στην κατοχή του σε τιμές αγοράς που είναι διαμορφωμένη στην τιμή των 60 αντί των 40 που υποχρεώνεται τώρα.

Γενικά, αν συμβολίσουμε με S_T την χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής XYZ στο χρόνο εξάσκησης T, τότε το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος αγοράς (call option) για τον πωλητή (*short position*) θα είναι:

$$-(S_T - E)_+ = -max\{S_T - E.0\} = \begin{cases} E - S_T, & S_T > E \\ 0, & S_T \leq E \end{cases}$$

ενώ αν συνυπολογιστεί και το ασφάλιστρο C θα είναι $C - (S_T \ - E)_+$.

3. ***Αγορά Δικαιώματος Πώλησης* (*Long a Put*)**

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση στην οποία ο επενδυτής μας κατέχει έναν αριθμό μετοχών της XYZ και εκτιμά πτώση στην τιμή της μετοχής XYZ τους επόμενους μήνες. Δεν επιθυμεί όμως να πωλήσει ακόμη τις μετοχές που έχει στην κατοχή του και εναλλακτικά αποφασίζει να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης λήξης Νοεμβρίου επί της μετοχής XYZ με τιμή άσκησης (*strike price*) $E = 40$ ευρώ καταβάλλοντας αντίτιμο C'. Είμαστε σε θέση τώρα να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής XYZ κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος γίνει για παράδειγμα 20 ευρώ, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης (επενδυτής μας), θα εξασκήσει το δικαίωμα του και θα πωλήσει στον πωλητή του δικαιώματος στην τιμή 40. Ο αγοραστής τότε θα έχει κέρδος ίσο με $40 - 20$ ευρώ ανά μετοχή μείον το ασφάλιστρο C' που πλήρωσε για την απόκτηση του δικαιώματος, διότι θεωρητικά μπορεί να αγοράσει αμέσως τις μετοχές XYZ που πώλησε στην τιμή των 40 ευρώ καταβάλλοντας μόνο 20 ευρώ.

- Αντίθετα, στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής XYZ γίνει 60 ευρώ, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης προφανώς και δεν θα προχωρήσει στην εξάσκηση του δικαιώματος, αφού του δίνεται η δυνατότητα να πωλήσει στην υψηλότερα από την τιμή εξάσκησης διαμορφωμένη τιμή αγοράς, δηλαδή στα 60 ευρώ. Σε αυτή την περίπτωση, ο αγοραστής όχι μόνο δεν θα έχει κανένα κέρδος από το δικαίωμα, αλλά θα ζημιωθεί στο ύψος της τιμής καταβολής του ασφαλίστρου C'.

Γενικά, αν S_T είναι η τιμή της μετοχής XYZ στο χρόνο εξάσκησης T, τότε το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος πώλησης (put option) για τον αγοραστή (long position) θα είναι:

$$(E - S_T)_+ = max\{E - S_T.0\} = \begin{cases} E - S_T, & E > S_T \\ 0, & E \leq S_T \end{cases}$$

ενώ αν συνυπολογιστεί και το ασφάλιστρο C' θα είναι $(E - S_T)_+ - C'$.

4. **Πώληση Δικαιώματος πώλησης (*Short a Put*)**

Τέλος, θεωρούμε την περίπτωση στην οποία ο επενδυτής μας εκτιμά ότι η τιμή της μετοχής θα κινηθεί ανοδικά μέσα στους επόμενους μήνες. Αποφασίζει να πωλήσει ένα δικαίωμα πώλησης λήξης Νοεμβρίου επί της μετοχής XYZ με τιμή άσκησης (strike price) $E = 40$ ευρώ και έτσι με τον τρόπο αυτό να εισπράξει το ασφάλιστρο C'. Είμαστε σε θέση τώρα να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής XYZ κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος έχει κινηθεί ανοδικά και πάνω από τα 40 ευρώ, τότε όπως είναι λογικό ο αγοραστής του δικαιώματος δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του και έτσι ο πωλητής του δικαιώματος (επενδυτής) θα έχει κερδίσει το ασφάλιστρο C'.

- Στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής XYZ κινηθεί πτωτικά και κάτω από 40 ευρώ, έστω 20 ευρώ η τιμή αυτή, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος θα εξασκήσει το δικαίωμά του κάτι που θα υποχρεώσει τον επενδυτής μας να αγοράσει στην τιμή των 40 ευρώ χάνοντας $40 - 20$ ευρώ ανά μετοχή, αφού θα μπορούσε να προχωρήσει σε πώληση στην διαμορφωμένη τιμή της αγοράς στα 20 ευρώ.

Γενικά, αν S_T είναι η τιμή της μετοχής XYZ στο χρόνο εξάσκησης T, τότε το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος πώλησης (put option) για τον πωλητή (short position) θα είναι:

$$-(E - S_T)_+ = -max\{E - S_T.0\} = \begin{cases} S_T - E, & E > S_T \\ 0, & E \leq S_T \end{cases}$$

ενώ αν συνυπολογιστεί και το ασφάλιστρο C' θα είναι $C' - (E - S_T)_+$.

➢ Αξία του Δικαιώματος

Η αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης αποτελείται από δύο συνθετικά στοιχεία:

1. Εσωτερική Αξία (*intrinsic value*)

Στην ενότητα σχετικά με τα είδη δικαιωμάτων, καταλήξαμε στο ότι οι δύο συναρτήσεις αποπληρωμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης είναι οι εξής αντίστοιχα:

- ➢ $(S_T - E)_+ = max(S_T - E, 0)$
- ➢ $(E - S_T)_+ = max(E - S_T, 0)$

Η παραπάνω ποσότητες ονομάζονται και *εσωτερική αξία του δικαιώματος (intrinsic value)* όπου αποτελεί και την πρώτη συνιστώσα της αξίας του δικαιώματος. Όταν η εσωτερική αξία είναι θετική τότε το δικαίωμα χαρακτηρίζεται ως *in the money.* Όταν η εσωτερική αξία είναι μηδενική τότε το δικαίωμα χαρακτηρίζεται ως *out of the money.* Στην περίπτωση μη ύπαρξης εσωτερικής αξίας, τότε το δικαίωμα χαρακτηρίζεται ως *out of the money.*

2. Χρονική Αξία (*time value*)

Η δεύτερη συνιστώσα της αξίας ενός δικαιώματος είναι η *χρονική αξία (time value).* Η συνιστώσα αυτή εξαρτάται με τη σειρά της από τις παρακάτω δύο μεταβλητές:

i. Χρόνος μέχρι την ημερομηνία άσκησης του δικαιώματος

Είναι λογικό πως όσο περισσότερο απέχουμε χρονικά από την καταληκτική ημερομηνία άσκησης του δικαιώματος, τόσο περισσότερο να αυξάνεται και η οποιαδήποτε αβεβαιότητα που σχετίζεται με το δικαίωμα. Μεγαλύτερη αβεβαιότητα συνεπάγεται και αποζημίωση ανάλογη του αναλαμβανόμενου κινδύνου. Συνεπώς, εύκολα διαφαίνεται ότι η χρονική αξία ενός δικαιώματος αυξάνεται όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος που απομένει μέχρι την καταληκτική ημερομηνία άσκησης του δικαιώματος, είτε αυτό αφορά δικαίωμα αγοράς είτε δικαίωμα πώλησης. Επισημαίνεται ότι η συνάρτηση αυτή δεν είναι γραμμική, κάτι που σημαίνει ότι ένα δικαίωμα οχτώ μηνών δεν έχει δύο φορές τη χρονική αξία ενός δικαιώματος τεσσάρων μηνών, αλλά είναι κατά τι λιγότερο.

ii. Μεταβλητότητα (*volatility*)

Πρόκειται για μία παράμετρο που αντανακλά την ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται η τιμή του υποκείμενου τίτλου το οποίο αναφέρεται στο δικαίωμα. Αποτελεί μία στατιστική συνάρτηση και διαδραματίζει πολύ σημαντικό ρόλο για τον υπολογισμό της τιμής του δικαιώματος. Η διακυμαντότητα συνήθως εκτιμάται με δύο διαφορετικούς τρόπους:
Ο πρώτος αφορά την *ιστορική διακύμανση (historical volatility)* αναφέρεται σε πραγματικές παρατηρηθείσες μεταβολές των τιμών του υποκείμενου τίτλου σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Έτσι, οι επενδυτές μπορούν να χρησιμοποιήσουν την πληροφορία αυτή και να την εφαρμόσουν στον καθορισμό μιας πιθανής μελλοντικής διακυμαντότητας του υποκείμενου τίτλου, εφόσον βέβαια τα χαρακτηριστικά του χρονικού διαστήματος που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση ταιριάζουν με τα τωρινά.
Ο δεύτερος αφορά την τεκμαρτή μεταβλητότητα *(implied volatility)* και αποτελεί μία πρόβλεψη της διακύμανσης του υποκείμενου τίτλου μέσω διαφόρων μοντέλων. Με τον τρόπο αυτό είναι συνήθως δύσκολο να ποσοτικοποιηθεί η διακύμανση.

Γενικά η τιμή ενός δικαιώματος θα είναι υψηλότερη όσο μεγαλύτερη είναι η διακύμανση των τιμών του υποκείμενου τίτλου. Για το λόγο αυτό, είναι συχνό η διαπραγμάτευση και η σύναψη της συμφωνίας ενός δικαιώματος να πραγματοποιείται σε όρους διακυμαντότητας (volatility).

Πλέον έχοντας ορίσει το κατάλληλο μαθηματικό υπόβαθρο στα κεφάλαια ένα και δύο, την ανάπτυξη της γεωμετρικής κίνησης Brown και των δικαιωμάτων, έχουμε φτάσει στο τελευταίο βήμα και βασικό σκοπό της παρούσας εργασίας που είναι η ανάπτυξη του μοντέλου Black-Scholes όπως ακολουθεί στο κεφάλαιο πέντε.

Κεφάλαιο 5

Το Μοντέλο Black–Scholes

5.1 Εισαγωγή

Βασικός σκοπός του πέμπτου κεφαλαίου είναι η παρουσίαση και η πλήρης ανάπτυξη του μαθηματικού μοντέλου που εφηύραν οι Fisher Black, Myron Scholes και Robert Merton για την τιμολόγηση κυρίως, δικαιωμάτων προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου. Το μοντέλο αυτό κυριαρχείται από έναν αριθμό υποθέσεων. Συνεπώς, προτού ξεκινήσουμε την προσπάθεια μας προκειμένου να καταλήξουμε στο μοντέλο των Black-Scholes, θα προηγηθεί παρουσίαση των υποθέσεων αυτών. Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν τα βήματα έτσι ώστε να καταλήξουμε στον τελικό τύπο του μοντέλου που χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων. Τέλος θα γίνει προσαρμογή του μοντέλου Black-Scholes και στα Αμερικανικά δικαιώματα.

5.2 Σκοπός του Μοντέλου BS

Το μοντέλο των Black & Scholes αποτελεί ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της σύγχρονης χρηματοοικονομικής θεωρίας, τόσο ως προς τον ιδεοληπτικό τρόπο με τον οποίο προσεγγίστηκε όσο και για την εφαρμοσιμότητά του. Όλα ξεκίνησαν το 1973 όταν οι Fisher Black και Myron Scholes δημοσίευσαν την πρωτοποριακή όπως αποδείχθηκε μελέτη με τον τίτλο “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” στην οποία ανάπτυξαν έναν κλειστό τύπο ο οποίος σκοπό είχε τον υπολογισμό της τιμής δικαιωμάτων αγοράς ή πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου. Ο τύπος αυτός στηριζόταν σε κάποιες βασικές παραδοχές καθώς και στην ιδέα της συνεχούς αντιστάθμισης της έκθεσης που προέρχεται από τη θέση πώλησης ενός δικαιώματος.

Η εξίσωση των Black & Scholes, είναι μία μερική διαφορική εξίσωση η οποία στην ουσία κυβερνάει την τιμή ενός δικαιώματος στο χρόνο ζωής του. Η βασική ιδέα του μοντέλου αυτού, είναι η απόλυτη αντιστάθμιση του κινδύνου (hedging) που απορρέει από την κατοχή ενός δικαιώματος, με το να αγοράζει και να πουλάει ο κάτοχός του με τον κατάλληλο τρόπο τον υποκείμενο τίτλο που ενέχεται στο δικαίωμα εξαλείφοντας με αυτό τον τρόπο τον κίνδυνο. Βασικό ρόλο στο μοντέλο διαδραματίζει η θεωρία που διέπει τα δικαιώματα έτσι ώστε να επιτευχθεί μία σωστή στρατηγική αντιστάθμισης του κινδύνου και τελικά σωστή τιμολόγηση του δικαιώματος. Το μοντέλο των Black & Scholes σηματοδότησε μία ραγδαία ανάπτυξη των αγορών διαπραγμάτευσης παραγώγων καθότι προέβαλε μία άμεση μέθοδο για την τιμολόγηση και αντιστάθμιση των παραγώγων βασιζόμενη σε συγκεκριμένους παράγοντες κινδύνου. Το μαθηματικό αυτό μοντέλο εξηγεί ότι οι τιμές των εμπορευόμενων περιουσιακών στοιχείων ακολουθούν μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου, τη *γεωμετρική κίνηση Brown*. Όταν το μοντέλο εφαρμοστεί σε ένα δικαίωμα που ενέχει ως υποκείμενο τίτλο μία μετοχή, εξαρτάται από τη διακύμανση των τιμών της μετοχής την οποία θεωρεί σταθερή, τη χρονική αξία του χρήματος, την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος καθώς και το χρόνο λήξης του δικαιώματος.

Η χρησιμοποίηση του μοντέλου των Black & Scholes βρήκε τόσο μεγάλη αποδοχή και εφαρμογή από τους επενδυτές και διαχειριστές χαρτοφυλακίων, η οποία όπως ήταν λογικό οδήγησε στην μαζική χρήση των δικαιωμάτων προαίρεσης που σαν αποτέλεσμα είχε τη δημιουργία του χρηματιστηρίου διαπραγμάτευσης δικαιωμάτων του Σικάγο.

Η έως τώρα εμπειρία από την εφαρμογή του τύπου έχει δείξει ότι η θεωρία που ακολουθεί το μοντέλο των Black & Scholes είναι σχετικά ακριβής για τις παρατηρούμενες τιμές, παρόλο που παρατηρούνται και κάποιες ασυνέπειες σε αυτές. Στην ουσία το μοντέλο αυτό δηλώνει ότι προσαρμόζοντας συνεχώς τις αναλογίες ποσότητας-τιμής μεταξύ του υποκείμενου τίτλου και των δικαιωμάτων σε ένα χαρτοφυλάκιο που τα περιέχει, ο επενδυτής μπορεί να δημιουργήσει ένα χαρτοφυλάκιο προστατευμένο από τους κινδύνους της αγοράς. Η ικανότητα στο να δημιουργήσει ένας επενδυτής ένα τέτοιου είδους χαρτοφυλάκιο έγκειται στο να μπορεί ο επενδυτής να πραγματοποιεί συνεχώς συναλλαγές αλλά και στην υπόθεση ότι οι τιμές των υποκείμενων τίτλων μπορούν να μεταβάλλονται συνεχώς στο χρόνο. Σε μία αποτελεσματική αγορά, όπου δεν υπάρχει ευκαιρία για κερδοσκοπία δίχως κίνδυνο, οποιοδήποτε χαρτοφυλάκιο με μηδενικό κίνδυνο αγοράς θα πρέπει να έχει την ίδια αναμενόμενη απόδοση με το επιτόκιο άνευ κινδύνου. Αυτή η προσέγγιση οδήγησε στη διαφορική εξίσωση η οποία στον κλάδο της φυσικής επιστήμης είναι γνωστή και ως εξίσωση θερμότητας (heat equation). Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι εκείνη που δίνει τον τύπο των Black & Scholes για την τιμολόγηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων που ενέχουν ως υποκείμενο τίτλο μετοχές που δεν δίνουν μερίσματα [28], [30], [35], [36].

Προτού προχωρήσουμε στην αναλυτική μαθηματικά παρουσίαση του μοντέλου των Black & Scholes, στην αναλυτική λύση της εξίσωσης και την εφαρμογή αυτής στα Ευρωπαϊκά και Αμερικανικά δικαιώματα, θα δοθούν οι υποθέσεις που κυβερνούν το μοντέλο αυτό σύμφωνα με τους [24], [31] .

5.2.1 Υποθέσεις του Μοντέλου B-S

Το μοντέλο των Black & Scholes έχει σαν σκοπό τον υπολογισμό της τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και πώλησης που σαν υποκείμενο τίτλο ενέχουν μία μετοχή. Για την σωστή εφαρμογή του μοντέλου θα πρέπει να πληρούνται οι επόμενες υποθέσεις που αφορούν την χρηματιστηριακή αγορά:

- Σταθερή μεταβλητότητα *σ*. Η μεταβλητότητα, δηλαδή το μέτρο που δείχνει κατά πόσο η τιμή της μετοχής θα κινηθεί είτε ανοδικά είτε καθοδικά, παραμένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος και θεωρείται γνωστή από τους επενδυτές.
- Η μετοχή δεν αποδίδει μερίσματα. Η μετοχή που ενέχεται στο δικαίωμα δεν αποδίδει μερίσματα καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος.
- Η αγορά είναι αποτελεσματική. Σε μία τέτοια αγορά, οι συμμετέχοντες σε αυτή είναι διαρκώς και το ίδιο καλά πληροφορημένοι για τις
- Οι αποδόσεις της μετοχής είναι λογαριθμοκανονικά κατανεμημένες. Το μοντέλο των Black & Scholes υποθέτει ότι οι αποδόσεις της υποκείμενης μετοχής κατανέμονται κανονικά. Μία τέτοια παραδοχή είναι λογική για τον πραγματικό κόσμο.
- Τα επιτόκια είναι σταθερά και γνωστά στο χρόνο. Το μοντέλο Black & Scholes χρησιμοποιεί τα επιτόκια ελευθέρου κινδύνου, δηλαδή την απόδοση που θα έδινε μία επένδυση που δεν ενέχει κάποιο κίνδυνο, για να εκπροσωπήσει τα επιτόκια αυτά.
- Δεν υφίσταται προμήθειες και κόστη συναλλαγής. Το μοντέλο αυτό υποθέτει πως δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής κατά την αγορά ή πώληση του περιουσιακού στοιχείου ή του δικαιώματος, δεν υπάρχουν όρια ως προς τις διαπραγματεύσεις και δεν υφίσταται οποιαδήποτε μορφή φορολογίας. Με άλλα λόγια η πληροφορία για την αγορά είναι διαθέσιμη σε όλους τους συμμετέχοντες σε αυτή κάτι που είναι συνεπές με την υπόθεση του μοντέλου για αποτελεσματική αγορά.
- Αφορά κυρίως δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου. Το μοντέλο των Black & Scholes εφαρμόζεται κατά κύριο λόγο για Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα τα οποία μπορούν να εξασκηθούν μόνο κατά την ημερομηνία λήξης τους.
- Οι αγορές είναι πλήρως ρευστοποιήσιμες. Το μοντέλο Black & Scholes υποθέτει ότι οι αγορές είναι τέλεια ρευστοποιήσιμες κάτι που σημαίνει ότι οποιαδήποτε χρονική στιγμή μπορεί να γίνει οποιαδήποτε πράξη αγοράς ή πώλησης και με οποιαδήποτε ποσότητα του εκάστοτε υποκείμενου τίτλου. Και αυτή η υπόθεση είναι συνεπής με την υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς του μοντέλου.

Στο μοντέλο των Black & Scholes υπάρχουν πέντε παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την τελική έκβαση της τιμής του δικαιώματος. Οι πέντε αυτοί παράγοντες είναι οι εξής:

1) Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος

2) Η τιμή του υποκείμενου τίτλου κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος

3) Ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος

4) Η διακύμανση της τιμής της μετοχής

5) Το επιτόκιο ελευθέρου κινδύνου

5.2.2 Εύρεση της Εξίσωσης B-S

Έχοντας ορίσει το πλαίσιο μέσα στο οποίο λειτουργεί το μοντέλο των Black & Scholes, θα ξεκινήσουμε να παρουσιάσουμε τα βήματα που μας οδηγούν αρχικά στην εύρεση της μερικής διαφορικής εξίσωσης που πρέπει να ικανοποιεί ένα δικαίωμα στον κόσμο των Black & Scholes σύμφωνα με τους [4], [11], [28], [30], [31] και, στη συνέχεια στη λύση της που μας οδηγεί στην τελική της μορφή προκειμένου να εφαρμοστεί στο Ευρωπαϊκό δικαίωμα σύμφωνα με τους [6], [12], [14], [28].

Θεωρούμε μία αγορά η οποία περιλαμβάνει:

i. Ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με υποκείμενο τίτλο μία μετοχή.

ii. Έναν τραπεζικό λογαριασμό.

iii. Μία μετοχή.

Για κάθε ένα από τα συστατικά στοιχεία της αγοράς που ορίσαμε θα προχωρήσουμε στη διατύπωση της συμπεριφοράς τους καθώς επίσης και τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται, με βάση τις υποθέσεις που υπαγορεύει το μοντέλου Black & Scholes.

i. Όπως έχουμε δει στο κεφάλαιο τέσσερα, ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου έχει συνάρτηση αποπληρωμής, πάντα στο τέλος της καθορισμένης χρονικής περιόδου, ίση με:

$$\max(S_T - K, 0) = (S_T - K)_+$$

Επιπλέον, όπως μπορεί να διαπιστωθεί από τη συνάρτηση αποπληρωμής, η τιμή του δικαιώματος εξαρτάται από την τιμή του υποκείμενου τίτλου S καθώς επίσης και από την μεταβλητή του χρόνου t. Αρχικά μπορούμε να πούμε ότι καθώς ο χρόνος που απομένει μέχρι τη λήξη του δικαιώματος μειώνεται, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση της αξίας του δικαιώματος καθώς μειώνει τον χρονικό διάστημα έκθεσης σε οποιαδήποτε αβεβαιότητα και συνεπώς κίνδυνο. Επιπρόσθετα, είναι φυσικό παρεπόμενο της παρέλευσης του χρόνου και η οποιαδήποτε μεταβολή στην τιμή του υποκείμενου τίτλου, δηλαδή της μετοχής, που ενέχεται στο δικαίωμα. Επομένως, η τιμή του δικαιώματος μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση της μεταβλητής του χρόνου και της μεταβλητής της τιμής της μετοχής ως εξής:

$$V_t \equiv V(S_t, t)$$

όπου:

- V_t είναι η τιμή του δικαιώματος τη χρονική στιγμή t
- S_t είναι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t
- t είναι ο χρόνος

ii. Θεωρούμε τώρα έναν τραπεζικό λογαριασμό, στον οποίο γίνεται αρχική κατάθεση χρημάτων αξίας D_0. Για τον τραπεζικό αυτό λογαριασμό πραγματοποιείται συνεχής ανατοκισμός και μετά από χρόνο t θα δώσει λογαριασμό ονομαστικής αξίας ίσο με:

$$D_t = D_0 e^{rt}, \quad r > 0$$

Για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, η αξία του λογαριασμού θα είναι ίση με την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dD_t}{dt} = rD_0 e^{rt} = rD_t \Rightarrow dD_t = rD_t dt \Rightarrow \frac{dD_t}{D_t} = rdt$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να διακρίνουμε ότι η μεταβολή του λογαριασμού εξαρτάται αναλόγως με το επιτόκιο χορήγησης της τράπεζας,rκαι, από το χρονικό διάστημα που αυτός τοκίζεται, dt.

iii. Όπως έχουμε δείξει στο κεφάλαιο τρία, η τιμή μιας μετοχής μοντελοποιείται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, η λύση της οποίας μας οδηγεί στο ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί μία *γεωμετρική κίνηση Brown.*

Από το σημείο αυτό και μετά οι δείκτες t παραλείπονται.

Θεωρούμε τώρα ένα χαρτοφυλάκιο, έστω Π αυτό, του οποίου η σύνθεση αποτελείται από:

- Μία θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς (long a call option)
- Μία θέση πώλησης, μεγέθους Δ στον υποκείμενο τίτλο (μετοχή). Το μέγεθος Δ παραμένει προς το παρόν απροσδιόριστο. Παρακάτω θα γίνει προσδιορισμός αυτής της ποσότητας σύμφωνα με τη βασική υπόθεση

του μοντέλου περί μη ύπαρξης ευκαιριών κερδοσκοπίας δίχως την ύπαρξη κινδύνου (μη ύπαρξη arbitrage).

Τότε, η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή t θα είναι ίση με:

$$\Pi = V(S,t) - \Delta S$$

Ένα βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου των Black & Scholes είναι πως προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα. Συνεπώς είναι λογικό να θέλουμε να βρούμε ποια θα είναι η μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου σε ένα μικρό χρονικό διάστημα $[t, t+dt]$. Η μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$d\Pi = dV - \Delta dS \tag{5.1}$$

Στην ουσία αυτό που επιθυμούμε να βρούμε είναι ποια θα είναι η αξία των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου μας, δηλαδή του δικαιώματος και της μετοχής. Όμως όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, η τιμή της μετοχής είναι και αυτή η οποία καθορίζει την αξία του δικαιώματος. Σκοπός του μοντέλου Black & Scholes είναι η εύρεση της τιμής του δικαιώματος, δηλαδή του V.

Η εξίσωση (5.1) είναι μία στοχαστική διαφορική εξίσωση λόγω της στοχαστικής *διαδικασίας Wiener*, W_t,που περιέχει η τιμή του δικαιώματος V μέσω του όρου dS που είναι ίσως με:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Στο κεφάλαιο δύο έχουμε δει ότι η λύση μίας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης πετυχαίνεται με εφαρμογή του λήμματος του Itô και είναι της μορφής:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX)^2$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα Itô για την τιμή του δικαιώματος, $V(S,t)$, θα έχουμε ότι αυτή θα είναι ίση με:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt$$

Άρα η μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου στο χρονικό διάστημα $[t, t+dt]$, θα είναι ίση με:

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS$$

Οι στοχαστικοί όροι της παραπάνω εξίσωσης, δηλαδή οι όροι που παράγουν βαθμό αβεβαιότητας, είναι εκείνοι που συνοδεύονται από τον όρο της στοχαστικής διαδικασίας Wiener και περιέχεται στον όρο dS. Οι όροι αυτοί οι:

$$\frac{\partial V}{\partial S}dS - \Delta dS = \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)dS$$

Μία από τις βασικότερες υποθέσεις που υπαγορεύει το μοντέλο Black & Scholes αφορά τη μη ύπαρξη ευκαιριών για κερδοσκοπία χωρίς κίνδυνο (no arbitrage). Συνεπώς, για να είναι προσαρμοσμένη η συνέχεια της ανάλυσης μας στο πλαίσιο υποθέσεων του μοντέλου, θα πρέπει να εξαλείψουμε τον παράγοντα αβεβαιότητας και συνεπώς κινδύνου. Αυτό θα γίνει με το να θέσουμε τους δύο όρους που συνοδεύουν το στοχαστικό όρο dS ως ίσους. Δηλαδή να θέσουμε:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

και η στοχαστική διαφορική εξίσωση $d\Pi$ αποκτά ντετερμινιστικό χαρακτήρα. Με την κίνηση αυτή έχει επιτευχθεί πλήρης αντιστάθμιση του κινδύνου (hedging) καθώς τα χαρτοφυλάκιο παρέχει εγγυημένη απόδοση για καθορισμένη χρονική περίοδο. Αυτό σημαίνει ότι είναι εφικτό η τιμή του Δ να αλλάζει συνεχώς, καθώς όσο ο χρόνος μεταβάλλεται η τιμή του όρου $\frac{\partial V}{\partial S}$ μεταβάλλεται και αυτή. Έχοντας κάνει την παραπάνω επιλογή στο μέγεθος, Δ, της θέσεως πώλησης του υποκείμενου τίτλου, η μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι πλέον ίση με:

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt$$

Εφόσον τώρα έχουμε δημιουργήσει ένα χαρτοφυλάκιο στο οποίο έχουμε εξαλείψει τον κίνδυνο, θα πρέπει η απόδοσή του, υπό την αρχή της μη ύπαρξης ευκαιριών κερδοσκοπίας χωρίς κίνδυνο, να ισούται με τη απόδοση που προσφέρει κάποια επένδυση με μηδενικό κίνδυνο. Μία τέτοια επένδυση θεωρείται η κατάθεση ενός χρηματικού ποσού σε έναν τραπεζικό λογαριασμό. Συνεπώς, θα πρέπει το χαρτοφυλάκιό μας να δίνει την ίδια απόδοση με τον τραπεζικό λογαριασμό αν καταθέταμε σε αυτόν την αξία του χαρτοφυλακίου Π. Η αξία του χαρτοφυλακίου καταθετημένη στον τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο $r > 0$, θα είναι ίση με:

$$d\Pi = r\Pi dt$$

Αν ίσχυε ότι $d\Pi \neq r\Pi dt$, τότε θα ήταν εφικτό για κάποιον επενδυτή να αποκτήσει κέρδος:

- είτε με το να δανειζόταν ένα ποσό από την τράπεζα ίσο με Π και στη συνέχεια να το επένδυε στο χαρτοφυλάκιο (περίπτωση $d\Pi > r\Pi dt$)

- είτε με το να προχωρούσε σε πώληση του χαρτοφυλακίου και στη συνέχεια να επένδυε το ποσό της πώλησης στο τραπεζικό λογαριασμό (περίπτωση $d\Pi < r\Pi dt$)

Και στις δύο περιπτώσεις θα παραβιαζόταν η βασική υπόθεση του μοντέλου περί μη ύπαρξης κερδοσκοπίας χωρίς την ύπαρξη κινδύνου.

Μένει τώρα να εξισώσουμε τις αξίες των δύο χαρτοφυλακίων. Θα έχουμε ότι:

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt = r\Pi dt \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt = r(V - \Delta S)dt \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt$$

Φέρνοντας τους όρους του δεξιού μέρους στο αριστερό και διαιρώντας με dt, έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \tag{5.1}$$

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως η *μερική διαφορική εξίσωση των Black & Scholes*, 1973, [31]. Η μεταβλητή ως προς την οποία μας ενδιαφέρει να λύσουμε την εξίσωση Black & Scholes έτσι ώστε να βρίσκουμε την τιμή του δικαιώματος είναι η V.

Σχόλια για την εξίσωση Black-Scholes:

- Η εξίσωση αυτή ορίζει την τιμή για οποιοδήποτε παράγωγο πάνω σε κάποιο υποκείμενο τίτλο, η τιμή του οποίου ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown

- Παρατηρούμε ότι έχοντας ορίσει το χαρτοφυλάκιο με τον παραπάνω τρόπο, χρησιμοποιώντας τον παράγοντα αντιστάθμισης Δ, η εξίσωση Black-Scholes δεν εξαρτάται από τον όρο τάσης μ, που δίνει τη μέση απόδοση της τιμής του υποκείμενου τίτλου, με κανένα τρόπο. Η απουσία αυτής της παραμέτρου τάσης (drift) δεν θα πρέπει να θεωρηθεί ως έκπληξη, καθώς η εξαγωγή της εξίσωσης Black-Scholes στηρίχθηκε στην υπόθεση της μη ύπαρξης κέρδους χωρίς κίνδυνο. Η μοναδική παράμετρος που εξαρτάται η εξίσωση και θα πρέπει να εκτιμηθεί με εμπειρικό τρόπο (χρήση χρονολογικών σειρών), είναι η διακύμανση σ.

- Ο γραμμικός τελεστής:

$$\mathcal{L}_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS\frac{\partial}{\partial S} - r$$

αποτελεί ένα μέτρο της διαφοράς μεταξύ της απόδοσης του αντισταθμισμένου χαρτοφυλακίου (Π) που είναι ο πρώτοι δύο όροι, και την απόδοση μιας κατάθεσης σε έναν τραπεζικό λογαριασμό που είναι οι δύο τελευταίοι όροι.

Στην επόμενη ενότητα παρατίθεται ένας αναλυτικός τρόπος εύρεσης του τύπου για τον υπολογισμό της τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος έχοντας ως αρχική εξίσωση, την μερική διαφορική εξίσωση των *Black & Scholes*.

5.2.3 Γενική Λύση της εξίσωσης B-S

Μία μέθοδος για την επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης BS, είναι να δείξουμε ότι η εξίσωση αυτή παίρνει τη μορφή μίας εξίσωσης διάχυσης (diffusion equation) ή εξίσωσης θερμότητας (heat equation) όπως αλλιώς ονομάζεται στον κλάδο της φυσικής. Ο λόγος που γίνεται αυτό, είναι πως είναι γνωστό στα μαθηματικά πώς να λύνονται τέτοιου είδους εξισώσεις. Η εξίσωση θερμότητας είναι μία πολύ γνωστή μερική διαφορική εξίσωση η οποία χρησιμοποιείται για την περιγραφή του τρόπου με τον οποίο κατανέμεται η θερμότητα σε μία ράβδο συναρτήσει του χρόνου και του χώρου.

Κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών θα δείξουμε ότι η μερική διαφορική εξίσωση BS είναι μία γραμμική παραβολική εξίσωση. Βάση της μορφής αυτής της εξίσωσης BS, θα δείξουμε ότι με τη σειρά της μπορεί να αναχθεί σε μορφή εξίσωσης διάχυσης ή όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως σε μορφή εξίσωσης θερμότητας. Συνεπώς, έχουμε φτάσει στο σημείο όπου η μερική διαφορική εξίσωση BS είναι πλέον στη μορφή μίας εξίσωσης διάχυσης.

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας ολοκληρωτικό μετασχηματισμό *Fourier*, τον αντίστροφο αυτού και το θεώρημα συνέλιξης (*convolution theorem*) βρίσκουμε τη γενική λύση της εξίσωσης διάχυσης ή θερμότητας για συγκεκριμένης μορφής αρχική συνθήκη.

Τέλος, γίνεται εφαρμογή και προσαρμογή της γενικής λύσης της εξίσωσης διάχυσης που βρήκαμε σε κάθε ένα από τα δύο είδη Ευρωπαϊκού δικαιώματος, αγοράς και πώλησης.

Το σημείο έναρξης της ανάλυσης μας είναι η μερική διαφορική εξίσωση BS στην οποία καταλήξαμε στην προηγούμενη ενότητα:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

Η σχέση αυτή είναι μια γραμμική εξίσωση παραβολικού τύπου της μορφής:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial v}{\partial x} + cv \tag{5.2}$$

η οποία μπορεί να πάρει τη μορφή μίας εξίσωσης διάχυσης:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{5.3}$$

Τότε για τη μορφή της εξίσωσης (5.3), μπορεί να δοθεί μία λύση για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες κάνοντας χρήση μεθόδων μετασχηματισμού *Fourier*.

Θα αποδείξουμε ότι η μερική διαφορική εξίσωση των BS είναι μία γραμμική εξίσωση παραβολικού τύπου της μορφής (5.2).

Υποθέτουμε ότι το επιτόκιο r και η μεταβλητότητα σ, παραμένουν σταθερά όπως ακριβώς ορίζει το μοντέλο των BS στις υποθέσεις του. Θεωρούμε επίσης τις ακόλουθες αλλαγές μεταβλητών:

$$S = Ke^x \Rightarrow e^x = \frac{S}{K} \Rightarrow e^{2x} = \left(\frac{S}{K}\right)^2 \text{ ή } x = log\frac{S}{K} \tag{5.4}$$

$$V(S,t) = Kv(x,\tau) \tag{5.5}$$

$$\tau = \frac{(T-t)\sigma^2}{2} \tag{5.6}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της ποσότητας *V(S,t)* όπως τις συναντάμε στην εξίσωση των Black & Scholes (5.1). Θα έχουμε ότι:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -K\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau} \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = K\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = K\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial S}\ln\left(\frac{S}{K}\right) = \frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{K}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S}\frac{\partial}{\partial S}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= -\frac{K}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S}\left(\frac{\partial x}{\partial S}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= -\frac{K}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\boldsymbol{e^{-2x}}}{K}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{5.9}$$

Εισάγοντας τις παραπάνω ποσότητες στην εξίσωση (5.1), τότε εκείνη θα πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} v \tag{5.10}$$

Αν ορίσουμε:

$$k = \frac{2r}{\sigma^2} \tag{5.12}$$

τότε η εξίσωση (5.10) παίρνει ακριβώς την μορφή της εξίσωσης (5.2). Γίνεται δηλαδή μία γραμμική εξίσωση παραβολικού:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} + kv \tag{5.13}$$

Όπου,

$$k - 1 = b \tag{5.14}$$

$$k = c$$

Η λύση μίας γραμμικής παραβολικής εξίσωσης, όπως η (5.13), είναι γνωστή και είναι πάντα της μορφής:

$$v(\mathrm{x}, \tau) = \ e^{\alpha x} e^{\beta \tau} h(x, \tau\ ) \tag{5.15}$$

Επομένως, οι μερικές παράγωγοι της $v(\mathrm{x}, \tau)$ θα είναι οι:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = e^{\alpha x} e^{\beta \tau} \frac{\partial h}{\partial \tau} + \beta e^{\alpha x} e^{\beta \tau} h \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{\alpha x} e^{\beta \tau} \frac{\partial h}{\partial \tau} + \alpha e^{\alpha x} e^{\beta \tau} h \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \ \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{\alpha x} e^{\beta \tau} \frac{\partial h}{\partial \tau} + \alpha e^{\alpha x} e^{\beta \tau} h\right]$$

$$= a^2 e^{\alpha x} e^{\beta \tau} h + e^{\alpha x} e^{\beta \tau}\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \alpha e^{\alpha x} e^{\beta \tau}\ \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha e^{\alpha x} e^{\beta \tau}\ \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$= a^2 e^{\alpha x} e^{\beta \tau} h + 2\alpha e^{\alpha x} e^{\beta \tau}\ \frac{\partial h}{\partial x} + e^{\alpha x} e^{\beta \tau}\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a^2 e^{\alpha x} e^{\beta \tau} h + 2\alpha e^{\alpha x} e^{\beta \tau}\ \frac{\partial h}{\partial x} + e^{\alpha x} e^{\beta \tau}\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{5.18}$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (5.15), (5.16), (5.17) και (5.18) στην (5.13) θα έχουμε:

$$e^{ax}e^{\beta\tau}\frac{\partial h}{\partial \tau}+\beta e^{ax}e^{\beta\tau}h=a^2e^{ax}e^{\beta\tau}h+2\alpha e^{ax}e^{\beta\tau}\,\frac{\partial h}{\partial x}+e^{ax}e^{\beta\tau}\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$$+(k-1)\left[e^{ax}e^{\beta\tau}\frac{\partial h}{\partial \tau}+\alpha e^{ax}e^{\beta\tau}h\right]-ke^{ax}e^{\beta\tau}h$$

$$\Rightarrow\frac{\partial h}{\partial \tau}+\beta h=a^2h+2\alpha\frac{\partial h}{\partial x}+\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(k-1)\left(\frac{\partial h}{\partial \tau}+\alpha h\right)-kh$$

Και καταλήγουμε στη σχέση:

$$\Rightarrow\frac{\partial h}{\partial \tau}=\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial h}{\partial x}[k-1+2a]+h[-k-\beta+\alpha(k-1)]+a^2 \qquad (5.19)$$

Προκειμένου τώρα να φέρουμε την εξίσωση (5.19) στη μορφή εξίσωσης διάχυσης:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\,, \qquad h\equiv h(x,\tau)$$

θα πρέπει:

$$\begin{cases} k-1+2a=0 \\ \kappa\alpha\iota \\ -k-\beta+\alpha(k-1)]+a^2=0 \end{cases}$$

από όπου έχουμε ότι:

$$a=-\frac{\kappa-1}{2} \qquad (5.20)$$

και για το β:

$$\beta=-k-\frac{1}{2}(k-1)^2+\frac{(k-1)^2}{4}=\frac{-4k-2(k-1)^2+(k-1)^2}{4}$$

$$=\frac{-4k-2k^2-2+4k+k^2-2k+1}{4}=\frac{-k^2-2k-1}{4}$$

$$\Rightarrow\beta=-\frac{(k+1)^2}{4} \qquad (5.21)$$

Συνεπώς, η σχέση (5.15) θα γίνει:

$$v(\mathrm{x},\tau) = e^{-\frac{k-1}{2}x}e^{-\frac{(k+1)^2}{4}\tau}h(x,\tau) \tag{5.22}$$

Επομένως, η σχέση (5.5) θα πάρει τη μορφή:

$$V(S,t) = Kv(x,\tau) = Ke^{-\frac{k-1}{2}x}e^{-\frac{(k+1)^2}{4}\tau}h(x,\tau) \tag{5.23}$$

Το $h(x,\tau)$ που είναι ένα κομμάτι της εξίσωσης διάχυσης της οποίας η γενική λύση μπορεί να βρεθεί.

Συνοψίζοντας, η εξίσωση των Black & Scholes με τις παρακάτω αλλαγές μεταβλητών ανάγεται σε πρόβλημα επίλυσης μίας εξίσωσης διάχυσης:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, x \in \mathbb{R}, \tau \in \left[0, \frac{\sigma^2 T}{2}\right] \\ &S = Ke^x \\ &\tau = \frac{(T-t)\sigma^2}{2} \\ &V(S,t) = Ke^{-\frac{k-1}{2}x}e^{-\frac{(k+1)^2}{4}\tau}h(x,\tau) \\ &k = \frac{2r}{\sigma^2} \end{aligned}}$$

Για να λυθεί η εξίσωση διάχυσης με αρχική συνθήκη $h(x,0)$ θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς *Fourier* (τα αποτελέσματα που θα χρησιμοποιήσουμε παρουσιάζονται στο παράρτημα). Η επιλογή της αρχικής συνθήκης όπως θα δούμε παρακάτω δεν έγινε με τυχαίο τρόπο. Έστω $\mathcal{F}(h) = \tilde{h}(k)$ ο μετασχηματισμός *Fourier* για μια συνάρτηση *f* ως προς μια μεταβλητή *x*. Τότε χάρη στην ιδιότητα (Π1) ο μετασχηματισμός *Fourier* για την εξίσωση διάχυσης δίνεται από το τύπο:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} = -k^2\tilde{h} \tag{5.24}$$

και η λύση της παραπάνω σχέσης είναι η:

$$\tilde{h}(k,\tau) = \tilde{h}(k,0)e^{-k^2\tau} \tag{5.25}$$

όπου $\tilde{h}(k,0)$ είναι ο μετασχηματισμός *Fourier* της αρχικής συνθήκης της συνάρτησης *h*.

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Fourier* προκειμένου να βρούμε τη λύση της $\tilde{h}(x,\tau)$. Ορίζουμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς *Fourier*:

$$\mathcal{F}(h_1) = \tilde{h}_1 = e^{-k^2\tau} \tag{5.26}$$

$$\mathcal{F}(h_2) = \tilde{h}_2 = \tilde{h}(k,0) \tag{5.27}$$

Τότε η σχέση (5.25) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\tilde{h}(k,\tau) = \tilde{h}_1(k,\tau)\tilde{h}_2(k,\tau) \tag{5.28}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης, καθώς και τους αντίστροφους μετασχηματισμούς *Fourier* στη σχέση (5.28), τα οποία παραθέτουμε στο παράρτημα (Π.2), (Π.3), αυτή γίνεται:

$$h(x,\tau) = (h_1 * h_2)(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x-\xi,\tau)h_2(\xi,\tau)d\xi \tag{5.29}$$

Κάνοντας τους ακριβείς υπολογισμούς του αντίστροφου μετασχηματισμού *Fourier* της σχέσης (5.25), οι οποίοι παρατίθενται στο παράρτημα (Π.4), θα έχουμε ότι:

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{h}_1) = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{-x^2/(4\tau)} \tag{5.30}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{h}_2) = h_2 = h(x,0) \tag{5.31}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.30) και (5.31) στη σχέση (5.28) έχουμε ότι:

$$h(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right] h(\xi,0)d\xi \tag{5.32}$$

η οποία αποτελεί τη γενική λύση της εξίσωσης διάχυσης.

5.2.4 Εφαρμογή στα Δικαιώματα Αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση αποπληρωμής του δικαιώματος είναι ίση με $V(S,t) = Ke^{-\frac{k-1}{2}x}e^{-\frac{(k+1)^2}{4}\tau}h(x,\tau) \overset{(5.14)}{\Longrightarrow} V(S,t) = Ke^{-\frac{b}{2}x}e^{-\frac{(b+2)^2}{4}\tau}h(x,\tau)$. Είδαμε επίσης ότι η $h(x,\tau)$ είναι συνάρτηση της $h(x,0)$ για $\tau = 0$. Οπότε, η συνάρτηση αποπληρωμής του δικαιώματος θα αντιστοιχεί στην τιμή ενός δικαιώματος τη χρονική στιγμή της ωρίμανσης του, αφού όπως είδαμε από την αρχική αλλαγή μεταβλητών για $\tau = \frac{(T-t)\sigma^2}{2} = 0$ θα σημαίνει πως $T = t$. Γνωρίζουμε ότι η αποπληρωμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος στη λήξη του είναι ίση με:

$$V(S,T) = max[\varepsilon(S-K),0] \tag{5.33}$$

όπου $\varepsilon = 1$ αντιστοιχεί στην περίπτωση ενός δικαιώματος αγοράς και $\varepsilon = -1$ στην περίπτωση ενός δικαιώματος πώλησης. Αρχικά θα υπολογίσουμε την ποσότητα $h(x,0)$.

$$\begin{aligned} h(x,0) &= \frac{1}{K} e^{\left(\frac{b}{2}\right)x} V(Ke^x, T) \\ &= \frac{1}{K} e^{\left(\frac{b}{2}\right)x} max[\varepsilon(Ke^x - K), 0] \\ &= max\left\{\varepsilon\left[e^{\left(\frac{b}{2}+1\right)x} - e^{\left(\frac{b}{2}\right)x}\right], 0\right\} \end{aligned} \tag{5.34}$$

Στην συνέχεια με αντικατάσταση της σχέσης (5.34) στη γενική λύση (5.32), θα έχουμε:

$$h(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right] max\left\{\varepsilon\left[e^{\left(\frac{b}{2}+1\right)\xi} - e^{\left(\frac{b}{2}\right)\xi}\right], 0\right\} d\eta \tag{5.35}$$

Εφόσον ισχύει ότι $e^{\left(\frac{b}{2}+1\right)x} - e^{\left(\frac{b}{2}\right)x} > 0$ αν και μόνο αν $x > 0$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$ κάνοντας τη απαραίτητα αλλαγή μεταβλητών, $\eta = \xi/\varepsilon \Rightarrow d\eta = d\xi/\varepsilon$, θα έχουμε:

$$h(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{0}^{\infty} exp\left[-\frac{(x-\varepsilon\eta)^2}{4\tau}\right]\left[e^{\varepsilon\left(\frac{b}{2}+1\right)\eta} - e^{\varepsilon\left(\frac{b}{2}\right)\eta}\right] d = \varepsilon I_{b/_2+1} - \varepsilon I_{b/_2} \tag{5.36}$$

όπου:

$$I_{b/_2+1} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{0}^{\infty} exp\left[-\frac{(x-\varepsilon\eta)^2}{4\tau}\right]\left[e^{\varepsilon\left(\frac{b}{2}+1\right)\eta}\right] d\eta$$

$$I_{b/_2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{0}^{\infty} exp\left[-\frac{(x-\varepsilon\eta)^2}{4\tau}\right]\left[e^{\varepsilon\left(\frac{b}{2}\right)\eta}\right] d\eta$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων I_b παρουσιάζεται στο παράρτημα (Π.5).

Η σχέση (5.36) τελικά γίνεται:

$$h(x,\tau) = \varepsilon e^{\left(\frac{b}{2}+1\right)\left(x+\frac{b\tau}{2}+\tau\right)}\Phi\left(\varepsilon\frac{x+\tau b+2\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) - \varepsilon e^{\left(\frac{b}{2}\right)\left(x+\frac{b\tau}{2}\right)}\Phi\left(\varepsilon\frac{x+\tau b}{\sqrt{2\tau}}\right) \quad (5.37)$$

Μέσω των αλλαγών μεταβλητών που έχουμε ορίσει προηγουμένως, μπορούμε να υπολογίσουμε πλέον την αξία του δικαιώματος $V(S,t)$ ως εξής:

$$V(S,t) = \varepsilon K e^{-\left(\frac{b^2}{4}+b+1\right)\tau} e^{-\frac{b}{2}x} e^{\left(\frac{b}{2}+1\right)\left(x+\frac{b\tau}{2}+\tau\right)}[\Phi\left(\varepsilon\frac{x+\tau b+2\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) - e^{\left(\frac{b}{2}\right)\left(x+\frac{b\tau}{2}\right)}\Phi\left(\varepsilon\frac{x+\tau b}{\sqrt{2\tau}}\right)]$$

$$= \varepsilon K e^{x}\Phi\left(\varepsilon\frac{x+\tau b+2\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) - \varepsilon K e^{-(b+1)\tau}\Phi\left(\varepsilon\frac{x+\tau b}{\sqrt{2\tau}}\right)$$

$$= \varepsilon K\frac{S}{K}\Phi\left(\varepsilon\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+(T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$-\varepsilon K e^{-r(T-t)}\Phi\left(\varepsilon\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+(T-t)\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$= \varepsilon S\Phi(\varepsilon d_1) - \varepsilon K e^{-r(T-t)}\Phi(\varepsilon d_2)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ο τελικός τύπος των Black & Scholes που αφορά την τιμολόγηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου. Στο παρακάτω πλαίσιο παρουσιάζεται το τελικό αποτέλεσμα συγκεντρωτικά.

$$\boxed{\begin{gathered} V(S,t) = \varepsilon S\Phi(\varepsilon d_1) - \varepsilon K e^{-r(T-t)}\Phi(\varepsilon d_2) \\ , \\ d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+(T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ , \\ d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+(T-t)\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ , \\ \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{για δικαώμα αγοράς} \\ -1 & \text{για δικαίωμα πώλησης} \end{cases} \\ \varphi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\frac{\eta^2}{2}}d\eta \end{gathered}}$$

5.2.5 Αριθμητικές Εφαρμογές

1) Υποθέτουμε ότι η τρέχουσα τιμή μίας μετοχής είναι ίση με 60 Ευρώ. Η διακύμανση της τιμής της μετοχής σε ετήσιο επίπεδο είναι ίση με 15%. Ο

ετήσιος ρυθμός ανατοκισμού είναι ίσος με 5%. Θα υπολογίσουμε την τιμή ενός εξαμηνιαίου Ευρωπαϊκού (α) δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης στα 50 Euro ανά μετοχή και (β) δικαιώματος πώλησης με την ίδια τιμή εξάσκησης.

***Λύση*:**

(α) Έχουμε ότι $S = 60,\ K = 50,\ \sigma = 0.15,\ r = 0.05,\ t = 0$ και θέλουμε να βρούμε την ποσότητα $V(S,t) = \varepsilon S\Phi(\varepsilon d_1) - \varepsilon K e^{-r(T-t)}\Phi(\varepsilon d_2)$ για $\varepsilon = 1$ που αντιστοιχεί στο Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς. Για τις ποσότητες $\Phi(d_1)$ και $\Phi(d_2)$ θα έχουμε με αντικατάσταση:

$$\Phi(d_1) = \Phi\left[\frac{ln\frac{60}{50} + 0.05\left(0.5 + \frac{0.15^2}{2}\right)}{0.15\sqrt{0.5}}\right] = \Phi(2.00768) = 0.977678$$

$$\Phi(d_2) = \Phi(d_1) - \sigma\sqrt{T-t} = 0.977678 - 0.15\sqrt{0.5} = 0.971389$$

Και για την τιμή του δικαιώματος αγοράς θα έχουμε ότι:

$V(S,t) = 60(0.977678) - 50e^{-0.05(0.5)}(0.971389) = 11.2904$ Ευρώ.

(β) Αντίστοιχα, για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης έχουμε ότι $S = 60,\ K = 50,$ $\sigma = 0.15,\ r = 0.05,\ t = 0$ και θα υπογιστεί η τιμή του μέσω της σχέσης $V(S,t) = \varepsilon S\Phi(\varepsilon d_1) - \varepsilon K e^{-r(T-t)}\Phi(\varepsilon d_2)$ για $\varepsilon = -1$. Για τις ποσότητες $\Phi(d_1)$ και $\Phi(d_2)$ κάνοντας χρήση της γνωστής σχέσης της τυπικής κανονικής κατανομής, $\Phi(-Z) = 1 - \Phi(Z)$, θα έχουμε με αντικατάσταση:

$$\Phi(-d_1) = \Phi\left[-\frac{ln\frac{60}{50} + 0.05\left(0.5 + \frac{0.15^2}{2}\right)}{0.15\sqrt{0.5}}\right] = 1 - \Phi(d_1) = 0.0223216$$

$$\Phi(-d_2) = 1 - \Phi(d_2) = 0.0286111$$

και για την τιμή του δικαιώματος αγοράς θα έχουμε ότι:

$$V(S,t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1)$$

$= 50e^{-0.05(0.5)}(0.0286111) - 60(0.0223216) = 0.0549016$ Ευρώ.

Παρατηρούμε ότι η τιμή του δικαιώματος πώλησης είναι σχεδόν μηδενική, το οποίο είναι αναμενόμενο λόγω του ότι η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη της τιμής εξάσκησης και συνεπώς δεν μπορεί να υπάρξει κέρδος. Δεν είναι ακριβώς μηδέν καθώς η συνάρτηση αποπληρωμής, $max(S_T - E, 0)$, του δικαιώματος ισχύει κατά τη χρονική στιγμή λήξης του δικαιώματος.

2) Η τιμή μίας μετοχής έξι μήνες πριν από τη λήξη ενός δικαιώματος είναι 42 Ευρώ, η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος είναι 40 Ευρώ, το ετήσιο επιτόκιο ελευθέρου κινδύνου είναι ίσο με 10%, και η ετήσια τυπική απόκλιση είναι ίση με 20%. Συνεπώς θα έχουμε ότι, $S_0 = 42$, $K = 40$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$, $t = 0$, $T = 0$

Για τις ποσότητες $\Phi(d_1)$ και $\Phi(d_2)$ θα έχουμε με αντικατάσταση:

$$d_1 = \frac{ln\frac{42}{40} + 0.5\left(0.1 + \frac{0.2^2}{2}\right)}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.7693$$

$$d_2 = \frac{ln\frac{42}{40} + 0.5\left(0.1 - \frac{0.2^2}{2}\right)}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.6278$$

και,

$$Ke^{-rT} = 40e^{-0.05} = 38.049$$

- Αν το δικαίωμα είναι ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (call), η τιμή του c θα είναι ίση με:

$$c = 42N(0.7693) - 38.049N(0.6278)$$

$$c = 42 * 0.7791 - 38.049 * 0.7349 = 4.76$$

- Αν το δικαίωμα είναι ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης (put), η τιμή του θα είναι ίση με:

$$p = 38.049N(-0.6278) - 42N(-0.7693)$$

$$p = 38.049 * 0.2651 - 42 * 0.2209 = 0.81$$

Αγνοώντας τη χρονική αξία του χρήματος, η τιμή της μετοχής θα πρέπει να αυξηθεί κατά 2.76 Ευρώ για τον αγοραστή του δικαιώματος αγοράς προκειμένου να μην υπάρξει κέρδος για τον επενδυτή (σημείο ισορροπίας). Αντίστοιχα, η τιμή της μετοχής θα πρέπει να μειωθεί κατά 2.81 Ευρώ για τον αγοραστή του δικαιώματος πώλησης προκειμένου να μην υπάρξει κέρδος και σε αυτή την περίπτωση για τον επενδυτή (σημείο ισορροπίας).

5.3 Συμπεράσματα για το Μοντέλο B-S

Το μοντέλο των Black & Scholes όπως ξέρουμε μας δίνει την τιμή ενός option δεδομένων κάποιων άλλων ποσοτήτων που θεωρούνται γνωστές. Παρά την ευρεία χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου όπως αναφέραμε και στην αρχή του κεφαλαίου βασίζεται σε κάποιες υποθέσεις που δεν ισχύουν στην πραγματικότητα. Πιο συγκεκριμένα:

1. Το θεώρημα των Black & Scholes υποθέτει ότι οι τιμές των μετοχών ακολουθούν με τον τρόπο που κινείται ένας τυχαίο περίπατο. Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε χρονική στιγμή οι τιμές μπορούν να κινηθούν ανοδικά ή καθοδικά με την ίδια πιθανότητα. Αυτό βέβαια δεν μπορεί να ισχύει με συστηματικό τρόπο, καθώς η τιμή μιας μετοχής εξαρτάται από πολλούς παράγοντες που δεν γίνεται να έχουν την ίδια πιθανότητα ως προς το πώς θα επηρεάσουν την κίνηση της μετοχής.

2. Η μεταβλητότητα ενώ μπορεί να θεωρηθεί σχετικά σταθερή για μικρά χρονικά διαστήματα, αυτό είναι εξαιρετικά μη πιθανό να ισχύει για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Συνήθως μετά από μία μεγάλη μεταβολή στις τιμές ακολουθεί μία περίοδος μεγάλης μεταβλητότητας η οποία θα χρειαστεί να περάσει αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα ώστε να υποχωρήσει.

3. Η υπόθεση ότι οι αποδόσεις των τιμών των μετοχών ακολουθούν τη λογαριθμοκανονική κατανομή, είναι μια λογική υπόθεση για τον ορθολογικό κόσμο η οποία όμως δεν ισχύει ακριβώς στην πραγματικότητα που παράγεται από τα εμπειρικά δεδομένα του χρηματοοικονομικού κόσμου. Οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων έχουν πεπερασμένη διακύμανση και ημί - βαριά ουρά κατανομής, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με πιο σταθερές κατανομές όπως η λογαριθμοκανονική η οποία έχει άπειρη διακύμανση και βαριά ουρά κατανομής. Καθώς η χρονική περίοδος για την οποία οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων υπολογίζονται αυξάνει, τότε η κατανομή των τιμών των περιουσιακών στοιχείων προσεγγίζει την κανονική κατανομή αλλά με πιο βαριές ουρές.

4. Το μοντέλο υποθέτει ότι οι μετοχές δεν αποδίδουν μερίδια κατά την διάρκεια ζωής του δικαιώματος. Στις περισσότερες περιπτώσεις στη πραγματικότητα, οι εταιρίες αποδίδουν μερίδια στους κάτοχους μετοχών.

5. Το μοντέλο υποθέτει ότι δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών, κατά τη διενέργεια αγοραπωλησιών μετοχών και δικαιωμάτων και δεν υπάρχει κανένα εμπόδιο κατά την πραγματοποίηση των συναλλαγών. Στην πραγματικότητα κάτι τέτοιο δεν ισχύει καθώς υπάρχουν χρεώσεις που βασίζονται στα spreads και σε άλλα κριτήρια. Πιο πολύ όμως, θα πρέπει

να σχολιαστεί το γεγονός ότι οι υποθέσεις που αποδίδουν στην αγορά στοιχεία που τη μετατρέπουν σε αποτελεσματική, όπως ότι οι παρούσες τιμές των χρεογράφων αντικατοπτρίζουν πλήρως κάθε σχετική και διαθέσιμη πληροφορία κατά τρόπο αποτελεσματικό και η υπόθεση ότι κάποιος μπορεί να προβεί σε αγοραπωλησία οποιουδήποτε μεγέθους και οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Η εμπειρία των χρηματιστηριακών αγορών δείχνει συστηματικά ότι η υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς δεν ισχύει στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων.

6. Στο μοντέλο γίνεται χρήση της υπόθεσης ότι τα επιτόκια είναι γνωστά και σταθερά. Η υπόθεση αυτή είναι μη ρεαλιστική. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει η έννοια του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου (risk free rate). Ως πραγματικό ανάλογο του επιτοκίου ελευθέρου κινδύνου μπορεί να χρησιμοποιηθεί η απόδοση ενός κυβερνητικού ομολόγου. Και αυτό όμως, όπως έχει αποδείξει διαχρονικά η οικονομική πραγματικότητα, υπόκειται σε μεταπτώσεις όπως σε περιόδους οικονομικών κρίσεων.

7. Τέλος, ένα πιθανό πρόβλημα του συγκεκριμένου μοντέλου είναι η εξαιρετική πολυπλοκότητά του, που μπορεί να οδηγήσει σε δυσκολίες τόσο σε επίπεδο κατανόησης λόγω του βαθύ μαθηματικού υπόβαθρου που απαιτεί το μοντέλο και σαν συνέπεια μπορεί να έχει τη μη σωστή εφαρμογή του.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, προκύπτει ότι το μοντέλο της θεωρίας των Black & Scholes στηρίζεται σε απλουστευτικές/εξιδανικευμένες υποθέσεις, κάτι το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικές διαφορές μεταξύ των πραγματικών τιμών των παραγώγων της αγοράς και των αντίστοιχων θεωρητικών που υπολογίζονται με το μοντέλο αυτό. Αρκετές μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί για την καταλληλότητα του μοντέλου σε πραγματικά δεδομένα αγοράς, όπως η μελέτη του Rubinstein (1994) και Dumas (1998), επιβεβαιώνουν την παραπάνω άποψη [36].

Παράρτημα

Μερικές Χρήσιμες Ιδιότητες του Μετασχηματισμού *Fourier*

Π.1 Ορισμός Μετασχηματισμού *Fourier*:

Ένας μονοδιάστατος μετασχηματισμός *Fourier* $\mathcal{F}(f(x))(k)$ μίας συνάρτησης $f(x)$ τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ ορίζεται ως:

$$\mathcal{F}(f(x))(k) = \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

Όπου $i = \sqrt{-1}$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός *Fourier* ορίζεται ως:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\tilde{f}(x)\right)(k) = f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \tilde{f}(x) dx$$

Π.2 Παράγωγοι Μετασχηματισμού *Fourier*:

Ο μετασχηματισμός *Fourier* της n-οστής παραγώγου μίας συνάρτησης f δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{F}(f^n(x))(k) = (ik)^n \mathcal{F}(f(x))(k)$$

Π.3 Το θεώρημα συνέλιξης:

Μια χρήσιμη ιδιότητα του μετασχηματισμού *Fourier* είναι ότι ο μετασχηματισμός *Fourier* για τη συνέλιξη του γινομένου δύο συναρτήσεων f και g είναι ίσο με το γινόμενο των μετασχηματισμών *Fourier* για τις f και g. Εάν ορίσουμε ως $f * g$ τη συνέλιξη του γινόμενο των f και g :

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy$$

Τότε ο μετασχηματισμός *Fourier* για τη συνέλιξη του γινομένου θα είναι:

$$(f * g)(x) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$$

Π.4 Υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού *Fourier* για το $e^{-k^2\tau}$.

Θα δείξουμε ότι:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k^2\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{-x^2/(4\tau)}$$

Απόδειξη:

Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στο Π.1 για το μετασχηματισμό *Fourier* θα έχουμε:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k^2\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} e^{-k^2\tau} dx \qquad (E.1)$$

Δημιουργώντας τα τετράγωνα στους εκθέτες των βάσεων e που βρίσκονται μέσα στο ολοκλήρωμα, απαιτούμε να ισχύει ότι:

$$-k^2\tau + ikx = A(k+B)^2 + C$$

$$-k^2\tau + ikx = A[k^2 + 2kB + B^2] + c$$

$$-k^2\tau + ikx = k^2A + 2kAB + AB^2 + c$$

όπου τα A, B, C θα πρέπει να καθοριστούν. Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων βαθμών ως προς k, έχουμε :

$$-\tau = A$$

$$ix = 2AB$$

$$0 = AB^2 + c$$

Και οι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων δίνουν:

$$A = -\tau$$

$$B = -\frac{ix}{2\tau}$$

$$C = -\frac{x^2}{4\tau}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση (Ε.1) θα έχουμε:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k^2\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(4\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left[-\tau(k - i\frac{x}{2\tau})^2\right] dx \qquad (E.2)$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών, $\xi = \sqrt{\tau}\left(k - i\frac{x}{2\tau}\right) \Rightarrow d\xi = \sqrt{\tau}dk$, η (E.2) θα γίνει:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k^2\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(4\tau)} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2/(4\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} dx$$

Και κάνοντας απευθείας χρήση του αποτελέσματος:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Καταλήγουμε στη σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k^2\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2/(4\tau)} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{-x^2/(4\tau)}$$

Π.5 Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων $I_{b/_{2}+1}$ και $I_{b/_{2}}$.

Θα αποδείξουμε ότι:

$$I_b = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{\infty} exp\left[-\frac{(x-\varepsilon\xi)^2}{4\tau} + b\varepsilon\xi\right] d\xi = e^{b(x+b\tau)\eta}\Phi\left(\varepsilon\frac{x+2b\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) \qquad (E.3)$$

όπου $\varepsilon = \pm 1$ και Φ ορίζει τη συνάρτηση κατανομής της Κανονικής κατανομής:

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta$$

Απόδειξη:

Δημιουργώντας τα τετράγωνα του εκθέτη της σχέσης (E.3) έχουμε:

$$-\frac{(x-\varepsilon\xi)^2}{4\tau} + \alpha\varepsilon\xi = -d_1(d_2 - \varepsilon\xi)^2 + d_3 \qquad (E.4)$$

Όπου τα $d_i, i = 1,2,3$ είναι σταθερές. Η σχέση (Ε.4) μετά από ανάπτυξη των ταυτοτήτων θα γίνει :

$$-\frac{(\varepsilon\xi)^2}{4\tau} + (\varepsilon\xi)\left(b + \frac{x}{2\tau}\right) - \frac{1}{4\tau}x^2 = -d_1(\xi)^2 + 2d_1d_2\xi - d_1(d_2)^2 + d_3$$

Εξισώνοντας τους ομοβάθμιους συντελεστές των $\varepsilon\xi$ θα έχουμε :

$$d_1 = \frac{1}{4\tau}$$

$$d_2 = x + 2\tau b$$

$$d_3 = b(x + b\tau)$$

Συνεπώς η σχέση (Ε.1) γίνεται:

$$I_b = e^{d_3}\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_0^{\infty} e^{-d_1(d_2-\varepsilon\xi)^2}\,d\xi \qquad (E.5)$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών, $\eta = (d_2 - \varepsilon\xi)\sqrt{2d_1} \Rightarrow d\eta = -\xi\sqrt{2d_1}d\xi$ και, η σχέση (Ε.5) θα γίνει:

$$I_b = \frac{e^{d_3}}{\sqrt{2d_1}}\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\left(-\varepsilon\int_{d_2\sqrt{2d_1}}^{-\varepsilon\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}}\,d\eta\right)$$

όπου για $\varepsilon = 1$ η εξίσωση (Ε.5) γίνεται:

$$I_b = e^{d_3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_2\sqrt{2d_1}} e^{-\frac{\eta^2}{2}}\,d\eta$$

$$I_b = e^{d_3}\Phi\left(d_2\sqrt{2d_1}\right) \qquad (\text{Ε}.6)$$

και για $\varepsilon = -1$ γίνεται :

$$I_b = e^{d_3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_2\sqrt{2d_1}}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}}\,d\eta \qquad (E.7)$$

Κάνοντας τώρα στη σχέση (Ε.7) την αλλαγή μεταβλητών, $\zeta = -\eta \Rightarrow d\zeta = d\eta$, αυτή θα γίνει:

$$I_b = e^{d_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2\sqrt{2d_1}} e^{-\zeta^2}\, d\zeta$$

$$I_b = e^{d_3} \Phi\left(-d_2\sqrt{2d_1}\right) \tag{Ε.8}$$

Έτσι συνδυάζοντας τις σχέσεις (Ε.6) και (Ε.8) θα έχουμε:

$$I_b = e^{d_3} \Phi\left(\varepsilon d_2\sqrt{2d_1}\right) \tag{Ε.9}$$

όπου:

$$e^{d_3} = e^{b(x+b\tau)}$$

$$d_2\sqrt{2d_1} = \frac{x + 2\tau b}{\sqrt{2\tau}}$$

Και αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις στη (Ε.9) παίρνουμε τη σχέση (Ε.1).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α. Βιβλία

[1] Δ. Λ. Αντζουλάκος, Μ. Κούτρας, Β. Κ. Μπένος, *"Ασκήσεις Πιθανοτήτων Μέρος Ι"*, Β΄ Έκδοση, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, 2004

[2] Δ. Λ. Αντζουλάκος, Μ. Κούτρας, *"Ασκήσεις Πιθανοτήτων Μέρος ΙΙ"*, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, 2004

[3] M. Baxter and A. Renie, *"Financial Calculus. An Introduction to Derivative Pricing"* Cambridge University Press, (1996)

[4] Σ. Δ. Βρόντος, *"Ειδικά Θέματα Ασφαλίσεων Ζωής, Σύγχρονα Ασφαλιστικά Προϊόντα, Μέρος Ι"*, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, (2011)

[5] J. Campbell, A. Lo, C. McKinlay, *"The Econometrics of Financial Markets"*, Princeton University Press, (1997)

[6] R. V. Churchill, *"Fourier Series and Boundary Value Problems"*, McGrawl-Hill, 2nd edition, New York, 1963

[7] Α. Ν. Γιαννακόπουλος, *"Εισαγωγή στα Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά"*, Τμήμα Στατιστικής ΟΠΑ, (2010)

[8] Μ. Γκλεζάκος, *"Αξιόγραφα και Χρηματιστηριακές Επενδύσεις"*, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, (2008)

[9] D. Duffie,*"Dynamic Asset Pricing Theory"*, 3rd edition, Princeton University Press, (2001)

[10] J.-P. Fouque, G. Papanicolaou and K. R. Sircar, *"Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility"*, Cambridge University Press, (2000)

[11] J. C. Hull, *"Options Futures and Other Derivatives"*, 5th Edition, Pearson, Prentice-Hull, (2003)

[12] JR. R. J Iorio, *"Fourier Analysis and Partial Differential Equations"*, Cambridge University, Cambridge New York, (2001)

[13] I. Karatzas, S. E. Shreve, *“Brownian Motion and Stochastic Calculus”,* Second Edition, Springer-Verlang, New York, (1991)

[14] J. Kevorkian, “Partial Differential Equations: Analytical Solution Techniques”, 2nd Edition, Chapman and Hall, 1993

[15] F. C. Klebaner,*“Introduction to Stochastic Calculus with Applications”*, Imperial College Press, (1998)

[16] G. F. Lawler, *“Random Walk and the Heat Equation”*, Ams Student Mathematical Library, (2010)

[17] G. F. Lawler and V. Limic, *“Random Walk: A Modern Introduction”* Cambtidge University Press, (2010)

[18] D. G. Luendberger, *“Investment Science”,* Oxford University Press, (1998)

[19] T. Mikosch, *“Elementary Stochastic Calculus with Finance in View”*, World Scientific, (2011)

[20] P. Mörters and Y. Peres, *“Brownian Motion”*, Cambridge University Press, (2010)

[21] Μ. Μπούτσικας, *“Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα (Εισαγωγή στη στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση)”*, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, (2005-2007)

[22] M. Musiela and M. Rutkowski, *“Martingale Methods in Financial Modelling”*, Springer-Verlang, (1998)

[23] Δ. Φ. Παπαϊωάννου, *“Εισαγωγή στις Χρηματοοικονομικές Αγορές”*, Ιδιωτική Έκδοση, (2002)

[24] S. H. Poon, *“A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility”*, John Wiley & Son, Ltd, (2005)

[25] S. M. Ross, *“Stochastic Processes”*, Wiley, 2nd Edition, New York, (1996)

[26] S. E. Shreve, *“Stochastic Calculus for Finance II: Continuous Time Models”*, Springer, (2004)

[27] R. M. Stulz, *“Risk Management and Derivatives”*, South-Western, (2003)

[28] P. Willmott, S. Howison, J. Dewynne, *“The Mathematics of Financial Derivatives”*, Cambridge University Press, (1997)

B. Εργασίες

[29] S. N. Z. Abidin and M. M. Jaffar, *"A Review on Geometric Brownian Motion in Forecasting the Share Prices in Bursa Malaysia"*, World Applied Sciences Journal 17, 87-93, ISSN 1818-4952, (2012)

[30] F. Black, *"How we Came Up with the Option Pricing Formula"*, Journal of Portfolio Management, 15, 2, 4-8, (1989)

[31] F. Black and M. Scholes, *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"*, The Journal of Political Economy, Vol. 81, No.3, pp. 637-654, (1973)

[32] J. C. Cox, S. Ross, M. Rubinstein, *"Option Pricing: A Simplified Approach"*, No. 79, SOC-77-18087 and SOC- 7722301, (1978)

[33] K. Itô, *"On Stochastic Differential Equations"*, Memoirs of the American Mathematical Society, 4, 1-51, (1951)

[34] H. B. E. Mechaiekh and R. W. Dimand, "Louis Bachelier's 1938 Monograph on the Calculus of Speculation: Mathematical Finance and Randmness of Asset Prices in Bachelier's Later Work", Electronic Journal for the History Probability and Statistics

[35] R. C. Merton, *"Theory of Rational Option Pricing"*, Bell Journal of Economics and Management Science 4, Vol. 4, No. 1, pp.141-183, (spring 1973)

[36] Dr. R. Sarbapriya, *"A Close Look into Black-Scholes Option Pricing Model"*, Journal of Science, Vol.2, No. 4, ISSN 2324-9854, (2012)