ΣΤΥΛΙΑΝΟΥ Α. ΣΑΡΑΝΤΙΔΗ, PH. D.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ

Α

(ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ)

ΕΚΔΟΤΗΣ: ΣΤΑΥΡΟΣ ΚΑΡΑΜΠΕΡΟΠΟΥΛΟΣ
ΠΕΙΡΑΙΕΥΣ 1971

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ

ΣΤΥΛΙΑΝΟΥ Α. ΣΑΡΑΝΤΙΔΗ PH.D.
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ

Α΄

ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

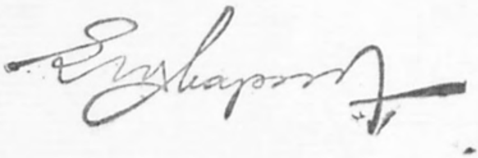
ΕΚΔΟΤΗΣ: ΣΤΑΥΡΟΣ ΚΑΡΑΜΠΕΡΟΠΟΥΛΟΣ
ΠΕΙΡΑΙΕΥΣ 1971

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ

ΕΙΣ ΤΗΝ ΦΙΛΟΜΑΘΗ ΕΛΛΗΝΙΚΗΝ ΝΕΟΛΑΙΑΝ

«Ἐπειδὴ δὲ ὑπάρχουν πολλαὶ πράξεις καὶ τέχναι καὶ ἐπιστῆμαι, ἔχομεν ἐπίσης καὶ πολλὰ ἀποτελέσματα· λόγου χάριν ἡ ἰατρικὴ ἔχει ἀποτέλεσμα τὴν ὑγείαν, ἡ δὲ ναυπηγικὴ τὸ πλοῖον, ἡ στρατηγικὴ πάλιν τὴν νίκην, καὶ ἡ οἰκονομικὴ τὸν πλοῦτον. Πολλαὶ δὲ ἀπὸ αὐτὰς ὑπάγονται εἰς ἓν σύστημα...».

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, Ἠθικὰ Νικομάχεια



ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Ἡ συγγραφὴ ἐγχειριδίον, ὡς τὸ ἀνὰ χεῖρας, ὁμοιάζει πρὸς τὴν προσπά-
θειαν διαπλεύσεως διὰ συμπληγάδων νήσων. Τὸ μὲν διότι ἡ Ἑλληνικὴ βιβλιο-
γραφία δὲν μᾶς παρέχει τὸ προηγούμενον, τὸ δὲ διότι τὸ μαθηματικὸν μέρος ἑ-
κάστου κεφαλαίου δὲν ἐγράφη ὑπὸ μαθηματικοῦ, ἀλλὰ ὑπὸ τοῦ ὑπογράφοντος
οἰκονομολόγου.

Ἡ παροῦσα ἔκδοσις πληροῖ ἓν κενὸν εἰς τὰ διδακτικὰ ἐγχειρίδια καὶ συγ-
κεκριμένως εἰς τὸ μάθημα τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως. Ὁ ὅρος «Οἰκονομικὴ
Ἀνάλυσις» χρησιμοποιεῖται πλέον εὐρύτατα εἰς τὴν καθόλου Οἰκονομικὴν Ἐ-
πιστήμην καὶ ὑποδηλοῖ διὰ τῆς δευτέρας λέξεως τὸν ποσοτικοαναλυτικὸν χα-
ρακτῆρα τῆς ἐπιστήμης. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ μάθημα τῆς οἰκονομικῆς ἀνα-
λύσεως σκοπὸν ἔχει νὰ διδάξῃ εἰς τοὺς φοιτητὰς τὴν διὰ τῆς ποσοτικῆς (μα-
θηματικῆς καὶ ἐμπειρικῆς) μεθόδου ἀντιμετώπισιν τῶν προβλημάτων τῆς οἰ-
κονομικῆς ἐπιστήμης, ἥτις ἤδη ἀπὸ τῆς δεκαετίας τοῦ 1930 κατέστη πλέον
σαφῶς «ποσοτική».

Οἱ τὸ πρῶτον μυούμενοι εἰς τὴν Οἰκονομικήν, ἥτις ἀποτελεῖ μίαν τῶν
κοινωνικῶν ἐπιστημῶν, εἶναι εὔλογον νὰ κάμνουν τὴν πρώτην μετ' αὐτῆς γνω-
ριμίαν εἰς ἐπίπεδον γνώσεων κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον ἁπλουστευμένον, χρη-
σιμοποιοῦντες κυρίως τὴν περιγραφικὴν μέθοδον τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας. Με-
τὰ ταῦτα, ὅμως, ἡ ἀντιμετώπισις τῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων θὰ χωρήσῃ
διὰ πλέον ἀναλυτικῶν μεθόδων. Ὁ σπουδαστὴς τῆς Οἰκονομικῆς θὰ πρέπει
νὰ καταστῇ ἱκανὸς ὅπως ἀντιμετωπίζῃ τῇ βοηθείᾳ τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως
τὰ ἐν τῇ πράξει ἀναφυόμενα θεωρητικὰ προβλήματα καὶ ἐπαρκῇ εἰς τὰς ἀνάγ-
κας τῆς ἐμπειρικῆς ἐρεύνης. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην, λοιπόν, εἰς τὸ μάθημα
τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως ἀντιμετωπίζομεν τόσον θεωρητικὰ ὅσον καὶ ἐμ-
πειρικὰ προβλήματα τῆς μικρο-καὶ μακρο-οικονομικῆς.

Τὴν ἀνωτέρω γνώμην ἐνισχύει καὶ ἡ αἰτιολόγησις εἰς ἣν προέβησαν οἱ
ἐκδόται - καθηγηταὶ τῆς γνωστῆς σειρᾶς «Συμβολαὶ εἰς τὴν Οἰκονομικὴν
Ἀνάλυσιν» τοῦ διεθνῶς γνωστοῦ Ἐκδοτικοῦ Οἴκου NORTH - HOLLAND
PUBLISHING COMPANY, AMSTERDAM. Οὕτω ἐν προλόγῳ ἁπά-
σων τῶν ἐκδόσεων τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς, μεταξὺ τῶν ἄλλων, γράφουν ὅτι: «Ὁ
ὅρος Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις, ὡς χρησιμοποιεῖται εἰς τὸν τίτλον
τῆς σειρᾶς, υἱοθετήθη διότι καλύπτει τόσον τὴν ἐργασίαν τοῦ θεωρητικοῦ οἰ-
κονομολόγου, ὅσον καὶ τοῦ ἐμπειρικοῦ ἐρευνητοῦ». Εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἐκδό-

σεων τούτων καὶ ὑπὸ τὸν τίτλον «Συμβολαὶ εἰς τὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν» ἐδημοσιεύθησαν ἐργασίαι θεωρητικοῦ καὶ πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος, αἱ ὁποῖαι εἶχον ὡς κοινὸν παρονομαστὴν τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον - μαθηματικήν, στατιστικήν, οἰκονομετρικήν. Τὰ θέματα, καίτοι ἐνίοτε θεωρητικά, εἶναι «πρακτικά» ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι δὲν εὑρίσκονται τόσον ἀπομεμακρυσμένα ἐκ τῆς δυνατότητος πρακτικῆς ἐφαρμογῆς ἢ τῆς ἐξευρέσεως ἀπαντήσεως εἰς προβλήματα τῆς πράξεως καὶ τῆς δεοντολογίας.

Εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας πρῶτον τεῦχος διαπραγματευόμεθα θέματα καὶ τεχνικὰς τῆς ὁριακῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως. Ὡς ἐκ τούτου αἱ βασικαὶ ἔννοιαι τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως θεωροῦνται ὡς ὅρος sine qua non, ὡς θὰ διαπιστωθῇ κυρίως ὅσον προχωρεῖ ἡ ἀνάλυσις. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, ὡς ἐπίσης διὰ τὴν πληρότητα καὶ αὐτάρκειαν τοῦ παρόντος, εἰς ἕκαστον κεφάλαιον προτάσσεται μέρος περιέχον τὰς ἀπαραιτήτους μαθηματικὰς ἐννοίας ἐν συνόψει. Τόσον λόγῳ τοῦ μαθηματικοῦ μέρους ὅσον καὶ λόγῳ τοῦ τρόπου διαπραγματεύσεως τῶν θεμάτων, τὸ παρὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς βοήθημα παρέχον τὰ ἀπαραιτήτους ποσοτικὰς τεχνικὰς τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως καὶ ἐφοδιάζον τὸν σπουδαστὴν τῆς Οἰκονομικῆς διὰ τῶν ἐφοδίων διὰ τῶν ὁποίων θὰ δυνηθῇ νὰ ἐργασθῇ ὡς οἰκονομικὸς ἀναλυτής, ἐφ᾽ ὅσον εἶναι ἐφοδιασμένος καὶ διὰ γνώσεων τῆς καθαρᾶς θεωρίας καὶ τῆς οἰκονομικῆς ἱστορίας.

Εἰς τὴν ἱστορικὴν ἀνάπτυξιν τῆς Οἰκονομικῆς Ἐπιστήμης, ἡ περιγραφικὴ μέθοδος ἐκθέσεως καὶ θεωρήσεως ἦτο τὸ πρῶτον στάδιον. Ἡ δυσκολία ὅμως ἀντιμετωπίσεως τῶν πεπλεγμένων οἰκονομικῶν σχέσεων καὶ φαινομένων καὶ ἡ ἀνάγκη ποσοτικῆς μετρήσεως καὶ ὑποδειγματικῆς παρουσιάσεως τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν πρὸς πρακτικοὺς σκοποὺς (οἰκονομικὴ πολιτική, οἰκονομικὸς προγραμματισμός), κατέστησαν ἀναγκαίαν τὴν εἰσαγωγὴν τῆς μαθηματικῆς καὶ γενικώτερον τῆς ποσοτικῆς μεθόδου. Ἡ σύγχρονος οἰκονομικὴ πλέον στηρίζεται εἰς τὴν βοήθειαν τῆς μαθηματικῆς καὶ ποσοτικῆς ἀναλύσεως. Ἡ μέτρησις ἀποτελεῖ σήμερον σημαντικὸν στοιχεῖον τῶν ἐν γένει κοινωνικῶν ἐπιστημῶν, τοσοῦτον δὲ μᾶλλον τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἀποτελεῖ κατὰ τὰς συγχρόνους ἀντιλήψεις «ποσοτικὴν» κυρίως ἐπιστήμην.

Ἡ ἀνάλυσις ὡρισμένων θεμάτων εἰς τὸ παρὸν τεῦχος γίνεται τῇ βοηθείᾳ γραφικῶν ἀπεικονίσεων, τῆς μεθόδου ταύτης κριθείσης ὡς πλέον παιδαγωγικῆς διὰ τὰς συγκεκριμένας περιπτώσεις.

Ἐνταῦθα δέον νὰ προβῶμεν, ἐπίσης, εἰς μίαν διευκρίνισιν. Ἡ ὕλη τοῦ παρόντος δὲν δύναται ὀρθῶς νὰ κριθῇ εἰ μὴ μόνον ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν προφορικὴν ἀνάπτυξιν καὶ τὴν ἐν τοῖς φροντιστηρίοις ἐπίλυσιν ἀσκήσεων καὶ διεξαγωγὴν συζητήσεων.

Δι᾽ ὅσους θὰ ἤθελον νὰ καταφύγουν εἰς ἀλλοδαπὰ συγγράμματα παρομοίου πρὸς τὸ παρὸν χαρακτῆρος θὰ ὑπεδείκνυον, πλὴν τῆς ἐν τῷ τέλει βιβλιογραφίας τὰ κάτωθι :

R. G. D. Allen, *Mathematical Economics*, *MacMillan and Co Ltd.*

R. Lipsey and G. Archibald, *A Mathematical Tre-*
atment of Economics, *Weidenfeld and Nicolson*, *London*, *1967*

A. Kooros, *Elements of Mathematical Economics*, *Boston*, *1965*

P. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, (νέα ἔκδοσις τοῦ *Atheneum*, *1965*). Λίαν δυσκόλου προσπελάσεως διὰ σπουδαστὰς πρώτου πτυχίου.

Τέλος, θὰ ἐπεθύμουν ὅπως διαδηλώσω τὴν εἰλικρινῆ μου στοργὴν πρὸς τὴν σεπτὴν χορείαν τῶν καθηγητῶν τῆς ἐν Πειραιεῖ Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς, οἵτινες μὲ πατρικὴν στοργὴν μὲ περιέβαλον, ποιήσαντες εἰς ἐμὲ τὴν μεγάλην τιμὴν ὅπως περιληφθῶ μεταξύ των καὶ ἀπὸ τῆς ἕδρας διδάξω τὴν Οἰκονομικὴν Ἐπιστήμην εἰς τὴν ὑπέροχον Ἑλληνικὴν νεολαίαν.

Σ.Α.Σ.

Πειραιεύς, 1970

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

«Ἐλπίζω ὅτι οἱ νέοι μας ποιηταὶ θὰ ἐνθυμῶνται τοὺς ἁπλοὺς μου ὁρισμούς...· δηλονότι, πεζογραφία = λέξεις κατὰ ἀρίστην τάξιν· ποίησις = αἱ ἄρισται λέξεις εἰς ἀρίστην τάξιν».

S. T. COLERIDGE, Table Talk, 12 Ἰουλίου, 1827

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 0

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ΕΠΙ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

Σκοπός τῆς εἰσαγωγῆς ταύτης εἶναι ἡ συνοπτική παροχή ὁρισμῶν καί διευκρινίσεων ἐπί τοῦ σκοποῦ, τοῦ ἀντικειμένου καί τῆς μεθοδολογίας τῆς Οἰκονομικῆς, πρίν ἤ ὁ ἀναγνώστης εἰσέλθῃ εἰς τάς τεχνικότητας τῆς ἀναλύσεως τῶν ἑπομένων κεφαλαίων. Ἐπίσης, ὡρισμένοι ὅροι καί ταξινομικαί διακρίσεις, τάς ὁποίας θέλομεν συναντήσει εἰς τά ἑπόμενα, δέον νά τύχουν κάποιας σημασιολογικῆς ἀναφορᾶς εὐθύς ἐξ ἀρχῆς.

0.0. ΣΚΟΠΟΣ, ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΝ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Ἡ Οἰκονομική Ἐπιστήμη, ὡς πᾶς κλάδος τοῦ ἀνθρωπίνου ἐπιστητοῦ, εἶναι συστηματοποιημένον σύνολον γνώσεων μέ ὡρισμένον σκοπόν καί ἀντικείμενον. Βίβλος γενέσεως ταύτης εἶναι ἡ ἀντιπαραβολή τῶν περιωρισμένων πόρων πρός τό ἀπεριόριστον τῶν ἀναγκῶν. Ἡ προσπάθεια «συμφιλιώσεως» τῶν περιωρισμένων πόρων μέ τάς ἀπεριορίστους ἀνάγκας ὡδήγησεν εἰς τήν διατύπωσιν τοῦ *οἰκονομικοῦ ἀξιώματος* ἤ τῆς *οἰκονομικῆς ἀρχῆς*. Ἡ ἀρχή αὕτη, ἥτις ἀποτελεῖ τό πρόβλημα τῆς *οἰκονομικῆς ἀριστοποιήσεως*, δύναται νά διακριθῇ εἰς δύο ἐπί μέρους προβλήματα:

(α) Τό πρόβλημα τῆς διά δεδομένων μέσων ἱκανοποιήσεως ὅσον τό δυνατόν περισσοτέρων ἀναγκῶν ἤ ἱκανοποιήσεως τούτων κατά τόν καλλίτερον τρόπον (*Πρόβλημα μεγιστοποιήσεως*).

(β) Τό πρόβλημα τῆς ἱκανοποιήσεως δεδομένων ἀναγκῶν ἤ ἐπιτεύξεως δεδομένων οἰκονομικῶν στόχων δι' ὅσον τό δυνατόν μικροτέρας σπατάλης μέσων (*Πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως*).

Ἄρα, δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι ἡ Οἰκονομική Ἐπιστήμη ἀσχολεῖται μέ τήν μελέτην τοῦ οἰκονομικοῦ προβλήματος, συνισταμένου ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο ἐπί μέρους προβλημάτων. Εἰς τήν προσπάθειαν ἐπιλύσεως τοῦ οἰκονομικοῦ προβλήματος, ἡ Οἰκονομική *ἑρμηνεύει*, *προβλέπει* καί *ὑποδεικνύει*.

Ὁρισμοὶ τῆς Οἰκονομικῆς εἶναι δυνατὸν νὰ δοθοῦν πολλοί. Μεταξὺ ἐκείνων οἱ ὁποῖοι ἐδόθησαν ἐπιλέγομεν τοὺς κάτωθι:

Κατὰ τὸν Oskar Lange, ἡ Οἰκονομικὴ εἶναι ἡ ἐπιστήμη τῆς διαχειρίσεως τῶν πόρων εἰς τὴν ἀνθρωπίνην κοινωνίαν*.

Κατὰ τὸν Lionel Robbins, Οἰκονομικὴ εἶναι ἡ ἐπιστήμη ἡ μελετῶσα τὴν ἀνθρωπίνην συμπεριφορὰν ὡς σχέσιν μεταξὺ ἀναγκῶν καὶ σπανίων μέσων τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν εἰς πολλὰς χρήσεις**.

Κατὰ παλαιότερον ὁρισμὸν τῶν περισσοτέρων οἰκονομολόγων (Marshall, Cannan, J.B. Clark), ἡ Κοινωνικὴ Οἰκονομικὴ ἀσχολεῖται μὲ τὴν μελέτην τῶν αἰτίων τῆς ὑλικῆς εὐμαρείας.

Ὁ Ἄγγλος καθηγητὴς Robbins ἀπέρριψε τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν ὡς περιορίζοντα τὸ ἀντικείμενον τῆς ἐπιστήμης καὶ δίδοντα εἰς αὐτὴν ὑλιστικὸν μόνον χαρακτῆρα. Πράγματι ὁ ὁρισμὸς οὗτος δὲν περιλαμβάνει ὅλας τὰς περιπτώσεις αἵτινες ἀποτελοῦν ἀντικείμενον τῆς Οἰκονομικῆς. Εἶναι σφάλμα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ Οἰκονομικὴ ἐνδιαφέρεται μόνον διὰ τὰς ὑλικὰς ἀνάγκας καὶ τὰ οἰκονομικὰ ἀγαθά. Ἡ ἐπ᾽ ἀμοιβῇ ἐκτέλεσις μουσικοῦ ἔργου ὑπάγεται εἰς τὰς οἰκονομικὰς δραστηριότητας, δεδομένου ὅτι χωρεῖ ἀμοιβὴ καὶ αἱ ὑπηρεσίαι τῶν μουσικῶν εἶναι ἀντικείμενον ζητήσεως ὑπὸ τῶν ἀτόμων, τὰ ὁποῖα δαπανοῦν ἓν μέρος τοῦ εἰσοδήματός των διὰ τὸ εἶδος τοῦτο τῆς «καταναλώσεως». Οὕτω δὲν θὰ πρέπει νὰ ὁμιλῶμεν περὶ οἰκονομικῶν ἀγαθῶν ἢ περὶ παραγωγικῶν ἢ μὴ παραγωγικῶν ὑπηρεσιῶν, ὅταν δίδωμεν ὁρισμὸν τῆς Οἰκονομικῆς, δεδομένου ὅτι τὸ τοιοῦτον θὰ ἦτο ἀναλυτικῶς, ἂν μὴ ταξινομικῶς, λίαν ἐπικίνδυνον. Ἡ ἐνέργεια ἢ δραστηριότης τοῦ ἀτόμου ἔχει οἰκονομικὸν χαρακτῆρα, ἤτοι ἐμπίπτει εἰς τὴν μελέτην τῆς Οἰκονομικῆς, ὅταν συντρέχῃ τὸ περιωρισμένον τῶν μέσων (ἀγαθῶν) καὶ ἡ πολλαπλότης τῶν ἀναγκῶν (ἢ τὸ ἀπεριόριστον τούτων). Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην αἱ ὑπηρεσίαι τοῦ ἐπαγγελματίου μουσικοῦ, τοῦ μαγείρου, κ.λπ. εἶναι περιωρισμέναι ἐν σχέσει πρὸς τὴν ζήτησιν, καὶ συνεπῶς ὁ καταναλωτὴς τῶν ὑπηρεσιῶν τούτων ἀντιμετωπίζει τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς.

Γίνεται φανερὸν ὅτι δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ φύσις τῆς ἀνάγκης, ἐὰν δηλονότι εἶναι αὕτη ὑλικὴ ἢ ψυχική, ἀλλ᾽ ἡ ἐνέργεια πρὸς ἱκανοποίησίν της, ἤτοι ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς οἱασδήποτε ἀνάγκης πρὸς τὰ περιωρισμένα μέσα ἱκανοποιήσεως.

Ὡς εἰκός, διὰ νὰ τύχῃ ἐφαρμογῆς ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ ὑπὸ τὰς δύο αὐτῆς μορφὰς δέον νὰ λαμβάνωνται ἀποφάσεις ἐκ μέρους τῶν ἀτόμων ἢ τῆς κοι-

---

* O. Lange, «The Scope and Method of Economics», εἰς The Review of Economic Studies, Vol. XIII, 1945 - 46.

** L. Robbins, An Essay on the Nature and Significance of Economic Science, 2nd Ed., 1935, London.

νωνίας. Αἱ ἀποφάσεις αὗται, ἐν ὄψει τῆς πολλαπλότητος τῶν λύσεων τοῦ οἰκονομικοῦ προβλήματος, τείνουν πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τῆς ἐπιλογῆς. Τὸ πρόβλημα τοῦτο συνίσταται εἰς τὴν ἐξεύρεσιν τῆς οἰκονομικῶς καλλιτέρας μεταξὺ πολλῶν λύσεων. Τὰ ἄτομα ἢ αἱ ὁμάδες παραγωγῆς ἢ καταναλώσεως αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν τὰς ἀποφάσεις καλοῦνται μ ο ν ά δ ε ς ἀ π ο φ ά σ ε ω ν.

Τὰς οἰκονομικὰς δραστηριότητας δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν εἰς τρεῖς κατηγορίας:

(α) Τὴν π α ρ α γ ω γ ή ν, ἥτις εἶναι ἡ μεταφορά, προετοιμασία, ἀποθήκευσις καὶ μεταβολὴ (ἢ προσαρμογὴ) τῶν πόρων διὰ φυσικῶν ἢ χημικῶν μεθόδων πρὸς ἱκανοποίησιν τῶν ἀναγκῶν.

(β) Τὴν κ α τ α ν ά λ ω σ ι ν, ἥτις εἶναι ἡ ἄμεσος χρησιμοποίησις τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς πρὸς ἱκανοποίησιν τῶν ἀναγκῶν.

(γ) Τ ὴ ν ἀ ν τ α λ λ α γ ὴ ν, ἥτις εἶναι ἡ κυκλοφορία τῶν μέσων καὶ πόρων μεταξὺ τῶν μονάδων ἀποφάσεων.

Ὑπάρχουν τρία συστήματα ὀργανώσεως καὶ συντονισμοῦ τῶν ἀποφάσεων τῶν μονάδων ἀποφάσεως:

(α) Ἡ ἐ λ ε υ θ έ ρ α ἀ γ ο ρ ά. Κατ' ἀρχὰς διὰ τοῦ ὅρου «ἀγορὰ» ὑπονοοῦμεν τὸ σύνολον στοιχείων ἅτινα ἀποτελοῦν τὰς ἀνταλλακτικὰς σχέσεις τῶν μονάδων οἰκονομικῶν ἀποφάσεων. Τὸ μέσον διεξαγωγῆς τῶν ἀνταλλαγῶν εἶναι τὸ χ ρ ῆ μ α. Ἡ ἀγορὰ δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ἀγορὰ ἀγαθοῦ τινος ἢ παραγωγικοῦ συντελεστοῦ. Παραδείγματος χάριν, ἡ ἀγορὰ σίτου, ἡ ἀγορὰ ἐργασίας, ἡ κεφαλαιαγορά, κ.λ.π. Ἐπίσης ὡς ἀγορὰν δυνάμεθα νὰ ὑπονοήσωμεν ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν. Ἡ ἰσορροπία εἰς τὴν ἀγορὰν ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς συνεργασίας τῶν μονάδων ἀποφάσεως ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρας βουλήσεως. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ὁμιλοῦμεν περὶ ἐ λ ε υ θ έ ρ α ς ο ἰ κ ο ν ο μ ί α ς ἢ ο ἰ κ ο ν ο μ ί α ς ἀ γ ο ρ ᾶ ς (market economy).

Εἰς τὴν οἰκονομίαν ἀγορᾶς τὸ βασικὸν ὄργανον ἐπιτεύξεως τῶν σκοπῶν ταύτης εἶναι ὁ μ η χ α ν ι σ μ ὸ ς τ ῶ ν τ ι μ ῶ ν. Διὰ τοῦ ὀργάνου τούτου λύονται εἰς τὴν ἐλευθέραν οἰκονομίαν τρία βασικὰ οἰκονομικὰ προβλήματα: (αα) Τί καὶ πόσον θὰ παραχθῇ διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῶν διαφόρων ἀναγκῶν. (ββ) Πῶς θὰ χρησιμοποιηθοῦν οἱ παραγωγικοὶ πόροι πρὸς παραγωγὴν τῶν ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν. (γγ) Πῶς θὰ διανεμηθῇ τὸ προϊὸν τῆς παραγωγῆς. Ἡ ἰσορροπία προσφορᾶς καὶ ζητήσεως τόσον τῶν ἀγαθῶν, ὅσον καὶ τῶν ὑπηρεσιῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, ἡ πλήρης ἀπασχόλησις, ἡ κατανομὴ τῶν συντελεστῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν δραστηριοτήτων, κ.λ.π., συντελοῦνται διὰ τοῦ μηχανισμοῦ τῶν τιμῶν. Αἱ τιμαὶ καὶ τὸ κέρδος εἶναι οἱ γνώμονες τῆς οἰκονομικῆς δράσεως.

(β) Ἡ σ χ ε δ ι α σ μ έ ν η ο ἰ κ ο ν ο μ ί α. Εἰς τὴν σχεδιασμένην ἢ κεντρικῶς διευθυνομένην οἰκονομίαν δὲν λειτουργεῖ ὁ ἐλεύθερος μηχανισμὸς τῶν τιμῶν, ἀλλ' ὁ συντονισμὸς τῶν ἀποφάσεων, ἐνεργειῶν καὶ δραστηριοτήτων γίνεται διὰ μιᾶς κ ε ν τ ρ ι κ ῆ ς ἀ ρ χ ῆ ς. Τιμαὶ ὑπάρχουν εἰς τὴν οἰκονομίαν ταύτην, ἀλλὰ δὲν διαδραματίζουν τὸν ρόλον ὃν διαδραματίζουν εἰς τὴν οἰκονομίαν ἀγορᾶς. Αἱ τιμαὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι ἁπλῶς ὑ π ο λ ο γ ι σ τ ι κ α ὶ ἢ σ κ ι ώ δ ε ι ς τ ι μ α ὶ (shadow prices).

(γ) Μ ι κ τ ὴ ο ἰ κ ο ν ο μ ί α. Αἱ ἀτέλειαι τῆς ἐλευθέρας οἰκονομίας ὡδήγησαν εἰς τὴν βαθμιαίαν δημιουργίαν τῆς μικτῆς οἰκονομίας. Κατὰ βάσιν ἰσχύουν οἱ κανόνες τῆς ἀγορᾶς, ἀλλὰ ὑπάρχει παρέμβασις τοῦ Κράτους, ἥτις τείνει τόσον πρὸς ρύθμισιν οἰκονομικῶν σχέσεων, ὅσον καὶ πρὸς ἐνδεικτικὸν προγραμματισμὸν τῆς οἰκονομίας, διὰ τῆς συντάξεως προγραμμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Εἰς τὴν μικτὴν οἰκονομίαν ἡ κατάλληλος ἄσκησις τῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς ὑπὸ τῶν οἰκονομικῶν ὑπουργείων καὶ τῶν κρατικῶν ὑπηρεσιῶν προγραμματισμοῦ καὶ οἰκονομικῆς πολιτικῆς συμβάλλει εἰς τὴν ἐπιθυμητὴν κατεύθυνσιν τῶν σχέσεων καὶ μεγεθῶν τῆς οἰκονομίας. Σήμερον αἱ δυτικοῦ τύπου οἰκονομίαι εἶναι τῆς μορφῆς ταύτης.

Ἀφοῦ ὡρίσθη τὸ ἀντικείμενον τῆς Οἰκονομικῆς Ἐπιστήμης θὰ πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν δι' ὀλίγων τὴν ἐπιστημονικὴν μεθοδολογίαν ἣν ἀκολουθεῖ αὕτη. Βασικῶς ὑφίστανται δύο μέθοδοι ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης*: ἡ ἀ π α γ ω γ ι κ ὴ καὶ ἡ ἐ π α γ ω γ ι κ ὴ μέθοδος. Ἡ Οἰκονομικὴ Ἐπιστήμη εἶναι ἐ μ π ε ι ρ ι κ ὴ ἐν ἀντιπαραβολῇ πρὸς τὰς «καθαρὰς» ἐπιστήμας, ὡς εἶναι ἡ λογικὴ καὶ τὰ μαθηματικά. Ἄρα εἴτε θεωρητικοῦ εἴτε πρακτικοῦ περιεχομένου εἶναι αἱ προτάσεις τῆς Οἰκονομικῆς στηρίζονται ἢ ἀντικατοπτρίζουν στοιχειώδη γεγονότα τῆς καθόλου ἐμπειρίας. Κατὰ τὴν ἀπαγωγήν, ἐκκινοῦμεν ἐκ γενικῶν πλαισίων, ἅτινα εἶναι τὸ προϊὸν ἀμέσου ἢ ἐμμέσου παρατηρήσεως, καὶ διὰ τῆς λογικῆς διαδικασίας συνάγομεν γενικὰς ἀρχάς. Χαρακτηριστικὸν τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι ὅτι ἐκ τοῦ γενικοῦ μεταβαίνομεν εἰς τὸ μερικόν. Κατὰ τὴν ἐ π α γ ω γ ή ν, ἐξ ἄλλου, ἐκκινοῦμεν ἐκ τῆς παρατηρήσεως ἰδιαιτέρων γεγονότων καὶ διὰ ἀξιωματικῶν μέσων καταλήγομεν εἰς γενικὰς ἀρχάς. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἡ ἀντίθετος τῆς πρώτης, ἤτοι ἐκ τοῦ μερικοῦ μεταβαίνομεν εἰς τὸ γενικόν.

Πλέον συγκεκριμένως, τὸ θεωρητικὸν περιεχόμενον τῆς Οἰκονομικῆς, ἤτοι ἡ Ο ἰ κ ο ν ο μ ι κ ὴ Θ ε ω ρ ί α, προκύπτει ἐκ τῆς πνευματικῆς ἐκείνης ἐργασίας προϊὸν τῆς ὁποίας εἶναι σχήματα καὶ ὑποδείγματα παρουσιάζοντα ὁμοιομορφίαν, γενικότητα καὶ ἐπιστημονικὴν ἁπλότητα. Τοιαῦτα σχήματα δύνανται νὰ ὀνομασθοῦν ο ἰ κ ο ν ο μ ι κ ο ὶ ν ό μ ο ι. Οὗτοι μᾶς λέγουν τί θὰ συμβῇ ἐὰν πληρωθοῦν αἱ πρὸς τοῦτο ἀναγκαῖα συνθῆκαι.

* Κ. Β. Μ π α ν τ α λ ο ῦ κ α, Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Μεθοδολογίαν τῆς Οἰκονομικῆς Ἐρεύνης, Πειραιεύς, 1963.

Ἄρα οἱ οἰκονομικοὶ νόμοι εἶναι προτάσεις ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας (conditional statements). Τοὺς νόμους δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν βασικῶς εἰς αἰτιώδεις (causal) καὶ μαθηματικούς. Οἱ αἰτιώδεις νόμοι δεικνύουν τὴν σχέσιν μεταξὺ αἰτίου καὶ αἰτιατοῦ καὶ συνεπῶς ἐνέχουν τὴν διάστασιν τοῦ χρόνου. Οἱ μαθηματικοὶ νόμοι, ἐξ ἄλλου, δεικνύουν τὴν ἀλληλεξάρτησιν τῶν γεγονότων. Εἶναι συναρτησιακαί, σχέσεις ὡς τὰ συστήματα γενικῆς ἰσορροπίας, καὶ δὲν ἐνέχουν χρονικὴν διαδρομήν.

Ἡ οἰκονομικὴ θεωρία εἶναι ἀπαγωγικὴ ἐπιστήμη. Διὰ τῶν κανόνων τῆς λογικῆς καὶ τῶν μαθηματικῶν παρουσιάζει τοὺς οἰκονομικοὺς νόμους ὡς ἕν σύνολον ἀπαγωγῶν ἐξ ὡρισμένων βασικῶν προτάσεων. Αἱ βασικαὶ αὗται προτάσεις καλοῦνται προϋποθέσεις ἢ συνθῆκαι (assumptions) καὶ ἀξιώματα (postulates). Αἱ συνθῆκαι εἶναι ἀρχαὶ αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι αὐταπόδεικτοι, ἀλλὰ δύναται ἡ ἀποκτωμένη πεῖρα νὰ ἐλέγξῃ. Ἀξιώματα εἶναι αἱ ἀρχαὶ τὴν ἀλήθειαν τῶν ὁποίων ἀποδεχόμεθα ἄνευ ἀποδείξεως. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βασικῶν προτάσεων διὰ τῆς λογικῆς ἀπαγωγικῆς διαδικασίας προκύπτουν δευτερογενεῖς προτάσεις αἱ ὁποῖαι καλοῦνται θεωρήματα. Τὰ θεωρήματα τῆς Οἰκονομικῆς δέον ὅπως εἶναι λειτουργικῶς σημαντικά*. Λόγῳ τοῦ ἐμπειρικοῦ περιεχομένου τῆς Οἰκονομικῆς αἱ προϋποθέσεις καὶ τὰ ἀξιώματά της δέον ὅπως εἶναι προσεγγίσεις τῆς πραγματικότητος. Συνεπῶς τὰ προκύπτοντα θεωρήματα ὑπόκεινται εἰς τὸν ἐμπειρικὸν ἔλεγχον. Κατὰ ἐσφαλμένην μεθοδολογικὴν προκατάληψιν ὡρισμένοι θεωρητικοὶ ὑπεστήριξαν ὅτι οἱ οἰκονομικοὶ νόμοι οἱ προκύπτοντες ἐξ a priori ὑποθέσεων κέκτηνται ἐγκυρότητος ἀνεξαρτήτως ἀναφορᾶς πρὸς τὴν ἐμπειρικὴν ἀνθρωπίνην συμπεριφοράν. Τὸ σύνολον τῶν ἐξ ἀπαγωγῆς θεωρημάτων ἅτινα ὑπόκεινται εἰς τὸν ἔλεγχον καλοῦνται θεωρία, ὑπόδειγμα ἢ καὶ ὑπόθεσις (hypothesis).

Οἱ ὀπαδοὶ τῆς ἐπαγωγικῆς μεθόδου ἀκολουθοῦν κατὰ τὴν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν ἀντίθετον διαδικασίαν. Οὗτοι ἐκκινοῦν ἐκ τῶν πραγματικῶν γεγονότων καὶ διὰ τῆς παρατηρήσεως καὶ τῆς στατιστικῆς σχηματίζουν θεωρίας ἢ διενεργοῦν προβλέψεις ἐπὶ τῇ βάσει πληροφοριῶν καὶ παρελθούσης πείρας.

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὸ μεθοδολογικὸν πρόβλημα τῆς Οἰκονομικῆς ὑπῆρξε κατὰ τὸ παρελθὸν μεγάλη διαμάχη μεταξὺ τῶν ἀκραίων θέσεων. Μία τῶν κατευθύνσεων τὰς ὁποίας ἔλαβεν ἡ διαμάχη αὕτη ἦτο τὸ κατὰ πόσον εἶναι δυνατὸν νὰ λάβουν ποσοτικὴν ἔκφρασιν αἱ σχέσεις τῶν ἀπαγωγικῶν συστημάτων. Μία θέσις, ὑποστηριζομένη κυρίως ὑπὸ τοῦ Robbins, εἶναι ὅτι ἡ ποσοτικὴ μέθοδος δὲν εἶναι ἱκανὴ νὰ καταρρίψῃ θεωρίας, αἱ ὁποῖαι

* P. A. Samuelson, Foundations of Economic Analysis, Atheneum, New York, 1965, κεφ. I.

προῆλθον ἀπὸ ὑποθέσεις καὶ ἀξιώματα ἅτινα δὲν ἀφίστανται τῆς πραγματικότητος, καὶ αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζουν ὅλα τὰ ἐχέγγυα τῆς γενικότητος. Τοῦτο διότι ὁ καθ' ὡρισμένην στιγμὴν ἔλεγχος τῆς θεωρίας εἶναι χρονικῶς περιωρισμένος καὶ δὲν ἐμφανίζει συνεπῶς τὰ ἐχέγγυα τῆς γενικότητος. Ἐπὶ παραδείγματι, εἰς τὴν θεωρίαν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ αὔξησις τῆς ποσότητος τοῦ χρήματος, τῶν λοιπῶν παραγόντων παραμενόντων ἀμεταβλήτων (ceteris paribus), ὁδηγεῖ εἰς μείωσιν τῆς ἀξίας τοῦ χρήματος (ποσοτικὴ θεωρία). Τώρα, τί εἶναι χρῆμα καὶ ποῖοι παράγοντες καὶ στοιχεῖα θὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν εἶναι ζήτημα πραγματικόν. Ἐὰν δὲν ἀποδειχθῇ ἡ ἀνωτέρω θεωρία διὰ τῆς ἐμπειρικῆς ἐρεύνης δὲν δυνάμεθα νὰ ἀπορρίψωμεν, κατὰ τὸν Robbins, ταύτην ὡς ἄχρηστον.

Ἡ ἑτέρα ὑποστηριχθεῖσα θέσις, ἐξ ἄλλου, εἶναι ὅτι πᾶσα θεωρία ὑπόκειται εἰς ποσοτικὴν ἔκφρασιν. Θεωρία ἢ ὑπόθεσις ἥτις δὲν ἀντέχει εἰς τὸν ἐμπειρικὸν ἔλεγχον ἀπορρίπτεται ὡς ἄχρηστος. Τοιαύτην θέσιν ὑποστηρίζουν πολλοὶ ἐκ τῶν οἰκονομετρῶν. Ὁ Ἀμερικανὸς καθηγητὴς Milton Friedman* ὑποστηρίζει ὅτι: (α) Μία ὑπόθεσις δύναται νὰ ἐλεγχθῇ μόνον ἐν ἀναφορᾷ πρὸς τὰ παρατηρούμενα φαινόμενα. (β) Μία νέα θεωρία πρέπει νὰ ἔχῃ τοιαῦτα ἀποτελέσματα τὰ ὁποῖα νὰ μὴν ἐπιδέχωνται ἐμπειρικὴν ἀντίρρησιν.

Ἑτέρα κατεύθυνσις τῆς μεθοδολογικῆς διαμάχης ἦτο ἐκείνη ἥτις ἀναφέρεται εἰς τὸν ἐμπειρισμὸν καὶ τὴν χρησιμότητα τῆς θεωρίας. Ἡ διαμάχη αὕτη προέκυψε κυρίως ἀπὸ τὴν ἀντιμετώπισιν τοῦ προβλήματος τῶν οἰκονομικῶν διακυμάνσεων. Ἐρευνῶντες τὸ πρόβλημα τοῦτο οἱ A. Burns καὶ W. Mitchell** οὐδόλως προσέφυγον εἰς συγκεκριμένην θεωρίαν. Ἐπεξειργάσθησαν τὸ εἰς χεῖρας των στατιστικὸν ὑλικὸν καὶ διὰ τῆς ἐπαγωγῆς συνήγαγον θεωρήματα σχετικῶς μὲ τὸ ἐρευνώμενον θέμα. Δὲν ἐθεώρησαν οὐδόλως ἀπαραίτητον, ὡς ἔπραττον οἱ πλεῖστοι τῶν οἰκονομολόγων, νὰ ἐκκινοῦν εἰς τὴν ἔρευνάν των ἐκ τῆς καταστάσεως ἰσορροπίας τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν καὶ νὰ μελετοῦν τὰς διακυμάνσεις ἃς ἐπιφέρει ἡ διατάραξις τῆς ἰσορροπίας. Κατ' αὐτοὺς τὸ νὰ λέγωμεν ὅτι αἱ οἰκονομικαὶ διακυμάνσεις εἶναι ἐκτροπαὶ ἐκ τῆς καταστάσεως ἰσορροπίας δὲν βοηθεῖ τὴν ἀνάλυσιν, διότι ἁπλούστατα δὲν δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν τὴν ἰσορροπίαν ταύτην. Οὕτω οἱ ἐμπειρικοὶ οὗτοι ἐρευνηταὶ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἐμπειρικοῦ ὑλικοῦ καὶ τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως ἤχθησαν ἐπαγωγικῶς εἰς θεω-

* «The Methodology of Positive Economics», εἰς Essays on Positive Economics, 1953.

** Measuring Business Cycles, National Bureau of Economic Research, New York 1946. Βλ. ἐπίσης R. Vining, «Methodological Issues in Quantitative Economics», εἰς Review of Economics and Statistics, Μάϊος 1949.

ρητικά περί τῶν οἰκονομικῶν κύκλων σχήματα, χωρὶς τὴν ἀνάγκην προσφυγῆς εἰς προηγουμένην θεωρίαν ἢ a priori σχήματα.

Τὴν πλέον ἀρνητικὴν στάσιν ἔναντι τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας ἐτήρησεν ὁ καθηγητὴς Sidney Schoeffler*, ὑποστηρίζων ὅτι δὲν ὑφίστανται οἰκονομικοὶ νόμοι καὶ ὅτι ἡ μόνη ἐπιστημονικῶς δεκτὴ μέθοδος εἶναι ἡ ἀπαγωγή. Ἡ Οἰκονομικὴ δὲν δύναται νὰ ἀκολουθῇ τὴν μεθοδολογίαν τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν, δύναται ὅμως, κατ' αὐτόν, νὰ προσφεύγῃ εἰς νόμους ἑτέρων ἐπιστημῶν, ὡς τῆς ψυχολογίας, κοινωνιολογίας κ.ἄ. Οὗτος ἀποδίδει τὰς ἀδυναμίας τῆς Οἰκονομικῆς, κυρίως ὡς πρὸς τὴν δυνατότητα διενεργείας προβλέψεων, εἰς τὰ μεθοδολογικὰ τεχνάσματα καὶ τὰς ἀφῃρημένας κατασκευὰς (artificialities), αἱ ὁποῖαι οὐδόλως βοηθοῦν εἰς τὴν ἔρευναν τῆς πραγματικότητος.

Σήμερον λόγῳ τῆς δυνατότητος εὐρείας χρησιμοποιήσεως στατιστικῶν μεθόδων καὶ τῆς ὑπάρξεως καὶ ἀξιοποιήσεως πλουσίου στατιστικοῦ ὑλικοῦ, πολλοὶ τῶν οἰκονομικῶν ἀναλυτῶν ἐρευνοῦν τὰ οἰκονομικὰ προβλήματα ἄνευ προσφυγῆς εἰς συγκεκριμένας θεωρίας. Οὗτοι προσπαθοῦν νὰ ἀνεύρουν χρησιμοποιοῦντες τὴν ἀνάλυσιν χρονολογικῶν σειρῶν (time series) ἢ στοιχείων διατομῆς (cross section) τὴν καταλληλοτέραν μορφὴν σχέσεως τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν, ἡ ὁποία διὰ βελτιώσεων καὶ θέσεως προϋποθέσεων ἀποτελεῖ τὴν σχετικὴν θεωρίαν των. Τοιούτου εἴδους σχέσεις καλοῦνται ἐμπειρικαὶ ἢ οἰκονομετρικαὶ συναρτήσεις, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς ἐξ ἀπαγωγῆς προκυπτούσας θεωρητικὰς συναρτήσεις**

Ἀντίθετος τοῦ ἐμπειρισμοῦ (empiricism) εἶναι ἡ θέσις τῶν οἰκονομολόγων ἐκείνων οἱ ὁποῖοι θεωροῦν ὅτι οὐδεμία ἔρευνα καὶ ἀνάλυσις δύναται νὰ διεξαχθῇ σοβαρῶς ἄνευ θεωρίας. Ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐὰν ἡ οἰκονομικὴ θεωρία πρέπει ἢ δύναται νὰ ὑπαχθῇ εἰς ποσοτικὰς μετρήσεις, ἡ ἐκκίνησις τῆς ἐρεύνης δέον νὰ γίνῃ ἐκ τῆς θεωρίας. Τὴν θέσιν ταύτην ὑποστηρίζουν τόσον θεωρητικοὶ οἰκονομολόγοι (π.χ. Robbins), ὅσον καὶ οἰκονομέτραι ὡς ὁ T. Koopmans. Ὁ τελευταῖος οὗτος εἰς περισπούδαστον ἄρθρον του*** κατακρίνει τὴν ἐμπειρικὴν μέθοδον τῶν Burns καὶ Mitchell, ὑποστηρίζων ὅτι ἄνευ θεωρίας δὲν δύνανται νὰ ἐξαχθοῦν συμπεράσματα σχετικῶς πρὸς ὑποδείξεις οἰκονομικῆς πολιτικῆς. Συγκεκριμένως ὁ Koopmans ἐπαραλλήλισε τὴν μέθοδον τῶν Burns καὶ Mitchell πρὸς ἐκείνην τοῦ Kepler καὶ Tycho, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὴν διὰ τῆς

* The Failures of Economics, Harvard University Press, 1955.

** Βλ. Σ. Α. Σαραντίδη, Ἀνάλυσις Οἰκονομικῶν Διαστάσεων, Ἀθῆναι 1970, σελ. 20.

*** Tjalling Koopmans, «Measurement without Theory», εἰς Review of Economic Statistics, Αὐγ. 1947.

παρατηρήσεως τῶν κινήσεων τῶν ἀστέρων ἀνακάλυψιν «ἐμπειρικῶν κανονικοτήτων».

Σήμερον ἐλαχίστη διαμάχη ὑφίσταται περὶ τὰ μεθοδολογικὰ προβλήματα. Τόσον ἡ ἀπαγωγικὴ ὅσον καὶ ἡ ἐπαγωγικὴ μέθοδος εἶναι χρήσιμοι, δεδομένου ὅτι ἀλληλοσυμπληροῦνται. Δὲν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν δὲ μετὰ βεβαιότητος ἐὰν μία πρότασις τῆς Οἰκονομικῆς εἶναι προϊὸν τῆς ἐπαγωγῆς ἢ τῆς ἀπαγωγῆς. Ἡ ἐπαγωγὴ μολονότι στηρίζεται εἰς τὴν παρατήρησιν, ἀναζητεῖ νὰ ἀνεύρῃ προηγούμενα διὰ τὸ ὑπὸ παρατήρησιν οἰκονομικὸν φαινόμενον, νὰ διαγράψῃ τὸν τρόπον λειτουργίας του, νὰ καθορίσῃ τὴν φύσιν αὐτοῦ καὶ τελικῶς νὰ προτείνῃ οἱονεὶ νόμον. Οὕτω ἡ ἐπαγωγὴ τελικῶς μεταβάλλεται εἰς μίαν ἀπαγωγήν. Ἡ ἐπαγωγὴ ἐξ ἄλλου, ἐλέγχει τὰ συμπεράσματα ἅτινα προκύπτουν ἐκ τῆς ἀπαγωγῆς δι᾽ ἀναφορᾶς πρὸς τὴν πραγματικότητα.

Πρὸς γεφύρωσιν τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ θεωρητικοῦ ὑποδείγματος καὶ πραγματικότητος ἀπαιτεῖται μία διαδικασία ἐπαληθεύσεως, αὐτῆς δὲ θὰ πρέπει νὰ προηγηθῇ μία διαδικασία ταυτοποιήσεως (identification) τῶν γεγονότων καὶ τῶν μεταβλητῶν. Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα: κατὰ πόσον ὑπάρχει ἀντιστοιχία μεταξὺ a priori θεωρίας καὶ πραγματικότητος, θὰ δοθῇ κατόπιν κάποιου ἐλέγχου. Ὁ κλάδος ὅστις ἀνεπτύχθη πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ταύτην εἶναι ἡ Οἰκονομετρικὴ (econometrics)*, ἡ ὁποία στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἀρχῶν τῆς Μαθηματικῆς Στατιστικῆς.

Διὰ νὰ ὑπάρξῃ ἐγκυρότης εἰς μίαν ἐμπειρικὴν ἐπιστήμην, ὡς ἡ Οἰκονομική, θὰ πρέπει τὰ θεωρήματα ταύτης νὰ συμβιβάζωνται μὲ τὴν πραγματικότητα, ἤτοι νὰ εἶναι λειτουργικῶς σημαντικά. Ἡ ὑφισταμένη σήμερον τάσις ἀνόδου τοῦ κύρους τῆς Οἰκονομικῆς ὀφείλεται εἰς τὴν μετατροπὴν ταύτης εἰς ποσοτικὴν ἐπιστήμην καὶ τὸν πρακτικὸν προσανατολισμὸν τὸν ὁποῖον αὕτη ἔλαβεν. Τοῦτο ὀφείλεται ἀκριβῶς εἰς τὰς ἐργασίας γεφυρώσεως τῶν ἀκραίων ἐπιστημονικῶν θέσεων.

Ἡ θεωρία, αἱ ὑποθέσεις καὶ τὰ ὑποδείγματα εἶναι ἀπαραίτητα στοιχεῖα τῆς ἐπιστημονικῆς δραστηριότητος εἰς τὸν κλάδον τῆς Οἰκονομικῆς. Εἶναι δὲ τελείως ἀπρόσωπα καὶ γενικά, ἐφ᾽ ὅσον προκύπτουν ἐκ τῶν κανόνων τῆς λογικῆς καὶ τῶν μαθηματικῶν. Παρ᾽ ὅλα ταῦτα ὑπάρχουν διαφωνίαι μεταξὺ τῶν οἰκονομολόγων. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἀποδίδει ὁ O. Lange εἰς:

(α) Τὴν ὑφισταμένην διαφορὰν καθ᾽ ὅσον ἀφορᾷ εἰς τοὺς ἐπιδιωκομένους κοινωνικοὺς σκοπούς.

* Ἑλληνικώτερος εἶναι ὁ ὅρος Οἰκονομομετρική. Βλ. σχ. Κ. Β. Μπανταλοῦκα, op. cit. σελ. 36, καὶ J. A. Schumpeter, A History of Economic Analysis, London, 1955 σελ. 209.

(β) Ἀσυμφωνίας ὡς πρὸς τὴν ταυτοποίησιν τῶν γεγονότων.

(γ) Ἀδυναμίαν ἐφαρμογῆς καταλλήλων κανόνων λογικῆς καὶ ἐλέγχου.

Αἱ διαφωνίαι δύνανται νὰ ἐλαττωθοῦν εἰς τὸ ἐλάχιστον ἐὰν χωρήσῃ ὁμοιόμορφος ἐφαρμογὴ τῶν καταλλήλων ἐργαλείων τῆς ἐπιστήμης καὶ ἐὰν οἱ ἐρευνηταὶ κατὰ τὴν διεξαγωγὴν τῆς ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης ἀπαλλαγοῦν ἀπὸ ὑποσυνειδήτους προκαταλήψεις. Ὅσον τεχνικωτέρα καθίσταται, τόσον περισσότερον ἀπαλλάσσεται τῶν ἰδεολογιῶν, τόσον ἐγκυροτέρα ἡ Οἰκονομικὴ γίνεται. Βεβαίως αἱ διαφωνίαι δὲν δύνανται νὰ ἐκλείψουν παντελῶς, δεδομένου ὅτι δὲν ὑφίσταται ἀπόλυτος καθολικότης εἰς τὴν ἐπιστήμην. Ἡ ἐπιστήμη συνεχῶς ἐξελίσσεται καὶ ἀποτελεῖ ἓν ἀέναον λογικὸν γίγνεσθαι. Αἱ πλέον σημαντικαὶ διαφωνίαι εἰς τὴν Οἰκονομικὴν ἀναφύονται εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Οἰκονομικῆς Πολιτικῆς. Ἐνταῦθα, ἐμφανίζεται τὸ τελολογικὸν στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον ἐὰν μὲν εἶναι συνεπὲς πρὸς τὴν ὅλην θεωρητικὴν ἢ ἐμπειρικὴν κατασκευήν, τότε ἀποτελεῖ στοιχεῖον τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως. Οἱ στόχοι τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀποδεκτοὶ ἐκ μέρους τῆς κοινωνίας, ἀποτελοῦν τὴν βάσιν διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς προγράμματος δράσεως.

Ἀλλ' εἰς τὴν περιοχὴν τῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς κατοικεῖ ἐπίσης ἡ πολιτικολογοῦσα γνῶσις. Εἰς τὴν περιοχὴν τῶν «λύσεων» συχνάκις ὑπάρχει σύγκρουσις τοῦ λογικοῦ μὲ τὸ ἐξωλογικὸν καὶ αὕτη εἶναι ἡ ἰδιοτυπία τῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς. Τὸ οἰκονομικὸν πρόβλημα ἐνδιαφέρει πᾶσαν μονάδα ἀποφάσεως εἴτε αὕτη εἶναι ἄτομον, εἴτε ὁμάς. Ἡ σύνδεσις δὲ αὕτη τοῦ οἰκονομικοῦ προβλήματος μὲ τὸ ἐνδιαφέρον τῶν πολιτῶν ἔδωσεν εἰς τὴν Οἰκονομικὴν τὴν προσωνυμίαν τῆς «Π ο λ ι τ ι κ ῆ ς Ο ἰ κ ο ν ο μ ί α ς». Οὕτω ἡ ἐπιστήμη τῆς Πολιτικῆς Οἰκονομίας δὲν ἦτο μία, ἀλλὰ πολλαί, ἀναλόγως πρὸς τὰς ἰδεολογικὰς πεποιθήσεις τῶν δημιουργῶν ταύτης καὶ τῶν ταγῶν τῶν διαφόρων «σχολῶν»*.

0.1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

Τὸ ὅτι σήμερον γίνεται εὐρυτάτη χρῆσις τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν δὲν εἶναι καθόλου τυχαῖον, ἀλλ' ὀφείλεται εἰς ὡρισμένα ἁπλᾶ γεγονότα. Κατὰ πρῶτον, ἡ Οἰκονομικὴ Ἐπιστήμη εἶναι ποσοτικὴ καὶ ἡ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις τείνει εἰς τὴν ἀνεύρεσιν καὶ μέτρησιν τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων. Ἄρα τὰ μαθηματικὰ θὰ πρέπει νὰ ἀποτελοῦν ἀπαραίτητον ἐργαλεῖον εἰς τὸ ἐργαστήριον τοῦ οἰκονομικοῦ ἀναλυτοῦ. Κατὰ δεύτερον, ἡ οἰκονομικὴ πραγματικότης καὶ τὰ οἰκονομικὰ συστήματα εἶναι

* Βλ. σχ. Σ. Α. Σ α ρ α ν τ ί δ η, «Ἡ Οἰκονομικὴ Ἐπιστήμη ἔναντι τῶν Ἀνθρωπίνων Προβλημάτων», εἰς Ο ἰ κ ο ν ο μ ι κ ὸ ν Τ α χ υ δ ρ ό μ ο ν τῆς 7/11/1968.

πεπλεγμένα, ἡ δὲ παρουσίασις, ἀνάλυσις καὶ σύγκρισις τούτων καθίσταται ἁπλουστέρα διὰ τῶν μαθηματικῶν. Κατὰ τρίτον, ἡ θεωρία πρέπει νὰ ἔχῃ τὸν χαρακτῆρα τῆς γενικότητος καὶ τὰ μαθηματικὰ ὡς γενικὴ ἐπιστήμη δύνανται νὰ ἐξυπηρετήσουν κάλλιστα τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν. Τέλος, διὰ τῶν μαθηματικῶν παρέχεται ἡ δυνατότης σαφοῦς ἀντιλήψεως ἐννοιῶν, αἱ ὁποῖαι ἄνευ τῶν μαθηματικῶν, ὑπὸ μορφὴν ὑποδειγμάτων, θὰ ἦτο δύσκολον νὰ κατανοηθοῦν, λόγῳ τῆς ἐμπεριεχομένης ἀοριστίας των.

Τὰ μαθηματικὰ παρέσχον σημαντικὴν βοήθειαν κυρίως εἰς τὴν διαμόρφωσιν καὶ διατύπωσιν τῆς θεωρίας τῆς γενικῆς ἰσορροπίας καὶ οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως, τῆς θεωρίας τῆς ἐπιλογῆς καὶ ἀριστοποιήσεως, τῆς θεωρίας τοῦ δυοπωλίου, καὶ εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς δυναμικῆς τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων. Ἡ τὸ πρῶτον συστηματικῶς σχηματισθεῖσα μαθηματικὴ θεωρία τῆς γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας, πρὶν περίπου ἑκατὸν ἔτη, ὠφείλεται εἰς τὸν Leon Walras. Ἡ θεωρία αὕτη ἔτυχε περαιτέρω ἐπεξεργασίας ὑπὸ τοῦ Vilfredo Pareto, πρὸ ἑβδομήκοντα περίπου ἐτῶν, καὶ τῶν διαδόχων του. Τὴν συμπεριφορὰν τῶν δυοπωλητῶν μαθηματικῶς διετύπωσε πρὸ ἑκατὸν καὶ πλέον ἐτῶν ὁ Augustin Cournot.

Ὁλόκληρος σχολὴ ὠνομάσθη Μαθηματικὴ Σχολή, διότι προσεπάθησεν ὅπως διατυπώσῃ διὰ τῶν μαθηματικῶν τὰς σχέσεις καὶ συναρτήσεις τῶν φαινομένων τῆς οἰκονομίας. Εἰς τὴν αὐτὴν Σχολὴν ἀνήκουν πλὴν τῶν Walras, Pareto, Jevons καὶ Edgeworth, οἱ Cournot, Fisher, Bernoulli, Slutsky, ὡς καὶ οἱ πλεῖστοι τῶν συγχρόνων οἰκονομολόγων, ὡς οἱ Samuelson, Dorfman, Solow, von Neumann, Morgenstern, Frisch, Allen, Koopmans κ.ἄ. Εἰς τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἐπιστήμης ἡ τάσις τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν μαθηματικῶν ἔπαυσε νὰ ἀποτελῇ ἰδιαιτέραν Σχολήν, ἀλλὰ ἐγένετο ἡ ἐπικρατοῦσα πλέον τάσις εἰς τὸν κλάδον τοῦτον τοῦ ἀνθρωπίνου ἐπιστητοῦ.

Τὰ μαθηματικά, ὅμως, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν, ὅτι δὲν εἶναι πανάκεια. Ὡς ὀρθῶς παρατηρεῖ εἷς ἐκ τῶν πρώτων μαθηματικῶν οἰκονομολόγων ὁ Ἄγγλος Jevons, ὁ μαθηματικὸς λογισμὸς δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς βοηθητικὸν καὶ προσωρινὸν ὄργανον διὰ τὴν συναγωγὴν πορισμάτων ποσοτικῶν ἐκ ποιοτικῶν προϋποθέσεων. Ἐνδύομεν προσωρινῶς μὲ ποσοτικὸν ἔνδυμα δεδομένα ποιοτικά. Πρόκειται, δηλονότι, περὶ δανείου ἐνδύματος, ὅπερ ἀποβάλλομεν εὐθὺς ὡς φθάσωμεν εἰς τὰ συμπεράσματά μας. Τὰ μαθηματικὰ ἐν προκειμένῳ εἶναι μέσον καὶ οὐχὶ αὐτοσκοπός.

0.2. ΑΙ ΔΙΑΦΟΡΟΙ «ΣΧΟΛΑΙ» ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

Ἐνταῦθα θεωροῦμεν σκόπιμον ὅπως δώσωμεν μίαν λίαν συνοπτικὴν εἰκόνα τῶν ἱστορικῶν τάσεων εἰς τὴν Οἰκονομικὴν Ἐπιστήμην, αἱ ὁποῖαι ἐσχημάτισαν ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν «σχολήν».

Καίτοι νύξεις περὶ τῶν οἰκονομικῶν ἐγένοντο ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τοῦ Ξενοφῶντος μέχρι τῆς ἐποχῆς τῶν Ἐμποροκρατῶν, ἡ γένεσις τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστημονικῶς δέον νὰ τοποθετηθῆ εἰς τὴν ἐποχὴν τῶν Φυσιοκρατῶν (18ος αἰών). Ἱστορικῶς ἡ ἐξέλιξις δύναται νὰ περιγραφῆ ὡς κατωτέρω:

0.2.0. **Ἐμποροκράται.** Οἱ ἐμποροκράται ἐνεφανίσθησαν ἀπὸ τοῦ 16ου αἰῶνος, κυριώτεροι δὲ τούτων ἦσαν οἱ A. Serra (1613), A. de Montchretien (1615), A. Genovesi (1769), κ.ἄ. Κατὰ τὴν «σχολὴν» ταύτην ἡ εὐημερία ἑνὸς κράτους ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ποσότητος τοῦ (μεταλλικοῦ) χρήματος. Συνεπείᾳ τῆς θέσεως ταύτης προτείνεται ἡ ἀνάπτυξις τῶν ἐξαγωγῶν, ἡ μείωσις τῶν εἰσαγωγῶν (= ἐνεργητικὸν ἐμπορικὸν ἰσοζύγιον), ἡ ἀπαγόρευσις ἐξαγωγῆς πολυτίμων μετάλλων, καὶ ἡ ἐπιβολὴ φόρων καὶ δασμῶν. Κατὰ τὰς ἐμποροκρατικὰς ἀντιλήψεις παραγωγικαὶ θεωροῦνται αἱ πρωτογενεῖς δραστηριότητες καὶ τὸ ἐξαγωγικὸν ἐμπόριον.

0.2.1. **Φυσιοκράται.** Οἱ φυσιοκράται ἐνεφανίσθησαν τὸν 18ον αἰῶνα ὡς ἀντίδρασις κατὰ τῶν ἐμποροκρατῶν, κυριώτεροι δὲ τούτων ἦσαν οἱ F. Quesnay (1758), J. Turgot (1776), κ.ἄ. Κατὰ τὴν «σχολὴν» ταύτην ὁ μόνος παραγωγικὸς κλάδος εἶναι ἡ γεωργία, ἡ ὁποία εἶναι ἡ μόνη ἡ ὁποία παράγει νέα ἀγαθὰ πρωτογενῶς καὶ συνεπῶς ἀναλόγως θὰ πρέπει νὰ γίνῃ ἡ διανομὴ τοῦ προϊόντος. Ὁ Πίναξ τοῦ Quesnay εἶναι ἡ πρώτη προσπάθεια κατασκευῆς συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας καὶ συνεπῶς ἡ πρώτη προσπάθεια θεωρητικῆς ἀναλύσεως. Οἱ φυσιοκράται ἀντιτίθενται πρὸς πᾶσαν κρατικὴν παρέμβασιν εἰς τὴν λειτουργίαν τῶν «οἰκονομικῶν νόμων», δεχόμενοι ὅτι φυσικοὶ νόμοι κυβερνοῦν τὴν κοινωνίαν. Ἡ ὅλη οἰκονομικὴ φιλοσοφία των περιέχεται εἰς τὴν γνωστὴν φράσιν: «laissez faire» καὶ «laissez passer».

0.2.2. **Οἱ Κλασσικοί.** Ἡ Οἰκονομικὴ Ἐπιστήμη ἔλαβε τὴν θεμελίωσιν καὶ τὴν ἀνάπτυξίν της εἰς λογικὸν σύστημα ἀπὸ τῆς ἐμφανίσεως τῶν κλασσικῶν. Ἡ δημοσίευσις τοῦ ἔργου «Ἔρευνα τῆς φύσεως καὶ τῶν αἰτίων τοῦ πλούτου τῶν ἐθνῶν» ὑπὸ τοῦ Adam Smith τὸ 1776, ἀνοίγει μίαν μεγάλην ἐποχὴν δι' ἕνα ἀκόμη κλάδον τοῦ ἀνθρωπίνου ἐπιστητοῦ καὶ δίδει εἰς τὸν συγγραφέα του τὸν τίτλον τοῦ πατρὸς τῆς Οἰκονομικῆς. Ὁ μέγας οὗτος Σκῶτος φιλόσοφος καὶ οἰκονομολόγος εἰσήγαγεν εἰς τὴν οἰκονομικὴν τὸ φυσικὸν δίκαιον καὶ τὰς δοξασίας τοῦ φιλελευθερισμοῦ, ὡς οἱ φυσιοκράται. Ἠκολούθησεν, ὅμως, διαφορετικὰς θεωρητικὰς ὑποθέσεις τούτων. Οὗτος, ὡς καὶ οἱ λοιποὶ κλασσικοί, θεωροῦν τὴν ἐργασίαν ὡς τὸν μόνον παραγωγικὸν συντελεστὴν πρωτογενῶς. Ὅλον τὸ θεωρητικὸν περὶ ἀξίας οἰκοδόμημα τῶν κλασσικῶν στηρίζεται εἰς τὴν ἐργασίαν, ἐξ ἧς προκύπτει ἡ θεωρία τῶν παραγωγικῶν δαπανῶν. Μεθοδολογικῶς ἠκολούθησαν τὴν ἀπαγωγικήν, κυρίως, μέθοδον διὰ νὰ σχηματίσουν τοὺς γενικοὺς οἰκονομικοὺς «νόμους» των. Συστηματικώτερος ὅλων τῶν κλασσικῶν ἀπεδείχθη ὁ David Ricardo, ὅστις ἀνέπτυξε τὴν κλασσικὴν θεωρίαν εἰς τέλειον λογικῶς οἰκοδόμημα. Οὗτος εἶναι περισσότερον γνωστὸς διὰ τὰς περὶ ἐργατικοῦ μισθοῦ, ἐγγείου προσόδου, ἀξίας καὶ συγκριτικοῦ κόστους θεωρίας του (1817).

Ἡ Κλασσικὴ Σχολή, κυρίως ἀγγλικὴ εἰς τὴν προέλευσιν, ὑποδιαιρεῖται εἰς δύο κλάδους: τοὺς αἰσιοδόξους καὶ τοὺς ἀπαισιοδόξους. Εἰς τοὺς πρώτους ἀνήκουν οἱ A.Smith, N. Senior, J. Mac Cullock, J. S. Mill, J. Say, F. Bastiat, κ.ἄ. Εἰς τοὺς δευτέρους, οἱ Ricardo καὶ Malthus.

Ἡ κλασσικὴ σχολὴ ὑπέστη δριμεῖαν κριτικὴν λόγῳ: (α) τῆς πίστεώς της εἰς τοὺς φυσικοὺς νόμους, β) τῆς μελέτης ἑκάστου οἰκονομικοῦ φαινομένου ἀνεξαρτήτως πρὸς τὴν σχέσιν τούτου πρὸς τὰ λοιπὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα, (γ) τῆς ὑποθέσεως τῆς πλήρους ἀπασχολήσεως εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν προβλημάτων ἀπασχολήσεως τῶν πόρων καὶ τοῦ χρήματος, (δ) τοῦ νόμου τῶν ἀγορῶν (Say), καθ' ὃν ἡ προσφορὰ δημιουργεῖ τὴν ἰδίαν αὐτῆς ζήτησιν, κ.ἄ.

Ἐνταῦθα δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἐκ τῆς κλασσικῆς ἐγεννήθη ἡ σοσιαλιστικὴ σχολή. Ἡ σχολὴ αὕτη μὲ κύριον ἐκπρόσωπον τὸν K. Marx πρεσβεύει τὴν αὐτὴν θεωρίαν περὶ ἀξίας ὡς οἱ κλασσικοί, ἀλλὰ ἐδιαφοροποιήθη τούτων ἀσκήσασα δριμεῖαν κριτικὴν τοῦ κεφαλαιοκρατικοῦ συστήματος διὰ τῆς περὶ ὑπεραξίας θεωρίας της. Ἕτεροι σοσιαλισταὶ ἦσαν οἱ Sismondi, R. Owen, Saint Simon, Fourier, Proudhon, κ.ἄ. Οἱ περισσότεροι δὲ τούτων, δέον νὰ λεχθῇ, ὅτι ἦσαν οὐτοπισταί.

0.2.3. **Ἡ Ψυχολογικὴ ἢ Αὐστριακὴ Σχολή.** Τὸ χαρακτηριστικὸν τῆς σχολῆς ταύτης εἶναι ὅτι ἐχρησιμοποίησεν ὡς κύριον ὄργανον ἀναλύσεως τὴν ψυχολογικὴν ἑρμηνείαν τῆς χρησιμότητος τῶν ἀγαθῶν. Ἐχρησιμοποίησεν τὴν ἀπαγωγικὴν μέθοδον, ὡς ἡ Κλασσικὴ σχολή, ἀλλὰ ἔδωσε διαφορετικὰς ἑρμηνείας εἰς τὸ πρόβλημα τῆς ἀξίας τῶν ἀγαθῶν, στηριχθεῖσα εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος, διὸ καὶ οἱ ὀπαδοὶ ταύτης ὁριακοὶ (marginalists) ἐκλήθησαν. Κύριοι ἐκπρόσωποι τῆς σχολῆς ἦσαν οἱ H. Gossen, K. Menger (1871), E. von Böhm—Bawerk (1886), F. von Wieser (1884), H. Mayer (1932), L. Mises (1933), κ.ἄ.

0.2.4. **Ἡ Μαθηματικὴ Σχολὴ τῆς Λωζάννης.** Οὕτω ἐκλήθη ἡ προσπάθεια τῶν ἐν Λωζάνῃ καθηγητῶν L. Walras καὶ V. Pareto ὅπως διατυπώσουν τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα καὶ σχέσεις διὰ μαθηματικῶν τύπων καὶ μεθόδων. Κύριον χαρακτηριστικὸν τῆς σχολῆς ταύτης εἶναι ἡ θεωρία τῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας, διὸ καὶ σχολὴ τῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας ἐκλήθη ἐπίσης. Δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν δὲ τὴν σχολὴν εἰς δύο κλάδους: τὸν κλάδον τῆς γενικῆς ἰσορροπίας, καὶ τὸν κλάδον τῆς μερικῆς ἰσορροπίας. Εἰς τὸν μὲν πρῶτον ἀνήκουν οἱ Walras καὶ Pareto, εἰς δὲ τὸν δεύτερον οἱ A. Cournot (1897) M. Pantaleoni (1898), S. Jevons (1871), F. Edgeworth (1881), ὁ μέγας νεοκλασσικὸς A. Marshall (1890, 1920), κ.ἄ.

0.2.5. **Ἡ Ἱστορικὴ Σχολή.** Ἡ σχολὴ αὕτη προέκυψε τόσον ἐκ τῆς προσπαθείας ἀσκήσεως δριμείας κριτικῆς κατὰ τῆς Κλασσικῆς σχολῆς, ὅσον καὶ ἐκ τῆς προσπαθείας ὑπερασπίσεως τῶν συμφερόντων τοῦ Γερμανικοῦ ἔθνους. Ἡ Ἱστορικὴ σχολὴ ἔβαλε κατὰ τῆς ἀφηρημένης συλλήψεως τῆς Κλασσικῆς σχολῆς, χρησιμοποιήσασα τὴν ἱστορικὴν καὶ ἐπαγωγικὴν μέθοδον. Αἱ θεωρίαι της προέκυψαν ἐκ τῆς παρατηρήσεως, διαδοχῆς καὶ ἐξελίξεως τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων εἰς δεδομένον κοινωνικὸν πλαίσιον. Οὕτω ἡ οἰκονομία εἶναι ἀντικείμενον μελέτης τῆς ἱστορίας.

Κύριοι ἐκπρόσωποι τῆς σχολῆς ταύτης ἦσαν ὁ ἀπολογητὴς τοῦ Γερμανικοῦ προστατευτισμοῦ F. List (1841), ὁ W. Roscher (1848) καὶ ὁ G. Schmoller (1875).

0.2.6. **Οἱ Νεοκλασσικοί.** Ἡ Σχολὴ τῶν Νεοκλασσικῶν προσεπάθησε νὰ ἀποκαταστήσῃ τὸ κῦρος τῶν κλασσικῶν μετὰ τὴν δριμεῖαν κριτικὴν τὴν ὁποίαν ὑπέστησαν ἐκ τῶν σοσιαλιστῶν καὶ ἱστορικῶν. Οἱ Νεοκλασσικοὶ χρησιμοποιοῦντες τὰς ἰδίας ἐπιστημονικὰς μεθόδους τῆς Κλασσικῆς καὶ τῆς Ψυχολογικῆς σχολῆς προσπαθοῦν νὰ διορθώσουν τὰς ἀδυναμίας τῶν κλασσικῶν, εἰς τὴν Ἀγγλίαν ὁ A. Marshall καὶ ὁ Pigou (Σχολὴ τοῦ Cambridge), εἰς Ἡνωμένας Πολιτείας ὁ J. B. Clark.

0.2.7. **Αἱ νεώτεραι σχολαί.** Ἀπὸ τὰς ἀρχὰς τοῦ 20οῦ αἰῶνος ἐδημιουργήθησαν νεώτεραι τάσεις εἰς τὴν οἰκονομικὴν σκέψιν καὶ ἔρευναν. Ἐνταῦθα λίαν συνοπτικῶς ἀναφέρομεν: (α) Τὴν Κοινωνιολογικὴν Σχολὴν (Institutionalism), ἡ ὁποία υἱοθετεῖ τὴν κοινωνιολογικὴν διερεύνησιν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων καὶ τὴν ἑρμηνείαν τούτων ἐντὸς τοῦ συστήματος τῶν κοινωνικῶν θεσμῶν (E. Seligman, T. Veblen). (β) Τὴν Σχολὴν τῶν Νεοοριακῶν, ἡ ὁποία προσεπάθησε νὰ ἀναθεωρήσῃ καὶ διορθώσῃ, τῇ βοηθείᾳ τῆς νεωτέρας ψυχολογίας καὶ τῆς κοινωνιολογούσης οἰκονομικῆς, τὴν Ὁριακὴν Σχολὴν, εἰσάγουσα τὸν οἰκονομικὸν λογισμὸν (wirtschaftsrechnung) καὶ ἀποβάλλουσα τὸν ὑπερβολικὸν ἀτομισμὸν καὶ ὑποκειμενισμὸν τῶν παλαιῶν ὁριακῶν. (γ) Τὴν σχολὴν τῶν Κεϋνσιανῶν, ἡ ὁποία ἀσχολεῖται μὲ τὰ συνολικὰ μεγέθη τῆς οἰκονομίας καὶ ἡ ὁποία διὰ τοῦ ἱδρυτοῦ της J. M. Keynes ἤσκησε κριτικὴν ἐπὶ τῶν ἀξιωμάτων τῶν ὑπ' αὐτῆς κληθέντων κλασσικῶν*. (δ) Τὴν Σχολὴν τῶν Νεοκεϋνσιανῶν, ἡ ὁποία ἐτροποποίησε τὸ στατικὸν ὑπόδειγμα τοῦ Keynes διὰ τῆς δυναμικοποιήσεώς του καὶ διὰ τῆς εἰσαγωγῆς νέων ἀξιωμάτων καὶ σχέσεων προκυψασῶν ἐκ τῆς ἐμπειρικῆς ἐρεύνης. (ε) Τὴν Σχολὴν τῶν Ἐμπειρικῶν καὶ τῶν Οἰκονομετρῶν, ἡ ὁποία περιλαμβάνει ὁμοῦ μετὰ τῶν Νεοκεϋνσιανῶν τὸ σύνολον σχεδὸν τῶν συγχρόνων οἰκονομολόγων. Ἡ σύγχρονος τάσις εἰς τὴν ἔρευναν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων καὶ σχέσεων εἶναι ἡ εὐρεῖα χρῆσις τῶν μαθηματικῶν ὑποδειγμάτων καὶ ἡ διὰ στατιστικῶν μεθόδων ἐκτίμησις τῶν ὑπ' αὐτῶν περιγραφομένων σχέσεων. Ἡ πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ταύτην ἀναπτυχθεῖσα θεωρία ἀπετέλεσε, ὡς ἤδη ἐλέχθη, τὸν κλάδον τῆς Οἰκονομικῆς Ἐπιστήμης, ὅστις ἐκλήθη Οἰκονομετρική.

0.3. ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΙΣΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ

Δεδομένου ὅτι ἡ Οἰκονομικὴ ἑρμηνεύει καὶ ὑποδεικνύει, προκύπτει ὅτι αἱ προτάσεις της θὰ πρέπει νὰ εἶναι τόσον θετικοῦ ὅσον καὶ κανονιστικοῦ χαρακτῆρος. Θετικὴ πρότασις εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς τὸ ὄν, δηλ. εἶναι οὐδετέρα ἄνευ ἀξιολογικοῦ περιεχομένου. Κανονιστική, ἀντιθέτως, εἶναι ἡ πρότασις ἐκείνη ἡ ὁποία περιέχει τὸ δέον γενέσθαι, ἤτοι ὑπόδειξιν προκύπτουσαν ὡς πόρισμα ἐκ τῆς ἀναλύσεως. Ἡ κανονιστικὴ πρότασις, λοιπόν, περιέχει ἀξιολογικὴν κρίσιν.

Ἡ πρότασις: «ἡ αὔξησις τῆς ποσότητος τοῦ χρήματος ἄνευ ἀναλόγου αὐξήσεως τῆς πραγματικῆς παραγωγῆς ὁδηγεῖ εἰς αὔξησιν τοῦ γενικοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν», εἶναι θετικοῦ χαρακτῆρος. Ἐξ ἄλλου, ἡ πρότασις: «ἀποτελεσματικὸν μέσον καταπολεμήσεως τῶν πληθωριστικῶν τάσεων εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἡ μὴ περαιτέρω αὔξησις τῶν χρηματικῶν εἰσοδημάτων...», εἶναι κανονιστικοῦ χαρακτῆρος.

0.4. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

Ἡ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις σήμερον διακρίνεται εἰς δύο σημαντικοὺς κλάδους: τὴν Μικροοικονομικὴν καὶ τὴν Μακροοικονομικὴν ἀνάλυσιν. Ἡ τοιαύτη διάκρισις δύναται νὰ στηριχθῇ εἰς πλείονα

* Ὡς κλασσικοὺς ὁ Keynes ἐθεώρησε συλλήβδην ὅλους τοὺς κλασσικούς, νεοκλασσικοὺς καὶ ὁριακούς.

τοῦ ἑνὸς κριτήρια. Κατὰ πρῶτον, δυνάμεθα νὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τοῦ τρόπου καθ' ὃν ἐπισκοπεῖται ἡ οἰκονομία ἢ τὸ οἰκονομικὸν φαινόμενον. Ἡ μικροσκοπικὴ θεώρησις εἶναι ἀντικείμενον τῆς μικροαναλύσεως, ἡ δὲ μακροσκοπικὴ θεώρησις ἀντικείμενον τῆς μακροαναλύσεως. Κατὰ δεύτερον, ἡ διάκρισις δύναται νὰ γίνῃ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑποκειμένων δράσεως. Κατ' ἀκολουθίαν, ἡ μικροανάλυσις ἀσχολεῖται μὲ τὰς ἀποφάσεις καὶ ἐπιλογὰς τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων, καταναλωτῶν καὶ παραγωγικῶν μονάδων, μὲ βασικὴν ὑπόθεσιν τῆς συμπεριφορᾶς τούτων τὴν ὀρθολογικότητα. Ἐκ τῆς ἀναλύσεως ταύτης προκύπτουν πρότυπα συμπεριφορᾶς ὡς καὶ τυπικαὶ ὀντότητες, ὡς ἡ «τυπικὴ» ἐπιχείρησις, κ.λπ. Ἡ μακροανάλυσις, ἐξ ἄλλου, ἀσχολεῖται κατὰ κύριον λόγον μὲ τὴν συμπεριφορὰν τῶν συνολικῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν.

Κατὰ τρίτον, ἡ διάκρισις στηρίζεται εἰς τὴν ἄθροισιν οἱονεὶ— ὁμοιογενῶν ποσοτήτων εἰς τὴν μικροανάλυσιν καὶ τὴν ἄθροισιν (ὁλοκλήρωσιν) ἑτερογενῶν ποσοτήτων εἰς τὴν μακροανάλυσιν. Ἡ ὑπὸ ἀνάλυσιν ποσότης εἰς τὴν πρώτην εἶναι κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον ὁμογενής, ὡς π.χ. ἡ ἀνάλυσις προσφορᾶς καὶ ζητήσεως βοείου κρέατος. Ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν, διάφοροι ποσότητες ἐκπεφρασμέναι εἰς χρηματικὰς μονάδας προστίθενται, ὡς τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰς ἐκτιμήσεις τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν.

Τέλος, ἑτέρα διάκρισις στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ρόλου ὅστις ἀποδίδεται εἰς τὰς σχετικὰς τιμὰς κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν θεωρητικῶν ὑποδειγμάτων. Εἰς τὴν μικροανάλυσιν αἱ σχετικαὶ τιμαὶ παίζουν σημαντικώτατον ρόλον, ἐνῶ εἰς τὴν μακροανάλυσιν τοῦτο δὲν συμβαίνει. Ἐν τούτοις ἡ διάκρισις ἡ στηριζομένη εἰς τὸ κριτήριον τοῦτο, ὡς τοῦτο συμβαίνει βεβαίως καὶ εἰς τὰ προηγούμενα κριτήρια, δὲν ἰσχύει πάντοτε. Παραδείγματος χάριν, ἡ ἀνάλυσις τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τόκου ἐμφανίζεται τόσον εἰς τὴν μικροθεωρίαν (θεωρία σχηματισμοῦ τῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν), ὅσον καὶ εἰς τὴν μακροθεωρίαν (σχέσεις τόκου καὶ ἐπενδύσεων, χρηματικὴ θεωρία, κ.λπ.).

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω προσπαθειῶν διακρίσεως μεταξὺ τῶν δύο κλάδων, δυνάμεθα νὰ περιλάβωμεν εἰς τὴν μικροοικονομικὴν ἀνάλυσιν τὸν σχηματισμὸν τῶν τιμῶν ἀγαθῶν καὶ παραγωγικῶν συντελεστῶν, τὴν κατανομὴν τῶν πόρων, τὴν θεωρίαν τοῦ καταναλωτοῦ καὶ τῆς ἐπιχειρήσεως, κ.λπ. Εἰς τὴν μακροανάλυσιν ἐμπίπτει ἡ μελέτη τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, τῆς ἀπασχολήσεως, τῆς προσφορᾶς καὶ ζητήσεως χρήματος, κ.λπ.

Ὁ τὸ πρῶτον χρησιμοποιήσας τὴν διάκρισιν μεταξὺ μικρο— καὶ μακροοικονομικῆς ἦτο ὁ R. Frisch τὸ 1933, ἀλλὰ ἡ διάδοσις καὶ ἀνάπτυξις τῆς μακροαναλύσεως ἤρχισε κυρίως ἀπὸ τῆς ἐποχῆς (1936) τῆς Γενικῆς Θεωρίας τοῦ Keynes. Ἡ ἰδέα βεβαίως τῆς μακροθεωρίας εἶναι παλαιά. Ἀρχίζει ἀπὸ τὸ μακροϋπόδειγμα τοῦ Q u e s n a y (Tableau Economique, 1758) καὶ διὰ μέσου τοῦ ὑποδείγματος τοῦ K e y n e s καὶ τῆς μήτρας Leontief, ἐξελίσσεται διὰ τῆς συμβολῆς τῶν κατασκευαστῶν ὑποδειγμάτων.

Παραδείγματα μικροοικονομικῆς ἀναλύσεως εἶναι αἱ ἐργασίαι τῶν M a r s h a l l καὶ C o u r n o t. Στοιχεῖα μικρο— καὶ μακροαναλύσεως συνυπάρχουν εἰς τὰς ἐργασίας τῶν περισσοτέρων δημιουργῶν τῆς Οἰκονομικῆς Ἐπιστήμης, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐὰν οὗτοι ἦσαν ἐνήμεροι τῆς διακρίσεως ἢ εἶχον συνείδησιν ταύτης.

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν θεωρίαν τῆς γενικῆς ἰσορροπίας δέον νὰ δεχθῶμεν ὅτι αὕτη μεθοδολογικῶς ἀνήκει εἰς τὴν μικροοικονομικὴν θεωρίαν, ὡς περιλαμβανομένη μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων τῆς θεωρίας τῶν τιμῶν, παρὰ τὴν ἀντίθετον γνώμην τοῦ F r i s c h, ὅστις περιλαμβάνει ταύτην μεταξὺ τῶν μακροοικονομικῶν θεμάτων, διότι ἀναφέρεται εἰς τὸ ὅλον οἰκονομικὸν σύστημα.

Τέλος, δέον νὰ τονισθῇ ἡ ὕπαρξις πληθύος ὅρων οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν καὶ οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἐκ τῆς συνενώσεως ἑτέρων ὅρων ὡς: μικροστατικὴ καὶ μακροστατικὴ ἀνάλυσις, μικροϋπόδειγμα καὶ μακροϋπόδειγμα, κ.ο.κ.

0.5. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Ἡ ἔννοια τῆς ἰσορροπίας εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν εἶναι ἐκ τῶν πλέον χρησιμοποιουμένων καὶ συγκεχυμένων ἐννοιῶν. Αὕτη ἐξυπονοεῖτο εἰς τὰ ἔργα τῶν οἰκονομολόγων ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τῶν Φυσιοκρατῶν, βαθμηδὸν δὲ καὶ διὰ τῆς χρήσεως τῶν μαθηματικῶν κατέστη θεμελιώδης ἔννοια τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως. Ἐχρησιμοποιήθη τόσον ὡς μ ε θ ο δ ο λ ο γ ι κ ὸ ν ὄ ρ γ α ν ο ν εἰς τὴν ἀφηρημένην θεωρίαν, ὅσον καὶ ὡς χ α ρ α κ τ η ρ ι σ μ ὸ ς συγκεκριμένης ἱστορικῆς καταστάσεως. Ὡς μεθοδολογικὸν ὄργανον κατέστη ἀναγκαία ἡ ἔννοια τῆς ἰσορροπίας ἵνα ὑπάρξῃ ἀφετηρία ἐκκινήσεως εἰς τὴν ἐξέτασιν θεωρητικῶν ὑποδειγμάτων. Ἐκκινοῦμεν πάντοτε ἐκ μιᾶς καταστάσεως ἰσορροπίας καὶ μελετῶμεν κατόπιν τὰ ἀποτελέσματα τῶν πιθανῶν διαταραχῶν εἰς τὸ σύστημα. Κατὰ M a c h l u p ἡ λειτουργία ἑνὸς θεωρητικοῦ ὑποδείγματος χωρεῖ κατὰ τέσσαρα στάδια.

1ον στάδιον: Ἀρχικὴ θέσις: «ἰσορροπία».

2ον στάδιον: Μεταβολὴ διαταρακτικὴ τῆς ἰσορροπίας (νέα δεδομένα ἢ συμβάν).

3ον στάδιον: Προσαρμοστικαὶ μεταβολαὶ (ἀντιδράσεις)

4ον στάδιον: Τελικὴ θέσις: «νέα ἰσορροπία».

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ M a c h l u p, ἰσορροπία εἶναι τὸ σύστημα ἀλληλοσυσχετιζομένων μεταβλητῶν προσηρμοσμένων κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ μὴ ὑφίσταται ἐνδογενὴς τάσις πρὸς μεταβολὴν εἰς τοῦτο. Ἢ ἀκόμη, τὸ ἀμοιβαίως συμβιβάσιμον ἑνὸς συνόλου ἐπιλεγεισῶν συσχετιζομένων μεταβλητῶν ὡρισμένου μεγέθους. Ὁ Pareto ὥρισεν ὡς ἰσορροπίαν τὴν κατάστασιν καθ' ἣν αἱ ἀνάγκαι καὶ οἱ περιορισμοὶ (μέσα) ἐξισορροποῦνται, ὥστε οὐδεμία τάσις πρὸς μεταβολὴν παρατηρεῖται.

Εἰς τὴν περιοχὴν τῆς μικροοικονομικῆς ἀναλύσεως ἡ προσπάθεια τείνει πρὸς ἐξέτασιν τῆς καταστάσεως ἰσορροπίας, ἐφ' ἑνὸς μὲν τῆς καταναλωτικῆς καὶ τῆς παραγωγικῆς μονάδος, ἀφ' ἑτέρου δὲ τῆς ἀγορᾶς τῶν διαφόρων ἀγαθῶν. Τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι ἐκεῖνος ὁ συνδιασμὸς ποσοτήτων ἀγαθῶν, ὅστις δίδει τὴν μεγίστην ἱκανοποίησιν. Τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι ἐκεῖνο ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς ποσότητα παραγωγῆς, ἥτις μεγιστοποιεῖ τὰ κέρδη. Συνεπῶς οὔτε ὁ καταναλωτής, οὔτε ἡ ἐπιχείρησις ἔχουν συμφέρον νὰ ἀπομακρυνθοῦν τῶν σημείων ἰσορροπίας, ἐφ' ὅσον οἱ λοιποὶ παράγοντες παραμένουν ἀμετάβλητοι, δεδομένου ὅτι ὁ πρῶτος μὲν μεγιστοποιεῖ τὴν ἱκανοποίησίν του ἐκ τῆς καταναλώσεως, ἡ δευτέρα δὲ τὰ κέρδη ἐκ τῆς διαθέσεως ἀγαθῶν.

Εἰς τὴν περιοχὴν τῆς μακροοικονομικῆς ἀναλύσεως ἡ προσπάθεια τείνει εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς λεγομένης μακροοικονομικῆς ἰσορροπίας ἢ τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου ἰσορροπίας τοῦ εἰσοδήματος τῆς κοινωνίας. Ὡς τοιοῦτον δὲ ἐπίπεδον ἰσορροπίας ὁρίζεται τὸ σημεῖον ὅπου αἱ ex-ante ἀποταμιεύσεις εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ex-ante ἐπενδύσεις.

Εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ σχηματισμοῦ τῶν τιμῶν τῶν ἀγαθῶν, ἡ ἰσότης τῆς προσφερομένης πρὸς τὴν ζητουμένην ποσότητα τοῦ ἀγαθοῦ δίδει τὴν τιμὴν ἰσορροπίας. Δεδομένου δὲ ὅτι ἡ προσαρμογὴ τῆς προσφορᾶς καὶ ζητήσεως πρὸς ἐπίτευξιν τῆς ἰσορροπίας εἰς τὴν ἀγορὰν τοῦ ἀγαθοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρόνου, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν τὴν ἰσορροπίαν εἰς τοιαύτην βραχείας καὶ μακρᾶς περιόδου. Ἐπίσης εἰς τὴν θεωρίαν τῆς ἐπιχειρήσεως διακρίνομεν μεταξὺ βραχυχρονίου καὶ μακροχρονίου ἰσορροπίας. Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἐξετάζεται ἡ δυνατότης τῆς αὐξήσεως τοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ τῆς ἐπιχειρήσεως καὶ τῆς ἱδρύσεως νέων μονάδων.

Ἑτέρα σημαντικωτάτη διάκρισις εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν εἶναι ἡ μεταξὺ μερικῆς καὶ γενικῆς ἰσορροπίας.

Ἡ ἀλληλεξάρτησις τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν καὶ τὸ πολύπλοκον τῶν σχέσεων τούτων δύνανται νὰ τύχουν ἐξετάσεως δι' ἑνὸς συστήματος ἐξισώσεων, ὡς τοῦτο εἶχε πράξει ὁ Walras. Τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων θὰ πρέπει νὰ περιγράφῃ ὅλας τὰς πιθανὰς κυκλικὰς ἢ ἁλυσοειδεῖς ἐπιδράσεις τῆς μεταβολῆς τῆς μιᾶς μεταβλητῆς ἐπὶ τῶν ἑτέρων. Εἰς ἓν σύστημα γενικῆς ἰσορροπίας αἱ καταναλωτικαὶ μονάδες πωλοῦν παραγωγικὰς ὑπηρεσίας εἰς τὴν ἀγορὰν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν καὶ ἀγοράζουν ἀγαθὰ εἰς τὴν ἀγορὰν τῶν ἀγαθῶν. Οἱ καταναλωταὶ προσπαθοῦν ὅπως μεγιστοποιήσουν τὴν ἱκανοποίησίν των ἐντὸς τῶν ὁρίων τοῦ εἰσοδήματος των, καὶ οἱ παραγωγοὶ ὅπως μεγιστοποιήσουν τὴν παραγωγὴν ἐντὸς τῶν ὁρίων τὰ ὁποῖα διαγράφονται ἐκ τῶν διαθεσίμων παραγωγικῶν συντελεστῶν ἢ ἐκ τῆς δεδομένης συναρτήσεως παραγωγῆς. Τὸ πλεονέκτημα τῆς ἀναλύσεως τῆς γενικῆς ἰσορροπίας εἶναι ὅτι καθιστᾶ ἔκδηλον τὸ πλέγμα τῶν ἀμοιβαίων διασυσχετίσεων τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν. Συστήματα γενικῆς ἰσορροπίας εἶναι τὸ Tableau Economique τοῦ Quesnay, τὸ Βαλρασιανὸν σύστημα γενικῆς ἰσορροπίας καὶ τὰ συστήματα διακλαδικῶν σχέσεων, ὡς ἐκεῖνο τοῦ Leontief.

Ἀντιθέτως πρὸς ὅτι συμβαίνει εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς γενικῆς ἰσορροπίας, εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς μερικῆς ἰσορροπίας τίθεται ἡ ὑπόθεσις ceteris paribus. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἐκ τοῦ ὅλου πλέγματος τῶν σχέσεων ἀπομονώνομεν δεδομένην σχέσιν, ἣν καὶ ἐξετάζομεν, θεωροῦντες τὰς λοιπὰς σχέσεις ἢ μεταβλητὰς ὡς μὴ ἐπηρεαζομένας. Λέγομεν, λόγου χάριν, ὅτι ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ α ὁδηγεῖ εἰς μείωσιν τῆς ζητήσεως, τῶν λοιπῶν παραγόντων παραμενόντων ἀμεταβλήτων. Ἡ κυρία μεθοδολογία εἰς τὴν θεωρίαν τῶν τιμῶν εἶναι ἡ τῆς μερικῆς ἰσορροπίας, ὅπου αἱ τιμαὶ τῶν ἀγαθῶν, πλὴν τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν, ἀγνοοῦνται. Τὸ κυριώτερον σύστημα μερικῆς ἰσορροπίας εἶναι τὸ Μαρσαλλιανόν, τὸ ὁποῖον μὲ τὰς ὑπὸ τῶν διαφόρων θεωρητικῶν οἰκονομολόγων ἐπενεχθείσας τροποποιήσεις καὶ προσθήκας, ἀποτελεῖ τὸν κύριον ὄγκον τῆς θεωρίας τῶν τιμῶν.

Τέλος, ἡ ἰσορροπία δύναται νὰ διακριθῇ εἰς σταθερὰν (εὐσταθῆ), ἀσταθῆ καὶ οὐδετέραν. Ὡς σταθερὰ κρίνεται ἡ ἰσορροπία ἡ διατάραξις τῆς ὁποίας θέτει ἐν κινήσει δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἐπαναφέρουν εἰς αὐτήν. Ὡς ἀσταθὴς κρίνεται ἐκείνη, ἡ διατάραξις τῆς ὁποίας θέτει ἐν κινήσει δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν εἰς ἀπομάκρυνσιν ἐξ αὐτῆς. Ὡς οὐδετέρα θὰ ὁρίσωμεν τὴν ἰσορροπίαν, ὅταν μία μεταβολὴ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν δὲν δημιουργεῖ δυνάμεις διαταρακτικάς, καὶ οὕτω ἡ νέα θέσις εἶναι αὐτὴ καθ' ἑαυτὴν νέα ἰσορροπία.

0.6. ΣΤΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

Ἡ οἱονεὶ μηχανικὴ φύσις τῶν οἰκονομικῶν συστημάτων ἐπέβαλε τὴν χρησιμοποίησιν διαφόρων ὅρων τῆς Φυσικῆς ἐπιστήμης καὶ εἰς τὴν οἰκονομικήν, ὡς οἱ ὅροι «στατικὸς» καὶ «δυναμικός». Οἱ ὅροι οὗτοι κατήντησαν καλειδοσκοπικαὶ λέξεις, κατὰ προσφυῆ ἔκφρασιν τοῦ καθηγητοῦ F. Machlup, λόγῳ τῆς ποικιλίας καὶ τῶν παραλλαγῶν τῆς ἐννοίας τὴν ὁποίαν ἀποδίδουν εἰς αὐτὰς οἱ διάφοροι οἰκονομολόγοι.

Γενικῶς, σ τ α τ ι κ ἡ ν θὰ καλέσωμεν τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν, ἥτις δὲν λαμβάνει ὑπ' ὄψιν τὸ στοιχεῖον τοῦ χρόνου, δ υ ν α μ ι κ ἡ ν δὲ ἐκείνην ἥτις ἀναλύει τὴν διαχρονικὴν μεταβολὴν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων. Ἡ ἐξέτασις τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος ἢ φαινομένου ἐν δεδομένῃ στιγμῇ, δίκην φωτογραφίας, ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς κατάστασιν ἰσορροπίας (στατικὴ ἰσορροπία), ὑπάγεται εἰς τὴν στατικὴν ἀνάλυσιν. Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν λέξιν «στασιμότης», ὑποδηλοῦντες βεβαίως τὴν στατικότητα. Πλὴν ὅμως, ἡ λέξις αὕτη χρησιμοποιεῖται κυρίως διὰ νὰ ὑποδηλώσῃ μίαν στάσιμον (μὴ ἐξελίξιμον ἢ ἐν καθυστερήσει) κατάστασιν ἢ οἰκονομίαν. Ἀντιθέτως, ἡ δυναμικὴ ἀνάλυσις λαμβάνει ὑπ' ὄψιν της τὸ στοιχεῖον τοῦ χρόνου καὶ ἀναφέρεται ἀκριβῶς εἰς τὴν διαδικασίαν τῆς ἐξελίξεως καὶ τῆς μεταβολῆς. Ἡ ἐξέλιξις καὶ ἡ μεταβολὴ ἀποτελοῦν ἐξ ὁρισμοῦ δυναμικὰ στοιχεῖα τῆς ἀναλύσεως. Διὰ τὴν ἀναλυτικὴν παρουσίασιν τῆς δυναμικῆς διαδικασίας ἀπαιτεῖται ἡ χρῆσις μαθηματικῶν, ὡς αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις καὶ αἱ ἐξισώσεις διαφορῶν.

Ἡ στατικὴ κατάστασις, θὰ πρέπει νὰ συμπεράνωμεν, εἶναι περίπτωσις τῆς δυναμικῆς τοιαύτης. Ἡ πρώτη περιέχεται εἰς τὴν δευτέραν, δεδομένου ὅτι ἡ δυναμικὴ ἀνάλυσις ἐξετάζει ὅλην τὴν χρονικὴν κλιμάκωσιν τοῦ φαινομένου, ἓν σημεῖον τῆς ὁποίας (δίκην φωτογραφίας) ἐξετάζει ἡ στατικὴ ἀνάλυσις.

Μεταξὺ τῶν δύο μεθόδων ἀναλύσεως, τῆς στατικῆς καὶ τῆς δυναμικῆς, ὑπάρχει ἡ ἐνδιάμεσος περίπτωσις τῆς σ υ γ κ ρ ι τ ι κ ῆ ς σ τ α τ ι κ ῆ ς ἀ ν α λ ύ σ ε ω ς. Κατ' αὐτὴν ἐξετάζονται τὰ ἀποτελέσματα τῆς μεταβολῆς εἰς μίαν στατικὴν κατάστασιν, ἐξ ἧς προκύπτει ἑτέρα στατικὴ κατάστασις. Δηλονότι, συγκρίνονται δύο στατικαὶ καταστάσεις ἢ δύο χρονικαὶ στιγμαὶ τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν φαινομένου.

Κατὰ τὸν K e y n e s, δ υ ν α μ ι κ ἡ εἶναι ἡ μελέτη τοῦ τρόπου κατὰ τὸν ὁποῖον αἱ οἰκονομικαὶ καὶ κοινωνικαὶ συνθῆκαι μεταβάλλονται διαχρονικῶς. Δηλονότι, ἡ μελέτη τῆς οἰκονομικῆς προόδου διὰ τῆς ἱστορικῆς, κυρίως, μεθόδου. Σ τ α τ ι κ ή, ἐξ ἄλλου, εἶναι ἡ μελέτη τῶν φαινομένων ὡς ταῦτα παρουσιάζονται ὑπὸ δεδομένας συνθήκας. Κατὰ τὸν P a r e t o ἡ στατικὴ (πρῶτον μέρος τῆς καθαρᾶς οἰκονομικῆς) μελετᾷ τὴν ἰσορροπίαν ὑπὸ δεδομένας καὶ ἀμεταβλήτους συνθήκας, ἐνῷ ἡ δυναμικὴ (δεύτερον καὶ τρίτον μέρος τῆς καθαρᾶς οἰκονομικῆς) μελετᾷ ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰς διαδοχικὰς ἰσορροπίας ὑπὸ μεταβαλλομένας συνθήκας, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὰς κινήσεις τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων. Κατὰ τὸν R a g n a r F r i s c h, ἡ δυναμικὴ ἑρμηνεύει τὴν ἐξέλιξιν μιᾶς καταστάσεως διὰ τῆς μελέτης τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν κατὰ διαφόρους χρονικὰς στιγμάς. Διακρίνει δὲ οὗτος, τὴν «μικροδυναμικὴν »καὶ «μακροδυναμικήν». Ἡ στατική, ἐξ ἄλλου, εἶναι ἡ θεωρία τῆς οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἅπασαι αἱ μεταβληταὶ ἀναφέρονται εἰς τὸ αὐτὸ χρονικὸν σημεῖον. Κατὰ τὸν H i c k s, δυναμικὴ εἶναι ἡ ἀνάλυσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἑκάστη ποσότης χρονολογεῖται, ἐνῶ στατικὴ ὅταν δὲν χρονολογῆται. Τέλος, κατὰ τὸν B a u m o l, δυναμικὴ εἶναι ἡ μελέτη τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων ἐν σχέσει πρὸς προηγούμενα ἢ ἑπόμενα γεγονότα, ἐνῶ στατικὴ εἶναι ἡ ἀνάλυσις τῆς διατομῆς (cross — section), ἐξ ἧς ἐξηλείφθη ἡ διαδρομὴ τοῦ χρόνου*.

0.7. ΟΡΙΑΚΗ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

Ἡ παραδοσιακὴ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις ἦτο κυρίως ὁριακὴ εἰς τὸν χαρακτῆρα, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἐχρησιμοποίει κυρίως τὸν διαφορικὸν λογισμὸν ὡς ἐργαλεῖον διὰ τὴν μελέτην τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων. Τὰ πλεῖστα τῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων ἦσαν προβλήματα ἐξευρέσεως τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου. Αἱ ἔννοιαι λοιπὸν τοῦ ὁρίου καὶ τῆς παραγώγου ἐχρησιμοποιήθησαν διὰ τὴν μελέτην τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν. Ὁ νόμος τῆς φθινούσης ἢ αὐξούσης ἀποδόσεως, ἡ ἀρχὴ τῆς μεγιστοποιήσεως τῶν κερδῶν ἢ τῆς ἱκανοποιήσεως, ἡ ἀρχὴ τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ κόστους ἢ τῆς θυσίας, ἡ διανομὴ τοῦ προϊόντος, κ.λπ., εἶναι βασικὰ στοιχεῖα τοῦ οἰκονομικοῦ προβλήματος καὶ ἀντικείμενα τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως.

Τὰ προβλήματα, ὅμως, τῆς ἐξευρέσεως τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου καὶ τῆς ἀρίστης κατανομῆς τῶν πόρων ἀπαιτοῦν, πολλάκις, πρὸς ἐπίλυσίν των μαθηματικὰς τεχνικὰς διαφόρους τῶν κλασικῶν τοιούτων, στηριζομένας ἐπὶ τῶν Γραμμικῶν χαρακτηριστικῶν τῶνσυστημάτων καὶ οἰκονομικῶν σχέσεων. Ἡ γραμμικότης τῶν σχέσεων καθιστᾶ δυνατὴν τὴν ἐπίλυσιν, δυσκόλων προβλημάτων, ἄνευ ἀπομακρύνσεως ἐκ τῆς πραγματικότητος. Ὁ κλάδος τῆς γραμμικῆς ἀναλύσεως στηριζόμενος βασικῶς ἐπὶ τῆς γραμμικῆς ἀλγέβρας περιλαμβάνει τρεῖς ὑποκλάδους: (α) τὴν ἀ ν ά λ υ σ ι ν ε ἰ σ ρ ο ῶ ν - ἐ κ ρ ο ῶ ν, ἢ δ ι α κ λ α δ ι κ ὴ ν ἀ ν ά λ υ σ ι ν, (β) τὸν γ ρ α μ μ ι κ ὸ ν π ρ ο γ ρ α μ μ α τ ι σ μ ὸ ν καὶ (γ) τὴν θ ε ω ρ ί α ν τ ῶ ν π α ι γ ν ί ω ν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριῶν κλάδων τῆς γραμμικῆς ἀναλύσεως ὁ πρῶτος μόνον ἔχει οἰκονομολογικὴν τὴν προέλευσιν. Πρῶτος ὅστις ἠσχολήθη μὲ τὴν διακλαδικὴν ἀνάλυσιν ἦτο ὁ καθηγητὴς W. W. L e o n t i e f ἀπὸ τοῦ ἔτους 1936. Σήμερον ἡ ἀνάλυσις αὕτη, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀλγέβρας τῶν μητρῶν καὶ τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, χρησιμοποιεῖται εὐρύτατα τόσον εἰς τὴν διαρθρωτικὴν ἀνάλυσιν ὅσον καὶ εἰς τὸν οἰκονομικὸν προγραμματισμὸν καὶ τὴν οἰκονομικὴν πρόβλεψιν..

Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς καὶ ἡ θεωρία τῶν παιγνίων εἶναι κα-

* Βλ. πλείονα εἰς F. M a c h l u p, Essays on Economic Semantics, New Jersey, 1963.

θαρῶς μαθηματικαὶ θεωρίαι, αἱ ὁποῖαι ἔτυχον ἐφαρμογῆς εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν μετὰ τὸν Β' Παγκόσμιον Πόλεμον. Ἡ μαθηματικὴ θεωρία τῶν παιγνίων, τὸ κεντρικὸν θεώρημα τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον ἐπαρουσιάσθη ὑπὸ τοῦ von Neumann τὸ 1928 ἔτυχεν ἐφαρμογῆς εἰς τὰ προβλήματα τῆς οἰκονομικῆς συμπεριφορᾶς ὑπὸ τῶν von Neumann καὶ Oskar Morgenstern τὸ 1944. Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμός, ἐξ ἄλλου, ἀνεπτύχθη ὑπὸ τοῦ G. Dantzig τὸ 1947 ὡς τεχνικὴ σχεδιασμοῦ τῆς δραστηριότητος τῆς Ἀμερικανικῆς ἀεροπορίας. Ἐχρησιμοποιήθη δὲ διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων τῆς ἐπιχειρήσεως (managerial planning), καὶ διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων οἰκονομικῆς ἀριστοποιήσεως εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν.

0.8. EX — ANTE ΚΑΙ EX — POST ΣΧΕΣΕΙΣ

Αἱ ἔννοιαι ex — ante καὶ ex — post τὸ πρῶτον ἐχρησιμοποιήθησαν ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ G. Myrdal. Ἡ πρώτη μὲν σημαίνει τὸ προγραμματιζόμενον ἢ τὸ ἀναμενόμενον ἢ ἐπιθυμητὸν ἡ δὲ δευτέρα σημαίνει τὸ πραγματοποιηθέν. Ex — ante ἀποταμιεύσεις καὶ ἐπενδύσεις εἶναι αἱ ἐπιθυμηταὶ τοιαῦται. Ἡ ex — ante σχέσις μεταξὺ ἀποταμιεύσεων καὶ ἐπενδύσεων εἶναι ἐκείνη ἥτις θὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἰσορροπίας τοῦ συστήματος. Μακροοικονομικὴ ἰσορροπία ὑπάρχει, ὅταν αἱ ex—ante ἀποταμιεύσεις καὶ ἐπενδύσεις εἶναι ἴσαι. Ex—ante πωλήσεις εἶναι ἐκεῖναι τὰς ὁποίας ἀναμένουν οἱ πωληταὶ δι' ὡρισμένην περίοδον, κ.ο.κ.

Αἱ ex — post ἀποταμιεύσεις καὶ ἐπενδύσεις εἶναι αἱ πραγματοποιηθεῖσαι τοιαῦται δι' ὡρισμένην περίοδον καὶ εἶναι πάντοτε ἴσαι. Ἡ ex — post σχέσις εἶναι ἀπολογιστικὴ ἔννοια. Ἡ διευκρίνισις τελικῶς τῶν ἀνωτέρω δύο ἐννοιῶν θὰ γίνῃ εἰς τὴν μακροοικονομικὴν ἢ εἰσοδηματικὴν ἀνάλυσιν.

0.9. ΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ «ΡΟΗΣ» ΚΑΙ «ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ»

Ἡ διάστασις τοῦ χρόνου εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν εἶναι βασικῆς σημασίας καὶ συνεπείᾳ τοῦ γεγονότος τούτου αἱ μεταβληταὶ διακρίνονται εἰς τοιαύτας «ροῆς» (flow) καὶ «ἀποθέματος» (stock). Ἡ μεταβλητὴ — ροὴ ἔχει ἔννοιαν μόνον ἐν ἀναφορᾷ πρὸς μίαν χρονικὴν περίοδον καὶ συνεπῶς ἐνέχει τὴν διάστασιν τοῦ χρόνου. Ἡ μεταβλητὴ — ἀπόθεμα ἀναφέρεται εἰς ὡρισμένην χρονικὴν στιγμὴν καὶ δὲν συναρτᾶται πρὸς τὴν χρονικὴν ροήν, ἤτοι εἶναι ἀπηλλαγμένη τῆς διαστάσεως τοῦ χρόνου*.

* Βλ. Στυλ. Α. Σαραντίδη, Ἀνάλυσις Οἰκονομικῶν Διαστάσεων, Ἀθῆναι, 1970, σελ. 12.

Αἱ ἐτήσιαι ἐπενδύσεις εἶναι προσθῆκαι εἰς τὸ ὑπάρχον κεφάλαιον. Αἱ ἐπενδύσεις εἶναι συνεπῶς μεταβλητὴ δεικνύουσα ροήν. Τὸ κεφάλαιον δὲ εἶναι μεταβλητὴ — ἀπόθεμα. Ἡ ἐντὸς ἑνὸς ἔτους καθαρὰ εἰσροὴ ξένου συναλλάγματος εἶναι ἔννοια ροῆς, ἀλλὰ τὸ καθ' ὡρισμένην στιγμὴν (31ην Δεκεμβρίου) ὑπάρχον συναλλαγματικὸν ἀπόθεμα εἶναι ἔννοια ἀποθέματος. Οἱ μισθοί, τὸ εἰσόδημα, ἡ ἀποταμίευσις, κ.λπ. ἀποτελοῦν ἐννοίας ροῆς. Τὸ ὑπάρχον ὑλικὸν πάγιον κεφάλαιον, τὸ ὑφιστάμενον δημόσιον χρέος, ἡ ὑπάρχουσα καθ' ὡρισμένην στιγμὴν ποσότης χρήματος εἰς τὴν οἰκονομίαν, κ.λπ., ἀποτελοῦν ἐννοίας ἀποθέματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

«Τὰ μαθηματικὰ εἶναι γλῶσσα»

I. W. GIBBS

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

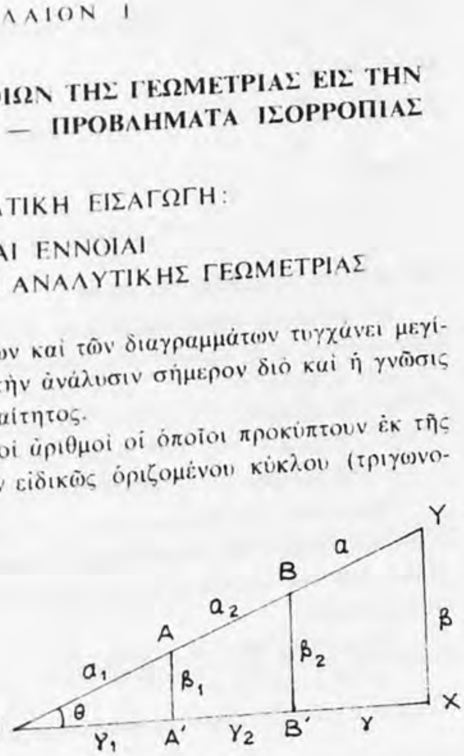
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ — ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

1.0. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ:

ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1.0.0. Ἡ ἄλγεβρα τῶν τριγώνων καὶ τῶν διαγραμμάτων τυγχάνει μεγί- ... ἡ γνῶσις στης ἐφαρμογῆς εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν σήμερον διὸ καὶ ἡ γνῶσις βασικῶν τινων ἐννοιῶν εἶναι ἀπαραίτητος.

Ἐν πρώτοις οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἐκ τῆς μελέτης τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τόξων εἰδικῶς ὁριζομένου κύκλου (τριγωνομετρικοῦ κύκλου) εἶναι λίαν χρήσιμοι διὰ τὴν μελέτην γραμμῶν ἀπεικονιζουσῶν οἰκονομικὰ φαινόμενα.



Σχ. 1.1

Ἄς λάβωμεν τὴν γωνίαν $\widehat{XOY}$. Αὐτὴ δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς τρίγωνον ἐὰν φέρωμεν κάθετον ἀπὸ τοῦ σημείου Υ εἰς τὸ σημεῖον Χ. Ἐάν, περαιτέρω, φέρωμεν καὶ ἑτέρας καθέτους ἀπὸ διάφορα σημεῖα τῆς πλευρᾶς ΟΥ (= ὑποτείνουσα πλευρὰ) ἐπὶ τῆς ΟΧ (= προσκειμένη), θὰ σχηματίσωμεν ὅ μ ο ι α τ ρ ί γ ω ν α, ὡς τὰ Α΄ΟΑ, Β΄ΟΒ καὶ ΧΟΥ, ὁ λόγος τῶν πλευρῶν τῶν ὁποίων θὰ εἶναι ὁ αὐτός, ἤτοι

$$\frac{A\,A'}{O\,A'} = \frac{B\,B'}{O\,B'} = \frac{Y\,X}{O\,X}$$

Ἄν ἀντικαταστήσωμεν τὰς πλευρὰς ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΥΧ μὲ $β_1$, $β_2$, β, ἀντιστοίχως, τὰς ΟΑ΄, ΟΒ΄, ΟΧ μὲ $γ_1$, $γ_2$, γ ἀντιστοίχως, καὶ τὰς ΟΑ, ΟΒ καὶ ΟΥ μὲ $α_1$, $α_2$, α ἀντιστοίχως, καὶ τὴν γωνίαν ΧΟΥ μὲ Θ, θὰ ἔχωμεν:

(i) $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta}{\alpha}$. Ὁ λόγος οὗτος παραμένει σταθερός, ὅταν σημεῖον τι διατρέχει τὴν πλευρὰν ΟΥ, ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς γωνίας Θ καὶ λέγεται ἡ μ ί τ ο ν ο ν αὐτῆς (ημΘ).

(ii) $\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \frac{\gamma}{\alpha}$. Ὁ λόγος οὗτος καλεῖται σ υ ν η μ ί τ ο ν ο ν τῆς Θ (συν Θ).

(iii) $\frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{\beta_2}{\gamma_2} = \frac{\beta}{\gamma}$. Ὁ λόγος οὗτος καλεῖται ἐ φ α π τ ο μ έ ν η τῆς Θ (εφ Θ).

(iv) $\frac{\gamma_1}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\beta_2} = \frac{\gamma}{\beta}$. Ὁ λόγος οὗτος καλεῖται συνεφαπτομένη τῆς Θ καὶ εἶναι ἀντίστροφος τῆς εφ Θ.

Οἱ ἀνωτέρω λόγοι καλοῦνται τ ρ ι γ ω ν ο μ ε τ ρ ι κ ο ὶ ἀ ρ ι θ μ ο ί. Προκειμένου περὶ ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ ἔχωμεν:

$\beta = \alpha.\,\eta\mu\Theta$

$\gamma = \alpha.\,\sigma\upsilon\nu\Theta$

$\beta = \gamma.\,\varepsilon\varphi\Theta$

$\gamma = \beta.\,\sigma\upsilon\nu\varphi\Theta$

Βάσει τοῦ Π υ θ α γ ο ρ ε ί ο υ θ ε ω ρ ή μ α τ ο ς, $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, καθ' ὃ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἑτέρων πλευρῶν, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν:

$\alpha^2 = \alpha^2.\eta\mu^2\,\Theta + \alpha^2.\sigma\upsilon\nu^2\Theta$, ἤ

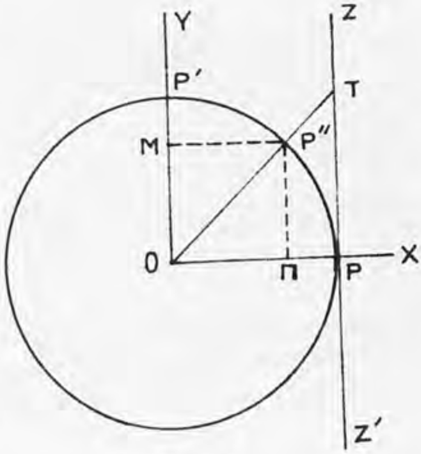
$\eta\mu^2\Theta + \sigma\upsilon\nu^2\Theta = 1$

Ἕτεραι σχέσεις τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν:

$$\varepsilon\varphi\Theta = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\eta\mu\Theta}{\sigma\upsilon\nu\Theta} \text{ καὶ } \sigma\upsilon\nu\varphi\Theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\Theta}{\eta\mu\Theta}.$$

Ἐκ τούτων ἔχομεν: (α) ημΘ = εφθ. συνΘ, καὶ (β) συνΘ = συνφΘ. ημΘ. Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν ὅτι ἐὰν ημΘ = y, συνΘ = χ καὶ εφΘ = λ, τότε ἡ (α) εἶναι ἡ ἐξίσωσις $y = \lambda\chi$, καὶ ἡ (β) εἶναι ἡ $\chi = 1/\lambda y$ τῶν ὀ ρ θ ο γ ω ν ί ω ν ἀ ξ ό ν ω ν ἢ ἄλλως τῶν κ α ρ τ ε σ ι α ν ῶ ν σ υ ν τ ε τ α γ μ έ ν ω ν.

I.0.1. Ἂς χωρήσωμεν τώρα εἰς τὸ νὰ δείξωμεν τὰς ἀνωτέρω σχέσεις ἐντὸς τοῦ χώρου κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν μονάδα (Σχ. I.2). Ὁ κύκλος οὗτος ὀνομάζεται τ ρ ι γ ω ν ο μ ε τ ρ ι κ ό ς. Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου φέρωμεν εὐθεῖαν πρὸς τὸ σημεῖον τῆς περιφερείας P, σχηματίζομεν τὴν ἀκτῖνα OP. Φέρομεν ἑτέραν εὐθεῖαν πρὸς τὸ σημεῖον P', ὥστε νὰ σχηματισθῇ γωνία 90°, καὶ συνεπῶς τόξον $\widehat{PP'}$ 90°. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰ διανύσματα OP καὶ OP′, λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τοὺς ἄξονας Oχ καὶ Oy. Ὁ ἄξων Oχ καλεῖται ἄξων τῶν συνημιτόνων, καὶ ὁ ἄξων Oy ἄξων τῶν ἡμιτόνων. Τὸ διάνυσμα OP″ καλεῖται διανυσματικὴ ἀκτίς. Ἀναφερομένη δὲ αὕτη εἰς τὸ τόξον $\widehat{PP''}$ καλεῖται τελική.



Σχ. 1. 2.

(i) Ἡμίτονον τόξου $\widehat{PP''}$ καλεῖται ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος OP″ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων Oy, ἤτοι OM.

(ii) Συνημίτονον τόξου καλεῖται ἡ προβολὴ τῆς ἰδίας ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων Oχ, ἤτοι OΠ.

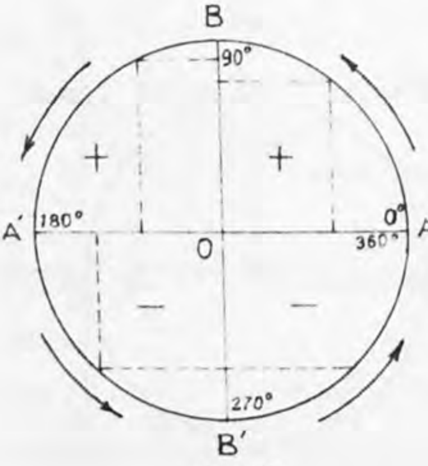
(iii) Ἐφαπτομένη τόξου $\widehat{PP''}$ εἶναι τὸ σχετικὸν μέτρον τοῦ διανύσματος τοῦ ἔχοντος ἀρχὴν τὸ P καὶ πέρας τὸ σημεῖον T ὅπου ἡ τελικὴ διανυσματικὴ ἀκτὶς τοῦ τόξου τέμνει τὸν ἄξονα ZZ′, ὅστις ὀνομάζεται ἄξων τῶν ἐφαπτομένων.

(iυ) Συνεπαφτομένη τόξου εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς ἐφαπτομένης του, ἤτοι συνφ $(\widehat{PP''}) = \dfrac{1}{\text{εφ}\,(PP'')}$

(υ) Τέμνουσα τόξου εἶναι ἡ ἀντίστροφος τοῦ συνημιτόνου του, ἤτοι τεμ $(\widehat{PP''}) = \dfrac{1}{\text{συν}(PP'')}$

(υi) Συντέμνουσα τόξου εἶναι ἡ ἀντίστροφος τοῦ ἡμιτόνου του, ἤτοι στεμ $(\widehat{PP''}) = \dfrac{1}{\text{ημ}\,(PP'')}$

Μεταβολαὶ ἡμιτόνου τόξου χ. Ἐπὶ προσανατολισμένης περιφερείας κύκλου (Σχ. 1.3), τὸ ἡμίτονον τόξου τινὸς χ θὰ αὐξάνῃ ἀπὸ O πρὸς 1, ἐφ᾽ ὅσον τὸ τόξον αὐξάνει ἀπὸ 0^0 εἰς 90^0. Ἀπὸ 90^0 μέχρι 180^0 τὸ ἡμίτονον θὰ βαίνῃ ἐλαττούμενον ἀπὸ 1 εἰς 0. Ἀπὸ 180^0 μέχρι 270^0 θὰ βαίνῃ ἐλαττούμενον ἀπὸ 0 εἰς —1. Ἀπὸ δὲ 270^0 μέχρι 360^0 θὰ αὐξάνῃ ἀπὸ —1 εἰς 0. Γενικῶς τὸ ἡμίτονον τόξου τῆς ἡμιπεριφερείας 0^0— 180^0 εἶναι θετικόν. τὸ δὲ ἡμίτονον τόξου τῆς ἡμιπεριφερείας 180^0— 360^0 εἶναι ἀρνητικόν. Ἄλλως, ὁ ἄξων τῶν ἡμιτόνων ἀπὸ 0 εἰς B, δίδει θετικὰς τιμάς, ἀπὸ δὲ 0 εἰς B′ δίδει ἀρνητικὰς τιμάς.

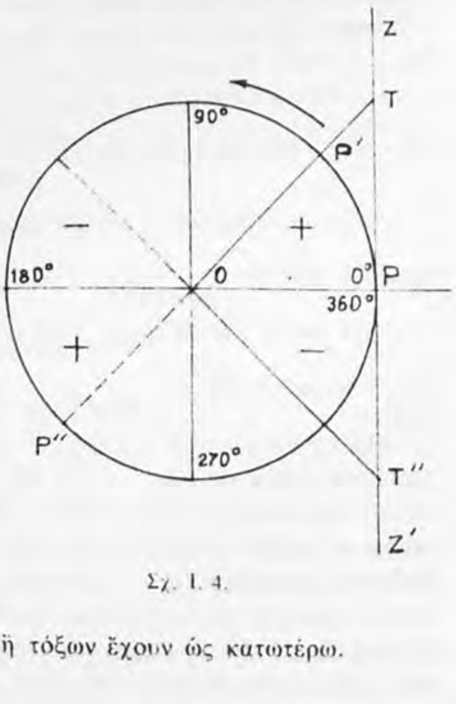


Σχ. 1. 3.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει τὸ θεώρημα ὅτι τὸ ἡμίτονον (ἢ καὶ τὸ συνημίτονον) τόξου δὲν βλάπτεται ἂν τὸ τόξον αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ κατὰ ἀκέραιον πλῆθος περιφερειῶν, ἤτοι

$$\text{ημ}(\Theta + 2k\pi) = \text{ημ}\Theta \qquad k = \text{ἀκέραιος}$$
$$\text{συν}(\Theta + 2k\pi) = \text{συν}\Theta \qquad \Theta = \text{μέτρον τόξου}$$

Μεταβολαὶ ἐφαπτομένης. Ἐπὶ προσανατολισμένης περιφερείας κύκλου (Σχ. 1.4.), ἡ ἐφαπτομένη τόξου χ αὐξάνει ἀπὸ 0 πρὸς $+\infty$, ἐφ᾽ ὅσον τὸ τόξον αὐξάνει ἀπὸ 0^0 μέχρι 90^0. Ὅταν τὸ τόξον ὑπερβῇ τὰς 90^0 ἡ ἐφαπτομένη γίνεται ἀρνητική. Γενικῶς ἡ ἐφαπτομένη εἶναι **θετική**, ἐφ᾽ ὅσον τὸ τόξον λήγει εἰς τὸ 1ον καὶ 3ον τεταρτημόριον, καὶ **ἀρνητικὴ** ἐφ᾽ ὅσον λήγει εἰς τὸ 2ον καὶ 4ον τεταρτημόριον. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει τὸ θεώρημα ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τόξου δὲν βλάπτεται ἂν τὸ τόξον αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ κατὰ ἀκέραιον ἀριθμὸν ἡμιπεριφερειῶν, ἤτοι $\text{εφ}(\Theta + k\pi) = \text{εφ}\Theta$. Ἐὰν τὸ τόξον PP′ αὐξηθῇ κατὰ 180^0 (κατὰ μίαν ἡμιπεριφέρειαν), τὸ πέρας τούτου θὰ εἶναι τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον σημεῖον P″ καὶ συνεπῶς ἡ νέα τελικὴ διανυσματικὴ ἀκτὶς OP″ συναντᾷ προεκτεινομένη τὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων εἰς σημεῖον T, ὡς καὶ ἡ ἀκτὶς OP′. Ἄρα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην.



Σχ. 1. 4.

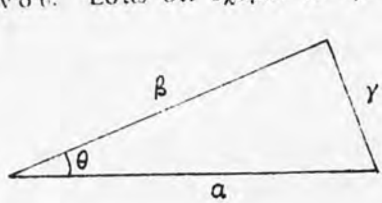
Τὰ μέτρα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ὡρισμένων γωνιῶν ἢ τόξων ἔχουν ὡς κατωτέρω.

	Τρίγωνα ἤ τόξα							
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	240^0	360^0
Ἡμίτονον	0	$^1/_2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	1	0
Συνημίτονον	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$^1/_2$	0	1	0	1
Ἐφαπτομένη	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
Συνεφαπτομένη	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0	∞

1.0.2. **Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀθροίσματος καὶ διαφορᾶς δύο γωνιῶν.** Κατωτέρω παραθέτομεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἄνευ ἀποδείξεως.

$$συν\ (α+β) = συνα.συνβ - ημα.ημβ$$
$$συν\ (α-β) = συνα.συνβ + ημα.ημβ$$
$$ημ\ (α+β) = ημα.συνβ + συνα.ημβ$$
$$ημ\ (α-β) = ημα.συνβ - συνα.ημβ$$
$$εφ\ (α+β) = \frac{εφα + εφβ}{1 - εφα.εφβ}$$
$$εφ\ (α-β) = \frac{εφα - εφβ}{1 + εφα.εφβ}$$
$$συνφ\ (α+β) = \frac{συνφα \cdot συνφβ - 1}{συνφα + συνφβ}$$
$$συνφ\ (α-β) = \frac{συνφα.συνφβ + 1}{συνφβ - συνφα}$$

Θ ε ώ ρ η μ α τ ο ῦ σ υ ν η μ ι τ ό ν ο υ. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸ τρίγωνον τοῦ Σχήματος 1.5. Τὸ θεώρημα λέγει ὅτι τὸ τετράγωνον πλευρᾶς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, μεῖον τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας. Ἤτοι, $γ^2 = α^2 + β^2 - 2αβ.συνΘ$.



Σχ. 1.5.

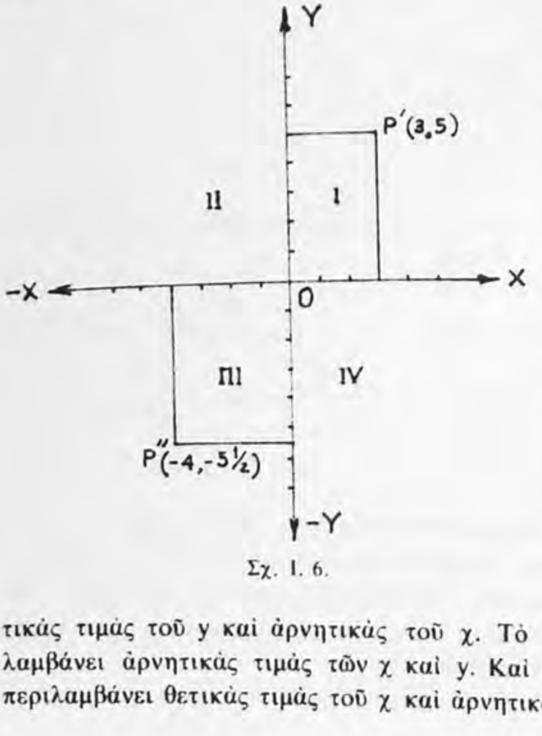
1.0.3. **Ὀρθογώνιοι καὶ πολικαὶ συντεταγμέναι.** Τὰ γραφήματα καὶ αἱ ἐξισώσεις διαφόρων μορφῶν γραμμῶν ἀποτελοῦν σήμερον ἀναπόσπαστα μέρη τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως. Ἡ ἀναλυτικὴ ἐπίπεδος γεωμετρία παρέχει μεγίστης σημασίας ὄργανα εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν διότι βοηθεῖ εἰς τὴν λύσιν δύο κεντρικῶν προβλημάτων:

(α) Δεδομένου συνόλου σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον εὑρίσκομεν τὴν ἐξισωσιν τῆς ὁποίας ἡ γραφική ἀπεικόνησις συνίσταται ἐκ τῶν σημείων τοῦ συνόλου, καί

(β) Δεδομένης ἐξισώσεώς τινος, ἥτις περιγράφει μίαν σχέσιν εἰς ὅρους χ καί y, κατασκευάζομεν τὸ γράφημά της.

Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν ὡς σημεῖα ἐπί τοῦ ἐπιπέδου, ὥστε ἕκαστον σημεῖον νὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς ἓν ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ἀντιπροσωπεύουν εὐθεῖαι γραμμαί ἐπί τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται συντεταγμέναι. Χρησιμοποιοῦμεν, λοιπόν, συντεταγμένας διὰ τὴν ταυτοποίησιν σημείων ἅτινα ἀντιστοιχοῦν πρὸς διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν. Αἱ συντεταγμέναι ἀποτελοῦν σύστημα ἀξόνων, οἱ ὁποῖοι ὅταν τέμνωνται καθέτως καλοῦνται ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι, ὅταν δὲ δὲν τέμνονται καθέτως ἀποτελοῦν σύστημα πλαγιογωνίων ἀξόνων. Αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι καλοῦνται καί καρτεσιαναί συντεταγμέναι, ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ πρώτου εἰσαγαγόντος ταύτας Descartes.

Τὸ σύνολον X×Y, καλούμενον καρτεσιανὸν γινόμενον τῆς πραγματικῆς γραμμῆς μὲ τὸν ἑαυτόν της, εἶναι τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (χ,y).



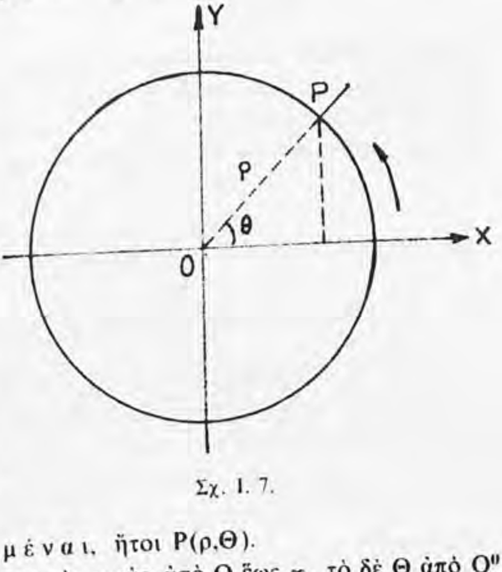
Σχ. I. 6.

Τὸ σχῆμα I.6 δεικνύει τὸ σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων, τὸ ὁποῖον μᾶς βοηθεῖ εἰς τὴν γραφικὴν ἀπεικόνισιν τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων. Τοῦτο διαιρεῖται εἰς τέσσαρα τεταρτημόρια (I, II, III, IV). Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο ἀξόνων χ καί y καλεῖται ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων. Τὰ χ καὶ y ἀπεικονίζουν μεταβλητὰς ποσότητας. Τὸ πρῶτον τεταρτημόριον περιλαμβάνει ἅπαντα τὰ σημεῖα θετικῶν τιμῶν τῶν χ καὶ y. Τὸ δεύτερον τεταρτημόριον περιλαμβάνει θετικὰς τιμὰς τοῦ y καὶ ἀρνητικὰς τοῦ χ. Τὸ τρίτον τεταρτημόριον περιλαμβάνει ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν χ καὶ y. Καὶ τὸ τέταρτον τεταρτημόριον περιλαμβάνει θετικὰς τιμὰς τοῦ χ καὶ ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ y.

Ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, ἕκαστον σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προσδιορίζει ἓν ζεῦγος ἀριθμῶν. Τὸ σημεῖον P′ προσδιορίζει τοὺς ἀριθμούς: 3 τῆς μεταβλητῆς χ καὶ 5 τῆς μεταβλητῆς y. Τὸ σημεῖον P″ προσδιορίζει τοὺς ἀριθμούς: —4 τῆς χ καὶ —5¹/₂ τῆς y. Ὁ ὁριζόντιος ἄξων τῶν χ καλεῖται καὶ ἄξων τῶν τετμημένων, ὁ δὲ κάθετος ἄξων τῶν y καλεῖται καὶ ἄξων τῶν τεταγμένων. Οὕτω λέγομεν ὅτι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου P′ εἶναι τὸ 3, ἡ δὲ τεταγμένη τὸ 5.

Ἐὰν φαντασθῶμεν πλῆθος σημείων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου θὰ ἔχωμεν ἓν σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τῶν ὁποίων ἡ γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις θὰ εἶναι τὸ σχῆμα ποιάς τινος γραμμῆς. Ἐξ αὐτοῦ δὲ ὁρίζομεν ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καλεῖται γραμμή.

Δυνάμεθα τώρα, νὰ ἐξετάσωμεν τὸν εἰς τὴν παράγραφον 1.0.1. ἀναφερθέντα τριγωνομετρικὸν κύκλον ἐν σχέσει πρὸς τὸ σύστημα τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων. Ἔστω ὁ εἰς Σχ. 1.7. τριγωνομετρικὸς κύκλος μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων. Τὸ διάνυσμα OP καλεῖται πολικὴ ἀκτίς, ὁ ἄξων OX καλεῖται πολικὸς ἄξων, καὶ ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων ἢ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καλεῖται πόλος. Τὸ σημεῖον P ὁρίζεται ἐκ τῆς γωνίας Θ καὶ ἐκ τῆς πολικῆς ἀκτῖνος ρ, αἵτινες ὀνομάζονται πολικαὶ συντεταγμέναι, ἤτοι P(ρ,Θ).



Σχ. 1. 7.

Τὸ ρ δύναται νὰ λάβη ἁπάσας τὰς τιμὰς ἀπὸ O ἕως ∞, τὸ δὲ Θ ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0. Τὸ σημεῖον P ἔχει ὀρθογωνίους μὲν συντεταγμένας χ καὶ y, πολικὰς δὲ συντεταγμένας ρ καὶ Θ. Ἐξ αὐτοῦ ἕπονται αἱ ἑξῆς σχέσεις:

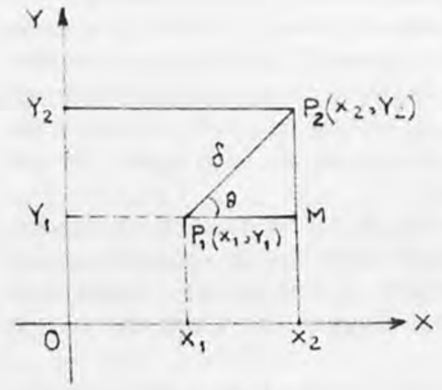
$$\chi = \rho.\text{συν}\Theta \qquad \text{καὶ} \qquad y = \rho.\text{ημ}\Theta$$

$$\rho = \sqrt{\chi^2 + y^2} \qquad \text{καὶ} \qquad \text{εφ}\Theta = \frac{y}{\chi}$$

Δεδομένου δὲ ὅτι ρ = 1 (ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου), χ = συνΘ καὶ y = ημΘ, θὰ ἔχωμεν:

$$\text{συν}^2\Theta + \text{ημ}^2\Theta = 1$$

$$\chi^2 + y^2 = 1$$



Σχ. 1. 8.

1.0.4. **Εὕρεσις τῆς ἀποστάσεως γραμμῆς.** Διά νά εὕρωμεν τήν ἀπόστασιν (δ) μεταξύ τῶν σημείων P_1 καί P_2 ἐφαρμόζομεν τάς ἀρχάς τῆς τριγωνομετρίας, ἤτοι σχηματίζομεν τρίγωνον καί ἐφαρμόζομεν τό Πυθαγόρειον θεώρημα. (Σχ. 1.8).

$\delta^2 = (P_1M)^2 + (MP_2)^2$ ἤ
$\delta^2 = (\chi_2 - \chi_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ καί
$\delta = \sqrt{(\chi_2 - \chi_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Ἐάν P_1 (0,0), δηλαδή ἐάν ἡ γραμμή διέρχεται ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, τότε $\delta = \sqrt{\chi^2 + y^2}$.

Ἡ γραμμή P_1 P_2 δυνατόν νά ἐκφράζῃ σχέσιν τινα οἰκονομικῶν μεγεθῶν ὡς π.χ. σχέσιν εἰσοδήματος (χ) καί δαπάνης (y). Ἀπό τοῦδε δέ δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὀλίγα τινά περί τῆς κλίσεως τῆς γραμμῆς. Ἡ κλίσις τῆς γραμμῆς ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐφαπτομένης τῆς γωνίας Θ τοῦ σχηματισθέντος τριγώνου P_1 M P_2, ἤτοι

$$\varepsilon\varphi\Theta = \frac{y_2 - y_1^{*}}{\chi_2 - \chi_1} = \frac{\eta\mu\Theta}{\sigma\upsilon\nu\Theta}, \text{ ἤ}$$

$\varepsilon\varphi\Theta = \frac{y}{\chi}$, ἐάν ἡ γραμμή διέρχεται ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.

Ἡ κλίσις τῆς γραμμῆς, ἡ ὁριζομένη διά τῆς ἐφαπτομένης τῆς γωνίας ἥν σχηματίζει μέ τήν πλευράν P_1M, ἥτις εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν χ, λαμβάνει ὡρισμένην τιμήν καί ὀνομάζεται σ υ ν τ ε λ ε σ τ ή ς κ α τ ε υ θ ύ ν σ ε ω ς, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω. Ἐάν δέ ἡ ἀπόστασις ἐκ τοῦ χ_1 πρός τό χ_2 εἶναι ἀπείρως μικρά, τότε ἡ κλίσις εἶναι ἡ ὁ ρ ι α κ ή τ ι μ ή τῆς γραμμῆς.

1.0.5. **Ἐξίσωσις εὐθείας γραμμῆς.** Ἄν τήν ἐφαπτομένην γωνίας Θ (εφΘ) παραστήσωμεν διά λ, θά ἔχωμεν ὡς γνωστόν $\lambda = \frac{y}{\chi}$. Ἐξ αὐτοῦ δέ θά ἔχωμεν

$$y = \lambda\chi.$$

---

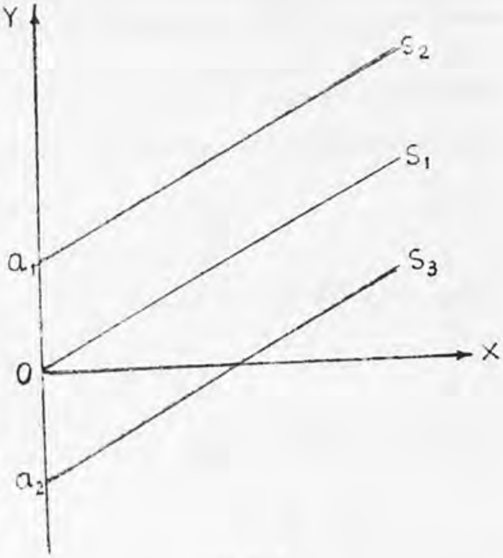
* Θά ἔχωμεν καί $\frac{y_2 - y_1}{\chi_2 - \chi_1} = \frac{y_1 - y_2}{\chi_1 - \chi_2}$. Ἡ $y_1 - y_2$ καλεῖται ὕ ψ ω σ ι ς, ἡ δέ $\chi_1 - \chi_2$ καλεῖται δ ι α δ ρ ο μ ή.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾶ εὐθεῖαν γραμμὴν διερχομένην ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ὡς ἡ S_1. Ἡ εὐθεῖα εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων ἅτινα ἐπαληθεύουν τὴν ἀξίσωσιν.

Ἄν ἡ εὐθεῖα τέμνῃ τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον α_1 τότε εἶναι φανερὸν ὅτι

$$\lambda = \frac{y - \alpha_1}{\chi}$$

Ἐξ αὐτῆς προκύπτει ἡ $y - \alpha_1 = \lambda\chi$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾶ τὴν εὐθεῖαν S_2. Ἄν ἡ εὐθεῖα τέμνῃ τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ ἀρνητικὸν μέρος αὐτοῦ, ἤτοι κάτω τῆς ἀρχῆς 0, τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται



Σχ. 1.9.

$$\lambda = \frac{y + \alpha_2}{\chi}$$

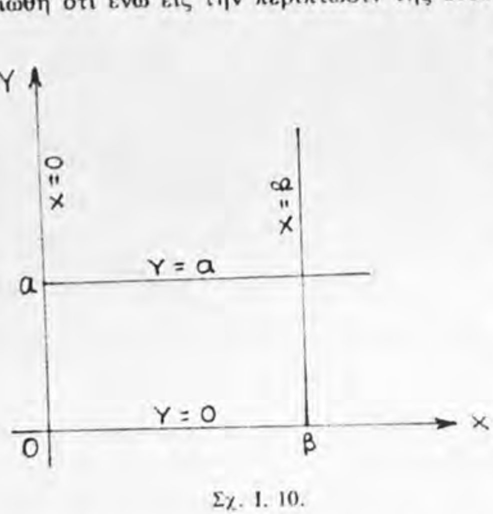
Ἐξ αὐτῆς προκύπτει ἡ $y = -\alpha_2 + \lambda\chi$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾶ τὴν εὐθεῖαν S_3.

Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ λ καλοῦνται π α ρ α μ ε τ ρ ι κ α ὶ σ τ α θ ε ρ α ὶ τῆς ἐξισώσεως. Ἡ παράμετρος λ καλεῖται γ ω ν ι α κ ὸ ς σ υ ν τ ε λ ε σ τ ὴ ς ἢ σ υ ν τ ε λ ε σ τ ὴ ς κ α τ ε υ θ ύ ν σ ε ω ς τῆς εὐθείας καὶ εἶναι, ὡς γίνεται ἀντιληπτόν, ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῆς εὐθείας μὲ τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος τῶν χ. Ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς εὐθείας εἶναι σταθερὸς καὶ τοῦτο διότι, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἡ ἐφαπτομένη ὁμοίων τριγώνων εἶναι σταθερὸς ἀριθμός.

Ἀνωτέρω γίνεται ἐπίσης ἀντιληπτὸν ὅτι ἡ εὐθεία S_2 προκύπτει ἐκ τῆς S_1 ($y = \lambda\chi$), ἐὰν εἰς αὐτὴν προστεθῇ ἡ σταθερὰ ποσότης α_1. Αἱ εὐθεῖαι S_1, S_2, S_3 οὖσαι παράλληλοι ἔχουν τὸν αὐτὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως (λ), διαφέρουσαι μόνον κατὰ τὴν σταθερὰν ποσότητα α. Ἐὰν $\lambda = 0$ (περίπτωσις καθ' ἣν ἡ εὐθεῖα συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τῶν χ ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτόν), τότε $y = \alpha$ ἢ $y = 0$ (ἐξίσωσις τοῦ ἄξονος τῶν χ).

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἄξονος τῶν y εἶναι $\chi = 0$, καθ' ὅτι τὸ λ (ἐφαπτομένη γωνίας 90^0) εἶναι ∞. Ἤτοι: $\frac{y}{\lambda} = \frac{\lambda\chi}{\lambda}$, καὶ $\chi = 0$. Ἐὰν τὸν ἄξονα τῶν y μεταφέρωμεν κατὰ β, τότε $\chi = \beta$.

Αἱ ἀνωτέρω περιπτώσεις ἐμφαίνονται εἰς τὸ Σχ. I.10. Θὰ πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἐνῷ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς εὐθείας τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ ἡ κλίσις (γωνιακὸς συντελεστὴς) εἶναι 0, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς εὐθείας τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y ἡ κλίσις εἶναι ἀκαθόριστος.



Σχ. I. 10.

Ὅταν ἡ εὐθεῖα κατευθύνεται ἐκ τῶν κάτω ἀριστερὰ πρὸς τὰ ἄνω δεξιά, λέγομεν ὅτι ἔχει θετικὴν κλίσιν (γραμμὴ προσφορᾶς προϊόντος τινος). Ὅταν δὲ κατευθύνεται ἐκ τῶν ἄνω ἀριστερὰ πρὸς τὰ κάτω δεξιά, λέγομεν ὅτι ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν (γραμμὴ ζητήσεως προϊόντος τινός). Ὅταν ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καὶ εἶναι διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζουν οἱ ἄξονες τῶν χ καὶ y, τότε ἡ ἐξίσωσις εἶναι $y = \chi$, ἤτοι ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα.

Ἀντίστροφος ἐξίσωσις εὐθείας. Ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi\Theta = \dfrac{y}{\chi}$ δυνάμεθα δι᾽ ἀντιστροφῆς νὰ λάβωμεν $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\Theta} = \dfrac{\chi}{y}$. Καὶ ἐξ αὐτῆς ἔχομεν $\chi = \dfrac{1}{\lambda} \cdot y$. Ἄρα ἡ ἀντικατάστασις τοῦ y διὰ τοῦ χ καὶ τοῦ χ διὰ τοῦ y γίνεται δι᾽ ἀντιστροφῆς τοῦ γωνιακοῦ συντελεστοῦ. Ἡ περίπτωσις αὐτη εἶναι συνήθης εἰς τὰς συναρτήσεις, περὶ ὧν κατωτέρω, καὶ εἰς τὴν στατιστικὴν παλινδρόμησιν. Οὕτω δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι ὁ ρυθμὸς ἀναπτύξεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος (y) ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως τῶν ἐξαγωγῶν (χ), ἤτοι $y = \lambda\chi$. Ἀλλὰ δυνάμεθα ἐπίσης νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ ρυθμὸς ἀναπτύξεως τῶν ἐξαγωγῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος (παραγωγῆς), ἤτοι $\chi = \lambda' y$, ὅπου $\lambda' = \dfrac{1}{\lambda}$.

I.0.6. **Ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ δοθέντος σημείου καὶ διὰ δύο σημείων.** Ἔστω σημεῖον τι P (χ_1, y_1). Ἡ ἐξίσωσις ἣν ἐπαληθεύει τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι $y_1 = \lambda\chi_1 + \alpha$. Ἀφαιροῦντες ταύτην ἐκ τῆς $y = \lambda\chi + \alpha$, ἔχομεν

$$y - y_1 = \lambda\,(\chi - \chi_1).$$

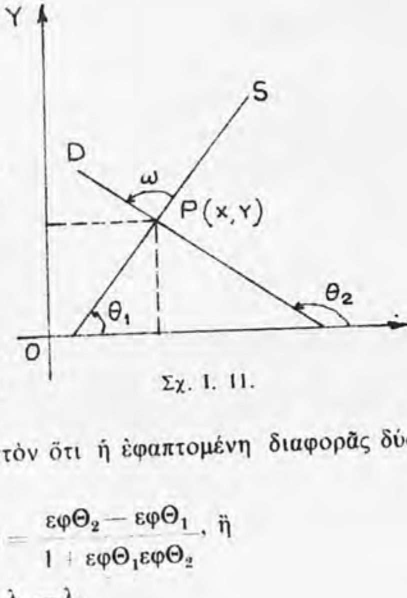
Ἐὰν δὲ ἔχωμεν δύο σημεῖα, $P_1\,(\chi_1, y_1)$ καὶ $P_2\,(\chi_2, y_2)$, ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ἣν σχηματίζει ἡ εὐθεία ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων τούτων εἶναι $\varepsilon\varphi\Theta = \dfrac{y_2 - y_1}{\chi_2 - \chi_1}$, ἤτοι ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς λ. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν καὶ ἔχομεν

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{\chi_2 - \chi_1}\,(\chi - \chi_1),$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{\chi - \chi_1}{\chi_2 - \chi_1}.$$

Αὕτη εἶναι ἡ ἐξίσωσις εὐθείας ὁριζομένη ὑπὸ δύο σημείων, ἥτις καὶ γ ρ α μ μ ι κ ὴ π α ρ ε μ β ο λ ὴ καλεῖται.



Σχ. I. 11.

1.0.7. **Εὕρεσις γωνίας σχηματιζομένης ὑπὸ δύο εὐθειῶν.** Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι D (ζητήσεως) καὶ S (προσφορᾶς) ἔχουσαι ἐξισώσεις τάς:

$$D = y = \lambda_2\chi + \alpha_2$$
$$S = y = \lambda_1\chi + \alpha_1$$

Αἱ γωνίαι ἃς σχηματίζουν μὲ τὸν ἄξονα τῶν Χ (Σχ. I. 11) εἶναι Θ_1 καὶ Θ_2. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων γωνιῶν εἶναι ω. Ἀλλ' εἶναι ἤδη γνωστὸν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη διαφορᾶς δύο γωνιῶν εἶναι

$$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\,(\Theta_2 - \Theta_1) = \frac{\varepsilon\varphi\Theta_2 - \varepsilon\varphi\Theta_1}{1 + \varepsilon\varphi\Theta_1\varepsilon\varphi\Theta_2}, \text{ ἢ}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}$$

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων τῶν δύο ἀνωτέρω εὐθειῶν δίδει τὸ σημεῖον P (χ,y), ὅπερ εἶναι σ η μ ε ῖ ο ν τ ο μ ῆ ς τῶν εὐθειῶν ἢ κοινὸν σημεῖον, καὶ ἐπαληθεύει ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις.

Σ υ ν θ ῆ κ α ι εὐ θ ε ι ῶ ν: (α) Σ υ ν θ ή κ η τ α υ τ ό τ η τ ο ς. Διὰ νὰ συμπίπτουν δύο εὐθεῖαι πρέπει νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν γωνιακὸν συντελεστὴν καὶ τὴν αὐτὴν τεταγμένην. (β) Σ υ ν θ ή κ η π α ρ α λ λ η λ ί α ς. Δύο

εὐθεῖαι ὅταν ἔχουν τὸν αὐτὸν γωνιακὸν συντελεστὴν καὶ διαφορετικὴν τεταγ-
μένην εἶναι παράλληλοι. (γ) Σ υ ν θ ή κ η κ α θ ε τ ό τ η τ ο ς. Διὰ νὰ εἶναι δύο εὐθεῖαι κάθετοι θὰ πρέπει ἡ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία νὰ εἶναι 90°, ἤτοι κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ω 90°. Ἀλλὰ ἡ ἐφαπτομένη γωνίας 90° τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ὁπότε διὰ νὰ γίνη τὸ β' μέλος τῆς ἐξισώσεως εφω $\dfrac{\lambda_2 \quad \lambda_1}{1 \quad \lambda_1\lambda_2}$ ἄπειρον θὰ πρέπει $1 \quad \lambda_1\lambda_2 \quad 0$. Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις μᾶς δίδει τὴν συνθήκην τῆς καθετότητος δύο εὐθειῶν. (δ) Σ υ ν θ ή κ η μ ι ᾶ ς λ ύ σ ε-
ω ς. Εἴδομεν ὅτι ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἔχουν τὸν αὐτὸν γωνιακὸν συντελεστὴν εἶναι παράλληλοι, ἐὰν δὲ ἔχουν καὶ τὴν αὐτὴν τεταγμένην τότε συμπίπτουν. Ἀντιθέτως, τώρα, ἐὰν δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν γωνιακὸν συντελεστὴν τότε αἱ εὐθεῖαι θὰ συναντηθοῦν, ἤτοι ἔχουν ἓν σημεῖον κοινόν.

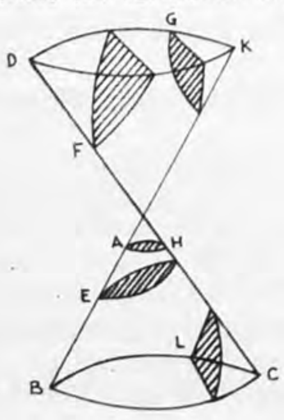
1.0.8. **Κωνικαὶ τομαί.** Ἐὰν γενικεύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν εὐθείας (πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ καὶ y) καὶ λάβωμεν ὅρους δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ καὶ y, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὴν κατωτέρων ἐξίσωσιν

$$a\chi^2 \quad 2b\chi y \quad cy^2 \quad 2d\chi \quad 2ey \quad f \quad 0$$

Τὰ γράμματα a,b,c,d,e,f ἐμφαίνουν σταθεράς καὶ ἡ πρόταξις τοῦ ἀριθμοῦ 2 ἔχει σκοπιμότητα ἥτις θὰ φανῆ κατωτέρω. Ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δύναται νὰ μᾶς δώση ἐξισώσεις τῶν ἑξῆς μορφῶν:

i. Κύκλος
ii. Παραβολή
iii. Ἔλλειψις
iv. Ὑπερβολή

Τὰς καμπύλας τῶν ἐξισώσεων τῶν ἀνωτέρω μορφῶν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν διὰ διαφόρων τομῶν ἐπὶ διπλοῦ κώνου, ὡς τὸ σχῆμα 1.12. Τὸ σχῆμα τοῦτο δεικνύει κῶνον μὲ κορυφὴν A ἐπὶ κυκλικῆς βάσεως BC. Ὁ κῶνος ἐκτείνεται καὶ πέραν τῆς κορυφῆς A, ὥστε ἔχομεν διπλοῦν κῶνον. Τώρα, ἐὰν διενεργήσωμεν διαφόρους τομάς, λαμβάνομεν διαφόρων μορφῶν καμπύλας.

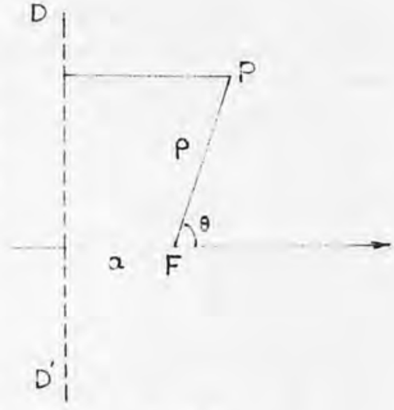


Σχ. 1.12.

Ἑκάστη ὁριζοντία πρὸς τὴν κυκλικὴν βασιν τομήν, ὡς ἡ περιοχὴ Η, μᾶς δίδει τὸν κύκλον. Ἡ τομὴ E μᾶς δίδει τὴν ἔλλειψιν, ἡ τομὴ F τὴν παραβολήν, καὶ αἱ τομαὶ G καὶ L μᾶς δίδουν τοὺς δύο κλάδους τῆς ὑπερβολῆς.

Γενικὸς κανών: Αἱ καμπύλαι αἱ προερχόμεναι ἐκ τῶν κωνικῶν τομῶν ὑπείκουν εἰς τὸν γενικὸν κανόνα καθ' ὃν ἡ ἀπόστασις σημείου P, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν ἑκάστην καμπύλην, ἀπὸ σταθεροῦ σημείου F (ἑστία) καὶ ἡ ἀπόστασις τούτου ἀπὸ ὡρισμένην εὐθεῖαν DD' εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν σχέσιν e:

ἐὰν e = 1, τότε ἔχομεν παραβολὴν
ἐὰν e < 1, » » ἔλλειψιν
ἐὰν e > 1, » » ὑπερβολὴν



Σχ. 1.13.

Ἡ γενικὴ κωνικὴ ἐξίσωσις κατόπιν τοῦ ἀνωτέρου κανόνος θὰ πρέπει νὰ εἶναι (Βλ. Σχ. 1.13):

$$\frac{\text{Ἀπόστασις } PF}{\text{Ἀπόστασις } P - DD'} = e, \text{ ἤτοι } \frac{\rho}{\alpha + \rho.\text{συν}\Theta} = e, \text{ ὅπου } \rho.\text{συν}\Theta = \chi.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀπολήγει εἰς τὴν

$$\rho = \frac{e\alpha}{1 - e.\text{συν}\Theta}$$

1.0.9. **Ἐξίσωσις κύκλου.** Κύκλος καλεῖται ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων ἅτινα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον καλούμενον κέντρον. Χρησιμοποιοῦντες τὰς ἀρχὰς τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ κύκλου:

(α) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, ὅταν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἔχει συντεταγμένας 0,0.

(β) $\rho = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$, ὅταν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἔχει καρτεσιανὰς συντεταγμένας α, β.

(γ) $\rho = \sqrt{x^2 + (y-\beta)^2}$, ὅταν τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y (ἤτοι α = ο).

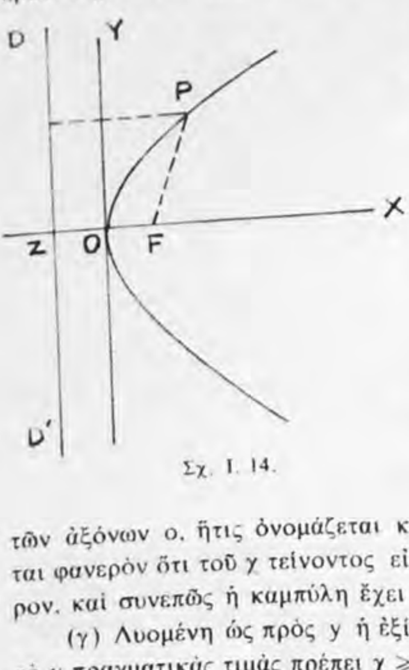
(δ) $\rho = \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}$, ὅταν τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ (ἤτοι β = ο).

Ἐκ τῆς ἀναπτύξεως τῆς (β) καὶ ὡρισμένων χειρισμῶν καὶ ἀντικαταστάσεων λαμβάνομεν τὴν

(ε) $\chi^2 + y^2 - 2\alpha\chi - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 = 0$,
ἥτις γίνεται $\chi^2 + y^2 + \lambda\chi + ky + \gamma = o$,
ἐὰν $\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 = \gamma$, $-2\alpha = \lambda$, καὶ $-2\beta = k$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (ε) εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τῆς εἰς τὴν παράγραφον I.0.8 ἀναφερθείσης γενικῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ.

I.0.10. **Ἐξίσωσις παραβολῆς.** Π α ρ α β ο λ ὴ εἶναι ἡ καμπύλη ἥτις ἀποτελεῖ τὸν γεωμετρικὸν τόπον σημείων τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ σταθερᾶς εὐθείας D, ἥτις καλεῖται δ ι ε υ θ ε τ ο ῦ σ α καὶ σταθεροῦ σημείου F (ἑ σ τ ί α ς) εἶναι ἡ αὐτή.



Σχ. I. 14.

Τὸ Σχῆμα I.14 παριστᾶ παραβολήν. Τὸ σημεῖον P τὸ ὁποῖον διατρέχει τὴν καμπύλην ἀπέχει πάντοτε ἀπὸ τὴν διευθετοῦσαν ὅσον ἀκριβῶς καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον F.

Ἂν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ Z καὶ F εἶναι 2α, τότε ἡ ἀπόστασις OF εἶναι α. Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἀρχῶν τῆς τριγωνομετρίας λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς παραβολῆς τοῦ Σχ. I.14. $y^2 = 4\alpha\chi$.

Ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως ταύτης παρατηροῦμεν τὰ ἀκόλουθα:

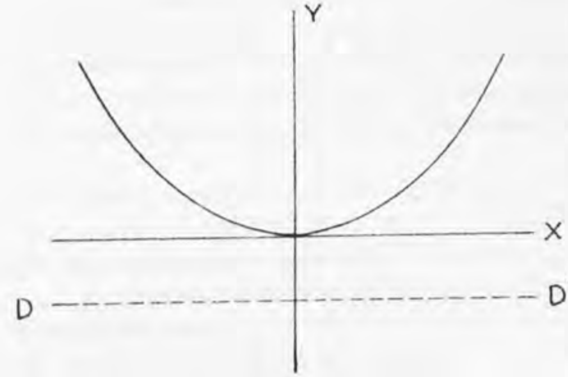
(α) Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπαληθεύει διὰ $\chi = o$ καὶ $y = o$, καὶ συνεπῶς ἡ καμπύλη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων o, ἥτις ὀνομάζεται κ ο ρ υ φ ὴ τῆς παραβολῆς (β). Καθίσταται φανερὸν ὅτι τοῦ χ τείνοντος εἰς τὸ ἄπειρον καὶ τὸ y τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, καὶ συνεπῶς ἡ καμπύλη ἔχει σημεῖα εἰς τὸ ἄπειρον.

(γ) Λυομένη ὡς πρὸς y ἡ ἐξίσωσις γίνεται $y = \pm\sqrt{4\alpha\chi}$. Διὰ νὰ λάβη τὸ y πραγματικὰς τιμὰς πρέπει $\chi \geqslant o$. Ὅταν $\chi < o$, τότε τὸ y λαμβάνει φανταστικὰς τιμὰς καὶ συνεπῶς δὲν ὑπάρχουν σημεῖα τῆς καμπύλης εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν y, ὡς καὶ ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται. Ἐπίσης, εἰς ἑκάστην θετικὴν τιμὴν τοῦ χ ἀντιστοιχοῦν δύο τιμαὶ τοῦ y, ἡ μιὰ θετικὴ καὶ ἡ ἑτέρα ἀρνητική, πρᾶγμα ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ, ὅστις καὶ ἄ ξ ω ν τ ῆ ς π α ρ α β ο λ ῆ ς καλεῖται. (δ) Ἐὰν ὁ ἄξων τῆς παραβολῆς εἶναι κάθετος καὶ ἡ κορυφὴ ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων ἡ ἐξίσωσις εἶναι:

$$y = 4\alpha\chi^2, \text{ ἢ } \chi^2 = 4\alpha y \qquad (\Sigma\chi.\ I.15)$$

(ε) Ἐὰν ἡ κορυφὴ τῆς παραβολῆς δὲν συμπίπτει μὲ τὴν ἀρχὴν τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων, καὶ ἐὰν ἀντὶ τοῦ y καὶ χ ἔχωμεν (y - η) καὶ (χ - ξ), τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$(\chi - \xi)^2 = 4\alpha\,(y - \eta)$$



Σχ. Ι. 15.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη κατόπιν καταλλήλων χειρισμῶν καὶ ἀντικαταστάσεων ἁπλοποιεῖται εἰς τὸν γενικὸν τύπον:

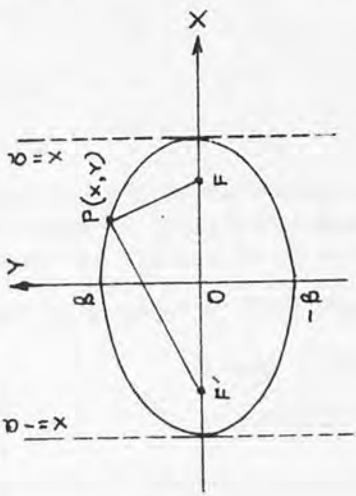
$$y = \alpha\chi^2 + b\chi + \gamma$$

1.0.11. Ἐξίσωσις ἐλλείψεως. Ἔ λ λ ε ι ψ ι ς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων (ὡς τὸ P) τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα (F,F'), ἅτινα ἑστίαι καλοῦνται, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

Τὸ Σχ. Ι.16. δεικνύει ἔλλειψιν. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν $F'P + PF = 2\alpha$, ἤτοι σταθερὸς ἀριθμός. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως κατὰ τὰς ἀρχὰς τῆς τριγωνομετρίας εἶναι:

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν $y = \pm \dfrac{\alpha}{\beta}\sqrt{\alpha^2-\chi^2}$.



Σχ. Ι. 16.

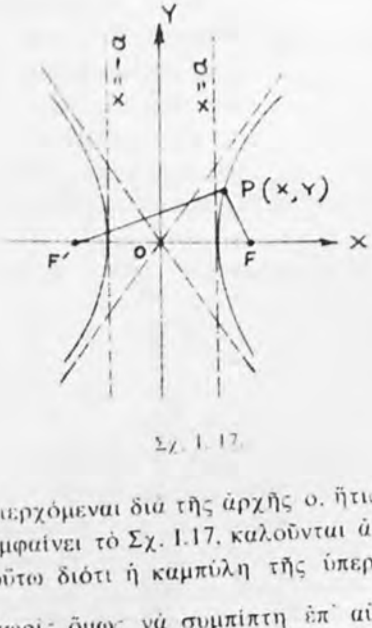
Ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως παρατηροῦμεν τὰ ἀκόλουθα:

(α) Διὰ νὰ ἔχωμεν πραγματικὰς τιμὰς τοῦ y πρέπει $\alpha^2 - \chi^2 \geqslant 0$, ἢ $\alpha^2 \geqslant \chi^2$ (καὶ $|\chi| \leqslant \alpha$) καὶ $-\alpha \leqslant \chi \leqslant \alpha$. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι ἡ καμπύλη περιορίζεται μεταξὺ τῶν εὐθειῶν $\chi = -\alpha$ καὶ $\chi = \alpha$, καὶ ὅτι τὸ y λαμβάνει τιμὰς μεταξὺ β καὶ -β, ὡς τὸ Σχ. Ι.16 δεικνύει. (β) Ἡ ἔλλειψις εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας καὶ τὴν ἀρχὴν τούτων. (γ) Τὰ σημεῖα (α, ο), (-α, ο) καὶ (ο,β), (ο, -β) κεῖνται ἐπὶ τῆς καμπύλης καὶ συνεπῶς ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν. (δ) Ἐὰν $\alpha = \beta$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\dfrac{\chi^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\alpha^2} = 1$ ἢ $\chi^2 + y^2 = \alpha^2$, ἤτοι εἶναι ἡ ἐξίσωσις κύκλου. Ἄρα ὁ κύκλος εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς ἐλλείψεως.

1.0.12. **Ἐξίσωσις ὑπερβολῆς.** Ὑ π ε ρ β ο λ ή εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων (ὡς πρὸς P) τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα (F,F′), ἅτινα ἑστίαι καλοῦνται, ἔχουν σταθερὰν διαφοράν.

Τὸ Σχ. 1.17 δεικνύει ὑπερβολήν. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν $F'P - PF = 2\alpha$, σταθερὸς ἀριθμός, καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς θὰ εἶναι:

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{καὶ} \quad y = \pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2-\alpha^2}$$



Σχ. 1.17.

Ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως παρατηροῦμεν τὰ ἀκόλουθα:

(α) Διὰ νὰ ἔχωμεν πραγματικὰς τιμὰς τοῦ y πρέπει $\chi^2 - \alpha^2 \geqslant 0$, καὶ $\chi^2 \geqslant \alpha^2$ ($|\chi| \geqslant \alpha$), ἐξ ἧς δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν $\chi \geqslant \alpha$ καὶ $\chi \leqslant -\alpha$. (β) Ἐὰν ὁρίσωμεν τὰς δύο εὐθείας $\chi = \alpha$ καὶ $\chi = -\alpha$, τότε ἡ καμπύλη κεῖται πέραν τῶν εὐθειῶν, ἤτοι δεξιὰ τῆς $\chi = \alpha$ καὶ ἀριστερὰ τῆς $\chi = -\alpha$. Ἄρα ἡ καμπύλη ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κλάδους, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ. 1.17. (γ) Ἡ ὑπερβολὴ εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας καὶ τὴν ἀρχὴν τούτων. (δ) Αἱ διακεκομμέναι εὐθεῖαι αἱ διερχόμεναι διὰ τῆς ἀρχῆς ο, ἥτις καὶ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς καλεῖται, ὡς ἐμφαίνει τὸ Σχ. 1.17, καλοῦνται ἀ σ ύ μ π τ ω τ ο ι τῆς ὑπερβολῆς. Καλοῦνται οὕτω διότι ἡ καμπύλη τῆς ὑπερβολῆς πλησιάζει συνεχῶς πρὸς τούτους, χωρὶς ὅμως νὰ συμπίπτῃ ἐπ' αὐτῶν. (ε) Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $y = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\chi^2-\alpha^2}$ ἔχομεν:

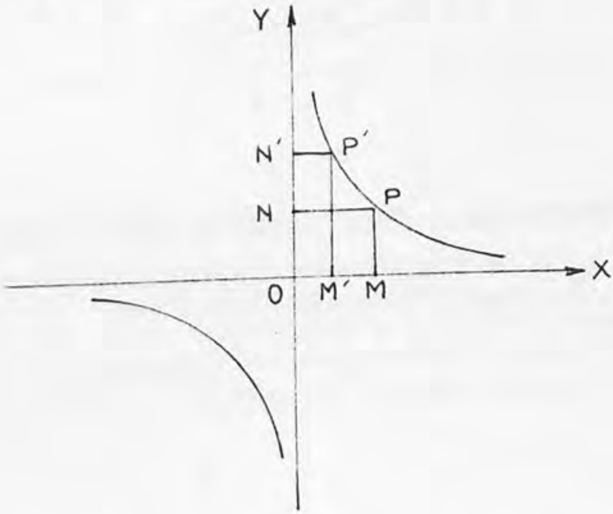
$$y = \pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2 - \frac{\alpha^2\chi^2}{\chi^2}}, \text{ ἤ}$$

$$y = \pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{\chi^2}\right)} \text{ καὶ}$$

$$y = \pm\frac{\beta}{\alpha}\,\chi\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\chi^2}}$$

Ὅσον τὸ χ αὐξάνει, τοσοῦτον ἡ ὑπόρριζος ποσότης $\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\chi^2}}$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ἤτοι ἡ καμπύλη τείνει νὰ συμπέσῃ ἐπὶ τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις $y = \pm \frac{\beta}{\alpha}\chi$ ἐπαληθεύει τὰς ἀσυμπτώτους τῆς ὑπερβολῆς καὶ συνεπῶς εἶναι ἡ ἐξίσωσις τούτων.

Ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ς ὑ π ε ρ β ο λ ή. Μία τῶν πλέον σημαντικῶν καμπυλῶν τῶν χρησιμοποιουμένων εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν εἶναι ἡ ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ς ἢ ἰ σ ο σ κ ε λ ὴ ς ὑ π ε ρ β ο λ ή. Αὕτη λαμβάνεται ἐὰν οἱ ἄξονες τῶν ἀσυμπτώτων ληφθοῦν ὡς ἄξονες τῆς ὑπερβολῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ καμπύλη ὁρίζεται ὡς ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων (P) τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ὀρθογωνίους εὐθείας, αἱ ὁποῖαι ἀσύμπτωτοι καλοῦνται, εἶναι σταθερὸς θετικὸς ἀριθμός, ὅστις ἰσοῦται πρὸς γ. Ἐκ τοῦ Σχ. 1.18. ἔχομεν: $NP \cdot PM = \gamma = N'P' \cdot P'M'$.



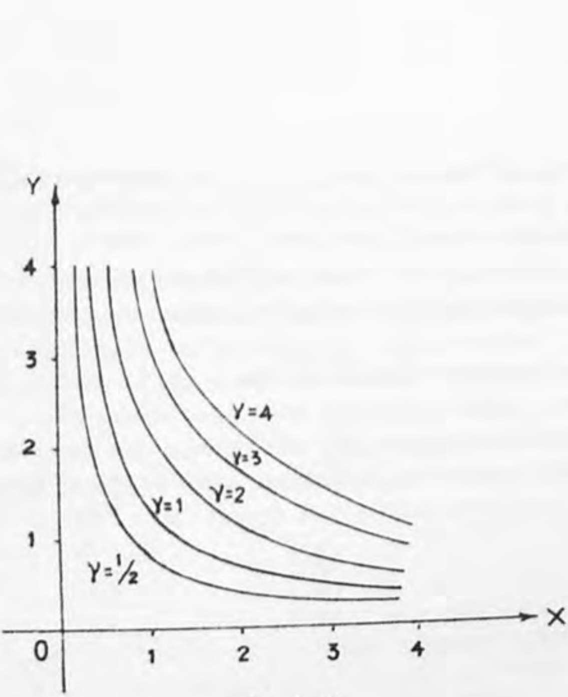
Σχ. 1.18.

Τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ONPM καὶ ON′P′M′ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔκτασιν.

Ἐπειδὴ $NP = \chi$ καὶ $PM = y$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς ἐν σχέσει πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους ὡς ἄξονας αὐτῆς θὰ εἶναι: $xy = \gamma$.

Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν $y = \frac{\gamma}{\chi}$ ἢ $\chi = \frac{\gamma}{y}$.

Αἱ ἐξισώσεις αὗται δεικνύουν ὅτι ἡ y εἶναι μονότιμος φθίνουσα συνάρτησις τῆς χ καὶ ἀντιθέτως. Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὁλόκληρον οἰκογένειαν καμπύλων ὀρθογωνίου ὑπερβολῆς ἐὰν μεταβάλλωμεν τὴν θέσιν τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τὴν τιμὴν τῆς σταθερᾶς γ, ὡς τὸ Σχ. 1.19. ἐμφαίνει.



Σχ. 1.19.

Ἡ ἐξίσωσις $y = \frac{1}{\chi}$ παριστᾶ ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν. Δίδοντες δὲ διαφόρους τιμὰς εἰς τὴν χ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τιμὰς διὰ τὴν y. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν κατωτέρω ἀντιστοιχίαν τιμῶν χ καὶ y

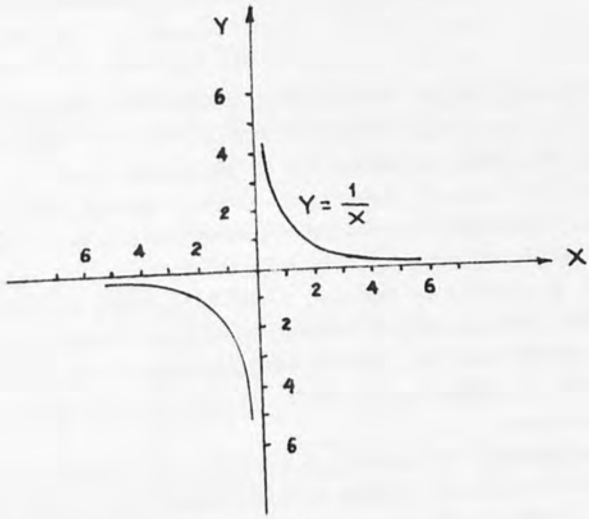
χ	$y = \frac{1}{\chi}$, ἢ $y = \chi^{-1}$
1	1
2	$^1/_2$
3	$^1/_3$
4	$^1/_4$

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἀνωτέρω ἀντιστοιχίας τιμῶν εἶναι ἡ τοῦ Σχ. 1.20.

1.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΝΙΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ*

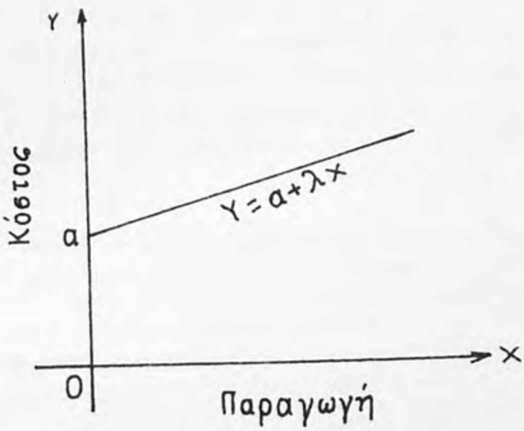
Κατ᾽ ἀκολουθίαν τῆς ἐξετάσεως τῶν διαφόρων μορφῶν ἐξισώσεων καὶ τῶν γραφημάτων τούτων, δίδομεν κατωτέρω διάφορα παραδείγματα εὐρέως χρησιμοποιουμένων καμπύλων εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν.

* Εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν χρησιμοποιοῦμεν τὴν λέξιν «καμπύλη» διὰ πάσας τὰς μορφὰς γραμμῶν.



Σχ. 1. 20.

1.10. **Γραμμική ἐξίσωσις κόστους.** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπιχείρησίς τις παράγει ὡρισμένον προϊὸν ὑφ' ὡρισμένας συνθήκας κόστους. Τὰ συνολικὰ σταθερὰ ἔξοδα παραγωγῆς, ἅτινα εἶναι ἀνεξάρτητα, κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον, τῆς παραγομένης ποσότητος εἶναι α. Τὰ συνολικὰ μεταβλητὰ ὅμως ἔξοδα εἶναι συνάρτησις τῆς παραγομένης ποσότητος. Ἔστω ὅτι ἡ παραγωγὴ χ μονάδων προϊόντος τινος κοστίζει λχ εἰς μεταβλητὰ ἔξοδα. Ἄρα τὸ συνο-



Σχ. 1. 21.

λικόν κόστος θα είναι α   λχ. Δεικνύοντες το συνολικόν κόστος διά y θα έχωμεν:

$$y \quad \alpha \quad \lambda\chi.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἐξίσωσις εὐθείας καὶ μᾶς λέγει ὅτι εἰς παραγωγὴν ο ἡ ἐπιχείρησις θὰ ἔχῃ σταθερὰ ἔξοδα α (y   α). Εἰς παραγωγὴν χ θὰ ἔχῃ πλέον τῶν σταθερῶν καὶ τὰ μεταβλητὰ ἔξοδα λχ. Ἡ κλίσις τῆς «καμπύλης» (λ) μᾶς δεικνύει τὸ κόστος ἑκάστης προσθέτου μονάδος προϊόντος. Τὸ κόστος δὲ τοῦτο εἶναι σταθερὸν διὰ κάθε κλίμακα παραγωγῆς λόγῳ σταθερᾶς κλίσεως τῆς γραμμῆς καὶ καλεῖται ὁ ρ ι α κ ὸ ν κ ό σ τ ο ς.

Ἐὰν ἡ «καμπύλη» κόστους εἶναι πραγματικὴ καμπύλη γραμμὴ καὶ οὐχὶ εὐθεῖα, τότε τὸ κόστος ἑκάστης προσθέτου μονάδος, ἤτοι τὸ ὁριακὸν κόστος, μεταβάλλεται εἰς ἕκαστον ἐπίπεδον παραγωγῆς. Τοῦτο γεωμετρικῶς σημαίνει ὅτι ἡ καμπύλη συνολικοῦ κόστους ἔχει εἰς ἕκαστον σημεῖον της διάφορον κλίσιν.

Εἶναι σκόπιμον νὰ τονισθῇ ἐνταῦθα ὅτι ἐκ διαφόρων ἐμπειρικῶν μελετῶν, αἱ ὁποῖαι ἐγένοντο ἐπὶ τῆς σχέσεως μεταξὺ συνολικοῦ κόστους καὶ παραγωγῆς, εὑρέθη ὅτι ἡ σχέσις αὕτη εἶναι γραμμική, ἤτοι τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι σταθερὸν βραχυχρονίως. Πράγματι μελέται γενόμεναι ὑπὸ τῶν J. Dean P. Lyle, G. Tintner, J. Johnston, κ.ἄ., ἀπέδειξαν ὅτι πολλαὶ ἐπιχειρήσεις λειτουργοῦν ὑπὸ συνθήκας σταθεροῦ ὁριακοῦ κόστους εἰς τὴν βραχυχρόνιον περίοδον.*

Τὸ γεγονὸς τῆς γραμμικότητος εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὴν θεωρητικὴν πρότασιν καθ' ἣν ἡ καμπύλη συνολικοῦ κόστους εἶναι παραβολή, τρίτου τουλάχιστον βαθμοῦ.

1.1.1. **Καμπύλαι σταθερᾶς ἐλαστικότητος προσφορᾶς.** Αἱ καμπύλαι προσφορᾶς σταθερᾶς ἐλαστικότητος εἶναι παραβολαὶ τῆς μορφῆς $y \quad \gamma\chi^{\alpha}$ ὅπου γ εἶναι μία σταθερὰ ποσότης, καὶ α ⟩ ο. Τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης θὰ ἐξαρτηθῇ, ὡς εἰκός, ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ α, ὡς εἰς τὸ Σχ. 1.22 ἐμφαίνεται. Ἅπασαι αἱ καμπύλαι διέρχονται ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων. Ὅταν α   1, τότε y   γχ, ἤτοι ἡ «καμπύλη» προσφορᾶς εἶναι εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

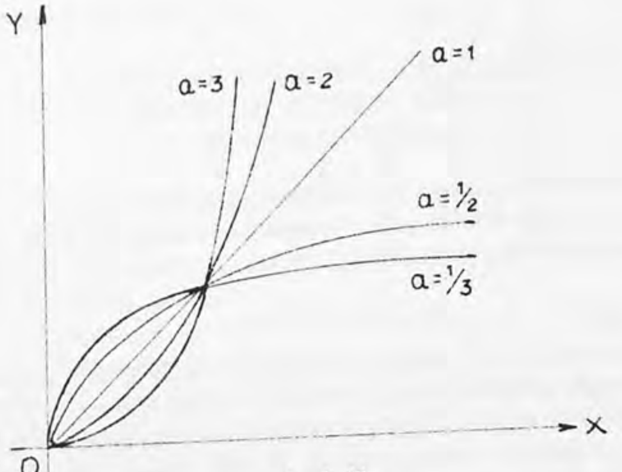
---

* Ἐκ τῆς παλινδρομήσεως τοῦ συνολικοῦ κόστους λειτουργίας ἐπιχειρήσεως διὰ λεωφορείων μεταφορῶν ἐπιβατῶν ἐπὶ τῶν διανυθέντων χιλιομετρικῶν ἀποστάσεων προέκυψεν ἡ κατωτέρω γραμμικὴ ἐξίσωσις.

$$Y \quad 0{,}656 \quad 0{,}443\ X.$$

ὅπου Y   συνολικὸν κόστος, καὶ X   χιλιομετρικαὶ ἀποστάσεις. Ὁ σταθερὸς ὅρος 0,656, δεικνύει τὰ σταθερὰ ἔξοδα τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς ἑκατοντάδας λιρῶν Ἀγγλίας καὶ ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς 0,443 τὸ ὁριακὸν κόστος. (Βλ. J. J o h n s t o n, Statistical Cost Analysis, Mc Graw - Hill Book Co., 1960, σελ. 79). Βλ. ἐπίσης G. T i n t n e r, Econometrics, New York, 1954, σελ. 47 - 51.

1.1.2. **Εὕρεσις τοῦ κόστους διὰ γραμμικῆς παρεμβολῆς.** Ἔστω ὅτι ἐπιχείρησις δύναται νὰ παράγῃ 20 μονάδας ἀγαθοῦ τινος μὲ κόστος 200 δρχ. καὶ 50 μονάδας μὲ 1000 δρχ. Μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὸ ὁριακὸν κόστος (κλίσις τῆς «καμπύλης» κόστους) εἶναι σταθερόν, ἤτοι ἡ γραμμὴ κόστους εἶναι εὐθεῖα, νὰ εὑρεθῇ τὸ κόστος τῶν 40 μονάδων.



Σχ. 1. 22.

Πὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος θέτομεν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος $y_1 = 200$, $\chi_1 = 20$ καὶ $y_2 = 1000$, $\chi_2 = 50$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς γραμμικῆς παρεμβολῆς:

$$\frac{y - 200}{1000 - 200} = \frac{\chi - 20}{50 - 20}$$

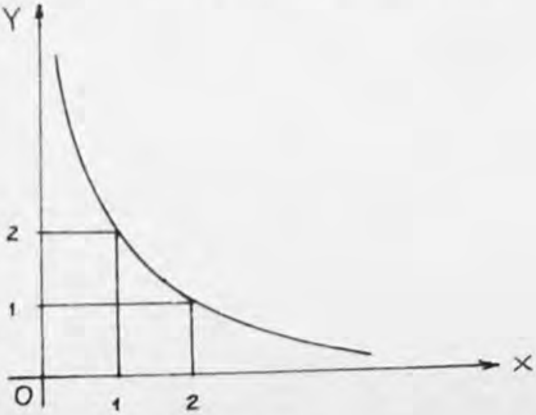
Ἐξ ἧς ἔχομεν: $y = 26{,}66\,\chi - 333{,}33$

$y = 26{,}66 \cdot 40 - 333{,}33$

$y = 733{,}17$

Ἄρα τὸ κόστος τῶν 40 μονάδων εἶναι 733,17 δρχ.

1.1.3. **Καμπύλη σταθερῶν συνολικῶν ἐσόδων.** Ἐὰν ἡ πώλησις οἱασδήποτε ποσότητος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ χ ἐπὶ διάφορον ἑκάστοτε τιμὴν μονάδος y δίδη σταθερὰν πρόσοδον διὰ τὸν πωλητήν, τότε ἔχομεν ἐνώπιόν μας τὴν περίπτωσιν μονοπωλητοῦ ἀγαθοῦ, ὅστις λαμβάνει ὁλόκηρον τὸ ποσὸν τὸ δαπανώμενον ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν διὰ τὸ συγκεκριμένον ἀγαθόν. Ἡ καμπύλη ζητήσεως τὴν ὁποίαν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀντιμετωπίζει ὁ μονοπωλητής είναι ἰσοσκελής ὑπερβολή ἐπαληθεύουσα τὴν ἐξίσωσιν $\chi y =$ σταθερός ἀριθμός, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸ κατωτέρω Σχ. 1.23.



Σχ. 1. 23.

Ὁ μονοπωλητής εἴτε πωλῶν 1 μονάδα μὲ τιμὴν 2, εἴτε 2 μονάδας μὲ τιμὴν 1, εἰσπράττει τὸ αὐτὸ ποσόν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως ἐν σχέσει πρὸς τὴν τιμὴν εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα. Ἡ ἐλαστικότης δὲ αὕτη εἶναι σταθερὰ καθ' ὅλην τὴν διαδρομὴν τῆς καμπύλης.

1.1.4. **Καμπύλαι σταθερᾶς ἐλαστικότητος.** Αἱ καμπύλαι αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν ὑπερβολῆς τύπου $y = \frac{\gamma}{\chi^{\alpha}}$ ἢ $y = \gamma\chi^{-\alpha}$ εἶναι καμπύλαι σταθερᾶς ἐλαστικότητος. Ἡ ἐλαστικότης ἰσοῦται πρὸς τὴν σταθερὰν α. Ἐὰν $\alpha = 1$, τότε ἡ καμπύλη εἶναι ἰσοσκελὴς ὑπερβολή, ὡς ἡ εἰς τὸ παράδειγμα τῆς 1.1.3. καὶ ἀπεικονίζει μίαν ἀντιστρόφως ἀνάλογον σχέσιν μεταξὺ y καὶ χ.

Καμπύλη σταθερᾶς ἐλαστικότητος, ἤτοι τῆς μορφῆς $y = \gamma\chi^{-\alpha}$ εἶναι ἐπίσης ἡ Παρετιανὴ καμπύλη (Pareto curve) κατανομῆς εἰσοδημάτων. Τὸ y εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης τοῦ Pareto δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν προσώπων ἅτινα ἔχουν εἰσόδημα χ ἢ ἄνω τούτου. Τὸ γ εἶναι μία σταθερὰ ποσότης καὶ τὸ α ἡ σταθερὰ ἐλαστικότης τῆς καμπύλης κατανομῆς. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς σταθερᾶς ταύτης εἶναι καὶ ἡ κρίσιμος παράμετρος τῆς ἐξισώσεως, διότι ἀποτελεῖ τὸ μέτρον τῆς ἀνισοκατανομῆς τῶν εἰσοδημάτων. Ὅσον ἀνερχόμεθα τὴν κλίμακα τῶν εἰσοδημάτων, τόσον ὁ ἀριθμὸς τῶν προσώπων ἐλαττοῦται. Ὁ ρυθμὸς ὅμως τῆς ἐλαττώσεως ταύτης εἶναι συνάρτησις τοῦ ἐπιπέδου εἰσοδήματος, δεδομένου ὅτι ἡ παράμετρος α παραμένει σταθερά, μετρῶσα τὴν ἀνισοκατανομὴν ὁλοκλήρου τῆς κατανομῆς*. Δηλονότι τὸ ποσοστὸν μειώσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προσώπων ἀπὸ εἰσοδηματικοῦ κλιμακίου εἰς κλιμάκιον εἶναι μεγαλύτερον εἰς τὰ κατώτερα κλιμάκια, μειοῦται δὲ ὅσον ἀνερχόμεθα τὰς βαθμίδας τοῦ εἰσοδήματος. Τοῦτο σημαίνει ὅτι μικροτέραν πιθανότητα ἔχει νὰ ἀνέλθη εἰς ἐπίπεδον εἰσοδήματος 5000 δρχ. ὁ ἔχων εἰσόδημα 3000 δρχ. ἢ ὁ ἔχων εἰσόδημα 8000 νὰ ἀνέλθη εἰς 10.000 δρχ.

1.2. ΚΑΜΠΥΛΑΙ ΖΗΤΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΓΟΡΑΝ ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

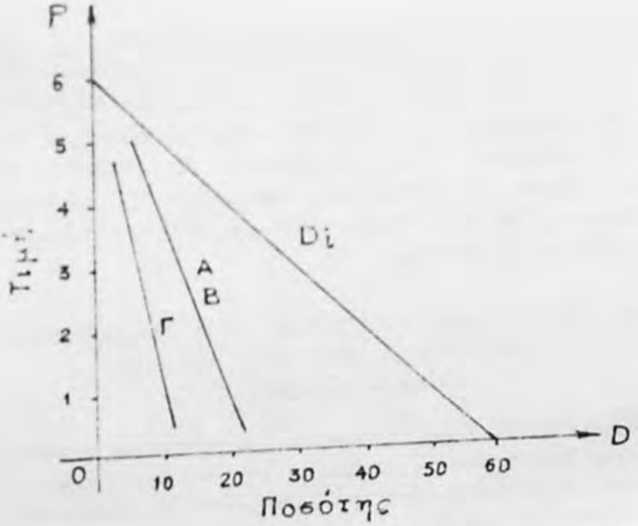
1.2.0. **Γραμμικαὶ ἐξισώσεις ζητήσεως καὶ προσφορᾶς ἀγαθοῦ.** Κατωτέρω παρουσιάζομεν τὸν τρόπον κατασκευῆς «καμπύλων» ζητήσεως καὶ προσφορᾶς ἀγαθοῦ τινος βάσει πινάκων ζητουμένων (προσφερομένων) ποσοτήτων εἰς ὡρισμένας τιμάς.

(i) «Καμπύλη» ζητήσεως. Αὕτη δεικνύει τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς ζητουμένης ποσότητος, D, καὶ τῆς τιμῆς p, ἀγαθοῦ τινος. Ἡ ζητουμένη ποσότης εἶναι συνάρτησις τῆς τιμῆς, καὶ συνεπῶς ὅσον μεγαλυτέρα ἡ τιμή, τόσον μικροτέρα ἡ ζητουμένη ποσότης. Ἄρα ἡ γραμμὴ θὰ πρέπει νὰ ἔχη ἀρνητικὴν κλίσιν. Ἡ ἀγοραία «καμπύλη» ζητήσεως συντίθεται ἐκ τῶν ἐπὶ μέρους ἀτομικῶν «καμπύλων» ζητήσεως. Ὁ κατωτέρω πίναξ δεικνύει τὰς τιμὰς καὶ τὰς ζητουμένας εἰς ἑκάστην τιμὴν ποσότητας τῶν καταναλωτῶν Α, Β καὶ Γ, ὡς καὶ τὴν ἀγοραίαν συνολικὴν ζήτησιν, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους ζητήσεων.

Τιμὴ (p_i)	Ζητουμένη ποσότης ὑπὸ Α	Β	Γ	Ζητουμένη συνολικὴ ποσότης εἰς τὴν ἀγορὰν (Di)
1	20	20	10	50
2	16	16	8	40
3	12	12	6	30
4	8	8	4	20
5	4	4	2	10
6	0	0	0	0

Τὸ γράφημα τῶν σχέσεων τιμῶν καὶ ζητουμένων ποσοτήτων ἔχει ὡς ἀκολούθως (Σχ. 1.24).

* Βλ. O. Lange, Introduction to Econometrics, 1962, σελ. 180 ἐπ. S. Sarantides, An Inquiry into International Income Inequality, et. c., Ph. D. Thesis, BRISTOL UNIVERSITY, 1968, σελ. 55.



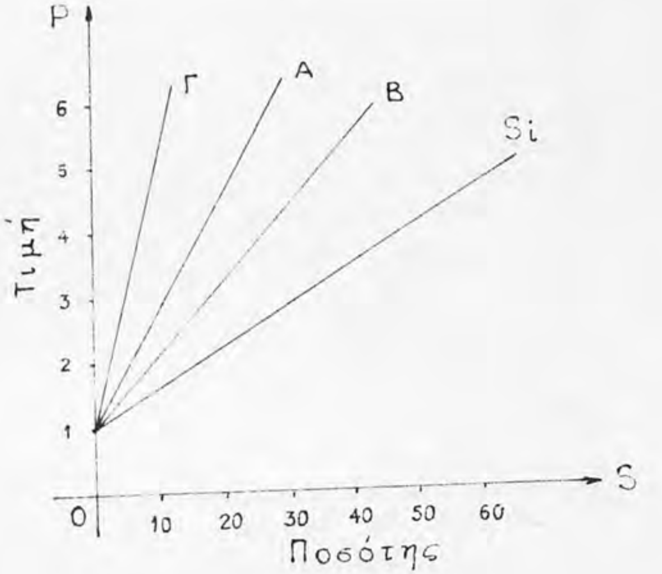
Σχ. 1. 24

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀγοραίας ζητήσεως, ἥτις ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν σημείων τῆς εὐθείας Di εἶναι D 60 - 10p. Τοιαύτας «καμπύλας» ζητήσεως ἀγαθοῦ τινος δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐξ ἐμπειρικῶν πραγματικῶν δεδομένων διὰ τῆς στατιστικῆς παλινδρομήσεως.

(ii) «Καμπύλη» προσφορᾶς. Αὕτη δεικνύει τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς προσφερομένης ποσότητος ἀγαθοῦ τινος, S, καὶ τῆς τιμῆς p, αὐτοῦ. Ἡ προσφερομένη ποσότης εἶναι συνάρτησης τῆς τιμῆς, καὶ συνεπῶς ὅσον ὑψηλοτέρα εἶναι ἡ τιμὴ τόσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ προσφερομένη ποσότης. Ἄρα ἡ γραμμὴ θὰ ἔχη θετικὴν κλίσιν. Ἡ ἀγοραία «καμπύλη» προσφορᾶς συντίθεται ἐκ τῶν ἐπὶ μέρους ἀτομικῶν «καμπύλων» προσφορᾶς. Ὁ κατωτέρω πίναξ δεικνύει τὰς τιμὰς καὶ τὰς προσφερομένας ποσότητας ὑπὸ τῶν παραγωγῶν A,B καὶ Γ, ὡς καὶ τὴν ἀγοραίαν συνολικὴν προσφοράν, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους προσφορῶν.

	Προσφερομένη ποσότης ὑπὸ			Προσφερομένη συνολικὴ
Τιμὴ (p_i)	A	B	Γ	ποσότης εἰς τὴν ἀγορὰν (Si)
1	0	0	0	0
2	5	8	2	15
3	10	16	4	30
4	15	24	6	45
5	20	32	8	60
6	25	40	10	75

Τὸ γράφημα τῶν σχέσεων τιμῶν καὶ ζητουμένων ποσοτήτων ἔχει ὡς ἀκολούθως (Σχ. 1.25).

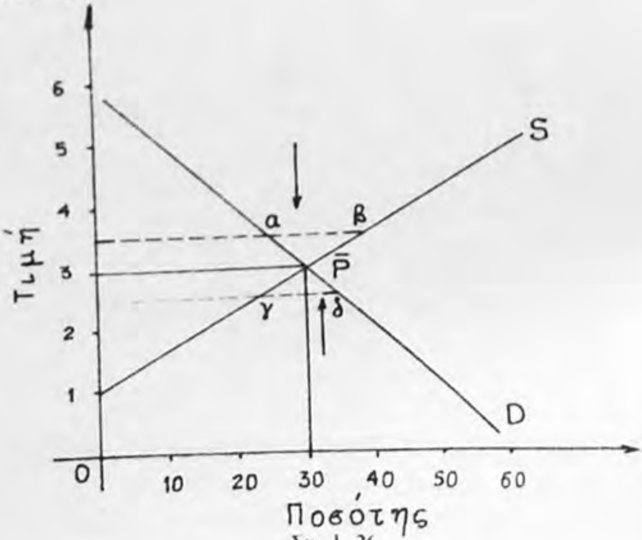


Σχ. 1.25

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀγοραίας προσφορᾶς, ἥτις ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν σημείων τῆς εὐθείας Si εἶναι $S = -15 + 15p$. Τοιαύτας «καμπύλας» προσφορᾶς ἀγαθοῦ τινος δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐξ ἐμπειρικῶν πραγματικῶν δεδομένων διὰ τῆς στατιστικῆς παλινδρομήσεως.

1.2.1. **Βραχυχρόνιος ἰσορροπία εἰς τὴν ἀγοράν.** Ἀνωτέρω ἐδόθησαν αἱ κλίμακες ζητήσεως καὶ προσφορᾶς, ὡς καὶ αἱ ἀντίστοιχοι «καμπύλαι» αὐτῶν. Αὗται, ὡς εἴδομεν δεικνύουν τὴν εἰς ἑκάστην τιμὴν ζητουμένην καὶ προσφερομένην ποσότητα τοῦ ἀγαθοῦ. Ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ, καθ' ὃν ἕκαστος πωλητὴς ἢ ἀγοραστὴς δὲν δύναται νὰ ἐπηρεάσῃ τὴν ἐπικρατοῦσαν εἰς τὴν ἀγορὰν τιμὴν καὶ δύναται νὰ εἰσέρχεται ἢ ἐξέρχεται ἐλευθέρως ἐκ τῆς ἀγορᾶς, — ἰσορροπία ὑφίσταται ὅταν ἡ ζητουμένη ποσότης ἰσοῦται πρὸς τὴν προσφερομένην ποσότητα εἰς τὴν ἐπικρατοῦσαν τιμὴν τοῦ ἀγαθοῦ. Ἡ τιμὴ αὕτη καλεῖται τ ι μ ὴ ἰ σ ο ρ ρ ο π ί α ς καὶ λαμβάνεται διὰ τῆς τομῆς τῶν «καμπύλων» ζητήσεως καὶ προσφορᾶς. Ἡ περίπτωσις αὕτη τῆς ἰσορροπίας εἰς τὴν ἀγορὰν ἑνὸς ἀγαθοῦ καλεῖται μ ε ρ ι κ ὴ ἰ σ ο ρ ρ ο π ί α.

Τὸ Σχ. 1.26 δεικνύει τὰς «καμπύλας» ζητήσεως καὶ προσφορᾶς. Ἡ τομὴ δὲ τούτων ἐμφαίνει τὸ σημεῖον ἰσορροπίας. Ἡ τιμὴ ἰσορροπίας εἶναι 3 μονάδες, ἡ δὲ εἰς τὴν τιμὴν ταύτην ζητουμένη καὶ προσφερομένη ποσότης εἶναι 30 μονάδες.



Σχ. 1. 26.

Ἀφοῦ γνωρίζομεν τὴν ἐξίσωσιν ζητήσεως καὶ τὴν ἐξίσωσιν προσφορᾶς, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν ἰσορροπίας, δεδομένου ὅτι εἰς κατάστασιν ἰσορροπίας ἡ ζήτησις ἰσοῦται πρὸς τὴν προσφοράν, ἤτοι

$$D = S, \text{ καί}$$

$$60 - 10p = -15 + 15p$$

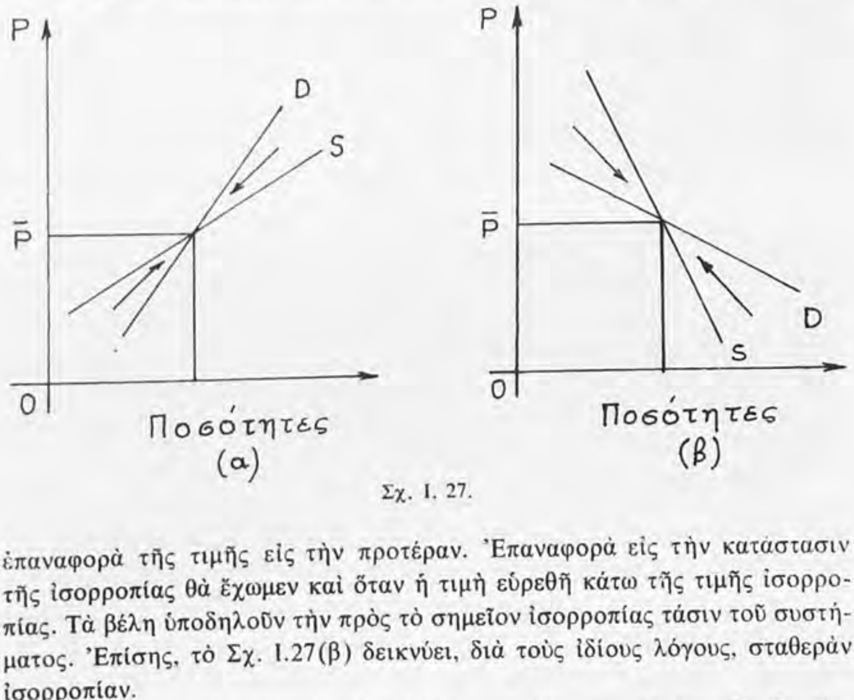
Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν $p = 3$

Ἡ ἰσορροπία καλεῖται σταθερά*, ὅταν πᾶσα διατάραξις ταύτης θέτει ἀμέσως εἰς ἐνέργειαν δυνάμεις πρὸς ἐπαναφοράν της. Οὕτω, ἐὰν ἡ τιμὴ καθορισθῇ κάτω τῆς τιμῆς ἰσορροπίας, ἔστω 2, τότε ὑπάρχει ὑπερβάλλουσα ζήτησις μὴ ἱκανοποιουμένη ἐκ τῆς προσφορᾶς καὶ συνεπῶς ἡ τιμὴ θὰ τείνῃ νὰ ὑψωθῇ μέχρι τοῦ σημείου ἰσορροπίας προσφορᾶς καὶ ζητήσεως. Τὸ αὐτὸ θὰ συμβῇ εἰς περίπτωσιν ὑψώσεως τῆς τιμῆς ἄνω τῆς τιμῆς ἰσορροπίας.

* Οἱ ὅροι σταθερὰ ἢ ἀσταθὴς ἰσορροπία προέρχονται ἐκ τῆς μαθηματικῆς Φυσικῆς καὶ συνεπῶς ἡ πρώτη θὰ ἠδύνατο νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὅρου «εὐσταθής», ὡς ὀρθοτέρου.

Τὸ Σχ. I.26. δεικνύει σταθερὰν ἰσορροπίαν. Τὰ τόξα ὑποδηλοῦν τὴν τάσιν πρὸς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας $\bar{p}$, ὅταν ἡ τιμὴ συμβαίνῃ, διὰ διαφόρους λόγους, νὰ εἶναι πρὸς στιγμὴν ἄνω ἢ κάτω τούτου. Οὕτω, ἐὰν ἡ τιμὴ εἶναι p = 3,5, τότε ἔχομεν ὑπερβάλλουσαν προσφορὰν κατὰ αβ καὶ τάσιν τῆς τιμῆς πρὸς τὰ κάτω. Ἐὰν ἡ τιμὴ εἶναι p = 2,5, τότε ἔχομεν ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν κατὰ γδ, καὶ συνεπῶς τάσιν τῆς τιμῆς πρὸς τὰ ἄνω. Περιπτώσεις σταθερᾶς ἰσορροπίας ἔχομεν καὶ ὅταν αἱ «καμπύλαι» προσφορᾶς καὶ ζητήσεως εἶναι εἴτε ἀμφότεραι θετικῆς εἴτε ἀμφότεραι ἀρνητικῆς κλίσεως.

Τὸ Σχ. I.27 (α) δεικνύει σταθερὰν ἰσορροπίαν διότι εἰς μίαν αὔξησιν τῆς τιμῆς θὰ ἀντιστοιχῇ προσφορὰ μεγαλυτέρα τῆς ζητήσεως καὶ συνεπῶς



Σχ. I. 27.

ἐπαναφορὰ τῆς τιμῆς εἰς τὴν προτέραν. Ἐπαναφορὰ εἰς τὴν κατάστασιν τῆς ἰσορροπίας θὰ ἔχωμεν καὶ ὅταν ἡ τιμὴ εὑρεθῇ κάτω τῆς τιμῆς ἰσορροπίας. Τὰ βέλη ὑποδηλοῦν τὴν πρὸς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τάσιν τοῦ συστήματος. Ἐπίσης, τὸ Σχ. I.27(β) δεικνύει, διὰ τοὺς ἰδίους λόγους, σταθερὰν ἰσορροπίαν.

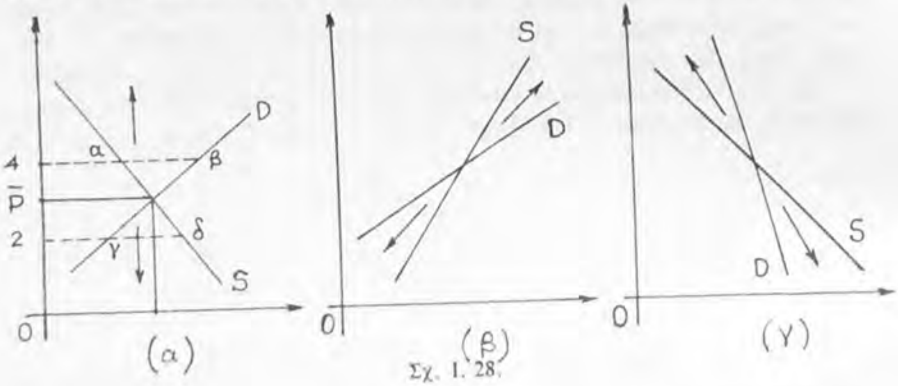
Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν μὲ E = D - S, τότε θὰ ἔχωμεν τὰς κατωτέρω συνθήκας σταθερᾶς ἰσορροπίας:

Ὅταν	$p < \bar{p}$,	τότε	$E > O$	(ὑπερβάλλουσα ζήτησις)
-»-	$p > \bar{p}$	-»-	$E < O$	(ὑπερβάλλουσα προσφορά)

Ἤτοι, ὅταν ἡ τιμὴ εἶναι μικροτέρα τῆς τιμῆς ἰσορροπία, τότε ἔχομεν ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν (D>S) καὶ συνεπῶς τάσιν τῆς τιμῆς πρὸς τὰ ἄνω, ἤτοι πρὸς τὴν τιμὴν ἰσορροπίας. Ὅταν ἡ τιμὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς ἰσορροπίας, τότε ἔχομεν ὑπερβάλλουσαν προσφορὰν (D<S), ἤτοι ἀρνητικὴν

ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν (E⟨O) καὶ συνεπῶς τάσιν τῆς τιμῆς πρὸς τὰ κάτω, δηλαδὴ πρὸς τὴν τιμὴν ἰσορροπίας.

Ἀντιθέτως ἀ σ τ α θ ή ς εἶναι ἡ ἰσορροπία ἡ διατάραξις τῆς ὁποίας θέτει εἰς ἐνέργειαν δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἀπομακρύνουν ἐκ ταύτης. Καὶ αἱ τρεῖς περιπτώσεις τοῦ Σχ. I.28 δεικνύουν ἀσταθῆ ἰσορροπίαν. Εἰς τὴν περί-



Σχ. I. 28.

πτωσιν (α), ἐὰν ἡ τιμὴ εἶναι $p = 4$, τότε ἔχομεν ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν κατὰ ποσότητα αβ καὶ συνεπῶς τάσιν πρὸς ὕψωσιν τῆς τιμῆς καὶ ἀπομάκρυνσιν συνεχῶς ἐκ τοῦ σημείου ἰσορροπίας $\bar{p}$. Ἐὰν ἡ τιμὴ εἶναι $p = 2$, τότε ἔχομεν ὑπερβάλλουσαν προσφορὰν κατὰ ποσότητα γδ καὶ συνεπῶς τάσιν πρὸς μείωσιν τῆς τιμῆς καὶ ἀπομάκρυνσιν συνεχῶς ἐκ τοῦ σημείου ἰσορροπίας ὡς τὰ τόξα ὑποδεικνύουν. Αἱ ἕτεραι περιπτώσεις (β) καὶ (γ) δεικνύουν ὁμοίως ἀσταθῆ ἰσορροπίαν.

Αἱ συνθῆκαι ἀσταθοῦς ἰσορροπίας εἶναι:

Ὅταν $p < \bar{p}$, τότε $E < O$ (ὑπερβάλλουσα προσφορά)

-»- $p > \bar{p}$ -»- $E > O$ (ὑπερβάλλουσα ζήτησις)

Ἡ ὕπαρξις διαφορᾶς μεταξὺ ζητουμένων καὶ προσφερομένων ποσοτήτων εἶναι συνάρτησις τῆς τιμῆς. Εἰς τιμὴν ἰσορροπίας, ἡ διαφορὰ αὐτὴ θὰ εἶναι μηδενική. Τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς διαφορᾶς $E\ (= D - S)$ καὶ τῆς τιμῆς (p), δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν διὰ τῆς συναρτήσεως ὑπερβαλλούσης ζητήσεως:

$$E = \varphi\ (p)$$

Δεδομένου ὅτι $E = D - S = \alpha + \beta p - (\gamma + \delta p) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)p$, διὰ νὰ ἔχωμεν ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν $(D - S > O)$ ἢ αὔξησιν τῆς περβαλλούσης ζητήσεως ἐν σχέσει πρὸς αὔξησιν τῆς τιμῆς $\left(\frac{dE}{dp} > O\right)$ θὰ πρέπει $|\beta| > \delta$, ἤτοι ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς καμπύλης ζητήσεως εἶναι μεγαλύτερος τοῦ γωνιακοῦ συντελεστοῦ τῆς καμπύλης προσφορᾶς. Διὰ νὰ ἔχωμεν ὑπερβάλλουσαν προσφορὰν (ἀρνητικὴν ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν) ἢ αὔξησιν τῆς πλεοναζούσης προσφορᾶς ἐν σχέσει πρὸς αὔξησιν τῆς τιμῆς $\left(\frac{dE}{dp} < o\right)$ θὰ πρέπει δ>|β|, ἤτοι ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς καμπύλης προσφορᾶς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ συντελεστοῦ τῆς καμπύλης ζητήσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ὕπαρξις σταθερᾶς ἢ ἀσταθοῦς ἰσορροπίας ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν κλίσεων τῶν «καμπύλων» προσφορᾶς καὶ ζητήσεως.

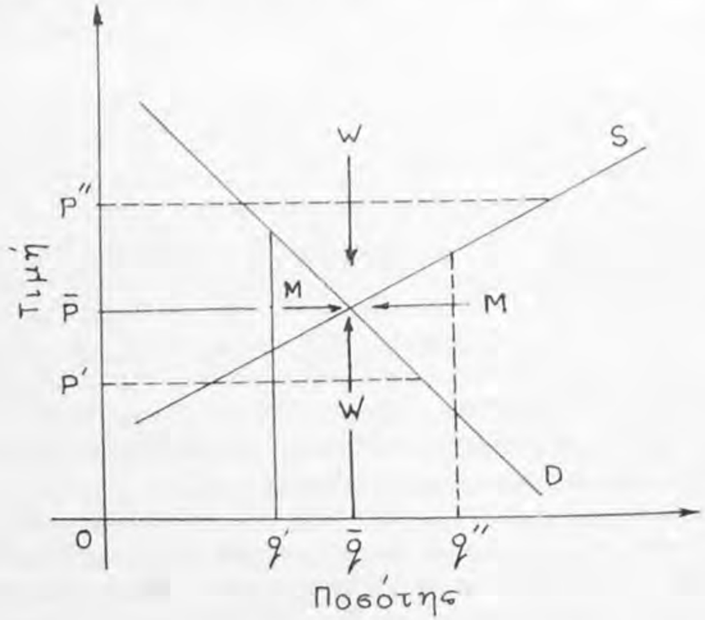
1.2.2. **Ἡ ἑρμηνεία τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας κατὰ Walras καὶ Marshall.** Ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσιν τῆς ἰσορροπίας εἰς τὴν ἀγορὰν καὶ τῶν ὅρων σταθερότητος ταύτης ἠκολούθησε τὴν μέθοδον ἣν πρῶτος ὁ Walras ἐφήρμοσεν. Δεδομένου δὲ ὅτι ὑφίσταται καὶ ἡ μέθοδος τὴν ὁποίαν ἠκολούθησεν ὁ Marshall διὰ τὴν περιγραφὴν τῇ ἰσορροπίας, θεωροῦμεν ἀπαραίτητον ὅπως προβῶμεν εἰς τὴν διευκρίνισιν σημείων τινων ἐπὶ τῶν ὁποίων δημιουργεῖται ποιὰ τις σύγχυσις.

Ἡ Βαλρασιανὴ ἑρμηνεία τῆς ἰσορροπίας στηρίζεται εἰς τὴν ὕπαρξιν ἢ μὴ πλεοναζούσης ζητήσεως ἢ προσφορᾶς. Ὅταν ὑπάρχη πλεοναζουσα ζήτησις, ἡ τιμὴ ὠθεῖται πρὸς τὰ ἄνω. Ὅταν δὲ ὑπάρχη πλεοναζουσα προσφορὰ (ἀρνητικὴ πλεονάζουσα ζήτησις) ἡ τιμὴ ὠθεῖται πρὸς τὰ κάτω. Ἡ Βαλρασιανὴ στατικὴ ἰσορροπία ἐξετάζει τὴν κατεύθυνσιν ἣν λαμβάνει ἡ τιμή, θεωροῦσα ἄμεσον τὴν μετάβασιν εἰς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας, ἤτοι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καμπύλων προσφορᾶς καὶ ζητήσεως. Διακριτικὸν στοιχεῖον τῆς Βαλρασιανῆς μεθόδου εἶναι ὅτι ἐκκινεῖ ἐξ ἑνὸς ἐπιπέδου τιμῆς κάτω ἢ ἄνω τῆς ἰσορροπίας καὶ ἐξετάζει τὴν τάσιν τῆς τιμῆς ἀναλόγως πρὸς τὴν ὕπαρξιν πλεοναζούσης ζητήσεως (θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς). Γραφικῶς ἡ ἀνάλυσις στηρίζεται εἰς ὁριζοντίας γραμμὰς ἐκκινούσας ἐξ ἐπιπέδων τιμῶν ἄνω καὶ κάτω τῆς τιμῆς ἰσορροπίας.

Ἡ Μαρσαλλιανὴ ἑρμηνεία τῆς ἰσορροπίας στηρίζεται εἰς τὰς διαφορὰς τιμῆς ζητήσεως καὶ τιμῆς προσφορᾶς. Ἡ τιμὴ ζητήσεως εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἠδύνατο νὰ πωληθῇ ὡρισμένη ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ. Ἐνῶ τιμὴ προσφορᾶς εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἠδύνατο νὰ προσφερθῇ ὡρισμένη ποσότης. Ὅταν ἡ τιμὴ ζητήσεως εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς προσφορᾶς, ἡ προσφερομένη ποσότης ὠθεῖται πρὸς αὔξησιν, ἐνῶ ὅταν ἡ τιμὴ ζητήσεως εἶναι μικροτέρα τῆς τιμῆς προσφορᾶς, ἡ προσφερομένη ποσότης ὠθεῖται πρὸς μείωσιν. Ἡ Μαρσαλλιανὴ στατικὴ ἰσορροπία ἐξετάζει τὴν κατεύθυνσιν ἣν λαμβάνει ἡ προσφερομένη ποσότης, θεωροῦσα ἄμεσον τὴν μετάβασιν πρὸς τὴν ποσότητα ἰσορροπίας, ἤτοι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καμπύλων προσφορᾶς καὶ ζητήσεως. Γραφικῶς ἡ ἀνάλυσις στηρίζεται εἰς καθέτους γραμμάς ἐκκινούσας ἐξ ἐπιπέδου προσφερομένων ποσοτήτων ἄνω ἢ κάτω τοῦ ἐπιπέδου ἰσορροπίας.

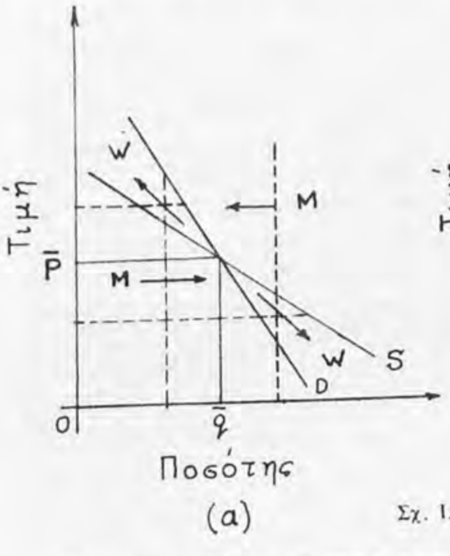
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι κατὰ τὴν Βαλρασιανὴν μέθοδον, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ πλέον ἀποδεκτή, ἡ τιμὴ εἶναι ἡ ἐξισορροπητικὴ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ πρὸς τὴν ὁποίαν τείνουν νὰ συμφωνήσουν προσφερόμεναι καὶ ζητούμεναι ποσότητες. Κατὰ τὴν Μαρσαλλιανὴν μέθοδον, ἡ ποσότης εἶναι ἡ ἐξισορροποῦσα μεταβλητὴ πρὸς τὴν ὁποίαν τείνουν νὰ συμφωνήσουν αἱ τιμαί. Ἡ μὲν πρώτη μέθοδος στηρίζεται εἰς τὰς κινήσεις τῶν τιμῶν, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὰς κινήσεις τῶν ποσοτήτων πρὸς ἐπίτευξιν τῆς ἰσορροπίας εἰς τὴν ἀγοράν.

Εἰς τὴν πλέον συνήθη περίπτωσιν ἰσορροπίας, καθ' ἣν ἡ μὲν καμπύλη ζητήσεως ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν ἡ δὲ καμπύλη προσφορᾶς θετικὴν κλίσιν, δὲν ὑπάρχει σύγχυσις καθ' ὅσον ἀφορᾶ τὴν σταθερότητα τῆς ἰσορροπίας κατὰ τὰς δύο μεθόδους. Εἰς τὸ Σχ.1.29, ἐμφαίνεται ἡ περίπτωσις τῆς σταθερᾶς

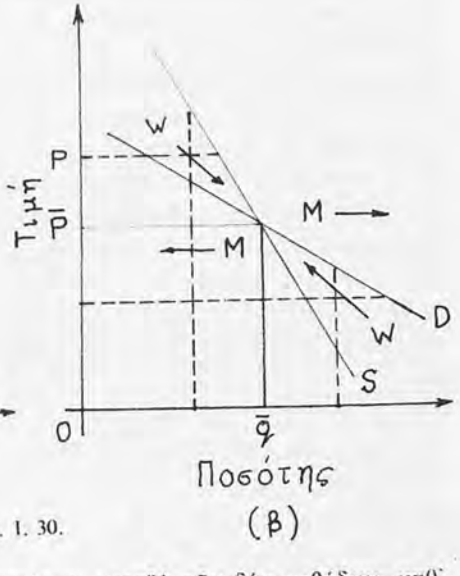


Σχ. 1. 29.

στατικῆς ἰσορροπίας. Τὰ καθέτου φορᾶς βέλη δεικνύουν τὴν πρὸς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τάσιν κατὰ τὴν Βαλρασιανὴν ἑρμηνείαν. Τὰ ὁριζοντίας κατευθύνσεως βέλη δεικνύουν τὴν τάσιν πρὸς ἰσορροπίαν κατὰ τὴν Μαρσαλλιανὴν ἑρμηνείαν. Κατὰ τὸν Marshall, ὅταν ἡ παραγομένη ποσότης εἶναι Oq', ἡ τιμὴ ζητήσεως εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς προσφορᾶς, καθιστῶσα οὕτω τὴν παραγωγὴν λίαν κερδοφόρον. Συνεπεία τούτου θὰ ὑπάρξῃ τάσις αὐξήσεως τῆς παραγωγῆς, τόσον διὰ τῆς εἰσόδου νέων παραγωγῶν ὅσον καὶ διὰ τῆς ἐπεκτάσεως τῆς παραγωγῆς τῶν παλαιῶν παραγωγῶν. Καθόσον ἡ παραγωγὴ αὐξάνει, ἡ μὲν τιμὴ ζητήσεως μειοῦται, ἡ δὲ τιμὴ προσφορᾶς αὐξάνει, μέχρι τοῦ σημείου συμπτώσεως τῶν δύο τιμῶν. Τὸ ἀντίθετον θὰ συμβῇ, ἐὰν ἡ παραγωγὴ εἶναι 0q'', ἤτοι πλέον τῆς ποσότητος ἰσορροπίας. Οὕτω ἡ ἀνωτέρω ἰσορροπία εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν Μαρσαλλιανὴν ἑρμηνείαν τῆς ἰσορροπίας. Ὡς εἴδομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις, ἡ ἀνωτέρω ἰσορροπία εἶναι σταθερὰ καὶ κατὰ τὴν Βαλρασιανὴν ἑρμηνείαν. Ἐν ἄλλοις λόγοις, οἱονδήποτε μηχανισμὸν προσαρμογῆς πρὸς τὴν ἰσορροπίαν ἠθέλομεν χρησιμοποιήσει τὸ ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι τὸ αὐτό, ἤτοι τάσις πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καμπύλων προσφορᾶς καὶ ζητήσεως.



Σχ. 1. 30.



Ἡ διαφορά, ὅμως, ἡ ὁποία προκύπτει μεταξὺ τῶν δύο μεθόδων, καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν σταθερότητα τῆς ἰσορροπίας, ἀναφέρεται εἰς τὴν περίπτωσιν ἐκείνην καθ' ἣν ἡ καμπύλη προσφορᾶς ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν*. Ἂς ἐξετάσωμεν γραφικῶς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

Ἡ ἰσορροπία εἰς τὸ Σχ. 1.30 (α) θὰ κριθῇ ὡς ἀσταθὴς κατὰ τὸ Βαλρα-

* Πρακτικῶς ἡ καμπύλη προσφορᾶς δύναται νὰ ἔχῃ ἀρνητικὴν κλίσιν εἰς τὴν περίπτωσιν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς (κυρίως ἐργασίας) καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὑπάρξεως ἐξωτερικῶν οἰκονομιῶν. Βλ. J. Henderson and R. Quandt, Microeconomic Theory, σελ. 111.

σιανὸν κριτήριον, διότι πᾶσα τιμὴ ἄνω τῆς τιμῆς ἰσορροπίας (p) δημιουργεῖ ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν, ἡ ὁποία ὠθεῖ ταύτην ἔτι ὑψηλότερον καὶ απομακρύνει ταύτην ἐκ τοῦ σημείου ἰσορροπίας. Ἀντιθέτως, ἡ ἰσορροπία αὕτη θὰ κριθῇ ὡς σταθερὰ κατὰ τὸ Μαρσαλλιανὸν κριτήριον, διότι ἡ προσφορὰ ποσότητος μικροτέρας ἐκείνης τῆς ποσότητος ἰσορροπίας (q) ἀντιστοιχεῖ εἰς τιμὴν ζητήσεως μεγαλυτέραν ἐκείνης τῆς τιμῆς προσφορᾶς, καὶ οὕτω ὁ παραγωγὸς ὠθεῖται εἰς αὔξησιν τῆς παραγωγῆς καὶ προσφορᾶς κινούμενος πρὸς τὴν ποσότητα ἰσορροπίας.

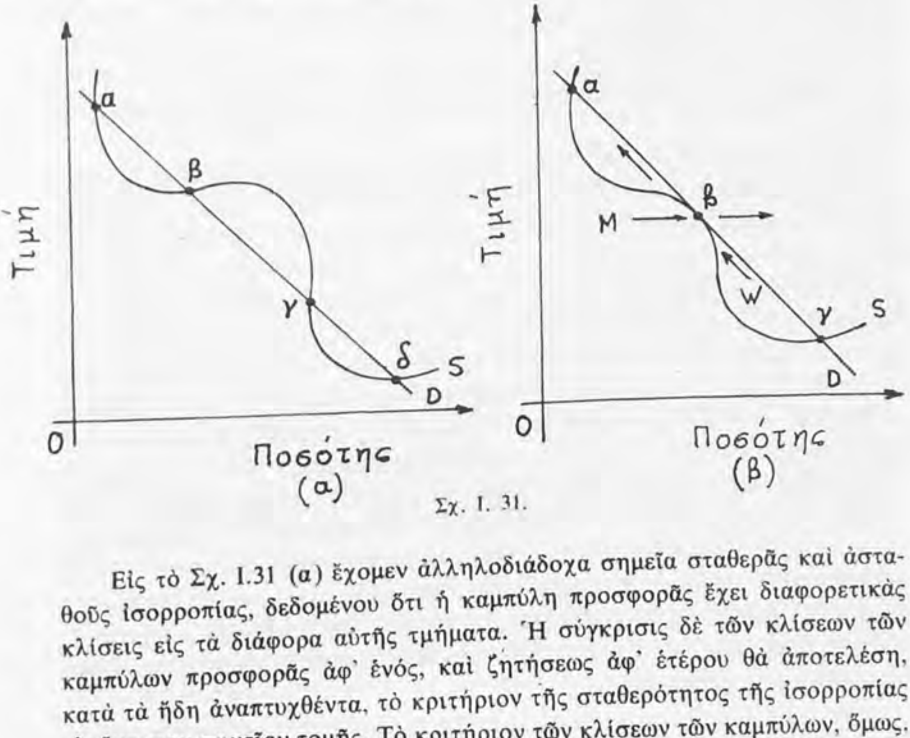
Ἡ ἰσορροπία τοῦ Σχ. I.30 (β) κρίνεται ὡς σταθερὰ κατὰ τὸ Βαλρασιανὸν κριτήριον καὶ ἀσταθὴς κατὰ τὸ Μαρσαλλιανὸν τοιοῦτον. Ὡς ἤδη ἐλέχθη αἱ κλίσεις τῶν καμπύλων προσφορᾶς καὶ ζητήσεως εἶναι οἱ καθοριστικοὶ παράγοντες τῆς ὑπάρξεως πλεοναζούσης ζητήσεως ἢ προσφορᾶς καὶ συνεπῶς σταθερᾶς ἢ ἀσταθοῦς ἰσορροπίας.

Ἡ διαπιστουμένη διάστασις μεταξὺ τῶν δύο μεθόδων, καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν σταθερότητα τῆς ἰσορροπίας εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ καμπύλη προσφορᾶς ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν, εἶναι κατ' ἀρχὰς τὸ ἀποτέλεσμα διαφορετικῶν ὁρισμῶν. Ὁ ὁρισμὸς τοῦ Walras ἀναφέρεται εἰς τὴν «πλεονάζουσαν, θετικὴν ἢ ἀρνητικήν, ζήτησιν», ἐνῶ ὁ ὁρισμὸς τοῦ Marshall ἀναφέρεται εἰς τὴν διαφορὰν «τιμῆς προσφορᾶς» καὶ «τιμῆς ζητήσεως», ἐξ ἧς προκύπτει τὸ κερδοφόρον ἢ μὴ τῆς παραγωγῆς. Ἀλλ' οἱ ὁρισμοὶ οὗτοι, ἢ τὰ κριτήρια, ἀναφέρονται ἁπλῶς εἰς τὴν βάσιν ἐκκινήσεως τῆς διαδικασίας προσαρμογῆς πρὸς τὴν ἰσορροπίαν. Ἡ οὐσία τῆς διαφορᾶς ἔγκειται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Marshall ἀνεφέρετο εἰς μακροχρόνιον ἰσορροπίαν, ἢ μᾶλλον εἰς μίαν διαδικασίαν μακρᾶς διαρκείας, ὅπου ἡ ἔχουσα ἀρνητικὴν κλίσιν καμπύλην τῆς προσφορᾶς ἀντανακλᾷ τὰς «ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ὰ ς ο ἰ κ ο ν ο μ ί α ς» ἢ «ἀ ν τ ι ο ι κ ο ν ο μ ί α ς» (external economies ἢ diseconomies)*. Δεδομένου δὲ ὅτι ἡ καμπύλη προσφορᾶς ἀντανακλᾷ τὸ κόστος τῆς παραγωγῆς, ἡ ἀρνητικὴ κλίσις σημαίνει φθῖνον κόστος εἰς τὸν κλάδον παραγωγῆς τοῦ ἀγαθοῦ. Τοῦτο, ὅμως, σημαίνει ἐπίσης ὅτι τιμὴ προσφορᾶς μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς ζητήσεως ὠθεῖ εἰς περιορισμὸν τῆς προσφορᾶς πρὸς τὰς ἀνάγκας τῆς ζητήσεως καὶ τοῦτο θὰ γίνῃ βαθμιαίως. Ἀντιθέτως ὁ Walras ἀνεφέρθη μᾶλλον εἰς τὸ ἄμεσον ἀποτέλεσμα, ἤτοι ἡ ὑπερβάλλουσα προσφορὰ διὰ νὰ διατεθῇ ἀμέσως θὰ πρέπει νὰ μειωθῇ ἡ τιμὴ καὶ οὕτω νὰ ἐπέλθῃ ἀπορρόφησις ταύτης ἐκ μέρους τῆς ζητήσεως.

I.2.3. **Ἡ περίπτωσις πολλαπλῶν σημείων ἰσορροπίας.** Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν τὰς περιπτώσεις ἐκείνας κατὰ τὰς ὁποίας ἡ καμπύλη προσφο-

* Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ α ὶ ο ἰ κ ο ν ο μ ί α ι ὑφίστανται ὅταν ἡ ἀνάπτυξις τοῦ κλάδου συνεπάγεται καὶ ἀνάπτυξιν τῆς παραγωγῆς τῶν ἐπὶ μέρους μονάδων.

ρᾶς τέμνει τὴν καμπύλην ζητήσεως εἰς πλείονα τοῦ ἑνὸς σημεῖα. Διὰ νὰ συμβῇ ὅμως τὸ τοιοῦτον θὰ πρέπει μία τῶν δύο καμπύλων νὰ εἶναι πραγματικὴ καμπύλη γραμμὴ καὶ οὐχί, ὡς εἰς τὸ τμῆμα τοῦτο ὑπεθέσαμεν, εὐθεῖαι γραμμαί (γραμμικὰ ὑποδείγματα ἰσορροπίας εἰς τὴν ἀγοράν). Δεχόμεθα λοιπὸν ὅτι ἡ συνάρτησις προσφορᾶς εἶναι μὴ γραμμικὴ καὶ ἔχουσα ἀρνητικὴν κλίσιν, ἐνῷ ἡ συνάρτησις ζητήσεως εἶναι γραμμική.



Σχ. Ι. 31.

Εἰς τὸ Σχ. Ι.31 (α) ἔχομεν ἀλληλοδιάδοχα σημεῖα σταθερᾶς καὶ ἀσταθοῦς ἰσορροπίας, δεδομένου ὅτι ἡ καμπύλη προσφορᾶς ἔχει διαφορετικὰς κλίσεις εἰς τὰ διάφορα αὐτῆς τμήματα. Ἡ σύγκρισις δὲ τῶν κλίσεων τῶν καμπύλων προσφορᾶς ἀφ' ἑνός, καὶ ζητήσεως ἀφ' ἑτέρου θὰ ἀποτελέσῃ, κατὰ τὰ ἤδη ἀναπτυχθέντα, τὸ κριτήριον τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας εἰς ἕκαστον σημεῖον τομῆς. Τὸ κριτήριον τῶν κλίσεων τῶν καμπύλων, ὅμως, θὰ δώσῃ διαφορετικὰ ἀποτελέσματα εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀρνητικῆς κλίσεως τῆς καμπύλης προσφορᾶς, ἀναλόγως πρὸς τὸ ὑπόδειγμα ὅπερ χρησιμοποιοῦμεν, ἤτοι τὸ ὑπόδειγμα τῆς θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς ὑπερβαλλούσης ζητήσεως (Walras) καὶ τὸ ὑπόδειγμα τῆς διαφορᾶς τῆς τιμῆς ζητήσεως καὶ τιμῆς προσφορᾶς (Marshall).

Κατὰ τὰ γνωστὰ θὰ ἔχωμεν τοὺς κάτωθι χαρακτηρισμούς:

Σημεῖον α	:	σταθερὰ ἰσορροπία κατὰ Walras ἀσταθὴς κατὰ Marshall
Σημεῖον β	:	ἀσταθὴς ἰσορροπία κατὰ Walras σταθερὰ ἰσορροπία κατὰ Marshall

Σημεῖον γ : σταθερὰ ἰσορροπία κατὰ Walras
ἀσταθὴς ἰσορροπία κατὰ Marshall
Σημεῖον δ : ὡς σημεῖον β.

Διὰ τὸν χαρακτηρισμὸν τῆς ἰσορροπίας τοῦ σημείου β εἰς τὸ Σχ. I.31 (β) δὲν ἀρκοῦν πλέον τὰ ἀνωτέρω δύο ὑποδείγματα ἑρμηνείας τῆς ἰσορροπίας*. Κατὰ τὸ Βαλρασιανὸν ὑπόδειγμα τὸ σημεῖον β χαρακτηρίζεται ὡς ἀσταθὲς διὰ τιμὰς ἄνω τῆς τιμῆς ἰσορροπίας καὶ σταθερὸν διὰ τιμὰς κάτω τῆς τιμῆς ἰσορροπίας. Ἀντιθέτως κατὰ τὸ Μαρσαλλιανὸν ὑπόδειγμα τὸ σημεῖον β χαρακτηρίζεται ὡς σταθερὸν διὰ ποσότητας κάτω τῆς ποσότητος ἰσορροπίας καὶ ἀσταθὲς διὰ ποσότητας ἄνω τῆς ποσότητος ἰσορροπίας.

I.2.4. **Τὸ θεώρημα τοῦ «ἱστοῦ τῆς ἀράχνης» καὶ ἡ δυναμικὴ ἰσορροπία.**
Ἀνωτέρω εἴδομεν ὅτι ἡ τιμὴ ἰσορροπίας εἰς τὴν ἀγορὰν κατὰ τὴν βραχυχρόνιον περίοδον καθορίζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως προσφερομένης καὶ ζητουμένης ποσότητος τοῦ ἀγαθοῦ. Ἐὰν δὲ πρὸς στιγμὴν καὶ δι' οἱονδήποτε λόγον ἐπέλθη μεταβολὴ εἰς τὴν ζητουμένην ἢ προσφερομένην ποσότητα, αἱ δυνάμεις τῆς ἀγορᾶς θὰ ἐπαναφέρουν τὴν ἰσορροπίαν. Τὴν ἰσορροπίαν ταύτην ἐκαλέσαμεν σταθεράν. Προσέτι τὸ εἶδος τῆς ἰσορροπίας ταύτης εἶναι ἡ στατικὴ ἰσορροπία, καθ' ὅτι δὲν ἐξητάσαμεν τὴν χρονικὴν διαδρομὴν ταύτης. Ἐὰν κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς ἀγοραίας ἀνταγωνιστικῆς ἰσορροπίας λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν χρονικὴν διαδρομὴν καὶ τὴν διαδικασίαν συγκλίσεως ἢ ἀποκλίσεως τῆς τιμῆς καὶ ποσότητος, τότε λαμβάνομεν ἓν ἁπλοῦν δυναμικὸν ὑπόδειγμα ἰσορροπίας ἐνέχον χρονικὰς ὑστερήσεις καὶ προηγήσεις (time leads and lags). Δέον νὰ τονισθῇ ἐνταῦθα ὅτι ἡ στατικὴ ἰσορροπία εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τῆς δυναμικῆς ἰσορροπίας, καθ' ὅτι ἡ πρώτη ἀναφέρεται εἰς μίαν χρονικὴν στιγμὴν τῆς ὅλης διαδικασίας. Ἡ ὅλη δὲ διαδικασία καὶ διαδρομὴ εἶναι ἀντικείμενον τῆς δυναμικῆς ἀναλύσεως.

Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν ἐκείνην τῆς δυναμικῆς ἰσορροπίας, ἡ ὁποία εἶναι γνωστὴ ὡς θεώρημα τοῦ ἱστοῦ τῆς ἀράχνης (Cobweb Theorem), καὶ ἡ ὁποία ἀποτελεῖ λίαν ἐνδιαφέρουσαν ἐφαρμογὴν τῆς ἀναλύσεως τῆς ζητήσεως καὶ προσφορᾶς πρὸς ἑρμηνείαν τῶν κυκλικῶν φαινομένων τῆς τιμῆς καὶ τῆς ποσότητος τῶν γεωργικῶν κυρίως προϊόντων. Ἐνταῦθα, θὰ λάβωμεν ὡς καμπύλας ζητήσεως καὶ προσφορᾶς εὐθείας γραμμάς.

Συμφώνως πρὸς τὸ Σχ. I.32 (α) εἰς τὴν πρώτην περίοδον ἡ προσφερομένη ποσότης εἶναι 0α, δυναμένη νὰ διατεθῇ εἰς τιμὴν 0ρ'. Εἰς τὴν ἑπομένην περίοδον ἡ ποσότης θὰ αὐξηθῇ εἰς 0β, διότι εἰς τὴν τιμὴν 0ρ' ἡ προγραμμα-

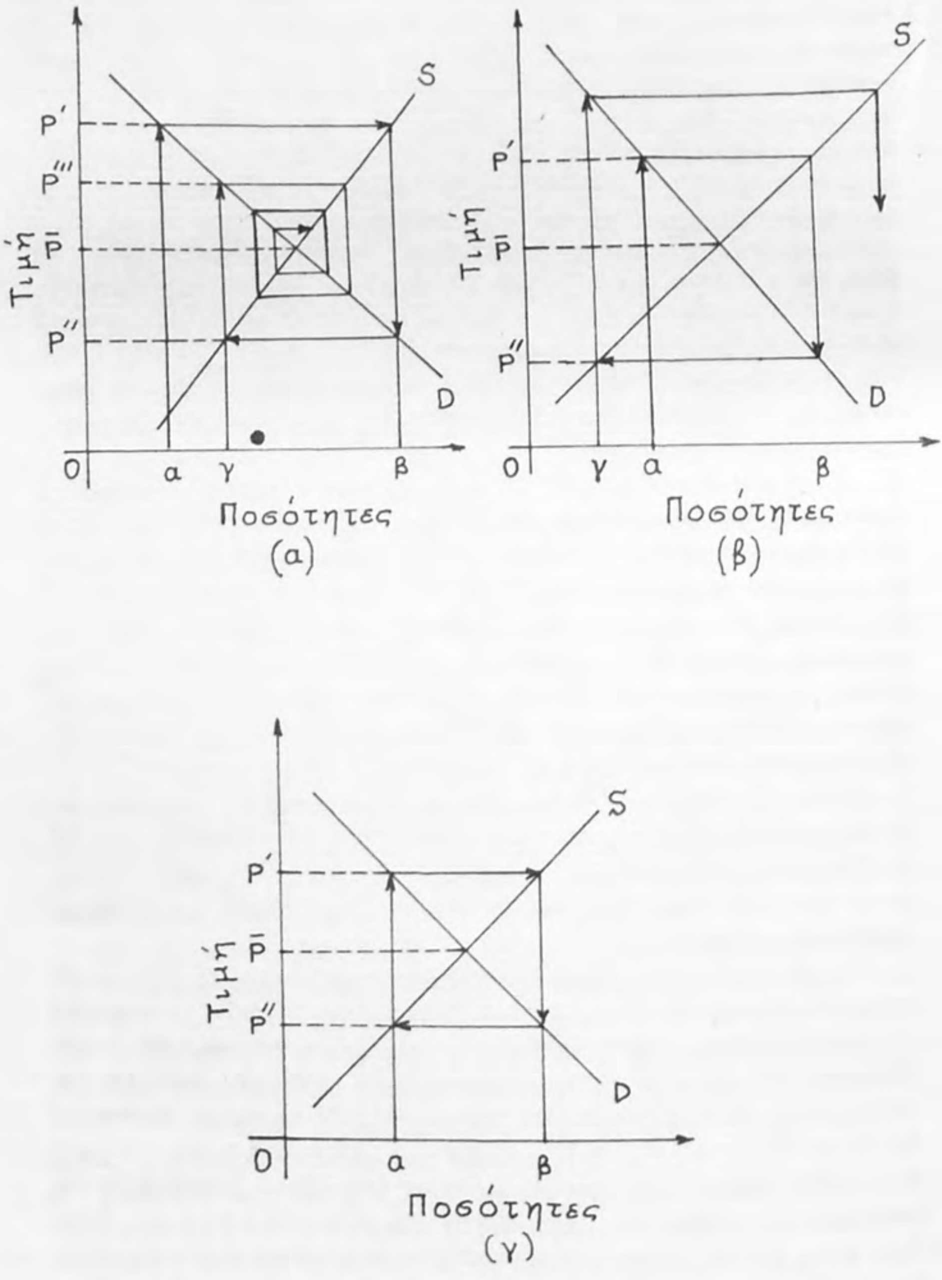
* Βλ. J. Henderson - R. Quandt, op. cit., σελ. 112 - 113.

τιζομένη παραγωγὴ (καὶ προσφορὰ) εἶναι 0β. Ἀλλὰ ποσότης 0β δύναται νὰ διατεθῇ μόνον εἰς τιμὴν 0ρ'', ἤτοι μικροτέραν ἐκείνης τῆς προηγουμένης περιόδου. Ἀπολαύοντες μικρᾶς τιμῆς κατὰ τὴν δευτέραν περίοδον, οἱ παραγωγοὶ θὰ ὁδηγηθοῦν εἰς μικροτέραν παραγωγὴν κατὰ τὴν τρίτην περίοδον, ἴσην πρὸς 0γ. Ἡ ποσότης, ὅμως αὕτη δύναται νὰ διατεθῇ εἰς τιμὴν 0ρ''', ἤτοι εἰς μεγαλυτέραν ἐκείνης τῆς δευτέρας περιόδου. Ὁπότε, οἱ παραγωγοὶ θὰ ὁδηγηθοῦν πάλιν εἰς τὴν παραγωγὴν μεγαλυτέρας ποσότητος ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν τιμὴν αὐτήν. Οὕτω ὁ κύκλος αὐξομειώσεως τιμῶν καὶ ποσοτήτων θὰ συνεχισθῇ ἀκολουθῶν τὴν διαδρομὴν τὴν ὁποίαν δεικνύουν τὰ βέλη, δίκην ἱστοῦ ἀράχνης. Ὁσάκις παρουσιάζεται ὑπερβάλλουσα ζήτησις, ἡ τιμὴ θὰ εἶναι ὑψηλὴ ὁδηγοῦσα εἰς ὑπερβάλλουσαν προσφοράν, ἡ ὁποία μὲ τὴν σειράν της θὰ ὁδηγῇ εἰς μείωσιν τῆς τιμῆς, κ.ο.κ. Τελικῶς, ἡ ὅλη διαδικασία ἔχουσα συγκλίνουσαν τάσιν θὰ ὁδηγήσῃ εἰς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τομὴ τῶν καμπύλων προσφορᾶς καὶ ζητήσεως, ἤτοι τὸ κέντρον τοῦ ἱστοῦ.

Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τοῦ Σχ. 1.32 (β) παρατηροῦμεν ὅτι ἐνταῦθα ἡ διαδικασία εἶναι ἀποκλίνουσα, διευρύνουσα συνεχῶς τὸν ἱστόν. Ἐκκινοῦντες ἐκ τῆς προσφερομένης ποσότητος 0α, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τιμὴν 0ρ', θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν δευτέραν περίοδον ποσότητα 0β ἀντιστοιχοῦσα εἰς τιμὴν 0ρ'', ἤτοι εἰς λίαν χαμηλὴν τιμήν. Ἡ τιμὴ αὕτη θὰ ὁδηγήσῃ εἰς μικροτέραν προσφοράν, ἴσην πρὸς 0γ. Ἡ μικρά, ὅμως, αὕτη προσφορὰ δύναται νὰ διατεθῇ εἰς μεγαλυτέραν τιμήν, ἡ ὁποία θὰ ὁδηγήσῃ εἰς πολὺ μεγαλυτέραν παραγωγὴν διὰ τὴν ἑπομένην περίοδον. Οὕτω συνεχῶς θὰ διευρύνεται ὁ ἱστός, τῆς διαδικασίας ἀκολουθούσης διαδρομὴν ἣν τὰ βέλη δεικνύουν.

Τέλος εἰς τὸ Σχ. 1.32 (γ), ὁ κύκλος τιμῶν— ποσοτήτων παραμένει σταθερός, τῶν ποσοτήτων καὶ τῶν τιμῶν ἐναλλασσομένων μεταξὺ 0α καὶ 0β, καὶ 0ρ' καὶ 0ρ'', ἀντιστοίχως. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν οὔτε σύγκλισιν οὔτε ἀπόκλισιν πρὸς καὶ ἐκ τῆς τομῆς (κέντρον) τῶν καμπύλων προσφορᾶς καὶ ζητήσεως.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως καὶ τῶν τριῶν γραφημάτων τοῦ Σχ. 1.32 προκύπτει ὅτι αἱ κλίσεις τῶν καμπύλων εἶναι διαφορετικαί. Ἀκριβῶς τὸ στοιχεῖον τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον διαφοροποιεῖ τὰς τρεῖς περιπτώσεις τὰς ὁποίας ἐξητάσαμεν ἀνωτέρω. Εἰς τὴν περίπτωσιν (α) ἡ κλίσις τῆς καμπύλης ζητήσεως εἶναι ἀπολύτως μικροτέρα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης προσφορᾶς καὶ τοῦτο ὁδηγεῖ εἰς *συγκλίνουσαν διαδρομήν*. Εἰς τὴν περίπτωσιν (β), ἀντιθέτως ἡ καμπύλη ζητήσεως ἔχει κλίσιν μεγαλυτέραν τῆς καμπύλης προσφορᾶς καὶ τοῦτο ὁδηγεῖ εἰς *ἀποκλίνουσαν διαδρομήν*. Εἰς τὴν περίπτωσιν (γ) ἀμφότεραι αἱ καμπύλαι ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν καὶ τοῦτο ὁδηγεῖ εἰς *«οὐδετέραν» διαδρομήν*. Οὕτω, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ κλίσεις τῶν καμπύλων ἐνέχουν σπουδαίαν βαρύτητα



S
P′
P‴
P̄
P″
Τιμή
D
O
α
γ
β
Ποσότητες
(α)
S
P′
Τιμή
P̄
P″
D
O
γ
α
β
Ποσότητες
(β)
S
P′
P̄
P″
Τιμή
D
O
α
β
Ποσότητες
(γ)

Σχ. I. 32.

διὰ τὴν ὕπαρξιν τῆς ἀνταγωνιστικῆς ἰσορροπίας εἰς ὑποδείγματα τὰ ὁποῖα χαρακτηρίζονται ἀπὸ τὸ φαινόμενον τοῦ ἱστοῦ τῆς ἀράχνης.

Τέλος, δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὑπάρχει σταθερὰ ἰσορροπία, τόσον κατὰ Marshall ὅσον καὶ κατὰ Warlas, ὡς ἡ περίπτωσις (β), ἡ δυναμικὴ θεώρησις ταύτης διὰ τῆς ἀποδοχῆς χρονικῆς ὑστερήσεως ὁδηγεῖ εἰς ἀστάθειαν καὶ ἀποκλίνουσαν διαδρομὴν τῆς διαδικασίας ἰσορροπίας.

Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τῶν γραφημάτων τοῦ Σχ. Ι.33 παρατηροῦμεν ὅτι τόσον αἱ τιμαί, ὅσον καὶ αἱ ποσότητες τοῦ ὑποδείγματος τοῦ «ἱστοῦ τῆς ἀράχνης» διακυμαίνονται πέριξ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας καὶ τῆς ποσότητος ἰσορροπίας*. Εἰς τὴν περίπτωσιν (α) ἡ διακύμανσις τῆς τιμῆς πέριξ ἐκείνης τῆς ἰσορροπίας ἔχει εὖρος συνεχῶς φθῖνον (damped) καὶ συνεπῶς συγκλίνει πρὸς ταύτην. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἐμφαίνεται εἰς τὸ γράφημα (α) τοῦ Σχ. Ι.33, ὅπου ἡ τιμὴ διακυμαίνεται πέριξ καὶ συγκλίνει πρὸς τὴν τιμὴν ἰσορροπίας ($\bar{p}$) διαχρονικῶς. Ἡ διακύμανσις, ἐξ ἄλλου, τῆς ποσότητος πέριξ ἐκείνης τῆς ἰσορροπίας (q) παρουσιάζεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὸ γράφημα (γ). Ὡς διαπιστοῦται, ἡ συσχέτισις τιμῶν καὶ ποσοτήτων εἶναι ἀρνητική, ἤτοι ὅπου ἡ τιμὴ εἶναι ἄνω τῆς τιμῆς ἰσορροπίας, ἡ ἀντιστοιχοῦσα ποσότης εἶναι κάτω τῆς ποσότητος ἰσορροπίας.

Τὴν συνεχῆ ἀπόκλισιν τόσον τῆς τιμῆς ὅσον καὶ τῆς ποσότητος ἐξ ἐκείνων τῆς ἰσορροπίας τῆς περιπτώσεως (β) τοῦ Σχ. Ι.32 παρουσιάζουν τὰ γραφήματα (β) καὶ (δ) τοῦ Σχ. Ι.33.

Τέλος, τὴν περίπτωσιν (γ) τοῦ Σχ. Ι.32, ὅπου ἡ τιμὴ καὶ ἡ ποσότης συνεχῶς διακυμαίνονται πέριξ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας ἄνευ ἀποκλίσεως ἢ συγκλίσεως, παρουσιάζουν τὰ γραφήματα (ε) καὶ (ζ) τοῦ Σχ. Ι.33.

Ἀναλυτικῶς τὸ ἀνωτέρω ὑπόδειγμα δυναμικῆς ἰσορροπίας μὲ χρονικὴν ὑστέρησιν εἰς τὴν συνάρτησιν προσφορᾶς ἔχει ὡς ἀκολούθως.

$D_t = \alpha - \beta p_t$ (ἐξίσωσις ζητήσεως)

$S_t = \gamma + \delta p_{t-1}$ (ἐξίσωσις προσφορᾶς)

$S_t = D_t$ (συνθήκη ἰσορροπίας),

ὅπου t = τρέχουσα χρονικὴ περίοδος

$t\text{-}1$ = προηγουμένη περίοδος

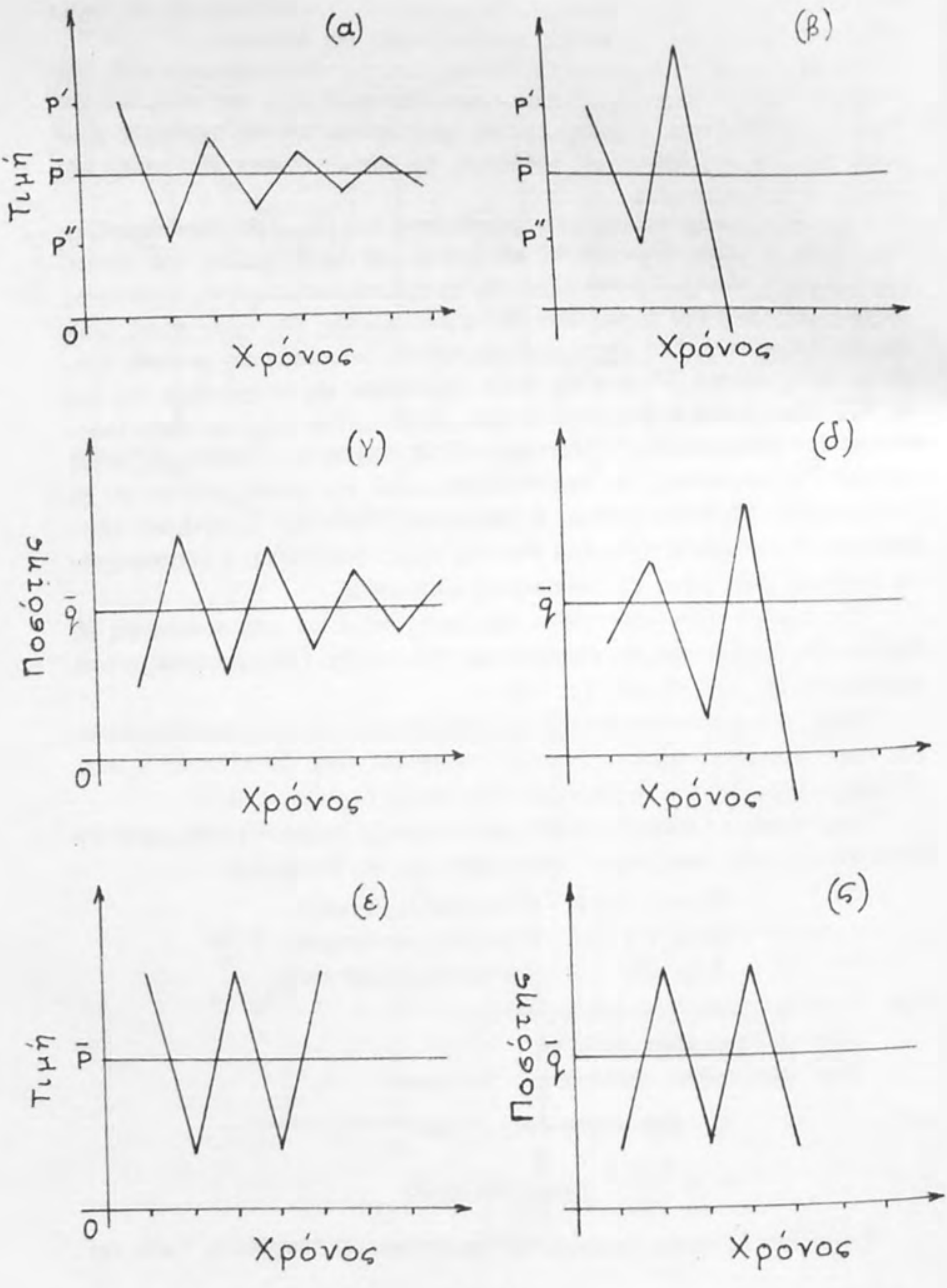
Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν

$$\alpha - \beta p_t = \gamma + \delta p_{t-1}, \quad \text{καὶ}$$

$$p_t = \frac{\alpha - \gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} p_{t-1}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δεικνύει τὴν σχέσιν μεταξὺ τρεχούσης τιμῆς καὶ

*E. Schneider, Pricing and Equilibrium, Trans. by T.W. Hutchison, σελ. 226.


(α)
Τιμή
p'
p̄
p''
0
Χρόνος
(β)
p'
p̄
p''
Χρόνος
(γ)
Ποσότης
q̄
0
Χρόνος
(δ)
q̄
Χρόνος
(ε)
Τιμή
p̄
0
Χρόνος
(ς)
Ποσότης
q̄
Χρόνος

Σχ. I. 33.

τιμῆς τῆς προηγουμένης περιόδου*. Θὰ ὑπάρξῃ δυναμικὴ ἰσορροπία ἐὰν ἡ τιμὴ εἶναι σταθερὰ ἀπὸ περιόδου εἰς περίοδον, δηλονότι ἡ τιμὴ ἰσορροπίας θὰ εἶναι ἐκείνη ἥτις ἐπαναλαμβάνεται διὰ μέσου τοῦ χρόνου. Συνεπῶς θέτοντες $p_t = p_{t-1} = p$ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν λαμβάνομεν

$$p = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta} \text{ (τιμὴ ἰσορροπίας)}$$

Ὡς καὶ ἐκ τῆς γραφικῆς ἀναλύσεως διεπιστώθη, αἱ συνθῆκαι συγκλίσεως πρὸς καὶ ἀπομακρύνσεως ἐκ τῆς ἰσορροπίας εἶναι:

$|\beta| < \delta$, συνθήκη συγκλίσεως

$|\beta| > \delta$, συνθήκη ἀποκλίσεως

$|\beta| = \delta$, συνθήκη ἀορίστου ἰσορροπίας

1.2.5. **Ἡ δυναμικὴ ἰσορροπία εἰς τὴν περίπτωσιν καμπύλης προσφορᾶς ἀρνητικῆς κλίσεως.** Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ καμπύλη προσφορᾶς ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν τὸ ὑπόδειγμα δυναμικῆς ἰσορροπίας θὰ ἔχῃ ὡς ἀκολούθως:

$$D_t = \alpha - \beta p_t$$
$$S_t = \gamma - \delta p_{t-1}$$
$$S_t = D_t$$

ἐξ οὗ προκύπτει $\bar{p} = \dfrac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta}$ (τιμὴ ἰσορροπίας),

ὅταν $p_t = p_{t-1} = p$.

Αἱ συνθῆκαι ἰσορροπίας θὰ εἶναι αἱ αὐταί. Ἤτοι, ἡ τιμὴ θὰ συγκλίνῃ πρὸς τὴν τιμὴν ἰσορροπίας, ὅταν ἡ κλίσις τῆς καμπύλης προσφορᾶς εἶναι, ἀπολύτως λαμβανομένη, μεγαλυτέρα ἐκείνης τῆς καμπύλης ζητήσεως, καὶ θὰ ἀπομακρύνεται συνεχῶς πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὰ κάτω ὅταν αὕτη εἶναι μικροτέρα ἐκείνης τῆς καμπύλης ζητήσεως**. Ὅταν αἱ κλίσεις τῶν καμπύλων προσφορᾶς καὶ ζητήσεως εἶναι αἱ αὐταί, τοῦτο σημαίνει ὅτι αὗται ταυτίζονται καὶ συνεπῶς ὑπάρχει ἀπροσδιοριστία καθ' ὅσον ἀφορᾶ τὸ σημεῖον ἰσορροπίας.

Τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς $|\delta| > |\beta|$ (σύγκλισις πρὸς ἰσορροπίαν) καὶ $|\delta| < |\beta|$ (ἀπόκλισις ἐκ τῆς ἰσορροπίας) ἐμφαίνουν τὰ κατωτέρω γραφήματα.

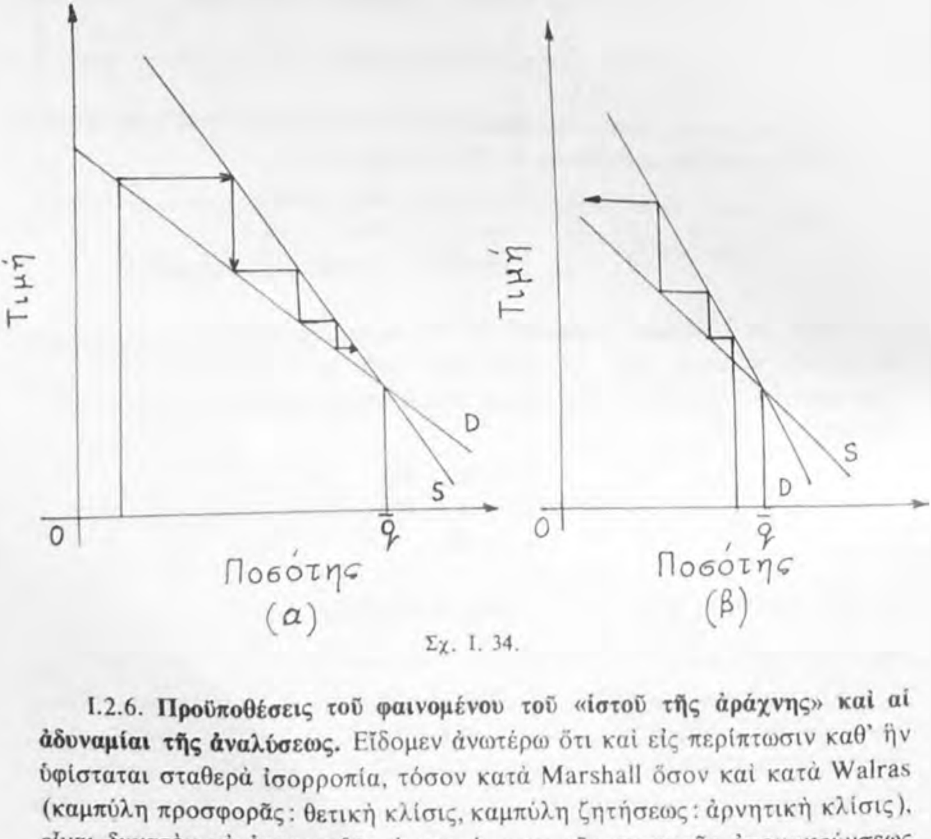
---

* Ἡ λύσις τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως διαφορῶν πρώτης τάξεως, ὅταν ἡ ἀρχικὴ τιμὴ εἶναι $P = P_0$ $(t = o)$, ἔχει ὡς ἀκολούθως:

$$P_t = \left(P_0 - \left(\frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}\right)\right)\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}$$

** Αἱ κλίσεις λαμβάνονται πάντοτε ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ποσοτήτων κατὰ σύμβασιν.

Τὸ Σχ. Ι.34 (α) ἐμφαίνει τὴν περίπτωσιν τῆς συνεχοῦς συγκλίσεως πρὸς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας, τὸ δὲ Σχ. Ι.34 (β) δεικνύει τὴν περίπτωσιν τῆς συνεχοῦς ἀποκλίσεως.



Σχ. Ι. 34.

Ι.2.6. Προϋποθέσεις τοῦ φαινομένου τοῦ «ἱστοῦ τῆς ἀράχνης» καὶ αἱ ἀδυναμίαι τῆς ἀναλύσεως. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι καὶ εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ὑφίσταται σταθερὰ ἰσορροπία, τόσον κατὰ Marshall ὅσον καὶ κατὰ Walras (καμπύλη προσφορᾶς: θετικὴ κλίσις, καμπύλη ζητήσεως: ἀρνητικὴ κλίσις), εἶναι δυνατὸν νὰ ἐμφανισθῇ τὸ φαινόμενον τῆς συνεχοῦς ἀπομακρύνσεως τῆς τιμῆς ἢ τῆς ποσότητος ἀπὸ τῆς τιμῆς ἢ ποσότητος ἰσορροπίας. Αἱ προϋποθέσεις πρὸς ἐμφάνισιν τοῦ φαινομένου τούτου εἶναι αἱ κάτωθι*:

(α) Ἡ προσφορὰ προσαρμόζεται πρὸς τὴν ζήτησιν μὲ χρονικὴν ὑστέρησιν μιᾶς περιόδου.

(β) Αἱ καμπύλαι προσφορᾶς καὶ ζητήσεως δὲν παρουσιάζουν μετατοπίσεις, ἤ, ταὐτό, ὅτι αἱ παράμετροι τῶν ἐξισώσεων προσφορᾶς καὶ ζητήσεως δὲν μεταβάλλονται.

(γ) Ἡ τιμὴ καθορίζεται ἀπὸ τὴν ζήτησιν ἀναλόγως πρὸς τὴν προσφερομένην ποσότητα εἰς ἑκάστην περίοδον.

---

* F.G. Hooton, «Risk and the Cobweb Theorem», εἰς Economic Journal, Vol. LX., Μάρτιος 1950, σελ. 74.

(δ) Ἡ ἐκκίνησις τῶν διακυμάνσεων γίνεται ἀπὸ σημείου ἀντιστοιχοῦντος εἰς ποσότητα μικροτέραν ἢ μεγαλυτέραν ἐκείνης τῆς ποσότητος ἰσορροπίας.

Ἔναντι, ὅμως, τῶν προϋποθέσεων ἐπὶ τῶν ὁποίων θεμελιοῦται τὸ φαινόμενον τοῦ «ἱστοῦ τῆς ἀράχνης» ὑφίστανται σοβαραὶ ἀντιρρήσεις. Διὰ τὴν ἐμφάνισιν τοῦ φαινομένου θὰ πρέπει οἱ παραγωγοὶ νὰ προβλέπουν ὅτι ἡ τιμή, ἥτις ἐπικρατεῖ σήμερον, θὰ ἐπικρατῇ ἐπίσης καὶ τὴν ἑπομένην περίοδον. Τὴν ἑπομένην ὅμως περίοδον οὗτοι διαπιστώνουν ὅτι, λόγῳ τῆς ηὐξημένης προσφορᾶς, ἡ τιμὴ εἶναι μειωμένη κάτω τῆς τιμῆς ἰσορροπίας καὶ συνεπῶς ὅτι αἱ προβλέψεις των ἦσαν ἀνακριβεῖς. Τὸ θεώρημα, λοιπόν, τοῦ «ἱστοῦ τῆς ἀράχνης» στηρίζεται εἰς μίαν τοιαύτην μὴ ὀρθὴν ἐπιχειρηματικὴν συμπεριφοράν*, ἀφοῦ ἡ διάψευσις τῶν προσδοκιῶν συνεχίζεται καὶ μετὰ τὴν πρώτην καὶ δευτέραν περίοδον.

Ἑτέρα ἀντίρρησις ἔναντι τοῦ φαινομένου τῆς ἀποκλίσεως ἀπὸ τῆς τιμῆς τῆς ἰσορροπίας καὶ τῆς διηνεκοῦς διακυμάνσεως τῶν τιμῶν πέριξ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας εἶναι ὅτι εἰσάγομεν χρονικὰς περιόδους εἰς τὴν ἀνάλυσιν (χρονικὴ ὑστέρησις τῆς παραγωγῆς), ἥτις παρὰ τὴν χρονικὴν διαδρομὴν παραμένει στατική. Τοῦτο δὲ διότι τὸ ὑπόδειγμά μας περιγράφει μὲν τὴν χρονολογικὴν σειρὰν τῶν διακυμάνσεων τῶν τιμῶν, ἀγνοεῖ, ὅμως, τὴν ἐπίδρασιν ἣν ἀσκοῦν αἱ διακυμάνσεις ἐπὶ τῶν ἐπιχειρηματικῶν καὶ καταναλωτικῶν προσδοκιῶν (κίνδυνος καὶ κερδοσκοπία), καὶ κατ' ἐπέκτασιν ἐπὶ τῶν ἐλαστικοτήτων τῶν καμπύλων προσφορᾶς καὶ ζητήσεως**. Πράγματι ἡ συνεχὴς διακύμανσις τῶν τιμῶν καὶ τῶν ποσοτήτων ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν ἐπαύξησιν τοῦ ἐπιχειρηματικοῦ κινδύνου, πρᾶγμα ὅπερ καθιστᾶ ὀλιγότερον ἐλαστικὴν τὴν προσφορὰν (αὔξησις τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης προσφορᾶς), καὶ δυνατὴν τὴν κερδοσκοπίαν ἐπὶ τῶν ἀποθεμάτων, πρᾶγμα ὅπερ καθιστᾶ τὴν ζήτησιν περισσότερον ἐλαστικὴν (μείωσις τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης ὡς πρὸς τὸ ἄξονα τῶν ποσοτήτων). Κατ' ἀκολουθίαν, τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ ἐπιχειρηματικοῦ κινδύνου καὶ τῆς κερδοσκοπίας θὰ εἶναι ἡ μετατροπὴ διηνεκῶν καὶ ἀποκλινουσῶν διακυμάνσεων εἰς συγκλινούσας τοιαύτας, δεδομένου ὅτι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης ζητήσεως ἀποβαίνει μεγαλυτέρα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης προσφορᾶς συνεπείᾳ τοῦ κινδύνου καὶ τῆς κερδοσκοπίας. Ἐπίσης, ἀποτέλεσμα τῆς κερδοκσοπίας καὶ τοῦ κινδύνου εἶναι ἡ μετατροπὴ συγκλινουσῶν διακυμάνσεων εἰς περισσότερον ἢ ταχύτερον συγκλινούσας τοιαύτας.

Τέλος, δέον νὰ τονίσωμεν ὅτι οὐδὲν εἶναι ἀπολύτως βέβαιον καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν διατήρησιν τῆς ἰσορροπίας, ἅπαξ αὕτη ἐπιτευχθῇ, καὶ τὴν συνέ-

---

* Βλ. E. Schneider, op. cit., σελ. 228.

** Βλ. F.G. Hooton, op. cit., σελ. 77-80.

χισιν τῆς συγκλίσεως πρὸς τὴν ἰσορροπίαν. Εἶναι δυνατὸν κατὰ τὴν διαδρομὴν τῶν διακυμάνσεων διάφοροι δυνάμεις ἐκτὸς τοῦ συστήματος νὰ καταστήσουν τόσον τὴν προσφορὰν ὅσον καὶ τὴν ζήτησιν ἀνελαστικωτέρας, ὁπότε ἡ διακύμανσις τιμῶν — ποσοτήτων ἀπὸ συγκλίνουσα καθίσταται καὶ πάλιν ἀποκλίνουσα.

1.2.7. **Ἐπίδρασις τοῦ φόρου ἐπὶ τῆς ἀγοραίας ἰσορροπίας.** Ἡ ἐπιβολὴ φορολογίας ἐπὶ τῆς τιμῆς ἀγαθοῦ τινος ὑπὸ μορφὴν εἰδικοῦ φόρου* ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν μεταβολὴν τῆς τιμῆς καὶ ποσότητος ἰσορροπίας τοῦ ἀγαθοῦ εἰς τὴν ἀγοράν. Τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα ὑποθέτοντες ὅτι ἐπικρατεῖ ἐλεύθερος ἀνταγωνισμὸς εἰς τὴν ἀγορὰν τοῦ ἀγαθοῦ καὶ ὅτι ἡ ἀγοραία ζήτησις δὲν ἐπηρεάζεται ἐκ τῆς ἐπιβολῆς τοῦ φόρου, ἤτοι οἱ ἀγορασταὶ εἶναι ἀδιάφοροι διὰ τὴν ὕπαρξιν ἢ μὴ τοῦ φόρου. Οὗτοι εἶναι πρόθυμοι νὰ ἀγοράζουν εἰς ὡρισμένην τιμὴν ὡρισμένην ποσότητα, ἀδιαφόρως τοῦ ἐὰν ἡ τιμὴ περιλαμβάνει μικρὰν ἢ μεγάλην ἀναλογίαν φορολογικῆς ἐπιβαρύνσεως. Τὸ ποσὸν τοῦ φόρου προστιθέμενον εἰς τὸ ὁριακὸν κόστος τοῦ ἀγαθοῦ ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν μετάθεσιν τῆς καμπύλης τοῦ ὁριακοῦ κόστους. Δεδομένου ὅτι ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους εἶναι ταυτόσημος πρὸς τὴν καμπύλην προσφορᾶς τῆς παραγωγικῆς μονάδος, ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιβολὴ τοῦ φόρου μεταθέτει τὴν καμπύλην προσφορᾶς πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν ἔκτασιν τοῦ ποσοῦ τοῦ φόρου. Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ἀγοραία προσφορὰ ἀποτελεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους προσφορῶν τῶν παραγωγικῶν μονάδων, θὰ ἔχωμεν ἐπίσης μετάθεσιν τῆς καμπύλης ἀγοραίας προσφορᾶς.

Ἃς χωρήσωμεν εἰς μίαν διαγραμματικὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἀποτελέσματος τῆς ἐπιβολῆς φόρου ἐπὶ τῆς ἰσορροπίας εἰς τὴν ἀγοράν. Εἰς τὸ Σχ. 1.35 (α), ἐν ἀρχῇ, ὑποθέτομεν τελείως ἀνελαστικὴν καμπύλην ζητήσεως. Ἡ τιμὴ καὶ ἡ ποσότης ἰσορροπίας πρὸ τοῦ φόρου εἶναι 0p καὶ 0q ἀντιστοίχως. Μετὰ τὴν ἐπιβολὴν τοῦ φόρου ἡ καμπύλη προσφορᾶς μετατίθεται πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ τιμὴ αὐξάνει εἰς 0p', ἤτοι κατὰ pp', ὅσον δηλαδὴ καὶ τὸ ποσὸν τοῦ φόρου κατὰ μονάδα προσφερομένης ποσότητος. Ἡ ποσότης παραμένει ἡ αὐτή. Οὕτω ὅλον τὸ βάρος τοῦ φόρου φέρει ὁ καταναλωτής.

Ἐὰν ἡ καμπύλη ζητήσεως εἶναι πλήρως ἐλαστική, ὡς εἰς τὸ Σχ. 1.35 (β), τότε τὸ βάρος τοῦ φόρου φέρει ὁ παραγωγός, δεδομένου ὅτι ἡ τιμὴ παραμένει ἀμετάβλητος εἰς 0p. Ἀντιθέτως ἡ ποσότης μειοῦται ἀπὸ 0q εἰς 0q'. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ εἰσπράξεις τοῦ παραγωγοῦ μειοῦνται ἀπὸ 0qap εἰς 0q'βp. Τὸ ποσὸν τῆς μειώσεως τῶν εἰσπράξεων θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς

---

*Ὁ ε ἰ δ ι κ ὸ ς φόρος ἀναφέρεται εἰς τὴν κατ' εἶδος ἢ ποσότητα (κατὰ χιλιόγραμμον, τεμάχιον, κλπ.) ἐπιβάρυνσιν, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸν a d v a l o r e m φόρον, ὅστις ἀναφέρεται εἰς τὸ ποσοστὸν ἐπιβαρύνσεως τῆς τιμῆς ἢ τῆς ἀξίας τοῦ ἀγαθοῦ.

αὐξήσεως τῆς τιμῆς ($\Delta p = \alpha\gamma$) ἐπὶ τὸ ποσὸν τῆς μειώσεως τῆς ποσότητος ($\Delta q = \alpha\beta$), ἤτοι

$$\Delta q \, \Delta p = q'q\alpha\beta$$

Ἐὰν ἡ καμπύλη ζητήσεως παρουσιάζῃ τὴν συνήθη μορφὴν ὡς εἰς τὸ Σχ. I.35 (γ), τότε ἔχομεν τὴν μεταξὺ τῶν δύο ἀνωτέρω ἀκραίαν περίπτωσιν. Πρὸ τῆς ἐπιβολῆς τοῦ φόρου ἡ τιμὴ καὶ ποσότης τῆς ἰσορροπίας εἶναι 0p καὶ 0q ἀντιστοίχως, ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας α. Μετὰ τὴν ἐπιβολὴν τοῦ φόρου ἡ καμπύλη προσφορᾶς μετατίθεται πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὸ ποσὸν τούτου, ἤτοι κατὰ αγ. Τοῦτο ἔχει ως συνέπειαν τὴν μεταβολὴν τοῦ σημείου ἰσορροπίας ἀπὸ α εἰς β. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀντιστοιχεῖ τιμὴ 0p' καὶ ποσότης 0q'. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς κατὰ pp' εἶναι μικροτέρα τοῦ ποσοῦ τοῦ φόρου αγ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ βάρος τοῦ φόρου φέρουν κατὰ ποσὸν pp' οἱ καταναλωταὶ καὶ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον οἱ παραγωγοί. Τὸ ποσοστὸν κατὰ συνέπειαν τῆς αὐξήσεως τῆς τιμῆς, κατὰ τὸ ὁποῖον ἐπιβαρύνονται οἱ καταναλωταὶ εἶναι ἴσον πρὸς pp'/αγ. Τὸ μέγεθος ὅμως, τοῦ ποσοστοῦ τούτου ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν κλίσεων τῶν καμπύλων προσφορᾶς καὶ ζητήσεως.

Ἐκ τῶν γραφημάτων τοῦ Σχ. I.35 προκύπτει, ὅτι ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης προσφορᾶς καὶ ὅσον μικροτέρα (ἀπολύτως) ἡ κλίσις τῆς καμπύλης ζητήσεως, τόσον μικροτέρα εἶναι ἡ ἀναλογία τοῦ φόρου, ἥτις πίπτει ἐπὶ τοῦ καταναλωτοῦ. Τὸ Σχ. I.35 (δ) ἐμφαίνει τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μὲν καμπύλη προσφορᾶς ἔχει κλίσιν μεγάλην, ἡ δὲ καμπύλη ζητήσεως (D') κλίσιν μικράν. Εἶναι ἔκδηλον ὅτι ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς εἶναι μικρὰ ἐν σχέσει πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἐπιβληθέντος φόρου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. I.35 (α) ἡ καμπύλη ζητήσεως ἔχει κλίσιν ἴσην πρὸς τὸ ἄπειρον καὶ συνεπῶς ἡ ἀναλογία τῆς ἐπιπτώσεως τοῦ φόρου ἐπὶ τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι 100%. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. I.35 (β), ἡ κλίσις τῆς καμπύλης ζητήσεως εἶναι μηδενικὴ καὶ συνεπῶς ἡ ἀναλογία εἶναι μηδέν.

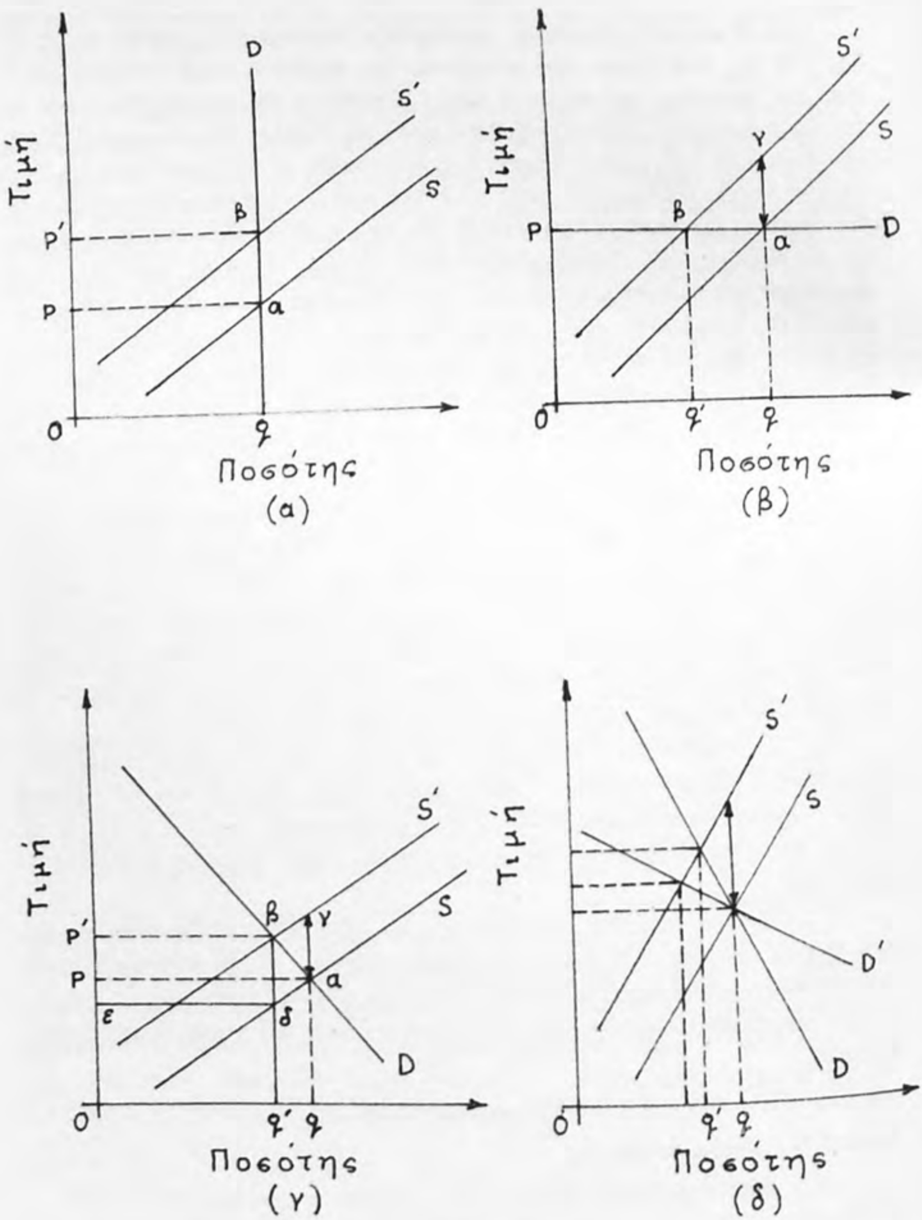
Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν παρουσίασιν τῆς ἐπιδράσεως τοῦ φόρου ἐπὶ τῆς ἰσορροπίας χρησιμοποιοῦντες τὸ ἁπλοῦν ὑπόδειγμα προσφορᾶς καὶ ζητήσεως ἀγαθοῦ*. Ἔστω ὅτι ὁ κλάδος παραγωγῆς τοῦ ἀγαθοῦ ἀποτελεῖται ἐκ 10 μονάδων αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς αὐτὰς συναρτήσεις κόστους.

$$C_i = 5 + 0{,}33q_i^2 + q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 10.$$

ὅπου C = συνολικὸν κόστος

q = παραγομένη ποσότης.

* Βλέπε καὶ Henderson and Quandt, op. cit., σελ. 105 - 107.


Τιμή
D
S'
S
β
P'
P
α
O
q
Ποσότης
(α)
Τιμή
S'
S
γ
β
P
D
α
O
q'
q
Ποσότης
(β)
Τιμή
S'
S
β
γ
P'
P
α
ε
δ
D
O
q'
q
Ποσότης
(γ)
Τιμή
S'
S
D'
D
O
q'
q
Ποσότης
(δ)

Σχ. I. 35.

Ἤδη ἐλέχθη ὅτι ἡ τιμὴ πωλήσεως ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ὁριακὸν κόστος καὶ ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους θὰ εἶναι ἡ καμπύλη προσφορᾶς τῆς παραγωγικῆς μονάδος. Τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος * τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως συνολικοῦ κόστους καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$p = 0{,}66q_i + 1$$

Λύοντες ὡς πρὸς q_i καὶ θέτοντες $q_i = S_i$ (προσφερομένη ποσότης) λαμβάνομεν

$S_i = -1{,}5 + 1{,}5p$ καὶ

$S = -15 + 15p$, δι' ὁλόκληρον τὸν κλάδον**.

Ὑποθέτοντες ὅτι ἐπεβλήθη φόρος t ἐπὶ ἑκάστης παραγομένης μονάδος, ἡ συνάρτησις κόστους θὰ εἶναι

$$C_i = 5 + 0{,}33q_i^2 + (1 + t)q_i$$

Ἡ συνάρτησις προσφορᾶς ἐπίσης θὰ εἶναι

$S_i = -1{,}5 + 1{,}5\,(p-t)$ καὶ

$S = -15 + 15\,(p-t)$, δι' ὁλόκληρον τὸν κλάδον.

Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ καμπύλη τῆς ἀγοραίας ζητήσεως εἶναι $D = 60 - 10p$ καὶ δεδομένου ὅτι ὑπὸ συνθήκας ἰσορροπίας $D = S$, θὰ ἔχωμεν:

(α) Τιμὴ — ποσότης ἰσορροπίας πρὸ τῆς ἐπιβολῆς τοῦ φόρου

$$60 - 10p = -15 + 15p$$

$$p = 3$$

$$D = S = 30$$

(β) Τιμὴ — ποσότης ἰσορροπίας μετὰ τὴν ἐπιβολὴν τοῦ φόρου

$$60 - 10p = -15 + 15\,(p-t)$$

$$p = 3 + \frac{3}{5}t$$

$$D = S = 30 - 6t$$

Ἐὰν ὁ φόρος εἶναι 0,50 νομισματικαὶ μονάδες τότε,

$$p = 3{,}30$$

$$D = S = 27$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ὑπὸ τὰς δεδομένας συναρτήσεις προσφορᾶς καὶ ζητήσεως, ἡ ἐπιβολὴ τοῦ φόρου ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴν μεταβολὴν τῆς ἰσορροπίας τῆς ἀντιστοιχούσης πρὸς p= 3 καὶ D= S= 30 εἰς νέαν

* Εἰς ἕτερον τμῆμα τοῦ παρόντος θὰ ὁμιλήσωμεν περὶ παραγώγων.

** Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ἀκριβῶς ἡ δοθεῖσα εἰς τὴν σελ. 63

τοιαύτην ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς ὑψηλοτέραν τιμὴν καὶ μικροτέραν ποσότητα. Ἐκ τῆς ἐπιβολῆς φόρου 0,50 νομ. μονάδων οἱ καταναλωταὶ ἐπιβαρύνονται κατὰ 0,30 ἤτοι 60% καὶ οἱ παραγωγοὶ κατὰ 0,20, ἤτοι 40%.

Δεδομένου ὅτι αἱ κλίσεις τῶν καμπύλων, ἤτοι οἱ γωνιακοὶ συντελεσται τῶν ἐξισώσεων ἀπολύτως λαμβανόμενοι, προσφορᾶς καὶ ζητήσεως, ἀποτελοῦν τὸν κρίσιμον παράγοντα τοῦ ἐπιμερισμοῦ τοῦ φόρου μεταξὺ καταναλωτοῦ καὶ παραγωγοῦ, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ποσοστιαίαν ἀναλογίαν τοῦ φόρου τὴν ὁποίαν φέρει ὁ καταναλωτὴς ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\text{Αὔξησις τιμῆς}}{\text{Ποσὸν φόρου}} = \frac{\beta_s}{\beta_s + \beta_D},$$

ὅπου β_s = γωνιακὸς συντελεστὴς ἐξισώσεως προσφορᾶς

β_D = γωνιακὸς συντελεστὴς ἐξισώσεως ζητήσεως.

Συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω τύπον ἡ ποσοστιαία ἀναλογία τοῦ φόρου ὅστις ἐπιβαρύνει τὸν καταναλωτὴν κατὰ τὸ ανωτέρω παράδειγμα εἶναι

$$\frac{15}{15+10} = 0{,}60, \text{ ἤτοι } 60\%.$$

Ἀνωτέρω προέβημεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς ἐπιδράσεως τοῦ εἰδικοῦ φόρου ἐπὶ τῆς ἀγοραίας ἰσορροπίας. Ἡ αὐτὴ ἀνάλυσις ἐφαρμόζεται διὰ πᾶσαν μορφὴν φορολογικῆς ἢ δασμολογικῆς ἐπιβαρύνσεως. Πλὴν ὅμως τῆς περιπτώσεως τῆς ἐπιβαρύνσεως ὑφίσταται καὶ ἡ περίπτωσις τῆς ἐπιδοτήσεως τῆς παραγωγῆς κατὰ μονάδα ποσότητος. Ἡ ἀνάλυσις θὰ χωρήσῃ ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ φόρου, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀντίθετον κατεύθυνσιν, διότι ἡ ἐπιδότησις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀρνητικὸς φόρος*. Δηλαδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀντὶ τῆς λήψεως ἑνὸς τμήματος τῆς τιμῆς, τὸ κράτος προσθέτει εἰς τὴν τιμὴν καὶ οὕτω ὁ παραγωγὸς λαμβάνει μίαν τιμὴν ἡ ὁποία ὑπερβαίνει τὴν τιμὴν τὴν ὁποίαν ὁ καταναλωτὴς καταβάλλει. Τοῦτο ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν αὔξησιν τῆς προσφερομένης ποσότητος. Διαγραμματικῶς δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὴν περίπτωσιν τῆς ἐπιδράσεως τῆς ἐπιδοτήσεως ἐπὶ τῆς τιμῆς καὶ τῆς ποσότητος ἰσορροπίας διὰ μεταθέσεως τῆς καμπύλης προσφορᾶς πρὸς τὰ δεξιά. Ἡ ἐξίσωσις προσφορᾶς θὰ εἶναι

$$S = -15 + 15\,(p + \varepsilon),$$

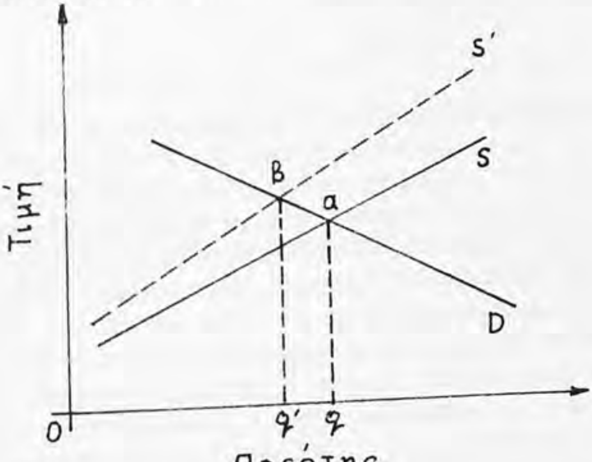
ὅπου ε = ἐπιδότησις.

1.2.8. Ἡ ἐπίδρασις τοῦ ad valorem φόρου ἐπὶ τῆς ἰσορροπίας. Ὁ ad valorem φόρος δὲν ἀποτελεῖ στεθερὸν ποσὸν ἀλλὰ σταθερὸν ποσοστὸν ἐπὶ τῆς ἑκάστοτε τιμῆς. Συνεπῶς, εἰς τὴν περίπτωσιν ἐπιβολῆς ἑνὸς τοιούτου

---

* Βλ. K. E. Boulding, Economic Analysis, 3rd Edition, σελ. 144 - 145.

φόρου ἡ μετάθεσις τῆς καμπύλης προσφορᾶς δὲν θὰ εἶναι παράλληλος, ἀλλὰ ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ. 1.36.



Σχ. 1. 36.

Πρὸ τῆς ἐπιβολῆς τοῦ κατ' ἀξίαν φόρου ἡ τιμὴ καὶ ἡ ποσότης ἰσορροπίας ἦσαν αq καὶ 0q ἀντιστοίχως. Μετὰ τὴν ἐπιβολὴν τοῦ φόρου ἡ καμπύλη προσφορᾶς μετετέθη ἀπὸ S εἰς S'. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπιβάλλεται φόρος 20% ἐπὶ τῆς τιμῆς πωλήσεως, τότε ἡ κάθετος ἀπόστασις μεταξὺ S καὶ S' εἶναι τὸ 1/4 τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ S καὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων. Κατόπιν τῆς ἐπιβολῆς τοῦ φόρου, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ εἰδικοῦ φόρου, εἰς ἑκάστην δεδομένην τιμήν, οἱ παραγωγοὶ θὰ παράγουν μικροτέραν ποσότητα, δεδομένου ὅτι θὰ λαμβάνουν τιμὴν μικροτέραν ἐκείνης τὴν ὁποίαν οἱ καταναλωταὶ πληρώνουν. Τὸ νέον σημεῖον ἰσορροπίας εἶναι τὸ β, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς μικροτέραν ποσότητα καὶ μεγαλυτέραν τιμήν.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ποσοστὸν τοῦ φόρου ἐπὶ τῆς τιμῆς εἶναι t%, τότε τὸ ὑπόδειγμα τῆς ἀγοραίας ἰσορροπίας θὰ ἔχῃ ὡς ἀκολούθως:

$$D = 60 - 10p$$
$$S = -15 + 15(p - pt)$$
$$D = S$$

1.2.9. **Αἱ ἐκ φόρου εἰσπράξεις τοῦ Δημοσίου καὶ ἡ δαπάνη δι' ἐπιδότησιν.** Τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον θὰ εἰσπράξῃ τὸ Δημόσιον ἐκ τῆς ἐπιβολῆς ἑνὸς εἰδικοῦ δασμοῦ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ποσότητος ἰσορροπίας ἐπὶ τὸ ποσὸν τοῦ φόρου, ἤτοι,

$$R = tS = tD,$$
ἢ $R = t[-15 + 15(p - t)] = t(60 - 10p)$

Τὸ ποσὸν ἐξ ἄλλου τὸ ὁποῖον καταβάλλει τὸ Δημόσιον διὰ τὴν ἐνίσχυσιν τῆς παραγωγῆς θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ποσότητος ἰσορροπίας ἐπὶ τὸ ποσὸν τῆς ἐπιδοτήσεως, ἤτοι

$$E = \varepsilon S = \varepsilon D,$$

ἢ $$E = \varepsilon[-15 + 15(p + \varepsilon)] = \varepsilon(60 - 10p).$$

Τὴν διαγραμματικὴν παρουσίασιν τῶν εἰσπράξεων ἐκ τῆς φορολογίας ἐμφαίνει τὸ Σχ. I.35 (γ). Τὸ ποσὸν τοῦ φόρου εἶναι αγ ἢ βδ, ἡ δὲ ποσότης ἰσορροπίας εἶναι 0q'. Ἄρα τὸ γινόμενον 0q'×βδ, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ρ'βδε, εἶναι τὸ σύνολον τῶν εἰσπράξεων ἐκ τῆς φορολογίας. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ἐξαρτᾶται, ὡς εἰκός ἐκ τῶν κλίσεων τῶν καμπύλων προσφορᾶς καὶ ζητήσεως. Γενικῶς δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ὅσον ἀνελαστικώτεραι εἶναι αἱ καμπύλαι, τόσον μεγαλύτερα θὰ εἶναι τὰ ἔσοδα τοῦ Δημοσίου καὶ μικροτέρα ἡ δαπάνη δι' ἐπιδότησιν.

Ὁ φόρος ὅστις ἀποδίδει τὰ μεγαλύτερα ἔσοδα μὲ δεδομένας τὰς καμπύλας ζητήσεως καὶ προσφορᾶς εἶναι ὁ ἀποδοτικώτερος ταμιευτικῶς. Οὗτος εὑρίσκεται, ὡς εἰκός, μεταξὺ ἑνὸς ὑψηλοῦ καὶ ἑνὸς χαμηλοῦ ἐπιπέδου φόρου, ὥστε προσπάθεια αὐξήσεως τούτου θὰ εἶχεν ὡς συνέπειαν τὴν μείωσιν τῶν συνολικῶν ἐσόδων τῆς φορολογίας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ ὑψηλότερος φόρος δὲν εἶναι καὶ ὁ ἀποδοτικώτερος ταμιευτικῶς. Ἐν τούτοις δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ὁ ἀποδοτικώτερος φόρος ἀπὸ ταμιευτικῆς ἀπόψεως δὲν εἶναι πάντοτε καὶ ὁ ἰδανικὸς φόρος ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς οἰκονομίας*.

Μὲ δεδομένας τὰς ἐξισώσεις προσφορᾶς καὶ ζητήσεως, ὡς ἀνωτέρω προκύπτουν, εἰς ἕκαστον ἐπίπεδον φόρου θὰ ἔχωμεν διαφορετικὸν ὕψος τιμῆς καὶ ποσότητος ἰσορροπίας, ὡς καὶ συνολικῶν ἐσόδων ἐκ τοῦ φόρου, ὡς τὰ κατωτέρω στοιχεῖα δεικνύουν.

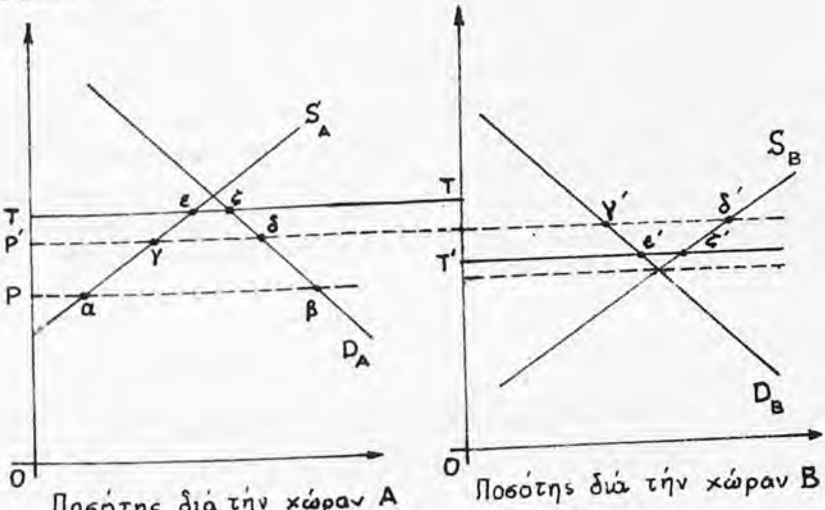
$t = 0{,}50$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
$p = 3{,}30$	$p = 3{,}60$	$p = 4{,}20$	$p = 4{,}80$
$S = D = 27$	$S = D = 24$	$S = D = 18$	$S = D = 12$
$R = 13{,}50$	$R = 24$	$R = 36$	$R = 36$

$t = 4$	$t = 5$	$t = 2{,}5$
$p = 5{,}4$	$p = 6$	$p = 4{,}50$
$S = D = 6$	$S = D = 0$	$S = D = 15$
$R = 24$	$R = 0$	$R = 37{,}50$

I.2.10. **Ἰσορροπία εἰς τὸ διεθνὲς ἐμπόριον καὶ ἡ ἐπίδρασις τῶν δασμῶν ἐπὶ ταύτης.** Ἡ ἀνάλυσις τῆς ἰσορροπίας προσφορᾶς καὶ ζητήσεως δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἓν ἀγαθὸν εἶναι ἐμπορεύσιμον

* K. E. Boulding, op. cit., σελ. 146.

διεθνῶς. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχουν δύο χῶραι, αἱ Α καὶ Β, τότε θὰ ἔχωμεν μίαν ἀγορὰν διὰ τὸ ἀγαθὸν δι᾽ ἑκάστην ἐξ αὐτῶν, ὡς ἐμφαίνουν τὰ γραφήματα τοῦ Σχ. Ι.37



Σχ. Ι. 37.

Κατὰ πρῶτον θὰ ἐξετάσωμεν τὴν ἰσορροπίαν εἰς τὴν διεθνῆ ἀγορὰν (=ἀγορὰ δύο χωρῶν, κατὰ τὸ ἀνωτέρω ὑπόδειγμα) ἐν ἀπουσίᾳ δασμῶν καὶ μεταφορικοῦ κόστους (= πλήρως ἐλεύθερον ἐμπόριον). Ἐὰν καθορισθῇ τιμὴ 0p, τότε ἡ προσφερομένη ποσότης εἰς τὴν Α θὰ εἶναι pα καὶ θὰ δημιουργηθῇ ἔλλειμμα ἴσον πρὸς αβ. Εἰς τὴν Β χώραν εἰς τιμὴν 0p θὰ ὑπάρξῃ ἰσορροπία προσφορᾶς καὶ ζητήσεως. Ἡ ὕπαρξις πλεοναζούσης ζητήσεως εἰς τὴν Α θὰ ὠθήσῃ εἰς αὔξησιν τῆς τιμῆς. Ἡ αὔξησις ὅμως, τῆς τιμῆς εἰς τὴν Α θὰ ὠθήσῃ τὴν Β εἰς μεγαλυτέραν παραγωγήν. Ἡ μεγαλυτέρα αὕτη παραγωγὴ ὑπερβαίνουσα τὴν ζήτησιν εἰς τὴν Β, θὰ εἶναι διαθέσιμος δι᾽ ἐξαγωγὴν πρὸς τὴν Α. Ἡ διαδικασία δὲ θὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ εἰς τὴν Α θὰ δημιουργήσῃ πλεόνασμα εἰς τὴν Β ἴσον πρὸς τὸ ἔλλειμμα τῆς Α. Ἤτοι, εἰς τιμὴν 0p' θὰ ὑπάρξῃ ὑπερβάλλουσα ζήτησις εἰς τὴν Α ἴση πρὸς γδ, καὶ ὑπερβάλλουσα προσφορὰ εἰς τὴν Β ἴση πρὸς γ'δ', ὅπου γδ = δ'γ'. Οὕτω, τὸ ἔλλειμμα τῆς Α θὰ ἱκανοποιηθῇ δι᾽ εἰσαγωγῆς ἐκ τῆς Β, ἀποκαθισταμένης τῆς ἰσορροπίας προσφορᾶς καὶ ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ, τόσον εἰς τὴν Α ὅσον καὶ εἰς τὴν Β, εἰς τιμὴν ἰσορροπίας ἴσην πρὸς 0p'.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ἡ χώρα Α ἐπιβάλλει δασμὸν ἴσον πρὸς Τ'Τ κατὰ μονάδα ἀγαθοῦ. Ἡ τιμὴ εἰς τὴν Α (ΟΤ) εἶναι τώρα μεγαλυτέρα ἐκείνης εἰς τὴν Β κατὰ Τ'Τ. Οὕτω ἐκ τῆς ἰσορροπίας ἐν ἀνυπαρξία δασμῶν εἰς μὲν τὴν Α ἐκκινήθημεν πρὸς τὰ ἄνω, εἰς δὲ τὴν Β πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὸ ποσὸν τοῦ δασμοῦ. Ἡ ἐπιβολὴ τοῦ δασμοῦ εἰς τὴν χώραν Α εἶχεν ὡς συνέπειαν, ὡς ἐμφαίνεται καὶ ἐκ τοῦ Σχ. Ι.37, τὸν περιορισμὸν τοῦ ἐμπορίου ἀπὸ γδ εἰς εζ εἰς τὴν Α (εἰσαγωγαί), καὶ ἀπὸ γ'δ' εἰς ε'ζ' εἰς τὴν Β (ἐξαγωγαί).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως προκύπτουν τὰ ἀκόλουθα ἀποτελέσματα καθ' ὅσον ἀφορᾶ τὴν θέσιν (welfare) τῶν καταναλωτῶν καὶ παραγωγῶν εἰς τὰς δύο χώρας: Εὐνοοῦνται τὰ συμφέροντα τῶν παραγωγῶν τῆς Α καὶ τῶν καταναλωτῶν τῆς Β, διότι διὰ τῆς ἐπιβολῆς τοῦ δασμοῦ αὐξάνει ἡ τιμὴ εἰς Α καὶ μειοῦται ἡ τιμὴ εἰς Β. Ἀντιθέτως, βλάπτονται ἢ περιορίζονται τὰ συμφέροντα τῶν καταναλωτῶν τῆς Α καὶ τῶν παραγωγῶν τῆς Β*.

---

* Βλ. K. E. Boulding, op. cit., σελ. 147 - 150.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ

«Still glides the Stream, and shall for ever glide;
The form remains, the Function never dies».

W. WORDWORTH (1770-1850), The River Duddon εἰς τὴν Β κατὰ Τ'Τ. Οὕτω ἐκ τῆς ἰσορροπίας ἐν ἀνυπαρξίᾳ δασμῶν εἰς μὲν τὴν Α ἐκκινήθημεν πρὸς τὰ ἄνω, εἰς δὲ τὴν Β πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὸ ποσὸν τοῦ δασμοῦ. Ἡ ἐπιβολὴ τοῦ δασμοῦ εἰς τὴν χώραν Α εἶχεν ὡς συνέπειαν, ὡς ἐμφαίνεται καὶ ἐκ τοῦ Σχ. I.37, τὸν περιορισμὸν τοῦ ἐμπορίου ἀπὸ γδ εἰς εζ εἰς τὴν Α (εἰσαγωγαί), καὶ ἀπὸ γ'δ' εἰς ε'ζ' εἰς τὴν Β (ἐξαγωγαί).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως προκύπτουν τὰ ἀκόλουθα ἀποτελέσματα καθ' ὅσον ἀφορᾶ τὴν θέσιν (welfare) τῶν καταναλωτῶν καὶ παραγωγῶν εἰς τὰς δύο χώρας: Εὐνοοῦνται τὰ συμφέροντα τῶν παραγωγῶν τῆς Α καὶ τῶν καταναλωτῶν τῆς Β, διότι διὰ τῆς ἐπιβολῆς τοῦ δασμοῦ αὐξάνει ἡ τιμὴ εἰς Α καὶ μειοῦται ἡ τιμὴ εἰς Β. Ἀντιθέτως, βλάπτονται ἢ περιορίζονται τὰ συμφέροντα τῶν καταναλωτῶν τῆς Α καὶ τῶν παραγωγῶν τῆς Β*.

---

* Βλ. K. E. Boulding, op. cit., σελ. 147-150.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ

«Still glides the Stream, and shall for ever glide;
The form remains, the Function never dies».
W. WORDWORTH (1770-1850), The River Duddon

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ

II.0. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ:

II.0.0. **Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως.** Ἡ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις πρωτίστως ἀσχολεῖται μὲ τὴν διατύπωσιν ὑφισταμένων σχέσεων μεταξὺ τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν. Ὡς μεταβλητὴν θὰ ὁρίσωμεν πᾶσαν ποσότητα, ἥτις δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν ἐπιτρεπτὴν τιμήν. Ἡ μεταβλητὴ ποσότης καλεῖται συνεχὴς μέν, ἐὰν δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς δυνατὰς τιμὰς ἐντὸς ὡρισμένου διαστήματος, ἀσυνεχὴς δὲ ὅταν λαμβάνῃ ὡρισμένας μόνον προκαθωρισμένας τιμάς.

Ὁ μαθηματικὸς τύπος ὅστις δεικνύει τὴν μεταξὺ δύο μεταβλητῶν ὑφισταμένην σχέσιν, ὥστε ἐὰν δώσωμεν μίαν ὡρισμένην τιμὴν εἰς τὴν μίαν μεταβλητὴν νὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν τῆς ἑτέρας μεταβλητῆς, καλεῖται συνάρτησις. Ἡ σχέσις μεταξὺ δύο μεταβλητῶν, ὡς τοῦ y καὶ τοῦ x, δύναται νὰ γραφῇ ὡς: $y = \varphi(x)$. Δηλαδὴ τὸ y εἶναι ποιά τις συνάρτησις τοῦ x. Τὸ γράμμα φ σημαίνει «συνάρτησις». Δυνάμεθα δὲ νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ ἕτερα σύμβολα ὡς f, g, ψ, h, F κ.λπ. Εἰς τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν, εἰς ὡρισμένας τιμὰς τῆς x ἀντιστοιχοῦν ὡρισμέναι τιμαὶ τῆς y. Αἱ τιμαὶ τοῦ x δυνατὸν νὰ περιλαμβάνωνται ἐντὸς ὡρισμένου διαστήματος τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, π.χ. ἐντὸς τοῦ διαστήματος αβ, ὅπερ εἶναι κλειστὸν μὲν ὅταν τὸ x λαμβάνει ὅλας τὰς τιμὰς περιλαμβανομένων τῶν α καὶ β ($\alpha \leqslant x \leqslant \beta$), ἀνοικτὸν δὲ ὅταν δὲν περιλαμβάνῃ τὰς ἀκραίας (ὁριακὰς τιμὰς α, β ($\alpha < x < \beta$).

Ὅταν ἡ σχέσις δύο (ἢ περισσοτέρων) μεταβλητῶν δὲν καθίσταται φανερά, τότε ἡ συνάρτησις καλεῖται πεπλεγμένη (implicit) καὶ γράφεται ὡς: $\varphi(y, x) = 0$. Ἡ συνάρτησις αὕτη δύναται νὰ καταστῇ λελυμένη (explicit) εἴτε ὡς πρὸς y, εἴτε ὡς πρὸς x. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν $y = f(x)$, ὅπου ἡ x καλεῖται ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ καὶ ἡ y ἐξηρτημένη μεταβλητή. Εἰς τὴν δευτέραν δὲ περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν $\mathbf{x = g(y)}$, ὅπου ἡ x καθίσταται ἐξηρτημένη καὶ ἡ y ἀνεξάρτητη μεταβλητή. Ἡ $x = g(y)$ εἶναι ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς $y = f(x)$.

Αἱ λελυμέναι συναρτήσεις καλοῦνται μονότιμοι ἢ μονοσήμαντοι, ὅταν μία καὶ μόνον μία τιμὴ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθεῖσαν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, πολύτιμοι ἢ πολυσήμαντοι δὲ ὅταν ἀντιστοιχοῦν περισσότεραι τῆς μιᾶς τιμαί. Ἡ ἀντίστροφος ὅμως μιᾶς μονοτίμου συναρτήσεως δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην καὶ αὕτη μονότιμος συνάρτησις. Παραδείγματος χάριν, ἡ ἀντίστροφος τῆς $y = x^2$ εἶναι ἡ $x = \pm\sqrt{v}$ καὶ ἐὰν $y = 4$, τότε ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ y εἶναι $+2$ ἢ -2, διότι $(+2)^2 = 4$ καὶ $(-2)^2 = 4$. Γραφικῶς ἡ γραμμή, ἥτις παριστᾶ τὴν μονότιμον συναρτησιν τέμνεται ἀπὸ οἱανδήποτε παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y γραμμὴν εἰς ἓν μόνον σημεῖον. Ἀντιθέτως, ἡ γραμμὴ πολυτίμου συναρτήσεως τέμνεται εἰς πλείονα σημεῖα.

Ἤδη ἐκ τῶν προηγουμένων ἔχομεν διαπιστώσει ὅτι ὁσάκις μία γραμμή, εὐθεῖα ἢ καμπύλη, ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν, τοῦτο σημαίνει ὅτι αὐξανομένης τῆς τιμῆς τοῦ x (μετρουμένης εἰς τὸν ἄξονα 0x), ἡ τιμὴ τοῦ y βαίνει ἐλαττουμένη. Ἡ συνάρτησις ἥτις παριστᾶ τοιαύτην γραμμὴν καλεῖται φθίνουσα συνάρτησις τοῦ x. Τὸ ἀντίθετον συμβαίνει ὅταν ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως ἔχει θετικὴν κλίσιν, ἤτοι αὐξανομένης τῆς τιμῆς τοῦ x, ἡ τιμὴ τοῦ y βαίνει αὐξανομένη, ὁπότε ἡ συνάρτησις καλεῖται αὔξουσα. Διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην περίπτωσιν, ἡ συνάρτησις πρέπει, ὡς εἰκός, νὰ εἶναι μονότιμος. Ἡ τάξις τῶν αὐξουσῶν καὶ φθινουσῶν συναρτήσεων ἀποτελεῖ τὰς μονοτόνους συναρτήσεις. Ἡ γραφικὴ παράστασις μιᾶς τοιαύτης συναρτήσεως βαίνει εἴτε αὐξανομένη εἴτε μειουμένη συνεχῶς ἄνευ διακοπῶν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Ἀνωτέρω ἐλέχθη ὅτι ἡ ἀντίστροφος μιᾶς μονοτίμου συναρτήσεως δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην καὶ αὕτη μονότιμος. Οὐχ ἧττον ὅμως εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν μονοτόνων συναρτήσεων ἔχομεν πάντοτε μονότιμον ἀντίστροφον συνάρτησιν.

Μία ἄλλη κατηγορία συναρτήσεων εἶναι αἱ συμμετρικαὶ συναρτήσεις τῶν ὁποίων ἡ μορφὴ δὲν μεταβάλλεται ἐὰν εἰς τὸν πεπλεγμένον τύπον $\varphi(x, y) = 0$ αἱ μεταβληταὶ x καὶ y ἐναλλαχθοῦν. Ἡ ὑπερβολικὴ συνάρτησις $xy = \gamma$ εἶναι συμμετρική, διότι $x = \frac{\gamma}{y}$ καὶ $y = \frac{\gamma}{x}$. Γραφικῶς ἡ συμμετρία ἐμφαίνεται εἰς τοὺς δύο κλάδους καμπύλων τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ὑπερβολῆς. Εἰς μὲν τὴν πρώτην ἔχομεν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x (ἢ καὶ y), εἰς δὲ τὴν δευτέραν ὁ εἷς κλάδος εἶναι ἀντικατόπτρισμα τοῦ ἑτέρου.

II.0.1. **Συναρτησιακοὶ τύποι.** Ἡ διατύπωσις τῆς συναρτήσεως ὡς $y = f(x)$ δὲν καθορίζει τὴν μορφὴν αὐτῆς, ἤτοι τὸν νόμον εἰς ὃν αὕτη ὑπείκει. Διὰ νὰ καταστῇ λειτουργικὸς ὁ τύπος τῆς συναρτήσεως πρέπει νὰ δώσωμεν ἐπακριβῶς τὴν μαθηματικὴν σχέσιν τὴν ὁποίαν καὶ θέλομεν νὰ περιγράψωμεν. Αἱ συναρτήσεις ἐξ ἀπόψεως μορφῆς διακρίνονται εἰς γ ρ α μ μ ι κ ὰ ς καὶ μ ὴ γ ρ α μ μ ι κ ά ς. Ἤδη εἰς τὰ περὶ ἀναλυτικῆς γεωμετρίας ἐγένετο λόγος περὶ τῶν διαφόρου μορφῆς ἐξισώσεων καὶ τῶν καμπύλων.

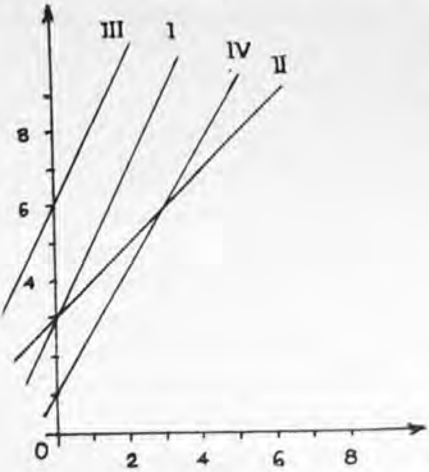
Οἱ συναρτησιακοὶ τύποι τῶν διαφόρων μορφῶν συναρτήσεων ἔχουν ὡς ἀκολούθως εἰς γενικὰς γραμμάς.

Γραμμική	συνάρτησις	: $y = \alpha + \beta x$
Τετράγωνος	»	: $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$
Κυβική	»	: $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$
Ἐκθετική	»	: $y = \alpha^x$
Λογαριθμική	»	: $y = \log_\alpha x$
Ὑπερβολική	»	: $y = \dfrac{\alpha}{x}$
Λογιστική	»	: $y = \dfrac{\alpha}{1 + \beta e^{-ct}}$
Τριγωνομετρική (περιοδική)	»	: $y =$ ημx, $y =$ συνx, κ.λπ.

II.0.2. **Σταθεραὶ συναρτήσεων.** Εἰς τὰς ἀνωτέρω συναρτήσεις τὰ γράμματα α, β, γ, δ, c, τὰ ὁποῖα ἀντιπροσωπεύουν μὴ καθορισθέντας ἀριθμούς, καλοῦνται σ τ α θ ε ρ α ί, διότι δίδοντες διαφόρους τιμὰς εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x, λαμβάνομεν ὡρισμένας τιμὰς τῆς ἐξηρτημένης y. Αἱ σταθεραὶ καλοῦνται καὶ π α ρ ά μ ε τ ρ ο ι ἢ π α ρ α μ ε τ ρ ι κ α ὶ σ τ α θ ε ρ α ὶ διὰ τὸν λόγον ὅτι αὗται δεικνύουν τὰς μεταβολὰς τῆς συναρτήσεως ὡς συνόλου.

Ἂς λάβωμεν τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν $y = \alpha + \beta x$ Αἱ παραμετρικαὶ σταθεραὶ εἶναι αἱ α καὶ β. Ἡ α δεικνύει σταθερὰν ποσότητα ἥτις προστίθεται εἰς τὴν συνάρτησιν ἀνεξαρτήτως τῆς τιμῆς τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ x ἢ τὸ B. Τὸ β εἶναι ἡ παράμετρος ἡ ὁποία δεικνύει τὴν σταθερὰν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ἐν τῷ συνόλῳ της ὅταν τὸ x μεταβάλλεται. Αἱ δύο αὗται σταθεραὶ ἔχουν μεγίστην σημασίαν διότι καθορίζουν τὸ σ χ ῆ μ α καὶ τ ὴ ν θ έ σ ι ν τῆς «καμπύλης» τῆς συναρτήσεως. Ἔστω ἡ γραμμικὴ συνάρτησις μὲ καθωρισμένας σταθεράς, $y = 3 + 2x$, τῆς ὁποίας τὸ γράφημα ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ. II.1. (περίπτωσις 1).

Ἡ σταθερὰ ποσότης 3 καὶ ἡ κλίσις 2 τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως καθορίζουν τὴν θέσιν τῆς γραμμῆς, ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύει ταύτην. Μεταβολὴν εἰς τὰς παραμέτρους τῆς συναρτήσεως προκαλεῖ τὴν μετατόπισιν τῆς γραμμῆς (shift). Μεταβολὴ μόνον τῆς β, ἔστω ἀπὸ 2 εἰς 1 (ἤτοι $y = 3 + x$), μεταβάλλει τὴν κλίσιν τῆς γραμμῆς, ἥτις παραμένει διερχομένη διὰ τοῦ 3 (περίπτωσις II). Μεταβολὴ μόνον τῆς α, ἔστω ἀπὸ 3 εἰς 6, μὲ κλίσιν τὴν αὐτήν, ἡ γραμμὴ μετατίθεται παραλλήλως (περίπτωσις III). Μεταβολή, τέλος, ἀμφοτέρων τῶν παραμέτρων, ἔστω ἀπὸ $y=3+2x$ εἰς $y=1+1{,}5x$ ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν μετάθεσιν τῆς γραμμῆς ἀπὸ τὴν θέσιν I εἰς τὴν θεσιν IV, τοῦ ἀνωτέρω Σχήματος.



Σχ. II. 1.

II.0.3. **Ἐκτίμησις παραμέτρων.** Εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν οἱ μαθηματικοὶ τύποι τῶν συναρτήσεων ἔχουν κάποιαν πρακτικὴν σημασίαν. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει τὸν οἰκονομικὸν ἐρευνητὴν εἶναι ἡ ἐκτίμησις τῶν συναρτήσεων αἱ ὁποῖαι κατὰ τὰς προτάσεις τῆς θεωρίας περιγράφουν οἰκονομικὰς σχέσεις καὶ συστήματα. Ὅταν δὲ λέγομεν ἐκτίμησιν τῶν συναρτήσεων βάσει πραγματικῶν δεδομένων ἐννοοῦμεν τὴν ἐκτίμησιν τῶν παραμέτρων τούτων. Ἡ ἐκτίμησις γίνεται τῇ χρήσει στατιστικῶν μεθόδων ἐκ τῶν ὁποίων ἡ σπουδαιοτέρα εἶναι ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων. Ἡ ἐπιλογὴ τῆς μεθόδου καὶ ἡ διερεύνησις τῆς ἀξιοπιστίας τῶν ἀποτελεσμάτων εἶναι ἀντικείμενα τῆς οἰκονομετρικῆς θεωρίας.

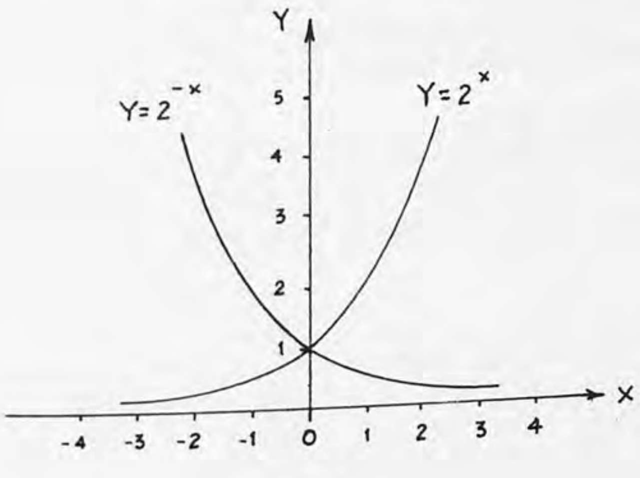
Πρὸς κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω ἂς δώσωμεν ἓν παράδειγμα. Ἔστω ὅτι βάσει μιᾶς κάποιας θεωρίας ἡ σχέσις μεταξὺ καταναλώσεως καὶ εἰσοδήματος εἶναι γραμμική, ἤτοι αὐξανομένου τοῦ εἰσοδήματος αὐξάνεται καὶ ἡ κατανάλωσις κατὰ λόγον σταθερόν. Ἡ συνάρτησις λοιπόν, θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $y=\alpha+\beta x$. Κατόπιν λαμβάνομεν τὰ πραγματικὰ δεδομένα (παρατηρήσεις), ἤτοι τὰ μεγέθη καταναλώσεως καὶ εἰσοδήματος ὡς ταῦτα παρουσιάζονται εἰς τοὺς Ἐθνικοὺς Λογαριασμούς, καὶ διὰ τῆς στατιστικῆς παλινδρομήσεως βάσει τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, ἔχομεν τὰς ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων τῆς συναρτήσεως. Ἔστω ὅτι ἡ ἐκτιμηθεῖσα συνάρτησις εἶναι $y=500+0{,}80x$. Ἡ ἐκτιμηθεῖσα συνάρτησις μᾶς λέγει ὅτι ἡ κατανάλωσις θὰ εἶναι 500 μονάδες ἔστω καὶ ἂν τὸ εἰσόδημα εἶναι μηδέν. Ἐπίσης, ὅτι εἰς μίαν αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος κατὰ 100 μονάδες ἡ ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις τῆς καταναλώσεως εἶναι 80 μονάδες.

II.0.4. **Ἐκθετικαὶ συναρτήσεις.** Ἡ συνάρτησις φ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς $y = \alpha^x$, ὅπου $\alpha > 0$, εἶναι ὁ τύπος τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως μὲ βάσιν α. Τὸ x (περιοχὴ) δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὸ δὲ y (ἔκτασις, εὖρος) ὅλας τὰς τιμὰς μεταξὺ 0 καὶ ∞ ($0 < y < \infty$).

Ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις εἶναι μονοτόνως αὔξουσα, ὅταν $\alpha > 1$ καὶ $x > 0$ καὶ πραγματικός, μονοτόνως φθίνουσα δὲ ὅταν $1 > \alpha > 0$ καὶ $x > 0$ καὶ πραγματικὸς ἀριθμός. Ὅταν $\alpha = 1$, τότε $\alpha^x = 1$.

Τὸ γράφημα ἐκθετικῆς συναρτήσεως δύναται νὰ ληφθῇ ἐὰν καθορίσωμεν τὴν βάσιν καὶ δώσωμεν εἰς τὸ x διαφόρους τιμὰς ὡς εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα καὶ τὸ διάγραμμα ἐμφαίνεται.

x	...	—2	—1	0	1	2	3	...
$y = 2^x$	...	0,25	0,50	1	2	4	8	...
$y = 2^{-x}$	...	4	2	1	0,5	0,25	0,125	...



Σχ. II. 2.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω διαγράμματος διαπιστοῦται ὅτι τὰ γραφήματα τῶν συναρτήσεων $y = 2^x$ καὶ $y = 2^{-x}$ εἶναι συμμετρικά. Δέον δὲ νὰ σημειωθῇ ὅτι τὸ γενικὸν σχῆμα τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως εἶναι πάντοτε τὸ ἴδιον, ἡ δὲ κλίσις τῆς καμπύλης ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς βάσεως α.

Ἐὰν ἡ βάσις λάβῃ τὴν τιμὴν 2,71828, ἥτις εἶναι ἡ προσεγγιστικὴ τιμὴ τοῦ e, τότε λαμβάνομεν τὴν πλέον ἐνδιαφέρουσαν ἐκθετικὴν συνάρτησιν

$y = e^x$, ἥτις γράφεται καὶ ὡς $y = \exp x$. Τὸ e δὲν εἶναι παρὰ τὸ ὅριον τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$, τοῦ ν τείνοντος πρὸς τὸ ἄπειρον, ἤτοι

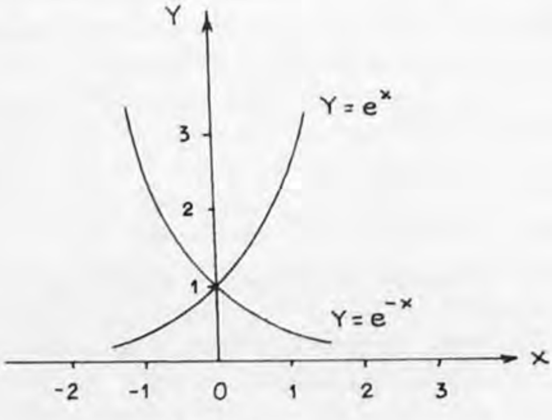
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots, \text{ ad infinitum} \simeq 2{,}71828$$

(ὅπου $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, κ.ο.κ.).

Οὕτω βλέπομεν ὅτι ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις εἶναι ἡ τελικὴ ἀξία ποσότητος ἀναπτυσσομένης ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ προστιθεμένου συνεχῶς. Εἰς τὴν οἰκονομικὴν ὑπάρχουν ποσότητες ἢ φαινόμενα ἅτινα ὑπείκουν εἰς τὸν νόμον τῆς ἐκθετικῆς ἀναπτύξεως. Ἐπὶ παραδείγματι, γνωρίζοντες τὴν ἀρχικὴν ἀξίαν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος Y_0 καὶ τὸ ἐτήσιον ποσοστὸν αὐξήσεως r, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν τελικὴν ἀξίαν μετὰ n ἔτη, ἤτοι $Y_n = Y_0 e^{rn}$. Ἡ τιμὴ τοῦ Y_n θὰ ἐξαρτηθῇ ἐκ τῶν σταθερῶν Y_0 καὶ n. Ὅσον μεγαλύτερον τὸ ποσοστὸν αὐξήσεως, τόσον ἀπότομος πρὸς τα ἄνω καθίσταται ἡ καμπύλη τῆς συναρτήσεως καὶ ταχυτέρα ἡ ἀνάπτυξις τοῦ εἰσοδήματος. Ὅσον μεγαλυτέρα, ἐπίσης, ἡ ἀρχικὴ ἀξία τόσον ὑψηλότερον ἐκκινεῖ ἡ καμπύλη τῆς συναρτήσεως.

Αἱ τιμαὶ τῶν συναρτήσεων $y = e^x$ καὶ $y = e^{-x}$ δίδονται ἕτοιμοι εἰς μαθηματικοὺς πίνακας. Τὰ γραφήματα τῶν συναρτήσεων τούτων δι' ὡρισμένας τιμὰς τοῦ x, ὡς ὁ κατωτέρω πίναξ, δίδονται εἰς τὸ Σχ. II.3.

x	0, 10	0, 20	0, 30	0, 40	0, 50	0, 60	0, 70	0, 80	0, 90	1, 00
e^x	1,105	1,221	1,350	1,491	1,649	1,822	2,014	2,225	2,459	2,718
e^{-x}	0,905	0,818	0,741	0,670	0,606	0,549	0,496	0,449	0,406	0,367



Σχ. II. 3.

Μία κατηγορία τῶν ἐκθετικῶν συναρτήσεων εἶναι αἱ ὑ π ε ρ β ο λ ι κ α ὶ   σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι ς, ὁριζόμεναι ὡς ἑξῆς:

$$\text{Ὑπερβολικὸν ἡμίτονον ημh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{Ὑπερβολικὸν συνημίτονον συνh } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{Ὑπερβολικὴ ἐφαπτομένη εφh } x = \frac{\text{ημh } x}{\text{συνh } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

II.0.5. **Λογαριθμικαὶ συναρτήσεις.** Ἡ ἀντίστροφος τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως $y = \alpha^x$ εἶναι ἡ $x = \alpha^y$. Ἡ τελευταία αὕτη, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ λογαρίθμου, γράφεται $y = \log\alpha\, x$, ἤτοι τὸ y εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ x ὡς πρὸς βάσιν α. Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὁ γενικὸς τύπος τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς ἐκθετικῆς τοιαύτης καὶ εἶναι πάντοτε μονότονος καὶ μονότιμος.

Τὸ x (περιοχὴ) εἰς τὴν συνάρτησιν δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν ἐκ τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὸ δὲ y (ἔκτασις) πᾶσαν τιμὴν ἐκ τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Τὸ κατωτέρω διάγραμμα ἐμφαίνει τὰ γραφήματα τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως διὰ $\alpha > 1$ καὶ $\alpha < 1$ καὶ τὴν ἀντιπαραβολὴν πρὸς τὴν ἀντίστροφον ἐκθετικὴν συνάρτησιν*.

Εἰς τὴν πρᾶξιν ὡς βάσις λαμβάνεται εἴτε τὸ 10 (κοινοὶ λογάριθμοι), εἴτε τὸ e (φυσικοὶ λογάριθμοι). Ἡ μετατροπὴ δὲ τῆς βάσεως τοῦ λογαρίθμου γίνεται βάσει τοῦ τύπου:

$$\log_e x = \log_{10} x \,.\, \log_e 10$$

Δεδομένου ὅτι $\log_e 10 = 2.30259$, ἔχομεν

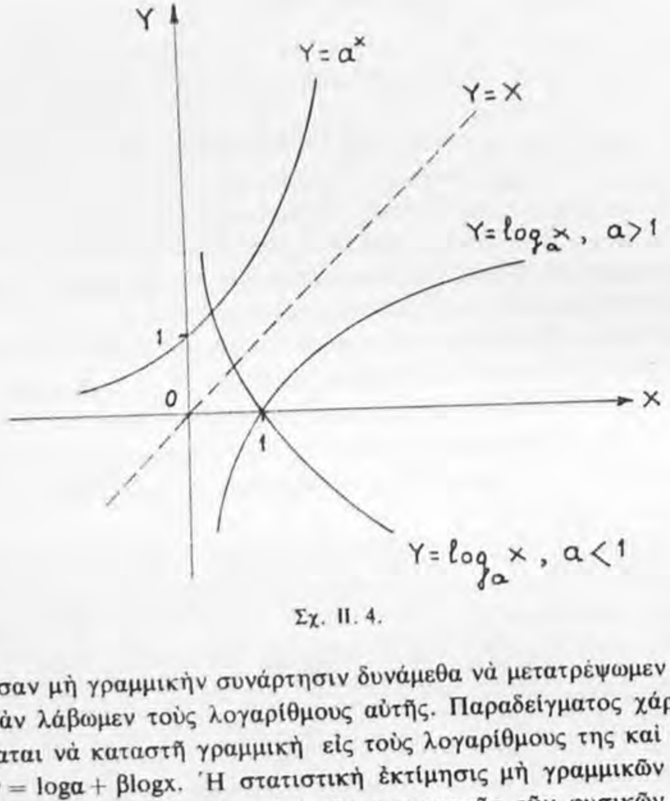
$$\log_e x = 2.30259 \times \log_{10} x$$

Θὰ ἦτο παράλειψις ἐὰν δὲν ἀνεφέραμεν ἐνταῦθα τὴν μεγάλην χρησιμότητα τῶν λογαρίθμων εἰς τὴν παρουσίασιν καὶ ἀνάλυσιν τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν. Εἰς τὴν στατιστικὴν παλινδρόμησιν ἡ χρῆσις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἐκτεταμένη διὰ τῆς μετατροπῆς κυρίως τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν εἰς λογαριθμικάς. Οὕτω, ἡ γραμμικὴ ἐξίσωσις $y = \alpha + \beta x$ δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς λογαριθμικὴν τοιαύτην: $\log y = \alpha + \beta \log x$, ἢ εἰς ἡμιλογαριθμικήν: $y = \alpha + \beta \log x$.

Αἱ μεταβολαὶ εἰς τὴν λογαριθμικὴν συνάρτησιν δὲν εἶναι ἀπόλυτοι ἀλλὰ σ χ ε τ ι κ α ί, ἡ δὲ ἐκτίμησις τῆς παραμέτρου β μᾶς δίδει τὴν κλίσιν τῆς γραμμῆς εἰς σχετικοὺς ὅρους καὶ συνεπῶς εἶναι ἡ ἐλαστικότης. Πο-

* **Διὰ $\alpha = 1$, ἡ συνάρτησις εἶναι ἀκαθόριστος.**

σοστιαῖαι μεταβολαὶ τῆς y ἀντιστοιχοῦν εἰς ποσοστιαίας μεταβολὰς τῆς x. Εἰς τὴν περίπτωσιν δὲ τῆς ἡμιλογαριθμικῆς ἐξισώσεως ἐνδιαφερόμεθα διὰ ποσοστιαίας μεταβολὰς τῆς x, ἐνῶ ἡ κλίμαξ τῆς y παραμένει ἡ φυσικὴ τοιαύτη (ἀπόλυτος).



Σχ. II. 4.

Πᾶσαν μὴ γραμμικὴν συνάρτησιν δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν εἰς γραμμικὴν ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους αὐτῆς. Παραδείγματος χάριν, ἡ $y = ax^{\beta}$ δύναται νὰ καταστῆ γραμμικὴ εἰς τοὺς λογαρίθμους της καὶ νὰ γραφῆ ὡς $\log y = \log a + \beta \log x$. Ἡ στατιστικὴ ἐκτίμησις μὴ γραμμικῶν συναρτήσεων καθίσταται εὐκολωτέρα διὰ τῆς μετατροπῆς τῶν φυσικῶν κλιμάκων εἰς λογαριθμικὰς ὁπότε ἡ σχέσις μεταξὺ y καὶ x καθίσταται γραμμική. Ὁ νόμος τοῦ Pareto ἐκφραζόμενος διὰ τῆς συναρτήσεως ὑπερβολῆς $y = Ax^{-\alpha}$, δύναται νὰ μετατραπῆ εἰς γραμμικὴν σχέσιν ἐὰν ληφθοῦν οἱ λογάριθμοι, ἤτοι $\log y = \log A - \alpha \log x$, ὅπου α εἶναι ὡς γνωστὸν ἡ παρετιανὴ παράμετρος τῆς ἀνισοκατανομῆς τοῦ εἰσοδήματος.

Τέλος ἡ γραφικὴ ἀπεικόνησις τῆς ἐξελίξεως ἑνὸς οἰκονομικοῦ μεγέθους ἢ τῆς σχέσεως δύο μεταβλητῶν δύναται νὰ γίνῃ κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω, κατὰ τρεῖς τρόπους:

i) Εἰς φυσικὰς κλίμακας τῶν ἀξόνων x καὶ y.

ii) Εἰς λογοριθμικὰς κλίμακας τῶν ἀξόνων x καὶ y.

iii) Εἰς λογαριθμικὴν κλίμακα τοῦ y καὶ φυσικὴν τοῦ x.

Εἰς διαγράμματα μὲ φυσικὰς κλίμακας, ἴσαι ἀποστάσεις μεταξὺ σημείων δεικνύουν ἀ π ο λ ύ τ ο υ ς μεταβολὰς τῆς μεταβλητῆς. Εἰς λογαριθμικὰς δὲ κλίμακας δεικνύουν ἴσας π ο σ ο σ τ ι α ί α ς μεταβολάς. Τοῦτο ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν τὰ σημεῖα x_1, x_2, x_3 ἀπέχουν ἐξ ἴσου μεταξύ των, τότε ἐπὶ φυσικῆς κλίμακος ἰσχύει $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$. Ἐπὶ λογαριθμικῆς κλίμακος θὰ ἔχωμεν:

$$\log x_3 - \log x_2 = \log x_2 - \log x_1, \quad \text{ἢ}$$

$$\log \frac{x_3}{x_2} = \log \frac{x_2}{x_1}. \quad \text{Ὁπότε ἔχομεν}$$

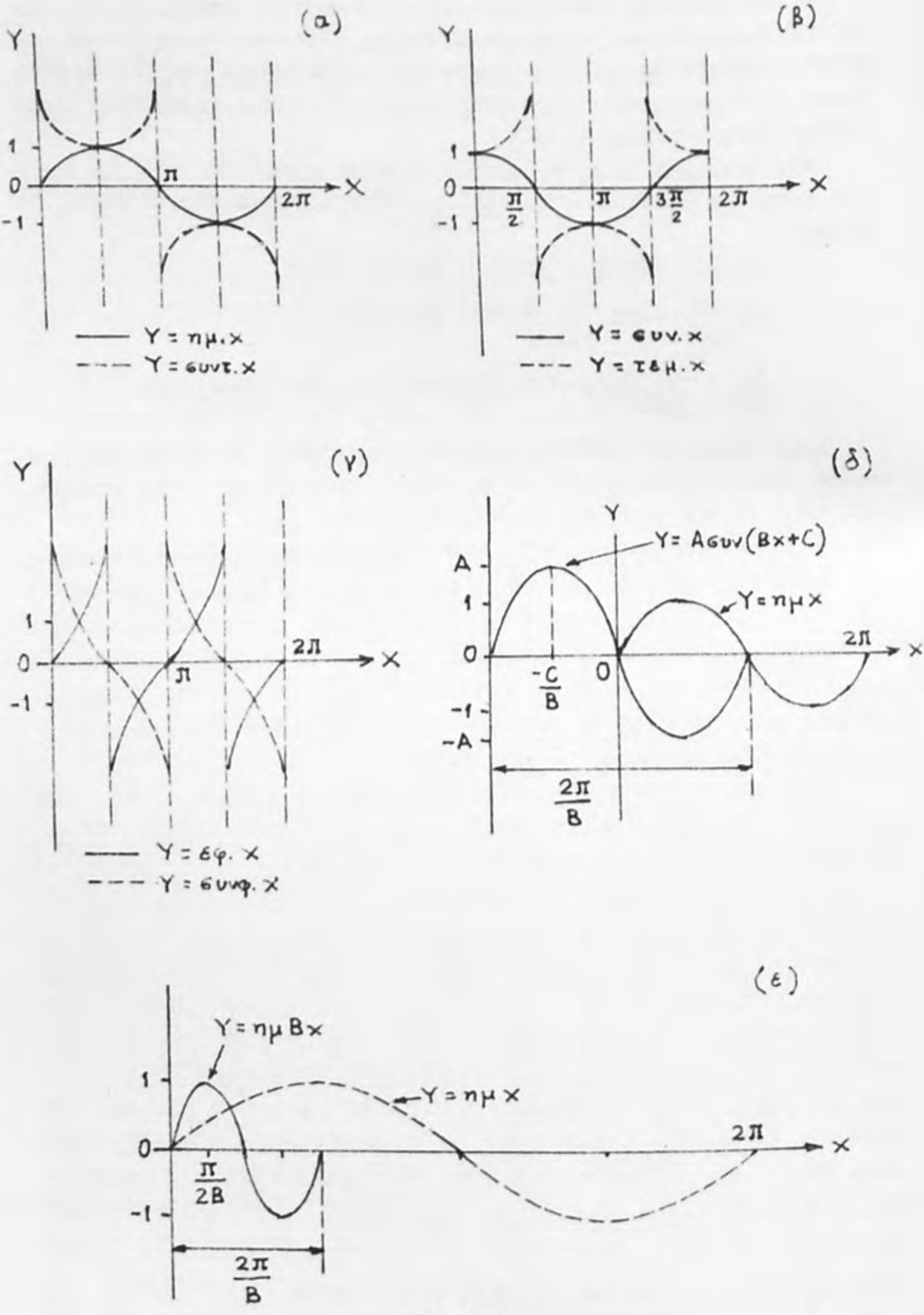
$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_1}, \quad \text{ὅπερ εἶναι σύγκρισις σχετικῶν ποσοτήτων.}$$

II.0.6. **Τριγωνομετρικαὶ ἢ κυκλικαὶ συναρτήσεις.** Αἱ συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι περιέχουν τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς καλοῦνται τ ρ ι γ ω ν ο μ ε τ ρ ι κ α ὶ ἢ κ υ κ λ ι κ α ὶ σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι ς.

Ἐκ τῶν γραφημάτων τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων προκύπτει ὅτι αὗται ἐμφανίζουν περιοδικότητα διὸ καὶ π ε ρ ι ο δ ι κ α ὶ συναρτήσεις καλοῦνται. Αἱ συναρτήσεις y = ημx καὶ y = συνx ἐπαναλαμβάνονται ἀνὰ δύο ἡμιπεριφερείας, ἤτοι ἀνὰ 2π, αἱ δὲ συναρτήσεις y = εφx καὶ y = συνφx ἀνὰ π. Αἱ ποσότητες 2π καὶ π καλοῦνται π ε ρ ί ο δ ο ι καὶ δεικνύουν τὴν ἔκτασιν τῆς x ἐντὸς τῆς ὁποίας ἐμφανίζεται μία πλήρης διακύμανσις τῆς y. Αἱ περίοδοι καλοῦνται καὶ κ ύ κ λ ο ι.

Ἐκ τῶν κυκλικῶν ἢ περιοδικῶν συναρτήσεων μεγαλυτέρας σημασίας εἶναι αἱ ἡ μ ι τ ο ν ο ε ι δ ε ῖ ς σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι ς, y = συνx καὶ y = ημx. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ y = ημx καὶ y = συνx εἶναι, ὡς καὶ εἰς τὸ Σχ. II.5. ἐμφαίνεται, ὅτι ἡ πρώτη λαμβάνει τιμὴν 1 εἰς x = π/2, ἐνῷ ἡ δευτέρα λαμβάνει τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς x = o. Παρατηροῦμεν ἐκ τοῦ Σχ. II.5. ὅτι ἅπασαι αἱ κυκλικαὶ καμπύλαι ἐμφανίζουν κανονικότητα ἢ ρυθμικότητα, χαρακτηριστικὰ τῶν ὁποίων εἶναι πλὴν τῆς περιόδου: τὸ ε ὖ ρ ο ς τῆς διακυμάνσεως, ἤτοι ἡ κορυφὴ (peak) καὶ τὸ κατώτατον σημεῖον τῆς διακυμάνσεως (trough), καὶ ἡ φ ά σ ι ς, ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς x εἰς ἣν ἡ καμπύλη κορυφοῦται.

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω ἡ συνάρτησις y = συνx ἔχει περίοδον ἢ κύκλον 2π, εὖρος ±1 καὶ φάσιν x = 0. Ἡ συνάρτησις y = ημx ἔχει περίοδον 2π, εὖρος ± 1 καὶ φάσιν χ = π/2. Γενικώτερον, ἡ συνάρτησις y = A συν (Bx + C) ἔχει περίοδον 2 π/B, φάσιν τὸ x = —c/B καὶ εὖρος τὸ ± A. Ἡ φάσις θὰ πρέπει νὰ λαμβάνῃ τιμὴν χ = 0, ἤτοι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην Bx + C = 0, καὶ συνεπῶς $x = \frac{-C}{B}$, τοῦ


(α)
Y
1
0
-1
π
2π
X
Y = ημ.x
Y = συντ.x
(β)
Y
1
0
-1
π/2
π
3π/2
2π
X
Y = συν.x
Y = τεμ.x
(γ)
Y
1
0
-1
π
2π
X
Y = εφ.x
Y = συνφ.x
(δ)
Y
A
1
0
-1
-A
-C/B
0
2π
x
Y = Aσυν(Bx+C)
Y = ημx
2π/B
(ε)
Y = ημBx
Y = ημx
1
0
-1
π/2B
2π
x
2π/B

Σχ. II. 5.

(—) δεικνύοντος τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ μετάθεσιν τῆς περιοδικῆς καμπύλης (phase shift). Οὕτω ἡ ἡμιτονοειδὴς αὕτη διακύμανσις καθορίζεται ἐκ τῶν παραμέτρων A,B καὶ C. Τὸ γράφημα τῆς συναρτήσεως ταύτης ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ. II.5.(δ), εἰς ὃ ἐμφαίνεται καὶ τὸ γράφημα τῆς συναρτήσεως $y=$ ημx πρὸς σύγκρισιν.

Ἂς λάβωμεν περαιτέρω πρὸς σύγκρισιν τὰς συναρτήσεις

$$y = \text{ημ}x$$
$$y = \text{ημ}Bx.$$

Ἡ περίοδος πάσης ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης εἶναι 2π, καὶ συνεπῶς $Bx = 2\pi$ καὶ $x = 2\pi/B$, ἤτοι ἡ περίοδος τῆς $y=$ ημBx εἶναι $2\pi/B$. Τὸ εὖρος ταύτης εἶναι ± 1. Ἡ φάσις ταύτης θὰ πρέπει νὰ εἶναι $Bx = \pi/2$, διότι εἰς συναρτήσεις τῆς μορφῆς $y =$ ημx ἡ κορύφωσις λαμβάνει χώραν εἰς τιμὴν τοῦ x ἴσην πρὸς $\pi/2$, καὶ συνεπῶς $x = \pi/2B$. Τὸ γράφημα τῶν ἐν λόγῳ συναρτήσεων ἐμφαίνεται εἰς Σχ. II.5. (ε).

Τέλος, δέον νὰ τονισθῇ ὅτι οἱ κύκλοι τῶν ἀνωτέρω συναρτήσεων δύνανται νὰ ἐπαναληφθοῦν εἰς τὸν χρόνον, ὁπότε ἔχομεν τὴν συχνότητα τῶν κύκλων, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν ἐπαναλήψεως τῶν κύκλων.

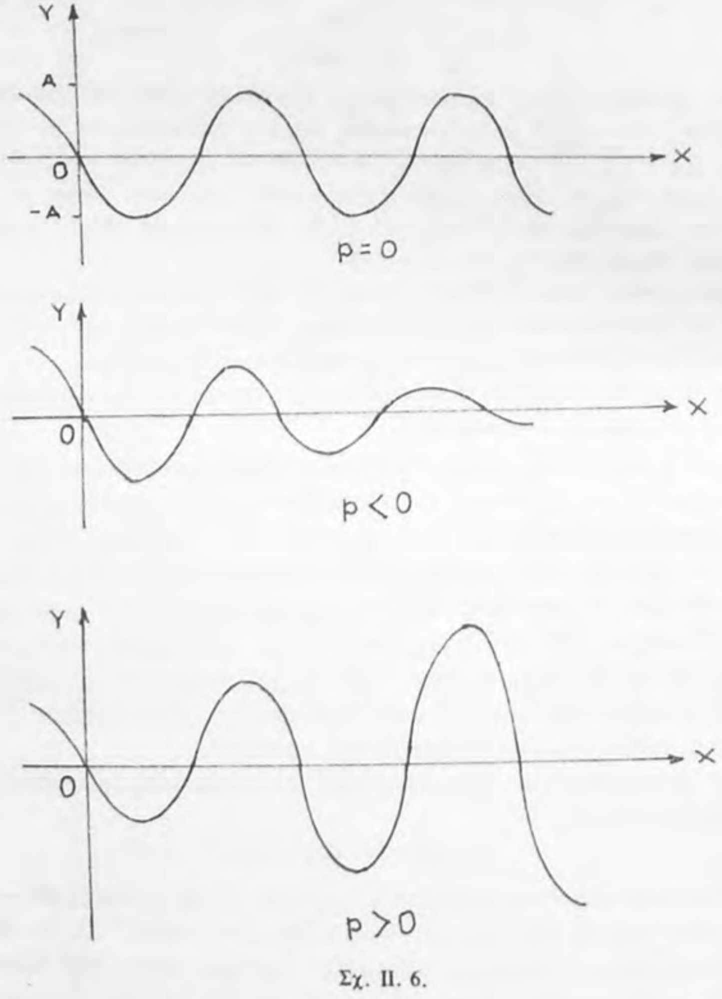
Γεννᾶται ἤδη τὸ ἐρώτημα, ὅπερ θὰ προκύψῃ καὶ εἰς τὴν περὶ τῶν οἰκονομικῶν διακυμάνσεων παράγραφον:

Παρουσιάζουν αἱ καμπύλαι τῶν ἡμιτονοειδῶν συναρτήσεων τὴν κανονικότητα τοῦ εὔρους (ἀνώτατον καὶ κατώτατον σημεῖον καμπῆς), ὡ ἀνωτέρω διεπιστώσαμεν; Ἡ ἀπάντησις εἶναι ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι ἀπαραίτητον, ἀλλὰ δύναται τὸ εὖρος A νὰ μεταβάλλεται ἐν συναρτήσει πρὸς τὴν μεταβλητὴν x, ἤτοι δύναται νὰ ὑπεισέλθῃ εἰς τὴν κυκλικὴν συνάρτησιν ἡ συνάρτησις A (x). Ἰδιαιτέρου ἐνδιαφέροντος εἶναι εἰς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα τὰ ἐξεταζόμενα ἐν τῷ χρόνῳ ἡ $A(x) = Ae^{\rho x}$, ἤτοι ἐκθετικὴ συνάρτησις (μονοτόνως αὔξουσα), ὅπου ρ τὸ ποσοστὸν μεταβολῆς καὶ x δύναται νὰ εἶναι ὁτιδήποτε, κυρίως δὲ εἶναι ἡ μεταβλητὴ «χρόνος».

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω, ἡ κυκλικὴ συνάρτησις δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν

$$y = Ae^{\rho x}\text{συν}\,(Bx + C),$$

ὅπου ὑφίστανται τέσσαρες παράμετροι A,ρ,B καὶ C. Ἡ περίοδος τῆς συναρτήσεως εἶναι $2\pi/B$ ἡ συχνότης εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου $f = B/2\pi$. Τὸ ἀρχικὸν εὖρος εἶναι A. Τὸ εὖρος ὅμως τοῦτο δὲν διατηρεῖται καθ' ὅλην τὴν χρονικὴν περίοδον, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ παράγοντος $e^{\rho x}$, ἤτοι τελικῶς ἐκ τῆς παραμέτρου ρ. Ἐὰν $\rho = 0$, τότε $e^{\rho x} = 1$, καὶ ἡ συνάρτησις εἶναι κανονικὴ παρουσιάζουσα τὸ αὐτὸ εὖρος εἰς ὅλους τοὺς κύκλους ἐπαναλήψεως. Ἐὰν $\rho < 0$, τότε ἡ ποσότης $Ae^{\rho x}$ βαίνει φθίνουσα, καὶ συνεπῶς ἡ ὅλη συνάρτησις ἔχει εὖρος συνεχῶς φθῖνον ἢ ἐξασθενίζον (damped). Αἱ τιμαὶ τῆς y εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀποτελοῦν σειρὰν συγκλίνουσαν. Ἐὰν ρ > 0, τότε ἡ ποσότης $Ae^{\rho x}$ αὐξάνει ραγδαίως (ἐκρηκτικῶς), καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις βαίνει συνεχῶς διευρυνομένη ὡς πρὸς τὸ εὖρος ταύτης. Αἱ τιμαὶ τῆς y εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀποτελοῦν σειρὰν ἀποκλίνουσαν. Τέλος, ἡ φάσις τῆς συναρτήσεως, ἤτοι ἡ κορύφωσις ταύτης εἰς x εἶναι $-C/B$.



Σχ. II. 6.

Τὰ γραφήματα τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως ἐμφαίνονται εἰς τὸ Σχ. II.6. διὰ τιμὰς $\rho = 0$, $\rho < 0$ καὶ $\rho > 0$.

Δέον νὰ τονισθῇ ἐνταῦθα ὅτι εἰς τὴν οἰκονομικὴν ζωὴν ἡ ἐπανάληψις τῶν κύκλων δὲν ἐμφανίζει τὴν αὐτὴν ἔντασιν καὶ τὰς αὐτὰς ἰδιομορφίας.

Αἱ φάσεις ἀντάσεως τῆς οἰκονομικῆς δραστηριότητος (ἀνώτατα σημεῖα τῆς καμπύλης) ὡς καὶ ὑφέσεως (κατώτατα σημεῖα) δὲν ἐμφανίζουν τὴν αὐτὴν διάρκειαν καὶ ἔντασιν κατὰ τὴν ἐπανάληψιν τῶν κύκλων. Ἄλλοτε ἔχομεν, δηλονότι, κρίσεις δριμείας μορφῆς, ἄλλοτε δὲ κρίσεις ἠπίας μορφῆς, κ.λπ. Μετὰ δὲ τὸν Β. Παγκόσμιον Πόλεμον ἡ σημασία τούτων ἐμειώθη λίαν σημαντικῶς λόγῳ τῶν μέσων ἅτινα διαθέτει τὸ Κράτος πρὸς ἐπηρεασμὸν τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς, ὡς ἡ δημοσιονομικὴ πολιτική, ἡ πολιτικὴ ἐπενδύσεων, τὰ προγράμματα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, κ.λπ. Τὰ μέσα ταῦτα ἔχουν τὴν προέλευσίν των ἐκ τῆς Κεϋνσιανῆς ἐπαναστάσεως.

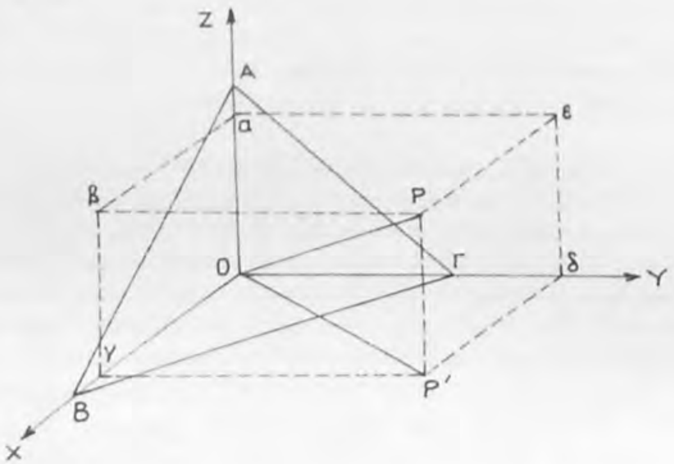
ΙΙ.0.7. **Συναρτήσεις πλειόνων μεταβλητῶν**. Μέχρι τοῦδε ἡ μελέτη τῶν συναρτήσεων ἀφεώρα τὴν σχέσιν μεταξὺ δύο μεταβλητῶν, ὡς π.χ. ἡ ζητουμένη ποσότης ἀγαθοῦ τινος εἶναι συνάρτησις τῆς τιμῆς τούτου, ἡ ἀτομικὴ κατανάλωσις εἶναι συνάρτησις τοῦ ἀτομικοῦ διαθεσίμου εἰσοδήματος, κ.λπ. Ὑπάρχουν ὅμως σχέσεις καὶ μεταξὺ πλειόνων μεταβλητῶν, ὁπότε ἡ ἐξηρτημένη τούτων εἶναι συνάρτησις τῶν λοιπῶν μεταβλητῶν. Παραδείγματος χάριν, ἡ ζητουμένη ποσότης ἀγαθοῦ τινὸς δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς τιμῆς τούτου, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὰς τιμὰς ἑτέρων ἀγαθῶν, ὑποκαταστάτων ἢ συμπληρωματικῶν. Ἐπίσης ἡ ἀτομικὴ κατανάλωσις δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ ἀτομικὸν εἰσόδημα, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὸ ἐπικρατοῦν ἐπιτόκιον εἰς τὴν ἀγοράν, κ.λπ.

Ἐάν, λοιπόν, ἔχωμεν τρεῖς μεταβλητὰς z, x, καὶ y, τότε ἡ πεπλεγμένη συνάρτησις γράφεται $\varphi(z, x, y) = 0$. Ἐξ αὐτῆς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τρεῖς λελυμένας συναρτήσεις ὡς αἱ $z = f_1(x, y)$, $x = f_2(z, y)$ καὶ $y = f_3(z, x)$.

Ἐὰν ἔχωμεν περισσοτέρας τῶν τριῶν μεταβλητὰς ἡ συνάρτησις δύναται νὰ γραφῇ ὡς $y = f(x_1 x_2, x_3, \ldots x_n)$. Γραφικῶς δὲν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν περισσοτέρας τῶν τριῶν μεταβλητάς.

Ἐνῶ ἡ συνάρτησις $y = f(x)$ ἀντιπροσωπεύει σημεῖα διατεταγμένων ζευγῶν yx εἰς τὸ ἐπίπεδον, ἡ συνάρτησις $z = f(x, y)$ δεικνύει ἐπιφάνειαν εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον. Ὁ χῶρος οὗτος ὁρίζεται ὑπὸ τριῶν ἀξόνων ὡς τὸ Σχ. ΙΙ.7., ἤτοι τὸν ἄξονα 0x (ἄξων τῶν τετμημένων), τὸν 0y (ἄξων τῶν τεταγμένων) καὶ 0z (ἄξων τῶν κατηγμένων). Οἱ ἄξονες οὗτοι ὁρίζουν τρία ἐπίπεδα, τὰ x0y, x0z καὶ y0z. Ἡ ἐπιφάνεια ἥτις τέμνει καὶ τὰ τρία ἐπίπεδα εἶναι ἡ ΑΒΓ.

Εἰς τὸ σύστημα τῶν τριῶν συντεταγμένων x, y, z ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον σημεῖον ὡς τὸ Ρ, τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας διὰ τῆς προβολῆς καθέτων εὐθειῶν πρὸς τὰ τρία ἐπίπεδα. Δίδοντες διαφόρους τιμὰς εἰς τὰ x καὶ y λαμβάνομεν διαφόρους τιμὰς τοῦ z, ἤτοι ἀπειρίαν σημείων εἰς τὸν χῶρον, ἅτινα ἀποτελοῦν μίαν ἐπιφάνειαν. Οὕτω ἡ ἐπιφάνεια ΑΒΓ εἶναι τὸ σύνολον τοιούτων σημείων καὶ παρίσταται γενικῶς ὑπὸ ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y καὶ z, ἤτοι ὑπὸ τῆς $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$. Πᾶν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν. Ἐὰν δὲ αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς ἐπαληθεύουν δύο συγχρόνως ἐξισώσεις, τότε τὸ σημεῖον τοῦτο εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τομῆς δύο ἐπιπέδων. Ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων ἀποτελεῖ γραμμήν*.



Σχ. II. 7.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy εἶναι $z = 0$, πᾶν δὲ παράλληλον πρὸς τοῦτο ἐπίπεδον ὡς τὸ αβPε ἔχει ἐξίσωσιν $z = \alpha$. Αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο ἑτέρων ἐπιπέδων yz καὶ xz εἶναι $x = 0$ καὶ $y = 0$, ἀντιστοίχως, τῶν δὲ παραλλήλων πρὸς αὐτὰ ἐπιπέδων εἶναι $x = \gamma$ καὶ $y = \delta$ ἀντιστοίχως.

II.0.8. **Ὁμογενεῖς συναρτήσεις.** Ἰδιαιτέραν σημασίαν διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν ἔχουν αἱ ὁμογενεῖς συναρτήσεις. Ἡ ἔννοια, π.χ., τῆς σταθερᾶς κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως εἰς τὴν θεωρίαν τῆς παραγωγῆς εἶναι μαθηματικῶς συνυφασμένη μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς γ ρ α μ μ ι κ ῆ ς ὁ μ ο γ ε ν ο ῦ ς σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ς (linear homogeneous function). Ἓν παράδειγμα δύναται νὰ διευκρινήσῃ τὴν ἔννοιαν τῆς σταθερᾶς κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως ἢ τῆς γραμμικῆς (πρώτου βαθμοῦ) ὁμογενοῦς συναρτήσεως. Ἔστω ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν z_1, μονάδων ἀγαθοῦ τινος ἀπαιτοῦνται x_1 μονάδες ἐργασίας καὶ y_1 μονάδες κεφαλαίου. Πρὸς παραγωγὴν 2z μονάδων τοῦ ἰδίου ἀγαθοῦ θὰ ἀπαιτηθοῦν 2x μονάδες ἐργασίας καὶ 2y μονάδες κεφαλαίου. Τριπλασια-

* Εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα αἱ τομαὶ παρίστανται δι' εὐθειῶν. Θὰ ἦτο ὅμως δυνατὸν νὰ εἶναι καμπύλαι γραμμαί, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ ἦτο κυρτὴ ἐπιφάνεια.

σμός, τετραπλασιασμός, κ.λπ., τῶν εἰς τὴν παραγωγὴν εἰσροῶν (παραγωγικῶν συντελεστῶν) θὰ ἔχη ὡς συνέπειαν τὸν τριπλασιασμόν, τετραπλασιασμόν, κ.λπ., τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς.

Γενικεύοντες τὴν ἔννοιαν τῆς ὁμογενοῦς συναρτήσεως ἀπὸ τοῦ πρώτου βαθμοῦ εἰς οἱονδήποτε βαθμὸν δίδομεν τὸν ἀκόλουθον ὁρισμὸν ταύτης:

Μία συνάρτησις $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$
εἶναι ὁμογενὴς ν— στοῦ βαθμοῦ, ἐὰν

$$f(tx_1, tx_2, tx_3, \ldots) = t^\nu f(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Ἤτοι, ἡ συνάρτησις εἶναι ν — στοῦ βαθμοῦ, ἐάν, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑκάστης ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἐπὶ μίαν σταθερὰν t, προκύπτη συνάρτησις t^ν φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἀρχικῆς.

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $z = x^2 + y^2$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ βαθμοῦ ὁμογενείας πρέπει

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2 + (ty)^2 \\ &= t^2x^2 + t^2y^2 \\ &= t^2(x^2 + y^2) \\ &= t^2 z. \end{aligned}$$

Οὕτω ἡ συνάρτησις $z = x^2 + y^2$ εἶναι ὁμογενὴς δευτέρου βαθμοῦ.

Ἡ συνάρτησις $z = x^2 + xy + y^2$ εἶναι ὁμογενὴς δευτέρου βαθμοῦ διότι:

$$\begin{aligned} f(tx, txty, ty) &= (tx)^2 + txty + (ty)^2 \\ &= t^2x^2 + t^2xy + t^2y^2 \\ &= t^2(x^2 + xy + y^2) \\ &= t^2 f(x, xy, y). \end{aligned}$$

Ἡ συνάρτησις $z = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{4x^3}{y^2} + 1$ δὲν εἶναι ὁμογενής, διότι:

$$\frac{t^2x^2}{ty} + \frac{4t^3x^3}{t^2y^2} + \frac{ty}{ty} = t\,\frac{x^2}{y} + \frac{4tx^3}{y^2} + 1.$$

Ἡ συνάρτησις $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{4x^2}{y^2} + 1$ εἶναι ὁμογενὴς μηδενικοῦ βαθμοῦ

$$\text{διότι: } \frac{tx}{ty} + \frac{4t^2x^2}{t^2y^2} + \frac{ty}{ty} = t^0\left(\frac{x}{y} + \frac{4x^2}{y^2} + 1\right),$$

ὅπου $t^0 = 1$. Ἡ μηδενικοῦ βαθμοῦ συνάρτησις ὑποδηλοῖ ὅτι, ἐὰν ἅπασαι αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ μίαν σταθερὰν ποσότητα (t) ἡ συνάρτησις παραμένει ἀμετάβλητος. Οὕτω ἐὰν εἰς μίαν συνάρτησιν ζητήσεως ἀγαθοῦ τινός, ἡ τιμὴ καὶ τὸ διαθέσιμον εἰσόδημα πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ μίαν σταθερὰν ποσότητα, ἡ ζήτησις παραμένει ἀμετάβλητος.

II.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ

Δεδομένου ὅτι αἱ προτάσεις τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας δύνανται νὰ διατυπωθοῦν ὑπὸ μαθηματικὴν μορφήν, ἡ χρῆσις ἀναλυτικῶν μεθόδων εἰς τὴν οἰκονομικὴν εἶναι λίαν διαδεδομένη σήμερον καὶ βοηθεῖ τὰ μέγιστα τὴν ἔρευναν. Αἱ συναρτήσεις καὶ τὰ γραφήματα τούτων εἶναι ἐκ τῶν πλέον ἐν χρήσει ἐργαλείων οἰκονομικῆς ἀναλύσεως.

Αἱ οἰκονομικαὶ συναρτήσεις ἀναλόγως τοῦ κλάδου τῆς οἰκονομικῆς εἰς ὃν εἰδικώτερον ἀναφέρονται δύνανται νὰ διακριθοῦν εἰς μικροοικονομικὰς (συνάρτησις ζητήσεως, συνάρτησις προσφορᾶς, συνάρτησις συνολικῶν ἐσόδων, συνάρτησις συνολικοῦ κόστους κ.λπ) καὶ μακροοικονομικὰς συναρτήσεις (συνάρτησις συνολικῆς καταναλώσεως, συνάρτησις συνολικῆς ἀποταμιεύσεως, συνάρτησις ἐπενδύσεων, συνάρτησις ζητήσεως χρήματος, κ.λπ), εἰς συναρτήσεις διεθνοῦς ἐμπορίου (συνάρτησις εἰσαγωγῶν, συνάρτησις ἐξαγωγῶν, κ.λπ), κ.λπ. Ἀναλόγως τῆς φύσεως τῆς συναρτησιακῆς σχέσεως, ἐξ ἄλλου, αἱ συναρτήσεις δύνανται νὰ διακριθοῦν εἰς τοιαύτας συμπεριφορᾶς (συνάρτησις ζητήσεως, καταναλώσεως, ἀποταμιεύσεως, κ.λπ) καὶ εἰς τεχνικο-οικονομικὰς τοιαύτας (συνάρτησις παραγωγῆς, συνάρτησις κόστους κ.λπ.).

Ἡ διατύπωσις συναρτησιακῆς σχέσεως δὲν εἶναι ἢ ἡ διατύπωσις (κατασκευὴ) ἑνὸς ἁπλοῦ ὑποδείγματος εἰς τὴν οἰκονομικήν, ὅπου ἐμφαίνεται ἡ ἐξάρτησις μιᾶς μεταβλητῆς ἐκ μιᾶς ἄλλης ἢ πολλῶν ἄλλων, τῆς ἐξαρτήσεως ταύτης γενομένης δεκτῆς βάσει μιᾶς ὡρισμένης θεωρίας a priori. Ἡ διατύπωσις τοιούτου ὑποδείγματος (συναρτησιακῆς σχέσεως) συνεπάγεται κατ' ἀρχὴν τὴν ἐπιλογὴν τῶν καταλλήλων μεταβλητῶν (εἰσόδημα, κατανάλωσις, ἐπιτόκιον, ἀπόδοσις κεφαλαίου, τιμαὶ κ.λπ.). Μετὰ ταῦτα ἀπαιτεῖται ὁ καθορισμὸς τῆς μορφῆς τῆς συναρτήσεως, ἤτοι γραμμικῆς παραβολικῆς, ὑπερβολικῆς, κ.λπ. Τοῦτο θὰ ἐξαρτηθῆ διὰ τὰς θεωρητικὰς μὲν συναρτήσεις ἐκ τοῦ a priori νόμου εἰς ὃν ὑπείκει ἡ σχέσις, διὰ δὲ τὰς ἐμπειρικὰς συναρτήσεις ἐκ τῶν πραγματικῶν δεδομένων, ἅτινα ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσίν μας καὶ τὰ ὁποῖα ὑποδεικνύουν τὸν «πρακτικὸν» νόμον εἰς ὃν ἡ σχέσις ὑπείκει.

Καθορίζοντες τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως καθορίζομεν συγχρόνως καὶ τὰς παραμέτρους ταύτης, ἡ ἐκτίμησις τῶν ὁποίων εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἔρευναν εἶναι ἔργον τῆς οἰκονομετρικῆς, ἥτις ἀποφαίνεται κυρίως καὶ διὰ τὴν ἀξιοπιστίαν τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν ἐκτιμήσεων.

Κατωτέρω παραθέτομεν παραδείγματα οἰκονομικῶν συναρτήσεων.

II.1.0. **Ἡ συνάρτησις ζητήσεως.** Αὕτη περιγράφει τὴν σχέσιν ἥτις ὑφίσταται μεταξὺ ζητουμένης ποσότητος ἀγαθοῦ τινος καὶ τῆς τιμῆς του ἢ καὶ τῶν τιμῶν ἑτέρων ἀγαθῶν, ὅταν τὸ εἰσόδημα καὶ αἱ προτιμήσεις τοῦ καταναλωτοῦ παραμένουν σταθεραί. Ἐκ τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας γνωρίζομεν ὅτι εἰς ἑκάστην τιμὴν ἀντιστοιχεῖ καὶ ὡρισμένη ζητουμένη ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ. Ὅσον αὐξάνεται ἡ τιμὴ τόσον ἡ ζητουμένη ποσότης ἐλαττοῦται καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ εἰκὼν αὕτη ἀποτελεῖ τὴν καλουμένην κλίμακα ζητήσεως (demand schedule).

Συνεπῶς ἡ συνάρτησις ζητήσεως εἶναι μονότιμος καὶ φθίνουσα, ἤτοι ἡ καμπύλη ταύτης ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν καὶ εἰς ἑκάστην τιμὴν ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνον ζητουμένη ποσότης. Αὕτη εἶναι ἡ συνήθης περίπτωσις εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν.

Ἡ γενικὴ συνάρτησις ζητήσεως δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $D = f(p)$, ὅπου D εἶναι ἡ ζητουμένη ποσότης καὶ p εἶναι ἡ κατὰ μονάδα τιμή. Ἡ συγκεκριμένη μορφή, ὅμως, τὴν ὁποίαν δύναται ἡ συνάρτησις νὰ λάβῃ ποικίλει. Δύναται νὰ εἶναι γραμμικῆς, ὑπερβολικῆς, ἐκθετικῆς ἢ ἑτέρας μορφῆς, ἀναλόγως τοῦ νόμου ζητήσεως εἰς ὃν ἑκάστη περίπτωσις ὑπείκει. Ἤδη εἰς τὰ προηγούμενα ἀνεφέρθημεν εἰς ὡρισμένας μορφάς, ὡς ἡ γραμμικὴ $D = 60 - 10p$.

Αἱ μεταβολαὶ τῶν παραμέτρων τῆς συναρτήσεως ζητήσεως μεταβάλλουν τὴν κατεύθυνσιν καὶ τὴν θέσιν τῆς καμπύλης ζητήσεως. Ἀνωτέρω ὑπετέθη ὅτι τὸ εἰσόδημα τῶν καταναλωτῶν παραμένει σταθερόν. Ἐάν, ὅμως, ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ εἰσόδημα μεταβάλλεται, τότε ἡ καμπύλη ζητήσεως μετατίθεται πρὸς τὰ δεξιὰ εἰς θέσιν παράλληλον τῆς ἀρχικῆς καμπύλης. Ταῦτα ἰσχύουν διὰ πᾶσαν συνάρτησιν.

Μὲ τὴν μαθηματικὴν μορφοποίησιν τοῦ νόμου τῆς ζητήσεως (ὡς καὶ τῆς προσφορᾶς) ἠσχολήθησαν κατὰ καιροὺς οἱ: Cournot (1801—1877), Walras (1834—1910), Marshall (1842—1924), Slutsky, Samuelson, κ.ἄ. Μὲ τὴν ἐμπειρικοστατιστικὴν δὲ διακρίβωσιν τοῦ νόμου τῆς ζητήσεως ἠσχολήθησαν παλαιότερον οἱ H.L. Moore, H. Schultz, W. Leontief, H. Wold, ὡς καὶ οἱ νεώτεροι οἰκονομέτραι.

Εἰδικώτερον, ἡ σχέσις μεταξὺ δαπάνης δι' ἀγαθὰ καὶ εἰσοδήματος ἐμελετήθη ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ στατιστικοῦ Ernest Engel (1821—1896), ὅστις διετύπωσεν τὸν νόμον καθ' ὃν αὐξανομένου τοῦ εἰσοδήματος ἡ διὰ τροφὴν δαπανωμένη ἀναλογία τούτου βαίνει μειουμένη, τῆς τιμῆς θεωρουμένης ἀμεταβλήτου. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ νόμου τούτου τὰ ἀγαθὰ διακρίνονται εἰς κατώτερα καὶ ἀνώτερα. Τῶν πρώτων μὲν ἡ κατανάλωσις βαίνει σχετικῶς μειουμένη, τῶν δευτέρων δὲ βαίνει σχετικῶς αὐξανομένη, αὐξανομένου τοῦ εἰσοδήματος. Αἱ δι' ἕκαστον ἀγαθὸν προκύπτουσαι καμπύλαι καλοῦνται καμπύλαι τοῦ Engel.

II.1.1. **Ἡ συνάρτησις συνολικῆς προσόδου.** Ἡ ἀνωτέρω περιγραφεῖσα συνάρτησις ζητήσεως ἀγαθοῦ καλεῖται καὶ καμπύλη μέσης τιμῆς ἢ προσόδου ὡς συσχετίζουσα ὡρισμένην ποσότητα μὲ ὡρισμένην κατὰ μονάδα τιμήν. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ποσότητας ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς λαμβάνομεν τὰς συνολικὰς εἰσπράξεις τοῦ πωλητοῦ ἢ τὰς συνολικὰς δαπάνας τῶν καταναλωτῶν τοῦ συγκεκριμένου ἀγαθοῦ. Ἡ συνάρτησις ἡ περιγράφουσα τὴν σχέσιν συνολικῆς προσόδου καὶ ποσότητος γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$R = f(p) \cdot p = D \cdot p = \varphi(D)$$

Ὁ συνήθης δὲ τύπος τῆς συναρτήσεως συνολικῆς προσόδου εἶναι ὁ τῆς παραβολῆς, ὡς π.χ. $R = \alpha x - \beta x^2$.

II.1.2. **Ἡ συνάρτησις προσφορᾶς.** Αὕτη περιγράφει τὴν σχέσιν μεταξὺ προσφερομένης ποσότητος ἀγαθοῦ τινος καὶ τῆς τιμῆς αὐτοῦ. Ἐκ τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας γνωρίζομεν ὅτι ὅσον αὐξάνεται ἡ τιμὴ ἑνὸς ἀγαθοῦ τόσον ἡ προσφερομένη ποσότης αὐξάνεται ἐπίσης. Εἰς ἑκάστην τιμὴν ἀντιστοιχεῖ καὶ ὡρισμένη προσφερομένη ποσότης. Ἡ εἰκὼν αὕτη μᾶς δίδει τὴν κλίμακα προσφορᾶς (supply schedule).

Ἡ συνάρτησις προσφορᾶς εἶναι μονότιμος καὶ αὔξουσα ἡ δὲ καμπύλη προσφορᾶς ἔχει θετικὴν κλίσιν. Ἡ γενικὴ συνάρτησις προσφορᾶς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $S = f(p)$, ὅπου S εἶναι ἡ προσφερομένη ποσότης καὶ p εἶναι ἡ τιμὴ κατὰ μονάδα προσφερομένης ποσότητος.

Ὡς ἡ συνάρτησις ζητήσεως, οὕτω καὶ ἡ συνάρτησις προσφορᾶς δύναται νὰ λάβη διαφόρους μορφάς, τούτου ἐξαρτωμένου ἐκ τῶν οἰκονομικοτεχνικῶν συνθηκῶν τῆς παραγωγῆς καὶ ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἀγαθοῦ (φθαρτὸν ἢ ἀγαθὸν διαρκείας). Οὕτω ἡ συνάρτησις δύναται νὰ εἶναι γραμμικῆς, παραβολικῆς, ἐκθετικῆς, ἢ ἑτέρας μορφῆς. Ἤδη εἰς τὰ προηγούμενα ἀναφέρθημεν εἰς ὡρισμένας μορφάς, ὡς ἡ γραμμικὴ $S = -15 + 15p$, καὶ ἡ καμπύλη σταθερᾶς ἐλαστικότητος $y = \gamma x^{a}$.

Ἐνταῦθα ἐπίσης, ἡ μεταβολὴ τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων τῆς συναρτήσεως μεταβάλλει τὴν θέσιν τῆς καμπύλης εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων.

II.1.3. **Ἡ συνάρτησις κόστους.** Αὕτη περιγράφει τὴν σχέσιν μεταξὺ συνολικοῦ κόστους ἢ μέσου κατὰ μονάδα κόστους καὶ παραγομένης ποσότητος.

Ἑκάστη παραγωγικὴ μονὰς λειτουργεῖ ὑφ' ὡρισμένας συνθήκας κόστους. Τὸ σύνολον τῶν δαπανῶν διὰ τὴν παραγωγὴν διαφόρων ποσοτήτων ἀγαθοῦ τινος ἀποτελεῖ τὸ κόστος παραγωγῆς. Ὡς εἶναι γνωστὸν, τὸ κόστος συντίθεται ἐκ τοῦ σταθεροῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον παραμένει τὸ αὐτὸ ἀνεξαρτήτως παραγομένης ποσότητος, καὶ τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ γενικὰ ἔξοδα (overhead costs), καὶ ἐκ τοῦ μεταβλητοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάλογον τῆς παραγομένης ποσότητος. Οὕτως, αὐξανομένης τῆς παραγομένης ποσότητος τὰ μὲν κατὰ μονάδα σταθερὰ ἔξοδα μειοῦνται, τὰ δὲ κατὰ μονάδα μεταβλητὰ ἔξοδα παραμένουν τὰ αὐτά. Ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν δύο συναρτήσεις κόστους, τὴν συνάρτησιν συνολικοῦ κόστους, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ αὐξάνεται αὐξανομένης τῆς παραγομένης ποσότητος, καὶ τὴν συνάρτησιν τοῦ μέσου κόστους τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ βαίνει φθίνουσα μέχρις ὡρισμένου ἐπιπέδου παραγωγῆς, μετὰ τὸ ὁποῖον ἄρχεται αὐξανομένη. Καὶ ταῦτα προκειμένου περὶ βραχυχρονίου συναρτήσεως κόστους. Εἰς τὴν μακροχρόνιον περίοδον, λόγῳ δυνάτότητος μεταβολῆς τῶν παγίων παραγωγικῶν στοιχείων καὶ γενικώτερον τῶν συνθηκῶν παραγωγῆς, ἡ καμπύλη τῆς συναρτήσεως κόστους ματαβάλλει σχῆμα καθισταμένη ὀλιγώτερον κυρτή.

Ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς συναρτήσεως συνολικοῦ κόστους δίδεται ὡς $C_T = f(x)$, ὅπου C_T εἶναι τὸ συνολικὸ κόστος εἰς χρηματικὰς μονάδας καὶ x ἡ παραγομένη ποσότης. Ἡ συνάρτησις συνολικοῦ κόστους εἶναι αὔξουσα καὶ μονότιμος, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι εἰς ἑκάστην ποσότητα ἀντιστοιχεῖ μία τιμή, ἥτις εἶναι ἡ ἐλαχίστη (ἐλάχιστον κόστος). Δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν καὶ ἕτεραι τιμαὶ μεγαλύτεραι, αἱ ὁποῖαι ὅμως δὲν ἐνδιαφέρουν, δεδομένου ὅτι ἡ προσπάθεια τῆς παραγωγικῆς μονάδος τείνει εἰς τὸ νὰ λειτουργῆ αὕτη ὑπὸ συνθήκας ἐλαχίστου κόστους.

II.1.4. **Ἡ συνάρτησις παραγωγῆς.** Ἡ συνάρτησις παραγωγῆς περιγράφει τὴν σχέσιν μεταξὺ προϊόντος τῆς παραγωγῆς καὶ τῶν συντελεστῶν ταύτης ἢ εἰσροῶν ὡς οὗτοι καλοῦνται. Ἡ σχέσις αὕτη εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν εἶναι γνωστὴ ὑπὸ τὸ ὄνομα «ἀπόδοσις κατὰ κλίμακα παραγωγῆς» (returns to scale). Ἐὰν ἡ παραγωγὴ αὐξάνεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν ὡς αἱ εἰσροαί, τότε ἔχομεν σταθερὰν ἀπόδοσιν. Ἔχομεν αὔξουσαν ἀπόδοσιν, ὅταν ἡ παραγωγὴ αὐξάνεται κατὰ μεγαλυτέραν ἀναλογίαν ἐκείνης τῶν εἰσροῶν, καὶ φθίνουσαν ἀπόδοσιν, ὅταν ἡ παραγωγὴ αὐξάνεται κατὰ μικροτέραν ἀναλογίαν ἐκείνης τῶν εἰσροῶν.

Γενικῶς ἡ συνάρτησις παραγωγῆς δύναται νὰ γραφῆ ὡς: $X = f(K,L,M)$, ὅπου X ἀντιπροσωπεύει τὴν παραγωγήν, K τὸ κεφάλαιον, L τὴν ἐργασίαν καὶ M τὰς πρώτας ὕλας, κ.λπ.

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις παραγωγῆς εἶναι ὁμογενής, ν — στοῦ βαθμοῦ, διότι γνωρίζομεν ὅτι

$$f(tK, tL, tM) = t^{\nu} f(K,L,M).$$

Ἐὰν αἱ εἰσροαὶ αὐξηθοῦν κατὰ t, ἡ παραγωγὴ θὰ αὐξηθῆ κατὰ t^{ν}. Συνεπῶς εἰς τὴν **περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν σταθερὰν ἀπόδοσιν**, τότε $\nu = 1$.

Εἰς τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς ἔχομεν αὔξουσαν ἢ φθίνουσαν ἀπόδοσιν, τότε $\nu > 1$ ἢ $\nu < 1$ ἀντιστοίχως.

Ἐκ τῶν πλέον ἐν χρήσει τύπων συναρτήσεων παραγωγῆς εἶναι ὁ τῶν Cobb καὶ Douglas*:

$$X = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις εἶναι ὁμογενὴς βαθμοῦ $(\alpha+\beta)$, καθ' ὅτι: $f(tL,tK) = A(tL)^{\alpha}(tK)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}AL^{\alpha}K^{\beta}$. Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸ ἀπασχολούμενον κεφάλαιον καὶ τὴν ἀπασχολουμένην ἐργασίαν, ἡ παραγωγὴ θὰ αὐξηθῇ κατὰ $2^{\alpha+\beta}$ φοράς. Οὕτω οἱ συντελεσταὶ α, β, καὶ τὸ ἄθροισμά των δύναται νὰ ἑρμηνευθοῦν εἰς ὅρους «οἰκονομιῶν κλίμακος» (economies of scale). Εἰς τὴν συνάρτησιν τύπου Cobb-Douglas συνήθως λαμβάνεται $\alpha+\beta = 1$, ὁπότε οἱ συντελεσταὶ α καὶ β δεικνύουν καὶ τὴν μερίδα ἑκάστου συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς, τῆς ἀμοιβῆς κατὰ συνέπειαν γινομένης ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁριακοῦ προϊόντος ἑκάστου συντελεστοῦ.

Ἡ συνάρτησις τύπου Cobb - Douglas εἶναι γραμμικὴ εἰς τοὺς λογαρίθμους της

$$\log X = \log A + \alpha\log L + \beta\log K$$

Οἱ συντελεσταὶ α καὶ β δεικνύουν τὴν ἐλαστικότητα ἀνταποκρίσεως τῆς παραγωγῆς πρὸς τὰς εἰσροάς. Μία κατὰ 1% αὔξησις τοῦ συντελεστοῦ «ἐργασία», τοῦ κεφαλαίου παραμένοντος σταθεροῦ, θὰ ἐπιφέρῃ μίαν κατὰ α% αὔξησιν τῆς παραγωγῆς. Ὁμοίως, μία κατὰ 1% αὔξησις τοῦ συντελεστοῦ «κεφάλαιον», τῆς ἐργασίας παραμενούσης ἀμεταβλήτου, θὰ ἐπιφέρῃ μίαν κατὰ β% αὔξησιν τῆς παραγωγῆς. Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ συντελεσταὶ αὐξηθοῦν κατὰ 1%, τότε ἡ παραγωγὴ θὰ αὐξηθῇ κατὰ $(\alpha+\beta)$%.

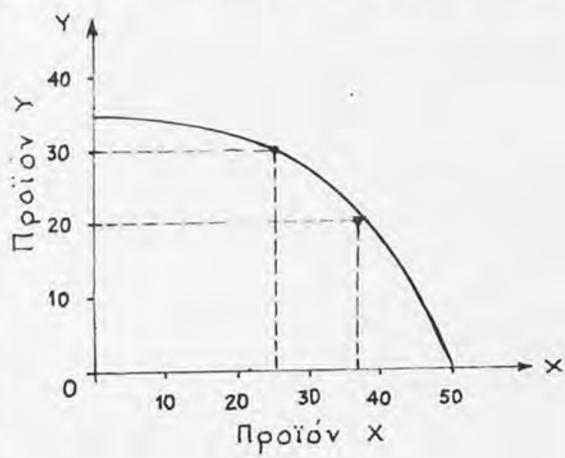
Ἐκ τῆς ἐννοίας τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς προκύπτουν αἱ ἑξῆς σχέσεις: (α) Σχέσεις μεταξὺ προϊόντος (ἐκροῆς) καὶ εἰσροῶν, καὶ (β) σχέσεις μεταξὺ τῶν εἰσροῶν (παραγωγικῶν συντελεστῶν). Αἱ πρῶται σχέσεις ἀποβαίνουν αἱ ἀνωτέρω κληθεῖσαι ἀποδόσεις κλίμακος (σταθεραί, φθίνουσαι αὔξουσαι). Ἡ σχέσις τῆς αὐξήσεως τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς ποσότητος ἑνὸς τῶν συντελεστῶν, τῶν λοιπῶν παραμενόντων ἀμεταβλήτων, καλεῖται φυσικὸν προϊὸν ἢ παραγωγικότης (ὁριακὴ) τοῦ ὑπ' ὄψιν συντελεστοῦ. Αἱ δεύτεραι σχέσεις ἀποβαίνουν εἰς ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον καλοῦμεν ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς. Ἡ ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως δύναται νὰ εἶναι μηδενικὴ ἢ μεγαλυτέρα τοῦ μηδενός.

Ὅταν ἡ ἐλαστικότης εἶναι μηδενική, τότε δὲν δύναται νὰ χωρήσῃ ὑποκατάστασις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, οἱ ὁποῖοι εἰσέρχονται

* Πλείονα βλέπε εἰς Κεφάλαιον IV.

εἰς τὴν παραγωγὴν καθ' ὡρισμένην ἀναλογίαν διατηρουμένην σταθεράν. Ὅταν ἡ ἐλαστικότης εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ μηδενός, τότε πρὸς παραγωγὴν τῆς αὐτῆς ποσότητος εἶναι δυνατοὶ διάφοροι συνδυασμοὶ τῶν εἰσροῶν. Τοιοῦτοι συνδυασμοί, ὅμως, εἶναι περιωρισμένης κλίμακος, ἡ δὲ ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως εὑρέθη νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος*. Ἡ συνάρτησις παραγωγῆς τύπου Cobb-Douglas ἔχει ἐλαστικότητα ὑποκαταστάσεως ἴσην πρὸς τὴν μονάδα, ἡ δὲ συνάρτησις παραγωγῆς τύπου Leontief, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῶν σταθερῶν συντελεστῶν πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν ἔχει ἐλαστικότητα ἴσην πρὸς τὸ μηδέν. Ἅπασαι αἱ ἀνωτέρω κατηγορίαι συναρτήσεων παραγωγῆς ἀνήκουν εἰς τὴν εὐρυτέραν κατηγορίαν τῶν συναρτήσεων σταθερᾶς ἐλαστικότητος ὑποκαταστάσεως (ΣΕΥ ἢ CES** ἀγγλιστί), ὡς ἡ συνάρτησις: $X^{-\beta} = aK^{-\beta} + lL^{-\beta}$.

II.1.5. **Ἡ συνάρτησις μετασχηματισμοῦ.** Εἰς τὴν θεωρίαν τῆς παραγωγῆς συχνάκις γίνεται λόγος διὰ τὴν καμπύλην μετασχηματισμοῦ. Ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων τὰ ὁποῖα δεικνύουν τὸν συνδυασμὸν παραγωγῆς ὑπὸ τῆς ἐπιχειρήσεως δύο προϊόντων x καὶ y μὲ δεδομένους παραγωγικοὺς συντελεστὰς καὶ παραγωγικὰς συνθήκας καὶ συνεπῶς μὲ δεδομένον κόστος παραγωγῆς. Διὰ τὴν καλλιτέραν κατανόησιν τῆς συναρτήσεως μετασχηματισμοῦ ἂς δείξωμεν τὴν καμπύλην ταύτης διαγραμματικῶς εἰς τὸ Σχ. II.8.



Σχ. II. 8.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω διάγραμμα ἡ καμπύλη δεικνύει ὅτι μὲ δεδομένους παραγωγικοὺς συντελεστὰς ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ παράγῃ, εἴτε 35 μονάδας ἐκ τοῦ προϊόντος y καὶ μόνον ἢ 50 μονάδας ἐκ τοῦ προϊόντος x καὶ μόνον, εἴτε οἱονδήποτε συνδυασμὸν μεταξὺ τῶν προϊόντων. Παραδείγματος χάριν, 30 μονάδας ἐκ τοῦ y καὶ 25 μονάδας ἐκ τοῦ x, ἢ 20 μονάδας ἐκ τοῦ y καὶ 38

* K. J. Arrow, H.B. Chenery, B.S. Minhas καὶ R.M. Solow, «Capital-Labour Subtution and Economic Efficiency», The Review of Economics and Statistics, Αὔγ. 1961.

** Constant elasticity of substitution

μονάδας ἐκ τοῦ x. Γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ αὔξησις τῆς παραγωγῆς τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν προϊόντων συνεπάγεται τὴν μείωσιν τῆς παραγωγῆς τοῦ ἑτέρου, ἤτοι τὸ ἓν προϊὸν μετασχηματίζεται εἰς τὸ ἕτερον, ἐξ οὗ καὶ ὁ ὅρος καμπύλη μετασχηματισμοῦ. Ἡ καμπύλη ἔχει κλίσιν ἀρνητικὴν καὶ εἶναι κοίλη ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων. Ἡ κοιλότης ὑποδηλοῖ ὅτι ἡ παραγωγὴ τοῦ y μειοῦται μὲ αὔξοντα ρυθμὸν καθὼς ἡ παραγωγὴ τοῦ x αὐξάνει κατὰ σταθερὰν ποσότητα.

Ἡ συνάρτησις ἡ δεικνύουσα τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν δύο προϊόντων γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\Phi(x,y) = 0$$

Ἐκ τῆς συναρτήσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ λάβωμεν δύο ἑτέρας συναρτήσεις, τὴν $y = f(x)$ καὶ $x = \varphi(y)$. Ἀμφότεραι αἱ συναρτήσεις εἶναι μονότιμοι καὶ φθίνουσαι, ὅπερ σημαίνει ὅτι εἰς μίαν τιμὴν τῆς x ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνον τιμὴ τῆς y, καὶ ὅτι αὐξανομένης τῆς τιμῆς τῆς y ἡ τιμὴ τῆς x μειοῦται.

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ καμπύλη μετασχηματισμοῦ δεικνύει τὰ μέγιστα σημεῖα συνδυασμοῦ τῶν δύο προϊόντων, ἤτοι πρόκειται περὶ ἐννοίας μεγιστεύσεως.

II.1.6. **Καμπύλαι ἀδιαφορίας τοῦ καταναλωτοῦ καὶ συνάρτησις ὠφελιμότητος.** Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ καταναλωτὴς περιορίζει τὴν κατανάλωσίν του εἰς δύο ἀγαθά, x καὶ y, τότε ἡ συνάρτησις τῆς ὠφελιμότητος δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς:

$$\Omega = f(x, y)$$

Σχ. II. 9.

Τὴν αὐτὴν ὠφελιμότητα ἢ ἱκανοποίησιν δύναται ὁ καταναλωτὴς νὰ λάβῃ μὲ διαφόρους συνδυασμοὺς τῶν ἀγαθῶν x καὶ y. Τὸ ὡρισμένον ἐπίπεδον ἱκανοποιήσεως παρίσταται διὰ μιᾶς καμπύλης, ὡς εἰς τὸ κατωτέρω διάγραμμα, ἥτις εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἅτινα ἀποτελοῦν συνδυασμοὺς τῶν δύο ἀγαθῶν. Καθ' ὅλην τὴν διαδρομὴν τῆς καμπύλης λαμβάνεται ἡ αὐτὴ ἱκανοποίησις διὸ καὶ καμπύλη ἀδιαφορίας καλεῖται.

Ἑκάστη καμπύλη ἀδιαφορίας δίδει ἓν σύνολον συνδυασμοῦ τῶν δύο ἀγαθῶν καὶ εἶναι ἀδιάφορον διὰ τὸν καταναλωτὴν ποῖον συνδυασμὸν θὰ ἐπιλέξῃ ἐφ' ὅσον πάντες δίδουν τὴν αὐτὴν ἱκανοποίησιν. Δυνατὸν ὅμως νὰ ὑπάρχουν καὶ συνδυασμοὶ δίδοντες μεγαλυτέραν ἢ μικροτέραν ἱκανοποίησιν καὶ οἱ ὁποῖοι παρίστανται ὑπὸ ἑτέρων συναρτήσεων ὠφελιμότητος. Τὸ σύνολον τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας ἑκάστη τῶν ὁποίων παριστάνει καὶ ἓν ἐπίπεδον ὠφελιμότητος καλεῖται χάρτης καμπύλων ἀδιαφορίας καὶ χρησιμεύει εἰς τὴν περιγραφὴν τῆς κλίμακος προτιμήσεων τοῦ καταναλωτοῦ διὰ τὰ δύο ἀγαθά. Ἡ καμπύλη ἀδιαφορίας I προσδιορίζει σημεῖα ἅτινα παρέχουν μικροτέραν ἱκανοποίησιν ἐκείνων τῆς καμπύλης II. Τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης III δεικνύουν μεγαλυτέραν ἱκανοποίησιν ἐκείνων τῆς καμπύλης II καὶ ὁπωσδήποτε τῆς I.

Αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας I, II καὶ III παρίστανται ὑπὸ συναρτησιακὴν μορφὴν ὡς ἀκολούθως:

$$\Omega_{I} = f(x,y)$$
$$\Omega_{II} = f(x,y)$$
$$\Omega_{III} = f(x,y)$$

Τὰ σύμβολα Ω_I, Ω_{II} καὶ Ω_{III} ἀποτελοῦν δείκτας τῆς τακτικῆς καὶ μὴ μετρησίμου ἐννοίας τῆς ἱκανοποιήσεως ἢ ὠφελιμότητος ἢ χρησιμότητος.

Αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας ἔχουν τὰ ἑξῆς χαρακτηριστικά:

α) Ἔχουν ἀρνητικὴν κλίσιν (φθίνουσα συνάρτησις).

β) Εἶναι κυρταὶ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων. Τοῦτο σημαίνει ὅτι μεγαλύτεραι ποσότητες τοῦ ἑνὸς ἀγαθοῦ ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ ἀντισταθμίσουν τὴν μείωσιν τοῦ ἑτέρου ἀγαθοῦ. Βεβαίως, τοῦτο ἰσχύει διὰ τὴν «κανονικὴν» περίπτωσιν τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας.

γ) Δὲν συντέμνονται, διότι ἄλλως θὰ ὑπῆρχον σημεῖα τῆς μιᾶς καμπύλης δίδοντα μεγαλυτέραν ἱκανοποίησιν καὶ σημεῖα τῆς αὐτῆς καμπύλης δίδοντα μικροτέραν ἱκανοποίησιν ἑτέρας καμπύλης, πρᾶγμα ἀσυμβίβαστον πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῶν καμπύλων καὶ τοῦ χάρτου ἀδιαφορίας.

II. 1. 7. Αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας καὶ ὁ νόμος τῆς ζητήσεως.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως ἀγαθοῦ τινος ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν, ἤτοι φέρεται ἐκ τῶν ἄνω ἀριστερὰ πρὸς τὰ κάτω δεξιὰ εἰς τὸ θετικὸν τεταρτημόριον τοῦ Καρτεσιανοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων. Εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν τοῦτο ἑρμηνεύεται διὰ δύο μεθόδων. Εἴτε βάσει τῆς ἀναλύσεως τῆς φθινούσης ὁριακῆς χρησιμότητος τοῦ ἀγαθοῦ εἰς ὃ ἡ καμπύλη ἀναφέρεται, εἴτε βάσει τῆς τεχνικῆς τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας τοῦ καταναλωτοῦ. Ἀμφότεραι αἱ μέθοδοι εἶναι ἰσάξιαι θεωρητικῶς. Ἡ δευτέρα ἐν τούτοις, μέθοδος πλεονεκτεῖ πρακτικῶς διότι δὲν ἀπαιτεῖ τὴν μέτρησιν τῆς χρησιμότητος ἑκάστης καταναλισκομένης, καὶ συνεπῶς ζητουμένης, μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ μέθοδος τῆς φθινούσης χρησιμότητος*.

Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τῆς φθινούσης ὁριακῆς χρησιμότητος ἡ αὔξησις τῆς καταναλώσεως ποσοτήτων ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ συνεπάγεται τὴν μείωσιν τῆς χρησιμότητος ἢ ἱκανοποιήσεως ἡ ὁποία προέρχεται ἐξ ἑκάστης προσθέτου ποσότητος. Ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ χρησιμότης τῆς τελευταίας μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ, τόσον περισσότερον πρόθυμος θὰ εἶναι ὁ καταναλωτὴς νὰ καταβάλῃ μεγαλυτέραν τιμήν. Ἀντιθέτως ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ χρησιμότης — καὶ τοῦτο συμβαίνει ὅταν ἡ ποσότης αὐξάνῃ —, τόσον ὀλιγώτερον πρόθυμος θὰ εἶναι ὁ καταναλωτὴς νὰ καταβάλῃ τὴν τιμὴν ὡς πρότερον, ἐνῷ θὰ εἶναι πρόθυμος νὰ καταβάλῃ μικροτέραν τιμήν.

Ἐκ τῆς ἀναλύσεως τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας ὁδηγούμεθα εἰς τὰ κατωτέρω συμπεράσματα, ἅτινα καὶ ἀποτελοῦν τοὺς λόγους εἰς τοὺς ὁποίους ὀφείλεται ἡ ἀρνητικὴ κλίσις τῆς καμπύλης ζητήσεως.

α) Ἡ μείωσις τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ ὁδηγεῖ ceteris paribus εἰς αὔξησιν τῆς ἀγοραστικῆς δυνάμεως τοῦ καταναλωτοῦ, ἡ ὁποία ἐπιτρέπει εἰς αὐτὸν τὴν ἀγορὰν μεγαλυτέρων ποσοτήτων (εἰσοδηματικὸν ἀποτέλεσμα).

β) Ἡ μείωσις τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ ὁδηγεῖ τὸν καταναλωτήν, τῶν τιμῶν τῶν λοιπῶν ἀγαθῶν παραμενουσῶν ἀμεταβλήτων, εἰς ἀγορὰν μεγαλυτέρων ποσοτήτων, λόγῳ ἀντικαταστάσεως τοῦ ἀγαθοῦ τούτου εἰς ἕτερα ὁμοειδῆ ἀγαθὰ (ἀποτέλεσμα ὑποκαταστάσεως).

Τέλος, ἕτερος λόγος εἰς ὃν ὀφείλεται ἡ ἀρνητικὴ κλίσις τῆς καμπύλης ζητήσεως καὶ ὅστις ἀναφέρεται εἰς ἀμφοτέρας τὰς προσεγγίσεις τοῦ προβλήματος, εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ μείωσις τῆς τιμῆς ὁδηγεῖ εἰς αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγοραστῶν. Ἤτοι, ὡρισμένη ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ δύναται νὰ ἀγορασθῇ εἰς ὡρισμένην τιμὴν ὄχι μόνον ὑπὸ ἐκείνων οἱ ὁποῖοι ἦσαν πρόθυμοι νὰ καταβάλουν τὴν ἀμέσως ὑψηλοτέραν τιμήν, ἀλλὰ καὶ ὑπὸ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι δὲν ἦσαν πρόθυμοι νὰ καταβάλουν ταύτην, ἀλλὰ εἶναι πρόθυμοι νὰ καταβάλουν τὴν νέαν τιμήν, ἥτις εἶναι χαμηλοτέρα.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητήσεως, ὡς εἴδομεν, εἶναι $D = \alpha + \beta p$. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω θεωρητικῆς ἀναλύσεως καὶ ἐκ τῆς ἐμπειρίας προκύπτει ὅτι ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς γραμμῆς τῆς ζητήσεως, ἤτοι τὸ β, εἶναι ἀρνητικός, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ $D = \alpha - \beta p$. Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τοῦ $(-\beta)$ εἶναι ὅτι εἰς αὔξησιν τῆς τιμῆς κατὰ μίαν νομισματικὴν μονάδα ἀντιστοιχεῖ

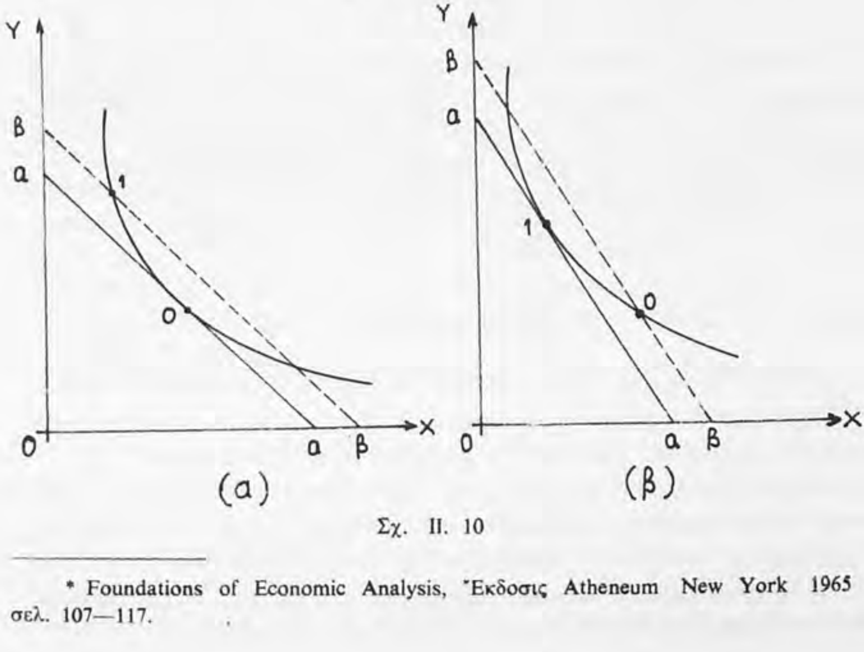
---

* Περὶ τῶν ἐννοιῶν τούτων βλέπε καὶ σελ. 217—223

μείωσις τῆς ζητουμένης ποσότητος κατὰ β μονάδας. Ἀντιθέτως, εἰς μείωσιν τῆς τιμῆς κατα μίαν νομισματικὴν μονάδα θὰ ἀντιστοιχῆ αὔξησις τῆς ζητήσεως κατὰ β μονάδας. Ἡ ἀρνητική λοιπόν κλίσις τῆς καμπύλης ζητήσεως, ἢ ἄλλως ὁ ἀρνητικὸς γωνιακὸς συντελεστὴς ταύτης, εἶναι αὐτὸ τὸ ὁποῖον καλοῦμεν «ν ό μ ο ν τ ῆ ς ζ η τ ή σ ε ω ς».

Ἄς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀρνητικῆς κλίσεως τῆς καμπύλης ζητήσεως χρησιμοποιοῦντες τὴν ἀνάλυσιν τῆς «ἐ κ δ η λ ο υ μ έ ν η ς π ρ ο τ ι μ ή σ ε ω ς» (revealed preference). τοῦ P. S a m u e l s o n*. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ καταναλωτὴς θέλει νὰ ἐπιτύχη ὡρισμένον ἐπίπεδον ἱκανοποιήσεως κινούμενος ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης ἀδιαφορίας. Ἐν τῇ προσπαθείᾳ του νὰ ἐπιτύχη τοῦτο τὸ ἐπίπεδον ἱκανοποιήσεως μὲ τὸ ἐλάχιστον κόστος προβαίνει εἰς τὴν ἐπιλογὴν ἑνὸς συνόλου ποσοτήτων (ἄριστος συνδυασμὸς) $\sum_{1}^{n} q_i^0$ εἰς τιμὰς p^0_i, ὁπότε τὸ κόστος τοῦ συνδυασμοῦ τούτου θὰ εἶναι $\sum_{1}^{n} p_i^0 q_i^0$. Ἄς λάβωμεν, τώρα, ἓν ἕτερον συνδυασμὸν ποσοτήτων $\sum_{1}^{n} q_i^1$. Ὁ πρῶτος συνδυασμὸς εἶναι εὐθηνότερος τοῦ δευτέρου ἀφοῦ παρέχων τὴν αὐτὴν χρησιμότητα ἐπροτιμήθη ὑπὸ τοῦ καταναλωτοῦ, ἤτοι :

$$\sum_{1}^{n} p_i^0 q_i^1 > \sum_{1}^{n} p_i^0 q^0$$



Σχ. II. 10

* Foundations of Economic Analysis, Ἔκδοσις Atheneum New York 1965 σελ. 107—117.

Ἡ ἀνωτέρω ὅμως ἀλγεβρικὴ σύγκρισις δύναται νὰ παρουσιασθῇ διαγραμματικῶς διὰ μιᾶς καμπύλης ἀδιαφορίας ἀναφερομένης εἰς δύο ἀγαθά, ὡς εἰς τὸ Σχ. II.10(α).

Εἰς τὸ Σχ. II.10(α) ὁ συνδυασμὸς O μὲ τιμὰς p_y^0 καὶ p_x^0 κοστίζει $\sum_1^2 p_i^0 q_i^1$ $(i = y, x)$. Ἡ κλίσις τῆς γραμμῆς αα ὑποδηλοῖ τὴν σχέσιν τῶν τιμῶν τῶν δύο ἀγαθῶν, ἡ δὲ θέσις της φανερώνει τὸ συνολικὸν κόστος ἀγορᾶς τοῦ συνδυασμοῦ O, δι' ὃ καὶ **γραμμὴ ἴσης δαπάνης** καλεῖται*. Ὁ συνδυασμὸς 1 εὑρισκόμενος ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης ἀδιαφορίας, ἀλλ' ὢν διάφορος τοῦ O, δίδει τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον χρησιμότητος. Ὁ συνδυασμὸς ὅμως οὗτος εἰς τιμὰς p_y^0 καὶ p_x^0 κοστίζει περισσότερον τοῦ συνδυασμοῦ O, διότι ἡ γραμμὴ τοῦ συνολικοῦ κόστους ββ εὑρίσκεται εἰς ἀνώτερον ἐπίπεδον τῆς γραμμῆς αα.

Ἂς λάβωμεν τὸν συνδυασμὸν ποσοστήτων $\sum_1^n q_i^1$ εἰς τιμὰς p_i^1, ὁπότε τὸ συνολικὸν κόστος θὰ εἶναι $\sum_1^n p_i^1 q_i^1$. Ἐὰν ὁ καταναλωτὴς προέβη εἰς τὴν ἐπιλογὴν τοῦ συνδυασμοῦ τούτου (ἄριστος συνδυασμός), τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ συνδυασμὸς οὗτος εἶναι εὐθηνότερος ἑτέρου συνδυασμοῦ, τοῦ O, εἰς τιμὰς p_i^1, ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης ἀδιαφορίας. Ἤτοι,

$$\sum_1^n p_i^1 q_i^0 > \sum_1^n p_i^1 q_i^1 \quad .$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀλγεβρικὴ ἀνισότης ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ. II.10(β). Ἐκ τοῦ γραφήματος τούτου προκύπτει ὅτι ὁ συνδυασμὸς 1, δηλονότι ὁ ἐπιλεγείς, ἔχει μικρότερον συνολικὸν κόστος τοῦ συνδυασμοῦ O, ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης ἀδιαφορίας, διότι ἡ γραμμὴ ββ εὑρίσκεται δεξιώτερον τῆς αα.

Οὕτω τελικῶς προκύπτουν αἱ ἀνισότητες:

$$\sum_1^n p_i^0 q_i^1 > \sum_1^n p_i^0 q_i^0$$

$$\sum_1^n p_i^1 q_i^0 > \sum_1^n p_i^1 q_i^1 \quad .$$

Μεταφέροντες τοὺς ὅρους τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους εἰς τὸ δεξιὸν λαμβάνομεν:

$$\sum_1^n p_i^0 \left(q_i^0 - q_i^1 \right) = \sum_1^n (-p_i^0)\left(q_i^1 - q_i^0 \right) < 0$$

$$\sum_1^n p_i^1 \left(q_i^1 - q_i^0 \right) < 0$$

* Εἰς ἄλλο τμῆμα τοῦ παρόντος θὰ προβῶμεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν καὶ διευκρίνισιν τῶν ἀνωτέρω ἐννοιῶν.

Προσθέτοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\sum_{1}^{n}\left(-p_i^0\right)\left(q_i^1-q_i^0\right)+\sum_{1}^{n}p_i^1\left(q_i^1-q_i^1\right)<0\cdot$$

Λαμβάνοντες κοινὸν παράγοντα ἔχομεν:

$$\sum_{1}^{n}\left(p_i^1-p_i^0\right)\left(q_i^1-q_i^0\right)<0$$

Ἀλλὰ $p_i^1-p_i^0=\Delta p_i$ καὶ $q_i^1-q_i^0=\Delta q_i$, καὶ συνεπῶς:

$$\sum_{1}^{n}\left(\Delta p_i\right)\left(\Delta q_i\right)<0\cdot$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης ὑποδηλοῖ ὅτι ἐὰν ὁ καταναλωτὴς κινῆται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης ἀδιαφορίας, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν καὶ τῶν ποσοστήτων εἶναι ἀρνητικόν. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τιμὴ ἑνὸς μόνον ἀγαθοῦ μεταβάλλεται, τῶν τιμῶν τῶν λοιπῶν ἀγαθῶν παραμενουσῶν ἀμεταβλήτων. Τότε ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀνισότητα ἐξαφανίζονται, πλὴν ἑνός, ἤτοι τοῦ ἀγαθοῦ τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ μετεβλήθη. Ἐὰν τὸ ἀγαθὸν τοῦτο εἶναι τὸ k, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\Delta p_\kappa\,\Delta q_\kappa<0.$$

Ἤτοι, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ k αὐξάνῃ (Δp_κ), τότε ἡ ἀγοραζομένη ποσότης θὰ πρέπει νὰ μειοῦται, ἵνα τὸ γινόμενον $\Delta p_\kappa\ \Delta q_\kappa$ εἶναι ἀρνητικόν.

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἀνισότητα διὰ τοῦ $(\Delta p_\kappa)^2$ θὰ λάβωμεν:

$$\frac{\Delta q_\kappa}{\Delta p_\kappa}<0$$

Ὁ ὅρος $\Delta q/\Delta p$ εἶναι, ὡς θὰ εἴδωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα, ἡ grosso modo παράγωγος τῆς συναρτήσεως (σχέσις ζητουμένων ποσοστήτων καὶ τιμῶν τοῦ ἀγαθοῦ) ἢ ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς ἐξισώσεως ζητήσεως $D=\alpha-\beta p$. Οὕτω λοιπὸν ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ γωνιακὸς συντελεστής, ὅστις δεικνύει τὴν κλίσιν τῆς καμπύλης ζητήσεως, εἶναι ἀρνητικός, ἀφοῦ $\Delta q/\Delta p<0$.

Διὰ τὴν ἰσχύν, ὅμως, τοῦ ἀνωτέρω «νόμου τῆς ζητήσεως» οἱ ἀκόλουθοι περιορισμοὶ ἐπιβάλλονται:

α) Ἡ σχέσις ποσοστήτων - τιμῶν νὰ εἶναι μονοσήμαντος. Ἤτοι, εἰς ἕκαστον σύνολον τιμῶν νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν καὶ μόνον σύνολον ποσοτήτων.

β) Ἡ σχέσις ποσοστήτων - τιμῶν νὰ εἶναι μία συνάρτησις ὁμογενὴς μηδενικοῦ βαθμοῦ· ἤτοι, μία μεταβολὴ εἰς τὴν τιμὴν καὶ τὸ εἰσόδημα πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν θὰ ἀφίσῃ τὴν ζητουμένην ποσότητα ἀμετάβλητον. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ μείωσις τῆς ποσότητος λόγῳ αὐξήσεως τῆς τιμῆς (νόμος τῆς ζητήσεως) θὰ ἐξουδετερωθῇ ἐκ τῆς αὐξήσεως τῆς ποσότητος, λόγῳ αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος.

Ὁ «νόμος τῆς ζητήσεως», κατὰ τὸν ὁποῖον ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς ἐπιφέρει μείωσιν τῆς ζητουμένης ποσότητος, ἡ δὲ μείωσις τῆς τιμῆς ἐπιφέρει αὔξησιν τῆς ποσότητος, ἰσχύει ὑπὸ ὁμαλὰς συνθήκας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς ἑνὸς ἀγαθοῦ ὁδηγεῖ εἰς αὔξησιν τῆς ζητήσεως, καὶ ἡ μείωσις τῆς τιμῆς εἰς μείωσιν τῆς ζητήσεως. Ἡ περίπτωσις αὕτη εἶναι γνωστὴ ὡς παράδοξον τοῦ Giffen.

II. 1. 8. Ἡ καμπύλη μετασχηματισμοῦ καὶ ὁ «νόμος τῆς προσφορᾶς».

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς ἀγαθοῦ τινος ἔχει θετικὴν κλίσιν, ἤτοι φέρεται ἐκ τῶν κάτω ἀριστερὰ πρὸς τὰ ἄνω δεξιὰ εἰς τὸ θετικὸν τεταρτημόριον τοῦ Καρτεσιανοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων. Ὁ βαθμὸς κλίσεως τῆς καμπύλης προσφορᾶς διαφέρει ἀναλόγως πρὸς τὴν χρονικὴν περίοδον εἰς ἣν ἀναφέρεται. Οὕτως εἰς τὴν περίοδον τῆς ἀγορᾶς, τὴν λίαν βραχεῖαν περίοδον (μιᾶς ἡμέρας), ἡ καμπύλη ζητήσεως εἶναι κάθετος γραμμή. Ὁ πωλητὴς θὰ προσπαθήσῃ νὰ πωλήσῃ τὴν εἰς χεῖρας του ποσότητα τοῦ ἀγαθοῦ ἐντὸς τῆς μιᾶς ἡμέρας καὶ δεδομένου ὅτι ἡ ποσότης αὕτη ἔχει ἤδη παραχθῆ, τὸ ὁριακὸν κόστος πάσης ποσότητος μικροτέρας ταύτης θὰ εἶναι μηδέν. Πέραν τῆς ποσότητος ταύτης οὐδεμία αὔξησις εἶναι δυνατὴ καὶ συνεπῶς τὸ ὁριακὸν κόστος πάσης μεγαλυτέρας παραγωγῆς θὰ εἶναι ἄπειρον*, ἤτοι:

$$\frac{\Delta C_T}{\Delta q} = \infty, \text{ ὅταν } \Delta q = 0, \text{ ὅπου } \Delta C_T = \text{μεταβολὴ συνολικοῦ κόστους.}$$

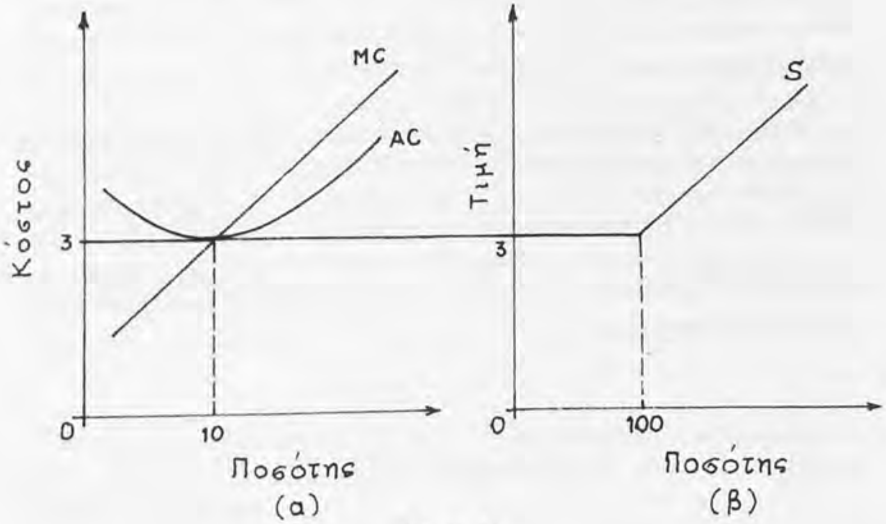
Εἰς τὴν βραχυχρόνιον περίοδον ἡ καμπύλη προσφορᾶς τῆς παραγωγικῆς μονάδος εἶναι ταυτόσημος πρὸς τὸ τμῆμα ἐκεῖνο τῆς καμπύλης ὁριακοῦ κόστους, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἄνωθεν τῆς καμπύλης μέσου κόστους. Ἤτοι, ἡ καμπύλη προσφορᾶς ἐκκινεῖ ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῶν καμπύλων μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους. Ἐφ' ὅσον δεχόμεθα ὅτι ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους εἶναι μονοτόνως αὔξουσα, τότε καὶ ἡ καμπύλη προσφορᾶς θὰ εἶναι αὔξουσα.

Εἰς τιμὴν μικροτέραν ἐκείνης, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καμπύλων μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους, ἡ προσφερομένη ποσότης θὰ εἶναι μηδέν, διότι τὸ μέσον κόστος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὁριακοῦ κόστους. Ἀφοῦ ἡ τιμὴ προσφορᾶς εἶναι ταυτόσημος πρὸς τὸ ὁριακὸν κόστος, τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν συμφέρει εἰς τὸν παραγωγὸν νὰ προσφέρῃ εἰς τιμὴν χαμηλοτέραν τοῦ κατὰ μονάδα κόστους. Ἀπὸ τὰ σημεῖα δὲ τομῆς τῶν δύο καμ-

---

* Βλέπε J. M. Henderson καὶ R. E. Quandt, op. cit., σελ. 89—91.

πύλων καὶ πέραν ἡ τιμὴ προσφορᾶς καθορίζεται ἐκ τοῦ ὁριακοῦ κόστους, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέσου κόστους.



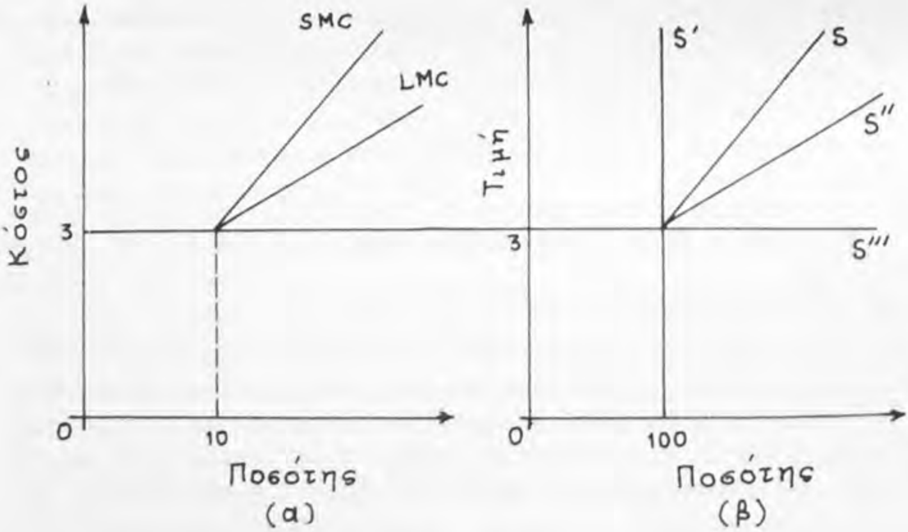
Σχ. II. 11.

Τὸ ἀνωτέρω σχῆμα ἐμφαίνει εἰς μὲν τὸ γράφημα (α) τὰς καμπύλας μέσου (AC) καὶ ὁριακοῦ κόστους (MC) βραχυχρονίως, εἰς δὲ τὸ γράφημα (β) τὴν καμπύλην προσφορᾶς τοῦ προϊόντος. Εἰς παραγωγὴν 10 μονάδων ἀγαθοῦ τινος τὸ ὁριακὸν καὶ μέσον κόστος συμπίπτουν εἰς τὴν παραγωγικὴν μονάδα. Ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἡ καμπύλη MC καθίσταται καμπύλη προσφορᾶς τῆς παραγωγικῆς μονάδος. Ἡ καμπύλη προσφορᾶς δι' ὁλόκληρον τὸν κλάδον, ἤτοι ἡ ἀγοραία καμπύλη προσφορᾶς θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς ὁριζοντίου ἀθροίσεως τῶν ἐπὶ μέρους καμπύλων MC τῶν παραγωγικῶν μονάδων. Ἐκ τοῦ γραφήματος (β), ὅπερ ἐμφαίνει τὴν καμπύλην προσφορᾶς τοῦ ἀγαθοῦ, προκύπτει ὅτι εἰς τιμὴν κάτω τῶν 3 νομισματικῶν μονάδων ἡ προσφερομένη ποσότης εἶναι μηδέν. Ἡ τιμὴ δὲ τῶν 3 νομισματικῶν μονάδων ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐλάχιστον μέσον κόστος.

Ἡ διαμόρφωσις τῆς καμπύλης ὁριακοῦ κόστους, καὶ συνεπῶς τῆς καμπύλης προσφορᾶς τοῦ ἀγαθοῦ, εἰς τὴν μακροχρόνιον περίοδον θὰ εἶναι ὀλιγώτερον ἀπότομος. Ἤτοι, ἡ καμπύλη προσφορᾶς θὰ ἔχῃ θετικὴν μὲν κλίσιν, ἀλλὰ μικροτέρα ἐκείνης ἣν ἔχει βραχυχρονίως. Καὶ τοῦτο θὰ συμβῇ ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγωγικῶν μονάδων παραμένει σταθερός. Ὅταν ὑπάρχῃ ἐλευθέρα εἴσοδος εἰς τὸν κλάδον, τότε τιμὴ μεγαλυτέρα ἐκείνης ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καμπύλων

MC καὶ AC, θὰ δημιουργήσῃ εἴσοδον νέων μονάδων εἰς τὸν κλάδον καὶ πίεσιν τῆς τιμῆς πρὸς τὰ κάτω. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἡ καμπύλη προσφορᾶς τοῦ κλάδου μακροχρονίως θὰ εἶναι ὁριζόντιος γραμμή, διότι ἡ εἴσοδος τῶν νέων μονάδων συνεπαγομένη αὔξησιν τῆς προσφερομένης ποσότητος τοῦ ἀγαθοῦ συγκρατεῖ τὴν τιμὴν μὴ ἀφίουσα ταύτην νὰ ἀνέλθῃ, καὶ τὸ ὁριακὸν κόστος ἑκάστης παραγωγικῆς μονάδος ἐπανέρχεται εἰς τὸ ἀρχικόν του ὕψος*.

Τὸ Σχ. II.12 δεικνύει εἰς μὲν τὸ γράφημα (α) τὰς καμπύλας ὁριακοῦ κόστους τῆς παραγωγικῆς μονάδος εἰς τὴν βραχυχρόνιον (SMC) καὶ τὴν μακροχρόνιον περίοδον (LMC), εἰς δὲ τὸ γράφημα (β) τὰς καμπύλας προσφορᾶς τοῦ κλάδου εἰς τὴν περίοδον τῆς ἀγορᾶς (S′), τὴν βραχυχρόνιον (S), τὴν μακροχρόνιον περίοδον μὲ ἀμετάβλητον τὸν ἀριθμὸν τῶν παραγωγικῶν μονάδων (S″), καὶ τὴν μακροχρόνιον περίοδον μὲ ἐλευθέραν εἴσοδον παραγωγικῶν μονάδων (S‴).



Σχ. II 12.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως προκύπτει ἡ θετικὴ κλίσις τῆς καμπύλης προσφορᾶς τοῦ ἀγαθοῦ, ἤτοι ὁ «νόμος τῆς προσφορᾶς», κατὰ τὸν ὁποῖον αἱ μεταβολαὶ τῆς τιμῆς ἐπιφέρουν μεταβολὰς τῆς προσφερομένης ποσότητος κατὰ τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν.

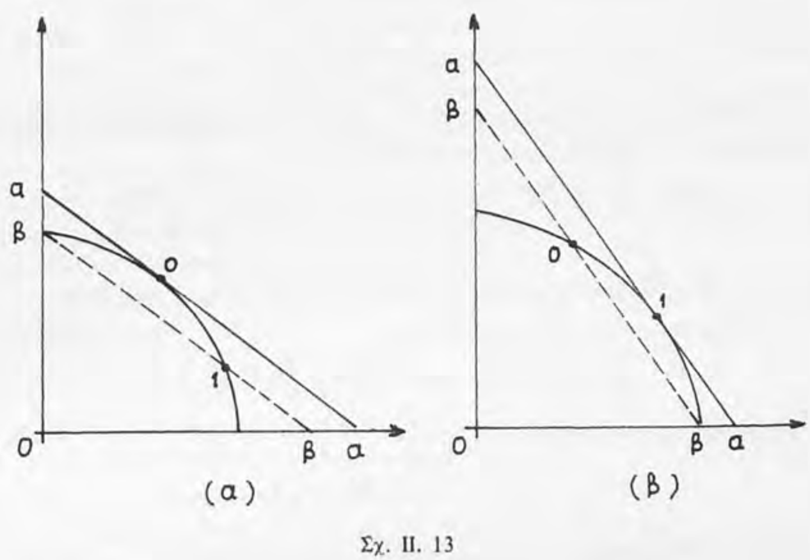
* A. W. Stonier καὶ D. C. Hague, A Textbook of Economic Theory, 2nd Ed. 1957, σελ. 140—143.

Εἴδομεν ἤδη, ὅτι ἡ ἐξίσωσις προσφορᾶς* εἶναι $S = \gamma + \delta p$, ὅπου δ εἶναι ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς εὐθείας, ὅστις εἶναι θετικός. Κατωτέρω, θὰ ἀποδείξωμεν μαθηματικῶς τὴν θετικὴν κλίσιν τῆς καμπύλης προσφορᾶς χρησιμοποιοῦντες ἀνάλυσιν ἀνάλογον πρὸς ἐκείνην ἣν ἐχρησιμοποιήσαμεν προκειμένου περὶ τοῦ «νόμου τῆς ζητήσεως».

Ἡ παραγωγικὴ μονὰς ἐν τῇ προσπαθείᾳ της νὰ μεγιστοποιήσῃ τὰ κέρδη της ἐπιλέγει ἓν σύνολον ποσοτήτων ἀγαθῶν, τὰ ὁποῖα παράγει μὲ δεδομένας ποσότητας παραγωγικῶν συντελεστῶν, εἰς ὃ σύνολον ἀντιστοιχεῖ ἓν σύνολον τιμῶν. Θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν συνδυασμὸν τοῦτον (ἄριστος συνδυασμός) : $\sum_1^n p_i^0 q_i^0$. Ὁ συνδυασμὸς οὗτος δίδει τὴν μεγίστην πρόσοδον. Ἄς λάβωμεν τώρα, ἓν ἕτερον συνδυασμὸν ποσοτήτων $\sum_1^n q_i^1$. Ὁ πρῶτος συνδυασμὸς παρέχει μεγαλυτέραν πρόσοδον τοῦ δευτέρου δι' ὃ καὶ ἐπροτιμήθη, ἤτοι :

$$\sum_1^n p_i^0 q_i^0 > \sum_1^n p_i^0 q_i^1$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης δύναται νὰ παρουσιασθῇ διαγραμματικῶς διὰ μιᾶς καμπύλης μετασχηματισμοῦ ἀναφερομένης εἰς τὴν παραγωγὴν δύο ἀγαθῶν, ὡς κατωτέρω.



Σχ. II. 13

* Βλέπε σελ. 62—66

Εἰς τὸ Σχ. ΙΙ. 13 (α) ὁ συνδυασμὸς Ο μὲ τιμὰς p_i^0 ἀποδίδει μεγαλύτερα ἔσοδα ἐκείνων τοῦ συνδυασμοῦ 1 εἰς τιμὰς p_i^0. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ γραμμὴ ἴσου κέρδους ἢ ἀποδόσεως αα εὑρίσκεται δεξιώτερον τῆς ββ τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸν συνδυασμὸν 1.

Ἂς λάβωμεν τὸν συνδυασμὸν ποσοτήτων $\sum_1^n q_i^1$, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓν σύνολον τιμῶν p_i^1. Ἡ συνολικὴ πρόσοδος θὰ εἶναι $\sum_1^n p_i^1 q_i^1$. Ἐφ' ὅσον ἡ παραγωγικὴ μονὰς προέβη εἰς τὴν παραγωγὴν τοῦ συνδυασμοῦ τούτου, τοῦτο σημαίνει ὅτι οὗτος εἶναι καλλίτερος ἑτέρου συνδυασμοῦ Ο εἰς τιμὰς p_i^1 ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης μετασχηματισμοῦ. Ἤτοι,

$$\sum_1^n p_i^1 q_i^1 > \sum_1^n p_i^1 q_i^0.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀλγεβρικὴ ἀνισότης ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ.ΙΙ.13(β). Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ὁ συνδυασμὸς 1 εἶναι καλλίτερος τοῦ συνδυασμοῦ Ο ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης μετασχηματισμοῦ, διότι ἡ γραμμὴ αα εὑρίσκεται δεξιώτερον τῆς ββ, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν συνδυασμὸν Ο.

Οὕτω, κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω, λαμβάνομεν τὰς ἀνισότητας :

$$\sum_1^n p_i^0 \; q_i^0 > \sum_1^n p_i^0 \; q_i^1,$$

$$\sum_1^n p_i^1 \; q_i^1 > \sum_1^n p_i^1 \; q_i^0.$$

Μεταφέροντες τοὺς ὅρους τοῦ δεξιοῦ σκέλους εἰς τὸ ἀριστερὸν λαμβάνομεν κατόπιν ἐξαγωγῆς κοινῶν παραγόντων :

$$\sum_1^n p_i^0 \left(q_i^0 - q_i^1 \right) = \sum_1^n \left(-p_i^0 \right) \left(q_i^1 - q_i^0 \right) > 0 ,$$

$$\sum_1^n p_i^1 \left(q_i^1 - q_i^0 \right) > 0 .$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\sum_1^n \left(-p_i^0 \right) \left(q_i^1 - q_i^0 \right) + \sum_1^n p_i^1 \left(q_i^1 - q_i^0 \right) > 0 .$$

Ἐξάγοντες κοινὸν παράγοντα ἔχομεν :

$$\sum_1^n \left(p_i^1 - p_i^0 \right) \left(q_i^1 - q_i^0 \right) > 0 .$$

Ἀλλὰ $p_i^1 - p_i^0 = \Delta p$,καὶ $q_i^1 - q_i^0 = \Delta q_i$, καὶ συνεπῶς

$$\sum_1^n \left(\Delta p_i \right) \left(\Delta q_i \right) > 0 .$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης ὑποδηλοῖ ὅτι, ἐὰν ἡ παραγωγικὴ μονὰς κινῆται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης μετασχηματισμοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν καὶ τῶν μεταβολῶν τῶν ποσοτήτων εἶναι θετικόν. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τιμὴ ἑνὸς μόνον ἀγαθοῦ μεταβάλλεται τῶν τιμῶν τῶν λοιπῶν ἀγαθῶν παραμενουσῶν ἀμεταβλήτων. Τότε ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀνισότητα ἐξαλείφονται, πλὴν ἑνός, ἤτοι τοῦ ἀγαθοῦ τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ μετεβλήθη. Ἐὰν τὸ ἀγαθὸν τοῦτο εἶναι τὸ k, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\Delta p_{\kappa}\ \Delta q_{\kappa} > 0.$$

Ἤτοι, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ k αὐξάνῃ, τότε ἡ παραγομένη ποσότης τούτου αὐξάνει, ἵνα τὸ γινόμενον $\Delta p_k \Delta q_k$ εἶναι θετικόν. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα διὰ $(\Delta p_{\kappa})^2$ θὰ λάβωμεν:

$$\frac{\Delta q_{\kappa}}{\Delta p_{\kappa}} > 0$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης ὑποδηλοῖ ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς ποσότητος καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς τιμῆς κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν, ὅπερ εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἀπεκαλέσαμεν «νόμον τῆς προσφορᾶς».

II. 1. 9. Ἡ συνάρτησις καταναλώσεως.

Εἰς τὴν Κεϋνσιανὴν ἢ γενικώτερον τὴν εἰσοδηματικὴν ἀνάλυσιν ἡ συνάρτησις αὕτη κατέχει σημαντικὸν μέρος. Ἡ συνάρτησις καταναλώσεως περιγράφει τὴν σχέσιν ἥτις ὑφίσταται μεταξὺ ἀτομικῆς δαπάνης καταναλώσεως ἢ δαπάνης ὁλοκλήρου τῆς οἰκονομίας καὶ ἀτομικοῦ διαθεσίμου εἰσοδήματος ἢ εἰσοδήματος ὁλοκλήρου τῆς οἰκονομίας, ὡς καὶ ἑτέρων παραγόντων, ὡς εἶναι ὁ τόκος, αἱ σχετικαὶ τιμαί, τὰ ἐνεργητικὰ καὶ παθητικὰ περιουσιακὰ στοιχεῖα τοῦ καταναλωτοῦ, ἡ κατανομὴ τοῦ εἰσοδήματος τῆς οἰκονομίας, ἡ διάρθρωσις τῶν ἡλικιῶν, αἱ προβλέψεις καὶ προσδοκίαι περὶ τῶν μελλοντικῶν τιμῶν καὶ εἰσοδημάτων, κ.λ.π.

Ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς συναρτήσεως καταναλώσεως δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς:

$$C = C\ (Y, r, A. \dots\dots).$$

ὅπου C = καταναλωτικὴ δαπάνη
Y = διαθέσιμον ἐθνικὸν εἰσόδημα
r = ἐπικρατοῦν ἐπιτόκιον
A = περιουσιακὰ στοιχεῖα

Ἐπειδὴ ὁ σημαντικώτερος προσδιοριστικὸς παράγων τῆς καταναλώσεως εἶναι τὸ εἰσόδημα, ἡ συνάρτησις καταναλώσεως γράφεται συνήθως ὡς: $C = C\,(Y)$.

Ὡς πρὸς τὴν συγκεκριμμένην μορφὴν τῆς συναρτήσεως δὲν ὑφίσταται ὁμοφωνία. Ὁ συνήθης τύπος τῆς συναρτήσεως εἶναι ὁ τῆς γραμμικῆς περιεχούσης καὶ σταθερὸν ὅρον, ἤτοι $C = \alpha + \beta Y$. Ἡ γραμμικὴ αὕτη συνάρτησις μᾶς λέγει ὅτι ἡ ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν* εἶναι σταθερά, ἡ κατανάλωσις εἶναι α (θετικὸς ἀριθμὸς) καὶ εἰς ἣν περίπτωσιν τὸ εἰσόδημα εἶναι μηδὲν καὶ συνεπῶς ἡ μέση ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν** εἶναι μὲν μεγαλυτέρα τῆς ὁριακῆς τοιαύτης, ἀλλὰ βαίνει μειουμένη αὐξανομένου τοῦ εἰσοδήματος. Τὸ γεγονὸς ὅτι μ.ρ.κ. > ὁ.ρ.κ. ἀποδεικνύεται ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ Y, ἤτοι :

$$\frac{C}{Y} = \frac{\alpha}{Y} + \beta,$$

ὅπου $\frac{C}{Y}$ εἶναι ἡ μέση ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν.

Αὐξανομένου τοῦ Y ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{Y}$ καθίσταται μικροτέρα καὶ συνεπῶς ὁλόκληρον τὸ δεξιὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως καθίσταται μικρότερον. Ἄρα ἡ μ.ρ.κ. καθίσταται μικροτέρα.

Ἡ γραμμικῆς μορφῆς συνάρτησις θὰ ἠδύνατο ἐπίσης νὰ εἶναι $C = \beta Y$, ἤτοι ἄνευ σταθεροῦ ὅρου. Ἡ συνάρτησις αὕτη μᾶς λέγει ὅτι ἡ «καμπύλη» καταναλώσεως διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καταναλώσεως καὶ εἰσοδήματος καὶ ὅτι ἡ ὁ.ρ.κ. εἶναι ἴση πρὸς τὴν μ.ρ.κ., ἤτοι $\frac{C}{Y} = \beta$.

Ἑτέρα περίπτωσις συναρτήσεως εἶναι ἡ μὴ γραμμικὴ τοιαύτη $C = \alpha + \beta\sqrt{Y}$. Ἡ συνάρτησις αὕτη περιγράφει φθίνουσαν ὁριακὴν καὶ μέσην ῥοπὴν αὐξανομένου τοῦ εἰσοδήματος, μὲ μ.ρ.κ. > ὁ.ρ.κ. Ἡ μορφὴ αὕτη εἶναι κυρίως ἐκείνη ἥτις ὑπείκει εἰς τὸν ψυχολογικὸν νόμον τοῦ Keynes, καθ' ὃν ἡ κατανάλωσις αὐξάνει ὅταν τὸ εἰσόδημα αὐξάνῃ, ἀλλὰ οὐχὶ κατὰ τὴν αὐτὴν ἔκτασιν.

Ἡ συνάρτησις καταναλώσεως ἀναφερομένη εἰς βραχεῖαν περίοδον, ὡς περιγράφεται εἰς τὴν περὶ ἀπασχολήσεως θεωρίαν τοῦ Keynes, καλεῖται *βραχυχρόνιος συνάρτησις καταναλώσεως*, ἀναφερομένη δὲ εἰς μακρὰν περίοδον καλεῖται *μακροχρόνιος συνάρτησις*. Ἡ μακροχρόνιος συνάρτησις καταναλώσεως, ὡς αὕτη προκύπτει ἐξ ἐμπειρικῶν δεδομένων, εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα συνεχῶν μεταθέσεων τῶν βραχυχρονίων καμπύλων καταναλώσεως.

* Ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν (ὁ.ρ.κ.) εἶναι ἡ σχέσις τῆς ἀπειροελαχίστης αὐξήσεως τῆς καταναλώσεως ὡς πρὸς τὴν ἀπειροελαχίστην αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος, ἤτοι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως.

** Μέση ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν (μ.ρ.κ.) εἶναι ἡ σχέσις τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως πρὸς τὸ ἀντίστοιχον ἐπίπεδον εἰσοδήματος.

II. 1. 10. **Ἡ συνάρτησις ἀποταμιεύσεως**. Ἡ συνάρτησις ἀποταμιεύσεως δύναται νὰ ληφθῇ ἐκ τῆς συναρτήσεως καταναλώσεως, δεδομένου ὅτι εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ διαθεσίμου εἰσοδήματος μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς καταναλωτικῆς δαπάνης. Ἤτοι, ἐὰν ἡ συνάρτησις καταναλώσεως εἶναι $C = \beta Y$ (ἀναλογική), ἡ ἀποταμίευσις (S) θὰ εἶναι :

$$S = Y - \beta Y = (1 - \beta)\, Y$$

ὅπου $(1 - \beta)$ εἶναι τὸ ποσοστὸν ἀποταμιεύσεως εἰς τὰ διάφορα ἐπίπεδα εἰσοδήματος καὶ $0 \leq (1-\beta) \leq 1$. Ὅταν $\beta = 1$, τότε $(1 - \beta) = 0$. Ὅταν $\beta = 0$, τότε $(1 - \beta) = 1$.

Ἡ ἀποταμίευσις ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἰσοδήματος (Y), τοῦ ἐπικρατοῦντος τόκου τῆς ἀγορᾶς (r), τῆς ὑφισταμένης περιουσίας τοῦ ἀποταμιευτοῦ (A), κ.λ.π. Ὁπότε ἡ γενικὴ συναρτησιακὴ σχέσις δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς :

$$S = S\,(Y,\, r,\, A,)$$

Συνήθως, ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως καταναλώσεως, τὸ διαθέσιμον εἰσόδημα εἶναι ὁ σημαντικώτερος προσδιοριστικὸς παράγων. Ἡ ἀποταμίευσις συνεπῶς προέρχεται ἐκ τῶν δύο πηγῶν εἰσοδήματος, ἤτοι τῶν κερδῶν καὶ τῶν ἀμοιβῶν τῆς ἐργασίας, ὁπότε ἡ συνάρτησις γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$S = \alpha \Pi + \beta W$$

ὅπου Π = κέρδη καὶ W = μισθὸς - ἡμερομίσθια. Αἱ σταθεραὶ α καὶ β δεικνύουν τὰ ποσοστὰ τῶν ἀποταμιευομένων κερδῶν καὶ μισθῶν ἀντιστοίχως. Κατὰ τοὺς κλασσικοὺς αἱ ἀποταμιεύσεις προέρχονται μόνον ἐκ τῶν κερδῶν καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις ἀποταμιεύσεως τῶν κλασσικῶν εἶναι $S = \alpha\, \Pi$.

Ἐπίσης διαφορὰ μεταξὺ τῶν κλασσικῶν καὶ Κεϋνσιανῶν ἀπόψεων ὑπάρχει ὡς πρὸς τοὺς προσδιοριστικοὺς παράγοντας τῆς ἀποταμιεύσεως. Κατὰ τοὺς κλασσικοὺς ἰσχύει ἡ συνάρτησις $S = S(r)$, ἐνῷ κατὰ τὸν Keynes ἰσχύει ἡ συνάρτησις $S = S\,(Y)$.

II. 1. 11. **Ἡ συνάρτησις ἐπενδύσεων**. Ἡ ἀπόφασις δι' ἐπένδυσιν προσδιορίζεται ἐκ πολλῶν παραγόντων, οἱ πλέον σημαντικοὶ τῶν ὁποίων εἶναι ἡ προσδοκωμένη ἀποδοτικότης τῆς ἐπενδύσεως (καὶ μὴ οὔσης ταύτης γνωστῆς δύναται νὰ ληφθῇ τὸ ποσοστὸν τοῦ τόκου), τὰ τρέχοντα κέρδη, τὸ εἰσόδημα, τὸ ὑφιστάμενον πάγιον κεφάλαιον, κ.λπ.

Ἤτοι ἡ συνάρτησις ἐπενδύσεως δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς :

$$I = I\,(r,\, \pi,\, Y,\, K),$$

ὅπου I = ἐπένδυσις.
r = προσδοκωμένη ἀποδοτικότης ἢ ἐπιτόκιον.
π = τρέχοντα κέρδη (ποσοστά).
Y = εἰσόδημα.
K = ὑφιστάμενον πάγιον κεφάλαιον.

Εἰς τὴν βραχυχρόνιον συνάρτησιν ἐπενδύσεων ὁ σπουδαιότερος προσδιοριστικὸς παράγων εἶναι τὸ ἐπιτόκιον δανεισμοῦ ἢ τὰ τρέχοντα κέρδη καὶ συνεπῶς $I = I(r)$. Εἰς τὴν μακροχρόνιον συνάρτησιν τὸ ὑφιστάμενον πάγιον κεφάλαιον καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ παραγωγικὴ δυναμικότης, εἶναι ὁ σημαντικώτερος προσδιοριστικὸς παράγων καὶ συνεπῶς ἔχομεν $I = I(K)$.

Ἡ συσχέτισις τῆς ἐπενδύσεως πρὸς εἰσοδηματικὰ μεγέθη (εἰσόδημα ἢ κατανάλωσιν) μᾶς δίδει συνάρτησιν, ἥτις περιγράφει κυρίως τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπιταχύνσεως, ὡς ἡ $I_t = \alpha + \beta (Y_t - Y_{t-1})$.

Ἡ συγκεκριμμένη μορφὴ τὴν ὁποίαν δίδουν συνήθως εἰς τὴν οἰκονομετρικὴν ἔρευναν εἰς τὴν συνάρτησιν ἐπενδύσεων εἶναι ἡ γραμμικὴ τοιαύτη.

II.1.12. **Ἡ συνάρτησις προτιμήσεως ρευστότητος**. Κατὰ τὴν κεϋνσιανὴν θεωρίαν τῆς ἀπασχολήσεως καὶ τοῦ χρήματος, ἡ ζήτησις τοῦ τελευταίου τούτου προέρχεται ἐκ τριῶν κινήτρων. Τὰ κίνητρα ταῦτα εἶναι τὸ τῶν συναλλαγῶν, τὸ κερδοσκοπικὸν καὶ τὸ τῆς ἐξασφαλίσεως. Ὡς εἰκός, ἡ ζήτησις λόγῳ τοῦ κινήτρου τῶν συναλλαγῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἰσοδήματος, ἤτοι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $L_1 = L_1(Y)$, ὅπου L_1 εἶναι ἡ προτίμησις (ζήτησις) ρευστότητος, λόγῳ τοῦ κινήτρου τῶν συναλλαγῶν. Ἡ δὲ ζήτησις λόγῳ τῶν κινήτρων κερδοσκοπίας καὶ ἐξασφαλίσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἐπιτοκίου τῶν χρεογράφων, ἤτοι $L_2 = L_2(r)$ ὅπου L_2 εἶναι ἡ προτίμησις ρευστότητος, λόγῳ τῶν κινήτρων κερδοσκοπίας καὶ ἐξασφαλίσεως.

Ἐὰν προσθέσωμεν ἀμφοτέρας τὰς ζητήσεις θὰ ἔχωμεν τὴν συνολικὴν συνάρτησιν προτιμήσεως ρευστότητος, ἤτοι :

$$L = L_1(Y) + L_2(r)$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω διατύπωσιν ἡ συνάρτησις $L_1(Y)$ εἶναι μονοτόνως αὔξουσα, ἤτοι αὐξανομένου τοῦ εἰσοδήματος, ἡ ζήτησις ρευστῶν διαθεσίμων αὐξάνεται, ἡ δὲ συνάρτησις $L_2(r)$ εἶναι φθίνουσα, ἤτοι αὐξανομένου (μειουμένου) τοῦ ἐπιτοκίου μειοῦται (αὐξάνεται) ἡ ζήτησις ρευστῶν διαθεσίμων. Πάντα ταῦτα τελοῦν ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τῆς σταθερᾶς ποσότητος τοῦ προσφερομένου χρήματος.

Κατὰ τὴν κλασσικὴν ἀντίληψιν ἡ ζήτησις χρήματος, ἤτοι ἡ διακράτησις ρευστῶν διαθεσίμων, εἶναι ποσοστὸν τοῦ εἰσοδήματος καὶ συνεπῶς ἡ κλασσική συνάρτησις* ζητήσεως χρήματος είναι $M = kY$. Τὸ k εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εἶναι τὸ ἀντίστροφον τῆς κυκλοφοριακῆς ταχύτητος τοῦ χρήματος V, ὡς αὕτη παρουσιάζεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Fisher, $MV = PT$. Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν $M = \frac{1}{V} Y$,** καὶ συνεπῶς $k = \frac{1}{V}$.

Κατὰ τὴν Κεϋνσιανὴν ὅμως ἀντίληψιν ὁ σπουδαιότερος παράγων διαμορφώσεως τῆς ζητήσεως ρευστότητος εἶναι τὸ κίνητρον τῆς κερδοσκοπίας εἰς τὴν ἀγορὰν τῶν χρεογράφων καὶ συνεπῶς τὸ ἐπιτόκιον εἶναι ὁ σημαντικώτερος ρυθμιστής. Ἡ καμπύλη τῆς προτιμήσεως ρευστότητος ὁμοιάζει πρὸς τὴν καμπύλην τῆς ὑπερβολῆς καὶ εἰς τὸ κατώτατον μέρος αὐτῆς εἶναι πλήρως ἐλαστική, ἤτοι ὁριζοντιοῦται. Ἡ ὁριζοντίωσις αὕτη σημαίνει ὅτι τὸ ἐπιτόκιον, μὲ δεδομένον τὸ ἐπίπεδον εἰσοδήματος, δὲν δύναται νὰ κατέλθῃ κάτω ὡρισμένου ὕψους (π.χ. 2%), ἔστω καὶ ἂν ἡ ποσότης τοῦ χρήματος αὐξάνεται. Τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο ὅπερ ἀπεκλήθη παγὶς ρευστότητος (liquidity trap). Ἤτοι, πᾶσα αὔξησις τῆς ρευστότητος πέραν τοῦ σημείου ὅπου τὸ ἐπιτόκιον ἔχει φθάσει εἰς τὸ κατώτατον ὅριον (βραχώδης πυθμὴν κατὰ τὸν Keynes), ρίπτεται εἰς τὴν παγίδαν.

II.1.13. **Ἡ συνάρτησις εἰσαγωγῶν.** Αἱ ἐκ τῆς ἀλλοδαπῆς εἰσαγωγαὶ ἀγαθῶν εἶναι συνήθως συνάρτησις τοῦ εἰσοδήματος (ἢ τῆς παραγωγῆς) τῆς εἰσαγούσης χώρας καὶ τῶν σχετικῶν τιμῶν, ἤτοι τοῦ λόγου ἐσωτερικοῦ πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν ἐπίπεδον τιμῶν. Συνεπῶς, ἡ συνάρτησις δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς $M = \varphi(Y, P)$, ὅπου M εἶναι αἱ εἰσαγωγαί, Y τὸ εἰσόδημα καὶ P αἱ σχετικαὶ τιμαί.

Ἡ συγκεκριμένη μορφὴ τὴν ὁποίαν δύναται ἡ συνάρτησις νὰ λάβῃ ποικίλλει ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως. Αἱ ἀνεξάρτητοι (ἑρμηνευτικαὶ) μεταβληταὶ ποικίλλουν ἀναλόγως τῆς κατηγορίας τῶν εἰσαγομένων ἀγαθῶν. Οὕτω διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν μεταβολῶν τῶν εἰσαγωγῶν κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ ὡς ἀνεξάρτητος (ἑρμηνεύουσα) μεταβλητὴ δύναται νὰ ληφθῇ ἡ ἐπένδυσις παγίου κεφαλαίου, ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν εἰσαγωγῶν βιομηχανικῶν πρώτων ὑλῶν, ὡς ἑρμηνεύουσαι μεταβληταὶ δύνανται νὰ ληφθοῦν ἡ βιομηχανικὴ παραγωγὴ καὶ τὰ ἀποθέματα τοιούτων ὑλῶν.

II.1.14. **Ἡ συνάρτησις ἐξαγωγῶν.** Αἱ ἐξαγωγαὶ ἀγαθῶν ἢ καὶ ὑπηρεσιῶν εἶναι συνήθως συνάρτησις τοῦ εἰσοδήματος καὶ τῶν τιμῶν τῶν ἐπικρατουσῶν εἰς τὴν ἀλλοδαπήν. Συνεπῶς, ἡ συνάρτησις ἐξαγωγῶν δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς $X = f(Y_E, P)$, ὅπου X εἶναι αἱ ἐξαγωγαί, Y_E τὸ εἰσόδημα τῆς ἀλλοδαπῆς καὶ P αἱ σχετικαὶ τιμαί. Ἡ συνάρτησις αὕτη περιγράφει τὴν πλευρὰν τῆς

* Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι γνωστὴ ὡς ἐξίσωσις τῆς σχολῆς τοῦ Cambridge.

** Ὑποτίθεται ὅτι $PT = Y$.

ζητήσεως μόνον. Θὰ ἠδύνατο ὅμως νὰ προστεθῇ καὶ ἑτέρα ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ πρὸς ὑποδήλωσιν τῆς πλευρᾶς τῆς προσφορᾶς, ὡς ἡ ἐγχώριος παραγωγή.

Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως ἐξαγωγῶν, ἡ συγκεκριμένη μορφὴ αὐτῆς ποικίλλει. Δύναται νὰ εἶναι γραμμικὴ ἢ καμπυλόγραμμος. Τὰ συγκεκριμένα στοιχεῖα θὰ μᾶς ὑποδείξουν τοῦτο.

II.2. Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΝ

II.2.0. Αἱ κυκλικαὶ συναρτήσεις εἶναι ἰδιαιτέρως χρήσιμοι διὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ οἰκονομικοῦ κύκλου. Εἰς αὐτὸ τὸ στάδιον τῆς ἀναλύσεως θὰ προβῶμεν εἰς μίαν συνοπτικὴν ἀνάλυσιν τῶν χαρακτηριστικῶν τῶν οἰκονομικῶν διακυμάνσεων.

Ἡ ἐξέλιξις τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν εἰς τὸν χρόνον ἀποτελεῖ τὴν συνισταμένην ἐπὶ μέρους συστατικῶν, ὡς ἡ μακραίων τάσις, ὁ οἰκονομικὸς κύκλος καὶ αἱ ἐποχικαὶ κυμάνσεις. Ἡ μακραίων τάσις ἐνυπάρχει εἰς ὅλα τὰ οἰκονομικὰ μεγέθη καὶ δεικνύει τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ φαινομένου ἢ μεγέθους εἰς τὴν μακρόβιον περίοδον δίκην βιολογικῆς ἐξελίξεως. Οὕτω ἐξετάζοντες τὸ ἐθνικὸν προϊὸν βλέπομεν ὅτι, παρὰ τὰς κατὰ καιροὺς διακυμάνσεις του, ἀνόδους (ups) καὶ καθόδους (downs), ἔχει μίαν ἀνοδικὴν τάσιν μακροχρονίως. Πέριξ τῆς τάσεως ταύτης ἐμφανίζονται διακυμάνσεις αἵτινες ἔχουν ποιάν τινα ρυθμικότητα, ὡς παρετηρήθη κατὰ τὸ παρελθόν, καὶ τὸ φαινόμενον τοῦτο ἐκλήθη οἰκονομικὸς κύκλος. Ὁ οἰκονομικὸς κύκλος ἐμφανίζει διαφόρους φάσεις ἢ περιόδους αἱ ὁποῖαι διακρίνονται ἀπὸ ὡρισμένα σημαντικῆς σπουδαιότητος χαρακτηριστικά. Μικροτέρας σημασίας ἀπὸ γενικωτέρας οἰκονομικῆς σκοπιᾶς, εἶναι αἱ ἐποχικαὶ διακυμάνσεις αἱ ἐμφανιζόμεναι ἐντὸς ἔτους. Ἐποχικὰς διακυμάνσεις ἐμφανίζουν συνήθως τὰ φαινόμενα τὰ συνδεόμενα μὲ τὴν γεωργικὴν παραγωγὴν ἢ μὲ ὡρισμένας συνηθείας καταναλώσεως, πληρωμῶν, κ.λ.π. Αἱ γεωργικαὶ ἐξαγωγαὶ ἐμφανίζουν ἐποχικότητα διότι ἔχουν περιόδους αἰχμῆς ἀμέσως μετὰ τὴν γεωργικὴν συγκομιδήν. Ἡ νομισματικὴ κυκλοφορία ἐμφανίζει ἔξαρσιν κατὰ τοὺς μῆνας Ἀπρίλιον καὶ Δεκέμβριον, λόγῳ κυρίως τῆς καταβολῆς τῶν δώρων, ηὐξημένων συναλλαγματικῶν εἰσπράξεων ἐξ ἐξαγωγῶν, διακανονισμῶν λογ/σμῶν τοῦ Δημοσίου, κ.λ.π.

Αἱ περίοδοι ἀνθήσεως καὶ ὑφέσεως τῆς οἰκονομίας ἐκδηλοῦνται εἰς τὰ βασικὰ μεγέθη ἅτινα ἀποτελοῦν τοὺς δείκτας εὐημερίας τῆς οἰκονομίας, ὡς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα, ἡ παραγωγή, ἡ ἀπασχόλησις, τὰ κέρδη, αἱ τιμαὶ κ.λπ. Διακυμάνσεις εἰς τὰ μεγέθη ταῦτα προκαλοῦνται εἴτε ἀπὸ τὴν πλευρὰν τῆς ζητήσεως εἴτε ἀπὸ τὴν πλευρὰν τῆς προσφορᾶς. Αἱ θεωρίαι περὶ οἰκονομικῶν διακυμάνσεων, αἱ βασιζόμεναι ἐπὶ τῶν στοιχείων μεταβολῶν τῆς προσφορᾶς, ἀκμάσασαι εἰς τὸ παρελθόν. σήμερον ἐμφανίζονται μειωμένης ἑρμηνευτικῆς ἰσχύος. Μετὰ τὴν Κεϋνσιανὴν ἐπανάστασιν ἡ πλευρὰ τῆς ἐνεργοῦ ζητήσεως ἀποτελεῖ τὴν σπουδαιοτέραν πηγὴν αἰτίων κυκλικῶν διακυμάνσεων. Ἐκ τῆς ἐνεργοῦ ὅμως ζητήσεως ἡ ζήτησις ἐπενδυτικῶν ἀγαθῶν εἶναι ἐκείνη ἥτις παρουσιάζει ἀποτόμους καὶ σημαντικὰς μεταβολάς, αἱ ὁποῖαι μέσῳ τόσον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὅσον καὶ τοῦ ἐπιταχυντοῦ ἐπιφέρουν αὐξομειώσεις εἰς τὸ εἰσόδημα καὶ τὴν ἀπασχόλησιν. Χαρακτηριστικῶς ἀναφέρεται ὅτι αἱ ἐπενδύσεις εἰς Η.Π.Α. κατὰ τὴν Μεγάλην Κρίσιν τοῦ 1930 ἐμειώθησαν κατὰ 90%.

Ὁ πολλαπλασιαστὴς δεικνύει κατὰ πόσον τὸ εἰσόδημα θὰ αὐξηθῇ ἐκ μιᾶς αὐτονόμου αὐξήσεως τῶν ἐπενδύσεων. Οὕτω ὁ προσδιοριστικὸς παράγων εἶναι αἱ ἐπενδύσεις καὶ ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητὴ τὸ εἰσόδημα. Ἐκ τῆς διενεργείας αὐτονόμου ἐπενδύσεως δημιουργεῖται εἰσόδημα, διότι ἡ δαπάνη δι' ἐπένδυσιν καθίσταται εἰσόδημα εἰς χεῖρας ἐκείνων οἱ ὁποῖοι συμβάλλουν εἰς τὴν πραγματοποίησιν ταύτης. Τὸ εἰσόδημα τοῦτο ἐκδηλοῦται εἰς ἐνεργὸν ζήτησιν πρὸς κάλυψιν τῶν ἀναγκῶν τῶν εἰσοδηματιῶν, οἱ ὁποῖοι δαπανοῦν πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν. Ἡ δαπάνη αὕτη καθίσταται εἰσόδημα εἰς χεῖρας ἐκείνων οἱ ὁποῖοι διαθέτουν τὰ ἀγαθὰ καὶ τὰς ὑπηρεσίας των. Τὸ εἰσόδημα τῶν τελευταίων τούτων δαπανᾶται πάλιν καὶ καθίσταται εἰσόδημα ἑτέρων προσώπων, κ.ο.κ. Οὕτω μία νομισματικὴ μονὰς διέρχεται διὰ μιᾶς σειρᾶς γύρων δαπάνης - εἰσοδήματος. Τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν ἐπὶ μέρους εἰσοδημάτων κατὰ τὴν διαδικασίαν ταύτην ἀποτελεῖ τὴν αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος, ἥτις προεκλήθη ἐκ τῆς ἀρχικῆς δαπάνης ἐπενδύσεως. Ἐπειδὴ δὲ τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα δὲν δαπανοῦν καθ' ὁλοκληρίαν τὸ εἰσόδημά των, ἀλλὰ ἓν μέρος τούτου ἀποταμιεύουν, καθίσταται ἀντιληπτὸν ὅτι ἡ ἀρχικὴ δαπάνη μιᾶς νομισματικῆς μονάδος θὰ δημιουργήσῃ εἰσόδημα τόσον ὅσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους δαπανῶν ἀπὸ ἀτόμου εἰς ἄτομον. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο θὰ εἶναι ἀριθμὸς πεπερασμένος καθ' ὅτι τὰ ἐπὶ μέρους συστατικά του (εἰσοδήματα) θὰ εἶναι σειρὰ φθίνουσα τείνουσα πρὸς τὸ μηδέν, δεδομένου ὅτι ἑκάστοτε ἓν μέρος τοῦ εἰσοδήματος ἀποταμιεύεται.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω εἰσοδηματικῆς διαδικασίας καθίσταται φανερὸν ὅτι τὸ μέγεθος τοῦ τελικῶς διαμορφωθησομένου εἰσοδήματος ἐκ τῆς ἀρχικῆς δαπάνης ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ὁριακῆς ροπῆς πρὸς κατανάλωσιν. Ὅσον μεγαλυτέρα ἡ ὁ.ρ.κ. τόσον μεγαλυτέρα καθίσταται ἡ τιμὴ τοῦ πολλαπλασιασιαστοῦ.

Εἰς τὴν κλειστὴν οἰκονομίαν τὸ ἀκαθ. ἐγχώριον προϊὸν ἰσοῦται πρὸς τὴν καταναλωτικὴν δαπάνην σὺν τῇ ἀποταμιεύσει, ἤτοι $Y = C + S$ (εἰσοδηματικὴ ταυτότης). Αἱ ἀποταμιεύσεις, ἐξ ἄλλου, ἰσοῦνται πρὸς τὰς ἐπενδύσεις μέσῳ τῶν ἐπενδυτικῶν ἀποφάσεων τῶν ἐπιχειρηματιῶν, ἤτοι $S = I$. Ἐὰν περαιτέρω δεχθῶμεν ὅτι ἡ συνάρτησις καταναλώσεως εἶναι τῆς μορφῆς $C = \beta Y$, ἤτοι ἡ κατανάλωσις εἶναι ποσοστὸν τοῦ ἑκάστοτε εἰσοδήματος, τότε ἡ εἰσοδηματικὴ ταυτότης γίνεται: $Y = \beta Y + I$. Ἐκ ταύτης δὲ ἔχομεν:

$$Y = \frac{1}{1-\beta} \cdot I,$$

ὅπου β εἶναι ἡ ὁριακὴ ροπὴ πρὸς κατανάλωσιν, καὶ (1 - β) ἡ ὁριακὴ ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον ἰσορροπίας τοῦ εἰσοδήματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ποσὸν τῆς δαπάνης δι' αὐτονόμους ἐπενδύσεις (I) ἐπὶ τὴν ἀντίστροφον τιμὴν τῆς ὁριακῆς ροπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν 1/(1 - β), ἣν καλοῦμεν πολλαπλασιαστὴν (k). Οὕτω, ἑκάστη αὔξησις τῆς αὐτονόμου δαπάνης δι' ἐπενδύσεις (ΔΙ) θὰ ἐπιφέρῃ αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος (ΔΥ) ἀνάλογον πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἤτοι $\Delta Y = k\Delta I$. Ὡς εἰκός, ἐὰν ἡ ὁ.ρ.κ. ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα (ἀποταμίευσις μηδέν), τότε ἡ τιμὴ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καθίσταται ἄπειρος. Ἐὰν δὲ ἡ ὁ.ρ.κ. ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν, τότε ὁ πολλαπλασιαστὴς ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα, ἤτοι ἡ αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀρχικὴν δαπάνην ἐπενδύσεως.

Ὁ πολλαπλασιαστὴς κατὰ τὰ ἀνωτέρω μᾶς δεικνύει πόσας φορὰς θὰ αὐξηθῇ τὸ εἰσόδημα ἐκ μιᾶς δεδομένης αὐξήσεως τῆς αὐτονόμου δαπάνης δι' ἐπένδυσιν. Ὁ ἐπιταχυντής, ἐξ ἄλλου, μᾶς δεικνύει τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς αὐξήσεως τῆς ζητήσεως ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος καὶ τῆς ἐκ ταύτης προκαλουμένης αὐξήσεως τοῦ παγίου κεφαλαίου (ἐπενδύσεων). Οὕτω κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπιταχύνσεως αἱ μεταβολαὶ τοῦ εἰσοδήματος (ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ) προκαλοῦν μεταβολὰς εἰς τὴν ζήτησιν ἀγαθῶν δι' ἐπενδυτικοὺς σκοποὺς (ἐξηρτημένη μεταβλητή). Δηλονότι, ἐνῷ ὁ πολ/στὴς δεικνύει τὴν ἐξάρτησιν τοῦ εἰσοδήματος (καὶ συνεπῶς τῆς καταναλώσεως) ἐκ τῶν ἐπενδύσεων, ὁ ἐπιταχυντὴς δεικνύει τὸ ἀντίστροφον, ἤτοι τὴν ἐξάρτησιν τῶν ἐπενδύσεων ἐκ τῆς καταναλώσεως.

Πρὸς κατανόησιν τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιταχύνσεως ἄς λάβωμεν ἓν παράδειγμα. Ἔστω ὅτι μὲ πάγιον κεφάλαιον 500 νομισματικῶν μονάδων παράγονται ὑποδήματα 50 μονάδων καὶ καθ' ἕκαστον ἔτος ἐπέρχεται φθορὰ εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο κατὰ 10%, ἤτοι 50 μονάδες. Οὕτω, κατ' ἔτος ὑφίσταται ζήτησις κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν 50 μ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αὐξάνει ἡ ζήτησις ὑποδημάτων κατὰ 10% θὰ ἀπαιτηθῇ κεφαλαιουχικὸς ἐξοπλισμὸς 50 μ., καὶ συνεπῶς ὁ κλάδος παραγωγῆς κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν θὰ ἀναγκασθῇ νὰ αὐξήσῃ τὴν παραγωγήν του κατὰ 100%, ἤτοι κατὰ 50 μ. λόγῳ ἀντικαταστάσεως τῶν φθειρομένων μηχανημάτων καὶ ἑτέρας 50 μ. λόγῳ τῆς κατὰ 10% αὐξήσεως τῆς ζητήσεως ὑποδημάτων. Οὕτω μία κατὰ 10% αὔξησις τῆς ζητήσεως καταναλωτικῶν ἀγαθῶν δημιουργεῖ μίαν κατὰ 100% αὔξησιν τῆς ζητήσεως κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν. Τὸ ἀντίθετον θὰ συμβῇ εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ζήτησις καταναλωτικῶν ἀγαθῶν μειοῦται κατὰ 10%. Δηλονότι ἡ ζήτησις κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν θὰ μειωθῇ κατὰ 100%.

Τὸ συμπέρασμα τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι ὅτι ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸν κλάδον παραγωγῆς καταναλωτικῶν ἀγαθῶν, ὁ κλάδος τῶν κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν παρουσιάζει ἀποτόμους αὐξομειώσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸν ἄμεσον ἀντίκτυπόν των ἐπὶ τῆς ἀπασχολήσεως. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν αἱ οἰκονομικαὶ διακυμάνσεις εἶναι κυρίως διακυμάνσεις τοῦ κλάδου τῶν κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν, αἱ ὁποῖαι ὅμως ἔχουν τοὺς ἀντικτύπους των εἰς ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν.

II.2.1. **Χαρακτηριστικὰ τῶν κινήσεων.** Ἡ ἱστορία τῶν οἰκονομιῶν κεφαλαιοκρατικῆς συγκροτήσεως μᾶς παρέσχεν ἐπαρκῆ μαρτυρίαν περὶ τῆς ἐξελίξεως τούτων καὶ ἰδία τῶν νόμων τοὺς ὁποίους ἠκολούθησαν αἱ κινήσεις τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν, ὡς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα, ἡ παραγωγή, ἡ ἀπασχόλησις, αἱ τιμαί, κ.λ.π. Αἱ κινήσεις αὗται χαρακτηρίζονται, ἐν πρώτοις, ἐκ μιᾶς διαδικασίας αὐτοτροφοδοτήσεως.

Ἡ αὐτοτροφοδότησις εἶναι τὸ φαινόμενον ἐκεῖνο κατὰ τὸ ὁποῖον ἅπαξ ἀρχίσῃ μία πρὸς τὰ ἄνω (ἢ κάτω) κίνησις αὕτη συνεχίζεται ἀφ' ἑαυτῆς καὶ κατὰ τρόπον σωρευτικόν. Ἡ ἔννοια τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὡς αὕτη ἀνεπτύχθη περιληπτικῶς ἀνωτέρω ἐμπίπτει ἐντὸς τοῦ πλαισίου τῆς ἐννοίας τῆς σωρευτικῆς διαδικασίας. Ἅπαξ καὶ ἐκδηλωθῇ μία δαπάνη αὕτη ὁδηγεῖ εἰς δημιουργίαν εἰσοδημάτων ἐξ ὧν προκύπτουν νέαι δαπάναι διὰ καταναλωτικὰ ἀγαθά, αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν μὲ τὴν σειράν των εἰς ἀπασχόλησιν ἀνθρωπίνου δυναμικοῦ. Οἱ νεοαπασχολούμενοι ἀποκτοῦν εἰσοδήματα, τὰ ὁποῖα περαιτέρω δαπανοῦν, καὶ οὕτω συνεχίζεται μία σωρευτικὴ διαδικασία δημιουργίας εἰσοδήματος καὶ ἀπασχολήσεως. Καθ' ὃν χρόνον ἡ ζήτησις καταναλωτικῶν ἀγαθῶν αὐξάνει, ἡ ζήτησις κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν αὐξάνει ἐπίσης, ἐφ' ὅσον δὲν ὑφίσταται ἀδρανοῦσα παραγωγικὴ ἱκανότης. Ὡς ἀνωτέρω ὅμως διεπιστώσαμεν ἡ ζήτησις καταναλωτικῶν ἀγαθῶν δημιουργεῖ πολὺ μεγαλυτέραν ζήτησιν κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν. Οὕτως αὐξάνουν αἱ ἐπενδύσεις εἰς τὸν κλάδον τῶν κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν καὶ δημιουργοῦνται πρόσθετα εἰσοδήματα, τὰ ὁποῖα ὁδηγοῦν εἰς τὴν ἀνάγκην νέων ἐπενδύσεων, κ.ο.κ. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δημιουργεῖται μία σωρευτικὴ διαδικασία ἡ ὁποία φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως ἀτέρμων καὶ ἡ ὁποία δὲν ὁδηγεῖ εἰς σημεῖον τι ἰσορροπίας.

Ἐὰν πρὸς στιγμὴν φαντασθῶμεν ὅτι ἡ ζήτησις καταναλωτικῶν ἀγαθῶν παύσῃ ν' αὐξάνῃ διὰ τὸν α ἢ β λόγον, τότε ἡ δαπάνη δι' ἐπενδύσεις θὰ μειωθῇ καὶ τὰ ἐκ τῶν ἐπενδύσεων δημιουργούμενα εἰσοδήματα θὰ μειωθοῦν. Ἡ μείωσις τῶν εἰσοδημάτων θὰ ὁδηγήσῃ εἰς περαιτέρω μείωσιν τῆς δαπάνης δι' ἐπενδύσεις, κ.ο.κ. Οὕτω δημιουργεῖται μία πρὸς τὰ κάτω σωρευτικὴ διαδικασία μὴ ἐμφανιζομένου σημείου τινος ἰσορροπίας. Ἐκ τῆς πρὸς τὰ ἄνω καὶ πρὸς τὰ κάτω ἀτέρμονος σωρευτικῆς διαδικασίας φαίνεται νὰ μὴ ὑπάρχη τάσις πρὸς ἰσορροπίαν, ἀλλὰ τάσις πρὸς διακύμανσιν τοῦ συστήματος. Ἀκριβῶς τὴν ἰδέαν τῆς κυκλικῆς σωρευτικῆς διαδικασίας προέβαλεν ὁ οἰκονομολόγος Gunnar Myrdal διὰ νὰ ὑποστηρίξη τὴν θέσιν του περὶ συνεχοῦς διευρύνσεως τοῦ χάσματος μεταξὺ πλουσίων καὶ πτωχῶν χωρῶν, βάλλων κατὰ τῆς κλασσικῆς θέσεως, καθ' ἣν τὸ οἰκονομικὸν σύστημα τείνει πρὸς ἰσορροπίαν*.

Πλὴν τῶν ἀνωτέρω αἰτίων τῆς πρὸς τὰ κάτω ἢ ἄνω σωρευτικῆς διαδικασίας, ἤτοι τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τοῦ ἐπιταχυντοῦ, ὑφίσταται καὶ τρίτος λόγος δημιουργίας σωρευτικῶν κινήσεων τοῦ συστήματος, αἱ ἐπιχειρηματικαὶ προβλέψεις. Τὸ στοιχεῖον τῶν προβλέψεων εἰς τὸν ἐπιχειρηματικὸν προγραμματισμὸν ἐν τῷ χρόνῳ κατέχει σημαντικωτάτην θέσιν. Αἰσιόδοξοι προβλέψεις περὶ τῆς μελλοντικῆς ζητήσεως ὁδηγοῦν εἰς ἐπενδύσεις τόσον εἰς τὸν κλάδον τῶν καταναλωτικῶν ὅσον καὶ τῶν κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν. Αἱ ἐπενδύσεις αὗται δημιουργοῦν εἰσοδήματα καὶ ζήτησιν, καὶ ταῦτα δημιουργοῦν νέας ἐπενδύσεις, κ.ο.κ. Οὕτω δημιουργοῦνται εὐνοϊκαὶ συνθῆκαι ἀνόδου, ἡ ἀρχὴ τῶν ὁποίων εἶναι αἱ εὐνοϊκαὶ προοπτικαί.

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω γεννᾶται τὸ ἐρώτημα, διατί μία πρὸς τὰ ἄνω ἢ τὰ κάτω σωρευτικὴ κίνησις δὲν συνεχίζεται ἀενάως κατὰ τρόπον ἐκρηκτικόν; Ἡ πρὸς τὰ ἄνω κίνησις εὑρίσκει ἓν ἀνώτατον ὅριον εἰς ὃ προσκρούει (ceiling). Πράγματι ἅπαξ τὸ ἐπίπεδον τῆς παραγωγῆς καὶ τῆς ἀπασχολήσεως κατόπιν τῶν συνεχῶν αὐξήσεων φθάση τὴν πλήρη ἀπασχόλησιν, τότε πᾶσα αὔξησις τοῦ πραγματικοῦ εἰσοδήματος εἶναι ἀνέφικτος. Ἐφικτὴ θὰ καταστῆ ἡ περαιτέρω αὔξησις τοῦ πραγματικοῦ εἰσοδήματος μόνον ὅταν μεταβληθοῦν αἱ συνθῆκαι καὶ τὰ δεδομένα τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος διὰ τῆς τεχνολογικῆς προόδου, τῆς ἀνακαλύψεως νέων πλουτοπαραγωγικῶν πηγῶν, κ.λπ. Ἐπίσης, ἡ πρὸς τὰ κάτω σωρευτικὴ κίνησις προσκρούει εἰς ἓν κατώτατον ὅριον (floor), ὅπερ εἶναι ἡ περίπτωσις καθ' ἣν αἱ ἐπενδύσεις ἐν τῇ οἰκονομίᾳ κατέρχονται εἰς τὸ μηδέν. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ ὑφίσταται εἰσόδημά τι εἰς τὴν οἰκονομίαν, τούτου μὴ δυναμένου νὰ καταστῆ ἀρνητικοῦ. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἀντιληφθῶμεν ὡς ἑξῆς : Μειουμένου τοῦ εἰσοδήματος συνεχῶς κατὰ τὴν πρὸς τὰ κάτω σωρευτικὴν κίνησιν, μειοῦνται καὶ αἱ ἀποταμιεύσεις τῶν ἀτόμων μέχρι σημείου νὰ διατίθεται ὁλόκληρον τὸ εἰσόδημα διὰ κατανάλωσιν, ὁπότε ἡ τοιαύτη

* Βλ. G. Myrdal, Economic Theory and Underdeveloped Regions, 1965 (University Paperback). Ὡς ἐπίσης J. W. Williams, Economic Stability in a Changing World, Oxford University Press, 1953.

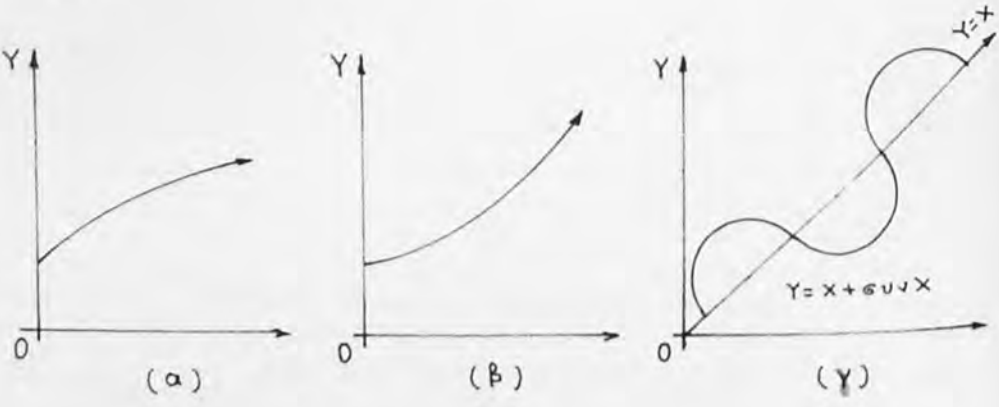
«ὑψηλὴ» ροπὴ πρὸς κατανάλωσιν θὰ συγκρατήσῃ τὸ εἰσόδημα ἀπὸ περαιτέρω πτῶσιν. Οὕτω συμπεραίνομεν ὅτι ὑφίστανται συνθῆκαι αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν δίκην «π ρ ο σ κ ρ ο υ σ τ ή ρ ω ν» τόσον κατὰ τὴν ἄνω ὅσον καὶ κατὰ τὴν κάτω κίνησιν τοῦ πραγματικοῦ εἰσοδήματος.

Οἱ ἀνωτέρω «προσκρουστῆρες» συμβαίνει νὰ εἶναι σημεῖα καμπῆς τῶν κυκλικῶν κινήσεων, πρᾶγμα ὅπερ σημαίνει ὅτι ἅπαξ τὸ εἰσόδημα φθάσῃ τὸ ἀνώτατον ἢ κατώτατον σημεῖον δὲν παραμένει ἐκεῖ, ἀλλὰ λαμβάνει τὴν πρὸς τὰ κάτω ἢ πρὸς τὰ ἄνω ἄγουσαν καὶ οὕτως ἔχομεν ἀενάους κυκλικὰς κινήσεις. Εἰς τὴν τοιαύτην ἀντιστροφὴν τῆς κινήσεως συμβάλλουν καὶ πάλιν ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ ἐπιταχυντής. Οὗτοι ἐπενεργοῦν τόσον κατὰ τὴν ἀνοδικὴν ὅσον καὶ κατὰ τὴν καθοδικὴν πορείαν.

Κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ ἐπιταχυντοῦ εἰς σταθερὰν αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος ἀντιστοιχεῖ σταθερὸν ἐπίπεδον ἐπενδύσεων. Ὁπότε εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ἐπέρχεται ἐπιβράδυνσις τοῦ ρυθμοῦ αὐξήσεως ἢ καὶ τὸ χεῖρον, σταθερότης εἰς τὸ εἰσόδημα, αἱ ἐπενδύσεις μειοῦνται. Ἡ μείωσις τῶν ἐπενδύσεων θὰ ἔχῃ μειωτικὴν ἐπὶ τοῦ εἰσοδήματος ἐπίδρασιν τῇ ἐπενεργείᾳ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Τὸ εἰσόδημα θὰ φθάσῃ εἰς ἓν κατώτατον σημεῖον, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, ἀλλὰ λόγῳ τῆς ὑπάρξεως ποιᾶς τινος ζητήσεως θὰ δημιουργηθοῦν καὶ πάλιν ἐπενδύσεις πρὸς ἀνανέωσιν τοῦ μηχανικοῦ ἐξοπλισμοῦ καὶ διεύρυνσιν τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τῆς οἰκονομίας. Αἱ ἐπενδύσεις θὰ δημιουργήσουν πάλιν εἰσόδημα τῇ ἐπενεργείᾳ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως καθίσταται σαφὲς ὅτι ἡ μεταξὺ πολλαπλασιαστοῦ καὶ ἐπιταχυντοῦ ἀλληλοεπίδρασις ὁδηγεῖ τὸ σύστημα μακρὰν τοῦ σημείου ἰσορροπίας. Τοιοῦτον σημεῖον ἰσορροπίας ἀποτελεῖ περίπτωσιν ἀσταθοῦς ἰσορροπίας. Τὸ πραγματικὸν εἰσόδημα διακυμαίνεται συνεχῶς κατὰ τὴν εἰς τὰ ἀνωτέρω περιγραφεῖσαν διαδικασίαν, ἥτις χαρακτηρίζεται ἐκ τριῶν κυρίως στοιχείων : τὴν σ ω ρ ε υ τ ι κ ὴ ν κ ί ν η σ ι ν, τὸν ἄνω καὶ κάτω «π ρ ο σ κ ρ ο υ σ τ ῆ ρ α» (buffers ἢ floor καὶ ceiling) καὶ τὴν ἀ ν ά σ τ ρ ο φ ο ν κ ί ν η σ ι ν.

Ἡ συνεχὴς διακύμανσις τοῦ εἰσοδήματος κατὰ τρόπον κυκλικὸν ἄνευ τάσεως πρὸς ἰσορροπίαν ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ.II.6 ($\rho = 0$). Ἡ ἐκ τοῦ κατωτάτου σημείου (—Α) πρὸς τὰ ἄνω σωρευτικὴ κίνησις διακόπτεται προσκρούουσα εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον (Α) διὰ νὰ ἀρχίσῃ ἡ πρὸς τὰ κάτω σωρευτικὴ κίνησις, κ.ο.κ. Ἐὰν ἡ σωρευτικὴ κίνησις εἶναι ἀπηλλαγμένη κυκλικῶν κυμάνσεων, τότε αὕτη δύναται εἴτε νὰ ἐξελιχθῇ ἐκρηκτικῶς, ὡς εἰς τὸ Σχ.II.14 (β) εἴτε νὰ τείνῃ πρὸς σημεῖον ἰσορροπίας, ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν (α) τοῦ Σχ.II.14. Συνήθως διαπιστοῦται μία περιέλιξις τοῦ συστήματος πέριξ μιᾶς διαιωνικῆς τάσεως πρὸς τὰ ἄνω (upward secular trend), ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν(γ).



Σχ. II. 14.

Εἶναι δυνατόν, ὅμως, αἱ κυκλικαὶ κινήσεις, αἱ χαρακτηριζόμεναι ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω στοιχείων, νὰ ὑφίστανται εἴτε μίαν ἐξασθένισιν ἐν τῇ ἐξελίξει των (damping), ὁπότε ἔχομεν τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ.II.6. διὰ $\rho < 0$, εἴτε μίαν ἐνδυνάμωσιν (explosion), ὁπότε ἔχομεν τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. II.6. διὰ $\rho > 0$.

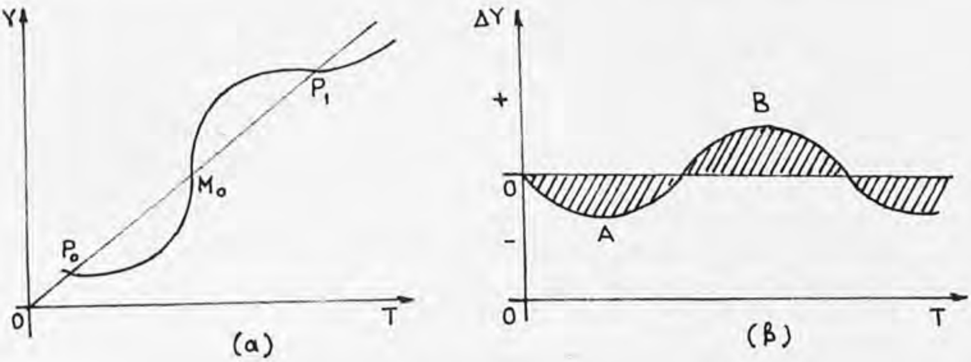
II.2.2. **Κυκλικαὶ κινήσεις καὶ καμπύλαι ἀναπτύξεως.** Αἱ κυκλικαὶ κινήσεις δὲν εἶναι χαρακτηριστικὸν ὅλων τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν. Μία οἰκονομικὴ μεταβλητὴ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀκολουθῇ τὴν ἐξέλιξιν ἣν ἐμφανίζουν τὰ γραφήματα (α) καὶ (β) τοῦ Σχ.II.14. Τὰ γραφήματα ταῦτα ἀποτελοῦν καμπύλας ἀναπτύξεως (growth curves). Πλὴν τῶν μορφῶν τούτων καμπύλων ἀναπτύξεως συνήθεις εἶναι αἱ σιγμοειδεῖς* καμπύλαι (λογιστικὴ καμπύλη, ἀψίδες), αἱ ὁποῖαι δεικνύουν τὴν ἐν τῷ χρόνῳ ἐξέλιξιν ὡρισμένων οἰκονομικῶν ἢ δημογραφικῶν μεταβλητῶν, ὡς ἡ πορεία τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, τῆς ἀναπτύξεως τοῦ πληθυσμοῦ, κ.λπ.

Δεδομένου ὅτι αἱ τελευταῖαι αὗται καμπύλαι δίδουν τὴν ἐντύπωσιν οἰκονομικῶν κύκλων περιελισσομένων πέριξ μιᾶς «γραμμῆς τάσεως», ὡς εἰς τὸ Σχ.II.15 (α) ἐμφαίνεται, δὲν πρέπει νὰ παρομοιάζωμεν ταύτας πρὸς καθαρῶς κυκλικὰς κινήσεις, αἱ ὁποῖαι χρήζουν τῆς γνωστῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως τῶν χρονολογικῶν σειρῶν**. Ἡ ἐξάλειψις τῆς τάσεως ἐκ μιᾶς τοιαύτης καμπύλης ἀναπτύξεως, μᾶς δίδει τὴν καμπύλην τοῦ Σχ.II.15 (β). Ἡ

* Ὁ ὅρος προκύπτει ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι αὗται ὁμοιάζουν πρὸς τὸ σχῆμα τοῦ γράμματος S (τελικὸν σίγμα).

** Βλ. K. Boulding, Economic Analysis, 3rd Ed., σελ. 451 —53.

καμπύλη (β) ὅμως δεικνύει διαφορὰς ἄνω (θετικὰς) καὶ κάτω (ἀρνητικὰς) τοῦ μηδενός, πρᾶγμα ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν οἰκονομικὸν φαινόμενον ἐμφανίζει φάσεις κάμψεως (Α) καὶ ἀνόδου (Β). Τὸ τοιοῦτον ὅμως δὲν εἶναι ὀρθόν, διότι ὡς ἐκ τῆς καμπύλης (α) ἐμφαίνεται, ἡ ἐξέλιξις τοῦ φαινομένου εἶναι συνεχῶς ἀνοδική. Ἡ ἀνάπτυξις τῆς μεταβλητῆς Υ ἐκ τοῦ σημείου p_0 βαίνει ἐν ἀρχῇ βραδέως. Κατόπιν καθίσταται ταχεῖα φθάνουσα μὲ τὸν ὑψηλότερον ρυθμὸν εἰς τὸ σημεῖον M_0, ἐκ τοῦ ὁποίου καὶ πάλιν ἄρχεται



Σχ. II. 15.

βραδύνουσα. Εἰς τὸ σημεῖον p_1 φθάνει τὸν βραδύτερον ρυθμὸν ἀναπτύξεως, ἐξ οὗ πάλιν ἄρχεται ἀναπτύσσουσα βαθμηδὸν ταχύτητα. Οὕτως, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς καμπύλης ἀναπτύξεως τοῦ ἀνωτέρω τύπου ἔχομεν συνεχῆ ἄνοδον, ἄλλοτε μὲν μὲ ταχὺν ρυθμόν, ἄλλοτε δὲ μὲ βραδὺν ρυθμόν. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν κυκλικῶν διακυμάνσεων ὅμως ἔχομεν πραγματικὰς ἀνόδους καὶ καθόδους. Εἰς τὴν φάσιν τῆς καθόδου αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς εἶναι μικρότεραι τῶν τιμῶν τῆς φάσεως ἀνόδου, ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς καμπύλης ἀναπτύξεως ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς εἰς κάθε σημεῖον εἶναι μεγαλυτέρα τῇ τιμῇς τοῦ προηγουμένου σημείου.

II.2.3. **Κυκλικαὶ κινήσεις τῶν ἀποθεμάτων** Ἡ ὕπαρξις κυκλικῶν κινήσεων χαρακτηρίζει πλείστας ὅσας μεταβλητὰς καὶ φαινόμενα τῆς οἰκονομίας. Μεταξὺ τούτων δὲ καὶ ἐκ τῶν πλέον εὐαισθήτων εἶναι τὰ ἀποθέματα ἑτοίμων ἀγαθῶν καὶ πρώτων ὑλῶν. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τόσον αἱ παραγωγικαὶ μονάδες ὅσον καὶ αἱ μεταπρατικαὶ τοιαῦται τηροῦν ἀποθέματα πρώτων ὑλῶν καὶ ἑτοίμων προϊόντων, διὰ τὰ ὁποῖα ὑφίσταται ἓν ἐπιθυμητὸν ποσοστὸν ἐν σχέσει πρὸς τὴν τρέχουσαν παραγωγήν, προκειμένου περὶ τῶν παραγωγικῶν μονάδων, ἢ τῶν πωλήσεων προκειμένου περὶ ἐμπορικῶν μονάδων.

Ἐκκινοῦντες ἐκ μιᾶς καταστάσεως ἰσορροπίας τοῦ εἰσοδήματος, ὅπου αἱ ἀποταμιεύσεις ἰσοῦνται πρὸς τὰς ἐπενδύσεις καὶ τὸ ποσοστὸν τῶν ἀποθεμάτων εἶναι τὸ ἐπιθυμητὸν τοιοῦτον, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν περαιτέρω αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος μὴ συνοδευομένη ὑπὸ ἀναλόγου αὐξήσεως τῆς ζητήσεως θὰ ὁδηγήσῃ εἰς τὴν δημιουργίαν πλεονασμάτων, καὶ οὕτω τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀποθεμάτων θὰ εἶναι ἀνώτερον τοῦ ἐπιθυμητοῦ. Ἡ συσσώρευσις ἀποθεμάτων θὰ συνεχισθῇ, τὸ μὲν διότι δὲν εἶναι δυνατὴ ἄμεσος καὶ ἀπότομος πτῶσις τῆς τρεχούσης παραγωγῆς, τὸ δὲ διότι ἡ μείωσις τῆς ζητήσεως θὰ εἶναι ταχυτέρα ἐκείνης τῆς παραγωγῆς. Ἡ περαιτέρω μείωσις τῆς ζητήσεως καταναλωτικῶν ἀγαθῶν θὰ προέλθῃ ἐκ τῆς μειώσεως τοῦ εἰσοδήματος καὶ τῆς ἀπασχολήσεως, λόγῳ μειώσεως τῆς παραγωγῆς. Αἱ ἀπαισιόδοξοι προβλέψεις τῶν ἐπιχειρηματιῶν ἐν σχέσει πρὸς τὴν ζήτησιν θὰ ὁδηγήσουν εἰς περαιτέρω μείωσιν τῆς παραγωγῆς, μὲ ἀποτέλεσμα αὐτὴ νὰ κατέλθῃ κάτω τοῦ ἐπιπέδου τῆς τρεχούσης ζητήσεως. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ θὰ ἀρχίσῃ ἡ ἀνάλωσις ἀποθεμάτων, ἅτινα, ἐφ' ὅσον ἡ ζήτησις διατηρηθῇ εἰς ὡρισμένον ὕψος, θὰ κατέλθουν εἰς τὸ ἐπιθυμητὸν ἐπίπεδον ἐν σχέσει πρὸς τὴν τρέχουσαν παραγωγήν. Μετὰ ταῦτα οἱ ἐπιχειρηματίαι θὰ θελήσουν νὰ ἱκανοποιήσουν τὴν τρέχουσαν ζήτησιν ἐκ τῆς τρεχούσης παραγωγῆς, ἡ ὁποία θὰ τείνῃ νὰ αὐξηθῇ. Ἡ αὔξησις τῆς παραγωγῆς ὅμως θὰ φέρῃ τὰ ἀποθέματα εἰς σχετικὸν ὕψος κάτω τοῦ ἐπιθυμητοῦ, ὁπότε οἱ ἐπιχειρηματίαι θὰ αὐξήσουν περαιτέρω τὴν παραγωγὴν πρὸς αὔξησιν καὶ τῶν ἀποθεμάτων. Ἡ διαδικασία αὐτὴ θὰ συνεχισθῇ μέχρι σημείου ὅπου ἡ τρέχουσα παραγωγὴ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τρέχουσαν κατανάλωσιν, τὸ δὲ ὕψος τῶν ἀποθεμάτων ἐν σχέσει πρὸς τὰς πωλήσεις θὰ εἶναι τὸ ἐπιθυμητὸν τοιοῦτον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΒΑΣΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

«Πρός τε γὰρ οἰκονομίαν καὶ πρός πολιτείαν καὶ πρός τὰς τέχνας πάσας ἓν οὐδὲν οὕτω δύναμιν ἔχει παίδειον μάθημα μεγάλην, ὡς ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς διατριβή . . .»

ΠΛΑΤΩΝΟΣ, Νόμοι, Ε', 747

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΒΑΣΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

III.0. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ : ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΟΡΙΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

III.0.0. Εἰς τὰ περὶ συναρτήσεων ἐξετέθησαν αἱ μαθηματικαὶ ἀρχαὶ τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν. Ἡ περαιτέρω ὅμως μελέτη τῶν σχέσεων τούτων ἐπιβάλλει τὴν χρησιμοποίησιν ὡρισμένων τεχνικῶν καὶ τὴν γνῶσιν προσθέτων ἐννοιῶν, τὰς ὁποίας ἐν συντομίᾳ θὰ ἐκθέσωμεν εἰς τὸ παρὸν τμῆμα, ἵνα δυνηθῶμεν καὶ προχωρήσωμεν περαιτέρω εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων.

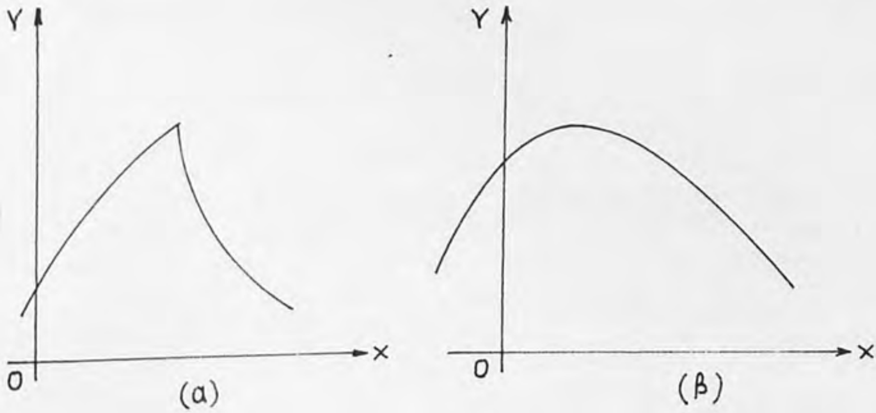
Κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν ἐνδιαφερόμεθα πρωτίστως διὰ τὰς μ ε τ α β ο λ ὰ ς των. Ἐνδιαφερόμεθα ἐπὶ παραδείγματι, διὰ τὸν ρυθμὸν μεταβολῆς τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς y, ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος x μεταβάλλεται. Κατὰ τὴν ἐπισκόπησιν τῆς καμπύλης μιᾶς συναρτήσεως δὲν ἐνδιαφερόμεθα μόνον διὰ τὴν θέσιν καὶ τὴν μορφὴν ταύτης,ἀλλὰ καὶ διὰ τὸν τρόπον καθ' ὃν αὕτη ἐξελίσσεται ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τοῦ πέρατός της. Ὑπάρχουν περιοχαὶ τῆς καμπύλης ὅπου ἡ μεταβολὴ εἶναι ταχεῖα καὶ περιοχαὶ ὅπου ἡ μεταβολὴ εἶναι βραδεῖα. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς εὐθείας γραμμῆς, ἥτις ἀντιπροσωπεύεται ὑπὸ γραμμικῆς ἐξισώσεως, ὁ ρυθμὸς τῆς μεταβολῆς εἶναι ὁ αὐτὸς καθ' ὅλον τὸ μῆκος ταύτης. Τοῦτο γνωρίζομεν ἤδη ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ κλίσις τῆς εὐθείας εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα της. Εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν $y = \beta x$, ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως (κλίσις) β εἶναι ἀκριβῶς ἡ παράμετρος, ἥτις περιγράφει τὸν ρυθμὸν μεταβολῆς τῆς y ἐν σχέσει πρὸς ὡρισμένας μεταβολὰς τῆς x. Ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως διὰ τὸν ὁποῖον ὡμιλήσαμεν εἰς τὴν ἀναλυτικὴν γεωμετρίαν εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως ἡ μελέτη τῆς ὁποίας ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα ἐκεῖνο τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται δ ι α φ ο ρ ι κ ὸ ς λ ο γ ι σ μ ό ς. Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἀρχῶν τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν κέκτηται μεγίστης σημασίας καὶ ἀφορᾶ τὸ εἶδος ἐκεῖνο τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ὁ ρ ι α κ ὴ ἀ ν ά λ υ σ ι ς (marginal analysis). Διὰ νὰ γίνη ὅμως κατανοητὴ ἡ ὁριακὴ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις εἶναι ἀπαραίτητος ἡ περὶ τῶν ὁρίων καὶ τῶν παραγώγων γνῶσις.

III.0.1. **Περὶ συνεχείας.** Ὁ διαφορικὸς λογισμὸς καὶ ἡ ὁριακὴ ἀνάλυσις προϋποθέτουν τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας. Ἡ συνάρτησις $y = f(x)$ εἶναι συνεχὴς ἂν αἱ συσχετιζόμεναι μεταβληταὶ μεταβάλλωνται συνεχῶς ἄνευ διακοπῆς. Εἰς συνεχῆ μεταβολὴν τῆς x ἔχομεν συνεχῆ μεταβολὴν τῆς $f(x)$. Τὰς συνεχεῖς συναρτήσεις ἀποτελοῦν συνεχεῖς μεταβολαί. Συνεχὴς δὲ εἶναι ἡ μεταβλητὴ ἥτις δύναται νὰ μεταβάλλεται συνεχῶς κατὰ ἀπειροστὰς ποσότητας. Παράδειγμα συνεχοῦς μεταβλητῆς εἶναι ἡ ταχύτης τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει κινούμενον ἀντικείμενον. Οὕτω, παραδείγματος χάριν, ἵνα αὐτοκίνητον ἀναπτύξη ταχύτητα ἀπὸ 10 χιλμ. ὡριαίως εἰς 30 χιλμ. δὲν δύναται νὰ συμβῆ τὸ τοιοῦτον ἀποτόμως ἄνευ τῆς μεσολαβήσεως τῶν ἐνδιαμέσων ὁρίων ταχύτητος· ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὅριον τῶν 10 χιλμ. θὰ διέλθωμεν ὅλας τὰς τιμὰς μέχρι τοῦ ὁρίου τῶν 30 χιλμ. Ἡ μετάβασις ἀπὸ τὸ ὅριον τῶν 10 εἰς τὸ ὅριον τῶν 30 χιλμ. δύναται νὰ γίνη εἴτε βραδέως (μικρὰ ἐπιτάχυνσις) εἴτε λίαν ταχέως (μεγάλη ἐπιτάχυνσις). Ἀντιθέτως, ἡ τιμὴ ἀγαθοῦ τινος εἶναι μὴ συνεχὴς μεταβλητή. Ἡ τιμὴ τοῦ βουτύρου, παραδείγματος χάριν, δύναται νὰ μεταβάλλεται ἀπὸ 10 εἰς 11 δραχμάς, ἢ ἀπὸ 10 εἰς 10,10, 10,20, 10,50, κ.ο.κ. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπασχολουμένων εἰς μίαν ἐπιχείρησιν εἶναι ἀσυνεχὴς μεταβλητή, διότι αἱ μεταβολαὶ δέον νὰ χωροῦν τοὐλάχιστον κατὰ ἀκεραίαν μονάδα. Οὕτω δὲν δυνάμεθα νὰ ἀριθμήσωμεν δέκα καὶ ἥμισυν ἐργαζόμενον.

Εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἔχομεν συνήθως ἀσυνεχεῖς μεταβλητάς. Ἐν τούτοις μεταχειριζόμεθα ταύτας ὡς συνεχεῖς ἵνα καταστῆ δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἀρχῶν τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ.

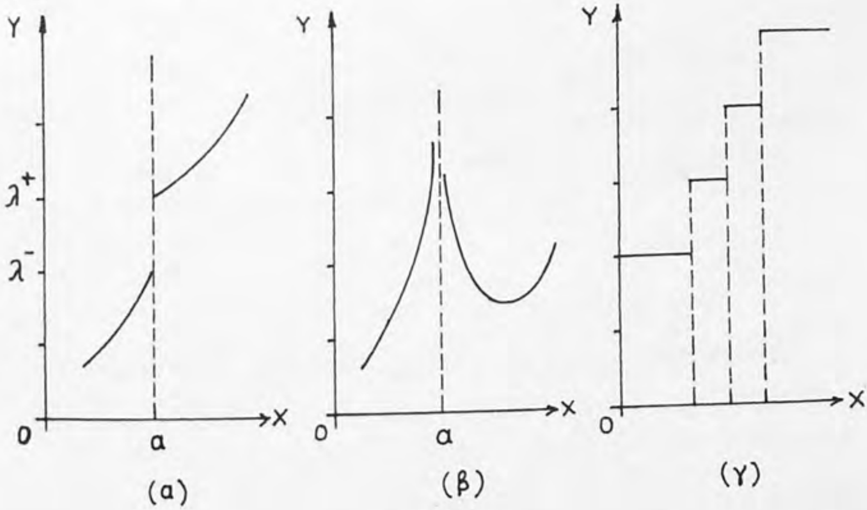
Ἡ συνάρτησις $y = f(x)$ δυνατὸν νὰ εἶναι συνεχὴς εἴτε εἰς ὡρισμένον σημεῖον $x = \alpha$, εἴτε εἰς ὡρισμένην περιοχὴν τῆς x. Εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $x = \alpha$ (ὅπου ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως διὰ $x = \alpha$ εἶναι ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη), ἐὰν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς x τείνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν α καὶ ἡ ἀκολουθία τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς συνρτήσεως τείνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $f(\alpha)$. Γραφικῶς ἡ καμπύλη εἶναι συνεχὴς εἰς σημεῖον $x = \alpha$, ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο δὲν ὑπάρχει διακοπὴ τῆς καμπύλης. Γενικῶς, συνάρτησις εἶναι συνεχὴς εἰς ὡρισμένην περιοχὴν τιμῶν τῆς x, ἐὰν εἶναι συνεχὴς εἰς πᾶν σημεῖον τῆς περιοχῆς.

Περιπτώσεις συνεχῶν συναρτήσεων ἐμφαίνουν τὰ κατωτέρω γραφήματα τοῦ Σχ. III. 1.



Σχ. III. 1.

Περιπτώσεις δὲ ἀσυνεχῶν συναρτήσεων δεικνύουν τὰ κατωτέρω γραφήματα τοῦ Σχ. III.2.



Σχ. III. 2.

Ἡ περίπτωσις (α) δεικνύει ὅτι ἡ συνάρτησις f (x) εἶναι ἀσυνεχὴς διὰ $x = \alpha$ καὶ ὅτι αὕτη ἔχει ὅριον τὸ λ^-, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς α ἐξ ἀριστερῶν καὶ τὸ λ^+ ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς α ἐκ δεξιῶν. Ἡ περίπτωσις (β) δεικνύει ἄπειρον ἀσυνέχειαν εἰς τὸ σημεῖον $x = \alpha$ καὶ ὅτι ἡ συνάρτησις f(x) αὐξάνει ἀπεριορίστως (ἄνευ ὁρίου) καθὼς τὸ x τείνει πρὸς α, χωρὶς ὅμως νὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ α. Ἡ περίπτωσις (γ) δεικνύει τρία σημεῖα ἀσυνεχείας, λόγῳ τριῶν διαδοχικῶν «πηδημάτων» τῆς καμπύλης, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς συνάρτησιν ἡ ὁποία καλεῖται «κλιμακωτὴ» (step - function).

III.0.2. **Περὶ ὁρίων**. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται ἀντιληπτὸν ὅτι, ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x τείνη πρὸς ὡρισμένην τιμὴν ἡ συνάρτησις f(x) ἔχει κάποιο ὅριον. Ἐνταῦθα ἐνδιαφερόμεθα κυρίως διὰ τὰ ὅρια τῶν μονοσημάντων συναρτήσεων. Ὁ ὁρισμὸς δὲ τοῦ ὁρίου εἶναι : Ὅριον εἶναι ἡ τιμὴ πρὸς ἣν τείνει ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς y καθὼς ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x μεταβάλλεται καθ᾽ ὡρισμένον τρόπον. Ἡ μαθηματικὴ διατύπωσις τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι :

$$\underset{x \longrightarrow ?}{\text{ορ}}\ f(x) = ?$$

Ἤτοι, τὸ ὅριον τῆς συναρτήσεως f(x) εἶναι ποιά τις τιμή, ὅταν τὸ x τείνη πρὸς ὡρισμένην τιμήν. Ὅταν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς y τείνη πρὸς τὸν ἀριθμὸν β, τῶν τιμῶν τῆς x τεινουσῶν πρὸς τὸν ἀριθμὸν α. Τοῦτο συμβολίζεται ὡς ἑξῆς :

$$\underset{x \longrightarrow \alpha}{\text{ορ}}\ y = \beta$$

Διὰ νὰ γίνη ἐπαρκῶς ἀντιληπτὴ ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου θὰ ἀναφέρωμεν ὡρισμένα παραδείγματα. Ἐὰν κατασκευάσωμεν τετράγωνον καὶ ἐν συνεχείᾳ ὀκτάγωνον, δεκαεξάγωνον, κ.ο.κ., θὰ καταλήξωμεν εἰς σχῆμα ὅπερ θὰ τείνη νὰ ὁμοιάζη πρὸς κύκλον. Ἄρα ὅριον τῆς ὅλης διαδικασίας εἶναι ὁ κύκλος. Ἐπίσης ἂς λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν μας τὰς κατωτέρω περιπτώσεις ὁρίων :

(i) $\underset{\nu \longrightarrow \infty}{\text{ορ}}\ \dfrac{1}{\nu} = 0$

Ὅριον τοῦ κλάσματος $\dfrac{1}{\nu}$ εἶναι τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ν τείνη πρὸς τὸ ἄπειρον. Εἶναι σαφὲς ὅτι ὅσον αὐξάνει ὁ παρονομαστὴς τόσον τὸ κλᾶσμα καθίσταται μικρότερον τεῖνον πρὸς τὸ μηδέν, χωρὶς ὅμως νὰ καταστῆ μηδέν.

(ii) $\underset{\nu \longrightarrow \infty}{\text{ορ}} \left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu} = e \simeq 2{,}71828$

(iii) $\underset{\nu \longrightarrow 0}{\text{ορ}}\ \dfrac{\alpha}{\nu} = \pm \infty$

(iv) $\underset{\nu \longrightarrow \infty}{\text{ορ}}\ \alpha^{\nu} = \infty$ διὰ $\alpha > 1$, καὶ $\underset{\nu \longrightarrow \infty}{\text{ορ}}\ \alpha^{\nu} = 0$ διὰ $0 < \alpha < 1$

(v) $\underset{\Theta \longrightarrow 0}{\text{ορ}} \dfrac{\text{ημ}\ \Theta}{\Theta} = 1$

(vi) $\underset{x \longrightarrow 1}{\text{ορ}} (2x^2 + 5) = 7$

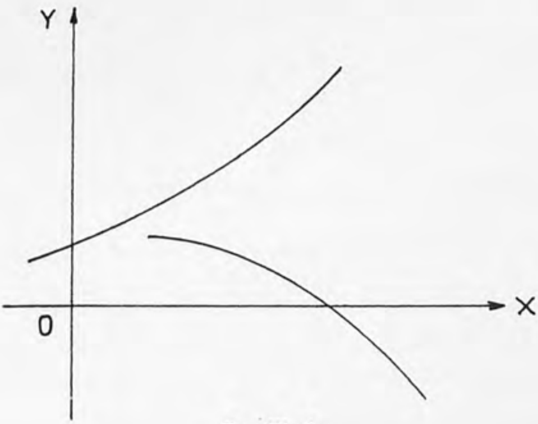
(vii) $\underset{x \longrightarrow 1}{\text{ορ}} \left(\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2} \right) = \dfrac{0}{0}$. Τοῦτο δὲν ἔχει ἔννοιαν καὶ οὕτω τὸ ὅριον εἶναι ἀπροσδιόριστον. Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ ὁρίου ὡς ἑξῆς :

$$\underset{x \longrightarrow 1}{\text{ορ}} \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2} \right) = \underset{x \longrightarrow 1}{\text{ορ}} \frac{(x-1)\ (x-5)}{(x-1)\ (x-2)} = \underset{x \longrightarrow 1}{\text{ορ}} \left(\frac{x-5}{x-2} \right) = \frac{-4}{-1} = 4$$

Περαιτέρω ἄς λάβωμεν τὰς κατωτέρω περιπτώσεις ὁρίων τῆς μονοσημάντου συναρτήσεως $y = f(x)$:

(i) $\underset{x \longrightarrow \infty}{\text{ορ}} f(x) = \infty$ ἢ $\underset{x \longrightarrow \infty}{\text{ορ}} f(x) = -\infty$

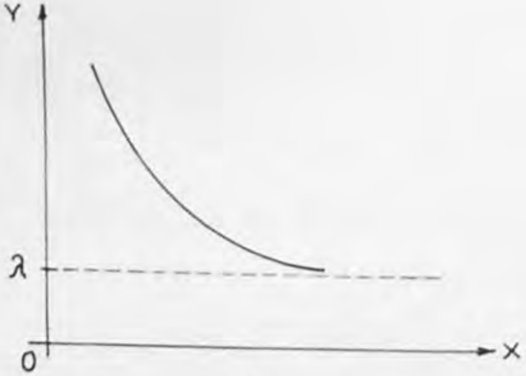
Γραφικῶς αἱ περιπτώσεις αὗται ἐμφαίνονται εἰς τὸ Σχ. III. 3.



Σχ. III. 3.

(ii) $\underset{x \longrightarrow \infty}{\text{ορ}} f(x) = \lambda.$

Γραφικῶς ἡ περίπτωσις αὕτη δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς εἰς τὸ Σχ.III.4.



Σχ. III. 4.

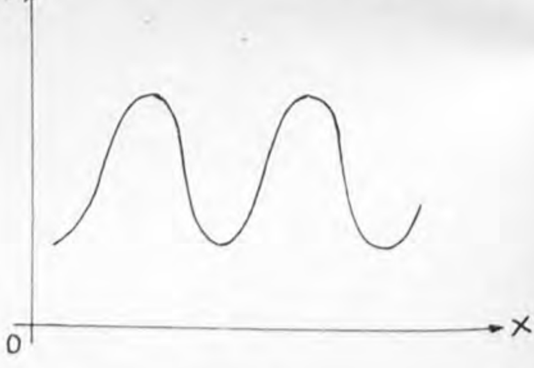
(iii) Δύναται ἡ συνάρτησις f(x) νὰ μὴν ἔχῃ ὅριον καθὼς τὸ x τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ὁπότε ἡ καμπύλη τῆς συναρτήσεως θὰ δεικνύῃ διακυμάνσεις, ὡς εἰς τὸ κατωτέρω Σχ.III.5.

(iv) $\underset{x \to \alpha}{\text{ορ}} f(x) = \lambda^-$ ἢ $\underset{x \to \alpha}{\text{ορ}} f(x) = \lambda^+$.

Αἱ περιπτώσεις αὗται ἐμφαίνονται εἰς τὸ γράφημα (α) τοῦ Σχ.III.2. Τὸ ὅριον τῆς f (x) εἶναι τὸ λ^-, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὴν τιμὴν α ἐκ μικροτέρων τιμῶν, ἢ ἐξ ἀριστερῶν. Εἶναι δὲ τὸ λ^+, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὴν τιμὴν α ἐκ τιμῶν μεγαλυτέρων, ἤτοι ἐκ δεξιῶν.

(v) $\underset{x \to \alpha}{\text{ορ}} f(x) = \infty$

Ἡ περίπτωσις αὕτη ἐμφαίνεται εἰς τὸ γράφημα (β) τοῦ Σχ. III. 2. Τὸ ὅριον τῆς f (x) εἶναι τὸ ἄπειρον καθὼς τὸ x τείνει πρὸς τὴν τιμὴν α, ἀλλὰ χωρὶς νὰ ταυτισθῇ μὲ ταύτην. Διὰ x = α ἔχομεν, ὡς γνωστόν, ἄπειρον ἀσυνέχειαν.

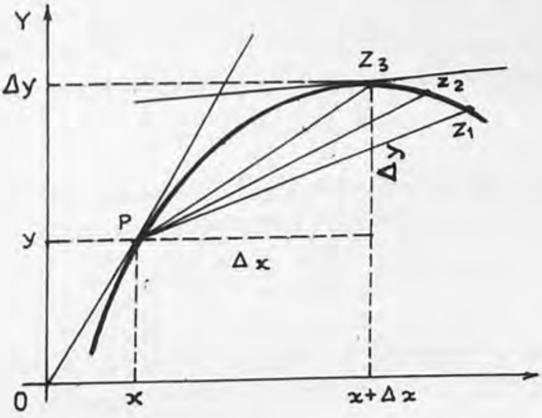


Σχ. III. 5.

III. 0. 3. **Ἐφαπτομένη καμπύλης.** Εἴδομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις εὐθείας γραμμῆς διερχομένης ἐκ δύο σημείων εἶναι $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$. Ὁπότε ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς εὐθείας ἢ ἡ κλίσις αὐτῆς ἢ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας, ἣν αὕτη σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, εἶναι $\lambda = \frac{y - y_1}{x - x_1}$. Ἡ κλίσις εἶναι λ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς, ἤτοι ἡ ἐφαπτομένη τῶν σημείων τῆς εὐθείας ταυτίζεται μὲ ταύτην. Ἄρα, ἐὰν ἡ y = f(x) εἶναι συνάρτησις γραμμικὴ καὶ συνεχής, τότε ἡ ἐφαπτομένη εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ἅπαντα τὰ σημεῖα ταύτης.

Ἄς λάβωμεν τώρα τὴν συνάρτησιν $y = f(x)$, μονότιμον καὶ συνεχῆ, ἡ καμπύλη τῆς ὁποίας ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ. III. 6.

Ἐκ τοῦ γραφήματος γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης εἶναι διάφορος εἰς τὰ διάφορα σημεῖα αὐτῆς. Ἐπίσης γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ κλίσις τῶν χορδῶν PZ τείνει πρὸς τὴν κλίσιν τῆς ἐφαπτομένης τοῦ σημείου



Σχ. III. 6.

P, καθὼς τὸ σημεῖον Z_1, κινεῖται βαθμιαίως πρὸς τὸ P. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην τὸ ὅριον τῆς χορδῆς PZ_1 εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ σημείου P.

Ἄς λάβωμεν τὴν χορδὴν PZ_3 καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου P εἶναι xy. Τότε ἡ κλίσις τῆς PZ_3 θὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ἔνθα Δy εἶναι ἡ αὔξησις ἣν λαμβάνει ἡ συνάρτησις ἀπὸ y εἰς $y + \Delta y$ καὶ Δx εἶναι ἡ αὔξησις ἣν λαμβάνει ἡ ἀνεξάρτητος x. Ὅσον ὅμως, τὸ σημεῖον Z_3 πλησιάζει τὸ σημεῖον P τόσον ἡ χορδὴ μικραίνει, ἡ δὲ κλίσις της τείνει πρὸς τὴν κλίσιν τῆς ἐφαπτομένης τοῦ σημείου P. Ἄρα δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ σημείου P, ἡ ὁποία δίδει τὴν κλίσιν τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, εἶναι τὸ ὅριον τῆς κλίσεως τῆς χορδῆς PZ_3, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ὅταν τὸ Δx γίνεται ὁλοὲν μικρότερον τεῖνον πρὸς τὸ 0. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν συμβολικῶς ὡς

$$\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{εφ } P$$

Ἡ κλίσις τῆς καμπύλης μεταξὺ τῶν σημείων P καὶ Z_3 ἀντιπροσωπευομένη ὑπὸ τοῦ λόγου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ μᾶς δίδει τὸν μέσον ρυθμὸν μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα PZ_3. Ἡ κλίσις δὲ τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον P εἶναι ὁ ὁριακὸς ρυθμὸς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

III.0.4. **Περὶ παραγώγων**. Ἄς λάβωμεν τὴν συνεχῆ καὶ μονότιμον συνάρτησιν $y = f(x)$. Εἰς δεδομένην αὔξησιν τῆς x, ἤτοι Δx, θὰ ἔχωμεν δεδομένην αὔξησιν τῆς συναρτήσεως $f(x)$, ἤτοι $f(x + \Delta x) - f(x)$. Ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς x

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

εἶναι ὁ μέσος ρυθμὸς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα μεταξὺ x καὶ $x + \Delta x$. Τὸ ὅριον τοῦ λόγου τούτου, ἤτοι :

$$\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{ορ}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

τοῦ Δx τείνοντος εἰς τὸ μηδέν, καλεῖται πρώτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως. Συμβολικῶς ἡ πρώτη παράγωγος παρίσταται ὡς $\frac{dy}{dx}$ ἢ $f'(x)$ ἢ $\frac{df(x)}{dx}$.

Κατ᾽ ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὰ ἡ σχέσις μεταξὺ ἐφαπτομένης καὶ παραγώγου. Ἡ εὕρεσις τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς κλίσεως ταύτης εἰς ὡρισμένον σημεῖον καμπύλης τινος ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν εὕρεσιν τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως ταύτης εἰς τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον. Ἡ παράγωγος λοιπόν, μετρεῖ τὸν ρυθμὸν μεταβολῆς τῆς y ἐν σχέσει πρὸς τὸ x εἰς ὡρισμένον σημεῖον.

III.0.5. **Παραγώγισις**. Ἡ πρᾶξις τῆς ἐξευρέσεως τῆς παραγώγου καλεῖται παραγώγισις τῆς συναρτήσεως. Ἡ συνάρτισις δὲ ἥτις ἔχει παράγωγον καλεῖται παραγωγίσιμος. Ἡ διαδικασία τῆς παραγωγίσεως περιλαμβάνει τὰ κάτωθι ἀναλυτικῶς :

α) Δίδομεν μίαν μικρὰν αὔξησιν εἰς τὸ x, ἤτοι Δx.

β) Εὑρίσκομεν τὴν αὔξησιν τῆς y, ἤτοι Δy, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς αὐξήσεως τοῦ x εἰς $x + \Delta x$.

γ) Εὑρίσκομεν τὸν λόγον $\Delta y / \Delta x$.

δ) Εὑρίσκομεν τὸν λόγον $\Delta y / \Delta x$, τοῦ $\Delta x \longrightarrow 0$.

Ἡ ὅλη διαδικασία καθίσταται ἀντιληπτὴ δι᾽ ἑνὸς παραδείγματος.

Έστω ή συνάρτησις $y = x^2$, ἥτις παριστᾶ παραβολήν. Συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω διαδικασίαν θὰ ἔχωμεν :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - y$$
$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 \text{ , δεδομένου ὅτι } y = x^2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= 2x + (\Delta x)^2$$

Καὶ ἐφ' ὅσον $\Delta x \longrightarrow 0$, τότε τὸ $(\Delta x)^2$ εἶναι ἀπειροστὸν καὶ παραλείπεται

Συνεπῶς $\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$

εἶναι ἡ παράγωγος τῆς $y = x^2$. Διὰ τιμὴν $x = 2$ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως εἶναι $\frac{dy}{dx} = 4$.

III.0.6. **Παραγώγισις διαφόρων μορφῶν συναρτήσεως.** (ι) Σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς δ υ ν ά μ ε ω ς. Ἡ συνάρτησις $y = \alpha x^\nu$ ἔχει παράγωγον $f'(x) = \nu\alpha x^{\nu-1}$. Ἡ εὕρεσις ταύτης ἔχει ὡς ἑξῆς :

$$y + \Delta y = \alpha\,(x + \Delta x)^\nu$$
$$= \alpha\left[x^\nu + \nu x^{\nu-1}\,\Delta x + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\,x^{\nu-2}\,(\Delta x)^2 + \ldots\ldots\right]^*$$
$$\Delta y = \alpha\left[\nu x^{\nu-1}\,\Delta x + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\,x^{\nu-2}\,(\Delta x)^2 + \ldots\ldots\right]$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha\left[\nu x^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\,x^{\nu-2}\,(\Delta x) + \ldots\ldots\right]$$
$$\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{dy}{dx} = \alpha\,\nu\,x^{\nu-1}$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = \frac{1}{2}x^3$ διὰ $x = 10$ εἶναι $f'(10) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x^{3-1} = \frac{3}{2}\,10^2 = 150$. Ὅσον αὐξάνει ἡ τιμὴ τοῦ x, τόσον ἡ παράγωγος αὐξάνει καὶ συνεπῶς ἡ καμπύλη ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ

* Ἡ ἀνάπτυξις τῆς $(x+\Delta x)^\nu$ γίνεται βάσει τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος.

εἰς τὴν παράγωγον δι' ὅλας τὰς ἐπιτρεπτὰς τιμὰς εἶναι αὔξουσα, ἤτοι ἔχει θετικὴν κλίσιν καὶ δεικνύει τὸν ρυθμὸν μεταβολῆς τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως δι' ὅλας τὰς ἐπιτρεπτὰς τιμὰς τῆς x.

Ἡ παράγωγος τῆς $y = ax$ εἶναι $f'(x) = a$, διότι

$$f'(x) = 1 \,.\, a \,.\, x^{1-1} = a\,x^0 = a\,.$$

Ἡ συνάρτησις $y = ax$ περιστᾶ εὐθεῖαν γραμμὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων. Ἐκ τῆς παραγώγου δὲ τῆς συναρτήσεως ταύτης προκύπτει ὅτι αὕτη εἶναι σταθερά. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις προσφορᾶς ἀγαθοῦ τινος εἶναι $y = 10x$, καὶ ὅτι ἡ y μετρεῖται εἰς χιλιόγραμμα, ἡ δὲ x εἰς δραχμάς, τότε ἐκ τῆς παραγώγου $\frac{dy}{dx} = 10$ προκύπτει ὅτι εἰς αὔξησιν τῆς τιμῆς κατὰ μίαν δραχμὴν ἡ προσφορὰ τοῦ ἀγαθοῦ αὐξάνεται κατὰ 10 χιλιόγραμμα.

(ii) Π α ρ ά γ ω γ ο ς σ τ α θ ε ρ ᾶ ς. Ἡ συνάρτησις $y = a$ ἔχει $f'(x) = 0$, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $y = ax^0$ καὶ συνεπῶς $\frac{dy}{dx} = 0.\,a.\,x^{0-1} = 0$.

Ἡ συνάρτησις $y = a$ παριστᾶ εὐθεῖαν γραμμὴν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, καὶ συνεπῶς ἡ κλίσις ταύτης εἶναι μηδενική.

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = a + \beta x$ εἶναι $f'(x) = \beta$, διότι ἡ παράγωγος τῆς a εἶναι μηδὲν καὶ τῆς $y = \beta x$ εἶναι β συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω. Συγκεκριμένως , ἡ συνάρτησις ζητήσεως $D = 60 - 10p$ ἔχει παράγωγον $\frac{dD}{dP} = -10$.

(iii) Π α ρ ά γ ω γ ο ς ἀ θ ρ ο ί σ μ α τ ο ς σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ν. Ἡ παράγωγος ἐν προκειμένῳ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων. Οὕτως ἔχομεν $f'(x) = \varphi'(x) + g'(x)$ διὰ τὴν συνάρτησιν $y = \varphi(x) + g(x)$. Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = 5 + 3x - 5x^2$ εἶναι $\frac{dy}{dx} = 3 - 10x$. Ἡ «καμπύλη» ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν παράγωγον ταύτην εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

(iv) Π α ρ ά γ ω γ ο ς γ ι ν ο μ έ ν ο υ σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ν. Ἡ παράγωγος εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ἑκάστης συναρτήσεως ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς ἑτέρας. Ἤτοι ἡ συνάρτησις $y = \varphi(x).g(x)$ ἔχει παράγωγον τὴν $f'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$.

Ἂς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν $y = (3x^2 - 2)(3x^2 + 4x - 1)$. Ἡ παράγωγος ταύτης κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι :

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 - 2)(6x + 4) + (3x^2 + 4x - 1)(6x).$$

v) Π α ρ ά γ ω γ ο ς   π η λ ί κ ο υ   σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ν. Ἡ παράγωγος πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὴν παράγωγον τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὸν παρανομαστὴν μεῖον τὴν παράγωγον τοῦ παρανομαστοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμητήν, καὶ ὅλου τούτου διαιρουμένου διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρανομαστοῦ. Οὕτως ἡ συνάρτησις $y = \dfrac{\varphi\ (x)}{g\ (x)}$ ἔχει παράγωγον τὴν

$$\frac{\varphi'\ (x)\ g\ (x) - g'\ (x)\ \varphi\ (x)}{[\ g\ (x)\ ]^2}$$

Ἄς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν $y = \dfrac{2\ x^2}{3x+1}$. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ παράγωγος ταύτης θὰ εἶναι :

$$f'\ (x) = \frac{(4x)\ (3x+1) - (3)\ (2x^2)}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2+4x}{(3x+1)^2}$$

vi) Π α ρ ά γ ω γ ο ς   σ υ ν θ έ τ ο υ   σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ς. Ἐὰν y εἶναι συνάρτησις τῆς z, ἡ ὁποία εἶναι συνάρτησις τῆς x, τότε διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον τῆς y ἐν σχέσει πρὸς x, πολλαπλασιάζομεν τὴν παράγωγον τῆς y ὡς πρὸς x ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς z ὡς πρὸς x. Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις f(x) καὶ φ(x). Ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι $y = f\ [\varphi(x)]$, τότε :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Ἡ τεχνικὴ εὑρέσεως τῆς παραγώγου συναρτήσεως ἥτις εἶναι συνάρτησις ἑτέρας τοιαύτης βοηθεῖ εἰς τὴν ἐξεύρεσιν παραγώγων συναρτήσεων αἱ ὁποῖαι δὲν δύνανται νὰ τύχουν παραγωγίσεως δι' ἑνὸς τῶν ἀνωτέρω τρόπων. Αἱ συναρτήσεις αὗται εἶναι μικτῆς φύσεως, ὡς ἡ συνάρτησις, λόγου χάριν, $y = (3x^2 - 8x)^5$. Ἡ συνάρτησις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ ὡς : $y = z^5$, ὅπου $z = 3x^2 - 8x$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{dz}{dx} = 6x - 8 \text{ καὶ } \frac{dy}{dz} = 5z^4$$

Ὁπότε : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = 5z^4 \cdot (6x - 8) = 5\ (3x^2 - 8x).^4\ (6x - 8)$.

Ὁ ἀνωτέρω κανών, κ α ν ὼ ν   ἁ λ ύ σ ε ω ς καλούμενος, δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς περιπτώσεις περισσοτέρων τῶν δύο συναρτήσεων. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ y εἶναι συνάρτησις τῆς z, ἡ z συνάρτησις τῆς u, ἡ u τῆς ω, καὶ ἡ ω τῆς x. Τότε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dx}$$

(vii) Π α ρ ά γ ω γ ο ς   ἀ ν τ ι σ τ ρ ό φ ο υ   σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ς. Εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα ὅτι γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς εὐθείας $y = \lambda x$

εἶναι $\lambda = \varepsilon\varphi\Theta = \frac{y}{x}$, ὅπου Θ εἶναι ἡ γωνία ἣν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x. Δι' ἀντιστροφῆς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν $\frac{x}{y} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\ \Theta}$.

Ἄρα, ἡ συνάρτησις $x = \varphi(y)$, ἥτις εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς $y = f(x)$, ἔχει ὡς παράγωγον τὴν ἀντίστροφον τῆς παραγώγου τῆς $y = f(x)$. Δηλαδή,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy\,/\,dx}.$$

Ἄς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν $y = x^2 + 3$. Ἡ παράγωγος τῆς y ὡς πρὸς x εἶναι $\frac{dy}{dx} = 2x$. Ἡ συνάρτησις λυομένη ὡς πρὸς x γίνεται $x = \sqrt{y-3}$ καὶ ἡ παράγωγος τῆς x ὡς πρὸς y εἶναι $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}(y-3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y-3}}$ $= \frac{1}{2x} = \frac{1}{dy\,/\,dx}$

viii) Παράγωγος πεπλεγμένης συναρτήσεως. Ἐὰν ἡ y συνδέεται μετὰ τῆς x ὡς εἰς τὴν παράστασιν $x^2 + xy + y^2 = 0$, τότε ἡ y εἶναι πεπλεγμένη συνάρτησις τῆς x. Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις ἡ πεπλεγμένη συνάρτησις δύναται νὰ καταστῇ λελυμένη ὡς πρὸς y, εἰς ἑτέρας δὲ περιπτώσεις τὸ τοιοῦτον εἶναι δύσκολον ἢ ἀδύνατον. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ἡ πεπλεγμένη συνάρτησις δύναται νὰ τύχῃ παραγωγίσεως ὅρου πρὸς ὅρον, λαβμανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ y εἶναι συνάρτησις ἑτέρας συναρτήσεως. Ἡ παράγωγος τῆς y^2 ὡς πρὸς x δύναται νὰ εὑρεθῇ λαμβάνοντες τὴν y^2 ὡς y.y. Ὁπότε ἡ παράγωγος εἶναι :

$$y \,.\, \frac{dy}{dx} + y \,.\, \frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως εἶναι :

$$2x + \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$$

Λύοντες ὡς πρὸς $\frac{dy}{dx}$ λαμβάνομεν $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$

(ix) Παράγωγοι τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων. Ἤδη ἐγένετο λόγος περὶ τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ ἀπεικονίσουν οἰκονομικὰ φαινόμενα ἐμφανίζοντα περιοδικότητα, ὡς εἶναι ἡ ἡμιτονοειδὴς συνάρτησις. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ρυθμοῦ μεταβολῆς μιᾶς τοιαύτης συναρτήσεως πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως.

(α) $y = \eta\mu\, x$

Κατὰ τὴν διαδικασίαν τῆς παραγωγίσεως θὰ ἔχωμεν :

$y + \Delta y = \eta\mu\,(x + \Delta x)$.

$\Delta y = \eta\mu\,(x + \Delta x) - \eta\mu\, x$, δεδομένου ὅτι $y = \eta\mu\, x$ Διαιροῦντες διὰ Δx , ἔχομεν :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\eta\mu(x+\Delta x) - \eta\mu x}{\Delta x}$$

Μετασχηματίζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δεξιοῦ σκέλους βάσει τοῦ τύπου $\eta\mu\, A - \eta\mu\, B = 2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\,\frac{A-B}{2}$, ὁπότε ἔχομεν :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\,\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\eta\mu\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\eta\mu\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\underset{\Theta \longrightarrow 0}{o\rho}\,\frac{\eta\mu\,\Theta}{\Theta} = 1$, ἔχομεν $\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{o\rho}\,\frac{\eta\mu\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$

Ἐπίσης, καθὼς $\Delta x \longrightarrow 0$, ἡ ποσότης $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \longrightarrow \sigma\upsilon\nu\, x$ καὶ

$$\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{o\rho}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sigma\upsilon\nu\, x.\ 1.$$ Ὁπότε,

$$\frac{dy}{dx} = \sigma\upsilon\nu\, x$$

(β) $y = \sigma\upsilon\nu\, x$.

Βάσει τῆς ἀνωτέρω διαδικασίας καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τριγωνομετρικὸν τύπον $\sigma\upsilon\nu\, A - \sigma\upsilon\nu\, B = -2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A-B}{2}\;\sigma\upsilon\nu\,\frac{A+B}{2}$, τελικῶς θὰ ἔχωμεν

$$\frac{dy}{dx} = -\,\eta\mu\, x.$$

(γ) $y = εφ\ x$

Δεδομένου ὅτι $εφ\ x = \frac{ημ\ x}{συν\ x}$, ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα παραγωγίσεως πηλίκου ἔχομεν τελικῶς

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{συν^2 x} = τεμ^2 x \left(γνωστοῦ \text{ ὄντος ὅτι } τεμ\ x = \frac{1}{συν\ x}\right).$$

(δ) $y = τεμ\ x$, $y = στεμ\ x$, $y = συνφ\ x$

Δεδομένου ὅτι $τεμ\ x = \frac{1}{συν\ 1}$, $στεμ\ x = \frac{1}{ημ\ x}$ καὶ $συνφ\ x = \frac{1}{εφ\ x}$,

θὰ ἔχωμεν :

$$f'\ (τεμ\ x) = τεμ\ χ.\ εφ\ x$$
$$f'\ (στεμ\ x) = -\ στεμ\ x\ συνφ\ x$$
$$f'\ (συνφ\ x) = -\ στεμ^2\ x$$

(ε) Ἕτεροι τύποι τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων.

$$y = ημ\ αx \quad , \quad \frac{dy}{dx} = α\ συν\ x\ α\ x$$

$$y = συν\ αx \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -\ α\ ημ\ α\ x$$

$$y = εφ\ α\ x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = α\ τεμ^2\ αx$$

$$y = ημ^{-1}\ x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = συν^{-1}\ x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = εφ^{-1}\ x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

(x) Π α ρ ά γ ω γ ο ι ἐ κ θ ε τ ι κ ῶ ν σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ν. Αἱ ἐκθετικαὶ συναρτήσεις ἀπεικονίζουσαι φαινόμενα ἀναπτύξεως ὡς αἱ e^x, e^{ax}, e^{ax^v}, e^y, $α^x$, κ.λπ., εἶναι παραγωγίσιμοι καὶ λίαν χρήσιμοι εἰς τὴν μαθηματικὴν στατιστικὴν καὶ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν.

(α) $y = e^x$

Δεδομένου ὅτι $e = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$, παραγωγίζομεν ὅρον πρὸς ὅρον ὡς ἑξῆς :

$$\frac{d}{dx}(e^x) = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \ldots,$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$
$$= e^x$$

Ἄρα ἡ $y = e^x$ ἔχει ὡς παράγωγον τὸν ἑαυτόν της.

Ἡ παραγώγισις τῆς συναρτήσεως δύναται νὰ γίνῃ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$y + \Delta y = e^{x+\Delta x}$$

$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x$, διαιροῦντες διὰ Δx ἔχομεν:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{ορ}} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ παραγωγίσωμεν τὴν συνάρτησιν $y = (2x + 3e^x)^3$. Χρησιμοποιοῦντες τὸν κανόνα παραγωγίσεως συνθέτου συναρτήσεως, γράφομεν $z = 2x + 3e^x$, καὶ συνεπῶς $y = z^3$.

Ὁπότε $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx}$.

Ἀλλὰ $\dfrac{dy}{dz} = 3z^2 = 3(2x + 3e^x)^2$

καὶ $\dfrac{dz}{dx} = 2 + 3e^x$. Ἄρα

$$\frac{dy}{dx} = 3(2x + 3e^x)^2 (2 + 3e^x).$$

Ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου διὰ $x = 1$ καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι $e = 2{,}71828$, εἶναι $f'(1) = 3136{,}96$.

Ἐξ ἄλλου, ἡ παράγωγος τῆς $y = e^{-x}$ εἶναι $\dfrac{dy}{dx} = -e^x$

(β) $y = e^{\alpha x}$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους, ἔχομεν $\log_e y = \alpha x$. Παραγωγίζοντες τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἔχομεν:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \alpha \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y$$

$$= \alpha e^{\alpha x}$$

(γ) $y = e^{\alpha x^\nu}$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους, ἔχομεν $\log y = \alpha x^\nu$. Παραγωγίζοντες τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἔχομεν:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \nu \alpha x^{\nu-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \nu \alpha x^{\nu-1} y$$

$$= \nu \alpha x^{\nu-1} e^{\alpha x^\nu}$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = e^{x^3}$

εἶναι $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 e^{x^3}$

(δ) $y = α^x$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρών τῶν μελῶν ἔχομεν:

$$\log_e x = x \log_e α \text{ , ἐξ ἧς ἔχομεν}$$

$$x = \frac{\log_e y}{\log_e α} = \frac{1}{\log_e α} \log_e y.$$

καὶ $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\log_e α} \cdot \dfrac{1}{y}$ · Δι' ἀντιστροφῆς τῶν ὅρων λαμβάνομεν:

$$\frac{dy}{dx} = y \log_e α$$

$$= α^x \log_e α$$

Ἐὰν ἔχωμεν $y = α^{f(x)}$, ἤτοι ἐὰν ὁ ἐκθέτης εἶναι συνάρτησις τῆς x, τότε χρησιμοποιοῦντες τὸν κανόνα παραγωγίσεως συνθέτου συναρτήσεως λαμβάνομεν:

$$\frac{dy}{dx} = α^{f(x)} f'(x) \log_e α.$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ παράγωγος τῆς $y = α^{3x^2+2x+4}$

εἶναι: $\dfrac{dy}{dx} = (6x + 2)\, α^{3x^2+2x+4} . \log_e α$

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ παραγωγίσωμεν τὴν συνάρτησιν $y = \dfrac{1}{2^x}$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν:

$$\log_e y = \log_e 2^{-x}$$

Ἡ $\log_e 2^{-x}$ δύναται νὰ γραφῇ ὡς $(-x \log_e 2)$ καὶ συνεπῶς

$$\log_e y = -x \log_e 2.$$

Παραγωγίζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, ἔχομεν:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\log_e 2 \text{ καὶ}$$

$$\frac{dy}{dx} = (-\log_e 2).\, y$$

$$= \frac{-\log_e 2}{2^x}$$

Ἡ ποσότης $\log_e 2$ δύναται νὰ εὑρεθῇ εἰς πίνακας φυσικῶν λογαρίθμων καὶ ἰσοῦται πρὸς 0,6931. Ὁπότε ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου διὰ $x = 3$ εἶναι $\dfrac{-0{,}6931}{2^3} = 0{,}0867$

(xi) Π α ρ ά γ ω γ ο ι λ ο γ α ρ ι θ μ ι κ ῶ ν σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ν

(α) $y = \log_e x$

Ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν $x = e^y$, καὶ $\dfrac{dx}{dy} = e^y$. Δι' ἀντιστροφῆς λαμβάνομεν

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}$. Ἐπίσης κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἔχομεν

$$\frac{d(\log_e y)}{dy} = \frac{1}{y}, \text{ καὶ } \frac{d}{dx}(\log_e y) = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Ἡ παράγωγος τῆς $y = 2\log_e x - \log x^2$ εἶναι $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2} = 0$

(β) $y = \log_e \alpha x$

Ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν $\alpha x = e^y$, καὶ παραγωγίζοντες ὡς πρὸς y λαμβάνομεν $\alpha \frac{dx}{dy} = e^y$. Δι' ἀντιστροφῆς λαμβάνομεν $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{\alpha x}$

καὶ $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\alpha x} = \frac{1}{x}$.

(γ) $y = \log_e f(x)$.

Ἐνταῦθα ἔχομεν λογάριθμον συναρτήσεως τῆς x. Ἔστω δὲ ἡ συνάρτησις $y = \log_e (2x^2 - 3x + 7)$. Ἐφαρμόζοντες καὶ πάλιν τὸν κανόνα συνθέτου συναρτήσεως θέτομεν: $2x^2 - 3x + 7 = z$. Ὁπότε $y = \log_e z$, καὶ $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}$

καὶ $\frac{dz}{dx} = 4x - 3$. Ἐντεῦθεν ἔχομεν:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z}(4x-3) = \frac{4x-3}{2x^2-3x+7}.$$

Ἄρα, $\frac{d}{dx}\left[\log_e f(x)\right] = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ συνάρτησις $y = \log\frac{x^2+2x}{x+1}$ ἔχει παράγωγον τὴν $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+2}{x^2+2} - \frac{1}{x+1}$.

(δ) Π α ρ α γ ώ γ ι σις δ ι ὰ χ ρ η σ ι μ ο π ο ι ή σ ε ω ς λ ο γ α ρ ί θ μ ω ν.

Ἔχομεν ἤδη χρησιμοποιήσει τοὺς λογαρίθμους κατὰ τὴν παραγώγισιν ἐκθετικῶν συναρτήσεων. Γενικῶς, ἡ χρῆσις τῶν λογαρίθμων εἶναι λίαν χρήσιμος κατὰ τὴν παραγώγισιν συναρτήσεων διότι καθιστᾷ ταύτην εὐκολωτέραν.

Ἄς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν $y = \frac{(2x^2+2x+1)\sqrt{2x-3}}{(5x^2+4)^3 \text{ ημ } x}$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν:

$$\log y = \log(2x^2+2x+1) + \frac{1}{2}\log(2x-3)$$

$$-\left[3\log(5x^2+4) + \log \text{ημ } x\right].$$

Ἐν συνεχείᾳ παραγωγίζομεν ὅρον πρὸς ὅρον, ὡς ἑξῆς:

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\log(2x^2+2x+1)\right] = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\log(2x-3)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-3}=\frac{1}{2x-3}$$

$$\frac{d}{dx}\left[-3\log(5x^2+4)\right]=(-3)\frac{f'(x)}{f(x)}=(-3)\frac{10x}{5x^2+4}=-\frac{30x}{5x^2+4}$$

$$\frac{d}{dx}(-\log \eta\mu\, x)=-\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x}.$$

Τελικῶς λαμβάνομεν: $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}+\dfrac{1}{2x-3}-\dfrac{30\,x}{5x^2+4}-$

$-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x}$ καὶ $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}+\dfrac{1}{2x-3}-\dfrac{30\,x}{5x^2+4}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x}\right)$

$$\left(\frac{(2x^2+2x+1)\sqrt{2x-3}}{(5x^2+4)^3\,\eta\mu\, x}\right)$$

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=\dfrac{(5x^2+2x+5)\,\eta\mu\, x}{(x^5+3x^2)^3}$

κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{10\,x+2}{5\,x^2+2\,x+5}+\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x}-\frac{15x^4+18x}{x^5+3x^2},\ \text{καὶ}\ \frac{dy}{dx}=$$

$$=\left[\frac{10x+2}{5x^2+2x+5}+\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x}-\frac{15x^4+18x}{x^5+3x^2}\right]\cdot\left[\frac{(5x^2+2x+5)\,\eta\mu\, x}{(x^5+3x^2)^3}\right].$$

(ε)·$y=\log_a x$

Ἡ παραγώγισις λογαρίθμων μὲ οἱανδήποτε βάσιν, πλὴν τῆς βάσεως τῶν φυσικῶν λογαρίθμων e, γίνεται ὡς ἀκολούθως λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι: $\log_a x=\dfrac{\log_e x}{\log_e a}$:

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log_e a}=\frac{1}{x\log_e a}$$

Ἐπίσης, ἐὰν $y=\log_a f(x)$, διὰ συνδυασμοῦ τῶν (γ) καὶ (ε) ἔχομεν:

$$\frac{d}{dx}\log_a f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)\log_e a}.$$

Ἂς λάβωμεν ἓν παράδειγμα. Ἔστω $y=\log_{10}(x^2+4x+2)$.

Τότε θὰ ἔχωμεν $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+4}{(x^2+4x+2)\log_e 10}$. Διὰ $x=2$ τιμὴ ἡ τῆς παραγώγου ἰσοῦται πρὸς 0,248

(xii) Π α ρ ά γ ω γ ο ι ὑ π ε ρ β ο λ ι κ ῶ ν σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ν

(α) Ὑ π ε ρ β ο λ ι κ ὸ ν ἡ μ ί τ ο ν ο ν, $y=\eta\mu\, h\, x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Ἡ παράγωγος εἶναι $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ συν h x.

(β) Ὑ π ε ρ β ο λ ι κ ὸ ν σ υ ν η μ ί τ ο ν ο ν, $y=\sigma\upsilon\nu\, h\, x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Ἡ παράγωγος εἶναι $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\eta\mu\ h\,x.$

(γ) Ὑ π ε ρ β ο λ ι κ ὴ ἐ φ α π τ ο μ έ ν η, $y=\varepsilon\varphi\,h\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{\eta\mu\,h\,x}{\sigma\upsilon\nu\,h\,x}$.

Ἐνταῦθα ἔχομεν παραγώγισιν πηλίκου, καὶ συνεπῶς

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sigma\upsilon\mu\,h\,x\cdot\frac{d}{dx}(\eta\mu\,hx)-\eta\mu hx\cdot\frac{d}{dx}(\sigma\upsilon\nu\,hx)}{\sigma\upsilon\nu\,h^2x}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\,h\,x\cdot\sigma\upsilon\nu\,h\,x-\eta\mu hx\cdot\eta\mu hx}{\sigma\upsilon\nu\,h^2x}=\frac{\sigma\upsilon\nu\,h^2x-\eta\mu\,h^2x}{\sigma\upsilon\nu\,h^2x}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\,h^2x}{\sigma\upsilon\nu\,h^2x}-\frac{\eta\mu\,h^2x}{\sigma\upsilon\nu\,h^2x}=1-\varepsilon\varphi\,h^2x.$$

III. 0. 7. **Παραγώγισις ἐν σχέσει πρὸς τὸν χρόνον**. Εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν πολλάκις παρίσταται ἡ ἀνάγκη ὅπως μελετηθῆ ἡ ἐξέλιξις ἑνὸς μεγέθους ἢ φαινομένου ἐν τῷ χρόνῳ. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ἡ ὑπὸ ἐξέτασιν μεταβλητὴ εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου καὶ δύναται νὰ παραστῆ ὡς $y = f(t)$, ὅπου t παριστᾶ τὸν χρόνον. Ἡ παράγωγος συνεπῶς θὰ εἶναι $\frac{dy}{dt}$ καὶ θὰ παριστᾶ τὴν ὁριακὴν μεταβολὴν τῆς μεταβλητῆς y ἐν τῷ χρόνῳ Ἡ παραγώγισις ἐν σχέσει πρὸς τὸν χρόνον ἐκφράζεται συνήθως διὰ μιᾶς τελείας ὑπεράνω τοῦ συμβόλου τῆς μεταβλητῆς, ἤτοι $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$.

III.0.8. **Παράγωγοι δευτέρας καὶ ἀνωτέρας τάξεως**. Ἐκτὸς τοῦ ἐνδιαφέροντος τὸ ὁποῖον ἔχομεν διὰ τὴν μέτρησιν τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως δι' ὡρισμένην τιμὴν τῆς x, ἢ τῆς κλίσεως εἰς ὡρισμένον σημεῖον τῆς καμπύλης, ἐνδιαφερόμεθα καὶ διὰ τὴν μεταβολὴν τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως. Διὰ τὴν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τῆς δευτέρας παραγώγου ἂς λάβωμεν τὸ παράδειγμα τοῦ κινουμένου ἀντικειμένου, τὸ ὁποῖον διανύει μίαν ἀπόστασιν εἰς ὡρισμένον χρόνον. Ἡ ταχύτης εἰς ὡρισμένον σημεῖον τῆς διαδρομῆς δίδεται ὑπὸ τῆς πρώτης παραγώγου $f'(t)$ ἢ $\frac{dy}{dt}$ Εἰς τὴν κίνησιν δὲν ἐνδιαφερόμεθα μόνον διὰ τὴν ταχύτητα ἀλλὰ καὶ διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν. Ἡ τελευταία αὕτη ἀκριβῶς δίδεται ὑπὸ τῆς δευτέρας παραγώγου. Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι ἡ παράγωγος τῆς παραγώγου καὶ συμβολίζεται ὡς $f''(t)$ ἢ $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}$. Γενικῶς ἡ ν—οστῆς τάξεως παράγωγος συμβολίζεται ὡς $f^{\nu}(x)$ ἢ $\frac{d^{\nu}y}{dx^{\nu}}$.

Ἃς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν $y = \chi^3 + 2x^2 + 5$. Διὰ συνεχοῦς παραγωγίσεως θὰ ἔχωμεν :

$f'(x) = 3x^2 + 4x$, πρώτη παράγωγος

$f''(x) = 6x + 4$, δευτέρα »

$f'''(x) = 6$, τρίτη »

Περαιτέρω, ἃς λάβωμεν τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν ζητήσεως ἀγαθοῦ τινος $D = 60 - 10p$. Αὕτη δεικνύει τὴν σχέσιν ζητουμένης ποσότητος (D) πρὸς τὴν μέσην τιμὴν (P) τοῦ ἀγαθοῦ. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἐπὶ P ἤτοι $Dp = 60p - 10p^2$, λαμβάνομεν τὴν συνάρτησιν συνολικῆς προσόδου ($Dp = R$). Διὰ νὰ λάβωμεν τὴν ὁριακὴν πρόσοδον παραγωγίζομεν τὴν συνάρτησιν συνολικῆς προσόδου καὶ ἔχομεν :

$$\frac{dR}{dp} = 60 - 20p = MR$$

Ἡ συνάρτησις τῆς ὁριακῆς προσόδου (πρώτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως συνολικῆς προσόδου) μᾶς δίδει τὸν ρυθμὸν μεταβολῆς τῆς συνολικῆς προσόδου ἐν σχέσει πρὸς τὰς μεταβολὰς τῆς τιμῆς. Διὰ παραγωγίσεως τῆς $MR = 60 - 20p$, λαμβανομεν $\frac{d\,(MR)}{dp} = -20$, ἤτοι τὰς μεταβολάς τῆς ὁριακῆς προσόδου ἐν σχέσει πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς τιμῆς. Ἡ τιμὴ (—20) μᾶς λέγει ὅτι ἡ ὁριακὴ πρόσοδος βαίνει μειουμένη αὐξανομένης τῆς κατὰ μονάδα τιμῆς τοῦ προϊόντος.

III.1. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΙΣ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΑΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΣ ΣΧΕΣΕΙΣ.

III.1.0. Ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου καὶ τῶν ὁρίων εἶναι λίαν ἐν χρήσει εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς οἰκονομικῆς ἀρχῆς ὑποδηλοῖ τὴν ὕπαρξιν τῆς λογικῆς ἐκείνης διαδικασίας ἡ ὁποία βασίζεται εἰς τὰς «ὁριακὰς» ἐννοίας. Τὸ πλεῖστον τῶν ἀποφάσεων τόσον τῆς παραγωγικῆς μονάδος ὅσον καὶ τῆς καταναλωτικῆς μονάδος γίνονται μὲ γνώμονα τοιαύτας ἐννοίας. Αἱ συναρτήσεις, ὡς ἤδη ἐλέχθη, δεικνύουν τὴν σχέσιν μεταξὺ διαφόρων μεταβλητῶν. Ἀλλ' αἱ μεταβολαὶ τῆς ἐξηρτημένης ἐν σχέσει πρὸς τὰς μεταβολὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, αἱ ὁποῖαι καὶ κυρίως μᾶς ἐνδιαφέρουν, εἶναι ἀντικείμενον τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως καὶ μετρῶνται διὰ τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως.

Ἡ παραγώγισις τόσον μικροοικονομικῶν ὅσον καὶ μακροοικονομικῶν συναρτήσεων παρουσιάζει μέγα ἐνδιαφέρον. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν μικροοικονομικῶν συναρτήσεων δυνάμεθα προκαταρκτικῶς νὰ εἴπωμεν τὰ ἑξῆς : Ἡ ὁριακὴ πρόσοδος καὶ τὸ ὁριακὸν κόστος, ἔννοιαι ἀπαραίτητοι κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς ἰσορροπίας τῆς παραγωγικῆς μονάδος, εἶναι ἡ μὲν πρώτη ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως τῆς συνολικῆς προσόδου, τὸ δὲ δεύτερον ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως συνολικοῦ κόστους. Ἡ ἐλαστικότης ἐπίσης εἶναι τὸ πηλίκον τῆς ὁριακῆς τιμῆς διὰ τῆς μέσης τιμῆς τῆς συναρτήσεως, τῆς πρώτης οὔσης παραγώγου τῆς σχετικῆς συναρτήσεως.

Ἐπίσης εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν μακροοικονομικῶν συναρτήσεων θὰ ἠδυνάμεθα προκαταρκτικῶς νὰ εἴπωμεν ὅτι αἱ ὁριακαὶ ροπαὶ πρὸς κατανάλωσιν, πρὸς ἀποταμίευσιν, πρὸς ἐπένδυσιν, πρὸς εἰσαγωγάς, κλπ., εἶναι αἱ πρῶται παράγωγοι τῶν συναρτήσεων καταναλώσεως, ἀποταμιεύσεως, ἐπενδύσεων καὶ εἰσαγωγῶν, ἀντιστοίχως.

Ἡ ὁριακὴ θεωρία ὡς ὄργανον ἀναλύσεως ἐνεφανίσθη ἀμέσως ὡς ἡ ἀνάλυσις ἤρχισε νὰ ἀναπτύσσεται εἰς τὸν κλάδον τῆς οἰκονομικῆς. Οἱ χρησιμοποιήσαντες τὴν ὁριακὴν θεωρίαν ὠνομάσθησαν «ὁ ρ ι α κ ο ί» ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ R o l l. Οὗτοι ἦσαν κυρίως οἱ ἐκπρόσωποι σχολῶν, ὡς ἡ Ψ υ χ ο λ ο γ ι κ ή, ἡ Μ α θ η μ α τ ι κ ὴ καὶ ἡ Ν ε ο κ λ α σ σ ι κ ὴ σχολή*. Κατὰ τὸν J. S c h u m p e t e r, οἱ G o s s e n καὶ L l o y d φέρονται ὡς οἱ τὸ πρῶτον χρησιμοποιήσαντες τὸν ὅρον «ὁ ρ ι α κ ὴ χ ρ η σ ι μ ό τ η ς». Ὁ W a l r a s, ἐκπρόσωπος τῆς Μαθηματικῆς σχολῆς, κατέληξεν εἰς τὸ σύστημα γενικῆς ἰσορροπίας διαβαίνων τὴν κλίμακα τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος, καίτοι ἡ τελευταία αὕτη δὲν ἔχει σημασίαν διὰ τὸ σύστημα του. Οὗτος, ἐχρησιμοποίησε τὸν ὅρον «ὅριον χρησιμότητος», ὡς ὁ P a r e t o ἐχρησιμοποίησε τὸν ὅρον «ὅριον ὠφελιμότητος».

Χρονικῶς ὅμως, προγενέστεροι χρησιμοποιήσαντες «ὁριακὰς» ἐννοίας ἦσαν : α) ὁ T u r g o t, ὅστις κατὰ τὸν 18ον αἰῶνα διετύπωσε τὸν νόμον περὶ αὐξούσης ἀποδόσεως, χρησιμοποιῶν διαδοχικὰς α ὐ ξ ή σ ε ι ς τοῦ προϊόντος, καὶ οὐχὶ τὸ μέσον προϊὸν κατὰ μονάδα μεταβλητοῦ συντελεστοῦ. (β) ὁ B e r m o u l l i, ὅστις τὸ 1730 διετύπωσεν ὅτι ἡ οἰκονομικὴ σημασία διὰ τὸ ἄτομον μιᾶς προσθέτου νομισματικῆς μονάδος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν νομισματικῶν μονάδων τὰς ὁποίας κατέχει. Ἀργότερον, ἡ ἀρχὴ αὕτη ἐκλήθη «ὁριακὴ χρησιμότης», ἡ στατιστικὴ μέτρησις τῆς ὁποίας ἐπεχειρήθη ὑπὸ τῶν I. F i s h e r καὶ R. F r i s c h.

Ἡ σ χ ο λ ὴ τ ο ῦ C a m b r i d g e ἢ Ν ε ο κ λ α σ σ ι κ ὴ σχολὴ προσεπάθησε νὰ ἀποκαταστήσῃ τὴν θέσιν τῶν κλασσικῶν εἰς τὴν νεωτέραν ἐποχὴν (τέλος 19ου αἰῶνος καὶ ἀρχαὶ 20οῦ αἰῶνος), διὰ τῆς συμφιλιώσεως τούτων μὲ τὰς ἀρχὰς τῆς ψυχολογικῆς καὶ Μαθηματικῆς σχολῆς. Ὁ A l f r e d M a r s h a l l (1842 - 1924), διδάξας εἰς Bristol καὶ Cambridge καὶ ἀκολουθῶν τὴν Ψυχολογικὴν σχολήν, διετύπωσε ὅτι ἡ συνολικὴ χρησιμότης ἀγαθοῦ τινος, δι' ἓν ἄτομον αὐξάνει διὰ τῆς προσθήκης προσθέτων

* Βλ. σχετικῶς εἰσαγωγήν.

ποσοτήτων τοῦ ἀγαθοῦ, ἀλλ' οὐχὶ ἀναλόγως, ἀλλὰ κατὰ φθίνοντα λόγον. Ἡ ποσότης τὴν ὁποίαν τὸ ἄτομον ἀγοράζει ἐπὶ πλέον ἐκείνης τὴν ὁποίαν κατέχει ὀνομάζεται ὁ ρ ι α κ ὴ ἀ γ ο ρ ὰ (marginal purchase). Ἡ χρησιμότης τοῦ ἀγαθοῦ ἥτις προέρχεται ἐκ τῆς ὁριακῆς ἀγορᾶς εἶναι ἡ ὁ ρ ι α κ ὴ χ ρ η σ ι μ ό τ η ς αὐτοῦ (marginal utility). Ὁ Marshall πρῶτος ὡμίλησε περὶ τῆς ἐ λ α σ τ ι κ ό τ η τ ο ς, ἣν ὥρισεν ὡς τὸν τρόπον καθ' ὃν μεταβάλλεται ἡ ζήτησις μεταβαλλομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ. Ὁ ἕτερος τῶν νεοκλασσικῶν, J. B. C l a r k (1847 - 1938) πρῶτος εἰσήγαγε τὴν θεωρίαν τῆς ὁριακῆς παραγωγικότητος εἰς τὴν Ἀμερικήν, ἀσχοληθεὶς μὲ τὰ προβλήματα τῆς διανομῆς, τὸ βάθρον τῆς ὁποίας εἶναι ἡ θεωρία τῆς παραγωγικότητος.

Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ ἐξετάσωμεν ὡρισμένας ἐκ τῶν ἐφαρμογῶν τῶν παραγώγων εἰς τὴν οἰκονομικήν, καὶ δὴ ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς διμεταβλητὰς οἰκονομικὰς σχέσεις. Τὰς ἀναφερομένας δὲ εἰς πολυμεταβλητὰς σχέσεις θὰ ἐξετάσωμεν εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον.

III.1.1. **Μέση καὶ ὁριακὴ πρόσοδος**. Ἡ καμπύλη ζητήσεως ἀγαθοῦ τινος δεικνύει τὴν σχέσιν μεταξὺ ζητουμένης ποσότητος καὶ τῆς μέσης τιμῆς αὐτοῦ. Ἡ σχέσις αὕτη περιγράφεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $p = f(q)$, ὅπου p εἶναι ἡ μέση τιμὴ καὶ q ἡ ποσότης. Ἡ καμπύλη συνολικῆς προσόδου δεικνύει τὴν συνολικὴν πρόσοδον ἢ τὰς εἰσπράξεις τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς διάφορα ἐπίπεδα ζητουμένων ποσοτήτων. Ἡ συνολικὴ πρόσοδος προκύπτει διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ποσότητος ἐπὶ τὴν μέσην τιμὴν τοῦ ἀγαθοῦ, ἤτοι $qp = R = q\,f(q)$. Ἄρα ἡ μέση τιμὴ ἢ μέση πρόσοδος εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς συνολικῆς προσόδου διὰ τῆς ποσότητος. Τί εἶναι ὅμως ἡ ὁριακὴ πρόσοδος; Ὁριακὴν πρόσοδον καλοῦμεν τὴν αὔξησιν τῆς συνολικῆς προσόδου τὴν ὁποίαν ἀποκομίζει ἡ ἐπιχείρησις ἐκ τῆς πωλήσεως μιᾶς προσθέτου μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ.Συνεπῶς, ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως τῆς συνολικῆς προσόδου, $R = q\,f(q)$, εἶναι ἡ ὁριακὴ πρόσοδος, ἤτοι :

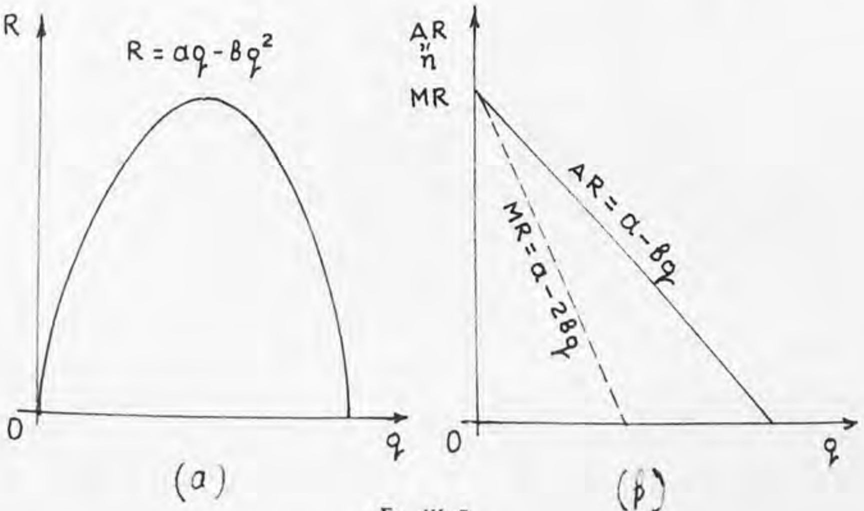
$$\frac{dR}{dq} = M\,R = \frac{d}{dq}\left[q\,f(q)\right]$$

Ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ ἡ ἐπιχείρησις ἀντιμετωπίζει δεδομένην καμπύλην ζητήσεως, ἤτοι δεδομένην τιμὴν κατὰ μονάδα τοῦ ἀγαθοῦ. Ἑκάστη δὲ πρόσθετος μονὰς τοῦ ἀγαθοῦ λαμβάνει τὴν αὐτὴν τιμήν, ἤτοι τιμὴν ἥτις ἐπικρατεῖ εἰς τὴν ἀγοράν, τῆς ἐπιχειρήσεως μὴ δυναμένης νὰ ἐπηρεάση ταύτην. Ἄρα καὶ ἡ ὁριακὴ πρόσοδος θὰ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς τὴν μέσην τιμήν. Παραγωγίζοντες τὴν συνάρτησιν συνολικῆς προσόδου $R = pq$ ἐν σχέσει πρὸς q λαμβάνομεν τὴν ὁριακὴν πρόσοδον $MR = \dfrac{dR}{dq} = p$. Ἐκ τῆς παραγωγίσεως ταύτης ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ὁριακὴ πρόσοδος (MR) εἶναι ἴση πρὸς τὴν μέσην τιμὴν ἢ μέσην πρόσοδον (p ἢ AR) ἤτοι MR = p = AR.

Ὑπὸ συνθήκας μονοπωλίου ὁ μονοπωλητὴς πρὸς μεγίστευσιν τῶν κερδῶν του δύναται νὰ μεταβάλῃ εἴτε τὴν πωλουμένην ποσότητα εἴτε τὴν τιμὴν τοῦ ἀγαθοῦ. Ἡ σπουδαιοτέρα διαφορὰ μεταξὺ μονοπωλητοῦ καὶ πωλητοῦ τελείου ἀνταγωνισμοῦ εἶναι ὅτι ἡ καμπύλη ἣν ἀντιμετωπίζει ὁ μονοπωλητὴς βαίνει φθίνουσα αὐξανομένης τῆς πωλουμένης ποσότητος τοῦ ἀγαθοῦ. Ἄρα ἡ καμπύλη ζητήσεως τοῦ μονοπωλητοῦ ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν. Ἀρνητικὴν ἐπίσης κλίσιν ἔχει καὶ ἡ καμπύλη ζητήσεως ὁλοκλήρου τοῦ κλάδου εἰς τὸν πλήρη ἀνταγωνισμόν.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις ζητήσεως εἶναι τῆς γραμμικῆς μορφῆς $p = \alpha - \beta q$. Ἡ συνάρτησις τῆς συνολικῆς προσόδου θὰ εἶναι $R = pq = \alpha q - \beta q^2$, ἤτοι παραβολή. Κατὰ συνέπειαν ἡ συνάρτησις τῆς ὁριακῆς προσόδου θὰ εἶναι $\frac{dR}{dq} = MR = \alpha - 2\beta q$, ἤτοι συνάρτησις γραμμικῆς μορφῆς.

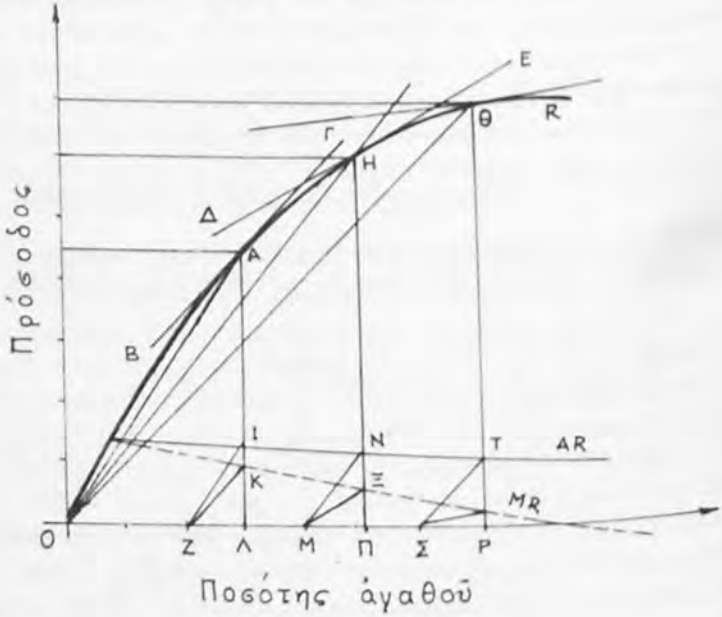
Ἡ ἀπεικόνισις τῆς καμπύλης συνολικῆς προσόδου, μέσης προσόδου (καμπύλη ζητήσεως) καὶ ὁριακῆς προσόδου ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ. III.7.



Σχ. III. 7.

Ἀνωτέρω εἴδομεν πῶς προκύπτουν αἱ καμπύλαι μέσης καὶ ὁριακῆς προσόδου ἐκ τῆς συναρτήσεως τῆς συνολικῆς προσόδου χρησιμοποιήσαντες τὸ ἀναλυτικὸν μέσον τῆς παραγώγου. Τὰς καμπύλας μέσης καὶ ὁριακῆς προσόδου δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ γεωμετρικῶς, ὡς κατωτέρω, γνωστοῦ ὄντος ὅτι πᾶσα εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον τῆς καμπύλης συνολικῆς προσόδου δεικνύει τὴν μέσην τιμὴν καὶ ὅτι ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης οἱουδήποτε σημείου τῆς καμπύλης δεικνύει τὴν ὁριακὴν τιμὴν αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Εἰς τὸ Σχ. III.8. ἡ καμπύλη OR δεικνύει τὴν συνολικὴν πρόσοδον ἣν ἀποκομίζει ὁ πωλητὴς εἰς τὰ διάφορα ἐπίπεδα ζητουμένης ποσότητος τοῦ ἀγαθοῦ. Αἱ κλίσεις τῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΗ καὶ ΟΘ δεικνύουν τὴν μέσην τιμὴν τοῦ ἀγαθοῦ ὅταν ἡ πωλουμένη ποσότης αὐτοῦ εἶναι ΟΛ, ΟΠ καὶ ΟΡ, ἀντιστοίχως. Τὴν μέσην τιμὴν ἢ μέσην πρόσοδον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, ἐπίσης, ἐὰν ἀπὸ τὴν θέσιν Ζ, ἥτις εἶναι κατὰ μίαν μονάδα μικροτέρα τῆς Λ,

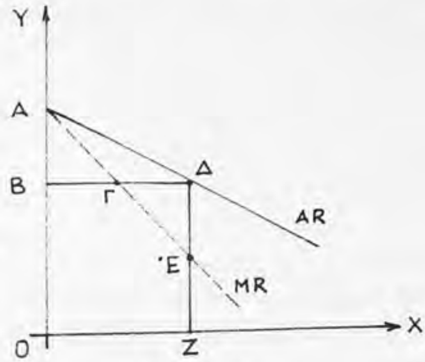


Σχ. III. 8.

φέρωμεν εὐθεῖαν ΖΙ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΑ. Τὸ σημεῖον Ι εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα αὕτη συναντᾶ τὴν ΛΑ, ἡ ὁποία δεικνύει τὴν συνολικὴν πρόσοδον εἰς ποσότητα ΟΛ, εἶναι ἡ μέση πρόσοδος ἢ κατὰ μονάδα τιμή. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰς εὐθείας ΜΝ καὶ ΣΤ.

Αἱ κλίσεις, ἐξ ἄλλου, τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης συνολικῆς προσόδου δεικνύουν τὴν ὁριακὴν πρόσοδον εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα ἐπαφῆς Α, Η, καὶ Θ. Οὕτω ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης ΒΓ δεικνύει τὸν ρυθμὸν μεταβολῆς τῆς συνολικῆς προσόδου εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἐὰν δὲ φέρωμεν τὴν ΖΚ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ λαμβάνομεν τὴν πρόσοδον ἣν ἀποκομίζει ὁ πωλητὴς διὰ τῆς προσθήκης τῆς μονάδος ΖΛ. Ἡ ὁριακὴ πρόσοδος, συνεπῶς, εἶναι ΛΚ. Οὕτω δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν καμπύλην ὁριακῆς προσόδου τῆς ἐπιχειρήσεως, ἐφ' ὅσον φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης συνολικῆς προσόδου καὶ εὕρωμεν τὰς κλίσεις των.

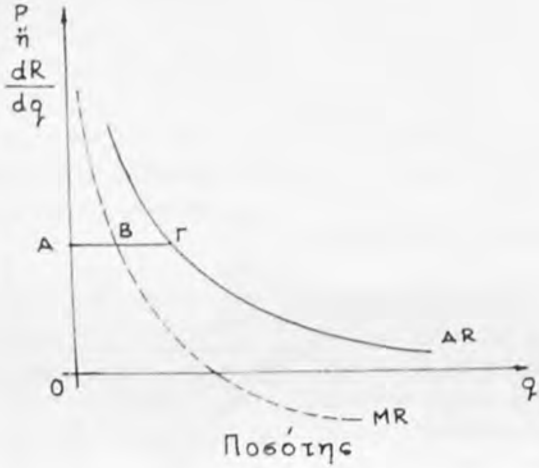
Μεταξὺ τῆς ὁριακῆς καὶ μέσης προσόδου ὑφίστανται ὡρισμέναι ἐνδιαφέρουσαι σχέσεις. Κατ' ἀρχάς, ὅταν ἡ καμπύλη μέσης προσόδου εἶναι φθίνουσα ἡ ὁριακὴ πρόσοδος εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς μέσης. Περαιτέρω εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν γραμμικῶν «καμπύλων», ὡς ἡ ἀνωτέρω, ἡ καμπύλη ὁριακῆς προσόδου τέμνει εἰς τὸ μέσον ἀκριβῶς πᾶσαν εὐθεῖαν ἡ ὁποία ἑνώνει τὸν ἄξονα τῶν y μὲ τὴν καμπύλην τῆς μέσης προσόδου. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς λάβωμεν τὸ γράφημα τοῦ Σχ. III.9., τὸ ὁποῖον ἐμφαίνει τὴν μέσην καὶ τὴν ὁριακὴν πρόσοδον, AR καὶ MR ἀντιστοίχως.



Σχ. III. 9.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΔ κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα y, καὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΖ κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα x. Αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς καμπύλης ὁριακῆς προσόδου εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Ε. Ἡ ἔκτασις τοῦ παραλληλογράμμου ΒΔΖΟ εἶναι ἡ συνολικὴ πρόσοδος ἐκ τῆς πωλήσεως ΟΖ μονάδων τοῦ ἀγαθοῦ μὲ τιμὴν ΟΒ, ἤτοι ΔΖ . ΟΒ = ἐμβαδὸν ΒΔΖΟ. Ἡ ἔκτασις ΒΔΖΟ, ὅμως, ἰσοῦται πρὸς τὴν ἔκτασιν ΑΕΖΟ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ ὄντα ἴσα ἔχουν καὶ ἴσας γωνίας καὶ ἴσας πλευράς. Ὁπότε ΒΓ = ΓΔ, ἐξ οὗ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ καμπύλη MR τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν ΒΔ. Συνεπεία τούτου, ἐπίσης περαίνομεν ὅτι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης ὁριακῆς προσόδου εἶναι διπλασία τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης μέσης προσόδου ὡς τοῦτο διεπιστώσαμεν καὶ ἐκ τῆς $MR = \alpha - 2\beta q$.

Ἀνωτέρω εἴδομεν τὴν περίπτωσιν τῶν γραμμικῶν καμπύλων μέσης καὶ ὁριακῆς προσόδου, ἤτοι ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ὑπείκουν εἰς τὸν «γραμμικὸν» νόμον τῆς ζητήσεως. Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν περίπτωσιν μὴ γραμμικῶν συναρτήσεων. Ἔστω ὅτι ἡ ζήτησις ὑπείκει εἰς τὸν νόμον ὅστις περιγράφεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως μέσης τιμῆς $p = \dfrac{\alpha}{q+\beta} - \gamma$. Ἡ συνάρτησις συνολικῆς προσόδου θὰ εἶναι $R = pq = \dfrac{\alpha q}{q+\beta} - \gamma q$ καὶ ἡ ὁριακὴ πρόσοδος $\dfrac{dR}{dq} = \dfrac{\alpha(q+\beta)-q}{(q+\beta)^2} - \gamma = \dfrac{\beta\alpha}{(q+\beta)^2} - \gamma$. Τὸ διάγραμμα III.10 δεικνύει τὰς καμπύλας μέσης καὶ ὁριακῆς προσόδου. Αἱ καμπύλαι αὗται εἶναι κοῖλαι πρὸς τὰ ἄνω, ἡ δὲ καμπύλη ὁριακῆς προσόδου τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΑΓ



Σχ. III. 10.

εἰς σημεῖον τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἐκ τοῦ ἄξονος τῶν y εἶναι μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως πρὸς τὴν καμπύλην τῆς μέσης προσόδου (AR).

III.1.2. **Μέσον καὶ ὁριακὸν κόστος.** Ἤδη ἔχομεν ἀναφερθῆ εἰς τὴν καμπύλην συνολικοῦ κόστους εἰς τὰ περὶ ἀναλυτικῆς γεωμετρίας καὶ τὴν συνάρτησιν συνολικοῦ κόστους εἰς τὰ περὶ οἰκονομικῶν συναρτήσεων. Τὸ συνολικὸν κόστος εἶναι συνάρτησις τῶν διαφόρων ἐπιπέδων παραγωγῆς, $C_T = f(x)$, ὅπου C_T εἶναι τὸ συνολικὸν κόστος καὶ x ἡ παραγομένη ποσότης. Τὸ μέσον κατὰ μονάδα κόστος θὰ εἶναι $AC = \frac{C_T}{x} = \frac{f(x)}{x}$. Τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως, ἤτοι $MC = \frac{dC_T}{dx} = f'(x)$. Εἶναι δὲ γνωστὸν ἐκ τῆς μικροοικονομικῆς θεωρίας ὅτι ὁριακὸν κόστος εἶναι τὸ κόστος παραγωγῆς τῆς ὁριακῆς μονάδος τοῦ προϊόντος τῆς ἐπιχειρήσεως.

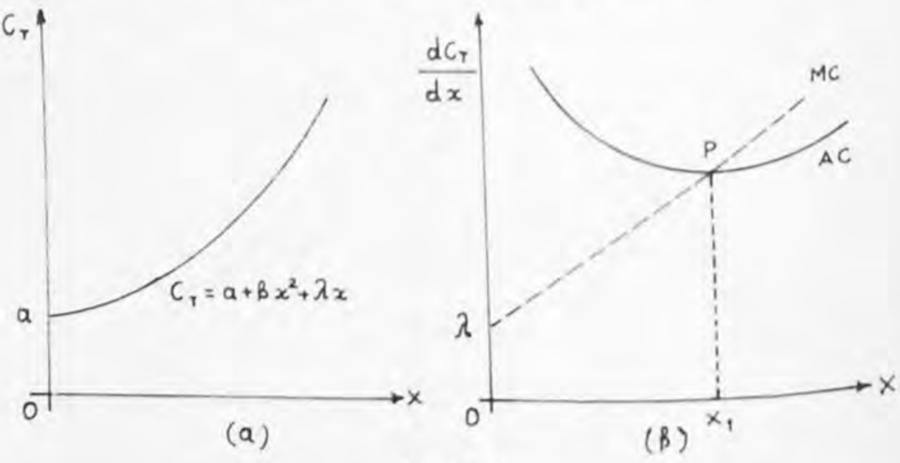
Ἡ καμπύλη συνολικοῦ κόστους δύναται νὰ εἶναι γραμμικῆς μορφῆς, ὡς ἡ $C_T = \alpha + \lambda x$. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ μέσον κόστος θὰ εἶναι $AC = \frac{\alpha}{x} + \lambda$. Ἡ καμπύλη ἣν ἀντιπροσωπεύει ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι τοῦ τύπου τῆς ὑπερβολῆς. Εἰς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος τὸ κόστος εἶναι $(\alpha+\lambda)$. τῆς παραγωγῆς τεινούσης πρὸς τὸ ἄπειρον ($x \to \infty$), τὸ μέσον κόστος τείνει πρὸς τὸ λ. Ἀλλὰ ἡ σταθερὰ λ δὲν εἶναι παρὰ τὸ ὁριακὸν κόστος, καθ' ὅτι $\frac{dC_T}{dx} = \lambda$. Ἄρα τὸ μέσον κόστος τείνει πρὸς τὸ ὁριακὸν τοιοῦτον εἰς πολὺ ὑψηλὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς. Ἡ περίπτωσις τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως συνολικοῦ κόστους καὶ αἱ ἐξ αὐτῆς προκύπτουσαι καμπύλαι μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους ἐμφαίνονται εἰς τὸ Σχ. III.11 (α) καὶ (β).

Σχ. III. 11.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις συνολικοῦ κόστους εἶναι μορφῆς παραβολῆς, ὡς ἡ $C_T = \alpha + \beta x^2 + \lambda x$, τότε ἡ καμπύλη μέσου κόστους θὰ ἀντιπροσωπεύεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $AC = \frac{\alpha}{x} + \beta x + \lambda$, καὶ ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους ὑπὸ τῆς $\frac{dC_T}{dx} = 2\beta x + \lambda$. Οὕτω ἡ καμπύλη μέσου κόστους θὰ ἔχη σχῆμα U, καὶ ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους θὰ εἶναι γραμμικῆς μορφῆς μὲ θετικὴν κλίσιν, ὡς τὸ Σχ. III.12 δεικνύει.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι τὸ μέσον κόστος μεταβάλλεται μεταβαλλομένου τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς. Κατὰ τὰ πρῶτα στάδια παραγωγῆς τὸ μέσον κόστος εἶναι φθῖνον μέχρι τοῦ σημείου P, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς παραγωγὴν x_1 ποσότητος. Ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἀρχίζει νὰ ἀνέρχεται. Τὸ ὁριακὸν κόστος, ἐξ ἄλλου, ἀνέρχεται συνεχῶς μὲ σταθερὸν ρυθμόν, καὶ ἡ καμπύλη τούτου τέμνει τὴν καμπύλην μέσου κόστους εἰς τὸ κατώτατον αὐτῆς σημεῖον P. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἔχομεν AC = MC.

Εἰς τὴν μικροοικονομικὴν θεωρίαν συνήθως διδάσκεται ὅτι ἀμφότεραι αἱ καμπύλαι μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους ἔχουν σχῆμα U, εἰς τὴν βραχυχρόνιον περίοδον. Ἤτοι αἱ καμπύλαι δὲν εἶναι γραμμικῆς μορφῆς, ἀλλὰ ἀκολουθοῦν ὡρισμένον νόμον ἐξελίξεως, ὅστις εὑρίσκει τὴν ἐξήγησίν του τόσον εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ συνολικοῦ κόστους, ὅσον καὶ εἰς ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ὁ Marshall ἀπεκάλεσεν «ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ὰ ς ο ἰ κ ο ν ο μ ί α ς» (internal economies).

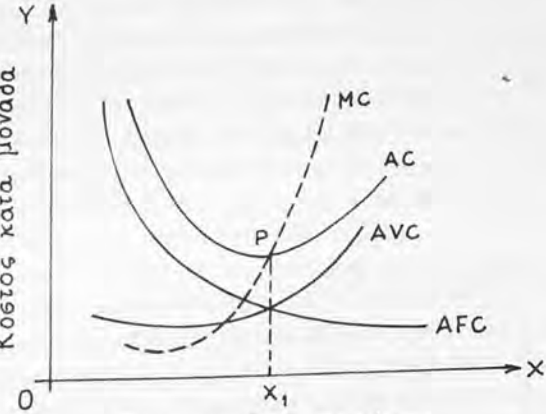


Σχ. III. 12.

mies). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις συνολικοῦ κόστους εἶναι τῆς μορφῆς $C_T = \alpha + \beta x^3 + \gamma x^2 + \lambda x$. Ἡ συνάρτησις μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους θὰ εἶναι $AC = \frac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$ καὶ $\frac{dC_T}{dx} = 3\beta x^2 + 2\gamma x + \lambda$, ἀντιστοίχως. Τὸ Σχ. III.13 δεικνύει τὸ σχῆμα τῶν καμπύλων μέσου (AC) καὶ ὁριακοῦ κόστους (MC). Ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους τέμνει τὴν καμπύλην μέσου κόστους ἐκ τῶν κάτω ἀριστερῶν καὶ εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον αὐτῆς (P), εἰς ὃ ἀντιστοιχεῖ παραγωγὴ ποσότητος x_1. Ἡ ποσότης αὕτη εἶναι τὸ ἄριστον σημεῖον παραγωγῆς διότι εἰς τοῦτο πραγματοποιεῖται τὸ μικρότερον κόστος κατὰ μονάδα προϊόντος.

Εἰς τὸ Σχ. III.13 πλὴν τῶν καμπύλων μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους δεικνύονται καὶ αἱ καμπύλαι μέσου σταθεροῦ (average fixed cost, AFC) καὶ μέσου μεταβλητοῦ κόστους (average variable cost, AVC), μὲ τὸν σκοπὸν ὅπως ἑρμηνεύσωμεν τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης μέσου κόστους. Ἡ ἑρμηνεία τοῦ σχήματος (U) τῆς καμπύλης δύναται νὰ εἶναι διττή.

(i) Ἑ ρ μ η ν ε ί α σ τ η ρ ι ζ ο μ έ ν η ἐ π ὶ τ ῆ ς δ ι α κ ρ ί σ ε ω ς τ ῶ ν σ υ ν ο λ ι κ ῶ ν δ α π α ν ῶ ν τ ῆ ς π α ρ α γ ω γ ῆ ς ε ἰ ς σ τ α θ ε ρ ὰ ς κ α ὶ μ ε τ α β λ η τ ά ς. Τὰ σταθερὰ ἔξοδα δὲν μεταβάλλονται βραχυχρονίως μὲ τὰς μεταβολὰς τῆς παραγωγῆς καὶ συνεπῶς εἰς μικρὰν κλίμακα παραγωγῆς τὸ κατὰ μονάδα σταθερὸν κόστος θὰ εἶναι ὑψηλόν. Αὐξανομένης, ὅμως, τῆς παραγωγῆς τὸ κατὰ μονάδα σταθερὸν κόστος θὰ βαίνη συνεχῶς μειούμενον, δεδομένου ὅτι ὁ διαιρετέος εἶναι σταθερὸς ἀριθμός, ὁ δὲ διαιρέτης αὐξάνει, καὶ ἡ καμπύλη θὰ λάβη τὸ σχῆμα ὀρθογωνίου ὑπερβολῆς ὡς ἡ AFC εἰς τὸ Σχ. III.13. Καθ' ὅσον ἀφορᾶ εἰς τὰς μεταβλητὰς δαπάνας



Σχ. III. 13.

ἡ κατὰ προϊὸν ἐπιβάρυνσις θὰ εἶναι σταθερὰ περίπου, δεδομένου ὅτι αἱ δαπάναι αὗται αὐξομειοῦνται μὲ τὴν αὐξομείωσιν τῆς παραγωγῆς, ἤτοι τελοῦν εἰς σχέσιν ἀναλογίας. Παρὰ ταῦτα καὶ τὸ μεταβλητὸν κόστος τῆς παραγωγῆς, τὸ ὁποῖον εἶναι σταθερὸν κατὰ μονάδα, πέραν ἑνὸς ἐπιπέδου ταύτης (x_1) θὰ ἀρχίση νὰ ἀνέρχεται, ὡς δεικνύει ἡ καμπύλη AVC. Τοῦτο συμβαίνει συνήθως διότι ἡ παραγωγὴ ὑπερβαίνει τὸ «κανονικὸν» ὅριον τῆς δυναμικότητος τῆς ἐπιχειρήσεως, καὶ συνεπῶς μὲ δεδομένα παραγωγικὰ μέσα ἡ αὔξησις τῆς παραγωγῆς δύναται νὰ χωρήση μόνον μὲ αὔξον κόστος. Ὀπτικῶς ἐκ τοῦ Σχ. III.13 προκύπτει ὅτι ἡ συνένωσις τῶν καμπύλων σταθεροῦ καὶ μεταβλητοῦ κόστους μᾶς δίδει τὴν καμπύλην μέσου κόστους. Οὕτω στηριζόμενοι εἰς τὴν φύσιν τῶν ἐξόδων παραγωγῆς κατὰ τὴν βραχυχρόνιον περίοδον ἐλάβομεν τὴν ἐξήγησιν διὰ τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης μέσου κόστους.

(ii) Ἑρμηνεία στηριζομένη ἐπὶ τῶν ἐννοιῶν τῶν «ἐσωτερικῶν οἰκονομιῶν» καὶ τῶν μεταβλητῶν ἀναλογιῶν ἢ τοῦ νόμου τῆς φθινούσης ἀποδόσεως. Αἱ ἐσωτερικαὶ οἰκονομίαι προκύπτουν ἀπὸ καλλιτέραν ὀργάνωσιν τῆς ἐπιχειρήσεως, ἐξειδίκευσιν καὶ καταμερισμὸν τῆς ἐργασίας, οἰκονομίας ἐκ τεχνικῶν λόγων, οἰκονομίας παραγωγῆς μεγάλης κλίμακος, κ.λπ. Οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς ὡς εἶναι γνωστόν, συνδυάζονται καθ' ὡρισμένον τρόπον λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ὑφίσταται ὡρισμένη τεχνολογία εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Οἱ πλεῖστοι τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, ἐπίσης, παρουσιάζουν «ἀ δ ι α ι ρ ε τ ό τ η τ α» (indivisibility), ἤτοι δὲν δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς μικρὰς ποσότητας καὶ συνεπῶς εἶναι ὀλιγώτερον ἀποδοτικοὶ εἰς μικρὰς κλίμακας παραγωγῆς, ἐνῶ ἡ ἀπόδοσις τούτων εἶναι ὑψηλὴ εἰς σχετικῶς ὑψηλὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς. Εἰς ἐπιχειρηματίας ἢ διευθυντὴς ἐπιχειρήσεως, παραδείγματος χάριν, δὲν δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τὸ ἥμισυ, λόγῳ μειώσεως τῆς παραγωγῆς εἰς τὸ ἥμισυ. Ἡ μόνη ἴσως ἐξαίρεσις εἰς τὸν κανόνα τῆς «διαιρετότητος» εἶναι ὁ συντελεστὴς «ἐργασία», ὅστις δύναται νὰ αὐξομειωθῇ ἀναλογικῶς πρὸς τὴν αὐξομείωσιν τῆς παραγωγῆς. Συνεπείᾳ τῶν ἀνωτέρω ἡ ἀπόδοσις τῆς παραγωγῆς βαίνει αὐξανομένη, καθ' ὅσον ἡ παραγωγὴ αὐξάνει. Τοῦτο ὅμως δύναται νὰ συμβῇ μέχρις ὡρισμένου ὁρίου παραγωγῆς, καλουμένου ἀ ρ ί σ τ ο υ (optimum). Εἰς τὸ ἄριστον σημεῖον οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς χρησιμοποιοῦνται κατὰ τὰς ὀρθὰς ἢ ἀρίστας ἀναλογίας, καὶ ἔχομεν τὸ ἐλάχιστον μέσον κατὰ μονάδα κόστος. Εἰς τὸ Σχ. III.13 τὸ σημεῖον τοῦτο συμπίπτει μὲ παραγωγὴν X_1, μονάδων ἀγαθοῦ. Μετὰ τὸ σημεῖον τοῦτο γίνεται, βραχυχρονίως πάντοτε, ἐντατικωτέρα χρησιμοποίησις τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, μὲ συνέπειαν τὴν διατάραξιν τοῦ ἀρίστου συνδυασμοῦ τούτων καὶ μείωσιν τῆς ἀποδοτικότητος. Κατ' ἀκολουθίαν, τὸ μέσον κόστος μετὰ τὸ ἄριστον σημεῖον παραγωγῆς βαίνει αὐξανόμενον καὶ ἡ καμπύλη μέσου κόστους λαμβάνει τελικῶς τὸ σχῆμα U. Ἵνα ἡ ἐπιχείρησις συνεχίσῃ ἔχουσα χαμηλὸν κόστος κατὰ μονάδα παραγωγῆς θὰ πρέπει νὰ μεταβάλῃ τὴν συγκρότησίν της. Τὸ τοιοῦτον, ὅμως, δύναται νὰ συμβῇ μακροχρονίως. Εἰς τὴν μακροχρόνιον περίοδον ἡ καμπύλη μέσου κόστους παρουσιάζει μεγαλυτέραν ἐλαστικότητα καὶ εἶναι περισσότερον ἀμβλεῖα εἰς τὸ σχῆμα αὐτῆς, ἐκ τοῦ λόγου ἀκριβῶς ὅτι ἡ περιουσιακὴ συγκρότησις ταύτης μεταβάλλεται.

Ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ μέσου καὶ ὁριακοῦ ἐσόδου, τὰς καμπύλας μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους δυνάμεθα νὰ διαγράψωμεν γεωμετρικῶς φέροντες εὐθείας γραμμὰς ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων πρὸς σημεῖα τῆς καμπύλης συνολικοῦ κόστους, προκειμένου περὶ τοῦ μέσου κόστους, καὶ ἐφαπτομένας εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα, προκειμένου περὶ ὁριακοῦ κόστους.

Ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ σχέσις μεταξὺ ὁριακοῦ καὶ μέσου κόστους, εἰς τὴν ὁποίαν συντόμως θὰ ἀναφερθῶμεν ἐνταῦθα. Εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν διατυποῦται συνήθως ὡρισμένη σχέσις μεταξὺ τῶν καμπύλων μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους, ὡς αὕτη ἀπεικονίζεται εἰς τὸ Σχ. III.13. Παρὰ ταῦτα δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν περὶ τῆς ἀκριβοῦς σχέσεως, ἐὰν δὲν γνωρίζωμεν τὸν ἀκριβῆ μαθηματικὸν τύπον τῆς καμπύλης συνολικοῦ κόστους, ἐξ οὗ θὰ προκύψουν αἱ καμπύλαι τοῦ μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως συνολικοῦ κόστους ἡ καμπύλη μέσου κόστους εἶναι ὑπερβολή, ἡ δὲ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους ὁριζοντία γραμμή. Ἐνταῦθα τὸ μέσον κόστος εἶναι πάντοτε μεγαλύτερον τοῦ ὁριακοῦ τεῖνον ὅμως νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τοῦτο εἰς πολὺ μεγάλας τιμὰς τῆς x. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. ΙΙΙ.12 (β) τὸ μέσον κόστος μέχρι τοῦ σημείου x_1 (optimum παραγωγή), βαίνει μειούμενον, ἐνῶ τὸ ὁριακὸν κόστος βαίνει αὖξον. Ἀπὸ τοῦ σημείου x_1 καὶ πέραν, τόσον τὸ μέσον ὅσον καὶ τὸ ὁριακὸν κόστος βαίνουν αὔξοντα. Ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους τέμνει τὴν καμπύλην μέσου κόστους εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον ταύτης. Τέλος εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. ΙΙΙ.13, ὅταν τὸ μέσον κόστος βαίνῃ φθῖνον τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι πάντοτε μικρότερον τούτου, ὡς καὶ εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις. Ὅταν τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέσου (πέραν τοῦ σημείου x_1), τὸ τελευταῖον τοῦτο βαίνει αὐξανόμενον. Ὅταν τέλος, τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μέσον, τὸ τελευταῖον τοῦτο εἶναι σταθερόν.

ΙΙΙ.1.3. **Ἐμπειρικὴ ἐπαλήθευσις τῶν θεωρητικῶν καμπύλων κόστους.** Ἐλέχθη ὅτι αἱ ὑπὸ τῆς θεωρίας προτεινόμεναι καμπύλαι μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους ἔχουν σχῆμα U, δι' οὓς λόγους ἀνεφέρομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον. Τοιούτου σχήματος καμπύλαι ἀντιστοιχοῦν πρὸς καμπύλην συνολικοῦ κόστους ἔχουσαν σχῆμα παραβολῆς, πλέον συγκεκριμένως δέ, σχῆμα ἀνεστραμμένου τελικοῦ σῖγμα.

Ὡς γνωστόν, ἵνα αἱ θεωρητικαὶ προτάσεις περιβληθοῦν τὸν μανδύαν τῆς ἐγκυρότητος καὶ τῆς χρησιμότητος τυγχάνουν ἐμπειρικῆς ἐπαληθεύσεως. Τοιαύτης ἐπαληθεύσεως ἀνάγκην ἔχουν καὶ αἱ καμπύλαι κόστους, δεδομένου ὅτι ἡ γνῶσις τῆς διαμορφώσεως τούτων εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῆς ἐπιχειρηματικῆς συμπεριφορᾶς, ὡς ἀπαραίτητος εἶναι ἡ γνῶσις τῆς καμπύλης ζητήσεως διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῆς καταναλωτικῆς συμπεριφορᾶς τῶν ἀτόμων.

Δοθέντος ὅτι τὸ κόστος εἶναι ποσοτικὴ ἔννοια, εἶναι κατὰ συνέπειαν μετρήσιμος ποσότης. Ὡς τοιαύτη δύναται νὰ τύχῃ καταλλήλου στατιστικῆς διερευνήσεως. Οὕτω πρὸς ἔλεγχον τοῦ κατὰ πόσον ἡ θεωρητικὴ καμπύλη συνολικοῦ κόστους, ἐξ ἧς λαμβάνονται αἱ ἐπὶ μέρους καμπύλαι ὁριακοῦ καὶ μέσου κόστους, προσαρμόζεται πρὸς τὰ ἐμπειρικὰ δεδομένα τῆς παραγωγῆς θὰ πρέπει νὰ χωρήσῃ στατιστικὴ ἔρευνα.

Πρῶτον πρόβλημα τῆς στατιστικῆς ἐρεύνης, ὅπερ θὰ ἀντιμετωπισθῇ ὑπὸ τοῦ οἰκονομικοῦ ἀναλυτοῦ, εἶναι ἡ ἐπιλογὴ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων. Τὸ κόστος εἶναι ἡ χρηματικὴ ἔκφρασις τῶν ἀναλώσεων ποσοτήτων παραγωγικῶν συντελεστῶν εἰς τὴν συγκεκριμένην παραγωγικὴν δραστηριότητα ἢ παραγωγὴν συγκεκριμένου προϊόντος. Ὡς κόστος συνήθως λαμβάνεται τὸ ἄμεσον τοιοῦτον σὺν τῇ προσθήκῃ παγίων ἐξόδων, ἅτινα ἀναφέρονται εἰς τὰς παγίας ἐγκαταστάσεις. Τόκοι μακροπροθέσμων δανειακῶν κεφαλαίων, ὑπολογιστικαὶ ἀμοιβαὶ ἐπιχειρηματίου, ἀσφάλιστρα τῆς ἐπιχειρήσεως, καὶ ἄλλα τινά, δὲν περιλαμβάνονται εἰς τὸ συνολικὸν κόστος, ὅπερ ἀποτελεῖ τὴν ἐξηρτημένην μεταβλητὴν εἰς τὴν πρὸς ἐκτίμησιν συνάρτησιν συνολικοῦ κόστους. Εἰς τὰς γενομένας ἐμπειρικὰς ἐρεύνας ἐχρησιμοποιήθησαν στοιχεῖα διαφόρου φύσεως, καὶ ὡς ἐκ τούτου ἓν μέρος τῆς ἑρμηνευτικῆς συγχύσεως περὶ τὴν συνάρτησιν κόστους προέρχεται ἐκ τοῦ λόγου τούτου.

Δεδομένου ὅτι εἰς τὴν συνάρτησιν κόστους συσχετίζονται αἱ μεταβολαὶ τοῦ κόστους πρὸς τὰς μεταβολὰς τῆς παραγωγῆς, πλὴν τῶν στοιχείων κόστους ἀπαιτοῦνται καὶ στοιχεῖα τῆς παραγωγῆς. Ὅταν ἡ παραγωγὴ περιορίζηται εἰς ἓν ὁμοιογενὲς προϊόν, τότε δὲν γεννῶνται δυσκολίαι. Ὅταν ὅμως, ἡ παραγωγικὴ μονὰς παράγῃ σειρὰν προϊόντων, τότε πρὸς τὸ σύνολον τῆς παραγωγῆς ἀντιστοιχεῖ σ υ ν θ ε τ ι κ ὸ ν κ ό σ τ ο ς, καὶ αἱ δυσκολίαι τῆς ἐρεύνης εἶναι μεγαλύτεραι. Ὡς παραγωγὴ λαμβάνεται ἡ ἀκαθάριστος ἀξία καὶ οὐχὶ ἡ προστιθεμένη ἀξία.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ κόστους καὶ τῆς παραγωγῆς λαμβάνονται εἴτε ἐκ τῶν λογιστικῶν βιβλίων, εἴτε ἐκ μηχανολογικῶν δεδομένων. Ἡ συνήθης περίπτωσις εἶναι ἡ πρώτη. Πλὴν ὅμως, γεννῶνται προβλήματα λογιστικοῦ ἐ π ι μ ε ρ ι σ μ ο ῦ τῶν ἐξόδων μεταξὺ δραστηριοτήτων, προϊόντων καὶ χρονικῶν περιόδων. Προσπάθεια δέον νὰ καταβάλληται ὅπως τὰ στοιχεῖα κόστους καὶ παραγωγῆς ἀναφέρωνται εἰς τὴν αὐτὴν περίοδον.

Ἕτερον πρόβλημα εἶναι ἡ ἐπιλογὴ στοιχείων ἀναφερομένων εἰς χ ρ ο ν ο λ ο γ ι κ ὰ ς σ ε ι ρ ὰ ς (time series) ἢ στοιχείων δ ι α τ ο μ ῆ ς (cross — section).

Κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν στοιχείων χρονολογικῶν σειρῶν δημιουργοῦνται τὰ ἑξῆς προβλήματα, ἅτινα δέον ὅπως ἀντιμετωπισθοῦν ἀναλόγως: (α) Δέον ὅπως αἱ μεταβληταὶ τοῦ συνολικοῦ κόστους καὶ τῆς παραγωγῆς· αἵτινες εἶναι ἐκπεφρασμέναι εἰς χρηματικὰς ἀξίας, τύχουν ἀ π ο π λ η θ ω ρ ι σ μ ο ῦ διὰ καταλλήλου δείκτου τιμῶν. (β) Δέον ὅπως ἀποφασισθῇ τί εἴδους χρονικαὶ μονάδες θὰ λαμβάνωνται, δεδομένου ὅτι ἔχομεν τὰς λ ο γ ι σ τ ι κ ὰ ς π ε ρ ι ό δ ο υ ς καὶ τὰς περιόδους τὰς ἀναφερομένας εἰς τὸν ἀπαιτούμενον χρόνον πρὸς περάτωσιν τοῦ ἔργου ἢ τοῦ προϊόντος ἢ τῆς συγκεκριμένης δραστηριότητος (unit data, process data). (γ) Δέον ὅπως ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν ἡ ἐπισυμβαίνουσα τ ε χ ν ο λ ο γ ι κ ὴ π ρ ό ο δ ο ς, ἥτις δημιουργεῖ μεταθέσεις εἰς τὴν καμπύλην κόστους μὲ συνέπειαν τὰ ἐμπειρικὰ δεδομένα ν᾽ ἀνταποκρίνωνται εἰς διαφορετικὰς συναρτήσεις καὶ οὐχὶ εἰς μίαν συνάρτησιν ἢ καμπύλην τῆς ὁποίας τὸ σχῆμα ἢ τὴν μορφὴν ἐπιζητοῦμεν. (δ) Τὰ δεδομένα διά κάθε περίοδον τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς δέον ὅπως εἶναι μεταξύ των συγκρίσιμα.

Τά ἀνωτέρω προβλήματα τῶν χρονολογικῶν σειρῶν, ἤ ἔνια ἐξ αὐτῶν, δύνανται νά παρακαμφθοῦν ἐάν πρός ἐκτίμησιν τῆς συναρτήσεως κόστους στηριχθῶμεν εἰς στοιχεῖα διατομῆς. Ὡς τοιαῦτα ἐννοοῦμεν τά δεδομένα τά ἀναφερόμενα εἰς τήν αὐτήν χρονικήν περίοδον ἤ στιγμήν καί εἰς τό πλῆθος (δεῖγμα) τῶν ἐπιχειρήσεων συγκεκριμένου κλάδου (ἐνδοκλαδική συνάρτησις κόστους) ἤ εἰς πλῆθος κλάδων τῆς βιομηχανίας (διακλαδική συνάρτησις κόστους.) Εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ἀναλύσεως διατομῆς (cross— section analysis), ὡς εἰκός, ὡς μεταβλητή κόστους θά ληφθῆ τό κόστος ἑκάστης ἐπιχειρήσεως τοῦ δείγματος κατά τήν αὐτήν χρονικήν περίοδον, καί ὡς μεταβλητή παραγωγῆς, αἱ παραγωγαί τῶν αὐτῶν ἐπιχειρήσεων. Οὕτως ἔναντι τοῦ κόστους θά ἔχωμεν τό μέγεθος τῆς παραγωγῆς ἑκάστης ἐπιχειρήσεως καί συνεπῶς διάφορα μεγέθη κόστους θά ἀνταποκρίνωνται πρός διάφορα μεγέθη παραγωγῆς, ὅπερ ἀναγκαῖον διά τήν ἐφαρμογήν τῆς ἀναλύσεως παλινδρομήσεως πρός ἐκτίμησιν τῆς συναρτήσεως. Ἀπαραίτητος ὅρος διά τήν ἀξιοπιστίαν τῆς ἀναλύσεως εἶναι ἡ ὁμοιογένεια τῶν στοιχείων. Τοιαύτη ὁμοιογένεια, ὅμως, δέν εἶναι πολλάκις δυνατόν νά συναντηθῆ εἰς τήν πρᾶξιν, λόγῳ τῶν διαφορετικῶν λογιστικῶν μεθόδων καί κανόνων παρουσιάσεως τῶν δεδομένων ὑπό τῶν ἐπιχειρήσεων.

Ἕτερον πρόβλημα τοῦ οἰκονομικοῦ ἀναλυτοῦ εἶναι ἡ ἐπιλογή τῆς καταλλήλου στατιστικῆς μεθόδου ἐκτιμήσεως καί ὁ περιορισμός εἰς τό ἐλάχιστον τοῦ σφάλματος ἐκτιμήσεως. Τά προβλήματα ταῦτα ἀντιμετωπίζονται ὑπό τῆς οἰκονομετρικῆς θεωρίας καί συνεπῶς οὐδέν ἐνταῦθα θά εἴπωμεν. Τό μόνον ἴσως τό ὁποῖον πρέπει νά λεχθῆ εἶναι ὅτι ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εἶναι ἡ πλέον διαδεδομένη καί ἡ πλέον πρακτικῶς χρήσιμος. Παρά τό γεγονός ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη στηρίζεται εἰς ὑποθέσεις αἱ ὁποῖαι δέν πληροῦνται πολλάκις εἰς τήν πρᾶξιν, καί συνεπῶς αἱ ἐκτιμήσεις καθίστανται μεροληπτικαί καί μή συνεπεῖς, ἐν τούτοις ἔναντι τῶν δυσχερειῶν ἑτέρων μεθόδων καί τῶν σφαλμάτων ἐξ ἑτέρων πηγῶν, τά μειονεκτήματα ταύτης εἶναι πρακτικῶς ἀσήμαντα.

Ἄς ἔλθωμεν τώρα νά ἐξετάσωμεν τά εὑρήματα τῶν γενομένων κατά καιρούς ἐμπειρικῶν (οἰκονομετρικῶν) ἐρευνῶν καί νά ἴδωμεν κατά πόσον ταῦτα συμβιβάζονται πρός τό γνωστόν σχῆμα τῆς θεωρητικῆς καμπύλης κόστους.

Ἐκ τῶν δεκατριῶν μελετῶν τῶν ἀναφερομένων ὑπό τοῦ A.A. Walters*, αἱ ὁποῖαι ἐγένοντο ἀπό τοῦ 1933 μέχρι τοῦ 1960 εἰς διαφόρους κλάδους τῆς βιομηχανίας καί ὑπό διαφόρων ἐρευνητῶν, αἱ ἑπτά ἔδειξαν σταθερόν ὁριακόν

* Βλέπε «Production and Cost Functions: An Econometric Survey» εἰς ECONOMETRICA, Ἰαν - Ἀπρ. 1963, Πίναξ VII, σελ. 49.

κόστος, τρεῖς ἔδειξαν αὖξον ὁριακὸν κόστος, ἕτεραι δύο φθῖνον ὁριακὸν κόστος καὶ μόνον μία ἔδειξεν ὅτι ἡ μακροχρόνιος καμπύλη μέσου κόστους εἶχε σχῆμα U.

Ἄς ἐξετάσωμεν ὡρισμένας τῶν ἐκτιμηθεισῶν εἰς τὰς ἀνωτέρω μελέτας συναρτήσεων κόστους. Ὁ καθηγητὴς J. Dean* ὑπελόγισε συναρτήσεις κόστους διὰ καλτσοβιομηχανίαν, ἐργοστάσιον κατασκευῆς δερματίνων ζωνῶν, ὑποδηματοποιεῖον, καὶ καταστήματα γενικοῦ ἐμπορίου. Χρησιμοποιήσας μηνιαῖα στοιχεῖα διὰ τὰ ἔτη 1935—39 καὶ τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εὗρεν ὅτι ἡ καλλίτερον προσιδιάζουσα συνάρτησις συνολικοῦ κόστους τῆς καλτσοβιομηχανίας εἶναι ἡ γραμμική:

$$C_T = 2935{,}59 + 1{,}998\,x$$

ὅπου C_T = συνολικὸν σύνθετον κόστος εἰς δολλάρια Η.Π.Α., καὶ x = παραγωγὴ εἰς δωδεκάδας ζευγῶν.

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις δοκιμασθεῖσα στατιστικῶς πληροῖ τὴν ὑπόθεσιν τῆς γραμμικότητος, ὅλοι δὲ οἱ συντελεσταὶ παλινδρομήσεως εἶναι στατιστικῶς σημαντικοί. Ἐκ ταύτης προκύπτει ὅτι τὸ ὁριακὸν κόστος, ὅπερ εἶναι 1,998 δολλάρια, εἶναι σταθερόν. Ἡ γραμμικότης τῆς συναρτήσεως συνολικοῦ κόστους συνηγορεῖ ὑπὲρ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τοῦ πλήρους κόστους (full cost principle) κατὰ τὴν κοστολόγησιν τῶν προϊόντων. Τὸ γεγονὸς δὲ ὅτι τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι σταθερὸν σημαίνει ὅτι ἑκάστη δωδεκὰς ζευγῶν καλτσῶν προσθέτει 2 δολλ. περίπου εἰς τὸ κόστος τῆς ἤδη λειτουργούσης ἐπιχειρήσεως.

Σταθερὸν ὁριακὸν κόστος εὗρεν ὁ J. Dean καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν δερματίνων ζωνῶν καὶ τοῦ γενικοῦ ἐμπορίου, ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὑποδημάτων εὗρεν μέσον κόστος φθῖνον ἀρχικῶς καὶ αὐξανόμενον εἰς ὑψηλότερα ἐπίπεδα παραγωγῆς.

Ὁ Τ.Ο. Yntema ὑπελόγισε συνάρτησιν συνολικοῦ κόστους χάλυβος χρησιμοποιήσας ἐτήσια στοιχεῖα τῶν ἐτῶν 1927—38 καὶ τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

Ἡ συνάρτησις ἔχει ὡς ἀκολούθως:

$$C_T = 182{,}1 + 55{,}73\,x$$

ὅπου C_T = συνολικὸν κόστος χάλυβος εἰς ἑκατομμύρια δολλαρίων καὶ x = ἑκατομ. τόννοι χάλυβος.

Συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν, ἐντὸς τοῦ εὔρους τῶν χρησιμοποιηθέντων στοιχείων, τὸ ὁριακὸν κόστος κατασκευῆς χάλυβος εἶναι σταθερὸν ἴσον πρὸς 55,73 δολλ. κατὰ τόννον.

---

* Βλ. σχ. G. Tintner, Econometrics, Science Edition 1965, σελ. 48 καὶ A. A. Walters, op. cit.

Πλὴν τῶν ἀνωτέρω καὶ ἕτεροι ἐρευνηταὶ διεπίστωσαν ἐμπειρικῶς τὴν γραμμικότητα τῆς συναρτήσεως τοῦ συνολικοῦ κόστους ἢ τὸ σταθερὸν τοῦ ὁριακοῦ κόστους, ὡς οἱ J. Johnston (1960), K. Ehrke (1933), M. Ezekiel καὶ K. Wylie (1941), κ.ἄ.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐπισκοπήσεως τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐμπειρικῆς ἐρεύνης προκύπτει, ἐκ πρώτης ὄψεως, ὅτι ὑφίσταται διάστασις μεταξὺ τῶν a priori ὑποθέσεων τοῦ θεωρητικοῦ οἰκονομολόγου, καθ' ὅσον ἀφορᾶ εἰς τὴν καμπύλην κόστους, καὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν ἐρευνητῶν. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἐγένετο προσπάθεια ἑρμηνείας καὶ αἰτιολογήσεως τοῦ ἀνωτέρω φαινομένου, ἥτις συνοψίζεται ὡς κατωτέρω:

(α) Τὰ στατιστικὰ στοιχεῖα δὲν εἶναι πάντοτε τὰ κατάλληλα διὰ νὰ προσαρμοσθοῦν εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τῆς θεωρίας. Τοῦτο διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συλλάβωμεν στατιστικῶς ὅλους τοὺς ἑρμηνευτικοὺς παράγοντας ἀφ' ἑνὸς καὶ πρακτικῶς δὲν εἶναι εὔκολον νὰ ἐφαρμόσωμεν ἰδανικὰς μεθόδους παραγωγῆς τῶν στοιχείων. Πάντα ταῦτα συντελοῦν εἰς τὴν γραμμικότητα τῆς συναρτήσεως κόστους. Ἡ χρησιμοποίησις λογιστικῶν περιόδων, ὁ λογιστικὸς ἐπιμερισμὸς τῶν ἐμμέσων ἐξόδων κατὰ προϊὸν ἢ δραστηριότητα, ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου σταθερᾶς ἀποσβέσεως (straight line method), αἱ μέθοδοι μετρήσεως τῆς διαφοροποιουμένης παραγωγῆς, κ.λπ., δὲν ἀποτελοῦν εἰς τὴν πρᾶξιν τὰς προτεινομένας ὑπὸ τῆς θεωρίας ἰδανικὰς μεθόδους ὑπολογισμοῦ τοῦ κόστους καὶ τῆς παραγωγῆς.

(β) Τὸ εὖρος τῶν χρησιμοποιουμένων στοιχείων δὲν εἶναι ἀρκούντως μέγα, ὥστε νὰ καλύπτῃ τὴν δυνατότητα ἐμφανίσεως φθίνοντος καὶ αὔξοντος κόστους. Τοῦτο καλύπτει συνήθως μόνον τὸ μέσον μέρος τῆς πραγματικῆς καμπύλης, τὸ ὁποῖον εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιπροσωπευθῇ κάλλιστα διὰ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς.

(γ) Σχετικὴ πρὸς τὸν δεύτερον λόγον εἶναι καὶ ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν κατὰ κλίμακα παραγωγῆς ἀναλογιῶν, κατὰ τὴν ὁποίαν δὲν ὑφίσταται οὐδεμία θεωρητικὴ ἀντίρρησις ἔναντι τῶν σταθερῶν ἀποδόσεων, ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς συνδυάζωνται κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε ἀναλογίαν.

Ἡ συνύπαρξις δὲ μικρῶν καὶ μεγάλων παραγωγικῶν μονάδων λειτουργουσῶν κερδοφόρως ἐπιβεβαιοῖ τὸ γεγονός, ὅτι τὸ εὖρος εἰς ὃ δὲν παρατηροῦνται οἰκονομίαι ἢ ἀντιοικονομίαι κλίμακος εἶναι μέγα. Ἐντὸς τοῦ εὔρους τούτου, λοιπόν, φαίνεται ὅτι ἐλειτούργουν αἱ ἐπιχειρήσεις ἐκ τῶν ὁποίων προῆλθον αἱ ἀνωτέρω ἐμπειρικαὶ ἔρευναι.

(δ) Τὰ εὑρήματα τῆς ἐμπειρικῆς ἐρεύνης ἐνέχουν καὶ τὴν ἐπίδρασιν τῆς τεχνολογικῆς προόδου, ἐφ' ὅσον ἡ ἀνάλυσις ἐγένετο ἐπὶ τῇ βάσει χρονολογικῶν σειρῶν. Ἡ συνεχὴς τεχνολογικὴ πρόοδος συντελεῖ ὥστε ἡ καμπύλη κόστους νὰ μετατίθηται συνεχῶς, μὲ συνέπειαν ἡ ἐπιχείρησις νὰ αὐξάνη τὴν παραγωγήν της μέχρι σημείου, τὸ ὁποῖον ὑπὸ συνθήκας ἀμεταβλήτου τεχνολογίας θὰ ἠδύνατο νὰ φθάσῃ μόνον μὲ αὔξον κόστος. Οὕτως ἕνεκεντοῦ ἀνωτέρω λόγου εἶναι δυνατὸν νὰ ἐμφανισθῇ γραμμικότης εἰς τὴν συνάρτησιν κόστους.

(ε) Αἱ μεταβολαὶ τοῦ μεγέθους τῶν ἐγκαταστάσεων τῆς παραγωγικῆς μονάδος γίγνονται συνήθως πρὸς ἐπίτευξιν ἑκάστοτε τοῦ ἀρίστου κόστους τῆς παραγωγῆς. Εἶναι συνεπῶς δυνατὸν τὰ στοιχεῖα τῆς ἐρεύνης ἅτινα ἀντιστοιχοῦν πρὸς δεδομένα μεγέθη ἐγκαταστάσεων νὰ ἐμφανίζουν ποιάν τινα γραμμικότητα.

(στ) Ἡ θεωρητικὴ πρότασις περὶ τοῦ σχήματος τῶν καμπύλων κόστους ἀντιστοιχεῖ εἰς στατικὴν θεώρησιν τῶν πραγμάτων. Ἡ ἐκ τῶν πραγματικῶν δεδομένων, ὅμως, καμπύλη κόστους ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δυναμικὴν ἔκφρασιν τῆς λειτουργίας τῆς ἐπιχειρήσεως. Ἡ δυναμικότης συνίσταται εἰς τὰς συνεχεῖς μεταβολὰς τῶν πραγματικῶν δεδομένων. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δύνανται νὰ ἐνταχθοῦν καὶ αἱ εἰδικώτεραι περιπτώσεις τῆς μεταβολῆς τοῦ μεγέθους τῶν ἐγκαταστάσεων καὶ τῆς τεχνολογικῆς προόδου.

(ζ) Ἡ ἀνεπάρκεια, τέλος, τῆς στατιστικῆς παλινδρομήσεως εἶναι αἰτία γραμμικότητος τῆς συναρτήσεως κόστους. Τὰ σφάλματα μεροληψίας κατὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν παραμέτρων τῆς συναρτήσεως βάσει τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων συντελοῦν εἰς τὴν γραμμικότητα τῆς ἐμπειρικῆς συναρτήσεως.

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω θὰ πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ θεωρητικὸς οἰκονομολόγος δὲν ἔχει λόγους νὰ ἀνησυχῇ* διὰ τὸ σχῆμα τῆς ἐμπειρικῆς καμπύλης ὁριακοῦ κόστους, ὅπερ δὲν ταυτίζεται πρὸς ἐκεῖνο τῆς θεωρητικῆς καμπύλης. Ἡ ἀπαρίθμησις τῶν ἀνωτέρω λόγων, τῶν δικαιολογούντων τὴν γραμμικότητα, εἶναι ἐν ταυτῷ καὶ συνηγορία ὑπὲρ τῆς μὴ ἀπορρίψεως τῆς θεωρίας. Ἡ ἁπλῆ ἐμπειρικὴ διαπίστωσις, ἄνευ τῆς ἐρεύνης τῶν αἰτίων τοῦ ἀποτελέσματος, δὲν δύναται ἀβιάστως νὰ ἀπορρίψῃ καλῶς θεμελιωμένην θεωρητικὴν πρότασιν. Καὶ ἀνωτέρω διεπιστώθη ὅτι ἡ γραμμικότης προέρχεται ἐξ ὡρισμένων αἰτίων μὴ δυναμένων νὰ θεμελιώσουν τὴν ἀπόρριψιν τῆς θεωρίας.

Ἡ διεξαχθεῖσα, ἐν τούτοις, ἔρευνα δὲν εἶναι ἄχρηστος. Ἀντιθέτως μάλιστα μᾶς ἀποκαλύπτει ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν δυναμικὴν τοῦ πραγματικοῦ κόστους, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν μὴ ὕπαρξιν τῶν ἰδανικῶν συνθηκῶν καὶ στοιχείων ἅτινα ἀπαιτεῖ ἡ θεωρία.

---

* Βλ. Hans Staehle, «The Measurement of Statistical Cost Functions: An Appraisal of Some Recent Contributions» εἰς The American Economic Review, Vol - XXXII, 1942, σελ. 321 - 333.

III.1.4. **Ὁριακὸν φυσικὸν προϊὸν ἢ ὁριακὴ φυσικὴ παραγωγικότης.** Ἤδη ἐγένετο λόγος περὶ τοῦ νόμου τῶν μεταβλητῶν ἀναλογιῶν, ἢ τῆς φθινούσης ἀποδόσεως, καθ' ὃν αὐξανομένης τῆς ποσότητος ἑνὸς συντελεστοῦ, τῶν λοιπῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς παραμενόντων ἀμεταβλήτων, ἡ παραγομένη ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ βαίνει αὔξουσα μέχρις ὡρισμένου σημείου, πέραν τοῦ ὁποίου αὕτη ἄρχεται πίπτουσα. Ἀκριβῶς τὸ προϊὸν τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ἐκ τῆς προσθήκης μιᾶς ἐπὶ πλέον μονάδος παραγωγικοῦ συντελεστοῦ, τῶν λοιπῶν συντελεστῶν παραμενόντων ἀμεταβλήτων, καλεῖται ὁ ρ ι α κ ὸ ν φ υ σ ι κ ὸ ν π ρ ο ϊ ὸ ν ἢ ὁ ρ ι α κ ὴ φ υ σ ι κ ὴ π α ρ α γ ω γ ι κ ό τ η ς τοῦ συντελεστοῦ τούτου. Συνεπῶς ἡ ὁριακὴ παραγωγικότης συντελεστοῦ x βαίνει αὐξανομένη μὲ τὴν προσθήκην μονάδων τοῦ συντελεστοῦ τούτου εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν μέχρις ὡρισμένου σημείου. Πέραν τοῦ σημείου τούτου ἡ ὁριακὴ παραγωγικότης ἄρχεται πίπτουσα.

Ἡ ὁριακὴ παραγωγικότης εἶναι λίαν χρήσιμος ὡς ἔννοια εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν, διότι ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς ἑρμηνείας τοῦ σχηματισμοῦ τῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν καὶ τῆς ὁριακῆς θεωρίας τῆς διανομῆς τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς μεταξὺ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν. Λόγος περὶ τῶν ὁριακῶν προϊόντων θὰ γίνῃ ἐπίσης εἰς τὰ ἑπόμενα περὶ μερικῶν παραγώγων.

III.1.5. **Ὁριακοὶ λόγοι ὑποκαταστάσεως.** Εἰς τὸ κεφάλαιον II. ἐγένετο λόγος περὶ τῶν καμπύλων μετασχηματισμοῦ καὶ ἀδιαφορίας. Ἐνταῦθα θὰ προσθέσωμεν ὀλίγα τινά. Ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς παραγωγῆς δύο προϊόντων y καὶ x δύναται νὰ γραφῇ ὡς $y = f(x)$. Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι μονότιμος καὶ φθίνουσα, ὑποδηλοῦσα ὅτι αὐξανομένης (μειουμένης) τῆς παραγωγῆς τοῦ προϊόντος y, ἡ παραγωγὴ τοῦ προϊόντος x μειοῦται (αὐξάνει). Ὁ ρυθμὸς δὲ κατὰ τὸν ὁποῖον βαίνει ἡ ὑποκατάστασις τοῦ ἑνὸς διὰ τοῦ ἑτέρου προϊόντος καλεῖται ὁ ρ ι α κ ὸ ς λ ό γ ο ς ὑ π ο κ α τ α σ τ ά σ ε ω ς. Ὁ λόγος οὗτος εἶναι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως μετασχηματισμοῦ. Ὁ ὁριακὸς λόγος ὑποκαταστάσεως εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης μετασχηματισμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν κλίσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας καταναλωτοῦ ὅπου ἔχομεν ἐπιλογὴν μεταξὺ δύο ἀγαθῶν, ὁ ὁ ρ ι α κ ὸ ς λ ό γ ο ς ὑ π ο κ α τ α σ τ ά σ ε ω ς τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων διὰ τοῦ ἑτέρου εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης ἀδιαφορίας εἶναι ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα, ἤτοι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως ἀδιαφορίας διὰ διαφόρους τιμὰς τῆς x.

III.1.6. **Σχέσις μεταξὺ ὁριακοῦ κόστους καὶ ὁριακοῦ προϊόντος.** Ἂς δεχθῶμεν ὅτι ἡ παραγωγὴ εἰς μίαν παραγωγικὴν μονάδα συντελεῖται δι' ἑνὸς μεταβλητοῦ συντελεστοῦ, ἔστω τῆς ἐργασίας. Ὁ νόμος τῆς παραγωγῆς εἰς τὴν συγκεκριμένην παραγωγικὴν μονάδα δύναται νὰ διατυπωθῆ μαθηματικῶς διὰ μιᾶς συναρτήσεως παραγωγῆς* ὡς ἡ

$$Q = Q(L),$$

ὅπου Q = προϊὸν τῆς παραγωγῆς
καὶ L = μονάδες συντελεστοῦ «ἐργασία».

Τὸ ὁριακὸν προϊὸν (τῆς ἐργασίας) ἰσοῦται πρὸς τὴν πρώτην παράγωγον τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς καὶ καλεῖται φυσικόν, ἐφ' ὅσον ἀναφέρεται εἰς φυσικὰς μονάδας τοῦ προϊόντος. Καλεῖται δὲ ὁριακὸν χρηματικὸν προϊόν, (marginal revenue product), ἐφ' ὅσον πολλαπλασιασθῆ ἐπὶ τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος, ἰσχύοντος ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{dQ}{dL} = Q' = \text{ὁριακὸν φυσικὸν προϊόν},$$

καὶ pQ' = ὁριακὸν χρηματικὸν προϊόν.

Ἐφ' ὅσον ἰσχύει ὁ «Ρικαρδιανὸς» νόμος τῆς φθινούσης ἀποδόσεως** τὸ ὁριακὸν προϊὸν θὰ βαίνη φθῖνον αὐξανομένης τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ μεταβλητοῦ συντελεστοῦ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν ἑκάστοτε μιᾶς ἐπὶ πλέον μονάδος ἐκ τοῦ προϊόντος θὰ ἀπαιτῆται συνεχῶς καὶ μεγαλυτέρα ποσότης ἐκ τοῦ συντελεστοῦ. Τοῦτο, ὅμως, περαιτέρω σημαίνει ὅτι τὸ κόστος τῆς ἑκάστοτε ὁριακῆς μονάδος τοῦ προϊόντος εἰς ὅρους ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ θὰ αὐξάνη. Ἰσχύοντος ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ, ἡ ἀμοιβὴ τοῦ μεταβλητοῦ συντελεστοῦ εἶναι σταθερὰ (ω) καὶ συνεπῶς τὸ χρηματικὸν κόστος θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν αὔξουσαν ἀνάλωσιν τοῦ συντελεστοῦ ἐπὶ τὴν τιμὴν τούτου.

Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις συνολικοῦ κόστους εἶναι

$$C_T = \varphi(Q)$$

Τὸ ὁριακὸν κόστος θὰ εἶναι $\dfrac{dC_T}{dQ} = \varphi'(Q)$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ ἡ ἀμοιβὴ τῆς ἐργασίας (ω) ἰσοῦται πρὸς τὸ ὁριακὸν χρηματικὸν προϊόν, ἤτοι

$$pQ' = \omega$$

Ἐξ οὗ $p = \dfrac{\omega}{Q'}$

Ἐπίσης, ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας ἀγορᾶς, τὸ ὁριακὸν κόστος τείνει νὰ ἐξισωθῆ πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος, ἤτοι

$$\varphi'(Q) = p$$

* Περὶ τῶν συναρτήσεων παραγωγῆς βλ. καὶ εἰς ἑπόμενον κεφάλαιον

** Βλέπε J. Viner, «Cost Curves and Supply Curves» εἰς American Economic Association, Readings in Price Theory, London 1964, σελ. 206.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν

$$\varphi'(Q) = \frac{\omega}{Q'}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις μᾶς λέγει ὅτι τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸ ὁριακὸν προϊόν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αὐξανομένου τοῦ ὁριακοῦ προϊόντος, τὸ ὁριακὸν κόστος βαίνει φθῖνον καὶ ἀντιστρόφως.

Δεδομένου ὅτι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἔκφρασιν, ἥτις ἀπεικονίζει τὴν σχέσιν μεταξὺ κόστους καὶ προϊόντος, ὑπεισέρχονται ἕτεραι συναρτησιακαὶ σχέσεις, ὡς ἡ συνάρτησις κόστους, ἡ ὁποία ταξινομικῶς ἀνήκει εἰς τὴν περὶ τῶν τιμῶν (ἀξίας) θεωρίαν, καὶ ἡ συνάρτησις παραγωγῆς, ἡ ὁποία ἀνήκει εἰς τὴν θεωρίαν τῆς παραγωγῆς, αὕτη συνεπῶς ἀποτελεῖ τὴν σύζευξιν μεταξὺ τῶν δύο θεωριῶν. Πρῶτος συστηματικῶς ἀσχοληθεὶς μὲ τὴν σύζευξιν ταύτην ἦτο ὁ Alfred Marshall, ἐντὸς τοῦ πλαισίου τῆς ἐρεύνης τοῦ νόμου τῶν μεταβλητῶν ἀποδόσεων καὶ τῆς μορφῆς τῆς καμπύλης προσφορᾶς. Μὲ τὴν αὐτὴν ἔρευναν ἠσχολήθησαν ἐπίσης οἱ Sraffa, Viner, Joan Robinson*, F.Y. Edgeworth**, κ.ἄ.

III.1.7. **Ἐλαστικότητες.** Ἡ ἔννοια τῆς ἐλαστικότητος εἶναι ἐκ τῶν πλέον χρησίμων εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν καὶ τὴν ἐμπειρικὴν ἀνάλυσιν. Διὰ τῶν ἐλαστικοτήτων δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν τὰς ἀποκρίσεις μεταβλητῶν εἰς τὸ οἰκονομικὸν σύστημα, ὅταν ἕτεραι μεταβληταὶ μεταβάλλωνται. Ἡ σχέσις, ἤτοι ὁ λόγος, μεταξὺ ποσοστιαίων μεταβολῶν δύο μεταβλητῶν ἀποβαίνει ἡ ἀριθμητικὴ ἔκφρασις τῆς ἐλαστικότητος, περὶ τῆς ὁποίας θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω.

III.1.8. **Ἐλαστικότης συναρτήσεως.** Ἂς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν $y = f(x)$, ὅπου y εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῆς x. Ἐὰν δώσωμεν ὡρισμένην αὔξησιν εἰς y καὶ x, ἤτοι Δy καὶ Δx, τότε ἡ ποσοστιαία μεταβολὴ εἰς ἀμφοτέρας τὰς μεταβλητὰς θὰ εἶναι $\Delta y/y$ καὶ $\Delta x/x$. Ἡ μέση ποσοστιαία μεταβολὴ εἰς τὴν y ἐν σχέσει πρὸς τὴν κατὰ μονάδα ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς x εἶναι:

$$e = (\Delta y/y) : (\Delta x/x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

* P. Sraffa, «The Laws of Returns under Competitive Conditions». J. Robinson, «Rising Supply Curves» εἰς American Economic Association, Readings in Price Theory, London 1964.

** «The Laws of Increasing and Diminishing Returns», εἰς Papers Relating to Political Economy, London 1925.

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἔκφρασιν αἱ μεταβολαὶ Δy καὶ Δx δὲν εἶναι, ὡς εἰκός, ἀπειροσταὶ καὶ συνεπῶς ἀντιπροσωπεύουν ἓν τμῆμα τῆς καμπύλης τῆς συναρτήσεως. Ἄρα, ἡ ἐλαστικότης ἣν ἐκφράζει ἡ ἀνωτέρω μαθηματικὴ διατύπωσις εἶναι μία μέση τιμὴ ἐλαστικοτήτων. Ἡ ἔκφρασις Δy/Δx μετρεῖ οὐχὶ τὴν κλίσιν τῆς καμπύλης εἰς ὡρισμένον σημεῖον, ἀλλὰ τὴν κλίσιν τῆς χορδῆς τοῦ τόξου τῆς καμπύλης, τὸ ὁποῖον τόξον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν σημείων y καὶ (y + Δy). Συνεπῶς ἡ ἔκφρασις $e = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$ ἀποτελεῖ τὴν τοξοειδῆ ἐλαστικότητα (arc elasticity).

Ἐὰν τώρα λάβωμεν τὸ ὅριον τῆς $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ἤτοι τὴν κλίσιν τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον (y,x) θὰ ἔχωμεν

$$e = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις ἀποτελεῖ τὴν στιγμικὴν ἐλαστικότητα (point elasticity), ἢ ἄλλως τὴν ἐλαστικότητα τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$ εἰς τὸ σημεῖον x. Οὕτως ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐλαστικότητα μιᾶς συναρτήσεως διαιροῦμεν τὴν ὁριακὴν τιμὴν (dy/dx) διὰ τῆς μέσης τιμῆς (y/x) τῆς συναρτήσεως ἢ ἄλλως πολλαπλασιάζομεν τὴν ὁριακὴν τιμὴν ἐπὶ τὴν ποσότητα (x/y).

Ἐνδιαφέρον εἶναι νὰ ἴδωμεν τὴν ἐλαστικότητα τῶν διαφόρων μορφῶν συναρτήσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως $y = \alpha + \beta x$, ἡ παράγωγος εἶναι μὲν σταθερά, $f'(x) = \beta$, ἡ μέση ὅμως τιμὴ μεταβάλλεται μεταβαλλομένης τῆς x, καὶ συνεπῶς ἡ ἐλαστικότης εἶναι διάφορος εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς «καμπύλης». Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = 5 + 2x$. Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι 2. Ἡ ἐλαστικότης διὰ τιμὴν $x = 2$ εἶναι $e = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = 2 \cdot \frac{2}{9} = 0{,}45$. Διὰ τιμὴν τῆς $x = 10$, ἡ ἐλαστικότης εἶναι $e = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = 2 \cdot \frac{10}{25} = 0{,}80$. Ἡ ἐλαστικότης τῆς συναρτήσεως $y = \beta x$ ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα εἰς ἅπαντα τὰ σημεῖα, διότι $e = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \beta \cdot \frac{x}{\beta x} = 1$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως ὀρθογωνίου ὑπερβολῆς $xy = \gamma$ ἡ ἐλαστικότης εἶναι (— 1) εἰς ἅπαντα τὰ σημεῖα. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: Ἔχομεν $y = \gamma x^{-1}$ καὶ $\frac{dy}{dx} = -\gamma x^{-2}$. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐλαστικότητος $e = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = -\gamma x^{-2} \cdot \frac{x}{\gamma x^{-1}} = -x^{-2} \cdot x^2 = -1.$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x^{\beta}$, ἡ ἐλαστικότης ἰσοῦται πρὸς τὴν σταθερὰν β. Τοῦτο δὲ διότι $\frac{dy}{dx} = \alpha\beta x^{\beta-1}$, καὶ $e = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} =$ $= \alpha\beta x^{\beta-1} \cdot \frac{x}{\alpha x^{\beta}} = \beta$. Ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι $y = \alpha x^{-\beta}$, ἢ ἄλλως $yx^{\beta} = \alpha$, ἡ ἐλαστικότης εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἴση πρὸς $(-\beta)$ εἰς ἅπαντα τὰ σημεῖα.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως $y = e^x$, ἡ ἐλαστικότης ἰσοῦται πρὸς x. Τοῦτο διότι $\frac{dy}{dx} = e^x$, καὶ $e = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = e^x \frac{x}{e^x} = x$. Ἡ ἐλαστικότης τῆς συναρτήσεως $y = e^{\alpha x}$ εἶναι ἴση πρὸς αx, διότι $e = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \alpha e^{\alpha x} \cdot \frac{x}{e^{\alpha x}} = \alpha x$.

Ἄς λάβωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἀμφότεραι αἱ μεταβληταὶ εἶναι ἐκπεφρασμέναι εἰς φυσικοὺς λογαρίθμους. Ἡ συνάρτησις $y = \alpha x^{\beta}$ εἰς λογαρίθμους γίνεται:

$$\log y = \log \alpha + \beta \log x.$$

Ἡ πρώτη παράγωγος ταύτης εἶναι κατὰ τοὺς κανόνας παραγωγίσεως:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{x} \quad \text{καὶ} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{x} y$$

Ἡ ἐλαστικότης δὲ εἶναι $e = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{\beta}{x} y \cdot \frac{x}{y} = \beta$. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν ὅτι εἰς τὴ περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ μεταβληταὶ εἶναι ἐκπεφρασμέναι εἰς λογαριθμικὴν κλίμακα ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς ἐξισώσεως ἢ ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἶναι καὶ ἡ ἐλαστικότης τῆς συναρτήσεως. Τοῦτο σημαίνει ὅτι $\frac{d(\log y)}{d(\log x)} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$.

Τὸ γεγονὸς ὅτι $\frac{d(\log y)}{d(\log x)} =$ ἐλαστικότης δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς: Εἶναι γνωστὸν ὅτι $\frac{d(\log y)}{dy} = \frac{1}{y}$ καὶ $\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}$. Ἐκ τούτων ἔχομεν $d(\log y) = \frac{dy}{y}$ καὶ $d(\log x) = \frac{dx}{x}$.

Ἀλλὰ $\frac{dy}{y} : \frac{dx}{x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} =$ ἐλαστικότ

Συνεπῶς $\frac{d(\log y)}{d(\log x)} =$ ἐλαστικότης.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης, ἡ ἐλαστικότης εἰς σημεῖον x θὰ εἶναι $e = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \text{συν}\, x \cdot \frac{x}{y} = \frac{\text{συν}\, x}{\text{ημ}\, x} \cdot x = \frac{x}{\text{εφ}\, x}$.

Τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ ὅτι $\frac{d\,(\text{ημ}\, x)}{dx} = \text{συν}\, x$, καὶ $\frac{\text{ημ}\, x}{\text{συν}\, x} = \text{εφ}\, x$.

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ἐλαστικότητος εἶναι τὸ κριτήριον βάσει τοῦ ὁποίου θὰ κρίνωμεν τὴν ἐλαστικότητα ἢ ἀνελαστικότητα ἑνὸς οἰκονομικοῦ φαινομένου, ὡς λόγου χάριν ἡ ζήτησις ἀγαθοῦ τινος. Ἡ διαχωριστικὴ γραμμὴ συνήθως εἶναι ἡ ἐλαστικότης ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα. Ὅταν $e = 1$ εἰς σημεῖον x, τότε μία κατὰ 10% αὔξησις τῆς x θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν κατὰ 10% αὔξησιν τῆς y. Ὅταν $e > 1$ εἰς σημεῖον x, τότε μία κατὰ 10% αὔξησις τῆς x θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν μεγαλυτέραν ποσοστιαίαν αὔξησιν τῆς y. Ὅταν, τέλος, $e < 1$ εἰς σημεῖον x, τότε μία κατὰ 10% αὔξησις τῆς x θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν μικροτέραν ποσοστιαίαν αὔξησιν τῆς y.

Περαιτέρω θὰ ἀναφερθῶμεν εἰς τὰ σπουδαιότερα εἴδη ἐλαστικότητος εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν.

III.1.8.0. **Ἐλαστικότης ζητήσεως.** Ἡ ἐλαστικότης ζητήσεως διακρίνεται εἰς ἐλαστικότητα ὡς πρὸς τὴν τιμὴν (price elasticity of demand) καὶ εἰς εἰσοδηματικὴν ἐλαστικότητα (income elesticity). Ἡ μὲν πρώτη ὁρίζεται ὡς ἡ ποσοστιαία μεταβολὴ εἰς τὴν ζητουμένην ποσότητα ἀγαθοῦ τινος ἐν σχέσει πρὸς τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς τιμῆς. Ἡ δὲ δευτέρα, ὡς ἡ ποσοστιαία μεταβολὴ εἰς τὴν ζητουμένην ποσότητα τοῦ ἀγαθοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τοῦ εἰσοδήματος τοῦ καταναλωτοῦ. Εἰς τὰ ἑπόμενα λέγοντες ἐλαστικότητα ζητήσεως ἢ προσφορᾶς θὰ ἐννοοῦμεν τὴν τοιαύτην ὡς πρὸς τὴν τιμήν.

Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις ζητήσεως ἀγαθοῦ τινος εἶναι $q = f(p)$, ἔνθα q εἶναι ἡ ζητουμένη ποσότης καὶ p ἡ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ. Ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως θὰ εἶναι: $e = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$.

Ὡς παράδειγμα ἂς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν ζητήσεως $q = 60 - 10p$. Ἡ ἐλαστικότης θὰ ἰσοῦται πρὸς $e = -10 \cdot \frac{p}{q}$. Εἰς τιμὴν $p = 2$ καὶ $q = 60 - 10.(2) = 40$, $e = -\frac{1}{2}$. Εἰς τιμὴν $p = 4$ καὶ $q = 60 - 10.(4) = 20$, $e = -2$. Εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι ἡ ζήτησις εἰς τιμὴν $p = 2$ εἶναι σχετικῶς ἀνελαστική, εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἰς τιμὴν $p = 4$, ἡ ζήτησις εἶναι σχετικῶς ἐλαστική. Εἰς τιμὴν $p = 3$, ἔχομεν $e = -1$, καὶ συνεπῶς ἡ ζήτησις εἶναι ἐλαστική, δεδομένου ὅτι τιμὴ ἐλαστικότητος κάτω τῆς μονάδος ἀποβαίνει ζήτησις ἀνελαστική.

Ἄς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν ζητήσεως ἥτις ὑπείκει εἰς τὸν νόμον $q = \gamma p^{-\alpha}$. Ἡ ἐλαστικότης ἐνταῦθα εἶναι σταθερὰ καὶ ἰσοῦται πρὸς $-\alpha$. Ἐὰν ἡ καμπύλη ζητήσεως εἶναι ὀρθογώνιος ὑπερβολὴ $q = \gamma p^{-1}$, τότε ἡ ἐλαστικότης εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς -1 εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης ζητήσεως. Γενικῶς, ἀναλόγως τοῦ νόμου εἰς ὃν ἡ ζήτησις ὑπείκει θὰ ἔχωμεν καὶ διαφόρους ἐλαστικότητας ζητήσεως.

Ἡ σημασία τῆς ἐλαστικότητος εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς ἀγορᾶς δύναται νὰ καταδειχθῆ ἐκ τῶν ἐπιδράσεων τὰς ὁποίας ἔχουν ἐπὶ τῆς συνολικῆς δαπάνης δι' ἓν ἀγαθὸν αἱ μεταβολαὶ τῆς τιμῆς του.

Ἡ συνολικὴ δαπάνη δι' ἓν ἀγαθὸν ἢ ἄλλως τὸ σύνολον τῶν εἰσπράξεων τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ἀγαθοῦ, εἶναι $pq = pf(p)$. Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως ταύτης ὡς πρὸς τὴν τιμὴν εἶναι*:

$$\frac{d}{dp}[pf(p)] = f(p) + pf'(p)$$

$$= f(p)\left(1 + \frac{pf'(p)}{f(p)}\right) = f(p)\left(1 - f'(p)\cdot\frac{p}{q}\right)^{**}$$

$$= f(p)\,[(1-e)].$$

Ἡ διερεύνησις τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως εἶναι λίαν ἐνδιαφέρουσα. Οὕτως, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $e = 1$, ἡ παράγωγος τῆς συνολικῆς δαπάνης θὰ εἶναι

$$\frac{d}{dp}[pf(p)] = f(p)\,[1-1] = 0.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ὅταν ἡ ἐλαστικότης ἰσοῦται πρὸς 1, ἡ συνολικὴ δαπάνη τῶν καταναλωτῶν διὰ τὸ συγκεκριμένον ἀγαθὸν εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς οἱανδήποτε τιμήν. Συνεπῶς πᾶσα μεταβολὴ τῆς τιμῆς οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς συνολικῆς δαπάνης ἔχει.

Ἐὰν $e > 1$, τότε

$$\frac{d}{dp}[pf(p)] = f(p)\,[1-e] < 0$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι μία αὔξησις τῆς τιμῆς θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν μείωσιν τῆς συνολικῆς δαπάνης, ἤτοι ὀλιγωτέρας εἰσπράξεις ὑπὸ τοῦ πωλητοῦ (ἐλαστικὴ ζήτησις).

Ἐὰν $e < 1$, τότε

$$\frac{d}{dp}[pf(p)] = f(p)\,[1-e] > 0.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι μία αὔξησις τῆς τιμῆς θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν

---

* Συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα εὑρέσεως παραγώγου γινομένου.

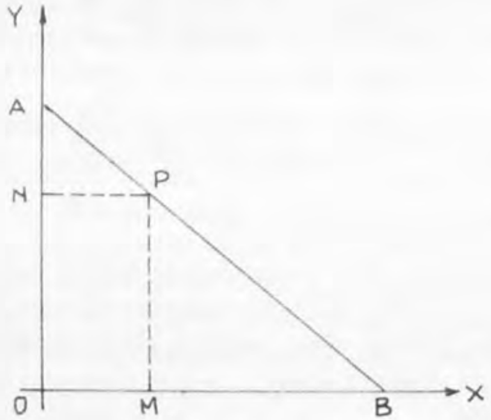
** Τὸ σημεῖον (-) τίθεται πρὸς ἔνδειξιν τῆς ἀρνητικῆς παραγώγου.

αὔξησιν τῆς συνολικῆς δαπάνης, ἢ περισσοτέρας εἰσπράξεις ὑπὸ τοῦ πωλητοῦ (ἀνελαστικὴ ζήτησις).

Τὰ ἀνωτέρω καθιστοῦν σαφῆ τὴν σπουδαιότητα ἣν ἔχει ἡ γνῶσις τῆς ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως ἐκ μέρους τοῦ μονοπωλητοῦ. Ἡ γνῶσις τῆς ἐλαστικότητος δὲν εἶναι ἀπαραίτητος καὶ χρήσιμος μόνον διὰ τὸν πωλητήν, ἀλλὰ καὶ διὰ τὴν κρατικὴν οἰκονομικὴν πολιτικήν, ἰδίᾳ κατὰ τὴν ἐπιβολὴν φόρων καὶ δασμῶν.

Γενικῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἐλαστικότητα τῆς συναρτήσεως ζητήσεως οἱασδήποτε μορφῆς, ἐφ' ὅσον αὕτη ἔχῃ παράγωγον, βάσει τοῦ τύπου $e = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$.

Τὴν ἐλαστικότητα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐπίσης διὰ γραφικῆς μεθόδου, ὡς τοῦτο ἔπραξεν ὁ A. Marshall. Ἔστω ὅτι ἡ «καμπύλη» ζητήσεως εἶναι



Σχ. III. 14.

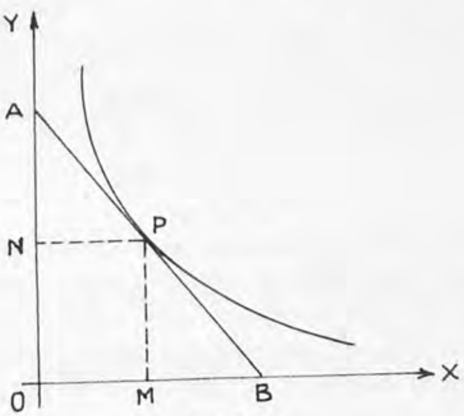
γραμμικῆς μορφῆς ὡς εἰς τὸ Σχ. III. 14. Ἡ ἐλαστικότης εἰς τὸ σημεῖον P εἶναι $\frac{AP}{PB}$ ἢ $\frac{OM}{MB}$ ἢ $\frac{AN}{NO}$.

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐλαστικότητος $e = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$.

Ἔχομεν $e = -\frac{PM}{MB} \cdot \frac{OM}{PM} = -\frac{OM}{MB}$.

Ἐὰν ἡ καμπύλη ζητήσεως εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ Σχ. III.15, τότε ἡ ἐλαστικότης εἰς τὸ σημεῖον P τῆς καμπύλης εὑρίσκεται διὰ χρησιμοποιήσεως τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ὡς καὶ ὡρισμένων γεωμετρικῶν ἰδιοτήτων. Βάσει τοῦ τύπου $e = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$, θὰ ἔχωμεν $\frac{dy}{dx} = -\frac{PM}{MB}$, $\frac{x}{y} = \frac{OM}{PM}$ καὶ συνεπῶς $e = -\frac{PM}{MB} \cdot \frac{OM}{\Pi M} = -\frac{OM}{MB}$.

Περαιτέρω ἐκ τοῦ Σχ. III.15 ἔχομεν: $\frac{OM}{MB} = \frac{AP}{PB} = \frac{AN}{NO}$.



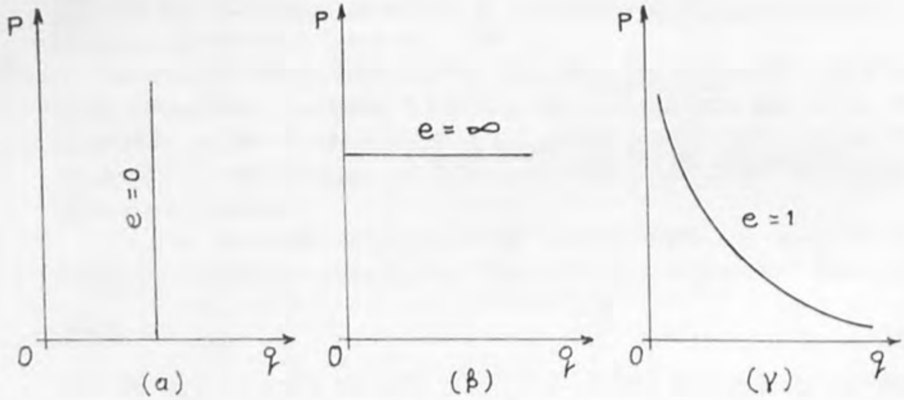
Σχ. III. 15.

Ἕκαστος ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριῶν λόγων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μέτρον τῆς ἐλαστικότητος ζητήσεως εἰς τὸ σημεῖον P.

Κατωτέρω παρουσιάζομεν συνοπτικὸν πίνακα ἀναφερόμενον εἰς τοὺς διαφόρους βαθμοὺς ἐλαστικότητος ζητήσεως, ὡς καὶ διάγραμμα ἐμφαῖνον τρεῖς χαρακτηριστικὰς «καμπύλας» ζητήσεως.

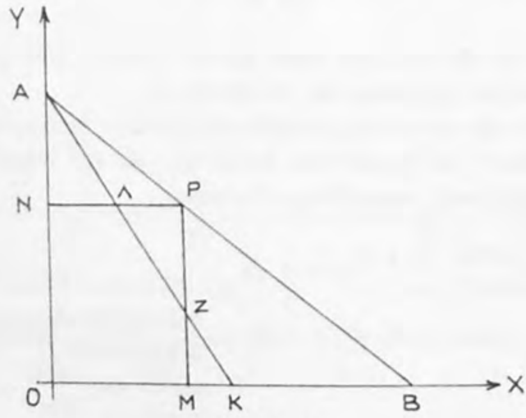
Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἐλαστικότητος	Ἡ ἐλαστικότης εἶναι:
$e = 0$	τελείως ἀνελαστικὴ
$1 > e > 0$	ἀνελαστικὴ
$e = 1$	μοναδιαία
$\infty > e > 1$	ἐλαστικὴ
$e = \infty$	τελείως ἢ ἀπείρως ἐλαστική.

III.1.8.1. **Σχέσις μέσης, ὁριακῆς προσόδου καὶ ἐλαστικότητος ζητήσεως.** Ἀνωτέρω ἐχρησιμοποιήσαμεν τὴν γραφικὴν μέθοδον πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐλαστικότητος. Τὰ ἀνωτέρω εὑρήματα δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ νὰ διατυπώσωμεν τὴν ὑφισταμένην σχέσιν μεταξὺ ἐλαστικότητος καὶ τῆς μέσης καὶ ὁριακῆς προσόδου. Βάσει τοῦ Σχ. III.17 ἡ ἐλαστικότης εἰς τὸ



Σχ. III. 16.

σημεῖον P εἶναι $\frac{AP}{PB}$ ἢ $\frac{AN}{NO}$. Ἡ εὐθεῖα AK εἶναι ἡ καμπύλη ὁριακοῦ ἐσόδου ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν καμπύλην μέσου ἐσόδου ἢ καμπύλην ζητήσεως AB. Κατὰ τὰ γνωστά, ἡ AK τέμνει τὴν NP εἰς τὸ μέσον ἀκριβῶς,



Σχ. III. 17.

δημιουργοῦσα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ANΛ καὶ ΛPZ. Τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα καθ' ὅλα, καὶ συνεπῶς AN = PZ. Οὕτως, ἀντὶ τοῦ λόγου $\frac{AN}{NO}$ δυνάμεθα ὡς μέτρον τῆς ἐλαστικότητος νὰ ἔχωμεν τὸν λόγον $\frac{PZ}{PM}$ ἢ

$\frac{PM-ZM}{PM}$. Ἀλλὰ PM = μέση πρόσοδος (AR) καὶ ZM = ὁριακὴ πρόσοδος (MR), καὶ συνεπῶς $e = \frac{\text{μέση πρόσοδος} - \text{ὁριακὴ πρόσοδος}}{\text{μέση πρόσοδος}} = \frac{AR-MR}{AR}$

Ἐὰν εἰς τὸν ἄξονα τῶν y μετρεῖται ἡ τιμὴ καὶ εἰς τὸν ἄξονα τῶν x μετρεῖται ἡ ποσότης τότε ὁ ἀνωτέρω λόγος ἀντιστρέφεται, ἤτοι $e = \frac{AR}{AR-MR}$.

Ἐξ αὐτῆς θὰ ἔχωμεν:

$$AR = eAR - eMR$$

$$MR = AR\,\frac{e-1}{e}$$

$$AR = MR\,\frac{e}{e-1}.$$

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω σχέσεων, μεταξὺ ἀφ' ἑνὸς μὲν ὁριακῆς προσόδου καὶ ἐλαστικότητος ζητήσεως, καὶ ἀφ' ἑτέρου δὲ μέσης προσόδου καὶ ἐλαστικότητος, προκύπτει ὅτι: (α) ὅταν ἡ ἐλαστικότης ἰσοῦται πρὸς μονάδα, ἡ ὁριακὴ πρόσοδος ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδὲν $\left(MR = AR\,\frac{1-1}{1} = 0\right)$, (β) ὅταν ἡ ἐλαστικότης εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, ἡ ὁριακὴ πρόσοδος εἶναι πάντοτε θετικὴ $\left(MR = AR\,\frac{e-1}{e} > o\right)$· τέλος (γ) ὅταν ἡ ἐλαστικότης εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος, ἡ ὁριακὴ πρόσοδος εἶναι πάντοτε ἀρνητικὴ $\left(MR = AR\,\frac{e-1}{e} < o\right)$. Οὕτω δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι, ὅπου ἡ καμπύλη μέσης προσόδου εἶναι ἐλαστικὴ ἡ ὁριακὴ πρόσοδος εἶναι θετικὴ καὶ ὅπου ἡ καμπύλη μέσης προσόδου εἶναι ἀνελαστικὴ ἡ ὁριακὴ πρόσοδος εἶναι ἀρνητική.

III.1.8.2. **Εἰσοδηματικὴ ἐλαστικότης ζητήσεως καὶ ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως.** Ἀνωτέρω ἐξητάσαμεν τὴν ἐλαστικότητα ζητήσεως ὡς πρὸς τὴν τιμὴν διαπιστώσαντες, ὅτι ἡ ζήτησις ἄλλοτε μὲν εἶναι ἐλαστικὴ (ἢ πλήρως ἐλαστική), ἄλλοτε δὲ ἀνελαστικὴ (ἢ πλήρως ἀνελαστική). Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: ὅταν λέγωμεν ὅτι μία κατὰ 10% μείωσις τῆς τιμῆς ἀγαθοῦ τινος ἐπιφέρει μίαν κατά, ἔστω, 20% αὔξησιν τῆς ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ, τί ἀκριβῶς συμβαίνει, ὥστε ἡ ζήτησις αὐξάνει μειουμένης τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ;

Ἡ μείωσις τῆς τιμῆς ἔχει δύο ἀποτελέσματα. Τὸ ἓν ἀποτέλεσμα εἶναι εἰσοδηματικὸν (income effect). Δηλονότι, ὅταν ἡ τιμὴ μειοῦται, αὐξάνει ἡ ἀγοραστικὴ δύναμις τοῦ εἰσοδήματος τοῦ καταναλωτοῦ καὶ συνεπῶς, οὗτος δύναται νὰ προβῇ εἰς ἀγορὰς μεγαλυτέρων ποσοτήτων ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ. Τὸ ἕτερον ἀποτέλεσμα εἶναι τὸ ἐκ τῆς ὑποκαταστάσεως (substitution effect). Δηλονότι, ὅταν ἡ τιμὴ μειοῦται, αὐξάνει ἡ κατανάλωσις τοῦ εὐθηνοτέρου ἀγαθοῦ εἰς βάρος ἑτέρων ἀγαθῶν, τοῦ δαπανωμένου εἰσοδήματος παραμένοντος ἀμεταβλήτου. Οὕτως, ἡ κατὰ τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα αὔξησις τῆς ζητήσεως κατὰ 20% ὀφείλεται εἰς τὴν εἰσοδηματικὴν ἀφ' ἑνὸς καὶ εἰς τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὑποκαταστάσεως ἀφ' ἑτέρου. Πρὶν ἢ δώσωμεν ὅμως τὸν τύπον τῆς ἐλαστικότητος εἰς ὅρους τῶν δύο ἀνωτέρω ἐπιδράσεων θὰ πρέπει νὰ ἀναπτύξωμεν δι' ὀλίγων τὴν ἐλαστικότητα ὡς πρὸς τὸ εἰσόδημα καὶ τὴν ἐλαστικότητα ὑποκαταστάσεως.

(i) Εἰσοδηματικὴ ἐλαστικότης ζητήσεως (income elasticity of demand) εἶναι ὁ λόγος τῆς ποσοστιαίας μεταβολῆς τῆς ζητήσεως ἀγαθοῦ τινος ἐν σχέσει πρὸς τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν εἰς τὸ εἰσόδημα τοῦ καταναλωτοῦ. Ἡ σχέσις μεταξὺ ζητήσεως καὶ εἰσοδήματος δύναται νὰ διατυπωθῇ μαθηματικῶς εἰς τὴν συνάρτησιν $q = f(Y)$, ὅπου q εἶναι ἡ ζητουμένη ποσότης καὶ Y εἶναι τὸ εἰσόδημα τοῦ καταναλωτοῦ. Μαθηματικῶς ἡ ἐλαστικότης ὡς πρὸς τὸ εἰσόδημα δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$e_1 = \frac{dq}{dY} \cdot \frac{Y}{q}$$

Ὁμιλοῦντες περὶ εἰσοδηματικῆς ἐλαστικότητος ζητήσεως ἀγαθοῦ τινος ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ τιμὴ τούτου παραμένει ἀμετάβλητος καὶ συνεπῶς ἡ ζήτησις δέχεται μόνον τὴν ἐπίδρασιν τῆς μεταβολῆς τοῦ εἰσοδήματος. Ἡ ἐπίδρασις αὐτὴ εἶναι πάντοτε σχεδὸν θετική, ἤτοι μία αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος ἐπιφέρει αὔξησιν τῆς ζητήσεως, μικροτέραν (ἀνελαστική), ἴσην, ἢ μεγαλυτέραν (ἐλαστική). Ὑπάρχει, ὅμως, καὶ ἡ περίπτωσις καθ' ἣν ἡ αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος ὁδηγεῖ εἰς μείωσιν τῆς ζητήσεως ὡρισμένων ἀγαθῶν, ἅτινα κατώτερα ἀγαθὰ καλοῦνται.

Ἡ εἰσοδηματικὴ ἐλαστικότης δύναται νὰ λάβῃ διαφόρους τιμάς. Ἐλαστικότης ἴση πρὸς τὴν μονάδα σημαίνει, ὅτι ἡ ἀναλογία τοῦ εἰσοδήματος τοῦ δαπανωμένου διὰ συγκεκριμένον ἀγαθὸν παραμένει ἡ αὐτὴ πρὸ καὶ μετὰ τὴν αὔξησιν τούτου. Ἐὰν ἡ ἐλαστικότης εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος τότε ἡ ἀναλογία τοῦ εἰσοδήματος τοῦ δαπανωμένου διὰ τὸ ἀγαθὸν αὐξάνει αὐξανομένου τοῦ εἰσοδήματος. Ἀντιθέτως ἐλαστικότης μικροτέρα τῆς μονάδος σημαίνει, ὅτι ἡ ἀναλογία αὕτη βαίνει μειουμένη αὐξανομένου τοῦ εἰσοδήματος. Τέλος μηδενικὴ ἐλαστικότης σημαίνει, ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος δὲν ὁδηγεῖ εἰς αὔξησιν τῆς ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ, ὁπότε ἡ δαπάνη διὰ τὸ ἀγαθὸν τοῦτο ὡς ποσοστοῦ ἐπὶ τοῦ συνόλου τοῦ εἰσοδήματος τοῦ καταναλωτοῦ μειοῦται.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ καλέσωμεν ἀγαθὰ ἀνωτέρου ἐ π ι π έ δ ο υ ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ἡ εἰσοδηματικὴ ἐλαστικότης εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, καὶ β α σ ι κ ὰ ἀ γ α θ ὰ ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ἡ εἰσοδηματικὴ ἐλαστικότης εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος.

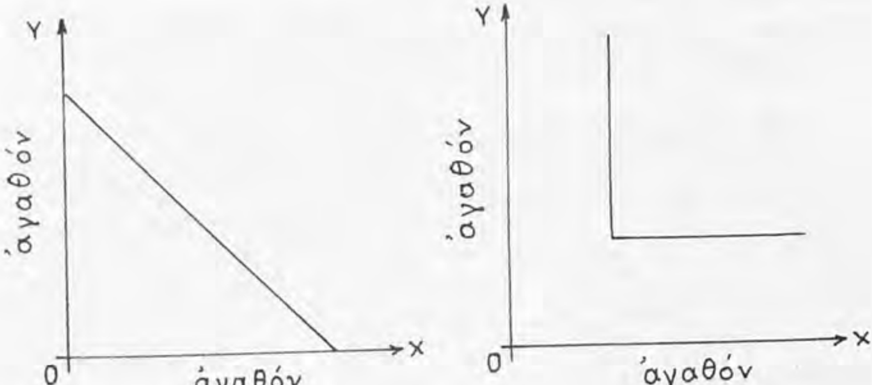
(ii) Ἐ λ α σ τ ι κ ό τ η ς ὑ π ο κ α τ α σ τ ά σ ε ω ς, ἐξ ἄλλου, εἶναι τὸ μέτρον ὅπερ μετρεῖ τὴν ἔκτασιν καθ' ἣν ἓν ἀγαθὸν ὑποκαθίσταται εἰς τὴν κατανάλωσιν ἑτέρου, τοῦ καταναλωτοῦ ἀποκομίζοντος ὅμως τὴν αὐτὴν ἱκανοποίησιν*. Τὸ σχῆμα τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας τοῦ καταναλωτοῦ, δι' ἅς ἤδη ὡμιλήσαμεν, ὑποδηλοῖ τὸν λόγον ὑποκαταστάσεως τοῦ ἑνὸς ἀγαθοῦ διὰ τοῦ ἑτέρου. Ἡ μαθηματικὴ διατύπωσις τῆς ἐλαστικότητος ὑποκαταστάσεως δύο ἀγαθῶν x καὶ y εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

$$e_s = -\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x}{y}} : \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dy}{dx}}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος δύναται νὰ διατυπωθῇ μὲ λέξεις ὡς ἑξῆς:

$$e_s = \frac{\text{Σχετικὴ αὔξησις τοῦ λόγου τῶν δύο ἀγαθῶν } x/y}{\text{Σχετικὴ μείωσις τῆς ὁριακῆς σπουδαιότητος τοῦ } x \text{ εἰς ὅρους τοῦ } y.}$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ἐλαστικότητος ὑποκαταστάσεως δύναται νὰ κυμανθῇ μεταξὺ 0 καὶ ∞. Ἡ ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως μεταξὺ δύο ἀγαθῶν εἶναι μηδενική, ὅταν ὑποκατάστασις μεταξὺ τούτων δὲν χωρεῖ, εἶναι ἄπειρος ὅταν τὰ ἀγαθὰ εἶναι μεταξύ των πλήρως ὑποκατάστατα. Αἱ δύο αὗται περιπτώσεις ἐμφαίνονται εἰς τὸ κατωτέρω Σχ. III.18.



Σχ. III. 18.

* Τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὁ καταναλωτὴς παραμένει ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης ἀδιαφορίας.

Μεταξὺ τῶν δύο ἀκραίων περιπτώσεων ὑφίστανται, ὡς εἰκός, αἱ περιπτώσεις καθ' ἃς ἡ ἐλαστικότης εἶναι, ἴση, μικροτέρα, ἢ μεγαλυτέρα τῆς μονάδος.

Κατόπιν τῶν ὅσων ἐλέχθησαν ἀνωτέρω, ἤδη δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἐλαστικότητα ζητήσεως ὡς πρὸς τὴν τιμὴν εἰς ὅρους τῶν δύο ἑτέρων ἐλαστικοτήτων, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ ποσοστὸν τοῦ εἰσοδήματος τὸ δαπανώμενον διὰ τὸ ἀγαθὸν x, (μ_x). Ἡ σχέσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$e = \mu_x \cdot e_I + (1 - \mu_x) \cdot e_s$$

Γνωρίζοντες δύο ἐκ τῶν ἐλαστικοτήτων δυνάμεθα πάντοτε νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην βάσει τῆς ἀνωτέρω σχέσεως.

Τὸ πρῶτον μέρος τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ($\mu_x e_I$) δεικνύει τὴν ἐπίδρασιν τοῦ εἰσοδήματος ἐπὶ τῆς ζητήσεως. Ἡ ἐπίδρασις αὕτη ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μεγέθους τοῦ ποσοστοῦ τοῦ δαπανωμένου διὰ τὸ ἀγαθὸν x καὶ ἐξ αὐτῆς ταύτης τῆς εἰσοδηματικῆς ἐλαστικότητος. Τὸ δεύτερον μέρος, $(1 - \mu x) \cdot e_s$, δεικνύει τὴν ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς ζητήσεως ἥτις προέρχεται ἀφ' ἑνὸς ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι τὸ ἀγαθὸν x κατέστη σχετικῶς εὐθηνότερον τοῦ y καὶ δύναται συνεπῶς νὰ ὑποκαταστήσῃ τοῦτο, καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐκ τῆς ποσότητος τοῦ y τὴν ὁποίαν ὁ καταναλωτὴς προηγουμένως ἠγόραζεν. Ἡ ποσότης $(1 - \mu_x)$ ἀκριβῶς δεικνύει τὸ μέρος τοῦ εἰσοδήματος τὸ ὁποῖον δὲν δαπανᾶται διὰ τὸ x.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου προκύπτει ὅτι, ὅταν ἡ ἐλαστικότης τόσον ὡς πρὸς τὸ εἰσόδημα, ὅσον καὶ τῆς ὑποκαταστάσεως εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα, ἡ ἐλαστικότης ζητήσεως ὡς πρὸς τὴν τιμὴν εἶναι πάντοτε ἴση πρὸς τὴν μονάδα. Παραδείγματος χάριν, $e = \mu_x \cdot 1 + (1 - \mu_x) \cdot 1 = \mu_x - \mu_x + 1 = 1$.

III.1.8.3. **Σταυροειδὴς ἐλαστικότης ζητήσεως.** Ἡ ζήτησις ἑνὸς ἀγαθοῦ δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς τιμῆς τούτου ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς τιμῆς ἑτέρων ἀγαθῶν ἅτινα εἶναι ὑποκατάστατα ἢ συμπληρωματικὰ τούτου. Οὕτως ἐπὶ παραδείγματος, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ βοείου κρέατος αὐξάνῃ θὰ ἀναμείνωμεν αὔξησιν τῆς καταναλώσεως χοιρινοῦ κρέατος, ἐφ' ὅσον ἡ τιμὴ τοῦ τελευταίου παραμένει ἀμετάβλητος. Ἡ σταυροειδὴς ἐλαστικότης εἶναι συνεπῶς ὁ λόγος τῆς ποσοστιαίας μεταβολῆς τῆς ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ y ὡς πρὸς τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ x.

Ἡ συναρτησιακὴ σχέσις τῆς ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ y καὶ τῶν τιμῶν καὶ τῶν λοιπῶν συμπληρωματικῶν ἢ ὑποκαταστάτων δίδεται ὑπὸ τῆς

$$q_y = f(p_y, p_x, p_z, \ldots),$$

ὅπου q_y ἡ ζήτησις τοῦ ἀγαθοῦ y, καὶ

p_x p_y, p_z, αἱ τιμαὶ τῶν ἀγαθῶν x, y καὶ z ἀντιστοίχως.

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις εἶναι συνάρτησις πολλῶν μεταβλητῶν καὶ συνεπῶς ἡ μαθηματικὴ διατύπωσις τῆς σταυροειδοῦς ἐλαστικότητος δὲν δύναται νὰ γίνῃ πρὶν ἢ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν παραγώγισιν πολυμεταβλητῶν συναρτήσεων, περὶ ἧς ὅμως θὰ γίνῃ λόγος ἐν τοῖς ἑπομένοις.

III.1.8.4. **Ἐλαστικότης προσφορᾶς** — Αὕτη ὁρίζεται ὡς ἡ ποσοστιαία μεταβολὴ τῆς προσφορᾶς ἀγαθοῦ τινος ἐν σχέσει πρὸς τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς τιμῆς του. Τὰ λεχθέντα περὶ ἐλαστικότητος ζητήσεως δύναται νὰ τύχουν ἐφαρμογῆς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλαστικότητος προσφορᾶς.

Ὑπάρχει ἐν τούτοις μία σημαντικὴ διαφορὰ μεταξὺ προσφορᾶς καὶ ζητήσεως. Δεδομένου, ὅτι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης ζητήσεως εἶναι ἀρνητικὴ ἡ ἐλαστικότης ταύτης εἶναι ἀρνητική, ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς προσφορᾶς αὕτη εἶναι θετική*.

Ἄς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν προσφορᾶς $S = f(p)$. Τὸ σύνολον τῶν εἰσπράξεων τοῦ πωλητοῦ θὰ εἶναι:

$$Sp = p \,.\, f(p)$$

Ἡ παράγωγος συναρτήσεως ὡς πρὸς p εἶναι:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp}[pf(p)] &= f(p) + pf'(p)\\ &= f(p) + \left(1 + \frac{pf'(p)}{f(p)}\right)\\ &= f(p)[1+\eta],\end{aligned}$$

ὅπου η = ἐλαστικότης προσφορᾶς.

Δεδομένου ὅτι ὁ δεύτερος παράγων τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως εἶναι θετικὸς καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις, ἤτοι $\eta = 1$, $\eta > 1$ καὶ $\eta < 1$, περαίνομεν, ὅτι ἡ συνολικὴ πρόσοδος τοῦ πωλητοῦ αὐξάνει αὐξανομένης τῆς τιμῆς, πρᾶγμα ὅπερ δὲν συμβαίνει πάντοτε εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ζητήσεως.

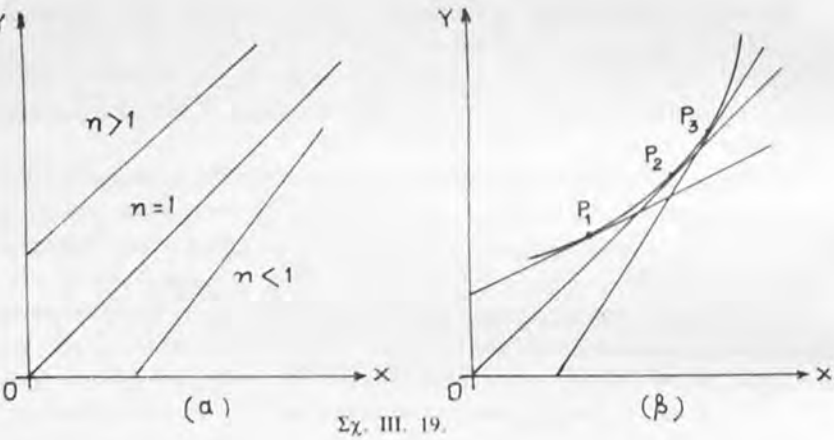
Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ἐλαστικότης τῆς προσφορᾶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα ὅπερ σημαίνει ὅτι μία κατά, ἔστω, 10% αὔξησις τῆς τιμῆς θὰ ἐπιφέρῃ μίαν κατὰ 10% αὔξησιν τῆς προσφορᾶς, τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι ἡ συνολικὴ πρόσοδος εἶναι σταθερὰ εἰς ὅλας τὰς τιμὰς ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ζητήσεως. Τουναντίον, εἰς πᾶσαν αὔξησιν τῆς τιμῆς ἀντιστοιχεῖ καὶ μεγαλυτέρα συνολικὴ πρόσοδος.

Γενικῶς, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἐλαστικότητα τῆς συναρτήσεως προσφορᾶς οἱασδήποτε μορφῆς, ἐφ' ὅσον αὕτη ἔχῃ παράγωγον., βάσει τοῦ τύπου

$$\eta = \frac{dy}{dx} \,.\, \frac{x}{y}\,.$$

* Ἐξαιρεῖται ἡ περίπτωσις τῆς πρὸς τὰ ὀπίσω στρεφομένης καμπύλης προσφορᾶς (backward bending curve).

Τέλος δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν περὶ τῆς ἐλαστικότητος προσφορᾶς δι' ἐπισκοπήσεως τῆς καμπύλης ταύτης.



Σχ. ΙΙΙ. 19.

Εἰς τὸ Σχ. ΙΙΙ.19 (α) ἔχομεν τρεῖς «καμπύλας» προσφορᾶς γραμμικῆς μορφῆς. Ἡ «καμπύλη» ἡ τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν y ἔχει ἐλαστικότητα μεγαλυτέρα τῆς μονάδος. Ἤτοι, ποσοστιαῖαι αὐξήσεις τῆς τιμῆς ὁδηγοῦν εἰς μεγαλυτέρας ποσοστιαίας αὐξήσεις τῆς προσφορᾶς (ἐλαστικὴ προσφορά). Ἡ «καμπύλη» ἡ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ἔχει ἐλαστικότητα ἴσην πρὸς τὴν μονάδα. Ἤτοι, ποσοστιαῖαι μεταβολαὶ τῆς τιμῆς ὁδηγοῦν εἰς τοῦ αὐτοῦ μεγέθους ποσοστιαίας μεταβολὰς τῆς προσφορᾶς πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν (ἐλαστικὴ προσφορά). Ἡ καμπύλη τέλος, ἡ τέμνουσα τὸν ἄξονα x ἔχει ἐλαστικότητα μικροτέρα τῆς μονάδος. Ἤτοι, ποσοστιαῖαι μεταβολαὶ τῆς τιμῆς ὁδηγοῦν εἰς μικροτέρου μεγέθους ποσοστιαίας μεταβολὰς τῆς προσφορᾶς (σχετικῶς ἀνελαστικὴ προσφορά).

Ἐξ ἄλλου, εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ καμπύλη προσφορᾶς εἶναι πραγματικὴ καμπύλη δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν περὶ τῆς ἐλαστικότητος εἰς τὰ διάφορα σημεῖα ταύτης φέροντες τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα. Οὕτως, ἐπισκοποῦντες τὸ Σχ. ΙΙΙ.19 (β), εἰς τὸ σημεῖον P_1 τῆς καμπύλης ἡ ἐλαστικότης εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, διότι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ σημείου τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y. Εἰς τὸ σημεῖον P_2 ἡ ἐλαστικότης ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα, διότι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ σημείου διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων. Τέλος, ἡ ἐλαστικότης εἰς τὸ σημεῖον P_3 εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος, διότι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ σημείου τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x.

Ἐκ τῆς πραγματικῆς καμπύλης προσφορᾶς συμπεραίνομεν, ὅτι κατὰ τὰ πρῶτα στάδια ἡ προσφορὰ εἶναι ἐλαστική, καθισταμένη ὅμως ἀνελαστικὴ ὅσον ἡ προσφερομένη ποσότης ἐξαντλεῖται ἢ ἡ παραγωγὴ φθάνει εἰς τὰ πέραν τοῦ ἀρίστου σημείου ἐπίπεδα.

Ὡς γενικὸν κανόνα δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν, ὅτι ἡ προσφορὰ τῶν περισσοτέρων ἀγαθῶν εἶναι σχετικῶς ἀνελαστικὴ βραχυχρονίως καὶ ἐλαστικὴ μακροχρονίως.

III.1.8.5. **Ἐλαστικότης συνολικοῦ κόστους.** Ἡ ποσοστιαία αὔξησις τοῦ συνολικοῦ κόστους ἔναντι μιᾶς ποσοστιαίας αὐξήσεως τῆς παραγομένης ποσότητος μᾶς παρέχει τὸ μέτρον τῆς ἐλαστικότητος τοῦ κόστους. Ὡς γνωστόν, τὸ συνολικὸν κόστος παραγωγῆς βαίνει συνεχῶς αὐξανόμενον ἐφ' ὅσον ἡ παραγωγὴ αὐξάνη. Συνεπῶς ἡ ἐλαστικότης κόστους θὰ εἶναι θετική, τῶν δύο μεταβλητῶν αὐξανομένων πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν.

Ἡ συνάρτησις συνολικοῦ κόστους δύναται νὰ λάβη τὴν μορφὴν $C_T = \alpha + \beta x^3 + \gamma x^2 + \lambda x$, ὡς εἴδομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις. Ἡ ἐλαστικότης κατὰ τὸν ὁρισμὸν $\frac{dC_T}{dx} \cdot \frac{x}{C_T}$ θὰ εἶναι:

$$\eta_c = \frac{(3\beta x^2 + 2\gamma x + \lambda)\, x}{\alpha + \beta x^3 + \gamma x^2 + \lambda x} = \frac{3\beta x^2 + 2\gamma x + \lambda}{\frac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \gamma x + \lambda}$$

Γνωστοῦ ὄντος ὅτι: $\frac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \gamma x + \lambda = \frac{C_T}{x} =$ μέσον κόστος

καὶ $3\beta x^2 + 2\gamma x + \lambda = \frac{dC_T}{dx} =$ ὁριακὸν κόστος,

ἕπεται ὅτι $\eta_c = \frac{\text{ὁριακὸν κόστος}}{\text{μέσον κόστος}}$.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν: (α) Ὅταν $n_c = 1$, τὸ ὁριακὸν κόστος ἰσοῦται πρὸς τὸ μέσον τοιοῦτον καὶ συνεπῶς ἔχομεν τὸ ἐλάχιστον μέσον κόστος ὅταν ἡ ἐλαστικότης κόστους ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα. (β) Ὅταν $n_c < 1$, τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι μικρότερον τοῦ μέσου τοιούτου καὶ συνεπῶς εὑρισκόμεθα εἰς τὴν περιοχὴν ἐκείνην τῆς παραγωγῆς πρὸ τοῦ ἀρίστου σημείου, ὅπου μέσον καὶ ὁριακὸν κόστος βαίνουν φθίνοντα. (γ) Ὅταν $n_c > 1$, τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέσου, ὅπερ σημαίνει, ὅτι μέσον καὶ ὁριακὸν κόστος βαίνουν αὔξοντα (μία κατὰ ἔστω 10% αὔξησις τῆς παραγωγῆς ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν κατὰ μεγαλύτερον ποσοστὸν αὔξησιν τοῦ συνολικοῦ κόστους).

III.1.8.6. **Ἐλαστικότης προβλέψεων.** Αἱ ἀποφάσεις τόσον τῶν καταναλωτῶν ὅσον καὶ τῶν ἐπιχειρηματιῶν ἐξητάσθησαν μέχρι τοῦδε ὑπὸ τὸ πρῖσμα μεταβολῶν τῶν τιμῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν τρέχουσαν περίοδον. Αἱ ἀποφάσεις ὅμως, ὡς γνωστόν, ἐπηρεάζονται καὶ ἐκ τῶν προβλέψεων περὶ μελλοντικῶν μεταβολῶν εἰς τὰς τιμάς. Ἡ ἀπόφασις τοῦ καταναλωτοῦ ὅπως ἀγοράσῃ μεγαλυτέρας ποσότητας ἀγαθοῦ τινος εἰς τὸ παρὸν ἐπηρεάζεται ὄχι μόνον ἐκ τῆς τρεχούσης τιμῆς, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς προβλέψεως περὶ τῆς μελλοντικῆς ἐξελίξεως τῆς τιμῆς. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ μὲ τὸν ἐπιχειρηματία ὁ ὁποῖος ἀποφασίζει τὴν αὔξησιν τῆς παραγωγῆς του ὄχι μόνον βάσει τῆς τρεχούσης τιμῆς τοῦ προϊόντος εἰς τὴν ἀγοράν, ἀλλὰ καὶ βάσει τῆς προβλεπομένης νὰ διαμορφωθῇ τιμῆς εἰς τὸ μέλλον. Ἐὰν προβλέπῃ ὅτι ἡ τιμὴ θὰ αὐξηθῇ κατὰ πολὺ περισσότερον εἰς τὸ μέλλον, τότε δύναται νὰ ἀναβάλῃ τὴν αὔξησιν τῆς παραγωγῆς διὰ τὸ παρὸν εἰς ἀπώτερον μέλλον, κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ τιμὴ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα καὶ αἱ εἰσπράξεις συνεπῶς μεγαλύτεραι.

Ὑπὸ τὸ φῶς τῶν ἀνωτέρω σκέψεων δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὰς «καμπύλας» προσφορᾶς καὶ ζητήσεως διαφορετικὰς τῶν μέχρι τοῦδε γενομένων ἀποδεκτῶν. Ἤτοι, αἱ «καμπύλαι» δύνανται νὰ ἀπολέσουν τὸ «κανονικὸν» σχῆμα των καὶ νὰ τραποῦν πρὸς τὴν ἀντίθετον κατεύθυνσιν εἰς ὡρισμένον χρόνον καὶ δι᾽ ὡρισμένον διάστημα τιμῶν.

Ὁ καθηγητὴς R. J. Hicks πρὸς ἀπόδοσιν τοῦ ἀνωτέρου φαινομένου εἰσήγαγεν τὴν ἔννοιαν τῆς ἐλαστικότητος προβλέψεων ἢ προσδοκιῶν (elasticity of expectations). Πρὸς ἁπλοποίησιν ὅμως τῆς ἐννοίας ταύτης ἀνεφέρθη εἰς μεταβολὰς τιμῶν ἐν σχέσει πρὸς ἓν ἀγαθὸν μόνον, παρὰ τὸ γεγονός, ὅτι τὰς ἀποφάσεις τοῦ ἐπιχειρηματίου καὶ τοῦ καταναλωτοῦ ἐπηρεάζει ὁλόκληρος σειρὰ τιμῶν. Τὴν ἐλαστικότητα, λοιπόν, ταύτην ὥρισεν ὡς τὴν ἀναμενομένην ποσοστιαίως αὔξησιν εἰς τὴν μελλοντικὴν τιμὴν τοῦ ἀγαθοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὴν ποσοστιαίαν αὔξησιν εἰς τὴν τρέχουσαν τιμὴν τούτου.

Ἡ ἐλαστικότης προβλέψεων δύναται νὰ λάβῃ διαφόρους τιμὰς αἱ χαρακτηριστικώτεραι τῶν ὁποίων εἶναι: (α) $e_E = 0$, περίπτωσις καθ᾽ ἣν αἱ προβλέψεις εἶναι τελείως ἀνελαστικαὶ (δεδομέναι προβλέψεις). (β) $e_E = 1$, περίπτωσις, καθ᾽ ἣν μεταβολὴ τῶν τρεχουσῶν τιμῶν ἐπιφέρει μεταβολὴν τῶν ἀναμενομένων τιμῶν κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν καὶ κατεύθυνσιν. (γ) $1 > e_E > 0$, περίπτωσις καθ᾽ ἣν μεταβολὴ τῶν τρεχουσῶν τιμῶν ἐπιφέρει μεταβολὴν τῶν ἀναμενομένων τιμῶν εἰς μικροτέραν ἔκτασιν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν. (δ) $e_E > 1$ περίπτωσις, καθ᾽ ἣν μεταβολαὶ τῶν τρεχουσῶν τιμῶν δημιουργοῦν προσδοκίας μεταβολῶν τιμῶν εἰς μεγαλυτέραν ἔκτασιν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν. Καὶ (ε) $e_E < 0$, περίπτωσις, καθ᾽ ἣν ἡ πρόβλεψις ἀναφέρεται εἰς ἀντίθετον κίνησιν τῶν μελλοντικῶν τιμῶν (ἀρνητικὴ ἐλαστικότης).

Ἡ θεωρία τῆς ἐλαστικότητος τῶν προβλέψεων τυγχάνει ἐφαρμογῆς πλὴν τῆς μικροοικονομικῆς καὶ εἰς τὴν μακροοικονομικὴν ἀνάλυσιν.

Ἰδιαιτέρως εἰς τὴν θεωρίαν τῆς προτιμήσεως ρευστότητος ἡ ζήτησις χρήματος λόγῳ τοῦ κερδοσκοπικοῦ κινήτρου ἐξαρτᾶται κυρίως ἐκ τῶν προσδοκιῶν τοῦ μέλλοντος. Ἡ διακράτησις χρήματος διὰ λόγους κερδοσκοπίας κατὰ τὴν κλασσικὴν ἀντίληψιν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν προβλέψεων περὶ μελλοντικῶν διαμορφώσεων τῶν τιμῶν τῶν ἐμπορευμάτων. Ἐὰν προβλέπεται ἡ αὔξησις τῶν τιμῶν τῶν ἐμπορευμάτων εἰς τὸ μέλλον, τότε ὁ κάτοχος ἐμπορευμάτων δὲν πωλεῖ, ἀλλὰ ἀναμένει νὰ πωλήσῃ εἰς τὸ μέλλον μὲ ὑψηλὰς τιμάς. Ὁ κάτοχος χρηματικοῦ ποσοῦ θὰ ἀποφασίσῃ νὰ διαθέσῃ τοῦτο πρὸς ἀγορὰν ἐμπορευμάτων, ἐφ᾽ ὅσον προβλέπῃ τὴν αὔξησιν τῶν τιμῶν των εἰς τὸ μέλλον. Οὕτω λαμβάνουν χώραν ἀποφάσεις μετατροπῆς τῆς μιᾶς μορφῆς διακατεχομένου πλούτου εἰς ἑτέραν μορφὴν πρὸς πρόσκτησιν κέρδους. Μετὰ ὅμως, τὴν εἰσαγωγὴν τῆς Κεϋνσιανῆς ἀναλύσεως, ἡ ἀπόφασις μετατροπῆς ρευστῶν διαθεσίμων εἰς ἑτέρας μορφὰς ἐνεργητικῶν στοιχείων δὲν στηρίζεται μόνον εἰς τὰς προβλέψεις περὶ μελλοντικῶν ἐξελίξεων τῶν τιμῶν ἐμπορευμάτων, ἀλλὰ κυρίως εἰς τὰς προβλέψεις περὶ μελλοντικῶν ἐξελίξεων εἰς τὰς τιμὰς χρεογράφων, καὶ μέσῳ τούτων εἰς τὰς μεταβολὰς τοῦ ἐπιτοκίου. Κατὰ συνέπειαν ἡ ζήτησις χρήματος λόγῳ τοῦ κερδοσκοπικοῦ κινήτρου στηρίζεται εἰς τὰς προβλέψεις περὶ μελλοντικῶν ἐξελίξεων εἰς τὰς τιμὰς τῶν χρεογράφων. Συνεπῶς δυνάμεθα καὶ ἐνταῦθα νὰ ὁμιλήσωμεν περὶ ἐλαστικότητος προβλέψεων.

III.1.9. **Ροπαὶ καὶ ἐλαστικότητες μακροοικονομικῶν μεγεθῶν.** Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν παραγώγων εἶναι εὑρεῖα εἰς ὅλους τοὺς κλάδους τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως. Τόσον κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τῆς συμπεριφορᾶς τοῦ καταναλωτοῦ καὶ τῆς ἐπιχειρήσεως (μικροοικονομικὴ ἀνάλυσις), ὅσον καὶ κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τῆς συμπεριφορᾶς μεταβλητῶν περιγραφουσῶν συνολικὰ μεγέθη τῆς οἰκονομίας ἢ αὐτὴν ταύτην τὴν οἰκονομίαν ὡς σύνολον (μακροοικονομικὴ ἀνάλυσις), αἱ συναρτήσεις καὶ ἡ τεχνικὴ τῆς παραγωγίσεως τούτων ἀποτελοῦν σήμερον τὰ κύρια ὄργανα. Κατωτέρω θὰ περιγράψωμεν ἐν συντομίᾳ τὰς ὁριακὰς μεταβολὰς τῶν πλέον ἐν χρήσει μακροοικονομικῶν συναρτήσεων, ὡς ἀνεπτύχθησαν εἰς τὸ περὶ οἰκονομικῶν συναρτήσεων κεφάλαιον, ὡς καὶ τὰς ἐλαστικότητας τούτων.

III.1.9.0. **Μέση καὶ ὁριακὴ ροπὴ πρὸς κατανάλωσιν.** Ἡ συνάρτησις καταναλώσεως $C = C(Y)$, ἥτις δεικνύει τὴν σχέσιν μεταξὺ συνολικῆς καταναλώσεως καὶ πραγματικοῦ εἰσοδήματος, ἔχει ὡς πρώτην παράγωγον τὴν $\frac{dC}{dY}$.

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως καταναλώσεως καλεῖται ὁ ρ ι α κ ὴ ρ ο π ὴ π ρ ὸ ς κ α τ α ν ά λ ω σ ι ν (ὁ.ρ.κ.) καὶ εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀπειροελαχίστης αὐξήσεως τῆς καταναλώσεως ὡς πρὸς τὴν ἀπειροελαχίστην αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος. Ἡ κεϋνσιανὴ θεωρία τῆς καταναλώσεως θέτει περιορισμὸν εἰς τὴν τιμὴν τῆς παραγώγου, ἤτοι: $0 < \frac{dC}{dY} < 1$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος ἐπιφέρει αὔξησιν τῆς καταναλώσεως, ἀλλὰ πάντοτε εἰς μικροτέραν ἔκτασιν.

Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐλαστικότητος συναρτήσεως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἐλαστικότητα τῆς καταναλώσεως ἐν σχέσει πρὸς τὸ εἰσόδημα διὰ τοῦ τύπου:

$$e_Y = \frac{dC}{dY} \cdot \frac{Y}{C}$$

Ἀναλόγως πρὸς τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως καταναλώσεως, ἡ ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν καὶ ἡ εἰσοδηματικὴ ἐλαστικότης τῆς καταναλώσεως λαμβάνουν καὶ ὡρισμένας τιμάς. Ἡ γραμμικῆς μορφῆς συνάρτησις $C = \beta Y$, δίδει ὁριακὴν καὶ μέσην ῥοπὴν πρὸς κατανάλωσιν τὴν αὐτὴν ἤτοι β*, ἡ δὲ καμπύλη καταναλώσεως διέρχεται μέσῳ τῆς ἀρχῆς τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων. Ἡ ἐλαστικότης ὡς πρὸς τὸ εἰσόδημα εἶναι: $e_Y = \beta.(1/_\beta) = 1$. Ἤτοι μία κατὰ 10% αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος ἐπιφέρει μίαν κατὰ 10% αὔξησιν τῆς καταναλώσεως. Ἔστω ὅτι ἡ ἐκτιμηθεῖσα βάσει πραγματικῶν στοιχείων συνάρτησις καταναλώσεως εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$C = 0{,}80\,Y$$

Ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως (πρώτη παράγωγος) τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως εἶναι 0,80. Δηλαδὴ μία αὔξησις τοῦ πραγματικοῦ εἰσοδήματος τῆς οἰκονομίας κατὰ 100 δραχμὰς ὁδηγεῖ εἰς αὔξησιν τῆς καταναλώσεως κατὰ 80 δραχμάς. Ἡ αὔξησις αὕτη εἶναι ἡ ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν, ἥτις, λόγῳ τῆς γραμμικῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως, εἶναι σταθερά.

Διὰ εἰσόδημα 100 ἑκατ. δραχμῶν, ἡ κατανάλωσις εἶναι $C = 0{,}80 \times 100 = 80$ ἑκατ. δρχ. Ἡ εἰσοδηματικὴ ἐλαστικότης τῆς καταναλώσεως εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τοῦ εἰσοδήματος, ὡς καὶ εἰς πᾶν ἐπίπεδον, λόγῳ μὴ ὑπάρξεως σταθεροῦ ὅρου εἰς τὴν ἐξίσωσιν, θὰ εἶναι:

$$e_Y = 0{,}80 \cdot \frac{100}{80} = 1$$

Ἡ συνήθης μορφὴ συναρτήσεως καταναλώσεως εἶναι ἡ κατωτέρω γραμμικὴ τοιαύτη:

$$C = \alpha + \beta Y$$

---

* Μέση ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν = ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν, εἰς ἅπαντα τὰ ἐπίπεδα εἰσοδήματος, δεδομένου ὅτι $\frac{C}{Y} = \frac{\beta Y}{Y} = \beta$.

Ἡ ό.ρ.κ. εἶναι β καὶ ἡ μ.ρ.κ. εἶναι $\frac{C}{Y} = \frac{\alpha}{Y} + \beta$

Συνεπῶς ό.ρ.κ. $<$ μ.ρ.κ., ἐφ' ὅσον $\alpha > o$. Ἡ ἐλαστικότης ὡς πρὸς τὸ εἰσόδημα εἶναι:

$$e_Y = \beta \cdot \frac{Y}{C}.$$

Ἔστω: $C = 10 + 0{,}85Y$

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις πληροῖ τὰς Κεϋνσιανὰς ὑποθέσεις ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν καταναλώσεως, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ό.ρ.κ. εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὁ σταθερὸς ὅρος α εἶναι θετικός, ὅπερ σημαίνει ὅτι εἰς ἐπίπεδον εἰσοδήματος 0 ὑφίσταται κατανάλωσις τῆς τάξεως τῶν 10 ἑκατ. δραχμῶν. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ καμπύλη καταναλώσεως τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὴν τιμὴν τῶν 10 ἑκατ. δρχ. Συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω συγκεκριμένην συνάρτησιν ἡ ό.ρ.κ. εἶναι 0,85. Ἡ μ.ρ.κ. δὲν εἶναι σταθερὰ ἀλλὰ διαφέρει ἀναλόγως πρὸς τὸ ἐπίπεδον εἰσοδήματος. Οὕτως εἰς ἐπίπεδον εἰσοδήματος 100 δρχ. ἡ μ.ρ.κ. εἶναι $\frac{C}{Y} = \frac{10}{100} + 0{,}85 = 0{,}95$. Εἰς ἐπίπεδον $Y = 200$, ἔχομεν $\frac{C}{Y} = \frac{10}{200} + 0{,}85 = 0{,}90$ κ.ο.κ.

Ἡ ἐλαστικότης τῆς καταναλώσεως ὡς πρὸς τὸ εἰσόδημα θὰ διαφέρῃ ἀναλόγως πρὸς τὸ ἐπίπεδον εἰσοδήματος, δεδομένου ὅτι ἡ μ.ρ.κ. δὲν εἶναι σταθερά. Οὕτω εἰς ἐπίπεδον $Y = 100$, ἡ ἐλαστικότης εἶναι: $e_y = \frac{0{,}85}{0{,}95} = 0{,}895$.

Διὰ $Y = 200$, ἔχομεν $e_y = \frac{0{,}85}{0{,}90} = 0{,}94$ κ.ο.κ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μέση κατανάλωσις διὰ μίαν σειρὰν ἐτῶν εἶναι $\bar{C} = 469$ ἑκατ. δρχ., καὶ τὸ μέσον εἰσόδημα διὰ τὴν αὐτὴν περίοδον $\bar{Y} = 540$ ἑκατ. δραχ., τότε ἡ μέση ἐλαστικότης δι' ὁλόκληρον τὴν περίοδον εἶναι:

$$e_y = 0{,}85 \times \frac{540}{469} = 0{,}97$$

Ἤτοι, μία αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος κατὰ 10% ἐπιφέρει κατὰ μέσον ὅρον αὔξησιν τῆς καταναλώσεως κατὰ 9,7% ἐντὸς τῆς συγκεκριμένης περιόδου.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις δὲν εἶναι γραμμικῆς μορφῆς, τότε τόσον ἡ ό.ρ.κ. ὅσον καὶ ἡ μ.ρ.κ. δὲν εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοί. Ἔστω ἡ συγκεκριμένη συνάρτησις

$$C = 10 + 8\sqrt{Y}.$$

Ἡ ό.ρ.κ. εἶναι $\frac{dC}{dY} = \frac{8}{2} Y^{-1/2} = \frac{8}{2\sqrt{Y}}$. Διάφοροι τιμαὶ τοῦ Y, δίδουν διάφορον ὁ.ρ.κ. Οὕτω, διὰ Y = 100, ἔχομεν $\frac{dC}{dY} = 0,40$·

Διὰ Y = 400, ἔχομεν $\frac{dC}{dY} = 0,20$ κ.ο.κ.

Ἡ μέση ροπὴ πρὸς κατανάλωσιν εἶναι:

$$\frac{C}{Y} = \frac{10}{Y} + \frac{8\sqrt{Y}}{Y} = \frac{10}{Y} + 8Y^{1/2}\ Y^{-1} = \frac{10}{Y} + \frac{8}{\sqrt{Y}}.$$

Διὰ Y = 100, ἔχομεν $\frac{C}{Y} = 0,90$, διὰ Y = 400, ἔχομεν $\frac{C}{Y} = 0,425$ κ.ο.κ.

Ἡ εἰσοδηματικὴ ἐλαστικότης τῆς καταναλώσεως συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν ταύτης θὰ εἶναι:

$e_y = \frac{dC}{dY} \cdot \frac{Y}{C} = \frac{8}{2\sqrt{Y}} \frac{Y}{C}$. Δι' ἕκαστον ἐπίπεδον εἰσοδήματος θὰ ἔχωμεν καὶ διαφορετικὴν στιγμικὴν ἐλαστικότητα, ἥτις θὰ εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς μονάδος, δεδομένου ὅτι $\frac{dC}{dY} < \frac{C}{Y}$. Ἡ ἐλαστικότης δι' ὁλόκληρον τὴν συνάρτησιν, ἤτοι ἡ μέση ἐλαστικότης δι' ὁλόκληρον τὴν περίοδον εἰς ἣν ἡ συνάρτησις ἀναφέρεται, θὰ εἶναι: $e_y = \frac{8}{2\sqrt{Y}}$.

III.1.9.1. **Μέση καὶ ὁριακὴ ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν.** Ἡ ἐξ ὁρισμοῦ ταυτότης τοῦ εἰσοδήματος εἶναι:

$$Y = C + S.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ γραφῆ:

$$Y = \beta Y + S,$$

$$\text{καὶ} \quad S = Y - \beta Y = (1-\beta)Y$$

Ἡ συνάρτησις ἀποταμιεύσεως $S = (1-\beta)Y$ ἔχει παράγωγον τὴν σταθερὰν $(1-\beta)$, ἥτις εἶναι ἡ ὁ ρ ι α κ ὴ ρ ο π ὴ π ρ ὸ ς ἀ π ο τ α μ ί ε υ σ ι ν (ὁ.ρ.ἀ.), ἤτοι $\frac{dS}{dY} = (1-\beta)$. Ἡ ὁ.ρ.ἀ. εἶναι ἡ ἀπειροελαχίστη αὔξησις τῆς ἀποταμιεύσεως ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀπειροελαχίστην αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος. Ἡ μ έ σ η ρ ο π ὴ π ρ ὸ ς ἀ π ο τ α μ ί ε υ σ ι ν (μ.ρ.ἀ.) εἶναι S/Y.

Ἐπειδὴ ἡ ἀποταμίευσις λαμβάνεται συνήθως ὡς ὑπολειμματικὸν μέγεθος, ἤτοι μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἐκ τοῦ εἰσοδήματος τῆς καταναλωτικῆς δαπάνης, ἡ συνάρτησις ταύτης ἀκολουθεῖ κατ' ἀντίστροφον τρόπον τὴν φορὰν τῆς συναρτήσεως καταναλώσεως.

Ἔστω ἡ συνάρτησις καταναλώσεως $C = 10 + 0{,}85Y$.

Ἡ συνάρτησις ἀποταμιεύσεως θὰ εἶναι $S = -10 + 0{,}15Y$. Ἡ ὁ.ρ.ἀ. εἶναι $\frac{dS}{dY} = 0{,}15$ σταθερὰ εἰς ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ Υ. Ἡ μ.ρ.ἀ. εἶναι $\frac{S}{Y} = -\frac{10}{Y} + 0{,}15$. Διὰ $Y = 100$, ἔχομεν $\frac{S}{Y} = 0{,}05$. Διὰ $Y = 200$, ἔχομεν $\frac{S}{Y} = 0{,}10$, κ.ο.κ. Οὕτως ἐνῶ ἡ μέση ροπὴ πρὸς κατανάλωσιν βαίνει φθίνουσα, ἡ μέση ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν βαίνει αὔξουσα. Τοῦτο εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ γνωστόν.

Κατὰ τὰ λοιπὰ ἔχουν ἐφαρμογὴν καὶ ἐνταῦθα τὰ ὅσα ἐλέχθησαν διὰ τὰς διαφόρου μορφῆς συναρτήσεις καταναλώσεως.

III.1.9.2. **Ἐλαστικότης συναρτήσεως ἐπενδύσεων.** Ἡ ροπὴ πρὸς ἐπένδυσιν (inducement to invest) προσδιορίζεται ἐκ πολλῶν παραγόντων μνεία τῶν ὁποίων ἐγένετο ἐν τοῖς προηγουμένοις. Εἴδομεν ὅτι ὁ σπουδαιότερος παράγων προσδιορισμοῦ τῆς ροπῆς πρὸς ἐπένδυσιν εἰς τὴν βραχυχρόνιον περίοδον εἶναι τὰ κέρδη ἢ ἡ ὁριακὴ ἀπόδοσις τοῦ κεφαλαίου, ἥτις ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἐπιτοκίου.

Συνεπῶς τὸ ἐπιτόκιον θὰ ἠδύνατο νὰ ἀποτελέσῃ τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν εἰς τὴν συνάρτησιν ἐπενδύσεων. Ἤτοι, $I = I(r)$. Ἡ συνάρτησις αὕτη δεικνύει τὴν σχέσιν ἥτις ὑφίσταται μεταξὺ ἐπενδύσεων καὶ τόκου τῆς ἀγορᾶς κεφαλαίων. Αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἐπιτοκίου ἐπιφέρουν ἀντιστρόφους μεταβολὰς εἰς τὰς διενεργουμένας ἐπενδύσεις καὶ συνεπῶς ἔχομεν $\frac{dI}{dr} < 0$. Ἤτοι, ἡ ἐπένδυσις εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τοῦ ἐπιτοκίου.

Ἡ ἐλαστικότης τῆς ἐπενδύσεως ὡς πρὸς τὸν τόκον θὰ εἶναι βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐλαστικότητος:

ἐλαστικότης $= -\frac{dI}{dr} \cdot \frac{r}{I}$. Ἤτοι, μία ποσοστιαία μεταβολὴ τοῦ τόκου ἐπιφέρει ἀντίστροφον ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῶν ἐπενδύσεων.

Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς μακροοικονομικῆς θεωρίας ὅτι αἱ ἐπενδύσεις διακρίνονται εἰς αὐτονόμους καὶ παραγώγους. Αὐτόνομοι εἶναι ἐκεῖναι αἵτινες ὀφείλονται εἰς τὴν τεχνολογίαν ἢ εἰς ἀποφάσεις τοῦ κράτους. Αἱ παράγωγοι ἐπενδύσεις προωθοῦνται ἐκ τῆς αὐξήσεως τῆς ζητήσεως καὶ συνεπῶς τοῦ εἰσοδήματος. Ἡ σχέσις μεταξὺ καταναλώσεως ἢ εἰσοδήματος καὶ παραγώγων ἐπενδύσεων μᾶς δίδει τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐπιταχυντοῦ, περί οὗ κατωτέρω. Ἔχοντες ταῦτα ὑπ' ὄψιν, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν συνάρτησιν ἐπενδύσεων ὡς ἑξῆς: $I = I(Y)$.

Ἡ πρώτη παράγωγος τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως, dI/dY, ἀποτελεῖ τὴν ὁριακὴν ροπὴν πρὸς ἐπένδυσιν. Αἱ μεταβολαὶ τοῦ εἰσοδήματος ἐπιφέρουν ὁμορρόπους μεταβολὰς εἰς τὰς ἐπενδύσεις καὶ συνεπῶς ἔχομεν $dI/dY > 0$, ἤτοι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως ἐπενδύσεων εἶναι θετική.

III.1.9.3. **Πολλαπλασιαστὴς ἐπενδύσεων ἢ δαπάνης***. Εἰς μίαν κλειστὴν οἰκονομίαν τὸ ἀκαθάριστον ἐγχώριον προϊὸν (Y) διατίθεται τόσον διὰ κατανάλωσιν ὅσον καὶ δι' ἀποταμιεύσεις. Ἡ διάθεσις τοῦ εἰσοδήματος διὰ καταναλωτικοὺς σκοποὺς ἀποβαίνει εἴσπραξις τοῦ τομέως τῶν καταναλωτικῶν ἀγαθῶν (C). Ἡ διάθεσις ἐξ ἄλλου μέρους τοῦ εἰσοδήματος δι' ἀποταμιευτικοὺς σκοποὺς ἀποβαίνει τελικῶς δαπάνη τοῦ εἰσοδήματος δι' ἀγαθὰ ἐπενδύσεως μέσῳ τῶν ἐπενδυτῶν (ἐπιχειρηματιῶν καὶ κράτους), καὶ συνεπῶς εἴσπραξις τοῦ τομέως τῶν ἀγαθῶν ἐπενδύσεως.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν συνθήκην ἰσορροπίας τοῦ εἰσοδήματος

$$Y = C + S,$$

καὶ τὴν συνθήκην ἰσορροπίας ἀποταμιεύσεων - ἐπενδύσεων

$$S = I$$

Ἂν δεχθῶμεν τὴν ἁπλῆν μορφὴν τῆς συναρτήσεως καταναλώσεως $C = \beta Y$, ἄνευ χρονικῶν ὑστερήσεων μεταξὺ καταναλώσεως καὶ εἰσοδήματος καὶ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι αἱ ἐπενδύσεις εἶναι αὐτόνομοι (I_0), τότε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$Y = \beta Y + I_0,$$

ὅπερ εἶναι τὸ εἰσόδημα ἰσορροπίας ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς συμπεριφορᾶς τῆς καταναλώσεως καὶ τοῦ ὕψους τῶν αὐτονόμων ἐπενδύσεων. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως λαμβάνομεν

$$Y = \frac{1}{1-\beta} \cdot I_0 \quad \text{ἢ} \quad Y = \frac{1}{s} \cdot I_0 \; **$$

Ἤτοι τὸ ἐπίπεδον ἰσορροπίας τοῦ εἰσοδήματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ποσὸν τῆς δαπάνης δι' αὐτονόμους ἐπενδύσεις ἐπὶ τὴν ἀντίστροφον τιμὴν τῆς ὁ.ρ.ἀ. Τὴν ποσότητα $\frac{1}{1-\beta}$ ἢ $\frac{1}{s}$ καλοῦμεν πολλαπλασιαστὴν (multiplier) καὶ παριστῶμεν τοῦτον μὲ k, ἤτοι

$$k = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{s} = \frac{Y}{I_0}.$$

---

* Βλ. σχετικῶς εἰς Κεφάλαιον II.

** Ἐλέχθη ὅτι ἡ ποσότης $(1-\beta)$ εἶναι ἡ ὁ.ρ.ἀ. καὶ τὴν παριστῶμεν διὰ s.

Καθίσταται σαφὲς ὅτι ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς ὁ.ρ.κ. Ὅσον μεγαλυτέρα ἡ ὁ.ρ.κ. τόσον μεγαλυτέρα ἡ τιμὴ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ συνεπῶς τόσον μεγαλύτερον τὸ ἐπίπεδον τοῦ εἰσοδήματος. Παραμένοντος σταθεροῦ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἡ αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος θὰ προέλθῃ ἐκ τῆς αὐξήσεως τῶν αὐτονόμων ἐπενδύσεων.

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις καταναλώσεως εἶναι τῆς μορφῆς $C = \alpha + \beta Y$, τότε τὸ εἰσοδηματικὸν ἐπίπεδον ἰσορροπίας θὰ εἶναι

$$Y = \alpha + \beta Y + I_0 .$$

Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν $Y = \frac{1}{1-\beta} . (\alpha + I_0)$. Ἤτοι, τὸ ἐπίπεδον ἰσορροπίας τοῦ εἰσοδήματος ἰσοῦται πρὸς τὰς αὐτονόμους ἐπενδύσεις σὺν τὴν αὐτόνομον κατανάλωσιν (α) ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν. Ἡ σταθερὰ α εἶναι ὡς γνωστὸν τὸ αὐτόνομον μέρος τῆς καταναλώσεως, ὅπερ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἰσοδήματος.

Περαιτέρω ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ἐπενδύσεις ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἓν αὐτόνομον μέρος (I_0) καὶ ἓν μέρος τὸ ὁποῖον εἶναι παράγωγον ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ εἰσοδήματος (γY), ἤτοι

$$I = I_0 + \gamma Y$$

Τὸ ἐπίπεδον ἰσορροπίας τοῦ εἰσοδήματος θὰ εἶναι

$$Y = \alpha + \beta Y + I_0 + \gamma Y, \text{ καὶ}$$

$$Y = \frac{1}{1-\beta-\gamma} . (\alpha + I_0).$$

Ἡ ποσότης $\frac{1}{1-\beta-\gamma}$ καλεῖται π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ ὴ ς δ α π ά ν η ς ἢ σ ύ ν θ ε τ ο ς π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ ή ς. Τὸ ἄθροισμα τῆς ὁ.ρ.κ. καὶ τῆς ὁριακῆς ῥοπῆς πρὸς ἐπένδυσιν ἀποτελεῖ τὴν ὁ ρ ι α κ ὴ ν ῥ ο π ὴ ν π ρ ὸ ς δ α π ά ν η ν (ὁ.ρ.δ.)

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν θεώρησιν δύο διαδοχικῶν ἐπιπέδων εἰσοδήματος Y_1 καὶ Y_2. Τὰς μεταξὺ δύο διαδοχικῶν τιμῶν ἑνὸς μεγέθους διαφορὰς θὰ παραστήσωμεν διὰ τοῦ τελεστοῦ Δ. Αἱ εἰσοδηματικαὶ ἐξισώσεις τῶν δύο ἐπιπέδων εἰσοδήματος θὰ εἶναι:

$$Y_1 = \alpha + \beta Y_1 + I_{01} + \gamma Y_1$$
$$Y_2 = \alpha + \beta Y_2 + I_{02} + \gamma Y_2$$

Ἀφαιροῦντες τὸ ἐπίπεδον 1 ἐκ τοῦ 2 θὰ ἔχωμεν:

$$Y_2 - Y_1 = \beta(Y_2 - Y_1) + (I_{02} - I_{01}) + \gamma(Y_2 - Y_1), \text{ ἢ}$$
$$\Delta Y = \beta \Delta Y + \Delta I_0 + \gamma \Delta Y.$$

Ἐξ αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν

$\Delta Y = \frac{1}{1-\beta-\gamma} \cdot \Delta I_0$. Ἤτοι, μία αὔξησις τῶν αὐτονόμων ἐπενδύσεων κατὰ ΔI_a ἐπιφέρει αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος κατὰ ΔY, τῆς αὐξήσεως ταύτης ἐξαρτωμένης ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἡ ὁποία ὅμως πάλιν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ὁριακῆς ῥοπῆς πρὸς δαπάνην ($\beta + \gamma$). Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι διὰ νὰ εἶναι ὁ πολλαπλασιαστὴς θετικὸς ἀριθμὸς θὰ πρέπει $\gamma < (1 - \beta)$, ἤτοι ἡ ὁ.ρ.ἐ. νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ὁ.ρ.ἀ. Ὅταν $\gamma = (1 - \beta)$, τότε ὁ πολλαπλασιαστὴς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄπειρον.

Μὲ δεδομένα: $\beta = 0{,}85$, $\gamma = 0{,}10$ καὶ $\Delta I_a = 100$, θὰ ἔχωμεν:

$$k = \frac{1}{1-\beta-\gamma} = \frac{1}{1-0{,}95} = 20 \text{ καὶ}$$

$\Delta Y = 20 \,.\, 100 = 2.000$. Ἤτοι, μία κατὰ 100 μονάδας αὔξησις τῆς δαπάνης δι' αὐτονόμους ἐπενδύσεις ἔχει ὡς πολλαπλασιαστικὸν ἀποτέλεσμα τὴν αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος κατὰ 2.000 μονάδας.

Τὸν πολλαπλασιαστὴν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐξ ἐμπειρικῶν δεδομένων, ἐφ' ὅσον ἐκτιμήσωμεν βάσει στατιστικῆς μεθόδου τὴν συνάρτησιν $Y_t = \alpha + kI_t$. Ἡ ἐκτίμησις τῆς σταθερᾶς k θὰ μᾶς δώσῃ μίαν ἐμπειρικὴν προσέγγισιν τοῦ μεγέθους τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

III.1.9.4. **Ὁ ἐπιταχυντής.**. Εἴδομεν ὅτι αἱ ἐπενδύσεις δύνανται νὰ εἶναι συνάρτησις τοῦ εἰσοδήματος ἢ ἄλλως τῆς συνολικῆς ζητήσεως. Ὀρθότερον εἶναι ἐν τούτοις νὰ εἴπωμεν ὅτι αἱ καθαραὶ ἐπενδύσεις (ἀκαθάριστοι μεῖον ἐπενδύσεις πρὸς ἀντικατάστασιν φθαρέντος κεφαλαίου) εἶναι συνάρτησις τῶν μεταβολῶν τοῦ εἰσοδήματος. Δεδομένου δὲ ὅτι ἐνταῦθα διαπραγματευόμεθα συνεχεῖς συναρτήσεις θὰ ἔχωμεν τὴν κατωτέρω συνάρτησιν ἐπενδύσεων

$$I = \upsilon \frac{dY}{dt},$$

ὅπου ἡ σταθερὰ υ εἶναι ὁ ἐ π ι τ α χ υ ν τ ή ς (accelarator)·

Λύοντες ὡς πρὸς υ ἔχομεν

$$\upsilon = \frac{I}{dy/dt}.$$

Δεδομένου ὅτι τὸ ποσὸν τῶν ἐπενδύσεων (I) εἶναι ἡ αὔξησις τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ τῆς οἰκονομίας ἐν τῷ χρόνῳ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $I = dK/dt$, ὅπου K εἶναι ὁ κεφαλαιακὸς ἐξοπλισμός. Συνεπῶς ὁ τύπος τοῦ ἐπιταχυντοῦ καθίσταται

$$\upsilon = \frac{dK}{dt} \Big/ \frac{dY}{dt} \text{ ἢ } \upsilon = \frac{\Delta K}{\Delta Y} \text{ (grosso modo).}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος μᾶς λέγει ὅτι ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ τῆς οἰκονομίας ὡς πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος ἢ τῆς συνολικῆς ζητήσεως εἶναι ὁ ἐπιταχυντής. Ὁ ἐπιταχυντὴς καλεῖται καὶ ὁ ρ ι α κ ὸ ς κ ε φ α λ α ι α κ ὸ ς σ υ ν τ ε λ ε σ τ ὴ ς ἢ λ ό γ ο ς κ ε φ α λ α ί ο υ — ε ἰ σ ο δ ή μ α τ ο ς καὶ μᾶς δεικνύει τὸ ποσὸν τῶν ἐπενδύσεων αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν παραγωγὴν 1 μονάδος πραγματικοῦ εἰσοδήματος.

Συγκρίνοντες τοὺς δύο συντελεστάς, τὸν ἐπιταχυντὴν καὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἤτοι $\upsilon = \frac{\Delta K}{\Delta Y}$ καὶ $k = \frac{\Delta Y}{\Delta K}$, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ κεφαλαιακὸς συντελεστὴς εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Ὁ ἐπιταχυντὴς δύναται νὰ ληφθῇ ἐξ ἐμπειρικῶν δεδομένων δι' ἐκτιμήσεως βάσει στατιστικῆς μεθόδου τῆς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως $I = \alpha + \upsilon \Delta Y$. Ἡ ἐκτίμησις τῆς σταθερᾶς υ θὰ μᾶς δώσῃ τὴν τιμὴν τοῦ ἐπιταχυντοῦ.

III.1.9.5. **Ἐλαστικότης, μέση καὶ ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς εἰσαγωγάς.** Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι αἱ ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ εἰσαγωγαὶ ἀγαθῶν εἶναι συνάρτησις μόνον τοῦ διαθεσίμου εἰσοδήματος, ἤτοι $M = \varphi(Y)$, τότε θὰ καλέσωμεν ὁ ρ ι α κ ὴ ν ρ ο π ὴ ν π ρ ὸ ς ε ἰ σ α γ ω γ ά ς τὸν λόγον τῆς αὐξήσεως τῶν εἰσαγωγῶν ὡς πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος, ἤτοι τὴν πρώτην παράγωγον τῆς συναρτήσεως εἰσαγωγῶν, τ.ἔ., dM/dY. Ἡ μ έ σ η ρ ο π ὴ π ρ ὸ ς ε ἰ σ α γ ω γ ὰ ς εἰς ὡρισμένον ἐπίπεδον εἰσοδήματος θὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν εἰσαγωγῶν εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τοῦ εἰσοδήματος ὡς πρὸς τὸ εἰσόδημα, τ.ἔ., M/Y. Ἡ ἐλαστικότης τῶν εἰσαγωγῶν ὡς πρὸς τὸ εἰσόδημα εἶναι τὸ πηλῖκον τῆς ὁριακῆς διὰ τῆς μέσης ῥοπῆς πρὸς εἰσαγωγὰς τ.ἔ., $\frac{dM}{dY} : \frac{M}{Y}$ ἢ $\frac{dM}{dY} \cdot \frac{Y}{M}$. Ἐνταῦθα ἰσχύουν ἐπίσης ὅσα ἐλέχθησαν ἀνωτέρω καὶ διὰ τὰς λοιπὰς συναρτήσεις καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς διαφόρους μορφὰς τούτων.

Ἂς λάβωμεν τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν εἰσαγωγῶν $M = -6.958 + 0{,}30Y$, ἐκτιμηθεῖσαν ἐκ πραγματικῶν στοιχείων εἰσαγωγῶν καὶ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος (εἰς σταθερὰς τιμὰς) τῆς Ἑλλάδος. Ἐκ ταύτης προκύπτει ὅτι ἡ ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς εἰσαγωγὰς εἶναι 0,30, ἤτοι εἰς αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος κατὰ 100 μονάδας ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τῶν εἰσαγωγῶν κατὰ 30 μονάδας. Ἡ ἀρνητικὴ σταθερὰ δεικνύει ὅτι ἡ ὁριακὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μέσης ῥοπῆς. Πράγματι ἡ μέση ῥοπὴ (λόγος μέσων ὅρων τῶν δύο μεταβλητῶν, M/Y) εἶναι 0,21. Τέλος ἡ εἰσοδηματικὴ ἐλαστικότης τῶν εἰσαγωγῶν εἶναι 1,43, ἤτοι μία κατὰ 10% αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος ἐπιφέρει αὔξησιν τῶν εἰσαγωγῶν κατὰ 14,3%*.

---

* Βλ. καὶ Στυλ. Α. Σαραντίδη, «Συναρτήσεις Εἰσαγωγῶν εἰς τὴν Ἑλληνικὴν Οἰκονομίαν». Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ περιοδικοῦ «Σπουδαί», Τεῦχος 1, 1970.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΒΑΣΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

«But the sad truth of the matter is that they (theorists) have made little effort to find out and have instead turned their backs upon inductive research and have, in effect, been school men living within ivy-clad towers».

P.H. DOUGLAS, «Are there laws of production?», American Economic Review (1948), σ. 5-6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΒΑΣΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

IV.0. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ΜΕΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΛΕΙΟΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Μέχρι τοῦδε ἀνεφέρθημεν εἰς συναρτησιακὰς σχέσεις μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὡς π.χ. ἡ περίπτωσις τῆς συναρτήσεως ζητήσεως, καθ' ἣν ἡ ζητουμένη ποσότης εἶναι συνάρτησις τῆς τιμῆς τοῦ ζητουμένου ἀγαθοῦ. Ὡς ὅμως, ἀντιλαμβάνεταί τις ἡ ζήτησις ἀγαθοῦ εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι συνάρτησις πλειόνων μεταβλητῶν, ὡς εἶναι τὸ διαθέσιμον εἰσόδημα τοῦ καταναλωτοῦ, ἡ τιμὴ αὐτοῦ τούτου τοῦ ἀγαθοῦ, ὡς καὶ αἱ τιμαὶ τῶν ὑποκαταστάτων, ἤτοι $D_1 = f(y, p_1, p_2, p_3)$, ὅπου

D_1	= ζητουμένη ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ 1			
y	= ἀτομικὸν διαθέσιμον εἰσόδημα			
(p_1)	= τιμὴ	μονάδος	ἀγαθοῦ	1
(p_2)	= »	»	»	2
(p_3)	= »	»	»	3

Τὰς μεταβολὰς τῶν πολυμεταβλητῶν οἰκονομικῶν σχέσεων δυνάμεθα νὰ μελετήσωμεν διὰ τῶν μερικῶν παραγώγων.

IV. 0. 0. **Μερικαὶ παράγωγοι.** Ἡ σχέσις μεταξὺ τριῶν μεταβλητῶν δίδεται διὰ τῆς συναρτήσεως

$$z = f(x,y).$$

Ἡ ἀπεικόνισις μιᾶς τοιαύτης συναρτήσεως γίνεται εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον, ὡς εἰς ἕτερον κεφάλαιον ἀνεπτύχθη. Εἰς τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς μεταβολάς:

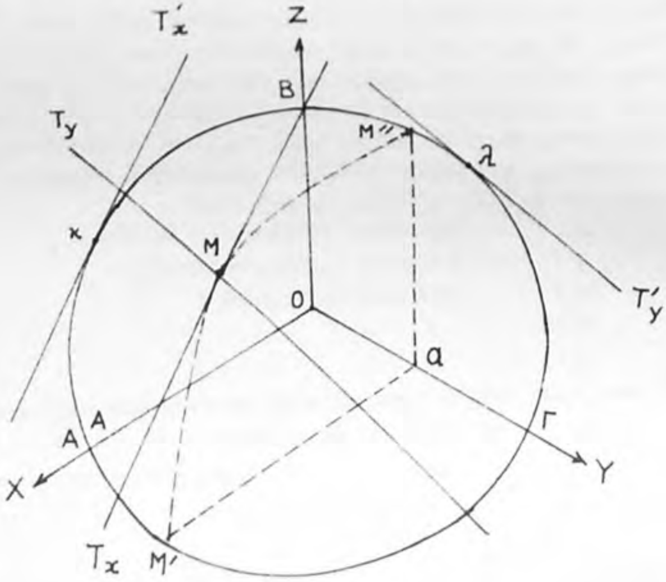
(α) Μεταβολὴ τῆς z ἐν σχέσει πρὸς μεταβολὴν τῆς x, τῆς y παραμενούσης ἀμεταβλήτου. Ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἡ μερικὴ παράγωγος τῆς z ὡς πρὸς x, τῆς y οὔσης ἀμεταβλήτου. Ἐνταῦθα ἐπίσης ἡ παράγωγος θὰ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ λόγου τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς x, ἤτοι

$$\underset{\Delta x \to o}{\text{ορ}} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to o}{\text{ορ}} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x$$

Ὁ τελεστὴς «∂» εἰσαχθεὶς ὑπὸ τοῦ Jacobi χρησιμεύει πρὸς ὑποδήλωσιν τῆς μερικῆς παραγώγου.

Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς μερικῆς παραγώγου τῆς z ὡς πρὸς x, τῆς y οὔσης ἀμεταβλήτου ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ. IV.1.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω διάγραμμα ἡ συνάρτησις $z = f(x,y)$ ἐπαληθεύεται ὑφ' ὅλων τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓ, ἥτις κατὰ τὸ Σχῆμα εἶναι κυρτὴ πρὸς τὰ ἔξω. Ἔστω σημεῖον Μ τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓ. Ἡ μερικὴ παράγωγος τῆς z ὡς πρὸς x εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι ἡ κλίσις εἰς τὸ ἐπίπεδον $x - z$ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ σημείου Μ, ἤτοι τῆς εὐθείας T_x. Ἡ ἐφαπτομένη T_x δύναται νὰ λάβη διαφόρους κλίσεις ἐπὶ τῆς καμπύλης Μ'ΜΜ'', ἀναλόγως πρὸς τὰς τιμὰς τῆς x, ἐνῶ ἡ τιμὴ τῆς y παραμένη σταθερά, ἤτοι α. Τὴν μερικὴν παρά-



Σχ. IV. 1.

γωγον τῆς z ὡς πρὸς x δεικνύει καὶ ἡ κλίσις τῆς εὐθείας T'_x εἰς τὸ σημεῖον k τῆς καμπύλης ΑΒ, ὅταν ἡ τιμὴ τῆς y ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν.

(β) Μεταβολὴ τῆς z ἐν σχέσει πρὸς μεταβολὴν τῆς y, τῆς x παραμενούσης ἀμεταβλήτου. Ἡ σχέσις αὕτη δίδει τὴν μερικὴν παράγωγον τῆς z ὡς πρὸς y, τῆς x οὔσης σταθερᾶς, ἤτοι

$$\underset{\Delta y \to 0}{\text{ορ}} \frac{f(y + \Delta y, x) - f(x,y)}{\Delta y} = \underset{\Delta y \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y$$

Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς μερικῆς παραγώγου τῆς z ὡς πρὸς y, τῆς x οὔσης ἀμεταβλήτου, ἐμφαίνεται εἰς τὸ αὐτὸ Σχῆμα διὰ τῆς κλίσεως τῆς εὐθείας T_y, ἥτις ἐφάπτεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Μ. Ἐπίσης τὴν μερικὴν παράγωγον τῆς z ὡς πρὸς y δεικνύει καὶ ἡ κλίσις τῆς T'_y εἰς τὸ σημεῖον λ, ὅταν ἡ τιμὴ τῆς x ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν.

(γ) Μεταβολὴ τῆς z, ὅταν ἀμφότεραι αἱ x καὶ y μεταβάλλωνται. Ἡ μεταβολὴ αὕτη δίδεται ὑπὸ τῆς

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \cdot$$

Ἐξ αὐτῆς ἄνευ ἀποδείξεως, δυνάμεθα νὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως, ἤτοι

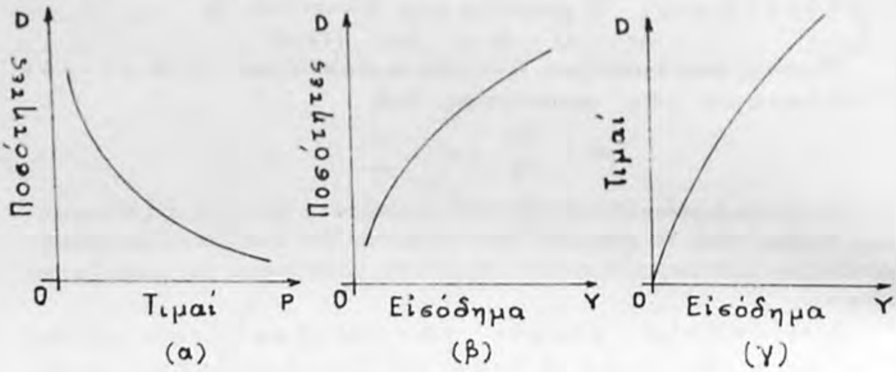
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν μᾶς λέγει ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἐλαχίστων μεταβολῶν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἐπὶ τὰς μερικὰς παραγώγους τῶν μεταβλητῶν τούτων.

(δ) Μεταβολαὶ μεταξὺ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x καὶ y, ὅταν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως z παραμένη σταθερά. Οὕτω, δι' ὡρισμένην τιμὴν τῆς z, αἱ μεταβαλλόμεναι ποσότητες εἶναι αἱ τῆς y καὶ x, καὶ συνεπῶς δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν μεταβολῶν τῆς y καὶ x εἰς τὸν δισδιάστατον πλέον χῶρον. Ἐνῷ ἡ μεταβολὴ τῆς z ὡς πρὸς x ἐμφαίνεται εἰς τὸ ἐπίπεδον x — z καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς z ὡς πρὸς y εἰς τὸ ἐπίπεδον y — z, αἱ μεταβολαὶ τῶν x καὶ y μὲ σταθερὰν τὴν z ἐμφαίνονται εἰς τὸ ἐπίπεδον x — y.

Τὰς καμπύλας γραμμὰς αἱ ὁποῖαι δεικνύουν τὴν σχέσιν μεταξὺ x καὶ y, ὅταν ἡ συνολικὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως παραμένη σταθερά, καλοῦμεν «ἰσοϋψεῖς καμπύλας»· Τοιαῦται καμπύλαι εἶναι αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας καὶ αἱ καμπύλαι μετασχηματισμοῦ διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν ἤδη ὁμιλήσει.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν συναρτήσεως τριῶν μεταβλητῶν δυνάμεθα νὰ ἐμφανίσωμεν κεχωρισμένως εἰς τρία δισδιάστατα σχήματα. Ἔστω ἡ συνάρτησις ζητήσεως $D = f(y, p)$, καθ' ἣν ἡ ζήτησις ἀγαθοῦ τινος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ διαθεσίμου εἰσοδήματος (y) καὶ ἐκ τῆς τιμῆς τούτου (p). Αἱ σχέσεις δύναται νὰ τύχουν γραφικῆς παραστάσεως εἰς τὰ κατωτέρω γραφήματα τοῦ Σχ. IV. 2· Τὰ γράφημα (α) δεικνύει τὴν σχέσιν ζητουμένων ποσοτήτων καὶ τιμῶν, τῆς καμπύλης ἐχούσης, ὡς εἰκός, ἀρνητικὴν κλίσιν. Τὸ γράφημα (β) ἀπεικονίζει τὴν σχέσιν ζητουμένων ποσοτήτων καὶ διαθεσίμου εἰσοδήματος, τῆς καμπύλης ἐχούσης, ὡς εἰκός, θετικὴν κλίσιν (περίπτωσις ἀγαθοῦ μὴ ὄντος κατωτέρου). Τὸ γράφημα (γ) δεικνύει τὰς μεταβολὰς τιμῶν καὶ εἰσοδήματος, ὅταν ἡ ζητουμένη ποσότης τηρῆται σταθερά. Ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς ὁδηγεῖ εἰς μείωσιν τῆς ζητουμένης ποσότητος. Ἡ αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος συγχρόνως ὁδηγεῖ εἰς ἀντιστάθμισιν τῆς μειώσεως τῆς προκληθείσης ἐκ τῆς αὐξήσεως τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ καὶ οὕτως ἡ ζητουμένη ποσότης τελικῶς παραμένει ἀμετάβλητος.



Σχ. IV. 2.

(ε) Μεταβολὴ τῆς $\partial z/\partial x$, ὅταν μεταβάλλεται ἡ x. Ἤτοι, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}$, δηλ. ἡ παράγωγος τῆς μερικῆς παραγώγου ὡς πρὸς x. Ἡ παράγωγος αὕτη καλεῖται μερικὴ παράγωγος δευτέρας τάξεως ὡς πρὸς x.

(στ) Μεταβολὴ τῆς $\partial z/\partial y$, ὅταν μεταβάλλεται ἡ y. Ἤτοι, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}$, δηλ. ἡ παράγωγος τῆς μερικῆς παραγώγου ὡς πρὸς y. Ἡ παράγωγος αὕτη καλεῖται μερικὴ παράγωγος δευτέρας τάξεως ὡς πρὸς y.

(ζ) Μεταβολὴ τῆς $\partial z/\partial x$, ὅταν μεταβάλλεται ἡ y. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}$. Ἤτοι ἡ μεταβολὴ τῆς μερικῆς παραγώγου ὡς πρὸς x ἐν σχέσει πρὸς τὰς μεταβολὰς τῆς ἑτέρας ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς y. Ἡ παράγωγος αὕτη καλεῖται **σταυροειδὴς μερικὴ παράγωγος** δευτέρας τάξεως, καὶ δεικνύει τὴν παραγώγισιν πρῶτον πρὸς x καὶ δεύτερον ὡς πρὸς y.

(η) Μεταβολὴ τῆς $\partial z/\partial y$, ὅταν μεταβάλλεται ἡ x. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}$. Ἤτοι, ἡ μεταβολὴ τῆς μερικῆς παραγώγου ὡς πρὸς y ἐν σχέσει πρὸς τὰς μεταβολὰς τῆς ἑτέρας ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x. Καὶ ἡ παράγωγος αὕτη καλεῖται σταυροειδὴς μερικὴ παράγωγος δευτέρας τάξεως καὶ δεικνύει τὴν παραγώγισιν πρῶτον ὡς πρὸς y καὶ δεύτερον ὡς πρὸς x.

Ἐκ τῶν (ζ) καὶ (η) προκύπτει ὅτι $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Young.

IV.0.1. **Παραγώγισις συναρτήσεων πλειόνων μεταβλητῶν.** Κατὰ τὴν παραγώγισιν συναρτήσεων πλειόνων μεταβλητῶν, ὡς ἡ $z = f(x,y)$ ἀκολουθοῦνται οἱ γνωστοὶ κανόνες παραγωγίσεως, ὡς οὗτοι ἀνεπτύχθησαν εἰς τὰ προηγούμενα.

Παραδείγματα: (α) $z = f(x,y) = 3x^3 + x^2 - xy^2 + 2y^3 - x^2y^2$. Ἡ μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς x, τῆς y λαμβανομένης ὡς σταθερᾶς, εἶναι:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = 9x^2 + 2x - y^2 - 2xy^2$$

Ἡ μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς y, τῆς x λαμβανομένης ὡς σταθερᾶς εἶναι:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y = -2xy + 6y^2 - 2x^2y$$

Ἡ δευτέρα μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς x, θὰ εἶναι ἡ παράγωγος τῆς $\partial z/\partial x$ ὡς πρὸς x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} = 18x + 2 - 2y^2$$

Ἡ δευτέρα μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς y, εἶναι ἡ παράγωγος τῆς $\partial z/\partial y$ ὡς πρὸς y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} = -2x + 12y - 2x^2.$$

Αἱ τρίται μερικαὶ παράγωγοι εὑρίσκονται διὰ συνεχίσεως τῆς παραγωγίσεως.

Ἡ σταυροειδὴς μερικὴ παράγωγος $\partial^2 z/\partial y \partial x$ θὰ εἶναι ἡ μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς y καὶ ἡ παράγωγος ταύτης ὡς πρὸς x, ἤτοι:

$$f_{yx} = -2y - 4xy$$

Ἡ σταυροειδὴς μερικὴ παράγωγος $\partial^2 z/\partial x \partial y$ θὰ εἶναι ἡ μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς x καὶ ἡ παράγωγος ταύτης ὡς πρὸς y, ἤτοι:

$$f_{xy} = -2y - 4xy.$$

Συνεπῶς
$$f_{yx} = f_{xy}$$
$$2y - 4xy = -2y - 4xy$$

(β) Ἐκ τῆς $z = \log(x^2 + y^2)$, ἔχομεν:

$$\frac{\partial}{\partial x}\log(x^2+y^2) = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\log(x^2+y^2) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x\left(-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

IV.0.2. **Παραγώγισις συνθέτου συναρτήσεως.** Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν συνάρτησιν $z = f(x,y)$, ὅπου αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ x καὶ y εἶναι συναρτήσεις ἑτέρας μεταβλητῆς, ἔστω τῆς t (χρόνου). Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς:

$$z = f(x, y)$$
$$x = x(t)$$
$$y = y(t).$$

Ἐπιθυμοῦμεν τὴν εὕρεσιν τοῦ dz/dt. Γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι $f_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ καὶ $f_y = \frac{\partial z}{\partial x}$. Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα παραγωγίσεως συνθέτου συναρτήσεως θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$
$$= f_x \cdot \frac{dx}{dt} + f_y \cdot \frac{dy}{dt}.^{*}$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω φαίνεται ὅτι, ἐὰν τὸ ὁλικὸν διαφορικόν, $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$, διαιρέσωμεν διὰ dt, θὰ λάβωμεν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως $z = f(x, y)$ ὡς πρὸς t.

Ἐὰν $z = f(x, y)$, καὶ $y = y(x)$, τότε

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

---

* Καλοῦμεν τὴν dz/dt σ υ ν ο λ ι κ ὴ ν π α ρ ά γ ω γ ο ν τῆς z ὡς πρὸς t, διότι λαμβάνει ὑπ' ὄψιν ἁπάσας τὰς μερικὰς μεταβολὰς τῆς z.

Ἐὰν $z = f(x,y)$, καὶ x καὶ y εἶναι συναρτήσεις τῶν u καὶ υ, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν μερικὴν παράγωγον τῆς z ὡς πρὸς u:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

τὴν μερικὴν παράγωγον τῆς z ὡς πρὸς υ:

$$\frac{\partial z}{\partial \upsilon} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \upsilon} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \upsilon}$$

Ἐκ τοῦ διαφορικοῦ $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$,

ὅπου $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial \upsilon} d\upsilon$ καὶ $dy = \frac{\partial y}{\partial \upsilon} du + \frac{\partial x}{\partial \upsilon} d\upsilon$, προκύπτει τὸ διαφορικὸν τῆς z ὡς πρὸς u καὶ υ:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \upsilon} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \upsilon}\right) d\upsilon.$$

Ἂς λάβωμεν τὰ κατωτέρω παραδείγματα πρὸς λύσιν:

(α) $z = e^{x^2+y^2}$ καὶ $y = e^{x^2}$. Εὑρεῖν τὴν dz/dx.

Ἔχομεν: $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}, \quad \frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} = 2xy$$

Συνεπῶς, $\frac{dz}{dx} = 2xe^{x^2+y^2} + 2ye^{x^2+y^2} \cdot 2xy$

$= 2xe^{x^2+y^2}(1 + 2y^2)$.

(β) $z = x^3y^2$, ὅπου $x = e^t$ καὶ $y = (1 + t)^2$. Εὑρεῖν τὴν dz/dt.

Ἔχομεν: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$,

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = 2(1 + t) = 2\sqrt{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y$$

Συνεπῶς, $\frac{dz}{dt} = 3x^2y^2e^t + 2x^3y\, 2\sqrt{y}$

$= 3x^2y^2x + x^3y\, 4\sqrt{y}$

$= x^3y\,(3y + 4\sqrt{y})$

IV.0.3. **Παραγώγισις πεπλεγμένης συναρτήσεως.** Εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητὴ z δὲν εἶναι εὔκολον νὰ ἐκφρασθῇ εἰς ὅρους τῶν x καὶ y [$z = f(x,y)$,] τότε ἔχομεν τὴν πεπλεγμένην μορφὴν $f(x,y,z) = 0$. Διὰ τὴν παραγώγισιν τοιούτων συναρτήσεων ἀκολουθεῖται ὁ κανὼν (ἄνευ ἀποδείξεως):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{f_x}{f_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} \Big/ \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{f_y}{f_z}$$

Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x,y,z) = 3z^4 + x^3z^3 - xy^2z = 0$. Θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3z^3x^2 - y^2z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 12z^3 + 3x^3z^2 - xy^2,$$

καὶ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{3z^3x^2 - y^2z}{12z^3 + 3x^3z^2 - xy^2}$. Ἐπίσης, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2xyz$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 12z^3 + 3x^3z^2 - xy^2, \text{ καὶ}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xyz}{12z^3 + 3x^3z^2 - xy^2}$$

IV.0.4. **Ὁμογενεῖς συναρτήσεις καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Euler.** Εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ οἰκονομικῶν συναρτήσεων ἐγένετο λόγος περὶ τῶν ὁμογενῶν τοιούτων, αἱ ὁποῖαι εἶναι συνυφασμέναι εἰς τὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς «ἀ π ο δ ό σ ε ω ς κ λ ί μ α κ ο ς». Ἡ ἔννοια αὕτη περιγράφει τὴν ἀπόκρισιν τῆς παραγωγῆς εἰς μίαν αὔξησιν τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς (εἰσροαὶ εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν). Ἡ γραμμικὴ ὁμογενὴς συνάρτησις παραγωγῆς περιγράφει σταθερὰν ἀπόδοσιν κλίμακος, καθ' ὅτι ἡ παραγωγὴ αὐξάνει κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν ὡς καὶ οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς. Ὁμογενὴς συνάρτησις βαθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος περιγράφει αὔξουσαν ἀπόδοσιν, βαθμοῦ δὲ μικροτέρου τῆς μονάδος φθίνουσαν ἀπόδοσιν.

Μερικαὶ ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁμογενῶν συναρτήσεων εἶναι αἱ ἀκόλουθοι:

(α) Ἡ συνάρτησις $z = (x,y)$, ἐφ' ὅσον εἶναι ὁμογενὴς ν— στοῦ βαθμοῦ δύναται νὰ γραφῇ ὡς:

$$f = x^{\nu}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ ὅπου } \varphi \text{ εἶναι νέα συνάρτησις.}$$

Π.χ. ἐὰν $f = x^2 + y^2 + z^2$, τότε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$f = x^2\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2\right] = x^2(1 + u^2 + \upsilon^2) = x^2\varphi\ (u, \upsilon),$$

$$\text{ὅπου } u = \frac{y}{x} \text{ καὶ } \upsilon = \frac{z}{x}$$

(β) Αἱ μερικαὶ παράγωγοι ὁμογενοῦς συναρτήσεως βαθμοῦ ν—στοῦ εἶναι ὁμογενεῖς βαθμοῦ (ν — 1). Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις $z = f(x,y)$ εἶναι ν — στοῦ βαθμοῦ, ἤτοι

$$f(tx, ty) = t^{\nu} f(x, y).$$

Ἡ παραγώγισις ταύτης ὡς πρὸς x, χρησιμοποιοῦντες τὸν κανόνα τῆς συνθέτου συναρτήσεως, εἶναι

$$tf_x (tx, ty) = t^{\nu} f_x (x, y)$$

Διαιροῦντες διὰ t, ἔχομεν: $f_x (tx, ty) = t^{\nu-1} f_x (x,y)$, ἤτοι ὁμογενὴς βαθμοῦ ν — 1. Ἐὰν συνάρτησίς τις παραγωγῆς εἶναι πρώτου βαθμοῦ τότε τὸ ὁριακὸν προϊὸν ἑκάστου συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ, ἤτοι παραμένει σταθερὸν διὰ ἀναλογικὰς μεταβολὰς εἰς ὅλους τοὺς συντελεστάς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι κάθε ὁριακὸν προϊὸν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς ἀναλογίας τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς κατὰ τὴν ὁποίαν οὗτοι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος. Ἡ γραμμικὴ ὁμογενὴς συνάρτησις $z = f(x,y)$ δύναται συμφώνως πρὸς τὸ (α) νὰ γραφῇ: $z = x\varphi(y/x)$. Ἡ μερικὴ παράγωγος ταύτης ὡς πρὸς x εἶναι*:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

ὅπου $\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$ ἡ παράγωγος τῆς $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ὡς πρὸς $\frac{y}{x}$ καὶ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$ εἶναι ἡ

παράγωγος ὡς πρὸς x $\left(\text{ἤτοι, } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\right)$

Ἡ μερική, ἐξ ἄλλου, παράγωγος τῆς $z = x\varphi(y/x)$ ὡς πρὸς y εἶναι:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left(\text{δοθέντος ὅτι } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\right).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, λοιπόν, ὅτι ἀμφότεραι αἱ μερικαὶ παράγωγοι (ὁριακὰ προϊόντα εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς), $\partial z/\partial x$ καὶ $\partial z/\partial y$, εἶναι συναρτήσεις τοῦ λόγου y/x (λόγος τῶν συντελεστῶν y καὶ x εἰς τὴν συνάρτησιν παραγωγῆς).

---

* Χρησιμοποιοῦμεν τὸ κανόνα παραγωγίσεως γινομένου καὶ συνθέτου συναρτήσεως.

(γ) Τὸ θεώρημα τοῦ Euler μᾶς λέγει ὅτι ἡ ἀκόλουθος συνθήκη ἱκανοποιεῖται ὑπὸ τῆς ὁμογενοῦς συναρτήσεως ν — στοῦ βαθμοῦ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y = \nu z.$$

Ἔστω ἡ ὁμογενὴς συνάρτησις 2ου βαθμοῦ $z = x^2 + y^2$, τότε $\partial z/\partial x = 2x$ καὶ $\partial z/\partial y = 2y$, καὶ συνεπῶς

$$2x \,.\, x + 2y \,.\, y = 2\,(x^2 + y^2) = 2z$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις παραγωγῆς $Q = f(x,y)$ εἶναι ὁμογενὴς πρώτου βαθμοῦ, τότε

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} \cdot x + \dfrac{\partial Q}{\partial y} \cdot y = Q$. Ἤτοι, ἡ συνολικὴ παραγωγὴ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τοῦ ὁριακοῦ προϊόντος τοῦ συντελεστοῦ x ἐπὶ τὴν ποσότητα τούτου καὶ τοῦ ὁριακοῦ προϊόντος τοῦ y ἐπὶ τὴν ποσότητα τούτου.

IV.1. ΟΡΙΑΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

IV.1.0. Ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν συναρτήσεως μιᾶς οἰκονομικῆς μεταβλητῆς οὕτω καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν περισσοτέρων μεταβλητῶν, αἱ μεταβολαὶ τούτων ἐνέχουν μεγίστην σημασίαν εἰς τὴν ἀνάλυσιν προβλημάτων τόσον τῆς μικροοικονομικῆς ὅσον καὶ τῆς μακροοικονομικῆς θεωρίας. Συνεπῶς ἰσχύουν ὅσα ἐλέχθησαν εἰς τὸ οἰκεῖον περὶ συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς κεφάλαιον, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἐνταῦθα ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι συνάρτησις πλειόνων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν καὶ αἱ μεταβολαὶ ταύτης ἐξετάζονται ἐν σχέσει πρὸς τὰς μεταβολὰς μιᾶς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τῶν λοιπῶν παραμενουσῶν ἀμεταβλήτων. Παραδείγματος χάριν ἡ ζητουμένη ποσότης ἀγαθοῦ τινος εἶναι συνάρτησις τῆς τιμῆς του καὶ τοῦ εἰσοδήματος τοῦ καταναλωτοῦ, καὶ ἐρωτᾶται ποία ἡ ἀπόκρισις τῆς ζητήσεως εἰς μίαν αὔξησιν τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ, τοῦ εἰσοδήματος παραμένοντος ἀμεταβλήτου, ἢ εἰς μίαν αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος, τῆς τιμῆς παραμενούσης ἀμεταβλήτου.

IV.1.1. **Μερικαὶ ἐλαστικότητες.** Ὡς ἐλέχθη ἡ ἐλαστικότης εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁριακῆς τιμῆς διὰ τῆς μέσης τιμῆς τῆς συναρτήσεως. Οὕτως ἡ μερικὴ ἐλαστικότης εἶναι ὁ λόγος τῆς μερικῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς μέσης τιμῆς τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς τὴν ὑπ' ὄψιν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, τῶν λοιπῶν παραμενουσῶν ἀμεταβλήτων. Ἔστω ἡ συνάρτησις ζητήσεως $q = q(p,y)$, ὅπου q = ἡ ζητουμένη ποσότης, p = ἡ τιμὴ μονάδος καὶ y = τὸ ἀτομικὸν εἰσόδημα. Ἡ ἐλαστικότης ζητήσεως ὡς πρὸς τὴν τιμὴν θὰ εἶναι:

$$e_p = \partial q/\partial p : q/p$$

Ἡ εἰσοδηματικὴ ἐλαστικότης ζητήσεως θὰ εἶναι:

$$e_y = \partial q/\partial y : q/y$$

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν ζητήσεως $q_1 = \varphi(p_1, p_2, p_3)$, ὅπου p_1, p_2 καὶ p_3 εἶναι αἱ τιμαὶ τοῦ ζητουμένου ἀγαθοῦ 1 καὶ τῶν ἀγαθῶν 2 καὶ 3, τότε:

—Ἐλαστικότης ὡς πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ ἀγαθοῦ 1: $(\partial q_1/\partial p_1 : q_1/p_1)$

—Ἐλαστικότης ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ 1 ὡς πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ ἀγαθοῦ 2: $(\partial q_1/\partial p_2 : q_1/p_2)$

—Ἐλαστικότης ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ 1 ὡς πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ ἀγαθοῦ 3: $(\partial q_1/\partial p_3 : q_1/p_3)$

Αἱ δύο τελευταῖαι ἐλαστικότητες καλοῦνται σταυροειδεῖς.

Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἐλαστικότητος, αὕτη ἐπηρεάζεται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως. Ἡ τελευταία αὕτη οὖσα παράμετρος τῆς στατιστικῆς συναρτήσεως ἐπηρεάζεται ἀπὸ πολλοὺς παράγοντας, ὡς αἱ προτιμήσεις τῶν καταναλωτῶν, ὁ συρμός, ἡ ὕπαρξις ὑποκαταστάτων κ.λπ.

Ὁ τελευταῖος παράγων, ἤτοι ἡ ὕπαρξις ὑποκαταστάτων, ὡς καὶ ἡ ὕπαρξις συμπληρωματικῶν ἀγαθῶν ἔχει μεγίστην σημασίαν κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς καμπύλης ζητήσεως ἑνὸς ἀγαθοῦ. Ὅταν ὑφίστανται ἀνταγωνιστικὰ ἀγαθὰ (ὑποκατάστατα), ἡ ἐλαστικότης ζητήσεως ὡς πρὸς τὴν τιμὴν ἑνὸς ἀγαθοῦ ἐπηρεάζεται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν ἀνταγωνιστικῶν ἀγαθῶν. Παραδείγματος χάριν, ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς τυροῦ φέτας θὰ στρέψῃ ἓν μέρος τῆς ζητήσεως πρὸς ἕτερον εἶδος τυροῦ τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ παραμένει σταθερά. Εἰς τὰς περιπτώσεις ἀνταγωνιστικῶν ἀγαθῶν αἱ ἐλαστικότητες ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τῶν ὑποκαταστάτων ἀγαθῶν εἶναι θετικαί. Ὅταν ὑφίσταται συμπληρωματικὸν ἀγαθόν, ὁπότε ἡ ζήτησις εἶναι συνδεδεμένη, τότε ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ἀγαθοῦ δὲν θὰ ὁδηγήσῃ μόνον εἰς μείωσιν τῆς ζητουμένης ποσότητος τοῦ ἀγαθοῦ τούτου, ἀλλὰ καὶ εἰς μείωσιν τῆς ζητήσεως τοῦ ἑτέρου (συμπληρωματικοῦ) ἀγαθοῦ τοῦ ὁποίου ἡ ζήτησις προκύπτει λόγῳ τῆς ζητήσεως τοῦ πρώτου ἀγαθοῦ. Παραδείγματος χάριν, ἡ ζήτησις αὐτοκινήτων εἶναι συνδεδεμένη μὲ τὴν ζήτησιν ἐλαστικῶν αὐτοκινήτων. Συνεπῶς ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς αὐτοκινήτων θὰ ὁδηγήσῃ εἰς μείωσιν ὄχι μόνον αὐτῶν τούτων τῶν αὐτοκινήτων, ἀλλὰ καὶ τῶν ἐλαστικῶν. Αἱ μερικαὶ ἐλαστικότητες εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι ἀρνητικαί.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ συναρτήσεις ζητήσεως διὰ δύο ἀγαθὰ εἶναι γραμμικῆς μορφῆς, ἤτοι

$$q_1 = \alpha - \beta p_1 + \gamma p_2, \qquad q_2 = \delta - \varepsilon p_2 + \zeta p_1$$

ἐξ ὧν φαίνεται ὅτι τὰ ἀγαθὰ 1 καὶ 2 εἶναι ἀνταγωνιστικά, τότε αἱ μερικαὶ ἐλαστικότητες ζητήσεως θὰ εἶναι:

$$e_{11} = -\beta . p_1/q_1, \qquad e_{22} = -\varepsilon : q_2/p_2$$
$$e_{12} = +\gamma . p_1/q_2, \qquad e_{21} = +\zeta : q_2/p_1.$$

Ἐὰν τὰ ἀγαθὰ 1 καὶ 2 ἦσαν συμπληρωματικὰ τότε αἱ συναρτήσεις θὰ εἶχον ὡς ἀκολούθως:

$$q_1 = \alpha - \beta p_1 - \gamma p_2, \qquad q_2 = \delta - \varepsilon p_2 - \zeta p_1.$$

Ἐξ ὧν προκύπτει ὅτι αἱ ἐλαστικότητες εἶναι ἀρνητικαί.

Μία σπουδαία ἰδιότης τῶν μερικῶν ἐλαστικοτήτων εἶναι ὅτι τὸ ἄθροισμα τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸν βαθμὸν ὁμογενείας τῆς συναρτήσεως ἐξ ἧς ἐλήφθησαν. Διὰ νὰ ἰσχύη ἡ ἰδιότης αὕτη θὰ πρέπει ἡ συνάρτησις νὰ εἶναι ὁμογενής. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου στηρίζεται ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Euler, καθ' ὃ εἰς τὴν περίπτωσιν συναρτήσεως ζητήσεως $q = \varphi(p,y)$, ἔχομεν:

$$\partial q/\partial p \,.\, p + \partial q/\partial y \,.\, y = vq.$$

Ἐὰν τὰ μέλη τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως διαιρέσωμεν διὰ q θὰ ἔχωμεν:

$$\partial q/\partial p \,.\, p/q + \partial q/\partial y \,.\, y/q = v$$

Ἤτοι, τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν ἐλαστικοτήτων ἰσοῦται μὲ τὸν βαθμὸν ὁμογενείας τῆς συναρτήσεως.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν συνάρτησιν ζητήσεως $q = \alpha\, y/p$, ὅπου $y =$ τὸ εἰσόδημα, $p =$ ἡ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ καὶ $\alpha =$ σταθερὰ ποσότης. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν:

Βαθμὸς ὁμογενείας τῆς q: $(\alpha . ty/tp) = \alpha t^0 . y/p$, ἤτοι μηδενικοῦ βαθμοῦ.
Ἄθροισμα μερικῶν ἐλαστικοτήτων $= 0$

$$\partial q/\partial p \,.\, p/q + \partial q/\partial y \,.\, y/q = 0$$
$$-\alpha y/p^2 \,.\, p/q + \alpha/p \,.\, y/q = 0$$
$$-\alpha y/pq + \alpha y/pq = 0$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος προκύπτει ἐπίσης, ὅτι, ὅταν ἡ συνάρτησις ζητήσεως εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ ὁμογενείας τότε, ἐὰν τὸ εἰσόδημα καὶ ἡ τιμὴ μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, ἡ ζητουμένη ποσότης παραμένει σταθερά.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν μίαν κατὰ 10% αὔξησιν τόσον τῆς τιμῆς ὅσον καὶ τοῦ εἰσοδήματος εἰς τὴν συνάρτησιν

$q = 2yp^{-1} = 2.10/2 = 10$, ἤτοι $q = 2.11/2{,}2 = 10$.

Βλέπομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ποσότης q παρέμεινε σταθερά. Τοῦτο γίνεται εὐκόλως ἀντιληπτὸν ἐκ τῆς ἐπενεργείας τοῦ εἰσοδηματικοῦ ἀποτελέσματος καὶ τοῦ ἀποτελέσματος τῆς τιμῆς ἐπὶ τῆς ζητουμένης ποσότητος. Ἡ αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος ὁδηγεῖ εἰς αὔξησιν τῆς ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ. Ἡ αὔξησις, ὅμως τῆς τιμῆς ὁδηγεῖ εἰς μείωσιν τῆς ζητήσεως. Δεδομένου ὅτι αἱ δύο αὗται ἐπιδράσεις εἶναι τῆς αὐτῆς ἐκτάσεως, ἡ ζητουμένη ποσότης μένει τελικῶς ἀνεπηρέαστος.

IV.1.2. **Ἡ συνάρτησις χρησιμότητος**. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς παραγωγικῆς μονάδος ἔχομεν τὰς εἰσροὰς εἰς τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα ἐκ τῆς μιᾶς πλευρᾶς καὶ τὴν ἐκροὴν τοῦ προϊόντος ἐκ τῆς ἄλλης. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς καταναλωτικῆς μονάδος (ἄτομον, οἰκοκυριὸν) αἱ εἰσροαὶ ἀποβαίνουν τὰ καταναλισκόμενα ἀγαθὰ καὶ ἡ ἐκροὴ ἢ παραγωγὴ ἀποβαίνει ἡ ἱ κ α ν ο π ο ί η σ ι ς ἢ χ ρ η σ ι μ ό τ η ς (utility) ἢ ὠ φ ε λ ι μ ό τ η ς διὰ τὸν καταναλωτήν. Τὰ ἀγαθὰ ζητοῦνται ἐκ μέρους τῶν καταναλωτικῶν μονάδων διότι ταῦτα εἶναι χρήσιμα. Ἐξ ἑνὸς συνόλου ἀγαθῶν ὁ καταναλωτὴς ἀποκομίζει ἓν σύνολον χρησιμότητος ἢ ἱκανοποιήσεως. Ἡ βαθμιαία κατανάλωσις ἀγαθοῦ τινος δίδει εἰς τὸν καταναλωτὴν βαθμιαίας ἱκανοποιήσεις, αἱ ὁποῖαι σωρευτικῶς μετὰ τὴν πλήρη κατανάλωσιν τοῦ ἀγαθοῦ, ἀποτελοῦν τὴν σ υ ν ο λ ι κ ὴ ν ἱ κ α ν ο π ο ί η σ ι ν. Τὴν αὔξησιν τῆς ἱκανοποιήσεως ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ μίαν ἐπὶ πλέον μονάδα καταναλώσεως τοῦ ἀγαθοῦ καλοῦμεν ὁ ρ ι α κ ὴ ν ἱ κ α ν ο π ο ί η σ ι ν ἢ χ ρ η σ ι μ ό τ η τ α (m a r g i n a l u t i l i t y).

Ἡ ὁριακὴ χρησιμότης εἰς τὰ πρῶτα στάδια καταναλώσεως τοῦ ἀγαθοῦ βαίνει αὔξουσα. Εἰς ἐνδιάμεσόν τι στάδιον φθάνει τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμὴν καὶ κατόπιν ἀρχίζει καὶ πάλιν νὰ πίπτη καθ' ὃν χρόνον ἡ κατανάλωσις τοῦ ἀγαθοῦ αὐξάνει. Οὕτω διατυποῦται ὁ νόμος τῆς φ θ ι ν ο ύ σ η ς ὁ ρ ι α κ ῆ ς χ ρ η σ ι μ ό τ η τ ο ς, ὅστις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν νόμον τῆς «φ θ ι ν ο ύ σ η ς ὁ ρ ι α κ ῆ ς π α ρ α γ ω γ ι κ ό τ η τ ο ς» ἢ τοῦ νόμου τῆς «φ θ ι ν ο ύ σ η ς ὁ ρ ι α κ ῆ ς ἀ π ο δ ο τ ι κ ό τ η τ ο ς» εἰς τὴν θεωρίαν τῆς παραγωγῆς.

Οἱ λόγοι διὰ τοὺς ὁποίους ἡ χρησιμότης ἑνὸς ἀγαθοῦ βαίνει φθίνουσα αὐξανομένης τῆς καταναλισκομένης ποσότητος τούτου, ἀποδίδονται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι αἱ περισσότεραι τῶν ἀναγκῶν ἔχουν κάποιο σημεῖον κορεσμοῦ, καὶ ὅτι εἰς τὴν πραγματικότητα τὰ ἀγαθὰ εἶναι ἀτελῶς ὑποκατάστατα μεταξύ των. Ὁ τελευταῖος λόγος σημαίνει ὅτι ὁ καταναλωτὴς διὰ νὰ ἀποκομίση ὡρισμένην ἱκανοποίησιν προβαίνει εἰς κατανάλωσιν διαφόρων ποσοτήτων ἑνὸς συνόλου ἀγαθῶν καὶ οὐχὶ ἑνὸς μόνον ἀγαθοῦ, ἐξ οὗ νὰ θέλῃ νὰ ἀποκομίσῃ τὸ σύνολον τῆς ἱκανοποιήσεως. Καταναλίσκων τις ἄρτον καὶ βούτυρον ἀποκομίζει ὡρισμένην ἱκανοποίησιν. Ἐὰν ἀντὶ ἄρτου καταναλώσῃ μόνον βούτυρον, τότε δὲν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι οὗτος θὰ λάβῃ τὴν αὐτὴν ἱκανοποίησιν, ἤτοι ἡ πρόσθετος ποσότης βουτύρου θὰ ἔχῃ χρησιμότητα μικροτέρα τῆς ἀρχικῆς ποσότητος.

Κατὰ τὴν θεώρησιν τῶν προβλημάτων τῆς καταναλώσεως γίνεται πάντοτε ἡ ὑπόθεσις ὅτι ὁ καταναλωτὴς συμπεριφέρεται ὀρθολογικῶς. Ἀπόρροια τῆς ὀρθολογικότητος τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι καὶ ἡ ὑπ' αὐτοῦ κατάταξις τῶν ἀγαθῶν ἀναλόγως τῆς χρησιμότητός των καὶ ἡ ἐπιλογὴ εἰς ἣν οὗτος προβαίνει μεταξὺ πολλῶν ἀγαθῶν διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῶν ἀναγκῶν του. Ἀπαιτεῖται ὅμως, ὡς εἶναι φυσικόν, ἓν μέτρον διὰ τὴν μέτρησιν τῆς χρησιμότητος τῶν ἀγαθῶν καὶ τὴν κατάταξιν τούτων. Λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ χρησιμότης εἶναι ἔννοια ὑποκειμενικὴ εἶναι δύσκολος ἡ ἀνεύρεσις ἀντικειμενικοῦ μέτρου. Θὰ ἦτο ὅμως δυνατὸν νὰ γίνῃ ἱεράρχησις τῶν ἀγαθῶν κατὰ τάξιν ἀναλόγως τῶν προτιμήσεων τοῦ καταναλωτοῦ, ὁπότε οὗτος ἀντιμετωπίζει μίαν κλίμακα ἀγαθῶν διατεταγμένων κατὰ φθίνουσαν τάξιν ἐπιθυμητότητος. Οὕτως ὁ καταναλωτὴς διὰ τοῦ τρόπου τούτου κατέχει ἓν μέτρον τακτικῆς χρησιμότητος (ordinal utility). Οἱ παλαιότεροι οἰκονομολόγοι, ὡς οἱ Jevons, Walras, Pareto, κ.ἄ., ἐθεώρουν ὅτι ἡ χρησιμότης εἶναι μετρήσιμος διὰ τῆς ἀπονομῆς μονάδων χρησιμότητος δι' ἕκαστον ἀγαθόν, ἢ δείκτου χρησιμότητος, ὁπότε ἕκαστον ἀγαθὸν ἱεραρχεῖται βάσει τοῦ δείκτου χρησιμότητός του δίκην σταθμίσεως. Οὕτως ὁ καταναλωτὴς κατέχει ἓν ὁριστικὸν μέτρον χρησιμότητος (cardinal utility).

Ἡ μαθηματικὴ ἔκφρασις τῆς ἱεραρχήσεως τῶν ἀγαθῶν ἀναλόγως πρὸς τὴν χρησιμότητά των ἀποτελεῖ τὴν συνάρτησιν χρησιμότητος. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ καταναλωτὴς καταναλίσκει δύο ἀγαθὰ q_1 καὶ q_2, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν συνεχῆ μονότιμον συνάρτησιν χρησιμότητος.

$$\Omega = f(q_1, q_2),$$

ὅπου Ω μετρεῖ τὴν τακτικὴν χρησιμότητα. Ἐὰν δώσωμεν διαφόρους δείκτας εἰς τὴν χρησιμότητα Ω, τότε λαμβάνομεν χάρτην καμπύλων ἀδιαφορίας, ὡς εἰς τὸ Κεφάλαιον II. εἴδομεν.

Αἱ ὁριακαὶ χρησιμότητες τῶν δύο ἀγαθῶν εἶναι αἱ μερικαὶ παράγωγοι τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως ἤτοι:

$$\partial\Omega/\partial q_1, \quad \partial\Omega/\partial q_2$$

Δεδομένου ὅτι ἡ μέτρησις τῶν ὁριακῶν χρησιμοτήτων δὲν εἶναι δυνατὴ κατ' ἀπόλυτον τρόπον, αὕτη δύναται νὰ γίνῃ κατὰ σχετικὸν τρόπον, ἤτοι:

$$\partial\Omega/\partial q_1 : \partial\Omega/\partial q_2$$

Βασική ἀρχὴ τῆς ὀρθολογικότητος τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι ἡ προσπάθεια τούτου ὅπως κατανείμη τὴν κατανάλωσιν τῶν δεδομένων ἀγαθῶν κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε αἱ ὁριακαὶ χρησιμότητες τῶν ἀγαθῶν καταστοῦν ἴσαι. Ἡ ἀρχὴ αὕτη, καλουμένη ἀρχὴ τῆς ἰσο-ὁριακῆς χρησιμότητος, τυγχάνει ἐφαρμογῆς κατὰ τὴν δαπάνην τοῦ εἰσοδήματος, τὴν κατανομὴν τῶν περιουσιακῶν στοιχείων τοῦ καταναλωτοῦ καὶ τὴν κατανομὴν τῶν πόρων μιᾶς οἰκονομίας. Ἡ κατανομὴ τοῦ εἰσοδήματος μεταξὺ διαφόρων χρήσεων θὰ πρέπει νὰ ἀποφέρη ἴσας ὁριακὰς ἱκανοποιήσεις. Ἄλλως ὁ καταναλωτὴς δὲν λαμβάνει ἐκ τοῦ εἰσοδήματός του τὴν μεγίστην ἱκανοποίησιν. Ἡ αὐτὴ ἀρχὴ τῆς ἰσο-ὁριακῆς χρησιμότητος ἐφαρμόζεται κατὰ τὴν κατανομὴν τῶν ἀτομικῶν περιουσιακῶν στοιχείων μεταξὺ διαφόρων μορφῶν. Τὸ οἰκονομοῦν ἄτομον κατανέμει τὸν πλοῦτον του εἰς ἀκίνητα, χρεόγραφα, ρευστὰ διαθέσιμα, καταναλωτικὰ εἴδη διαρκείας, κ.λπ., κατὰ τὴν ὑποκειμενικὴν αὐτοῦ ἐκτίμησιν, ἐλπίζων ὅτι ἡ κατανομὴ εἶναι ἡ ἀρίστη ὠφελιμιστικῶς. Ἐὰν πρὸς στιγμὴν μορφή τις περιουσιακοῦ στοιχείου ἀποβαίνει περίσσεια, τότε τὸ οἰκονομοῦν ἄτομον μετατρέπει ποσότητα ἐκ τοῦ περιουσιακοῦ στοιχείου εἰς ἑτέραν μορφὴν πλέον ἐπιθυμητὴν ὠφελιμιστικῶς, ὥστε αἱ ὁριακαὶ ποσότητες τῶν περιουσιακῶν του στοιχείων νὰ ἀποδίδουν τὴν αὐτὴν ὠφελιμότητα. Τέλος, τὴν ἀρχὴν τῆς ἰσο-ὁριακῆς χρησιμότητος ἀκολουθεῖ καὶ ὁ προγραμματισμὸς τῆς ἀρίστης κατανομῆς τῶν πλουτοπαραγωγικῶν πόρων μιᾶς οἰκονομίας. Οἱ παραγωγικοὶ πόροι τῆς οἰκονομίας πρέπει νὰ κατανέμωνται μεταξὺ τῶν διαφόρων χρήσεων (τομέων καὶ κλάδων τῆς οἰκονομίας) κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ὁριακὴ ἀπόδοσις ἁπασῶν τῶν χρήσεων εἶναι ἡ αὐτή. Ὅταν τὸ τοιοῦτον συμβῆ, τότε πᾶσα μεταφορὰ πόρων ἐξ ἑνὸς κλάδου πρὸς ἕτερον παύει νὰ εἶναι συμφέρουσα, ἐπιφέρουσα μείωσιν τῆς συνολικῆς ἀποδόσεως (ὠφελιμότητος).

Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀνωτέρω ἀρχῆς ὑπόκειται εἰς περιορισμοὺς εἰς τὴν πρᾶξιν. Οἱ περιορισμοὶ οὗτοι προέρχονται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ὅλοι οἱ πόροι ἢ τὰ ἀγαθὰ δὲν εἶναι διαιρετὰ εἰς πολὺ μικρὰ μέρη (ἀδιαιρετότης) ἀφ᾿ ἑνός, καὶ ἡ «περίοδος δαπάνης» (budget period) τοῦ εἰσοδήματος καὶ ἀποκομίσεως τῆς ὠφελιμότητος δὲν εἶναι ὡρισμένη, ἀφ᾿ ἑτέρου.

Ἡ ἀρχὴ τῆς ἰσο-ὁριακῆς χρησιμότητος, ὡς ὁριακὴ ἔννοια, προϋποθέτει συνεχεῖς μεταβλητάς. Αἱ ποσότητες τῶν ἀγαθῶν ὅμως, δὲν εἶναι πάντοτε συνεχεῖς μεταβληταὶ καὶ ἡ ἐξίσωσις τῶν ὁριακῶν χρησιμοτήτων αἵτινες προκύπτουν ἐκ τῶν ἀπειροελαχίστων τελευταίων μεταβολῶν, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῆ ἀπολύτως. Ἐξ ἄλλου, ἡ κατανομὴ τῆς δαπάνης μεταξὺ διαφόρων ἀγαθῶν ἐντὸς τῆς «περιόδου δαπάνης» ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νὰ ἀποφέρη ὠφελιμότητα ὄχι μόνον ἐντὸς ταύτης, ἀλλὰ καὶ εἰς ἑπομένας περιόδους. Συνεπῶς διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν χρησιμοτήτων δέον νὰ ληφθῆ ὑπ᾿ ὄψιν ὁλόκληρος ὁ χρονικὸς ὁρίζων, καθ᾿ ὃν ἀποκομίζονται αἱ τμηματικαὶ ὠφελιμότητες. Ἡ κατανομὴ τῆς ὠφελιμότητος ἑνὸς ἀγαθοῦ εἰς περισσοτέρας περιόδους μειώνει καὶ τὴν σημασίαν τοῦ περιορισμοῦ, ὅστις προέρχεται ἐκ τῆς ἀδιαιρετότητος ὡρισμένων ἀγαθῶν. Ὅσον μεγαλυτέρα ἡ «περίοδος δαπάνης» τόσον περισσότερον μειοῦται ἡ σημασία τῆς ἀδιαιρετότητος τῶν ἀγαθῶν.

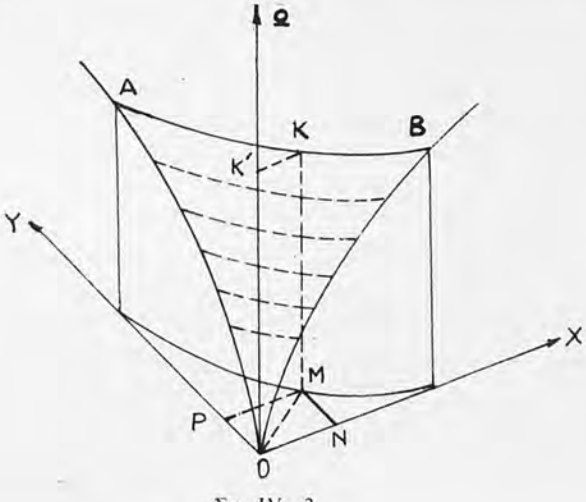
Ἡ προσθήκη ἀγαθοῦ τινος εἰς τὴν κατανάλωσιν τοῦ ἀτόμου ὠθεῖ εἰς μείωσιν τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος τούτου, ἀλλὰ αὐξάνει τὴν συνολικὴν χρησιμότητα. Ἡ τελευταία αὕτη αὐξάνει συνεχῶς διὰ τῆς προσθήκης μονάδων τοῦ ἀγαθοῦ εἰς τὴν κατανάλωσιν μέχρι τοῦ σημείου, ὅπου ἡ ὁριακὴ χρησιμότης καθίσταται ἴση πρὸς τὸ μηδέν. Αὐξομειώσεις τῶν καταναλισκομένων ποσοτήτων ἐπιφέρουν αὐξομείωσν τῆς συνολικῆς χρησιμότητος. Εἶναι ὅμως, δυνατὸν ἡ συνολικὴ χρησιμότης ἢ ἱκανοποίησις τοῦ καταναλωτοῦ νὰ παραμένη σταθερὰ καὶ νὰ λαμβάνη χώραν μεταβολὴν εἰς τὸν συνδυασμὸν τῶν καταναλισκομένων ποσοτήτων, ἤτοι ὑποκατάστασις τοῦ ἑνὸς διὰ τοῦ ἑτέρου. Τὸ τοιοῦτον παρηκολουθήσαμεν ἤδη διὰ τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας. Ἐνταῦθα θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ θέμα ἀναλυτικῶς.

Ἄς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν χρησιμότητος: $\Omega = (x+k)^{\alpha}(y+\lambda)^{\beta}$, ὅπου x καὶ y εἶναι ποσότητες ἀγαθῶν, καὶ k, λ, α καὶ β παράμετροι τῆς συναρτήσεως. Ἡ μεταβολὴ τῆς συνολικῆς χρησιμότητος, dΩ, ἤτοι τὸ συνολικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως, θὰ ἰσοῦται πρὸς $d\Omega = \partial\Omega/\partial x \, dx + \partial\Omega/\partial y \, dy$. Δηλονότι ἡ μεταβολὴ τῆς συνολικῆς χρησιμότητος ἡ προκαλουμένη ἐκ τῆς μεταβολῆς τῶν ποσοτήτων τῶν ἀγαθῶν x καὶ y ἰσοῦται πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς ποσότητος τοῦ x ἐπὶ τὴν ὁριακὴν χρησιμότητα τούτου σὺν τῇ μεταβολῇ τῆς ποσότητος τοῦ y ἐπὶ τὴν ὁριακὴν χρησιμότητα τούτου. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ καταναλωτὴς κινεῖται ἐπὶ δεδομένης καμπύλης ἀδιαφορίας, τότε ὡς γνωστὸν οὐδεμία μεταβολὴ τῆς συνολικῆς χρησιμότητος ἐπισυμβαίνει. Οὕτω θὰ ἔχωμεν $d\Omega = 0$. Συνεπῶς

$$\partial\Omega/\partial x \, dx + \partial\Omega/\partial y \, dy = 0, \text{ καὶ}$$
$$dx/dy = -f_y/f_x \quad \text{ἢ} \quad -dx/dy = f_y/f_x.$$

Ὁ λόγος $-(dx/dy)$ εἶναι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης ἀδιαφορίας καὶ ἐμφαίνει τὸν λόγον ὑποκαταστάσεως τοῦ ἀγαθοῦ x διὰ τοῦ y. Ὁ λόγος οὗτος, καλούμενος ὁριακός, βαίνει φθίνων, ὅπερ σημαίνει ὅτι προστιθεμένων συνεχῶς σταθερῶν ποσοτήτων τοῦ x, ἀφαιρεῖται ὁλοὲν καὶ μικροτέρα ποσότης ἐκ τοῦ y, ὥστε ὁ καταναλωτὴς μένει εἰς τὴν αὐτὴν καμπύλην ἀδιαφορίας. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος προκύπτει περαιτέρω, ὅτι ὁ λόγος ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν δύο ἀγαθῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν μερικῶν παραγώγων, ἤτοι τὸν λόγον τῶν ὁριακῶν χρησιμοτήτων τῶν δύο ἀγαθῶν. Δεδομένου ὅτι δὲν ὑφίσταται ἀπόλυτον μέτρον διὰ τὰς ὁριακὰς χρησιμότητας, ὁ λόγος τούτων εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ λόγου ὑποκαταστάσεως τῶν δύο ἀγαθῶν. Ὁ λόγος τῶν ὁριακῶν χρησιμοτήτων συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω εἶναι $\beta/(y+\lambda) : \alpha/(x+k)$ καὶ ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ ὁριακοῦ λόγου ὑποκαταστάσεως τῶν δύο ἀγαθῶν dy/dx.

Ὁ ὁριακὸς λόγος ὑποκαταστάσεως εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψῃ γραφικῶς ἐκ τῆς κλίσεως τῆς ἐφαπτομένης εἰς ὡρισμένον σημεῖον τῆς καμπύλης ἀδιαφορίας, ἥτις ἐμφαίνει συνδυασμοὺς τῶν δύο ἀγαθῶν εἰς δεδομένον ἐπίπεδον συνολικῆς χρησιμότητος. Ἓν σύνολον καμπύλων ἀδιαφορίας προκύπτει ἐκ τῆς «ἐπιφανείας χρησιμότητος» τρισδιαστάτου σχήματος ὡς τὸ κατωτέρω*.



Σχ. IV. 3.

Ἡ ἐπιφάνεια AOB δεικνύει τὴν συνολικὴν χρησιμότητα συναρτήσει τῶν δύο ἀγαθῶν x καὶ y, ἤτοι $\Omega = \varphi(x, y)$, συνάρτησις συνεχής. Αἱ καμπύλαι OA καὶ OB δεικνύουν τὴν σχέσιν συνολικῆς χρησιμότητος καὶ y ἢ x ἀντιστοίχως, ὅταν ἡ κατανάλωσις τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγαθῶν εἶναι μηδέν. Ἡ καμπύλη, ἐξ ἄλλου, AB δεικνύει συνδυασμὸν τῶν ἀγαθῶν x καὶ y εἰς ἐπίπεδον χρησιμότητος OK′ ἢ MK. Ἅπασαι αἱ διακεκομμέναι γραμμαὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν AOB ἀποτελοῦν οἰκογένειαν ἢ χάρτην καμπύλων ἀδιαφορίας. Ἀνερχόμενοι δὲ ἐκ τοῦ σημείου O πρὸς τὸ σημεῖον K, δίκην λόφου, ἀποκομίζομεν συνεχῶς καὶ μεγαλυτέραν ἀπόλαυσιν. Κινούμενοι ἐπὶ ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω καμπύλων λαμβάνομεν τὸν βαθμὸν ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν δύο ἀγαθῶν.

* J. R. Hicks, Value and Capital, 2nd Ed., σελ. 15.

Ὁ νόμος τῆς φθινούσης ὁριακῆς χρησιμότητος ἀποτελεῖ μίαν ἐκ τῶν βάσεων τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας. Λόγῳ ὅμως τῆς ὑποκειμενικότητος καὶ τῆς ὑποθέσεως τῆς ὀρθολογικότητος τοῦ καταναλωτοῦ ἀφ' ἑνός, ὡς καὶ τῆς ἀνυπαρξίας ἀπολύτου μέτρου τῆς χρησιμότητος ἀφ' ἑτέρου, ὁ νόμος οὗτος ἠμφεσβητήθη ἢ ἀντεκατεστάθη ὑπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ λόγου ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν δύο ἀγαθῶν, ὡς προκύπτει γραφικῶς ἐκ τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας. Διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν τελευταίων τούτων καθίσταται περιττὴ ἡ χρῆσις τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος, καὶ ἀντ' αὐτῆς ἔχομεν κλίμακα προτιμήσεων (scale of preferences), ἤτοι συγκρίσεις μᾶλλον παρὰ μετρήσεις.

Οὕτω πως ἡ θεωρία τῆς χρησιμότητος ὡς εἶχεν ἀναπτυχθῆ ὑπὸ τοῦ Menger, τοῦ Walras, τοῦ Jevons καὶ τοῦ Marshall, τροποποιεῖται ὑπὸ τοῦ Pareto, ὅστις πρὸς τὸν σκοπὸν ἐξετάσεως τῆς ζητήσεως ἀνταγωνιστικῶν ἢ συμπληρωματικῶν ἀγαθῶν ἐχρησιμοποίησεν τὴν τεχνικὴν τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας τοῦ Edgeworth. Τὴν αὐτὴν προσπάθειαν τοποθετήσεως τῆς θεωρίας τῆς ἀξίας ἐπὶ σταθερᾶς βάσεως μακρὰν ψυχολογικῶν καὶ φιλοσοφικῶν παραδοχῶν κατέβαλεν ὁ Eugen Slutsky*, ὅστις ἐπροχώρησεν ἓν βῆμα περαιτέρω διὰ τῆς ὁλοκληρώσεως τῆς θεωρίας τῆς ζητήσεως. Σημαντικὴ θεωρεῖται σήμερον ἡ συμβολὴ τοῦ J. R. Hicks εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῆς θεωρίας τῆς ζητήσεως βασιζομένης ἐπὶ τοῦ ἀναλυτικοῦ ὀργάνου τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας καὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ὁριακοῦ λόγου ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν ἀγαθῶν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθέντων θεωρητικῶν ὁ Ἄγγλος Stanley Jevons ἐπρότεινε συνάρτησιν χρησιμότητος μὲ ἀθροιστικὴν ἰδιότητα, ἤτοι ἄθροισμα συναρτήσεων χρησιμοτήτων ἑκάστου ἀγαθοῦ $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_v)$ ὡς ἡ κατωτέρω:

$$\Omega = F_1(x_1) + F_2(x_2) + \ldots + F_v(x_v),$$

ὅπου αἱ ἐπιμέρους συναρτήσεις Fi ὑπείκουν εἰς τὸν νόμον τῆς φθινούσης ὁριακῆς χρησιμότητος. Κατὰ τὸν νόμον αὐτὸν θὰ πρέπει ἡ πρώτη παράγωγος τῶν συναρτήσεων νὰ εἶναι θετικὴ (αὔξουσαι συναρτήσεις), ἤτοι $F_i'(x_i) > 0$, καὶ ἡ δευτέρα παράγωγος (μεταβολὴ τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος) τούτων νὰ εἶναι ἀρνητική, ἤτοι $F_i''(x_i) < 0$.

Ἐνῶ κατὰ τὸν Jevons ἡ μεταβολὴ συνολικῆς χρησιμότητος εἶναι τὸ ἁπλοῦν ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους ὁριακῶν χρησιμοτήτων τῶν ἀγαθῶν, κατὰ τὸν F. Edgeworth εἶναι τὸ συνδεδεμένον ἀποτέλεσμα τῶν μεταβολῶν τῶν ποσοτήτων ὅλων τῶν ἀγαθῶν, ὁπότε ἡ συνάρτησις χρησιμότητος εἶναι τῆς μορφῆς:

---

* E. E. Slutsky, «Sulla teoria del bilacio del consumatore», Giornale degli Economisti, Ἰούλιος 1915.

$$\Omega = F(x_1, x_2, \ldots, x_\nu),$$

ἐξ ἧς προκύπτει ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος τοῦ ἀγαθοῦ i ἐν σχέσει πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς ποσότητος τοῦ ἀγαθοῦ j (σταυροειδὴς μερικὴ παράγωγος δευτέρας τάξεως) δύναται νὰ εἶναι

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_j} \gtreqless 0 \quad (i \neq j).$$

Ὁ Pareto καταργῶν τὴν ὁριστικὴν ἔννοιαν τῆς χρησιμότητος, ὡς μὴ ἀπαραίτητον εἰς τὴν θεωρίαν τῆς ἀξίας καὶ τῆς ζητήσεως, εἰσήγαγε τὴν ἔννοιαν τῶν τακτικῶν συγκρίσεων, ἐξ ὧν προκύπτει ἡ κλῖμαξ προτιμήσεων. Δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γνωρίζωμεν τὸ ποσὸν καθ' ὃ ἐμειώθη ἢ ηὐξήθη ἡ χρησιμότης ἀγαθοῦ ἢ συνδυασμοῦ ἀγαθῶν, ἀλλὰ μόνον τὴν σύγκρισιν μεταξὺ συνδυασμῶν ἀγαθῶν, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ «καλλίτερον» ἢ «χειρότερον». Ἀρκεῖ νὰ εἴπωμεν δηλαδή, ὅτι ὁ συνδυασμὸς Α εἶναι καλλίτερος τοῦ Β διότι μᾶς ἱκανοποιεῖ περισσότερον, καὶ ὁ Γ συνδυασμὸς καλλίτερος τοῦ Β, ὁπότε ὁ Γ εἶναι καλλίτερος τοῦ Α, κ.ο.κ. Οὕτως ἕκαστος συνδυασμὸς λαμβάνει ἕνα δείκτην παρὰ μετρεῖται ἀπολύτως. Μεταξὺ δύο συνδιασμῶν προκύπτουν τρεῖς κατηγορίαι συγκρίσεων:

(α) Ὁ Α καλλίτερος τοῦ Β

(β) Ὁ Β καλλίτερος τοῦ Α

(γ) Μεταξὺ τοῦ Α καὶ Β ὁ καταναλωτὴς μένει ἀδιάφορος, ἤτοι οἱ Α καὶ Β προτιμῶνται ἐξ ἴσου.

Ὁ κάθε συνδυασμὸς ἀγαθῶν (x καὶ y) δύναται νὰ δοθῇ ὡς συνεχὴς συνάρτησις τῆς μορφῆς $\varphi(A) = \varphi(x,y)$ διὰ τὸν συνδυασμὸν Α, καὶ $\varphi(B) = \varphi(x,y)$ διὰ τὸν συνδυασμὸν Β. Ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

(α) $\varphi(A) < \varphi(B)$

(β) $\varphi(B) < \varphi(A)$

(γ) $\varphi(A) = \varphi(B)$

Ἡ χρησιμότης ἥτις προκύπτει ἐξ ἑκάστου συνδυασμοῦ δύναται νὰ ἀπεικονισθῇ εἰς τὴν συνάρτησιν $\Omega = F(\varphi)$, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ δείκτην χρησιμότητος. Ἐφ' ὅσον δὲ

$$\varphi(A) \gtreqless \varphi(B), \qquad \text{τότε καὶ} \qquad \Omega(A) \gtreqless \Omega(B)$$

Ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y)$ δεικνύει καμπύλην ἀδιαφορίας ἡ θέσις τῆς ὁποίας προκύπτει ἐκ μιᾶς παραμέτρου Ci πρὸς ἣν ἡ συνάρτησις ἰσοῦται, ἤτοι $\varphi(x,y) = Ci$, ὅπου $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ οἱ δεῖκται συγκρίσεως προτιμήσεως ἑκάστης καμπύλης ἀδιαφορίας εἰς τὸν χάρτην τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας.

IV.1.3. **Σχέσις εἰσοδήματος καὶ χρόνου ἀδρανείας.** Ὁ καταναλωτὴς διαθέτει τὸ ἀτομικόν του εἰσόδημα διὰ τὴν ἀπόκτησιν ἀγαθῶν ἅτινα ἱκανοποιοῦν τὰς ἀνάγκας του. Ἐκ τῆς ἀγορᾶς τῶν ἀγαθῶν ἀποκομίζει οὗτος ἐν σύνολον ἱκανοποιήσεως. Ἡ ἀπόκτησις ὅμως, εἰσοδήματος συνεπάγεται τὴν διάθεσιν χρόνου ἐκ μέρους τοῦ καταναλωτοῦ. Οὗτος διαθέτει τὸν χρόνον του μεταξὺ ἐργασίας καὶ ἀδρανείας (χρόνος ἀναπαύσεως καὶ ἀναψυχῆς), (leizure). Τόσον τὸ εἰσόδημα ἐκ τῆς ἐργασίας, ὅσον καὶ ὁ χρόνος ἀναψυχῆς ἔχουν διὰ τὸν καταναλωτὴν χρησιμότητα.

Οὕτω γεννᾶται τὸ πρόβλημα τῆς κατανομῆς τοῦ χρόνου μεταξὺ ἐργασίας (εἰσόδημα) καὶ ἀναψυχῆς. Ἡ τοιαύτη κατανομὴ θὰ γίνῃ καὶ πάλιν βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς ἰσο-οριακῆς χρησιμότητος, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ χρησιμότης τῆς τελευταίας μονάδος τοῦ εἰσοδήματος θὰ πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν χρησιμότητα τῆς τελευταίας μονάδος τοῦ χρόνου ἀναψυχῆς. Ὁ καταναλωτὴς θὰ ἀποφασίσῃ νὰ ἀποποιηθῇ εἰσόδημα, ἐφ' ὅσον νομίζῃ ὅτι ἡ ὁριακὴ ἱκανοποίησις τὴν ὁποίαν θὰ λάβῃ ἐκ τοῦ εἰσοδήματος εἶναι μικροτέρα ἐκείνης ἣν θὰ ἀπολαύσῃ ἐκ τῆς ἀναψυχῆς.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις χρησιμότητος εἶναι $\Omega = \varphi(A, y)$, ὅπου A εἶναι ὁ χρόνος ἀναψυχῆς καὶ y τὸ εἰσόδημα, τότε ὁ καταναλωτὴς δύναται νὰ κάμῃ διαφόρους συνδιασμοὺς μεταξὺ χρόνου ἀναψυχῆς (A) καὶ εἰσοδήματος παραμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης ἀδιαφορίας. Παραμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης ἀδιαφορίας ὁ καταναλωτὴς ἀποκομίζει τὴν αὐτὴν συνολικὴν χρησιμότητα καὶ ἔχει τὴν δυνατότητα ὑποκαταστάσεως μεταξὺ A καὶ y, ὁπότε ὁ ὁριακὸς λόγος ὑποκαταστάσεως εἰσοδήματος διὰ χρόνου ἀναψυχῆς ἰσοῦται κατὰ τὰ γνωστά, πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος τῆς ἀδρανείας ($\partial\Omega/\partial A$) πρὸς τὴν ὁριακὴν χρησιμότητα τοῦ εἰσοδήματος ($\partial\Omega/\partial y$), ἤτοι

$$-dy/dA = \partial\Omega/\partial A : \partial\Omega/\partial y$$

IV. 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ — Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ —

IV.2.0. Ἤδη εἰς τὰ περὶ οἰκονομικῶν συναρτήσεων ὡμιλήσαμεν περὶ τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς. Ἐνταῦθα θὰ ἐπιχειρήσωμεν ἀνάλυσιν ταύτης τῇ βοηθείᾳ τῶν μερικῶν παραγώγων καὶ ἐλαστικοτήτων. Ἡ ἐν λόγῳ συνάρτησις ἀνήκει τόσον εἰς τὰς μικροοικονομικὰς ὅσον καὶ τὰς μακροοικονομικὰς συναρτήσεις, ἡ σημασία δὲ ταύτης εἶναι μεγίστη εἰς τὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν, διὸ καὶ ἀσχολούμεθα ἰδιαιτέρως ἐνταῦθα.

Ἄς λάβωμεν τὴν γενικὴν μορφὴν συναρτήσεως, ἰσοδυναμούσης πρὸς ἓν ὑπόδειγμα παραγωγῆς τοῦ τύπου «ἓν προϊὸν — δύο συντελεσταί», ὡς ἡ κατωτέρω

$$Q = f(x, y)$$

ὅπου Q = τὸ προϊὸν τῆς παραγωγῆς

x = ἡ ποσότης συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς X
y = » » » » » Y

Ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις τῆς συναρτήσεως ταύτης δύναται νὰ γίνη διὰ τοῦ συστήματος τριῶν ἀξόνων ἐμφαινόντων τὸν τρισδιάστατον χῶρον, ὡς ἀκριβῶς εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος. Ἡ ἐντὸς τοῦ τρισδιαστάτου χώρου σχηματιζομένη ἐπιφάνεια ἀποτελεῖ τὴν ἐπιφάνειαν παραγωγῆς, ἕκαστον σημεῖον τῆς ὁποίας ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν παραγωγῆς. Τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἀξόνων δίδει τρία ἐπίπεδα, ἤτοι τὰ ἐπίπεδα Qox Qoy καὶ xoy.

Ἐκ τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς προκύπτουν βασικῶς δύο σχέσεις: (α) Ἡ σχέσις μεταξὺ προϊόντος καὶ εἰσροῶν τῆς παραγωγῆς, καὶ (β) ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν εἰσροῶν (συντελεστῶν) τῆς παραγωγῆς εἰς δεδομένον ἐπίπεδον ταύτης. Ἡ σχέσις (α) διακρίνεται εἰς δύο περιπτώσεις: (αα) Τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἀναλύεται ἡ σχέσις μεταβολῆς τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς καὶ μεταβολῆς εἰς ἀμφοτέρους τοὺς συντελεστάς, καὶ (ββ) ἡ περίπτωσις ἀναλύσεως τῆς σχέσεως μεταβολῆς τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς καὶ μεταβολῆς τοῦ ἑνὸς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, τοῦ ἑτέρου παραμένοντος ἀμεταβλήτου. Ἡ εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν ἔννοια τῆς ἀποδόσεως κλίμακος (returns to scale) ὑπάγεται εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς σχέσεως (αα), ἡ ἔννοια τῆς ὁριακῆς φυσικῆς παραγωγικότητος ἢ ὁριακοῦ φυσικοῦ προϊόντος εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς σχέσεως (ββ), ἡ δὲ ἔννοια τῶν καμπύλων ἰσοπαραγωγῆς καὶ ὁριακοῦ λόγου ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς σχέσεως (β).

Κατωτέρω προβαίνομεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἀνωτέρω σχέσεων χρησιμοποιοῦντες τόσον τὴν γενικὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς $Q = f(x,y)$, ὅσον καὶ τὴν συγκεκριμένην μορφὴν Cobb-Douglas* $X = AL^{\alpha} K^{\beta}$.

IV.2.1. **Ἀποδόσεις κλίμακος**. Τὸ συνολικὸν προϊὸν τῆς παραγωγῆς εἶναι συνάρτησις τῆς ποσότητος τῶν συντελεστῶν, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν. Αἱ μεταβολαὶ συνεπῶς τῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν ἐπιφέρουν μεταβολὰς εἰς τὸ προϊὸν τῆς παραγωγῆς. Ἡ σχέσις τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς ἢ τῶν μεταβολῶν ταύτης καὶ τῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν ἢ τῶν μεταβολῶν αὐτῶν εἶναι γνωστὴ εἰς τὴν θεωρίαν ὡς ἀπόδοσις κλίμακος. Μαθηματικῶς ἡ ἔννοια αὕτη ἀποβαίνει ὁ βαθμὸς ὁμογενείας τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς. Ἡ συνάρτησις $X = AL^{\alpha}K^{\beta}$

* Ἡ συνάρτησις αὕτη θὰ ἀναφέρεται εἰς τὸ κείμενον ὡς C - D.

εἶναι ὁμογενὴς $(\alpha+\beta)$ βαθμοῦ, ὡς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα ἐλέχθη, διότι

$$f(tL,tK)=A(tL)^{\alpha}(tK)^{\beta}$$
$$=t^{(\alpha+\beta)}AL^{\alpha}K^{\beta}.$$

Δεδομένου ὅτι, ὡς κατωτέρω θέλομεν ἀποδείξει, οἱ ἐκθέται α καὶ β τῶν μεταβλητῶν L καὶ K εἶναι αἱ μερικαὶ ἐλαστικότητες τῶν συναρτήσεων, προκύπτει ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι ὁ βαθμὸς ὁμογενείας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν ἐλαστικοτήτων. Τοῦτο ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Euler, κατὰ τὸ ὁποῖον

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot y=vQ.$$

Ἤτοι, ἐὰν ἡ συνάρτησις παραγωγῆς εἶναι v - στοῦ βαθμοῦ, τότε ἡ παραγωγὴ εἶναι v-πλασία τῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Περαιτέρω διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ Q, ἔχομεν

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\frac{x}{Q}+\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{y}{Q}=v.$$

Ἤτοι, ἄθροισμα μερικῶν ἐλαστικοτήτων = v, βαθμὸς ὁμογενείας. Διὰ τὴν συνάρτησιν C — D θὰ ἔχωμεν

$$\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}\cdot\frac{L}{AL^{\alpha}K^{\beta}}+\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}\cdot\frac{K}{AL^{\alpha}K^{\beta}}=\alpha+\beta.$$

Δεδομένου λοιπόν, ὅτι ὁ βαθμὸς ὁμογενείας τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς ἰσοδυναμεῖ πρὸς ὅ,τι εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν καλοῦμεν ἀπόδοσιν κλίμακος, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν τὰς κάτωθι τρεῖς περιπτώσεις:

(α) $\alpha+\beta=1$, σταθερὰ ἀπόδοσις κλίμακος.
(β) $\alpha+\beta<1$, φθίνουσα ἀπόδοσις κλίμακος
(γ) $\alpha+\beta>1$, αὔξουσα ἀπόδοσις κλίμακος.

Εἰς τὴν περίπτωσιν (α), ἥτις ἀντιπροσωπεύεται ὑπὸ τῆς γραμμικῆς ὁμογενοῦς συναρτήσεως παραγωγῆς, μία κατὰ r% αὔξησις τῶν εἰσροῶν εἰς τὴν παραγωγὴν θὰ ἐπιφέρῃ μίαν κατὰ r% αὔξησιν τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν (β), ἡ αὔξησις τοῦ προϊόντος θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ r%, καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν (γ) θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ r%.

Πᾶσα μεταβολὴ τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ συνολικὸν διαφορικὸν συναρτήσεως παραγωγῆς.

$$dQ=\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot dy$$

Ἢ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως C — D

$$dX=\alpha A L^{\alpha-1}.K^{\beta}dL+\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}dK.$$

Ἤτοι, ἡ κατὰ dL καὶ dK αὔξησις τῶν εἰσροῶν συντελεστῶν ἐργασίας καὶ κεφαλαίου ἐπιφέρει κατὰ dX αὔξησιν τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς. Ἀναλυτικώτερον δέ, ἡ αὔξησις τοῦ προϊόντος (dX) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ὁριακῶν παραγωγικοτήτων τῶν συντελεστῶν ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους αὐξήσεις τῶν ποσοτήτων τούτων.

Ἡ ποσοστιαία ἀνταπόκρισις τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς ἔναντι ποσοστιαίων μεταβολῶν εἰς τοὺς συντελεστὰς τῆς παραγωγῆς δίδεται διὰ τοῦ μέτρου τῶν ἐλαστικοτήτων. Οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἰς τὰς συναρτήσεις τύπου C — D εἶναι αἱ μερικαὶ ἐλαστικότητες, αἱ ὁποῖαι εἶναι σταθεραί. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐλαστικότητος ἔχομεν

$$\eta_{\varepsilon\rho\gamma} = \alpha A L^{\alpha-1} K^{\beta} \cdot \frac{L}{X} = \alpha. \quad \text{ἐλαστικότης ὡς πρὸς τὴν ἐργασίαν.}$$

$$\eta_{\kappa\varepsilon\varphi} = \beta A L^{\alpha} K^{\beta-1} \cdot \frac{K}{X} = \beta. \quad \text{ἐλαστικότης ὡς πρὸς τὸ κεφάλαιον.}$$

Ἡ ἐκτιμηθεῖσα συνάρτησις παραγωγῆς ὑπὸ τῶν Cobb καὶ Douglas* βάσει δειγματοληπτικῶν στοιχείων τῆς ἀμερικανικῆς βιομηχανίας διὰ τὰ ἔτη 1900 ἕως 1922 εἶναι ἡ κάτωθι:

$$X = 1{,}101 L^{0.75} K^{0.25}.$$

Δεδομένου ὅτι $\alpha + \beta = 0{,}75 + 0{,}25 = 1$, ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις εἶναι ὁμογενὴς πρώτου βαθμοῦ (γραμμική), πρᾶγμα ὅπερ σημαίνει, ὅτι μία κατὰ 1% αὔξησις τόσον τῆς εἰσροῆς ἐργασίας ὅσον καὶ τοῦ κεφαλαίου θὰ ἀπολήξῃ εἰς αὔξησιν τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς κατὰ 1%. Ἐπίσης συμφώνως πρὸς τὰς ἐπὶ μέρους ἐλαστικότητας, μία κατὰ 1% αὔξησις τῆς εἰσροῆς ἐργασίας θὰ ἐπιφέρῃ μίαν κατὰ 0,75% αὔξησιν τῆς παραγωγῆς, ἐνῶ μία κατὰ 1% αὔξησις τῆς εἰσροῆς κεφαλαίου θὰ ἀπολήξῃ εἰς αὔξησιν τῆς παραγωγῆς κατὰ 0,25%.

IV.2.2. **Συνολικὸν προϊὸν καὶ ὁριακὴ φυσικὴ παραγωγικότης.** Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν τὴν σχέσιν συνολικοῦ προϊόντος καὶ ἑκάστου τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς. Συνολικὸν προϊὸν τοῦ συντελεστοῦ x εἰς τὴν συνάρτησιν παραγωγῆς $Q = f(x,y)$ θὰ ὁρίσωμεν τὸ προκῦπτον συνολικὸν προϊὸν ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ συντελεστοῦ x, μὲ δεδομένον τὸν συντελεστὴν y. Οὕτως ἐνταῦθα ἡ παραγωγὴ Q εἶναι συνάρτησις τοῦ συντελεστοῦ x, τοῦ συντελεστοῦ y θεωρουμένου ὡς σταθερᾶς ποσότητος. Ἡ συνεχὴς αὔξησις εἰσροῆς συντελεστοῦ x θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν συνεχῆ αὔξησιν τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς. Κατὰ τὸν νόμον τῆς φθινούσης ἀποδόσεως ἐν τούτοις, ἡ αὔξησις τοῦ προϊόντος πέραν ὡρισμένου ἐπιπέδου παραγωγῆς θὰ βαίνῃ ὁλοὲν καὶ μικροτέρα μὲ τὴν συνεχῆ χρησιμοποίησιν

* C.W. Cobb - P. Douglas, «A Theory of Production», American Economic Review, Supplement, Vol. XVIII, 1938, σελ. 139 - 65.

μονάδων τοῦ συντελεστοῦ x. Οὕτω δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν καμπύλην συνολικοῦ προϊόντος τοῦ συντελεστοῦ x (ὅσον καὶ τοῦ y) ἀντιπροσωπεύουσαν τὴν συνάρτησιν $Q = f(x,y)$, ὡς εἰς τὸ Σχ. IV.4. ἐμφαίνεται.

Ὁριακὸν φυσικὸν προϊὸν ἢ ὁριακὴν παραγωγικότητα τοῦ συντελεστοῦ x θὰ καλέσωμεν τὴν αὔξησιν τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς τὴν ἐπιτυγχανομένην διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ κατὰ μίαν μονάδα, τοῦ ἑτέρου συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς παραμένοντος σταθεροῦ. Μαθηματικῶς ἡ ἔννοια τοῦ ὁριακοῦ φυσικοῦ προϊόντος ἀποβαίνει ἡ μερικὴ παράγωγος τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς ὡς πρὸς ἕνα τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, ἤτοι:

$f_x(x, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ = ὁριακὸν φυσικὸν προϊὸν τοῦ συντελεστοῦ x (marginal product ἢ productivity).

$f_y(x_0, y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ = ὁριακὸν φυσικὸν προϊὸν τοῦ συντελεστοῦ y.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως C — D τὸ ὁριακὸν προϊὸν ἢ ἡ παραγωγικότης τῆς ἐργασίας εἶναι

$$\frac{\partial X}{\partial L} = \alpha A L^{\alpha-1} K^{\beta} = \frac{0{,}825 \ K^{0.25}}{L^{0.25}}$$

Τὸ ὁριακὸν προϊὸν τοῦ κεφαλαίου εἶναι

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \beta A L^{\alpha} K^{\beta-1} = \frac{0{,}275 L^{0.75}}{K^{0.75}}$$

Μέσον φυσικὸν προϊὸν ἢ μέση* παραγωγικότης τοῦ συντελεστοῦ x καλεῖται τὸ πηλῖκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συνολικοῦ προϊόντος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τοῦ συντελεστοῦ τούτου, ἤτοι

$AP = \dfrac{f(x, y_0)}{x}$ (average productivity)*.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως C — D, ἡ μέση παραγωγικότης τῆς ἐργασίας καὶ τοῦ κεφαλαίου εἶναι ἀντιστοίχως

$$AL^{\alpha-1}K^{\beta} \text{ καὶ } AL^{\alpha}K^{\beta-1}.$$

Γεωμετρικῶς τὸ ὁριακὸν φυσικὸν προϊὸν εἰς δεδομένον ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως συντελεστοῦ x εἶναι ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον τῆς καμπύλης συνολικοῦ προϊόντος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Αἱ κλίσεις τῶν ἐφαπτομένων τῶν διαφόρων σημείων τῆς καμπύλης συνολικοῦ προϊόντος ἀντιπροσωπεύουν τὰ ὁριακὰ προϊόντα εἰς τὰ διάφορα ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως τοῦ συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς. Γεωμετρικῶς

---

* Ἡ μέση παραγωγικότης διὰ τὸν συντελεστὴν y θὰ εἶναι $AP = \dfrac{f(x_0, y)}{y}$.

τὸ μέσον προϊὸν ἀντιπροσωπεύεται ὑπὸ τῆς κλίσεως τῆς εὐθείας τῆς συρομένης ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης συνολικοῦ προϊόντος.

Λίαν ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ παρακολούθησις τῆς πορείας τῆς ἐξελίξεως τῆς καμπύλης συνολικοῦ προϊόντος εἰς τὸ Σχ. IV.4. Ἐκ τοῦ σημείου Ο μέχρι τοῦ σημείου Μ ὁ ρυθμὸς ἀναπτύξεως τῆς καμπύλης βαίνει αὔξων. Εἰς τὸ σημεῖον Μ καθίσταται μέγιστος*. Ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἄρχεται φθίνων, διότι τὰ κοῖλα τῆς καμπύλης ἀλλάσσουν φοράν. Εἰς τὸ σημεῖον Ζ, ὁ ρυθμὸς μεταβολῆς καθίσταται μηδενικός, καὶ τοῦτο φαίνεται ἐκ τῆς κλίσεως τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Ζ (ὁριζοντία γραμμή). Ἡ συνάρτησις συνολικοῦ προϊόντος, οὖσα συνεχής, ἔχει μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον Ζ, ὅπου ἡ πρώτη παράγωγος ταύτης ἰσοῦται πρὸς μηδέν, ἡ δὲ δευτέρα παράγωγος εἶναι ἀρνητική**.

Ἤτοι $f_x(x,y_0) = 0$, πρώτη συνθήκη διὰ μέγιστον.

$f_{xx}(x,y_0) < 0$, δευτέρα συνθήκη διὰ μέγιστον.

Ἡ δευτέρα συνθήκη ὑποδηλοῦται διὰ τῆς ἀρνητικῆς κλίσεως τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ καμπύλη συνολικοῦ προϊόντος μετὰ τὸ σημεῖον Ζ.

Ἐνδιαφέρον εἶναι νὰ ἴδωμεν τὴν ὑφισταμένην σχέσιν μεταξὺ συνολικοῦ προϊόντος ἀφ' ἑνὸς καὶ μέσου καὶ ὁριακοῦ προϊόντος ἀφ' ἑτέρου. Τὴν σχέσιν ταύτην ἐμφαίνουν τὰ Σχ. IV.4 - IV.5. Τὸ ὁριακὸν προϊὸν συνεχῶς αὐξάνει μέχρι τοῦ σημείου Μ (ἐπίπεδον συντελεστοῦ x,x_1). Τὸ σημεῖον τοῦτο ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς καμπύλης ὁριακοῦ προϊόντος (ΜΡ). Ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἀρχίζει νὰ βαίνῃ φθῖνον μέχρι τοῦ σημείου Ζ, ὅπου μηδενίζεται. Τοῦτο φαίνεται εἰς τὸ τμῆμα τῆς καμπύλης ΜΡ μεταξὺ x_1 καὶ x_3. Ἡ συνάρτησις ὁριακοῦ κόστους λαμβάνει τιμὴν μηδὲν εἰς x_3. Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ σημεῖον Ε τῆς καμπύλης συνολικοῦ προϊόντος, τὸ μέσον προϊόν, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν κλίσιν τῆς εὐθείας ΟΕ, συμπίπτει πρὸς τὸ ὁριακὸν προϊόν, ὅπερ ἀντιπροσωπεύεται ὑπὸ τῆς κλίσεως τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Ε. Τοῦτο συμβαίνει εἰς x_2, ὅπου αἱ καμπύλαι ΑΡ καὶ ΜΡ τέμνονται. Εἰς τὸ σημεῖον Ε τῆς καμπύλης συνολικοῦ προϊόντος ἀντιστοιχεῖ τὸ μεγαλύτερον μέσον προϊόν, δεδομένου ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καὶ τοῦ σημείου τούτου, ἔχει τὴν μεγαλυτέραν κλίσιν ἀπὸ οἱανδήποτε ἄλλην φερομένην εἰς οἱοδήποτε σημεῖον τῆς καμπύλης τοῦ Σχ. IV.4. Τὸ σημεῖον τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς τιμὴν τοῦ x,x_3, ὅπου ἡ καμπύλη μέσου προϊόντος ἔχει μέγιστον (κορυφοῦται). Ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου τὸ μέσον προϊόντος ἀρχίζει νὰ ἐλαττοῦται. Εἶναι χαρακτηριστικὸν νὰ τονισθῇ ὅτι μέχρι τοῦ σημείου x_2, τὸ ὁριακὸν προϊὸν εἶναι

---

* Σημεῖον καμπῆς συναρτήσεως.

** Βλ. σχετικῶς εἰς Κεφ. V.

μεγαλύτερον τοῦ μέσου, ἀπὸ τοῦ σημείου δὲ τούτου καὶ πέραν τὸ μέσον προϊὸν καθίσταται μεγαλύτερον τοῦ ὁριακοῦ τοιούτου. Ἐπίσης, ἐνῶ τὸ ὁριακὸν προϊὸν εἶναι δυνατὸν νὰ μηδενισθῇ ἢ καὶ νὰ καταστῇ ἀρνητικὸν (ἐφ' ὅσον τάμη τὸν ἄξονα τῶν X), τὸ τοιοῦτον δὲν δύναται πρακτικῶς νὰ συμβῇ διὰ τὸ μέσον προϊόν*. Περιττὸν νὰ τονισθῇ ὅτι τὰ ἀνωτέρω συμβαίνουν, διότι τὸ γράφημα τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς ἔχει τὴν μορφὴν οἵαν τὸ Σχ. IV.4 ἀπεικονίζει.

Τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς καμπύλης μέσου προϊόντος πραγματοποιεῖται ἡ τομὴ μὲ τὴν καμπύλην ὁριακοῦ προϊόντος, δύναται νὰ ἀποδειχθῇ μαθηματικῶς ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς AP ἡ πρώτη παράγωγος ταύτης ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν, ἤτοι

$$\frac{\partial AP}{\partial x} = \frac{\partial \frac{f(x,y_0)}{x}}{\partial x} = 0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{x f_x(x,y_0) - f(x,y_0)}{x^2} = 0, \quad \text{ἢ}$$

$$x f_x(x,y_0) - f(x,y_0) = 0$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἔχομεν

$$f_x(x,y_0) = \frac{f(x,y_0)}{x}.$$

Ἤτοι, τὸ ὁριακὸν προϊὸν ἰσοῦται πρὸς τὸ μέσον, εἰς τὸ σημεῖον ὅπου ἡ συνάρτησις μέσου προϊόντος ἔχει μέγιστον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ συνάρτησις παραγωγῆς εἶναι ὁμογενὴς πρώτου βαθμοῦ, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Euler θὰ ἔχωμεν

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot y \quad \text{καὶ} \quad \frac{Q}{x} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot y.$$

Ἤτοι, τὸ μέσον προϊὸν τοῦ x (Q/x) εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὁριακοῦ προϊόντος αὐτοῦ $(\partial Q/\partial x)$.

Διὰ τὴν συνάρτησιν C - D, $X = AL^{\alpha} K^{\beta}$, ὅπου $\alpha + \beta = 1$, τὸ ὁριακὸν προϊὸν βαίνει συνεχῶς φθῖνον, καθὼς ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ὑπ' ὄψιν συντελεστοῦ αὐξάνει. Τοῦτο ἀποδεικνύεται, ἐφ' ὅσον ἡ πρώτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως τοῦ ὁριακοῦ προϊόντος εἶναι ἀρνητική, ἤτοι

$$\frac{\partial MP}{\partial L} = \alpha(\alpha - 1) AL^{\alpha-2} K^{\beta}.$$

Ὁ ὅρος $(\alpha - 1)$ εἰς τὴν ἀνωτέρω παράστασιν εἶναι ἀρνητικός, καὶ συνεπῶς ἡ $\partial MP/\partial L$ εἶναι ἀρνητική. Ἐπίσης τὸ μέσον προϊὸν ὡς πρὸς L εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὁριακοῦ προϊόντος αὐτοῦ, διότι

---

* Αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y εἶναι πάντοτε θετικαί.

$$\frac{X}{L} = \alpha A L^{\alpha-1} K^{\beta} \quad \beta A L^{\alpha} K^{\beta-1} \cdot \frac{K}{L}.$$

Τὸ μέσον προϊὸν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὁριακοῦ, ὡς ἀνωτέρω ἀπεδείχθη, ἀλλὰ ἡ καμπύλη τούτου, ὡς καὶ τοῦ ὁριακοῦ, ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ μέσον προϊὸν βαίνει φθῖνον καθὼς ἡ χρησιμοποίησις τοῦ συντελεστοῦ εἰς τὴν παραγωγὴν αὐξάνει. Πράγματι, τὸ μέσον προϊὸν τῆς ἐργασίας εἰς τὴν συνάρτησιν C - D εἶναι

$$\frac{X}{L} = \frac{AL^{\alpha} K^{\beta}}{L} = \frac{AK^{\beta}}{L^{1-\alpha}}$$

Δεδομένου ὅτι $0<\alpha<1$, ἡ ποσότης $L^{1-\alpha}$ εἶναι θετική, καὶ συνεπῶς τὸ κλᾶσμα συνεχῶς μικραίνει ἐφ' ὅσον αἱ τιμαὶ τοῦ L αὐξάνουν*. Ἐπίσης ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως μέσου προϊόντος πρέπει νὰ εἶναι ἀρνητικὴ ἵνα ἡ καμπύλη AP ἔχῃ κλίσιν ἀρνητικήν, ἤτοι

$$\frac{\partial AP}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{AK^{\beta}}{L^{1-\alpha}}\right) = \frac{(\alpha-1)AK^{\beta}}{L^{2-\alpha}}.$$

Δεδομένου ὅτι $(\alpha - 1)<0$ καὶ $(2 - \alpha)>0$, ἡ ἀνωτέρω παράγωγος τοῦ μέσου προϊόντος εἶναι ἀρνητική.

Ἕτερον χαρακτηριστικὸν εἰς τὴν σχέσιν μέσου καὶ ὁριακοῦ προϊόντος τῆς συναρτήσεως C - D εἶναι ὅτι τὸ ὁριακὸν προϊὸν εἶναι ἀνάλογον τοῦ μέσου προϊόντος τοῦ ὑπ' ὄψιν συντελεστοῦ. Ἐκ τῆς σχέσεως

$$\alpha = \frac{\partial X}{\partial L} \cdot \frac{L}{X} \quad \text{ἔχομεν:} \quad \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha \cdot \frac{X}{L}.$$

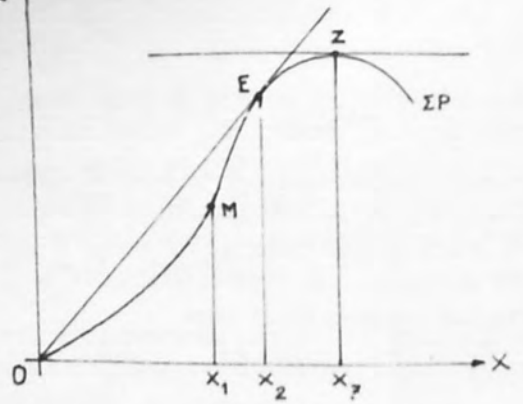
Τὰς ἀνωτέρω σχέσεις μεταξὺ συνολικοῦ προϊόντος, μέσου καὶ ὁριακοῦ προϊόντος εἰς τὴν συνάρτησιν C - D δεικνύει τὸ Σχ. IV.6.

Τὴν περίπτωσιν τῆς σταθερᾶς ἀποδόσεως κλίμακος εἰς τὰς συναρτήσεις παραγωγῆς δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν εἰς ἓν διάγραμμα καμπύλων ἴσης παραγωγῆς, ὡς τοῦ Σχ.IV.7., ἐκ τοῦ ὁποίου ἐμφαίνεται ἡ σταθερὰ αὔξησις τῆς παραγωγῆς διὰ τῶν ἴσων ἀποστάσεων τῶν σημείων M',M'', καὶ M''' εἰς τὴν γ ρ α μ μ ὴ ν ἀ ν α π τ ύ ξ ε ω ς τ ῆ ς π α ρ α γ ω γ ῆ ς OX, ὡς καὶ ἡ φθίνουσα ὁριακὴ παραγωγικότης τοῦ συντελεστοῦ «ἐργασία», ὅταν ἡ ποσότης τοῦ συνετελεστοῦ «κεφάλαιον» εἶναι σταθερὰ OK_1. Τὸ τελευταῖον τοιοῦτον ὑποδηλοῦται διὰ τῶν ὁλοὲν μεγαλυτέρων ποσοτήτων ἐκ τοῦ L, αἵτινες ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν παραγωγὴν 10,20, καὶ 30 μονάδων τοῦ προϊόντος.

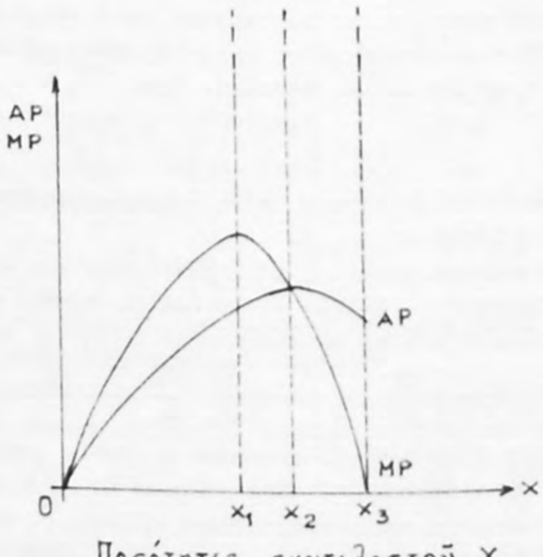
IV.2.3 **Καμπύλαι ἴσου προϊόντος.** Ἡ τρίτη σχέσις ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς «ἓ ν π ρ ο ϊ ὸ ν - δ ύ ο π α ρ α γ ω γ ι κ ο ὶ σ υ ν τ ε λ ε σ τ α ί», εἶναι ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῆς

---

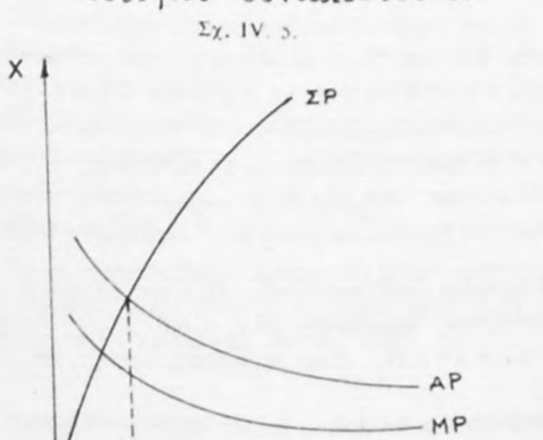
* Ὑποτίθεται πάντοτε ὅτι $A>0$.



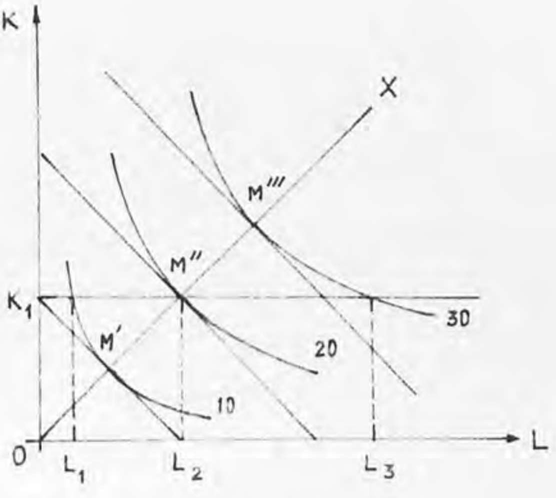
Σχ. IV. 4.



Σχ. IV. 5.



Σχ. IV. 6.



Σχ. IV. 7.

παραγωγῆς εἰς σταθερὸν ἐπίπεδον παραγωγῆς. Ἡ σχέσις αὕτη μαθηματικῶς διατυποῦται ὡς $f(x,y)=$ σταθερά.

Δι' ἕκαστον ἐπίπεδον παραγωγῆς λαμβάνομεν μίαν καμπύλην, ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύει τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν, καὶ συνεπῶς διὰ τὰ διάφορα ἐπίπεδα παραγωγῆς θὰ ἔχωμεν ὁλόκληρον οἰκογένειαν καμπύλων. Ἑκάστη καμπύλη εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον ἅτινα ἐμφανίζουν συνδυασμοὺς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν πρὸς παραγωγὴν τοῦ αὐτοῦ πάντοτε προϊόντος, διὸ καὶ καμπύλη ἴσου προϊόντος (iso - quant) ἢ ἰσοπαραγωγῆς καλεῖται. Γεωμετρικῶς ἡ οἰκογένεια τῶν καμπύλων ἰσοπαραγωγῆς προβάλλεται ἐκ τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγωγῆς εἰς τὸ ἐπίπεδον xoy διὰ θετικὰς πάντοτε τιμὰς τῶν x καὶ y. Εἰς τὴν συνήθη περίπτωσιν αἱ καμπύλαι ἰσοπαραγωγῆς, οὖσαι τὸ ἀντίστοιχον τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας τοῦ καταναλωτοῦ, ἔχουν ἀρνητικὴν κλίσιν καὶ εἶναι κυρταὶ πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.

Ἡ ἀρνητικὴ κλίσις οἰκονομικῶς ἑρμηνεύεται ὡς τὸ γεγονὸς κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ αὔξησις τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ συντελεστοῦ x συνεπάγεται τὴν μείωσιν τοῦ ἑτέρου. Ἡ κυρτότης δὲ ἐμφαίνει τὸν τρόπον καθ' ὃν λαμβάνει χώραν τὸ γεγονὸς τοῦτο. Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν x καὶ y κατὰ μῆκος μιᾶς καμπύλης ἰσοπαραγωγῆς δύναται νὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ συνολικοῦ διαφορικοῦ τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς, $Q=f(x,y)$. Οὕτω ἐὰν δεχθῶμεν μεταβολὰς εἰς τὰ x καὶ y καὶ $dQ=0$, τότε θὰ ἔχωμεν

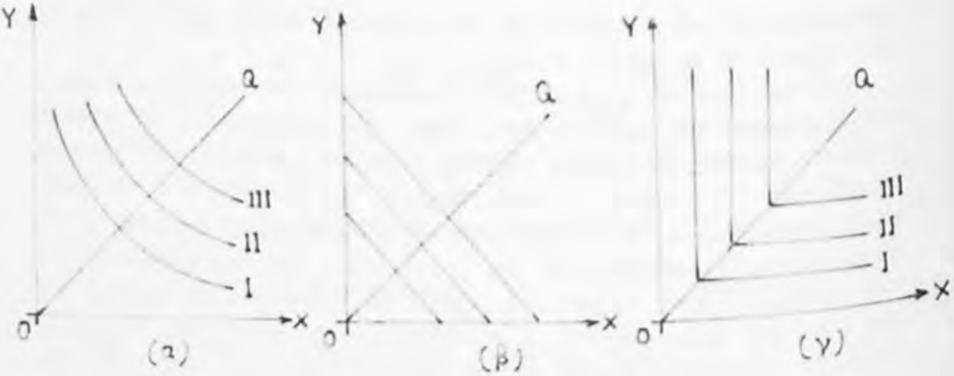
$$\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy=0.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\partial Q/\partial y}{\partial Q/\partial x}$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial Q/\partial x}{\partial Q/\partial y}.$$

Ἡ ποσότης dy/dx καλεῖται ὁ ρ ι α κ ὸ ς λ ό γ ο ς ὑ π ο κ α τ α σ τ ά σ ε ω ς καὶ ἐμφαίνει τὸν ρυθμὸν ὑποκαταστάσεως τοῦ συντελεστοῦ x ὑπὸ τοῦ y εἰς ὡρισμένον σημεῖον τῆς καμπύλης πρὸς διατήρησιν σταθεροῦ τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς. Γεωμετρικῶς ὁ ὁ.λ.ὑ. εἶναι ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς δεδομένον σημεῖον τῆς καμπύλης. Ὁ ὁ.λ.ὑ. βαίνει αὔξων καὶ τὸ γεγονὸς τοῦτο ἐμφαίνει ἡ κυρτότης τῆς καμπύλης. Ἤτοι, ὁλοὲν μεγαλυτέρα ποσότης ἐκ τοῦ y ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀντισταθμισθῇ ἡ συνεχὴς κατὰ μίαν μονάδα μείωσις τοῦ συντελεστοῦ x. Πλὴν ὅμως τῆς περιπτώσεως ταύτης, ὁ ὁ.λ.ὑ. δύναται νὰ εἶναι σταθερὸς ἢ καὶ μηδενικός. Τὰς τρεῖς ταύτας δυνατότητας τῆς τιμῆς τοῦ ὁ.λ.ὑ. ἐμφαίνουν τὰ γραφήματα τοῦ Σχ. IV.8.

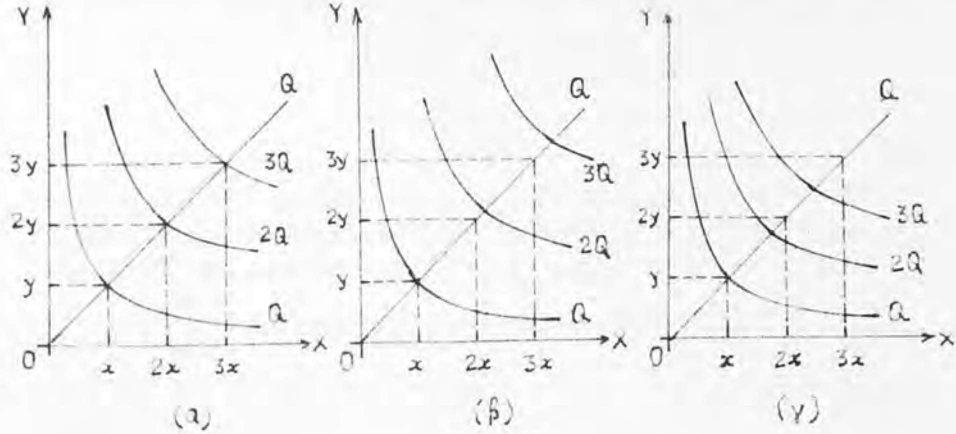


Σχ. IV. 8.

Τὸ διάγραμμα (α) ἐμφανίζει τὴν δυνατότητα ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν x καὶ y μὲ αὔξοντα ρυθμόν. Τὸ διάγραμμα (β) ἐμφανίζει τὴν δυνατότητα ὑποκαταστάσεως μὲ σταθερὸν ρυθμόν. Τὸ δὲ διάγραμμα (γ) ἐμφανίζει τὴν ἀνυπαρξίαν ὑποκαταστάσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ παραγωγικὴ μονὰς διαθέτει μίαν μόνον παραγωγικὴν δραστηριότητα (τεχνολογίαν), ἥτις ἀνταποκρίνεται πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ συντεταγμέναι x καὶ y.

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἕκαστον σημεῖον εἰς τὰς καμπύλας ἰσοπροϊόντος δεικνύει τὸ μέγιστον παραγωγικὸν ἀποτέλεσμα τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ μὲ τὸν δεδομένον συνδυασμὸν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν. Ἡ ἀπόστασις δὲ τῶν καμπύλων ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ἀντιπροσωπεύει τὸ ἐπίπεδον τῆς παραγωγῆς (ἀπόδοσις κλίματος). Ἐὰν τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν τῶν συντελεστῶν διατηρήσωμεν εἰς ἅπαντα τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς, τότε ἡ γραμμὴ ἡ ὁποία ἑνώνει τὰς καμπύλας ἰσοπαραγωγῆς διερχομένη διὰ τῶν σημείων σταθερᾶς ἀναλογίας τῶν συντελεστῶν δεικνύεται εἰς τὰ ἀνωτέρω διαγράμματα διὰ τῆς εὐθείας OQ καὶ καλεῖται γ ρ α μ μ ὴ α ὐ ξ ή σ ε ω ς τ ῆ ς π α ρ α γ ω γ ῆ ς (expansion path).

Τὴν συσχέτισιν μεταξὺ συνδυασμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν καὶ ἐπιπέδου παραγωγῆς εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις σταθερᾶς (α) αὐξούσης (β) καὶ φθινούσης (γ) ἀποδόσεως δεικνύει τὸ Σχ. IV.9. Τὸ σχῆμα τοῦτο ἀντι-



Σχ. IV. 9.

προσωπεύει συναρτήσεις παραγωγῆς τύπου C - D, ὅπου α + β = 1, α + β > 1 καὶ α + β < 1. Ὁ ὁ.λ.ὑ. εἰς συναρτήσεις C - D εἶναι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha(Q/x)}{\beta(Q/y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{y}{x},$$

ὅπου α καὶ β εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν x καὶ y ἀντιστοίχως.

Τὸ ὁριακὸν φυσικὸν προϊὸν ὡς πρὸς ἕνα τῶν συντελστῶν τῆς παραγωγῆς εἰς τὰς περιπτώσεις τοῦ Σχ. IV.9. βαίνει φθῖνον. Τοῦτο ἤδη ἐτονίσθη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. IV.7. Εἰς τὴν περίπτωσιν (β) τοῦ Σχ. IV.8. τὸ ὁριακὸν φυσικὸν προϊὸν τοῦ x εἶναι σταθερόν. Εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν (γ) (συνάρτησις παραγωγῆς τύπου Leontief) τοῦ Σχ. IV.8. τὸ ὁριακὸν φυσικὸν προϊὸν εἶναι μηδέν, ἤτοι οὐδεμία αὔξησις τοῦ προϊόντος ἐπέρχεται μὲ μόνην τὴν αὔξησιν τοῦ συντελεστοῦ x.

IV.2.4. **Ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως.** Αὕτη μετρεῖ τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν ὁ ὁ.λ.ὑ. βαίνει αὔξων. Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν δὲ τὴν ἐλαστικότητα ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν x καὶ y εἰς δεδομένον συνδυασμὸν τούτων δέον ὅπως ἔχωμεν τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς σχέσεως y/x καὶ τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τοῦ ὁ.λ.ὑ. Δεδομένου ὅτι ὁ ὁ.λ.ὑ. εἶναι συνάρτησις τῆς σχέσεως y/x, ἡ τελευταία αὕτη εἶναι συνάρτησις τοῦ ὁ.λ.ὑ. ἤτοι

$$\frac{y}{x} = \Phi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐλαστικότητος θὰ ἔχωμεν*

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right) : \frac{y}{x}}{d\left(\frac{dy}{dx}\right) : \frac{dy}{dx}}$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου προκύπτει ὅτι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος εἶναι ἡ ποσοστιαία μεταβολὴ τῆς σχέσεως y/x, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἡ ποσοστιαία μεταβολὴ τοῦ ὁ.λ.ὑ. Ὁ ἀνωτέρω τύπος δύναται νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῶν ὁριακῶν προϊόντων, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial Q/\partial x}{\partial Q/\partial y}$, ὡς ἑξῆς:

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right) : \frac{y}{x}}{d\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\partial Q}{\partial y}}\right) : \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\partial Q}{\partial y}}}$$

Εἰς τὰς συναρτήσεις παραγωγῆς μὲ καμπύλας ἰσοπαραγωγῆς, ὡς τῆς περιπτώσεως (β) τοῦ Σχ. IV.8. (συντελεσταὶ πλήρως ἀνταγωνιστικοὶ μεταξύ των), ὁ ὁ.λ.ὑ. εἶναι σταθερός, ἤτοι δὲν ἐμφανίζονται μεταβολαὶ τούτου ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον καὶ συνεπῶς

$$d\left(\frac{\partial Q/\partial x}{\partial Q/\partial y}\right) : \left(\frac{\partial Q/\partial x}{\partial Q/\partial y}\right) = 0$$

---

* Ἡ ἐλαστικότης δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς $\sigma = \frac{d\log\left(\frac{y}{x}\right)}{d\log\left(\frac{dy}{dx}\right)}$.

Ἄρα, βάσει τοῦ τύπου τοῦ σ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως εἶναι ἄπειρος.

Εἰς τὰς συναρτήσεις παραγωγῆς μὲ καμπύλας ἰσοπαραγωγῆς ὡς τῆς περιπτώσεως (γ) τοῦ Σχ. IV.8. (συμπληρωματικοὶ συντελεσταί), τὰ ὁριακὰ προϊόντα τούτων εἶναι μηδὲν καὶ συνεπῶς ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος τοῦ σ εἶναι μηδέν. Ἐξ ἄλλου, ὁ ἀριθμητὴς τούτου, ὅστις δεικνύει τὴν σχετικὴν μεταβολὴν τῆς ἀναλογίας τῶν δύο συντελεστῶν, εἶναι μηδέν, διότι ἡ ἀναλογία τούτων εἶναι σταθερά. Συνεπῶς ἡ τιμὴ τοῦ σ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τῆς ἐλαστικότητος ἀντικαταστήσωμεν τὸν ὁ.λ.ὑ., dy/dx, διὰ τοῦ συμβόλου ρ θὰ ἔχωμεν

$$\sigma = \frac{d\left(\dfrac{y}{x}\right) : \dfrac{y}{x}}{d\rho : \rho} = \frac{d\left(\dfrac{y}{x}\right) \cdot \dfrac{x}{y}}{d\rho \cdot \dfrac{1}{\rho}}.$$

Ἡ ποσότης $\dfrac{d\left(\dfrac{y}{x}\right)}{d\rho}$ εἶναι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\dfrac{y}{x} = \Phi\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ ἢ $\dfrac{y}{x} = \Phi(\rho)$, ἤτοι συναρτήσεως μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁ λόγος δύο διαφορικῶν, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐπίσης δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνολικὸν διαφορικόν. Οὕτω θὰ ἔχωμεν:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\partial y} dy + \frac{\partial\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\partial x} dx = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial x} dx + \frac{\partial\rho}{\partial y} dy.$$

Δεδομένου ὅτι $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial\rho/\partial x}{\partial\rho/\partial y}$, καὶ $dy = -\rho dx$,

τὰ ἀνωτέρω διαφορικὰ θὰ εἶναι:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-x\rho dx - ydx}{x^2} = -\frac{x\rho + y}{x^2} dx$$

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial x} dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}(-\rho dx) = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\rho - \frac{\partial\rho}{\partial x}\right) dx.$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ὁ τύπος τῆς ἐλαστικότητος λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\sigma = \frac{\left(\dfrac{x\rho + y}{x^2}\right) dx \cdot \dfrac{x}{y}}{\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\rho - \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\right) dx \cdot \dfrac{1}{\rho}} = \frac{\rho x + y}{\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\rho - \dfrac{\partial\rho}{\partial x}} \cdot \frac{\rho}{xy}$$

Ὁ κατὰ τὰ ἀνωτέρω διαμορφωθεὶς τύπος εἶναι λίαν χρήσιμος διὰ τὴν διερεύνησιν τῆς ἐλαστκότητος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ποσότης

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}\rho - \frac{\partial\rho}{\partial x}$$

εἶναι ἡ παράγωγος τοῦ ὁ.λ.ὑ. (ρ), ὡς πρὸς x, ἤτοι

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\rho}{dx} = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial x} - \frac{\partial\rho}{\partial y}\rho\right)$$

Ἡ παράγωγος $d\rho/dx$ ἐμφαίνει τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν μεταβάλλεται ὁ ὁ.λ.ὑ. κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης ἰσοπαραγωγῆς καὶ ἀντανακλᾷ τὴν κυρτότητα ἣν παρουσιάζει αὕτη.

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω τὸ σ εἶναι θετικὸν καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὴν κυρτότητα τῆς καμπύλης ἰσοπαραγωγῆς. Οὕτως ἡ κυρτότης τῆς καμπύλης συνδέεται πρὸς τὴν ἐλαστικότητα ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν. Ὅταν ἡ «καμπύλη» εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ἡ κυρτότης αὐτῆς εἶναι μηδενικὴ καὶ συνεπῶς ἡ ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως εἶναι ἀπείρως μεγάλη, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω. Τοῦτο ἰσχύει διὰ συντελεστὰς οἱ ὁποῖοι εἶναι μεταξὺ των πλήρως ὑποκαταστήσιμοι. Ὅταν οἱ συντελεσταὶ χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν παραγωγὴν εἰς ὡρισμένην ἀναλογίαν, μὴ ἐπιτρεπομένης ὑποκαταστάσεως (συμπληρωματικοί), τότε ἡ καμπύλη ἰσοπαραγωγῆς ἐμφανίζεται ὡς ὀρθὴ γωνία. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἡ κυρτότης εἶναι ἀπροσδιόριστος τείνουσα πρὸς τὸ ἄπειρον καὶ συνεπῶς τὸ σ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Μηδενικῆς ἐλαστικότητος συνάρτησις εἶναι ἡ τύπου L e o n t i e f. Ἡ συνάρτησις αὕτη δύναται νὰ ἐκφρασθῆ ὡς ἓν σύστημα ἀνισοτήτων

$$x \geqslant \alpha_1 Q$$
$$y \geqslant \alpha_2 Q$$

ὅπου ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$ καὶ $Q \geqslant 0$.

Ἑκάστη τῶν ἀνισοτήτων δεικνύει τὴν ἀπαιτουμένην εἰσροὴν διὰ νὰ παραχθῆ ὡρισμένη ποσότης προϊόντος (Q). Τὰ α_1 καὶ α_2 εἶναι αἱ κατὰ μονάδα προϊόντος ἀπαιτούμεναι ποσότητες τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν (τεχνολογικοὶ συντελεσταί) καὶ ὁ λόγος τούτων α_1/α_2 δεικνύει τὴν κλίσιν τῆς γραμμῆς αὐξήσεως τῆς παραγωγῆς, ἡ ὁποία διέρχεται, ὡς εἴδομεν, διὰ τῶν γωνιῶν τῶν καμπύλων ἰσοπαραγωγῆς τῶν ἐχουσῶν μηδενικὴν ἐλαστικότητα ὑποκαταστάσεως. Αἱ ἀνωτέρω ἀνισότητες δύνανται νὰ μετατραποῦν εἰς ἰσότητας δεικνυούσας τὰς ἐλαχίστας ποσότητας τῶν εἰσροῶν τῶν ἀπαιτουμένων διὰ τὴν παραγωγὴν ὡρισμένης ποσότητος προϊόντος

$$x = \alpha_1 Q$$
$$y = \alpha_2 Q.$$

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω δύο ἀκραίων περιπτώσεων ἐλαστικότητος $\sigma = 0$ καὶ $\sigma = \infty$, ὑπάρχουν συναρτήσεις τῶν ὁποίων ἡ ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως λαμβάνει τιμὴν μεταξὺ 0 καὶ ∞. Τοιαύτη περίπτωσις εἶναι μιὰ τάξις συναρτήσεων αἱ ὁποῖαι καλοῦνται σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι ς π α ρ α γ ω γ ῆ ς σ τ α θ ε ρ ᾶ ς ἐ λ α σ τ ι κ ό τ η τ ο ς ὑ π ο κ α τ α σ τ ά σ ε ω ς*. Εἰδικὴ περίπτωσις τούτων εἶναι ἡ γνωστὴ συνάρτησις C - D σταθερᾶς ἀποδόσεως κλίμακος, ὅπου $\sigma = 1$.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ὁ.λ.ὑ. δύναται νὰ γραφῇ

$$\frac{dK}{dL} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{K}{L} \quad \text{ἢ} \quad \frac{K}{L} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{dK}{dL}.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ταύτης ἔχομεν

$$\log (K/L) = \log (\beta/\alpha) + \log (dK/dL),$$

ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ δεξιοῦ σκέλους τῆς ἐξισώσεως εἶναι 1. Ἤτοι, ἡ παράγωγος τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{d \log (K/L)}{d \log (dK/dL)} = 1$$

Ἄρα, $\sigma = 1$.

IV.2.5. **Ἡ διανομὴ τοῦ προϊόντος.** Κατὰ τὴν θεωρίαν τῆς ὁριακῆς παραγωγικότητος τὴν ἑρμηνεύουσαν τὴν διανομὴν τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς ὑπὸ συνθήκας ἀνταγωνιστικῆς ἰσορροπίας: (α) ἕκαστος συντελεστὴς τῆς παραγωγῆς ἀμείβεται συμφώνως πρὸς τὴν ὁριακὴν τούτου παραγωγικότητα καὶ (β) τὸ προϊὸν ἀπορροφᾶται ὑπὸ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ἐξ ὁλοκλήρου.

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις συνθέτει τὸ ἀποκληθὲν εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν π ρ ό β λ η μ α τ ῆ ς ἀ θ ρ ο ί σ ε ω ς (adding - up problem). Τὸ θεώρημα τοῦ Euler ἀποτελεῖ τὴν μαθηματικὴν ἔκφρασιν τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος, ὅταν ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς εἶναι ὁμογενὴς πρώτου βαθμοῦ. Χρησιμοποιοῦντες τὸ θεώρημα τοῦτο καὶ τὴν συνάρτησιν C - D θὰ ἔχωμεν:

$$X = \alpha A L^{\alpha-1} K^{\beta} \cdot L + \beta A L^{\alpha} K^{\beta-1} \cdot K$$
$$= \alpha X + X\beta$$
$$= (\alpha + \beta)X.$$

---

* Περὶ ὧν κατωτέρω.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐὰν ἕκαστος συντελεστὴς λάβῃ ὡς ἀμοιβὴν τὸ ὁριακὸν τούτου προϊὸν τότε τὸ συνολικὸν προϊὸν τῆς παραγωγῆς διανέμεται μεταξὺ ἐργασίας καὶ κεφαλαίου κατὰ τὰς ἀναλογίας α καὶ β ἀντιστοίχως. Οὕτως αἱ ἐλαστικότητες τῆς συναρτήσεως ἀποτελοῦν καὶ τοὺς συντελεστὰς διανομῆς τοῦ προϊόντος, ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι $\alpha + \beta = 1$ (σταθερὰ ἀπόδοσις κλίμακος). Ἐὰν $\alpha + \beta > 1$ (αὔξουσα ἀπόδοσις κλίμακος), τότε ἀπαιτεῖται μεγαλύτερον προϊὸν πρὸς διανομὴν ἢ τὸ παραχθὲν καὶ συνεπῶς πρᾶγμα ἀδύνατον. Ἐὰν $\alpha + \beta < 1$, τότε δημιουργεῖται πλεόνασμα μετὰ τὴν διανομὴν τοῦ προϊόντος ἀναλόγως πρὸς τὴν ὁριακὴν τούτων παραγωγικότητα, ἴσον πρὸς $(1 - \alpha - \beta)X$. Ἄρα τὸ πρόβλημα τῆς διανομῆς λύεται μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου $\alpha + \beta = 1$. Εἰς τὰς λοιπὰς περιπτώσεις τὸ πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ εἷς τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς λαμβάνει ὅ,τι ἀπομένει.

Τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ συντελεσταὶ α καὶ β δεικνύουν την συμμετοχὴν ἑκάστου συντελεστοῦ εἰς τὴν διανομὴν τοῦ προϊόντος ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ κατωτέρω συλλογισμοῦ.

Ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ ἡ ἀμοιβὴ τῶν συντελεστῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν ὁριακὴν παραγωγικότητά των, ἤτοι

$$\frac{\partial X}{\partial L} = \alpha A L^{\alpha-1} K^{\beta} = \omega \text{ (ἀμοιβὴ ἐργασίας)}$$

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \beta A L^{\alpha} K^{\beta-1} = r \text{ (ἀμοιβὴ κεφαλαίου)}$$

Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\dfrac{\partial X}{\partial L} = \alpha \dfrac{X}{L}$ καὶ $\dfrac{\partial X}{\partial K} = \beta \dfrac{X}{K}$,

θὰ ἔχωμεν $\alpha = \dfrac{\omega L}{X}$ (σχετικὴ συμμετοχὴ ἐργασίας).

$\beta = \dfrac{rK}{X}$ (σχετικὴ συμμετοχὴ κεφαλαίου).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτουν αἱ ἑξῆς σχέσεις:

$\dfrac{\omega}{r} = \dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{K}{L}$ (συντελεστὴς κεφαλαίου - ἐργασίας).

$\dfrac{\beta}{r} = \dfrac{K}{X}$ (συντελεστὴς κεφαλαίου - προϊόντος).

Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἐπιβεβαιοῦν τὸ γεγονός, ὅτι ἡ σχέσις κεφαλαίου - ἐργασίας ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς σχέσεως τῶν τιμῶν τούτων καὶ ὅτι ὁ συντελεστὴς κεφαλαίου - προϊόντος ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς ἀμοιβῆς τοῦ κεφαλαίου, δεδομένου ὅτι αἱ παράμετροι α καὶ β εἶναι σταθεραί.

Εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς παραγράφου ἐσημειώθη ὅτι $X = (\alpha + \beta)X$, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ διανομὴ τοῦ προϊόντος ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν α καὶ β, εἶναι δὲ ἀνεξάρτητος τοῦ μεγέθους τῶν L καὶ K.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως προκύπτει ὅτι αἱ παράμετροι α καὶ β, αἵτινες ἀντιπροσωπεύουν τὰς σχετικὰς συμμετοχὰς τῆς ἐργασίας καὶ τοῦ κεφαλαίου ἀντιστοίχως, παραμένουν σταθεραὶ καθ' ὅλην τὴν κλίμακα τῆς παραγωγῆς καὶ τὰ ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως τῶν συντελεστῶν, μὴ ἐπηρεαζόμεναι ἐκ τῆς μεταβολῆς εἰς τὴν σχέσιν κεφαλαίου - ἐργασίας*. Οὕτως ἐν σχέσει πρὸς τὸ τελευταῖον τοῦτο, παρὰ τὴν κατὰ τὰ τελευταῖα ἑκατὸν ἔτη σημαντικὴν αὔξησιν τοῦ κεφαλαίου, ἥτις ἦτο μεγαλυτέρα ἐκείνης τῆς ἐργασίας, εὑρέθη ὅτι αἱ ποσοστιαῖαι συμμετοχαὶ εἰς τὸ προϊὸν τῆς ἐργασίας καὶ τοῦ κεφαλαίου παρέμειναν περίπου σταθεραί**.

Ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς θεωρίας τῆς ὁριακῆς παραγωγικότητος εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς σταθερᾶς ἀποδόσεως κλίμακος προκύπτει ἡ ἀδυναμία καθορισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς καὶ τοῦτο διὰ τοὺς ἑξῆς λόγους:

Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς θεωρίας τῆς ἐπιχειρήσεως, ὅτι ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ ἡ ἐπιχείρησις λαμβάνει ὡς κέρδος τὴν διαφορὰν μεταξὺ προσόδων ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ προϊόντος καὶ κόστους τῆς παραγωγῆς. Ἐὰν Π = συνολικὸν κέρδος καὶ p = ἡ τιμὴ (γενικῶς), θὰ ἔχωμεν: $\Pi = pX - pwL - prK$

Δεδομένου δὲ ὅτι $w = \alpha \frac{X}{L}$ καὶ $r = \beta \frac{X}{K}$, ἔχομεν

$$\begin{aligned} \Pi &= pX - \alpha pX - \beta pX \\ &= pX(1 - \alpha - \beta). \end{aligned}$$

Ἡ πρώτη συνθήκη μεγιστοποιήσεως τοῦ συνολικοῦ κέρδους εἶναι ὅτι τὸ ὁριακὸν κέρδος (κέρδος τῆς τελευταίας διατιθεμένης μονάδος τοῦ προϊόντος) εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν, ἤτοι

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} = p(1 - \alpha - \beta) = 0,$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\alpha + \beta = 1$, (σταθερὰ ἀπόδοσις κλίμακος). Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη δίδει λύσιν ἰσορροπίας, πλὴν ὅμως δὲν περιέχει τὴν μεταβλητὴν X, ἤτοι δὲν γνωρίζομεν εἰς ποῖον ἐπίπεδον παραγωγῆς ἐπέρχεται ἡ μεγιστοποίησις τῶν κερδῶν. Ἤτοι, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς γραμμικῆς ὁμογενοῦς συναρτήσεως παραγωγῆς, τὰ κέρδη εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὸ ἐπίπεδον

---

* Ὁ λόγος εἶναι ὅτι ἡ αὔξησις τῆς προσφορᾶς ἑνὸς συντελεστοῦ ὁδηγεῖ εἰς μείωσιν τῆς ὁριακῆς παραγωγικότητός του καὶ συνεπῶς τῆς τιμῆς αὐτοῦ, μὲ συνέπειαν ἡ συμμετοχή του νὰ παραμένῃ ἡ αὐτή.

** P. H. Douglas, «Are there laws of production?» εἰς American Economic Review, 1948, σελ. 1 - 41.

16

δραστηριότητος (scale of operations). Τὸ ἐπίπεδον δραστηριότητος εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ t τῆς ὁμογενοῦς συναρτήσεως

$$f(tx, ty) = t\,f(x,y).$$

Μὲ δεδομένας δὲ τιμὰς (λόγῳ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ), ἡ μεγιστοποίησις τῶν κερδῶν δὲν δύναται νὰ προσδιορίσῃ τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς καὶ εἰσροῶν.

Ἐνδιαφέρον εἶναι νὰ ἴδωμεν τώρα μὲ τί ἰσοῦται ἡ σχετικὴ συμμετοχὴ (μερίδιον) ἑνὸς τῶν συντελεστῶν, ἔστω τῆς ἐργασίας, εἰς τὸ συνολικὸν προϊὸν (X), εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν δὲν ὑφίσταται ἐλεύθερος ἀνταγωνισμὸς εἰς τὴν ἀγορὰν τοῦ προϊόντος.

Ὅταν δὲν ὑφίσταται ἐλεύθερος ἀνταγωνισμὸς τότε ἡ κατὰ τὴν ὁριακὴν θεωρίαν συνθήκη: ὁριακὸν φυσικὸν προϊὸν = ἀμοιβὴ συντελεστοῦ, δὲν ἰσχύει. Ἡ αὔξησις τῆς προσφορᾶς τοῦ προϊόντος ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν μείωσιν τῆς τιμῆς του, καὶ συνεπῶς ὁ συντελεστὴς θὰ λάβῃ ὡς ἀμοιβὴν τὴν πρόσοδον, ἥτις θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς πωλήσεως τῆς ποσότητος τοῦ προϊόντος τῆς παραχθείσης διὰ τῆς ἀπασχολήσεως τῆς τελευταίας μονάδος τοῦ συντελεστοῦ. Ἡ πρόσοδος αὕτη καλεῖται ὁ ρ ι α κ ὴ χ ρ η μ α τ ι κ ὴ π α ρ α γ ω γ ι κ ό τ η ς (marginal revenue productivity, MRP) καὶ εἶναι, ὡς εἰκός, τὸ γινόμενον τῆς ὁριακῆς φυσικῆς παραγωγικότητος ἐπὶ τὴν ὁριακὴν πρόσοδον τοῦ προϊόντος (MR). Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν προκειμένου περὶ τοῦ ἐργατικοῦ μισθοῦ

$$w = MRP = MP.MR.$$

Ἡ ὁριακὴ πρόσοδος (MR) εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως συνολικῆς προσόδου $R = Xp$. Δεδομένου δὲ ὅτι $p = f(X)$, θὰ ἔχωμεν

$$MR = \frac{dR}{dX} = \frac{d}{dX}\Big(X.f(X)\Big)$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{dR}{dX} = X\frac{dp}{dX} + p^{*}.$$

$$\text{Ἄρα,}\ w = MP\left(X\frac{dp}{dX} + p\right).$$

Ἐξάγοντες τὸ p ἐκτὸς παρενθέσεως ἔχομεν

$$w = MP\left(\frac{X}{P}\,\frac{dp}{dX} + 1\right)p$$

$$= MP\left(\frac{1}{e} + 1\right)p^{**}.$$

* Παραγώγισις γινομένου.

** Ἡ ποσότης $\left(\frac{dx}{dp}\cdot\frac{p}{x}\right)$ εἶναι ἡ ἐλαστικότης ζητήσεως (e)

Ἡ συμμετοχὴ τοῦ συντελεστοῦ «ἐργασία» εἰς τὸ συνολικὸν προϊὸν θὰ εἶναι

$$\frac{wL}{X} = \frac{MP\left(\frac{1}{e}+1\right)p.L}{X}$$

$$= \frac{\alpha A L^{\alpha-1}K^{\beta}\left(\frac{1}{e}+1\right)pL}{X}$$

$$= \alpha\left(\frac{1}{e}+1\right)p$$

$$\text{Καὶ} \quad \frac{wL}{Xp} = \alpha\left(\frac{1}{e}+1\right)$$

ὅπου Xp = συνολικὸν προϊὸν εἰς χρηματικὰς ἀξίας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ συμμετοχὴ τοῦ συντελεστοῦ εἰς τὸ συνολικὸν προϊὸν ἐξαρτᾶται τόσον ἐκ τοῦ α (παραμέτρου τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς) ὅσον καὶ ἐκ τῆς ἐλαστικότητος ζητήσεως, ἡ ὁποία μετρεῖ, κατὰ κάποιον τρόπον, τὸν βαθμὸν τοῦ μονοπωλίου ἢ ἀπεικονίζει τὰς συνθήκας εἰς τὴν ἀγοράν. Συνεπῶς, ἐὰν $e = \infty$ (ἡ καμπύλη ζητήσεως διὰ τὸ προϊὸν τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι ὁριζοντία), τότε $\frac{1}{e} = 0$, καὶ ἡ συμμετοχὴ τοῦ συντελεστοῦ εἶναι ἴση πρὸς α (πλήρης ἀνταγωνισμός).

IV.2.6. **Σύνοψις ἰδιοτήτων καὶ χαρακτηριστικῶν τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς τύπου Cobb-Douglas.** Ἡ συνάρτησις αὕτη λόγῳ τόσον τῆς ἁπλότητός της, ὅσον καὶ τῶν ἀλλεπαλλήλων ἐμπειρικῶν ἐπαληθεύσεών της δύναται νὰ ἀποτελέση ἑκάστοτε τὸ μέσον γενικῆς περιγραφῆς καὶ ἀποδείξεως τῶν ἀρχῶν τῆς θεωρίας τῆς παραγωγῆς ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ. Ἐνταῦθα παρουσιάζομεν συνοπτικῶς τὰς ἰδιότητας καὶ τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς συναρτήσεως C-D.

(α) Αἱ μερικαὶ ἐλαστικότητες τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς τοὺς ἐπὶ μέρους συντελεστὰς εἶναι σταθεραί. Ἤτοι, μία κατὰ 1% μεταβολὴ τῆς ποσότητος τοῦ ἑνὸς τῶν συντελεστῶν, τοῦ ἑτέρου παραμένοντος ἀμεταβλήτου, θὰ ἔχη ὡς συνέπειαν τὴν κατὰ α% (ἢ β%) μεταβολὴν τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς (X).

(β) Τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν ἐλαστικοτήτων δίδει τὸν βαθμὸν ὁμογενείας τῆς συναρτήσεως. Ὁ βαθμὸς δὲ ὁμογενείας οἰκονομικῶς ἑρμηνεύεται ὡς ἡ ἀπόδοσις κλίμακος (νόμος παραγωγῆς). Συνεπῶς, ἐὰν $\alpha + \beta = 1$, τότε ἔχομεν σταθερὰν ἀπόδοσιν κλίμακος. Ἐὰν $\alpha + \beta > 1$, τότε ἔχομεν αὔξουσαν ἀπόδοσιν, ἐὰν δὲ $\alpha + \beta < 1$, τότε ἔχομεν φθίνουσαν ἀπόδοσιν.

(γ) Ἡ μεταβολὴ τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς ἥτις ἐπέρχεται κατόπιν μεταβολῆς εἰς ἀμφοτέρους τοὺς συντελεστὰς τῆς παραγωγῆς, ἰσοῦται πρὸς τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως C - D, ἤτοι

$$dX = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta} . dL + \beta AL^{\alpha} K^{\beta-1} . dK.$$

(δ) Τὸ ὁριακὸν προϊὸν (ἢ ἡ ὁριακὴ παραγωγικότης) τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς εἶναι ἀνάλογον τοῦ μέσου τοιούτου. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων:

$$\alpha = \frac{\partial X}{\partial L} \cdot \frac{L}{X}, \text{ καὶ } \beta = \frac{\partial X}{\partial K} \cdot \frac{K}{X},$$

ἐξ ὧν ἔχομεν

$$\frac{\partial X}{\partial L} = \alpha \frac{X}{L}, \quad \text{(ὁριακὴ παραγωγικότης ἐργασίας)}$$

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \beta \frac{X}{K}, \quad \text{(ὁριακὴ παραγωγικότης κεφαλαίου)}$$

καὶ $\alpha < 1$, $\beta < 1$, ὅπου α καὶ β σταθεραί.

(ε) Τὰ ὁριακὰ προϊόντα τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς βαίνουν φθίνοντα καὶ εἶναι πάντοτε μικρότερα τῶν μέσων τοιούτων. Ἐκ τοῦ (δ) ἀποδεικνύεται ὅτι

$$\frac{\partial X}{\partial L} < \frac{X}{L} \text{ καὶ } \frac{\partial X}{\partial K} < \frac{X}{K}.$$

Ἐπίσης διὰ νὰ ἔχωμεν φθῖνον ὁριακὸν προϊὸν πρέπει ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς ἕκαστον συντελεστὴν νὰ εἶναι ἀρνητική. Ἤτοι

$$\frac{\partial^2 X}{\partial L^2} = \alpha(\alpha - 1)AL^{\alpha-2}K^{\beta},$$

ὅπου $(\alpha - 1) < 0$ (ἀρνητικόν).

$$\frac{\partial^2 X}{\partial K^2} = \beta(\beta - 1)AL^{\alpha} K^{\beta-2},$$

ὅπου $(\beta - 1) < 0$ (ἀρνητικόν).

(στ) Αἱ καμπύλαι ἰσοπαραγωγῆς τῆς συναρτήσεως C—D ἔχουν κανονικὴν κυρτότητα τοῦ ὁριακοῦ λόγου ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν ὄντος ἀναλόγου πρὸς τὴν σχέσιν μεταξὺ τούτων. Ἤτοι

$$\frac{dK}{dL} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{K}{L}.$$

Ἡ δὲ ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα ($\sigma = 1$).

(ζ) Ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ ἡ ἀμοιβὴ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν ὁριακὴν παραγωγικότητα τούτων (Νεοκλασικὴ θεωρία). Ἤτοι

$$\frac{\partial X}{\partial L} = \alpha\left(\frac{X}{L}\right) = w, \text{ (ἀμοιβὴ ἐργασίας)}$$

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \beta\left(\frac{X}{K}\right) = r, \text{ (ἀμοιβὴ κεφαλαίου)}$$

Ἐκ τούτων ἔχομεν

$\alpha = \dfrac{wL}{X}$ καὶ $\beta = \dfrac{rK}{X}$. Ἤτοι οἱ σταθεροὶ συντελεσταὶ α καὶ β δεικνύουν τὴν συμμετοχὴν ἑκάστου συντελεστοῦ εἰς τὸ προϊὸν τῆς παραγωγῆς ἐκείνης ἡ ὁποία ὑπείκει εἰς τὸν νόμον τῆς σταθερᾶς ἀποδόσεως.

IV.2.7. **Συναρτήσεις παραγωγῆς σταθερᾶς ἐλαστικότητος ὑποκαταστάσεως.** Ὑπὸ τῶν Arrow, Chenery, Minhas καὶ Solow* ὑπεδείχθη συνάρτησις παραγωγῆς σταθερᾶς ἐλαστικότητος ὑποκαταστάσεως** γενικωτέρας μορφῆς ἢ αἱ συναρτήσεις Cobb — Douglas καὶ Leontief, ὡς ἡ κατωτέρω:

$$X = \beta[\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

ὅπου β καὶ ρ εἶναι θετικαὶ σταθεραὶ καὶ $0 < \alpha < 1$. Ἡ ἔννοια τῶν παραμετρικῶν τούτων σταθερῶν εἰς τὴν συνάρτησιν θὰ καταδειχθῇ κατωτέρω.

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις εἶναι ὁμογενὴς πρώτου βαθμοῦ, ἤτοι ὑποδηλοῖ σταθερὰν ἀπόδοσιν κλίμακος.

$$f(tK, tL) = \beta[\alpha(tK)^{-\rho} + (1-\alpha)(tL)^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} = tX.$$

Τὸ β, ὡς γνωστόν, εἶναι ἐκπεφρασμένον εἰς μονάδας μετρήσεως ὡς καὶ τὸ X (παραγωγή). Ἐὰν αἱ μεταβληταὶ X,K,L εἶναι ἐκπεφρασμέναι εἰς τὸ

---

* Capital - Labor Substitution and Economic Efficiency», εἰς Review of Economics and Statistics, Αὔγ. 1961, No 3.

** Ἡ ὅλη οἰκογένεια τῶν συναρτήσεων τούτων εἶναι γνωστὴ εἰς τὴν Ἀγγλοσαξωνικὴν βιβλιογραφίαν ὡς CES (Constant Elasticity of Substitution), ἢ SMAC, ἐκ τῶν ὀνομάτων τῶν ἐρευνητῶν.

αὐτὸ μέτρον, τότε κατὰ τὴν σύγκρισιν συναρτήσεων παραγωγῆς ἡ παράμετρος β δεικνύει τὸ ἐ π ί π ε δ ο ν ἀ π ο δ ο τ ι κ ό τ η τ ο ς (efficiency parameter). Κατωτέρω πρὸς διευκόλυνσιν τῆς ἀναλύσεως τὸ β θὰ ληφθῆ ἴσον πρὸς τὴν μονάδα.

Ταυτολογικῶς δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$X = (X^{-(1+\rho)} X)^{-\frac{1}{\rho}} = X .$$

Ὁπότε συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Euler θὰ ἔχωμεν

$$X = \left[X^{-(1+\rho)} \left(\frac{\partial X}{\partial K} K + \frac{\partial X}{\partial L} L \right) \right]^{-\frac{1}{\rho}} =$$

$$= \left[\frac{\partial X}{\partial K} \left(\frac{X}{K} \right)^{-(1+\rho)} K^{-\rho} + \frac{\partial X}{\partial L} \left(\frac{X}{L} \right)^{-(1+\rho)} L^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι

$$\frac{\partial X}{\partial K} \left(\frac{X}{K} \right)^{-(1+\rho)} = \alpha$$

$$\frac{\partial X}{\partial L} \left(\frac{X}{L} \right)^{-(1+\rho)} = (1-\alpha),$$

καὶ συνεπῶς

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \alpha \left(\frac{X}{K} \right)^{1+\rho}, \quad \text{ὁριακὴ παραγωγικότης κεφαλαίου}$$

$$\frac{\partial X}{\partial L} = (1-\alpha) \left(\frac{X}{L} \right)^{1+\rho}, \quad \text{ὁριακὴ παραγωγικότης ἐργασίας.}$$

Ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ, ὡς γνωστόν, ἡ ὁριακὴ παραγωγικότης καθορίζει τὴν τιμὴν τοῦ παραγωγικοῦ συντελεστοῦ, τῆς ἰσορροπίας εἰς τὴν παραγωγικὴν μονάδα ἐπερχομένης διὰ τῆς ἐξισώσεως ὁριακῆς παραγωγικότητος καὶ τιμῆς, ἤτοι

$$r = \alpha \left(\frac{X}{K} \right)^{1+\rho} \quad \text{ἢ} \quad \frac{X}{K} = r^{\frac{1}{1+\rho}} \alpha^{-\frac{1}{1+\rho}}$$

$$w = (1-\alpha) \left(\frac{X}{L} \right)^{1+\rho} \quad \text{ἢ} \quad \frac{X}{L} = w^{\frac{1}{1+\rho}} (1-\alpha)^{-\frac{1}{1+\rho}}$$

ὅπου r = ἡ ἀμοιβὴ τοῦ κεφαλαίου

w = ὁ ἐργατικὸς μισθός.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων θὰ ἔχωμεν:

$$\log\left(\frac{X}{K}\right) = \frac{1}{1+\rho}\log r - \frac{1}{1+\rho}\log \alpha$$

$$\log\left(\frac{X}{L}\right) = \frac{1}{1+\rho}\log w - \frac{1}{1+\rho}\log (1-\alpha)$$

Κατά τά ἀνωτέρω μία κατά 1% αὔξησις τῆς ἀμοιβῆς τοῦ κεφαλαίου (ἢ τῆς ἐργασίας) θά ἔχῃ ὡς ἀποτέλεσμα τὴν κατά $(1/1+\rho)$% αὔξησιν τῆς ὁριακῆς παραγωγικότητος τοῦ κεφαλαίου (ἢ τῆς ἐργασίας).

Διά νά εὕρωμεν τὴν ἐλαστικότητα ὑποκαταστάσεως, συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμόν, ἀπαιτεῖται νά γνωρίζωμεν τὴν μεταβολὴν τῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καί τὴν μεταβολὴν τοῦ ὁ.λ.ύ. Ὁ τελευταῖος οὗτος εἶναι ὡς γνωστὸν

$$\frac{\partial X/\partial L}{\partial X/\partial K} = \frac{dK}{dL}, \text{ ἢ } \frac{(1-\alpha)(X/L)^{1+\rho}}{\alpha(X/K)^{1+\rho}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho}$$

$$\text{ἢ } \frac{K}{L} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}\left(\frac{dK}{dL}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}.$$

Λαμβάνοντες τούς λογαρίθμους τῆς τελευταίας ταύτης ἔχομεν

$$\log\frac{K}{L} = \frac{1}{1+\rho}\log\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) + \frac{1}{1+\rho}\log\left(\frac{dK}{dL}\right).$$

Ὁπότε, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐλαστικότητος θά ἔχωμεν

$$\sigma = \frac{d\log\left(\frac{K}{L}\right)}{d\log\left(\frac{dK}{dL}\right)} = \frac{1}{1+\rho}$$

Ἐκ τοῦ εὑρήματος $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$ δυνάμεθα πλέον νά καθορίσωμεν τὴν παράμετρον ρ, ὡς συνάρτησιν τῆς ἐλαστικότητος ὑποκαταστάσεως καί νά καλέσωμεν ταύτην π α ρ ά μ ε τ ρ ο ν ὑ π ο κ α τ α σ τ ά σ ε ω ς:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} - 1.$$

Αἱ συναρτήσεις τύπου Leontief καί C — D εἶναι ἀκραῖαι περιπτώσεις τῆς γενικωτέρας μορφῆς συναρτήσεως σταθερᾶς ἐλαστικότητος ἴσης πρὸς $\frac{1}{1+\rho}$. Πράγματι, ὅταν τὸ ρ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον τὸ σ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν (Leontief). Ὅταν τὸ ρ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τὸ σ τείνει πρὸς τὴν μονάδα (C — D). Ἐμπειρικαί ἔρευναι γενόμεναι κατά τά τελευταῖα ἔτη ἀπέδειξαν ὅτι τὸ σ ποικίλει ἀπὸ βιομηχανίας εἰς βιομηχανίαν καὶ κυμαίνεται μεταξὺ 0,5 καὶ 0,7.

Τέλος, ἂς ἐπιχειρήσωμεν τὴν ἀνεύρεσιν τῆς σημασίας τῶν παραμέτρων α καὶ (1—α). Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τοῦ ὁ.λ.ὑ. ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho} \frac{\partial X/\partial K}{\partial X/\partial L}.$$

Δεδομένου ὅτι εἰς τὸν ἐλεύθερον ἀνταγωνισμὸν ἡ θεωρία τῆς ὁριακῆς παραγωγικότητος ἀπαιτεῖ τὴν πλήρωσιν τῆς συνθήκης: ὁριακὸν προϊὸν = τιμὴ παραγωγικοῦ συντελεστοῦ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho} \frac{r}{w} = \frac{K}{L}\frac{r}{w}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho}$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{rK}{wL} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho},$$

ὅπου rK εἶναι ἡ συνολικὴ ἀμοιβὴ τοῦ κεφαλαίου (μερίδιον τοῦ κεφαλαίου) καὶ wL ἡ συνολικὴ ἀμοιβὴ τῆς ἐργασίας (μερίδιον τῆς ἐργασίας). Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ἐὰν $\rho = 0$ (ὅπερ ἰσοδυναμεῖ πρὸς $\sigma = 1$, ὡς εἰς τὴν C — D) τότε

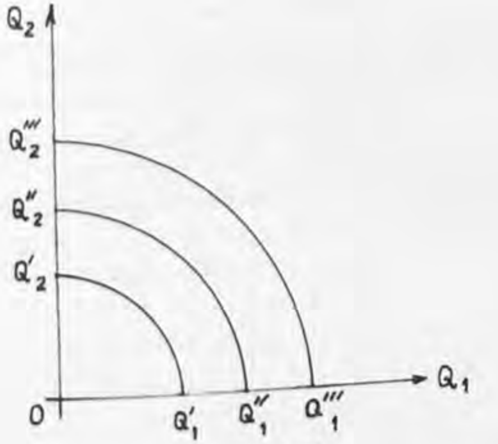
$rK = \alpha$, μερίδιον κεφαλαίου (β τῆς C — D)
$wL = (1-\alpha)$, μερίδιον ἐργασίας (α τῆς C — D).

Οὕτως αἱ παράμετροι α καὶ (1 — α) δύνανται νὰ ἑρμηνευθοῦν ὡς παράμετροι διανομῆς (distribution parameters).

Ἐὰν $\rho \neq 0$, τότε τὸ α καὶ (1 — α) δὲν δύνανται μόνα νὰ καθορίσουν τὴν διανομὴν τοῦ προϊόντος μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, ἀλλ' ἀπαιτεῖται καὶ ὁ καθορισμὸς τῆς σχέσεως μεταξὺ τούτων, ἤτοι τὰ μερίδια τῶν συντελεστῶν εἶναι συνάρτησις καὶ τῆς μεταξὺ τῶν συντελεστῶν ἀναλογίας, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως C — D.

Οὕτω τελικῶς ἑρμηνεύσαμεν ὅλας τὰς παραμετρικὰς σταθερὰς (β, ρ, α καὶ (1 — α)) τῆς συναρτήσεως σταθερᾶς ἐλαστικότητος ὑποκαταταστάσεως.

IV.2.8. **Καμπύλαι μετασχηματισμοῦ.** Εἰς τὰ προηγούμενα ἐξητάσθησαν αἱ σχέσεις μεταξὺ παραγωγικῶν συντελεστῶν καὶ προϊόντος τῆς παραγωγῆς εἰς ἓν ὑπόδειγμα «ἓν προϊὸν — δύο συντελεσταί». Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ προκύψουν ἐκ τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας πλείονα τοῦ ἑνὸς ἀγαθά. Δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν ταύτην εἰς ἓν κοινὸν σύστημα δύο ἀξόνων, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ πρὸς παραγωγὴν ἀγαθὰ εἶναι δύο, Q_1 καὶ Q_2, καὶ εἷς ὁ συντελεστὴς τῆς παραγωγῆς, x, ὅστις εἶναι κοινὸς δι' ἀμφότερα τὰ ἀγαθά, ὡς τοῦτο ἐπράξαμεν εἰς τὴν σελ.



Σχ. IV. 10.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω διαγράμματος διαπιστοῦμεν ὅτι ἐὰν ὁλόκληρος ἡ διαθέσιμος ποσότης τοῦ συντελεστοῦ x διατεθῇ εἰς τὴν παραγωγὴν τοῦ ἀγαθοῦ Q_1, ἡ παραγωγικὴ μονὰς θὰ παράγῃ ποσότητα OQ_1. Ἐὰν δὲ ἡ ποσότης τοῦ συντελεστοῦ διατεθῇ εἰς τὴν παραγωγὴν τοῦ ἀγαθοῦ Q_2 καθ' ὁλοκληρίαν, τότε θὰ παραχθῇ ποσότης OQ_2. Δύναται ὅμως νὰ παραχθῇ οἱοσδήποτε συνδυασμὸς τῶν δύο ἀγαθῶν διὰ τῆς διαθέσεως τῆς αὐτῆς ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ. Συνεπῶς, ἡ καμπύλη $Q'_2Q'_1$, καμπύλη μετασχηματισμοῦ (transformation curve) καλουμένη, εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων τὰ ὁποῖα δεικνύουν συνδυασμοὺς παραγωγῆς ἐκ τῶν δύο ἀγαθῶν Q_1 καὶ Q_2 μὲ δεδομένον τὸν συντελεστὴν τῆς παραγωγῆς καὶ τὰς συνθήκας ταύτης.

Ἡ συνάρτησις ἡ δίδουσα τὴν ἀνωτέρω σχέσιν μεταξὺ τοῦ παραγωγικοῦ συντελεστοῦ καὶ τῶν προϊόντων τῆς παραγωγῆς ἔχει ὡς ἑξῆς:

$$x = \varphi(Q_1, Q_2).$$

Ἑκάστη καμπύλη μετασχηματισμοῦ ἀνταποκρίνεται εἰς ὡρισμένον ἐπίπεδον συντελεστοῦ x. Μεγαλύτεραι ποσότητες παραγωγῆς τῶν δύο ἀγαθῶν συνεπάγονται ὑψηλότερον ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς καὶ ἀντιπροσωπεύονται ὑπὸ καμπύλων, αἱ ὁποῖαι ὁλοὲν ἀπομακρύνονται τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων. Οὕτω θὰ ἔχωμεν:

$$Q'_2\,Q'_1 < Q''_2\,Q''_1 < Q_2'''\,Q_1'''.$$

Ἑκάστη ἐπίσης συνάρτησις μετασχηματισμοῦ μᾶς δίδει τὸ κόστος παραγωγῆς εἰς ὅρους τοῦ συντελεστοῦ x. Κατ' αὐτὴν λοιπὸν τὴν ἔννοιαν τὸ κόστος παραγωγῆς εἶναι συνάρτησις τῶν ποσοτήτων τῶν δύο ἀγαθῶν,

Q_1 καὶ Q_2. Θὰ ἴδωμεν εὐθὺς ἀμέσως τὴν σχέσιν τῶν ὁριακῶν κόστων καὶ ὁριακῶν προϊόντων.

Εἰς τὴν συνάρτησιν μετασχηματισμοῦ, ἡ μεταβολὴ τῆς ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ (ἢ ταὐτό, ἡ μεταβολὴ τοῦ συνολικοῦ κόστους) ἡ προερχομένη ἐκ τῆς ἀνάγκης μεταβολῆς τῶν ποσοτήτων τῶν παραγομένων ἀγαθῶν, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν ταύτης, ἤτοι

$$dx = \frac{\partial x}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial x}{\partial Q_2} dQ_2.$$

Ἐὰν $dx = 0$, πρᾶγμα ὅπερ σημαίνει ὅτι κινούμεθα ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης μετασχηματισμοῦ, τότε ἔχομεν

$$\frac{dQ_2}{dQ_1} = -\frac{\partial x/\partial Q_1}{\partial x/\partial Q_2}$$

Ἡ ποσότης dQ_2/dQ_1 εἶναι ὁ ὁ ρ ι α κ ὸ ς λ ό γ ο ς μ ε τ α σ χ η μ α τ ι σ μ ο ῦ (ὁ.λ.μ.) εἰς τὸ σημεῖον Q_1, Q_2, ὅστις ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τοῦ ὁριακοῦ κόστους τοῦ Q_1 πρὸς τὸ ὁριακὸν κόστος τοῦ Q_2 εἰς ὅρους συντελεστοῦ x εἰς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο.

Ἐκ τῆς συναρτήσεως μετασχηματισμοῦ δύναται νὰ προκύψῃ ἀντίστροφος συνάρτησις, ἡ ὁποία δίδει, ἀντὶ τῶν ὁριακῶν κόστων, τὰ ὁριακὰ προϊόντα τῶν δύο ἀγαθῶν ὡς πρὸς τὸν κοινὸν συντελεστήν, ἤτοι

$\frac{\partial Q_1}{\partial x}$, ὁριακὸν προϊὸν Q_1 ὡς πρὸς x

$\frac{\partial Q_2}{\partial x}$, ὁριακὸν προϊὸν Q_2 ὡς πρὸς x.

Ἄρα, τὸ ὁριακὸν κόστος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀντίστροφον τοῦ ὁριακοῦ προϊόντος, ἤτοι

$$\frac{\partial x}{\partial Q_1} = \frac{1}{\partial Q_1/\partial x} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial x}{\partial Q_2} = \frac{1}{\partial Q_2/\partial x}$$

καὶ συνεπῶς

$$\text{ὁ.λ.μ.} = \frac{dQ_2}{dQ_1} = \frac{\partial Q_2/\partial x}{\partial Q_1/\partial x}$$

Ἤτοι ὁ ὁ.λ.μ. ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ὁριακῶν προϊόντων τοῦ συντελεστοῦ x εἰς τὴν παραγωγὴν τῶν Q_1 καὶ Q_2

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων προκύπτει ὅτι τὰ χαρακτηριστικὰ τῶν καμπύλων μετασχηματισμοῦ εἶναι: (α) Ἡ ἀ ρ ν η τ ι κ ὴ τ ο ύ τ ω ν κ λ ί σ ι ς, ἥτις ἑρμηνεύεται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ μείωσις τῆς παραγωγῆς ἑνὸς τῶν ἀγαθῶν συνεπάγεται τὴν αὔξησιν τῆς παραγωγῆς τοῦ ἑτέρου. (β) Τ ὸ κ ο ῖ λ ο ν τ ο ύ τ ω ν ὡ ς π ρ ὸ ς τ ὴ ν ἀ ρ χ ὴ ν τ ῶ ν ὀ ρ θ ο γ ω ν ί ω ν ἀ ξ ό ν ω ν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἴσαι μειώσεις τῆς ποσότητος τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγαθῶν συνεπάγονται ὁλοὲν καὶ μικροτέρας αὐξήσεις τῆς ποσότητος τοῦ ἑτέρου ἀγαθοῦ. Τοῦτο ἐπίσης σημαίνει ὅτι τὸ κόστος παραγωγῆς τοῦ ἀγαθοῦ αὐξάνει, αὐξανομένης τῆς παραγομένης ποσότητος τούτου καὶ συνεπῶς ὁ ὁ.λ.μ. τῶν ἀγαθῶν βαίνει φθίνων.

IV.2.9. **Ἡ συμπαραγωγὴ εἰς τὰς συναρτήσεις παραγωγῆς.** Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον εἴδομεν ὅτι ἡ καμπύλη μετασχηματισμοῦ δεικνύει συνδυασμοὺς παραγωγῆς δύο ἀγαθῶν μὲ δεδομένην ποσότητα συντελεστοῦ ἢ συντελεστῶν. Ἡ ἀρνητικὴ δὲ κλίσις τῆς καμπύλης δεικνύει τὸν ἀνταγωνιστικὸν χαρακτῆρα τῶν δύο ἀγαθῶν. Εἰς τὰς περιπτώσεις ἐκείνας κατὰ τὰς ὁποίας ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ταυτόχρονον παραγωγὴν δύο ἢ περισσοτέρων ἀγαθῶν, καὶ οὐχὶ ἑνὸς καὶ μόνον (ὁμογενοῦς) ὡς εἴδομεν εἰς τὴν μελέτην τῶν συναρτήσεων παραγωγῆς, ἔχομεν τὴν *συμπαραγωγὴν* (joint—production). Δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις συμπαραγωγῆς: (α) *ἐκείνην κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν σταθερὰν ἀναλογίαν τῶν συμπαραγώγων εἰς ὅλα τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς*, καὶ (β) *ἐκείνην κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν μεταβλητὴν ἀναλογίαν.*

Ἡ πρώτη περίπτωσις συμπαραγωγῆς τυγχάνει τῆς αὐτῆς μεταχειρήσεως ὡς ἡ συνάρτησις παραγωγῆς ἑνὸς μοναδικοῦ προϊόντος. Δηλονότι δυνάμεθα νὰ ἐκλάβωμεν τὴν συνδεδεμένην παραγωγὴν δύο προϊόντων εἰς τὴν αὐτὴν πάντοτε ἀναλογίαν ὡς μίαν ἑνιαίαν μονάδα παραγωγῆς. Ἡ δευτέρα περίπτωσις εἶναι πράγματι ἐκείνη ἡ ὁποία διαφοροποιεῖ τὸ ὑπόδειγμα «*ἓν προϊὸν—δύο συντελεσταί*» ἀπὸ τὸ ὑπόδειγμα «*δύο προϊόντα—δύο συντελεσταί*». Ὑπάρχουν πλεῖστα παραδείγματα συμπαραγωγῆς. Ὁ ὅρος δὲ καλύπτει τρεῖς τύπους παραγωγῆς: (α) *τὸν τύπον τῶν ἀνταγωνιστικῶν προϊόντων* (βενζίνη, πετρέλαιον), (β) *τὸν τύπον τῶν συμπληρωματικῶν προϊόντων* (βάμβαξ, βαμβακόσπορος), καὶ (γ) *τὸν τύπον τῶν ἀνεξαρτήτων μεταξύ των προϊόντων* (π.χ. εἰς ὑφισταμένην ἐλαιοκαλλιέργειαν καθ' ὡρισμένην ἐποχὴν καλλιεργεῖται καὶ σῖτος, τῆς πρώτης μὴ ἐπηρεαζομένης ἐκ τῆς σιτοκαλλιεργείας).

Πρὸς ἁπλοποίησιν τοῦ προβλήματος τῆς συμπαραγωγῆς ἂς λάβωμεν ἓν ὑπόδειγμα «*δύο προϊόντων καὶ ἑνὸς μεταβλητοῦ συντελεστοῦ*»*. Πρὸς διατύπωσιν τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς ἑκάστου προϊόντος κεχωρισμένως δέον νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ παραγωγὴ συναρτᾶται πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ μεταβλητοῦ συντελεστοῦ καὶ πρὸς τὴν παραγωγὴν τοῦ ἑτέρου προϊόντος.

---

* Σχετικῶς βλέπε καὶ *Sune Carlson*, A Study on the Pure Theory of Production, Kelley, New York, 1965, σελ. 74 ἑπομ.

Ἤτοι $Q_1 = f_1(x, Q_2)$

$Q_2 = f_2(x, Q_1)$

ὅπου Q_1, Q_2 = προϊόντα τῆς παραγωγῆς

x = μεταβλητὸς συντελεστής.

Τὰς ἀνωτέρω σχέσεις εὐκόλως δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν πρὸς τὴν συνάρτησιν τῆς καμπύλης μετασχηματισμοῦ: $x = \varphi(Q_1, Q_2)$, ἣν ἀνεφέραμεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον καὶ ἡ ὁποία δύναται γενικῶς νὰ κληθῇ συνάρτησις συντελεστοῦ ἢ συνάρτησις πραγματικοῦ κόστους παραγωγῆς*. Εἴδομεν δὲ ὅτι ἐκ τῶν συναρτήσεων πραγματικοῦ κόστους δύναται νὰ προκύψουν ἀντίστροφοι συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι ἀντὶ τῶν ὁριακῶν κόστων (μερικαὶ παράγωγοι) δίδουν τὰ ὁριακὰ προϊόντα. Ἡ διαπίστωσις αὕτη εἶναι σημαντικὴ διὰ τὴν διατύπωσιν ὡρισμένων σχέσεων ἀναφερομένων εἰς τὴν συμπαραγωγήν.

Ἐκ τῶν συναρτήσεων παραγωγῆς προκύπτει ὅτι

$\partial Q_1/\partial x$ = ὁριακὸν προϊὸν τοῦ x, ὅταν τὸ Q_2 εἶναι σταθερόν.

$\partial Q_1/\partial Q_2$ = ὁριακὸς λόγος μετασχηματισμοῦ, ὅταν τὸ x εἶναι σταθερόν.

Διὰ νὰ διατυπώσωμεν ὅμως, τὰς μεταξὺ τῶν δύο προϊόντων σχέσεις, αἱ ὁποῖαι θὰ προέκυπτον ἐκ τῶν σταυροειδῶν παραγώγων, αἱ ἀνωτέρω συναρτήσεις παραγωγῆς εἶναι ἀκατάλληλοι. Τοῦτο διότι ἡ παράγωγος $\partial^2 Q_1/\partial Q_2 \partial x$ δὲν ὑφίσταται, δεδομένου ὅτι διὰ τὴν αὔξησιν τοῦ Q_2 ἀπαιτεῖται ἀπαραιτήτως αὔξησις τοῦ συντελεστοῦ x, ὅταν τὸ Q_1 εἶναι σταθερόν. Κατὰ συνέπειαν θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν συνάρτησιν μετασχηματισμοῦ, ἐκ τῆς ὁποίας δυνάμεθα, ὡς εἴδομεν, νὰ λάβωμεν τὸ ὁριακὸν πραγματικὸν κόστος** ἑκάστου προϊόντος. Ἤτοι

$$\frac{\partial x}{\partial Q_1} \text{ καὶ } \frac{\partial x}{\partial Q_2}.$$

Ἀμφότερα ταῦτα εἶναι θετικὰ πέραν ὡρισμένου σημείου παραγωγῆς, ἤτοι αἱ δευτέρας τάξεως παράγωγοι καθίστανται θετικαί. Ἀλλὰ προκειμένου περὶ συμπαραγωγῆς σημασίαν διὰ τὸν τύπον ταύτης ἔχουν αἱ σταυροειδεῖς παράγωγοι, ἤτοι αἱ μεταβολαὶ τοῦ ὁριακοῦ κόστους τοῦ ἑνὸς προϊόντος ἔναντι τῶν μεταβολῶν τῆς ποσότητος τοῦ ἑτέρου. Διὰ τὴν περίπτωσιν ἀνταγωνιστικῶν ἀγαθῶν θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\partial^2 x}{\partial Q_2 \partial Q_1} > 0,$$

---

* Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ χρηματικὸν κόστος.

** Τὸ ὁριακὸν πραγματικὸν κόστος δυνάμεθα νὰ καλέσωμεν καὶ ὁριακὸν τεχνολογικὸν συντελεστὴν παραγωγῆς, δεδομένου ὅτι μᾶς δεικνύει πόσην ποσότητα ἐκ τοῦ συντελεστοῦ x θὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς ἐπὶ πλέον μονάδος ἑκάστου προϊόντος, τοῦ ἑτέρου παραμένοντος ἀμεταβλήτου.

ἤτοι μία αὔξησις τοῦ προϊόντος Q_2 προκαλεῖ αὔξησιν τοῦ ὁριακοῦ πραγματικοῦ κόστους τοῦ Q_1.

Διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν συμπληρωματικῶν ἀγαθῶν θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\partial^2 x}{\partial Q_2 \partial Q_1} < 0,$$

ἤτοι μία αὔξησις τοῦ Q_2 προκαλεῖ μείωσιν τοῦ ὁριακοῦ κόστους τοῦ Q_1.

Διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν ἀνεξαρτήτων ἀλλήλων προϊόντων θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\partial^2 x}{\partial Q_2 \partial Q_1} = 0,$$

ἤτοι μία αὔξησις τοῦ Q_2 οὐδεμίαν μεταβολὴν ἐπιφέρει εἰς τὸ ὁριακὸν κόστος τοῦ Q_1*.

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν σχέσιν τοῦ σχηματισμοῦ κόστους πρὸς τὰ προϊόντα, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ μεταβλητοῦ συντελεστοῦ (w) παραμένῃ σταθερά. Τὸ συνολικὸν κόστος (C_T) ἀμφοτέρων τῶν ἀγαθῶν ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ μεταβλητοῦ κόστους καὶ ἐκ τοῦ σταθεροῦ κόστους. Συνήθως τὸ συνολικὸν τοῦτο κόστος εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν συνολικῶν κόστων ἐὰν τὰ προϊόντα παρήγοντο κεχωρισμένως**. Ἡ συνάρτησις συνολικοῦ κόστους εἶναι $C_T = \Phi(Q_1, Q_2) = xw + FC$, ὅπου FC = σταθερὸν κόστος. Ὡς εἶναι εὐνόητον εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συμπαραγωγῆς δὲν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ μέσον κατὰ μονάδα κόστος ἑκάστου προϊόντος, δεδομένου ὅτι τὸ συνολικὸν κόστος δὲν δύναται νὰ ἐπιμερισθῇ ἀναλόγως. Δυνάμεθα ὅμως νὰ λάβωμεν τὸ ὁριακὸν χρηματικὸν κόστος ἑκάστου προϊόντος διὰ παραγωγίσεως τῆς συναρτήσεως χρηματικοῦ κόστους, ἤτοι

$$MC_1 = \frac{\partial C_T}{\partial Q_1} = w \frac{\partial x}{\partial Q_1}, \text{ ὁριακὸν χρηματικὸν κόστος τοῦ } Q_1,$$

$$MC_2 = \frac{\partial C_T}{\partial Q_2} = w \frac{\partial x}{\partial Q_2}, \text{ ὁριακὸν χρηματικὸν κόστος τοῦ } Q_2.$$

Ἡ συμπεριφορὰ τοῦ ὁριακοῦ χρηματικοῦ κόστους ἑνὸς τῶν προϊόντων ἐν σχέσει πρὸς τὰς μεταβολὰς τῆς ποσότητος τοῦ ἑτέρου τῶν ἀγαθῶν, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ πραγματικοῦ κόστους, δίδεται διὰ τῆς σταυροειδοῦς παραγώγου τῆς συναρτήσεως. Ὁπότε ἔχομεν:

$$\frac{\partial^2 C_T}{\partial Q_2 \partial Q_1} > 0, \text{ περίπτωσις ἀνταγωνιστικῶν προϊόντων.}$$

$$\frac{\partial^2 C_T}{\partial Q_2 \partial Q_1} < 0, \text{ περίπτωσις συμπληρωματικῶν προϊόντων.}$$

---

* S. Carlson, op. cit., σελ. 78 - 80.

** Ibid, σελ. 81.

$$\frac{\partial^2 C_T}{\partial Q_2 \partial Q_1} = 0,$$ π ε ρ ί π τ ω σ ι ς ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ω ν π ρ ο ϊ ό ν τ ω ν.

IV.2.10. **Τεχνολογικὴ πρόοδος καὶ καμπύλαι ἰσοπαραγωγῆς.** Ἡ κατὰ τὴν διαδρομὴν τοῦ χρόνου ἐπισυμβαίνουσα τεχνολογικὴ πρόοδος ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν μεταβολὴν τῶν συνθηκῶν τῆς παραγωγῆς μὲ ἀποτέλεσμα τὴν ἐπίτευξιν καλλιτέρου παραγωγικοῦ ἀποτελέσματος μὲ τὰς αὐτὰς εἰσροὰς ἢ τὴν ἐπίτευξιν τοῦ αὐτοῦ ἀποτελέσματος μὲ ἐξοικονόμησιν εἰσροῶν. Δηλονότι, ἡ αὔξησις τῆς παραγωγῆς δὲν ἀποδίδεται καθ' ὁλοκληρίαν εἰς τὴν συμβολὴν τοῦ κεφαλαίου καὶ τῆς ἐργασίας, ἀλλὰ καὶ εἰς δυνάμεις ὡς ἡ βελτίωσις τῆς εἰδικεύσεως καὶ ἐκπαιδεύσεως, αἱ καινοτομίαι, αἱ βελτιώσεις εἰς τὴν ὀργάνωσιν καὶ τὴν ἐπιχειρηματικὴν δρᾶσιν, κ.λπ.

Αἱ σχέσεις τόσον μεταξὺ εἰσροῶν καὶ παραγωγῆς, ὅσον καὶ μεταξὺ τῶν εἰσροῶν κυριαρχοῦνται ἐκ τῆς ἐπικρατούσης τεχνολογίας, ἡ ὁποία οὕτως ἐκφράζεται μέσῳ τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς. Ἡ διαπίστωσις αὕτη εἶναι λίαν χρήσιμος διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν.

Ὡς πρὸς τὴν πρώτην σχέσιν, ἤτοι τὴν σχέσιν μεταξὺ εἰσροῶν καὶ παραγωγῆς, ἡ τεχνολογικὴ πρόοδος ἐκδηλοῦται εἰς αὔξησιν τῆς ἀποδόσεως μὲ δεδομένας τὰς εἰσροάς, ἢ εἰς ἀμετάβλητον ἀπόδοσιν μὲ ἠλαττωμένας εἰσροάς. Αἱ τοιαῦται ο ἰ κ ο ν ο μ ί α ι κ λ ί μ α κ ο ς (economies of scale) δύνανται νὰ διακριθοῦν εἰς ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ἀποδίδονται εἰς τὴν γενικὴν ἀνάπτυξιν τῆς βιομηχανίας καὶ καλοῦνται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ α ὶ ο ἰ κ ο ν ο μ ί α ι (external economies), καὶ εἰς ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ὀφείλονται εἰς τὰς ἰδιαιτέρας συνθήκας αὐτῶν τούτων τῶν ἐπιχειρήσεων (ὀργάνωσις, ἐπιχειρηματικὴ ἀπόδοσις, κ.λπ.) καὶ καλοῦνται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ α ὶ ο ἰ κ ο ν ο μ ί α ι (internal economies)*. Ἡ λόγῳ τῆς τεχνολογικῆς προόδου αὔξησις τῆς παραγωγῆς δεικνύεται εἰς τὰ κατωτέρω γραφήματα.

Εἰς τὸ διάγραμμα (α) ἐμφανίζεται ἡ ἐπίτευξις τῆς αὐτῆς παραγωγῆς δι' ὀλιγωτέρων εἰσροῶν ἐκ τοῦ κεφαλαίου (K) καὶ τῆς ἐργασίας (L). Εἰς τὰ διαγράμματα (β) καὶ (γ) ἐμφανίζεται ἡ διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος εἰσροῶν ἐπίτευξις μεγαλυτέρας παραγωγῆς.

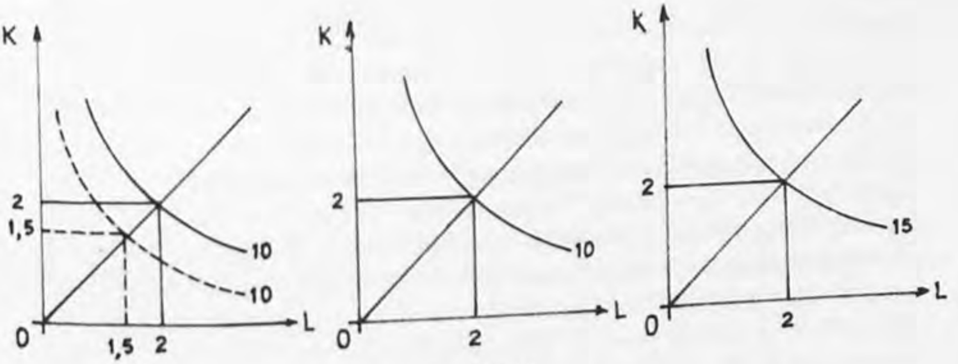
Ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω τεχνολογικὴ πρόοδος ἐπηρέασε μόνον τὴν ἀπόδοσιν τῆς παραγωγῆς, τῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν δύο εἰσροῶν παραμενούσης ἀμεταβλήτου. Τὸ εἶδος τοῦτο τῆς τεχνολογικῆς προόδου καλεῖται ο ὐ δ ε τ έ ρ α π ρ ό ο δ ο ς (neutral change)**.

Ἡ τεχνολογικὴ ὅμως πρόοδος δύναται νὰ εἶναι μεροληπτική, ἤτοι μὴ

---

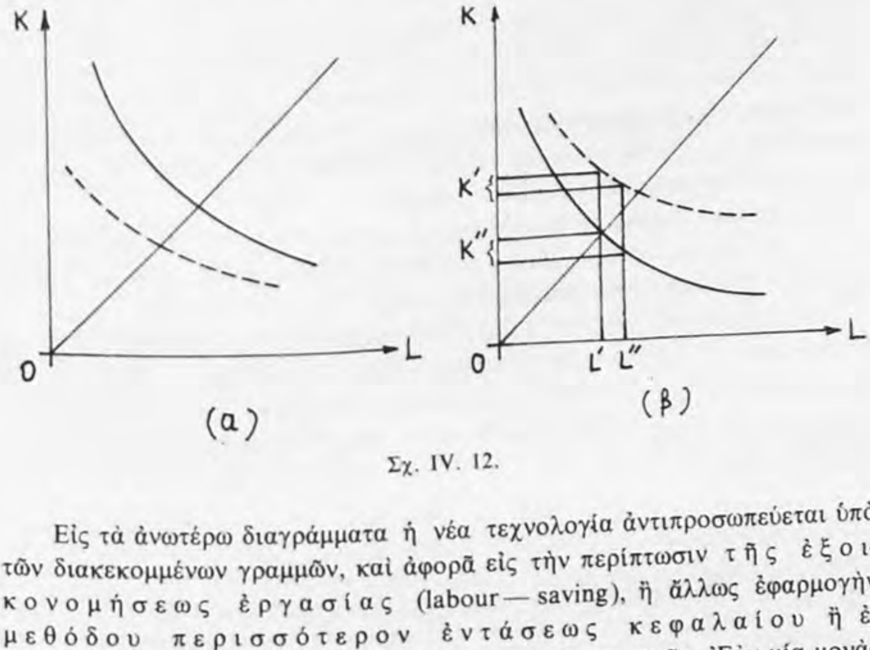
* Ἡ διάκρισις εἰς ἐσωτερικὰς καὶ ἐξωτερικὰς οἰκονομίας ὀφείλεται εἰς τὸν A. M a r s h a l l (Principles of Economics, London, 1922).

** Βλ. καὶ M. B r o w n, On the Theory and Measurement of Technological Change, Cambridge, 1966, σελ. 9 - 42.



Σχ. IV. 11.

οὐδετέρα, ἐξοικονομοῦσα ἢ χρησιμοποιοῦσα περισσότερον τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον συντελεστήν, τούτου ἐξαρτωμένου ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν ἡ τεχνολογικὴ μεταβολὴ ἐπηρεάζει τὸν ὁ.λ.ὑ. μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς εἰς ἕκαστον συνδυασμὸν τούτων. Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς νέας τεχνολογίας, ἡ κλίσις τῶν καμπύλων ἰσοπαραγωγῆς μεταβάλλεται. Τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐμφαίνει τὸ κατωτέρω Σχ. IV.12.



Σχ. IV. 12.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω διαγράμματα ἡ νέα τεχνολογία ἀντιπροσωπεύεται ὑπὸ τῶν διακεκομμένων γραμμῶν, καὶ ἀφορᾷ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐξοικονομήσεως ἐργασίας (labour — saving), ἢ ἄλλως ἐφαρμογὴν μεθόδου περισσότερον ἐντάσεως κεφαλαίου ἢ ἐκείνης τῆς ἀντιπροσωπευομένης ὑπὸ τῶν συνεχῶν γραμμῶν. Ἐὰν μία μονὰς ἐργασίας προστεθῇ εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν (ἀπὸ OL'' εἰς τὸ διάγραμμα (β)), τότε μικροτέρα ποσότης κεφαλαίου θὰ ἐγκαταλειφθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς νέας τεχνολογίας ἢ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς τεχνολογίας, ἥτις ἀντιπροσωπεύεται ὑπὸ τῆς συνεχοῦς γραμμῆς, ἤτοι $K' < K''$. Τὸ τοιοῦτον συμβαίνει διότι αἱ συνεχεῖς καμπύλαι τοῦ Σχ. IV.12 ἔχουν κλίσιν μεγαλυτέραν ἐκείνης τῶν διακεκομμένων γραμμῶν, ὅπερ σημαίνει ὅτι μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς νέας τεχνολογίας (διακεκομμέναι γραμμαί) ὁ ὁ.λ.ὑ. ἐμειώθη. Ἡ μείωσις, ὄντως τοῦ ὁ.λ.ὑ. σημαίνει ὅτι μὲ δεδομένον τὸ ὁριακὸν προϊὸν τῆς ἐργασίας αὐξάνει τὸ ὁριακὸν προϊὸν τοῦ κεφαλαίου συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν

$$-\frac{dK}{dL} = \frac{\partial X/\partial L}{\partial X/\partial K}.$$

Διὰ νὰ καταστῇ μικροτέρα ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως καὶ μὲ δεδομένην τὴν τιμὴν τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δευτέρου μέλους θὰ πρέπει νὰ αὐξηθῇ ὁ παρονομαστὴς (όρ. προϊὸν κεφαλαίου) τούτου.

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς τεχνολογικῆς μεταβολῆς εἰς τὴν συνάρτησιν Cobb — Douglas. Ἡ τεχνολογικὴ μεταβολὴ εἰς τὴν συνάρτησιν ταύτην εὑρίσκει ἔκφρασιν εἰς τὰς μεταβολὰς τῶν παραμέτρων A, α καὶ β. Οὕτω, μεταβολαὶ εἰς τὴν παράμετρον A (παράμετρος ἀποδόσεως) οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἔχουν ἐπὶ τῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν δύο συντελεστῶν L καὶ K καὶ συνεπῶς ἡ μέσω τῶν μεταβολῶν τούτων ἐκδηλουμένη τεχνολογικὴ πρόοδος εἶναι οὐδετέρα. Αὔξησις τῆς παραμέτρου A σημαίνει αὔξησιν τῆς ἀποδόσεως τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας. Ἡ παράμετρος ὅμως αὕτη δὲν εὑρίσκεται εἰς σχέσιν πρὸς τὸν λόγον ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ συνεπῶς δὲν ἐπηρεάζει τοῦτον.

Οὐδετέραν τεχνολογίαν, ἐπίσης, ἐκφράζουν καὶ αἱ ἴσαι ἀναλογικαὶ μεταβολαὶ εἰς τὰς παραμέτρους α καὶ β εἰς τὸ ἄθροισμα (α + β), τὸ ὁποῖον ἐμφαίνει τὸν βαθμὸν ἀποδόσεως κλίμακος.

Ἀντιθέτως μεροληπτικὴ μεταβολὴν ἔχομεν ὅταν μεταβάλλεται ὁ ὁ.λ.ὑ., ἤτοι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης ἰσοπαραγωγῆς. Τοῦτο δύναται νὰ συμβῇ διὰ τῆς μεταβολῆς εἰς τὸν λόγον τῶν μερικῶν ἐλαστικοτήτων α καὶ β, ὅστις ἐπηρεάζει τὸν ὁ.λ.ὑ. εἰς δεδομένην σχέσιν κεφαλαίου ἐργασίας. Δεδομένης τῆς σχέσεως,

$$\frac{dK}{dL} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{K}{L},$$

καὶ τῆς συνθήκης ἰσορροπίας

$$\frac{w}{r} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{K}{L},$$

ἕπεται ὅτι δι' ὡρισμένην σχέσιν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν $\left(\frac{w}{r}\right)$ ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ λόγος τῶν ἐλαστικοτήτων $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, τόσον μικρότερα πρέπει νὰ εἶναι ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν $\left(\frac{K}{L}\right)$.

Ἤτοι, ἀναλυτικώτερον, ὅσον μικρότερον τὸ β τόσον μικρότερος θὰ εἶναι ὁ λόγος κεφαλαίου — ἐργασίας καὶ ὅσον μικρότερον τὸ α τόσον μεγαλύτερος θὰ εἶναι ὁ λόγος οὗτος. Εἰς τὴν πρώτην μὲν περίπτωσιν ἡ τεχνολογικὴ πρόοδος ἐξοικονομεῖ κεφάλαιον ἢ ἄλλως, εἶναι ἐντάσεως ἐργασίας, εἰς τὴν δευτέραν δὲ περίπτωσιν εἶναι ἐντάσεως κεφαλαίου ἢ χρησιμοποιεῖ περισσότερον κεφάλαιον ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐργασίαν. Οὕτω, λοιπόν, ὁ λόγος τῶν μερικῶν ἐλαστικοτήτων, αἱ ὁποῖαι ἐμφαίνουν καὶ τὴν σχετικὴν συμμετοχὴν ἑκάστου συντελεστοῦ εἰς τὴν διανομὴν τοῦ προϊόντος εἰς τὴν περίπτωσιν $\alpha + \beta = 1$, προσδιορίζει τὴν ἐντατικότητα χρησιμοποιήσεως κεφαλαίου ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐργασίαν (capital intensity) κατὰ τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν.

Ἡ ἐν τοῖς προηγουμένοις ἀναπτυχθεῖσα «οὐδετερότης» (neutrality) τῆς τεχνολογικῆς προόδου ὑποδηλοῦται εἰς τὰ πλεῖστα τῶν νεοκλασσικῶν ὑποδειγμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως (growth models)*. Εἰς μίαν συνάρτησιν παραγωγῆς ὁ παράγων τῆς οὐδετέρας τεχνολογικῆς προόδου εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθῇ διὰ μιᾶς ἐκθετικῆς μεταβλητῆς τοῦ χρόνου ὡς κατωτέρω

$$X = e^{pt} F(L, K),$$

ὅπου p = θετικὴ σταθερά,
t = χρόνος,
F = συνάρτησις συνεχής.

Ἡ ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν οὐδετέρα τεχνολογικὴ πρόοδος εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία ἐχρησιμοποιήθη ὑπὸ τοῦ J.R. Hicks**. Κατὰ Hicks ἡ ἔννοια τῆς οὐδετερότητος συνίσταται εἰς τὸ ὅτι διὰ δεδομένας εἰσροὰς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ἐργασίας καὶ κεφαλαίου, τὸ ὁριακὸν προϊὸν τοῦ πρώτου αὐξάνει κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν ὡς καὶ τοῦ δευτέρου. Ἡ οὐδετερότης ὅμως τῆς τεχνολογικῆς προόδου εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκληφθῇ ὑφ' ἣν ἔννοιαν

---

* Ἐνταῦθα ὁ ὅρος «ἀνάπτυξις» ἀποτελεῖ τὴν μετάφρασιν τοῦ «growth» καὶ ἀναφέρεται εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀνεπτυγμένων οἰκονομιῶν. Συναντᾶται δὲ καὶ ὡς «αὔξησις». Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὑπὸ ἀνάπτυξιν οἰκονομιῶν, ἀντιθέτως, ὁ ὅρος «ἀνάπτυξις» ἀποτελεῖ τὴν μετάφρασιν τοῦ «development».

** The Theory of Wages, London, 1932.

τὴν ἐξέλαβεν ὁ R. Harrod*, δηλονότι ὑπὸ καθεστὼς σταθεροῦ ἐπιτοκίου αὕτη δὲν ἐπηρεάζει τὸν λόγον κεφαλαίου — προϊόντος (capital — output ratio). Ὁ λόγος οὗτος ὅστις καὶ κεφαλαιακὸς ἢ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς παραγωγῆς καλεῖται, δεικνύει, ὡς εἰκός, τὸν βαθμὸν κεφαλαιουχικότητος ἢ ἐντάσεως κεφαλαίου τῆς παραγωγῆς.

Γεννᾶται τελικῶς τὸ ἐρώτημα κατὰ πόσον ἡ τεχνολογικὴ πρόοδος εἰς τὴν διαδρομὴν τοῦ χρόνου εἶναι οὐδετέρα ἢ μή. Ἐκ τῆς ἱστορικῆς μαρτυρίας προκύπτει ὅτι ὁ λόγος κεφαλαίου — προϊόντος αὐξάνει μᾶλλον ἢ παραμένει σταθερὸς μακροχρονίως** καὶ συνεπῶς ἡ τεχνολογικὴ πρόοδος δὲν ἦτο οὐδετέρα ὑφ' οἱανδήποτε ἔννοιαν. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Hicks θὰ ἦτο πλησιέστερον πρὸς τὴν πραγματικότητα, ἐὰν ἀποδεχώμεθα ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ κόστους τῆς ἐργασίας εἰς προκεχωρημένα στάδια ἀναπτύξεως ὁδηγεῖ εἰς ἐφαρμογὴν τεχνικῆς ἐξοικονομούσης ἐργασίαν (labour saving). Εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν τοῦ Harrod δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἡ τεχνολογικὴ πρόοδος ὁδηγεῖ εἰς αὔξησιν τοῦ κεφαλαιακοῦ συντελεστοῦ μέσῳ τῆς πτωτικῆς τάσεως τοῦ ἐπιτοκίου. Ἤτοι ἡ εἰς τὴν μακροχρόνιον περίοδον τάσις πτώσεως τοῦ ἐπιτοκίου θὰ ὁδηγήσῃ εἰς μεγαλυτέραν χρησιμοποίησιν τοῦ συντελεστοῦ «κεφάλαιον» ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐργασίαν, καθισταμένης οὕτω τῆς παραγωγῆς κεφαλαιουχικωτέρας.

IV.2.11. **Σχέσεις προϊόντος καὶ κόστους εἰς τὰς συναρτήσεις παραγωγῆς.** Ἤδη κατέστη σαφὲς ἐκ τῆς προηγηθείσης ἀναλύσεως ὅτι αἱ καμπύλαι ἰσοπαραγωγῆς δεικνύουν συνδυασμοὺς ἐλαχίστων ποσοτήτων συντελεστῶν πρὸς παραγωγὴν δεδομένης ποσότητος τοῦ προϊόντος καὶ συνεπῶς ἀνήκουν ἐννοιολογικῶς εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ἐλαχίστων ἀξιῶν (minimal concept). Δεδομένου ὅτι ἡ ἀνάλωσις παραγωγικῶν συντελεστῶν ἀποτελεῖ τὸ κόστος τῆς παραγωγῆς τὸ πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἐπιλογῆς τῆς παραγωγικῆς μονάδος ἀνάγεται εἰς πρόβλημα ἐλαχιστεύσεως τοῦ κόστους τῆς παραγωγῆς.

Τὸ συνολικὸν κόστος τῆς παραγωγῆς θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀνάλωσιν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ἐπὶ τὰς τιμάς των σὺν μίαν σταθερὰν ποσότητα α ἀντιπροσωπεύουσαν τὸ σταθερὸν κόστος, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀνεξαρτήτως τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς, ἤτοι

$$C_T = wx + ry + \alpha.$$

Ἡ συνάρτησις παραγωγῆς εἶναι: $Q = f(x, y)$.

---

* R. Harrod, Towards a Dynamic Economics, London 1948.

** Βλ. S. Kuznets, «Quantitative Aspects of Economic Growth: VI. Long-Term Trends in Capital Formation» εἰς Economic Development and Cultural Change, Vol. IX, Part II, No 4, July 1961. S. Sarantides, An Inquiry into International Income Inequality...... (Ἀδημοσίευτος Διατριβή), BRISTOL 1968, σελ. 137.

Τὸ σύνολον τῶν ἐσόδων τῆς παραγωγικῆς μονάδος θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ συνολικὸν προϊὸν (Q) ἐπὶ τὴν τιμὴν μονάδος (p), ἤτοι pQ. Ἄρα, τὸ συνολικὸν κέρδος θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$\Pi = pQ - wx - ry - \alpha.$$

Διὰ τὴν ἐλαχίστευσιν τοῦ συνολικοῦ κόστους θὰ πρέπει νὰ πληρωθῇ ἡ συνθήκη*:

$$\frac{w}{r} = \partial Q/\partial x : \partial Q/\partial y \, .$$

Τὸ συνολικὸν κόστος ὅμως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ ὡς συνάρτησις τοῦ ἐπιπέδου τῆς παραγωγῆς πλέον τοῦ σταθεροῦ κόστους, ἤτοι

$$C_T = \varphi(Q) + \alpha.$$

Τὸ μέσον κατὰ μονάδα κόστος θὰ εἶναι**.

$$AC = \frac{\varphi(Q) + \alpha}{Q}.$$

Τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι:

$$MC = \frac{dC_T}{dQ} = \varphi'(Q).$$

Ἡ συγκεκριμένη μορφὴ τῆς καμπύλης συνολικοῦ κόστους θὰ ἐξαρτηθῇ ἐκ τῆς συγκεκριμένης μορφῆς τῆς φ. Ἡ συνήθης μορφὴ καμπύλης συνολικοῦ κόστους, ἐξ ἧς προκύπτουν αἱ γνωστοῦ σχήματος καμπύλαι μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους τῶν ἐγχειριδίων θεωρητικῆς οἰκονομικῆς, εἶναι ἡ ἀπεικονιζομένη εἰς τὸ Σχ. IV.13.(α).

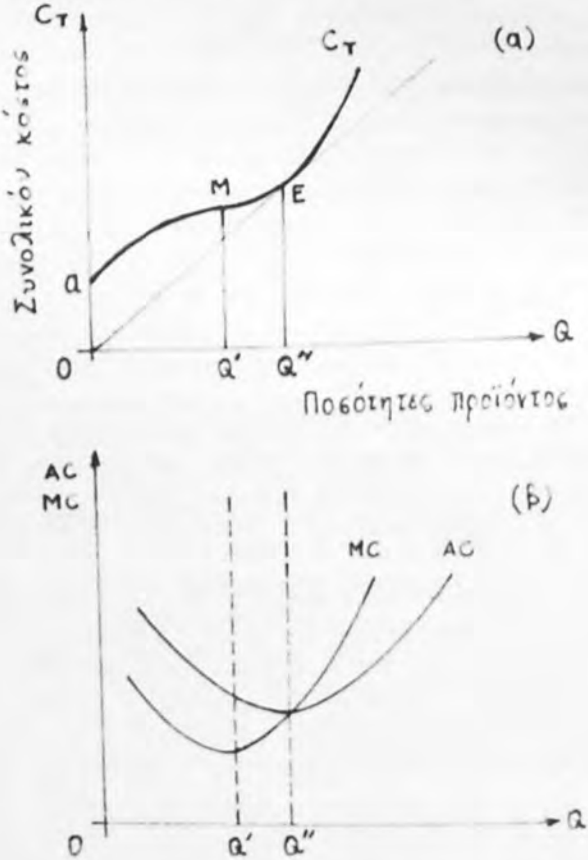
Εἰς ἀμφότερα τὰ γραφήματα τοῦ ἀνωτέρω Σχ. IV.13 ἐμφαίνεται ἡ διαμόρφωσις τοῦ συνολικοῦ κόστους (α) καὶ τοῦ μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους (β) συναρτήσει τῆς παραγωγῆς (Q). Ἐκ τῶν κλίσεων τῶν ἐφαπτομένων γραμμῶν εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης C_T προκύπτει ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους, τῆς ὁποίας τὸ κατώτατον σημεῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον καμπῆς τῆς καμπύλης C_T, M, εἰς παραγωγὴν Q′. Αἱ κλίσεις ἐκ τῆς τῆς ἀρχῆς τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων πρὸς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης C_T δίδουν τὸ μέσον κόστος εἰς τὰ ἀντίστοιχα ἐπίπεδα παραγωγῆς. Εἰς τὸ σημεῖον E τῆς C_T ἡ κλίσις τῆς εὐθείας γραμμῆς τῆς ἐμφαινούσης τὸ μέσον κόστος καὶ ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἐμφαινούσης τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι ἡ αὐτή. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ὁριακὸν καὶ μέσον κόστος εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ αὐτό, ἤτοι εἰς ἐπίπεδον παραγωγῆς ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ σημεῖον E ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους τέμνει τὴν καμπύλην μέσου κόστους ἐκ τῶν κάτω καὶ εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον ταύτης (ἐπίπεδον παραγωγῆς Q″).

---

* Περὶ τῶν συνθηκῶν τῆς οἰκονομικῆς ἀριστοποιήσεως βλέπε ἐν τοῖς ἑπομένοις.

** Περὶ κόστους ἰδὲ εἰς σελ. 164 ἑπομ.

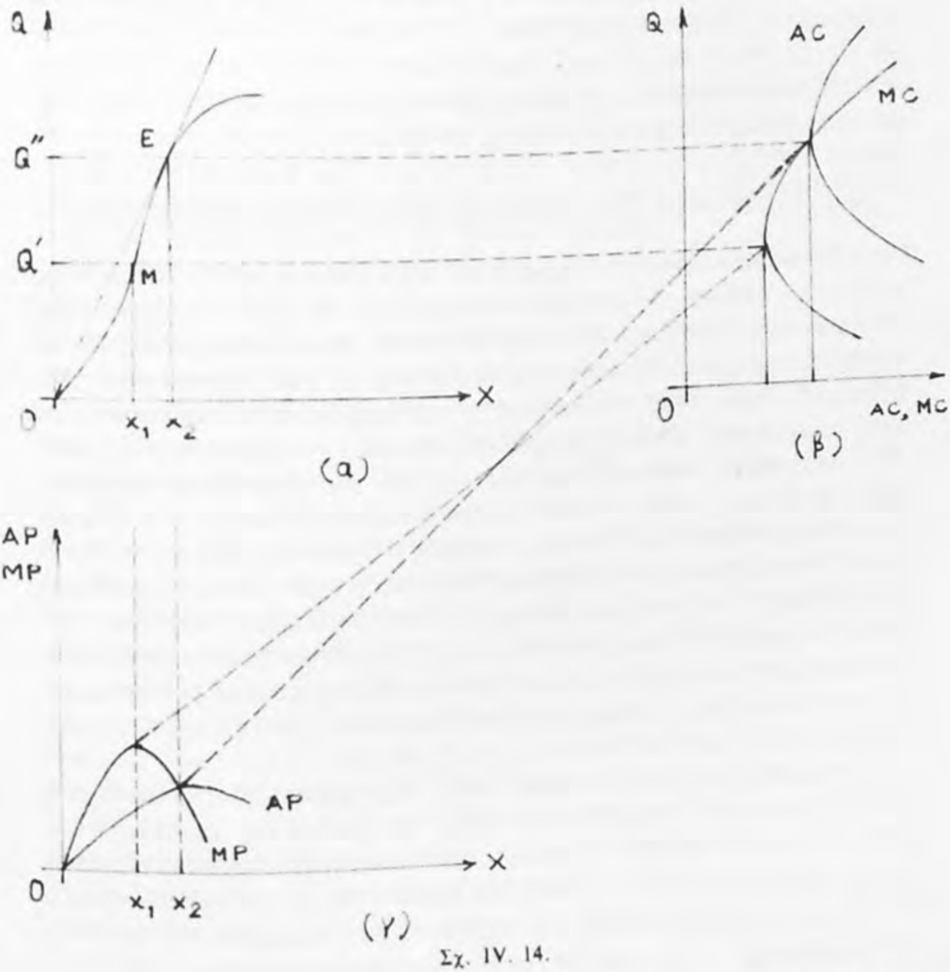
Ἐκ τῶν ἐννοιῶν τοῦ ὁριακοῦ προϊόντος καὶ τοῦ ὁριακοῦ κόστους προκύπτει ὅτι ἡ πρότασις καθ' ἣν ἡ χρησιμοποίησις μιᾶς ἐπὶ πλέον μονάδος τοῦ συντελεστοῦ x ἐπιφέρει αὔξησιν τοῦ προϊόντος κατά, ἔστω, δύο μονάδας, ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν πρότασιν καθ' ἣν πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ προϊόντος ἀπαιτεῖται αὔξησις τῆς ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ x κατὰ



Σχ. IV. 13.

1/2 μονάδας. Δεδομένου δὲ ὅτι ἡ μὲν πρώτη πρότασις ἀποβαίνει ἡ ἔννοια τοῦ ὁριακοῦ προϊόντος, ἡ δὲ δευτέρα τοιαύτη ἡ ἔννοια τοῦ ὁριακοῦ κόστους, ἕπεται ὅτι τὸ ὁριακὸν προϊὸν εἶναι ἀντίστροφον τοῦ ὁριακοῦ κόστους. Εἶναι ἑπόμενον ὅτι ὁσάκις τὸ ὁριακὸν προϊὸν ἑνὸς τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς βαίνει φθῖνον, τὸ ὁριακὸν κόστος τῆς παραγωγῆς βαίνει αὖξον.

Εἰδικώτερον δὲ αἱ μεταξὺ προϊόντος καὶ κόστους σχέσεις ἐμφαίνονται εἰς τὰ γραφήματα τοῦ Σχ. IV.14. Ἐκ τούτων προκύπτουν ὅτι: (i) Τ ὸ σ ημεῖον καμπῆς. Μ, τῆς καμπύλης συνολικοῦ προϊόντος (γράφημα (α)) ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ ἀνώτατον ὁριακὸν προϊὸν (γράφημα (γ)) καὶ τὸ κατώτατον ὁριακὸν κόστος (γράφημα (β)). (ii) Τὸ σημεῖον Ε ὅπου ἡ ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων διερχομένη εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς καμπύλης συνολικοῦ προ-



Σχ. IV. 14.

ϊόντος ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ ἀνώτατον μέσον προϊὸν καὶ συνεπῶς πρὸς τὸ κατώτατον μέσον κόστος. (iii) Τὸ σημεῖον Ε, ἐπίσης, ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς, τῶν καμπύλων μέσου καὶ ὁριακοῦ προϊόντος, ὡς ἐπίσης καὶ πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καμπύλων μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους. (iv) Ὅταν ἡ καμπύλη ὁριακοῦ προϊόντος εἶναι αὔξουσα ἡ τοιαύτη τοῦ ὁριακοῦ κόστους εἶναι φθίνουσα. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς καμπύλας μέσου προϊόντος καὶ μέσου κόστους, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν γραφημάτων (β) καὶ (γ). Ἂς σημειωθῇ ὅτι τὸ γράφημα (β) τοῦ Σχ. IV.14. εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ ἐκεῖνον τοῦ (β) τοῦ Σχ. IV.13 ἀντιστρόφως λαμβανόμενον.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ἡ ἄμεσος σχέσις μεταξὺ τῆς ἀρχῆς τῆς φθινούσης ἀποδόσεως καὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ αὔξοντος κόστους.

IV.3. ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

IV.3.0. **Εἰσαγωγή.** Ἓν σημαντικὸν μέρος τῆς ἐμπειρικῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως ἀναφέρεται εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῶν συναρτήσεων παραγωγῆς. Ἡ ἐμπειρικὴ ἔρευνα ἐν προκειμένῳ σκοπὸν ἔχει νὰ διαπιστώσῃ ἐν τῇ πράξει τοὺς ἰσχύοντας νόμους τῆς παραγωγῆς εἰς ἑκάστην περίπτωσιν παραγωγικῆς διαδικασίας καὶ συνεπῶς νὰ παράσχῃ εἰς τὸν παραγωγὸν τὰ μέσα πρὸς διευκόλυνσιν τῶν ἐπιχειρηματικῶν ἀποφάσεων. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν διαπιστωθῇ ἐκ τῆς ἐμπειρικῆς ἐρεύνης ὅτι εἰς συγκεκριμένην παραγωγὴν ἰσχύει ὁ νόμος τῆς φθινούσης ἀποδόσεως, τότε ὁ παραγωγὸς θὰ πρέπει νὰ γνωρίζῃ ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ μεγέθους τῆς παραγωγικῆς μονάδος ἐν ἀρχῇ μὲν δίδει φθῖνον κόστος, ἀπὸ ὡρισμένου δὲ ὁρίου καὶ πέραν δίδει αὖξον κόστος. Συνεπῶς οὗτος δὲν δύναται νὰ ἐπιλέξῃ οἱονδήποτε μέγεθος διὰ τὴν παραγωγικὴν μονάδα, ἀλλὰ ἓν μέγεθος τὸ ὁποῖον θὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν περιωρισμένην περιοχὴν τοῦ χαμηλοῦ κόστους. Ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ βιώσιμοι θὰ εἶναι αἱ μονάδες, τῶν ὁποίων τὸ μέγεθος πλησιάζει τὸ ἄριστον τοιοῦτον.

Ἀντιθέτως, εἰς ἣν περίπτωσιν ἤθελε διαπιστωθῇ διὰ τῆς ἐμπειρικῆς ἐρεύνης ὅτι ἰσχύει ὁ νόμος τῆς σταθερᾶς κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως, τοῦτο θὰ ἦτο μιὰ ἔνδειξις τῆς δυνατότητος συνυπάρξεως τόσον μικρῶν, ὅσον καὶ μεγάλων παραγωγικῶν μονάδων λειτουργουσῶν κερδοφόρως.

Ὁ νόμος τῆς παραγωγῆς, ἤτοι ἡ σχέσις μεταξὺ εἰσροῶν καὶ προϊόντος τῆς παραγωγῆς, ἐκδηλοῦνται εἰς τὴν συγκεκριμένην συνάρτησιν τῆς παραγωγῆς, διὸ καὶ ἡ ἐμπειρικὴ ἐκτίμησις ταύτης τυγχάνει ἀπαραίτητος πρὸς διαπίστωσιν τούτου. Κατωτέρω θίγομεν ὡρισμένα τῶν προβλημάτων τῆς ἐμπειρικῆς ἐρεύνης καὶ δίδομεν τὰ ἀποτελέσματα ὡρισμένων ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ἐργασιῶν, αἱ ὁποῖαι ἐγένοντο ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου. Ἐκ τῶν προβλημάτων τῆς ἐμπειρικῆς (οἰκονομετρικῆς) ἐρεύνης θίγομεν τὰ προβλήματα τῆς ἐξειδικεύσεως τῶν μεταβλητῶν, τῆς ἐξειδικεύσεως τῆς συναρτήσεως καὶ τὸ πρόβλημα τῆς στατιστικῆς μεθόδου ἐκτιμήσεως.

IV.3.1. **Ἡ ἐξειδίκευσις τῶν μεταβλητῶν τῆς συναρτήσεως.** Εἰς τὴν πρᾶξιν θὰ πρέπει νὰ ἀνεύρωμεν τὰς οἰκονομικὰς ποσότητας αἱ ὁποῖαι δύνανται καλλίτερον νὰ ἀντιπροσωπεύσουν τὰς μεταβλητὰς τῆς θεωρητικῆς συναρτήσεως παραγωγῆς καὶ οὕτω νὰ χωρήσωμεν εἰς τὴν ἐκτίμησιν. Ὡς πρὸς τὴν τοιαύτην ἐξειδίκευσιν (ἐπιλογὴν) τῶν μεταβλητῶν λεκτέα τὰ ἀκόλουθα ὡς πρὸς μίαν ἑκάστην τούτων.

Προϊὸν παραγωγῆς. Ὡς προϊὸν τῆς παραγωγῆς λαμβάνονται στοιχεῖα εἰς φυσικὰς μονάδας (τόννοι, τεμάχια, κ.λπ) ἢ εἰς ἀξίας. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν προκύπτει μία καθαρῶς τεχνολογικὴ σχέσις, ἥτις ἀπαιτεῖ ὅπως τὸ προϊὸν εἶναι ὁμοιογενές, τόσον εἰς τὴν ἐπιχείρησιν (individual firm), ὅσον καὶ εἰς τὸν κλάδον (industry).

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν δὲν ἀπαιτεῖται ὁπωσδήποτε ὁμοιογένεια προϊόντος, δεδομένου ὅτι ἡ εἰς χρηματικὰς μονάδας ἔκφρασις τῆς ἀξίας τοῦ προϊόντος καθιστᾶ δυνατὴν τὴν ἄθροισιν τῶν προϊόντων καὶ ὅταν ταῦτα δὲν εἶναι ὁμοιογενῆ. Τοῦτο ἔχει περισσότερον σημασίαν διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς ὁλοκλήρου τῆς οἰκονομίας, κατὰ τὴν ὁποίαν δέον νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν τόσα πολλὰ ἑτερογενῆ προϊόντα.

Ἡ ἀξία τοῦ προϊόντος δύναται νὰ ἐκφρασθῇ εἴτε εἰς ὅρους ἀκαθαρίστου ἀξίας (gross value), εἴτε εἰς ὅρους καθαρᾶς ἢ προστιθεμένης ἀξίας* (value added), ἀναλόγως πρὸς τὰ διαθέσιμα στοιχεῖα. Συνήθως διὰ τὴν ἐκτίμησιν συναρτήσεως μιᾶς ἐπιχειρήσεως λαμβάνονται στοιχεῖα ἀκαθαρίστου ἀξίας παραγωγῆς, ἐνῶ δι' ὁλόκληρον τὴν βιομηχανίαν λαμβάνεται ἡ προστιθεμένη ἀξία. Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ὡς μεταβλητὴ λαμβάνεται ἡ ἀκαθάριστος ἀξία, θὰ πρέπει εἰς τὴν συνάρτησιν παραγωγῆς νὰ συμπεριλαμβάνωμεν μίαν μεταβλητὴν ἡ ὁποία θὰ ἀντιπροσωπεύῃ τὰς εἰσροὰς πρώτων ὑλῶν καὶ καυσίμων. Ἡ συμπερίληψις ὅμως τοιούτων μεταβλητῶν εἰς τὴν συνάρτησιν εἶναι δυνατὸν νὰ δημιουργήσῃ στατιστικὰ προβλήματα ἐκτιμήσεως, ἤτοι νὰ δώσῃ ἐκτιμητὰς (estimators), οἱ ὁποῖοι εἶναι μεροληπτικοί. Τοῦτο συμβαίνει, διότι ἡ αὔξησις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεταβλητῶν δημιουργεῖ πολλάκις τὸ φαινόμενον τῆς πολυσυγγραμμικότητος (multicollinearity) καὶ μειώνει τοὺς βαθμοὺς ἐλευθερίας κατὰ τὴν

---

* Ἡ προστιθεμένη ἀξία προκύπτει, ἐὰν ἐκ τῆς ἀκαθαρίστου ἀξίας παραγωγῆς ἀφαιρεθῇ τὸ σύνολον τῶν ἐξ ἄλλων ἐπιχειρήσεων ἢ κλάδων εἰσροῶν. Γενικῶς δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ προστιθεμένη ἀξία ἑκάστου κλάδου ἢ τομέως τῆς οἰκονομίας εἶναι ἡ συμβολὴ ἑκάστου εἰς τὴν τελικὴν διαμόρφωσιν τοῦ ἐθνικοῦ προϊόντος. Οὕτω τὸ ἐθνικὸν προϊὸν ἀποτελεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν προστιθεμένων ἀξιῶν ἑκάστου τομέως τῆς οἰκονομίας.

στατιστικὴν ἐκτίμησιν. Ἐπίσης, ἡ ἐλαστικότης τοῦ προϊόντος ἐν σχέσει πρὸς τὰς εἰσροὰς πρώτων ὑλῶν εἶναι μεγάλη, ὁπότε τοῦτο θὰ ὁδηγήσῃ εἰς ὑποεκτίμησιν τῶν ἐλαστικοτήτων τῆς ἐργασίας καὶ τοῦ κεφαλαίου. Εἶναι δὲ ἐνδεχόμενον ἡ τοιαύτη συμπερίληψις νὰ ὁδηγήσῃ εἰς εὕρεσιν μηδενικῆς ἢ καὶ ἀρνητικῆς ἐλαστικότητος διὰ τὸ κεφάλαιον, ἐὰν τεθῇ ἡ ὑπόθεσις τῆς σταθερᾶς κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως*.

Κ ε φ ά λ α ι ο ν. Ἡ ἔννοια τοῦ κεφαλαίου ὑπάγεται εἰς τὰς ἐννοίας ἀποθέματος (stock), καὶ συνεπῶς ἡ λῆψις στοιχείων τοῦ ὑφισταμένου παγίου κεφαλαίου, διὰ τὴν ἀντιπροσώπευσιν τοῦ συντελεστοῦ «κεφάλαιον», δὲν μᾶς δίδει τὸ ποσὸν τῆς ἀναλώσεως τούτου, ἤτοι τῆς πραγματικῆς συμβολῆς του εἰς τὴν παραγωγήν. Τοῦτο διότι εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὑφίσταται ὑποαπασχόλησις τοῦ παγίου κεφαλαίου (excess capacity), δὲν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐκ τῆς ἐκτιμήσεως τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς ἀκριβῆ σχέσιν μεταξὺ προϊόντος-κεφαλαίου. Ὀρθότερον εἶναι νὰ ληφθοῦν ὡς μεταβλητή - κεφάλαιον αἱ πράγματι ἀναλωθεῖσαι ὑπηρεσίαι τούτου, αἱ ὁποῖαι ἀντιπροσωπεύονται κυρίως ὑπὸ τῶν πραγματικῶν ἀποσβέσεων**. Ἡ δυσκολία ὅμως ἐξευρέσεως ἀξιοπίστων στοιχείων ἀντιπροσωπευόντων τὰς ὑπηρεσίας τοῦ κεφαλαίου, ἀναγκάζει εἰς τὴν λῆψιν στοιχείων ἀναφερομένων εἰς τὸν ὄγκον τοῦ κεφαλαίου. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι δύσκολος ἡ ἐξεύρεσις στοιχείων τοῦ ὑφισταμένου εἰς ἑκάστην περίοδον κεφαλαίου δι' ὁλόκληρον τὸν κλάδον ἢ τὴν οἰκονομίαν. Πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς τοιαύτης ἐλλείψεως στοιχείων εἴθισται εἰς τὴν ἔρευναν νὰ λαμβάνεται τὸ ὑφιστάμενον κεφάλαιον μιᾶς ἀρχικῆς περιόδου καὶ νὰ προστίθεται καθ' ἑκάστην περίοδον τὸ ποσὸν τῶν ἐπενδύσεων, διὰ τὰς ὁποίας ὑφίστανται διαθέσιμα στοιχεῖα.

Ἐ ρ γ α σ ί α. Ὡς μεταβλητή, διὰ νὰ ἀντιπροσωπεύσῃ τὴν συμβολὴν τοῦ συντελεστοῦ «ἐργασία» εἰς τὴν παραγωγήν, λαμβάνεται συνήθως εἴτε ὁ ἀναλωθεὶς χρόνος ἐργασίας (ὧραι ἐργασίας, ἀνθρωπο - ὧραι, man - hours) εἴτε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργαζομένων. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἥτις εἶναι καὶ ἡ προτιμωτέρα, ἡ «ἐργασία» εἶναι ἔννοια ροῆς, ὡς ἀκριβῶς καὶ ἡ μεταβλητὴ «προϊόν», ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι ἔννοια ἀποθέματος.

IV.3.2. **Ἡ ἐξειδίκευσις τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς.** Μετὰ τὸν καθορισμὸν τῶν μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι θὰ εἰσέλθουν εἰς τὸ ἁπλοῦν ὑπόδειγμα τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς, δέον ὅπως καθορισθῇ ἡ μαθηματικὴ μορφὴ

---

* Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην θὰ ἔχωμεν $\alpha+\beta+\gamma=1$, ὅπου α = ἐλαστικότης ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐργασίαν, β = ἐλαστικότης ἐν σχέσει πρὸς τὸ κεφάλαιον, καὶ γ = ἐλαστικότης ἐν σχέσει πρὸς τὰς πρώτας καὶ ἐνδιαμέσους ὕλας. Δεδομένου δὲ ὅτι αἱ ἐλαστικότητες α καὶ γ εἶναι ὑψηλαί, πιθανὸν τότε νὰ λάβωμεν $\beta<0$.

** Μέσῳ τῶν ἀποσβέσεων πράγματι γίνεται ἡ βαθμιαία ἀνάλωσις τοῦ παγίου κεφαλαίου εἰς τὰς παραγωγικὰς μονάδας.

τῆς συναρτήσεως ταύτης. Ἡ ἐπιλογὴ τῆς καταλλήλου μορφῆς τῆς συναρτήσεως μᾶς καθιστᾶ ἱκανοὺς ὅπως προσεγγίσωμεν καλλίτερον τὸν ὑφιστάμενον νόμον εἰς συγκεκριμένην παραγωγήν.

Ἐν τούτοις παρὰ τὴν προσπάθειαν ἐπιλογῆς τῶν καταλληλοτέρων μεταβλητῶν, καὶ εἰς περίπτωσιν ἀκόμη καθ' ἣν αἱ μεταβληταὶ ἀνταποκρίνονται ἀπολύτως πρὸς ὅ,τι ἡ οἰκονομικὴ θεωρία ἀπαιτεῖ πρὸς περιγραφὴν τῆς παραγωγικῆς σχέσεως, εἰς τὴν πρᾶξιν δὲν δυνάμεθα νὰ ἐξειδικεύσωμεν μίαν συνάρτησιν ἀκριβοῦς μορφῆς (exact), ἡ ὁποία θὰ περιγράφη ἀπολύτως τὴν ἐπίδρασιν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἐπὶ τῆς ἐξηρτημένης. Τοῦτο βεβαίως, δὲν ὀφείλεται εἰς ἀδυναμίαν τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας τῆς παραγωγῆς, ἀλλὰ μᾶλλον εἰς ἀδυναμίαν τῆς στατιστικῆς ἐξειδικεύσεως (specification) τῆς συναρτήσεως. Ὑπάρχει δηλονότι πλῆθος παραγόντων, οἱ ὁποῖοι ἐπιδροῦν ἐπὶ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς, ἓν μέρος τῶν διακυμάνσεων τῆς ὁποίας ὀφείλεται εἰς τούτους, καὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀδύνατον ὅπως περιληφθοῦν εἰς τὴν συνάρτησιν παραγωγῆς.

Πάντες οἱ παράγοντες οἱ δυνάμενοι νὰ ἐπιδράσουν ἐπὶ τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς καὶ μὴ συμπεριλαμβανόμενοι εἰς τὴν συνάρτησιν λαμβάνουν τὸ ὄνομα «διαταρακτικὸς ὅρος» (disturbance term) ἢ ὅρος τυχαίων ἐπιδράσεων.

Ὁ ὅρος τῶν τυχαίων καὶ μὴ συστηματικῶν ἐπιδράσεων θὰ πρέπει νὰ ὑπάρχη εἰς πάσας τὰς μὴ ἀκριβεῖς συναρτήσεις,ὡς αἱ οἰκονομετρικαὶ συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου καλοῦνται στοχαστικαὶ συναρτήσεις (stochastic). Εἰς τὴν συνάρτησιν παραγωγῆς C-D ὁ ὅρος οὗτος εἰσέρχεται ὡς μεταβλητὴ ἔχουσα πολλαπλασιαστικὴν ἰδιότητα, ἤτοι

$$X = AL^{\alpha}K^{\beta}U.$$

Τὸ U ἀντιπροσωπεύει τὴν ἐπίδρασιν τὴν ὀφειλομένην εἰς παράγοντας τυχαίους καὶ μὴ συστηματικούς, οἱ ὁποῖοι δὲν κατονομάζονται εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν. Τελικῶς, ἡ ἐκτίμησις τῆς συναρτήσεως θὰ γίνη διὰ τῆς παλινδρομήσεως τοῦ log X ἐπὶ τῶν log L καὶ log K. Αἱ διαφοραὶ μεταξὺ πραγματικῶν τιμῶν τῆς X καὶ τιμῶν προκυψασῶν ἐκ τῆς ἐκτιμήσεως (θεωρητικαὶ τιμαὶ) ἀποτελοῦν τὰ ἀνερμήνευτα κατάλοιπα, ἤτοι τὸ μέρος ἐκεῖνο τῆς X, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τοὺς τυχαίους παράγοντας.

IV.3.3. **Διάφορα στατιστικὰ προβλήματα τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς.** Τὸ πρόβλημα τῆς ὁλοκληρώσεως ἢ ἑνοποιήσεως. Τὰς συναρτήσεις παραγωγῆς δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν εἰς μικρο-συναρτήσεις καὶ μακρο-συναρτήσεις. Αἱ μικρο-συναρτήσεις παραγωγῆς προέρχονται εἴτε ἐκ τῆς ἐκτιμήσεως στοιχείων χρονολογικῶν σειρῶν διὰ μίαν συγκεκριμένην ἐπιχείρησιν ἢ ἐργοστάσιον, εἴτε ἐκ στοιχείων διατομῆς (cross

- section) τῶν ἐπιχειρήσεων τοῦ αὐτοῦ κλάδου (ἐνδοκλαδική συνάρτησις) ἢ ἁπασῶν τῶν ἐπιχειρήσεων ὁλοκλήρου τοῦ τομέως τῆς βιομηχανίας. Ἡ ἀτομική διὰ τὴν συγκεκριμένην ἐπιχείρησιν, συνάρτησις περιγράφει ἀποκλειστικῶς τὸν νόμον παραγωγῆς, ὅστις ἰσχύει εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ταύτην διὰ τὴν συγκεκριμένην χρονικὴν περίοδον εἰς ἣν τὰ στοιχεῖα ἀναφέρονται. Ἡ ἐνδοκλαδική συνάρτησις περιγράφει τὴν σχέσιν προϊόντος καὶ εἰσροῶν (inputs) διὰ τὴν τυπικὴν ἐπιχείρησιν. Αἱ μακρο - συναρτήσεις προέρχονται εἴτε ἐκ τῆς ὁλοκληρώσεως ἢ ἑνοποιήσεως (aggregation) μικρο - συναρτήσεων, εἴτε ἐξ ὑφισταμένων στοιχείων συνολικῶν ποσοτήτων προϊόντος καὶ εἰσροῶν, ἅτινα ἀναφέρονται εἴτε εἰς ὁλόκληρον κλάδον περιλαμβάνοντα πολλὰς ἐπιχειρήσεις, εἴτε εἰς ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν. Βασικὴ ὑπόθεσις κατὰ τὴν ἑρμηνείαν μακρο - συναρτήσεως παραγωγῆς (aggregate production function) εἶναι ὅτι αὕτη συμπεριφέρεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς ἡ συνάρτησις ἐκείνη ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς μίαν ἐπιχείρησιν καὶ τὴν ὁποίαν ἔχει ὑπ' ὄψιν της ἡ οἰκονομικὴ θεωρία. Ὡς ἀκριβῶς εἰς τὴν θεωρίαν τῆς ζητήσεως, ἡ καμπύλη ζητήσεως ἀγαθοῦ τινος ἑρμηνεύεται ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀτομικῶν καμπύλων ζητήσεως*.

Ἓν πρόβλημα, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς ἐννοίας τῆς συνολικῆς συναρτήσεως, εἶναι ἡ ὕπαρξις ἐξωτερικῶν οἰκονομιῶν (external economies), αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἐκ τῆς λειτουργίας ὁλοκλήρου τοῦ κλάδου. Αἱ μικρο - συναρτήσεις τῶν ἐπιχειρήσεων δὲν δεικνύουν τοιαύτας οἰκονομίας. Ἀντιθέτως, ἡ συνολικὴ τοῦ κλάδου ἢ τῶν κλάδων συνάρτησις ἀντανακλᾷ τοιαύτας οἰκονομίας, καθ' ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ προϊόντος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς αὐξήσεως τῶν εἰσροῶν, καθὼς ἡ παραγωγὴ ἁπασῶν τῶν ἐπιχειρήσεων τοῦ κλάδου ἢ ἁπάντων τῶν κλάδων τῆς βιομηχανικῆς δραστηριότητος αὐξάνει. Οὕτως εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἑνοποιήσεως ἢ ἀθροίσεως προκύπτει πρόβλημα προσομοιάζον πρὸς ἐκεῖνο τῆς μικροοικονομικῆς θεωρίας, κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ ταυτόχρονος αὔξησις τῆς ποσότητος τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν εἶναι δυνατὸν νὰ ὁδηγήσῃ εἰς μεγαλυτέραν ἀναλογικῶς αὔξησιν τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς ἢ ἐκείνης ἡ ὁποία θὰ προέκυπτεν ἐὰν ἠθροίζομεν τὰ ἐπὶ μέρους μερικὰ προϊόντα τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν.

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω, διὰ νὰ προκύψῃ ἐκ τῶν μικρο - συναρτήσεων μία μακρο - συνάρτησις θὰ πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι (α) αἱ μικρο - συναρτήσεις συμπεριφέρονται ὁμοιομόρφως, (β) ἡ μακρο - συνάρτησις ἀντανακλᾷ τὴν συμπεριφορὰν τῶν μικρο - συναρτήσεων, (γ) ἡ μακρο - συνάρτησις εἶναι «προσθετικῶς διαχωρίσιμος» (additively separable) εἰς τὰς συνιστώσας ταύτην εἰσροὰς (ἐργασίαν καὶ κεφάλαιον), κ.λπ.

* Βλ. A.A. Walters, op. cit., σελ. 306.

Κατὰ τὴν προϋπόθεσιν (γ) αἱ μικρο - συναρτήσεις πρέπει νὰ ὑπείκουν εἰς τὸν νόμον τῶν σταθερῶν ἀποδόσεων. Ἐν τούτοις, ὁλοκλήρωσις εἰς τὴν πρᾶξιν δύναται νὰ γίνῃ οὐχὶ μόνον γραμμικῶν συναρτήσεων, ἀλλὰ καὶ μὴ γραμμικῶν τοιούτων.

Οὕτω τὸ *πρόβλημα τῆς ἑνοποιήσεως* (aggregation problem) ἀντιμετωπίζεται εἰς μὲν τὰς γραμμικὰς συναρτήσεις διὰ λήψεως τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ὅρου τῶν καθ' ἕκαστα μικρο - συναρτήσεων, εἰς δὲ τὰς μὴ γραμμικὰς τοιαύτας διὰ λήψεως τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου ὅρου. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως C - D λαμβάνομεν τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τῶν λογαρίθμων τῶν μεταβλητῶν.

Ἡ χρησιμοποίησις στοιχείων χρονολογικῶν σειρῶν καὶ διατομῆς. Ἡ χρησιμοποίησις στοιχείων χρονολογικῶν σειρῶν πρὸς ἐκτίμησιν τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον ὁλοκληρώσεως δημιουργεῖ ὡρισμένα προβλήματα, κυριώτερα τῶν ὁποίων εἶναι: (α) Ἡ ἀνάγκη *ἀποπληθωρισμοῦ* τῶν χρονολογικῶν σειρῶν διὰ καταλλήλων δεικτῶν τιμῶν, ἐφ' ὅσον τὰ στοιχεῖα εἶναι ἐκπεφρασμένα εἰς τρεχούσας τιμάς. (β) Ἡ ἀνάγκη ἐξαλείψεως τῆς ὑπαρχούσης εἰς τὰς σειρὰς τάσεως (trend), διὰ νὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ ἀπομόνωσις τῶν μεταβολῶν τῶν ὀφειλομένων εἰς τὰς μεταβολὰς καὶ μόνον τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. (γ) Ἡ ἀνάγκη μετρήσεως τῆς τεχνολογικῆς προόδου τῆς ἐπισυμβαινούσης κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς χρονολογικῆς περιόδου καὶ εἰς τὴν ὁποίαν ὀφείλεται ἓν μέρος τῆς αὐξήσεως τοῦ προϊόντος*. (δ) Ἡ ἀνάγκη ὑπάρξεως ὁμοιογενῶν στοιχείων ἀπὸ περιόδου εἰς περίοδον. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ στοιχεῖα πρέπει νὰ εἶναι συγκρίσιμα ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος δι' ὁλόκληρον τὴν περίοδον ποιοτικῶς, τεχνολογικῶς καὶ χρηματικῶς κ.ἄ.

Αἱ πλεῖσται τῶν δυσχερειῶν τὰς ὁποίας παρουσιάζει ἡ βάσει *χρονολογικῶν σειρῶν* ἐκτίμησις παρακάμπτονται διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως στοιχείων διατομῆς (cross - section). Τὰ στοιχεῖα ταῦτα ἀναφέρονται εἰς τὴν αὐτὴν χρονικὴν στιγμὴν ἢ περίοδον καὶ δύνανται νὰ ἀφοροῦν καθ' ἕκαστα ἐπιχειρήσεις, κλάδους ἢ γεωγραφικὰς περιοχάς. Οὕτω κατὰ τὴν ἐκτίμησιν βάσει στοιχείων διατομῆς δὲν παρεμβάλλεται ἡ διάστασις τοῦ χρόνου καὶ συνεπῶς αἱ διακυμάνσεις τῶν μεταβλητῶν προϊόντος καὶ εἰσροῶν προκύπτουν ἐκ τῆς λήψεως διαφόρου μεγέθους ἐπιχειρήσεων.

Ἡ χρησιμοποίησις *στοιχείων διατομῆς* ἐξαλείφει μὲν ὡρισμένας δυσχερείας τῶν χρονολογικῶν σειρῶν, δημιουργεῖ δὲ ἕτερα προβλήματα, ὡς τὸ πρόβλημα τῆς ἑρμηνείας τῶν τοιούτων συναρτήσεων. Παραδείγματος χάριν, τί ἀκριβῶς ἀντιπροσωπεύει ἡ συνάρτησις παραγωγῆς, ἡ ὁποία προέκυψε ἐκ στοιχείων ὅλων τῶν ἐπὶ μέρους κλάδων τῆς βιομηχα-

* Περὶ τῆς τεχνολογικῆς προόδου ἰδὲ ἐν τοῖς προηγουμένοις.

νίας; Τί ἀκριβῶς δηλαδὴ δεικνύει ἡ διακλαδικὴ συνάρτησις παραγωγῆς;

Τέλος, θὰ πρέπει νὰ τονίσωμεν ὅτι, δεδομένου ὅτι τὸ προϊὸν εἶναι ἔννοια «ροῆς», αἱ εἴσροαὶ ἐπίσης θὰ πρέπει νὰ εἶναι «ροαὶ» καὶ οὐχὶ «ἀποθέματα»*.

IV.3.4. **Ἡ στατιστικὴ μέθοδος.** Ἡ πλέον ἐν χρήσει στατιστικὴ μέθοδος πρὸς ἐκτίμησιν τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς εἶναι ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἡ ὁποία παρὰ τὰς ἀδυναμίας της ἀπεδείχθη εἰς τὴν πρᾶξιν ἡ πλέον «δημοφιλής»**, ἰδίᾳ διὰ προγνωστικοὺς σκοπούς. Ἡ μέθοδος ὅμως αὐτή, διὰ νὰ δώσῃ ἀρίστας γραμμικάς, συνεπεῖς καὶ ἀμεροληπτους ἐκτιμήσεις*** στηρίζεται εἰς ὑποθέσεις, ἡ μὴ πλήρωσις τῶν ὁποίων καθιστᾷ τὰς ἐκτιμήσεις ταύτας ἐπισφαλεῖς, ἰδίᾳ ὅταν ὁ σκοπὸς τῆς ἐκτιμήσεως εἶναι διαρθρωτικός, ἤτοι, ὅταν ἐπιθυμοῦμεν, ἐπὶ παραδείγματι, νὰ εὕρωμεν τὰ σχετικὰ μερίδια τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς.

Αἱ ὑποθέσεις εἰς τὰς ὁποίας στηρίζεται ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων**** εἶναι αἱ κάτωθι:

(α) Αἱ τιμαὶ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τῆς παλινδρομικῆς συναρτήσεως θεωροῦνται ὡς σταθεροὶ ἀριθμοὶ ἄνευ στοχαστικῆς σημασίας, ὥστε ἡ μόνη τυχαία μεταβλητὴ εἶναι ὁ διαταρακτικὸς ὅρος U. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἐπανάληψις τῆς δειγματοληψίας θὰ δώσῃ τὰς αὐτὰς τιμάς.

(β) Αἱ τιμαὶ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν καὶ τῶν καταλοίπων U δὲν συσχετίζονται μεταξύ των. Αἱ τυχαῖαι μεταβολαὶ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς ὀφείλονται εἰς τὸ U. Τοῦτο εἶναι ἀπόρροια τῆς ὑποθέσεως ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν εἶναι σταθεραί.

Ἡ μὴ πλήρωσις τῆς ἀνωτέρω προϋποθέσεως δημιουργεῖ τὸ φαινόμενον τῶν «λαθῶν εἰς τὰς μεταβλητάς» (errors in variables), μὲ συνέπειαν νὰ λαμβάνωμεν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐκτιμητὰς ἀσυνεπεῖς καὶ πρὸς τὰ κάτω μεροληπτικοὺς (ὑπεκτιμημένους). Ὁσάκις συμβαίνει τοῦτο ἡ οἰκονομετρικὴ θεωρία προτείνει τρόπους βελτιώσεως τῶν ἀποτελεσμάτων, ὡς ἡ ὁμαδοποιη-

---

* Περὶ τῶν ἐννοιῶν τουτων ἰδὲ Εἰσαγωγικὸν Κεφάλαιον.

** Βλ. A.A. Walters, op. cit., σελ. 319.

*** Λέγοντες ἀρίστας γραμμικὰς ἐκτιμήσεις (best linear estimates) ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ παράμετροι, αἱ ὁποῖαι εἰσέρχονται εἰς τὴν σχέσιν κατὰ γραμμικὸν τρόπον, ἔχουν τὸ μικρότερον τυπικὸν σφάλμα. Ἀμερόληπτοι (unbiased) εἶναι αἱ ἐκτιμήσεις, ὅταν αἱ μέσαι τιμαὶ (μαθηματικὴ ἐλπὶς) τούτων εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τοιαύτας τοῦ πληθυσμοῦ, ἐξ οὗ προῆλθε τὸ δεῖγμα." Τέλος, συνεπεῖς (consistent) εἶναι αἱ ἐκτιμήσεις ὅταν αὗται προσεγγίζουν κατὰ πιθανότητα τὰς ἀληθεῖς τιμὰς ἢ τὰς τιμὰς τοῦ πληθυσμοῦ, καθὼς τὸ δεῖγμα καθίσταται ὁλοὲν μεγαλύτερον.

**** Πλεῖονα περὶ πάντων τῶν στατιστικῶν προβλημάτων παραπέμπομεν εἰς τὰ γνωστὰ ἐγχειρίδια οἰκονομετρικῆς.

σις τῶν παρατηρήσεων (grouping of observations) καὶ ἡ χρησιμοποίησις βοηθητικῶν μεταβλητῶν (instrumental variable).

(γ) Τὰ κατάλοιπα κατανέμονται τυχαίως καὶ κανονικῶς μὲ μέσην τιμὴν ἴσην πρὸς τὸ μηδέν, $E(u_i) = 0$. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη καθιστᾶ δυνατὴν τὴν ἐφαρμογὴν διαφόρων ἐλέγχων, οἱ ὁποῖοι στηρίζονται εἰς τὰς ἰδιότητας τῆς κανονικῆς κατανομῆς.

(δ) Τὰ κατάλοιπα ἔχουν σταθερὰν διακύμανσιν. Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι γνωστὴ ὡς ὁμοσκεδαστικότης ((homoscedasticity) καὶ ἐξασφαλίζει ἀρίστας ἐκτιμήσεις. Ἡ ἔλλειψις ταύτης δημιουργεῖ τὴν ἑτεροσκεδαστικότητα.

(ε) Αἱ τιμαὶ τῶν καταλοίπων πρέπει νὰ εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων, ἤτοι νὰ μὴ συσχετίζωνται μεταξύ των. Ἡ ἔλλειψις τῆς ἰδιότητος ταύτης δημιουργεῖ τὴν αὐτοσυσχέτισιν (autocorrelation), ἡ ὁποία δίδει μὴ ἀρίστας ἐκτιμήσεις. Πρὸς διαπίστωσιν τῆς αὐτοσυσχετίσεως, τὴν ὁποίαν συχνάκις ἐμφανίζουν αἱ χρονολογικαὶ σειραὶ οἰκονομικῶν μεγεθῶν, ἐφαρμόζεται τὸ κριτήριον τῶν Durbin-Watson ἢ ὁ δείκτης τοῦ von Neumann. Μία τῶν μεθόδων ἀντιμετωπίσεως τῆς δυσχερείας τὴν ὁποίαν δημιουργεῖ ἡ ὕπαρξις αὐτοσυσχετίσεως εἶναι ἡ χρησιμοποίησις τῶν πρώτων διαφορῶν τῶν μεταβλητῶν ἀντὶ τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τούτων.

(στ) Αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ δὲν πρέπει νὰ συσχετίζωνται μεταξύ των. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν ἔχομεν τὸ φαινόμενον τῆς πολυσυγγραμμικότητος (multicollinearity), εἰς τὴν ὁποίαν ὀφείλεται ἡ μὴ ἀκριβὴς ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων τῆς συναρτήσεως, ἤτοι ἡ δυσκολία διακρίσεως τοῦ κεχωρισμένου ἀποτελέσματος τούτων. Τὸ φαινόμενον τῆς διασυσχετίσεως τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν παρατηρεῖται συχνάκις εἰς τὰς χρονολογικὰς σειρὰς τῶν συνολικῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν, ὡς τὸ εἰσόδημα, αἱ τιμαί, ἡ νομισματικὴ κυκλοφορία, κ.λπ. Εἰς τὰς συναρτήσεις παραγωγῆς ὑπάρχει σχεδὸν ὑψηλὸς βαθμὸς συσχετίσεως μεταξὺ ἐργασίας καὶ κεφαλαίου, τόσον εἰς τὰ στοιχεῖα διατομῆς (cross - section), ὅσον καὶ εἰς τὰ στοιχεῖα χρονολογικῶν σειρῶν. Τὸ μέγεθος τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι καθοριστικὸς παράγων τόσον τοῦ κεφαλαίου, ὅσον καὶ τῆς ἐργασίας. Μεγάλαι ἐπιχειρήσεις ἔχουν μέγα κεφάλαιον καὶ μεγάλην ἐργατικὴν δύναμιν.

Ἡ διασυσχέτισις μεταξὺ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν δὲν ἀποτελεῖ σημαντικὸν πρόβλημα διὰ τὴν ἀκρίβειαν τῶν ἐκτιμητῶν, μόνον ὅταν ὁ γενικὸς συντελεστὴς πολλαπλῆς παλινδρομήσεως (R^2) εἶναι λίαν ὑψηλὸς καὶ οἱ μερικοὶ συντελεσταὶ παλινδρομήσεως ἀρκετὰ ὑψηλότεροι τῶν τυπικῶν σφαλμάτων των*.

Πρὸς ἀντιμετώπισιν τοῦ προβλήματος τῆς πολυσυγγραμμικότητος

* Σαφῶς ὑπερδιπλάσιοι τῶν τυπικῶν σφαλμάτων των εἰς ἐπίπεδον ἐμπιστοσύνης 5%.

ἐφαρμόζονται διάφοροι μέθοδοι, ὡς ἡ μέθοδος τῶν ἐξωγενῶν ἐκτιμήσεων (extraneous estimation), ἡ μέθοδος τῆς ἀναλύσεως τῶν βασικῶν συστατικῶν μερῶν (method of principal components), ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων δύο σταδίων (two - stage least squares), κ.ἄ.

IV.3.5. **Ἐπισκόπησις ἐμπειρικῆς ἐρεύνης συναρτήσεων παραγωγῆς τύπου Cobb - Douglas.** Ὁ καθηγητὴς Douglas ἐξετίμησε συναρτήσεις παραγωγῆς διὰ τὴν Ἀμερικανικὴν οἰκονομίαν βασιζόμενος τόσον ἐπὶ ἐτησίων στοιχείων καλυπτόντων τὴν περίοδον 1899 - 1922, ὅσον καὶ στοιχείων βιομηχανικῶν κλάδων διὰ τὸ ἔτος 1919 (cross - section). Λαμβάνων τοὺς λογαρίθμους τῶν μεταβλητῶν καὶ προσθέτων τὸν ὅρον διὰ τὴν ἐπίδρασιν τῶν τυχαίων παραγόντων (disturbance term), δίδει τὴν κάτωθι ἐξίσωσιν παλινδρομήσεως:

$$\log X = \log A + \alpha \log L + \beta \log K + U.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐκτιμηθεῖσα βάσει τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἔδωκε τὰς κάτωθι τιμὰς τῶν συντελεστῶν α καὶ β δι' ὁλόκληρον τὴν βιομηχανικὴν παραγωγήν*.

	α	β
Βάσει στοιχείων χρονολογικῆς σειρᾶς	0,73	0,26
Βάσει στοιχείων διατομῆς (cross - section)	0,76	0,25.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὑρημάτων προκύπτει ὅτι τόσον ἡ βάσει χρονολογικῶν σειρῶν ἀνάλυσις ὅσον καὶ ἡ βάσει στοιχείων τῶν διαφόρων κλάδων βιομηχανίας διὰ τὸ αὐτὸ ἔτος ἀνάλυσις ἔδοσαν τοὺς αὐτοὺς περίπου συντελεστάς. Ὁ συντελεστὴς τῆς ἐργασίας εἶναι περίπου τὰ 3/4, καὶ ὁ συντελεστὴς τοῦ κεφαλαίου τὸ 1/4 τῆς μονάδος. Οὕτω τὰ ἀποτελέσματα πλησιάζουν τὴν συνθήκην $\alpha + \beta = 1$, ἥτις ἀποβαίνει ἡ σταθερὰ ἀπόδοσις κλίμακος. Ὁ P. H. Douglas περαιτέρω θέτει τὴν συνθήκην ταύτην ὡς περιορισμὸν εἰς τὴν ἐξίσωσιν καὶ λαμβάνει

$$\log X = \log A + \alpha \log L + (1 - \alpha) \log K + U, \text{ ἢ}$$

$$\log\left(\frac{X}{K}\right) = \log A + \alpha \log\left(\frac{L}{K}\right) + U.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως προκύπτει ὅτι διὰ τῆς ἁπλῆς παλινδρομήσεως εἶναι δυνατὴ ἡ ἐκτίμησις τοῦ συντελεστοῦ α. Οἰκονομετρικῶς ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει τὸ πλεονέκτημα ὅτι ἀπαλείφει εἰς κάποιον βαθμὸν τὴν

* P.H. Douglas, «Are there laws of production?», American Economic Review, No 38, 1948, σελ. 12.

π ο λ υ σ υ γ γ ρ α μ μ ι κ ό τ η τ α*, ἥτις ὑφίσταται μεταξὺ L καὶ K εἰς τὰς χρονολογικὰς σειράς, δεδομένου ὅτι ἀποφεύγεται ἡ πολλαπλῆ συσχέτισις. Αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τοῦ α, τὰς ὁποίας ἔλαβεν θέτων τὸν περιορισμὸν α + β = 1, ἦσαν διὰ μὲν τὴν χρονολογικὴν σειρὰν 0,76 (β = 0,24), διὰ δὲ τὴν cross - section 0,75 (β = 0,25). Ὡς διαπιστοῦται, δὲν ὑφίστανται διαφοραὶ μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν συντελεστῶν τῶν ἐκτιμηθεισῶν ἄνευ τοῦ περιορισμοῦ καὶ ἐκείνων ὑπὸ τὸν περιορισμόν.

Ἔχομεν ἤδη δείξει ὅτι οἱ συντελεσταὶ α καὶ β δεικνύουν τὴν σχετικὴν συμμετοχὴν τῆς ἐργασίας καὶ τοῦ κεφαλαίου εἰς τὸ συνολικὸν προϊόν. Συνεπῶς πλὴν τῆς διὰ τῆς παλινδρομήσεως ἐκτιμήσεως τῶν α καὶ β, δυνάμεθα βάσει στοιχείων ἐκ τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν νὰ λάβωμεν διὰ μίαν σειρὰν ἐτῶν τὸν μέσον ὅρον τῆς συμμετοχῆς (μεριδίου) τῆς ἐργασίας εἰς τὸ συνολικὸν προϊὸν καὶ νὰ συγκρίνωμεν τοῦτον πρὸς τὴν τιμήν, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς ἐκτιμήσεως τῆς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως**. Πράγματι ὁ P. H. D o u g l a s εὗρεν ὅτι ὁ μέσος ὅρος συμμετοχῆς τῆς ἐργασίας ἦτο διὰ τὰ ἔτη 1909 - 1918 0,74, ἤτοι ὅσον περίπου ἡ τιμὴ τοῦ α τοῦ ἐκτιμηθέντος βάσει τῆς ἐξισώσεως.

Ὁ J. S. C r a m e r*** ἐκφράζει ὡρισμένας ἀντιρρήσεις καθ᾽ ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦ D o u g l a s, ἤτοι τὰς σχέσεις εἰς τὴν συνάρτησιν $X = AL^{\alpha}K^{\beta}$, μία τῶν ὁποίων συνίσταται εἰς τὸ ὅτι αἱ προκαθωρισμέναι μεταβληταὶ (predetemined) L καὶ K δὲν εἶναι πράγματι δεδομέναι (ἀνεξάρτητοι), ἀλλὰ προσδιορίζονται ἐν ἀλληλεξαρτήσει πρὸς ἄλλας μεταβλητὰς εἰς ἓν σύστημα γενικῆς ἰσορροπίας.

Λίαν ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ ἀνάλυσις τῆς παραγωγῆς ὑπηρεσιῶν μεταφορῶν 80 σιδηροδρομικῶν ἐπιχειρήσεων εἰς Η.Π.Α. ἐκ μέρους τοῦ καθηγητοῦ L. R. K l e i n**** βάσει στοιχείων ἀναφερομένων εἰς τὸ ἔτος 1936. Ἡ ἐκτιμηθεῖσα τελικῶς ἐνδοκλαδικὴ συνάρτησις παραγωγῆς εἶναι ἡ ἀκόλουθος

$$X_p X_g^{0,16} = 5,26 L^{0,89} K^{0,28} F^{0,12} Z_1^{0,34} Z_2^{0,25},$$

* Π ο λ υ σ υ γ γ ρ α μ μ ι κ ό τ η ς εἶναι ὁ οἰκονομετρικὸς ὅρος ὅστις χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ὑπάρξεως στενῆς ἀλλ᾽ οὐχὶ πλήρους συσχετίσεως μεταξὺ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν εἰς μίαν ἐξίσωσιν παλινδρομήσεως. Ἡ τοιαύτη συσχέτισις βλάπτει τὴν ἀκρίβειαν τῆς ἐκτιμήσεως τῶν συντελεστῶν παλινδρομήσεως. Βλ. σχ. J.S. C r a m e r, Empirical Econometrics, Amsterdam, 1969, σελ. 98 - 103, A.A. W a l t e r s, An Introduction to Econometrics, London, 1968, σελ. 127, καὶ J. J o h n s t o n, Econometric Methods, McGraw - Hill Book Co, 1963.

** Αὐτη δύναται νὰ ὀνομασθῇ ἔ μ μ ε σ ο ς μ έ θ ο δ ο ς ἐκτιμήσεως, ἐν ἀντιπαραβολῇ πρὸς ἐκείνην τῆς στατιστικῆς παλινδρομήσεως ἥτις δύναται νὰ κληθῇ ἄ μ ε σ ο ς μ έ θ ο δ ο ς.

*** Ibid, σελ. 236.

**** L.R. K l e i n, A Textbook of Econometrics, Evanston, 1953, σελ. 226 - 236. Βλ. καὶ J.S. C r a m e r, op. cit., σελ. 237 - 241.

ὅπουX_p = ὑπηρεσία μεταφορᾶς ἐπιβατῶν

X_g = ὑπηρεσία μεταφορᾶς ἀγαθῶν

0,16 = δ = σταθερὰ παράμετρος

L = ἐργασία

K = ὑπηρεσίαι κεφαλαίου μετρούμεναι εἰς ὥρας διακινήσεως (train - hours)

F = κατανάλωσις καυσίμων

Z = μῆκος συρμοῦ

Z = ἀναλογία χύδην φορτίου.

Ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως παλινδρομήσεως τὸ προϊὸν τῆς παραγωγῆς τοῦ κλάδου τῶν σιδηροδρομικῶν μεταφορῶν λαμβάνεται ὡς τὸ γινόμενον τῶν ἐπὶ μέρους ὑπηρεσιῶν μεταφορῶν κατὰ τὴν ἀναλογίαν ὡς αὔτη καθορίζεται καὶ ἐκ τοῦ δείκτου δ, ἤτοι $X = X_p X_g^{\delta}$. Ὁ K l e i n ἀντὶ τῶν δύο εἰσροῶν αἱ ὁποῖαι συνήθως λαμβάνονται προσέθεσε καὶ τρίτην τοιαύτην, τὴν καύσιμον ὕλην, ὡς καὶ ὡρισμένα χαρακτηριστικὰ τῶν μεταφορῶν, ἤτοι τὰ Z_1 καὶ Z_2, ἅτινα δημιουργοῦν μετατοπίσεις εἰς τὴν συνάρτησιν. Τὸ χαρακτηριστικὸν ὄντως τοῦ ὑποδείγματος τοῦ K l e i n εἶναι ὅτι ἡ μεταβλητὴ τῆς παραγωγῆς (X) δὲν λαμβάνεται ὡς ἡ ἐξηρτημένη κατὰ τὴν ἐκτίμησιν, ἀλλὰ ὡς προκαθωρισμένη μεταβλητή. Πράγματι δεδομένου ὅτι ὁ κλάδος τῶν σιδηροδρομικῶν μεταφορῶν ἀποτελεῖ ἐπιχείρησιν δημοσίας ὠφελείας καὶ συνεπῶς ρυθμιζομένης παροχῆς ὑπηρεσιῶν, ἡ παραγωγὴ ὑπηρεσιῶν λαμβάνεται ὡς δεδομένη, ὁπότε ἡ ἐπιχείρησις προσπαθεῖ ὅπως ἐλαχιστοποιήση τὸ κόστος μεταβάλλουσα τὰς εἰσροάς. Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω, ἡ ἐξίσωσις θὰ λάβη τὴν μορφὴν

$$L^{\alpha} K^{\beta} F^{\gamma} = A^{-1} X_p X_g^{\delta} Z_1 Z_2^{-\varphi} .$$

ὅπου τὸ δεξιὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως εἶναι δεδομένον δι' ἑκάστην ἐπιχείρησιν.

Ὁ K l e i n ἐξετίμησε τὰς παραμέτρους α, β καὶ γ διὰ τῆς ἐξισώσεως τῶν β/α καὶ γ/α ἀντιστοίχως πρὸς τὸν μέσον γεωμετρικὸν τῶν λόγων τῶν ἀμοιβῶν κεφαλαίου πρὸς τὰς ἀμοιβὰς τῆς ἐργασίας, ἤτοι

$$\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{1}{\nu} \sum_{sa} \log\left(\frac{rK}{wL}\right)^{*}$$

$$\log\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) = \frac{1}{\nu} \sum_{sa} \log\left(\frac{kF}{wL}\right) ,$$

---

* Εἶναι γνωστὸν ὅτι $\alpha = \frac{wL}{X}$ καὶ $\beta = \frac{rK}{X}$ καὶ συνεπῶς $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{rK}{wL}$. Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι ὁ γεωμετρικὸς μέσος ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τῶν λογαρίθμων τῶν παρατηρήσεων.

rK = δαπάνη διὰ τὸν συντελεστὴν «κεφάλαιον»
wL = δαπάνη διὰ τὸν συντελεστὴν «ἐργασία»
kF = δαπάνη διὰ τὸν συντελεστὴν «καύσιμα».
r, w, k = τιμαὶ τῶν συντελεστῶν οὖσαι δεδομέναι.

Ὁ Klein ἐχρησιμοποίησε τὰς ἐκτιμήσεις τῶν β/α καὶ γ/α διὰ νὰ ἐκτιμήσῃ τὰς λοιπὰς παραμέτρους τῆς συναρτήσεως λαμβάνων τὴν λογαριθμικὴν μορφὴν ταύτης:

$$\alpha \log L + b \log K + \gamma \log F = -\log A + \log X_p + \delta \log X_g - \mu \log Z_1 - \nu \log Z_2.$$

Διαιροῦντες ταύτην διὰ α, λαμβάνομεν

$$\log K + \frac{\beta}{\alpha} \log K + \frac{\gamma}{\alpha} F = -\frac{1}{\alpha} \log A + \frac{1}{\alpha} \log X_p + \frac{\delta}{\alpha} \log X_g - \frac{\mu}{\alpha} \log Z_1 - \frac{\nu}{\alpha} \log Z_2$$

Τὸ ἀριστερὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως ἐλήφθη ὡς ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητή, διὰ δὲ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐξετιμήθησαν οἱ συντελεσταὶ τῶν Xp, Xg, Z_1 καὶ Z_2, τῶν συντελεστῶν α, β καὶ γ ὄντων γνωστῶν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἐμμέσου μεθόδου.

Ἐκ τῆς ἐνδοκλαδικῆς συναρτήσεως παραγωγῆς τοῦ Klein προκύπτει ὅτι $\alpha+\beta+\gamma>1$, δεδομένου ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=1{,}29$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ κλάδος τῶν σιδηροδρομικῶν μεταφορῶν εἰργάζετο ὑπὸ συνθήκας αὐξούσης ἀποδόσεως, ἤτοι ὅσον μεγαλύτερον καθίσταται τὸ μέγεθος τῶν ἐπιχειρήσεων, τόσον μεγαλυτέρα ἦτο ἡ ἀπόδοσις. Διὰ νὰ εἴμεθα σύμφωνοι πρὸς τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Klein θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι διὰ δεδομένας αὐξήσεις τῆς παραγωγῆς ἀπαιτοῦνται ὁλοὲν καὶ ὀλιγώτεραι αὐξήσεις τῶν εἰσροῶν.

Οἱ Hildebrand καὶ Liu* ἀνέλυσαν τὰς συνθήκας τῆς βιομηχανικῆς παραγωγῆς τῶν Η.Π.Α. διὰ διαπολιτειακῶν, διακλαδικῶν συναρτήσεων παραγωγῆς διὰ τὸ ἔτος 1957. Τὸ ἐνδιαφέρον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἀνωτέρω ἐρευνητῶν εὑρίσκεται, ἀφ' ἑνὸς μὲν εἰς τὸν τρόπον εἰσαγωγῆς καὶ ἑρμηνείας τῆς τεχνολογικῆς προόδου εἰς τὸ ὑπόδειγμα των, ἀφ' ἑτέρου δὲ εἰς τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ τούτου τοῦ ὑποδείγματος.

Ἡ ἐκτιμηθεῖσα συνάρτησις παραγωγῆς εἶναι τοῦ γνωστοῦ τύπου C-D

$$X = AL_1^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2} K^{\beta} \quad \text{ἤ} \quad X = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

ὅπου X = προστιθεμένη ἀξία παραγωγῆς.
L_1 = ἐργατικὸν δυναμικόν.

* G.H. Hildebrand and T. Chung Liu, Manufacturing Production Functions in the United States, 1957, Ithaca, 1965.

L_2 = ὑπαλληλικὸν δυναμικόν.
K = ἀκαθάριστος λογιστικὴ ἀξία τοῦ παγίου κεφαλαίου εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους.
L = ἅπαν τὸ ἀνθρώπινον δυναμικὸν ἄνευ διακρίσεως.

Ὁ κατωτέρω πίναξ δεικνύει τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐκτιμήσεως τῶν παραμέτρων (ἐλαστικότητων) τῶν συναρτήσεων.

ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ
ΤΗΣ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ
ΚΑΤΑ HILDEBRAND ΚΑΙ LIU

Βιομηχανίας	Ἐλαστικότητες ἐργασίας			Ἐλαστικότητες κεφαλαίου		Ἀπόδοσις κλίμακος	
	α_1	α_2 (1)	α	β_1 (2)	β_2	(3)	
Τροφίμων	0,32	0,40	—	0,53	1,29	1,24	2,00
Ἱματισμοῦ	0,59	0,26	—	0,20	0,44	1,03	1,28
Χάρτου	0,55	0,27	—	0,28	0,65	1,10	1,47
Χημικῶν	0,35	0,57	—	0,27	0,75	1,18	1,66
Πετρελαιοειδῶν	0,27	0,50	—	0,23	0,74	1,00	1,51
Μὴ μεταλλικῶν ὀρυκτῶν	0,67	0,30	—	0,13	0,32	1,09	1,28
Μεταλλουργικῶν προϊόντων	0,53	0,34	—	0,15	0,34	1,02	1,21
Μηχανῶν	0,47	0,27	—	0,33	0,78	1,07	1,52
Ἠλεκτρικῶν μηχανῶν	0,41	0,24	—	0,30	0,69	0,95	1,34
Μεταφορικῶν μέσων	0,41	0,28	—	0,32	0,84	1,01	1,53
Ξύλου	—	—	0,79	0,31	0,63	1,10	1,42
Ἐλαστικοῦ	—	—	0,85	0,23	0,72	1,08	1,57
Δέρματος	—	—	0,85	0,07	0,20	0,92	1,05
Βασικῶν μεταλλουργικῶν	—	—	0,96	0,16	0,58	1,12	1,54
Ὀργάνων	—	—	0,67	0,44	1,00	1,11	1,67

Ὡς πρὸς τὰς ἐλαστικότητας τοῦ συντελεστοῦ «ἐργασία» ὑπομιμνήσκεται ὅτι ἡ παράμετρος α_1 ἀναφέρεται εἰς τὸ ἐργατικὸν δυναμικόν, ἡ α_2 εἰς τὸ ὑπαλληλικὸν προσωπικὸν καὶ ἡ α εἰς ὁλόκληρον τὸ προσωπικὸν διὰ τὰς τελευταίας πέντε βιομηχανίας, εἰς ἃς ὁ διαχωρισμὸς ἦτο δύσκολος.

Αἱ ἐλαστικότητες τοῦ συντελεστοῦ «κεφάλαιον» παρουσιάζουν τὸ περισσότερον ἐνδιαφέρον τῆς ἐργασίας τῶν Hildebrand καὶ Liu, λόγῳ τοῦ ἰδιαιτέρου τρόπου κατὰ τὸν ὁποῖον οὗτοι ὥρισαν τὴν μεταβλητὴν K. Οὕτω πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς ἐπὶ τῆς παραγωγῆς ἐπιδράσεως τῆς σχετικῆς μεταβολῆς τοῦ κεφαλαίου διέκρινον δύο περιπτώσεις, αἱ ὁποῖαι ἔδοσαν καὶ δύο διαφορετικοὺς συντελεστάς. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἐξ ἧς λαμβάνεται τὸ β_1, οἱ ἀνωτέρω ἐρευνηταὶ ἔλαβον ὡς μεταβλητὴν K τὴν ἀκαθάριστον λογιστικὴν ἀξίαν τῶν παγίων περιουσιακῶν στοιχείων μὲ ἀμετάβλητον τὸν λόγον καθαρᾶς πρὸς ἀκαθάριστον ἀξίαν τῶν παγίων στοιχείων. Δὲν εἶναι ὅμως πραγματιστικὸν νὰ θεωρήσωμεν ὅτι αὐξανομένης τῆς ἀκαθαρίστου ἀξίας ὁ ἀνωτέρω λόγος παραμένει σταθερός. Τὸ τοιοῦτον δύναται νὰ συμβῆ, ἐν τούτοις, ὅταν ἡ αὔξησις τοῦ κεφαλαίου προέρχεται ἐκ δανειακοῦ τοιούτου. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ἐξ ἧς λαμβάνεται τὸ β_2, ἔχομεν αὔξησιν τοῦ κεφαλαίου μέσῳ νέων ἐπενδύσεων, αἱ ὁποῖαι αὐξάνουν καὶ τὸν λόγον καθαρᾶς πρὸς ἀκαθάριστον ἀξίαν τοῦ κεφαλαίου. Ἡ περίπτωσις αὕτη εἶναι ἡ πλέον πραγματιστική. Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω, τὸ β_2 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ β_1, διότι περιέχει τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ηὐξημένου λόγου καθαρᾶς πρὸς ἀκαθάριστον ἀξίαν τοῦ κεφαλαίου. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ β_1 καὶ β_2 ἐμφαίνεται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα εἰς τὴν στήλην (2) καὶ δίδει διαφορετικὰς τιμὰς διὰ τὴν ἀπόδοσιν κλίμακος εἰς τὴν στήλην (3).

Τὸ πρῶτον μέρος τῆς στήλης (3) δεικνύει τοὺς συντελεστὰς ἀποδόσεως κλίμακος (βαθμὸς ὁμογενείας), οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ἐλαστικοτήτων ἐργασίας καὶ τῆς ἐλαστικότητος β_1. Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τῆς στήλης προκύπτει ὅτι οἱ συντελεσταὶ εἶναι πλησίον τῆς μονάδος ἢ μεγαλύτεροι ταύτης. Τὸ δεύτερον μέρος τῆς στήλης (3) προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ἐλαστικοτήτων ἐργασίας καὶ τοῦ συντελεστοῦ β_2. Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως ταύτης προκύπτει ὅτι οἱ συντελεσταὶ ἀποδόσεως κλίμακος εἶναι λίαν ὑψηλοί. Ἡ πρωτοτυπία τῆς ἐρεύνης τῶν ἀνωτέρω συγγραφέων ἔγκειται ἀκριβῶς εἰς τὴν διαφορὰν μεταξὺ β_1 καὶ β_2, ἥτις ἀποδίδεται εἰς τὸν βαθμὸν ἐκσυγχρονισμοῦ τῶν παγίων ἐγκαταστάσεων. Δηλονότι ἡ διαφορὰ αὕτη μετρεῖ τὸ ποσὸν τῆς παραγωγῆς τὸ ἀποδιδόμενον εἰς τὴν τεχνολογικὴν ἐξέλιξιν, ὡς αὕτη μετρεῖται κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

Ἑτέρα ἐνδιαφέρουσα παρατήρησις ἐπὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐρεύνης εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι αἱ ἐλαστικότητες τόσον τοῦ συντελεστοῦ ἐργασίας ὅσον καὶ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαίου ὑπερβαίνουν τὰς σχετικὰς συμμετοχὰς (μερίδια) τούτων εἰς τὸ εἰσόδημα (προστιθεμένη ἀξία)*, δεδομένου ὅτι $\alpha + \beta > 1$.

Τέλος, ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ ἔρευνα τῶν Hildebrand καὶ Liu ὡς πρὸς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὑποδείγματος. Κατὰ τὸ ὑπόδειγμα ἡ μεταβλητὴ K εἶναι προκαθωρισμένη, αἱ δὲ X, L_1 καὶ L_2 καθορίζονται ἐντὸς τοῦ συστήματος. Συνεπῶς τὸ ὑπόδειγμα ἀποτελεῖ σύστημα ἐξισώσεων (simultaneous equations system), εἰς ὃ ὑφίστανται τρεῖς ἐξηρτημέναι μεταβληταὶ εἰς τρεῖς ἐξισώσεις. Μία ἐξίσωσις διὰ τὸ X, καὶ αὕτη εἶναι ἡ συνάρτησις παραγωγῆς, ἥτις ἐδόθη εἰς τὴν ἀρχήν, καὶ ἕτεραι δύο, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὰς συναρτήσεις ζητήσεως συντελεστοῦ ἐργασίας διὰ L_1 καὶ L_2.

Πλῆθος ἑτέρων ἐμπειρικῶν ἐρευνῶν ἐγένετο πρὸς διαπίστωσιν τῶν νόμων παραγωγῆς, οἱ ὁποῖοι ἐπικρατοῦν εἰς τὴν βιομηχανικὴν παραγωγήν.

* Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν συνάρτησιν Cobb - Douglas, ὅπου $\alpha + \beta = 1$, αἱ ἐλαστικότητες α καὶ β δεικνύουν καὶ τὰς σχετικὰς συμμετοχὰς τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς εἰς τὸ προϊόν.

τόσον διεθνῶς ὅσον καὶ εἰς ἑκάστην χώραν*. Εἰς τὸ ἀντικείμενον τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς ἔχει ἀφιερωθῆ πράγματι, ἓν σημαντικὸν μέρος τῆς οἰκονομετρικῆς ἐρεύνης καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ σχετικὴ βιβλιογραφία εἶναι πλουσία**

IV.3.6. **Ἐπισκόπησις ἐμπειρικῆς ἐρεύνης συναρτήσεων CES.** Ὁ ἔλεγχος τῶν συναρτήσεων παραγωγῆς CES βάσει ἐμπειρικῶν στοιχείων (empirical testing) δύναται νὰ βασισθῆ εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\log\left(\frac{X}{L}\right) = \frac{1}{1+\rho}\log w - \frac{1}{1+\rho}\log(1-\alpha)$$

$$\text{ἢ}\quad \log\left(\frac{X}{L}\right) = \alpha + \frac{1}{1+\rho}\log w.$$

Οἱ Arrow, Chenery, Minhas καὶ Solow*** ἐχρησιμοποίησαν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\log\left(\frac{X}{L}\right) = \log\alpha + \beta\log w + \epsilon$$

$$\text{ὅπου}:\beta = \frac{1}{1+\rho},$$

X = προστιθεμένη ἀξία παραγωγῆς εἰς χιλιάδας δολλαρίων.
L = εἰσροὴ ἐργασίας εἰς ἀνθρωποέτη (man-years)
w = ἐργατικὸς μισθὸς
Θ = τυπικὸν σφάλμα ἐκτιμήσεως τῆς συναρτήσεως.

Οἱ ἀνωτέρω ἐρευνηταὶ ἐξετίμησαν μίαν συνάρτησιν δι' ἑκάστην ἐκ τῶν 24 κλάδων βιομηχανίας εἰς μίαν διεθνῆ ἐκ 19 χωρῶν σύγκρισιν. Ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ β (ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως μεταξὺ κεφαλαίου καὶ ἐργασίας) ἡ ἐκτιμωμένη διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, εἶναι τὸ κριτήριον βάσει τοῦ ὁποίου θὰ ἀποφανθῶμεν, ἐὰν ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις ὑπείκει εἰς τὴν ἐξειδίκευσιν (specification) τοῦ Cobb—Douglas ἢ τῆς συναρτήσεως CES. Δηλονότι, ἐὰν τὸ β εἶναι ἴσον πρὸς 1 ἢ δὲν διαφέρῃ

---

* Διὰ τὴν Ἑλλάδα βλέπε Κ. Δρακάτου, Συναρτήσεις Παραγωγῆς τῆς Ἑλληνικῆς Βιομηχανίας, Σειρὰ Εἰδικῶν Μελετῶν Τραπέζης Ἑλλάδος, Ἀθῆναι, 1964. Α. Κουτσογιάννη, Συναρτήσεις Παραγωγῆς τῆς Ἑλληνικῆς Βιομηχανίας, ΚΕΠΕ, Ἀθῆναι 1964. Α. Κιντῆ, Οἰκονομετρικὴ Ἀνάλυσις τῆς Ζητήσεως Ἐργασίας, ΚΕΠΕ, Ἀθῆναι 1970. Π. Παυλοπούλου, Συναρτήσεις Προσφορᾶς Ἀγροτικῶν Προϊόντων: Ποσοτικὴ Διερεύνησις, Ἀθῆναι, 1967.

** Βλ. A.A. Walters, «Production and Cost Functions: An Econometric Survey», εἰς Econometrica, Vol. 31, 1963.

*** «Capital - Labonv Substitution and Economic Efficiency», εἰς The Review of Econamics aud Statistics, Aug. 1961, σελ. 225 - 250.

σημαντικῶς τῆς μονάδος*, τότε αἱ συνθῆκαι παραγωγῆς συνάδουν πρὸς ἐκείνας τοῦ τύπου C — D. Ἐὰν ὅμως τὸ β διαφέρῃ σημαντικῶς τῆς μονάδος, τότε διαπιστοῦμεν τὴν ὕπαρξιν συναρτήσεως παραγωγῆς CES.

Τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἐκτιμήσεων ἐμφαίνονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα**. Εἰς τὸν αὐτὸν πίνακα ἐμφαίνονται καὶ τὰ ἀποτελέσματα τοῦ V.R Fuchs***, περὶ ὧν κατωτέρω.

Ἐκτιμήσεις ἐλαστικότητος ὑποκαταστάσεως βάσει διεθνῶν συγκρίσεων

Κλάδοι	Arrow, et al.	Fuchs
Γαλακτοκομικῶν προϊόντων	0,721 (α)	0,902
Κονσερβῶν	0,855	1,086
Ἀλευρομύλων	0,909	1,324
Ἀρτοποιΐας	0,900	1,056
Ζαχάρεως	0,781	0,898
Καπνοῦ	0,753	1,215
Κλωστοϋφαντουργίας	0,809 (α)	0,976
Πλεκτοβιομηχανίας	0,785 (α)	0,948
Ξυλείας	0,860 (α)	1,083
Ἐπίπλων	0,894 (α)	1,043
Χάρτου καὶ χαρτομάζης	0,965	0,912
Ἐκτυπώσεων	0,868 (α)	1,021
Δέρματος	0,857 (α)	0,975
Βασικῶν χημικῶν	0,831 (α)	1,113
Λιπῶν καὶ ἐλαίων	0,839	1,058
Λοιπῶν Χημικῶν	0,895	1,060
Προϊόντων ἐκ πηλοῦ	0,919	0,658
Ὑάλου	0,999	1,269
Κεραμευτικῆς	0,901 (α)	1,078
Τσιμεντοβιομηχανίας	0,920	1,308
Σιδήρου καὶ Χάλυβος	0,811 (α)	0,756
Μὴ σιδηρούχων μετάλλων	1,011	0,935
Προϊόντων ἐκ μετάλλου	0,902	1,006
Ἠλεκτρικῶν μηχανῶν	0,870	1,026

* Ὁ ἔλεγχος τῆς στατιστικῆς σημαντικότητος δύναται νὰ γίνῃ διὰ τοῦ κριτηρίου t, ἐφ' ὅσον δεχθῶμεν τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὰ κατάλοιπα (Є) εἶναι κανονικῶς κατανεμημένα (κατανομὴ τοῦ Student).

** Βλ. J.S. Cramer, Empirical Econometrics, σελ. 251.

*** «Capital - Labor Substitution: A Note», εἰς The Review of Economics and Statistics, (1963), σελ. 436 - 438.

Συμφώνως πρός τό ἀνωτέρω κριτήριον δέκα ἐκ τῶν εἰκοσιτεσσάρων συντελεστῶν τῶν ἐκτιμηθέντων ὑπό τῶν Arrow, Chenery, Minhas καί Solow ἦσαν σημαντικῶς διάφοροι τῆς μονάδος εἰς ἐπίπεδον σημαντικότητος εἴτε 0,5 εἴτε 0,01, ὡς δεικνύεται ὑπό τοῦ (α). Τό ἀποτέλεσμα τοῦτο ὡδήγησεν τούς ἐρευνητάς τούτους εἰς τήν ἐξεύρεσιν τοῦ μαθηματικοῦ τύπου συναρτήσεως παραγωγῆς ὡς αἱ CES.

Ὁ Fuchs ἐπεχείρησε βελτίωσιν εἰς τήν ἀνωτέρω ἐμπειρικήν ἀνάλυσιν στηριζόμενος εἰς τό γεγονός, ὅτι ὑφίστανται διαφοραί εἰς τάς τεχνικάς συνθήκας μεταξύ ἀνεπτυγμένων καί ὑπαναπτύκτων χωρῶν τοῦ δείγματος τῶν Arrow, et al., καί συνεπῶς ὅτι αἱ ἐκτιμηθεῖσαι δι' ἕκαστον κλάδον ἐλαστικότητες θά πρέπει νά παρουσιάζουν διαφοράς. Πράγματι ἡ ὑπό τοῦ Fuchs γενομένη ἀνάλυσις συνδιακυμάνσεως ἀπέδειξεν ὅτι αἱ δύο κατηγορίαι τῶν χωρῶν διαφέρουν σημαντικῶς ἐν σχέσει πρός τήν σταθεράν a τῆς συναρτήσεως, ἀλλ' ὄχι ὡς πρός τόν συντελεστήν β. Ἤτοι τό ἀπόλυτον ἐπίπεδον τῆς συναρτήσεως δέν εἶναι τό αὐτό διά τάς δύο κατηγορίας τῶν χωρῶν. Διά τόν λόγον αὐτόν προέβη, βάσει τῶν στοιχείων τῶν Arrow et al., εἰς τήν ἐκτίμησιν τῆς συναρτήσεως

$$\log\left(\frac{X}{L}\right) = \log a_1 + \log a_2 + \beta \log w + e,$$

ὅπου ἡ σταθερά $\log a_2$ ἀναφέρεται εἰς τάς ἀνεπτυγμένας χώρας, καί ἡ σταθερά $\log a_1$ ἐτέθη ἴση πρός τό μηδέν διά τάς ὑπαναπτύκτους χώρας. Κατ' ἀκολουθίαν τῆς ἀνωτέρω ἐκτιμήσεως, εὑρέθη ὅτι τό β διαφέρει ἐκείνου τῶν Arrow et al., ὡς εἰς τόν ἀνωτέρω πίνακα φαίνεται, καί αἱ τιμαί τούτου εἶναι κανονικῶς κατανεμημέναι πέριξ τῆς μονάδος. Συνεπῶς ἡ ὑπόθεσις Cobb—Douglas δέν δύναται νά ἀπορριφθῇ.

Ἑτέρα ἔρευνα ἐγένετο ὑπό τοῦ C.E. Ferguson*, ὁ ὁποῖος προσήρμοσε τό ἀνωτέρω ὑπόδειγμα εἰς χρονολογικάς σειράς 18 βιομηχανικῶν κλάδων τῶν Η.Π.Α. διά τά ἔτη 1949—1961. Ἐκ τῶν 16 στατιστικῶς σημαντικῶν συντελεστῶν ἐλαστικότητος μόνον οἱ δύο ἦσαν σημαντικῶς μεγαλύτεροι τῆς μονάδος, ἐνῶ οἱ λοιποί ἦσαν κανονικῶς κατανεμημένοι πέριξ τῆς μονάδος πληροῦντες τήν ὑπόθεσιν $\beta = 1$ (μοναδιαία ἐλαστικότης).

* «Time-Series Production Functions and Technological Progress in American Manufacturing Industry», εἰς Journal of Political Economy, 1965, σελ. 135-147.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΕΩΣ

«Εἰς τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς αἱ τιμαὶ ἰσορροπίας τῶν μεταβλητῶν δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς λύσεις προβλήματος ἀκροτάτου (μεγίστου ἢ ἐλαχίστου), εἶναι συχνάκις δυνατόν, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεταβλητῶν, νὰ προσδιορίσωμεν ἀναμφιβόλως τὴν ποιοτικὴν συμπεριφορὰν τούτων ἐν σχέσει πρὸς μεταβολὰς τῶν παραμέτρων».

P. A. SAMUELSON, Foundations of Economic Analysis, σελ. 21.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΕΩΣ

V.0. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΙΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

V.0.0. **Εἰσαγωγή.**

Βασικὴ ὑπόθεσις τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας καὶ ἀναλύσεως κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς συμπεριφορᾶς τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων καὶ τῶν ἐπιχειρήσεων εἶναι ἡ ἀρχὴ τῆς ὀρθολογικότητος. Ἡ ἀρχὴ αὕτη συνίσταται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἑκάστη ἀπόφασίς μας κυριαρχεῖται ἀπὸ τὴν προσπάθειαν πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ ἀρίστου ἀποτελέσματος. Κυριαρχοῦσα ἀρχὴ εἰς τὴν οἰκονομικὴν συμπεριφορὰν τοῦ ἀτόμου εἶναι ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ ἢ τὸ οἰκονομικὸν ἀξίωμα. Τὸ ἀξίωμα τοῦτο, ὅπερ εἶναι καὶ τὸ ἱδρυτικὸν θεμέλιον τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης, διακρίνεται εἰς δύο ἐπὶ μέρους ἀξιώματα: (α) τὴν προσπάθειαν ὅπως μὲ δεδομένα οἰκονομικὰ μέσα ἐπιτευχθῇ τὸ μέγιστον δυνατὸν ἀποτέλεσμα, καὶ (β) τὴν προσπάθειαν ὅπως μὲ δεδομένον τὸ ἀποτέλεσμα ἢ τὸν σκοπὸν ἐπιτύχωμεν τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν κόστος. Ἡ πρώτη περίπτωσις ἀναφέρεται ὡς πρόβλημα μεγιστοποιήσεως. Τὸ πρὸς μεγίστευσιν μέγεθος δύναται νὰ εἶναι ἡ κατανάλωσις, ἡ παραγωγή, ἡ ἱκανοποίησις, τὸ κέρδος κ.λπ. Ἡ δευτέρα περίπτωσις ἀναφέρεται ὡς πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως. Τὸ πρὸς ἐλαχίστευσιν μέγεθος εἶναι συνήθως αἱ δαπάναι (εἰς χρῆμα ἢ εἰς ὑλικὰ) ἢ ἡ οἰκονομικὴ θυσία. Ἡ διαδικασία ἀποφάσεων τῶν καταναλωτῶν καὶ τῶν παραγωγῶν πρὸς μεγιστοποίησιν ἢ ἐλαχιστοποίησιν τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν ἐμπίπτει εἰς τὸ ὅλον πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἐπιλογῆς.

Δεδομένου ὅτι τὰ πρὸς μεγιστοποίησιν ἢ ἐλαχιστοποίησιν μεγέθη δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὑπὸ τὴν μορφὴν συναρτήσεων, τότε τὸ πρόβλημα ἀποβαίνει ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου τῆς συναρτήσεως. Ἤτοι, ἐρωτᾶται εἰς ποίαν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς (ἢ μεταβλητῶν) μεγιστοποιεῖται ἢ ἐλαχιστοποιεῖται ἡ οἰκονομικὴ συνάρτησις. Εἰς γεωμετρικοὺς ὅρους τοῦτο σημαίνει τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου σημείου ἐπὶ τῆς καμπύλης (προκειμένου περὶ συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς) ἢ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας (προκειμένου περὶ συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν). Μέγιστον μὲν σημεῖον εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ὑψηλότερον παντὸς ἑτέρου εἰς ὡρισμένην περιοχήν. Ἐλάχιστον δὲ σημεῖον εἶναι ἐκεῖνον τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται χαμηλότερον παντὸς ἑτέρου εἰς ὡρισμένην περιοχὴν τῆς καμπύλης ἢ τῆς ἐπιφανείας.

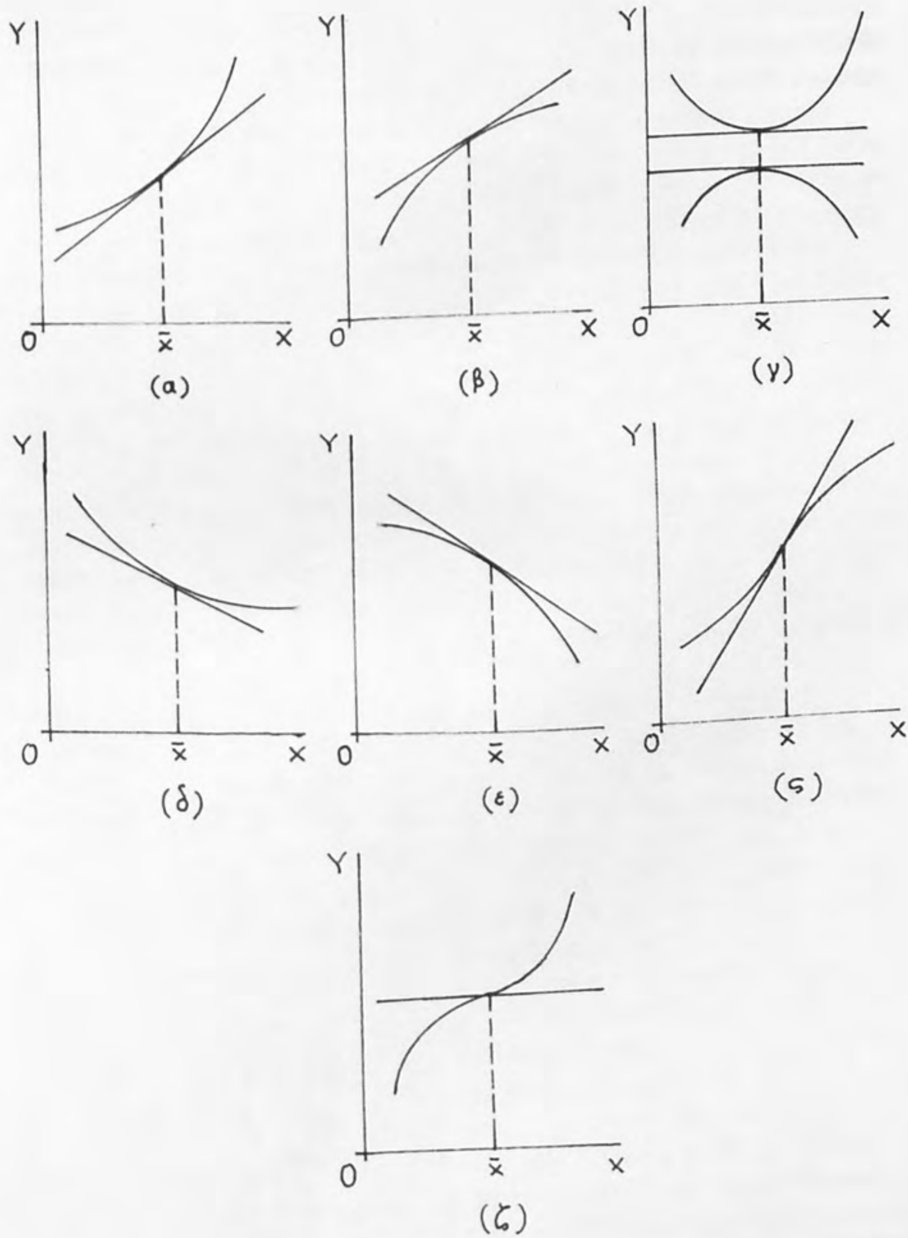
Οὕτως εὑρισκόμενοι πρὸ τῆς ἐπιθυμίας μεγιστοποιήσεως ἢ ἐλαχιστοποιήσεως οἰκονομικῆς τινος συναρτήσεως, παρίσταται ἡ ἀνάγκη ὅπως ἀσχοληθῶμεν δι' ὀλίγων μὲ τὴν μαθηματικὴν διατύπωσιν καὶ ἀνάλυσιν τοῦ προβλήματος. Ὡς κύριον μέσον ἀναλύσεως εἶναι ἐν προκειμένῳ ἡ παράγωγος, τῆς ὁποίας ἡ σημασία τῆς πρακτικῆς ἐφαρμογῆς εἶναι μεγίστη εἰς τὴν ὁ ρ ι α κ ὴ ν   ο ἰ κ ο ν ο μ ι κ ὴ ν   ἀ ν ά λ υ σ ι ν.

V.0.1. **Ἡ διὰ τῶν παραγώγων σπουδὴ τῶν συναρτήσεων.** Ἡ γνῶσις τῆς πρώτης παραγώγου μιᾶς συναρτήσεεως ὁδηγεῖ εἰς τὴν διαπίστωσιν ὅτι αὕτη εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα, ἢ ἀκόμη ὅτι ἡ καμπύλη ταύτης παρουσιάζει στάσιμον σημεῖον (stationary value). Ἡ ἐξέτασις ὅμως μόνον τῆς πρώτης παραγώγου δὲν ἀρκεῖ διὰ τὴν σπουδὴν τῶν συναρτήσεων καὶ τῶν καμπύλων τούτων. Ἀπαιτεῖται ἐπίσης ἡ γνῶσις τῆς δευτέρας, σπανιώτερον δὲ καὶ τῆς τρίτης παραγώγου. Ὡς γνωστόν, ἡ πρώτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$ εἰς σημεῖον ὅπου $x = \bar{x}$, μετρεῖ τὸν ρυθμὸν μεταβολῆς ἢ τὴν κλίσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἡ δευτέρα παράγωγος δεικνύει τὸν ρυθμὸν μεταβολῆς τῆς πρώτης παραγώγου ἢ τὸν βαθμὸν ἐπιταχύνσεως τῆς $f(x)$, ὡς ἐπίσης τὴν φύσιν καὶ τὴν ἔκτασιν τῆς καμπυλότητος τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον $x = \bar{x}$ (κυρτὴ ἢ κοίλη).

Διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας παραγώγου λαμβάνομεν τὰς κατωτέρω περιπτώσεις συναρτήσεων ἐμφανιζομένων διὰ τῶν καμπύλων αὐτῶν (Σχ. V.1.):

(α)	$f'(\bar{x}) > 0$	. $f''(\bar{x}) > 0$	αὔξουσα — κυρτὴ	(Σχ. V. 1.α)
(β)	$f'(\bar{x}) > 0$	. $f''(\bar{x}) < 0$	αὔξουσα — κοίλη	(Σχ. V. 1.β)
(γ)	$f'(\bar{x}) = 0$		στάσιμος τιμὴ	(Σχ. V. 1.γ)
(δ)	$f'(\bar{x}) < 0$	. $f''(\bar{x}) > 0$	φθίνουσα — κυρτὴ	(Σχ. V. 1.δ)
(ε)	$f'(\bar{x}) < 0$	. $f''(\bar{x}) < 0$	φθίνουσα — κοίλη	(Σχ. V. 1.ε)
(στ)	$f'(\bar{x}) \neq 0$	. $f''(\bar{x}) = 0$	σημεῖον καμπῆς	(Σχ. V.1στ΄)
(ζ)	$f'(\bar{x}) = 0$	. $f''(\bar{x}) = 0$	σημεῖον καμπῆς καὶ στάσιμον	(Σχ. V.1.ζ)

Τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν διὰ πεπερασμένας, συνεχεῖς καὶ παραγωγισίμους συναρτήσεις. Ὡς προκύπτει δὲ διὰ τὸν χαρακτηρισμὸν τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων δέον νὰ ὑφίστανται συνήθως δύο συνθῆκαι. Ἡ μὲν πρώτη (ἀπαραίτητος) ἀναφέρεται εἰς τὴν πρώτην παράγωγον, ἡ δὲ δευτέρα (ἱκανὴ) εἰς τὴν δευτέραν παράγωγον. Διὰ νὰ εἶναι αὔξουσα ἡ καμπύλη (ἢ ἡ συνάρτησις) πρέπει



Σχ. V. 1.

V.0.3. **Μέγιστα—Ἐλάχιστα συναρτήσεων δύο μεταβλητῶν.** Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν συνάρτησιν $z = f(x,y)$. Ὁρίζομεν ὡς μεγίστην τιμὴν τῆς z ἐκείνην ἐκ τῆς ὁποίας πᾶσα κίνησις πρὸς οἱανδήποτε κατεύθυνσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὁδηγεῖ εἰς μικροτέραν τιμήν. Ἀναλόγως ὁρίζομεν καὶ τὴν κατωτάτην τιμήν. Ἐπίσης σαγματικὸν ἢ σελλοειδὲς σημεῖον (saddle point) εἶναι ἐκεῖνο ἐκ τοῦ ὁποίου παράλληλος κίνησις πρὸς ἕνα ἄξονα ὁδηγεῖ εἰς ἀνωτέραν τιμὴν τοῦ z, ἀλλ' ἑτέρα παράλληλος κίνησις πρὸς ἕτερον ἄξονα ὁδηγεῖ εἰς μικροτέραν τιμὴν τοῦ z. Τὸ σημεῖον τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὴν κορυφὴν καμπύλης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ εἰς τὸ κατώτατον τῆς κοιλότητος ταύτης.

Αἱ συνθῆκαι διὰ τὴν ὕπαρξιν μεγίστου, ἐλαχίστου καὶ σελλοειδοῦς σημείου εἶναι αἱ κάτωθι:

(α) Μέγιστον:

Πρώτη συνθήκη: $f_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$

$$f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Δευτέρα συνθήκη: $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$$

$$\text{ἢ } f_{xx} f_{yy} > (f_{xy})^2$$

(β) Ἐλάχιστον:

Πρώτη συνθήκη: $f_x = 0$

$$f_y = 0$$

Δευτέρα συνθήκη: $f_{xx} > 0$

$$f_{yy} > 0$$

$$f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$$

$$\text{ἢ } f_{xx} f_{yy} > (f_{xy})^2$$

(γ) Σελλοειδὲς σημεῖον:

Πρώτη συνθήκη: $f_x = 0$

$$f_y = 0$$

Δευτέρα συνθήκη: $f_{xx} f_{yy} < (f_{xy})^2$

Παραδείγματα:

(i) Εὑρεῖν τὴν μεγίστην ἢ ἐλαχίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως

$$z = 8 - 3x + 4x^2 - y + 2y^2.$$

Δέον ὅπως: (α) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 8x - 3 = 0$, ἐξ ἧς $x = 3/8$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y - 1 = 0$, ἐξ ἧς $y = 1/4$

(β) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$ καὶ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, ἢ $8 \cdot 4 > 0$

Ἄρα ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον ὅπου $x = 3/8$ καὶ $y = 1/4$. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι $z = 7\dfrac{5}{16}$.

(ii) Εὑρεῖν τὸ ἐλάχιστον ἢ μέγιστον τῆς συναρτήσεως

$$z = 2x - x^2 + 8y - 2y^2.$$

Δέον ὅπως: (α) $f_x = 2 - 2x = 0$, ἐξ ἧς $x = 1$

$f_y = 8 - 4y = 0$, ἐξ ἧς $y = 2$

(β) $f_{xx} = -2$, $f_{yy} = -4$, $f_{xy} = 0$

$f_{xx} . f_{yy} > f_{xy}$ ἢ $(-2)(-4) > 0$.

Ἄρα, ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον ὅπου $x = 1$ καὶ $y = 2$ Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι $z = 9$.

V.0.4. **Μέγιστα — Ἐλάχιστα συναρτήσεων πλειόνων μεταβλητῶν.** Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἔχομεν συναρτήσεις περισσοτέρων τῶν δύο μεταβλητῶν, ἡ διαδικασία εὑρέσεως τῆς μεγίστης ἢ ἐλαχίστης τιμῆς τούτων εἶναι δυσκολωτέρα. Ἔστω ἡ συνάρτησις $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu)$. Διὰ νὰ ἔχωμεν στάσιμον τιμὴν ταύτης, ἤτοι ἀκρότατον, θὰ πρέπει

$$f_{x_1} = f_{x_2} = f_{x_3} = \ldots = f_{x_\nu} = 0.$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν ἐλάχιστον θὰ πρέπει αἱ Ἐσσιαναὶ ὁρίζουσαι, αἱ σχηματιζόμεναι ἐκ τῶν δευτέρας τάξεως μερικῶν παραγώγων νὰ εἶναι θετικαί. Ἤτοι θὰ πρέπει:

$$fx_1x_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} fx_1x_1 & fx_1x_2 \\ fx_1x_2 & fx_2x_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} fx_1x_1 & fx_1x_2 & fx_1x_3 \\ fx_1x_2 & fx_2x_2 & fx_2x_3 \\ fx_1x_3 & fx_3x_2 & fx_3x_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} fx_1x_1 & fx_1x_2 & \ldots & fx_1x_\nu \\ fx_1x_2 & fx_2x_2 & \ldots & fx_2x_\nu \\ \\ fx_1x_\nu & fx_2x_\nu & \ldots & fx_\nu x_\nu \end{vmatrix} > 0.$$

Διά νά ἔχωμεν μέγιστον θά πρέπει αἱ μὲν περιττῆς τάξεως ὁρίζουσαι νά εἶναι ἀρνητικαί, αἱ δὲ ἀρτίας τάξεως τοιαῦται νά εἶναι θετικαί.

Παράδειγμα:

Δίδεται ἡ συνάρτησις συνολικῆς προσόδου (z)*

$$z = 2x_1x_2x_3 - (2x_1^2 + 4x_2^2 + 23x_3^2 + 2x_4^2) + 4x_2 + 90x_3 + 4x_4$$

ὅπου xi (i = 1,2,3,4) = ποσότητες παραγωγῆς τῶν ἀγαθῶν.

Ἐρωτᾶται εἰς ποῖα ἐπίπεδα παραγωγῆς μεγιστοποιεῖται ἡ πρόσοδος τοῦ παραγωγοῦ;

Δέον ὅπως

$$\begin{aligned} \partial z/\partial x_1 &= 2x_2x_3 - 4x_1 = 0 \\ \partial z/\partial x_2 &= 2x_1x_3 - 8x_2 + 4 = 0 \\ \partial z/\partial x_3 &= 2x_2x_1 - 46x_3 + 90 = 0 \\ \partial z/\partial x_4 &= -4x_4 + 4 = 0. \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν λύσεων τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν τάς $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ καί $x_4 = 1$.

Αἱ δευτέρας τάξεως μερικαί παράγωγοι εἶναι:
$f_{x_1x_1} = -4$, $f_{x_2x_2} = -8$, $f_{x_3x_3} = -46$, $f_{x_4x_4} = -4$, $f_{x_1x_2} = 2x_3$, $f_{x_1x_3} = 2x_2$, $f_{x_1x_4} = 0$, $f_{x_2x_3} = 2x_1$, $f_{x_2x_4} = 0$, καί $f_{x_3x_4} = 0$.

Κατ᾽ ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν:

$f_{x_1x_1} < 0$, ἀρνητική

$$\begin{vmatrix} -4 & 2x_3 \\ 2x_3 & -8 \end{vmatrix} = 32 - 4x_3^2 = 32 - 16 = 16 > 0, \text{ θετική}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2x_3 & 2x_2 \\ 2x_3 & -8 & 2x_1 \\ 2x_2 & 2x_1 & -46 \end{vmatrix} = -8\,(90 - 8) < 0, \text{ ἀρνητική}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2x_3 & 2x_2 & 0 \\ 2x_3 & -8 & 2x_1 & 0 \\ 2x_2 & 2x_1 & -46 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$ ὡς ἡ προηγουμένη πολλαπλασιαζομένη ἐπί (-4), ἄρα θετική.

Κατά τά ἀνωτέρω ὁ παραγωγός μεγιστοποιεῖ τήν πρόσοδον αὐτοῦ εἰς ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ καί $x_4 = 1$.

---

* Βλ. J. Parry Lewis, An Introduction to Maths for Students of Economics, London 1964, σελ. 234.

V.0.5. **Τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς καὶ ἡ μεγιστοποίησις—ἐλαχιστοποίησις ὑπὸ περιορισμούς.** Κατὰ τὴν οἰκονομικήν των δρᾶσιν τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα εὑρίσκονται ἐνώπιον τοῦ προβλήματος τῆς ἐπιλογῆς. Ἡ διαδικασία τῆς ἐπιλογῆς συνίσταται εἰς τὸ ὅτι ὁ μὲν καταναλωτὴς ἔχων ὡρισμένον εἰσόδημα προσπαθεῖ μεταξὺ πολλῶν συνδυασμῶν ἀγαθῶν, ἅτινα εἶναι μεταξύ των ἀνταγωνιστικά, νὰ ἐπιλέξῃ ἐκεῖνον, ὅστις ἐπιφέρει τὴν μεγαλυτέραν ἱκανοποίησιν, ὁ δὲ παραγωγὸς προσπαθεῖ εἴτε νὰ μεγιστοποιήσῃ τὸ κέρδος του ὑπὸ τὸν περιορισμὸν μιᾶς συναρτήσεως παραγωγῆς, εἴτε νὰ ἐλαχιστοποιήσῃ τὸ κόστος ἐπιλέγων μεταξὺ τῶν συνδυασμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ἐκεῖνον, ὅστις δίδει τὸ μικρότερον κόστος ἐν ὄψει δεδομένης παραγωγῆς. Ἡ πρὸς ἐλαχιστοποίησιν ἢ μεγιστοποίησιν συνάρτησις ἀποτελεῖ τὴν ἀντικειμενικὴν συνάρτησιν (objective function), ἥτις ὑπείκει εἰς περιορισμὸν ἢ περιορισμοὺς (constraints), ἢ ἄλλως εἰς παραπλεύρους συνθήκας (side conditions).

Τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς, ὡς ἀνωτέρω ἐτέθη, ἀντιμετωπίζεται τόσον εἰς τὴν μικροοικονομίαν (καταναλωτής, παραγωγός, ἐπιχείρησις), ὅσον καὶ εἰς τὴν μακροοικονομίαν (οἰκονομικὴ πολιτική, οἰκονομικὸς προγραμματισμός, κατανομὴ ἐθνικῶν πόρων). Ἡ ἐπίλυσις προβλημάτων ἐπιλογῆς εἰς τὴν ὁριακὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν δύναται νὰ γίνῃ διὰ τῆς κατωτέρω περιγραφομένης τεχνικῆς.

Μέγιστα—Ἐλάχιστα συναρτήσεων, ὑπὸ περιορισμούς.

Ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου συναρτήσεώς τινος ὑποκειμένης εἰς περιορισμὸν δύναται νὰ γίνῃ διὰ τῆς μεθόδου τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange (Lagrangean undetermined multipliers). Ὁ διαφορικὸς ὅμως λογισμὸς δὲν δύναται πάντοτε νὰ ἐπιλύσῃ προβλήματα τοιαῦτα, ὁπότε χρησιμοποιοῦνται ἄλλαι τεχνικαί, ὡς ὁ γραμμικὸς προγραμματισμός.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν τὴν συνάρτησιν $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu)$ ὑποκειμένην εἰς τὸν περιορισμὸν $u = \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu) = 0$.

Σχηματίζομεν νέαν συνάρτησιν ὡς ἡ κατωτέρω

$$V = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu) - \lambda\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu),$$

ὅπου λ εἶναι ὁ ἀπροσδιόριστος πολλαπλασιαστὴς τοῦ Lagrange, ἀνεξάρτητος τῶν x.

Ἐφ' ὅσον $u = 0$, αἱ τιμαὶ τῶν x, αἱ ὁποῖαι μεγιστοποιοῦν τὴν V, πρέπει ἐπίσης νὰ μεγιστοποιοῦν καὶ τὴν z. Ὁπότε συμφώνως πρὸς τὴν πρώτην συνθήκην τῆς μεγιστοποιήσεως θὰ πρέπει αἱ πρῶται μερικαὶ παράγωγοι τῆς V ὡς πρὸς τὰ x καὶ λ νὰ εἶναι μηδέν, ἤτοι

$$V_{x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$$

$$V_{x_2} = \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_{x_\nu} = \frac{\partial V}{\partial x_\nu} = \frac{\partial z}{\partial x_\nu} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x_\nu} = 0$$

$$V_\lambda = \frac{\partial V}{\partial \lambda} = u = 0 .$$

Οὕτως ἔχομεν $\nu + 1$ ἀριθμὸν ἐξισώσεων καὶ $\nu + 1$ ἀριθμὸν ἀγνώστων τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας, αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἐὰν αἱ ἀνώτεραι τιμαὶ ἀνταποκρίνωνται εἰς μέγιστον ἢ ἐλάχιστον θὰ πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὴν ὁρίζουσαν τῶν δευτέρας τάξεως μερικῶν παραγώγων τῆς V καὶ τῶν παραγώγων τῆς u, ἤτοι

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} \dots & V_{1\nu} & u_1 \\ V_{21} & V_{22} \dots & V_{2\nu} & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{\nu 1} & V_{\nu 2} \dots & V_{\nu\nu} & u_\nu \\ u_1 & u_2 \dots & u_\nu & 0 \end{vmatrix}$$

ὅπου $V_{11} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}$, $V_{12} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}$, κ.ο.κ.

καὶ $u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, κ.ο.κ.,

ὡς καὶ τὰς κυρίας ἐλάσσονας

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} V_{22} & V_{23} \dots & u_2 \\ V_{23} & V_{33} \dots & u_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_2 & u_3 \dots & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} V_{33} & V_{34} \dots & u_3 \\ V_{34} & V_{44} \dots & u_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_3 & u_4 \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\dots \Delta_{\nu-1} = \begin{vmatrix} V_{\nu-1,\,\nu-1} & V_{\nu-1,\,\nu} & u_{\nu-1} \\ V_{\nu-1,\,\nu} & V_{\nu,\,\nu} & u_\nu \\ u_{\nu-1} & u_\nu & 0 \end{vmatrix}$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν μ έ γ ι σ τ ο ν τῆς συναρτήσεως z, ὑποκειμένης εἰς τὸν περιορισμὸν u, πρέπει νὰ ἰσχύουν:

$\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, κ.ο.κ. ἐὰν τὸ ν εἶναι περιττὸς καὶ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 > 0$, κ.ο.κ., ἐὰν τὸ ν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

Διὰ νὰ ἔχωμεν ἐλάχιστον πρέπει ἡ Δ_1 καὶ αἱ κύριαι ἐλάσσονες ταύτης νὰ εἶναι ἀρνητικαί.

Παράδειγμα*

Ἔστω ἡ ἀντικειμενικὴ συνάρτησις $z = f(x, y) = 2x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ ὑποκειμένη εἰς τὸν περιορισμὸν $u = \varphi(x, y) = 100 - 2x - y = 0$.

Θέτομεν

$$V = 2x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} + \lambda(100 - 2x - y),$$

καὶ ἐξισώνομεν τὰς μερικὰς παραγώγους πρὸς 0:

$$V_x = x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} - 2\lambda = 0$$

$$V_y = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} - \lambda = 0$$

$$V_\lambda = 100 - 2x - y = 0$$

Ἐκ τούτων λαμβάνομεν $x = 25$, $y = 50$, καὶ $\lambda \simeq 5/7$.

Πρὸς ἀποφυγὴν τῆς καταπονήσεως ἐκ τῶν περαιτέρω ὑπολογισμῶν δὲν θὰ συνεχίσωμεν τὴν διαδικασίαν, ἀλλὰ θὰ ἀρκεσθῶμεν εἰς τὴν διαπίστωσιν ὅτι εἰς τιμὰς $x = 25$ καὶ $y = 50$ ἡ συνάρτησις ἔχει ἀκρότατον, καὶ θὰ εἴπωμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον (25, 50) ἔχομεν ἰσορροπίαν. Τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ εἶναι σημεῖον μεγιστοποιήσεως ἐφ' ὅσον πρόκειται περὶ συναρτήσεως ὠφελιμότητος.

V.0.6. **Μέγιστα — Ἐλάχιστα συναρτήσεως ὑποκειμένης εἰς περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς περιορισμούς.** Εἶναι δυνατὸν μία οἰκονομικὴ συνάρτησις νὰ ὑπείκῃ εἰς περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς περιορισμοὺς ἢ παραπλεύρους συνθήκας. Τοιαῦται περιπτώσεις συναντῶνται πολλάκις εἰς τὴν οἰκονομικήν. Οὕτως εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ καταναλωτοῦ, οὗτος εἶναι δυνατὸν νὰ περιορίζεται οὐχὶ μόνον ἐκ τοῦ εἰσοδήματός του, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς ὑπάρξεως δελτίου διανομῆς (rationing). Εἰς τὸν χῶρον τῆς παραγωγῆς ἡ ἐλαχιστοποίησις τοῦ κόστους δυνατὸν νὰ ὑπόκειται εἰς τοὺς περιορισμούς, οἱ ὁποῖοι ἐπιβάλλονται ἐκ τοῦ ἐπιθυμητοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς καὶ τοῦ ἐπιθυμητοῦ ἐπιπέδου ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως.

Ἡ τεχνικὴ ἐπιλύσεως τῶν προβλημάτων καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν πολλαπλῶν περιορισμῶν εἶναι ἡ αὐτή, ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἑνὸς περιο-

---

* G.C. Archibald and R.G. Lipsey, An Introduction to Mathematical Treatment of Economics, London, 1967, σελ. 242.

ρισμοῦ, μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τούτων δέον ὅπως εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεταβλητῶν.

Ἔστω ἡ πρὸς μεγιστοποίησιν συνάρτησις

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$

ὑποκειμένη εἰς τοὺς περιορισμοὺς

$$u = 0, \quad \upsilon = 0 \quad \text{καὶ} \quad \omega = 0.$$

Σχηματίζομεν τὴν συνάρτησιν

$$V = z + \lambda u + \mu \upsilon + k\omega,$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} + k \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν x καὶ λ, μ καὶ k σχηματίζομεν τὴν ὁρίζουσαν

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & \ldots & V_{1\nu} & u_1 & \upsilon_1 & \omega_1 \\ V_{21} & V_{22} & \ldots & V_{2\nu} & u_2 & \upsilon_2 & \omega_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{\nu 1} & V_{\nu 2} & \ldots & V_{\nu\nu} & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_\nu & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \ldots & \upsilon_\nu & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_\nu & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

καὶ τὰς κυρίας ἐλάσσονας ταύτης ἀπὸ τῆς Δ_2 μέχρι τῆς $\Delta_{\nu-3}$, ὅπου ν = ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβλητῶν καὶ 3 = ὁ ἀριθμὸς τῶν περιορισμῶν:

Διὰ τὴν ὕπαρξιν μ ε γ ί σ τ ο υ πρέπει: (α) ἐὰν ν εἶναι περιττὸς ἀριθμός, τότε $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ . . . κ.ο.κ. (β) ἐὰν ν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, τότε $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$, . . .κ.ο.κ.

Διὰ τὴν ὕπαρξιν ἐ λ α χ ί σ τ ο υ πρέπει: (α) ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν περιορισμῶν εἶναι ἄρτιος, τότε $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, . . . κ.ο.κ., ἤτοι ἅπασαι θετικαί· (β) ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν περιορισμῶν εἶναι περιττὸς τότε ἅπασαι αἱ ἐλάσσονες πρέπει νὰ εἶναι ἀρνητικαί.

V.0.7. **Ὁλοκλήρωσις συναρτήσεως**. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ περιλάβωμεν καὶ τὴν περίπτωσιν τῆς ὁλοκληρώσεως (integration) μιᾶς συναρτήσεως, δεδομένου ὅτι αὕτη ἀποτελεῖ διαδικασίαν ἀθροίσεως, ἤτοι ἐν τῇ οὐσίᾳ πρόβλημα ἐκ τοῦ ὁριακοῦ ἐξευρέσεως τοῦ συνολικοῦ μεγέθους. Οὕτως ἐφ' ὅσον δίδεται τὸ ὁριακὸν κόστος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ συνολικὸν τοιοῦτον. Διδομένου τοῦ ὁριακοῦ κόστους καὶ ὁριακοῦ ἐσόδου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς ὅπερ μεγιστοποιεῖ τὰ κέρδη τῆς παραγωγικῆς μονάδος.

Ἡ ὁλοκλήρωσις δύναται νὰ ἐξετασθῇ ἐκ δύο πλευρῶν. Ἀπὸ τῆς μιᾶς μὲν πλευρᾶς, αὕτη ἀποτελεῖ τὴν διαδικασίαν εὑρέσεως τῆς συναρτήσεως γνωστῆς οὔσης τῆς παραγώγου, ἤτοι ἡ ἀντίθετος διαδικασία τῆς παραγωγίσεως. Ἡ πρὸς εὕρεσιν συνάρτησις καλεῖται ἀόριστον ὁλοκλήρωμα. Ἀπὸ τῆς ἑτέρας δὲ πλευρᾶς, ἡ ὁλοκλήρωσις εἶναι ἡ διαδικασία εὑρέσεως τοῦ ὁρίου ὡρισμένης ἀθροίσεως (summation). Εἰς γεωμετρικοὺς ὅρους τοῦτο σημαίνει τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία δεσπόζεται ὑπὸ μιᾶς ἢ περισσοτέρων καμπύλων. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἐπιφάνεια καλεῖται ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα.

(i) Ἀόριστον ὁλοκλήρωμα:

Ἐὰν δίδεται ἡ συνάρτησις $f'(x)$, ἥτις εἶναι ἡ παράγωγος ἑτέρας μὴ διδομένης συναρτήσεως $f(x)$, τότε τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα εἶναι

$$\int f'(x)dx = f(x) + c,$$

ὅπου τὸ c εἶναι σταθερὰ καὶ προστίθεται χάριν γενικότητος, δεδομένου ὅτι ἡ παράγωγος σταθερᾶς εἶναι μηδὲν καὶ συνεπῶς δὲν ἐμφανίζεται εἰς τὴν πρὸς ὁλοκλήρωσιν συνάρτησιν.

Ἡ σχέσις μεταξὺ παραγωγίσεως καὶ ὁλοκληρώσεως δύναται νὰ δοθῇ ὡς ἀκολούθως:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f'(x)dx\right) = f'(x).$$

Ἡ ὁλοκλήρωσις ἀπαιτεῖ πεῖραν καὶ γνῶσιν τῆς παραγωγίσεως. Οἱ κανόνες ὁλοκληρώσεως ὁμοιάζουν πρὸς ἐκείνους τῆς παραγωγίσεως, ὡς:

α) Τὸ ὁλοκλήρωμα ἀθροίσματος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωμάτων.

(β) Τὸ ὁλοκλήρωμα διαφορᾶς εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ὁλοκληρωμάτων.

(γ) Τὸ ὁλοκλήρωμα σταθερᾶς ἐπὶ συνάρτησιν εἶναι ἡ σταθερὰ ἐπὶ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως, κ.λπ.

Κατωτέρω δίδονται ὡρισμένα βασικὰ ὁλοκληρώματα:

$f'(x)$	$y = f(x)$	
α	$\alpha x + c$	
αx^{ν}	$\dfrac{\alpha x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$	$\nu \neq -1$
$(\alpha x + \beta)^{\nu}$	$\dfrac{(\alpha x+\beta)^{\nu+1}}{(\nu+1)\alpha} + c$	$\nu \neq -1$
$e^{\alpha x}$	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$	
$\dfrac{1}{x}$	$\log_e x + c$	

$f'(x)e^{f(x)}$	$e^{f(x)}+c$
$f'(x)a^{f(x)}$	$\dfrac{a^{f(x)}}{\log_e a}+c$
ημx	$-$συνx$+c$
συνx	ημx$+c$
τεμνx	εφx$+c$
εφx	log(τεμνx)$+c$.

Παραδείγματα:

(α) Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως

$$x^2-2x+1.$$

Ἔχομεν $\int(x^2-2x+1)dx=\int x^2dx-2\int xd+\int dx=$

$$\frac{x^3}{3}-2.\frac{x^2}{2}+x+c=\frac{x^3}{3}-x^2+x+c.$$

(β) Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως

$$3xa^{x^3+6}.$$

Ἔχομεν $\int 3xa^{x^3+6}dx=\dfrac{a^{x^3+6}}{\log_e a}+c.$

(γ) Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως

$$3xe^{x^3}.$$

Ἔχομεν $\int 3xe^{x^3}dx=e^{x^3}+c.$

(δ) Εὑρεῖν τὴν συνάρτησιν συνολικοῦ κόστους ἐκ τῆς συναρτήσεως ὁριακοῦ κόστους $MC=1+2q+6q^2$.

Ἔχομεν $C_T=\int(1+2q+6q^2)dq=q+q^2+2q^3+c.$

(ii) Ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα.

Ἐὰν ὡρισμένη καμπύλη δίδεται ὑπὸ συναρτήσεως $f'(x)$ καὶ ζητεῖται ἡ ὑπὸ τὴν καμπύλην ἐπιφάνεια μεταξὺ τῶν ὁρίων $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx=f(\beta)-f(\alpha).$$

Ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις δίδει τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα μεταξὺ τιμῶν α καὶ β καὶ καλεῖται θεμελιῶδες θεώρημα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

Παράδειγμα:

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν ὑπὸ τὴν καμπύλην $y=x^3$ μεταξὺ $x=1$ καὶ $x=3$.

Ἔχομεν $\int_1^3 x^3dx=\left[\dfrac{x^4}{4}\right]_1^3=\dfrac{(3)^4}{4}-\dfrac{(1)^4}{4}=20.$

iii) Μία ἐφαρμογὴ εἰς τὴν θεωρίαν τῆς ζητήσεως. — Τὸ πλεόνασμα τοῦ καταναλωτοῦ.

Ὡς γνωστὸν ἡ ἀγοραία καμπύλη ζητήσεως ἀγαθοῦ τινος δεικνύει τὰς ἀγοραζομένας ποσότητας τούτου εἰς ἑκάστην τιμήν. Ἡ ἐπικρατοῦσα ὅμως τιμὴ εἰς τὴν ἀγοράν, ἤτοι ἡ τιμὴ ἰσορροπίας, εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς συμβολῆς τόσον τῆς καμπύλης ζητήσεως ὅσον καὶ τῆς καμπύλης προσφορᾶς. Οὕτως ἅπασαι αἱ ποσότητες ἀγοράζονται καὶ πωλοῦνται εἰς τὴν τιμὴν ταύτην. Εἰς τὴν τιμὴν ταύτην ἀγοράζει καὶ ἐκεῖνος ὅστις ἦτο διατεθειμένος νὰ ἀγοράσῃ τὴν αὐτὴν ποσότητα εἰς ὑψηλοτέραν τιμήν. Διὰ τὸν ἀγοραστὴν λοιπὸν τοῦτον ὑφίσταται ἓν κέρδος, τὸ ὁποῖον ὁ A. Marshall ἀπεκάλεσεν πλεόνασμα τοῦ καταναλωτοῦ (consumer's surplus).

Κατὰ τὴν Μαρσαλλιανὴν ἔννοιαν*, ἡ ἐπιφάνεια ἡ ὁποία δεσπόζεται ὑπὸ τῆς καμπύλης ζητήσεως τοῦ ἄξονος τῶν τιμῶν καὶ τῆς ὁριζοντίας γραμμῆς τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν τιμὴν ἰσορροπίας (ἐπικρατοῦσα τιμή), καλεῖται πλεόνασμα τοῦ καταναλωτοῦ. Ἐπειδὴ ὅμως πρόκειται περὶ καμπύλης ζητήσεως καὶ οὐχὶ περὶ καμπύλης καταναλώσεως, ὀρθότερον θὰ ἦτο κατὰ τὸν K. Boulding νὰ κληθῇ τὸ πλεόνασμα τοῦτο, πλεόνασμα ἀγοραστοῦ**

Ἀπαραίτητοι προϋποθέσεις τῆς ἐννοίας τοῦ πλεονάσματος εἶναι ὅτι: (α) ἡ ὁριακὴ χρησιμότης τοῦ χρήματος παραμένει σταθερά, καὶ (β) ἡ χρησιμότης εἶναι μετρήσιμος. Ἐὰν ἡ ὁριακὴ χρησιμότης τοῦ χρήματος εἶναι σταθερά, τότε ὁ ὁριακὸς λόγος ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τοῦ ἑνὸς ἀγαθοῦ καὶ τῶν λοιπῶν ἀγαθῶν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς ποσότητος τοῦ ἐν λόγῳ ἀγαθοῦ καὶ οὐχὶ ἐκ τῆς ποσότητος τοῦ χρήματος. Τοῦτο σημαίνει, ὅπερ καὶ τὸ σημαντικόν, ὅτι ἡ ζήτησις τοῦ ἀγοραστοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐπιθυμίας του πρὸς ἀπόκτησιν ὡρισμένης ποσότητος τοῦ ἀγαθοῦ καὶ οὐχὶ ἐκ τῆς ἐπιθυμίας διακρατήσεως χρήματος. Οὕτω τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ εἰς τὴν ἀγορὰν εἶναι κατωτέρα ἐκείνης τὴν ὁποίαν ἦτο διατεθειμένος νὰ καταβάλῃ ὁ ἀγοραστὴς καὶ συνεπῶς ἡ πραγματοποίησις πλεονάσματος δὲν ἐπηρεάζει τὴν ἀπόφασιν αὐτοῦ νὰ ἀγοράσῃ τὴν ὡρισμένην ποσότητα ἀγαθοῦ***.

Εἰς τὸ κατωτέρω γράφημα ἡ «καμπύλη» ζητήσεως δύναται νὰ γραφῇ ὡς $p = f(q)$. Ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ εἰς τὴν ἀγορὰν ἡ σχηματιζομένη διὰ τῆς τομῆς τῆς καμπύλης ζητήσεως καὶ τῆς καμπύλης προσφορᾶς εἶναι $\bar{p}$ καὶ ἀν-

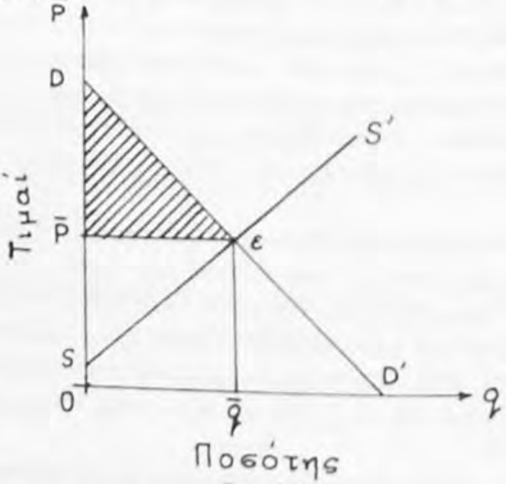
---

* Βλ. σχ. A. Marshall, op. cit., Κεφ. VI.

** K. Boulding, Economic Analysis, 3rd Edition, σελ. 819.

*** Διὰ μίαν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν ἐξ παραλλαγῶν τῆς ἐννοίας τοῦ πλεονάσματος τοῦ καταναλωτοῦ, ἰδὲ P.A. Samuelson, op. cit., σελ. 195 - 202.

τιστοιχεῖ εἰς ζητουμένην καὶ προσφερομένην ποσότητα ἴσην πρὸς $\bar{q}$. Εἰς τιμὴν $\bar{p}$ ὁ ἀγοραστὴς ἀγοράζει $\bar{q}$ μονάδας ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ καὶ συνεπῶς ἡ συνολικὴ δαπάνη διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ ἀγαθοῦ εἶναι $\bar{p}\bar{q}$, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας $0\bar{p}\varepsilon\bar{q}$. Ἡ ἐπιφάνεια ὑπὸ τὴν καμπύλην ζητήσεως μέχρι τῆς γραμμῆς $\bar{p}\varepsilon$ ἀποτελεῖ τὸ πλεόνασμα τοῦ καταναλωτοῦ. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τούτου σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:



Σχ. V, 2.

Ἡ ὑπὸ τὴν καμπύλην ζητήσεως ἐπιφάνεια μεταξὺ 0 καὶ $\bar{q}$ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\bar{q}} f(q)dq.$$

Ἐὰν ἐκ τῆς ἐπιφανείας ταύτης ἀφαιρεθῇ μέρος ἴσον πρὸς $\bar{p}\bar{q}$ (συνολικὴ δαπάνη), τότε προκύπτει ἡ γραμμωτὴ ἐπιφάνεια $\bar{p}D\varepsilon$ (τρίγωνον), ἡ ὁποία δεικνύει τὸ πλεόνασμα τοῦ ἀγοραστοῦ καὶ εἶναι ἴση πρὸς

$$\int_0^{\bar{q}} f(q)dq - \bar{p}\bar{q}$$

Ἡ ἔννοια τοῦ πλεονάσματος τοῦ καταναλωτοῦ ἐνέχει ἀρκετὴν ἀσάφειαν καὶ προεκάλεσεν ἀρκετὴν σύγχυσιν. Ἐγένοντο προσπάθειαι ἀναθεωρήσεως καὶ ἐπανατοποθετήσεως τῆς ὅλης θεωρίας (doctrine). Τοιαύτη προσπάθεια ἦτο ἡ γενομένη ὑπὸ τοῦ J.R. H i c k s*, ὁ ὁποῖος εἰσήγαγε τὴν περίπτωσιν τοῦ εἰσοδηματικοῦ ἀποτελέσματος τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ πλεονάσματος τοῦ ἀγοραστοῦ, τὴν ὁποίαν ἠγνόησε ὁ M a r s h a l l ὑποθέτων σταθερὰν ὁριακὴν χρησιμότητα διὰ τὸ χρῆμα.

Ἀλλ' ὁ M a r s h a l l ὡμίλησε καὶ περὶ π λ ε ο ν ά σ μ α τ ο ς π α ρ α γ ω γ ο ῦ (producer's surplus)**, ὅπερ δεικνύεται ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας

* J.R. H i c k s, A Revision of Demand Theory, Oxford, 1956.

** Ibid., σελ. 668 (8η ἐκδ. χαρτόδ.).

τοῦ τριγώνου $S\varepsilon\bar{p}$. Τὸ πλεόνασμα τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ δημιουργηθῆ διὰ συγκεκριμένον παραγωγόν, ἐφ' ὅσον μέχρι τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς $\bar{q}$ τὰ ἔξοδα παραγωγῆς εἶναι κατώτερα τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς $\bar{p}$. Εἶναι δὲ γνωστὸν ὅτι ἡ καμπύλη προσφορᾶς SS' δεικνύει καὶ τὰ ὁριακὰ ἔξοδα παραγωγῆς εἰς ἕκαστον ἐπίπεδον παραγωγῆς, ἤτοι τὰς ἐλαχίστας τιμὰς εἰς ἃς ὁ παραγωγὸς εἶναι διατεθειμένος νὰ διαθέση τὴν παραγωγήν του.

V.1. ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΟΣ — ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΟΥ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΟΥ —

V.1.0. **Τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς τοῦ καταναλωτοῦ***. Ἀφετηρία τῆς ἀναλύσεως τῆς ἐπιλογῆς καὶ τῆς ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι ἡ ἀρχὴ τῆς ὀρθολογικότητος, ὡς ἐτονίσθη καὶ εἰς τὰ προηγούμενα. Οὗτος εὑρισκόμενος ἐνώπιον πολλῶν ἐφικτῶν λύσεων προσπαθεῖ νὰ ἐπιλέξη ἐκείνην, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἡ πλέον ἐπωφελὴς δι' αὐτόν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ καταναλωτὴς εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἐκτιμήση τὴν σημασίαν ἑκάστης λύσεως ἔχων ὑπ' ὄψιν του τὰς οἰκονομικὰς δυνατότητάς του (εἰσόδημα) καὶ τὰς τιμὰς τῶν διαφόρων ἀγαθῶν. Ὅλη ἀκριβῶς ἡ ἱστορία αὕτη τυγχάνει ἀφηγήσεως ἐκ μέρους τῆς γνωστῆς συναρτήσεως ὠφελιμότητος ἢ χρησιμότητος (utility function).

Ὁ πυρὴν τῆς ὁριακῆς ἀριστοποιήσεως ἢ τῆς διαδικασίας τῆς οἰκονομικῆς ἐπιλογῆς τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι ἡ σύγκρισις τῆς ὠφελείας, ἥτις προκύπτει ἐκ μιᾶς προσθέτου μονάδος ἀγαθοῦ ἢ ἐκ μιᾶς προσθέτου ἐνεργείας ἐν σχέσει πρὸς τὴν καταβληθεῖσαν διὰ ταύτην οἰκονομικὴν θυσίαν. Ἡ οἰκονομικὴ θυσία δύναται νὰ εἶναι μία ἐπὶ πλέον ποσότης ἐργασίας, χρήματος ἢ ἑτέρου ἀγαθοῦ. Οὕτω κατὰ τὴν διαδικασίαν ταύτην τὸ οἰκονομοῦν ἄτομον εὑρίσκεται καὶ εἰς διαφορετικὴν ἑκάστοτε θέσιν ἀποκτῶν μίαν ὠφέλειαν καὶ θυσιάζον ἑτέραν ἀξίαν. Προχωρεῖ δὲ εἰς ἑτέραν θέσιν ἐφ' ὅσον αὕτη εἶναι καλλιτέρα τῆς προηγουμένης. Τὴν θέσιν, οἵαν ὁ καταναλωτὴς οὐδὲν συμφέρον ἔχει νὰ ἐγκαταλείψη, διότι κατὰ τὴν ἐκτίμησίν του ἀποκομίζει τὴν μεγίστην ἱκανοποίησιν, καλοῦμεν σημεῖον ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ.

V.1.1. **Μεγιστοποίησις τῆς ὠφελείας.** Ὁ καταναλωτὴς ἔχων περιωρισμένα οἰκονομικὰ μέσα προσπαθεῖ ὅπως κατανείμη ταῦτα διὰ τὴν ἀγορὰν διαφόρων ἀγαθῶν κατὰ τρόπον ἄριστον, ὥστε νὰ λάβη τελικῶς τὴν μεγίστην δυνατὴν ἱκανοποίησιν. Τοῦτο προϋποθέτει τὴν ὕπαρξιν ἱκανότητος ἐκ μέρους τοῦ καταναλωτοῦ νὰ συγκρίνη καὶ κρίνη τὴν σημασίαν τῶν διαφόρων ἀγαθῶν ἢ διαφόρων συνδυασμῶν τούτου. Ἡ συνάρτησις ὠφελιμότητος εἶναι

* Βλ. σχ. καὶ P.A. Samuelson, Foundations, Κεφάλαιον V.

ἀκριβῶς ἡ ἔννοια ἐκείνη τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν προκειμένην περίπτωσιν, χωρὶς νὰ εἶναι ἀπαραίτητος ἡ μέτρησις τῆς ἐννοίας τῆς χρησιμότητος, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ οἰκεῖον περὶ οἰκονομικῶν συναρτήσεων τμῆμα.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν δύο μόνον ἀγαθὰ x καὶ y καὶ τὴν συνάρτησιν ὠφελιμότητος

$$\Omega = f(x, y).$$

Τὸ πρόβλημα τοῦ καταναλωτοῦ συνίσταται εἰς τὴν μεγιστοποίησιν τῆς συναρτήσεως ταύτης, ὑπὸ τὸν περιορισμὸν ὅτι οὗτος ἔχει ὡρισμένον εἰσόδημα μὴ δυνάμενος νὰ ἀγοράσῃ ἀπεριορίστους ποσότητας ἀγαθῶν. Τὸ εἰσόδημα τοῦ καταναλωτοῦ ἀπεικονίζεται εἰς τὴν κατωτέρω ἐξίσωσιν εἰσοδήματος ἢ δαπάνης (budget equation), ἡ ὁποία ἀποτελεῖ καὶ τὸν περιορισμὸν (budget constraint)

$$I = \varphi(x, y) = p_x x + p_y y$$

ὅπου p_x καὶ p_y εἶναι αἱ δεδομέναι τιμαὶ τῶν x καὶ y. Ἡ δαπάνη διὰ τὸ ἀγαθὸν x σὺν τῇ δαπάνῃ διὰ τὸ ἀγαθὸν y θὰ πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ εἰσόδημά του I.

Διὰ νὰ μεγιστοποιήσωμεν τὴν συνάρτησιν ὠφελιμότητος ὑποκειμένην εἰς τὸν περιορισμὸν τοῦ εἰσοδήματος θὰ πρέπει νὰ εὕρωμεν τοιοῦτον συνδυασμὸν τῶν ἀγαθῶν x καὶ y, ὅστις νὰ ἱκανοποιῇ τὴν ἐξίσωσιν δαπάνης καὶ συγχρόνως νὰ μεγιστοποιῇ τὴν συνάρτησιν. Δυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωμεν δύο τρόπους διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν τοιαύτην μεγιστοποίησιν, δηλονότι, εἴτε χρησιμοποιοῦντες τοὺς πολλαπλασιαστὰς τοῦ Lagrange εἴτε ὄχι*.

Χρησιμοποιοῦντες τὸν πρῶτον τρόπον σχηματίζομεν τὴν συνάρτησιν τοῦ Lagrange

$$V = f(x, y) - \lambda\,(I - p_x x - p_y y).$$

Ἐξισοῦμεν τὰς μερικὰς παραγώγους τῆς V ὡς πρὸς x, y καὶ λ μὲ τὸ μηδὲν (συνθήκη πρώτης τάξεως), ἤτοι

$$\begin{aligned} V_x &= f_x - \lambda p_x = 0 \\ V_y &= f_y - \lambda p_y = 0 \\ V_\lambda &= I - p_x x - p_y y = 0. \end{aligned}$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν μέγιστον πρέπει ἡ σχετικὴ ἐσσιανὴ ὁρίζουσα νὰ εἶναι θετικὴ (συνθήκη δευτέρας τάξεως), ἤτοι

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & -p_x \\ f_{yx} & f_{yy} & -p_y \\ -p_x & -p_y & 0 \end{vmatrix} > 0$$

* Βλ. σχ. Henderson and Quandt, op. cit., σελ. 12 - 16, W.J. Baumol, Economic Theory and Operations Analysis, Prentice - Hall, Inc. 1961, Κεφ. 8, K.J. Cohen and R.M. Cyert, Theory of the Firm: Resource Allocation in a Market Economy, Prentice Hall, Inc., 1965, σελ. 69 - 71.

ἐξ ἧς δι' ἀναπτύξεως λαμβάνομεν

$$2f_{xy}\, p_x\, p_y - f_{yy}\, p_x^2 - f_{xx} p_y^2 > 0.$$

Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τῆς πρώτης συνθήκης διὰ διαιρέσεως λαμβάνομεν

$$\frac{fx}{fy} = \frac{p_x}{p_y} \text{ καὶ } \frac{f_x}{p_x} = \frac{f_y}{p_y}.$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις ἐκφράζουν τὰς ἑξῆς πρώτας συνθήκας ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ: (α) Ὁ λόγος τῶν ὁριακῶν χρησιμοτήτων τῶν δύο ἀγαθῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν τιμῶν τούτων. (β) Ἡ ὁριακὴ χρησιμότης, ἥτις λαμβάνεται διὰ δαπάνης τῆς τελευταίας χρηματικῆς μονάδος διὰ τὸ ἀγαθὸν x, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὁριακὴν χρησιμότητα τῆς τελευταίας χρηματικῆς μονάδος τῆς δαπανωμένης διὰ τὸ ἀγαθὸν y. Ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι ἀναγκαία συνέπεια τῆς μεγιστοποιήσεως, διότι ἄλλως ὁ καταναλωτὴς θὰ ἠδύνατο νὰ λάβη μεγαλυτέραν ἱκανοποίησιν ἄνευ αὐξήσεως τῆς συνολικῆς του δαπάνης, δαπανῶν μίαν ἐπὶ πλέον χρηματικὴν μονάδα διὰ τὸ x καὶ μίαν ἐπὶ ἔλαττον διὰ τὸ y.

Χρησιμοποιοῦντες τὸν δεύτερον τρόπον (ἄνευ τῆς βοηθείας τῆς συναρτήσεως Lagrange) γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ εἰσοδήματος εἰς ὅρους τοῦ y, ἤτοι

$$y = \frac{I}{p_y} - \frac{p_x x}{p_y}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν συνάρτησιν ταύτην εἰς τὴν συνάρτησιν ὠφελιμότητος λαμβάνομεν

$$\Omega = f\left(x, \left(\frac{I}{p_y} - \frac{p_x x}{p_y}\right)\right).$$

Δεδομένης τῆς σταθερᾶς σχέσεως μεταξὺ x καὶ y εἰς τὴν ἐξίσωσιν εἰσοδήματος, ἐπαρκεῖς συνθῆκαι μεγιστοποιήσεως τῆς συναρτήσεως ὠφελιμότητος, ἡ ὁποία ἐκφράζεται ὡς πρὸς x, θὰ εἶναι:

$$(\alpha)\ \frac{d\Omega}{dx} = f_x + f_y\left(-\frac{p_x}{p_y}\right) = 0 \quad \text{(πρώτη συνθήκη)}.$$

Ἐκ ταύτης διὰ καταλλήλου μετασχηματισμοῦ λαμβάνομεν

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{p_x}{p_y}.$$

Ἤτοι, τὸ αὐτὸ ὡς καὶ προηγουμένως ἀποτέλεσμα: ὁ λόγος τῶν ὁριακῶν χρησιμοτήτων εἶναι ἴσος πρός τόν λόγον τῶν τιμῶν τῶν δύο ἀγαθῶν.

$$(\beta)\ \frac{d^2\Omega}{dx^2} = f_{xx} + 2f_{xy}\left(-\frac{p_x}{p_y}\right) + f_{yy}\left(-\frac{p_x}{p_y}\right)^2 < 0 \text{ (δευτέρα συνθήκη).}$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπί p_y^2 λαμβάνομεν

$$f_{xx}\, p_y^2 - 2f_{xy}\, p_x p_y + f_{yy}\, p_x^2 < 0$$

$$\text{ἤ } 2f_{xy}\, p_x p_y - f_{xx}\, p_y^2 - f_{yy}\, p_x^2 > 0.$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἀνισότης εἶναι ἡ αὐτή ὡς τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐσσιανῆς εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν.

V.1.2. **Γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς μεγιστοποιήσεως—Ἰσορροπία τοῦ καταναλωτοῦ—Συνθήκη Ἐπαφῆς.** Εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον ἐγράψαμεν τήν ἐξίσωσιν τοῦ εἰσοδήματος ὡς

$$y = \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}\, x.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται γραφικῶς νά ἀπεικονισθῇ εἰς τό Σχ. V.3. διά τῆς ἐχούσης ἀρνητικήν κλίσιν εὐθείας y′x′. Ἡ κλίσις ταύτης εἶναι $-\frac{p_x}{p_y}$.

Σχ. V. 3.

Ἡ συνάρτησις ὠφελιμότητος δίδει, ὡς γνωρίζομεν, καμπύλας ἀδιαφορίας ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει σταθεράν τιμήν ἱκανοποιήσεως, ὁπότε τό συνολικόν διαφορικόν τῆς συναρτήσεως εἶναι μηδέν, ἤτοι

$$f_x\, dx + f_y\, dy = 0, \text{ ἐξ ἧς λαμβάνομεν}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις μᾶς λέγει ὅτι ὁ *ὁριακὸς λόγος ὑποκαταστάσεως τῶν δύο ἀγαθῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ὁριακῶν χρησιμοτήτων αὐτῶν.*

Τὸ συνολικὸν διαφορικὸν ἐπίσης τῆς ἐξισώσεως τοῦ εἰσοδήματος (περιορισμὸς) εἶναι

$\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}.$$

Ἀλλὰ $\varphi_x = -p_x$ καὶ $\varphi_y = -p_y$ καὶ συνεπῶς

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{p_x}{p_y}$, ἤτοι ἡ κλίσις τῆς εὐθείας.

Ἡ κλίσις τῆς καμπύλης ἀδιαφορίας εἰς τὸ σημεῖον ε εἶναι, ὡς ἀνωτέρω διεπιστώθη, ἴση πρὸς dy/dx. Ἀλλὰ καὶ ἡ κλίσις τῆς γραμμῆς εἰσοδήματος εἶναι dy/dx. Ἄρα εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς καμπύλης ἀδιαφορίας Ω_2 μετὰ τῆς γραμμῆς εἰσοδήματος θὰ ἔχωμεν

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

ἢ ἐπίσης $\dfrac{f_x}{f_y} = \dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}.$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως λαμβάνομεν

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \frac{f_y}{\varphi_y},$$

ἤτοι, ὁ *λόγος τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος τοῦ x πρὸς τὴν τιμὴν αὐτοῦ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος τοῦ y πρὸς τὴν τιμὴν αὐτοῦ.* Δηλαδὴ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ὡς εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον. Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν τοὺς λόγους τούτους ἴσους πρὸς ἕνα συντελεστὴν ($-\lambda$) θὰ λάβωμεν

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \frac{f_y}{\varphi_y} = -\lambda,$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν δύο ἐξισώσεις

$$f_x + \lambda\varphi_x = 0$$
$$f_y + \lambda\varphi_y = 0,$$

εἰς τὰς ὁποίας προσθέτομεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν-περιορισμὸν

$$I - \varphi(x, y) = 0.$$

Οὕτω τὸ ἀνωτέρω σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων ἀποτελεῖ τὴν πρώτην συνθήκην τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς συναρτήσεως, ὡς εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα. Αἱ ἀνωτέρω ὅμως ἐξισώσεις προέκυψαν ἐκ τῆς ἱκανοποιήσεως τοῦ σημείου ἐπαφῆς ε. Ἤτοι, διὰ τὴν ὕπαρξιν μεγίστου τῆς συναρτήσεως πρέπει νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη ἐπαφῆς

$$f_x / \varphi_x = f_y / \varphi_y .$$

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς τεχνικῆς τῆς μεγιστοποιήσεως διὰ τῆς ἀλγεβρικῆς ἀναλύσεως δύναται νὰ προκύψῃ καὶ ἐκ τῆς ἀναλύσεως τοῦ σημείου ἐπαφῆς εἰς τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα, ὡς ἀνωτέρω*.

Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ε καλεῖται σημεῖον ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ, διότι ἅπαξ οὗτος ἀπεφάσισε τὴν ἀγορὰν τοῦ συνδυασμοῦ x,y, δὲν ἔχει συμφέρον ὅπως ἀναθεωρήσῃ τὴν ἀπόφασίν του ταύτην. Ὁ συνδυασμὸς τοῦ σημείου ε εἶναι ὁ ἄριστος. Πᾶς ἕτερος δυνατὸς συνδυασμός, τὸν ὁποῖον δεικνύει ἡ γραμμὴ τοῦ εἰσοδήματος ἢ τῶν οἰκονομικῶν δυνατοτήτων, εἶναι κατώτερος τούτου. Οὕτως ὁ συνδυασμὸς τῶν ἀγαθῶν, τὸν ὁποῖον δεικνύει τὸ σημεῖον ε΄, ἐνῷ συνεπάγεται τὴν αὐτὴν δαπάνην ὡς καὶ ὁ ε, εἶναι κατώτερος, διότι ἀναφέρεται εἰς καμπύλην ἀδιαφορίας ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀριστερώτερον, ἤτοι εἰς κατώτερον ἐπίπεδον ἱκανοποιήσεως.

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω, διὰ νὰ δείξωμεν τὴν ἰσορροπίαν τοῦ καταναλωτοῦ, ἤτοι τὴν θέσιν εἰς ἣν οὗτος ἀποκομίζει τὴν μεγίστην ἱκανοποίησιν, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸν χάρτην ἀδιαφορίας τούτου καὶ τὴν γραμμὴν τοῦ εἰσοδήματος ἢ γραμμὴν τῶν τιμῶν, ὅπως ἄλλως καλεῖται, δοθέντος ὅτι ἡ κλίσις ταύτης δεικνύει τὸν λόγον τῶν τιμῶν τῶν δύο ἀγαθῶν. Ἡ γραμμὴ εἰσοδήματος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος συνδυασμῶν τῶν δύο ἀγαθῶν οἱ ὁποῖοι συνεπάγονται τὴν αὐτὴν δαπάνην. Ὁ χάρτης τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας ἐξ ἄλλου οὐδεμίαν πληροφορίαν δίδει αὐτὸς καθ' ἑαυτός, καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς τιμὰς καὶ τὰς οἰκονομικὰς δυνατότητας τοῦ καταναλωτοῦ καὶ συνεπῶς εἶναι ἀνεξάρτητος τούτων.

Τὰ δύο ταῦτα ὄργανα τῆς ἀναλύσεως τῆς ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ, ἤτοι αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας καὶ ἡ γραμμὴ εἰσοδήματος, δέον ὅπως κέκτηνται ὡρισμένας ἰδιότητας διὰ νὰ ἔχωμεν λογικὰ ἀποτελέσματα κατ' αὐτήν.

Ἔχομεν ἤδη ἀναφέρει τὰς ἰδιότητας τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας εἰς τὸ οἰκεῖον κεφάλαιον. Ἂς ἐξετάσωμεν ὅμως, τί θὰ συμβῇ, ἐὰν δὲν ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες αὗται: (α) Ἐὰν ἡ ἰδιότης τῆς ἀρνητικῆς κλίσεως δὲν ἰσχύῃ, τότε δὲν θὰ ὑπάρξῃ σημεῖον ἐπαφῆς, ὅπερ ἐξασφαλίζει κανονικῶς τὴν ἰσορροπίαν καὶ τὴν μεγιστοποίησιν τῆς ἱκανοποιήσεως τοῦ καταναλωτοῦ (Σχ. 4.α).

---

* Βλ. Archibald-Lipsey, op. cit., σελ. 237 - 241.

(β) Ἐὰν αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας τέμνωνται μεταξύ των, τότε δυνατὸν νὰ ὑπάρξουν πλείονα σημεῖα ἐπαφῆς καὶ συνεπῶς σημεῖα ἰσορροπίας (Σχ. 4.β.). (γ) Ἐὰν αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας εἶναι κοῖλαι πρὸς τὰ κάτω καὶ οὐχὶ κυρταὶ ὡς πρέπει, τότε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς δὲν δίδει πλέον τὸν συνδυασμὸν τῆς μεγίστης ἱκανοποιήσεως, διότι ἀναφέρεται εἰς κατωτέραν καμπύλην ἀδιαφορίας, ὡς δεικνύει τὸ Σχ.4.γ. Δεδομένου ὅτι ὁ συνδυασμὸς τοῦ σημείου ε κοστίζει ὅσον καὶ ὁ συνδυασμὸς τοῦ σημείου ε΄, ἕπεται ὅτι ὁ καταναλωτὴς θὰ ἐπιλέξῃ τὸ σημεῖον ε΄, ὡς εὑρισκόμενον εἰς ὑψηλοτέραν καμπύλην ἀδιαφορίας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ ὀρθολογικῶς δρῶν καταναλωτὴς θὰ δαπανήσῃ ὅλον τὸ εἰσόδημά του διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ ἀγαθοῦ x καὶ μόνον.

Οὕτως ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνθήκη ἐπαφῆς εἶναι ἐπαρκὴς διὰ νὰ ἐξασφαλίσῃ τὴν μεγιστοποίησιν καὶ συνεπῶς τὴν ἰσορροπίαν τοῦ καταναλωτοῦ μόνον, ὅταν αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας εἶναι κυρταὶ καὶ δὲν τέμνωνται. Τοῦτο ἀναλυτικῶς σημαίνει ὅτι πλὴν τῆς πληρώσεως τῆς πρώτης συνθήκης μεγιστοποιήσεως, ἀπαιτεῖται καὶ ἡ πλήρωσις τῆς δευτέρας συνθήκης $\frac{d^2\Omega}{dx^2} < 0$.

Ἐξ ἄλλου ἡ *γραμμὴ δαπάνης ἢ τιμῶν* δέον ὅπως κέκτηται τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας, ἐφ' ὅσον αἱ τιμαὶ τῶν δύο ἀγαθῶν εἶναι σταθεραί: (α) Δέον ὅπως εἶναι εὐθεῖα γραμμή. (β) Δέον ὅπως ἔχῃ ἀρνητικὴν κλίσιν. (γ) Ἡ κλίσις της εἶναι ἴση πρὸς τὸν ἀρνητικὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν τιμῶν, ἤτοι $dy/dx = -p_x/p_y$. (δ) Ἐκπληροῖ τὴν συνθήκην παραλληλίας, ὅταν μεταβάλλεται ἡ δαπάνη ἢ τὸ εἰσόδημα, ἀλλὰ αἱ τιμαὶ εἶναι αἱ αὐταί.

V.1.3. **Γενίκευσις τοῦ προβλήματος τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς ὠφελείας διὰ πλείονα τῶν δύο ἀγαθά.** Δυνάμεθα νὰ γενικεύσωμεν τὴν μεγιστοποίησιν τῆς συναρτήσεως εἰς περισσότερα τῶν δύο ἀγαθά. Οὕτως ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ καταναλωτὴς καταναλίσκει ν ἀγαθὰ εἰς ἑκάστην περίοδον, ὁπότε ἡ συνάρτησις ὠφελιμότητος εἶναι

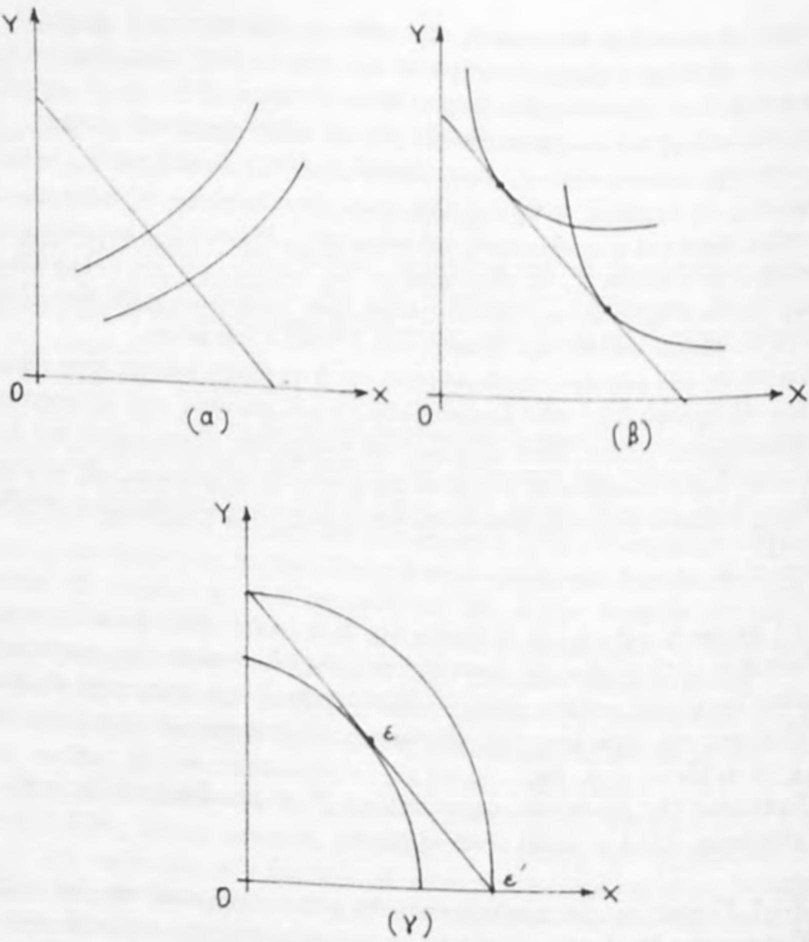
$$\Omega = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu).$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ εἰσοδήματος ἢ τῆς δαπάνης εἶναι

$$I = \sum_{i=1}^{\nu} p_i x_i, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu).$$

Σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Lagrange

$$V = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu) - \lambda \left(I - \sum_{i=1}^{\nu} p_i x_i \right).$$



Σχ. V. 4.

Ἡ πρώτη συνθήκη μεγιστοποιήσεως τῆς συναρτήσεως εἶναι

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = f_i - \lambda p_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu).$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = I - \sum_{i=1}^{\nu} p_i x_i = 0$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω συνθήκηςδυνάμεθα νὰ γράψωμεν.

$$\frac{f_1}{p_1} = \frac{f_2}{p_2} = \ldots = \frac{f_\nu}{p_\nu}.$$

Διὰ νὰ ἐξασφαλίσωμεν ὅτι εἷς συνδυασμὸς ἐκ τῶν ἀγαθῶν εἶναι ὁ ἄριστος πρέπει νὰ πληρωθῇ καὶ ἡ δευτέρα συνθήκη διὰ τοῦ καθορισμοῦ τῶν ἑσσιανῶν ὁριζουσῶν, ὡς εἰς τὴν μαθηματικὴν εἰσαγωγὴν τοῦ παρόντος κεφαλαίου ἀναλύεται.

V.1.4. **Προσδιορισμὸς τῆς καμπύλης ζητήσεως ἐκ τῆς συναρτήσεως ὠφελιμότητος.** Ὡς γνωστὸν ἡ καμπύλη ζητήσεως ἀγαθοῦ ἀπεικονίζει τὰς ζητουμένας ποσότητας ὡς συνάρτησιν τῆς τιμῆς τούτου. Μία τοιαύτη καμπύλη ζητήσεως διὰ τὸν καταναλωτὴν δύναται νὰ προκύψῃ ἐκ τῆς ἀτομικῆς συναρτήσεως ὠφελιμότητος.

Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις ὠφελιμότητος τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι: $\Omega = xy$.

Αἱ ὁριακαὶ χρησιμότητες τῶν ἀγαθῶν εἶναι:

$$f_x = y \quad \text{καὶ} \quad f_y = x$$

Γνωρίζομεν ἤδη ὅτι μία πρώτη συνθήκη μεγιστοποιήσεως τῆς χρησιμότητος εἶναι: $\dfrac{f_x}{p_x} = \dfrac{f_y}{p_y}$.

Ἀντικαθιστῶμεν καὶ ἔχομεν: $\dfrac{y}{p_x} = \dfrac{x}{p_y}$.

Λύοντες ὡς πρὸς y καὶ x λαμβάνομεν ἀντιστοίχως

$$y = x\frac{p_x}{p_y} \quad \text{καὶ} \quad x = y\frac{p_y}{p_x}.$$

Τὰς ἐξισώσεις ταύτας ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν εἰσοδήματος καὶ λαμβάνομεν:

$$I = xp_x + x\frac{p_x}{p_y}p_y, \quad \text{διὰ τὸ } x$$

$$I = y\frac{p_y}{p_x}p_x + yp_y, \quad \text{διὰ τὸ } y.$$

Συνεπῶς: $x = \dfrac{I}{2p_x}$ καὶ $y = \dfrac{I}{2p_y}$.

Αἱ τελευταῖαι δύο ἐξισώσεις δύνανται νὰ ἑρμηνευθοῦν ὡς ἡ ζήτησις τοῦ καταναλωτοῦ διὰ τὰ ἀγαθὰ x καὶ y. Ἐφ' ὅσον εἶναι δεδομένα τὸ εἰσόδημα καὶ αἱ τιμαὶ δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ποσότητες, αἱ ὁποῖαι, σημειωθήτω, ἀνταποκρίνονται πρὸς τὴν συγκεκριμένην συνάρτησιν ὠφελιμότητος, ἐξ ἧς προῆλθον αἱ συναρτήσεις ζητήσεως. Αἱ συναρτήσεις αὗται εἶναι συνεχεῖς μονότιμοι καὶ ὁμογενεῖς πρώτου βαθμοῦ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς μόνον συνδυασμὸς ἀγαθοῦ ἀντιστοιχεῖ πρὸς δεδομένον σύνολον τιμῶν καὶ εἰσοδήματος καὶ ὅτι εἰς περίπτωσιν αὐξήσεως τῶν τιμῶν καὶ τοῦ εἰσοδήματος, αἱ ζητούμεναι ποσότητες παραμένουν ἀμετάβλητοι.

Ἐκ τῆς ἐξετάσεως τῶν ἀνωτέρω συναρτήσεων ζητήσεως προκύπτει ὅτι: (α) Ὅταν τὸ εἰσόδημα εἶναι σταθερὸς ἀριθμός, τότε ἡ ζήτησις ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν καὶ εὑρίσκεται εἰς ἀρνητικὴν συσχέτισιν πρὸς ταύτας, ἤτοι γενικώτερον D = α/p. (β). Ὅταν αἱ τιμαὶ εἶναι σταθεραί, τότε ἡ ζήτησις ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν μεταβολῶν τοῦ εἰσοδήματος καὶ εὑρίσκεται εἰς θετικὴν πρὸς τοῦτο συσχέτισιν, ἤτοι D = βI. (γ) Δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτησις ζητήσεως προέκυψεν ἐκ τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος, ἕπεται ὅτι αἱ προτιμήσεις τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι δεδομέναι καὶ συνεπῶς αἱ ζητούμεναι ποσότητες ἐπηρεάζονται μόνον ἐκ τῶν μεταβολῶν τοῦ εἰσοδήματος καὶ τῆς τιμῆς, ἤτοι D = f(p, I).

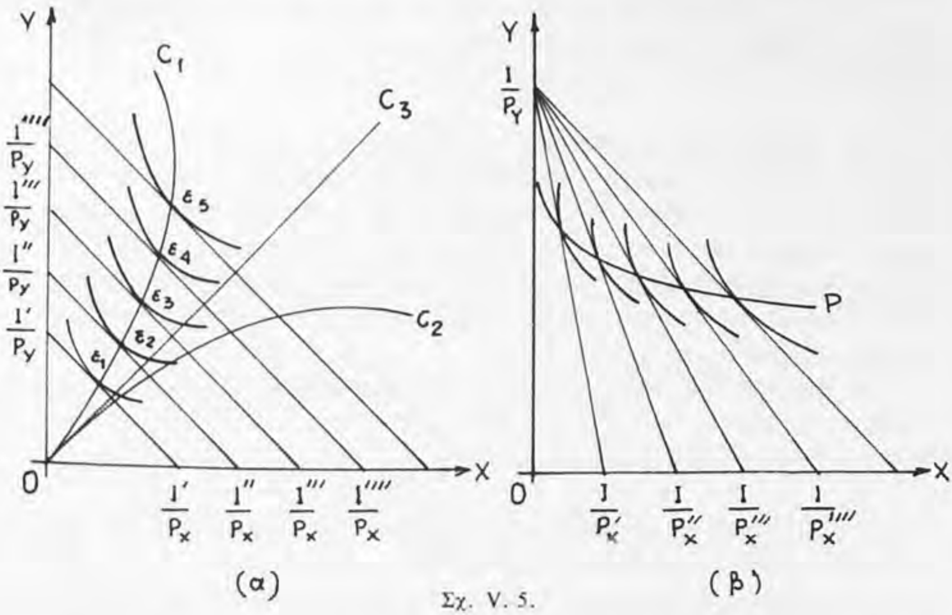
V.1.5. **Μεταβολαὶ τῆς θέσεως ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ λόγῳ μεταβολῶν τοῦ εἰσοδήματος καὶ τῆς τιμῆς.** Εἴδομεν εἰς τὴν παράγραφον V.1.2. ὅτι τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ, ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς τεχνικῆς τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας, εἶναι τὸ ε, ἤτοι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς γραμμῆς τοῦ εἰσοδήματος πρὸς μίαν τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας. Τὸ σημεῖον δὲ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο ὅπερ δίδει τὴν μεγίστην ἱκανοποίησιν ὑπὸ συνθήκας δεδομένου εἰσοδήματος καὶ σταθερῶν τιμῶν.

Ἐὰν τὸ εἰσόδημα τοῦ καταναλωτοῦ αὐξηθῇ, τότε ἡ γραμμὴ εἰσοδήματος θὰ μετατεθῇ πρὸς τὰ ἄνω δεξιὰ ἄνευ ἀλλαγῆς τῆς κλίσεως ταύτης, ἐφ' ὅσον ἡ σχέσις τῶν τιμῶν τῶν δύο ἀγαθῶν παραμένη σταθερά. Οὕτω διὰ τῆς μεταβολῆς τοῦ εἰσοδήματος ἢ τῶν οἰκονομικῶν δυνατοτήτων τοῦ καταναλωτοῦ μεταβάλλεται ἡ θέσις ἰσορροπίας τούτου, ὡς τὸ Σχ. V.5.(α) δεικνύει. Αὐξανομένων τῶν οἰκονομικῶν δυνατοτήτων τοῦ καταναλωτοῦ, οὗτος ἀνέρχεται εἰς ὑψηλότερα ἐπίπεδα ἱκανοποιήσεως, ἀκολουθῶν τὴν γραμμὴν ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ διαδοχικὰ σημεῖα ἰσορροπίας καὶ ἡ ὁποία καλεῖται *εἰσοδηματικὴ γραμμὴ καταναλώσεως* (income-consumption curve). Ἡ γραμμὴ αὐτὴ καλεῖται καὶ *καμπύλη τοῦ Engel*.

Τὴν ἐπίδρασιν τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ἡ μεταβολὴ τοῦ εἰσοδήματος ἐπὶ τῆς θέσεως ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ καλοῦμεν *εἰσοδηματικὸν ἀποτέλεσμα* (income effect). Κανονικῶς ἡ αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος συνεπάγεται τὴν αὔξησιν καταναλώσεως ἀμφοτέρων τῶν ἀγαθῶν, καὶ ἐφ' ὅσον τὸ ἀποτέλεσμα ἐπὶ τῆς καταναλώσεως εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ἀμφότερα τὰ ἀγαθά, τότε τοῦτο καλεῖται οὐδέτερον καὶ δεικνύεται διὰ τῆς εἰσοδηματικῆς γραμμῆς OC_3*. Πολλάκις ὅμως συμβαίνει ὥστε ἡ αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος τοῦ καταναλωτοῦ νὰ ὁδηγῇ τοῦτον εἰς μεγαλυτέραν κατανάλωσιν ἐκ τοῦ ἑνὸς ἀγαθοῦ, ἔστω y, καὶ εἰς μικροτέραν αὔξησιν τῆς καταναλώσεως ἐκ τοῦ ἑτέρου ἀγαθοῦ. Τοῦτο συμβαίνει εἰς τὸ τμῆμα OE_1 τῆς εἰσοδηματικῆς γραμμῆς OC_1. Ἡ περαιτέρω ὅμως αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος δυνατὸν νὰ ὁδηγήσῃ

* Εἰς τὸ Σχ. V 5 (α) δὲν δίδονται αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας διὰ τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς OC_2 καὶ OC_3, ἀλλ' ἁπλῶς φανταζόμεθα τὴν ὕπαρξίν των, ἐφ' ὅσον μελετῶμεν τὰς ἀντιστοίχους γραμμάς.

τελικῶς εἰς μείωσιν τῆς καταναλώσεως τοῦ ἀγαθοῦ x, ὡς δεικνύει ἡ ἀρνητικὴ κλίσις τοῦ τμήματος E_4C_1 τῆς εἰσοδηματικῆς γραμμῆς OC_1. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ εἰσοδηματικὸν ἀποτέλεσμα ἀπὸ θετικὸν μετατρέπεται εἰς ἀρνητικόν. Ὁσάκις προκύπτει ἀρνητικὸν εἰσοδηματικὸν ἀποτέλεσμα λέγομεν ὅτι τὰ ἀγαθὰ εἶναι κατώτερα (inferior goods).



Σχ. V. 5.

Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ὅτι ἡ καμπύλη ζητήσεως τοῦ κατωτέρου ἀγαθοῦ θὰ ἔχῃ θετικὴν κλίσιν, ὅπερ σημαίνει ὅτι ὁ καταναλωτὴς ἐκτιμᾶ τὰ ἀγαθὰ ἐκ τῆς ὑψηλῆς τιμῆς των. Τὸ φαινόμενον τοῦτο δύναται νὰ ἀποκληθῆ ἀποτέλεσμα κενοδόξου στάσεως (snob effect) καὶ προϋποθέτει ὅτι ὁ χάρτης ἀδιαφορίας τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι συνάρτησις τῶν τιμῶν.

Εἶναι ἐπίσης δυνατὸν ὁ χάρτης ἀδιαφορίας νὰ εἶναι κατασκευασμένος κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ εἰσοδηματικὴ γραμμὴ νὰ λάβῃ τὸ σχῆμα τῆς OC_2. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ εἰσοδηματικὸν ἀποτέλεσμα εἶναι μεροληπτικὸν πρὸς τὸ ἀγαθὸν x, ἐνῶ τὸ ἀγαθὸν y εἶναι κατώτερον.

Τέλος δέον νὰ σημειωθῆ ὅτι ἡ εἰσοδηματικὴ γραμμὴ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, ὅπερ σημαίνει ὅτι εἰς εἰσόδημα μηδὲν οὐδεμία κατανάλωσις εἶναι δυνατή.

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν ἐπίδρασιν ἣν ἔχει ἡ μεταβολὴ τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ἀγαθοῦ ἐπὶ τῆς ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ x μειοῦται, ἐνῶ ἡ τιμὴ τοῦ y καὶ τὸ εἰσόδημα παραμένουν σταθερά, τότε ἡ γραμμὴ τῶν οἰκονομικῶν δυνατοτήτων τοῦ καταναλωτοῦ θὰ λάβῃ τὰς θέσεις τὰς ὁποίας δεικνύει τὸ Σχ. V.5.(β) εἰς ἑκάστην μείωσιν τῆς τιμῆς τοῦ x. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ μείωσις τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ x ὁδηγεῖ εἰς μεγαλυτέραν κατανάλωσιν τούτου καὶ εἰς μετάβασιν εἰς ὑψηλοτέρας καμπύλας ἀδιαφορίας, ἤτοι εἰς ὑψηλότερα ἐπίπεδα ἱκανοποιήσεως, ὡς ἐμφαίνουν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα ἐπαφῆς (ἰσορροπίας) τῶν γραμμῶν εἰσοδήματος μετὰ τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας. Ἡ γραμμὴ ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ σημεῖα ταῦτα καλεῖται καμπύλη τιμῶν — καταναλώσεως (price-consumption curve) ἢ καμπύλη καταναλώσεως λόγῳ μεταβολῆς τῆς τιμῆς*.

Ἂς σημειωθῇ ὅτι ἡ καμπύλη αὐτη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου I/p_y, τὸ ὁποῖον δεικνύει τὴν ποσότητα τοῦ ἀγαθοῦ y τὴν ὁποίαν θὰ κατηνάλισκε ὁ καταναλωτής, ἐὰν διέθετε ὅλον τὸ εἰσόδημά του διὰ τὴν ἀγορὰν τούτου. Τοῦτο πράγματι θὰ ἔπραττεν, ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ x καθίστατο λίαν ὑψηλή, ἤτοι ἡ γραμμὴ οἰκονομικῶν δυνατοτήτων ἔτεινε πρὸς καθετότητα ἢ σύμπτωσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y. Τοῦτο ἑρμηνεύει διατί ἡ καμπύλη τιμῶν - καταναλώσεως ἐκκινεῖ ἐκ τοῦ σημείου I/p_y.

Ἡ ἀνωτέρω ἀναλυθεῖσα μεταβολὴ τῆς ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ λόγῳ μεταβολῆς τῆς τιμῆς καλεῖται ἀποτέλεσμα λόγῳ μεταβολῆς τῆς τιμῆς (price effect).

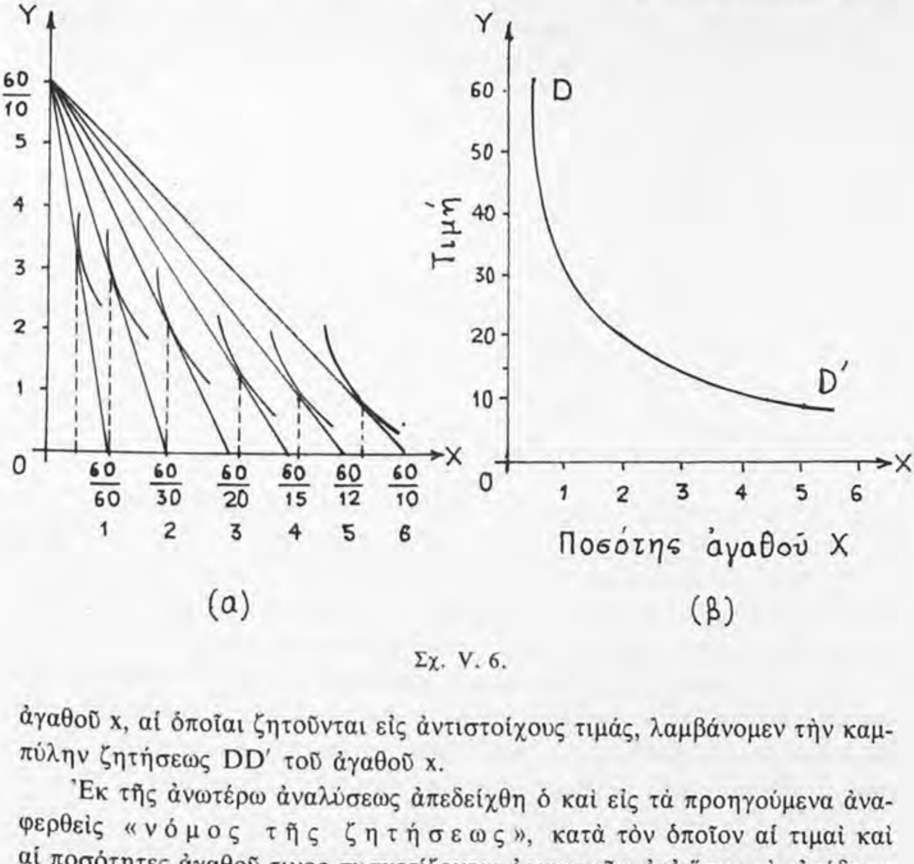
V.1.6. **Κατασκευὴ τῆς καμπύλης ζητήσεως τοῦ καταναλωτοῦ ἐκ τῆς καμπύλης τιμῆς-καταναλώσεως.** Εἴδομεν εἰς τὴν παράγραφον V.1.4. πῶς προσδιορίζεται ἡ συνάρτησις ζητήσεως τοῦ καταναλωτοῦ δι' ὡρισμένον ἀγαθὸν ἐκ τῆς συναρτήσεως ὠφελιμότητος. Ἐνταῦθα θὰ ἐπιχειρήσωμεν τὴν κατασκευὴν τῆς ἀτομικῆς καμπύλης ζητήσεως χρησιμοποιοῦντες τὴν ἀνάλυσιν τῶν διαδοχικῶν σημείων ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ λόγῳ ἐπιδράσεως τῶν μεταβολῶν τῆς τιμῆς τοῦ x.

Οὕτως, ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ y καὶ τὸ εἰσόδημα τοῦ καταναλωτοῦ παραμένουν σταθερὰ καὶ ὅτι μόνον ἡ τιμὴ τοῦ x μειοῦται, τότε θὰ ἔχωμεν τὸ γράφημα (α) τοῦ Σχ V.6. Τὸ γράφημα τοῦτο κατεσκευάσθη μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὸ εἰσόδημα τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι 60 ν.μ. καὶ ἡ τιμὴ τοῦ y εἶναι 10 ν.μ. Ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι 30 ν.μ., τότε διατιθεμένου τοῦ εἰσοδήματος καθ' ὁλοκληρίαν εἰς τὸ x θὰ ἀγορασθοῦν 2 μονάδες τούτου. Ἀλλὰ τὸ εἰσόδημα διατίθεται μεταξὺ τοῦ y καὶ τοῦ x, καὶ συνεπῶς, δεδομένου τοῦ χάρτου τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας εἰς τιμὴν τοῦ x ἴσην πρὸς 30 ν.μ. καὶ σταθερὰν τιμὴν τοῦ y ἴσην πρὸς 10 ν.μ., θὰ ἀγορασθῇ 1 μονὰς τοῦ x. Εἰς τιμὴν

* Βλ. καὶ Α. Λάζαρη, Εἰσαγωγικὰ Μαθήματα Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως 1961, σελ. 114.

τοῦ x ἴσην πρὸς 20 ν.μ. καὶ τιμὴν τοῦ y ἴσην πρὸς 10 ν.μ., θὰ ἀγορασθοῦν 2 μονάδες τοῦ x κ.ο.κ. Αἱ ἑκάστοτε ἀγοραζόμεναι ποσότητες τοῦ x ἐμφαίνονται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος ἐὰν φέρωμεν καθέτους ἐπ' αὐτοῦ γραμμὰς ἐκ τῶν διαφόρων σημείων ἰσορροπίας, ἡ ἕνωσις τῶν ὁποίων ἀποτελεῖ τὴν γραμμὴν τιμῆς-καταναλώσεως.

Ἐὰν εἰς τὸ γράφημα (β) τοῦ Σχ. V.6. ἀπεικονίσωμεν τὰς ποσότητας τοῦ



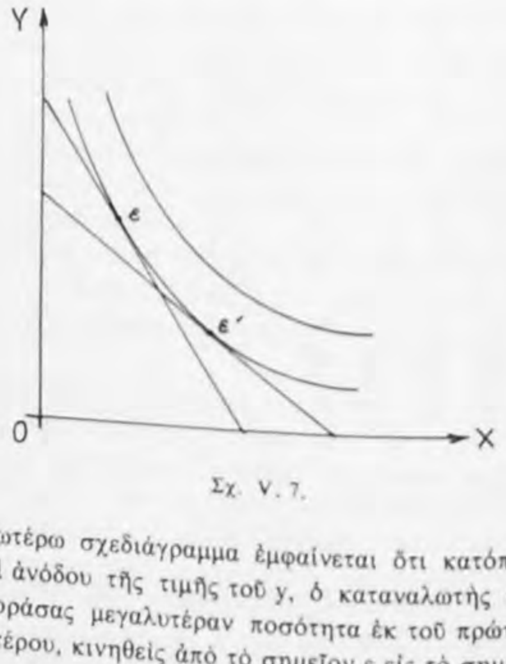
Σχ. V. 6.

ἀγαθοῦ x, αἱ ὁποῖαι ζητοῦνται εἰς ἀντιστοίχους τιμάς, λαμβάνομεν τὴν καμπύλην ζητήσεως DD' τοῦ ἀγαθοῦ x.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως ἀπεδείχθη ὁ καὶ εἰς τὰ προηγούμενα ἀναφερθεὶς «νόμος τῆς ζητήσεως», κατὰ τὸν ὁποῖον αἱ τιμαὶ καὶ αἱ ποσότητες ἀγαθοῦ τινος συσχετίζονται ἀρνητικῶς, ἐφ' ὅσον τὸ εἰσόδημα καὶ αἱ τιμαὶ τῶν λοιπῶν ἀγαθῶν παραμένουν σταθερά.

V.1.7. **Τὸ ἀποτέλεσμα ὑποκαταστάσεως.** Εἴδομεν ὅτι τὸ εἰσοδηματικὸν ἀποτέλεσμα ἐπιφέρει μετάστασιν τοῦ σημείου ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ ἀπὸ τῆς μιᾶς εἰς ἑτέραν καμπύλην ἀδιαφορίας. Οὕτως ἡ αὔξησις τῶν οἰκονομικῶν δυνατοτήτων τοῦ καταναλωτοῦ φέρει τοῦτον εἰς καμπύλην ἀδιαφορίας ἀνωτέρας ἱκανοποιήσεως, ἤτοι εἰς σημεῖον ταύτης ὅπερ δεικνύει ἀνώτερον τοῦ προηγουμένου συνδυασμὸν ἀγαθῶν.

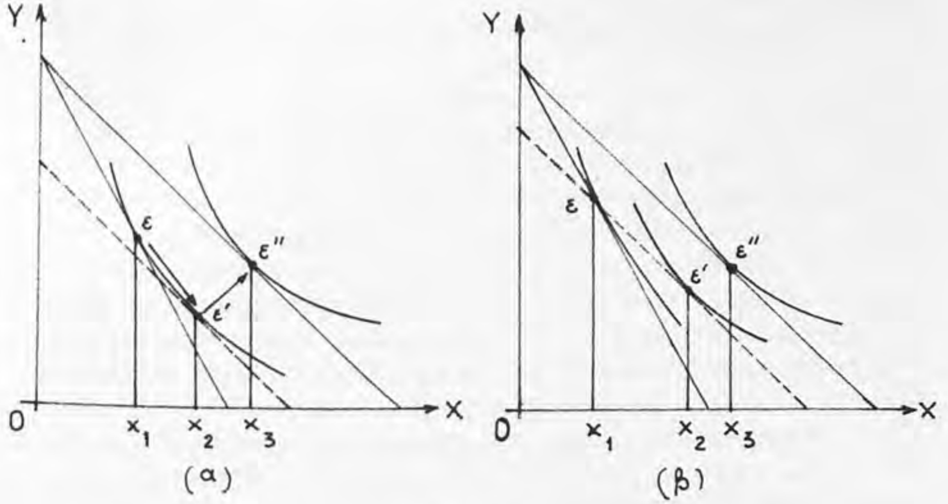
Εἶναι ὅμως σύνηθες διὰ τὸν καταναλωτὴν νὰ κινῆται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης ἀδιαφορίας, πρᾶγμα ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ ἀποκομιζομένη ἱκανοποίησις εἶναι ἡ αὐτὴ ἀνεξαρτήτως τῆς κινήσεως, ἀλλὰ μεταβάλλεται μόνον ὁ συνδυασμὸς τῶν ἀγαθῶν. Τὸ φαινόμενον τοῦτο συμβαίνει ὅταν μεταβάλλωνται αἱ τιμαὶ τῶν δύο ἀγαθῶν καὶ ἐκ τῆς μεταβολῆς ταύτης οὐδεμία μεταβολὴ τῶν οἰκονομικῶν δυνατοτήτων τοῦ καταναλωτοῦ ἐπέρχεται ἢ ἀκόμη ὅταν πᾶσα μεταβολὴ τῆς συνολικῆς ἱκανοποιήσεως ἀντισταθμίζεται ἀπὸ ἀνάλογον μεταβολὴν τοῦ εἰσοδήματος. Τὸ φαινόμενον τοῦτο, ὅπερ ἐμφανίζεται εἰς τὸ Σχ. V, καλεῖται ἀ π ο τ έ λ ε σ μ α ὑ π ο κ α τ α σ τ ά σ ε ω ς (substitution effect).



Σχ. V. 7.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω σχεδιάγραμμα ἐμφαίνεται ὅτι κατόπιν πτώσεως τῆς τιμῆς τοῦ x καὶ ἀνόδου τῆς τιμῆς τοῦ y, ὁ καταναλωτὴς προέβη εἰς ὑποκατάστασιν ἀγοράσας μεγαλυτέραν ποσότητα ἐκ τοῦ πρώτου καὶ μικροτέραν ἐκ τοῦ δευτέρου, κινηθεὶς ἀπὸ τὸ σημεῖον ε εἰς τὸ σημεῖον ε΄.

V.1.8. **Ἡ ἀνάλυσις τοῦ ἀποτελέσματος τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς εἰς εἰσοδηματικὸν ἀποτέλεσμα καὶ ἀποτέλεσμα ὑποκαταστάσεως.** Ὡς γίνεται ἀντιληπτὸν ἐκ τοῦ Σχ. V.5.(β), ἡ μεταβολὴ τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ x, τῆς τιμῆς τοῦ y παραμενούσης ἀμεταβλήτου, μεταφέρει τὸν καταναλωτὴν εἰς ὑψηλοτέραν καμπύλην ἀδιαφορίας, πρᾶγμα ὅπερ σημαίνει αὔξησιν τῶν οἰκονομικῶν δυνατοτήτων του ἢ αὔξησιν, ὡς θὰ ἐλέγομεν, τοῦ πραγματικοῦ εἰσοδήματός του. Συγχρόνως ὅμως, λόγῳ τοῦ ὅτι τὸ ἀγαθὸν x κατέστη εὐθηνότερον, οὗτος καταναλίσκει περισσοτέραν ποσότητα ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ τούτου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ λόγῳ μεταβολῆς τῆς τιμῆς ἀποτέλεσμα ἐπὶ τῆς ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ δύναται νὰ διακριθῇ εἰς δύο ἐπὶ μέρους ἀποτελέσματα: τὸ ἀποτέλεσμα ὑποκαταστάσεως καὶ τὸ εἰσοδηματικὸν ἀποτέλεσμα.



Σχ. V. 8.

Ἀκολουθοῦντες τὸν J.R. Hicks* δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν τὰ δύο ἐπιμέρους συστατικὰ τοῦ ἀποτελέσματος τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς εἰς τὸ Σχ V.8.(α). Ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ μὲ δεδομένας τιμὰς καὶ δεδομένον εἰσόδημα εἶναι ε. Κατόπιν τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς τοῦ x τὸ νέον σημεῖον ἰσορροπίας εἶναι ε'' ἐπὶ ἀνωτέρας καμπύλης ἀδιαφορίας. Φέρομεν κατόπιν τὴν διακεκομμένην γραμμήν, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν νέαν γραμμὴν τιμῶν, καὶ ἡ ὁποία ἐφάπτεται ἐπὶ τῆς πρώτης καμπύλης ἀδιαφορίας εἰς τὸ σημεῖον ε'. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ σημείου ε' πρὸς τὸ σημεῖον ε'' ἀποτελεῖ τὸ εἰσοδηματικὸν ἀποτέλεσμα, δεδομένου ὅτι ἔχομεν μετάβασιν ἀπὸ τῆς μιᾶς εἰς τὴν ἑτέραν καμπύλην ἀδιαφορίας. Ἐξ ἄλλου ἡ μετάβασις ἀπὸ τοῦ σημείου ε εἰς τὸ σημεῖον ε' ἀποτελεῖ τὸ ἀποτέλεσμα ὑποκαταστάσεως, δεδομένου ὅτι δεικνύει τὴν ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης ἀδιαφορίας κίνησιν τοῦ καταναλωτοῦ, λόγῳ μεταβολῆς τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ x.

Τὴν διάκρισιν μεταξὺ τῶν δύο ἀποτελεσμάτων πρὸ τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς (σημεῖον ε) καὶ μετὰ τὴν μεταβολὴν (σημεῖον ε'') δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν ἐπίσης ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ ἀγαθοῦ x, ἀφοῦ φέρομεν εὐθείας

---

* J.R. Hicks and R.G.D. Allen, «A Reconsideration of the Theory of Value», Economica, Febr. 1934 καὶ May 1934.

γραμμάς ἐκ τῶν σημείων ε, ε΄ καὶ ε΄΄. Τὸ ὅλον ἀποτέλεσμα λόγῳ μεταβολῆς τῆς τιμῆς εἶναι εἰς ὅρους x ἡ ποσότης $x_1 x_3$. Αὕτη διακρίνεται εἰς τὴν ποσότητα $x_1 x_2$, λόγῳ ὑποκαταστάσεως, καὶ εἰς $x_2 x_3$, λόγῳ εἰσοδηματικοῦ ἀποτελέσματος.

Ἄς ἔλθωμεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἀποτελέσματος τῆς τιμῆς κατὰ τὸν Slutsky. Οὗτος ὥρισε τὸ πραγματικὸν εἰσόδημα ἀνεξαρτήτως τῆς ἀναφορᾶς πρὸς τὸ σύστημα τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας τοῦ καταναλωτοῦ. Κατὰ τὸν Slutsky, ἡ γραμμὴ εἰσοδήματος (διακεκομμένη), ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ ἀρχικοῦ σημείου ἰσορροπίας καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν νέαν γραμμὴν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου ε΄΄, ἀντιπροσωπεύει τὸ αὐτὸ περίπου πραγματικὸν εἰσόδημα ὡς καὶ τὸ ἀρχικὸν (Σχ. V.8.(β)). Ἐφ᾽ ὅσον ὡς εἴδομεν, ἅπαντα τὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς εἰσοδήματος συνεπάγωνται τὴν αὐτὴν δαπάνην, τότε τὰ σημεῖα ε καὶ ε΄ συνεπάγονται τὴν αὐτὴν δαπάνην, ὡς εὑρισκόμενα ἐπὶ τῆς διακεκομμένης γραμμῆς εἰσοδήματος. Ἀλλ᾽ ὁ καταναλωτὴς ἐκινήθη ἀπὸ τοῦ σημείου ε εἰς τὸ σημεῖον ε΄ ὑποκαθιστῶν ἀγαθὸν x εἰς τὸ ἀγαθὸν y, λόγῳ τοῦ ὅτι τὸ πρῶτον κατέστη εὐθηνότερον τοῦ δευτέρου (ἀποτέλεσμα ὑποκαταστάσεως). Περαιτέρω, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ μείωσις τῆς τιμῆς τοῦ x ηὔξησε τὸ πραγματικὸν εἰσόδημα τοῦ καταναλωτοῦ, οὗτος κινεῖται ἐκ τῆς διακεκομμένης γραμμῆς (σημεῖον ε΄) εἰς τὴν νέαν γραμμὴν εἰσοδήματος καὶ συγκεκριμένως εἰς τὸ σημεῖον ε΄΄ τοῦ γραφήματος (β) τοῦ Σχ. V.8.

Καὶ πάλιν τὸ ὅλον ἀποτέλεσμα, λόγῳ μεταβολῆς τῆς τιμῆς, εἰς ὅρους x εἶναι κατὰ τὸν Slutsky ἡ ποσότης $x_1 x_3$, ἡ ὁποία συντίθεται ἐκ τῆς ποσότητος $x_1 x_2$ (ἀποτέλεσμα ὑποκαταστάσεως) καὶ $x_2 x_3$ (εἰσοδηματικὸν ἀποτέλεσμα).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως τοῦ συνθέτου ἀποτελέσματος τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς κατὰ Hicks καὶ Slutsky, προκύπτει ὅτι ἡ μεταξὺ τῶν δύο τούτων διαφορὰ ἀναλύσεως ὀφείλεται εἰς τοὺς διαφορετικοὺς ὁρισμοὺς τοῦ πραγματικοῦ εἰσοδήματος τοὺς ὁποίους εἶχον ὑπ᾽ ὄψιν των. Κατὰ τὸν Hicks τὸ ἐπίπεδον τοῦ πραγματικοῦ εἰσοδήματος εἶναι οἱοσδήποτε συνδυασμὸς ἀγαθῶν ἀντιπροσωπευόμενος ὑπὸ σημείου ἐπὶ μιᾶς καμπύλης ἀδιαφορίας καὶ συνεπῶς ἀποτελεῖ ποσότητα ἱκανοποιήσεως. Ἀντιθέτως ὁ Slutsky, ὥρισε τὸ πραγματικὸν εἰσόδημα ὡς ἀντιπροσωπευόμενον ὑπὸ σημείου τῆς γραμμῆς εἰσοδήματος, ἀνεξαρτήτως τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας τοῦ καταναλωτοῦ.

Κατ᾽ ἀκολουθίαν τῆς ὅλης ἀναλύσεως καθίσταται πλέον σαφὴς ἡ σημασία τῆς ἀναλύσεως τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῆς καμπύλης ζητήσεως. Ὁ κανονικὸς «νόμος τῆς ζητήσεως», ὅστις ἀποβαίνει ἡ ἀρνητικὴ κλίσις τῆς καμπύλης ταύτης, ἑρμηνεύεται πλέον διὰ τῶν δύο ἐπὶ μέρους ἐπιδράσεων, ἤτοι τοῦ εἰσοδηματικοῦ καὶ τοῦ ἀποτελέσματος ὑποκαταστάσεως. Οὕτως ἡ μείωσις τῆς τιμῆς ἀγαθοῦ τινος συνεπάγεται τὴν αὔξησιν τῆς ζητουμένης ποσότητος τούτου, ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι ἡ μείωσις αὕτη ηὔξησε τὴν ἀγοραστικὴν δύναμιν τοῦ καταναλωτοῦ, ceteris paribus, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι ὁ καταναλωτὴς ἀγοράζει μεγαλυτέραν ποσότητα λόγῳ ὑποκαταστάσεως τούτου εἰς ἕτερα ἀγαθά, ἅτινα εἶναι σχετικῶς ἀκριβώτερα.

V.1.9. **Ἡ διαδικασία ἐπιλογῆς τοῦ καταναλωτοῦ ὑπὸ πλείονας τοῦ ἑνὸς περιορισμούς.** Εἰς τὰ προηγούμενα εἴδομεν ὅτι ἡ διαδικασία ἐπιλογῆς τοῦ καταναλωτοῦ συνίσταται εἰς τὴν προσπάθειαν μεγιστοποιήσεως τῆς ὠφελείας ἐκ τῆς καταναλώσεως δύο ἢ περισσοτέρων ἀγαθῶν ὑπὸ τὸν περιορισμὸν τοῦ εἰσοδήματός του καὶ μόνον. Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ καὶ ἕτερος περιορισμός, ὁπότε τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς καθίσταται δυσκολώτερον. Οὕτως εἰς τὸ ὑπόδειγμα τῶν δύο ἀγαθῶν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν πλὴν τοῦ περιορισμοῦ τοῦ εἰσοδήματος καὶ τὸν περιορισμὸν ὅτι ἡ κατανάλωσις τοῦ ἀγαθοῦ x δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ ὡρισμένην ποσότητα. Τοιαύτη εἶναι ἡ περίπτωσις καθ' ἣν, λόγῳ ἐκτάκτων ἀναγκῶν ἢ περιστάσεων, καθορίζεται ἀναγκαστικὴ κατανομὴ τοῦ ἀγαθοῦ (ration).

Διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν ἑνὸς τοιούτου προβλήματος θὰ πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν μαθηματικὴν τεχνικὴν τῆς παραγράφου V.0.6. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν συνάρτησιν ὠφελιμότητος $\Omega = f(x,y)$, τὴν ἐξίσωσιν τοῦ εἰσοδήματος $I = p_x x + p_y y$ (πρῶτος περιορισμός), καὶ τὸν περιορισμὸν ὅτι ἡ ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ x πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς μίαν σταθεράν, $x = \alpha$. Σχηματίζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὴν Λαγκρανζιανὴν συνάρτησιν:

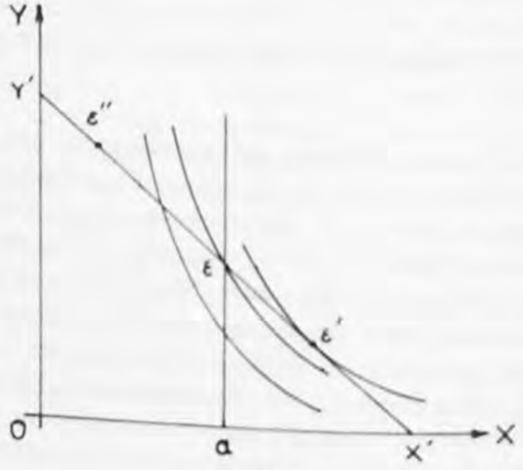
$$V = f(x,y) - \lambda\ (I - p_x x - p_y y) - \mu\ (x - \alpha),$$

καὶ ἐξισώνομεν τὰς μερικὰς παραγώγους ὡς πρὸς x, y, λ καὶ μ πρὸς τὸ μηδὲν (πρώτη συνθήκη). Ἐφ' ὅσον εἴμεθα βέβαιοι περὶ τῆς κυρτότητος τῶν καμπύλων ἀδιαφορίας, τότε ἀρκούμεθα εἰς τὴν πλήρωσιν τῆς πρώτης συνθήκης. Ἄλλως προχωροῦμεν κατὰ τὴν γνωστὴν διαδικασίαν, ἥτις εἶναι ἀρκούντως κουραστική.

Γεωμετρικῶς* δυνάμεθα νὰ παρουσιάσωμεν τὸ ὑπόδειγμα τῶν δύο ἀγαθῶν — δύο περιορισμῶν ὡς εἰς τὸ Σχ. V.9. Ἐκ τοῦ γραφήματος τούτου καθίσταται φανερὸν ὅτι, συμφώνως πρὸς τοὺς τεθέντας περιορισμούς, μόνον τὸ σημεῖον ε δίδει τὴν μεγίστην ἱκανοποίησιν καὶ πληροῖ συγχρόνως τὸν περιορισμὸν τοῦ $x = \alpha$. Τὸ σημεῖον ε' δίδει μεγαλυτέραν ἱκανοποίησιν ὡς εὑρισκόμενον ἐπὶ ὑψηλοτέρας καμπύλης ἀδιαφορίας, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐφικτόν, καθ' ὅτι ἀπαιτεῖ μεγαλυτέραν ποσότητα ἐκείνης τοῦ τεθέντος περιορισμοῦ $x = \alpha$.

* Βλ. σχ. Archibald and Lipsey, op. cit., σελ. 256 - 258.

Ἐξ ἄλλου τὸ σημεῖον ε'' ἀντιπροσωπεύει συνδυασμὸν ἀγαθῶν περιέχοντα ποσότητα ἐκ τοῦ x μικροτέρα ἐκείνης τοῦ περιορισμοῦ.



Σχ. V. 9.

Οὕτως ἡ περιοχὴ τῶν ἐφικτῶν λύσεων ἀντιπροσωπεύεται ὑπὸ τοῦ μετώπου y'εα. Ἐκ τοῦ μετώπου τούτου τὸ τμῆμα ἀριστερώτερον τοῦ ε δὲν ἐπηρεάζεται ἐκ τοῦ περιορισμοῦ x = α καὶ συνεπῶς ἡ λύσις τῆς ἀνωτέρω Λαγκρανζιανῆς συναρτήσεως δὲν πρόκειται νὰ μᾶς δώσῃ σημεῖον ἐπ' αὐτοῦ. Τὸ τμῆμα τῆς γραμμῆς τοῦ εἰσοδήματος, ὅπερ εὑρίσκεται δεξιώτερον τοῦ ε, ἀντιπροσωπεύει ἀνεφίκτους λύσεις, διότι αἱ ποσότητες τοῦ x δὲν πληροῦν τὸν περιορισμὸν x = α. Περιττὸν νὰ λεχθῇ ὅτι ὁ πρῶτος περιορισμός, ἤτοι ὁ περιορισμὸς τοῦ εἰσοδήματος, πληροῦται εἰς πᾶν σημεῖον ἐπὶ τῆς γραμμῆς y'x'. Κατ' ἀκολουθίαν ὁ μόνος συνδυασμὸς ὅστις πληροῖ ἀμφοτέρους τοὺς περιορισμοὺς εἶναι ὁ τοῦ σημείου ε. Τὸ σημεῖον τοῦτο εὑρίσκεται ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν γραμμῶν τῶν περιορισμῶν, ἤτοι εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τούτων καὶ εἶναι καὶ τὸ μοναδικὸν σημεῖον*. Ἤτοι ὁ καταναλωτὴς οὐδεμίαν ἐπιλογὴν ἔχει καὶ συνεπῶς οὐδὲν πρόβλημα ἐπιλογῆς ἀντιμετωπίζει.

---

* Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται περιωρισμένη ἡ γωνιακὴ λύσις τοῦ προβλήματος τῆς ἐπιλογῆς (corner solution). Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι, ἐὰν οἱ περιορισμοὶ ἐδίδοντο ὡς ἀνισότητες καὶ οὐχὶ ὡς ἰσότητες, τότε ἡ ὁριακὴ τεχνικὴ δὲν θὰ ἠδύνατο νὰ ἀντιμετωπίσῃ τὸ πρόβλημα καὶ συνεπῶς θὰ ἔπρεπε νὰ προσφύγωμεν εἰς ἑτέρας τεχνικάς, ὡς καὶ εἰς τὴν παράγραφον V.0.5 ἐτονίσθη.

V.2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΕΩΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΝ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΝ

V.2.0. **Εἰσαγωγή.** Ἡ παραγωγικὴ μονάς, ἡ ὁποία ἀσχολεῖται μὲ τὴν παραγωγήν, μεταφορὰν καὶ διανομὴν τῶν ἀγαθῶν, ἔχει σαφεῖς ὁμοιότητας μὲ τὴν καταναλωτικὴν μονάδα. Τὸ πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἐπιλογῆς ὑφίσταται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτης. Ἡ παραγωγικὴ μονάς, ὡς μονὰς ἀποφάσεων, θὰ πρέπει ἑκάστοτε νὰ ἐπιλέγῃ μεταξὺ πολλῶν τὴν ἀρίστην λύσιν βασιζομένην ἐπὶ τοῦ θεμελιώδους ἀξιώματος τῆς οἰκονομικῆς συμπεριφορᾶς, ἤτοι τοῦ ἀξιώματος τῆς ὀρθολογικότητος. Ἡ προσπάθεια ταύτης συνήθως τείνει πρὸς ἀριστοποίησιν μιᾶς ποσότητος, ὡς εἶναι τὸ προϊόν, τὸ κέρδος, αἱ συνολικαὶ εἰσπράξεις κ.λπ, ὅπως ἀκριβῶς ἡ ὠφέλεια τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι ἡ πρὸς μεγιστοποίησιν ποσότης.

Κατὰ δὲ τὴν διαδικασίαν ἐπιλογῆς ἡ παραγωγικὴ μονὰς περιορίζεται εἰς τὴν λῆψιν ἀποφάσεως ὑφ' ὡρισμένων ἐμποδίων, ὡς ἀκριβῶς ἑκάστη οἰκονομικὴ δραστηριότης κυριαρχεῖται ὑπὸ τῆς δραματικῆς σχέσεως τῶν ἀπεριορίστων ἀναγκῶν πρὸς τὰ περιωρισμένα μέσα. Ἡ μεγιστοποίησις τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς τελεῖ ὑπὸ τὸν περιορισμὸν τῶν δεδομένων μέσων παραγωγῆς ἢ τῆς δεδομένης συνολικῆς δαπάνης διὰ τὴν ἀπασχόλησιν παραγωγικῶν συντελεστῶν. Ἐξ ἄλλου ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς δαπάνης παραγωγῆς, ἤτοι ἡ ἐξεύρεσις τοῦ ἀρίστου συνδυασμοῦ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, ὅστις ἐλαχιστοποιεῖ τὸ κόστος δεδομένης παραγωγῆς, τελεῖ ὑπὸ τὸν περιορισμὸν τὸν ὁποῖον θέτει ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς τῆς μονάδος, ἡ ὁποία περιγράφει τὰς ὑφισταμένας τεχνολογικὰς σχέσεις εἰς ταύτην.

Ἀνεξαρτήτως λοιπὸν οἰκονομικοῦ συστήματος ἢ μορφῆς ἀγορᾶς, ἡ παραγωγικὴ δρᾶσις τελεῖ ὑπὸ περιορισμοὺς καὶ κυριαρχεῖται γενικῶς ὑπὸ τῆς δραματικῆς οἰκονομικῆς ἀρχῆς. Εἰς τὴν ἐλευθέραν οἰκονομίαν ἡ ἐπιχείρησις, δρῶσα ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ, σκοπὸν ἔχει ὅπως μεγιστοποιήσῃ τὰ κέρδη της εἰς δεδομένην χρονικὴν περίοδον. Πρὸς τοῦτο δὲ αὕτη δὲν περιορίζεται ἐξ οὐδεμιᾶς τῶν δύο μεταβλητῶν, ἡ διαφορὰ τῶν ὁποίων δίδει τὸ οἰκονομικὸν κέρδος. Ἤτοι αὕτη δύναται νὰ μεταβάλλῃ τόσον τὸ συνολικὸν κόστος, ὅσον καὶ τὴν συνολικὴν πρόσοδόν της. Ἀντικειμενικὸς σκοπός της εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς διαφορᾶς.

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἀριστοποιήσεως εἰς τὴν παραγωγὴν διακρίνεται εἰς δύο ἐπὶ μέρους προβλήματα: τὸ πρόβλημα τῆς μεγιστοποιήσεως ὑπὸ τὴν πίεσιν κάποιου περιορισμοῦ (δεδομένα μέσα, δεδομένη συνολικὴ δαπάνη), καὶ τὸ πρόβλημα τῆς ἐλαχιστοποιήσεως ὑπὸ τὸν δεσμὸν κάποιου περιορισμοῦ (συνάρτησις παραγωγῆς). Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους ὑπὸ τῆς ἐπιχειρήσεως, ἡ διαδικασία δέν ἀπαιτεῖ τήν ὕπαρξιν περιορισμοῦ, ὡς ἐλέχθη, ἀλλ' αὕτη δύναται νά μεταβάλλη τόσον τήν συνολικήν πρόσοδον, ὅσον καί τό συνολικόν κόστος.

Ὑπάρχει ποιά τις σύγχυσις καθ' ὅσον ἀφορᾶ εἰς τήν ἔννοιαν τοῦ κέρδους καί τήν ὑπόθεσιν τῆς μεγιστοποιήσεως τούτου. Ὡς κέρδος ὁρίζομεν τήν διαφοράν μεταξύ συνολικῆς προσόδου καί συνολικοῦ κόστους, ἐφ' ὅσον εἰς τό τελευταῖον τοῦτο ὑπολογισθοῦν ὁ μισθός τοῦ ἐπιχειρηματίου καί λοιπαί τεκμαρταί δαπάναι, ὡς τό κόστος εὐκαιρίας τοῦ ἰδίου κεφαλαίου κ.λπ. Ὁ ὑπολογισμός τοῦ κέρδους, παρά ταῦτα, δέν εἶναι εὔκολος. Ἀπαιτεῖται ὅμως ἕν μέτρον τῆς μεγιστοποιούσης συμπεριφορᾶς καί συνεπῶς πρέπει νά καθορίσωμεν τοῦτο, ἔστω καί ἀνεπαρκῶς. Ὁ καθορισμός τοῦ χρονικοῦ ὁρίζοντος τοῦ κέρδους εἶναι ἔτι δυσκολώτερος, δεδομένου ὅτι πολλαί δαπάναι γίνονται ἄνευ γνώσεως τοῦ συγκεκριμένου χρόνου ἀποδόσεως τούτων. Ἐξ ἄλλου, ἡ μεγιστοποιοῦσα συμπεριφορά δέν εἶναι βέβαιον ὅτι ἐπικρατεῖ πάντοτε κατά τήν δρᾶσιν τῶν ἐπιχειρήσεων. Ἡ ἐπιχείρησις προσβλέπουσα εἰς τό μέλλον εἶναι πιθανόν νά δέχεται εἰς τό παρόν μικρά ἤ καθόλου κέρδη ἤ ἀκόμη καί ζημίαν. Πέραν ὅμως τούτου αὐτή αὕτη ἡ ὑπόθεσις τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους ὡς βάσις τῆς ἐπιχειρηματικῆς συμπεριφορᾶς, ἠμφισβητήθη πολλάκις, ὡς ἄγουσα εἰς εἰδικήν ἐπιχειρηματικήν ψυχολογίαν* ἤ ἀπροσδιοριστίαν τοῦ μεγέθους τῆς ἐπιχειρήσεως. Παρά ταῦτα ὅμως, ὡς ὑπόθεσις διευκολύνει τά μέγιστα τήν οἰκονομικήν ἀνάλυσιν καί οὕτω τήν δεχόμεθα.

Καί ἐκτός τῆς περιοχῆς τοῦ μικροκόσμου, εἰς τήν περιοχήν τοῦ μακροκόσμου ἡ διαδικασία τῆς οἰκονομικῆς ἐπιλογῆς εἶναι τό κεντρικόν πρόβλημα. Μονάδες ἀποφάσεων ἐνταῦθα εἶναι οἱ ἀσκοῦντες τήν οἰκονομικήν πολιτικήν καί οἱ θέτοντες τούς στόχους τοῦ οἰκονομικοῦ προγράμματος. Σημαντικόν πρόβλημα εἶναι ἡ ἀρίστη κατανομή τῶν ἐθνικῶν πόρων, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τήν ἐπίτευξιν τοῦ μεγίστου δυνατοῦ ἀποτελέσματος (παραγωγῆς ἤ γενικῆς εὐημερίας) διά τῶν δεδομένων πόρων. Ἡ μεγιστοποίησις τοῦ προϊόντος τῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς, ὑπό συνθήκας πλήρους χρησιμοποιήσεως τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, συνίσταται εἰς τήν προσπάθειαν τῆς ἐπιτεύξεως τοῦ αὐτοῦ προϊόντος εἰς ὅλας τάς χρήσεις ἑκάστου συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς.

Εἰς τά ἑπόμενα θά ἐπιχειρήσωμεν τήν ἀνάλυσιν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων ἐξάγοντες θεμελιώδη θεωρήματα τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως διά τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως**.

---

* Βλ. σχετικήν ἐπιχειρηματολογίαν εἰς τό ἄρθρον τοῦ T. Scitovsky, «A Note on Profit Maximisation and its Implications», Review of Economic Studies, Vol. XI (1943), σελ. 57 - 60.

** Διά μίαν ἀναλυτικήν παρουσίασιν τῆς μεγιστοποιούσης συμπεριφορᾶς εἰς τήν παραγωγικήν δρᾶσιν ὅρα P.A. Samuelson, op. cit., Κεφ. IV.

V.2.1. **Ἡ μεγιστοποίησις τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς.** Κατ᾽ ἀρχὰς ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν ὑφίσταται οὐδεὶς περιορισμὸς εἰς τὴν ἀπασχόλησιν παραγωγικῶν συντελεστῶν, ἤτοι ἡ παραγωγικὴ μονὰς δύναται νὰ χρησιμοποιῆ τούτους εἰς τὴν δεδομένην τιμὴν εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον ὅπερ μεγιστοποιεῖ τὸ προϊόν. Ἐκκινοῦντες ἐκ τοῦ ὑποδείγματος «ἓν προϊὸν — δύο συντελεσταί», θὰ προβῶμεν εἰς τὴν μεγιστοποίησιν τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς

$$Q = f(x, y),$$

ὅπου Q = προϊὸν τῆς παραγωγῆς,
x = ὁ πρῶτος συντελεστής,
y = ὁ δεύτερος συντελεστής.

Ἡ πρώτη συνθήκη εἶναι: τὰ ὁριακὰ προϊόντα τῶν συντελεστῶν πρέπει νὰ εἶναι μηδέν,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = f_x = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = f_y = 0.$$

Ἡ δευτέρα συνθήκη εἶναι:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0 \quad ἤ \quad f_{xx}f_{yy} > (f_{xy})^2$$

καὶ $f_{xx} < 0$, $f_{yy} < 0$.

Ἡ μεγιστοποίησις ὅμως τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς τελεῖ ὑπὸ τὸν περιορισμὸν τῆς δυνατότητος δαπάνης. Οὕτως, ὡς ὁ καταναλωτὴς προσπαθεῖ νὰ μεγιστοποιήσῃ τὴν ἱκανοποίησίν του δεσμευόμενος ὑπὸ τοῦ εἰσοδήματός του, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἡ παραγωγικὴ μονὰς προσπαθεῖ νὰ μεγιστοποιήσῃ τὸ προϊὸν τῆς παραγωγῆς δεσμευομένη ὑπὸ τοῦ κόστους. Πρὸς μεγιστοποίησιν τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς ἀπαιτεῖται συνεπῶς ἡ γνῶσις τῆς συναρτήσεως κόστους. Ἔστω ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι

$$C_T = r_1x + r_2y + \alpha,$$

ὅπου r_1 καὶ r_2 εἶναι αἱ ὡρισμέναι τιμαὶ τῶν ὑπηρεσιῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν x καὶ y ἀντιστοίχως. Τὸ α εἶναι τὸ σταθερὸν κόστος καὶ συνεπῶς τὸ (r_1x+r_2y) εἶναι τὸ συνολικὸν μεταβλητὸν κόστος.

Σχηματίζομεν τὴν Λαγκρανζιανὴν συνάρτησιν

$$V = f(x,y) + \lambda(C_T - r_1x - r_2y - \alpha).$$

Θέτομεν τὰς μερικὰς παραγώγους τῆς V ὡς πρὸς x,y καὶ λ ἴσας πρὸς τὸ μηδὲν (πρώτη συνθήκη)

$$V_x = f_x - \lambda r_1 = 0,$$
$$V_y = f_y - \lambda r_2 = 0,$$
$$V_\lambda = C_T - r_1x - r_2y - \alpha = 0,$$

Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων διὰ διαιρέσεως καὶ μεταφορᾶς εἰς τὸ δεξιὸν μέρος λαμβάνομεν

$$f_x / f_y = r_1 / r_2.$$

Ἄρα ἡ πρώτη συνθήκη μεγιστοποιήσεως τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς ἀπαιτεῖ, ὅπως ὁ λόγος τῶν ὁριακῶν προϊόντων τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν τιμῶν τούτων.

Λύοντες ὡς πρὸς λ, λαμβάνομεν

$$\lambda = \frac{f_x}{r_1} = \frac{f_y}{r_2}.$$

Ἤτοι τὸ ὁριακὸν προϊὸν τῆς τελευταίας νομισματικῆς μονάδος τῆς δαπανωμένης δι' ἀγορὰν συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς πρέπει νὰ εἶναι ἴσον διὰ κάθε συντελεστὴν καὶ συγκεκριμένως ἴσον πρὸς λ. Ἄρα ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τοῦ Lagrange εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι ὅτι οὗτος ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ ὁριακὸν προϊὸν τῆς τελευταίας δαπανωμένης νομισματικῆς μονάδος. Τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνομεν τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως κόστους

$$dC_T = r_1 dx + r_2 dy.$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ἀντικαθιστῶμεν ὅπου $r_1 = f_x/\lambda$ καὶ $r_2 = f_y/\lambda$ καὶ ἔχομεν

$$dC_T = 1/\lambda\ (f_x dx + f_y dy).$$

Λαμβάνομεν ἐπίσης τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς

$$dQ = f_x\, dx + f_y\, dy,$$

ὅπερ διαιροῦμεν διὰ τοῦ dC_T καὶ ἔχομεν

$$\frac{dQ}{dC_T} = \frac{f_x\, dx + f_y\, dy}{\frac{1}{\lambda}(f_x\, dx + f_y\, dy)} = \lambda.$$

Ἄρα τὸ λ εἶναι ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τοῦ προϊόντος πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ κόστους.

Ἕτερον θεώρημα, ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης συνθήκης μεγιστοποιήσεως, εἶναι ὅτι ὁ λόγος τῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὁριακὸν λόγον ὑποκαταστάσεως τούτων. Πράγματι δεδομένου ὅτι f_x/f_y = ὁ.λ.ὑ. ἔχομεν: ὁ.λ.ὑ. $= r_1/r_2$. Ἡ τελευταία αὐτη ἔκφρασις γεωμετρικῶς ἑρμηνεύεται ὡς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς γραμμῆς ἴσου κόστους καὶ τῆς καμπύλης ἀδιαφορίας τῆς παραγωγῆς (καμπύλη ἴσου προϊόντος), ὡς κατωτέρω θὰ ἴδωμεν.

Ἐφ' ὅσον εἴμεθα βέβαιοι ὅτι αἱ καμπύλαι ἴσου προϊόντος αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς εἶναι κυρταὶ πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων, τότε ἀρκοῦν τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα διὰ νὰ ἐξασφαλίσουν τὴν μεγιστοποίησιν. Ἄλλως θὰ πρέπει νὰ πληρωθῇ καὶ ἡ δευτέρα συνθήκη, καθ' ἣν ἡ ἑσσιανὴ ὁρίζουσα πρέπει νὰ εἶναι θετική.

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & -r_1 \\ f_{yx} & f_{yy} & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ ρυθμὸς μεταβολῆς τοῦ ὁ.λ.ὑ. πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς ($d^2x/dy^2 > 0$).

V.2.2. **Ἐλαχιστοποίησις τοῦ κόστους. — Ὁ ἄριστος συνδυασμὸς τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς.** Εἴδομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς ἀριστοποιήσεως συνίστατο εἰς τὴν ἐπίτευξιν τοῦ μεγίστου προϊόντος μὲ δεδομένον τὸ κόστος ἢ τὴν δαπάνην δι' ἀγορὰν ὑπηρεσιῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν. Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν ἀκριβῶς τὸ ἀντίστροφον. Ἤτοι τὴν ἐπίτευξιν τοῦ ἐλαχίστου δυνατοῦ κόστους ἐν ὄψει δεδομένου προϊόντος τῆς παραγωγῆς. Τὸ ἐλάχιστον τοῦτο κόστος ἐπιτυγχάνεται ὅταν συνδυασθοῦν οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς κατὰ τὸν καλλίτερον τρόπον. Ὁ ἄριστος συνδυασμὸς (optimum factor combination) δίδει τὸ ἐλάχιστον κόστος (least — cost combination), ἀλλὰ τὸ ἐλάχιστον κόστος σημαίνει μεγίστην ἀπόδοσιν τῆς παραγωγῆς (maximum economic efficiency). Πρὸς ἀντιμετώπισιν τοῦ προβλήματος τούτου ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις τῶν παραγωγικῶν δυνατοτήτων (συνάρτησις παραγωγῆς) καὶ τῶν τιμῶν τῶν εἰσροῶν. Ἀμφότερα ταῦτα ἀποτελοῦν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος (given data), τὸ δὲ ἐλάχιστον κόστος ἀποτελεῖ τὸ ζητούμενον.

Εἰς τὸ πρόβλημα τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ κόστους ἡ ἀντικειμενικὴ συνάρτησις εἶναι ἡ τοῦ κόστους καὶ ὁ περιορισμὸς (constraint) εἶναι ἡ συνάρτησις παραγωγῆς, ἀκριβῶς δηλονότι, τὸ ἀντίστροφον ἐκείνου ὅπερ συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ προϊόντος.

Οὕτω σχηματίζομεν τὴν Λαγκρανζιανὴν συνάρτησιν

$$E = r_1x + r_2y + \alpha + \mu\,[Q - f\,(x,y)],$$

ὅπου μ ὁ μὴ εἰσέτι προσδιορισθεὶς πολλαπλασιαστὴς τοῦ Lagrange. Θέτομεν τὰς μερικὰς παραγώγους τῆς E ὡς πρὸς x,y καὶ μ ἴσας πρὸς μηδέν:

$$E_x = r_1 - \mu f_x = 0$$
$$E_y = r_2 - \mu f_y = 0$$
$$E_\mu = Q - f\,(x,\,y) = 0.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων, αἵτινες ἀποτελοῦν καὶ τὰς πρώτης τάξεως συνθήκας, λαμβάνομεν

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\frac{f_x}{r_1} = \frac{f_y}{r_2} = \frac{1}{\mu}$$

$$\text{ὁ. λ. ὑ.} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνθηκῶν προκύπτει ὅτι π ρ ο κ ε ι μ έ ν ο υ π ε ρ ὶ ἐ λ α χ ι σ τ ο π ο ι ή σ ε ω ς τ ο ῦ κ ό σ τ ο υ ς μ ὲ δ ε δ ο μ έ ν η ν τ ὴ ν π α ρ α γ ω γ ὴ ν ἰ σ χ ύ ο υ ν α ἱ α ὐ τ α ὶ σ υ ν θ ῆ κ α ι ὡ ς κ α ὶ π ρ ο κ ε ι μ έ ν ο υ π ε ρ ὶ μ ε γ ι σ τ ο π ο ι ή σ ε ω ς τ ο ῦ π ρ ο ϊ ό ν τ ο ς μ ὲ δ ε δ ο μ έ ν ο ν τ ὸ κ ό σ τ ο ς.

Ἐπίσης προκύπτει ὅτι ὁ πολλαπλασιαστὴς μ εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ λ, ἤτοι $\lambda = \frac{1}{\mu}$. Συνεπῶς τὸ μ εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{dC_T}{dQ}$, ἤτοι ὁ λόγος αὐξήσεως τοῦ κόστους ἔναντι μιᾶς αὐξήσεως τοῦ προϊόντος. Ἄρα ἡ ο ἰ κ ο ν ο μ ι κ ὴ ἔ ν ν ο ι α τ ο ῦ μ ε ἶ ν α ι ὅ τ ι ο ὗ τ ο ς ἀ ν τ ι σ τ ο ι χ ε ῖ π ρ ὸ ς τ ὸ ὁ ρ ι α κ ὸ ν κ ό σ τ ο ς ὅ π ε ρ σ υ ν ε π ά γ ε τ α ι ἡ ὁ ρ ι α κ ὴ μ ο ν ὰ ς τ ο ῦ π ρ ο ϊ ό ν τ ο ς.

Διὰ τὴν ὕπαρξιν ἐλαχίστου, ὡς γνωστόν, ἀπαιτεῖται ὅπως ἡ ἐσσιανὴ εἶναι ἀρνητική:

$$\begin{vmatrix} -\mu f_{xx} & -\mu f_{xy} & -f_x \\ -\mu f_{yx} & -\mu f_{yy} & -f_y \\ -f_x & -f_y & 0 \end{vmatrix} < 0.$$

Προβαίνοντες εἰς ἀντικατάστασιν ὅπου $-f_x = \frac{-r_1}{\mu}$ καὶ $-f_y = -\frac{r_2}{\mu}$, πολλαπλασιάζοντες τὰς πρώτας δύο στήλας ἐπὶ $-1/\mu$ καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζοντες τὴν τρίτην σειρὰν ἐπὶ $-\mu^2$ καὶ τὴν τρίτην στήλην ἐπὶ μ, λαμβάνομεν,

$$\begin{vmatrix} -\mu f_{xx} & -\mu f_{xy} & -r_1/\mu \\ -\mu f_{yx} & -\mu f_{yy} & -r_2/\mu \\ -r_1/\mu & -r_2/\mu & 0 \end{vmatrix} = \mu^2 \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & -r_1/\mu \\ f_{yx} & f_{yy} & -r_2/\mu \\ r_1/\mu^2 & r_2/\mu^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-1/\mu \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & -r_1 \\ f_{xy} & f_{yy} & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{vmatrix} < 0 \text{ καὶ } \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & -r_1 \\ f_{yx} & f_{yy} & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

δεδομένου ὅτι $\mu > 0$.

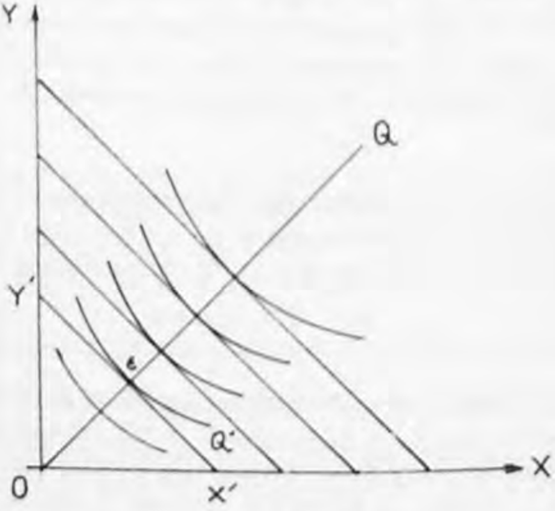
Ἐκ τῆς τελευταίας ἐσσιανῆς προκύπτει ὅτι ἡ δευτέρα συνθήκη διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλαχιστοποιήσεως εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μεγιστοποιήσεως. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μεταξὺ μιᾶς καμπύλης ἴσου προϊόντος καὶ τῆς γραμμῆς ἴσου κόστους, ἡ κλίσις τῆς ὁποίας εἶναι ὁ λόγος τῶν τιμῶν τῶν εἰσροῶν, εἶναι ἡ λύσις τόσον τοῦ προβλήματος τῆς ἐλαχιστοποιήσεως ὑπὸ περιορισμόν, ὅσον καὶ τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως ὑπὸ περιορισμόν. Τοῦτο θέλει φανῆ κατωτέρω διὰ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλύσεως.

V.2.3. **Γεωμετρικὴ παρουσίασις τῆς ἀριστοποιήσεως—Ἰσορροπία τῆς παραγωγικῆς μονάδος.** Ἡ ἐξίσωσις κόστους $C_T = r_1x + r_2y + \alpha$ δύναται νὰ λυθῇ ὡς πρὸς ἕνα τῶν συντελεστῶν ἢ εἰσροῶν τῆς παραγωγῆς, ὡς ἑξῆς:

$$x = \frac{C_T - \alpha}{r_1} - \frac{r_2}{r_1}\, y.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμὴν μὲ κλίσιν ἴσην πρὸς $-r_2/r_1$ καὶ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ διάγραμμα V. 10 διὰ τῆς γραμμῆς y′x′. Ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται *γραμμὴ ἴσου κόστους* καὶ *εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων ἅτινα ἀντιπροσωπεύουν τὸ αὐτὸ ποσὸν δαπάνης.* Ἑκάστη γραμμὴ ἡ ὁποία εὑρίσκεται δεξιώτερον ταύτης ἀντιπροσωπεύει ὑψηλότερον ἐπίπεδον δαπάνης. Ὡς γίνεται ἀντιληπτὸν ἡ κλίσις τῶν γραμμῶν τούτων εἶναι ἴση πρὸς τὸν λόγον τῶν τιμῶν τῶν δύο εἰσροῶν x καὶ y.

Ὡς γνωστὸν ἡ συνάρτησις παραγωγῆς μᾶς δίδει καμπύλας ἴσου προϊόντος, αἱ ὁποῖαι ἀπεικονίζονται εἰς τὸ αὐτὸ διάγραμμα. Εἰς τὸ σημεῖον ὅπου ἐφάπτεται ἡ γραμμὴ ἴσου κόστους μὲ μίαν τῶν καμπύλων ἴσου προϊόντος ἔχομεν τὴν πλήρωσιν τῆς συνθήκης ὁ.λ.ὑ. $= r_1/r_2$. Ἡ αὐτὴ ὅμως συνθήκη προέκυψεν, ὡς εἴδομεν, καὶ ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς παρουσιάσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀριστοποιήσεως. Οὕτω τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ε ἀποτελεῖ *σημεῖον ἀριστοποιήσεως* καὶ συνεπῶς *σημεῖον ἰσορροπίας* τῆς παραγωγικῆς μονάδος. Εἰς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας, ὡς διεπιστώθη, *ὁ λόγος τῶν τιμῶν τῶν δύο εἰσροῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὁριακὸν λόγον ὑποκαταστάσεως τούτων ἢ ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ὁριακῶν προϊόντων τῶν ἐπὶ μέρους εἰσροῶν,* ἤτοι $f_x / f_y = r_1/r_2$. Τὴν συνθήκην ταύτην δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὡς $f_x / r_1 = f_y / r_2$. Ἡ σημασία τῆς ἐξισώσεως ταύτης δύναται νὰ γίνῃ καλλίτερον ἀντιληπτή, ἐὰν λάβωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αὕτη δὲν ἰσχύει, ἤτοι $f_x / r_1 > f_y / r_2$. Ἡ ἀνισότης αὕτη σημαίνει ὅτι τὸ ὁριακὸν προϊὸν κατὰ νομισματικὴν μονάδα δαπανωμένην διὰ τὸν συντελεστὴν x εἶναι μεγαλύτερον ἐκείνου τοῦ y. Ὁπότε ὁ ὀρθολογικῶς δρῶν παραγωγὸς θὰ πρέπει νὰ ἀνακατανείμη τὴν συνολικὴν αὐτοῦ δαπάνην, κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἡ τελευταία χρηματικὴ μονὰς νὰ ἐπιφέρη τὸ αὐτὸ προϊόν, δαπανωμένη τόσον εἰς τὸ x, ὅσον καὶ εἰς τὸ y.

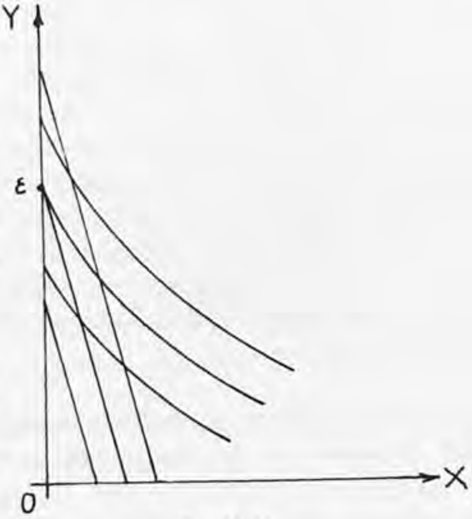


Σχ. V. 10.

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι **διὰ τῆς συμβολῆς τῶν καμπύλων ἴσου προϊόντος καὶ τῆς γραμμῆς ἴσου κόστους δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν γεωμετρικῶς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τῆς παραγωγικῆς μονάδος**. 'Αλλ' ὡς διαπιστοῦται, τὸ σημεῖον τοῦτο δύναται νὰ εἶναι εἴτε σημεῖον μεγιστοποιήσεως τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγῆς, εἴτε σημεῖον ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ κόστους, δεδομένου ὅτι, ὡς διεπιστώθη καὶ εἰς τὴν ἀναλυτικὴν παρουσίασιν τῆς ἀριστοποιήσεως, ἰσχύουν αἱ αὐταὶ συνθῆκαι εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις (συνθῆκαι ἐπαφῆς). Εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι δεδομένη ἡ γραμμὴ ἴσου κόστους καὶ ἐπιλέγομεν ἐπὶ ταύτης τὸ σημεῖον ἐκεῖνο ὅπερ ἀνήκει εἰς καμπύλην ἴσου προϊόντος εὑρισκομένου ὅσον τὸ δυνατὸν δεξιώτερον (μεγαλυτέρα παραγωγή). Καὶ τοιοῦτον σημεῖον εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι δεδομένη ἡ καμπύλη ἴσου προϊόντος καὶ ἐπιλέγομεν ἐπὶ ταύτης τὸ σημεῖον ἐκεῖνο ὅπερ ἀνήκει εἰς ὅσον τὸ δυνατὸν χαμηλοτέραν γραμμὴν ἴσου κόστους (μικρότερον κόστος). Καὶ τοιοῦτον σημεῖον εἶναι πάλιν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Οὕτως ἐὰν ἡ γραμμὴ y'x' τοῦ Σχ. V.10 εἶναι ἡ προκαθωρισμένη γραμμὴ κόστους, τότε ἡ μεγίστη παραγωγὴ εἶναι ἡ Q' Πᾶσαι αἱ καμπύλαι αἱ εὑρισκόμεναι ἀριστερώτερον ταύτης ἀντιπροσωπεύουν μικροτέραν παραγωγήν, δεξιώτερον δὲ ταύτης ἀνέφικτα ἐπίπεδα παραγωγῆς. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς Q' εἶναι προκαθωρισμένον, τότε τὸ ἐλάχιστον κόστος παραγωγῆς τούτου, μὲ δεδομένας τὰς τιμὰς τῶν συντελεστῶν, εἶναι τὸ δεικνυόμενον ὑπὸ τῆς x'y'.

Ἐὰν ἑνώσωμεν ὅλα τὰ σημεῖα ἰσορροπίας ἢ ἐπαφῆς, λαμβάνομεν τὴν γ ρ α μ μ ὴ ν ἀ ν α π τ ύ ξ ε ω ς (expansion path) τῆς παραγωγικῆς μονάδος, ἤτοι τὴν γραμμὴν OQ. Ὁ ὀρθολογικῶς δρῶν παραγωγὸς θὰ ἐπιλέγῃ ἑκάστοτε συνδυασμοὺς εἰσροῶν οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ταύτης, ἐφ' ὅσον ὑποτίθεται ὅτι αὐξάνει ἡ δυνατότης διενεργείας μεγαλυτέρων δαπανῶν.

Ἐνταῦθα δέον ὅπως ἀναφέρωμεν μίαν ἐνδιαφέρουσαν περίπτωσιν ἐπιλογῆς τοῦ ἀρίστου σημείου, καθ' ἣν εἷς μόνον συντελεστὴς τῆς παραγωγῆς τυγχάνει χρησιμοποιήσεως. Ὡς δεικνύει τὸ Σχ. V.11, ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ y εἶναι κατὰ πολὺ μικροτέρα ἐκείνης τοῦ συντελεστοῦ x. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ κλίσις τῆς γραμμῆς ἴσου κόστους (λόγος τιμῶν τῶν εἰσροῶν) εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχῃ σημεῖον ἐπαφῆς, εἰ μὴ μόνον τὸ σημεῖον ε, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται γ ω ν ι α κ ὴ λ ύ σ ι ς (corner solution) καὶ δὲν ἀπαιτεῖ, εἰ μὴ μόνον τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ συντελεστοῦ y. Ε ἰ ς τ ὴ ν π ε ρ ί π τ ω σ ι ν τ α ύ τ η ν α ἱ σ υ ν θ ῆ κ α ι ἰ σ ο ρ ρ ο π ί α ς δ ὲ ν ἀ π α ι τ ο ῦ ν τ ὴ ν ἐ ξ ί σ ω σ ι ν τ ῶ ν ὁ ρ ι α κ ῶ ν π ρ ο ϊ ό ν τ ω ν τ ῆ ς τ ε λ ε υ τ α ί α ς χ ρ η μ α τ ι κ ῆ ς μ ο ν ά δ ο ς τ ῆ ς δ α π α ν ω μ έ ν η ς ἐ π ὶ ἑ ν ὸ ς ἑ κ ά σ τ ο υ τ ῶ ν σ υ ν τ ε λ ε σ τ ῶ ν τ ῆ ς π α ρ α γ ω γ ῆ ς. Προφανῶς ἡ γωνιακὴ λύσις γίνεται δεκτὴ διότι οἰκονομικῶς δὲν νοοῦνται ἀρνητικαὶ ποσότητες τῶν εἰσροῶν, τὰς ὁποίας θὰ εἴχομεν ἐὰν ἐδεχόμεθα λύσεις ἐπαφῆς εἰς τὸ δεύτερον τεταρτημόριον τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων*.



Σχ. V. 11.

V.2.4. **Μεταβολαὶ τοῦ σημείου ἰσορροπίας τῆς παραγωγικῆς μονάδος.**

* Βλ. P.A. S a m u e l s o n, op. cit., σελ. 69.

Ἀνωτέρω εἴδομεν ὅτι τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τῆς παραγωγικῆς μονάδος καθορίζεται ἐφ' ὅσον εἶναι δεδομέναι αἱ τιμαὶ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν καὶ ἡ δυνατότης τῆς συνολικῆς δαπάνης, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μεγιστοποιήσεως, ἢ τὸ ἐπίπεδον τῆς παραγωγῆς εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλαχιστοποιήσεως. Ὅταν ὅμως μεταβάλλωνται αἱ τιμαὶ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, κατ' ἀνάγκην μεταβάλλεται ἡ κλίσις τῆς γραμμῆς ἴσου κόστους καὶ συνεπῶς καὶ τὸ σημεῖον ἰσορροπίας ἢ σημεῖον τῆς ἀριστοποιήσεως, ὡς ἀκριβῶς διεπιστώσαμεν εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ καταναλωτοῦ.

Ἐφ' ὅσον ὑπάρχῃ ἡ δυνατότης τῆς ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν εἰσροῶν τῆς παραγωγῆς, τότε ἡ μεταβολὴ τῆς τιμῆς τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο εἰσροῶν θὰ ὁδηγήσῃ εἰς ὑποκατάστασιν ταύτης εἰς τὴν ἑτέραν, ἤτοι χρησιμοποίησιν μεγαλυτέρων ποσοτήτων ἐκ τῆς εἰσροῆς ἐκείνης ἡ ὁποία κατέστη εὐθηνοτέρα. Τὸ νέον σημεῖον ἰσορροπίας θὰ πληροῖ καὶ πάλιν τὰς γνωστὰς συνθήκας ἰσορροπίας ἢ ἀριστοποιήσεως, μία τῶν ὁποίων εἶναι ὅτι ὁ λόγος τῶν τιμῶν τῶν δύο εἰσροῶν θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ὁριακῶν προϊόντων των ἢ τὸν ὁριακὸν λόγον ὑποκαταστάσεως τούτων.

Ἡ μεταβολὴ τοῦ σημείου ἰσορροπίας δύναται νὰ ἐπέλθῃ, ὡς εἰκός, ὄχι μόνον λόγῳ μεταβολῆς τῶν τιμῶν τῶν εἰσροῶν, ἀλλὰ καὶ λόγῳ μεταβολῆς τῶν οἰκονομικῶν δυνατοτήτων τῆς παραγωγικῆς μονάδος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ μονὰς βαδίζει ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἀναπτύξεως OQ, ἡ ὁποία εἶναι εὐθεῖα, ἐὰν ἡ συνάρτησις παραγωγῆς εἶναι ὁμογενὴς πρώτου βαθμοῦ, ὁπότε τὰ ὁριακὰ προϊόντα δὲν μεταβάλλονται ὅταν αὐξάνῃ ἡ κλῖμαξ παραγωγῆς, ἢ μὴ μόνον ὅταν μεταβάλλεται ἡ ἀναλογία τῶν εἰσροῶν. Ἡ μεταβολὴ ὅμως τῆς ἀναλογίας τῶν εἰσροῶν (input mix) λαμβάνει χώραν, ἐφ' ὅσον μεταβάλλωνται αἱ τιμαὶ τούτων.

V.2.5. **Ὁ ἄριστος συνδυασμὸς παραγωγῆς δύο ἀγαθῶν—Μεγιστοποίησις τῆς προσόδου τῆς παραγωγικῆς μονάδος.** Ἐνταῦθα θὰ ἀναλύσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς ἀριστοποιήσεως τῆς παραγωγικῆς μονάδος, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ ὑπόδειγμα «δύο προϊόντα — εἷς συντελεστής». Αὐτὴ εἶναι ἡ περίπτωσις τῆς συμπαραγωγῆς (joint production).

Ἤδη γνωρίζομεν ὅτι ἡ καμπύλη μετασχηματισμοῦ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον, τὰ ὁποῖα δεικνύουν συνδυασμοὺς δύο προϊόντων Q_1 καὶ Q_2, οἱ ὁποῖοι παράγονται διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς x. Ἡ συνάρτησις τῆς καμπύλης μετασχηματισμοῦ γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$x = \varphi(Q_1, Q_2).$$

Ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀπόστασις, εἰς ἣν εὑρίσκεται ἡ καμπύλη μετασχηματισμοῦ ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, τόσον μεγαλυτέρα ποσότης συμπαραγωγῆς καὶ συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς ἀντιπροσωπεύει, ὡς τὸ Σχ. V.12 ἐμφαίνει.

Τὸ πρόβλημα τῆς ἀριστοποιήσεως εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἔχομεν συμπαραγωγὴν συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ συνδυασμοῦ ἐκείνου τῆς παραγωγῆς τῶν δύο προϊόντων, ὅστις ἀποφέρει τὴν μεγίστην δυνατὴν πρόσοδον εἰς τὸν παραγωγόν, δεδομένων τῶν τιμῶν (ἢ κατὰ μονάδα κερδῶν)* τῶν προϊόντων καὶ ὑπὸ τὸν περιορισμὸν τῆς δεδομένης συναρτήσεως μετασχηματισμοῦ.

Ἐφ' ὅσον εἶναι γνωσταὶ αἱ τιμαὶ τῶν προϊόντων, τότε ὁ παραγωγὸς πωλῶν τὴν συμπαραγωγήν του θὰ εἰσπράξῃ,

$$R = p_1Q_1 + p_2Q_2$$

Ἀκριβῶς τὴν μεγιστοποίησιν τῆς συναρτήσεως ταύτης ἐπιζητοῦμεν διὰ δεδομένον ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς. Οὕτω σχηματίζομεν τὴν Λαγκρανζιανὴν συνάρτησιν

$$M = p_1Q_1 + p_2Q_2 + \lambda[x - \varphi(Q_1,Q_2)].$$

Θέτομεν τὰς μερικὰς παραγώγους ἴσας πρὸς τὸ μηδέν:

$$M_{Q_1} = p_1 - \lambda\varphi_1 = 0$$
$$M_{Q_2} = p_2 - \lambda\varphi_2 = 0$$
$$M_\lambda = x - \varphi(Q_1,Q_2) = 0.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο πρώτων ἐξισώσεων (πρώτης τάξεως συνθῆκαι) λαμβάνομεν

$$p_1/p_2 = \varphi_1/\varphi_2.$$

Τὰ φ_1 καὶ φ_2 εἶναι αἱ μερικαὶ παράγωγοι τῆς x ὡς πρὸς Q_1 καὶ Q_2, ἀντιστοίχως, ἤτοι τὰ ὁριακὰ κόστη τῶν προϊόντων Q_1 καὶ Q_2 εἰς ὅρους x. Οὕτω κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁ λόγος τῶν τιμῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ὁριακῶν κόστων. Περαιτέρω ἐκ τοῦ ὁλικοῦ διαφορικοῦ τῆς συναρτήσεως μετασχηματισμοῦ

$$dx = \frac{\partial x}{\partial Q_1}dQ_1 + \frac{\partial x}{\partial Q_2}dQ_2 = 0,$$

ἔχομεν $\dfrac{\partial x}{\partial Q_1} \Big/ \dfrac{\partial x}{\partial Q_2} = \dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\dfrac{dQ_2}{dQ_1}$ (ὁρ. λόγος μετασχηματισμοῦ).

Συνεπῶς εἰς ὡρισμένον σημεῖον τῆς καμπύλης μετασχηματισμοῦ ὁ ὁριακὸς λόγος μετασχηματισμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ὁριακῶν κόστων τῶν Q_1 καὶ Q_2 εἰς ὅρους x.

---

* Τὸ πρόβλημα δυνατὸν νὰ συνίσταται εἰς τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ συνολικοῦ κέρδους, ἐφ' ὅσον ἔχωμεν τὸ κατὰ μονάδα προϊόντος κέρδος ἀντὶ τῆς τιμῆς καὶ συνεπῶς τὴν συνάρτησιν $\Pi = \pi_1Q_1 + \pi_2Q_2$, ὅπου π_1 καὶ π_2 τὰ κατὰ μονάδα κέρδη.

Κατ' ἀκολουθίαν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἑτέραν ἔκφρασιν τῆς πρώτης συνθήκης μεγιστοποιήσεως.

$$p_1/p_2 = \text{ὁ.λ.μ.}$$

Ἤτοι ὁ λόγος τῶν τιμῶν τῶν δύο προϊόντων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὁριακὸν λόγον μετασχηματισμοῦ. Ἡ ἔκφρασις αὕτη ἀποτελεῖ τὴν συνθήκην ἐπαφῆς μεταξὺ καμπύλων μετασχηματισμοῦ καὶ γραμμῆς τιμῶν ἢ ἴσης προσόδου, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Ἀλλὰ δεδομένου ὅτι $\partial x/\partial Q_i = \varphi_i$ (ὁριακὸν κόστος εἰς ὅρους x), προκύπτει ὅτι καὶ $\partial Q_i \,/\, \partial x = 1/\varphi_i$ (ὁριακὸν προϊὸν τοῦ x) καὶ συνεπῶς:

$$\text{ὁ.λ.μ.} = \frac{\partial Q_2/\partial x}{\partial Q_1/\partial x} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Ἤτοι ὁ λόγος τῶν τιμῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ὁριακῶν προϊόντων.

Ἡ πρώτη συνθήκη ἐπίσης δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς, ἐφ' ὅσον λύσωμεν ὡς πρὸς λ:

$$\lambda = p_1/\varphi_1 = \frac{p_2}{\varphi_2},$$

$$\text{ἢ } \lambda = p_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x} = p_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x}.$$

Ἤτοι ἡ ὁριακὴ πρόσοδος ἡ λαμβανομένη ἐκ τῆς τελευταίας μονάδος κόστους πρέπει νὰ εἶναι ἴση διὰ κάθε προϊόν, ἢ τὸ ὁριακὸν χρηματικὸν προϊὸν (marginal revenue product)* τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι ἴσον διὰ κάθε προϊόν. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τοῦ πολλαπλασιαστοῦ λ εἰς τὴν Λαγκρανζιανὴν συνάρτησιν, κατὰ τὴν ὁποίαν οὗτος εἶναι τὸ ὁριακὸν χρηματικὸν προϊὸν ἢ ἡ παράγωγος τοῦ R ὡς πρὸς x**.

Ἡ δευτέρα συνθήκη μεγιστοποιήσεως, ἥτις ἐξασφαλίζει τὴν κοιλότητα τῶν καμπύλων μετασχηματισμοῦ, ἀπαιτεῖ ὅπως ἡ ἑσσιανὴ εἶναι θετική.

---

* Τὸ ὁριακὸν χρηματικὸν προϊὸν προκύπτει ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ὁριακὸν φυσικὸν προϊὸν $\left(\frac{\partial Qi}{\partial x}\right)$ ἐπὶ τὴν τιμὴν pi.

** Τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς R εἶναι $dR = p_1 dQ_1 + p_2 dQ_2$. Ἀντικαθιστῶντες ὅπου $p_1 = \lambda\varphi_1$ καὶ $p_2 = \lambda\varphi_2$ λαμβάνομεν $dR = \lambda(\varphi_1 dQ_1 + \varphi_2 dQ_2)$.

Ἐξ ἄλλου τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς $x = \varphi(Q_1, Q_2)$ εἶναι $dx = \varphi_1 dQ_1 - \varphi_2 dQ_2$. Διὰ διαιρέσεως τελικῶς τῶν δύο διαφορικῶν λαμβάνομεν.

$$\frac{dR}{dx} = \frac{\lambda(\varphi_1 dQ_1 + \varphi_2 dQ_2)}{\varphi_1 dQ_1 + \varphi_2 dQ_2} = \lambda.$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda\varphi_{11} & -\lambda\varphi_{12} & -\varphi_1 \\ -\lambda\varphi_{12} & -\lambda\varphi_{22} & -\varphi_2 \\ -\varphi_1 & -\varphi_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

ἢ δι᾿ ἀναπτύξεως $\lambda(\varphi_{11}\varphi_2^2 - 2\varphi_{12}\varphi_1\varphi_2 + \varphi_{22}\varphi_1^2) > 0$.

Τέλος θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἐπιζητεῖται ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς συναρτήσεως $x = \varphi(Q_1,Q_2)$, ὑποκειμένης εἰς τὸν περιορισμὸν τῆς προσόδου $R = p_1Q_1 + p_2Q_2$, ὁπότε σχηματίζομεν τὴν συνάρτησιν

$$Z = \varphi(Q_1,Q_2) + \mu(R - p_1Q_1 - p_2Q_2)$$

καὶ προχωροῦμεν εἰς τὴν λύσιν κατὰ τὰ γνωστά.

V.2.6. **Διαγραμματικὴ παρουσίασις τοῦ ὑποδείγματος «δύο προϊόντα —εἷς συντελεστὴς τῆς παραγωγῆς».** Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν διαγραμματικὴν παρουσίασιν τῆς ἀριστοποιήσεως τοῦ ὑποδείγματος «δύο προϊόντα — εἷς συντελεστὴς» καὶ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου ἰσορροπίας τῆς παραγωγικῆς μονάδος.

Λύοντες τὴν πρὸς μεγιστοποίησιν συνάρτησιν συνολικῆς προσόδου ὡς πρὸς Q_2 λαμβάνομεν

$$Q_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}Q_1.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις παριστᾶ εὐθεῖαν γραμμὴν μὲ κλίσιν ἴσην πρὸς $-p_1/p_2$ καὶ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ Σχ. V.12(α) διὰ τῆς $Q_2'Q_1'$. Ἡ γραμμὴ αὕτη εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων ἅτινα ἐμφαίνουν τὸ αὐτὸ προϊὸν συνολικῆς προσόδου διὸ καὶ γ ρ α μ μ ὴ ἴ σ η ς π ρ ο σ ό δ ο υ (isorevenue curve) καλεῖται*. Ἡ κλίσις τῆς γραμμῆς ταύτης εἶναι ἴση πρὸς τὸν λόγον τῶν τιμῶν τῶν δύο προϊόντων. Ἑκάστη δὲ γραμμὴ παράλληλος καὶ δεξιώτερον ταύτης εὑρισκομένη, ἀντιπροσωπεύει μεγαλύτερον ποσὸν συνολικῆς προσόδου μὲ σταθερὸν τὸν λόγον τῶν τιμῶν (σχετικαὶ τιμαὶ ἀμετάβλητοι)**.

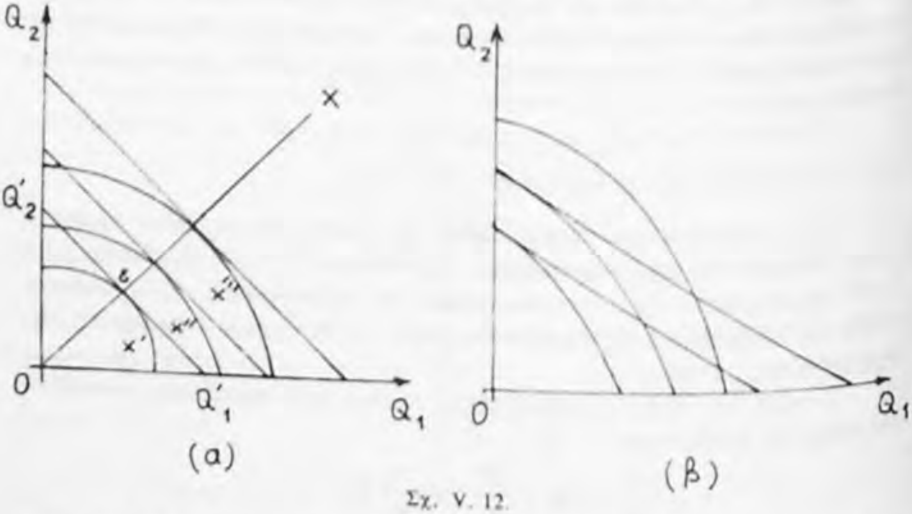
Εἰς τὸ αὐτὸ διάγραμμα ἀπεικονίζονται καμπύλαι μετασχηματισμοῦ, δι᾿ ἃς ὡμιλήσαμεν εἰς ἕτερον τμῆμα τοῦ παρόντος. Εἰς τὸ σημεῖον, ὅπου ἡ καμπύλη ἴσης προσόδου ἐφάπτεται τῆς καμπύλης μετασχηματισμοῦ, πληροῦται ἡ συνθήκη δ.λ.μ. $= p_1/p_2$. Ἤτοι ἡ αὐτὴ συνθήκη ἥτις προέκυψε καὶ ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς παρουσιάσεως τοῦ προβλήματος.

Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ε ἀποτελεῖ σημεῖον ἀ ρ ι σ τ ο π ο ι ή σ ε ω ς καὶ συνεπῶς σ η μ ε ῖ ο ν ἰ σ ο ρ ρ ο π ί α ς τῆς παραγωγικῆς μονάδος. Ἤτοι τὸ σημεῖον ε παρέχει τὴν μεγαλυτέραν πρόσοδον ἐξ ὅλων τῶν λοιπῶν σημείων

* Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἔχομεν ἀντὶ τῶν τιμῶν τῶν προϊόντων τὸ κατὰ προϊὸν κέρδος, ἡ γραμμὴ καλεῖται γ ρ α μ μ ὴ ἴ σ ο υ κ έ ρ δ ο υ ς.

** Εἶναι δυνατὸν ὅμως τὸ ἀπόλυτον ὕψος τῶν τιμῶν νὰ μεταβάλλεται.

τῶν εὑρισκομένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης μετασχηματισμοῦ x', μὲ τὰς δεδομένας τιμὰς τῶν προϊόντων. Πᾶς ἕτερος συνδυασμὸς προϊόντων Q_1Q_2 ἀπαιτεῖ τὸ αὐτὸ μὲν ποσὸν συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς, δὲν δίδει δὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν συνολικῆς προσόδου. Ὁ ὀρθολογικῶς δρῶν παραγωγός, ὑπὸ τὸ καθε-



Σχ. V. 12.

στὼς τῶν δεδομένων τιμῶν, θὰ ἐπιλέγῃ τοὺς συνδυασμοὺς παραγωγῆς τῶν προϊόντων Q_1 καὶ Q_2, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς γραμμῆς Ox, ὁσάκις χρησιμοποιεῖ μεγαλυτέρας ποσότητας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ x.

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι διὰ τῆς συμβολῆς τῶν καμπύλων μετασχηματισμοῦ καὶ τῶν γραμμῶν ἴσης προσόδου δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τῆς παραγωγικῆς μονάδος, ἤτοι τὸν συνδυασμὸν ἐκεῖνον τῶν δύο προϊόντων, ὅστις μεγιστοποιεῖ τὴν πρόσοδον ταύτης.

Ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. V.11, οὕτω καὶ εἰς τὸ Σχ. V.12(β), ἡ σχέσις τῶν τιμῶν τῶν δύο προϊόντων εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ συμφέρῃ ἡ παραγωγὴ μόνον τοῦ Q_2. Ἐνταῦθα πάλιν δὲν ἔχομεν ἐπαφὴν τῆς καμπύλης μετασχηματισμοῦ μετὰ τῆς γραμμῆς ἴσης προσόδου, εἰ μὴ μόνον εἰς τὴν τομὴν τοῦ ἄξονος τοῦ Q_2, ὁπότε ἔχομεν γ ω ν ι α κ ὴ ν λ ύ σ ι ν (corner solution)*. Ἡ λύσις αὕτη ἀποκλείει τὴν παραγωγὴν τοῦ Q_1 ὡς ἔχοντος πολὺ μικρὰν τιμήν.

---

* Γωνιακὴν λύσιν θὰ ἔχωμεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ καμπύλη μετασχηματισμοῦ δὲν ἔχει τὸ κανονικὸν σχῆμα (κοίλη), ἀλλὰ εἶναι ὀρθὴ γωνία. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἷς καὶ μόνον συνδυασμὸς τῶν προϊόντων εἶναι τεχνολογικῶς ἐφικτός, ἡ δὲ μεταβολὴ τοῦ λόγου τῶν τιμῶν ἐντὸς εὐρέων περιθωρίων δὲν ἐπηρεάζει τὴν λύσιν.

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν συγκριτικὴν στατικὴν τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ὡς ἐπράξαμεν εἰς τὴν παράγραφον V.2.4. Τὸ σημεῖον ἰσορροπίας καὶ ἀριστοποιήσεως δύναται νὰ μεταβληθῇ, ἐφ' ὅσον μεταβληθῇ ἡ σχέσις τῶν τιμῶν τῶν δύο ἀγαθῶν ἢ τὸ ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως τοῦ συντελεστοῦ x, ἢ τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς τῶν δύο ἀγαθῶν. Ἐφ' ὅσον ἡ γραμμὴ ἴσης προσόδου ἔχῃ κλίσιν ἴσην πρὸς τὸν λόγον τῶν τιμῶν καὶ ἴσην πρὸς τὸν ὁ.λ.μ. εἰς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας, τότε μία μεταβολὴ τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς προϊόντος συνεπάγεται μεταβολὴν τῆς κλίσεως τῆς γραμμῆς ἴσης προσόδου καὶ τὴν δημιουργίαν νέας ἰσορροπίας ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης μετασχηματισμοῦ εἰς σημεῖον ὅπου ἡ νέα κλίσις τῆς γραμμῆς ἴσης προσόδου εἶναι ἴση πρὸς τὸν ὁ.λ.μ. τοῦ σημείου τούτου. Συγκεκριμένως, ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ Q_1 αὐξάνῃ, θὰ ἔχωμεν μετάθεσιν τοῦ σημείου ἰσορροπίας πρὸς τὰ δεξιά, καὶ ἐὰν ἡ τιμὴ μειοῦται μετάθεσιν πρὸς τὰ ἀριστερά.
Ἤτοι ceteris paribus ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ προϊόντος ὁδηγεῖ εἰς αὔξησιν τῆς παραγωγῆς του. Τὸ τοιοῦτον ἐπιβεβαιοῖ τὸν νόμον τῆς προσφορᾶς, τὸν ὁποῖον ἀλλαχοῦ ἀνελύσαμεν.

V.2.7. **Μεγιστοποίησις τοῦ κέρδους—Ἰσορροπία τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὸν ἐλεύθερον ἀνταγωνισμόν.** Σκοπὸς τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὴν ἐλευθέραν συναλλακτικὴν οἰκονομίαν εἶναι τὸ κέρδος. Βάσις τῆς ἐπιχειρηματικῆς συμπεριφορᾶς εἶναι ἡ προσπάθεια μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους καὶ συνεπῶς βασικὴ ὑπόθεσις εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι ἡ ἔννοια αὕτη.

Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θὰ ἀναλύσωμεν τὰς συνθήκας μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους ὑπὸ τὸ καθεστὼς τοῦ πλήρους ἀνταγωνισμοῦ. Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας, ὅτι διὰ τὴν ὕπαρξιν τῆς μορφῆς ταύτης τῆς ἀγορᾶς ἀπαιτοῦνται τὰ ἑξῆς στοιχεῖα: (α) Μεγάλος ἀριθμὸς ἐπιχειρήσεων εἰς τὸν κλάδον ὥστε νὰ μὴ δύναται μία ἑκάστη ἐξ αὐτῶν νὰ ἐπηρεάσῃ τὴν συνολικὴν προσφορὰν καὶ συνεπῶς τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος. (β) Ὁμοιογένειαν προϊόντος, ἄνευ οὐδεμιᾶς διαφορᾶς ποιότητος ἢ ἄλλης τινὸς διακρίσεως. (γ) Ἐλευθέρα εἴσοδος καὶ ἔξοδος ἐπιχειρήσεων εἰς τὸν κλάδον καὶ (δ) Ἀνεξαρτησία δράσεως ἑκάστης ἐπιχειρήσεως (ἀνυπαρξία συνεννοήσεως μεταξὺ τῶν ἐπιχειρήσεων). Συνεπείᾳ τῶν ἀνωτέρω χαρακτηριστικῶν τοῦ πλήρους ἀνταγωνισμοῦ θὰ δεχθῶμεν τὰ ἑξῆς: (α) Ὅτι ἡ καμπύλη ζητήσεως διὰ τὸ προϊὸν τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι ὁριζοντία γραμμὴ (πλήρως ἐλαστική). Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ τιμὴ εἶναι σταθερὰ εἰς κάθε ἐπίπεδον παραγωγῆς, μὴ δυναμένης τῆς ἐπιχειρήσεως νὰ ἐπηρεάσῃ ταύτην. (β) Ὅτι εἰς μὲν τὴν βραχυχρόνιον περίοδον ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ πραγματοποιῇ κέρδη ἢ νὰ ὑφίσταται ζημίας, εἰς δὲ τὴν μακροχρόνιον περίοδον κέρδη ἢ ζημίαι ἐξαλείφονται, λόγῳ τῆς ἐλευθέρας εἰσόδου ἢ ἐξόδου εἰς τὸν κλάδον.

Σκοποῦσα εἰς τὸ κέρδος ἡ ἐπιχείρησις, δύναται νὰ μεταβάλλῃ τόσον τὸ συνολικὸν κόστος ὅσον καὶ τὴν συνολικὴν πρόσοδόν της διὰ νὰ ἐπιτύχῃ τὴν μεγιστοποίησιν τούτου. Συνεπῶς τὸ πρόβλημά μας εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς διαφορᾶς μεταξὺ συνολικοῦ κόστους (C_T) καὶ συνολικῆς προσόδου (R), ἄνευ οὐδενὸς περιορισμοῦ.

Τὸ συνολικὸν κέρδος (Π) ὁρίζεται ὡς:

$$\Pi = R(Q) - C_T(Q),$$

ἤτοι ἡ διαφορὰ μεταξὺ συνολικῆς προσόδου καὶ συνολικοῦ κόστους.

Ἡ συνολικὴ πρόσοδος εἶναι τὸ γινόμενον ποσοτήτων ἐπὶ τὴν ἐπικρατοῦσαν εἰς τὴν ἀγορὰν τιμήν, ἤτοι $R = pQ$, καὶ τὸ συνολικὸν κόστος εἶναι συνάρτησις τῆς παραγομένης ποσότητος, κατὰ τὰ γνωστά. Ἄρα ἡ συνάρτησις συνολικοῦ κέρδους δύναται νὰ γραφῇ ὡς:

$$\Pi = pQ - C_T.$$

Ἡ πρώτη συνθήκη διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τῆς συναρτήσεως εἶναι

$$\frac{d\Pi}{dQ} = p - \frac{dC_T}{dQ} = 0.$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως προκύπτει ἡ σχέσις:

$$p = \frac{dC_T}{dQ} = MC,$$

ἤτοι διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ ἀπαιτεῖται ὅπως ἡ τιμὴ ἰσοῦται πρὸς τὸ ὁριακὸν κόστος. Ἡ τιμὴ ὡς γνωστὸν εἰς τὸν ἐλεύθερον ἀνταγωνισμὸν ἰσοῦται πρὸς τὴν μέσην πρόσοδον καὶ αὕτη πρὸς τὴν ὁριακὴν πρόσοδον, ἤτοι $p = AR = MR$, ὁπότε ἡ πρώτη συνθήκη ἐκφράζει γενικῶς τὴν ἰσότητα μεταξὺ ὁριακῆς προσόδου καὶ ὁριακοῦ κόστους. Ἡ σχέσις $p = MR = AR = MC$ ἐκφράζει τὴν θέσιν ἰσορροπίας τῆς ἐπιχειρήσεως ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ.

Ἡ συνθήκη ὅμως αὕτη δὲν ἀρκεῖ, διότι τοιαύτη ἰσότης, ὡς θὰ ἴδωμεν καὶ διαγραμματικῶς, δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ καὶ εἰς ἐπίπεδον παραγωγῆς, ὅπερ δὲν μεγιστοποιεῖ τὰ κέρδη. Ἀπαιτεῖται συνεπῶς ὅπως πληροῦται καὶ ἡ δευτέρα συνθήκη, ἤτοι

$$d^2\Pi/dQ^2 = dp/dQ - d^2C_T/dQ^2 < 0$$

$$\text{ἢ} \quad dp/dQ < d^2C_T/dQ^2$$

$$\text{ἢ} \quad 0 < d^2C_T/dQ^2.$$

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη μᾶς λέγει ὅτι διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τῶν κερδῶν ἀπαιτεῖται ὅπως ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους ἔχει κλίσιν εἰς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας, μεγαλυτέραν ἐκείνης τῆς καμπύλης τοῦ ὁριακοῦ ἐσόδου ἢ τῆς τιμῆς. Τοῦτο γεωμετρικῶς σημαίνει ὅτι ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους πρέπει νὰ τέμνη τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν τῆς τιμῆς ἐκ τῶν κάτω.

Ἡ δευτέρα συνθήκη ἐξασφαλίζει τὴν σταθερότητα τῆς ἰσορροπίας τῆς ἐπιχειρήσεως. Πᾶσα πρὸς τὰ ἄνω ἢ κάτω μεταβολὴ τῆς ποσότητος ἰσορροπίας, ἤτοι τῆς ποσότητος ἡ ὁποία μεγιστοποιεῖ τὰ κέρδη, θὰ ἔχη ὡς ἀποτέλεσμα τὴν μείωσιν τοῦ συνολικοῦ κέρδους. Ἤτοι ἰσχύουν αἱ κάτωθι ἀνισότητες*:

$$d\Pi < 0, \quad \text{διὰ } dQ \gtrless 0,$$

$$\bar{p} < \frac{dC_T}{dQ}, \quad \text{διὰ } d\bar{Q} > 0,$$

$$\bar{p} > \frac{dC_T}{dQ}, \quad \text{διὰ } d\bar{Q} < 0.$$

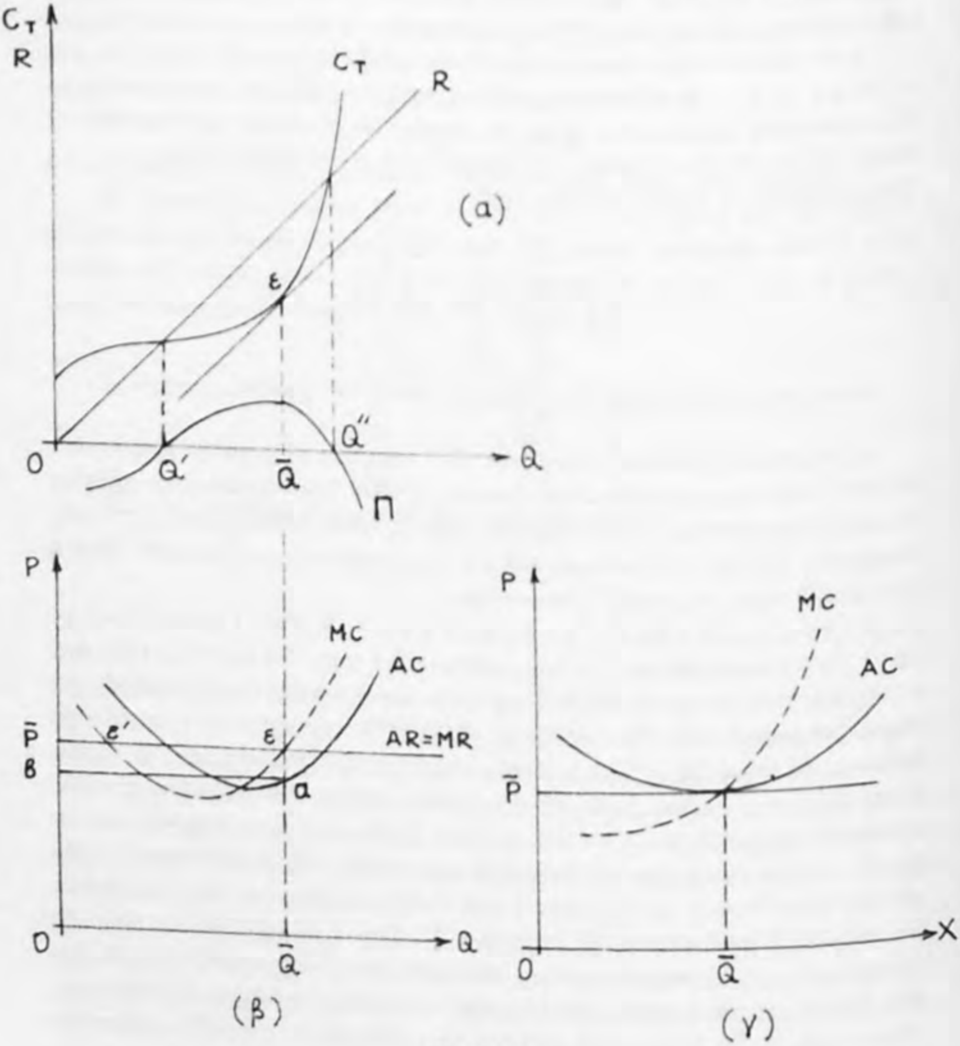
Αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι σημαίνουν ὅτι: (α) Εἰς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας (ἄριστον σημεῖον) τὰ κέρδη εἶναι μέγιστα, (β) δεξιὰ τοῦ σημείου ἰσορροπίας (ποσότης ἰσορροπίας, $\bar{Q}$) τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι μεγαλύτερον τῆς τιμῆς ἰσορροπίας ($\bar{p}$) καὶ (γ) ἀριστερὰ τοῦ σημείου ἰσορροπίας τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι μικρότερον τῆς τιμῆς ἰσορροπίας.

Διαγραμματικὴ παρουσίασις τῆς ἰσορροπίας τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὸν πλήρη ἀνταγωνισμόν. Διαγραμματικῶς δυνάμεθα νὰ δείξωμεν τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς καμπύλης συνολικῆς προσόδου καὶ συνολικοῦ κόστους, ὡς εἰς τὸ Σχ. V.13(α). Μέχρι τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς Q′ ἡ ἐπιχείρησις ὑφίσταται ζημίαν, διότι τὸ συνολικὸν κόστος εἶναι μεγαλύτερον τῶν συνολικῶν εἰσπράξεων. Ἀπὸ τοῦ σημείου Q′ ἀρχίζει ἡ κερδοφόρος περιοχή. Εἰς τὸ σημεῖον ε, ἤτοι εἰς ἐπίπεδον παραγωγῆς $O\bar{Q}$, ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο καμπύλων R καὶ C_T εἶναι ἡ μεγαλυτέρα. Τοῦτο, ὡς εἰκός, συμβαίνει εἰς σημεῖον ὅπου ἡ κλίσις τῆς καμπύλης R εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν κλίσιν τῆς καμπύλης C_T εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἀλλὰ ἐφ᾽ ὅσον, ὡς γνωρίζομεν, αἱ κλίσεις δεικνύουν τὸ ὁριακὸν ἔσοδον καὶ τὸ ὁριακὸν κόστος ἀντιστοίχως, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁριακὸν ἔσοδον (τιμὴ) = ὁριακὸν κόστος, ἤτοι ἡ συνθήκη ἰσορροπίας ἢ μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους. Ἡ καμπύλη συνολικοῦ κέρδους Π δεικνύεται εἰς τὸ κατώτερον τμῆμα τοῦ γραφήματος (α). Τὰ τμήματα τῆς καμπύλης τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται κάτω τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος

* Βλ. P.A. Samuelson, op. cit., σελ. 77.

Q δεικνύουν ζημίαν. Οὕτω φαίνεται ὅτι ἡ κερδοφόρος περιοχὴ εἶναι ἡ τοῦ Q′Q″.

Εἰς τὸ γράφημα (β) τοῦ Σχ. V.13 δεικνύεται ἡ ἰσορροπία τῆς ἐπιχειρή-



Σχ. V. 13.

σεως διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς καμπύλης ὁριακοῦ κόστους (MC) καὶ ὁριακῆς προσόδου, ἢ τιμῆς (MR = AR = p). Εἰς τὸ σημεῖον ε, ὅπου αἱ καμπύλαι MC καὶ p τέμνονται, καθορίζεται ἡ ποσότης ἰσορροπίας $\bar{Q}$, ἥτις μεγιστοποιεῖ τὰ κέρδη, κατὰ τὰ εἰς τὴν ἀναλυτικὴν παρουσίασιν λεχθέντα.

Ὡς γνωστὸν τὸ κατὰ μονάδα προϊόντος κέρδος προκύπτει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ μέσου κόστους ἐκ τῆς τιμῆς πωλήσεως, ἡ ὁποία ἐνταῦθα εἶναι σταθερὰ δι' ὅλα τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς. Ἐν ἰσορροπίᾳ τὸ κατὰ μονάδα κόστος εἶναι Οβ, ἡ δὲ τιμὴ πωλήσεως $O\bar{p}$. Ἡ διαφορὰ αε εἶναι τὸ κατὰ μονάδα κέρδος καὶ συνεπῶς τὸ γινόμενον $O\bar{Q}\times$εα εἶναι τὸ συνολικὸν κέρδος. Τὸ συνολικὸν κέρδος δεικνύεται εἰς τὸ διάγραμμα διὰ τοῦ παραλληλογράμμου $\beta\alpha\varepsilon\bar{p}$. Τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο προκύπτει καὶ ὡς διαφορὰ μεταξὺ δύο ἑτέρων παραλληλογράμμων, ἅτινα δεικνύουν τὰς συνολικάς εἰσπράξεις ($O\bar{p}\varepsilon\bar{Q}$), καὶ τὸ συνολικὸν κόστος τῆς ἐπιχειρήσεως, ἤτοι $O\bar{p}\varepsilon\bar{Q} - O\beta\alpha\bar{Q}$.

Ὡς διεπιστώσαμεν ἀνωτέρω, ἡ συνθήκη $p = MC$ πληροῦται εἰς τὸ σημεῖον ε, εἰς ὃ ἀντιστοιχεῖ ποσότης $\bar{Q}$, ἥτις μεγιστοποιεῖ τὰ κέρδη. Ἀλλά, ὡς διαπιστοῦται ἐκ τοῦ γραφήματος (β), ἡ αὐτὴ συνθήκη πληροῦται εἰς τὸ σημεῖον ε΄. Τὸ σημεῖον ὅμως τοῦτο δὲν εἶναι σημεῖον ἰσορροπίας τῆς ἐπιχειρήσεως, δεδομένου ὅτι ἡ πρὸς τὰ δεξιὰ κίνησις ὁδηγεῖ εἰς αὔξησιν τῶν κερδῶν. Οὕτω διὰ νὰ ἔχωμεν ἰσορροπίαν ἢ μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως ἀπαιτεῖται πλὴν τῆς πρώτης συνθήκης ($p = MC$), ἡ πλήρωσις τῆς δευτέρας συνθήκης, ἡ ὁποία γεωμετρικῶς ἐκδηλοῦται εἰς τὴν ἐκ τῶν κάτω τομὴν τῆς καμπύλης τῆς ὁριακῆς προσόδου ἢ τιμῆς ὑπὸ τῆς καμπύλης ὁριακοῦ κόστους καὶ οὐχὶ ἐκ τῶν ἄνω.

Ἡ γεωμετρικὴ ἀνάλυσις τῆς ἰσορροπίας εἰς τὸ γράφημα (β) τοῦ Σχ. V.13 ἀναφέρεται εἰς τὴν *βραχυχρόνιον ἰσορροπίαν*, καθ' ἣν εἶναι δυνατὸν νὰ πραγματοποιηθοῦν διαφόρου μεγέθους κέρδη καὶ νὰ διαμορφωθοῦν διαφόρου ἐκτάσεως ζημίαι. Εἰς τὴν μακροχρόνιον περίοδον δὲν δικαιολογεῖται ἡ ὕπαρξις κερδῶν ἢ ζημιῶν, δεδομένου ὅτι θὰ ἔχωμεν εἴσοδον νέων ἐπιχειρήσεων εἰς τὸν κλάδον εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν κερδῶν, καὶ ἔξοδον ἐπιχειρήσεων εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ζημιῶν. Οὕτω κατὰ τὴν *μακροχρόνιον ἰσορροπίαν* θὰ ἔχωμεν τὴν συνθήκην $MR = AR = p = MC = AC$, ἤτοι ἡ τιμὴ τοῦ προϊόντος θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ μέσον καὶ τὸ ὁριακὸν κόστος. Ἡ ἰσότης ὅμως μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους πραγματοποιεῖται εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον τῆς καμπύλης μέσου κόστους. Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, καθ' ἣν τὰ παραγωγικὰ ἔξοδα ἰσοῦνται πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος, ἡ ἐπιχείρησις τοῦ πλήρους ἀνταγωνισμοῦ δὲν πραγματοποιεῖ οἰκονομικὰ κέρδη, ἀλλὰ ἓν ποσὸν «κανονικοῦ» κέρδους (ἐπιχειρηματικὸς μισθός, ἀμοιβὴ ἰδίων κεφαλαίων) συμπεριλαμβάνεται εἰς τὰ παραγωγικὰ ἔξοδα. Τὴν κατάστασιν τῆς μακροχρονίου ἰσορροπίας δεικνύει τὸ γράφημα (γ) τοῦ Σχ. V.13.

Ἀπροσδιοριστία τοῦ μεγέθους τῆς παραγωγῆς εἰς τὸν πλήρη ἀνταγωνισμόν. Ἐὰν ἡ καμπύλη τοῦ ὁριακοῦ κόστους εἶναι ὁριζοντία γραμμή, ἤτοι $d^2C_T/dQ^2 = 0$, τότε θὰ ἐμφανισθῇ τὸ παράδοξον τῆς ἀδυναμίας προσδιορισμοῦ τῆς ποσότητος, ἥτις μεγιστοποιεῖ τὰ κέρδη τῆς ἐπιχειρήσεως. Εἶναι δυνατὸν δὲ νὰ προκύψουν τρεῖς περιπτώσεις: (α) Τὸ ὁριακὸν κόστος νὰ εἶναι μεγαλύτερον τῆς τιμῆς εἰς ὅλα τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, καθ' ἣν ἡ γραμμὴ κόστους εὑρίσκεται ὑψηλότερον τῆς γραμμῆς τῆς τιμῆς, ἡ ἐπιχείρησις ὑφίσταται ζημίαν καὶ συνεπῶς ἐγκαταλείπει τὸν κλάδον. (β) Τὸ ὁριακὸν κόστος νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν τιμὴν εἰς ὅλα τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, καθ' ἣν συμπίπτει ἡ γραμμὴ ὁριακοῦ κόστους μὲ τὴν γραμμὴν τῆς τιμῆς, ὑπάρχουν ἄπειρα σημεῖα ἰσορροπίας καὶ συνεπῶς, εἰς τὴν οὐσίαν ἀπροσδιοριστία τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς. (γ) Τὸ ὁριακὸν κόστος νὰ εἶναι μικρότερον τῆς τιμῆς εἰς ὅλα τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, καθ' ἣν ἡ γραμμὴ τοῦ ὁριακοῦ κόστους εὑρίσκεται χαμηλότερον τῆς γραμμῆς τῆς τιμῆς, ὑπάρχει πάλιν ἀπροσδιοριστία τῆς μεγιστοποιούσης τὸ κέρδος ποσότητος, διότι συμφέρει εἰς τὴν ἐπιχείρησιν νὰ ἐπεκτείνεται συνεχῶς ἄνευ ὁρίου.

Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ποσότης τῆς παραγωγῆς τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι ἀπροσδιόριστος, ἡ συνολικὴ προσφορὰ τοῦ κλάδου εἶναι προσδιορίσιμος, οὖσα τὸ ἄθροισμα ἐπὶ μέρους ποσοτήτων, διότι ἄλλαι μὲν ἐπιχειρήσεις θὰ ἐπεκτείνουν τὴν παραγωγήν των, ἄλλαι δὲ θὰ μειώσουν ταύτην. Ἀλλ' ἡ ἐπιχείρησις ἐκείνη ἡ ὁποία αὐξάνει μεγάλως τὴν παραγωγήν της, ἐνῶ ἕτεραι μειώνουν ταύτην, θὰ ἀποβῇ τελικῶς γίγας εἰς τὸν κλάδον, ὁπότε θὰ παύσῃ νὰ ὑφίσταται ὁ καθαρὸς ἀνταγωνισμὸς (pure competition)*.

Ὑπάρχει τέλος καὶ ἑτέρα περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους βαίνει συνεχῶς φθίνουσα ὅσον αὐξάνει ἡ παραγωγή, ἤτοι $d^2C_T/dQ^2 < 0$. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπάρχει ἀπροσδιοριστία τῆς ἰσορροπίας τῆς ἐπιχειρήσεως, δυναμένης νὰ αὐξάνῃ συνεχῶς τὴν παραγωγήν της ἄνευ ὁρίου.

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανὲς ὅτι διὰ τὴν ὕπαρξιν σταθερᾶς ἰσορροπίας εἰς τὴν ἐπιχείρησιν εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως πληρωθῇ ἡ δευτέρα συνθήκη, ἤτοι

$$dp/dQ^2 < d^2C_T/dQ^2$$

$$\text{ἢ} \quad d^2C_T/dQ^2 > 0.$$

Δηλονότι, ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους δέον νὰ τέμνῃ τὴν γραμμὴν τῆς τιμῆς ἐκ τῶν κάτω.

V.2.8. **Μεγιστοποίησις καὶ Ἰσορροπία τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὸ μονοπώλιον.** Διὰ τὴν ὕπαρξιν μονοπωλίου ἀπαιτεῖται ὅπως ὁ πωλητὴς εἶναι εἷς καὶ ἡ τιμὴ τοῦ προϊόντος εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν τιμῶν ἑτέρων προϊόντων, ἤτοι νὰ μὴν ὑπάρχουν ἔστω καὶ ἀσθενοῦς σχέσεως ὑποκατάστατα. Ἐκ τῶν

---

* Βλ. P.A. Samuelson, op. cit., σελ. 79.

δύο τούτων χαρακτηριστικῶν τοῦ μονοπωλίου προκύπτουν: (α) Ὅτι ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως διὰ τὸ προϊὸν ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν καὶ οὕτως ἡ καμπύλη τοῦ μονοπωλητοῦ συμπίπτει μὲ τὴν καμπύλην τῆς ἀγοραίας ζητήσεως, ἤτοι καμπύλη ζητήσεως τῆς ἐπιχειρήσεως καὶ καμπύλη ζητήσεως τοῦ κλάδου συμπίπτουν, ἐφ' ὅσον εἷς καὶ μόνον πωλητὴς ἀντιπροσωπεύη ὁλόκληρον τὸν κλάδον. (β) Ὅτι ἡ σταυροειδὴς ἐλαστικότης ζητήσεως ὡς πρὸς τὴν τιμὴν εἶναι πολὺ μικρὰ ἢ μηδενική.

Κατ' ἀρχὰς ἡ περίπτωσις τοῦ γνησίου μονοπωλίου (pure monopoly) εἶναι θεωρητική, ὡς ἀκριβῶς ἡ περίπτωσις τοῦ γνησίου ἀνταγωνισμοῦ. Ἡ πρᾶξις παρέχει παραδείγματα ἐνδιαμέσων καταστάσεων.

Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ μονοπωλίου, ἡ μονοπωλιακὴ ἐπιχείρησις σκοπεῖ εἰς τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους. Οὕτω πρέπει νὰ διατυπώσωμεν τὰς συνθήκας τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς διαφορᾶς συνολικῶν εἰσπράξεων (R) καὶ συνολικοῦ κόστους (C_T). $\Pi = R - C_T$.

Ἡ πρώτη συνθήκη ἀπαιτεῖ

$$\frac{d\Pi}{dQ} = \frac{dR}{dQ} - \frac{dC_T}{dQ} = 0$$

$$\text{καὶ } \frac{dR}{dQ} = \frac{dC_T}{dQ}$$

Ἤτοι ἰσχύει ἡ αὐτὴ συνθήκη ὡς εἰς τὸν πλήρη ἀνταγωνισμόν, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ ὁριακὴ πρόσοδος ἐνταῦθα δὲν ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμὴν πωλήσεως, ἀλλὰ εἶναι μικροτέρα ταύτης εἰς κάθε ἐπίπεδον παραγωγῆς.

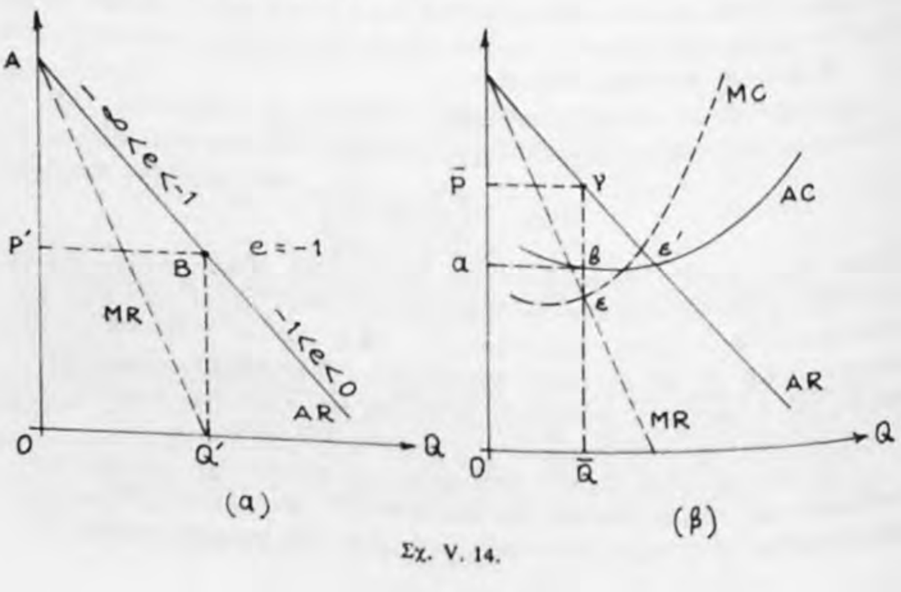
Ἡ δευτέρα συνθήκη ἀπαιτεῖ

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} = \frac{d^2R}{dQ^2} - \frac{d^2C_T}{dQ^2} < 0$$

$$\text{ἢ } \frac{d^2R}{dQ^2} < \frac{d^2C_T}{dQ^2}$$

Ἤτοι, ἐφ' ὅσον ἡ καμπύλη ὁριακῆς προσόδου ἔχη ἀρνητικὴν κλίσιν, ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους πρέπει νὰ τέμνη ταύτην ἐκ τῶν κάτω διὰ νὰ ἱκανοποιηθῇ ἡ ἀνωτέρω συνθήκη. Ὁ μονοπωλητὴς ἔχων δεδομένας τὰς συναρτήσεις συνολικῆς προσόδου καὶ συνολικοῦ κόστους δύναται νὰ εὕρη τὴν ποσότητα $\overline{Q}$, ἥτις μεγιστοποιεῖ τὰ κέρδη του.

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν διαγραμματικὴν παρουσίασιν τῆς μεγιστοποιήσεως καὶ τῆς ἰσορροπίας τῆς μονοπωλιακῆς ἐπιχειρήσεως βάσει τοῦ ὑποδείγματος «ἓν προϊὸν — μία ἀγορά». Ὡς γνωστὸν αἱ καμπύλαι μέσης καὶ ὁριακῆς προσόδου τῆς μονοπωλιακῆς ἐπιχειρήσεως ἔχουν ἀρνητικὴν κλίσιν. Ἡ καμπύλη ὁριακῆς προσόδου εὑρίσκεται χαμηλότερον τῆς καμπύλης μέσης προσόδου. Ἡ τελευταία δὲ αὕτη ἀποτελεῖ καὶ τὴν καμπύλην ζητήσεως τοῦ προϊόντος ἡ ὁποία καθορίζεται ἐκ τῶν ἀντιδράσεων τῶν ἀγοραστῶν. Εἰς τὸ γράφημα (α) τοῦ Σχ. V.14 ἡ καμπύλη A — AR δεικνύει τὴν μέσην πρόσοδον ἢ τὴν καμπύλην ζητήσεως, ἡ δὲ γραμμὴ A — MR τὴν καμπύλην τῆς ὁριακῆς προσόδου. Ἡ κλίσις τῆς A — MR εἶναι διπλασία ἐκείνης τῆς A — AR, κατὰ τὰ γνωστά. Ἡ διάθεσις κάθε προσθέτου μονάδος τοῦ προϊόντος ἀποφέρει εἰς τὸν μονοπωλητὴν συνεχῶς καὶ μικροτέραν πρόσοδον μέχρι τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς Q′, ὅπου ἡ ὁριακὴ πρόσοδος καθίσταται μηδέν. Εἰς ἐπίπεδον Q′ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον B τῆς καμπύλης ζητήσεως, ὅπου ἡ ἐλαστικότης ὡς πρὸς τὴν τιμὴν εἶναι μοναδιαία. Ἡ ἐλαστικότης (e) εἰς μὲν τὸ τμῆμα AB τῆς καμπύλης εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, εἰς δὲ τὸ τμῆμα B — AR εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος. Ὁ μονοπωλητὴς δὲν ἔχει συμφέρον ὅπως διαθέση ποσότητα μεγαλυτέραν τῆς Q′, διότι θὰ ἔχη μειωμένας συνολικὰς εἰσπράξεις, λόγῳ ἀρνητικῆς ὁριακῆς προσόδου. Οὕτω θὰ καθορίση ποσότητα μικροτέραν τῆς Q′, εἰς ἣν θὰ ἀντιστοιχῆ τιμὴ καθοριζομένη ἐκ τῆς ἀγορᾶς μεγαλυτέρα τῆς p′, ἤτοι θὰ ἐνδιαφερθῆ διὰ τὸ τμῆμα ἐκεῖνο τῆς καμπύλης ὅπου ἡ ἐλαστικότης εἶναι $e \geqslant -1$. Ἡ συνολικὴ πρόσοδος καθίσταται, ὡς εἰκός, μεγίστη ὅταν ἡ παραγωγὴ εἶναι ἴση πρὸς Q′, καὶ ὅτε ἡ MR εἶναι μηδέν. Ἀλλὰ ἡ ποσότης ἡ μεγιστοποιοῦσα τὰ κέρδη τοῦ μονοπωλητοῦ θὰ καθορισθῆ διὰ τῆς τομῆς τῆς MR καὶ τοῦ MC, ὡς δεικνύει τὸ γράφημα (β) τοῦ Σχ. V.14.



Σχ. V. 14.

Ἡ ἰσότης τῆς ὁριακῆς προσόδου καὶ τοῦ ὁριακοῦ κόστους καθορίζουν ποσότητα ἰσορροπίας ἴσην πρὸς $\bar{Q}$ καὶ τιμὴν διαθέσεως ἴσην πρὸς $\bar{p}$. Ὁ μονοπωλητὴς θὰ καθορίσῃ εἴτε τιμὴν ἴσην πρὸς $\bar{p}$, ὁπότε ἡ ποσότης θὰ καθορισθῇ αὐτομάτως ἐκ τῶν ἀντιδράσεων τῶν ἀγοραστῶν (ποσότης $\bar{Q}$), εἴτε τὴν ποσότητα $\bar{Q}$, ὁπότε ἡ τιμὴ ($\bar{p}$) θὰ καθορισθῇ πάλιν ἐκ τῶν ἀγοραστῶν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ μονοπωλητὴς κατὰ τὴν ἄσκησιν τῆς τιμολογιακῆς πολιτικῆς δὲν δύναται νὰ καθορίσῃ αὐθαιρέτως τιμὴν καὶ ποσότητα παραγωγῆς, ἀλλὰ πρέπει νὰ λάβῃ ὑπ' ὄψιν του τὴν καμπύλην ζητήσεως τοῦ προϊόντος καὶ ἰδιαιτέρως τὸ στοιχεῖον τῆς ἐλαστικότητος ταύτης. Ὡς γνωστὸν ἡ σχέσις ὁριακῆς προσόδου καὶ ἐλαστικότητος ζητήσεως ὡς πρὸς τὴν τιμὴν εἶναι: $MR = AR\ (1 - 1/e)$, ὅπου AR = τιμὴ πωλήσεως (p).

Ἐκ τοῦ γραφήματος (β) προκύπτει ὅτι τὸ μὲν κατὰ μονάδα κέρδος εἶναι βγ, τὸ δὲ συνολικὸν κέρδος τοῦ μονοπωλητοῦ εἶναι αβγ$\bar{p}$.

Τὸ σημεῖον ἰσορροπίας (ε) τῆς μονοπωλιακῆς ἐπιχειρήσεως δίδει ποσότητα $\bar{Q}$ καὶ τιμὴν $\bar{p}$. Ἐὰν ἴσχυε πλήρης ἀνταγωνισμός, τότε ἡ μὲν ποσότης ἰσορροπίας θὰ ἦτο μεγαλυτέρα, ἡ δὲ τιμὴ μικροτέρα, ὡς ἀποδεικνύουν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου ε', ὅπου τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν τιμὴν ($MC = AR = p$). Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ὕπαρξις μονοπωλίου ἀποβαίνει εἰς βάρος τῆς καταναλώσεως.

Μονοπώλιον μὲ διαφοροποίησιν τιμῶν καὶ ἀγορῶν. Ὁ μονοπωλητὴς δὲν διαθέτει πάντοτε τὴν παραγωγὴν του εἰς μίαν μόνον ἀγορὰν καὶ εἰς τὴν αὐτὴν τιμήν, ἀλλὰ εἰς διαφορετικὰς ἀγορὰς καὶ εἰς διαφορετικὰς τιμὰς (market and price discrimination), μὲ τὸν σκοπὸν ὅπως ἀποκομίσῃ μεγαλύτερα κέρδη.

Ἂς λάβωμεν τὸ ὑπόδειγμα «ἓν προϊὸν — δύο ἀγοραί». Ὁ μονοπωλητὴς ὁρίζει διαφορετικὴν τιμὴν εἰς εκάστην τῶν δύο ἀγορῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ πρέπει νὰ μὴν ἐπικοινωνοῦν μεταξύ των. Αἱ δύο ἀγοραὶ δυνατὸν νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἢ δυνατὸν τὸ ὑπόδειγμα νὰ ἀναφέρεται ἀφ' ἑνὸς μὲν εἰς τὴν ἐσωτερικὴν ἀγοράν, ἀφ' ἑτέρου δὲ εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἀγορὰν διὰ τὴν ὁποίαν συνήθως ὁρίζομεν χαμηλοτέραν τιμήν.

Εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ὁ μονοπωλητὴς θὰ προσπαθήσῃ νὰ μεγιστοποιήσῃ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς συνολικῆς προσόδου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ἀγορῶν καὶ τοῦ συνολικοῦ κόστους, ἤτοι

$$\Pi = (R_\alpha + R_\beta) - C_T,$$

ὅπου R_α καὶ R_β εἶναι αἱ εἰσπράξεις ἐκ τῶν ἀγορῶν α καὶ β, ἀντιστοίχως.

Ἡ πρώτη συνθήκη μεγιστοποιήσεως ἀπαιτεῖ:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_\alpha} = \frac{dR_\alpha}{dQ_\alpha} - \frac{dC_T}{dQ} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_\beta} = \frac{dR_\beta}{dQ_\beta} - \frac{dC_T}{dQ} = 0,$$

$$\text{καὶ } \frac{dR_\beta}{dQ_\beta} = \frac{dR_\alpha}{dQ_\alpha} = \frac{dC_T}{dQ}.$$

Ἤτοι, ἡ ὁριακὴ πρόσοδος ἐκ τῆς ἀγορᾶς α ἰσοῦται πρὸς τὴν ὁριακὴν πρόσοδον ἐκ τῆς ἀγορᾶς β καὶ αὗται ἰσοῦνται πρὸς τὸ ὁριακὸν κόστος τῆς συνολικῆς παραγωγῆς*. Τὸ ὅτι αἱ ὁριακαὶ πρόσοδοι εἶναι αἱ αὐταί, τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι αἱ τιμαὶ πωλήσεως συμπίπτουν εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἀγοράς. Τοὐναντίον μάλιστα, αἱ τιμαὶ μᾶλλον θὰ διαφέρουν εἰς τὰς δύο ἀγοράς, ἐφ' ὅσον αἱ ἐλαστικότητες ζητήσεως διαφέρουν. Μόνον ὅταν ἡ ἐλαστικότης ζητήσεως εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἀγοράς, ἡ τιμὴ πωλήσεως εἶναι ἑνιαία. Εἴδομεν ὅτι συμφώνως πρὸς τὴν πρώτην συνθήκην ἰσορροπίας ἔχομεν $MR_\alpha = MR_\beta$. Τοῦτο ὑποδηλοῖ ὅτι

$$p_\alpha \left(1 - \frac{1}{e_\alpha}\right) = p_\alpha \left(1 - \frac{1}{e_\beta}\right),$$

$$\text{καὶ } p_\alpha / p_\beta = \frac{1 - 1/e_\beta}{1 - 1/e_\alpha}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ τιμὴ εἰς τὴν ἀγορὰν α (p_α) θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς εἰς τὴν ἀγορὰν β (p_β) ἐὰν $|e_\alpha| < |e_\beta|$ καὶ ἀντιθέτως.

Ἡ δευτέρα συνθήκη μεγιστοποιήσεως ἀπαιτεῖ ὅπως αἱ κύριαι ἐλάσσονες τῆς Ἑσσιανῆς

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{d^2R_\alpha}{dQ^2_\alpha} - \frac{d^2C_T}{dQ^2}\right) & -\frac{d^2C_T}{dQ^2} \\ -\frac{d^2C_T}{dQ^2} & \left(\frac{d^2R_\beta}{dQ^2_\beta} - \frac{d^2C_T}{dQ^2}\right) \end{vmatrix}$$

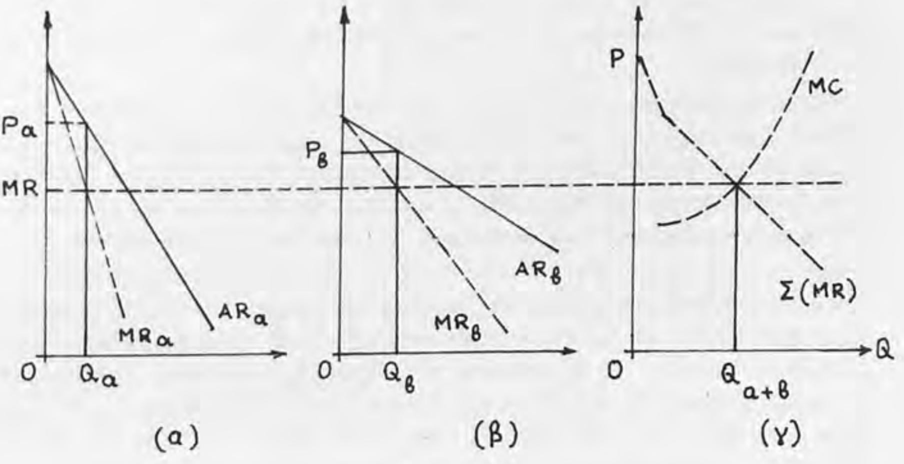
παραλλάσουν σημεῖον, ἀρχῆς γενομένης ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου. Ἀναπτύσσοντες λαμβάνομεν

$$\left(\frac{d^2R_\alpha}{dQ^2_\alpha} - \frac{d^2C_T}{dQ^2}\right) < 0$$

$$\left(\frac{d^2R_\beta}{dQ^2_\alpha} - \frac{d^2C_T}{dQ^2}\right) < 0,$$

* Ἐὰν ἡ ποσότης τοῦ προϊόντος εἶναι δεδομένη, ἤτοι ὑφίσταται εἰς ἀπόθεμα, τότε ἀρκεῖ ἡ ἐξίσωσις μεταξὺ τῶν ὁριακῶν προσόδων τῶν δύο ἀγορῶν.

ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ ὁριακὴ πρόσοδος εἰς ἑκάστην ἀγορὰν πρέπει νὰ μεταβάλλεται ὀλιγώτερον ταχέως ἢ τὸ ὁριακὸν κόστος δι' ὁλόκληρον τὴν παραγωγήν.



Σχ. V. 15.

Διαγραμματικῶς δυνάμεθα νὰ παρουσιάσωμεν τὴν περίπτωσιν τῶν δύο ἀγορῶν εἰς τὸ Σχ. V.15. Εἰς τὴν ἀγορὰν α διατίθεται ποσότης OQ_{α}, εἰς τὴν ἀγορὰν β διατίθεται ποσότης OQ_{β}. Ἡ ὁριακὴ πρόσοδος εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἀγορὰς εἶναι ἡ αὐτή, ὡς δεικνύει ἡ διακεκομμένη ὁριζοντία γραμμὴ MR, καὶ οὕτω πληροῦται ἡ συνθήκη μεγιστοποιήσεως $MR_{\alpha} = MR_{\beta}$. Οὕτως ἡ συνολικὴ παραγωγὴ (γράφημα (γ)) $OQ_{(\alpha+\beta)}$ κατανέμεται μεταξὺ τῶν δύο ἀγορῶν ὡς ἀνωτέρω. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τῆς μεγιστοποιούσης τὰ κέρδη τοῦ μονοπωλητοῦ παραγωγῆς καθορίζεται διὰ τῆς τομῆς τῆς καμπύλης ὁριακοῦ κόστους MC καὶ τῆς συνδεδιασμένης καμπύλης ὁριακῆς προσόδου Σ(MR)· Ὡς προκύπτει ἐκ τῶν γραφημάτων (α) καὶ (β), ἡ ἐλαστικότης ζητήσεως εἶναι διάφορος εἰς τὰς δύο ἀγορὰς καὶ συνεπῶς διάφορος καὶ ἡ τιμὴ πωλήσεως. Εἰς τὴν ἀγορὰν (α) ἡ ζήτησις εἶναι ἀνελαστικὴ καὶ συνεπῶς ἡ προσφορὰ μικρὰ καὶ ἡ τιμὴ μεγάλη. Εἰς τὴν ἀγορὰν (β) ἡ ζήτησις εἶναι ἐλαστικὴ καὶ συνεπῶς ἡ προσφορὰ μεγαλυτέρα καὶ ἡ τιμὴ μικροτέρα.

Περιπτώσεις διακριτικῆς μεταχειρίσεως τῶν ἀγοραστῶν ἐκ μέρους τοῦ μονοπωλητοῦ δυνάμεθα νὰ συναντήσωμεν πολλὰς μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι: ἡ διάθεσις εἰσιτηρίων πρώτης καὶ δευτέρας θέσεως, ἡ παροχὴ ὑπηρεσιῶν, ὡς τοῦ ἰατροῦ, εἰς πλουσίους καὶ πτωχούς, ἡ παροχὴ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος εἰς οἰκίας καὶ εἰς βιομηχανίας, ἡ πώλησις προϊόντος εἰς τὴν ἐγχώριον ἀγοράν καί εἰς τήν διεθνῆ ἀγοράν, κ.λπ*. Εἰς τήν τελευταίαν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ μονοπωλητής πωλεῖ εἰς τήν μονοπωλιακήν ἐγχώριον ἀγοράν ὡς καί εἰς τήν ἀνταγωνιστικήν διεθνῆ ἀγοράν, εἶναι σύνηθες τό φαινόμενον τῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς ἐγχωρίου ἀγορᾶς μέ ὑψηλάς τιμάς καί τῆς πωλήσεως εἰς τήν διεθνῆ ἀγοράν μέ τιμάς κάτω τοῦ μέσου κόστους παραγωγῆς. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ὁ μεγιστοποιῶν τό κέρδος του μονοπωλητής ἀσκεῖ dumping.

Μονοπώλιον εἰς τήν συνδεδεμένην παραγωγήν. Ἐνίοτε ὁ μονοπωλητής εἶναι παραγωγός δύο προϊόντων ἅτινα συμπαράγονται ἐκ τῆς ἐκμεταλλεύσεως ὡρισμένης πρώτης ὕλης ἢ πηγῆς. Τοιαύτη εἶναι ἡ περίπτωσις τῆς παραγωγῆς πετρελαίου, βενζίνης, λιπαντικῶν, κ.λπ. ἐκ τῆς κατεργασίας καί διϋλίσεως ἀκαθ. πετρελαίου. Ἄς λάβωμεν τό ὑπόδειγμα «δύο προϊόντα — μία ἀγορά». Δι' ἕκαστον προϊόν ἐκ τῶν συμπαραγώγων ὑφίσταται μία καμπύλη ζητήσεως. Τό κόστος ἑκάστου ὅμως δέν δύναται νά προσδιορισθῇ ἐπακριβῶς καί συνεπῶς ἔχομεν συνδεδεμένον κόστος. Ἡ περίπτωσις αὕτη ὁμοιάζει πρός τήν περίπτωσιν τοῦ ὑποδείγματος «ἕν προϊόν — δύο ἀγοραί», καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τήν μαθηματικήν λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς μεγιστοποιήσεως. Ὡς ἐκ τούτου θά δώσωμεν κατωτέρω τήν διαγραμματικήν μόνον παρουσίασιν τοῦ ὑποδείγματος τούτου (Σχ. V. 16).

Ἡ καμπύλη τοῦ συνδεδεμένου ὁριακοῦ κόστους (MC) τέμνει τήν καμπύλην τῆς ἀθροιστικῆς ὁριακῆς προσόδου εἰς συνδεδεμένην παραγωγήν ἴσην πρός $\overline{Q}_{\alpha+\beta}$. Εἰς τό ἐπίπεδον τοῦτο τῆς παραγωγῆς τῶν συμπαραγώγων προϊόντων α καί β αἱ ὁριακαί πρόσοδοι τούτων εἶναι θετικαί. Διά τό προϊόν α καθορίζεται τιμή p_α καί διά τό προϊόν β τιμή p_β, ἀναλόγως πρός τάς δεδομένας καμπύλας ζητήσεως τῶν προϊόντων. Οὕτως ὁ μονοπωλητής χρησιμοποιῶν ἀκαθ. πετρέλαιον παράγει συνολικόν ὄγκον παραγωγῆς $O\overline{Q}_{\alpha+\beta}$, ἀλλά διά νά μεγιστοποιήσῃ τά κέρδη του πωλεῖ τήν βενζίνην εἰς τιμήν p_β καί τό πετρέλαιον εἰς τιμήν p_α.

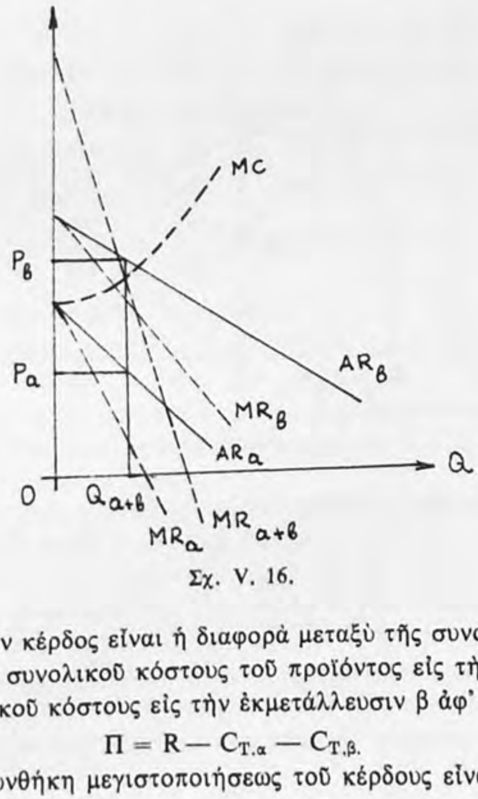
Μονοπώλιον παραγωγῆς ἑνός προϊόντος ἐκ δύο ἐκμεταλλεύσεων. Ἄς ἐξετάσωμεν τήν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ μονοπωλητής παράγει τό αὐτό προϊόν εἰς δύο κεχωρισμένας ἐκμεταλλεύσεις διά τήν αὐτήν ἀγοράν, ἤτοι ἕν ὑπόδειγμα «δύο ἐκμεταλλεύσεις — ἕν προϊόν — μία ἀγορά»**. Σκοπός τοῦ μονοπωλητοῦ εἶναι νά ἀποκομίσῃ τό μεγαλύτερον δυνατόν κέρδος κατανέμων τήν παραγωγήν μεταξύ τῶν δύο

---

* J. Robinson, The Economics of Imperfect Competition, MacMillan and Co, London 1933, Book V.

** Ἡ περίπτωσις αὕτη ὁμοιάζει πρός δυοπώλιον πλήρους συμφωνίας, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω.

ἐκμεταλλεύσεων πρὸς τοῦτο. Λόγῳ τῆς ὑπάρξεως δύο ἐκμεταλλεύσεων θὰ ἔχωμεν καὶ δύο καμπύλας ὁριακῶν κόστων, ἀλλὰ μία καμπύλη ὁριακοῦ ἐσόδου, λόγῳ τῆς ὑπάρξεως ἑνὸς μόνον προϊόντος. Ἤτοι, ἐνταῦθα ἔχομεν τὴν ἀντίστροφον τῶν προηγουμένων περίπτωσιν.



Σχ. V. 16.

Τὸ συνολικὸν κέρδος εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς συνολικῆς προσόδου ἀφ' ἑνὸς καὶ τοῦ συνολικοῦ κόστους τοῦ προϊόντος εἰς τὴν ἐκμετάλλευσιν α καὶ τοῦ συνολικοῦ κόστους εἰς τὴν ἐκμετάλλευσιν β ἀφ' ἑτέρου, ἤτοι

$$\Pi = R - C_{T.\alpha} - C_{T.\beta}.$$

Ἡ πρώτη συνθήκη μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους εἶναι:

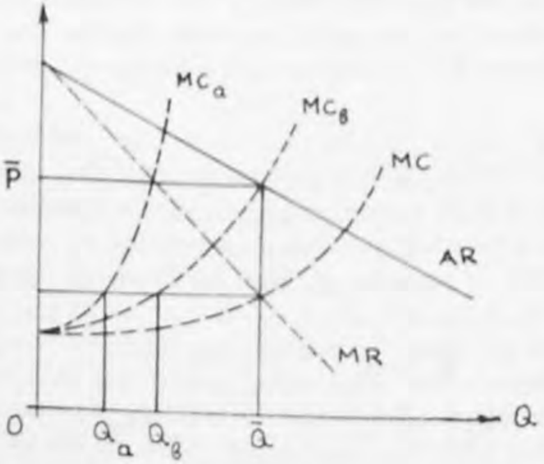
$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_\alpha} = \frac{dR}{dQ} - \frac{dC_{T.\alpha}}{dQ_\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_\beta} = \frac{dR}{dQ} - \frac{dC_{T.\beta}}{dQ_\alpha} = 0,$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{dR}{dQ} = \frac{dC_{T.\alpha}}{dQ_\alpha} = \frac{dC_{T.\beta}}{dQ_\beta}.$$

Ἤτοι, τὸ ὁριακὸν κόστος εἰς ἑκάστην ἐκμετάλλευσιν πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ὁριακὴν πρόσοδον ἐκ τῆς διαθέσεως τοῦ προϊόντος εἰς τὴν ἀγοράν.

Διαγραμματικῶς ἡ ἀνωτέρω συνθήκη, ἡ πλήρωσις τῆς ὁποίας εἶναι ἀναγκαία διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τῶν κερδῶν τοῦ μονοπωλητοῦ εἰς τὸ ὑπ' ὄψιν ὑπόδειγμα, ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ. V.17.



Σχ. V. 17.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω διαγράμματος προκύπτει ὅτι ἡ ποσότης $\bar{Q}$ εἶναι ἡ μεγιστοποιοῦσα τὰ κέρδη, ἡ δὲ τιμὴ πωλήσεως εἶναι $\bar{p}$, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐὰν τὸ προϊὸν παρήχθη εἰς τὴν ἐκμετάλλευσιν α ἢ β. Αἱ συνθῆκαι κόστους εἰς μὲν τὴν ἐκμετάλλευσιν α ἐπιτρέπουν τὴν παραγωγὴν ποσότητος $OQ_α$, εἰς δὲ τὴν ἐκμετάλλευσιν β τὴν παραγωγὴν ποσότητος $OQ_β$. Ἀπαραίτητος ὅμως συνθήκη εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ὁριακοῦ κόστους τῆς α μὲ ἐκεῖνο τῆς β.

Ἡ δευτέρα συνθήκη ἐξ ἄλλου ἀπαιτεῖ ὅπως αἱ κύριαι ἐλάσσονες τῆς ἐσσιανῆς παραλλάσουν τὸ σημεῖον των, ἀρχῆς γινομένης ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου.

Μονοπώλιον καὶ φορολογία. Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν τὴν ἐπίδρασιν τριῶν εἰδῶν φόρων ἐπὶ τῆς μεγιστοποιούσης συμπεριφορᾶς τοῦ μονοπωλητοῦ. Ἐν πρώτοις, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἐπιβάλλεται εἰς ἐφ' ἅπαξ φόρος, ἀνεξάρτητος τῶν κρισίμων μεταβλητῶν τῆς πρὸς μεγιστοποίησιν συναρτήσεως, θὰ ἔχωμεν

$$\Pi = R - C_T - \Phi ,$$

ὅπου Φ εἶναι ὁ ἐν λόγῳ φόρος (σταθερά).

Ἡ μεγιστοποίησις τοῦ Π ἀπαιτεῖ ὅπως

$$\frac{d\Pi}{dQ} = \frac{dR}{dQ} - \frac{dC_T}{dQ} = 0,$$

$$\text{καὶ } \frac{dR}{dQ} = \frac{dC_T}{dQ}.$$

Ἄρα, ἡ ἐπιβολὴ τοῦ ἐφ' ἅπαξ φόρου δὲν ἐπηρεάζει τὸ ὕψος τῆς παραγωγῆς καὶ τῆς τιμῆς τοῦ προϊόντος.

Δεύτερον, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐπιβολῆς ἑνὸς φόρου κύκλου ἐργασιῶν α νομισματικῶν μονάδων κατὰ μονάδα παραγωγῆς θὰ ἔχωμεν

$$\Pi = R - C_T - \alpha Q.$$

$$\text{Συνεπῶς } \frac{d\Pi}{dQ} = \frac{dR}{dQ} - \frac{dC_T}{dQ} - \alpha = 0.$$

$$\text{καὶ } \frac{dR}{dQ} = \frac{dC_T}{dQ} + \alpha.$$

Ἄρα, ὁ μονοπωλητὴς μεγιστοποιεῖ τὰ κέρδη του μετὰ τὴν φορολογίαν ἐφ' ὅσον ἐξισώσῃ τὴν ὁριακὴν πρόσοδον πρὸς τὸ ὁριακὸν κόστος σὺν τὸν κατὰ μονάδα φόρον. Τοῦτο ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν πρὸς τὰ ἄνω ἀριστερὰ μετακίνησιν τῆς τιμῆς πωλήσεως καὶ τὴν μείωσιν τῆς ποσότητος, ἥτις μεγιστοποιεῖ τὰ κέρδη.

Τρίτον, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ μονοπωλητὴς πληρώνει φόρον ἐπὶ τῶν κερδῶν (ἀναλογικὸς φόρος) θὰ ἔχωμεν

$$\Pi = R - C_T - \Phi(R - C_T),$$

ὅπου Φ εἶναι τὸ ποσοστὸν τοῦ φόρου ἐπὶ τῶν κερδῶν.

$$\text{Συνεπῶς } \frac{d\Pi}{dQ} = \frac{dR}{dQ} - \frac{dC_T}{dQ} - \Phi\frac{dR}{dQ} + \Phi\frac{dC_T}{dQ} = 0,$$

$$\text{καὶ } \frac{dR}{dQ} - \Phi\frac{dR}{dQ} = \frac{dC_T}{dQ} - \Phi\frac{dC_T}{dQ}$$

$$\text{ἢ } \frac{dR}{dQ}(1-\Phi) = \frac{dC_T}{dQ}(1-\Phi),$$

$$\text{καὶ } \frac{dR}{dQ} = \frac{dC_T}{dQ}.$$

ἐφ' ὅσον $0 < \Phi < 1$ καὶ $(1-\Phi) \neq 0$.

Ἄρα, διὰ τῆς φορολογίας τῶν κερδῶν δὲν ἐπηρεάζονται τὸ ὕψος τῆς παραγωγῆς καὶ ἡ τιμὴ τοῦ προϊόντος.

V.2.9. **Μεγιστοποίησις τοῦ κέρδους καὶ ἰσορροπία τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὸν μονοπωλιακὸν ἀνταγωνισμόν.** Μεταξὺ τῶν δύο ἀκραίων περιπτώσεων τοῦ πλήρους ἀνταγωνισμοῦ καὶ τοῦ ἀμιγοῦς μονοπωλίου, ὑπάρχει πλῆθος ἑτέρων περιπτώσεων, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν διὰ τοῦ συνδυασμοῦ στοιχείων τοῦ μονοπωλίου καὶ συνθηκῶν τοῦ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ. Μία τοιαύτη περίπτωσις εἶναι ἡ τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ (monopolistic competition).

Μονοπωλιακὸς ἀνταγωνισμὸς ὑφίσταται ὅταν ὑπάρχουν πολλοὶ πωληταί, οἱ ὁποῖοι προσπαθοῦν νὰ διαφοροποιήσουν τὸ προϊὸν των εἰς τὰ ὄμματα τῶν ἀγοραστῶν, διὰ σημάτων, ἐπωνυμιῶν, διαφημίσεων κ.λπ. Τὰ προϊόντα τῶν πωλητῶν εἶναι στενῶς ὑποκατάστατα μεταξύ των, ἀλλὰ πάντως οὐχὶ ἀπολύτως ὁμοιογενῆ. Ὅλοι οἱ πωληταὶ οἱ πωλοῦντες ὁμοειδῆ προϊόντα ἀποτελοῦν τὴν «ὁμάδα» (group), ἡ ὁποία χαρακτηρίζεται ὡς μεγάλη, διότι περιλαμβάνει πολλοὺς πωλητὰς (ὁμοιότης μὲ τὸν πλήρη ἀνταγωνισμόν). Τὸν ὅρον τοῦτον πρῶτος ἐχρησιμοποίησεν ὁ E.H. Chamberlin* ἀντὶ τοῦ ὅρου «κλάδος» (industry). Ὁ καθορισμὸς τῆς ὁμάδος δὲν εἶναι πάντοτε εὐχερὴς ὡς ὁ καθορισμὸς τοῦ κλάδου εἰς τὸν πλήρη ἀνταγωνισμόν, ἀλλὰ ἐν πάσῃ περιπτώσει περιλαμβάνει τοὺς πωλητὰς ἐκείνους οἱ ὁποῖοι πωλοῦν συγγενῆ τείνοντα πρὸς τὴν ὁμοιογένειαν προϊόντα.

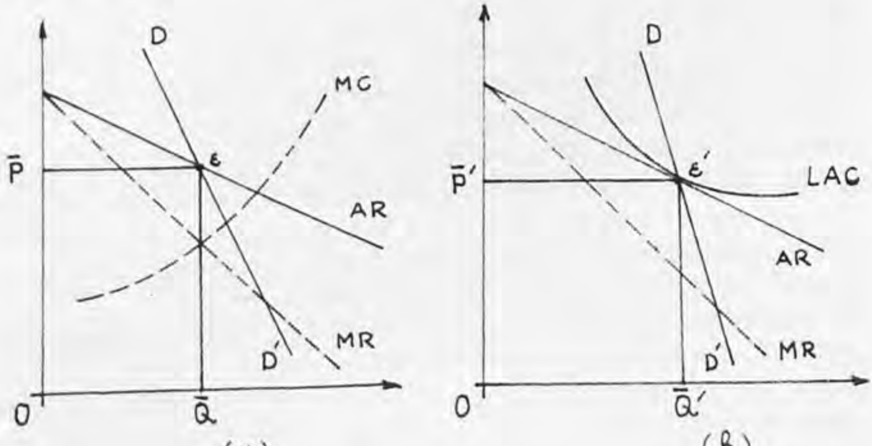
Λόγῳ τῆς διαφοροποιήσεως τοῦ προϊόντος ὑφ' ἑκάστου πωλητοῦ, θὰ πρέπει ἕκαστος νὰ ἀντιμετωπίζῃ ἰδίαν καμπύλην ζητήσεως, ἡ ὁποία ἐν τούτοις δὲν μένει ἀνεπηρέαστος ἐκ τῆς δράσεως τῶν λοιπῶν πωλητῶν τῆς ὁμάδος. Ἐξ ἄλλου τὸ ὑψηλὸν κέρδος, τὸ ὁποῖον ἐνδεχομένως ἀποκομίζει ὁ μονοπωλιακὸς ἀνταγωνιστὴς θὰ τείνῃ μακροχρονίως νὰ μειωθῇ, διότι θὰ σπεύσουν νὰ παράγουν σχεδὸν ὅμοιον ἢ νὰ καινοτομήσουν ἀναλόγως ἢ καὶ νὰ εἰσέλθουν εἰς τὴν ὁμάδα ἕτεροι ἐπιχειρήσεις, ἐφ' ὅσον δὲν ὑπάρχει τυπικὸν ἐμπόδιον.

Εἰς τὸν μονοπωλιακὸν ἀνταγωνισμὸν ὁ πωλητὴς δύναται νὰ δράσῃ κατὰ τρεῖς τρόπους: (α) Δύναται νὰ μεταβάλῃ τὴν τιμὴν πωλήσεως τοῦ προϊόντος του, (β) δύναται νὰ μεταβάλῃ τὴν ποιότητα τοῦ προϊόντος, καὶ (γ) δύναται νὰ μεταβάλῃ τὴν διαφημιστικὴν δαπάνην διὰ τὴν αὔξησιν τῶν πωλήσεών του. Ὁ μὲν πρῶτος τρόπος δράσεως ἰσοδυναμεῖ μὲ κίνησιν ἐπὶ τῆς καμπύλης ζητήσεως, οἱ δὲ δύο ἕτεροι τρόποι ἰσοδυναμοῦν μὲ μετάθεσιν τῆς καμπύλης ζητήσεως.

Κατωτέρω παρουσιάζομεν τὴν γραφικὴν ἀνάλυσιν τοῦ καθορισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς καὶ τῆς τιμῆς ὑπὸ τῆς «ἀντιπροσωπευτικῆς» ἐπιχειρήσεως τῆς ὁμάδος μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι αἱ συναρτήσεις κόστους καὶ ζητήσεως εἶναι αἱ αὐταὶ δι' ὅλας τὰς ἐπιχειρήσεις. Εἰς τὴν πραγματικότητα αἱ συναρτήσεις εἶναι διάφοροι δι' ἑκάστην ἐπιχείρησιν, ἀλλὰ δεδομένου ὅτι κατ' οὐσίαν αὐτὸ τὸ προϊὸν δὲν διαφέρει εἰ μὴ μόνον κατὰ τοὺς

* The Theory of Monopolistic Competition, Harvard University Press, 1933.

τύπους, θεωροῦμεν ὅτι εἶναι αἱ αὐταί. Τὸ Σχ. V.18 (α) παρουσιάζει τὴν ἰσορροπίαν τῆς ἀντιπροσωπευτικῆς μονοπωλιακῆς ἐπιχειρήσεως βραχυχρονίως. Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο παρουσιάζει δύο καμπύλας ζητήσεως. Ἡ καμπύλη DD' ἐμφαίνει τὴν ἐνεργὸν ζήτησιν τοῦ προϊόντος τῆς ἀντιπροσωπευτικῆς ἐπιχειρήσεως διὰ μεταβολὰς τῆς τιμῆς ὑπὸ τῶν λοιπῶν ἐπιχειρήσεων τῆς ὁμάδος. Ἤτοι, δεικνύει τὰς ἀντιδράσεις τῶν λοιπῶν ἐπιχειρήσεων. Ἡ καμπύλη AR δεικνύει τὰς ποσότητας τοῦ προϊόντος τῆς ἀντιπροσωπευτικῆς μόνον ἐπιχειρήσεως εἰς ἑκάστην τιμήν, ὅταν αὕτη εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα ἐκείνης τῶν λοιπῶν ἐπιχειρήσεων (DD'), πλὴν βεβαίως τοῦ σημείου ε, ὅπου ἡ τιμὴ τῆς ἀντιπροσωπευτικῆς καὶ τῶν λοιπῶν ἐπιχειρήσεων εἶναι ἡ αὐτή. Οὕτως ἡ ἀντιπροσωπευτικὴ ἐπιχείρησις παράγει $O\bar{Q}$ καὶ πωλεῖ εἰς τιμὴν $\bar{p}$. Ἐνταῦθα ἔχομεν ἐξίσωσιν ὁριακοῦ κόστους καὶ ὁριακῆς προσόδου (πρώτη συνθήκη μεγιστοποιήσεως). Ἡ δευτέρα συνθήκη τῆς ἰσορροπίας ἀπαιτεῖ ὅπως ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους τέμνει τὴν καμπύλην ὁριακῆς προσόδου ἐκ τῶν κάτω.



Σχ. V. 18.

Εἰς τὸ Σχ. V.18.(β) ἀναλύεται ἡ ἰσορροπία τῆς ἐπιχειρήσεως μακροχρονίως. Ἡ καμπύλη τοῦ μακροχρονίου μέσου κόστους ἐφάπτεται τῆς καμπύλης τοῦ μέσου ἐσόδου εἰς τὸ σημεῖον ε', διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται καὶ ἡ καμπύλη DD'. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὑφίσταται ἰσορροπία, τῆς ἐπιχειρήσεως παραγούσης $O\bar{Q}'$ ποσότητα καὶ πωλοῦσα εἰς τιμὴν $\bar{p}'$. Ἡ θέσις αὐτη δεικνύει ὅτι, λόγῳ τῆς ἐλευθέρας εἰσόδου καὶ ἐξόδου τῶν ἐπιχειρήσεων, τὰ οἰκονομικὰ κέρδη εἶναι μηδενικὰ (μέσον κόστος = τιμὴ πωλήσεως). Πρὶν ἢ φθάσωμεν εἰς τὴν θέσιν ταύτην ὑφίστανται, ἐν τούτοις, περιθώρια κέρδους. Δέον νά σημειωθῆ ἐξ ἄλλου, ὅτι ἡ θέσις τῆς καμπύλης DD' ἐπηρεάζεται ἀπό τήν μεταβολήν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐπιχειρήσεων εἰς τήν ὁμάδα. Τελικῶς, ὁ ἀριθμός τῆς ὁμάδος θά εἶναι τοιοῦτος ὥστε ἡ καμπύλη DD' νά διέρχεται διά τοῦ σημείου ε', ὡς τό γράφημα (β) δεικνύει.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως προκύπτει τό συμπέρασμα ὅτι ὁ μονοπωλιακός ἀνταγωνιστής πλησιάζει τήν λύσιν τοῦ πλήρους ἀνταγωνιστοῦ, ἐφ' ὅσον ἡ ποιοτική διαφοροποίησις τοῦ προϊόντος του τείνει πρός ὁμοιογένειαν, καί ὅτι πλησιάζει τήν λύσιν τοῦ μονοπωλητοῦ, ἐφ' ὅσον ἡ διαφοροποίησις καθίσταται ἰσχυρά.

V.2.10. **Μεγιστοποίησις καί Ἰσορροπία εἰς τό ὀλιγοπώλιον καί τό δυοπώλιον.** Ἡ ἀγορά τοῦ ὀλιγοπωλίου χαρακτηρίζεται ἐκ τοῦ μικροῦ ἀριθμοῦ τῶν πωλητῶν, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται μεταξύ των εἰς ἀλληλοεξάρτησιν. Τό προϊόν δύναται νά εἶναι εἴτε ὁμοιογενές, ὅτε τό ὑπόδειγμα πλησιάζει πρός τόν ἐλεύθερον ἀνταγωνισμόν, εἴτε διαφοροποιημένον, ὅτε τό ὑπόδειγμα ὁμοιάζει πρός τόν μονοπωλιακόν ἀνταγωνισμόν. Καθ' ὅσον ἀφορᾶ εἰς τόν ἀριθμόν τῶν πωλητῶν δέν ἔχει τόσην σημασίαν ἡ ἀπαρίθμησις, ἀλλά ὁ ἀριθμός ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐξουσιάζουν τό μεγαλύτερον μέρος τῆς ἀγορᾶς. Συνήθεις περιπτώσεις ὀλιγοπωλίου συναντῶμεν εἰς τήν βιομηχανίαν σιγαρέτων, αὐτοκινήτων, ἐλαστικῶν αὐτοκινήτων, μετάλλων, κ.λπ.

Τό ὀλιγοπώλιον δημιουργεῖται διότι ὑπάρχουν ὡρισμένα φυσικά νομικά ἐμπόδια, ἅτινα ἐμποδίζουν ἤ δυσχεραίνουν τήν εἴσοδον ἑτέρων ἐπιχειρήσεων εἰς τόν κλάδον*. Τοιαῦτα ἐμπόδια εἶναι: Τό μέγα μέγεθος τῶν ἐπιχειρήσεων, ἡ διάθεσις δικαιωμάτων ἐκμεταλλεύσεως, ἡ ὑφισταμένη πλεονάζουσα δυναμικότης ἡ ὁποία καθιστᾶ τόν κλάδον μή ἐνδιαφέροντα, κ.λπ.

Ἡ ἀνάλυσις τῆς δράσεως τῶν ὀλιγοπωλητῶν καί τῆς θέσεως ἰσορροπίας τῆς ἐπιχειρήσεως γίνεται συνήθως ἐπί τῇ βάσει τοῦ ὑποδείγματος τοῦ δυοπωλίου. Εἰς τήν πρᾶξιν ὑφίστανται πολλαί μορφαί ὀλιγοπωλίου στηριζόμεναι τόσον εἰς ἐμφανεῖς συμφωνίας μεταξύ τῶν ὀλιγοπωλητῶν, ὅσον καί εἰς ἀφανεῖς συμφωνίας, ὁσάκις ὑφίστανται νομικαί ἀπαγορεύσεις. Λόγῳ δέ τῆς πολλαπλότητος τήν ὁποίαν ἡ πρᾶξις ἐμφανίζει καί τοῦ πολυπλόκου τῶν φαινομένων δέν ὑφίσταται ἑνιαία θεωρία ἑρμηνεύουσα τό ὀλιγοπώλιον καί γενικώτερον τάς μορφάς τοῦ ἀτελοῦς ἀνταγωνισμοῦ. Κατωτέρω θά ἀναλύσωμεν ἐν συντομίᾳ τά πλέον γνωστά ὑποδείγματα, τά ὁποῖα περιέχονται εἰς τά πλεῖστα ἐγχειρίδια τῆς θεωρίας τῆς ἐπιχειρήσεως.

Τό δυοπωλιακόν ὑπόδειγμα ἄνευ διαφοροποιήσεως τοῦ προϊόντος. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὑφίστανται δύο πωληταί

* Ὁ κλάδος ἐνταῦθα δύναται νά κληθῇ «μικρά ὁμάς», ἐν ἀντιπαραβολῇ πρός τήν «μεγάλην ὁμάδα» τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ.

πωλοῦντες ἓν ὁμοιογενὲς προϊὸν (Q). Ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις ζητήσεως τοῦ προϊόντος εἶναι

$$p = f(Q_1 + Q_2) = f(Q).$$

Ἡ συνολικὴ πρόσοδος ἑκάστου πωλητοῦ εἶναι

$$R_1 = Q_1 f(Q_1 + Q_2),$$
$$R_2 = Q_2 f(Q_1 + Q_2).$$

Τὰ κέρδη ἑκάστου πωλητοῦ εἶναι

$$\Pi_1 = Q_1 f(Q_1 + Q_2) - C_{T\cdot 1}$$
$$\Pi_2 = Q_2 f(Q_1 + Q_2) = C_{T\cdot 2}.$$

Διὰ παραγωγίσεως ἑκάστης συναρτήσεως κέρδους καὶ ἐξισώσεως πρὸς μηδὲν λαμβάνομεν

$$\frac{d\Pi_1}{dQ_1} = \frac{\partial[Q_1 f(Q_1+Q_2)]}{\partial Q_1} + \frac{\partial[Q_1 f(Q_1+Q_2)]}{\partial Q_2}\,\frac{dQ_2}{dQ_1} - \frac{dC_{T\cdot 1}}{dQ_1} = 0,$$
$$\frac{d\Pi_2}{dQ_2} = \frac{\partial[Q_2 f(Q_1+Q_2)]}{\partial Q_1}\,\frac{dQ_1}{dQ_2} + \frac{\partial[Q_2 f(Q_1+Q_2)]}{\partial Q_2} - \frac{dC_{T\cdot 2}}{dQ_2} = 0.$$

Διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις τῶν τιμῶν τῶν dQ_2/dQ_1 καὶ dQ_1/dQ_2. Αἱ παράγωγοι αὗται εἶναι οἱ χαρακτηριστικοὶ δεῖκται τῆς ἀλληλεξαρτήσεως εἰς τὸ δυοπώλιον, καλούμενοι ἐλπιζόμεναι ἢ εἰκαστικαὶ μεταβολαὶ (conjectural variations). Αὗται δεικνύουν τὴν ἀναμενομένην μεταβολὴν τῆς παραγωγῆς τοῦ ἀνταγωνιστοῦ ὡς ἀποτέλεσμα τῆς μεταβολῆς τῆς παραγωγῆς τῆς ὑπ' ὄψιν ἐπιχειρήσεως.

Τὸ ὑπόδειγμα Cournot. Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο εἶναι τὸ ἀρχαιότερον (1838) εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ δυοπωλίου καὶ στηρίζεται εἰς τὰς ὑποθέσεις: Ὅτι ἡ παραγωγὴ τοῦ ἑτέρου πωλητοῦ εἶναι δεδομένη, τὸ προϊὸν εἶναι ὁμοιογενές, τὸ κόστος εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ ὅτι δὲν ὑφίσταται ἐλευθέρα εἴσοδος εἰς τὸν κλάδον*.

Συνεπείᾳ τῆς ὑποθέσεως, καθ' ἣν ἡ ἀπόφασις τῆς παραγωγῆς δὲν ἐπηρεάζεται ἐκ τῆς παραγωγῆς τοῦ ἑτέρου ἀνταγωνιστοῦ, αἱ κρίσιμοι μεταβληταί, ὡς εἶναι αἱ ἀνωτέρω εἰκαστικαὶ μεταβολαί, θὰ εἶναι μηδέν, ἤτοι $dQ_2/dQ_1 = dQ_1/dQ_2 = 0$.

Συνεπῶς ἡ μεγιστοποιοῦσα τὰ κέρδη ἑκάστου ἀνταγωνιστοῦ συνθήκη εἶναι:

$$\frac{\partial R_1}{\partial Q_1} = \frac{dC_{T\cdot 1}}{dQ_1},$$

---

* Augustin Cournot, Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth, Μετάφρ. N.T. Bacon, MacMillan, New York, 1897. Ὁ Cournot ἀνεφέρθη εἰς δυοπωλητὰς ἐκμεταλλευομένους πηγὴν ὕδατος μὲ μηδενικὸν ὁριακὸν κόστος.

$$\frac{\partial R_2}{\partial Q_2} = \frac{dC_{T\cdot 2}}{dQ_2}.$$

Ἤτοι ἑκάστου ἀνταγωνιστοῦ ἡ ὁριακὴ πρόσοδος δέον ὅπως εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὁριακὸν κόστος. Ἡ ὀλιγοπωλιακὴ ἀγορὰ εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν, ἐὰν αἱ τιμαὶ τῶν Q_1 καὶ Q_2 εἶναι τοιαῦται ὥστε ἕκαστος δυοπωλητὴς μεγιστοποιεῖ τὰ κέρδη του, ὑφ' ἃς ὑποθέσεις τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο ἀπαιτεῖ.

Ἡ δευτέρα συνθήκη μεγιστοποιήσεως ἀπαιτεῖ ὅπως

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_1^2} < \frac{d^2 C_{T\cdot 1}}{dQ_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 R_2}{\partial Q_2^2} < \frac{d^2 C_{T\cdot 2}}{dQ_2^2}.$$

Ἤτοι, ἡ ὁριακὴ πρόσοδος ἑκάστου ἀνταγωνιστοῦ πρέπει νὰ μεταβάλλεται κατὰ μικρότερον ρυθμὸν ἢ τὸ ὁριακὸν κόστος.

Τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Cournot ἐν τῇ οὐσίᾳ ὑποδηλοῖ μίαν δυναμικὴν διαδικασίαν, ἥτις προκύπτει ἐκ τῶν ἀντιδράσεων ἑκάστου ἀνταγωνιστοῦ πρὸς τὴν δρᾶσιν τοῦ ἑτέρου. Οὕτως ἡ παραγωγὴ ἑκάστου ἀνταγωνιστοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις τῆς ἀντιδράσεως τοῦ ἑτέρου ἀνταγωνιστοῦ, ἥτις ἐκδηλοῦται εἰς τὴν παραγωγὴν τούτου, ἤτοι $Q_1 = \Phi_1(Q_2)$, καὶ $Q_2 = \Phi_2(Q_1)$. Αἱ συναρτήσεις αὗται καλοῦνται συναρτήσεις ἀντιδράσεως (reaction functions). Ἡ συνάρτησις Φ_1 ὑποδηλοῖ τοιαύτην σχέσιν ὥστε δι' ὡρισμένην τιμὴν τῆς Q_2 ἡ Q_1 λαμβάνει τοιαύτην τιμὴν ἡ ὁποία μεγιστοποιεῖ τὰ κέρδη τοῦ πρώτου ἀνταγωνιστοῦ. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει διὰ τὴν συνάρτησιν Φ_2. Οὕτω διὰ νὰ ὑπάρξῃ ἰσορροπία (λύσις) εἰς τὸν ἀνταγωνισμὸν τῶν δύο πωλητῶν θὰ πρέπει νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ διὰ τὰ Q_1 καὶ Q_2 τοιαῦται ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦν ἀμφοτέρας τὰς συναρτήσεις ἀντιδράσεως.

Συναρτήσεις ἀντιδράσεως δύνανται νὰ προκύψουν ἐκ τῶν ἐξισώσεων ὁριακῶν προσόδων τῶν δυοπωλητῶν, γνωστῆς οὔσης τῆς καμπύλης ζητήσεως τοῦ προϊόντος, ἐφ' ὅσον λυθοῦν ὡς πρὸς Q_1 καὶ Q_2. Οὕτως ἐὰν ἡ ἀντίστροφος καμπύλη ζητήσεως εἶναι $p = f(Q_1+Q_2) = \alpha - \beta(Q_1+Q_2)$, τότε ὁριακαὶ πρόσοδοι τῶν δυοπωλητῶν εἶναι*

$$\frac{\partial}{\partial Q_1}(\alpha Q_1 - \beta Q_1^2 - \beta Q_1 Q_2) = \alpha - 2\beta Q_1 - \beta Q_2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_2}(\alpha Q_2 - \beta Q_1 Q_2 - \beta Q_2^2) = \alpha - \beta Q_1 - 2\beta Q_2 = 0.$$

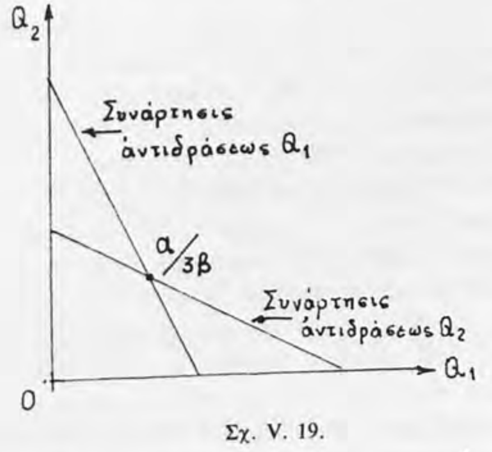
* Αἱ ὁριακαὶ πρόσοδοι ἰσοῦνται πρὸς τὸ μηδέν, διότι τὸ ὁριακὸν κόστος παραγωγῆς εἰς τὸ ὑπόδειγμα Cournot εἶναι μηδέν.

Ἐκ τούτων λαμβάνομεν

$$Q_1 = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2} Q_2,$$

$$Q_2 = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2} Q_1.$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τούτου δίδει $Q_1 = Q_2 = \alpha/3\beta$. Ἄρα, μόνον διὰ τὴν τιμὴν ταύτην οἱ δυοπωληταὶ μεγιστοποιοῦν τὰ κέρδη των καὶ δὲν ἔχουν πλέον συμφέρον νὰ μεταβάλουν τὴν παραγωγήν των. Ἡ λύσις συνεπῶς αὕτη εἶναι λύσις ἰσορροπίας. Τὰς συναρτήσεις ἀντιδράσεως τοῦ ὑποδείγματος Cournot δεικνύει τὸ Σχ. V. 19.



Σχ. V. 19.

Ὁ Pareto* ἤσκησε κριτικὴν ἐπὶ ὡρισμένων σημείων τοῦ ὑποδείγματος τοῦ Cournot. Ἰδιαιτέρως δὲ ἐπὶ τῆς προτάσεως ὅτι ἡ τιμὴ εἶναι συνάρτησις τοῦ ἀθροίσματος τῶν Q_1 καὶ Q_2, ἤτοι $p = f(Q_1 + Q_2)$. Κατὰ τὸν Pareto, συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων, ἡ τιμὴ εἶναι συνάρτησις τῶν Q_1 καὶ Q_2, ἤτοι $p = f(Q_1 . Q_2)$.

Παρόμοια ὑποδείγματα πρὸς ἐκεῖνο τοῦ Cournot ἀνέπτυξαν καὶ οἱ Joseph Bertrand (1883) καὶ Edgeworth (1925)** Οὗτοι ὑπέδειξαν ὅτι ἡ τιμὴ εἶναι ἡ πλέον κατάλληλος μεταβλητὴ διὰ τὴν λῆψιν ἀποφάσεως. Συνεπῶς εἰς τὰς ἐλπιζομένας μεταβολὰς ἀντὶ τῆς ποσότητος θέ-

---

* «Economie Mathématique», εἰς Encyclopédie des Sciences Mathematiques (T. I. Vol. 4, Paris, 1911). Παρ. E. Fossati, The Theory of General Static Equilibrium, Oxford, 1957.

** W. Fellner, Competition Among the Few, New York, 1949.

τομεν τὴν τιμὴν καὶ ὑποθέτομεν ὅτι αὗται εἶναι μηδέν, ἤτοι $dp_1/dp_2 = 0$ καὶ $dp_2/dp_1 = 0$.

Τὸ ὑπόδειγμα τῆς πλήρους συμφωνίας (Collusive model). Ὁ πλέον γνωστὸς τύπος τῆς ἀπολύτου συνεργασίας εἰς τὸ ὀλιγοπώλιον ἢ τὸ δυοπώλιον εἶναι τὸ καρτέλ. Ἐνταῦθα οἱ ὀλιγοπωληταὶ προσπαθοῦν διὰ τοῦ καθορισμοῦ ἑνιαίας τιμῆς νὰ μεγιστοποιήσουν τὸ σύνολον τῶν κερδῶν των, ἔχων ἕκαστος ὡρισμένον τμῆμα τῆς παραγωγῆς τοῦ κλάδου. Τὰ πάντα καθορίζονται ἀπὸ ἓν κεντρικὸν ὄργανον διὰ συνεννοήσεως ὅλων τῶν ἐπιχειρήσεων, αἱ ὁποῖαι συμμετέχουν εἰς τὴν συμφωνίαν.

Οὕτω τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο ὁμοιάζει πρὸς τὸ μονοπώλιον καὶ ἡ ἀνάλυσις τῆς διαδικασίας μεγιστοποιήσεως καὶ ἰσορροπίας εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ μονοπωλητοῦ, ὅστις ἔχει δύο ἐκμεταλλεύσεις, αἱ ὁποῖαι παράγουν τὸ αὐτὸ προϊόν. Ἤτοι, ἡ λύσις ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ συνολικοῦ κέρδους $(\Pi_1+\Pi_2)$ ἐν σχέσει πρὸς Q_1 καὶ Q_2.

Τὸ ὑπόδειγμα Stackelberg. Γενικῶς τὸ κέρδος ἑκάστου δυοπωλητοῦ εἶναι συνάρτησις τῶν Q_1 καὶ Q_2, ἤτοι,

$$\Pi_1 = \Phi_1(Q_1,Q_2) \text{ καὶ } \Pi_2 = \Phi_2(Q_1,Q_2).$$

Εἰς τὸ ὑπόδειγμα Cournot ὁ μεγιστοποιῶν τὰ κέρδη του δυοπωλητὴς ἐνεργεῖ ὡς οὐραγὸς (follower), διότι θεωρεῖ τὴν συνάρτησιν ἀντιδράσεως τοῦ ἑτέρου δυοπωλητοῦ ὡς σταθερά. Ἀντιθέτως, ὁ ἐνεργῶν ὡς ἡγέτης θεωρεῖ τὸν ἕτερον δυοπωλητὴν ὡς οὐραγόν. Ἓν τοιοῦτον ὑπόδειγμα ἐπιχειρήσεως ἡγέτιδος καὶ οὐραγοῦ (leadership - followship) ἀνέπτυξεν ὁ Γερμανὸς οἰκονομολόγος Heinrich von Stackelberg*.

Οὕτως ἐὰν ἡ ἐπιχείρησις 1 εἶναι οὐραγὸς τότε καθορίζει τὴν παραγωγήν της Q_1, ὥστε νὰ μεγιστοποιήσῃ τὸ κέρδος της $\Pi_1 = \Phi_1(Q_1,Q_2)$ μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι $dQ_2/Q_1 = 0$. Τὸ αὐτὸ θὰ συμβῇ ἐὰν ἡ ἐπιχείρησις 2 θεωρήσῃ ἑαυτὴν οὐραγόν. Ἐὰν ἐν τούτοις ἡ ἐπιχείρησις 1 εἶναι ἡγέτις, τότε θὰ καθορίσῃ τὴν παραγωγήν της Q_1, ὥστε νὰ μεγιστοποιήσῃ τὴν συνάρτησιν κέρδους $\Pi_1 = \Phi_1[Q_1, \Phi_2(Q_1)]$, ὅπου $\Phi_2(Q_1)$ εἶναι ἡ συνάρτησις ἀντιδράσεως τῆς ἐπιχειρήσεως 2. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἐπιχείρησις 1 δὲν θεωρεῖ τὰς ἐλπιζομένας μεταβολὰς ἴσας πρὸς μηδέν, ἀλλὰ

$$\frac{dQ_2}{dQ_1} = \frac{d\Phi_2(Q_1)}{dQ_1}.$$

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ἐπιχείρησιν 2 ὡς ἡγέτιδα, ἤτοι

$$\frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{d\Phi_1(Q_2)}{dQ_2}.$$

---

* H. von Stackelberg, The Theory of the Market Economy, Μετάφρ. Alan Peacock, Oxford University Press, 1952.

Ἐκ τοῦ ὑποδείγματος «ἡ γ έ τ ι ς - ο ὐ ρ α γ ὸ ς ἐ π ι χ ε ί ρ η σ ι ς» δύναται νὰ προκύψουν τέσσαρες περιπτώσεις.

(α) Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ δυοπωληταὶ ἐνεργοῦν ὡς οὐραγοί, τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς εἰς τὸ ὑπόδειγμα Cournot.

(β) Ἐὰν ὁ εἷς ἐνεργῇ ὡς ἡγέτης καὶ ὁ ἕτερος ὡς οὐραγός, τότε τὸ ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι σταθερὰ ἰσορροπία.

(γ) Ἐὰν ἀμφότεροι ἐπιθυμοῦν νὰ ἐνεργήσουν ὡς ἡγέται, τότε δὲν δύναται νὰ προκύψη σταθερὰ ἰσορροπία.

(δ) Ἐὰν ὁ εἷς ἐνεργῇ ὡς οὐραγὸς καὶ ὁ ἕτερος ὡς ἡγέτης, τότε τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι σταθερὰ ἰσορροπία.

Τ ὸ ὑ π ό δ ε ι γ μ α τ ο ῦ μ ε ρ ι δ ί ο υ τ ῆ ς ἀ γ ο ρ ᾶ ς (Market-shares Model). Ἡ ὑπόθεσις τοῦ ὑποδείγματος τούτου εἶναι ὅτι ὁ δυοπωλητὴς ἐπιθυμεῖ νὰ κατέχη ἓν ὡρισμένον μερίδιον τῆς ἀγορᾶς, ἀνεξαρτήτως τῶν βραχυχρονίων ἀποτελεσμάτων, ἀποβλέπων εἰς μακροχρόνια πλεονεκτήματα. Οὕτω ἐὰν ἡ ἀγορὰ μερισθῇ εἰς δύο μέρη, μ καὶ (1 - μ), τότε ἑκάστη μεταβολὴ τῆς ποσότητος τοῦ δυοπωλητοῦ 1 θὰ συνοδεύεται ἀπὸ ἀνάλογον μεταβολὴν τῆς ποσότητος τοῦ δυοπωλητοῦ 2.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ 2 διατηρεῖ σταθερὸν μερίδιον ἴσον πρὸς μ, τότε

$$\mu = \frac{Q_2}{Q_1+Q_2}.$$

Λύοντες ὡς πρὸς Q_2, ἔχομεν $Q_2 = \dfrac{\mu Q_1}{1-\mu}$. Ἡ ἐλπιζομένη μεταβολὴ διὰ τὴν ἐπιχείρησιν 1 εἶναι ἐκ ταύτης $\dfrac{dQ_2}{dQ_1} = \dfrac{\mu}{1-\mu}$ Ἤτοι, εἰς περίπτωσιν μεταβολῆς τῆς ποσότητος τῆς ἐπιχειρήσεως 1, ἡ ποσότης τῆς ἐπιχειρήσεως 2 θὰ μεταβληθῇ κατὰ $\mu/(1-\mu)$.

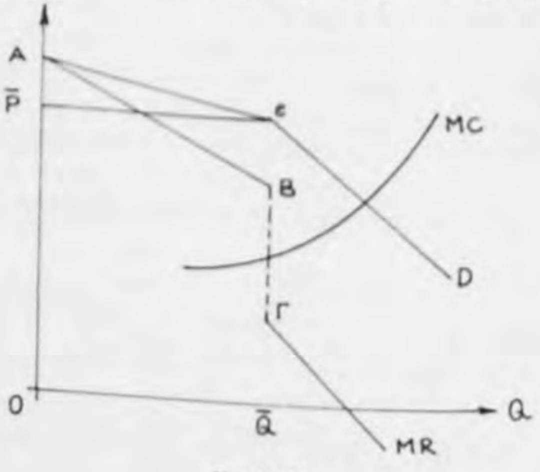
Ἡ συνάρτησις κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως 1 εἶναι

$$\Pi_1 = \Phi_1\left[Q_1, \left(\frac{\mu Q_1}{1-\mu}\right)\right] \text{ ἀντὶ τῆς } \Pi_1 = \Phi_1(Q_1, Q_2).$$

Τὸ ἀνωτέρω ὑπόδειγμα ἔχει λύσιν σταθερᾶς ἰσορροπίας, ἐφ' ὅσον ἡ μία ἐπιχείρησις διατηρῇ σταθερὸν μερίδιον τῆς ἀγορᾶς καὶ ἡ ἑτέρα δὲν ἔχει λόγους νὰ μὴ δέχεται τοῦτο. Ἐὰν ἑκάστη ἐπιχείρησις προσπαθῇ νὰ καθορίση δι' ἑαυτὴν ἓν μερίδιον καὶ ἀμφότερα τὰ μερίδια ὑπερβαίνουν τὸ 100%, τότε ἡ ἰσορροπία εἶναι ἀσταθὴς ἢ ἀνέφικτος.

Τ ὸ ὑ π ό δ ε ι γ μ α τ ῆ ς τ ε θ λ α σ μ έ ν η ς κ α μ π ύ λ η ς ζ η τ ή σ ε ω ς (K i n k e d d e m a n d C u r v e M o d e l). Τὸ 1939 ὁ P a u l

M. Sweezy* προσεπάθησε νὰ ἑρμηνεύσῃ τὴν παρατηρουμένην ἀκαμψίαν τῶν τιμῶν εἰς τὰς ὀλιγοπωλιακὰς ἀγοράς, εἰσαγαγὼν τὴν ἀνάλυσιν τῆς τεθλασμένης καμπύλης ζητήσεως. Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο προϋποθέτει: (α) Ὅτι ἔχει προκαθορισθῇ εἰς συνδυασμὸς τιμῆς - ποσότητος καὶ ὁ κλάδος εἶναι εἰς κατάστασιν ἰσορροπίας. (β) Ὅτι μία μείωσις τῆς τιμῆς ἐκ μέρους τοῦ ἑνὸς ἀνταγωνιστοῦ θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν ἀντίποινα ἐκ μέρους τοῦ ἑτέρου διὰ μειώσεως τῆς τιμῆς τοῦ προϊόντος του, ἐνῷ μία αὔξησις τῆς τιμῆς ἐκ μέρους τοῦ ἑνὸς δὲν ἀκολουθεῖται ἀπὸ μεταβολὴν τῆς τιμῆς ἐκ μέρους τοῦ ἑτέρου. Ἡ συνέπεια τῶν δύο ἀνωτέρω ὑποθέσεων εἶναι ἡ δημιουργία θλάσεως εἰς τὴν καμπύλην ζητήσεως τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπικρατούσης εἰς τὴν ἀγορὰν τιμῆς. Εἰς τὸ Σχ. V. 20 ἡ καμπύλη ζητήσεως



Σχ. V. 20.

παρουσιάζει θλάσιν εἰς τὸ σημεῖον ε, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἐπικρατοῦσαν τιμὴν $\bar{p}$. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἡ ἐλαστικότης μεταβάλλεται σημαντικῶς. Ἐὰν ἡ ἐπιχείρησις ἤθελε μειώσει τὴν τιμήν, τότε καὶ αἱ λοιπαὶ ἐπιχειρήσεις θὰ ἔπραττον τὸ αὐτό, ὥστε ἡ σχετικὴ θέσις ἑκάστης νὰ μὴ μεταβληθῇ. Συνεπῶς τὸ τμῆμα εD τῆς καμπύλης ζητήσεως ἔχει τὴν αὐτὴν ἐλαστικότητα ὡς καὶ ἡ ἀγοραία καμπύλη. Ἐὰν ἡ ἐπιχείρησις ἤθελε αὐξήσει τὴν τιμήν, τότε αἱ λοιπαὶ ἐπιχειρήσεις δὲν θὰ ἔπραττον τὸ αὐτὸ μὲ συνέπειαν τὴν ἀπώλειαν πελατῶν τῆς ἐπιχειρήσεως. Συνεπῶς τὸ τμῆμα Αε τῆς

* «Demand under Conditions of Oligopoly», εἰς Journal of Political Economy, 1939, σελ. 568 - 73. Βλ. ἐπίσης Α.Α. Λάζαρη, «Ἐπανεξέτασις τῶν θεωριῶν τοῦ Ἀτελοῦς Ἀνταγωνισμοῦ», εἰς Ἐπιθεώρησιν Οἰκον. καὶ Πολιτ. Ἐπιστημῶν, 1957, τεῦχος 3 - 4.

καμπύλης ἔχει ἐλαστικότητα σημαντικῶς ἀνωτέραν τοῦ τμήματος εD καὶ τῆς ἀγοραίας καμπύλης.

Ἡ καμπύλη ὁριακῆς προσόδου, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν καμπύλην ζητήσεως ἢ μέσης προσόδου τῆς παρουσιαζούσης θλᾶσιν, εἶναι ἡ ΑΒΓΜR. Ἡ καμπύλη αὕτη παρουσιάζει διακοπὴν τῆς συνεχείας της εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν θλᾶσιν τῆς καμπύλης ζητήσεως καὶ εἰς ἐπίπεδον παραγωγῆς ἴσον πρὸς $\bar{Q}$. Τὸ τμῆμα ΑΒ ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα Αε καὶ τὸ τμῆμα ΓΜR εἰς τὸ τμῆμα εD τῆς καμπύλης ζητήσεως.

Ἡ καμπύλη ὁριακοῦ κόστους τέμνει τὸ ἀσυνεχὲς τμῆμα τῆς καμπύλης ὁριακῆς προσόδου. Ἡ μεγιστοποίησις τῶν κερδῶν συντελεῖται εἰς τιμὴν $\bar{p}$ καὶ ποσότητα $\bar{Q}$. Καὶ τοῦτο εἶναι ἑπόμενον, διότι εἰς παραγωγὴν μικροτέραν τῆς $\bar{Q}$ τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι μικρότερον τῆς ὁριακῆς προσόδου, ὥστε νὰ συμφέρῃ ἡ αὔξησις τῆς παραγωγῆς, εἰς παραγωγὴν μεγαλυτέραν δὲ τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι μεγαλύτερον τῆς ὁριακῆς προσόδου, ὥστε νὰ συμφέρῃ ἡ μείωσις τῆς παραγωγῆς.

Εἶναι προφανὲς ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τοῦ διαγράμματος, ὅτι παρὰ τὰς ἐνδεχομένας μετατοπίσεις τῆς καμπύλης MC ἐντὸς τοῦ τμήματος ΒΓ, ἡ τιμὴ δὲν μεταβάλλεται. Διὰ νὰ μεταβληθῇ ἡ τιμὴ θὰ πρέπει νὰ ἐπισυμβῇ σημαντικωτάτη μεταβολὴ τοῦ κόστους εἰς τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς.

Τὸ ἀνωτέρω ὑπόδειγμα ἑρμηνεύει τὴν ἀκαμψίαν τῶν τιμῶν, ἥτις παρουσιάζεται κατὰ τὴν φάσιν τῆς ὑφέσεως εἰς ὡρισμένους κλάδους καὶ ὑποδεικνύει τὴν δυνατότητα αὐξήσεως τῶν ἡμερομισθίων ἄνευ αὐξήσεως τῶν τιμῶν τῶν προϊόντων.

Ἕτερα ὑποδείγματα: Ὡς ἐλέχθη ὑφίσταται μέγας ἀριθμὸς περιπτώσεων τὰς ὁποίας καλύπτει τὸ ὀλιγοπώλιον καὶ γενικῶς ὁ ἀτελὴς ἀνταγωνισμός. Ἡ ποικιλία αὕτη δὲν δύναται, ὡς εἰκός, νὰ καλυφθῇ ὑπὸ τῶν ἀνωτέρω ὑποδειγμάτων. Ἐν κατακλεῖδι θὰ ἀναφέρωμεν, χωρὶς νὰ ἀναλύσωμεν, σχετικῶς νεωτέρας προσπαθείας εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν τῶν προβλημάτων τῆς λήψεως ἀποφάσεων εἰς τὸ ὀλιγοπώλιον. Οὕτως ὁ Herbert A. Simon* εἰσήγαγεν ἀντὶ τῆς ἀρχῆς τῆς μεγιστοποιήσεως τὴν ἀρχὴν τῆς σχετικῆς ἱκανοποιήσεως τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς δράσεως ταύτης, ἥτις ἀποφέρει ἓν ἀποδεκτὸν κέρδος μὲ σχετικῶς ἥσυχην ἐπιχειρηματικὴν ζωὴν (satisficing theory). Ἕτεροι ἐχρησιμοποίησαν τὴν ἀρχὴν ταύτην διὰ νὰ κατασκευάσουν ὑπόδειγμα simulation (ἐξομοίωσις) τῶν ἐπιχειρηματικῶν ἀποφάσεων. Τὰ ὑποδείγματα ταῦτα δὲν ἑρμηνεύουν, ἀλλὰ μᾶλλον προγιγνώσκουν τὴν ἐπιχειρηματικὴν συμπεριφορὰν διὰ τροφοδοτήσεων ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν διὰ δεδομένων σχετικῶν πρὸς τὰς λαμβανο-

---

* «Theories of Decision Making in Economics», εἰς American Economic Review, June 1959.

μένας ἀποφάσεις. Ἐπίσης λόγῳ τῆς ἀβεβαιότητος, ἥτις κυριαρχεῖ εἰς τὰς ἐνεργείας τῶν ὀλιγοπωλητῶν, αἱ συμβατικαὶ μέθοδοι ἀναλύσεως ἀπεδείχθησαν ἀνεπαρκεῖς καὶ ἀντὶ τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως ἤρχισε νὰ ἐφαρμόζεται ἡ γραμμικὴ ἀνάλυσις, εἰδικώτερον δὲ ἡ θεωρία τῶν παιγνίων. Πρῶτοι εἰσαγαγόντες ταύτην εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς οἰκονομικῆς συμπεριφορᾶς ἦσαν οἱ J o h n v o n N e u m a n n καὶ O s k a r M o r g e n s t e r n*.

* Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, N.J., 1953.

ΕΠΙΛΟΓΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Α΄. ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Ἀγαπητίδη, Σ. : Μαθήματα Πολιτικῆς Οἰκονομίας, Ἀθῆναι 1960.

Βογιατζῆ, Β. : Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Θεωρητικὴν Οἰκονομικήν, Θεσ/νίκη 1967.

Δελιβάνη, Δ. : Παραδόσεις Θεωρητικῆς Πολιτικῆς Οἰκονομίας, Ε΄ ἔκδοσις, Θεσ/νίκη 1967.

Δρακάτου, Κ. : Συναρτήσεις Παραγωγῆς τῆς Ἑλληνικῆς Βιομηχανίας, Ἔκδοσις Τραπέζης Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1964.

—— : Χρησιμότης καὶ Ἀδυναμίαι τῆς Οἰκονομετρικῆς Ἀναλύσεως, Ἀθῆναι 1964.

—— : Στατιστικαὶ Ἀναλύσεις Οἰκονομικῶν Θεμάτων, Ἀθῆναι 1966.

Ζολώτα, Ξ. : Παραδόσεις Θεωρητικῆς Οἰκονομικῆς, Ἀθῆναι 1961.

—— : Νομισματικὴ Ἰσορροπία καὶ Οἰκονομικὴ Ἀνάπτυξις, Ἔκδοσις Τραπέζης Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1964.

Καλιτσουνάκη, Δ. : Ἐφηρμοσμένη Πολιτικὴ Οἰκονομία, Ἀθῆναι 1954.

Κεβόρκ, Κ. : Πρότυπον Ἀστικῆς Καταναλώσεως ἐν Ἑλλάδι καὶ Διεθνεῖς Συγκρίσεις, Ἔκδοσις Τραπέζης Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1962.

Κουτσογιάννη-Κόκκοβα, Α.: Συναρτήσεις Παραγωγῆς τῆς Ἑλληνικῆς Βιομηχανίας, Κ.Π.Ο.Ε., Ἀθῆναι 1964.

—— : Θεωρητικὴ Οἰκονομική, Ἀθῆναι 1967.

Κυρκιλίτση, Α. : Διεθνεῖς Οἰκονομικαὶ Σχέσεις, Ἀθῆναι 1968.

—— : Νομισματικὴ καὶ Πιστωτικὴ Πολιτική, Ἀθῆναι 1968.

Λάζαρη, Α. : Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις (Εἰσαγωγικὰ Μαθήματα), 1966.

—— : Οἰκονομικὸς Προγραμματισμός, 1965.

Λάζαρη, Α., : Θεωρία Ἀπασχολήσεως καὶ Ἐθνικοῦ Εἰσοδήματος, 1967.

Μπανταλούκα, Κλ. : Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Μεθοδολογίαν τῆς Οἰκονομικῆς Ἐρεύνης, Πειραιεύς, 1963.

—— : Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Μακροοικονομικὴν τῆς Καταναλώσεως.

Νεγρεπόντη-Δελιβάνη, Μ.: Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις, Τόμος Ι, Μικροοικονομικὴ Ἀνάλυσις, Θεσσαλονίκη 1969.

Πανᾶ, Ε. : Μελέται ἐπὶ τῆς Οἰκονομικῆς Ἀναπτύξεως, Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1970.

Παυλοπούλου, Π. : Συναρτήσεις Προσφορᾶς Ἀγροτικῶν Προϊόντων, Ἀθῆναι 1967.

—— : Οἰκονομικὴ Θεωρία (Μικροοικονομική), Τόμος Ι, Ἀθῆναι 1971.

Πεσμαζόγλου, Ἰω. : Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Ἐφηρμοσμένην Πολιτικὴν Οἰκονομίαν (Πανεπιστημιακαὶ Παραδόσεις), Τεύχη Α καὶ Β, Ἀθῆναι 1968.

Σαραντίδη, Στ. : Ἀνάλυσις Οἰκονομικῶν Διαστάσεων, Ἀθῆναι, 1970.

—— : Ἡ Θεωρία τῆς Διεθνοῦς Οἰκονομικῆς Ἰσορροπίας, Πειραιεύς, 1963.

—— : Προβλήματα Διεθνοῦς Νομισματικῆς Ρευστότητος, Ἀθῆναι 1969.

—— : Ἡ Μεταβαλλομένη Διάρθρωσις τοῦ Ἐξωτερικοῦ Ἐμπορίου Ὡρισμένων χωρῶν κατὰ τὴν περίοδον 1952 - 64, Ἀθῆναι 1968.

—— : Συναρτήσεις Εἰσαγωγῶν εἰς τὴν Ἑλληνικὴν Οἰκονομίαν Ἀθῆναι 1970.

—— : Ποσοτικὴ Ἐκτίμησις τῆς Ἐξαρτήσεως τῆς Οἰκονομικῆς Δραστηριότητος ἐκ τῶν Εἰσαγωγῶν, Πειραιεύς 1970.

—— : Στοιχεῖα Θεωρίας Οἰκονομικῶν Διακυμάνσεων (Πολυγραφημέναι Σημειώσεις), Πειραιεὺς 1970.

—— : Στοιχεῖα Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως (Πολυγραφημέναι Σημειώσεις), Πειραιεὺς 1971.

Σίδερι, Α. : Ἱστορία Οἰκονομικῶν Θεωριῶν, Τόμος πρῶτος, Ἀθῆναι 1953.

Στεριώτη, Π. : Στοιχεῖα Γενικῶν Μαθηματικῶν, Ἀθῆναι 1962.

Χαλκιοπούλου, Γ. : Πολιτικὴ Οἰκονομία, Τεῦχος Α΄, Ἀθῆναι 1967.

Χριστοδουλοπούλου, Π.: Θεωρητικὴ Πολιτικὴ Οἰκονομία, Ἀθῆναθ 1947.

Β΄. ΑΛΛΟΔΑΠΗ.

American Economic Association: Readings in Price Theory, Allen and Unwin, London 1964.

Balopoulos, Elias : Fiscal Policy Model of the British Economy, North - Holland Publishing Co, Amsterdam 1967.

Baumol, W.J. : Economic Theory aud Operations Analysis, Englewood Cliffs, N. J. 1961.

—— : Economic Dynamics, MacMillan, New York, 1951.

—— Business Behavior, Value aud Growth, MacMillan, New York 1959.

Beach, E.F. : Economic Models, Wiley, New York 1957.

Boulding, K.E. : Economic Analysis, 3rd Ed., Harper, New York 1955.

Brennan, M.J. : Theory of Economic Statics, 2nd Edition, Englewood Cliffs, N. J. 1970.

—— : Preface to Econometrics, An Introduction to Quantitative Methods in Economics, South Western Publishing Co, 1960.

Bushaw D.W. and R.W. Clower : Introduction to Mathematical Economics, R.D. Irwin 1957.

Carlson, Sune : A study on the Pure Theory of Production, New York, 1956.

Cohen, K.J. and Cyert, R. M., : Theory of the Firm: Resource Allocation in a Market Economy, Englewood Cliffs,N.J., 1965.

Derycke, P - H. : Elasticitè et Analyse Economique, Cujas, Paris 1964.

Eastham, J.K. : Graphical Economics, E.U.P., London 1960.

Ferguson, C.E., : Microeconomic Theory, 1969.

Fleming, Miles : Introduction to Economic Analysis, Allen and Unwin, London, 1969.

Friedman, Milton : Essays in Positive Economics, Chicago, 1953.
——— : Price Theory, Aldine, Chicago, 1962.

Henderson, J.M. and Quandt, R.E.: Microeconomic Theory: A Mathematical Approach, McGraw-Hill, New York, 1958.

Johnston, J., : Statistical Cost Analysis, McGraw Hill, New York 1960.

Klein, L.R., : An Introduction to Econometrics, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1962.

Leontief, W. : Essays in Economics: Theories and Theorizing, Oxford University Press, New York, 1966.

Lerner, A. : Essays in Economic Analysis, MacMillan, London, 1953.

Lewis, Parry J. : Εἰσαγωγή εἰς τά Μαθηματικα τῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως, Μετάφρασις Κ. Δρακάτου, Ἀθῆναι 1971.

Lipsey, R.G. : An Introduction to Positive Economics, 2nd Ed., Weidenfeld and Nicolson, London, 1966.

Marchal, André : Methode Scientifique et Science Economique, Vols I-II, Paris 1952.

Marchal, Jean : Cours d' Economie Politique, 4e Ed., Paris 1957.

Marshall, A. : Principles of Economics, Eighth Ed. MacMillan London 1961.

Paulsen, A. : Neue Wirtschaftslehre, Berlin 1958.

Robinson, Joan : Exercises in Economic Analysis, MacMillan, London 1960.

Schneider, E. : Pricing aud Equilibrium, Transl. by T.W. Hutchison, London 1952.
——— : Einführung in die Wirtschaftstheorie I-III, Tübingen 1965.

Scitovsky, T. : Welfare aud competition, Unwin, London 1964.

Stigler, G.J. : The Theory of Price, MacMillan, New York 1952.
——— : Production and Distribution Theories, MacMillan, New York 1946.

Tintner, G. and Millham C.B.: Mathematics and Statistics for Economists, 2nd Edition, New York 1970.

Walsh, V.C. : Introduction to Contemporary Microeconomics, McGraw-Hill, New York, 1970.

Walters, A.A. : An Introduction to Econometrics, McMillan, London, 1968.

Weber, A. : Allegemeine Volkswirtshaftslehre; Berlin 1953.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦ. II. Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ

ΚΕΦ. III. ΒΑΣΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ — ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ