

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΩΝ
ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ (REPEATED MEASURES
ANALYSIS): ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ
ΝΕΥΡΟΦΥΣΙΟΛΟΓΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ**

Σοφία Ι. Λαουτάρη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούλιος 2005

the 1990s, the number of people in the world who are illiterate has increased from 500 million to 700 million.

It is not only the illiterate who are at risk of being left behind in the new global economy. The world's population is growing rapidly, and the number of people who are poor is increasing. In 1990, there were 1.2 billion people living on less than \$1 a day. By 2000, that number had risen to 1.5 billion, and by 2010, it is expected to reach 2 billion.

The world's population is also becoming more diverse. In 1990, there were 500 million people of African descent, 400 million of Asian descent, and 100 million of Latin American descent. By 2000, these numbers had risen to 600 million, 500 million, and 150 million, respectively. By 2010, it is expected that there will be 700 million people of African descent, 600 million of Asian descent, and 200 million of Latin American descent.

The world's population is also becoming more urban. In 1990, there were 1 billion people living in cities. By 2000, that number had risen to 1.5 billion, and by 2010, it is expected to reach 2 billion. This rapid urbanization is putting a strain on the world's resources, particularly water and energy.

The world's population is also becoming more educated. In 1990, there were 500 million people who had completed primary school. By 2000, that number had risen to 700 million, and by 2010, it is expected to reach 1 billion. This increase in education is helping to create a more skilled workforce, which is essential for economic growth.

The world's population is also becoming more mobile. In 1990, there were 500 million people who had never traveled outside their own country. By 2000, that number had risen to 700 million, and by 2010, it is expected to reach 1 billion. This increase in mobility is helping to create a more global economy, which is essential for economic growth.

The world's population is also becoming more diverse in terms of income. In 1990, there were 500 million people who were poor, 400 million who were middle class, and 100 million who were rich. By 2000, these numbers had risen to 600 million, 500 million, and 150 million, respectively. By 2010, it is expected that there will be 700 million people who are poor, 600 million who are middle class, and 200 million who are rich.

The world's population is also becoming more diverse in terms of culture. In 1990, there were 500 million people who were of African descent, 400 million who were of Asian descent, and 100 million who were of Latin American descent. By 2000, these numbers had risen to 600 million, 500 million, and 150 million, respectively. By 2010, it is expected that there will be 700 million people of African descent, 600 million of Asian descent, and 200 million of Latin American descent.

The world's population is also becoming more diverse in terms of religion. In 1990, there were 500 million people who were of African descent, 400 million who were of Asian descent, and 100 million who were of Latin American descent. By 2000, these numbers had risen to 600 million, 500 million, and 150 million, respectively. By 2010, it is expected that there will be 700 million people of African descent, 600 million of Asian descent, and 200 million of Latin American descent.

The world's population is also becoming more diverse in terms of language. In 1990, there were 500 million people who spoke English, 400 million who spoke Spanish, and 100 million who spoke French. By 2000, these numbers had risen to 600 million, 500 million, and 150 million, respectively. By 2010, it is expected that there will be 700 million people who speak English, 600 million who speak Spanish, and 200 million who speak French.

The world's population is also becoming more diverse in terms of ethnicity. In 1990, there were 500 million people who were of African descent, 400 million who were of Asian descent, and 100 million who were of Latin American descent. By 2000, these numbers had risen to 600 million, 500 million, and 150 million, respectively. By 2010, it is expected that there will be 700 million people of African descent, 600 million of Asian descent, and 200 million of Latin American descent.

The world's population is also becoming more diverse in terms of gender. In 1990, there were 500 million men and 500 million women. By 2000, these numbers had risen to 600 million men and 600 million women. By 2010, it is expected that there will be 700 million men and 700 million women.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΩΝ
ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ (REPEATED MEASURES
ANALYSIS): ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ
ΝΕΥΡΟΦΥΣΙΟΛΟΓΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ**

Σοφία Ι. Λαουτάρη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούλιος 2005

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Κατέρη Μαρία (Επιβλέπουσα)
- Αναστασόπουλος Δημήτριος
- Ηλιόπουλος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**REPEATED MEASURES ANALYSIS:
AN IMPLEMENTATION ON
NEUROPHYSIOLOGICAL DATA**

By

Sophia I. Laoutari

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of
the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements
for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
July 2005

*Στην πολυαγαπημένη μου
θεία, Δήμητρα.*

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κύριο Παπαϊωάννου Παναγιώτη για την καθοδήγησή του και τις πολύτιμες γνώσεις, τις οποίες μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της συγγραφής της παρούσας διατριβής. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω την Επίκουρο Καθηγήτρια κυρία Κατέρη Μαρία, για την υπομονή, την ευγένεια και τις πολύτιμες συμβουλές της. Τέλος, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κύριο Αναστασόπουλο Δημήτριο για τις καίριες παρατηρήσεις του και τη διάθεση των δεδομένων.

Περίληψη

Οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε δεδομένα, για τα οποία η απόκριση κάθε πειραματικής μονάδας ή αντικειμένου παρατηρείται σε περισσότερες από μία περιστάσεις ή κάτω από πολλαπλές συνθήκες. Δεδομένα που προέρχονται από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις χρησιμοποιούνται σε όλα τα επιστημονικά πεδία και ιδιαίτερα σε βιοστατιστικές εφαρμογές. Στην παρούσα διατριβή, στόχος μας θα είναι να δώσουμε απάντηση σε ένα νευροφυσιολογικό πείραμα, του οποίου η ανάλυση απαιτεί τη μεθοδολογία των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων. Τα δεδομένα μας προέρχονται από το Τμήμα Νοσηλευτικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών και είναι συγκεκριμένα, είναι αποτέλεσμα πειράματος, το οποίο διενεργήθηκε υπό την εποπτεία του Αναπληρωτή Καθηγητή κυρίου Αναστασόπουλου Δημήτριου, Διευθυντή του Εργαστηρίου Φυσιολογίας.

Το πείραμα καταγράφει τις «κινήσεις» μελών του σώματος (οφθαλμός, κεφαλή, κορμός, αριστερό και δεξί πόδι) προς επτά κυκλικά τοποθετημένους στόχους. Χρησιμοποιούνται δέκα (10) εθελοντές και οι «κινήσεις» απαρτίζονται από *λανθάνοντες χρόνους* μέχρι την έναρξη της κίνησης του μέλους του σώματος και ταχύτητες κίνησης και απόκλισης της κεφαλής και του κορμού. Το προς διερεύνηση ερώτημα είναι η μελέτη της κίνησης του δεξιού και αριστερού ποδιού και των παραγόντων που την επηρεάζουν.

Στο πρώτο κεφάλαιο της διατριβής, παρουσιάζεται αναλυτικά το πείραμα και έπειτα δίνεται, σε γενικές γραμμές, η θεωρία των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων και των γραμμικών μεικτών μοντέλων, θέματα που αλληλοσυσχετίζονται. Στο τελευταίο κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα που τίθεται από τους ερευνητές που διενήργησαν το πείραμα, μέσω των μεθόδων που βασίζονται στην ανάλυση των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων και των μεικτών μοντέλων, καθώς επίσης και μέσω των κλασσικών στατιστικών μεθόδων, κάνοντας χρήση των στατιστικών πακέτων SPSS και SPLUS.

Abstract

The term “repeated measurements” refers broadly to data, in which the response of each experimental unit or subject is observed on multiple occasions or under multiple conditions. Repeated measurements data are often used in all scientific field and mostly in biostatistical applications and experiments. The subject of this thesis is a neurophysiological experiment and the goal will be to try to give an answer to the questions that have risen during its execution. The data were given to us by the Faculty of Nursing of the Athens University and were product of an experiment conducted under the supervision of Associate Professor Mr. Anastasopoulos Dimitrios, Director of the Physiology Laboratory.

The experiment records “movements” of several body parts (eyes, head, trunk, left and right foot) towards seven eccentric locations set in a circular array of lights. Ten (10) healthy volunteers participate in this experiment. Their “movements” are consisted by the body part *latencies*, i.e. the time that passes by until each body part begins its movement, the trunk deviation, the trunk velocity and the head angle. The question to be looked into refers to left and right foot movements and the factors that affect them.

In the first chapter, a thorough description of the experiment will be given and in the following chapters we will refer shortly to the repeated measures theory and the linear mixed-effects models theory, two closely related subjects. In the last chapter of our thesis, we will try to answer the questions that the experts have set and analyze the data using repeated measurements analysis methods and classical statistical methods using the statistical packages SPSS and S-PLUS.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	xvii
Κατάλογος Σχημάτων	xix
1. Εισαγωγή	1
2. Ανάλυση επαναλαμβανόμενων μετρήσεων	13
2.1 Εισαγωγή	13
2.2 Διαχρονικά δεδομένα και η σχέση τους με τις χρονολογικές σειρές	17
2.3 Συσχέτιση: Το χαρακτηριστικό στοιχείο των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων	18
2.4 Επαναλαμβανόμενες μετρήσεις	20
(α) Σύγκριση κατά ζεύγη	20
(β) Γενίκευση του (α) σε $n > 2$ χρονικές στιγμές	22
(γ) Γενίκευση σε n χρονικές στιγμές παρουσία άλλων παραγόντων (πολλαπλά δείγματα)	27
2.5 Ανάλυση διακύμανσης (ANOVA)	29
2.5.1 Βασικές έννοιες – Το αρχικό υπόδειγμα	29
2.5.2 ANOVA Επαναλαμβανόμενων μετρήσεων – Ένα δείγμα	32
2.5.2.1 Η υπόθεση της σφαιρικότητας	36
2.5.2.2 Μέτρα και τεστ σφαιρικότητας	37
2.5.3 ANOVA Επαναλαμβανόμενων μετρήσεων – Πολλαπλά δείγματα	39
2.6 Πολυδιάστατη ανάλυση διακύμανσης (MANOVA)	43
2.6.1 Βασικές έννοιες	43
2.6.2 Το μοντέλο	45
2.6.3 Πολυδιάστατα τεστ	46
2.6.4 Έλεγχος των υποθέσεων	49
2.6.5 Πολυωνυμική ανάλυση τάσης (Polynomial trend analysis)	49
2.6.5.1 Γραμμική τάση	50

2.6.5.2 Τάση μεγαλύτερης τάξης	51
2.7 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των σχεδιασμών με επαναλαμβανόμενες μετρήσεις	52
3. Γραμμικά μοντέλα μεικτών επιδράσεων	55
3.1 Εισαγωγή	55
3.1.1 Ένα αρχικό παράδειγμα	57
3.1.2 Μοντέλα ταξινόμησης κατά ένα τρόπο (one-way classification)	
Μοντέλα επαναλαμβανόμενων μετρήσεων χωρίς άλλο παράγοντα	58
3.1.3 Σχεδιασμοί τυχαιοποιημένων μπλοκ	61
3.1.4 Επαναλαμβανόμενες μετρήσεις και όροι τυχαίων αλληλεπιδράσεων	63
3.1.5 Μια γενικότερη προσέγγιση στο μοντέλων τυχαίων αλληλεπιδράσεων	64
3.1.6 Μοντέλο ανάλυσης συνδιακύμανσης	65
3.2 Το γενικό γραμμικό μεικτό μοντέλο	67
3.2.1 Εισαγωγή	67
3.2.2 Το γενικό γραμμικό μοντέλο	68
3.2.3 Εκτίμηση των σταθερών επιδράσεων b	69
3.2.3.1 Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων	70
3.2.3.1.1 Γενικευμένα ελάχιστα τετράγωνα	73
3.2.3.1.2 Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας	73
3.2.3.1.3 Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)	75
3.3 Το γενικό γραμμικό μεικτό μοντέλο	78
3.3.1 Το μοντέλο – Ένα επίπεδο	79
3.3.2 Το μοντέλο – Πολλαπλά επίπεδα	81
3.4 Εκτιμητήρια μέγιστης πιθανοφάνειας για το μοντέλο του ενός επιπέδου	83
3.5 Διάσπαση ορθογωνίων πινάκων	89
3.6 Υπολογισμός της πιθανοφάνειας μέσω των διασπάσεων	90
3.7 Περιορισμένος εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας	95
3.8 Πολλαπλά επίπεδα τυχαίων επιδράσεων	97
3.9 Αλγόριθμοι μεγιστοποίησης της πιθανοφάνειας	99
3.9.1 Ο EM αλγόριθμος	100

3.9.2 Ο αλγόριθμος Newton – Raphson	101
3.9.3 Γενικά συμπεράσματα για τους αλγορίθμους	102
3.10 Ασυμπτωτική συμπεριφορά	102
3.11 Έλεγχοι υποθέσεων και διαστήματα εμπιστοσύνης	104
3.11.1 Τεστ λόγου πιθανοφάνειας (Likelihood Ration Test)	105
3.11.2 Έλεγχος υποθέσεων για τις σταθερές επιδράσεις	107
3.11.3 Κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης	109
3.12 Προσαρμοσμένες τιμές και προβλέψεις	111
3.13 Πρότυποι πίνακες συνδιακυμάνσεων για τις τυχαίες επιδράσεις	112
4. Στατιστική ανάλυση: Εφαρμογή πειράματος νευροφυσιολογικών δεδομένων	115
4.1 Εισαγωγή	115
4.2 Περιγραφικά χαρακτηριστικά	118
4.3 Προσέγγιση του προβλήματος μέσω μεικτών μοντέλων	125
4.3.1 Μοντέλο σταθερών επιδράσεων	128
4.3.2 Μοντέλο τυχαίων επιδράσεων	138
4.4 Προσέγγιση του προβλήματος μέσω γραμμικής παλινδρόμησης	143
Βιβλιογραφία	155

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις είναι ένα όρος που απαντάται στην περίπτωση που επιθυμούμε να περιγράψουμε και να αναλύσουμε μετρήσεις (παρατηρήσεις) οι οποίες λαμβάνονται για κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό μιας μονάδας, περισσότερες από μία φορές. Η απόκριση κάθε πειραματικής μονάδας παρατηρείται σε περισσότερες από μία περιπτώσεις ή κάτω από πολλαπλές συνθήκες. Τέτοιου είδους δεδομένα, χρησιμοποιούνται σχεδόν σε όλα τα επιστημονικά πεδία και ιδιαίτερα (ή πιο συχνά) σε βιοστατιστικές εφαρμογές, όπου οι ίδιοι ασθενείς (άτομα) χρησιμοποιούνται περισσότερες από μία φορές στη διεξαγωγή του πειράματος (κλινική δοκιμή).

Ένα θέμα επαναλαμβανόμενων μετρήσεων θα μας απασχολήσει στην παρούσα διατριβή. Τα δεδομένα μας, προέρχονται από το Τμήμα Νοσηλευτικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών και συγκεκριμένα είναι αποτέλεσμα πειράματος που διενεργήθηκε υπό την εποπτεία του Αναπληρωτή Καθηγητή κυρίου Αναστασόπουλου Δημήτριου. Τα δεδομένα που μας δόθηκαν προς ανάλυση, αφορούσαν την εκτέλεση ενός νευροφυσιολογικού πειράματος, στο οποίο έλαβαν μέρος δέκα (10) υγιείς ενήλικες εθελοντές και των δύο φύλων, ηλικίας 52 ± 2.6 ($\bar{x} \pm s$) έτη. Στη διάθεσή μας έχουμε 334 παρατηρήσεις για κάθε μία από οκτώ (8) συνεχείς αποκριτικές μεταβλητές (responses), οι οποίες εκφράζουν μετρήσεις που έγιναν με τη βοήθεια επιστημονικών οργάνων, πάνω στα διάφορα μέλη του σώματος και τις κινήσεις αυτών και αφορούν τόσο τους λανθάνοντες χρόνους (δηλαδή το χρόνο που περνά μέχρι την κίνησή τους, με βάση κάποιο αρχικό ερέθισμα) όσο και την ταχύτητα ή και τη γωνία που μπορεί να έχουν κάποια από αυτά.

Το πείραμά μας, αφορά στις αντιδράσεις και στις κινήσεις που κάνουν οι εθελοντές στην προσπάθειά τους να ευθυγραμμίσουν το σώμα τους προς μία λυχνία – στόχο (κεντρικό ή έκκεντρο). Η λυχνία υπάρχει και ενεργοποιείται σε μία από τις επτά

θέσεις – σημεία του κύκλου, στο κέντρο του οποίου στέκονται οι εθελοντές. Τα σημεία του κύκλου στα οποία υπάρχει τοποθετημένη λυχνία είναι διαδοχικά οι 45° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° και 315° δεξιόστροφα από το κεντρικό σημείο – αφητηρία των 0° .

Το ερώτημα που τέθηκε προς ανάλυση αφορά στη γενεσιουργό αιτία που ωθεί τα κάτω άκρα (δεξί και αριστερό πόδι) σε κίνηση. Η κίνηση αυτή σχετίζεται, τουλάχιστον φαινομενικά, με την κίνηση άλλων μελών του σώματος όπως οι οφθαλμοί, η κεφαλή και ο κορμός. Προηγούμενα πειράματα, έχουν δείξει ότι κατά την περιστροφή και ευθυγράμμιση του ανθρώπινου σώματος προς έναν κεντρικό ή έκκεντρο στόχο, τα μέλη του σώματος που οδηγούνται πρώτα σε κίνηση είναι διαδοχικά οι οφθαλμοί, η κεφαλή και τέλος ο κορμός. Στην προσπάθειά τους οι επιστήμονες να εξακριβώσουν αν η εντολή που ξεκινά από τον εγκέφαλο και οδηγεί σε κίνηση οφθαλμούς – κεφαλή – κορμό είναι η ίδια με εκείνη που οδηγεί σε κίνηση και τα κάτω άκρα, εκτέλεσαν το παρόν πείραμα, τα αποτελέσματα του οποίου κληθήκαμε εμείς με τη σειρά μας να ερμηνεύσουμε και να προσπαθήσουμε να δώσουμε μια απάντηση στο παραπάνω ερώτημα.

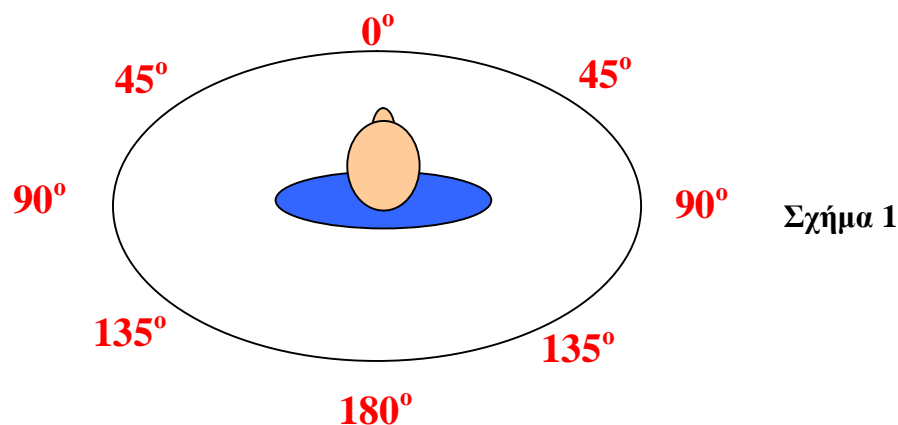
Καθώς, όπως προαναφέρθηκε, η εκτέλεση του πειράματος έγινε με τη συμβολή δέκα (10) εθελοντών, οι οποίοι εκτέλεσαν τις απαιτούμενες κινήσεις περισσότερες από μία φορές (έτσι είχαμε και στη διάθεσή μας τον αριθμό των 334 παρατηρήσεων) είναι φανερό πως η στατιστική μας ανάλυση θα έπρεπε να βασιστεί στη θεωρία και μεθοδολογία των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων και κατ' επέκταση των μεικτών μοντέλων, όπως θα φανεί σε ακόλουθο κεφάλαιο.

Για το λόγο αυτό, στο δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής, παρατίθενται συνοπτικά ορισμένες πτυχές της θεωρίας των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων και στο τρίτο κεφάλαιο εκείνες των γραμμικών μεικτών μοντέλων. Στο κεφάλαιο 4 λαμβάνει χώρα η ανάλυση των δεδομένων του πειράματός μας με χρήση μεθόδων που συναντούμε στη κλασσική στατιστική ανάλυση κι επιπλέον γίνεται μια προσπάθεια να χρησιμοποιηθούν στην ανάλυσή μας οι μέθοδοι που αναφέρονται στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις και τα μικτά μοντέλα. Η ανάλυσή μας έγινε με τη χρήση των στατιστικών πακέτων SPSS και S-PLUS.

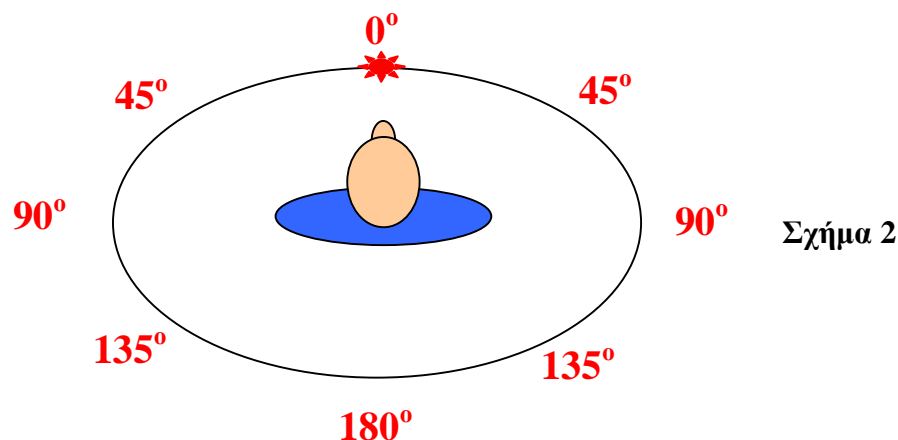
1.2 Περιγραφή του πειράματος

Όπως ήδη αναφέραμε, για τη διεξαγωγή του πειράματός μας, είχαμε στη διάθεσή μας δέκα (10) υγιείς ενήλικες, και των δύο φύλων, ηλικίας 52 ± 2.6 ετών, οι οποίοι εθελοντικά δήλωσαν συμμετοχή στην έρευνα αυτή. Το πείραμα διεξάγεται σύμφωνα με την παρακάτω διαδικασία:

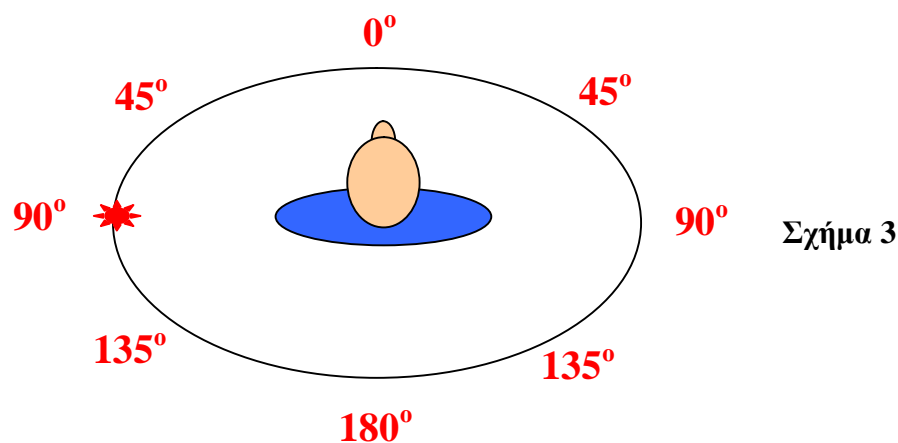
Ζητείται από τον συμμετέχοντα στην έρευνα να σταθεί στο κέντρο μιας κυκλικής διάταξης φωτεινών λυχνιών (LEDs), στο απόλυτο σκοτάδι. Τα διατεταγμένα φώτα βρίσκονται τοποθετημένα στις 0° , 45° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° και 315° (σχήμα 1).



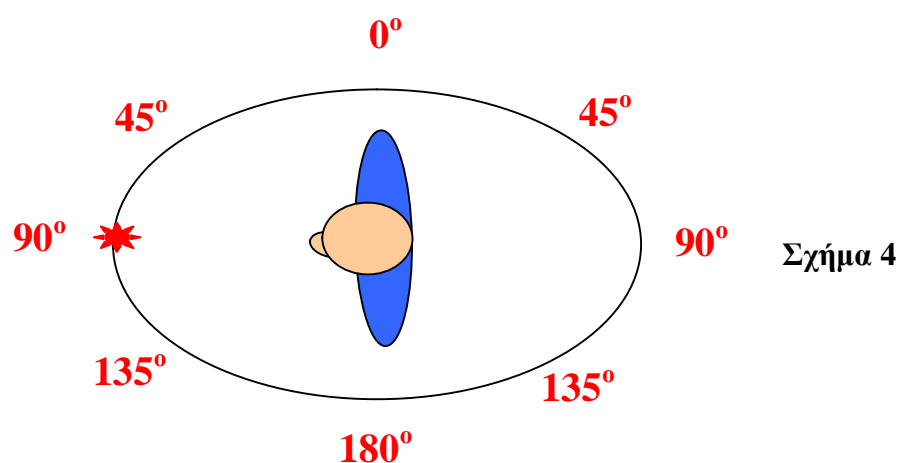
Στη συνέχεια, ζητείται από τον εθελοντή να ευθυγραμμίσει το βλέμμα και το σώμα του με το φως της λυχνίας των 0° , η οποία ανάβει και αποτελεί το μοναδικό φως στο χώρο (Σχήμα 2).



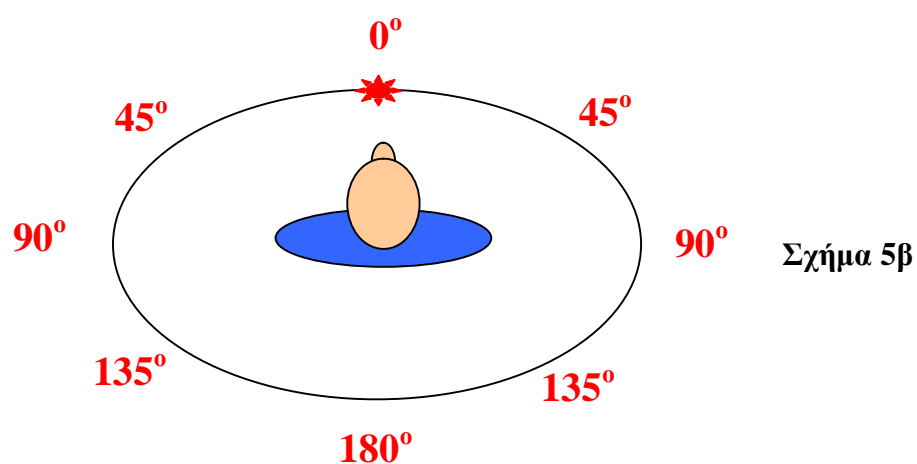
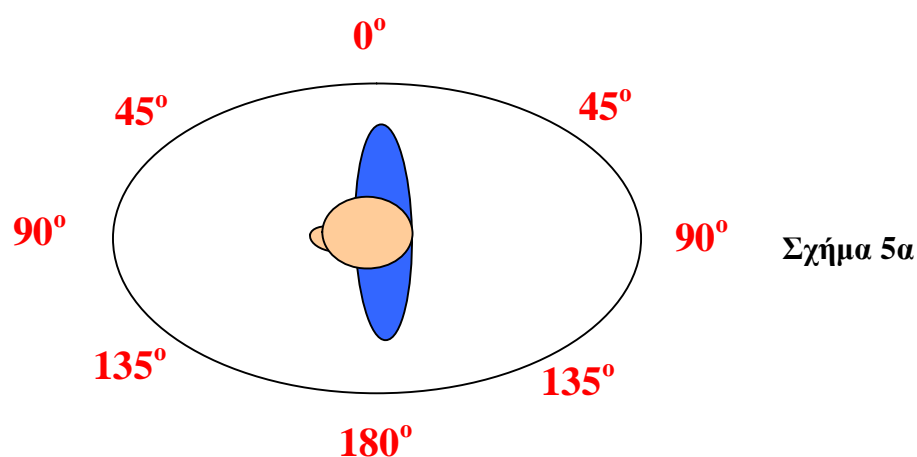
Μετά την πάροδο δέκα (10) δευτερολέπτων, το φως της κεντρικής αυτής λυχνίας των 0° απενεργοποιείται, κάτι που σημαίνει ότι κάποια άλλη, μη κεντρική λυχνία (στις 45° , 90° , 135° αριστερά ή δεξιά από το κέντρο ή και ακόμα η λυχνία των 180°) έχει ανάψει (Σχήμα 3).



Στο σημείο αυτό, ο εθελοντής υποχρεούται να εντοπίσει την νέα αναμμένη λυχνία και να περιστρέψει όλο του το σώμα, έτσι ώστε να ευθυγραμμίσει και αυτό, καθώς επίσης και το βλέμμα του με το φως της λυχνίας αυτής, το οποίο αποτελεί τη χρονική αυτή στιγμή, το μοναδικό φως στο χώρο (Σχήμα 4).



Μετά την πάροδο δεκαπέντε (15) δευτερολέπτων, η μη κεντρική αυτή λυχνία απενεργοποιείται με τη σειρά της, ενεργοποιείται η λυχνία των 0°, οδηγώντας με αυτόν τον τρόπο τον εθελοντή να λάβει την αρχική του θέση, μπροστά από την κεντρική λυχνία των 0° (Σχήματα 5α και 5β) που έχει ενεργοποιηθεί.



Οι δέκα εθελοντές πραγματοποίησαν δέκα στον αριθμό τέτοιες προσπάθειες (ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφηκαν μόλις παραπάνω) προς κάθε μία από τις επτά (7) μη κεντρικές λυχνίες. Η σειρά με την οποία έγινε η επιλογή των λυχνιών αυτών, ήταν πλήρως τυχαιοποιημένη. Πολλές όμως προσπάθειες «απέτυχαν» και τα δεδομένα μας είναι πολύ λιγότερα από τα πλήρη δεδομένα.

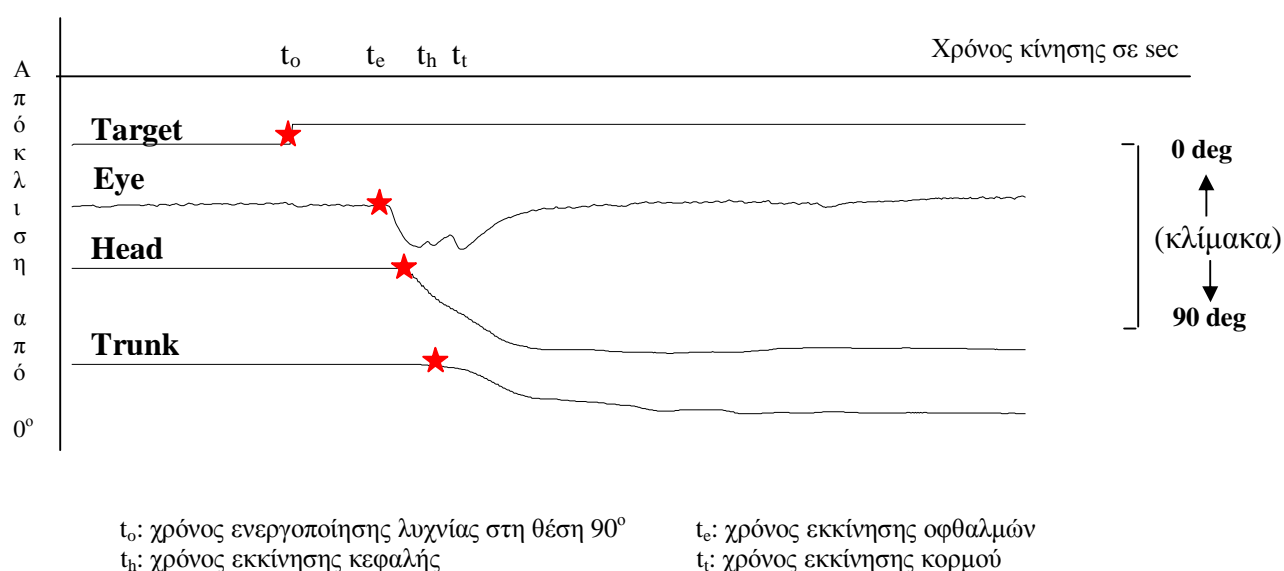
Οι μεταβλητές οι οποίες καταγράφονται κατά τη διάρκεια διεξαγωγής του παρόντος πειράματος, αφορούν αρχικά τους λανθάνοντες χρόνους των μελών του σώματος, καθώς επίσης και τη γωνία και την ταχύτητα της κεφαλής και τέλος τη γωνία του κορμού του σώματος. Ως λανθάνοντας χρόνος ενός μέλους του σώματος, ορίζεται ο χρόνος ο οποίος περνά σε sec από τη στιγμή που σβήνει η λυχνία (κεντρική ή έκκεντρη) έως τη στιγμή που το συγκεκριμένο σημείο του σώματος οδηγείται σε κίνηση. Πιο συγκεκριμένα λοιπόν, οι μεταβλητές που έχουμε στη διάθεσή μας είναι οι εξής:

Μεταβλητή	Περιγραφή
Angle	Κατηγορική μεταβλητή με τιμές από 1-7 που εκφράζουν κάθε μια από τις επτά γωνίες στις οποίες είναι τοποθετημένες οι έκκεντρες λυχνίες στον κύκλο (1=45°, ..., 7=315°).
Direction	Κατηγορική μεταβλητή με τιμές 1 (fugal) υποδηλώνοντας την κίνηση από τις 0 προς κάποιο άλλο μη προβλέψιμο στόχο και 2 (petal), που εκφράζει την κίνηση της επιστροφής του εθελοντή από τον έκκεντρο στόχο στις 0°.
Latency Eye	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους των ματιών.
Latency Head	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους της κεφαλής.
Latency Trunk	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους του κορμού.
Latency Right Foot	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους του δεξιού κάτω άκρου.
Latency Left Foot	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους του αριστερού κάτω άκρου.
Trunk Velocity	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει την ταχύτητα του κορμού. Η μέτρησή που έχουμε στη διάθεσή μας, αφορά την ταχύτητα που έχει αναπτύξει ο κορμός του ατόμου τη χρονική στιγμή που αρχίζει η κίνηση του ποδιού.
Trunk Deviation	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τη γωνία του κορμού σε μοίρες. Η μέτρηση που έχουμε στη διάθεσή μας, αφορά τη γωνία στην οποία έχει φτάσει ο κορμός του εθελοντή από την αρχική του θέση, κατά την κίνησή του προς τον γνωστό (κατά την επιστροφή) ή τον μη προβλεπόμενο στόχο, ακριβώς τη χρονική στιγμή που αρχίζει η κίνηση του κάτω άκρου.
Head Angle	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τη γωνία της κεφαλής σε μοίρες ανά sec. Τα δεδομένα μας προκύπτουν από τις μετρήσεις που αφορούν στη γωνία της κεφαλής, την απόκλιση δηλ. της κεφαλής από το σημείο στο οποίο αρχικά έχει ευθυγραμμίσει το σώμα του, τη χρονική στιγμή που κινείται για πρώτη φορά το κάτω άκρο.

Για την καταγραφή των κινήσεων των μελών του σώματος με σκοπό την απόκτηση μετρήσεων για τη διεξαγωγή του πειράματος, χρησιμοποιήθηκαν εξειδικευμένα μηχανήματα. Πιο συγκεκριμένα, για την καταγραφή των οριζόντιων μετακινήσεων που πραγματοποιήθηκαν από την κεφαλή, τον κορμό και τα κάτω άκρα, χρησιμοποιήθηκε το σύστημα ανάλυσης κινήσεων *Polhemus Fastrak*, στα 30 Hz.

Επιπλέον, τοποθετήθηκαν ενεργοί ανιχνευτές (markers) επάνω σε ένα ελαφρύ και εύκολα ρυθμιζόμενο κράνος στην κεφαλή καθώς επίσης και στο δεξί και το αριστερό πόδι. Οι οριζόντιες κινήσεις των ματιών και της κεφαλής, κατεγράφησαν μέσω της χρήσης ηλεκτρονικού οφθαλμογράφου (electro-oculography – EOG) .

Το Σχήμα 6 παρουσιάζει κάποια αρχικά στοιχεία, τα οποία μπορούν να φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα για την κατανόηση του πειράματος και τη διατύπωση του προβλήματος. Τα στοιχεία αυτά που έχουμε στη διάθεσή μας (διαγραμματικά) στο σημείο αυτό, αφορούν μια αριστερόστροφη κίνηση προς μια λυχνία (η οποία δεν μπορεί να είναι γνωστή εκ των προτέρων) που βρίσκεται στις 90° αριστερά της κεντρικής λυχνίας των 0°. Το έναυσμα για την αρχή της κίνησης των μελών του σώματος ήταν η απενεργοποίηση της ηλεκτροδότησης της κεντρικής λυχνίας, καθώς ο έκκεντρος στόχος των 90° προς τα αριστερά δεν ήταν ορατός από τον εθελοντή την ώρα που εκείνος αντίκριζε τον κεντρικό στόχο (και κατά συνέπεια όλο του το σώμα ήταν ευθυγραμμισμένο στις 0°). Η γραμμή του EOG εκφράζει την κίνηση των ματιών, όταν αυτά εγκαταλείπουν τις 0° και αρχίζουν να κινούνται προς το νέο στόχο (έκκεντρη ενεργή λυχνία). Η όλη κίνηση τίθεται σε λειτουργία σε μία περίοδο περίπου 30°, κατά τη διάρκεια της οποίας, αρχίζει και η κίνηση της κεφαλής. Ο κορμός αρχίζει την κίνησή του ακόμα αργότερα στο χρόνο.



Σχήμα 6: Γράφημα κίνησης μελών του σώματος σε αριστερόστροφη κίνηση προς τον στόχο των 90°

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα παλαιότερων πειραμάτων [βλ. Hollands et al (2004) και τις αναφορές που μνημονεύονται στο άρθρο αυτό] βλέπουμε ότι οι ερευνητές έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι κατά την κίνηση του σώματος των εθελοντών στο πείραμα προς κάποιο συγκεκριμένο και εμφανή στόχο (του οποίου τη θέση αγνοούν και είναι υποχρεωμένοι να ανακαλύψουν και τέλος να στραφούν ολοκληρωτικά προς αυτόν) το πρώτο μέλος του σώματος που οδηγείται σε κίνηση είναι οι *οφθαλμοί*. Στη συνέχεια – διαδοχικά – ακολουθούν η *κεφαλή*, ο *κορμός* και τα *πόδια*. Επιπλέον, οι ερευνητές οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι η κίνηση των ποδιών επηρεάζεται σημαντικά από τα κινητήρια συστήματα που είναι υπεύθυνα για την έναρξη και το συγχρονισμό των κινήσεων των οφθαλμών και της κεφαλής προς κάποιο περιφερειακό στόχο.

Κατά την εκτέλεση των πειραμάτων αυτού του είδους, οι ερευνητές παρατήρησαν ότι χρειάζονται αρκετές κινήσεις έτσι ώστε το σώμα να «προσανατολιστεί» προς τον καινούριο στόχο. Λαμβάνοντας υπόψη και τα συμπεράσματα παλαιότερων παρεμφερών πειραμάτων [Hollands et al (2004)], αλλά και από τα πρώτα αυτά αποτελέσματα που παραθέσαμε παραπάνω (Σχήμα 6) ή άλλα παρεμφερή [βλ. Carey (2000), Fischer and Rogal (1986), Fisk and Goodale (1985), Flanders et al (1999), Grasso et al (1998), Herman et al (1981), Hollands et al (1985), Hollands and Marple-Horvat (2001), Hollands et al (2001), Hollands et al (2002), Patla et al (1991)], οι επιστήμονες οδηγήθηκαν στη σκέψη ότι υπάρχει πιθανότητα η εντολή που ξεκινά από τον εγκέφαλο και οδηγεί σε κίνηση διαδοχικά οφθαλμούς, κεφαλή και κορμό να μην είναι η ίδια με την αιτία που οδηγεί σε κίνηση και τα κάτω άκρα.

Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν τρεις υποθέσεις για το τι μπορεί να είναι αυτό που προκαλεί την κίνηση των κάτω άκρων:

- ⊙ **Η γωνία της κεφαλής (Head angle)**
- ⊙ **Η γωνία του κορμού (Trunk deviation)**
- ⊙ **Η ταχύτητα του κορμού (Trunk velocity)**

Σύμφωνα λοιπόν με όλα τα παραπάνω, καλούμαστε να ερευνήσουμε μέσω του δεδομένου πειράματος την αιτία που οδηγεί τα κάτω άκρα σε κίνηση. Πρέπει σε αυτό το σημείο, για να γίνονται κατανοητά τα όσα θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε στη συνέχεια, να παραθέσουμε κάποιες βασικές λεπτομέρειες που αφορούν στις μεταβλητές

που έχουμε στη διάθεσή μας και θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να μπορέσουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα που μας έχει τεθεί.

Για την ανάλυση του προβλήματός μας, χρησιμοποιούμε τα δεδομένα τα οποία αντιστοιχούν στις μετρήσεις που έγιναν στους δέκα εθελοντές. Χρησιμοποιούμε δεδομένα που αντιστοιχούν και στις επτά διαφορετικές δυνατές επιλογές γωνίας καθώς επίσης και για τις δύο κατευθύνσεις τις οποίες ακολουθεί ο εθελοντής κατά την προσπάθειά του να ευθυγραμμίσει το σώμα του με την κεντρική ή την έκκεντρη λυχνία (fugal: στροφή σώματος προς μη προβλέψιμο στόχο, petal: στροφή σώματος προς την αρχική του θέση, αντικρίζοντας την κεντρική λυχνία των 0°). Τα δεδομένα, όπως αναφέρθηκε και μόλις παραπάνω, μετρούν τη γωνία και τη ταχύτητα του κορμού, τη γωνία της κεφαλής καθώς επίσης και τους λανθάνοντες χρόνους των οφθαλμών, της κεφαλής, του κορμού και τέλος των κάτω άκρων. Ως λανθάνοντας χρόνος, νοείται η καθυστέρηση που επέρχεται από τη στιγμή που το φως της κεντρικής ή έκκεντρης (ανάλογα με το προς ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί στο επόμενο βήμα ο εθελοντής) λυχνίας απενεργοποιηθεί, έως ότου αρχίσει το συγκεκριμένο μέλος του σώματος να κινείται.

Η φύση των δεδομένων μας, εφόσον προέρχονται από συνεχείς επαναλήψεις των συγκεκριμένων κινήσεων από τους εθελοντές, και κατά συνέπεια για κάθε ένα από τα άτομα έχουμε περισσότερες από μία παρατηρήσεις που αναφέρονται στις ίδιες παραμέτρους του πειράματος (γωνία, κατεύθυνση) μας οδηγούν στην εξέταση του προβλήματος (όπως αναφέρθηκε στο εδάφιο 1.1) μέσω των μεθόδων των *επαναλαμβανόμενων μετρήσεων* και των *μεικτών μοντέλων*. Ο χώρος των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων καθώς επίσης και οι μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους ερευνητές για την ανάλυσή τους είναι αρκετά πολύπλοκος. Ο στόχος μας σε αυτή τη διατριβή θα είναι να παρουσιάσουμε με όσο το δυνατόν πιο κατανοητό τρόπο μερικές πτυχές της θεωρίας που αναφέρεται στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις και τα μεικτά μοντέλα και στη συνέχεια να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα που μας έχει τεθεί προς ανάλυση. Πιο συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία που αφορά στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις και στη συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο εκείνη που αφορά στα μεικτά μοντέλα. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η στατιστική ανάλυση των δεδομένων μας, όπου γίνεται και προσπάθεια να δοθεί απάντηση στο ερώτημα που μας έχει τεθεί, μέσω

κλασσικών στατιστικών μεθόδων καθώς επίσης και μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί ειδικά για την περίπτωση των δεδομένων επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, κάνοντας χρήση των στατιστικών πακέτων SPSS και S-PLUS.

1.3 Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας

Κατά τη συγγραφή της διπλωματικής αυτής εργασίας, στην προσπάθειά μας να συγκεντρώσουμε το απαραίτητο υλικό για την εκπόνησή της, διαπιστώσαμε ότι υπάρχει πλούσια και αρκετά μεγάλη βιβλιογραφία για το θέμα με το οποίο θέλαμε να καταπιαστούμε. Το θέμα των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων απαντάται συχνά στις βιοστατιστικές εφαρμογές, όπου πολλές φορές χρησιμοποιούνται τα ίδια άτομα (ασθενείς) για διάφορους πειραματικούς σχεδιασμούς – κλινικές δοκιμές, για λόγους «οικονομίας» ατόμων – ασθενών, που είναι διατεθειμένοι να λάβουν μέρος στην κλινική δοκιμή, όπως για παράδειγμα στις μελέτες βιοϊσοδυναμίας. Ενδεικτικά, μπορούμε να αναφέρουμε τέσσερα συγγράμματα, τα οποία παρουσιάζουν αναλυτικά το θέμα των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων καθώς και εκείνο των μεικτών μοντέλων. Αυτά είναι τα *Analysis of Repeated Measures* των Crowder and Hand (1990), *Statistical Methods for the Analysis of Repeated Measurements* του Davis (2002), *Nonlinear Models for Repeated Measurement Data* των Davidian and Giltinan (1995) και τέλος το σύγγραμμα *Analysis of Longitudinal Data* του Diggle και των συνεργατών του (2002). Επίσης, σημαντικά υπήρξαν και δημοσιευμένα άρθρα σε έγκυρα περιοδικά (όπως τα *Biometrika*, *Biometrics*, *Journal of the American Statistical Association* κ.ά.) του Liang και συνεργατών του [Liang (1986, 1988, 1992, 1994, 2000)]. Ακόμα, δύο σημαντικές αναφορές αποτέλεσαν τα άρθρα των Laird and Ware (1982) και Touloumi et al (1999) τα οποία δημοσιεύθηκαν στα επιστημονικά περιοδικά *Biometrics* και *Statistics in Medicine* αντίστοιχα. Η έρευνά μας, επεκτάθηκε και μέσω της χρήσης του διαδικτύου και διαφόρων μηχανών αναζήτησης, όπου πρέπει να αναφέρουμε ότι μια αναζήτηση κάτω από το όνομα Liang, απέδωσε 159 σε σύνολο άρθρα σχετικά με το θέμα των repeated ή των longitudinal data, χρονικά τοποθετημένα από το 1981 έως το 2004, σε ιατρικά και στατιστικού περιεχομένου επιστημονικά περιοδικά. Τέλος, θα πρέπει να αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι βασικό βοήθημα για την πρόοδο των εργασιών μας, αποτέλεσε το άρθρο του δόκτορα Mark Hollands και των συνεργατών του, με τίτλο: *A new paradigm to*

investigate the roles of head and eye movements in the coordination of whole – body movements [Hollands et al (2004)]. Το συγκεκριμένο άρθρο παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες, όσον αφορά τους στόχους της ανάλυσης, με την παρούσα διατριβή και κατά κάποιο τρόπο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αρχικό έναυσμα για τη εκτέλεση του συγκεκριμένου πειράματος.

Στην Ελλάδα, εξ όσον γνωρίζουμε, δεν υπάρχει ελληνική βιβλιογραφία ή αρθρογραφία στο θέμα των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, με εξαίρεση τις πανεπιστημιακές σημειώσεις της κ. Κατέρη (2003). Σε επίπεδο Διπλωματικών Εργασιών βρήκαμε τις εργασίες των κ. Καραμανλή (2003) και Μαλέσιου (2003), οι οποίες αναφέρονται στην εφαρμογή ενός μοντέλου με γραμμικές μεικτές επιδράσεις σε ιατρικά δεδομένα και στην εκτενή παρουσίαση των διαδικασιών συμπερασματολογίας για τη στατιστική ανάλυση των διαχρονικών δεδομένων συνεχούς απόκρισης αντίστοιχα. Και στις δύο αυτές διπλωματικές εργασίες γίνεται εκτενής αναφορά στη θεωρία που αφορά στα γραμμικά μεικτά μοντέλα και τις περιπτώσεις στις οποίες αυτά χρησιμοποιούνται, αλλά και στη θεωρία των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ανάλυση επαναλαμβανόμενων μετρήσεων

2.1. Εισαγωγή

Ο όρος «επαναλαμβανόμενες μετρήσεις» (*repeated measurements*) χρησιμοποιείται ευρέως για τη περιγραφή μετρήσεων (παρατηρήσεων), οι οποίες λαμβάνονται για κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό μίας μονάδας, περισσότερες από μία φορές. Πιο συγκεκριμένα, η απόκριση κάθε πειραματικής μονάδας παρατηρείται σε περισσότερες από μία περιστάσεις ή κάτω από πολλαπλές συνθήκες. Αυτό που διαχωρίζει τέτοιου είδους παρατηρήσεις από εκείνες που απαντάμε στην κλασσική μοντελοποίηση στατιστικών δεδομένων, είναι ότι

- ❑ Η ίδια μεταβλητή μετράται στην ίδια παρατηρούμενη μονάδα περισσότερες από μία φορές.
- ❑ Περισσότερες από μία παρατηρούμενες μονάδες παίρνουν μέρος στην ανάλυση και οι αποκρίσεις δεν διαμορφώνουν μία απλή χρονοσειρά.

Πολύ συχνά, σε σχεδόν όλα τα επιστημονικά πεδία όπου χρησιμοποιούνται στατιστικά μοντέλα, παρατηρούνται επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Μερικά απλά παραδείγματα για ορισμένους επιστημονικούς χώρους και επαγγέλματα, είναι τα παρακάτω:

Γεωργία: Καλλιέργειες σε διαφορετικές φυτείες κατά το πέρασμα των ετών, όπου σε μία ή περισσότερες φυτείες παίρνουμε μετρήσεις σε διαφορετικές στιγμές.

Βιολογία: Καμπύλες ανάπτυξης

Εμπόριο: Πρότυπα επιβίωσης μικρομεσαίων επιχειρήσεων

Διεθνές Εμπόριο: Συμπεριφορά καταναλωτών όσον αφορά στα ανταγωνιστικά προϊόντα

Εγκληματολογία: Υποτροπή σε εγκλήματα

Δημογραφία: Διάστημα μεταξύ διαδοχικών γεννήσεων σε μια οικογένεια

Οικονομικά: Μοντέλα προσλήψεων και ανεργίας
Εκπαίδευση: Πρόοδος μαθητών υπό διαφορετικές συνθήκες μάθησης
Μηχανολογία: Ακολουθίες βλαβών και επισκευών μηχανών
Γεωγραφία: Μετανάστευση μεταξύ αστικών κέντρων
Βιομηχανία: Έλεγχος ποιότητας στην παραγωγή μιας σειράς ενός προϊόντος
Ασφάλειες: Αναπτυσσόμενες σχέσεις μεταξύ ασφαλιστρών και αξιώσεων για διαφορετικές εταιρίες
Εργασιακές Σχέσεις: Συχνότητα ή διάρκεια απεργιών σε διαφορετικές εταιρίες
Ιατρική: Διαδοχικές περίοδοι ασθένειας και ανάρρωσης κάτω από διαφορετικές θεραπευτικές αγωγές
Μετεωρολογία: Μοντέλα βροχοπτώσεως κατά την πάροδο του χρόνου σε διαφορετικές περιοχές
Πολιτική: Συγκριτικές ιστορίες πολιτικών καθεστώτων
Κοινωνιολογία: Κοινωνική κινητικότητα
Μεταφορές: Σειρά ατυχημάτων
Ζωολογία: Συχνότητες μοντέλων συμπεριφοράς, όπως για παράδειγμα, η μελωδία των πτηνών

Οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις στις περισσότερες περιπτώσεις αναφέρονται στο χρόνο αλλά είναι επίσης πιθανόν να αναφέρονται και στο χώρο. Ο διαχωρισμός αυτός είναι που κάνει δυνατή και τη διαφοροποίηση του παραπάνω όρου με τον όρο «διαχρονικά δεδομένα», ή πιο χαλαρά «συγχρονικά δεδομένα» (*longitudinal data*). Στην ελληνική βιβλιογραφία, ο όρος αυτός έχει αποδοθεί και ως «διαμήκη δεδομένα». Ο όρος «διαχρονικά δεδομένα» χρησιμοποιείται κι αυτός για την περιγραφή δεδομένων που αφορούν επαναλαμβανόμενες μετρήσεις.

Πολλοί συγγραφείς όμως, χρησιμοποιούν τον όρο αυτό όταν αναφέρονται σε δεδομένα, στα οποία ο παράγοντας που επαναλαμβάνεται, είναι αυστηρώς ο χρόνος. Με άλλα λόγια, τα διαχρονικά δεδομένα αποτελούνται από μετρήσεις ή αποκρίσεις, οι οποίες λαμβάνονται από μία ή περισσότερες πειραματικές μονάδες. Σε αυτήν την περίπτωση, τα διαχρονικά δεδομένα μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική περίπτωση των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων. Σε άλλες περιπτώσεις, ο όρος αυτός χρησιμοποιείται για δεδομένα τα οποία συλλέγονται κατά τη διάρκεια μιας εκτεταμένης χρονικής περιόδου, συνήθως κάτω από ανεξέλεγκτες πειραματικές συνθήκες. Σε αυτήν την

περίπτωση. Αν χρησιμοποιηθεί ο όρος αυτός, τότε οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις αποτελούν ειδική περίπτωση των διαμηκών δεδομένων. Κατά την παρούσα διατριβή θα χρησιμοποιηθεί ο όρος επαναλαμβανόμενες μετρήσεις με την ευρεία έννοιά του, δηλαδή για τις περιπτώσεις που λαμβάνονται πολλαπλές μετρήσεις για τη μεταβλητή απόκρισης από κάθε πειραματική μονάδα. Σε όλες τις περιπτώσεις, το κύριο χαρακτηριστικό είναι ότι οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις είναι συσχετισμένες ως προερχόμενες από την ίδια ή ίδιες πειραματικές μονάδες.

Επαναλαμβανόμενες μετρήσεις πάνω σε μία συγκεκριμένη μεταβλητή, μπορεί συχνά να είναι επιθυμητές για πολλούς λόγους. Για παράδειγμα, ένα φαινόμενο να παρατηρείται μόνο σε επαναλαμβανόμενη μορφή και αυτό να αποτελεί το μοναδικό τρόπο συλλογής των απαιτούμενων δεδομένων. Ένας επιπλέον λόγος μπορεί να είναι το γεγονός ότι το κύριο ενδιαφέρον επικεντρώνεται στη διαχρονική εξέλιξη κάποιας μεταβλητής. Τέλος, μπορεί να είναι απαραίτητη η διαχρονική σύγκριση μεταξύ διαφορετικών αγωγών, οι οποίες εφαρμόζονται στα ίδια άτομα.

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Επαναλαμβανόμενες μετρήσεις (και κατά συνέπεια διαχρονικά δεδομένα) είναι πολλαπλές παρατηρήσεις σε m μονάδες, με n_i (επαναλαμβανόμενες) μετρήσεις στην i -οστή μονάδα. Ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων για όλες τις μονάδες είναι ίσος με $n = \sum_{i=1}^m n_i$. Το διάνυσμα των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων του ατόμου i με διαστάσεις ($n_i \times 1$) είναι το $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in_i})'$. Οι παρατηρήσεις y_{ij} σε κάθε άτομο λαμβάνονται στις χρονικές στιγμές t_{ij} με $\mathbf{t}_i = (t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in_i})'$. Το διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)'$ εκφράζει ολόκληρο το σετ των δεδομένων στις m μονάδες.

Από τον παραπάνω ορισμό, εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι ισχύουν και τα παρακάτω:

y_{ij} = η j -οστή παρατήρηση της μονάδος i

t_{ij} = η χρονική στιγμή κατά την οποία λήφθηκε η j -οστή παρατήρηση στην i μονάδα

Ο παραπάνω ορισμός είναι εμφανές ότι μπορεί να αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμος για την ανάλυση τέτοιου είδους δεδομένων, καθώς μας δίνει τη δυνατότητα να αντιμετωπίσουμε τις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις μίας μεμονωμένης μονάδας ως μία μαθηματική οντότητα και κατά συνέπεια να συνοψίσουμε και να παρουσιάσουμε σε μία απλή και λειτουργικότερη μορφή τις παρατηρήσεις μας στην κάθε μονάδα. Πρέπει να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι είναι σύνηθες σε μελέτες επαναλαμβανόμενων μετρήσεων να εξετάζουμε τα δεδομένα από μία συγκεκριμένη μονάδα ως σύνολο, έτσι ώστε να συνοψίζονται οι περίπλοκες συσχετίσεις που εμφανίζονται με την πάροδο του χρόνου. Ο αριθμός των παρατηρήσεων ορίζεται ως n_i , κάτι που σημαίνει ότι είναι δυνατόν να έχουμε στη διάθεσή μας διαφορετικό αριθμό παρατηρήσεων σε κάθε μονάδα. Βέβαια, είναι επίσης πολύ συχνό, ιδιαίτερα σε πειράματα που έχουν συγκεκριμένο σχεδιασμό, να έχουμε στη διάθεσή μας τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων σε κάθε μονάδα. Επομένως, σε αυτήν την ειδική περίπτωση, έχουμε ότι $n_i = n$ για όλα τα i και $t_{ij} = t_j$ για όλα τα i και $j = 1, 2, \dots, n$. Τέτοιου είδους δεδομένα αναφέρονται ως *ισορροπημένες (balanced) επαναλαμβανόμενες μετρήσεις*. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση τα δεδομένα μας θεωρούνται μη ισορροπημένα. Αυτό όμως που απαντάται στις έρευνες είναι τα μη ισορροπημένα δεδομένα, παρ' όλο που τα ισορροπημένα είναι ο επιθυμητός στόχος κάθε ερευνητή. Υπάρχουν πολλοί λόγοι για την πληθώρα αυτή των μη ισορροπημένων δεδομένων. Πολλές φορές ο σχεδιασμός του ίδιου του πειράματος είναι τέτοιος που δεν επιτρέπει ένα ισορροπημένο σετ δεδομένων. Ο κυριότερος όμως λόγος είναι η ύπαρξη ελλιπυσών τιμών, με την έννοια ότι μετρήσεις που έπρεπε να ληφθούν δεν ελήφθησαν, χάθηκαν ή δεν ήταν διαθέσιμες για κάποια άλλη αιτία.

Μία γενική παρουσίαση επαναλαμβανόμενων μετρήσεων που λαμβάνονται σε ένα κοινό σετ t χρονικών στιγμών για όλα τα αντικείμενα, δίνεται παρακάτω:

Πίνακας 2.1 Δομή επαναλαμβανόμενων μετρήσεων από πολλαπλά δείγματα

		Χρονική Στιγμή					
Ομάδα	Αντικείμενο	1	2	...	j	...	t
1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11j}	...	y_{11t}
	2	y_{121}	y_{122}	...	y_{12j}	...	y_{12t}

	i	y_{i1}	y_{i2}	...	y_{ij}	...	y_{it}

	n_1	$y_{1n_1,1}$	$y_{1n_1,2}$...	$y_{1n_1,j}$...	$y_{1n_1,t}$
...	
h	1	y_{h11}	y_{h12}	...	y_{h1j}	...	y_{h1t}
	2	y_{h21}	y_{h22}	...	y_{h2j}	...	y_{h2t}

	i	y_{hi1}	y_{hi2}	...	y_{hij}	...	y_{hit}

	n_h	$y_{hn_h,1}$	$y_{hn_h,2}$...	$y_{hn_h,j}$...	$y_{hn_h,t}$
...	
s	1	y_{s11}	y_{s12}	...	y_{s1j}	...	y_{s1t}
	2	y_{s21}	y_{s22}	...	y_{s2j}	...	y_{s2t}

	i	y_{si1}	y_{si2}	...	y_{sij}	...	y_{sit}

	n_s	$y_{sn_s,1}$	$y_{sn_s,2}$...	$y_{sn_s,j}$...	$y_{sn_s,t}$

2.2. Διαχρονικά Δεδομένα και η Σχέση τους με τις Χρονολογικές Σειρές

Ένα ερώτημα που φυσιολογικά εγείρεται από τον ορισμό των διαχρονικών δεδομένων, είναι αν τέτοιου είδους δεδομένα περιλαμβάνουν στοιχεία χρονολογικών σειρών. Πράγματι, δεν είναι εύκολο να ορίσουμε ένα συγκεκριμένο όριο, το οποίο να διαχωρίζει τα διαχρονικά δεδομένα από τις χρονολογικές σειρές. Γενικά, οι μέθοδοι των χρονολογικών σειρών θεωρούνται περισσότερο κατάλληλες όσον αφορά στην ανάλυση δεδομένων που παρουσιάζουν μακρά χρονική σειρά. Μια απλή χρονολογική σειρά αποτελείται από μια μεταβλητή, η οποία μετράται για ένα υποκείμενο, σε τουλάχιστον είκοσι (ή ακόμα και παραπάνω) χρονικές στιγμές (π.χ. διαδοχικά έτη), ενώ τα διαχρονικά δεδομένα σπάνια περιλαμβάνουν δέκα παρατηρήσεις για το κάθε άτομο, αλλά αποτελούνται από πολλά υποκείμενα.

Ο διαχωρισμός μεταξύ των δύο αυτών ειδών δεδομένων συσχετίζεται περισσότερο με τις μεθόδους ανάλυσης, όπου μέθοδοι προβλέψεων και οικονομετρικά υποδείγματα εφαρμόζονται σε χρονολογικές σειρές ενώ αναλύσεις πολυμεταβλητών και κατηγορικών δεδομένων αλλά και αναλύσεις που αρμόζουν στις συγχρονικές (cross – sectional) μελέτες, ακολουθούνται για την ανάλυση των διαχρονικών δεδομένων.

2.3. Συσχέτιση: Το Χαρακτηριστικό Στοιχείο των Επαναλαμβανόμενων Μετρήσεων

Το κύριο χαρακτηριστικό στοιχείο των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων είναι η ύπαρξη συσχέτισης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να επηρεάζονται οι διακυμάνσεις (είναι πλέον άνισες) αλλά και οι συνδιακυμάνσεις των μετρήσεων. Ένα από τα κυριότερα χαρακτηριστικά στοιχεία των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων είναι η υπόθεση (ή ο περιορισμός) ότι η διακύμανση ενσωματώνεται στις παρατηρήσεις του κάθε ατόμου ξεχωριστά (within-subject variability). Επομένως, στη στατιστική ανάλυση των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων εμφανίζεται το ζήτημα της συνδιακύμανσης μεταξύ των παρατηρήσεων μέσα στην ίδια μονάδα. Τι ήταν όμως αυτό που οδήγησε τους στατιστικούς να εισαγάγουν τους περιορισμούς αυτούς στην ανάλυση των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων; Η απάντηση είναι αρκετά απλή. Αν θεωρήσουμε ως διάνυση των αποκρίσεων που συλλέγονται κατά την πάροδο του χρόνου για τη μονάδα i το $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in_i})'$, είναι φυσικό να ενδιαφερθούμε για την πιθανότητα ύπαρξης συσχετίσεων μεταξύ τους (για σταθερό i).

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε μία κλινική δοκιμή, όπου επαναλαμβανόμενες μετρήσεις (συνηθέστερα λαμβάνοντας υπόψη τον χρόνο) συλλέγονται από ασθενείς με σκοπό να εξετάσουμε την επίδραση μίας νέας αγωγής στην εξέλιξη της ασθένειας με την πάροδο του χρόνου. Το παραπάνω αποτελεί τυπικό παράδειγμα επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, όπου τις μονάδες αποτελούν τα άτομα (οι ασθενείς) που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα και τα δεδομένα αποτελούνται από μετρήσεις κάποιου χαρακτηριστικού των ασθενών, λαμβανόμενες σε πολλαπλές χρονικές στιγμές (μία περίοδο ή μία επίσκεψη). Αναμφισβήτητα, είναι περισσότερο ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι οι μετρήσεις πάνω στον ίδιο ασθενή είναι περισσότερο ή λιγότερο συσχετισμένες η μία με την άλλη, από το να κάνουμε μια υπόθεση για το αντίθετο.

Με άλλα λόγια, είναι αρκετά εύλογο να αναμένουμε ότι δύο διαδοχικές μετρήσεις του ίδιου ατόμου να «κυμαίνονται» ταυτόχρονα. Επομένως, μία μεγάλη για παράδειγμα τιμή για μια μέτρηση, υποδηλώνει ότι η άλλη τιμή θα μπορούσε να είναι μεγάλη κι αυτή. Αντίστοιχα, μικρές τιμές της πρώτης μέτρησης, υποδηλώνουν μικρές τιμές και για την δεύτερη. Όπως είναι γνωστό ένα μέτρο για το πώς δύο τυχαίες μεταβλητές «κυμαίνονται» ταυτόχρονα, είναι η συνδιακύμανση. Τυπικά, αν τα y_i , y_j εκφράζουν δύο τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ακολουθούν κατανομές με μέσους ίσους με m_i και m_j αντίστοιχα, η συνδιακύμανση μεταξύ των y_i και y_j θα δίνεται από τον τύπο:

$$Cov(y_i, y_j) = E[(y_i - m_i)(y_j - m_j)]$$

Εφόσον οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις y_{ij} αλλά και ο τρόπος με τον οποίο αυτές συμβαίνουν, αποδίδονται σε κάποιο μοντέλο πιθανοτήτων, μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως τυχαίες μεταβλητές και ως συνέπεια αυτού, είναι δυνατόν να ορίσουμε ένα μέτρο που μπορεί να εκφράσει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ τους, όπως είναι η συνδιακύμανση.

Όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, αν ορίσουμε ως y_{ij} και $y_{i'j'}$ (με $j \neq j'$), τις μετρήσεις μέσα στο ίδιο υποκείμενο i , είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι υπάρχει κάποια σχέση (εξάρτηση) μεταξύ τους. Επομένως, πιστεύουμε ότι αυτές οι μετρήσεις τείνουν να «κυμαίνονται» ταυτόχρονα, ή με άλλα λόγια, εμφανίζονται ταυτόχρονα θετικές ή ταυτόχρονα αρνητικές. Ως συνέπεια των παραπάνω, η ποσότητα $(y_{ij} - m_{ij})(y_{i'j'} - m_{i'j'})$ στον τύπο της συνδιακύμανσης, θα είναι θετική για την πλειοψηφία των τιμών – ζευγών. Άρα, αυτό που θα περιμέναμε θα ήταν:

$$Cov(y_{ij}, y_{i'j'}) > 0$$

Ανάλογα, δεν υπάρχει κανένας λόγος να περιμένουμε την ύπαρξη οποιασδήποτε σχέσης μεταξύ των μετρήσεων που ανήκουν σε διαφορετικά υποκείμενα (δηλαδή από άτομο σε άτομο). Έτσι, αν το y_{ij} αποτελεί μια παρατήρηση από ένα υποκείμενο (ασθενή) i και το $y_{i'j'}$ αποτελεί μια παρατήρηση από ένα υποκείμενο i' (με $i \neq i'$) θα ισχύει:

$$\text{Cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = 0$$

2.4 Επαναλαμβανόμενες μετρήσεις

(α) Σύγκριση κατά ζεύγη

Για να μπορέσουμε να αντιληφθούμε τη φύση και τη λειτουργία των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε το πιο απλό παράδειγμα δεδομένων που μπορούν να θεωρηθούν ως σετ επαναλαμβανόμενων μετρήσεων: τις συγκρίσεις κατά ζεύγη.

Οι συγκρίσεις κατά ζεύγη, αναφέρονται σε παρατηρήσεις που λαμβάνονται κατά ζεύγη, συνήθως σε πειράματα για τη διερεύνηση της αποτελεσματικότητας μιας αγωγής (θεραπείας) δηλαδή όταν η θεραπεία χορηγείται σε κάθε ένα από τα n άτομα, στα οποία λαμβάνονται δύο παρατηρήσεις, μία πριν την χορήγηση της θεραπείας και μία έπειτα την εφαρμογή αυτής. Για την ανάλυση τέτοιου είδους δεδομένων, αυτό που μας ενδιαφέρει ουσιαστικά είναι το μέγεθος d , $d = m_1 - m_2$, που εκφράζει τη διαφορά μεταξύ των δύο μέσων (πριν και μετά τη χορήγηση της θεραπείας). Το δείγμα θα αποτελεί η ποσότητα $D_i = X_i - Y_i$ (με $i = 1, 2, \dots, n$). Η μηδενική υπόθεση είναι ισοδύναμη με την υπόθεση $H_0 : \mu = 0$, ο έλεγχος της οποίας μπορεί να γίνει μέσω του δείγματος D και μέσω της ελεγχοσυνάρτησης:

$$t = \frac{D - d_0}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{όταν ισχύει η μηδενική μας υπόθεση}$$

όπου

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2$$

Πρέπει να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι χρησιμοποιούμε το συγκεκριμένο τεστ, υποθέτοντας ότι τα D_i και τα X_i ακολουθούν την κανονική κατανομή. Υπάρχει

βέβαια και ένα επιπλέον τεστ (το οποίο είναι μη παραμετρικό) όπου οι υποθέσεις που κάνουμε δεν είναι τόσο αυστηρές κάθε φορά:

Και πάλι έχουμε μετρήσεις X_1, X_2, \dots, X_n πριν την εφαρμογή της μεθόδου και τις μετρήσεις Y_1, Y_2, \dots, Y_n μετά την εφαρμογή της μεθόδου. Προφανώς, οι μετρήσεις μας (X_i, Y_i) αναφέρονται στο ίδιο αντικείμενο και δεν μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητες για κάθε i . Για το λόγο αυτό αλλά και γιατί οι παρατηρήσεις μας δεν προέρχονται από κανονικό πληθυσμό, εφαρμόζουμε το τεστ συγκρίσεως ζευγών, κάνοντας την υπόθεση ότι οι διαφορές $x_i - y_i$ ακολουθούν την κανονική κατανομή. Η υπόθεση που θέλουμε να ελέγξουμε είναι η εξής:

$$H_0 : p = 1/2$$

αν υποθέσουμε ότι $P(d_i > 0) = P(d_i < 0) = 1/2$. Τότε ο έλεγχος θα γίνει προσεγγιστικά

με το στατιστικό $Z = \frac{X - n/2}{\sqrt{n}/2} \sim N(0,1)$ όταν ισχύει η μηδενική μας υπόθεση.

Το στατιστικό που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της υπόθεσής μας, είναι το εξής:

$$T_+ = \text{το άθροισμα των θετικών τάξεων}$$

με κρίσιμη περιοχή την $T' < T_{n,\alpha/2}$ όπου $T' = \min\left(T_+, \frac{n(n+1)}{2} - T_+\right)$.

Εφαρμόζοντας λοιπόν όλα τα παραπάνω στα δεδομένα μας, θα έχουμε για παράδειγμα, για το άτομο 6 και όσον αφορά στη μεταβλητή που ορίζει τους λανθάνοντες χρόνους του δεξιού ποδιού, τις εξής παρατηρήσεις:

	Χρονική Στιγμή												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Fugal	1,13	0,96	1,63	1,21	1,29	1,5	1,29	0,88	1,42	1,13	1,67	1,46	1,05
Petal	0,98	0,75	0,79	0,67	0,67	0,75	0,79	0,63	0,79	0,63	1	0,92	0,9

Στο σημείο αυτό, θα διατάξουμε τις διαφορές $d_i = x_i - y_i$ κατά αύξουσα τάξη μεγέθους της απόλυτης τους τιμής, από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη, σημειώνοντας το πρόσημό τους. Επομένως, θα έχουμε:

Διατεταγμένες απόλυτες διαφορές με πρόσημο	0,15	0,15	0,21	0,25	0,5	0,5	0,54	0,54	0,54	0,63	0,67	0,71	0,84
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Τάξεις	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Τελικές τάξεις με πρόσημο	1,5	1,5	3	4	5,5	5,5	8	8	8	10	11	12	13

Το άθροισμα των θετικών τάξεων είναι ίσο με $T_+ = 1.5 + 1.5 + \dots + 13 = 91$ και $n = 13$.

Επομένως, θα έχουμε:

$$T' = \min\left(T_+, \frac{n(n+1)}{2} - T_+\right) = \min\left(91, \frac{13(13+1)}{2} - 91\right) = \min(91, 0) = 0$$

Από τους πίνακες έχουμε ότι $T_{13,0.01/2} = T_{13,0.005} = 10$. Άρα, εφόσον ισχύει ότι $T' = 0 < T_{n,\alpha/2} = 10$, θα πρέπει να απορρίψουμε την αρχική μας υπόθεση ότι οι μέσοι των δύο πληθυσμών είναι ίσοι.

(β) Γενίκευση του (α) σε $n > 2$ χρονικές στιγμές – Summary Statistics

Η πιο απλή προσέγγιση για την ανάλυση των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων είναι η μείωση του διανύσματος των πολλαπλών μετρήσεων από κάθε πειραματική μονάδα, σε μία μόνο παρατήρηση, όπως για παράδειγμα τον μέσο όρο. Συνεπώς, μία πολυμεταβλητή (δηλαδή πολλαπλή) απόκριση, μειώνεται σε μονομεταβλητή απόκριση. Αυτό μας βοηθάει στην αποφυγή της συσχέτισης μεταξύ των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων ενός υποκειμένου. Στην ειδική περίπτωση που έχουμε δύο παρατηρήσεις για κάθε υποκείμενο, όπως αναφέραμε και παραπάνω, για την ανάλυση χρησιμοποιούμε το t τεστ για δύο μέσων τιμών συγκρίσεις κατά ζεύγη (για συνεχή δεδομένα) ή το τεστ του McNemar (για συγκρίσεις δύο ποσοστών κατά ζεύγη). Η μονομεταβλητή προσέγγιση για την ανάλυση των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων αποτελεί μια λύση, όταν έχουμε στη διάθεσή μας πλήρη δεδομένα από ένα κοινό σει μετρήσεων από κάθε υποκείμενο. Η

διαδικασία αυτή γίνεται ακόμα πιο άμεση, όταν τα δεδομένα μας προέρχονται από ένα μόνο δείγμα ή από πολλαπλά δείγματα, που ορίζονται από τα επίπεδα μιας ή περισσότερων συμμεταβλητών.

Όταν αναφερόμαστε στην περίπτωση του ενός δείγματος, εννοούμε τη λήψη παρατηρήσεων για ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό X το οποίο μετράται σε n διαφορετικές χρονικές στιγμές. Όταν αντίθετα αναφερόμαστε στην περίπτωση των πολλαπλών δειγμάτων, θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις μας για το χαρακτηριστικό X λαμβάνονται σε διαφορετικές ομάδες, όπου υπεισέρχεται και κάποιος άλλος παράγοντας. Η δομή των δεδομένων μας, αποτελεί υποπερίπτωση του πίνακα 2.1 που έχουμε παραθέσει σε προηγούμενη παράγραφο. Έτσι λοιπόν, στην περίπτωση του ενός δείγματος, η δομή μας θα παρουσιάζεται ως εξής:

Πίνακας 2.2 Δομή επαναλαμβανόμενων μετρήσεων από ένα δείγμα

	Χρονική στιγμή			
Αντικείμενο	1	2	...	n
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n}
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{mn}

Ο στόχος της ανάλυσής μας είναι να καθορίσουμε αν η κατανομή της εξαρτημένης μεταβλητής παραμένει σταθερή με την πάροδο του χρόνου. Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο, υπάρχουν αρκετοί τρόποι προσέγγισης του προβλήματος αυτού. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των συγκρίσεων κατά ζεύγη, αν η κατανομή είναι κανονική και τα δεδομένα συνεχή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το t τεστ για συγκρίσεις μέσω των τιμών κατά ζεύγη, ενώ αν η κατανομή δεν είναι κανονική, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μη παραμετρικό τεστ του Wilcoxon. Όταν έχουμε στη διάθεσή μας t χρονικές στιγμές, απαιτούνται $\frac{t(t-1)}{2}$ τεστ για τη διεκπεραίωση των συγκεκριμένων συγκρίσεων ανά δύο. Αυτά τα στατιστικά τεστ είναι προφανώς συσχετισμένα λόγω του γεγονότος ότι τα δεδομένα από κάθε χρονική στιγμή χρησιμοποιούνται σε πολλαπλά τεστ. Επιπλέον, με τα «πολλά t τεστ» ή γενικά «πολλά

απλά τεστ» το ολικό (overall) επίπεδο σημαντικότητας αυξάνεται, δηλαδή είναι μεγαλύτερο του α . Επομένως, οι μέθοδοι αυτές δεν συνιστώνται [βλ. Davis (2002)].

Στη στατιστική, συνήθως χρησιμοποιούμε αντί των αρχικών δεδομένων τα λεγόμενα χαρακτηριστικά του δείγματος, όπως για παράδειγμα τα διάφορα μέτρα θέσης κλίμακας ή άλλα στατιστικά, τα οποία αποτελούν «περιληπτικές» (summary) ποσότητες, οι οποίες περιέχουν μέρος ή ολόκληρη την πληροφορία που περιέχουν τα αρχικά δεδομένα. Οι ποσότητες αυτές ονομάζονται «περιληπτικά» στατιστικά (summary statistic).

Στην περίπτωση που χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση των «περιληπτικών» στατιστικών (summary-statistic) για την ανάλυση των δεδομένων αυτών, ο στόχος είναι να μειώσουμε τον αριθμό των δεδομένων που αντιστοιχούν σε κάθε άτομο σε μία μόνο παρατήρηση, η οποία να έχει νόημα και να εκφράζει άμεσα τη σχέση της μεταβλητής απόκρισης και του χρόνου. Ένα summary-statistic για το i άτομο, μπορεί να είναι για παράδειγμα η μέση τιμή \bar{y}_i των y_{ij} ($j = 1, \dots, n$), η κλίση b_i της γραμμής παλινδρόμησης μεταξύ της μεταβλητής y και του χρόνου στο υπό ανάλυση πείραμα ή της μεταβλητής y και της γωνίας προς την οποία στρέφεται το άτομο ή ο αντίστοιχος παραμετρικός ή μη παραμετρικός συντελεστής συσχέτισης. Στο σημείο αυτό, θα χρησιμοποιηθούν οι αντίστοιχες και αρμόζουσες στατιστικές μέθοδοι για να ελέγξουμε αν ο μέσος (ή η διάμεσος) των μετρήσεών μας διαφέρει από το μηδέν. Αυτή η αντιμετώπιση συνήθως εφαρμόζεται στις περιπτώσεις που οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις είναι άτακτα τοποθετημένες [βλ. Davis (2002)].

Βέβαια, ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στο μέτρο του summary-statistic που θα χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση, καθώς αν αυτό δεν περιγράφει ικανοποιητικά τα δεδομένα που αντιστοιχούν σε κάθε υποκείμενο, τα αποτελέσματα που θα μας δώσει και που θα κληθούμε να ερμηνεύσουμε, στην περίπτωση αυτή θα είναι παραπλανητικά και κατά συνέπεια θα μας οδηγήσουν σε λανθασμένα συμπεράσματα.

Στον παρακάτω πίνακα, παρατίθενται τα δεδομένα που αφορούν τους λανθάνοντες χρόνους του δεξιού ποδιού. Οι παρατηρήσεις αντιστοιχούν στις μετρήσεις που έγιναν σε κάθε ένα από τα δέκα άτομα που έλαβαν μέρος στο πείραμά μας, σε κάθε μία από τις τρεις γωνίες αριστερά και δεξιά του κεντρικού στόχου των 0° ($45^\circ \equiv 315^\circ, 90^\circ \equiv 225^\circ, 135^\circ \equiv 270^\circ$) καθώς και στη γωνία των 180° . Πρέπει να

σημειώσουμε ότι πήραμε το μέσο όρο για κάθε μία γωνία. Τα δεδομένα μας λοιπόν, συνοψίζονται ως εξής:

Άτομο	Γωνία			
	45°	90°	135°	180°
1	1,44	1,42	1,32	1,13
2	1,14	1,12	1,36	1,01
3	0,87	0,83	0,75	0,79
4	1,13	1,16	1,03	1,34
5	1,25	1,22	1,19	1,42
6	1,01	1,16	1,03	0,8
7	0,82	0,92	0,92	0,74
8	1,2	1,21	1,4	1,08
9	0,64	0,93	0,87	0,83
10	1,02	1,05	1,03	0,77

Ο στόχος της ανάλυσής μας στο σημείο αυτό θα είναι να καθορίσουμε αν οι λανθάνοντες χρόνοι y του δεξιού ποδιού επηρεάζονται από τη γωνία x στην οποία είναι τοποθετημένο το φως προς το οποίο το κάθε άτομο θα πρέπει να στραφεί.

Μία προσέγγιση στην ανάλυση αυτή θα ήταν να υποθέσουμε ότι η σχέση μεταξύ της γωνίας και των λανθανόντων αυτών χρόνων μπορεί να συνοψισθεί σε ικανοποιητικό βαθμό από την κλίση της γραμμής παλινδρόμησης μεταξύ λανθανόντων χρόνων y και γωνίας x (στο τέλος του εδαφίου αυτού εξετάζουμε αν η υπόθεση αυτή είναι ρεαλιστική. Έτσι, ορίζουμε ως x_{ij} τις γωνίες και ως y_{ij} τους λανθάνοντες χρόνους που αντιστοιχούν στο άτομο i κατά την j περίπτωση, με $i=1,2,\dots,10$ και $j=1,2,3,4$. Η εκτιμώμενη κλίση της ευθείας για το άτομο i δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\hat{b}_i = \frac{\sum_{j=1}^4 (x_{ij} - \bar{x}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)}{\sum_{j=1}^4 (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}$$

όπου το \bar{x}_i εκφράζει το δειγματικό μέσο των γωνιών και \bar{y}_i το δειγματικό μέσο των λανθανόντων χρόνων για το άτομο i . Για κάθε άτομο ισχύει ότι $\bar{x}_i = 112.5$ και

$\sum_{j=1}^4 (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = 10125$ (διότι τα x_i είναι τα ίδια για όλα τα άτομα). Η υπόθεση που

θέλουμε να εξετάσουμε στο σημείο αυτό θα εκφραστεί ως εξής:

$$H_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_{10} \equiv b = 0$$

Επομένως, θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

Άτομο	\hat{b}_i	Τάξη
1	-0,00228	-9
2	-0,00033	-1
3	-0,00071	-4
4	0,00111	6
5	0,00106	5
6	-0,00353	-10
7	-0,00053	-3
8	-0,00037	-2
9	0,00113	7
10	-0,00171	-8

Ο δειγματικός μέσος και η τυπική απόκλιση των \hat{b}_i είναι ίσα με $-0,000616$ και $0,00154$ αντίστοιχα. Υποθέτοντας ότι οι εκτιμώμενες κλίσεις ακολουθούν κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή $N(b, S_b^2)$, το t τεστ ($H_0 : b = 0$), θα μας δώσει το αποτέλεσμα:

$$t = \frac{\sqrt{10} * (-0.000616 - 0)}{0.00154} \cong -1.26$$

με 9 βαθμούς ελευθερίας. Εναλλακτικά, το προσημικό τεστ του Wilcoxon, μας δίνει

$T_+ = 18$, $T' = \min\left(T_+, \frac{n(n+1)}{2} - T_+\right) = \min(18, 37) = 18$ και $T_{10,0.005} = 3$. Βέβαια, εδώ

κάνουμε την υπόθεση ότι τα \hat{b}_i είναι *i.i.d.* από κανονική κατανομή $N(b, S_b^2)$, κάτι που

υποθέτει ουσιαστικά ότι τα b_i είναι ίσα με b . Επομένως, καθώς έχουμε ότι $T' > T_{10,0.005}$ δεν μπορούμε να απορρίψουμε την αρχική μας υπόθεση.

(γ) Γενίκευση σε n χρονικές στιγμές παρουσία άλλων παραγόντων (πολλαπλά δείγματα)

Στην περίπτωση των πολλαπλών δειγμάτων (η γενική μορφή και παρουσίασή τους αντιστοιχεί στον πίνακα 2.1) έχουμε τις παρατηρήσεις y_{hij} , στη χρονική στιγμή j , για το άτομο i και την ομάδα h , με $h = 1, 2, \dots, s$, $i = 1, 2, \dots, n$ και $j = 1, 2, \dots, t$. Κάτι που μπορεί να προκαλέσει το ενδιαφέρον είναι οι συγκρίσεις μεταξύ των χρονικών στιγμών μέσα στην κάθε μια ομάδα χωριστά. Συνήθως, παρ' όλα αυτά, ο στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε αν το πρότυπο της αλλαγής σε κάθε χρονική στιγμή παραμένει το ίδιο για τις s ομάδες (τα αντικείμενα διαφέρουν από ομάδα σε ομάδα).

Μια πρώτη προσέγγιση θα ήταν η διεξαγωγή ξεχωριστών συγκρίσεων ανάμεσα στις ομάδες για κάθε μια από τις t χρονικές στιγμές, καθώς τα αντικείμενα διαφέρουν από ομάδα σε ομάδα και με αυτόν τον τρόπο θα μπορούμε να έχουμε ανεξάρτητες μετρήσεις. Η χρήση της ανάλυσης διακύμανσης (ANOVA) για τη σύγκριση των ομάδων σε κάθε μέτρηση μπορεί να αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμη σε περίπτωση που η μεταβλητή απόκρισης είναι συνεχής και ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αντιθέτως, αν η εξαρτημένη μεταβλητή δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί το τεστ των Kruskal-Wallis. Τέλος, αν η εξαρτημένη μεταβλητή είναι κατηγορική, το σωστό τεστ θα ήταν το X^2 τεστ ομοιογένειας του Pearson. Το βασικό μειονεκτήματα της μονομεταβλητής αυτής ανάλυσης είναι η προϋπόθεση χρήσης t διαφορετικών τεστ για την εξαγωγή των συμπερασμάτων μας. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του summary-statistic ο στόχος μας θα είναι πρώτα να μειώσουμε τα δεδομένα που ανήκουν σε κάθε υποκείμενο σε μία μόνο παρατήρηση, η οποία θα έχει νόημα και θα περιλαμβάνει μερική ή ολόκληρη πληροφορία από το δείγμα (όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο (β)).

Για να γίνουν περισσότερο κατανοητά όλα τα παραπάνω, θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα μιας έρευνας που διεξάχθηκε από τον Leppik και άλλους συνεργάτες του το 1987 [βλ. Davis (2002)]. Η κλινική δοκιμή περιλάμβανε άτομα, τα οποία υπέφεραν από

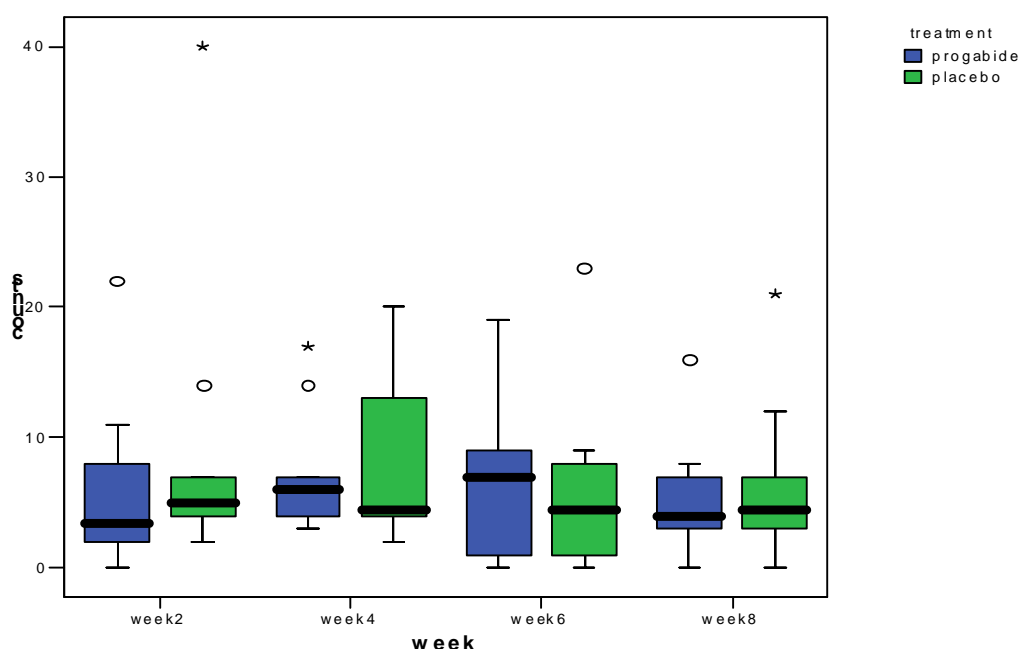
απλού ή περίπλοκου τύπου κρίσεις και στα οποία μέσω τυχαιοποίηση επιλέχθηκε αν θα χορηγηθεί το φάρμακο Progabide για την επιληψία ή αν θα τους χορηγηθεί ψευδοφάρμακο (placebo). Τα άτομα εξετάστηκαν κατά τη διάρκεια τεσσάρων επισκέψεων που έγιναν έπειτα από την τυχαιοποίηση αυτή. Κατά τη διάρκεια των επισκέψεων αυτών, καταγράφηκε ο αριθμός των κρίσεων κατά τη διάρκεια των δυο εβδομάδων που είχαν μεσολαβήσει μέχρι την ημέρα της επισκέψεως. Το ερώτημα που απασχολούσε τους ιατρούς και στο οποίο προσπαθούσαν να δώσουν μια ικανοποιητική απάντηση ήταν αν το φάρμακο το οποίο χορηγήθηκε (progabide) μειώνει τη συχνότητα των επιληπτικών κρίσεων. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι μετρήσεις που έγιναν στους 10 πρώτους (από τους 59 στο σύνολο) ασθενείς των δύο γκρουπ (progabide – placebo).

Αγωγή	Ασθενής	Εβδομάδα 2	Εβδομάδα 4	Εβδομάδα 6	Εβδομάδα 8
Progabide	101	11	14	9	8
	102	8	7	9	4
	103	0	4	3	0
	108	3	6	1	3
	110	2	6	7	4
	11	4	3	1	3
	112	22	17	19	16
	113	5	4	7	4
	117	2	4	0	4
	121	3	7	7	7
Placebo	104	5	3	3	3
	106	3	5	3	3
	107	2	4	0	5
	114	4	4	1	4
	116	7	18	9	21
	118	5	2	8	7
	123	6	4	0	2
	126	40	20	23	12
	130	5	6	6	5
	135	14	13	6	0

Πηγή: Charles S. Davis, Statistical Methods for the Analysis of Repeated Measurements

Για την περιγραφική παρουσίαση των παραπάνω δεδομένων, χρησιμοποιήθηκαν box-plots για τις δύο αγωγές σε κάθε χρονική στιγμή. Τα αποτελέσματα μιας αρχικής ανάλυσης, παρατίθενται στο επόμενο διάγραμμα.

Μια πιθανή προσέγγιση για να δοθεί απάντηση στο ερώτημα αν το φάρμακο progabide μειώνει τις επιληπτικές κρίσεις, ήταν να μειωθεί ο αριθμός των δεδομένων που υπήρχαν προς ανάλυση, σε μια μοναδική παρατήρηση για κάθε ένα αντικείμενο. Ως ένα πιθανό μέτρο θα μπορούσε να είναι ο συνολικός αριθμός των κρίσεων για κάθε άτομο. Μια άλλη πιθανότητα θα ήταν η διάμεσος, η οποία θα επηρεάζεται λιγότερο από τις ακραίες τιμές.



2.5. Ανάλυση Διακύμανσης (ANOVA)

2.5.1. Βασικές έννοιες – Το αρχικό υπόδειγμα

Η προσέγγιση της μονοδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης για την ανάλυση των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, είναι διαδομένη σε κάποιους επιστημονικούς κλάδους (στην ψυχολογία για παράδειγμα, είναι ιδιαίτερα διαδομένη η πολυδιάστατη ανάλυση διακύμανσης, γνωστή και ως MANOVA) όπου υπάρχει μακρά ιστορία χρήσης των μεθόδων της ανάλυσης διακύμανσης. Αν εξετάσουμε το θέμα επιφανειακά, η δομή των δεδομένων μας, με m άτομα σε n διαφορετικές χρονικές στιγμές, μοιάζει με εκείνη των τυχαιοποιημένων block, ή των σχεδιασμών split-plot. Έτσι, υπάρχει πιθανότητα κανείς να προσπαθήσει να προχωρήσει σε ανάλυση διακύμανσης δύο παραγόντων (two-

way ANOVA). Σε μια τέτοια ανάλυση, οι nm στο πλήθος παρατηρήσεις θεωρείται ότι αποτελούν τα στοιχεία ενός διανύσματος παρατηρήσεων διαστάσεων $nm \times 1$. Το πρώτο σύνολο των n παρατηρήσεων, εκφράζει τις n μετρήσεις από το πρώτο άτομο, το δεύτερο σύνολο από n παρατηρήσεις αποτελείται από τις παρατηρήσεις του δεύτερου ατόμου κ.ο.κ.

Η ανάλυση επαναλαμβανόμενων μετρήσεων μέσω της ανάλυσης διακύμανσης στην πιο απλή περίπτωση εφαρμόζεται όταν έχουμε ισορροπημένα (balanced) δεδομένα. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση που το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο i -οστό άτομο δίνεται από το $\mathbf{y}^i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in})'$ κι επομένως, οι αποκρίσεις που αντιστοιχούν στο κάθε ένα από τα υποκείμενα (άτομα), λαμβάνουν χώρα στις ίδιες n χρονικές στιγμές για όλα τα άτομα, χωρίς να υπάρχουν αποκλίσεις από αυτές στις χρονικές στιγμές και χωρίς την ύπαρξη ελλειπουσών τιμών. Αυτή η συγκεκριμένη δομή των δεδομένων μας, όπου δηλαδή έχουμε m άτομα και n μετρήσεις σε κάθε ένα από αυτά, και συλλέγοντας τις παρατηρήσεις την ίδια χρονική στιγμή σε όλα τα άτομα, είναι παρόμοια με εκείνη των τυχαιοποιημένων block.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι μια συνεχής μεταβλητή απόκρισης, που ακολουθεί την κανονική κατανομή, μετράται σε n χρονικές στιγμές για κάθε ένα από τα m άτομα (πειραματικές μονάδες). Έστω ότι το y_{ij} εκφράζει την απόκριση από το άτομο i , τη χρονική στιγμή j , με $i = 1, \dots, m$ και $j = 1, \dots, n$. Μία γενική μορφή μοντέλου ANOVA για επαναλαμβανόμενες μετρήσεις είναι η εξής:

$$y_{ij} = m_j + a_{ij} + e_{ij}$$

Το παραπάνω μοντέλο αποτελείται από τρεις συνιστώσες:

- Το m_j εκφράζει το μέσο επίπεδο του y_{ij} τη χρονική στιγμή j για άτομα που είναι τυχαία επιλεγμένα από τον ίδιο πληθυσμό με το άτομο i . Υποθετικά, γίνονται επαναλήψεις της δομής των δεδομένων και τα άτομα επιλέγονται με τυχαίο τρόπο. Επομένως, το m_j θα παραμείνει αναλλοίωτο αν κάποιο άλλο άτομο αντικαθιστούσε το άτομο i στο δείγμα μας.

- Το a_{ij} εκπροσωπεί τη σταθερή απόκλιση του y_{ij} από το m_j για τη συγκεκριμένη πειραματική μονάδα, δηλαδή το i -οστό άτομο το δείγμα μας. Υπό υποθετικές επαναλήψεις, στο ίδιο υποκείμενο, το y_{ij} έχει μέσο ίσο με $m_j + a_{ij}$. Όπως θα φανεί παρακάτω, το a_{ij} είναι η τυχαία επίδραση (random effect) του i ατόμου τη χρονική στιγμή j .
- Το e_{ij} αποτελεί τον όρο του σφάλματος, ο οποίος εκφράζει την απόκλιση του y_{ij} από το $m_j + a_{ij}$ στη συγκεκριμένη περίπτωση και στο συγκεκριμένο άτομο που εξετάζουμε. Καμία σταθερότητα στις επαναλήψεις δεν ανταποκρίνεται στο e_{ij} .

Οι παράμετροι m_j και a_{ij} ονομάζονται σταθερές και τυχαίες επιδράσεις (fixed and random effects) αντίστοιχα. Το m_j αποτελεί μια σταθερή παράμετρο των δεδομένων μας, καθώς η τιμή της δεν αλλάζει αλλά παραμένει μοναδική ανεξάρτητα από το υποκείμενο i . Αντιθέτως, η τιμή του a_{ij} ποικίλλει, ανάλογα με τον πληθυσμό των υποκειμένων. Επομένως, εφόσον το m_j δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη του υποκειμένου i , μπορεί να γραφεί και ως m_j , δηλαδή να παραληφθεί ο όρος που εκφράζει το i -οστό άτομο στην ανάλυσή μας. Κάτι τέτοιο θα ήταν αποδεκτό και δεν θα δημιουργούσε προβλήματα, στην περίπτωση που όλα τα άτομα στο δείγμα μας είχαν την ίδια αντιμετώπιση, με την έννοια ότι δεν θα υπάρχουν διαφορές στις χορηγηθείσες θεραπείες ή ακόμα και στα περιβάλλοντα από τα οποία αυτά προέρχονται, έτσι ώστε να μην είναι δυνατός ο οποιοσδήποτε διαχωρισμός τους. Αν όμως κάτι τέτοιο δεν μπορεί να εξασφαλιστεί, σοφότερη θα ήταν η διατήρηση του όρου i στο συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε (για παράδειγμα όταν υπάρχουν διαφορετικές ομάδες στα δεδομένα μας). Λόγω αυτής της ύπαρξης σταθερών και τυχαίων όρων επιδράσεων, το μοντέλο αυτό ονομάζεται μεικτό μοντέλο (mixed-effects model). Περισσότερος λόγος για τα μεικτά μοντέλα, θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο.

Βέβαια, για να ολοκληρωθεί επαρκώς ο ορισμός του μοντέλου που παραθέσαμε παραπάνω, θα πρέπει να γίνουν γνωστοί ορισμένοι περιορισμοί, οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την ορθή χρήση και λειτουργία αυτού, καθώς επίσης και ορισμένες

απαραίτητες υποθέσεις που πρέπει να γίνονται. Αυτά συνοψίζονται στα παρακάτω [βλ. Hand and Crowder (1996)]:

- ☛ Τα a_{ij} , για δεδομένο j , ποικίλουν στον κάθε πληθυσμό ατόμων, έχοντας μέση τιμή ίση με το μηδέν και διακύμανση ίση με S_{aj}^2 . Επομένως, θα ισχύουν οι σχέσεις $E(a_{ij}) = 0$ και $Var(a_{ij}) = S_{aj}^2$. Τα παραπάνω δεν αποτελούν περιορισμούς, καθώς κάθε μη μηδενική μέση τιμή απορροφάται από τον όρο m_j , απλά εκφράζει μια απαραίτητη σημείωση.
- ☛ Τα e_{ij} , για δεδομένο j , ποικίλουν από άτομο σε άτομο κι έχουν μέση τιμή ίση με το μηδέν και διακύμανση ίση με S_j^2 . Επομένως, ισχύουν οι σχέσεις $E(e_{ij}) = 0$ και $Var(e_{ij}) = S_j^2$. Όπως και παραπάνω, αυτό δεν αποτελεί κάποιο συγκεκριμένο περιορισμό, παρά μονάχα μια σημείωση.
- ☛ Για διαφορετικά άτομα i , τα a_{ij} είναι ασυσχέτιστα κι έτσι ισχύει ότι $Cov(a_{ij}, a_{i'j}) = 0$ για $i \neq i'$. Για συγκεκριμένο i , ισχύει ότι $Cov(a_{ij}, a_{ij'}) = S_{ajj'}^2$.
- ☛ Όλα τα σφάλματα είναι ασυσχέτιστα, επομένως θα έχουμε $Cov(e_{ij}, e_{i'j'}) = 0$ για $i \neq i'$ ή $j \neq j'$.
- ☛ Οι όροι των τυχαίων επιδράσεων είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστοι. Άρα θα ισχύει $Cov(a_{ij}, e_{i'j'}) = 0$ για όλα τα i, j, i', j' .
- ☛ Τα a_{ij} και e_{ij} ακολουθούν την κανονική κατανομή.

2.5.2. ANOVA Επαναλαμβανόμενων μετρήσεων (Ένα Δείγμα)

Στην περίπτωση που οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις λαμβάνονται από ένα μόνο δείγμα (η δομή τους δίνεται στον πίνακα 2.2), η μορφή του μοντέλου ANOVA θα είναι η εξής:

$$y_{ij} = m + a_i + t_j + e_{ij}$$

με $i = 1, \dots, m$ και $j = 1, \dots, n$

Το y_{ij} εκφράζει την απόκριση από το άτομο i στη χρονική στιγμή j , το m είναι ο ολικός μέσος, το a_i εκφράζει τις τυχαίες επιδράσεις του υποκειμένου i , που παραμένουν αμετάβλητες σε όλες τις περιστάσεις, το t_j εκφράζει τις σταθερές επιδράσεις κατά τη διάρκεια του χρόνου και τέλος το e_{ij} είναι το τυχαίο σφάλμα συγκεκριμένα για το άτομο i τη στιγμή j . Επίσης, ισχύουν τα εξής:

- Τα a_i είναι ανεξάρτητα και ισχύει $a_i \sim N(0, s_a^2)$
- Τα e_{ij} είναι ανεξάρτητα και ισχύει $e_{ij} \sim N(0, s_e^2)$
- $\sum_{j=1}^n t_j = 0$
- Τα a_i και e_{ij} είναι ανεξάρτητα

Οι διακυμάνσεις και οι συνδιακυμάνσεις των παρατηρήσεων είναι ίσες με:

- $Var(y_{ij}) = Var(m + a_i + t_j + e_{ij}) = s_a^2 + s_e^2$ για κάθε i και j
- $Cov(y_{ij}, y_{i'j'}) = 0$ για $i \neq i'$
- $Cov(y_{ij}, y_{ij'}) = s_a^2$ για $j \neq j'$

Επομένως, ο πίνακας διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων Σ του διανύσματος \mathbf{r} $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{in})'$, θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_* & & \mathbf{0} \\ & \Sigma_* & \\ \mathbf{0} & & \Sigma_* \end{pmatrix}, \text{ όπου } \Sigma_* = \begin{pmatrix} s_a^2 + s_e^2 & & s_a^2 \\ & \mathbf{O} & \\ s_e^2 & & s_a^2 + s_e^2 \end{pmatrix} = (s_a^2 + s_e^2) \begin{pmatrix} 1 & & r \\ & \mathbf{O} & \\ r & & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

όπου $r = \frac{S_a^2}{S_a^2 + S_e^2} = \text{Corr}(y_{ij}, y_{ij'})$ ο συντελεστής συσχέτισης παραμένει ίδιος για όλα τα άτομα. Ο πίνακας Σ για όλο το διάνυσμα των μετρήσεων $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ είναι block diagonal.

Παρ' όλο που οι τυχαίες μεταβλητές στο μοντέλο αυτό είναι ανεξάρτητες από άτομο σε άτομο, οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις σε κάθε άτομο είναι συσχετισμένες. Ο πίνακας διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων που παραθέσαμε μόλις παραπάνω, που εμφανίζει ίσα διαγώνια και μη-διαγώνια στοιχεία, λέγεται ότι παρουσιάζει σύνθετη συμμετρία (compound symmetry), μία ιδιότητα που θεωρείται ως ειδική περίπτωση της σφαιρικότητας:

- ✓ Οι διακυμάνσεις των πληθυσμών των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων είναι ίσες μεταξύ τους
- ✓ Οι συνδιακυμάνσεις των πληθυσμών για όλα τα ζεύγη επαναλαμβανόμενων μετρήσεων είναι ίσες μεταξύ τους

Αυτή η δομή των δεδομένων, υπονοεί ότι η συσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους επαναλαμβανόμενων μετρήσεων παραμένει η ίδια, ανεξάρτητα από τη θέση των παρατηρήσεων. Αυτή η υπόθεση μπορεί να χαρακτηριστεί ως ιδιαίτερα περιοριστική και συχνά μη ρεαλιστική, ιδιαίτερα όταν ο παράγοντας που επαναλαμβάνεται στις παρατηρήσεις μας είναι ο χρόνος.

Ο πίνακας ANOVA για το μοντέλο αυτό, είναι παρόμοιος με εκείνον για το μεικτό μοντέλο με δύο παράγοντες, με μία μόνο παρατήρηση σε κάθε κελί και χωρίς την ύπαρξη αλληλεπίδρασης μεταξύ των υποκειμένων και του χρόνου. Ο πίνακας ANOVA δίνεται παρακάτω [βλ. Davis (2002)]:

Πηγή	SS	df	MS	$E(MS)$
Χρόνος	SS_T	$n - 1$	$MS_T = SS_T / (n - 1)$	$S_e^2 + mS_t^2$
Αντικείμενα	SS_S	$m - 1$	$MS_S = SS_S / (m - 1)$	$S_e^2 + nS_a^2$
Υπόλοιπα	SS_E	$(n - 1)(m - 1)$	$MS_E = SS_E / (n - 1)(m - 1)$	S_e^2

όπου ισχύει ότι:

$$\blacksquare \bar{y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}}{mn}$$

$$\blacksquare \bar{y}_{.i} = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij}}{n}$$

$$\blacksquare \bar{y}_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^m y_{ij}}{m}$$

καθώς επίσης και

$$\blacksquare SS_T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 = m \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$$

$$\blacksquare SS_S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{.i} - \bar{y}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^m (\bar{y}_{.i} - \bar{y}_{..})^2$$

$$\blacksquare SS_E = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{.i} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$$

Η αρχική μας υπόθεση είναι ότι δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των χρονικών περιόδων ($H_0 : t_j = 0$). Για να κάνουμε τον έλεγχο της υπόθεσης αυτής, μπορούμε να κινηθούμε μέσω ενός απλού F-test, κάνοντας χρήση του στατιστικού $F = MS_T / MS_E$. Δεδομένου ότι ισχύουν οι υποθέσεις του μοντέλου, το στατιστικό ακολουθεί την κατανομή $F_{n-1, (m-1)(n-1)}$ αν ισχύει η μηδενική μας υπόθεση [βλ. Davis(2002)].

Ο Scheffé (1959) έδωσε μια εναλλακτική πρόταση για τη διαμόρφωση του μοντέλου ANOVA των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων. Τα y_{ij} , t_j και m , εξακολουθούν να ερμηνεύονται όπως παραπάνω. Αυτό που αλλάζει στο μοντέλο του Scheffé είναι ότι πλέον στα e_{ij} περιλαμβάνεται η υπόθεση της ύπαρξης αλληλεπίδρασης μεταξύ των ατόμων και του χρόνου εκτός από τα σφάλματα μέτρησης. Επίσης ισχύει ότι τα a_i αλλά και τα e_{ij} ακολουθούν πλέον πολυμεταβλητή κανονική κατανομή. Μία πολύ σημαντική διαφορά αποτελεί το γεγονός ότι ισχύουν οι σχέσεις $Cov(e_{ij}, e_{ij.}) \neq 0$ καθώς επίσης και $Cov(a_i, e_{ij}) \neq 0$. Η ανάλυση όμως του μοντέλου, παραμένει η ίδια, γι' αυτό και πολλές φορές δεν γίνεται διαχωρισμός μεταξύ των δύο παραπάνω μοντέλων. Το

στατιστικό $F = MS_T / MS_{TS}$, όπου $MS_{TS} = SS_{TS} / (n-1)(m-1)$ εκφράζει το μέσο άθροισμα τετραγώνων του σφάλματος, χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι οι μέσοι στις n χρονικές στιγμές είναι ίσοι.

2.5.2.1. Η υπόθεση της σφαιρικότητας

Ο τύπος (2.1) που παραθέσαμε παραπάνω, μας δίνει τον πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων για τις παρατηρήσεις y_{ij} από το μοντέλο της ανάλυσης διακύμανσης κατά δύο παράγοντες (two-way ANOVA) για τις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Αυτή η συγκεκριμένη δομή ονομάζεται *σύνθετη συμμετρία* (compound symmetry). Παρ' όλο που η συνθήκη της σύνθετης συμμετρίας είναι επαρκής για να χρησιμοποιήσουμε το F-test για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή για τον έλεγχο ότι δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των διαφορετικών χρονικών στιγμών, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι είναι και απαραίτητη [βλ. Davis (2002), σελ. 109]. Η σύνθετη συμμετρία είναι ειδική περίπτωση, όπως αναφέραμε και παραπάνω, της *σφαιρικότητας*. Η υπόθεση της σφαιρικότητας, μπορεί να εκφραστεί μέσω ορισμένων εναλλακτικών συνθηκών, κάποιες από τις οποίες, είναι οι εξής:

◆ Οι διακυμάνσεις όλων των ζευγών – διαφορών μεταξύ των μεταβλητών είναι ίσες, δηλαδή ισχύει η σχέση: $Var(y_{ij} - y_{ij'}) = c$ για όλα τα j, j'

◆ $e = 1$, όπου $e = \frac{n^2(\bar{S}_{ii} - \bar{S}_{..})^2}{(n-1)(S - 2n\sum \bar{S}_i^2 + n^2\bar{S}_{..}^2)}$ και \bar{S}_{ii} εκφράζει το μέσο των στοιχείων

της κυρίας διαγωνίου του πίνακα Σ , $\bar{S}_{..}$ είναι ο μέσος όλων των στοιχείων του πίνακα Σ , \bar{S}_i αποτελεί το μέσο των στοιχείων στην γραμμή i του πίνακα Σ και τέλος S είναι το άθροισμα τετραγώνων των στοιχείων του πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων Σ .

Αν ισχύει η υπόθεση της σύνθετης συμμετρίας, τότε τα $Var(y_{ij})$ και $Cov(y_{ij}, y_{ij'})$, παραμένουν σταθερά για όλα τα i, j . Παρ' όλο που η συνθήκη της

σφαιρικότητας αποτελεί ένα γενικότερο κριτήριο για την ισχύ του F-test της ανάλυσης διακύμανσης των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, δεν είναι εύκολο να επιχειρηματολογήσουμε ουσιαστικά για κάποια άλλη μορφή του πίνακα Σ , εκτός από αυτήν της σύνθετης συμμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, αν οι διακυμάνσεις είναι ίσες, τότε οι συνδιακυμάνσεις πρέπει να είναι και εκείνες ίσες, έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη της σφαιρικότητας. Πρέπει να σημειώσουμε ότι αν παραβιαστεί η προϋπόθεση της σφαιρικότητας, αυτό σημαίνει ότι θα υπάρξουν σοβαρές επιπτώσεις. Με λίγα λόγια, η παραβίαση οδηγεί σε αύξηση της πιθανότητας του σφάλματος Τύπου I [βλ. Κατέρη (2003)].

2.5.2.2. Μέτρα και τεστ σφαιρικότητας

Καθώς λοιπόν για τη χρήση της μονοδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης, απαιτείται η υπόθεση της σφαιρικότητας, πρέπει να ελέγχουμε αρχικά αν αυτή ικανοποιείται και αν όχι, τι εναλλακτικές λύσεις έχουμε στη διάθεσή μας για να συνεχίσουμε την ανάλυση των δεδομένων μας. Με το θέμα αυτό έχουν ασχοληθεί αρκετοί επιστήμονες, όπως ο Huynh, ο Wallenstein και ο Mauchly.

Ο Huynh (1978) δήλωσε ότι θα ήταν δύσκολο να διαμορφώσουμε μια κατάσταση, η οποία θα οδηγούσε στη δημιουργία ενός πίνακα συνδιακυμάνσεων ο οποίος θα ικανοποιούσε την υπόθεση της σφαιρικότητας αλλά όχι και της σύνθετης συμμετρίας. Έχοντας αυτό ως έναυσμα, ο Wallenstein (1982), οδηγείται στο συμπέρασμα ότι για λόγους καθαρά πρακτικούς, η απαιτούμενη υπόθεση για την ανάλυση διακύμανσης των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων είναι αυτή της σύνθετης συμμετρίας. Τέλος, ο Mauchly (1940), έδωσε ένα τεστ για την υπόθεση της σφαιρικότητας. Δυστυχώς όμως, το τεστ αυτό παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα, που δεν το καθιστούν ιδιαίτερα εύκολο στη χρήση του:

- Το τεστ δεν είναι ισχυρό για δείγματα μικρού μεγέθους.
- Για μεγάλα δείγματα μπορεί να δείξει σημαντικά αποτελέσματα, ενώ η επίδραση στο F-test να παρουσιάζεται αμελητέα.
- Το τεστ παρουσιάζεται ευαίσθητο στις αποκλίσεις από την κανονικότητα και ιδιαίτερος απέναντι στις ακραίες τιμές.

Το στατιστικό που χρησιμοποιούμε στο τεστ του Mauchly για τη σφαιρικότητα, είναι το:

$$W = \frac{|CS_p C^T|}{|tr(CS_p C^T)/(p-1)|^{p-1}}$$

όπου ο S_p είναι ο pooled πίνακας δειγματικών συνδιακυμάνσεων μέσα στα άτομα και ο C , ένας $(p-1) \times p$ πίνακας ορθοκανονικών αντιθέσεων. Το παραπάνω τεστ βασίζεται στην ποσότητα $\left\{ \sum_g (n_g - 1) - (p-2)(p+1)/2 \right\} \log(W)$, η οποία ασυμπτωτικά, ακολουθεί την X^2 κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας, όπου $n = (p-2)(p+1)/2$, όταν ισχύει η μηδενική μας υπόθεση [βλ. Everitt and Dunn (1992)].

Στην περίπτωση που δεν ισχύει η υπόθεση της σφαιρικότητας, τότε μια εναλλακτική λύση αποτελεί η χρήση της πολυδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης (δηλαδή της MANOVA). Η πολυδιάστατη προσέγγιση δεν κάνει υπόθεση για τον κοινό πίνακα συνδιακυμάνσεων και είναι πάντα μια ασφαλής επιλογή. Το μειονέκτημα όμως που παρουσιάζεται σε αυτήν την περίπτωση (και κατά συνέπεια δεν καθιστά την πολυδιάστατη ανάλυση διακύμανσης ως μια ασφαλή επιλογή) είναι η χαμηλή ισχύς της όταν υπάρχει σφαιρικότητα. Ενώ και τα δύο τεστ (μονοδιάστατο και πολυδιάστατο) παρουσιάζουν τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας για τον αριθμητή, το πολυδιάστατο τεστ εμφανίζει περισσότερους βαθμούς ελευθερίας στον παρονομαστή.

Μια άλλη πιθανή αντιμετώπιση θα ήταν να μετασχηματίσουμε με κατάλληλο τρόπο την προσέγγισή μας μέσω της μονοδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης. Όταν λοιπόν δεν ισχύει η σφαιρικότητα, το στατιστικό του F-test ακολουθεί ασυμπτωτικά την

κατανομή $F_{e(n-1), e(n-1)(m-1)}$, όπου το $e = \frac{n^2 (\bar{S}_{ii} - \bar{S}_{..})^2}{(n-1)(S - 2n \sum \bar{S}_{i.}^2 + n^2 \bar{S}_{..}^2)}$ (όπως έχει οριστεί

και στην παράγραφο 2.5.2.1) αποτελεί έναν δείκτη απόκλισης από τη σφαιρικότητα και κυμαίνεται μεταξύ των τιμών $1/(n-1)$ και της μονάδος [βλ. Davis (2002)]. Πολλές ήταν οι προτάσεις για τον έλεγχο υποθέσεων σε περίπτωση παραβίασης της υπόθεσης της σφαιρικότητας. Μία από αυτές ήταν η προσαρμογή των βαθμών ελευθερίας του

στατιστικού F, κάνοντας χρήση του κάτω ορίου της ποσότητας e . Έτσι, η $F_{e(n-1), e(n-1)(m-1)}$ κατανομή, γίνεται $F_{1, m-1}$. Το τεστ αυτό βέβαια, είναι πολύ συντηρητικό.

Αυτό που πρότειναν οι Greenhouse και Geisser (1959) για τη χρήση της μονοδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης για τις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις, ήταν τα εξής:

- ⊕ Αν υποθέσουμε ότι οι υποθέσεις της μονοδιάστατης ANOVA ικανοποιούνται, προβαίνουμε σε εκτέλεση του μονομεταβλητού F-test.
- ⊕ Αν το τεστ αυτό δεν μας δώσει σημαντικά αποτελέσματα, τότε σταματάμε τη διαδικασία.
- ⊕ Αν το τεστ μας δώσει σημαντικά αποτελέσματα, τότε προβαίνουμε στην εκτέλεση του πιο συντηρητικού F-test, το οποίο έχει μειωμένους βαθμούς ελευθερίας, δεδομένου ότι χρησιμοποιούμε την τιμή $1/(n-1)$ για το e . Αν σε αυτό το σημείο το τεστ εμφανίσει σημαντικά αποτελέσματα, τότε απορρίπτουμε την αρχική μας υπόθεση. Αν τα αποτελέσματα δεν είναι σημαντικά, τότε επανεκτιμούμε την τιμή του

$$e \text{ μέσω της τιμής } \tilde{e} = \min \left(1, \frac{m(n-1)\hat{e} - 2}{(n-1)(m-1 - (n-1)\hat{e})} \right) \text{ και προβαίνουμε σε εφαρμογή}$$

διορθωμένου ελέγχου. Ο εκτιμητής \tilde{e} είναι βασισμένος σε μη μεροληπτικούς εκτιμητές του αριθμητή και του παρονομαστή του e και είναι λιγότερο μεροληπτικός από το \hat{e} . Στην πράξη το e είναι άγνωστο.

2.5.3. ANOVA Επαναλαμβανόμενων μετρήσεων (Πολλαπλά Δείγματα)

Ας υποθέσουμε ότι οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις σε n χρονικές στιγμές, συλλέγονται από s ομάδες υποκειμένων. Έστω ότι το n_h εκφράζει τον αριθμό των

ατόμων στην ομάδα h κι ότι ισχύει $m = \sum_{h=1}^s n_h$. Το y_{hij} εκφράζει τις αποκρίσεις κατά τη

χρονική στιγμή j , για το άτομο i και την ομάδα h , με $h = 1, \dots, s$, $i = 1, \dots, n_h$ και $j = 1, \dots, n$ (η δομή των δεδομένων δίνεται από τον πίνακα 2.2). Η πιο απλή μορφή του μοντέλου που θα εκφράσει την ανάλυση διακύμανσης, θα είναι η εξής:

$$y_{hij} = m + g_h + t_j + (gt)_{hj} + a_{i(h)} + e_{hij}$$

όπου:

- Το m εκφράζει τον ολικό μέσο.
- Το g_h αποτελεί τη σταθερή επίδραση στην ομάδα h , με $\sum_{h=1}^s g_h = 0$.
- Το t_j αποτελεί τη σταθερή επίδραση στη χρονική στιγμή j , με $\sum_{j=1}^n t_j = 0$.
- Το $(tg)_{hj}$ αποτελεί τη σταθερή επίδραση για την αλληλεπίδραση της ομάδας h τη χρονική στιγμή j .
- Οι περιορισμοί που αφορούν τις παραμέτρους των αλληλεπιδράσεων, είναι οι εξής:

$$\sum_{h=1}^s (gt)_{hj} = \sum_{j=1}^n (gt)_{hj} = 0.$$

- Το $a_{i(h)}$ εκφράζει τις τυχαίες επιδράσεις για το άτομο i στην ομάδα h .
- Ισχύει ότι $a_{i(h)} \sim N(0, \mathbf{S}_a^2)$.
- Τα e_{hij} είναι ανεξάρτητα και ισχύει ότι $e_{hij} \sim N(0, \mathbf{S}_e^2)$.

Ο πίνακας ANOVA για την ανάλυση διακύμανσης πολλαπλών δειγμάτων, δίνεται παρακάτω:

Πηγή	SS	df	MS	$E(MS)$
Ομάδα	SS_G	$s - 1$	$SS_G / (s - 1)$	$\mathbf{S}_e^2 + n\mathbf{S}_a^2 + D_G$
Αντικείμενα	SS_S	$m - s$	$SS_S / (m - s)$	$\mathbf{S}_e^2 + n\mathbf{S}_a^2$
Χρόνος	SS_T	$n - 1$	$SS_T / (n - 1)$	$\mathbf{S}_e^2 + D_T$
Ομάδα x Χρόνος	SS_{GT}	$(s - 1)(n - 1)$	$SS_{GT} / (s - 1)(n - 1)$	$\mathbf{S}_e^2 + D_{GT}$
Υπόλοιπα	SS_R	$(m - s)(n - 1)$	$SS_R / (m - s)(n - 1)$	\mathbf{S}_e^2

Πηγή: Charles S. Davis, Statistical Methods for the Analysis of Repeated Measurements

Στον παραπάνω πίνακα, οι ποσότητες D_G , D_T και D_{GT} εκφράζουν τις διαφορές ανάμεσα στις ομάδες, τις διαφορές ανάμεσα στις χρονικές στιγμές και τις διαφορές μεταξύ των αλληλεπιδράσεων ομάδας – χρόνου αντίστοιχα. Τα αθροίσματα τετραγώνων

που δίνονται στον πίνακα ANOVA, βασίζονται στον διαχωρισμό των αποκλίσεων κάθε παρατήρησης από τον συνολικό μέσο ($y_{hij} - \bar{y}_{...}$):

$$y_{hij} - \bar{y}_{...} = (\bar{y}_{h..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{hi.} - \bar{y}_{h..}) + (\bar{y}_{..j} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{h.j} - \bar{y}_{h..} - \bar{y}_{..j} + \bar{y}_{...}) + (y_{hij} - \bar{y}_{h.j} - \bar{y}_{hi.} + \bar{y}_{h..})$$

όπου:

- Το $\bar{y}_{...} = \frac{\sum_{h=1}^s \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^n y_{hij}}{nm}$ εκφράζει τον ολικό μέσο

- Το $\bar{y}_{h..} = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^n y_{hij}}{n_h n}$ αποτελεί τον μέσο για την ομάδα h

- Το $\bar{y}_{..j} = \frac{\sum_{h=1}^s \sum_{i=1}^{n_h} y_{hij}}{m}$ είναι ο μέσος στη χρονική στιγμή j

- Το $\bar{y}_{h.j} = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hij}}{n_h}$ εκφράζει το μέσο για την ομάδα h τη χρονική στιγμή j

- Το $\bar{y}_{hi.} = \frac{\sum_{j=1}^n y_{hij}}{n}$ αποτελεί το μέσο για το i αντικείμενο στην ομάδα h

Επομένως, τα αθροίσματα τετραγώνων θα ορίζονται όπως παρακάτω:

- $SS_G = \sum_{h=1}^s \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{h..} - \bar{y}_{...})^2 = n \sum_{h=1}^s n_h (\bar{y}_{h..} - \bar{y}_{...})^2$

- $SS_S = \sum_{h=1}^s \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{hi.} - \bar{y}_{h..})^2 = n \sum_{h=1}^s \sum_{i=1}^{n_h} (\bar{y}_{hi.} - \bar{y}_{h..})^2$

- $SS_T = \sum_{h=1}^s \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{..j} - \bar{y}_{...})^2 = m \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{..j} - \bar{y}_{...})^2$

$$\blacksquare \quad SS_{GT} = \sum_{h=1}^s \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{h..j} - \bar{y}_{h..} - \bar{y}_{..j} + \bar{y}_{...})^2$$

$$\blacksquare \quad SS_R = \sum_{h=1}^s \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{hij} - \bar{y}_{h..j} - \bar{y}_{hi.} + \bar{y}_{h..})^2$$

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τα SS_G , SS_T και SS_{GT} , είναι ίσα με τα αθροίσματα τετραγώνων του μοντέλου της δισδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης (2-way ANOVA model, με άνισο αριθμό παρατηρήσεων σε κάθε κελί, αλλά ίσο αριθμό για κάθε h), το οποίο έχει επιδράσεις που αφορούν στις ομάδες, στο χρόνο και στην αλληλεπίδραση μεταξύ των ομάδων και του χρόνου. Το άθροισμα τετραγώνων των καταλοίπων οφείλεται στην επίδραση που βρίσκεται εντός της ταξινόμησης της ομάδας με το χρόνο. Για το στατιστικό που θα χρησιμοποιήσουμε για τον έλεγχο της υπόθεσης της ύπαρξης διαφορών μεταξύ των διαφόρων ομάδων $H_0 : g_h = 0$, είναι απαραίτητο να γίνει χρήση της υπόθεσης ότι οι πίνακες διακυμάνσεων μέσα στις ομάδες είναι ίδιοι:

$$F = \frac{MS_G}{MS_S} = \frac{SS_G/(s-1)}{SS_S/(m-s)} \stackrel{H_0}{\sim} F_{(s-1),(m-s)}$$

Η παραπάνω υπόθεση βέβαια, είναι απαραίτητο να γίνεται και για όλους τους ελέγχους που γίνονται μεταξύ των αντικειμένων.

Το στατιστικό F για τον έλεγχο της ύπαρξης διαφορών μεταξύ των χρονικών στιγμών $H_0 : t_j = 0$, δίνεται από τον τύπο:

$$F = \frac{MS_T}{MS_R} = \frac{SS_T/(n-1)}{SS_R/(m-s)(n-1)} \stackrel{H_0}{\sim} F_{(n-1),(m-s)(n-1)}$$

Αναλόγως, το στατιστικό F για τον έλεγχο αν η αλληλεπίδραση που υπάρχει μεταξύ των ομάδων και του χρόνου είναι στατιστικά σημαντική $H_0 : (tg)_{ij} = 0$, δίνεται από τον τύπο:

$$F = \frac{MS_{GT}}{MS_R} = \frac{SS_{GT}/(s-1)(n-1)}{SS_R/(m-s)(n-1)} \stackrel{H_0}{\sim} F_{(s-1)(n-1), (m-s)(n-1)}$$

Και για τα δύο παραπάνω τεστ είναι απαραίτητη η υπόθεση ότι οι πίνακες διακύμανσης μέσα στις ομάδες είναι ίσοι και ότι η συνθήκη της σφαιρικότητας ικανοποιείται. Γενικά, οι υποθέσεις αυτές είναι απαραίτητες απαιτούνται για κάθε είδους τεστ που γίνεται για τις επιδράσεις μέσα στα αντικείμενα.

Τέλος, ένα εναλλακτικό μοντέλο για την ανάλυση διακύμανσης για επαναλαμβανόμενες μετρήσεις, συμπεριλαμβάνει και έναν όρο τυχαίων επιδράσεων για την αλληλεπίδραση μεταξύ των αντικειμένων και του χρόνου. Αυτές οι επιδράσεις συνήθως θεωρούνται ασυσχέτιστες με την τυχαία επίδραση του αντικειμένου. Παρ' όλο που οι αναμενόμενες μέσες τιμές για το μοντέλο αυτό είναι διαφορετικές από αυτές που παραθέσαμε στον παραπάνω πίνακα ANOVA, τα αθροίσματα τετραγώνων καθώς επίσης και τα στατιστικά που χρησιμοποιούνται για τους διάφορους ελέγχους, είναι πανομοιότυπα.

2.6. Πολυδιάστατη ανάλυση διακύμανσης (MANOVA)

2.6.1. Βασικές έννοιες

Η πολυδιάστατη ανάλυση διακύμανσης με απλά λόγια, μπορεί να οριστεί ως μια ανάλυση διακύμανσης (ANOVA), η οποία περιλαμβάνει περισσότερες από μια εξαρτημένες μεταβλητές. Αντίστοιχα, μπορούμε να πούμε ότι αποτελεί μια πολυμεταβλητή μέθοδο, η οποία επεκτείνει τις μονομεταβλητές μεθόδους, σε περιπτώσεις που η απόκριση δεν είναι μονοδιάστατο μέγεθος, αλλά αντίθετα, διάνυσμα. Σε τέτοιου είδους περιπτώσεις, μονομεταβλητά τεστ υποθέσεων για συγκρίσεις, όπως το γνωστό t-test για μια σύγκριση ή η μονοδιάστατη ανάλυση διακύμανσης για πολλαπλές συγκρίσεις, μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη μόνο για κάθε ένα από τα y ξεχωριστά. Όμως στην περίπτωση των πολυδιάστατων μεγεθών, λόγω της ύπαρξης του διανύσματος αποκρούσεων, αναπτύχθηκαν πολυδιάστατες μέθοδοι ανάλυσης διακύμανσης. Το βασικό στοιχείο των μεθόδων αυτών είναι ότι θεωρούν ως παρατήρηση ένα διάνυσμα και όχι ένα μονοδιάστατο μέγεθος.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειώσουμε ότι γενικά, οι μέθοδοι της πολυδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης δημιουργήθηκαν από το ενδιαφέρον που υπήρχε για την ανάλυση όχι μόνο των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, αλλά για ένα πολύ ευρύτερο σύνολο δεδομένων, τα πολυμεταβλητά δεδομένα, που οι αποκρίσεις δεν προέρχονται απαραίτητως από την ίδια μεταβλητή. Παρ' όλα αυτά, εφόσον οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις μπορούν να αναλυθούν ή να θεωρηθούν ως μια ειδική περίπτωση των πολυμεταβλητών δεδομένων, η γενική θεωρία της πολυδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης μπορεί εύκολα να αποδοθεί και μέσω των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων.

Πριν όμως ασχοληθούμε με τον τρόπο που η MANOVA προσαρμόζεται και χρησιμοποιείται στις αναλύσεις των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, θα ήταν χρήσιμο να παρουσιάσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά στοιχεία της μεθόδου, στην περίπτωση της εφαρμογής ενός γενικότερου προβλήματος. Στην πολυδιάστατη ανάλυση διακύμανσης, αντίθετα με τη μονοδιάστατη περίπτωση, οι αποκρίσεις δεν είναι μετρήσεις επάνω στην ίδια μεταβλητή, αλλά είναι δυνατόν να προέρχονται από πολλαπλές εξαρτώμενες μεταβλητές. Ουσιαστικά, είναι μια «γενικευμένη» περίπτωση της μονοδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης, όπου πια τη θέση της εξαρτημένης μεταβλητής καταλαμβάνουν δύο ή και περισσότερες εξαρτημένες μεταβλητές.

Επομένως, ενώ η ANOVA χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της ύπαρξης διαφορών στους μέσους μιας μοναδικής εξαρτημένης μεταβλητής, για διάφορες κατηγορίες των ανεξάρτητων μεταβλητών, η MANOVA χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της ύπαρξης διαφορών στο διάνυσμα των μέσων των εξαρτημένων μεταβλητών για τις διάφορες κατηγορίες των ανεξάρτητων μεταβλητών. Η ύπαρξη των πολλαπλών εξαρτημένων μεταβλητών κάνει τη διεξαγωγή της πολυδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης πολύ δυσκολότερη από εκείνη της μονοδιάστατης, λόγω του γεγονότος ότι πολλαπλές εξαρτημένες μεταβλητές, συνήθως είναι εξαρτημένες η μια από την άλλη. Ως συνέπεια αυτού, τα τεστ της MANOVA δεν μπορούν πλέον να βασίζονται στα αθροίσματα τετραγώνων μεταξύ και μέσα τις ομάδες, όπως γίνεται στην ANOVA. Πιο συγκεκριμένα, τα αθροίσματα τετραγώνων θα πρέπει να αντικατασταθούν από έναν πίνακα, ο οποίος θα περιλαμβάνει τα αθροίσματα τετραγώνων για κάθε μια από τις εξαρτημένες μεταβλητές, όπως και για τα διανυσματικά γινόμενά τους. Οι ορίζουσες των πινάκων αυτών, χρησιμοποιούνται στη συνέχεια ως μέτρα για την ολική διακύμανση σε κάθε πίνακα.

Τέλος, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η αντιμετώπιση των επαναλαμβανόμενων παρατηρήσεων μέσω της μονοδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης είχε το μειονέκτημα ότι ήταν απαραίτητη η ύπαρξη και ικανοποίηση της υπόθεσης της σφαιρικότητας. Αντίθετα, αυτό που ισχύει για την πολυδιάστατη ανάλυση διακύμανσης είναι ότι μια τέτοιου είδους απαίτηση δεν υπάρχει κι έτσι δεν έχουμε περιορισμούς που να αφορούν τον πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων, παρ' όλα αυτά όμως, πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτό που απαιτείται στην MANOVA είναι η ύπαρξη ισοσταθμισμένων παρατηρήσεων, με την έννοια ότι κάθε αντικείμενο πρέπει να μετρηθεί στις ίδιες συνθήκες ή χρονικές στιγμές.

2.6.2. Το μοντέλο

Το μοντέλο πάνω στο οποίο βασίζεται η ανάλυση της πολυδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης είναι το παρακάτω:

$$\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{e}_i \quad (\text{με } i = 1, \dots, m)$$

Οι μετρήσεις που γίνονται σε κάθε ένα από το m στο πλήθος αντικείμενα, είναι p στο σύνολό τους. Επομένως, οι p μετρήσεις δεν αντιμετωπίζονται ως μονοδιάστατες μετρήσεις αλλά ως διάνυσμα της μορφής $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip})'$. Αν υπάρχουν m άτομα, έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα αυτά για να δημιουργήσουμε έναν $(m \times p)$ πίνακα. Ισχύει ότι:

- $\boldsymbol{\mu}_i = E(\mathbf{y}_i)$ αποτελεί ένα $(p \times 1)$ διάνυσμα, το οποίο αποτελείται από τις παραμέτρους μ_{ij} , πλέον θεωρηθείσες ως συνιστώσες του διανύσματος.
- Τα διανύσματα των σφαλμάτων \mathbf{e}_i είναι ανεξάρτητα και η μέση τιμή είναι ίση με 0 $E(\mathbf{e}_i) = 0$. Επιπλέον, ισχύει ότι $Cov(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{s}_{ij})$.
- Επομένως, θα έχουμε ως πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων τον $\boldsymbol{\Sigma}$ με διαστάσεις $(p \times p)$ και (j, k) στοιχείο το $Cov(e_{ij}, e_{jk}) = \mathbf{s}_{jk}$.
- $Cov(\mathbf{y}_i) = Cov(\mathbf{e}_i) = \boldsymbol{\Sigma}$ για όλα τα άτομα.

Οι τυχαίοι παράγοντες ενσωματώνονται στη δομή της συνδιακύμανσης κι έτσι όλοι οι παράγοντες πλέον θεωρούνται σταθεροί. Γενικά, τα \mathbf{y}_i θα προέρχονται από διαφορετικές ομάδες (όπως για παράδειγμα, μπορεί να υπάρχει μια δομή θεραπείας, από την οποία σε κάθε ένα αντικείμενο (άτομο) να χορηγείται διαφορετική θεραπευτική αγωγή) [βλ. Κατέρη (2003)].

2.6.3. Πολυδιάστατα τεστ

Η ανάλυση διακύμανσης βασίζεται σε μια σειρά από F τεστ, τα οποία αποτελούνται από τους λόγους των αθροισμάτων που αναφέρονται στην υπόθεσή μας προς το άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων (βλ. παραγράφους 2.5.2 και 2.5.3). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στην πολυδιάστατη ανάλυση διακύμανσης, ως μια άμεση επέκταση της μονοδιάστατης περίπτωσης, στη θέση των αθροισμάτων τετραγώνων έχουμε πίνακες. Για τους πίνακες αυτούς σημειώνουμε ότι τα διαγώνια στοιχεία τους αποτελούνται από τα αθροίσματα τετραγώνων των υποθέσεων και τα αθροίσματα τετραγώνων των σφαλμάτων που αντιστοιχούν στην μονοδιάστατη ανάλυση, χωριστά για κάθε μια από τις p ξεχωριστές μεταβλητές. Αντίστοιχα, τα μη διαγώνια στοιχεία τους αποτελούνται από τους ανάλογους cross – product όρους. Τέλος, στη θέση του λόγου των αθροισμάτων χρησιμοποιούμε το γινόμενο του «πίνακα της υπόθεσης» επί τον αντίστροφο του «πίνακα των σφαλμάτων».

Για να μπορέσουμε να καταλάβουμε τον τρόπο με τον οποίο προκύπτουν οι πίνακες αυτοί, θα αναλύσουμε αρχικά την απλή περίπτωση, αυτή δηλαδή της μεταβλητής $y \sim N(0, \mathbf{S}^2)$ που μετράται στα άτομα μέσα σε κάθε ομάδα μεγέθους n . Η μηδενική υπόθεση που θέλουμε να εξετάσουμε στην περίπτωση αυτή θα είναι η $H_0 : \mathbf{m} = \mathbf{m}_0$. Για τον έλεγχο της υπόθεσης αυτής θα προβούμε στο γνωστό t-test: $t = \frac{\bar{y} - \mathbf{m}_0}{s/\sqrt{n}}$, το οποίο μπορεί να γραφεί και ως $t^2 = (\bar{y} - \mathbf{m}_0)s^{-2}(\bar{y} - \mathbf{m}_0)n$.

Έστω ότι το \mathbf{y} είναι το διάνυσμα, το οποίο περιλαμβάνει τις p μεταβλητές, με το αντίστοιχο διάνυσμα $\boldsymbol{\mu}$, οι τιμές του οποίου δίνονται από το διάνυσμα $\boldsymbol{\mu}_0$. Αυτό μπορεί να μειωθεί σε μονοδιάστατη περίπτωση, αν διαμορφωθεί ένας γραμμικός συνδυασμός

των στοιχείων που τον αποτελούν ($\mathbf{a}^T \mathbf{y}$), που στη συνέχεια θα υποβληθεί στο t-test όπως παραθέσαμε και παραπάνω.

Αν λοιπόν το $\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu}_0$ ισχύει για όλους τους μη μηδενικούς γραμμικούς σχεδιασμούς \mathbf{a} , τότε ισχύει ότι $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$. Επομένως, για να ελέγξουμε τη δεύτερη σχέση, μπορούμε να ελέγξουμε την πρώτη. Η πρώτη από αυτές τις υποθέσεις εμφανίζεται να είναι αρκετά δύσκολο τεστ. Παρ' όλα αυτά όμως, αν καταφέρουμε να δείξουμε ότι το $\hat{\mathbf{a}}$ (με τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή) δεν οδηγεί στην απόρριψη της υπόθεσης $\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu}_0$, τότε κανένα άλλο \mathbf{a} δεν θα οδηγήσει στην απόρριψη της αρχικής μας υπόθεσης. Αυτό που θέλουμε είναι να βρεθεί το \mathbf{a} που μεγιστοποιεί την ποσότητα $t(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a}^T \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu}_0}{\sqrt{\mathbf{a}^T S_p \mathbf{a}} / \sqrt{n}}$.

Είναι εμφανές ότι το παραπάνω δεν οδηγεί σε ένα μοναδικό \mathbf{a} . Αυτή η αδυναμία αποφεύγεται μέσω του περιορισμού $\mathbf{a}^T S_p \mathbf{a} = 1$ και τη μεγιστοποίηση της ποσότητας $t(\mathbf{a})$ για την τιμή αυτή. Μέσω ενός πολλαπλασιαστή Lagrange οδηγούμαστε στην ποσότητα:

$$\blacksquare T^2 = (\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T S_p^{-1} (\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}_0) n \quad \mathbf{T}^2 - \text{στατιστικό του Hotelling}$$

Η παραπάνω ποσότητα αποτελεί γενίκευση του γνωστού μας t-test και υπό την αρχική μας υπόθεση,

$$\frac{n-p}{p(n-1)} T^2 \sim F_{p, n-p}$$

Στην περίπτωση που έχουμε στη διάθεσή μας δύο ομάδες, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με τον ανάλογο τρόπο. Δεδομένου ότι έχουμε

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$$

η λύση δίνεται από την ποσότητα $T^2 = (\bar{\mathbf{y}}_1 - \bar{\mathbf{y}}_2)^T S_p^{-1} (\bar{\mathbf{y}}_1 - \bar{\mathbf{y}}_2) \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$.

Επίσης ισχύει ότι :

- $\frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)p} T^2 \sim F_{p, n_1 + n_2 - p - 1}$
- $\mathbf{y}_1 \sim N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_p)$ $\mathbf{y}_2 \sim N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_p)$ (με τον ίδιο πίνακα συνδιακυμάνσεων). Η υπόθεση αυτή είναι αρκετά επικίνδυνη, αλλά όταν τα n_1 και n_2 είναι μεγάλα και ίσα, τότε άνισοι πίνακες συνδιακύμανσης έχουν μικρή επίδραση επάνω στο σφάλμα Τύπου Ι.

Το T^2 αποτελεί την λύση του $|T_B - IE| = 0$, όπου \mathbf{E} είναι ο πίνακας των εντός των ομάδων αθροισμάτων τετραγώνων των σφαλμάτων και το \mathbf{T}_B αποτελεί τον πίνακα των μεταξύ των ομάδων αθροισμάτων τετραγώνων της υπόθεσης.

Αυτή η γενίκευση για πολλαπλές ομάδες, έτσι ώστε ο πίνακας της υπόθεσης να έχει τάξη μεγαλύτερη της μονάδας, οδηγεί στην ύπαρξη περισσότερων ριζών και σε περισσότερα στατιστικά που προκύπτουν από διαφορετικούς συνδυασμούς των ριζών αυτών, ή των ιδιοτιμών των πινάκων.

- I_1 **Η Μεγαλύτερη ιδιοτιμή του στατιστικού του Roy** (συχνά δεν είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του $\mathbf{T}_B \mathbf{E}^{-1}$ αλλά του $\mathbf{T}(\mathbf{T} + \mathbf{E})^{-1}$).
- $\sum I_i$ **Το ίχνος των Hotelling – Lawley.**
- $\Pi(1 + I_i)^{-1}$ **Wilks's Lamda.**
- $\sum I_i / (1 + I_i)$ **Το ίχνος των Pillai – Bartlett.** [βλ. Κατέρη (2003)]

Το στατιστικό F που χρησιμοποιείται στην μονοδιάστατη ανάλυση διακύμανσης, ακολουθεί την κατανομή F, όταν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής. Δυστυχώς, τα παραπάνω στατιστικά δεν ακολουθούν τόσο απλές κατανομές (αν εξαιρέσουμε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις). Παρ' όλα αυτά, είναι δυνατόν να θέσουμε σε εφαρμογή κάποιους μετασχηματισμούς, έτσι ώστε το αποτέλεσμα που θα μας δώσουν να κατανέμεται σύμφωνα με την F κατανομή. Τα περισσότερα στατιστικά πακέτα δίνουν όλα τα παραπάνω τεστ. Η επιθυμία μας θα ήταν να επιλέξουμε το καταλληλότερο από αυτά, αυτό δηλαδή που έχει την μεγαλύτερη ισχύ.

Η σχετική ισχύς των τεστ εξαρτάται από τη φύση των αποκλίσεων από τη μηδενική υπόθεση των ίσων διανυσμάτων των μέσων. Αν η διαφορά αναφέρεται σε ένα μονοδιάστατο σύνολο, τότε το καταλληλότερο τεστ είναι εκείνο της μεγαλύτερης ιδιοτιμής του Roy. Στην περίπτωση αυτή η ισχύς μειώνεται καθώς προχωράμε στη λίστα των τεστ. Σε αντίθετη περίπτωση, η σειρά των τεστ (σύμφωνα με την ισχύ τους) φαίνεται ότι αντιστρέφεται. Παρ' όλα αυτά, φαίνεται πως η επικέντρωση του ενδιαφέροντος σε μία μόνο διάσταση, πρέπει να είναι τελείως ακραία, πριν αλλάξει τη σειρά της ισχύος των τεστ. Το ίχνος των Pillai – Bartlett παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ανθεκτικότητα απέναντι στο σφάλμα Τύπου I, το οποίο προκαλείται από ακραίες τιμές που εμφανίζονται περιστασιακά. Αν γίνει σύγκριση μεταξύ δύο μόνο ομάδων, τότε ο πίνακας \mathbf{TE}^{-1} έχει τάξη ίση με τη μονάδα. Ως συνέπεια αυτού, τα παραπάνω τεστ καταλήγουν στο ίδιο απολύτως αποτέλεσμα.

2.6.4. Έλεγχος των υποθέσεων

Η διαδικασία της πολυδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης κάνει χρήση της υπόθεσης ότι τα διανύσματα των παρατηρήσεων για κάθε άτομο προκύπτουν από πολυδιάστατες κανονικές κατανομές και ότι αυτές οι κατανομές για κάθε ομάδα (που καθορίζεται από τους παράγοντες μεταξύ των αντικειμένων) έχουν τον ίδιο πίνακα συνδιακυμάνσεων. Αυτή η υπόθεση αποτελεί τη φυσική επέκταση της υπόθεσης της ίσης διακύμανσης που κάνουμε στην μονοδιάστατη ανάλυση διακύμανσης. Αν το μέγεθος των δειγμάτων είναι σχεδόν ίσο (και υπό την προϋπόθεση ότι δεν είναι τα δείγματα μικρά), τα ποσοστά λάθους των τεστ επηρεάζονται λιγότερο αν η υπόθεση δεν είναι αληθής.

2.6.5. Πολυωνομική ανάλυση τάσης (Polynomial trend analysis)

Σε ένα πείραμα όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ονοματική δε μπορούμε να προχωρήσουμε με την ανάλυση των δεδομένων πέρα από το F-τεστ και τις συγκρίσεις των μέσων τιμών ανά δύο ή σε υποομάδες. Όταν όμως η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι αναλογική ή διαστηματική, τότε μπορούμε να προχωρήσουμε σε εξέταση του σχήματος της σχέσης μεταξύ εξαρτημένης μεταβλητής και ανεξάρτητης.

Υπάρχει μια παράδοση στη Στατιστική να προσαρμόζει κανείς πολυώνυμα σε αποκριτικές συναρτήσεις όταν δεν υπάρχει θεωρητική βάση για την αληθινή σχέση. Η υποστήριξη αυτής της πρακτικής ενισχύεται από την απλότητα τόσο στην περιγραφή της καμπύλης όσο και στη προσαρμογή του αντίστοιχου (γραμμικού) μοντέλου. Στο πλαίσιο αυτό συχνά αναφερόμαστε και ως «εξομάλυνση» των δεδομένων. Στις περισσότερες περιπτώσεις, ένα πολυώνυμο χαμηλού βαθμού (μέχρι 3^{ου}) είναι αρκετό.

- Συνήθως δε μας ενδιαφέρει η εκτίμηση της ακριβούς εξίσωσης που περιγράφει τη συναρτησιακή σχέση αλλά μόνο η σημαντικότητα ή μη της γραμμικής, τετραγωνικής, κτλ. σχέσης.
- Πρόκειται για απλή γενίκευση της μεθόδου των ορθοκανονικών αντιθέσεων και στηρίζεται στα ορθογώνια πολυώνυμα.
- Πρακτικά, αυτό που κάνει η ανάλυση τάσης είναι να συσχετίζει τις μέσες τιμές των ομάδων με τα σύνολα των συντελεστών των ορθογωνίων πολυωνύμων και να ελέγχει τη σημαντικότητα των συσχετίσεων. Αν η συσχέτιση μεταξύ των μέσων τιμών των ομάδων και ενός συγκεκριμένου συνόλου συντελεστών είναι υψηλή, τότε οι μέσες τιμές των ομάδων έχουν ένα σχήμα παρόμοιο με αυτό των συντελεστών.

2.6.5.1. Γραμμική Τάση

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε αν το μέσο προφίλ (m_1, m_2, \dots, m_p) ακολουθεί μια ευθεία γραμμή, όταν τα επίπεδα της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι (x_1, x_2, \dots, x_p) . Ας θεωρήσουμε μόνο τα τρία πρώτα μέσα επίπεδα (m_1, m_2, m_3) στις τιμές (x_1, x_2, x_3) . Τα τρία σημεία θα βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία αν έχουν ίσες διαιρεμένες διαφορές, δηλ. αν

$$\frac{m_2 - m_1}{x_2 - x_1} = \frac{m_3 - m_2}{x_3 - x_2}.$$

Σε μορφή πίνακα, η συνθήκη γραμμικής τάσης είναι

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$$

όπου $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3)^T$ και $\mathbf{H}_{1 \times 3} = (-d_1, d_1 + d_2, -d_2)$ με $d_j = (x_{j+1} - x_j)^{-1}$ ($j=1, 2$).

Στη γενικότερη περίπτωση που $p > 3$, τότε ο \mathbf{H} είναι ο παρακάτω $(p-2) \times p$ πίνακας:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -d_1 & d_1 + d_2 & -d_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 & d_3 + d_4 & -d_4 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix}.$$

Η γραμμικότητα μπορεί να ελεγχθεί με το T^2 του Hotelling με $\mathbf{z} = n^{1/2}\mathbf{H}\bar{\mathbf{y}}$ και $\mathbf{A} = (n-1)\mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{H}^T$, όπου $\bar{\mathbf{y}}$ είναι η δειγματική μέση τιμή και \mathbf{S} ο δειγματικός πίνακας συνδιακυμάνσεων με $(n-1)$ β.ε. [βλ. Κατέρη (2003)].

2.6.5.2. Τάση μεγαλύτερης τάξης

Η διαδικασία μπορεί να γενικευθεί για καμπύλες τετραγωνικές, κυβικές και πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού. Αν ορίσουμε τον τελεστή F έτσι ώστε $Fx_j = x_{j+1}$, τότε $(F-1)x_j = x_{j+1} - x_j$ και $F^2x_j = x_{j+2}$. Έτσι, οι διαιρεμένες διαφορές 1^{ης} τάξης θα είναι $(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)/(x_2 - x_1) = (F-1)\mathbf{m}_1/(F-1)x_1$.

Γενικά, θα συμβολίσουμε τις διαιρεμένες διαφορές 1^{ης} τάξης ως

$$D_{1j} = (F-1)\mathbf{m}_j/(F-1)x_j, \quad j=1, \dots, p-1.$$

Τότε οι διαιρεμένες διαφορές 2^{ης} τάξης είναι $D_{2j} = (F-1)D_{1j}/(F^2-1)x_j$.

Οι διαιρεμένες διαφορές $l^{\text{στης}}$ τάξης είναι

$$D_{lj} = (F - 1)D_{l-1,j} / (F^l - 1)x_j, \quad j=1, \dots, p-l.$$

Ουσιαστικά οι διαιρεμένες διαφορές D_{lj} είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των μ (από το m_j ως το m_{j+l}) με συντελεστές που εξαρτώνται από τα x .

Ισχύει ότι:

$$\blacksquare \quad D_{lj} = \sum_{k=j}^{j+l} h_{lk} m_k \quad \text{με} \quad h_{lk} = \prod_{\substack{s=j \\ s \neq k}}^{j+l} (x_k - x_s)^{-1}.$$

■ Αν $m_j = f_l(x_j)$, όπου $f_l(g)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ l , τότε $D_{sj} = 0$ για $s > l$.

Έτσι, ο πίνακας \mathbf{H} για τον έλεγχο σημαντικότητας της πολυωνυμικής τάσης $l^{\text{στης}}$ τάξης είναι ο $(p-l) \times p$ πίνακας με στοιχεία $H_{jk} = h_{lk}$ για $k=j, \dots, j+l$ και $H_{jk} = 0$ διαφορετικά [βλ. Κατέρη (2003)]

2.7. Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα των Σχεδιασμών με Επαναλαμβανόμενες Μετρήσεις

Ένα δυνατό σημείο των σχεδιασμών στους οποίους λαμβάνονται επαναλαμβανόμενες μετρήσεις από κάθε υποκείμενο, είναι ότι αυτός είναι ο μοναδικός τύπος σχεδιασμού, που καθίσταται δυνατόν να ληφθούν παρατηρήσεις που αφορούν ατομικά υποδείγματα αλλαγής (*individual patterns of change*). Επίσης, αυτού του τύπου ο σχεδιασμός, προσφέρει μεγάλη οικονομία στον αριθμό των ατόμων τα οποία εξετάζονται. Για παράδειγμα, όταν μελετάται η επίδραση μιας αγωγής με την πάροδο του χρόνου είναι συνήθως επιθυμητό να παρατηρηθούν τα ίδια υποκείμενα επανειλημμένα, από το να παρατηρηθούν διαφορετικά αντικείμενα σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή. Ένα επιπλέον πλεονέκτημα είναι ότι τα υποκείμενα μπορούν να λειτουργήσουν ως μονάδες ελέγχου για τον ίδιο τους τον εαυτό, με την έννοια ότι η μεταβλητή απόκρισης μπορεί να μετρηθεί και κάτω από τις πειραματικές συνθήκες αλλά και κάτω από τις

συνθήκες ελέγχου, για κάθε υποκείμενο. Καθώς οι πηγές μεταβλητότητας ανάμεσα στα υποκείμενα μπορούν να μην περιληφθούν στο πειραματικό σφάλμα, οι σχεδιασμοί επαναλαμβανόμενων μετρήσεων συχνά προσφέρουν πιο αποτελεσματικούς εκτιμητές των σχετικών παραμέτρων απ' ό,τι οι συγχρονικοί (cross – sectional) σχεδιασμοί, που έχουν τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων αλλά και χρησιμοποιούν το ίδιο υπόδειγμα. Ένα τελευταίο πλεονέκτημα είναι ότι τα δεδομένα μπορούν να συλλεχθούν με μεγαλύτερη αξιοπιστία σε μία μελέτη όπου παρακολουθείται επανειλημμένως η πορεία των ίδιων αντικειμένων, απ' ό,τι σε μία εγκάρσια μελέτη.

Δύο είναι τα βασικά μειονεκτήματα της ανάλυσης των δεδομένων από μελέτες με επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Πρώτον, η ανάλυση περιπλέκεται από την εξάρτηση ανάμεσα στις επαναλαμβανόμενες παρατηρήσεις, οι οποίες λαμβάνονται από την ίδια πειραματική μονάδα. Δεύτερον, συχνά ο ερευνητής δεν μπορεί να ελέγξει τις συνθήκες συλλογής δεδομένων, έτσι ώστε τα δεδομένα να είναι μη ισορροπημένα ή μερικώς ημιτελή. Για παράδειγμα, σε μία έρευνα επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, η απόκριση ενός αντικειμένου μπορεί να λείπει σε μία ή περισσότερες χρονικές στιγμές λόγω παραγόντων που δεν σχετίζονται με την έκβαση που μας ενδιαφέρει. Σε τοξικολογικές ή γενετικές μελέτες, το μέγεθος των λίτρων ή των οικογενειών, είναι τυχαίο αντί σταθερό. Ως εκ τούτου, ο αριθμός των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων δεν είναι σταθερός μέσα στις πειραματικές μονάδες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Γραμμικά μοντέλα μεικτών επιδράσεων ως μοντέλα επαναλαμβανόμενων μετρήσεων

3.1. Εισαγωγή

Πολλά από τα μοντέλα που συχνά συναντούμε στην στατιστική επιστήμη μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικά μοντέλα, τα οποία περιέχουν ταυτόχρονα και όρους σταθερών αλλά και όρους τυχαίων επιδράσεων. Ως *σταθερές επιδράσεις (fixed effects)* ορίζονται οι παράμετροι που αναφέρονται σε ολόκληρο τον πληθυσμό ή σε συγκεκριμένα επίπεδα των παραγόντων του πειράματος. Ως *τυχαίες επιδράσεις (random effects)* ορίζονται οι παράμετροι που είναι συσχετισμένες με τις ξεχωριστές πειραματικές μονάδες που επιλέγονται τυχαία από κάποιον πληθυσμό. Ένα μοντέλο που περιέχει και σταθερές αλλά και τυχαίες επιδράσεις ονομάζεται *μοντέλο μεικτών επιδράσεων (mixed-effects model)* ή αλλιώς *μεικτό μοντέλο (mixed model)*.

Η ανάλυση των μεικτών μοντέλων αποτελεί μια σχετικά πρόσφατα (από το 1959) ανεπτυγμένη μορφή στατιστικής ανάλυσης, βασισμένης σε γραμμικά μοντέλα παλινδρόμησης. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζεται σε έρευνες, που περιλαμβάνουν παράγοντες, των οποίων τα επίπεδα μπορούν να ελεγχθούν από τον ερευνητή (σταθερές επιδράσεις) αλλά και παράγοντες, των οποίων τα επίπεδα ο ερευνητής δεν έχει τη δυνατότητα να επηρεάσει (τυχαίες επιδράσεις) [βλ. Scheffé (1959)].

Ο όρος *μεικτό μοντέλο* αποδίδεται στον Eisenhart (1947), ο οποίος κωδικοποίησε πολλές από τις γνώσεις του πάνω στα γραμμικά μοντέλα σε τρεις επιμέρους μορφές μοντέλων. Το **Μοντέλο I** (σταθερών επιδράσεων) και το **Μοντέλο II** (τυχαίων επιδράσεων) αναλύθηκαν εκτενώς την περίοδο εκείνη. Το **Μεικτό Μοντέλο**, το οποίο αποτέλεσε το συνδυασμό (μίξη) των Μοντέλων I και II, δεν έλαβε εκτενή αναφορά, παρ' όλο που ο Eisenhart το είχε ήδη διατυπώσει.

Τα τρία αυτά μοντέλα (I, II και μεικτό) σε γενικές γραμμές προσέφεραν το πλαίσιο, μέσα στο οποίο αναπτύχθηκαν τα περισσότερα εφαρμοσμένα γραμμικά μοντέλα. Στις ημέρες μας, έχει καθιερωθεί πια να αναφερόμαστε στο Μοντέλο I ως μοντέλο σταθερών επιδράσεων και στο Μοντέλο II ως μοντέλο τυχαίων επιδράσεων. Η γενετική ήταν ο πρώτος επιστημονικός τομέας, στον οποίο βασίστηκαν τα πρώτα βήματα για την διαμόρφωση και εφαρμογή της ανάλυσης των μεικτών γραμμικών μοντέλων. Ειδικά στην αναπαραγωγή των ζώων, όπου η πρόβλεψη και η εκτίμηση των μη παρατηρούμενων γενετικών παραμέτρων αποτελεί ένα πολύ σημαντικό ζήτημα, τα μεικτά μοντέλα και ιδιαίτερα τα μεικτά γραμμικά μοντέλα, βρήκαν το κατάλληλο έδαφος για την ανάπτυξή τους. Αυτό συνέβη κυρίως για το λόγο ότι τα δεδομένα που μας δίνονται από την γενετική των ζώων δεν είναι ισορροπημένα, επομένως, οι μέθοδοι που αφορούσαν την ανάλυση των ισορροπημένων δεδομένων (όπως είναι η ανάλυση διακύμανσης) δεν ήταν κατάλληλες αλλά ούτε και εφαρμόσιμες. Η βασική πρόκληση των γενετικών δεδομένων και ιδίως των δεδομένων που αφορούσαν την αναπαραγωγή των ζώων, δεν ήταν τόσο η δημιουργία ενός μοντέλου που θα ήταν κατάλληλο για τη φύση τέτοιων δεδομένων, όσο η εκτίμηση της διακύμανσης των συνιστωσών που ήταν συνδεδεμένες και προέκυπταν στα μοντέλα αυτά. Επιστήμονες που ασχολούνταν με την αναπαραγωγή των ζώων και ιδιαίτερα ο C.R. Henderson, ανέπτυξαν τα πρώτα αποτελέσματα των μεικτών γραμμικών μοντέλων αποτελέσματα τα οποία αποδείχθηκαν ότι ήταν η βάση για όλες σχεδόν τις εφαρμογές της ανάλυσης των γραμμικών μεικτών μοντέλων.

Μεικτά μοντέλα συναντούμε όταν υπάρχουν περισσότερες από μια παράμετροι στην κατανομή που αντιπροσωπεύει τον όρο του σφάλματος. Χρησιμοποιούνται αρχικά για να περιγράψουν τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ μιας μεταβλητής απόκρισης και μερικών συμμεταβλητών στα δεδομένα μας, τα οποία είναι χωρισμένα σε ομάδες σύμφωνα με έναν ή περισσότερους παράγοντες ταξινόμησης.

Τρεις είναι οι κατηγορίες των μεικτών μοντέλων που μπορεί να συναντήσουμε [βλ. Milliken and Johnson (2002)]:

- Πρώτος τύπος μεικτών μοντέλων: Υπάρχει μια δομή σταθερών επιδράσεων για τις αγωγές και κάποιου είδους ομαδοποίηση στη δομή του σχεδιασμού, η οποία απαιτεί

ένα μοντέλο που να περιέχει περισσότερες από μία τυχαίες επιδράσεις κι επομένως περισσότερες από μία συνιστώσες για τη διακύμανση.

- Δεύτερος τύπος μεικτών μοντέλων: Η δομή των αγωγών αποτελείται από τυχαίες και σταθερές επιδράσεις.
- Τρίτος τύπος μεικτών μοντέλων: Η δομή των αγωγών αποτελείται από σταθερές επιδράσεις και υπάρχουν άνισες διακυμάνσεις κι επομένως, υπάρχουν περισσότερες από μία συνιστώσες διακύμανσης στο μοντέλο.

Αν συσχετίσουμε κοινές τυχαίες επιδράσεις σε παρατηρήσεις που μοιράζονται το ίδιο επίπεδο ενός παράγοντα ταξινόμησης, τα μοντέλα των μεικτών επιδράσεων αντιπροσωπεύουν τη συνδιακύμανση που εμφανίζεται μέσω της ομαδοποίησης των δεδομένων.

Μια βασική υπόθεση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι δεν υπάρχει καμία αλληλεπίδραση μεταξύ των συνιστωσών της δομής των αγωγών και των συνιστωσών που ανήκουν στην δομή του σχεδιασμού. Μια επιπλέον υπόθεση θα ήταν ότι οι κλίσεις των γραμμών παλινδρόμησης δεν επηρεάζονται από τις συνιστώσες της δομής σχεδιασμού. Οι κλίσεις δεν θα εκφράζονται ως συναρτήσεις των ομάδων. Επομένως, οι κλίσεις που αντιστοιχούν στις συμμεταβλητές θεωρείται ότι εξαρτώνται μονάχα από τα επίπεδα των διαφόρων παραγόντων στη δομή των αγωγών και όχι από τις ομάδες ή τα μεγέθη (όποια κι αν είναι αυτά) των πειραματικών μονάδων ή από τον οποιονδήποτε παράγοντα που μπορεί να χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή της δομής του σχεδιασμού.

3.1.1. Ένα αρχικό παράδειγμα

Για να γίνουν όλα τα παραπάνω περισσότερο κατανοητά, θα παραθέσουμε ένα απλό παράδειγμα όσον αφορά στις τυχαίες επιδράσεις. Έστω λοιπόν ότι έχουμε στη διάθεσή μας δεδομένα που αναφέρονται σε έξι σιδηροδρομικές γραμμές, οι οποίες επιλέχθηκαν τυχαία και ελέγχθηκαν τρεις φορές. Κάθε φορά οι μετρήσεις αφορούσαν το χρόνο που χρειαζόταν ένα υπερηχητικό κύμα να «ταξιδέψει» κατά μήκος της γραμμής. Η μόνη πειραματική παράμετρος που αλλάζει κατά την εκτέλεση του συγκεκριμένου πειράματος είναι οι γραμμές. Λέμε ότι αυτές οι παρατηρήσεις είναι τοποθετημένες

σύμφωνα με μια μονοδιάστατη ταξινόμηση, κι αυτό γιατί ταξινομούνται σύμφωνα με ένα μονάχα χαρακτηριστικό, τη γραμμή πάνω στην οποία έγινε η κάθε μέτρηση.

Οι ποσότητες που ήθελαν να εκτιμήσουν οι επιστήμονες ήταν ο χρόνος που απαιτείτο για τη διαδρομή σε μία «τυπική» γραμμή, η μεταξύ των γραμμών μεταβλητότητα και η εντός των γραμμών μεταβλητότητα. Όπως ήταν αναμενόμενο, τέτοιου είδους δεδομένα είναι αρκετά εύκολα στο χειρισμό τους. Κάθε γραμμή θα αντιστοιχεί σε μια παρατήρηση για την οποία καταγράφονται η γραμμή και ο χρόνος ταξιδιού. Δεδομένα που προέρχονται από μονοδιάστατη ταξινόμηση μπορούν να αναλυθούν είτε μέσω μοντέλων σταθερών επιδράσεων, είτε μέσω μοντέλων τυχαίων επιδράσεων. Η διαφοροποίηση μεταξύ των δύο αυτών μοντέλων γίνεται με το αν θέλουμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τα συγκεκριμένα επίπεδα του παράγοντα ταξινόμησης, που χρησιμοποιήθηκε στο πείραμα ή αν θέλουμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τον πληθυσμό από τον οποίο αυτά τα επίπεδα επιλέχθηκαν. Στη δεύτερη περίπτωση, τα επίπεδα συνήθως αναφέρονται σε διαφορετικά αντικείμενα ή διαφορετικά γραφήματα ή σε διαφορετικές πειραματικές μονάδες.

3.1.2. Μοντέλα ταξινόμησης κατά ένα τρόπο (one-way classification) – Μοντέλα επαναλαμβανόμενων μετρήσεων χωρίς άλλο παράγοντα

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, τα μοντέλα αυτά αναφέρονται σε δεδομένα που η μοναδική πειραματική παράμετρος, η οποία αλλάζει από παρατήρηση σε παρατήρηση, είναι ένα μοναδικό χαρακτηριστικό. Όπως είναι γνωστό, στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις, κάθε αντικείμενο μετράται περισσότερο από μία φορές στο πέρασμα του χρόνου. Θεωρούμε τα δεδομένα ότι προέρχονται από μονοδιάστατη ταξινόμηση, αν αυτά κατατάσσονται σύμφωνα μονάχα με ένα χαρακτηριστικό.

Αυτό που συνήθως μας ενδιαφέρει είναι η εκτίμηση της μέσης απόκρισης για ένα άτομο και η εντός των αντικειμένων αλλά και η μεταξύ των αντικειμένων μεταβλητότητα. Αρχικά, θα παρουσιάσουμε το μοντέλο αγνοώντας τη δομή της ομαδοποίησης των δεδομένων και θα θεωρήσουμε το απλό μοντέλο, που ορίζουμε ως εξής [βλ. Pinheiro and Bates (2000)]:

$$y_{ij} = \mathbf{b} + e_{ij}$$

όπου:

- $i = 1, \dots, m$ εκφράζει το πλήθος των ατόμων ή αντικειμένων.
- $j = 1, \dots, n_i$ αποτελεί την παρατήρηση στο i -οστό άτομο ή αντικείμενο.
- y_{ij} αντιπροσωπεύει την παρατηρούμενη ποσότητα για την παρατήρηση j στο άτομο ή αντικείμενο i .
- b εκπροσωπεί τη μέση απόκριση στον πληθυσμό και
- e_{ij} είναι τα ανεξάρτητα σφάλματα, για τα οποία ισχύει ότι $e_{ij} \sim N(0, S_e^2)$.

Το βασικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε όταν προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε δεδομένα χωρίς να λάβουμε υπόψη τις επιδράσεις που οφείλονται στην ομαδοποίηση, είναι το γεγονός ότι αυξάνεται η μεταβλητότητα που υπάρχει μέσα στα αντικείμενα. Το βήμα που πρέπει να κάνουμε είναι να εφαρμόσουμε ένα μοντέλο, όπου ο μέσος κάθε αντικείμενου (άτομου) να εκπροσωπείται από μια ξεχωριστή παράμετρο. Το μοντέλο αυτό ονομάζεται μοντέλο σταθερών επιδράσεων και στην περίπτωση της μονοδιάστατης ταξινόμησης, εκφράζεται όπως παρακάτω:

$$y_{ij} = b_i + e_{ij}$$

Η μόνη διαφορά με τους παραπάνω συμβολισμούς είναι πια ότι το b_i αποτελεί τη μέση απόκριση του ατόμου i . Παρ' όλο που το παραπάνω μοντέλο ορίζει τις αποκρίσεις κάθε αντικείμενου, δεν αποτελεί μια χρήσιμη έκφραση, αν αυτό που θέλουμε είναι να αναφερθούμε στον πληθυσμό από τον οποίο προήλθαν τα δείγματα. Με άλλα λόγια, το βασικό πρόβλημα είναι ότι το μοντέλο αναφέρεται μονάχα στο συγκεκριμένο δείγμα. Επιπλέον, δεν μπορεί να μας παράσχει εκτίμηση για την μεταβλητότητα που υπάρχει μεταξύ των αντικειμένων. Τέλος, ο αριθμός των παραμέτρων αυξάνει γραμμικά σε σχέση με τον αριθμό των αντικειμένων.

Όλα τα παραπάνω προβλήματα αντιμετωπίζονται αν εφαρμοστεί ένα μοντέλο τυχαίων επιδράσεων, όπου οι επιδράσεις που οφείλονται στα άτομα, αντιμετωπίζονται ως τυχαίες, γύρω από τον πληθυσμιακό μέσο. Επομένως, το παραπάνω μοντέλο των σταθερών επιδράσεων, μεταμορφώνεται και επαναπροσδιορίζονται οι παράμετροί του, ως εξής:

$$y_{ij} = \bar{b} + (b_i - \bar{b}) + e_{ij}$$

όπου το $\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^m b_i}{m}$ αποτελεί την μέση απόκριση για τα άτομα που λαμβάνουν μέρος στο πείραμα.

Για την κατασκευή του μοντέλου τυχαίων επιδράσεων θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το \bar{b} με το μέσο του πληθυσμού των αντικειμένων (ατόμων) και τις αποκλίσεις $(b_i - \bar{b})$ με κάποιες τυχαίες μεταβλητές, των οποίων θα πρέπει να εκτιμήσουμε επίσης και την κατανομή. Το μοντέλο των τυχαίων επιδράσεων στην περίπτωση της μονοδιάστατης ταξινόμησης, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$y_{ij} = b + b_i + e_{ij}$$

όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση, ισχύει ότι:

- Το b αποτελεί τη μέση απόκριση σε όλο τον πληθυσμό απ' όπου συλλέγονται τα δείγματά μας.
- Το b_i είναι τυχαία μεταβλητή, που εκφράζει την απόκλιση από τον πληθυσμιακό μέσο όσον αφορά στο άτομο i .
- Το e_{ij} αποτελεί τυχαία μεταβλητή, η οποία εκφράζει την απόκλιση από την j -οστή παρατήρηση του i -οστού αντικειμένου από τη μέση απόκριση που αντιστοιχεί στο αντικείμενο αυτό.
- Οι μεταβλητές b_i είναι ανεξάρτητες που ακολουθούν την κανονική κατανομή, έχουν μέση τιμή μηδέν και σταθερή διακύμανση.
- Έχουμε ότι $Var(b_i) = s_b^2$ και $Var(e_{ij}) = s_e^2$, τα οποία εκφράζουν την μεταξύ των αντικειμένων και την εντός των αντικειμένων μεταβλητότητα αντίστοιχα. Επιπλέον, θα έχουμε ότι: $b_i \sim N(0, s_b^2)$ και $e_{ij} \sim N(0, s_e^2)$.

Το παραπάνω μοντέλο, μπορεί να τροποποιηθεί αν δεν προσαρμόζεται ικανοποιητικά στα δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας. Τα b_i αποτελούν τους όρους των τυχαίων επιδράσεων και ονομάζονται έτσι λόγω του ότι είναι συνδεδεμένα με τις συγκεκριμένες πειραματικές μονάδες που έχουν επιλεγεί τυχαία από ολόκληρο τον πληθυσμό και αποδίδουν την απόκλιση από το συνολικό μέσο. Η επίδραση της επιλογής του i αντικειμένου είναι μια μετατόπιση στη μέση απόκριση από το b στο $b + b_i$. Οι παρατηρήσεις που παίρνουμε από το ίδιο αντικείμενο είναι συσχετισμένες διότι όλες μοιράζονται την ίδια τυχαία επίδραση, δηλαδή το b_i . Η συνδιακύμανση μεταξύ των παρατηρήσεων που γίνονται απάνω στο ίδιο αντικείμενο, είναι ίση με το S_b^2 και η συσχέτιση είναι ίση με $\frac{S_b^2}{(S_b^2 + S_e^2)}$.

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι οι παράμετροι του στατιστικού μοντέλου είναι οι b , S_b^2 και S_e^2 και θα παραμείνουν τρεις στον αριθμό, ανεξάρτητα από τον αριθμό των ατόμων που θα λάβουν μέρος στο πείραμα. Παρόλο που οι τυχαίες επιδράσεις b_i συμπεριφέρονται σαν παράμετροι, αποτελούν στην ουσία ένα ακόμα επίπεδο διακύμανσης μέσα στο μοντέλο, οπότε δεν τις εκτιμούμε ως παραμέτρους. Παρ' όλα αυτά όμως, μπορούμε να έχουμε στη διάθεσή μας εκτιμήσεις των τιμών αυτών των τυχαίων μεταβλητών, βασιζόμενοι στα δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας.

3.1.3. Σχεδιασμοί τυχαιοποιημένων μπλοκ

Στην προηγούμενη ανάλυση, οι παρατηρήσεις μας ταξινομούνταν σύμφωνα με ένα μόνο χαρακτηριστικό. Υπάρχουν όμως πειράματα, στα οποία έχουμε περισσότερους από έναν παράγοντες ταξινόμησης για κάθε παρατήρηση. Στους σχεδιασμούς τυχαιοποιημένων μπλοκ έχουμε δύο παράγοντες ομαδοποίησης: Έναν πειραματικό παράγοντα, για τον οποίο χρησιμοποιούμε σταθερές επιδράσεις και έναν παράγοντα ομαδοποίησης, για τον οποίο χρησιμοποιούμε τυχαίες επιδράσεις. Ένα μοντέλο με σταθερές επιδράσεις b_j για τον πειραματικό παράγοντα και τυχαίες επιδράσεις b_i για τον παράγοντα ομαδοποίησης, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$y_{ij} = b_j + b_i + e_{ij}$$

Όπου $i=1, \dots, m$, εκφράζει το άτομο και $j=1, \dots, s$ εκφράζει τα επίπεδα του πειραματικού παράγοντα. Οι τιμές που παίρνει το j μας επιτρέπει να κάνουμε το διαχωρισμό μεταξύ των διαφορετικών επιπέδων του παράγοντα. Βέβαια, είναι γεγονός ότι σε αυτό το μοντέλο, ο αριθμός των παρατηρήσεων σε κάθε αντικείμενο (άτομο) είναι ίδιος με τα επίπεδα του παράγοντα, κάτι που όμως δεν είναι κοινός τύπος για όλα τα μοντέλα που συναντάμε. Τέλος, ισχύει όπως και παραπάνω ότι: $b_i \sim N(0, S_b^2)$, $e_{ij} \sim N(0, S_e^2)$.

Ισοδύναμα, μπορούμε να εκφράσουμε το παραπάνω μοντέλο και με μορφή πινάκων, ως εξής:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i b_i + e_i$$

με $i=1, \dots, m$, $b_i \sim N(0, S_b^2)$ και $\mathbf{e}_i \sim N(\mathbf{0}, S_e^2 \mathbf{I})$.

Πιο συγκεκριμένα, θα έχουμε τους πίνακες \mathbf{y}_i , \mathbf{Z}_i και \mathbf{e}_i διαστάσεων $(s \times 1)$ και τον πίνακα \mathbf{X}_i διαστάσεων $(s \times s)$:

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ y_{i3} \\ \mathbf{M} \\ y_{is} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \mathbf{M} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} e_{i1} \\ e_{i2} \\ e_{i3} \\ \mathbf{M} \\ e_{is} \end{bmatrix}$$

Οι διαστάσεις των παραπάνω πινάκων ισχύουν για $i=1, \dots, m$. Για όλα τα άτομα i οι πίνακες \mathbf{y} και \mathbf{e} θα έχουν συνολικά $(m \times s)$ στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή, συχνά λέγεται ότι ο πίνακας \mathbf{X}_i έχει μορφή «μέσων τιμών των κελιών», καθώς η j -οστή συνιστώσα του $\boldsymbol{\beta}$ αντιπροσωπεύει τη μέση απόκριση για το j -οστό επίπεδο του πειραματικού παράγοντα, αν ελέγξουμε όλον τον πληθυσμό. Εύκολα μπορούμε να ορίσουμε τα β_j , όμως η ερμηνεία δεν είναι πάντα χρήσιμη αν αυτό που μας ενδιαφέρει είναι

οι διαφορές μεταξύ των επιπέδων του πειραματικού παράγοντα. Για να ελέγξουμε τις διαφορές αυτές, συνήθως χρησιμοποιούμε τους πίνακες \mathbf{X}_i . Συνήθως η πρώτη στήλη των πινάκων αυτών αντιπροσωπεύει τον ολικό μέσο του επιπέδου στο οποίο αναφερόμαστε και οι υπόλοιπες αναφέρονται στις αλλαγές μεταξύ των επιπέδων του παράγοντα και ονομάζονται «αντιθέσεις». Σε μερικές περιπτώσεις έχει περισσότερη σημασία να συγκρίνουμε τα υπόλοιπα επίπεδα του παράγοντα με ένα σταθερό επίπεδο. Σε μια τέτοια περίπτωση, οι αντιθέσεις ονομάζονται αγωγές και αντιπροσωπεύουν την αλλαγή από το σταθερό επίπεδο του παράγοντα σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα επίπεδα.

3.1.4. Επαναλαμβανόμενες μετρήσεις και όροι τυχαίων αλληλεπιδράσεων

Στις προηγούμενες παραγράφους, είχαμε μια παρατήρηση από κάθε άτομο για κάθε επίπεδο του πειραματικού παράγοντα. Επομένως, ο σχεδιασμός θεωρείται μη επαναλαμβανόμενος καθώς μονάχα μία παρατήρηση δίνεται για κάθε συνδυασμό των πειραματικών συνθηκών. Σε άλλα πειράματα είναι δυνατόν να έχουμε στη διάθεσή μας επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Οι επαναλήψεις μας δίνουν τη δυνατότητα να έχουμε πρόσβαση στην παρουσία της αλληλεπίδρασης μεταξύ του αντικειμένου και του πειραματικού παράγοντα.

Ας θεωρήσουμε αρχικά ένα μοντέλο, που δεν περιέχει όρους αλληλεπιδράσεων, αλλά με επαναλήψεις στα διάφορα επίπεδα του πειραματικού παράγοντα. Το μοντέλο, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$y_{ijk} = \mathbf{b}_j + b_i + e_{ijk}$$

όπου:

- ⊕ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, s$ και $k = 1, \dots, n$
- ⊕ $b_i \sim N(0, \mathbf{s}_b^2)$ και $e_{ijk} \sim N(0, \mathbf{s}_e^2)$

Όπως παρατηρούμε η μορφή του παραπάνω μοντέλου είναι παρόμοια με εκείνη που παραθέσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, με τη μόνη διαφορά την ύπαρξη του

δείκτη k , ο οποίος εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων που γίνονται στα διάφορα επίπεδα του παράγοντα.

Στα πειράματα, τα άτομα (αντικείμενα) που λαμβάνουν μέρος στην έρευνα αποτελούν ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό που μας ενδιαφέρει. Κάθε όρος αλληλεπίδρασης, που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση των διαφορών μεταξύ των αντικειμένων, που αλλάζουν από το ένα επίπεδο του παράγοντα στο άλλο, εκφράζονται ως τυχαίες επιδράσεις. Ένα μοντέλο που θα περιέχει όρους τυχαίων αλληλεπιδράσεων, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$y_{ijk} = \mathbf{b}_j + b_i + b_{ij} + e_{ijk}$$

όπου:

- $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, s$ και $k = 1, \dots, n$
- $b_i \sim N(0, \mathbf{S}_1^2)$, $b_{ij} \sim N(0, \mathbf{S}_2^2)$ και $e_{ijk} \sim N(0, \mathbf{S}_e^2)$

Το παραπάνω μοντέλο παρουσιάζει τυχαίες επιδράσεις σε δύο επίπεδα. Πρώτο επίπεδο, στο οποίο εκφράζονται οι επιδράσεις ως b_i για το αντικείμενο και για το δεύτερο επίπεδο εκφράζονται μέσω του b_{ij} οι επιδράσεις για τα επίπεδα του παράγοντα μέσα στα αντικείμενα. Η βασική φιλοσοφία του μοντέλου μπορεί να ισχύσει και για μη ισορροπημένα δεδομένα. Και για τις δύο περιπτώσεις, και για ισορροπημένα και για μη ισορροπημένα δεδομένα, πρέπει να έχουμε στη διάθεσή μας ικανοποιητικές πληροφορίες για τη φύση των δεδομένων μας, έτσι ώστε να είναι δυνατή η εκτίμηση των συνιστωσών της διακύμανσης και των παραμέτρων των σταθερών επιδράσεων.

3.1.5. Μια γενικότερη προσέγγιση στο μοντέλο τυχαίων αλληλεπιδράσεων

Το μοντέλο $y_{ijk} = \mathbf{b}_j + b_i + b_{ij} + e_{ijk}$ κάνει την υπόθεση ότι όλοι οι τυχαίοι όροι αλληλεπίδρασης έχουν την ίδια διακύμανση. Επιπλέον, έχουμε κάνει την υπόθεση ότι αυτές οι αλληλεπιδράσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, ακόμα και μέσα στο ίδιο αντικείμενο. Μια ακόμα πιο γενική προσέγγιση του παραπάνω μοντέλου δίνει τη δυνατότητα στις τυχαίες επιδράσεις για κάθε άτομο να εκφράζονται μέσω από ένα

διάνυσμα και μας δίνει την δυνατότητα να εκτιμήσουμε τον πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων για το διάνυσμα αυτό από όλους του θετικά ορισμένους πίνακες. Το μοντέλο, με τη χρήση των πινάκων, θα είναι η εξής:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \mathbf{e}_i$$

όπου:

$$\star i = 1, \dots, m$$

$$\star \mathbf{b}_i \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}), \mathbf{e}_i \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{S}_e^2 \mathbf{I})$$

Στο παραπάνω μοντέλο, με τον συμβολισμό \mathbf{y}_i εκφράζουμε το διάνυσμα αποκρίσεων του i -οστού αντικειμένου, το $\boldsymbol{\beta}$ αποτελεί το διάνυσμα των σταθερών επιδράσεων των παραμέτρων του πληθυσμού, με το \mathbf{b}_i αποτελεί το διάνυσμα των τυχαίων επιδράσεων για το i -οστό αντικείμενο. Επιπλέον, ο πίνακας των σταθερών επιδράσεων για το αντικείμενο i δηλώνεται ως \mathbf{X}_i και ο θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας είναι ο $\boldsymbol{\Psi}$. Τέλος, να σημειώσουμε και πάλι ότι ο πίνακας \mathbf{X}_i αποτελείται από μια στήλη από μονάδες και στις υπόλοιπες στήλες βρίσκονται οι αντιθέσεις.

3.1.6. Μοντέλο Ανάλυσης Συνδιακύμανσης

Η ανάλυση συνδιακύμανσης, γενικά, εφαρμόζεται σε μοντέλα των οποίων η μεταβλητή απόκρισης είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή. Αρχικά, θα θεωρήσουμε την περίπτωση ενός μοντέλου ανάλυσης συνδιακύμανσης (*ANCOVA model*), το οποίο θα περιέχει και όρους τυχαίων επιδράσεων. Η έκφρασή του θα έχει ως εξής:

$$y_{ij} = \mathbf{b} + b_i + e_{ij}$$

όπου:

$$\blacksquare i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n_i$$

$$\blacksquare b_i \sim N(0, \mathbf{S}_b^2) \text{ και } e_{ij} \sim N(0, \mathbf{S}_e^2)$$

Ένα γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης, που συνδέει την συνεχή μεταβλητή απόκρισης με μερικές συμμεταβλητές, θα είναι το:

$$y_i = b_1 + b_2 x_i + e_i$$

με $i = 1, \dots, n$ και $e_i \sim N(0, \mathbf{S}_e^2)$

Στο παραπάνω μοντέλο, τα y_i αποτελούν τις ανεξάρτητες μεταβλητές και τα x_i τις συμμεταβλητές του μοντέλου. Ένα μοντέλο ANCOVA συνδέει μια συνεχή μεταβλητή απόκρισης και με τις συνεχείς συμμεταβλητές αλλά και με τον παράγοντα ομαδοποίησης. Ένα μοντέλο που συνδυάζει μια ανάλυση διακύμανσης για τυχαίες επιδράσεις με τη γραμμική παλινδρόμηση μπορεί να γραφεί όπως παρακάτω:

$$y_{ij} = b_1 + b_i + b_2 x_{ij} + e_{ij}$$

όπου θα έχουμε:

✘ $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n_i$

✘ $b_i \sim N(0, \mathbf{S}_b^2)$ και $e_{ij} \sim N(0, \mathbf{S}_e^2)$

✘ Το y_{ij} αποτελεί την j -οστή παρατήρηση στο i -οστό αντικείμενο

✘ Το x_{ij} αποτελεί την τιμή που παίρνει η εκάστοτε συμμεταβλητή

✘ Επιπλέον, έχουμε χρησιμοποιήσει έναν τυχαίο όρο επιδράσεων για τη σταθερά

Μια πολύ συνηθισμένη εφαρμογή των μοντέλων ανάλυσης συνδιακύμανσης τυχαίων επιδράσεων βρίσκουμε στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις και στα διαμήκη δεδομένα, όταν παρατηρούμε τα αποτελέσματα σε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις που έχουν γίνει επάνω σε κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό διαφορετικών υποκειμένων, κατά την πάροδο του χρόνου.

3.2. Το γενικό γραμμικό μεικτό μοντέλο

3.2.1. Εισαγωγή

Τα γραμμικά μοντέλα έχουν συγκεντρώσει το ενδιαφέρον των επιστημόνων και σε θεωρητικό αλλά και σε πρακτικό επίπεδο. Από θεωρητικής άποψης, είναι ιδιαίτερα εύχρηστη η μαθηματική τους φύση και όσον αφορά την πρακτική τους εφαρμογή, σε πολλές περιπτώσεις έχουν αποδειχθεί ένα πολύτιμο εργαλείο. Οι τεχνικές που εφαρμόζονται στην ανάλυση γραμμικής παλινδρόμησης βρίσκουν εφαρμογή σε σχεδόν όλους τους επιστημονικούς κλάδους, συμπεριλαμβανομένων των κοινωνικών επιστημών, της φυσικής και της βιολογίας, την οικονομία και την τεχνολογία αλλά και τις ανθρωπιστικές επιστήμες.

Οι περισσότερες περιπτώσεις των στατιστικών αναλύσεων βασίζονται σε ένα γραμμικό μοντέλο. Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τις στατιστικές αναλύσεις όπως παρακάτω:

- Απλή και πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση
- Ανάλυση διακύμανσης (ANOVA)
- Ανάλυση συνδιακύμανσης (ANCOVA)
- Μεικτά μοντέλα ανάλυσης διακύμανσης

Οι πρώτες τρεις κατηγορίες των παραπάνω γραμμικών μοντέλων θεωρούνται ως ειδικές περιπτώσεις του γενικού γραμμικού μοντέλου (γνωστού και ως GLM) καθώς μπορούν να γραφούν σε κάποια μορφή του GLM. Πράγματι, κάθε μοντέλο σταθερών επιδράσεων που είναι γραμμικό ως προς τις παραμέτρους του, ονομάζεται γενικό γραμμικό μοντέλο. Η μεγάλη σημασία του οφείλεται στην ευρύτητά του, καθώς στη θεωρία των GLM καλύπτεται όλη η θεωρητική βάση των μεθόδων ανάλυσης της συνεχούς μεταβλητής Y καθώς και των πολλαπλών ερμηνευτικών μεταβλητών X_i .

3.2.2. Το γενικό γραμμικό μοντέλο

Απ' όλα τα παραπάνω είναι ξεκάθαρο ότι το γενικό μεικτό γραμμικό μοντέλο δεν συσχετίζεται άμεσα με το γενικό γραμμικό μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα, το γενικό μεικτό γραμμικό μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση του GLM, αν σκεφτούμε ότι το GLM είναι ουσιαστικά ένα μοντέλο σταθερών επιδράσεων (καθώς περιέχει μονάχα το διάνυσμα των σταθερών παραμέτρων, ενώ το γενικό μεικτό γραμμικό μοντέλο, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, περιλαμβάνει και όρους και σταθερών αλλά και τυχαίων επιδράσεων).

Παρ' όλα αυτά, θα παρουσιάσουμε στις επόμενες παραγράφους τα βασικά της θεωρίας των γενικών γραμμικών μοντέλων (ιδιαίτερα όσα αναφέρονται στην εκτίμηση του \mathbf{b}) όχι μόνο για μια πλήρη και ακριβή παρουσίαση του μοντέλου των GLM, αλλά κυρίως λόγω του ότι μια παράλληλη σύγκριση των δύο αυτών μοντέλων, θα αποτελέσει σημαντικό βοήθημα στην κατανόηση των ομοιοτήτων αλλά και των διαφορών μεταξύ των δύο μοντέλων.

Το γενικό γραμμικό μοντέλο, μπορεί να εκφραστεί μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$$

όπου θα έχουμε:

- \mathbf{y} αποτελεί διάνυσμα των αποκρίσεων y_i , διαστάσεων $(n \times 1)$
- \mathbf{X} αποτελεί έναν γνωστό $(n \times p)$ πίνακα, με $rank(\mathbf{X}) \leq p$
- $\boldsymbol{\beta}$ είναι ένα $(p \times 1)$ διάνυσμα που περιέχει όλες τις άγνωστες παραμέτρους του πληθυσμού b_j ($j=1, \dots, p$)
- \mathbf{e} είναι ένα $(n \times 1)$ διάνυσμα που περιέχει τα τυχαία σφάλματα e_i ($i=1, \dots, n$)

Γενικά, κάνουμε την υπόθεση ότι το διάνυσμα \mathbf{e} ακολουθεί μια n -μεταβλητή κανονική κατανομή (το n εκφράζει το συνολικό αριθμό των παρατηρήσεων) με μέση τιμή ίση με το μηδέν και πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων, ίσο με \mathbf{V} , δηλαδή, ισχύει ότι: $\mathbf{e} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{V})$.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειώσουμε ότι το χαρακτηριστικό γνώρισμα που κάνει το γενικό γραμμικό μοντέλο $y = X\beta + e$ να ξεχωρίζει από τις άλλες διάφορες περιπτώσεις των μοντέλων γραμμικής ανάλυσης (δηλαδή τις ANOVA, ANCOVA, απλή και πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση) είναι στην ουσία ο τύπος του πίνακα X . Πράγματι, ένα μοντέλο ANOVA μπορεί να διαμορφωθεί χρησιμοποιώντας ως στοιχεία του πίνακα X ψευδομεταβλητές, έτσι ώστε οι ερμηνευτικές μεταβλητές X_i να αντιπροσωπεύουν τους παράγοντες του μοντέλου, καθώς επίσης και τις αλληλεπιδράσεις. Όταν ο πίνακας X αποτελείται από τις παρατηρούμενες ποσότητες των X_i , έχουμε την περίπτωση του μοντέλου απλής και πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης. Τέλος, στην περίπτωση που μερικά από τα στοιχεία του πίνακα X είναι οι παρατηρούμενες ποσότητες X_i και τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα αποτελούν ψευδομεταβλητές, δηλαδή όταν έχουμε ένα μοντέλο που συνδυάζει και παλινδρόμηση (απλή ή πολλαπλή) αλλά και γραμμικά μοντέλα που περιέχουν παράγοντες και αλληλεπιδράσεις, είναι η κοινώς γνωστή ανάλυση συνδιακύμανσης.

3.2.3. Εκτίμηση των σταθερών επιδράσεων β

Τρεις είναι οι πιο διαδεδομένες προσεγγίσεις για τη στατιστική εκτίμηση των παραμέτρων β του γενικού γραμμικού μοντέλου:

- Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων
- Η μέθοδος της μεγίστης πιθανοφάνειας και
- Ο άριστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής του β (Best Linear Unbiased Estimator – BLUE)

Μια σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των μεθόδων ελαχίστων τετραγώνων και μεγίστης πιθανοφάνειας είναι ότι η πρώτη μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς τη χρήση κάποιων υποθέσεων για την κατανομή που θα πρέπει να ακολουθεί το διάνυσμα των αποκρίσεων y , πέρα από τον καθορισμό της πρόβλεψης και ίσως του πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων. Αντιθέτως, δεν είναι δυνατόν να παράγουμε

εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας χωρίς να καθορίσουμε πρώτα την κατανομή του διανύσματος \mathbf{y} .

3.2.3.1. Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Δύο είναι οι πιο συνηθισμένες παραλλαγές αυτής της διαδικασίας εκτίμησης. Και οι δύο είναι βασισμένες πάνω στη γενική ιδέα της ελαχιστοποίησης του αθροίσματος τετραγώνων, με χαρακτηριστικό στοιχείο που τις διαχωρίζει να είναι η δομή του πίνακα διακύμανσης – συνδιακύμανσης του διανύσματος \mathbf{y} .

Για την απλή περίπτωση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων κάνουμε την υπόθεση ότι το διάνυσμα \mathbf{e} έχει μέση τιμή ίση με το μηδέν, ότι δηλαδή ισχύει η σχέση $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$, και ότι όλα τα στοιχεία του \mathbf{e} είναι ασυσχέτιστα και έχουν την ίδια διακύμανση s_e^2 , έτσι ώστε ο πίνακας διακύμανσης – συνδιακύμανσης να διαμορφώνεται ως εξής:

$$Var(\mathbf{e}) = s_e^2 \mathbf{I}_n$$

με το \mathbf{I}_n να αποτελεί έναν ταυτοτικό πίνακα.

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, θα έχουμε ότι $E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + E(\mathbf{e}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ και $Var(\mathbf{y}) = s_e^2 \mathbf{I}_n$. Ο συνήθης εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων του $\boldsymbol{\beta}$, ο οποίος πολύ συχνά συμβολίζεται και ως $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, επιλέγεται να είναι η τιμή του $\boldsymbol{\beta}$ η οποία ελαχιστοποιεί το άθροισμα τετραγώνων των παρατηρήσεων από τις παρατηρούμενες τιμές τους. Κάτι που σημαίνει ότι είναι οι όροι του αθροίσματος τετραγώνων των σφαλμάτων

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - E(y_i)]^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - m_i)^2 \quad (\text{όπου πάλι το } n \text{ δηλώνει το συνολικό αριθμό των}$$

αποκρίσεων). Η ποσότητα $\sum_{i=1}^n (y_i - m_i)^2$ μπορεί αντίστοιχα να γραφεί και ως εξής:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - m_i)^2 = (y_1 - m_1)^2 + \dots + (y_n - m_n)^2 = (y_1 - m_1, \dots, y_n - m_n) \begin{pmatrix} y_1 - m_1 \\ \mathbf{M} \\ y_n - m_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 - m_1 \\ \vdots \\ y_n - m_n \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} y_1 - m_1 \\ \vdots \\ y_n - m_n \end{pmatrix} = [\mathbf{y} - E(\mathbf{y})]' [\mathbf{y} - E(\mathbf{y})] = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{e}'\mathbf{e}$$

όπου το $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ αποτελεί το διάνυσμα των αποκρίσεων και $E(\mathbf{y}) = (m_1, m_2, \dots, m_n)'$.

Επομένως, ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων του $\boldsymbol{\beta}$ μπορεί αντίστοιχα να παραχθεί από την ελαχιστοποίηση του γινομένου των διανυσμάτων $\mathbf{e}'\mathbf{e} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$. Για να επιτύχουμε αυτήν ελαχιστοποίηση, υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο του $\mathbf{e}'\mathbf{e}$, ως προς $\boldsymbol{\beta}$ και θέτουμε το κλάσμα ίσο με το μηδέν:

$\frac{\partial(\mathbf{e}'\mathbf{e})}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{0}$. Οι εξισώσεις που έχουμε έπειτα στη διάθεσή μας, θα είναι οι εξής:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^o = \mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (3.1)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γνωστές ως *Κανονικές Εξισώσεις*. Όταν ο πίνακας $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ είναι μη ιδιάζων (δηλαδή η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός) κι επομένως, εξασφαλίζεται η ύπαρξη του αντιστρόφου πίνακα $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, ο συμβολισμός $\boldsymbol{\beta}^o$ χρησιμοποιείται προς αντικατάσταση του όρου $\boldsymbol{\beta}^o$ και η λύση στις κανονικές εξισώσεις (εκτιμητής μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων) δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{\beta}_{OLS}^o = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ είναι ιδιάζων και επομένως δεν υπάρχει ο αντίστροφός του, ο γενικευμένος αντίστροφος του $\mathbf{X}'\mathbf{X}$, που συμβολίζεται ως $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^-$, χρησιμοποιείται στη θέση του και ικανοποιεί τη σχέση: $\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^- \mathbf{X}'\mathbf{X} = \mathbf{X}'\mathbf{X}$. Στην περίπτωση αυτή, η λύση των κανονικών εξισώσεων, δίνεται από το:

$$\beta^{\circ} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Η χρήση του συμβολισμού β° , αντί του $\hat{\beta}$, στην παραπάνω εξίσωση, γίνεται για είναι εμφανές ότι το β° αποτελεί μονάχα μια λύση στις κανονικές εξισώσεις και δεν αποτελεί εκτίμηση του β . Αυτό συμβαίνει διότι παρ' όλο που το β° αποτελεί εκτιμητή κάποιας έκφρασης, (όχι του β), αυτή η έκφραση εξαρτάται αποκλειστικά από ποιον γενικευμένο αντίστροφο $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}$ έχουμε χρησιμοποιήσει για τον υπολογισμό του β° .

Σημείωση:

Ο γενικευμένος αντίστροφος ενός $(m \times n)$ πίνακα \mathbf{A} , που συμβολίζεται ως \mathbf{A}^{-} , είναι κάθε $(n \times m)$ πίνακας, ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Ο γενικευμένος αντίστροφος ενός πίνακα \mathbf{A} δεν είναι μοναδικός. Υπάρχει απεριόριστος αριθμός πινάκων που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση. Ο γενικευμένος αντίστροφος βρίσκει εφαρμογή σε περιπτώσεις που ο (κανονικός) αντίστροφος \mathbf{A}^{-1} του \mathbf{A} δεν μπορεί να ορισθεί. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που είτε $m \neq n$, οπότε ο \mathbf{A} δεν είναι τετραγωνικός, είτε στην περίπτωση που $m = n$ αλλά ταυτόχρονα ισχύει ότι $|\mathbf{A}| = 0$. Από τη στιγμή που ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων απαιτεί την ύπαρξη του πίνακα $\mathbf{X}'\mathbf{X}$, ο οποίος είναι ένας $(p \times p)$ τετραγωνικός πίνακας, ο αντίστροφος $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ μπορεί να μην υπάρχει πάντα (όπως για παράδειγμα όταν $|\mathbf{X}'\mathbf{X}| = 0$ και ο μοναδικός τρόπος για να υπολογίσουμε τον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων είναι με τη χρήση ενός γενικευμένου αντιστρόφου).

Το πρόβλημα που προκύπτει σε αυτό το σημείο, οφείλεται στο γεγονός ότι παρ' όλο που ο γενικευμένος αντίστροφος $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ του $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ υπάρχει πάντοτε, όπως αναφέραμε και παραπάνω δεν είναι μοναδικός. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να εξαρτάται καθαρά ο εκτιμητής β° στην επιλογή του $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

3.2.3.1.1. Γενικευμένα ελάχιστα τετράγωνα

Οι συνηθισμένοι εκτιμητές της σχέσης (3.1) βασίστηκαν στην υπόθεση ότι $Var(\mathbf{e}) = \sigma_e^2 \mathbf{I}_n$. Αν αντί αυτής της υπόθεσης για την ιδιαίτερη δομή διακύμανσης – συνδιακύμανσης για το \mathbf{e} , μπορούμε να θεωρήσουμε μια πιο γενική περίπτωση, αυτή της:

$$Var(\mathbf{e}) = \mathbf{V}$$

για κάποιον θετικά ορισμένο συμμετρικό πίνακα \mathbf{V} , τότε ο γενικευμένος εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων του $\boldsymbol{\beta}$ (γνωστός και ως εκτιμητής σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων – WLS) υπολογίζεται μέσω της ελαχιστοποίησης, ως προς $\boldsymbol{\beta}$, της σχέσης:

$$[\mathbf{y} - E(\mathbf{y})]' \mathbf{V}^{-1} [\mathbf{y} - E(\mathbf{y})] \equiv (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

Από την ελαχιστοποίηση του παραπάνω, προκύπτουν οι εξισώσεις των γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων,

$$\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}$$

που δίνουν ως λύση τον γενικευμένο εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων του $\boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{\beta}_{GLS} = (\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}$$

3.2.3.1.2. Η μέθοδος της μεγίστης πιθανοφάνειας

Για να υπολογίσουμε τους παραπάνω εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων (κοινό και γενικευμένο) του διανύσματος των σταθερών επιδράσεων $\boldsymbol{\beta}$, δεν κάναμε κάποια συγκεκριμένη υπόθεση για τη μορφή της κατανομής που θα πρέπει να ακολουθεί το διάνυσμα των τυχαίων σφαλμάτων \mathbf{e} και κατά συνέπεια, ούτε και για την κατανομή που

ακολουθεί το διάνυσμα των αποκρίσεων \mathbf{y} . Παρ' όλα αυτά, για τον εκτιμητή μείσσης πιθανοφάνειας του $\boldsymbol{\beta}$ είναι απαραίητο να κάνουμε κάποια υπόθεση για την κατανομή. Τις περισσότερες φορές, αυτή η υπόθεση δηλώνει ότι το \mathbf{e} ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή ίση με το μηδέν και πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων \mathbf{V} , δηλαδή $\mathbf{e} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{V})$. Ως συνέπεια, το διάνυσμα των αποκρίσεων \mathbf{y} ακολουθεί την κανονική κατανομή και ισχύει ότι:

$$\mathbf{y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V})$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) του διανύσματος \mathbf{y} που ακολουθεί την κανονική κατανομή, είναι όπως γνωρίζουμε, η εξής:

$$f(\mathbf{y}; \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{V}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\}$$

Για να παράγουμε τον εκτιμητή μείσσης πιθανοφάνειας του $\boldsymbol{\beta}$, πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την πιθανοφάνεια των παρατηρήσεων του δείγματος ως προς $\boldsymbol{\beta}$. Για το διάνυσμα \mathbf{y} , η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}; \mathbf{y})$ είναι αλγεβρικά η ίδια με την σ.π.π. $f(\mathbf{y}; \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V})$. Η διαφορά στη σειρά των συμβόλων στις f και L γίνεται για να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι ενώ το βάρος στην f δίνεται στο διάνυσμα των αποκρίσεων \mathbf{y} , αντίθετα, στην L δίνουμε περισσότερο βάρος στις παραμέτρους, θεωρώντας ότι το \mathbf{y} εκφράζει τις σταθερές παρατηρήσεις.

Η μεγιστοποίηση της $L(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}; \mathbf{y})$ ως προς $\boldsymbol{\beta}$ είναι αντίστοιχη, λόγω του ότι το \ln είναι αύξουσα συνάρτηση, στην μεγιστοποίηση του $\ln L(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}; \mathbf{y})$. Για το λόγο αυτό, υπάρχει λύση για την εξίσωση $\frac{\partial(\ln L)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$, η οποία αποτελεί και τον εκτιμητή μείσσης πιθανοφάνειας του $\boldsymbol{\beta}$. Ο εκτιμητής είναι ίδιος με τον γενικευμένο εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$$

Αν στο σημείο αυτό κάνουμε την υπόθεση (όπως και στην περίπτωση των ελαχίστων τετραγώνων) μιας λιγότερο γενικευμένης δομής συνδιακύμανσης για το \mathbf{e} , δηλαδή $\mathbf{V} = \sigma_e^2 \mathbf{I}_n$, τότε ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας του $\boldsymbol{\beta}$, απλουστεύεται στη μορφή του απλού εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων και εκφράζεται ως εξής:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Η μοναδική διαφορά που υπάρχει σε αυτό το σημείο είναι ότι η υπόθεση που κάνουμε για την κατανομή που ακολουθεί το διάνυσμα \mathbf{e} είναι πολυμεταβλητή κανονική κατανομή. Δηλαδή ισχύει ότι $\mathbf{e} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}_n)$.

3.2.3.1.3. *Best Linear Unbiased Estimator – BLUE*

Στην περίπτωση του εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων του διανύσματος των σταθερών επιδράσεων $\boldsymbol{\beta}$, οι εκτιμητές $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ και $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}$ παράχθηκαν μετά από ορισμένες υποθέσεις τις οποίες κάναμε για τη μέση τιμή και τον πίνακα διακύμανσης – συνδιακύμανσης του διανύσματος \mathbf{e} . Επιπλέον, υποθέτοντας κανονικότητα για το \mathbf{e} , είχαμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Στην παράγραφο αυτή, θα παρουσιάσουμε τον εκτιμητή του $\boldsymbol{\beta}$, που είναι γνωστός ως άριστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής (BLUE). Για τον εκτιμητή αυτόν, δεν είναι απαραίτητη καμία υπόθεση για τα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{e} αλλά ούτε και για την κατανομή την οποία αυτός ακολουθεί. Αντίθετα, αξιοποιούνται δύο από τα πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενα κριτήρια στην διερεύνηση των εκτιμητών στη στατιστική: το κριτήριο της αμεροληψίας και το κριτήριο της ελάχιστης διακύμανσης του εκτιμητή. Η συγκεκριμένη διαδικασία εκτίμησης βασίζεται στη θεωρία γραμμικής εκτίμησης που ανέπτυξαν οι Marcov, Laplace και Gauss, κάνοντας χρήση μιας γενικευμένης εκδοχής του θεωρήματος των Gauss – Marcov. Με αυτήν την προσέγγιση είναι δυνατή η εκτίμηση όχι μόνο του διανύσματος των σταθερών επιδράσεων $\boldsymbol{\beta}$, αλλά γενικά κάθε γραμμικής συνάρτησης του $\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$, με το \mathbf{t} να εκφράζει κάθε διάνυσμα – στήλη, με τον μοναδικό περιορισμό για τις διαστάσεις του διανύσματος \mathbf{t} , που πρέπει να αρμόζουν σε

εκείνες του διάνυσματος β . Επομένως, καθώς το διάνυσμα β έχει ορισθεί ως ένα $(p \times 1)$ διάνυσμα, το t θα πρέπει να είναι και αυτό ένα $(p \times 1)$ διάνυσμα, έτσι ώστε να έχουμε ως αποτέλεσμα το μονοδιάστατο μέγεθος $t'\beta$.

Τα τρία χαρακτηριστικά του εκτιμητή (δύο από αυτά είναι τα κριτήρια για την απόκτηση ενός άριστου εκτιμητή) μας οδηγούν στο σχηματισμό του. Η τεχνική για τη διαμόρφωση του άριστου γραμμικού αμερόληπτου εκτιμητή, ακολουθεί τα εξής βήματα: Αρχικά, θεωρούμε ότι ο εκτιμητής $t'\beta$ αποτελεί τη γραμμική συνάρτηση $\lambda'y$ του διανύσματος των παρατηρήσεων y (εδώ είναι και το σημείο στο οποίο αντιστοιχεί ο όρος «γραμμικός» στον ορισμό του εκτιμητή αυτού). Το επόμενο βήμα, απαιτεί τον περιορισμό του συνόλου των εκτιμητών της μορφής $\lambda'y$, κάνοντας χρήση του κριτηρίου της αμεροληψίας για το $\lambda'y$. Ο εκτιμητής $\lambda'y$ του $t'\beta$ λέγεται ότι είναι αμερόληπτος εκτιμητής, αν και μόνον αν ισχύει ότι:

$$E(\lambda'y) = t'\beta \Rightarrow \lambda'E(y) = t'\beta \underset{E(y)=X\beta}{\Rightarrow} \lambda'X\beta = t'\beta \quad \forall \beta \Rightarrow \lambda'X = t'$$

Αν πάρουμε τους ανάστροφους των πινάκων και στα δυο μέρη της εξίσωσης, θα έχουμε ότι:

$$X'\lambda = t$$

Έχοντας κατά νου την παραπάνω σχέση, απαιτούμε επιπλέον, ο $\lambda'y$ να είναι ο «καλύτερος» εκτιμητής του $t'\beta$. Με τον όρο «καλύτερος» εννοούμε ότι στην κατηγορία των γραμμικών, αμερόληπτων εκτιμητών του $t'\beta$, ο καλύτερος είναι εκείνος που παρουσιάζει την μικρότερη διακύμανση. Αυτό το κριτήριο θα αποτελέσει σημαντικό βοήθημα για τον υπολογισμό του λ' του εκτιμητή $\lambda'y$. Πράγματι, αν ορίσουμε ότι $Var(y) = V$, θα έχουμε:

$$Var(\lambda'y) = \lambda'Var(y)\lambda = \lambda'V\lambda$$

Για να αποτελεί το $\lambda' \mathbf{y}$ τον «άριστο» εκτιμητή, θα πρέπει η παραπάνω ποσότητα $Var(\lambda' \mathbf{y}) = \lambda' \mathbf{V} \lambda$ να ελαχιστοποιείται. Αυτή η ελαχιστοποίηση μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστή Lagrange. Επομένως, ελαχιστοποιούμε, ως προς τα στοιχεία των λ' και θ' , την ποσότητα (θεωρώντας το $2\theta'$ ως διάνυσμα του πολλαπλασιαστή Lagrange και την ποσότητα $\mathbf{X}'\lambda - \mathbf{t}$ να αποτελεί περιορισμό):

$$Q = \lambda' \mathbf{V} \lambda - 2\theta' (\mathbf{X}'\lambda - \mathbf{t})$$

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της λύσης του συστήματος :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta} = \mathbf{0} \\ \mathbf{X}'\lambda = \mathbf{t} \end{array} \right.$$

Λύνοντας την $\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = \mathbf{0}$ παίρνουμε $\mathbf{X}'\lambda = \mathbf{t}$, καθώς η εξίσωση $\mathbf{X}'\lambda = \mathbf{t}$ είναι αντίστοιχη με την εξίσωση $\lambda' \mathbf{X} = \mathbf{t}'$, από τη στιγμή που ισχύει ότι $\mathbf{X}'\lambda = \mathbf{t} \Leftrightarrow (\mathbf{X}'\lambda)' = \mathbf{t}' \Leftrightarrow \lambda' \mathbf{X} = \mathbf{t}'$. Επιπλέον, η εξίσωση $\frac{\partial Q}{\partial \theta} = \mathbf{0}$ μας δίνει ότι $\mathbf{V}\lambda = \mathbf{X}\theta$ και έπειτα από τη λύση ως προς λ , έχουμε ότι $\lambda = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\theta$. Παίρνοντας τον ανάστροφο και στα δύο μέρη, έχουμε ότι $\lambda' = \theta' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1}$ (ισχύει ότι $(\mathbf{V}^{-1})' = \mathbf{V}^{-1}$ αφού $(\mathbf{V}^{-1})' = (\mathbf{V}')^{-1}$ και $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$). Αντικαθιστώντας τον λ' με τον $\lambda' \mathbf{X} = \mathbf{t}'$, παίρνουμε $\theta' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{t}' \Rightarrow \theta' = \mathbf{t}' (\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1}$. Αντικαθιστώντας τον θ' στην εξίσωση $\lambda' = \theta' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1}$, μπορούμε να έχουμε μια λύση για τον λ' , του εκτιμητή $\lambda' \mathbf{y}$, που δεν θα περιλαμβάνει το άγνωστο διάνυσμα θ . Η λύση αυτή θα είναι η:

$$\lambda' = \mathbf{t}' (\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1}$$

Επομένως, ο άριστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής (BLUE) του $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{y}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{y} = \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$$

Τέλος, μπορεί ναδειχθεί ότι ο εκτιμητής BLUE για το διάνυσμα των σταθερών επιδράσεων $\boldsymbol{\beta}$, μπορεί να δοθεί από τη σχέση:

$$\boldsymbol{\beta}_{BLUE} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$$

Όπως διακρίνουμε και από παραπάνω, ο εκτιμητής αυτός είναι πανομοιότυπος με τον γενικευμένο εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων καθώς επίσης και με τον εκτιμητή μείζονος πιθανοφάνειας, κάνοντας την υπόθεση ότι $\mathbf{e} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{V})$.

3.3. Το γενικό γραμμικό μεικτό μοντέλο

Παρ' όλη την ευρεία διάδοσή του και την μεγάλη δυνατότητα εφαρμογής του, το μοντέλο GLM που αναλύσαμε στις παραπάνω παραγράφους, έχει και ένα μεγάλο μειονέκτημα. Το πρόβλημα που προκύπτει είναι ότι αυτό το μοντέλο επιτρέπει την ύπαρξη ενός μόνο τυχαίου παράγοντα, αυτού του τυχαίου σφάλματος, \mathbf{e} . Με τη χρήση του γενικευμένου γραμμικού μεικτού μοντέλου, μπορούμε να αποφύγουμε τον περιορισμό αυτό, καθώς επιτρέπει την ύπαρξη και άλλων δομών στα σφάλματα, εκτός από το \mathbf{e} , δομές που είναι ευρύτερα γνωστές ως παράγοντες «τυχαίων επιδράσεων» ή απλά τυχαίες επιδράσεις. Κάτω από αυτήν την προοπτική, το γενικευμένο γραμμικό μεικτό μοντέλο, μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση του γενικευμένου γραμμικού μοντέλου. Αυτό το μοντέλο έχει τραβήξει μεγάλη προσοχή, κυρίως λόγω της μεγάλης ευκολίας στην εφαρμογή του αλλά και την εύκολη ερμηνεία του. Είναι επομένως εύλογο να ενδιαφέρεται κανείς για τις υπάρχουσες διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων και εκτίμησης των παραμέτρων του γενικευμένου γραμμικού μεικτού μοντέλου. Γενικά, τα γραμμικά μεικτά μοντέλα είναι μοντέλα όπου οι τυχαίοι και σταθεροί όροι επιδράσεων είναι γραμμικά συνδεδεμένοι με τη μεταβλητή απόκρισης. Το απλό γραμμικό μοντέλο

επεκτείνεται ενώνοντας τυχαίες επιδράσεις, έναν επιπλέον όρο σφάλματος, για να εξηγήσουν τη συσχέτιση μεταξύ των παρατηρήσεων που λαμβάνονται από την ίδια ομάδα.

3.3.1. Το μοντέλο – Ένα επίπεδο – Μοντέλο των Laird-Ware

Το γενικευμένο γραμμικό μοντέλο μεικτών επιδράσεων, για την n_i -διάστατη απόκριση \mathbf{y}_i για την i -οστή ομάδα, μπορεί να εκφραστεί μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \mathbf{e}_i$$

όπου:

- ◆ $i = 1, \dots, m$
- ◆ $\mathbf{b}_i \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi})$ και $\mathbf{e}_i \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{S}^2\mathbf{I})$
- ◆ Το $\boldsymbol{\beta}$ είναι ένα $(p \times 1)$ διάνυσμα των σταθερών επιδράσεων (των αγνώστων παραμέτρων του πληθυσμού).
- ◆ Το \mathbf{b}_i είναι ένα $(q \times 1)$ διάνυσμα των τυχαίων επιδράσεων (των αγνώστων επιδράσεων των ατόμων).
- ◆ Το \mathbf{X}_i αποτελεί έναν γνωστό $(n_i \times p)$ πίνακα σχεδιασμού, που συνδέει το $\boldsymbol{\beta}$ με το \mathbf{y}_i .
- ◆ Το \mathbf{Z}_i είναι ένας γνωστός $(n_i \times q)$ πίνακας σχεδιασμού, ο οποίος συνδέει το \mathbf{b}_i με το \mathbf{y}_i και τέλος,
- ◆ Το \mathbf{e}_i αποτελεί ένα $(n_i \times 1)$ διάνυσμα που εκφράζει τα σφάλματα εντός των ομάδων και ακολουθεί σφαιρική κατανομή Gauss.

Το παραπάνω μοντέλο είναι γνωστό και ως *μοντέλο των Laird – Ware*.

Η υπόθεση ότι η διακύμανση του \mathbf{e}_i είναι ίση με $\mathbf{S}^2\mathbf{I}$, όπου \mathbf{I} ταυτοτικός πίνακας, μπορεί να μην μας είναι απαραίτητη. Στην περίπτωση αυτή όμως, ονομάζουμε

το μοντέλο μας «μοντέλο σχετικής ανεξαρτησίας», καθώς υπονοείται ότι οι n_i αποκρίσεις του i -οστού αντικειμένου είναι ανεξάρτητες, υπό όρους, από τα \mathbf{b}_i και $\boldsymbol{\beta}$.

Τα \mathbf{y}_i θεωρούνται ότι κατανέμονται σύμφωνα με την κανονική κατανομή και είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Επιπλέον, γι' αυτά ισχύει ότι $\mathbf{y}_i \sim N(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}, \mathbf{S}_e^2\mathbf{I} + \mathbf{Z}_i\boldsymbol{\Psi}\mathbf{Z}_i^T)$. Οι τυχαίες επιδράσεις \mathbf{b}_i και τα σφάλματα εντός των ομάδων \mathbf{e}_i θεωρείται ότι είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους μέσα στην ίδια ομάδα και ανεξάρτητα για διαφορετικές ομάδες. Όπως αναφέραμε αμέσως παραπάνω, η κατανομή των τυχαίων επιδράσεων θεωρείται κανονική, με μέση τιμή ίση με το μηδέν και πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων ίσο με $\boldsymbol{\Psi}$. Αυτός είναι ένας θετικά ημι-ορισμένος ($q \times q$) πίνακας διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων, δηλαδή με άλλα λόγια, όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα πρέπει να είναι μη αρνητικές. Μπορούμε να κάνουμε πιο αυστηρές υποθέσεις, λέγοντας ότι ο πίνακας πρέπει να είναι θετικά ορισμένος, ότι όλες οι ιδιοτιμές του πρέπει να είναι θετικές, επειδή ένα αόριστο μοντέλο μπορεί πάντοτε να εκφραστεί ως ένα θετικά ορισμένο μοντέλο, μικρότερης διάστασης.

Στην εκτίμηση που θέλουμε να κάνουμε, είναι πιο βολικό να ορίσουμε τον πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων στη μορφή ενός παράγοντα σχετικής ακρίβειας $\boldsymbol{\Delta}$. Ο πίνακας $\boldsymbol{\Delta}$ εκφράζεται από οποιονδήποτε πίνακα που ικανοποιεί την παρακάτω ισότητα:

$$\frac{\boldsymbol{\Psi}^{-1}}{1/\mathbf{S}^2} = \boldsymbol{\Delta}^T \boldsymbol{\Delta}$$

Αν ο πίνακας διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων είναι θετικά ορισμένος, τότε υπάρχει πίνακας $\boldsymbol{\Delta}$, αλλά δεν είναι απαραίτητο να είναι και μοναδικός. Ο «παράγοντας του Cholesky», δηλαδή η ποσότητα $\mathbf{S}^2\boldsymbol{\Psi}^{-1}$, είναι μια πιθανή περίπτωση για τον πίνακα $\boldsymbol{\Delta}$. Ο όρος «παράγοντας σχετικής ακρίβειας» χρησιμοποιείται για τον πίνακα $\boldsymbol{\Delta}$ γιατί παραγοντοποιεί τον $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$, τον πίνακα ακρίβειας των τυχαίων επιδράσεων, εκφρασμένος σε σχέση με το $\frac{1}{\mathbf{S}^2}$, την ακρίβεια του \mathbf{e}_i .

3.3.2 Το μοντέλο – Πολλαπλά επίπεδα

Στην παράγραφο αυτήν θα επεκτείνουμε το γραμμικό μοντέλο μεικτών επιδράσεων με ένα επίπεδο και θα αναφερθούμε στην ύπαρξη πολλαπλών επιπέδων, όσον αφορά στα επίπεδα των τυχαίων επιδράσεων. Αρχικά, θα παρουσιάσουμε την περίπτωση των δύο επιπέδων τυχαίων επιδράσεων. Τα διανύσματα των αποκρίσεων, στο εσωτερικό επίπεδο των ομάδων, εκφράζονται ως \mathbf{y}_{ij} , με $i=1, \dots, m$ και $j=1, \dots, m_i$. Το m εκφράζει τον αριθμό των ομάδων του πρώτου επιπέδου, ενώ το m_i τον αριθμό των ομάδων του δεύτερου επιπέδου, που βρίσκονται στην i -οστή ομάδα του πρώτου επιπέδου. Οι πίνακες σχεδιασμού για τις σταθερές επιδράσεις δηλώνονται με το συμβολισμό \mathbf{X}_{ij} και είναι διαστάσεων $(n_{ij} \times p)$, όπου το p εκφράζει με τη σειρά του τον αριθμό των παραμέτρων του πληθυσμού. Ο συμβολισμός για το πρώτο επίπεδο τυχαίων επιδράσεων είναι \mathbf{b}_i , ένα διάνυσμα διαστάσεων $(q_1 \times 1)$. Αντίστοιχα, το δεύτερο επίπεδο των τυχαίων επιδράσεων, εκφράζεται μέσω του διανύσματος \mathbf{b}_{ij} , το οποίο έχει διαστάσεις $(q_2 \times 1)$. Οι πίνακες για τις τυχαίες επιδράσεις είναι οι $\mathbf{Z}_{i,j}$, με διαστάσεις $(n_i \times q_1)$ και \mathbf{Z}_{ij} , διαστάσεων $(n_i \times q_2)$ αντίστοιχα για το πρώτο και το δεύτερο επίπεδο τους. Επομένως, το μοντέλο μας μπορεί να γραφεί πλέον στη μορφή:

$$\mathbf{y}_{ij} = \mathbf{X}_{ij}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_{i,j}\mathbf{b}_i + \mathbf{Z}_{ij}\mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ij}$$

με

- $i=1, \dots, m$ και $j=1, \dots, m_i$
- $\mathbf{b}_i \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}_1)$
- $\mathbf{b}_{ij} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}_2)$
- $\mathbf{e}_{ij} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{S}^2\mathbf{I})$

Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες επιδράσεις του πρώτου επιπέδου, \mathbf{b}_i είναι ανεξάρτητες για τα διάφορα i , ότι οι τυχαίες επιδράσεις του δεύτερου επιπέδου είναι ανεξάρτητες για τα διάφορα i και j και ανεξάρτητες του πρώτου επιπέδου τυχαίων επιδράσεων. Τέλος,

τα εντός των ομάδων σφάλματα είναι ανεξάρτητα για τα διάφορα i και j και ανεξάρτητα του πρώτου και δεύτερου επιπέδου των τυχαίων επιδράσεων.

Το παραπάνω μοντέλο που παρουσιάσαμε για δύο επίπεδα τυχαίων επιδράσεων, μπορεί να εφαρμοστεί, αν επεκταθεί, και σε πολλαπλά επίπεδα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας τρία επίπεδα τυχαίων επιδράσεων. Τα διανύσματα των αποκρίσεων μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\mathbf{y}_{ijk} = \mathbf{X}_{ijk}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_{i,jk}\mathbf{b}_i + \mathbf{Z}_{ij,k}\mathbf{b}_{ij} + \mathbf{Z}_{ijk}\mathbf{b}_{ijk} + \mathbf{e}_{ijk}$$

όπου:

$$\oplus i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m_i \quad \text{και} \quad k = 1, \dots, m_{ij}$$

$$\oplus \mathbf{b}_i \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}_1)$$

$$\oplus \mathbf{b}_{ij} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}_2)$$

$$\oplus \mathbf{b}_{ijk} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}_3)$$

$$\oplus \mathbf{e}_{ijk} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{s}^2\mathbf{I})$$

Επαγωγικά, το παραπάνω μοντέλο μπορεί να επεκταθεί για Q σε αριθμό επίπεδα. Στο σημείο αυτό, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η θέση στην οποία τοποθετείται το κόμμα στην παραπάνω έκφραση αποτελεί το μοναδικό στοιχείο στο οποίο διαφέρει από την προηγούμενη έκφραση που αναλύσαμε. Αντίστοιχα, όπως κάναμε και στο μοντέλο του ενός επιπέδου, θα εκφράσουμε τους πίνακες διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων $\boldsymbol{\Psi}_q$ με όρους των παραγόντων σχετικής ακρίβειας, Δ_q .

Γενικά, θα κάνουμε την υπόθεση ότι για τα μεικτά μοντέλα που θα αναλύσουμε εδώ, οι τυχαίες επιδράσεις, αλλά και τα σφάλματα εντός των ομάδων, ακολουθούν την πολυμεταβλητή κανονική ή την κατανομή Gauss. Όσον δε αφορά στον πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων $\boldsymbol{\Psi}_q$ των τυχαίων επιδράσεων του επιπέδου q , κάνουμε την υπόθεση ότι είναι θετικά ορισμένος και συμμετρικός. Παρ' όλα αυτά, είναι δυνατή η απλοποίηση του μοντέλου, αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας έχει κάποια συγκεκριμένη μορφή (είναι για παράδειγμα διαγώνιος).

3.4. Εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας για το μοντέλο του ενός επιπέδου

Από όλες τις μεθόδους που προτείνονται για την εκτίμηση των παραμέτρων στο γραμμικό μεικτό μοντέλο, θα παρουσιάσουμε εκείνη της μεγίστης πιθανοφάνειας και εκείνη της δεσμευμένης μεγίστης πιθανοφάνειας.

Ας θεωρήσουμε αρχικά το μοντέλο που αναφέρεται στην ύπαρξη ενός επιπέδου τυχαίων επιδράσεων, δηλαδή στο μοντέλο $y_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \mathbf{e}_i$, το οποίο αναπτύξαμε στην παράγραφο 3.3.1. Ως παράμετροι του μοντέλου θεωρούνται οι παράμετροι που ορίζουν τον πίνακα Δ , καθώς επίσης και τα $\boldsymbol{\beta}$ και s^2 . Ορίζουμε ως $\boldsymbol{\theta}$, το σύνολο των παραμέτρων που ορίζουν τον Δ και υποθέτουμε ότι έχουμε ήδη επιλέξει μια κατάλληλη παραμετροποίηση.

Όπως γνωρίζουμε, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η πυκνότητα πιθανότητα για τα δεδομένα, έχοντας ως σταθερούς τους παράγοντες. Θεωρούμε το παραπάνω ότι αποτελεί μια συνάρτηση των παραμέτρων με σταθερά τα δεδομένα και όχι μια συνάρτηση των δεδομένων με σταθερές τις παραμέτρους. Με άλλα λόγια, θεωρούμε το:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, s^2 | \mathbf{y}) = p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, s^2)$$

όπου εδώ ως L συμβολίζουμε την πιθανοφάνεια, p την πυκνότητα πιθανότητα και με \mathbf{y} εκφράζουμε το διάνυσμα των παραμέτρων N -διαστάσεων, με $N = \sum_{i=1}^m n_i$.

Καθώς τα \mathbf{b}_i και \mathbf{e}_i είναι ανεξάρτητα, μπορούμε να εκφράσουμε την πιθανοφάνεια και ως εξής:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, s^2 | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^m p(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, s^2)$$

Οι μη παρατηρούμενες τυχαίες επιδράσεις αποτελούν τμήμα του μοντέλου. Επομένως, θα πρέπει να ενσωματώσουμε τη σχετική πυκνότητα των παρατηρήσεων, δεδομένων των τυχαίων επιδράσεων ως προς την οριακή πυκνότητα των τυχαίων

επιδράσεων, έτσι ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την οριακή πυκνότητα των παρατηρήσεών μας.

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, s^2 | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^m \int p(\mathbf{y}_i | \mathbf{b}_i, \boldsymbol{\beta}, s^2) p(\mathbf{b}_i | \boldsymbol{\theta}, s^2) d\mathbf{b}_i$$

Η πυκνότητα του \mathbf{y}_i είναι πολυμεταβλητή κανονική και μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:

$$p(\mathbf{y}_i | \mathbf{b}_i, \boldsymbol{\beta}, s^2) = \frac{\exp(-\|\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}_i \mathbf{b}_i\|^2 / 2s^2)}{(2ps^2)^{n_i/2}}$$

Η κατανομή του \mathbf{b}_i είναι επίσης πολυμεταβλητή κανονική και ορίζεται ως εξής:

$$p(\mathbf{b}_i | \boldsymbol{\theta}, s^2) = \frac{\exp(-\mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{b}_i)}{(2p)^{q/2} \sqrt{|\boldsymbol{\Psi}|}}$$

που επίσης μπορεί να εκφραστεί μέσω των όρων των παραγόντων σχετικής ακρίβειας:

$$p(\mathbf{b}_i | \boldsymbol{\theta}, s^2) = \frac{\exp(-\|\boldsymbol{\Delta} \mathbf{b}_i\|^2 / 2s^2)}{(2p)^{q/2} \text{abs}|\boldsymbol{\Delta}|^{-1}}$$

Μέσω αντικαταστάσεως, παίρνουμε την παρακάτω πιθανοφάνεια:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, s^2 | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^m \frac{\text{abs}|\boldsymbol{\Delta}|}{(2ps^2)^{n_i/2}} \int \frac{\exp\left[-\left(\|\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}_i \mathbf{b}_i\|^2\right) / 2s^2\right]}{(2ps^2)^{q/2}} d\mathbf{b}_i \quad (3.2)$$

όπου έχουμε ορίσει ότι:

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_i \\ \boldsymbol{\Delta} \end{bmatrix}$$

Αυτά τα διανύσματα αποτελούν επαυξημένα διανύσματα δεδομένων και πίνακες μοντέλων. Η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το σημείο, ονομάζεται *προσέγγιση ψευδών δεδομένων*. Αυτό που κάναμε ήταν να αλλάξουμε τη συνεισφορά της οριακής κατανομής των τυχαίων επιδράσεων σε επιπλέον σειρές της απόκρισης και των πινάκων σχεδιασμού. Την αποκαλούμε προσέγγιση ψευδών δεδομένων γιατί δημιουργεί τις επιδράσεις της οριακής κατανομής προσθέτοντας ψευδές παρατηρήσεις. Το εκθετικό μέρος της πιθανοφάνειας είναι το τετράγωνο του μήκους ενός διανύσματος. Για να γίνουμε περισσότερο σαφείς, είναι ένα άθροισμα τετραγώνων. Επίσης, μπορούμε να περιγράψουμε τις σχετικές μέγιστες τιμές των τυχαίων επιδράσεων, δεδομένων των παρατηρήσεών μας, αν ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα τετραγώνων των καταλοίπων. Κάτι τέτοιο αποτελεί ένα αρκετά απλό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, το οποίο μας δίνει ως λύση την:

$$\hat{\mathbf{b}}_i = (\mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i)^{-1} \mathbf{Z}_i^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})$$

Το τετράγωνο του μήκους του διανύσματος, μπορεί να δοθεί από την:

$$\|\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}_i \mathbf{b}_i\|^2 = \|\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}_i \hat{\mathbf{b}}_i\|^2 + (\mathbf{b}_i - \hat{\mathbf{b}}_i)^T \mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i (\mathbf{b}_i - \hat{\mathbf{b}}_i) \quad (3.3)$$

Ο πρώτος όρος στην παραπάνω εξίσωση είναι ανεξάρτητος των \mathbf{b}_i κι έτσι μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα στην εξίσωση της πιθανοφάνειας (3.2). Ως προς το δεύτερο όρο της εξίσωσης, αν ολοκληρώσουμε την εκθετική του μορφή, θα είναι το ίδιο με το να ολοκληρώναμε μια πολυμεταβλητή κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Επομένως, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{|\mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i|}}{\sqrt{|\mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i|}} \int \frac{\exp\left[-(\mathbf{b}_i - \hat{\mathbf{b}}_i)^T \mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i (\mathbf{b}_i - \hat{\mathbf{b}}_i) / 2s^2\right]}{(2ps^2)^{q/2}} d\mathbf{b}_i &= \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i|}} \int \frac{\exp\left[-(\mathbf{b}_i - \hat{\mathbf{b}}_i)^T \mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i (\mathbf{b}_i - \hat{\mathbf{b}}_i) / 2s^2\right]}{(2ps^2)^{q/2} / \sqrt{|\mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i|}} d\mathbf{b}_i = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i|}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i + \Delta^T \Delta}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (3.4) και (3.3), μπορούμε να ξαναγράψουμε το ολοκλήρωμα στη σχέση (3.2) για την πιθανοφάνεια, ως εξής:

$$\int \frac{\exp\left[-\|\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}_i \mathbf{b}_i\|^2 / 2s^2\right]}{(2ps^2)^{q/2}} d\mathbf{b}_i = \frac{\exp\left[-\|\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}_i \mathbf{b}_i\|^2 / 2s^2\right]}{\sqrt{|\mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i|}}$$

Επομένως, η σχέση (3.2) που εκφράζει την πιθανοφάνεια, διαμορφώνεται όπως παρακάτω και μπορεί να χρησιμοποιηθεί από έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό των εκτιμητών μεγίστης πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\theta}$ και s^2 :

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, s^2 | \mathbf{y}) = \frac{1}{(2ps^2)^{N/2}} \exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^m \|\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}_i \hat{\mathbf{b}}_i\|^2}{2s^2}\right) \prod_{i=1}^m \frac{abs|\Delta|}{\sqrt{|\mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i|}} \quad (3.5)$$

Η διαδικασία της μεγιστοποίησης γίνεται πολύ πιο εύκολη αν διαμορφώσουμε την πιθανοφάνεια, έτσι ώστε να αποτελεί συνάρτηση μόνο του $\boldsymbol{\theta}$. Για να το κάνουμε αυτό, μπορούμε να υπολογίσουμε τις σχετικές εκτιμήτριες των $\hat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\theta})$ και $\hat{s}^2(\boldsymbol{\theta})$ ως προς τις τιμές που μεγιστοποιούν την πιθανοφάνεια για ένα δεδομένο $\boldsymbol{\theta}$. Στην τελευταία έκφραση, οι όροι που περιλαμβάνουν τα $\boldsymbol{\beta}$ και s^2 , μπορούν αν προσδιοριστούν από την κλασική θεωρία γραμμικής παλινδρόμησης γιατί έχουν πανομοιότυπη μορφή με τη μορφή εκείνων στο μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης.

Παρ' όλα αυτά, οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων του $\boldsymbol{\beta}$ θα εξαρτώνται από το σχετικό $\hat{\mathbf{b}}_i$ και το αντίστροφο. Επομένως, αυτό που θα πρέπει να κάνουμε, είναι να ορίσουμε από κοινού αυτούς τους εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων ως τη λύση του:

$$(\hat{\mathbf{b}}_1^T, \dots, \hat{\mathbf{b}}_m^T, \hat{\boldsymbol{\beta}}^T) = \arg_{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m, \boldsymbol{\beta}} \min \|\mathbf{y}_e - \mathbf{X}_e(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m, \boldsymbol{\beta})^T\|^2$$

όπου έχουμε ορίσει ότι:

$$\mathbf{X}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{X}_1 \\ \Delta & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{0} & \Delta & \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{Z}_m & \mathbf{X}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \Delta & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{y}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε τους εκτιμητές από την παρακάτω σχέση:

$$(\hat{\mathbf{b}}_1^T, \dots, \hat{\mathbf{b}}_m^T, \hat{\boldsymbol{\beta}}^T) = (\mathbf{X}_e^T \mathbf{X}_e)^{-1} \mathbf{X}_e^T \mathbf{y}_e$$

Η σχετική εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας για το \mathcal{S}^2 , που υπολογίζεται μέσω της θεωρίας της γραμμικής παλινδρόμησης, είναι η εξής:

$$\hat{\mathcal{S}}^2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\|\mathbf{y}_e - \mathbf{X}_e (\hat{\mathbf{b}}_1^T, \dots, \hat{\mathbf{b}}_m^T, \hat{\boldsymbol{\beta}}^T)^T\|^2}{N}$$

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η εκτιμήτρια του \mathcal{S}^2 από τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας είναι το άθροισμα τετραγώνων των καταλοίπων, διαιρεμένο με το N και όχι με το $N - p$.

Μέσω αντικατάστασης των σχετικών εκτιμητριών στην (3.5), υπολογίζουμε την profiled πιθανοφάνεια:

$$L(\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta}, \hat{\mathcal{S}}^2(\boldsymbol{\theta})) = \frac{\exp(-N/2)}{[2p\hat{\mathcal{S}}^2(\boldsymbol{\theta})]^{N/2}} \prod_{i=1}^m \frac{abs|\Delta|}{\sqrt{|\mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i|}}$$

Για όλα τα παραπάνω, θα πρέπει να κάνουμε ορισμένα σχόλια. Αρχικά, δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε στους υπολογισμούς μας τον πίνακα \mathbf{X}_e , για το λόγο ότι μπορεί να είναι πολύ μεγάλες οι διαστάσεις του. Είναι δυνατόν να επωφεληθούμε από την «ελλειπτικότητα» του και να αποφύγουμε τελείως να χρησιμοποιήσουμε τον \mathbf{X}_e .

Δεύτερον, δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τα $\hat{\mathbf{b}}_1^T, \dots, \hat{\mathbf{b}}_m^T, \hat{\boldsymbol{\beta}}^T$ για να υπολογίσουμε την profiled πιθανοφάνεια. Το μόνο που χρειάζεται να γνωρίζουμε είναι το μήκος του διανύσματος των καταλοίπων στην έκφραση (3.2), το αυξημένο άθροισμα τετραγώνων των καταλοίπων.

Η παρουσίαση της (3.2) κάνοντας χρήση των «ψευδών» (“dummy”) παρατηρήσεων αποτελεί έναν τρόπο έκφρασης της πυκνότητας και κατά συνέπεια έναν τρόπο για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Υπάρχει όμως και εναλλακτικός τρόπος για να το κάνουμε αυτό. Μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα αυτή ως μια κανονική κατανομή, με μέση τιμή ίση με το μηδέν και χρησιμοποιώντας έναν πρότυπο πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων, $\boldsymbol{\Sigma}_i$.

Μπορούμε να εκφράσουμε το μοντέλο με έναν παράγοντα ως εξής:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \mathbf{e}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}_i^* \text{ με } i = 1, \dots, m$$

όπου $\mathbf{e}_i^* = \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \mathbf{e}_i$

Ας σημειώσουμε εδώ ότι το \mathbf{e}_i^* αποτελεί ένα άθροισμα δυο ανεξάρτητων, πολυμεταβλητών, κανονικών, τυχαίων διανυσμάτων. Επομένως, κατανέμονται ανεξάρτητα ως πολυμεταβλητά κανονικά διανύσματα, με μέση τιμή μηδέν και πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων $s^2\boldsymbol{\Sigma}_i$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{I} + \mathbf{Z}_i\boldsymbol{\Psi}\mathbf{Z}_i^T/s^2$. Τα \mathbf{y}_i είναι ανεξάρτητα πολυμεταβλητά κανονικά τυχαία διανύσματα, με μέση τιμή ίση με $\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}$ και πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων $s^2\boldsymbol{\Sigma}_i$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$p(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, s^2) = (2ps^2)^{n_i/2} \exp\left(\frac{(\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})}{-2s^2}\right) |\boldsymbol{\Sigma}_i|^{1/2}$$

Οι τιμές των $\boldsymbol{\beta}$ και s^2 που μεγιστοποιούν την πιθανοφάνεια για δεδομένο $\boldsymbol{\theta}$, είναι οι εξής:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{X}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{y}_i$$

$$\hat{S}^2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^m (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}))^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}))}{N}$$

Οι παραπάνω εκφράσεις μπορεί να είναι πι δύσκολες στο υπολογισμό, αλλά μας βοηθούν στην ανεύρεση της profiled πιθανοφάνειας.

3.5. Διάσπαση ορθογώνιων πινάκων

Οι ορθογώνιες – τριγωνικές διασπάσεις αποτελούν μια αριθμητική μέθοδο για τη λύση προβλημάτων ελαχίστων τετραγώνων. Συχνά αποκαλούνται QR διασπάσεις, καθώς συχνά οι διασπάσεις γράφονται ως εξής:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_t \mathbf{R}$$

όπου:

- Ο \mathbf{X} είναι ένας $(n \times p)$ πίνακας, με $n \geq p$ και τάξη ίση με p .
- Ο \mathbf{Q} είναι ένας $(n \times n)$ ορθογώνιος πίνακας.
- Ο \mathbf{R} είναι ένας $(p \times p)$ άνω τριγωνικός πίνακας.
- Ο \mathbf{Q}_t ένας πίνακας που αποτελείται από τις p πρώτες στήλες του \mathbf{Q} .

Όταν χρησιμοποιούμε τον όρο ορθογώνιος για τον πίνακα \mathbf{Q} , εννοούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις: $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$, κάτι που βέβαια υπονοεί ότι ισχύει και η σχέση: $\mathbf{Q}_t^T \mathbf{Q}_t = \mathbf{I}$. Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των ορθογώνιων πινάκων είναι ότι διατηρούν τα μήκη των διανυσμάτων μέσω πολλαπλασιασμού είτε με τον πίνακα \mathbf{Q} , είτε με τον \mathbf{Q}_t . Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός που εκπροσωπείται από τον πίνακα \mathbf{Q} , είναι η γενίκευση μιας αντιστροφής ή αντικατοπτρισμού στις διαστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, θα έχουμε:

$$\|\mathbf{Q}^T \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{Q}^T \mathbf{y})^T \mathbf{Q}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2$$

Αν εφαρμόσουμε το παραπάνω στο διάνυσμα των καταλοίπων σε ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, θα έχουμε το εξής:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 &= \|\mathbf{Q}^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\|^2 = \|\mathbf{Q}^T\mathbf{y} - \mathbf{Q}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 = \left\| \mathbf{c} - \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \right\|^2 = \\ &= \left\| \mathbf{c} - \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \right\|^2 = \|\mathbf{c}_1 - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}\|^2 + \|\mathbf{c}_2\|^2\end{aligned}$$

όπου το $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1^T \mathbf{c}_2^T)^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{y}$ αποτελεί το αντίστροφο διάνυσμα αποκρίσεων. Τα στοιχεία \mathbf{c}_1 και \mathbf{c}_2 είναι διαστάσεων $(p \times 1)$ και $[(n-p) \times 1]$ αντίστοιχα. Επειδή ο πίνακας είναι τάξεως p , ο $(p \times p)$ πίνακας \mathbf{R} είναι μη ιδιάζων και άνω τριγωνικός. Η λύση των ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ εύκολα υπολογίζεται ως λύση στην εξίσωση:

$$\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{c}_1$$

και το άθροισμα τετραγώνων των καταλοίπων είναι ίσο με $\|\mathbf{c}_2\|^2$. Πρέπει να σημειώσουμε ότι το άθροισμα τετραγώνων των καταλοίπων μπορεί να υπολογιστεί και χωρίς τον υπολογισμό του $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

3.6 Υπολογισμός της πιθανοφάνειας μέσω των διασπάσεων

Σε αυτήν την παράγραφο θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας (σχέση 3.7) μέσω των διασπάσεων. Αρχικά, θα θεωρήσουμε μια ορθογώνια – τριγωνική διάσπαση του επαυξημένου πίνακα \mathbf{Z}_i :

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Q}_{(i)} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11(i)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

όπου:

- ⊕ Ο πίνακας $\mathbf{Q}_{(i)}$ είναι διαστάσεων $(n_i + q) \times (n_i + q)$

✦ Ο πίνακας $\mathbf{R}_{11(i)}$ είναι διαστάσεων $(q \times q)$

Αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό στο στην εξίσωση του τετραγώνου του μήκους του διανύσματος της σχέσης (3.2), θα έχουμε:

$$\|y_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}_i \mathbf{b}_i\|^2 = \|\mathbf{Q}_{(i)}^T (y_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}_i \mathbf{b}_i)\|^2 = \|\mathbf{c}_{1(i)} - \mathbf{R}_{10(i)} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{R}_{11(i)} \mathbf{b}_i\|^2 + \|\mathbf{c}_{0(i)} - \mathbf{R}_{00(i)} \boldsymbol{\beta}\|^2$$

όπου:

- Ο $\mathbf{R}_{10(i)}$ έχει διαστάσεις $(q \times p)$
- Ο πίνακας $\mathbf{R}_{00(i)}$ έχει διαστάσεις $(n_i \times p)$
- Το $\mathbf{c}_{1(i)}$ είναι ένα $(q \times 1)$ διάνυσμα
- Το $\mathbf{c}_{0(i)}$ αποτελεί ένα $(n_i \times 1)$ διάνυσμα
- $$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{10(i)} \\ \mathbf{R}_{00(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{(i)}^T \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ \mathbf{Z}_i \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1(i)} \\ \mathbf{c}_{0(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{(i)}^T \begin{bmatrix} y_i \\ \boldsymbol{\Delta}_i \end{bmatrix}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να γράψουμε τους πίνακες αυτούς, είναι να τους θεωρήσουμε ως στοιχεία μιας ορθογώνιας – τριγωνικής διάσπασης ενός επαυξημένου πίνακα, δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_i & \mathbf{X}_i & y_i \\ \boldsymbol{\Delta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{(i)} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11(i)} & \mathbf{R}_{10(i)} & \mathbf{c}_{1(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{00(i)} & \mathbf{c}_{0(i)} \end{bmatrix}$$

όπου η απλοποίηση στην τριγωνική μορφή σταματάει μετά από τις πρώτες q στήλες.

Στο σημείο αυτό, μπορούμε να ξαναγράψουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας (3.2) και να εκφράσουμε το ολοκλήρωμα μέσα στην πιθανοφάνεια, ως εξής:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\exp\left[-\left(\|\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i\|^2 + \|\Delta\mathbf{b}_i\|^2\right)/2s^2\right]}{(2ps^2)^{q/2}} d\mathbf{b}_i = \\
& = \exp\left[\frac{\|\mathbf{c}_{o(i)} - \mathbf{R}_{00(i)}\boldsymbol{\beta}\|^2}{-2s^2}\right] \int \frac{\exp\left[\frac{\|\mathbf{c}_{1o(i)} - \mathbf{R}_{10(i)}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{R}_{11(i)}\mathbf{b}_i\|^2}{-2s^2}\right]}{(2ps^2)^{q/2}} d\mathbf{b}_i \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Καθώς ο πίνακας $\mathbf{R}_{11(i)}$ είναι μη ιδιάζων, μπορούμε να αλλάξουμε τις μεταβλητές. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $\boldsymbol{\varphi}_i = (\mathbf{c}_{1(i)} - \mathbf{R}_{10(i)}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{R}_{11(i)}\mathbf{b}_i)/s$ και το $d\boldsymbol{\varphi}_i = s^{-q} abs|\mathbf{R}_{11(i)}| d\mathbf{b}_i$ για να γράψουμε το ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int \frac{\exp\left(-\|\mathbf{c}_{1(i)} - \mathbf{R}_{10(i)}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{R}_{11(i)}\mathbf{b}_i\|^2/2s^2\right)}{(2ps^2)^{q/2}} d\mathbf{b}_i = \frac{1}{abs|\mathbf{R}_{11(i)}|} \int \frac{\exp(-\|\boldsymbol{\varphi}_i\|^2/2)}{(2p)^{q/2}} = \frac{1}{abs|\mathbf{R}_{11(i)}|}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ίδιο με εκείνο που δόθηκε από τη σχέση (3.5) από την άποψη ότι ισχύει:

$$\sqrt{|\mathbf{Z}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{Z}_i|} = \sqrt{\left[\mathbf{R}_{11(i)}^T \mathbf{0}\right] \mathbf{Q}_{(i)}^T \mathbf{Q}_{(i)} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11(i)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}} = \sqrt{|\mathbf{R}_{11(i)}^T \mathbf{R}_{11(i)}|} = \sqrt{|\mathbf{R}_{11(i)}^T| |\mathbf{R}_{11(i)}|} = \sqrt{\left(|\mathbf{R}_{11(i)}^T|\right)^2} = abs|\mathbf{R}_{11(i)}| \quad (3.7)$$

Επειδή ο πίνακας $\mathbf{R}_{11(i)}$ είναι τριγωνικός, η ορίζουσά του είναι απλά το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του. Αν αντικαταστήσουμε τη σχέση (3.7) στη σχέση (3.6) και στη συνέχεια στη σχέση (3.2), θα έχουμε την εξής έκφραση για την συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, s^2 | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^m \frac{\exp\left[-\|\mathbf{c}_{o(i)} - \mathbf{R}_{00(i)}\boldsymbol{\beta}\|^2/2s^2\right]}{(2ps^2)^{n_i/2}} abs\left(\frac{|\Delta|}{|\mathbf{R}_{11(i)}|}\right) =$$

$$= \frac{\exp\left[-\sum_{i=1}^m \|\mathbf{c}_{0(i)} - \mathbf{R}_{00(i)}\boldsymbol{\beta}\|^2 / 2s^2\right]}{(2ps^2)^{N/2}} \prod_{i=1}^m \text{abs}\left(\frac{|\Delta|}{|\mathbf{R}_{11(i)}|}\right)$$

Στο εκθετικό μέρος της παραπάνω σχέσης, ο όρος φαίνεται να μοιάζει με ένα άθροισμα τετραγώνων των καταλοίπων για το $\boldsymbol{\beta}$ σε όλες τις ομάδες. Αν παράγουμε μια νέα ορθογώνια – τριγωνική διάσπαση, μπορούμε να εκφράσουμε την πιθανοφάνεια σε μια πιο απλή μορφή:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{00(1)} & \mathbf{c}_{0(1)} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{R}_{00(m)} & \mathbf{c}_{0(m)} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{00} & \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_{-1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Οπότε, η νέα έκφραση για τη συνάρτηση πιθανοφάνειας, θα είναι η παρακάτω:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, s^2 | \mathbf{y}) = (2ps^2)^{-N/2} \exp\left(\frac{\|\mathbf{c}_{-1}\|^2 + \|\mathbf{c}_0 - \mathbf{R}_{00}\boldsymbol{\beta}\|^2}{-2s^2}\right) \prod_{i=1}^m \text{abs}\left(\frac{|\Delta|}{|\mathbf{R}_{11(i)}|}\right)$$

Οι τιμές των $\boldsymbol{\beta}$ και s^2 που μεγιστοποιούν την πιθανοφάνεια για δεδομένο $\boldsymbol{\theta}$ είναι οι εξής:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{R}_{00}^{-1}\mathbf{c}_0 \quad \text{και} \quad \hat{s}^2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\|\mathbf{c}_{-1}\|^2}{N} \quad (3.9)$$

Ως συνέπεια των παραπάνω, η profiled πιθανοφάνεια, θα διαμορφωθεί ως εξής:

$$L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \left(\frac{N}{2p\|\mathbf{c}_{-1}\|^2}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{N}{2}\right) \prod_{i=1}^m \text{abs}\left(\frac{|\Delta|}{|\mathbf{R}_{11(i)}|}\right)$$

και επίσης θα ισχύει ότι:

$$\mathbf{l}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \log L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{N}{2} \log [\log N - \log(2p) - 1] - N \log \|\mathbf{c}_{-1}\| + \sum_{i=1}^m \log \text{abs} \left(\frac{|\Delta|}{|\mathbf{R}_{11(i)}|} \right)$$

Η profiled πιθανοφάνεια μας δίνει τη δυνατότητα να θεωρήσουμε ότι η πιθανοφάνεια αποτελείται από το άθροισμα τριών στοιχείων. Ένα σταθερό μέρος, έναν λογάριθμο του αθροίσματος τετραγώνων των καταλοίπων και ένα άθροισμα των αναλογιών των λογαρίθμων στις ορίζουσες. Η profiled πιθανοφάνεια που μόλις παρουσιάσαμε παραπάνω, μας δίνει τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας του $\boldsymbol{\theta}$, τον $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Οι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας για τα $\boldsymbol{\beta}$ και \mathbf{S}^2 , $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ και $\hat{\mathbf{S}}^2$ αντίστοιχα, μπορούν να υπολογιστούν αν θέσουμε στις εξισώσεις (3.9) το $\boldsymbol{\theta}$ ίσο με $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Παρ' όλο που οι τυχαίες επιδράσεις δεν αποτελούν παραμέτρου για το μοντέλο, πολλές φορές συμπεριφέρονται με τέτοιο τρόπο, οδηγώντας μας να εκτιμήσουμε τις τιμές τους. Οι σχετικές μέγιστες τιμές των τυχαίων επιδράσεων που υπολογίζονται σύμφωνα με τη σχετική εκτίμηση του $\boldsymbol{\beta}$ αποτελούν τις άριστες γραμμικές αμερόληπτες προβλέψεις (Best Linear Unbiased Predictors – BLUP) όσον αφορά το \mathbf{b}_i , με $i = 1, \dots, m$. Τις εκτιμούμε μέσω των πινάκων της ορθογώνιας – τριγωνικής διάσπασης σύμφωνα με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\hat{\mathbf{b}}_i(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{R}_{1(i)}^{-1} (\mathbf{c}_{1(i)} - \mathbf{R}_{10(i)} \hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}))$$

Στην πράξη, αυτό που κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε το άγνωστο διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}$ με τον εκτιμητή του μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Η διάσπαση που χρησιμοποιήσαμε στη σχέση (3.8) είναι αντίστοιχη με τον υπολογισμό της ορθογώνιας – τριγωνικής διάσπασης για τον \mathbf{X}_e του κεφαλαίου 3.4, η οποία θα μπορούσε να είναι:

$$\mathbf{X}_e = \mathbf{Q}_e \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

όπου, θα ισχύουν τα εξής:

$$\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{10(1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{11(2)} & \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{10(2)} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{R}_{11(m)} & \mathbf{R}_{10(m)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{00} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1(1)} \\ \mathbf{c}_{1(2)} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{c}_{1(m)} \\ \mathbf{c}_0 \end{bmatrix}$$

Επομένως, οι εκτιμητές $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta})$ και \hat{S}^2 παραμένουν ίδιοι με προηγουμένως. Το \mathbf{c}_{-1} είναι το διάνυσμα των καταλοίπων στο σύστημα των συντεταγμένων που ορίζεται από τον \mathbf{Q}_e . Καθώς ο \mathbf{Q}_e αποτελεί ορθογώνιο πίνακα, η ποσότητα $\|\mathbf{c}_{-1}\|^2$ αποτελεί το άθροισμα τετραγώνων των καταλοίπων για το πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων που ορίζεται από τα \mathbf{X}_e και \mathbf{y}_e .

3.7. Περιορισμένος εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας

Η προσέγγιση της μεγίστης πιθανοφάνειας για την εκτίμηση του διανύσματος των παραμέτρων $\boldsymbol{\theta}$, δεν λαμβάνει υπόψη την απώλεια σε βαθμούς ελευθερίας που έχει ως αποτέλεσμα η εκτίμηση του $\boldsymbol{\beta}$. Τα μειονεκτήματα της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας παύουν να υπάρχουν με τη χρήση της μεθόδου περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας. Η προσέγγιση αυτή αναπτύχθηκε από πολλούς επιστήμονες για συγκεκριμένου τύπου ισορροπημένα μοντέλα ανάλυσης διακύμανσης. Η τεχνική επεκτάθηκε στη συνέχεια έτσι ώστε να έχει εφαρμογή σε όλα τα ισορροπημένα μοντέλα ανάλυσης διακύμανσης και τελικά διαμορφώθηκε στην τελική της μορφή, από τους Petterson και R. Thompson, το 1971 και 1974 αντίστοιχα.

Η μέθοδος της μεγίστης πιθανοφάνειας εκτιμά τα στοιχεία που εκφράζουν τη διακύμανση, όπως είναι το S_e^2 ή το S_b^2 , και έχει την τάση να υποεκτιμά τις παραμέτρους αυτές. Για το λόγο αυτό πολλοί είναι οι επιστήμονες που προτιμούν τη μέθοδο του περιορισμένου εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να εκφράσει κανείς το κριτήριο της μεθόδου αυτής. Ένας ορισμός που προσφέρει ταυτόχρονα και μια εύκολα υπολογίσιμη φόρμα, είναι εκείνος που έδωσαν οι Laird και Ware το 1982 και συνοψίζεται στο εξής:

$$L_R(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}^2 | \mathbf{y}) = \int L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}^2 | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\beta}$$

Αν εξετάσουμε το παραπάνω με βάση τη Μπεϋζιανή θεωρία, αντιλαμβανόμαστε ότι είναι παρόμοιο με την επιλογή μιας τοπικής ομοιόμορφης πρότερης κατανομής για το διάνυσμα των σταθερών επιδράσεων $\boldsymbol{\beta}$. Επομένως, θα έχουμε:

$$\mathbf{l}_R(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}^2 | \mathbf{y}) = \log L_R(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}^2 | \mathbf{y}) = -\frac{N-p}{2} \log(2ps^2) - \frac{\|\mathbf{c}_{-1}\|^2}{2s^2} - \log \text{abs} |\mathbf{R}_{00}| + \sum_{i=1}^m \log \text{abs} \left(\frac{|\Delta|}{|\mathbf{R}_{11(i)}|} \right)$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει τη σχετική εκτίμηση $\hat{\mathbf{S}}_R^2(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{c}_{-1}\|^2 / (N-p)$ για το \mathbf{s}^2 , από την οποία παίρνουμε την profiled περιορισμένη – λογαριθμική πιθανοφάνεια, που εκφράζεται ως εξής:

$$\mathbf{l}_R(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \mathbf{l}_R(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{S}}_R^2(\boldsymbol{\theta}) | \mathbf{y}) = \text{const} - (N-p) \log \|\mathbf{c}_{-1}\| - \log \text{abs} |\mathbf{R}_{00}| + \sum_{i=1}^m \log \text{abs} \left(\frac{|\Delta|}{|\mathbf{R}_{11(i)}|} \right)$$

Οι όροι που στοιχειοθετούν την profiled περιορισμένη – λογαριθμική πιθανοφάνεια είναι ίδιοι με εκείνους της profiled πιθανοφάνειας, αν εξαιρέσουμε το γεγονός ότι ο λογάριθμος του μήκους του διανύσματος των καταλοίπων έχει διαφορετικό πολλαπλασιαστή και ότι υπάρχει ένας επιπλέον όρος, εκείνος του $\log \text{abs} |\mathbf{R}_{00}|$, που είναι ίσος με:

$$\log \text{abs} |\mathbf{R}_{00}| = \frac{\log \left| \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{X}_i \right|}{2}$$

Η εκτίμηση των εκτιμητών περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας επιτεύχθηκε μέσω της μεγιστοποίησης της profiled περιορισμένης – λογαριθμικής πιθανοφάνειας μόνο ως προς $\boldsymbol{\theta}$. Έπειτα, με τη χρήση της εκτίμησης $\hat{\boldsymbol{\theta}}_R$, παίρνουμε τον περιορισμένο εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας του \mathbf{s}^2 , τον $\hat{\mathbf{S}}_R^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_R)$. Για τις άριστες γραμμικές αμερόληπτες προβλέψεις (Best Linear Unbiased Predictors – BLUP) του \mathbf{b}_i

χρησιμοποιούμε την εξίσωση $\hat{\mathbf{b}}_i(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{R}_{1(i)}^{-1}(\mathbf{c}_{1(i)} - \mathbf{R}_{10(i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}))$ και αντικαθιστούμε το $\boldsymbol{\theta}$ με το $\hat{\boldsymbol{\theta}}_R$.

Κατά κάποιον τρόπο είναι λίγο δύσκολο να προσδιορίσουμε τον περιορισμένο εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας του $\boldsymbol{\beta}$. Το κριτήριο περιορισμένης πιθανοφάνειας εξαρτάται μονάχα από το $\boldsymbol{\theta}$ και το \mathcal{S} . Παρ' όλα αυτά, είναι χρήσιμο να κάνουμε την «καλύτερη υπόθεση» για το $\boldsymbol{\beta}$ από την σχέση (3.9) όταν το $\hat{\boldsymbol{\theta}}_R$ προσδιοριστεί μέσω της μεθόδου της περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας.

Μια πολύ σημαντική διαφορά μεταξύ των δυο μοντέλων (της μεγίστης πιθανοφάνειας και της περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας) είναι ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας παραμένει η ίδια κατά τον επαναπροσδιορισμό των παραμέτρων (μία προς μία) των σταθερών επιδράσεων. Ενώ αντίθετα, η συνάρτηση της περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας αλλάζει. Μια αλλαγή στον πίνακα \mathbf{X}_i έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή στο $\log abs|\mathbf{R}_{00}|$ και αντίστοιχα στην πιθανοφάνεια.

Απ' όλα τα παραπάνω μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι τα μοντέλα μεικτών επιδράσεων που έχουν διαφορετικές τυχαίες επιδράσεις με τη χρήση των εκτιμητών περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας, δεν μπορούν να συγκριθούν ως προς τις περιορισμένες πιθανοφάνειές τους. Αυτό σημαίνει ότι τα τεστ του λόγου πιθανοφάνειας σε αυτήν την περίπτωση δεν έχουν καμία ισχύ.

3.8. Πολλαπλά επίπεδα τυχαίων επιδράσεων

Οι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας και περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας για τα μοντέλα μεικτών επιδράσεων με πολλαπλά επίπεδα μπορούν να υπολογιστούν με τον ίδιο τρόπο που υπολογίσαμε τους εκτιμητές στις παραπάνω παραγράφους για το απλό μοντέλο (με ένα επίπεδο). Για την παρουσίαση του μοντέλου με πολλαπλά επίπεδα, θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα το μοντέλο μεικτών επιδράσεων με δύο επίπεδα, ώστε να καταλήξουμε στον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανοφάνειας για την περίπτωση αυτή. Η πιθανοφάνεια για ένα μοντέλο με δύο επίπεδα όσον αφορά στις τυχαίες επιδράσεις, ορίζεται ως εξής:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{S}^2 | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^m \int \prod_{j=1}^{m_i} \left[\int p(\mathbf{y}_{ij} | \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_i, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{S}^2) p(\mathbf{b}_{ij} | \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{S}^2) d\mathbf{b}_{ij} \right] p(\mathbf{b}_i | \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{S}^2) d\mathbf{b}_i$$

Όπως κάναμε και με το μοντέλο με ένα επίπεδο, μπορούμε να απλοποιήσουμε τα ολοκληρώματα στην παραπάνω σχέση αν επαυξήσουμε τους πίνακες \mathbf{Z}_{ij} με τη χρήση του Δ_2 και εφαρμόζοντας μια ορθογώνια – τριγωνική διάσπαση αυτών των επαυξημένων πινάκων. Αυτό μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε τα εσωτερικά ολοκληρώματα. Για την εκτίμηση των εξωτερικών ολοκληρωμάτων, επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία. Επομένως, σύμφωνα με όλα τα προαναφερθέντα, πρώτα εκτελούμε μια διάσπαση των πινάκων, ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{ij} & \mathbf{Z}_{i,j} & \mathbf{X}_{ij} & \mathbf{y}_{ij} \\ \Delta_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{(ij)} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{22(ij)} & \mathbf{R}_{21(ij)} & \mathbf{R}_{20(ij)} & \mathbf{c}_{2(ij)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{11(ij)} & \mathbf{R}_{10(ij)} & \mathbf{c}_{1(ij)} \end{bmatrix}$$

με $i = 1, \dots, m$ και $j = 1, \dots, m_i$

όπου:

- Ο πίνακας $\mathbf{R}_{22(ij)}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας, διαστάσεων $(q_2 \times q_2)$.
- Οι υπόλοιποι πίνακες στην πρώτη γραμμή της παραπάνω διάσπασης χρησιμοποιούνται μόνο στην περίπτωση που οι σχετικοί εκτιμητές $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta})$ ή οι σχετικές μέγιστες τιμές $\hat{\mathbf{b}}_{ij}(\boldsymbol{\theta})$ και $\hat{\mathbf{b}}_i(\boldsymbol{\theta})$ ζητούνται.
- Οι πίνακες της δεύτερης γραμμής της διάσπασης $\mathbf{R}_{11(ij)}$, $\mathbf{R}_{10(ij)}$ και $\mathbf{c}_{2(ij)}$ έχουν ο κάθε ένας n_{ij} γραμμές.

Για τον υπολογισμό των εξωτερικών ολοκληρωμάτων και πάλι διαμορφώνουμε και εκτελούμε μια διάσπαση επαυξημένου πίνακα, ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11(i1)} & \mathbf{R}_{10(i1)} & \mathbf{c}_{1(i1)} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{R}_{11(im_i)} & \mathbf{R}_{10(im_i)} & \mathbf{c}_{1(im_i)} \\ \Delta_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{(i)} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11(i)} & \mathbf{R}_{10(i)} & \mathbf{c}_{1(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{00(i)} & \mathbf{c}_{0(i)} \end{bmatrix}$$

με $i = 1, \dots, m$

Η διάσπαση που χρησιμοποιείται για τη διαμόρφωση των \mathbf{R}_{00} , \mathbf{c}_0 και \mathbf{c}_{-1} είναι η ίδια με εκείνη της σχέσεως (3.8). Κάνοντας χρήση της ίδιας μεθοδολογίας όπως στην περίπτωση του μοντέλου με ένα επίπεδο για τις τυχαίες επιδράσεις, και συνδυάζοντας τις τελευταίες εξισώσεις, έχουμε τη δυνατότητα να εκφράσουμε την profiled λογαριθμική πιθανοφάνεια για τα θ_1 και θ_2 , όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{y}) &= \log L(\hat{\boldsymbol{\beta}}(\theta_1, \theta_2), \theta_1, \theta_2, \hat{\mathbf{S}}^2(\theta_1, \theta_2) | \mathbf{y}) = \\ &= \text{const} - N \log \|\mathbf{c}_{-1}\| + \sum_{i=1}^m \log \text{abs} \left(\frac{|\Delta_1|}{|\mathbf{R}_{11(i)}|} \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \log \text{abs} \left(\frac{|\Delta_2|}{|\mathbf{R}_{22(ij)}|} \right) \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, η περιορισμένη λογαριθμική πιθανοφάνεια, θα είναι της εξής μορφής:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_R(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{y}) &= \log L_R(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R(\theta_1, \theta_2), \theta_1, \theta_2, \hat{\mathbf{S}}_R^2(\theta_1, \theta_2) | \mathbf{y}) = \\ &= \text{const} - (N - p) \log \|\mathbf{c}_{-1}\| - \log \text{abs} |\mathbf{R}_{00}| + \sum_{i=1}^m \log \text{abs} \left(\frac{|\Delta_1|}{|\mathbf{R}_{11(i)}|} \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \log \text{abs} \left(\frac{|\Delta_2|}{|\mathbf{R}_{22(ij)}|} \right) \end{aligned}$$

Όπως είναι φυσικό, οι παραπάνω μέθοδοι επεκτείνονται έτσι ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή τους και στην περίπτωση ύπαρξης Q επιπέδων τυχαίων επιδράσεων.

3.9. Αλγόριθμοι μεγιστοποίησης της πιθανοφάνειας

Υπάρχουν πολλοί επαναλαμβανόμενοι αριθμητικοί αλγόριθμοι που μπορούν να θεωρηθούν ως υπονήφιοι για τον υπολογισμό των εκτιμητών για το διάνυσμα των

παραμέτρων θ της μεγίστης πιθανοφάνειας ή της περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας. Μερικοί από αυτούς, έχουν αναπτυχθεί για συγκεκριμένες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα για τον υπολογισμό των εκτιμητών μεγίστης πιθανοφάνειας, όσον αφορά τους όρους της διακύμανσης. Άλλοι μπορεί να θεωρηθούν ως γενικές διαδικασίες για την αριθμητική λύση ευρύτερων κατηγοριών προβλημάτων περιορισμένης, μη γραμμικής βελτιστοποίησης. Στη βιβλιογραφία, αναφέρεται ότι δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα ελπίδες ανεύρεσης ενός μόνο επαναλαμβανόμενου αλγόριθμου, ο οποίος θα είναι ο καλύτερος για κάθε πρόβλημα το οποίο προκύπτει. Για παράδειγμα, ένας αλγόριθμος που απαιτεί σχετικά λιγότερους υπολογισμούς σε κάποια περίπτωση για να συγκλίνει σε έναν εκτιμητή μεγίστης ή περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας, είναι πιθανόν να αποτύχει στην επίτευξη του στόχου αυτού αν εφαρμοστεί σε κάποιου άλλου είδους πρόβλημα. Για να αποφασίσουμε ποιος από τους αλγόριθμους που έχουμε στη διάθεσή μας θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σε μια συγκεκριμένη εφαρμογή, πρέπει να προβούμε σε κάποια αξιολόγηση των υπολογιστικών τους απαιτήσεων αλλά και των δυνατοτήτων τους, όταν αυτοί εφαρμοστούν πάνω σε ένα δεδομένο σετ παρατηρήσεων. Ειδικά οι ποσότητες ενός καλού αλγορίθμου, περιλαμβάνουν, με σειρά προτεραιότητας τα εξής: 1) επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς, οι οποίοι δεν είναι απαγορευτικά χρονοβόροι, 2) γρήγορη και σταθερή σύγκλιση και 3) μια καλή μέθοδο για την επίτευξη της σύγκλισης.

Η μεγιστοποίηση της profiled λογαριθμικής πιθανοφάνειας ή της profiled περιορισμένης – λογαριθμικής πιθανοφάνειας σε ένα μοντέλο μεικτών γραμμικών επιδράσεων συχνά επιτυγχάνεται μέσω των EM αλγορίθμων ή των αλγορίθμων Newton – Raphson.

3.9.1. Ο EM αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος EM είναι ένα ιδιαίτερα δημοφιλές επαναληπτικός αλγόριθμος για την εκτίμηση της πιθανοφάνειας σε μοντέλα που περιλαμβάνουν ελλιπική δεδομένα. Η διαδικασία του αλγορίθμου αυτού είναι αξιολογή όχι μόνο για την απλότητα και τη γενική δυνατότητα εφαρμογής της αντίστοιχης θεωρίας, αλλά και λόγω του μεγάλου πλήθους των εφαρμογών τις οποίες περιλαμβάνει [βλ. Laird and Ware (1982), Pinheiro and Bates (2000)].

Ο αλγόριθμος για τα μοντέλα μεικτών γραμμικών επιδράσεων βασίζεται στην ιδέα της θεώρησης των τυχαίων επιδράσεων ως μη παρατηρούμενες τιμές. Πρέπει βέβαια να σημειώσουμε ότι ο EM αλγόριθμος μπορεί να εκτελεστεί με πολλούς τρόπους.

- **Το βήμα E:** Στην w -οστή επανάληψη του αλγορίθμου, χρησιμοποιούμε το τρέχον διάνυσμα των παραμέτρων διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων $\theta^{(w)}$, για να εκτιμήσουμε την κατανομή του \mathbf{y} , δεδομένου του διανύσματος των παρατηρήσεων \mathbf{y} , δηλαδή για να εκτιμήσουμε το $\mathbf{b}|\mathbf{y}$. Έπειτα, παράγουμε την πρόβλεψη της λογαριθμικής πιθανοφάνειας για ένα νέο διάνυσμα θ , δεδομένης αυτής της κατανομής.
- **Το βήμα M:** Μεγιστοποιούμε την πρόβλεψη που υπολογίσαμε στο προηγούμενο βήμα ως προς θ , για να παράγουμε το $\theta^{(w+1)}$.

Καθώς κάθε επανάληψη του αλγορίθμου αποτελείται από ένα βήμα E και ένα βήμα M, τον αποκαλούμε αλγόριθμο EM.

3.9.2. Ο αλγόριθμος Newton – Raphson

Ο αλγόριθμος Newton – Raphson είναι πιθανότατα μια από τις πλέον πολυχρησιμοποιημένες διαδικασίες. Χρησιμοποιούμε την επέκταση πρώτης τάξης του κλίτου της συνάρτησης της λογαριθμικής πιθανοφάνειας (δηλαδή της score function) σε μια περιοχή που βρίσκεται κοντά στον τρέχοντα εκτιμητή θ , έτσι ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να παράγουμε τον επόμενο εκτιμητή $\theta^{(w+1)}$. Σε κάθε επανάληψη πρέπει να υπολογίζουμε την score function και την παράγωγό της. Υπό ορισμένες συνθήκες, που ικανοποιούνται σε γενικά πλαίσια στην πράξη, ο αλγόριθμος συγκλίνει quadratically. Παρ' όλα αυτά όμως, επειδή ο υπολογισμός της παραγώγου είναι αρκετά δαπανηρός από την άποψη των υπολογισμών, συχνά αυτό που κάνουμε είναι να χρησιμοποιούμε απλουστευμένες υπολογιστικά προσεγγίσεις, καταλήγοντας έτσι στους αλγορίθμους Quasi – Newton.

3.9.3. Γενικά συμπεράσματα για τους αλγόριθμους

Γενικά, κάθε επαναληπτικός αλγόριθμος απαιτεί κάποιες αρχικές τιμές για τις παραμέτρους που θα εκτιμηθούν. Λόγω του γεγονότος ότι μπορούμε να εκφράσουμε και την profiled λογαριθμική πιθανοφάνεια αλλά και την profiled περιορισμένη λογαριθμική πιθανοφάνεια ως συνάρτηση των παραμέτρων του διανύσματος θ , αυτό που χρειαζόμαστε είναι να έχουμε στη διάθεσή μας κάποιες αρχικές τιμές για το θ , πριν από οποιαδήποτε επαναληπτική διαδικασία για τα γραμμικά μεικτά μοντέλα. Αυτές οι αρχικές τιμές συνήθως αποκτώνται από κάποια προηγούμενη προσαρμογή παρόμοιων δεδομένων ή αντλούνται από τα δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας προς ανάλυση.

Όσον αφορά στον αλγόριθμο EM, οι επαναλήψεις γίνονται γρήγορα και υπολογίζονται εύκολα. Αυτό που συμβαίνει τις περισσότερες φορές είναι ότι παρ' όλο που οι επαναλήψεις των EM δίνουν παραμέτρους πολύ γρήγορα στην περιοχή του βέλτιστου, ο αλγόριθμος έχει την τάση να είναι αργός στην περιοχή αυτή. Αντίθετα, οι επαναλήψεις του αλγορίθμου Newton – Raphson είναι πιο πολύπλοκες υπολογιστικά και μπορεί να είναι ασταθείς όταν βρίσκονται μακριά από την βέλτιστη τιμή. Όμως, ο αλγόριθμος συγκλίνει πολύ γρήγορα σε μια περιοχή κοντά στο βέλτιστο.

Έχει προταθεί από τους Pinheiro και Bates μια συμβιβαστική προσέγγιση λόγω του παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα, αρχίζουμε με μια αρχική τιμή $\theta^{(0)}$ και εκτελούμε έναν περιορισμένο αριθμό επαναλήψεων κάνοντας χρήση του αλγορίθμου EM και έπειτα αλλάζουμε, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Newton – Raphson. Οι EM επαναλήψεις, αρχικά, μπορούν να θεωρηθούν ως μια διαδικασία εκκαθάρισης στις αρχικές τιμές πριν την κύρια διαδικασία βελτιστοποίησης.

3.10. Ασυμπτωτική συμπεριφορά

Η εξαγωγή στατιστικών συμπερασμάτων για τις παραμέτρους ενός γραμμικού μεικτού μοντέλου, βασίζεται στις προσεγγιστικές κατανομές για τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας και τους εκτιμητές περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας, που παράγονται από την ασυμπτωτική θεωρία. Έχει αποδειχθεί ότι οι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας στο γενικό γραμμικό μεικτό μοντέλο, παραμένουν αμετάβλητοι και

ακολουθούν ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή, υπό ορισμένες προϋποθέσεις που γενικά ικανοποιούνται σε γενικές γραμμές στην πράξη.

Ο πίνακας (κατά προσέγγιση) διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων για τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας παράγεται μέσω του πίνακα πληροφορίας που αντιστοιχεί στη συνάρτηση λογαριθμικής πιθανοφάνειας $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_q, s^2)$. Επειδή ισχύει ότι:

$$E(\partial^2 \mathbf{l} | \partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\theta}_q^T) = \mathbf{0} \quad \text{με } q=1, \dots, Q \quad \text{και} \quad E(\partial^2 \mathbf{l} | \partial \boldsymbol{\beta} \partial s^2) = \mathbf{0}$$

Ο πίνακας πληροφορίας για ένα μοντέλο γραμμικών μεικτών επιδράσεων με Q επίπεδα, είναι block διαγώνιος, δηλαδή οι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας του $\boldsymbol{\beta}$ είναι ασυμπτωτικά ασυσχέτιστοι με τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας των $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_q$ και s^2 .

Γενικά, οι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας για ένα μοντέλο με Q επίπεδα, κατανέμεται ασυμπτωτικά, όπως παρακάτω:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \square N(\boldsymbol{\beta}, s^2 [\mathbf{R}_{00}^{-1}, \mathbf{R}_{00}^{-T}])$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \mathbf{M} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_Q \\ \log \hat{S} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \mathbf{M} \\ \boldsymbol{\theta}_Q \\ \log S \end{bmatrix}, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_Q, S) \right) \quad (3.10)$$

$$\text{όπου } \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_Q, S) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \boldsymbol{\theta}_1 \partial \boldsymbol{\theta}_1^T} & \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \boldsymbol{\theta}_2 \partial \boldsymbol{\theta}_1^T} & \mathbf{L} & \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \log S \partial \boldsymbol{\theta}_1^T} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \boldsymbol{\theta}_1 \partial \log S} & \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \boldsymbol{\theta}_2 \partial \log S} & \mathbf{L} & \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial^2 \log S} \end{bmatrix}$$

όπου:

- Το $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_q, S^2)$ είναι η profiled λογαριθμική πιθανοφάνεια των σταθερών επιδράσεων.
- Το \mathbf{I} αποτελεί τον εμπειρικό πίνακα πληροφορίας.
- Το \mathbf{R}_{00} είναι το ίδιο με εκείνο που εμφανίζεται στη σχέση (3.8).
- Κάνουμε χρήση του λογαρίθμου του S αντί εκείνου του S^2 για να αποδείξουμε μια παραμετροποίηση χωρίς περιορισμούς, για την οποία η κανονικότητα κατά προσέγγιση τείνει να γίνεται πιο ακριβής.

Έχει αποδειχθεί από τον Pinheiro (1994) ότι οι εκτιμητές που παίρνουμε από την περιορισμένη λογαριθμική πιθανοφάνεια σε ένα γραμμικό μεικτό μοντέλο είναι επίσης σταθεροί και κατανέμονται ασυμπτωτικά σύμφωνα με την κανονική κατανομή. Οι κατανομές μοιάζουν αρκετά με εκείνες της μεγίστης πιθανοφάνειας, αν αντικαταστήσουμε το \mathbf{I} με το \mathbf{I}_R , όπως δείξαμε και σε προηγούμενες παραγράφους.

Στην πράξη, οι παράμετροι $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_q$ και S^2 που είναι άγνωστοι, αντικαθιστώνται από τους εκτιμητές τους, που εκφράζονται μέσω των κατά προσέγγιση πινάκων διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων. Οι κατανομές για τους εκτιμητές χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση των ελέγχων υποθέσεων αλλά και των διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους των γραμμικών μεικτών μοντέλων.

3.11. Έλεγχοι υποθέσεων και διαστήματα εμπιστοσύνης

Αυτό που συνήθως θέλουμε μετά την προσαρμογή κάποιου μοντέλου στα δεδομένα μας, είναι αν έχουμε πρόσβαση στην ακρίβεια των εκτιμητών και τη «σημαντικότητα» των διαφόρων όρων του μοντέλου ή ακόμα και να συγκρίνουμε πόσο καλά προσαρμόζεται ένα μοντέλο στα δεδομένα μας σε σχέση με κάποιο άλλο μοντέλο. Στην παράγραφο αυτήν θα παρουσιάσουμε τα τεστ για τον έλεγχο των υποθέσεων του μοντέλου και τα διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους που περιέχει ένα γραμμικό μεικτό μοντέλο.

3.11.1. Τεστ λόγου πιθανοφάνειας (*Likelihood Ratio Test*)

Μια ευρύτερα γνωστή μέθοδος για τη σύγκριση σύνθετων μοντέλων που εφαρμόζονται μέσω της μεγίστης πιθανοφάνειας, είναι το τεστ του λόγου πιθανοφάνειας. Ένα τέτοιο τεστ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και με μοντέλα που εφαρμόζονται μέσω της περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας, αλλά μόνο στην περίπτωση που τα δύο μοντέλα έχουν εφαρμοστεί μέσω της περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας και αν ο καθορισμός των σταθερών επιδράσεων είναι ο ίδιος και για τα δύο μοντέλα.

Ένα στατιστικό μοντέλο συνθέτεται με ένα άλλο αν αποτελεί ειδική περίπτωση ενός γενικότερου μοντέλου. Αν το L_2 εκφράζει την πιθανοφάνεια του γενικού μοντέλου και το L_1 αποτελεί την πιθανοφάνεια του περιορισμένου μοντέλου, τότε θα πρέπει να έχουμε ότι $L_2 > L_1$ και αντίστοιχα, $\log L_2 > \log L_1$. Το στατιστικό του τεστ του λόγου πιθανοφάνειας θα δίνεται από την παρακάτω έκφραση (η οποία θα εμφανίζεται και θετική):

$$2\log(L_2|L_1) = 2[\log(L_2) - \log(L_1)]$$

Αν το k_i αποτελεί τον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν στο μοντέλο i , τότε η κατανομή του στατιστικού του τεστ του λόγου πιθανοφάνειας ακολουθεί ασυμπτωτικά την χ^2 κατανομή με $k_2 - k_1$ βαθμούς ελευθερίας. Αυτή η θεωρία ισχύει κάτω από τη μηδενική υπόθεση ότι το περιορισμένο μοντέλο είναι κατάλληλο.

Για τη σύγκριση μεταξύ δύο μοντέλων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα κριτήρια, όπως είναι το κριτήριο της πληροφορίας του Akaike (AIC) και το κριτήριο της πληροφορίας του Bayes (BIC), το οποίο ονομάζεται και Μπεϋζιανό κριτήριο του Schwarz (SBC). Τα κριτήρια αυτά υπολογίζονται μέσω των σχέσεων [βλ. Pinheiro and Bates (2000)]:

$$AIC = -2\mathbf{l}(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{y}) + 2n_{par}$$

$$BIC = -2\mathbf{l}(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{y}) + n_{par} \log(N)$$

Το n_{par} εκφράζει τον αριθμό των παραμέτρων στο μοντέλο. Και στις δύο περιπτώσεις, η μικρότερη τιμή του κριτηρίου είναι και η καταλληλότερη. Αυτό σημαίνει ότι αν για παράδειγμα χρησιμοποιούμε το κριτήριο AIC για να συγκρίνουμε δύο μοντέλα, με το ίδιο σετ δεδομένων, επιλέγουμε εκείνο που θα μας δώσει μικρότερη τιμή για το AIC, το ίδιο αν χρησιμοποιούμε το κριτήριο BIC. Τα κριτήρια αυτά μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε και σε μοντέλα που εφαρμόζονται με την περιορισμένη μέγιστη πιθανοφάνεια, αν αντικαταστήσουμε το $\mathbf{I}(\hat{\theta}|\mathbf{y})$ με το $\mathbf{I}(\hat{\theta}_R|\mathbf{y})$ και το $\log(N)$ με το $\log(N - p)$.

Γενικά χρησιμοποιούμε τα τεστ του λόγου πιθανοφάνειας για να εκτιμήσουμε τη σημαντικότητα των όρων στη δομή των τυχαίων επιδράσεων. Δηλαδή, εφαρμόζουμε διαφορετικά σύνθετα μοντέλα, στα οποία η δομή των τυχαίων επιδράσεων αλλάζει και εκτελούμε τεστ λόγου πιθανοφάνειας. Διατυπώθηκε το 1994 από τους Stram και Lee ότι τα τεστ αυτά που γίνονται επάνω στη δομή των τυχαίων επιδράσεων, μπορεί να είναι αρκετά συντηρητικά, καθώς η τιμή του p-value που υπολογίζεται από την κατανομή $C_{k_2-k_1}^2$ είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι θα έπρεπε. Όπως υποστηρίζουν, όταν μεταβαίνουμε από ένα γενικό μοντέλο σε ένα πιο περιορισμένο, είναι απαραίτητο να θέσουμε ορισμένες από τις διακυμάνσεις των τυχαίων επιδράσεων ίσες με το μηδέν, που είναι πάνω στο όριο της περιοχής των παραμέτρων. Τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα του τεστ λόγου πιθανοφάνειας πρέπει να προσαρμοστούν για τις συνθήκες που ισχύουν για την περιοχή αυτή.

Η χρήση της μεθόδου του λόγου πιθανοφάνειας για τη δημιουργία τεστ που θα εφαρμόζονται σε μη μηδενικά στοιχεία διακύμανσης είναι ένα μη σταθερό πρόβλημα στη χρήση της μέγιστης πιθανοφάνειας, γιατί η μηδενική υπόθεση (το στοιχείο της διακύμανσης είναι ίσο με το μηδέν) τοποθετεί την αληθινή τιμή των παραμέτρων της διακύμανσης στο όριο του χώρου των παραμέτρων, που ορίζεται από την εναλλακτική υπόθεση. Αυτό επιδρά στη συμπεριφορά των τεστ του λόγου πιθανοφάνειας ως προς τα μεγάλα δείγματα, έτσι ώστε η κατανομή του διπλάσιου του λογαρίθμου του λόγου πιθανοφάνειας να μην μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μια C^2 τυχαία μεταβλητή.

3.11.2. Έλεγχος υποθέσεων για τις σταθερές επιδράσεις

Τα τεστ του λόγου πιθανοφάνειας μπορούν να εφαρμοστούν στην περίπτωση που έχουμε δυο σύνθετα μοντέλα που παρουσιάζουν διαφορές στους όρους των σταθερών επιδράσεων. Το τεστ μπορεί να υπολογιστεί μονάχα για εφαρμογές της μεγίστης πιθανοφάνειας. Ο λόγος πιθανοφάνειας δεν έχει ισχύ για την περίπτωση της περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας, γιατί υπάρχει ένας όρος στο κριτήριο της περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας που αλλάζει με τη μεταβολή στις σταθερές επιδράσεις.

Παρ' όλο που θεωρητικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τεστ του λόγου πιθανοφάνειας για μοντέλα διαφορετικών σταθερών επιδράσεων στα οποία εφαρμόζεται η μέθοδος της μεγίστης πιθανοφάνειας, δεν είναι κάτι που συνιστάται. Ένα τέτοιο τεστ έχει την τάση να μην είναι συντηρητικό όταν κάνουμε χρήση της c^2 κατανομής. Μια πιο συνηθισμένη προσέγγιση στον έλεγχο υποθέσεων για τις σταθερές επιδράσεις, είναι να θέσουμε περιορισμούς στις εκτιμήσεις των παραμέτρων των τυχαίων επιδράσεων διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων, $\hat{\theta}$. Οι περιορισμένοι εκτιμητές για τις σταθερές επιδράσεις, $\hat{\beta}(\theta)$, για να συγκεκριμένη τιμή του $\hat{\theta}$, είναι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων. Στη σχέση (3.10) η κατανομή των εκτιμητών μεγίστης και περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας των σταθερών επιδράσεων είναι ακριβείς για τους περιορισμένους εκτιμητές $\hat{\beta}(\theta)$. Τα τεστ σημαντικότητας για τις σταθερές επιδράσεις υπολογίζονται αν χρησιμοποιήσουμε το γνωστό F-τεστ ή ακόμα και το t-τεστ των γραμμικών μοντέλων παλινδρόμησης. Βασιζόμαστε λοιπόν στον εκτιμητή της διακύμανσης, ως εξής [βλ. Pinheiro and Bates (2000)]:

$$\hat{S}_R^2(\theta) = s^2 = \frac{RSS}{N-p} = \frac{\|e_{-1}\|^2}{N-p}$$

Στην πράξη, το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων θ , αντικαθίσταται από τον εκτιμητή του μεγίστης πιθανοφάνειας, ή τον εκτιμητή του περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας, έτσι ώστε τα τεστ να ισχύουν μονάχα προσεγγιστικά. Τα t-τεστ εξετάζουν

τη marginal σημαντικότητα του κάθε ένα συντελεστή σταθερών επιδράσεων, όταν όλες οι άλλες σταθερές επιδράσεις περιλαμβάνονται στο μοντέλο. Από την άλλη μεριά, τα F-τεστ εξετάζουν τη σημαντικότητα των όρων των σταθερών επιδράσεων σε ένα μοντέλο, το οποίο μπορεί να περιλαμβάνει πολλούς συντελεστές. Για παράδειγμα, μπορούμε να ελέγξουμε ταυτόχρονα τη σημαντικότητα ενός, δύο ή τριών συντελεστών στο ίδιο μοντέλο.

Τα τεστ αυτά απαιτούν βαθμούς ελευθερίας για τον παρονομαστή. Στην περίπτωση του F-τεστ οι βαθμοί ελευθερίας του αριθμητή είναι επίσης απαραίτητοι και ορίζονται από τον ίδιο τον όρο. Οι βαθμοί ελευθερίας του παρονομαστή υπολογίζονται βάσει του επιπέδου ομαδοποίησης, στο οποίο υπολογίζεται ο όρος αυτός. Για να γίνουμε περισσότερο κατανοητοί, λέμε ότι ένας όρος είναι «εσωτερικά» συναφής με έναν παράγοντα ομαδοποίησης αν η τιμή του αλλάζει μέσα στο επίπεδο του παράγοντα. Αντίστοιχα, ένας παράγοντας λέμε ότι είναι «εξωτερικά» συναφής με έναν παράγοντα ομαδοποίησης αν η τιμή του δεν αλλάζει μέσα στο δεδομένο επίπεδο του παράγοντα ομαδοποίησης. Ένας όρος εκτιμάται σε ένα επίπεδο i αν είναι εσωτερικός στον $(i-1)$ παράγοντα ομαδοποίησης και εξωτερικός στον i -οστό παράγοντα. Αν ένας όρος είναι εσωτερικός σε όλους τους Q παράγοντες ομαδοποίησης, τότε εκτιμάται στο επίπεδο των σφαλμάτων μέσα στην ομάδα, που ορίζεται ως το $(Q+1)$ επίπεδο.

Για την παράμετρο που αντιστοιχεί στην (πρώτη συνήθως) στήλη των πινάκων \mathbf{X}_i του μοντέλου, που αποτελείται από μονάδες, χρησιμοποιούμε διαφορετική προσέγγιση. Ως παράμετρο, την εκτιμάμε στο 0 επίπεδο επειδή είναι εξωτερική σε όλους τους παράγοντες ομαδοποίησης. Παρ' όλα αυτά, οι βαθμοί ελευθερίας του παρονομαστή για την παράμετρο αυτή υπολογίζονται, σαν να εκτιμούνταν στο επίπεδο $(Q+1)$. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι η παράμετρος αντλεί πληροφορία από όλες τις παρατηρήσεις.

Αν ορίσουμε ως m_i το συνολικό αριθμό των ομάδων για το i -οστό επίπεδο (θεωρώντας ότι ισχύει $m_0 = 1$ όταν το μοντέλο περιέχει μια τέτοια παράμετρο, $m_0 = 0$ στην αντίθετη περίπτωση και $m_{Q+1} = N$) και ως p_i το σύνολο των βαθμών ελευθερίας που αντιστοιχούν στους όρους που εκτιμούνται στο i -οστό επίπεδο. Τότε, οι βαθμοί ελευθερίας του παρονομαστή του i -οστού επιπέδου θα είναι ίσοι με:

$$denDF_i = m_i - (m_{i-1} + p_i) \quad \text{με } i = 1, \dots, Q+1$$

Ο παραπάνω ορισμός είναι σύμφωνος με τον κλασσικό ορισμό των βαθμών ελευθερίας που αντιστοιχούν στο μοντέλο της πολυδιάστατης ανάλυσης διακύμανσης. Επίσης δίνει μια λογική προσέγγιση για τα περισσότερο γενικά μεικτά μοντέλα.

3.11.3. Κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης

Τα κατά προσέγγιση διαστήματα εμπιστοσύνης για τα στοιχεία διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων αλλά και για τις σταθερές επιδράσεις παράγοντα από τις κατά προσέγγιση κατανομές για τους εκτιμητές μεγίστης και περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας, όπως αναφέραμε και σε προηγούμενες παραγράφους.

Αν ορίσουμε ως df_j τους βαθμούς ελευθερίας για τον παρονομαστή του t-τεστ που θα αντιστοιχεί στην j -οστή σταθερή επίδραση, το κατά προσέγγιση διάστημα εμπιστοσύνης για το β_j θα είναι το εξής [βλ. Pinheiro and Bates (2000)]:

$$\hat{\beta}_j \pm t_{df_j, (1-a/2)} \hat{S}_R \sqrt{(\mathbf{R}_{00}^{-1} \mathbf{R}_{00}^{-T})_{ij}}$$

όπου το \hat{S}_R εκφράζει τον εκτιμητή περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας του \mathbf{S} και ο πίνακας \mathbf{R}_{00} υπολογίζεται στην εκτιμώμενη τιμή του $\boldsymbol{\theta}$.

Τα κατά προσέγγιση διαστήματα εμπιστοσύνης για την εντός των ομάδων σταθερή απόκλιση δίνονται από τη σχέση (3.10). Αν το $[\mathbf{I}^{-1}]_{SS}$ εκφράζει το τελευταίο διαγώνιο στοιχείο του αντιστρόφου εμπειρικού πίνακα πληροφορίας, τότε το κατά προσέγγιση διάστημα εμπιστοσύνης για το \mathbf{S} , σε επίπεδο $(1-a)$, θα είναι το:

$$\left[\hat{\mathbf{S}} \exp\left(-z_{(1-a/2)} \sqrt{[\mathbf{I}^{-1}]_{SS}}\right), \hat{\mathbf{S}} \exp\left(z_{(1-a/2)} \sqrt{[\mathbf{I}^{-1}]_{SS}}\right) \right]$$

είναι προφανές, ότι τα διαστήματα εμπιστοσύνης μπορούν αν εφαρμοστούν και για τους εκτιμητές μεγίστης και περιορισμένης μεγίστης πιθανοφάνειας, αν κάνουμε τις κατάλληλες προσαρμογές.

Τα διαστήματα εμπιστοσύνης για τα στοιχεία των διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων των τυχαίων επιδράσεων δεν είναι εύκολα υπολογίσιμα. Στην πράξη, αυτό που μπορεί να προκαλέσει το ενδιαφέρον είναι η κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης στην κλίμακα των στοιχείων του πίνακα Ψ και όχι στην κλίμακα των (χωρίς περιορισμούς) παραμέτρων του θ , που χρησιμοποιούνται για την βελτιστοποίηση. Αν ο πίνακας διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων έχει απλή μορφή (για παράδειγμα αν είναι διαγώνιος) τότε είναι πιθανό να μετατρέψουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης που έχουμε στη διάθεσή μας βάση της κλίμακας χωρίς περιορισμούς στην αρχική κλασσική κλίμακα. Αυτό που θα πρέπει να κάνουμε θα είναι να χρησιμοποιήσουμε την εκθετική μορφή των ορίων του διαστήματος στην περίπτωση ενός διαγώνιου πίνακα.

Αντίθετα, αν ο πίνακας Ψ έχει γενικά θετικά ορισμένη μορφή, δεν είναι δυνατόν να κάνουμε τη μετατροπή αυτή στην αρχική κλίμακα στα διαστήματα εμπιστοσύνης. Αν η διαδικασία η οποία ακολουθείται είναι εκείνη της θετικά ορισμένης μορφής του πίνακα Ψ , τότε κάνουμε λόγο για την προσέγγιση της «φυσικής» παραμετροποίησης, η οποία χρησιμοποιεί τον λογάριθμο των τυπικών αποκλίσεων και το γενικευμένα logit των συσχετίσεων. Το γενικευμένα logit για μία δεδομένη παράμετρο συσχέτισης $-1 < r < 1$ είναι ίσο με:

$$\log \left[\frac{1+r}{1-r} \right] \quad \text{με τιμές } (-\infty, \infty)$$

Θέτουμε ως η το διάνυσμα που ορίζει τη «φυσική» παραμετροποίηση. Τα στοιχεία του είναι το κάθε ένα μη περιορισμένα, κάτι που όμως δεν ισχύει για όλα μαζί. Τα στοιχεία του η μπορεί το κάθε ένα ξεχωριστά να τροποποιηθούν σε παραμέτρους της κλασσικής κλίμακας. Έτσι, η παραμετροποίηση αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης.

Αν το h_i εκφράζει το στοιχείο που αντιστοιχεί στο λογάριθμο μιας τυπικής απόκλισης στον πίνακα Ψ και το $[\mathbf{I}^{-1}]_{jj}$ αποτελεί το αντίστοιχο στοιχείο της διαγωνίου στον αντίστροφο εμπειρικό πίνακα πληροφορίας, το κατά προσέγγιση διάστημα εμπιστοσύνης, σε επίπεδο $(1-a)$ για την αντίστοιχη τυπική απόκλιση είναι το παρακάτω:

$$\left[\exp\left(\hat{h}_j - z_{(1-a/2)}\sqrt{[\mathbf{I}^{-1}]_{jj}}\right), \exp\left(\hat{h}_j + z_{(1-a/2)}\sqrt{[\mathbf{I}^{-1}]_{jj}}\right) \right]$$

Το κατά προσέγγιση διάστημα εμπιστοσύνης για τον συντελεστή συσχέτισης που αντιπροσωπεύεται από το \hat{h}_j στο διάνυσμα των παραμέτρων είναι το εξής [βλ. Pinheiro and Bates (2000)]:

$$\left[\frac{\exp\left(\hat{h}_j - z_{(1-a/2)}\sqrt{[\mathbf{I}^{-1}]_{jj}}\right) - 1}{\exp\left(\hat{h}_j - z_{(1-a/2)}\sqrt{[\mathbf{I}^{-1}]_{jj}}\right) + 1}, \frac{\exp\left(\hat{h}_j + z_{(1-a/2)}\sqrt{[\mathbf{I}^{-1}]_{jj}}\right) - 1}{\exp\left(\hat{h}_j + z_{(1-a/2)}\sqrt{[\mathbf{I}^{-1}]_{jj}}\right) + 1} \right]$$

3.12. Προσαρμοσμένες τιμές και προβλέψεις

Οι προσαρμοσμένες τιμές, οι προβλεπόμενες τιμές για τις παρατηρούμενες αποκρίσεις του προσαρμοσμένου μοντέλου, προκαλούν μεγάλο ενδιαφέρον όσον αφορά στον έλεγχο του μοντέλου. Οι προβλεπόμενες τιμές για τις νέες παρατηρήσεις προκαλούν το ενδιαφέρον, όταν εξάγουμε συμπεράσματα από το προσαρμοσμένο μοντέλο.

Στα μοντέλα γραμμικών μεικτών επιδράσεων οι προβλεπόμενες τιμές και οι προσαρμοσμένες τιμές μπορεί να υπολογιστούν σε ένα επίπεδο του πληθυσμού ή σε διαφορετικά επίπεδα, τα οποία μοιάζουν μεταξύ τους. Για την πρώτη περίπτωση (προβλέψεις σε ένα επίπεδο του πληθυσμού) οι προβλέψεις εκτιμούν την οριακή, αναμενόμενη τιμή της απόκρισης. Αν το \mathbf{x}_h αποτελεί ένα διάνυσμα των συμμεταβλητών των σταθερών επιδράσεων, τότε η οριακή αναμενόμενη τιμή της αντίστοιχης απόκρισης y_h είναι η:

$$E[y_h] = \mathbf{x}_h^T \boldsymbol{\beta}$$

Οι προβλεπόμενες τιμές στο k -οστό επίπεδο εκτιμούν την περιορισμένη πρόβλεψη της απόκρισης, δεδομένων των τυχαίων επιδράσεων στα επίπεδα που είναι μικρότερα ή ίσα με k . Αν το $\mathbf{z}_h(i)$ εκφράζει ένα διάνυσμα συμμεταβλητών που

αντιστοιχούν στις τυχαίες επιδράσεις που σχετίζονται με την i -οστή ομάδα στο πρώτο επίπεδο, οι προβλέψεις του επιπέδου 1 εκτιμούν το:

$$E[y_h(i)|\mathbf{b}_i] = \mathbf{x}_h^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}_h(i)^T \mathbf{b}_i$$

Αντίστοιχα, αν το $\mathbf{z}_h(i, j)$ εκφράζει το διάνυσμα των συμμεταβλητών που σχετίζονται με τη j -οστή ομάδα του 2^{ου} επιπέδου, μέσα στην i -οστή ομάδα του 1^{ου} επιπέδου, οι προβλεπόμενες τιμές του 2^{ου} επιπέδου, είναι οι:

$$E[y_h(i)|\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{ij}] = \mathbf{x}_h^T \boldsymbol{\beta} + z_h(i)^T \mathbf{b}_i + z_h(i, j)^T \mathbf{b}_{ij}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να επεκτείνουμε και για οποιοδήποτε άλλο μοντέλο.

Για να παράγουμε τις άριστες γραμμικές αμερόληπτες προβλέψεις (BLUP) των αναμενόμενων τιμών του πληθυσμού και τις περιορισμένες προβλέψεις, δεδομένων των τυχαίων επιδράσεων, απλά αντικαθιστούμε το $\boldsymbol{\beta}$ με τον περιορισμένο εκτιμητή του, $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta})$. Οι άριστες γραμμικές αμερόληπτες προβλέψεις (BLUP) που αντιστοιχούν στις αναμενόμενες τιμές είναι οι παρακάτω [βλ. Pinheiro and Bates (2000)]:

$$\hat{y}_h = \mathbf{x}_h^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta})$$

$$\hat{y}_h(i) = \mathbf{x}_h^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) + z_h(i)^T \hat{\mathbf{b}}_i(\boldsymbol{\theta})$$

$$\hat{y}_h(i, j) = \mathbf{x}_h^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) + z_h(i)^T \hat{\mathbf{b}}_i(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{z}_h(i, j)^T \hat{\mathbf{b}}_{ij}(\boldsymbol{\theta})$$

3.13. Πρότυποι πίνακες συνδιακυμάνσεων για τις τυχαίες επιδράσεις

Οι πρότυποι πίνακες διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων για τις τυχαίες επιδράσεις είναι ειδικές μορφές του πίνακα συνδιακυμάνσεων των τυχαίων επιδράσεων $\boldsymbol{\Psi}$. Σε πολλές εφαρμογές, αυτό που επιθυμούμε είναι να περιορίσουμε τον πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων, έτσι ώστε να έχουμε στη διάθεσή μας μια ειδική

μορφή αυτού για την εκτίμηση των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν. Στη συνέχεια θα επαναλάβουμε ορισμένα θεωρητικά κομμάτια που έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενες παραγράφους, με σκοπό να παρουσιάσουμε ορισμένες από αυτές τις ειδικές μορφές του πίνακα.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε το μοντέλο ενός επιπέδου, που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 3.3.1 και έστω ότι το \mathbf{b}_i αποτελεί ένα (3×1) διάνυσμα των αγνώστων ατομικών επιδράσεων (τυχαίων επιδράσεων),

$$y_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i \mathbf{b}_i + e_i \text{ με } i = 1, \dots, m$$

όπου ισχύει ότι $\mathbf{b}_i \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi})$ και $e_i \sim N(0, \mathbf{s}^2 \mathbf{I})$

☀ Μέχρι τώρα, υποθέταμε ότι ο $\boldsymbol{\Psi}$ είναι ένας γενικά θετικά ορισμένος πίνακας. Αυτό σήμαινε ότι στην περίπτωση που θα έχουμε 3 τυχαίες επιδράσεις, ο $\boldsymbol{\Psi}$ θα ήταν της επόμενης μορφής:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{b_1}^2 & \mathbf{s}_{b_{12}} & \mathbf{s}_{b_{13}} \\ \mathbf{s}_{b_{21}} & \mathbf{s}_{b_2}^2 & \mathbf{s}_{b_{23}} \\ \mathbf{s}_{b_{31}} & \mathbf{s}_{b_{32}} & \mathbf{s}_{b_3}^2 \end{bmatrix}$$

όπου το $\mathbf{s}_{b_q}^2$ για $q = 1, 2, 3$ αποτελεί τη διακύμανση της q -οστής τυχαίας επίδρασης.

☀ Στην περίπτωση που θα θέλαμε να υποθέσουμε ότι οι τυχαίες επιδράσεις είναι ανεξάρτητες, ο πίνακας $\boldsymbol{\Psi}$ θα είναι διαγώνιος και θα έχει τη μορφή:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{b_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_{b_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_{b_3}^2 \end{bmatrix}$$

☀ Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι εκτός από το ότι οι τυχαίες επιδράσεις είναι ανεξάρτητες, έχουν και την ίδια διακύμανση. Επομένως, ο πίνακας $\boldsymbol{\Psi}$ θα είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού πίνακα, δηλαδή θα είναι:

$$\Psi = S^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

☀ Εναλλακτικά, είναι πιθανόν να έχουμε αποδείξεις ότι η πρώτη τυχαία επίδραση είναι ανεξάρτητη από τη δεύτερη και την τρίτη, αλλά οι δύο τελευταίες εξαρτώνται η μία από την άλλη. Αυτή η μορφή του πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων ονομάζεται block διαγώνιος και έχει τη μορφή:

$$\Psi = \begin{bmatrix} s_{b_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & s_{b_2}^2 & s_{b_{23}} \\ 0 & s_{b_{32}} & s_{b_3}^2 \end{bmatrix}$$

Άλλες μορφές του πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων των τυχαίων επιδράσεων, όπως η σύνθετη συμμετρία, είναι επίσης δυνατές. Αυτό που θα πρέπει να ελέγχεται κάθε φορά είναι η ορθή μορφή του πίνακα Ψ , έτσι ώστε να αποφευχθεί ο κίνδυνος της υπερ-παραμετροποίησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Στατιστική ανάλυση: Εφαρμογή πειράματος νευροφυσιολογικών δεδομένων

4.1. Εισαγωγή

Όπως αναφέραμε και στην αρχή της διπλωματικής αυτής εργασίας, τα δεδομένα μας προέρχονται από την εκτέλεση ενός νευροφυσιολογικού πειράματος, στο οποίο λαμβάνουν μέρος δέκα (10) υγιείς ενήλικες εθελοντές, οι οποίοι ανήκουν και στα δύο φύλα και έχουν μέση ηλικία 52 ± 2.6 έτη. Στη διάθεσή μας έχουμε στο σύνολο 334 παρατηρήσεις για κάθε μία μεταβλητή. Οι μεταβλητές οι οποίες καταγράφονται κατά τη διάρκεια διεξαγωγής του παρόντος πειράματος, αφορούν αρχικά τους λανθάνοντες χρόνους των μελών του σώματος, καθώς επίσης και τη γωνία και την ταχύτητα της κεφαλής και τέλος τη γωνία του κορμού του σώματος. Ως λανθάνοντας χρόνος ενός μέλους του σώματος, ορίζεται ο χρόνος ο οποίος περνά σε sec από τη στιγμή που σβήνει η λυχνία (κεντρική ή έκκεντρη) έως τη στιγμή που το συγκεκριμένο σημείο του σώματος οδηγείται σε κίνηση. Πιο συγκεκριμένα λοιπόν, οι μεταβλητές που έχουμε στη διάθεσή μας είναι οι εξής:

<u>Μεταβλητή</u>	<u>Περιγραφή</u>
Angle	Κατηγορική μεταβλητή με τιμές από 1-7 που εκφράζουν κάθε μια από τις επτά γωνίες στις οποίες είναι τοποθετημένες οι έκκεντρες λυχνίες στον κύκλο ($1=45^\circ, \dots, 7=315^\circ$).
Direction	Κατηγορική μεταβλητή με τιμές 1 (fugal) υποδηλώνοντας την κίνηση από τις 0 προς κάποιο άλλο μη προβλέψιμο στόχο και 2 (petal), που εκφράζει την κίνηση της επιστροφής του εθελοντή από τον έκκεντρο στόχο στις 0° .
Latency Eye	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους των ματιών.
Latency Head	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους της κεφαλής.
Latency Trunk	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους του κορμού.
Latency Right Foot	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους του δεξιού κάτω άκρου.
Latency Left Foot	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους του αριστερού κάτω άκρου.

<u>Μεταβλητή</u>	<u>Περιγραφή</u>
Trunk Velocity	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει την ταχύτητα του κορμού ανά sec. Η μέτρησή που έχουμε στη διάθεσή μας, αφορά την ταχύτητα που έχει αναπτύξει ο κορμός του ατόμου τη χρονική στιγμή που αρχίζει η κίνηση του ποδιού.
Trunk Deviation	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τη γωνία του κορμού σε μοίρες. Η μέτρηση που έχουμε στη διάθεσή μας, αφορά τη γωνία στην οποία έχει φτάσει ο κορμός του εθελοντή από την αρχική του θέση, κατά την κίνησή του προς τον γνωστό (κατά την επιστροφή) ή τον μη προβλεπόμενο στόχο, ακριβώς τη χρονική στιγμή που αρχίζει η κίνηση του κάτω άκρου.
Head Angle	Συνεχής μεταβλητή που εκφράζει τη γωνία της κεφαλής σε μοίρες. Τα δεδομένα μας προκύπτουν από τις μετρήσεις που αφορούν στη γωνία της κεφαλής, την απόκλιση δηλ. της κεφαλής από το σημείο στο οποίο αρχικά έχει ευθυγραμμίσει το σώμα του, τη χρονική στιγμή που κινείται για πρώτη φορά το κάτω άκρο.

Βλέπουμε λοιπόν από τα παραπάνω, ότι οι κύριες μεταβλητές μας επηρεάζονται από το άτομο, τη γωνία (δηλαδή τη θέση της λυχνίας που ενεργοποιείται) αλλά και την κατεύθυνση (δηλαδή την αρχική κίνηση ή την κίνηση της επιστροφής στο κεντρικό σημείο των 0 μοιρών). Καθώς το ερώτημα που μας δίνεται προς ανάλυση αφορά την κίνηση των κάτω άκρων, τις εξαρτημένες μας μεταβλητές θα αποτελέσουν οι λανθάνοντες χρόνοι που αντιστοιχούν στο αριστερό και δεξί κάτω άκρο. Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε απάντηση στο ερώτημά μας, εφαρμόζοντας μοντέλα ξεχωριστά για την κάθε μία από αυτές τις δύο μεταβλητές.

Μία αρχική προσέγγιση για την ανάλυση του προβλήματος θα ήταν να εξετάζαμε, ως προς τα περιγραφικά τους χαρακτηριστικά, τις μεταβλητές που έχουμε στη διάθεσή μας, έτσι ώστε να είμαστε σε θέση να βγάλουμε κάποια αρχικά συμπεράσματα για τη σχέση που μπορεί να υπάρχει μεταξύ αυτών. Η ανάλυση των δεδομένων μας, θα γίνει κατά κύριο λόγο με τη χρήση των στατιστικών πακέτων S-PLUS και SPSS. Στο σημείο αυτό, πριν προβούμε σε όποια ανάλυση, μια ιδέα θα ήταν να εξετάσουμε πως κατανέμονται (αριθμητικά) τα δεδομένα μας σε κάθε ένα από τα δέκα άτομα και για τις δύο κατευθύνσεις fugal και petal: κάτι που μπορούμε να δούμε από τους παρακάτω πίνακες:

	fugal							Σύνολο
	Γωνία 45	Γωνία 90	Γωνία 135	Γωνία 180	Γωνία 225	Γωνία 270	Γωνία 315	
Άτομο 1	3	2	2	0	1	2	3	13
Άτομο 2	2	0	2	0	1	1	3	9
Άτομο 3	3	0	2	3	4	3	3	18
Άτομο 4	4	2	3	1	0	0	4	14
Άτομο 5	5	1	2	1	0	2	4	15
Άτομο 6	2	2	3	3	2	1	2	15
Άτομο 7	3	2	2	1	2	2	3	15
Άτομο 8	2	1	3	0	0	0	2	8
Άτομο 9	2	1	0	0	1	0	2	6
Άτομο 10	2	2	1	0	2	3	1	11
Σύνολο	28	13	20	9	13	14	27	124

	petal							Σύνολο
	Γωνία 45	Γωνία 90	Γωνία 135	Γωνία 180	Γωνία 225	Γωνία 270	Γωνία 315	
Άτομο 1	3	3	3	3	4	4	3	23
Άτομο 2	2	3	3	3	4	1	3	19
Άτομο 3	3	4	4	6	5	3	3	28
Άτομο 4	4	3	3	3	3	3	3	22
Άτομο 5	6	5	4	4	3	3	4	29
Άτομο 6	2	2	3	3	2	1	2	15
Άτομο 7	3	4	3	4	3	3	3	23
Άτομο 8	2	1	3	4	2	2	2	16
Άτομο 9	2	3	2	4	2	3	2	18
Άτομο 10	2	3	2	4	2	3	1	17
Σύνολο	29	31	30	38	30	26	26	210

Πίνακας 4.1 Αριθμητική κατανομή των δεδομένων σε κάθε ένα από τα 10 άτομα για τις κατευθύνσεις petal και fugal

Παρατηρούμε λοιπόν από τα παραπάνω στοιχεία, ότι υπάρχουν αρκετές διαφορές ως προς τον αριθμό των παρατηρήσεων από άτομο σε άτομο αλλά και στα ίδια τα άτομα όσον αφορά τις δύο κατευθύνσεις, καθώς επίσης και στις παρατηρήσεις που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις επτά γωνίες. Ενδεικτικά αναφέρουμε την ύπαρξη 13 παρατηρήσεων στις 90° στην κατεύθυνση fugal, ενώ στις 90° στην αντίθετη κατεύθυνση οι παρατηρήσεις φτάνουν τις 31 σε αριθμό. Αντίστοιχα, το δέκατο άτομο φέρει 11 και 17 παρατηρήσεις σε fugal και petal αντίστοιχα. Τέλος, σε πολλές περιπτώσεις της κατεύθυνσης fugal βρίσκουμε μηδενικό αριθμό παρατηρήσεων. Η ιδιαίτερη αυτή φύση των δεδομένων μας, θα μας απασχολήσει σε μετέπειτα σημείο του παρόντος κεφαλαίου.

4.2. Περιγραφικά Χαρακτηριστικά

Μία αρχική περιγραφή των δεδομένων μας, θα μπορούσε να γίνει μέσω των αποτελεσμάτων που παίρνουμε από τους πίνακες 4.2 και 4.3 (α και β) που δίνονται παρακάτω. Στους πίνακες αυτούς που ακολουθούν, έχουμε υπολογίσει τον μέσο, την ελάχιστη, καθώς επίσης και τη μέγιστη τιμή για κάθε μία μεταβλητή που έχουμε στη διάθεσή μας προς ανάλυση και για τα δέκα άτομα που λαμβάνουν εθελοντικά μέρος στη διεξαγωγή του πειράματός μας για το σύνολο των δεδομένων μας αλλά και ξεχωριστά για τις δύο κατευθύνσεις *fugal* και *retal*. Όπως παρατηρούμε από τα αποτελέσματα αυτά, ο εθελοντής 5 παρουσιάζει το μεγαλύτερο μέσο όρο όσον αφορά στις μεταβλητές που εκφράζουν τους λανθάνοντες χρόνους για τους οφθαλμούς, τον κορμό και την κεφαλή. Επιπλέον, το ίδιο άτομο, παρουσιάζει το δεύτερο μεγαλύτερο μέσο χρόνο όσον αφορά τον λανθάνοντα χρόνο του δεξιού ποδιού. Όλα τα παραπάνω, ίσως να μπορούν να εξηγηθούν από το γεγονός ότι ο πέμπτος εθελοντής στο πείραμα αυτό, είναι ένα άτομο προχωρημένης ηλικίας (αναφέρεται στα δεδομένα που μας έχουν δοθεί ως *old10d*) και κατά συνέπεια δεν μπορεί να έχει άμεση αντίδραση στο σβήσιμο της κεντρικής ή έκκεντρης λυχνίας.

Επίσης, αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα δεδομένα μας, είναι ότι το εύρος των τιμών που παρουσιάζει κάθε ένα άτομο ξεχωριστά και για κάθε μία από τις μεταβλητές μας, είναι αρκετά μεγάλο. Κάτι που μπορούμε να πούμε ότι είναι απολύτως αναμενόμενο, καθώς ορισμένοι από τους έκκεντρους στόχους δεν ήταν άμεσα εντοπίσιμοι από τον εθελοντή, δηλαδή δεν βρίσκονταν στο άμεσο οπτικό πεδίο του εθελοντή. Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι δεν ήταν δυνατόν να προβλεφθεί από οποιονδήποτε από τους δέκα εθελοντές ποια θα είναι η έκκεντρο λυχνία που θα ενεργοποιηθεί μετά την απενεργοποίηση της κεντρικής, εφόσον για τη διεξαγωγή του συγκεκριμένου πειράματος είχε γίνει πλήρης τυχαιοποίηση ανάμεσα στις λυχνίες και τη σειρά με την οποία θα ενεργοποιούνται για τον κάθε έναν εθελοντή κατά τη διάρκεια του πειράματος. Κατά συνέπεια, είναι απολύτως αναμενόμενο ο εθελοντής (ανάλογα με το ποια ήταν η έκκεντρο ενεργοποιημένη λυχνία) να παρουσιάζει μεγάλες διαφορές στις μετρήσεις των διαφόρων χαρακτηριστικών, όπως για παράδειγμα στους λανθάνοντες χρόνους των οφθαλμών και της κεφαλής. Για να γίνει το παραπάνω περισσότερο κατανοητό, θα μπορούσαμε να σκεφτούμε την διαφορά που θα υπάρχει για παράδειγμα

στους λανθάνοντες χρόνους των μελών του σώματος ή και ακόμα στην ταχύτητα που αναπτύσσει ο κορμός κατά την κίνησή του, στην περίπτωση της ενεργοποίησης της λυχνίας των 45° αριστερά ή δεξιά του κεντρικού στόχου, η οποία είναι απολύτως ορατή από τον εθελοντή και της ενεργοποίησης της λυχνίας των 180°, η οποία δεν μπορεί να γίνει αμέσως αντιληπτή από τον εθελοντή.

Τέλος, είναι επίσης απολύτως αναμενόμενο, οι εθελοντές να παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές όσον αφορά τις μετρήσεις των διαφόρων μεταβλητών κατά την εκτέλεση της πρώτης κίνησής τους προς τον έκκεντρο στόχο (direction: fugal) και κατά την επιστροφή τους στις 0° έτσι ώστε να ευθυγραμμίσουν το σώμα και το βλέμμα τους με την κεντρική λυχνία (direction: petal), εφόσον η δεύτερη κίνηση (η επιστροφή δηλαδή στον στόχο των 0°) είναι εκ των προτέρων γνωστή ότι πρέπει να γίνει και φυσικά ο εθελοντής, έχει απόλυτη γνώση για την κατεύθυνση προς την οποία καλείται στο σημείο αυτό του πειράματος να κινηθεί.

Πίνακας 4.2 Μέση τιμή, μέγιστη και ελαχίστη τιμή των προς ανάλυση μεταβλητών

Άτομο	Latency eye			Latency Head			Latency Trunk			Latency Right Foot			Latency Left Foot		
	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max
1	0,301	0,3	1,07	0,703	0,43	1,04	0,769	0,46	1,65	1,37	0,54	3,47	1,39	0,61	2,49
2	0,482	0,22	0,85	0,659	0,37	1,1	0,725	0,38	1,16	1,2	0,69	2,39	1,48	0,58	2,9
3	0,449	0,19	0,79	0,48	0,26	0,75	0,534	0,3	0,83	0,81	0,38	1,39	0,84	0,53	1,43
4	0,471	0,2	0,94	0,54	0,27	0,93	0,647	0,4	1,23	1,13	0,5	2,03	1,27	0,5	2,77
5	0,694	0,2	2,66	0,782	0,3	2,66	0,838	0,37	2,63	1,25	0,56	3,68	1,26	0,6	2,96
6	0,397	0,25	0,79	0,486	0,28	0,71	0,544	0,38	0,83	1,02	0,63	1,67	0,99	0,58	1,61
7	0,463	0,32	0,63	0,511	0,39	0,67	0,57	0,4	1,08	0,86	0,58	1,43	1,02	0,58	1,75
8	0,626	0,5	0,86	0,725	0,58	0,86	0,777	0,58	1	1,25	0,92	1,88	1,46	1,04	2,25
9	0,451	0,23	0,68	0,573	0,3	1,09	0,634	0,38	1,16	0,8	0,41	1,27	0,75	0,41	1,31
10	0,378	0,23	0,71	0,466	0,33	0,79	0,547	0,41	0,86	1	0,49	1,58	1,01	0,6	1,69
Total Mean	0.4712	0.264	0.998	0.5925	0.351	1.06	0.6585	0.406	1.24	1.07	0.57	2.08	1.15	0.603	2.12

Άτομο	Trunk Velocity			Trunk Deviation			Head Angle		
	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max
1	67,8	8,4	152,6	19,31	4,72	39,3	12,63	-18	48
2	63,7	25,3	120	16,66	8,5	31,7	16,67	-2	47
3	68,5	16,9	123,9	12,53	0,5	33,7	24,41	-5	67
4	64,1	25,3	120,5	13,44	1,65	29,3	31	6	65
5	70,3	25,3	139,4	12,3	0,15	27,3	8,63	-10	33
6	38,9	19	71,8	9	0,28	26,4	8,83	-8	39
7	91,3	48	177,5	16,22	7,48	33,3	20,52	-5	56
8	48	25,3	69,7	14,06	3,16	29,6	12,16	0	39
9	61,5	0	152,2	5,53	0,13	34,3	13,58	-4	57
10	77,9	6,3	164	18,3	1,8	34,9	27,6	-6	55
Total Mean	65.2	20	129.2	13.74	2.84	32	17.6	-5.2	50.6

Αντίστοιχα, για τις κατευθύνσεις fugal και petal, θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα για την κάθε μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές μας και για κάθε ένα από τα δέκα άτομα που λαμβάνουν μέρος στην έρευνά μας:

Πίνακας 4.3.α Μέση τιμή, μέγιστη και ελαχίστη τιμή των προς ανάλυση μεταβλητών για την κατεύθυνση fugal

Άτομο	Latency eye			Latency Head			Latency Trunk			Latency Right Foot			Latency Left Foot		
	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max
1	0,6647	0,48	0,97	0,7859	0,54	1,03	0,9244	0,59	1,65	1,9142	0,98	3,47	1,7592	0,87	2,49
2	0,5406	0,22	0,85	0,8332	0,52	1,1	0,922	0,57	1,16	1,5994	0,91	2,39	1,9893	1,28	2,9
3	0,4755	0,34	0,79	0,5172	0,38	0,75	0,6102	0,45	0,83	0,9151	0,71	1,39	0,9726	0,63	1,43
4	0,4244	0,26	0,8	0,5214	0,33	0,9	0,6455	0,43	1,23	1,1426	0,6	2	1,3709	0,5	2,77
5	0,4317	0,2	0,63	0,6907	0,37	1,31	0,8085	0,43	1,35	1,3303	0,6	2,33	1,3477	0,8	2,44
6	0,3681	0,25	0,79	0,4956	0,28	0,71	0,5687	0,38	0,83	1,2201	0,79	1,67	1,0912	0,63	1,61
7	0,491	0,42	0,63	0,5642	0,46	0,67	0,6766	0,55	1,08	1,0695	0,79	1,43	1,2908	0,9	1,75
8	0,6433	0,5	0,75	0,7441	0,67	0,83	0,811	0,67	1	1,3766	0,98	1,88	1,6671	1,25	2,25
9	0,3997	0,23	0,53	0,5248	0,34	0,71	0,625	0,56	0,75	0,8098	0,64	1,2	0,9437	0,64	1,31
10	0,4075	0,24	0,71	0,4844	0,33	0,79	0,6054	0,46	0,75	1,2507	1,01	1,58	1,2694	0,82	1,69
Total Mean	0,48465	0,314	0,745	0,61615	0,42	0,88	0,71973	0,509	1,063	1,26283	0,8	1,934	1,37019	0,83	2,064

Άτομο	Trunk Velocity			Trunk Deviation			Head Angle		
	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max
1	50,4846	8,4	92,2	24,2828	8,1	39,33	25,7462	-1	48
2	50,6778	32,4	75,1	16,5111	8,5	30,5	28,2222	14	47
3	68,1111	16,9	110,2	14,5074	1,94	33,7	43,3889	17	67
4	50,05	25,3	101,4	12,9016	4,16	29,25	35,4286	16	65
5	72,0733	25,3	120,4	15,2938	7,35	23,11	22,3333	-3	33
6	44,18	21,1	71,8	11,6064	0,28	26,41	17,4667	2	39
7	77,0267	50,7	133,1	19,3199	9,24	33,27	33,9333	9	56
8	37,2	25,3	69,7	16,309	3,16	29,64	22,125	8	39
9	71,85	31,7	107,8	10,8788	3,2	34,3	29,8333	12	57
10	71,5273	6,3	111	17,5402	1,8	32,9	38,4545	17	55
Total Mean	59,31808	24,34	99,27	15,9151	4,773	31,241	29,6932	9,1	50,6

Πίνακας 4.3.β Μέση τιμή, μέγιστη και ελαχίστη τιμή των προς ανάλυση μεταβλητών για την κατεύθυνση petal

Άτομο	Latency eye			Latency Trunk			Latency Head			Latency Right Foot			Latency Left Foot		
	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max
1	0,5678	0,3	1,07	0,682	0,46	1,04	0,6609	0,43	1,04	1,0767	0,54	1,9	1,1871	0,61	2,33
2	0,5273	0,22	1,07	0,6642	0,38	1,04	0,6344	0,37	1,04	1,0225	0,54	1,66	0,2505	0,58	2,33
3	0,4993	0,19	1,07	0,567	0,3	1,04	0,548	0,26	1,04	0,8544	0,38	1,45	0,9504	0,53	2,33
4	0,5565	0,2	1,07	0,6715	0,4	1,1	0,6182	0,27	1,04	1,0878	0,5	2,03	1,2361	0,53	2,33
5	0,7492	0,23	2,66	0,7962	0,37	2,63	0,7813	0,3	2,66	1,1407	0,54	3,68	1,2359	0,6	2,96
6	0,5233	0,26	1,07	0,6159	0,42	1,04	0,602	0,42	1,04	0,9285	0,54	1,45	1,0947	0,58	2,33
7	0,5149	0,32	1,07	0,5864	0,4	1,04	0,5711	0,39	1,04	0,8579	0,54	1,45	1,0254	0,58	2,33
8	0,6128	0,38	1,07	0,7296	0,46	1,04	0,7071	0,49	1,04	1,1068	0,54	1,63	1,3097	0,64	2,33
9	0,5367	0,23	1,07	0,6682	0,38	1,16	0,6424	0,3	1,09	0,9134	0,41	1,45	0,9695	0,41	2,33
10	0,4842	0,23	1,07	0,6054	0,41	1,04	0,5761	0,34	1,04	0,9353	0,49	1,45	1,0598	0,6	2,33
Total Mean	0,5572	0,26	1,229	0,65864	0,4	1,217	0,63415	0,36	1,21	0,9924	0,5	1,82	1,0319	0,57	2,39

Άτομο	Trunk Velocity			Trunk Deviation			Head Angle		
	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max
1	77,5913	16,9	152,6	16,5132	4,72	30,43	5,2304	-18	19
2	75,5528	17,8	152,6	16,9461	4,72	31,7	8,7028	-18	35
3	73,7378	17,8	152,6	13,4988	0,5	30,43	9,8289	-18	42
4	76,9615	17,8	152,6	15,2674	1,65	30,43	18,4692	-18	47
5	74,0326	17,8	152,6	13,1682	0,15	30,43	3,1587	-18	19
6	59,25	17,8	152,6	12,1278	1,76	30,43	3,2281	-18	19
7	92,6725	17,8	177,5	15,4712	4,72	33,32	9,2825	-18	24
8	68,0606	17,8	152,6	15,1198	4,72	30,43	6,5242	-18	21
9	69,6314	0	152,6	10,2695	0,13	30,43	7,0657	-18	30
10	81,9647	17,8	164	17,9861	2,54	34,87	13,2441	-18	49
Total Mean	74,9455	15,9	156,2	14,6368	2,56	31,29	8,47346	-18	30,5

Για την ύπαρξη σχέσης μεταξύ των μεταβλητών μας, μπορούμε να εξετάσουμε τον ολοκληρωμένο πίνακα των συσχετίσεων, χρησιμοποιώντας δηλαδή το σύνολο των δεδομένων μας, αγνοώντας φυσικά κάποιους άλλους παράγοντες, όπως το γεγονός ότι τα δεδομένα μας, λόγω της προέλευσής τους από τα ίδια άτομα, χαρακτηρίζονται από έλλειψη ανεξαρτησίας. Ο πίνακας που παίρνουμε από το SPSS, είναι ο εξής:

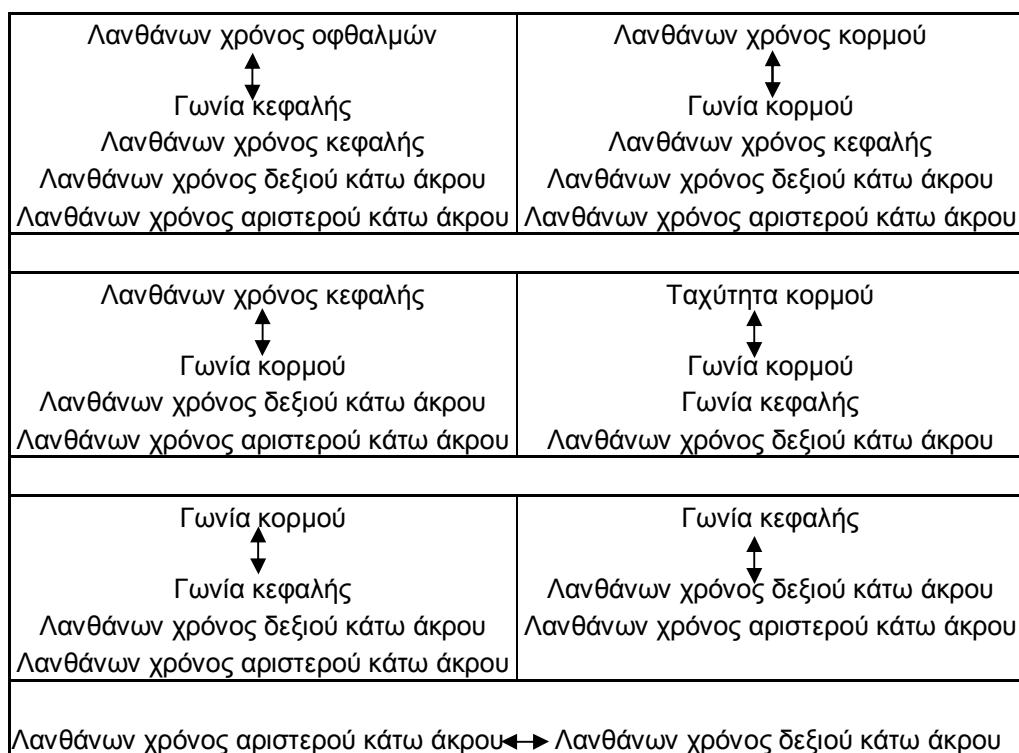
Correlations

		late_eye	late_tru	late_he_a	tr_veloc	tr_dev	he_angle	late_rf	late_if
late_eye	Pearson Correlation	1	,820**	,874**	,078	,068	-,144**	,533**	,477**
	Sig. (2-tailed)	.	,000	,000	,159	,218	,009	,000	,000
	N	328	328	326	328	328	328	324	325
late_tru	Pearson Correlation	,820**	1	,954**	,037	,154**	,054	,723**	,717**
	Sig. (2-tailed)	,000	.	,000	,496	,005	,325	,000	,000
	N	328	333	329	333	333	333	329	330
late_he_a	Pearson Correlation	,874**	,954**	1	,069	,144**	-,049	,689**	,643**
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	.	,212	,009	,375	,000	,000
	N	326	329	329	329	329	329	327	328
tr_veloc	Pearson Correlation	,078	,037	,069	1	,320**	,145**	-,135*	-,093
	Sig. (2-tailed)	,159	,496	,212	.	,000	,008	,014	,093
	N	328	333	329	334	334	334	329	330
tr_dev	Pearson Correlation	,068	,154**	,144**	,320**	1	,481**	,340**	,398**
	Sig. (2-tailed)	,218	,005	,009	,000	.	,000	,000	,000
	N	328	333	329	334	334	334	329	330
he_angle	Pearson Correlation	-,144**	,054	-,049	,145**	,481**	1	,240**	,294**
	Sig. (2-tailed)	,009	,325	,375	,008	,000	.	,000	,000
	N	328	333	329	334	334	334	329	330
late_rf	Pearson Correlation	,533**	,723**	,689**	-,135*	,340**	,240**	1	,691**
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,014	,000	,000	.	,000
	N	324	329	327	329	329	329	329	328
late_if	Pearson Correlation	,477**	,717**	,643**	-,093	,398**	,294**	,691**	1
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,093	,000	,000	,000	.
	N	325	330	328	330	330	330	328	330

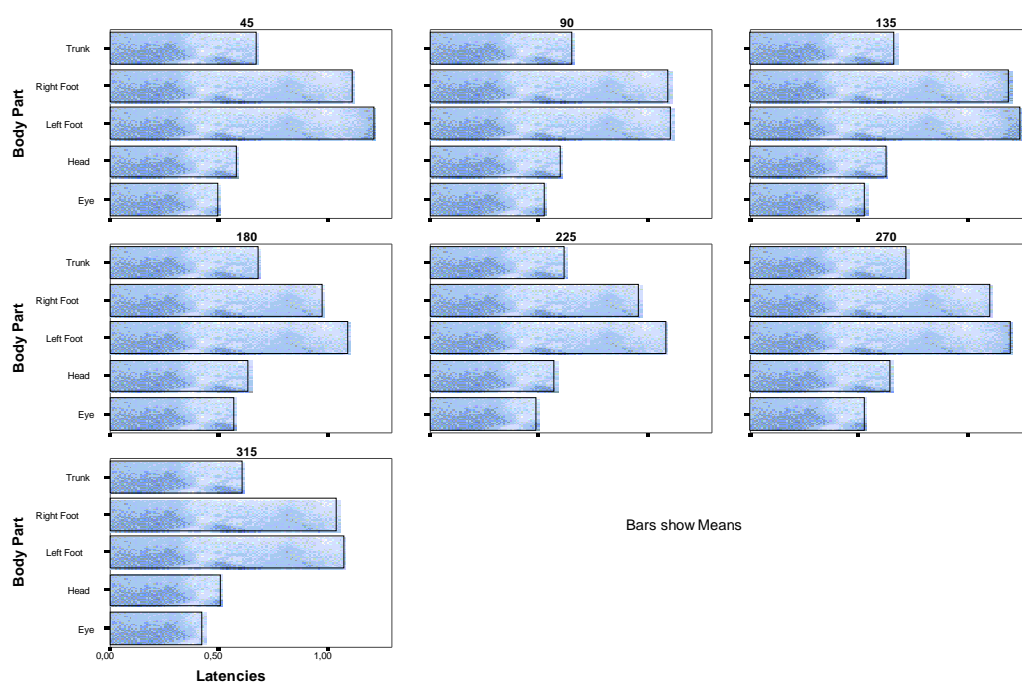
** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

* . Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

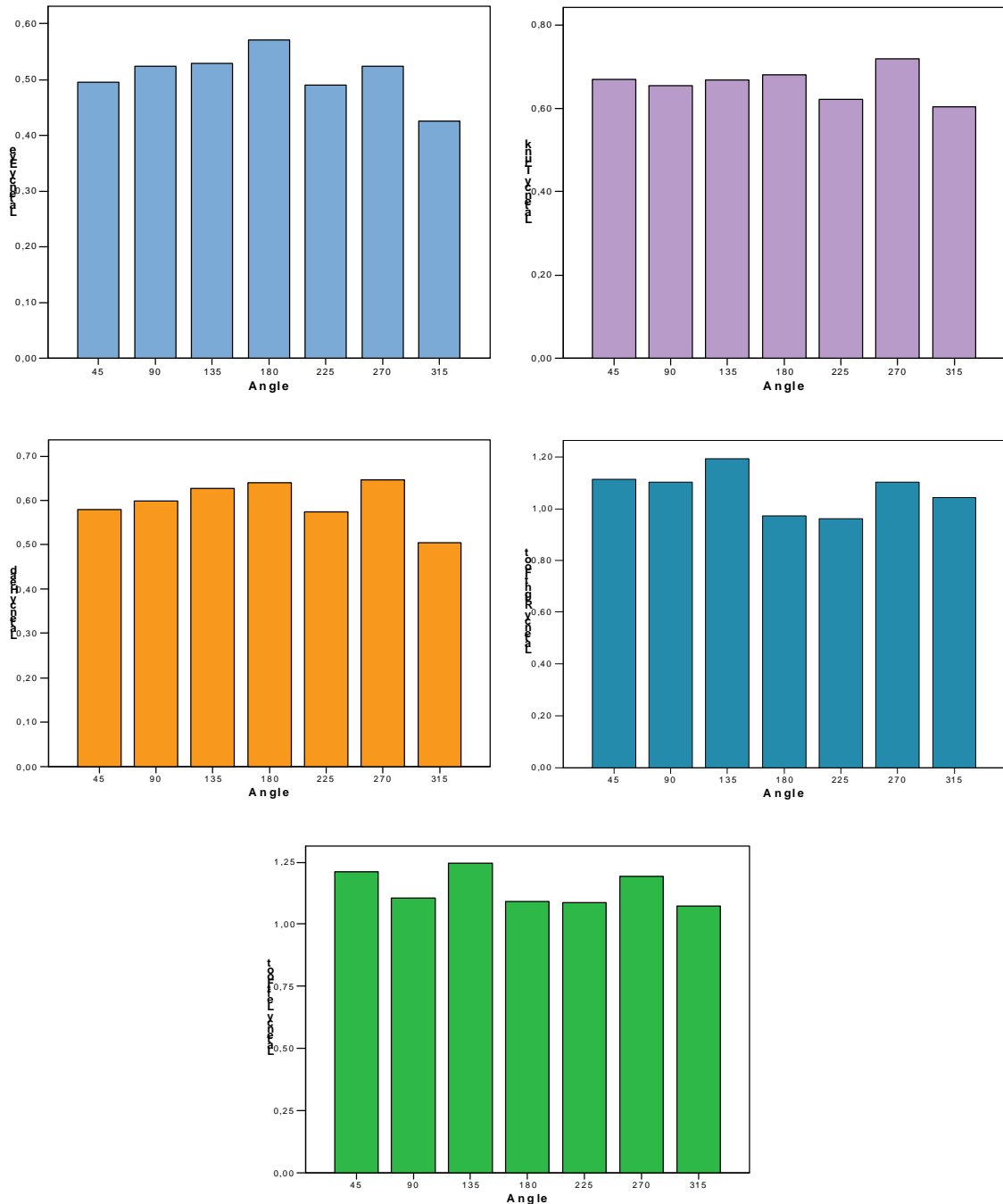
Από τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι οι συσχετίσεις που εμφανίζονται στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο 1% και 5%, είναι οι παρακάτω:



Στη συνέχεια, μπορούμε να κάνουμε μια αρχική εξέταση της σχέσης που μπορεί να υπάρχει μεταξύ της γωνίας και των υπόλοιπων μεταβλητών, μέσω ορισμένων ιστογραμμάτων:



Σχήμα 4.1. Ιστογράμματα ανά γωνία για τους λανθάνοντες χρόνους των μελών του σώματος



Σχήμα 4.2. Ιστογράμματα (διαδοχικά από άνω αριστερά γωνία) λανθανόντων χρόνων Οφθαλμών – Κορμού – Κεφαλής – Δεξιού κάτω άκρου – Αριστερού κάτω άκρου ανά γωνία

Από το σχήμα 4.1. παρατηρούμε ότι επιβεβαιώνεται η διαπίστωση των επιστημόνων για τις διαδοχικές κινήσεις οφθαλμών – κεφαλής – κορμού, καθώς όπως μπορούμε να διακρίνουμε, και στις επτά γωνίες, ο μικρότερος μέσος αντιστοιχεί στους οφθαλμούς, ο δεύτερος μικρότερος στην κεφαλή και έπειτα ακολουθεί εκείνος του

κορμού και τελευταίοι οι μέσοι που αντιστοιχούν στα κάτω άκρα. Σε όλα τα ιστογράμματα, βλέπουμε ότι ο μεγαλύτερος μέσος αντιστοιχεί στους λανθάνοντες χρόνους του αριστερού ποδιού, όμως οι διαφορές που έχει από εκείνους του δεξιού ποδιού δεν είναι σε γενικές γραμμές μεγάλες. Από τα σχήματα 4.2. βλέπουμε ότι για τους λανθάνοντες χρόνους των οφθαλμών, της κεφαλής και του κορμού, η μέγιστη τιμή αντιστοιχεί στη γωνία των 315° , ενώ η ελάχιστη για τα δύο τελευταία είναι οι 270° και για τους οφθαλμούς οι 180° . Όσον αφορά τα κάτω άκρα παρουσιάζουν απόλυτη ισότητα ως προς τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή τους, στις 215° και 135° αντίστοιχα.

4.3. Προσέγγιση του προβλήματος μέσω μεικτών μοντέλων

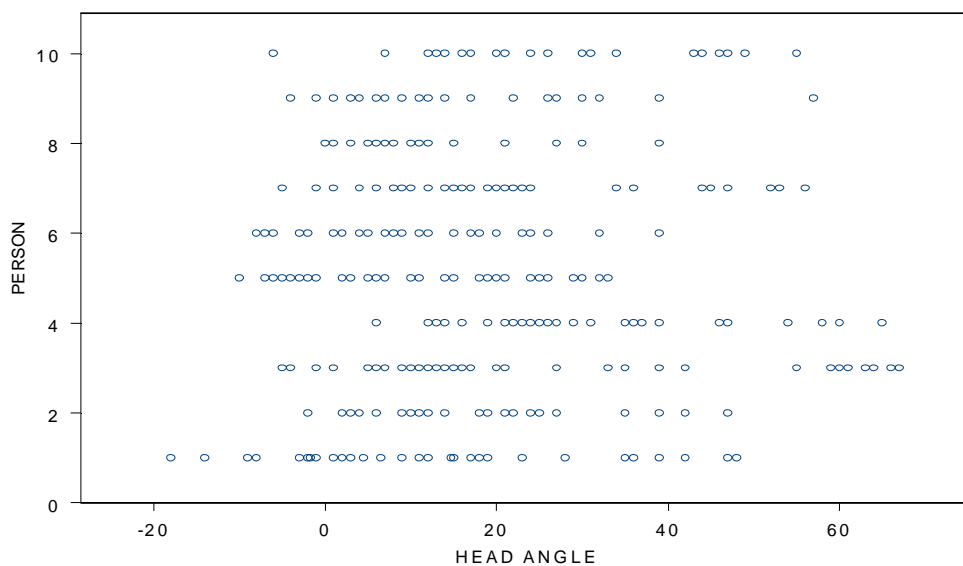
Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενο κεφάλαιο της διατριβής αυτής, τα μοντέλα των μεικτών επιδράσεων χρησιμοποιήθηκαν αρχικά για την περιγραφή της σχέσης που υπάρχει μεταξύ μιας μεταβλητής απόκρισης και κάποιων συμμεταβλητών, σε δεδομένα που έχουν ομαδοποιηθεί σύμφωνα με έναν ή περισσότερους παράγοντες ταξινόμησης. Ένα μοντέλο μεικτών επιδράσεων περιέχει ταυτόχρονα και σταθερές αλλά και τυχαίες επιδράσεις. Οι πρώτες αποτελούν παραμέτρους που σχετίζονται με έναν ολόκληρο πληθυσμό ή με κάποια συγκεκριμένα επαναλαμβανόμενα επίπεδα των πειραματικών παραγόντων και οι δεύτερες σχετίζονται με μεμονωμένες πειραματικές μονάδες που επιλέγονται με τυχαίο τρόπο από τον πληθυσμό. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και όλη τη θεωρία που έχουμε αναπτύξει στα προηγούμενα κεφάλαια για τις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις και για τα μοντέλα των μεικτών επιδράσεων, είναι φανερό ότι η ανάλυση των δεδομένων μας, λόγω της φύσεως διεξαγωγής του πειράματός μας, θα πρέπει να γίνει με χρήση των μεθόδων που αναπτύχθηκαν σε αυτά.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι τα δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας, δεν είναι ισορροπημένα (balanced data), λόγω συγκεκριμένων προβλημάτων στη διεξαγωγή του προβλήματος που θα παραθέσουμε σε επόμενο σημείο του παρόντος κεφαλαίου. Η δομή αυτή καθιστά ιδιαίτερα δύσκολη την ανάλυση των δεδομένων με τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

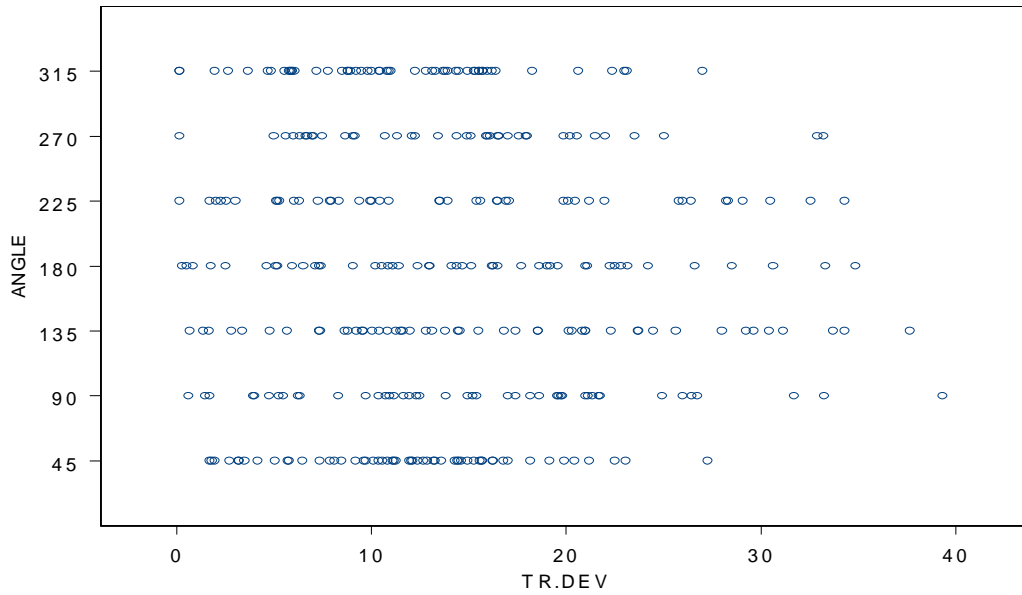
Ως μία προσπάθεια για έναν πρώτο έλεγχο των δεδομένων του πειράματός μας, βασιζόμενοι στη θεωρία που αναπτύχθηκε προηγουμένως, παραθέτουμε κάποια διαγράμματα (για παράδειγμα κάποια scatter plots), που θα μας βοηθήσουν να λάβουμε

μία πρώτη εικόνα, όσον αφορά την μεταβλητότητα που μπορεί να υπάρχει στις παρατηρήσεις κάθε ενός από τα δέκα άτομα αλλά και τη μεταβλητότητα που μπορεί να παρατηρείται μεταξύ των παρατηρήσεων των δέκα εθελοντών (*between subjects and within subjects variability*). Έχουμε τη δυνατότητα να παράγουμε σχεδιαγράμματα που να στηρίζονται σε κάθε ένα από τα τρία βασικά χαρακτηριστικά που έχουμε στη διάθεσή μας, ή πιο απλά, στις τρεις κατηγορικές μεταβλητές του πειράματός μας (άτομο – γωνία – κατεύθυνση). Καθώς σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές το μοναδικό χαρακτηριστικό που μεταβάλλεται μεταξύ των παρατηρήσεων είναι η εκάστοτε κατηγορική μας μεταβλητή, ονομάζουμε τον τρόπο της διάταξης των παρατηρήσεων αυτών ως μονοδιάστατη ταξινόμηση (*one-way classification*).

Κάποια από τα διαγράμματα που θα μπορούσαμε να παραθέσουμε στο σημείο αυτό, είναι τα παρακάτω (Διαγράμματα 4.1):



(α)



(β)



(γ)

Διαγράμματα 4.1 One-Way Classification βάση των τριών κατηγορικών μεταβλητών

Στα παραπάνω διαγράμματα, η κάθε μία γραμμή απεικονίζει τις παρατηρήσεις που αντιστοιχούν στα επίπεδα της κατηγορικής μεταβλητής (άτομο, γωνία, κατεύθυνση) στον άξονα των y και ο άξονας των x απεικονίζει τη μεταβλητή που μας ενδιαφέρει (γωνία κεφαλής, γωνία κορμού, ταχύτητα κορμού κλπ).

Για κάθε ένα από τα τρία χαρακτηριστικά, άτομο – γωνία – κατεύθυνση, μπορούμε να δημιουργήσουμε οκτώ διαφορετικά scatter plot, ανάλογα με το ποια μεταβλητή θέλουμε να εξετάσουμε κάθε φορά.

Για τα δεδομένα που προέρχονται από ταξινόμηση κατά έναν παράγοντα, υπάρχουν δύο τρόποι ανάλυσης. Είτε μέσω ενός μοντέλου σταθερών επιδράσεων, είτε ενός μοντέλου τυχαίων επιδράσεων. Η διάκριση μεταξύ των δύο μοντέλων γίνεται βάσει του αν αυτό που επιθυμούμε είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων για αυτά τα συγκεκριμένα επίπεδα του παράγοντα ταξινόμησης, ή αν η συμπερασματολογία μας θέλουμε να αναφέρεται στον πληθυσμό από τον οποίο προήλθαν τα επίπεδα αυτά. Στη δεύτερη αυτή περίπτωση, τα «επίπεδα» αυτά συνήθως αντιστοιχούν σε διαφορετικά υποκείμενα ή διαφορετικά διαγράμματα ή κάποιου είδους πειραματικές μονάδες.

Βασιζόμενοι στα Διαγράμματα 4.1 που παραθέσαμε παραπάνω, βλέπουμε – οπτικά – ότι όσον αφορά στη γωνία της κεφαλής [Διάγραμμα (α)], ότι παρουσιάζεται μεγάλη μεταβλητότητα μεταξύ των παρατηρήσεων σε κάθε ένα από τα δέκα άτομα, ενώ ταυτόχρονα, η μεταβλητότητα μεταξύ των δέκα αυτών ατόμων παρουσιάζεται μικρή. Ακριβώς το ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να εξάγουμε – οπτικά – και για την ταχύτητα του κορμού [Διάγραμμα (γ)] μεταξύ των δύο κατευθύνσεων fugal και petal. Τέλος, από το δεύτερο scatter plot βλέπουμε ότι η μεταβλητότητα μεταξύ των γωνιών παρουσιάζεται μικρή ενώ όσον αφορά στις εντός των ατόμων παρατηρήσεις, βλέπουμε ότι υπάρχει σχετικά μεγάλη μεταβλητότητα. Τέλος, να σημειώσουμε ότι οι αρνητικές τιμές που εμφανίζονται στη μεταβλητή που εκφράζει τη γωνία της κεφαλής, οφείλονται στο γεγονός ότι η κεφαλή, τη χρονική στιγμή που γίνεται η μέτρηση, δηλαδή τη χρονική στιγμή που σηκώνεται το κάτω άκρο, «κοιτάζει» προς την αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη που στρέφεται κατά την κίνησή του ολόκληρο το σώμα.

4.3.1. Μοντέλο σταθερών επιδράσεων

Στην ανάλυση που μόλις παραθέσαμε, δεν λάβαμε υπόψη τον παράγοντα ταξινόμησης (άτομο, γωνία, κατεύθυνση). Το γεγονός αυτό, αποτελεί ένα πολύ μεγάλο μειονέκτημα για την περαιτέρω ανάλυσή μας, καθώς η παράλειψη του παράγοντα ταξινόμησης κατά την εφαρμογή ενός τέτοιου μοντέλου, οδηγεί στην υπερεκτίμηση της εντός των αντικειμένων μεταβλητότητας (within subject variability). Πιο συγκεκριμένα,

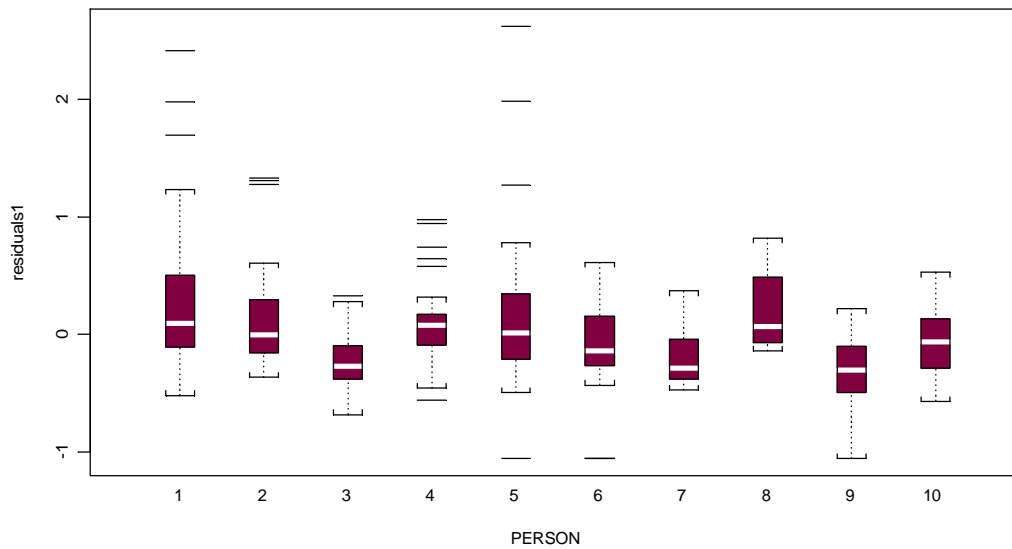
οδηγούμαστε σε υπερεκτίμηση της μεταβλητότητας που παρουσιάζεται στις παρατηρήσεις που αντιστοιχούν σε κάθε ένα από τα δέκα άτομα (ή αντίστοιχα στις παρατηρήσεις που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις επτά γωνίες ή τις δύο κατευθύνσεις). Όλα τα παραπάνω, μπορούν να γίνουν πιο κατανοητά, αν εφαρμόσουμε ένα μοντέλο στα ομαδοποιημένα δεδομένα μας, αγνοώντας τον παράγοντα ταξινόμησης, για παράδειγμα όσον αφορά τον παράγοντα «άτομο». Εφαρμόζουμε κατά συνέπεια το απλό μοντέλο, που εκφράζεται ως εξής:

$$y_{ij} = b + e_{ij} \text{ με } i = 1, \dots, 10 \text{ και } j = 1, \dots, n_i$$

όπου το n_i εκφράζει τον αριθμό των παρατηρήσεων που έχουμε στη διάθεσή μας για κάθε ένα από τα δέκα άτομα που παίρνουν μέρος εθελοντικά στην εκτέλεση του πειράματός μας και το b εκπροσωπεί τον ολικό μέσο της εξαρτημένης μας μεταβλητής. Τα υπόλοιπα θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$. Εφαρμόζοντας λοιπόν το απλό αυτό μοντέλο για τα δέκα άτομα και τη μεταβλητή που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους του δεξιού ποδιού, θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

<p><u>Coefficients:</u> (Intercept) 1.056575 <u>Degrees of freedom:</u> 334 total; 333 residual <u>Residual standard error:</u> 0.4647966</p>

Επιπλέον, αν κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα που να παρουσιάζει τα υπόλοιπα, θα έχουμε την παρακάτω εικόνα:



Στο διάγραμμα των υπολοίπων που βλέπουμε παραπάνω, παρουσιάζει σε κάποιο βαθμό ένα θεμελιώδες πρόβλημα που προκύπτει στην περίπτωση που αγνοήσουμε τον παράγοντα ταξινόμησης κατά την μοντελοποίηση ομαδοποιημένων δεδομένων, όπως αναφέραμε και παραπάνω, κάτι που σημαίνει ότι οι επιδράσεις των «ομάδων» ενσωματώνονται στα υπόλοιπα και έτσι κατά συνέπεια οδηγούν σε υπερεκτίμηση της εντός των ατόμων μεταβλητότητας.

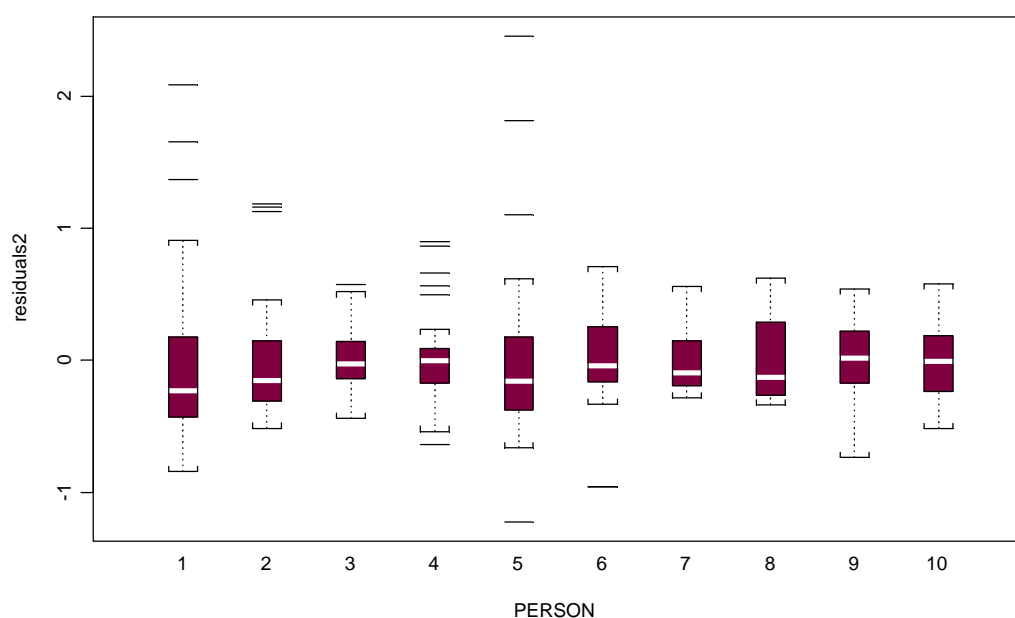
Οι επιδράσεις των ομάδων, μπορούν να ενσωματωθούν στο μοντέλο μας, επιτρέποντας με αυτόν τον τρόπο στον μέσο του κάθε ενός από τα επίπεδα του παράγοντα ταξινόμησης, να εκπροσωπείται από μία ξεχωριστή παράμετρο. Το μοντέλο των σταθερών επιδράσεων στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε ως παράγοντα ταξινόμησης τα άτομα, θα γράφεται στην μορφή: $y_{ij} = b_i + e_{ij}$ με $i = 1, \dots, 10$ και $j = 1, \dots, n_i$ (4.1) όπου το b_i εκπροσωπεί το μέσο λανθάνοντα χρόνο του δεξιού ποδιού και θεωρώντας όπως και παραπάνω ότι τα υπόλοιπα είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(0, s^2)$. Εφαρμόζοντας λοιπόν το παραπάνω μοντέλο, θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

Coefficients:

PERSON 1	PERSON 2	PERSON 3	PERSON 4	PERSON 5
1,379167	1,204571	0,8139348	1,137278	1,222955
PERSON 6	PERSON 7	PERSON 8	PERSON 9	PERSON 10
0,9559333	0,8652895	1,2525	0,7344167	1,002857

Degrees of freedom: 334 total; 324 residual

Residual standard error: 0.4239453



Από τα παραπάνω αποτελέσματα και διαγράμματα, βλέπουμε ότι στην περίπτωση του μοντέλου που περιέχει τον παράγοντα ταξινόμησης, το σφάλμα των υπολοίπων παρουσιάζει μία μικρή ελάττωση και τα υπόλοιπα στην περίπτωση του μοντέλου που εμπεριέχει τον παράγοντα ταξινόμησης βλέπουμε ότι βρίσκονται τοποθετημένα πιο κοντά στο μηδέν.

Αν εργαστούμε με τον αντίστοιχο τρόπο χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που αντιστοιχούν στην άλλη εξαρτημένη μας μεταβλητή, δηλαδή στους λανθάνοντες χρόνους του αριστερού ποδιού και για το αρχικό μας μοντέλο, στο οποίο δεν περιλαμβάνουμε τον παράγοντα ταξινόμησης, θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

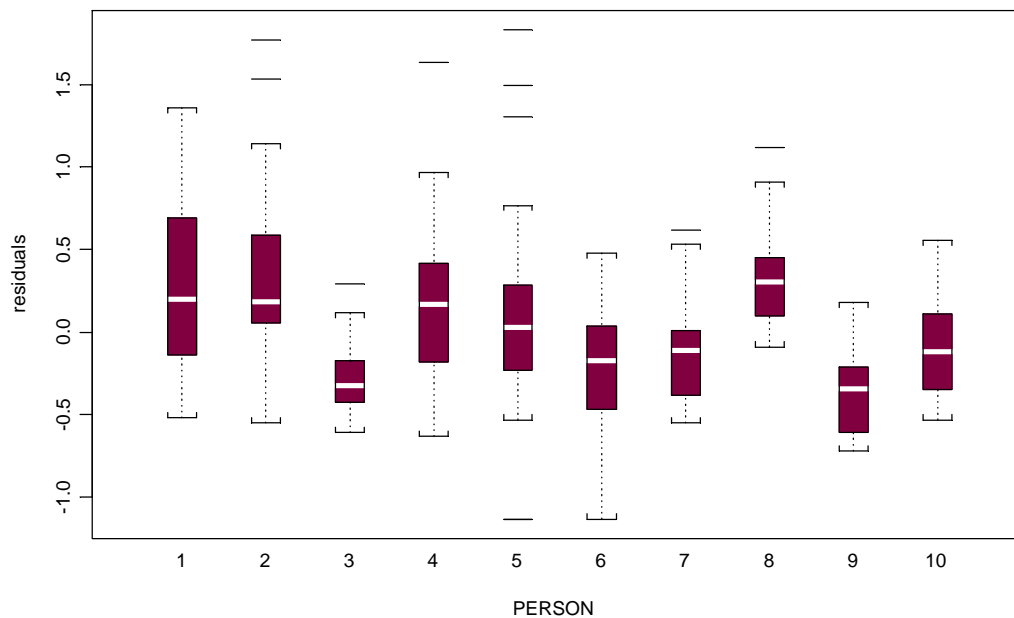
Coefficients:

(Intercept)

1,132012

Degrees of freedom: 334 total; 333 residual

Residual standard error: 0.4679182



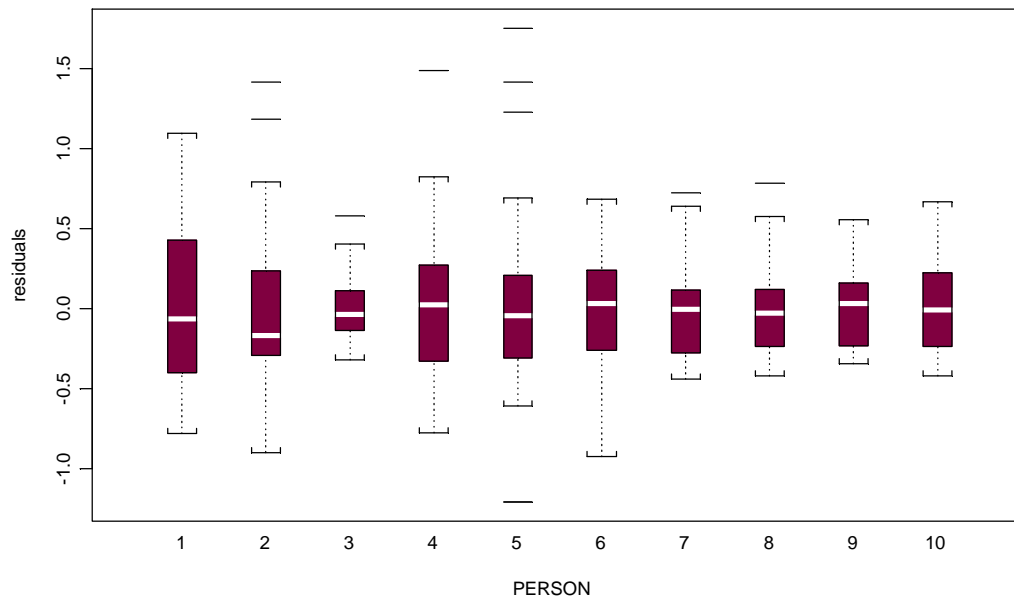
Όσον αφορά δε στο δεύτερο μας μοντέλο, όπου δηλαδή λαμβάνουμε υπόψη τον παράγοντα ομαδοποίησης «άτομο», θα έχουμε τα εξής:

Coefficients:

PERSON 1	PERSON 2	PERSON 3	PERSON 4	PERSON 5
1,393694	1,481321	0,8441522	1,276472	1,207977
PERSON 6	PERSON 7	PERSON 8	PERSON 9	PERSON 10
0,9254667	1,0245	1,462958	0,75625	1,019679

Degrees of freedom: 334 total; 324 residual

Residual standard error: 0.4087062



Εργαζόμενοι με ακριβώς την ίδια μεθοδολογία, χρησιμοποιώντας δηλαδή αρχικά το απλό μοντέλο στο οποίο δεν περιλαμβάνεται ο παράγοντας ομαδοποίησης και στη συνέχεια το μοντέλο στο οποίο χρησιμοποιούμε τον παράγοντα αυτόν, θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά τους λανθάνοντες χρόνους των δύο κάτω άκρων, θέτοντας πρώτα ως παράγοντα ταξινόμησης τη γωνία και έπειτα την κατεύθυνση:

Βέβαια, στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι τα αποτελέσματα που θα πάρουμε από το αρχικό μοντέλο παραμένουν τα ίδια με εκείνα που ήδη έχουμε παραθέσει και ισχύουν και για τις δύο περιπτώσεις που ακολουθούν. Δηλαδή για το απλό μας μοντέλο, για τους λανθάνοντες χρόνους του δεξιού και του αριστερού άκρου αντίστοιχα, θα έχουμε:

Coefficients (δεξί άκρο):

(Intercept)

1.056575

Degrees of freedom: 334 total; 333 residual

Residual standard error: 0.4647966

Coefficients (αριστερό άκρο):

(Intercept)

1.132012

Degrees of freedom: 334 total; 333 residual

Residual standard error: 0.4679182

Τα αποτελέσματα που θα πάρουμε έπειτα της εφαρμογής του μοντέλου που ενσωματώνει και τον παράγοντα ταξινόμησης (στην περίπτωσή μας τη γωνία), για τους λανθάνοντες χρόνους του δεξιού και του αριστερού άκρου αντίστοιχα, τα εξής:

Coefficients (δεξί άκρο):

ANGLE 45 ⁰	ANGLE 90 ⁰	ANGLE 135 ⁰	ANGLE 180 ⁰	ANGLE 225 ⁰	ANGLE 270 ⁰	ANGLE 315 ⁰
1.092947	1.10075	1.19182	0.9315106	0.9157209	1.102275	1.043887

Degrees of freedom: 334 total; 327 residual

Residual standard error: 0.4599688

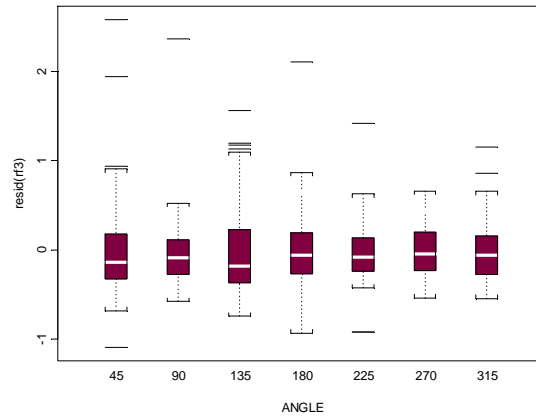
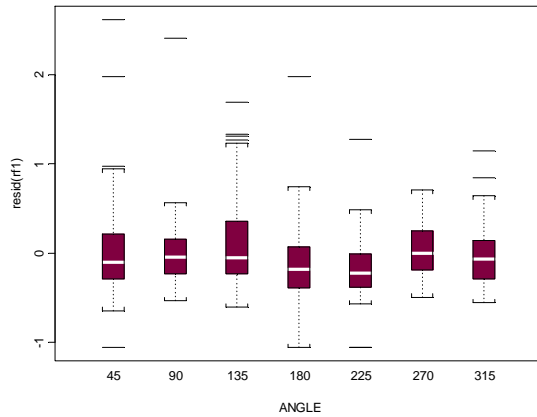
Coefficients (αριστερό άκρο):

ANGLE 45 ⁰	ANGLE 90 ⁰	ANGLE 135 ⁰	ANGLE 180 ⁰	ANGLE 225 ⁰	ANGLE 270 ⁰	ANGLE 315 ⁰
1.190596	1.105705	1.21996	1.046191	1.086209	1.19325	1.074925

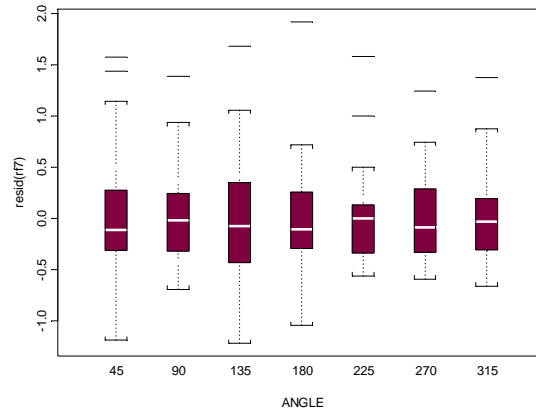
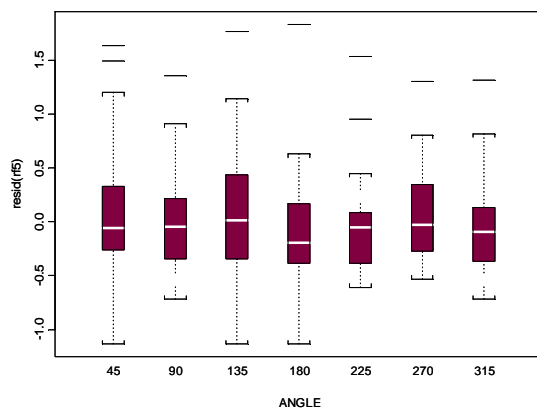
Degrees of freedom: 334 total; 327 residual

Residual standard error: 0.4677278

Τα διαγράμματα που αντιστοιχούν για τα μοντέλα που εφαρμόζουμε για τους λανθάνοντες χρόνους του δεξιού άκρου, είναι τα παρακάτω:



Αντίστοιχα, τα διαγράμματα για τους λαθάνοντες χρόνους του αριστερού άκρου, είναι τα εξής:



Ακολούθως, όσον αφορά στα μοντέλα που εφαρμόζουμε χρησιμοποιώντας ως παράγοντα ταξινόμησης την κατεύθυνση, θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Coefficients (δεξί άκρο):
 (Intercept)
 1.056575
Degrees of freedom: 334 total; 333 residual
Residual standard error: 0.4647966

Coefficients (αριστερό άκρο):

(Intercept)

1.132012

Degrees of freedom: 334 total; 333 residual

Residual standard error: 0.4679182

Τα αποτελέσματα που θα πάρουμε έπειτα της εφαρμογής του μοντέλου που ενσωματώνει και τον παράγοντα ταξινόμησης (στο σημείο αυτό την κατεύθυνση), για τους λανθάνοντες χρόνους του δεξιού και του αριστερού άκρου αντίστοιχα, τα εξής:

Coefficients (δεξί άκρο):

FUGAL	PETAL
1.248919	0.943

Degrees of freedom: 334 total; 332 residual

Residual standard error: 0.441259

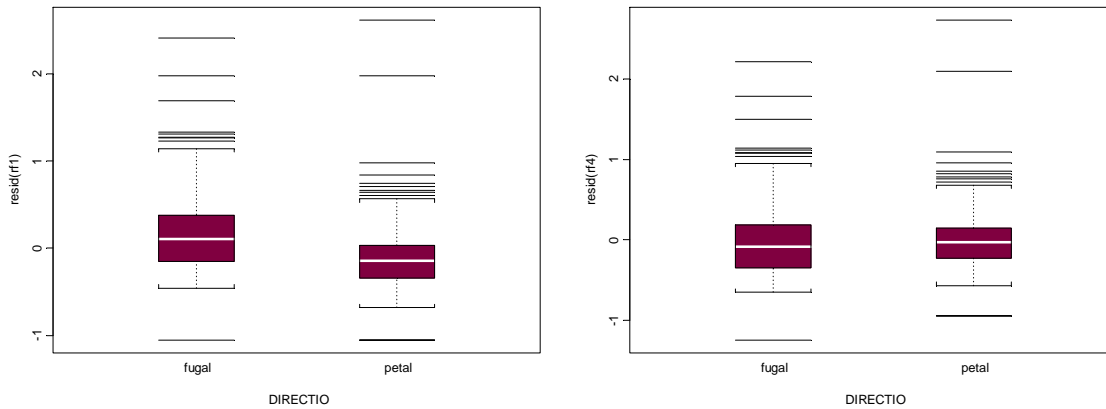
Coefficients (αριστερό άκρο):

FUGAL	PETAL
1.341766	1.008157

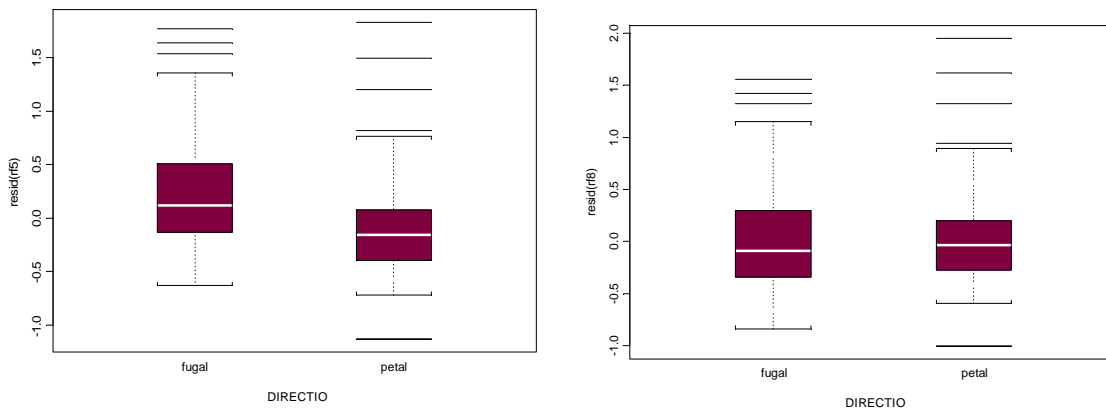
Degrees of freedom: 334 total; 332 residual

Residual standard error: 0.4398538

Τα διαγράμματα που αντιστοιχούν για τα μοντέλα που εφαρμόζουμε για τους λανθάνοντες χρόνους του δεξιού άκρου, είναι τα παρακάτω:



Αντίστοιχα, τα διαγράμματα για τους λανθάνοντες χρόνους του αριστερού άκρου, είναι τα εξής:



Από όλη την παραπάνω ανάλυση, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όταν εφαρμόζουμε το μοντέλο μας που ενσωματώνει τον εκάστοτε παράγοντα ταξινόμησης (άτομο, γωνία και κατεύθυνση) μειώνεται το τυπικό σφάλμα των υπολοίπων και από τα διαγράμματα βλέπουμε ότι τα υπόλοιπα στο μοντέλο αυτό τοποθετούνται με μεγαλύτερη ακρίβεια γύρω από το μηδέν και έχουν μικρότερα μεγέθη από τα αποτελέσματα που παίρνουμε όταν εφαρμόζουμε τα απλά μοντέλα.

4.3.2. Μοντέλο τυχαίων επιδράσεων

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω μεθοδολογία που ακολουθήσαμε για την ανάλυση των δεδομένων μας, μπορεί να επεκταθεί, με την έννοια ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα μοντέλο τυχαίων επιδράσεων, το οποίο θα περιλαμβάνει και μια εκτιμήτρια για την εντός των αντικειμένων μεταβλητότητα και θα δίνει βάρος και στον πληθυσμό από τον οποίο λήφθηκε το δείγμα μας, κάτι που προσελκύει μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Τέλος, αντίθετα με το μοντέλο των σταθερών επιδράσεων που μόλις πριν ακολουθήσαμε, δεν θα αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της γραμμικής αύξησης των παραμέτρων του μοντέλου σε σχέση με τον αριθμό των αντικειμένων. Στο μοντέλο των τυχαίων επιδράσεων, ο παράγοντας ταξινόμησης (άτομο – γωνία – κατεύθυνση) αντιμετωπίζεται ως μια τυχαία απόκλιση γύρω από τον πληθυσμιακό μέσο. Η ακόλουθη παραμετροποίηση του μοντέλου (4.1) που δίνεται παραπάνω, μας διευκολύνει για την εφαρμογή του μοντέλου των τυχαίων επιδράσεων για τα δεδομένα μας. Έτσι λοιπόν, θα έχουμε:

$$y_{ij} = \bar{b} + (b_i - \bar{b}) + e_{ij}$$

όπου το $\bar{b} = \sum_{i=1}^{10} b_i / 10$ εκπροσωπεί τον μέσο λανθάνοντα χρόνο για τα άτομα (για τη γωνία ή την κατεύθυνση θα έχουμε ότι $\bar{b} = \sum_{i=1}^7 b_i / 7$ και $\bar{b} = \sum_{i=1}^2 b_i / 2$ αντίστοιχα) στο πείραμά μας. Το μοντέλο των τυχαίων επιδράσεων αντικαθιστά το \bar{b} με το μέσο λανθάνοντα χρόνο στον πληθυσμό και αντικαθιστά τις αποκλίσεις $b_i - \bar{b}$ με τυχαίες μεταβλητές, η κατανομή των οποίων πρέπει να εκτιμηθεί.

Ένα μοντέλο τυχαίων επιδράσεων για την περίπτωση της μονοδιάστατης ταξινόμησης, μπορεί να γραφεί επομένως ως εξής:

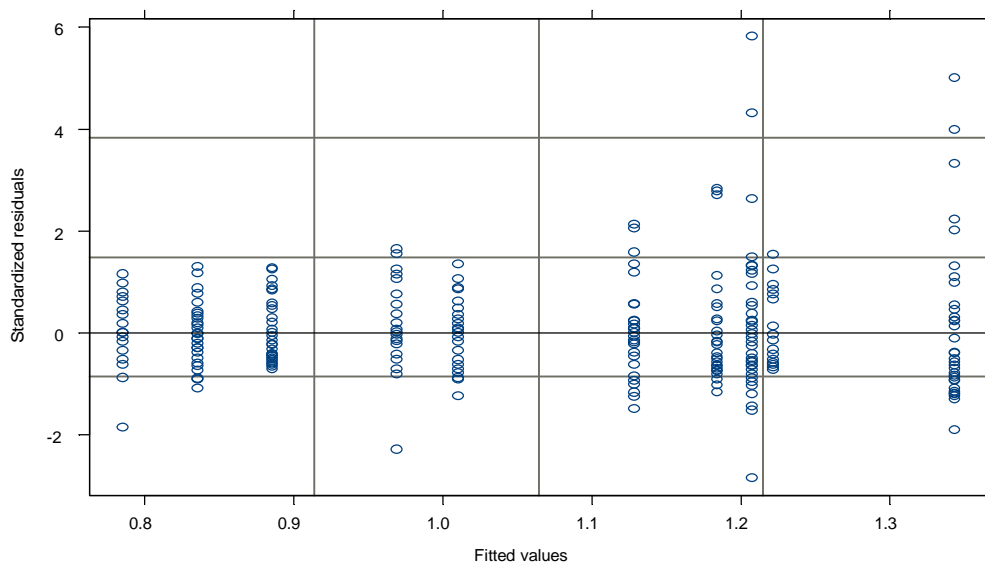
$$y_{ij} = b + b_i + e_{ij}$$

Όπου το b εκφράζει τον μέσο λανθάνοντα χρόνο στον πληθυσμό απ' όπου λαμβάνεται το δείγμα, το b_i αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή που εκπροσωπεί την απόκλιση του μέσου λανθάνοντα χρόνου για το i -οστό άτομο (i -οστή γωνία i -οστή κατεύθυνση) από τον πληθυσμιακό μέσο.

Τέλος, για να ολοκληρώσουμε το στατιστικό μοντέλο, πρέπει να προσδιορίσουμε την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών. Έτσι λοιπόν, θα έχουμε ότι $b_i \sim N(0, s_b^2)$ και $e_{ij} \sim N(0, s^2)$. Εφαρμόζοντας λοιπόν το παραπάνω μοντέλο στα δεδομένα μας και όσον αφορά τους λανθάνοντες χρόνους του δεξιού ποδιού και έχοντας ως παράγοντα ταξινόμησης τα άτομα, θα πάρουμε τα παρακάτω αποτελέσματα για τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας και τα κριτήρια AIC και BIC:

$$\hat{b} = 1.057 \quad \hat{s}_b = 0.1881 \quad \hat{s} = 0.424 \quad AIC = 400.6751 \quad BIC = 412.1085$$

Το διάγραμμα των καταλοίπων, θα έχει την εξής μορφή:



Όπως παρατηρούμε, δεν παρουσιάζεται κάποια συστηματική αύξηση (ή μείωση) στη διακύμανση των e_{ij} καθώς το επίπεδο της απόκρισης αυξάνεται. Επομένως

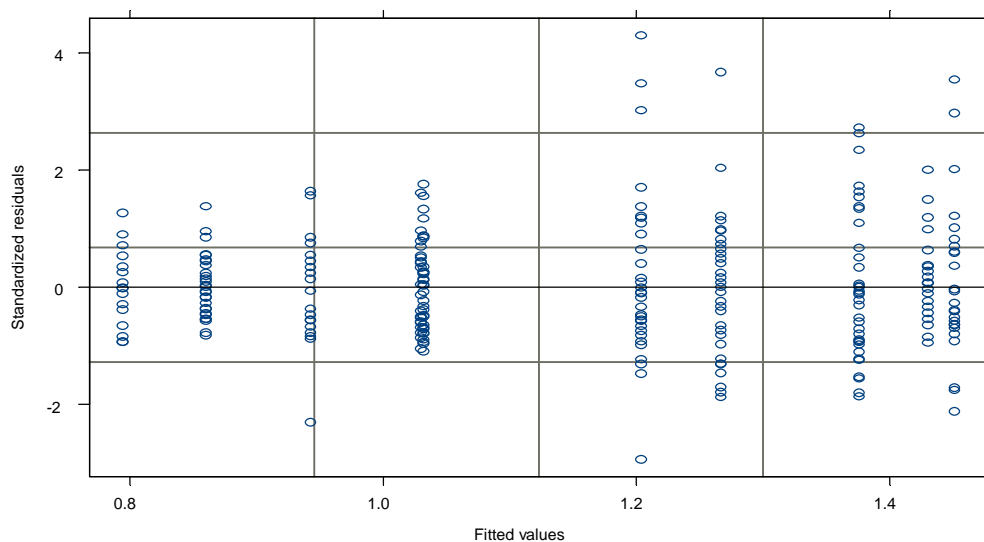
μπορούμε να πούμε ότι η διακύμανση των καταλοίπων παραμένει σταθερή. Επιπλέον, ο πίνακας ANOVA θα δώσει τα εξής:

	numDF	denDF	F-value	p-value
(Intercept)	1	324	245.2758	<.0001

Καθώς η υπόθεση που ελέγχεται σε αυτή την περίπτωση είναι η $b = 0$ και το p-value είναι $0.0001 < 0.05$, θα πρέπει να την απορρίψουμε.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τους λανθάνοντες χρόνους για το αριστερό πόδι:

$$\hat{b} = 1.1388 \quad \hat{s}_b = 0.2354 \quad \hat{s} = 0.4087 \quad AIC = 380.9478 \quad BIC = 392.3812$$



	numDF	denDF	F-value	p-value
(Intercept)	1	324	192.0926	<.0001

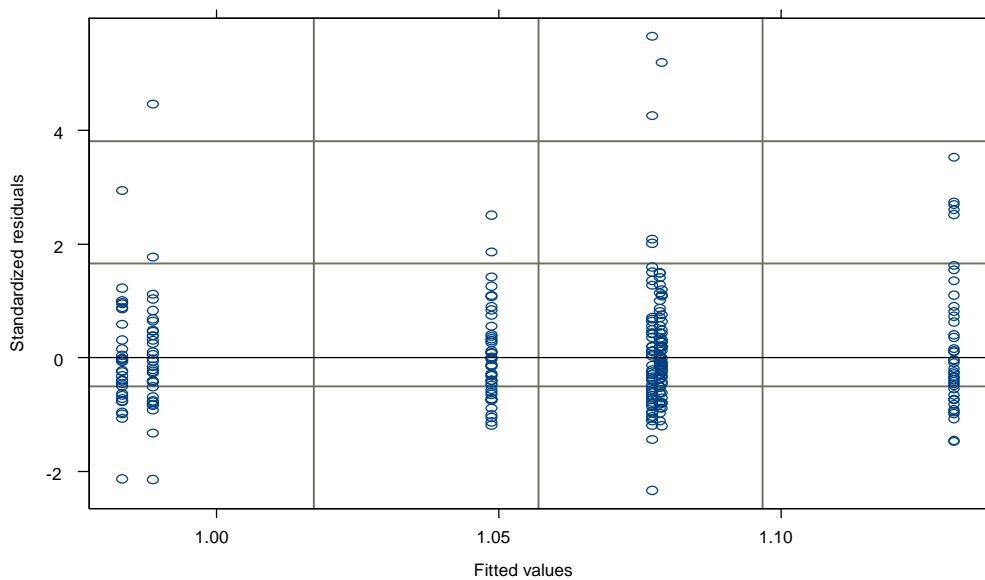
Και πάλι παρατηρούμε ότι η διακύμανση των καταλοίπων παραμένει σταθερή και ότι η υπόθεση $b = 0$ απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=5\%$.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να εργαστούμε και χρησιμοποιώντας ως παράγοντα ταξινόμησης τη γωνία και τη κατεύθυνση. Επομένως, τα αποτελέσματα που παίρνουμε από το μοντέλο αυτό και έχοντας ως παράγοντα ταξινόμησης τη γωνία, αρχικά για του

λανθάνοντες χρόνους του δεξιού ποδιού και στη συνέχεια για εκείνους που αντιστοιχούν στο αριστερό κάτω άκρο, θα είναι τα ακόλουθα:

Δεξί κάτω άκρο:

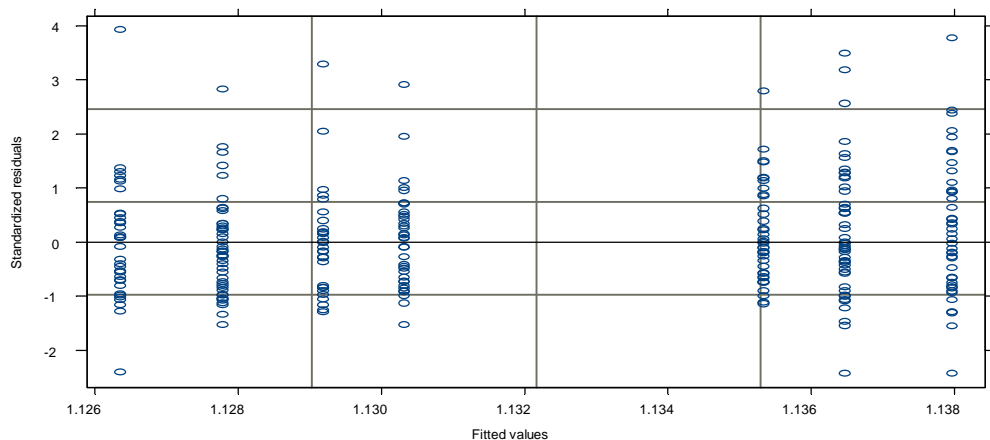
$$\hat{b} = 1.0553 \quad \hat{s}_b = 0.062 \quad \hat{s} = 0.46 \quad AIC = 439.4958 \quad BIC = 450.9292$$



	numDF	denDF	F-value	p-value
(Intercept)	1	327	803.3903	<.0001

Αριστερό κάτω άκρο:

$$\hat{b} = 1.1320 \quad \hat{s}_b = 0.000016 \quad \hat{s} = 0.4672 \quad AIC = 445.529 \quad BIC = 456.9624$$



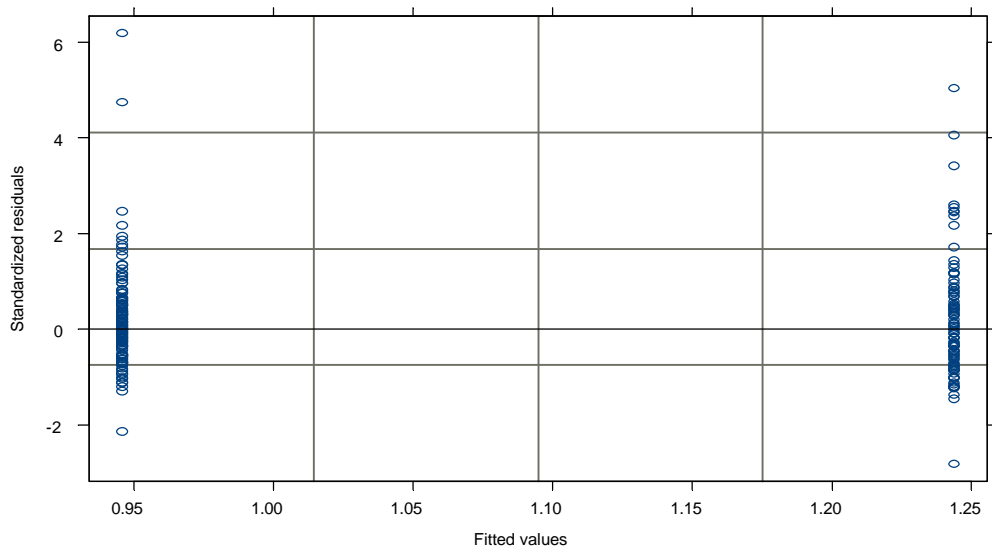
	numDF	denDF	F-value	p-value
(Intercept)	1	327	1826.668	<.0001

Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε όπως και προηγουμένως, ότι η διακύμανση των καταλοίπων παραμένει σταθερή και ότι η υπόθεση $b = 0$ απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=5\%$.

Τέλος, χρησιμοποιώντας τον παράγοντα κατεύθυνση και για τους λανθάνοντες χρόνους και των δύο κάτω άκρων, θα έχουμε τα παρακάτω:

Δεξί κάτω άκρο:

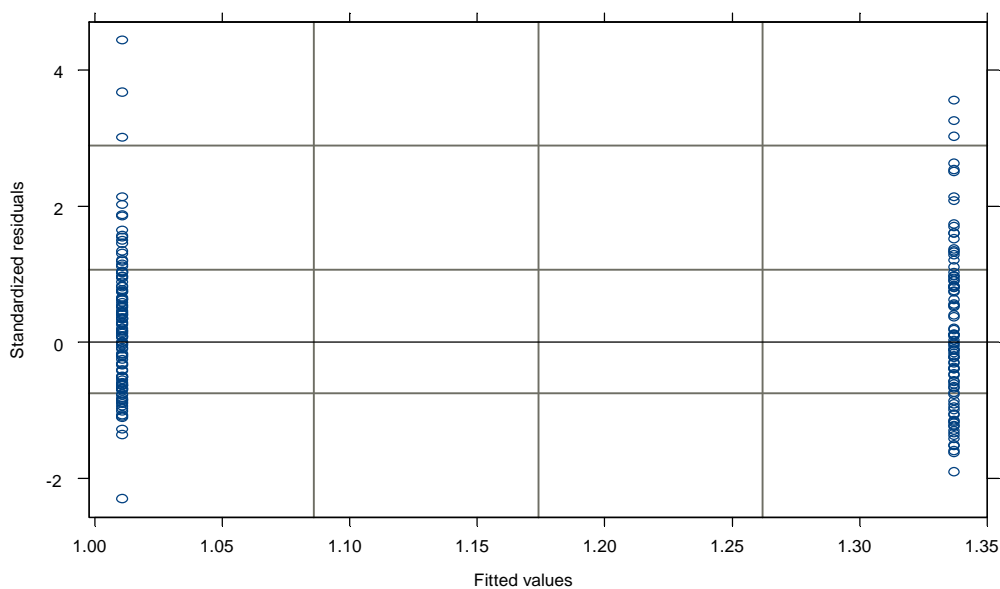
$$\hat{b} = 1.0938 \quad \hat{s}_b = 0.44126 \quad \hat{s} = 0.1488 \quad AIC = 413.274 \quad BIC = 424.7074$$



	numDF	denDF	F-value	p-value
(Intercept)	1	332	51.24157	<.0001

Αριστερό κάτω άκρο:

$$\hat{b} = 1.173 \quad \hat{s}_b = 0.163 \quad \hat{s} = 0.439 \quad AIC = 411.5027 \quad BIC = 422.9361$$



	numDF	denDF	F-value	p-value
(Intercept)	1	332	49.53795	<.0001

Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε όπως και προηγουμένως, ότι η διακύμανση των καταλοίπων παραμένει σταθερή και ότι η υπόθεση $b = 0$ απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=5\%$.

4.4. Προσέγγιση του προβλήματος μέσω γραμμικής παλινδρόμησης

Λόγω της φύσεως του πειράματος μας και των συνθηκών κάτω από τις οποίες αυτό διεξάχθηκε, κατά την ανάλυση των δεδομένων μας, αντιμετωπίσαμε ορισμένα προβλήματα τα οποία μπορούν να συνοψισθούν στα παρακάτω σημεία:

- Ο αριθμός των παρατηρήσεων που έχουμε στη διάθεσή μας για κάθε ένα από τα δέκα άτομα που λαμβάνουν μέρος στο πείραμά μας, δεν παραμένει σταθερός, αλλά αντίθετα, παρουσιάζει μεγάλες διαφορές. Πιο συγκεκριμένα, για τα άτομα 1 έως 10, έχουμε στη διάθεσή μας 36, 28, 46, 36, 44, 30, 38, 24, 24 και 28 σε αριθμό παρατηρήσεις αντίστοιχα.
- Υπάρχει ανισότητα στον αριθμό των παρατηρήσεων μεταξύ των δύο κατευθύνσεων fugal και petal όχι μονάχα γενικά, δηλαδή σε ολόκληρο το δείγμα μας των 334 παρατηρήσεων, αλλά και μέσα στις παρατηρήσεις του ίδιου ατόμου. Για να γίνουμε περισσότερο κατανοητοί, μπορεί ένα άτομο να παρουσιάζει 13 παρατηρήσεις στην κατεύθυνση fugal και 23 στην αντίθετη κατεύθυνση.
- Άνισος είναι επίσης και ο αριθμός των δύο κατευθύνσεων όσον αφορά στις γωνίες. Μπορεί επομένως οι παρατηρήσεις που ανήκουν σε ένα άτομο να μην εμφανίζουν μετρήσεις που να αντιστοιχούν σε κατεύθυνση 180° fugal αλλά στο ίδιο άτομο να εμφανίζονται παρατηρήσεις που να αντιστοιχούν σε μετρήσεις 180° κατεύθυνσης petal. Στο σύνολό τους, έχουμε 124 παρατηρήσεις που αντιστοιχούν στην κατεύθυνση fugal και 210 παρατηρήσεις που αντιστοιχούν στην κατεύθυνση petal.
- Ο αριθμός των παρατηρήσεων από άτομο σε άτομο διαφέρει. Για παράδειγμα το 1^ο άτομο έχει 6 παρατηρήσεις που να αντιστοιχούν σε γωνία 45° (συνολικά fugal και petal) ενώ το 2^ο άτομο να παρουσιάζει το σύνολο των 4^{ων} παρατηρήσεων για την ίδια αυτή γωνία κ.ο.κ.. Επιπλέον, δεν παραμένει σταθερή η συχνότητα με την οποία θα κληθεί ο κάθε ένας από τους εθελοντές σε κάθε μία από τις επτά γωνίες. Μπορεί επομένως, ένα άτομο κατά τη διάρκεια του πειράματος να στραφεί προς τις 45° τρεις φορές, ενώ δεν θα κληθεί να στραφεί καμία φορά προς τις 180°.

Για όλους λοιπόν τους παραπάνω λόγους και λόγω του γεγονότος ότι μέσω των μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί για τα μεικτά μοντέλα, όπως είδαμε παραπάνω τα αποτελέσματα που παίρνουμε δεν είναι και τόσο ικανοποιητικά όσον αφορά την διεξαγωγή των επιθυμητών συμπερασμάτων για την απάντηση του ερωτήματος που μας έχει τεθεί, γίνεται κατανοητό ότι η επίλυσή του, αντιμετώπισε αρκετά προβλήματα. Για να ξεπεράσουμε αυτές τις δυσκολίες, προσπαθήσαμε να δώσουμε μία απάντηση στο

ερώτημα του πειράματός μας, μέσω ενός μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης, χρησιμοποιώντας πια όχι τις 334 παρατηρήσεις που αρχικά είχαμε στη διάθεσή μας, αλλά χρησιμοποιώντας τον μέσο κάθε ατόμου, σε κάθε μία από τις συνεχείς μεταβλητές μας. Έτσι λοιπόν, είχαμε πια δέκα στον αριθμό παρατηρήσεις για κάθε μία από αυτές τις μεταβλητές, οι οποίες πια θα είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη, καθώς οι παρατηρήσεις που προέρχονται από διαφορετικά άτομα δεν αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της εξάρτησης.

Η πολλαπλή παλινδρόμηση αποτελεί επέκταση της απλής παλινδρόμησης. Επιδίωξη της είναι η εξέταση της σχέσης μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής Y και κάποιων ανεξάρτητων X_1, \dots, X_{p-1} . Η εξαρτημένη μεταβλητή Y θεωρείται ως ένας γραμμικός συνδυασμός των ανεξάρτητων μεταβλητών X_1, \dots, X_{p-1} , δηλαδή

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + \dots + b_{p-1} X_{p-1} + e$$

Οι υποθέσεις του στατιστικού πολλαπλού γραμμικού μοντέλου $Y_i = b_0 X_{i0} + b_1 X_{i1} + \dots + b_{p-1} X_{i,p-1} + e_i$ ($i = 1, \dots, n$) είναι οι εξής:

- $E(e_i) = 0$, $Var(e_i) = s^2$, $Cov(e_i, e_j) = 0$
- $E(e_i) = 0 \Rightarrow E(Y_i) = b_0 X_{i0} + \dots + b_{p-1} X_{i,p-1}$
- $V(e_i) = s^2 \Rightarrow V(Y_i) = s^2 \quad i = 1, \dots, n$
- $Cov(e_i, e_j) = 0 \Rightarrow Cov(Y_i, Y_j) = 0 \quad i \neq j$

Άρα:

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \quad E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \quad D(\boldsymbol{\varepsilon}) = D(\mathbf{Y}) = s^2 \mathbf{I}$$

Για την ανάλυσή μας, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα που μας έχει τεθεί προσαρμόζοντας δύο γραμμικά μοντέλα, καθώς έχουμε στη διάθεσή μας δύο εξαρτημένες μεταβλητές, μία που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους του δεξιού άκρου και μία που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους του αριστερού άκρου.

Αρχικά, μπορούμε να δούμε ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών, ελέγχοντας τις συσχετίσεις που υπάρχουν μεταξύ τους. Μέσω του στατιστικού πακέτου SPSS, θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

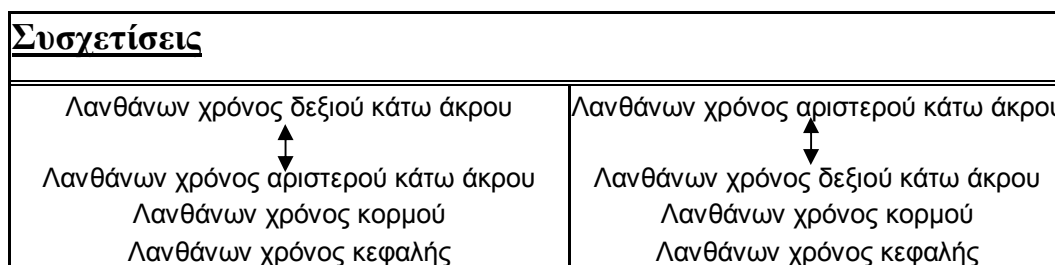
Correlations

		late_eye	late_trunk	late_head	tr_velocity	tr_deviation	head_angle	late_rf	late_lf
late_eye	Pearson Correlation	1	,889**	,931**	-,069	,108	-,602	,619	,535
	Sig. (2-tailed)	.	,001	,000	,850	,767	,065	,057	,111
	N	10	10	10	10	10	10	10	10
late_trunk	Pearson Correlation	,889**	1	,982**	-,164	,160	-,512	,789**	,746*
	Sig. (2-tailed)	,001	.	,000	,651	,659	,130	,007	,013
	N	10	10	10	10	10	10	10	10
late_head	Pearson Correlation	,931**	,982**	1	-,121	,129	-,569	,704*	,678*
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	.	,738	,722	,086	,023	,031
	N	10	10	10	10	10	10	10	10
tr_velocity	Pearson Correlation	-,069	-,164	-,121	1	,483	,486	-,195	-,124
	Sig. (2-tailed)	,850	,651	,738	.	,157	,154	,590	,734
	N	10	10	10	10	10	10	10	10
tr_deviation	Pearson Correlation	,108	,160	,129	,483	1	,326	,565	,597
	Sig. (2-tailed)	,767	,659	,722	,157	.	,358	,089	,068
	N	10	10	10	10	10	10	10	10
head_angle	Pearson Correlation	-,602	-,512	-,569	,486	,326	1	-,249	-,116
	Sig. (2-tailed)	,065	,130	,086	,154	,358	.	,487	,749
	N	10	10	10	10	10	10	10	10
late_rf	Pearson Correlation	,619	,789**	,704*	-,195	,565	-,249	1	,919**
	Sig. (2-tailed)	,057	,007	,023	,590	,089	,487	.	,000
	N	10	10	10	10	10	10	10	10
late_lf	Pearson Correlation	,535	,746*	,678*	-,124	,597	-,116	,919**	1
	Sig. (2-tailed)	,111	,013	,031	,734	,068	,749	,000	.
	N	10	10	10	10	10	10	10	10

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

* . Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, βλέπουμε ότι στατιστικά σημαντική συσχέτιση υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών:



Για την εφαρμογή των μοντέλων μας, θα πρέπει να ελέγξουμε αν οι εξαρτημένες μας μεταβλητές ακολουθούν την κανονική κατανομή. Ο έλεγχος υποθέσεων που θέλουμε να κάνουμε εκφράζεται ως εξής:

H₀: Η μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή

H₁: Η μεταβλητή δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή

Εργαζόμενοι μέσω του στατιστικού πακέτου SPSS, θα πάρουμε τα εξής αποτελέσματα:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		late_rf	late_lf
N		10	10
Normal Parameters ^{a,b}	Mean	1,05385900	1,13607360
	Std. Deviation	,207365843	,257669485
Most Extreme Differences	Absolute	,168	,166
	Positive	,117	,166
	Negative	-,168	-,112
Kolmogorov-Smirnov Z		,531	,526
Asymp. Sig. (2-tailed)		,940	,945

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Καθώς ισχύει και για τις δύο μας μεταβλητές ότι $p\text{-value} > 0.05$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι δεν θα απορρίψουμε την αρχική μας υπόθεση και κατά συνέπεια, θα αποδεχθούμε ότι οι μεταβλητές μας αυτές ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Εργαζόμενοι αρχικά έχοντας ως εξαρτημένη μεταβλητή τους λανθάνοντες χρόνους που αντιστοιχούν στο δεξί κάτω άκρο κι εφαρμόζοντας γραμμική παλινδρόμηση με τη μέθοδο Stepwise, θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά το μοντέλο που εφαρμόζουμε:

Variables Entered/Removed^a

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	late_trunk	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter \leq ,050, Probability-of-F-to-remove \geq ,100).
2	tr_deviation	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter \leq ,050, Probability-of-F-to-remove \geq ,100).
3	tr_velocity	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter \leq ,050, Probability-of-F-to-remove \geq ,100).
4	late_head	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter \leq ,050, Probability-of-F-to-remove \geq ,100).

a. Dependent Variable: late_rf

ANOVA ^e

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	,241	1	,241	13,178	,007 ^a
	Residual	,146	8	,018		
	Total	,387	9			
2	Regression	,317	2	,159	15,983	,002 ^b
	Residual	,070	7	,010		
	Total	,387	9			
3	Regression	,365	3	,122	33,441	,000 ^c
	Residual	,022	6	,004		
	Total	,387	9			
4	Regression	,381	4	,095	77,361	,000 ^d
	Residual	,006	5	,001		
	Total	,387	9			

- a. Predictors: (Constant), late_trunk
b. Predictors: (Constant), late_trunk, tr_deviation
c. Predictors: (Constant), late_trunk, tr_deviation, tr_velocity
d. Predictors: (Constant), late_trunk, tr_deviation, tr_velocity, late_head
e. Dependent Variable: late_rf

Coefficients ^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	,047	,281		,168	,871
	late_trunk	1,536	,423	,789	3,630	,007
2	(Constant)	-,170	,221		-,769	,467
	late_trunk	1,395	,316	,717	4,417	,003
	tr_deviation	,023	,008	,451	2,778	,027
3	(Constant)	,201	,169		1,193	,278
	late_trunk	1,194	,199	,614	5,998	,001
	tr_deviation	,033	,006	,669	5,805	,001
	tr_velocity	-,006	,002	-,417	-3,619	,011
4	(Constant)	-,069	,124		-,554	,604
	late_trunk	3,419	,634	1,756	5,394	,003
	tr_deviation	,030	,004	,592	8,402	,000
	tr_velocity	-,005	,001	-,331	-4,641	,006
	late_head	-2,085	,584	-1,137	-3,570	,016

- a. Dependent Variable: late_rf

Βλέπουμε λοιπόν ότι το μοντέλο μας με εξαρτημένη μεταβλητή τους λανθάνοντες χρόνους για το δεξί κάτω άκρο, θα είναι της μορφής:

$$Y = b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + e$$

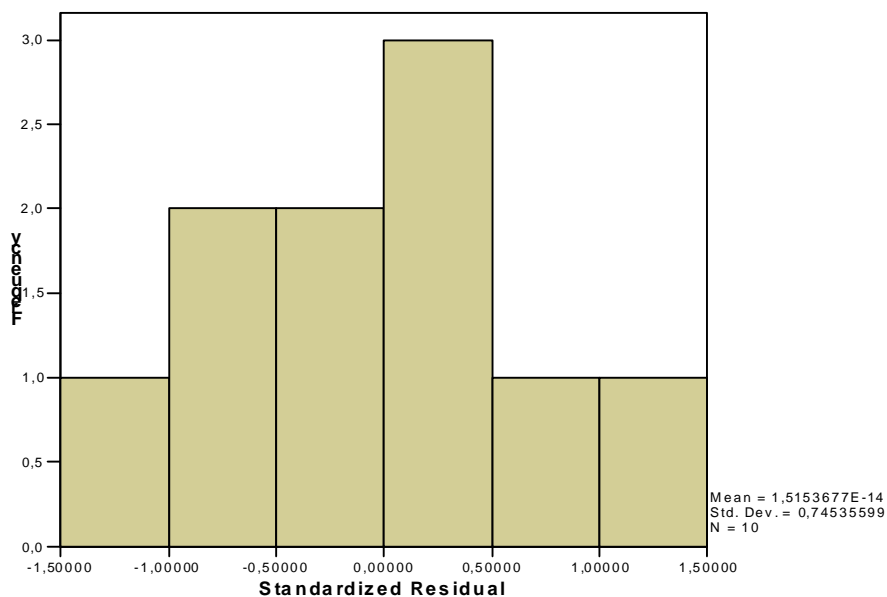
όπου το X_1 εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους του κορμού
το X_2 εκφράζει τη γωνία του κορμού
το X_3 εκφράζει την ταχύτητα του κορμού και
το X_4 εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους της κεφαλής

Πιο συγκεκριμένα, η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων διαμορφώνεται ως εξής:

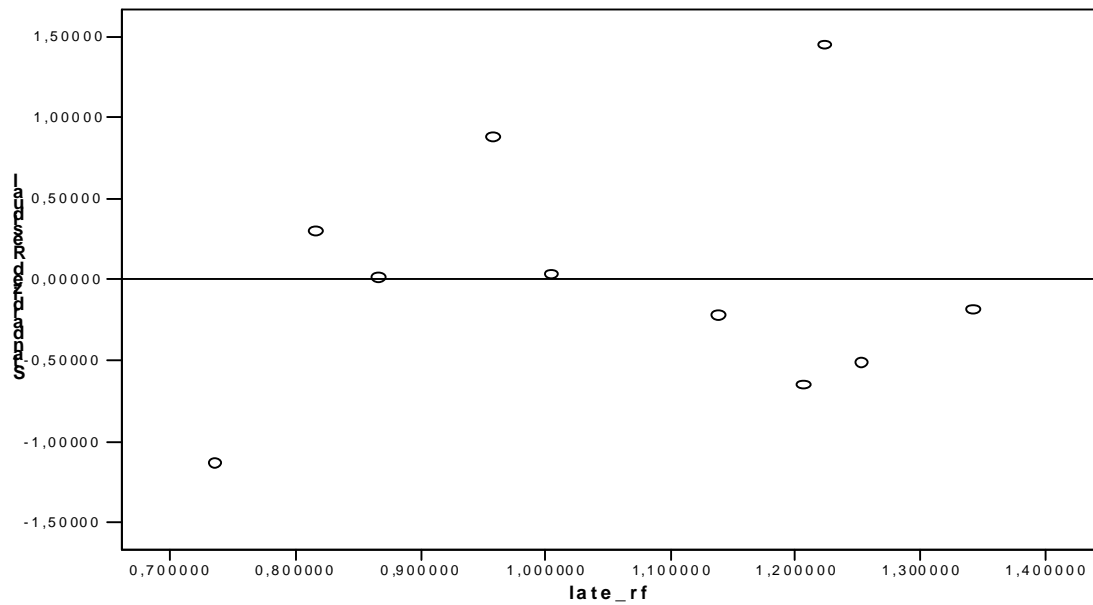
$$\hat{Y} = 3.419X_1 + 0.030X_2 - 0.005X_3 - 2.085X_4$$

Στη συνέχεια, θα πρέπει να ελέγξουμε αν τα υπόλοιπά μας πληρούν τις απαραίτητες προϋποθέσεις. Για το λόγο αυτό, προβαίνουμε σε έλεγχο κανονικότητας, έλεγχο ροών για έλεγχο ανεξαρτησίας και κατασκευή scatter plot για τον έλεγχο της σταθερότητας της διακύμανσης. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι τα ακόλουθα:

Από τον έλεγχο της κανονικότητας έχουμε ότι το p-value είναι ίσο με $0.895 > 0.05$, άρα οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι δεν μπορούμε να απορρίψουμε την αρχική μας υπόθεση, ότι δηλαδή τα υπόλοιπα ακολουθούν την κανονική κατανομή. Το ιστόγραμμα των υπολοίπων, φαίνεται παρακάτω:



Ο έλεγχος ροών, μας δίνει p-value ίσο με $0.998 > 0.05$ άρα οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τα υπόλοιπα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Τέλος, για να ελέγξουμε τη διακύμανση των υπολοίπων, θα χρησιμοποιήσουμε ένα scatter plot, που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η διακύμανση παραμένει σταθερή και δεν αυξάνεται αλλά ούτε και ελαττώνεται ανάλογα με το y και το οποίο εμφανίζεται με την εξής μορφή:



Τέλος, ως συντελεστής προσδιορισμού ορίζεται το πηλίκο του αθροίσματος τετραγώνων που οφείλεται στην παλινδρόμηση προς το ολικό άθροισμα τετραγώνων, δηλαδή έχουμε ότι ισχύει $R^2 = \frac{SSR}{SST}$. Στο συγκεκριμένο μοντέλο μας, ο συντελεστής προσδιορισμού εμφανίζεται ίσως με 0.984, δηλαδή το 98.4% της μεταβλητότητας οφείλεται στην παλινδρόμηση και το 1.6% στα σφάλματα. Ο συντελεστής αυτός προσδιορισμού μας δείχνει ότι το μοντέλο μας αποτελεί μια πολύ καλή προσαρμογή για τα δεδομένα μας.

Συνοψίζοντας λοιπόν τα παραπάνω, οι παράγοντες που επηρεάζουν σημαντικά τους λανθάνοντες χρόνους για το δεξί κάτω άκρο, είναι οι λανθάνοντες χρόνοι της κεφαλής και του κορμού, καθώς επίσης και η γωνία και η ταχύτητα του κορμού.

Αν εργαστούμε με την ίδια μεθοδολογία για το δεύτερό μας μοντέλο, το οποίο θα έχει ως εξαρτημένη μεταβλητή τους λανθάνοντες χρόνους που αντιστοιχούν στο αριστερό κάτω άκρο, θα έχουμε αντίστοιχα, τα παρακάτω αποτελέσματα μέσω του στατιστικού μας πακέτου και της διαδικασίας Stepwise:

Variables Entered/Removed ^a

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	late_trunk	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter <= ,050, Probability-of-F-to-remove >= ,100).
2	tr_deviation	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter <= ,050, Probability-of-F-to-remove >= ,100).

a. Dependent Variable: late>If

ANOVA ^c

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	,333	1	,333	10,052	,013 ^a
	Residual	,265	8	,033		
	Total	,598	9			
2	Regression	,473	2	,236	13,249	,004 ^b
	Residual	,125	7	,018		
	Total	,598	9			

a. Predictors: (Constant), late_trunk

b. Predictors: (Constant), late_trunk, tr_deviation

c. Dependent Variable: late>If

Coefficients ^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-,047	,378		-,125	,903
	late_trunk	1,805	,569	,746	3,170	,013
2	(Constant)	-,341	,296		-1,149	,288
	late_trunk	1,616	,423	,668	3,816	,007
	tr_deviation	,030	,011	,490	2,801	,026

a. Dependent Variable: late>If

Βλέπουμε λοιπόν ότι το μοντέλο μας με εξαρτημένη μεταβλητή τους λανθάνοντες χρόνους που αναφέρονται στο αριστερό κάτω άκρο, θα είναι της μορφής:

$$Y = b_1X_1 + b_2X_2 + e$$

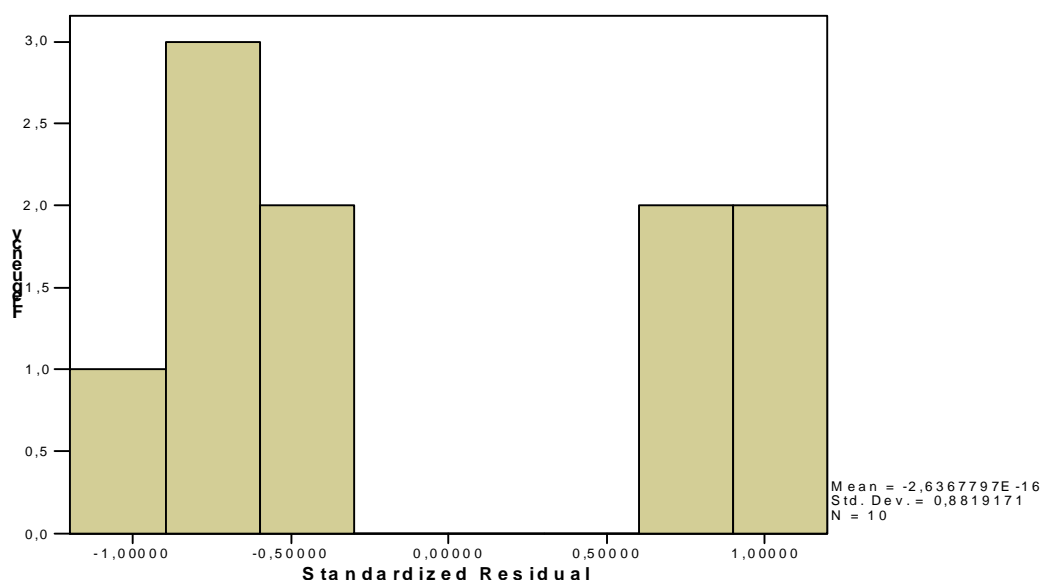
όπου το X_1 θα εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους του κορμού και

το X_2 θα εκφράζει τη γωνία του κορμού

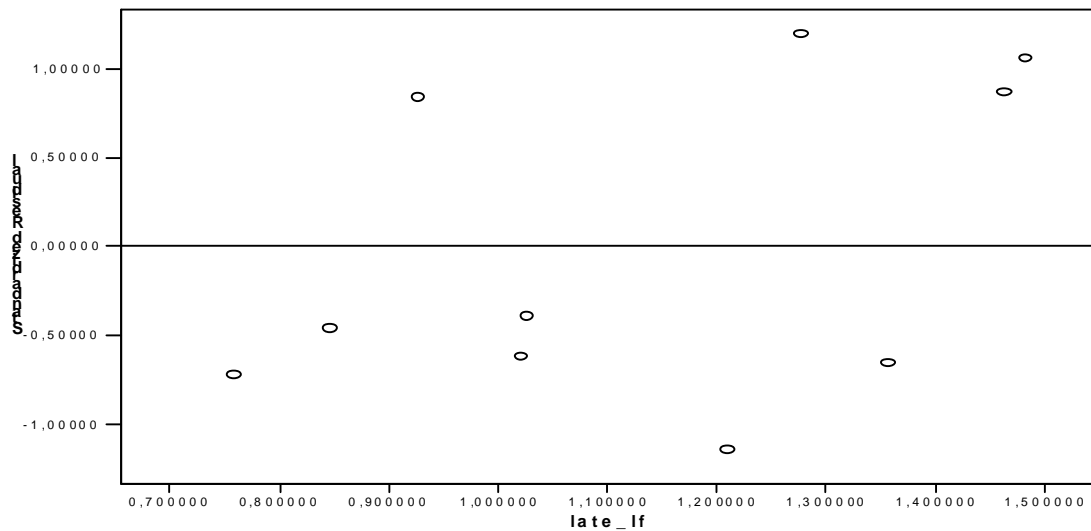
Πιο συγκεκριμένα, η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων διαμορφώνεται ως εξής:

$$\hat{Y} = 1.616X_1 + 0.030X_2$$

Στη συνέχεια, προχωρούμε στον έλεγχο των προϋποθέσεων που πρέπει να πληρούνται για τα υπόλοιπα. Αρχικά, για τον έλεγχο κανονικότητας των υπολοίπων, έχουμε ότι το p-value είναι ίσο με $0.457 > 0.05$, άρα οδηγούμαστε και πάλι στο συμπέρασμα ότι τα υπόλοιπά μας ακολουθούν την κανονική κατανομή. το ιστόγραμμα μας, θα έχει την εξής μορφή:



Ο έλεγχος ροών μας δίνει αποτέλεσμα για το p-value ίσο με $0.737 > 0.05$, άρα αντιλαμβανόμαστε ότι τα υπόλοιπα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Τέλος, για να ελέγξουμε τη διακύμανση των υπολοίπων, θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι ένα scatter plot, το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η διακύμανση δεν αυξάνεται και δεν μειώνεται σε σχέση με το Y αλλά παραμένει σταθερή. Το διάγραμμά μας είναι το παρακάτω:



Τέλος, ως συντελεστής προσδιορισμού $R^2 = \frac{SSR}{SST}$ στο συγκεκριμένο μοντέλο μας, εμφανίζεται ίσος με 0.925, δηλαδή το 92.5% της μεταβλητότητας οφείλεται στην παλινδρόμηση και το 7.5% στα σφάλματα. Ο συντελεστής αυτός προσδιορισμού μας δείχνει ότι το μοντέλο μας αποτελεί μια πολύ καλή προσαρμογή για τα δεδομένα μας.

Συνοψίζοντας λοιπόν τα παραπάνω, οι παράγοντες που επηρεάζουν σημαντικά τους λανθάνοντες χρόνους για το αριστερό κάτω άκρο, είναι οι λανθάνοντες χρόνοι του κορμού, καθώς επίσης και η γωνία του κορμού.

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε από την εφαρμογή και των δύο μοντέλων (δηλαδή έχοντας ως εξαρτημένες μεταβλητές και τους λανθάνοντες χρόνους του αριστερού κάτω άκρου αλλά και τους λανθάνοντες χρόνους για το δεξιό κάτω άκρο) βλέπουμε ότι και στα δύο μοντέλα ως παράγοντες που επηρεάζουν την εξαρτημένη μας μεταβλητή είναι οι λανθάνοντες χρόνοι του κορμού και η γωνία αυτού. Όσον αφορά τους λανθάνοντες χρόνους, όπως αναφέραμε και παραπάνω στην ανάλυσή μας η συσχέτιση και με τις δύο εξαρτημένες μας μεταβλητές παρουσιάζεται πολύ μεγάλη. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η μία από τις τρεις «υποψίες» που είχαν αναφερθεί στην αρχή της διπλωματικής μας εργασίας (ως προς τη γωνία του κορμού) και οι οποίες μας οδήγησαν στη διαμόρφωση της παρούσας ανάλυσης επιβεβαιώνεται. Επίσης από το πρώτο μας μοντέλο επιβεβαιώνεται και η κρίση ότι η ταχύτητα του κορμού επηρεάζει την κίνηση των άκρων. Από τα αποτελέσματά μας όμως, δεν επιβεβαιώνεται απόλυτα και η θέση ότι η αρχική εντολή που ξεκινά από τον εγκέφαλο και πάει διαδοχικά στους οφθαλμούς την κεφαλή και τελικά τον κορμό ότι σταματά και

δεν επηρεάζει την κίνηση των κάτω άκρων, όπως φαίνεται και από τα παραπάνω πορίσματα. Ένα ακόμη στοιχείο για το τελευταίο μπορεί να αποτελέσει και το γεγονός ότι στο πρώτο μας μοντέλο στατιστικά σημαντικός εμφανίστηκε και ο παράγοντας που εκφράζει τους λανθάνοντες χρόνους της κεφαλής.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι λόγω της συμμετρίας των γωνιών (45° , 315°), (90° , 270°) κλπ, θα μπορούσε να γίνει ενοποίηση των επιπέδων του παράγοντα γωνία (angle) και να αναλυθεί ο παράγοντας αυτός με πέντε επίπεδα αντί των εννέα που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη ανάλυση.

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Δομή επαναλαμβανόμενων μετρήσεων από πολλαπλά δείγματα	17
2.2	Δομή επαναλαμβανόμενων μετρήσεων από ένα δείγμα	23
4.1	Αριθμητική κατανομή των δεδομένων σε κάθε ένα από τα 10 άτομα για τις κατευθύνσεις petal και fugal	117
4.2	Μέση τιμή, μέγιστη και ελαχίστη τιμή των προς ανάλυση μεταβλητών	119
4.3.α	Μέση τιμή, μέγιστη και ελαχίστη τιμή των προς ανάλυση μεταβλητών για την κατεύθυνση fugal	120
4.3.β	Μέση τιμή, μέγιστη και ελαχίστη τιμή των προς ανάλυση μεταβλητών για την κατεύθυνση petal	121

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1-5	Περιγραφή του προβλήματος	3-5
Σχήμα 6	Γράφημα κίνησης μελών του σώματος σε αριστερόστροφη κίνηση προς τον στόχο των 90°	7
Σχήμα 4.1	Ιστογράμματα ανά γωνία για τους λανθάνοντες χρόνους των μελών του σώματος	123
Σχήμα 4.2	Ιστογράμματα γωνίας και (διαδοχικά από άνω αριστερή γωνία) λανθανόντων χρόνων Οφθαλμών – Κορμού – Κεφαλής – Δεξιού κάτω άκρου – Αριστερού κάτω άκρου	124
Διαγράμματα 4.1	One-way Classification βάση των τριών κατηγορικών μεταβλητών	126-127

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- Καραμανλής, Ορέστης (2003) *A Longitudinal Data Analysis Using Linear – Mixed Effects Models*, Διπλωματική Εργασία Ο.Π.Α
- Κατέρη, Μαρία (2003) *Ανάλυση Επαναλαμβανόμενων Μετρήσεων*, Σημειώσεις για το μάθημα των «Ειδικών Θεμάτων Βιοστατιστικής» του Π.Μ.Σ. «Εφαρμοσμένη Στατιστική» του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς
- Μαλέσιος, Χρυσοβαλάντης Χ. (2003) *Μοντέλα Για την Ανάλυση Συνεχών Διαμηκών Δεδομένων Με Ιδιαίτερη Έμφαση Στα Μεικτά Μοντέλα*, Διπλωματική Εργασία Ο.Π.Α

Ξένη

- Carey, D.P. (2000) *Eye-hand coordination: Eye to hand or hand to eye?* Current Biology 10R416 – R419
- Crowder, M.J. and Hand, D.J. (1990) *Analysis Of Repeated Measures*, Chapman and Hall, New York
- Davis, Charles S. (2002) *Statistical Methods for the Analysis of Repeated Measurements*, Springer – Verlag, New York
- Diggle, P., Heagerty, P., Liang, K.Y. and Zeger, S.L. (2002) *Analysis of Longitudinal Data*, Oxford University Press
- Ekkehard, Glimm (2000) *Spherical Tests in Balanced Multivariate Mixed Models*, Biometrical Journal 42 (2000) 8, 937 – 950
- Everitt, Brian S. and Dunn, Graham (1992) *Applied Multivariate Data Analysis*
- Fisher, B. and Rogal, L. (1986) *Eye – hand coordination in man: a reaction time study.* Biol Cybern 55:253-261

- Fisk, J.D. and Goodale, M.A. (1985) *The organization of eye and limb movements during unrestricted reaching to targets in contralateral and ipsilateral visual space*. Experimental Brain Research 60:159-78
- Flanders, M., Daghestani, L. and Berthoz, A. (1999) *Reaching beyond reach*. Experimental Brain Research 126:19-30
- Grasso, R., Prevost, P., Ivanenko, Y.P. and Berthoz, A. (1998) *Eye – hand coordination for the steering of locomotion in humans: an anticipatory synergy*. Neuroscience Letters 253 (2):115-118
- Giltinan, David M. (1995) *Nonlinear Models for Repeated Measurement Data*, Chapman and Hall / CRC
- Hand, D.J and Crowder, M.J. (1996) *Practical Longitudinal Data Analysis*, Chapman and Hall, New York
- Herman, R. Herman, R. and Mulucci, R. (1981) *Visually triggered eye – arm movements in man*. Experimental Brain Research 42:392-398
- Hollands, M.A., Marple – Horvat, D.E., Henkes, S. and Rowan, A.K. (1995) *Human eye movements during visually guided stepping*. Journal of Motor Behavior 27:155-163
- Hollands, M.A. and Marple – Horvat, D.E. (2001) *Coordination of eye and leg movements during visually guided stepping*. Journal of Motor Behavior 33 (2):205-16
- Hollands, M.A., Sorensen, K.L. and Patla, A.E. (2001) *The effects of Head Immobilization on the Co-ordination and Control of Head and Body Reorientation and Translation During Steering*. Experimental Brain Research 140 (2):223-233
- Hollands, M.A., Patla, A.E. and Vickers, J.N. (2002) *“Look where you’re going!”: Gaze behavior associated with maintaining and changing the direction of locomotion*. Experimental Brain Research 143 (2):221-30
- Hollands, M.A., Zivara, N.V. and Bronstein, A.M. (2004) *A new paradigm to investigate the roles of head and eye movements in the coordination of whole-body movements*
- Johnson, Richard A. and Wichern, Dean W. (1988) *Applied Multivariate Statistical Analysis 2nd Edition*, Prentice-Hall International, London
- Katz, J., Zeger, S. and Liang, K.Y. (1994) *Choosing appropriate statistical methods to account for similarities between fellow eyes*. Investigative Ophthalmology and Visual Sciences 35: 2461-2465

- Laire, M. and Ware, J.M (1982) *Random-effects models for longitudinal data* Biometrics 38: 963-974
- Liang, K.Y. and Zeger, S. (1986) *Longitudinal data analysis using generalized linear models* Biometrica 73: 13-22
- Liang, K.Y. and Zeger, S.L. (2000) *Longitudinal data analysis of continuous and discrete responses for pre-post designs* Sankhya Series B 62: 134-148
- Lindsey, J.K (1999) *Models For Repeated Measurements*, Oxford University Press, New York
- Liu, X. and Liang, K.Y. (1992) *Efficacy of repeated measures in regression model with measurement error* Biometrics 48: 645-654
- Milliken, George A. and Johnson, Dallas E. (2002) *Analysis Of Messy Data, Volume III: Analysis Of Covariance*, Chapman and Hall, New York
- Patla, A.E., Prentice, S. Robonson, C. and Neufeld, J. (1991) *Visual control of locomotion: strategies for changing direction and for going over obstacles* Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance 17:604-634
- Pinheiro, José C. and Bates, Douglas M. (2000) *Mixed – Effects Models In S And S-PLUS*, Springer – Verlag, New York
- Rencher, Alvin C. (2002) *Methods Of Multivariate Analysis, 2nd Edition*, Wiley – Interscience, New York
- Ronghui, Xu (2003) *Measuring Explained Variation in Linear Mixed Effects Models*, Statistics in Medicine 2003; 22:3527 – 3541
- Scheffé, H. (1959) *The Analysis of Variance*, John Wiley
- Timm, Neil H. (2002) *Applied Multivariate Statistics*, Springer – Verlag, New York
- Touloumi, G., Pocock, S.J., Baboker, A.G. and Darbyshire, J.H. (1999) *Estimation and comparison of range of change in longitudinal studies with informative drop-outs* Statistics in Medicine 18: 1215-1233
- Zeger, S., Liang, K.Y. and Albert, P. (1988) *Models for longitudinal data: a generalized estimating equation approach* Biometrics 44: 1049-1060