

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ  
ΤΗΣ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ  
(LINEAR ECONOMICS)

ΑΘΗΝΑΙ, 1960

Ἄφιεροῦται  
εἰς τοὺς πρωτεργάτας ἑνὸς μεγάλου ἔργου :  
τῆς Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς

ΣΤΑΥΡΟΝ Ι. ΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΝ  
Πρόεδρον τοῦ Διοικητικοῦ Συμβουλίου  
καὶ

ΣΤΡΑΤΟΝ Κ. ΠΑΠΑ-ΓΩΑΝΝΟΥ  
Κοσμήτορα

## Ω Σ Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Τὸ Τμήμα Προγραμματισμοῦ τοῦ Γραφείου Οἰκονομικῶν Ἐρευνῶν τῆς Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς παρουσιάζει, μὲ τὴν ἀνά χειρὸς ἔκδοσιν, μίαν συστηματικὴν συλλογὴν μελετῶν ἐπὶ διαφόρων θεμάτων τῆς **Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως** (Linear Economics). Ὡς γνωστόν, ἡ Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις ἀποτελεῖ σημαντικὸν τομέα τῆς συγχρόνου Οἰκονομικῆς Ἐπιστήμης. Οὐσιώδη χαρακτηριστικά τῆς ἀναλύσεως ταύτης εἶναι ὅτι βασίζεται: α) ἐπὶ **γραμμικῶν** παραγωγικῶν συναρτήσεων καὶ β) ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῆς οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως.

Ἡ γραμμικότης τῶν παραγωγικῶν συναρτήσεων ἀπορρέει ἐκ τῆς καλουμένης «ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν». Ὁ ἀπλοποιητικὸς χαρακτὴρ τῆς υποθέσεως ταύτης καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ἐκτέλεσιν ὑπολογισμῶν εὐρείας κλίμακος βάσει πραγματικῶν στατιστικῶν δεδομένων, ἐνῶ ταυτοχρόνως δὲν περιορίζει οὐσιωδῶς τὸ πεδίον ἐφαρμογῆς τῆς, ἰδίᾳ προκειμένου περὶ προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ὡς δεικνύεται εἰς εἰδικὴν μελέτην τῆς παρούσης συλλογῆς.

Ἡ οἰκονομικὴ ἀλληλεξάρτησις νοεῖται εἰς τὴν Γραμμικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν εἶτε ὡς ἀλληλεξάρτησις κλασσικοῦ τύπου Walras—Cassel, εἶτε ὡς σχέσις ἐμμέσου ἐξαρτήσεως διαφόρων κλάδων, οἵτινες χρησιμοποιοῦν **δεδομένην ποσότητα** ἐνὸς ἢ περισσοτέρων συντελεστῶν παραγωγῆς. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς ἐκάστου κλάδου ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς τῶν λοιπῶν κλάδων τῆς οἰκονομίας, οἱ ὅποιοι δίδουν εἰς τὸν δοθέντα κλάδον, ἢ λαμβάνουν ἐξ αὐτοῦ, προϊόντα. Τὰ προβλήματα τὰ ὅποια ἀνακύπτουν ἐκ τῆς μορφῆς ταύτης ἀλληλεξαρτήσεως ἐξετάζει εἰδικὸς κλάδος τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως, γνωστὸς ὑπὸ τὸ ὄνομα **Ἀνάλυσις Εἰσροῶν—Ἐκροῶν** (Input—Output Analysis).

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἀνακύπτει κυρίως τὸ ζήτημα τῆς οἰκονομικῆς



κωτέρας κατανομής τῶν διαθέσιμων ποσοτήτων τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν μεταξύ διαφόρων κλάδων παραγωγῆς. Εἶναι προφανές ὅτι, ἐφ' ὅσον οἱ παραγωγικοὶ κλάδοι χρησιμοποιοῦν τοὺς αὐτοὺς ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστίαις, αὐξήσις τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς τοῦ ἐνὸς κλάδου ὑποδηλοῖ ἀντίστοιχον μείωσιν τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς τῶν ἄλλων κλάδων. Ἀνακύπτει οὕτω τὸ πρόβλημα τῆς ἀρίστης, ἐπὶ τῇ βάσει ὠριστημένων οικονομικῶν κριτηρίων, κατανομῆς τῶν διαθέσιμων ποσοτήτων συντελεστῶν μεταξύ τῶν διαφόρων δραστηριοτήτων. Μὲ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦτον ἀσχολεῖται ὁ **Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς** (Linear Programming), ὅστις καὶ ἀποτελεῖ τὸν δεῦτερον σημαντικὸν κλάδον τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως.

Ἡ συγγένεια μεταξύ τῆς Ἀναλύσεως Εἰσοδῶν—Ἐκροῶν καὶ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι στενὴ, τόσον λόγῳ τῶν οἰκονομικῶν βάσεων αὐτῶν ὅσον καὶ λόγῳ τῆς μαθηματικῆς διαρθρώσεως τῶν σχετικῶν ὑποδειγμάτων.

Ὡς τρίτος κλάδος τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως κατατάσσεται σνήθως ἡ **Θεωρία Παιγνίων** (Theory of Games), λόγῳ τῆς μαθηματικῆς διαρθρώσεως τῶν ὑποδειγμάτων τῆς, τὰ ὅποια εἶναι πρακτικῶς ὅμοια πρὸς τὰ ὑποδείγματα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

Ἡ παρῶσα συλλογὴ μελετῶν ἀναφέρεται μόνον εἰς τὴν Ἀνάλυσιν Εἰσοδῶν—Ἐκροῶν (Μέρος Πρῶτον) καὶ τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμὸν (Μέρος Δεύτερον). Δὲν εἶναι βεβαίως δυνατὸν νὰ λεχθῆ ὅτι αἱ ἐνταῦθα δημοσιευόμεναι μελέται ἐξανιλοῦν πλήρως τὰ διάφορα θέματα τῆς Ἀναλύσεως Εἰσοδῶν—Ἐκροῶν καὶ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἐκ τῆς ἐκτίσεως τῆς παρατιθεμένης βιβλιογραφίας, ὁ ἀναγνώστης θὰ ἀντιληφθῆ ἀσφαλῶς ὅτι μία προσπάθεια ἰκανοποιητικῆς ἀναλύσεως τῶν ὡς ἄνω θεμάτων εἰς ἓνα τόμον θὰ ἦτο σχεδὸν ἀδύνατος. Διὰ τῆς παρουσίας ὁμοῦ συλλογῆς ἐλπίζεται ὅτι θὰ καταστή δυνατὸν νὰ ἐξοικειωθῆ ὁ ἀναγνώστης εἰς τὰς βασικὰς ἐννοίας τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως καὶ νὰ ἐνδιαφερθῆ διὰ μίαν συστηματικώτερον μελέτην τοῦ ὅλου θέματος.

Ἡ Ἀνωτάτη Βιομηχανικὴ Σχολή, ἐκτιμῶσα ἰδιαιτέρως τὴν πρακτικὴν σπουδαιότητα τοῦ νέου τούτου τομέως τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης, τόσον ὅσον ἀφορᾷ τὸν προγραμματισμὸν καὶ τὴν ὁργάνωσιν τῶν ἐπὶ μέρους παραγωγικῶν μονάδων, ὅσον καὶ ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τοῦ προγραμματισμοῦ τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως τῆς οἰκονομίας ἐν τῷ συνόλῳ, εἰσήγαγε τὴν διδασκαλίαν τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως εἰς τὰς ἀνωτέρας τάξεις καὶ ταυτοχρόνως ὁργάνωσε τὴν ἔρευναν, βάσει τῆς ἀναλύσεως ταύτης, ἐπὶ οὐγκεχομένων οἰκονομικῶν προβλημάτων. Ἡ Ἀνάλυσις Εἰσοδῶν—Ἐκροῶν καὶ ὁ Γραμμικὸς Προγραμματι-

σμός διδάσκονται ἤδη ἀπὸ διετίας ὑπὸ τοῦ Καθηγητοῦ κ. Α. Λάζαρη, ὁ ὁποῖος κατευθύνει ἐπίσης καὶ τὴν σχετικὴν ἐρευνητικὴν ἐργασίαν τοῦ Κέντρου Ὁργανώσεως καὶ Διοικήσεως τῆς Σχολῆς. Ἐξ ἄλλου, ἀπὸ τοῦ Ὀκτωβρίου 1958 λειτουργεῖ παρὰ τῷ Γραφείῳ Οἰκονομικῶν Ἐρευνῶν εἰδικὸν Τμῆμα Προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον διὰ σειρᾶς διαλέξεων μαθημάτων καὶ μελετῶν ἐπιδιώκει νὰ καταστήσῃ γενικώτερον γνωστὰς τὰς συγχρόνους μεθόδους οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἡ ἐργασία αὕτη τῶν δύο τελευταίων ἐτῶν συμπληροῦται ἤδη διὰ τῆς παρουσίας ἐκδόσεως.

## ΣΥΝΕΡΓΑΤΑΙ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΤΟΣ ΤΟΜΟΥ

- ΑΘΑΝΑΣΑΤΟΣ Δημήτριος, 'Υφηγητής Γεωργικής Οικονομίας εις τήν 'Ανωτάτην Γεω-  
πονικήν Σχολήν.
- CAO - PINNA V., Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου τῆς Ρώμης καὶ Οικονομικὸς Σύμ-  
βουλος τῆς Κοινότητος Χάλυβος καὶ Ἄνθρακος.
- CHERUBINO Salvatore, Καθηγητῆς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Μιλάνου.
- DES RAJ, Στατιστικὸς ἐμπειρογνώμων τοῦ Ο.Η.Ε.
- ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΑΣ Διονύσιος, τῆς Δ)σεως Μελετῶν τῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλλάδος.
- ΚΟΥΛΟΥΡΙΑΝΟΣ Δημήτριος, τῆς Δ)σεως Μελετῶν τῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλλάδος.
- ΛΑΖΑΡΗΣ Α. Α., Καθηγητῆς τῆς Ἄνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς, Οικονομολόγος τῆς  
Δ)σεως Μελετῶν τῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλλάδος.
- ΜΠΑΝΤΑΛΟΥΚΑΣ Κλαύδιος, Καθηγητῆς τῆς Ἄνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς, Δ)ντῆς  
Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τοῦ Ὑπουργείου Οικονομικῶν.
- ΠΑΠΑΝΔΡΕΟΥ Ἀνδρέας, Καθηγητῆς Οικονομικῶν τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Καλιφορ-  
νίας, Berkeley.
- PASSAQUINDICI M., Ὑφηγήτρια Στατιστικῆς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ρώμης.
- ΠΕΦΑΝΗΣ Σπυρίδων, Μηχανικὸς ἠλεκτρονικῶν ἐγκεφάλων.
- ΣΠΕΝΤΖΟΥ Ἑλένη, τῆς Διευθύνσεως Μελετῶν τῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλλάδος.

# Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

## ΜΕΡΟΣ Α΄.

### ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΙΣΡΩΩΝ-ΕΚΡΩΩΝ

Πρόλογος . . . . .	Σελ. θ΄
<i>A. A. Λάζαρη</i> : Το σύστημα Λεόντιεφ . . . . .	» 3
<i>Δημ. Θ. Κουλουριάνου</i> : 'Η υπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν εἰς τὴν Γραμμικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν . . . . .	» 44
<i>A. A. Λάζαρη - Δ. Π. Καράγιωργα</i> : "Εν Ὑπόδειγμα νομισματικῆς ἀναλύσεως	» 59
<i>Δ. Π. Καράγιωργα</i> : Συστήματα γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας καὶ διακλαδικῆ ἀνάλυσιν . . . . .	» 79
<i>A. A. Λάζαρη</i> : Τὸ κριτήριον τῆς κατανομῆς τῶν διαθέσιμων πόρων εἰς τὸ πρόγραμμα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως . . . . .	» 95
<i>Salv. Cherubino</i> : Input-output analisi ed economie astratte . . . . .	» 105
<i>V. Cao-Pinna</i> : Ἐκθεσις ἐπὶ τῶν διαφόρων ἐφαρμογῶν τοῦ συστήματος εἰσρῶων - ἐκρῶων εἰς τὴν Ἰταλίαν . . . . .	» 122
<i>Κλ. Β. Μπανταλούκα</i> : Ἐφαρμογαὶ τοῦ συστήματος εἰσρῶων - ἐκρῶων εἰς διαφόρους χώρας . . . . .	» 140

## ΜΕΡΟΣ Β΄.

### ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

<i>*Ανδρέου Γ. Παπανδρέου</i> : Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς : Νέον ὄργανον οἰκονομικοῦ ὀρθολογισμοῦ . . . . .	» 157
<i>A. A. Λάζαρη</i> : Ὁ ἀλγόριθμος Simplex . . . . .	» 177
<i>Δημ. Θ. Κουλουριάνου</i> : Δύο μέθοδοι λύσεως γραμμικῶν προβλημάτων . . . . .	» 197
<i>*Ανδρέου Γ. Παπανδρέου</i> : Προβλήματα τῆς πολιτικῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως . . . . .	» 230
<i>Salv. Cherubino</i> : Alcuni problemi di programmazione lineare . . . . .	» 240
<i>Des Raj</i> : Use of programming methods in sample surveys . . . . .	» 251
<i>Δημ. Γ. Ἀθανασάτου</i> : Ἐφαρμογαὶ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἰς τὴν γεωργικὴν οἰκονομίαν . . . . .	» 255
<i>M. Passaquindici</i> : Sulla ripartizione geografica delle vendite e sulla distribuzione dei mezzi di trasporto di diversa capacita . . . . .	» 315

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

<i>Σπύρου Ε. Πεφάνη</i> : Συστήματα Γραμμικῶν ἐξισώσεων - Λογισμὸς μητρῶν. Μέθοδος λύσεως δι' ἠλεκτρονικοῦ ἔγκεφάλου . . . . .	» 325
Summaries . . . . .	» 355
Βιβλιογραφία (Ἐπιμέλεια Ἑλένης Σπέντζου) . . . . .	» 363

Ἡ Ἀνωτάτη Βιομηχανικὴ Σχολὴ θεωρεῖ ἰδιαιτέ-  
ραν χαρὰν καὶ ὑποχρέωσιν, νὰ εὐχαριστήσῃ θερ-  
μῶς τοὺς Ἕλληνας καὶ ξένους ἐπιστήμονας οἱ  
ὅποιοι, παρὰ τὰς πολλαπλᾶς τῶν ἀσχολίας, προσ-  
έφερον προθύμως τὴν πολύτιμον καὶ ἐξαιρετον  
συνεργασίαν τῶν διὰ τὴν ὅσον τὸ δυνατόν ἀρτιω-  
τέραν σύνταξιν τοῦ ἀνά χεῖρας τόμου διὰ πρώτην  
φορὰν συστηματικῶς προβάλλοντος ἐν Ἑλλάδι τὰ  
θέματα καὶ τὴν μέθοδον τῆς οἰκονομικῆς γραμ-  
μικῆς ἀναλύσεως.

ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΙΣΡΟΩΝ - ΕΚΡΟΩΝ

(INPUT - OUTPUT ANALYSIS)

# ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΛΕΟΝΤΙΕΦ

Υπό τοῦ κ. Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ

## I

### Α'. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατὰ τὴν μεταπολεμικὴν περίοδον ἐσημειώθη σημαντικὴ πρόοδος εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῆς οικονομικῆς ἀναλύσεως πρὸς ἀντιμετώπισιν πρακτικῶν οικονομικῶν προβλημάτων. Οἱ οικονομολόγοι, πέραν τοῦ συνήθους ἐνδιαφέροντός των πρὸς διατύπωσιν ὑποθέσεων περὶ τοῦ ποιοτικοῦ χαρακτῆρος τῶν οικονομικῶν σχέσεων, ἤρχισαν νὰ δεικνύουν ἠϋξημένον ἐνδιαφέρον διὰ τὴν ποσοτικὴν μέτρησιν τῶν σχέσεων αὐτῶν ἐπὶ τῇ βάσει στατιστικῶν στοιχείων.

Αἱ ἐπὶ μέρους ἐρευνητικαὶ προσπάθειαι ἐμπειρικῆς ἐπαληθεύσεως τῶν οικονομικῶν ὑποθέσεων καὶ συστηματοποιήσεως τῶν μεθόδων πρακτικῆς ἐφαρμογῆς τῶν ὑποθέσεων αὐτῶν συγκλίνουν ἤδη πρὸς δημιουργίαν ἐνός νέου κλάδου τῆς οικονομικῆς ἐπιστήμης, γνωστοῦ ὑπὸ τὸ ὄνομα «Οἰκομετρία».

Εἶναι ἄξιον ἰδιαίτερας σημειώσεως ὅτι ἡ οἰκομετρικὴ ἔρευνα δὲν ὑποδηλοῖ στροφὴν πρὸς τὴν περιπτωσιολογίαν καὶ τὸν στατιστικὸν ἐμπειρισμόν, ἀλλ' ἀντιθέτως θέτει τὴν οικονομικὴν θεωρίαν ὡς θεμελιῶδες προαπαιτούμενον διὰ τὴν κατάστρωσιν τῶν «ὑποδειγμάτων» οἰκομετρικῆς ἀναλύσεως. Πρόκειται περὶ μιᾶς κινήσεως ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς τὴν μονομερῆ χρησιμοποίησιν καθαρῶς θεωρητικῶν ἢ καθαρῶς ἐμπειρικῶν μεθόδων ἀναλύσεως καὶ ἀποσκοπεῖ εἰς τὸν ἐπιτυχῆ συνδυασμὸν θεωρίας καὶ ἐμπειρικῆς ἐρεύνης.

Εἰς τὴν νέαν ταύτην κίνησιν αἱ ἐργασίαι τοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Harvard Βασ. Λεόντιεφ κατέχουν ἀναμφισβητήτως πρωτοποριακὴν θέσιν.

Εἰδικώτερον, αἱ ὡς ἄνω ἐργασίαι ἀφοροῦν εἰς τὴν κατάστρωσιν ἐνός οἰκομετρικοῦ συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας, προσοριζόμενον διὰ τὴν μελέτην μακροοικονομικῶν προβλημάτων, ὡς εἶναι π. χ. τὸ πρόβλημα τῆς πλήρους ἀπασχολήσεως καὶ τοῦ προγραμματισμοῦ μιᾶς οἰκονομίας. Τὸ σύστημα τοῦτο ἀποτελεῖ λογικὴν συνέχειαν τῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας τῶν Quesnay, Walras, Pareto καὶ Cassel, τὰ ὁποῖα σκοπὸν εἶχον νὰ δώσουν μίαν ἐποπτικὴν περιγραφὴν τῆς οἰκονομίας καὶ νὰ προσδιορίσουν τὴν φύσιν τῶν ὑφισταμένων σχέσεων ἀλληλεξαρτήσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων οικονομικῶν μεγεθῶν. Ὁ ἴδιος ὁ καθηγητὴς Λεόντιεφ θεωρεῖ τὴν κλασσικὴν ἐργασίαν του ἐπὶ τῆς διαρθρώσεως τῆς Ἀμερικανικῆς Οἰκονομίας (1) ὡς προσπάθειαν καταστρώσεως ἐνός Tableau Economique διὰ τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας (2).

\* Ἡ παρούσα μελέτη συνετάχθη ἐπὶ τῇ βάσει παλαιότερας μελέτης τοῦ συγγραφέως ὑπὸ τὸν ὡς ἄνω τίτλον καὶ τοῦ κεμένου δύο διαλέξεων αὐτοῦ, δοθεισῶν εἰς τὴν Ἀνωτάτην Βιομηχανικὴν Σχολὴν τὴν 26ην Νοεμβρίου καὶ 17ην Δεκεμβρίου 1958.

1) W. Leontief «The Structure of American Economy 1919 - 1939», N.Y. 1941 (νέα ἐκδόσις 1953).

2) W. Leontief, ἐνθ' ἄνωτ. σ. 9.

'Αλλ' ἐνῶ οἱ κλασσικοὶ οἰκονομολόγοι τῆς γενικῆς ἰσορροπίας οὐδέποτε διανοήθησαν νὰ χρησιμοποιήσουν τὸ σύστημά των διὰ πρακτικὰς ἀναλύσεις, ὁ καθηγητὴς Λεόντιεφ ἀντιθέτως ἐπέδιώξε νὰ παρουσιάσῃ ἓν σύστημα τὸ ὁποῖον, τροφοδοτούμενον διὰ καταλλήλων στατιστικῶν στοιχείων, θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν πρακτικῶν προβλημάτων.

Τὸ πολύπλοκον τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων καὶ ἰδίως ἡ ἔλλειψις ἐπαρκῶν στατιστικῶν στοιχείων καὶ καταλλήλων ὑπολογιστικῶν μέσων καθίστα οὐτοπικὴν πᾶσαν προσπάθειαν πρακτικῆς χρησιμοποίησεως τῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν Walras καὶ Pareto. Οὕτω τὰ συστήματα ταῦτα, παρὰ τὴν θεωρητικὴν των μεγαλοπρέπειαν, ἐγκατελείφθησαν βαθμιαίως χάριν τῶν μαρσαλλιανῶν συστημάτων μερικῆς ἰσορροπίας, εἰς τὰ ὁποῖα ἐξητάζοντο ἰδιαίτερος αἱ οἰκονομικαὶ μεταβολαὶ ἐντὸς ὁρισμένων ἀγορῶν καὶ ἀπεφεύγετο ἡ παρακολούθησις τῶν ἐπιδράσεων τῶν μεταβολῶν αὐτῶν ἐντὸς ὁλοκλήρου τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Ἡ ἀναξωογόνησις τοῦ συστήματος τῆς γενικῆς ἰσορροπίας ὑπὸ τοῦ Cassel (1918) δὲν ἤλλαξε κατὰ βάσιν τὴν κρατοῦσαν τάσιν. Καὶ τοῦτο διότι ὁ Cassel, συνεχίσας τὴν κλασσικὴν παράδοσιν, ἐνδιεφέρθη κυρίως διὰ τὴν μαθηματικὴν θεμελίωσιν τοῦ συστήματός του καὶ δὲν ἔθεσε ζήτημα πρακτικῆς ἐφαρμογῆς αὐτοῦ.

Ὁ καθηγητὴς Λεόντιεφ (1941) εἶναι ὁ πρῶτος οἰκονομολόγος ὁ ὁποῖος ἀντικατέστησε τὰ ἀφρημένα ἐλγερικὰ σύμβολα τοῦ συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας διὰ συγκεκριμένον στατιστικῶν στοιχείων, καὶ ἐπεχείρησε νὰ χρησιμοποιήσῃ τὸ σύστημα τοῦτο διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τῆς οἰκονομικῆς πραγματικότητος. Τὸ ἐγχείρημα ἦτο βεβαίως τολμηρόν, ἀλλ' ἡ ἀνάληψις αὐτοῦ καθίστατο δυνατὴ κατόπιν τῆς ἐν τῷ μεταξὺ ἐπελευθούσης βελτιώσεως τῶν στατιστικῶν συνθηκῶν εἰς Ἀμερικὴν καὶ τῆς ἀναπτύξεως τῶν ὑπολογιστικῶν μηχανῶν ὑψηλῆς ταχύτητος. Ἐξ ἄλλου ἡ προοῦσα σημασία τῶν προβλημάτων πλήρους ἀπασχολήσεως καὶ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ κατὰ τὴν μεταπολεμικὴν περίοδον προώθησεν ἐπίσης σημαντικῶς τὰς ἐρευνητικὰς ἐργασίας ἐπὶ τῆς πρακτικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας.

Ὡς συνήθως συμβαίνει μὲ τὰς πρωτοποριακάς ἐργασίας, τὸ σύστημα Λεόντιεφ ἐγένετο ἀντικείμενον κριτικῶν ἐπιθέσεων, ἰδίᾳ ὅσον ἀφορᾷ τὰς δυνατοτήτας πρακτικῆς αὐτοῦ ἐφαρμογῆς. Ἀκόμη καὶ σήμερον, μετὰ παρέλευσιν 18ετίας ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς του ἐμφανίσεως, θὰ ἠδύνατο νὰ λεχθῇ ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο δὲν περιβάλλεται ἐνεπιφυλάκτως μὲ τὸν μανδύαν τῆς ἀκαδημαϊκῆς ὀρθοδοξίας. Ὅπως δὲποτε, τὸ σύστημα Λεόντιεφ ἤρχισε νὰ ἐπιηρεάζῃ ἀποφασιστικῶς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν καὶ πράξιν. Ἦδη διδάσκεται εἰς πλείστα ξένα πανεπιστήμια καὶ ἀποτελεῖ τὴν βάσιν ἐρευνητικῶν ἐργασιῶν αἱ ὁποῖα ἐκτελοῦνται, κατὰ τὴν τελευταίαν κυρίως πενταετίαν, ὑπὸ διαφόρων Ἰνστιτούτων ἢ κρατικῶν ὑπηρεσιῶν εἰς τὰς Η.Π.Α. καὶ πλείστας Εὐρωπαϊκάς χώρας. Σχετικὸν ἐνδιαφέρον ἤρχισε νὰ ἐκδηλοῦται τελευταίως καὶ παρ' ἡμῖν. Καθίσταται συνεπῶς σκόπιμος μία ἀναλυτικὴ περιγραφή τοῦ συστήματος Λεόντιεφ, ἡ ὁποία θὰ ἠδύνατο νὰ βοηθήσῃ τοὺς ἐν Ἑλλάδι ἐνδιαφερομένους διὰ τὸ θέμα τοῦτο.

Ἡ παρούσα ἐργασία ἀποσκοπεῖ εἰς μίαν τοιαύτην περιγραφὴν. Τὸ πρῶτον μέρος αὐτῆς περιλαμβάνει ἀνάλυσιν τοῦ κυριωτέρου ὑποδείγματος Λεόντιεφ καὶ συσχέτισμόν αὐτοῦ μὲ τὴν γενικωτέραν τεχνικὴν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ καὶ



τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν. Τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἐργασίας περιλαμβάνει μίαν μαθηματικὴν ἐπισκόπῃσιν τοῦ ἐξεταζομένου θέματος, ἢ ὅποια δύναται ἐπίσης νὰ θεωρηθῆ καὶ ὡς γενίκευσις τῶν κυριωτέρων ἰδεῶν τοῦ πρώτου μέρους.

### Β'. ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

Αἱ βασικαὶ ὑποθέσεις τοῦ συστήματος Λεόντιεφ ἔχουν ὡς ἀκολούθως :

α) Ἡ οἰκονομία εἶναι δυνατόν νὰ διαιρεθῆ εἰς ἓνα ἀριθμὸν παραγωγικῶν κλάδων.

β) Ἐκαστος κλάδος παράγει ἓν μόνον προϊόν καὶ καθ' ὀρισμένην μέθοδον.

γ) Αἱ ὑφ' ἐκάστου κλάδου ἀπορροφόμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς εὐρίσκονται εἰς σταθερὰν ἀναλογίαν πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ ἐξ αὐτῶν παραγομένου προϊόντος, ἀνεξαρτήτως τοῦ «ἐπιπέδου καὶ τοῦ χρόνου δράσεως»<sup>3)</sup> τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν).

Ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ εἶδος τῶν εἰς τὴν πρώτην ὑπόθεσιν ἀναφερομένων κλάδων ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ποσότητος καὶ ποιότητος τῶν διατιθεμένων στατιστικῶν πληροφοριῶν, τῆς ἰκανότητος τῶν ὑπολογιστικῶν μέσων (ἀριθμομηχανῶν), ὡς ἐπίσης καὶ ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἐξεταζομένου θέματος. Ἐνταῦθα ἀνακύπτει τὸ πρόβλημα τῆς συμπτύξεως τῶν ἐπὶ μέρους οἰκονομικῶν μονάδων εἰς γενικωτέρας ὁμάδας ἢ ἄλλως τῆς «συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως» (agrégation) τῶν στατιστικῶν στοιχείων<sup>4)</sup>. Τοιοῦτον πρόβλημα δὲν ὑφίστατο διὰ τοὺς κλασσικοὺς οἰκονομολόγους τῆς γενικῆς ἰσορροπίας, οἱ ὅποιοι ἐνδιεφέροντο μόνον δι' ἀλγεβρικὰς ἀποδείξεις. Πρακτικῆ ὁμως ἐφαρμογῇ τοῦ ὡς ἄνω συστήματος εἶναι ἀδύνατος ἄνευ συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων, ὅχι μόνον λόγῳ τῶν δυσχερειῶν ἐξευρέσεως ἀναλυτικῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν, ἀλλὰ καὶ διότι ὁ μέγας ὄγκος τῶν πληροφοριῶν αὐτῶν θὰ ἠμπόδιζε τὴν χρησιμοποίησίν των. Ὡς λέγει ὁ καθηγητὴς Λεόντιεφ, τὸ πρόβλημα δὲν εἶναι ἡ ἐκλογή μεταξὺ συγκεντρωτικῆς καὶ ἀναλυτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν, ἀλλ' ἡ ἐκλογή μεταξὺ μεγαλύτερου ἢ μικροτέρου βαθμοῦ συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως. Οὕτω π.χ. ἐὰν πρόκειται νὰ ἐξετασθῆ ἀπὸ τινος ἀπόψεως, ἡ θέσις τῆς κλωστοῦφαντουργίας ἐντὸς μιᾶς οἰκονομίας, δὲν γεννᾶται ζήτημα χρησιμοποίησεως ἀναλυτικῶν στατιστικῶν στοιχείων δι' ὅλας τὰς ἐπὶ μέρους κλωστοῦφαντουργικὰς ἐπιχειρήσεις, γεννᾶται μόνον ζήτημα ἐκλογῆς μεταξὺ συγκεντρωτικῶν στοιχείων διὰ τὴν κλωστοῦφαντουργίαν λαμβανομένην ὡς ἓνα ἐνιαῖον κλάδον παραγωγῆς καὶ συγκεντρωτικῶν (ἐπίσης) στοιχείων ἀναφερομένων εἰς μικρὸν σχετικῶς ἀριθμὸν ὑποκλάδων, εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἦτο δυνατόν νὰ διαιρεθῆ ἡ κλωστοῦφαντουργία (π.χ. ἐριουργίαν, βαμβαουργίαν κλπ.).

3) «Ἐπίπεδον δράσεως» (level of activity) εἶναι ὁ συνήθως χρησιμοποιούμενος εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ προγραμματισμοῦ ὅρος πρὸς ὑποδήλωσιν τοῦ ἐπιπέδου παραγωγικῆς δραστηριότητος.

4) Ὡς «συγκεντρωτικὴ ταξινόμησις» στατιστικῶν στοιχείων νοεῖται ἡ συλλογὴ στοιχείων περὶ τῆς δραστηριότητος τῶν διαφόρων κλάδων, θεωρουμένων ὡς αὐτοτελεῶν μονάδων, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν συλλογὴν ἀναλυτικῶν στοιχείων περὶ τῆς δραστηριότητος τῶν ἐπὶ μέρους οἰκονομικῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι συγχροτοῦν τοὺς ἐν λόγῳ κλάδους.

“Όσον ό βαθμός συγκεντρωτικής ταξινομήσεως τών στατιστικῶν στοιχείων είναι μεγαλύτερος τόσοσν έλαττοῦται ή πληροφοριακή δύναμις τών στοιχείων αὐτῶν, ένῳ αντίθετως διευκολύνεται ό ύπολογιστικός χειρισμός των. Έπιβάλλεται ὅθεν ή έκλογή τοῦ βαθμοῦ συγκεντρωτικής ταξινομήσεως, ό ὁποῖος ἀφ' ενός μὲν δέν θίγει στατιστικὰς πληροφορίας χρησίμους διὰ τὸ έξεταζόμενον θέμα, ἀφ' έτέρου δέ διευκολύνει κατὰ τὸ δυνατόν τοὺς ύπολογισμοὺς (5).

Ἡ δευτέρα ὑπόθεσις, ἀνωτέρω, σημαίνει ὅτι εἰς τὸ σύστημα Λεόντιεφ δέν τίθεται ζήτημα ἀριστοποίησης τοῦ οικονομικοῦ ἀποτελέσματος καθ' ὅσον τοιαύτη ἀριστοποίησης προϋποθέτει δυνατότητα έκλογῆς μεταξὺ διαφόρων παραγωγικῶν μεθόδων ὀδηγοῦσῶν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα (6).

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν εἶναι θεμελιώδης διὰ τὸ σύστημα Λεόντιεφ, ὡς ἐπίσης καὶ διὰ τὰ κλασσικὰ συστήματα γενικῆς ἰσορροπίας (7). Τοῦτο δέν σημαίνει ὅτι αἱ πραγματικαὶ παραγωγικαὶ συναρτήσεις θεωροῦνται ὡς συμφωνοῦσαι κατ' ἀνάγκην πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, ἀλλ' ἀπλῶς ή ὑπόθεσις αὕτη λαμβάνεται ὡς μία ἱκανοποιητικὴ προσέγγις εἰς τὴν πραγματικότητα(8).

Ἐκ τῶν ὑποθέσεων (β) καὶ (γ) προκύπτει ὅτι εἰς τὸ σύστημα Λεόντιεφ δέν γίνεται ἀποδεκτὴ ή θεωρία τῆς ὀριακῆς παραγωγικότητας, συμφώνως πρὸς τὴν ὁποῖαν ὑπάρχει ἀπεριόριστος δυνατότης ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Εἰς τὰς παραγωγικὰς συναρτήσεις τοῦ συστήματος Λεόντιεφ οἱ συντελεσταὶ παραγωγῆς εἶναι αὐστηρῶς συμπληρωματικοὶ καὶ συνεπῶς τὸ ὀριακὸν προῖον ἑκάστου εἶναι μηδέν. Τὸ προῖον δύναται νὰ αὐξηθῆ μόνον ἂν αἱ ποσότητες ὄλων τῶν συντελεστῶν, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγήν δεδομένου προϊόντος αὐξηθοῦν καθ' ὄρισμένην ἀναλογίαν, καθοριζομένην ὑπὸ τῶν τεχνολογικῶν συνθηκῶν τῆς δεδομένης παραγωγῆς (9).

## Γ'. ΤΟ ΒΑΣΙΚΟΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

1. Ἀναλύομεν κατωτέρω τὰ βασικὰ σημεῖα τοῦ συστήματος Λεόντιεφ μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς ἀριθμητικοῦ παραδείγματος.

Τὸ κεντρικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ συστήματος εἶναι ὁ «πίναξ εἰσοδῶν - ἐκροῶν (input - output table)». Ὁ πίναξ οὗτος ὁμοιάζει κατὰ θάσιν πρὸς τὸ Tableau Economique τοῦ Francois Quesnay καὶ καταγράφει συστηματικῶς τὰς ροὰς ἀγαθῶν καὶ

5) Τὰ προβλήματα καὶ τὰ κριτήρια τῆς συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων ἀναπτύσσονται εἰς W. Leontief: The Structure of American Economy σ. σ. 14, 69 καὶ 208 - 11. Ἐπίσης εἰς Economic Activity Analysis. Edit by Os. Morgenstern, London 1954, σ. σ. 79 - 102.

6) Ἐπ' αὐτοῦ τοῦ σημείου πλεονα εἰς τμήμα Ζ'.

7) Βλ. Economic Activity Analysis, κεφαλ. Models of General Economic Equilibrium:

8) Βλέπε Input - Output Analysis, an appraisal NBER, Princeton University Press, 1955, σ. 30. Βλ. ἐπίσης τμήμα Θ' κατωτέρω.

9) Βλέπε τμήμα Θ', παραγρ. 1 κατωτέρω. Βλ. ἐπίσης Α. Λάζαρη, Γραμμικός Προγραμματισμός, Ἐπιθεώρ. Οἰκον. καὶ Πολ. Ἐπιστημῶν σ. σ. 21 - 22.

υπηρεσιῶν μεταξύ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας ἐντὸς μιᾶς δεδομένης χρονικῆς περιόδου.

Ἴδου πῶς ἐμφανίζεται ὁ πίναξ εἰσοῶν - ἐκροῶν διὰ τὴν φανταστικὴν οἰκονομίαν τοῦ χρησιμοποιουμένου παραδείγματος :

Πίναξ 1

Εἰσοδαί - Ἐκροδαί (καὶ Τελικὴ Ζήτησις) κατὰ τὸ ἔτος x

ΕΙΣΡΟΔΑΙ ΕΚΡΟΔΑΙ	Πρωτογενὴς παραγωγή	Μεταποιήσις	Λοιπὸι κλάδοι	Τελικὴ Ζήτησις				Σύνολον	
				Κατανάλωσις		Ἐπένδυσις (α)			
				Ἰδιωτικὴ	Δημοσία	Παγίαι	Ἀποβηματ.		Ἐξισωγαί
Πρωτογενὴς παραγωγή		60	20	50	7		8	10	155
Μεταποιήσις	20		60	60	20	30	10	20	220
Λοιπὸι κλάδοι	20	40		40	20	15		10	145
Εἰσισωγαί	5	30	10	10	3				58
Ἑπηρεσία προσώπων	100	70	45						215
Φόροι	10	20	10	20					60
Σύνολον	155	220	145	180	50	45	18	40	853

(α) Ἰδιωτικὴ Ἐπένδυσις.

Ὁ πίναξ 1 δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς μία λογιστικὴ (ex post) κατάστασις, ἀπεικονίζουσα τὰς διακλαδικὰς (intersectoral) σχέσεις τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας κατὰ τὸ ληφθὲν ἔτος X, ὡς ἐπίσης καὶ τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ κατὰ τὸ αὐτὸ ἔτος παραχθέντος τελικοῦ προϊόντος. Ὁ πίναξ οὗτος ἐπισκοπούμενος κατὰ στίγλας δύναται νὰ χωρισθῆ εἰς δύο βασικοὺς τομεῖς, τὸν παραγωγικὸν τομέα — ὁ ὁποῖος ὑποδιαιρεῖται εἰς τὸν κλάδον τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς (γεωργία - ὀρυχτεία κ.λ.π.), τῶν κλάδων τῆς μεταποιήσεως (βιομηχανία - βιοτεχνία) καὶ τοὺς «λοιποὺς κλάδους» — καὶ τὸν τομέα τῆς τελικῆς ζήτησεως, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν κατανάλωσιν, τὰς ἐπενδύσεις καὶ τὰς ἐξισωγάς. Ἐκ τῆς κατὰ σειράς ἐπισκοπήσεως τοῦ πίνακος εἶναι δυνατόν νὰ διακριθῶν ἐπίσης δύο τομεῖς, ὁ παραγωγικὸς τομεὺς (ὡς καὶ προηγουμένως) καὶ ὁ τομεὺς τῶν προσωπικῶν ὑπηρεσιῶν, τῶν εἰσισωγῶν καὶ τῶν φόρων.

Ειδικώτερον ἢ κατὰ στήλας ἐξέτασις τοῦ πίνακος 1 δεικνύει τὰς «εισοδάς» (inputs), ἦτοι τὰς ὑφ' ἐκάστου οἰκονομικοῦ κλάδου ἀπορροφώμενας ποσότητες ἀγαθῶν (ἢ ὑπηρεσιῶν) καὶ τὰς πηγὰς προελεύσεως αὐτῶν. Αἱ ποσότητες αὗται δὲν μετροῦνται εἰς πραγματικὰς μονάδας, ἀλλ' ἐκφράζονται εἰς νομισματικὰς ἀξίας ὑπολογιζομένας εἰς σταθερὰς τιμὰς. Οὕτω, αἱ τρεῖς πρῶται στήλαι δεικνύουν τὰς ἀξίας ἀγαθῶν (ἢ ὑπηρεσιῶν) τὰ ὁποῖα ἀπορροφῶνται ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν κλάδων διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος αὐτῶν κατὰ τὸ ἔτος X. Ὁ κλάδος π.χ. τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς ἐχρησιμοποίησε προϊόν τοῦ κλάδου τῆς μεταποιήσεως ἀξίας 20 ν. μ., προϊόντα τῶν λοιπῶν κλάδων ἀξίας 20 ν. μ., εἰσαγόμενα προϊόντα ἀξίας 5 ν. μ., προσωπικὰς ὑπηρεσίας ἀξίας 100 ν. μ. καὶ ἐπλήρωσε φόρους 10 ν. μ.

Ἀναλόγως ἐρμηνεύονται καὶ αἱ ἐπόμεναι δύο στήλαι. Αἱ στήλαι τῆς τελικῆς ζητήσεως δεικνύουν τὸν τρόπον διανομῆς τοῦ τελικοῦ προϊόντος τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος X μετὰ τὴν καταναλώσεως (ιδιωτικῆς καὶ δημοσίας), ἐπενδύσεων καὶ ἐξαγωγῶν. Ἡ εἰς τὴν στήλην τῆς ιδιωτικῆς καταναλώσεως ἀναγραφομένη ἀξία 20 ν. μ. ἐκ φόρων παριστᾷ τὸ ἀντίτιμον τῆς ὑπὸ τῶν ιδιωτῶν καταναλώσεως κρατικῶν ὑπηρεσιῶν κατὰ τὸ δοθὲν ἔτος.

Ἡ κατὰ σειρὰς ἐξέτασις τοῦ πίνακος δεικνύει τὰς «ἐκροδάς» (outputs), ἦτοι τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ παραχθέντος συνολικοῦ προϊόντος ἐκάστου κλάδου κατὰ τὸ ἔτος X. Οὕτω π.χ., ἡ πρώτη σειρὰ τοῦ πίνακος δεικνύει ὅτι ἐκ τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς τοῦ ἔτους X, ἀξίας 155 ν. μ., διετέθη προϊόν ἀξίας 60 ν. μ., διὰ τὸν κλάδον τῆς μεταποιήσεως (πρῶται ἴλαι κ.λ.π.), 20 ν. μ. διὰ τοὺς λοιποὺς κλάδους, 50 ν. μ. δι' ιδιωτικὴν κατανάλωσιν, 7 ν. μ. διὰ δημοσίαν κατανάλωσιν, 8 ν. μ. δι' ἀποθέματα καὶ τέλος προϊόν ἀξίας 10 ν. μ. δι' ἐξαγωγὰς (10).

Ἀναλόγως ἐρμηνεύονται καὶ αἱ ἐπόμεναι δύο σειραὶ.

Ὁ πίναξ 1 δεικνύει ὅτι ἡ ἀξία τοῦ συνολικοῦ προϊόντος ἐκάστου παραγωγικοῦ κλάδου (ἄθροισμα κονδυλίων ἀντιστοίχου σειρᾶς) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν χρηματικῶν καταβολῶν τοῦ αὐτοῦ κλάδου (ἄθροισμα κονδυλίων ἀντιστοίχου στήλης). Τοῦτο συμβαίνει διότι εἰς τὴν ἀξίαν δι' ὑπηρεσίας προσώπων συμπεριλαμβάνονται ἐνταῦθα καὶ τὰ ἐπιχειρηματικὰ κέρδη.

Ἡ τετάρτη σειρὰ καθορίζει τὸν τρόπον διαθέσεως τῶν εἰσαγομένων ἀγαθῶν μετὰ τὴν τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων καὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως. Ἡ πέμπτη σειρὰ δεικνύει τὴν ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν κλάδων καταβληθεῖσαν ἀξίαν διὰ τὰς χρησιμοποιηθεῖσας ὑπηρεσίας προσώπων (ἐργασίαν). Τέλος εἰς τὴν ἕκτην σειρὰν ἀναγράφονται αἱ ἐκ φόρων ἐπιβαρύνσεις τῶν παραγωγικῶν κλάδων καὶ τῆς καταναλώσεως. Αἱ ἐπιβαρύνσεις αὗται ἀποτελοῦν θεωρητικῶς τὸ ἀντίτιμον τῶν κρατικῶν ὑπηρεσιῶν πρὸς τὴν οἰκονομίαν.

Ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ πίνακος 1 τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν σειρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν στηλῶν. Ἐπειδὴ δὲ τὰ μερικὰ ἄθροίσματα τῶν τριῶν πρώτων σειρῶν ἰσοῦνται, ἀνὰ ἓν, πρὸς τὰ συνολικὰ ἄθροίσματα τῶν τριῶν πρώτων στηλῶν, ἔπεται ὅτι τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων σειρῶν (ἀξία

10) Δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ δι' ἰδιοκατανάλωσιν χρησιμοποιούμενον προϊόν.

εισαγωγών + αξία υπηρεσιών προσώπων + φόροι), ισοῦται πρὸς τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν στηλῶν τῆς τελικῆς ζητήσεως.

2. Ἐλέγχθη ἤδη ὅτι ὁ πίναξ 1 ἔχει ἀπλῶς λογιστικὴν σημασίαν ὡς ἀπεικονίζον τὰς λαβούσας χώραν κατὰ τὸ ἔτος X, συναλλακτικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν κλάδων τῆς δοθείσης οἰκονομίας. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης ὁ πίναξ οὗτος θὰ ἠδύνατο νὰ παραβληθῆ πρὸς τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν<sup>(11)</sup>. Ἡ μετατροπὴ τοῦ πίνακος 1 ἀπὸ ἀπλῆν λογιστικὴν κατάστασιν εἰς ἀ ν α λ υ τ ι κ ὸ ν ὄ ρ γ α ν ο ν — δυνάμενον νὰ παρακολουθήσῃ τὰς ἐπιδράσεις τῶν μεταβολῶν τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν μεγεθῶν — εἶναι ἐν τούτοις δυνατὴ διὰ τῆς χρησιμοποίησεως τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, αἱ ὑφ' ἐκάστου παραγωγικοῦ κλάδου ἀπορροφώμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς εὐρίσκονται εἰς σταθερὰν σχέσιν πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ ἐξ αὐτῶν παραγομένου προϊόντος, ἀνεξαρτήτως ἐπιπέδου καὶ χρόνου δράσεως τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, δοθέντος τοῦ πίνακος 1, δύναται νὰ προσδιορισθῆ ἡ μορφή τῆς παραγωγικῆς συναρτήσεως ἐκάστου κλάδου διὰ σειρὰς τεχνολογικῶν συντελεστῶν, οἱ ὅποιοι λαμβάνονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν κονδυλίων τῶν εἰσροῶν τῶν ἐν λόγῳ κλάδων διὰ τῆς ἀξίας τοῦ ὑπ' αὐτῶν παραχθέντος συνολικοῦ προϊόντος<sup>(12)</sup>. Οἱ συντελεσταὶ οὗτοι εἶναι γνωστοὶ ὡς «συντελεσταὶ εἰσροῆς» (input coefficients).

### Πίναξ 2

#### Συντελεσταὶ Εἰσροῆς

	Π (α)	Μ	Λ
Π	0/155 = 0	60/220 = 0,272	20/145 = 0,137
Μ	20/155 = 0,129	0/220 = 0	60/145 = 0,414
Λ	20/155 = 0,129	40/220 = 0,182	0/145 = 0
Ε	5/155 = 0,032	50/220 = 0,227	10/145 = 0,069
Υ	100/155 = 0,645	70/220 = 0,318	45/145 = 0,311
Φ	10/155 = 0,065	20/220 = 0,092	10/145 = 0,069
Σύνολον	1,000	1,000	1,000

(α) Τὰ σύμβολα Π, Μ, κλπ. εἶναι τὰ ἀρχικά γράμματα τῶν ὀνομάτων τῶν κλάδων τοῦ πίνακος 1.

Ἡ ἔννοια τῶν ἀνωτέρω συντελεστῶν εἶναι προφανής. Οὕτω, ὁ συντελεστὴς 0,272 (πρῶτος εἰς τὴν στήλιν Μ) καθορίζει τὴν ἀξίαν τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς, τὸ ὅποιον χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ κλάδου τῆς μεταποιήσεως

11) Βλέπε σχετικὴν σύγκρισιν εἰς Τμῆμα Δ' κατωτέρω.

12) Μολονότι ἐνδιαφέρουν κυρίως αἱ σχέσεις πραγματικῶν ποσοτήτων, ἡ χρησιμοποίησις ἐνταῦθα σταθερῶν τιμῶν καθιστᾶ δυνατὴν τὴν ἐκτίμησιν τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν εἰς νομισματικὰς ἀξίας.



κατά την παραγωγήν προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου ἀξίας μᾶς νομ. μονάδος. Ἀνάλογον ἐρμηνείαν δίδομεν καὶ εἰς τοὺς λοιποὺς συντελεστάς εισροῆς.

Ὁ εἰς τὸν πίνακα 1 γενόμενος διαχωρισμὸς μεταξὺ παραγωγικοῦ τομέως καὶ τελικῆς ζητήσεως ἐπιδιώκει νὰ τονίσῃ ὅτι εἰς τὸ ἐξεταζόμενον οἰκονομικὸν σύστημα τὰ κονδύλια τῆς τελικῆς ζητήσεως λαμβάνονται ὡς δεδομένα (ἐξωγενῆ), ἐπὶ τῇ βάσει δὲ τῶν κονδυλίων αὐτῶν πρέπει νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὁ βαθμὸς παραγωγικῆς ἀπασχολήσεως τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἐκάστοτε ὕψος (καὶ τὴν σύνθεσιν) τῆς τελικῆς ζητήσεως.

Διὰ νὰ καταδειχθῇ τώρα ἡ ἀναλυτικὴ ἀξία τοῦ πίνακος εισροῶν - ἐκροῶν κατόπιν τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν συντελεστῶν εισροῆς, ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ κονδύλια τελικῆς ζητήσεως μεταβάλλονται ὡς ἀκολούθως : Τὰ μὲν κονδύλια τῆς καταναλώσεως αὐξάνουν κατὰ 5 ο)ο, τὰ δὲ κονδύλια τῶν ἐπενδύσεων καὶ τῶν ἐξαγωγῶν αὐξάνουν κατὰ 10 ο)ο. Τὸ προκύπτον ἐκ τῶν ὡς ἄνω μεταβολῶν πρόβλημα εἶναι νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν εισαγωγῶν καὶ τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα διὰ νὰ ικανοποιήσουν τὴν αὐξηθεῖσαν τελικὴν ζήτησιν.

Ἐχόντες ἐπ' ὄψιν μας τὰς πληροφορίας τῶν πινάκων 1 καὶ 2 καὶ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν τὸν κάτωθι πίνακα :

Πίναξ 3

ΕΚΡΟΑΙ ----- ΕΙΣΡΟΑΙ	Προγενῆς παραγωγή	Μεταποιήσις	Λοιπὸι κλάδοι	Τελικὴ Ζήτησις					Σύνολον
				Κατανάλωσις		Ἐπενδύσεις		Ἐξαγωγαί	
				Ἰδιωτικὴ	δημοσία	Πάγαι	Ἀποθεμ.		
Πρωτογενῆς παραγωγή		0,272 X <sub>3</sub>	0,137 X <sub>3</sub>	52,5	7,35		8,8	11	X <sub>1</sub>
Μεταποιήσις	0,129 X <sub>1</sub>		0,114 X <sub>3</sub>	63	21	33	11	22	X <sub>2</sub>
Λοιποὶ κλάδοι	0,129 X <sub>1</sub>	0,182 X <sub>2</sub>		42	21	16,5		11	X <sub>3</sub>
Εἰσαγωγαί	0,032 X <sub>1</sub>	0,136 X <sub>2</sub>	0,069 X <sub>3</sub>	10,5	3,15				X <sub>4</sub>
Ἐπηρεασίαι Προσώπων	0,615 X <sub>1</sub>	0,318 X <sub>2</sub>	0,311 X <sub>3</sub>						X <sub>5</sub>
Φόροι	0,065 X <sub>1</sub>	0,092 X <sub>2</sub>	0,069 X <sub>3</sub>	21					X <sub>6</sub>
Σύνολον	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	189	52,5	49,5	19,8	44	X

Εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα τὰ κονδύλια τελικῆς ζητήσεως ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰ κονδύλια τελικῆς ζητήσεως τοῦ πίνακος 1, μεταβληθέντα συμφώνως πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος. Τὰ  $X_1$ ,  $X_2$  καὶ  $X_3$  παριστοῦν τὰ ζητούμενα ἐπίπεδα δράσεως τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων κατὰ τὴν σειρὰν τοῦ πίνακος. Αἱ ἔγγραφαι εἰς τὰς στήλας τοῦ παραγωγικοῦ τομέως ὑπελογίσθησαν ὡς γινόμενα τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα δράσεως  $X_1$ ,  $X_2$  καὶ  $X_3$  (13).

Λύσις τοῦ τεθέντος προβλήματος σημαίνει νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , ἐξ ὧν τιμῶν δύναται νὰ προσδιορισθοῦν ἐν συνεχείᾳ πᾶσαι αἱ ἔγγραφαι τοῦ πίνακος 3.

Προχωροῦμεν ὡς ἀκολούθως :

Ὡς γνωρίζομεν, ἐκάστη τῶν τριῶν πρώτων σειρῶν δεικνύει τὸν τρόπον διανομῆς τοῦ προϊόντος τῶν ἀντιστοίχων παραγωγικῶν κλάδων μεταξὺ τῶν κλάδων τούτων καὶ τῶν διαφόρων ὑποτομέων τῆς τελικῆς ζητήσεως. Συνεπῶς τὸ ἄθροισμα τῶν κονδυλίων ἐκάστης σειρᾶς πρέπει νὰ ἰσοῦται ἐξ ὀρισμοῦ πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ ἀντιστοίχου κλάδου. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης (βλ. πίν. 3) εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ τὸ ἀκόλουθον σύστημα ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} 0 & + 0,272 X_2 + 0,137 X_3 + 79,65 = X_1 \\ 0,129 X_1 + 0 & + 0,414 X_3 + 150 = X_2 \\ 0,129 X_1 + 0,182 X_2 + 0 & + 90,5 = X_3 \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὡς ἄνω συστήματος λαμβάνομεν :

$$X_1 = 164, \quad X_2 = 234, \quad X_3 = 154$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τιμῶν τούτων καὶ κατόπιν ἐκτελέσεως τῶν σημειουμένων πολλαπλασιασμῶν, ὁ πίναξ 3 λαμβάνει τὴν μορφήν τοῦ πίνακος 4, κατωτέρω.

\*Ἦδη ἡ ἀπάντησις τοῦ τεθέντος προβλήματος δίδεται ἐκ τῶν ἔγγραφῶν τῆς στήλης τῶν συνόλων τοῦ πίνακος 4.

Τὸ ἐπίπεδον δράσεως τοῦ κλάδου Π	ἠϋξήθη ἀπὸ 155 εἰς 164 ἢ οἱ κατὰ 6 % περίπ.
» » » » Μ	» » 220 » 234 » » 6,3 % »
» » » » Λ	» » 145 » 154 » » 6,2 % »
» » τῶν εἰσαγωγῶν	» » 58 » 62 » » 6,9 % »
» » ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως	» » » » » 6,5 % »
» (Ἡ φορολογ. ἐπιβάρυνσις τῆς Οἴκου	» » 69 » 63,7 » » 6,2 % » )

Ἡ διάρθρωσις τοῦ πίνακος 4 δεικνύει ἐπίσης τὰς μεταβολὰς εἰς τὰς εἰσροὰς καὶ ἐκροὰς αἱ ὁποῖαι ἦσαν ἀναγκαῖαι πρὸς παραγωγήν τοῦ νέου συνολικοῦ προϊόντος τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων.

3. Εἶναι πρόδηλός ἡ πρακτικὴ σπουδαιότης τῆς ὡς ἀνωτέρω ἀναλύσεως. \*Ἄν

13) Ἐφ' ὅσον ἕκαστος συντελεστὴς εἰσροῆς ἀποτελεῖ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς ἀντιστοίχου ἔγγραφῆς (εἰσροῆς) ἐνὸς κλάδου διὰ τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τοῦ αὐτοῦ κλάδου, ἡ ὡς ἄνω ἔγγραφῆ (εἰσροῆς) δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ εἰσροῆς καὶ τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τοῦ κλάδου (βλ. καὶ εἰς μέρος II συστήματα 2 καὶ 4).

Πίναξ 4 (α)

ΕΚΡΟΑΙ ΕΙΣΡΟΑΙ	Πρωτογενής παραγωγή	Μεταποίησης	Λοιποί κλάδοι	Τελική ζήτηση					Σύνολον
				Κατανάλωσις		Έπενδύσεις		Έξαιραγαί	
				Ίδιωτική	Δημοσία	Πάγια	Άποβεματ.		
Πρωτογενής παραγωγή		63,2	21,2	52,5	7,3		8,8	11	164
Μεταποίησης	21		63	63	21	33	11	22	234
Λοιποί κλάδοι	21,5	42		42	21	16,5		11	151
Είσαγωγαι	5,3	32	11	10,5	3,2				62
Ύπηρεσία προσώπων	105,6	75,5	48						229,1
Φόροι	10,6	21,3	10,8	21					63,7
Σύνολον	161	234	151	189	52,5	49,5	19,8	44	906,8

(α) Κατά τους υπολογισμούς μετεβλήθησαν ελαφρώς ώρισμένα ποσά πρὸς ἀποφυγήν τῶν πολλῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἰς τὰς ἐγγραφάς.

π.χ. αἱ ὑποθεθεῖσαι μεταβολαὶ τῆς τελικῆς ζήτησεως ἀποτελοῦν ἀντικειμενικοὺς σκοποὺς ἑνὸς οἰκονομικοῦ προγράμματος πραγματοποιητέους εἰς τὸ τέλος μιᾶς, ἔστω, τριετίας ἀπὸ τοῦ ἔτους Χ, τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος 4 δεικνύουν τὰς ἀναγκαίας προϋποθέσεις ἀπὸ ἀπόψεως ἐπιπέδων δράσεως τῶν παραγωγικῶν κλάδων, ποσότητος (14) καὶ εἶδους πρώτων ὑλῶν, ἐπιπέδου εἰσαγωγῶν καὶ ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως, τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῶν σκοπῶν τοῦ ὡς ἄνω προγράμματος. Ἐν, ἐπομένως, ἐκ τῶν ὑπαρχουσῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν προκύπτει ὅτι ὁ κεφαλαιουχικὸς ἐξοπλισμὸς ὄρισμένων παραγωγικῶν κλάδων δὲν ἐπιτρέπει τὴν σχεδιασθεῖσαν ἐλέκτασιν ἢ ὅτι τὸ ἀπόθεμα συναλλάγματος τῆς ἐν λόγῳ οἰκονομίας (λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν ἐξαγωγῶν) δὲν ἐπιτρέπει τὴν ἀπαιτουμένην αὔξησιν τῶν εἰσαγωγῶν, τότε οἱ σκοποὶ τοῦ προγράμματος δὲν δύνανται νὰ πραγματοποιηθοῦν.

Ἐκ τοῦ συμπεράσματος αὐτοῦ αἱ ἀρμόδιαι ἀρχαὶ δυνατόν νὰ ἀχθοῦν εἰς ἀποφάσεις οἰκονομικῆς πολιτικῆς διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ, πρώτων ὑλῶν κ.λ.π. τῆς δοθείσης οἰκονομίας, τὰ ὁποῖα ἀποκαλύπτει ἡ σύγκρισις τῶν

14) Ἐφ' ὅσον αἱ ἐγγραφαὶ τοῦ πίνακος 4 ἐκφράζουν ἀξίας προϊόντων ὑπολογιζομένας εἰς σταθερὰς τιμὰς, πρὸς εὐρεσιν τῶν ποσοτήτων τῶν προϊόντων αὐτῶν ἀπαιτεῖται διαίρεσις τῶν ἀξιών διὰ τῶν ἀντιστοίχων σταθερῶν τιμῶν.



πινάκων 4 και 1. "Αν τοιαύτη λύσις είναι αδύνατος τότε καθίσταται αναγκαία η αναπροσαρμογή του προγράμματος (ποσοτικῶς ἢ χρονικῶς) ἐπὶ τῇ βάσει τῶν διαθέσιμων οικονομικῶν πόρων. Οὕτω, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ταύτης θὰ ἦτο δυνατόν νὰ ἀποκαλυφθοῦν τυχὸν ὑπάρχουσαι ἀσυνέπειαι κατὰ τὴν κατάρτισιν ἐνὸς οικονομικοῦ προγράμματος.

#### Δ'. ΠΙΝΑΞ ΕΙΣΡΟΩΝ - ΕΚΡΟΩΝ ΚΑΙ ΕΘΝΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΙ <sup>(15)</sup>

Ὁ πίναξ εισροῶν - ἐκροῶν δύναται, ὡς ἐλέχθη, νὰ παραβληθῆ πρὸς τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν. Ἐκ τῶν πληροφοριῶν τοῦ πίνακος τούτου δυνάμεθα, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἐθνικοὺς λογαριασμοὺς, νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ὕψος τοῦ ἐθνικοῦ εισοδήματος καὶ τὸν τρόπον διαθέσεως αὐτοῦ κατὰ δοθεῖσαν περιόδον.

Ἐπάρχουν ἐν τούτοις σημαντικαὶ διαφοραὶ μεταξὺ τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν καὶ τοῦ πίνακος εισροῶν - ἐκροῶν. Αἱ κυριώτεραι ἐκ τῶν διαφορῶν αὐτῶν εἶναι αἱ ἑξῆς δύο : α) εἰς τὸν πίνακα τῶν εισροῶν - ἐκροῶν περιέχονται πληροφορίαὶ περὶ τοῦ τελικοῦ προϊόντος μιᾶς οικονομίας ἐντὸς μιᾶς δοθείσης περιόδου, ὡς συμβαίνει μὲ τοὺς ἐθνικοὺς λογαριασμοὺς, ἐ π ἰ π λ ε ο ν ὅμως περιέχονται καὶ πληροφορίαὶ περὶ τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν τῆς δοθείσης οικονομίας, αἱ ὁποῖαι ἀποκλείονται ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν. β) Ἐπειδὴ ἡ λογιστικὴ βάση διὰ τὴν κατάρτισιν τοῦ πίνακος εισροῶν - ἐκροῶν εἶναι αἱ ἀγοραὶ καὶ πωλήσεις ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων, δὲν λαμβάνονται συνήθως ὑπ' ὄψιν κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐθνικοῦ εισοδήματος, βάσει τοῦ ἀνωτέρω πίνακος, τὰ ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ εισρέοντα εισοδήματα. Συνεπῶς τὸ ἐθνικὸν εισόδημα, ὡς δίδεται ἐκ τοῦ πίνακος εισροῶν - ἐκροῶν, εἶναι συνήθως κατώτερον τοῦ ἐθνικοῦ εισοδήματος, ὡς τοῦτο καθορίζεται εἰς τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν, κατὰ τὸ ποσὸν τῶν ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ εισρέοντων εισοδημάτων.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐθνικοῦ εισοδήματος δύναται νὰ προσδιορισθῆ κατὰ δύο τρόπους ἐκ τοῦ πίνακος εισροῶν - ἐκροῶν : α) Διὰ προσθέσεως τῶν ἀθροιστικῶν κονδυλίων τῆς καταναλώσεως (ιδιωτικῆς καὶ δημοσίας) καὶ τῶν ἐπενδύσεων καὶ τῆς ἀφαιρέσεως (προσθέσεως) τοῦ ἐλλείμματος (πλεονάσματος) τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου. Οὕτω, βάσει τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 1 ἔχομεν :

$$180 + 50 + 45 + 18 - 18 = 275$$

Τὸ συνολικὸν ποσὸν 275 ἀποτελεῖ τὸ ἀκαθάριστον ἐθνικὸν εισόδημα (gross value added) τῆς οικονομίας κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους <sup>(16)</sup>.

β) Διὰ προσθέσεως τῶν εισοδημάτων ἐξ ὑπηρεσιῶν καὶ τῶν φόρων :

$$215 + 60 = 275$$

Ὅμοιως ἐργαζόμενοι ἐπὶ τοῦ πίνακος 4 λαμβάνομεν :

\* Ακαθ. ἐθν. εισόδημα :  $241,5 + 69,3 - 18 = 292,8$

ἢ  $229,1 + 63,7 = 292,8$

15) Βλ. H. Liebling : Interindustry economy and national income theory eis Input - Output. — Analysis : an appraisal κλπ.

16) Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω σημειωθείσας ἐπιφυλάξεις καὶ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἐν τῷ πίνακι ἀνγραφομένη ἀξία τῶν ἐπενδύσεων εἶναι ἀκαθάρτος.

Ἐκ τῶν πινάκων 1 καὶ 4 δυνάμεθα τώρα νὰ σχηματίσωμεν τοὺς κάτωθι ἀναλυτικούς λογαριασμούς :

## Πίναξ 5

Ἐθνικοὶ Λογαριασμοὶ καὶ Διακλαδικαὶ Συναλλαγαὶ διὰ τὰ ἐτὴ χ καὶ ψ (α)

	Πραγματικά δεδομένα διὰ τὸ ἔτος χ		Προβλέψεις διὰ τὸ ἔτος ψ		°/ο Μετα- ολαί με- ταξὺ ἐτῶν χ καὶ ψ
<b>I. Ἔσοδα καὶ ἔξοδα ἰδιωτῶν</b>					
α) Ἔσοδα (μισθοί, κέρδη κ.λπ.)		215		229,1	6,5
β) Ἔξοδα (κατανάλωσις)		180		189	5
γ) Διαφορὰ (ἀποταμίευσις)		35		40,1	14,5
<b>II. Ἔσοδα καὶ ἔξοδα Δημοσίου</b>					
α) Ἔσοδα (Φόροι)		60		63,7	6,2
β) Ἔξοδα (κατανάλωσις)		50		52,5	5
γ) Διαφορὰ (ἀποταμίευσις)		10		11,2	12
<b>III. Ἐξωτερικὸν ἔμποριον</b>					
α) Εἰσαγωγαί		58		62	7
β) Ἐξαγωγαί		40		42	5
γ) Ἐλλειμμα Ἐμπορ. Ἴσοζυγίου		18		18	0
<b>IV. Ἐπένδυσις - Ἀποταμίευσις</b>					
α) Ἐπένδυσις		63		63,3	10
Παγία	45		49,5		
Ἀποθέματα	18		19,8		
β) Ἀποταμίευσις		63		69,3	10
Ἰδιωτῶν	35		40,1		
Δημοσίου	10		11,2		
Ἐλλειμμα Ἐμπ. Ἴσοζυγίου (β)	18		18		
<b>V. Διακλαδικαὶ Συναλλαγαὶ</b>					
α) Ἀγοραί		220		231,9	4,5
ὑπὸ Πρωτ. Παραγωγῆς	40		42,5		
» Μεταποιήσεως	100		105,2		
» Λοιπῶν Κλάδων	80		84,2		
β) Πωλήσεις		220		231,9	4,5
ὑπὸ Πρωτ. Παραγωγῆς	80		81,4		
» Μεταποιήσεως	80		84		
» Λοιπῶν Κλάδων	60		63,5		

(α) Διὰ τοῦ συμβόλου ψ παριστᾶται τὸ ἔτος εἰς ὃ ἀναφέρεται ὁ πίναξ 4.

(β) Τὸ ἔλλειμμα τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀρνητικὴ ἐπένδυσις ἢ ὡς ἀποταμίευσις ἐξωτερικοῦ χρηματοδοτοῦσα ἰσόποσον ἐπένδυσιν τῆς δοθείσης οἰκονομίας.

Οι λογαριασμοί I - IV ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀναλόγους τοιοῦτους τοῦ συστήματος ἔθνικῶν λογαριασμῶν. Ὁ λογαριασμός V συναντᾶται μόνον εἰς τὸ σύστημα Λεόντιεφ.

Ἐφ' ὅσων ὁ πίναξ 1 παριστᾷ λογιστικὴν κατάστασιν τῆς οἰκονομίας διὰ τὸ δοθὲν ἔτος, οἱ ἐκ τοῦ πίνακος τούτου ἀπορρέοντες λογαριασμοὶ ἀναφέρονται εἰς πραγματοποιηθέντα οἰκονομικὰ μεγέθη. Ἀντιθέτως οἱ ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 4 διαμορφούμενοι λογαριασμοὶ ἀναφέρονται εἰς π ρ ο β λ έ ψ ε ι ς περὶ τῆς ἐξελίξεως τῶν ὡς ἄνω μεγεθῶν, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τῆς μεταβολῆς τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ πίνακος 1, συμφώνως πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος.

### Ε'. ΑΝΟΙΚΤΑ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Πάντα τὰ ὑποδείγματα τοῦ συστήματος Λεόντιεφ τὰ ὁποῖα περιλαμβάνουν, ὡς καὶ τὸ ἤδη ἔξετασθὲν ὑπόδειγμα, ἓνα τομέα τελικῆς ζητήσεως ἐξωγενῶς καθοριζόμενον, χαρακτηρίζονται ὡς «ἀνοικτὰ». Τὰ ὑποδείγματα ταῦτα προήλθον ἐκ τῶν «κλειστῶν» ὑποδειγμάτων Λεόντιεφ, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχει τομεὺς τελικῆς ζητήσεως, τὰ δὲ ἐπίπεδα δράσεως πάντων τῶν οἰκονομικῶν κλάδων θεωροῦνται ὡς καθοριζόμενα ἐντὸς τοῦ συστήματος (ἐνδογενῶς). Εἰς τὰ κλειστὰ ὑποδείγματα τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα ἐν τῇ συνόλῳ λαμβάνονται ὡς εἰς παραγωγικὸς κλάδος, τοῦ ὁποῖου ἐκροαὶ (προϊόντα) εἶναι αἱ πρὸς τοὺς λοιποὺς κλάδους τῆς οἰκονομίας παρεχόμενα ὑπηρεσίαι καὶ εἰσροαὶ εἶναι ἢ κατανάλωσις διαφόρων προϊόντων ἐγχωρίως παραγομένων ἢ εἰσαγομένων ἐκ τοῦ ἔξωτερικοῦ.

Τὸ ἔξωτερικὸν ἐμπόριον ἐπίσης θεωρεῖται εἰς τὰ κλειστὰ ὑποδείγματα ὡς ἰδιαιτερος παραγωγικὸς κλάδος, μὲ εἰσροὰς τὰ ἐξαγόμενα προϊόντα καὶ ἐκροὰς τὰ εἰσαγόμενα τοιαῦτα (17). Σταθεροὶ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ καθορίζονται ἐν προκειμένῳ διὰ πάντας τοὺς οἰκονομικοὺς κλάδους. Στατιστικαὶ δυσχέρειαι καὶ ἰδίως ὁ ἀπρόβλεπτος χαρακτήρ τῆς ἐξελίξεως ὄρισμένων τομέων, π.χ. τοῦ τομέως τῶν Ἑξαγωγῶν, ὤθησαν εἰς τὴν ἐγκατάλειψιν τῶν κλειστῶν ὑποδειγμάτων καὶ τὴν ἀποδοχὴν τῶν ἀνοικτῶν τοιοῦτων. Τὰ ἀνοικτὰ συστήματα ἐξ ἄλλου εἶναι ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των πρόσφορα διὰ τὴν μελέτην προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ὡς εἶδομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἔξετασθέντος ὑποδείγματος. Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα, ὑποτίθεται συνήθως ὅτι τὰ ἐπίπεδα δράσεως ὄρισμένων τομέων, ὡς π.χ. τοῦ κρατικοῦ τομέως καὶ τοῦ τομέως τῶν ἔξαγωγῶν, καθορίζονται ἐξωγενῶς ὡς σκοποὶ τοῦ οἰκονομικοῦ προγράμματος καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῶν τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν εἰσαγωγῶν καὶ τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τὰ ὁποῖα θὰ ἐπιτρέψωσιν τὴν πραγματοποίησιν τῶν ἐν λόγῳ σκοπῶν.

### ΣΤ'. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ (18)

Εἰς τὸ προηγουμένως ἔξετασθὲν ὑπόδειγμα καθορίζονται τὰ ἐπίπεδα εἰσροῶν καὶ ἐκροῶν τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα διὰ τὴν ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως. Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο ἀναφέρεται θεθαίως εἰς συγκεκριμένην χρονικὴν περίοδον ἀλλὰ

17) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται ὅτι οἱ ὅροι «κλειστὸν ἢ ἀνοικτὸν» ὑπόδειγμα δὲν σημαίνουσι ἀποκλεισμὸν ἢ μὴ τοῦ ἔξωτερικοῦ ἐμπορίου ἀπὸ τοῦ ὑποδείγματος.

18) Βλ. καὶ μέρος II τῆς παρούσης ἐργασίας.

δὲν δίδει τὴν διαχρονικὴν ἐξάρτησιν τῶν μεταβλητῶν. Διὰ τοῦτο τὸ ὑπόδειγμα χαρακτηρίζεται ὡς «στατικόν» (19).

Τὰ στατικά ὑποδείγματα δυνατόν νὰ εἶναι ἀνοικτὰ ἢ κλειστά, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν περιέχεται εἰς αὐτὰ ἰδιαιτέρος τομεὺς τελικῆς ζήτησεως ἢ ἐὰν πάντα τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν οἰκονομικῶν κλάδων ἀλληλοκαθορίζονται ἐντὸς τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος (ἐνδογενῶς).

Διὰ τῶν στατικῶν ὑποδειγμάτων εἶναι, ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη, γενικῶς δυνατός ὁ προσδιορισμὸς τῶν μεταβολῶν εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν καὶ εἰς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἐγγραφῶν πινάκων εἰσροῶν - ἐκροῶν ἀνθρώπων εἰς διαφόρους χρονικὰς περιόδους (συγκριτικὴ στατικὴ), ἀλλὰ δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ περιγραφή τῆς ἐξελίξεως τῶν διαφορῶν μεγεθῶν εἰς τὸ μεταξὺ τῶν ἐν λόγω περιόδων χρονικὸν διάστημα. Πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ κενοῦ αὐτοῦ ὁ καθηγητῆς Λεόντιεφ ἐπενόησε τὰ «δυναμικὰ» ὑποδείγματα (20), εἰς τὰ ὁποῖα εἰσάγονται ὁ χ ρ ὀ ν ο ς καὶ αἱ μεταβολαὶ τοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ τῶν παραγωγικῶν κλάδων ὡς ὑπολογιστικοὶ παράγοντες. Τὰ δυναμικὰ ὑποδείγματα διακρίνονται ὡσαύτως εἰς ἀνοικτὰ καὶ κλειστά, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ γνωστοῦ κριτηρίου. Μέχρι τοῦδε δὲν ἐγένετο σοβαρὰ προσπάθεια ἐμπειρικῆς ἐπαληθεύσεως τῆς ἀξίας τῶν δυναμικῶν ὑποδειγμάτων λόγω στατιστικῶν καὶ ὑπολογιστικῶν δυσχερειῶν.

#### Ζ'. ΣΥΣΤΗΜΑ ΛΕΟΝΤΙΕΦ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ (21)

Τὸ σύστημα Λεόντιεφ θεωρεῖται εἰδικὴ περίπτωση τοῦ καλουμένου Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ἀποτελεῖ γενικῶς μίαν τεχνικὴν ὑπολογισμοῦ τῶν προγραμμάτων οἰκονομικῆς δράσεως, στηρίζεται δέ, ὡς καὶ τὸ σύστημα Λεόντιεφ, εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἐκφράζεται μαθηματικῶς εἰς τὴν «γραμμικότητα» τῶν παραγωγικῶν συναρτήσεων ἐξ ἧς δικαιολογεῖται καὶ ὁ ὅρος «Γραμμικὸς» Προγραμματισμὸς (22).

Τὸ γενικὸν πρόβλημα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄ ρ ι σ τ ο ς συνδυασμὸς τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ μεγίστου οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος (ἢ τῆς ἐλαχίστης οἰκονομικῆς θυσίας).

Ἡ εὕρεσις ἐνὸς ἀρίστου παραγωγικοῦ συνδυασμοῦ προϋποθέτει θεβαίως δυνατότητα ἐπιλογῆς μεταξὺ διαφορῶν μεθόδων παραγωγῆς, τὰς ὁποίας ὑποτίθεται ὅτι γνωρίζει ὁ προγραμματίζων. Εἰς τὸ σύστημα Λεόντιεφ ὑποτίθεται, ἐν τούτοις, ὅτι ὑπάρχει μόνον εἰς ὁ ρ ι σ μ ἔ ν ο ς τρόπος ἐπιτεύξεως ἐνὸς οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος (23) καὶ συνεπῶς οὐδὲν ζήτημα ἐπιλογῆς τίθεται. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἀκρι-

19) Βλ. W. Leontief, *Studies in the Structure of American Economy*, 1953 καὶ R. G. Allen, *Mathematical Economics*, London, 1956, Κεφ. 11.

20) Βλ. βιβλιογρ. προηγ. σημειώσεως καὶ τὸ μέρος II τῆς παρούσης ἐργασίας (τμήμ. Β).

21) Βλ. Α. Α. Λαζαρη «Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς» εἰς Ἐπιθ. Οἰκ. καὶ Κοινων. Ἐπιστημῶν, Ἰανουάρ. - Ἰουν. 1956.

22) Α. Α. Λαζαρη ἐνθ. ἀν. σ. 24.

23) «Ἐκαστος κλάδος παράγει ἓν μόνον προϊόν καὶ κατ' ὀρισμένην μέθοδον» (βλ. ἀρχὴν τμήμ. Β', ἀνωτ.).

ὡς τὸ σύστημα Λεόντιεφ θεωρεῖται ὡς εἰδική μορφή τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ Νεώτεροι ἔρευνα ἀπέδειξαν ἐν τούτοις ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ ἀρθῇ ἢ ὡς ἄνω περιοριστικὴ ὑπόθεσις τοῦ συστήματος Λεόντιεφ, ὁπότε καὶ τὸ πρόβλημα τῆς ἀναλύσεως εἰσοῶν - ἐκροῶν<sup>(24)</sup> μετατρέπεται εἰς γενικὸν πρόβλημα ἀριστοποιήσεως ὡς εἰς τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμόν<sup>(25)</sup>.

## Η'. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Τὸ σύστημα Λεόντιεφ ἤρχισεν ἤδη νὰ χρησιμοποιηθῆ διὰ πρακτικὸς σκοποὺς εἰς πλείστας χώρας<sup>(26)</sup>, εἰς διαφόρους δὲ ἄλλας γίνεται σχετικὴ προεργασία διὰ τὴν εἰσαγωγὴν του<sup>(27)</sup>.

Ἡ ταχεία διάδοσις τοῦ συστήματος Λεόντιεφ ὀφείλεται τόσον εἰς τὴν ἀναλυτικὴν ἀξίαν ὅσον καὶ εἰς τὴν στατιστικὴν χρησιμότητα αὐτοῦ. Ἀναλυτικῶς τὸ σύστημα τοῦτο (ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα) δύναται νὰ χρησιμοποιηθῆ ὡς βοηθητικὸν ὄργανον οἰκονομικῆς πολιτικῆς, εἰδικώτερον δέ, ὡς ἐλέγχθη, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῆ διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ.

Τὸ κυριώτερον πλεονέκτημα τοῦ συστήματος Λεόντιεφ ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ ἱκανότης αὐτοῦ νὰ παρακολουθῆ τόσον τὰς ἀμεσοὺς ὡς ὅσον καὶ τὰς ἐμμέσους οἰκονομικὰς συνεπείας δοθείσης μεταβολῆς εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν. Ἐὰς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι εἰς μίαν χώραν μελετᾶται ἡ ἐκτέλεσις ἐνὸς στεγαστικοῦ προγράμματος ἐπενδύσεων. Δὲν εἶναι κατ' ἀρχὴν δύσκολον νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ποσότητες σιδήρου, τοιμέντου καὶ λοιπῶν οἰκοδομικῶν ὑλικῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ὡς ἄνω ἐκτέλεσιν. Πρέπει ὅμως νὰ ληφθῆ ἐπίσης ὑπ' ὄψιν ὅτι, πρὸς ἐξασφάλισιν τῶν ἀναγκαίουσῶν ποσοτήτων π.χ. σιδήρου, ἀπαιτοῦνται ἀνάλογοι ποσότητες σιδηρομεταλλεύματος, συγκοινωνιακῶν ὑπηρεσιῶν, καυσίμου ἴλης κ.λ.π. (ἢ ἐνδεχομένως ἀνάλογος ποσότης συναλλάγματος πρὸς εἰσαγωγὴν τοῦ σιδήρου ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ).

Καθίσταται εὐκόλως ἀντιληπτὸν πόσον πολὺπλοκον ἀποβαίνει τὸ συνολικὸν πλέγμα τῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι ἀναφαίνονται κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ὡς ἄνω προγράμματος ἢ οἰοῦντο ἄλλου προγράμματος ἐπενδύσεων ἢ καταναλώσεως. Τὸ σύστημα Λεόντιεφ παρέχει τὴν δυνατότητα εὐχεροῦς παρακολουθήσεως τοῦ πολυπλόκου αὐτοῦ πλέγματος σχέσεων.

Μέχρι τοῦδε ὑπετίθετο ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν διαφόρων ἀγαθῶν (καὶ ὑπηρεσιῶν) παραμένουν σταθεραὶ καὶ ὅτι μόνον αἱ ποσότητες αὐτῶν εἶναι μεταβληταί. Εἶναι ἐν τούτοις δυνατὴ ἡ κατὰστρωσις ἐνὸς ὑποδείγματος εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ποσότητες λαμ-

24) α' Ἀνάλυσις εἰσοῶν - ἐκροῶν (input - output analysis) ἀποκαλεῖται συνήθως ἡ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις βάσει τοῦ συστήματος Λεόντιεφ.

25) Βλ. T. Koopmans «Activity Analysis» Ν. Υ. 1951, καὶ R. G. D. Allen : Mathematical Economics, London, 1956 (σ. 573 κ.έ.).

26) Πλὴν τῶν Η.Π.Α. ὅπου λειτουργοῦν ἀπὸ τινων ἐτῶν καλῶς ὀργανωμένα κέντρα ἐρευνῶν ἢ ἐφαρμογῆς τῆς διακλαδικῆς ἀναλύσεως, ἔχουν καταστρώσει πίνακας εἰσοῶν-ἐκροῶν αἱ ἐξῆς εὐρωπαϊκαὶ χώραι : Δανία, Ἰταλία, Ὀλλανδία, Σουηδία, Νορβηγία, Μ. Βρετανία καὶ Γαλλία (Βλ. Econ. Bulletin for Europe, May 1956).

27) Βλ. Input - Output Models, εἰς Economic Bulletin for S. America, Sept. 1956.



βάνονται ὡς σταθερὰ μεγέθη, αἱ δὲ τιμαὶ δύνανται νὰ μεταβάλλωνται. Αἱ μεταβληταὶ τιμαὶ τοῦ ὑποδείγματος δύνανται τότε νὰ ταξινομηθοῦν εἰς δύο κατηγορίας, τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τιμὰς καὶ τὰς ἐξηρητημένας τοιαύτας<sup>(28)</sup>.

Ἄν εἰς τὸ ὑπόδειγμα τῶν μεταβλητῶν τιμῶν ληφθοῦν ὡς ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, π.χ. οἱ ἐργατικοὶ μισθοὶ καὶ ὡς ἐξηρητημένοι μεταβληταὶ αἱ τιμαὶ τῶν προϊόντων τῶν διαφόρων κλάδων, τότε θὰ ἦτο δυνατόν (c.p.) διὰ χρησιμοποίησεως τοῦ ὑποδείγματος τούτου<sup>(29)</sup> νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἄμειοι καὶ ἔμειοι ἐπιδράσεις ἐπὶ τοῦ κόστους καὶ τῶν τιμῶν διαφόρων προϊόντων, αἱ ἀπορρέουσαι ἀπὸ δοθεῖσαν μεταβολὴν εἰς τοὺς ἐργατικούς μισθοὺς<sup>(30)</sup>. Τὰ προβλήματα τῆς ἐπιπτώσεως τῶν ἐμμέσων φόρων, τῶν ὄρων ἐμπορίου μεταξὺ γεωργίας καὶ βιομηχανίας καὶ γενικῶς προβλήματα νομισματικῆς φύσεως θὰ ἠδύνατο κατ' ἀρχὴν νὰ ἐρευνηθοῦν δι' ἐνὸς τοιοῦτου ὑποδείγματος.

Πλὴν τῶν καθαρῶς ἀναλυτικῶν ἐφαρμογῶν τῆς διακλαδικῆς ἀναλύσεως<sup>(31)</sup>, ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν καὶ αἱ στατιστικαὶ ἐφαρμογαὶ τοῦ πίνακος εἰσοδῶν - ἐκροῶν. Διευκρινίσθη ἤδη ἡ σχέσις τοῦ πίνακος τούτου πρὸς τὸ σύστημα ἐθνικῶν λογαριασμῶν. Διὰ τῆς συστηματικῆς καταχωρήσεως εἰς τὸν ἐν λόγω πίνακα στατιστικῶν στοιχείων περὶ τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος μῆς οἰκονομίας ἐντὸς δοθείσης περιόδου, ὡς ἐπίσης καὶ περὶ τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν, αἱ ὁποῖαι ἔλαβον χώραν κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον, παρέχεται ἡ δυνατότης ἐποπτικῆς ἐξετάσεως τῶν στοιχείων αὐτῶν καὶ συνελπῶς ἐκκαθαρίσεως τυχόν ἀσυνπειῶν ἢ συμπληρώσεως πληροφοριακῶν κενῶν<sup>(32)</sup>. Τὰ κενὰ ταῦτα τοῦ πίνακος εἰσοδῶν - ἐκροῶν δεικνύουν ἐξ ἄλλου τὴν κατεύθυνσιν πρὸς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ στραφῇ ἡ στατιστικὴ ἔρευνα. Εἰς διαφόρους χώρας ὁ πίναξ εἰσοδῶν - ἐκροῶν χρησιμοποιεῖται ἐπιτυχῶς ὡς μέσον βελτιώσεως τῶν στατιστικῶν ἐκτιμήσεων ἢ πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ συστήματος τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν<sup>(33)</sup>.

#### Θ'. ΚΡΙΤΙΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογικῶν ν. Ὡς καθίσταται προφανὲς ἐκ τῶν μέγρι τοῦδε λεχθέντων, τὸ σύστημα Λεόντιεφ θέτει ὡς θεμελιώδη

28) Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ ἐξετασθὲν (ἀνοικτὸν) ὑπόδειγμα τοῦ τμήμ. Γ, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ μεταβλητὰ ποσότητες ταξινομοῦνται εἰς τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν παραγωγικῶν τομέων (ἐξηρητημένα μεταβληταὶ) καὶ τὴν τελικὴν ζήτησιν (ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ).

29) Κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν ἐν τμήματι Γ (ἀνωτέρω) ἐφαρμοσθέντα.

30) Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο θὰ ἦτο χρήσιμον π.χ. διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν ἐπιδράσεων σχεδιαζομένης ἀναπροσαρμογῆς ἐργατικῶν μισθῶν λόγω πληθωρισμοῦ.

31) Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀναφερθείσας ἐφαρμογὰς πρέπει νὰ προστεθῇ καὶ ἡ καλουμένη «διαχωρικὴ ἀνάλυσις» (interregional analysis) βάσει τοῦ συστήματος Λεόντιεφ, ἡ ὁποία παρουσιάζει ἐνδιαφέρον διὰ χώρας μὲ σοβαρὰς διαφορὰς εἰς τὰ ἐπίπεδα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως τῶν διαφόρων περιοχῶν των. Βλ. Chenery and Clark: *The structure and Growth of Italian Economy*, Roma 1953.

32) Εἰς τινὰς περιπτώσεις εἶναι δυνατόν νὰ προσδιορισθοῦν ἐκ τῶν σχέσεων τοῦ πίνακος (π.χ. τῆς ἐσότητος τοῦ ἀθροίσματος τῶν στήλῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν σειρῶν) τυχόν ἔλλειπντα στατιστικὰ στοιχεῖα.

33) Βλ. Econ. Bull. for Europe, May 1956.

προϋπόθεσιν του την σταθερότητα των συντελεστών εισροῆς (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιών). Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν τὴν βασιμότητα τῆς προϋπόθεσεως ταύτης, ἢ ὅποια εἶναι θεμελιώδης διὰ τὴν ἀνάλυσιν εισροῶν - ἐκροῶν καὶ γενικώτερον τὴν Γραμμικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν.

Ὡς ἤδη ἐλέχθη, συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιών, οἱ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ παραγωγῆς (Input Coefficients) θεωροῦνται σταθεροὶ τόσον κατὰ κλίμακα παραγωγῆς ὅσον καὶ διαχρονικῶς. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ σχέσης μεταξὺ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων συντελεστῶν καὶ παραγομένων ποσοτήτων ἀγαθῶν λαμβάνεται ὡς ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς.

Τὴν μεθοδολογικὴν καὶ ἀπλοποιητικὴν ἀξίαν τῆς ὡς ἄνω ὑποθέσεως οὐδεὶς ἀμφισβητεῖ. Ἠγέρθησαν ὅμως σοβαραὶ ἀμφισβητήσεις, ἐὰν αὕτη εἶναι δυνατόν νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν περιγραφὴν πραγματικῶν καταστάσεων. Τὰ προβολόμενα, ἐν προκειμένῳ ἐπιχειρήματα εἶναι ἀπ' ἑνὸς μὲν ὅτι εἰς τὰς παραγωγικὰς μονάδας παρατηρεῖται ἐνίοτε τὸ φαινόμενον τῆς μὴ ἀναλόγου κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως — εἴτε ὑπὸ τὴν μορφήν τῆς φθίνουσας, εἴτε ὑπὸ τὴν μορφήν τῆς αὐξούσης ἀποδόσεως — ἀπ' ἑτέρου δὲ ὅτι αἱ μεταβολαὶ τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν καὶ ἰδίως ἡ ἐξέλιξις τῆς τεχνικῆς ἐπιφέρουν σοβαρὰς μεταβολὰς εἰς τοὺς τεχνολογικοὺς συντελεστάς.

Μολονότι τὸ ἐπιχειρήμα τῶν μεταβολῶν τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν συντελεστῶν, ἐν τινι δὲ μέτρῳ, καὶ τὸ ἐπιχειρήμα τῆς μὴ ἀναλόγου κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως, δὲν ἔχουν πάντοτε τὴν εἰς αὐτὰ ἀποδιδομένην σημασίαν<sup>(34)</sup>, ἢ ἀνωτέρω κριτικὴ εἶναι νομιζομένη κατὰ βάσιν ὀρθή, λόγῳ κυρίως τῆς σοβαρότητος τοῦ ἐπιχειρήματος περὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς τεχνικῆς. Δεδομένου μάλιστα ὅτι δὲν εἶναι κατ' ἀρχὴν δυνατόν νὰ προβλεφθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς τεχνικῆς, δὲν εἶναι ἐπίσης δυνατόν νὰ περιληφθοῦν καὶ αἱ σχετικαὶ μεταβολαὶ τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν εἰς τὸ ὑπόδειγμα ἀναλύσεως.

Βεβαίως ἡ τεχνικὴ δὲν μεταβάλλεται οὐσιωδῶς ἐντὸς σχετικῶς βραχείου χρονικοῦ διαστήματος καὶ συνεπῶς ἡ σταθερότης τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, δύναται νὰ θεωρηθῇ βραχυχρονίως, ὡς μία ἱκανοποιητικὴ προσέγγιξις εἰς τὴν πραγματικότητα. Διὰ μακροτέρας ὅμως περιόδους (π.χ. διὰ περιόδους 3,5 ἢ περισσοτέρων ἐτῶν) ἡ μεταβλητότης τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἀγνοηθῇ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι ἡ προγνωστικὴ ἱκανότης τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιών εἶναι μᾶλλον περιορισμένη. Δὲν δυνάμεθα, δηλαδή, νὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν μᾶς ὀρισμένης περιόδου διὰ νὰ προβλέψωμεν ἀσφαλῶς τὰς μελλοντικὰς οἰκονομικὰς ἐξελίξεις, λόγῳ ἀκριβῶς τῶν ἀπροβλέπτων μεταβολῶν εἰς τοὺς συντελεστάς αὐτοὺς. Πρέπει νὰ ὁμολογηθῇ ὅτι ἡ μέχρι τοῦδε χρησιμοποίησις τοῦ συστήματος εισροῶν - ἐκροῶν — τὸ ὁ-

34) Βλ. σχετικῶς, Masao Fukuoka : Full employment and constant coefficients of production, Quart. Journal of Economics, Febr. 1955 καὶ E. Simpson : Inflation, Deflation and employment in Italy» εἰς Review of Economic Studies, 1941—1950.

ποιον, ὡς γνωρίζομεν, στηρίζεται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν — δι' οἰκονομικὴν πρόγνωσιν, δὲν εἶχε τὰ ἀναμενόμενα ἀποτελέσματα (35). Τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι ἄλλη τις μέθοδος προγνώσεως θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῆ μέ μεγαλύτερας πιθανότητος ἐπιτυχίας πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν. Ἡ κτηθείσα πείρα ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τῶν «οἰκονομικῶν βαρομέτρων», μέχρι τῶν σημερινῶν πολυπλόκων οἰκονομετρικῶν ὑποδειγμάτων (36) κατέστησαν τοὺς οἰκονομολόγους λίαν ἐπιφυλακτικοὺς ὅσον ἀφορᾷ τὰς προγνωστικὰς δυνατότητας τῆς ἐπιστήμης των.

Θὰ ἠδύνατό τις κατόπιν τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων νὰ ἐρωτήσῃ ἐὰν εἶναι ὀρθὸν νὰ βασισώμεθα ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν διὰ τὴν μελέτην προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ ἢ διὰ τὴν κατάρτισιν προγραμμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο εἶναι ἀνευδοκίμως καταφατικὴ. Διὰ νὰ γίνῃ ὅμως ἀντὶληπτὴ ἡ ἀπάντησις αὕτη εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνῃ σαφῆς διάκρισις μεταξὺ δύο ἐννοιῶν, ἧται τῆς *περιγραφικῆς* (Descriptive) καὶ τῆς *κανονιστικῆς* (Normative) ἐννοίας τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ὑπὸ τὴν περιγραφικὴν αὐτῆς ἔννοιαν ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν περιγραφὴν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων καὶ τὴν οἰκονομικὴν πρόγνωσιν. Ἐπιτίθεται δηλαδή ὅτι αἱ παραγωγικαὶ συναρτήσεις συμπεριφέρονται κατ' ὄρισμένον ἀπλοῦν τρόπον καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι δυνατὴ ἡ προβολὴ τῶν οἰκονομικῶν ἐξελίξεων καὶ εἰς τὸ μέλλον. Αἱ ἀνωτέρω ἐκτεθείσαι κριτικαὶ παρατηρήσεις καὶ γενικῶς αἱ συνήθως διατυπούμεναι παρατηρήσεις ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἀφοροῦν ἀκριβῶς εἰς τὴν ὑπόθεσιν ταύτην ὑπὸ τὴν περιγραφικὴν τῆς ἔννοιαν.

Ἡ ὑπόθεσις ὅμως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν χρησιμοποιεῖται εἰς τὸν οἰκονομικὸν προγραμματισμὸν οὐχὶ ὑπὸ τὴν περιγραφικὴν ἀλλὰ ὑπὸ τὴν κανονιστικὴν αὐτῆς ἔννοιαν. Ἐπὶ τὴν τελευταίαν ταύτην ἔννοιαν ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν συνδέεται μὲ τὸ βασικὸν πρόβλημα τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, τὸ ὅποιον συνίσταται εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῆς ἀρίστης οἰκονομικῆς διαρθρώσεως, δηλαδή τῶν καλύτερων ἐκ τῶν ὑφιστάμενων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἐπιλογῆς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἔννοια τῆς μελλοντικῆς τεχνικῆς ἐξελίξεως δὲν ὑπηρετῆται κατ' ἀρχὴν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ προγραμματισμοῦ. Ὅταν π.χ. ἕνας μηχανικὸς προγραμματίζει τὴν κατασκευὴν ἐνὸς ἔργου, ἔχει νὰ ἐπιλέξῃ τὴν καλύτεραν — βάσει ὀρισμένων κριτηρίων — ἐκ τῶν ὑφιστάμενων τεχνικῶν μεθόδων, διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἔργου αὐτοῦ. Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι αἱ τεχνικαὶ μέθοδοι θὰ μεταβληθῶν εἰς τὸ μέλλον. Τοῦτο ὅμως δὲν δύναται προφανῶς νὰ ἐπηρεάσῃ τὴν διατύπωσιν καὶ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος προγραμματισμοῦ, τὸ ὅποιον ἀντιμετωπίζει ὁ μηχανικὸς. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι κανονιστικοῦ χαρακτήρος, ἡ δὲ λύσις του καθορίζει

35) Βλ. Nat. Bureau of Econ. Research: «Input - Output Analysis An Appraisal». Princeton Univ. Press, 1955.

36) Βλ. π.χ. L. Klein, Economic Fluctuation in the United States, 1921-1944 (N. Y. Wiley, 1950).



τί πρέπει νά γίνη καί ὄχι τί πράγματι θά γίνη. Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁ οικονομικός προγραμματισμός, γενικώτερον, θέτει προβλήματα κανονιστικοῦ χαρακτήρος, ἡ λύσις τῶν ὁποίων συνίσταται εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῆς ἀρίστης παραγωγικῆς δραστηριότητος μεταξὺ τῶν ὑφισταμένων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, πρὸς ἐπίτευξιν ὀρισμένου σκοποῦ.

Ὡς γνωστόν, παραγωγικὴ δραστηριότης εἶναι ὁ συγκεκριμένος συνδυασμός τῶν συντελεστῶν πρὸς παραγωγὴν ἐνὸς ἀγαθοῦ. Κατὰ συνέπειαν, «ἀρίστη παραγωγικὴ δραστηριότης» σημαίνει ἄριστον συνδυασμὸν τῶν συντελεστῶν διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἐν λόγῳ ἀγαθοῦ. Ἡ διατήρησις ὁμῶς τοῦ ἀρίστου παραγωγικοῦ συνδυασμοῦ — ὡς βεβαίως καὶ οἰοῦδηποτε ἄλλου ὀρισμένου παραγωγικοῦ συνδυασμοῦ — εἶναι δυνατὴ μόνον ἂν οἱ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ παραγωγῆς παραμένουν σταθεροὶ κατὰ κλίμακα παραγωγῆς καὶ διαχρονικῶς, ἂν δηλαδή ἡ συνάρτησις παραγωγῆς συμπεριφέρεται ἐπὶ τῆ βάσει τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς εἶναι προφανῆς ὁ κανονιστικὸς χαρακτὴρ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Τὰ ἀνωτέρω δὲν σημαίνουν ὅτι, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν προβλεπομένων ἐπενδύσεων ἢ ἐπιλεγείσα παραγωγικὴ δραστηριότης θά λειτουργῇ ἀκριβῶς ἐπὶ τῆ βάσει τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Διάφορα αἰτία τεχνικῆς ἢ ἄλλης φύσεως (ὡς π.χ. ἡ ἔλλειψις πλήρους διαιρητότητος τῶν παραγομένων ἀγαθῶν ἢ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς) δημιουργοῦν ἀποκλίσεις ἀπὸ τὸ παραγωγικὸν Optimum τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Αἱ ἀποκλίσεις αὗται δὲν θίγουν ἐν τούτοις οὐσιωδῶς τὴν σταθερότητα τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, ὅσον ἀφορᾷ τὴν δοθεῖσαν παραγωγικὴν δραστηριότητα. Κατὰ συνέπειαν, εἶναι δυνατόν, μετὰ τὴν ἐπιλογὴν τῆς δραστηριότητος ταύτης νά προβλεφθοῦν μελλοντικαὶ ἐξελίξεις, ὑπὸ τὸν ὅρον ὁμῶς τῆς ἐκτέλεσεως τοῦ σχετικοῦ προγράμματος ἐπενδύσεων.

Βεβαίως εἶναι δυνατὴ ἡ ἀντικατάστασις εἰς τὸ μέλλον τῆς ἐπιλεγείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος δι' ἄλλης καλύτερας, ἥτις βασίζεται ἐπὶ νεωτέρων τεχνικῶν ἐξελίξεων μὲ συνέπειαν τὴν ἀλλοίωσιν τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, ἀλλ' ἡ ἀντικατάστασις αὕτη εἶναι συνήθως οικονομικῶς ἀσύμφορος ἂν δὲν ἔχουν προηγουμένως ἀποσβεσθῆ αἱ ἐπὶ τῆ βάσει τῆς ἀρχικῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος διενεργηθεῖσαι ἐπενδύσεις. Ὅποσδήποτε, πρὸς ἀποφυγὴν ἐσφαλμένων ἐκτιμήσεων ἐπιβάλλεται ἢ ἐπανεξέτασις τοῦ καταρτισθέντος προγράμματος κατὰ περιόδους καὶ ἢ προσαρμογὴ αὐτοῦ εἰς τὰς ἐκάστοτε διαμορφουμένας νέας συνθήκας καὶ τεχνικὰς ἐξελίξεις. Τοῦτο καθίσταται ἄλλωστε δυνατόν καὶ ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι αἱ προβλεπόμεναι ὑπὸ τοῦ προγράμματος ἐπενδύσεις δὲν γίνονται ἐφ' ἅπαξ ἐντὸς μιᾶς βραχείας χρονικῆς περιόδου, ἀλλ' ἐκτελοῦνται τμηματικῶς ἐντὸς μιᾶς σχετικῶς μακρᾶς χρονικῆς περιόδου.

Στατιστικαὶ καὶ ὑπολογιστικαὶ δυσχέρειαί, Μολοντί διὰ τῆς τεχνικῆς Λεόντιεφ δύνανται νά ἀντιμετωπισθοῦν ἀποτελεσματικώτερον ἢ δι' ἄλλων ἐμπειρικῶν μεθόδων πλεῖστα οικονομικὰ προβλήματα, δὲν πρέπει πάντως νά παραβλέπεται ἡ σοβαρότης τῶν στατιστικῶν καὶ ὑπολογιστικῶν δυσ-

χειριῶν, τὰς ὁποίας συνεπάγεται συνήθως ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ὡς ἄνω τεχνικῆς.

Ἐν πρώτοις ἡ διακλαδικὴ ἀνάλυσις προϋποθέτει εἰδικευμένον προσωπικὸν καὶ ἀνεπτυγμένον στατιστικὸν σύστημα. Προϋποθέτει ἐπίσης λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων, ὑπολογισμὸν τῆς μῆτρας τῶν συντελεστῶν εἰσορῆς καὶ ἀντιστροφὴν τῆς μῆτρας ταύτης (37). Ἡ ἐξασφάλισις τῶν ὡς ἄνω προϋποθέσεων ἀπαιτεῖ συνήθως χρόνον μακρὸν ἀκόμη καὶ εἰς ἀνεπτυγμένας ἀπὸ στατιστικῆς ἀπόψεως χώρας καὶ ἀναλόγους οἰκονομικὰς θυσίας. Διὰ τοῦτο ἡ ἀξία τῆς μεθόδου Λεόντιεφ, ἐν σχέσει πρὸς ἄλλας μεθόδους, πρέπει νὰ κρίνεται ὄχι μόνον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀναλυτικῆς τῆς ὑπεροχῆς ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῇ θύσει τοῦ κόστους ἐφαρμογῆς αὐτῆς.

### Γ'. ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Τὸ σύστημα Λεόντιεφ ἀποτελεῖ συνέχειαν τῶν κλασσικῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας καὶ στηριζέται ὡς καὶ τὰ τελευταῖα εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἄλλ' ἐνῶ οἱ κλασσικοὶ οἰκονομολόγοι τῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας δὲν κατήρχοντο ἀπὸ τοῦ ὕψους τῆς θεωρητικῆς ἐρευνῆς, ὁ καθηγητὴς Λεόντιεφ ἐπεχείρησε νὰ δημοσιεύσῃ διὰ τοῦ συστήματός του ἐν ἀναλυτικὸν ὄργανον διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν πρακτικῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων.

Τὰ ὑποδείγματα τῆς ἀναλύσεως Λεόντιεφ χαρακτηρίζονται ὡς δυναμικὰ ἢ στατικά, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν παρακολουθοῦν ἢ ὄχι διαχρονικὰς μεταβολὰς τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν. Τὰ ὑποδείγματα ταῦτα διακρίνονται ἐξ ἄλλου εἰς ἀνοικτὰ ἢ κλειστά, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν περιλαμβάνουν ἓνα ἐξωγενῶς καθοριζόμενον τομέα τελικῆς ζητήσεως προϊόντων, πρὸς τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ προσαρμοσθῇ ὁλόκληρον τὸ οἰκονομικὸν σύστημα, ἢ ἐὰν πάντα τὰ οἰκονομικὰ μεγέθη καθορίζονται ἐνδογενῶς (ἐντὸς τοῦ ὑποδείματος). Εἰς τὰ κλειστὰ ὑποδείγματα τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα ἐν τῷ συνόλῳ θεωροῦνται ὡς εἰς παραγωγικὸς κλάδος παράγων ὑπηρεσίας καὶ ἀπορροφῶν καταναλωτικὰ ἀγαθὰ.

Αἱ προσπάθειαι ἐμπειρικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ συστήματος Λεόντιεφ ἀπέδειξαν ὅτι, πρὸς τὸ παρὸν τοῦλάχιστον, μόνον τὰ στατικά ἀνοικτὰ ὑποδείγματα εἶναι πρόσφορα διὰ πρακτικὰς ἀναλύσεις, κυρίως διότι τὰ ὑποδείγματα ταῦτα παρουσιάζουν σχετικῶς ὀλιγωτέρας στατιστικὰς καὶ ὑπολογιστικὰς δυσχερείας καὶ διότι εἶναι κατάλληλα διὰ τὴν μελέτην θεμάτων οἰκονομικῆς πολιτικῆς.

Τὸ κυριώτερον πλεονέκτημα τοῦ συστήματος Λεόντιεφ εἶναι ὅτι παρέχει τὴν δυνατότητα εὐχεροῦς παρακολουθήσεως τὸσον τῶν ἀμέσων ὡσον καὶ τῶν ἐμμέσων οἰκονομικῶν συνεπειῶν δοθείσης μεταβολῆς ἐνὸς οἰκονομικοῦ μεγέθους (π.χ. τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἐξαγωγῶν ἢ τῶν κρατικῶν ἐπενδύσεων). Ἡ ἀρχὴ τῆς οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ σύστημα τοῦτο διὰ τὴν μελέτην καὶ τὴν λύσιν πραγματικῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων. Μηχανικὴ πάντως ἐφαρμογὴ τοῦ

37) Βλ. μέρος II τμήμα Α. Δυνατὸν ἀρτὶ τῆς ἀντιστροφῆς τῆς μῆτρας τῶν συντελεστῶν εἰσορῆς νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ κατὰ προσέγγισιν (ἀνιχνευτικῶν) μεθόδων ὡς ἐλέχθη εἰς τὸ τμήμα Η'.

ουστήματος δὲν ἀρκεῖ. Ἀπαιτεῖται ἐπίσης γνῶσις τῶν συνθηκῶν ἐκάστης συγκεκριμένης περιπτώσεως ἐφαρμογῆς πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ὕψους καὶ τῆς συνθέσεως τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ ὑποδείγματος. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην τὸ σύστημα Λεόντιεφ εἶναι δυνατόν νὰ ἀποβῇ πολύτιμον ὄργανον πρακτικῆς οἰκονομικῆς ἐρεῦνης εἰς χεῖρας πεπειραμένου ἀναλυτοῦ.

Εἰς πλείστας χώρας ἔχει κατανοηθῆ ἡ πρακτικὴ χρησιμότης τοῦ συστήματος Λεόντιεφ, τὸ ὁποῖον ἤρχισεν ἤδη νὰ ἐφαρμόζεται συστηματικῶς εἰς προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναλύσεως ἢ διὰ καθαρῶς στατιστικούς σκοπούς. Τὴν τάσιν ταύτην ὑποβοηθεῖ καὶ ἡ ὁλοῦν ἀξιοσημείωτη σημασία τῶν κυβερνητικῶν οἰκονομικῶν προγραμμάτων, τὰ ὁποῖα δύνανται γενικῶς νὰ ἀντιμετωπισθοῦν εὐχερέστερον καὶ ἀποτελεσματικώτερον διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν παρὰ διὰ τῶν παλαιότερων στατιστικῶν μεθόδων.

## II

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΛΕΟΝΤΙΕΦ

#### Α'. ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

1. Κλειστὸν ὑπόδειγμα. Ἐὰν  $X_i$  παριστᾷ τὴν ἀξίαν <sup>(39)</sup> τοῦ συνολικοῦ ἐτησίου προϊόντος τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου  $i$  καὶ  $X_{ik}$  τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ προϊόντος τούτου, ἢ ὁποῖα ἀπορροφᾶται ἐντὸς μιᾶς περιόδου (π.χ. ἐνὸς ἔτους) ὑπὸ τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου  $k$ , τότε αἱ συναλλαγματικαὶ σχέσεις τῶν  $v$  παραγωγικῶν κλάδων μιᾶς οἰκονομίας κατὰ τὴν ὡς ἄνω περίοδον δύνανται νὰ παρασταθοῦν διὰ τοῦ ἀκολουθοῦ συστήματος:

$$\left. \begin{aligned} X_1 - \chi_{12} - \chi_{13} - \dots - \chi_{1v} &= 0 \\ -\chi_{21} + X_2 - \chi_{23} - \dots - \chi_{2v} &= 0 \\ -\chi_{31} - \chi_{32} + X_3 - \dots - \chi_{3v} &= 0 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ -\chi_{v1} - \chi_{v2} - \chi_{v3} - \dots + X_v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ἢ συνοπτικῶς:

$$X_i - \sum_{k=1}^v \chi_{ik} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, v \\ \text{καὶ } i \neq k \end{array} \right. \quad (1')$$

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) παριστοῦν ἀπλῶς λογιστικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν παραγωγικῶν κλάδων, ὡς ἀπεικονίζουσαι τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τῶν κλάδων αὐτῶν κατὰ τὴν δοθεῖσαν περίοδον. Οὕτω, ἡ πρώτη ἐξίσωσις δεικνύει ὅτι τὸ συνολικὸν ἐτήσιον προϊόν τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου 1 διανέμεται ἐξ

39) Ἡ ἀξία τῶν προϊόντων ἀποτιμᾶται εἰς σταθερὰς τιμὰς.

όλοκλήρου μεταξύ των λοιπών κλάδων 2, 3... και ν (40). Ἀνάλογος ἐρημνεία πρέπει νὰ δοθῆ καὶ εἰς τὰς λοιπὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

Εἰς τὸ σύστημα (1) τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα ἐν τῷ συνόλῳ θεωροῦνται ὡς εἰς παραγωγικὸς κλάδος, ὑπὸ εὐρείαν ἔννοιαν, ὁ ὁποῖος προσφέρει εἰς τοὺς λοιποὺς κλάδους τὰς ὑπηρεσίας του (ἐργασίαν) καὶ ἀπορροφᾷ καταναλωτικὰ ἀγαθὰ. Ὁμοίως ὁ κρατικὸς τομεὺς δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς παραγωγικὸς κλάδος προσφέρων ὑπηρεσίας διοικήσεως, ἀσφαλείας κ.λ.π. εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους καὶ καταναλίσκων μέρος τοῦ προϊόντος τῶν κλάδων αὐτῶν (41). Τὸ ἐξωτερικὸν ἐμπόριον δύναται ἐπίσης νὰ θεωρηθῆ ὡς ἰδιαίτερος κλάδος ἀπορροφῶν τὰ ἐξ α γ ὄ μ ε ν α προϊόντα τῶν λοιπῶν κλάδων καὶ προσφέρων εἰς αὐτοὺς τὰ εἰ σ α γ ὄ μ ε ν α προϊόντα.

Αἱ σχέσεις μεταξύ τῶν ἀξιών τῶν ὑφ' ἐκάστου κλάδου καταναλισκομένων προϊόντων ἐντὸς μιᾶς περιόδου καὶ τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον δύνανται νὰ παρασταθοῦν διὰ μιᾶς σειρᾶς ἐξισώσεων τῆς μορφῆς:

$$a_{ik} = \frac{z_{ik}}{X_k} \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, \nu \\ k = 1, 2, \dots, \nu \end{array} \right\} \quad (2)$$

Τὸ  $a_{ik}$  εἶναι «συντελεστὴς εἰσροῆς» (42) καὶ καθορίζει τὴν ὑπὸ τοῦ κλάδου  $k$  καταβαλλομένην ἀξίαν εἰς τὸν κλάδον  $i$  διὰ τὴν χρησιμοποίησιν ποσότητος προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος τοῦ κλάδου  $k$  ἀξίας μιᾶς χρημ. μονάδος. Οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς θεωροῦνται σ τ α θ ε ρ ο ἰ ἀνεξαρτήτως τοῦ βαθμοῦ καὶ τῆς περιόδου ἀπασχολήσεως τῶν οἰκείων κλάδων (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιών). Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν δι' ἕκαστον κλάδον ἰσοῦται προφανῶς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν «εἰσροῶν» αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν τοῦ ὡς ἄνω κλάδου. Ἐνταῦθα ὑποτίθεται γενικῶς, πρὸς ὁμοιομορφίαν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰσροῶν δι' ὅλους τοὺς παραγωγικοὺς κλάδους εἶναι  $\nu$ , ἤτοι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν παραγωγικῶν κλάδων τοῦ συστήματος, ἀλλ' ὑποτίθεται ἐπίσης ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ μερικῶν ἐκ τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἤδη λεχθέντα οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς διὰ τὸν κλάδον 1 θὰ εἶναι:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{\nu 1} \end{bmatrix}$$

40) Εἰς τὸ  $X_i$  δὲν συμπεριλαμβάνεται ἡ ἀξία τῆς ὑπὸ τοῦ κλάδου 1 καταναλισκομένης ποσότητος ἰδίου προϊόντος, δι' ὃ καὶ εἰς τὴν συνοπτικὴν παράστασιν (1') δὲν ἀθροίζονται τὰ στοιχεῖα  $x_{ik}$  ὅταν  $i=k$ .

41) Τὸ κόστος τῶν ὡς ἄνω προϊόντων καλύπτεται ἐκ τῶν φορολογικῶν ἐσόδων, τὰ ὁποῖα καταβάλλονται εἰς τὸ Κράτος ὑπὸ τῶν λοιπῶν κλάδων ὡς οἰονεὶ ἀντιπαροχὴ διὰ τὰς κρατικὰς ὑπηρεσίας.

42) Βλ. μέρος I, τμῆμα Γ' παρ. 2.

Κατ' αναλογίαν συντελεσται εισροῆς τῶν κλάδων 2 καὶ ν θὰ εἶναι :

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{v2} \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{bmatrix} a_{1v} \\ a_{2v} \\ a_{3v} \\ \vdots \\ a_{vv} \end{bmatrix}$$

ἀντιστοίχως.

Αἱ ἀνωτέρω «στῆλαι» τῶν συντελεστῶν εισροῆς παριστοῦν προφανῶς τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας τῶν ἀντιστοίχων κλάδων, αἱ ὁποῖαι δεικνύουν τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας παραγωγῆς προϊόντος ἀξίας μιᾶς μονάδος τῶν κλάδων αὐτῶν. Τὰς ὡς ἄνω συναρτήσεις δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν, γεωμετρικῶς, ὡς σημεῖα ἐντὸς τοῦ ν - διαστάτου εὐκλείδειου χώρου, ἔχοντα συντεταγμένας τὰ στοιχεῖα αἰκ, ἦ — ἰσοδυνάμως — ὡς «διανύσματα» (43) ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χώρου καὶ μὲ τὰς αὐτὰς συντεταγμένας.

Ἐκ τῶν διανυσμάτων τῶν παραγωγικῶν συναρτήσεων τῶν διαφόρων κλάδων δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν τὴν «μῆτραν» (44) τῶν συντελεστῶν εισροῆς» (matrix of input coefficients) δι' ὁλόκληρον τὴν ἐξεταζομένην οἰκονομίαν :

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2v} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{v1} & a_{v2} & a_{v3} & \dots & a_{vv} \end{bmatrix} \quad (45) \quad (3)$$

Ἐπειδὴ δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἐνταῦθα ἡ ὑπ' ἐκάστου κλάδου κατανάλωσις ἰδίου προϊόντος (βλ. ὑπόσημ. 40) θὰ θέσωμεν συμβατικῶς  $X_{ii} = 0$  καὶ :

$$a_{ii} = \frac{0}{X_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, v)$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ κριαία διαγώνιος ( $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{vv}$ ) τῆς μῆτρας A περιλαμβάνει μόνον μηδενικά στοιχεῖα.

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῶν συντελεστῶν εισροῆς (ἐξίσωσις 2) δυνάμεθα τώρα, δι' ἀντικαταστάσεως, εἰς τὸ σύστημα (1) νὰ σχηματίσωμεν τὸ κάτωθι σύστημα ἐξισώσεων :

43) βλ. Allen (R.C.D.), *Mathematical Economics*, Macmilan, 1956.

44) Βλ. ἐπίσης Aitken (A.C.) *Determinants and matrices*, Oliver and Bond, 1949.

45) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σημειωθέντων περὶ διανυσμάτων, καθίσταται νοητὸν ὅτι ἡ μῆτρα τῶν συντελεστῶν εισροῆς πικριστῶ, γεωμετρικῶς, δέσμη διανυσμάτων ἐντὸς τοῦ ν - διαστάτου εὐκλείδειου χώρου.

$$\left. \begin{aligned} X_1 - \alpha_{12} X_2 - \alpha_{13} X_3 - \dots - \alpha_{1v} X_v &= 0 \\ -\alpha_{21} X_1 + X_2 - \alpha_{23} X_3 - \dots - \alpha_{2v} X_v &= 0 \\ -\alpha_{31} X_1 - \alpha_{32} X_2 + X_3 - \dots - \alpha_{3v} X_v &= 0 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ -\alpha_{v1} X_1 - \alpha_{v2} X_2 - \alpha_{v3} X_3 - \dots + X_v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ἢ συνοπτικῶς:

$$X_i - \sum_{\kappa=1}^v \alpha_{i\kappa} X_\kappa = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, v \\ \text{καὶ } \gamma_{ii} = 0 \text{ διὰ } i = 2 \end{array} \right.$$

Ἐφ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς παραμένουν σταθεροί, αἱ ἀξίαι τῶν συνολικῶν προϊόντων δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἄγνωστοι μεταβληταὶ εἰς τὸ σύστημα (4). Δεδομένου ὅτι ὁ ἀριθμὸς  $v$  τῶν ἐν τῷ συστήματι ἐξισώσεων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων ( $X_1, X_2, \dots, X_v$ ), τὸ σύστημα τοῦτο δύναται κατ' ἀρχὴν νὰ λυθῇ. Ἡ ἀκολουθουμένη διαδικασία λύσεως στηρίζεται εἰς τὰ περὶ ὁμογενῶν συστημάτων ὁριζώμενα (46). Εἰς τὴν παρούσαν περίπτωσιν ἡ λύσις εἶναι σ η μ α ν τ ι κ ῆ, ἢτοι διάφορος τοῦ μηδενός, μόνον ὅταν ἡ μήτρα τοῦ συστήματος ἴσούται πρὸς (rank)  $v-1$  ἢ κατωτέρου, δηλ. ἂν ἡ  $v \times v$  ὁρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι βαθμοῦ τὸ μηδὲν καὶ μία τουλάχιστον ἐκ τῶν  $\mu \times \mu$  ὁρίζουσῶν (διὰ  $\mu = 1, 2, \dots, v-1$ ) εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ἡ τοιαύτη λύσις ἐν τούτοις δίδει μόνον τὴν σ χ ε τ ι κ ῆ ν τιμὴν τῶν ζητουμένων μεταβλητῶν καὶ εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως καθορισθῇ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ μᾶς οἰασδήποτε μεταβλητῆς πρὸς καθορισμὸν τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῶν λοιπῶν. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν θὰ ἴητο δυνατόν νὰ καθορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως ὄλων τῶν παραγωγικῶν κλάδων.

Ὡς ἐλέχθη τὸ σύστημα (4) ἐ σχηματίσθη ἀπὸ τὸ σύστημα (1) διὰ τῆς καταλήλου εἰσαγωγῆς εἰς τὸ τελευταῖον τῶν σταθερῶν συντελεστῶν εἰσροῆς, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἡ μετατροπὴ αὕτη προσδίδει εἰς τὸ σύστημα (4) λειτουργικὴν ἀξίαν, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι τοῦτο θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῇ κατ' ἀρχὴν ὄχι μόνον διὰ λογιστικὴν ἀπεικόνισιν τῶν διακλαδικῶν σχέσεων τῆς οἰκονομίας, ἀλλ' ἐπίσης καὶ δι' οἰκονομικὴν πρόγνωσιν ἢ δοκιμαστικὸν σχεδιασμόν.

Τὸ ὑπόδειγμα τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται διὰ τοῦ συστήματος ἐξισώσεων (4) χαρακτηρίζεται ὡς «στατικόν», καθόσον ἡ λύσις αὐτοῦ δὲν δίδει διαχρονικὰς μεταβολὰς τῶν μεταβλητῶν  $X_1, X_2, \dots, X_v$ , ἀλλ' εἰκονίζει μόνον μίαν κατάστασιν ex post ἰσορροπίας. Εἶναι βεβαίως δυνατόν νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῶν ὡς ἄνω μεταβλητῶν μεταξὺ δύο χρονικῶν σημείων (συγκριτικὴ στατική), ἀλλὰ δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ παρακολούθησις τῶν μεταβολῶν αὐτῶν κατὰ τὴν δ ι α ρ κ ε ι α ν δοθείσης περιόδου. Τὸ ὡς ἄνω ὑπόδειγμα χαρακτηρίζεται ἐξ ἄλλου ὡς «κλειστὸν» διότι δὲν περικλείει ἐξωγενεῖς μεταβλητάς: "Ἄπαντα τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν οἰκono-

46) Βλ. Aitken, Allen, ἐνθ. ἄνωτ.



μικῶν κλάδων, τὰ ὅποια ὑποδηλοῦνται διὰ τῶν  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , ἀλληλοκαθαρίζονται ἐντὸς τοῦ ὑποδείγματος.

Αἱ μεταβληταὶ  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ἐκφράζουσι τὴν ἀξίαν τῆς συνολικῆς παραγωγῆς τῶν ἀντιστοίχων κλάδων εἰς σταθερὰς τιμὰς (βλ. ὑποσ. 39). Θὰ ὑποθέσωμεν περαιτέρω ὅτι αἱ τιμαὶ μονάδος  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  τῶν προϊόντων τῶν κλάδων 1, 2, ..., n εἶναι ἐπίσης σταθεραί. Δυνάμεθα τότε νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ποσότητας συνολικῆς παραγωγῆς τῶν προϊόντων τῶν ὡς ἄνω κλάδων ὡς ἐξῆς:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_i}{\tau_i} &\equiv X'_i \\ i &= (1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\}$$

2. Ἄνοικτον ὑπόδειγμα. Βασικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ «ἀνοικτοῦ» ὑποδείγματος εἶναι ὅτι ὀρισμένα τῶν ἐν αὐτῷ μεταβλητῶν θεωροῦνται ὡς ἀνεξαρτήτως (ἐκτὸς τοῦ ὑποδείγματος) καθοριζόμενα. Οὕτω θὰ ἠδύνατο π.χ. νὰ θεωρηθῆ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τὸ ἐπίπεδον καταναλώσεως προϊόντων ὑπὸ τῶν φυσικῶν προσώπων (47), ὅποτε ὁ σχετικὸς κλάδος «οἰκονομοῦντα ἄτομα» (48) χαρακτηρίζεται ὡς ἐξωτερικὸς τομεὺς διὰ τὸ ὑπόδειγμα καὶ διασπᾶται εἰς τοὺς ὑποτομεῖς Ἰδιωτικὴ Κατανάλωσις καὶ Ὑπηρεσίαι Προσώπων, τῶν ὑποτομῶν τούτων μόνον γαλαρῶς συνδεομένων.

Ἐὰν ὑποτεθῆ ὅτι ὁ νιοστὸς κλάδος εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦ συστήματος ἐξισώσεων (4) ἀντιπροσωπεύει τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα, πρὸς μετατροπὴν τοῦ ὡς ἄνω ὑποδείγματος ἀπὸ κλειστοῦ εἰς ἀνοικτὸν ἢ νιοστὴ ἐξίσωσις ἀπαλείφεται, αἱ δὲ ἐπὶ μέρους ἀξίαι τῶν ἀπορροφωμένων ὑπὸ τῶν οἰκονομοῦντων ἀτόμων προϊόντων τῶν ὑπολοίπων κλάδων (1, 2, 3, ..., μ) (49) μεταφέρονται εἰς τὸ δεξιὸν σέλος τοῦ συστήματος καὶ λαμβάνονται ὡς γνωσταὶ σταθεραὶ  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_\mu$ , αἱ ὅποια ἀποτελοῦν τὰ κοινὰ ἄλλα τῆς τελικῆς ζητήσεως:

$$\left. \begin{aligned} X_1 - a_{12} X_2 - a_{13} X_3 - \dots - a_{1\mu} X_\mu &= \Psi_1 \\ - a_{21} X_1 + X_2 - a_{23} X_3 - \dots - a_{2\mu} X_\mu &= \Psi_2 \\ - a_{31} X_1 - a_{32} X_2 + X_3 - \dots - a_{3\mu} X_\mu &= \Psi_3 \\ \vdots &\vdots \\ - a_{\mu 1} X_1 - a_{\mu 2} X_2 - a_{\mu 3} X_3 - \dots + X_\mu &= \Psi_\mu \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

καὶ συνολτικῶς

$$X_i - \sum_{k=1}^{\mu} a_{ik} X_k = \Psi_i \quad \left\{ \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, \mu \\ \mu + 1 &= n \\ \lambda_{ii} &= 0 \quad \text{διὰ} \quad i = n \end{aligned} \right. \quad (5')$$

47) Ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὴν καταναλώσιν προϊόντων ὑπὸ τῶν ἐπιχειρήσεων.

48) Βλ. παρ. 1 ἄνω.

49) Δηλαδή οἱ νιοστοὶ ὅροι τῶν ὑπολοίπων ἐξισώσεων.

Τὸ σύστημα (5) εἶναι μὴ ὁμογενές (50) καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ μ ἐξισώσεις καὶ μ ἀγνώστους. Δύναται συνεπῶς νὰ λυθῇ ἂν ἡ μήτρα τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους αὐτοῦ εἶναι μισοτοῦ βαθμοῦ, ἥτοι ἂν ἡ ὀρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός (51).

Λόγω τῆς ἰδιαίτερας οἰκονομικῆς σπουδαιότητος τῶν ἀνοικτῶν ὑποδειγμάτων παραθέτομεν κατωτέρω ἀναλυτικῶς τὴν διαδικασίαν λύσεως τοῦ συστήματος (5).

Συμφώνως πρὸς τὸν συμβολισμόν τῶν «μητρῶν» (52) τὸ σύστημα (5) δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & \dots & -\alpha_{1\mu} \\ -\alpha_{21} & 1 & -\alpha_{23} & \dots & -\alpha_{2\mu} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & 1 & \dots & -\alpha_{3\mu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{\mu 1} & -\alpha_{\mu 2} & -\alpha_{\mu 3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \vdots \\ \Psi_\mu \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ὁ πρῶτος παράγων τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους τῆς ἐξισώσεως (6) καλεῖται «τεχνολογικὴ μήτρα» (technological matrix) καὶ περιλαμβάνει τοὺς σταθεροὺς συντελεστὰς τοῦ συστήματος (5). Θὰ παραστήσωμεν ταύτην διὰ τοῦ συμβόλου  $A^*$ . Αἱ στήλαι τῆς τεχνολογικῆς μήτρας παριστοῦν τὰς παραγωγικὰς συναρτήσεις τῆς ἐξεταζομένης οἰκονομίας. Αἱ συναρτήσεις αὗται διαφέρουν ἀπὸ τὰς παραγωγικὰς συναρτήσεις τῆς μήτρας συντελεστῶν εἰσροῆς  $A$ , καθ' ὅτι αἱ πρῶται, πλὴν τῶν στοιχείων κόστους (εἰσροῶν) τοῦ παραγομένου προϊόντος ἀξίας μιᾶς μονάδος, περιλαμβάνουν ἐπίσης ρητῶς τὴν ὡς ἄνω μονάδα ἀξίας (ἐκροήν) (53).

Ἡ τεχνολογικὴ μήτρα ἀποτελεῖ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς καλουμένης «μοναδιαίας μήτρας» (unit matrix) (54)

$$I \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

καὶ τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς  $A$  (λαμβανομένου βεβαίως ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ κυρία διαγώνιος τῆς τελευταίας μήτρας περιλαμβάνει μόνον μηδενικὰ στοιχεῖα).

50) Βλ. Aitken, Allen, ἔνθ. ἀν.

51) Εἰδικῶς ἡ ὀρίζουσα τοῦ μὴ ὁμογενοῦς συστήματος τύπου Leontief (ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα) πρέπει νὰ εἶναι θετικὴ. Βλ. σχετικῶς Economic Activity Analysis, ed. by Morgenstern (σ. 400 κ.ἐπ.).

52) Βλ. Aitken, ἔνθ. ἀν. σ. 3.

53) Αἱ εἰσροαὶ λαμβάνονται μὲ ἀρνητικὰς τιμὰς εἰς τὴν τεχνολογικὴν μήτραν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὰς ἐκροὰς αἱ ὁποῖαι λαμβάνονται ὡς θετικὰ μονάδες.

54) Aitken, ἔνθ. ἄνωτ. σ. 12.



Δυνάμεθα οὕτω νὰ παραστήσωμεν περιληπτικῶς τὴν τεχνολογικὴ μῆτραν ὡς ἀκολουθῶς :

$$A^* \equiv [I - A] \quad (8)$$

Ἡ τεχνολογικὴ μῆτρα  $[I - A]$  καλεῖται συνήθως «μῆτρα τύπου Λεόντιεφ». Ὁ δεῦτερος παράγων τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους τῆς ἐξίσωσως (6) ἀποτελεῖ τὸ διάνυσμα τῶν προσδιοριστέων μεταβλητῶν τοῦ συστήματος (5), τὸ δὲ δεξιὸν σκέλος τῆς ἐξίσωσως ταύτης παριστᾷ τὸ διάνυσμα τῆς τελικῆς ζητήσεως. Ἄν θέσωμεν περιληπτικῶς  $X$  καὶ  $\Psi$  διὰ τὸ διάνυσμα τῶν προσδιοριστέων μεταβλητῶν καὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως ἀντιστοίχως, τότε ἡ ἐξίσωσις (6) καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα (5) δύναται νὰ λάβῃ τὴν συνοπτικὴν μορφήν :

$$[I - A] \cdot X = \Psi \quad (9)$$

Ἄν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξίσωσως (9) ἐπὶ τὴν μῆτραν  $[I - A]^{-1}$ , ἡ ὁποία εἶναι ἡ «ἀντίστροφος» τῆς τεχνολογικῆς μῆτρας, λαμβάνομεν :

$$[I - A]^{-1} \cdot [I - A] \cdot X = [I - A]^{-1} \cdot \Psi \quad (10)$$

Καὶ ἐπειδὴ  $[I - A]^{-1} \cdot [I - A] \cdot X = IX = X$

ἡ ἐξίσωσις 10 γίνεται :

$$X = [I - A]^{-1} \cdot \Psi \quad (11)$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσως 11 καθίσταται προφανές ὅτι, δοθέντος τοῦ διανύσματος τελικῆς ζητήσεως, πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων  $X_1, X_2 \dots X_n$  ἀπαιτεῖται προηγουμένως «ἀντίστροφή» (55) τῆς τεχνολογικῆς μῆτρας καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐκτέλεσις τοῦ εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος τῆς ἐξίσωσως σημειουμένου πολλαπλασιασμοῦ.

Ἀναλυτικῶς ἡ λύσις τῆς ἐξίσωσως 11 (καὶ συνεπῶς καὶ τοῦ συστήματος (5) ἔχει ὡς ἀκολουθῶς :

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= E_{11} \Psi_1 + E_{21} \Psi_2 + E_{31} \Psi_3 + \dots + E_{\mu 1} \Psi_\mu \\ X_2 &= E_{12} \Psi_1 + E_{22} \Psi_2 + E_{32} \Psi_3 + \dots + E_{\mu 2} \Psi_\mu \\ X_3 &= E_{13} \Psi_1 + E_{23} \Psi_2 + E_{33} \Psi_3 + \dots + E_{\mu 3} \Psi_\mu \\ &\vdots \\ &\vdots \\ X_\mu &= E_{1\mu} \Psi_1 + E_{2\mu} \Psi_2 + E_{3\mu} \Psi_3 + \dots + E_{\mu\mu} \Psi_\mu \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

καὶ συνοπτικῶς :

$$X_i = \sum_{\kappa=1}^{\mu} E_{\kappa i} \Psi_\kappa \quad i = 1, 2, \dots, \mu \quad (12')$$

$$\text{Ἄνωτέρω} \quad E_{\kappa i} = \frac{\Delta_{\kappa i}}{\Delta} \quad (13)$$

55) Βλ. Α. Λάζαρη : Στοιχεῖα μαθηματικῆς ἀναλύσεως διὰ τὴν σπουδὴν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἀρχεῖον Κοινων. καὶ Οἰκονομικῶν Ἐπιστημῶν, 1957.

δπου  $\Delta_{ki}$  είναι τὸ ἀλγεβρικὸν συμπλήρωμα τοῦ στοιχείου  $a_{ik}$  τῆς τεχνολογικῆς μήτρας καὶ  $\Delta$  ἡ ὀρίζουσα τῆς μήτρας ταύτης.

Οἰκονομικῶς ὁ ὅρος  $E_{11} \Psi_1$  ἐκφράζει τὸ τμήμα τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 1 τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν  $\Psi_1$  αὐτοῦ τούτου τοῦ προϊόντος. Ὁ ὅρος  $E_{21} \Psi_2$  παριστᾷ τὸ τμήμα τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 1, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν  $\Psi_2$  τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 2 κ.ο.κ. Γενικῶς οἱ συντελεσταὶ  $E_{ki}$  δεικνύουν κατὰ πόσον τὸ συνολικὸν προϊόν τοῦ κλάδου  $k$  ἀξιάνει ἂν ἡ τελικὴ ζήτησις διὰ τὸ προϊόν τοῦ κλάδου  $k$  ἀξηθῆ κατὰ 1 μονάδα (τῶν ἄλλων κονδυλίων ζήτησεως παραμενόντων ἀμεταβλήτων). Ἐκ τῆς (13) καταφαίνεται ὅτι ἡ τιμὴ τῶν συντελεστῶν  $E_{ki}$  ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς ὀρίζουσας τῆς τεχνολογικῆς μήτρας καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς τιμῆς  $\delta \lambda \omega \nu$  τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Κατὰ συνέπειαν ἡ ἱκανοποίησης δοθείσης ἀξίσεως τῆς ζήτησεως π.χ. γεωργικῶν προϊόντων, εἶναι κατ' ἀρχὴν δυνατὴ κατόπιν ὀρισμένων μεταβολῶν,  $\alpha \mu \epsilon \sigma \omega \nu$  ἢ  $\epsilon \mu \mu \epsilon \sigma \omega \nu$  εἰς τὰ ἐπίπεδα δράσεως ὄλων τῶν παραγωγικῶν κλάδων (56). Τοῦτο ἐκφράζεται εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἐπιστήμην διὰ τῆς γνωστῆς ἀρχῆς τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν οἰκονομικῶν κλάδων.

Ἡ δεδομένη λύσις (12) καθορίζει τὰ ἐπίπεδα δράσεως  $X_1, X_2, \dots, X_\mu$  τῶν παραγωγικῶν κλάδων 1, 2, ...,  $\mu$ , τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπαραίτητα πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς δοθείσης τελικῆς ζήτησεως ( $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_\mu$ ).

Αἱ ποσότητες προϊόντων αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ὡς ἄνω ἐπίπεδα δράσεως θὰ εἶναι (βλ. τέλος παρ. 1, ἀνωτέρω)

$$X'_i \equiv \frac{X_i}{r_i} \quad (i = 1, 2, \dots, \mu) \quad (14)$$

Ἐκ τῆς λύσεως (12) δὲν εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῆς ὑπ' ἐκάστου κλάδου καταβαλλομένης ἀξίας δι' ἐργασίαν καὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐργατικῆς ἀπασχόλησεως (57) τῆς ἐξεταζομένης οἰκονομίας (58). Τοιοῦτος προσδιορισμὸς καθίσταται ἐν τούτοις δυνατὸς ἂν γνωρίζωμεν τοὺς «συντελεστάς εἰσροῆς ἐργασίας» δι' ἕκαστον κλάδον. Οἱ συντελεσταὶ οὗτοι καθορίζουν τὴν καταβαλλομένην ὑπὸ τῶν ἀντιστοίχων κλάδων ἀξίαν διὰ τὴν ἐργασίαν ἢ ὁποῖα ἀπαιτεῖται πρὸς παραγωγήν μιᾶς μονάδος ἀξίας ἐκ τοῦ προϊόντος τῶν ἐν λόγῳ κλάδων. Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ οὗτοι παραμένουν σταθεροὶ ὡς καὶ οἱ λοιποὶ συντελεσταὶ εἰσροῆς. Ἄν χαρακτηρίσωμεν διὰ τοῦ γράμματος  $\nu$  τὸν τομέα «Ἑπιχειρήσῃ Προσώπων» ἢ «Ἐργασία» τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας, θὰ ἔχωμεν γενικῶς :

56) Ἡ αὐτὴ ἔννοια θὰ ἠδύνατο νὰ διατυπωθῆ ἐπίσης ὡς ἀκολούθως: Μία ἀξίσις τῆς τελικῆς ζήτησεως ἐνδὸς ὀρισμένου προϊόντος προκαλεῖ κατ' ἀρχὴν ἀμέσους ἢ ἐμμέσους ἀξίσεις εἰς τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς ὄλων τῶν παραγωγικῶν κλάδων.

57) Ὁ ὅρος «ἐργατικὴ ἀπασχόλησις» χρησιμοποιεῖται ἐνταῦθα ὑπὸ εὐρείαν ἔννοιαν, περιλαμβάνων τὰς πάσης φύσεως παραγωγικὰς ὑπηρεσίας προσώπων.

58) Ὡς ἐλέχθη ἡ νιοστὴ ἐξίσωσις ἢ ἀναφερομένη εἰς τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα (καὶ συνεπῶς καὶ εἰς τὴν ἐργασίαν) ἀπληρέφθη ἀπὸ τὸ σύστημα (5).

$$\left. \begin{aligned} \chi_{v_i} &= a_{v_i} X_i \\ i &= 1, 2 \dots \mu \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Όπου  $a_{v_i}$  παριστά τὸν σταθερὸν συντελεστὴν εἰσοδοῦς ἐργασίας τοῦ κλάδου  $i$  καὶ  $\chi_{v_i}$  τὴν συνολικῶς καταβαλλομένην ἀξίαν δι' ἐργασίαν ὑπὸ τοῦ κλάδου  $i$  διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου.

Κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ ἐν παραγρ. 1 (ἄνωτέρω) λεχθέντα καὶ ὑποθέτοντες ὅτι ἡ τιμὴ μονάδος τῆς ἐργασίας (π.χ. τὸ ὄρομίσιον) εἶναι ἴση πρὸς τὴν σταθερὰν  $\tau_v$ , δυνάμεθα εὐκόλως νὰ προσδιορίσωμεν δι' ἕκαστον κλάδον παραγωγῆς τὸ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως (εἰς ὥρας ἐργασίας) :

$$\left. \begin{aligned} \chi'_{v_i} &\equiv \frac{a_{v_i} X_i}{\tau_v} \\ i &= 1, 2 \dots \mu \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Ἄν εἰς τὸ σύστημα (16) ἀντικαταστήσωμεν τὸ  $X_i$  διὰ τῆς τιμῆς του ὡς αὕτη ὀρίζεται ἐκ τῶν λύσεων (12), λαμβάνομεν τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{aligned} \chi'_{v_i} &= \frac{a_{v_i}}{\tau_v} (E_{i1} \Psi_1 + E_{i2} \Psi_2 + \dots + E_{i\mu} \Psi_\mu) \\ i &= (1, 2 \dots \mu) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Ἐξ οὗ καταφαίνεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως εἰς δοθέντα κλάδον  $i$  ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαρθρώσεως  $\delta \lambda \omega \nu$  τῶν παραγωγικῶν συναρτήσεων τῆς οἰκονομίας καὶ ἐκ τοῦ μεγέθους  $\delta \lambda \omega \nu$  τῶν κονδυλίων τελικῆς ζητήσεως.

Ἡ συνολικὴ ἐργατικὴ ἀπασχολήσις εἰς τὴν οἰκονομίαν ( $X'_v$ ) εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τῶν ἐπὶ μέρους κλάδων τῆς οἰκονομίας :

$$X'_v = (\chi'_{v_1} + \chi'_{v_2} + \dots + \chi'_{v_\mu}) \quad (18)$$

Ἡ ἐξίσωσις (18) δεικνύει ἐξ ἄλλου τὸν τρόπον κατανομῆς τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (18) τὰς τιμὰς τῶν  $\chi'_{v_i}$  ὡς αὐταὶ δίδονται εἰς (17), θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} X'_v &= \frac{1}{\tau_v} (a_{v_1} E_{11} \Psi_1 + a_{v_1} E_{21} \Psi_2 + \dots + a_{v_1} E_{\mu 1} \Psi_\mu) + \\ &+ \frac{1}{\tau_v} (a_{v_2} E_{12} \Psi_1 + a_{v_2} E_{22} \Psi_2 + \dots + a_{v_2} E_{\mu 2} \Psi_\mu) + \\ &+ \frac{1}{\tau_v} (a_{v_\mu} E_{1\mu} \Psi_1 + a_{v_\mu} E_{2\mu} \Psi_2 + \dots + a_{v_\mu} E_{\mu\mu} \Psi_\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta) \quad X'_v &= \frac{\Psi_1}{\tau_v} (a_{v_1} E_{11} + a_{v_2} E_{12} + \dots + a_{v\mu} E_{1\mu}) + \\
 &+ \frac{\Psi_2}{\tau_v} (a_{v_1} E_{21} + a_{v_2} E_{22} + \dots + a_{v\mu} E_{2\mu}) + \dots \\
 &+ \frac{\Psi_\mu}{\tau_v} (a_{v_1} E_{\mu 1} + a_{v_2} E_{\mu 2} + \dots + a_{v\mu} E_{\mu\mu}) \dots \quad (19)
 \end{aligned}$$

καὶ συνοπτικῶς :

$$X'_v = \frac{\Psi_1}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{v_i} E_{1i} + \frac{\Psi_2}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{v_i} E_{2i} + \dots + \frac{\Psi_\mu}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{v_i} E_{\mu i} \quad (19')$$

Ὁ ὅρος  $\frac{\Psi_1}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{v_i} E_{1i}$  προσδιορίζει τὴν αὔξησιν τῆς συνολικῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως, τὴν ὀφειλομένην εἰς τὴν αὔξησιν κατὰ  $\Psi_1$  μονάδας τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 1.

Γενικῶς ὁ ὅρος  $\frac{\Psi_\kappa}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{v_i} E_{\kappa i}$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, \mu$ ) δίδει τὴν αὔξησιν τῆς συνολικῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τὴν προερχομένην ἐκ τῆς αὔξεως τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου  $\kappa$  κατὰ  $\Psi_\kappa$  μονάδας.

Κατ' ἀναλογίαν οἱ συντελεσταὶ  $\frac{1}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{v_i} E_{\kappa i}$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, \mu$ ), καλούμενοι συνήθως «συντελεσταὶ ὀλικῆς ἀπασχολήσεως» (total employment coefficients), προσδιορίζουν τὴν αὔξησιν τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τῆς οἰκονομίας, τὴν προερχομένην ἐκ τῆς αὔξεως κατὰ μίαν μονάδα τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου  $\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, \mu$ ).

Ἐκαστος συντελεστὴς ὀλικῆς ἀπασχολήσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦ «ἰμῆσου συντελεστοῦ ἀπασχολήσεως» (<sup>59</sup>) (direct employment coefficient) καὶ τῶν «συντελεστῶν ἑμμέσου ἀπασχολήσεως» (<sup>60</sup>) (indirect employment coefficient).

Ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως εἶναι προφανής.

Καταφαίνεται ἤδη ὅτι ἐκ τῆς λύσεως (12) καὶ τῆς ἐξισώσεως (19) εἶναι δυνατόν νὰ προσδιορισθῶν τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς ἐκάστου κλάδου καὶ τὰ ἐπίπεδα

59) Οὗτος δεικνύει τὴν ὑπὸ τοῦ οἰκείου κλάδου ἀμέσως ἀπορροφωμένην ποσότητα ἐργασίας διὰ τὴν ἱκανοποίησιν μιᾶς μονάδος τελικῆς ζητήσεως ἐκ τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου καὶ παριστᾶται διὰ τῶν στοιχείων

$$\frac{1}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{v_i} E_{\kappa\kappa} \quad \kappa=1, 2, \dots, \mu \quad (\text{βλ. ἐξ. (19)})$$

60) Οὗτοι δεικνύουν τὴν ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν κλάδων τῆς οἰκονομίας δαπανωμένην ποσότητα ἐργασίας διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν προϊόντων τὰ ὅποια χρησιμοποιοῦνται ὡς πρῶται ὕλαι κλπ. πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας μιᾶς μονάδος τοῦ δοθέντος κλάδου  $\kappa$ . Οἱ ἑμμέσοι συντελεσταὶ παριστῶνται διὰ τῶν στοιχείων  $\frac{1}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{v_i} E_{\kappa i}$ . (διὰ  $\kappa=1, 2, \dots, \mu$  ἀλλὰ  $\kappa \neq i$ ).

άπασχολήσεως τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ, τὰ ὅποια εἶναι ἀναγκαῖα πρὸς ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζήτησεως τῶν προϊόντων τῶν ἐν λόγῳ κλάδων. Αἱ οὕτω προσδιοριζόμεναι τιμαὶ λύσεως εἰς τὰς οἰκονομικὰς μεταβλητὰς (ἐπίπεδα δράσεως παραγωγικῶν τομέων καὶ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως) χαρακτηρίζονται συνήθως ὡς «συνεπεῖς» (consistent), καθ' ὅσον ἀναφέρονται εἰς τὴν «ἀρμονικὴν» (61) συνεργασίαν τῶν παραγωγικῶν κλάδων πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς δοθείσης τελικῆς ζήτησεως. Ἡ σύγκρισις τῶν τιμῶν αὐτῶν πρὸς τὰς πραγματικὰς συνθήκας τῆς οἰκονομίας θὰ δείξῃ κατὰ πόσον τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τελικῆς ζήτησεως (62) εἶναι πραγματοποιήσιμον (feasible). Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης θὰ δειχθῇ ἐπίσης ἂν ἐπιβάλλεται προηγουμένως ἄρσις τῶν τυχόν ὑπαρχουσῶν στενοτήτων (λόγῳ ἑλλείψεως κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ εἰς τινὰς παραγωγικοὺς κλάδους ἢ λόγῳ ἀνεπαρκοῦς ποσότητος ἐργασίας), ἢ ἂν ἡ τελικὴ ζήτησις πρέπει νὰ προσαρμοσθῇ ἀναλόγως, εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἱκανοποίησις αὐτῆς βάσει τῶν ὑπαρχουσῶν δυνατοτήτων τῆς οἰκονομίας.

Τὸ ἀνωτέρω περιγραφὲν ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα εἶναι στατικὸν ὡς καὶ τὸ προηγούμενον, διότι δὲν παρακολουθεῖ διαχρονικὰς μεταβολὰς τῶν μεταβλητῶν  $X_1, X_2, \dots, X_m$  ἀλλὰ δίδει μόνον λύσεις ἰσορροπίας αὐτῶν εἰς δεδομένην περίοδον ἢ συνολικὰς μεταβολὰς τῶν μεταβλητῶν μεταξὺ δύο χρονικῶν περιόδων (συγκριτικὴ στατικῇ).

3. Ἰδιότητες μητρῶν τύπου Λεόντιεφ. Ἡ μήτρα τύπου Λεόντιεφ ἔχει ὀρισμένας μαθηματικὰς ιδιότητες, αἱ ὅποια ἀντικατοπτρίζουν ιδιότητες τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Αἱ κυριώτερα ἐκ τῶν ιδιοτήτων αὐτῶν εἶναι αἱ ἀκόλουθοι (63):

$$1\eta \quad \sum_{i=1}^v a_{ik} < 1 \quad (k=1, 2, \dots, v)$$

$$2\alpha \quad a_{ik} \geq 0 \quad (i, k=1, 2, \dots, v)$$

$$3\eta \quad 1 > (I - A) > 0$$

$$4\eta \quad (I - A)^{-1} = (I + A + A^2 + A^3 + \dots)$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ἀποτελεῖ σ υ γ κ λ ί ν ο υ σ α ν σειράν.

5η Πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς  $(I - A)^{-1}$  εἶναι μὴ ἀρνητικὰ καὶ μεγαλύτερα, κατ' ἀπόλυτον τιμὴν, τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς  $(I - A)$ .

Συμφώνως πρὸς τὴν πρώτην ιδιότητα, τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων τῶν στη-

61) Ἄνευ ὑποδραστηριότητος ἢ ὑπερδραστηριότητος τῶν ἐπὶ μέρους παραγωγικῶν κλάδων.

62) Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ δυνατὸν νὰ ἀποτελῇ πρόβλεψιν ἢ προγραμματικὸν σκοπὸν.

63) Βλ. Dorfman Samelson and Solow «Linear programming and economic analysis» mcgraw Hill 1958 σ. 253 κ. ἑ. Ἐπίσης βλ. Morgenstern A. (edit.) economic activity analysis, σ. 341 κ. ἑ.

λῶν τῆς Α δὲν εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος. Ἡ οικονομικὴ ἔννοια τῆς ιδιότητος αὐτῆς εἶναι ὅτι τὸ σύνολον τῶν πληρωμῶν τοῦ δοθέντος κλάδου καὶ διὰ προϊόντα ἄλλων κλάδων πρὸς παραγωγὴν τοῦ προϊόντος του, δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνει τὴν ἀξίαν

τοῦ προϊόντος αὐτοῦ. Ἡ συνήθης μάλιστα περίπτωσης εἶναι  $\sum_{i=1}^v a_{ik} < 1$ .

Ἡ δευτέρα ιδιότης λέγει ὅτι ἡ ἐκάστοτε «εἰσορῆ» τοῦ δοθέντος κλάδου καὶ ἀπὸ ἄλλους κλάδους ( $i=1, 2, \dots$ ) εἶναι μέγεθος μὴ ἀρνητικόν. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (1 § 1), δεδομένου ὅτι  $X_k > X_{ik} > 0$  καὶ σημαίνει ὅτι δὲν εἶναι νοητὸν νὰ λαμβάνῃ ὁ κλάδος  $k$  ἀρνητικὸν προϊόν ἀπὸ τοὺς λοιποὺς κλάδους.

Προφανῶς ἐκ τῆς 1ης ιδιότητος θὰ εἶναι:

$$1 > a_{ik} \geq 0$$

καὶ ἐκ τῆς 2ας ιδιότητος:

$$0 \leq \sum_{i=1}^v a_{ik} \leq 1$$

Ἡ συνήθης περίπτωσης εἶναι (64) :

$$0 < \sum_{i=1}^v a_{ik} < 1$$

Αἱ ιδιότητες 1 καὶ 2 ἀποτελοῦν ἀ ν α γ κ α ί α ς καὶ ἐ π α ρ κ ε ῖ ς συνθήκας διὰ χαρακτηρισμὸν μιᾶς μήτρας ὡς τύπου Λεόντιεφ. Αἱ λοιπαὶ ιδιότητες 3, 4 καὶ 5 εἶναι παράγωγοι τῶν ιδιοτήτων 1 καὶ 2.

Συμφώνως πρὸς τὴν 3ην ιδιότητα, ἡ ὀρίζουσα τῆς μήτρας τύπου Λεόντιεφ, (I—A) εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος (65).

Ἡ ιδιότης αὕτη σημαίνει ὅτι πληροῦνται αἱ συνθήκαι ἰσορροπίας τοῦ οικονομικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον περιγράφει ἡ (I—A) (66).

Ἡ 4η ιδιότης χρησιμοποιεῖται εὐρύτατα εἰς τὰς διακλαδικὰς ἀναλύσεις διὰ τὴν λύσιν μεγάλων συστημάτων ἐξισώσεων:

Ὡς γνωστὸν, ἡ ἀντιστροφή τῆς μήτρας (I—A) εἶναι, εἰς περίπτωσιν μεγάλων συστημάτων, δυσχερέστατον ὑπολογιστικὸν πρόβλημα, ἡ λύσις τοῦ ὁποίου δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὴ ἄνευ τῆς χρησιμοποιήσεως ἠλεκτρονικῶν ἀριθμομηχανῶν. Βάσει τῆς 4ης ὁμως ιδιότητος ἡ ἐξίσωσις (11) γίνεται

$$X = (I + A + A^2 + A^3 + \dots) \Psi = (\Psi + A\Psi + A^2\Psi + \dots) \quad (20)$$

Ἐπειδὴ ἡ σύγκλισις τῆς σειρᾶς  $(I + A + A^2 + A^3 + \dots)$  εἶναι σχετικῶς τα-

64)  $0 = \sum_{i=1}^v a_{ik}$  ἐμφανίζεται ἐνίοτε εἰς τὰς καλουμένας «τριγωνικὰς μήτρας τύπου Λεόντιεφ».

65) Βλ. Morgenstern (edit). Economic activity analysis 356.

66) Βλ. D. Hawkins and H. Simon, «Note: Some conditions of macro economic stability» Econometrica, 1949.



χεῖα<sup>(67)</sup>, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ διάνυσμα  $X$  κατὰ προσέγγισιν μιᾶς δυνάμεως τοῦ  $A$ , π.χ. τῆς  $A_1$ ς δυνάμεως:<sup>(68)</sup>

$$X = (\Psi + A\Psi + A^2\Psi + A^3\Psi + A^4\Psi) \dots \quad (21)$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ὄρων τῆς σειρᾶς ταύτης, ἡ ὁποία εἶναι συνήθως γνωστὴ ὡς «πολλαπλασιαστικὴ διαδικασία Cornfield - Leontief»<sup>(69)</sup> δὲν παρουσιάζει σοβαρὰ προβλήματα ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν σχετικῶς μεγάλων τεχνολογικῶν μητρῶν. δύνανται δὲ νὰ γίνῃ με συνήθεις ἀριθμομηχανὰς γραφείου<sup>(70)</sup>.

Ἡ 5ῃ ιδιότης ἀπορρέει προφανῶς ἐκ τῆς 4ης ιδιότητος. Ἐφ' ὅσον  $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots$  καὶ πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς  $A$  εἶναι μὴ ἀρνητικά (2α ιδιότης) θὰ ἔχωμεν καὶ τὰ στοιχεῖα τῶν  $A^2, A^3$  κ.λ.π. μὴ ἀρνητικά. Ἡ  $I$  ἔχει ἐπίσης μὴ ἀρνητικὰ στοιχεῖα ἐξ ὀρισμοῦ<sup>(71)</sup>, κατὰ συνέπειαν τὰ στοιχεῖα τῆς  $(I - A)^{-1}$ , τὰ ὁποῖα εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν  $I, A, A^2$ , κ.λ.π. θὰ εἶναι ἐπίσης μὴ ἀρνητικά. Ἐξ ἄλλου ἐὰν θέσωμεν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς  $(I - A)$  με θετικῶν σημεῖων λαμβάνομεν τὴν μήτραν:  $(I + A)$ , ἣτις εἶναι:

$$(I + A) < (I + A + A^2 + A^3 + \dots) = (I - A)^{-1} \quad (22)$$

ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως προκύπτει ὅτι ἕκαστον στοιχεῖον τῆς  $(I - A)^{-1}$  εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον τῆς  $(I + A)$  καὶ κατὰ συνέπειαν ἀπὸ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀντιστοίχου στοιχείου τῆς  $(I - A)$ .

4. Ἐ π η υ ξ η μ έ ν α ι μ ἦ τ ρ α ι τ ῦ π ο υ Λ ε ό ν τ ι ε φ, θὰ ὀνομάζωμεν «επηξημέναις μήτρας τύπου Λεόντιεφ». τὰς μήτρας τῆς  $(n+1)$ μ τῆς κατωτέρω μορφῆς:

67) Sal Cherubino: «Sull' analisi delle inderdipendenze strutturali dei settori economici eiz L' industria No 1, 1953 (σ. 39 κ. ἐ.) καὶ H. Chenery, P. Clark κλπ. the structure of Italian economy». M.S.A. Rome, 1953. Ἡ σειρὰ  $I + A + A^2 + A^3 + \dots$  καλεῖται συνήθως «σειρὰ Newmann» (βλ. Morejestern: Economic activity analysis σ. 291).

68) Ὁ βαθμὸς προσεγγίσεως ἐξαρτᾶται κυρίως ἐκ τῆς ταχύτητος συγκλίσεως τῶν ὄρων  $A, A^2, A^3, \dots$ . Ἄν ἐπιτευθῇ μία σταθερὰ σχέσις συγκλίσεως τῶν ὄρων εἶναι δυνατόν νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάνυσμα  $X$  μετὰ μεγίστης προσεγγίσεως, διὰ προσθέσεως εἰς τὸ ἀρχικὸν ἀποτέλεσμα τοῦ ἀποτελέσματος μιᾶς πολλαπλασιαστικῆς διαδικασίας, ἥτις ἔχει λόγον τὴν σταθερὰν ταύτην σχέσιν. Βλ. σχετικῶς: C. Rigli: Raffronto fra I metodi matriciale e iterativo per la soluzione dello schema di Leontief (nota tecnica) eiz l' Industria, No 1, 1952.

69) Βλ. Dorfman, Samuelson κλπ. «Linear programming κλπ.» σ. 253. Πρβ. καὶ R. Goodwin «The multiplier en a matrix» Econ Journal. Dec 1949.

70) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πολλαπλασιασμῶν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι, κατὰ προσέγγισιν,  $Pv^n$ , ὅπου  $P = \delta$  ἀριθμὸς τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων εἰς μίαν σειρὰν τύπου (A. 14) καὶ  $v = \eta$  τάξις τῆς μήτρας  $A$ , δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν κλάδων τοῦ ἐξεταζομένου οικονομικοῦ συστήματος. Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ  $X$  διὰ τῆς συνήθους μεθόδου τῆς ἀντιστροφῆς τῆς μήτρας ἀπαιτοῦνται περίπου  $v^n$  πολλαπλασιασμοί. Κατὰ συνέπειαν, ἡ διαδικασία Cornfield - Leontief συμφέρει ἐὰν  $P < v$ , ὡς πράγματι συμβαίνει κατὰ κανόνα εἰς τὰς πραγματικὰς περιπτώσεις. (Βλ. Chenery, Clark κλπ. ἐνθ. ἀνωτέρω).

71) Βλ. Α.Α. Λάζαρη «Στοιχεῖα κλπ.», παρ. III 5.

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1\mu} \\ -\alpha_{21} & 1 & -\alpha_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2\mu} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{3\mu} \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ \dots & & & & & & & \dots \\ -\alpha_{\mu 1} & -\alpha_{\mu 2} & -\alpha_{\mu 3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \hline -\alpha_{(\mu+1)1} & -\alpha_{(\mu+1)2} & -\alpha_{(\mu+1)3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{(\mu+1)\mu} \end{array} \right] \quad (23)$$

Ἡ μήτρα (23) εἶναι διανεμημένη<sup>(72)</sup> εἰς δύο μέρη: τὸ ἄνωθεν τῆς «εὐθείας διανομῆς» τμήμα αὐτῆς, τὸ ὁποῖον θὰ ὀνομάζωμεν *κ ὄ ρ ι ο ν σ ῶ μ α* τῆς ἐπηυξημένης μήτρας καὶ τὴν ὑπὸ τὴν εὐθείαν διανομῆς σειρὰν<sup>(73)</sup>. Ὡς παρατηροῦμεν τὸ κύριον σῶμα τῆς ἐπηυξημένης μήτρας ἀποτελεῖ ἀλλήν μήτραν τύπου Λεόντιεφ. Ἡ ὑπὸ τὴν εὐθείαν διανομῆς σειρὰ δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς ἀποτελουμένη ἀπὸ στοιχεῖα «εἰσροῆς» ἀναλόγου φύσεως ὡς καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αἰκ. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα — τὰ ὁποῖα χαρακτηρίζομεν ὡς ἀκροαῖα πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα εἰσροῆς τὰ ὁποῖα καλοῦνται συνήθως «διακλαδικὰ»

$$a_{(\mu+1)i} \geq 0$$

Ἐκ τῆς ἐπηυξημένης μήτρας 23 δυνάμεθα νὰ λάβωμεν στήλας — διανύσματα (Column Vectors) <sup>(74)</sup> ὡς π.χ.

$$\left[ \begin{array}{c} 1 \\ -\alpha_{21} \\ -\alpha_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dots \\ -\alpha_{\mu 1} \\ \hline -\alpha_{(\mu+1)1} \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{c} -\alpha_{13} \\ -\alpha_{23} \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dots \\ -\alpha_{\mu 3} \\ \hline -\alpha_{(\mu+1)3} \end{array} \right] \quad \text{κ.λ.π.}$$

αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ἐπηυξημένας παραγωγικὰς δραστηριότητας, διαφορούσας ἀπὸ τὰς ἀπλᾶς παραγωγικὰς δραστηριότητες τῆς μορφῆς τῆς σ. 24, καθ' ὅτι περιλαμβάνουν ἐπὶ πλέον τὰ στοιχεῖα  $a_{(\mu+1)i}$ . Τὰ στοιχεῖα ταῦτα οἰκονομικῶς δὲν παριστοῦν διακλαδικὰς ροὰς, δηλαδὴ προϊόντα ἐνὸς ἐκ τῶν παραγωγικῶν κλάδων, ἀλλὰ εἰσροὰς εἰς τὸν οἰκ. εἶον κλάδον προερχομένας ἐκ τῶς τοῦ συστήματος τῶν  $\mu$  κλάδων.

Τοιαῦται εἰσροαὶ δυνατόν νὰ εἶναι π.χ. τὸ κόστος κεφαλαίου κατὰ μονάδα παραγωγῆς τοῦ δεδομένου προϊόντος, ἢ ἡ πρὸς τοῦτο ἀπαιτούμενη ποσότης ἐργασίας.

72) Περὶ «διανεμομένην μήτραν» (Partitioned matrices) βλ. Aitken ἐνθ. ἄνωτ. 21.

73) Ἡ σειρὰ αὕτη, ἀποτελεῖ, κατὰ τὴν ὀρολογίαν τῶν μητρῶν, διάνυσμα-σειρὰ (Row-Vector), βλ. Α. Λάζαρη «Στοιχεῖα κλπ.» παραγρ. III 3.

74) βλ. Α. Λάζαρη «Στοιχεῖα κλπ.» παράγρ. III 3.

Ἡ ἐπηρεξιμένη μήτρα (23) δύναται νὰ γραφῆ ὡς :

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cccccccc} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{2\mu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{3\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline \alpha_{(\mu+1)1} & \alpha_{(\mu+1)2} & \alpha_{(\mu+1)3} & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{(\mu+1)\mu} \end{array} \right] \quad (24)$$

ἢ συμβολικῶς :

$$\left\{ \frac{I - A}{\bar{0} - \bar{a}} \right\} \quad (25)$$

ὅπου  $I = \bar{1}$  μοναδιαία μήτρα.  $A = \bar{a}$  μήτρα τῶν διακλαδικῶν στοιχείων

$\alpha_{ik} (i, k = 1, \dots, \mu)$ ,  $\bar{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$  καὶ  $\bar{a} = (\alpha_{(\mu+1)1}, \dots, \alpha_{(\mu+1)\mu})$

Βάσει τῆς ἐπηρεξιμένης μήτρας τύπου Λεόντιεφ δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν λύσιν δύο κατηγοριῶν προβλημάτων. Εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν προβλημάτων ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνολικαὶ π ο σ ό τ η τ ε ς ἢ ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων (καὶ αἱ διακλαδικαὶ ροαὶ) αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται πρὸς ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως. Εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν προβλημάτων ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν ὠρισμένα τ ι μ α λ ἰ σ ο ρ ρ ο π ἰ α ς, ὡς π.χ. εἶναι ἡ περίπτωση τῶν τιμῶν, αἱ ὁποῖαι παριστοῦν τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου δι' ἐκάστην παραγωγικὴν δραστηριότητα.

Οὗτω, π.χ. ἐκ τοῦ συστήματος (6) ἀνωτέρω, βλέπομεν ὅτι δοθείσης τῆς τελικῆς ζητήσεως, πρὸς εἴρεσιν τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_\mu$  μιᾶς οἰκονομίας, βασιζόμεθα ἐπὶ τῆς μήτρας τῶν διακλαδικῶν στοιχείων τῶν ἐν λόγῳ δραστηριοτήτων, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὸ κύριον σῶμα τ ἦ ς ἔ π η υ ξ ἡ μ ἔ ν η ς τ ε χ ν ο λ ο γ ι κ ἦ ς μ ἦ τ ρ α ς 23. Ἡ τελευταία σειρὰ τῆς ἐπηρεξιμένης μήτρας δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν κατὰ τὸν ὑπολογισμόν.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἐξ ἄλλου ὅτι θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς τιμὰς  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_\mu$ , αἱ ὁποῖαι παριστοῦν τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῆς ἐπηρεξιμένης τεχνολογικῆς μήτρας 23<sup>(15)</sup>. Τὸ κόστος τοῦτο εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀμέσου κόστους κεφαλαίου (τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ ἀκραῖον στοιχεῖον) τῆς δοθείσης διαδικασίας καὶ τοῦ ἐμμέσου κόστους κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον δρῖζεται ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν γινόμενων τῶν διακλαδικῶν στοιχείων τῆς διαδικασίας ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς  $\tau$ . Συνεπῶς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἀκόλουθον σύστημα ἔξισώσεων :

75) Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι τὸ στοιχεῖον  $\alpha_{(\mu+1)1}, \alpha_{(\mu+1)2}, \dots$  παριστοῦν ἄμεσον κόστος κεφαλαίου, τῶν οἰκείων δραστηριοτήτων.

$$\begin{aligned}
 \tau_1 - \alpha_{21} \tau_2 - \alpha_{31} \tau_3 - \dots - \alpha_{\mu 1} \tau_\mu &= \alpha_{(\mu+1)1} \\
 -\alpha_{12} \tau_1 + \tau_2 - \alpha_{32} \tau_3 + \dots - \alpha_{\mu 2} \tau_\mu &= \alpha_{(\mu+1)2} \\
 -\alpha_{13} \tau_1 - \alpha_{23} \tau_2 + \tau_3 + \dots - \alpha_{\mu 3} \tau_\mu &= \alpha_{(\mu+1)3} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 -\alpha_{1\mu} \tau_1 - \alpha_{2\mu} \tau_2 - \alpha_{3\mu} \tau_3 + \dots + \tau_\mu &= \alpha_{(\mu+1)\mu}
 \end{aligned} \tag{26}$$

Τὸ σύστημα τοῦτο ἀναδιατυπούμενον ὑπὸ μορφῆν μητρῶν γίνεται :

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{21} & -\alpha_{31} & \dots & -\alpha_{\mu 1} \\ -\alpha_{12} & 1 & -\alpha_{32} & \dots & -\alpha_{\mu 2} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 1 & \dots & -\alpha_{\mu 3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{1\mu} & -\alpha_{2\mu} & -\alpha_{3\mu} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \vdots \\ \tau_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{(\mu+1)1} \\ \alpha_{(\mu+1)2} \\ \alpha_{(\mu+1)3} \\ \vdots \\ \alpha_{(\mu+1)\mu} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω διατυπώσεως προκύπτει ὅτι ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος εἶναι ἡ ἐνηλλαγμένη (Transposed) τοῦ κυρίου σώματος τῆς ἐπισημασμένης τεχνολογικῆς μήτρας (23) (76). Ἐπίσης τὸ διάνυσμα (στήλη) τοῦ δεξιοῦ μέλους τοῦ συστήματος (A20) εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ διανύσματος (σειρᾶς) τῶν ἀκραίων στοιχείων τῆς ἐπισημασμένης μήτρας (23). Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ προσδιορίσωμεν εὐκόλως ἐν σύστημα πρὸς εὐρεσιν τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων μιᾶς οἰκονομίας, ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς ἐπισημασμένης τεχνολογικῆς μήτρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκραία σειρά παριστᾷ συντελεστὰς κεφαλαιουχικότητας τῶν οἰκείων δραστηριοτήτων (77).

Συνοπτικῶς, ἂν  $T$  παριστᾷ τὸ διάνυσμα (στήλη) τῶν ζητουμένων τιμῶν (συνολικὸν κόστους κεφαλαίου)  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_\mu$  καὶ  $K$  τὸ διάνυσμα (σειρὰ) τῶν ἀκραίων στοιχείων  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_\mu$ , τῆς ἐπισημασμένης τεχνολογικῆς μήτρας :

$\left\{ \begin{array}{l} I - A \\ \bar{0} - K \end{array} \right\}$ , διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ  $T$  θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα :

$$(I - A')T = K' \tag{28}$$

Ἐξ ὧν :

$$T = (I - A')^{-1} K' \tag{29}$$

76) Δηλαδή ἐκάστη στήλη τοῦ κυρίου σώματος τῆς ἐπισημασμένης μήτρας ἐμφανίζεται ὡς σειρά τῆς νέας μήτρας. Περὶ ἐνηλλαγμένων ἢ ἀντιστrophων μητρῶν βλ. Α. Λάζαρη, «Στοιχεῖα κλπ.», παραγρ. IV'.

77) Ὁμοίως δυνάμεθα βάσει μιᾶς ἐπισημασμένης μήτρας νὰ προσδιορίσωμεν ἄλλας παρομοίας τιμὰς ὡς εἶναι π.χ. τὸ συνολικὸν κόστος ἐργασίας, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὰ ἀκραία στοιχεῖα τῆς ἐν λόγῳ μήτρας παριστοῦν ἄμεσον κόστος ἐργασίας κατὰ μονάδα παραγομένου προϊόντος.

### Β'. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

1. Κ λ ε ι σ τ ό ν ύ π ό δ ε ι γ μ α . "Εν μέρος τῆς παραγωγῆς ἐκάστης περιόδου ἀποτελεῖται συνήθως ἀπὸ κεφαλαιουχικά ἀγαθὰ, τὰ ὁποῖα ἀπορροφῶνται ἀπὸ τοὺς διαφόρους οἰκονομικοὺς κλάδους πρὸς αὐξήσιν τῆς παραγωγικῆς τῶν δυναμικότητος. Ἄν θέσωμεν  $K_{ik}$  διὰ τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου  $i$  τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται ὡς ὕλικόν κεφάλαιον (πάγιον ἢ ἀποθέματα) ὑπὸ τοῦ κλάδου  $\kappa$  καὶ  $K_{i\kappa}$  ( $= dK_{i\kappa}/dt$ ) διὰ τὴν μεταβολὴν (θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν) τοῦ  $K_{i\kappa}$  κατὰ τὴν δοθεῖσαν περίοδον ( $t$ ) αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (1') μετατρέπονται εἰς:

$$\left. \begin{aligned} X_1 - \gamma_{12} - \gamma_{13} - \dots - \gamma_{1v} - K_{11} - K_{12} - \dots - K_{1v} &= 0 \\ -\gamma_{21} + X_2 - \gamma_{23} - \dots - \gamma_{2v} - K_{21} - K_{22} - \dots - K_{2v} &= 0 \\ -\gamma_{31} - \gamma_{32} + X_3 - \dots - \gamma_{3v} - K_{31} - K_{32} - \dots - K_{3v} &= 0 \\ \vdots & \\ -\gamma_{v1} - \gamma_{v2} - \gamma_{v3} - \dots + X_v - K_{v1} - K_{v2} - \dots - K_{vv} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\text{καὶ} \quad X_i - \sum_{\kappa=1}^v \gamma_{i\kappa} - \sum_{\kappa=1}^v K_{i\kappa} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, v \\ \gamma_{i\kappa} = 0 \quad \text{διὰ} \quad i = \kappa \end{array} \right. \quad (20')$$

Τὸ σύστημα ἐξισώσεων (20) δεικνύει ὅτι τὸ συνολικὸν ἐτήσιον προϊόν ἐκάστου κλάδου διανέμεται μεταξὺ τῶν λοιπῶν κλάδων, διὰ νὰ λάβῃ μέρος ὡς πρώτη ὕλη κ.λ.π. εἰς τὴν τρέχουσαν παραγωγὴν ἢ τὴν ἐπέκτασιν τοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ τῶν κλάδων αὐτῶν.

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἔχομεν  $\gamma_{i\kappa} = \alpha_{i\kappa} X_i$ . Ὁρίζομεν ἤδη:

$$K_{i\kappa} = \beta_{i\kappa} X_i \quad (21)$$

ὅπου  $\beta_{i\kappa}$  εἶναι ὁ τεχνολογικὸς συντελεστὴς κεφαλαίου» (capital coefficient), ὁ ὁποῖος καθορίζει τὴν ἀξίαν τῶν ἀγαθῶν τοῦ κλάδου  $i$  τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖ ὁ κλάδος  $\kappa$  ὡς ὕλικόν κεφάλαιον, διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος τοῦ τελευταίου κλάδου ἀξίας 1 νομισμ. μονάδος. Ἐάν π.χ. ὁ κλάδος  $\kappa$  παριστᾷ τὴν γεωργίαν καὶ ὁ κλάδος  $i$  τὴν βιομηχανίαν γεωργικῶν ἐργασιῶν ὠρισμένου τύπου, ὁ συντελεστὴς  $\beta_{i\kappa}$  παριστᾷ τὴν ἀξίαν τῶν ὡς ἄνω ἐργασιῶν, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ ἡ γεωργία καθ' ὠρισμένην περίοδον πρὸς παραγωγὴν γεωργικοῦ προϊόντος ἀξίας μιᾶς νομισμ. μονάδος κατὰ τὴν περίοδον ταύτην. Ὁ τεχνολογικὸς συντελεστὴς  $\beta_{i\kappa}$  δίνεται συνεπῶς νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁ «ἐπιταχυντὴς» (accelerator), ὁ ὁποῖος δεικνύει τὴν σχέσιν μεταξὺ ὕλικου κεφαλαίου τοῦ τύπου  $i$  καὶ παραγομένου προϊόντος τοῦ κλάδου  $\kappa$ .

Ἄν διαφορίσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (21) ὡς πρὸς τὸν χρόνον ( $t$ ), θὰ ἔχομεν:

$$\frac{dK_{i\kappa}}{d(t)} = \beta_{i\kappa} \frac{dX_i}{d(t)} \quad (22)$$

$$K_{i\kappa} = \beta_{i\kappa} X_i$$

$K_{ik}$  παριστά τὴν ἐπένδυσιν τοῦ κλάδου  $k$  εἰς προϊόντα τοῦ κλάδου  $i$  ἢ ὅποια καθίσταται ἀναγκαία πρὸς ὑποστήριξιν τῆς μεταβληθείσης κατὰ  $X'_k$  μονάδας παραγωγῆς τοῦ κλάδου  $k$ .

Ἀντικαθιστῶντες τώρα εἰς τὸ σύστημα (20) τὰ  $z_{ik}$  καὶ  $K_{ik}$  διὰ τῶν τιμῶν τῶν ἐκ τῶν σχέσεων (2) καὶ (22) λαμβάνομεν τὸ κάτωθι «λειτουργικὸν» σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} X_1 - a_{12}X_2 - \dots - a_{1v}X_v - \beta_{11}X_1 - \beta_{12}X_2 - \dots - \beta_{1v}X_v = 0 \\ -a_{21}X_1 + X_2 - \dots - a_{2v}X_v - \beta_{21}X_1 - \beta_{22}X_2 - \dots - \beta_{2v}X_v = 0 \\ \vdots \\ -a_{v1}X_1 - a_{v2}X_2 - \dots + X_v - \beta_{v1}X_1 - \beta_{v2}X_2 - \dots - \beta_{vv}X_v = 0 \end{array} \right\} (23)$$

καὶ συνοπτικῶς:

$$\left. \begin{array}{l} X_i - \sum_{k=1}^v a_{ik} X_k - \sum_{k=1}^v \beta_{ik} X_k = 0 \\ i = 1, 2, \dots, v \\ a_{ik} = 0 \text{ διὰ } i = k \end{array} \right\} (23')$$

Τὸ ὑπόδειγμα τὸν ὅποιον περιγράφεται διὰ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος ἐξισώσεων εἶναι  $\delta \nu \alpha \mu \iota \kappa \delta \nu$  διότι περιλαμβάνει τὴν διαχρονικὴν μεταβολὴν τῶν ἐπιπέδων δράσεως  $X_1, X_2 \dots X_v$ . Εἶναι ἐξ ἄλλου κλειστὸν διότι ἅπαντα τὰ ὠς ἄνω ἐπίπεδα δράσεως καθορίζονται ἐνδογενῶς, ἤτοι ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος. Τὰ οικονομοῦντα ἄτομα ἐν τῷ συνόλῳ θεωροῦνται ὡς ἰδιαίτερος παραγωγικὸς κλάδος, ὁ ὁποῖος προσφέρει τὰς ὑπηρεσίας του εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους καὶ ἀπορροφᾷ ἀγαθὰ τρεχούσης καταναλώσεως καὶ καταναλωτικὰ ἀγαθὰ διαρκείας (αὐτοκίνητα, οἰκίας κ.λ.π.). Τὰ τελευταῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς ἐπενδύσεις τῶν παραγωγικῶν κλάδων ἐν στενῇ ἐννοίᾳ.

Ἐκ τοῦ συστήματος (23) συνάγεται ὅτι ἡ διάρθρωσις τῆς οἰκονομίας δύναται νὰ περιγραφῆ διὰ δύο κατηγοριῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, τῶν «συντελεστῶν εἰσροῆς», οἱ ὁποῖοι ἀπαρτίζουν τὴν μήτραν τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς  $A$  (78) καὶ τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν κεφαλαίου, οἱ ὁποῖοι συγκροτοῦν τὴν «τεχνολογικὴν μήτραν κεφαλαίου»  $B$ :

$$B \equiv \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1v} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{v1} & \beta_{v2} & \dots & \beta_{vv} \end{bmatrix} \quad (24)$$

78) Ἐντὶ τῆς μήτρας  $A$  θὰ ἠδύνκτο νὰ ἀναφερθῆ ἡ «τεχνολογικὴ μήτρα»  $A^*$  (βλ. ἐξίς. 6).



Ἐκάστη στήλη τῆς μήτρας Β ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς τεχνολογικοὺς συντελεστὰς κεφαλαίου (εἰδικούς ἐπιταχυντάς), οἱ ὅποιοι δεικνύουν τὴν σχέσιν μεταξὺ τοῦ ὕλικου κεφαλαίου διαφόρων τύπων τοῦ ἀντιστοίχου κλάδου καὶ τοῦ παραγομένου προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου (79).

Τὸ σύστημα (23) ἀποτελεῖται ἀπὸ ν ὁμογενεῖς διαφορικές ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ καὶ γ ἀγνώστου<sup>3</sup> ( $X_1, X_2 \dots X_\nu$ ) μὲ σταθεροὺς συντελεστὰς. Δύναται συνεπῶς νὰ λυθῇ κατ' ἀρχὴν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς σχετικῆς τεχνικῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ<sup>(80)</sup>. Ἐπειδὴ εἰς τὸ σύστημα περιέχονται ἐπίσης καὶ αἱ χρονικαὶ παράγωγοι τῶν ἀγνώστων, εἶναι δυνατόν ἐκ τῆς λύσεως νὰ καθορισθῇ ἡ διαχρονικὴ συμπεριφορὰ (time path) τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, προϋποτιθεμένου βεβαίως ὅτι κατὰ τὴν λύσιν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ «ἀρχικαὶ συνθήκαι» (initial conditions) (81) τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος κατὰ δοθείσαν περίοδον. Εὐθὺς ὡς καθορισθῇ ὡς ἀνωτέρω ἡ διαχρονικὴ καμπύλη τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, εἶναι θεωρητικῶς δυνατόν νὰ προσδιορισθοῦν, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς τεχνολογικὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (22), αἱ καθ' ἑκάστην χρονικὴν στιγμήν (ἢ περίοδον εἰσοδαῖ ἐνὸς κλάδου<sup>(82)</sup>), αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν τρέχουσαν παραγωγὴν, ὡς ἐπίσης καὶ αἱ ἀναγκαῖαι ἐπενδύσεις τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου πρὸς ὑποστήριξιν ἐνδεχομένης αὐξήσεως τῆς τρεχούσης παραγωγῆς<sup>(83)</sup>.

Πρὸς εὐρεσιν τῶν φυσικῶν ποσοτήτων τῶν μεταβλητῶν, διαιροῦμεν ὡς καὶ προηγουμένως τὰ  $X_1$  διὰ τῶν σταθερῶν τιμῶν  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \nu$ ).

2. Ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα. Συμφωνῶς πρὸς τὰ ἐν τμήμ. Α παρ. 2 λεχθέντα, τὸ κλειστὸν σύστημα (23) δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ἀνοικτὸν διὰ τῆς εἰσαγωγῆς εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος τῶν σταθερῶν τῆς τελικῆς ζήτησεως ( $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_\mu$ ) καὶ τῆς ἀπαίλοιφης τῶν ἀντιστοίχων ( $\nu - \mu$ ) ἐξισώσεων:

$$\left. \begin{array}{l} X_1 - \alpha_{12}X_2 - \dots - \alpha_{1\mu}X_\mu - \beta_{11}X_1 - \beta_{12}X_2 - \dots - \beta_{1\mu}X_\mu = \Psi_1 \\ -\alpha_{21}X_1 + X_2 - \dots - \alpha_{2\mu}X_\mu - \beta_{21}X_1 - \beta_{22}X_2 - \dots - \beta_{2\mu}X_\mu = \Psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\alpha_{\mu 1}X_1 - \alpha_{\mu 2}X_2 - \dots + X_\mu - \beta_{\mu 1}X_1 - \beta_{\mu 2}X_2 - \dots - \beta_{\mu \mu}X_\mu = \Psi_\mu \end{array} \right\} (25)$$

79) Ἡ κυρία διαγώνιος ( $\beta_{11}, \beta_{22}, \dots, \beta_{\nu\nu}$ ) τῆς μήτρας Β ἀποτελεῖται ἀπὸ μὴ μηδενικά στοιχεῖα, τὰ ὅποια παριστοῦν τὰς σχέσεις μεταξὺ τοῦ παρακρατουμένου ὑπ' ἐκάστου κλάδου ἰδίου προϊόντος διὰ νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς ὕλικὸν κεφάλαιον καὶ τοῦ συνολικῶς παραγομένου προϊόντος τῶν τοῦ κλάδου τούτου κατὰ μίαν περίοδον.

80) Βλ. R. G. D. Allen *Mathematical Economics*, London 1956, shps 5 and 11.

81) Ὡς «ἀρχικαὶ συνθήκαι» θεωροῦνται αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν καθ' ὠρισμένην περίοδον, ἡ ὁποία λαμβάνεται ὡς ἀφετηρία τῆς δυναμικῆς ἀναλύσεως.

82) Αἱ καταβλλόμεναι ὑπ' αὐτοῦ ἀξίαι εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους.

83) Δυνατὸν βεβαίως νὰ προκληθῇ μείωσις τῆς τρεχούσης παραγωγῆς ὅποτε θὰ ἔχωμεν ἀρνητικὴν ἐπένδυσιν.

καὶ συνοπτικῶς:

$$\left. \begin{aligned} X_i - \sum_{\kappa=1}^{\mu} \alpha_{i\kappa} X_{\kappa} - \sum_{\kappa=1}^{\mu} \beta_{i\kappa} X_{\kappa} &= \Psi_{\kappa} \\ i &= 1, 2, \dots, \mu \\ \alpha_{i\kappa} &= 0 \quad \text{διὰ} \quad i = \kappa \end{aligned} \right\} \quad (25')$$

Ἐκ τῆς περιληπτικῆς παραστάσεως (25') καταφαίνεται ὅτι τὸ συνολικὸν προϊόν ἐνὸς κλάδου διανέμεται μεταξὺ τῶν λοιπῶν κλάδων (διὰ τὴν ἀναχρησιμοποίησιν εἰς τὴν τρέχουσαν παραγωγὴν καὶ τὴν δημιουργίαν ὑλικοῦ κεφαλαίου) καὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως. Τὸ σύστημα (25) εἶναι μὴ ὁμογενὲς καὶ περιέχει μ διαφορικὰς ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ καὶ μ ἀγνώστους ( $X_1, X_2 \dots X_{\mu}$ ). Δύναται συνεπῶς νὰ λυθῆ, ἂν ἡ ὀρίζουσα τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους αὐτοῦ εἶναι θετικὴ<sup>(84)</sup> καὶ ἂν ὀρισθῶν αἱ συνθήκαι τοῦ συστήματος κατὰ δοθεῖσαν (ἀρχικὴν) περίοδον, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ διαχρονικὴ καμπύλη τῶν κονδυλίων τελικῆς ζητήσεως  $\Psi_1, \Psi_2 \dots \Psi_{\mu}$ . Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος δύναται ἐν συνεχείᾳ νὰ προσδιορισθῶν αἱ εἰσροαὶ τρεχούσης παραγωγῆς καὶ αἱ ἀνάγκαι ὑλικοῦ κεφαλαίου διαφόρων τύπων ἐκάστου κλάδου. Ἐάν ὁ κλάδος «οἰκονομοῦντα ἄτομα» θεωρηθῆ ὡς ἑξωτερικὸς τομεὺς ὡς καὶ εἰς τὸ στατικὸν ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα, τότε ἡ ἐργατικὴ ἀπασχόλησις δι' ἑκάστον κλάδον παραγωγῆς ἢ διὰ τὴν οἰκονομίαν ἐν τῷ συνόλῳ δύναται νὰ προσδιορισθῆ (ἂν γνωρίζωμεν τοὺς συντελεστὰς εἰσροῆς ἐργασίας ἐκάστου κλάδου), κατὰ τὸν ἀνάλογον πρὸς τὸν ἐν τμήματι Α τοῦ παρόντος μέρους ὑποδεικνύμενον.

84) Βλ. ὑπόσημ. 57.



## Η ΥΠΟΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ (1)

Υπό ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Θ. ΚΟΥΛΟΥΡΙΑΝΟΥ

Ἡ θεμελιώδης ὑπόθεσις τοῦ συστήματος εἰσροῶν—ἐκροῶν καὶ γενικώτερον τῆς γραμμικῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως, εἶναι ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἡ ἔννοια τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς ἔχει ὡς ἀκολουθῶς. Ἐάν ἐπὶ παραδείγματι διὰ τὴν παραγωγὴν 1 μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ Α ἀπαιτοῦνται 2 μονάδες ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ καὶ 3 ἐξ ἑνὸς ἄλλου, τότε διὰ τὴν παραγωγὴν 2 ἔστω μονάδων τοῦ αὐτοῦ ἀγαθοῦ θὰ ἀπαιτηθοῦν 4 μονάδες ἐκ τοῦ πρώτου συντελεστοῦ καὶ 6 μονάδες ἐκ τοῦ δευτέρου, ἀνεξαρτήτως τοῦ χρόνου καθ' ὃν λαμβάνει χώραν ἡ παραγωγή.

Ἐν ἄλλοις λόγοις, αἱ ὑφ' ἐκάστου παραγωγικοῦ κλάδου χρησιμοποιούμεναι ποσότητες ἐκ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς εὐρίσκονται εἰς σταθερὰν ἀναλογίαν πρὸς τὴν ποσότητα τῶν παραγομένων ἀγαθῶν ὑπὸ τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου, ἀνεξαρτήτως χρόνου καὶ ἐπιπέδου παραγωγικῆς δραστηριότητος.

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν προεκάλεσεν μακρὰς συζητήσεις μεταξὺ τῶν οἰκονομολόγων ἀποτελέσασα τὸ κέντρον τῆς ἀσκηθείσης κριτικῆς κατὰ τοῦ συστήματος εἰσροῶν—ἐκροῶν ἢ ἄλλως καλουμένου συστήματος *Leontief*.

Κατωτέρω θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἐξετάσωμεν τὴν βασιμότητα τῆς κριτικῆς ταύτης καὶ κατὰ συνέπειαν τὴν ἀναλυτικὴν ἀξίαν τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Ἐπειδὴ ὡς ἐλέχθη ἡ ἀρχὴ τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν εἰς τὸ σύστημα εἰσροῶν—ἐκροῶν ὑποτίθεται ὅτι ἰσχύει τόσο ἀνεξαρτήτως κλίμακος παραγωγῆς, ὅσον καὶ διαχρονικῶς, θὰ ἐπιχειρήσωμεν κεχωρισμένην ἐξέτασιν τῶν δύο τούτων μορφῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας αὕτη ἐμφανίζεται.

1) Τὸ παρὸν θέμα ἀπετέλεσεν ἀντικείμενον διαλέξεως δοθείσης ἐν τῇ Ἐνωτάτῃ Βιομηχανικῇ Σχολῇ τὴν 28ην Φεβρουαρίου 1959.

### 1. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἐν σχέσει πρὸς τὴν κλίμακα παραγωγικῆς δραστηριότητος

Τὸ σύστημα εἰσροῶν—ἐκροῶν στηρίζεται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως ὅτι, οἰοδῆποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ ἐπίπεδον παραγωγικῆς δραστηριότητος μιᾶς ἐπιχειρήσεως, ἡ σχέσηις μεταξὺ τῆς ποσότητος ἐνὸς ἐκάστου συντελεστοῦ παραγωγῆς χρησιμοποιουμένου ὑπὸ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης καὶ τῆς ποσότητος τοῦ παραγομένου προϊόντος εἶναι σταθερὰ καὶ ἀμετάβλητος.

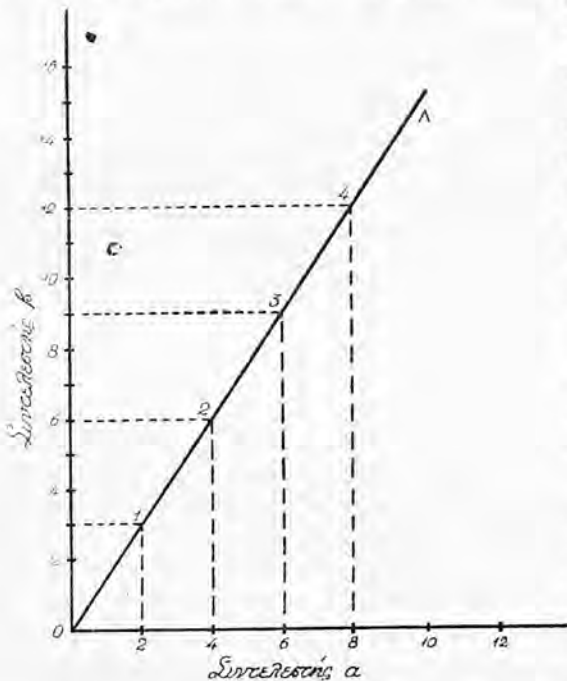
Ἄν ἐπὶ παραδείγματι διὰ τὴν παραγωγήν μιᾶς ἔστω μονάδος ἀγαθοῦ τύπου Μ ἀπαιτῆται ποσότης 2 μονάδων ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α, 3 μονάδων ἐκ τοῦ β, 4 μονάδων ἐκ τοῦ γ καὶ 5 ἐκ τοῦ δ, τότε σύμφωνα μὲ τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἡ παραγωγή ἔστω 4,6 καὶ γενικῶς  $v$  μονάδων ἐκ τοῦ ἐν λόγῳ ἀγαθοῦ θὰ ἀπορροφήσῃ τὰς κάτωθι ποσότητας ἐκ τῶν χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν :

ἐπίπεδον παραγωγῆς ἀγαθοῦ Μ Συν-τελεσταὶ παραγωγῆς	1	4	6	...	$v$
α	2	$2 \times 4 = 8$	$2 \times 6 = 12$	...	$2v$
β	3	$3 \times 4 = 12$	$3 \times 6 = 18$	...	$3v$
γ	4	$4 \times 4 = 16$	$4 \times 6 = 24$	...	$4v$
δ	5	$5 \times 4 = 20$	$5 \times 6 = 30$	...	$5v$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ὁ λόγος, ποσότης ἐτοίμου προϊόντος, πρὸς ποσότητα χρησιμοποιηθέντος συντελεστοῦ παραγωγῆς παραμένει σταθερὸς εἰς ὅλα τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς. Πράγματι, ἂν ἡ παραγομένη ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ διαιρηθῇ διὰ τῆς ἐκάστοτε χρησιμοποιουμένης ποσότητος ἕξ ἐνὸς ἐκάστου συντελεστοῦ λαμβάνομεν τὰς κατωτέρω σταθερὰς σχέσεις :

ἐπίπεδον παραγωγῆς ἀγαθοῦ Μ Συν-τελεσταὶ παραγωγῆς	1	4	6	...	$v$
α	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	...	$\frac{v}{2v} = \frac{1}{2}$
β	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	...	$\frac{v}{3v} = \frac{1}{3}$
γ	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	...	$\frac{v}{4v} = \frac{1}{4}$
δ	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$	$\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$	...	$\frac{v}{5v} = \frac{1}{5}$

Αί άνωτέρω σχέσεις παριστοῦν τοὺς λεγομένους τεχνολογικούς συντελεστές καί ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νά ὀμιλοῦμεν ἀδιαφόρως, εἴτε περὶ ὑποθέσεως



Σχ. 1

συναρτήσεως παραγωγῆς θά εἶναι ἡ εὐθεία ΟΛ. (Σχῆμα 1).

Κατὰ συνέπειαν εἰς τὸ σύστημα εἰσροῶν-έκροῶν δέν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ καμπυλοειδείς συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι παριστοῦν αύξανόμενην ἢ φθίνουσαν κατὰ κλίμακα ἀπόδοσιν. Ἐν ἄλλοις λόγοις εἰς τὸ σύστημα εἰσροῶν-έκροῶν δέν λαμβάνεται ἡ ὑπ' ὄψιν ἡ περίπτωσης τῆς μὴ ἀναλογικῆς αύξήσεως τῆς παραγωγῆς ἐν σχέσει μὲ τὴν αύξησιν τῶν ποσοτήτων τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν.

## 2. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν διαχρονικῶς

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἔχει ὡς εἵπομεν καί μίαν χρονικήν διάστασιν. Ὑποθέτομεν δηλαδή ὅτι οἱ τεχνολογικοί συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς ἐνὸς ἀγαθοῦ παραμένουν ὡς οὗτοι καθωρίσθησαν εἰς δεδομένην χρονικήν στιγμήν, μὴ μεταβαλλόμενοι διὰ τῆς παρόδου τοῦ χρόνου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, κατ' ἀρχὴν τουλάχιστον, δέν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ τεχνικαὶ ἐξελίξεις αἰτινες μεταβάλλουν διὰ μέσου τοῦ χρόνου τὴν διάρθρωσιν τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας τῶν ἐπιχειρήσεων εἰς τρόπον ὥστε ἡ μέθοδος παραγωγῆς ἐνὸς ἀγαθοῦ εἰς δύο διαφόρους χρονικάς περιόδους νά διαφέρῃ πολλακίς οὐσίω-

σταθερῶν ἀναλογιῶν, εἴτε περὶ σταθερότητος τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν.

Μαθηματικῶς, οἱ σταθεροὶ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ προσδιορίζουν γραμμικὰς συναρτήσεις παραγωγῆς, ἤτοι συναρτήσεις αἰτινες δύνανται νά παρασταθοῦν γραφικῶς δι' εὐθειῶν γραμμῶν ἐκ τῶν ὁποίων καὶ προέκυψαν οἱ ὄροι «γραμμικὴ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις», «γραμμικὸς προγραμματισμὸς» κ.λ.π.

Ἄν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ὑποθέσωμεν, χάριν ἀπλουστεύσεως ὅτι ἡ παραγωγή τοῦ ἀγαθοῦ Μ ἀπαιτεῖ τὴν χρησιμοποίησιν 2 μόνον συντελεστῶν ἔστω τῶν α καὶ β, τότε ἡ γραφικὴ εἰκὼν τῆς



δῶς. Ἀντιθέτως, ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἀκολουθουμένη σήμερον διαδικασία διὰ τὴν παραγωγὴν ἑνὸς ἀγαθοῦ θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ κατὰ τὰς ἐπομένους χρονικὰς περιόδους. Ἄν ἐπὶ παραδείγματι ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ παραγωγή μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ Α κατὰ τὸ 1959 ἀπαιτεῖ τὴν χρησιμοποίησιν 2 μονάδων ἐκ τοῦ συντελεστοῦ  $x$  καὶ 3 μονάδων ἐκ τοῦ συντελεστοῦ  $\psi$ , κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῆς διαχρονικῆς σταθερότητος τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, αἱ αὐταὶ ποσότητες ἐκ τῶν συντελεστῶν τούτων θὰ εἶναι ἀναγκαῖαι διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἐν λόγῳ ἀγαθοῦ καὶ κατὰ τὸ 1960, 1961, . . . ., 19. . . Ἐνταῦθα, ὡς καὶ προηγουμένως, ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς εἶναι γραμμικὴ παρασταμένη γραφικῶς δι' εὐθείας γραμμῆς ἀναφερομένης εἰς σύστημα ἀξόνων εἰς ἕνα ἐκ τῶν ὁποίων μετρεῖται ὁ χρόνος, εἰς δὲ τοὺς λοιποὺς αἱ ποσότητες τῶν χρησιμοποιουμένων παραγωγικῶν συντελεστῶν.

### 3. Ἀξιολόγησις τῆς ὑποθέσεως

α) Ἀναφορικῶς μὲ τὴν σταθερότητα κατὰ κλίμακα παραγωγῆς. Ἐπειδὴ ὡς εἶπομεν προηγουμένως ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἀποτελεῖ τὴν βᾶσιν τοῦ συστήματος εἰσροῶν—ἐκροῶν καὶ γενικώτερον τῆς γραμμικῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως, θὰ ἐπιχειρήσωμεν ἐνταῦθα μίαν κριτικὴν ἀξιολόγησιν τῆς ὑποθέσεως ταύτης.

Κατ' ἀρχὴν θὰ ἐξετάσωμεν τὴν ἰσχύν τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἐν σχέσει μὲ τὴν κλίμακα παραγωγῆς.

Πολλάκις συναντᾶται εἰς τὴν πράξιν τὸ φαινόμενον κατὰ τὸ ὅποιον ἡ μεταβολὴ τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς παρακολουθεῖται ἀπὸ μεταβολὴν τῆς ἀποδόσεως, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ὁμιλοῦμεν περὶ φθίνουσης ἢ αὐξούσης ἀποδόσεως. Ἐνταῦθα θὰ πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ ἐπικρατοῦσα δοξασία περὶ τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης, τόσον τοῦ συνολικοῦ ὅσον καὶ τοῦ ὀριακοῦ κόστους εἶναι μᾶλλον μία προκατάληψις τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης μὴ ἀνταποκρινόμενη πρὸς τὴν πραγματικότητα. Ἐρευνα ἐπὶ τοῦ κόστους διεξαχθεῖσα ὑπὸ τῆς Committee on Price Determination τοῦ National Bureau of Economic Research τῶν Ἠνωμένων Πολιτειῶν διευθυνομένη ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ Edward S. Mason <sup>(1)</sup> ἀπέδειξεν ὅτι ἐκτὸς ὀλίγων ἐξαιρέσεων, ἡ σχέσις κόστος—προϊόν εἶναι γραμμικὴ <sup>(2)</sup>.

Ἐπειδὴ ὡς ἐλέχθη, εἰς τὸ σύστημα εἰσροῶν—ἐκροῶν δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ μορφαὶ μεταβαλλομένης ἀποδόσεως, θὰ προσπαθῶμεν νὰ διερευνήσωμεν κατὰ πόσον ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἀνεξαρτήτως κλίμακος παραγωγῆς, συμβιβάζεται μὲ τὴν ἐμφάνισιν τῆς φθίνουσης ἢ αὐξούσης ἀποδόσεως.

1) Ἴδε «Cost Behavior and Price Policy» N.B.E.R. 1943.

2) Τὴν σπουδαιότητα τῆς σχέσεως αὐτῆς διὰ τὴν θεωρίαν τῆς ἀπασχολήσεως, ὡς καὶ τὴν προβαλλομένην ὑπὸ τῆς ἐπιτροπῆς ἐπιχειρηματολογίαν πρὸς ὑποστήριξιν τῶν συμπερασμάτων τῆς, ἴδε A. H. Hansen «Monetary Theory and Fiscal Policy» N. York 1949, σελίς 107—110.

Καί πρῶτον ἄς εἰδωμεν πῶς ἡ ἐξεταζομένη ὑπόθεσις ἀντιμετωπίζει τὴν ἐμφάνισιν τῆς φθινοῦσης ἀποδόσεως.

Τὸ φαινόμενον τῆς φθινοῦσης ἀποδόσεως γνωστὸν ἀπὸ τὰ πρῶτα βήματα τῆς οικονομικῆς ἐπιστήμης προεκάλεσε πολλὰς συζητήσεις μεταξύ τῶν οἰκονομολόγων, ἀρχικῶς μὲν ἀναφορικῶς μὲ τὴν φθινοῦσαν ἀπόδοσιν τοῦ ἐδάφους, εἰς τὸ ὅποιον καὶ παρετηρήθη τὸ πρῶτον, ἀργότερον δέ, ἐν σχέσει καὶ μὲ τοὺς λοιποὺς συντελεστὰς τῆς παραγωγῆς.

Ὡς γνωστόν, κατὰ τὸν νόμον τῆς φθινοῦσης ἀποδόσεως μία αὐξησις ἐνὸς ἐκ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, πέραν ἐνὸς σημείου καὶ ἄνευ ἀναλόγου αὐξήσεως τῶν λοιπῶν, παρακολουθεῖται οὐχὶ ἀπὸ ἀνάλογον αὐξησιν τῆς παραγωγῆς ἀλλὰ ἀπὸ φθινοῦσαν. Ἄν, ἐπὶ παραδείγματι, ἐπὶ δεδομένης ἐκτάσεως ἐδάφους αὐξάνωμεν διαδοχικῶς τοὺς ἐπ' αὐτοῦ ἐπιτελεσθέντας λοιποὺς παραγωγικοὺς συντελεστὰς, τουτέστιν ἐργασίαν καὶ κεφάλαιον, θὰ παρατηρηθῇ ὅτι, ἀπὸ ἐνὸς σημείου καὶ πέραν ἡ ἐπιτυγχανομένη ἀπόδοσις δὲν θὰ εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ποσοτήτων τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, ἀλλὰ μικροτέρα αὐτῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁμιλοῦμεν περὶ φθινοῦσης ἀποδόσεως τοῦ ἐδάφους. Τὸ αὐτὸ θὰ συμβῇ, ὡς γνωστόν, προκειμένου καὶ περὶ τῶν λοιπῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ποσότης τοῦ ἐνὸς ἐξ αὐτῶν παραμένει σταθερὰ αὐξανομένης τῆς χρησιμοποιομένης ποσότητος τῶν λοιπῶν. Τοῦτο συμβαίνει, ἐπὶ παραδείγματι, ὡσάκις ἐπὶ δεδομένου μηχανικοῦ ἐξοπλισμοῦ μιᾶς ἐπιχειρήσεως ἀπασχολοῦμεν ὅλον ἐν καὶ περισσοτέρους ἐργάτας μὲ συνέπειαν ἢ κατὰ ἐργάτην ἀπόδοσις νὰ βραϊνὴ μειουμένη πέραν ἐνὸς σημείου.

Εἶναι ὡς ἐκ τούτου προφανές ὅτι ἡ ἐμφάνισις τῆς φθινοῦσης ἀποδόσεως ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον εἰς τὴν μὴ ἀνάλογον αὐξησιν τῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, δηλαδὴ εἰς τὴν διατάραξιν τοῦ ἁρμονικοῦ συνδυασμοῦ τούτων. Συνεπῶς, ἡ περίπτωσις τῆς φθινοῦσης ἀποδόσεως ἀποκλείεται ὡσάκις ἡ αὐξησις τῆς παραγωγῆς ἐπιτυγχάνεται μὲ παράλληλον διατήρησιν τοῦ ἁρμονικοῦ συνδυασμοῦ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, ὡς ἡ ἀρχὴ τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν διατείνεται. Ἐξ ἄλλου, προκειμένου περὶ προγραμματισμοῦ τὰ διάφορα μεγέθη παραγωγῆς τὰ ὅποια ἐπιδιώκομεν νὰ ἐπιτύχωμεν εἶναι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὅποια πραγματοποιεῖται ὁ ἁρμονικὸς συνδυασμὸς τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, διότι ὡσάκις κινουμένη εἰς ἐπίπεδα ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω, ἡ ἀπόδοσις εἶναι μικροτέρα τῆς δυνατῆς καὶ ὡς ἐκ τούτου ἐνεργοῦμεν κατὰ παράβασιν τοῦ οικονομικοῦ ἀξιώματος, τουτέστιν τῆς ἐπιτεύξεως τοῦ μεγαλυτέρου δυνατοῦ ἀποτελέσματος διὰ δεδομένων παραγωγικῶν μέσων.

Ἄρα, τὸ φαινόμενον τῆς φθινοῦσης ἀποδόσεως δὲν δύναται νὰ προβληθῇ ὡς ἐπιχείρημα κατὰ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν καθ' ὅτι, ὡς διεπιστώθη ἡ ἐμφάνισις του ὀφείλεται εἰς τὸν μὴ ἁρμονικὸν συνδυασμὸν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, πρᾶγμα τὸ ὅποιον ἀποκλείει ἢ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Πλὴν τῆς ἀναφερθείσης περιπτώσεως καθ' ἣν μία μεταβολὴ τοῦ ὄγκου παραγωγῆς συνοδεύεται ἀπὸ φθινοῦσαν ἀπόδοσιν, εἶναι ἐπίσης δυνατὴ, καὶ

πολλάκις συναντᾶται εἰς τὴν πράξιν, ἢ περίπτωσις τῆς αὐξούσης ἀποδόσεως.

Κατ' αὐτὴν μία αὐξήσις τῆς παραγωγῆς παρακολουθεῖται ἀπὸ αὐξησιν τῆς ἀποδόσεως, τουτέστιν μείωσιν τοῦ κατὰ μονάδα κόστους. Τοῦτο συμβαίνει ὡσάκις ἕνας συντελεστὴς δὲν ἀπασχολεῖται πλήρως, ὁπότε ἡ αὐξήσις τῆς παραγωγῆς καθίσταται δυνατὴ διὰ μόνης τῆς αὐξήσεως τῶν λοιπῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς τὸ κόστος τοῦ συντελεστοῦ ὅστις παρέμεινεν ἀμετάβλητος διαμοιράζεται ἐπὶ μεγαλύτερου ὄγκου παραγωγῆς μὲ συνέπειαν τὴν μείωσιν τοῦ κόστους κατὰ παραγομένην μονάδα. Ἄν, ἐπὶ παραδείγματι, δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν τὴν παραγωγὴν μιᾶς ἐπιχειρήσεως δι' ἀπασχολήσεως περισσοτέρων ἐργατῶν ἄνευ οὐδεμιᾶς ἢ ἄνευ μὴ ἀναλόγου αὐξήσεως τοῦ μηχανικοῦ ἐξοπλισμοῦ τῆς, τοῦ ἀνωτέρου διοικητικοῦ προσωπικοῦ κ.λ.π. τότε, τὸ κατὰ μονάδα κόστος θὰ μειωθῇ, ἦτοι, ἢ ἀπόδοσις θὰ καταστῇ αὐξουσα. Ἡ αὐξήσις τῆς ἀποδόσεως δὲν δύναται φυσικὰ νὰ συνεχισθῇ εἰς ὅλα τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς, ἀλλὰ ὅταν αὕτη φθάσει εἰς ἓν ἐπίπεδον, προσδιοριζόμενον ἐκ τῶν τεχνολογικῶν συνθηκῶν ἐκάστης ἐπιχειρήσεως, ἡ ἀπόδοσις θὰ παύσῃ νὰ εἶναι αὐξουσα μεταβαλλομένη εἰς σταθεράν. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι τὸ γνωστὸν optimum ἐπίπεδον παραγωγῆς. Ἄλλ' ὡς εἶναι προφανές ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς φθίνουσης ἀποδόσεως, οὕτω καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς αὐξούσης, ἢ μὴ ἀνάλογος μεταβολὴ τῆς ἀποδόσεως κατ' ἀκολουθίαν μιᾶς μεταβολῆς τῆς παραγωγῆς, ὀφείλεται εἰς τὴν ἔλλειψιν ἁρμονικοῦ συνδυασμοῦ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι, ὡσάκις δι' αὐξήσεως ἑνὸς μόνου συντελεστοῦ ἐπιτυγχάνεται αὐξήσις τῆς παραγωγῆς τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ συντελεστὴς ὅστις παρέμεινεν ἀμετάβλητος εὐρίσκετο ἐν ὑποαπασχολήσει πρὶν ἐπέλθῃ ἡ αὐξήσις τῶν λοιπῶν. Ἄλλωστε, ὡς εἶπομεν καὶ προηγουμένως, ὅταν ἡ παραγωγή φθάσει τὸ optimum ἐκεῖνο ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον ὁ συνδυασμὸς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν εἶναι ἁρμονικός, τὸ φαινόμενον τῆς αὐξούσης ἀποδόσεως παύει νὰ ὑφίσταται.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι καὶ τὸ φαινόμενον τῆς αὐξούσης ἀποδόσεως δὲν ἀντιστρατεύεται τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν διότι, ὡς ἐλέχθη, τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ μὴ ἁρμονικοῦ συνδυασμοῦ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, συνδυασμοῦ ὅστις δὲν πληροῖ τὸ βασικὸν οικονομικὸν ἀξίωμα.

Ἐκ τῶν ἤδη λεχθέντων προκύπτει ὅτι εἶναι δυνατὴ ἡ αὐξήσις τῆς παραγωγῆς ἄνευ ἐμφανίσεως φθίνουσης ἢ αὐξούσης ἀποδόσεως. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ, ἐκκινούμεντες ἀπὸ ἓνα optimum συνδυασμὸν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, ὅστις προσδιορίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τεχνολογικῶν συνθηκῶν ἐκάστης ἐπιχειρήσεως, νὰ ὠθήσωμεν τὴν παραγωγὴν εἰς ὑψηλότερα ἐπίπεδα χωρὶς νὰ διαταραχθῇ ὁ ἁρμονικὸς τοῦτος συνδυασμὸς. Ἡ διατήρησις τοῦ συνδυασμοῦ τούτου ἐπιτυγχάνεται, ὡς πολλάκις ἐλέχθη, διὰ τῆς ἀναλόγου αὐξήσεως ὅλων τῶν συντελεστῶν οἵτινες χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν παραγωγὴν ἑνὸς ἀγαθοῦ. Ἐπ' εὐκαιρίᾳ ἐπαναλαμβάνομεν διὰ μίαν ἀκόμη φοράν ὅτι, ἡ αὐξήσις τῆς παραγωγῆς θὰ εἶναι ἀνάλογος τῆς σημειωθείσης αὐξήσεως εἰς τὰς ποσότητας τῶν ἐπὶ μέρους παραγωγικῶν συντελεστῶν. Δηλαδή, ἂν αἱ ἀπορροφούμεναι διὰ τὴν παραγωγὴν ἑνὸς ἀγαθοῦ ποσότητες ἐκ τῶν διαφόρων συντελεστῶν

αύξηθουν έστω κατά 10 % , τότε και ή παραγωγή του έν λόγω άγαθού θα άνέλθη κατά τό αυτό ποσοστόν.

Δύναται βεβαίως νά παρατηρηθί ότι ή διατήρησης του άρμονικού συνδυασμού τών παραγωγικών συντελεστών εις τά διάφορα έπίπεδα παραγωγής, πιθανόν λόγω τών τεχνικών συνθηκών υπό τās όποιās διεξάγεται αύτη και τής καταστάσεως τής άγοράς, νά μήν πληροί συγχρόνως και τήν άρχήν τής πλήρους διαιρετότητας. Έν άλλοις λόγοις είναι δυνατή ή περίπτωσης καθ' ήν, ή μικρότερα δυνατή αύξησης ένός συντελεστού εύρίσκεται άνω τής έπιθυμητής αύξήσεως του συνόλου τής παραγωγής ήτις προσδιορίζεται έκ τής καταστάσεως τής άγοράς. Η περίπτωσης αύτη δύναται νά εμφανισθί, έπί παραδείγματι, εις τās σιδηροδρομικές έπιχειρήσεις, όπου ή προσθήκη και ένός μόνου βαγονίου εις ένα συρμόν 20 έστω βαγονίων και μιās άτμομηχανής, άπαιτεί τήν προσθήκη νέας άτμομηχανής ένώ συγχρόνως δέν ύφίσταται ζήτησις διά τήν άπασχόλησιν τών υπολοίπων 19 βαγονίων, τά όποια θα ήδύνατο ή τελευταία αύτη νά έλξη. Τουτο βεβαίως είναι όρθόν, αλλά προκειμένου περι τής οικονομίας ώς σύνολον, άφ' ένός μόν περιπτώσεις ώς ή άνωτέρω είναι άπίθανοι άφ' έτέρου δέ και όσάκις εμφανίζονται, ώς είναι δυνατόν νά συμβή εις τās έπί μέρους έπιχειρήσεις, αύται είναι άσήμαντοι διότι άφορούν μόνον τό τελευταίον κλιμάκιον παραγωγής. Άν έπί παραδείγματι ή αύξησης τής παραγωγής, βάσει τής ύποθέσεως τών σταθερών αναλογιών, είναι δυνατή μόνον κατά κλιμάκια 10 έστω μονάδων, δηλαδή από 110 έστω μονάδας εις 120, 130, 140 κ.λ.π. τότε μόνον όσάκις έπιθυμείται αύξησης τής παραγωγής κατά ποσότητα μικρότεραν του ένός κλιμακίου, έστω από 130 εις 138 μονάδας, δύναται νά λεχθί ότι δέν ικανοποιείται ή άρχή τής πλήρους διαιρετότητας. Έπανερχόμενοι εις τό προηγούμενον παράδειγμα τών σιδηροδρόμων θα ήτο λίαν έξεζητημένον νά ύποθέσωμεν ότι μία οικονομία άπασχολούσα 500 έστω άτμομηχανάς και 10.000 βαγόνια, θα έπεθύμει νά αύξηση τήν εις βαγόνια δυναμικότητά της κατά 1, 2, ή 3 μόνον βαγόνια με συνέπειαν τήν ύποαπασχόλησιν τής άπαιτουμένης προς τουτο άτμομηχανής, άντι μιās αύξήσεως κατά 20 βαγόνια ήτις θα διατηρήση τόν άρμονικόν συνδυασμόν άτμομηχανών και βαγονίων. Άλλά και όταν άκόμη περιπτώσεις ώς ή του προηγούμενου παραδείγματος λαμβάνουν χώραν, ίδίως εις τās μεμονωμένες έπιχειρήσεις, αί άποκλίσεις από τόν όρθίνιον συνδυασμόν, έν σχέσει με τό σύνολον τής παραγωγής, είναι μικράι και ώς έκ τούτου ή έπίδρασις των έπί τής άποδόσεως είναι άμελητέα. Εις τās περιπτώσεις όμως κατά τās όποιās ή γραμμική οικονομική άνάλυσις χρησιμοποιείται διά προγραμματισμόν, τόσον τών έπί μέρους έπιχειρήσεων όσον και τής οικονομίας έν τώ συνόλω, ή διατήρησης τής άρμονίας εις τόν συνδυασμόν τών παραγωγικών συντελεστών είναι έξησφαλισμένη καθ' όσον ή αύξησης τής παραγωγής λαμβάνει χώραν διά συνεχών κινήσεων από  $optimum$  εις  $optimum$ . Η μεταξύ δύο  $optimum$  άπόστασις καθορίζεται, ώς είναι προφανές, από τās κρατούσας τεχνικές συνθήκας και ποικίλλει από έπιχειρήσεως εις έπιχείρησιν, διά τό σύνολον όμως τής οικονομίας αί διαφοραί είναι τόσον άσήμαντοι ώστε δύναται νά θεωρηθουν ώς μη ύπάρχουσαι.



Ἐκ τῆς ἐπιχειρηθείσης ἐπισκοπῆσεως περὶ τῆς ὀρθότητος τῆς γενομένης εἰς τὸ σύστημα εἰσοδῶν - ἐκροδῶν καὶ γενικώτερον εἰς τὴν γραμμικὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν, ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἀνεξαρτήτως κλίμακος παραγωγῆς, ὡς τελικὸν συμπέρασμα προκύπτει ὅτι αὕτη δὲν ἔρχεται εἰς ἀντίθεσιν μὲ τὴν πραγματικότητά διότι τὸ πολλακὶς παρατηρούμενον φαινόμενον τῆς φθινοῦσης ἢ αὐξοῦσης ἀποδόσεως ὀφείλεται, ὡς ἐλέχθη, εἰς τὴν ἔλλειψιν ἁρμονικοῦ συνδυασμοῦ μεταξύ τῶν διαφόρων συντελεστῶν παραγωγῆς πράγμα τὸ ὁποῖον ἀποκλείεται εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μεταβολῆς τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀρχῆς τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Τὸ μόνον τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀντιταχθῇ ἐν προκειμένῳ εἶναι ὅτι ἡ ἐξεταζομένη ὑπόθεσις δὲν ἱκανοποιεῖ τὴν ἀρχὴν τῆς πλήρους διαιρετότητος. Τοῦτο φυσικὰ εἶναι ὀρθὸν ἀλλὰ ὡς ἐλέχθη μόνον προκειμένου περὶ τοῦ τελευταίου κλιμακίου παραγωγῆς καὶ ἐπομένως ἀνευ οὐσιώδους σπουδαιότητος.

Ἡ σημασία τῆς κατὰ κλίμακα σταθερότητος τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν διὰ τὸ σύστημα εἰσοδῶν-ἐκροδῶν καὶ γενικώτερον διὰ τὴν γραμμικὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν εἶναι προφανής. Διὰ τῆς ὑποθέσεως ταύτης καθίσταται δυνατὴ ἡ ἔκφρασις τῶν παραγωγικῶν σχέσεων δι' ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ αἵτινες διευκολύνουν τὰ μέγιστα τὴν ὑπολογιστικὴν ἐργασίαν πρὸς ἀντιμετώπισιν τῶν σχετικῶν προβλημάτων.

β) Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογικῶν διαχρονικῶς. Ἐλέχθη προηγουμένως ὅτι εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν περιλαμβάνεται καὶ ἡ ἔννοια τῆς διαχρονικῆς σταθερότητος τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν. Ὑποτίθεται δηλαδή ὅτι οἱ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς δὲν μεταβάλλονται διὰ τῆς παρόδου τοῦ χρόνου. Τοῦτο ὅμως σημαίνει ὅτι ὑποτίθεται πῶς αἱ τεχνικαὶ μέθοδοι τῆς παραγωγῆς μένουσιν ἀμετάβλητοι. Εἶναι νομιζόμεν περὶ τὸν νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ ὑπόθεσις αὕτη δὲν ἀνταποκρίνεται πρὸς τὴν πραγματικότητα. Αἱ τελευταῖαι τεχνικαὶ ἐξελίξεις, ἐπέφεραν πραγματικὴν ἐπανάστασιν εἰς τὴν τεχνολογικὴν διάρθρωσιν τῶν ἐπιχειρήσεων, εἰς τρόπον ὥστε ὡς παρατηρεῖ ὁ καθηγητὴς Leontief «συγκρίνοντες τὴν διάρθρωσιν ἑνὸς οἰκονομικοῦ συστήματος εἰς δύο στάδια τῆς ἐξελίξεώς του, ἀρκούντως ἀπομακρυσμένα τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἄλλου, δύναται κανεὶς νὰ εὕρῃ ὅτι διαφέρουν μεταξύ των ὅσον ἢ πεταλούδα ἀπὸ τὴν κάμπη της. Ὅχι μόνον αἱ σχέσεις μεταξύ τῶν ἐπὶ μέρους τομέων τῆς οἰκονομίας καὶ αἱ μεταξύ τῶν διαφόρων ἀγχιῶν καὶ ὑπηρεσιῶν τοιαῦται ἔχουν μεταβληθῇ, ἀλλὰ πολὺ περισσότερο αὐτοῦ, τὰ ἀγαθὰ καὶ αἱ ὑπηρεσίαι εἰς τὰ δύο αὐτὰ στάδια θὰ ἔχουν ἔντελῶς διάφορον μορφήν. . . . » (1).

Ἐπομένως, ἡ διαχρονικὴ σταθερότης τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν ἐλέγχεται ἐκ τῶν πραγμάτων ὡς μὴ ρεαλιστικὴ. Πρὶν ὅμως καταδικάσωμεν ταύτην θὰ ἦτο σκόπιμον νὰ ἐπιχειρήσωμεν μίαν κατὰ τὸ δυνατόν λεπτομερῆ ἐξέτασιν τῶν λόγων οἵτινες προκαλοῦν τὴν μεταβολὴν τῶν τεχνολογικῶν συν-

1) V. Leontief and others. «Studies in the Structure of the American Economy», 1953, σελ. 20.

τελεστών και την σημασίαν μιᾶς τοιαύτης μεταβολῆς ἐπὶ τοῦ συστήματος εἰσροῶν - ἐκροῶν.

Διαχρονικὴ μεταβολὴ τῶν σχέσεων, ποσότης παραγομένου ἀγαθοῦ πρὸς ποσότητος χρησιμοποιουμένων συντελεστών, τουτέστιν τῶν τεχνολογικῶν συντελεστών ὑποστηρίχθη ὅτι δύναται νὰ ἐπέλθῃ εἴτε λόγῳ μεταβολῆς τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστών, εἴτε λόγῳ ἐξελίξεως τῆς τεχνικῆς.

Κατ' ἄρχὴν θὰ ἐξετάσωμεν τὴν δυνατότητα μεταβολῆς τῆς τεχνικῆς διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας κατ' ἀκολουθίαν μιᾶς μεταβολῆς εἰς τὰς σχετικὰς τιμὰς τῶν συντελεστών παραγωγῆς.

Κατὰ τοὺς ὑποστηρικτὰς τῆς ἀπόψεως αὐτῆς ἢ μείωσις τῆς τιμῆς ἑνὸς παραγωγικοῦ συντελεστοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὰς τιμὰς τῶν ἄλλων, θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν ὑποκατάστασιν ἑνὸς πρότερον χρησιμοποιουμένου συντελεστοῦ διὰ τοῦ ἤδη καταστάντος εὐθυνότερου, εἰς τρόπον ὥστε, αἱ ἀπορροφούμεναι ποσότητες ἐξ ἑνὸς ἐκάστου συντελεστοῦ νὰ εἶναι διάφοροι ἐκείνων αἰτίνας ἐχρησιμοποιοῦντο πρὶν ἢ ἐπέλθῃ ἡ μεταβολὴ τῶν σχετικῶν τιμῶν. Ὡς εἶναι προφανές, πρόκειται περὶ τῆς γνωστῆς θεωρίας τῆς ὀριακῆς παραγωγικότητος.

Οἱ κλασσικοὶ καὶ ἰδίως οἱ νεοκλασσικοὶ ἀπέδωσαν ἰδιαιτέραν σημασίαν εἰς τὴν δυνατότητα ὑποκαταστάσεως ἑνὸς συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς δι' ἑνὸς ἄλλου. Ὑποστηρίχθη δηλαδὴ ὅτι εἰς περιπτώσεις καθ' ἃς ἡ τιμὴ ἑνὸς συντελεστοῦ αὐξηθεῖ ἐν σχέσει πρὸς τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν, ὁ συντελεστής οὗτος θὰ ἀντικατασταθῇ εἰς τὴν παραγωγὴν δι' ἑνὸς ἄλλου εὐθυνότερου. Ἄν, ἐπὶ παραδείγματι, αὐξηθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κεφαλαίου, δηλαδὴ ὁ τόκος, οἱ ὀπαδοὶ τῆς θεωρίας τῆς ὀριακῆς παραγωγικότητος ὑποστηρίζουν ὅτι θὰ λάβῃ χώραν πλήρης ὑποκατάστασις τοῦ συντελεστοῦ τούτου ὑπὸ τῆς ἐργασίας ἢ τοῦ ἐδάφους τῶν ὀπίστων αἱ τιμαὶ παρέμειναν ἀμετάβλητοι ἢ ἠυξήθησαν ἀναλογικῶς ὀλιγώτερον τῆς τιμῆς τοῦ κεφαλαίου. Ἄλλὰ, καὶ ὑπὸ ἄλλην μορφήν, κατὰ τοὺς ὑποστηρικτὰς πάντα τῆς θεωρίας τῆς ὀριακῆς παραγωγικότητος, δύναται νὰ πραγματοποιηθῇ πλήρης ὑποκατάστασις ἑνὸς συντελεστοῦ δι' ἄλλου. Κατὰ τὴν ἀποψιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν τὴν παραγωγὴν ἑνὸς ἀγαθοῦ διὰ μόνης αὐξήσεως ἑνὸς ἢ περισσοτέρων συντελεστών, ἀνευ οὐδεμίας αὐξήσεως τῶν λοιπῶν, συντελουμένης οὕτω πλήρους ὑποκαταστάσεως τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ὁποίου ἢ ποσότης δὲν ἠυξήθη ὑπὸ τῶν λοιπῶν. Ὑποστηρίζεται δηλαδὴ ὅτι, ἡ ὀριακὴ παραγωγικότης ἐκάστου συντελεστοῦ — ὀριζομένη ὡς ἡ σχέσις μιᾶς ἀπειροστῆς αὐξήσεως ἑνὸς παραγωγικοῦ συντελεστοῦ πρὸς τὴν αὐξήσιν τοῦ προϊόντος — εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς. Ἀντιθέτως, εἰς τὸ σύστημα εἰσροῶν - ἐκροῶν, καὶ γενικώτερον εἰς τὴν γραμμικὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν, ἡ ὀριακὴ παραγωγικότης ἑνὸς ἐκάστου συντελεστοῦ ὑποτίθεται ὅτι εἶναι μηδέν. Τουτέστιν, δὲν δύναται νὰ λάβῃ χώραν οὐδεμία αὐξήσις τῆς παραγωγῆς ὅσον-δήποτε μεγάλη καὶ ἂν εἶναι ἡ αὐξήσις τῆς χρησιμοποιουμένης ποσότητος ἑνὸς συντελεστοῦ, ἂν δὲν αὐξηθῶν ἀναλόγως καὶ αἱ ποσότητες τῶν λοιπῶν συντελεστών.

Φυσικά, τοῦτο δὲν ἀνταποκρίνεται πλήρως πρὸς τὴν πραγματικότητα.



πλησιάζει όμως προς αυτήν πολύ περισσότερο απ' ότι ή θεωρία τής πλήρους ύποκαταστάσεως.

Δέν θά άσχοληθώμεν μέ τήν όρθότητα ή μή τής θεωρίας τής όριακής παραγωγικότητας καί τās έπί τούτου γενομένης συζητήσεις τών οικονομολόγων διότι, άφ' ένός μέν είναι γνωστά τά προς ύποστήριξιν ή κατηγοριαν αυτής προταθέντα έπιχειρήματα, άφ' έτέρου δέ μία τοιαύτη εξέταση είναι έκτός τών όρων του παρόντος.

Πλήν όμως, κρίνομεν σκόπιμον νά παραθέσωμεν τās έπί τούτου άπόψεις του καθηγητού W. Leontief εις τό κλασσικόν έργον του «The structure of American Economy 1919—1939» έκδοσις 1953, σελ. 39—41. Μεταξύ άλλων γράφει τά εξής: «Τά άναφερόμενα εις τās οικονομικές συζητήσεις παραδείγματα ύποκαταστάσεως κατόπιν έπισταμένης εξέτασεως άποδεικνύονται ότι είναι έντελώς διαφόρου φύσεως. Η έρμηνεία τής θεωρίας τής όριακής παραγωγικότητας είναι στενά συνδεδεμένη μέ τήν άνευ διακρίσεων χρήςιν τής έννοίας τών «συντελεστών τής παραγωγής». Η γνωστή τριάς «έργασία, έδαφος, κεφάλαιον» φαίνεται ότι κυριαρχεί άκόμη εις τās θεωρητικές συζητήσεις περί τήν έν λόγω θεωριαν. Η θεωρία αυτή ήτο συνδεδεμένη μέ τό γεγονός ότι ή οικονομία έλαμβάνετο ως σύνολον, ως μία τεραστία βιομηχανία ήτις άπορροφούσε άπό τήν μίαν πλευράν παραγωγικούς συντελεστας καί άπέδιδε έτοιμα προϊόντα άπό τήν άλλην. Άλλά καί αί άργότερον γενομένη διακρίσεις σπανίως έφθαναν πέραν τής διαιρέσεως τών καταναλωτικά καί κεφαλαιουχικά άγαγά παραγουσών έπιχειρήσεων. Αντιθέτως, εις τήν πραγματικότητα ύπάρχουν δεκάδες άνεξαρτήτων παραγωγικών κλάδων. Αν έπί παραδείγματι εις δύο έτερογενείς έπιχειρήσεις του κλάδου παραγωγής καταναλωτικών άγαθών, έστω τροφίμων καί αυτοκινήτων, αίτινες χρησιμοποιούν έδαφος, έργασίαν, καί κεφάλαιον εις σταθεράς αλλά έντελώς διαφόρους αναλογίας, έπέλθη μία μεταβολή εις τό μέγεθος των, τούτο θά ακολουθηθή άπό μίαν μεταβολήν εις τήν ποσότητα γής, έργασίας καί έδάφους τήν άπορροφουμένην άπό τόν κλάδον τής παραγωγής καταναλωτικών άγαθών έν τώ συνόλω. Ένας οικονομολόγος θά έρμηνεύση τούτο ως μεταβολήν εις τόν συνδυασμόν τών συντελεστών παραγωγής έντός του κλάδου.

Τό παράδειγμα τούτο δεικνύει πώς πολλές περιπτώσεις άναφερόμεναι ως ύποκατάστασις τών συντελεστών, δύναται νά θεωρηθούν ως άπλάι ένδοκλαδικαί μεταβολαί χωρίς καμμίαν μεταβολήν εις τόν συνδυασμόν τών συντελεστών έντός του ύπό στενήν έννοιαν παραγωγικού κλάδου....» καί μετ' όλίγον συνεχίζει: «...Παραδόξως μερικά παραδείγματα πλήρους ύποκαταστάσεως ήθελον συχνά άποδειχθή ότι ένισχύουν τήν ύπόθεσιν τών σταθερών αναλογιών περισσότερο άπό τās περιπτώσεις ύψηλής συμπληρωματικότητας. Άς πάρωμεν τήν περίπτωσην δύο μετάλλων τά όποια άπό τεχνικής άπόψεως χρησιμοποιούνται έξ ίσου καλώς διά κάποιαν παραγωγικήν χρήςιν. Προφανώς ύπάρχει κάποια σχέση τινών εις τήν όποιαν ή χρησιμοποίησις του ένός ή του άλλου μετάλλου δίδει τό αυτό άκριβώς κόστος. Εις οίανδήποτε άλλην σχέσηιν τινών τό εύθυνότερον μέταλλον θά χρησιμοποιείται άποκλειστικώς.

Και ἡ πλέον ἰσχυρά μεταβολή τῶν τιμῶν δὲν δύναται νὰ ἔχη τὸ παραμικρὸν ἀποτέλεσμα ἐπὶ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν συντελεστῶν, ἐφ' ὅσον ἡ νέα σχέσηις τιμῶν δὲν ὑπερπηδᾷ εἰς τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς κρίσιμου σχέσεως, εἰς τὴν ὁποίαν, ὡς ἐλέχθη, ἡ χρήσις τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου μετάλλου εἶναι ἀπὸ ἀπόψεως κόστους ἀδιάφορος...».

Ἐκ τῶν προηγουμένων παρατηρήσεων τοῦ καθηγητοῦ Leonief καθίσταται νομίζομεν σαφές τὸ ὅτι ἡ θεωρία τῆς ὀριακῆς παραγωγικότητος στερεῖται τοῦ ρεαλισμοῦ ὅστις τῆς ἀπεδόθη ὑπὸ τῶν ὁπαδῶν τῆς.

Τέλος, δυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν καὶ ἕνα ἄλλον λόγον διὰ τὸν ὁποῖον ἡ θεωρία αὕτη δὲν δύναται νὰ ἀνταποκριθῆ πρὸς τὴν πραγματικότητα.

Αἱ πρόοδοι τῆς τεχνικῆς καὶ ἡ ἐξέλιξις τῶν ἀναγκῶν τοῦ ἀνθρώπου εἶχον ὡς ἀποτέλεσμα τὴν εἰς μεγάλον βαθμὸν ἐξειδίκευσιν, τόσον τῶν παραγομένων ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν, ὅσον καὶ τῶν ἀπαιτουμένων πρὸς παραγωγήν τούτων πρώτων ὑλῶν καὶ ἐγκαταστάσεων. Ἐφθάσαμεν δηλαδὴ εἰς τοιοῦτον βαθμὸν ἐιδικεύσεως ὥστε ἡ παραγωγή ἑνὸς ὠρισμένου τύπου ἀγαθοῦ νὰ ἀπαιτῆ πρώτας ὕλας ἐπίσης ὠρισμένου τύπου καὶ λίαν ἐιδικευμένον προσωπικὸν καὶ μηχανικὸν ἐξοπλισμὸν καὶ ἀντιστρόφως, μηχανήματα, ἐργάται καὶ πρώται ὕλαι νὰ δύνανται νὰ παράγουν ἀγαθὰ ὠρισμένου μόνου τύπου. Ἄλλωστε, ἀπλή παρατήρησις τῆς πραγματικότητος ἀποδεικνύει τὸ ἐσφαλμένον τῆς θεωρίας τῆς ὑποκαταστάσεως. Τόσον εἰς τὰς ἐπὶ μέρους ἐπιχειρήσεις, ὅσον καὶ εἰς τὰς οικονομίας ἐν συνόλῳ, συχνάκις συναντᾶται ἡ περίπτωσις ἀδυναμίας αὐξήσεως τῆς παραγωγῆς λόγω ἀνεπαρκείας ἑνὸς συντελεστοῦ, ἐνῶ συγχρόνως ὑφίσταται ἀφθονία τῶν λοιπῶν. Κλασσικὸν παράδειγμα ἡ περίπτωσις τῶν ὑποαναπτύκτων χωρῶν, ὅπου παρὰ τὴν ὑπαρξιν πλεονάζοντος ἐργατικοῦ δυναμικοῦ καὶ πολλάκις καὶ ἐδάφους, ἡ οικονομικὴ ἀνάπτυξις των καθυστερεῖ λόγω ἐλλείψεως παρηγμένων κεφαλαίων.

Ὡς τελικὸν συμπέρασμα ἐκ τῆς ὅλης ἐξετάσεως τῆς δυνατότητος μεταβολῆς τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς διαχρονικῶς κατ' ἀκολουθίαν μιᾶς μεταβολῆς εἰς τὰς σχετικὰς τιμὰς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, προκύπτει ὅτι ἂν καὶ δὲν εἶναι ἀδύνατος μία τοιαύτη περίπτωσις, δὲν θὰ ἦτο ἐν τούτοις ὀρθὸν νὰ δεχθῶμεν ὅτι ὑπὸ τὰς σημερινὰς συνθήκας παραγωγῆς τοιαῦται μεταβολαὶ δύνανται νὰ λάβουν χώραν εἰς ἀξιόλογον ἔκτασιν. Προφανῶς ἡ ἔκτασις τῶν μεταβολῶν τούτων εἶναι ζήτημα πραγματικὸν καὶ δύναται νὰ προσδιορισθῆ διὰ λεπτομεροῦς ἐξετάσεως τῆς ἐκάστοτε περιπτώσεως. Ὡς ἐκ τούτου, ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν διαχρονικῶς, δύναται ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς νὰ θεωρηθῆ ὡς μία ἱκανοποιητικὴ προσέγγισις πρὸς τὴν πραγματικότητα.

Ἐρχόμεθα τώρα εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν τεχνικῶν ἐξελίξεων.

Ἀνεφέρθη προηγουμένως ὅτι ἡ διαχρονικὴ σταθερότης τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν ἡμφεσβητήθη οὐχὶ μόνον διὰ τῆς θεωρίας τῆς ὀριακῆς παραγωγικότητος ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ ἐπιχειρήματος τῆς τεχνικῆς ἐξελίξεως. Εἶναι ἐπομένως σκόπιμον νὰ ἐξετάσωμεν κατὰ πόσον αἱ ἐξελίξεις εἰς τὴν τεχνικὴν ἐπιπρεάζουν τὴν λειτουργίαν τοῦ συστήματος εἰσροῶν—ἐκροῶν.

Ὁ πίναξ εισροῶν—έκροῶν πλὴν τῶν ἄλλων παριστᾶ ὡς γνωστὸν καὶ τὸν τρόπον παραγωγῆς καὶ διαθέσεως τῶν διαφόρων ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν, τουτέστιν τὴν τεχνολογίαν καὶ τὰς διακλαδικὰς σχέσεις τῆς οἰκονομίας. Δεικνύει δηλαδὴ ὁ πίναξ τὸ τί λαμβάνει ἕκαστος κλάδος παραγωγῆς ὡς εισροὰς ἐκ τῶν ἄλλων καὶ τὸ τί δίδει οὗτος ὡς ἐκροὰς εἰς τοὺς λοιποὺς κλάδους τῆς οἰκονομίας. Ἐπὶ τῇ βᾶσει δὲ τῶν σχέσεων τούτων προσδιορίζεται ἡ τεχνολογικὴ διάρθρωσις τόσον τοῦ καθ' ἕκαστον κλάδου, ὅσον καὶ τῆς οἰκονομίας ὡς σύνολον. Δηλαδὴ, ὁ πίναξ εισροῶν—έκροῶν δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο, παρὰ μία φωτογραφία τῆς οἰκονομίας εἰς δεδομένην στιγμήν. Καὶ γεννᾶται τὸ ἐρώτημα, μία νέα φωτογραφία τῆς ἰδίας οἰκονομίας εἰς μίαν ἄλλην χρονικὴν στιγμήν, κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἥττον ἀπομεμακρυσμένην τῆς πρώτης, θὰ εἶναι ἢ αὐτὴ μὲ τὴν ἀρχικὴν; Ἀσφαλῶς ὄχι, καὶ ὅτι μὲν ἀφορᾶ τὰς μεταβολὰς εἰς τὰ ἀπόλυτα μεγέθη τῶν εισροῶν καὶ ἐκροῶν τῶν διαφόρων κλάδων μᾶς εἶναι ἀδιάφοροι διὰ τὴν ἐξεταζομένην ἐνταῦθα ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἐκεῖνο τὸ ὅποιον μᾶς ἐνδιαφέρει εἶναι τὸ ἂν μετεβλήθησαν αἱ σχέσεις μεταξὺ ποσότητος τοῦ ὑφ' ἑκάστου κλάδου παραγομένου προϊόντος καὶ τῶν ποσοτήτων τῶν διαφόρων συντελεστῶν παραγωγῆς.

Αἱ τεχνικαὶ ἐξελίξεις αἰτίνας ἀποσκοποῦν κατ' ἀρχὴν εἰς τὴν πληρεστέραν ἱκανοποίησιν τῶν ἀναγκῶν τοῦ ἀνθρώπου δι' ἐξοικονομήσεως πρώτων ὑλῶν καὶ ἐργασίας, ἔχουν ὡς συνέπειαν τὴν μεταβολὴν τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἀκολουθουμένη σήμερον διαδικασία διὰ τὴν παραγωγὴν ἑνὸς ἀγαθοῦ νὰ εἶναι διάφορος ἐκείνης τῆς χθές. Παρὰ τὴν σὺν τῷ χρόνῳ μείωσιν τοῦ μέσου ὄρου τῶν εισροῶν τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας, παρατηρεῖται πολλακίς ὅτι εἰς πολλοὺς κλάδους ἄλλαι ἐκ τῶν εισροῶν αὐξάνουν καὶ ἄλλαι μειοῦνται. Τοῦτο ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν πλήρη ἀναμόρφωσιν τῆς τεχνολογικῆς διερθρωσεως ὅλων τῶν κλάδων. Λέγομεν ὅλων τῶν κλάδων διότι ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ τεχνικαὶ ἐξελίξεις ἀφοροῦν ἀμέσως ἓνα μόνον παραγωγικὸν κλάδον, αἱ ἐπερχόμεναι εἰς αὐτὸν μεταβολαί, λόγῳ τοῦ πλέγματος τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν διαφόρων κλάδων, θὰ ἐπηρεάσουν ἐμμέσως καὶ τοὺς λοιποὺς. Ὁ χρόνος καὶ ὁ βαθμὸς μὲ τὸν ὅποιον θὰ ἐπηρεασθῇ ἕκαστος ἐξ αὐτῶν θὰ ποικίλλῃ ἀπὸ κλάδου εἰς κλάδον καὶ εἶναι συνάρτησις τῆς ἐντάσεως τῶν σχέσεων ἑκάστου κλάδου μετὰ τοῦ ἀμέσως ἐπηρεασθέντος καὶ τῶν λοιπῶν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύναται νὰ ἀχθῇ κανεὶς εἰς τὴν σκέψιν ὅτι ἐξ ὅλων τῶν ἐπιχειρημάτων, τὰ ὅποια διευτώθησαν ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, τὸ ἐπιχείρημα τῶν τεχνικῶν ἐξελίξεων φαίνεται νὰ εἶναι τὸ πλέον ἰσχυρόν. Δέον ὅμως νὰ παρατηρηθῇ ὅτι, τὸ γεγονός τῆς ἀντικαταστάσεως παλαιῶν μεθόδων διὰ νέων δὲν σημαίνει συγχρόνως ὅτι τοῦτο λαμβάνει χώραν ἀπὸ τὴν μίαν ἡμέραν εἰς τὴν ἄλλην. Αἱ τεχνικαὶ ἀνακαλύψεις εἶναι μακροχρόνιου συνήθως χαρακτῆρος, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἀκόμη πραγματοποιοῦνται δὲν εἶναι τόσον ἐπαναστατικῆς φύσεως, ὅσον ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνονται, ἰδιαιτέρως δὲ ἂν ἐξετασθοῦν ἀπὸ τῆς σκοπιᾶς τῆς οἰκονομίας ὡς σύνολον. Ἐπὶ πλέον, οἷα—δήποτε ἐνέργεια τοῦ ἀνθρώπου στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἤδη γνωστῶν μὴ δυναμέ-

νη νά βασισθῆ ἐπὶ ἀπλῶν εἰκασιῶν ἂν θέλῃ νά μὴ στερηθῆ τὸν μαυδύαν τῆς σοβαρότητος.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι ἀναγκαῖον νά γίνῃ καὶ μία ἄλλη διευκρίνησις. Τὸ σύστημα εἰσροῶν-ἐκροῶν δύναται νά χρησιμοποιηθῆ ἀφ' ἐνὸς μὲν διὰ προβλέψεις, ἀφ' ἑτέρου δὲ διὰ προγραμματισμόν. Κατὰ συνέπειαν τὸ ἐπιχείρημα τῶν τεχνικῶν ἐξελίξεων δεόν νά ἐξετασθῆ ἀναφορικῶς μὲ ἐκάστην τῶν δύο τούτων περιπτώσεων χρησιμοποίησεως τοῦ συστήματος εἰσροῶν-ἐκροῶν.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν περίπτωσιν τῶν προβλέψεων αἱ τεχνικαὶ ἐξελίξεις προκαλοῦν ἀλλοίωσιν εἰς τὴν διάρθρωσιν τῆς οἰκονομίας καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ σύστημα εἰσροῶν-ἐκροῶν δὲν δύναται νά χρησιμοποιηθῆ διὰ προβλέψεις, σχετικῶς μὲ τὴν ἐξέλιξιν τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν, ὑπὸ τὴν μορφήν ὑπὸ τὴν ὁποίαν συνήθως αὐταὶ ἐπιχειροῦνται. Προκειμένου ὅμως περὶ προγραμματισμοῦ καὶ ἐπομένως καὶ προβλέψεως τῶν μεταβολῶν εἰς τὰ οἰκονομικὰ μεγέθη κατ' ἀκολουθίαν τῆς ἐκτελέσεως τῶν προγραμματισθέντων ἢ κατάστασις εἶναι ἐντελῶς διάφορος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἢ κατὰστρωσις ἐνὸς οἰκονομικοῦ προγράμματος τόσον εἰς μεμονωμένας ἐπιχειρήσεις ὅσον καὶ εἰς τὴν οἰκονομίαν ὡς σύνολον καὶ ἢ πρόβλεψις τῶν μεταβολῶν αἰτινες θὰ ἐπέλθουν εἰς τὴν οἰκονομίαν, ἐκ τῆς πραγματοποιήσεως τοῦ προγράμματος τούτου, εἶναι δυνατὴ.

Φυσικὰ, ὅπως ἓνας μηχανικὸς διὰ τὴν ἐκπόνησιν τοῦ σχεδίου μιᾶς οἰκοδομῆς λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν του μόνον τὰς ἤδη γνωστὰς τεχνικὰς μεθόδους, οὕτω καὶ ἓνας οἰκονομολόγος προκειμένου νά καταρτίσῃ ἓνα σχέδιον οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, δὲν δύναται νά ὑπολογίξῃ ἐπὶ παραγωγικῶν μεθόδων ἀγνωστων εἰσέτι, ἀλλὰ θὰ βασισθῆ ἐπὶ τῶν ἤδη γνωστῶν τοιούτων περιοριζόμενος εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῶν καλυτέρων καὶ τὸν οἰκονομικώτερον συνδυασμόν αὐτῶν. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ οὕτω καταρτισθέντος προγράμματος, στηριζόμενος ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, δυνάμεθα πλέον νά προβλέψωμεν τὰς μεταβολὰς τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν, αἰτινες θὰ ἐπέλθουν ἐκ τῆς πραγματοποίησεως τοῦ προγράμματος.

Κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἐκτελέσεως τοῦ προγράμματος εἶναι πιθανὸν νά λάβουν χώραν τεχνικαὶ ἐξελίξεις αἰτινες νά καθιστοῦν τὴν παραγωγὴν ἐνὸς ἢ περισσοτέρων ἀγαθῶν οἰκονομικώτεραν. Τὸ γεγονός ὅτι ἓνα σχέδιον προγραμματισμοῦ, ἐκπονηθὲν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τεχνικῶν μεθόδων αἰτινες ὑφίσταντο πρὶν πραγματοποιηθῶν αἱ τελευταῖαι τεχνικαὶ ἐξελίξεις, εὐρίσκεται ἐν ἐκτελέσει, δὲν ἀποκλείει τὴν δυνατότητα υἱοθετήσεως τῶν νέων μεθόδων παραγωγῆς ὡσάκις τοῦτο κρίνεται οἰκονομικῶς σκόπιμον.

Τὰ οἰκονομικὰ προγράμματα δὲν ἐκτελοῦνται χωρὶς νά λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν αἱ ἐν τῷ μεταξύ ἐπελθοῦσαι μεταβολαὶ εἰς τὴν τεχνικὴν, ἀντιθέτως αἱ λαμβάνουσαι χώραν τεχνολογικαὶ ἀνακαλύψεις παρακολουθοῦνται μετὰ προσοχῆς καὶ πολλάκις ἀποφασίζεται ἡ προσαρμογὴ τοῦ προγράμματος πρὸς αὐτὰς ὅταν τοῦτο κρίνεται συμφέρον. Ἄλλωστε, διὰ τὸν σκοπὸν αὐτόν, ἐν μακροχρόνιον πρόγραμμα ὑποδιαιρεῖται εἰς μικροτέρας διαρκείας τοιαῦτα, εἰς τρόπον ὥστε, ἡ ἀναπροσαρμογὴ πρὸς τὰς ἐπελθοῦσας τεχνικὰς ἐξελίξεις καὶ τὰ δεδομένα τῆς πείρας νά καθίσταται εὐχερεστέρα. Οὕτω, εἰκοσαετῆ οἰκονομικὰ



προγράμματα υποδιαιρούνται εἰς πενταετῆ τοιαῦτα εἰς τρόπον ὥστε μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἑνὸς ἐκάστου ἐξ αὐτῶν, σταθμίζονται ἐκ νέου οἱ διάφοροι παράγοντες καὶ προσαρμόζεται τὸ ὅλον πρόγραμμα πρὸς τὴν νεοδιαμορφωθείσαν πραγματικότητα(!). Δυνάμεθα δηλαδὴ εἰς τὸ σύστημα εἰσροῶν-ἐκροῶν, ὡς ἂν ἐπέλθει μία σημαντικὴ τεχνολογικὴ μεταβολὴ εἰς ἕνα κλάδον, νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν παλαιὰν τεχνολογίαν διὰ μιᾶς νέας, ἣτις ἀνταποκρίνεται πρὸς τὰς ἐπελθούσας ἐξελίξεις εἰς τὴν τεχνικὴν. Τὸ γεγονός τοῦτο θὰ ἔχῃ φυσικὰ ὡς συνέπειαν τὴν ἀλλαγὴν τῆς τεχνολογίας τῆς οἰκονομίας καὶ ἐπομένως θὰ χρειασθῆ νὰ λύσωμεν ἐκ νέου τὸ πρόβλημα.

Δέον ὅμως νὰ παρατηρηθῆ ὅτι, οἰαδήποτε τεχνικὴ ἀνακάλυψις δὲν κρίνεται πάντοτε οἰκονομικῶς συμφέρουσα διότι πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν ἐπερχομένων οἰκονομιῶν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς, πρέπει νὰ ληφθῆ ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ ἀρνητικὸν αὐτῆς ἀποτέλεσμα, τουτέστιν αἱ ἀπώλειαι κεφαλαίων αἵτινες προκαλοῦνται ἐκ τῆς οἰκονομικῆς ἀπαξιώσεως τοῦ ἀντικαθισταμένου μηχανικοῦ ἐξοπλισμοῦ, τῆς ἀχρηστεύσεως πρώτων ὑλῶν κ.λ.π.

Ὡς ἐκ τούτου, ἡ ἐφαρμογὴ μιᾶς νέας μεθόδου παραγωγῆς εἶναι δυσκολωτέρα εἰς τὰς ἀνεπτυγμένας οἰκονομίας εἰς τὰς ὁποίας ὑφίσταται ἤδη ἐπαρκὴς μηχανικὸς ἐξοπλισμὸς, παρ' ὅτι εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους τοιαύτας. Εἰς τὰς οἰκονομίας τῆς πρώτης μορφῆς ἡ ἀπώλεια εἰς κεφάλαια θὰ εἶναι πολὺ μεγαλύτερα καὶ ὡς ἐκ τούτου οἱ ἐπιχειρηματῆται εἶναι πολλὰκις ἐπιφυλακτικοὶ προκειμένου νὰ ἀντικαταστήσουν τὰς ἐφαρμοζόμενας ἤδη μεθόδους παραγωγῆς διὰ νέων τοιούτων. Κατὰ συνέπειαν καὶ ὁ προγραμματίζων εἰς τὰς οἰκονομίας τῆς μορφῆς αὐτῆς εἶναι ἠναγκασμένος νὰ λαμβάνῃ σοβαρῶς ὑπ' ὄψιν τὴν ὑπάρχουσαν κατάστασιν τῆς οἰκονομίας, πράγμα τὸ ὁποῖον περιορίζει σοβαρῶς τὴν ἐλευθερίαν ἐπιλογῆς μεταξὺ τῶν διαφόρων μεθόδων. Ἀντιθέτως, εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους οἰκονομίας τοιαῦται δεσμεύσεις δὲν ὑφίστανται ἢ εἶναι ἀσήμαντοι. Εἰς τὰς χώρας αὐτὰς ὁ μηχανικὸς ἐξοπλισμὸς εἶναι συνήθως πεπαλαιωμένος, ἢ, προκειμένου περὶ ὠρισμένων κλάδων δὲν ὑφίσταται καν, ὑπάρχει ἐπομένως, ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς, ἐλευθερία ὡς πρὸς τὴν ἐπιλογὴν τῶν μεθόδων αἵτινες θὰ ἐφαρμοσθοῦν προκειμένου νὰ ἐπιδιωχθῆ ἡ οἰκονομικὴ ἀνάπτυξις τῆς χώρας. Συνεπεία τῆς ἐλευθερίας ταύτης εἶναι τὸ γεγονός ὅτι ἡ ἐφαρμογὴ πολλῶν τεχνικῶν ἀνακαλύψεων πραγματοποιεῖται κατ' ἀρχὰς οὐχὶ εἰς ἀνεπτυγμένας οἰκονομίας, ὡς θὰ ἠδύνατο νὰ ὑποθέσῃ κανεὶς, ἀλλὰ εἰς οἰκονομίας κατωτέρου βαθμοῦ ἀναπτύξεως.

Ἐκ τῆς προηγηθείσης ἐπισκοπήσεως δυνάμεθα νὰ ἀχθῶμεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι αἱ τεχνικαὶ ἐξελίξεις συνεπάγονται πράγματι τὴν διαχρονικὴν μεταβολὴν τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, τουτέστιν τῶν ποσοτικῶν σχέσεων παραγομένου προϊόντος καὶ χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν. Δέον ὅμως νὰ σημειωθῆ ὅτι, αἱ μεταβολαὶ αὗται ἀφ' ἑνὸς μὲν εἶναι μακροχρόνιοι καὶ σημασίας μικροτέρας ἐκείνης τῆς ὁποίας συνήθως τοὺς ἀποδίδεται, ἀφ' ἑτέρου δὲ εἶναι

1) Ἴδε καὶ I. Δ. Πίντου. «Μεθοδολογικὰ προβλήματα τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ», Ἀθῆναι 1959, σελίς 9.

ἀναπόφευκτοι ἀνεξαρτήτως ἐφαρμοζομένου συστήματος ἀναλύσεως καὶ δύναται κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἥττον ν' ἀντιμετωπισθοῦν δι' ἀναπροσαρμογῶν τοῦ ἀρχικοῦ σχεδίου.

Ἐκτὸς τῶν ἐξετασθέντων δύο περιπτώσεων διαχρονικῆς μεταβολῆς τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, ἤτοι τῆς μεταβολῆς τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν τεχνικῶν ἐξελίξεων, μία τοιαύτη μεταβολὴ δύναται νὰ ἐπέλθῃ καὶ ἐξ ἄλλων λόγων, ὡς εἶναι ἡ ἐξάντλησις τῶν φυσικῶν πηγῶν, ἡ ἀλλαγὴ τῶν προτιμήσεων τῶν καταναλωτῶν, ἡ ἀλλαγὴ τοῦ κλίματος κ.λ.π., οἱ παράγοντες ὅμως οὗτοι εἶναι μακροχρονίου χαρακτήρος καὶ σπανίως δύναται νὰ προβλεφθοῦν.



# ΕΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΝΟΜΙΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

Υπό Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ — Δ. Π. ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΑ

## Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἡ παρακολούθησις τῶν οἰκονομικῶν συνεπειῶν τῆς νομισματικῆς πολιτικῆς τόσον προϋπολογιστικῶς ὅσον καὶ ἀπολογιστικῶς δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς ἐν ἐκ τῶν κυριωτέρων μελημάτων τῆς Οἰκονομετρικῆς Ἀναλύσεως. Εἰδικώτερον, ἡ κατάστρωσις ἐνὸς ὑποδείγματος ἀναλύσεως πρὸς παρακολούθησιν τῶν ἐπιδράσεων μιᾶς αὐξήσεως τῆς ἐνεργοῦ ζήτησεως ἐπὶ τοῦ νομίσματος καὶ τοῦ ἰσοζυγίου πληρωμῶν μιᾶς χώρας εἶναι ἰδιαιτέρως χρήσιμος διὰ τὰς νομισματικὰς ἀρχάς, καθ' ὅσον παρέχει προγνωστικὰς ἐνδείξεις περὶ τῆς ἀκολουθητέας παρ' αὐτῶν νομισματικῆς καὶ πιστωτικῆς πολιτικῆς.

Ἐπὶ τὸ ἀνωτέρω πνεῦμα ἐσχεδιάσθη καὶ ἤρchiσε διεξαγομένη παρὰ τῶν Γραφείων Οἰκονομικῶν Ἐρευνῶν, τμῆμα Προγραμματισμοῦ εἰδικὴ ἔρευνα ἐπὶ τῶν ἀμέσων καὶ ἐμμέσων συνεπειῶν τῆς αὐξήσεως τῆς ἐνεργοῦ ζήτησεως ἐπὶ τοῦ νομίσματος καὶ τοῦ ἰσοζυγίου πληρωμῶν τῆς ἑλληνικῆς οἰκονομίας. Ἡ ἔρευνα αὕτη ὡς ἐκ τῆς φύσεώς της ἔχει κυρίως πρακτικὸν χαρακτῆρα. Τοῦτο ὁμῶς δὲν σημαίνει ὅτι παραμελεῖται ἡ θεωρητικὴ καὶ μεθοδολογικὴ πλευρὰ αὐτῆς. Τὸ ἐρευνώμενον θέμα εἶναι λίαν δυσχερὲς καὶ ἱκανοποιητικὴ προσέγγισις αὐτοῦ θὰ ἦτο ἀδύνατος ἄνευ τῆς χρησιμοποίησεως εἰδικῆς ἐπιστημονικῆς τεχνικῆς. Ὡς ἐκ τούτου ἡ ὅλη ἔρευνα διηρέθη εἰς δύο μέρη: α) τὴν θεωρητικὴν καὶ μεθοδολογικὴν ἀνάλυσιν καὶ β) τὴν πρακτικὴν ἐφαρμογὴν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τῆς ἑλληνικῆς οἰκονομίας.

Ἡ παροῦσα ἐργασία περιλαμβάνει τὴν θεωρητικὴν καὶ μεθοδολογικὴν μόνον πλευρὰν τοῦ ἐρευνωμένου θέματος. Ἡ ἐν αὐτῇ ἀναλυομένη τεχνικὴ στηρίζεται κυρίως ἐπὶ τῆς θεωρίας τῆς διακλαδικῆς ἀναλύσεως καταλλήλως προσηρμοσμένης εἰς τὰς οἰκονομικὰς συνθήκας τῆς ἑλληνικῆς πραγματικότητος. Τὸ κύριον πλεονέκτημα αὐτῆς εἶναι ὅτι καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ταυτόχρονον παρακολούθησιν τόσον τῶν ἀμέσων ὅσον καὶ ἐμμέσων ἐπιδράσεων τῆς αὐξήσεως τῆς ἐνεργοῦ ζήτησεως ἐπὶ τοῦ νομίσματος καὶ τοῦ ἰσοζυγίου πληρωμῶν. Ἐπὶ πλεον καθιστᾷ δυνατὸν τὸν καθορισμὸν τοῦ βαθμοῦ ἐξαρτήσεως τῶν οἰκονομικῶν τομῶν ἀπ' ἀλλήλων ὡς ἐπίσης καὶ τὴν ἐπισήμανσιν τῶν ἐν στενότητι εὐρισκομένων τομῶν, διευκολύνουσα οὕτω τὴν κατάρτισιν ρεαλιστικοῦ προγράμματος ἐπενδύσεων διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν τῆς χώρας.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν πρακτικὴν ἐφαρμογὴν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τῆς ἑλληνικῆς οἰκονομίας, ἡ δημοσίευσίς αὐτῆς δὲν κατέστη δυνατὴ ἐκ τοῦ λόγου ὅτι αὕτη εὐρίσκεται εἰσέτι εἰς τὸ στάδιον τῆς ἐπεξεργασίας. Δέον ὁμῶς νὰ τοινοσηθῆ ἐνταῦθα ἰδιαιτέρως ἡ σοβαρότης τῶν ἀντιμετωπιζομένων δυσχερειῶν

ίδια από απόψεως στατιστικῶν στοιχείων, λόγω ἀφ' ἐνὸς μὲν τῶν γνωστῶν ἀτελειῶν τοῦ στατιστικοῦ συστήματος ἐν Ἑλλάδι, ἀφ' ἐτέρου δὲ τῆς ἀνάγκης συγκεντρώσεως πληροφοριῶν τῶν ὁποίων διὰ πρώτην φοράν ἐπιχειρεῖται ἡ στατιστικὴ σύλληψις. Ἀπαιτεῖται ὅθεν ἐπίμονος καὶ συστηματικὴ προσπάθεια ὅπως καταστή δυνατὴ ἡ συμπλήρωσις καὶ βελτίωσις τῶν ἀναγκαιούτων στατιστικῶν στοιχείων, δεδομένου μάλιστα ὅτι τὰ στοιχεῖα ταῦτα θὰ εἶναι ἐπίσης χρήσιμα καὶ διὰ πλείστας ἄλλας ἐπιστημονικὰς ἀνυλῶσεις.

## II. ΣΚΙΑΓΡΑΦΗΣΙΣ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

Τὰ ὑποδείγματα οἰκονομικῆς πολιτικῆς (Disinflation Model) ἔχουν σκοπὸν νὰ προλέγουν τὰς συνεπείας τῶν σχεδιαζομένων ὑπὸ τῶν ἀσκούντων τὴν οἰκονομικὴν πολιτικὴν μεταβολῶν τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν. Ἡ χρησιμότης τῶν ὑποδειγμάτων αὐτῶν ἐξαρτᾶται κυρίως ἀπὸ τὸν βαθμὸν τῆς ἀκριβείας των καὶ τὴν ἰκανότητά των νὰ παρέχουν ἐγκαίρως ἀπαντήσεις εἰς τὰ τιθέμενα ἐρωτήματα.

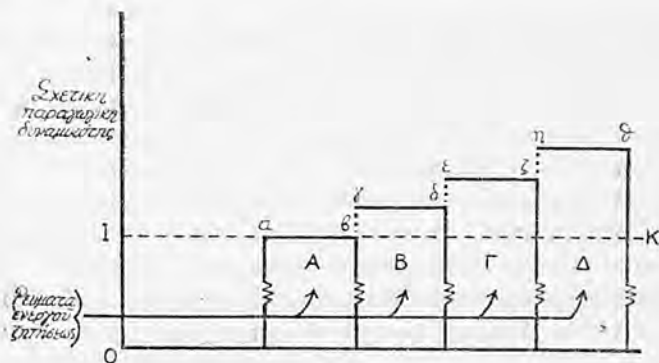
Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ὑποδεικνύεται ὁ τρόπος καταρτίσεως ἐνὸς ὑποδείματος, τὸ ὁποῖον θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ δίδῃ ἀπαντήσεις εἰς ἐρωτήματα νομισματικῆς πολιτικῆς, ὡς π.χ. εἶναι τὰ ἀνοφερόμενα εἰς τὴν ἐπέκτασιν ἢ τὸν περιορισμὸν τῶν πιστώσεων κλπ.

Εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ὅτι ἐντὸς τῆς Ἑλληνικῆς Οἰκονομίας ὑφίσταται εὐρὺς ποσοτικὸς διαφορισμὸς ὅσον ἀφορᾷ τὴν διαθέσιμον παραγωγικὴν δυναμικότητα τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν τομέων. Ὁ ἐν λόγω διαφορισμὸς ἀποτελεῖ σύνηθες φαινόμενον τῶν ὑπαναπτύκτων χωρῶν, ὅπου τὸ σύστημα τῶν τιμῶν δὲν εἶναι ἰκανὸν νὰ ἄρῃ τὰς ἀσυνεπείας εἰς τὴν παραγωγικὴν διάρθρωσιν τῆς οἰκονομίας.

Ἡ προαναφερθεῖσα ποσοτικὴ διαφοροποίησις τῶν διαθέσιμων παραγωγικῶν δυναμικότητων δέον νὰ γίνῃ ἀντιληπτὴ ὡς ἑξῆς: Λόγω τοῦ γεγονότος ὅτι οἱ διάφοροι τομεῖς τῆς οἰκονομίας εὐρίσκονται εἰς σχέσιν δυναμικῆς ἀλληλεξαρτήσεως τόσο ἀπὸ ἀπόψεως ἀγορᾶς ὅσον καὶ ἀπὸ ἀπόψεως παραγωγικῶν σχέσεων (1), ὑφίσταται κατ' ἀρχὴν καὶ ὑπὸ δεδομένας τεχνολογικὰς συνθήκας, ἕν ὠρισμένον ἐπίπεδον δραστηριότητος δι' ἕκαστον τομέα, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς δεδομένον ἐπίπεδον καὶ σύνθεσιν τοῦ Ἐθνικοῦ προϊόντος. Ἐν ἄλλοις λόγοις ἡ παραγωγή δεδομένης ποσότητος Ἐθνικοῦ προϊόντος προϋποθέτει ὠρισμένον βαθμὸν συνεργασίας μεταξύ τῶν διαφόρων τομέων τῆς οἰκονομίας. Ἡ φύσις τῆς συνεργασίας ταύτης προσδιορίζεται ὑπὸ τῶν τεχνολογικῶν δεδομένων. Οὕτω διὰ μίαν ἀρμονικὴν ἀνάπτυξιν τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας ἐν τῷ συνόλῳ ἀπαιτεῖται ἀντιστοιχεῖα εἰς τὴν παραγωγικὴν δυναμικότητα μεταξύ

1) Ὡς «ἀλληλεξάρτησις ἀπὸ ἀπόψεως ἀγορᾶς» νοεῖται ἡ ἀλυσὶς τῶν σχέσεων μεταξύ τῶν οἰκονομιῶν αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῶν ἀγορῶν καὶ πωλήσεων. «Ἀλληλεξάρτησις ἀπὸ ἀπόψεως παραγωγικῶν σχέσεων» εἶναι ἡ «πραγματικὴ» ὄψις τῶν προηγουμένων σχέσεων ὡς αὐταὶ ἐκφράζονται εἰς τοὺς συνήθεις πίνακας εἰσοδῶν-ἐκροδῶν.

των διαφόρων παραγωγικών τομέων. Το σύστημα τιμών ἐντὸς μιᾶς ἐλευθέρου οἰκονομίας τείνει νὰ προσαρμόσῃ τὴν διάρθρωσιν τῆς οἰκονομίας πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ταύτην. Εἰς τὰς ἀνεπτυγμένας οἰκονομίας δύναται νὰ λεχθῆ ὅτι ἡ ἐναρμόνισις αὕτη τῶν παραγωγικῶν δυναμικότητων εἶναι κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἥττον πραγματικῆ. Τοῦτο ὅμως δὲν συμβαίνει εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας ὅπου τὸ σύστημα τιμῶν δὲν ἐπηρεάζει πάντοτε ἀποτελεσματικῶς τὴν διάρθρωσιν τῆς οἰκονομίας. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ ἀνώτατα ὅρια τῶν παραγωγικῶν δυναμικότητων τῶν διαφόρων τομέων μιᾶς ἀνεπτυγμένης οἰκονομίας κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς (1), τότε δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν μὲ μίαν ἀσυνεχῆ γραμμὴν, τὴν  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta$ , τὰ ἀνώτατα ὅρια τῶν παραγωγικῶν δυναμικότητων μιᾶς ὑπαναπτύκτου χώρας:



Τὰ ὀρθογώνια ἀπεικονίζουν τὴν παραγωγικὴν ἰκανότητα τῶν τομέων A, B, Γ, καὶ Δ, τὰ δὲ τμήματα εὐθείας  $\alpha-\beta$ ,  $\gamma-\delta$ ,  $\epsilon-\zeta$  καὶ  $\eta-\theta$  τὰ ἀνώτατα ὅρια τῶν παραγωγικῶν δυναμικότητων τῶν τομέων αὐτῶν ἀντιστοίχως. Ἡ εὐθεία K ἀπεικονίζει τὴν «γραμμὴν ἀσφαλείας» τῆς παραγωγικῆς ἰκανότητος τῆς οἰκονομίας ἐν τῷ συνόλῳ (2). Τὸ ὕψος τῆς γραμμῆς ταύτης προσδιορίζεται ἀπὸ τὸ ἀνώτατον ὄριον τῆς σχετικῶς μικροτέρας παραγωγικῆς δυναμικότητος ἐν τῇ οἰκονομίᾳ.

Εἰς τὸ σχῆμα ἡ σχετικῶς μικροτέρα παραγωγικὴ δυναμικότης εἶναι ἡ τοῦ τομέως A.

Δεδομένης τῆς ἀνωτέρω διαρθρώσεως, πᾶσα αὐξήσις τῆς ἐνεργοῦ ζήτησεως, ἡ ὅποια δὲν θὰ ἤξυξανε τὰ εἰσοδήματα καὶ τὴν χρηματικὴν κυκλοφορίαν πέραν τῆς γραμμῆς ἀσφαλείας (3) θὰ ἦδύνατο κατ' ἀρχὴν νὰ αἰτιολογηθῆ ἀπὸ ἀπόψεως νομισματικῆς σταθερότητος. Τοῦτο συμβαίνει διότι μέχρι τῆς γραμμῆς αὐτῆς ἡ ἐλαστικότητα προσφορᾶς ἀγαθῶν ἐξ ὅλων τῶν ἀλληλοεξαρτωμένων

1) Ἡ ὑπόθεσις αὕτη ὑποδηλοῖ βεβαίως σχετικὴν (καὶ ὄχι ἀπόλυτον) σύγκρισιν τῶν παραγωγικῶν δυναμικότητων βάσει τῆς σημασίας ἐνὸς ἐκάστου τομέως ἐντὸς τῆς οἰκονομίας.

2) Βλ. ἀμέσως κατωτέρω.

3) Λαμβανομένων βεβαίως ὑπ' ὄψιν τῶν πολλαπλασιαστικῶν ἐπιδράσεων τῆς αὐξήσεως τῆς ἐνεργοῦ ζήτησεως.

τομέων τῆς οἰκονομίας εἶναι ἄρκετὰ ὑψηλὴ οὕτως ὥστε νὰ δύναται ν' ἀντιδράσῃ εἰς τὰς νομισματικὰς πιέσεις τῆς διευρυνομένης ἐνεργοῦ ζήτησεως. Ὁ τρόπος οὗτος αἰτιολογήσεως τῶν φαινομένων εἶναι προφανῶς Κεϋνσιανοῦ τύπου καὶ δύναται νὰ ἔχῃ ἰδιαιτέραν ἐφαρμογὴν ἐπὶ ὑποαπασχολουμένων οἰκονομιῶν εἰς τὰς ὁποίας αἱ παραγωγικαὶ δυναμικότητες τῶν ἐπὶ μέρους τομέων κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ἐν τούτοις ὅτι αὐξάνωμεν τὴν ἐνεργὸν ζήτησιν διὰ νὰ χρηματοδοτήσωμεν τὸν τομέα Β (ἐπέκτασις πιστώσεων) μέχρι τοῦ μεγίστου ὁρίου τῆς παραγωγικῆς αὐτοῦ δυναμικότητος. Δεδομένου δὲ ὅτι, ἐξ ὑποθέσεως, ὁ ἐν λόγῳ τομεὺς εὐρίσκεται εἰς ἄμεσον ἢ ἔμμεσον σχέσιν μὲ τοὺς λοιποὺς τομεῖς τῆς οἰκονομίας, ἢ χρηματοδοτήσις του θὰ ἐπιδράσῃ (μέσω τῆς διαδικασίας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τῶν εἰσοδῶν - ἐκροῶν) καὶ ἐπὶ τῶν τελευταίων τούτων. Καθίσταται φανερόν ἐκ τοῦ διαγράμματος ὅτι ἂν ὁ τομεὺς Β συσχετίζεται ἰσχυρῶς μὲ τὸν τομέα Α, ὁ ὁποῖος εὐρίσκεται εἰς χαμηλότερον σχετικῶς ἐπίπεδον παραγωγικῆς δυναμικότητος, ἢ ἠυξημένη πιστοδοτήσις τοῦ πρώτου τομέως θὰ προκαλέσῃ, διὰ τῆς διαδικασίας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πληθωριστικὰς πιέσεις εἰς τὸν τομέα Α. Ἡ πλήρης ἀνάλυσις τῶν περαιτέρω συνεπειῶν τῶν πληθωριστικῶν αὐτῶν πιέσεων ἐπὶ τῆς νομισματικῆς ἰσορροπίας καὶ τῆς διανομῆς τοῦ εἰσοδήματος ἐξέρχεται τῶν ὁρίων τῆς παρούσης μελέτης. Δέον, πάντως, νὰ προστεθῇ ἐνταῦθα ὅτι ὁ πληθωρισμὸς εἰς ἓνα δεδομένον τομέα δύναται νὰ προκαλέσῃ πληθωρισμὸν κόστους ἢ τιμῶν εἰς ἑτέρους τομεῖς τῆς οἰκονομίας συμπεριλαμβανομένου τοῦ τομέως Β. Τοιαῦτα πληθωρικὰ πιέσεις εἶναι βεβαίως δυνατόν ν' ἀποφευχθοῦν ἂν αἱ ὀφειλόμενα εἰς διαρθρωτικούς ἢ ἄλλους προσωρινούς λόγους εἰδικαὶ στενότητες ἐξουδετεροῦντο ἐγκαίρως διὰ καταλλήλου ἐπαυξήσεως τῶν εἰσαγωγῶν. Καθίσταται ὅθεν ἀναγκαία ἢ προσθήκη εἰς τὸ ὑπόδειγμά μας καὶ ἐνὸς μεγέθους ἐμφαίνοντος τὴν εἰς συναλλαγματικὰ διαθέσιμα δυναμικότητα τῆς οἰκονομίας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται φανερόν ὅτι δὲν εἶναι ἀσφαλὴς ἢ ὑπὸ τῶν νομισματικῶν ἀρχῶν ἀσκήσις τῆς πιστωτικῆς πολιτικῆς ἐπὶ τῇ βάσει μόνον τῆς φερεγγυότητος ἐκάστου τομέως καὶ τῆς ἱκανότητος αὐτοῦ νὰ χρησιμοποιεῖ παραγωγικῶς τὰ λαμβανόμενα κεφάλαια. Ἀπαιτεῖται ἐπίσης ἐξέτασις τῶν περαιτέρω ἐπιδράσεων ἐκάστου τομέως ἐπὶ τῶν λοιπῶν τομέων. Ἐπὶ πλέον πρέπει νὰ ἐπιδιωχθῇ ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἐν λόγῳ ἐπιδράσεων ἐν συσχετισμῶ μὲ τὴν διαθέσιμον παραγωγικὴν δυναμικότητα τῶν διαφόρων τομέων. Ἡ τοιαύτη ἀνάλυσις εἶναι βεβαίως δυνατόν νὰ ἀποδείξῃ ὅτι τὸ μεγαλύτερον μέρος τῶν ἀμέσων καὶ ἔμμεσων πολλαπλασιαστικῶν ἐπιδράσεων ἀπορροφᾶται ὑπὸ τομέων μὲ ἐπαρκῆ παραγωγικὴν δυναμικότητα εἰς τρόπον ὥστε νὰ μὴ προκαλοῦνται σημαντικαὶ νομισματικαὶ διαταραχαὶ ἐκ τῶν ἐπιδράσεων τούτων, παρὰ τὴν πιθανὴν ὑπαρξιν ἀρνητικῶν ἐπιδράσεων ἐν στενότητι.

Ἡ ἐπαρκὴς ἀνάλυσις τῶν ἐν λόγῳ ἐπιδράσεων θὰ ἠδύνατο εὐκόλως νὰ πραγματοποιηθῇ ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς ἀξιοπιστοῦ ἀναλύσεως τῶν χρηματικῶν ροῶν (Money Flows) ἢ ἐνὸς συνήθους πίνακος εἰσοδῶν - ἐκροῶν (Input -

Output Table) ὁμοῦ μὲ ἐπαρκῆ στοιχεῖα περὶ τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τῶν διαφόρων τομέων. Εἰς τὴν Ἑλλάδα, ὅμως, αἱ στατιστικαὶ δυνατότητες δὲν ἐπιτρέπουν τοιαύτην ἀνάλυσιν, τουλάχιστον διὰ τὸ ἄμεσον μέλλον. Νομίζομεν παρὰ ταῦτα ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ γίνουν ἐποικοδομητικαὶ τινες ἐνέργειαι πρὸς τὴν ὀρθὴν κατεύθυνσιν.

A) Εἶναι, ἐπὶ παραδείγματι, στατιστικῶς δυνατόν ν' ἀναλυθοῦν τὰ συνολικὰ μεγέθη « Βιομηχανία », « Γεωργία », « Ἐμπόριον » κλπ., εἰς μικρότερα μεγέθη θεωρούμενα ὡς στρατηγικῆς σημασίας διὰ τὴν παρακολούθησιν τῶν νομισματικῶν ἐξελίξεων. Ἡ στατιστικὴ τοῦ ἔθνικοῦ εἰσοδήματος τοῦ Ὑπουργείου Συντονισμοῦ καθὼς καὶ μερικαὶ Ad Hoc ἔρευναι θὰ ἦσαν νομίζομεν ἐπαρκεῖς διὰ τὴν ἐν λόγω ἀνάλυσιν.

B) Τὸ δευτέρον καὶ σπουδαιότατον βῆμα ἔγκειται εἰς τὸν κατὰ τὸ δυνατόν ἀκριβέστερον προσδιορισμὸν τῶν ἀμέσων καὶ ἐμμέσων σχέσεων ἀλληλεξαρτήσεως τῶν διαφόρων τομέων. Ὡς πρώτη προσέγγισις ὁ προσδιορισμὸς οὗτος θὰ ἦτο δυνατόν νὰ ἐπιδιωχθῆ διὰ τὰς ἀρχικὰς μόνον φάσεις τῆς ἀλληλεπιδράσεως. Οὕτω, ἐπὶ παραδείγματι, λαμβάνοντες τὸν τομέα A δυνάμεθα νὰ ἐρευνήσωμεν τὴν σχέσιν του μὲ τοὺς τομεῖς Γ καὶ Δ, μὲ τοὺς ὁποίους ὁ τομεὺς A ἔχει ἄμεσον σχέσιν (πρῶτη φάσις), μὲ τὸν τομέα B ὁ ὁποῖος συσχετίζεται ἀμέσως μὲ τὸν τομέα Γ καὶ κατὰ συνέπειαν ἐμμέσως μὲ τὸν τομέα A (δευτέρα φάσις), ἀγνοοῦντες τὰς λοιπὰς ἐμμέσους ἐπιδράσεις. Ὁ βαθμὸς προσεγγίσεως ἐξαρτᾶται ἐκάστοτε ἐκ τῆς φύσεως τῶν ἐρευνωμένων σχέσεων. Ἡ διαδικασία αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς θεωρητικῶς ὀρθὴ διὰ τοὺς περισσότερους οικονομικοὺς τομεῖς λόγῳ τῆς μεγάλης ταχύτητος συγκλίσεως (1) τῶν πολλαπλασιαστικῶν ἐπιδράσεων εἰς τὰς πλείστας τῶν ὑπαναπτύκτων χωρῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν σχετικῶς ὑψηλὸν ποσοστὸν δι' εἰσαγωγὰς εἰς τὸ παραγωγικὸν αὐτῶν κόστος. Λόγῳ τῶν ὑφισταμένων ἐν Ἑλλάδι στατιστικῶν δυσκολιῶν πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ἐπιδράσεων μεταξὺ τῶν τομέων, θὰ ἦτο πιθανῶς εὐκολωτέρα ἢ προσέγγισις τοῦ προβλήματος διὰ τῆς ἐπιλογῆς (διὰ δειγματοληψίας ἢ ἄλλως) ἀντιπροσωπευτικῶν παραγωγικῶν μονάδων (ἐργοστασίων, ἐργαστηρίων κλπ.), ἐξ ἐκάστου τομέως καὶ ἀναλύσεως τοῦ παραγωγικοῦ κόστους αὐτῶν. Ἐκ τῆς ἀναλύσεως ταύτης εἶναι δυνατόν περαιτέρω νὰ προβῶμεν εἰς μίαν κατὰ προσέγγισιν γενίκευσιν ἵνα προσδιορισθῆ ἡ διάρθρωσις τοῦ κόστους τοῦ τομέως, ἥτοι τὰ ποσοστὰ αὐτοῦ ἐξ ἡμερομισθίων, τόκων, ἀποσβέσεων, πρώτων ὑλῶν κλπ. Ἐκτὸς τῆς προηγουμένης ἀναλύσεως τοῦ κόστους, ἢ ὁποῖα θὰ παράσχη ἐν πρόχειρον πλαίσιον διὰ τὴν κατὰ τομεῖς ταξινομήσιν τῶν παραγωγικῶν τομέων, θὰ καταστῆ ἀναγκαῖα ἡ ἀνάλυσις κατὰ κυριώτερα κοινὰ τῆς ἰδιωτικῆς καὶ τῆς κρατικῆς καταναλώσεως. Νομίζομεν ὅτι τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ ἐπὶ τῇ βάσει λεπτομερῶν στατιστικῶν στοιχείων ἐπὶ τῆς καταναλώσεως, τὰ ὁποῖα συγκεντροῦνται καιρικῶς εἰς τὸ Ὑπουργεῖον Συντονισμοῦ καὶ τῶν στοιχείων ἐπὶ τῶν οἰκογενειακῶν προϋπολογισμῶν τῆς Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας.

1) Βλ. καὶ κατωτέρω.



Ἐκ τῆς προαναφερθείσης ἀναλύσεως θὰ προκύψῃ μία σειρά ἰσοζυγίων διὰ τοὺς ἐπιλεγέντας τομεῖς, τὰ ὁποῖα ἂν καὶ ἑλλειπῇ (1) θὰ δίδουν μίαν εἰκόνα τῶν οἰκονομικῶν ἀλληλεξαρτήσεων.

Γ) Μετὰ τὸν κατὰ προσέγγισιν καθορισμὸν τῶν σχέσεων ὑπὸ τὴν μορφήν ἑνὸς συστήματος τεχνολογικῶν συντελεστῶν (Coefficients) τὸ ἐπόμενον οὐσιῶδες βῆμα ἐγκείται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἀνωτάτου βαθμοῦ παραγωγικῆς ἱκανότητος ἐκάστου τομέως. Τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον ἵνα προσδιορισθῇ εἰς ἕκαστον τομέα καὶ ὑπὸ τὰς ὑφισταμένας συνθήκας δραστηριότητος, ἢ ἐλαστικότης προσφορᾶς ἐν συσχετίσει μὲ δεδομένην αὐξησιν τῆς ἐνεργαῦς ζητήσεως διὰ τὸ προϊόν τοῦ ἐν λόγῳ τομέως.

Τὰ ὑπάρχοντα στοιχεῖα ἐπὶ τῆς παραγωγικῆς ἱκανότητος τῶν διαφόρων τομέων τῆς Ἑλληνικῆς Οἰκονομίας φαίνεται ὅτι εἶναι λίαν ἀνεπαρκῆ. Μία ἐρευνα δι' ἐρωτηματολογίου ἐν συνεργασίᾳ μὲ τὸν Σύνδεσμον Ἑλλήνων Βιομηχάνων θὰ ἔδιδεν, πιθανῶς, ἱκανοποιητικὰ ἀποτελέσματα. Ἡ συγκέντρωσις ἐπαρκῶν στοιχείων ἐπὶ τῆς παραγωγικῆς ἱκανότητος ἀποτελεῖ τὸ δυσκολώτερον μέρος τοῦ ὅλου ἔργου. Αἱ δυσκολαὶ αὗται ὁμως δεόν νὰ ὑπερникηθοῦν προκειμένου νὰ μελετηθῇ σοβαρῶς τὸ πρόβλημα τῶν πληθωρικῶν πιέσεων, ἢ ἱκανοποιητικὴ ἀνάλυσις τῶν ὁποίων δὲν εἶναι δυνατὴ ἄνευ τῆς κατὰ τομεῖς ἐξετάσεως τῶν ἐπικρατουσῶν συνθηκῶν προσφορᾶς καὶ ζητήσεως.

Ἡ ἀνάλυσις αὕτη δὲν εἶναι χρήσιμος μόνον ἀπὸ νομισματικῆς ἀπόψεως ὡς ἐντοπιζουσα τὰς ἐστίας τῶν νομισματικῶν διαταραχῶν, ἀλλὰ ταυτοχρόνως διευκολύνει τὴν χάραξιν τῆς πολιτικῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, ὡς δυναμένη νὰ ὑποδείξῃ τὴν σειράν προτεραιότητος τῶν ἐπενδύσεων πρὸς διεύρυνσιν τῶν ὀρίων τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος εἰς τοὺς ἐν στενότητι εὕρισκόμενους τομεῖς. Ἡ τοιαύτη ἀνάλυσις, συνεπῶς, θὰ δημιουργήσῃ τὸν φυσικὸν σύνδεσμον μεταξὺ τῆς νομισματικῆς πολιτικῆς καὶ τῆς πολιτικῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως τῆς χώρας.

Δ) Ἐκ τῆς ὀργανώσεως πάντων τῶν προαναφερθέντων στοιχείων ὑπὸ τὴν μορφήν ἑνὸς ὑποδείγματος θὰ εἶναι δυνατόν νὰ προσδιορισθοῦν κατὰ προσέγγισιν αἱ συνέπειαι μιᾶς δεδομένης πιστωτικῆς πολιτικῆς. Τὸ σπουδαιότερον πλεονέκτημα ἑνὸς τοιοῦτου ὑποδείγματος εἶναι ἡ ἱκανότης αὐτοῦ νὰ ἐντοπιζῇ οὐχὶ μόνον τὰ ἄμεσα, ἀλλὰ καὶ τὰ ἔμμεσα ἐπακόλουθα ἐκάστης μεταβολῆς τῆς ἐνεργαῦς ζητήσεως, τὰ ὁποῖα ἢ ἐκ παραδόσεως ἀνάλυσις συνήθως ἀγνοεῖ. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐνδείξεων τοῦ ὑποδείγματος αἱ Νομισματικαὶ Ἀρχαὶ θὰ ἦτο ἐπίσης δυνατόν ν' ἀποφανθοῦν ἐπὶ ἑνὸς ἀποδεκτοῦ περιθωρίου πληθωρισμοῦ, ἐὰν εἶναι ἀδύνατος ἡ πλήρης ἀποφυγὴ τοῦ τελευταίου.

Ἐφ' ὅσον τὸ ὡς ἄνω ὑπόδειγμα προορίζεται νὰ καταστῇ βοηθητικὸν ὄργανον τῆς τρεχούσης Νομισματικῆς Πολιτικῆς εἶναι οὐσιῶδες νὰ ἐνσωματωῦται εἰς αὐτὸ πᾶσα μεταβολὴ ἐπηρεάζουσα τὴν διάρθρωσιν του. Ἰδιαίτε-

1) Θὰ εἴμεθα ἀρχικῶς ὑποχρεωμένοι νὰ παραλείψωμεν μερικοὺς τομεῖς μικρᾶς σημασίας ἢ δευτερευούσης ἐπιδράσεως λόγῳ ἑλλείψεως στοιχείων.



πως δέον από καιρού εις καιρόν να διενεργούνται αι κατάλληλοι προσαρμογαι δια τας έπερχόμενας μεταβολάς εις την τεχνολογίαν και εις την συνολικήν παραγωγικήν δυναμικότητα (1).

Πλήν τής προγνωστικής του ίκανότητος τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο ἔχει ἐπίσης ἐν σπουδαίῳν πλεονέκτημα ἀπὸ τεχνικῆς ἀπόψεως. Ὑποχρεώνει κατ' ἀνάγκην τὰς στατιστικὰς ὑπηρεσίας νὰ προσανατολισθοῦν πρὸς μίαν διακλαδικήν ἐξέτασιν τῆς οἰκονομίας, ἢ ὅποια δυνατὸν νὰ ὀδηγήσῃ εἰς τὸ μέλλον εἰς τὴν σύνταξιν ἑνὸς λεπτομεροῦς πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν δι' ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν.

### III. ΤΡΟΠΟΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

#### Γενικὴ ἀνάλυσις

1. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀλληλεξάρτησις τῶν ἐπὶ μέρους τομέων μιᾶς οἰκονομίας εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθῇ βασικῶς διὰ μιᾶς « μήτρας »  $4 \times 3$  ὡς ἀκολουθῶς :

	1	2	3
1	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$
2	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$
3	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$
4	$\alpha_{41}$	$\alpha_{42}$	$\alpha_{43}$

Οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 2 ὑποθέτομεν ὅτι ἀντιπροσωπεύουν τοὺς τομεῖς « Γεωργία » καὶ « Βιομηχανία » ἀντιστοίχως, οἱ ὅποιοι θεωροῦνται ὡς οἱ μόνοι ἐν στενῇ ἔννοιά παραγωγικοὶ τομεῖς τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας. Ὑποθέτομεν ἐπίσης ὅτι τὰ ἐξ ἑκάστου κλάδου παραγόμενα προϊόντα εἶναι ὁμοιογενῆ καὶ ἀδιαφοροποίητα (2).

Ὁ ἀριθμὸς 3 ἀντιπροσωπεύει τὸν τομέα τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων τὰ ὅποια ἀφ' ἑνὸς μὲν παρέχουν τὰς ὑπηρεσίας των εἰς τοὺς παραγωγικοὺς τομεῖς λαμβάνοντα ἀντιστοίχως χρηματικὰς ἀμοιβὰς (εἰσοδήματα), ἀφ' ἑτέρου δὲ καταναλίσκουν τὰ παραγόμενα ἀγαθὰ διὰ τῆς χρησιμοποίησεως τῶν λαμβαν-

1) Τὸ κύριον ζήτημα ἐνταῦθα εἶναι ἡ ἐπαρκὴς ὀργάνωσις τοῦ τρόπου τακτικῆς λήψεως τῶν πληροφοριῶν τούτων ἀπὸ κρατικούς ἢ ἄλλους ὀργανισμούς.

2) Αἱ ὡς ἄνω ὑποθέσεις ὡς καὶ ἄλλαι τινὲς ὑποθέσεις τῆς Γενικῆς Ἀναλύσεως ἔχουν ἀπλοποιητικὸν σκοπὸν καὶ δύνανται νὰ ἀρθοῦν κατὰ τὴν ἀνάλυσιν πραγματικῶν περιπτώσεων.

νομένων χρηματικῶν ἀμοιβῶν. Θὰ ὀνομάσωμεν τὸν τομέα 3 περιληπτικῶς « Ἔργασία - Κατανάλωσις » (1).

Ὁ ἀριθμὸς 4 ἀντιπροσωπεύει τὸν τομέα « Εἰσαγωγαί » (2).

Ἐξετάζοντες τὴν ἀνωτέρω μῆτραν κατὰ στήλας βλέπομεν « τί λαμβάνει » ἕκαστος τομεὺς ἀπὸ τῶν ἄλλων τομεῖς (καὶ ἀπὸ τὸν ἑαυτὸν του). Ἐξετάζοντες αὐτὴν κατὰ σειρὰς βλέπομεν « τί δίδει » ἕκαστος τομεὺς εἰς τοὺς ἄλλους τομεῖς (καὶ εἰς τὸν ἑαυτὸν του) (3). Εἰδικώτερον, ἡ κατωτέρω στήλη καθορίζει τὴν ὑπὸ

$\alpha_{11}$
$\alpha_{21}$
$\alpha_{31}$
$\alpha_{41}$

τῆς Γεωργίας καταβαλλομένην ἀξίαν εἰς τοὺς ἄλλους τομεῖς (καὶ τὸν ἑαυτὸν της) διὰ τὴν προμήθειαν τῶν ὑλῶν καὶ ὑπηρεσιῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγροτικοῦ προϊόντος. Ἐν ἄλλοις λόγοις ἡ πρώτη στήλη καθορίζει τὴν διάρθρωσιν τοῦ γεωργικοῦ κόστους. Τὰ  $\alpha$  εἶναι συνεπῶς στοιχεῖα κόστους ἐκφραζόμενα (ἐνταῦθα) ὡς ποσοστὰ ἐπὶ τοῖς ἑκατόν. Ὁ πρῶτος δείκτης ἑκάστου στοιχείου καθορίζει τὸν τομέα ὃ ὁποῖος « καταβάλλει », ὃ δὲ δεῦτερος τὸν τομέα ὃ ὁποῖος « λαμβάνει » τὴν ὑπὸ τοῦ στοιχείου παριστωμένην ἀξίαν. Οὕτω τὸ στοιχεῖον  $\alpha_{21}$  ἐκφράζει τὴν ὑπὸ τῆς Γεωργίας καταβαλλομένην ἀξίαν εἰς τὴν Βιομηχανίαν διὰ τὴν προμήθειαν π.χ. πρώτων ὑλῶν ἐκ τῆς τελευταίας πρὸς παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγροτικοῦ προϊόντος. Τὸ στοιχεῖον  $\alpha_{31}$  παριστᾷ τὴν ὑπὸ τῆς Γεωργίας καταβαλλομένην ἀξίαν δι' ἀμοιβὴν ἐργασίας, τὸ στοιχεῖον  $\alpha_{11}$  τὴν εἰς αὐτὴν ταύτην τὴν Γεωργίαν καταβαλλομένην ἀξίαν (πρὸς ἀγορὰν π.χ. σπόρων), τὸ δὲ στοιχεῖον  $\alpha_{41}$  τὴν δι' εἰσαγωγῶν (λιπασμάτων, μηχανημάτων κλπ.) καταβαλλομένην ἀξίαν, διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγροτικοῦ προϊόντος.

Ἄνάλογος ἔρμηνεῖα δέον νὰ δοθῇ καὶ εἰς τὴν δευτέραν στήλην ἢ ὁποῖα παριστᾷ τὸ κατὰ μονάδα παραγωγῆς βιομηχανικὸν κόστος.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν τρίτην στήλην, αὕτη, προφανῶς, ἐκφράζει τὴν ποσοστιαίαν κατανομήν τῆς καταναλωτικῆς δαπάνης μεταξύ τῶν διαφόρων κονδυλίων καταναλώσεως: Τὰ στοιχεῖα  $\alpha_{13}$ ,  $\alpha_{23}$  καὶ  $\alpha_{33}$  παριστοῦν τὰ ποσοστὰ τῆς καταναλωτικῆς δαπάνης τὰ ὁποῖα στρέφονται εἰς τὴν ἀγορὰν γεωργικῶν, βιομηχανικῶν καὶ εἰσαγομένων προϊόντων ἀντιστοίχως. Τὸ στοιχεῖον  $\alpha_{33}$  ἐκφράζει τὸ ποσοστὸν δαπάνης τὸ ὁποῖον ἀπορροφᾶται ἐκ τῶν προσωπικῶν ὑπηρεσιῶν τελικῆς καταναλώσεως.

1) Ὁ ὅρος οὗτος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν ἀγγλικὸν Households.

2) Δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ ἐξαγωγαί ὡς ἐπίσης καὶ ἄλλοι οικονομικοὶ τομεῖς ὡς μὴ ἀπαραίτητοι εἰς τὴν παροῦσαν ὑποδειγματικὴν ἀνάλυσιν. Ἡ ἀνωτέρω « μῆτρα » εἶναι κατὰ συνέπειαν ἑλλειπής. Τοῦτο ὑποδηλοῦται διὰ τῶν σημειουμένων στιγμῶν ἐπεκτάσεως.

3) Προφανῶς ὁ τομεὺς τῶν εἰσαγωγῶν « δίδει » εἰς τὴν οἰκονομίαν, ἀλλὰ δὲν λαμβάνει ἐξ αὐτῆς. Ἄν εἰς τὴν μῆτραν περιλαμβάνοντο καὶ αἱ ἔξαγωγαί θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ χαρακτηρισθοῦν αὗται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 4 καὶ νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἡ ἑτέρα ὄψις τοῦ τομέως « Ἐξωτερικὸν Ἐμπόριον ».

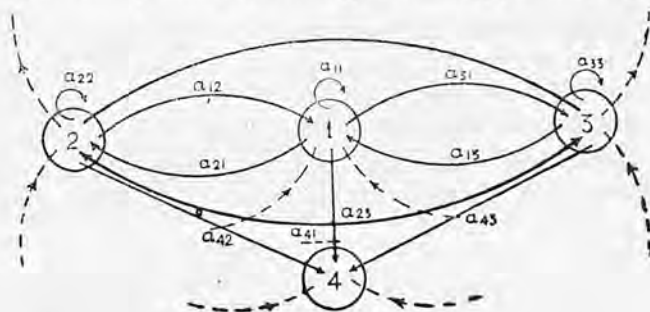
Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ ἀναγραφόμενα τέσσερα στοιχεία εἰς ἑκάστην στήλην ἐξαντλοῦν πλήρως τὴν ἀνάλυσιν κόστους (1), θὰ ἔχωμεν :

$\sum_{i=1}^4 \alpha_{i\zeta} = 1$  ( $\zeta=1,2,3$ ) ἤτοι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα, ἄλ-

λως θὰ εἶναι  $0 < \sum_{i=1}^4 \alpha_{i\zeta} < 1$  (2). Ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἡ κατὰ σειρὰς ἐξέτασις τῆς μήτρας δεικνύει τί δίδει ἕκαστος τομεὺς εἰς τὴν οἰκονομίαν, ἤτοι τὸν τρόπον κατανομῆς τῶν παραγομένων (καὶ εἰσαγομένων) προϊόντων μεταξὺ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν τομέων. Ὡς ἔχει πάντως ἡ διάρθρωσις τῆς ἀνωτέρω μήτρας δὲν εἶναι ἀμέσως δυνατὴ ἡ πρόσθεσις τῶν στοιχείων τῶν σειρῶν πρὸς ἐξεύρεσιν τῆς ἀξίας τοῦ κατανεμομένου προϊόντος ἑκάστου τομέως. Τοῦτο θὰ ἦτο δυνατόν μόνον κατόπιν μετατροπῆς τῶν στοιχείων  $\alpha$  ἀπὸ ποσοστὰ κόστους εἰς ποσοστὰ παραγωγῆς (3).

Αἱ ἀνωτέρω περιγραφεῖσαι σχέσεις κόστους ἐξεταζόμεναι ἀπὸ ἀπόψεως χρηματικῆς κυκλοφορίας δεικνύουσιν τὴν ἀλληλεξάρτησιν (μέσω τῆς ἀγορᾶς) τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν τομέων. Διὰ τοῦτο καὶ ἡ μήτρα τῶν σχέσεων αὐτῶν καλεῖται συνήθως «μήτρα ἀλληλεξαρτήσεως».

Τὴν μήτραν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν σχηματικῶς ὡς ἀκολούθως :



Σ χ ῆ μ α 1

Αἱ κατευθύνσεις τῶν τόξων δεικνύουσιν πρὸς ποίους τομεῖς καταβάλλονται αἱ ἀντιστοιχῶς σημειούμεναι ἀξίαι.

2. Πλὴν τῶν ἀνωτέρω ὑποθέσεων περὶ κοστολογικῆς διάρθρωσεως τῆς οἰκονομίας θὰ ὑποθεθῆ ἐπίσης ὅτι : α) ἡ οἰκονομία εὐρίσκεται εἰς ἓν ἐπίπεδον σταθερᾶς ἰσορροπίας ἀπὸ ἀπόψεως παραγωγῆς καὶ χρηματικῆς κυκλοφορίας κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ὑπὸ ἐξέτασιν περιόδου (4)· β) οἱ τομεῖς 1, 2 καὶ 3 ἐμφα-

1) Ἡ καταναλωτικῆς δαπάνης προκειμένου διὰ τὴν τρίτην στήλην.

2) Ἐνταῦθα ὡς προσθετικὸν στοιχεῖον κόστους ὑπολογίζεται ἐπίσης καὶ ἓν ποσοστὸν κανονικοῦ κέρδους. Τοῦτο ὅμως δὲν ἐμφανίζεται ὡς ἰδιαιτέρον κονδύλιον καὶ ἐνσωματοῦται δι' εὐχέρειαν ἀναλύσεως εἰς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεία  $\alpha_{i\zeta}$ .

3) Ὡς ἐξ ἄλλου ἐλέχθη ἤδη (σελ. ὑποσημ. (3)), ἡ ἐνταῦθα χρησιμοποιουμένη μήτρα εἶναι ἐλλειπτικῆς καὶ συνεπῶς αἱ σειραὶ αὐτῆς δὲν παρουσιάζουσιν πλήρη εἰκόνα κατανομῆς τῶν παραγομένων προϊόντων μεταξὺ τῶν διαφόρων τομέων τῆς οἰκονομίας.

4) Δὲν ἐνδιαφέρει πρὸς τὸ παρὸν τὸ ἀπόλυτον ὕψος τοῦ ἐπίπεδου αὐτοῦ.

νίζουν άργουσαν παραγωγικήν δυναμικότητα (1)  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  κατά την αὐτὴν περίοδον γ) ἢ ζήτησις προϊόντων τῶν παραγωγικῶν τομέων 1 καὶ 2 προκαλεῖ ἀντίστοιχον ἐπέκτασιν τῆς παραγωγῆς, εἰς τοὺς τομεῖς αὐτοὺς, ἐφ' ὅσον βεβαίως τὸ ἐπιτρέπει ἡ δυναμικότης ἐκάστου τομέως (2).

3. Ἐὰς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἐντὸς τῆς οἰκονομίας παρατηρεῖται κατὰ τὴν ὑπὸ ἐξέτασιν περίοδον αὐξήσις τῆς συνολικῆς ζήτησεως προϊόντων τοῦ τομέως 1 κατὰ Α χρηματικὰς μονάδας. Τοῦτο θὰ προκαλέσῃ, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω τεθέντα, ἀντίστοιχον αὐξήσιν τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος εἰς τὸν τομέα 1, ἂν ἡ ὑφισταμένη δυναμικότης τῶν τομέων αὐτῶν ἐπιτρέπει τοιαύτην ἐπέκτασιν. Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν, ἐκ τῆς μῆτρας ἀλληλεξαρτήσεως, τὸ κόστος κατὰ μονάδα παραγωγῆς εἰς τὸν τομέα 1, δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν τὴν ἄξιαν τῆς παραγωγῆς, ἥτοι τὸ ποσὸν Α, τὸ ὁποῖον θὰ καλύψῃ τὰ έξοδα τῆς ἐπεκτάσεως τῆς παραγωγῆς εἰς τὸν τομέα 1, εἰς τὰ ἐπὶ μέρους στοιχεῖα κόστους:

$$A \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\alpha_{11} \\ A\alpha_{21} \\ A\alpha_{31} \\ A\alpha_{41} \end{bmatrix}$$

$A\alpha_{11}$  θὰ εἶναι αἱ χρηματικαὶ καταβολαὶ διὰ τὰ προϊόντα αὐτοῦ τούτου τοῦ κλάδου,  $A\alpha_{21}$ ,  $A\alpha_{31}$  καὶ  $A\alpha_{41}$  αἱ χρηματικαὶ καταβολαὶ διὰ τὰ προϊόντα τῶν κλάδων 2, 3 καὶ 4 ἀντιστοίχως.

Τὰ κονδύλια  $A\alpha_{11}$  καὶ  $A\alpha_{21}$ , τὰ ὁποῖα ἀφοροῦν τοὺς παραγωγικοὺς τομεῖς 1 καὶ 2, θὰ προκαλέσουν περαιτέρω ἀντίστοιχον αὐξήσιν τῆς παραγωγῆς εἰς τοὺς ἐν λόγῳ τομεῖς μὲ ἀποτέλεσμα ἀντίστοιχον ζήτησιν (ἐργασίας, πρώτων ὑλῶν κλπ.) κ.ο.κ.:

$$A\alpha_{11} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\alpha_{11} \alpha_{11} \\ A\alpha_{11} \alpha_{21} \\ A\alpha_{11} \alpha_{31} \\ A\alpha_{11} \alpha_{41} \end{bmatrix} \cdot \dots \cdot A\alpha_{11} \alpha_{21} \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\alpha_{11} \alpha_{21} \alpha_{12} \\ A\alpha_{11} \alpha_{21} \alpha_{22} \\ A\alpha_{11} \alpha_{21} \alpha_{32} \\ A\alpha_{11} \alpha_{21} \alpha_{42} \end{bmatrix} \cdot \dots \cdot$$

1) Ἡ «ἀργουσα δυναμικότης» ἐκάστου τομέως καθορίζεται ἐκ τῆς διαφορᾶς τῆς ἀνωτάτης δυναμικότητος καὶ τῆς χρησιμοποιουμένης τοιαύτης εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς δοθείσης ἰσορροπίας παραγωγῆς. Ἡ δυναμικότης μετρεῖται εἰς ἀντιστοίχους μονάδας ἀγαθῶν ἢ υπηρεσιῶν δι' ἕκαστον τομέα (π.χ. ὀκάδες σίτου, ὠραι ἐργασίας κλπ.). Δὲν λαμβάνεται ἐνταῦθα ὑπ' ὄψιν ἡ δυνατότης χρηματοδοτήσεως τῶν εἰσαγωγῶν αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ δοθείσαν αὐξήσιν τῆς ἐνεργοῦ ζήτησεως, ἥτοι ἡ διαθέσιμος δυναμικότης τῆς οἰκονομίας εἰς ξένον συνάλλαγμα. Εἰς πραγματικὰς περιπτώσεις δυνάμεθα εὐκόλως νὰ συμπεριλάβωμεν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τὴν τοιαύτην δυναμικότητα.

2) Ἡ ζήτησις ἱκανοποιῆται ἀμέσως ἀπὸ τὰ ἀποθέματα, ὑποτίθεται ὅτι τὰ ἀπορροφηθέντα ἀποθέματα δέον νὰ ἀντικατασταθοῦν δι' ἀντιστοίχου ἐπεκτάσεως τῆς παραγωγῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς Γεωργίας ἐν τούτοις μία αὐξήσις τῆς ζήτησεως δὲν προκαλεῖ βραχυχρονίως αὐξήσιν τῆς παραγωγῆς καθ' ὅσον ἡ τελευταία ἔχει αὐστηρῶς ἐποχικὸν χαρακτήρα. Διὰ τοῦτο ἡ δυναμικότης εἰς τὴν Γεωργίαν προσδιορίζεται ἐκ τῆς διαθεσίμου ποσότητος ἀγροτικῶν προϊόντων κατὰ τὴν περίοδον τοῦ ὑπολογισμοῦ.

$$A\alpha_{21} \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\alpha_{21} \alpha_{12} \\ A\alpha_{21} \alpha_{22} \\ A\alpha_{21} \alpha_{32} \\ A\alpha_{21} \alpha_{42} \end{bmatrix} \rightarrow A\alpha_{21} \alpha_{22} \begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{13} \\ A\alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{22} \\ A\alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{32} \\ A\alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{42} \end{bmatrix}$$

Ἀνάλογος διαδικασία ἀναλύσεως εἶναι βεβαίως νοητὴ καὶ διὰ τὸ κονδύλιον  $A\alpha_{31}$ , τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὸ κατὰ τὴν ἀρχικὴν ἀνάλυσιν τοῦ ποσοῦ  $A$  διατιθέμενον ποσὸν δι' ἀμοιβὴν τῆς ἐργασίας. Ἐφ' ὅσον ἡ ἀμοιβὴ αὕτη δαπανᾶται δι' ἀγορὰν καταναλωτικῶν ἀγαθῶν (καὶ ὑπηρεσιῶν) εἶναι ἀναγκαῖα ἡ ἀνάλυσις τοῦ  $A\alpha_{31}$  ἐπὶ τῇ βάσει τῆς στήλης 3, ἡ ὁποία δεῖκνυει τὴν ποσοστιαίαν κατανομὴν τῶν καταναλωτικῶν δαπανῶν. Ἐν ἑκάστον ἐκ τῶν κονδυλίων ἄτινα προκύπτουν ἐκ τῆς ἀναλύσεως αὐτῆς ἀποτελεῖ ζήτησιν ἀντιστοίχων καταναλωτικῶν ἀγαθῶν καὶ συνεπῶς δεόν νὰ ὑπαναλυθῇ περαιτέρω ἐπὶ τῇ βάσει τῆς στήλης κόστους τοῦ τομέως εἰς τὸν ὁποῖον στρέφεται ἡ ζήτησις κ.ο.κ. Ἐπειδὴ δὲν δαπανᾶται συνήθως ὁλόκληρος ἡ ἐξ ἐργασίας ἀμοιβή, ἀλλ' ἐν μέρος ἀποταμιεύεται, εἶναι ἀνάγκη νὰ χρησιμοποιηθῇ κατὰ τὴν ἀνάλυσιν μία παράμετρος παριστάτωσα τὴν ροπὴν πρὸς κατανάλωσιν, ἣτις θὰ διαχωρίζῃ τὸ δαπανώμενον ἀπὸ τὸ ἀποταμιεύμενον τμῆμα τῆς ἀμοιβῆς τῆς ἐργασίας.

Ἡ ἀνωτέρω περιγραφεῖσα διαδικασία ἀναλύσεως διὰ τὰ κονδύλια ζήτησεως, τὰ ἀφορῶντα τοὺς τομεῖς 1, 2 καὶ 3 δὲν ἰσχύει προφανῶς διὰ τὸν τομέα 4, ὅστις ἐκφράζει τὰς εἰσαγωγάς. Ἐν ἄλλοις λόγοις ἡ μέσῳ τοῦ κόστους (ἡ τῆς κατανομῆς τῶν καταναλωτικῶν δαπανῶν) προκαλουμένη ζήτησις εἰσαγομένων ἀγαθῶν δὲν προκαλεῖ οὐδεμίαν περαιτέρω ἐπίδρασιν ἀπὸ ἀπόψεως χρηματικῆς κυκλοφορίας (καὶ εἰσοδημάτων) εἰς τὴν ὑπ' ὄψιν οἰκονομίαν, ἀλλ' ἐπηρεάζει τὴν οἰκονομικὴν κατάστασιν ἄλλων χωρῶν (1). Ὡς ἐκ τούτου τὰ κονδύλια τῆς ζητήσεως δι' εἰσαγωγὰς ἀγαθῶν, τὰ ὁποῖα προκύπτουν κατὰ τὸν ὑπολογισμόν δεόν νὰ τακτοποιοῦνται περιθωρικῶς καὶ νὰ μὴ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν διὰ περαιτέρω ἀνάλυσιν.

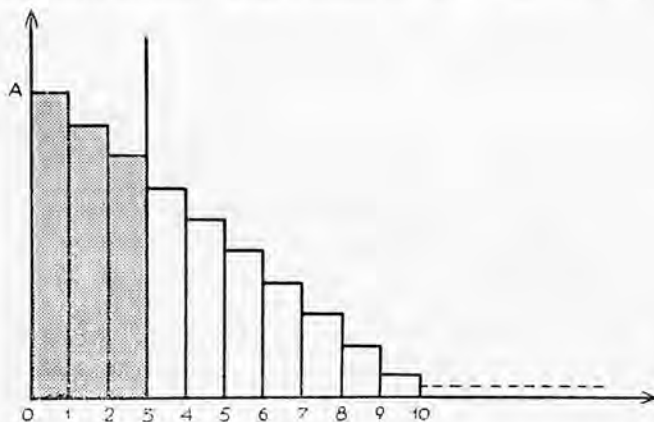
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἐκ τῆς ἀρχικῆς αὐξήσεως τῆς ἐνεργοῦς ζητήσεως κατὰ  $A$  χρηματικὰς μονάδας ἐξαπολύεται πολυσχιδῆς διαδικασία ζητήσεως καὶ παραγωγῆς διὰ τὰ ἀγαθὰ καὶ ὑπηρεσίας ὄλων τῶν τομέων τῆς οἰκονομίας. Ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἡ διαδικασία αὕτη ἀκολουθεῖ φθίνουσαν πρόοδον λόγῳ τῶν δημιουργουμένων «διαρροῶν» εἰς τὸ κυκλοφοριακὸν σύστημα ἐκ τῆς ροπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν καὶ πρὸς εἰσαγωγὴν. Οὕτω, μετὰ πάροδον χρονικοῦ τινὸς διαστήματος, αἱ κυκλοφοριακαὶ καὶ εἰσοδηματικαὶ ἐπίδράσεις τῆς ἀρχικῆς ζητήσεως ἐξαντλοῦνται. Τὸ φαινόμενον αὐτὸ ὀνομάζεται συνήθως «σύγκλισις» (convergency)

1) Εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ Διεθνoῦς Ἐμπορίου γίνεται βεβαίως λόγος περὶ «γενικοῦ πολλαπλασιαστοῦ» εἰς τὸν ὁποῖον λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ μέσῳ τῶν εἰσαγωγῶν προκαλούμεναι ἐπίδράσεις εἰς τὰς ξένας χώρας καὶ συνεπείᾳ τούτου εἰς ἐξαγωγὰς καὶ τὸ εἰσόδημα τῆς εἰσαγωγῆς χώρας. Τοιαῦται ἐπίδράσεις προϋποθέτουν ὅτι ἡ εἰσάγουσα χώρα ἄσκει μεγάλην ἐπίδρασιν εἰς τὰς ξένας οἰκονομίας λόγῳ τοῦ ὄγκου τῶν εἰσαγωγῶν τῆς, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν ἰσχύει διὰ τὴν χώραν μας.



λόγω του ότι τα δημιουργούμενα κύματα ζητήσεως παρουσιάζουν ολοένα μειούμενη ένταση και τέλος παύουν να ύφίστανται ή — συμφώνως προς την τεχνικήν έκφρασιν — συγκλίνουν εις έν επίπεδον Ισοροπίας.

Ένταυθα γεννᾶται έν σημαντικόν πρόβλημα ἀναφορικῶς προς την σχέσιν τῆς χρονικῆς περιόδου τήν ὅποιαν καλύπτει ἡ ἀνάλυσις καί τῆς χρονικῆς περιόδου ἡ ὅποια ἀπαιτεῖται ὅπως ἐξαντληθοῦν τὰ ἐκ τῆς ἀρχικῆς ζητήσεως προκληθέντα πολλαπλασιαστικά φαινόμενα. Ἄν αἱ περίοδοι αὗται εἶναι ἴσαι (ἢ ἡ περίοδος τῆς ἀναλύσεως εἶναι μεγαλυτέρα) οὐδέν πρόβλημα μαγευᾶται. Δυνάμεθα τότε νά προβῶμεν εις πλήρη ἀνάλυσιν, ἤτοι νά παρακολουθήσωμεν τὰ δημιουργούμενα κύματα ζητήσεως μέχρι πλήρους (1) ἐξαντλήσεώς των. Ἄν ὁμως ἡ περίοδος ὑπολογισμοῦ εἶναι βραχυτέρα τῆς περιόδου τῆς ἀναλύσεως τότε δέν ἐνδιαφέρει τὸ σύνολον τῶν ἐπιδράσεων αἱ ὁποῖαι ἐξαπολύονται ἐκ τῆς ἀρχικῆς αὐξήσεως τῆς ζητήσεως ἀλλά μόνον τμήμα αὐτῶν. Ἐάν π.χ. ἡ περίοδος ὑπολογισμοῦ εἶναι τρεῖς μῆνες ἤτοι ζητεῖται ὁ προσδιορισμός τῶν ἐπιδράσεων μιᾶς αὐξήσεως τῆς ἐνεργοῦ ζητήσεως κατά τήν διάρκειαν τῶν τριῶν μηνῶν οἵτινες ἐπακολουθοῦν τῆς αὐξήσεως ταύτης, δέν πρέπει νά περιληφθοῦν εις τὸν ὑπολογισμὸν ἐπιδράσεις ἐξικνούμεναι ἐνδεχομένως πέραν τῆς προσδιορισθείσης τριμηνίας. Δέν πρέπει δηλαδή νά ὑπολογισθῇ ὁλόκληρος ἡ ἀξία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀλλά μόνον τὸ τμήμα αὐτῆς τὸ ὁποῖον προσδιορίζει τήν συνολικὴν αὐξήσιν τῆς ζητήσεως (καί τῶν εισοδημάτων) ἐντὸς τῆς περιόδου τοῦ ὑπολογισμοῦ. Τοῦτο δεικνύεται εις τὸ κατωτέρω σχῆμα :



Σ χ ῆ μ α 2

ΟΑ εἶναι τὸ ὕψος τῆς ἀρχικῆς ζητήσεως ἡ ὅποια προεκάλεσε πολλαπλασιαστικὰς μεταβολὰς (κατὰ φθίνουσαν πρόοδον). Ἐπειδὴ ἐνδιαφέρουν αἱ προκληθεῖσαι μεταβολαὶ ἐντὸς τῆς τριμηνίας δέν δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν ὡς

1) Θεωρητικῶς αἱ πολλαπλασιαστικαὶ ἐπιδράσεις συνεχίζονται ἐπ' ἀπείρον κατὰ φθίνουσαν πρόοδον, πρακτικῶς ὁμως τὰ 99 ἑκατοστὰ τῶν ἐπιδράσεων αὐτῶν λαμβάνουν χώραν ἐντὸς συγκεκριμένης χρονικῆς περιόδου.



συνήθως βάσει τῆς ροπῆς πρὸς κατανάλωσιν χρησιμοποιοῦντες τὸν γνωστόν τύπον τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου (1). Ὑπολογίζομεν μόνον τὰς μεταβολὰς κατὰ τοὺς τρεῖς πρώτους μῆνας ἢ κύκλους ἀναλύσεως (2). Ὁ οὕτω ὑπολογιζόμενος πολλαπλασιαστὴς χαρακτηρίζεται ὡς «κόλουρος» (truncated multiplier) ἐκ τοῦ σχήματός του (σχῆμα 2).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται ὅτι εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν τὴν διαχρονικὴν κίνησιν τῶν δημιουργουμένων κονδυλίων ζητήσεων. Ἐν ἄλλοις λόγοις πρόκειται ἐνταῦθα περὶ ἀναλύσεως ἐνὸς δυναμικοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἢ μᾶλλον ἐνὸς πλήθους δυναμικῶν πολλαπλασιαστῶν οἱ ὁποῖοι συγκροτοῦν τὸν γενικὸν πολλαπλασιαστήν (3).

Μία τοιαύτη ἀνάλυσις προϋποθέτει γνώσιν τῶν χρονικῶν ἐπιβραδύνσεων (time lags) κατὰ τὴν κίνησιν τῶν διαφόρων κονδυλίων ζητήσεως. Ἐπειδὴ αἱ χρονικαὶ ἐπιβραδύνσεις διαφέρουν ἀναλόγως τῆς φύσεως ἐκάστου κονδυλίου (4) δὲν εἶναι πάντοτε εὐκολον νὰ προσδιορισθῇ τὸ κατὰ περίοδον ὕψος τῆς ζητήσεως ἐνὸς ἐκάστου ἀγαθοῦ ἢ ὑπηρεσίας. Ἄν ἡ περίοδος εἶναι μακρὰ (π.χ. 6 μῆνες ἢ 1 ἔτος) εἶναι δυνατὸν νὰ ἀγνοηθῇ κατὰ τὸν ὑπολογισμόν τὸ πρόβλημα τοῦ χρόνου καθ' ὅσον ὑποτίθεται ὅτι ἐντὸς τῆς περιόδου ταύτης θὰ ἔχουν οὕτως ἢ ἄλλως ἐξαντληθῇ τὰ πολλαπλασιαστικά ἀποτελέσματα. Ὅσον ὅμως μικροτέρα εἶναι ἡ ἐξεταζομένη περίοδος τόσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ ἀβεβαιότης τοῦ ὑπολογισμοῦ.

Πρὸς περιορισμὸν τῆς ἀβεβαιότητος ἀπαιτεῖται κατ' ἀρχὴν εἰδικὴ μελέτη τῶν συναλλακτικῶν συνθηκῶν εἰς τὴν ἐξεταζομένην οἰκονομίαν διὰ τὸν καθορισμὸν τῶν χρονικῶν καθυστερήσεων εἰς χαρακτηριστικὰς διακλαδικὰς συναλλαγὰς. Περιορισμὸς τῆς ἀβεβαιότητος εἶναι ἐπίσης δυνατὸς ἂν ἡ «ταχύτης συγκλίσεως» τοῦ πολλαπλασιαστοῦ (ἢ τῶν ἐπὶ μέρους πολλαπλασιαστῶν) εἶναι μεγάλη. Οὕτω ἂν λόγῳ ὑψηλῶν ροπῶν πρὸς ἀποταμίευσιν καὶ πρὸς εἰσαγωγήν, ἐν σημαντικῶν τμημάτων τῶν δημιουργουμένων κονδυλίων ζητήσεως διαφεύγη ἐκ τοῦ κυκλοφοριακοῦ κυκλώματος εἶναι δυνατὸν τὸ σύνολον ἢ τουλάχιστον τὸ μέγιστον μέρος τῶν πολλαπλασιαστικῶν ἐπιδράσεων νὰ ἐξαντληθῇ

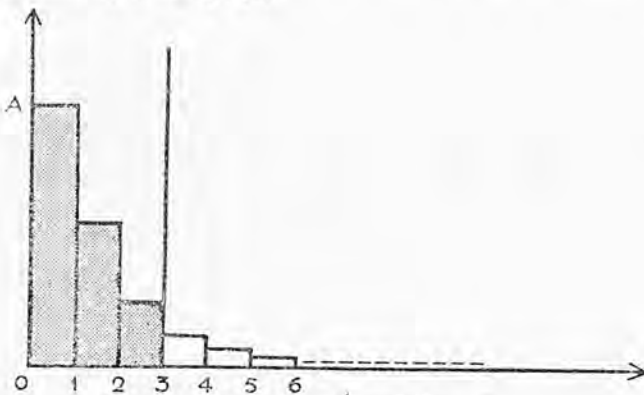
1) Ὁ τύπος αὐτὸς χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ Κέυνς διὰ τὸν ὑπολογισμόν τοῦ στατικοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ παρουσιάζει χρησιμότητα ἂν ἡ περίοδος ἀναλύσεως εἶναι ἀρκετὰ μακρὰ ἢ ἐὰν αἱ πολλαπλασιαστικαὶ ἐπιδράσεις ἐξαντλοῦνται ἐντὸς τῆς περιόδου ὑπολογισμοῦ.

2) Θὰ ὀνομάσωμεν τὰ στάδια ἀναλύσεως τῶν κονδυλίων ζητήσεως «κύκλους ἀναλύσεως». Ἡ ὀνομασία αὕτη ἔχει σκοπὸν νὰ διευκολύνῃ διαχρονικῶς τὴν ἐπακολουθοῦσαν ἀνάλυσιν. Δὲν χρησιμοποιοῦμεν τὴν λέξιν «περίοδος» —παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἐφαρμοζομένη τεχνικὴ εἶναι ἡ καλουμένη «κατὰ περιόδους ἀνάλυσις» πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως μὲ τὴν «περίοδον τοῦ ὑπολογισμοῦ».

3) Ἡ διακλαδικὴ ἀνάλυσις τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἡ ὁποία ὀδηγεῖ εἰς πλῆθος ἐπὶ μέρους πολλαπλασιαστὰς εἶναι γνωστὴ ὡς ἀνάλυσις τοῦ «πολλαπλασιαστοῦ—μήτρα» (matrix-multiplier) βλ. R. Goobwin: The multiplier as a matrix. Econ. July 1956.

4) Οὕτω π.χ. ἡ χρονικὴ ἐπιβραδύνσις διὰ τὴν ζήτησιν καταναλωτικῶν ἀγαθῶν εἶναι σχετικῶς μικρὰ λόγῳ τοῦ ὅτι τὰ ἐργατικά κυρίως εἰσοδήματα καταναλίσκονται ταχέως. Ἡ ζήτησις διὰ πρώτας ὕλας καὶ μηχανήματα παρουσιάζει γενικῶς σημαντικὴν ἐπιβραδύνσιν.

έντός τῆς βραχείας περιόδου τοῦ ὑπολογισμοῦ. Τοῦτο καταφαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος 3 τὸ ὁποῖον διαφέρει ἀπὸ τὸ σχῆμα 2 εἰς τὴν ἀξίαν τῆς ροπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν καὶ πρὸς εἰσαγωγὴν.



Σχῆμα 3

Διὰ τὴν Ἑλλάδα αἱ ἐν λόγῳ διαρροαὶ εἶναι σχετικῶς μικραὶ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τῆς ἀποταμιεύσεως ἀλλ' ἡ ροπή δι' εἰσαγωγὰς εἶναι σημαντική. Εἰδικῶς διὰ τὴν χώραν μας — ὡς ἐπίσης καὶ δι' ὅλας τὰς χώρας αἱ ὁποῖαν ἀνήκουν εἰς τὸν αὐτὸν οἰκονομικὸν τύπον — δεόν νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν τὰ ἀκόλουθα. Αἱ προκαλούμεναι αὐξήσεις τῆς ἐνεργοῦ ζήτησεως ἀντιμετωπίζουν συνήθως εἰς διάφορα σημεία τῆς οἰκονομίας ἀνελαστικὴν προσφορὰν (Botleneck) λόγω ἀδυναμίας ἐπεκτάσεως τῆς ἐγχωρίου παραγωγῆς. Δυνατὸν τότε νὰ προκληθῇ μία ἐκ τῶν ἀκολούθων συνεπειῶν:

α) Ὑψωσις τιμῶν εἰς τὸν κλάδον ὃ ὁποῖος ἐμφανίζει ἀδυναμίαν αὐξήσεως τῆς προσφορᾶς λόγω ἀνεπαρκοῦς παραγωγικῆς δυναμικότητος. Ἡ ὑψωσις αὕτη θὰ προκαλέσῃ κατ' ἀρχὴν ὑψωσιν κερδῶν ('). Ἐρωτᾶται πῶς θὰ χρησιμοποιηθοῦν τὰ κέρδη ταῦτα. Ἡ αὐξησης τῆς καταναλώσεως τῶν ἐπιχειρηματιῶν εἶναι βεβαίως δυνατὴ ἀλλὰ δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ σημαντικὴ βραχυχρονίως. Εἶναι περισσότερον πιθανὸν ὅτι τὰ κέρδη θὰ ἀποταμιεωθοῦν διὰ νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀργότερον ἢ διὰ τὴν ἐπέκτασιν τοῦ παραγωγικοῦ ἐξοπλισμοῦ τῶν οἰκείων ἐπιχειρήσεων εἰς τὰς ὁποίας ἐμφανίζεται μεγαλυτέρα ζήτησις ἢ δι' ἄλλας τοποθετήσεις. Ὅπως δὴποτε βραχυχρονίως (έντός περιόδου π.χ. 3—6 μηνῶν) εἶναι νομιζόμενον λογικὸν νὰ δεχθῶμεν ὅτι τὰ ἐκ τῆς αὐξήσεως τῶν τιμῶν δημιουργηθέντα κέρδη δὲν θὰ ἐπηρεάσουν σοβαρῶς τὸ χρηματικὸν κύκλωμα.

β) Αὐξησης εἰσαγωγῶν ("), ὁπότε καὶ ἀποφεύγονται αἱ πληθωρικαὶ πιέ-

1) Ἐπειδὴ αἱ ἀναπροσαρμογαὶ ἐργατικῶν εἰσοδημάτων εἶναι βραδεῖαι καὶ δυσχερεῖς εἰς χώρας μὲ πλεονάζον ἐργατικὸν δυναμικόν.

2) Ἡ αὐξησης αὕτη προσδιορίζεται ἐκ τῆς διαφορᾶς μεταξὺ ζήτησεως καὶ ἐγχωρίου προσφορᾶς.

σεις ἐπὶ τῶν τιμῶν. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ παρατηρηθῇ ἀντίστοιχος διαρροή χρηματικῆς ζητήσεως ἐκ τοῦ κυκλοφοριακοῦ κυκλώματος.

γ) Μερικὴ αὐξησις τιμῶν καὶ συμπληρωματικὴ αὐξησις εἰσαγωγῶν. Ἐνταῦθα θὰ προκληθῇ διαρροή λόγω ἀποταμιεύσεως κερδῶν καὶ λόγω ζητήσεως εἰσαγωγικῶν ἀγαθῶν.

Γενικῶς δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι αἱ διαρθρωτικαὶ συνθήκαι οἰκονομιῶν ὡς ἡ Ἑλληνικὴ αὐξάνουν (βραχυχρονίως) τὴν «ταχύτητα συγκλίσεως» τοῦ πολ-λαπλασιαστοῦ καὶ συνεπῶς εὐνοοῦν τὴν ἐπιχειρουμένην ἐνταῦθα ἀνάλυσιν.

Αἱ ὡς ἄνω διαρθρωτικαὶ συνθήκαι τῆς Ἑλληνικῆς οἰκονομίας ἐκδηλούμε-ναι τελικῶς εἰς στενότητας προσφορᾶς ἀγαθῶν, ἀπαιτοῦν τὴν κατὰ κύκλον ἀναλύσεως σύγκρισιν μεταξὺ τῆς συνολικῆς δημιουργηθείσης ζητήσεως ἐξ ἑνὸς ἀγαθοῦ καὶ τῆς διαθεσίμου προσφορᾶς αὐτοῦ. Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης θὰ καταστῇ δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἤδη ἀναφερθεῖσων πιέσεων ἐπὶ τῶν τι-μῶν καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν εἰσαγωγῶν.

Αἱ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν εἰσαγωγῶν ἐπιδράσεις εἶναι εὐκολον νὰ ὑπο-λογισθοῦν κατὰ κατηγορίας εἰσαγομένων προϊόντων ἢ συνολικῶς—ἐκ τῶν κατὰ τὴν ἀνάλυσιν σημειουμένων (θετικῶν) διαφορῶν μεταξὺ σ υ ν ο λ ι κ ῆ ς π ρ ο σ θ ἔ τ ο υ ζ η τ ῆ ς ε ω ς δι' ἕκαστον εἰσαγόμενον εἶδος καὶ διαθεσίμου ἔγχωριου προσφορᾶς τοῦ εἴδους τούτου. Ὅμοίως εἶναι εὐκολον νὰ ὑπολογι-σθοῦν ἐκ τῶν ὡς ἄνω διαφορῶν τὰ δημιουργούμενα πληθωρικά ἀνοίγματα (Inflationary Gaps) εἰς τοὺς διαφόρους οἰκονομικοὺς τομεῖς καὶ ἐκ τοῦ ἀθροί-σματος αὐτῶν τὸ συνολικὸν πληθωρικὸν ἀνοίγμα διὰ τὴν οἰκονομίαν. Ὁ μικτὸς ὑπολογισμὸς καθ' ὃν ὑποτίθεται ὅτι ἡ συνολικὴ πίεσις τῆς ζητήσεως ἐξαντλεῖται μερικῶς εἰς αὐξησιν τῶν εἰσαγωγῶν καὶ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον μέρος εἰς δημιουργίαν πληθωρικῶν ἀνοιγμάτων διεξάγεται ἀναλόγως. Δυσχέριαν παρουσιάζει ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ποσοστοῦ ὑψώσεως τῶν τιμῶν κατὰ οἰκονο-μικὸν τομέα, λόγω τοῦ ὅτι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν αὐτὸν ἀπαιτεῖται ὄχι μόνον ἡ γνῶσις τῆς «διαθεσίμου προσφορᾶς» ἀγαθῶν τοῦ ἐν λόγω τομέως, ἀλλ' ὀλόκληρος ἡ κατὰ τὴν ὡς ἄνω περίσθον προσφερομένη ποσότης ἐντὸς τῆς ἀγο-ρᾶς. Ἄν ὑποθέσωμεν δηλαδὴ ὅτι Ζ ἦτο ἡ συνολικὴ ζήτησις δι' ἐν ἀγαθὸν πρὶν ἢ ἐκδηλωθῇ ἡ αὐξησις τῆς ζητήσεως. Π ἡ προσφορὰ καὶ Τ ἡ ἐπικρα-τοῦσα τιμῆς ἰσορροπίας ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$Z = \Pi T, \dots \dots (1)$$

τότε μία αὐξησις τῆς συνολικῆς ζητήσεως θὰ εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα μεταβολὴν τῆς τιμῆς κατὰ τι.

$$Z + \zeta = \Pi (T + \tau) \dots \dots (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἐν συσχετισμῶ μετὰ τὴν σχέσιν (1) λαμβάνομεν

$$\tau = \frac{\zeta}{\Pi} \dots \dots (3)$$

Οὕτω καταφαίνεται ὅτι διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ  $\tau$  (καὶ ἐξ αὐτοῦ τῆς ποσοστιαίας μεταβολῆς τῆς ἀρχικῆς τιμῆς  $T$ ) πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν συνο-

λικήν προσφοράν Π. Ὅσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ τελευταία τόσο μικρότερα θὰ εἶναι ἡ ποσοστιαία αὐξήσις τῶν τιμῶν. Λόγῳ ἑλλείψεως στατιστικῶν πληροφοριῶν περὶ τῆς ἐκάστοτε συνολικῆς προσφορᾶς ἀγαθῶν, ὁ ὑπολογισμὸς αὐτὸς παρουσιάζει σοβαρὰς δυσχερείας, αἱ ὁποῖαι ἐν τούτοις δύνανται νὰ περιορισθοῦν σημαντικῶς μὲ τὴν βελτίωσιν τοῦ συστήματος συλλογῆς στατιστικῶν πληροφοριῶν.

Ἐκ τοῦ καθορισμοῦ τῶν ποσοστῶν ὑψώσεως τῶν τιμῶν τῶν ἐν στενότητι εὐρίσκομένων ἀγαθῶν, εἶναι δυνατόν νὰ προσδιορισθῇ εὐκόλως ἡ συνολικὴ τιμαριθμικὴ μεταβολή. Ἐπειδὴ αἱ μεταβολαὶ τοῦ τιμαριθμοῦ ἐπηρεάζουσι τὴν οἰκονομικὴν πολιτικὴν τόσο τῶν δημοσίων ἀρχῶν ὅσον πολλακίς καὶ τῶν ἐργατοῦπαλληλικῶν ἐνώσεων ὁ ὑπολογισμὸς οὗτος δὲν στερεῖται ἐνδισφέροντος.

Ἡ μεγαλύτερα δυσχέρεια διὰ τὴν παροῦσαν ἀνάλυσιν εἶναι, ὡς ἐλέχθη καὶ εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, ἡ ἔλλειψις ἀσφαλῶν στοιχείων διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς «διαθεσίμου δυναμικότητος» ἐκάστου τομέως. Ἡ δυναμικότης εἶναι βασικὸν στοιχεῖον διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν πληθωρικῶν ἀνοιγμάτων καὶ τῶν ἐπιδράσεων ἐπὶ τῶν εἰσαγωγῶν καθ' ὅσον ἂν αὕτη εἶναι ἐπαρκὴς δυνάμεθα κατ' ἀρχὴν δι' αὐξήσεως τῆς ἐνεργοῦ ζήτησεως νὰ προκαλέσωμεν αὐξήσιν ἀντιστοίχως τῆς παραγωγῆς καὶ συνεπῶς νὰ ἀποφύγωμεν τὰς ἐπὶ τῶν τιμῶν καὶ τοῦ ἰσοζυγίου πληρωμῶν δυσμενεῖς συνεπεῖας. Δέον συνεπῶς νὰ τονισθῇ ὅτι τὸ βάρος τῆς ἔννοιας τοῦ ὄρου «διαθεσίμος δυναμικότης» πίπτει κυρίως ἐπὶ τῆς δυνατότητος αὐξήσεως τῆς προσφορᾶς ἀγαθῶν (ἢ ὑπηρεσιῶν) εἰς τὸν οἰκείον τομέα.

Κατόπιν τῶν ὅσων ἐλέχθησαν ἀνωτέρω προβαίνομεν ἤδη εἰς τὴν σχηματικὴν ἀνάλυσιν τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ τῶν ἐπιδράσεων τῆς αὐξήσεως τῆς ἐνεργοῦ ζήτησεως εἰς τὸν τομέα 1 κατὰ Α χρηματικὰς μονάδας.

Ἡ ἀνάλυσις αὕτη ἐκτίθεται εἰς τὸ συνημμένον εἰς τὸ τέλος τῆς παρουσίης «Σχέδιον Ὑπολογισμοῦ».

Παραθέτομεν ἤδη σχέδιον πίνακος συστηματικῆς συγκεντρώσεως τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ ὑπολογισμοῦ.

#### ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΙΣ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

(περίοδος ὑπολογισμοῦ X μῆνες)

##### 1. Ἐγχώριος Χρηματικὴ Ζήτησις

- |                               |       |
|-------------------------------|-------|
| 1) διὰ τὸ προϊόν τοῦ τομέως 1 | ..... |
| 2) διὰ τὸ προϊόν τοῦ τομέως 2 | ..... |
| 3) διὰ τὸ προϊόν τοῦ τομέως 3 | ..... |

Σύνολον

.....

## II. Ζήτησις δι' εισαγωγάς

1) Λόγω τῆς ροπῆς πρὸς εισαγωγὴν

1) 1. .... ) .....

2. .... ) (κατηγορία) .....

3. .... ) (εἰσαγομένων) .....

Σύνολον .....

2) Πρὸς ἀποφυγὴν τῶν ἐν παρ. IV.  
νομισματικῶν ἐπιδράσεων

1. .... ) (κατηγορία) .....

2. .... ) (εἰσαγομένων) .....

Σύνολον .....

3) Συνολικὴ ζήτησις δι' εισαγωγάς

1. .... ) (κατηγορία) .....

2. .... ) (εἰσαγομένων) .....

Σύνολον .....

## III. Συνολικὴ Χρηματικὴ Ζήτησις

1) ..... ) .....

2) ..... ) (κατηγορία ἀγαθῶν) .....

3) ..... ) .....

Σύνολον .....

## IV. Πληθωρικαὶ πιέσεις

1) Πληθωρικὸν ἄνοιγμα εἰς τὸν τομέα 1 .....

2) » » » » » 2 .....

3) » » » » » 3 .....

Συνολικὸν Πληθωρικὸν ἄνοιγμα .....

4) Ἐκατοστιαῖαι ἐπιδράσεις ἐπὶ τῶν τιμῶν εἰς τὸν τομέα 1 .....

5) » » » » » » » » 2 .....

6) » » » » » » » » 3 .....

Συνολικὴ τιμαριθμικὴ ὕψωσις .....

## V. Μικτὸς ὑπολογισμὸς

(Βάσει τῆς διαθέσιμου δυναμικότητος  
εἰς ἔξωτερικὸν συναλλάγμα)

1) Διαθέσιμος ποσότης ἔξωτερικοῦ συναλλ/τος δι' εισαγωγ. ....

2) Κάλυψις πληθωρικῶν ἄνοιγμάτων εισαγωγῶν ὡς ἀκολουθῶς .....

Πληθωρ. ἄνοιγμα τομέως 1 κατὰ  $\chi^0_0$

» » » 1 »  $\psi^0_0$

3) Πληθωρικαὶ πιέσεις (ὑπολογισμὸς βάσει τῶν ἀκαλύπτων  
πληθωρικῶν ἄνοιγμάτων)



## IV. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἡ ἀνωτέρω περιγραφεῖσα μέθοδος ἀναλύσεως ἐσχεδιάσθη διὰ τὴν παρακολούθησιν βραχυχρονίων νομισματικῶν μεταβολῶν καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἑλληνικῶν οικονομικῶν συνθηκῶν. Ἡ συνήθης ἀντιμετώπισις προβλημάτων εἰς τὰ ὁποῖα ὑπεισέρχονται διακλαδικαὶ σχέσεις ἐπιδιώκεται διὰ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος ἐξισώσεων τὸ ὁποῖον παριστᾶ τὰς ἐν λόγῳ σχέσεις (1). Ἡ μέθοδος αὕτη — χαρακτηρισζομένη συνήθως ὡς «αὐτόματος» λόγῳ τῆς μαθηματικῆς φύσεώς της — ἐφηρμόσθη ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ Leonitzi καὶ τῶν συνεργατῶν του, ἐπὶ προβλημάτων σχεδιασμοῦ τῆς Ἀμερικανικῆς Οἰκονομίας. Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα ἐνδιαφέρει κυρίως νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀρμονικότης (Consistency) τῶν οικονομικῶν μεγεθῶν εἰς περίπτωσιν μεταβολῶν τῆς καταναλώσεως ἢ τῶν ἐπενδύσεων καὶ ὀλιγώτερον αἱ νομισματικαὶ διαταραχαὶ αἱ ὁποῖαι τυχὸν συνοδεύουν τὰς τοιαύτας μεταβολάς. Ἡ ἐνταῦθα ἐφαρμοζομένη μέθοδος τὴν ὁποῖαν θὰ χαρακτηρίσωμεν «ἀνιχνευτικὴν» — ἐπειδὴ δὲν δίδει αὐτόματον ἀπάντησιν εἰς τὸ πρόβλημα, ἀλλ' ἀκολουθεῖ διαδικασίαν ἀναλύσεως κατὰ περιόδους καὶ βαθμιαίας προσεγγίσεως εἰς τὴν τελικὴν ἀπάντησιν — παρουσιάζει σοβαρὰ πλεονεκτήματα ἐναντι τῆς αὐτομάτου μεθόδου:

α) Κατ' αὐτὴν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ διαθέσιμος προσφορὰ τῶν ἀγαθῶν εἰς ἕκαστον τομέα καὶ συγκρίνεται αὕτη πρὸς τὴν ἀθροιστικὴν κατὰ κύκλον ἀναλύσεως ζήτησιν τῶν ἀγαθῶν αὐτῶν. Οὕτω παρέχεται ἡ δυνατότης ἀνιχνεύσεως τῶν «πληθωρικῶν ἀνοιγμάτων» ἢ τῶν ἐπιδράσεων ἐπὶ τοῦ ἰσοζυγίου πληρωμῶν εἰς τὰ σημεῖα ἐκεῖνα τῆς οἰκονομίας ὅπου ἐμφανίζεται διάστασις προσφορᾶς καὶ ζητήσεως. Ἡ αὐτόματος μέθοδος λόγῳ τῆς μαθηματικῆς φύσεώς της ὑστερεῖ σοβαρῶς ἐνταῦθα. Καὶ ἂν ἀκόμη ὑποτεθῇ ὅτι λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν κατ' αὐτὴν ἡ διαθέσιμος προσφορὰ τῶν ἀγαθῶν, σύγκρισις δύναται νὰ γίνῃ μόνον ἐκ τῶν ὑστέρων. Οὕτω ἂν π. χ. ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ζήτησις ἐνὸς ἀγαθοῦ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς περιόδου ὑπολογισμοῦ εἶναι κατὰ 50 μονάδας μεγαλυτέρα τῆς προσφορᾶς τοῦ ἀγαθοῦ αὐτοῦ καὶ τὸ ἔλλειμμα ἱκανοποιεῖται δι' εἰσαγωγῶν, τότε ἡ ὡς ἂν ζήτησις ἀποτελεῖ «διαρροὴν» διὰ τὴν ἐγχώριον οἰκονομίαν. Κατὰ συνέπειαν αἱ πολλαπλασιαστικαὶ ἐπιδράσεις αὐτῆς δὲν πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν κατὰ τὸν ὑπολογισμόν (2). Εἰς τὴν ἀνιχνευτικὴν μέθοδον, εἰς τὴν ὁποῖαν ἐφαρμόζεται συνεχῆς σύγκρισις ζητήσεως καὶ προσφορᾶς εἶναι εὐκόλον νὰ γίνῃ ἡ πρὸς τοῦτο ἀναγκαία τροποποίησις τοῦ ὑπολογισμοῦ. Τοιαύτη τροποποίησις δὲν εἶναι δυνατὴ εἰς τὴν αὐτόματον μέθοδον καθ' ὅσον κατ' αὐτὴν πρέπει πρῶτον νὰ λυθῇ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων δηλαδὴ νὰ ὑπολογισθοῦν ὁ λαί αἱ πολλαπλασιαστικαὶ ἐπιδράσεις τῶν μεταβλητῶν (κονδυλίων ζητήσεως) καὶ κατόπιν νὰ γίνῃ σύγκρισις μὲ τὰς ὑπαρχούσας ποσότητας ἀγαθῶν. Κατὰ συνέ-

1) Τὸ βασικὸν στάδιον ἐπεξεργασίας τοῦ συστήματος εἶναι ἡ λεγομένη «ἀντιστροφή» τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν (Inversion of the Matrix) ἣτις οικονομικῶς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μήτραν ἀλληλεξαρτήσεως.

2) Αἱ ἐπιδράσεις αὗται ἐμφανίζονται προφανῶς εἰς τὰς οἰκονομίας τοῦ ἐξωτερικοῦ.



πειαν τὰ ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς αὐτομάτου μεθόδου προκύπτοντα ἀποτελέσματα δυνατόν νὰ ἐμφανίζουσι πλασματικά πληθωρικά ἀνοίγματα.

β) Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς παρούσης μεθόδου δὲν ἀπαιτεῖται πλήρης μῆτρα ἀλληλεξαρτήσεως διὰ τὴν οἰκονομίαν ὡς συμβαίνει μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς αὐτομάτου μεθόδου. Ἄρκει νὰ ὑπάρχη ἀνάλυσις τῶν κυριωτέρων τομέων τῆς οἰκονομίας.

γ) Δὲν εἶναι ἀναγκαῖα ἡ χρησιμοποίησις ἠλεκτρονικῶν ἀριθμομηχανῶν καὶ συνεπῶς ἀποφεύγονται αἱ δαπάναι ὑπολογισμοῦ. Ἄνειδίκευτος ὑπάλληλος δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις μὲ τὴν βοήθειαν συνήθων πολλαπλασιαστικῶν μηχανῶν (\*). Ἐπίσης ὁ χρόνος τοῦ ὑπολογισμοῦ εἶναι σχετικῶς βραχύς.

2) Ἐλέχθη ὅτι ἡ ἀνωτέρω μέθοδος δύναται νὰ χρησιμοποιηθῆ διὰ βραχυχρονίους προβλέψεις (περίοδος ὑπολογισμοῦ ἀπὸ 3 μῆνας ἕως 1 ἔτος). Ὑποτίθεται ὅτι βραχυχρονίως δὲν μεταβάλλονται σοβαρῶς οἱ χρησιμοποιούμενοι συντελεσταὶ ἤτοι ἡ διάρθρωσις τοῦ παραγωγικοῦ κόστους καὶ ἡ ποσοστιαία κατανομὴ τῶν καταναλωτικῶν δαπανῶν. Λαμβάνεται βεβαίως πρόνοια προσαρμογῆς τῶν ἤδη συλλεγέντων στατιστικῶν στοιχείων εἰς τὰς κρατούσας συνθήκας κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς περιόδου ὑπολογισμοῦ (\*), ἀλλ' ὁ ὑπολογισμὸς εἶναι γραμμικός, ὑποτίθεται δηλαδὴ σταθερότης τῆς διαρθρώσεως τοῦ κόστους καὶ καταναλωτικῶν δαπανῶν κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς περιόδου ὑπολογισμοῦ.

Ἡ γραμμικότης τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐπιτρέπει τὴν ταυτόχρονον ἀνάλυσιν περισσοτέρων τοῦ ἑνὸς κονδυλίων ἐνεργοῦ ζητήσεως. Οὕτω θὰ ἦτο δυνατόν εἰς τὸ ἀνωτέρω γενικὸν παράδειγμα νὰ ἀναλύσωμεν παραλλήλως καὶ ἓν κονδυλίον π.χ. Β<sub>2</sub> καλύπτον ἐξοδα παραγωγῆς τοῦ τομέως 2 κ.λ.π. Ἡ παράλληλος ἀνάλυσις πολλῶν κονδυλίων ἐνεργοῦ ζητήσεως εἶναι ἀναγκαῖα εἰς περιπτώσεις ὑπολογισμοῦ τῶν ἐπιδράσεων τῆς πιστωτικῆς πολιτικῆς τῆς Κεντρικῆς Τραπεζῆς, ἡ ὁποία χρηματοδοτεῖ ταυτοχρόνως περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς οἰκονομικοὺς κλάδους διὰ τῆς χρησιμοποίησεως τοῦ ἐκδοτικοῦ προνομίου. Λόγω ὁμοιογενείας πολλῶν ἐκ τῶν κονδυλίων ζητήσεως (ἢ εἰσοδήματος) τῆς ἀναλύσεως (π.χ. τὸ κονδυλίον «ἀμοιβαὶ ἐξ ἐργασίας» τοῦ τομέως 1 εἶναι ὁμοιογενὲς πρὸς τὸ ἀνάλογον κονδυλίον τοῦ τομέως 2 κ.τ.λ.) δυνάμεθα νὰ συμπύκνωσωμεν διὰ προσθέσεως τὸν ἀριθμὸν τῶν κονδυλίων ζητήσεως πρὸς ἀπλούστευσιν τῆς ἀναλύσεως (\*). Ἡ σύμπτυξις αὕτη ἐκφράζει τὴν γνωστὴν εἰς τὰς

1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πολλαπλασιασμῶν κατὰ τὴν παρούσαν μέθοδον εἶναι περίπου  $Kn^2$  ὅπου  $K$  εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν κύκλων ἀναλύσεως καὶ  $n$  ὁ ἀριθμὸς τῶν τομέων τῆς οἰκονομίας οἱ ὅποιοι λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν. Κατὰ τὴν αὐτόματον μέθοδον ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλαπλασιασμῶν εἶναι περίπου  $n^3$ . Ἐπειδὴ συνήθως  $n > K$ , ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πολλαπλασιασμῶν εἶναι μικρότερος κατὰ τὴν παρούσαν μέθοδον.

2) Τοιαύτη προσαρμογὴ εἶναι εὐκόλουν νὰ γίνῃ ἂν ὑπάρχουν αἱ ἀπαιτούμεναι πληροφορίαι.

3) Ἡ διαδικασία συμπύξεως τῶν κονδυλίων ζητήσεως ὑποδεικνύεται εἰς τὸν «πίνακα ὑπολογισμοῦ» διὰ τοῦ σημείου —→

γραμμικός αναλύσεις αρχήν της προσθετικότητας (Additivity principle).

3. 'Η σχεδιασθείσα ανάλυσις είναι όριακή, υπό την έννοιαν ότι δέν λαμβάνεται ύπ' όψιν κατ' αυτήν ή συνολική ένεργός ζήτησις (καί προσφορά) έντός της οίκονομίας αλλά μόνον ή αύξησις της ένεργού ζήτησεως και αί εκ ταύτης επίδράσεις. Κατά πόσον ό τρόπος αυτός αντιμετώπισεως είναι ό πλέον ένδεδειγμένος θα δείξη ή καλλιτέρα γνώσις της στατιστικής πραγματικότητας.

4. Ειδική ανάλυσις τών έξαγωγών ως κλάδου παραγωγής δέν απαιτείται. Είναι όμως σκόπιμον να λαμβάνωνται ύπ' όψιν αί έξαγωγαί ως πηγή αύξησεως της ένεργού ζήτησεως. 'Υπό την αυτήν έννοιαν δέον να λαμβάνεται ύπ' όψιν εις την ανάλυσιν και ό Κρατικός Τομεύς. 'Ενταύθα δίδεται πρός τό παρόν περισσοτέρα έμφασις εις τούς οίκονομικούς τομείς, οί όποιοι συνδέονται άμέσως με την πιστωτικήν πολιτικήν της Κεντρικής Τραπεζής.

5. 'Εν σοβαρόν πρόβλημα κατά την εφαρμογήν της άνωτέρω αναλύσεως είναι να προσδιορισθ ή ό βαθμός έλαστικότητας της προσφορας αγαθών εκάστου τομέως της οίκονομίας, έναντι τών μεταβολών της ζήτησεως δια τά αγαθά ταύτα. 'Η άνωτέρω θεθείσα υπόθεσις, ότι έφ' όσον τό επιτρέπει ή διαθέσιμος παραγωγική δυναμικότης ή αύξησις της ζήτησεως θα προκαλέση αντίστοιχον επέκτασιν της προσφορας, άποτελεί μόνον μίαν πρώτην προσέγγισιν τοϋ προβλήματος. Ειν την πράξιν είναι δυνατόν ή αύξηθείσα ζήτησις να ίκανοποιηθ ή από τά τρέχοντα άποθέματα ή δέ αντικατάστασις αύτών να μη λάβη χώραν έντός της περιόδου ύπολογισμού. Τοϋτο σημαίνει ότι ή ύποτιθεμένη περαιτέρω αύξησις της ζήτησεως (και τών εισοδημάτων) δέν είναι πραγματική. 'Επίσης είναι ένδεχόμενον ή αύξηθείσα ζήτησις να μεταβάλη μόνον τας τιμάς τών αγαθών και συνεπώς να αύξήση τά κέρδη τών επιχειρηματιών, όποτε ένδέχεται και πάλιν να μη προκληθοϋν δευτερογενείς επιδράσεις εις άλλους κλάδους της οίκονομίας ('). Το θέμα δέον να έξετασθ ή επί τη βάσει τών πραγματικών συνθηκών της οίκονομίας. 'Η έπαρκής γνώσις τών συνθηκών αύτών απαιτεί χρόνον. Προσωρινώς, ή άβεβαιότης τοϋ συστήματος είναι δυνατόν να περιορισθ ή άν διερευνηθ ή έλαστικότης της προσφορας αγαθών εις τούς σπουδαιοτέρους οίκονομικούς τομείς (π.χ. κλωστοϋφαντουργίαν, χημικός βιομηχανίας κ.λ.π.). Πρός τοϋτο θα απαιτηθοϋν βοηθητικά μελέται. Γενικώς βοηθητικά μελέται τοιαύτης φύσεως θα είναι επίσης απαραίτητοι δια την κάλυψιν τών άναποτρέπτων κενών της παρούσης αναλύσεως.

1) Π.χ. αί μονοπωλιακά συνθήκαι τών επιχειρήσεων άσκοϋν σημαντικήν επίδρασιν επί της έλαστικότητας προσφορας τών διαφόρων τομέων της οίκονομίας.

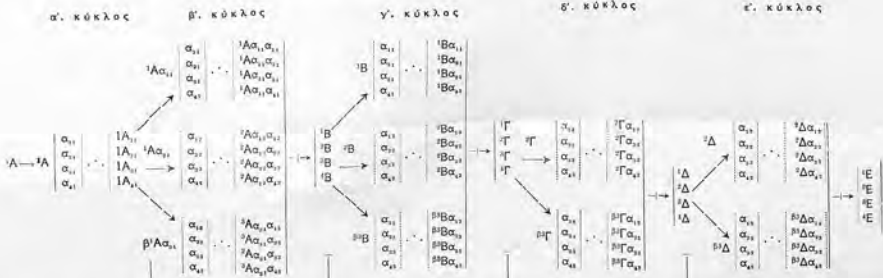
# Σ Χ Ε Δ Ι Ο Ν   Υ Π Ο Λ Ο Γ Ι Σ Μ Ο Υ

- $\alpha_i$  = προϋν του τομέα  $i$                       ( $i = 1, 2, 3, 4$ )
- $\alpha_\zeta$  = στήλη κόστους του τομέα  $\zeta$                       ( $\zeta = 1, 2, 3$ )
- $\alpha_\zeta$  = στοιχείον κόστους του τομέα  $\zeta$ , δεκνόν την υπό του τομέα τούτου καταβαλλομένην όξιν εις τον τομέα  $i$  κατά μονάδα παραγωγής.
- $'A$  = ή αρχική αύξησις της ζήτησιως καταθυνομένη εις τον τομέα  $i$ .
- $'B, 'Γ, 'Δ, \dots$  = ή συνολική ζήτησις των αγαθών του τομέα  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) κατά τον δεύτερον, τρίτον, τέταρτον  $\dots$  κύκλου αναλύσεως.
- $X$  = περίοδος υπολογισμού (εις μήνας)
- $\beta$  = ροπή προς καταπόλευσιν
- $\dots$  = συνεχώς
- $\rightarrow$  = αναλύεται εις
- $\dashrightarrow$  = συμπύσσεται εις

## Μ ή τ ρ α   δ ή λ λ η λ ε ξ α ρ τ η σ ε ω ς

$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$	
$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$	
$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$	
$\alpha_{41}$	$\alpha_{42}$	$\alpha_{43}$	

'Εάν  $'A = 'A_i$  ή κατά κύκλον ζήτησις των επί μέρους αγαθών δά εμφανισθή ώς ή τέ καταπύσσεται αναλύσει:



Επιτόκιστος επί του εισαγωγών	Διαθέσιμα εισαγωγών και αναγκασίας	ΑΠΡΟΣΤΙΧΗ ΖΗΤΗΣΙΣ					
			1	$'A_{\alpha_{11}}$	$'A_{\alpha_{11}} + 'B = Z_1$	$Z_1 + 'Γ = Z_2$	$Z_2 + 'Δ = Z_3$
2	$'A_{\alpha_{21}}$	$'A_{\alpha_{21}} + 'B = Z_2$	$Z_2 + 'Γ = Z_2$	$Z_2 + 'Δ = Z_2$	$Z_2 + 'E = Z_{11}$		
3	$'A_{\alpha_{31}}$	$'A_{\alpha_{31}} + 'B = Z_3$	$Z_3 + 'Γ = Z_3$	$Z_3 + 'Δ = Z_3$	$Z_3 + 'E = Z_{11}$		
1Π	Μή δύν. εισαγωγών λόγω έλλείψεως όσον επί ζήτησιως δάσ. Πιθ. άπογνώστα		$Z_3 - \Pi_1 = 0$	$Z_3 - \Pi_1 = \delta_1$	$Z_3 - \Pi_1 = \delta_1$	$Z_3 - \Pi_1 = \delta_1$	
2Π							
3Π							
Επιτόκιστος επί του εισαγωγών	1	*Άδραστεύσις προς άπογνώγην πληθωρισμού	$'A_{\alpha_{11}}$	$'A_{\alpha_{11}} + 'B = M_1$	$M_1 + 'Γ + 'Γ = M_1$	$M_1 + 'Δ + 'Δ = M_1$	$M_1 + 'E + 'E = M_1$
	2	*Άδρασ. βάσει ροπήσ προς εισαγωγών	$'A_{\alpha_{21}}$	$'A_{\alpha_{21}} + 'B = M'_1$	$M_1 + 'Γ = M'_1$	$M_1 + 'Δ = M'_1$	$M_1 + 'E = M'_1$
	3	Μικτή περίπτωσης					

Σ η μ ε ι ώ σ η ς : 1) 'Ο ύπολογισμός στασιωά εις τον  $\gamma'$  κύκλον αναλύσεως είτε βιάσι τδ προς άνάλυσιν καθόλου 2E και 3E είναι μή ρύσθησι είτε βιάσι ό  $\epsilon'$  κύκλου αναλύσεως έμνησι τδ περιόδου της περιόδου υπολογισμού.  
 2) 'Η χρησιμοποίησις των συνόλων  $Z, \delta, M$  και  $M'$  είναι προφανή και ή έκδοσις δέξι των όξινωσις εκ του (άλληθρυνό) άδραστεύσιτος. Είναι επίσης φανερόν ότι  $\delta < \delta < \delta_1$ .  
 3) Αί κειμενικαί  $Z - \Pi$  κειμενικαί κατά κύκλον αναλύσεως και τωμά δημιουργώμενα πληθωρικά άναγκασια ή  $\delta$  δύναισι έλκερις ή ύπολογισθή τδ συνολικόν πληθωρικό άναγκασι δ' άδραστου την περίοδον ύπολογισμού. Αι όσολι διαφοράι καθορίζου άδραστουσις αύξισιν των εισαγωγών ή των μή ή άδραστουσις λόγω της ροπήσ δ' εισαγωγών όσον και λόγω των ήθρικών εισαγωγών προς άπογνώγην πληθωρισμού, καταγράφονται εις τδς τάξιταισι σφράς των αναλύσεως.

# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΛΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

Δ. Π. ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΑ

## I. Εισαγωγή

Είς τὴν παροῦσαν Ἔργασίαν Ἐπιχειρεῖται μίᾳ συγκριτικῇ ἐξέτασιν τῶν κλασσικῶν ὑποδειγμάτων γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας καὶ ἐκείνων τὰ ὁποῖα κατεσκευάσθησαν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀρχῶν τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως. Ἡ προσπάθεια στρέφεται κυρίως εἰς τὴν συγκριτικὴν ἀξιολόγησιν δύο βασικῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας, τοῦ συστήματος Walras καὶ τοῦ συστήματος Leontief. Εἰς τὰ δύο αὐτὰ συστήματα δίδεται μεγαλυτέρα προσοχὴ διότι τὸ μὲν πρῶτον ἀποτελεῖ τὸ σπουδαιότερον εἰς τὸ εἶδος τοῦ ἐξ ὅλων τῶν κλασσικῶν ὑποδειγμάτων γενικῆς ἰσορροπίας τὸ δὲ δεύτερον εἶναι τὸ πλέον ἀντιπροσωπευτικὸν ἐκ τῶν συγχρόνων ὑποδειγμάτων τῆς γραμμικῆς ἀναλύσεως.

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην θίγονται ἀπλῶς τὰ βασικώτερα σημεῖα τὰ ἀφορῶντα τὸ ἐν λόγῳ θέμα χωρὶς νὰ ἐπεκτεινώμεθα εἰς ἀτελευτήτους οἰκονομικὰς καὶ μαθηματικὰς ἀναλύσεις.

## II. Ἡ Ἔννοια τῆς Γενικῆς Οἰκονομικῆς Ἰσορροπίας

Πρὶν ἢ εἰσέλθωμεν εἰς τὴν εἰδικωτέραν ἐξέτασιν τῶν συστημάτων Walras καὶ Leontief εἶναι σκόπιμον νὰ καθορίσωμεν, ἐν ὀλίγοις, τὴν ἔννοιαν τῆς Γενικῆς Οἰκονομικῆς Ἰσορροπίας.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν οἰκονομίαν ὑφίστανται πολυπληθεῖς ποσοτικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν οἰκονομικῶν στοιχείων, ἢ τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν, ὡς συνήθως λέγονται, αἱ ὁποῖαι ἀπαρτίζουν τὸ οἰκονομικὸν σύστημα. Πρὸς μεγαλυτέραν εὐκολίαν τὰς ποσοτικὰς αὐτὰς σχέσεις δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν διὰ μαθηματικῶν συναρτήσεων. Οὕτω τὴν σχέσιν ἢ ὁποῖα ὑφίσταται μεταξὺ τῆς ζητουμένης ποσότητος  $d_\alpha$  τοῦ ἀγαθοῦ  $\alpha$  καὶ τῆς τιμῆς αὐτοῦ  $P_\alpha$  ἐκφράζομεν διὰ τῆς συναρτήσεων :

$$d_\alpha = f(P_\alpha)$$

Ἐπίσης τὴν ὑφισταμένην σχέσιν μεταξὺ τῆς ζητουμένης ποσότητος  $D_\alpha$  καὶ τῶν τιμῶν ὅλων τῶν ἀγαθῶν τῆς οἰκονομίας,  $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma, \dots, P_n$ , δυνάμεθα μαθηματικῶς νὰ ἐκφράσωμεν διὰ τῆς πολυμεταβλητῆς συναρτήσεως :

$$D_\alpha = f(P_\alpha, P_\beta, P_\gamma, \dots, P_n)$$

Ἡ μεταβολὴ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἐκ τῶν ἀνεξαρτήτων οἰκονομικῶν μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι εἰσέρχονται εἰς δεδομένην ποσοτικὴν σχέσιν ἢ εἰς δεδομένον σύστημα ποσοτικῶν σχέσεων συνεπάγεται μεταβολὴν τῆς ἐξηρητημένης μεταβλητῆς ποσότητος κατ' ὠρισμένον νόμον. Εἰς τὴν Οἰκονομικὴν πραγματικότητα βεβαίως αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων συνεχῶς ἀλλάσσουσι λόγω τῆς ἐπενεργείας ἐνδογενῶν ἢ ἐξωγενῶν παραγόντων. Δυνάμεθα, ἐν τούτοις, νὰ ὑποθέσωμεν πρὸ στιγμῆν ὅτι δοθεῖσα ποσοτικὴ σχέση εἰς τὸ δοθὲν σύστημα ποσοτικῶν σχέσεων εἶναι τοιοῦτον ὥστε νὰ μὴ παρατηρηθῆται ἐνδογενεὴς τάσις ἀλλαγῆς τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν αὐτοῦ ποσοτήτων, ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λέγομεν ὅτι ὑφίσταται ἰσορροπία εἰς τὴν δεδομένην αὐτὴν ποσοτικὴν σχέσιν ἢ εἰς τὸ συγκεκριμένον τοῦτο σύστημα ποσοτικῶν σχέσεων.

Τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἰσορροπίας εἰς τὰς σχέσεις μεταξύ τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος θέτομεν, ὡς εὐκόλως δύναται ν' ἀντιληφθῆ τις, πρὸς τὸν σκοπὸν διευκολύνσεως τῆς μελέτης τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων. Ἐὰν ἐξ ἄλλου, κατὰ τὴν μελέτην τῶν φαινομένων τούτων χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον τῆς στατικῆς ἀναλύσεως, ὁμιλοῦμεν περὶ στατικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας ἐνῶ ἐὰν χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον τῆς δυναμικῆς ἀναλύσεως, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς διαχρονικὰς μεταβολὰς, ὁμιλοῦμεν περὶ δυναμικῆς ἰσορροπίας.

Ἰδιαιτέραν σημασίαν παρουσιάζει τὸ ζήτημα ἐὰν ἡ ὑπόθεσις τῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας θὰ πρέπει νὰ τίθεται διὰ δεδομένην πρακτικὴν σχέσιν μεταξύ τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν ἢ δι' ὀλόκληρον τὸ οἰκονομικὸν σύστημα. Ἐλέχθη ἀνωτέρω ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων τῆς οἰκονομίας εἶναι μέγας καὶ ἐπομένως μέγας εἶναι καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑφισταμένων ἐντὸς τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος ποσοτικῶν σχέσεων. Δυνάμεθα κατ' ἀρχὴν διὰ δοθεῖσαν ποσοτικὴν σχέσιν ἢ διὰ δοθὲν σύστημα ποσοτικῶν σχέσεων, τοῦ ὁποῖου μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ μελέτη, νὰ θέσωμεν τὴν ὑπόθεσιν τῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας. Πρὸς τοῦτο εἴμεθα ἀναγκασμένοι νὰ ἀπομονώσωμεν τὰς μεταβλητὰς αἱ ὁποῖαι εἰσέρχονται εἰς τὴν ἐν λόγω ποσοτικὴν σχέσιν ἢ τὸ σύστημα ποσοτικῶν σχέσεων ἐκ τῶν λοιπῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Τὰ οὕτω προκύπτοντα ὑποδείγματα καλοῦνται συστήματα μερικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας. Ταῦτα εἶναι βεβαίως χρήσιμα διὰ τὴν μελέτην τῶν ἐπὶ μέρους οἰκονομικῶν φαινομένων, παρουσιάζουν ἐν τούτοις σοβαρὰ μειονεκτήματα. Ἡ ἀπομόνωσις δοθέντων μεταβλητῶν ποσοτήτων ἐκ τοῦ ὑπολοίπου οἰκονομικοῦ συστήματος σημαίνει ὅτι δεχόμεθα τὸν μὴ ἐπηρεασμὸν τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν, ἐκ τῶν μεταβολῶν τῶν λοιπῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος. Πρὸς ἀποκλεισμὸν ἀκριβῶς μιᾶς τοιαύτης ἐπιδράσεως τίθεται εἰς τὰ συστήματα μερικῆς ἰσορροπίας ἡ γνωστὴ ὑπόθεσις «*ceteris paribus*». Ἡ κατ' αὐτὸν ὁμως τὸν τρόπον μελέτη τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων δὲν εἶναι βέβαιον ὅτι ὀδηγεῖ πάντοτε εἰς ὀρθὰ συμπεράσματα. Εἰς τὴν οἰκονομικὴν πραγματικότητα ὑφίσταται σχέσις ἀλληλεξαρτήσεως καὶ ἀλληλεπιδράσεως μεταξύ πάντων τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Ἡ ἀπομόνωσις ὠρισμένων μεταβλητῶν ποσοτήτων ἀποτελεῖ σοβαρὰν ἀφαίρεσιν ἐκ τῆς πραγματικότητος.



Ἐνταῦθα γεννᾶται τὸ ζήτημα κατὰ ποῖον τρόπον θὰ καθίστατο δυνατὴ ἡ μελέτη τῶν οικονομικῶν φαινομένων λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς ἀλληλεξαρτήσεως καὶ ἀλληλεπιδράσεως μεταξὺ πάντων τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων τοῦ οικονομικοῦ συστήματος. Τοῦτο θὰ ἠδύνατο νὰ ἐπιτευχθῆ διὰ τῆς κατασκευῆς ἑνὸς συστήματος οικονομικῆς ἰσορροπίας περιλαμβάνοντος τὰς ποσοτικὰς σχέσεις μεταξὺ πασῶν τῶν μεταβλητῶν τῆς οἰκονομίας, συγκεκριμένως δὲ τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν τιμῶν πάντων τῶν ἀγαθῶν καὶ παραγωγικῶν μέσων καὶ τῶν ποσοτήτων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι προσφέρονται καὶ ζητοῦνται ὑπὸ πάντων τῶν παραγωγῶν καὶ καταναλωτῶν. Ἐν τοιαύτης μορφῆς σύστημα περιλαμβάνον τὴν ἀλληλεξάρτησιν πασῶν τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν τῆς οἰκονομίας ὑπὸ συνθήκας ἰσορροπίας καλεῖται Σύστημα Γενικῆς Οἰκονομικῆς Ἴσορροπίας. Δι' ἐνὸς τοιοῦτου συστήματος δύνανται νὰ τεθῆ ὑπὸ τὸν Ἐπιστημονικὸν ἀναλυτικὸν ἔλεγχον ἡ πληθώρα τῶν οικονομικῶν μεταβλητῶν καὶ αἱ μεταξὺ τῶν ποσοτικῶν σχέσεις, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ βασικὴν προϋπόθεσιν τῆς μελέτης τῶν οικονομικῶν φαινομένων.

### III. Τὸ Tableau Économique τοῦ Fr. Quesnay

Ἡ πρώτη ἰδέα ἑνὸς συστήματος γενικῆς οικονομικῆς ἰσορροπίας εὕρισκεται εἰς τὸ Tableau Économique τοῦ Fr. Quesnay τὸ ὁποῖον ἐγράφη περὶ τὰ 1760. Τὸ Tableau Économique ἐδείκνυε δι' ὑποθετικῶν ἀριθμῶν τὸ ρεῦμα τῶν συνολικῶν ἐσόδων καὶ δαπανῶν ἀφ' ἐνὸς καὶ τὸ ρεῦμα τοῦ συνόλου τῶν ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν ἀφ' ἑτέρου μεταξὺ τῶν σπουδαιότερων κλάδων τῆς Γαλλικῆς Οἰκονομίας. Σκοπὸς τοῦ Quesnay, ὡς φυσιοκράτου, ἦτο ν' ἀποδείξη διὰ τοῦ πίνακος του ὅτι μόνον ὁ κλάδος τῆς γεωργίας παρέχει καθαρὸν προϊόν ἐνῶ οἱ ἄλλοι κλάδοι τῆς Οἰκονομίας εἶναι στεῖροι. Μεγάλην ὁμως σημασίαν διὰ τὴν μεταγενεστέραν Οἰκονομικὴν σκέψιν εἶχεν ὅχι ὁ ἀρχικὸς σκοπὸς κατασκευῆς τοῦ πίνακος ἀλλὰ ἡ χρησιμοποιηθεῖσα μέθοδος πρὸς κατασκευὴν αὐτοῦ. Τὸ Tableau Économique τοῦ Quesnay παρέσχε διὰ πρώτην φοράν ποσοτικὴν ἔκφρασιν εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀλληλεξάρτησιν τῶν συνολικῶν οικονομικῶν μεταβλητῶν.

### IV. Τὸ σύστημα γενικῆς Ἴσορροπίας τοῦ Walras

Τὸ πρῶτον πλήρες θεωρητικὸν σύστημα γενικῆς Οἰκονομικῆς Ἴσορροπίας κατασκευάσθη ὑπὸ τοῦ Walras τὸ ἔτος 1874. Βασικὸς σκοπὸς τοῦ Walras ἦτο νὰ καταδείξη ὅτι μεταξὺ πάντων τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων τοῦ οικονομικοῦ συστήματος ὑπάρχει σχέσις ἀλληλεξαρτήσεως καὶ ἀλληλεπιδράσεως. Πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ αὐτοῦ κατεσκεύασεν οὗτος μαθηματικὸν σύστημα τοῦ ὁποῖου αἱ ἐξισώσεις παρίστανον ποσοτικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν τῆς Οἰκονομίας. Τὸ σύστημα Walras ἀποτελεῖ διατύπωσιν τοῦ κατωθι προβλήματος:

Ἔστω ὅτι εἰς δεδομένην περίοδον μία οἰκονομία διαθέτει τὰ παραγωγικὰ μέσα:



$$\kappa, \lambda, \mu, \dots, \pi,$$

Διὰ τοῦ συνδυασμοῦ αὐτῶν παράγει τὰ ἀγαθὰ:

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi$$

Τὰ ἀγαθὰ ταῦτα καταναλίσκονται πάντα κατὰ τὴν περίοδον ἐντὸς τῆς ὁποίας παρήχθησαν.

Διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐξ ἑκάστου τῶν ὡς ἄνω ἀγαθῶν χρησιμοποιοῦνται αἱ ἐξῆς ποσότητες παραγωγικῶν μέσων:

$$\alpha_{\kappa}, \beta_{\kappa}, \gamma_{\kappa}, \dots, \pi_{\kappa}$$

$$\alpha_{\lambda}, \beta_{\lambda}, \gamma_{\lambda}, \dots, \pi_{\lambda}$$

$$\alpha_{\mu}, \beta_{\mu}, \gamma_{\mu}, \dots, \pi_{\mu}$$

$$\dots$$

$$\alpha_{\pi}, \beta_{\pi}, \gamma_{\pi}, \dots, \pi_{\pi}$$

Αἱ ποσότητες αὗται, ἐκ τῶν προτέρων γνωσταί, καλοῦνται συνθήκως τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ παραγωγῆς.

Ζητεῖται ποῖα θὰ εἶναι, ὑπὸ συνθήκας στατικῆς ἰσορροπίας τῆς οἰκονομίας:

1) Αἱ προσφερόμεναι ποσότητες παραγωγικῶν μέσων:

$$O_{\kappa}, O_{\lambda}, O_{\mu}, \dots, O_{\pi}$$

2) Αἱ ζητούμεναι ποσότητες ἐτοιμῶν ἀγαθῶν:

$$D_{\alpha}, D_{\beta}, D_{\gamma}, \dots, D_{\pi}$$

3) Αἱ τιμαὶ τῶν παραγωγικῶν μέσων:

$$P_{\kappa}, P_{\lambda}, P_{\mu}, \dots, P_{\pi}$$

4) Αἱ τιμαὶ τῶν ἐτοιμῶν ἀγαθῶν:

$$P_{\alpha}, P_{\beta}, P_{\gamma}, \dots, P_{\pi}$$

ὑποτιθεμένου ὅτι:

α) Ἡ οἰκονομία λειτουργεῖ ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ.

β) Οἱ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ παραγωγῆς εἶναι σταθεροί.

γ) Δὲν παράγονται ἐνδιάμεσα ἀγαθὰ, ἀλλ' ἀπ' εὐθείας ἀγαθὰ τελικῆς καταναλώσεως.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ὁ Walras κατεσκεύασε κατ' ἀρχὴν τὰ συστήματα ἐξισώσεων τῆς ἰσορροπίας τῶν ἐπὶ μέρους ἀτομικῶν οἰκονομιῶν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὀριακῆς χρησιμότητος αὐτῶν δι' ἑκάστον ἀγαθὸν ἢ παραγωγικὸν μέσον, δι' ἀθροίσεως δὲ αὐτῶν ἔλαβε τὰ κάτωθι τέσσαρα συστήματα ἐξισώσεων δι' ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν:

. Τὰς συναρτήσεις προσφερομένων ποσοτήτων καὶ τιμῶν τῶν παραγωγικῶν μέσων: Δι' αὐτῶν ὀρίζεται ὅτι ἡ προσφερομένη ποσότης ἑκάστου παραγωγικοῦ μέσου ἀποτελεῖ συνάρτησιν τῶν τιμῶν πάντων τῶν παραγωγικῶν μέσων καὶ ἐτοιμῶν ἀγαθῶν:

$$\begin{aligned}
 O_{\kappa} &= F(P_{\kappa}, P_{\lambda}, P_{\mu}, \dots, P_{\eta}, P_{\alpha}, P_{\beta}, P_{\gamma}, \dots, P_{\mu}) \\
 O_{\lambda} &= F(P_{\kappa}, P_{\lambda}, P_{\mu}, \dots, P_{\eta}, P_{\alpha}, P_{\beta}, P_{\gamma}, \dots, P_{\mu}) \\
 O_{\mu} &= F(P_{\kappa}, P_{\lambda}, P_{\mu}, \dots, P_{\eta}, P_{\alpha}, P_{\beta}, P_{\gamma}, \dots, P_{\mu}) \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 O_{\eta} &= F(P_{\kappa}, P_{\lambda}, P_{\mu}, \dots, P_{\eta}, P_{\alpha}, P_{\beta}, P_{\gamma}, \dots, P_{\mu})
 \end{aligned} \tag{1}$$

Εἰς τὸ ἀνωτέρω σύστημα περιλαμβάνονται  $n$  ἐξισώσεις μὲ  $n$  ἀγνώστους προσφερομένης ποσότητος ( $O_{\kappa}, O_{\lambda}, O_{\mu}, \dots, O_{\eta}$ ) καὶ  $n + m$  ἀγνώστους τιμὰς ( $P_{\kappa}, P_{\lambda}, P_{\mu}, \dots, P_{\eta}, P_{\alpha}, P_{\beta}, P_{\gamma}, \dots, P_{\mu}$ ).

II. Τὰς συναρτήσεις ζητουμένων ποσοτήτων καὶ τιμῶν τῶν ἐτοιμῶν ἀγαθῶν: Δι' αὐτῶν ὀρίζεται ὅτι ἡ ζητούμενη ποσότης ἐκάστου ἐτοιμοῦ ἀγαθοῦ ἀποτελεῖ συνάρτησιν τῆς τιμῆς του καὶ τῆς τιμῆς πάντων τῶν ἄλλων ἀγαθῶν καὶ παραγωγικῶν μέσων:

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha} &= F(P_{\alpha}, P_{\beta}, P_{\gamma}, \dots, P_{\mu}, P_{\kappa}, P_{\lambda}, P_{\mu}, \dots, P_{\eta}) \\
 D_{\beta} &= F(P_{\alpha}, P_{\beta}, P_{\gamma}, \dots, P_{\mu}, P_{\kappa}, P_{\lambda}, P_{\mu}, \dots, P_{\eta}) \\
 D_{\gamma} &= F(P_{\alpha}, P_{\beta}, P_{\gamma}, \dots, P_{\mu}, P_{\kappa}, P_{\lambda}, P_{\mu}, \dots, P_{\eta}) \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 D_{\mu} &= F(P_{\alpha}, P_{\beta}, P_{\gamma}, \dots, P_{\mu}, P_{\kappa}, P_{\lambda}, P_{\mu}, \dots, P_{\eta})
 \end{aligned} \tag{2}$$

Εἰς τὸ ἀνωτέρω σύστημα περιλαμβάνονται  $m$  ἐξισώσεις μὲ  $m$  ἀγνώστους ζητούμενας ποσότητας ( $D_{\alpha}, D_{\beta}, D_{\gamma}, \dots, D_{\mu}$ ), καὶ  $m + n$  ἀγνώστους τιμὰς ( $P_{\alpha}, P_{\beta}, \dots, P_{\gamma}, P_{\mu}, P_{\kappa}, P_{\lambda}, P_{\mu}, \dots, P_{\eta}$ ) τὰς αὐτὰς πρὸς τὰ  $m + n$  ἀγνώστους τιμὰς τῶν ἐξισώσεων τῆς (1).

III. Τὰς ἰσότητες μεταξὺ προσφερομένων καὶ ζητουμένων ποσοτήτων παραγωγικῶν μέσων: Ἐφ' ὅσον ὑπετέθη ὅτι ἡ οἰκονομία εὐρίσκεται εἰς κατάστασιν στατικῆς ἰσορροπίας θὰ πρέπει ἡ προσφερομένη ποσότης ἐκάστου παραγωγικοῦ μέσου νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ζητούμενην ποσότητα αὐτοῦ:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\kappa} D_{\alpha} + \beta_{\kappa} D_{\beta} + \gamma_{\kappa} D_{\gamma} + \dots + m_{\kappa} D_{\mu} &= O_{\kappa} \\
 \alpha_{\lambda} D_{\alpha} + \beta_{\lambda} D_{\beta} + \gamma_{\lambda} D_{\gamma} + \dots + m_{\lambda} D_{\mu} &= O_{\lambda} \\
 \alpha_{\mu} D_{\alpha} + \beta_{\mu} D_{\beta} + \gamma_{\mu} D_{\gamma} + \dots + m_{\mu} D_{\mu} &= O_{\mu} \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 \alpha_{\eta} D_{\alpha} + \beta_{\eta} D_{\beta} + \gamma_{\eta} D_{\gamma} + \dots + m_{\eta} D_{\mu} &= O_{\eta}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Εἰς τὸ ἀνωτέρω σύστημα περιλαμβάνονται  $n + m$  ἀγνώστους προσφερομένας καὶ ζητούμενας ποσότητας παραγωγικῶν μέσων ὁμοίας πρὸς τὰς ἀγνώστους ποσότητας τῶν (1) καὶ (2).

IV. Τὰς ἰσότητας μεταξύ κόστους παραγωγῆς καὶ τιμῶν τῶν ἐτοιμῶν ἀγαθῶν. Ἐφ' ὅσον ὑπετέθη ὅτι ἡ Οἰκονομία λειτουργεῖ ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ θὰ πρέπει τὸ κόστος παραγωγῆς ἐκάστου ἀγαθοῦ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμὴν αὐτοῦ.

$$\begin{aligned} \alpha_k P_k + \alpha_l P_l + \alpha_m P_m + \dots + \alpha_n P_n &= P_\alpha \\ \beta_k P_k + \beta_l P_l + \beta_m P_m + \dots + \beta_n P_n &= P_\beta \\ \gamma_k P_k + \gamma_l P_l + \gamma_m P_m + \dots + \gamma_n P_n &= P_\gamma \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \omega_k P_k + \omega_l P_l + \omega_m P_m + \dots + \omega_n P_n &= P_\omega \end{aligned} \quad (4)$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω σειρὰν ἐξισώσεων περιλαμβάνονται  $m$  ἐξισώσεις μὲ  $m+1$  ἀγνώστους τιμὰς τῶν παραγωγικῶν μέσων καὶ ἐτοιμῶν ἀγαθῶν ὁμοίας πρὸς τὰς ἀγνώστους τιμὰς τῶν (1) καὶ (2).

Εἰς τὰ ἀνωτέρω συστήματα περιλαμβάνονται ἐν συνόλῳ  $2n+2m$  ἐξισώσεις μὲ  $2m+2n$  ἀγνώστους. Ἄλλ' ὡς δύναται νὰ δεიχθῆ, μία οἰαδήποτε ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων δύναται νὰ προσδιορισθῆ ἐκ τῶν λοιπῶν. Ἐπομένως αἱ ἀνεξάρτητοι ἐξισώσεις τοῦ συστήματος Walras εἶναι  $2n+2m-1$  μὲ ἀντιστοιχοῦς ἀγνώστους. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ σύστημα Walras φαίνεται κατ' ἀρχὴν νὰ ἔχει μίαν καὶ μόνην λύσιν.

## V. Ἡ ἐγκατάλειψις τῶν κλασικῶν συστημάτων γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας

Μετὰ τὴν ὡς ἄνω περιληπτικὴν περιγραφὴν τοῦ μαθηματικοῦ συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας τοῦ Walras (!) θὰ ἦτο σκόπιμον νὰ θιγοῦν ἐν ὀλίγοις τὰ βασικὰ σημεῖα αὐτοῦ τὰ ὁποῖα ἀπετέλεσαν ἀντικείμενον κριτικῆς τῶν μεταγενεστέρων οἰκονομολόγων. Ἡ κριτικὴ αὕτη ἀναφέρεται πρὸ πάντων εἰς τὰς ὑποθέσεις αἱ ὁποῖαι ἐτέθησαν πρὸς κατασκευὴν τοῦ συστήματος καὶ εἰς τὴν καθ' ὅλου χρησιμότητα καὶ σκοπιμότητα αὐτοῦ ὡς ὄργανου οἰκονομικῆς ἀναλύσεως.

Τινὲς ἐκ τῶν ὑποθέσεων τὰς ὁποίας ἔθεσεν ὁ Walras διὰ νὰ καταστήσῃ δυνατὴν τὴν κατασκευὴν τοῦ συστήματός του ἀποτελοῦν βεβαίως σοβαρὰς ἀφαιρέσεις ἐκ τῆς πραγματικότητος. Οὕτω, ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ οἰκονομία λειτουργεῖ ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ ἀποτελεῖ μίαν ἰδεατὴν κατάστασιν. Ὁ Pareto προσεπάθησε διὰ κατασκευῆς ἐνὸς ἑτέρου συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας βασιζομένου κατ' οὐσίαν ἐπὶ τοῦ Βαλρασιακοῦ, νὰ λάβῃ ὑπ' ὄψιν του τὴν περίπτωσιν τοῦ μονοπωλίου καὶ τὰς ἐξ αὐτοῦ ἐπιδράσεις. Ἐξ ἄλλου εἰς τὰ σύγχρονα ὑποδείγματα ἀναλύσεως τῆς ἀγορᾶς τὰ βασιζόμενα ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν παιγνίων, περιλαμβάνονται αἱ ἐπιδράσεις τῶν μονοπω-

1) Δέον νὰ σημειωθῆ ὅτι μετὰ τὸν Walras πολλοὶ οἰκονομολόγοι τῆς κλασικῆς Σχολῆς ὡς ὁ Pareto, ὁ Cassel κλπ. κατεσκεύασαν συστήματα γενικῆς ἰσορροπίας τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν παραλλαγὰς τοῦ συστήματος Walras.

λιακῶν καὶ ὀλιγοπωλιακῶν καταστάσεων τῆς οἰκονομίας ὡς ἐπίσης αἱ ἐπιδράσεις ἐκ τῆς παρεμβάσεως τοῦ Κράτους εἰς τὸν μηχανισμόν τῆς αὐτομάτου διαμορφώσεως τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν.

Ἀντιπραγματιστικὴ ἐξ ἄλλου εἶναι ἡ ὑπόθεσις ὅτι δὲν παράγονται ἐνδιάμεσα ἀγαθὰ. Τέλος, ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν ἀποκλείουσα παντελῶς τὴν δυνατότητα ὑποκαταστάσεως τοῦ ἐνὸς παραγωγικοῦ μέσου δι' ἄλλου, ἐγένετο ἀντικείμενον ὀξυτάτης κριτικῆς ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων οἰκονομολόγων (!).

Ἡ σοβαρωτέρα ἐν τούτοις κριτικὴ τοῦ συστήματος Walras ἀναφέρεται εἰς τὴν ἀδυναμίαν χρησιμοποίησεως αὐτοῦ ὡς ὄργανου οἰκονομικῆς ἀναλύσεως. Ὁ ἴσος ἀριθμὸς ἐξισώσεων καὶ ἀγνώστων τοῦ συστήματος Walras ἐξασφαλίζει βεβαίως ὅτι τοῦτο ἔχει μίαν καὶ μόνην λύσιν. Οὐδέποτε ὅμως ἐτέθη ζήτημα ἐξευρέσεως τῆς λύσεως τούτης λόγῳ τῆς γενικῆς ἀλγεβρικῆς διατυπώσεως τοῦ συστήματος τούτου. Ὡς ἴδομεν ἀνωτέρω, τὸ σύστημα Walras περιλαμβάνει ἀριθμὸν ἐξισώσεων καὶ ἀγνώστων ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν προσφερομένων παραγωγικῶν μέσων, τῶν ζητουμένων ἀγαθῶν καὶ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν αὐτῶν. Οὕτω, ἐὰν εἰς μίαν οἰκονομίαν τὰ παραγωγικὰ μέσα εἶναι 500 μὲ ἰσαριθμούς τιμὰς καὶ τὰ ἔτοιμα ἀγαθὰ 10.000 μὲ ἰσαριθμούς ἐπίσης τιμὰς-ἀριθμοὶ πολὺ συντηρητικοὶ διὰ τὰς συγχρόνους οἰκονομίας — τὸ σύστημα Walras διὰ τὴν ἐν λόγῳ οἰκονομίαν θὰ περιλαμβάνῃ 20.000 περίπου ἐξισώσεις μὲ ἰσαριθμούς ἀγνώστους. Ἐν σύστημα μὲ τόσον μεγάλον ἀριθμὸν ἐξισώσεων εἶναι ἀδύνατον νὰ λυθῇ ἀκόμη καὶ διὰ τῶν συγχρόνων ἠλεκτρονικῶν μηχανῶν ὑψηλῆς ταχύτητος. Αὐτὸς εἶναι ὁ βασικὸς λόγος διὰ τὸν ὁποῖον τὸ σύστημα γενικῆς ἰσορροπίας τοῦ Walras καὶ αἱ διάφοροι παραλλαγαὶ αὐτοῦ, παρὰ τὴν πληρότητα τῆς θεωρητικῆς τῶν κατασκευῆς, δὲν ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιηθοῦν πρὸς λύσιν πραγματικῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων. Λόγῳ τοῦ πολυπλόκου τῆς μαθηματικῆς τῶν διατυπώσεων, τῆς ἐλλείψεως στατιστικῶν πληροφοριῶν, καταλλήλων μαθηματικῶν μεθόδων καὶ ὑπολογιστικῶν μηχανῶν διὰ τὴν λύσιν τῶν, τὰ συστήματα ταῦτα, σὺν τῇ παρόδῳ τοῦ χρόνου, ἐγκατελείφθησαν. Τὴν θέσιν τῶν κατέλαβον τὰ συστήματα τῆς μερικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας κυρίως δὲ τὸ Μαρσαλλιανόν, τὸ ὁποῖον ἐχρησιμοποιήθη αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ ἢ ὑπὸ διαφόρους παραλλαγὰς ἐπὶ μίαν περίπου γενεάν ὡς ὄργανον διερευνήσεως τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων. Τὰ συστήματα γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας ἐγένοντο μὲν παραδεκτὰ ὑπὸ τῶν οἰκονομολόγων τῆς ἐποχῆς αὐτῆς ὡς τέλεια θεωρητικὰ κατασκευάσματα πλὴν ὅμως ὡς «χρήσιμα οἰκονομικά» ἐθεωροῦντο τὰ συστήματα μερικῆς ἰσορροπίας.

#### VI. Ἡ ἐπιστροφή εἰς τὰ συστήματα γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας

Κατὰ τὴν περίοδον τοῦ μεσοπολέμου παρατηρεῖται μεταστροφή πρὸς τὰς ἰδέας τῶν συστημάτων τῆς γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας καταβαλλομένων

1) Περὶ τῆς τσαυτῆς κριτικῆς βλέπε: Δ. Κουλουριάνου «Ἡ Ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν εἰς τὴν γραμμικὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν».

ταυτοχρόνως προσπαθειῶν ὅπως διαμορφωθῶν κατὰ τρόπον δυνάμενον νὰ καταστήσῃ ταῦτα χρήσιμα ὄργανα οἰκονομικῆς πολιτικῆς. Ἡ ἐν λόγῳ μεταστροφή καθίσταται ἐντονωτέρα κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ δευτέρου παγκοσμίου πολέμου καὶ τὴν μεταπολεμικὴν περίοδον. Τρεῖς βασικοὶ λόγοι συνετέλεσαν εἰς τὴν τοιαύτην μεταστροφήν. Πρῶτον ἡ συγκέντρωσις τῆς προσοχῆς τῶν ὑπευθύνων οἰκονομικῶν ἀρχῶν καὶ τῶν οἰκονομολόγων εἰς τὰ προβλήματα τῆς γενικῆς οἰκονομικῆς δραστηριότητος τῆς κοινωνικῆς οἰκονομίας, δηλαδὴ εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς, τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος καὶ τῆς γενικῆς ἀπασχολήσεως. Δεύτερον, ἡ ἀντιμετώπισις τῶν τεραστίων ἀναγκῶν τῆς πολεμικῆς οἰκονομίας, ἐκ τῶν ὁποίων προέκυψεν ὀξύτερον τὸ πρόβλημα τῆς ὅσον τὸ δυνατόν περισσότερον ἀποτελεσματικῆς κατανομῆς τῶν διαθέσιμων παραγωγικῶν μέσων μεταξύ τῶν διαφόρων τομέων τῆς οἰκονομίας. Καὶ τρίτον, ἡ διὰ πρώτην φοράν προβολὴ καὶ ἀντιμετώπισις τῶν προβλημάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, ἡ ἐπίλυσις τῶν ὁποίων προϋποθέτει τὴν κατάστροφισιν καθολικῶν οἰκονομικῶν προγραμμάτων. Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, ἐθνικῆς παραγωγῆς, ὀρθολογικῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων καὶ καταστρώσεως καθολικῶν προγραμμάτων ἀναπτύξεως δὲν ἦτο δυνατόν, ὡς εἶναι προφανές, ν' ἀντιμετωπισθοῦν διὰ τῶν μαρσαλλιστῶν συστημάτων μερικῆς ἰσορροπίας καὶ τῶν οἰωνδῆποτε παραλλαγῶν αὐτῶν. Οὕτω, οἱ οἰκονομικοὶ ἐρευνηταὶ ἐπιστρέφουν εἰς τὰς κλασσικὰς θεωρητικὰς ἀντιλήψεις τῆς γενικῆς ἰσορροπίας καὶ προσπαθοῦν νὰ κατασκευάσουν ὑποδείγματα γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας δυνάμενα νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἐπιτυχῶς πρὸς λύσιν πραγματικῶν προβλημάτων ἀπασχολήσεως, προγραμματισμοῦ καὶ ὀρθολογικῆς κατανομῆς τῶν παραγωγικῶν μέσων.

Ἐκ τῶν ἐν λόγῳ προσπαθειῶν προέκυψαν τὰ σύγχρονα ὑποδείγματα γραμμικῆς ἀναλύσεως. Τὰ σπουδαιότερα ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ σύστημα εἰσοῶν—ἐκροῶν τοῦ Wassily Leontief, τὸ ὑπόδειγμα προγραμματισμοῦ τοῦ Von Neuman καὶ τὸ ὑπόδειγμα τῆς Στρατιωτικῆς Ἀεροπορίας τῶν Η.Π.Α.

## VII. Τὸ σύστημα Leontief

Ὁ Wassily Leontief εἶναι ὁ πρῶτος οἰκονομολόγος ὁ ὁποῖος κατεσκεύασε ἐν πλήρει σύστημα γενικῆς ἰσορροπίας, τὸ ὁποῖον ἐφήρμοσε διὰ τὴν ποσοτικὴν μέτρησιν τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν συγκεκριμένης οἰκονομίας, τῆς Ἀμερικανικῆς, καὶ δι' ὄρισμένην χρονικὴν περίοδον.

Τὸ περιεχόμενον καὶ τὰ βασικὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ συστήματος Leontief ἔχουν ὡς ἑξῆς:

α. Ὁρισμοί: Εἰς τὸ σύστημα Leontief ἢ σύστημα εἰσοῶν—ἐκροῶν ὡς συνήθως λέγεται, ἡ οἰκονομία διαιρεῖται εἰς παραγωγικούς κλάδους, ἕκαστος τῶν ὁποίων παράγει ὁμοιογενῆ κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἥττον ἀγαθὰ. Ἐκαστος παραγωγικὸς κλάδος εἰσέρχεται εἰς τὸ σύστημα ὑπὸ διττὴν ιδιότητα ὡς παραγωγὸς τοῦ προϊόντος του, τὸ ὁποῖον διαθέτει εἰς τοὺς λοιποὺς κλάδους καὶ ὡς ἀγοραστὴς τῶν προϊόντων τῶν ἄλλων κλάδων πρὸς παραγωγὴν







β. Ἡ ἰσότης μεταξύ εισροῶν καὶ ἐκροῶν ὑπὸ συνθή-  
 κας στατικῆς ἰσορροπίας: Τὰ δεδομένα τοῦ ἀνωτέρω πίνακος δύνα-  
 νται μαθηματικῶς νὰ ἐμφανισθοῦν ὑπὸ μορφήν συστήματος γραμμικῶν ἐξισώ-  
 σεων, ὡς κάτωθι:

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1j} + \dots + x_{1n} + Y_1 &= X_1 \\
 x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2j} + \dots + x_{2n} + Y_2 &= X_2 \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{in} + Y_i &= X_i \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nj} + \dots + x_{nn} + Y_n &= X_n
 \end{aligned} \quad (5)$$

ἢ περιληπτικῶς:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i = X_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (5a)$$

Τὸ ἀνωτέρω σύστημα ὀρίζει ὅτι ἡ ἀξία τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ παραχθέντος ὑπὸ τῶν καθ' ἕκαστον παραγωγικῶν κλάδων ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ προϊόντος τοῦ ἀπορροφηθέντος ἐκ τοῦ κλάδου τούτου τόσον ὑπὸ τῶν λοιπῶν παραγωγικῶν κλάδων πρὸς παραγωγήν τοῦ προϊόντος των ὅσον καὶ ὑπὸ τῆς τελικῆς ζήτησεως πρὸς κατανάλωσιν. Ἐν ἄλλοις λόγοις εἰς τὸ σύστημα εισροῶν—ἐκροῶν ὑποτίθεται ὅτι ἡ οἰκονομία εὐρίσκεται εἰς κατάστα-  
 σιν στατικῆς ἰσορροπίας, εἰς τρόπον ὥστε ἡ συνολικὴ ἀξία τῶν ἐκροῶν νὰ ἐξι-  
 σοῦται πρὸς τὴν συνολικὴν ἀξίαν τῶν εισροῶν ἢ ἄλλως ἡ συνολικὴ προσφορά  
 νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν συνολικὴν ζήτησιν.

Τὸ σύστημα (5) δύναται νὰ γραφῆ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned}
 X_1 - x_{12} - \dots - x_{1j} - \dots - x_{1n} &= Y_1 \\
 -x_{21} + X_2 - \dots - x_{2j} - \dots - x_{2n} &= Y_2 \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 -x_{i1} - x_{i2} - \dots + X_j - \dots - x_{in} &= Y_j \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 -x_{n1} - x_{n2} - \dots - x_{nj} - \dots + X_n &= Y_n
 \end{aligned} \quad (6)$$

ἢ περιληπτικῶς:

$$X - \sum_{j=1}^n x_{ij} = Y_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (6a)$$

Διὰ τοῦ συστήματος (6) ὀρίζεται ὅτι ἡ τελικὴ ζήτησις διὰ τὸ προϊόν τῶν καθ' ἕκαστον παραγωγικῶν κλάδων εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ συνολικῶς παραχθέντος προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου μείον τὰς πωλήσεις (ἐκροὰς) πρὸς τοὺς λοιποὺς κλάδους. Εἶναι προφανές ὅτι ἀμφότερα τὰ συστήματα (5) καὶ (6) δίδουν τὸν αὐτὸν ὀρισμὸν μὲ διαφορετικὸν ὁμῶς τρόπον.



ἢ περιληπτικῶς :

$$X_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} X_j = Y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8\alpha)$$

Τὸ ἀνωτέρω σύστημα δύναται νὰ γραφῆ βάσει τῆς μαθηματικῆς τεχνικῆς τῶν μητρώων ὡς ἐξῆς :

$$\begin{bmatrix} 1 - \alpha_{11} & -\dots & -\alpha_{1i} & -\dots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & +1 & -\dots & -\alpha_{2i} & -\dots & -\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{i1} & -\alpha_{i2} & -\dots & +1 & -\dots & -\alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & -\dots & -\alpha_{ni} & +\dots & +1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_i \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_i \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

ἢ περιληπτικῶς

$$AX = Y \quad (9\alpha)$$

ὅπου  $A$  ἡ μήτρα τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν  $\alpha_{ij}$ ,  $X$  τὸ διάνυσμα τῶν συνολικῶν ἀξιῶν παραγωγῆς  $X_1, X_2 \dots X_i \dots X_n$ , τῶν κλάδων  $1, 2, \dots, i, \dots, n$ , καὶ  $Y$  τὸ διάνυσμα τῆς τελικῆς ζητήσεως  $Y_1, Y_2 \dots Y_i \dots Y_n$  τοῦ προϊόντος τῶν κλάδων  $1, 2, \dots, i, \dots, n$ .

Διὰ νὰ εὔρωμεν πόσον πρέπει νὰ ἀυξηθῆ ἡ ἀξία παραγωγῆς ἐκάστου παραγωγικοῦ κλάδου τοῦ συστήματος πρὸς ἰκανοποίησιν τῆς ἐπιδιωκομένης ἀυξήσεως τῆς τελικῆς ζητήσεως θὰ πρέπει νὰ ἐκφράσωμεν τὰς ἀξίας παραγωγῆς  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ὡς συναρτήσεως τῆς τελικῆς ζητήσεως  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (9) ἢ (9α) διὰ τῆς ἀντιστρόφου μήτρας τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν  $A^{-1}$  :

$$A^{-1} AX = A^{-1} Y$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνεται :

$$X = A^{-1} Y \quad (10)$$

Ἐὰν  $A_{ij}$  ὀνομάσωμεν τὰ νέα στοιχεῖα τῆς ἀντιστρόφου μήτρας  $A^{-1}$  ἢ (10) μετασχηματίζεται ὡς κάτωθι :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_i \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1i} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2i} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{ii} & \dots & A_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{ni} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_i \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

Οἱ συντελεσταὶ  $A_{ij}$  οἱ ὁποῖοι προέκυψαν κατόπιν ἀντιστροφῆς τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν  $\alpha_{ij}$  τῆς ἀρχικῆς μήτρας τῆς (9) δεικνύουν πόσον πρέπει ν' ἀυξηθῆ ἡ ἀξία τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου  $i$  διὰ νὰ ἰκανοποιηθῆ ἡ κατὰ μίαν χρηματικὴν μονάδα ἀυξήσις τῆς τελικῆς ζητήσεως διὰ τὸ

προϊόν του κλάδου  $j$ . Εάν ενεργήσωμεν τὸν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς (11) σημειούμενον πολλαπλασιασμόν, αὕτη δύναται νὰ γραφῆ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{aligned} X_1 &= A_{11} Y_1 + A_{12} Y_2 + \dots + A_{1i} Y_i + \dots + A_{1n} Y_n \\ X_2 &= A_{21} Y_1 + A_{22} Y_2 + \dots + A_{2i} Y_i + \dots + A_{2n} Y_n \\ &\vdots \\ X_3 &= A_{31} Y_1 + A_{32} Y_2 + \dots + A_{3i} Y_i + \dots + A_{3n} Y_n \\ &\vdots \\ X_n &= A_{n1} Y_1 + A_{n2} Y_2 + \dots + A_{ni} Y_i + \dots + A_{nn} Y_n \end{aligned} \quad (12)$$

Εἶναι προφανές ὅτι εἰς τὴν ἀνωτέρω σειρὰν ἐξισώσεων αἱ ἀξίαι παραγωγῆς  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ἐκφράζονται συναρτήσῃ τῆς τελικῆς ζητήσεως  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Τοῦτο σημαίνει ὅτι δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν βάσει τοῦ συστήματος (12) πόσον θὰ πρέπει ν' αὐξηθοῦν τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  πρὸς ἰκανοποίησιν μιᾶς αὐξήσεως τῆς τελικῆς ζητήσεως τὴν ὁποῖαν καθορίζουν καὶ ἐπιδιώκουν αἱ οἰκονομικαὶ ἀρχαὶ τῆς χώρας.

δ. Ἡ ἰσότης μεταξὺ κόστους καὶ τιμῶν: Εἰς τὸ σύστημα Εἰσορῶν—Ἐκροῶν ὑποτίθεται ὅτι ἡ οἰκονομία λειτουργεῖ ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ. Ὡς ἐκ τῆς ὑποθέσεως ταύτης, ἡ τιμὴ τοῦ προϊόντος τοῦ παραγομένου ὑπὸ δοθέντος παραγωγικοῦ κλάδου  $j$  θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀξιῶν τῶν καταβαλλομένων ὑπὸ τοῦ κλάδου τούτου πρὸς τοὺς λοιποὺς κλάδους  $1, 2, \dots, i, \dots, n$ , διὰ τὸ προϊόν τὸ ὁποῖον δίδουν οὗτοι εἰς τὸν κλάδον  $j$  παραγωγὴν μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος αὐτοῦ.

Ἄς ὀνομάσωμεν  $P_j$  τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου  $j$  καὶ  $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$  τὰς σχετικὰς τιμὰς τῶν Εἰσορῶν τοῦ κλάδου  $j$  ἐκ τῶν κλάδων  $1, 2, \dots, i, \dots, n$ . Ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ ἡ τιμὴ τοῦ προϊόντος κλάδου  $j$  καθορίζεται ὡς ἑξῆς :

$$P_j = P_1 \alpha_{1j} + P_2 \alpha_{2j} + \dots + P_i \alpha_{ij} + \dots + P_n \alpha_{nj} \quad (13)$$

ὅπου  $P_j$  ἡ τιμὴ μονάδος τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου  $j$  καὶ  $P_i \alpha_{ij}$  ἡ ἀξία τῆς ποσότητος τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου  $i$  ἢ ἀπαιτουμένη πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος τοῦ κλάδου  $j$ .

Τὸ τελευταῖον τοῦτο σύστημα ἐκφράζει τὴν ἰσότητα κόστους καὶ τιμῶν τῶν παραγομένων προϊόντων.

Ἐξ ὅλης τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως τῆς σχετικῆς μετὰ τὸ σύστημα Leontief προκύπτει ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν τὴν ὁποῖαν θέτει, δίδει λύσιν εἰς προβλήματα εἰς τὰ ὅποια ζητεῖται πόσον δέον ν' αὐξηθοῦν τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν καθ' ἕκαστον παραγωγικῶν κλάδων μιᾶς οἰκονομίας λειτουργούσης ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ πρὸς ἰκανοποίησιν τοῦ ἐπιδιωκόμενου ἐπιπέδου τελικῆς ζητήσεως, λαμβανομένης ὁμως ὑπ' ὄψιν τῆς ὑφισταμένης ἀλληλεξαρτήσεως τῶν παραγωγικῶν κλάδων τῆς ἐν λόγῳ οἰκονομίας.

### VIII. Συγκριτική αξιολόγησης Συστήματος Γενικής Ίσορροπίας Walras και Leontief.

Τὸ σύστημα Leontief θεμελιούται ἐπὶ τῶν θεωρητικῶν ἀντιλήψεων περὶ γενικῆς οἰκονομικῆς Ίσορροπίας τοῦ Walras καὶ τῶν λοιπῶν κλασσικῶν οἰκονομολόγων. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς δύναται νὰ ὑποστηριχθῇ ὅτι τὸ σύστημα Leontief δὲν διεκδικεῖ οὐδεμίαν θεωρητικῆς φύσεως συμβολήν. Ἡ συμβολὴ τοῦ Leontief, αὐτὴ καθ' ἑαυτὴν ἀξιόλογος, συνίσταται εἰς τὴν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς εἰδικῆς μαθηματικῆς τεχνικῆς ἀπλοποίησησιν τοῦ συστήματος γενικῆς Ίσορροπίας τοῦ Walras εἰς τρόπον ὥστε τοῦτο νὰ καταστῇ χρήσιμον ὄργανον ἐπιλύσεως πραγματικῶν προβλημάτων τῆς Οἰκονομικῆς ζωῆς. Οὕτως ἐχόντων τῶν πραγμάτων τὸ σύστημα Leontief θεμελιούται ἐπὶ τῶν αὐτῶν βασικῶν ὑποθέσεων καὶ καταλήγει εἰς τὰ αὐτὰ περίπου συμπεράσματα περὶ ἀλληλεξαρτήσεως καὶ ἀλληλεπιδράσεως τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν ὡς τὸ σύστημα Walras.

Τὸ σύστημα Walras, ὡς ἐκ τῆς ὑποθέσεως, τῆς στατικῆς ἰσορροπίας τὴν ὁποίαν θέτει ὀρίζει ὅτι ἡ συνολικὴ προσφορὰ τῶν παραγωγικῶν μέσων ἰσοῦται πρὸς τὴν συνολικὴν ζήτησιν αὐτῶν (βλέπε σειρὰν ἐξισώσεων (3)). Τὸ σύστημα Leontief, βασιζόμενον ὡσαύτως ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὑποθέσεως, δέχεται ὅτι αἱ συνολικαὶ ἔκροαί τῶν παραγωγικῶν κλάδων εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς συνολικὰς εἰσροὰς αὐτῶν (βλέπε συστήματα ἐξισώσεων (5) καὶ (6)).

Ἡ ὑπόθεσις τοῦ πλήρους ἀνταγωνισμοῦ τιθεμένη τόσον ὑπὸ τοῦ συστήματος Leontief, ὀδηγεῖ ἀμφοτέρω εἰς τὸν ὀρισμὸν ὅτι ἡ τιμὴ τῶν παραγομένων προϊόντων εἶναι ἴση πρὸς τὸ κόστος παραγωγῆς αὐτῶν (βλέπε συστήματα ἐξισώσεων (4) καὶ (13)).

Τέλος, ἀμφοτέρω τὰ συστήματα θεμελιούονται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν παραγωγῆς ἀπομακρυνόμενα οὕτω ἐκ τῶν θεωριῶν τῆς ὀριακῆς ὑποκαταστάσεως τῶν παραγωγικῶν μέσων.

Παρὰ τὰς ἀνωτέρω βασικὰς ὁμοιότητας τὸ σύστημα Leontief παρουσιάζει, ἐν τούτοις, οὐσιώδεις διαφορὰς συγκρινόμενον πρὸς ἐκεῖνο τοῦ Walras. Αἱ διαφοραὶ αὗται προέκυψαν ὡς ἐκ τῆς τεχνικῆς, οὕτως εἶπεῖν, φύσεως τροποποιήσεων καὶ βελτιώσεων τὰς ὁποίας ἐπέφερεν ὁ Leontief εἰς τὸ βαλρασιανὸν σύστημα γενικῆς ἰσορροπίας καὶ τὰς ὁποίας ὑπαγόρευεν ἡ ἀνάγκη ὅπως τὸ σύστημα τοῦτο καταστῇ χρήσιμον διὰ τὴν λύσιν πραγματικῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων. Αἱ κυριώτεραι ἐκ τῶν τροποποιήσεων τούτων εἶναι αἱ ἑξῆς :

1. Ἡ στατιστικὴ ἐνοποίηση τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν: ὡς ἤδη ἐλέχθη τὸ σύστημα Walras καὶ αἱ παραλλαγαὶ αὐτοῦ περιγράφουν τὴν ἀλληλεξάρτησιν μεταξύ τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων τῆς οἰκονομίας δι' ἑνὸς μαθηματικοῦ συστήματος περιλαμβάνοντος τόσας ἐξισώσεις καὶ ἀγνώστους ὅσαι εἶναι αἱ ποσοτικαὶ σχέσεις μεταξύ τῶν μεταβλητῶν τῆς ἐν λόγω οἰκονομίας. Οἱ θεωρητικοὶ τῶν κλασσικῶν ὑποδειγμάτων γενικῆς ἰσορροπίας μὴ ἐνδιαφερόμενοι διὰ πρακτικὰς ἐφαρμογὰς διεμόρφωσαν τὰ ὑποδείγματα αὐτῶν

κατὰ τρόπον δυνάμενον νὰ παρέχη ὅσον τὸ δυνατόν λεπτομερεστέρας πληροφορίας περὶ τῆς οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως. Τὰ ὑπὸ τὸ πνεῦμα τοῦτο κατασκευασθέντα ὑπὸ τῶν κλασσικῶν μαθηματικῶν συστήματα, περιέχουν τόσον μεγάλον ἀριθμὸν ἐξισώσεων, ὡς ἴδομεν ἀνωτέρω, ὥστε ἡ λύσις των καθίσταται ἀδύνατος ἀκόμη καὶ διὰ τῶν σήμερον διατιθεμένων ὑπολογιστικῶν μηχανῶν ὑψηλῆς ταχύτητος.

Προκειμένου ὁμως νὰ ἐπιδιωχθῆ ἡ ἐφαρμογὴ τοιούτων συστημάτων πρὸς ἐπίλυσιν πραγματικῶν προβλημάτων τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς τίθεται τὸ ζήτημα τοῦ περιορισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐξισώσεων καὶ ἀγνώστων τῶν ἐν λόγῳ συστημάτων εἰς ὅρια ἐπιτρέποντα τὸν μαθηματικὸν καὶ ὑπολογιστικὸν χειρισμὸν αὐτῶν ἐπὶ θυσίᾳ βεβαίως τῆς παροχῆς λεπτομερῶν πληροφοριῶν περὶ τῆς Οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως. Εἰς τοιοῦτος περιορισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐξισώσεων καὶ ἀγνώστων ἐπραγματοποιήθη εἰς τὸ σύστημα Leontief δι' ἐφαρμογῆς τῆς διαδικασίας τῆς στατιστικῆς ἐνοποιήσεως (aggregation process).

Ἡ στατιστικὴ ἐνοποίησις συνίσταται εἰς τὴν συγκέντρωσιν πάντων τῶν παραγομένων ἀγαθῶν καὶ παραγωγικῶν μέσων εἰς σχετικῶς μικρὸν ἀριθμὸν ὁμάδων ἐπὶ τῇ βάσει ὠρισμένων κριτηρίων. Αἱ ὁμάδες αὗται ἀποτελοῦν εἰς τὸ σύστημα ἑισροῶν ἐκροῶν τοῦ Leontief τοὺς γνωστοὺς παραγωγικοὺς κλάδους, ἕκαστος τῶν ὁποίων παράγει ὁμοειδῆ κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἥττον προϊόντα. Δι' ἐφαρμογῆς τῆς διαδικασίας τῆς στατιστικῆς ἐνοποιήσεως ὁ Leontief περιώρισε τὸν σχετικῶς ἀπέραντον ἀριθμὸν ἐξισώσεων καὶ ἀγνώστων τοῦ συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας τοῦ Walras καὶ κατέστησεν οὕτω δυνατὴν τὴν λύσιν του διὰ τῶν διαθεσίμων ὑπολογιστικῶν μέσων.

2. Ὁ προσδιορισμὸς τῶν συναρτήσεων ζητήσεως καὶ προσφορᾶς εἰς τὸ σύστημα Leontief: Κατὰ τὴν περιγραφὴν τοῦ συστήματος Walras διεπιστώθη ὅτι ὁ προσδιορισμὸς τῶν συναρτήσεων προσφορᾶς καὶ ζητήσεως τῶν ἐπὶ μέρους παραγωγῶν καὶ καταναλωτῶν ἐκ τῆς ἀθροίσεως τῶν ὁποίων ἐλήφθησαν αἱ συναρτήσεις προσφορᾶς καὶ ζητήσεως δι' ὀλόκληρον τὴν οἰκονομίαν, ἐβασίσθη ἐπὶ τῆς συναρτήσεως τῆς ὀριακῆς χρησιμότητος τῶν καθ' ἕκαστον ἀγαθῶν καὶ παραγωγικῶν μέσων.

Ὁ Leontief κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ συστήματος ἑισροῶν—ἑκροῶν ἠγνόησεν παντελῶς τὰς συναρτήσεις τῆς ὀριακῆς χρησιμότητος. Ἡ ὀριακὴ χρησιμότης ἀποτελεῖ θεωρητικὴν ἔννοιαν, δὲν ὑφίσταται δὲ εἰς τὴν πράξιν τρόπος ποσοτικῆς μετρήσεως αὐτῆς, πέραν ὁμως τούτου, εἰς τὸ σύστημα ἑισροῶν—ἑκροῶν δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἢ πρὸς μεγιστοποίησιν τοῦ οἰκονομικοῦ ὀφέλους συμπεριφορὰ τῶν παραγωγῶν. Ὅσον ἀφορᾷ δὲ τὸ πρόβλημα τῆς μεγιστοποιήσεως τῶν καταναλωτῶν, τοῦτο ἀντιμετωπίζεται μὲν ἄλλ' ἐκτὸς τοῦ συστήματος ἑισροῶν—ἑκροῶν (ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα) διὰ διεξαγωγῆς ἐιδικῶν ἐρευνῶν σχετικῶν πρὸς τοὺς οἰκογενειακοὺς προϋπολογισμοὺς τῶν καταναλωτῶν.

3. Ἡ παραγωγή ἐνδιαμέσων ἀγαθῶν εἰς τὸ σύστημα Leontief: Κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ συστήματος Walras ἴδομεν, ἐπί-



σης, ὅτι διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν παραγωγικῶν μέσων ὑποτίθεται ὅτι δὲν παράγονται ἐνδιάμεσα ἀγαθὰ ἀλλ' ἀπ' εὐθείας ἀγαθὰ τελικῆς καταναλώσεως. Ὁ Leontief ἐτροποποίησε τὸ σύστημα Walras ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο. Ὁ πίναξ Εἰσροῶν—Ἐκροῶν δεικνύει ὅτι τὸ ὑφ' ἐκάστου παραγωγικοῦ κλάδου παραγόμενον προϊόν διατίθεται εἴτε ἀπ' εὐθείας πρὸς κατανάλωσιν εἴτε πρὸς παραγωγήν τοῦ προϊόντος ἐνὸς ἐτέρου κλάδου. Τὸ προϊόν τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ κλάδος  $j$  ἐκ τοῦ κλάδου  $i$  ἀποτελεῖ ἐνδιάμεσον προϊόν καθ' ὅσον τοῦτο χρησιμοποιεῖται παρὰ τοῦ κλάδου  $j$  πρὸς παραγωγήν τοῦ προϊόντος αὐτοῦ. Κατὰ συνέπειαν εἰς τὰς διακλαδικὰς συναλλαγὰς τοῦ συστήματος Εἰσροῶν—Ἐκροῶν δὲν παραγνωρίζεται τὸ ζήτημα τῆς παραγωγῆς ἐνδιαμέσων προϊόντων, ἀπὸ τῆς ἀπόψεως δὲ ταύτης τὸ σύστημα τοῦτο ἀνταποκρίνεται περισσότερο πρὸς τὴν οἰκονομικὴν πραγματικότητα παρ' ὅτι τὸ σύστημα Walras.

4. Ἡ χρησιμοποίησις τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς τεχνικῆς τῶν μητρῶν εἰς τὸ σύστημα Leontief: Τὴν διὰ τοῦ συστήματος Εἰσροῶν—Ἐκροῶν διατύπωσιν καὶ λύσιν οἰκονομικῶν προβλημάτων διευκολύνει τὰ μέγιστα ἡ χρησιμοποίησις τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς τεχνικῆς τῶν μητρῶν. Ἡ ἄλγεβρα τῶν μητρῶν ἐνέχει κατ' ἀρχὴν ἀναλυτικὴν ἀξίαν καθ' ὅσον καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἀξιωμάτων καὶ κανόνων αὐτῆς πρὸς συναγωγήν χρησίμων συμπερασμάτων κατὰ τὴν διατύπωσιν καὶ λύσιν πολυπλόκων προβλημάτων ὡς εἶναι τὰ οἰκονομικά. Ἐπιπροσθέτως ἡ χρησιμοποίησις τῆς τεχνικῆς τῶν μητρῶν εἰς συστήματα μὲ μεγάλον ἀριθμὸν ἐξισώσεων ἀπλοποιεῖ κατὰ πολὺ τὰς ὑπολογιστικὰς πράξεις κατὰ τὴν λύσιν τῶν συστημάτων αὐτῶν. Εἰς ἐκ τῶν λόγων τῆς ἀδυναμίας ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσοροπίας τοῦ Walras ἦτο καὶ ἡ ἔλλειψις καταλλήλων μαθηματικῶν μεθόδων ὡς εἶναι ἡ σύγχρονος μαθηματικὴ τεχνικὴ τῶν μητρῶν.

# ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟΝ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΔΙΑΘΕΣΙΜΩΝ ΠΟΡΩΝ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΕΩΣ

Ὑπὸ τοῦ κ. Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ

1. Δοθέντων τῶν σκοπῶν τοῦ προγράμματος, τὸ πρὸς λύσιν πρόβλημα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως εἶναι νὰ χρησιμοποιηθοῦν οἱ διαθέσιμοι οἰκονομικοὶ πόροι κατὰ τρόπον ἐξασφαλίζοντα τὴν πραγματοποιήσιν τῶν σκοπῶν αὐτῶν, ὑπὸ τοὺς καλυτέρους δυνατοὺς ὅρους. Τοῦτο σημαίνει ἐπιλογὴν τῆς ἀρίστης λύσεως μεταξύ τῶν διαφόρων δυνατῶν λύσεων τοῦ προβλήματος, δηλαδὴ μεταξύ τῶν διαφόρων μορφῶν κατανομῆς τῶν οἰκονομικῶν πόρων. Ἐπιβάλλεται ὅθεν ὁ προσδιορισμὸς κριτηρίου τινος, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἐπιλογή αὕτη.

Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ κριτηρίου τῆς ἀρίστης λύσεως, ὡς καὶ τοῦ τρόπου χρησιμοποίησεως αὐτοῦ, ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως καὶ τὴν συνετεία ταύτης διδομένην ἐκάστοτε ἔννοιαν εἰς τὸν ὅρον «ἀρίστη λύσις». Ἐν π.χ. μίᾳ οἰκονομίᾳ χαρακτηρίζεται ἀπὸ στενότητα ἐργατικῶν δυνάμεων καὶ ἐπιδιώκεται διὰ τῆς κινητοποιήσεως αὐτῶν ἡ πραγματοποιήσις ὠρισμένων σκοπῶν, ὡς οἰκονομικῶς ἀρίστη λύσις δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ ἡ λύσις ἡ ὁποία ἐξασφαλίζει τὴν μεγίστην δυνατὴν ἐξοικονόμησιν τῶν ἐργατικῶν δυνάμεων ἢ ἄλλως, τὴν καλλιτέραν ἀξιοποίησιν τῶν δυνάμεων αὐτῶν. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν «ἀρίστη λύσις» εἶναι συνεπῶς ἡ ἱκανοποιουῦσα τὸ οἰκονομικὸν ἀξίωμα, ὅσον ἀφορᾷ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ οἰκονομικῶν πόρων.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ χρησιμοποίησις διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀρίστης λύσεως κριτηρίου ἀναφερομένου εἰς τὸν μέγιστον βαθμὸν οἰκονομικότητος ὅσον ἀφορᾷ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ πόρων, δὲν σημαίνει ἔλλειψιν ἐνδιαφέροντος διὰ τὴν ὀργάνωσιν καὶ ἀξιοποίησιν τῶν ἐν σχετικῇ ἐπαρκείᾳ εὐρισκομένων οἰκονομικῶν πόρων. Σημαίνει ἀπλῶς ὅτι οἱ πόροι οὗτοι

δὲν ἐμποδίζουν τὴν ἀνάπτυξιν τῆς οἰκονομίας καὶ συνεπῶς δὲν δημιουργοῦν οἰκονομικὰ προβλήματα, ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐξεταζομένην περίοδον οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

2. Ἐνταῦθα ἐνδιαφερόμεθα εἰδικώτερον δι' ἓν συγκεκριμένον τύπον οἰκονομίας, εἰς τὸν ὅποιον δύναται νὰ ὑπαχθῆ καὶ ἡ ἑλληνικὴ οἰκονομία. Ἡ οἰκονομία αὕτη χαρακτηρίζεται κυρίως ἀπὸ ἔντονον ἀνεπάρκειαν κεφαλαίου καὶ ἀφθονίαν ἐργατικῶν δυνάμεων. Κατὰ συνέπειαν, τὸ κριτήριον τῆς ἀρίστης λύσεως εἰς τὸ πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως πρέπει νὰ εἶναι, βάσει τῶν λεχθέντων, ἡ ἀρίστη δυνατὴ ἀξιοποίησις τοῦ κεφαλαίου.

Τὸ κριτήριον τοῦτο εἶναι δυνατόν νὰ διατυπωθῆ κατὰ δύο τρόπους, ἀναλόγως τῆς διατυπώσεως τῶν σκοπῶν τοῦ προγράμματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἄν π.χ. οἱ σκοποὶ οὗτοι συνίστανται εἰς τὴν ἐπίτευξιν ὠρισμένου ἐπιπέδου ἔθνικοῦ εἰσοδήματος, ἀρίστη δυνατὴ ἀξιοποίησις τοῦ κεφαλαίου σημαίνει χρησιμοποίησιν τῆς ἐλαχίστης δυνατῆς ποσότητος αὐτοῦ διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ὡς ἄνω σκοποῦ. Ἐπειδὴ, ὡς συμβαίνει συνήθως εἰς τὰ προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, τὸ ἐπιδιωκόμενον ἐπίπεδον ἔθνικοῦ εἰσοδήματος εἶναι ἀνώτερον ἀπὸ τὸ δυνάμενον νὰ πραγματοποιηθῆ βάσει τῆς ὑπαρχούσης ποσότητος κεφαλαίου τῆς οἰκονομίας, τὸ κριτήριον τῆς ἀρίστης λύσεως σημαίνει κυρίως ἐλαχιστοποίησιν τῶν ἐπενδύσεων (δηλαδὴ τῆς ποσότητος τοῦ νέου κεφαλαίου), αἱ ὅποιαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς ὑπερβαλούσης τὰς ἀρχικὰς δυνατότητας τῆς οἰκονομίας αὐξήσεως τοῦ ἔθνικοῦ εἰσοδήματος.

Ἄν, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ἡ εἰς τὴν διάθεσιν τῆς οἰκονομίας ποσότης κεφαλαίου εἶναι ὠρισμένη, ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ προβλήματος τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ὑποδηλοῖ μεγιστοποίησιν τοῦ ἔθνικοῦ εἰσοδήματος, τὸ δὲ κριτήριον τῆς λύσεως ταύτης θὰ εἶναι τότε ἡ μεγιστοποίησις τῆς εἰσοδηματικῆς ἀποδόσεως τοῦ κεφαλαίου.

Μεθοδολογικῶς ἡ πρώτη διατύπωσις εἶναι προτιμότερα, καθ' ὅσον εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων τὰ προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως διατυπῶνται ὡς προβλήματα ἐλαχιστοποίησεως. Ὅριζεται δηλαδὴ ἐκ τῶν προτέρω ἡ ἐπιθυμητὴ αὐξήσις τοῦ ἔθνικοῦ εἰσοδήματος, καὶ ἐπιδιώκεται νὰ προσδιορισθῆ ἡ ἐλαχίστη δυνατὴ δαπάνη κεφαλαίου ἢ τῶν λοιπῶν ἐν ἀνεπάρκειᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς ἢ ὅποια ἀπαιτεῖται διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς ὡς ἄνω αὐξήσεως.

3. Εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους οἰκονομίας, πλὴν τοῦ κεφαλαίου, εὐρίσκειται συνήθως ἐν στενότητι καὶ ἡ εἰδικευμένη ἐργασία, ἐνίοτε δὲ (ὡς εἰς τὴν ἑλληνικὴν περίπτωσιν) καὶ ὁ συντελεστὴς ἔδαφος. Ἄλλ' ἡ αὐξήσις τῆς ποσότητος τῆς εἰδικευμένης ἐργασίας, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ αὐξήσις τῶν δυνατοτήτων τῆς οἰκονομίας ἀπὸ ἀπόψεως ἐδάφους εἶναι δυνατὴ διὰ τῆς χρησιμοποίησεως κεφαλαίου, πρὸς ἴδρυσιν ἐκπαιδευτηρίων, τεχνικῶν σχολῶν κλπ. ἢ πρὸς ἐκτέλεσιν ἐγγείων βελτιώσεων καὶ γενικῶς πρὸς δημιουργίαν νέων ἐδαφῶν. Οὕτω ἡ στενότης τῶν συντελεστῶν αὐτῶν ἀνάγεται τελικῶς εἰς τὴν στενότητα κεφα-

λαίου και κατά συνέπειαν δυνάμεθα βασίμως νὰ χρησιμοποιήσωμεν, πρὸς ἔλεγχον τῆς οικονομικότητος τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος οικονομικῆς ἀναπτύξεως, κριτήριον βασιζόμενον ἐπὶ τῆς στενότητος τοῦ κεφαλαίου.

4. Τὸ κριτήριον τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῶν ἐπενδύσεων (ἢ τῆς μεγιστοποίησης τῆς εισοδηματικῆς ἀποδόσεως τῶν ἐπενδύσεων) χρησιμοποιεῖται κατὰ κανόνα εἰς θεωρητικὰς ἢ πρακτικὰς ἀναλύσεις ἀναφερομένας εἰς τὸν προγραμματισμὸν τῆς οικονομικῆς ἀναπτύξεως τῶν καθυστερημένων περιοχῶν. Ἡ χρησιμοποίησις ὁμως τοῦ κριτηρίου αὐτοῦ βασίζεται συνήθως ἐπὶ τῆς καλουμένης «μερικῆς μεθόδου ἀναλύσεως» (Partial Analysis), ἣτις δὲν λαμβάνει ὑπ' ὄψιν τὴν ἀλληλεξάρτησιν μεταξὺ τῶν διαφόρων οικονομικῶν κλάδων. Οὕτω, ἐὰν π.χ. ἐκ δύο μεθόδων παραγωγῆς τοῦ αὐτοῦ προϊόντος, ἡ πρώτη μέθοδος ἀπαιτῆ ἄμεσον δαπάνην κεφαλαίου, ὑπὸ μορφήν παγίων ἐγκαταστάσεων κλπ., μεγαλυτέραν τῆς δευτέρας, προκρίνεται, βάσει τοῦ κριτηρίου ἐλαχιστοποίησης κεφαλαίου, ἡ δευτέρα μέθοδος ὡς οικονομικώτερα πρὸς παραγωγὴν τοῦ προϊόντος. Ὁ τρόπος οὗτος ἐπιλογῆς παρέχει μὲν τὸ πλεονέκτημα τοῦ αὐτομάτου καθορισμοῦ τῆς «οικονομικώτερας» μεθόδου εἶναι ὁμως ἐσφαλμένος, διότι ἀγνοεῖ τὰς διακλαδικὰς σχέσεις ἐντὸς τῆς οἰκονομίας καὶ τὰς συνεπεῖα τῶν σχέσεων αὐτῶν ἐμμέσου ἐπιδράσεις ἐπὶ τοῦ κόστους κεφαλαίου ἐκάστου κλάδου. Πρὸς κατανόησιν τοῦ σφάλματος τοῦ ὡς ἄνω τρόπου χρησιμοποίησης τοῦ κριτηρίου οικονομικότητος τῶν ἐπενδύσεων δεόν νὰ διακρίνωμεν τὰς ἐννοίας τοῦ ἀμέσου, ἐμμέσου καὶ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου.

5. Ἡ ἄμεσον κόστος κεφαλαίου εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἀπαιτουμένου παγίου κεφαλαίου ἀπὸ ἑνα κλάδον πρὸς πραγματοποίησιν δεδομένου ἐπιπέδου παραγωγῆς. Τὸ ἄμεσον κόστος κεφαλαίου δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὸ κόστος τῆς τρεχούσης παραγωγῆς τοῦ κλάδου τούτου. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς τοῦ κλάδου εἶναι ἡ μονὰς τοῦ προϊόντος τότε τὸ ἄμεσον κόστος κεφαλαίου εἶναι ἀπλῶς ὁ συντελεστής κεφαλαιουχικότητος (Capital Output coefficient) τοῦ κλάδου τούτου.

Ἡ ἐννοία τοῦ ἐμμέσου κόστους κεφαλαίου ἀπορρέει ἐκ τῆς βασικῆς ἐννοίας τῆς οικονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν διαφόρων κλάδων. Ἐφ' ὅσον ἕκαστος κλάδος χρησιμοποιεῖ διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος του προϊόντα ἄλλων κλάδων (ὡς πρώτας ὕλας κλπ.) τὰ ὁποῖα διὰ νὰ παραχθοῦν προϋποθέτουν κόστος κεφαλαίου, ὁ δοθεὶς κλάδος εἶναι ἐμμέσως (λειτουργικῶς) ὑπεύθυνος διὰ τὸ κόστος τοῦτο. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὁ δοθεὶς κλάδος δημιουργεῖ, διὰ τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας του, κόστος κεφαλαίου εἰς τὴν οἰκονομίαν, ἄνευ τοῦ ὁποίου δὲν θὰ ἦτο δυνατόν νὰ χρησιμοποιηθῆ οὗτος παραγωγικῶς. Τὸ κόστος τοῦτο εἶναι τὸ ἐμμεσον κόστος κεφαλαίου διὰ τὸν δοθέντα κλάδον. Ἄν ἀθροίσωμεν τὸ ἄμεσον κόστος καὶ τὸ ἐμμεσον κόστος κεφαλαίου, ἐφ' ὅσον βεβαίως ἀναφέρονται ἀμφοτέρω εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς, λαμβάνομεν τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου τοῦ κλάδου διὰ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον παραγωγῆς.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω διακρίσεων μεταξὺ ἀμέσου, ἐμμέσου καὶ συνολικοῦ

κόστους κεφαλαίου, καθίσταται σαφές ότι η σύγκρισις δύο μεθόδων παραγωγής του αὐτοῦ προϊόντος βάσει τῶν συντελεστῶν κεφαλαιουχικότητας αὐτῶν (δηλαδή βάσει τοῦ ἀμέσου κόστους κεφαλαίου ἐκάστης μεθόδου), πρὸς προσδιορισμὸν τῆς συμφερωτέρας ἐξ αὐτῶν διὰ τὴν οικονομικὴν ἀνάπτυξιν, δὲν εἶναι ὀρθή. Εἶναι δυνατόν μία μέθοδος παραγωγῆς ἀπαιτοῦσα μικρότερον ἄμεσον κόστος κεφαλαίου ἀπὸ μίαν ἄλλην νὰ καταναλίσκη συγκριτικῶς πρὸς τὴν δευτέραν σημαντικῶς μεγαλύτερας ποσότητας πρώτων ὑλῶν καὶ ὑπηρεσιῶν, με ἀποτέλεσμα τὸ συνολικὸν κόστος τῆς πρώτης νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ συνολικὸν κόστος τῆς δευτέρας.

Ἡ μόνη δυνατὴ μέθοδος ὑπολογισμοῦ τῆς συνολικῆς (ἀμέσου καὶ ἐμμέσου) ἀναλώσεως κεφαλαίου εἰς ἐκάστην περίπτωσιν παραγωγῆς, εἶναι ἡ μέθοδος τῆς γενικῆς οικονομικῆς ἰσοροπίας (General Equilibrium Method). Ἡ μέθοδος αὕτη ὑπὸ τὴν ἀρχικὴν της μορφήν ἐβασίσθη, ὡς γνωστόν, εἰς τὰς ἐργασίας τῶν οικονομολόγων τῆς σχολῆς τῆς Λωζάννης Walras καὶ Pareto, ἀνεπτύχθη δὲ περαιτέρω ὑπὸ τοῦ Cassel. Ἡ χρησιμοποιοῦμένη σήμερον μέθοδος γενικῆς οικονομικῆς ἰσοροπίας ἀποτελεῖ μίαν ἐξειλιγμένην μορφήν τοῦ ἀρχικοῦ ἀναλυτικοῦ σχήματος πρὸς τὴν κατεύθυνσιν κυρίως τῆς οικονομετρικῆς αὐτοῦ ἐφαρμογῆς καὶ εἶναι γνωστὴ ὡς «Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις» (Linear Economics) ἢ ὡς «Ἀνάλυσις Οἰκονομικῆς Δραστηριότητος» (Activity Analysis).

Ἡ βασικὴ ἔννοια τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως εἶναι ἡ ἔννοια τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. «Παραγωγικὴ Δραστηριότης» (Productive Activity) καλεῖται εἰς τὴν Γραμμικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν ὁ συγκεκριμένος συνδυασμὸς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς μονάδος τοῦ οικονομικοῦ ἔργου ἢ ἄλλως ἡ συγκεκριμένη μέθοδος παραγωγῆς ἐνὸς προϊόντος.

6. Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν τὸν τρόπον ἐφαρμογῆς τοῦ κριτηρίου κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων ἐπὶ τῇ βάσει ἐνὸς ἀριθμητικοῦ παραδείγματος. Ἐστω π.χ. ὅτι μία ὑποθετικὴ οἰκονομία ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν της τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας I, II, III καὶ IV αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς παραγωγικοὺς κλάδους 1, 2, 3 καὶ 4. Αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες σχηματίζουν «τεχνολογικὴν μῆτραν τύπου Leontief» (1) ὡς δεικνύται εἰς τὸν Πίν. 1.

Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης I δεικνύει ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 νομισματικῆς μονάδος (2) τοῦ κλάδου 1, ἀπαιτεῖται ὡς πρώτη ὑλὴ κλπ., προϊόν ἀξίας 0,2 ν.μ. τοῦ κλάδου 2, προϊόν ἀξίας 0,2 ν.μ. τοῦ κλάδου 3 καὶ προϊόν ἀξίας 0,1 ν.μ. τοῦ κλάδου 4. Αἱ ἀνωτέρω ποσότητες ἀποτελοῦν συνεπῶς «συντελεστὰς εἰσροῆς» (Input Coefficients) τοῦ κλάδου 1 ἐν σχέσει πρὸς τοὺς ἄλλους κλάδους (3).

1) Τεχνολογικαὶ μῆτραι τύπου Leontief καλοῦνται εἰς τὴν Γραμμικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν οἱ πίνακες εἰσροῶν-ἐκροῶν εἰς τοὺς ὁποίους καταγράφονται συστηματικῶς αἱ τεχνολογικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας.

2) Αἱ νομισματικαὶ μονάδες εἶναι ἐνταῦθα συμβατικά μεγέθη σταθερᾶς ἀξίας.

3) Πρὸς ἀπλοῦστευσιν δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἐνταῦθα τὸ ὑφ' ἐκάστου κλάδου



Πίναξ 1  
Τεχνολογία έγχωρίων κλάδων

Παραγωγικά δραστηριότητες	I	II	III	IV
Κλάδοι	1	2	3	4
1	1	0	-0,5	-0,1
2	-0,2	1	-0,2	-0,2
3	-0,2	-0,2	1	-0,6
4	-0,1	-0,4	0	1
Κεφάλαιον	-1,2	-0,5	-1,9	-2,1

Πλήν τών άνωτέρω «είσορων» έκ τών κλάδων 2, 3 και 4, ό κλάδος 1 χρησιμοποιεί επίσης—πρός παραγωγήν προϊόντος άξίας 1 ν.μ.—κεφάλαιον υπό μορφήν μηχανημάτων και γενικώς παγίων έγκαταστάσεων άξίας 1, 2 ν.μ. Το στοιχείον 1, 2 τó όποιον άποτελεί τόν «συντελεστήν κεφαλαιουχικότητας» τού κλάδου 1, παριστά τήν σχέσηιν μεταξύ τής άξίας τού χρησιμοποιουμένου υπό τού κλάδου κεφαλαιουχικού έξοπλισμού και τής άξίας τού ύπ' αυτού παραγομένου προϊόντος.

Ό συντελεστής κεφαλαιουχικότητας δέν άποτελεί κόστος τής τρεχούσης παραγωγής, ώς οί αναφερθέντες άνωτέρω συντελεσταί είσορης ('). Σημαίνει άπλώς ότι προς παραγωγήν προϊόντος άξίας 1 ν.μ. έκ τού κλάδου 1 άπαιτούνται μηχανήματα και λοιπά πάγια έγκαταστάσεις άξίας 1,2 ν.μ. Τα μηχανήματα και αι έγκαταστάσεις αύται δημιουργούν κόστος τρεχούσης παραγωγής μόνον κατά τó ποσοστόν τών άποσβέσεων των. Άλλ' ύποθέτομεν ότι αι άποσβέσεις άντιστοιχούν εις είσοράς τού κλάδου 1 έκ τών λοιπών κλάδων, ότι δηλαδή λαμβάνονται ύπ' όψιν εις ένα τουλάχιστον έκ τών συντελεστών είσορης τής παραγωγικής δραστηριότητας I. Πρός διάκρισιν τού συντελεστού κεφαλαιουχικότητας άπό τούς λοιπούς συντελεστάς έκάστης παραγωγικής δραστηριότητας, θα όνομάζωμεν ένίοτε τόν πρώτον «άκραϊον στοιχείον», τούς δέ δευτέρους «διακλαδικά στοιχεία» τής παραγωγικής δραστηριότητας.

Τό άκραϊον και τά διακλαδικά στοιχεία προσημαίνονται άρηθρικώς προς διάκρισιν άπό τó παραγομένον προϊόν (άξίας 1 ν.μ.), τó όποιον λαμβάνει θετικών σημείον.

Βάσει τών λεχθέντων περι τής παραγωγικής δραστηριότητας I, δυνάμεθα τώρα τά έρμηνεύσωμεν αναλόγως και τάς λοιπάς παραγωγικάς δραστη-

απορροφώμενον ίδιον προϊόν, δηλαδή άποκλείονται έκ τής άνωτέρω τεχνολογικής μήτρας αι «ένδοκλαδικά» σχέσεις και έμφανίζονται μόνον αι «διακλαδικά» τοιαύται.

1) Δέον να σημειωθή ότι οί συντελεσταί είσορης τού κλάδου I δέν άποτελούν τά μοναδικά στοιχεία κόστους παραγωγής τού κλάδου τούτου, καθ' όσον εις τήν άνωτέρω τεχνολογικήν μήτραν δέν λαμβάνονται ύπ' όψιν αι είσοραί έργασίας και άλλα στοιχεία τά όποια άποτελούν επίσης κόστος παραγωγής.



ριότητας II, III και IV. Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης II δεικνύει ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ. τοῦ κλάδου 2, ὁ κλάδος οὗτος πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ προϊόντα ἀξίας 0,2 ν.μ. καὶ 0,4 ν.μ. τῶν κλάδων 3 καὶ 4 ἀντιστοίχως καὶ κεφάλαιον, ὑπὸ μορφήν μηχανημάτων καὶ λοιπῶν παγίων ἐγκαταστάσεων, ἀξίας 1,5 ν.μ. Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης III δεικνύει ὅτι ὁ κλάδος 3 λαμβάνει προϊόντα ἀξίας 0,5 καὶ 0,2 ν.μ. ἐκ τῶν κλάδων 1 καὶ 2 ἀντιστοίχως καὶ χρησιμοποιεῖ κεφάλαιον ἀξίας 1,9 ν.μ. πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ. Τέλος, ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης IV ὑποδηλοῖ ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ. τοῦ κλάδου 4 ἀπαιτοῦνται προϊόντα ἀξίας 0,1, 0,2 καὶ 0,6 ν.μ. τῶν κλάδων 1, 2 καὶ 3 ἀντιστοίχως καὶ κεφάλαιον ἀξίας 2,1 ν.μ.

Ἡ περιγραφεῖσα τεχνολογία παριστᾷ, ἐν ὀλίγοις, τὰς διακλαδικὰς ροὰς τῶν προϊόντων μεταξύ τῶν κλάδων 1, 2, 3 καὶ 4 ὡς ἐπίσης καὶ τὸ ποσὸν κεφαλαίου τὸ ὅποιον ἕκαστος τῶν κλάδων τούτων χρησιμοποιεῖ διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ.

7. Ἐὰν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι εἰς τὴν ἐν λόγω οἰκονομίαν ἐπιδιώκεται ἡ πραγματοποίησις ὠρισμένων σκοπῶν οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως καὶ τίθεται τὸ ζήτημα τῆς ἀρίστης κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων μεταξύ τῶν διαφόρων κλάδων.

Ἡ ἀρίστη κατανομή τῶν ἐπενδύσεων σημαίνει κυρίως δύο τινά: α) Καθορισμὸν τῆς οἰκονομικωτέρας ἀπὸ ἀπόψεως κόστους κεφαλαίου, παραγωγικῆς δραστηριότητος (ἢ μεθόδου παραγωγῆς) δι' ἕκαστον κλάδον (1), β) ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους τῶν ἀπαιτουμένων—κατὰ κλάδον καὶ ἐν τῷ συνόλῳ—ἐπενδύσεων. Εἰς τὸ παρὸν τμήμα θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸν προσδιορισμὸν τῆς οἰκονομικωτέρας παραγωγικῆς δραστηριότητος μεταξύ δύο ἢ περισσοτέρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ἀνηκουσῶν εἰς τὸν αὐτὸν κλάδον καὶ δυναμένων νὰ χρησιμοποιηθοῦν (διαζευκτικῶς) εἰς τὴν παραγωγὴν ἑνὸς συγκεκριμένου προϊόντος. Τὰς παραγωγικὰς ταύτας δραστηριότητας θὰ ὀνομάσωμεν ὁμοκλαδικὰς, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ παραγωγικὰς δραστηριότητας ἀνηκούσας εἰς διαφόρους κλάδους, τὰς ὁποίας χαρακτηρίζομεν ὡς συνεργαζομένας παραγωγικὰς δραστηριότητας, πρὸς ὑποδήλωσιν τῆς ἀμέσου ἢ ἐμέσου ἀλληλεξαρτήσεώς των πρὸς παραγωγὴν τῶν διαφόρων προϊόντων. Πρὸς ἀπλοῦστευσιν, θὰ θεωρήσωμεν ὅτι ὑφίσταται πρόβλημα ἐπιλογῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος μόνον διὰ τὸν κλάδον 1 τῆς οἰκονομίας.

Κατὰ τὴν σύγκρισιν δύο (ἢ περισσοτέρων) ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων πρὸς ἐξακρίβωσιν τῆς οἰκονομικωτέρας μεταξύ αὐτῶν παρουσιάζονται δύο βασικαὶ περιπτώσεις. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, αἱ ὑπὸ σύγκρισιν παραγωγικὰ δραστηριότητες εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθοῦν μὲ διάνυσματα (2) ἄνισα καὶ ἀμέσως συγκρίσιμα, ὑπὸ τὴν στενὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν,

1) Ὡς παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ἡ «εἰσαγωγή» ἐνὸς ἀγαθοῦ ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ.

2) Διάνυσμα ἀλγεβρικῶς καλεῖται πᾶσα στήλη (ἢ σειρά) ἀριθμῶν διατεταγμένων καθ' ὠρισμένην τάξιν. Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται προφανῶς νὰ παρασταθῇ ὡς διάνυσμα καθ' ὅσον εἶναι στήλη ἀριθμῶν μὲ ὠρισμένην διάταξιν.

εις δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν μὲ διανύσματα ἄνισα μὲν ἀλλ' οὐχὶ ἀμέσως συγκρίσιμα μαθηματικῶς. Λεπτομερῆς ἀνάλυσις δι' ἐκάστην περίπτωσιν ἀκολουθεῖ ἀμέσως κατωτέρω.

Περίπτωσης Α'. Ἐστώσαν π.χ. πρὸς σύγκρισιν αἱ ὁμοκλαδικαὶ παραγωγικαὶ δραστηριότητες I καὶ I<sup>+</sup>

$$I = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2 \\ -0,2 \\ -0,1 \\ -1,2 \end{bmatrix} \quad I^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,3 \\ -0,2 \\ -0,2 \\ -1,2 \end{bmatrix}$$

Αἱ παραγωγικαὶ αὗται δραστηριότητες παριστῶνται ὡς βλέπομεν ἀπὸ διανύσματα ἄνισα καὶ ἀμέσως συγκρίσιμα μαθηματικῶς, καθ' ὅσον πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ πρώτου διανύσματος εἶναι ἀνὰ ἓν ἴσα ἢ (ἀλγεβρικῶς) μεγαλύτερα τῶν στοιχείων τοῦ δευτέρου διανύσματος: Ἐχομεν δηλαδὴ  $I \geq I^+$ .

Τὸ σημεῖον  $\geq$  σημαίνει ὅτι τὰ ἀντίστοιχα διανύσματα εἶναι ὅπωςδὴ-ποτε ἄνισα ἔχουν ὅμως τινὰ ἐκ τῶν στοιχείων αὐτῶν ἴσα. Ἐπειδὴ τὸ θετικὸν στοιχεῖον τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὴν μονάδα τοῦ παραγομένου προϊόντος εἶναι κοινὸν εἰς ἀμφότερα τὰ διανύσματα, ἡ ἀνισότης μεταξύ αὐτῶν δύναται νὰ ἐκδηλωθῇ συνεπείᾳ ἀνισότητος ἐνὸς ἢ περισσοτέρων ἐκ τῶν ἀρνητικῶν στοιχείων. Μεγαλύτερον (1) εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἓν ἢ περισσότερα ἀρνητικὰ στοιχεῖα μικρότερα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ἑτέρου διανύσματος. Μικρότερα ὅμως κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀρνητικὰ στοιχεῖα σημαίνει μικρότερα κατανάλωσις πρώτων ὑλῶν κλπ., συνεπῶς μικρότερον συνολικὸν κόστος κεφαλαίου διὰ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας αἱ ὁποῖαι παράγουν τὰς πρώτας ὑλὰς. Συνεπῶς μεγαλύτερον (ἀλγεβρικῶς) διάνυσμα ὑποδηλοῖ τελικῶς συμφερωτέραν, ἀπὸ ἀπόψεως κόστους κεφαλαίου, παραγωγικὴν δραστηριότητα.

Περίπτωσης Β'. Μολονότι ἡ σύγκρισις δύο ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ἀντιπροσωπευομένων δι' ἄνισων καὶ μαθηματικῶς ἀμέσως συγκρίσιμων διανυσμάτων εἶναι ἀπλή, αὕτη δὲν παρουσιάζει μεγάλην πρακτικὴν ἀξίαν, διότι αἱ εὐκαιρία τοιαύτης συγκρίσεως δὲν εἶναι συνήθεις εἰς τὴν οἰκονομικὴν πράξιν. Περισσότερον συνήθης εἶναι ἡ περίπτωσις τῶν διαφορῶν ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων αἱ ὁποῖαι παριστῶνται ὑπὸ διανυσμάτων μὴ ἐπιδεχομένων ἄμεσον σύγκρισιν κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου  $\geq$ .

Δὲν ἔχομεν δηλαδὴ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς στοιχεῖα τοῦ ἐνὸς διανύσματος ἀνὰ ἓν ἴσα ἢ (ἀλγεβρικῶς) μεγαλύτερα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ ἑτέρου ἢ ἑτέρων διανυσμάτων. Οὕτω π.χ. δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἀποφανθῶμεν δι' ἀπ' εὐθείας συγκρίσεως ποῖα ἐκ τῶν ἀκολουθῶν δύο παραγωγικῶν δραστηριοτήτων εἶναι συμφερωτέρα:

1) Ἀλγεβρικῶς.

$$I = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2 \\ -0,2 \\ -0,1 \\ -1,2 \end{bmatrix} \quad I^{++} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,3 \\ -0,1 \\ 0 \\ -1,0 \end{bmatrix}$$

Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης I ἔχει τὸ δεύτερον στοιχεῖον αὐτῆς μεγαλύτερον (ἀλγεβρικῶς) τοῦ δευτέρου στοιχείου τῆς  $I^{++}$  τὰ δὲ λοιπὰ (ἀρνητικὰ) στοιχεῖα μικρότερα (ἀλγεβρικῶς) τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων τῆς ἄλλης. Συνεπῶς δὲν εἶναι δυνατόν νὰ διατυπώσωμεν, δι' ἀπευθείας συγκρίσεως, ἀνισότητα μεταξύ τῶν δύο διανυσμάτων.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰς ὡς ἄνω παραγωγικὰς δραστηριότητας πρέπει προηγουμένως νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου αὐτῶν. Τὸ κόστος τοῦτο ἰσοῦται, ὡς ἐλέχθη, μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀμέσου καὶ ἐμμέσου κόστους κεφαλαίου. Τὸ ἄμεσον κόστος κεφαλαίου δὲν ἀπαιτεῖ ὑπολογισμόν, διότι δίδεται ἀμέσως ἐκ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιουχικότητος τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Τὸ ἐμμεσον κόστος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν διακλαδικῶν στοιχείων ἐπὶ τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου τῶν ἀντιστοιχῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Οὕτω, ἂν π.χ.  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  καὶ  $\tau_4$  παριστοῦν τὸ συνολικὸν κόστος τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων II, III καὶ IV (αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς κλάδους 2, 3 καὶ 4 τῆς δοθείσης τεχνολογικῆς μήτρας), τὸ ἐμμεσον κόστος κεφαλαίου τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I θὰ εἶναι :

$$0.2.\tau_2 + 0.2.\tau_3 + 0.1.\tau_4$$

Τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου  $\tau_1$ , διὰ τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα I, θὰ εἶναι τῶρα :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \text{ἀμεσον κόστος τῆς I} + \text{ἐμμεσον κόστος τῆς I} \\ &= 1.2 + 0.2.\tau_2 + 0.2.\tau_3 + 0.1.\tau_4 \end{aligned} \quad (1)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται ὅτι πρὸς ὑπολογισμόν τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου μὴδ παραγωγικῆς δραστηριότητος εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ μετὰ τῆς δραστηριότητος ταύτης συνεργαζόμεναι (ἀμέσως ἢ ἐμμέσως) παραγωγικαὶ δραστηριότητες τῶν ἄλλων κλάδων τῆς οἰκονομίας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ εἶναι καθωρισμένη ἡ τεχνολογικὴ μήτρα εἰς τὴν ὁποῖαν ἀνήκει τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν δοθείσαν παραγωγικὴν δραστηριότητα διάνυσμα. Ὅμοίως σκεπτόμενοι, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ συνολικὸν κόστος ἐκάστης τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων :

$$II = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,2 \\ -0,4 \\ -1,5 \end{bmatrix} \quad III = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,2 \\ 1 \\ 0 \\ -1,9 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad IV = \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,2 \\ -0,6 \\ 1 \\ -2,1 \end{bmatrix}$$

(αί όποίοι ανήκουν εις τήν αὐτήν τεχνολογικήν μήτραν εις τήν όποίαν ανήκει καί ἡ παραγωγική δραστηριότης I) ὡς ἀκολουθῶς :

$$\begin{aligned} \tau_2 &= 1,5 + 0,2\tau_3 + 0,4\tau_4 \\ \tau_3 &= 1,9 + 0,5\tau_1 + 0,2\tau_2 \\ \tau_4 &= 2,1 + 0,1\tau_1 + 0,2\tau_2 + 0,6\tau_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριῶν ἐξισώσεων καί τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} \tau_1 - 0,2\tau_2 - 0,2\tau_3 - 0,1\tau_4 &= 1,2 \\ -0,1\tau_1 + \tau_2 - 0,2\tau_3 - 0,4\tau_4 &= 1,5 \\ -0,5\tau_1 - 0,2\tau_2 + \tau_3 - 0,1\tau_4 &= 1,9 \\ -0,1\tau_1 - 0,2\tau_2 - 0,6\tau_3 + \tau_4 &= 2,1 \end{aligned} \quad (3)$$

Τὸ όποῖον δύναται νά γραφῆ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,2 & -0,2 & -0,1 \\ 0 & 1 & -0,2 & -0,4 \\ -0,5 & -0,2 & 1 & 0 \\ -0,1 & -0,2 & -0,6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,5 \\ 1,9 \\ 2,1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος αὐτοῦ λαμβάνομεν τὰς ἀκολουθοῦσας τιμὰς (') διὰ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας I, II, III, καί IV ἀντιστοίχως :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 3,75 \\ \tau_2 &= 4,98 \\ \tau_3 &= 4,76 \\ \tau_4 &= 6,32 \end{aligned} \quad (5)$$

Ἄν τώρα θέλωμεν νά συγκρίνωμεν τήν παραγωγικήν δραστηριότητα I μέ τήν παραγωγικήν δραστηριότητα I<sup>++</sup> πρὸς ἐπιλογήν τῆς οικονομικώτερας μεταξύ αὐτῶν, πρέπει νά προσδιορίσωμεν τήν τιμὴν τῆς I<sup>++</sup>, ὡς ἐπράξαμεν ἤδη καί διὰ τήν I, καί νά συγκρίνωμεν τὰς δύο τιμὰς. Πρὸς τοῦτο, εἰς τήν τεχνολογικήν μήτραν I, II, III, IV, ἀντικαθιστῶμεν τήν I διὰ τῆς I<sup>++</sup> όπότε λαμβάνομεν τήν νέαν τεχνολογίαν I<sup>++</sup>, II, III, IV, ἥτις διαφέρει τῆς προηγουμένης μόνον κατὰ τήν πρώτην (τήν ὑπὸ κρίσιν) παραγωγικήν δραστηριότητα. Ἐκ τῆς νέας τεχνολογίας σχηματίζομεν τὸ ἀκόλουθον σύστημα ἐξισώσεων :

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,3 & -0,1 & 0 \\ 0 & 1 & -0,2 & -0,4 \\ -0,5 & -0,2 & 1 & 0 \\ -0,1 & -0,2 & -0,6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau'_1 \\ \tau'_2 \\ \tau'_3 \\ \tau'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 1,9 \\ 2,1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

όπου  $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \tau'_4$ , εἶναι αἱ νέαι τιμαὶ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων I<sup>++</sup>, II, III καί IV ἀντιστοίχως.

1) Ἐντὶ τοῦ όρου «συνολικὸν κόστος κεφαλαίου» τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος χρῆσιμοποιοῦμεν τὸν όρον «τιμὴ» τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος ἔχομεν :

$$\tau'_1 = 2,83$$

$$\tau'_2 = 4,70$$

$$\tau'_3 = 4,24$$

$$\tau'_4 = 5,86$$

(7)

Συγκρίνοντας τὰς τιμὰς  $\tau_1$  καὶ  $\tau'_1$  βλέπομεν ὅτι  $\tau_1 > \tau'_1$ . Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι  $\tau_2 > \tau'_2$ ,  $\tau_3 > \tau'_3$  καὶ  $\tau_4 > \tau'_4$ , δηλαδή ὅτι πᾶσαι αἱ τιμαὶ τῆς δευτέρας σειρᾶς (τὰ τονούμενα  $\tau$ ) εἶναι μικρότεροι ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς πρώτης σειρᾶς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἀντικατάστασις τῆς I διὰ τῆς I<sup>++</sup> εἰς τὴν τεχνολογικὴν μήτραν προεκάλεσε μείωσιν, ὄχι μόνον τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ τοῦ κλάδου 1, ἀλλ' ἐπίσης καὶ τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τῶν προϊόντων τῶν κλάδων 2,3 καὶ 4. Ἡ ἀνωτέρω σχέση μεταξὺ τῶν δύο σειρῶν τιμῶν ἀποτελεῖ ἐπαρκές κριτήριον περὶ τῆς σκοπιμότητος ἀντικαταστάσεως τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I διὰ τῆς ὁμοκλαδικῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I<sup>++</sup>.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων I καὶ I<sup>++</sup> (περίπτ. α), εἶδομεν ὅτι ἡ πρώτη χρησιμοποιοῖ ὀλιγώτερον συνολικὸν κεφάλαιον τῆς δευτέρας διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ αὐτοῦ ἀγαθοῦ καὶ συνεπῶς εἶναι συμφερωτέρα ταύτης. Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον εἶδομεν ὅτι ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης I<sup>++</sup> εἶναι συμφερωτέρα τῆς I. Κατὰ συνέπειαν ἡ I<sup>++</sup> εἶναι οἰκονομικώτερα ἀμφοτέρων καὶ πρέπει νὰ προτιμηθῇ εἰς τὸ πρόγραμμα ἐπενδύσεων.

Ἡ ἐφαρμογὴ εἰς τὴν πράξιν τῆς ἀνωτέρω ὑποδειχθείσης ἐπιλογῆς τῶν ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων πρὸς καθορισμὸν τοῦ τρόπου κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων εἰς τὸ πρόγραμμα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, δημιουργεῖ σοβαρὰ ὑπολογιστικὰ προβλήματα. Ἡ ἀντιμετώπισις τῶν προβλημάτων αὐτῶν εἶναι ἐν τούτοις δυνατὴ, ὡς δεικνύεται εἰς εἰδικὴν μελέτην τοῦ ὑποφαινομένου (1), ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς τὴν ἀναλυτικὴν ἐξέτασιν τοῦ ὅλου θέματος τῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων.

Ἐνταῦθα ἐπεδιώχθη κυρίως νὰ τονισθῇ ὅτι βασικὸν κριτήριον κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων εἰς μίαν ὑπανάπτυκτον οἰκονομίαν, ὡς ἡ ἑλληνικὴ, εἶναι τὸ συνολικὸν (ἄμεσον καὶ ἔμμεσον) κόστος κεφαλαίου καὶ ὅτι ὁ προσδιορισμὸς αὐτοῦ δὲν εἶναι δυνατὸς ἄνευ τῆς ἐφαρμογῆς εἰδικῆς μεθόδου ἀναλύσεως ἡ ὁποία θὰ λαμβάνη ὑπ' ὄψιν τὸ γεγονός ὅτι οἱ διάφοροι οἰκονομικοὶ κλάδοι εὐρίσκονται εἰς σχέσιν ἀλληλεξαρτήσεως.

1) «Προγραμματισμὸς τῶν Ἐπενδύσεων διὰ τὴν Ἀνάπτυξιν τῶν Οἰκονομικῶς Καθυστερημένων Χωρῶν», Ἀθῆναι 1959 (πολυγραφημένον κείμενον).



# INPUT - OUTPUT ANALISI ED ECONOMIE ASTRATTE

## CONCETTI E PROPRIETA GENERALI

per SALVATORE CHERUBINO (a Pisa)\*

### § 1. Proprietà algebriche delle tavole di input-output

1. Sia  $E$  un'economia abbastanza estesa le cui attività produttrici, in un certo intervallo di tempo  $(t_0, t_1)$ , siano ripartite in  $n$  settori o industrie: 1, 2, ...,  $n$ . Diciamo  $X_r > 0$  la produzione totale del settore  $r$  conseguita dal tempo  $t_0$  al tempo  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ ; sia  $x_{rs}$  la porzione di  $X_r$  ceduta nello stesso intervallo  $(t_0, t)$  dal settore  $r$  a quello  $s$ ;  $p_r$  sia il prezzo unitario di costo, all'istante  $t$ , della produzione  $X_r$ ; indichiamo infine con  $Y_r$  quella parte non negativa della produzione di  $r$  che, nell'intervallo  $(t_0, t)$  vien dedicata al consumo. Sarà necessariamente:

$$(1.1) \quad x_{r1} + x_{r2} + \dots + x_{rn} + Y_r \leq X_r; \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

con le  $Y_r$  non tutte zero.

Poniamo:

$$(2.1) \quad a_{rs} = x_{rs} : X_s \quad (r, s = 1, 2, \dots, n)$$

e consideriamo le matrici quadrate di ordine  $n$ :

$$(3.1) \quad \mathbf{x} = [x_{rs}]; \quad \mathbf{a} = [a_{rs}]$$

che diciamo rispettivamente matrice degli scambi e matrice dei coefficienti di scambio. Esse sono entrambe non negative, cioè i loro elementi sono numeri reali positivi o zero, ma non tutti zero. Si indica questa proprietà scrivendo:

$$(4.1) \quad \mathbf{x} = [x_{rs}] \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{a} = [a_{rs}] \geq \mathbf{0}.$$

\*O συγγραφέας είναι τακτικός καθηγητής της Γεωμετρίας εις τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Πίζης, ὅπου ἀπὸ τὸ 1932 διδάσκει εις τὴν Σχολὴν Μηχανικῶν ἀνώτερα μαθηματικά καὶ εις τὴν Οἰκονομικὴν Σχολὴν γενικὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν. Συνέγραψε πολυαριθμοὺς μαθηματικὰς ἐργασίας κυρίως ἐπὶ θεμάτων ἀναλυτικῆς γεωμετρίας καὶ λογισμοῦ μητρῶν. Ἀπὸ δεκαετίας περίπου ἀσχολεῖται ἐπιτυχῶς μὲ τὴν σπουδὴν τῶν γραμμικῶν οἰκονομικῶν συστημάτων, ἔγινε δὲ γνωστός, εις τοὺς κύκλους τῶν οἰκονομολόγων, ἀπὸ τὰς πρωτοτύπους καὶ μεθοδικὰς ἐργασίας του ἐπὶ τῶν ἀφηρημένων οἰκονομιῶν (economie astratte). Ἡ παροῦσα ἐργασία του, ἥτις ἀποτελεῖ μίαν ἐνδιαφέρουσαν εἰσαγωγὴν εις τὸ θέμα τῶν ἀφηρημένων οἰκονομιῶν ἐν συστηματικῶ μὲ τὴν ἀνάλυσιν εἰσροῶν-ἐκροῶν, ἐγράφη εἰδικῶς διὰ τὴν παροῦσαν ἐκδοσιν τῆς Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς.



I vettori orizzontali:

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n); \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n); \quad \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

i primi due positivi, il terzo non negativo (<sup>1</sup>), sono detti vettori delle produzioni totali, dei prezzi (unitari di costo) e dei consumi necessari, rispettivamente.

Le (2. 1) si compendiano nell'eguaglianza:

$$(2. 1') \quad \mathbf{a} = \mathbf{x} \mathbf{Q}^{-1}$$

dove  $\mathbf{Q}$  è la matrice diagonale di ordine  $n$  che ha per elementi principali le produzioni  $X_1, X_2, \dots, X_n$  delle  $n$  industrie (ed i rimanenti elementi tutti uguali a zero).

Le (1. 1), a causa delle (2. 1), si scrivono:

$$(I. 1) \quad [\mathbf{I} - \mathbf{a}] \mathbf{X}_{-1} \geq \mathbf{Y}_{-1} \geq \mathbf{0}$$

Se nella (I. 1), cioè nella (1. 1), vale il solo segno eguale, si dice che si ha equilibrio di produzione, cioè che (in ogni istante) la produzione di ciascun settore è esattamente eguale alla somma delle vendite a tutti gli altri (compreso se stesso) e del consumo necessario  $Y_r$ .

2. Ciascun settore, per produrre, ha bisogno di forza-lavoro: indicheremo con  $x_{n+1,s}$  la forza-lavoro impiegata nel settore  $s$  per produrre, nell'intervallo  $(0,t)$  la produzione totale  $X_s$  e considereremo il vettore positivo

$$(6. 1) \quad \mathbf{a}_{(n+1)} = (a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \dots, a_{n+1,n})$$

nel quale si è posto:

$$(7. 1) \quad a_{n+1,s} = x_{n+1,s} : X_s \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Il prezzo unitario, positivo, della forza-lavoro all'istante  $t$  s' indicherà  $p_{n+1}$  e si porrà:

$$(8. 1) \quad x_{n+1,1} + x_{n+1,2} + \dots + x_{n+1,n} = X_{n+1}.$$

La forza-lavoro funziona così come un settore di  $E$  che si dice primitivo perché la forza-lavoro non può esser prodotta da nessuna delle  $n$  industrie.

1) Si scrive  $\mathbf{X} > \mathbf{0}$ ;  $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ ;  $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ .

Il segno  $\geq$  indica che ciascuna riga del primo membro non supera l'elemento corrispondente del secondo. Il segno  $>$  significa che fra gli elementi corrispondenti dei due membri vale il  $\geq$ , ma non sempre il  $>$ , né l' =.

Il simbolo  $\mathbf{I}$ , di cui appresso, indica la matrice diagonale ad elementi principali tutti uguali a +1 (e gli altri uguali a zero). L' indice -1 al piede di un vettore orizzontale sta ad indicare che esso si scrive verticalmente.

Paragonando i costi si ha, ad esempio per il settore  $s$ :

$$(9.1) \quad p_1 x_{1,s} + p_2 x_{2,s} + \dots + p_n x_{n,s} + p_{n+1} x_{n+1,s} \leq p_s x_s; \quad (s=1, 2, \dots, n).$$

Ne segue la relazione in matrici:

$$(II.1) \quad \mathbf{p} [I - \mathbf{a}] \geq \mathbf{Z} > 0$$

nella quale  $\mathbf{Z}$  è il vettore, positivo, che ha per componenti i costi della forza-lavoro impiegata per produzione unitaria in ciascuno degli  $n$  settori. Si ha:

$$(10.1) \quad \mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = p_{n+1} \mathbf{a}_{(n+1)}$$

ossia:

$$(10.1') \quad Z_r = p_{n+1} a_{n+1,r} \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

3. Dalla (I. 1), indicando con  $P$  la matrice diagonale di elementi principali  $p_1, p_2, \dots, p_n$  segue che la matrice:

$$(11.1) \quad \mathbf{a}' = P \mathbf{a} P^{-1}$$

ha le somme degli elementi di ciascuna colonna tutte minori di +1, cioè che  $[I - \mathbf{a}']$  è una matrice leontieviana soddisfacente all'ipotesi forte<sup>(2)</sup>. La matrice  $[I - \mathbf{a}]$  che compare nella (I. 1) - (II. 1) è simile ad  $[I - \mathbf{a}']$  quindi possiede le stesse proprietà strutturali di questa. In particolare, le radici caratteristiche di  $\mathbf{a}$  sono tutte di modulo minore di 1; una almeno sarà positiva ed avrà massimo modulo; esiste l'inversa di  $[I - \mathbf{a}]$ :

$$(12.1) \quad [I - \mathbf{a}]^{-1} = [\mathbf{a}_{rs}] \quad (r, s=1, 2, \dots, n)$$

e risulta non negativa. In particolare, se  $\mathbf{a}$  è irriducibile, cioè se nessun gruppo di settori di  $E$  compra o vende soltanto da se stesso, la (12. 1) è addirittura positiva<sup>(3)</sup>, cioè ha gli elementi tutti  $> 0$ .

Dalle (I. 1) - (II. 1) si ha:

$$(I'.1) \quad \mathbf{X}_{-1} \geq [I - \mathbf{a}]^{-1} \mathbf{Y}_{-1}$$

$$(II'.1) \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{Z} [I - \mathbf{a}]^{-1}$$

ed il vettore  $\mathbf{p}$  riesce sempre positive come  $\mathbf{Z}$ , mentre  $\mathbf{X}$  è non negativo

2) S. CHERUBINO: Sulle matrici leontieviane su un problema di programmazione lineare [*L'Industria* (1959) n. 2, pp. 156-164], § 1.

3) V. il mio *Calcolo delle Matrici* [CNR, Roma Cremonese (1957) cap. II, § 2, b), p. 133 ed f) - f') pp. 140 - 141]. Vedasi anche la mia Mem.: *Sulle matrici quadrate non negative* [Ann. Sc. Norm. Pisa, s. III, vol. X (1956) pp. 217 - 235] § 1, n. 1 p. 219.

insieme ad  $\mathbf{Y}$ . Se però l' economia, cioè  $\mathbf{a}$ , è irriducibile,  $\mathbf{X}$  è positivo anche con  $\mathbf{Y}$  semipositivo ( $\mathbf{Y} \geq 0$ ).

Se vale l' equilibrio generale, nella (I. 1) — (II. 1) e nella (I'. 1) — (II'. 1) vale il solo segno eguale e si ha che i vettori delle produzioni e dei prezzi determinano e sono determinati, univocamente, dai settori dei consumi necessari e dei costi di forza-lavoro impiegata, rispettivamente.

Se non vale l' equilibrio generale,  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Z}$  sono consumi e costi di forza-lavoro necessari, cioè minimi.

4. Ricavando  $X_s$  da (I'. 1) e sostituendo nella (3. 1) si ottiene:

$$(13. 1) \quad x_{r,s} \geq \sum_1^n a_{rs} a_{sh} Y_h$$

Sostituendo invece nella (7. 1), si ha:

$$(14. 1) \quad x_{n+1,s} \geq \sum_1^n a_{n+1,s} a_{sh} Y_n$$

e che (4):

$$(15. 1) \quad \sum_1^n a_{rs} a_{sh}; \quad \sum_1^n a_{n+1,s} a_{sh} = L_h$$

sono rispettivamente gli aumenti minimi delle vendite del settore  $r$  a tutti gli altri e di forza-lavoro impiegata in tutti i settori provocati dall' aumento unitario di consumo necessario (minimo) nel settore  $h$ .

Dalla (II'. 1) si ottiene anche:

$$(16. 1) \quad p_h \geq p_{n+1} \cdot L_h$$

quindi che il prezzo di costo della produzione del settore  $h$  non è minore (è uguale se siamo nell' equilibrio generale) del costo del maggior lavoro totale provocato dall' aumento unitario di consumo nello stesso settore  $h$ .

Questo fatto costituisce il principio del valore-lavoro (che sarebbe preferibile chiamare principio del prezzo-lavoro) (5).

## § 2. Le reazioni del mercato

5. Produzioni e prezzi sono soggetti alle cosiddette reazioni di mercato le quali influiscono anche sulle velocità con cui produ-

4) S. CHERUBINO: Sui fondamenti matematici della teoria dell' equilibrio generale economico [«L' Industria» (1956) n. 3, pag. 302-336] § 6, p. 316.

5) Cfr. Mem: cit. (4), § 6, c). p. 316.

zioni e prezzi variano nell'intervallo di tempo che si considera, che prendiamo coincidente con quello  $(t_0, t_1)$  cui si riferisce la tavola di input-output. Ciò vuol dire che il mercato dà luogo a delle relazioni fra i vettori  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{p}$  e le loro derivate  $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$ ,  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$  rispetto al tempo.

L'ipotesi più plausibile è che le velocità di produzione (di prezzo) dipendano esplicitamente dai prezzi (dalle produzioni).

Per comodità di trattazione matematica conviene supporre che le relazioni in discorso siano lineari. E' poi avvio che le reazioni del mercato agiscono contemporaneamente su tutti i settori e non separatamente su ciascuno di essi, salvo casi molto particolari.

A questi requisiti rispondono relazioni come:

$$(I. 2) \quad \begin{cases} \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right)_{-1} = \mathcal{B}\mathbf{p}_{-1} \\ \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{-1} = \mathcal{F}\mathbf{X}_{-1} \end{cases}$$

nelle quali le lettere gotiche  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  denotano due matrici quadrate di ordine  $n$  ad elementi funzioni del tempo  $t$  variabile in  $(t_0, t_1)$ .

Si osservi che, quali che siano i vettori  $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$  e  $\mathbf{p}$ , così  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$  ed  $\mathbf{X}$ , esistono sempre relazioni del tipo (I. 2). Soltanto  $2n$  dei  $2n^2$  elementi delle matrici  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  sono necessariamente impegnati dalle due coppie: restano liberi  $2n(n-1)$  parametri che, con la loro arbitraria variabilità, consentono di adeguare il sistema (I. 2) al fenomeno del mercato, che riesce ben rappresentato dal sistema stesso.

Questo può anche scriversi:

$$(I'. 2) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{X} | \mathbf{p})_{-1} = \mathcal{A} \cdot (\mathbf{X} | \mathbf{p})_{-1}$$

che è un sistema differenziale lineare omogeneo sulle  $2n$  funzioni incognite  $X_1, \dots, X_n$ ;  $p_1, \dots, p_n$  elementi del vettore  $(\mathbf{X} | \mathbf{p})$ . La matrice  $\mathcal{A}$  dei coefficienti è:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{B} \\ \mathcal{F} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

coi quadranti delle prime, e delle ultime,  $n$  righe e colonne dati da matrici nulle (cioè ad elementi tutti zero). L'integrale generale di questo sistema si scrive:

$$(II. 2) \quad (\mathbf{X} | \mathbf{p})_{-1} = \mathcal{X}(t) c_{-1}$$

nel cui secondo membro  $\mathcal{X}(t)$  è la matrice quadrata di ordine  $2n$  ma-

trizzante sinistro di  $\mathcal{A}$ , esteso all'intervallo  $(t_0, t_1)$  e  $c$  è un vettore orizzontale a  $2n$  componenti determinazione iniziale (all'istante  $t_0$ ) del vettore  $(\mathbf{X} | \mathbf{p})$ <sup>(6)</sup>. Ciò implica che  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  soddisfino ad opportune condizioni, che supporremo verificate. Così appresso, per le condizioni via via implicitamente richieste.

Considerando la (II. 2) nello spazio lineare  $S_{2n}$  congiungente quelli delle produzioni e dei prezzi (che in esso poniamo assumano posizioni opposte) il bipoliedro costituito dai due coni poliedrali convessi descritti dai vettori  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{p}$  soddisfacenti alle (I. 1) — (II. 1), ossia alle<sup>(7)</sup>:

$$(III. 2) \quad [I - \mathbf{a}] \mathbf{X}_{-1} > 0; \quad \mathbf{p} [I - \mathbf{a}] > 0$$

viene trasformato in se stesso da detta (II. 2), la quale porta il vettore  $c$  iniziale, che corrisponde a un punto fissato a piacere nel bipoliedro predetto, in un vettore, cioè in un punto, variabile col tempo appartenente allo stesso bipoliedro. Per ricordare che gli elementi della matrice  $\mathcal{A}^*(t)$  sono funzioni del tempo, ossia che il vettore trasformato è variabile con  $t$ , e può descrivere tutto il bipoliedro delle produzioni - prezzi, la trasformazione (II. 2) si è detta *evolutiva* e si è parlato di *evoluzione economica*, conseguenza delle reazioni di mercato.

La matrice  $\mathcal{A}^*(t)$ , quindi la  $\mathcal{A}$  che la determina, deve essere necessariamente sottoposta ad opportune restrizioni che consentono di affermare che la trasformazione avviene nel modo predetto. Se, ad es., la matrice  $\mathcal{A}$  è costante e l'intervallo  $(t_0, t_1)$  è sufficientemente piccolo, si vede facilmente, utilizzando un noto risultato, essere necessario che la matrici  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  siano non negative<sup>(8)</sup>.

### § 3. Concorrenza ed oscillabilità

6. In un intervallo di tempo abbastanza piccolo, nel quale la matrice  $\mathcal{A}$  (cioè  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$ ) possa ritenersi costante, le condizioni:

$$(I. 3) \quad \mathcal{B} \geq 0, \quad \mathcal{F} \geq 0$$

sono non solo necessarie ma anche sufficienti perchè il sistema (I. 2) ammetta soluzioni tutte positive qualunque siano le determinazioni iniziali

6) Vedi il mio *Calcolo delle Matrici*, cit. (3), cap. I, § 13, n. 49, p. 101.

7) S. CHERUBINO: *Sull'evoluzione economica* [Rend. Mat. Roma (1958), vol. 17, pp. 231 - 261] § 2, pp. 239 - 241.

8) Cfr. «Fondamenti» cit. (4) §. p.p. 322 - 324 e la mia Nota lineea: *Sulla dinamica economica* [Rend. Lincei, s. VII, vol. XXII (1957) pp. 281 - 285] nn. 2 e 3, pp. 282 - 284. Per evidente ragione di continuità,  $\mathbf{p}$  dato dalle (5) - (6) p. 283 deve inizialmente soddisfare la seconda delle (III - 2) con  $t=0$ ; analogamente per  $\mathbf{X}$ .

delle produzioni e dei prezzi. La necessità vale per  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  costanti, la sufficienza anche per  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  variabili col tempo. Ci riferiamo qui alla sola positività dell'integrale generale (II. 2) prescindendo dalle (III. 2), cioè senza esigere l'appartenenza delle soluzioni ad un determinato bipoliedro di produzioni - prezzi. Le condizioni (I. 3) assicurano che il mercato opera in regime di libera concorrenza (perfetta) perché nessuna restrizione dovrà apportarsi alla libera scelta delle determinazioni iniziali dei vettori  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{p}$  cioè nessuna costrizione viene esercitata sui produttori - consumatori che quelle determinazioni scelgono. La piccolezza dell'intervallo di tempo durante il quale il mercato opera, cioè in cui sussiste il sistema (I. 2), serve ad assicurare che le reazioni, elementi delle matrici  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$ , manengono in tutto quell'intervallo le proprietà analitiche necessarie e sufficienti per l'integrabilità del sistema e che, verificandosi le (I. 3) in un certo istante  $t'$ , esso si verifichino in un intorno conveniente di  $t'$ .

Se non valgono le (I. 3) la positività di tutte o parte delle soluzioni (II. 2) può verificarsi solo con conveniente scelta delle determinazioni iniziali di  $\mathbf{X}$  e di  $\mathbf{p}$ : si è allora in regime di concorrenza imperfetta. Se non si verificasse neppure questo fatto, il mercato sarebbe in crisi.

La costanza dei coefficienti di scambio, cioè della matrice  $\mathbf{a}$  intervalli sufficientemente piccoli non si estende né ai coefficienti di scambio relativi alla forza - lavoro, né a quelli del consumo, altrimenti i prezzi (le produzioni) correnti sarebbero indipendenti dalle produzioni (dai prezzi) iniziali, ciò che non concorda col concetto di mercato<sup>9)</sup>.

7. Per esaminare se, quando e come la economia oscilla, consideriamo ancora il caso particolare in cui  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  siano costanti. Allora risulta:

$$(1. 3) \quad \mathcal{X}(t) = e^{\mathcal{A}(t-t_0)}$$

e portando la matrice  $\mathcal{A}$  nella forma canonica  $\mathcal{A}_0$  e dicendo  $(\mathbf{X} | \mathbf{p})_0$ ,  $c_0$  i vettori trasformati di  $(\mathbf{X} | \mathbf{p})$  e di  $\mathbf{a}$  mediante la stessa trasformazione che porta  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{A}_0$ , si ha:

$$(2. 3.) \quad (\mathbf{X} | \mathbf{p})_0 = c_0 e^{D(t-t_0)} e^{J(t-t_0)}$$

ove  $D$  e  $J$  sono le parti principali e complementari (tra loro permutabili) di  $\mathcal{A}_0$ . La parte  $D$  è diagonale ed ha per elementi principali le radici caratteristiche di  $\mathcal{A}$ . Se  $\alpha$  è una di queste radici ed è complessa, il secondo membro di (2. 3) possiede il fattore scalare:

9) S. CHERUBINO: Sulle economie bipartite [Gior. degli Economisti (Marzo - Aprile 1957)] § 3. Vedi anche la Nota Lincea cit. (8), n. 2, pp. 282 - 283.



$$(3.3) \quad e^{\alpha(t-t_0)} = \rho [\text{sen } \alpha(t-t_0) + i \cos \alpha(t-t_0)]$$

che oscilla tra  $-\rho$  e  $+\rho$ . Se  $\alpha$  è la radice immaginaria di massimo modulo, i corrispondenti settori trasformati compiranno oscillazioni di ampiezza non superiore a  $2\rho$ . Il periodo di oscillazione corrispondente si calcola immediatamente. L'ampiezza ed il periodo dell'oscillazione sono però condizionati dall'intervallo  $(t_0, t_1)$  che li restringe, a meno che esso non sia sufficientemente grande.

Invece di pensare  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  costanti in tutto l'intervallo  $(t_0, t_1)$  si può considerare un istante  $t'$  di esso, le corrispondenti determinazioni di  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  ed un intorno di  $t'$  in cui  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  varino abbastanza lentamente per potersi ritenere praticamente costanti.

Nell'ipotesi dell'equilibrio generale, il mercato può considerarsi operante sui consumi e sulle forze-lavoro impiegate, cioè sui vettori  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Z}$ . Occorre trasformare il sistema (I. 2) mediante le (I. 1) — (II. 1) nelle quali varrà il solo segno eguale. Se  $\mathbf{a}$  è costante, il sistema (II. 2) non muterà di aspetto, ma l'intervallo  $(-\rho, \rho)$  ed il periodo di oscillazione verranno a dipendere anche dai coefficienti di scambio, perché ne dipenderà la matrice dei coefficienti del sistema, quindi ne dipenderanno le radici caratteristiche  $\alpha$ .

Altre ipotesi particolari sono possibili <sup>(10)</sup>.

8. Le (I'. 1) — (II'. 1) mostrano che per  $\mathbf{a}$  costante, dall'accettabilità delle soluzioni del sistema differenziale lineare in  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  segua quella delle soluzioni di (I. 2), causa la non negatività della inversa della matrice  $[I - \mathbf{a}]$ . Non vale il viceversa.

Se  $\mathbf{a}$  è variabile col tempo, il sistema trasformato di (I. 2) acquista la forma:

$$(6.3) \quad \begin{cases} \left( \frac{d\mathbf{Y}}{dt} \right)_{-1} = \underline{P}(t) \mathbf{Y}_{-1} + \underline{Q}(t) \mathbf{Z}_{-1} \\ \left( \frac{d\mathbf{Z}}{dt} \right)_{-1} = \underline{R}(t) \mathbf{Y}_{-1} + \underline{S}(t) \mathbf{Z}_{-1} \end{cases}$$

in cui vi sono 4 matrici d'ordine  $n$  i cui elementi rappresentano le reazioni del mercato. La positività dei consumi  $\mathbf{Y}$  e della forza-lavoro impiegata  $\mathbf{Z}$  viene allora garantita dalla non negatività delle reazioni elementi delle matrici  $\underline{Q}$  ed  $\underline{R}$  insieme a quella degli elementi non principali di  $\underline{Q}$  ed  $\underline{S}$  <sup>(11)</sup>.

<sup>10)</sup> Vedansi le due mie Memorie: Sull'analisi lineare delle interdipendenze industriali [*«L'Industria»* (1954) n. 2, pp. 151-178] § 4, n. 10 e *«Fondamenti»* cit. (4) § 8, nn. 16 a 19, pp. 319-327.

<sup>11)</sup> BELLMAN R., GLICKSBERG I. and GROSS O.: On some va-

Le espressioni di queste quattro matrici per mezzo di  $P$ ,  $\mathcal{F}$  ed  $\mathbf{a}$  mostrano ancora come la positività di  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Z}$  e quella di  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{p}$  non si equivalgono e che la positività di  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{p}$  segue da quella di  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Z}$  solo in termini finiti, cioè indipendentemente dall'intervento del mercato.

Riassumendo, il mercato, da solo, può garantire la positività delle produzioni e dei prezzi, ma, anche se questa si verifica, non può garantire la positività dei consumi e quella del lavoro impiegato nei singoli settori.

#### § 4. Classificazione delle economie

9. Lo studio delle proprietà del sistema differenziale (I. 2) porta anche a distinguere molti tipi di economia, dei quali enumereremo i più significativi.

Per approfondire l'analisi conviene riferirsi non ai settori di partenza, ma ad un settore aggregato secondo un vettore positivo o semipositivo costante indeterminato  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  e fare qualche opportuna posizione (12).

Riferendoci alla prima della (II. 2) poniamo:

$$(1.4) \quad \mathcal{B} = B + p_1 B' + p_2 B'' + \dots + p_n B^{(n)}$$

$$(2.4) \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \lambda B' \\ \lambda B'' \\ \vdots \\ \lambda B^{(n)} \end{bmatrix}$$

La matrice  $B$  si dice dei coefficienti delle reazioni generali;  $B'$ ,  $B''$ , ...,  $B^{(n)}$  si dicono matrici delle reazioni specifiche. Si ha:

$$(3.4) \quad \mathbf{p} \mathcal{M} = \lambda [ \mathcal{B} - B ]$$

Considerato allora

$$(4.4) \quad \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}_{-1} = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n$$

cioè la produzione del settore aggregato secondo il vettore  $\lambda$  positivo o semipositivo arbitrario, si ha:

$$(I.4) \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \lambda B \mathbf{p}_{-1} + \mathbf{p} S \mathbf{p}_{-1}$$

rational problems occurring in the theory of dynamic programming [Rend. Pal., s. II, t. III (1954) pp. 363-397] theorem 4, p. 376. Vedasi anche la mia Nota lineca cit. (15) qui appresso, n.11, pp.17-18.

12) S. CHERUBINO: Su alcune proprietà delle economie ripartite in settori e sulla loro classificazione dinamica [Politica economica, XLVII, III serie, (1957) pp.406-421] § 2, pp. 411-413.

con  $S = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{M} + \mathcal{M}_{-1} \right]$  matrice reale simmetrica ad elementi funzioni bilineari delle reazioni specifiche e dei coefficienti o intensità di aggregazione  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Le due parti del secondo membro di (I. 4) si dicono rispettivamente: parte principale e parte complementare della velocità di produzione del settore aggregato secondo  $\lambda$ . Analoghe posizioni possono farsi sui prezzi, cioè mercè la seconda delle (II. 2).

Le parti principale e complementare possono essere, separatamente o congiuntamente, comunque sia fissato  $\mathbf{p}$ , di valore  $> 0$ ,  $< 0$ ,  $= 0$  qualunque sia  $\lambda$ , cioè incondizionatamente (od assolutamente) o con opportuna scelta di  $\lambda$ , ossia condizionatamente. È facile trovare delle condizioni sufficienti, da imporre ai coefficienti di reazione in corrispondenza delle varie eventualità indicate; condizioni anche necessarie sono meno semplici e per le forme complementari esigono disuguaglianze non lineari nelle reazioni specifiche e nelle intensità  $\lambda_s$  di applicazione dei fattori provenienti dai singoli settori.

La produzione  $X$  è crescente in tutto l'intervallo  $(t_0, t_1)$  quando la forma principale risulta positiva insieme a quella complementare oppure positiva e maggiore del valore assoluto della seconda. Se questa seconda è sempre zero come accadrebbe, ad esempio, se  $\mathcal{M}$  fosse emisimmetrica ( $\mathcal{M} = -\mathcal{M}_{-1}$ ) allora si dice che l'economia è conservativa (assolutamente o condizionatamente secondo che  $\lambda$  resta arbitrario o soltanto opportuno).

Se la forma principale è sempre negativa mentre quella complementare è zero, con qualunque scelta di  $\mathbf{p}$  l'economia si dice dissipativa, incondizionatamente o condizionatamente (cioè con  $\lambda$  arbitrario od opportuno).

Secondo che la produzione  $X$  resta crescente o decrescente in tutto  $(t_0, t_1)$  o in un pezzo di esso si dice che l'economia è progressiva o regressiva in tutto l'intervallo o in quel pezzo.

Le condizioni da imporre ai coefficienti di reazione perché si verifichino i casi indicati, o altri specificabili, devono esser compatibili con le condizioni di accettabilità delle soluzioni del sistema (I. 2). Se queste esigono le (I. 3) si ha necessariamente progressività delle produzioni (e dei prezzi)<sup>(13)</sup>, indipendentemente da quello che accade per le parti principali e complementari.

Osservisi che la crescita o decrescenza di  $X$  non equivale necessariamente a quella delle produzioni dei singoli settori, se non quando si tratti di progressività o regressività assoluta.

<sup>13)</sup> Per i prezzi valgono relazioni del tutto analoghe a quelle delle produzioni: queste relazioni possono dirsi duali di quelle stabilite per le produzioni.

10. La produzione  $X$  può essere stazionaria, cioè di velocità zero, solo in punti isolati dell'intervallo  $(t_0, t_1)$  a meno che non sia senz'altro  $\lambda \mathcal{B} = 0$  in tutto o parte di  $(t_0, t_1)$  il che, se  $\lambda$  è arbitrario, implicherebbe che ivi fosse  $\mathcal{B} = 0$  cioè la completa inattività del mercato delle produzioni.

D'altra parte, l'annullamento della velocità di  $X$  in un punto  $t'$  di  $(t_0, t_1)$  richiede che ivi si abbia  $\lambda \mathcal{B} \mathbf{p}_{-1} = 0$ , il che, se  $\mathbf{p}$  si vuole variabile comunque, richiede che ivi risulti:

$$(5.4) \quad \lambda \mathcal{B} = \lambda B + \mathbf{p} \mathcal{M} = 0$$

Se  $B$  è non singolare in  $t'$  si possono avere vettori  $\lambda$  che danno settori stazionari, uno per ogni determinazione dei prezzi per i quali  $-\mathbf{p} \mathcal{M} B^{-1}$  è positivo o semipositivo. Per  $\mathbf{p}$  arbitrario, si avrebbe  $\mathcal{M} B^{-1} \leq 0$  ciò che, tenendo presente la (2.4), condiziona ulteriormente  $\lambda$ . Dunque settori stazionari con prezzi variabili comunque sono assai poco probabili. Se  $B$  è singolare, potrebbe non aversene nessuno oppure infiniti.

Il verificarsi di (5.4) con  $\lambda$  assegnato, può far determinare uno o più vettori (anche infiniti) di prezzi che rendono stazionaria la produzione; ma ciò sempre e soltanto in istanti in cui  $\det \mathcal{B} = 0$ . I valori  $t'$  di  $(t_0, t_1)$  nei quali si verifica (5.4) si dicono punti di stazionarietà per la produzione dell'economia <sup>(14)</sup>.

## § 5. Programmazione

11. Le (I.1) — (II.1) consentono di fare una specie di programma a zione, cioè danno la possibilità di fare previsioni più o meno attendibili. Infatti, assegnati i vettori  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Z}$  dei consumi e della forza-lavoro impiegata le relazioni richiamate determinano, in caso di equilibrio generale, i corrispondenti vettori  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{p}$  delle produzioni e dei prezzi. Ma ciò presuppone che la matrice  $\mathbf{a}$  dei coefficienti di scambio rimanga inalterata in intervalli successivi a quello  $(t_0, t_1)$  cui si riferiva la tavola delle  $i n p u t$ - o  $t p u t$ . In altri termini si fa una estrapolazione della validità dei coefficienti di scambio in un intervallo di tempo più ampio.

Ci si può invece riferire al mercato, cioè al sistema differenziale (I.2), quando i coefficienti di reazione di mercato possano esser previsti con buona approssimazione con mezzi sperimentali, cioè mediante rilevamenti statistici adeguati, mezzi di rapida calcolazione e successive approssimazioni. Bisogna perciò introdurre un congruo metodo di calcolo: qui ne indicheremo uno che deriva direttamente dai fondamenti teorici <sup>(15)</sup>.

<sup>14</sup> Cfr. il ragionamento del n. 40, p. 417, della mia Mem. cit. (12).

<sup>15</sup> S. CHERUBINO: Sulla dinamica economica [Rend. Lincei, s. VIII, vol. XXII (1957) pp. 281-285] nn. 3-4, pp. 283-285. Nella recensione in Math. Rev., Vol. 20, 5 May 1959, non vien fatto alcun cenno esplicito alle note 4 e 5; né vien rilevata la dimostrazione della possibilità teorica della pianificazione economica.

Poniamo che siano praticamente note le reazioni specifiche dei vari settori, quindi che sia nota la parte complementare della velocità di produzione di un settore aggregato secondo ogni vettore  $\lambda$ . Allora si tratta di fissare i coefficienti di reazione generale, cioè  $B$ , in modo che la velocità di produzione di quel settore aggregato, con prezzi fissati a priori, sia determinata quantitativamente o qualitativamente, cioè risulti eguale oppure  $\geq$  ovvero  $\leq$  di un certo valore dato. Oppure, nota la matrice discriminante  $S$  della parte complementare, si vuol fissare il vettore  $p$  dei prezzi in modo che la velocità  $\frac{dX}{dt}$  di quel settore aggregato sia non minore, o non maggiore, di un valore assegnato.

Se, ad esempio, si vuole che quella velocità riesca  $\geq k$ , detto  $m$  il massimo valore assoluto delle radici caratteristiche di  $S$ , basta avere:

$$(1.5) \quad \lambda B p_{-1} = k + m$$

Possono facilmente fissarsi gli estremi tra i quali varia il vettore  $\lambda B$ , con  $\lambda$  assegnato, per modo che la (1.5.) possa soddisfarsi con  $p$  positivo opportuno. Naturalmente, è sufficiente conoscere  $m$  per approssimazione, cioè avere di  $S$  soltanto gli estremi fra i quali variano i suoi elementi<sup>16)</sup>.

Invece di agire sul settore pubblico o statale, cioè sulle reazioni generali, si può agire su un settore diverso, ad es. l'ultimo, quando siano noti abbastanza bene gli estremi delle reazioni generali e di quelle specifiche dei rimanenti settori. Riunendo queste in un'unica matrice  $B_n$ , somma dei primi  $n$  termini del secondo membro di (1.4), si tratta di determinare il prezzo  $p_n$  e le reazioni  $B^{(n)}$  in modo da avere:

$$(2.5) \quad \lambda [B + p_n B^{(n)}] p_{-1} > 0$$

In  $B$  figurano linearmente tutti gli altri prezzi, che si suppongono dati, mentre di  $B^{(n)}$  sarà generalmente possibile fissare a priori gli estremi inferiore e superiore. Dalla disuguaglianza (2.5) se ne deducono una o più, di secondo grado in  $p_n$ : soddisfacendole sarà soddisfatta anche la (2.5).

Può darsi che il vettore  $\lambda$  si voglia positivo ed arbitrario; allora la (2.5) equivale alla:

$$(3.5) \quad [B + p_n B^{(n)}] p_{-1} > 0$$

Se i prezzi sono tutti sconosciuti, per averli può convenire procedere per approssimazioni successive, cominciando col porre, in parentesi, tutti i prezzi eguali all'unità e determinando il vettore  $p$  fuori parentesi.

16) Converrà applicare il teorema a) del cap. II, § 2, p. 130, del mio *Calcolo delle Matrici*, cit. (2).



tesi col metodo esposto in una recente Memoria<sup>(17)</sup>. La determinazione ottenuta si porterà in parentesi e si calcolerà con lo stesso procedimento una seconda determinazione del vettore  $\mathbf{p}$  fuori parentesi; e così via. Quando si pervenga a valori dei prezzi  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$  che si ritengono convenienti, questi si fisseranno e di conseguenza si determinerà  $p_n$  a mezzo del sistema di disuguaglianze quadratiche di cui si è discusso poco fa. La compatibilità di queste disuguaglianze, quindi la validità del processo descritto, può essere assicurata dalle reazioni specifiche dell' $n^{\text{mo}}$  settore, cioè dagli elementi di  $B^{(n)}$ , quando siano indeterminate e purché soddisfino alle limitazioni imposte dagli estremi eventualmente già conosciuti.

## § 6. Le Economie astratte

12. Le proprietà esposte nei cinque paragrafi che precedono non dipendono dal significato attribuito alle parole «produzioni», «consumi», «prezzi», «lavoro» quindi ai vettori  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{p}, \mathbf{Z}$ . Il fatto che importa è che questi 4 enti siano legati a una matrice di numeri (reali) non negativi, da dirsi «degli scambi» verificantisi tra  $n$  «settori», la cui natura non occorre specificare e che abbiano significato le relazioni algebriche e differenziali scritte avanti. Le seconde presuppongono che quei 4 vettori ed i coefficienti di scambio  $a_{rs}$  siano funzioni di una stessa variabile  $t$  in un intervallo  $(t_0, t_1)$ . Anche la mozione di «tempo» è puramente formale o convenzionale e la dipendenza da esso può essere sia esplicita che implicita; in quest'ultimo caso avviene mediatamente per mezzo di opportune funzioni di  $t$ , da dirsi *p a r a m e t r i*, disimpegnanti un ruolo matematicamente ben determinato, ma concettualmente non specificato.

Il concetto di «mercato» è anch'esso puramente convenzionale, in quanto espresso esclusivamente mediante il sistema differenziale lineare (I. 2). Questo implica che i vettori  $\mathbf{X}, \mathbf{p}$ , così pure  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Z}$ , siano funzioni continue e derivabili del tempo  $t$ , eventualmente derivabili più volte di seguito, come quando si voglia far intervenire anche le accelerazioni<sup>(18)</sup> e si desiderino sviluppi in serie. Ciò s' intende verificato in

17) S. CHERUBINO e M. PASSAQUINDICI: Sui sistemi di disuguaglianze lineari e su alcune loro applicazioni [Ann. Sc. Norm. Pisa, s. III, vol. XII (1958) pp. 31-53] introduzione, pp. 37-40 e §§ 1-2-3, pp. 40-51. I prezzi, generalmente, non vengono determinati, ma conservano una certa variabilità.

18) Le accelerazioni sono state introdotte in «Fondamenti» cit. (4), al § 8, n. 17, p. 324, per lo studio della possibile oscillabilità del sistema economico. A differenza di questa, nella Nota Lincea: Sul concetto di economia astratta [Rend. Lincei, s. VIII, vol. XXVI (maggio 1959) pp. 656-661] n. 5, p. 659, le reazioni di mercato si suppongono senz'altro funzioni di  $t$ , quindi  $(t_0, t_1)$  può avere maggiore ampiezza.



tutto l'intervallo  $(t_0, t_1)$  in cui si considera l'Economia. L'intervallo predetto si dirà «ciclo» (teorico) dell'economia se in esso il sistema (I. 2) ammette un integrale generale (II. 2) che dà soluzioni accettabili almeno con opportune determinazioni iniziali del vettore  $(\mathbf{X} | \mathbf{p})$ .

Nelle considerazioni che precedono restano pure indeterminati tanto il numero  $n$  dei settori che gli elementi della matrice  $\mathbf{x}$  degli scambi, quindi i coefficienti di scambio, nonché le reazioni del mercato, cioè le matrici  $B, C$ . Il che vuol dire, fra l'altro, che le nostre premesse e le nostre deduzioni prescindono da esperienze di persone singole (fisiche, giuridiche o morali) ma sono basate su esperienze globali estese alla totalità degli enti od operatori che intervengono nei fenomeni che si studiano.

Questa estensione va intesa non in senso quantitativo bensì in senso qualitativo, fatte salve le proprietà algebrico - aritmetiche supposte verificate dalla matrice  $\mathbf{a}$  e dai vettori  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{p}, \mathbf{Z}$ . Supponendo che questi vettori, con  $\mathbf{a}$ , non soddisfino necessariamente ad eguaglianze, ma soltanto a disequaglianze (sempre lineari, almeno per semplicità od in prima approssimazione), i vincoli imposti vengono ad essere del tutto elastici, quindi viene ad estendersi il campo di applicazione delle nostre considerazioni. Altrettanto, se si vuole, può farsi per le relazioni fra i vettori medesimi e le loro derivate: cioè le (I. 2) potrebbero suporsi non più omogenee, ma con termini noti di segno (invariabile) opportuno, sempre (finiti) e limitati<sup>(19)</sup>.

Il punto di vista schizzato in quest'articolo, che può dirsi astratto, ha anche il vantaggio di eliminare i molti inconvenienti e difficoltà cui dà luogo o che s'incontrano nella costruzione delle tavole di *input-output* e nell'uso di esse<sup>(20)</sup>. Vengono eliminati anche i presupposti politico - sociali, ideologico - finalistici, ed edonistico - psicologici cui spesso sono subordinate le teorie moderne costruite apposta per spiegare o controllare fenomeni economici più o meno complessi. Ciò non significa che quei presupposti od interessi non meritino accoglimento o considerazione. E' però necessario porli bene in chiaro, in forma esplicita, onde trasformare l'economia teorica, che è necessariamente astratta, in sia pure particolari economie concrete.

13. E' abbastanza evidente, e perciò non ci soffermeremo su questi casi, che le proprietà esposte nei §§ 1 a 5, con opportuni adattamenti,

19) Si procederà allora come nel § 3, pp. 47-51 della Mem. di S. CHERUBINO - M. PASSAQUINDICI cit. (17).

20) Parecchi di questi inconvenienti e difficoltà sono menzionati nella mia Nota: Osservazioni sulle economie astratte [Politica Economica, a. XLIX, s. III (Ottobre 1959), pp. 1559 - 1573].

valgono anche nella teoria del commercio internazionale, nella quale i settori economici sono i singoli paesi che trafficano fra di loro. Le stesse proprietà valgono nell'economia aziendale, quando per settore economico si intenda ogni singolo reparto e ogni singola attività che, nell'insieme, costituiscono l'azienda o che da questa derivano la loro ragione di essere.

Sempre nel campo dell'economia, un caso notevole, concettualmente alquanto diverso dai tre mentovati, è quello degli investimenti fatti e dei redditi percepiti nei singoli settori. Le proprietà formali, in questo caso si presentano come in quelli che precedono e l'inversa della matrice  $[I - a]$  assume le funzioni del moltiplicatore Keynesiano del campo scalare<sup>21)</sup>.

Il concetto di economia astratta non vale soltanto nel campo dell'economia politica, ma anche, ad es., in quelli della biologia e della fisica. E' perciò che diciamo, al plurale, «Economie astratte».

Nel campo biologico, gli  $n$  settori, possono essere  $n$  specie di animali viventi nello stesso ambiente dal quale ricevono il cibo e lo elaborano per distribuirlo alle altre specie o per restituirlo all'ambiente. Le produzioni sono le quantità di cibo elaborato dalle singole specie; i consumi sono le quantità di cibo elaborato restituito all'ambiente; il cibo si esprime in calorie ed il calore (cioè il cibo) preso dall'ambiente (o dalle specie che costituiscono cibo per le altre) ha la funzione della forza-lavoro. Il prezzo  $p_r$  indica il numero di calorie che assorbe, in media, ogni individuo della specie  $r$ ; il prezzo del lavoro, cioè dell'unità di calore, è 1;  $Z_s$  indica la quantità di calore, sempre espressa in calorie, assorbito dalla specie  $s$  per produrre l'unità di cibo elaborato;  $p_{n+1} = 1$ .

Nel campo della fisica, gli  $n$  settori possono essere  $n$  masse di gas ( $r$  e  $a$  l  $i$ ) diversi mantenute alla stessa temperatura costante in un ambiente chiuso. Scontrandosi molecole del gas  $A$  con molecole del gas  $B$  nel tempo  $(t_0, t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , il primo cede al secondo la quantità di energia  $X_{AB}$  non negativa; la pressione del gas  $A$  sulle pareti del recipiente provoca, nello stesso tempo  $(t_0, t)$  una perdita  $Y_A$  di energia totale  $X_A$  di  $A$ , utilizzabile per un lavoro esterno. Se  $X_B$  è l'energia totale di  $B$ , sempre all'istante  $t$ ,  $X_{AB} : X_B = a_{AB}$  è il coefficiente di scambio di energia tra  $A$  e  $B$  al tempo  $t$ . Il calore fornito dall'esterno all'ambiente per mantenere costante la temperatura disimpegna la funzione del lavoro; prezzo

21) S. CHERUBINO: Sulla matrice-moltiplicatore per un sistema economico diviso in settori [*L'Industria* 1952 (n. 3) pp. 346 - 374]. Alcune considerazioni di questa memoria provengono dall'interpretazione dei coefficienti di scambio come propensioni marginali ai consumi, il che può farsi anche negli altri casi. Cfr. anche: R. M. GOODWIN: The Multiplier as Matrix [*Economic Journal*], London, vol. LIX, n. 236 (dic. 1949) pp. 503 - 514].

di  $A$  all'istante  $t$  è la quantità di calore acquistata o consumata dall'unità di massa di  $A$  nell'intervallo  $(t_0, t)$ . L'energia cinetica posseduta da  $A$  all'istante  $t$  funziona da capitale investito nel settore  $A$  durante  $(t_0, t)$ . Se in ogni istante  $t$  l'energia posseduta da ciascun gas può ritenersi proporzionale alla massa, per prezzo di  $A$  si può intendere la massa di  $A$  corrispondente all'energia unitaria. Per prezzo  $p_{n+1}$  del calore fornito dall'esterno s'intende la massa di un certo combustibile impiegato per produrre una caloria: con questo combustibile si esprimeranno, nel primo caso, anche i prezzi delle  $n$  masse gassose.

Altri esempi di fenomeni rappresentabili con una tabella quadrata di numeri non negativi, tabella soddisfacente alle proprietà aritmetiche esposte in questo articolo, possono presentarsi in altri capitoli della fisica o in altra scienza. Si ottengono così altre economie astratte concretizzate con particolari ipotesi sulla natura dei settori, delle produzioni, dei prezzi e delle condizioni cui questi si vuole soddisfare.

**Articoli per professore Salv. Cherubino sull'«analisi economica lineare» e sull'«economie astratte».**

1. Sulla matrice - moltiplicatore per un sistema economico diviso in settori [*L'Industria* (1952) n. 3, pp. 346-376].
2. Sull'analisi lineare delle interdipendenze industriali [*L'Industria* (1954) n. 2., pp. 154-178].
3. Sui fondamenti matematici dell'equilibrio generale economico [*Industria* (1956) n. 3, pp. 302-336].
4. Sulle economie bipartite [Giorn. degli Economisti (marzo-aprile 1957) pp. 162 - 173].
5. Sulla dinamica economica [Rend. Lincei, s. VIII, vol. XXII, (marzo 1957) pp. 281 - 285].
6. Su alcune proprietà delle economie ripartite in settori e sulla loro classificazione dinamica [*Politica Economica*, a. XLVII IIIs. (giugno 1957) pp. 406-421].
7. Sulle matrici quadrate non negative [Ann. Sc. Norm. Pisa, S. III, vol. X (1956) pp. 217 - 235].
8. Calcolo delle Matrici [C.N.R., Roma, Cremonese (1957) pp. VI-332].
9. Sui sistemi di disequaglianze lineari e su alcune loro applicazioni [Ann. Sc. Norm. Pisa, s. III; vol. XII (1958) pp. 31 - 53] (collabor. di Maria Passaquindici).
10. Sull'evoluzione economica (Principi di economia astratta) [Rend. Mat. Roma, vol. 17 (1958) pp. 231-261].
11. Sulle economie astratte [*Politica Economica*, a. XLVIII, IIIs., (nov. 1958) pp. 1193-1204].
12. Sulle matrici leonteviane e su un problema di programmazione lineare [*L'Industria* (1959) pp. 156 - 164].
13. Sul concetto di economia astratta [Rend. Lincei, s. VIII, vol. XXVI, (maggio 1959) pp. 654 - 661].
14. Osservazioni sulle economie astratte [*Politica Economica*, a. XLIX, III s., (ottobre (1959) pp. 1559 - 1573].

## Π Ε Ρ Ι Λ Η Ψ Ι Σ

*Ἀνάλυσις εισροῶν - ἐκροῶν καὶ ἀφηρημένη οἰκονομία*

Ἡ μελέτη αὐτὴ τοῦ καθηγητοῦ Cherubino διαιρεῖται εἰς τὰς ἀκολουθούς ἐξ παραγράφους :

1. Ἀλγεβρικαὶ ἰδιότητες τῆς μήτρας εισροῶν - ἐκροῶν.
2. Ἀντιδράσεις τῆς ἀγορᾶς.
3. Ἀνταγωνισμὸς καὶ οἰκονομικὴ διακύμανσις.
4. Ταξινόμησις τῶν διαφόρων οἰκονομιῶν.
5. Προγραμματισμὸς.
6. Ἀφηρημέναι καὶ συγκεκριμέναι οἰκονομίαι.

Εἰς τὴν πρώτην παράγραφον ὁ σ. ἀσχολεῖται μὲ τὰς σχέσεις μεταξύ παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως ἢ τιμῶν καὶ ἀπασχολήσεως ἐν συσχετισμῷ πρὸς τὰς ἀντιστοιχοῦς ἐπιδράσεις αὐτῶν ἐπὶ τῆς μήτρας εισροῶν - ἐκροῶν. Εἰς περίπτωσιν γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας αἱ σχέσεις αὐταὶ ἐπιτρέπουν τὸν σαφῆ προσδιορισμὸν διανυσμάτων παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως, τιμῶν καὶ εισοδήματος. Εἰς περίπτωσιν ἐλλείψεως ἰσορροπίας ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς μεγίστων ἢ ἐλαχίστων διανυσμάτων παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως ἢ τιμῶν καὶ εισοδήματος.

Πρὸς περιγραφὴν τῶν ἀντιδράσεων τῆς ἀγορᾶς ἡ δευτέρα παράγραφος εἰσάγει ἐν σύστημα γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μεταξύ τοῦ διανύσματος τῆς παραγωγῆς καὶ τῶν τιμῶν καὶ τοῦ διανύσματος τοῦ ρυθμοῦ μεταβολῆς αὐτῶν. Πολλοὶ ἐκ τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος δὲν προσδιορίζονται διὰ τὴν καταστάσιν δυνατὴ ἢ προσαρμογὴ τοῦ συστήματος εἰς τὰς συνθέτους συνθήκας τῆς ἀγορᾶς. Ἐπειδὴ ἡ παραγωγὴ καὶ αἱ τιμαὶ ἐκφράζονται δι' ἑνὸς πολυεδρικοῦ κυρτοῦ κώνου προσδιοριζομένου ὑπὸ τοῦ συστήματος τῶν γραμμικῶν ἀνισοτήτων, αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνονται εἰς τὴν πρώτην παράγραφον, τὸ γενικὸν ὀλοκλήρωμα τοῦ διαφορικοῦ συστήματος δίδει ἀνεκτάς λύσεις μόνον ἂν οἱ συντελεσταὶ ἱκανοποιῦν τὰς δεδομένας συνθήκας τῆς ἀγορᾶς.

Εἰς τὴν τρίτην παράγραφον προσδιορίζονται αἱ συνθήκαι τοῦ πλήρους καὶ ἀτελοῦς ἀνταγωνισμοῦ. Ἐξετάζεται ἐπίσης ἡ δυνατότης κυματοειδοῦς συμπεριφορᾶς τῆς οἰκονομίας ὡς καὶ ἡ ἔντασις καὶ ἡ περίοδος τοῦ κυματισμοῦ τούτου.

Εἰς τὴν παράγραφον 4 ταξινομοῦνται αἱ οἰκονομίαι ἐπὶ τῇ βάσει τῆς τεχνολογικῆς μήτρας αὐτῶν. Πλεῖσταὶ παρατηρήσεις σχετικῶς μὲ τὴν κατανάλωσιν, ἀπασχόλησιν κ.λ.π. διατυποῦνται εἰς τὴν παράγραφον ταύτην.

Τὸ ἀντικείμενον τῆς παραγράφου 5 εἶναι ὁ προγραμματισμὸς, δηλαδὴ ἡ θεωρητικὴ διερεύνησις τῆς δυνατότητος τῆς κατευθύνσεως τῆς οἰκονομίας πρὸς ἐκπλήρωσιν θεέντων σκοπῶν. Ὑπὸ τοῦ σ. ἐκτίθεται συνοπτικῶς μία μέθοδος δράσεως πρὸς ἐπίτευξιν προγραμματισθέντων σκοπῶν.

Ἡ ἕκτη καὶ τελευταία παράγραφος ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς «ἀφηρημένης οἰκονομίας» ἢ ὁποῖα προκύπτει ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι αἱ μαθηματικαὶ ἰδιότητες τοῦ συστήματος δὲν ἐπηρεάζονται ἀπὸ ἐννοίας ὡς ἡ «παραγωγή», «τιμαὶ», «κατανάλωσις», «ἀπασχόλησις», «κλάδος οἰκονομίας», «ἀγορὰ» κλπ. Εἰς τὴν ἴδιαν παράγραφον δίδονται μερικά παραδείγματα ἀφηρημένων συστημάτων ἀπὸ τὴν οἰκονομίαν, τὴν βιολογίαν καὶ τὴν φυσικὴν. Γενικῶς τοιαῦτα ἀφηρημένα συστήματα εἶναι δυνατόν νὰ διαμορφωθοῦν καὶ διὰ ἄλλα φαινόμενα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γενικὰς ἰδιότητας τὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν παράγραφον ταύτην.

# ΕΚΘΕΣΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΙΣΡΟΩΝ-ΕΚΡΟΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΙΤΑΛΙΑΝ \*

\*Υπό V. CAO-PIANNA \*\*

1. Ἡ μελέτη καὶ ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου Λεόντιεφ ἐσημείωσεν ἀξιόλογον πρόοδον εἰς τὴν Ἰταλίαν κατὰ τὰ τελευταῖα πέντε ἔτη, χάρις εἰς τὸ ἔντονον ἐνδιαφέρον τῆς Κυβερνήσεως καὶ τῶν ἀκαδημαϊκῶν καὶ βιομηχανικῶν κύκλων, τὸ ὁποῖον εἶχεν προκληθῆ ὑπὸ τῶν γενομένων, κατὰ τὰ ἔτη 1951—1954, πρωτοβουλία τῆς Ἀμερικανικῆς Οἰκονομικῆς Ἀποστολῆς μελετῶν (1).

Ἡ ἰδία ὁμὰς ἐρευνητῶν, ἡ ὁποία εἶχεν ἐκπαιδευθῆ ὑπὸ τῶν καθηγητῶν Chenery καὶ Clark εἰς τὴν κατάρτισιν καὶ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ πρώτου Ἰταλικοῦ Πίνακος Εἰσροῶν—Ἐκροῶν τοῦ 1950, ἐσυνέχισεν—ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τῆς συγγραφέως τοῦ παρόντος—τὴν ἐρευνᾶν, ἡ ὁποία καὶ ἀπετέλεσε τὴν δευτέραν φάσιν τῆς Ἰταλικῆς ἐμπειρίας εἰς τὸν τομέα ἀναλύσεως τοῦ συστήματος εἰσροῶν—ἐκροῶν.

Τὸν Δεκέμβριον τοῦ 1953, ἡ ἀνωτέρω ὁμὰς ἐρευνητῶν ὑπήχθη, κατόπιν κυβερνητικῆς ἀποφάσεως, εἰς τὸ «Ἐθνικὸν Ἰδρυμα Ἐρευνῶν ἐπὶ τῶν Βραχυχρονίων Οἰκονομικῶν Ἐξελίξεων», πρὸς τὸν σκοπὸν ὅπως ἐξακολουθήσῃ τὴν

(\*) Μετάφραση Ἑλένης Σπέντζου (τῆς Δ)σεως Μελετῶν τῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλλάδος).

(\*\*) Ἡ συγγραφεὺς διδάσκει ἐφηρμοσμένην Οἰκονομικὴν Στατιστικὴν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Ρώμης, εἶναι δὲ μέλος τῆς Διεθνoῦς Ἑταιρίας Ἐρευνῶν ἐπὶ τοῦ Εἰσοδήματος καὶ τοῦ Πλούτου (International Association for Research in Income and Wealth) καὶ οἰκονομικὸς σύμβουλος τῆς Εὐρωπαϊκῆς Κοινῆς Ἀγορᾶς καὶ τῆς Κοινότητος Χάλυβος καὶ Ἀνθρακος. Ἀπὸ τὸ ἔτος 1951 ἐργάζεται συστηματικῶς ἐπὶ θεμάτων τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν—ἐκροῶν, ἔχει δὲ συγγράψῃ πολυαριθμοὺς μελέτας σχετικῶς. Ἦτο ἐπὶ κεφαλῆς τῆς ὁμάδος ἐργασίας ἡ ὁποία κατέστρωσε τοὺς πίνακας εἰσροῶν—ἐκροῶν τῆς Ἰταλικῆς οἰκονομίας διὰ τὰ ἔτη 1950, 1953 καὶ 1956. Εἰς τὴν ἀνωτέρω μελέτην—ἡ ὁποία ἐγράφη εἰδικῶς διὰ τὴν παροῦσαν ἐκδοσιν τῆς Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς—ἀναλύονται ὠρισμέναι ἐφαρμογαὶ τῶν πινάκων τῶν ἐτῶν 1953 καὶ 1956.

1) H. B. Chenery—P. G. Clark V. Cao-Pinna: «The Structure and Growth of the Italian Economy»—Mutual Security Agency—Mission to Italy, Rome, 1952.

H. B. Chenery—P. G. Clark: «Interindustry Economics»—J. Wiley & Sons, New York, 1959.



άρξασμένην, ὑπὸ τῆς Ἀμερικανικῆς ἐν Ἰταλίᾳ Οἰκονομικῆς Ἀποστολῆς ἐρευνητικὴν προσπάθειαν. Ὑπὸ τὴν αἰγίδα τοῦ Ἰδρύματος τούτου ἡ ὁμὰς ἐσυνέχισεν τὸ ἔργον τῆς μέχρι τὸ ἔτος 1957.

Ἡ ἀνάγκη ὁλονὲν καὶ περισσοτέρων ἐφαρμογῶν τῆς Μεθόδου εἰς εἰδικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀπήτουν καὶ τὴν ὀργάνωσιν μεγάλων ἐρευνητικῶν προγραμμάτων, παρεκίνησεν ἀργότερον τὴν ὁμάδα, ὅπως δώσῃ εἰς τὰς δραστηριότητάς τῆς ἡμι-επαγγελματικὴν χροιάν, ἀναλαμβάνοντας τὴν ἐκτέλεσιν τοιούτων σχεδίων διὰ λογαριασμόν τῶν Κέντρων Ἐρευνῶν τῶν διαφόρων ἐνδιαφερομένων Ὄργανώσεων (σήμερον τὸ «Ente Nazionale Idrocarburi» καὶ ἡ Τράπεζα τῆς Σικελίας).

Τὸ ἐπιτελεσθέν, κατὰ τὰ τελευταῖα πέντε ἔτη ἔργον καὶ τὰ ἐπιτευχθέντα σχετικὰ ἀποτελέσματα περιγράφονται εἰς τὰς ἀκολουθοῦσας παραγράφους :

## I. Ἡ κατάρτις τοῦ Πίνακος τοῦ 1953

2. Ὁ δεῦτερος Πίναξ εἰσρωῶν - ἐκρωῶν τῆς Ἰταλικῆς Οἰκονομίας κατηρτίσθη τὸ 1954, ἡ συνοπτικὴ του δὲ μορφή ἀποτελουμένη ἀπὸ 30 στήλας καὶ 30 σειράς, συνεπληρώθη ὑπὸ ἐνὸς ἐκτεταμένου ἐπὶ τῶν κυριωτέρων χαρακτηριστικῶν τοῦ Ἰταλικοῦ παραγωγικοῦ συστήματος, σχολίου καὶ ἐδημοσιεύθη εἰς τὴν πρὸς τὸ Κοινοβούλιον Κυβερνητικὴν Οἰκονομικὴν Ἐκθεσιν τοῦ 1955 [1].

Τὸ μέγεθος τοῦ ἀρχικοῦ (καὶ μερικῶς μόνον δημοσιευθέντος) Πίνακος τοῦ 1953 ἦτο πάντως πολὺ μεγαλύτερον, ἀπετελεῖτο δὲ ἀπὸ 30 στήλας καὶ 300 σειράς. Ἡ υἱοθέτησις τοῦ ὀρθογωνίου σχήματος τῆς μήτρας ἐπεβλήθη ἐκ τῆς μεθόδου, ἡ ὁποία ἐπρόκειτο νὰ ἀκολουθηθῇ διὰ τὴν περιγραφὴν τῶν διακλαδικῶν ροῶν.

Λόγω τῆς μὴ ὑπάρξεως προσφάτου βιομηχανικῆς ἀπογραφῆς, ἐκ τῆς ὁποίας θὰ ἤδύνατό τις νὰ ἀντλήσῃ τὰ ἀπαιτούμενα στοιχεῖα διὰ τὴν κατάρτισιν τῆς καμπύλης ἐξόδων τῶν ἐπὶ μέρους κλάδων, αἱ δυνατὰ βασικὰ πηγαὶ πληροφοριῶν ἦσαν αἱ ἀκόλουθοι :

— οἱ ἐπίσημοι ὑπολογισμοὶ τῆς συνολικῆς ἀξίας τῶν 25 κλάδων εἰς τοὺς ὁποίους διηρέθη ἡ Ἰταλικὴ Οἰκονομία χάριν τῆς καλυτέρας καταρτίσεως τοῦ Ἐθνικοῦ Προϋπολογισμοῦ,

— οἱ λεπτομερεῖς ὑπολογισμοὶ τῶν μεγεθῶν ἰδιωτικῆς καταναλώσεως, τρεχουσῶν Κυβερνητικῶν δαπανῶν καὶ ἐπενδύσεων, κατὰ κλάδους, οἵτινες ἐθεσπίσθησαν προσφάτως διὰ τὴν περιγραφὴν τῆς χρησιμοποίησεως τῶν ἐθνικῶν πόρων.

Ὁ συνδυασμὸς τῶν δύο τούτων μεγάλων πηγῶν πληροφοριῶν ἀποτελεῖ μίαν ἀσφαλῆ βάσιν διὰ τὴν ἐξακρίβωσιν τῆς συνεπειᾶς τῶν ὑπολογισμῶν τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν. Αἱ πρόσθετοι χρησιμοποιηθεῖσαι πηγαὶ στοιχείων διὰ τὴν περιγραφὴν τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν τῶν 25 παραγωγικῶν κλάδων ἦσαν αἱ ἑξῆς :

α) Λεπτομερῆ ποσοτικὰ στοιχεῖα τῆς ἐγχωρίου παραγωγῆς βασικῶν πρώτων ὑλῶν καὶ ἡμιτοίμων προϊόντων,



β) ἡ στατιστικὴ διεθνοῦς ἐμπορίου διὰ 5.000 περίπου συγκεκριμένα ἀγαθὰ,  
 γ) λεπτομερῆ στοιχεῖα διὰ τιμὰς καταναλωτικῶν ἀγαθῶν, στοιχεῖα ἀφο-  
 ρῶντα τόσον τιμὰς παραγωγῆς ὅσον καὶ τιμὰς χονδρικῆς πωλήσεως,

δ) αἱ ποσότητες (καὶ οἱ ἀντίστοιχοι δασμοὶ) διαφόρων κατηγοριῶν  
 ἐμπορευμάτων μεταφερομένων σιδηροδρομικῶς ἢ δι' αὐτοκινήτων,

ε) στοιχεῖα ἀφορῶντα τὴν κατανομήν ἢ τὴν παράδοσιν εἰς τοὺς διαφό-  
 ρους κλάδους, ὠρισμένων βασικῶν ὑλῶν, π.χ. καύσιμα, ἤλεκτρισμός, σίδηρος,  
 χάλυψ καὶ χάρτης.

στ) τεχνικαὶ πληροφορίες παρασχεθεῖσαι ὑπὸ τῶν κυριωτέρων βιομηχανι-  
 ῶν, ἀφορῶσαι τὰς βασικὰς χρησιμοποιούμενας εἰσροὰς καὶ τὰ ἀναλογοῦντα  
 εἰς αὐτὰς ἔξοδα.

3. Ἡ ἐφαρμοσθεῖσα μέθοδος ἐξετάσεως κατὰ σειράς, διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῆς  
 κατανομῆς τῶν διαφόρων ἀγαθῶν τῶν καταναλισκομένων ὑπὸ τῶν κλάδων,  
 ἀπεδείχθη πολὺ χρήσιμος διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μεγέθους τῶν συνολικῶν  
 διακλαδικῶν ροῶν.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγαθῶν, τῶν δυναμένων νὰ χρησιμοποιηθοῦν εἰς ἕναν  
 πολὺ περιορισμένον ἀριθμὸν κλάδων εἶναι, πράγματι, πολὺ μεγάλος, ἡ δὲ  
 συνολικὴ ἀξία αὐτῶν εἶναι λίαν σημαντικὴ διὰ τὴν Ἰταλικὴν οἰκονομίαν. Ἀξίζει  
 νὰ σημειωθῇ ὅτι μεταξύ τοιούτων ἀγαθῶν περιλαμβάνονται: τὰ δημητριακὰ,  
 τὰ βιομηχανικὰ φυτὰ, τὰ κτήνη, τὰ νήματα, ἡ ξυλεία, τὰ μεταλλεύματα, τὰ  
 λιπάσματα, τὰ συνθετικὰ νήματα, τὸ φυσικὸν καὶ συνθετικὸν καουτσούκ,  
 τὰ μέταλλα, τὸ τσιμέντο, τὰ ὑλικά οἰκοδομῶν, κ.λ.π. καὶ πῶς τὸ προϊόν ὠρισμέ-  
 νων κλάδων (βιομηχαναίαι τροφίμων, ἐνδυμάτων, ἐπίπλων, κατασκευῶν, ναυπη-  
 γείας, ὑαλοουργίας, καὶ προσωπικῶν ὑπηρεσιῶν) χρησιμοποιεῖται ἐξ ὀλοκλή-  
 ρου ἢ κατὰ τὸ μεγαλύτερον μέρος ἀπὸ τοὺς τελικοὺς κλάδους παραγωγῆς.  
 Ὁ ὑπολογισμὸς συνεπῶς τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν συνίστατο εἰς τὴν  
 πρόσθεσιν τῶν ἀξιῶν αἱ ὁποῖαι εἰσέρχονται εἰς κάθε σειράν καὶ στήλην καὶ τὴν  
 σύγκρισιν αὐτῶν μὲ τὴν ἀξίαν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος (ἐγχωρία παραγωγή  
 σὺν εἰσαγωγῇ) τῶν 25 παραγωγικῶν κλάδων, ἡ ὁποῖα ὑπελογίσθη ξεχωρι-  
 στά καὶ λίαν προσεκτικῶς, κατ' ὄγκον καὶ κατ' ἀξίαν.

Τὰ ἀποτελέσματα ἦσαν λίαν ἱκανοποιητικὰ διότι μόνον ἐλάχισται οὐσιώ-  
 δεις διαφοραὶ προέκυψαν ἐκ τῶν συγκρίσεων τούτων, αἱ ὁποῖαι ἦσαν εὐκολον  
 νὰ ἐξαλειφθοῦν διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν λαθῶν, τῶν ὀφειλομένων εἰς λαν-  
 θασμένην ταξινόμησιν τῶν βασικῶν στοιχείων.

Πάντως, τὰ ὑπόλοιπα διαφορῶν, τὰ ὁποῖα προέκυψαν μεταξύ στηλῶν καὶ  
 σειρῶν, τὰ ἀφορῶντα τὴν συνολικὴν ἀξίαν παραγωγῆς κάθε κλάδου δὲν ἐξη-  
 λείφθησαν ἀλλὰ κατεχωρήθησαν εἰς εἰδικὴν στήλην ὑπὸ τὸν τίτλον «Καθαραὶ  
 μεταβολαὶ ἀποθεμάτων καὶ στατιστικαὶ προσαρμογαί».

4. Τὰ ὑπόλοιπα κύρια χαρακτηριστικὰ τοῦ Πίνακος τοῦ 1953 εἶναι:

α) Ἡ ἐκτίμησις ὄλων τῶν συναλλαγῶν εἰς τιμὰς ἀγοραστοῦ, ἤτοι: συμ-  
 περιλαμβανομένων τῶν ἐμπορικῶν περιθωρίων, τῶν ἐξόδων μεταφορᾶς καὶ τῶν

ἐμμέσων καὶ ἀμέσων φόρων, τῶν ἐπιβαλλομένων εἰς τὰ ἐνδιάμεσα ἀγαθὰ καὶ εἰς τὰ ἀγαθὰ τελικῆς καταναλώσεως,

β) ἡ συνδεδεμένη διανομὴ τῶν καταναλισκομένων ὑπὸ τῶν κλάδων ἀνταγωνιστικῶν καὶ μὴ ἀνταγωνιστικῶν εἰσαγωγῶν,

γ) ἡ ἀποφυγὴ διπλῶν ἐγγραφῶν ἀφορώντων τὰς ἐνδοκλαδικὰς συναλλαγὰς ἡμιετοίμων προϊόντων.

Ἄξιζει νὰ σημειωθῇ ὅτι μετὰ τὴν δημοσίευσιν τοῦ Πίνακος εἰς τὴν Γενικὴν Οἰκονομικὴν Ἐκθεσιν, ἡ διάρθρωσις τῆς καμπύλης ἐξόδων ὠρισμένων σημαντικῶν κλάδων (γεωργίας, ὑφαντουργίας, ξυλείας, χάρτου, καουτσούκ, μεταλλουργίας), ἐμελετήθη καὶ συζητήθη ὑπὸ ἀντιπροσώπων τῶν κυριωτέρων βιομηχανικῶν καὶ ἐμπορικῶν ἐταιριῶν, ἀνεγνωρίσθη δὲ γενικῶς, ὅτι τὰ σχετικὰ μεγέθη τῶν κυριωτέρων εἰσροῶν καὶ τῶν πρωτογενῶν συντελεστῶν τῶν χρησιμοποιουμένων εἰς τοὺς κλάδους τούτους συνέπιπτον εἰς σημαντικὸν βαθμὸν μὲ τὰ πραγματικὰ χαρακτηριστικὰ τῶν ἀντιστοίχων λειτουργικῶν ἐξόδων.

## II. Ἀνάλυσις τῶν Εἰσαγωγῶν τῶν ἀπαιτουμένων εἰς τὴν Ἰταλικὴν Οἰκονομίαν.

5. Ἡ μελέτη αὕτη ἦτο ἡ πρώτη εἰς μεγάλην κλίμακα ἐφαρμογὴ τοῦ πίνακος τοῦ 1953 εἰς ἓν πρόβλημα μεγίστου ἐνδιαφέροντος διὰ τὴν Ἰταλικὴν Οἰκονομίαν. Τὸ πρόβλημα τοῦτο συνίστατο εἰς τὴν ἐξέυρεσιν ἐκείνων τῶν κατηγοριῶν ἀγαθῶν, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὰ παθητικὰ στοιχεῖα τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου τῆς Ἰταλίας.

Ὁ σκοπὸς τῆς μελέτης αὐτῆς ἦτο ὁ ἑξῆς:

α) Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ τελικοῦ προορισμοῦ τῶν εἰσαχθέντων κατὰ τὸ 1953 βασικῶν πρώτων ὑλῶν καὶ καυσίμων,

β) ἡ ἐξακρίβωσις τῆς βασιμότητος τῶν διακλαδικῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τὸν Πίνακα Εἰσροῶν—Ἐκροῶν τοῦ 1953 πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς βραχυχρονίου προβλέψεως τῶν ἀπαραιτήτων εἰσαγωγῶν πρώτων βασικῶν ὑλῶν καὶ καυσίμων.

Εἰς τὰς ἐπομένας παραγράφους δίδεται μία σύντομος περιγραφή τῆς μεθοδολογίας καὶ τῶν συμπερασμάτων τῆς ἐρεῦνης:

6. Τὸ πρῶτον στάδιον τῆς μελέτης συνίστατο εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἀξιῶν τῶν περιλαμβανομένων εἰς κάθε τετραγωνίδιον τοῦ Πίνακος εἰς δύο μέρη: εἰς τὴν ἀξίαν τῶν εἰσαγομένων ἀγαθῶν καὶ εἰς τὴν ἀξίαν τῶν ἐγχωρίως παραγομένων ἀγαθῶν.

Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀναλύσεως αὐτῆς (ἡ ὁποία ἀπότησεν μίαν προσεκτικὴν ἐπανεξέτασιν τοῦ βασικοῦ στατιστικοῦ ὑλικοῦ) ὑπῆρξεν ἡ ἔμφασις τοῦ ὀρθογωνίου σχήματος τοῦ Πίνακος, ὁ ὁποῖος ὑπὸ τὴν νέαν του λεπτομερῆ μορφήν ἀπετελέσθη ἀπὸ 30 στήλας καὶ 600 περίπτου σειράς.

Τὸ πρῶτον ἀξιόλογον συμπέρασμα, τὸ ὁποῖον προέκυψεν ἀπὸ τὴν ἐνοποίησην τῶν λεπτομερῶν στοιχείων εἰς 30 κλάδους προορισμοῦ καὶ εἰς 60 κλά-

δους προελεύσεως (30 ομάδας έγχωρίων κλάδων και 30 ομάδας κλάδων έξωτε-  
ρικού), ήτο ότι ή σχέσις μεταξύ τής αξίας τών εισαχθέντων εισροών και τών  
αξιών τών συνολικών εισροών τών καταχωρημένων εις κάθε τετραγωνίδιον του  
ένοποιημένου πίνακος διέφερεν ούσιωδώς από κλάδου εις κλάδον. Τουτο άπε-  
δείκνυεν πόσον άνακριβής θά ήτο τυχόν άνάλυσις τών άπαραιτήτων εισαγωγών  
τής 'Ιταλικής Οικονομίας εάν έχρησιμοποιήτο προχειρότερος τρόπος έρεύνης  
διά τόν προσδιορισμόν τής συμμετοχής τών εισαγωγών εις τās εισροάς εκά-  
στου κλάδου: ώς π.χ. εάν έχρησιμοποιήτο ή μέθοδος έπιμερισμού τών δαπα-  
νών κάθε κλάδου βάσει τής μέσης σχέσεως συνολικών εισαγωγών και συνολι-  
κής προσφοράς όλων όμου τών έμπορευματικών ροών.

7. Εις τó δεύτερον στάδιον τής μελέτης άντιμετωπίσθησαν τά μαθημα-  
τικά και ύπολογιστικά προβλήματα, τά όποια συνεπήγετο ή λύσις του όρθο-  
γωνίου πίνακος τών τεχνολογικών συντελεστών, ό όποιος προέκυψεν από την  
νέαν μορφήν του Πίνακος του 1953.

Ό λεπτομερής πίναξ τών τεχνολογικών συντελεστών προέκυψεν δι' ενός  
μαθηματικού τρόπου, όστις άπεικονίζεται εις τó κατωτέρω παράδειγμα διά  
μιās μήτρας 3 στηλών και 6 σειρών, δεικνύει δέ τās άπαιτουμένες έμμέσους και  
άμέσους εισαγωγάς, τās άπορρεούσας εκ τής τελικής ζητήσεως τών προσφε-  
ρομένων ύφ' εκάστου παραγωγικού κλάδου έγχωρίων προϊόντων :

	$1_p$		$2_p$		$3_p$		$Y$
$1_p$	$p_{111}X_1$	+	$p_{112}X_2$	+	$p_{113}X_3$	+	$pY_1 = X_1$
$1_i$	$i_{111}X_1$	+	$i_{112}X_2$	+	$i_{113}X_3$	+	$iY_1 = I_1$
$2_p$	$p_{221}X_1$	+	$p_{222}X_2$	+	$p_{223}X_3$	+	$pY_2 = X_2$
$2_i$	$i_{221}X_1$	+	$i_{222}X_2$	+	$i_{223}X_3$	+	$iY_2 = I_2$
$3_p$	$p_{331}X_1$	+	$p_{332}X_2$	+	$p_{333}X_3$	+	$pY_3 = X_3$
$3_i$	$i_{331}X_1$	+	$i_{332}X_2$	+	$i_{333}X_3$	+	$iY_3 = I_3$

όπου  $X_1, X_2, X_3$  = αγοραία αξία του συνολικού προϊόντος τών έγχωρίων  
κλάδων  $1_p, 2_p, 3_p,$

$I_1, I_2, I_3$  = αγοραία αξία τών συνολικών εισαγωγών εκ τών ξένων  
κλάδων  $1_i, 2_i, 3_i,$

$p_{ijk}$  = τεχνολογικοί συντελεσται δεικνύοντες τās άμέσους ανάγκας  
εις έγχώρια ένδιάμεσα αγαθά, παραχθέντα ύπό του  
κλάδου  $j$  και χρησιμοποιηθέντα ύπό του κλάδου  $k$  κατά  
μονάδα τής συνολικής του παραγωγής (εις αγοραίας τιμές),

$a_{jk}$  = τεχνολογικοί συντελεστές δεικνύοντες τὰς ἀμέσους ἀνάγκας εἰς εἰσαγόμενα ἐνδιάμεσα ἀγαθὰ παραγόμενα ὑπὸ τοῦ ξένου κλάδου  $j$  καὶ χρησιμοποιούμενα ὑπὸ τοῦ ἔθνικοῦ κλάδου  $k$  κατὰ μονάδα τῆς συνολικῆς του παραγωγῆς (εἰς ἀγοραίας τιμᾶς),

${}_p Y_1, {}_p Y_2, {}_p Y_3$  = ἀγοραῖαι ἀξίαι τελικῆς ζητήσεως τῶν ἐγχωρίων προϊόντων τῶν προσφερομένων ὑπὸ τῶν κλάδων  $1_p, 2_p, 3_p$ .

${}_i Y_1, {}_i Y_2, {}_i Y_3$  = ἀγοραῖαι ἀξίαι τῆς τελικῆς ζητήσεως εἰσαγομένων προϊόντων προσφερομένων ὑπὸ τῶν ξένων παραγωγικῶν τομέων  $1_i, 2_i, 3_i$ .

Τὸ πρῶτον βῆμα τῆς λύσεως ἦτο ἡ ἀντιστροφή τῆς μήτρας, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὰς ἀμέσους ἀνάγκας εἰς ἐγχωρίους ἐκροὰς ( ${}_p a_{jk}$ ), κατὰ μονάδα ἐγχωρίου προϊόντος ἐκάστου ἔθνικοῦ κλάδου  ${}_p X_i$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -{}_p a_{1k} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} {}_p A_{11} & {}_p A_{21} & {}_p A_{31} \\ {}_p A_{12} & {}_p A_{22} & {}_p A_{32} \\ {}_p A_{13} & {}_p A_{23} & {}_p A_{33} \end{vmatrix}$$

Κατόπιν, πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλην τῶν εἰσαχθέντων εἰσροῶν [ ${}_i a_{jk}$ ] τῆς ἀνωτέρω ἀντιστρόφου μήτρας τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, προέκυψαν οἱ συντελεστές τῶν συνολικῶν ἀπαραιτήτων εἰσαγωγῶν (ἐμμέσων καὶ ἀμέσων) τοῦ κάθε κλάδου [ ${}_i A_{jk}$ ]:

$$\text{Κλάδος } 1-p: \begin{bmatrix} {}_i a_{11} & {}_i a_{12} & {}_i a_{13} \\ {}_i a_{21} & {}_i a_{22} & {}_i a_{23} \\ {}_i a_{31} & {}_i a_{32} & {}_i a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_p A_{11} \\ {}_p A_{12} \\ {}_p A_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_i \hat{A}_{11} \\ {}_i \hat{A}_{12} \\ {}_i \hat{A}_{13} \end{bmatrix}$$

$$\text{Κλάδος } 2-p: \begin{bmatrix} {}_i a_{11} & {}_i a_{12} & {}_i a_{13} \\ {}_i a_{21} & {}_i a_{22} & {}_i a_{23} \\ {}_i a_{31} & {}_i a_{32} & {}_i a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_p A_{21} \\ {}_p A_{22} \\ {}_p A_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_i \hat{A}_{21} \\ {}_i \hat{A}_{22} \\ {}_i \hat{A}_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{Κλάδος } 3-p: \begin{bmatrix} {}_i a_{11} & {}_i a_{12} & {}_i a_{13} \\ {}_i a_{21} & {}_i a_{22} & {}_i a_{23} \\ {}_i a_{31} & {}_i a_{32} & {}_i a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_p A_{31} \\ {}_p A_{32} \\ {}_p A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_i \hat{A}_{31} \\ {}_i \hat{A}_{32} \\ {}_i \hat{A}_{33} \end{bmatrix}$$

Τὰ τελικὰ συμπεράσματα προέκυψαν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν συντελεστῶν τούτων ἐπὶ τὸ διάνυσμα τῆς τελικῆς ζητήσεως ἐγχωρίων ἀγαθῶν  $\{ {}_p Y_i \}$ :

Συνολικαὶ ἀπαιτούμεναι εἰσαγωγαὶ τῶν προϊόντων  $1_i, 2_i, 3_i$ .

$$\begin{aligned} \text{Σύνολον} & \quad {}_i \hat{A}_{11} {}_p Y_1 + {}_i \hat{A}_{21} {}_p Y_2 + {}_i \hat{A}_{31} {}_p Y_3 = \sum {}_i \hat{A}_{k1} {}_p Y_k \\ \text{εἰσαγωγῶν} & \quad {}_i \hat{A}_{12} {}_p Y_1 + {}_i \hat{A}_{22} {}_p Y_2 + {}_i \hat{A}_{32} {}_p Y_3 = \sum {}_i \hat{A}_{k2} {}_p Y_k \quad (k=1,2,3). \\ \text{περιεχομένων} & \quad {}_i \hat{A}_{13} {}_p Y_1 + {}_i \hat{A}_{23} {}_p Y_2 + {}_i \hat{A}_{33} {}_p Y_3 = \sum {}_i \hat{A}_{k3} {}_p Y_k \\ \text{εἰς τὴν τελικὴν} & \quad \sum {}_i \hat{A}_{ij} {}_p Y_j = \sum {}_i \hat{A}_{2j} {}_p Y_2 = \sum {}_i \hat{A}_{3j} {}_p Y_3 \\ \text{ζήτησιν} & \quad (i=1, 2, 3) \\ \text{τῶν ἐγχωρίων} & \\ \text{προϊόντων} & \quad 1_p, 2_p, 3_p. \end{aligned}$$

8. Ὑπολογίζοντες ξεχωριστά, τὴν ἀξίαν τῶν ἐμμέσων καὶ ἀμέσων εἰσαγωγῶν τοῦ 1953, τῶν περιεχομένων εἰς τὴν τελικὴν παραγωγὴν τῶν 25 ἐγχωρίων κλάδων, ἀγαθῶν ἰδιωτικῆς καὶ δημοσίας καταναλώσεως ἀκαθαρίστων ἐπενδύσεων καὶ ἐξαγωγῶν, ἐπιτεύχθη καὶ ὁ πρῶτος σκοπὸς τῆς ἐρεύνης.

Τὰ συμπεράσματα ἅτινα προέκυψαν ἐκ τῶν ὑπολογισμῶν τούτων ἀπέδειξαν ὅτι :

α) Ἡ ἀξία εἰς τοῦ συνόλου τῶν εἰσαγωγῶν τοῦ 1953 (ἀνερχομένων εἰς 1.566 δισ. λιρέτ.) ἀντιπροσωπεύει τὸ 12,3 % τῆς συνολικῆς ἀγοραίας ἀξίας τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ 1953,

β) ἐκ τοῦ ποσοῦ τούτου μόνον 28,5 % διετέθη δι' ἔτοιμα ἀγαθὰ τελικῆς καταναλώσεως, 71,5 % δὲ δι' εἰσαγωγὰς ἐνδιαμέσων ἀγαθῶν,

γ) αἱ εἰσαγωγαὶ τῶν ἐνδιαμέσων ἀγαθῶν ἀπερροφήθησαν ἀμέσως ἢ ἐμμέσως ὡς ἑξῆς: 59 % τῆς συνολικῆς τῶν ἀξίας εἰς τὴν ἐγχώριον παραγωγὴν καταναλωτικῶν ἀγαθῶν, 18,4 % εἰς τὴν παραγωγὴν κεφαλαίου-χικῶν ἀγαθῶν καὶ 18,8 % εἰς τὴν παραγωγὴν προϊόντων πρὸς ἐξαγωγήν.

Ἡ περαιτέρω ἐξέλιξις τῆς ἐρεύνης (ἀποβλέπουσα εἰς τὴν ἐξακρίβωσιν τῶν διακλαδικῶν σχέσεων ὡς προέκυπτον αὐταὶ ἐκ τοῦ Πίνακος τοῦ 1953) συνίστατο εἰς μίαν «οἰονεὶ» πρόβλεψιν τῶν «τεχνικῶς» ἀπαραιτήτων εἰσαγωγῶν ἐνδιαμέσων ἀγαθῶν, ἅτινα ἀπητοῦντο διὰ τὴν ἐπίτευξιν τόσον τοῦ (γνωστοῦ) ἐπιπέδου ὅσον καὶ τῆς διαρθρώσεως τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ 1954 (ἐκφραζομένη εἰς τιμὰς 1953) ἀμφοτέρων ὄντων οὐσιασδῶς διαφορετικῶν τῶν ἀντιστοίχων τοῦ παρελθόντος ἔτους.

Τὰ ἀποτελέσματα τῆς οἰονεὶ ταύτης προβλέψεως συνεκρίθησαν μὲ τὰς πραγματικὰς μεταβολὰς τοῦ ὄγκου τῶν εἰσαγωγῶν βασικῶν πρώτων ὑλῶν καὶ καυσίμων. Ἡ σύγκρισις αὕτη ἀπέδωκεν ἐνθαρρυντικὰ ἀποτελέσματα, ἅτινα καὶ ἐπεβεβαίωσαν τὴν βασιμότητα τοῦ Πίνακος Εἰσορῶν—Ἐκροῶν τοῦ 1953 ὡς μέσον βραχυχρονίων προβλέψεων.

Πραγματικῶς, αἱ ὑπολογισθεῖσαι ἀξίαι τῶν εἰσαγωγῶν τῶν κατωτέρω ἀναφερομένων εἰδῶν συνέπιπτον ἄρκετὰ μὲ τὰς σημειωθείσας πραγματικὰς εἰσαγωγὰς τοῦ 1954 (ἐκπεφρασμένας εἰς τιμὰς 1953). (Αἱ διαφοραὶ ὑπολογισθεισῶν καὶ πραγματοποιηθεισῶν ἀξιών σημειοῦνται ἐντὸς τῶν παρενθέσεων) : ἄνθραξ (-1 %), ἔρια (+0,9 %), σίδηρος καὶ ἀκατέργαστος χάλυψ (-0,5 %), ξυλεῖα (0,8 %), καουτσούκ (+1,4 %), ἀκατέργαστα δέρματα (-2,5 %), μὴ σιδηροῦχα μέταλλα καὶ ρινίσματα σιδήρου (-3,9 %).

Ἀντιθέτως, διὰ τὰς ἀκολουθοῦσας ὑλας τὰ περιθώρια λάθους ἦσαν πολὺ μεγαλύτερα: βάμβαξ (-6,1 %), σπορέλαια (+7,5 %), ὀρυκτὰ ἔλαια (-8,5 %), κυτταρίνη (-10,8 %), καὶ τοῦτο διότι διὰ τὰ εἶδη ταῦτα τὸ μέγεθος τῆς καθαρᾶς ἀντιστοίχου μεταβολῆς τῶν ἀποθεμάτων αὐτῶν μεταξύ 1953 καὶ 1954 δὲν ἦτο δεδομένον.

Γενικῶς, δεδομένου ὅτι ἡ ἀξία τῶν βασικῶν τούτων εἰσαγομένων ὑλῶν ἀντιπροσωπεύει τὰ 70 % τοῦ συνόλου τῶν ἀναγκαιούντων εἰς τὴν Ἰταλικὴν Οἰκονομίαν εἰσαγωγῶν, τὰ ἀποτελέσματα τῆς πρώτης ταύτης ἐφαρμογῆς τῆς



λεπτομεροῦς μορφῆς τοῦ Πίνακος τοῦ 1953 ἐθεωρήθησαν ἀρκούντως ἱκανοποιητικά καὶ ἀξιόλογα διὰ νὰ δημοσιευθοῦν εἰς τὴν πρὸς τὸ Κοινοβούλιον Κυβερνητικὴν Οἰκονομικὴν Ἐκθεσιν τοῦ 1956 [9].

### III. Ἀνάλυσις τῶν ἐκ τοῦ Ναυπηγικοῦ Προγράμματος ἐπιδράσεων ἐπὶ τῆς Ἰταλικῆς Οἰκονομίας

9. Ἡ μελέτη αὕτη ἀποτελεῖ τὴν δευτέραν Ἰταλικὴν ἐφαρμογὴν, εἰς συγκεκριμένον κλάδον (¹) τῆς τεχνικῆς Εἰσροῶν—Ἐκροῶν, ἐδημοσιεύθη δὲ ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν ἀναζωπύρωσιν τῆς ναυπηγικῆς ἀγορᾶς καὶ τὸν ἐνθαρρυντικὸν ἀριθμὸν παραγγελιῶν, τὰς ὁποίας εἶχον λάβει αἱ ναυπηγικαὶ βιομηχαναὶ διὰ τὰ ἐπόμενα τέσσαρα ἔτη.

Σκοπὸς τῆς μελέτης ἦτο ἡ μέτρησις τῆς κατανομῆς μεταξύ τῶν ἐγχωρίων κλάδων τῶν προκυπτόντων, ἐκ τῆς κατασκευῆς πλοίων χωρητικότητος 2 δισ. τόννων, εἰσοδηματικῶν ροῶν.

Ἡ πρώτη φάσις τῆς ἀναλύσεως συνίστατο εἰς τὴν ἐκτίμησιν, εἰς τιμὰς 1953, τοῦ συνολικοῦ κόστους τῶν τριῶν κυριωτέρων τύπων πλοίων, οἱ ὅποιοι ἐπρόκειτο νὰ ναυπηγηθοῦν καὶ εἰς τὸν προσδιορισμὸν τόσον τῶν ἐπὶ τοῦ ναυπηγικοῦ κλάδου εἰσοδηματικῶν ἐπιδράσεων, ὅσον καὶ τῶν προκυπτόντων ἐκ τοῦ Προγράμματος τούτου ἐργασιῶν, ἀμέσων ἀναγκῶν, εἰς ἐγχώριον καὶ εἰσαγόμενον ὑλικόν.

Εἰς τὴν προκαταρκτικὴν ταύτην φάσιν τῆς ἀναλύσεως συνεκεντρώθη λεπτομερέστατον ὑλικόν τεχνικῶν πληροφοριῶν, σχετικῶν πρὸς τὰς ἀναγκαιούσας ποσοτικὰς εἰσροὰς καὶ τὸ πραγματικὸν κόστος τῶν τριῶν προσφάτως κατασκευασθέντων πλοίων, τὰ ὅποια παρουσίαζον τὰ ἴδια χαρακτηριστικὰ μὲ τοὺς τρεῖς τύπους τουνάζ, οἱ ὅποιοι ἐπρόκειτο νὰ ναυπηγηθοῦν.

Τὰ ἀποτελέσματα τῆς πρώτης ταύτης φάσεως τῆς ἀναλύσεως ἀπέδειξαν ὅτι :

α) Αἱ ἄμεσοι εἰσοδηματικαὶ ἐπιδράσεις ἐκ τοῦ ναυπηγικοῦ κλάδου θὰ ἀνῆρχοντο εἰς 33 %, τῆς συνολικῆς ἀξίας τῶν νέων πλοίων ἐκτιμωμένης εἰς 500 δισ. περίπου λιρετῶν 1953.

β) αἱ ἄμεσοι ἀνάγκαι εἰς ἐγχώριον ὑλικόν θὰ ἀνῆρχοντο εἰς 63,5 % τῆς προαναφερθείσης ἀξίας ἐνῶ αἱ ἄμεσοι ἀνάγκαι εἰς εἰσαγωγὰς θὰ ἀνῆρχοντο μόλις εἰς 3,5 %.

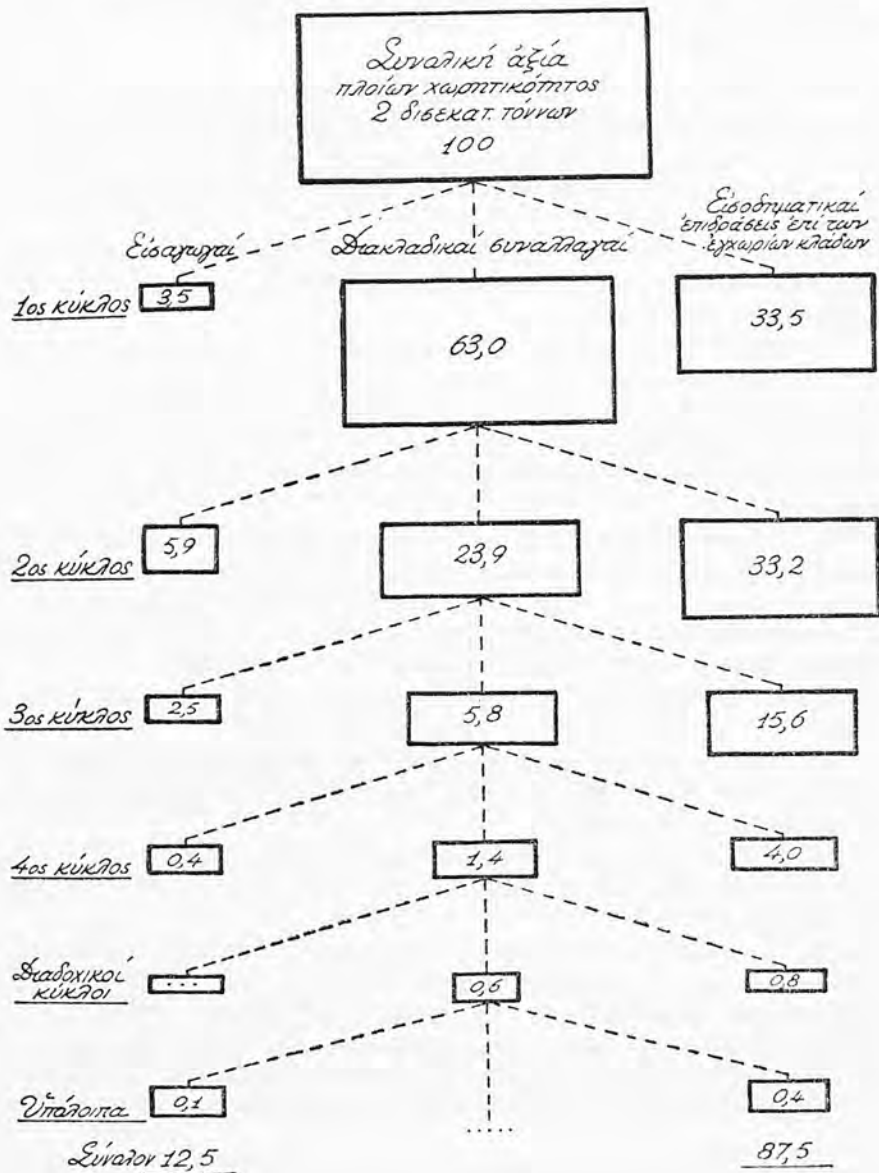
Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἐμμέσων εἰσαγωγῶν καὶ ἡ κατανομή τῶν προκυπτόντων, ἐκ τῆς ναυπηγήσεως κατὰ τὰ ἐπόμενα 4 ἔτη τῶν τριῶν τύπων πλοίων, ἐμμέσων εἰσοδηματικῶν ροῶν, μεταξύ τῶν ἐγχωρίων κλάδων, ἐπετεύχθη διὰ τῆς χρησιμοποίησεως τῶν προκυπτόντων ἐκ τῆς λεπτομεροῦς μορφῆς τοῦ Πίνακος Εἰσροῶν—Ἐκροῶν τοῦ 1953, τεχνολογικῶν συντελεστῶν.

Ἡ μετάδοσις τῶν εἰσοδηματικῶν καὶ εἰσαγωγικῶν ἐπιδράσεων εἰς τοὺς

1) Ἡ πρώτη κλαδική μελέτη (βασισθεῖσα ἐπὶ τοῦ πίνακος 1950) ἀνεφέρετο εἰς τὴν διάρθρωσιν καὶ τὰς προοπτικὰς τῆς Ἰταλικῆς Ὑφαντουργίας.



Κατανομή των ενδράσεων επί της παραγωγής των παραγ-  
 γελών του Ναυπηγικού κλάδου μέχρι της 1<sup>ης</sup> Ιανουαρίου 1957  
 (δισεκατ. λιρετών 1953)



έγχωριους κλάδους υπελογίσθη διὰ τῆς ἀνιχνευτικῆς μεθόδου, μὲ σκοπὸν τὴν διεκκρίνησιν τῶν διαδοχικῶν ἐπιδράσεων τῆς ναυπηγικῆς δραστηριότητος ἐπὶ τοῦ παραγωγικοῦ συστήματος.

Τὰ τελικὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀναλύσεως (τὰ ὁποῖα ἐδημοσιεύθησαν τὸ 1957 [18] καὶ τὰ ὁποῖα περιέχονται συνοπτικῶς εἰς τὸ ἐπόμενον διάγραμμα) ἀπέδειξαν ὅτι :

α) Οἱ τομεῖς, οἱ ὁποῖοι θὰ ὑφίσταντο τὴν μεγαλύτεραν ὥθησιν ἐκ τῆς ἐκ νέου λειτουργίας τοῦ ναυπηγικοῦ κλάδου θὰ ἦσαν : οἱ μεταλλουργικοὶ καὶ οἱ μηχανολογικοὶ κλάδοι, οἱ ὁποῖοι θὰ ἐλάμβανον 24 % καὶ 18 % ἀντιστοίχως τῆς συνολικῆς ἐμμέσου εἰσοδηματικῆς ροῆς, τῆς προκυπτούσης ἐκ τοῦ ὑπὸ μελέτην τομέως,

β) αἱ συνολικαὶ ἀνάγκαι δι' ἐγχώρια μεταλλουργικὰ προϊόντα θὰ ὑπερεῖχον κατὰ 37 % τῶν ἀμέσων ἀναγκῶν διὰ τοιαῦτα προϊόντα (130 δις. λιρετῶν ἔναντι 95).

γ) ἡ ἀξία τῶν συνολικῶν ἀναγκῶν εἰς ὑλικὸν καὶ ὑπηρεσίας παραγομένων ὑπὸ τομέων ἄλλων ἐκτὸς τοῦ μεταλλουργικοῦ καὶ μηχανολογικοῦ κλάδου θὰ ἦτο τριπλασία τῆς ἀντιστοίχου συνολικῆς ἀξίας τῶν ἀμέσων ἀναγκῶν (102 δις. λιρέττες ἔναντι 35),

δ) οἱ κλάδοι οἱ ὁποῖοι θὰ ὠφελοῦντο περισσότερο (μολονότι ἐμμέσως) ὑπὸ τῶν εἰλημμένων ὑπὸ τοῦ ναυπηγικοῦ κλάδου παραγγελιῶν θὰ ἦσαν οἱ κλάδοι : Μεταφορῶν, Χημικῶν Προϊόντων, Πετρελαίου, Ἄνθρακος, Ἡλεκτρισμοῦ, Ζυλείας, Ὑπηρεσιῶν,

ε) αἱ ἐμμεσοὶ ἀνάγκαι δι' εἰσαγωγὰς θὰ ἀνῆρχοντο εἰς 12,5 % τῆς συνολικῆς ἀξίας τῶν νέων πλοίων (ἔναντι 3,5 % τῆς προαναφερθείσης ἀξίας, ἐκφραζούσης τὰς ἀμέσους εἰσαγωγικὰς ἀνάγκας τοῦ Ναυπηγικοῦ κλάδου).

#### IV. Συγκριτικὴ Ἀνάλυσις τῆς διαρθρώσεως τῆς Ἰσπανικῆς καὶ τῆς Ἰταλικῆς Οἰκονομίας

10. Ἡ μελέτη αὕτη ἐγένετο κατόπιν ἐκφραστῆσεως ἐπιθυμίας Ἰσπανῶν συναδέλφων—ὑπὸ τῆς συγγραφῆς τῆς παρούσης— ὀλίγον μετὰ τὴν δημοσίευσιν τοῦ πρώτου Πίνακος Εἰσοδῶν—Ἐκροῶν τῆς Ἰσπανίας (1).

Σκοπὸς τῆς ἀναλύσεως ἦτο ὄχι μόνον ἡ ἐξατομίκευσις τῶν κυριωτέρων παραγόντων, οἱ ὁποῖοι διαφοροποιοῦν τὴν διάρθρωσιν καὶ τὴν ἐξέλιξιν τῶν δύο οἰκονομιῶν, ἀλλ' ἐπίσης καὶ ἡ διερεύνησις τῆς δυνατότητος ἀπεικονίσεως τῶν διαφορῶν καὶ τῶν ὁμοιοτήτων τῶν δύο οἰκονομιῶν, κατὰ τρόπον περισσότερο λεπτομερῆ καὶ ἀντικειμενικὸν τοῦ ἐπιτυγχανομένου ὑπὸ τῶν χρησιμοποιουμένων συνήθως μακροοικονομικῶν στοιχείων, διὰ διεθνεῖς συγκρίσεις.

Οὐσιωδῶς συνέβαλεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν ταύτην ἡ συνδρομὴ τῶν συντακτῶν τοῦ Ἰσπανικοῦ Πίνακος Εἰσοδῶν—Ἐκροῶν, οἱ ὁποῖοι ἔθεσαν εἰς τὴν διά-

1) A. Alcaide Inchausti; G. Begue; J. Castañeda; A. Santos Blanco: «La Estructura de la Economía Española»; Instituto de Estudios Políticos, Madrid, 1958.

θεσίν μας λεπτομερή και μη δημοσιευθέντα στοιχεία, χρησιμοποιηθέντα δια τὸν καταρτισθέντα ὑπ' αὐτῶν Πίνακα.

Τοιοτοτρόπως, ἡ σύγκρισις τῶν δύο πηγῶν πληροφοριῶν ἔγινεν εἰς ἀναλυτικώτερον ἐπίπεδον ἐκείνου, τὸ ὁποῖον προέκυψεν ἐκ τῆς ἐνοποιημένης μορφῆς τῶν δύο Πινάκων Εἰσροῶν—Ἐκροῶν.

Παρὰ ταῦτα ὅμως τὸ ἔργον τῆς συγκρίσεως ἦτο δυσχερέστατον, ὡφείλετο δὲ κυρίως εἰς τὰ χρησιμοποιηθέντα εἰς τὰς δύο χώρας, διαφορετικὰ κριτήρια ταξινομήσεως καὶ ἀθροίσεως τῶν διαφόρων κλάδων καὶ ἐκτιμήσεως τῶν ἀντιστοιχῶν ροῶν.

11. Τὰ προκύπτοντα συμπεράσματα ἐκ τῆς μελέτης ταύτης, ἣτις ἐδημοσιεύθη συγχρόνως εἰς τὴν Ἰσπανίαν καὶ Ἰταλίαν [21] δύνανται νὰ συνοψισθοῦν ὡς ἀκολούθως :

α) Ἡ προκαταρκτικὴ μεταξὺ τῶν συνολικῶν ἀριθμῶν καὶ τελικῶν ἀποτελεσμάτων τῆς οἰκονομικῆς διαδικασίας, σύγκρισις τῶν δύο χωρῶν, ἐπεβεβαίωσεν τὴν μεγαλυτέραν ἐξάρτησιν τῆς Ἰταλικῆς ἐκ τῆς παγκοσμίου οἰκονομίας καὶ τὴν μεγαλυτέραν ροπὴν αὐξήσεως τοῦ κεφαλαίου ἀποθέματος τῶν Ἰταλικῶν βιομηχανικῶν τομέων.

β) Ἡ σύγκρισις τῆς κατανομῆς κατὰ τομέα προελεύσεως τοῦ Ἐθνικοῦ Προϊόντος τῶν δύο χωρῶν, ἐπεβεβαίωσεν ἐπίσης ὅτι, παρὰ τὸ γεγονός ὅτι ὁ ἀγροτικός τομεὺς διαδραματίζει ἀκόμη σημαντικὸν ρόλον εἰς ἀμφοτέρας τὰς χώρας, ἐν τούτοις ἡ μὲν βιομηχανία ἦτο περισσότερο ἀνεπτυγμένη εἰς τὴν Ἰταλίαν, κατὰ τὴν ὑπὸ μελέτην περίοδον (1953—1954), ἐνῶ ὁ πρωτογενὴς τομεὺς συμμετεῖχεν κατὰ μεγαλύτερον ποσοστὸν εἰς τὸν σχηματισμὸν τοῦ Ἰσπανικοῦ Ἐθνικοῦ Προϊόντος.

Ἐναντιθετως, ἡ σχετικὴ σημασία τῆς οἰκοδομητικῆς δραστηριότητος ἦτο ἐντελῶς ἡ ἴδια καὶ διὰ τὰς δύο χώρας :

γ) Ἡ σύγκρισις τῆς διαρθρώσεως τῆς ἰδιωτικῆς καταναλώσεως ἀπέδειξεν τὸ σχετικῶς ὑψηλότερον βιοτικὸν ἐπίπεδον τοῦ Ἰταλικοῦ λαοῦ.

δ) Τὰ δύο σύνολα τῶν ἐνδοκλαδικῶν συναλλαγῶν ἀπεκάλυψαν ὅτι ἡσχέσις συνολικῆς ἀξίας τῶν ροῶν τούτων καὶ συνολικῆς ἀξίας τῶν τελικῶν προϊόντων εἶναι οὐσιωδῶς μεγαλυτέρα διὰ τὴν Ἰσπανίαν (0,73 ἐναντι 0,52 διὰ τὴν Ἰταλίαν), ὅπερ ὀφείλεται κυρίως εἰς τὴν διαφορετικὴν διάρθρωσιν τῶν δύο «τελικῶν ζητήσεων» καὶ εἰς τὴν ὑψηλοτέραν προστιθεμένην ἀξίαν, τὴν περιεχομένην εἰς τὰ Ἰταλικά προϊόντα καταναλώσεως.

ε) Ἡ σύγκρισις τῶν σχέσεων μεταξὺ προστιθεμένης ἀξίας κάθε τομέως καὶ ἀντιστοίχου καθαρῆς ἀξίας τῆς παραγωγῆς, ἀπέδειξεν, ὅτι αἱ οὐσιώδεις διαφοραὶ μεταξὺ τῶν δύο συνόλων τῶν συντελεστῶν ἦσαν τὸ συνδεδεμένον ἀποτέλεσμα ὠρισμένων παραγόντων, ὅπως π.χ. : ἡ μεγαλυτέρα κατὰ κλίμακα ἀποδοτικότης καὶ ἡ περισσότερο ἀνεπτυγμένη τεχνικὴ τῆς Ἰταλικῆς βιομηχανίας, ἡ ὑψηλοτέρα παραγωγικότης τῶν χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τῶν βιομηχανικῶν τούτων πρωτογενῶν συντελεστῶν καὶ τὰ σχετικῶς χαμηλότερα ἐξοδα μεταφορᾶς καὶ διανομῆς.

στ) Ἡ ἀνάλυσις τῆς καμπύλης ἐξόδων τῶν ἐπὶ μέρος τομέων ἀπεκάλυψεν, πάντως, μέγα ἀριθμὸν ὁμοιοτήτων μεταξὺ τῶν δύο συνόλων τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, εἰδικώτερον δὲ τῶν τομέων, τῶν ὁποίων ἡ παραγωγικὴ διαδικασία εἶναι μᾶλλον ἀπλῆ καὶ τὰ προϊόντα σχετικῶς ὁμοιογενῆ (Γεωργία, Ὑφαντουργία, Ὀρυχεῖα, Μεταφοραί, Ἐμπόριον).

ζ) Ἀντιθέτως, αἱ σημαντικαὶ διαφοραὶ, αἱ ὁποῖαι παρουσιάσθησαν εἰς τοὺς τεχνολογικοὺς συντελεστὰς ὠρισμένων τομέων (βιομηχανία τροφίμων, χημικῶν, πετρελαιοειδῶν καὶ προϊόντων ἄνθρακος), θὰ ἠδύναντο νὰ θεωρηθοῦν ὅτι ὀφείλονται περισσότερο εἰς τὴν διαφορετικὴν σύνθεσιν τῆς παραγωγῆς ἢ εἰς διαφορὰς εἰς τὰ σχετικὰ συστήματα τιμῶν τῶν δύο οἰκονομιῶν.

η) Τέλος, πλείστοι ἐνδιαφέρουσαι ὁμοιότητες ἀπεκαλύφθησαν ἐκ τῆς συγκρίσεως τῆς κατὰ τομέα προελεύσεως κατατάξεως τοῦ συνόλου τῶν προκυπτόντων ἐκ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν δύο μητρῶν ἀπαραιτήτων συντελεστῶν. Τοῦτο ἐπεβεβαίωσεν καὶ τὸ γεγονός ὅτι ἐνυπάρχουσαι διαφοραὶ εἰς τὸ παραγωγικὸν σύστημα τῶν δύο χωρῶν ἀναφορικῶς ὡς πρὸς τὴν παραγωγικότητα, τὴν τεχνολογίαν, τὴν σύνθεσιν προϊόντος καὶ τὴν σχετικὴν διάρθρωσιν τιμῶν δὲν δύνανται νὰ ἀλλοιώσωσιν οὐσιωδῶς τὴν ἀκολουθίαν καὶ τὸ μέγεθος τῆς τελικῆς ζητήσεως τῶν δύο χωρῶν.

12. Ἀναφορικῶς μὲ τὸν δεῦτερον σκοπὸν τῆς ἀναλύσεως ταύτης, τὸ συμπέρασμα ἦτο, ὅτι παρ' ὅλας τὰς ἀντιμετωπισθείσας διὰ τὴν ἀπὸ τεχνικῆς ἀπόψεως σύγκρισιν τῶν δύο πινάκων δυσχερείας, (αἱ ὁποῖαι θὰ ἠδύναντο νὰ μειωθοῦν οὐσιωδῶς διὰ τῆς παραδοχῆς ἐνὸς κοινοῦ συστήματος ταξινομήσεως καὶ τῆς χρησιμοποίησεως ἐνὸς περισσότερον δυνατοῦ συγκριτικοῦ συστήματος τιμῶν), ἡ μέθοδος Λεόντιεφ παρέχει τοιοῦτον κατάλληλον ὄργανον διὰ τὴν ἔρμηνείαν τῶν οἰκονομικῶν γεγονότων, ὥστε ἡ χρησιμοποίησις τῆς νὰ συνιστᾶται ἰδιαιτέρως διὰ τὴν διεθνῆ σύγκρισιν ἐθνικῶν οἰκονομιῶν καὶ διὰ τὴν ἐπίτευξιν μιᾶς καλυτέρας κατανοήσεως τῶν ἐνυπαρχουσῶν διαφορῶν εἰς τὴν σχετικὴν διαδικασίαν ἀναπτύξεως.

## V. Ἀνάλυσις τῶν εἰς ἐνέργειαν ἀναγκῶν τῆς Ἰταλικῆς Οἰκονομίας

13. Ἡ κλαδικὴ αὕτη μελέτη εἶναι μιὰ ἄλλη εἰς μεγάλην κλίμακα ἐφαρμογὴ τῆς Μεθόδου Εἰσοδῶν - Ἐκροῶν, κατηρτίσθη δὲ ὑπὸ τοῦ Κέντρου Οἰκονομικῶν Ἐρευνῶν τοῦ Ente Nazionale Idrocarburi.

Σκοποὶ τῆς μελέτης ταύτης — τὰ ἀποτελέσματα τῆς ὁποίας μόλις ἐδημοσιεύθησαν [23]— ἦσαν οἱ ἀκόλουθοι :

α) Ἡ βελτίωσις τῆς ποιότητος καὶ ἡ αὐξησις τῆς ποσότητος τῶν δυνατῶν στοιχείων, τῶν σχετικῶν μὲ τοὺς πόρους καὶ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἐνεργειακῶν προϊόντων ὥστε νὰ καταστή δυνατὴ ἡ μελέτη τῆς διαρθρώσεως τοῦ κόστους καὶ ἡ ἐξέλιξις τῶν εἰς ἐνέργειαν ἀναγκῶν τῆς Ἰταλίας διὰ τὴν περίοδον 1953 - 1957,

β) ἡ μελέτη τῆς ὑποκαταστάσεως διὰ τὴν προαναφερθεῖσαν περίοδον τῶν διαφόρων ἐνεργειακῶν πηγῶν ἐνεργείας,

γ) Χρησιμοποίησις τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐρεύνης εἰς τὴν σχέσιν μεταξύ τομέων παραγόντων τὰς διαφόρους πηγὰς ἐνεργείας καὶ Ἰταλικῆς Οἰκονομίας ἐν γένει, οὕτως ὥστε νὰ ἐρευνηθοῦν αἱ μελλοντικαὶ ἐξελίξεις τῆς ζητήσεως ἐνεργείας μέχρι τὸ 1965.

14. Ἡ πρώτη φάσις τῆς μελέτης συνίστατο εἰς τὴν ἀναθεώρησιν καὶ ἀνάλυσιν (κατὰ ποσότητα, θερμαντικὴν ἰκανότητα καὶ ἀξίαν) τοῦ συνόλου τῶν στοιχείων τοῦ 1953, τῶν ἀφορώντων τὴν παραγωγὴν καὶ διανομὴν κατὰ τομεῖς καταναλώσεως τῶν ἐνεργειακῶν προϊόντων.

Ἡ δευτέρα φάσις περιελάμβανε τὴν ἀνάπτυξιν, κατὰ στήλας τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν τοῦ 1953 ἕως τὸ 1956 πλὴν τοῦ ἐνεργειακοῦ τομέως διὰ τὸν ὅποιον ὑπῆρχαν θετικὰ στοιχεῖα καταναλώσεως τοῦ 1956.

Ὁ ἔλεγχος τῆς βασιμότητος τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν τοῦ 1953 ἀπάντων τῶν τομέων (πλὴν τῶν ὑπὸ μελέτην) ἔγινε κατὰ δύο τρόπους:

1) Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοιοῦτων συντελεστῶν εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν τοῦ 1956 (ἐκφραζομένης εἰς τιμὰς 1953) καὶ διὰ τῆς συγκρίσεως τῶν συνόλων τῶν σειρῶν πρὸς τὴν συνολικὴν ἀξίαν τῆς παραγωγῆς ἐκάστου τομέως - ἦτις ὑπελογίσθη κεχωρισμένως, βάσει τῶν ἐπισήμων δεικτῶν, παραγωγῆς καὶ εἰσαγωγῶν τῆς περιόδου 1953-1956.

2) Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ ἀνωτέρω ἐλέγχου διὰ τὰς ἐγχωρίους καὶ τὰς εἰσαγομένας ροάς.

Τὰ ἀποτελέσματα ἀμφοτέρων τῶν ἐλέγχων τούτων ἦσαν ἀπολύτως ἱκανοποιητικά: αἱ προκύψασαι ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν συνολικῶν ἀξιῶν διαφοραὶ τῶν στηλῶν καὶ τῶν σειρῶν ἀνῆλθον τὸ maximum εἰς 5% διὰ 19 τομεῖς (ἐπὶ συνόλου 29), 10% δὲ μόνον δι' ἐκείνους τοὺς τρεῖς τομεῖς, διὰ τοὺς ὁποίους ἡ ἐπίσημος ταξινομήσις τῆς παραγωγῆς διέφερεν τῆς χρησιμοποιηθείσης εἰς τὴν κατάρτισιν τοῦ Πίνακος εἰσορῶν - ἐκροῶν.

15. Ἡ δευτέρα φάσις τῆς ἐρεύνης περιελάμβανε ἀνάλυσιν τῶν ἐπιδράσεων τιμῶν τῶν ὑποκαταστάσεων μεταξύ τῶν διαφόρων πηγῶν ἐνεργείας, ἀνάλυσιν τοῦ κόστους τοῦ ἐνεργειακοῦ συστήματος καθὼς καὶ ἀνάλυσιν τῆς ἐνεργειακῆς ζητήσεως δι' ἐνδιαμέσους καὶ τελικοὺς σκοποὺς.

Τέλος, μετὰ τὴν κατάρτισιν λεπτομερῶν προβλέψεων τῶν κυριωτέρων παραγόντων τῆς τελικῆς ζητήσεως (καταναλώσεως, ἐξαγωγῶν, ἀκαθαρίστων ἐπενδύσεων) μέχρι τοῦ ἔτους 1965, ἀπεικονίσθησαν δι' ἀντιστροφῆς τῆς μήτρας τοῦ 1956 (εἰς σταθερὰς τιμὰς 1953) τὰ μεγέθη τῶν δυνατῶν ἐξελίξεων τῶν ἀναγκῶν (ἐξ ἐγχωρίων πηγῶν καὶ εἰσαγωγῶν) τῶν ἐνεργειακῶν προϊόντων.

Αἱ προκαταρκτικαὶ αὐταὶ προβλέψεις συνεκρίθησαν πάντως πρὸς τὴν ἐφικτὴν ἐπέκτασιν τῆς δυναμικότητος τοῦ Ἰταλικοῦ ἐνεργειακοῦ συστήματος, κατόπιν δὲ προσεκτικῆς μελέτης τῶν τάσεων ὑποκαταστάσεως μεταξύ τῶν διαφόρων ἐνεργειακῶν προϊόντων, αἱ προβλέψεις αὐταὶ προσδιωρίσθησαν ἀνα-



λυτικῶς καὶ περιελήφθησαν συνοπτικῶς εἰς τὸ «'Ενεργειακὸν Ἴσοζύγιον τοῦ ἔτους 1965, τῆς Ἱταλικῆς Οἰκονομίας».

Εἶναι περιττὸν νὰ ὑπομνησθῇ πόσον χρήσιμος ἀπεδείχθη—διὰ μίαν ἀκόμη φοράν— ἡ μέθοδος Λεόντιεφ διὰ τὸν καταρτισμὸν μιᾶς ἀκριβοῦς ἀναλύσεως ἐνὸς τοιοῦτου πολυπλόκου τομέως.

## ΜΕΛΕΤΑΙ ΥΠΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΝ

### VI. Τοπικὴ μήτρα τῆς Σικελικῆς Οἰκονομίας

16. Ἡ μελέτη αὕτη πρόκειται νὰ ὁλοκληρωθῇ ἐντὸς τῶν προσεχῶν μηνῶν καὶ εἶναι ἀποτέλεσμα ἐντατικῆς ἐρευνητικῆς προσπάθειας, χρηματοδοτουμένης ὑπὸ τῆς Τραπεζῆς τῆς Σικελίας, ἀποβλέπει δὲ εἰς τὸν συντονισμὸν καὶ τὴν συμπλήρωσιν τῶν ὑπαρχόντων στοιχείων τῶν ἀφορώντων τὴν διάρθρωσιν καὶ τὰ κύρια χαρακτηριστικὰ μιᾶς ἐκ τῶν πλέον τυπικῶν προβληματικῶν περιοχῶν τῆς Νοτίου Ἱταλίας.

Τὸ ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον τῆς ὡς ἄνω μελέτης ἐγκείται εἰς τὸ γεγονός ὅτι αὕτη θὰ ἀποτελέσῃ τὸ πρῶτον δεῖγμα λεπτομεροῦς καὶ πλήρους περιγραφῆς τῆς σχέσεως ἣτις συνδέει μίαν αὐτόνομον περιοχὴν τῆς Ἐθνικῆς Οἰκονομίας μετὰ τῆς ὑπολοίπου χώρας.

Ἡ τοπικὴ αὕτη μήτρα δὲν θὰ βασισθῇ ἐπὶ τῶν γνωστῶν θεωριῶν καὶ μεθόδων, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται συνήθως διὰ τὸν χωρισμὸν ἐνὸς οἰκονομικοῦ συστήματος εἰς γεωγραφικὰς περιοχάς, ἀλλὰ θὰ καταρτισθῇ ἐπὶ τῇ βάσει ἀμέσων πληροφοριῶν ἀφορώντων τὴν προέλευσιν καὶ τὸν προορισμὸν τῶν τοπικῶν πόρων.

Τὰ χρησιμοποιηθέντα βασικὰ στοιχεῖα διὰ τὴν κατάρτισιν τῆς μήτρας ταύτης εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

α) στατιστικαὶ ποσοτικαὶ σειραὶ (καταρτισθεῖσαι ὑπὸ τῆς Τραπεζῆς τῆς Σικελίας) τοῦ διαχωρικοῦ μεταξὺ τῆς νήσου Σικελίας καὶ τῆς ὑπολοίπου Ἱταλίας, ἐμπορίου,

β) στατιστικαὶ σειραὶ τῶν διενεργουμένων ὑπὸ τῆς περιοχῆς καὶ τῶν ξένων χωρῶν εἰσαγωγῶν καὶ ἐξαγωγῶν (κατ' ὄγκον καὶ κατ' ἀξίαν), καταρτισθεῖσαι ὑπὸ τοῦ Κεντρικοῦ Ἰνστιτούτου Στατιστικῆς διὰ λογαριασμὸν τῆς Τραπεζῆς τῆς Σικελίας ἀρχόμεναι ἀπὸ τοῦ ἔτους 1926,

γ) ἐκτεταμένη δειγματοληπτικὴ ἔκθεσις (1% ἀντιπροσώπευσις κάθε στρώματος) ἀγροτικῶν προϋπολογισμῶν, ἀγροτικοῦ κεφαλαίου καὶ οἰκογενειακῶν προϋπολογισμῶν, τοῦ Ἀγροτικοῦ τομέως, καταρτισθεῖσα, διὰ λογαριασμὸν τῆς Τραπεζῆς, ὑπὸ τοῦ τοπικοῦ Ἐθνικοῦ Ἰνστιτούτου Ἀγροτικῆς Οἰκονομίας,

δ) μία ἐξίσου ἐκτεταμένη καὶ ἀντιπροσωπευτικὴ ἔκθεσις οἰκογενειακῶν προϋπολογισμῶν καὶ οἰκογενειακοῦ κεφαλαίου τῶν μὴ ἀγροτικῶν καὶ τῶν ἀστικῶν περιοχῶν, καταρτισθεῖσα διὰ λογαριασμὸν τῆς Τραπεζῆς, ὑπὸ τοῦ Τοπικοῦ Στατιστικοῦ Κέντρου.



ε) μία ἀρκούντως ἀντιπροσωπευτική έκθεσις τῶν εισροῶν καὶ τῶν ἐκροῶν τῶν ἐπὶ μέρους κλάδων τῆς Βιομηχανίας τῶν Μεταφορῶν καὶ τοῦ Ἐμπορίου, ἥτις κατηρτίσθη ad hoc ὑπὸ τοῦ τοπικοῦ Κέντρου Στατιστικῆς,

στ) στοιχεῖα τοπικῆς ἀπασχολήσεως κατὰ τομέα συνεκεντρώθησαν ὑπὸ τῶν Ἰνστιτούτων Κοινωνικῆς Ἀσφαλίσεως.

Τὰ κυριώτερα χαρακτηριστικά τοῦ Σικελικοῦ Πίνακος Εἰσροῶν—Ἐκροῶν θὰ εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

1) Τὸ σχῆμα τοῦ Πίνακος, ὁ ὁποῖος θὰ ἀποτελεῖται ἐκ 50 στηλῶν καὶ 200 περίπου σειρῶν, θὰ εἶναι ὀρθογώνιον.

2) Αἱ εἰσροαὶ καὶ ἐκροαὶ τοῦ Ἀγροτικοῦ τομέως θὰ διασπῶνται εἰς 4 μεγάλας ἀγροτικὰς περιοχάς.

3) Ὁ Πίναξ εἰς τιμὰς ἀγοραστοῦ θὰ συμπληροῦται δι' ἐτέρου Πίνακος δεικνύοντος τὰς ποσοτικὰς ροὰς ὄλων τῶν προϊόντων διὰ τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν στοιχεῖα.

4) Αἱ εἰσαγωγαὶ ἐκ τῶν ἄλλων Ἰταλικῶν περιοχῶν καὶ ἐκ τοῦ ὑπολοίπου κόσμου θὰ ὑπολογισθοῦν εἰς τὸν Πίνακα κατὰ τομέα προελεύσεως καὶ προορισμοῦ.

Τὰ ἀποτελέσματα τῆς μελέτης ταύτης θὰ χρησιμοποιηθοῦν κατόπιν διὰ τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐπιδράσεων ἐπὶ τῆς ὑπολοίπου Ἰταλίας τῆς προβλεπομένης ἐπεκτάσεως τῆς τοπικῆς τελικῆς ζητήσεως καὶ τοῦ προγράμματος ἐπενδύσεων, τοῦ ἀποβλέποντος εἰς τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως τῆς Σικελικῆς Οἰκονομίας.

Ἡ δυνατότης ἐπεκτάσεως τοῦ σχεδίου τούτου εἰς ἄλλας περιοχὰς καθὼς καὶ εἰς ὀλόκληρον τὴν περιοχὴν τῆς Νοτίου Ἰταλίας μελετᾶται ὑπὸ τῶν Ὁργανώσεων, τῶν ὑπευθύνων διὰ τὸν συντονισμόν τῶν προγραμμάτων ἐπενδύσεων τῶν ὑπαναπτύκτων περιοχῶν τῆς Χώρας.

## VII. Ἀνάλυσις ἀφορῶσα τὰς ἐπιδράσεις τῶν τιμῶν τῶν δυνατῶν μεταβολῶν καὶ ἐξελίξεων τοῦ συστήματος Κοινωνικῶν Ἀσφαλίσεων

17. Ἡ μελέτη αὕτη ἀνελήφθη προσωπικῶς ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ Alvaro Tomasetti τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ρώμης, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰ μεταρρυθμιστικὰ τοῦ Ἰταλικοῦ συστήματος Κοινωνικῶν Ἀσφαλίσεων, σχέδια.

Ἡ ἔρευνα θὰ βασισθῇ ἐπὶ τῆς ἀναστροφῆς τοῦ Πίνακος Εἰσροῶν—Ἐκροῶν τοῦ 1956 (εἰς τιμὰς 1953) καὶ ἐπὶ ὑποθέσεων ἀφορώντων :

α) Τὰς προβλεπομένας δημογραφικὰς ἐξελίξεις τοῦ πληθυσμοῦ καὶ τοῦ ἐπιπέδου οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως μέχρι τοῦ ἔτους 1965,

β) τὴν δυνατότητα ἐπεκτάσεως τοῦ ὑπάρχοντος (ἢ τοῦ τροποποιηθησομένου) συστήματος κοινωνικῶν ἀσφαλίσεων, εἰς ὀλόκληρον τὸν πληθυσμόν,

γ) τὰς δυνατὰς μεταβολὰς τοῦ παρόντος συστήματος κατανομῆς μεταξὺ Κράτους, ἐπιχειρηματιῶν καὶ ἐργατῶν, ἀσφαλιστικῶν εἰσφορῶν.

## Διδασκαλία τῆς Μεθόδου

Ἡ διδασκαλία τῆς μεθόδου Λεόντιεφ τόσον ἀπὸ θεωρητικῆς ὅσον καὶ ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως ἐκαλλιεργήθη ἐντατικῶς κατὰ τὰ τελευταῖα πέντε ἔτη εἴτε εἰς ἀκαδημαϊκὸν εἴτε εἰς βιομηχανικὸν ἐπίπεδον.

Τὰ βασικὰ χαρακτηριστικὰ τῆς μεθόδου εἰσροῶν-ἐκροῶν περιλαμβάνονται εἰς τὰ διδακτικὰ προγράμματα τῶν οἰκονομικῶν καὶ στατιστικῶν σχολῶν διαφόρων Πανεπιστημίων (Ρώμης, Μιλάνου, Τεργέστης, Τουρίνου καὶ Παλέρμου), καθὼς καὶ εἰς μερικὰς πτυχιακὰς παραδόσεις Σχολῶν π.χ. :

- τοῦ Ἰνστιτούτου Εὐρωπαϊκῶν Σπουδῶν (Τουρίνου),
- τοῦ Ἰνστιτούτου Δημοσίας Διοικήσεως (Βολωνία),
- τῆς ἐτησίας Συνόδου τῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως ὀργανουμένης ὑπὸ τῶν Δημοκρατικῶν Ἐνώσεων Ἐμπορίου διὰ τὰ τοπικὰ Διοικητικὰ Συμβούλια,
- τοῦ Κέντρου Ἐρευνῶν καὶ Μελετῶν Μεσογειακῶν περιοχῶν ὀργανωθέντος ὑπὸ τῆς Svinex καὶ χρηματοδοτηθέντος ὑπὸ τῶν Ford and Rockefeller Foundations (Ρώμη).

Αἱ θεωρητικαί, μαθηματικαί καὶ ὑπολογιστικαὶ ἀπόψεις τῆς μεθόδου ἀπεικονίζονται καὶ ἀναλύονται εἰς πλείστα ἄρθρα, ἐπιλογή τῶν ὁποίων ἀκολουθεῖ τὴν ἔκθεσιν ταύτην.

### *Ἐπιλογή ἀπὸ μελέτας καὶ ἄρθρα δημοσιευθέντα εἰς τὴν Ἰταλίαν κατὰ τὰ ἔτη 1955 — 1959*

- [1] **Ministry of the Budget**: «The structural interdependence of the Italian economy» (containing the original consolidated version of the 1953 Input-Output Table): Chap. IV of the «Relazione Generale sulla Situazione Economica del Paese nell' anno 1954». Parliamentary Acts, 1955.
- [2] **National Institute of Agrarian Economy**: «The Interrelationship between the Farm and Food Processing Economy» (containing a detailed abstract of the interindustry flows of the 1953 Table): Chap. VIII of the «Annuario dell' Agricoltura Italiana nell' anno 1956» - National Institute of Agrarian Economy, Rome, 1955.
- [3] **V. Cao - Pinna**: «Input - Output Analysis»: Dizionario di Economia Politica - Edizioni di Comunità, Milan, 1955.
- [4] **R. Bozuffi - G. Reviglio**: «The inversion of the 1950 Italian Input - Output Table» - L'industria, Milan 1955.
- [5] **V. Del Punta**: «The uses of Linear Programming for Planning the Industrial Development of the Southern Italy Area»: Rivista di Politica Economica, Rome 1955.

- [6] **G. Orlando** : «Sectors' Economic Equilibrium» : *Rivista di Economia Agraria*, Rome, 1955.
- [7] **V. Cao - Pinna** : «The Value Added Concept in the Input-Output Accounting System» : *Proceedings of the 3rd Conference on Studies of Business Statistics*, Cedam, Padua 1955.
- [8] **C. Righi** : *A Comparative Analysis of the Total Requirements originated by the Final Demand for Capital Goods* : *Tecnica e Organizzazione*, Milan, 1955.
- [9] **Ministry of the Budget** : «Relationship between the Final Demand Structure and the Import Requirements of the Italian Economy» : Annex 2 of the «Relazione Generale sulla Situazione Economica del Paese nell'anno 1955» - *Parliamentary Acts*, 1956.
- [10] **V. Cao - Pinna** : «Income Transfers Among the Productive Sectors Resulting from Changes in the Relative Price System» - *Rivista di Economia Agraria*, Rome, 1956 (re-published in Spanish language in «*De Economia*», Madrid, 1957).
- [11] **V. Del Punta** : «Application of the Input-Output Analysis and of Linear Programming to the problems of Economic Growth» : *Rivista di Politica Economica*, Rome, March, 1956.
- [12] **S. Cherubino** : «On the Mathematical Fundamentals of the General Economic Equilibrium» : *L'Industria*, 1956.
- [13] **V. Cao - Pinna** : «Relationship between the Transportation Sector and the Productive System» : *Proceedings of the 4th Italian Conference on Transportation Problems*, Italian Automobil Club, Milan, 1956.
- [14] **Y. K. Wong** : «An Elementary Procedure for a Input-Output System» : *L'Industria*, n. 1, 1956.
- [15] **V. Del Punta** : «Regional Input-Output Analysis» (the problems of regional differences in prices and technology) : *Rivista di Politica Economica*, Rome, 1957.
- [16] **V. Cao - Pinna - C. Righi** : «The Interdependence between the Textile Industries and the Productive System» : Vol. IV of the «*Il Problema Tessile Italiano* - Vol. IV : *National Productivity Committee*, Rome, 1957.
- [17] **G. Tintner** : *The Theory of Games, Linear Pro-*

- gramming and Input-Output Analysis» - *L'Industria*, 1957.
- [18] **National Institute for Research on Short-Term Economic Developments**: «Effects, on the Productive System of the Program of Work of the Shipbuilding Industries», Rome, 1958.
- [19] **V. Cao - Pinna**: «Possible Uses of the Input-Output Method in the Industrial Concerns»: *Tecnica e Organizzazione*, Milan, May-June, 1958.
- [20] **V. Cao Pinna**: «The Intra-Sector Interdependence of an Economic System»: *Edizioni Scientifiche Einaudi*, Turin, 1958.
- [21] **V. Cao - Pinna**: «The Structure of Two Mediterranean Economies: Spain and Italy»: *Economia Internazionale*, Genoa, May, 1958 (re-published in Spanish language in: *Revista da Economia Politica*, Madrid, April 1958).
- [22] **S. Cherubino**: «On Leontief's matrix and Linear Programming Problems»: *L'Industria*, n. 2, Milan, 1959.
- [23] **V. Paretti - V. Cao - Pinna - L. Cugia - C. Righie**: «Structure and Perspectives of the Italian Energetic System»: *Edizioni Scientifiche Einaudi*, Turin, 1959.

## ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

### ΕΙΣΡΟΩΝ - ΕΚΡΟΩΝ ΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΟΥΣ ΧΩΡΑΣ

Υπό του κ. ΚΛΑΥΔΙΟΥ Β. ΜΠΑΝΤΑΛΟΥΚΑ

#### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εἰς προηγηθείσας τῆς παρούσης διαλέξεις (1), ἐξετέθησαν αἱ γενικαὶ ἀρχαὶ καὶ ὁ τρόπος χρησιμοποίησεως τοῦ συστήματος εἰσροῶν—ἐκροῶν ὡς λογιστικοῦ ὄργανου καὶ ὡς ὄργανου οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ. Εἰς τὴν διάλεξιν ταύτην θὰ ἐπιχειρηθῇ, κατὰ κύριον λόγον, ἡ σύντομος παρουσίαις τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν τοῦ ἐν προκειμένῳ συστήματος εἰς διαφόρους χώρας.

Ὡς γνωστὸν, ἡ περιγραφή καὶ ἡ ἀνάλυσις τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος κατέστη πλέον ἀρκούντως συγκεκριμένη, χάρις κυρίως εἰς τὰς οἰκονομετρικὰς ἐρεῦνας καὶ ἐμπειρικὰς ἐφαρμογὰς. Αἱ ἐρευναὶ καὶ ἐφαρμογαὶ αὗται στηρίζονται ἐν πολλοῖς εἰς δύο ἐξόχους συμβολὰς κατὰ τὸ ἔτος 1936 τῶν μεγάλων οἰκονομολόγων John M. Keynes καὶ Wassily W. Leontief. Ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν συνίσταται εἰς τὴν ἐκδοθεῖσαν «Γενικὴν θεωρίαν τῆς ἀπασχολήσεως, τοῦ τόκου καὶ τοῦ χρήματος» καὶ τὴν βάσει ταύτης μετέπειτα συστηματοποιηθεῖσαν προσπάθειαν τηρήσεως ἐθνικῆς λογιστικῆς πρὸς ἀκριβῆ προσδιορισμὸν τῶν συνολικῶν τῆς οἰκονομίας μεγεθῶν. Ἡ δευτέρα, πάλιν, εἰς τὴν τότε δημοσιευθεῖσαν ἐργασίαν τοῦ Λεόντιεφ, καθηγητοῦ τῆς Οἰκονομικῆς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Harvard, περὶ «τῶν ποσοτικῶν σχέσεων εἰσροῶν καὶ ἐκροῶν εἰς τὸ οἰκονομικὸν σύστημα τῶν Ἑνωμένων Πολιτειῶν» (2), ὡς καὶ τὰς μετέπειτα θεωρητικὰς καὶ πρακτικὰς ἐξελίξεις τοῦ ὑπ' αὐτοῦ διαμορφωθέντος συστήματος εἰσροῶν—ἐκροῶν τῆς οἰκονομίας.

Κατὰ τὸ σύστημα τοῦτο, ἡ σύγχρονος οἰκονομικὴ δραστηριότης ἐκδηλοῦται διὰ κυκλικῶν ροῶν καὶ δὴ δι' εἰσροῶν καὶ ἐκροῶν ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν, μέσῳ νομισματικῶν συναλλαγῶν. Ἐνῶ δὲ αἱ ροαὶ αὗται συνεχίζονται, ὑφίσταται δυνατότης ὅπως ληφθῇ στατικὴ αὐτῶν εἰκὼν «πρὸς ἐμπειρικὴν μέλητην τῶν ἀμοιβαίων σχέσεων τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων».

1) Διλέξεις δοθεῖσα τὴν 21ην Ἰανουαρίου 1959, εἰς τὴν αἴθουσαν τοῦ ἐν Ἀθήναις καὶ παρὰ τῇ ὁδῷ Ἀκαδημίας ἀριθ. 84 παραρτήματος τῆς Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς. Αὕτη ἀπετέλεσε τὴν κατὰ τὸ ἀκαδημαϊκὸν ἔτος 1958—59 τρίτην διάλεξιν τοῦ Γραφείου Οἰκονομικῶν Ἐρευνῶν τῆς ἐν λόγῳ Σχολῆς ἐπὶ θεμάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, τῆς σειράς «γραμματικὴ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις». Τὸ κείμενον τῆς διαλέξεως ἐμπλουτίζεται ἐνταῦθα διὰ τῆς οικείας βιβλιογραφίας.

2) W. W. Leontief: Quantitative Input and Output Relation in the Economic System of the United States, εἰς Review of Economic Statistics, τόμ. 18 (1936) σσ. 105—25.

Ἡ στατική αὐτή εἰκὼν λαμβάνει τὴν μορφήν πίνακος, δεικνύοντος τὰς ποσοτικές σχέσεις τῶν ἀγαθῶν καὶ τῶν ὑπηρεσιῶν μεταξὺ τῶν κλάδων τῆς οἰκονομικῆς δραστηριότητος χώρας τινός, ἐντὸς δεδομένης χρονικῆς περιόδου. Αἱ ἐν προκειμένῳ σχέσεις ἐκφράζονται συνήθως διὰ τῶν συναλλαγῶν εἰς σταθερὰς νομισματικές μονάδας. Εἶναι ὅμως δυνατόν νὰ ἐκφραστοῦν αὐταὶ καὶ εἰς ἕτερας μονάδας μετρήσεως, ὡς εἰς ὥρας ἐργασίας, εἰς τόνους σημαντικοῦ τινος ἀγαθοῦ (ἄνθρακος, χάλυβος κλπ.) κ.ο.κ.

Οἱ πίνακες εἰσορῶν—ἐκροῶν ὁμοιάζουν μὲ τοὺς χρεουμένους καὶ πιστούμενους λογαριασμοὺς τῆς λογιστικῆς. Ἡ κατάρτισις ὅμως τῶν πρώτων στηρίζεται εἰς προκεχωρημένην μέθοδον τηρήσεως τῆς ἔθνικῆς λογιστικῆς καὶ δὴ τῶν διακλαδικῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν παραγωγικῶν κλάδων.

Ὡς εἶναι εὐνόητον, οἱ πίνακες εἰσορῶν—ἐκροῶν βοηθοῦν ἀποφασιστικῶς τοὺς Οἰκονομολόγους εἰς τὴν συγκέντρωσιν καὶ κατανοήσιν πλήθους γεγονότων καὶ μεγεθῶν δεδομένης οἰκονομίας. Ἰδιαιτέρως βοηθοῦν αὐτοὺς σχετικῶς μὲ τὴν διαπίστωσιν τῆς προελεύσεως, τῆς κατευθύνσεως καὶ τῶν ἀλληλεπιδράσεων τῶν οἰκονομικῶν τομέων, τόσον μακροοικονομικῶς, ὅσον καὶ μικροοικονομικῶς. Οὕτω, καθίσταται ἐφικτὴ ἡ ἐπίλυσις πληθῶρας προβλημάτων ἐκτιμήσεως καὶ ὑπολογισμοῦ οἰκονομικῶν γεγονότων καὶ μεγεθῶν, διαρθρώσεως καὶ λειτουργίας οἰκονομικῶν μονάδων, κλάδων, τομέων καὶ τοῦ συνόλου ἔθνικῆς τινος οἰκονομίας. Ὡσαύτως ἐπιτυγχάνεται ἡ παρακολούθησις τῶν ἀμέσων καὶ ἐμμέσων συνεπειῶν ἕνεκα μεταβολῆς τινος εἰς τὸ οἰκονομικὸν σύστημα, ἡ κατάστρωσις ἔθνικῶν προϋπολογισμῶν ἢ προγραμμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως κλπ.

Ὡς ἦτο φυσικόν, τὰ πρακτικὰ ταῦτα πλεονεκτήματα τοῦ συστήματος προεκάλεσαν τὸ ἐνδιαφέρον πολλῶν Κυβερνήσεων καὶ ἐπιστημόνων κατὰ τὴν τελευταίαν ἰδίως εἰκοσαετίαν. Δι' ὃ καὶ παρατηρεῖται ὄλονεν καὶ αὐξουσα σύστασις ἐιδικῶν κρατικῶν καὶ μὴ ὑπηρεσιῶν, ὡς καὶ ἰνστιτούτων ἢ γραφείων εἰς πανεπιστημιακὰ ἰδρύματα ἢ ἐπιστημονικὰς ἐταιρίας τόσον ἐν Εὐρώπῃ, ὅσον καὶ ἐν Ἀμερικῇ.

Ἦδη, τὸ οἰκονομομετρικόν τοῦτο σύστημα ἐφαρμόζεται ἐπιτυχῶς εἰς Γαλίαν, Δανίαν, Ἡνωμένον Βασίλειον, Ἡνωμένας Πολιτείας τῆς Ἀμερικῆς, Ἰταλίαν, Νορβηγίαν καὶ Ὀλλανδίαν. Συνάμα, ἤρχισαν προπαρασκευαστικαὶ ἐργασίαι ἐφαρμογῆς καὶ εἰς ἕτερας χώρας, ὡς εἰς Αἴγυπτον, Αὐστρίαν, Βραζιλίαν, Καναδᾶν, Κολομβίαν, Πακιστάν, Πολωνίαν, Ρωσίαν, Σάν Σαλβατόρ, Σουηδίαν κλπ. (\*).

3) Διὰ τὰς νέας ταύτας προσπάθειάς πλ. εἰς H. B. Chenery : Development Policies and Programs, εἰς Economic Bulletin for Latin America, τόμ. 3 (1958). Dominion of Canada Bureau Statistics : The Inter-Industry Flow of Goods and Services. Ottawa, E. Cloutier, 1956. V. O. Chsenious : The Economic Development of Colombia, εἰς United Nations Economic Commission for Latin America : Analyses and Projections of Economic Development, New York, 1955. United Nations : The Economic Development of Brasil, εἰς U.N. Economic Commission for Latin America : Analyses and Projections of Economic Development, New York, 1956. United Nations : Economic Bulletin for Latin America, τόμ. 1 (1956), τεϋ-



Τὰς πρακτικὰς ταύτας ἐφαρμογὰς προσπαθοῦμεν κατωτέρω νὰ ἐκθέσωμεν ἐν συντομίᾳ καὶ δὴ κατὰ τὸν ἀπλοῦστερον δυνατὸν τρόπον. Ἐν τέλει, ἐπιχειροῦμεν νὰ δειξωμεν τὰς ἐμφανιζομένας δυσχερείας καὶ τὰς πλέον ἐνδιαφερούσας προσφάτους ἐπιτεύξεις τῆς Οἰκονομικῆς, μέσῳ τῶν ἐμπειρικῶν αὐτῶν ἐφαρμογῶν (\*).

#### 1. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΟΛΛΑΝΔΙΑΝ

Οἱ πρῶτοι πίνακες εἰσροῶν—ἐκροῶν κατεστρώθησαν ἐν Εὐρώπῃ καὶ δὴ εἰς Ὀλλανδίαν καὶ Δανίαν κατὰ τὴν προπολεμικὴν περίοδον, ἐχρησιμοποιήθησαν δὲ ἀρχικῶς ὡς μέσα ἀκριβεστέρας ἐμφανίσεως τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν.

Ἡ Ὀλλανδία, πάντως, διεκδικεῖ τὴν τιμὴν, ὅτι πρώτη ἐφήρμοσεν ἐν Εὐρώπῃ παρεμφερὲς σύστημα πρὸς ἔρευναν τῶν παραγωγικῶν σχέσεων. Ἡ Ἐθνικὴ Στατιστικὴ Ὑπηρεσία τῆς Ὀλλανδίας ἐδημοσίευσεν τὸ 1920 πίνακας διὰ τὰ ἔτη 1913 καὶ 1916, ὁμοιάζοντας ἀρκούντως πρὸς τοὺς τοῦ Λεόντιεφ, ἐπὶ τῇ βάσει στατιστικῶν στοιχείων τῆς παραγωγῆς. Αἱ διαπιστωθεῖσαι εἰς τοὺς πίνακας αὐτοὺς ἀτέλειαι, ὤθησαν τὴν ἐν λόγῳ Ὑπηρεσίαν εἰς ὀλονὲν πληρεστέρας ἀναλύσεις τῶν εἰσροῶν καὶ τῶν ἐκροῶν τῆς παραγωγῆς, αἵτινες ἐτελειοποιήθησαν ἀργότερον βάσει τοῦ συστήματος Λεόντιεφ.

χος 2, σσ. 1—34. United Nations: Input-Output Tables, Recent Experience in Western Europe, εἰς Economic Bulletin for Europe, τόμ. 8 (1956), τεύχος 5, σσ. 36—53. United Nations: Food and Agriculture Organisation: Bulletin Mensuel Economie et Statistique Agricoles, τόμ. 5 (1956), τεύχη 5 καὶ 8.

4) Πλ. σχετικῶς εἰς O. Aukrust: Principles on National Accounting, εἰς T. Barua (Editor): The Structural Interdependence of the Economy; Proceedings of an International Conference on Input-Output Analysis, Varenna, 27 June—10 July 1954. Milano, A. Giuffrè; or New York, J. Wiley and Sons; for the Faculty of Economics University of Pisa, 1955, σσ. 205—15. Α. Α. Λάζαρη: Τὸ σύστημα Λεόντιεφ, εἰς Ἐπιθεώρησιν Οἰκονομικῶν καὶ Πολιτικῶν Ἐπιστημῶν, τόμ. 12 (1957), σσ. 7—50. W. Leontief: Introduction to a Theory of the Internal Structure of Functional Relationship, εἰς Econometrica, τόμ. 15 (1947), τ. 4. J. Marshak: Economic Measurements for Policy and Prediction, εἰς Hood and Koopmans (Editors): Studies in Econometric Method. New York, J. Wiley and Sons, 1953. J. Sandee: Input-Output Accounts, εἰς T. Barua (Editor): The Structural Interdependence of the Economy, ἔ. ἀ. σσ. 219—29. J. Sandee and D.B.J. Schouten: A Combination of a Macro-Economic Model and a Detailed Input-Output System, εἰς Netherlands Economic Institute (Editor): Input-Output Relations; Proceedings of a Conference on Inter-Industrial Relations. Held at Driebergen, Holland. Leiden, H. E. Stenfort Kroese, N. V., 1953, σσ. 186—94. J. R. N. Stone: Input-Output and the Social Accounts, εἰς T. Barua (Editor): The Structural Interdependence of the Economy, ἔ. ἀ. σ. 155. J. R. N. Stone: Model Building and the Social Accounts; A Survey, εἰς M. Gilbert and J. R. N. Stone (Editors): Income and Wealth, Series IV. London, Bowes and Bowes, for the International Association for Research in Income and Wealth, 1955, σσ. 27—77. J. R. N. Stone and J. E. G. Utting: The Relationship between Input-Output Analysis and National Accounting, εἰς Netherlands Economic Institute (Editor): Input-Output Relations, ἔ. ἀ. σσ. 195—224.

Ἐν ἔτει 1938 ἡ αὐτὴ Ὑπηρεσία συνέστησεν ἴδιαν Διεύθυνσιν Ἐθνικῶν Λογαριασμῶν καὶ ἔκτοτε ἐφαρμόζει τὴν διακλαδικὴν ἀνάλυσιν πρὸς ἔλεγχον τῶν ἔθνικῶν λογαριασμῶν καὶ πρὸς ἐξαγωγήν ὀρθοτέρων συμπερασμάτων ἐπὶ τῆς πορείας τῆς οἰκονομίας τῆς χώρας.

Τὸ 1945, ἡ Ὀλλανδικὴ Κυβέρνησις συνέστησεν, ὡς δεύτερον μετὰ τὴν Ἐθνικὴν Στατιστικὴν Ὑπηρεσίαν συμβουλευτικὸν αὐτῆς ἐπὶ τῆς οἰκονομίας ὄργανον, τὴν Κεντρικὴν Ὑπηρεσίαν Προγραμματισμοῦ, πρὸς κατάρτισιν ἔθνικῶν προϋπολογισμῶν. Ἀπὸ τοῦ ὡς ἄνω ἔτους παρατηρεῖται στενὴ συνεργασία τῶν Ὑπηρεσιῶν Στατιστικῆς καὶ Προγραμματισμοῦ, μετὰ κατανομῆς μεταξύ τῶν τοῦ ἔργου τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ συστήματος εἰσοδῶν — ἐκροδῶν. Ἡ στατιστικὴ Ὑπηρεσία συλλέγει τὰ δεδομένα καὶ καταρτίζει τοὺς πίνακες, ἀναλύουσα αὐτοὺς περιπτωσιακῶς, ἐνῶ ἡ Ὑπηρεσία Προγραμματισμοῦ, στηριζομένη εἰς τὸ ἔργον τῆς προηγουμένης Ὑπηρεσίας, ἐνεργεῖ συμπληρωματικὰς ἐκτιμήσεις καὶ ὑπολογισμοὺς, ὡς καὶ προβλέψεις ἐπὶ τῆς οἰκονομικῆς ἐξελίξεως.

Οἱ ὑπὸ τῆς Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας καταρτισθέντες πίνακες διὰ τὰ ἔτη 1938, 1946 καὶ 1947 ἔχουν διαστάσεις 27 X 27, δηλαδὴ διαιροῦν τὴν οἰκονομίαν εἰς 27 κλάδους. Εἰς τὰς στήλας προστίθενται καὶ οἱ τῶν εἰσαγωγῶν, τῆς καταναλώσεως, τῆς ἀνακατανομῆς κερδῶν, τῶν λογαριασμῶν κεφαλαίου καὶ ἀσφαλειῶν, τῶν ξένων χωρῶν καὶ τοῦ δημοσίου. Προστίθενται ἐπίσης εἰς τὰς σειρὰς ἕτεροι 22 διὰ πρὸς τοὺς κλάδους πληρωμὰς τῶν καταναλωτῶν καὶ τοῦ δημοσίου, ὡς καὶ δι' ἀποσβέσεις, δάνεια, ἀποταμιεύσεις καὶ ἀντιθησαυρίσεις. Οἱ κλάδοι τῆς δευτερογενοῦς παραγωγικῆς δραστηριότητος κατανέμονται εἰς μερικωτέρους.

Ὁ πίναξ διὰ τὸ ἔτος 1948 ἔχει διαστάσεις 40 X 40 καὶ οἱ διὰ τὰ ἐπόμενα ἔτη ἀκόμη μεγαλυτέρας. Οἱ πίνακες οὗτοι ὑφίστανται τακτικὰς ἀναθεωρήσεις. Οἱ προσφάτως καταρτιζόμενοι ἔθνικοὶ προϋπολογισμοὶ περιλαμβάνουν περὶ τοὺς 34 κλάδους μεταποιήσεως (5).

5) Λεπτομερείας βλ. εἰς J. Lips: *The Business Sector in the National Budget of the Netherlands*, εἰς *Cahiers du Congrès International de Comptabilité*, Paris, 1948. G. F. Loebe: *Experience with Input-Output Analysis in the Netherlands*, εἰς *Netherlands Economic Institute (Editor): Input-Output Relations*, ε. & σσ. 167-85. *Netherlands' Central Bureau of Statistics: National Accounts of the Netherlands, 1948-49*. The Hague, 1953. *Netherlands' Central Planning Bureau: Central Economic Plan, 1954*. The Hague 1954. *Organisation for European Economic Cooperation, National Accounts Research Unit: National Accounts Studies*; Netherlands, Paris, O.E.E.C., 1951. P. N. Rasmussen: *Studies in Inter-Sectoral Relations*. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1956. J. Sandee: *Netherlands*, εἰς T. Barna (Editor): *The Structural Interdependence of the Economy*, ε. & σσ. 289-93. G. Stuvvel: *Recent Experiences in the Use of Social Accounting in the Netherlands*. Cambridge, International Association for Research in Income and Wealth, 1949.

## 2. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΔΑΝΙΑΝ

Μετά τήν Ὀλλανδίαν, ἤρχισε καί ἡ Δανία κατὰ τὸ 1930 τήν προπαρασκευὴν εἰδους πινάκων εἰσροῶν—ἐκροῶν, μέσῳ τῆς Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας της, ἂν καὶ ὑφίσταντο τότε πλείστοι ἀντιξοότητες ἀπὸ ἀπόψεως πληρότητος καὶ ἀκριβείας στοιχείων, ὡς καὶ ἀπὸ ἀπόψεως μηχανογραφικῶν μέσων. Αἱ δυσχέρεια φαίνεται ὅτι ἦσαν ὀλιγώτεροι ὡς πρὸς τὰ στοιχεῖα τῶν ἐκροῶν, λόγῳ τῶν ἀπογραφῶν τῆς παραγωγῆς καὶ τῆς προθυμίας τῶν οἰκονομικῶν μονάδων εἰς τὴν παροχὴν σχετικῶν στοιχείων, ἔβαινον δὲ αὐταὶ συνεχῶς μειοῦμεναι. Δι' ὃ καὶ οἱ καταρτισθέντες πίνακες διὰ τὰ ἔτη 1930—1939 βαίνουν βελτιούμενοι, παρουσιάζοντες μεταξὺ των διαφορὰς κατὰ τινα χαρακτηριστικά, ἰδίᾳ ἀπὸ τοῦ ἔτους 1937 καὶ ἐντεῦθεν.

Οἱ πίνακες οὗτοι τῆς τελευταίας ταύτης προπολεμικῆς δεκαετίας ἔχουν διαστάσεις 14 X 14, μὲ προσθέτους στήλας δι' ἐσωτερικὴν ζήτησιν καὶ ἐξαγωγὰς, ὡς καὶ προσθέτους σειρὰς διὰ προστιθεμένην ἀξίαν καὶ εἰσαγωγὰς. Οἱ 14 κλάδοι τῶν πινάκων τούτων εἶναι οἱ τῆς γεωργίας, κτηνοτροφίας, δασοκομίας, ἀλιείας, βιομηχανίας, βιοτεχνίας, οἰκοδομικῆς, ἐμπορίου, πίστεως, ἀσφαλίσεων, μεταφορῶν, ἐνοικίων, ὑπηρεσιῶν ἐπαγγελματιῶν καὶ δημοσίου. Τὰ ἀγαθὰ διακρίνονται εἰς διαρκοῦς καὶ μὴ χρήσεως, αἱ δὲ εἰσαγωγὰι θεωροῦνται ὡς εἰσροαὶ τῶν παραγαγόντων ὁμοειδῆ προϊόντα κλάδων.

Ἡ ὡς ἂν Στατιστικὴ Ὑπηρεσία ἐπανήρχισε τὸ ἔργον της τῆς καταρτίσεως πινάκων εἰσροῶν—ἐκροῶν ἐν ἔτει 1947, ἐπὶ τῇ βάσει πλέον τοῦ συστήματος Λεόντιεφ. Μετὰ διετίαν, συνεφωνήθη μεταξὺ Δανίας καὶ Νορβηγίας ὅπως ἀμφότεραι αἱ χῶραι λάβουν ὡς ἔτος βάσεως τὸ 1959 καὶ ἐμφανίζον τὰς χρηματικὰς μονάδας εἰς τοὺς πίνακας εἰς τιμαριθμικὰς τιμὰς λιανικῆς πωλήσεως. Οὕτω ἔκτοτε, οἱ πίνακες τῶν δύο αὐτῶν χωρῶν διαφέρουν τῶν λοιπῶν, αἵτινες ἐμφανίζον τὰ μεγέθη τῶν πινάκων εἰς τρεχούσας τιμὰς, εἰς ἃς καταχωροῦνται εἰς τὰ λογιστικὰ βιβλία τῶν οἰκονομικῶν μονάδων.

Οἱ πίνακες διὰ τὰ ἀπὸ τοῦ 1947 καὶ ἐντεῦθεν ἔτη ἔχουν διαστάσεις 28X28, μὲ προσθέτους στήλας διὰ κατανάλωσιν, ἐξαγωγὰς, αὐξησιν ἀποθεμάτων καὶ παγίας ἐπενδύσεις, ὡς καὶ μὲ προσθέτους σειρὰς δι' ἀμοιβὰς τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, συντήρησιν καὶ ἐπισκευὰς τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ, ἀποσβέσεις, εἰσαγωγὰς καὶ καθαρὰν ἔμμεσον φορολογίαν. Οἱ 28 παραγωγικοὶ κλάδοι τῶν πινάκων αὐτῶν ἀνταποκρίνονται πρὸς τοὺς ὁμοίους ὑπολογισμοὺς τοῦ ἐθνικοῦ προϊόντος καὶ εἶναι: 5 διὰ τὴν γεωργίαν, δασοκομίαν καὶ ἀλιείαν, 1 διὰ τὴν παραγωγὴν ἀνθρακος καὶ λιγνίτου, 9 διὰ τὴν βιομηχανίαν, 1 διὰ τὴν βιοτεχνίαν, 1 δι' οἰκοδομὰς, 1 διὰ παροχὴν ὕδατος, ἠλεκτρισμοῦ καὶ φωταερίου, 2 διὰ τὸ ἐμπόριον, 1 διὰ τὰς μεταφορὰς καὶ 7 διὰ τὰς λοιπὰς ὑπηρεσίας. Τὰ μεγέθη τῆς παραγωγῆς καὶ τοῦ ἰσοζυγίου πληρωμῶν, ἅτινα συνθέτουν τὴν συνολικὴν προσφορὰν ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν, ἐμφανίζονται εἰς τοὺς πίνακας αὐτοὺς μὲ πᾶσαν δυνατὴν λεπτομέρειαν. Τὰ ἀγαθὰ διακρίνονται καὶ ἐδῶ εἰς τοιαῦτα διαρκοῦς καὶ μὴ χρήσεως, ἀκόμη δὲ καὶ εἰς παραγωγικὰ, καταναλωτικὰ καὶ ἐξαγόμενα εἰς τὴν ἄλλοδαπὴν<sup>(6)</sup>.

(6) Πρβλ. K. B j e r k e : Government Economic Planning and Control in

## 3. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΝΟΡΒΗΓΙΑΝ

Πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διακλαδικῶν σχέσεων καὶ ἔλεγχον τῶν δεδομένων τῆς τηρουμένης ἐθνικῆς λογιστικῆς ὑπὸ τῆς παρὰ τῆ Ἐθνικῆ Στατιστικῆ Ὑπηρεσίᾳ τῆς Νορβηγίας Διευθύνσεως Ἐθνικῶν Λογαριασμῶν, συνεστήθη παρὰ τῆ αὐτῆ Ὑπηρεσίᾳ τῷ 1946 καὶ Διευθυνσις Εἰσροῶν—Ἐκροῶν. Ἡ Διεύθυνσις αὕτη ἀρχικῶς κατέστρωσε πίνακας διὰ τὴν προπολεμικὴν δεκαετίαν 1930—39, στηριζομένη εἰς τοὺς ἐθνικοὺς λογαριασμοὺς, τοὺς ὁποίους ὠλοκλήρωσε περὶ τὸ τέλος τοῦ 1951.

\*Ἐκτοτε ἤρχισε τὴν κατὰστρωσιν πινάκων διὰ τὰ ἔτη 1947 καὶ ἐνεῦθεν. Οἱ πίνακες τῶν πρώτων τριῶν ἐτῶν 1947—49 εἶναι διαστάσεων 30 X 30, μὲ προσθέτους στήλας διὰ κατανάλωσιν, παγίας ἐπενδύσεις, μεταβολὰς ἀποθεμάτων καὶ ἐξαγωγὰς, ὡς καὶ μὲ προσθέτους σειρὰς δι' ἀμοιβὰς τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, ἀποσβέσεις, ἔμμεσον φορολογίαν (μεῖον ἐπιδοτήσεις) καὶ εἰσαγωγὰς. Αἱ στήλαι εἶναι κατανεμημέναι ὡς ἑξῆς: 3 διὰ τὴν γεωργίαν, δασοκομίαν καὶ ἀλιείαν, 3 διὰ τὰ μεταλλεῖα, 12 διὰ τὴν βιομηχανίαν, 2 διὰ τὰς οἰκοδομὰς, 2 διὰ τὸν ἠλεκτρισμὸν καὶ τὸ φωταέριον, 1 διὰ τὸ ἐμπόριον, 3 διὰ τὰς συγκοινωνίας καὶ ἐπικοινωνίας καὶ 4 διὰ τὰς λοιπὰς ὑπηρεσίας.

Οἱ πίνακες διὰ τὰ ἔτη 1947 καὶ 1948 ὑπελογίσθησαν τὸ 1949 καὶ οὗτοι εἰς τιμαριθμικὰς τιμάς, ὡς καὶ οἱ τῶν ἐπομένων, κατόπιν τῆς προμνησθείσης συμφωνίας μεταξύ Δανίας καὶ Νορβηγίας καὶ διὰ λόγους διαχρονικῆς συγκρίσεως.

Ὁ πίναξ διὰ τὸ ἔτος 1950 κατηρτίσθη ἀρχικῶς μὲ διαστάσεις 78 X 78, αἵτινες ἀκολούθως συνεπτύχθησαν εἰς 27 X 27, μὲ ἐπὶ πλέον τὰς αὐτὰς σειρὰς καὶ στήλας, τὰς ὁποίας ἀνεφέραμεν διὰ τοὺς πίνακας τῶν ἐτῶν 1947—49. Ὑψίσταται πάντως διαφορὰ τις, διότι ἐνταῦθα ἀφιεροῦνται δύο στήλαι διὰ τὴν κατανάλωσιν, διακρινομένην εἰς ἰδιωτικὴν καὶ δημοσίαν, καὶ μία τοιαύτη, ἀντὶ δύο, διὰ τὸν ἠλεκτρισμὸν καὶ φωταέριον.

Οἱ πίνακες διὰ τὰ ἐπόμενα ἔτη ὁμοιάζουν πρὸς τοὺς τοῦ 1950, παρέχουν ὁμως περισσοτέρας, λεπτομερείας αἵτινες εἶναι χρήσιμοι διὰ τὸν ἔλεγχον τῶν καταρτιζομένων ἐθνικῶν λογαριασμῶν καὶ προϋπολογισμῶν ὡς καὶ τὴν μελέτην τῶν ροῶν τῶν τιμῶν, τῶν ἐξαγωγῶν καὶ ἐτέρων οἰκονομικῶν μεγεθῶν (?).

Scandinavia, εἰς Cornell University (Editor): Scandinavia between East and West. Ithaca, N.Y., Cornell University Press, 1950. K. Bjerke and Others: Denmark, εἰς T. Barua (Editor): The Structural Interdependence of the Economy, ἔ. ἀ. σσ. 235—57. Organisation for European Economic Co-operation, National Accounts Research Unit: National Accounts Studies; Denmark. Paris, O.E.E.C., 1951.

7) Περαιτέρω λεπτομερείας βλ. εἰς O. Aukrust: Recent Experiences in the Use of Social Accounting in Norway. Cambridge, International Association for Research in Income and Wealth, 1949. Τοῦ αὐτοῦ: Input-Output Studies in Norway, εἰς Netherlands Economic Institute (Editor): Input-Output Relations, ἔ. ἀ. σσ. 111—22. P. J. Bjerve: Planning in Norway 1947—56. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1959. Norway's Central Bu-

Τὰ ἀποτελέσματα τῆς πρώτης ἐμπειρικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ οἰκονομετρικοῦ συστήματος εἰσροῶν—ἐκροῶν διὰ τὴν Ἀμερικανικὴν οἰκονομίαν ἐδημοσιεύθησαν τὸ 1941 εἰς τὸ βασικὸν ἐν προκειμένῳ βιβλίον τοῦ καθηγητοῦ Λεόντιεφ, ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἡ διάρθρωσις τῆς ἀμερικανικῆς οἰκονομίας, 1919—1929», ὅπερ ἐπανεδεδόθη τὸ 1951 μὲ τὴν προσθήκην τῆς δεκαετίας 1930—1939 (8). Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο, οἱ δημοσιευόμενοι πίνακες ἔχουν διαστάσεις 43 X 43.

Κατὰ τὸ αὐτὸ ἔτος 1941, τὸ παρὰ τῷ Ἀμερικανικῷ Ὑπουργεῖῳ Ἔργασίας «Bureau of Labor Statistics», ἐν στενῇ συνεργασίᾳ μετὰ τοῦ καθηγητοῦ Λεόντιεφ καὶ τῶν συνεργατῶν του, ἤρχισε μὲ ὀλιγάριθμον ἐπιτελεῖον ν' ἀσχολῆται συστηματικῶς μὲ τὴν κατάρτισιν ἐκτενεστέρων τοῦ βιβλίου τοῦ Λεόντιεφ πινάκων εἰσροῶν—ἐκροῶν. Ὁ πρῶτος πίναξ ἀναφέρεται εἰς τὸ ἔτος 1939 καὶ βασιζέται εἰς τὰ δεδομένα τῆς τότε διενεργηθείσης ἀπογραφῆς τῶν ἐπιχειρήσεων καὶ εἰς ἑτέρας πηγάς. Ὁ δεῦτερος τῶν πινάκων ἀναφέρεται εἰς τὸ ἔτος 1947 καὶ οἱ λοιποὶ εἰς τὰ ἐπόμενα κατὰ σειρὰν ἔτη. Οἱ πίνακες οὔτοι τῶν μεταπολεμικῶν ἐτῶν καθίστανται ὄλον ἐν πληρέστεροι καὶ ἀκριβέστεροι. Οἱ πρόσφατοι πίνακες εἶναι διαστάσεων 200 X 200.

Παραλλήλως, τὸ U. S. Bureau of Labor Statistics, χάρις καὶ εἰς τὴν ἠθικὴν καὶ ὕλικὴν ἐνίσχυσιν τοῦ Ὁμοσπονδιακοῦ Κράτους καὶ τῶν ἰδιωτικῶν ὀργανισμῶν, διενεργεῖ δοκιμαστικὰς ἀναλύσεις εἰσροῶν—ἐκροῶν πρὸς ἐξέτασιν μακροοικονομικῶν θεμάτων σχετικῶν μὲ τὸν βαθμὸν τῆς πλήρους ἀπασχολήσεως, τὴν ἐλαστικότητα τῆς ζήτησεως κλπ., ὡς ἐπίσης καὶ μικροοικονομικῶν καὶ δὴ ἐπὶ ἐπιλεγομένων βιομηχανιῶν. Πρὸς τοῦτο, χρησιμοποιεῖ διαθέσιμα δευτερογενῆ στατιστικὰ στοιχεῖα, ἅτινα συμπληρῶνει δι' ἀλληλογραφίας μετὰ τῶν οἰκείων οἰκονομικῶν μονάδων, ἀκόμη δὲ καὶ δι' ἐπιτοπιῶν ἐπισκέψεων. Εἰς τινὰς περιπτώσεις διενεργεῖ καὶ συμπληρωματικὰς ἀναλύσεις εἰσροῶν—ἐκροῶν μεμονωμένων ἐργοστασιῶν, χρησίμους πρὸς ἀναθεώρησιν τῶν ἀρχικῶς καταρτιζομένων ὑπ' αὐτοῦ γενικωτέρων πινάκων.

Ἀπὸ δεκαετίας σχεδόν, τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Χάρβαρντ συνέστησε παρ' αὐτῷ τὸ «Harvard Economic Research Project on the Structure of American Economy» ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ καθηγητοῦ Λεόντιεφ. Εἰς τοῦτο μελετῶνται σχετικὰ θεωρητικὰ καὶ πρακτικὰ θέματα ἐπιλύσεως τῶν διαφόρων δυσχερειῶν καὶ προωθήσεως τοῦ συστήματος πρὸς νέα πεδία ἐρεύνης. Συγχρόνως παρατηρεῖται σύστασις καὶ λειτουργία παρομοίων ὑπηρεσιῶν εἰς διαφόρους Κρατικούς Ὄργανισμούς, Πανεπιστήμια καὶ Ἰνστιτοῦτα τῆς χώρας. Ἡ μέχρι τοῦδε ἔκτασις τῆς δημιουργίας νέων σχετικῶν ὑπηρεσιῶν καθίσταται ἀρκούντως ἀντι-

reau of Statistics: National Accounts 1938 and 1948—53. Oslo, 1954. P. Sevaldson: Norway, εἰς T. Barna (Editor): The Structural Interdependence of the Economy, ἔ. ἀ. σσ. 297—311.

8) W. W. Leontief: The Structure of American Economy, 1919—1929; An Empirical Application of Equilibrium Analysis. Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1941. Second edition, 1919—1939, New York, Oxford University Press, 1951.



ληπτή και δι' άπλης μόνον άπαριθμήσεως τών κυριωτέρων οργανισμών οίτινες τās συνέστησαν. Οί οργανισμοί ούτοι είναι: Τά 'Υπουργεία Γεωργίας, 'Εμπορίου, 'Αμύνης και 'Αεροπορίας, τά 'Όμοσπονδιακά Γραφεία του Προέδρου τών Η.Π.Α., του Προϋπολογισμού, τών 'Απογραφών, τών Προτύπων και τών Μεταλλείων, ή Federal Power Commission, ή Cowles Commission for Research in Economics, ή Interstate Commerce Commission, τó Πανεπιστήμιον τής Πενσυλβανίας, τó 'Ινστιτούτον Τεχνολογίας Κάρνεγκη, τó 'Ινστιτούτον Rice, τó 'Ιδρυμα Φόρντ κλπ. (4).

##### 5. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΗΝΩΜΕΝΟΝ ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ

'Εν έτει 1946 ήρχισε και τó 'Ηνωμένον Βασίλειον νά εφαρμόζη τó σύστημα εισροών-έκροών, τή καθοδηγήσει του καθηγητου του Πανεπιστημίου του Λονδίνου Tibor Barna, συνεργαζομένου μετά του συναδέλφου του R. G. D. Allen. Ουτος κατά τó ως άνω έτος συνέστησε παρά τω Γραφείω Μελετών τής Οικονομικής Σχολής του Πανεπιστημίου του Λονδίνου ειδικόν Τμήμα 'Εφαρμογών Συστήματος Εισροών-Έκροών και ήρχισε σχετικές εφαρμογάς, βοηθούμενος αρχικώς και επί μίαν τετραετίαν από τρεις μόνον άμέσους συνεργάτας του. Τó έπόμενον έτος, ó καθηγητής Barna ανέλαβε τήν σύστασιν όμοίου τμήματος και εις τó Κολλέγιον Nuffield τής 'Οσφόρδης. 'Επειδή τά τότε σχετικά στατιστικά στοιχεία ήσαν άτελή, ó καθηγητής Barna προσέφυγεν εις τās άρμοδίας κρατικές ύπηρεσίας και λοιπās οικονομικές μονάδας, αίτινες προθύμως του παρείχον πāsαν αίτουμένην λεπτομέρεια.

Ουτω κατέστη δυνατόν νά άρχισή τó έργον του τó φθινόπωρον του 1946, μέ τήν κατάρτισιν πίνακος διά τó έτος 1935, ó όποιος ώλοκληρώθη μό-

9) Πλ. εις C. F. Christ: An Econometric Model for the United States, 1921-47, εις National Bureau of Economic Research (editor): Conference on Research in Business Cycles. New York, N.B.E.R., 1951, σσ. 35-129. Τού αυτού: On Econometric Models of the U. S. Economy, εις International Association for Research in Income and Wealth (editor): Income and Wealth: Series VI. London, Bowes and Bowes, 1957, σσ. 1-23. W. D. Evans and M. Hoffenberg: The Interindustry Relations Study for 1947. Washington, D C., U.S. Department of Labor, Bureau of Labor Statistics, 1950. K. A. Fox. Econometric Models of the United States, εις Journal of Political Economy, τόμ. 64 (1956) σσ. 128-42. E. Glaser: Interindustry Economics Research Program of the U.S. Government, εις Netherlands Economic Institute (editor): Input-Output Relations, έ.δ. σσ. 230-4. L. R. Klein and A. S. Goldberger: An Econometric Model of the United States, 1929-52. Amsterdam, North Holland Publishing Co., 1955. W. W. Leontief and Members of the Harvard Economic Research Project: Studies in the Structure of the American Economy. New York, Oxford University Press, 1953. U. S. Department of Labor, Bureau of Labor Statistics: Full Employment Patterns, 1950, εις Monthly Labor Review, Feb.-March, 1947. U.S. Cowles Commission: Activity Analysis of Production and Allocation. New York, J. Wiley and Sons, 1951. S. Valavanis: An Econometric Model of Growth U.S.A., 1869-1953, εις American Economic Review, Papers and Proceedings, τόμ. 45 (1955) σσ. 208-27.



λις τὸ 1953. Ἐπέλεξε δὲ τὸ ἔτος 1935, διότι δι' αὐτὸ εἶχον μέχρι τοῦ 1946 δημοσιευθῆ τὰ πληρέστερα ἐπὶ τῆς παραγωγῆς στοιχεῖα, λόγω τῆς τότε διεξαχθείσης σχετικῆς ἀπογραφῆς. Ἡ πρώτη αὕτη δοκιμὴ ἀπέδειξε, ὅτι ὑφίστατο δυνατότης καταρτίσεως πινάκων εἰσροῶν—ἐκροῶν καὶ συνάμα ἐλέγχου τῶν ἄλλως ἐξαγομένων στοιχείων ἐπὶ τῆς δραστηριότητος τῶν παραγωγικῶν τῆς χώρας κλάδων.

Αἱ διαστάσεις τοῦ διὰ τὸ ἔτος 1935 πίνακος εἶναι 36 X 36. Εἰς ταύτας προστίθενται σειραὶ δι' εἰσαγωγὰς μὴ κατεταγμένων εἰς ἑτέρας ομάδας ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν, διὰ προστιθεμένην ἀξίαν μετὰ τῶν ἀποσβέσεων καὶ διὰ καθαρὰν ἔμμεσον φορολογίαν. Προστίθενται ἐπίσης στήλαι δι' ἐξαγωγὰς, εἰς τὰς ὁποίας περιλαμβάνεται καὶ τὸ προϊόν τῆς ναυτιλίας, διὰ μὴ κατεταγμένα ἀποθέματα, διὰ παγίας ἐπενδύσεις, διὰ τὴν οἰκιακὴν οἰκονομίαν καὶ διὰ τὸ δημόσιον. Οἱ 36 παραγωγικοὶ κλάδοι ἦσαν οἱ ἀκόλουθοι: 1 διὰ τὴν γεωργίαν καὶ τὴν ἀλιείαν, 2 διὰ τὰ μεταλλεῖα, 1 δι' ὑλικά οἰκοδομῶν, 28 διὰ βιομηχανίας, 1 δι' οἰκοδομᾶς, 1 διὰ παροχὴν ὕδατος, ἠλεκτρισμοῦ καὶ φωταερίου καὶ 2 διὰ λοιπὰς ὑπηρεσίας. Τὰ δευτερεύοντα προϊόντα ἔθεωρήθησαν ὡς ἐκροή τοῦ παραγόμενου ταῦτα κλάδου καὶ ὡς εἰσροή τοῦ χρησιμοποιήσαντος αὐτά.

Ὁ δεύτερος τῶν καταρτισθέντων πινάκων ἀναφέρεται εἰς τὸ ἔτος 1948, ὅτε διεξήχθη ἐπίσης, ἀλλ' ἀρτιωτέρα τῆς προηγουμένης, ἀπογραφή τῆς παραγωγῆς. Ἡ κατάρτισις αὐτοῦ ἤρχισε τὸ 1953 καὶ ἔπερατώθη μόλις τὸ 1957. Αἱ διαστάσεις του εἶναι 400 X 400, ἥτοι αἱ μεγαλύτεραι τῶν μέχρι τότε καταρτισθέντων πινάκων. Ὁ δεύτερος ὁμως οὗτος πίναξ παρήχθη ὑπὸ τῆς ἐν ἔτει 1953 συσταθείσης παρὰ τῷ Ὑπουργεῖῳ Ἐμπορίου εἰδικῆς ὑπηρεσίας, ἡ ὁποία ἔκτοτε συνεργάζεται μετὰ τοῦ Τμήματος Ἐφηρμοσμένης Οἰκονομικῆς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Καίμπριτζ.

Διὰ τὰ ἀπὸ τοῦ 1950 καὶ ἐντεῦθεν ἔτη καταρτίζονται πλέον ὑπὸ τῆς προαναφερθείσης ὑπηρεσίας πίνακες, οἵτινες δημοσιεύονται συνεπτυγμένως, με διαστάσεις μόνον 10 X 10. Εἰς τὰς 10 γραμμάς προστίθενται καὶ διὰ τὰς ἀμοιβὰς τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, τὰς πωλήσεις εἰς τελικοὺς ἀγοραστὰς, τὰς εἰσαγωγὰς καὶ τὴν καθαρὰν ἔμμεσον φορολογίαν. Εἰς δὲ τὰς 10 στήλας προστίθενται καὶ διὰ τὰς παγίας ἐπενδύσεις, τὰ ἀποθέματα, τὰς ἐξαγωγὰς, τὰς δημοσίας ὑπηρεσίας καὶ τὴν οἰκιακὴν οἰκονομίαν. Οἱ διακρινόμενοι δέκα κλάδοι εἶναι: 1 γεωργίας καὶ ἀλιείας, 1 μεταλλείων καὶ ὀρυχείων, 5 βιομηχανίας, 1 οἰκοδομῶν, 1 πίστωσης, ἔμπορίου καὶ μεταφορῶν καὶ 1 δημοσίων ὑπηρεσιῶν (1<sup>ο</sup>).

10) Ἴδε πλ. εἰς T. B a r n a : The Interdependence of the British Economy, εἰς Journal of the Royal Statistical Society, τόμ. 65 (1952), Series A (general) σσ. 52—3. Τοῦ αὐτοῦ: Experience with Input-Output Analysis in the United Kingdom, εἰς Netherlands Economic Institute (editor): Input-Output Relations, ἔ. ἀ. σσ. 124—66. L. S. B e r m a n : United Kingdom, εἰς T. B a r n a (editor): The structural Interdependence of the Economy, ἔ. ἀ. σσ. 315—35. J. R. N. S t o n e : Simple Transaction Models, εἰς Review of Economic Studies, τόμ. 19 (1951—52) σσ. 67—84.

## 6. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΙΤΑΛΙΑΝ

Κατὰ Ἰανουάριον τοῦ 1951, ἡ ἐν Ρώμῃ Ἀμερικανικὴ Ὑπηρεσία Ἀμοιβαίας Βοηθείας ἀνέθεσεν εἰς τὴν παρ' αὐτῇ Διεύθυνσιν Προγράμματος τὴν ἐφαρμογὴν εἰς τὴν Ἰταλικὴν Οἰκονομίαν τοῦ συστήματος εἰσροῶν—ἐκροῶν, ἵνα βοηθῆται ἀποτελεσματικῶς εἰς τὸ κύριον αὐτῆς ἔργον τῆς ἐξαγωγῆς συμπερασμάτων ἐπὶ τῶν ἐρευνωμένων θεμάτων τῶν σχετιζομένων μὲ τὸν οἰκονομικὸν προγραμματισμόν. Τὰ ἀναγκαῖα στοιχεῖα ἀνέλαβε νὰ παρέχῃ ἡ Ἐθνικὴ Στατιστικὴ Ὑπηρεσία τῆς Ἰταλίας.

Ὁ πρῶτος πίναξ ὁ ὁποῖος κατηρτίσθη ἦτο διὰ τὸ ἔτος 1950, μὲ διαστάσεις ἀρχικῶς 56 στηλῶν καὶ 200 σειρῶν. Ἡ παρατηρουμένη διαφορὰ εἰς τὰς διαστάσεις ἦτο ἀποτέλεσμα τῆς ἀνεπαρκείας τῶν οἰκείων στοιχείων. Ἡ προμνησθεῖσα Διεύθυνσις ἐχρησιμοποίησε σχετικῶς στοιχεῖα τῶν ἀπογραφῶν τῆς παραγωγῆς κατὰ τὰ ἔτη 1937—39 (καλυπτούσας ἐκροὰς περίπου 300 βιομηχανιῶν καὶ στοιχεῖα ἐκτενέστερα εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ κόστους, ἐναντι τῶν στοιχείων διὰ τὰς πωλήσεις). Ἐχρησιμοποίησεν ἐπίσης αὕτη συμπληρωματικὰ τινὰ στοιχεῖα τῆς μεταπολεμικῆς περιόδου, ἀναφερόμενα κυρίως εἰς τὰς κατὰ τὸ δεδομένον ἔτος διενεργηθείσας συναλλαγὰς. Αἱ ὡς ἄνω ὁμῶς διαστάσεις τοῦ πίνακος τούτου περιωρίσθησαν ἀκολούθως εἰς 16X16, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸν ἐπόμενον πίνακα :

α/α	Κ λ ἄ δ ο ι	Ἀ ρ χ ι κ ἄ ι	
		στήλαι	σειραὶ
1	Γεωργία, δασοκομία καὶ ἀλιεία	7	27
2	Καύσιμα	2	5
3	Ὀρυκτὰ (πλὴν καυσίμων)	2	14
4	Τρόφιμα, ποτὰ καὶ καπνὸς	10	26
5	Ὑφάσματα καὶ ἐνδύματα	10	24
6	Χημικὰ προϊόντα	2	20
7	Ξυλεία, χάρτης, ἐλαστικά κλπ.	6	11
8	Σιδηρομεταλλεύματα	1	12
9	Μὴ σιδηροῦχα μεταλλεύματα	1	14
10	Μηχανήματα	6	24
11	Μὴ μεταλλικὰ ὀρυκτὰ	1	6
12	Οἰκοδομικαὶ ὕλαι	1	1
13	Πετρέλαιον διυλισμένον	1	6
14	Ὀπτάνθραξ καὶ φωταέριον	1	3
15	Ἡλεκτρισμὸς	2	2
16	Λοιπαὶ ὑπηρεσίαι	3	5
	Σύνολον	56	200

Εἰς τὰς 16 σειρὰς τοῦ συνεπτυγμένου τούτου πίνακος προσετέθησαν δύο διὰ προστιθεμένην ἀξίαν καὶ εἰσαγωγὰς. Εἰς δὲ τὰς 16 στήλας τοῦ ἰδίου πίνακος, προσετέθησαν τέσσαρες ἀκόμη, διὰ τὰς ἰδιωτικὰς παγίας ἐπενδύσεις (μετὰ τῶν ἐπισκευῶν), δι' αὐξήσεις ἀποθεμάτων καὶ ἐξαγωγὰς, δι' οἰκιακὴν οἰκονομίαν καὶ διὰ τὸ δημόσιον. Τὰ μεταφορικὰ ἔξοδα ἐνεσωματώθησαν εἰς

τούς κλάδους παραγωγής τῶν οἰκείων προϊόντων, τὰ δὲ δευτερεύοντα προϊόντα ἔθεωρήθησαν ὡς ἔκροαί τοῦ κλάδου παραγωγῆς των καὶ ὡς εἰσοραὶ τοῦ κυρίως χρησιμοποιήσαντος ταῦτα κλάδου.

Κατὰ Δεκέμβριον τοῦ 1953, ἡ Διεύθυνσις Προγραμματισμοῦ τῆς προμηθεύσεως Ἀμερικανικῆς Ὑπηρεσίας ἐν Ρώμῃ ὑπήχθη πλέον ὀριστικῶς εἰς τὴν ἀρμοδιότητα τῆς συσταθείσης τότε ὑπὸ τῆς Ἰταλικῆς Κυβερνήσεως «Ἐθνικῆς Ἐπιτροπῆς Οἰκονομικῆς Ἐρεύνης». Αὕτη συνέχισε τὸ ἔργον της καταρτίσασα, μετὰ τὸν διὰ τὸ ἔτος 1950 πίνακα, τὸν διὰ τὸ ἔτος 1953. Ὁ νέος πίναξ εἶχεν ἀρχικῶς διαστάσεις 25 στηλῶν καὶ 300 σειρῶν. Συνεπτύχθη ὁμως μεταγενεστέρως εἰς διαστάσεις 25 × 25. Εἰς τὰς σειρὰς προσετέθησαν καὶ τοιαῦται δι' ἔκροας μετὰ τὰς ἀποσβέσεις καὶ διὰ δημοσίας ὑπηρεσίας. Ὅμοιως εἰς τὰς στήλας ἐγένοντο προσθήκαι ἐτέρων δι' οἰκιακὴν οἰκονομίαν, παγίαις ἐπενδύσεσι, (πλὴν ἐπισκευῶν τὴν φορὰν ταύτην), δημοσίον, ἐξαγωγὰς καὶ μεταβολὰς ἀποθεμάτων. Αἱ εἰσαγωγαὶ ἐνετάγησαν εἰς τοὺς κλάδους τοὺς παράγοντας ἐγχώρια, ὁμοειδῆ τῶν εἰσαχθέντων, ἀγαθὰ.

Ἦδη ἐπιχειρεῖται ἡ κατάρτισις πίνακος διὰ τὸ ἔτος 1957, ὁ ὁποῖος προβλέπεται νὰ ἔχη διαστάσεις 60 στηλῶν καὶ 500 σειρῶν. Πρόκειται δηλαδὴ περὶ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ ἀπόψεως σειρῶν πίνακος ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε καταρτισθέντων ὁμοίων εἰς τὴν Εὐρώπην (11).

#### 7. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΓΑΛΛΙΑΝ

Κατὰ τὸ 1952, ἡ Διεύθυνσις Οἰκονομικῶν καὶ Δημοσιονομικῶν Μελετῶν τοῦ Ὑπουργείου Οἰκονομικῶν τῆς Γαλλίας, ἀνέλαβε, παραλλήλως πρὸς τὴν ἐθνικὴν λογιστικὴν, τὴν κατάρτισιν πινάκων εἰσορῶν—ἐκροῶν, ἐπὶ σκοπῶ κυρίως διευκολύνσεως τοῦ ἔργου της τῆς καταρτίσεως ἐθνικῶν προϋπολογισμῶν. Οὕτω ἤρχισε τὴν πινακοποίησιν διὰ τὸ ἔτος 1953 καὶ τὰ ἐπόμενα. Ἄλλ' οἱ ὑπ' αὐτῆς παραχθέντες πίνακες διαφέρουν τοῦ κλασσικοῦ σχήματος, διότι εἰς αὐτοὺς δὲν ὑφίσταται ἀναπόκρισις μεταξὺ κλάδων παραγωγῆς καὶ ὁμάδων ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν. Δι' ἕκαστον ἔτος συντάσσονται δύο πίνακες. Ὁ πρῶτος ἐξ αὐτῶν δεικνύει τὰς πωλήσεις ἢ τὴν προσφορὰν τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων καὶ ὁ δεύτερος τὰς ἀγορὰς ἢ τὴν ἐνεργὸν ζήτησιν ὑπὸ τῶν κλάδων τούτων καὶ τῆς καταναλώσεως τῶν διαθεσίμων ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν.

Οἱ πρῶτοι καταρτισθέντες πίνακες τῶν πωλήσεων περιλαμβάνουν ἀρχικῶς 112 παραγωγικοὺς κλάδους καὶ οἱ πίνακες τῶν ἀγορῶν 105 ὁμάδας ἀγα-

11) Βλ. καὶ V. C a o - P i n a : Italy, εἰς T. B a r n a (E d i t o r) : The Structural Interdependence of the Economy, ἐ.ά. σσ. 273—86. H. B. C h e n e r y, and P. G. C l a r k : Application of Input—Output Analysis in Italy, εἰς Econometrica, τόμ. 21 (1953), τεύχ. 1ον. H. B. C h e n e r y, P. G. C l a r k and V. C a o - P i n a : The Structure and Growth of the Italian Economy, Rome, U S. Mutual Security Agency, Special Mission to Italy for Economic Co—operation, 1953. M i n i s t r o d e l B i l a n c i o : Relazione Generale sulla Economia del Paese; Presentata al Parlamento dal Ministro del Bilancio, Roma, 1954.

θῶν καὶ ὑπηρεσιῶν. Συμπτύσσονται ὁμῶς ἐν συνεχείᾳ εἰς ὀλιγοτέρους κλάδους καὶ ὁμάδας. Συγκεκριμένως, ὁ πίναξ τῶν πωλήσεων ἔχει τελικῶς 42 γραμμὰς καὶ 43 στήλας, μὲ προσθέτους γραμμὰς πωλήσεων ἀγαθῶν εἰδικῶν τινῶν κλάδων, εἰσαχθέντων ἀγαθῶν καὶ ὁμοίων προσφερομένων ὑπὸ τοῦ δημοσίου καὶ ὑπὸ τῆς οἰκιακῆς οἰκονομίας. Περιλαμβάνει ὡσαύτως προσθέτους στήλας μὴ ἐντασσομένων εἰς τὰς κυρίας στήλας ἀγαθῶν, ὡς καὶ τοιαύτας σχηματιζομένων ἀποθεμάτων. Ὅσον ἀφορᾷ τὸν πίνακα ἀγορῶν, οὗτος περιέχει 43 γραμμὰς καὶ 42 στήλας, μὲ ἐπὶ πλέον γραμμὰς ἀγορῶν μὴ τυπικῶς καθοριζομένων κατ' ἀγαθόν, δι' εἰσοδήματα καὶ ἀποθέματα ἐπιχειρηματιῶν, δι' ἀμοιβὰς ἐργασίας, διὰ καθαρὰν ἔμμεσον φορολογίαν καὶ διὰ κοινωνικὰς ἐπιβαρύνσεις. Περιέχει οὗτος ἐπίσης προσθέτους στήλας δι' ἀγορὰς μὴ κατὰ κλάδον καθοριζόμενας, δι' ὁμοίας πραγματοποιούμενας ὑπὸ τοῦ δημοσίου καὶ τῆς οἰκιακῆς οἰκονομίας, δι' ἐπενδύσεις παγίου κεφαλαίου καὶ δι' ἐξαγωγὰς.

Οἱ πλέον πρόσφατοι πίνακες εἶναι λεπτομερέστεροι καὶ ἀκριβέστεροι τῶν πρώτων, λόγῳ ἰδίᾳ τῆς χρήσεως ἀνωτέρας ποιότητος στατιστικῶν δεδομένων καὶ ἠλεκτρονικῶν μηχανῶν διατρήτων δελτίων.

Ἡ σχέσηις μεταξὺ τοῦ πίνακος τῶν πωλήσεων καὶ τοῦ πίνακος ἀγορῶν ἐμφανίζεται εἰς τὸν ἐθνικὸν λογαριασμὸν τῆς ὁμάδος ἐπιχειρηματιῶν, ὁ ὁποῖος χρεωπιστοῦται ὡς ἑξῆς :

Χ Ρ Ε ὼ Σ Ι Σ	Π Ι Σ Τ ὼ Σ Ι Σ
'Αγοραὶ (καθ' ὁμάδας ἀγαθῶν)	Πωλήσεις (καθ' ὁμάδας ἀγαθῶν)
'Αποθέματα	'Αποθέματα
*Ἐμμεσος φορολογία (ἐκτὸς ἐπιχορηγήσεων).	
Κοινωνικαὶ ἐπιβαρύνσεις	
Μισθοὶ καὶ ἡμερομίσθια	
'Ακαθάριστον κέρδος	

Ὡς εἶναι φανερόν, ὁ λογαριασμὸς οὗτος δεικνύει εἰς τὴν χρέωσιν τὴν συνολικὴν ζήτησιν ἢ εἰσορὴν καὶ εἰς τὴν πίστωσιν τὴν συνολικὴν προσφορὰν ἢ ἐκροτὴν, ἐὰν εἰς τὴν πρώτην προσθέσωμεν τὰς ἐξαγωγὰς καὶ εἰς τὴν δευτέραν τὰς εἰσαγωγὰς. Εἰς τὸν κλασσικὸν τύπον τοῦ πίνακος εἰσορῶν-ἐκροῶν, ἡ ζήτησις θὰ ἀπεικονίζετο εἰς τὰς γραμμὰς καὶ ἡ προσφορὰ εἰς τὰς στήλας (<sup>12</sup>).

12) Βλ. καὶ L. P. B l a n c : France, εἰς T. B a r n a (E d i t o r) : The Structural Interdependence of the Economy, ἔ. ἀ. σσ. 261-69. R. M e r c i e r : Comptabilité Nationale et Tableaux Économiques, εἰς Econometrica, τόμ. 21 (1953), τεύχ. 3. M i n i s t e r d e F i n a n c e : Principes d'Établissement d'une Comptabilité Nationale et d'un Tableau Économique, εἰς Statistiques et Études Financières. Paris. Imprimerie Nationale, 1952. Τ ο ὗ α ὕ τ ο ὗ : Rapport sur les Comptes de la Nation; volume II, Méthodes; Annexe 3, Premiers résultats de l'Analyse des Achats et Ventes des Secteurs. Paris, Imprimerie Nationale, 1953, σσ. 305-16.

## 8. ΔΥΣΧΕΡΕΙΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΦΑΤΟΙ ΕΠΙΤΕΥΞΕΙΣ

Ἡ προηγηθεῖσα περιγραφή ἔδειξεν ἄρκούντως τὰς ἀκόμη καὶ σήμερον ὑφισταμένας σοβαρὰς δυσχερείας ἐφαρμογῆς τοῦ οἰκονομομετρικοῦ συστήματος εἰσροῶν—ἐκροῶν. Εἶναι ἄλλωστε γενικῶς γνωστόν, ὅτι δὲν ἐπετεύχθη εἰσέτι ἔγκαιρος, κατάλληλος καὶ ἀκριβῆς παροχὴ τῶν ἀναγκαιούτων στατιστικῶν στοιχείων ὑπὸ τῶν περισσοτέρων χωρῶν. Εἰς τινὰς μάλιστα χώρας ἠλλείπου καὶ τὰ κατάλληλα μέσα, τόσο ἀπὸ ἀπόψεως προσωπικοῦ, ὅσον καὶ μηχανογραφίας.

Ἐξ ἄλλου, δὲν εἶναι καὶ τόσο ἀπλαῖ αἱ οἰκονομικαὶ σχέσεις, ὥστε νὰ εἶναι δυνατόν νὰ πειθαρχήσουν ἐντὸς τῶν πλαισίων τῶν πινάκων εἰσροῶν—ἐκροῶν. Δι' ὃ καὶ οἱ πίνακες οὗτοι συνιστοῦν ἀπλῶς εἰκόνας προσεγγιζούσας τὴν πραγματικότητα. Αὐταὶ αὐταὶ αἱ ἐντεχνιοὶ καὶ αὐστηραὶ ἀπλοποιήσεις τῆς χρησιμοποιομένης εἰς τὸ σύστημα Λεόντιεφ γραμμικῆς ἀναλύσεως περιέχουν ἐξ ὑπαρχῆς τὸ σπέρμα τῶν σοβαρῶν δυσχερειῶν, λόγῳ κυρίως τῆς μὴ παρακολουθήσεως τῶν τεχνολογικῶν μεταβολῶν καὶ τῶν ἀποτελεσμάτων ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ κεφαλαίου. Παρὰ τὴν ἐν τῇ πραγματικότητι διαχρονικὴν μεταβολὴν τῶν εἰσροῶν, τῇ ἐπιδράσει πλείστων παραγόντων (μεταβολῶν τῶν τιμῶν, τῶν εἰσοδημάτων, τῆς τεχνικῆς, τῆς καταναλώσεως κ.λ.π.), ἐν τούτοις αὐταὶ θεωροῦνται εἰς τὸ σύστημα Λεόντιεφ ὡς σταθεραὶ. Εἶναι ἐπίσης ἄρκούντως θεωρητικὴ ἡ γενομένη εἰς τὸ σύστημα τοῦτο κατανομὴ τῆς οἰκονομίας εἰς παραγωγικοὺς κλάδους. Ὁ σχηματισμὸς τοῦ κεφαλαίου θεωρεῖται εἰς αὐτὸ ὡς τελικὴ ἐκροή, ἐνῶ γενικῶς ἀποτελεῖ εἰσροὴν εἰς μελλοντικὴν ἐκροὴν τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Προσέτι, διαπιστοῦται ὅτι δὲν ὑφίσταται ἀκόμη ἐνιαία σχετικὴ ὀρολογία, ἐνιαῖος τύπος πίνακος καὶ ὁμοίομορφος εἰς αὐτὸν κατάταξις κλάδων καὶ ὁμάδων ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν.

Πάντα ταῦτα μειώνουν βεβαίως τὴν ἀξίαν τῶν πινάκων τούτων ὡς μέσων βασίμου περιγραφῆς καὶ ἀναλύσεως τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Ἐν τούτοις, ὅλον ἐν καὶ σημαντικώτερα εἶναι τὰ ἐπιτυγχανόμενα ἀποτελέσματα εἰς τὴν ἐξακρίβωσιν τῶν ἀμοιβαίων σχέσεων καὶ ἐπιδράσεων τῶν διαφορῶν μονάδων καὶ κλάδων τῆς οἰκονομίας καὶ εἰς τὴν προσπάθειαν καταστρώσεως προγραμμάτων οἰκονομικῆς κινητοποιήσεως.

Συγκεκριμένως, οἱ πίνακες εἰσροῶν—ἐκροῶν τῆς ἀμερικανικῆς οἰκονομίας ἐβόηθησαν τελευταίως τοὺς Οἰκονομολόγους εἰς τὴν ἐξασφάλισιν καὶ νέων ἐπιτευγμάτων. Οὕτω, οὗτοι ἐπέτυχον τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐπιδράσεων ὠρισμένων μεταβολῶν τῶν ἀμοιβῶν τῆς ἐργασίας καὶ τοῦ ἐπιχειρηματικοῦ ἐπὶ τῆς διαρθρώσεως τοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν. Ἐπέτυχον ἐπίσης τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐπιδράσεων τῶν μεταβολῶν τοῦ ὄγκου τῶν ἐξαγωγῶν ἐπὶ τῆς ἐγχωρίου παραγωγῆς καὶ ἀπασχολήσεως. Κατώρθωσαν νὰ ὑπολογίσουν ἀκόμη τὰς ἐπιδράσεις συγκεκριμένης εἰς χρηματικὸν ποσὸν μεταβολῆς τῆς τελικῆς ζητήσεως ἐπὶ τῶν ἐκροῶν διαφορῶν παραγωγικῶν κλάδων, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν πωλήσεων αὐτῶν καὶ τῆς οἰκείας ἀπασχολήσεως τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς. Ἦδυνήθησαν, τέλος, νὰ προσδιορίσουν τὰς ἐπιδράσεις μεταβολῶν τινῶν τοῦ ἐπιπέδου



καί τῆς μορφῆς τῆς συνολικῆς ζήτησεως ἐπὶ τοῦ μεγέθους τῆς παραγωγῆς εἰς διάφορα γεωγραφικά διαμερίσματα τῆς χώρας.

Ἡ δὴ ἡ ἀνάλυσις τῶν εἰσροῶν—ἐκροῶν στρέφεται πρὸς τὴν κατασκευὴν δυναμικῶν ὑποδειγμάτων καὶ ἐτέρων διαχωρικῆς ἐντὸς τῆς αὐτῆς χώρας κατανομῆς. Στρέφεται ἐπίσης ἡ ἀνάλυσις αὕτη πρὸς τὸν προσδιορισμὸν τῶν εἰς κεφάλαιον ἀναγκῶν τῆς παραγωγῆς, τῶν πρὸς ἐπένδυσιν παραγόντων, τῶν τεχνολογικῶν συναρτήσεων τῆς παραγωγῆς, τῶν κινήτρων μεταβολῆς τῶν συνηθειῶν τῆς καταναλώσεως κλπ.

Σήμερον, διὰ τῶν ἐφαρμογῶν αὐτῶν καὶ ἐτέρων συναφῶν, ἡ οἰκονομικὴ ἐπιστήμη ἔπαυσε νὰ εἶναι κυρίως θεωρητικὴ. Προσφέρει πλέον οὐσιαστικὴν συμβολὴν πρὸς ἐπίδιωξιν τῆς ἀνθρωπίνης εὐημερίας<sup>13)</sup>. Δι' ὃ καὶ εὐχόμεθα ὅπως συντόμως ἀρχίσουν καὶ παρ' ἡμῖν προπαρασκευαστικαὶ ἐργασίαι ἐφαρμογῆς τοῦ οἰκονομομετρικοῦ τούτου συστήματος εἰσροῶν—ἐκροῶν, δοθέντος ὅτι ὑφίστανται πλέον ἀρκετὰ εὐνοϊκαὶ προϋποθέσεις ἀπὸ ἀπόψεως προσώπων καὶ μέσων.

13) Πλ. εἰς R. Dorfman: 'Ἡ φύσις καὶ ἡ σημασία τῆς ἀναλύσεως τῶν εἰσροῶν—ἐκροῶν, εἰς 'Επιθεώρησιν Οἰκονομικῶν καὶ Πολιτικῶν Ἐπιστημῶν, τόμ. 9 (1954), σσ. 151—80. W. H. Mieryk: A Primer of Input—Output Economics. Boston, Northeastern University Press, 1957. National Bureau of Economic Research: Input—Output Analysis; An Appraisal. New York, N.B.E.R., Studies in Income and Wealth, τόμ. 18 (1955). H. Platt: Input—Output Analyse. Meisenheim—Glan, Anton Hain, 1957. J. R. N. Stone: Conceptual Problems in Input—Output Work, Paris, O.E.E.C., 1955 (mimeographed).



ΜΕΡΟΣ Β΄

# ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

(LINEAR PROGRAMMING)

# ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ:

## ΝΕΟΝ ΟΡΓΑΝΟΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥ ΟΡΘΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ὑπὸ τοῦ Καθηγητοῦ κ. ΑΝΔΡΕΟΥ Γ. ΠΑΠΑΝΔΡΕΟΥ

Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς εἶναι μία μαθηματικὴ τεχνικὴ χρησιμοποιουμένη διὰ τὴν ἐπίτευξιν τῆς μεγίστης τιμῆς μιᾶς γραμμικῆς συναρτήσεως ὑποκειμένης εἰς περιορισμοὺς οἵτινες λαμβάνουν τὴν μορφήν γραμμικῶν ἀνισοτήτων. Ἡ τεχνικὴ αὕτη καθιστᾷ δυνατὴν τὴν λύσιν μιᾶς κατηγορίας προβλημάτων μεγιστοποιήσεως ἢ ἐλαχιστοποιήσεως τὰ ὅποια δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἀντιμετωπισθοῦν διὰ τῶν κλασσικῶν μεθόδων ἀριστοποιήσεως. Ἡ σπουδαιότης τῆς τεχνικῆς συνίσταται εἰς τὸ γεγονός ὅτι ἡ ὡς ἄνω κατηγορία προβλημάτων εἶναι λίαν ἐκτεταμένη.

Ἡ ἐξέτασις τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ δύναται γενικῶς νὰ ἀναχθῆ, εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν κάτωθι τριῶν εἰδικωτέρων ζητημάτων: 1) Διατύπωσις τοῦ μαθηματικοῦ προβλήματος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ διερεύνησις τῶν συνθηκῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχει λύσιν. 2) Καθορισμὸς τῆς ὑπολογιστικῆς τεχνικῆς διὰ τὴν λύσιν

---

Θεωροῦμεν ἰδιαιτέραν τιμὴν ὅτι μεταξύ τῶν συνεργατῶν τῆς παρούσης ἐκδόσεως συγκαταλέγεται καὶ ὁ διεθνoῦς κύριος οἰκονομολόγος κ. Α. Γ. Παπανδρέου, καθηγητῆς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Καλιφορνίας, Berkeley. Ὁ καθηγητῆς κ. Παπανδρέου, εἶναι συγγραφεὺς πλείστων ἐπιστημονικῶν ἐργασιῶν, ἐξ ὧν ἀναφέρομεν «Competition and its Regulation, Prentice Hall 1954, καὶ «Economics as a Science» Lippincott, 1958. Αἱ ἐργασίαι αὗται χαρακτηρίζονται ἀπὸ σπανίαν ἀναλυτικὴν δύναμιν καὶ μεθοδολογικὴν πρωτοτυπίαν, ἰδίᾳ ὅσον ἀφορᾷ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς τεχνικῆς εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἐρευναν. Ἡ δημοσιευομένη ἐργασία, γραφεῖσα εἰδικῶς διὰ τὴν παροῦσαν ἐκδοσιν, ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν συνοπτικὴν παρουσίασιν τῶν βασικῶν τεχνικῶν καὶ οἰκονομικῶν ἐνοιῶν τῆς θεωρίας τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ (Σ.Σ.).

τοῦ προβλήματος, καὶ 3) Ἀξιολόγησις τῆς σημασίας τῆς τεχνικῆς εἰς συγκεκριμένης ἐφαρμογᾶς. Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἀσχολούμεθα μόνον μὲ τὰ ζητήματα 1 καὶ 3.

### *Ι. Εἰσαγωγικαὶ μαθηματικαὶ ἔννοιαι*

Διὰ τὴν κατανόησιν τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἀναγκαῖα ἡ ἐκμάθησις βασικῶν τινῶν μαθηματικῶν ἐννοιῶν. Σκοπὸς τοῦ παρόντος τμήματος τῆς ἀναλύσεως εἶναι ἀκριβῶς ἡ συνοπτικὴ καὶ ἡ ὅσον τὸ δυνατόν ἀπλουστερά παρουσιάσις τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν. Ἐκρίθη σκόπιμον ὅπως ἀποφευχθῆ ἡ ἀποδεικτικὴ διαδικασία καὶ ἐδόθη ἔμφασις εἰς τὰς ἐννοίας μᾶλλον παρὰ εἰς τὰς μαθηματικὰς πράξεις.

#### *1. Προτάσεις καὶ δηλώσεις*

«Πρότασις» (Sentence) εἶναι μία σειρά συμβόλων τὰ ὅποια πληροῦν τὰς ἀπαιτήσεις τῆς διαρθρώσεως μιᾶς γλώσσης. Θὰ καλοῦμεν τὴν πρότασιν ταύτην «δήλωσιν» (Statement) ἔαν εἶναι δυνατόν νὰ προσδώσωμεν εἰς αὐτὴν μίαν τιμὴν ἀληθείας (Truth Value). Οὕτω «α εἶναι Q», εἶναι μία δήλωσις, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ α εἶναι δοθὲν ἀντικείμενον καὶ τὸ Q ὑποδηλοῖ δοθεῖσαν ιδιότητα. Ἐξ ἐξετάσωμεν ὁμῶς μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς «χ εἶναι Q», ὅπου τὸ χ εἶναι μία μεταβλητὴ. Μία τοιαύτη πρότασις—καλουμένη ἀνοιχτὴ πρότασις—δὲν εἶναι δήλωσις, διότι τὸ χ δὲν ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενόν τι ἀλλ' ἀπλῶς κατέχει τὴν θέσιν ἑνὸς μὴ ὀρισθέντος εἰσέτι ἀντικείμενου. Κατὰ συνέπειαν δὲν εἶναι δυνατόν νὰ εἴπωμεν ἔαν ἡ πρότασις «x εἶναι Q», εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής. Τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ μόνον κατόπιν ἀντικαταστάσεως τοῦ χ μὲ συγκεκριμένον ἀντικείμενον.

#### *2. Σύνολα*

Εἰς τὴν ἀνοιχτὴν πρότασιν «x εἶναι Q» ἀντιστοιχεῖ ἓν σύνολον, τὸ ὁποῖον καλεῖται συνήθως «σύνολον ἀληθείας» τῆς προτάσεως. Τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι ἡ συλλογὴ ὄλων τῶν δυνατῶν ὑποκαταστάσεων τοῦ x αἱ ὅποια μετατρέπουν τὴν πρότασιν εἰς πραγματικὴν δήλωσιν. Οὕτω γράφομεν :

$$X = [x/x \text{ εἶναι } Q]$$

πρὸς ὑποδήλωσιν τοῦ συνόλου ἀληθείας τῆς προτάσεως «x εἶναι Q». Ἐν ἄλλοις λόγοις X εἶναι ἡ τάξις ἢ τὸ σύνολον ὄλων τῶν περιπτώσεων ὑποκαταστάσεως τοῦ x, αἱ ὅποια καθιστοῦν τὴν πρότασιν «x εἶναι Q» ἀληθῆ δήλωσιν. Τὰ σύνολα ἀποτελοῦνται ἐκ στοιχείων. Ἐάν ἡ πρότασις «x<sub>1</sub> εἶναι Q» εἶναι ἀληθὴς δήλωσις, τότε τὸ x<sub>1</sub> εἶναι στοιχεῖον τοῦ X ἢ συμβολικῶς x<sub>1</sub> ∈ X. Δύο σύνολα εἶναι ἴσα ἔαν περιλαμβάνουν τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς στοιχεῖα. Ἐνα σύνολον X καλεῖται ὑποσύνολον ἑτέρου συνόλου Y ἔαν τὸ τελευταῖον τοῦτο περιλαμβάνῃ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ X. Τοῦτο παριστῶμεν συμβολικῶς ὡς ἑξῆς : X ⊆ Y. Ἐάν ἐξ ἄλλου X ⊆ Y εἶναι ἀληθὴς ἀλλὰ Y ⊆ X δὲν εἶναι ἀληθὴς τότε

λέγομεν ὅτι τὸ  $X$  εἶναι ἓνα πραγματικὸν (Proper) ὑποσύνολον τοῦ  $Y$  καὶ γράφωμεν συμβολικῶς  $XY$ .

Θὰ ὠρίσωμεν τρεῖς βασικὰς πράξεις ἐπὶ συνόλων ἤτοι: τὴν ἔνωσιν (Union), τὴν τομὴν (Intersection) καὶ τὴν συμπλήρωσιν (Complementation). Ἡ ἔνωσις τῶν συνόλων  $A$  καὶ  $B$ , παριστωμένη διὰ « $A \cup B$ », εἶναι ἓν σύνολον περιέχον τὰ στοιχεῖα τοῦ  $A$  καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ  $B$ . Οὕτω, ἀμφότερα τὰ σύνολα  $A$  καὶ  $B$  εἶναι ὑποσύνολα τοῦ συνόλου  $A \cup B$ . Ἡ τομὴ τῶν  $A$  καὶ  $B$  ἦτις παριστᾶται ὡς  $A \cap B$  περιλαμβάνει μόνον ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα τοῦ  $A$  (ἢ τοῦ  $B$ ) τὰ ὁποῖα ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τὸ  $B$  (τὸ  $A$ ). Οὕτω, ἂν τὸ  $A$  καὶ  $B$  δὲν περιλαμβάνουν κοινὰ στοιχεῖα, λέγομεν ὅτι ἡ τομὴ τῶν  $A$  καὶ  $B$  εἶναι κενή. Ἐς ὑπόθεσιν τῶν  $A \subset B$ . Τότε ἡ παράστασις  $B - A$  εἶναι τὸ συμπλήρωμα (Complement) τοῦ  $A$  εἰς τὸ  $B$ . Τὸ σύνολον  $B - A$  περιλαμβάνει προφανῶς ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ  $B$  τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ἐπίσης καὶ στοιχεῖα τοῦ  $A$ .

### 3. Σχέσεις

Ἐς λάβωμεν δύο σύνολα, τὸ  $A$  καὶ τὸ  $B$ . Ἐὰν λάβωμεν ἀνά δύο τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων αὐτῶν ἀκολουθοῦντες ὠρισμένην τάξιν, π.χ. θέτοντες εἰς ἕκαστον ζευγος, ὡς πρῶτον ἓν στοιχεῖον τοῦ  $A$  καὶ ὡς δευτέρον ἓν στοιχεῖον τοῦ  $B$ , κατασκευάζομεν ἓν νέον σύνολον, τὸ ὁποῖον καλεῖται καρτεσιανὸν γινόμενον τῶν συνόλων  $A, B$  καὶ παριστᾶται ὡς « $A \cdot B$ ». Τὸ σύνολον « $A \cdot B$ » εἶναι τὸ σύνολον ὄλων τῶν διτεταγμένων ζευγῶν  $(a, b)$ . Οὕτω γράφωμεν:

$$A \cdot B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι  $A \cdot B$  εἶναι τὸ σύνολον ὄλων τῶν ζευγῶν  $(a, b)$ , ὅπου τὸ στοιχεῖον  $a$  ἀνήκει εἰς τὸ  $A$  καὶ τὸ στοιχεῖον  $b$  εἰς τὸ  $B$ .

Ἡ Σχέσις (Relation) ὀρίζεται ὡς ἓν ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου. Ἐς λάβωμεν ἓνα παράδειγμα. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις:

$$y = 3x$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι μία ἀνοικτὴ πρότασις. Δι' ὠρισμένας τιμὰς τῶν  $x$  καὶ  $y$  εἶναι δυνατόν νὰ μετατραπῇ αὕτη εἰς ἀληθῆ δήλωσιν, ἐνῶ δι' ἄλλας τιμὰς τῶν  $x$  καὶ  $y$  δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ψευδῆ δήλωσιν. Οὕτω π.χ. ἐὰν θέσωμεν  $y = 3$  καὶ  $x = 1$  ἡ ἐξίσωσις μετατρέπεται εἰς ἀληθῆ δήλωσιν. Ἀντιθέτως αἱ τιμαὶ  $y = 2$  καὶ  $x = 1$  καθιστοῦν αὐτὴν ψευδῆ δήλωσιν. Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς προτάσεως:

$$y = 3x;$$

Προφανῶς τοῦτο εἶναι τὸ σύνολον ὄλων τῶν ζευγῶν τῆς μορφῆς  $(x, y)$  τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν καὶ μετατρέπουν αὐτὴν εἰς ἀληθῆ δήλωσιν. Οὕτω γράφωμεν:

$$R = \{ (x, y) \mid y = 3x \}$$

Το σύνολον  $R$  είναι μία σχέσις. Είναι σαφές ότι το  $R$  είναι έν υποσύνολον ενός καρτεσιανού γινομένου, ήτοι του :

$$X \cdot Y = [ (x, y) / x \in X, y \in Y ]$$

Το  $X \cdot Y$  αποτελείται από πάντα τα ζεύγη τῆς μορφῆς  $(x, y)$  καὶ κατὰ νέπειαν περιλαμβάνει κατ' ἀνάγκην καὶ τὰ ζεύγη ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν  $y = 3x$ .

Πρὸς ἐμφατικωτέραν διατύπωσιν τούτου δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ  $R$  ὡς ἀκολουθῶς :

$$R = [ (x, y) / x \in X, y \in Y \text{ καὶ } y = 3x ]$$

Δοθείσης μιᾶς σχέσεως διακρίνομεν μεταξύ τοῦ πεδίου (Domain) καὶ τοῦ εὔρου (Range) αὐτῆς. Τὸ πεδίου μιᾶς σχέσεως π.χ. τῆς  $R$  είναι τὸ σύνολον ὄλων τῶν  $x$  διὰ τὰ ὁποῖα ὑφίστανται  $y$  τοιαῦτα ὥστε ἡ σχέσις  $y = 3x$  νὰ εἶναι ἀληθής. Ἀντιθέτως τὸ εὔρος τῆς  $R$  είναι τὸ σύνολον ὄλων τῶν  $y$  διὰ τὰ ὁποῖα ὑφίστανται  $x$  τοιαῦτα ὥστε ἡ σχέσις  $y = 3x$  νὰ εἶναι ἀληθής.

Αἱ ἔννοιαι αὗται σχετίζονται εἰδικώτερον μὲ τὰς συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις τῶν σχέσεων, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Ἡ σχέσις  $R$  είναι μία δυαδικὴ σχέσις περιλαμβάνουσα 2 μεταβλητάς. Τριαδικαὶ σχέσεις ἢ σχέσεις περιλαμβάνουσαι περισσοτέρας μεταβλητάς δύνανται νὰ ἀναχθοῦν εἰς δυαδικὰς σχέσεις ὡς ἀκολουθῶς : Ἐστω π.χ. ἡ σχέσις

$$S = [ (x, y, z) / x \in X, y \in Y, z \in Z \text{ καὶ } z = y + 2x ]$$

$S$  εἶναι τὸ ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου  $X \cdot Y \cdot Z$ . Τίποτε ἐν τούτοις δὲν θὰ μᾶς ἐμποδίσῃ νὰ ἐκφράσωμεν τὸ καρτεσιανὸν τοῦτο γινόμενον ὡς  $W \cdot Z$ , ὅπου  $W = X \cdot Y$ . Οὕτω, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ  $X \cdot Y$  ὡς τὸ πεδίου τοῦ  $S$  καὶ  $Z$  ὡς τὸ εὔρος αὐτοῦ καὶ νὰ γράψωμεν :

$$S = [ ( (x, y), z ) / (x, y) \in X \cdot Y, z \in Z \text{ καὶ } z = y + 2x ]$$

#### 4. Συναρτήσεις καὶ Συσχετίσεις (Mappings)

Μία σχέσις  $F$  καλεῖται συνάρτησις ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν εἰς ἕκαστον  $x$  τοῦ πεδίου τῆς  $F$  ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς ἓν  $y$  τοῦ εὔρου αὐτῆς. Οὕτω :

$$[ (x, y) / x \in X, y \in Y \text{ καὶ } y = 2x ]$$

εἶναι μία συνάρτησις, ἐνῶ :

$$[ (x, y) / x \in X, y \in Y \text{ καὶ } x^2 + y^2 = 1 ]$$

δὲν εἶναι συνάρτησις.

Εἰς ἕκαστην συνάρτησιν  $F$  μὲ πεδίου  $X$  καὶ εὔρος  $Y'$ , ὅπου  $Y' \subset Y$ , ἀντιστοιχεῖ εἰς κανὼν  $f$  ὀνομαζόμενος συσχέτισις (Mapping) τοῦ  $X$  πρὸς τὸ  $Y'$ , ὅστις συσχετίζει ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ  $X$  μὲ ἓν ἀκριβές στοιχεῖον τοῦ  $Y'$

Συμβολικῶς :

$$f : X \rightarrow Y'$$



Κατά ταῦτα ὁ κανὼν  $f$  δημιουργεῖ τὴν συνάρτησιν  $f$  ἣτις δύναται νὰ προσδιορισθῆ ὡς ἀκολούθως:

$$f = [ (x, y) / x \in X, y \in Y \text{ καὶ } y = f(x) ]$$

ὅπου  $f(x)$  εἶναι τὸ ἀντίστοιχον τοῦ  $x$  βάσει τοῦ κανόνος  $f$  καὶ καλεῖται συνήθως « $f$ -ἀντίστοιχον» τοῦ  $x$ . Οὕτω ἡ ἔκφρασις:

$$y = f(x)$$

εἶναι μία ἀνοικτὴ πρότασις συμφώνως πρὸς τὴν ὁποῖαν τὸ  $y$  εἶναι  $f$ -ἀντίστοιχον τοῦ  $x$ .

### 5. Διανύσματα καὶ διανυσματικοὶ χώροι

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἀμφότερα τὰ σύμβολα  $X$  καὶ  $Y$  παριστοῦν τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον  $X \cdot Y$  περιλαμβάνει στοιχεῖα τῆς μορφῆς  $(x, y)$  ὅπου  $x, y$  εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί. Τὰ διατεταγμένα ταῦτα ζεύγη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν διὰ τῶν γραμμάτων  $\alpha, \beta, \gamma$ , κ.λ.π. Ἐστω ὅτι διὰ:

$$\alpha = (x', y'), \beta = (x'', y'')$$

1.  $\alpha = \beta$  σημαίνει  $x' = x''$  καὶ  $y' = y''$ .
2.  $\alpha + \beta$  σημαίνει  $(x' + x'', y' + y'')$ .
3.  $k\alpha = (kx', ky')$ , ὅπου  $k$  εἶναι ἕνας ἀριθμὸς.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου  $X \cdot Y$ , διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύουν αἱ ὑποθέσεις 1, 2 καὶ 3 ἀνωτέρω, δυνάμεθα τώρα νὰ ὀνομάσωμεν καρτεσιανὸν ἄξιομα εἰς δύο διαστάσεων τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Συμβολικῶς θὰ παραστήσωμεν τὸν ἄξιομα εἰς δύο διαστάσεων αὐτὸν περιλαμβανόμενα διατεταγμένα ζεύγη καλοῦνται διανύσματα εἰς  $V_2(R)$ .

Αἱ ὡς ἄνω παρατηρήσεις δύναται νὰ γενικευθοῦν. Ἐν πρώτοις δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ περιορισθῶμεν εἰς διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἐπεκταθῶμεν εἰς ἄξιωμα εἰς  $n$  διαστάσεων, συμβολικῶς εἰς  $V_n(R)$ . Ἐπι πλεόν, πλὴν τοῦ πεδίου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἐπεκταθῶμεν καὶ εἰς πᾶν ἕτερον πεδίου τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ ὠρισμένα ἀξιώματα. Πράγματι, ὁ διανυσματικὸς ἄξιομα εἶναι σύνολον στοιχείων (διανυσμάτων) διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύουν αἱ πράξεις τῆς διανυσματικῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διανύσματος ἐπὶ βαθμωτῶν (δηλαδὴ πολλαπλασιασμοῦ διανύσματος ἐπὶ ἀριθμῶν) καὶ ἱκανοποιοῦν τὰς κάτωθι ὑποθέσεις ἢ ἀξιώματα. Ἐστω ὅτι  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  εἶναι διανύσματα εἰς τὸν διανυσματικὸν ἄξιομα  $X$  καὶ  $c, d$  ἀριθμοί.

1. Τὸ ἄθροισμα  $\alpha + \beta$  εἶναι διάνυσμα εἰς  $X$ .
2.  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ .
3.  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ .

4. Ὑφίσταται ἐν διάνυσμα 0 τοιοῦτον ὥστε δι' ἕκαστον διάνυσμα  $\alpha$ :  $\alpha + 0 = \alpha$ .
5. Δι' ἕκαστον διάνυσμα  $\alpha$  ὑφίσταται ἐν διάνυσμα  $\delta$  τοιοῦτον ὥστε:  $\alpha + \delta = 0$ .
6. Τὸ γινόμενον  $c\alpha$  εἶναι διάνυσμα εἰς  $X$ .
7.  $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$ .
8.  $(c + d)\alpha = c\alpha + d\alpha$ .
9.  $(cd)\alpha = c(d\alpha)$ .
10.  $1\alpha = \alpha$ .

Ὁ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον δοθεὶς ὀρισμὸς τοῦ διανυσματικοῦ χώρου εἶναι γενικὸς καὶ περιλαμβάνει μεταξύ τῶν διαφορῶν εἰδικῶν περιπτώσεων καὶ τὴν περίπτωσιν τοῦ  $n$ -διαστάτου χώρου τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Πάν ὑποσύνολον ἔστω  $Y$  ἐνὸς διανυσματικοῦ χώρου  $X$ , καλεῖται ὑποχώρος τοῦ  $X$  ἐφ' εἶναι διανυσματικὸς χώρος. Εἰδικώτερον, ὁ ὀρισμὸς οὗτος ἀπαιτεῖ ὅπως, (1) ἐάν  $\alpha, \beta \in Y$ , τότε  $\alpha + \beta \in Y$ , (2) ἐάν  $\alpha \in Y$ , τότε  $c\alpha \in Y$ , διὰ πάντα ἀριθμὸν  $c$ .

Ἄς υποθέσωμεν τῶρα ὅτι  $X$  εἶναι διανυσματικὸς χώρος καὶ ὅτι  $x^1, x^2, \dots, x^n$  εἶναι διανύσματα εἰς  $X$ . Καλοῦμεν γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων αὐτῶν τὴν παράστασιν  $c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$  ὅπου  $c_1, c_2, \dots, c_n$  εἶναι ἀριθμοί. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν διανυσμάτων  $x^1, x^2, \dots, x_n$  εἶναι ὑποχώρος τοῦ  $X$  καὶ καλεῖται ὑποχώρος δημιουργούμενος ὑπὸ τῶν διανυσμάτων  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . Τὰ διανύσματα ταῦτα καλοῦνται γραμμικῶς ἀνεξάρτητα ἐάν

$$c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = 0$$

διὰ  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . Περαιτέρω ἐάν τὰ διανύσματα εἶναι ἀνεξάρτητα καὶ δημιουργοῦν ὀλόκληρον τὸν χώρον  $X$ , καλοῦνται βάσεις τοῦ χώρου τούτου καὶ ὁ δείκτης  $n$  διάστασις τοῦ  $X$ . Ἐπὶ παραδείγματι τὰ διανύσματα

$$x^1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$$

$$x^2 = (0, 1, \dots, 0, 0)$$

$$\dots$$

$$x^n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

σχηματίζουν βάση διὰ τὸν καρτεσιανὸν χώρον τῶν  $n$  διαστάσεων. Ἀξίζει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἐάν μία ἐκ τῶν βάσεων τοῦ  $X$  περιλαμβάνει  $n$  διανύσματα τότε κάθε βάση αὐτοῦ περιλαμβάνει ἐπίσης  $n$  διανύσματα. Ἐπὶ πλέον ἐάν ὁ χώρος  $X$  ἔχει μίαν βάση  $n$  διανυσμάτων τότε οὐδὲν σύνολον περιέχον περισσότερα τῶν  $n$  διανύσματα εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητον.

## 6. Μήτραι

Μία μήτρα δύναται νὰ ὀρισθῇ ὡς ἐν διατεταγμένον  $m$ -πλοῦν διανυσμάτων, εἰς ἐν  $n$ -διάστατον καρτεσιανὸν διανυσματικὸν χώρον, καταγεγραφομένων εἰς στήλας μᾶλλον παρά εἰς σειράς. Π.χ. :

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

είναι μήτρα όπου  $\alpha = (x', y')$ ,  $\beta = (x'', y'')$ ,  $\gamma = (x''', y''')$ . Ούτω δυνάμεθα επίσης νά γράψωμεν :

$$\begin{bmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{bmatrix}$$

Ἐκ τῆς ἐπισκοπῆσεως τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως βλέπομεν ὅτι εἶναι δυνατὸν νά θεωρήσωμεν τὰς στήλας

$$\begin{bmatrix} x' \\ x'' \\ x''' \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{bmatrix}$$

ὡς διανύσματα—ὀνομαζόμενα διανύσματα στήλαι—ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὰ  $(x', y')$ ,  $(x'', y'')$ ,  $(x''', y''')$ , τὰ ὁποῖα δυνάμεθα τώρα νά καλέσωμεν διανύσματα σειρᾶς. Οὔτω, ἡ μήτρα ἀποτελεῖ ἓνα ὀρθογώνιον πίνακα ἀριθμῶν  $m$  σειρῶν (διανυσμάτων-σειρῶν) καὶ  $n$  στηλῶν (διανυσμάτων-στηλῶν). Προφανῶς πᾶν διάνυσμα-σειρὰ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς εἰδικὴ περίπτωσης μήτρας τάξεως  $1 \times n$ , ἐνῶ πᾶν διάνυσμα-στήλη δύναται νά θεωρηθῇ ὡς μήτρα τάξεως  $m \times 1$ . Πᾶσα μήτρα  $A$  τάξεως  $m \times n$  δύναται νά παρασταθῇ δι' ἐνὸς ἐκ τῶν ἀκολουθῶν τρόπων :

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \equiv (\alpha', \beta', \gamma')$$

ὅπου  $\alpha_{ij}$  εἶναι τὸ στοιχεῖον τῆς μήτρας τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὴν  $i$  σειρὰν καὶ  $j$  στήλην, καὶ  $\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$ ,  $\beta = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$  :

$$\alpha' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix}, \quad \beta' = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad \gamma' = \begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix}$$

Δύο μήτραι  $A$  καὶ  $B$  καλοῦνται ἴσαι ἐάν εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ  $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$  διὰ πάντα τὰ  $ij$ .

Τὸ ἄθροισμα δύο μητρῶν τάξεως  $m \times n$  εὐρίσκεται διὰ τοῦ σχηματισμοῦ μιᾶς μήτρας  $C$  τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα  $c_{ij}$  ἴσονται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων τῶν  $A$  καὶ  $B$ . Οὔτω :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} + b_{11} & \alpha_{12} + b_{12} \\ \alpha_{21} + b_{21} & \alpha_{22} + b_{22} \\ \alpha_{31} + b_{31} & \alpha_{32} + b_{32} \end{bmatrix}$$

"Αν υποθέσωμεν ὅτι  $k$  εἶναι ἕνας ἀριθμὸς καὶ  $A$  μία μῆτρα δυνάμεθα τότε νὰ ὀρίσωμεν μίαν νέαν μῆτραν  $k \cdot A$  τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα εἶναι  $k\alpha_{ij}$ . Οὕτω

$$k \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\alpha_{11} & k\alpha_{12} \\ k\alpha_{21} & k\alpha_{22} \\ k\alpha_{31} & k\alpha_{32} \end{bmatrix}$$

Ἐπομένως ὁ πολλαπλασιασμὸς μητρῶν εἶναι μία ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τοῦ ἔσωτε-  
ρικοῦ γινομένου. Ἐστω :

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{καὶ} \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Δυνάμεθα τότε νὰ ὀρίσωμεν τὸ ἔσωτερικὸν γινόμενον  $\alpha \cdot \beta$  ὡς ἀκολούθως :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$$

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι : 1) ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων τοῦ  $\alpha$  ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχείων τοῦ  $\beta$ . 2) Τὸ διάνυσμα στήλης  $\alpha$  προηγείται τοῦ διανύσματος στήλης  $\beta$ . 3) Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως εἶναι ἕνας ἀριθμὸς.

Δοθεῖσῶν δύο μητρῶν  $A$  καὶ  $B$  τάξεως  $m \times k$  καὶ  $k \times n$  ἀντιστοίχως δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μῆτραν  $C$  τάξεως  $m \times n$  διὰ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ  $A \times B$ . Τὸ στοιχεῖον  $c_{ij}$  τοῦ  $C$  ἰσοῦται μὲ τὸ ἔσωτερικὸν γινόμενον τῆς  $i$  σειρᾶς τῆς  $A$  καὶ  $j$  στήλης τῆς  $B$ . Οὕτω π.χ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 5 \\ 14 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Δοθείσης μιᾶς μῆτρας  $A$  δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μίαν νέαν μῆτραν  $A'$  μεταβάλλοντες τὰς σειρὰς τῆς  $A$  εἰς στήλας τῆς  $A'$ . Ἡ πράξις αὕτη καλεῖται ἐναλλαγή τῆς  $A$ . Προφανῶς  $A'' = A$ .

Ἐπιπλέον ὁ συμβολισμὸς τῶν μητρῶν εἶναι λίαν ἰσχυρὸς, δι' αὐτοῦ δὲ ὁλόκληρα συστήματα εἶναι δυνατόν νὰ παρασταθοῦν κατὰ τρόπον ἀπλουστάτον. Ἐστω ἐπὶ παραδείγματι τὸ σύστημα ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= w_1 \\ 2x_1 + 5x_2 &= w_2 \end{aligned}$$

τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ διὰ τοῦ συμβολισμοῦ τῶν μητρῶν ὡς ἀκολούθως :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

ἢ ἀπλῶς

$$Ax = w$$

όπου  $A$  είναι η μήτρα τών συντελεστών  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ , και  $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

### 7. Γραμμικοί μετασχηματισμοί και συναρτησιακά

Γραμμικός μετασχηματισμός είναι μία συσχέτισις,  $f$ , τής οποίας τὸ πεδίον καὶ τὸ εὖρος είναι διανυσματικοὶ χώροι καὶ ἱκανοποιεῖ τὰ κάτωθι δύο ἀξιώματα :

1) Δι' ἕκαστον  $x', x''$  εἰς τὸ πεδίον  $X$  :

$$f(x' + x'') = f(x') + f(x'')$$

2) Δι' ἕκαστον  $x$  εἰς  $X$ , καὶ δι' ἕκαστον ἀριθμὸν  $c$  :

$$f(cx) = cf(x)$$

Ὁ γραμμικός μετασχηματισμός δύναται νὰ διατυπωθῆ ὡς :

$$f : X \rightarrow Y$$

όπου  $X$  καὶ  $Y$  εἶναι διανυσματικοὶ χώροι. Ὁ μετασχηματισμός οὗτος ὀρίζεται ὡς μία ἀνοικτὴ πρότασις ἔστω  $f(x) = y$ , ὅπου  $x \in X$  καὶ  $y \in Y$ . Π.χ. ἔστω :

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

τότε τὸ  $f$ -ἀντίστοιχον τοῦ  $x$  θὰ εἶναι ἴσον μὲ

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

Οὕτω τὸ  $f$  εἰς τὸ παράδειγμά μας εἶναι ἕνας μετασχηματισμός μεταξύ τοῦ τρισδιάστατου διανυσματικοῦ χώρου καὶ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου δύο διαστάσεων. Εἰς τὸν μετασχηματισμὸν ἀντιστοιχεῖ μία μήτρα μετασχηματισμοῦ, ἥτοι :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Μία γραμμικὴ ἀριθμητικὴ συνάρτησις (functional) εἶναι μία συσχέτισις μὲ πεδία διανυσματικῶν χώρων καὶ περιοχὴν μίαν σειρὰν ἀριθμῶν καὶ ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τὰ ἀνωτέρω ἀναφερθέντα ἀξιώματα. Οὕτω ἡ γραμμικὴ ἀριθμητικὴ συνάρτησις εἶναι μία εἰδικὴ περίπτωσις γραμμικοῦ μετασχηματισμοῦ. Ἐστω π.χ.  $g$  εἶναι μία γραμμικὴ ἀριθμητικὴ συνάρτησις εἰς τὸν τρισδιάστατον διανυσματικὸν χώρον. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$g : X \rightarrow R$$

καὶ νὰ ὀρίσωμεν τὸ  $g$  διὰ τῆς ἀνοικτῆς προτάσεως

$$g(x) = (1, 5, 2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ούτω τὸ  $g$ -ἀντίστοιχον τοῦ  $x$  ἰσοῦται πρὸς  $x_1 + 5x_2 + 2x_3$  τὸ ὁποῖον εἶναι ἕνας ἀριθμὸς καὶ ἀνήκει εἰς τὸ  $\mathbb{R}$ , δηλ. τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

## II. Κυτὰ σύνολα

Ἐὰν λάβωμεν π.χ. τὴν ἀνοικτὴν πρότασιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν  $f(x) = w_i$  ὅπου τὸ  $x$  εἶναι διάνυσμα εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον τῶν  $n$  διαστάσεων  $X_n$  καὶ  $w_i$  εἶναι ἕνας ἀριθμὸς. Ἡ πρότασις αὕτη ὀρίζει μίαν γραμμικὴν ἀριθμητικὴν συνάρτησιν,  $f$ . Τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς προτάσεως, ἐκφράζεται διὰ τοῦ συνόλου:

$$[x/x \in X_n \text{ καὶ } f(x) = w_i]$$

Διὰ  $n = 2$  τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι γραμμὴ, διὰ  $n = 3$  ἐπίπεδον καὶ διὰ  $n > 3$  ὑπερεπίπεδον. Ἐστω π.χ.:

$$f(x) = (3, 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 6$$

Ἡ ἀνωτέρω παράστασις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἐξίσωσιν:  $3x_1 + x_2 = 6$ , τῆς ὁποίας τὸ σύνολον ἀληθείας

$$[x/x \in X_2 \text{ καὶ } 3x_1 + x_2 = 6]$$

εἶναι μία γραμμὴ.

Ἐὰν ἐξετάσωμεν τώρα τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς ἀνισότητος:

$$f(x) = (3, 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} > 6$$

Τοῦτο ἰσοῦται πρὸς

$$[x/x \in X_2 \text{ καὶ } 3x_1 + x_2 > 6]$$

Ἡ ἐστιγμένη περιοχὴ τοῦ διαγράμματος 1 κατωτέρω ἐκφράζει γεωμετρικῶς τὸ σύνολον τοῦτο. Ἡ γραμμὴ ἢ παριστῶσα τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς ἐξίσωσεως  $3x_1 + x_2 = 6$  δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὴν ἐν λόγω περιοχὴν. Ἐὰν ἀντιθέτως ἐνδιαφερώμεθα διὰ τὸ σύνολον τῆς ἀληθείας τῆς ἀνισότητος  $f(x) \geq 6$ , ἡ γραμμὴ αὕτη πρέπει νὰ περιληφθῇ εἰς τὴν ἐστιγμένην περιοχὴν.

Γενικῶς ἀνισότητες τῆς μορφῆς  $f(x) < w_i$  ἢ  $f(x) > w_i$  προσδιορίζουν σύνολα, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν ἀνοικτοὺς ἢ μιχῶρους ἐνῶ ἀνισότητες τῆς μορφῆς  $f(x) \leq w_i$  ἢ  $f(x) \geq w_i$  χαρακτηρίζουν σύνολα, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν κλειστοὺς ἢ μιχῶρους.



Ἐλέχθη προηγουμένως ὅτι ἐν σύστημα ἐξισώσεων δύναται νὰ διατυπωθῆ ὑπὸ μορφήν μητρῶν. Τοῦτο ἀκριβῶς δύναται νὰ συμβῆ καὶ μὲ ἐν σύστημα ἀνισοτήτων. Π.χ. :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\eta} Ax \leq w$$

καταλήγει εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \leq w_1 & \tilde{\eta} & f(x) \leq w_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \leq w_2 & & f(x) \leq w_2 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \leq w_3 & & f(x) \leq w_3 \end{array}$$

Ἄς λάβωμεν ἐν δεύτερον παράδειγμα. Ἔστω :

$$Ax \leq w$$

ὅπου

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Τοῦτο δύναται νὰ γραφῆ ὡς ἐν σύστημα ἀνισοτήτων

$$\begin{array}{rcl} -x_1 \leq 0 & \tilde{\eta} & x_1 \geq 0 \\ -x_2 \leq 0 & \tilde{\eta} & x_2 \geq 0 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 & \tilde{\eta} & 3x_1 + x_2 \geq 6 \end{array}$$

Τὸ σύνολον ἀληθείας τοῦ συστήματος ἀνισοτήτων ἦτοι

$$[x / x \in X_n \text{ καὶ } Ax \leq w]$$

ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν περιοχὴν τοῦ τριγώνου (συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν πλευρῶν) τοῦ διαγρ. 1. Τὸ σύνολον τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς ἡ τομὴ τριῶν ἄλλων συνόλων, ἦτοι τῶν τριῶν ἡμιχώρων, οἱ ὅποιοι χαρακτηρίζονται ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων  $Ax \leq w$ .

Μία σημαντικὴ ιδιότης τῶν ἡμιχώρων εἶναι ἡ κυρτότης αὐτῶν. Ἐν σύνολον χαρακτηρίζεται ὡς κυρτὸν ἐὰν δι' ἕκαστον ζεύγος στοιχείων αὐτοῦ, π.χ.  $x_1$  καὶ  $x_2$  τὸ συνδέον ταῦτα τμήμα εὐθείας κείται ἐπίσης ἐντὸς τοῦ συνόλου. Δύναται νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ τομὴ τῶν κυρτῶν συνόλων ἀποτελεῖ ἐπίσης κυρτὸν σύνολον. Ἐν κυρτὸν σύνολον τὸ ὅποιον δημιουργεῖται ἐκ τῆς τομῆς κλειστῶν ἡμιχώρων καλεῖται πολυεδρικὸν κυρτὸν σύνολον. Ἐκ τούτου συνέπεται ὅτι τὸ σύνολον ἀληθείας μιᾶς ἀνοικτῆς δηλώσεως τοῦ τύπου  $Ax \leq w$  εἶναι ἐν πολυεδρικὸν κυρτὸν σύνολον. Π.χ. τὸ τρίγωνον τοῦ διαγράμματος 1 ἀποτελεῖ ἐν τοιοῦτον πολυεδρικὸν κυρτὸν σύνολον.

Ἐλέχθη ἤδη ὅτι ἡ ἀνοικτὴ δήλωση  $Ax \leq w$  ὅπου :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

ἐκφράζει τὰς ἀνοικτὰς προτάσεις - ἀνισότητας

$$\begin{aligned} (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\leq w_1 \\ (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\leq w_2 \\ \dots &\dots \\ (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mn}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\leq w_m \end{aligned}$$

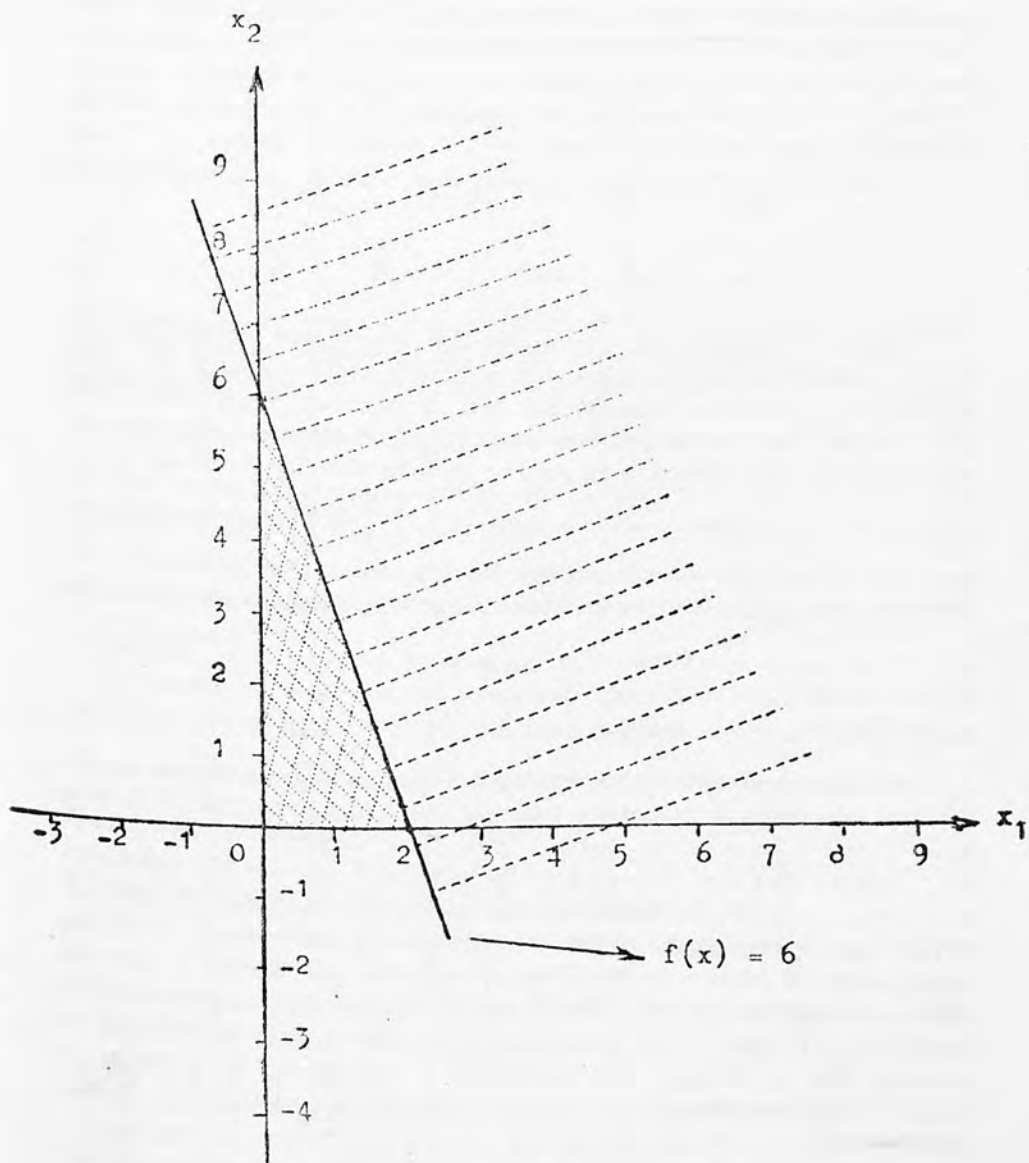
τῶν ὁποίων τὰ σύνολα ἀληθείας εἶναι κλειστοὶ ἡμιχώροι εἰς τὸν  $n$ -διάστατον διανυσματικὸν χώρον. Εἰς ἕκαστον οὕτω ὀριζόμενον ἡμιχώρον ἀντιστοιχεῖ ἐν περιβάλλον ὑπερεπίπεδον τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς ἐξίσωσης ἣτις χαρακτηρίζει τὴν ἀνισότητα. Οὕτω π.χ. τὸ περιβάλλον ὑπερεπίπεδον τοῦ ἡμιχώρου :

$$[x/x \in X_n \text{ καὶ } (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq w_1]$$

εἶναι τὸ σύνολον

$$[x/x \in X_n \text{ καὶ } (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = w_1]$$

Εἰς τὸ διάγραμμα 1 τὸ περιβάλλον ὑπερεπίπεδον τοῦ ἡμιχώρου ὅστις προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἀνισότητα  $3x_1 + x_2 \geq 6$  εἶναι ἡ γραμμὴ ἢ ὀριζομένη ὑπὸ τῆς ἐξίσωσης  $3x_1 + x_2 = 6$ . Τὰ περιβάλλοντα ὑπερεπίπεδα τῶν ἡμιχώρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὡς τομὴν τὸ κυρτὸν πολύεδρον ἀποτελοῦν ἐπίσης τὰ περιβάλλοντα ὑπερεπίπεδα τοῦ πολυέδρου τούτου.



Διαγρ. 1

Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν  $n$  περιβαλλόντων ὑπερεπιπέδων ἑνὸς κυρτοῦ πολυέδρου καλεῖται ἀκραῖον σημεῖον τοῦ συνόλου. Ὁ ἀριθμὸς  $n$  δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστάσεων τοῦ διανυσματικοῦ χώρου  $\underline{X}$ . Ὁ ὀρισμὸς τῶν ἀκραίων σημείων δεικνύει τὴν μέθοδον ἀναζητήσεως τῶν σημείων τούτων εἰς ἓν κυρτὸν πολυεδρικὸν σύνολον. Οὕτω π.χ. εἰς τὸ διάγραμμα 1 ἔχομεν τρεῖς περιβαλλούσας γραμμὰς διὰ τὸ στικτὸν κυρτὸν σύνολον, ἤτοι

$$H_1 = \left[ x / x \in \underline{X}_2 \quad \text{καὶ} \quad (-1, 0) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right]$$

$$H_2 = \left[ x / x \in \underline{X}_2 \quad \text{καὶ} \quad (0, -1) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right]$$

$$H_3 = \left[ x / x \in \underline{X}_2 \quad \text{καὶ} \quad (3, 1) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 6 \right]$$

Ἐπειδὴ ὁ διανυσματικὸς χώρος εἶναι δύο διαστάσεων πρέπει διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἀκραίων σημείων νὰ προσδιορίσωμεν τὰς τομὰς τῶν περιβαλλουσῶν τὸ τρίγωνον γραμμῶν ἀνὰ δύο. Αἱ σχετικαὶ τομαὶ εἶναι τρεῖς ἤτοι:  $H_1 \cap H_2$ ,  $H_1 \cap H_3$ ,  $H_2 \cap H_3$ . Ἡ τομὴ  $H_1 \cap H_2$  ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ σύνολον ἀληθείας τῶν ἐξισώσεων  $H_1$  καὶ  $H_2$ , δηλαδὴ τῶν  $x_1 = 0$  καὶ  $x_2 = 0$ . Ἡ λύσις αὕτη περιλαμβάνει ἓν μόνον σημεῖον τὸ  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ πολυεδρικοῦ κυρτοῦ συνόλου. Κατὰ συνέπειαν εἶναι ἓν ἀκραῖον σημεῖον. Ἡ τομὴ  $H_1 \cap H_2$  ἰσοῦται πρὸς τὸ σύνολον τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων  $x_1 = 0$  καὶ  $3x_1 + x_2 = 6$  καὶ δίδει τὸ ἀκραῖον σημεῖον  $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ . Ὁμοίως τὸ  $H_2 \cap H_3$  δίδει τὸ τρίτον ἀκραῖον σημεῖον  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Ἀναφορικῶς μὲ τὰς ιδιότητες τῶν ἀκραίων σημείων τῶν πολυεδρικῶν κυρτῶν συνόλων, ὑφίσταται ἓν σημαντικὸν θεώρημα, ἀλλ' ἡ διατύπωσις αὐτοῦ δὲν εἶναι δυνατὴ ἄνευ προηγουμένου ὀρισμοῦ τῶν ὄρων κυρτὸς συνδυασμὸς καὶ περατωμένον σύνολον. Ἐν σύνολον σημείων (διανυσμάτων) εἰς  $\underline{X}_2, \underline{X}_3, \dots, \underline{X}_n$  θὰ ὀνομάζεται περατωμένον ἔαν δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν ἀντιστοίχως ἓν τετράγωνον, κύβον, ἢ ὑπερκύβον ( $n$  διαστάσεων), ὁ ὁποῖος περιλαμβάνει τὸ σύνολον τοῦτο. Οὕτω τὸ τρίγωνον τοῦ διαγρ. 1, ἀποτελεῖ περατωμένον κυρτὸν σύνολον. Ἐὰν ἓν κυρτὸν σύνολον εἶναι περατωμένον, συνάγεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς  $m$  τῶν ἡμιχώρων, τῶν ὁποίων ἡ τομὴ προσδιορίζει τὸ σύνολον, εἶναι μεγαλύτερος τῶν διαστάσεων  $n$  τοῦ χώρου. Κυρτὸς συνδυασμὸς διανυσμάτων  $x^1, x^2, \dots, x^k$  εἰς  $\underline{X}_n$  καλεῖται ὁ γραμμικὸς συνδυασμὸς:

$$c_1 x^1 + c_2 x^2 + \dots + c_k x^k \quad \text{ὅπου} \quad c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$$

Δυνάμεθα τώρα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν: Πᾶν ση-

μείον ενός κυρτού πολυεδρικού συνόλου δύναται να εκφρασθῆ ὡς κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν ἀκραίων σημείων τοῦ συνόλου καὶ πᾶς κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν ἀκραίων σημείων εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου.

Μία πρότασις ἔχουσα ἄμεσον σχέσιν μὲ τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν εἶναι ἡ ἀκόλουθος: Ἐὰν  $f$  εἶναι ἓν συναρτησιακὸν εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον,  $n$ -διαστάσεων καὶ  $C$  εἶναι κυρτὸν πολυεδρικὸν σύνολον εἰς τὸν αὐτὸν χῶρον, δύναται νὰ δειχθῆ ὅτι διὰ  $x \in C$  ἡ μεγίστη ἢ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως  $f(x)$  ἐπιτυγχάνεται εἰς ἓν ἢ περισσότερα ἀκραῖα σημεία τοῦ  $C$ . Ἐν παράδειγμα θὰ διευκολύνῃ τὴν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω: Εἶδομεν προηγουμένως ὅτι τὰ ἀκραῖα σημεία τοῦ περατωμένου κυρτοῦ συνόλου τοῦ σχήματος 1 εἶναι:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ἄς ὀρίσωμεν τώρα ἓν συναρτησιακὸν εἰς τὸν χῶρον τῶν 2 διαστάσεων, μέσω τῆς ἀνοικτῆς προτάσεως  $f(x) = x_1 + 2x_2$ . Ἡ ἀξία τῆς  $f(x)$  εἰς τὰ τρία ἀκραῖα σημεία (κατὰ τὴν ὑποδειχθεῖσαν σειρὰν) εἶναι 0, 12, 2. Ἡ  $f(x)$  μεγιστοποιεῖται εἰς τὸ σημεῖον  $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$  καὶ ἐλαχιστοποιεῖται εἰς τὸ σημεῖον  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Τὸ ἴδιον ἰσχύει διὰ πᾶσαν συνάρτησιν  $g(x)$ , ὅπου  $g(x) = f(x) + k$ , καὶ  $k$  εἶναι εἰς ἀριθμὸς:

### III. Τὰ βασικὰ χαρακτηριστικὰ προβλήματα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ

Τυπικῶς τὸ πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ δύναται νὰ εκφρασθῆ ὡς ἀκολούθως: Περιγράψατε ἢ ἀπαριθμήσατε τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου:

$$[\hat{x} / \hat{x} \in C \cap X_n \text{ καὶ } f(\hat{x}) = \text{ἀκραῖα τιμὴ τῆς } f(x)]$$

ὅπου  $C$  εἶναι πολυεδρικὸν κυρτὸν σύνολον καὶ  $f$  ἓν συναρτησιακὸν εἰς τὸν  $n$ -διάστατον χῶρον. Ἄς ἐξετάσωμεν π.χ. ἓν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως. Τὸ συναρτησιακὸν ὀρίζεται ἀπὸ τὴν ἀνοικτὴν πρότασιν:

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

ἢ ὅποια δύναται νὰ γραφῆ ἀπλούτερον ὡς  $c x$ . Ζητεῖται νὰ εὑρεθῆ διάνυσμα  $x$  τοιοῦτον ὥστε  $c x =$  μέγιστον ὑπὸ τὸν περιορισμὸν ὅτι τὸ  $x$  ἀνήκει εἰς τὸ κυρτὸν πολυεδρικὸν σύνολον  $C$ , τὸ ὅποιον ὀρίζεται ἀπὸ τὴν τομὴν κλειστῶν ἡμιχώρων. Τὸ κάτωθι σύστημα ἀνισοτήτων προσδιορίζει τὸ σχετικὸν κυρτὸν πολυέδρον:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ή, απλώς } x \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad \text{ή, απλώς } Ax \leq w$$

Ούτω τὸ πρόβλημα συνίσταται εἰς τὴν μεγιστοποίησιν τῆς  $cx$  ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς τῶν ἀνισοτήτων  $x \geq 0$  καὶ  $Ax \leq w$ .

Εἶναι ἀξίον ἰδιαίτερας σημειώσεως ὅτι εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀντιστοιχεῖ ἕτερον πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ τὸ ὁποῖον καλοῦμεν «δίδυμον» (dual) αὐτοῦ. Εἰσάγομεν ἓνα διάνυσμα στήλη τάξεως  $m \times 1$ :

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$$

εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον  $Z_m$ , καὶ ἐν συνεχείᾳ διατυποῦμεν τὸ κάτωθι πρόβλημα: Νὰ ελαχιστοποιηθῇ ἡ

$$(w_1, w_2, \dots, w_m) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \quad \text{ή, απλώς } w'z$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς  $z \geq 0$

καὶ

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

ή, απλώς  $A'z \geq c'$

Ὡς παρατηροῦμεν τὸ μόνον νέον σύμβολον τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ δίδυμον πρόβλημα εἶναι τὸ διάνυσμα στήλη  $z$ . Ἡ ἔννοια τοῦ διανύσματος αὐτοῦ θὰ ἐξετασθῇ ἀργότερον. Ἐνταῦθα περιοριζόμεθα εἰς τὴν παρουσίαν τῆς τυπικῆς σχέσεως μεταξὺ ἐνὸς προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ τοῦ διδύμου αὐτοῦ. Τὸ δίδυμον πρόβλημα ἐκφράζεται ὡς ἀκολουθῶς: Νὰ περιγραφοῦν ἢ ἀπαριθμηθοῦν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου

$$\{ \widehat{z} / \widehat{z} \in C' \cap Z_m \text{ καὶ } h(\widehat{z}) = \text{ἐλάχιστον τῆς } h(z) \}$$



Τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἀναφέρεται ἀκριβῶς εἰς τὴν τυπικὴν σχέσιν μεταξύ ἑνὸς προβλήματος μεγιστοποιήσεως (ἢ ἐλαχιστοποιήσεως) καὶ τοῦ διδύμου αὐτοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως (ἢ μεγιστοποιήσεως). Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ διατυπωθῆ ὡς ἑξῆς: α) τὸ σύνολον  $\widehat{X} = [\widehat{x} / \widehat{x} \in C \cap X_n$  καὶ  $f(\widehat{x}) = \text{μέγιστον (ἐλάχιστον τῆς } f(x))$ ] δὲν εἶναι κενόν (δηλαδὴ τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα ἔχει λύσιν) ἂν καὶ μόνον ἂν τὸ σύνολον  $\widehat{Z} = [\widehat{z} / \widehat{z} \in C' \cap Z_m$  καὶ  $h(\widehat{z}) = \text{ἐλάχιστον (μέγιστον) τῆς } h(z)]$  δὲν εἶναι κενόν (δηλαδὴ ἂν τὸ δίδυμον πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν). β)  $\widehat{x}$  καὶ  $\widehat{z}$  εἶναι λύσεις (ἀμφοτέρων τῶν προβλημάτων) ἂν καὶ μόνον ἂν  $\widehat{cx} = \widehat{w'z}$ .

Τέλος, δύναται νὰ δεიχθῆ ὅτι ἂν  $C$  ἢ  $C'$  εἶναι μὴ κενὰ καὶ περατωμένα σύνολα τότε  $\widehat{X}$  καὶ  $\widehat{Z}$  εἶναι μὴ κενὰ σύνολα (δηλαδὴ ἀμφότερα τὰ προβλήματα ἔχουν λύσεις). Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀπορρέει ἀμέσως ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα καὶ ἀπὸ τὸ θεώρημα συμφώνως πρὸς τὸ ὁποῖον ἓν συναρτησιακὸν ὀριζόμενον εἰς ἓν περατωμένον κυρτὸν πολυεδρικὸν σύνολον λαμβάνει τὴν μεγίστην καὶ ἐλαχίστην τιμὴν αὐτοῦ εἰς ἓν ἢ περισσότερα ἀκραῖα σημεῖα τοῦ συνόλου.

#### IV. Ἡ ἔννοια τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ

Ἡ ἔννοια τῶν πράξεων τὰς ὁποίας περιεγράψαμεν εἰς τὸ προηγούμενον τμήμα ἐξαρτᾶται κατ' ἀνάγκην ἀπὸ τὰ συγκεκριμένα προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζεται ἡ τεχνική. Κατὰ κανόνα τὰ προβλήματα ταῦτα εἶναι προβλήματα ἀριστοποιήσεως. Μία σπουδαιότατη κατηγορία προβλημάτων ἀριστοποιήσεως εἶναι τὰ ἀφορῶντα εἰς τὴν λήψιν ἀποφάσεων σχετικῶς μὲ τὴν λειτουργίαν καὶ διοίκησιν τῶν ἐπιχειρήσεων. Πρὸς πληρεστέραν ἐξέτασιν τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ὡς ἄνω τεχνικῆς εἰς ἓν τυπικὸν ἐπιχειρηματικὸν πρόβλημα πρέπει νὰ περιγράψωμεν τὴν τεχνολογίαν τῆς ἐπιχειρήσεως κατὰ τρόπον σύμφωνον πρὸς τὸ ἐννοιολογικὸν πλαίσιον τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἀποτελεσματικὴ μέθοδος διὰ τὴν περιγραφὴν ταύτην εἶναι ἡ χρησιμοποίησις τῆς λεγομένης τεχνολογικῆς μήτρας:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ἐκάστη στήλη ἐκφράζει μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα (activity) καὶ δύναται νὰ παρασταθῆ ὡς σημεῖον εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον  $X_m$  τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας  $m$  ποσότητες ἀγαθῶν, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται εἰσροαὶ (inputs) ἂν προσημαίνωνται μὲ ἀρνητικὸν σημεῖον ἢ ἔκροαὶ (outputs) ἂν λαμβάνουν θετικὸν σημεῖον. Ἐκάστη σειρὰ τῆς  $A$  περιλαμβάνει  $n$  ποσότητας ἑκ δοθέντος ἀγαθοῦ, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται ὡς ἔκροαὶ ἢ εἰσροαὶ

εις μίαν η περισσότερας παραγωγικας δραστηριότητας. Έκάστη στήλη (παραγωγική δραστηριότης) παριστά μίαν συγκεκριμένην μέθοδον παραγωγής ενός προϊόντος. Ο αριθμός των παραγωγικών δραστηριοτήτων είναι περιορισμένος (finite). Επί πλέον αι η παραγωγικαί δραστηριότητες της μήτρας A είναι βασικαί (basic), δηλαδή δέν δύναται να εκφρασθούν ως γραμμικοί θετικοί συνδυασμοί άλλων παραγωγικών δραστηριοτήτων της εν λόγω μήτρας. Εις έκαστην παραγωγικήν δραστηριότητα αντιστοιχεί μία διαδικασία (process), η οποία περιλαμβάνει ταύτην. Ούτω π.χ. δοθείσης της παραγωγικής δραστηριότητος α τὸ σύνολον όλων των γινομένων λα, ὅπου  $\lambda \geq 0$  ἀποτελεῖ μίαν διαδικασίαν. Τὸ λ εἶναι βαθμωτὸν (scalar) καὶ παριστά τὸ ἐπίπεδον χρησιμοποίησεως της παραγωγικῆς δραστηριότητος α, η ὅποια θεωρεῖται ἐπίσης ὅτι ἀποτελεῖ τὴν μονάδα μετρήσεως της εν λόγω παραγωγικῆς διαδικασίας.

Ὁ τρόπος οὗτος ἐκφράσεως της τεχνολογίας μιᾶς ἐπιχειρήσεως βασίζεται ἐπὶ ὑποθέσεων, αἱ ὅποια γενικῶς ἀποτελοῦν ἀπόκλισην ἀπὸ τὴν κατὰ παράδοσιν διατύπωσιν της παραγωγικῆς συναρτήσεως εἰς τὴν οικονομικὴν ἀνάλυσιν. Ἡ διατύπωσις μιᾶς παραγωγικῆς συναρτήσεως ἀπαιτεῖ πράγματι νὰ λυθῆ προηγουμένως τὸ πρόβλημα της τεχνολογικῆς ἀποδοτικότητος (technological efficiency). Ἐὰς λάβωμεν π.χ. ἐν σημείον  $(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m)$  ἢ συνοπτικῶς  $(x, y)$  τὸ ὅποσον ἀνήκει εἰς μίαν παραγωγικὴν συνάρτησιν χαρακτηριζομένην ἀπὸ τὴν ἀνοικτὴν πρότασιν  $g(x, y) = 0$ , καὶ ὅπου  $x_i$  εἶναι ἡ i-στὴν εἰσροή καὶ  $y_j$  εἶναι ἡ j-στὴν ἐκροή. Δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν ὅτι τὸ σημείον τοῦτο ἀνήκει εἰς τὴν παραγωγικὴν συνάρτησιν ἔαν καὶ μόνον ἔαν ἕκαστον  $y_j$  εἶναι τὸ μέγιστον τεχνολογικῶς δυνατὸν (ἢ ἕκαστον  $x_i$  εἶναι τὸ ἐλάχιστον τεχνολογικῶς δυνατὸν), δοθέντων των λοιπῶν στοιχείων τοῦ ὡς ἄνω σημείου. Ἡ ἐξουδετέρωσις των μὴ ἀποδοτικῶν σημείων εἰς τὸ σύνολον των πραγματοποιησίμων παραγωγικῶν συνδυασμῶν ἀποτελεῖ μέρος της διαδικασίας προσδιορισμοῦ της παραγωγικῆς συναρτήσεως. Ἐπειδὴ ὁμως εἰς τὴν συνήθη ἀνάλυσιν ἡ παραγωγικὴ συνάρτησις λαμβάνεται γενικῶς ὡς δεδομένη, δέν διατυπῶνται ἀποτελεσματικὴ διαδικασία ἐφαρμογῆς τοῦ κριτηρίου ἀποδοτικότητος διὰ τὴν κατασκευὴν της ὡς ἄνω συναρτήσεως. Ἀντιθέτως, εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν ὀρίζεται σαφῶς ἡ διαδικασία προσδιορισμοῦ τοῦ ὑποσυνόλου των ἀποδοτικῶν συνδυασμῶν δοθέντος ἐνὸς συνόλου πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν. Ἡ δυνατότης ὑπολογισμοῦ της τεχνικῆς ἀποδοτικότητος καθιστᾷ ἰδιαιτέρως ἔλκυστικὴν τὴν τεχνικὴν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τοὺς μηχανικούς, λογιστὰς καὶ ἐπιχειρηματίας. Πράγματι, ἡ τεχνικὴ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ φαίνεται νὰ προσεραμῶζεται καλύτερον ἢ ἄλλαι τεχνικαὶ ἀναλύσεως εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν πρακτικῶν προβλημάτων. Τὰ πλεονεκτήματα ταῦτα ἐπιτυγχάνονται ἐν τούτοις μὲ μίαν θυσίαν. Ἐν πρώτοις εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν χρησιμοποιοῦμεν περιορισμένον ἀριθμὸν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων καὶ οὐχὶ ἀπερίοριστον ὡς εἰς τὴν συνήθη ἀνάλυσιν. Ἐπὶ πλέον, λόγω της ὑποθέσεως της γραμμικότητος, ἀποδεχόμεθα σταθερότητα των τεχνολογικῶν συντελεστῶν ἤτις δυνατὸν νὰ μὴ καλύπτῃ ὠρισμένην τάξιν προβλημάτων.

Κατὰ κανόνα εἰς τὰ προβλήματα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ τὰ ἀφορῶντα εἰς τὰς ἐπιχειρήσεις ὑποτίθεται ὅτι εἶναι δεδομέναί αἱ ποσότητες ὠρισμένων συντελεστῶν παραγωγῆς—καὶ οἱ περιορισμοὶ οὗτοι ἐκφράζονται διὰ τοῦ σχετικοῦ κυρτοῦ πολυεδρικοῦ συνόλου—οἱ δὲ λοιποὶ συντελεσταὶ δύνανται νὰ ἀγορασθοῦν εἰς σταθερὰς τιμὰς. Ὑποτίθεται ἐξ ἄλλου ὅτι τὰ παραγόμενα προϊόντα δύνανται νὰ πωληθοῦν ἐπίσης εἰς σταθερὰς τιμὰς. Ἡ τεχνολογία τῆς ἐπιχειρήσεως λαμβάνει συνήθως τὴν μορφήν μιᾶς μήτρας, ἢ ὁποῖα ἀναφέρεται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῶν σταθερῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Εἰς τὴν διατύπωσιν ταύτην δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνῃ διάκρισις μεταξὺ ἀρνητικῶν καὶ θετικῶν στοιχείων τῆς μήτρας, ὡς ἐγένετο προηγουμένως, καθ' ὅσον ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας ταύτης ἀναφέρονται εἰς εἰσροὰς αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν θετικὰς τιμὰς ἢ μηδέν. Διὰ τὸ προϊόν ἐκάστης παραγωγικῆς δραστηριότητος χρησιμοποιουμένης εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος ὑπολογίζεται ἓν καθαρὸν κέρδος  $c_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) εἰς τρόπον ὥστε διὰ τὰς  $n$  παραγωγικὰς δραστηριότητας λαμβάνομεν τὸ διάνυσμα σειρά  $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ . Τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιχειρήσεως δύνανται τώρα νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως:

Νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ συνάρτησις  $cx$  ὑπὸ τῶν περιορισμῶν  $Ax \leq w$  καὶ  $x \geq 0$ , ὅπου  $x$  εἶναι τὸ διάνυσμα-στήλη, τὸ ὁποῖον ἔχει στοιχεῖα τὰ ἐπίπεδα τῶν  $n$  παραγωγικῶν δραστηριοτήτων,  $A$  ἡ τεχνολογικὴ μήτρα τῆς ἐπιχειρήσεως ὡς ὠρίσθη ἀνωτέρω καὶ  $w$  τὸ διάνυσμα στήλη τὸ ὁποῖον ἔχει στοιχεῖα τὰς διαθέσιμους ποσότητας τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Ἐάν τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχει λύσιν, δηλαδὴ ἐάν τὸ σύνολον τῶν λύσεων  $X$  δὲν εἶναι κενόν, τότε δύνανται νὰ δειχθῇ ὅτι ὑφίσταται ἓν ἄριστον πρόγραμμα  $\hat{x} \in \hat{X}$  τὸ ὁποῖον δὲν περιλαμβάνει περισσοτέρας ἀπὸ  $m$  δραστηριότητας ὅπου  $m$  εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνισοτήτων, αἱ ὁποῖαι παριστοῦν τὰς ἐκ τῶν διαθέσιμων συντελεστῶν δυνατότητας τῆς ἐπιχειρήσεως.

Λύσις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος σημαίνει καὶ λύσιν τοῦ διδύμου αὐτοῦ. Ἄλλὰ ποία εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ διδύμου προβλήματος; Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ζητεῖται ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς συναρτήσεως  $w'z$  ὑπὸ τῶν περιορισμῶν  $z \geq 0$  καὶ  $A'z \geq e'$ . Ἡ ἔννοια τοῦ  $z$  εἶναι θεμελιώδους σημασίας διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν. Τὸ  $z$  εἶναι τὸ διάνυσμα τῶν λογιστικῶν τιμῶν τῶν διαθέσιμων παραγωγικῶν συντελεστῶν. Διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν καθίσταται δυνατὸς ὁ πλήρης ἐπιμερισμὸς (imputation) τοῦ συνολικοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τοὺς ἓν ἀνεπαρκεῖς συντελεστὰς παραγωγῆς, κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἡ συνολικῶς καταλογιζομένη ἀξία εἰς τοὺς συντελεστὰς παραγωγῆς οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται εἰς μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα εἶναι ἴση πρὸς τὸ δημιουργούμενον ἐκ τῆς δραστηριότητος ταύτης καθαρὸν κέρδος. Εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας σημειώσεως ὅτι ἐάν ὠρισμένοι συντελεσταὶ παραγωγῆς δὲν χρησιμοποιοῦνται πλήρως αἱ λογιστικαὶ τιμαὶ αὐτῶν κατὰ τὴν λύσιν τοῦ διδύμου προβλήματος εἶναι μηδέν.

Καθίσταται ἤδη προφανές ὅτι ἡ κατανομὴ τῶν διαθέσιμων πόρων καὶ ἡ

ἀξιολόγησις αὐτῶν ἀποτελοῦν εἰς τὴν πραγματικότητα δύο ὄψεις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος. Οὕτω τὸ θεώρημα τῆς διαδικότητος (duality) τὸ ὁποῖον εἰσάγει τὴν ἔννοιαν τοῦ διδύμου προβλήματος, καθιστᾷ δυνατὴν τὴν σαφῆ διατύπωσιν τοῦ προβλήματος τῆς κατανομῆς καὶ ἀξιολογήσεως καὶ κατὰ συνέπειαν ἐπιτρέπει νὰ κατανοήσωμεν καλύτερον βασικά προβλήματα τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης. Ἐπὶ πλέον ἡ δυνατότης καθορισμοῦ «ὀρθῶν λογιστικῶν τιμῶν διὰ τοὺς ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστὰς μιᾶς παραγωγικῆς μονάδος καθιστᾷ δυνατὴν τὴν εἰσαγωγὴν ἐνὸς ἀποτελεσματικοῦ συστήματος ἀποκεντρωτικῆς διοικήσεως εἰς τὴν ἐν λόγῳ παραγωγικὴν μονάδα. Ἐπὶ τῇ βᾶσει τῶν λογιστικῶν τιμῶν εἶναι δυνατόν νὰ ληφθοῦν ἀνεξάρτητοι ἀποφάσεις εἰς τὰ κατώτερα κλιμάκια τῆς διοικήσεως ὅσον ἀφορᾷ τὴν κατανομὴν τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων χρήσεων.

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἐξητάσαμεν τὴν σημασίαν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ὅσον ἀφορᾷ μίαν περιορισμένην τάξιν προβλημάτων. Ἡ τεχνικὴ ὅμως αὕτη δύναται πράγματι νὰ χρησιμοποιηθῆ εἰς μίαν εὐρυτάτην κατηγορίαν προβλημάτων. Δύναται π.χ. νὰ χρησιμοποιηθῆ ὡς ἐν ἀναλυτικὸν ἐργαλεῖον προγραμματισμοῦ τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως διὰ τοῦ καθορισμοῦ λογιστικῶν τιμῶν εἰς τοὺς ἐν ἀνεπαρκείᾳ πόρους. Εἶναι προφανὴς ἐκ τῆς ἀπόψεως ταύτης ἡ χρησιμότης τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀντιμετώπισιν προβλημάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

Ὡς ἀναλυτικὴ τεχνικὴ ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς εἶναι τμῆμα τοῦ καλουμένου Μαθηματικοῦ Προγραμματισμοῦ (ὁ ὁποῖος περιλαμβάνει ἐπίσης καὶ τὸν μὴ γραμμικὸν προγραμματισμόν). Εἶναι ἐπίσης μέρος τῆς λεγομένης Ἀναλύσεως Οἰκονομικῆς Δραστηριότητος, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἤδη νέον κλάδον τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης. Ἄλλ' ἢ ἐξέτασις τῶν θεμάτων αὐτῶν δὲν ἐμπίπτει εἰς τὰ ὅρια τῆς παρούσης μελέτης.

# Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX

Υπό τοῦ κ. Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ

Ἡ μαθηματικὴ θεωρία τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ὀδηγεῖ εἰς τὴν διαμόρφωσιν μιᾶς γενικῆς μεθόδου λύσεως τῶν γραμμικῶν προβλημάτων, γνωστῆς ὑπὸ τὸ ὄνομα «ἀλγόριθμος simplex». Ἡ μέθοδος αὕτη χαρακτηρίζεται ὡς «ἀνιχνευτικὴ» (iterative) διότι ἐξετάζει συστηματικῶς διαφόρους λύσεις πρὸς ἀνεύρεσιν τῆς «ἀρίστης». Σημειοῦμεν κατωτέρω μερικὰ ἐκ τῶν κυριωτέρων πλεονεκτημάτων τῆς μεθόδου simplex :

α) Καθιστᾷ δυνατὴν τὴν λύσιν προβλημάτων προγραμματισμοῦ μεγάλης κλίμακος εἰς σχετικῶς βραχὺ χρονικὸν διάστημα.

β) Παρέχει τὰ μέσα αὐτομάτου ἐλέγχου τῶν ὑπολογισμῶν ὡς ἐπίσης καὶ κριτήρια βάσει τῶν ὁποίων καθορίζεται ἂν ἐπιτεύχθη ἡ «ἀρίστη» λύσις, ἢ ἂν πρέπει νὰ συνεχισθοῦν οἱ ὑπολογισμοί.

γ) Δίδει χρήσιμους πληροφορίας ὡς πρὸς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιδράσεις πάσης ἀποκλίσεως ἀπὸ τὴν «ἀρίστην λύσιν».

δ) Δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν κοινωνικοοικονομικῶν προβλημάτων τύπου Leontief, τὰ ὁποῖα λόγῳ τοῦ μεγέθους των ἀπαιτοῦν συνήθως χρῆσιν δαπανηρῶν ἀριθμομηχανῶν (1).

ε) Ἀπὸ ἀπόψεως ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν, γενικῶς, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν μεγάλων συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων ἢ ἀνισοτήτων.

στ) Τέλος, σημαντικὸν πλεονέκτημα εἶναι ἡ ἀπλότης τῆς μεθόδου. Ἀνειδίκευτος ὑπάλληλος γραφεῖου δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ ταύτην ἀποδοτικῶς μετὰ ὀλιγοήμερον ἐξάσκησιν (2).

Ἡ ἐπακολουθοῦσα ἀνάλυσις—ἢ ὁποῖα ἀπευθύνεται κυρίως εἰς τοὺς ἐνδιαφερομένους νὰ ἀποκτήσουν πρακτικὴν ἀντίληψιν τῆς ὑπολογιστικῆς τεχνικῆς τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ—δὲν προϋποθέτει ἰδιαιτέραν μαθηματικὴν κατάρτισιν τοῦ ἀναγνώστου καὶ ἀπαιτεῖ μόνον προσεκτικὴν παρακολούθησιν τῆς διαδικασίας τῶν ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν.

1. Ὁμοίως δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν μιᾶς κατηγορίας προβλημάτων τῆς θεωρίας «παιγνίων» ἢ οἰκονομικῆς σημασίας τῶν ὁποίων ἀρχίζει νὰ ἀναγνωρίζεται σήμερον (βλ. κεφ. 19, 20 καὶ 24 εἰς K o o r m a n s, T C., ed «Activity analysis of production and allocation», Cowles Commission for Research in Economics, 1951).

2. Ἡ διατύπωσις βεβαίως τοῦ προβλήματος ἀπαιτεῖ σχετικὴν πείραν καὶ γνώσιν τῶν εἰδικῶν συνθηκῶν ἐκάστης περιπτώσεως προγραμματισμοῦ.



*Διατύπώσεις και λύσεις ενός τυπικού προβλήματος προγραμματισμού*

1. *Μερικαί διευκρινήσεις*

Θα παρακολουθήσωμεν τήν διαδικασίαν ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου simplex εἰς ἓν πρόβλημα προγραμματισμοῦ τῆς φανταστικῆς ἐπιχειρήσεως A. Προηγουμένως εἶναι ἀνάγκη νά διευκρινήσωμεν μαθηματικὰς τινὰς ἐννοίας τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν εἰς τήν ἀνάλυσιν.

α) Διάνυσμα: Ὑπὸ τὸν ὄρον διάνυσμα θὰ ἐννοοῦμεν ἐνταῦθα μίαν στήλην ἀριθμῶν ἐγγραφομένων καθ' ὠρισμένην τάξιν, π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Οἱ ἀριθμοί, 1, 4 καὶ 3 ἀποτελοῦν στοιχεῖα τοῦ διανύσματος:

β) Πρόσθεσις διανυσμάτων: ἡ πρόσθεσις τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων τῶν διανυσμάτων αὐτῶν π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Πρόσθεσις διανυσμάτων εἶναι δυνατὴ μόνον ὅταν τὰ ἐπὶ μέρους διανύσματα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων.

γ) Πολλαπλασιασμός διανύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν: ὁ πολλαπλασιασμός ἐνὸς ἐκάστου τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν. Π.χ.:

$$2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

δ) Γραμμικὸς συνδυασμὸς διανυσμάτων: τὸ ἄθροισμα (ἢ διαφορὰ) τῶν διανυσμάτων αὐτῶν ἐκάστου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ ἓνα ἀριθμὸν<sup>(1)</sup>.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Τοὺς ἀριθμοὺς 2, 5 καὶ 3 καλοῦμεν συντελεστὰς ἢ ἀπλῶς πολλαπλασιαστές. Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως γίνεται βάσει τῶν λεχθέντων. Πολλαπλασιάζομεν, πρῶτον, ἕκαστον διάνυσμα ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν:

1. Ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.



$$\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ἐν συνεχείᾳ προσθέτομεν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα καὶ λαμβάνομεν τελικῶς τὸ διάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} 46 \\ 32 \\ 40 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Τὰς ἀπλᾶς αὐτὰς ἐννοίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν κατωτέρω. Οὐδεμία ἄλλη μαθηματικὴ γνῶσις ἀπαιτεῖται πρὸς παρακολούθησιν τῆς ἀναλύσεως, πλὴν βεβαίως στοιχειώδους ἀριθμητικῆς.

## 2. Διατύπωσις τοῦ προβλήματος

Ὑποθέσεις A. Κατὰ τὸν χρόνον τοῦ ὑπολογισμοῦ ἢ ἐπιχειρήσεις A δύναται νὰ διαθέσῃ 100, 80, 150 μονάδας (¹) ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β, γ ἀντιστοίχως. Τὸν περιορισμὸν αὐτὸν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὑπὸ μορφήν διανύσματος:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Τὸ σύμβολον  $\Pi_0$  παριστᾷ συνοπτικῶς τὸ ἀνωτέρω διάνυσμα. Ἀνάλογα σύμβολα θὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις κατωτέρω. Τὸ  $\Pi_0$  θὰ καλέσωμεν «διάνυσμα διαθεσίμων συντελεστῶν».

B. Ἡ ἐπιχείρησις A ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν της πέντε διαφόρους παραγωγικὰς διαδικασίας, τὰς ὁποίας θὰ ἐκφράσωμεν διὰ τῶν διανυσμάτων  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$ :

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \Pi_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Τὰ ἀνωτέρω διανύσματα θὰ ὀνομάσωμεν «διανύσματα δράσεως» (²). Τὸ  $\Pi_1$  σημαίνει ὅτι πρὸς παραγωγήν μιᾶς μονάδος ἐξ ἑνὸς ὠρισμένου ἀγαθοῦ (³), ἀπαιτοῦνται 2 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α, 2 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β

1. Αἱ «μονάδες» μετρήσεως καθορίζονται ἐκ τοῦ χρησιμοποιουμένου μετρικοῦ συστήματος.

2. Structural or activity vectors.

3. Αἱ διάφοροι παραγωγικαὶ διαδικασίαι δυνατόν νὰ παράγουν ἑτεροειδῆ ἢ ὁμοειδῆ ἀγαθὰ. Ἐνταῦθα θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι παράγουν ἑτεροειδῆ ἀγαθὰ.

καί οὐδεμία μονάς ἐκ τοῦ συντελεστοῦ  $\gamma$  (1). Ἀναλόγως ἐρμηνεύονται καί τὰ λοιπὰ διανύσματα.

Γ. Ἡ ἐπιχειρήσις Α δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ μίαν ἢ περισσοτέρας ταυτοχρόνως παραγωγικὰς διαδικασίας καί εἰς οἰονδήποτε ἐπίπεδον δράσεως — ἂν βεβαίως αἱ συνολικῶς ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν δὲν ὑπερβαίνουν τὰ ὄρια τὰ ὅποια καθορίζει τὸ διάνυσμα  $\Pi_0$ .

Δ. Τὸ καθαρὸν κέρδος ἐκ τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν (=διανυσμάτων δράσεως)  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  καὶ  $\Pi_5$  χρησιμοποιουμένων εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος, εἶναι 2, 2, 3, 4 καὶ 6 νομισματικαὶ μονάδες ἀντιστοίχως. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ κέρδους ἀφαιρεῖται τὸ κατὰ μονάδα κόστος ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν ἀντιστοίχων ἀγαθῶν (2).

Αἱ ἀνωτέρω ὑποθέσεις καθορίζουν τὰς τεχνολογικὰς καὶ οἰκονομικὰς συνθήκας ἐντὸς τῶν ὁποίων δύναται νὰ κινηθῇ ἡ ἐπιχειρήσις Α.

Τὸ πρόβλημα τῶρα εἶναι νὰ καθορισθῇ βάσει τῶν ὑποθέσεων αὐτῶν τὸ πρόγραμμα δράσεως τῆς ἐπιχειρήσεως. Τοῦτο σημαίνει καθορισμὸν: α) τοῦ εἴδους τῶν χρησιμοποιηθησομένων παραγωγικῶν διαδικασιῶν καὶ β) τοῦ ἐπίπεδου δράσεως αὐτῶν, κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ἐπιχειρήσις νὰ ἐπιτύχῃ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν προϊόντων.

Ἄν θέσωμεν  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  καὶ  $\lambda_5$ , διὰ τὰ ζητούμενα ἐπίπεδα δράσεως τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  καὶ  $\Pi_5$  ἀντιστοίχως, τότε ἡ συνάρτησις  $\varphi(\lambda)$ :

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5$$

ἐκφράζει τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον ἡ ἐπιχειρήσις ἐπιδιώκει νὰ καταστήσῃ μέγιστον ὑπὸ τὰς ἐνταῦθα ὑποθέσεις (3). Προφανῶς μερικὰ  $\lambda$  δυνατὸν νὰ λάβουν τιμὴν μηδέν (4), ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ ἀντίστοιχος παραγωγικὴ διαδικασία δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὸ πρόγραμμα.

Ὁ τελικὸς περιορισμὸς τοῦ προγράμματος δράσεως τίθεται βεβαίως ὑπὸ τῆς ὑπαρχούσης ποσότητος συντελεστῶν παραγωγῆς. Δέον συνεπῶς νὰ εἶναι:

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 \leq \Pi_0 \quad (1)$$

1. Οἱ  $\alpha, \beta, \gamma$  θεωροῦνται συντελεσταὶ παραγωγῆς ἀπὸ ἐπιχειρηματικῆς ἀπόψεως καὶ δὲν ἀνταποκρίνονται κατ' ἀνάγκην εἰς τὴν κλασσικὴν διαιρέσιν: ἐργασία, ἔδαφος, κεφάλαιον. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὸ πρόβλημα οἰοσδήποτε ἀριθμὸς παραγωγικῶν συντελεστῶν. Ὁ συντελεστὴς  $\alpha$  ἐνταῦθα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς «χηματικὸν κεφάλαιον», ὅποτε ἐξηγεῖται εὐκόλως πῶς εἶναι δυνατὴ ἡ παραγωγή με δύο μόνον συντελεστάς εἰς τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις.

2. Δυνατὸν τὸ κέρδος νὰ ὑπολογίζεται βάσει προβλεπομένων τιμῶν.

3. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ καθαρὸν κέρδος τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας  $\Pi_1$  εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος εἶναι 2. Ἄν συνεπῶς  $\lambda_1$  εἶναι τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς  $\Pi_1$ , τότε θὰ ἔχωμεν  $2\lambda_1$ , διὰ τὸ συνολικὸν κέρδος ἐκ τῆς παραγωγικῆς ταύτης διαδικασίας. Ὅμοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ τὰς λοιπὰς παραγωγικὰς διαδικασίας καὶ προσθέτοντες τὰ ἐπὶ μέρους γινόμενα λαμβάνομεν τὴν συνάρτησιν κέρδους  $\varphi(\lambda)$ .

4. Ὅχι ὁμως καὶ ἀρνητικῆν.

η), εκφράζοντας αριθμητικῶς τὰ διανύσματα :

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix}$$

ἢ ἀναλυτικώτερον (συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ὑπὸ στοιχ. 1. δ λεχθέντα):

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 &\leq 100 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 2\lambda_5 &\leq 80 \\ 0\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 + 2\lambda_5 &\leq 150 \end{aligned} \quad (2)$$

Ἡ σημασία τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων εἶναι προφανής: Ἡ πρώτη σημαίνει ὅτι ἡ συνολικῶς δαπανωμένη ποσότης ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ προγράμματος δράσεως δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίῃ τὴν συνολικῶς διατιθεμένην ποσότητα τῶν 100 μονάδων τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ. Ἀνάλογος ἔρμηνεία πρέπει νὰ δοθῇ καὶ εἰς τὰς ἄλλας δύο ἀνισότητες. Οὕτω τὸ σύστημα (2) σημαίνει ὅτι αἱ ὑπὸ τοῦ προγράμματος προβλεπόμεναι συνολικαὶ ποσότητες τῶν συντελεστῶν α, β καὶ γ δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνουν τὰς ἀντιστοίχως διαθεσίμους ποσότητας τῶν συντελεστῶν αὐτῶν. Συνοπτικῶς λοιπὸν τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιχειρήσεως Α δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως. Νὰ εὑρεθῶν αἱ (μὴ ἀρνητικαὶ) τιμαὶ τῶν λ, ὥστε:

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 = \text{μέγιστον}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν:

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 \leq \Pi_0$$

Πρὶν προχωρήσωμεν ἐν τούτοις εἶναι ἀνάγκη, διὰ λόγους διευκολύνσεως τῶν ὑπολογισμῶν, ὅπως μετατρέψωμεν τὰς ἀνωτέρω ἀνισότητας εἰς ἰσότητες. Ἡ μετατροπὴ μιᾶς ἀνισότητος εἰς ἰσότητα γίνεται δι' ἀπλῆς προσθήκης εἰς τὸ ἀσθενέστερον μέρος τῆς ἀνισότητος τῆς διαφορᾶς, ἡ ὅποια ὀρίζεται ὑπὸ τῆς ἀνισότητος ταύτης. Π.χ. ἡ ἀνισότης  $5 < 8$  μετατρέπεται εἰς ἰσότητα ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τὴν διαφορὰν  $8 - 5 = 3$ . Ἡ ἀκολουθουμένη ἐνταῦθα διαδικασία μετατροπῆς τῶν ἀνισοτήτων εἰς ἰσότητας δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς. Ὄριζομεν τρία νέα διανύσματα  $\Pi_6, \Pi_7, \Pi_8$ , τοιαῦτα ὥστε:

$$\Pi_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οἰκονομικῶς, τὸ  $\Pi_6$  σημαίνει ὅτι ἐπιτρέπει τὴν μὴ χρησιμοποίησιν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α. Τὰ  $\Pi_7$  καὶ  $\Pi_8$  ἐπιτρέπουν τὴν μὴ χρησιμοποίησιν μιᾶς μονάδος ἐκ τῶν συντελεστῶν β καὶ γ ἀντιστοίχως. Τὰ δύο μηδενικὰ εἰς ἕκαστον διάνυσμα σημαίνουν ὅτι ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ δὲν ἀπαιτεῖ δαπάνας ἐκ τῶν δύο ἄλλων συν-

τελεστών. Λόγω τῆς οἰκονομικῆς των σημασίας θὰ ὀνομάσωμεν τὰ  $\Pi_6$ ,  $\Pi_7$  καὶ  $\Pi_8$  «διανύσματα ἀδρανείας» (').

Ἄν τώρα ὀρισμένοι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς μένου ἀχρησιμοποίητοι, διότι εἶναι πολλὰκις τεχνικῶς ἀδύνατος ἡ χρησιμοποίησις ὀρισμένων ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ ἄνευ ἀντιστοίχων ποσοτήτων ἐκ τῶν ἄλλων συντελεστῶν (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν), τὰ ἀντίστοιχα διανύσματα ἀδρανείας πρέπει νὰ περιλαμβάνωνται εἰς τὸ πρόγραμμα δράσεως ὑπὸ κατάλληλα ἐπίπεδα. Θὰ ὀνομάσωμεν τὰ ἐπίπεδα ταῦτα «ἐπίπεδα ἀδρανείας», καθόσον χρησιμοποίησις εἰς οἰονδήποτε ἐπίπεδον ἑνὸς διανύσματος ἀδρανείας, σημαίνει ἀπλῶς μὴ χρησιμοποίησιν ὀρισμένων ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Αἱ τιμαὶ τῶν ἐπιπέδων ἀδρανείας δὲν δύναται νὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ μηδενός (δηλαδὴ ἀρνητικαί), οὔτε μεγαλύτεροι τῶν ποσοτήτων τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν.

Ἄν θέσωμεν  $\lambda_6$ ,  $\lambda_7$ ,  $\lambda_8$  διὰ τὰ ἐπίπεδα ἀδρανείας  $\Pi_6$ ,  $\Pi_7$  καὶ  $\Pi_8$  ἀντιστοίχως, τότε ἡ παράστασις (1) γίνεται :

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 + \lambda_6\Pi_6 + \lambda_7\Pi_7 + \lambda_8\Pi_8 = \Pi_0 \quad (3)$$

καὶ ἀναλυτικῶς :

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 + 1\lambda_6 + 0\lambda_7 + 0\lambda_8 &= 100 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 1\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 + 0\lambda_6 + 1\lambda_7 + 0\lambda_8 &= 80 \\ 0\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 + 0\lambda_6 + 0\lambda_7 + 1\lambda_8 &= 150 \end{aligned} \quad (4)$$

Τὸ σύστημα (4) σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον τῶν παραγωγικῶς χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων συντελεστῶν σὺν τῷ συνόλῳ τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὰς συνολικῶς διαθέσιμους ποσότητες συντελεστῶν.

Ἄν τέλος ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν ζημιοῦται ἡ ἐπιχείρησις Α ἐκ τῆς μὴ χρησιμοποίησεως ὀρισμένων ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν (2), τότε τὸ καθαρὸν ἀποτέλεσμα ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς διανυσμάτων ἀδρανείας εἰς τὸ πρόγραμμα ὑφ' οἰονδήποτε ἐπίπεδον εἶναι μηδὲν καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις  $\varphi(\lambda)$  μένει ἀμετάβλητος.

Μετὰ τὸν καθορισμὸν τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας τὸ πρόβλημα δύναται νὰ λάβῃ ὀριστικὴν διατύπωσιν ὡς ἀκολουθῶς :

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ (μὴ ἀρνητικαί) τιμαὶ τῶν  $\lambda$ , τοιαῦται ὥστε :

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 = \text{μέγιστον} \quad (5)$$

ὑπὸ τὸν περιορισμὸν :

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 + \lambda_6\Pi_6 + \lambda_7\Pi_7 + \lambda_8\Pi_8 = \Pi_0 \quad (6)$$

1. Slack vectors ἢ disposable activities.

2. Δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ διαφυγόν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς μὴ χρησιμοποίησεως ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν. Πάντως εἶναι ἐνδεχόμενον ὅπως ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων συντελεστῶν προκαλῆ ζημίαν, ἂν π.χ. δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ διατήρησις καὶ ἐπαναχρησιμοποίησις αὐτῶν. (βλ. καὶ ὑπ' ἀριθ. 2 παρατήρησιν εἰς 4 κατωτέρω).

## 3. Λύσις τοῦ προβλήματος

Ἡ παράστασις (6), ἡ ὁποία εἶναι περιληπτική μορφή τοῦ συστήματος (4), ἐπιδέχεται διαφόρους λύσεις. Ἡ ἐπιχείρησις Α ἐνδιαφέρεται μόνον δι' ἐκείνην τὴν λύσιν ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ ταυτοχρόνως τὴν (5), ἥτοι καθιστᾷ μέγιστον τὸ ἀναμενόμενον κέρδος. Ἡ μέθοδος simplex, περὶ τῆς ὁποίας ὠμιλήσαμεν εἰς τὸ προηγούμενον τμήμα, χρησιμοποιεῖται ἀκριβῶς πρὸς ἀνίχνευσιν τῆς λύσεως ταύτης διὰ συστηματικῆς ἐξετάσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ λύσεων.

Πρῶτον στὰ διον ὑπολογισμῶν. Ἐκλέγομεν ὡς ἀφετηρίαν τῶν ὑπολογισμῶν τὴν ἀπλουστέραν «δυνατὴν» (1) λύσιν θέτοντες  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$  καὶ  $\lambda_6 = 100$ ,  $\lambda_7 = 80$ ,  $\lambda_8 = 150$  (2). Ἡ λύσις αὕτη σημαίνει ὅτι οὐδεμία παραγωγικὴ διαδικασία χρησιμοποιεῖται (ἐφ' ὅσον τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν διαθεσίμων παραγωγικῶν διαδικασιῶν εἶναι μηδέν), αἱ δὲ διατιθέμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραμένουν ἀχρησιμοποίητοι (ἥτοι ἀπορροφῶνται ἀπὸ τὰ διανύσματα ἀδρανείας τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα  $\lambda_6$ ,  $\lambda_7$ ,  $\lambda_8$  λαμβάνουν τὴν μέγιστη δυνατὴν τιμὴν). Κατὰ συνέπειαν καὶ τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι μηδέν :

$$\varphi(\lambda) = 2 \times 0 + 2 \times 0 + 3 \times 0 + 4 \times 0 + 6 \times 0$$

Πρὶν προχωρήσωμεν πρὸς εὗρεσιν καλλιτέρας λύσεως θὰ καταγράψωμεν συστηματικῶς τὰ τεχνικὰ καὶ οἰκονομικὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς ἐπίσης καὶ τὴν ἀρχικὴν λύσιν ὡς κατωτέρω :

Πινάκιον α'.

K.K. →						2	2	3	4	6
↓	B	$\Pi_6$	$\Pi_7$	$\Pi_8$	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$	$\Pi_4$	$\Pi_5$	
	$\Pi_6$	100	1			2	2	1	2	2
	$\Pi_7$	80		1		2		1	1	2
	$\Pi_8$	150			1		1	2	1	2
O.K. →						-2	-2	-3	-4	-6

Ἐὰν ἀφήσωμεν πρὸς στιγμὴν κατὰ μέρος τὴν τελευταίαν σειράν, τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ πινακίου εἶναι μᾶλλον σαφές.

α) Κάτωθεν τοῦ στοιχείου B, τὸ ὁποῖον συμβολίζει τὴν λέξιν «βάσις»,

1. «Δυνατὴ» λύσις σημαίνει λύσις ἱκανοποιούσα τὴν παράστασιν (6) ὄχι ὁμως κατ' ἀνάγκην καὶ τὴν (5).

2. Οἱ λόγοι τῆς ἐκλογῆς αὐτῆς ἀναφέρονται κατωτέρω.

έγγράφονται τὰ ἐκλεγόμενα διανύσματα πρὸς κατάστρωσιν τοῦ ἐκάστοτε προγράμματος (1).

β) Κάτωθεν τοῦ  $\Pi_0$  σημειοῦνται αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Ταυτοχρόνως ὁμοίως οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ παριστοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως (ἢ ἀδρανείας, ὡς ἐν προκειμένῳ) τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων τῆς βάσεως ὡς δεικνύεται εἰς τὸ πινάκιον, αἱ 100, 80 καὶ 150 μονάδες ἐκ τῶν συντελεστῶν  $\alpha$ ,  $\beta$  καὶ  $\gamma$  ἀντιστοίχως, καθορίζουν τὰ ἐπίπεδα τῶν διανυσμάτων  $\Pi_6$ ,  $\Pi_7$  καὶ  $\Pi_8$ . Οὕτω αἱ στήλαι κάτωθεν τῶν  $B$  καὶ  $\Pi_0$  παριστοῦν ὁμοῦ τὸ ἐκάστοτε ἐκλεγόμενον πρόγραμμα δράσεως, ὡς καθορίζουσαι τὰ ἐκλεγόμενα διανύσματα καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

γ) Εἰς τὰς ὑπολοίπους στήλας τοῦ πινακίου ἀναγράφονται πάντα τὰ χρησιμοποιούμενα διανύσματα (δράσεως ἢ ἀδρανείας) μετὰ τῶν στοιχείων αὐτῶν. Τὰ μηδενικά στοιχεία δὲν ἀναγράφονται. Κατὰ τὴν ταξινομήσιν τὰ διανύσματα ἀδρανείας ἐτέθησαν πρὸ τῶν διανυσμάτων δράσεως διὰ λόγους εὐχερείας ὑπολογισμῶν.

δ) Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι πάντα τὰ διανύσματα  $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_8$  δύναται νὰ ἐκφραστοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ (2) τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως  $\Pi_6, \Pi_7, \Pi_8$ .

\* Ἄν λάβωμεν π.χ. τὸ διάνυσμα διαθεσίμων συντελεστῶν  $\Pi_0$  δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= 100 \Pi_6 + 80 \Pi_7 + 150 \Pi_8 \\ &= 100 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 80 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 150 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix} = \Pi_0 \end{aligned}$$

Εἰς τὸν ἀνωτέρω γραμμικὸν συνδυασμὸν ὡς πολλαπλασιασταὶ τῶν διανυσμάτων ἐτέθησαν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ διανύσματος  $\Pi_0$ . Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τοῦ συνδυασμοῦ αὐτοῦ εἶναι ὅτι αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες τῶν συντελεστῶν  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , διατίθενται ἐξ ὀλοκλήρου, ἂν τὸ ἐκλεγόμενον πρόγραμμα περιλαμβάνῃ τὸ διάνυσμα  $\Pi_6$  εἰς ἐπίπεδον 100, τὸ διάνυσμα  $\Pi_7$  εἰς ἐπίπεδον 80 καὶ τὸ διάνυσμα  $\Pi_8$  εἰς ἐπίπεδον 150. «Διατίθενται ἐξ ὀλοκλήρου» σημαίνει ἐνταῦθα — λόγῳ τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος — ὅτι δὲν χρησιμοποιοῦνται. Ἡ ἐρμηνεία εἶναι προφανῶς πλέον ἐνδιαφέρουσα ὅταν εἰς τὸ πρόγραμμα περιλαμβάνωνται καὶ διανύσματα δράσεως (= παραγωγικὰ διαδικασίαι), ὡς συμβαίνει εἰς τὰ πινάκια β' καὶ γ' κατωτέρω.

\* Ὁμοίως, τὸ διάνυσμα  $\Pi_1$  δύναται νὰ ἐκφραστῇ ὡς :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= 2\Pi_6 + 1\Pi_7 + 1\Pi_8 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_1 \end{aligned}$$

1. Θὰ καλοῦμεν ἐνίοτε τὰ διανύσματα τοῦ προγράμματος διανύσματα βάσεως.

2. Βλέπε τὰ ὑπὸ στοιχεία δ λεχθέντα τῆς παραγρ. 1 τοῦ παρόντος τμήματος.



Εἰς τὸν συνδυασμὸν αὐτὸν ἐτέθησαν ὁμοίως ὡς πολλαπλασιασται τῶν διανυσμάτων τὰ στοιχεῖα τοῦ  $\Pi_1$ . Γενικῶς πᾶν διάνυσμα τοῦ πινακίου δύναται νὰ ἐκφρασθῆ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐκλεγομένου προγράμματος, ἂν θέσωμεν ὡς πολλαπλασιαστὰς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ὑπ' ὄψιν διανύσματος.

Ποία τῶρα εἶναι ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῆς ἐκφράσεως ἐνὸς διανύσματος δράσεως, π.χ. τοῦ  $\Pi_1$ , ὡς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος. Σκεπτόμενοι ὡς καὶ προηγουμένως, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἔννοιαν ταύτην ὡς ἐξῆς: Αἱ ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τὴν χρησιμοποίησιν π.χ. τοῦ διανύσματος δράσεως  $\Pi_1$ , εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος, ἰσοῦνται ἀκριβῶς πρὸς τὰς ποσότητας αἱ ὁποῖαι ἀπορροφῶνται ἀπὸ τὰ διανύσματα:  $\Pi_2$  εἰς ἐπίπεδον 2,  $\Pi_7$  εἰς ἐπίπεδον 1 καὶ  $\Pi_8$  εἰς ἐπίπεδον 1. Ἐν ἄλλοις λόγοις ἔχομεν ἐνώπιόν μας δὺο διαφόρους συνδυασμοὺς τῆς αὐτῆς ποσότητος παραγωγικῶν συντελεστῶν. Δεδομένου ὅτι εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ γνωρίζωμεν τὸ καθαρὸν κέρδος ἐκάστου συνδυασμοῦ (διότι δίδεται ὑπὸ τοῦ προβλήματος τὸ ὑφ' ἐκάστου διανύσματος ἀναμενόμενον καθαρὸν κέρδος), δυνάμεθα νὰ ἀποφασίσωμεν ἐὰν συμφέρη ἢ ὄχι ἡ ἀφαίρεσις ποσοτήτων συντελεστῶν ἀπὸ τὰ διανύσματα τοῦ προγράμματος, διὰ τὴν δραστηριοποίησιν ἐνὸς νέου διανύσματος. Ἐνταῦθα βεβαίως ἡ σύγκρισις αὕτη γίνεται αὐτομάτως διότι γνωρίζομεν ὅτι τὰ διανύσματα ἀδρανεῖας δίδουν μηδὲν καθαρὸν κέρδος, οἷοτε συμφέρει ὅπωςδῆποτε ἡ εἰσαγωγή ἐνὸς διανύσματος δράσεως εἰς τὸ πρόγραμμα. Ὅταν ὁμως τὸ πρόγραμμα περιλαμβάνη ἤδη διανύσματα δράσεως (ὡς εἰς τὰ ἐπόμενα πινάκια β' καὶ γ') τότε ἡ ἀνωτέρω σύγκρισις διὰ τοῦ τεχνάσματος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ εἶναι βασικὴ διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς καλλιτέρας δυνατῆς λύσεως (').

Ὡς θὰ παρετήρησεν ὁ ἀναγνώστης τὰ διανύσματα  $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_8$  ἐκφραζόμενα ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος, δὲν ἀλλάσουν ἀριθμητικὴν μορφήν, παραμένοντα ὡς ἀκριβῶς ἐδόθησαν ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ προβλήματος. Τοῦτο ὁμως συμβαίνει μόνον εἰς τὸ πρῶτον πινάκιον τῶν ὑπολογισμῶν, λόγῳ τῆς ἀριθμητικῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανεῖας (') τὰ ὁποῖα ἐξελέγησαν εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα. Οὕτως ἐκλέγοντες ὡς ἀφετηρίαν ἓν πρόγραμμα ἀπαρτιζόμενον ἀπὸ τὰ διανύσματα ἀδρανεῖας εἰς οὐδένα

1. Πᾶν διάνυσμα ἀδρανεῖας δύναται ἐπίσης νὰ ἐκφρασθῆ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος. Ἡ ἔννοια τοῦ συνδυασμοῦ αὐτοῦ δύναται νὰ καθορισθῆ κατ' ἀναλογία τῶν λεχθέντων διὰ τὰ λοιπὰ διανύσματα, λαμβανομένης βεβαίως ὑπ' ὄψιν τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανεῖας.

2. Ἐπειδὴ δηλαδὴ περιέχουν ἀνὰ μίαν μονάδα καὶ δύο μηδενικά ἐκαστον κατὰ τρόπον ὥστε χρησιμοποιούμενα εἰς τὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν ἀφήνουν τὴν ἀριθμητικὴν φύσιν τῶν ἄλλων διανυσμάτων ἀναλλοίωτον. Μαθηματικῶς τὰ διανύσματα ἀδρανεῖας ἀποτελοῦν τὴν ἀρχικὴν «βάσιν» τοῦ συστήματος ἢ τὰς συντεταγμένας ἐνὸς χώρου  $n$  διαστάσεων ( $n = 0$  ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν) βάσει τῶν ὁποίων δύναται νὰ ἐκφρασθῶν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τὰ ὑπόλοιπα διανύσματα τοῦ προβλήματος, κείμενα ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χώρου.

σχεδόν ύπολογισμόν είναι αναγκαίον νά προβώμεν κατά τήν κατάστροψιν τοῦ πρώτου πινακίου. Ἄρκει νά καταγράψωμεν τά δεδομένα τοῦ προβλήματος κατά τήν ύποδειχθεΐσαν σειράν (πινάκ. α'). Οὗτος εἶναι εἰς ἕκ τῶν λόγων χρησιμοποιοῦσας διανύσμάτων ἀδρανεΐας εἰς τὸ ἀρχικόν πρόγραμμα. Ἔτερος, πλέον οὐσιώδης λόγος, εἶναι ὅτι διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ ἀποφεύγεται ἡ ὑπερπήδησις τῆς «ἀρίστης» δυνατῆς λύσεως, ἐφ' ὅσον ἀρχίζομεν τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀπὸ τήν λύσιν ἐκείνην ἢ ὅποια δίδει καθαρὸν κέρδος μηδέν.

ε) Τὰ στοιχεΐα Κ.Κ. εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον τοῦ πινακίου σημαίνουν «καθαρὸν κέρδος». Ἡ φορὰ τῶν βελῶν δεικνύει ὅτι τὰ τετραγωνΐδια τῆς ἔναντι σειρᾶς καὶ τῆς κάτωθεν στήλης χρησιμοποιοῦνται διὰ τήν ἔγγραφὴν τοῦ καθαροῦ κέρδους ἐκάστου διανύσματος. Ἐπειδὴ τὰ διανύσματα ἀδρανεΐας ἔχουν καθαρὸν κέρδος μηδέν, τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνΐδια μένουσιν κενά, ἀναγράφεται δὲ μόνον τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ διανύσματα δράσεως, κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

στ) Εἰς τήν τελευταίαν σειράν τοῦ πινακίου, ἔναντι τῶν στοιχείων Ο.Κ. (= ὀριακὸν κέρδος) ἔγγρᾶφεται ἡ διαφορὰ καθαροῦ κέρδους ἢ λαμβανομένη ἐκ τῆς ὑπὸ στοιχεΐου δ ἀνωτέρω ὑποδειχθεΐσης συγκρίσεως. Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι θέλωμεν νά καθορίσωμεν ποίαν ἐπίδρασιν θὰ ἔχη ἐπὶ τοῦ καθαροῦ κέρδους ἡ εἰσαγωγή εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος δράσεως  $\Pi_3$ . Πρῶτον, ἐκφράζομεν τοῦτο ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανύσμάτων τῆς βάσεως κατὰ τὰ γνωστά :

$$\Pi_3 = 1 \cdot \Pi_6 + 1 \cdot \Pi_7 + 2 \cdot \Pi_8$$

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις σημαίνει ὅτι ἡ ἀπαιτουμένη ποσότης συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τήν χρησιμοποίησιν τοῦ  $\Pi_3$  εἰς ἐπίπεδον δράσεως 1, εἶναι ἴση μὲ τὰς ποσότητας συντελεστῶν τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν μὲ διάνυσμα  $\Pi_6$  εἰς ἐπίπεδον 1, τὸ διάνυσμα  $\Pi_7$  εἰς ἐπίπεδον 1 καὶ τὸ διάνυσμα  $\Pi_8$  εἰς ἐπίπεδον 2.

Δεύτερον, συγκρίνομεν τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ὁποῖον δίδουν οἱ δύο ἀνωτέρω συνδυασμοὶ (') τῶν αὐτῶν ποσοτήτων συντελεστῶν παραγωγῆς. Γνωρίζομεν ὅτι πάντα τὰ διανύσματα ἀδρανεΐας φέρουν ἕξ ὑποθέσεως καθαρὸν κέρδος μηδέν (ἦτοι,  $1 \times 0 + 1 \times 0 + 2 \times 0 = 0$ , ὅπου τὰ τρία πρῶτα μηδενικά εἶναι τὰ καθαρὰ κέρδη τῶν  $\Pi_6, \Pi_7, \Pi_8$ ), τὸ δὲ  $\Pi_3$  εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος φέρει κέρδος 3. Συγκρίνοντες συνεπῶς λαμβάνομεν  $0 - 3 = -3$ , ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ ὀριακὸν κέρδος τοῦ διανύσματος  $\Pi_3$  εἶναι 3 μονάδες ("). Ἐπομένως ἡ εἰσαγωγή τοῦ  $\Pi_3$  εἰς τὸ πρόγραμμα δύναται νά βελτιώσῃ τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως. Κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον γίνεταί ὁ προσδιορισμὸς τοῦ «ὀριακοῦ κέρδους» ὄλων τῶν διανύσμάτων.

1. Ὡς παριστῶνται ἐκ τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως.

2. Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τοῦ ὀριακοῦ κέρδους ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ  $\Pi_3$  τίθεται ὡς ἀφαιρέτης, δὲν πρέπει δὲ νά ἐκλαμβάνεται ὡς ὀριακὴ ζημία ἢ ὅποια σημειοῦται διὰ θετικοῦ σημείου. Ὁ τρόπος αὐτὸς παρουσιάσεως ἔχει ὀρισμένα πλεονεκτήματα ἀπὸ ἀπόψεως ὑπολογισμοῦ.

Γενικῶς ὅταν ὑπάρχη ἐν ἡ περισσότερα ἀρνητικὰ στοιχεῖα εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου, βελτίωσις τοῦ συνολικοῦ κέρδους εἶναι δυνατὴ δι' εἰσαγωγῆς εἰς τὸ πρόγραμμα ἑνὸς ἐκ τῶν ἀντιστοιχῶν διανυσμάτων. Κατ' ἀντιστοιχίαν ὅταν ἐν στοιχείῳ εἶναι θετικὸν ἢ εἰσαγωγή εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ ἀντιστοιχοῦ διανύσματος μειώνει τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως, ὡς τοῦτο καθορίζεται ὑπὸ τοῦ ἤδη ἐκλεγέντος προγράμματος. Ὅταν ἐν ἡ περισσότερα στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου εἶναι μηδέν, οὔτε κέρδος οὔτε ζημία προκαλοῦνται ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀντιστοιχῶν διανυσμάτων εἰς τὸ πρόγραμμα.

Λόγῳ τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανεῖας, τὰ ὁποῖα δίδουν κέρδος μηδέν, οὐδεμία σχεδὸν σκέψις ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κατάρτισιν τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου α'. Ἀπλῶς ἐγγράφομεν τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης σειρᾶς εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια μὲ ἀντίθετον σημεῖον.

Κατόπιν τῶν ὄσων ἤδη ἐλέχθησαν, ἀπλῆ ἐπισκόπησις τοῦ πινακίου α' δεικνύει ὅτι ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ ἐπιτύχῃ καθαρὸν κέρδος ἂν μεταβάλλῃ τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα. Τὸ πρόβλημα εἶναι τώρα πῶς θὰ γίνῃ ἡ μεταβολή. Εἰδικώτερον πρέπει νὰ καθορισθοῦν: α) Ποῖον διάνυσμα πρέπει νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὸ πρόγραμμα, β) Ποῖον διάνυσμα πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τοῦ προγράμματος.

Ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιχείρησις ἐνδιαφέρεται διὰ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος, λογικὸν εἶναι νὰ ἐπιζητητῆται ἡ εἰσαγωγή εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος τὸ ὁποῖον δίδει τὸ μεγαλύτερον ὀριακὸν κέρδος. Ἐνταῦθα τὸ διάνυσμα αὐτὸ εἶναι τὸ  $P_5$  εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ κέρδος 6 μονάδες. Γενικῶς, ἐπιβάλλεται ἡ εἰσαγωγή εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ὁ ὀρνητικὸς ἀριθμὸς μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν, ὁ εὐρισκόμενος εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου (!).

Πρὸς καθορισμὸν τοῦ διανύσματος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τοῦ προγράμματος, ἀντικαθιστῶμενον ὑπὸ τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος, σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως: Ἐφ' ὅσον  $P_5$  εἶναι τὸ πλέον ἐπικερδὲς διάνυσμα, συμφέροι ἡ χρησιμοποίησις αὐτοῦ εἰς τὸ ἀνώτατον δυνατὸν ἐπίπεδον δράσεως. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ποσότητος τῶν ἐν ἀδρανεῖα συντελεστῶν παραγωγῆς, κυρίως δὲ (<sup>2</sup>) ἐκ τῆς ποσότητος τοῦ ἐν σχετικῇ (ὡς πρὸς τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας τοῦ  $P_5$ ) ἀνεπαρκεία εὐρισκομένου συντελεστοῦ. Ὁ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκεία συντελεστῆς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μικρότερον ἐκ τῶν πηλίκων, τὰ ὁποῖα λαμβάνονται ἂν διαιρέσωμεν τὰς ποσότητας καὶ τῶν τριῶν συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων τοῦ  $P_5$ . Ἐνταῦθα ἔχομεν  $100/2=50$ ,  $80/2=40$ ,  $150/2=75$ , συνεπῶς ὁ συντελεστῆς  $\beta$  εἶναι ὁ ἐν σχετικῇ

1. Ἄν ὑπάρχουν εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν δύο ἢ περισσότεροι ἴσοι ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ μὲ ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέραν τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῶν ἄλλων ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἐκλέγεται πρὸς εἰσαγωγὴν εἰς τὸ πρόγραμμα οἰονδήποτε ἐκ τῶν διανυσμάτων τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς ἴσους ἀρνητικὸς ἀριθμούς.

2. Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

ἀνεπαρκεία εύρισκόμενος καί καθορίζει άνώτατον επίπεδον δράσεως του  $\Pi_5$  40 μονάδας. Τοῦτο σημαίνει ότι ὁλόκληρος ἡ ποσότης του συντελεστοῦ  $\beta$  ( $40 \times 2 = 80$ ) χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ «είσερχομένου» διάνυσματος καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα  $\Pi_7$  (τὸ ὁποῖον ὑποδηλοῖ ἀδράνειαν τοῦ συντελεστοῦ  $\beta$ ), δὲν ἔχει θέσιν εἰς τὸ πρόγραμμα. Γενικῶς, πρὸς καθορισμὸν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος: Διαιροῦμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ  $\Pi_0$  διὰ τῶν ἀντιστοιχῶν θετικῶν (1) στοιχείων τοῦ εἰσερχομένου διανύσματος καὶ καθορίζομεν ἐν συνεχείᾳ ὡς «ἐξερχόμενον» διάνυσμα τὸ διάνυσμα τοῦ προγράμματος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ μικρότερον πηλίκον (2). Τὸ εἰσερχόμενον» διάνυσμα  $\Pi_5$  καὶ τὸ «ἐξερχόμενον» διάνυσμα  $\Pi_7$  καταδεικνύονται διὰ τῶν ἐντόνων καθέτων καὶ ὀριζοντιῶν γραμμῶν τοῦ πίνακίου.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ περατοῦται τὸ πρῶτον στάδιον τῶν ὑπολογισμῶν. Μηχανικῶς αἱ μέχρι τοῦδε ὑποδειχθεῖσαι κινήσεις ἔχουν ὡς ἀκολουθῶς:

α) Κατάστρωσις τοῦ πίνακίου α' βάσει δοθεισῶν πληροφοριῶν: ἔγγραφῆ εἰς τὸ πινάκιον τῶν διανυσμάτων δράσεως καὶ ἀδρανεῖας κατὰ τὴν ὑποδειχθεῖσαν τάξιν· ἔγγραφῆ τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰ καθαρὰ κέρδη τῶν διανυσμάτων εἰς τὰ οἰκεία τετραγωνίδια τῆς πρώτης σειρᾶς τοῦ πίνακίου· ἔγγραφῆ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἀλλὰ μὲ ἀρνητικὸν σημεῖον εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πίνακίου (βλ. πινάκ. α').

β) Καθορισμὸς τοῦ «είσερχομένου» διανύσματος βάσει τοῦ ἀρνητικοῦ στοιχείου μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν, τοῦ εύρισκομένου εἰς τὴν τελευταίαν σειράν.

γ) Καθορισμὸς τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος βάσει τοῦ μικροτέρου ἐκ τῶν πηλίκων τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ  $\Pi_0$  διὰ τῶν ἀντιστοιχῶν θετικῶν στοιχείων τοῦ «είσερχομένου» διανύσματος.

Καταφαίνεται ὅτι ὁ χρόνος τοῦ μηχανικοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ πίνακίου α' εἶναι ἐλάχιστος.

Δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν. Μὲ ἀφετηρίαν τὰς πληροφορίας τοῦ πίνακίου α', προχωροῦμεν εἰς τὸ δεύτερον στάδιον τῶν ὑπολογισμῶν ἐκ τῶν ὁποίων τελικῶς συντίθεται τὸ πινάκιον β'.

1. Δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν τὰ μηδενικὰ καὶ τὰ ἀρνητικὰ στοιχεῖα.

2. Ἄν εὑρεθοῦν δύο ἢ περισσότερα πηλικά ἴσα καὶ μικρότερα τῶν ἄλλων πηλίκων, πρὸς εὔρεσιν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολουθῶς: Διαιροῦμεν τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα κείνται ἀμέσως δεξιὰ τῶν διαιρετέων τῶν ἴσων πηλίκων (καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου κατὰ σειράν διανύσματος ἀδρανεῖας), διὰ τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων τοῦ «είσερχομένου», διανύσματος· τὸ διάνυσμα τῆς βάσεως τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ (ἀλγεβρικῶς) μικρότερον ἐκ τῶν οὕτω ληφθέντων πηλίκων, χαρακτηρίζεται ὡς «ἐξερχόμενον» διάνυσμα. Ἄν δύο ἢ περισσότερα ἐκ τῶν νέων πηλίκων, εἶναι ἴσα καὶ μικρότερα τῶν ἄλλων πηλίκων, συνεχίζεται ὁ ὑπολογισμὸς καθ' ὅμοιον τρόπον, μὲ διαιρετέους τὰ ἀμέσως ἐπόμενα στοιχεῖα κ.ο.κ. μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ἐν (ἀλγεβρικῶς) μικρότερον πηλίκον.

Πινάκιον β'.

K.K.	→					2	2	3	4	6
	↓	B	$\Pi_0$	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$	$\Pi_4$	$\Pi_5$	$\Pi_6$	$\Pi_7$
		$\Pi_8$	20	1	-1			2		1
		6	$\Pi_9$	40		$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
			$\Pi_{10}$	70		-1	1	-2	1	1
		O.K.	→	240		3		4	-2	
										-1

Τὸ πινάκιον β' διαφέρει σημαντικῶς ἀπὸ τὸ πινάκιον α'. Αἱ διαφοραὶ ὀφείλονται εἰς τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ διανύσματος  $\Pi_7$  διὰ τοῦ διανύσματος  $\Pi_5$  εἰς τὴν βᾶσιν. Λόγω τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης κατέστη ἀναγκαῖον, ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ ὑπολογισθοῦν ἐκ νέου τὰ ἐπίπεδα τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ ἀναπροσαρμοσθοῦν τὰ στοιχεῖα πάντων τῶν διανυσμάτων ( $\Pi_1$ - $\Pi_8$ ) εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύναται ἐν ἑκάστον ἐξ αὐτῶν νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, μὲ πολλαπλασιαστικὰ τὰ στοιχεῖα τοῦ ὑπ' ὄψιν διανύσματος.

Δὲν εἶναι δύσκολον νὰ ἐρμηνευθῇ οἰκονομικῶς διατὶ ἀπαιτεῖται ὑπολογισμὸς νέων ἐπιπέδων διὰ τὰ διανύσματα τῆς βάσεως. Καθωρίσθη ἤδη ὅτι τὸ ἀνώτατον δυνατὸν ἐπίπεδον δράσεως τοῦ  $\Pi_5$  εἶναι 40 μονάδες. Διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ  $\Pi_5$  εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἀπαιτοῦνται : 1) ὀλόκληρος ἢ ἐν ἀδρανεῖα ποσότης τοῦ συντελεστοῦ β (συνεπῶς τὸ  $\Pi_7$  ἀφαιρεῖται ἐκ τῆς βάσεως), 2) 80 μονάδες ( $2 \times 40$ ), ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα  $\Pi_6$  ἐξακολουθεῖ νὰ παραμένῃ εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ ἐπίπεδον ἀδρανεῖας 20 μονάδας (=100-80), 3) 80 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ γ καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα ἀδρανεῖας  $\Pi_8$  παραμένει εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ ἐπίπεδον 70 μονάδας (=150-80).

Ἡ ἀριθμητικὴ ἀναπροσαρμογὴ τῶν διανυσμάτων  $\Pi_1$ - $\Pi_8$ , οὕτως ὥστε νὰ δύναται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, εἶναι ἀναγκαῖα, ὡς ἤδη ἐλέχθη, διὰ τὴν σύγκρισιν τοῦ καθαροῦ κέρδους ἐκάστου διανύσματος μὲ τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ὁποῖον δίδει ἡ αὐτὴ ποσότης συντελεστῶν χρησιμοποιουμένη ὁμως ὑπὸ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως. Ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς θὰ καταφανῆ ἂν ὑπάρχῃ δυνατότης καταρτίσεως ἄλλου καλλιτέρου προγράμματος ἢ ἐὰν τὸ ἤδη καταρτισθὲν εἶναι τὸ ζητούμενον.

Μηχανικῶς ἡ κατάστρωσις τοῦ πινακίου β, γίνεται ὡς ἀκολούθως :



α) Αί δύο πρώται σειραί του πινακίου α' μεταφέρονται εις τό πινάκιον β' άνευ ούδεμιᾶς μεταβολῆς (').

β) Εις τήν βάσιν άναγράφεται τό διανύσμα Π<sub>5</sub> άντι του διανύσματος Π<sub>7</sub>. 'Αριστερά του Π<sub>5</sub> άναγράφεται τό καθαρόν κέρδος του διανύσματος 6 νομισματικά μονάδες.

γ) Διαιρουνται πάντα τά στοιχεῖα τά εύρισκόμενα εις τήν σειράν του «έξερχομένου» διανύσματος Π<sub>7</sub> εις τό πινάκιον α', διά του στοιχείου τό όποιον εύρίσκεται εις τήν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς αὐτῆς καί τῆς στήλης του «είσερχομένου» διανύσματος εις τό πινάκιον α'. Τά προκύπτοντα πηλίκα έγγράφονται εις τά αντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς σειρᾶς του «είσερχομένου» διανύσματος Π<sub>5</sub> εις τό πινάκιον β'. Ούτω π.χ. τό έβδομον στοιχείον τῆς σειρᾶς έναντι του Π<sub>5</sub> (πινάκ. β') προσδιορίζεται έκ τῆς διαιρέσεως του στοιχείου 1, έβδόμου εις τήν σειράν έναντι του Π<sub>7</sub> εις τό πινάκ. α', διά του στοιχείου 2 τό όποιον εύρίσκεται εις τήν διασταύρωσιν τῆς αὐτῆς σειρᾶς καί τῆς στήλης του «έξερχομένου» διανύσματος εις τό πινάκ. α'. 'Ο άναγνώστης δύναται νά έλέγξη δι' άναλόγων ύπολογισμῶν τὰς λοιπὰς έγγραφὰς τῆς σειρᾶς έναντι του Π<sub>5</sub> εις τό πινάκ. β'.

δ) 'Ο ύπολογισμός τῶν λοιπῶν στοιχείων του πινακίου β' χρειάζεται περισσοτέραν προσοχήν. Ἐς ύποθέσωμεν ότι θέλωμεν νά ύπολογίσωμεν τό στοιχείον τό όποιον πρέπει νά έγγραφῆ εις τό τετραγωνίδιον τ του πινακίου β' (2).

1) Εύρίσκομεν τό στοιχείον του αντίστοιχου τετραγωνιδίου τ' εις τό πινάκιον α' (3).

2) Ἐφαιρουμεν άπό τό εύρεθέν στοιχείον του τ' τό γινόμενον: του στοιχείου τό όποιον εύρίσκεται εις τήν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς του τ' καί τῆς στήλης του «είσερχομένου» διανύσματος, εις τό πινάκιον α' έπί τό στοιχείον τό όποιον εύρίσκεται έπί τῆς διασταυρώσεως τῆς στήλης του τ εις τό πινάκ. β' καί τῆς σειρᾶς έναντι του «είσερχομένου» διανύσματος εις τό πινάκ. β'.

3) Τήν εύρεθείσαν διαφοράν έγγράφομεν εις τό τετραγωνίδιον τ (του πινακ. β').

Διά νά κατανοηθῆ ὁ τελευταῖος ύπολογισμός χρειάζεται παρακολούθησις τῶν ύποδεικνυομένων κινήσεων έπί τῶν πινακίων α' καί β'. Με ὀλίγην έξάσκησην ὁ ύπολογισμός αὐτός γίνεται σχεδόν αὐτομάτως, ὡς δύναται νά διαπιστώσῃ ὁ άναγνώστης πειραματιζόμενος βάσει τῶν δεδομένων τῶν πινακίων α' καί β'. Δίδομεν ένταῦθα μερικά παραδείγματα:

Ἐς ύποθέσωμεν ότι θέλωμεν νά ύπολογίσωμεν τό πρώτον στοιχείον του

1. Ὅταν τά πινάκια του ύπολογισμοῦ ένσωματοῦνται εις ένα πίνακα, δέν άπαιτεῖται βεβαίως επανάληψις τῶν δύο πρώτων σειρῶν.

2. τ δύναται νά εἶναι οἷονδήποτε τετραγωνίδιον έκτός βεβαίως τῶν τετραγωνιδίων τῆς σειρᾶς έναντι του «είσερχομένου» διανύσματος τά όποια ύπολογίζονται κατά τά υπό στοιχείον γ' άναγραφόμενα.

3. Τό στοιχείον τοῦτο δύναται νά εἶναι καί μηδέν.



$\Pi_0$ , εις τὸ πινάκ. β'. 1) Τὸ ἀντίστοιχον στοιχείον εἰς τὸ πινάκ. α' εἶναι 100. 2) Ἀπὸ τὸ 100 ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ στοιχείου 2 (εὐρίσκομένου εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς τοῦ 100 μὲ τὴν στήλην τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος  $\Pi_5$  εἰς τὸ πινάκ. α'), ἐπὶ τὸ στοιχείον 40 (τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς στήλης τοῦ πρὸς ὑπολογισμὸν στοιχείου καὶ τῆς σειρᾶς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος  $\Pi_5$  εἰς τὸ πινάκ. β'). 3) Ἐγγράφομεν τὴν διαφορὰν  $100-80=20$  εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον κάτωθεν τοῦ  $\Pi_0$ .

Καθ' ὅμοιον τρόπον, πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τετάρτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι  $\Pi_6$  εἰς τὸ πινάκιον β' (διασταύρωσις στήλης  $\Pi_8$  καὶ τῆς σειρᾶς ἔναντι  $\Pi_6$ ) ἔχομεν:  $0-2 \times 0=0$ .

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἔκτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι  $\Pi_8$  (διασταύρωσις τῆς σειρᾶς ἔναντι  $\Pi_8$  καὶ τῆς στήλης  $\Pi_2$ ) ἔχομεν:  $1-2 \times 0=1$ .

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τρίτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι  $\Pi_8$  ἔχομεν:  $0-2 \times 1/2=-1$ , κ.ο.κ.

ε) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινάκ. β' γίνεται, εἴτε δι' ἐφαρμογῆς τῶν ὑπὸ στοιχείον δ' λεχθέντων, εἴτε δι' ἐφαρμογῆς τῶν ὑπὸ στοιχείον στ' (πρῶτον στάδιον ὑπολογισμῶν) λεχθέντων. Οὕτω, πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τρίτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινάκ. β' ἔχομεν:  $0-(-6 \times 1/2)=3$  ἢ  $[0 \times (-1) + 6 \times 1/2 + 0 \times (-1)]-0=3$  ὅπου 0,6,0 (ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν) παριστοῦν τὸ καθαρὸν κέρδος τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ὁποίων θὰ ἠδύνατο νὰ ἐκφρασθῇ τὸ διάνυσμα  $\Pi$ , τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τρίτον στοιχείον τῆς τελευταίας σειρᾶς.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἔκτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πιν. β' ἔχομεν  $(-2)-(-6) \times 0=-2$  ἢ  $(2 \times 0 + 0 \times 6 + 1 \times 0)-2=-2$ .

Ἐπειδὴ οἱ ὡς ἄνω δύο τρόποι ὑπολογισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμοι, δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ταυτοχρόνως πρὸς ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῶν ἐγγραφῶν ἐκάστου νέου πινακίου. Ἄν δηλαδὴ παρατηρηθῇ διαφορὰ ἀποτελέσματος τῶν δύο ὑπολογισμῶν σημαίνει ὅτι ἔγινε λάθος εἰς τὴν σύνταξιν τοῦ πινακίου.

Μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν τῶν ὡς ἄνω ὑπολογισμῶν, ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὸ πινάκιον β'. Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ νέον πρόγραμμα ( $\Pi_6: 20$ ,  $\Pi_5: 40$ ,  $\Pi_8: 70$ ) εἶναι καλλίτερον ἀπὸ τὸ ἀρχικόν ( $\Pi_6: 100$ ,  $\Pi_7: 80$ ,  $\Pi_8: 150$ ) διότι δίδει καθαρὸν κέρδος 240 νομισματικὰς μονάδας ( $40 \times 6$ ). Τὸ καθαρὸν κέρδος καταγράφεται ὡς πρῶτον στοιχείον τῆς τελευταίας σειρᾶς ('). Παρατηροῦμεν ὁμῶς ἐπίσης ὅτι δύο ἐκ τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς φέρουν ἀρνητικὸν σημεῖον, ὅπερ σημαίνει ὅτι εἶναι δυνατὴ περαιτέρω βελτίωσις τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως δι' εἰσαγωγῆς εἰς τὴν βάση τοῦ διανύσματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τὸ ἀρνητικὸν στοιχείον μὲ τὴν μεγαλύτεραν ἀπόλυτον τιμὴν ἤτοι τοῦ  $\Pi_2$  καὶ δι' ἀφαιρέσεως  $\Pi_6$ , ἐπειδὴ  $20/2 < 70/1$ . Ἐπομένως οἱ ὑπολογισμοὶ δεόν νὰ συνεχισθοῦν διὰ τὴν κατάρτισιν νέου πινακίου.

1. Τὸ στοιχείον αὐτὸ μολονότι δὲν ὑποδηλοῖ ὀριακὸν κέρδος, τίθεται εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν διότι ἐξομοιοῦται ὑπολογιστικῶς πρὸς τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς σειρᾶς ταύτης.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ δίδομεν τὸ γενικὸν κριτήριον τῆς μεθόδου simplex περὶ τῆς συνεχίσεως ἢ μὴ τῶν ὑπολογισμῶν.

Κριτήριον simplex. Μετὰ τὴν κατάρτισιν ἐκάστου πινακίου:

1) Ἄν ἐν ἡ περισσότερα στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς φέρουν ἀρνητικὸν σημεῖον, βελτίωσις τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος εἶναι δυνατὴ, καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ συνεχίζονται, ἐκτός, 2) ἂν πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος εἶναι μὴ θετικά (1) ὁπότε συνήθως σημαίνει ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει λαθασμένην διατύπωσιν· 3) ἂν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι μὴ ἀρνητικά (2), τὸ ἐν λόγῳ πινάκιον περιέχει τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ πρέπει νὰ σταματήσουν. Τὸ μέγιστον οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα δίδεται ἐκ τοῦ πρώτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς.

Συνέχεια ὑπολογισμῶν. Ἡ κατάστρωσις τοῦ ἑπομένου πινακίου γίνεται βάσει τῶν πληροφοριῶν τοῦ πινακίου β', ὅπως ἀκριβῶς ἐγένετο ἡ κατάστρωσις τοῦ πινακίου β' βάσει τῶν πληροφοριῶν τοῦ πινακίου α'.

Πινάκιον γ'.

K.K. →						2	2	3	4	6
	B	$\Pi_0$	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$	$\Pi_4$	$\Pi_5$	$\Pi_6$	$\Pi_7$	$\Pi_8$
→ 2	$\Pi_2$	10	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			1		$\frac{1}{2}$	
6	$\Pi_5$	40		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	$\Pi_6$	60	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2		1	$-\frac{1}{2}$	
O.K. →		260	1	2		4				

Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τοῦ πινακ. γ' συνάγεται ὅτι: α) Τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ νέου προγράμματος (260 ν.μ.) εἶναι ἀνώτερον τοῦ καθαροῦ κέρδους τοῦ προηγουμένου προγράμματος (240 ν.μ.). β) Οὐδὲν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι ἀρνητικόν· συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον simplex, τὸ πινάκιον γ' περιέχει τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως, ἦτοι  $\Pi_2$ : 10,  $\Pi_5$ : 40 καὶ  $\Pi_8$ : 60 καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ πρέπει νὰ σταματήσουν. Τὸ ζητούμενον μέγιστον κέρδος εἶναι 260 νομισματικαὶ μονάδες.

Τὰ ἀποτελέσματα τοῦ πινακ. β' ἱκανοποιοῦν ἐπίσης τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος. Οὕτω ἔχομεν:

1. Ἦτοι ἀρνητικά ἢ μηδέν.

2. Ἦτοι θετικά ἢ μηδέν.

$$\begin{aligned}
 \text{Ἐπίπεδον δράσεως } \Pi_1 &= \lambda_1 = 0 \\
 \text{» } \text{»} \quad \Pi_2 &= \lambda_2 = 10 \\
 \text{» } \text{»} \quad \Pi_3 &= \lambda_3 = 0 \\
 \text{» } \text{»} \quad \Pi_4 &= \lambda_4 = 0 \\
 \text{» } \text{»} \quad \Pi_5 &= \lambda_5 = 40 \\
 \text{Ἐπίπεδον ἀδρανείας } \Pi_6 &= \lambda_6 = 0 \\
 \text{» } \text{»} \quad \Pi_7 &= \lambda_7 = 0 \\
 \text{» } \text{»} \quad \Pi_8 &= \lambda_8 = 60 \text{ (')}
 \end{aligned}$$

Συνεπῶς αἱ (5) καὶ (6) γίνονται :

$$\varphi(\lambda) = 2 \times 0 + 2 \times 10 + 3 \times 0 + 4 \times 0 + 6 \times 40 = 260 = \text{μέγιστον}$$

καὶ  $0 \cdot \Pi_1 + 10 \cdot \Pi_2 + 0 \cdot \Pi_3 + 0 \cdot \Pi_4 + 40 \cdot \Pi_5 + 0 \cdot \Pi_6 + 0 \cdot \Pi_7 + 60 \cdot \Pi_8 = \Pi_0$  ἢ ἀναλυτικώτερον :

$$0 \times 2 + 10 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 2 + 40 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 0 + 60 \times 0 = 100$$

$$0 \times 2 + 10 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 40 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 1 + 60 \times 0 = 80$$

$$0 \times 0 + 10 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 1 + 40 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 60 \times 1 = 150$$

Ἐκθέτομεν κατωτέρω συστηματικῶς τὸ εὐρεθὲν πρόγραμμα :

« Ἄριστον » πρόγραμμα δράσεως τῆς ἐπιχειρήσεως Α.

Ἐπιλεγείσαι Παραγ. Διαδικασίαι (Ε.π.δ.)	Ἐπίπεδον δράσεως Ε.π.δ.	Κέρδος κατὰ μονάδα Ε.π.δ.	Σύνολον κέρδος ἐξ ἐκάστης Ε.π.δ.	Συνολικὸν κέρδος τοῦ προγράμματος	Ἀχρησιμοπ. ποσότης συντ/στῶν
$\Pi_2$	10	2	20	260	60 μον. ἐκ τοῦ συντ. γ
$\Pi_5$	40	6	240		

#### 4. Παρατηρήσεις.

1. Τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πίνακίου μεγιστοποιήσεως (2) παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον.

α) Τὸ πρῶτον στοιχεῖον παριστᾷ πάντοτε τὸ «μέγιστον» δυνατόν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα (κέρδος, παραγωγή κλπ.).

β) Ἄν πολλαπλασιάσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ διανύσματα ἀδρανείας, ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων διαθεσίμων

1. Ἡ μὴ χρησιμοποίησις τῶν 60 μονάδων ὀφείλεται προφανῶς εἰς τὴν ἔλλειψιν ἀντιστοιχῶν ποσοτήτων ἐκ τῶν συμπληρωματικῶν συντελεστῶν  $\alpha$  καὶ  $\beta$  (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν).

2. «Πινάκιον μεγιστοποιήσεως» καλεῖται συνήθως τὸ τελευταῖον πινάκιον τῶν ὑπολογισμῶν εἰς τὰ προβλήματα μεγιστοποιήσεως.

ποσοτήτων συντελεστών παραγωγής και προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα, λαμβάνομεν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος. Οὕτω ἐνταῦθα:  $1 \times 100 + 2 \times 80 + 0 \times 150 = 260$ .

Ἡ σχέσις αὕτη ὀφείλεται εἰς τὴν λεγομένην «δυναδικήν» φύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἕκαστον πρόβλημα μεγιστοποιήσεως ἔχει λύσιν ἴσην πρὸς τὴν λύσιν τοῦ ἀντιστοίχου «διδύμου προβλήματος» ἐλαχιστοποιήσεως καὶ ἀντιστρόφως. Αἱ λύσεις τῶν δύο προβλημάτων δίδονται ὑπὸ τοῦ τελικοῦ πινακίου τῶν ὑπολογισμῶν. Ἐνταῦθα τὰ στοιχεῖα 1, 2, 0 τῆς τελευταίας σειρᾶς, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ διανύσματα ἀδρανεῖας, εἶναι λύσεις τοῦ διδύμου προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως. Ἡ ἀνάπτυξις τῆς σημασίας τῆς δυναδικῆς φύσεως τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἐκφεύγει τῶν πλαισίων τῆς παρούσης εἰσαγωγικῆς ἐργασίας. Τὴν ἀνωτέρω ἀναφερθεῖσαν σχέσιν δυνάμεθα ἐν τούτοις νὰ χρησιμοποιήσωμεν πρὸς τελικὸν ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῶν ὑπολογισμῶν. Ἄν, ὁ ἐν ἀρχῇ τῆς παρούσης παραγράφου (β) ἀναφερόμενος ὑπολογισμὸς, δίδῃ ἀποτέλεσμα διάφορον τοῦ πρώτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς, τότε οἱ ὑπολογισμοὶ εἶναι λαθασμένοι.

γ) Τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι μὴ ἀρνητικά· τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ εἰσαγωγή εἰς τὴν βᾶσιν ἐνὸς ἐκ τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων δὲν αὐξάνει τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα, δυνατὸν δὲ νὰ τὸ μειώσῃ (περίπτωσης τοῦ Π<sub>1</sub>).

2. Ὑπετέθη ὅτι ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων ἐξ ἐνὸς συντελεστοῦ δὲν ζημιώνει τὴν ἐπιχείρησιν. Ἄν ὅμως αἱ μὴ χρησιμοποιούμεναι ποσότητες προκαλοῦν ζημίας, λόγῳ π.χ. ἀδυναμίας διατηρήσεως αὐτῶν ἢ ἐξόδων ἀποθηκείσεως κλπ., τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως πρέπει νὰ μειωθῇ ἀντιστοίχως. Εἶναι δυνατὸν τότε νὰ ἀπαιτηθῶσιν συνέχισις τῶν ὑπολογισμῶν πρὸς εὐρεσιν καλλιτέρου προγράμματος ὑπὸ τὰς νέας συνθήκας (!).

3. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πινακίων ὑπολογισμοῦ δὲν εἶναι συνήθως μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς, δυνατὸν δὲ νὰ εἶναι πολὺ μικρότερος. Πρὸς διευκόλυνσιν τῶν ὑπολογισμῶν συνιστῶνται τὰ ἀκόλουθα: α) Χρῆσις τετραγωνισμένου χάρτου διὰ τὴν κατάστρωσιν τῶν πινακίων. β) Ἐνσωμάτωσις τῶν πινακίων εἰς ἓνα συνεχῆ πίνακα, οὕτως ὥστε νὰ ἀποφεύγεται ἡ ἐπανάληψις τῶν δύο πρώτων σειρῶν καὶ νὰ διευκολύνεται ὁ ὑπολογισμὸς ἕκαστου πινακίου δι' ἀμέσου συσχετίσεως πρὸς τὸ προηγούμενον πινακίον. γ) Ὅταν τὸ «εἰσέρχόμενον» διάνυσμα ἔχει ἐν ἡ περισσώτερα μηδενικά στοιχεῖα, τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα κείνται ἐπὶ τῶν σειρῶν τῶν μηδενικῶν στοιχείων, μεταφέρονται ἀναλλοίωτα εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τοῦ νεο-καταρτιζομένου πινακίου. Ὅμοίως, πάντα τὰ στοιχεῖα

1. Ἡ περίπτωση αὕτη μολοῦντι ἀναμφισβητήτου πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος δὲν ἀναφέρεται εἰς τὴν φιλολογοῖαν τοῦ Γ.Π. Ὁ γράφων διεβεβαίωθη κατόπιν ἐπανειλημμένων πειραματισμῶν, ὅτι ὁ χειρισμὸς τῆς παρούσης περιπτώσεως εἶναι δυνατὸς ἀνευ οὐσιαστικῆς ἀλλοιώσεως τῆς περιγραφείσης τεχνικῆς.

τῶν στηλῶν αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς μηδενικά στοιχεῖα τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος μεταφέρονται ἀναλλοίωτα εἰς τὰς ἀντιστοίχους θέσεις τοῦ νεοκαρτιζομένου πινακίου. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν μηδενισμόν τοῦ ὑπὸ στοιχ. δ, παρ. 3 τοῦ παρόντος τμήματος (δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν) προσδιοριζομένου γινομένου. Εἰς τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις εἶναι, νομίζομεν, σκόπιμον νὰ σημειοῦνται αἱ ἐν λόγῳ στηλαὶ ἢ σειραὶ, τὰ δὲ στοιχεῖα τῶν νὰ μεταφέρονται ἀμέσως εἰς τὸ νέον πινάκιον.

4. Εἶναι δυνατὴ ἡ παράλειψις τῶν διανυσμάτων ἀδρανεῖας πρὸς συντόμεισιν τῶν ὑπολογισμῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ἐξασφαλίζεται ὅμως τὸ ὑπ' ἀριθ. (1) ἀνωτέρω, κριτήριον τελικοῦ ἐλέγχου.

5. Τὸ ληφθὲν ἐνταῦθα πρόβλημα εἶναι βεβαίως εὐκολώτατον (!) καὶ δύναται νὰ λυθῆ καὶ δι' ἄλλων μεθόδων. Ἡ μέθοδος *simplex* ἐσχεδιάσθη διὰ τὴν λύσιν πολὺ συνθετωτέρων προβλημάτων. Ἐχρησιμοποιήσαμεν ἐν τούτοις τὸ ἀνωτέρω ἀπλοῦν πρόβλημα δι' εὐκολίαν ἀναπτύξεως τῆς μεθόδου καὶ διότι ἡ διαδικασία λύσεως τῶν συνθέτων προβλημάτων εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἴδια μὲ τὴν ἐνταῦθα χρησιμοποιηθεῖσαν.

6. Διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως ἀκολουθεῖται ἡ περιγραφείσα διαδικασία τῆς μεθόδου *simplex*, μὲ μικρὰς μόνον ἀλλαγὰς ὑπαγορευομένας ὑπὸ τῆς φύσεως τῶν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως (\*).

##### 5. Περίληψις.

Ἡ διαδικασία λύσεως τῶν προβλημάτων μεγιστοποιήσεως δύναται νὰ συνοψισθῆ ὡς ἀκολούθως :

α) Ταξινόμησις καὶ ἔλεγχος τῶν πληροφοριῶν. Ἀπαιτοῦνται συνήθως πληροφοραὶ περὶ : 1) τῆς ποσότητος καὶ τοῦ εἶδους τῶν διαθεσίμων οικονομικῶν μέσων (συντελεστῶν παραγωγῆς ὑπὸ εὐρείαν ἔννοιαν), 2) τῶν διαθεσίμων μεθόδων δράσεως (παραγωγικῶν διαδικασιῶν ὑπὸ εὐρείαν ἔννοιαν) καὶ 3) τοῦ οικονομικοῦ ἀποτελέσματος (κέρδους, παραγωγῆς κλπ.) τὸ ὁποῖον ἐπιζητεῖται ὅπως καταστῆ μέγιστον.

β) Ἐπιλογή διανυσμάτων ἀδρανεῖας.

γ) Διατύπωσις τοῦ προβλήματος (καὶ ἔλεγχος τῆς «γραμμικότητος» αὐτοῦ.)

δ) Κατάρτισις τοῦ πινακίου α' δι' εἰσαγωγῆς τῶν πληροφοριῶν καὶ τῶν διανυσμάτων ἀδρανεῖας εἰς τὰς οἰκείας θέσεις καὶ δι' ἐγγραφῆς τῶν στοιχείων τῆς πρώτης σειρᾶς εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς τελευταίας σειρᾶς μὲ ἀντίθετον σημεῖον.

1. Μὲ ὀλίγην πείραν ἡ ἐκτέλεσις τῶν ὑπολογισμῶν δύναται νὰ γίνῃ ἐντὸς πενταλέπτου.

2. Charnes A., W. W. Cooper, and A. Henderson. «An introduction to Linear Programming», New York, 1953. Neuman, P., «Some calculations of least - cost diets», Oxford Bulletin of Statistics, Aug. 1954.

ε) Καθορισμός του «είσερχομένου» διανύσματος (ώς ἐν παρ. 3 ἀνωτέρω, πρώτον στάδιον ὑπολογισμῶν).

ς) Καθορισμός του «ἐξερχομένου» διανύσματος (ώς ἐν παρ. 3, πρώτου σταδίου υπολογισμῶν).

ζ) Κατάστροφαις του δευτέρου πινακίου ὡς ἀκολουθῶς :

1) Εἰσαγωγή του νέου διανύσματος εἰς τὴν βᾶσιν.

2) Ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων τῆς σειρᾶς ἐναντι τοῦ νέου διανύσματος (ὡς ἐν παρ. 3, δεύτερον στάδιον ὑπολογ.).

3) Ὑπολογισμὸς τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ πινακίου (ὡς ἐν παρ. 3, δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν).

η) Ἐπισκόπησις του δευτέρου πινακίου πρὸς καθορισμὸν :

1) Τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος τοῦ νέου προγράμματος.

2) Τῆς δυνατότητος περαιτέρω βελτιώσεως τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος (ἐφαρμογὴ «κριτηρίου simplex»).

\*Ἄν ὑπάρχη δυνατότης βελτιώσεως, τότε ἐπιβάλλεται :

θ) Κατάρτισις τρίτου πινακίου κατὰ τὰ γνωστά, κ.ο.κ. μέχρις ὅτου ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ κριτηρίου simplex δείξη ὅτι ἐπετεύχθη τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως ἢ ὅτι λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἀδύνατος.

ι) Ἐλεγχος τῆς ὀρθότητος τῶν ἐγγραφῶν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ὑπὸ στοιχ. β' τῆς παρ. 4 κριτηρίου.

ια) Ἐλεγχος τῆς οἰκονομικῆς λογικῆς τοῦ «ἄριστου» προγράμματος δράσεως διὰ συσχετίσεως πρὸς τὰ δεδομένα καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος.

ιβ) Συστηματικὴ ἐκθεσις τοῦ εὐρεθέντος «ἄριστου» προγράμματος δράσεως διὰ σαφοῦς καθορισμοῦ : 1) τοῦ εἴδους καὶ τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν, 2) τοῦ συνολικῶς ἐπιτυγχανομένου οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ προγράμματος, 3) τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τοῦ προγράμματος ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς.



## ΔΥΟ ΜΕΘΟΔΟΙ

### ΔΥΣΕΩΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ (1)

Υπό ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Θ. ΚΟΥΛΟΥΡΙΑΝΟΥ

#### Α. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ἢ ΔΙΑΝΟΜΗΣ

Ἡ μέθοδος τῆς μεταφορᾶς ἢ διανομῆς (transportation or distribution method) εἶναι μία εἰδικὴ μορφή τῆς μεθόδου Simplex, χρησιμοποιουμένη κυρίως διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων μεταφορᾶς ἢ διανομῆς πρώτων ὑλών καὶ ἐτοιμῶν προϊόντων ἀπὸ τὰ κέντρα παραγωγῆς εἰς τὰ κέντρα καταναλώσεως εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται τὸ χαμηλότερον μεταφορικὸν κόστος. Ἀρχικῶς, ἡ ἐξεταζομένη ἐνταῦθα μέθοδος ἐχρησιμοποιήθη εἰς τὰς βιομηχανίας πετρελαίου πρὸς ἐξεύρεσιν τοῦ πλέον οἰκονομικοῦ τρόπου διανομῆς τῶν προϊόντων τούτων ἀπὸ διυλιστήρια ἐγκατεστημένα εἰς διαφόρους περιοχὰς μιᾶς χώρας εἰς τὰ κέντρα καταναλώσεως. Τὸ γεγονός ὅτι ἡ μέθοδος τῆς μεταφορᾶς ἢ διανομῆς χρησιμοποιεῖται κυρίως διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων μεταφορικοῦ κόστους δὲν σημαίνει ὅτι αὕτη δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῆ ἕξ ἴσου ἀποτελεσματικῶς καὶ διὰ τὴν λύσιν ἄλλης μορφῆς προβλημάτων. Προβλήματα ὡς τῆς κατανομῆς παραγγελιῶν εἰς διάφορα ἐργοστάσια ἢ τμήματα ἐνὸς ἐργοστασίου πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ μεγαλύτερου δυνατοῦ κέρδους λύνονται διὰ τῆς ἐν λόγω μεθόδου ἕξ ἴσου καλῶς ὅσον καὶ δι' ἄλλων ὑπολογιστικῶν μεθόδων.

Τὸ μεγαλύτερον πλεονέκτημα τῆς μεθόδου μεταφορᾶς ἢ διανομῆς εἶναι ἡ ἀπλότης αὐτῆς καὶ ἐπομένως ἡ δυνατότης χρησιμοποίησέως τῆς καὶ ὑπὸ ὑπαλλήλων στερουμένων εἰδικῆς μορφώσεως. Προβλήματα μεταφορᾶς τὰ ὅποια ἀντιμετωπίζουν ἐπιχειρήσεις μέσου καὶ μεγάλου μεγέθους δύναται νὰ λυθοῦν διὰ τῆς ἐν λόγω μεθόδου ὑπὸ ὑπαλλήλου στερουμένου εἰδικῆς μορφώσεως ἐντὸς ὀλίγων ὥρῶν καὶ διὰ τῆς χρησιμοποίησεως τῶν συνήθων μηχανῶν γραφείου χωρὶς νὰ ἀπαιτῆται ἡ προσφυγὴ εἰς ἠλεκτρονικὰς ἀριθμομηχανάς. Κατὰ τὴν λύσιν προβλημάτων Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ διὰ τῆς μεθόδου

1) Ἡ παρούσα ἀνάλυσις βασίζεται κυρίως εἰς τὴν ἐργασίαν τῶν R. O. Ferguson καὶ L. F. Sargent «Linear Programming : Fundamentals and Applications» New York 1958.

τῆς μεταφορᾶς ἢ διανομῆς ὡς καὶ διὰ πάσης ἄλλης ὑπολογιστικῆς μεθόδου θεωρεῖται ὅτι ἰσχύουν αἱ βασικαὶ ὑποθέσεις τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως (1).

Ἀπαραίτητος προϋπόθεσις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου μεταφορᾶς ἢ διανομῆς εἶναι ἡ ἰσότης προσφορᾶς καὶ ζητήσεως. Ἡ πρὸς διανομὴν δηλαδὴ ποσότης πρώτων ὑλῶν ἢ ἐτοιμῶν προϊόντων καὶ ἡ ζητούμενη ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι, ἢ αἱ πρὸς ἐκτέλεσιν παραγγελίαι πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι, μὲ τὴν διαθέσιμον δυναμικότητα τῶν ἐγκαταστάσεων. Ἐπὶ τῆς ἀναγκαίας αὐτῆς προϋποθέσεως δύναται βεβαίως νὰ ἀντιταχθῆ ὅτι ἡ ἰσότης αὕτη δὲν συναντᾶται πάντοτε εἰς τὴν πραγματικότητα, τοῦτο ὅμως δὲν ἀποτελεῖ ἐμπόδιον χρησιμοποίησεως τῆς μεθόδου, διότι ἂν ἐπὶ παραδείγματι ἡ ζήτησις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς προσφορᾶς ἢ ἐπιχειρήσις δύναται νὰ ἀνταποκριθῆ εἰς τὴν μεγαλυτέραν ζήτησιν δι' ἀγορᾶς μέρους τῆς ἀπαιτουμένης ποσότητος ἐξ ἄλλων ἐπιχειρήσεων, ὁπότε ὡς κέρδος κατὰ μονάδα θὰ θεωρηθῆ ἡ διαφορά μεταξύ τιμῆς ἀγορᾶς καὶ τιμῆς πωλήσεως. Ἐὰν ἀντιθέτως ἡ ζήτησις εἶναι μικροτέρα τῆς προσφορᾶς ἢ ἐπιχειρήσις θὰ ἐμφανίξῃ ἀργοῦσαν παραγωγικὴν δυναμικότητα, ἣτις πιθανὸν νὰ αὐξάνῃ τὸ κατὰ μονάδα κόστος τῶν παραγομένων ἢ μεταφερομένων προϊόντων.

Ἐνταῦθα θὰ ὑπεθυμίσωμεν ὅτι τὰ ὑπὸ τῆς μεθόδου μεταφορᾶς ἢ διανομῆς λυόμενα προβλήματα, ὡς προβλήματα Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως ἢ μεγιστοποιήσεως.

Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον μεταφορᾶς ἢ διανομῆς θὰ πρέπει νὰ γνωρίζωμεν: α) τὴν πρὸς διανομὴν ποσότητα ἐκάστου κέντρου παραγωγῆς ἢ τὴν διαθέσιμον δυναμικότητα ἐκάστου ἐργοστασίου, β) τὴν ζητούμενην ποσότητα ἐκάστου κέντρου καταναλώσεως ἢ τὴν ποσότητα ἐκάστης παραγγελίας καὶ γ) τὸ κατὰ μονάδα μεταφορικὸν κόστος ἐξ ἐκάστου κέντρου παραγωγῆς πρὸς ἕκαστον κέντρον καταναλώσεως ἢ τὸ κατὰ μονάδα κέρδος ἐκάστης παραγγελίας ἐκτελουμένης ὑπὸ τῶν διαφόρων ἐργοστασίων, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν πρόκειται περὶ ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ συνολικοῦ μεταφορικοῦ κόστους ἢ μεγιστοποιήσεως τοῦ συνολικοῦ κέρδους.

Αἱ ἀνωτέρω ἀπαραίτητοι πληροφoρία διαφέρουν προφανῶς ἀναλόγως τῆς φύσεως τοῦ ὑπὸ λύσιν προβλήματος.

Νομίζομεν ὅτι ἡ ἀπλῆ περιγραφή μιᾶς ὑπολογιστικῆς μεθόδου διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως ὠρισμένων κανόνων οἵτινες θὰ πρέπει νὰ τηρηθοῦν δὲν εἶναι ὁ καλύτερος τρόπος νὰ ἐννοήσῃ ὁ ἀναγνώστης τὰ πλεονεκτήματα τῆς μεθόδου καὶ νὰ δυνηθῆ νὰ ἐφαρμόσῃ αὐτὴν διὰ τὴν λύσιν συγκεκριμένων προβλημάτων. Ἀντιθέτως, ἡ λύσις ἐνὸς προβλήματος θὰ δώσῃ εἰς τὸν ἀναγνώστην τὴν ἱκανότητα ἀφ' ἐνὸς μὲν νὰ ἐννοήσῃ πληρέστερον τὴν μέθοδον, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ καταφεύγῃ εἰς αὐτὸ ὡς ἀκίς ἀντιμετωπίζῃ δυσκολίας κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν αὐτῆς εἰς τὴν πρᾶξιν.

Κατωτέρω παραθέτομεν τὰς γενικὰς γραμμὰς τῆς μεθόδου μεταφορᾶς ἢ

1) Ἰδε Α. Α. Λάζαρη «Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς» εἰς Ἐπιθ. Οἰκ. καὶ Κοινων. Ἐπισημῶν 1956.

διανομῆς λύοντες συγχρόνως ἐν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως μεταφορικοῦ κόστους.

**Τὸ πρόβλημα (1)**

α) Δεδομένα. Οἱ κυλινδρόμυλοι Θεσσαλονίκης, Πειραιῶς, Καλαμάτας καὶ Χανίων ἐφοδιάζουν δι' ἀλεύρων τὰς πόλεις Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ Ζ.

Ἡ ἡμερησία παραγωγή ἀλεύρων τῶν κυλινδρομύλων ἔχει ὡς κάτωθι :

Θεσσαλονίκη	80	τόννοι
Πειραιεὺς	92	»
Καλαμάτα	68	»
Χανιά	50	»
Σύνολον	290	»

Ἡ ὑφ' ἐκάστης πόλεως ζητούμενη ἡμερησίως ποσότης ἀλεύρων ἔχει ὡς ἑξῆς :

Πόλις Α	35	τόννοι
» Β	70	»
» Γ	50	»
» Δ	40	»
» Ε	48	»
» Ζ	67	»
Σύνολον	290	»

Τὸ μεταφορικὸν κόστος κατὰ τόννον ἀπὸ τὰ κέντρα παραγωγῆς εἰς τὰ κέντρα καταναλώσεως ἐμφαίνεται εἰς τὸν κατωτέρω παρατιθέμενον πίνακα :

**Πίναξ 1**  
Μεταφορικὸν κόστος κατὰ τόννον (εἰς δραχμὰς)

Κέντρα Καταναλώσεως Κέντρα Παραγωγῆς	Κέντρα Καταναλώσεως					
	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ
Θεσσαλονίκη	- 300	- 400	- 200	- 100	- 500	- 400
Πειραιεὺς	- 200	- 200	- 300	- 400	- 400	- 100
Καλαμάτα	- 300	- 200	- 400	- 400	- 100	- 300
Χανιά	- 400	- 100	- 400	- 500	- 100	- 200

1) Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι ὑποθετικά.

Τὰ ἀρνητικά σημεῖα εἰς τὸν πίνακα ἐτέθησαν ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον διὰ νὰ δηλώσουν ὅτι πρόκειται περὶ κόστους, πέραν τούτου οὐδεμίαν ἄλλην σημασίαν ἔχουν, ἂν ἐπρόκειτο δὲ περὶ προβλήματος μεγιστοποιήσεως κέρδους οἱ ἀριθμοὶ τοῦ πίνακος θὰ ἦτο θετικῶς προσηρμοσμένοι.

Ἡ ἀνάγνωσις τοῦ πίνακος 1 δὲν παρουσιάζει δυσκολίας, ἕκαστος ἀριθμὸς παριστᾷ τὸ κατὰ τόννον κόστος μεταφορᾶς ἐκ τοῦ κέντρου παραγωγῆς εἰς τὴν σειρὰν τοῦ ὁποίου ἀνήκει, εἰς τὸ κέντρον καταναλώσεως εἰς τὴν στήλην τοῦ ὁποίου περιλαμβάνεται. Οὕτω, ὁ ἄνω ἀριστερὰ ἀριθμὸς -300 σημαίνει ὅτι τὸ μεταφορικὸν κόστος ἐνὸς τόννου ἀλεύρου ἐκ Θεσσαλονίκης εἰς τὸ καταναλωτικὸν κέντρον Α ἀνέρχεται εἰς 300 δραχμάς, ἀνάλογος εἶναι ἡ σημασία καὶ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν τοῦ πίνακος.

β) Ζητεῖται: Νὰ προγραμματισθῇ ἡ διάθεσις τοῦ προϊόντος εἰς τὰ διάφορα καταναλωτικὰ κέντρα εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται τὸ μικρότερον σ υ ν ο λ ι κ ὸ ν μεταφορικὸν κόστος, λαμβανομένων φυσικὰ ὑπ' ὄψιν τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως ἑκάστου κέντρου.

### Περιγραφή τῆς μεθόδου καὶ λύσις τοῦ προβλήματος

#### 1. Ἐκπόνησις τοῦ πρώτου προγράμματος

Τοποθετοῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν ὁποίων δηλοῦνται τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως εἰς πίνακα διπλῆς εἰσόδου, ὡς ὁ πίναξ 2, εἰς

Πίναξ 2

(Α' Πρόγραμμα)	(εἰς τόννους)						
Κέντρο Κατα- ναλώσεως Κέντρα Παραγωγῆς	A	B	Γ	Δ	E	Z	Συνολικὸς Ποσότης
Θεσσαλονίκη	(35)	(45)					80 45 0
Πειραιεύς		(25)	(30)	(37)			92 67 37 0
Καλαμάτα				(3)	(48)	(17)	68 65 17 0
Χανιά						(50)	50 0
Συνολικὴ Ποσότης	35 0	70 25 0	30 0	40 3 0	48 0	67 50 0	290

τρόπον ὥστε ἡ διασταύρωσις ἐκάστης σειρᾶς μὲ ἐκάστην στήλην νὰ παριστᾶ μίαν δυνατὴν περίπτωσιν διαθέσεως τοῦ προϊόντος. Ὡς εἶναι προφανὲς δι' ἕκαστον καταναλωτικὸν κέντρον ὑφίστανται τόσαι περιπτώσεις ἐφοδιασμοῦ ὅσα τὰ κέντρα παραγωγῆς, καὶ διὰ τὰ κέντρα παραγωγῆς τόσαι περιπτώσεις διαθέσεως ὅσα τὰ κέντρα καταναλώσεως καὶ τοῦτο διότι ἅπασαι αἱ περιπτώσεις θεωροῦνται δυναταί.

Προχωροῦμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος διὰ τοῦ σχηματισμοῦ ἐνὸς πρώτου προγράμματος καὶ βελτιοῦμεν τοῦτο συνεχῶς ἕως ὅτου ἐπιτευχθῆ ἡ ἀρίστη λύσις. Ἡ ἐκπόνησις τοῦ πρώτου προγράμματος γίνεται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ «κανόνος τῆς Βορειοδυτικῆς γωνίας» (The Northwest Corner Rule), ὅστις εἰς γενικὰς γραμμάς ἔχει ὡς ἑξῆς (1): α) ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ἄνω ἀριστερὰ (Βορειοδυτικὸν) τετραγωνίδιον συγκρίνομεν τοὺς ἀριθμοὺς οἵτινες εὐρίσκονται ἐπὶ τῆς σειρᾶς καὶ στήλης εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τετραγωνίδιον καὶ παριστοῦν τὴν διαθέσιμον καὶ ζητουμένην ποσότητα τῶν κέντρων παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως τῆς ἐν λόγω σειρᾶς καὶ στήλης. Εἰς τὸ παράδειγμά μας οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι 80 καὶ 35, β) τοποθετοῦμεν τὸν μικρότερον ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν εἰς τὸ τετραγωνίδιον, θέτοντες αὐτὸν ἐντὸς κύκλου πρὸς διάκρισιν ἀπὸ ἄλλους ἀριθμοὺς οἱ ὅποιοι θὰ τοποθετηθοῦν ἀργότερον εἰς τὰ λοιπὰ τετραγωνίδια. Ἐὰν ὁ τοποθετούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος ὅστις παριστᾶ τὴν ὑπὸ τοῦ καταναλωτικοῦ κέντρου ζητουμένην ποσότητα, τότε προχωροῦμεν εἰς τὸ τετραγωνίδιον τῆς ἐπομένης στήλης, τῆς αὐτῆς σειρᾶς, συγκρίνοντες τὴν ὑπὸ τοῦ δευτέρου τούτου καταναλωτικοῦ κέντρου ζητουμένην ποσότητα μετὰ τῆς ὑπολοίπου διαθέσιμου ποσότητος τοῦ πρώτου κέντρου παραγωγῆς καὶ θέτομεν καὶ πάλιν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν εἰς τὸ τετραγωνίδιον. Ἡ ἐργασία συνεχίζεται ἕως ὅτου ὀλόκληρος ἡ διαθέσιμος ποσότης τοῦ κέντρου παραγωγῆς τῆς πρώτης σειρᾶς κατανεμηθῆ εἰς τὰ διάφορα κέντρα καταναλώσεως. Ἐὰν ὁ τοποθετούμενος (ὡς μικρότερος) ἀριθμὸς εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον παριστᾶ τὴν ὑπὸ τοῦ πρώτου κέντρου παραγωγῆς διαθέσιμον ποσότητα, τότε ἀντὶ τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ πορείας κινούμεθα πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ τῆς αὐτῆς στήλης ἕως ὅτου ὀλόκληρος ἡ ζήτησις τοῦ πρώτου καταναλωτικοῦ κέντρου ἱκανοποιηθῆ ἐκ τῶν διαφόρων κέντρων παραγωγῆς. Πρὸς διευκόλυνσιν τῆς ἐργασίας μετὰ ἀπὸ κάθε τοποθέτησιν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς ποσότητας τῆς τελευταίας σειρᾶς καὶ στήλης τὸν τοποθετούμενον εἰς τὸ τετραγωνίδιον ἀριθμὸν καὶ συνεχίζομεν τὰς συγκρίσεις μὲ τὰ ὑπόλοιπα. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν ἐργασίαν εἰς τὰς ὑπολοίπους σειρὰς καὶ στήλας κινούμενοι ὀριζοντίως ἕως ὅτου ἐξαντλήσωμεν τὴν διαθέσιμον ποσότητα τοῦ κέντρου παραγωγῆς καὶ ἐν συνεχείᾳ εἰς τὴν ἐπομένην σειρὰν καὶ καθέτως ἕως ὅτου ἱκανοποιηθῆ ὀλόκληρος ἡ ζήτησις τοῦ κέντρου καταναλώσεως, ὁπότε ἡ ἐργασία συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην στήλην.

Εἰς τὸ παράδειγμά μας ἡ πρώτη σύγκρισις γίνεται μετὰ τῶν ἀριθμῶν 80, τῆς πρώτης σειρᾶς, καὶ 35 τῆς πρώτης στήλης, τοποθετουμένου τοῦ

1) Ἴδε Ferguson and Sargent, «Linear Programming», σελίς 27.



τελευταίου εις τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον ὡς μικρότερου. Ἀφαιρούμενου τοῦ ποσοῦ τούτου, εις μὲν τὸ τελευταῖον τετραγωνίδιον τῆς πρώτης στήλης λαμβάνομεν ὑπόλοιπον μηδὲν εἰς δὲ τὸ τελευταῖον τετραγωνίδιον τῆς πρώτης σειρᾶς ὑπόλοιπον 45. Ἡ δευτέρα σύγκρισις γίνεται μεταξύ τοῦ 45 καὶ τοῦ 70 τῆς δευτέρας στήλης, τοποθετουμένου εἰς τὸ δεύτερον τετραγωνίδιον τῆς πρώτης σειρᾶς τοῦ ἀριθμοῦ 45. Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου λαμβάνομεν εἰς μὲν τὴν σειρὰν ὑπόλοιπον μηδὲν, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἐξηντήθη ἡ διαθέσιμος δυναμικότης τοῦ πρώτου κέντρου παραγωγῆς, εἰς δὲ τὴν στήλην ὑπόλοιπον 25, τὸ ὅποιον ἐν συνεχείᾳ συγκρίνομεν μὲ τὸ 92 τῆς δευτέρας σειρᾶς, τοποθετοῦμεν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν, ἀφαιροῦμεν κ.λ.π. ἕως ὅτου ἅπανα ἡ διαθέσιμος ποσότης τῶν κέντρων παραγωγῆς ἐξαντήθη καὶ ἡ ζήτησις τῶν κέντρων καταναλώσεως ἱκανοποιηθῆ, πρᾶγμα τὸ ὅποιον διαπιστοῦται ἀπὸ τὸ ἔαν τὸ τελευταῖον τετραγωνίδιον ἐκάστου κέντρου παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως δεικνύει ὑπόλοιπον μηδὲν. Οἱ τοποθετούμενοι εἰς τὸν πίνακα κύκλοι ἰσοῦνται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στηλῶν καὶ σειρῶν μείον ἐν. Εἰς τὸ παράδειγμά μας ὑπάρχουν 6 στήλαι καὶ 4 σειραὶ ὅποτε ἔχομεν κύκλους  $6 + 4 - 1 = 9$ . Ὁ ἐφαρμοσθεὶς κανὼν τῆς «Βορειοδυτικῆς γωνίας» δὲν εἶναι δεσμευτικός, ἡ ἐκκίνησις δύναται νὰ γίνῃ καὶ ἀπὸ οἰονδήποτε ἄλλο τετραγωνίδιον, ἡ ἐφαρμογὴ ὁμως τοῦ ἐν λόγω κανόνος εἰς τὴν πρᾶξιν ἀπέδειξεν ὅτι οὗτος μειώνει τὴν ἐργασίαν καὶ εὐκολύνει τοὺς ὑπολογισμοὺς. Διὰ τῆς τοποθετήσεως τῶν ἐντὸς κύκλων ἀριθμῶν εἰς τὰ ἐπιλεγέντα τετραγωνίδια σχηματίζεται ἐν νέφος κύκλων μὲ κατεύθυνσιν ἐκ τῶν ἄνω ἀριστερὰ πρὸς τὰ κάτω καὶ δεξιὰ. Ἡ ἐκπόνησις τοῦ πρώτου προγράμματος ἔχει ἐπιτευχθῆ καὶ ἐμφανίζεται εἰς τὸν πίνακα 2. Τὸ μεταφορικὸν κόστος ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πρώτου προγράμματος ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ πίνακος 2 ἐν συνδυασμῶ μὲ τὸν πίνακα 1 καὶ ἔχει ὡς κάτωθι :

<i>Θεσσαλονίκη</i>	<i>Πειραιὲς</i>	<i>Κυλαμάτα</i>	<i>Χανιά</i>
$35 \times -300 = -10.500$	$25 \times -200 = -5.000$	$3 \times -400 = -1.200$	$50 \times -200 = -10.000$
$45 \times -400 = -18.000$	$30 \times -300 = -9.000$	$48 \times -100 = -4.800$	
	$37 \times -400 = -14.800$	$17 \times -300 = -5.100$	
$-28.500$	$-28.800$	$-11.100$	$-10.000$
Συνολικὸν μεταφορικὸν κόστος $(-28.500) + (-28.800) + (-11.100) + (-10.000) = -78.400$			

## 2. Βελτίωσις τοῦ πρώτου προγράμματος πρὸς ἐπίτευξιν τῆς καλύτερας λύσεως

Ἡ ἐκπόνησις τοῦ πρώτου προγράμματος δὲν σημαίνει συγχρόνως καὶ τὴν ἐπίτευξιν τῆς ἀρίστης λύσεως, ὡς ἐκ τούτου εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἐλέγξωμεν κατὰ πόσον τὸ πρόγραμμα τοῦτο εἶναι τὸ οἰκονομικώτερον καὶ ἐν ἀρνητικῇ ἀπαντήσει νὰ ἐπιδιώξωμεν τὴν βελτίωσίν του.

Ὁ ἐλεγχος τοῦ προγράμματος γίνεται ὡς ἑξῆς :

α) Συμπληρώνομεν τὰ τετραγωνίδια εἰς τὰ ὅποια δὲν ἐτέθησαν ἀριθμοὶ ἐντὸς κύκλων ἀκολουθοῦντες τὴν κάτωθι διαδικασίαν. Ἐκ τοῦ τετραγωνίδιου



τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν συμπλήρωσιν,—εἶναι ἀδιάφορον ἀπὸ ποῖον τετραγωνίδιον θὰ ἀρχίσωμεν—κινούμεθα ὀριζοντίως ἐπὶ τῆς σειρᾶς εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει, πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἢ δεξιὰ, ἕως ὅτου συναντήσωμεν τετραγωνίδιον μὲ ἀριθμὸν ἐν κύκλῳ ἀπὸ τοῦ ὁποίου θὰ καταστήῃ δυνατὸν διὰ στροφῆς 90 μοιρῶν, κινούμενοι πλέον καθέτως, νὰ συναντήσωμεν ἄλλο τετραγωνίδιον μὲ ἀριθμὸν ἐν κύκλῳ ἐκ τοῦ ὁποίου διὰ στροφῆς ἐπίσης 90 μοιρῶν θὰ κατορθώσωμεν ἀπ' εὐθείας ἢ μέσῳ ἄλλων τετραγωνιδίων μὲ ἀριθμούς ἐντὸς κύκλου καὶ κινούμενοι διὰ στροφῶν τῆς αὐτῆς γωνίας νὰ φθάσωμεν εἰς κύκλον τοποθετημένον εἰς τὴν αὐτὴν στήλην μὲ τὸ τετραγωνίδιον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐκκινήσαμεν καὶ τοῦ ὁποίου ἐπιζητοῦμεν τὴν συμπλήρωσιν. Διευκρινίζεται ὅτι ἀκολουθοῦμεν τὸ συντομώτερον δρομολόγιον καὶ ὅτι τὰ ἐνδιάμεσα τετραγωνίδια, μετὰ κύκλων ἢ ἄνευ, ὑπερπηδῶνται. Τὰ κατωτέρω σχέδια 1 καὶ 2 καθιστοῦν σαφῆ τὴν ἀνωτέρω περιγραφεῖσαν διαδικασίαν.

Ἐνάλογον δρομολόγιον ἀκολουθεῖται προκειμένου καὶ περὶ τῶν λοιπῶν κενῶν τετραγωνιδίων.

Μετὰ τὴν χάραξιν τοῦ ἀκολουθητέου δρομολογίου θέτομεν ἐναλλάξ τὰ σημεῖα + καὶ - εἰς τὰ τετραγωνίδια τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποιήθησαν ὡς σταθμοὶ κατὰ τὴν πορείαν τῆς ἐργασίας καὶ μεταφέρομεν εἰς αὐτὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἀντιστοιχῶν τετραγωνιδίων τοῦ πίνακος 1 (πίναξ κόστους κατὰ μονάδα).

### Σ χ έ δ ι ο ν 1

Δρομολόγιον διὰ τὴν συμπλήρωσιν τοῦ τετραγωνιδίου Πειραιεύς, Α

Κέντρα Κα- ταναλώσεως Κέντρα Παραγωγῆς	A	B	
Θεσσαλονίκη	(35)	(45)	
Πειραιεύς		(25)	

Diagram illustrating the transportation route for the Piraeus square. The grid shows the following flow:

- From the square (35) in the Θεσσαλονίκη row, an arrow points left to the square (45) in the Θεσσαλονίκη row.
- From the square (45) in the Θεσσαλονίκη row, an arrow points down to the square (25) in the Πειραιεύς row.
- From the square (25) in the Πειραιεύς row, an arrow points left to the square (35) in the Θεσσαλονίκη row.

## Σ χ έ δ ι ο ν 2

Δρομολόγιον διά τήν συμπλήρωσιν τοῦ τετραγωνιδίου Θεσσαλονίκη, Ε

Κέντρα Κατα- ναλώσεως Κέντρα Παραγωγῆς	A	B	Γ	Δ	E
Θεσσαλονίκη	(35)	(45)			
Πειραιεύς		(25)	(30)	(37)	
Καλαμάτα				(3)	(48)

## Σ χ έ δ ι ο ν 3

Κέντρα Κα- ταναλώσεως Κέντρα Παραγωγῆς	A	B	Γ	Δ	E
Θεσσαλονίκη		+ - 400			- - 500
Πειραιεύς		- - 200		+ - 400	
Καλαμάτα				- - 400	+ - 100

Τò αὐτὸ κάμνομεν καί διά τὸ τετραγωνίδιον τοῦ ὁποῖου ἐπιζητοῦμεν τήν συμπλήρωσιν, εἰς τὸ τετραγωνίδιον τοῦτο θέτομεν ἀρνητικὸν σημεῖον. Ἐφαρμόζοντες τὰ ἀνωτέρω ἐπὶ τοῦ παραδείγματός μας καὶ συγκεκριμένως διά τήν συμπλήρωσιν τοῦ τετραγωνιδίου Θεσσαλονίκη, Ε, λαμβάνομεν τὸ σχέδιον 3.

Ἐκ τοῦ σχεδίου 3 εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν (θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν) ὅστις θὰ τεθῆ εἰς τὸ ὑπὸ συμπλήρωσιν τετραγωνίδιον. Πρὸς τοῦτο προσδιορίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν οἵτινες μετεφέρθησαν ἐκ τοῦ πίνακος 1 (πίναξ κόστους) προσημαίνοντες αὐτοὺς ἐναλλάξ διὰ + καὶ -, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τὸ τετραγωνίδιον τοῦ ὁποῖου ἐπιζητοῦμεν τὸν ἀριθμὸν. Διὰ τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα θὰ ἔχομεν :

$$500 - 400 + 200 - 400 + 400 - 100 = 200$$

Ὁ ἀριθμὸς 200 τίθεται εἰς τὸ τετραγωνίδιον Θεσσαλονίκη, E, τοῦ πίνακος 2 τοῦ ὁποῖου καὶ τὰ λοιπὰ τετραγωνίδια συμπληροῦνται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁπότε οὗτος λαμβάνει τὴν μορφήν τοῦ πίνακος 3.

Ἐφ' ὅσον εἰς τὸν πίνακα ὑπάρχει ἀρνητικὸς ἀριθμὸς τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ πρόγραμμα εἶναι ἐπιδεκτικὸν βελτιώσεως, ἥτις καθίσταται δυνατὴ διὰ μετακινήσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐν κύκλῳ πρὸς τὸ τετραγωνίδιον μὲ τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν. Ὅταν οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροὶ τοῦ ἑνός, τότε ἡ μετακίνησις γίνεται πρὸς τὸ τετραγωνίδιον μὲ τὸν μεγαλύτερον, κατ' ἀπόλυτον τιμὴν, ἀρνητικὸν ἀριθμὸν. Εἰς τὸν πίνακα 3 ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ -500 καὶ ἐπομένως τὸ τετραγωνίδιον πρὸς τὸ ὁποῖον θὰ μετακινηθῆ ἕνας ἀριθμὸς ἐν κύκλῳ εἶναι τὸ Θεσσαλονίκη, Δ. Ἐρωτᾶται ὁμως ποῖος ἀπὸ τοὺς εὐρισκομέ-

Πίναξ 3

(A' Πρόγραμμα)

Κέντρα Καταναλώσεως Κέντρα Παραγωγῆς	A	B	Γ	Δ	E	Z	Ἀναθεωρητὸς ποσότης
Θεσσαλονίκη	(35)	(45)	-300	-500	200	-100	80450
Πειραιεύς	100	(25)	(30)	(37)	300	-200	9267370
Καλαμάτα	200	0	100	(3)	(48)	(17)	6865770
Χανιά	400	0	200	200	100	(50)	500
Ἐπιθυμητὴ ποσότης	<del>35</del> 0	<del>70</del> 25 0	<del>30</del> 0	<del>40</del> 3 0	<del>48</del> 0	<del>67</del> 50 0	290

νους ἐντὸς κύκλων ἀριθμούς θὰ μετακινηθῆ; Ἀνατρέχουμεν εἰς τὸ ἀκολουθηθὲν δρομολόγιον πρὸς προσδιορισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ τετραγωνιδίου πρὸς τὸ ὁποῖον θὰ γίνῃ ἡ μετακίνησις καὶ ἐκ τῶν θετικῶς προσημανσμένων τετραγωνιδίων ἐπιλέγομεν ἐκεῖνο μὲ τὸν μικρότερον ἐν κύκλῳ ἀριθμὸν. Τὸ ἠκολουθηθὲν εἰς τὸ παράδειγμά μας δρομολόγιον ἐμφανίζεται εἰς τὸ σχέδιον 4.

Σ χ έ δ ι ο ν 4

Κέντρα Καταναλωθεῖς Κέντρα Παραγωγῆς	A	B	Γ	Δ
Θεσσαλονίκη	(35)	+ (45)	-300	-500
Πειραιεὺς		- (25)	(30)	+ (37)

Τὰ θετικῶς προσημανσμένα τετραγωνίδια εἶναι τὸ Θεσσαλονίκη, Β καὶ τὸ Πειραιεὺς, Δ μὲ τιμὰς 45 καὶ 37 ἀντιστοίχως καὶ ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς ὅστις θὰ πρέπει νὰ μετακινηθῆ εἶναι ὁ 37. Μετὰ τὴν ἐπιλογὴν τοῦ ἀριθμοῦ μεταθέτομεν τοῦτο εἰς τὸ τετραγωνίδιον μὲ τὸν μικρότερον, κατ' ἀπόλυτον τιμὴν, ἀρνητικὸν ἀριθμὸν καὶ τοποθετοῦμεν τοὺς ὑπολοίπους κύκλους εἰς τὰς προηγουμένας τῶν θέσεις ἀλλὰ ἄνευ ἀριθμῶν. Ἀκολουθοῦντες τὸν ἀρχικῶς ἐκτεθέντα κανόνα τῆς «Βορειοδυτικῆς γωνίας» συμπληρώνομεν τοὺς τοποθετηθέντας κενούς κύκλους διὰ καταλλήλων ἀριθμῶν σχηματίζοντες οὕτω ἐν νέον πρόγραμμα, τὸ ὁποῖον ἐν συνεχείᾳ, ἐλέγχωμεν ἂν εἶναι ἐπιδεκτικὸν βελτιώσεως καὶ ἡ ἐργασία συνεχίζεται ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς πρόγραμμα τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ τετραγωνίδια ἔχουν θετικούς ἀριθμούς. Τὸ τελευταῖον τοῦτο πρόγραμμα εἶναι τὸ πλέον οἰκονομικὸν καὶ τὸ τῆς ἐκτελέσεως του προκῦπτου μεταφορικὸν κόστος τὸ μικρότερον δυνατόν. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι εἶναι δυνατόν κατὰ τὴν πορείαν τῆς ἐργασίας ὁ ἀριθμὸς τῶν κύκλων νὰ καταστῆ μικρότερος τοῦ ἁθροίσματος τῶν σειρῶν καὶ στηλῶν μείον ἕνα, ὅποτε εἰς τὴν θέσιν τοῦ μετακινουμένου κύκλου ἀφίνομεν ἕνα κύκλον μὲ τιμὴν μηδὲν καὶ τὸν χειρίζομεθα ὡς θετικὸν ἀριθμὸν, εἰς τὸ παράδειγμά μας τοῦτο συνέβη εἰς τὸ 7ον πρόγραμμα.

Τὰ διάφορα προγράμματα ἀπὸ τοῦ δευτέρου μέχρι καὶ τοῦ τελευταίου

ὡς καὶ τὸ μεταφορικὸν κόστος ἐκάστου ἐμφανίζονται εἰς τὰς ἐπομένους σελίδας.

Ἐκ τῆς ἐπομένης σειρᾶς προγραμμάτων εἶναι ἐμφανῆς ἡ συνεχὴς μείωσις τοῦ μεταφορικοῦ κόστους ἕως τὸ ἑβδομον πρόγραμμα. Οὕτω, ἐκ κόστους 78.400 δραχμῶν τοῦ πρώτου προγράμματος καταλήγομεν εἰς κόστος 38.500 δραχμῶν τοῦ ἑβδόμου προγράμματος, ποσὸν μικρότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀρχικοῦ. Ἡ ἐκπόνησις τοῦ ὀγδοῦ προγράμματος ἐγένετο ἀπλῶς καὶ μόνον διὰ λόγους μεθοδολογικούς. Τὸ κόστος τοῦ προγράμματος τούτου εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ κόστος τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του διότι ἡ μετακινουμένη ἀξία τοῦ τετραγωνιδίου Χανιά, Ζ εἶναι μηδὲν καὶ ἐπομένως οὐδεμία μεταβολὴ εἰς τὸ πρόγραμμα διανομῆς ἐπέρχεται. Σχετικῶς μὲ τὴν ἀρίστην λύσιν τοῦ προβλήματος θὰ πρέπει νὰ σημειωθῇ τὸ ἑξῆς: Ἡ ἐκπόνησις τοῦ προγράμματος διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνεται τὸ χαμηλότερον μεταφορικὸν κόστος δὲν σημαίνει συγχρόνως ὅτι ἕκαστον καταναλωτικὸν κέντρον προμηθεύεται τὴν ἀναγκαιούσαν εἰς αὐτὸ ποσότητα ἀγαθῶν ἐκ τοῦ κέντρου ἐκείνου παραγωγῆς ἐκ τοῦ ὁποίου τὸ κόστος μεταφορᾶς τῶν ἀγαθῶν εἶναι τὸ χαμηλότερον. Ἡ διὰ τοῦ καλυτέρου προγράμματος ἐπίτευξις τοῦ μικρότερου κόστους ἀναφέρεται εἰς τὸ συνολικὸν μεταφορικὸν κόστος καὶ οὐχὶ εἰς τὸ κόστος μεταφορᾶς τῶν εἰς τὰ καθ' ἕκαστον καταναλωτικὰ κέντρα ἀναγκαιουσῶν ποσοτήτων. Οὕτω, εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐπιλυθὲν πρόβλημα ἐνῶ τὸ συνολικὸν μεταφορικὸν κόστος τοῦ ἑβδόμου προγράμματος εἶναι τὸ χαμηλότερον δυνατόν, διὰ τὸ καταναλωτικὸν κέντρον Α, ἐπὶ παραδείγματι, δὲν συμβαίνει τοῦτο. Προμηθευόμενον τὸ κέντρον Α, 10 τόννους ἐκ Θεσσαλονίκης καὶ 25 τόννους ἐκ Πειραιῶς πραγματοποιεῖ κόστος μεταφορᾶς  $10 \times 300 + 25 \times 200 = 8.000$  δραχμᾶς ἐνῶ ἂν ἐπρομηθεύετο ὁλόκληρον τὴν ἀναγκαιούσαν εἰς αὐτὸ ποσότητα ἐκ Πειραιῶς θὰ ἐπετύχανε κόστος  $35 \times 200 = 7.000$  δρχ. ἤτοι κατὰ 1.000 δρχ. μικρότερον τοῦ πραγματοποιημένου διὰ τοῦ καλυτέρου προγράμματος. Προφανῶς τοῦτο συμβαίνει διότι ἡ ὑπὸ τῶν κέντρων παραγωγῆς διαθέσιμος ποσότης ἐλήφθη ὡς δεδομένη καὶ ἐπομένως δὲν εἶναι δυνατὸς ὁ ἐφοδιασμὸς τῶν κέντρων καταναλώσεως ἐκ τοῦ κέντρου παραγωγῆς ἐκ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνουν τὸ χαμηλότερον μεταφορικὸν κόστος ὡσάκις ἡ ζητουμένη ποσότης εἶναι μεγαλύτερα τῆς ὑπὸ τοῦ κέντρου τούτου διατιθεμένης. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ὁ Πειραιεὺς εἶναι τὸ εὐθηνότερον κέντρον ἐφοδιασμοῦ τόσον διὰ τὸ καταναλωτικὸν κέντρον Α ὅσον καὶ διὰ τὸ Ζ, ἢ συνολικῶς ὅμως ζητουμένη ποσότης ὑπὸ τῶν κέντρων τούτων ἀνέρχεται εἰς  $35 + 67 = 102$  τόννους, ἧτις εἶναι μεγαλύτερα τῆς ποσότητος τῶν 92 τόννων, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ παράγουν ἡμερησίως οἱ κυλινδρόμυλοι τοῦ Πειραιῶς. Ὡς ἐκ τούτου παρίσταται ἀνάγκη εὐρέσεως προγράμματος διὰ τοῦ ὁποίου νὰ ἀλληλοσυμψηφίζονται αἱ ἐπὶ μέρος πρόσθετοι καὶ ἐξοικονομούμενοι δαπάναι εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται τὸ χαμηλότερον συνολικὸν μεταφορικὸν κόστος. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι προβλήματα τῆς μορφῆς τοῦ λυθέντος ἐνταῦθα ἔχουν ἔννοιαν μόνον εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας τὰ διάφορα παραγωγικὰ κέντρα ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν ἐπιχείρησιν ἢ τὸ πρόβλημα τοῦ κόστους ἐξετάζεται ἀπὸ κοινωνικοοικονομικῆς σκοπιᾶς.

## Πρόγραμμα

Κέντρα Κατα- Κέντρα γαλιώσε- παραγωγής	A	B	Γ	Δ	E	Z	Σταθμισμένος ποσοστός
Θεσσαλονίκη	(35)	(8)	-300	(37)	700	400	80-43-8-0
Πειραιεύς	100	(62)	(30)	500	800	300	92-30-0
Καλαμάτα	-300	-500	-400	(3)	(48)	(17)	68-65-17-0
Χανιά	-100	-500	-300	200	100	(50)	50-0.
Στοιχισμένη ποσότητα	$\frac{35}{0}$	$\frac{70}{62}$ 0	$\frac{30}{0}$	$\frac{40}{2}$ 0	$\frac{48}{0}$	$\frac{67}{50}$ 0	290

2<sup>ος</sup>3<sup>ος</sup>

Θεσσαλονίκη	(35)	(5)	-300	(40)	200	-100	80-40-5-0
Πειραιεύς	100	(62)	(30)	500	300	-200	92-30-0
Καλαμάτα	200	(3)	100	500	(48)	(17)	68-65-17-0
Χανιά	400	0	200	700	100	(50)	50-0
Στοιχισμένη ποσότητα	$\frac{35}{0}$	$\frac{30}{62}$ $\frac{67}{52}$ 0	$\frac{30}{0}$	$\frac{40}{0}$	$\frac{48}{0}$	$\frac{67}{50}$ 0	290

4<sup>ος</sup>

Θεσσαλονίκη	(35)	300	(5)	(40)	500	200	80-75-10-0
Πειραιεύς	-200	(67)	(25)	200	300	-200	92-67-0
Καλαμάτα	-100	(3)	100	200	(48)	(17)	68-65-17-0
Χανιά	100	0	200	400	100	(50)	50-0
Στοιχισμένη ποσότητα	$\frac{35}{0}$	$\frac{70}{3}$ 0	$\frac{30}{25}$ 0	$\frac{40}{0}$	$\frac{48}{0}$	$\frac{67}{50}$ 0	290



## Κόστος Προγράμματος

Θεσσαλονίκη	Περαίες	Καλαμάτα	Χανιά
$35 \times 300 = -10,500$	$62 \times 200 = -12,400$	$3 \times 400 = -1,200$	$50 \times 200 = -10,000$
$8 \times 400 = -3,200$	$30 \times 300 = -9,000$	$48 \times 100 = -4,800$	
$37 \times 100 = -3,700$		$17 \times 300 = -5,100$	
<u>-17,400</u>	<u>-21,400</u>	<u>-11,100</u>	<u>10,000</u>
Συνολικών μεταφορικών κόστος $-17,400 - 21,400 - 11,100 - 10,000 = -59,900$			

$35 \times 300 = -10,500$	$62 \times 200 = -12,400$	$3 \times 200 = -600$	$50 \times 200 = -10,000$
$5 \times 400 = -2,000$	$30 \times 300 = -9,000$	$48 \times 100 = -4,800$	
$40 \times 100 = -4,000$		$17 \times 300 = -5,100$	
<u>-16,500</u>	<u>-21,400</u>	<u>-10,500</u>	<u>-10,000</u>
Συνολικών μεταφορικών κόστος $-16,500 - 21,400 - 10,500 - 10,000 = -58,400$			

$35 \times 300 = -10,500$	$67 \times 200 = -13,400$	$3 \times 200 = -600$	$50 \times 200 = -10,000$
$5 \times 200 = -1,000$	$25 \times 300 = -7,500$	$48 \times 100 = -4,800$	
$40 \times 100 = -4,000$		$17 \times 300 = -5,100$	
<u>-15,500</u>	<u>-20,900</u>	<u>-10,500</u>	<u>-10,000</u>
Συνολικών μεταφορικών κόστος $-15,500 - 20,900 - 10,500 - 10,000 = -56,900$			

## Πρόγραμμα

5<sup>ο</sup>

Θεσσαλονίκη	(35)	300	(5)	(40)	500	400	92 45 50
Πειραιεύς	-200	(50)	(25)	200	300	(17)	92 75 500
Καλαμάτα	-100	(20)	100	200	(48)	200	68 48 0
Χανιά	-100	-200	0	200	-100	(50)	50 0
Σπουμένη Ποδοτής	35 0	70 20 0	20 25 0	40 0	48 0	67 53 0	290

6<sup>ο</sup>

Θεσσαλονίκη	(10)	100	(30)	(40)	300	200	92 70 30 0
Πειραιεύς	(25)	(50)	200	400	300	(17)	92 67 500
Καλαμάτα	100	(20)	300	400	(48)	200	68 48 0
Χανιά	100	-200	200	400	-100	(50)	50 0
Σπουμένη Ποδοτής	35 40 0	70 20 0	20 0	40 0	48 0	67 17 0	290

7<sup>ο</sup>

Θεσσαλονίκη	(10)	300	(30)	(40)	500	200	92 40 18 0
Πειραιεύς	(25)	200	200	400	500	(67)	92 25 0
Καλαμάτα	-100	(20)	100	200	(48)	0	68 20 0
Χανιά	100	(50)	200	400	100	(0)	50 0
Σπουμένη Ποδοτής	35 40 0	70 20 0	20 0	40 0	48 0	67 0	290

## Κόστος Προγράμματος

$35X - 300 = 19,500$	$50X - 200 = -10,000$	$20X - 200 = -4,000$	$50X - 200 = -10,000$
$5X - 200 = -1,000$	$25X - 300 = -7,500$	$48X - 100 = 4,800$	
$40X - 100 = -4,000$	$17X - 100 = -1,700$		
<u>-15,500</u>	<u>-19,200</u>	<u>-8,800</u>	<u>-10,000</u>
Συνολικών μεταβαρικών κόστους $-15,500 - 19,200 - 8,800 - 10,000 = -53,500$			

$10X - 300 = -3,000$	$25X - 200 = -5,000$	$26X - 200 = -4,000$	$50X - 200 = -10,000$
$30X - 200 = -6,000$	$50X - 200 = -10,000$	$48X - 100 = -4,800$	
$40X - 100 = -4,000$	$17X - 100 = -1,700$		
<u>-13,000</u>	<u>-16,700</u>	<u>-8,800</u>	<u>-10,000</u>
Συνολικών μεταβαρικών κόστους $-13,000 - 16,700 - 8,800 - 10,000 = -48,500$			

$10X - 300 = -3,000$	$25X - 200 = -5,000$	$20X - 200 = -4,000$	$50X - 100 = -5,000$
$30X - 200 = -6,000$	$67X - 100 = -6,700$	$48X - 100 = -4,800$	$0X - 100 = 0$
$40 - 100 = -4,000$			
<u>-13,000</u>	<u>-11,700</u>	<u>-8,800</u>	<u>-5,000</u>
Συνολικών μεταβαρικών κόστους $-13,000 - 11,700 - 8,800 - 5,000 = -38,500$			

## Πρόγραμμα

Θεσσαλονίκη	(10)	200	(30)	(40)	400	200	80.483.0
Πειραιώς	(25)	100	200	400	400	(57)	92.57.0
8ου Καλαμάτα	(0)	(20)	200	300	(48)	100	68.48.0
Χανιά	200	(50)	300	500	100	100	50.0
Στοιχισμένη ποσότητα	<del>25</del> 25 <del>10</del> 0	<del>20</del> 20 0	<del>30</del> 0	<del>40</del> 0	<del>48</del> 0	<del>57</del> 0	290

## Κόστος Προγράμματος

$10 \times -300 = -3.000$	$25 \times -200 = -5.000$	$0 \times -300 = - 0$	$50 \times -100 = -5.000$
$30 \times -200 = -6.000$	$67 \times -100 = -6.700$	$20 \times -200 = -4.000$	
$40 \times -100 = -4.000$		$48 \times -100 = -4.800$	
<u>-13.000</u>	<u>-11.700</u>	<u>-8.800</u>	<u>-5.000</u>
Συνολικών μεταφορικών κόστους $-13.000 - 11.700 - 8.800 - 5.000 = -38.500$			

## Β. ΜΕΘΟΔΟΣ MODI

Ἡ μέθοδος Modī ἢ «τροποποιημένη μέθοδος διανομῆς» (Modified Distribution Method), ὡς πολλάκις καλεῖται, βασίζεται ὡς καὶ ἡ Transportation Method ἐπὶ τῆς μεθόδου Simplex. Ὅπως ἡ Transportation Method, ἡ μέθοδος τῆς μεταφορᾶς, προέκυψε ἀπὸ τὴν Simplex ὡς μία εἰδικὴ ἀπλοποιημένη μέθοδος διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν εἰδικῶν προβλημάτων τῶν ἐπιχειρήσεων, οὕτω καὶ ἡ μέθοδος Modī προῆλθεν ἀπὸ τὴν μέθοδον τῆς μεταφορᾶς κατόπιν διαφορῶν προσθηκῶν καὶ ἀπλοποιήσεων, τὰς ὁποίας ὑπηγόρευσε ἡ ἐφαρμογὴ τῆς πρώτης εἰς τὴν πρᾶξιν καὶ ἡ ἀνάγκη ἀντιμετωπίσεως εἰδικῆς μορφῆς προβλημάτων τῆς ἐπιχειρηματικῆς ζωῆς κατὰ τὸν ἀπλούστερον δυνατὸν τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται ἐξοικονόμησις χρόνου καὶ προσπάθειας. Προβλήματα ὡς ἐκεῖνα τῆς κατανομῆς διαφορῶν παραγγελιῶν τῶν πελατῶν μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἰς διάφορα ἐργοστάσια ἢ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ μεγαλύτερου δυνατοῦ κέρδους ἢ τῆς ἐκτελέσεως τῶν παραγγελιῶν εἰς τὸν μικρότερον δυνατὸν χρόνον, ὡς καὶ προβλήματα παρεμφεροῦς μορφῆς ἀντιμετωπίζονται ἐπιτυχῶς διὰ τῆς μεθόδου Modī :

Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου Modī πρὸς λύσιν ἑνὸς προβλήματος ὡς καὶ κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν οἰασδήποτε ἄλλης μεθόδου Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι ἀναγκαῖον κατ' ἀρχὴν νὰ ἐξετάσωμεν κατὰ πόσον τὸ πρόβλημα εἶναι δεικτικὸν γραμμικῆς ἀναλύσεως, κατὰ πόσον δηλαδὴ εἶναι πρόβλημα Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον διαπιστοῦται ἐκ τοῦ ἐὰν δύναται νὰ γίνουσι δεκταὶ εἰς τὴν συγκεκριμένην περίπτωσιν αἱ βασικαὶ ὑποθέσεις τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, ὡς ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, τῆς διαιρετότητος κλπ. Ἐφ' ὅσον ἀποφανθῶμεν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι δεικτικὸν γραμμικοῦ χειρισμοῦ καὶ ἡ φύσις του εἶναι τοιαύτη ὥστε ἡ μέθοδος Modī νὰ κρίνεται ὡς ἡ πλέον κατάλληλος διὰ τὴν λύσιν του τότε τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος θὰ πρέπει νὰ πληροῦν τὰς κάτωθι προϋποθέσεις διὰ νὰ καταστήθῃ δυνατὴ ἡ χρησιμοποίησις τῆς ἐν λόγω μεθόδου.

α) Ἡ βασικὴ προϋπόθεσις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου Modī εἶναι ἡ ἔκφρασις τῶν ποσοτικῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος εἰς κοινὴν μονάδα μετρήσεως, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ἄμεσον συγκρισιμότητα τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος μειώνουσα οὕτω σημαντικῶς τοὺς ἀπαιτούμενους ὑπολογισμούς. Ἡ φύσις τῆς κοινῆς μονάδος μετρήμεως δύναται νὰ εἶναι οἰασδήποτε (χρηματικὴ μονάς, χρονικὴ μονάς κλπ.), χρησιμοποιεῖται ὁμως συνήθως ἡ ὥρα ἐργασίας μιᾶς μηχανῆς, ἐργοστασίου, ἐργάτου κλπ. θεωρουμένης ὡς

προτύπου (standard), όποτε τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, διά καταλλήλων ὑπολογισμῶν, ἐκφράζονται εἰς ὥρας προτύπου μηχανῆς, προτύπου ἐργοστασίου, προτύπου ἐργάτου κλπ. Εἶναι ἀληθές ὅτι ἡ ἐκφρασις αὕτη τῶν δεδομένων εἰς κοινὴν μονάδα μετρήσεως εἶναι δύσκολος ἐργασία ἀπαιτούσα πολλάκις μακροῦς ὑπολογισμοὺς, ὑποθέσεις, μετρήσεις καὶ ἐκτιμήσεις τῶν διαφόρων στοιχείων τοῦ προβλήματος, ἀλλὰ εἶναι ἐπίσης ἀληθές ὅτι ἅπαξ καὶ πραγματοποιηθῆ ἡ ἐργασία αὕτη, ἀφ' ἐνός μὲν οἱ μετέπειτα ὑπολογισμοὶ εἶναι πολὺ ὀλιγώτεροι τῶν ἀπαιτουμένων κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς Simplex, ἀφ' ἑτέρου δὲ αἱ καθωρισθεῖσαι σχέσεις δύναται νὰ χρησιμοποιοῦνται διά τὴν ἀντιμετώπισιν καὶ μελλοντικῶν προβλημάτων τῆς ἐπιχειρήσεως, ἐφ' ὅσον φυσικὰ δὲν ἐπῆλθον μεταβολαὶ εἰς τὴν φύσιν τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος.

β) Ἐτέρα ἀναγκαία προϋπόθεσις διά τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου Modi εἶναι ἡ ἰσότης ἀπαιτουμένων καὶ ζητουμένων. Ἡ ζητούμενη ποσότης ἀγαθῶν ἐκφραζομένη εἰς κοινὴν μονάδα μετρήσεως πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν διαθέσιμον παραγωγικὴν δυναμικότητα ἐκφραζομένην ἐπίσης εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως. Εἶναι ἀληθές ὅτι τοῦτο σπανίως συμβαίνει εἰς τὴν πράξιν. Εἰς τὰς πλείους τῶν περιπτώσεων ἡ διαθέσιμος παραγωγικὴ δυναμικότης εἶναι μεγαλύτερα ἢ μικρότερα τῆς ἀπαιτουμένης διά τὴν ἐκτέλεσιν τῶν παραγγελιῶν. Ἡ διαπίστωσις αὕτη δὲν ἀναιρεῖ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα περὶ ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου Modi διά τὴν λύσιν προβλημάτων αὐτῆς τῆς μορφῆς. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς γενομένης ἐνταῦθα ὑποθέσεως καὶ τῆς πραγματικότητος ἀντιμετωπίζεται διά τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ λεγομένου «εἰκονικοῦ προϊόντος» καὶ τῆς «εἰκονικῆς μηχανῆς», ἀναλόγως τοῦ ἀν ἡ ζητούμενη ποσότης εἶναι μικρότερα τῆς διαθέσιμου ἢ ἡ διαθέσιμος μικρότερα τῆς ζητούμενης ἀντιστοίχως. Διά τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ «εἰκονικοῦ προϊόντος» ὑποθέτομεν ὅτι ἡ διαθέσιμος ποσότης χρησιμοποιεῖται ὀλόκληρος ἀλλὰ τὸ προϊόν τὸ μὴ πράγματι παραγόμενον (εἰκονικὸν προϊόν) ἀποφέρει κέρδος μηδέν. Ἐπίσης διά τὸ προϊόν τῆς «εἰκονικῆς μηχανῆς» ἡ ἐπιχείρησις δὲν ἔχει ἴδιον παραγωγικὸν κόστος ἀλλὰ προμηθεύεται τοῦτο δι' ἀγορᾶς ἐξ ἄλλων ἐπιχειρήσεων ὅποτε δυνατόν οὐχὶ μόνον νὰ μὴ ἐπιτυγχάνη κέρδος ἀλλὰ ἀντιθέτως νὰ πραγματοποιηθῆ καὶ ζημίαν, κρίνεται ὅμως σκόπιμος ἡ ἱκανοποίησις καὶ τοῦ τμήματος τούτου τῆς ζητήσεως, καθ' ὑπέρβασιν τῶν παραγωγικῶν δυνατοτήτων, ἐκ λόγων πολιτικῆς τῆς ἐπιχειρήσεως.

Ὡς καὶ κατὰ τὴν περιγραφὴν τῆς μεθόδου μεταφορᾶς ἡ διανομῆς ἐλέχθη, ἡ ἀπλὴ ἀπαριθμησις κανόνων δὲν νομίζομεν ὅτι εἶναι ὁ καλύτερος τρόπος ἐκμάθησεως μιᾶς μεθόδου λύσεως προβλημάτων Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἀντιθέτως, ἡ περιγραφή τῆς μεθόδου ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν λύσιν ἐνός προβλήματος δίδει τὴν εὐκαιρίαν εἰς τὸν ἀναγνώστην νὰ ἀφομοιώσῃ πληρέστερον τὴν ἀκολουθουμένην διαδικασίαν καὶ τὴν δυνατότητα νὰ καταφεύγῃ εἰς τὸ πρόβλημα ὡσάκις ἀντιμετωπίζει δυσκολίας κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου εἰς προβλήματα τῆς καθ' ἡμέραν ἐπιχειρηματικῆς ζωῆς.

Κατωτέρω ἐκθέτομεν περιληπτικῶς τὴν μέθοδον Modi λύοντες συγχρόνως ἐν πρόβλημα τῆς μορφῆς κατανομῆς παραγγελιῶν εἰς τὰ διάφορα ἐργοστάσια μιᾶς ἐπιχειρήσεως.



## Τὸ πρόβλημα

α) Δεδομένα. Ἡ ἐπιχείρησις «Υφαντική» διαθέτουσα τέσσαρα ἐργοστάσια τὰ ὑπ' ἀριθμὸν I, II, III, καὶ IV ἔχει νὰ ἐκτελέσῃ παραγγελίας πελατῶν τῆς διὰ τοὺς τύπους (') ὑφασμάτων A, B, Γ, Δ, E καὶ Z. Ἡ ἑβδομαδιαία ζήτησις δι' ἕκαστον τύπον ὑφάσματος καὶ ἡ ὠριαία δυνατὴ παραγωγή ἐκάστου ἐργοστασίου δι' ἕκαστον τύπον ὑφάσματος ἐμφαίνονται εἰς τὸν πίνακα 1.

Πίναξ 1  
Ζήτησις καὶ παραγωγικὴ ἰκανότης

Ζήτησις		Παραγωγικὴ ἰκανότης εἰς μέτρα ἀνά ὥραν			
Τύπος ὑφάσματος.	Μέτρα κατὰ ἑβδομάδα	Ἐργοστάσιον	Ἐργοστάσιον	Ἐργοστάσιον	Ἐργοστάσιον
		I	II	III	IV
A	2400	120	108	72	96
B	1800	300	270	180	240
Γ	5500	100	90	60	80
Δ	6000	150	135	90	120
E	2000	200	180	120	160
Z	3600	180	—	—	—
Δείκτης παραγωγικῆς ἰκανότητος		1,00	0,90	0,60	0,80

Κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἀνωτέρω πίνακος ὑπετέθη, ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι ἡ ἐκτέλεσις τῆς παραγγελίας διὰ ὑφάσμα τύπου Z δύναται νὰ γίνῃ διὰ τεχνικούς ἔστω λόγους, μόνον ὑπὸ τοῦ ἐργοστασίου I, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι ἡ σχέσις τῆς παραγωγικῆς ἰκανότητος τῶν ἐργοστασίων θεωρεῖται ὅτι εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλας τὰς παραγγελίας, ἔξ οὗ καὶ ὁ κοινὸς δείκτης παραγωγικῆς ἰκανότητος εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πίνακος. Τόσον ἡ πρώτη, ὅσον καὶ ἡ δευτέρα ὑπόθεσις ἐγένοντο ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον διὰ λόγους ἀπλουστεύσεως τοῦ προβλήματος.

Ἡ τιμὴ πωλήσεως εἶναι ἐνιαία, διὰ τὸν αὐτὸν τύπον ὑφάσματος, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐργοστασίου παραγωγῆς, τὸ κατὰ μονάδα ὁμως κόστος διαφέρει τόσον ἀπὸ τύπον εἰς τύπον ὅσον καὶ ἀπὸ ἐργοστάσιον εἰς ἐργοστάσιον, ἀναλυτικῶς δὲ ἔχει ὡς ὁ πίναξ 2 δεικνύει.

Αἱ δυνατὰ ὥραι ἐργασίας τῶν ἐργοστασίων καὶ ὁ βαθμὸς παραγωγικῆς χρησιμοποίησεως αὐτῶν ἔχει ὡς κάτωθι :

Ἐργοστάσιον	I	II	III	IV
Δυνατὰ ὥραι ἐργασίας ἑβδομαδιαίας	48	48	48	96 (*)
Βαθμὸς παραγωγικῆς χρησιμοποίησεως μηχανημάτων	95% <sub>n</sub>	90% <sub>o</sub>	85% <sub>o</sub>	80% <sub>o</sub>

1) Κατωτέρω θὰ ὀμιλοῦμεν ἀδιαφόρως περὶ τύπου A, B, Γ, ... ἢ παραγγελίας A, B, Γ, ...

2) Τὸ ἐργοστάσιον IV ἀπασχολεῖ δύο «βάρδιες» ἐργατῶν.

Πίναξ 2  
Κόστος, Τιμή, Κέρδος

(εις δραχμὰς ἀνά μέτρον)

Τύπος Υφάσμα- τος	Κόστος				Τιμή Πωλήσεως	Κέρδος			
	I	II	III	IV		I	II	III	IV
A	21	19	20	18	23	2	4	3	5
B	8	7	9	6	10	2	3	1	4
Γ	27	26	25	24	30	3	4	5	6
Δ	19	17	15	14	21	2	4	6	7
E	12	15	12	11	16	4	1	4	5
Z	15	—	—	—	19	4	—	—	—

β) Ζητείται. Νὰ κατανεμηθοῦν αἱ παραγγελίαι εἰς τὰ διάφορα ἔργο-  
σια κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται τὸ μεγαλύτερον δυνατὸν  
κέρδος.

### Περιγραφή τῆς μεθόδου καὶ λύσις τοῦ προβλήματος

1. Ἐκφρασις τῶν δεδομένων εἰς κοινὴν μονάδα μετρήσεως

Θεωροῦμεν τὸ ἔργοστάσιον I ὡς πρότυπον (standard) καὶ ὡς κοινὴν  
μονάδα μετρήσεως τὴν ὥραν ἐργασίας τούτου, ἐκφράζομεν δέ, τὸσον τὴν ἔβδο-  
μαδιαίαν διαθέσιμον παραγωγικὴν δυναμικότητα, ὅσον καὶ τὴν κατ' ἔβδομα-  
διαίαν ζήτησιν εἰς ὥρας ἐργασίας προτύπου ἔργοστασίου. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα  
ὡς ἑξῆς. Προκειμένου περὶ τῆς διαθέσιμου παραγωγικῆς δυναμικότητος, πολ-  
λαπλασιάζομεν τὰς δυνατὰς ὥρας ἐργασίας ἑκάστου ἔργοστασίου ἐπὶ τὸν  
βαθμὸν παραγωγικῆς χρησιμοποίησεως αὐτοῦ ὁπότε τὸ προκύπτον γινόμενον  
παριστᾷ τὰς παραγωγικὰς ὥρας τοῦ ἔργοστασίου. Αἱ ὥραι αὗται πολλαπλα-  
σιαζόμεναι μὲ τὸν δείκτην παραγωγικῆς ἰκανότητος τοῦ πίνακος 1 δίδουν τὴν  
παραγωγικὴν δυναμικότητα ἑκάστου ἔργοστασίου ἐκπεφρασμένην εἰς ὥρας  
ἐργασίας προτύπου ἔργοστασίου, τὸ ἄθροισμα τούτων παριστᾷ τὴν συνο-  
λικὴν διαθέσιμον παραγωγικὴν δυναμικότητα τῆς ἐπιχειρήσεως. Σχετικῶς μὲ  
τὴν ζήτησιν ἡ ἐργασία εἶναι κατὰ πολὺ ἀπλουστερά. Διαιροῦντες τὴν ἔβδομα-  
διαίαν ζήτησιν διὰ τῆς ὠριαίας παραγωγικῆς ἰκανότητος τοῦ προτύπου ἔργο-  
στασίου, δι' ἕκαστον τύπον ὑφάσματος κεχωρισμένως, λαμβάνομεν τὴν ζητου-  
μένην ὑφ' ἑκάστου τύπου παραγωγικὴν δυναμικότητα. Οἱ ἐν λόγῳ ὑπολογι-  
σμοὶ διὰ τὸ ὑπὸ λύσιν πρόβλημα ἐμφαίνονται εἰς τοὺς πίνακας 3 καὶ 4.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν συνολικῶν μεγεθῶν τῶν δύο κατωτέρω πινάκων  
προκύπτει ὅτι ἡ διαθέσιμος παραγωγικὴ δυναμικότης τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι  
κατὰ 19,4 ὥρας προτύπου ἔργοστασίου μεγαλυτέρα τῆς ἀπαιτουμένης διὰ τὴν

Πίναξ 3  
Διαθέσιμος Παραγωγική Δυναμικότητας

Έργοστάσιον	Δυνατάι ώραι εργασίας	Βαθμός παραγωγικής χρηση/σεως	Παραγωγικαι ώραι εργασίας	Δείκτης παραγωγικής ικανότητας	Διαθέσιμος παραγωγική δυναμικότητας εις ώρας πρ.εβ.
I	48	95 <sup>ο</sup> / <sub>ο</sub>	45,6	1,00	45,68
II	48	90 <sup>ο</sup> / <sub>ο</sub>	43,2	0,90	38,88
III	48	85 <sup>ο</sup> / <sub>ο</sub>	40,8	0,60	24,48
IV	96	80 <sup>ο</sup> / <sub>ο</sub>	76,8	0,80	61,44
Συνολική διαθέσιμος παραγωγική δυναμικότητας 170,40					

Πίναξ 4  
Ζητούμένη Παραγωγική δυναμικότητας

Τύπος 'Υφάσματος	Ζητούμενα μέτρα καθ' εβδομάδα	Παραγ/κή ικανότητας Έργοστ. I εις μέτρα ανά ώραν	Ζητούμένη παρ/κή δυναμικότητας εις ώρας προτύπου εργοστασίου
A	2400	120	20
B	1800	300	6
Γ	5500	100	55
Δ	6000	150	40
E	2000	200	10
Z	3600	180	20
Συνολική ζητούμένη παραγωγική δυναμικότητας 151			

παραγωγήν τῶν ζητουμένων ποσοτήτων (170,4 – 151 = 19,4). ὡς ἐκ τούτου, συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω βασικὴν προϋπόθεσιν ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου Modii, θὰ πρέπει νὰ εἰσαχθῆ εἰς τὸ πρόβλημα «εἰκονικὸν προϊόν».

Πρὶν προχωρήσωμεν εἰς τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος θὰ πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἀνά ὥραν ἐργασίας προτύπου εργοστασίου, τόσον διὰ τοὺς καθ' ἕκαστον τύπους ὑφάσματος, ὅσον καὶ διὰ τὰ καθ' ἕκαστον εργοστάσια. Ὁ ὑπολογισμὸς εἶναι ἀπλὸς καὶ συνίσταται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ κατὰ μονάδα κέρδους, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἀπὸ τὸν πίνακα 2, ἐπὶ τὴν ὡριαίαν παραγωγικὴν ἰκανότητα τοῦ προτύπου εργοστασίου ὡς αὕτη ἐμφανίζεται εἰς τοὺς πίνακας 1 καὶ 4. Οἱ ἀνωτέρω ὑπολογισμοὶ διὰ τὸ ὑπὸ λύσιν πρόβλημα περιλαμβάνονται εἰς τοὺς πίνακας 5 καὶ 5α.

**Πίναξ 5**  
**Κέρδος ανά ωραν προτύπου έργουστασίου**  
 (εις δραχμάς)

Τύπος υφάσματος	Έργο- στάσιον	Κέρδος	Κατάταξις παραγγελιών από απόψεως κέρδους
Α	I	$2 \times 120 = 240$	5η
	II	$4 \times 120 = 480$	
	III	$3 \times 120 = 360$	
	IV	$5 \times 120 = 600$	
	Σύνολον	1680	
Β	I	$2 \times 300 = 600$	1η
	II	$3 \times 300 = 900$	
	III	$1 \times 300 = 300$	
	IV	$4 \times 300 = 1200$	
	Σύνολον	3000	
Γ	I	$3 \times 100 = 300$	4η
	II	$4 \times 100 = 400$	
	III	$5 \times 100 = 500$	
	IV	$6 \times 100 = 600$	
	Σύνολον	1800	
Δ	I	$2 \times 150 = 300$	2η
	II	$4 \times 150 = 600$	
	III	$6 \times 150 = 900$	
	IV	$7 \times 150 = 1050$	
	Σύνολον	2850	
Ε	I	$4 \times 200 = 800$	3η
	II	$1 \times 200 = 200$	
	III	$4 \times 200 = 800$	
	IV	$5 \times 200 = 1000$	
	Σύνολον	2800	
Ζ	I	$4 \times 180 = 720$	6η

Πίναξ 5α

Κέρδος ανά ωραν προτύπου έργουστασίου

Έργοστάσιον τύπος Υφάσματος	Έργοστάσιον			
	I	II	III	IV
A	240	480	360	600
B	600	900	300	1200
Γ	300	400	500	600
Δ	300	600	900	1050
E	800	200	800	1000
Σύνολον	2240	2580	2860	4450
Σειρά κέρδους	4ον	3ον	2ον	1ον

Ο τύπος Z δεν περιλαμβάνεται εις τόν πίνακα 5α διότι ούτος δύναται να παραχθῆ μόνον ὑπό τοῦ ἐργοστασίου I καί ἐπομένως δέν ἀντιμετωπίζομεν, ὡς πρὸς αὐτόν, πρόβλημα κατανομῆς, ἀφαιροῦμεν ἀπλῶς ἀπὸ τὴν παραγωγικὴν δυναμικότητα τοῦ ἐργοστασίου I τόσας ὥρας, ὅσαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς ζητουμένης ποσότητος ὑφάσματος τύπου Z, ὁπότε διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν λοιπῶν τύπων, τὸ ἐργοστάσιον I εἰσέρχεται εις τοὺς ὑπολογισμοὺς μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς δυναμικότητός του.

## 2. Ἐπιτόνησις τοῦ πρώτου προγράμματος

Ἐχόντες ἐκφράσει τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εις κοινὴν μονάδα μετρήσεως εἴμεθα πλέον ἔτοιμοι νὰ προχωρήσωμεν εις τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐκπονοῦντες ἐν πρώτον πρόγραμμα καί βελτιώνοντες τοῦτο ἕως ὅτου ἐπιτευχθῆ ἢ καλυτέρα (οἰκονομικώτερα) δυνατὴ λύσις. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

α) Τοποθετοῦμεν εις πίνακα διπλῆς εἰσόδου ὡς ὁ πίναξ 6, ὀριζοντίως μὲν τοὺς διαφόρους τύπους τοῦ παραχθησομένου προϊόντος, καθέτως δὲ τὰ διάφορα ἐργοστάσια, τάσσοντες ἀμφοτέρα κατὰ σειρὰν σπουδαιότητος ἀπὸ ἀπόψεως κέρδους ὡς καθωρίσθησαν εις τοὺς πίνακας 5 καὶ 5α. Διὰ τοὺς ἀνωτέρω ἀναφερθέντας λόγους ὁ τύπος Z δέν εἰσέρχεται εις τόν πίνακα. Ἐπειδὴ εις τὸ πρόβλημα ἡ διαθέσιμος παραγωγικὴ δυναμικότης εἶναι μικροτέρα τῆς ζητουμένης προστίθεται εις τόν πίνακα μία ἐπὶ πλέον στήλη διὰ τὸ «εἰκονικόν» προϊόν. Εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν καὶ στήλην τοῦ πίνακος θέτομεν τὴν ζητου-

## Πίναξ 6

Πρόγραμμα 1ον

	Ώρες έργασίας	B	Δ	E	Γ	A	Εισοδική πράσιον	Διαθέσιμος δυναμικότητα επί ώρας πρωτοπρω- το-έργασίας
Έργοστάσιον	Σελήνα Σεραί	1200	1050	1000	600	680	440	
IV	0	1200 (6)	1050 (40)	1000 (10)	600 (544)	680	440	644, 544, 154, 346, 0
III	-100	300 1100	900 950	800 900	500 (246)	360 550	0 340	2448 0
II	-200	900 1000	800 850	200 900	400 (230)	480 (136)	0 240	30,58, 13,60, 0
I	-440	600 760	300 610	500 560	300 160	240 (32)	0 (194)	25,60, 19,40, 0
Διατεθειμένη δυναμικότητα επί ώρας πρωτο- πρω-έργασίας		6 0	40 0	30 0	55 49,58 25,68 0	20 8,80 0	19,40 0	150,40 <sup>(1)</sup>

μήνη και διαθέσιμον παραγωγικήν δυναμικότητα κατά τύπον παραγγελίας και έργοστάσιον αντίστοιχως. Τα στοιχεία ταύτα λαμβάνονται εκ των πινάκων 3 και 4. Προφανώς, η παραγωγική δυναμικότης του έργοστασίου I έμφανίζεται εις τον πίνακα μικροτέρα της πραγματικής κατά 20 ώρας όσαι δηλαδή απαιτούνται διά την έκτέλεσιν της παραγγελίας Z (45,6 - 20 = 25,6).

β) Κατανέμωμεν τας παραγγελίας διά τους διαφόρους τύπους ύφασματος εις τὰ έργοστάσια, ακολουθούντες τον περιγραφέντα εις την μέθοδον «Μεταφοράς η Διανομής» κανόνα της «Βορειοδυτικής Γωνίας» προχωρούντες εις την έπομένην σειράν μόνον έφ' όσον εξαντλήσωμεν την δυναμικότητα της πρώτης, τοποθετούμεν δέ τους αριθμούς εντός κύκλων προς διάκρισιν από τους λοιπούς αριθμούς οι όποιοι θα τοποθετηθούν άργότερον εις τὰ τετραγωνίδια (\*).

γ) Εις την άνω δεξιά γωνίαν εκάστου τετραγωνιδίου, εύρισκομένου εις την διασταύρωσιν των στηλών και σειρών που άνήκουν εις τους διαφόρους τύπους προϊόντος άφ' ενός, και έργοστάσια άφ' άλλου, τοποθετούμεν τον αριθμόν τον εκφράζοντα τό κέρδος του έργοστασίου εκ της παραγωγής εκείνου του

1) Αναφέρει της συνολικής διαθέσιμου παραγωγικής δυναμικότητος κατά 20 ώρας διατεθείσας διά την παραγγελίαν Z.

2) Ός και κατά την μέθοδον της «Μεταφοράς η Διανομής» ο αριθμός των τοποθετουμένων κύκλων θα πρέπει να ίσούται με τον αριθμόν των στηλών συν τον αριθμόν των σειρών μείον ένα. Αναφορικώς με τον άνωτέρω κανόνα ισχύουν τὰ κατά την περιγραφην της προηγουμένης μεθόδου λεχθέντα.



τύπου του προϊόντος εις την διασταύρωσιν τῶν ὁποίων εὐρίσκεται τὸ τετραγωνίδιον. Τὰ ἐν λόγῳ στοιχεῖα λαμβάνομεν ἐκ τοῦ πίνακος 5 καὶ τίθενται ἐντὸς τριγῶνων πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως μετὰ τῶν λοιπῶν. Ὡς εἶναι προφανές, διὰ τὰ τετραγωνίδια τῆς στήλης τοῦ εἰκονικοῦ προϊόντος οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι μηδέν.

δ) Ὑπολογίζομεν τὸ προκύπτον κέρδος ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ προγράμματος, πολλασιάζοντες τοὺς ἐν κύκλῳ ἀριθμοὺς μὲ τοὺς ἐντὸς τῶν τριγῶνων ἀριθμοὺς τῶν τετραγωνιδίων εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι τοποθετημένοι, καὶ ἀθροίζομεν τὰ γινόμενα.

Διὰ τὸ πρῶτον πρόγραμμα τοῦ ὑπὸ λύσιν προβλήματος ἔχομεν :

$6,00 \times 1200 =$	$7\ 200$	Δρχ.
$40,00 \times 1050 =$	$42\ 000$	»
$10,00 \times 1000 =$	$10\ 000$	»
$5,44 \times 600 =$	$3\ 264$	»
$24,48 \times 500 =$	$12\ 240$	»
$25,08 \times 400 =$	$10\ 032$	»
$13,80 \times 480 =$	$6\ 624$	»
$6,20 \times 240 =$	$1\ 488$	»
$19,40 \times 0 =$	$0$	»
	$92\ 848$	»
Παραγγελία Z		
$20 \times 720 =$	$14\ 400$	»
Σύνολον	<u><math>107\ 248</math></u>	»

Ἦτοι, τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πρώτου προγράμματος ἀνέρχεται εἰς 107 248 δρχ.

### 3. Ἐλεγχος τοῦ προγράμματος διὰ τὴν δυνατότητα βελτιώσεώς του

Ὡς καὶ κατὰ τὴν περιγραφὴν τῆς μεθόδου «Μεταφορᾶς ἢ Διανομῆς» ἐλέχθη, κατὰ τὸ στάδιον ἐλέγχου τοῦ προγράμματος ζητοῦμεν νὰ ἀνεύρωμεν ἂν εἶναι δυνατὴ ἡ αὐξήσις ἢ μείωσις τοῦ ἀποτελέσματος, ἀναλόγως ἂν πρόκειται περὶ προβλήματος μεγιστοποιήσεως κέρδους ἢ ἐλαχιστοποιήσεως κόστους, διὰ μετακινήσεως ἐνὸς ἢ περισσοτέρων κύκλων, διὰ τὸ σύνολον ἢ μέρος τῆς ἐντὸς αὐτοῦ ἀναγραφομένης ποσότητος, ἐκ τῆς ἀρχικῆς του θέσεως εἰς ἄλλο ἢ ἄλλα τετραγωνίδια ἐπιτυχανομένης οὕτω μιᾶς νέας, περισσότερον-οικονομικῆς, κατανομῆς τῶν παραγγελιῶν εἰς τὰ διάφορα ἐργοστάσια.

Προκειμένου περὶ τῆς μεθόδου Modί διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ὁ ἔλεγχος τοῦ προγράμματος, κατ' ἀρχὴν θὰ πρέπει νὰ συμπληρώσωμεν δι' ἀριθμῶν τὰ τετραγωνίδια εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τεθῆ κύκλοι. Διὰ νὰ καταστήθῃ δυνατὴ ἡ συμπλήρωσις τῶν ἐν λόγῳ τετραγωνιδίων θὰ πρέπει πρῶτον νὰ συμπληρω-

θοῦν δι' ἀριθμῶν τὰ κενὰ τετραγωνίδια πού εὐρίσκονται παραπλεύρως τῆς λέξεως «Στῆλαι» καί κάτω τῆς λέξεως «Σειραί» (πίναξ 6).

Δυνάμεθα νά ἐκκινήσωμεν ἀπό οἰοδηήποτε τετραγωνίδιον θέτοντες εἰς αὐτό ἓνα οἰοδηήποτε ἀριθμόν, συνήθως ἀρχίζομεν ἀπό τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἀμέσως κάτω ἀπὸ τὴν λέξιν «Σειραί» καί θέτομεν εἰς αὐτὸ τὸν ἀριθμὸν μηδέν. Ἐπειδὴ, ἡ ἐντὸς τριγώνου τιμὴ ἐκάστου τετραγωνιδίου εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει τεθῆ κύκλος, πρέπει νά ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τοῦ τετραγωνιδίου τῆς στήλης καὶ τοῦ τετραγωνιδίου τῆς σειρᾶς εἰς τὴν διασταύρωσιν τῶν ὁποίων εὐρίσκεται τὸ περιέχον κύκλον τετραγωνίδιον (1). Ἡ συμπλήρωσις τῶν τετραγωνιδίων τῶν εὐρισκομένων παραπλεύρως τῆς λέξεως «Στῆλαι» καὶ τῶν ὁποίων τὰ ἀμέσως κάτω αὐτῶν τετραγωνίδια περιέχουν κύκλον γίνεται δι' ἀπλῆς ἀναγραφῆς εἰς αὐτὰ τῶν ἀντιστοιχῶν ἀριθμῶν τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται ἐντὸς τῶν τριγῶνων (2). Ἐργαζόμενοι ἀναλόγως συμπληροῦμεν καὶ τὰ λοιπὰ τετραγωνίδια τὰ ἀπάναντι καὶ κάτω τῶν λέξων «Στῆλαι» καὶ «Σειραί».

Ἡ κατανόησις τῆς ἀνωτέρω διαδικασίας θὰ καταστή κατὰ πολὺ εὐχερესτέρα ἂν ὁ ἀναγνώστης παρακολουθῇ αὐτὴν ἐπὶ τοῦ πίνακος 6. Ἐπ' εὐκαιρίᾳ σημειοῦμεν ὅτι ἡ ἐκμάθησις τῆς ὅλης μεθόδου, καθίσταται εὐκολωτάτη ἂν ὁ ἀναγνώστης παρακολουθῇ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐργαζόμενος ἐπὶ ἰδιαιτέρου χάρτου.

Μετὰ τὴν συμπλήρωσιν τῶν τετραγωνιδίων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἔναντι καὶ κάτω τῶν λέξεων «Στῆλαι» καὶ «Σειραί» ἀντιστοιχῶς προχωροῦμεν εἰς τὴν συμπλήρωσιν τῶν τετραγωνιδίων τοῦ πίνακος εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τεθῆ κύκλοι, θέτοντες εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν τιμῶν τοῦ πρῶτου τετραγωνιδίου τῆς στήλης καὶ τῆς σειρᾶς εἰς τὴν διασταύρωσιν τῶν ὁποίων κεῖται τὸ ὑπὸ συμπλήρωσιν τετραγωνίδιον. Ἡ τιμὴ τοῦ τετραγωνιδίου E, II, ἐπὶ παραδείγματι εἶναι  $(1000) + (-200) = 800$ , καὶ τοῦ A, III θὰ εἶναι  $(680) + (-100) = 580$ , ἐργαζόμενοι ἀναλόγως εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν καὶ τῶν λοιπῶν.

Μετὰ τὴν συμπλήρωσιν ὅλων τῶν κενῶν τετραγωνιδίων τοῦ πίνακος συγκρίνομεν τὴν τιμὴν ἐκάστου τετραγωνιδίου πού δὲν περιέχει κύκλον μὲ τὴν τιμὴν τοῦ ἐν αὐτῷ τετραγωνιδίου καὶ ἐφ' ὅσον ἡ πρώτη εἶναι μικρότερα τῆς δευτέρας τὸ πρόγραμμα εἶναι δεκτικὸν βελτιώσεως, τὸ ἄριστον πρόγραμμα ἐπιτυγχάνεται μόνον ὅταν ἡ τιμὴ ἐνὸς ἐκάστου τετραγωνιδίου (3) εἶναι μεγαλύτερα τῆς τιμῆς τοῦ τριγῶνου τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον ἐντὸς αὐτοῦ.

1) Ἄν παραστήσωμεν διὰ K τὴν τιμὴν ἐνὸς ἐκάστου τετραγωνιδίου εὐρισκομένου ἔναντι τῆς λέξεως «Στῆλαι», διὰ Σ τὴν τιμὴν ἐνὸς ἐκάστου τετραγωνιδίου κειμένου κάτωθι τῆς λέξεως «Σειραί» καὶ διὰ T τὴν τιμὴν τοῦ τριγῶνου ἐκάστου τετραγωνιδίου τὸ ὁποῖον περιέχει κύκλον, τότε θὰ ἔχωμεν  $K + Σ = T$ . Διὰ τὸ τετραγωνίδιον E, IV ἐπὶ παραδείγματι, θὰ ἔχωμεν:  $Σ = 0$  καὶ  $T = 1000$  ὁπότε  $K + 0 = 1000$   $K = 1000$ .

2) Τοῦτο ἰσχύει ἐφ' ὅσον ἡ ἐκκίνησις ἐγένετο ἐκ τοῦ πρῶτου τετραγωνιδίου κάτωθεν τῆς λέξεως «Σειραί» καὶ ἐφ' ὅσον ἐτέθη ὡς τιμὴ αὐτοῦ τὸ μηδέν.

3) Μὴ περιέχοντος κύκλου.

Ἡ ὑπαρξίς τετραγωνιδίου με τιμὴν μικροτέραν τῆς τιμῆς τοῦ ἐν αὐτῷ τριγώνου σημαίνει ὅτι, διὰ τῆς μετακινήσεως πρὸς τὸ τετραγωνίδιον αὐτὸ ἑνὸς κύκλου, με τὴν συνολικὴν αὐτοῦ τιμὴν ἢ με μέρος αὐτῆς θὰ ἐπιτύχωμεν βελτιώσιν τοῦ ἀποτελέσματος.

#### 4. Ἐκπὸνήσις τοῦ δευτέρου προγράμματος

Ἐφ' ὅσον διαπιστωθῆ ἡ δυνατότης βελτιώσεως τοῦ προγράμματος, ἡ ἀκολουθουμένη πρὸς τοῦτο διαδικασία εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἐκείνην κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῆς «Μεταφορᾶς ἢ Διανομῆς». Ἐκκινουῦντες ἀπὸ τὸ τετραγωνίδιον ποῦ ἔχει τιμὴν μικροτέραν τῆς τιμῆς τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τριγώνου (\*) ἀκολουθοῦμεν δρομολόγιον ὁμοιον πρὸς τὸ περιγραφέν εἰς τὴν μέθοδον τῆς «Μεταφορᾶς ἢ Διανομῆς» καὶ προσημαίνομεν τὰ τετραγωνίδια κατὰ τὰ ἐκεῖ λεχθέντα. Εἰς τὸ ὑπὸ λύσιν πρόβλημα τὸ ἐν λόγῳ τετραγωνίδιον εἶναι τὸ Γ, Ι καὶ τὸ ἀκολουθηθὲν δρομολόγιον ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα 6. Ἐκ τῶν τετραγωνιδίων τῶν προσημασμένων θετικῶς ἐκλέγομεν ἐκεῖνο με τὴν μικροτέραν ἐντὸς κύκλου τιμὴν καὶ ἐν προκειμένῳ τὸ Α, Ι. Τὴν ἐν κύκλῳ τιμὴν τοῦ ἐπιλεγέντος τετραγωνιδίου προσθέτομεν εἰς τὴν τιμὴν τῶν ἀρνητικῶς προσημασμένων τετραγωνιδίων καὶ τὴν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν θετι-

Πίναξ 7

Πρόγραμμα 2ον

	Τύπος ὑφάσματος	B	Δ	Ε	Γ	A	Εἰσοδικὸν προϊόν	Συνολικὸς ἀποτέλεσμα εἰς ὅρας προϋπίστου ἔργου αἰμαίου
Ἐργασαίον	Σερβίαι	1200	1050	1000	600	680	300	
	Σερβίαι							
IV	0	1200 (6)	1050 (40)	1000 (10)	600 (544)	680	300	61,44
III	-100	300 1100	900 950	800 900	500 (2148)	360 580	200	24,48
II	-200	900 1000	500 650	200 800	400 (1888)	480 (20)	100	38,88
I	-300	600 900	300 750	900 700	300 (620)	240 380	0 (1940)	25,60
Συνολικὴ δυναμικότης εἰς ὅρας προϋπίστου ἔργου αἰμαίου		6	40	10	55	20	19,40	150,40 <sup>(1)</sup>

1) Διαφέρει τῆς συνολικῆς διαθέσιμου παραγωγικῆς δυναμικότητος κατὰ 20 ὥρας διατεθείσας διὰ τὴν παραγγελίαν Z.

\*) Ἐάν ὑφίστανται πλείονα τοῦ ἑνὸς τοιαῦτα τετραγωνίδια εἶναι ἀδιάφορον ἀπὸ ποῖον τετραγωνίδιον θὰ ἐκκινήσωμεν.

κῶς προσημανσμένων τοιούτων. Μετὰ ταῦτα μετακινούμεν τὸν κύκλον μὲ τὴν ἐν αὐτῷ τιμὴν εἰς τὸ τετραγωνίδιον ἐκ τοῦ ὁποῖου ἐκκινήσαμεν. Οὕτω, τὸ δευτέρου πρόγραμμα ἔχει ἐκπονηθῆ. Τὸ δευτέρου πρόγραμμα διὰ τὸ ὑπὸ λύσιν πρόβλημα ἐμφανίζεται εἰς τὸν πίνακα 7.

Μετὰ ταῦτα ὑπολογίζομεν τὸ πραγματοποιούμενον ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ δευτέρου τούτου προγράμματος ἀποτέλεσμα, τὸ ὁποῖον θὰ πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀποτελέσματος τοῦ πρώτου προγράμματος προκειμένου περὶ κέρδους, ἢ μικρότερον ἐκείνου προκειμένου περὶ κόστους (!). Ἐνταῦθα σημειοῦμεν ὅτι, ἡ αὐξησις τοῦ ἀποτελέσματος θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς τιμῆς (ᾠραι προτύπου ἐργοστασίου) τοῦ μετακινουμένου κύκλου, ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῆς τιμῆς τοῦ τετραγωνιδίου πρὸς τὸ ὁποῖον μετακινεῖται ὁ κύκλος ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ ἐν αὐτῷ τριγώνου. Εἰς τὴν συγκεκριμένην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν :

$$(300 - 160) \times 6,20 = 868 \text{ δρχ.}$$

Ἐπολογίζοντες τὸ κέρδος τοῦ δευτέρου προγράμματος λαμβάνομεν :

$$6,00 \times 1200 = 7\,200 \text{ Δρχ.}$$

$$40,00 \times 1050 = 42\,000 \text{ »}$$

$$10,00 \times 1000 = 10\,000 \text{ »}$$

$$5,44 \times 600 = 3\,264 \text{ »}$$

$$24,48 \times 500 = 12\,240 \text{ »}$$

$$18,88 \times 400 = 7\,552 \text{ »}$$

$$20,00 \times 480 = 9\,600 \text{ »}$$

$$6,20 \times 300 = 1\,860 \text{ »}$$

$$19,40 \times 0 = 0 \text{ »}$$

$$93716 \text{ »}$$

Παραγγελία Z

$$20 \times 720 = 14\,400 \text{ »}$$

$$\text{Σύνολον} \quad \underline{108\,116 \text{ Δρχ.}}$$

Τὸ συνολικὸν τοῦτο κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως, συγκρινόμενον πρὸς τὸ κέρδος τοῦ πρώτου προγράμματος, εἶναι πράγματι κατὰ 868 δρ. μεγαλύτερον ( $108\,116 - 107\,248 = 868$ ).

5. Ἐλεχος πρὸς περαιτέρω βελτίωσιν τοῦ ἀποτελέσματος

Ἡ βελτίωσις τοῦ προγράμματος διὰ τῆς ἐκπονήσεως τοῦ δευτέρου τοιούτου δὲν σημαίνει συγχρόνως ὅτι τὸ τελευταῖον τοῦτο εἶναι καὶ τὸ καλύτερον δυ-

1) Οἱ ὅροι «κέρδος» καὶ «κόστος» χρησιμοποιοῦνται ἐνταῦθα ὡς ἀντιπροσωπευτικοὶ τῶν δύο κατηγοριῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, ἴητοι τῶν προβλημάτων μεγιστοποιήσεως καὶ ἐλαχιστοποιήσεως.

νατόν. Διὰ νὰ ἀποφανθῶμεν ἂν τὸ ἐκπονηθὲν δεῦτερον πρόγραμμα δύναται νὰ βελτιωθῇ, ἐργαζόμεθα ὡς καὶ κατὰ τὸν ἔλεγχον τοῦ πρώτου. Συγκρίνομεν τὰς τιμὰς τῶν τετραγωνιδίων—τῶν μὴ περιεχόντων κύκλον—μὲ τὰς τιμὰς τῶν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένων τριγῶνων, ἐκλέγομεν τὸ τετραγωνίδιον—ἐφ' ὅσον ὑπάρχει— τὸ ὁποῖον ἔχει τιμὴν μικροτέραν τοῦ τριγῶνου, χαράσσωμεν τὸ δρομολόγιον κ.λ.π. συνεχίζοντες τὴν ἐκπόνησιν διαδοχικῶν προγραμμάτων ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς πρόγραμμα τοῦ ὁποῖου αἱ τιμαὶ ὅλων τῶν τετραγωνιδίων—τῶν μὴ περιεχόντων κύκλον—εἶναι μικρότεροι τῶν τιμῶν τῶν ἀντιστοιχῶν τριγῶνων.

Εἰς τὸ λυόμενον ἐνταῦθα πρόβλημα τὸ «ἄριστον» ἀποτέλεσμα ἐπιτυγχάνεται εἰς τὸ τρίτον πρόγραμμα.

## Πίναξ 8

Πρόγραμμα 3ον (ἄριστον)

	Τύπος ἔργου	B	Δ	E	Γ	A	Επιπλέον πρόσόν	Διαθέσιμος δυναμικὸς εἰς ἄρας προκύπτου ἑργασιῶν.
Ἐξουσιοδότησις	Διὰ πᾶσι Διῶρα	1200	1050	1000	600	680	200	
IV	0	1200 (6)	1050 (20)	1000 (380)	600 (1164)	680	200	61,44
III	-100	300 1100	500 950	800 900	500 (240)	360 580	0 100	24,48
II	-200	900 1000	600 850	200 800	400 (980)	480 (20)	0	38,58
I	-200	600 1000	300 850	800 (620)	300 400	200 480	0 (174)	25,60
Διαθέσιμος δυναμικὸς εἰς ἄρας προκύπτου ἑργασιῶν		6	40	10	55	20	19,40	(1) 150,40

Ἡ αὐξησης τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ τρίτου προγράμματος θὰ εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω :

$$(800 - 700) \times 6,20 = 620 \text{ δρχ.}$$

Τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως θὰ ἀνέρχεται εἰς 108 736 δρχ. ἀναλυόμενον ὡς κάτωθι :

1) Ἀναφέρει τῆς συνολικῆς διαθέσιμου παραγωγικῆς δυναμικότητος κατὰ 20 ὥρας διατεθείσας διὰ τὴν παραγωγίαν Z.

$6,00 \times 1200 = 7200$	Δρχ.
$40,00 \times 1050 = 42000$	»
$3,80 \times 1000 = 3800$	»
$11,64 \times 600 = 6984$	»
$24,48 \times 500 = 12240$	»
$18,88 \times 400 = 7552$	»
$20,00 \times 480 = 9600$	»
$6,20 \times 800 = 4960$	»
$19,40 \times 0 = 0$	»
	94336 »
Παραγγελία Z	
$20 \times 720 = 14400$	»
Σύνολον	<u>108736</u> Δρχ.

Κατά την εκπόνησιν διαδοχικῶν προγραμμάτων, εἶναι πιθανόν νά ἐμφανισθῆ περίπτωσης καθ' ἣν ἡ τιμὴ ἑνὸς ἢ πλειόνων τετραγωνιδίων—ἀνευ κύκλου—εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τριγώνου. Ὡς εἶναι προφανὲς εἰς τοιαύτας περιπτώσεις βελτίωσις τοῦ προγράμματος δὲν εἶναι δυνατὴ ('). Παρὰ ταῦτα, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τὸ τετραγωνίδιον τῆς ἀνωτέρω μορφῆς ὡς τετραγωνίδιον ἐπιτρέπον τὴν βελτίωσιν τοῦ ἀποτελέσματος καὶ νά προβῶμεν εἰς τὴν εκπόνησιν νέου προγράμματος τοῦ ὁποίου, τὸ μὲν ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς ἐκεῖνο τοῦ προηγουμένου προγράμματος, πλὴν ὅμως θὰ παρέχη εἰς τὴν ἐπιχείρησιν εὐκαμψίαν ἀναφορικῶς πρὸς τὴν κατανομὴν τῶν παραγγελιῶν εἰς τὰ διάφορα ἐργοστάσια.

#### 6. Ἐκφρασις τοῦ ἀποτελέσματος εἰς πραγματικὰς μονάδας

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ὡς αὕτη ἐμφανίζεται εἰς τὸ τελευταῖον «ἄριστον», πρόγραμμα δὲν εἶναι εὐκόλως νοητὴ ὑπὸ τῶν ἰθυνόντων τὰς ἐπιχειρήσεις, ἄλλωστε ἡ ἔκφρασις τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος καὶ τῆς λύσεως τούτου εἰς «κοινὴν μονάδα μετρήσεως» ἐγένετο ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον διὰ ὑπολογιστικούς λόγους. Ὡς ἐκ τούτου, παρίσταται ἀνάγκη νά ἐκφρασθῆ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἰς πραγματικὰς μονάδας, εἰς τρόπον ὥστε νά δίδεται σαφὴς ἀπάντησις εἰς τὸ θεθὲν ὑπὸ τοῦ προβλήματος ἐρώτημα.

Ἡ ἀκολουθουμένη πρὸς τοῦτο διαδικασία εἶναι ἀπλουστάτη καὶ συνίσταται κατὰ βάσιν εἰς ἀπλὴν διαίρεσιν τῶν ὥρων προτύπου ἐργοστασίου διὰ τοῦ δείκτου τοῦ πίνακος I καὶ τὴν σύνθεσιν τῶν δεδομένων ὑπὸ μορφήν πίνακος.

Διὰ τὸ χρησιμοποιηθῆν ἐνταῦθα παράδειγμα ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα 9.

1) Ἐφ' ὅσον φυσικὰ δὲν ὑφίστανται ἄλλα τετραγωνίδια μὲ τιμὴν μικροτέραν τῆς τοῦ τριγώνου των.



Πίναξ 9

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἰς πραγματικά μεγέθη

Τύπος ύφασματος	Ἔργο- στάσιον	Ὑψὸς προτύπου ἔργουστα- σίου	Δείκτης παραγω- γικῆς ικανότητ.	Πραγμα- τικαὶ ὥραι ἐργασίας	Μέτρα ἀνὰ ὥραν	Παραγο- μένη ποσότης (εἰς μέτρα)	Ζητούμενη ποσότης (εἰς μέτρα)
A	II	20	0,93	22,22	108	2400	2400
B	IV	6	0,80	7,50	240	1800	1800
Γ	IV	11,64	0,80	14,55	80	1164	} 5500
	III	24,48	0,60	40,80	60	2448	
	II	18,88	0,90	20,98	90	1888	
Δ	IV	40	0,80	50,00	120	6000	6000
E	IV	3,80	0,80	4,75	160	760	} 2000
	I	6,20	1,00	6,20	200	1240	
Z	I	20	1,00	20,00	180	3600	3600

Ἐπὶ τοῦ τρόπου κατασκευῆς τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Ἡ συμπλήρωσις τῶν τριῶν πρώτων στηλῶν γίνεται εὐκόλως ἐκ τοῦ τελευταίου προγράμματος καὶ ἐν προκειμένῳ ἐκ τοῦ πίνακος 8, εἰς τὴν τετάρτην στήλην ἀπλῶς μεταφέρομεν τὸν δείκτην τοῦ πίνακος 1, ἐνῶ ἡ συμπλήρωσις τῆς πέμπτης, γίνεται διὰ διαιρέσεως τῶν δεδομένων τῆς τρίτης στήλης τοῦ πίνακος διὰ τοῦ δείκτου τῆς τετάρτης στήλης. Ἡ ὑπὸ τὸν τίτλον «Μέτρα ἀνὰ ὥραν» ἕκτη στήλη συμπληροῦται ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος 1 ἢ δὲ ἑβδόμη διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεδομένων τῆς πέμπτης καὶ ἕκτης στήλης τοῦ πίνακος. Ἡ τελευταία στήλη τοῦ πίνακος ἀποτελεῖ ἀπλήν ἀντιγραφὴν τῆς ἀντιστοίχου στήλης τοῦ πίνακος 1.

Ἐκ τοῦ τελευταίου ὑπ' ἀριθμὸν 9 πίνακος δυνάμεθα εὐκόλως νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα ἄλλον πίνακα εἰς τὸν ὁποῖον νὰ ἐμφανίζονται αἱ ὥραι ἐργασίας ἐκάστου ἔργουστασίου διὰ τὴν παραγωγὴν ὀλοκλήρου τῆς ποσότητος, ἢ μέρους αὐτῆς ἐκάστου τύπου ζητουμένου ύφασματος. Ὁ πίναξ 10 παρέχει τὰς ἀνωτέρω πληροφορίας ἀναφορικῶς μὲ τὸ λυθὲν πρόβλημα.

Ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, βασικὴ προϋπόθεσις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου Modii εἶναι ἡ ἰσότης διαθεσίμου καὶ ζητουμένης παραγωγικῆς δυναμικότητος ἐκφραζομένων εἰς κοινὴν μονάδα μετρήσεως. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ παρετηρήθη ὅτι ἡ ἰσότης αὕτη σπανίως συναντᾶται εἰς τὴν πρᾶξιν, καὶ ὡς ἐκ τούτου παρίσταται ἀνάγκη προσαρμογῆς τῆς μεθόδου ὥστε νὰ δύναται νὰ ἀνταποκριθῆ εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τῆς καθ' ἡμέραν ἐπιχειρητικῆς ζωῆς. Εἰς τὰς περιπτώσεις ἐκεῖνας εἰς τὰς ὁποίας ἡ διαθέσιμος παραγωγικὴ δυναμικότης εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ζητουμένης, ἡ προσαρμογὴ καθίσταται δυνατὴ διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ λεγομένου «εἰκονικοῦ προϊόντος» ὡς ἐγένετο καὶ εἰς τὸ ἀνωτέρω λυθὲν πρόβλημα. Ἀντιθέτως, εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ἡ ζητουμένη

Πίναξ 10

Κατανομή των πραγματικών ωρών εργασίας  
έκαστου εργοστασίου

Έργοστάσιον Τύπος ύφασματος	I	II	III	IV
	A		22,22	
B				7,50
Γ		20,98	40,80	14,55
Δ				50,00
E	6,20			4,75
Z	20,00			
Σύνολον	26,20	43,20	40,80	76,80
Διαθέσιμος παρα- γωγική δυναμικότης	45,60	43,20	40,80	76,80
Άργοῦσα παρα- γωγική δυναμικότης	19,40	0	0	0

δυναμικότης είναι μεγαλύτερα τῆς διαθεσίμου, προσαρμόζομεν τὴν μέθοδον διὰ τῆς εισαγωγῆς «εἰκονικοῦ εργοστασίου». Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν ἡ ἀκολουθουμένη διαδικασία πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος εἶναι κατὰ βάσιν ὁμοία πρὸς ἐκείνην τῆς πρώτης περιπτώσεως ὅτε ἡ διαθέσιμος δυναμικότης ἦτο μεγαλύτερα τῆς ζητουμένης. Ἐπανάληψις τῆς διαδικασίας νομιζομεν ὅτι θὰ ἀπέβαινε κουραστική διὰ τὸν ἀναγνώστην χωρὶς νὰ προσθέτῃ τίποτε τὸ οὐσιῶδες εἰς τὰ μέχρι τοῦδε ἐκτεθέντα (!).

#### Ἡ μέθοδος Mod i εἰς προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως

Ὡς γνωστόν, τὰ προβλήματα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ὡς προβλήματα «ἀριστοποιήσεως» δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς δύο βασικὰς κατηγορίας: α) προβλήματα «μειστοποιήσεως», β) προβλήματα «ἐλαχιστοποιήσεως». Τὸ ἀνωτέρω λυθὲν πρόβλημα ἀνήκει εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν ὡς ἀποβλέπον εἰς τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως. Ὡς ἐλέχθη ὁμως ἀνωτέρω, ἡ μέθοδος Mod i δύνανται νὰ εφαρμοσθῇ εἰς ὅλας τὰς κατη-

1) Λύσιν προβλήματος τῆς δευτέρας αὐτῆς μορφῆς ἴδε: R. O. Ferguson and L. F. Sargent «Linear Programming: Fundamentals and Applications» N. York, 1958, σελ. 58.

γορίας προβλημάτων Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, ἐφ' ὅσον βεβαίως ἡ φύσις τοῦ προβλήματος τὸ ἐπιτρέπει. Θὰ ἡδυνάμεθα ὡς ἐκ τούτου νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον Modī καὶ εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἀντὶ τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους ἐζητεῖτο ἡ ἐλαχιστοποίησις τοῦ κόστους. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὠρισμένα ἀπὸ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς ἡ τιμὴ πωλήσεως ἐπὶ παραδείγματι, δὲν θὰ ἦσαν ἀναγκαῖα, θὰ ἀπητεῖτο δὲ διάφορος ἐν μέρει ταξινόμησις τῶν δεδομένων, πλὴν ὅμως ἡ διαδικασία εἶναι κατὰ βάσιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ἀκολουθηθεῖσαν. Ὡς ἐκ τούτου πρὸς ἀποφυγὴν παραθέσεως ἐκ νέου τῶν αὐτῶν πινάκων σημειώνομεν κατωτέρω τὰς κυριωτέρας διαφορὰς κατὰ τὴν ἀκολουθουμένην διαδικασίαν :

α) Ὑποθέτομεν τὴν τιμὴν πωλήσεως ὡς δεδομένην χωρὶς νὰ ἀπαιτῆται ἀκριβὴς προσδιορισμὸς αὐτῆς ὡς κατὰ τὴν περίπτωσιν μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους. Ἀντὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ κατὰ ἐργοστάσιον καὶ παραγγελίαν κέρδους ὑπολογίζομεν τὸ κόστος, κατασκευάζοντες πίνακα τῆς μορφῆς τοῦ πίνακος 5 καὶ μεταφέρομεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς τὰ τρίγωνα τοῦ πίνακος τοῦ προγράμματος.

β) Εἰς τὴν στήλην «εἰκονικὸν προϊόν» ἀντὶ μηδὲν θέτομεν ἓνα γράμμα ἔστω M ὑποθέτοντες ὅτι τοῦτο παριστᾷ ἀριθμὸν ἀπείρως μεγάλον, τὸ M δὲν εἰσέρχεται εἰς τοὺς προὑπολογισμοὺς.

γ) Προκειμένου νὰ ἐλεγχθῆ ἡ δυνατότης βελτιώσεως τοῦ προγράμματος, καὶ ἐπειδὴ παριστῶμεν τὸ κόστος διὰ θετικῶν ἀριθμῶν, ἀναζητοῦμεν εἰς τὸν πίνακα τετραγωνίδιον, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ εἶναι μεγαλύτερα τῆς τιμῆς τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τριγώνου. Ἀκολουθοῦντες τὴν γνωστὴν διαδικασίαν φθάνομεν εἰς πρόγραμμα τοῦ ὁποίου αἱ τιμαὶ ὅλων τῶν τετραγωνιδίων εἶναι μικρότεροι τῶν τιμῶν τῶν τριγώνων, τὸ πρόγραμμα τοῦτο εἶναι τὸ ἄριστον (1).

1) Λύσιν προβλήματος ἐλαχιστοποίησης κόστους ἴδε εἰς R. O. Ferguson and L. F. Sargent, ἐνθ. ἀνωτ., σελὶς 66.

# Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Τ Α

## ΤΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΕΩΣ

Υπό τοῦ Καθηγητοῦ κ. Α. Γ. ΠΑΠΑΝΔΡΕΟΥ

Σκοπὸς τῆς παρουσίης ἐργασίας δὲν εἶναι ἡ ἐξαντλητικὴ ἀνάλυσις τῶν προβλημάτων τῆς πολιτικῆς οικονομικῆς ἀναπτύξεως, ἀλλ' ἀπλῶς ἡ ἐξέτασις βασικῶν τινῶν θεμάτων τῆς πολιτικῆς ταύτης.

Μολονότι εἰς τὰς πολυπληθεῖς καὶ ὀγκώδεις ἐργασίας τῆς οικονομικῆς ἀναπτύξεως ἐξετάζονται πολυάριθμα θέματα, ἀναφερόμενα τόσον εἰς τὴν κατασκευὴν ἀφηρημένων ὑποδειγμάτων ὅσον καὶ εἰς τὴν διαμόρφωσιν ὑπολογιστικῶν σχημάτων ἢ τὴν ἀνάλυσιν συγκεκριμένων ἱστορικῶν περιπτώσεων, ἡ συστηματικὴ διατύπωσις τῶν ἐννοιολογικῶν συστατικῶν τῆς πολιτικῆς οικονομικῆς ἀναπτύξεως δὲν ἔχει γίνεαι μέχρι τοῦδε. Τοῦτο βεβαίως δὲν εἶναι ἐκπληκτικόν, διότι ἡ μελέτη τῆς κοινωνικῆς μηχανικῆς εἰς καθολικὴν κλίμακα προϋποθέτει κατανόησιν κοινωνικοοικονομικῶν διαδικασιῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν δύναται νὰ ἀναλυθοῦν εὐχερῶς.

Ἐκ τῆς ἀπόψεως ταύτης θὰ ἦτο ἴσως ἐνδιαφέρον νὰ ἐπιχειρηθῆ ἡ κατάστρωσις ἐνὸς γενικοῦ ὑποδείγματος οικονομικῆς πολιτικῆς, ὑποδεικνύοντος τὰ βασικὰ προβλήματα ἐκ τῆς λύσεως τῶν ὁποίων ἐξαρτᾶται ἡ διαμόρφωσις μιᾶς ἐπιτυχοῦς πολιτικῆς οικονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἄφετηρία τῆς ἐπακολουθούσης ἀναλύσεως εἶναι ἓν ἀπλοῦν ὑπόδειγμα, τὸ ὁποῖον βαθμιαίως καθίσταται πολυπλοκώτερον. Ἡ ὅλη ἐπιχειρηματολογία στηρίζεται ἐπὶ μιᾶς θεμελιώδους διακρίσεως μεταξὺ τοῦ προβλήματος τῆς κατανομῆς τῶν διαθεσίμων πόρων καὶ τῆς οικονομικῆς ὀργανώσεως, ἡ ὁποία καθίσταται ἀναγκαία διὰ τὴν ἐπιτυχῆ λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου. Ἡ βασικὴ αὕτη διάκρισις ὀδηγεῖ ἀναποφεύκτως εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ πλέον σημαντικὸν σύνολον (set) ἐπιλογῆς διὰ τὴν Οἰκονομικὴν Ἀρχὴν εἶναι τὸ σύνολον τῶν διαφόρων δυνατῶν μορφῶν οικονομικῆς ὀργανώσεως.

### *I. Ἐν ἀπλοῦν ἀθροιστικὸν ὑπόδειγμα οικονομικῆς ἀναπτύξεως.*

Ἡ ἀπλουστέρη διατύπωσις τοῦ προβλήματος οικονομικῆς ἀναπτύξεως ὀφείλεται εἰς τὸν Evsey Domar (1). Ἐν ὑπόδειγμα τύπου Domar δύναται νὰ ἐκφρασθῆ διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐξισώσεων διαφορῶν :

1) Evsey Domar, *Essays in the Theory of Economic Growth* (Oxford University Press, 1957).

- 1)  $Y_{t+1} - Y_t = b^* I_t$
- 2)  $S_t = sY_t$
- 3)  $S_t = I_t$

όπου  $Y$  εκφράζει τὸ Ἐθνικὸν εἰσοδήμα,  $S$  τὰς ἀποταμιεύσεις,  $I$  τὰς ἐπενδύσεις  $b^*$  τὸ ἀντίστροφον τοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως κεφαλαίου (capital-output ratio) καὶ  $s$  τὴν ὀριακὴν ροπήν πρὸς ἀποταμίευσιν. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ ὑποδείγματος τὴν ἐξίσωσιν διαφορῶν πρώτης τάξεως

$$Y_{t+1} - Y_t (1 + sb^*) = 0$$

τῆς ὁποίας ἡ λύσις εἶναι :

$$Y_t = Y_0 (1 + sb^*)^t.$$

Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς ἓν ὑπόδειγμα οἰκονομικῆς πολιτικῆς, ἐὰν ἡ Οἰκονομικὴ Ἀρχὴ ἐνδιαφέρεται διὰ τὴν ἐπιλογὴν τοῦ σχετικοῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως  $r$  (όπου  $r = sb^*$ ), ὅστις μεγιστοποιεῖ δοθέντα δεικτὴν χρησιμότητος. Ἡ ἐπιλογή ρυθμοῦ ἀναπτύξεως σημαίνει ἐπιλογὴν μιᾶς τιμῆς διὰ τὴν ὀριακὴν ροπήν πρὸς κατανάλωσιν,  $s$ . Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης αἱ παράμετροι  $s$  καὶ  $r$  εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθοῦν ἢ μὲν πρώτη ὡς μεταβλητὴ-ὄργανον, ἢ δὲ δευτέρα ὡς μεταβλητὴ-σκοπός, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ  $b^*$  ἀποτελεῖ ἓν δεδομένον τοῦ προβλήματος.

Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον συνοψίζει τὴν βασικὴν ἀριθμητικὴν τοῦ προβλήματος τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν κατὰ διαφόρους τρόπους. Οὕτω, π.χ., δύναται νὰ ληφθῆ ὑπ' ὄψιν, ὁ ρυθμὸς ἀναπτύξεως τοῦ πληθυσμοῦ καὶ νὰ ὑποθεθῆ ὅτι ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν ἐπίτευξιν τοῦ καλλιτέρου δυνατοῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως τοῦ κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος. Ὅπωςδὴποτε, παρὰ τὸ ἐνδιαφέρον τὸ ὁποῖον παρουσιάζει, τὸ ὡς ἄνω ὑπόδειγμα ἔχει τὸ βασικὸν μειονέκτημα ὅτι ἀποκρύπτει, λόγῳ τῆς γενικότητός του, πρωταρχικῆς σημασίας διαρθρωτικὰ προβλήματα. Τὰ προβλήματα ταῦτα εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιμετωπισθοῦν ἐντὸς τῶν εὐρυτέρων πλαισίων τῆς μῆτρας εἰσοδῶν - ἐκροῶν τοῦ Leontief.

## II. Ἀναλυτικοὶ συντελεσταὶ ἀποδόσεως κεφαλαίου

Πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς ἀναλυτικῆς διατυπώσεως τοῦ ὑποδείγματος Domar, εἰσάγομεν τὴν τεχνολογικὴν μῆτραν  $A$  διὰ τὴν ὁποῖαν ἰσχύουν οἱ συνήθεις περιορισμοὶ τῆς «ἀναλύσεως οἰκονομικῆς δραστηριότητος» (activity analysis) καὶ ἡ ὑπόθεσις Leontief, συμφώνως πρὸς τὴν ὁποῖαν ἕκαστος παραγωγικὸς κλάδος παράγει ἓν μόνον προϊόν. Ἡ τελευταία ὑπόθεσις σημαίνει ὅτι ἡ  $A$  εἶναι τετραγωνικὴ μῆτρα  $n$ -στῆς, τάξεως. Ἄν θεωρήσωμεν τὸ κεφάλαιον ὡς πρωτογενῆ καὶ ἓν ἀνεπαρκεῖα εὐρισκόμενον συντελεστὴν, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν διάνυσμα-γραμμὴν (row vector)  $b = (b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_n)$ , ὅπου  $b_j$  εἶναι ὁ συντελεστὴς κεφαλαιουχικότητος τοῦ κλάδου  $j$ . Ἔχομεν οὕτω τὴν ἀκόλουθον μῆτραν :

$$A^e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_j & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix}$$

Κατά τήν περίοδον  $t$  ἔχομεν :

$$(I - A)X_t = Y_t$$

ὅπου  $I$  εἶναι ἡ μήτρα - ταυτότης,  $X_t$ , τὸ διάνυσμα-στήλη τῶν προϊόντων τῶν διαφόρων τομέων καὶ  $Y_t$  εἶναι τὸ διάνυσμα-στήλη τῆς «τελικῆς ζήτησεως» κατὰ τήν περίοδον  $t$ . Θέτοντες τήν τελικὴν ζήτησιν κατὰ τήν περίοδον  $t-1$  ἴσην πρὸς  $Y_{t+1}$ , δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$(I - A) \Delta X_t = \Delta Y_t$$

$$\delta\text{που } \Delta X_t = X_{t+1} - X_t, \quad \Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t$$

Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ  $\Delta X_t$ , δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τήν συνολικῶς ἀπαιτουμένην ἐπένδυσιν. Αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν γενόμενον  $b\Delta X_t$ .

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος μολονότι δεικνύει τὸν τρόπον ἀναλυτικῆς παρουσιάσεως (ἀπὸ τινων τουλάχιστον ἀπόψεων) τοῦ ὑποδείγματος Domar, ἔχει προφανῶς μειονεκτήματα. Ἐν πρώτοις, δὲν ἐξασφαλίζει τήν ἰσότητα μεταξὺ συνολικῆς ἀποταμιεύσεως καὶ συνολικῆς ἐπενδύσεως. Δεύτερον, προϋποθέτει ὁμογένειαν τοῦ συντελεστοῦ «κεφάλαιον» καὶ δὲν λαμβάνει ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ κεφαλαιακὸν δυναμικὸν ἐκάστου κλάδου δημιουργεῖται ἐκ τῶν εἰσροῶν αὐτοῦ ἐκ τοῦ προϊόντος τῶν ἄλλων κλάδων τῆς οἰκονομίας. Πρὸς συμπλήρωσιν τῶν κενῶν αὐτῶν πρέπει νὰ διατυπώσωμεν ἓν δυναμικὸν καὶ ἀναλυτικὸν, ἐν μέρει, ὑπόδειγμα. Ἐν τοιοῦτον ὑπόδειγμα παρουσιάζεται ὑπὸ τοῦ S. Chakravarty εἰς τήν ἐργασίαν του: *The Logic of Investment Planning* (Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1959).

### III. Τὸ ὑπόδειγμα Chakravarty.

Ἀρχίζομεν διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν ἐπενδύσεως (investment coefficients)  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1j} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2j} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{i1} & w_{i2} & \dots & w_{ij} & \dots & w_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nj} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix} \quad \delta\text{ι' ὅλας τὰ } j, \sum_i w_{ij} = 1$$



όπου  $w_{ij}$  είναι τὸ ποσοστὸν τῶν ἀγαθῶν ἐπενδύσεως τὰ ὁποῖα λαμβάνει ὁ κλάδος  $j$  ἐκ τοῦ κλάδου  $i$  διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ προϊόντος τοῦ πρώτου κλάδου. Ἄν θέσωμεν  $W_j$  διὰ τὴν συνολικὴν ποσότητα ἀγαθῶν ἐπενδύσεως τὰ ὁποῖα λαμβάνει ὁ κλάδος  $j$  ἀπὸ τοὺς διαφόρους κλάδους καὶ  $\bar{W}_i$  διὰ τὴν συνολικὴν ποσότητα ἀγαθῶν ἐπενδύσεων τὴν ὁποῖαν δίδει ὁ κλάδος  $i$ , εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν.

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1j} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2j} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{i1} & w_{i2} & \dots & w_{ij} & \dots & w_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nj} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_j \\ \dots \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{W}_1 \\ \bar{W}_2 \\ \dots \\ \bar{W}_i \\ \dots \\ \bar{W}_n \end{bmatrix}$$

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ ὑποδείγματος δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς ἀκολούθως :

$$(1) \quad X_i = C_i + \sum_j X_{ij} + \sum_j W_{ij}$$

ὅπου  $X_i$  εἶναι τὸ συνολικὸν προϊόν τοῦ κλάδου  $i$ ,  $C_i$  ἡ συνολικὴ κατανάλωσις ἀγαθῶν  $i$ ,  $X_{ij}$  ἡ ποσότης τοῦ  $i$ , ἣτις χρησιμοποιεῖται ἀπὸ τὸν κλάδον  $j$  καὶ  $W_{ij}$  ἡ ποσότης τοῦ  $i$  ἢ ὁποῖα λαμβάνεται ἀπὸ τὸν κλάδον  $j$  δι' ἐπένδυσιν.

$$(2) \quad X_{ij} = a_{ij} X_j,$$

ὅπου  $a_{ij}$  εἶναι ὁ συντελεστὴς εἰσροῆς τοῦ κλάδου  $j$  ἐκ τοῦ κλάδου  $i$  καὶ  $X_j$  τὸ συνολικὸν προϊόν τοῦ κλάδου  $j$ .

$$(3) \quad W_{ij} = w_{ij} W_j,$$

$$(4) \quad W_j = b_j / g [X_j (t + g) - X_j (t)],$$

ὅπου  $b_j$  εἶναι ὁ συντελεστὴς κεφαλαιουχικότητος τοῦ κλάδου  $j$  καὶ  $g$  μία (σταθερὰ) χρονικὴ ὑστέρησις (lag), μετὰ τὸ πέρασ τῆς ὁποίας ἀρχίζουν πράγματι νὰ ἀποδίδουν αἱ ἐπενδύσεις (!).

$$(5) \quad Y = \sum_j X_j - \sum_j \sum_i X_{ij},$$

ὅπου  $Y$  εἶναι τὸ συνολικὸν ἔθνικόν εἰσόδημα.

$$(6) \quad C_i = c_i (Y - J) + \bar{c}_i, \text{ ὑπὸ τὸν περιορισμὸν } \sum_i c_i = 1, \sum_i \bar{c}_i = 0,$$

ὅπου  $J$  εἶναι ἡ συνολικὴ ἐπένδυσις. Οὕτω ἡ κατανάλωσις τοῦ προϊόντος  $i$  εἶναι συνάρτησις τῆς συνολικῆς καταναλώσεως.

1) Θέτοντας  $g = 1$  λαμβάνομεν  $W_j = b_j \Delta X$  ἢ  $b_j = W_j / \Delta X$ .

$$7) \quad J = \sum_j W_j,$$

ἀποτελεί ὄρισμὸν τῆς συνολικῆς ἐπενδύσεως.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (6) προκύπτει ἡ ἰσότης μεταξὺ ἀποταμιεύσεως ( $sY$ ) καὶ ἐπενδύσεως. Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀναλυτικὴν παρουσίασιν τοῦ ὑποδείγματος Domar ἀποτελεῖ μίαν αὐτάρκη διάρθρωσιν καὶ συνεπῶς δὲν παρέχει τὴν δυνατότητα ἀσκήσεως οἰκονομικῆς πολιτικῆς. Εὐθύς ὡς προσδιορισθοῦν αἱ ἀρχικαὶ συνθήκαι αὐτοῦ, προσδιορίζεται ἐπίσης καὶ ὁ ρυθμὸς ἀναπτύξεως τῆς οἰκονομίας. Πρὸς μετατροπὴν τοῦ προβλήματος εἰς ἓν πρόβλημα ἐπιλογῆς εἶναι ἀνάγκη νὰ εἰσαχθοῦν πρόσθετοι ὑποθέσεις. Εἰς τὰ τμήματα IV καὶ V ἀσχολούμεθα μὲ δύο διάφορους τύπους ἐπιλογῆς οἱ ὅποιοι θὰ ἦτο δυνατόν νὰ ἐνσωματωθοῦν εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐξετασθὲν ὑπόδειγμα.

#### IV. Ἐπιλογή Τεχνολογίας.

Εἰς τὸ προηγούμενον τμήμα ἡ τεχνολογικὴ μήτρα τῆς οἰκονομίας ἐθεωρήθη ὡς δεδομένη. Ἄν ὅμως ὑποθέσωμεν ὅτι ὑφίστανται περισσότεραι τῆς μιᾶς μέθοδοι διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ αὐτοῦ προϊόντος, δημιουργεῖται ἡ δυνατότης διατυπώσεως ἑνὸς προβλήματος ἐπιλογῆς τῆς «οἰκονομικωτέρας» μεθόδου δι' ἕκαστον προϊόν. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ θὰ ἠδύνατο τότε νὰ ἀναζητηθῆ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἐνταῦθα θὰ ἐκθέσωμεν ἓν συντομίᾳ τὴν ἀναπτυχθεῖσαν ὑπὸ τοῦ κ. Α. Α. Λάζαρη τεχνικὴν λύσεως τοῦ ὡς ἄνω προβλήματος (!). Ἡ τεχνικὴ αὕτη, ἣτις διαφέρει τῆς συνήθως χρησιμοποιουμένης τεχνικῆς simplex, παρουσιάζει τὸ σημαντικὸν ὑπολογιστικὸν πλεονέκτημα ὅτι ἐπιτρέπει τὸν χειρισμὸν πρακτικῶν προβλημάτων μεγάλης κλίμακος, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ ἀναφανοῦν ὡς συγκεκριμέναι περιπτώσεις, ἀνευ χρησιμοποίησεως δαπανηρῶν ὑπολογιστικῶν μηχανῶν. Ἡ ἐνταῦθα παρουσιάσις μας δὲν ἀναφέρεται εἰς τὰ τεχνικὰ λεπτομερεῖας τῆς διατυπώσεως Λάζαρη.

Ἀρχίζομεν μὲ τὴν βασικὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ Οἰκονομικὴ ἀρχὴ ἔχει ὑπὸ ἐξέτασιν μίαν τεχνολογικὴν μήτραν  $A^*$  μὲ στοιχεῖα τοῦ τύπου

$$A_{ij}^* = \begin{bmatrix} \Lambda_{ij} \\ \alpha_{ij} \end{bmatrix}$$

ὅπου  $A_{ij}$  εἶναι μία  $n \times n$  μήτρα τύπου Leontief καὶ  $b_{ij}$  εἶναι τὸ δiάνυσμα-σειρὰ τῶν συντελεστῶν ἀποδόσεως κεφαλαίου τῶν διαφόρων κλάδων. Ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον λαμβάνεται ὡς ὁ ἓν ἀνεπαρκεῖα συντελεστής, τὸ πρόβλημά μας συνί-

1) Α. Α. Λάζαρη: Προγραμματισμὸς τῶν ἐπενδύσεων διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν οἰκονομικῶς καθυστερημένων χωρῶν (Μία ἐφαρμογὴ τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως). Ἀθῆναι 1959 (Πολυγραφ. κείμενον).

σταται εἰς τὴν πραγματοποίησιν τῶν τιθεμένων οικονομικῶν σκοπῶν διὰ ἐξοικονομήσεως κατὰ τὸ δυνατόν τοῦ κεφαλαίου. Εἰδικώτερον ἀποσκοπεῖται ἡ ἐπιλογή  $A_{ii}^*$  ἐκ τῆς  $A^*$ , εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐλαχιστοποιηθοῦν αἱ ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς τελικῆς ζητήσεως  $\Delta Y_i$  (βλ. καὶ τμ. II). Προχωροῦμεν, ὀρίζοντες τὴν «συσχέτισιν»  $g$ :

$$g : A^* \rightarrow T$$

$$\text{ὅπου } g(A^*_{ii}) = A'_{ii}^{-1} b'_{ii} = \tau_{ii}.$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω διατύπωσιν  $\tau_{ii}$  εἶναι διάνυσμα μὲ στοιχεῖα  $\tau_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) ὅπου  $\tau_{ij}$  εἶναι τὸ συνολικὸν (ἄμεσον καὶ ἔμμεσον) κόστος κεφαλαίου τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου  $j$ . Τὸ τελευταῖον βῆμα τῆς ἀναλύσεως συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ συνόλου:

$$\Omega = [\omega/\omega \in A^* \text{ καὶ } \Delta Y'_i, g(\omega) \text{ εἶναι ἐλάχιστον}]$$

Ἡ οικονομικὴ ἀρχὴ ἐκλέγει τὴν τεχνολογίαν  $\omega$ , ἥτις εἶναι ἡ ἀρίστη δυνατὴ, δηλαδὴ ἡ ἐλαχιστοποιοῦσα τὰς ἀπαιτουμένας ἐπενδύσεις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιλογῆς δύναται εὐχερῶς νὰ ἐνσωματωθῇ εἰς τὸ ὑπόδειγμα κλειστῆς οἰκονομίας τοῦ προηγουμένου τμήματος (!).

## V Τὸ ὑπόδειγμα ἀνοικτῆς Οἰκονομίας τοῦ Chakravarty

Ἐὸ Chakravarty διατυπώνει ἐν ὑπόδειγμα ἐπιλογῆς διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ἀνοικτῆς οἰκονομίας. Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο ἔχει ὡς ἀκολούθως:

$$1) \quad X_i = C_i + E_i + \sum_j X_{ij} + \sum_j W_{ij},$$

ὅπου  $E_i$  παριστᾷ τὰς ἐξαγωγὰς (ἢ τὰς εισαγωγὰς, ἂν ἔχη ἀρνητικὸν σημεῖον) τοῦ κλάδου  $i$ .

$$2) \quad X_{ij} = a_{ij} X_j$$

$$3) \quad W_{ij} = w_{ij} W_j$$

$$4) \quad K_j + W_j = b_j/g [X_j(t+g) - X_j(t)],$$

ὅπου  $K_j$  παριστᾷ τὰς εισαγωγὰς ἀγαθῶν ἐπενδύσεων τοῦ κλάδου  $j$ .

$$5) \quad K_j = k_j W_j,$$

δίδει τὴν ποσότητα τῶν εισαγωγῶν ἥτις περιέχεται εἰς δοθείσαν ποσότητα ἐγχωρίων ἐπενδύσεων τοῦ κλάδου  $j$ .

$$6) \quad R_j = r_j X_j,$$

1) Ὁ κ. Λάζαρης ἐπεκτείνει τὸ πρόβλημα ἐπιλογῆς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀνοικτῆς οἰκονομίας καί, χρησιμοποιῶν τὸ κριτήριον ἐλαχιστοποίησεως τῶν ἐπενδύσεων, προσδιορίζει ποῖοι παραγωγικοὶ κλάδοι εἶναι «κενοί» (empty), δηλ. ποῖα προϊόντα πρέπει νὰ εἰσαχθοῦν καὶ ποῖα πρέπει νὰ παραχθοῦν ἐπιτοπίως.

όπου  $R_j$  ύποδηλοί τας εισαγωγάς πρώτων ύλων του κλάδου  $j$ .

$$7) \quad J = \sum_j W_j + \sum_j K_j$$

$$8) \quad Y = \sum_j X_j - \sum_j \sum_i X_{ij} - \sum_j R_j$$

$$9) \quad C_i = c_i (Y - J) + \bar{c}_i \left[ \sum_j c_j = 1, \sum_j \bar{c}_j = 0 \right]$$

$$10) \quad J = s Y.$$

Ύποθέτοντες ότι ούδεις κλάδος είναι «κενός», λαμβάνομεν  $2n^2 + 6n + 2$  μεταβλητάς και  $2n^2 + 5n + 3$  εξισώσεις. Κατά συνέπειαν έχομεν  $n - 1$  βαθμούς ελευθερίας, όπερ σημαίνει ότι ή διάρθρωσις είναι τμηματική και άνακύπτει πρόβλημα έπιλογής. Το πρόβλημα τούτο δύναται να διατυπωθή ως εξής: Να έπιλεγούν αί διαχρονικάι τιμαί των  $n - 1$  μεταβλητών  $W$ , εις τρόπον ώστε, δοθεισών των άρχικών συνθηκών, να προσδιορισθούν αί  $n$  διαχρονικάι τιμαί των  $X$ , αί όποιαί μεγιστοποιούν δοθείσαν συνάρτησιν άριστοποίησεως. Κατά την όρολογίαν Tinbergen αί μεταβληταί  $X$  είναι «μεταβληταί-σκοποί» αί δέ  $W$  «μεταβληταί-όργανα».

#### VI. Διαρθρωτικά τινα προβλήματα οικονομικής άναπτύξεως.

Εις τό πρόβλημα οικονομικής πολιτικής του προηγούμενου τμήματος, έλαμβάνετο ως δεδομένη ή διάρθρωσις της οικονομίας. Έν τοιούτον πρόβλημα δύναται να χαρακτηρισθή ως «ένδο-διαρθρωτικόν», έν αντιδιαστολή προς έτερα προβλήματα οικονομικής πολιτικής εις τά όποια έπιδιώκεται (ως εις τό τμ. IV) ή μεταβολή της διαρθρώσεως της οικονομίας και συνεπώς δύνανται να χαρακτηρισθούν ως «διαρθρωτικά». Εις την περίπτωσιν ένός διαρθρωτικού προβλήματος θά ήτο ένδιαφέρον να διατυπωθή έν δυναμικόν ύπόδειγμα άναλύσεως τό όποιον θά παρείχε την δυνατότητα του διαχρονικού συσχετισμού των παραμέτρων των εξισώσεων. Η έπιλογή των διαχρονικών τιμών των μεταβλητών-σκοπών εις έν τοιούτον ύπόδειγμα θά καθόριζεν έπίσης και τάς τιμάς των μεταβλητών-όργάνων, λαμβανομένων ταυτοχρόνως ύπ' όψιν και των έπερχομένων μεταβολών εις την διάρθρωσιν της οικονομίας. Έν τοιούτον ύπόδειγμα θά ήτο ίσως δυνατόν να χρησιμοποιηθή διά την συστηματοποίησιν των σκέψεων των άσκοούντων την οικονομικήν πολιτικήν, αλλά θά είχε πολύ μικράν πιθανότητα να καταστή «λειτουργικόν.» Έν πρόβλημα του άνωτέρω τύπου είναι και τό πρόβλημα των καλουμένων «έπενδύσεων ύποδομής», τό όποιον συνίσταται εις τον προσδιορισμόν της διαχρονικής έπιδράσεως των ως άνω έπενδύσεων επί των «συντελεστών» της τεχνολογικής μήτρας της οικονομίας.

Ύως διαρθρωτικόν πρόβλημα θά ήδύνατο έπίσης να χαρακτηρισθή και τό πρόβλημα της έπιλογής ένός ύποδείγματος τό όποιον θά έπέτρεπε την διακλαδικήν και διαχωρικήν ταξινόμησιν των στατιστικών δεδομένων, εις τρόπον ώστε να καταστή δυνατή ή διατήρησις της «συμπληρωματικότητας» με-

ταξύ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, καί κατὰ συνέπειαν ἡ ἐντός τοῦ ὑποδείγματος ὑπαγωγή τῶν «ἐξωτερικῶν οικονομῶν».

Ἐτερον «κλασσικόν» διαρθρωτικόν πρόβλημα εἶναι τὸ πρόβλημα τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν εἰσαγωγῶν δι' ἐγχωρίου παραγωγῆς. Ἡ ἀντικατάστασις αὕτη πιθανὸν νὰ ἐπιβάλλεται πρὸς ἐξοικονόμησιν ἐπενδύσεων ἢ διότι ἡ ζήτησις δι' ἐξαγωγὰς τῆς δοθείσης χώρας δὲν εἶναι ἀπείρως ἐλαστικὴ, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον θὰ ἐδημιούργει δυσχερείας ὅσον ἀφορᾷ τὴν δυνατότητα πληρωμῆς τῶν εἰσαγωγῶν τῆς χώρας ταύτης, εἰς τὸ ἐπίπεδον ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐπιβάλλει τὸ πρόγραμμα ἀναπτύξεως τῆς. Ἡ ἐγχωρία παραγωγή εἶναι ἡ μόνη λύσις πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς καταστάσεως εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην. Ἐξ ἄλλου εἰς ἓν ὠρισμένον στάδιον ἀναπτύξεως, ἡ ἐγχωρία παραγωγή ἐξασφαλίζει τὴν δυνατότητα τῶν «οἰκονομῶν πληθοπαραγωγῆς» (τὰς ὁποίας δὲν ἐλάβομεν ὑπ' ὄψιν μας εἰς τὸ ὑπόδειγμα) καὶ τοῦτο θὰ ἦτο ἕτερος λόγος ἀντικαταστάσεως ὠρισμένων εἰσαγωγῶν δι' ἐγχωρίας παραγωγῆς.

Ἐτερον πρόβλημα εἶναι τὸ πρόβλημα τῆς διαρθρωτικῆς ἀνεργίας, τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζει τὰς ὑπαναπτύκτους οικονομίας. Μία προσπάθεια ἐκ μέρους τῆς Οἰκονομικῆς Ἀρχῆς πρὸς ἀντιμετώπισιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ δυνατόν νὰ ὀδηγήσῃ εἰς παραβίασιν τοῦ κριτηρίου ἀποδοτικότητος τοῦ τμήματος III.

#### *VII. Τὸ πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ὀργανώσεως.*

Μέχρι τοῦδε ἐξητάσθη τὸ πρόβλημα ἐπιλογῆς ἑνὸς δυναμικοῦ προγράμματος ἀρίστης κατανομῆς τῶν πόρων ἐν σχέσει πρὸς δοθείσαν συνάρτησιν κοινωνικῆς προτιμῆσεως. Ἡ πραγματοποιήσις ὁμως τοῦ προγράμματος αὐτοῦ προϋποθέτει τὴν λειτουργίαν ὠρισμένων οἰκονομικῶν ὀργανώσεων. Κατὰ συνέπειαν προκύπτει ἐνταῦθα ἐν πρωταρχικῆς σημασίας πρόβλημα ἐπιλογῆς, ἀφορῶν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ καταλλήλου ὀργανωτικοῦ πλαισίου τῆς οἰκονομίας. Παραλλήλως μὲ τὴν Οἰκονομικὴν Ἀρχὴν, ἀσχολουμένη μὲ τὴν ἐκλογὴν τοῦ ἀρίστου οἰκονομικοῦ προγράμματος, θὰ ὑποθέσωμεν τώρα τὴν ὑπαρξιν μιᾶς Ὄργανωτικῆς Ἀρχῆς, ἐπιφορτισμένης μὲ τὴν προσπάθειαν ἐκλογῆς τοῦ καταλλήλου ὀργανωτικοῦ πλαισίου τῆς οἰκονομίας.

Μολοντί σημαντικὴ ἐργασία ἐπετελέσθη κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη ὅσον ἀφορᾷ τὸ πρόβλημα τῆς ὀργανώσεως καὶ παρὰ τὸ γεγονός ὅτι τὸ κλασσικόν πρόβλημα τῆς ἀνταγωνιστικῆς οἰκονομίας ἢ τῆς ἰσορροπίας ὑπὸ καθεστῶς ἀτελοῦς ἀνταγωνισμοῦ εἶναι πρόβλημα ὀργανωτικῆς φύσεως, αἱ γνώσεις μας ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐπιλογὴν τῆς καταλλήλου οἰκονομικῆς ὀργανώσεως εἶναι μᾶλλον ἀτελεῖς. Οὐδεμία προσπάθεια βεβαίως γίνεται ἐνταῦθα πρὸς βελτίωσιν τῆς καταστάσεως ταύτης. Πρὸς ἀπλούστευσιν, θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ οἰκονομικὴ ὀργάνωσις χαρακτηρίζεται ἐπαρκῶς εὐθὺς ὡς α) καταμερίσωμεν τὴν οἰκονομίαν (κατὰ τὴν ἔννοιαν Hurvitz), δηλαδὴ διαιρέσωμεν αὐτὴν εἰς «διοικητικὰς» μονάδας, β) καθορίσωμεν τοὺς κανόνας ἐρεύνης (κατὰ τὴν ἔννοιαν Simon), οἱ ὁποῖοι προσδιορίζουν τὴν συμπεριφορὰν αὐτῶν. Ἐνταῦθα εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ ὑπόδειγμά μας τὴν συμπεριφορὰν ἀριστοποιήσεως



δι' έρευνητικής συμπεριφορᾶς ὀδηγούσης εἰς «ίκανοποιητικά» ἀποτελέσματα —καθ' ὅσον εἶναι σαφές ὅτι τὸ κρίσιμον στοιχείον τῆς συμπεριφορᾶς ἑνὸς οἰκονομικοῦ φορέως εἶναι ἡ σύγκλισις (καὶ ἡ ταχύτης συγκλίσεως) τῆς συμπεριφορᾶς ταύτης πρὸς ἓν ἀποτέλεσμα τὸ ὅποιον θεωρεῖται ὡς ἰκανοποιητικόν. Τοιαῦτα προβλήματα δύνανται νὰ ἀντιμετωπισθοῦν ἰκανοποιητικῶς διὰ τῶν «κανόνων ἐρεύνης» τοῦ Simon.

Ἡ συμπεριφορὰ τῆς διοικητικῆς ἀρχῆς δύνανται νὰ διατυπωθῆ ὡς ἑξῆς: Ἐστω  $\Phi$  τὸ σύνολον τῶν δυνατῶν ὀργανώσεων,  $S$  τὸ σύνολον τῶν ἀποτελεσμάτων (τῶν δυνατῶν καταστάσεων τοῦ κόσμου) καὶ  $i$  ἡ συσχέτισις τοῦ  $\Phi$  πρὸς τὸ  $S$ . Οὕτω εἰς ἕκαστον στοιχείον τοῦ  $\Phi$  ἀντιστοιχεῖ ἓν ἀποτέλεσμα  $s$ , κατὰ τὴν συνάρτησιν  $f$ . Ἐκαστον ἀποτέλεσμα, δηλ. ἕκαστον στοιχείον τοῦ  $S$ , δύνανται νὰ νοηθῆ ὡς μία σειρά  $n$  διατεταγμένων στοιχείων ( $n$ -tuple) μὲ μίαν ἀντίστοιχον θέσιν εἰς τὸ σύστημα ἀξιῶν τῆς διοικητικῆς μονάδος. Ἡ συσχέτισις  $f$  δεικνύει τὴν κατάστασιν τῆς διοικητικῆς ἀρχῆς ἀπὸ πληροφοριακῆς ἀπόψεως. Διατυπώνομεν ἓν συνεχεῖα μίαν συσχέτισιν ἀξιολογήσεως  $n$ , τοῦ στοιχείου  $s$  εἰς τὸ σύνολον  $[0, 1]$  ὅπου 0 σημαίνει «μὴ ἰκανοποιητικόν» καὶ 1 σημαίνει «ἰκανοποιητικόν» (ἀποτέλεσμα). Ἐπειδὴ τὸ  $S$  εἶναι πολυδιάστατον θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι  $w(s) = 1$  ἂν καὶ μόνον ἂν τὸ ἐπίπεδον ἑκάστου στοιχείου  $s$  εἶναι ἰκανοποιητικόν.

Τέλος, ἀντὶ ὀρισμοῦ τῆς θέσεως ἰσορροπίας τῆς διοικητικῆς ἀρχῆς, χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἔννοιαν τῆς *διοικητικῆς διαδικασίας ἐρεύνης*, ἣτις ὀρίζει δυναμικῶς τὸν τρόπον καθ' ὃν ἡ διοικητικὴ ἀρχὴ ἐπιχειρῆ νὰ φθάσῃ εἰς κατάστασιν ἰσορροπίας.

Ἐκαστον στοιχείον τοῦ  $S$  δύνανται νὰ θεωρηθῆ ὡς ἀναφερόμενον εἰς τὸν τρόπον κατανομῆς τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ οἰκονομικῶν πόρων, τοῦ ἀτομικοῦ εἰσοδήματος καὶ τῆς κατανομῆς τῆς πολιτικῆς δυνάμεως. Οὕτω ἡ συσχέτισις  $w$  θὰ ἠδύνατο νὰ θεωρηθῆ ὡς παρέχουσα πληροφορίας διὰ τὸ σύστημα προτεραιοτήτων τῆς διοικητικῆς ἀρχῆς ἐν σχέσει π.χ. πρὸς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν, τὴν κατανομὴν τοῦ εἰσοδήματος καὶ τὸ ὑφιστάμενον πολιτικόν σύστημα. Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι πρόβλημα πολιτικῆς ἐν σχέσει πρὸς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν ὑφίσταται μόνον ἐφ' ὅσον ἡ οἰκονομικὴ κατάστασις θεωρεῖται, δυναμικῶς ἐξεταζομένη, ὡς μὴ ἰκανοποιητικὴ ὑπὸ τῆς διοικητικῆς ἀρχῆς. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει θὰ καταβληθῆ προσπάθεια μεταβολῆς τῆς καταστάσεως αὐτῆς, δι' ἐκλογῆς τῆς κατολλήλου μορφῆς οἰκονομικῆς ὀργανώσεως. Ἡ λύσις αὐτῆ πρέπει ἐξ ἄλλου νὰ συμβιβάζεται μὲ τὸ ὅλον σύστημα προτεραιοτήτων τῆς διοικητικῆς ἀρχῆς. Ἐὰν τοῦτο εἶναι ἀδύνατον τότε θὰ καταστῆ ἀναγκαῖος ὁ ἐκ νέου ὀρισμὸς τοῦ  $w$ , δηλαδὴ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δυνατοτήτων τῆς διοικητικῆς ἀρχῆς.

Θεμελιώδη προβλήματα, ὡς εἶναι π.χ. τὸ πρόβλημα τῆς ἀποκεντρώσεως τῆς οἰκονομικῆς δραστηριότητος καὶ τῆς πολιτικῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, ἢ τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς μεταξὺ ἰδιωτικῆς καὶ κρατικῆς ἐπιχειρήσεως ἢ τοῦ ρυθμοῦ οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως καὶ τῆς πολιτικῆς διαρθρώσεως (τοῦ πολιτικοῦ συστήματος), θὰ ἠδύνατο νὰ ἐξετασθοῦν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω



έννοιών. Είναι πάντως αναγκαίον νὰ τονισθῆ ὅτι αἱ σημεριναὶ γνώσεις μας εἰς τὸν τομέα αὐτὸν δὲν μᾶς ἐπιτρέπουν παρὰ μόνον τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος. Ἡ σημαντικώτερα πλευρὰ τοῦ τιθεμένου προβλήματος εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῆς συναρτήσεως  $f$ , δηλαδή τῆς σχέσεως μεταξὺ δεδομένης οἰκονομικῆς ὀργανώσεως καὶ κοινωνικῆς ὀργανώσεως.

### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. S. Chakravarty, *The Logic of Investment Planning* (Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1959).
2. H. B. Chenery and P. G. Clark, *Interindustry Economics* (New York : John Wiley and Sons, Inc., 1959).
3. Evsey Domar, *Essays in the Theory of Economic Growth* (New York : Oxford University Press, 1957).
4. R. Dorfman, P. A. Samuelson, R. M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis* (New York : Mc Graw-Hill Book Company, 1958).
5. Α. Α. Λάζαρη, «Προγραμματισμὸς τῶν ἐπενδύσεων διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν οἰκονομικῶς καθυστερημένων χωρῶν : Μία ἐφαρμογὴ τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως». (Ἀθήναι, 1959, πολυγραφημένον κείμενον).
6. P. C. Mahalanobis, «Some Observations on the Process of Growth of National Income» (*Sankhya*, 1953).
7. P. C. Mahalanobis, «The Approach of Operational Research to Planning» (*Sankhya*, 1955).
8. Herbert Simon, *Models of Man* (New York : John Wiley and Sons, Inc., 1957).
9. J. Tinbergen, *Centralization and Decentralization in Economic Policy* (Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1954).

# ALCUNI PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

per SALVATORE CHERUBINO

## § 1. Massimizzazione o minimizzazione di un settore aggregato

1. Consideriamo le due funzioni lineari delle produzioni e dei prezzi di un' economia  $E$  ripartita in  $n$  settori:

$$(1. 1) \quad z = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n = \lambda \mathbf{X}_{-1}$$

$$(1. 1) \quad z = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_n p_n = \mu \mathbf{p}_{-1}$$

vincolate dalle condizioni:

$$(2. 1) \quad [I - \mathbf{a}] \mathbf{X}_{-1} \leq \mu_{-1}$$

$$(2. 1) \quad \mathbf{p} [I - \mathbf{a}] \geq \lambda$$

Poiché  $[I - \mathbf{a}]^{-1}$  è una matrice non negativa (addirittura positiva se  $\mathbf{a}$ , ossia l'economia  $E$ , è irriducibile) dalle (2. 1) — (2. 1) si ha:

$$(3. 1) \quad \mathbf{X}_{-1} \leq [I - \mathbf{a}]^{-1} \mu_{-1} = \mathbf{X}_{-1}^0$$

$$(3. 1) \quad \mathbf{p} \geq \lambda [I - \mathbf{a}]^{-1} = \mathbf{p}^0$$

Essendo  $\lambda$  e  $\mu$  due vettori positivi o semipositivi, anche  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{p}$  sono tali e si può scrivere:

$$(4. 1) \quad z = \lambda \mathbf{X}_{-1} \leq \lambda \mathbf{X}_{-1}^0 = z^0$$

$$(4. 1) \quad z = \mu \mathbf{p}_{-1} \geq \mu \mathbf{p}_{-1}^0 = z^0$$

le quali ci dicono che  $z^0$  e  $z^0$  sono rispettivamente massimo e minimo di  $z$  e  $z$ . Orbene, confrontando le (2. 1) — (2. 1) con le (I. 1) — (II. 1) della parte prima si vede che  $\lambda$  è un vettore di costi di forza-lavoro per produzioni unitarie non minore di quello necessario (quindi minimo)  $\mathbf{Z}$  e che  $\mu$  è un vettore di consumi non minore di quello  $\mathbf{Y}$  dei consumi necessari (quindi minimo). Si è dunque ottenuto che:

a) Esistono produzioni e prezzi che massimizzano un costo di lavoro impiegato negli  $n$  settori e minimizzano il costo dei consumi: questo massimo e questo minimo risultano fra loro uguali. Quest'ultima affermazione segue dalle (3. 1) — (3. 1) sostituite nelle (4. 1) — (4. 1).

Analogamente, considerando le funzioni lineari:

$$(5. 1) \quad +z = \lambda_1 + X_1 + \lambda_2 + X_2 + \dots + \lambda_n + X_n = \lambda + \mathbf{X}_{-1}$$

$$(5. 1) \quad +z = \mu_1 + \mathbf{p}_1 + \mu_2 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mu_n + \mathbf{p}_n = \mu + \mathbf{p}_{-1}$$

sottoposte ai vincoli lineari:

$$(6. 1) \quad [I - \mathbf{a}] \mathbf{X}_{-1} \geq \mu^+$$

$$(6. 1) \quad \mathbf{p} [I - \mathbf{a}] \leq \lambda^+$$

si ha che:

$$+z^0 = \lambda^+ \cdot +\mathbf{X}_{-1}^0 \quad \text{con} \quad +\mathbf{X}_{-1}^0 = [I - \mathbf{a}]^{-1} \mu^+$$

$$+z^0 = +\mathbf{p}^0 \cdot \mu^+ \quad \text{con} \quad +\mathbf{p}^0 = \lambda^+ [I - \mathbf{a}]^{-1}$$

sono rispettivamente minimo e massimo, fra loro eguali, di  $+z$  e  $+z$ . Cioé, confrontando ancora con le (I. 1) - (II. 1) della parte prima, che ci dicono essere  $\mu^+$  un vettore di consumi e  $\lambda^+$  un vettore di forza-lavoro impiegata non maggiori di quelli massimi, supposti fissati per E, si ha che:

b) Esistono produzioni e prezzi che minimizzano un costo di lavoro impiegato e massimizzano un costo di consumi; questo massimo e questo minimo risultano fra loro eguali.

I vettori della forza-lavoro impiegata per produzioni unitarie nei singoli settori e dei consumi rispettivi si possono fissare ad arbitrio, entrambi positivi o semipositivi. Se il primo, cioè quello della forza-lavoro, si fissa positivo, anche il vettore dei prezzi che danno il massimo od il minimo risulta positivo; se si fissa positivo il secondo, cioè quello dei consumi, altrettanto accade per il vettore delle produzioni. Se l'economia è irriducibile i vettori dei prezzi e delle produzioni risultano entrambi positivi anche quando quelli della forza-lavoro impiegata e dei consumi siano semipositivi.

## § 2. Massimo e minimo della velocità di produzione e di prezzo

2. Abbiamo visto (p. I, § 4, 8) che le velocità di produzione e di prezzo relative ad un settore aggregato secondo il vettore  $\lambda$  positivo o semipositivo, posto:

$$(1. 2) \quad \begin{cases} X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n = \lambda \mathbf{X}_{-1} \\ p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_n p_n = \lambda \mathbf{p}_{-1} \end{cases}$$

si esprimono con le relazioni differenziali:

$$(1. 2) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = \lambda B \mathbf{p}_{-1} + \mathbf{p} \mathcal{M} \mathbf{p}_{-1} \\ \frac{dp}{dt} = \lambda C \mathbf{X}_{-1} + \mathbf{X} \mathcal{X}' \mathbf{X}_{-1} \end{cases}$$

Ponendo:

$$2S = \mathcal{M} + \mathcal{M}_{-1}; \quad 2S' = \mathcal{X}' + \mathcal{X}'_{-1}$$

le parti complementari  $\mathbf{p} \mathcal{M} \mathbf{p}_{-1}$ ,  $\mathbf{X} \mathcal{X}' \mathbf{X}_{-1}$  diventano rispettivamente le forme quadratiche  $\mathbf{p} S \mathbf{p}_{-1}$ ,  $\mathbf{X} S' \mathbf{X}_{-1}$ , onde può scriversi:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \lambda B \mathbf{p}_{-1} + \mathbf{p}_{-1} S \mathbf{p}_{-1} \\ \frac{dp}{dt} &= \lambda C \mathbf{X}_{-1} + \mathbf{X}_{-1} S' \mathbf{X}_{-1} \end{aligned}$$

Si ricordino le posizioni (1. 4) — (2. 4) della parte prima e le due analoghe:

$$(4. 2) \quad \mathcal{F} = C + X_1 C' + X_2 C'' + \dots + X_n C^{(n)}$$

$$(5. 2) \quad \mathcal{X}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 C' \\ \lambda_2 C' \\ \vdots \\ \lambda_n C^{(n)} \end{bmatrix}$$

con le conseguenti relazioni:

$$(6. 2) \quad \mathbf{p} \mathcal{M} = \lambda [\mathcal{B} - B]; \quad \mathbf{X} \mathcal{X}' = \lambda [\mathcal{F} - C]$$

$\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  essendo le matrici dei coefficienti del sistema differenziale lineare che rappresenta il mercato [parte I, (I. 2)].

In un intervallo di tempo abbastanza piccolo ( $t_0$ ,  $t_1$ ) in cui funziona il mercato, se si vuole essere in regime di libera concorrenza le matrici  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  devono essere non negative (n. 6, § 3, della parte prima)<sup>1)</sup>. Ne segue che sono tali anche B e C. Invero, ricordando che si è posto, con la (1. 4) della parte prima:

$$(4'. 2) \quad \mathcal{B} = B + p_1 B' + p_2 B'' + \dots + p_n B^{(n)}$$

si vede che ad un elemento negativo di B potrebbero farsi corrispondere, se occorre, reazioni specifiche tutte zero od abbastanza piccole in va-

1) Le condizione é necessaria; la sufficienza si ha se non si tien conto di **a**. Se le reazioni sono variabili col tempo, la non negatività di  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{F}$  in ( $t_0$ ,  $t_1$ ) o in una sua porzione é condizione sufficiente per la positività delle soluzioni dell' integrale generale in tutto ( $t_0$ ,  $t_1$ ) o in quella porzione. Ma non é detto che esse soddisfino senz' altro alle (II. 2) della parte prima, che sono indispensabili perché  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{p}$  siano relativi alla matrice di scambi **a**.

lore assoluto, per modo che anche il corrispondente elemento di  $\mathcal{B}$  sia negativo, onde verrebbe meno la concorrenza perfetta. La non negatività di  $B$  e  $C$  è anch' essa solo necessaria. Sarebbe necessaria anche la non negatività delle reazioni specifiche qualora le componenti dei vettori  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{X}$  non fossero limitate: il che non avviene quando, come si supporrà di qui a poco, questi vettori siano normalizzati.

Ne segue che i vettori  $\lambda B$  e  $\lambda C$  sono non negativi insieme alle parti principali delle velocità di produzione e di prezzo dei settori aggregati.

3. Supponiamo che i vettori  $\lambda B$  e  $\lambda C$  siano non nulli, quindi positivi o semipositivi; poniamo:

$$(7. 2) \quad \lambda B = \mu; \quad \lambda C = \lambda$$

e consideriamo le funzioni lineari:

$$(8. 2) \quad \lambda B \mathbf{p}_{-1} = \mu \mathbf{p}_{-1}; \quad \lambda C \mathbf{X}_{-1} = \lambda \mathbf{X}_{-1}$$

La prima di queste funzioni ammette il minimo e la seconda il massimo o viceversa, secondo che  $\mathbf{p}$  ed  $\mathbf{X}$  siano sottoposti ai vincoli:

$$(9. 2) \quad \mathbf{p} [I - \mathbf{a}] \geq \lambda; \quad [I - \mathbf{a}] \mathbf{X}_{-1} \leq \mu_{-1}$$

oppure agli altri:

$$(10. 2) \quad \mathbf{p} [I - \mathbf{a}] \leq \lambda; \quad [I - \mathbf{a}] \mathbf{X}_{-1} \geq \mu_{-1}$$

cioè secondo che i due vettori  $\lambda$  e  $\mu$  siano non maggiori, o non minori, ordinatamente del vettore delle forze-lavoro necessarie per produzioni unitarie o del vettore dei consumi necessari. Il che non è detto che accade con  $\lambda, B, C$  qualunque. Quando accade, la parte principale della velocità di produzione (di prezzo) di un assegnato settore aggregato varia fra un minimo e un massimo non negativi determinati dal vettore di aggregazione ed ogni minimo (massimo) della parte principale di produzione eguaglia un ben determinato valore massimo (minimo) della velocità di prezzo.

Le determinazioni dei prezzi e delle produzioni che danno luogo al minimo od al massimo di  $\lambda B \mathbf{p}_{-1}$  ed al massimo od al minimo di  $\lambda C \mathbf{X}_{-1}$  relativi al fissato  $\lambda$  sono:

$$(11. 2) \quad \mathbf{p}^0 = \lambda [I - \mathbf{a}]^{-1}; \quad \mathbf{X}_{-1}^0 = [I - \mathbf{a}]^{-1} \mu_{-1}$$

4. Nel sistema (I. 2) i prezzi e le produzioni possono supporre normalizzati in modo che le loro somme siano uguali all'unità. Allora le parti complementari delle due velocità<sup>(2)</sup> ammetteranno come massimi e

<sup>(2)</sup> Cfr. il § 3 del cap. II del mio *Calcolo delle Matrici* [cit. (3) nella parte prima] propos. f) a p. 153. Non importa che ivi la normalizzazione si fa

minimi le radici caratteristiche delle loro matrici discriminanti  $S$  ed  $S'$ .

Riferendosi ai due spazi ad  $n$  dimensioni in cui variano tutti i prezzi e tutte le produzioni, con le limitazioni imposte dalla normalizzazione, questi massimi e minimi capitano tra la più piccola e la più grande radice caratteristica di ciascuna di dette matrici reali e simmetriche. Queste radici sono note almeno con approssimazione quando siano note le matrici  $S$  ed  $S'$  oppure gli estremi tra i quali esse variano<sup>(3)</sup>. Si tenga inoltre conto del che i prezzi e le produzioni variano soltanto nei due coni poliedrali convessi di cui al primo paragrafo della parte prima.

Si può allora rilevare che l'esistenza di determinazioni di  $p$  e di  $X$  che rendano massima o minima ciascuna parte delle due velocità è assicurata dal che esse sono funzioni continue definite nel poliedro convesso e limitato intersezione del rispettivo cono poliedrale convesso di equazione una delle (III. 2) della parte prima col corrispondente iperpiano ad  $n-1$  dimensioni avente una delle due equazioni:

$$(12. 2) \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1; \quad X_1 + X_2 + \dots + X_n = 1$$

Si conclude che, in regime di concorrenza perfetta, le velocità di produzione e di prezzo (normalizzati) di ogni settore aggregato di  $E$  variano oscillando intorno al massimo ed al minimo, entrambi non negativi, della parte principale, rimanendo in un ben determinato intervallo.

Le osservazioni fatte di sopra assicurano che vi sono mezzi per calcolare valori almeno approssimati degli estremi tra i quali variano dette velocità, basandosi su opportune ed adeguate rilevazioni statistiche.

L'ipotesi della normalizzazione di produzioni e prezzi è troppo restrittiva. Essa può sostituirsi con quella della limitazione, ammissibile almeno in intervalli finiti di tempo. Allora, invece della (12. 2) valgono le desuguaglianze:

$$(13. 2) \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n \leq h$$

con altra posizione, diretta anch' essa ad ottenere che le variabili indipendenti restino in un insieme limitato. Qui le produzioni sono omogeneizzate considerandole in valore monetario.

3) Per un limite superiore e l'approssimazione della radice caratteristica di massimo modulo di una matrice si può consultare il mio *Calcolo delle Matrici*: cfr. principalmente il § 1 del cap. II (formula di HIRSCH) a p. 123; il § 3 del cap. III, teor. a) a p. 129 e, per l'approssimazione numerica, il § 1 dello stesso cap. III, pp. 201-205. Per un limite superiore eventualmente più basso, vedasi M. PICONE: *Sulla teoria delle matrici nel corpo complesso* (Boll. U.M.I. s. III, a. XIII (1958) pp. 1-6) p. 2. Proprietà relative alle radici caratteristiche si trovano anche in altre pagine del mio trattato. Per la radice di minimo modulo basta considerare la matrice inversa: se la data matrice fosse singolare il minimo modulo richiesto sarebbe zero.

Se sono dati solo gli estremi delle matrici  $S$  e  $S'$  converrà applicare il teorema (di LAPPO - DANILEVSKI) a p. 130.



$$(14. 2) \quad X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq k$$

con  $h, k$  valori finiti opportuni. La conclusione di cui sopra resta invariata, esistendo massimo e minimo di entrambe le parti delle due velocità perchè prezzi e produzioni variano ancora in insiemi limitati.

### § 3. Surproduzione ed Accumulazione del Capitale

5. Siano  $C_1, C_2, \dots, C_n$  gli investimenti o capitali impiegati nei settori  $1, 2, \dots, n$  e  $\mathbf{b} = [b_{rs}]$ ,  $r, s = 1, 2, \dots, n$ , la matrice non negativa dei coefficienti di capitale relativi ai singoli scambi. Misuriamo i capitali  $C_r$  con le stesse unità di misura che sono state usate per le corrispondenti produzioni (ovvero in moneta). Salvo casi di eccezione, da ritenersi antieconomici, potrà sempre supporre:

$$(1. 3) \quad \mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n) \leq \mathbf{X}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{a}$$

quindi

$$(2. 3) \quad \mathbf{bC} \leq \mathbf{bX}_{-1} \leq \mathbf{aX}_{-1}$$

Ponendo:

$$(3. 3) \quad \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{b}$$

dalla (1. 1) della parte prima e dalla (1. 3) di cui sopra, si ha:

$$(4. 3) \quad [\mathbf{I} - \bar{\mathbf{a}}] \mathbf{X}_{-1} \geq \mathbf{Y}_{-1} + \mathbf{b}(\mathbf{X} - \mathbf{C})_{-1}$$

Supporremo inoltre (4):

$$(5. 3) \quad [\mathbf{I} - \mathbf{a}] \mathbf{C}_{-1} \geq [\mathbf{I} - \mathbf{a}] \mathbf{X}_{-1}$$

che ci permette di annoverare il vettore  $\mathbf{C}$  dei capitali fra quelli che appartengono al cono poliedrale convesso:

$$(6. 3) \quad [\mathbf{I} - \mathbf{a}] \mathbf{x}_{-1} \geq 0; \quad \mathbf{x} > 0$$

cui appartiene il vettore  $\mathbf{X}$  delle produzioni; il quale appartiene anche all'altro cono poliedrale convesso:

$$(7. 3) \quad [\mathbf{I} - \mathbf{b}] \mathbf{x}_{-1} \geq 0, \quad \mathbf{x} > 0$$

che contiene quello (6. 3). Si ha inoltre:

$$(8. 3) \quad \mathbf{p}[\mathbf{I} - \mathbf{b}] \geq \mathbf{p}[\mathbf{I} - \mathbf{a}]$$

cosicché il vettore dei prezzi appartiene ai due coni poliedrali convessi duali di (6. 3) e (7. 3).

Qui si indica, come nella parte prima, con  $\mathbf{y}$  il vettore dei consumi necessari e con  $\mathbf{z}$  quello delle forze-lavoro necessarie impiegate per pro-

4) La (4. 6) a p. 249 della mia memoria *Sull'evoluzione economica*, cit. (6) nella parte prima, è da intendersi anche ivi come un'ipotesi a priori.

duzioni unitarie. In conseguenza delle (I. 1) — (II. 1) della parte prima e delle (5. 3) — (8. 3), si ha:

$$[I - \mathbf{b}] \mathbf{C}_{-1} \geq \mathbf{Y}_{-1}; \quad \mathbf{p} [I - \mathbf{b}] \geq \mathbf{Z}$$

Tra le velocità degli investimenti e i relativi prezzi e fra le velocità di questi e gli investimenti possono scriversi due relazioni del tutto analoghe alle (I. 2) della parte prima, cioè:

$$(1. 3) \quad \begin{cases} \left( \frac{d\mathbf{C}}{dt} \right)_{-1} = \mathcal{B} \mathbf{p}_{-1} \\ \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_{-1} = \mathcal{F} \mathbf{c}_{-1} \end{cases}$$

il cui integrale generale è:

$$(11. 3) \quad (\mathbf{C} | \mathbf{p}) = \mathcal{X}(t) \mathbf{c}_{-1}, \quad \mathbf{c} = (\mathbf{C}(0) | \mathbf{p}(0))$$

dà luogo alla trasformazione evolutiva del mercato dei capitali da investimento. Le proprietà di questo mercato possono studiarsi parallelamente a quelle del mercato delle produzioni e dei prezzi; questi ultimi possono pensarsi coincidenti con quelli dei rispettivi investimenti.

6) Della (I.1) della parte prima e dalla (2.3), si ha che:

$$(9. 3) \quad [I - \bar{\mathbf{a}}] \mathbf{X}_{-1} \geq \mathbf{Y}_{-1} + \mathbf{b} \mathbf{C}_{-1}$$

Perciò il vettore:

$$(10. 3) \quad [I - \mathbf{a}] \mathbf{X}_{-1} - \mathbf{b} \mathbf{C}_{-1} - \mathbf{y}_{-1}$$

in cui  $\mathbf{y}$  indica un vettore di consumi possibili, quindi

$$[I - \mathbf{a}] \mathbf{X}_{-1} \geq \mathbf{y}_{-1} \supseteq \mathbf{Y}_{-1}$$

crece col diminuire del consumo  $\mathbf{y}$  sino a quello necessario  $\mathbf{Y}$  e diminuisce col crescere del capitale investito  $\mathbf{C}$  sino ad  $\mathbf{X}$ .

Indicheremo con  $\mathbf{S}$  e chiameremo *surproduzione* ogni determinazione del vettore  $\mathbf{S}$  soddisfacente alla limitazione:

$$(11. 3) \quad [I - \mathbf{a}] \mathbf{X}_{-1} - \mathbf{b} \mathbf{C}_{-1} - \mathbf{Y}_{-1} \geq \mathbf{S}_{-1} \geq [I - \mathbf{a}] \mathbf{X}_{-1} - \mathbf{y}_{-1}$$

La *surproduzione*  $\mathbf{S}$  sarà funzione del tempo  $\mathbf{t}$  variabile in  $(t_0, t_1)$ , come  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{a}$ , e  $\mathbf{b}$ .

Scriviamo:

$$(12. 3) \quad \mathbf{S}(t)_{-1} = \bar{\mathbf{Y}}(t)_{-1} - \mathbf{b}(t) \mathbf{C}(t)_{-1}$$

nella quale  $\bar{\mathbf{Y}}(t)$  è un vettore soddisfacente alla limitazione:

$$(13. 3) \quad [I - \bar{\mathbf{a}}] \mathbf{X}_{-1} - \bar{\mathbf{Y}}_{-1} \geq \bar{\mathbf{Y}}(t)_{-1} \geq [I - \bar{\mathbf{a}}] \mathbf{X}_{-1} - \mathbf{y}_{-1}.$$

Poniamo infine :

$$(14.3) \quad \mathbf{C}(t) + \mathbf{S}(t) = \mathbf{F}(t)$$

che diremo capitale accumulato al tempo  $t$ .

Per comodità, faremo variare  $t$  da zero a  $t$ , porremo cioè,  $t_0 = 0$ ,  $0 \leq t \leq t_1$  ed indicheremo con  $i$  il tasso d'interesse, che supporremo costante in  $(0, t_1)$ . Il costo totale di  $\mathbf{F}(t)$  alla fine dell'intervallo  $(0, t)$  computato all'inizio di detto intervallo, è dato dall'integrale :

$$(15.3) \quad \psi(t) = \int_0^t e^{-it} \mathbf{p}(t) \dot{\mathbf{F}}(t)_{-1} dt$$

il cui integrando è :

$$(16.3) \quad \varphi(t) = e^{-it} \mathbf{p}(t) [\dot{\mathbf{C}}(t) + \dot{\mathbf{S}}(t)] \dots$$

in cui il punto sopra indica, secondo l'uso, la derivazione del vettore rispetto al tempo.

Per la (12.3), si ha :

$$(17.3) \quad \dot{\mathbf{S}}(t)_{-1} = \dot{\mathbf{Y}}_{-1} - \frac{d\mathbf{b}}{dt} \mathbf{C}(t)_{-1} - \mathbf{b}(t) \dot{\mathbf{C}}(t)_{-1}$$

qui ndi :

$$(18.3) \quad \varphi(t) = e^{-it} \mathbf{p}(t) \left( \dot{\mathbf{Y}}(t) + [I - \mathbf{b}(t)] \dot{\mathbf{C}}(t)_{-1} - \frac{d\mathbf{b}}{dt} \mathbf{C}(t)_{-1} \right).$$

Per estremare l'integrale  $\psi(t)$  occorre eguagliare a zero la variazione prima di esso, cioè porre<sup>(6)</sup> :

$$(19.3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\mathbf{C}}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{C}}$$

$$(20.3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\mathbf{Y}}} = 0.$$

A calcoli eseguiti si ha<sup>(6)</sup> :

$$(21.3) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = i\mathbf{p}$$

5) I due membri de (19.3) sono i vettori le cui componenti sono le derivate parziali di  $\varphi$  rispetto alle componenti di  $\dot{\mathbf{C}}$  e di  $\mathbf{C}$ . Analogamente per la (20.3).

6) Cfr. S. Cherubino: Sull'evoluzione economica (Principi di economia astratta), già citata nella parte prima e qui nella nota (2), § 6, n. 18, p. 261. A pp. 256-257 di questa memoria alcuni segni  $\leq$  vanno cambiati in  $\geq$ ; a p. 258, rigo 7, invece di  $\mu \geq 0$ , deve leggersi  $\mu \leq q$ .

ossia :

$$(22.3) \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(0) e^{-it}$$

con  $\mathbf{p}(0)$  determinazione iniziale, arbitraria, positiva, del vettore  $\mathbf{p}(t)$  dei prezzi all' inizio del tempo. Il capitale investito non vien soggetto a condizioni. Il massimo o minimo dell' integrale  $\psi(t)$  é dunque :

$$(23.3) \quad \mathbf{p}(0) \int_0^t (\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_{-1} + [\mathbf{I} - \mathbf{b}] \dot{\mathbf{C}}_{-1} - \frac{db}{dt} \mathbf{C}_{-1}) dt$$

cioé :

$$(24.3) \quad \mathbf{p}(0) \int_0^t \dot{\mathbf{F}}(t)_{-1} dt = \mathbf{p}(0) \mathbf{F}(t)_{-1}$$

7. Chiediamoci ora il massimo di :

$$(25.3) \quad z = \lambda \mathbf{C}(t)_{-1} + \lambda \mathbf{S}(t)_{-1}, \quad 0 \leq t \leq t_1$$

cioé della somma degli investimenti e delle surproduzioni espressi in valore in un settore aggregato secondo il vettore positivo o semipositivo  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Per semplicità di scrittura, ometteremo di indicare l'argomento  $t$ , che supporremo fissato per tutto quel che segue.

Prendiamo le variabili  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ;  $S_1, S_2, \dots, S_n$  come componenti di un vettore  $\mathbf{x}$  orizzontale, cioè poniamo :

$$(26.3.) \quad \mathbf{x} = (\mathbf{C} | \mathbf{S})$$

e scriviamo la limitazione (11.3) sotto la forma :

$$(27.3) \quad c_{-1} \supseteq A \mathbf{x}_{-1} \supseteq \bar{c}_{-1}$$

avendo posto :

$$(28.3) \quad c_{-1} = [\mathbf{I} - \bar{\mathbf{a}}] \mathbf{X}_{-1} - \mathbf{Y}_{-1}; \quad \bar{c}_{-1} = [\mathbf{I} - \bar{\mathbf{a}}] \mathbf{X}_{-1} - y_{-1}$$

$$(29.3) \quad A = [\mathbf{b} | \mathbf{I}].$$

I vettori  $c_{-1}$  e  $\bar{c}_{-1}$  li diremo delle scorte o del risparmio.

La ricerca del massimo e del minimo del capitale accumulato si riduce così ai due problemi di programmazione lineare :

$$(I.3) \quad \begin{cases} \mathbf{z} = (\lambda | \lambda) \mathbf{x}_{-1} \\ A \mathbf{x}_{-1} \leq c_{-1} \end{cases} \quad (II.3) \quad \begin{cases} \mathbf{z} = (\lambda | \lambda) \mathbf{x}_{-1} \\ A \mathbf{x}_{-1} \supseteq \bar{c}_{-1} \end{cases}$$

I vincoli (27.3) sussistono per ipotesi, ma, in generale, ciò non basta per la esistenza del massimo e del minimo di  $z$ . Per accertarsene, occorre e basta<sup>(7)</sup> che siano compatibili, ossia sussistano, anche i vincoli dei problemi duali, che si scrivono :

7) A. J. Goldman and A. W. Tucker: Theory of linear programming [in Linear inequalities and related sy-

$$(III.3) \quad \begin{cases} \mathbf{z} = \xi \mathbf{c}_{-1} \\ \xi \mathbf{A} \geq (\lambda|\lambda) \end{cases} \quad (IV.3) \quad \begin{cases} \mathbf{z} = \xi \mathbf{c}_{-1} \\ \xi \mathbf{A} \leq (\lambda|\lambda) \end{cases}$$

nei quali  $\xi$  é un vettore ad  $n$  componenti non negative, che s'interpreta come vettore di prezzi<sup>(8)</sup>.

Limitiamoci ai vincoli del problema (III.3). Essi si scrivono:

$$(30.3) \quad \xi \mathbf{b} \geq \lambda; \quad \xi \geq \lambda \geq 0.$$

Ponendo:

$$(31.3) \quad X = \xi - \mu$$

le (30.3) diventano:

$$(32.3) \quad \mu \geq \xi[-\mathbf{b}]; \quad \mu \geq 0.$$

Poiché  $0 \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{a}$ , le radici caratteristiche di  $\mathbf{b}$  sono anch'esse tutte di modulo inferiore alla unità (e quello di massimo modulo é positiva) e si ha:  $[\mathbf{I} - \mathbf{b}]^{-1} \geq 0$ ; anzi, se  $\mathbf{b}$  é irriducibile, (quindi lo é anche  $\mathbf{a}$ ) questa inversa é addirittura positiva<sup>(9)</sup>.

Si può perciò sempre porre, con  $\mathbf{v}$  vettore positivo o semipositivo arbitrario  $\leq \mu$ :

$$(33.3) \quad \xi[\mathbf{I} - \mathbf{b}] = \mathbf{v}; \quad 0 \leq \mathbf{v} \leq \mu$$

riuscendo, in conseguenza:

$$34.3) \quad \xi = \mathbf{v}[\mathbf{I} - \mathbf{b}]^{-1} \geq \mathbf{v} \geq 0$$

Ne segue che:

$$(35.3) \quad \xi \mathbf{b} = \xi - \mathbf{v} \geq \xi - \mu = \lambda; \quad \xi \geq \lambda$$

quindi i vincoli delle (III.3) sono compatibili ed esiste il massimo di  $z$  coincidente in valore col minimo di  $\xi$ . Analogamente per i vincoli del problema (IV.3).

Possiamo dunque affermare che: qualunque sia il vettore aggregato, esistono, sotto vincoli opportuni, determinazioni degli investimenti e delle surproduzioni degli  $n$  settori che massimizzano (o minimizzano) l'accumulazione del capitale e minimizzano (o massimizzano) il risparmio, eguagliandone i valori.

systems, ed. by H. H. W u h n and A. W. T u c k e r. Princeton (1956) pp. 53-97] part 2, theorem 2, p. 61 e cor. I A p. 60.

8) Perciò, in luogo di  $\xi$  potrebbe scriversi  $\mathbf{p}$ .

9) Cfr. il mio *Calcolo delle Matrici* [cit. (3) nella parte I] cap. II, § 2 e la mia Mem. citata nella stessa nota (3), p. 219.

## Π Ε Ρ Ι Λ Η Ψ Ι Σ

Τὸ ἄρθρον διαιρεῖται εἰς τὰς ἀκολούθους παραγράφους :

1) Μέγιστον καὶ ἐλάχιστον εἰς τοὺς γενικοὺς οἰκονομικοὺς κλάδους.

2) Μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τῶν ταχυτήτων μεταβολῆς τῆς παραγωγῆς καὶ τῶν τιμῶν.

3) Ὑπερπαραγωγή καὶ συσσώρευσις κεφαλαίου.

Εἰς τὴν πρώτην παράγραφον ἐξετάζονται δύο προβλήματα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ τὰ δίδυμα αὐτῶν. Τὰ προβλήματα ταῦτα ἀφοροῦν εἰς τὴν παραγωγήν ἢ τὴν μέσσην τιμὴν ἑνὸς γενικοῦ οἰκονομικοῦ κλάδου, δηλαδὴ κλάδου συνισταμένου ἀπὸ τὴν ἄρθροισιν ἐπὶ μέρος μικροτέρων κλάδων.

Εἰς τὴν δευτέραν παράγραφον ἐξετάζονται αἱ ταχύτητες μεταβολῆς τῆς παραγωγῆς καὶ τῶν τιμῶν καὶ διερευνῶνται τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα αὐτῶν, ἀνεξαρτήτως τοῦ βαθμοῦ γενικότητος τοῦ κλάδου.

Εἰς τὴν τρίτην παράγραφον ὀρίζεται ἡ ἔννοια τῆς ὑπερπαραγωγῆς καὶ συσσωρεύσεως κεφαλαίου καὶ προσδιορίζεται τὸ μέγιστον τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἀπασχολουμένων κεφαλαίων καὶ τῆς ὑπερπαραγωγῆς βάσει τῆς τεχνικῆς τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.



# USE OF PROGRAMMING METHODS IN SAMPLE SURVEYS

By D E S R A J  
United Nations Expert, Greece

1. During the past few years great progress has been made in the area of programming methods. These methods have been used with advantage in solving practical problems arising in many different fields. In this paper a brief discussion is given of some problems in sample surveys whose solution has been made possible by the use of linear programming.

2. The basic requirement in the area of sampling is to design the survey in such a manner that for a specified budget the accuracy of the estimates made is maximised, or that for a desired level of accuracy the cost of the survey is minimised. For this reason programming methods have proved invaluable in this field. Since the quantities to be maximised (or minimised) have been generally found to be linear in the variables involved and the constraints to which these variables are subject are also linear, actually the techniques of linear programming have been used in practice.

3. Consider the following problem arising in the National Sample Survey of India. Information is to be collected from households for economic statistics and from plots for agricultural statistics for the villages in the sample. It is desirable to select the villages for the household enquiry with probabilities proportionate to population and the villages for the agricultural enquiry with probabilities proportionate to area. If the selection is made independently for the two enquiries, we are likely to get different villages and this will add heavily to the cost of field work. However, if the two enquiries could be so integrated that the vil-

---

Ο Δρ. Des Raj είναι στατιστικός έμπειρογνώμων των Ήνωμένων Έθνών παρά τη Έθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος. Έχει λάβει το δίπλωμα του Master εις τα Μαθηματικά και το δίπλωμα του διδάκτορος της Στατιστικής του Πανεπιστημίου της Καλκούτας. Έχει διδάξει εις τα Ινδικά πανεπιστήμια της Lucknow και Agra, εις το Ινδικόν Στατιστικόν Ίνστιτούτον της Καλκούτας και το Αμερικανικόν Πανεπιστήμιον της Beirut. Έδημοσίευσε πλείστας έπιστημονικάς έργασίας επί θεμάτων στατιστικῶν και οικονομικῶν.

ages for the two enquiries are identical or very near to each other, the cost of operations would be greatly reduced. This problem could be stated mathematically in the following way. Let a stratum consist of  $n$  villages with populations proportionate to

$$\frac{a_1}{G}, \frac{a_2}{G}, \dots, \frac{a_n}{G}$$

and areas proportionate to

$$\frac{b_1}{G}, \frac{b_2}{G}, \dots, \frac{b_n}{G}.$$

Let  $c_{ij}$  be the cost of journey between the  $i$ th. population village and the  $j$ th area village. Further, the probability with which the corresponding pair of villages is selected may be denoted by  $\frac{x_{ij}}{G}$ . The problem is then to determine  $x_{ij}$  such that

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= b_i, & \sum_{i=1}^n x_{ij} &= a_j \\ \sum_j a_j &= \sum_i b_i = G, & x_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

and

$$Z = \sum \sum c_{ij} x_{ij}$$

is minimised.

In this form, this is the familiar transportation problem in linear programming. Its solution by the simplex method due to Dantzig may be found in the book edited by Koopmans (1951).

4. The following problem arose in a Canadian population survey. First stage units are to be selected from within strata with probabilities proportionate to 1950 populations. The survey is, however, to be repeated at another occasion when new population figures would be available. It is desired that, as far as possible, the new sample at the second occasion be identical with the old sample. This is so since it is very costly to make lists of second—and subsequent—stage units from selected first-stage units. One would not like to change these units every time to avoid the cost of fresh listing. The mathematical formulation of this problem would be the following. Let the 1950 populations of first stage units be proportionate to

$$\frac{a_1}{G}, \frac{a_2}{G}, \dots, \frac{a_n}{G}$$

while the 1951 populations are proportionate to

$$\frac{b_1}{G}, \frac{b_2}{G}, \dots, \frac{b_n}{G}$$

We shall denote by  $\frac{x_{ij}}{G}$  the probability that the  $i$ th and  $j$ th first stage units are selected at the first and second occasion respectively. The probability of getting non-identical units at the two occasions is given by

$$Z = \frac{1}{G} \sum \sum c_{ij} x_{ij}$$

where the cost matrix ( $c_{ij}$ ) is given below.

Table I. Cost Matrix

unit no.	1	2	3	.....	n
1	0	1	1	.....	1
2	1	0	1	.....	1
3	1	1	0	.....	1
.					
.					
.					
n	1	1	1	.....	0

The problem is to determine  $x_{ij}$  such that

$$x_{ij} \geq 0, \quad \sum_j x_{ij} = b_i, \quad \sum_i x_{ij} = a_j, \quad \sum a_j = \sum b_i = G$$

and  $Z$  is minimised. Mathematically this problem is equivalent to the previous one.

5. Suppose a population is divided up into two strata, each containing rural and urban primary units. We want to select two units, one from each stratum, with probabilities given in the margins of Table 3 below. The selection is to be so made that the chance of getting one urban and one rural unit is maximised. The cost matrix would, then, be the following :

Table 2. Cost Matrix

Units	Stratum 1					
	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	U <sub>3</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>
Y <sub>1</sub>	0	0	0	1	1	1
Y <sub>2</sub>	0	0	0	1	1	1
stratum 2 Y <sub>3</sub>	0	0	0	1	1	1
Y <sub>4</sub>	0	0	0	1	1	1
u <sub>1</sub>	1	1	1	0	0	0

Mathematically formulated the problem is equivalent to those discussed before. The optimum solution, giving the probabilities with which pairs of units be selected, is given in Table 3 below.

Table 3. Optimum Solution

Units	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	U <sub>3</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	Total
Y <sub>1</sub>	15						15
Y <sub>2</sub>	0	10	20	0			30
Y <sub>3</sub>				10	0		10
Y <sub>4</sub>					20	5	25
u <sub>1</sub>						20	20
Total	15	10	20	10	20	25	100

6. One final result which will be presented relates to sampling without replacement with varying probabilities. Two units are to be selected from a stratum containing  $N$  units such that the probability that a specified unit  $U_i$  is selected in the sample is  $\mathcal{P}_i$  (known). The problem is to determine  $\mathcal{P}_{ij}$ , the probability that the pair  $(U_i, U_j)$  is selected in the sample, so that the variance of the estimate of the stratum total is minimised. If the  $\mathcal{P}_i$  are based on  $x_i$ , which are known measures of size of the units, and if the relation between  $y$ , the character under study, and  $x$  is linear, it can be easily shown that the problem is to minimise

$$Z = \sum \frac{\mathcal{P}_{ij}}{\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j}$$

such that

$$\sum_{j=1} \mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

and

$$\mathcal{P}_{ij} \geq 0.$$

Stated in this form, this is a familiar problem in linear programming and can be solved by the simplex method given in Charnes and others (1953).

#### REFERENCES

- Charnes, A., Cooper, W.W. and Henderson, A. (1953): «An introduction to linear programming», John Wiley and Sons, New York.
- Keopmans, T. C. (1951): «Activity analysis of production and allocation», John Wiley and Sons, New York.
- Raj, D. (1956): On the method of overlapping maps in sample surveys, *Sankhya*, Vol. 17.
- Raj, D. (1956): A note on the determination of optimum probabilities in sampling without replacement, *Sankhya*, Vol. 17.

# ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΡΓΙΚΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΝ

Υπό ΔΗΜ. Γ. ΑΘΑΝΑΣΑΤΟΥ

Ὁ γραμμικός προγραμματισμός, ὅστις ἀποτελεῖ νέαν τεχνικὴν οἰκονομικῆς ἀναλύσεως, ἐχρησιμοποιήθη ἀρχικῶς πρὸς ἐπίλυσιν προβλημάτων σχετιζομένων πρὸς τὴν ἐπιστημονικὴν διοίκησιν μᾶλλον παρά πρὸς ἀντιμετώπισιν οἰκονομικῶν τοιούτων. Ταχέως ὁμως ἡ μέθοδος αὕτη προσήλκυσε τὸ ἐνδιαφέρον τῶν οἰκονομολόγων, ὁ Κοορμαν δὲ ὑπῆρξεν ὁ πρῶτος ὅστις ἤρχισε μελετῶν τὴν ἐφαρμογὴν τῆς πρὸς ἐπίλυσιν οἰκονομικῶν προβλημάτων.

Ἡ πρώτη ὁμως προσπάθεια ἐφαρμογῆς τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἐν τῇ ἰδιωτικῇ οἰκονομικῇ πρὸς μελέτην οἰκονομικῆς φύσεως ζητημάτων ἐντὸς τῶν καθ' ἕκαστα ἐπιχειρήσεων ἐγένετο τὸ 1951 ὑπὸ τοῦ Dorfman, ὅστις ἀνέπτυξε τὸν τρόπον χρησιμοποίησεως καὶ ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τόσον ὑπὸ καθεστῶς πλήρους καὶ τελείου συναγωνισμοῦ καὶ ἀκαμψίας τῶν τιμῶν, ὅσον καὶ ὑπὸ καθεστῶς μονοπωλίου.

Βαθμιαίως καὶ δοθέντος τοῦ ἐνδιαφέροντος τὸ ὅποιον παρουσιάζει ἡ μέθοδος αὕτη μεγάλως διήγειρε τὸ ἐνδιαφέρον τῶν οἰκονομολόγων τῶν ἀσχολουμένων μὲ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων ἀναγομένων εἰς τὴν σφαῖραν τῆς Ἀγροτικῆς Οἰκονομίας, δεδομένου ὅτι αἱ ἀγροτικαὶ ἐπιχειρήσεις ἀντιμετωπίζουν καθ' ἕκαστην προβλήματα ἐπιτυχοῦς ὀργανώσεως τῆς παραγωγῆς. Αἱ πρῶται προσπάθειαι ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ἐγένοντο, πρὸς προσδιορισμὸν τῶν οἰκονομικωτέρων σιτηρεσιῶν εἰς τὸν τομέα τῆς Ζωοτεχνίας, ὑπὸ τῶν Fischeer and Schruben τὸ 1953. Ἐνωρίτερον τούτων ὁ Waugh ἐδημοσίευσεν παρεμφερῆ μελέτην τὸ 1951 χρησιμοποιῶν ὁμως διάφορον κάπως τρόπον ἀναλύσεως. Ἐτέρα μελέτη, ἣτις ἐδημοσιεύθη κατὰ τὸ 1953, ἦτο ἡ ὑπὸ τοῦ Καθηγητοῦ King, ὅστις διὰ ταύτης ἐμελέτησε τὴν ἐξέυρξιν τοῦ optimum τῆς ἡλικίας τῶν νεοσσῶν εἰς τὴν Νότιον Καρολίαν τῶν Η.Π.Α. εἰς τὴν δέον ὅπως αὗται ἐκποιοῦνται, ὥστε ἡ ἐπιχείρησις νὰ ἔχη τὰ καλύτερα οἰκονομικά ἀποτελέσματα.

Τὸ ἐπόμενο ἐτος 1954 οἱ Swanson καὶ Fox ἐφήρμοσαν τὴν μέθοδον ταύτην πρὸς προσδιορισμὸν τῶν κλάδων ἐκείνων τῆς Ζωοτεχνίας, οἵτινες προσιδιάζουσι καλύτερον εἰς μίαν ἐπιχείρησιν ὑπὸ δοθείσας συνθήκας παραγωγῆς, ὥστε διὰ τῆς εἰς τὸ optimum χρησιμοποίησεως τῶν διαθέσιμων συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς νὰ ἐπιτυγχάνεται τὸ maximum τοῦ κέρδους.

Περὶ τὰ τέλη τοῦ 1954 ὁ Καθηγητὴς Heady παρουσίασε μίαν ὠλοκληρωμένην μορφήν τῆς μεθόδου ὡς αὕτη δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς τὴν

οικονομικήν ἀνάλυσιν εἰς τὸν τομέα τοῦ Farm Management. Διὰ τῆς ἐργασίας ταύτης νέοι ὀρίζοντες ἠνοιχθῆσαν εἰς τὸ πεδῖον τῆς Ἀγροτικῆς Οἰκονομίας εἰς τὸ ὁποῖον μέχρι τοῦδε ἐχρησιμοποιεῖτο ἡ κλασσικὴ μέθοδος ἀναλύσεως διὰ τῆς χρήσεως τοῦ συστήματος τοῦ προϋπολογισμοῦ δαπανῶν καὶ ἐσόδων τῶν καθ' ἕκαστα κλάδων ἢ καλλιιεργειῶν (budgeted analysis).

Αὕτη ὑπῆρξεν ἡ ἐξέλιξις εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς νέας μεθόδου λήγοντος τοῦ 1954, ὁπότε μετὰ δῖμηνον, ὁ Καθηγητῆς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Καλιφορνίας Boles ἐδημοσίευσεν τὴν πολύτιμον καταστάσαν μελέτην του «Linear Programming and Farm Management Analysis» δι' ἧς τὸ πρῶτον ἐφήρμοσεν τὴν νέαν τεχνικὴν πρὸς μελέτην τοῦ προβλήματος τῆς καλυτέρας ὀργανώσεως τῶν κτημάτων τῆς Κεντρικῆς Καλιφορνίας μέσης ἐκτάσεως 160 acres, ἅτινα εὑρίσκονται εἰς τὸ βόρειον τμήμα τῆς Κομητείας τοῦ Kern, κατόπιν τῶν ἐπιβληθέντων περιορισμῶν εἰς τὴν καλλιέργειαν τοῦ βάμβακος πρὸς συγκράτησιν τῶν τιμῶν τούτου ἐν τῇ ἀγορᾷ.

Διὰ τῆς ἐργασίας ταύτης ὁ Καθηγητῆς Boles ἐπέτυχεν νὰ δώσῃ τὴν ἀπλουστέραν ἐρμηνείαν τῆς μεθόδου ἀπὸ μαθηματικῆς πλευρᾶς, ἐνῶ συγχρόνως ἠρμήνευσε τὰ τελικὰ ἀποτελέσματα, ἅτινα ἐπιτυγχάνονται διὰ ταύτης, κατὰ τρόπον ὁ ὁποῖος δίδει τὴν λυσιτελεστέραν ἀπάντησιν εἰς τὰ προβλήματα ἅτινα ἀντιμετωπίζουν αἱ ἀγροτικαὶ ἐπιχειρήσεις διὰ μακρὰν χρονικὴν περίοδον (long run) καὶ οὐχὶ διὰ βραχείας διαρκείας τοιαύτην (short run), ὡς μέχρι τότε ἐνομιζετο ὅτι συνέβαινε. Τέλος, ἐν ἐπὶ πλέον ἐπίτευγμα ὑπῆρξεν ἡ τελειοποίησις τοῦ χρησιμοποιουμένου ὑπολογιστικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον ἐφαίνετο ἀρχικῶς πολὺπλοκον καὶ δυσνόητον, καταστήσας τοῦτο προσιτότερον καὶ ἐν ταῦτῳ πλέον εὐχρηστον διὰ τὸν χρησιμοποιοῦντα τὴν μέθοδον ταύτην.

Ἐλίγον βραδύτερον, τὸν Ἀπρίλιον 1955, οἱ Καθηγηταὶ Heady καὶ Bowen ἐδημοσίευσαν μελέτην διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου, πρὸς ἐξεύρεσιν τοῦ καλυτέρου συνδυασμοῦ ἀνταγωνιζομένων μεταξὺ των καλλιιεργειῶν ἐν Iowa εἰς διαφόρους ὁμως περιφερείας ταύτης καὶ εἰς ἐδάφη διαφόρου γονιμότητος. Ἡ συμβολὴ τῆς νέας μεθόδου εἰς τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου ὑπῆρξεν ἰσχυρὰ σημαντικὴ, λαμβανομένου μάλιστα ὑπ' ὄψιν ὅτι ἀφεώρα μεγάλας περιφερείας μιᾶς τῶν μεγαλυτέρων καὶ πλουσιωτέρων Πολιτειῶν τῆς Ἀμερικῆς, ἥτις κατέχει τὴν πρώτην θέσιν εἰς τὴν παγκόσμιον παραγωγὴν ἀραβοσίτου.

Κατὰ τὴν ἀκολουθήσασαν 5ετίαν καὶ μέχρι τέλους 1959 ἐγένετο εὐρυτάτη χρησιμοποίησις τῆς μεθόδου τοῦ «γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ» εἰς τὰς Η.Π.Α., ὑπὸ τῶν διαφόρων ἐρευνητῶν, μὲ ἀντικειμενικὸν σκοπὸν τὴν ὀργανώσιν τῶν ἀγροτικῶν ἐκμεταλλεύσεων διὰ τοῦ καταλλήλου συνδυασμοῦ καλλιιεργειῶν ἢ ἀμειψισπορῶν μετὰ τῶν ἐνδεδειγμένων κτηνοτροφικῶν κλάδων πρὸς βελτίωσιν τῶν οἰκονομικῶν ἀποτελεσμάτων τούτων.

Ἀντιμετωπίσθησαν ὡσαύτως ἐπιτυχῶς προβλήματα ἐμπορίας ἀγροτικῶν προϊόντων, ὀργανώσεως ἀγροτικῶν βιομηχανιῶν ὡς καὶ τοιαῦτα μεταφορῶν, ἀποδεικνυομένης οὕτω τῆς μεγάλης ὠφελιμότητος τῆς μεθόδου εἰς τὴν ἐπίλυσιν ποικίλων προβλημάτων τοῦ γεωργικοῦ τομέως.



## ΟΡΓΑΝΩΣΙΣ ΑΓΡΟΤΙΚΩΝ ΕΚΜΕΤΑΛΛΕΥΣΕΩΝ ΚΩΠΑΙΔΟΣ (1)

Διά τῆς μεθόδου τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ

Ἀπαραίτητος προϋπόθεσις πρὸς χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἐν τῇ ἀγροτικῇ οἰκονομίᾳ εἶναι ἡ ὑπαρξίς λεπτομερῶν καὶ ἀκριβῶν στοιχείων σχετιζομένων πρὸς τὰς καλλιεργεῖας περιφερείας τινός, ὡς εἶναι αἱ ἐφαρμοζόμεναι καλλιεργητικαὶ μέθοδοι, αἱ ποσότητες τῶν χρησιμοποιουμένων σπόρων, λιπασμάτων κ.τ.τ. ὡς καὶ αἱ ἐπιτυγχανόμεναι ἀποδόσεις κ.τ.λ. Αἱ προϋποθέσεις αὗται ἐπληροῦντο μόνον εἰς τὴν Κωπαΐδα, ἔνθα ὑπῆρχον πλήρη στοιχεῖα τῆς ἀγροτικῆς παραγωγῆς, ἅτινα ἐτηροῦντο ἐπὶ δεκαετηρίδας ὑπὸ τῆς Ἀγγλικῆς Ἑταιρείας, ἣτις εἶχεν ὑπὸ τὴν κυριότητά της τὴν περιοχὴν μέχρι τοῦ 1953, ὁπότε ἐξηγοράσθη ὑπὸ τοῦ Ἑλληνικοῦ Κράτους, διαχειριζομένη ἔκτοτε ὑπὸ τοῦ συσταθέντος Ὄργανισμοῦ Κωπαΐδος, ὅστις πορέσχεν ἡμῖν ἅπαντα τὰ αἰτηθέντα στοιχεῖα κατὰ τὴν ἐκπόνησιν τῆς μελέτης.

Προσέτι ἡ περιφέρεια αὕτη παρουσιάζει ἐξαιρετικὸν ἐνδιαφέρον ἀπὸ ἀγροτικῆς πλευρᾶς, ἀφ' ἐνὸς λόγῳ τῆς σχετικῶς μεγάλης ἐκτάσεώς της καὶ τοῦ πλουσίου ἐδάφους της καὶ ἀφ' ἑτέρου λόγῳ τῶν εἰς μεγάλην κλίμακα ὑπαρχόντων ἐκεῖ ἀρδευτικῶν καὶ ἀποστραγγιστικῶν ἔργων, ἅτινα παρέχουν μεγάλης δυνατότητας περαιτέρω ἀναπτύξεώς της.

Αἱ ἀνωτέρω προϋποθέσεις ὥθησαν ἡμᾶς εἰς τὴν κατὰ τὸν πρῶτον χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου ἐν Ἑλλάδι πρὸς μελέτην καὶ ἐξαγωγήν συμπερασμάτων ἐπὶ τῆς δυνατότητος τῆς ἐφαρμογῆς ταύτης ἐν τῇ χώρᾳ μας εἰς τὸν τομέα τῆς Ἀγροτικῆς Οἰκονομίας καὶ εἰδικώτερον πρὸς ἐκπόνησιν τοῦ μᾶλλον ἀποδοτικοῦ (ἀρίστου) προγράμματος διαφόρου τοῦ ὑφισταμένου σήμερον ἐν Κωπαΐδι (2) καὶ παρέχοντος τὰς δυνατότητας ἐντάσεως τῆς παραγωγῆς καὶ ἐπιτεύξεως οὕτω βελτιωμένων οἰκονομικῶν ἀποτελεσμάτων πρὸς ὄφελος τόσον τῆς ἰδιωτικῆς οἰκονομίας τῶν ἐπὶ μέρους καλλιεργητῶν ὅσον καὶ τῆς ἐθνικῆς τοιαύτης.

### ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΚΩΠΑΙΔΟΣ

Μετὰ τὴν ἐξαγορὰν τῆς Κωπαΐδος ὑπὸ τοῦ Κράτους τὸ 1953 ὑπὸ τῆς *κατεχοῦσης μέχρι τότε* Ἀγγλικῆς Ἑταιρείας, ἐπηκολούθησεν ἀπαλλοτριώσις τῆς ἐκτάσεως καὶ διανομὴ τῆς γῆς εἰς τοὺς ἀκτήμονας καλλιεργητὰς τῆς περιφερείας, οἵτινες ὠργανώθησαν εἰς συνεταιρισμούς (ΣΑΑΚ). Συγχρόνως τὸ Κράτος διὰ τοῦ Ὑπουργείου Γεωργίας προέβη εἰς τὴν ἴδρυσιν τοῦ Ὄργανισμοῦ

1) Ἡ ἐργασία αὕτη ἀποτελεῖ μέρος τῆς ἐπὶ ὑψηγείᾳ διατριβῆς τοῦ κ. Δ. Γ. Ἀθανασάτου, ὑπὸ τὸν τίτλον «Ὁργάνωσις ἀγροτικῶν ἐπιχειρήσεων – Μέθοδος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ», Ἀθῆναι 1957.

2) Μετὰ τὴν ἀπαλλοτριώσιν τῆς Κωπαΐδος καὶ τὴν ἀποκατάστασιν ἐν αὐτῇ ἀκτημόνων καλλιεργητῶν, οὐδεμία ἀναδιάρθρωσις τῶν καλλιεργειῶν ἐσημειώθη, συνεχιζομένου τοῦ ἀπὸ πολλῶν ἐτῶν κρατοῦντος καλλιεργητικοῦ συστήματος τῆς καλλιεργείας σίτου καὶ βάμβακος, ἀνευ τῆς εἰσαγωγῆς ἐντατικωτέρων καλλιεργειῶν ἐπὶ τῷ σκοπῷ αὐξήσεως τῶν εἰσοδημάτων τῶν ἀγροτῶν.

Κωπαΐδος ἐπὶ τῶ σκοπῷ τῆς διατηρήσεως καὶ συντηρήσεως ἀφ' ἑνὸς τῶν ὑπαρχόντων ἐκεῖ μεγάλων ἀρδευτικῶν καὶ ἀποστραγγιστικῶν ἔργων καὶ ἀφ' ἑτέρου πρὸς καλυτέραν τεχνικὴν καθοδήγησιν τῶν καλλιεργητῶν, ὥστε ἡ καλλιέργεια νὰ ἀποβῆ σὺν τῷ χρόνῳ ἐντατικωτέρα. Παραλλήλως ὁ Ὅργανισμὸς ἐπιδιώκει τὴν ἐπέκτασιν τῶν ἐγγειοβελτιωτικῶν ἔργων, ἐνῶ συγχρόνως κατὰ τὰ πρῶτα μετὰ τὴν ἀπαλοτριῶσιν ἔτη παρεῖχεν εἰς τοὺς ἀγρότας τὴν δυνατότητα καλλιέργειας διὰ μηχανικῶν μέσων, ἅτινα εἶχεν εἰς τὴν διάθεσιν του, ἔναντι ἐνοικίου.

Ἡ συνολικὴ ἔκτασις τῆς Κωπαΐδος ἀνέρχεται εἰς 193.000 στρέμματα, ἀποτελεῖ δὲ μίαν συνεχῆ πεδιάδα, ἀπέχουσα τῶν Ἀθηνῶν μόλις 92 χιλιόμετρα.

*Δι κλιματολογικαὶ συνθήκαι* ὑφ' ἃς διατελεῖ ἡ περιφέρεια δύναται νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς εὐνοϊκαὶ διὰ τὴν γεωργίαν. Ἡ περιοχὴ χαρακτηρίζεται ὑπὸ ὑψηλῆς βροχοπτώσεως, ἥτις ἀνῆλθεν κατὰ τὴν 10ετίαν 1945—1955 εἰς 708 χλσ. ἐτησίως καὶ κατὰ μ. ὀ., πλὴν ὁμως ἡ κατανομὴ ταύτης κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἔτους εἶναι ἀκανόνιστος, δοθέντος ὅτι ἡ κατὰ τοὺς τρεῖς χειμερινοὺς μῆνας πίπτουσα βροχὴ ἀποτελεῖ τὰ 42,8% τοῦ συνόλου, ἐνῶ κατὰ τὸ θέρος ἐπικρατεῖ ξηρασία, τοῦ ποσοστοῦ φθάνοντος μόλις τὰ 3,7%. Τὸ γεγονός τοῦτο, ἐν συνδυασμῷ μὲ τὰς ὑψηλὰς σχετικῶς θερμοκρασίας τοῦ θέρους, καθιστοῦν ἀναπόφευκτον τὴν ἀρδυσιν τῶν ἀναπτυσσομένων κατὰ τὸ θέρος καλλιεργείων. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν θερμοκρασίαν παρατηρεῖται ὅτι αὕτη εἶναι ὑψηλὴ κατὰ τὸ θέρος καὶ χαμηλὴ κατὰ τὸν χειμῶνα ἢ δὲ μέση τοιαύτη ἀνέρχεται εἰς 15,8°.

*Ἐδαφος.* Τὰ ἐδάφη τῆς Κωπαΐδος, ἅτινα προῆλθον ἐκ τῆς ἀποξηράνεως τῆς ὑπαρχούσης ἄλλοτε λίμνης, εἶναι διαφόρου συστάσεως, χαρακτηριζόμενα ὁμως μᾶλλον ὡς πλούσια ἀπὸ ἀπόψεως θρεπτικῶν στοιχείων καὶ ἰδίᾳ ἀζώτου, εἰδικῶς δὲ τὰ ἐκ προσχώσεων προερχόμενα κοινῶς «Μαυρόγια» ἀνήκοντα εἰς τὸν Ἑλλουβιακὸν τύπον. Ὡς ἀποτέλεσμα τῆς καλῆς ποιότητος τῶν ἐδαφῶν εἶναι αἱ σημειούμεναι σχετικῶς ὑψηλαὶ ἀποδόσεις τόσοσιν εἰς τὸν σίτον ὅσον καὶ εἰς τὸν βάμβακα.

Ἡ πεδολογικὴ διάπλασις τοῦ λεκανοπεδίου, ἐν συσχετισμῷ πρὸς τὰς ἀρδεύσεις, ἐμφανίζει τὴν περιοχὴν ὡς διαχωριζομένην εἰς δύο βασικὰς κατηγορίας ἐδαφῶν: 1) τῶν περατῶν, προελθόντων ἐκ τῆς διὰ πυρὸς κατακαύσεως τῆς ἄλλοτε ποτε τύρφης τῆς καλυπτούσης τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῶν καὶ 2) τῶν συνεκτικῶν, κατεχόντων τὰς παρυφὰς τοῦ λεκανοπεδίου εἰς τὰς ὁποίας ἀπουσίαζεν ἡ τύρφη, ἐνῶ ἐπλεόναζον τὰ ἀργιλικὰ συστατικά. Ὡς συνδυαστικὸς κριτικὸς τῶν δύο ἀνωτέρω ἐδαφικῶν διαμορφώσεων δύνανται νὰ θεωρηθοῦν τὰ ἡμιπερατὰ ἐδάφη, χαρακτηριζόμενα ἐκ τῆς συνυπάρξεως εἰς διαφόρους διαβαθμίσεις τοῦ ἀργιλικοῦ στοιχείου καὶ τῆς κεκαυμένης τύρφης.

Ὁ πίναξ 1 ἐκφράζει εἰς στρέμματα τὰς τρεῖς ταύτας κατηγορίας ἐδαφῶν τῶν ὁποίων αἱ ἀπαιτήσεις εἰς ὕδωρ ποικίλλουν τὰ μέγιστα καὶ ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐφαρμόζονται διάφορα συστήματα ἀρδεύσεως. Οὕτω τὰ περατὰ ἐδάφη ἀρδεύονται ἀποκλειστικῶς διὰ διηθήσεως, τὰ συνεκτικὰ διὰ κατακλύσεως, τὰ δὲ ἡμιπερατὰ συνήθως δι' ἑνὸς ἐνδιαμέσου τρόπου προσεγγίζοντος πρὸς τὴν ὑπάρ-



δικτύου και την μορφή της γεωργικής έκμεταλλεύσεως ως τουτο ἐγένετο ἐπὶ Ἀγγλικῆς Ἑταιρείας. Τὴν ἀρδευομένην ταύτην ἑκτασιν, εἰς ἣν καλλιεργεῖται ἀποκλειστικῶς βάμβαξ, ὁ Ὄργανισμός Κωπαίδος κατώρθωσε νὰ αὐξήσῃ εἰς 78—80.000 στρ. κατ' ἀνώτατον ὄριον καὶ περὶ τὰ 70.000 στρ. κατὰ μ.δ. (1).

Τὸ πλεῖστον τμῆμα τῆς Κωπαίδος ἀρδεύεται διὰ διηθήσεως, ἀπαιτουμένου πρὸς τοῦτο 350 κ. μ. κατ' ἀρδευσιν καὶ κατὰ στρέμμα, μὲ ἀποτέλεσμα: ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν ἀπώλειαν μεγάλων ποσοτήτων ὕδατος, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν παράτασιν τῆς βλαστήσεως εἰς τὸν βάμβακα λόγῳ τῆς βραδείας ἀποξηράσεως τῆς οὕτω πληρουμένης μάξης τοῦ ἐδάφους.

Ἡ περιοχή τοῦ Ὄρχομενοῦ καθὼς καὶ μέρος τοῦ Ν. Δ. τμήματος τῆς Κωπαίδος ἀρδεύεται διὰ κατακλύσεως χορηγουμένων 100 κ. μ. ὕδατος κατ' ἀρδευσιν καὶ κατὰ στρέμμα. Τέλος, εἰς 10.000 στρ. διηθουμένων ἐδαφῶν ἐφηρμόσθη ἀπὸ τοῦ 1955 ἀρδευσις διὰ τοῦ συστήματος τεχνητῆς βροχῆς μὲ 300 κ.μ. περίπου κατὰ στρέμμα (5 ἀρδεύσεις εἰς βάμβακα). Καθ' ὅλην τὴν περίοδον τῆς ἀναπτύξεως τοῦ βάμβακος χορηγοῦνται δύο ἀρδεύσεις πλὴν τῆς περιοχῆς τοῦ Ὄρχομενοῦ εἰς ἣν δίδονται τρεῖς λόγῳ τῆς συνεκτικότητος τῶν ἐδαφῶν. Ὁ χρόνος τῆς πρώτης ἀρδεύσεως τοῦ βάμβακος κυμαίνεται ἀπὸ 5—30 Ἰουλίου καὶ ἀπὸ 10 Ἰουλίου — 10 Αὐγούστου διὰ τὴν δευτέραν.

Χαρακτηριστικὸν τῶν ἀρδεύσεων εἰς Κωπαίδα εἶναι ὅτι αὐταὶ διενεργοῦνται ἀποκλειστικῶς ὑπὸ τοῦ προσωπικοῦ τοῦ Ὄργανισμοῦ, ἄνευ συμμετοχῆς τῶν καλλιεργητῶν, μὲ μόνην ἐξάφρασιν τὴν περιοχὴν Ὄρχομενοῦ, ἔνθα τὸ προσωπικὸν τοῦ Ὄργανισμοῦ χειρίζεται τὸ ὕδωρ μέχρι τῶν τελικῶν αὐλάκων, ἅτινα κατασκευάζει ἢ ὑπηρεσία διὰ μηχανικῶν αὐλακωτήρων εἰς τὰ κτήματα, τὸ δὲ ὕδωρ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκείνου διοχετεύεται μερίμνη τῶν ἰδίων κτηματιῶν.

Ἐνταῦθα δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι παρὰ τὴν καταβαλλομένην ὑπὸ τοῦ Ὄργανισμοῦ προσπάθειαν νὰ ἐναλλάσσεται ὁ σῖτος μὲ τὸν βάμβακα, δὲν καθίσταται τοῦτο πάντοτε ἐφικτόν, λόγῳ τῆς διαφόρου διατάξεως τῶν συνεταιρισμῶν καὶ ἐπομένως καὶ τῶν καλλιεργητῶν ἐντὸς τῆς Κωπαίδος τόσον ἀπὸ ἀπόψεως θέσεως ὅσον καὶ ἐκτάσεως. Οὕτω παρατηρεῖται ἄλλοι μὲν συνεταιρισμοὶ νὰ καλλιεργοῦν τὸ ἕν ἔτος μόνον σῖτον τὸ ἐπόμενον δὲ μόνον βάμβακα, ἐνῶ τινὲς τούτων καλλιεργοῦν ἀμφότερα ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ἔτους οὐχὶ ὁμοῦ εἰς τὴν αὐτὴν ἀναλογία.

**Καλλιεργητικὸν σύστημα :** Ἡ καλλιέργεια τῆς Κωπαίδος μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῶν ἀγροτῶν γίνεται κατὰ ἰδιόρρυθμον τρόπον δεδομένου ὅτι τὴν πρωτοβουλίαν εἰς τὴν ἐκλογὴν τῶν καλλιεργειῶν δὲν ἔχουν οἱ ἐπὶ μέρος καλλιεργηταὶ ἀλλὰ ὁ Ὄργανισμός. Τοῦτο εἶναι συνέπεια τῆς ἀδυναμίας τῆς ρυθμίσεως καὶ τοῦ χειρισμοῦ τῶν ἀρδεύσεων ὑπὸ τῶν καλλιεργητῶν, καθ' ὅσον τὸ τεράστιον ἀρδευτικὸν καὶ ἀποστραγγιστικὸν δίκτυον τῆς περιοχῆς ἀπαιτεῖ ἐπιδέξιον χειρισμὸν ὑπὸ ἐπιστημονικοῦ προσωπικοῦ, παράγοντες οἵτι-

1) Ἡδὴ ἀπὸ ἔτους καὶ πλέον, κατόπιν τῶν ἔργων τῆς Ὑλικῆς, ἡ ἀρδευομένη ἑκτασίς ἀνήλθεν εἰς 100.000 στρ. καὶ πλέον.



νες συντελοῦν εἰς τὴν ὑπὸ τοῦ Ὁργανισμοῦ διαχειρίσιν τοῦ σοβαρωτάτου τούτου παράγοντος τοῦ ἀρδευτικοῦ ὕδατος.

Συνέπεια τούτου εἶναι ὅτι τὸ πρόγραμμα καλλιέργειας ὀλοκληροῦ τῆς περιοχῆς συντάσσεται κατ' ἔτος ὑπὸ τοῦ Ὁργανισμοῦ — Διεύθυνσις Καλλιεργειῶν, μὲ βάσιν πάντοτε τὸ εἰς τὴν διάθεσίν του ὑπάρχον ὕδωρ ὡς καὶ τὰς δυνατότητας τοῦ ἀρδευτικοῦ δικτύου. Τὸ πρόγραμμα εἶναι ὑποχρεωτικὸν δι' ὅλους τοὺς ἀγρότας ἐπὶ ποινῇ ἀφαιρέσεως τοῦ κτήματός των ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου Γεωργίας, εἰς περίπτωσιν μὴ συμμορφώσεώς των.

Ἡ ἀκολουθουμένη ἀμειψισπορὰ εἶναι ἡ βάμβαξ — σίτος καὶ βάμβαξ — σίτος — σίτος, μὲ μικρὰν ἐξάφαισιν τὴν περιοχὴν Ὁρχομενοῦ ἔμβα 5 — 10 % τῶν καλλιεργητῶν ἀντὶ βάμβακος καλλιεργοῦν κηπευτικά καὶ δὴ πεπόνια, πάντοτε ὁμως κατόπιν ἀδείας τοῦ Ὁργανισμοῦ. Ἐπίσης εἰς τὴν περιοχὴν Β.Α. τοῦ Μέλανος ποταμοῦ, ἔμβα δὲν ὑπάρχει ἀρδευτικὸν δίκτυον (μόνον τὸ ἡμισυ τῆς ἐκτάσεως ἀρδεύεται), ἡ ἐφαρμοζομένη ἀμειψισπορὰ εἶναι σίτος — σίτος — ἀγρανάπασις. Ἐκ τῶν λοιπῶν φυτῶν μόνον ἡ μηδικὴ ἐμφανίζεται σποραδικῶς καὶ εἰς μικρὰν κλίμακα ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ Ὁρχομενοῦ.

Ἀπὸ ἀπόψεως συμμετοχῆς τῶν ἀγροτῶν εἰς τὴν καλλιέργειαν τῶν ἀνωτέρω φυτῶν παρατηρεῖται, ὅτι λόγω τῆς ἐντατικῶς χρησιμοποιουμένης μηχανικῆς καλλιέργειας, οὗτοι ἀσχολοῦνται μόνον μὲ τὰ σκαλίσματα τοῦ βάμβακος καὶ τὴν συγκομιδὴν τούτου καὶ εἰς μικρὸν ποσοστὸν διὰ τὴν σποράν, ὅπου αὕτη διενεργεῖται διὰ ζωοκινήτων σπαστικῶν μηχανῶν. Αἱ καλλιεργητικαὶ αὐταὶ ἐργασίαι ἐκτελοῦνται κατὰ τὸ πλεῖστον ὑπὸ τοῦ ἰδιοκτήτου, βοηθουμένου ὑπὸ τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας. (Μὴ χρηματικαὶ δαπάναι — Ἰδιωφελεῖς δαπάναι). Ἡ καλλιέργεια τοῦ σίτου γίνεται ἀποκλειστικῶς σχεδὸν διὰ μηχανημάτων ἀπὸ τῆς κατεργασίας τοῦ ἐδάφους μέχρι τῆς συγκομιδῆς τοῦ προϊόντος, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον γενομένης διὰ θεριζοαλωνιστικῶν μηχανῶν, τῶν ἐργασιῶν ἐκτελουμένων ὑπὸ ἰδιωτῶν ἐπιχειρηματιῶν ἐπὶ πληρωμῇ.

Συνέπεια τῶν ἀνωτέρω εἶναι ὅτι οἱ πλεῖστοι τῶν καλλιεργητῶν, οἵτινες πρὸ τῆς ἀπαλλοτριώσεως ἦσαν ἀκτήμονες, στεροῦνται καθ' ὀλοκληρίαν κεφαλαίου ἐπενδεδυμένου εἰς μηχανήματα ἢ ἐργαλεῖα, πλὴν μικροῦ ἀριθμοῦ χειροκινήτων ἐργαλείων, ἐνῶ τινὲς τούτων, οἵτινες ἔλαβον συμπληρωματικὴν μερίδα εἰς Κωπαΐδα, εἶναι ἰδιοκτῆται ζώου ἢ ζώων ἐργασίας καὶ ἐνίοτε σπαστικῆς μηχανῆς βάμβακος ἢ καὶ ἵπποκινήτου σκαλιστηρίου.

Λόγω τοῦ πλουσίου τοῦ ἐδάφους, μικρὰ χρῆσις λιπασμάτων παρατηρεῖται καὶ δὴ μόνον εἰς τὸν σίτον παρεχομένων περίπου 25 χλγ. ὑπερφωσφορικοῦ κατὰ στρέμμα, ἐνῶ εἰς τὸν βάμβακα δὲν γίνεται οὐδεμία λίπανσις, μὴ διαπιστωθεῖσις τῆς πρὸς τοῦτο ἀνάγκης ἐκ τῶν γενομένων πειραμάτων. Αἱ κατὰ τὴν τριετίαν 1953—55 σημειωθεῖσαι ἀποδόσεις ὑπῆρξαν σχετικῶς ὑψηλαί, ἀνελθοῦσαι διὰ τὸν σίτον εἰς 200 ἕως 250 χλγ. κατὰ στρέμμα, ἐνῶ διὰ τὸν βάμβακα εἰς 128 ἕως 180 χλγ.

*Οικονομικαὶ Συνθήκαι τῶν Ἀγροτῶν:* Κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ Κράτους διανομὴν τοῦ κτήματος τῆς Κωπαΐδος εἰς τοὺς καλλιεργητάς, καθωρίσθη ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου Γεωργίας ὁ χορηγητέος βιώσιμος κλῆρος εἰς 24 στρ. ἐπὶ

γαιών α' κατηγορίας υπό την βασικήν προϋπόθεσιν κατασκευής έργων και κυρίως άρδευτικών, δι' ών θα εξησφαλιζοντο αϊ δυνατότητες έφαρμογής έντατικής γεωργοκτηνοτροφικής εκμεταλλεύσεως (1). Λόγω τής μικράς ιδιοκτησίας και τών ως εκ τούτου περιορισμένων έσόδων οϊ άγρόται τής Κωπαίδος αντιμετωπίζουν πλείστας όσας οικονομικάς δυσχερείας, όφειλομένας κυρίως εις τήν άνεπάρκειαν ρευστού χρήματος, τó όποϊον είναι άπαραίτητον διά τήν έγκαιρον άντιμετώπισιν τών δυσφόρων καλλιεργητικών έργασϊών.

Βεβαίως παρέχονται εις τούτους διευκολύνσεις τινές υπό τής Α.Τ.Ε., ήτις χορηγεί εις τούς καλλιεργητάς βραχυπρόθεσμα δάνεια διά τήν προμήθειαν σπόρων και λιπασμάτων, πλην όμως αντιμετωπίζουν έν τῶ συνόλω στενότητα χρήματος τοιαύτην, ώστε κατά τήν συγκομιδήν του σίτου νά καταβάλλουν τήν άντίστοιχον δαπάνην εις προϊόν και εις τās πλείστας τών περιπτώσεων νά προπωλοῦν τήν παραγωγήν των εις χαμηλάς τιμάς διά νά έπιτύχουν δανεισμόν έξ ιδιωτών ή άκόμη νά πωλοῦν τά προϊόντα των εις χαμηλάς τιμάς άμα τῆ συγκομιδῆ, ίνα άφ' ενός μὲν αντιμετωπίσουν τρεχούσας δαπάνας καλλιεργείας του βάμβακος, άφ' έτέρου δέ άποπληρώσουν τά πρὸς τήν Α.Τ.Ε. χρέη των, χωρίς νά αναφέρωμεν τās άπαιτουμένας καθ' έκάστην δαπάνας πρὸς συντήρησιν τής οικογενείας του καλλιεργητου, τής όποϊας τó βιοτικόν έπίπεδον είναι πολύ χαμηλόν.

Πλην τών άνωτέρω οϊ καλλιεργηται αντιμετωπίζουν και έτέρας δαπάνας, αίτινες ύπεισέρχονται εις τó κόστος τών καλλιεργείων των, βαρύνουσαι τάυτας ύπερμέτρως. Τάυτας συνιστοῦν τά καταβαλλόμενα υπό τών άγροτῶν ποσά τόσον πρὸς τó Δημόσιον όσον και πρὸς τόν Όργανισμὸν Κωπαίδος. Η πρὸς τó Δημόσιον καταβαλλομένη όφειλή έπέχει θέσιν έτησίας εδσεως πρὸς έξόφλησιν τής άξίας τών χορηγηθεισῶν εις τούς καλλιεργητάς γαιών, ύπολογίζεται δέ με βάσιν τó ισόποσον τής άξίας 10,24 χλγ. βάμβακος κατά στρέμμα, έφ' όσον οὔτοι καλλιεργούν βάμβακα και 6% επί τής παραγωγής του σίτου εις τήν περίπτωση καλλιεργείας σίτου κατά στρέμμα, με μακροχρόνιον προοπτικήν έξοφλήσεως του όλικου τιμήματος, τής όλικής διαρκείας μη καθωρισθείσης εισέτι υπό του Κράτους (2). Η προεργασία τής όριστικής διανομής έχει ήδη περατωθη υπό τής έπιτροπής έποικισμοῦ του Υπουργείου Γεωργίας.

Αϊ υπό του Όργανισμοῦ Κωπαίδος εισπραττόμεναι εισφοραϊ άπό τούς καλλιεργητάς άνέρχονται εις 15% τής κατά στρέμμα παραγωγής προκειμένου περι σίτου και εις 19,2 χλγ. βάμβακος κατά στρέμμα προκειμένου περι βάμβακος και έφ' όσον ή παραγωγή τούτου είναι άνωτέρα τών 128 χλγ., άλλως

1) Τó Δ.Σ. του Όργανισμοῦ Κωπαίδος ειχε προτείνει ως βιώσιμον κλήρον έκτασιν 35 στρ. επί γαιών α' κατηγορίας πρὸς αντιμετώπισιν του κατωτάτου όριου συντηρήσεως μις πενταμελοῦς οικογενείας.

2) Ένταῦθα δέον νά σημειωθῆ ότι ή Άγγλική Έταιρεία άπεξημιώθη υπό του Κράτους με £ 1.800.000, ποσόν τó όποϊον άντιστοιχεί εις 783 δρχ. κατά στρέμμα, μη λαμβανομένης ύπ' όψιν τής διαφόρου ποιότητος τών έδαφών. Εις τó συνολικῶς δμως καταβληθέν ποσόν περιλαμβάνεται έκτός τών γαιών και ή αξία τών κτιριακῶν έγκαταστάσεων, μηχανημάτων και εργοστασίου παραγωγής ήλεκτρικου ρεύματος.



έκπίπτειται εκ τῆς εἰσφορᾶς ποσοστὸν ἀντίστοιχον πρὸς τὴν ἐπὶ ἔλαττον παραγωγὴν. Διὰ τῶν ἐσόδων τούτων ὁ Ὄργανισμὸς ἀντιμετωπίζει τὰς δαπάνας προσωπικοῦ, ὑλικῶν ἀρδεύσεως, συντηρήσεως ἀρδευτικοῦ δικτύου, ἐπιδιώκων ἐκ παραλλήλου τὴν ἐπέκτασιν τῶν τεχνικῶν ἔργων πρὸς ἐπωφελεστέραν ἀξιοποίησιν τῆς περιοχῆς.

Ἐνταῦθα δέον νὰ σημειωθῆ ὅτι οἱ ἀποκατασταθέντες εἰς Κωπαΐδα καλλιεργηταὶ κατοικοῦν εἰς τὰ πέριξ χωρία ἑλλείπει κατοικιῶν, ὄντες οὕτω ἠναγκασμένοι νὰ διανύουν μεγάλας ἀποστάσεις πρὸς μετάβασιν καὶ ἐπιστροφήν εἰς τοὺς ἀγρούς των, τῆς ἐντάσεως οὕτω τῆς ἐκμεταλλεύσεως καθισταμένης προβληματικῆς.

### ΤΕΧΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΚΩΠΑΪΔΟΣ

Οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς, οἵτινες ἀπαντῶνται εἰς περιωρισμένας ποσότητας εἰς Κωπαΐδα, ἀποτελοῦντες φραγμὸν εἰς τὴν ἔντασιν τῆς παραγωγῆς, εἶναι τὸ ἔδαφος ἀφ' ἑνὸς καὶ τὸ χρησιμοποιούμενον πρὸς ἀρδουσιν ὕδωρ ἀφ' ἑτέρου. Εἰς τὰ ἀνωτέρω δέον νὰ προστεθῆ καὶ ἡ παρεχομένη ὑπὸ τῆς μέσης ἀγροτικῆς οἰκογενείας ἐργασία, δοθέντος ὅτι ἡ αὐξήσις τῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου, ἦν ἐπιδιώκομεν εἰς τὰς μικρὰς ἐκμεταλλεύσεις τῆς Κωπαΐδος, ἐξαρτᾶται κατὰ μέγιστον ποσοστὸν ἐκ τοῦ ποσοῦ τῆς ἐργασίας τῆς οἰκογενείας, ἣν χρησιμοποιοῦν οἱ ἐπὶ μέρους κλάδοι ἢ καλλιέργειαί.

Ὅθεν, τὸ ὅλον θέμα ἐντοπίζεται εἰς τὴν διὰ τῆς χρήσεως τῆς τεχνικῆς τῆς νέας μεθόδου ἐξεύρεσιν καὶ ἐκλογὴν τοῦ καλυτέρου συνδυασμοῦ ἐνδεδειγμένων καλλιεργειῶν ἢ ἀμειψισπορῶν μεταξύ πολλῶν τοιούτων ἀνταγωνιζομένων μεταξύ των, ὥστε διὰ τῆς καλυτέρας ἀξιοποιήσεως τῶν κατὰ τὰ ἀνωτέρω περιωρισμένων ποσοτικῶς συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς νὰ ἐπιτευχθῆ ἐν ταυτῷ καὶ ἡ μεγαλύτερα δυνατὴ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσοδος δι' ἕνα ἕκαστον τῶν καλλιεργητῶν. Ἡ τοιαύτη τοποθέτησις τοῦ προβλήματος προϋποθέτει τὴν λεπτομερῆ ἐξέτασιν τῶν συντελεστῶν, οἵτινες περιορίζουν τὰς δυνατότητας ἐφαρμογῆς ἐντατικωτέρου προγράμματος καὶ ὧν ἡ ἀνάλυσις ἀκολουθεῖ.

**Ἐδαφος:** Ἡ ὅλική ἐκτασις τῆς Κωπαΐδος, ὡς καὶ ἀλλαχοῦ ἐσημειώσαμεν, ἀνέρχεται εἰς 193.000 στρ. μὲ διαφόρου ποιότητος ἐδάφη. Ἐπὶ τῷ σκοπῷ ὑπάρξεως ὁμοιογενείας ἐξετάζομεν ἐν τῇ μελέτῃ μόνον τὰ ἐδάφη α' κατηγορίας, ἅτινα κατὰ τὰ ἐπίσημα στοιχεῖα τῆς διανομῆς ἀνέρχονται εἰς 125.000 στρ. καὶ ἐξ αὐτῶν μόνον τὰ 86.000 στρ., ἅτινα ἀποτελοῦνται ἀπὸ περατὰ καὶ ἡμιπερατὰ ἐδάφη, ὡς τοῦτο ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ πίνακος 2.

Οὕτω ἐπιτυγχάνεται ὁμοειδῆς βᾶσις ἀπὸ ἀπόψεως ποιότητος ἐδάφους καὶ μεγαλυτέρα ὡς ἐκ τούτου εὐχέρεια ἐκλογῆς τῶν δυναμένων νὰ εὐδοκίμησιν φυτῶν ὡς καὶ ἀκριβεστέρα στάθμισις τῶν ἀναμενομένων ἀποδόσεων. Ἡ ἐκτασις αὕτη τῶν 86.000 στρ. ἀποτελεῖ καὶ τὸ ὄριον τοῦ συντελεστοῦ ἐδάφους κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου.

**Ἵδωρ ἀρδεύσεως:** Τὸ ὕδατικὸν δυναμικὸν τῶν πηγῶν τῆς περιοχῆς

Πίναξ 2  
Κατηγορίες έδαφών Κωπαίδος  
α'. Κατηγορίας.

Κατηγορία έδαφους	*Εκτασις εις στρ.	% τών άρδευομένων
<b>Άρδευόμενα</b>		
Περατά	76.372,55	61,84
Ήμιπερατά	9.691,85	7,84
Συνεκτικά	37.445,80	30,32
Μή άρδευόμενα	1.489,80	—
<b>Σύνολον</b>	<b>125.000,00</b>	<b>100,00</b>

έξ ών άρδευεται ή Κωπαίς είναι λίαν ύψηλόν κατά τόν Ίούνιον και άπό τών μέσων Σεπτεμβρίου και έκειθεν, μή έμφανιζομένης δυσχερείας τινός πρός άρδευσιν άπό άπόψεως διαθεσίμου ύδατος κατά την περίοδον ταύτην. Άπό του Ίουλίου όμως έμφανίζεται μείωσις τών ύδάτων, όφειλομένη εις την σημαντικήν έλάττωσιν τής παροχής του Κηφισσοϋ, δεδομένου ότι ή παροχή τών δύο άλλων πηγών είναι κατά τό μάλλον και ήττον σταθερά καθ' όλον τό θέρος, ώς τουτο άνεφέρθη προηγουμένως.

Ούτω ή παροχή του Κηφισσοϋ κατά τό α' 15θήμερον του Ίουλίου κατέρχεται σημαντικώς φθάνουσα τό 1 κ.μ./1", μειουμένη εις 0,4 κ.μ./1" κατά τό β' 15θήμερον του αυτού μηνός. Κατά τόν Αύγουστον ή παροχή του ποταμοϋ κατέρχεται έτι περισσότερον εις τά 0,2 κ.μ./1" κατά τό α' 15θήμερον φθάνουσα την έλαχίστην τιμήν της κατά τό β' 15θήμερον του Αύγουστου, όποτε αυτή κυμαίνεται άπό 0—0,2 κ.μ./1"/μ. δ. 0,1 κ.μ./1"/, τής μειωμένης ταύτης παροχής διατηρουμένης και κατά τό α' 15θήμερον του Σεπτεμβρίου. Η παροχή τών δύο άλλων πηγών Μέλανος και Πολυνύρας άνέρχεται εις 3,6 κ.μ./1", οϋσα σταθερά καθ' όλην την άρδευτικήν περίοδον.

Βάσει τών άνωτέρω παροχών ή διαίτα του ύδατος κατά την κρίσιμον περίοδον 1 Ίουλίου—15 Σεπτεμβρίου έχει ώς κατωτέρω (πίναξ 3).

Πίναξ 3

Διαθέσιμον ύδωρ άρδευσεως εις Κωπαίδα κατά την περίοδον  
1 Ίουλίου — 15 Σεπτεμβρίου εις κ. μ.

Πηγαί	Ίούλιος		Αύγουστος		Σ/βριος	Σύνολον 1/7 — 15/9
	1—15	16—31	1—15	16—31	1—15	
Κηφισσός Μέλας	1.296.000	552.960	259.200	138.240	129.600	2.376.000
	4.665.600	4.717.440	4.665.600	4.717.440	4.665.600	23.431.680
<b>Σύνολον</b>	<b>5.961.600</b>	<b>5.270.400</b>	<b>4.924.800</b>	<b>4.855.680</b>	<b>4.795.200</b>	<b>25.807.680</b>

Πλήν τῆς ἀνωτέρω ποσότητος ὕδατος δέον νὰ ληφθῆ ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ ἀναφερθῆν ἀλλαχοῦ ὡς ἀποθηκευόμενον ἀπὸ τοῦ Ἰουνίου ἐντὸς τῶν ὕδατοδεξαμενῶν τῆς κοίτης τοῦ Κηφισοῦ ὕδωρ ἀνερχόμενον εἰς 1.050.000 κ.μ., τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται ἀναλόγως τῶν ἀναγκῶν κατὰ τὴν περίοδον τῶν ἀρδεύσεων, καταναλισκόμενον κατὰ 75 % περίπου τὸ πρῶτον 15 θήμερον τοῦ Αὐγούστου, τοῦ ὑπολοίπου ἀξιοποιουμένου κατὰ τὸ δεύτερον 15 θήμερον τοῦ αὐτοῦ μηνός. Ἐν τῇ πράξει ὁμως ἔχει ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ποσότης ἀυξάνεται κατὰ 40 % περίπου κατὰ τὸν χρόνον χρησιμοποίησεως τοῦ ὕδατος, τοῦ φαινομένου τούτου ὀφειλομένου εἰς τὴν ἐπαναφορὰν ὕδατος ἐξ ἀποθηκεύσεως τούτου εἰς τὸ ἔδαφος.

Δοθέντος ἤδη ὅτι ἡ ἀρδευομένη ἔκτασις τῆς Κωπαίδος ἀνέρχεται κατὰ μ. ὅ. εἰς 70.000 στρ. κατ' ἔτος, ἡ ἀναλογοῦσα ἔκτασις τῶν περατῶν καὶ ἡμιπερατῶν ἔδαφῶν τῆς α' κατηγορίας ἣτις ἀρδεύεται ἐτησίως φθάνει τὰ 37.000 περίπου στρέμματα, ἄτινα, βάσει τοῦ πίνακος 2, κατανέμονται εἰς 32.819 στρ., (περατὰ) ἀρδευόμενα διὰ διηθήσεως καὶ 4.181 στρ. (ἡμιπερατὰ) ἡμιδιηθούμενα ὡσαύτως. Τὸ καταναλισκόμενον πρὸς ἀρδευσιν ὕδωρ τῶν κατὰ τὰ ἀνωτέρω 37.000 στρ. ἐξεταζομένων ἔδαφῶν τῆς α' κατηγορίας ἐμφανίζεται εἰς τὸν πίνακα 4 τῆς διὰ διηθήσεως ἀρδευομένης ἐκτάσεως, μειωθείσης κατὰ 10.000 στρ., εἰς τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖται τὸ σύστημα ἀρδεύσεως διὰ τεχνητῆς βροχῆς.

#### Πίναξ 4

Μέση κατανάλωσις ὕδατος πρὸς ἀρδευσιν τῶν περατῶν καὶ ἡμιπερατῶν ἔδαφῶν α' κατηγορίας διὰ τὴν περίοδον Ἰουλίου - Αὐγούστου

Μέθοδος ἀρδεύσεως	*Ἐκτασις εἰς στρέμματα	*Ὑδωρ κατὰ (') στρ. εἰς κ.μ.	Συν. ὕδωρ. εἰς κ.μ.
Διήθησις	22.819	375	8.557.125
Τεχνητὴ βροχὴ	10.000	180	1.800.000
Ἀτελής διήθησις	4.181	250	1.045.250
<b>Σύνολον</b>	<b>37.000</b>	<b>—</b>	<b>11.402.375</b>

Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος 4 καὶ βάσει τῆς κατανομῆς τοῦ ὕδατος εἰς ὀλόκληρον τὴν περιοχὴν τῆς Κωπαίδος (πίναξ 3), ὑπολογίζομεν τὴν κατανομήν τοῦ ὕδατος κατὰ 15θήμερον καὶ διὰ τὸ διάστημα ἀπὸ πρώτης Ἰουλίου μέχρι τῶν μέσων Σεπτεμβρίου, ἣτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἔκτασιν τῶν 86.000 στρ., ἐκ τῶν ὁποίων ἀρδεύονται σήμερον περὶ τὰ 37.000 βάσει τοῦ κρατοῦντος συστήματος ἐκμεταλλεύσεως. Ὁ πίναξ 5 ἀπεικονίζει τὴν δίκαιαν ταύτην τοῦ

1) Τὰ κατὰ στρέμ. ποσὰ ὕδατος τῆς στήλης ταύτης ἐξήχθησαν βάσει τῶν ἐν σελ. 4 ἀναφερομένων, ληφθέντος ἐπὶ πλέον ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ τελευταία διὰ τεχνητῆς βροχῆς ἀρδευσις τοῦ βράμβακος χορηγεῖται τὸ βραδύτερον μέχρι τέλους Αὐγούστου καὶ ὅτι κατὰ τὴν ἀτελεῖ διήθησιν τῶν ἡμιπερατῶν ἔδαφῶν καταναλίσκονται 250 κ.μ. ὕδατος κατ' ἀρδευσιν.

## Πίναξ 5

Κατανομή ύδατος εις τὰ περατὰ καὶ ἡμιπερατὰ ἐδάφη  
α'. κατηγορίας κατὰ τὴν περίοδον 1)7- 15)9

Χρονική περίοδος	Ποσότης ύδατος εἰς κ.μ.
1 - 15 Ἰουλίου	3.238.274
16 - 31 Ἰουλίου	2.861.996
1 - 15 Αὐγούστου	2.668.156
16 - 31 Αὐγούστου	2.663.949
1 - 15 Σεπτεμβρίου	2.534.606
<b>Σύνολον</b>	<b>13.966.981</b>

ύδατος ἀνά δεκαπενθήμερα, αἱ δὲ ἀντίστοιχοι ποσότητες παρουσιάζουν τὰ ὅρια τοῦ συντελεστοῦ ύδατος, ὅστις ἀποτελεῖ τὸν κύριον περιοριστικὸν παράγοντα ἐν τῇ περιοχῇ πρὸς περαιτέρω ἐντασιν τῆς παραγωγῆς.

Κατὰ τὴν γιγνομένην ἐν τῇ παρουσίᾳ ἀνάλυσιν τοῦ ὑπὸ μελέτην τομέως πρὸς ἐξεύρεσιν τοῦ optimum τῆς παραγωγῆς λαμβάνομεν ὡς προϋπὸθεσιν ὅτι ἡ ἄρδευσις θὰ γίνεται ἐξ ὀλοκλήρου διὰ τεχνητῆς βροχῆς.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸν παράγοντα ἐργασία ὑπολογίζομεν τὴν ἐργασίαν, ἣν δύναται νὰ παρέξῃ οἰκογένεια καλλιεργητοῦ διαθέτουτος κτῆμα ἐκτάσεως 24 στρ. καὶ ἀποτελουμένη ἐκ τοῦ ἴδιου, τῆς συζύγου του καὶ ἑνὸς εἰσέτι ἄρρενος ἡλικίας 17-20 ἐτῶν, ὡς εἶναι κατὰ τὸ πλεῖστον ἡ σύνθεσις μιᾶς ἀγροτικῆς οἰκογενείας καὶ ἥτις ὡς ἔγγιστα ἀντιστοιχεῖ πρὸς 2,6 ἀνδρικὰ ἡμερομίσθια. Ἡ ποσότης τῆς ἐργασίας ἣν δύναται νὰ προσφέρῃ μία οἰκογένεια τῆς ἀνωτέρω συνθέσεως ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα 6.

## Πίναξ 6

Μέθοδος Ὑπολογισμοῦ Ἐργασίας Μέσης Οἰκογενείας ἐν Κωπατῆι  
Ἡμερησία Ἀπόδοσις = 2,6 ἀνδρικὰ ἡμερομίσθια

	Ι	Φ	Μ	Α	Μ	Ι	Ι	Α	Σ	Ο	Ν	Δ	Συν. ὠρῶν. ἐτησ.
1. Σύν. ὠρῶν (1) ἐργασίας κατὰ μῆνα.	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	6.240
2. Σύν. ὠρῶν (2) ἀκαταλλήλων πρὸς ἐργασ. λόγῳ δυσμενῶν καιρικῶν συνθηκῶν.	348	206	234	112	91	—	—	—	56	185	252	352	1.836
3. Ὑπόλ. ὠρῶν (3) καταλλήλων πρὸς ἐργασίαν.	172	314	286	408	429	520	520	520	464	335	268	168	4.404

1) Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς παρεχομένης ἐργασίας ὑπὸ τοῦ ἰδιοκτῆτου καὶ τῶν ἐργαζομένων μελῶν τῆς οἰκογενείας ἐγένετο μετὰ βᾶσιν 8ωρον ἐργασίαν ἡμερησίως καὶ διὰ 25 ἐργασίμους ἡμέρας κατὰ μῆνα.

2) Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ χρόνου καθ' ὃν δὲν δύναται νὰ ἐργασθῶν τὰ μέλη τῆς

ὡς πρὸς τὸ διατιθέμενον χρηματικὸν κεφάλαιον διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς ἐπιχειρήσεως ἐξετάζομεν τὴν περίπτωσιν τῆς μὴ ὑπάρξεως οὐδενὸς περιορισμοῦ.

## ΕΚΛΟΓΗ ΚΑΛΛΙΕΡΓΕΙΩΝ ΚΑΙ ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΟΙ ΚΑΤΑ ΣΤΡΕΜΜΑ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΑΙ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

### 1. Καλλιέργειαι

ὡς προηγουμένως ἀνεφέρθη ἡ ἐπικρατοῦσα ἀμειψισπορά ἐν Κωπαϊδί εἶναι ἡ βάμβαξ — σίτος, τῆς μὲν πρώτης καλλιέργειας προσαρμοζομένης κατ' ἔκτασιν ἀναλόγως πρὸς τὸ διαθέσιμον κατ' ἔτος ὕδωρ, τῆς δὲ δευτέρας καλυπτούσης τὴν ὑπόλοιπον ἔκτασιν, τοῦ ἐδάφους παραμένουτος ἀνεκμεταλλεύτου κατὰ τὴν μετὰ τὴν συγκομιδὴν τοῦ σίτου περίοδον ἐλλείπει ὕδατος. Τὸ τελευταῖον τοῦτο ὀφείλεται κυρίως οὐχὶ τόσο εἰς τὴν ἀνεπάρκειαν ὕδατος, ἀλλὰ εἰς τὴν σπατάλην τούτου λόγῳ τῶν χρησιμοποιουμένων συστημάτων ἀρδεύσεως (διηθήσεως κυρίως). Ἐπομένως πρώτιστος σκοπὸς πάσης βελτιώσεως, ἥτοι ἐντάσεως τῆς παραγωγῆς, εἶναι ἡ κατὰ ὀρθολογικὸν τρόπον ἀξιοποίησις τοῦ διαθέσιμου πρὸς ἄρδουσιν ὕδατος διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ συστήματος τῆς διὰ τεχνητῆς βροχῆς ἀρδεύσεως καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ καλλιέργεια μεγαλύτερων ἐκτάσεων διὰ φυτῶν, ἅτινα ἀπαιτοῦν ἄρδουσιν κατὰ τὸ θέρος, δοθείσης τῆς μεγάλης οἰκονομίας ἣτις ἐτέρχεται εἰς τὴν κατανάλωσιν τοῦ ὕδατος διὰ τῆς μεθόδου ταύτης.

Τὸ ἀμέσως ἐπόμενον θέμα ὅπερ ἀνακύπτει εἶναι τὸ τῆς ἐκλογῆς τῶν καταλλήλων κλάδων, οἵτινες δύνανται νὰ ἀναπτυχθοῦν ὑπὸ τὰς κρατούσας ἐν τῇ περιοχῇ συνθήκας. Λόγῳ τῆς παντελοῦς ἐλλείψεως κτιριακῶν ἐγκαταστάσεων, μὴδὲ τῶν κατοικιῶν τῶν καλλιεργητῶν ἐξαιρουμένων, οἵτινες διαμένουν εἰς τὰ περίξ χωρία καὶ εἰς ἀπόστασιν 10—30 χλμ., δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ ἀνάπτυξις οἰκίστου κτηνοτροφίας πρὸς τὸ παρὸν καὶ οὕτω παραμένει πρὸς ἐκλογὴν μόνον τὸ ἕτερον σκέλος τῆς ἀγροτικῆς οἰκονομίας τὸ τῆς φυτικῆς παραγωγῆς, χωλοσύνης εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς τῆς ὅλης προσπάθειας πρὸς ἔντασιν τῆς παραγωγῆς, ἐφ' ὅσον τὸ ἕτερον σκέλος τῆς κτηνοτροφίας θὰ ἀπουσιάζῃ.

Ὁ ἀραβόσιτος τόσο ὡς καλλιέργεια τῆς ἀνοίξεως, ὅσον καὶ ὡς ἐπίσπορος τοιαύτη μετὰ τὴν συγκομιδὴν τοῦ σίτου ἀναπτύσσεται πολὺ καλῶς ἐν Κωπαϊδί, αἱ δὲ ἀποδόσεις τῶν ὑβριδίων εἶναι λίαν ὑψηλαί. Ἀντιμετωπίζεται

οἰκογενεῖας ἐγένετο βάσει τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν βροχῆς, τοῦ ἀριθμοῦ τούτου αὐξηθέντος κατὰ 50 % διὰ τοὺς μῆνας Ἰανουάρ. καὶ Δεκέμβρ., κατὰ 30 % διὰ τοὺς μῆνας Φεβρουάριον καὶ Νοέμβριον, κατὰ 20 % διὰ τοὺς μῆνας Μάρτιον καὶ Ὀκτώβριον καὶ 10 % διὰ τοὺς μῆνας Ἀπρίλιον, Μάϊον καὶ Σεπτέμβριον λόγῳ τοῦ ἀδυνάτου τῆς ἐργασίας τὴν ἐπομένην μίαν ἡμέραν βροχῆς καὶ δὴ κατὰ τὴν χειμερινὴν περίοδον. Ἐγένετο ὡσαύτως προσαρμογὴ τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τὰς συμπτώσεις τῶν ἡμερῶν βροχῆς μὲ τὰς λόγῳ ἀργιῶν μὴ ἐργασίμους ἡμέρας.

3) Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας σειρᾶς ἀπὸ τῆς πρώτης καὶ δεικνύουν τὸ σύνολον τοῦ χρόνου ὃν δύναται νὰ ἀξιοποιηθῇ παραγωγικῶς διὰ τῆς ἐργασίας τῆς μίαι ἀγροτικῆς οἰκογενεῖαι τῆς ἀνωτέρω συνθέσεως.



μόνον τὸ πρόβλημα τῆς ἀποξηράνσεως τούτου κατὰ τὴν ὄψιμον σχετικῶς συγκομιδὴν τῆς θερινῆς σποράς. Πάντως ὁ ἀραβόσιτος ἀποτελεῖ μίαν ἐκ τῶν πρώτων καλλιιεργειῶν, αἰτινες δέον νὰ θεθοῦν ὑπὸ δοκιμὴν ἀπὸ οἰκονομικῆς πλευρᾶς πρὸς ἔντασιν τῆς παραγωγῆς.

Ἐκ τῶν λοιπῶν φυτῶν τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ εὐδοκιμήσουν ἐν Κωπαίδι πλὴν τοῦ σίτου καὶ βάμβακος, τὰ ὁποῖα ἀπὸ μακροῦ ἐπιτυχῶς καλλιεργοῦνται, πρωτεύουσιν θέσιν καταλαμβάνουν τὰ ζαχαρότευτλα. Ἡ καλλιέργεια αὕτη, τῆς ὁποίας τὰ πλεονεκτήματα ἐπανειλημμένως ἔχουν ἀναπτυχθῆ, εἶναι ἐνδεδειγμένη διὰ τὸ οἰκολογικὸν καὶ ἑδαφολογικὸν περιβάλλον τῆς περιφέρειας, ἐν συνδυασμῷ δὲ πρὸς τὴν προβλεπομένην ἀνέγερσιν ἐργοστασίων ἐπεξεργασίας τεύτλων πρὸς παραγωγὴν ζαχάρους ἐν Ἑλλάδι, δέον ν' ἀποτελέσῃ μίαν ἐκ τῶν πρώτων πρὸς μελέτην νέων καλλιιεργειῶν. Τὰ ζαχαρότευτλα δύνανται νὰ καλλιεργηθοῦν εἰς τὴν Κωπαίδα εἴτε κατὰ τὴν ἀνοιξιν, ὁπότε θὰ ἀνταγωνίζονται τὴν καλλιέργειαν τοῦ βάμβακος, εἴτε κατὰ τὸ θέρος μετὰ τὴν συγκομιδὴν τοῦ σίτου, ὁπότε θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνετα διπλὴ καλλιέργεια ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐδάφους ἐντὸς τοῦ ἔτους μὲ τὰ ἀνάλογα οἰκονομικὰ ἀποτελέσματα. Πλὴν τῶν τεχνικῶν πλεονεκτημάτων ἅτινα συγκεντρώνει ἡ καλλιέργεια αὕτη, συνδυάζει συγχρόνως τὸ ἕτερον πλεονέκτημα τῆς χρησιμοποίησεως πολλῶν ἐργατικῶν χειρῶν, τὰ ὁποῖα ἐπειδὴ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον παρέχονται ὑπὸ τῆς οἰκογενείας ἀποτελοῦν πρόσοδον διὰ τὸν ἐπιχειρηματίαν καλλιεργητὴν διὰ τῆς ἐπερχομένης οὕτω ἐλαττώσεως τῶν χρηματικῶν δαπανῶν.

Τὰ γεώμηλα ὡσαύτως δύνανται ν' ἀναπτυχθοῦν μετὰ τὴν συγκομιδὴν τοῦ σίτου, διότι ἐκτὸς τῶν ἄλλων αἱ τιμαὶ των κατὰ τὸν χειμῶνα εἰς τὴν ἀγορὰν τῶν Ἀθηνῶν εἶναι πάντοτε ὑψηλαί, λόγῳ τῆς παρατηρουμένης χαμηλῆς προσφορᾶς τούτων κατὰ τοὺς χειμερινοὺς μῆνας, συνεπεία τῆς εἰς μικρὰν σχετικῶς κλίμακα καλλιιεργείας των κατὰ τὸ θέρος καθ' ἅπασαν τὴν χώραν λόγῳ τῆς ἑλλείψεως ἐπαρκοῦς ὕδατος πρὸς ἄρδουσιν. Οὕτω θὰ εἶναι δυνατὴ ἡ διπλὴ καλλιέργεια ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ἔτους ὡς καὶ μὲ τὰ τεύτλα, τῶν δύο τούτων καλλιιεργειῶν ἀνταγωνιζομένων κατὰ τὸ θέρος μεταξὺ των.

Ἐτέρα ἐντατικὴ χρησιμοποίησις τοῦ ἐδάφους δύνανται νὰ ἐπέλθῃ διὰ τῆς καλλιιεργείας τομάτας κατὰ τὴν ἀνοιξιν καὶ ἐκ τῆς καλλιιεργείας κατὰ τὸ θέρος κουνουπιδιῶν μετὰ τὸν σίτον, λόγῳ τῶν ὑψηλῶν σχετικῶς ἀποδόσεων αἰτινες σημειοῦνται εἰς τὰς δοκιμαστικὰς καλλιιεργείας αἰτινες γίνονται ἐν τῇ περιοχῇ καὶ λόγῳ τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ ἡμερομισθίων ἅτινα ἀπαιτεῖ ἡ καλλιέργεια τῶν δύο τούτων φυτῶν (πλεονέκτημα λόγῳ τῆς ἀφθόνου οἰκογενειακῆς ἐργασίας). Διὰ τὴν ἀνάπτυξιν ὁμως τῶν δύο τούτων καλλιιεργειῶν ὑπάρχουν σοβαροὶ ἐνδοιασμοί, δεδομένου ὅτι οἱ καλλιεργηταὶ κατοικοῦν πολὺ μακρὰν καὶ δὲν δύνανται νὰ παρακολουθοῦν τὴν ἀνάπτυξιν τῶν φυτῶν καθ' ἑκάστην συμφώνως πρὸς τὰς μεγάλας ἀπαιτήσεις τούτων εἰς περιποιήσεις (κυρίως καταπολεμήσεις ἀσθενειῶν, σκαλίσματα κλπ.).

Τέλος, ἡ καλλιέργεια τῆς μηδικῆς δέον νὰ τεθῆ ὑπὸ μελέτην, δοθείσης τῆς πλεονεκτικῆς θέσεως εἰς ἣν εὐρίσκεται ἡ Κωπαίς, ἀπέχουσα τῆς μεγάλης καταναλωτικῆς ἀγορᾶς τῶν Ἀθηνῶν μόλις 92 χλμ. πρὸς κάλυψιν τῶν ἀναγ-



κῶν τῶν ὑπαρχόντων ἀφθόνων βουστασίων ἐνῶ ἡ πλησιεστέρα περιφέρεια παραγωγῆς σανοῦ μηδικῆς, ἡ Αἰτωλοακαρνανία, ἀπέχει πολὺ περισσότερον. Ἀπὸ ἀπόψεως ὄθεν κόστους μεταφορᾶς ἡ περιοχή εὐρίσκεται εἰς πλεονεκτικὴν θέσιν ἐναντι τῶν ἄλλων, ἐπὶ πλέον δὲ ἡ καλλιέργεια τῆς μηδικῆς παρουσιάζει τὸ πλεονέκτημα τῆς χρησιμοποίησεως τῶν ἐργατικῶν χειρῶν τῆς οἰκογενείας.

Κατόπιν τῆς οὕτω γενομένης ἐπιλογῆς τῶν διαφόρων καλλιεργειῶν, αἵτινες δύνανται νὰ εὐδοκίμησούν ἐν τῇ περιοχῇ καὶ πρὸς ἐξεύρεσιν ὁμοειδοῦς βάσεως συγκρίσεως τῆς ἀποδοτικότητος τούτων, κατετάξαμεν ταύτας καθ' ὁμάδας, τῆς κατατάξεως γενομένης ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑπαρχουσῶν δυνατοτήτων ἀναπτύξεως τῶν διαφόρων καλλιεργειῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐδάφους καὶ ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ἔτους.

Αἱ ὁμάδες αὗται ἔχουν ὡς κατωτέρω :

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. Σίτος (ἀνευ ἐπισπόρου καλλιέργειας). |                     |
| 2. Βάμβαξ.                              |                     |
| 3. Ἀραβόσιτος ἀνοίξεως.                 |                     |
| 4. Ζαχαρότευτλα ἀνοίξεως.               |                     |
| 5. Σίτος - Ἀραβόσιτος.                  | } διπλῆ καλλιέργεια |
| 6. Σίτος - Ζαχαρότευτλα.                |                     |
| 7. Σίτος - Γεώμηλα.                     |                     |
| 8. Μηδική (5ετής).                      |                     |

## 2. Ἀποδόσεις

Αἱ ἀποδόσεις αἵτινες ἐλήφθησαν ὑπ' ὄψιν ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς μέσας τοιαύτας τῆς περιόδου 1953 - 1955 τὰς σημειωθείσας ἐν Κωπαίδι διὰ τὸν σίτον καὶ βάμβακα.

Διὰ τὰς λοιπὰς καλλιεργείας, αἵτινες δὲν ἀπαντῶνται ἐν τῇ περιφερείᾳ ὑπὸ τὸ κρατοῦν σήμερον σύστημα ἐκμεταλλεύσεως, αἱ ἀποδόσεις προσηρμώθησαν εἰς ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα ἀνταποκρίνονται πρὸς τὴν καλὴν ποιότητα τῶν ἐδαφῶν τῆς ἐξεταζομένης περιοχῆς ἐν συνδυασμῶ πρὸς τὴν χρησιμοποιουμένην ἐντατικὴν λίπανσιν καὶ τὴν ἐν ταυτῶ ἀπαιτουμένην ποσότητα ὕδατος πρὸς ἄρδουσιν. Δυνατὸν βεβαίως ἐν τῇ πράξει αἱ ἀποδόσεις νὰ εἶναι ἀνώτεροι τῶν ὑπολογιζομένων λόγῳ τοῦ πλουσίου τῶν ἐδαφῶν, πλὴν ὁμως, λόγῳ τῆς σχετικῆς ἀπειρίας τῶν καλλιεργητῶν, ἐλήφθησαν μέσαι ἀποδόσεις δυνάμεναι νὰ πραγματοποιηθοῦν, συντελούσης πρὸς τοῦτο πλὴν τῶν ἄλλων καὶ τῆς ἀρίστης κατεργασίας τοῦ ἐδάφους διὰ μηχανικῶν μέσων. Αἱ ληφθεῖσαι ὑπ' ὄψιν ἀποδόσεις εὐρίσκονται εἰς τὸ παράρτημα καὶ εἰς τοὺς ἀντιστοιχοῦς πίνακας τῶν καλλιεργειῶν.

## 3. Τιμαὶ Προϊόντων.

Ὁ καθορισμὸς τῶν τιμῶν ἢ μᾶλλον ἢ πρόβλεψις τούτων ἀποκτᾶ σημαντικὴν σπουδαιότητα, ὡς ἄλλως τε τοῦτο συμβαίνει πάντοτε προκειμένου περὶ τιμῶν καὶ δὴ τοιούτων ἀγροτικῶν προϊόντων. Ὡς ἐκ τούτου περιωρίσθημεν διὰ μὲν τὸν σίτον καὶ βάμβακα εἰς τιμὰς μὴ ἀπεχούσας πολὺ ἐκείνων

τοῦ 1955. Διὰ τὸν ἀραβόσιτον ἐλήφθη τιμὴ ἀνταποκρινομένη πρὸς τὰς μέσας τιμὰς τοῦ προϊόντος κατὰ τὴν τελευταίαν ζετίαν, ἤτοι 2 δρχ. κατὰ χλγ. Διὰ τὰ τεύτλα ὡς μέση τιμὴ ἐλήφθη ἡ τῶν 300 δρχ. κατὰ τόννον μὲ παράδοσιν εἰς τὸ ἐργοστάσιον ἐκ μέρους τῶν παραγωγῶν (μέση προβλεπόμενη τιμὴ διὰ τὴν πρῶτην ὕλην τῆς βιομηχανίας ζαχαρώσας). Διὰ τὰ γεώμηλα ὡς τιμὴ ἐλήφθη ἡ τῶν 1.000 δρχ. κατὰ τόννον ἐν τῇ ἀποθήκῃ τοῦ Ὄργανισμοῦ Κωπαΐδος. Τέλος, ἡ ὑπολογισθεῖσα διὰ τὸν σανὸν μηδικῆς τιμὴ ἀνέρχεται εἰς 1.000 δρχ. κατὰ τόννον μὲ παράδοσιν εἰς τὰς ἀποθήκας τοῦ Ὄργανισμοῦ Κωπαΐδος. Ὁ καθορισμὸς μιᾶς μέσης τιμῆς τοῦ προϊόντος καθίσταται λίαν δυσχερὴς, λόγω ἐλλείψεως ἐπαρκῶν στοιχείων, παρατηρουμένου μεγάλου εὗρους μεταξύ τῶν τιμῶν, τῶν χαμηλοτέρων σημειουμένων κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ θέρους τῶν δὲ ὑψηλοτέρων κατὰ τὸν χειμῶνα καὶ δὴ κατὰ τὸ τέλος τούτου.

#### 4. Κόστος Συντελεστῶν τῆς Παραγωγῆς.

Ὡς κόστος τῶν χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ἐλήφθη τὸ κόστος τούτων κατὰ τὸ 1955, χωρὶς βεβαίως τοῦτο νὰ ἀποκλείη τὴν μεταβολὴν ἐνίων τούτων, ἥτις ὅμως θὰ εἶναι σχετικῶς μικρὰ μὴ δυναμένη νὰ ἐπηρεάσῃ τὰ ἀποτελέσματα. Διὰ τὴν ἀνθρωπίνην ἐργασίαν δὲν ὑπελογίσθη δαπάνη, καθ' ὅσον ἐπιδιώκομεν τὴν εἰς τὸ *maximum* ἀξιοποίησιν τῆς παρεχόμενης ὑπὸ τῆς οἰκογενείας ἐργασίας, ἀνευ χρησιμοποίησεως ἐργασίας ἐπὶ πληρωμῇ, ἐπὶ τῷ σκοπῷ τῆς ἐλαττώσεως τῶν χρηματικῶν δαπανῶν καὶ τῆς αὐξήσεως οὕτω τῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου.

Διὰ τοὺς σπόρους, λιπάσματα καὶ φάρμακα ἐλήφθησαν ὑπ' ὄψιν αἱ μέσαι τιμαὶ τῆς Α.Τ.Ε. κατὰ τὸ 1955 εἰς τὰς ὁποίας περιλαμβάνονται καὶ τὰ κόμιστρα μέχρι Κωπαΐδος.

Κατὰ τὴν γιγνομένην ἐν τῇ παρουσίᾳ ἀνάλυσιν πρὸς ἐξεύρεσιν τοῦ *optimum* τοῦ συνδυασμοῦ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, ὑπολογίζομεν τὸ εἰσπραττόμενον κατ' ἔτος ποσὸν ὑπὸ τοῦ Ὄργανισμοῦ βάσει τῶν καταβαλλομένων ὑπὸ τῶν παραγωγῶν εἰσφορῶν κατὰ τὴν λήξασαν τριετίαν (1) ὡς ἑξῆς :

Ἡ ἐπιβάρυνσις διὰ τὸν σίτον καὶ ἀραβόσιτον (ἀνοίξεως) ὑπολογίζεται εἰς 15% τῆς παραγωγῆς, ἐνῶ διὰ τὸν βάμβακα, ζαχαρότευτλα (ἀνοίξεως) καὶ μηδικὴν εἰς ποσὸν ἴσον πρὸς τὴν ἀξίαν 19,2 χλγ. βάμβακος. Διὰ τὰ ἐπίσπορα οὐδεμία ἰδιαιτέρα ἐπιβάρυνσις καταλογίζεται πλὴν ἐκείνης διὰ τὸν σίτον, ὅστις προηγεῖται τούτων. Ἡ πρὸς τὸ Δημόσιον καταβαλλομένη εἰσφορά ὑπολογίζεται ὡς αὕτη ἔχει σήμερον ἤτοι 6% τῆς παραγωγῆς διὰ τὰς καλλιεργείας σίτου καὶ ἀραβοσίτου καὶ τὴν ἀξίαν 10,24 χλγ. βάμβακος διὰ τὰς λοιπὰς καλλιεργείας.

Σχετικῶς μὲ τὸ κόστος χρησιμοποίησεως μηχανημάτων καὶ ἐργαλείων παρατηρεῖται ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ κατεργασία τοῦ ἐδάφους ὡς καὶ αἱ λοιπαὶ

1) Ἡ εἰσπραττομένη ὑπὸ τοῦ Ὄργανισμοῦ Κωπαΐδος εἰσφορά σκοπὸν κυρίως ἔχει πλὴν τῶν ἄλλων τὴν κάλυψιν τῶν δαπανῶν ἀρδύσεως, ἧς τὸ κόστος ἔχει ὡς κάτωθι :

Κατὰ τὴν διὰ τεχνητῆς βροχῆς ἀρδύσιν εἰς Κωπαΐδα χρησιμοποιεῖται ἐν συγκρότημα

έργασιαι σποράς, λιπάνσεως, καταπολεμήσεως ζιζανίων και ασθενειών και συγκομιδῆς γίνονται διὰ μηχανημάτων κατ' ἀποκοπὴν, περιωρισμένους θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τῶν καλλιεργητῶν χειροκινήτων ἐργαλείων.

Ὡσαύτως ἀπαιτεῖται ὁ ἀνάλογος ἀριθμὸς σάκκων ἢ ἄλλων μέσων πρὸς τοποθέτησιν καὶ μεταφορὰν τῶν συγκομιζομένων προϊόντων. Βάσει τῶν ἀνωτέρω παραθέτομεν εἰς τὸ παράρτημα τὰ ἀπαιτούμενα ἐργαλεῖα καὶ ὕλικά, ἅτινα δέον νὰ ἔχουν εἰς τὴν διάθεσίν των οἱ ἀγρόται πρὸς ἀντιμετώπισιν τῶν ἀναγκῶν των, τοῦ ὑπολογισμοῦ γενομένου μετὰ βᾶσιν κτῆμα ἐκτάσεως 24 στρ., τοῦ εἶδους δὲ τούτων προσηρμοσμένου πρὸς τὰς μελετωμένας καλλιεργείας.

### ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΑΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

Ἡ μέθοδος τοῦ «γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ» προϋποθέτει τὴν χρησιμοποίησιν τῶν αὐτῶν στοιχείων, ἅτινα ἀπαιτοῦνται κατὰ τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου τοῦ «προϋπολογισμοῦ». Πρὸς τοῦτο παραθέτομεν εἰς τὸ παράρτημα καὶ εἰς πίνακας ἀναλυτικῶς τὰς καλλιεργητικὰς ἐργασίας, αἵτινες ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς μελετωμένας καλλιεργείας ὡς καὶ τὰ χρησιμοποιούμενα ποσὰ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς μετὰ τῶν χρηματικῶν δαπανῶν (σταθερῶν καὶ μεταβλητῶν), ἅτινας συνεπάγεται ἡ χρῆσις τούτων. Εἰς τὸ τέλος ἐκάστου πίνακος ἐμφανίζονται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ἀκαθάριστος πρόσοδος ἐκάστης καλλιεργείας, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ σύνολον τῶν χρηματικῶν δαπανῶν καὶ ἡ προκύ-

ἀνὰ 500 στρ. μετὰ ἐκτόξευσιν 105 κ.μ. ὠριαίως, τῆς ἀξίας τούτου ἀνερχομένης εἰς 130.000 δρχ. περίπου. Τὸ κόστος κατὰ κυβικὸν μέτρον ὕδατος τοῦ ἀνωτέρω συγκροτήματος ὑπολογίζεται ὡς ἀκολουθῶς βάσει τῶν ὑπὸ τοῦ Ὄργανισμοῦ Κωπαίδος τηρουμένων στοιχείων :

#### 1. Σταθερὰ ἐτήσια δαπάναι.

α'. Ἀπόσβεσις (διάρκεια 10 ἔτη)	13.000 Δρχ.
β'. Τόκος 8 % τῶν 130.000	5.200 »
2	Σύνολον
	18.200 »

Δοθέντος ὅτι κατὰ τὴν ἀρδευτικὴν περίοδον ἀπὸ 1ης Ἰουνίου μέχρι μέσων Σεπτεμβρίου (107 ἡμέραι) τὰ συγκροτήματα τεχνητῆς βροχῆς χρησιμοποιοῦνται 19 ὥρας περίπου κατὰ 24ωρον, ἢ καθ' ὥραν ἐργασίας ἐπίπτωσης τῶν σταθερῶν δαπανῶν ἀνέρχεται εἰς

$$\frac{18.200}{2.033} = 8,95 \text{ Δρχ.}$$

#### 2. Μεταβλητὰ Δαπάναι ὠριαίως.

α'. Ἦτοι καύσιμα, λιπαντικά, ἐργατικά μεταφορῶν, ὕλικά ἀνταλλακτικῶν, μισθοὶ καὶ διάφορα	33,00 »
β'. Ἐπισκευαὶ ὠριαίως	5,00 »
Συνολικὸν κόστος καθ' ὥραν	46,95 »
ἦτοι τὸ κόστος κατὰ κ.μ. ὕδατος ἀνέρχεται εἰς	46,95
	105 = 0,447 δρχ.

πτουσα ἐκ τῆς διαφορᾶς τούτων καθαρὰ χρηματικὴ πρόσδοδος, πάντα δὲ ταῦτα κατὰ στρέμμα καλλιεργείας.

Ἐκ τῶν βοηθητικῶν τούτων πινάκων τοῦ παραρτήματος ἐξάγεται ὁ πίναξ 7, ὅστις περιλαμβάνει, ἀφ' ἐνὸς μὲν τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, οἵτινες εὐρίσκονται εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ Ὁργανισμοῦ Κωπαίδος εἰς περιορισμένας ποσότητας, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὑπὸ μορφήν διανυσμάτων  $P_1 - P_8$  τὰς παραγωγικὰς διαδικασίας τῶν διαφόρων ὁμάδων καλλιεργείων ὑπὸ μορφήν στηλῶν (διανύσματα δράσεως). Τὰ στοιχεῖα τῶν διανυσμάτων τούτων ἀνταποκρίνονται πρὸς τὰς ποσότητας τῶν ὑπὸ περιορισμὸν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, οἵτινες χρησιμοποιοῦνται ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν κατὰ στρέμμα καὶ αἵτινες εἶναι στοθεραὶ διὰ τὰς ληφθείσας ὑπ' ὄψιν ἀποδόσεις. Εἰς τὸ τέλος τοῦ πίνακος ἀναφέρεται ἡ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσδοδος ἢ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἐκάστην παραγωγικὴν διαδικασίαν.

Εἰς τὴν στήλην τῶν διαθεσίμων συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς περιλαμβάνονται πλὴν τοῦ ἐδάφους καὶ τοῦ ἀρδευτικοῦ ὕδατος κατὰ τὸ θέρος καὶ τινες ἄλλοι περιοριστικοὶ παράγοντες οἵτινες διαγράφονται ὡς ἑξῆς :

Κατὰ τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου πλὴν τῶν φυσικῶν συντελεστῶν δεόν νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν καὶ αἱ δυνατότητες διαθέσεως τῶν προϊόντων (1) εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν καλλιέργειά τις λάβῃ μεγάλην ἔκτασιν εἰς τὸ τελικὸν παραγωγικὸν πρόγραμμα, ὁπότε ἐπέρχεται διατάραξις τῆς ἰσορροπίας προσφορᾶς καὶ ζητήσεως ἐν τῇ ἀγορᾷ μὲ ἀποτέλεσμα, ἀφ' ἐνὸς μὲν τὴν πτώσιν τῶν τιμῶν, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν μὴ διάθεσιν ἱκανῶν ποσοτήτων ἐκ τῶν παραγομένων προϊόντων. Βασιζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀρχὴν, ἔθεσπισαμεν ὡς ὄριον διὰ τὴν καλλιέργειαν τῶν γεωμήλων τὴν ἔκτασιν τῶν 5.000 στρ., ἡ παραγωγή τῆς ὁποίας δύναται νὰ ἀπορροφηθῇ ἀπὸ τὴν μεγάλην καταναλωτικὴν ἀγορὰν Ἀθηνῶν—Πειραιῶς κατὰ τὴν χειμερινὴν περίοδον καὶ εἰς διάστημα 100 ἡμερῶν, δοθέντος ὅτι κατὰ τὴν περίοδον ταύτην ἡ ζήτησις διὰ τὸ προϊόν τοῦτο εἶναι πάντοτε ἀνωτέρα τῆς προσφορᾶς.

Ἡ μηδικὴ ὠσαύτως συναντᾷ δυσχερεῖας εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ προϊόντος εἰς τὰ ἀστικά βουστάσια τῆς Ἀττικῆς, ἐφ' ὅσον ἡ καλλιέργειά της ἐπεκταθῆ εἰς μεγάλον βαθμὸν, δεδομένου ὅτι ὡς ἐκ τῆς μὴ ἀναπτύξεως ἀγελαδοτροφίας ἐν Κωπαίδι ὑπὸ τὰς κρατούσας σήμερον συνθήκας (ὡς ἀλλαχοῦ ἐτονίσθη) καὶ τοῦ συναγωνισμοῦ ἐκ τῆς καλλιεργείας τῆς διενεργουμένης ἐν Ναυπακτίᾳ δὲν θὰ καθίσταται εὐκόλος ἡ διάθεσις μεγάλων ποσοτήτων. Οὕτω βάσει τῶν σήμερον διαπραγματευομένων ποσοτήτων σανοῦ μηδικῆς ἐν τῇ Ἀττικῇ ὡς καὶ τῶν ἐκ παραλλήλου διατιθεμένων ποσοτήτων σανοῦ βρώμης, ἀναβιβάζομεν τὸ maximum τῆς ἐκτάσεως ἣν δύναται νὰ καταλάβῃ ἡ καλλιέργειά της εἰς 10.000 στρ.

Τέλος, διὰ τὰ ζαχαρότευτλα θέτομεν ὡς ὄριον καλλιεργείας τὰ 20.000

1) Ἡ ἐξέτασις τοῦ παράγοντος τούτου καὶ ὁ καθορισμὸς ἀνωτάτων ὀρίων ἐπεκτάσεως κλάδου τινὸς εἰς τὰς ἐπιχειρήσεις ἀποκτᾷ ἰδιαιτέρην σημασίαν κατὰ τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου ἀποφευγομένων οὕτω ἐσφαλμένων λύσεων.

Πίναξ 7.

Συντελεστές παραγωγής	Διαθέσιμοι ποσότητες συντελεστών παραγωγής	Απαιτούμενοι συντελεστές κατά παραγωγικούς διαδικασίας (1)							
		P <sub>1</sub> Σίτος	P <sub>2</sub> Βάμβαξ	P <sub>3</sub> Αραβό- σιτ. άνοι- ξεως	P <sub>4</sub> Ζαχαρ. άνωξι.	P <sub>5</sub> Σίτος και άραβόσ.	P <sub>6</sub> Σίτος και ζαχαρότ.	P <sub>7</sub> Σίτος και γεώμηλα	P <sub>8</sub> Μηδική
*Εδαφος : στρέμματα	86.000	1	1	1	1	1	1	1	1
*Υδωρ άρδύσεως (*)									
Περίοδος 1η κ. μ.	3.238.274	0	65	65	65	40	0	0	65
» 2α »	2.861.996	0	65	65	65	50	60	0	66
» 3η »	2.668.156	0	65	0	65	75	25	0	70
» 4η »	2.693.949	0	0	0	0	50	75	0	67
» 5η »	2.534.606	0	0	0	0	25	50	0	60
Περιορισμοί εις έκτασιν καλλιερ- γειών εις στρέμματα									
Ζαχαρότευτλα	20.000	0	0	0	1	0	0	0	0
Γεώμηλα θέρους	5.000	0	0	0	0	0	1	0	0
Μηδική	10.000	0	0	0	0	0	0	0	1
Καθαρά χρηματική πρόσδοδος Δρχ.		313,50	706,12	548,12	722,79	555,35	800,85	1.171,33	991,32

- (1) Τα στοιχεία έκτασιν των διανυμάτων P<sub>1</sub> - P<sub>8</sub> είναι αι ποσότητες των συντε-  
λεστών τής παραγωγής αίτινες απαιτούνται κατά στρέμμα έκάστης παραγωγικής  
διαδικασίας και αίτινες συντελεσται εύρισκονται εις περιορισμένους ποσότητας.
- (2) Αι περίοδοι 1-5 άντιστοιχοϋν εις τα πέντε 15ήμερα άπό 1/7-15/9.



στρ., δοθέντος ὅτι καί εἰς τὴν ὑπόλοιπον ἔκτασιν τῆς Κωπαίδος θὰ καλλιεργοῦνται τεῦτλα πρὸς παραγωγὴν ζαχάρεως, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τῆς ὑπάρξεως βιομηχανίας ζαχάρεως ἐν τῇ περιοχῇ.

Οἱ ἀνωτέρω περιορισμοὶ εἰς τὰς διαφόρους καλλιεργείας, ἀφ' ἑνὸς ἀναποκρίνονται πρὸς τὰς συνθήκας τῆς ἀγορᾶς, ἐνῶ ἀφ' ἑτέρου παρέχουν τὴν δυνατότητα νὰ καταδειχθῇ ἡ χρησιμότης τῆς μεθόδου τοῦ «γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ» εἰς ὅλας αὐτῆς τὰ λεπτομερείας, γεγονόςς τὸ ὅποῖον πρωτίστως προέχει κατὰ τὴν παροῦσαν μελέτην, δοθέντος ὅτι ἡ Κωπαῖς χρησιμοποιεῖται ὡς πειραματικὸν πεδίου πρὸς ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἀναγόμεν ἐκ τὸν πίνακα 7 παραγωγικὰς διαδικασίας (διανύσματα  $P_1$ - $P_3$ ) εἰς 100 δρχ. καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου, διατηροῦντες τὴν αὐτὴν τάξιν τῶν στοιχείων, προκύπτει δὲ οὕτω ὁ πίναξ 8. Μετὰ τὴν πρώτην ταύτην ἀναγωγὴν ἀκολουθεῖ δευτέρα τοιαύτη, καθ' ἣν ἐκφράζομεν τὰ στοιχεῖα τῶν διανυσμάτων τοῦ πίνακος 8 ὡς ποσοστὰ τῶν διαθεσίμων συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς εἰς ἀναλογίαν 1: 100.000, ἐπιτυγχάνοντες οὕτω ἀπόλυτον ὁμοιογένειαν εἰς τὴν ἔκφρασιν τῶν «παραγωγικῶν διαδικασιῶν», τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα εἰς τὸν πίνακα 9 εἶναι ἐκπεφρασμένα εἰς ποσοστὰ τῶν διαθεσίμων συντελεστῶν, ἐνῶ συγχρόνως ἔχουν ἀναχθῆ προηγουμένως ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου.

Ἡ τοιαύτη διπλὴ ἀναγωγὴ, τὴν ὁποίαν ἐπενόησεν ὁ Καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Καλιφορίας ἐν Berkeley James Boles, περιώρισε σημαντικῶς τοὺς ἀπαιτούμενους μεγάλους ὑπολογισμοὺς, διότι ἐπέτρεψε τὴν προκαταρκτικὴν τρόπον τινὰ ἐπιλογὴν τόσον τῶν συντελεστῶν ἐκείνων τῆς παραγωγῆς, οἵτινες πράγματι ἀποτελοῦν φραγμὸν εἰς τὴν ἔκτασιν τῆς παραγωγῆς, ὅσον καὶ τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν, αἵτινες θὰ ἀποτελέσουν τελικῶς τὴν ομάδα, ἐξ ἧς, βάσει τῆς μεθόδου, θὰ καταρτισθῇ τὸ ἀποδοτικώτερον πρόγραμμα παραγωγῆς. Τὸ τέχνασμα τοῦτο συνίσταται εἰς τὰ ἀκόλουθα:

Εἰς τὸν πίνακα 9 συγκρίνονται ὄλαι αἱ σειραὶ τῶν διανυσμάτων μεταξὺ τῶν, ἀρχῆς γενομένης ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας, διαγραφομένης τῆς γραμμῆς ἐκείνης ἣτις ἔχει ἅπαντας τοὺς συντελεστὰς τῆς μικροτέρους ἀριθμητικῶς τῆς ἄλλης. Ἐν τῇ περιπτώσει μὴ ὑπάρξεως συντελεστοῦ ἐν τινι διανύσματι ὑπολογίζεται οὗτος ὡς μηδέν. Ἡ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἀκολουθουμένη τακτικὴ στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ὅτι ἐφ' ὅσον μιᾶς γραμμῆς οἱ συντελεσταὶ εἶναι ἅπαντες μεγαλύτεροι τῶν τοιούτων ἑτέρας, ἐπιτεταί ὅτι θὰ ἐξαντληθῇ πρῶτος ὁ ἀντίστοιχος συντελεστὴς τῆς παραγωγῆς οἰαδήποτε παραγωγικῆ διαδικασίᾳ καὶ ἐὰν ἐπιλεγῇ, ἐπομένως ὁ ἕτερος συντελεστὴς τῆς παραγωγῆς δὲν θὰ ἔχη ἤδη καταναλωθῆ ἐξ ὀλοκλήρου, μὴ ἀποτελῶν οὕτω πραγματικὸν περιορισμὸν κατὰ τὴν ἐκλογὴν τοῦ προγράμματος, μὲ ἀποτέλεσμα τὴν διαγραφὴν τούτου. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον διαγράφονται ἡ δευτέρα καὶ ἕκτη γραμμαὶ ἧτοι τὸ ἀρδευτικὸν ὕδωρ κατὰ τὸ πρῶτον 15θήμερον τοῦ Ἰουλίου καὶ τοῦ Σεπτεμβρίου τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν μὴ ὄντων περιοριστικῶν εἰς τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος.

Ἐν συνεχείᾳ λαμβάνει χώραν δευτέρα ἐπιλογὴ διὰ τῆς συγκρίσεως τὴν









Εἰς τὸ πρῶτον τμήμα τοῦ πίνακος τούτου τὸ ὁποῖον εἶναι τετράγωνον  $7 \times 7$  ἐμφανίζονται 7 μονάδες διαγωνίως ἐκ τῆς ἄνω ἀριστερᾶς γωνίας πρὸς τὴν κάτω δεξιάν (1). Μεταξύ τῶν διανυσμάτων τούτων τοῦ ὑποπίνακος οὐδεμία γραμμικὴ συνάρτισις ὑφίσταται, τῆς ὁμάδος ταύτης τῶν διανυσμάτων χρησιμοποιουμένης ὡς βάσεως ἐκκινήσεως, καθ' ὅσον ἅπαντα τὰ «διανύσματα δράσεως» δύνανται νὰ ἐκφραστοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν «διανυσμάτων ἀδρανείας», τῶν συντελεστῶν ἐκάστου «διανύσματος δράσεως» ὄντων ἴσων πρὸς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τούτου ὡς π. χ.

$$\mathbf{P}_2 = 0,164673 \mathbf{P}_0 + 0,321637 \mathbf{P}_{10} + 0,345004 \mathbf{P}_{11} \\ + 0 \times \mathbf{P}_{12} + 0 \times \mathbf{P}_{13} + 0 \times \mathbf{P}_{14} + 0 \times \mathbf{P}_{15} \text{ (}^2\text{)}$$

Οὕτω ἡ στήλη  $\mathbf{P}_j$  δηλοῖ τὴν βᾶσιν τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας  $\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{17}$ , ἅτινα σὺν τῇ χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου θὰ ἀντικατασταθῶσιν ἐν μέρει ἢ ἐν ὅλῳ διὰ τῶν διανυσμάτων δράσεως ἅτινα θὰ εἰσέλθουν εἰς τὸ τελικὸν παραγωγικὸν πρόγραμμα, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τοῦτο δύνανται νὰ περιληφθοῦν καὶ διανύσματα ἀδρανείας.

Πρὸς ὁλοκλήρωσιν τοῦ ἀρχικοῦ πίνακίου ἐκκινήσεως διὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς προστίθενται δύο εἰσέτι στήλαι καὶ τρεῖς σειραί. Ἡ στήλη  $\mathbf{P}_0$  περιλαμβάνει τὰς διαθεσίμους ποσότητας συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, τὰς ὁποίας ἐκφράζομεν διὰ τῆς μονάδος, ἐφ' ὅσον τὰ στοιχεῖα τῶν διανυσμάτων  $\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_8$  εἶναι ἐκπεφρασμένα εἰς ποσοστὸν τῶν διαθεσίμων συντελεστῶν (1 : 100.000). Ἡ γραμμὴ  $C_j$  δηλοῖ τὴν καθαρὰν χρηματικὴν πρόσδοον τῶν διαφόρων «παραγωγικῶν διαδικασιῶν»  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_8$  ἢ ἐκφράζομεν διὰ τῆς μονάδος (3) πρὸς εὐκολίαν κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς, τοῦ  $C_j$  τῶν  $\mathbf{P}_9 - \mathbf{P}_{16}$  ὄντος ἴσου πρὸς μηδέν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ  $\mathbf{P}_0$  εἰς τὸν πίνακα I περιλαμβάνει ἅπαντας τοὺς διαθεσίμους συντελεστὰς τῆς παραγωγῆς πρὶν ἢ οὔτοι χρησιμοποιηθοῦν ὑπὸ τῶν διαφορῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν τοῦ προγράμματος περιλαμβανόντος τὰ διανύσματα ἀδρανείας  $\mathbf{P}_9 - \mathbf{P}_{16}$ , τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης  $C_j$  εἶναι ἅπαντα μηδέν.

Ἡ γραμμὴ  $Z_j$  δηλοῖ τὴν καθαρὰν χρηματικὴν πρόσδοον ἣτις προκύπτει ἐκ τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, ὅστις χρησιμοποιεῖ τὴν αὐτὴν ποσότητα συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, οἷαν καὶ ἐν διάνυσμα δράσεως εἰς τὸ ἐπίπεδον εἰς ὃ τοῦτο χρησιμοποιεῖται. Ἐπειδὴ δὲ ὡς καὶ προηγουμένως ἀνεφέρθη ἅπαντα τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης  $C_j$  εἶναι 0, ἐκ τοῦ λόγου ὅτι ταῦτα παριστοῦν τὴν καθαρὰν χρηματικὴν πρόσδοον τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας ἅτινα περιλαμβάνονται εἰς τὴν βᾶσιν, ὅλαι αἱ τιμαὶ τῆς γραμμῆς  $Z_j$  θὰ εἶναι μηδέν, ἐφ' ὅσον οὐδεμία παραγωγή λαμβάνει εἰσέτι

1) Ὅπου τὰ στοιχεῖα τόσον τῶν διανυσμάτων δράσεως ὅσον καὶ ἀδρανείας ἰσοῦνται πρὸς μηδέν, δὲν ἀναγράφομεν τοῦτο ἀφήνοντας λευκὸν τὸν ἀντίστοιχον ἄξον.

2) Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ χρησιμοποιούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς ὑπὸ τοῦ διανύσματος δράσεως  $\mathbf{P}_2$  ἰσοῦνται πρὸς τὰς ἀντίστοιχους ποσότητας τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς τοὺς ὁποίους χρησιμοποιεῖ ὁ γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ἀντίστοιχων διανυσμάτων ἀδρανείας τῆς βάσεως, εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος δράσεως.

3) Τοῦτο σημαίνει 100 δρχ.

χώραν. Τό  $Z_0$  τοῦ διανύσματος  $P_0$  ἐμφανίζει τήν συνολικήν καθαρὰν χρηματικήν πρόσδοτον ἢν ἀποδίδει τό ἐκάστοτε πρόγραμμα παραγωγῆς καί ἡτις βεβαίως εἰς τόν πρῶτον πίνακα εἶναι μηδέν.

Τέλος, ἡ γραμμὴ  $Z_j - C_j$  δηλοῖ, προκειμένου μὲν περί τῶν «διανυσμάτων ἀδρανεῖας», τό ποσόν καθ' ὃ αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται ἡ συνολική καθαρὰ χρηματική πρόσδοτος  $Z_0$  τῆς στήλης  $P_0$  ἐκ τῆς προσθήκης ἢ ἀφαιρέσεως μιᾶς μονάδος τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ παραγωγῆς. Ἐπειδὴ βεβαίως τόσον τὰ  $Z_j$  ὅσον καί τὰ  $C_j$  (γραμμῆς) εἶναι μηδέν καί τὰ  $Z_j - C_j$  τῶν ἀνωτέρω διανυσμάτων θὰ εἶναι εἰς τόν πρῶτον πίνακα ἴσα μέ μηδέν. Ὅσον ἀφορᾷ τὰ «διανύσματα δράσεως» τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς  $Z_j - C_j$  εἰς τόν πρῶτον πίνακα θὰ εἶναι ὅλα ἴσα πρὸς  $-1$ .

Ὁ πρῶτος οὗτος πίναξ, εἰς τόν ὅποιον οὐδεμία παραγωγή λαμβάνει χώραν, καθ' ὅσον δὲν περιλαμβάνει εἰς τό πρόγραμμα «διανύσματα δράσεως», τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς παραμενόντων ἀχρησιμοποίητων, λαμβάνεται ὡς ἀφετηρία ἐκκινήσεως πρὸς ἐφαρμογήν τοῦ νέου ὑπολογιστικοῦ συστήματος.

#### ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν (ὡς ἀνεφέρθη προηγουμένως) ὅτι πάντα τὰ «διανύσματα δράσεως» δύναται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν «διανυσμάτων ἀδρανεῖας» καί οἵτινες συνδυασμοὶ δίδουν καθαρὰν χρηματικήν πρόσδοτον μηδέν, ἐνῶ τὰ ἀντίστοιχα «διανύσματα δράσεως» χρησιμοποιοῦνται τὰς αὐτὰς ποσότητας συντελεστῶν παραγωγῆς δίδουν καθαρὰν χρηματικήν πρόσδοτον 1, συνάγομεν ὅτι εἶναι συμφέρουσα ἢ εἰσαγωγή ἐνός τῶν «διανυσμάτων δράσεως» εἰς τό παραγωγικόν πρόγραμμα (principle of opportunity cost) (1) ἐφ' ὅσον ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς τούτου θὰ προκύψῃ αὐξήσις τῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου τῆς ἐμφανιζομένης διὰ τοῦ  $Z_0$  τῆς στήλης  $P_0$ .

Ἡ αὐξήσις αὕτη θὰ εἶναι ἴση πρὸς τό γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τοῦ «διανύσματος δράσεως» ὅπερ θὰ εἰσέλθῃ εἰς τό πρόγραμμα ἐπὶ τὴν μονάδα. Δοθέντος ὅμως ὅτι τὰ  $Z_j - C_j$  τῶν «διανυσμάτων δράσεως» εἶναι ἅπαντα  $-1$ , δὲν δύναται νὰ γίνῃ ἡ ἐπιλογή τοῦ μᾶλλον ἀποδοτικωτέρου διανύσματος, τό ὅποιον θὰ εἰσέλθῃ πρῶτον εἰς τό πρόγραμμα, μόνον ἐκ τοῦ κριτηρίου τούτου. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ στοιχεῖα τῶν «διανυσμάτων δράσεως» εἶναι ἐκπεφρασμένα τόσον ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὡς πρὸς τὴν καθαρὰν χρηματικήν πρόσδοτον ὅσον καί εἰς ποσοστὰ τῶν διαθέσιμων συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, ἡ ἔνδειξις περὶ τῆς ἐκλογῆς τοῦ ἀποδοτικωτέρου διανύσματος γίνεται τῇ βοθητικῇ τῶν στοιχείων ἐκάστου (2).

1) Earl O. Heady and H. R. Jensen / Farm Management Economics, New York, 1954. Ch. 4 Limited Capital and Opportunity Cost or Equal Marginal Return Principle, p. 77-80.

2) Ἡ νέα αὕτη τεχνική τοῦ ὑπολογιστικοῦ συστήματος τοῦ Καθηγητοῦ Boles ἐνέχει πλὴν τῶν ἄλλων μεγίστην σπουδαιότητα, διότι ἀποφεύγεται ἡ εἰσαγωγή εἰς τό παραγωγικόν πρόγραμμα διανύσματος (παραγωγικῆς διαδικασίας), ὅπερ βραδύτερον, κατὰ τὴν πορείαν τῶν ὑπολογισμῶν θέλει ἀντικατασταθῆ ὑπὸ ἐτέρου μᾶλλον ἀποδοτικωτέρου. Τοῦτο

Πρὸς τοῦτο σημειοῦμεν τὸ μέγιστον τῶν στοιχείων ἑκάστου «διανύσματος δράσεως» διότι διὰ τοῦ τρόπου τούτου προσδιορίζομεν ποῖος ἐκ τῶν διαθεσίμων συντελεστῶν, θὰ καταναλωθῆ πρῶτος ἐκ τῆς εισαγωγῆς τοῦ ἀντιστοίχου διανύσματος. Ἐκ τῶν οὕτω προσδιορισθέντων μεγίστων στοιχείων ἐκλέγομεν τὸ μικρότερον, διότι τοῦτο δίδει ὡς διαιρέτης τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ τῆς στήλης  $P_0$ ; τὸ μεγαλύτερον πηλίκον καὶ ἐπομένως καὶ τὴν μεγαλύτεραν καθαρὰν χρηματικὴν πρόσοδον. Τὸ στοιχείον τοῦ διανύσματος τὸ ὁποῖον ἀπέτέλεσε τὸ κριτήριον ἐπιλογῆς τούτου παρουσιάζεται περιβαλλόμενον ὑπὸ κύκλου. Τὸ μικρότερον ἐκ τῶν μεγίστων στοιχείων τῶν «διανυσμάτων δράσεως» εἶναι τὸ 0,345004 τοῦ  $P_2$  ἦτοι τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας, ἣτις ὑποδηλοῖ τὴν καλλιέργειαν βάμβακος καὶ ἣτις προκρίνεται νὰ εἰσέλθῃ πρῶτη εἰς τὸ παραγωγικὸν πρόγραμμα. Μετὰ τὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω γενομένην ἐπιλογὴν τοῦ διανύσματος, ὅπερ πρῶτον θὰ εἰσέλθῃ εἰς τὸ παραγωγικὸν πρόγραμμα, προβαίνομεν εἰς τὸν καταρτισμὸν τοῦ δευτέρου πινακίου κατὰ τὴν ἀκόλουθον τάξιν:

Ἐν τῇ στήλῃ  $P_j$  τοῦ δευτέρου πίνακος τὴν θέσιν τοῦ  $P_{11}$  καταλαμβάνει τὸ «διάνυσμα δράσεως»  $P_2$ , ἀριστερὰ δὲ τούτου ἐν τῇ στήλῃ  $C_j$  ἀναγράφεται ἡ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσοδος τούτου, ἣτις εἶναι 1. Τοῦτο δεικνύει ὅτι ἡ πρῶτη καλλιέργεια ἣτις εἰσέρχεται εἰς τὴν βάσιν εἶναι ἡ τοῦ βάμβακος καταναλίσκουσα ἐξ ὀλοκλήρου τὴν διαθέσιμον ποσότητα ὕδατος κατὰ τὸ ἀ' 15θῆμερον τοῦ Αὐγούστου. Ἡ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσοδος, ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς εισαγωγῆς εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ βάμβακος, ἐμφανίζεται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῆς στήλης  $P_0$  τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν γραμμὴν  $P_2$  τοῦ δευτέρου πινακίου, πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 100.000 καὶ εἶτα ἐπὶ 100 λόγῳ τῶν δύο ἀναγωγῶν αἰτινες ἔχουν λάβει χώραν. Ὁ ἀριθμὸς τῆς στήλης ταύτης προκύπτει ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ 1 τῆς γραμμῆς  $P_{11}$  τοῦ πρώτου πινακίου διὰ τοῦ στοιχείου τοῦ  $P_2$  ἐν τῷ πρώτῳ πινακίῳ 0,345004 ἦτοι εἶναι

$$\frac{1}{0,345004} = 2,898517. \text{ Ὄθεν ἡ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσοδος τοῦ προγράμματος μετὰ τὴν εισαγωγὴν τοῦ } P_2 \text{ ἀνῆλθεν εἰς } 28.985.170 \text{ δραχ.}$$

ἦτο ἀποτέλεσμα τοῦ μέχρι πρό ὀλίγου ἀκολουθουμένου ὑπολογιστικοῦ συστήματος, δοθέντος ὅτι ἡ ἐπιλογὴ τοῦ διανύσματος δράσεως ὅπερ θὰ εἰσῆρχετο εἰς τὸ πρόγραμμα ἐγένετο βάσει τῆς μεγαλύτερας ἀρνητικῆς τιμῆς, ἣτις ἐνεφανίζετο εἰς τοὺς συντελεστὰς τῆς γραμμῆς  $Z_j - C_j$ . Οὕτω, φαινομενικῶς ἐν διάνυσμα λόγῳ τῆς μεγαλύτερας ἀρνητικῆς τιμῆς ἦν παρουσίαζε ἐπελέγετο πρὸς εισαγωγὴν εἰς τὸ πρόγραμμα, ἐνῶ εἰς τὴν πραγματικότητα, λόγῳ τῆς ὑπὸ τούτου χρησιμοποίησεως μεγαλύτερων ποσοτήτων συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, ἀπέδιδεν ὀλιγώτερον ἑτέρου ὑπὸ τοῦ ὁποῖου ἀντεκαθίστατο τελικῶς βραδύτερον, ὡς τοῦτο ἐσημειώσαμεν καὶ εἰς τὴν μελέτην τῶν B. Bowen and Earl O. Heady: Optimum Combination of Competitive Crops at Particular Locations, Agr. Exp. Sta. Research Bul. 426, Iowa State College, Ames, Iowa, 1955. Ἐν τῇ ἐργασίᾳ ταύτῃ, σελ. 338, εἰς τὸ τέταρτον πινακίον, ἡ καλλιέργεια τῶν φασολίων, ἣτις εἶχεν εἰσέλθῃ εἰς τὸ παραγωγικὸν πρόγραμμα εἰς τὸ τρίτον πινακίον, ὡς ἔχουσα τὴν μεγαλύτεραν ἀρνητικὴν τιμὴν ἐν τῇ γραμμῇ  $Z_j - C_j$ , ἐξετοπίσθη, ἀντικατασταθεῖσα ὑπὸ τοῦ ἀραβοσίτου, μὴ εἰσελθοῦσα εἰς τὸ τελικὸν πρόγραμμα παραγωγῆς.



Είτα ακολουθεί ο προσδιορισμός των στοιχείων της γραμμής  $P_2$  του δευτέρου πίνακίου διά της διαιρέσεως εκάστου των στοιχείων της γραμμής  $P_{11}$  του πρώτου πίνακίου διά του αντίστοιχου στοιχείου του διανύσματος  $P_2$  εν τῷ πρώτῳ πίνακίῳ ἤτοι 0,345004. Οὕτω τὸ στοιχείον της γραμμής  $P_2$  εἰς τὴν στήλην τοῦ διανύσματος  $P_1$  θὰ εἶναι:

$$\frac{0,337047}{0,345004} = 0,976936, \text{ ἐν τῇ στήλῃ τοῦ } P_7 \text{ θὰ εἶναι } \frac{0,079993}{0,345004} = 0,231861 \text{ κ.ο.κ.}$$

Τὰ στοιχεῖα ταῦτα της γραμμής  $P_{11}$  τοῦ πρώτου πίνακίου, ἐκφράζουν ὡς γνωστὸν τὰ ποσοστὰ τοῦ συντελεστοῦ ὕδατος κατὰ τὸ ἀ' 15θῆμερον τοῦ Αὐγούστου, ἅτινα χρησιμοποιοῦνται ὑπὸ τῶν ἀντιστοιχῶν «διανυσμάτων δράσεως» εἰς τοιοῦτον ἐπίπεδον ὥστε νὰ δίδουν τὴν αὐτὴν καθαρὰν χρηματικὴν πρόσοδον. Διαιρούμενοι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι διά τοῦ στοιχείου τοῦ ὑποδηλοῦντος τὸ ποσοστὸν τοῦ συντελεστοῦ ὕδατος ὅπερ ἀπαιτεῖται ὑπὸ τοῦ βάμβακος εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ἀποδίδει καθαρὰν χρηματικὴν πρόσοδον, 1, δίδουν ὡς ἀποτέλεσμα ἀριθμοὺς οἵτινες ἐκφράζουν ποσοτικῶς τὰ ποσοστὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦ συντελεστοῦ παραγωγῆς ἅτινα ἀπαιτοῦνται, ὥστε νὰ εἶναι συμφέρουσα ἡ ἀντικατάστασις της καλλιιεργείας τοῦ βάμβακος ὑπὸ τῶν λοιπῶν καλλιιεργειῶν, ὥστε αὗται νὰ δίδουν τὴν αὐτὴν καθαρὰν χρηματικὴν πρόσοδον ἢ τὸ πηλίκον ἐκφράζει τὰς ὀριακὰς ἀναλογίας ὑποκαταστάσεως (marginal rates of substitution), δοθέντος ὅτι διά τοῦ τρόπου τούτου τὰ στοιχεῖα ὄλων τῶν «διανυσμάτων δράσεως» ἐκφράζονται συναρτήσῃ τοῦ εἰσερχομένου διανύσματος  $P_2$ . Τὰ στοιχεῖα της γραμμής  $P_2$  τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ «διανύσματα ἀδρανείας  $P_3$ — $P_{15}$ » ἐρμηνεύονται ὡς ἐξῆς: Ὁ ἀριθμὸς 2,898517 τοῦ  $P_{11}$  δηλοῖ ὅτι ἐὰν ἀποσυρθῇ ἐν κυβικὸν μέτρον ὕδατος κατὰ τὸ ἀ' 15θῆμερον τοῦ Αὐγούστου ὥστε νὰ μείνῃ ἀχρησιμοποίητον, τότε ἡ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσοδος ἢ προερχομένη ἐκ της εἰσαγωγῆς εἰς τὸ πρόγραμμα της καλλιιεργείας τοῦ βάμβακος, θέλει ἐλαττωθῆ κατὰ ποσὸν ἴσον πρὸς  $\frac{2,898517 \times 100.000 \times 100 \times 1}{2.668.156} = 10,86$  δρχ. δι' ἕκαστον κυβικὸν μέτρον ὕδατος, ἐνῶ ἀντιστοιχῶς θὰ αὐξηθῇ ἡ ἔκτασις τοῦ μὴ καλλιεργουμένου ἐδάφους  $P_9$  κατὰ ποσὸν ἴσον πρὸς  $\frac{0,477307 \times 86.000}{2.668.156} = 0,015384$  στρ. δι' ἕκαστον κυβικὸν μέτρον ὕδατος μὴ χρησιμοποιουμένου κατὰ τὴν περίοδον ταύτην.

Πρὸς προσδιορισμὸν τῶν συντελεστῶν τῶν λοιπῶν γραμμῶν καὶ στηλῶν τοῦ δευτέρου πίνακος χωροῦμεν ὡς ἐξῆς εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς. Πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον στοιχείον της γραμμής  $P_2$  τοῦ δευτέρου πίνακίου ἐπὶ ἓνα ἕκαστον τῶν στοιχείων της στήλης  $P_2$  τοῦ πρώτου πίνακίου, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιρεῖται ἐκ τοῦ ἀντιστοιχοῦ στοιχείου τοῦ εὑρισκομένου ἐπὶ της αὐτῆς γραμμῆς τοῦ πρώτου πίνακίου εἰς ἣν ἀνήκει τὸ πολλαπλασιαζόμενον στοιχείον της στήλης  $P_2$  καὶ τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὴν αὐτὴν στήλην εἰς ἣν περιλαμβάνεται καὶ τὸ στοιχείον της γραμμῆς  $P_2$  τοῦ δευτέρου πίνακος. Ἡ οὕτω προκύπτουσα ἀλγεβρικὴ διαφορὰ ἀναγράφεται ἐπὶ της ἀντιστοιχοῦ στήλης καὶ

## ΠΙΝΑΚΙΟΝ ΙΙ

Cj	P <sub>j</sub>	P <sub>0</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>10</sub>	P <sub>11</sub>	P <sub>12</sub>	P <sub>13</sub>	P <sub>14</sub>	P <sub>15</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>6</sub>	P <sub>7</sub>	P <sub>8</sub>
	P <sub>9</sub>	0,522693	1							0,370905		0,212142		-0,022338	0,061090	-0,009022
	P <sub>10</sub>	0,067730		1							0,414351			-0,109073	0,104404	-0,014098
1	P <sub>2</sub>	2,898517			2,898517						1		0,976936	-1,017359	0,231861	0,767095
	P <sub>12</sub>	1				1								0,234365	0,240357	0,253708
	P <sub>13</sub>	1					1						0,691765	0,624335		
	P <sub>14</sub>	1						1							1,707460	
	P <sub>15</sub>	1							1							1,008760
Z <sub>j</sub>		2,898517			2,898517								0,976936	1,017359	0,231851	0,767095
Z <sub>j-G<sub>j</sub></sub>					2,898517					1	1	1	-0,023064	0,017359	-0,768139	-0,232905

γραμμής του δευτέρου πίνακίου, ως π. χ. το στοιχείο της στήλης  $P_0$  και της γραμμής  $P_9$  του δευτέρου πίνακίου είναι αποτέλεσμα της  $1 - (2,898517 \times 0,164673) = 0,522693$ , το στοιχείο της στήλης  $P_{11}$  και της γραμμής  $P_{10}$  προήλθεν εκ του:

$0 - (2,898517 \times 0,321637) = -0,932270$ , το στοιχείο της στήλης  $P_7$  και της γραμμής  $P_9$  προήλθεν εκ του  $0,099271 - (0,231861 \times 0,164673) = 0,061090$  κ.ο.κ.

Τα στοιχεία του διανύσματος  $P_0$  έχουν ιδιαίτερα σημασία, διότι δεικνύουν τα διαθέσιμα εισέτι ποσά των συντελεστών της παραγωγής, άτινα απομένουν μετά την εισαγωγή εις το πρόγραμμα της καλλιέργειας του βάμβακος. Ούτω το στοιχείο του  $P_0$  αντιστοιχούν εις την γραμμήν  $P_9$  εκφράζει το ποσοστόν της έκτάσεως του εδάφους, το όποιον παραμένει άχρησιμοποίητον μετά την εισαγωγήν της καλλιέργειας του βάμβακος και το όποιον άνέρχεται εις  $0,522693 \times 86.000 = 44.951,5$  στρ. δοθέντος ότι ή καλλιέργεια του βάμβακος έχρησιμοποίησεν  $\frac{28.985.170}{706,12} = 41.048,5$  στρ. κ.ο.κ. Τα στοι-

χεία των γραμμών  $C_j$  και  $Z_j - Z_i$  του δευτέρου πίνακίου προσδιορίζονται ως εξής: 'Ο παραγωγικός κλάδος  $P_2$  όστις εισήλθεν εις το πρόγραμμα άποδίδει καθαράν χρηματικήν πρόσδοον  $1$  και επομένως εις την στήλην  $C_j$  και εις την αντίστοιχον γραμμήν αντί του μηδενός του πρώτου πίνακίου θά είναι  $1$  εις το δεύτερον. 'Οθεν το  $Z_0$  της στήλης  $P_0$  είναι  $Z_0 = (P_9 \times 0) + (P_{10} \times 0) + (P_2 \times 1) + P_{12} \times 0) + (P_{13} \times 0) + (P_{14} \times 0) + (P_{15} \times 0) = 2,898517$ . 'Ο αριθμός ούτος βεβαίως δέον να πολλαπλασιασθή επί  $100.000$  και άκολούθως επί  $100$  ίνα μετατραπή και δεικνύει την καθαράν χρηματικήν πρόσδοον την προκύπτουσαν εκ της εισαγωγής του κλάδου  $P_2$  εις το παραγωγικόν πρόγραμμα. 'Ομοίως το  $Z_1$  της στήλης  $P_4$  ύπολογιζόμενον κατά τον αύτον ως άνω τρόπον είναι  $0,976936$  κ.ο.κ.

Τα στοιχεία της γραμμής  $Z_j - C_j$  καθορίζονται ως ή διαφορά μεταξύ του  $Z_j$  (opportunity cost) και της καθαρής χρηματικής προσόδου έκαστης «παραγωγικής διαδικασίας». Τα στοιχεία της γραμμής ταύτης προκειμένου δια τα «διανύσματα άδρανείας»  $P_9 - P_{15}$  ταυτίζονται μετά των τοιούτων της γραμμής  $Z_j$  δεδομένου ότι ως έχει λεχθή ούδέν άποδίδουν ως αφήνοντα τινάς των συντελεστών της παραγωγής άχρησιμοποίητους. Τα στοιχεία της γραμμής  $Z_j - C_j$  τα αντιστοιχούντα εις τα «διανύσματα δράσεως»  $P_2 - P_8$  είναι το αποτέλεσμα της διαφοράς της καθαρής χρηματικής προσόδου ήτις προκύπτει εκ του γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων άτινα εύρίσκονται εις την βάση, εάν εκ ταύτης αφαιρεθί ή καθαρά χρηματική πρόσδοος του αντίστοιχου «διανύσματος δράσεως», το όποιον χρησιμοποιεί τας αυτάς ποσότητας συντελεστών της παραγωγής. Τινά των στοιχείων τούτων της γραμμής  $Z_j - C_j$  εις τον δεύτερον πίνακα είναι θετικά ενώ άλλα άρνητικά. Τούτο αναλυτικώς σημαίνει, ότι έφ' όσον εισαχθί εις το παραγωγικόν πρόγραμμα κλάδος τις, ούτινος το στοιχείο είναι θετικόν, το αποτέλεσμα θά είναι ή ελάττωσις της συνολικής καθαρής χρηματικής προσόδου.

'Αντιθέτως, εάν εισαχθί κλάδος του όποιου ό συντελεστής  $Z_j - C_j$  είναι

Πινάκιον ΙΙΙ

$C_j$	$P_j$	$P_0$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
1	$P_1$	1,409233	2,696101							1	1	1	1	1	1	1
	$P_{10}$	0,067730		1						1		0,571956		-0,060226	0,164705	-0,024324
1	$P_2$	2,898517			2,898517					1		0,414351	0,976936	-0,109073	0,104404	-0,014098
	$P_{12}$	1				1							0,691765	0,234365	0,231861	0,767995
	$P_{13}$	1					1						0,240357	0,624335		0,253798
	$P_{14}$	1						1							1,707460	
	$P_{15}$	1							1							1,008760
$Z_j$		4,307750	2,696101		1,611649					1	1	0,571956	0,976936	0,957133	0,396566	0,742771
$Z_j \cdot C_j$			2,696101		1,611649						-0,428044	-0,023064	-0,042867	-0,042867	-0,603434	-0,257229

άρνητικός, τούτο θά ἔχη ὡς ἀποτέλεσμα τήν αὐξησιν τῆς συνολικῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου. Ἡ παρουσία ὅθεν ἀρνητικῶν συντελεστῶν ἐν τῇ γραμμῇ  $Z_j - C_j$  εἶναι ὁ δείκτης τῆς δυνατότητος περαιτέρω αὐξήσεως τῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου διὰ τῆς εἰσαγωγῆς καί ἑτέρων κλάδων εἰς τὸ πρόγραμμα. Ἐπομένως θά συνεχισθῇ ἡ δημιουργία πινακίων, μέχρις ὅτου δὲν παρουσιάζονται ἀρνητικοί συντελεσταί ἐπὶ τῆς γραμμῆς  $Z_j - C_j$  τούτου ὑποδηλοῦντος ὅτι ἐπετεύχθη τὸ maximum τῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου καί ἐπομένως καί τὸ optimum τῆς ἀξιοποιήσεως τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς.

Ἡ ἐπιλογή ὅθεν τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας ἥτις θά εἰσέλθῃ δευτέρα εἰς τὸ πρόγραμμα θά γίνῃ ἐκ τῶν διανυσμάτων ἐκείνων ἅτινα ἔχουν ἀρνητικὴν τιμὴν ἐν τῇ γραμμῇ  $Z_j - C_j$  συμφώνως τοῖς προηγουμένοις, ἤτοι ἐκ τῶν  $P_1, P_3, P_4, P_7$  καὶ  $P_8$ . Ἐν τῷ δευτέρῳ ὅμως πινακίῳ τὰ στοιχεῖα τῶν διανυσμάτων δὲν εἶναι πλέον ἐκπεφρασμένα εἰς ποσοστὰ τῶν συντελεστῶν τῆς στήλης  $P_0$ , ὡς τούτο συνέβαινε εἰς τὸ πρῶτον πινακίον, ἕνεκα δὲ τούτου καί ἡ ἐκλογή τοῦ μᾶλλον ἀποδοτικότερου τῶν διανυσμάτων τῶν ἐχόντων ἀρνητικὴν τιμὴν ἐν τῇ γραμμῇ  $Z_j - C_j$  γίνεται κατὰ διάφορον τρόπον καί μάλιστα ὡς εἶναι ἐπόμενον ἀντίθετον. Οὕτω κατὰ πρῶτον ὑπολογίζεται ὁ λόγος τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος  $P_0$  διαιρουμένων διὰ τῶν ἀντιστοίχων θετικῶν μόνον στοιχείων (μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν μηδενικῶν καὶ ἀρνητικῶν στοιχείων) ἐκάστου τῶν διανυσμάτων τῶν ἐχόντων ἀρνητικὸν συντελεστὴν ἐν τῇ γραμμῇ  $Z_j - C_j$ . Ἐκ τῶν οὕτω εὑρεθέντων ἀριθμῶν σημειοῦται ὁ μικρότερος, ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς ἕκαστον διάνυσμα. Ἐκαστος τῶν οὕτω προσδιορισθέντων ἀριθμῶν (εἰς δι' ἕκαστον διάνυσμα) πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχον συντελεστὴν τῆς γραμμῆς  $Z_j - C_j$ , τῶν τελευταίων λαμβανομένων ἄνευ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου, ἐκ τῶν ἐπὶ μέρος δὲ γενομένων λαμβάνεται τὸ μεγαλύτερον καί ἐκλέγεται πρὸς εἰσαγωγὴν εἰς τὸ πρόγραμμα τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τούτο διάνυσμα, τοῦ ὁποίου ἡ εἰσαγωγή θά ἐπιφέρῃ τὴν μεγαλύτεραν αὐξησιν εἰς τὴν συνολικὴν καθαρὰν χρηματικὴν πρόσοδον καὶ μάλιστα ἴσην πρὸς τὸ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εὑρεθὲν γινόμενον.

Ἐκ τῆς κατὰ τὰ ἀνωτέρω γενομένης ἐπιλογῆς προκύπτει ὅτι ἡ εἰσαγωγή εἰς τὸ παραγωγικὸν πρόγραμμα τῆς καλλιεργείας τοῦ σίτου  $P_1$  θέλει ἐπιφέρει τὴν μεγαλύτεραν αὐξησιν εἰς τὴν συνολικὴν καθαρὰν χρηματικὴν πρόσοδον

κατὰ ποσὸν ἴσον πρὸς  $\frac{0,522693}{0,370906} \times 1 = 1,409233$  τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς

$1,409233 \times 100.000 \times 100 = 14.092.330$  δραχ. τῆς συνολικῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου ἀνερχομένης οὕτω εἰς  $Z_0 = 43.077.500$  δραχ.

Κατόπιν τῆς κατὰ τὰ ἀνωτέρω γενομένης ἐπιλογῆς τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου ὅστις θά εἰσέλθῃ δεύτερος εἰς τὸ πρόγραμμα, ἡ ἀκολουθουμένη περαιτέρω διαδικασία πρὸς δημιουργίαν τοῦ τρίτου πίνακος εἶναι ἀκριβῶς ἡ αὐτὴ ὡς καί εἰς τὸν δεύτερον, τοῦ  $P_1$  ἀντικαθιστῶντος τὸ  $P_0$ , ἤτοι ὀλόκληρον τὴν διαθέσιμον ἕκτασιν ἐδάφους. Ἐπειδὴ σημειοῦνται εἰσέτι ἀρνητικοί συντελεσταί ἐν

Π ι ν ά κ ι ο ν Ι V

C <sub>j</sub>	P <sub>j</sub>	P <sub>0</sub>	P <sub>9</sub>	P <sub>10</sub>	P <sub>11</sub>	P <sub>12</sub>	P <sub>13</sub>	P <sub>14</sub>	P <sub>15</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	P <sub>7</sub>	P <sub>8</sub>
1	P <sub>1</sub>	1,312772	2,696101	-1,286868				-0,096461	1	0,571956					-0,060226		-0,024324
	P <sub>10</sub>	0,006584	1	-0,932270				-0,061146		0,414351					-0,109073		-0,014098
1	P <sub>2</sub>	2,762724		2,898517				-0,135793	1				0,976936		1,017359		0,767095
	P <sub>12</sub>	0,859231			1			-0,140769							0,234365		0,253708
1	P <sub>13</sub>	1				1		0,585665					0,691765		0,624335		
	P <sub>7</sub>	0,585665															
	P <sub>15</sub>	1							1								1,008760
Z <sub>j</sub>		4,661161	2,696101	1,611649				0,353411	1	0,571956	0,976936	0,957133	1	0,742771			0,257229
Z <sub>j</sub> - C <sub>j</sub>			2,696101	1,611649				0,353411		-0,428044	-0,023064	-0,042867					

Π ι ν ά κ ι ο ν V

C <sub>j</sub>	P <sub>j</sub>	P <sub>0</sub>	P <sub>9</sub>	P <sub>10</sub>	P <sub>11</sub>	P <sub>12</sub>	P <sub>13</sub>	P <sub>14</sub>	P <sub>15</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	jP <sub>1</sub>	P <sub>8</sub>	P <sub>7</sub>	P <sub>8</sub>
1	P <sub>1</sub>	1,336885	2,696101	1	-1,286868			-0,096461	0,024113	1		0,571956			-0,060226		
	P <sub>10</sub>	0,020560	1	-0,932270				-0,061146	0,013976			0,414351			-0,109073		
1	P <sub>2</sub>	2,002290		2,898517				-0,135793	-0,760434	1				0,976936	1,017359		
	P <sub>12</sub>	0,607726			1			-0,140769	-0,251505						0,234365		
1	P <sub>13</sub>	1				1		0,585665						0,691765	0,624335		
	P <sub>7</sub>	0,585665															
1	P <sub>8</sub>	0,991316							0,991316								
Z <sub>j</sub>		4,916156	2,696101	1,611649				0,353411	0,254995	1	1	0,571956	0,976936	0,957133	1	1	1
Z <sub>j</sub> - C <sub>j</sub>			2,696101	1,611649				0,353411	0,254995			-0,428044	-0,023064	-0,042867			



ΠΙΝΑΚΙΟΝ VI

C <sub>j</sub>	P <sub>0</sub>		P <sub>9</sub>	P <sub>10</sub>	P <sub>11</sub>	P <sub>12</sub>	P <sub>13</sub>	P <sub>14</sub>	P <sub>15</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	P <sub>7</sub>	P <sub>8</sub>
	P <sub>j</sub>	P <sub>0</sub>															
1	P <sub>1</sub>	1,433349	2,696101	-1,286868	0,096464	-0,096461	0,24113	1	0,571956	0,066731	1	1	1	1	1	1	1
	P <sub>10</sub>	0,195263		1	0,174703	-0,061146	0,013976			0,414351							
1	P <sub>2</sub>	0,372782		2,898517	-1,629508	-0,135793	-0,760434		1								
1	P <sub>12</sub>	0,232343			-0,375383	-0,140769	-0,251505										
1	P <sub>6</sub>	1,601704			1,601704												
1	P <sub>7</sub>	0,585665				0,585665											
1	P <sub>8</sub>	0,991316					0,991316										
Z <sub>j</sub>		4,984816	2,696101	1,611649	0,068660	0,353411	0,254995	1	0,571956	1,024433	1	1	1	1	1	1	1
Z <sub>j</sub> - Z <sub>j</sub>			2,696101	1,611649	0,068660	0,353411	0,254995		-0,428044	0,024433							

ΠΙΝΑΚΙΟΝ VII

C <sub>j</sub>	P <sub>0</sub>		P <sub>9</sub>	P <sub>10</sub>	P <sub>11</sub>	P <sub>12</sub>	P <sub>13</sub>	P <sub>14</sub>	P <sub>15</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	P <sub>7</sub>	P <sub>8</sub>
	P <sub>j</sub>	P <sub>0</sub>															
1	P <sub>1</sub>	1,163815	2,696101	-1,380366	0,000006	-0,144690	-0,012057	0,004821	1	1							
1	P <sub>3</sub>	0,471250		2,413413	-2,249952	0,421630	-0,147571	0,033730			1						
1	P <sub>2</sub>	0,372782			2,898517	-1,629508	-0,135793	-0,760434				1					
	P <sub>2</sub>	0,232343				1	-0,375383	-0,140769	-0,251505								
1	P <sub>6</sub>	1,601704				1,601704											
1	P <sub>7</sub>	0,585665					0,585665		0,991316								
1	P <sub>8</sub>	0,991316															
Z <sub>j</sub>		5,186532	2,696101	1,033047	0,648571	0,249136	0,290244	0,269433	1	1	1	1	1,149280	1	1	1	1
Z <sub>j</sub> - Z <sub>j</sub>			2,696101	1,033047	0,648571	0,249136	0,290244	0,269433					0,149280				

τῆ γραμμῆ  $Z_j = C_j$  τοῦ τρίτου πίνακιού ἀκολουθεῖ ἡ κατασκευὴ τετάρτου τοιούτου, ὅπερ ἀκριβῶς καταρτίζεται ὡς καὶ τὸ προηγηθὲν τρίτον.

Εἰς τὸ τέταρτον πίνακιν εἰσέρχεται εἰς τὸ πρόγραμμα ἡ «παραγωγικὴ διαδικασία»  $P_7$  (ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν καλλιέργειαν σίτου κατὰ τὸ φθινόπωρον καὶ ἐν συνεχείᾳ μετὰ τὸν θερισμὸν τῆς καλλιέργειας τῶν γεωμήλων), τοῦ  $P_7$  ἀντικαθιστῶντος τὸ  $P_{14}$ . Ἡ συνολικὴ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσοδος τοῦ προγράμματος (διανυσμάτων βάσεως) ἀνῆλθε διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ  $P_7$  εἰς τὸ πίνακιν τοῦτο εἰς  $Z_0 = 4,661161$  ἤτοι 46.611.610 δρχ. βελτιώσασα τὸ οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα κατὰ  $46.611.610 - 43.077.500 = 3.534.110$  δρχ. Ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς  $P_7$  εἰς τὸ πρόγραμμα εἰς ἐπίπεδον ἀνταποκρινόμενον πρὸς τὸν περιορισμὸν τῆς ἐκτάσεως τῆς καλλιέργειας τῶν γεωμήλων

$\frac{1}{1,707460} = 0,585665$  ὅστις ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ εἰς 5.856.650 καθαρὰν χρηματικὴν πρόσοδον ἤτοι 5.000 στρ. ἐπῆλθε μείωσις εἰς τοὺς δύο ἄλλους κλάδους τοῦ προγράμματος, ὡς τοῦτο ἐμφαίνεται ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν στοιχείων τῶν  $P_1$  καὶ  $P_2$  τῆς στήλης  $P_0$  τῶν πίνακιν III καὶ IV, ὡς ἐκ τῆς ἀξιοποιήσεως μέρους τῶν ὑπὸ τούτων χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν ὑπὸ τῆς  $P_7$ .

Ἐπειδὴ εἰσέτι παρουσιάζονται ἀρνητικοὶ συντελεσταὶ ἐν τῇ γραμμῇ  $Z_j - C_j$  τοῦ τετάρτου πίνακιού συνεχίζομεν τὴν ἐργασίαν προβαίνοντες εἰς τὴν κατάστρωσιν καὶ πέμπτου τοιούτου ὅπερ περιλαμβάνει ἐν τῇ στήλῃ  $P_j$  τὴν καλλιέργειαν τῆς μηδικῆς  $P_8$ , ἐπερχομένης οὕτω νέας αὐξήσεως εἰς τὴν συνολικὴν καθαρὰν χρηματικὴν πρόσοδον ὡς τοῦτο ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ  $Z_0$  τοῦ πίνακος τούτου.

Συνεχίζοντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δημιουργοῦμεν τὸ ἕκτον πίνακιν, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει εἰς τὸ παραγωγικὸν πρόγραμμα τὴν  $P_6$  (σίτος καὶ ἐπίσπορα ζαχαρότευτλα) βελτιουμένης βεβαίως ἐν ταυτῶ τῆς συνολικῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου.

Τὸ τελευταῖον καταρτιζόμενον πίνακιν εἶναι τὸ ἕβδομον τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει εἰς τὸ πρόγραμμα καὶ τὴν καλλιέργειαν τοῦ ἀραβοσίτου (ἀνοίξεως), ἣτις βελτιώνει τὸ οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα τῆς συνολικῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου, ἀνερχομένης τελικῶς εἰς  $Z_0 = 5,186532$  ἤτοι εἰς 51.865.320 δρχ. Τὸ ἀνωτέρω ποσὸν ἀποτελεῖ καὶ τὸ maximum τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ ἐν τῇ ἐξεταζομένῃ περιφερείᾳ τῆς Κωπαίδος ὑπὸ τὰς δοθείσας τεχνικὰς καὶ οἰκονομικὰς προϋποθέσεις, ἐπομένως καὶ τὸ optimum τῆς ἀξιοποιήσεως τῶν διαθεσίμων συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς. Τοῦτο καθίσταται ἐμφανὲς ἐκ τοῦ ὅτι εἰς τὸ ἕβδομον πίνακιν δὲν ἐμφανίζονται συντελεσταὶ μὲ ἀρνητικὰς τιμὰς ἐπὶ τῆς γραμμῆς  $Z_j - C_j$ , ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ περαιτέρω βελτίωσις τοῦ προγράμματος διὰ τῆς εἰσαγωγῆς ἐνὸς εἰσέτι κλάδου εἰς τοῦτο.

## VI. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΠΙΛΕΓΕΝΤΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Τὸ τελευταῖον πίνακιν VII ἐρμηνευόμενον καταλλήλως παρέχει τὴν δυνατότητα ἐπιλογῆς τοῦ ἀρίστου προγράμματος παραγωγῆς (ὑπὸ τὰς χαραχθείσας τεχνικὰς καὶ οἰκονομικὰς συνθήκας), τοῦ ὁποῖου ἡ ἐφαρμογὴ ὑπὸ τοῦ

Όργανισμῶ Κωπαίδος, θὰ παρέξη τὴν δυνατότητα εἰς τοὺς καλλιεργητὰς πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ maximum τῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου, ἢν δύναται νὰ ἀποκομίσουν ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν καλλιεργουμένων κτημάτων.

Ὡς ἀνεφέρθη ἤδη ἡ συνολικὴ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσοδος ἦν ἀποδίδει τὸ ἐπιλεγὲν πρόγραμμα ἀνέρχεται εἰς 51.865.320 δρχ., ποσὸν τὸ ὁποῖον προέρχεται ἐκ τῆς ἀκολουθοῦ κατανομῆς τῆς ἐκτάσεως τῶν 86.000 στρεμ. ὡς τοῦτο συνάγεται ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος  $P_0$  (!).

1. Σίτος	62.123 στρ.		
2. Ἀραβόσιτος ἀνοῖξ.	8.598 »	Ἐπὶ πλέον δὲ	
3. Βάμβαξ	5.279 »	Ζαχαρότευτλα ἐπίσπορα	20.000 στρ.
4. Μηδική	10.000 »	Γεώμηλα	» 5.000 »
Σύνολον	86.000 »		

Ἡ κατανομὴ αὕτη τῶν καλλιεργειῶν δὲν εἶναι καὶ ἡ τελικὴ ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει, καθ' ὅσον ὡς ἀλλαχοῦ ἀνεφέρθη ὑπάρχει εἰσέτι διαθέσιμος ποσότης ὕδατος εἰς τὰς ὑδατοδεξαμενὰς τοῦ Κηφισσοῦ ἀνερχομένη εἰς 1.470.000 κ.μ., ἣτις ἀντιστοιχεῖ εἰς 777.000 κ.μ. διὰ τὴν ἔκτασιν τῶν 86.000 στρ. Εἰς τὸ ποσὸν ὁμως τοῦτο δέον νὰ προστεθῇ καὶ ἡ πλεονάζουσα ποσότης ὕδατος κατὰ τὸ α' 15ῆμερον τοῦ Ἰουλίου ἣτις ἀνέρχεται εἰς 886.269 κ.μ., ὡς συνάγεται ἐκ τῆς διαφορᾶς τοῦ καταναλισκομένου ὑπὸ τῶν ἀνωτέρω καλλιεργειῶν ὕδατος κατὰ τὴν περίοδον ταύτην ἀπὸ τοῦ διαθέσιμου τοιοῦτου, ὅπερ ἀνέρχεται εἰς 3.238.274 κ.μ. (πίναξ 5). Ἡ συνολικῶς ὅθεν διαθέσιμος ποσότης ὕδατος ἀνέρχεται εἰς  $777.000 + 886.269 = 1.663.269$  κ.μ.

Γενῶνται κατόπιν τούτου τὸ ἐρώτημα ποῖα καλλιέργεια δέον νὰ ἐπεκταθοῦν χρησιμοποιοῦσαι τὸ ὕδωρ τοῦτο, ὥστε νὰ αὐξηθῇ ἡ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσοδος εἰς τὸ maximum. Τὴν λύσιν εἰς τὸ δυσχερὲς τοῦτο πρόβλημα παρέχει ἡ ἐρμηνεία τῶν στοιχείων τῆς γραμμῆς  $Z_j - C_j$  τῶν διανυσμάτων ἀδρανεῖας  $P_9 - P_{15}$  τοῦ ἐβδόμου πίνακιου. Ὡς καὶ ἀλλαχοῦ ἐσημειώθη οἱ συντελεσταὶ οὗτοι ἐμφανίζουν τὸ ποσὸν κατὰ τὸ ὁποῖον αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται ἡ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσοδος ἐκ τοῦ προγράμματος διὰ τῆς προσθήκης ἢ ἀφαιρέσεως μιᾶς μονάδος ἑνὸς τῶν διαθεσίμων συντελεστῶν. Οὕτω ἐξευρίσκονται τὰ ποσὰ ταῦτα κατὰ τὴν ἀκόλουθον σειρὰν ἔχοντα ὡς ἑξῆς :

1) Ἡ ἐξεύρεσις τῆς ἐκτάσεως ἢν καταλαμβάνει ἐκάστη καλλιέργεια γίνεται ὡς ἑξῆς : π.χ. πρὸς ἐξεύρεσιν τῆς ἐκτάσεως ἢν καταλαμβάνει ὁ βάμβαξ εἰς τὸ πρόγραμμα λαμβάνομεν τὸ στοιχεῖον τῆς γραμμῆς  $P_2$  τοῦ διανύσματος  $P_0$ , ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 100.000 καὶ εἶτα ἐπὶ 100 δίδει τὴν καθαρὰν χρηματικὴν πρόσοδον ἢν ἀποφέρει ὁ βάμβαξ, εἶτα δὲ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διὰ τῆς κατὰ στρέμμα καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου τοῦ βάμβρακος ἐξευρίσκεται ἡ ἔκτασις  $\frac{0,372782 \times 100.000 \times 100}{706,12} = 5.279$  στρ.

Ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος  $P_0$  τοῦ ἐβδόμου πίνακιου συνάγεται ὅτι ἀπαντες οἱ ὑπὸ περιορισμὸν διατελοῦντες συντελεσταὶ παραγωγῆς κατηναλώθησαν ἐξ ὀλοκλήρου πλὴν τοῦ διαθέσιμου ὕδατος κατὰ τὸ β' 15ῆμερον τοῦ Αὐγούστου ἐκ τοῦ ὁποῖου πλεονάζει ποσότης 0,232343 τοῦ συνόλου ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ στοιχείου  $P_0$  τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν γραμμὴν  $P_{12}$ .

$P_9$ = "Εδαφος	$= \frac{2,696101 \times 100.000 \times 100}{86.000} = 315,5$ δρχ. κατά στρ.
$P_{10}$ = "Υδωρ β' 15θημέρου 'Ιουλίου	$= \frac{1,033047 \times 100.000 \times 100}{2.861.996} = 3,61$ » » κ.μ.
$P_{11}$ = "Υδωρ α' 15θημέρου Αύγουστου	$= \frac{0,648571 \times 100.000 \times 100}{2.668.156} = 2,43$ » » »
$P_{12}$ = "Υδωρ β' 15θημέρου Αύγουστου	$= \frac{0}{2.663.949} = 0,$ » » »
$P_{13}$ = "Εκτασις διὰ ζαχαρότευτλα	$= \frac{0,249136 \times 100.000 \times 100}{20.000} = 124,57$ » » »
$P_{14}$ = "Εκτασις διὰ γεωμήλια	$= \frac{0,290244 \times 100.000 \times 100}{5.000} = 580,49$ » » »
$P_{15}$ = "Εκτασις διὰ μηδικήν	$= \frac{0,269433 \times 100.000 \times 100}{10.000} = 269,43$ » » »

Το στοιχείον τῆς  $Z_j - C_j$  τοῦ διανύσματος δράσεως  $P_4$  θὰ εἶναι

$$P_4 = \frac{0,149280 \times 100}{0,138353} = 107,9 \text{ δρχ. κατά στρέμμα.}$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως συνάγεται ὅτι ἐάν ἀφεθῆ ἀκαλλιέργητον ἓν στρέμμα ξηρικοῦ ἐδάφους ( $P_9$ ), τότε ἡ συνολικὴ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσσδος θὰ ἐλαττωθῆ κατὰ 313,50 δρχ. δι' ἕκαστον στρέμμα περιοριζομένης ἀντιστοιχῶς τῆς καλλιέργειας τοῦ σίτου κατὰ ἓν στρέμμα καὶ ἀντιθέτως αὕτη θέλει αὐξηθῆ κατὰ τὸ αὐτὸ ποσὸν εἰς περίπτωσιν προσθήκης ἑνὸς εἰσέτι στρέμματος ἐδάφους, ἄνευ αὐξήσεως βεβαίως τοῦ ὑπάρχοντος ὕδατος. Κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἡ ἀνάλυσις τῶν  $P_{10}$  καὶ  $P_{11}$  δεικνύει ὅτι ἡ προσθήκη ἢ ἀφαίρεσις ἑνὸς κ. μ. ὕδατος ἐκ τοῦ προγράμματος θέλει ἐπιφέρει αὐξήσιν ἢ ἐλάττωσιν τῆς συνολικῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου κατὰ 3,61 δρχ. δι' ἕκαστον κ. μ. ὕδατος κατὰ τὴν περίοδον τοῦ β' 15θημέρου τοῦ 'Ιουλίου καὶ κατὰ 2,43 δρχ. κατὰ τὴν περίοδον τοῦ α' 15θημέρου τοῦ Αύγουστου ἐφ' ὅσον βεβαίως εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς αὐξήσεως τοῦ ὕδατος κατὰ μίαν τῶν περιόδων τούτων θέλει αὐξηθῆ ἀντιστοιχῶς καὶ τὸ διαθέσιμον ὕδωρ κατὰ τὰς λοιπὰς (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν). Ἐπειδὴ πλεονάζει ὕδωρ κατὰ τὸ β' 15θήμερον τοῦ Αύγουστου ἡ ἀξία τούτου εἶναι μηδέν. Ὅσον ἀφορᾷ τοὺς ὑπάρχοντας περιορισμοὺς εἰς τὴν ἔκτασιν ὠρισμένων καλλιεργειῶν, καθίσταται ἐμφανὲς ἐκ τῶν  $P_9 - P_{15}$  ὅτι συμφερωτέρα θὰ ἦτο ἡ ἄρσις τοῦ περιορισμοῦ τῆς ἐκτάσεως τῆς καλλιέργειας τῶν γεωμήλων (ἐπισπόρων), ὁπότε δι' ἕκαστον προστιθέμενον στρέμμα θὰ ἠῤῥξανε ἡ συνολικὴ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσσδος κατὰ 580,49 δρ.

Τέλος, ἡ ἐρμηνεία τοῦ  $P_4$  εἶναι ὅτι ἐάν ἤθελεν εἰσαχθῆ εἰς τὸ πρόγραμμα ἡ καλλιέργεια τῶν ζαχαροτεύτλων (ἀνοίξεως), τότε δι' ἕκαστον στρέμμα

ταύτης θά ἐπέλθῃ μείωσις τῆς συνολικῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου κατὰ 107,9 δρχ.

Ἐάν τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς  $Z_j - C_j$  τῶν ὑπὸ περιορισμὸν διατελούντων συντελεστῶν (διανύσματα  $P_9 - P_{15}$ ) πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὰς ἀντιστοιχοῦς ποσότητας τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς αἰτινες ἰσοῦνται πρὸς τὴν μονάδα (πίνακιον I) καὶ προσθέσωμεν ταῦτα τότε

$$(2,696101 \times 1) + (1,033047 \times 1) + (0,648571 \times 1) + (0 \times 1) + (0,249136 \times 1) + (0,290244 \times 1) + (0,269433 \times 1) = 5,186532$$

ἤτοι ἡ συνολικὴ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσδοδος τοῦ προγράμματος κατενεμήθη ἀκριβῶς εἰς τοὺς ὑπὸ περιορισμὸν διατελοῦντας συντελεστάς, καθ' ὅσον ἐάν ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν θέσωμεν τὰς εὐρεθείσας προηγουμένης τιμὰς τότε  $(313,5 \times 86.000) + (3,61 \times 2.861.996) + (2,43 \times 2.668.156) + (0 \times 2.663.947) + (124,57 \times 20.000) + (580,49 \times 5.000) + (269,43 \times 10.000) = 51.865.320$  δρχ. ἤτοι τὸ maximum.

Συναρτήσῃ ὅθεν τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ἡ ἀποδοτικώτερα ἀξιοποίηση τοῦ πλεονάζοντος ὕδατος θά εἶναι κατὰ τὸ β' 15θήμερον τοῦ Ἰουλίου. Ἐκ τῶν στοιχείων ὁμως τοῦ διανύματος  $P_{10}$  τοῦ VII πίνακίου συνάγεται ὅτι τὸ  $P_3$  (καλλιέργεια ἀραβοσίτου) θά αὐξηθῇ κατὰ ποσὸν ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ 2,413413 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν κ. μ. ὕδατος ἅτινα προστίθενται κατὰ τὴν περίοδον ταύτην τοῦ γινόμενου τούτου διαιρουμένου διὰ τῆς ὀλικῆς διαθέσιμου ποσότητος ὕδατος ἤτοι τῶν 2.861.996 κ. μ. Ἀντιθέτως τὸ  $P_1$  (σίτος) θά ἐλαττωθῇ κατὰ ποσὸν ἴσον πρὸς τὴν ἑκτασιν καθ' ἣν θά αὐξηθῇ ὁ ἀραβόσιτος. Δοθέντος ὁμως ὅτι ὁ ἀραβόσιτος ἀπαιτεῖ 65 κ. μ. ὕδατος κατὰ στρέμμα τόσον κατὰ τὸ α' ὅσον καὶ κατὰ τὸ β' 15θήμερον τοῦ Ἰουλίου, ἡ διαθέσιμος ποσότης ὕδατος κατὰ 15θήμερον θά εἶναι τὸ ἥμισυ ἤτοι 831.635 κ. μ., ὁπότε ὁ ἀραβόσιτος θά αὐξηθῇ κατὰ  $\frac{831.635}{65} = 12.794$  στρέμματα.

Κατὰ ταῦτα ἐκ τῆς χρησιμοποίησεως τῶν 831.635 κ. μ. ὕδατος κατὰ τὸ β' 15θήμερον τοῦ Ἰουλίου τὸ  $P_3$  τῆς στήλης  $P_0$  θά αὐξηθῇ κατὰ  $\frac{2,413413 \times 831.635}{2.861.996} = 0,701286$

ἤτοι ἀπὸ 0.471250 (πίνακιον VII) θά γίνῃ 1,172536 τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς 11.725.350 δρχ. καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου ἤτοι  $\frac{11.725.360}{548,12} = 21.392$  στρέμματα, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐξησιν τῆς καλλιέργειας τοῦ ἀραβοσίτου κατὰ 12.794 στρέμματα, δοθέντος ὅτι ὁ ἀραβόσιτος εἶχεν εἰσελθεῖ εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ 8.598 στρέμματα ἄρα  $21.392 - 8.598 = 12.794$ .

Τὸ  $P_1$  τῆς στήλης  $P_0$  θά ἐλαττωθῇ κατὰ  $\frac{1,380366 \times 831.635}{2.861.996} = 0,401105$  τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς 4.011.050 δρχ. καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου καὶ ἐπομένως ἡ καλλιέργεια τοῦ σίτου θά ἐλαττωθῇ κατὰ  $\frac{4.011.050}{313,50} = 12.794$  στρ.



\*Αρα τὸ  $P_1$  ἐν τῇ στήλῃ  $P_0$  θὰ γίνῃ  $1,163815-0,401105=0,762710$  τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς 7.627.100 δρχ. καθαρὰν χρηματικὴν πρόσδοσον ἧτοι εἰς  $\frac{7.627.100}{313,50}=24.329$  στρ. σίτου ἐν τῷ συνόλῳ δηλαδή ἀκριβῶς  $37.123 - 12.794=24.329$  στρ.

Συμπεραίνει τῶν ἀνωτέρω ἢ συνολικὴ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσδοδος τοῦ νέου προγράμματος παραγωγῆς ηὔξηθη κατὰ 3.001.810 δρχ. καὶ ἔγινε 54.867.130 δρχ., ἡ δὲ τελικὴ κατανομὴ τῶν καλλιεργειῶν ἔλαβε τὴν ἀκόλουθον μορφήν :

1) Σίτος	49.329 στρ.	
2) Ἀραβόσιτος ἀνοίξεως	21.392 »	ἐπὶ πλέον δὲ 20.000 στρ. ζαχαρότευτλα ἐπίσπορα.
3) Βάμβαξ	5.279 »	καὶ 5.000 στρ. γεώμηλα ἐπίσπορα.
4) Μηδικὴ	10.000 »	
Σύνολον	<u>86.000</u> »	

Εἰς τὸ τελικόν τοῦτο πρόγραμμα ὁ σίτος καταλαμβάνει τὰ 57,36% τοῦ συνόλου τῆς ἐκτάσεως τῶν 86.000 στρ., ὁ ἀραβόσιτος τὰ 25,20%, ὁ βάμβαξ τὰ 5,81% καὶ ἡ μηδικὴ τὰ 11,63%. Τὰ 50,68% τῆς διὰ σίτου καλλιεργουμένης ἐκτάσεως καταλαμβάνουν ἐπίσποροι καλλιεργεῖαι (μετὰ τὴν συγκομιδὴν τοῦ σιτηροῦ), εἰς ποσοστὸν 40,54% τὰ ζαχαρότευτλα καὶ 10,14% τὰ γεώμηλα, ἐνῶ εἰς τὰ 49,32% τῆς ἐκτάσεως ὁ σίτος διαδέχεται κατ' ἔτος τὸν σίτον.

Ἡ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ «γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ» ἔξευρεθεῖσα ἀρίστη λύσις ὡς πρὸς τὴν ὀργάνωσιν τοῦ ἐνδεδειγμένου καλλιεργητικοῦ προγράμματος, προσλαμβάνει ἰδιαιτέραν σημασίαν ἐξεταζομένη ἐν τῷ πλαισίῳ τῶν καθ' ἕκαστα καλλιεργητῶν τῆς Κωπαίδος.

Βάσει τοῦ ἀρίστου τούτου προγράμματος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ὑπὸ τοῦ Ὄργανισμοῦ Κωπαίδος ἐφ' ὀλοκλήρου τῆς ἐκτάσεως τῶν 86.000 στρ., ἡ κατανομὴ τῶν καλλιεργειῶν εἰς τὸ κτῆμα τῶν 24 στρ., τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν διανομὴν ἐλήφθη ὡς «βιώσιμος κλῆρος», ἔχει ὡς κατωτέρω :

1) Σίτος	13,77 στρ.	
2) Ἀραβόσιτος ἀνοίξεως	6,05 »	ἐπὶ πλέον δὲ 5,85 στρ. ζαχαρότευτλα ἐπίσπορα.
3) Βάμβαξ	1,39 »	καὶ 1,40 στρ. γεώμηλα ἐπίσπορα.
4) Μηδικὴ	2,69 »	
Σύνολον	<u>24,00</u> »	

Ἡ τοιαύτη διάταξις τῶν καλλιεργειῶν ἀποφέρει ἐτησίως εἰς τὸν αὐτοκαλλιεργητὴν τῆς Κωπαίδος 15.300 δρχ. (!) καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου

1) Ἡ συμβολὴ τῶν διαφόρων καλλιεργειῶν πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ maximum τῆς κα-



ήτοι ποσόν κατά 33,62% άνωτερον εκείνου τού όποιον καρποϋται σήμεραν υπό τού κρατοϋν σύστημα (1). Η βελτίωσις αύτη τού οικονομικού άποτελέσματος όφείλεται εις τήν έντασιν τής έκμεταλλεύσεως άφ' ένός δια τής καλυτέρας άξιοποιήσεως τού διαθεσίμου ύδατος και άφ' έτέρου εις τήν εισαγωγήν νέων καλλιιεργειών περισσότερον άποδοτικών τών ήδη ύφισταμένων τοιούτων σίτου και βάμβακος.

Η κατά τά άνωτέρω ύπολογισθεισα καθαρά χρηματική πρόσδοδος τών 15.300 δρχ., μειουμένη κατά τού ποσόν τών 300 δρχ. (άποσβέσεις έργαλείων) δίδει ύπόλοιπον 15.000 δρχ., τού όποιον άποτελει τού γεωργικόν εισόδημα τής οικογενείας.

Διά τής άφαιρέσεως έκ τού γεωργικού εισοδήματος τών τόκων τών άπασχολουμένων κεφαλαίων (2), οίτινες άνέρχονται εις 2.450 δρχ., λαμβάνομεν ως ύπόλοιπον ποσόν 12.550 δρχ. τού όποιον έμφανίζει τήν άμοιβήν τής έργασίας (3).

Πλήν τής βελτιώσεως τού τελικού οικονομικού άποτελέσματος τών μικρών τούτων έκμεταλλεύσεων έκ τής καλυτέρας όργανώσεώς των δια τής έφαρμογής τού έντατικωτέρου προγράμματος καλλιιεργείας και ή κατανομή

θαρής χρηματικής προσόδου έχει ως κατωτέρω :

Καλλιιεργεία	Έκτασις στρ.	Κ. Χ. Π. όγρ.	%
1. Σίτος	13,77	4.435,56	29,0
2. Άραβόσιτος	6,05	3.316,13	21,7
3. Βάμβαξ	1,39	981,51	6,4
4. Μηδική	2,79	2.765,78	18,0
5. Ζαχαρότευτλα β'.	5,58	2.624,55	17,7
6 Γεώμηλα β'.	1,40	1.177,16	7,7
Σύνολον		15.300,69	100,0

1) Υπό τού έφαρμοζόμενον νϋν καλλιιεργητικόν πρόγραμμα υπό τού Όργανισμού Κωπαίδος λόγω τεχνικών δυσχερειών, ή μέση έτησία καθαρά χρηματική πρόσδοδος κτήματος έκτάσεως 24 στρ. άνέρχεται εις 11.450 δρχ. ως άποτέλεσμα τής καλλιιεργείας 10 στρ. βάμβακος και 14 στρ. σίτου.

2) Η σημερινή αξία τών έδαφών α' κατηγορίας τής Κωπαίδος ύπολογίζεται εις 2.000 δρχ. κατά στρέμμα, τού έπιτοκίου δέ όντος 5% ή έγγειος πρόσδοδος άνέρχεται εις 2.400 δρχ. έτησίως. Τού ποσόν τούτο προσαυξάνεται κατά 50 δρχ. εισέτι (τόκος έργαλείων) τού συνόλου ούτω τών τόκων άνερχομένου εις 2.450 δρχ. έτησίως.

3) Η διάρθρωσις αύτη τής έπιχειρήσεως ως έκ τής έφαρμογής τού νέου προγράμματος θα έχη ως άποτέλεσμα πλήν τής αύξήσεως τής καθαράς χρηματικής προσόδου και τήν καλυτέραν άξιοποίησιν τής έργασίας τής οικογενείας. Ούτω ως συναγεται έκ τού πίνακος 10 τού συνόλου τού χρόνου έργασίας άνέρχεται εις 819 ώρας έτησίως ήτοι ό συντελεστής άπασχολήσεως τής διατιθεμένης υπό τής οικογενείας έργασίας άνέρχεται εις 18,6%. Ο μικρός ούτος συντελεστής είναι άποτέλεσμα άφ' ένός τής χρησιμοποίησεως εις εύρειαν κλίμακα, τής μηχανικής έργασίας και ιδίως εις τόν σίτου, άφ' έτέρου δέ εις τήν έλλειψιν λαχανοκομίας και κτηνοτροφικών κλάδων, οίτινες άπαιτοϋν σημαντικόν ποσοστόν ανθρωπίνης έργασίας. Η κατανομή τής έργασίας κατά τήν διάρκειαν τού έτους έμφανίζεται ώσαύτως λίαν ικανοποιητική, τού μεγαλυτέρου ποσοστού άνερχομένου εις 54% καταναλισκομένου κατά τήν περίοδον Αύγουστου-Όκτωβρίου, μη άπαιτουμένης έργασίας κατά τούς τρεις πρώτους μήνας τού έτους, όπότε και αι άντίξοι κλιματολογικά συνθήκαι έμποδίζουν τήν άπασχόλησιν εις τούς άγρούς.

## Πίναξ 10

Μηνιαία και έτησια κατανομή οικογενειακής έργασίας (1)  
κατά καλλιέργειας. Κτήμα 24 στρ.

Μήνες	Σίτος	Άραβό- σιτος	Βάμβαξ	Μηδική	Ζαχαρό- τευτλα έπισπορα	Γεώμγλα	Σύνολον	%
Ἀπρίλιος	—	—	—	8,93	—	—	8,93	1,09
Μάιος	—	60,50	6,95	20,53	—	—	87,98	10,76
Ἰούνιος	—	81,67	18,07	9,60	—	—	109,34	13,35
Ἰούλιος	—	39,33	20,85	15,82	—	—	76,00	9,28
Αὐγουστος	—	108,9	—	15,82	83,70	10,50	218,92	26,73
Σεπτέμβριος	—	—	—	7,98	83,70	28,00	119,68	14,61
Ὀκτώβριος	—	—	14,87	13,39	66,96	9,10	104,32	12,74
Νοέμβριος	—	—	15,29	—	—	5,60	20,89	2,55
Δεκέμβριος	—	—	5,98	—	55,80	11,20	72,98	8,91
	—	290,40	82,01	92,07	290,16	64,40	819,04	100,00

1) Ἡ έργασία τοῦ ἰδιοκτῆτου καὶ τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας τοῦ έπαρκεί πλήρως διὰ τὰς ἀνάγκας τοῦ προκύψαντος προγράμματος διὰ τῆς μεθόδου τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.

τῶν δαπανῶν καὶ τῶν εἰσπράξεων κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ έτους έμφανίζεται πολὺ καλύτερα ἐκείνης ἣτις ὑφίσταται σήμερον.

Οὕτω, ἐκ τοῦ πίνακος 11 έμφαίνεται ὅτι τὸ σύνολον τῶν χρηματικῶν δαπανῶν, αἵτινες ἀπαιτοῦνται πρὸς έφαρμογὴν τοῦ έκπονηθέντος νέου προγράμματος, ἀνέρχεται εἰς 10.280,97 δρχ. Τὸ τέταρτον τῶν δαπανῶν τούτων ἀπαιτεῖται κατὰ τὸν Ἰούλιον πλέον δὲ τοῦ ἡμίσεος τοῦ συνόλου ἀπαιτεῖται κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ θέρους. Μεγαλυτέραν ὁμως σπουδαιότητα ἀποκτᾷ ἡ ἀνάλυσις τῶν χρηματικῶν δαπανῶν κατὰ κατηγορίας ὡς αὕτη έμφανίζεται εἰς τὸν πίνακα 12, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι τὰ 42,64% τούτων ἀπαιτοῦνται πρὸς πληρωμὴν τῶν έργασιῶν τῶν έκτελουμένων διὰ μηχανημάτων, ἐνῶ αἱ καταβαλλόμεναι εἰς τὸν Ὀργανισμὸν Κωπαίδος εἰσφοραὶ συνιστοῦν τὰ 25,63% τοῦ συνόλου. Τὰ δύο ταῦτα κοινῶς βαρύνουν ὑπερμέτρως ἐπὶ τῆς οἰκονομίας τῶν καλλιεργητῶν, δοθέντος ὅτι αἱ λοιπαὶ κατηγορίαι δαπανῶν συνιστοῦν τὰ 31,73% μόνον τοῦ συνόλου.

Ὅσον ἀφορᾷ, τέλος, τὴν κατανομὴν τῶν εἰσπράξεων ἐντὸς τοῦ έτους, αὕτη έμφανίζεται εἰς τὸν πίνακα 13, τοῦ μεγαλυτέρου ποσοστοῦ εἰσπράξεως συμπίπτοντος μετὰ τὴν περίοδον τοῦ χειμῶνος, ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τὰ προϊόντα τόσο τῶν έαρινῶν καλλιεργειῶν ὅσον καὶ τῶν έπισπόρων τοιούτων διατίθενται εἰς τὴν ἀγορὰν κατὰ τὴν έποχὴν ταύτην. Ἐκ τῶν αὐτῶν πινάκων 12 καὶ 13 συνάγεται ἐπίσης ὅτι αἱ μὲν χρηματικαὶ δαπάναι ἀποτελοῦν τὰ 40% τῆς ἀκαθορίστου προσόδου ἢ δὲ καθαρὰ χρηματικὴ πρόσοδος τὰ 60% ταύτης.

Π ί ν α ξ 11  
Μηνιαία έτησια κατανομή χρηματικών δαπανών κατά καλλιέργειας  
Κτήμα 24 στρ.

Μ ή ν ε ς	Κ α λ λ ι έ ρ γ ε ι α ι							Σύνολον	°/ο
	Σίτος	*Αραβόσιτος	Βάμβαξ	Μηδική	Ζαχαρό- τεύλα έπισπορος	Γεώμηλα έπισπορα	Σύνολον		
Ίανουάριος	34,43	151,25	208,22	14,50	306,90	25,62	740,92	7,21	
Φεβρουάριος	83,94	15,13	4,52	27,91	11,72	3,50	146,72	1,43	
Μάρτιος	107,32	434,03	—	70,37	—	—	611,72	5,95	
*Απρίλιος	—	173,76	66,94	47,24	—	—	287,94	2,81	
Μάιος	—	—	—	156,22	—	—	156,22	1,52	
Ίούνιος	1.200,12	—	50,51	156,22	241,83	—	1.648,68	16,03	
Ίουλίος	1.200,13	—	—	203,99	1.000,00	116,93	2.521,05	24,52	
Αύγουστος	169,75	—	—	203,99	—	632,35	1.006,09	9,79	
Σεπτέμβριος	—	1.354,72	—	47,77	—	18,43	1.420,92	13,82	
*Οκτώβριος	—	—	20,85	156,22	—	—	177,07	1,72	
Νοέμβριος	—	—	13,90	—	—	42,00	55,90	0,54	
Δεκέμβριος	1.414,94	—	8,80	—	—	84,00	1.507,74	14,66	
Σύνολον	4.210,63	2.128,89	373,74	1.084,43	1.560,40	922,83	10.280,97	100,00	

Πίναξ 12  
Κατανομή χρηματικών δαπανών κατά κατηγορίας. Κτήμα 24 στρ.

Κατηγορία δαπανών	Κ α λ λ ι έ ρ γ ε ι α ι							Σύνολο	%
	Σίτος	Άραβόσιτος	Βάμβαξ	Μηδική	Ζαχαρό- τεύλα έπισπορα	Γεωργια έπισπορα	Σύνολο		
Σπόροι και φυτά	626,54	108,90	22,94	62,78	502,20	476,00	1.799,36	17,50	
Λιπάσματα	389,99	300,99	—	31,53	369,95	147,85	1.238,82	12,05	
Φάρμακα	74,22	—	48,57	—	—	38,55	161,44	1,57	
Έργασια επί συμβάσει	1.810,10	887,12	124,24	627,42	676,58	257,33	4.382,79	42,64	
Χρήσις μηχανημάτων	13,77	15,13	4,52	14,51	11,72	3,50	63,15	0,61	
Συντήρησις εργαλείων	1.297,00	816,75	173,47	348,19	—	—	2.635,41	25,63	
Είσοφα Όο.Κοιτάδος	—	—	—	—	—	—	—	—	
<b>Σύνολο</b>	<b>4 210,63</b>	<b>2.128,89</b>	<b>373,74</b>	<b>1.084,43</b>	<b>1.560,45</b>	<b>922,83</b>	<b>10 280,97</b>	<b>100,00</b>	

Π λ ν α ξ 13  
Μηνιαία κατ'Ετησία κατανομή εισπράξεων κατά καλλιέργειας (1)  
Κτήμα 24 στρ.

Μήνας	Κ α λ λ ι ε ρ γ ε ι α ι							Σύνολον	%
	Σίτος	'Αραβόσιτος	Βάμβαξ	Μηδική	Ζαχαρότευτ. έπισπορα	Γεώμηλα έπισπορ.	Σύνολον		
'Ιανουάριος	—	—	451,75	—	2.092,50	700,00	3244,25	12,7	
Φεβρουάριος	—	1.815,00	451,75	770,04	2.092,50	700,00	5829,29	22,8	
Μάρτιος	—	—	—	—	—	700,00	700,00	2,7	
'Απρίλιος	—	—	—	—	—	—	—	—	
Μάιος	—	—	—	—	—	—	—	—	
'Ιούνιος	—	—	—	770,04	—	—	770,04	3,0	
'Ιούλιος	2.882,06	—	—	—	—	—	2882,06	11,3	
Αύγουστος	—	1.815,00	—	770,04	—	—	2585,04	10,0	
Σεπτέμβριος	—	—	—	—	—	—	—	—	
'Οκτώβριος	2.882,06	—	—	770,04	—	—	3652,10	14,3	
Νοέμβριος	2.882,06	—	—	—	—	—	2882,06	11,3	
Δεκέμβριος	—	1.815,00	451,75	770,04	—	—	3036,79	11,9	
Σύνολον	8.646,18	5.445,00	1.355,25	3850,20	4.185,00	2.100,00	25.581,63	100,0	

1) 'Η κατανομή των εισπράξεων έγινε επί τη βάσει του χρόνου πωλήσεως των προϊόντων υπό των παραγωγών.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ἐκ τῆς ἀναλύσεως τῆς οἰκονομίας τῶν καλλιεργητῶν τῆς Κωπαίδος ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ βελτιωμένου προγράμματος καθίσταται ἐμφανές ὅτι, παρά τὴν σημαντικὴν αὐξήσιν τῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου, αὕτη παρουσιάζεται εἰσέτι μικρὰ μὴ ἐπαρκoῦσα διὰ τὴν κάλυψιν τῶν ἀναγκῶν τοῦ ἰδιοκτῆτου καλλιεργητοῦ καὶ τῆς οἰκογενείας του, ἄνευ προσθέτου οἰκονομικῆς ἐνισχύσεως ἐξ ἄλλων πηγῶν, ὡς εἶναι ἡ ἐργασία εἰς ξένα κτῆματα ἢ ἕτεροι ἐξωγεωργικοὶ πόροι. Τὸ ἀνεπαρκές τοῦτο εἰσόδημα εἶναι ἀποτέλεσμα κυρίως τῆς ἐκτάσεως τῶν κτημάτων, ἡτις πόρρω ἀπέχει ἀπὸ τοῦ νὰ καταστήσῃ ταῦτα βιώσιμα.

Πρόχειο ὄθεν κατὰ πρῶτον ἡ προσπάθεια ἐγκαταστάσεως τῶν καλλιεργητῶν ὑπὸ τοῦ Ὁργανισμοῦ Κωπαίδος εἰς ἐνιαῖα κτῆματα (ἐξ ἑνὸς τεμαχίου) ἐντὸς οἰκίσκου κατ' ἀρχᾶς καὶ ἡ ἐφαρμογὴ καλλιεργητικῶν συστημάτων βαθμιαίως ἐντατικωτέρων ὡς τὸ πρῶτον τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἀποκτήσουν οὗτοι τὰς ἀπαραιτήτους γνώσεις διὰ τὴν καλλιέργειαν τῶν νέων φυτῶν ἐν τῇ περιοχῇ, ὡς εἶναι τὰ ζαχαρότευτλα, λαχανικά κλπ. Βραδύτερον δὲ ἐκ τῆς διαμορφωθισομένης καταστάσεως ἐν τῇ περιοχῇ θέλει καταδειχθῆ καὶ ἐκ τῆς χρησιμοποίησεως τῆς μεθόδου τοῦ «γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ» θέλει διαπιστωθῆ ἂν θὰ εἶναι οἰκονομικῶς συμφέρουσα ἡ εἰσαγωγή τῆς κτηνοτροφίας ὡς καὶ ποίου κλάδου ταύτης, ἄνευ ἀπομακρύνσεως ἐκ τῆς βασικῆς ἀρχῆς τῆς Ἀγροτικῆς Οἰκονομικῆς ὅτι «ἡ κτηνοτροφία εἶναι συμφέρουσα καὶ ἐνδείκνυται εἰς τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς προϊόντα φυτικῆς παραγωγῆς ἢ ὑποπροϊόντα ταύτης (ἀμφότερα παραγόμενα εἰς τὸ κτῆμα) ἢ βιομηχανικά τοιαῦτα δύνανται νὰ ἀξιοποιηθoῦν καλύτερον μέσῳ τῶν ζώων, ὥστε τὰ παραγόμενα κτηνοτροφικὰ προϊόντα πωλούμενα ἐν τῇ ἀγορᾷ νὰ συμβάλλουν εἰς τὴν δημιουργίαν καλυτέρου οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος ἐκείνου ὅπερ θὰ προέκυπτεν ἐκ τῆς ἐκποιήσεως τῶν φυτικῶν προϊόντων αὐτουσίῳ ἄνευ μεταποιήσεως μέσῳ τῶν ζώων», χωρὶς βεβαίως νὰ παραβλέπεται καὶ ὁ παράγων τῆς διατηρήσεως τῆς γονιμότητος τοῦ ἐδάφους, ἡτις τουλάχιστον διὰ τὰ ὀλίγα προσεχῆ ἔτη δύναται νὰ διατηρηθῆ διὰ τῆς χρήσεως χημικῶν λιπασμάτων, δοθέντος ὅτι εἰς τὰ ἐδάφη τῆς Κωπαίδος ἡ ὀργανικὴ οὐσία εἶναι ἄφθονος ἤρχισαν δὲ ταῦτα συστηματικῶς καλλιεργούμενα μόλις πρὸ 25ετίας.

Ἡ ἀνάπτυξις καὶ ἐπέκτασις ὄθεν τῶν ἀποδοτικωτέρων καλλιεργειῶν τῶν λαχανικῶν καθίσταται ἐπιτακτικὴ εὐθύς ἐξ ἀρχῆς διὰ συγχρόνου ἰδρύσεως ἐργοστασίων ἐπεξεργασίας τούτων (κονσερβοποιεῖον διὰ τομάτας κλπ.). Παραλλήλως βασικὴ μέριμνα ἡτις δέον ν' ἀναληφθῆ ὑπὸ τοῦ Ὁργανισμοῦ Κωπαίδος εἶναι ἡ ὀργάνωσις τῆς διαθέσεως τῶν παραγομένων προϊόντων, ὥστε οἱ καλλιεργηταὶ νὰ ἀπολαμβάνουν ἱκανοποιητικῶν τιμῶν.

Ἡ ἐπαύξεισις ὡσαύτως τοῦ διατιθεμένου πρὸς ἄρδευσιν ὕδατος καὶ ἡ ἐπέκτασις τῆς μεθόδου τῆς τεχνητῆς βροχῆς σημαντικῶς θέλει συμβάλλει εἰς τὴν ἐντατικοποίησιν τῶν μικρῶν ἐκμεταλλεύσεων τῆς περιοχῆς. Διὰ τῶν συντελουμένων ἤδη ἔργων εἰς τὴν λίμνην τῆς Ὑλικῆς πρὸς παροχέτευσιν ὕδατος



εις τὴν πεδιάδα τῆς Κωπαίδος, ὥστε νὰ ἀρδεύεται αὕτη ἐξ ὀλοκλήρου, θὰ ἐπιτευχθῆ ὁ πρῶτος ἀντικειμενικὸς σκοπός. Ὅσον ἀφορᾷ ὁμως τὸν δεύτερον, ἦτοι τῆς ἐπεκτάσεως τῆς τεχνητῆς βροχῆς, παρουσιάζονται σημαντικαὶ δυσχέρειαι, καθ' ὅσον δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ ἀρδευσις ὑπὸ τοῦ Ὁργανισμοῦ μικρῶν τεμαχίων ἐξ ἐκάστου κτήματος, εἰς τὰ ὁποῖα ἐναλλάσσονται διάφορα φυτὰ μὲ διαφόρους ἀπαιτήσεις εἰς ὕδωρ ἀπὸ ἀπόψεως χρόνου. Ἡ δυσχέρεια αὕτη εἶναι διαφόρους ἀπαιτήσεις εἰς ὕδωρ ἀπὸ ἀπόψεως χρόνου. Ἡ δυσχέρεια αὕτη εἶναι τεχνικῆς φύσεως, δοθέντος ὅτι τὰ συγκροτήματα τεχνητῆς βροχῆς (ἐν διὰ 500 στρ.) δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ ἀρδευσεις τεμαχίων ἐκτάσεως 1—2 στρεμμάτων. Ἀπομένει ὅθεν ἡ λύσις τῆς χρησιμοποίησεως τοῦ ὕδατος ἀπ' εὐθείας ὑπὸ τῶν ἐπὶ μέρος καλλιεργητῶν, ὁπότε θὰ παρέχεται εἰς τούτους ἡ δυνατότης τῆς ἐντατικοποιήσεως τῆς ἐκμεταλλεύσεως των καὶ τῆς ὑπὸ τούτων ἐκλογῆς τοῦ ἐφαρμοστέου καλλιεργητικοῦ προγράμματος, ὅπερ, προσιδιάζει καλύτερον εἰς τὰς συνθήκας ἐκάστου κτήματος. Τὸ ὑψηλὸν ὁμως κόστος τῶν συγκροτημάτων τεχνητῆς βροχῆς καθιστᾷ ἀδύνατον τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ὕδατος ὑπὸ τῶν καθ' ἕκαστα καλλιεργητῶν, ὡς μὴ δυναμένων νὰ ἐπώμισθοῦν τὰς πρὸς τοῦτο δαπάνας.

Εἰς τὸν τομέα τοῦτον κατὰ τὴν γνώμην μας θὰ ἔδει νὰ ἐρευνηθῆ ἡ δυνατότης τῆς χρησιμοποίησεως μικρῶν συγκροτημάτων τεχνητῆς βροχῆς ὑπὸ ὁμάδων καλλιεργητῶν, οἵτινες θὰ εἶναι ἀπὸ κοινοῦ ἰδιοκτῆται τούτων. *Ἄλλως θὰ εἶναι δύσκολος ἡ ἀποφυγὴ τῆς μονοκαλλιέργειας, μὲ ὅλα τὰ μειονεκτήματά της.*

Ἐκ τῆς ἀναλύσεως ἐξ ἄλλου τῶν χρηματικῶν δαπανῶν, δι' ὧν θὰ ἐπιβαρύνωνται κατ' ἔτος οἱ καλλιεργηταὶ ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ προτεινομένου προγράμματος παραγωγῆς, συνάγεται ὅτι καθίσταται ἐπιτακτικὴ ἡ ἴδρυσις συνεταιρισμῶν μηχανικῆς καλλιέργειας πρὸς ὑποβιβασμὸν τῶν δαπανῶν τῆς κατηγορίας ταύτης, αἵτινες, ὡς ἀνεφέρθη, ἀποτελοῦν καὶ τὸ μεγαλύτερον κονδύλιον, ἐπιδρῶσαι σημαντικῶς ἐπὶ τοῦ ὕψους τῆς καθαρᾶς χρηματικῆς προσόδου.

Ἐσαύτως ἀπὸ πλευρᾶς πιστωτικῆς πολιτικῆς καταδεικνύεται ἐκ τῆς ἀναλύσεως τῶν δαπανῶν ὅτι ἡ θερινὴ περίοδος εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν οἱ καλλιεργηταὶ ἔχουν ἀνάγκην βραχυπροθέσμων δανείων, καθ' ὅσον τότε ἀντιμετωπίζουν τὸ μεγαλύτερον βάρος τῶν ἐτησίων δαπανῶν των. Τέλος, ἡ δυνατότης μειώσεως τῆς πρὸς τὸν Ὁργανισμὸν Κωπαίδος εἰσφορᾶς κρίνεται ὡς προβληματικὴ, δοθέντος ὅτι μόνον προϊόντος τοῦ χρόνου θὰ καταδειχθῆ ἐὰν ὑπάρχον περιθώρια μειώσεως καὶ ποῖα θὰ εἶναι ταῦτα.

Χωροῦντες ἤδη εἰς τὴν ἐπισκόπησιν τῆς ἀξίας τῆς μεθόδου τοῦ «γραμματικοῦ προγραμματισμοῦ», δυνάμεθα μετὰ βεβαιότητος νὰ ἀποφανθῶμεν ὅτι αὕτη παρουσιάζει σημαντικὰ πλεονεκτήματα ἐναντι τῆς μέχρι τοῦδε χρησιμοποιουμένης μεθόδου τοῦ «προϋπολογισμοῦ» πρὸς καλυτέραν ὀργάνωσιν τῶν ἀγροτικῶν ἐπιχειρήσεων. Διὰ τῆς τελευταίας ταύτης ἐπιτυγχάνεται ὡς γνωστὸν ἡ ἐπιλογή τῶν ἀποδοτικωτέρων κλάδων, πλὴν ὁμως καθίσταται ἀδύνατος ἡ ἐξεύρεσις τοῦ optimum τοῦ προγράμματος ἦτοι τῆς ἐκτάσεως ἣν θὰ λάβῃ ἕκαστος κλάδος ἐν αὐτῷ, ὥστε νὰ ἐπιτευχθῆ τὸ maximum τοῦ κέρδους.

Ἀντιθέτως, διὰ τῆς μεθόδου τοῦ «γραμματικοῦ προγραμματισμοῦ» ἐπιτυγ-

χάνεται διὰ τοῦ τελευταίου πινακίου (εἰς τὸ ὁποῖον δὲν ὑπάρχουν πλέον ἀρνητικοὶ συντελεσταὶ ἐν τῇ γραμμῇ  $Z_j - C_j$  τῶν διανυσμάτων δράσεως) τὸ ὀρθίσιμον τῆς χρησιμοποιήσεως δοθέντων συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ὑπὸ τῶν ἐπιλεγέντων κλάδων, ὁ συνδυασμὸς τῶν ὁποίων δίδει καὶ τὸ  $\max$  τιμῆ τοῦ κέρδους.

Ἰδιαιτέραν ὄλως σπουδαιότητα ἀποκτᾷ ἡ μέθοδος τοῦ «γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ» ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι παρέχει τὴν δυνατότητα διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν συντελεστῶν τῆς γραμμῆς  $Z_j - C_j$  τῶν «διανυσμάτων ἀδρανείας» τοῦ τελευταίου πινακίου, τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ ποσοῦ καθ' ὃ αὐξάνει τὸ οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα τοῦ προγράμματος ἐκ τῆς προσθήκης μιᾶς εἰσέτι μονάδος ἐνὸς ἐκ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, οἵτινες εὐρίσκονται εἰς τὴν διάθεσιν τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς περιωρισμένης ποσότητος.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν τιμῶν τούτων πρὸς τὸ κόστος τῆς μονάδος τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ παρέχεται ἡ δυνατότης εἰς τὸν διευθύνοντα τὴν ἐπιχείρησιν νὰ ἀποφανθῇ ἐπὶ τῆς περαιτέρω ἐντατικοποιήσεως ταύτης, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως προσθέτων μονάδων συντελεστῶν παραγωγῆς, τηρουμένων βεβαίως πάντοτε τῶν βασικῶν ἀρχῶν ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ χρῆσις τῆς μεθόδου. Ἔτερον πλεονέκτημα τῆς νέας τεχνικῆς εἶναι ὅτι ἐκ τοῦ τελευταίου πινακίου παρέχονται συγκεκριμένα στοιχεῖα ἐπὶ τοῦ ποσοῦ καθ' ὃ θέλει ἐλαττωθῆ τὸ οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα τοῦ προγράμματος, ἐὰν ἀποσυρθῇ ἐκ τούτου ἐν στρέμμα ἐδάφους μιᾶς τῶν καλλιεργείων ἐπὶ σκοπῶ ἀναπτύξεως ἑτέρας τοιαύτης.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω πλεονεκτήματα τῆς μεθόδου ἀντιπαράτασεται τὸ γεγονός ὅτι τόσον αἱ τιμαὶ τῶν χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ὅσον καὶ αἱ τοιαῦται τῶν πωλουμένων προϊόντων μεταβάλλονται συναρτήσῃ τῆς προσφορᾶς καὶ τῆς ζητήσεως τούτων, ὁπότε παύει νὰ ὑφίσταται ἡ ὑπόθεσις τῶν «σταθερῶν ἀναλογιῶν» μειονέκτημα τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται καὶ κατὰ τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου τοῦ «προϋπολογισμοῦ». Τοῦτο ὁμως δὲν μειώνει τὴν ἀξίαν τῆς μεθόδου, ἥτις ὑπερέχει ἔναντι τῶν ἄλλων, δοθέντος ὅτι αὕτη δὲν προβάλλεται ὡς τὸ μόνον μέσον διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιλύονται ὅλα τὰ προβλήματα ὀργανώσεως τῶν ἀγροτικῶν ἐκμεταλλεύσεων διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μιᾶς ἠλεκτρικῆς ἀριθμομηχανῆς, ἀλλὰ ὡς ὁ ἄριστος βοηθὸς εἰς τὸν οἰκονομολόγον, τὸν ἔχοντα πλήρη τεχνικὴν κατάρτισιν ἐν τῷ πλαισίῳ τῆς γεωπονικῆς ἐπιστήμης πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ἀναφυομένων ἐκάστοτε προβλημάτων ὀργανώσεως τῶν ἀγροτικῶν ἐκμεταλλεύσεων.

Καὶ εἰς τὸν τομέα ὁμως τοῦτου ἐπετεύχθη σημαντικὴ πρόοδος ἀπὸ τοῦ 1958 διὰ τῆς βελτιώσεως τῆς τεχνικῆς καὶ ἐπιλύσεως προβλημάτων μὲ μεταβαλλομένης τὰς τιμὰς τῶν παραγομένων προϊόντων.

Ἐν κατακλείδι, ἡ χρῆσις τῆς μεθόδου τοῦ «γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ», ἥτις τόσον ἔχει συμβάλει μέχρι τοῦδε εἰς τὴν ἐπίλυσιν σπουδαιοτάτων προβλημάτων ἐν τῇ ἀγροτικῇ οἰκονομίᾳ, χρῆζει περαιτέρω ἐρεῦνης διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ταύτης πρὸς ἀντιμετώπισιν ζητημάτων ὀργανωτικῆς τῶν ἐκμεταλλεύσεων ἐν τῇ πράξει, ὥστε νὰ καταδειχθοῦν τὰ ἰσχυρὰ καὶ ἀσθενῆ σημεῖα ταύτης, ἐπενεχθοῦν δὲ οὕτω αἱ δυναταὶ βελτιώσεις. Τὴν βάσιν, ὁμως, διὰ τὴν

έφαρμογὴν τῆς μεθόδου δέον νὰ ἀποτελῆ πάντοτε ἡ ὕπαρξις ἀκριβῶν δεδομένων, ἓν τινι περιφερεῖα ἡ ἐκμεταλλεύσει, τόσον ὡς πρὸς τοὺς διαθεσίμους συντελεστὰς παραγωγῆς ὅσον καὶ ὡς πρὸς τὰς προβλεπόμενας ἀποδόσεις, τὰς ἀπαιτούμενας δαπάνας καὶ τὰ προβλεπόμενα ἔσοδα τῶν διαφόρων καλλιεργειῶν ἢ κτηνοτροφικῶν κλάδων.

Πίναξ 1

Εἶδος Καλλιεργείας	Ἀποδόσεις κατὰ στρ.
1. Σίτος	230 KG
2. Βάμβαξ	150 » (1)
3. Ἀραβόσιτος	450 »
ἀνοίξεως	200 » (2)
ἐπίσπορος	4 / τόννοι
4. Ζαχαρότευτλα	2,5 »
ἀνοίξεως	
ἐπίσπορα	1,5 »
5. Γεώμηλα (ἐπίσπορα)	3 »
6. Τομάτα	2 »
7. Κουνουπίδι	0,9/1,5 » (3)
8. Μηδική	

Πίναξ 2

Προϊόν	Τιμαὶ εἰς δραχμὰς
1. Σίτος	2,73/KG
2. Βάμβαξ	6,50 »
3. Ἀραβόσιτος	2 »
4. Ζαχαρότευτλα	300 / Τόννοι
5. Γεώμηλα	1000 / »
6. Τομάτα	600 / »
7. Κουνουπίδι	800 / »
8. Μηδική	1000 / »

1) Σύσπορος βάμβαξ.

2) Ἡ ἀπόδοσις νοεῖται μετὰ τὴν ἀποξήρανσιν.

3) Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀπόδοσιν μηδικῆς κατὰ τὸ πρῶτον ἔτος. ὁ δὲ δεῦτερος δηλοῖ τὴν μέσσην ἐτησίαν ἀπόδοσιν ἀπὸ τοῦ 2-5 ἔτους.

### Κόστος συντελεστῶν παραγωγῆς

Πίναξ 3: Σπόροι

Εἶδος	Κόστος
1. Σίτος	3,50 δρχ. / KG
2. Βάμβαξ	3,30 » / »
3. Ἀραβόσιτος	4,50 » / »
4. Ζαχαρότευτλα	30,00 » / »
5. Γεώμηλα	2,00 » / »
6. Τομάτα	100,00 » / 1000 φυτὰ
7. Κουνουπίδι	75,00 » / 1000 φυτὰ
8. Μηδική	45,00 » / KG

Πίναξ 4: Λιπάσματα

Εἶδος	Κόστος
1. 33- 0- 0	3,15 δρχ. / KG
2. 31- 0- 0	2,15 » / »
3. 0-16- 0	1,13 » / »
4. 0- 0-48	2,22 » / »

Πίναξ 5  
Φάρμακα

Είδος	Κόστος
1. *Ασβεστος	0,50 δρχ. / KG
2. Chlordane 50 %	70,00 » / »
3. D.D.T. 10 %	10,00 » / »
4. Θειϊκός χαλκός	8,00 » / »
5. Θείον	2,73 » / »
6. Πίτυρα	1,00 » / »
7. 2,4 D.	42,12 » / »

Πίναξ 6  
Κόστος χρήσεως Γεωργικῶν Μηχανημάτων

Είδος ἐργασίας	Κόστος
1. *Αροσις μετρία	25 Δρχ. / στρ.
2. Δισκοσβάρνισμα	8 » / »
3. Κυλίνδρυσμα	5 » / »
4. Διασπορά λιπάσματος	4 » / »
5. Σπορά διὰ σπαστικής μηχανῆς	10 » / »
6. Ζιζανιοκτονία	5 » / »
7. Ψεκασμοὶ καὶ ἐπιπτάσεις	5 » / »
8. Αὐλάκωμα	15 » / »
9. Θεριζοαλωνισμὸς σίτου	9-11% τῆς παραγωγῆς
10. Ἐκκοκκισμὸς ἀραβοσίτου	7 % » »
11. Δεματοποιήσις μηδικῆς (')	12 % » »
12. Ἐκρίζωσις γεωμήλων καὶ ζαχαροτεύτλων	30 δρχ. / στρ.
13. Μεταφορὰ προϊόντων (2) ἢ σπόρων, λιπασμάτων κλπ.	4 % τῆς μεταφ.ποσότητος
14. Ἀποξηρανσις ἀραβοσίτου καὶ ξηραντήριου	0,10 δρχ. / KG

1) Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται βάσει τῶν τιμῶν τοῦ παρελθόντος ἔτους, ὅτε οἱ παραγωγοὶ κατέβαλαν 2 δρχ. κατὰ μπάλλαν χόρτου μηδικῆς βάρους 18 KG. περίπου.

2) Τὸ ποσοστὸν κυμαίνεται ἀναλόγως τῆς ἀποστάσεως.

Πίναξ 7

Έργαλεία και Ύλικά Κτήματος Έκτάσεως 24 στρ. έν Κωπαΐδι και έτήσια Χρηματικά Δαπάναι Συντηρήσεως—Έπισκευών

ΕΙΔΟΣ	Ποσόν	Τιμή Μονάδος δρχ.	Συνολική άξια δρχ.	Έτήσια Χρ. Δαπάναι δρχ.	Μ. Ο. Χρησι-μοποιήσεως ώραι	Χρηματικά δαπάναι καθ' ώραν έργ. δρχ.
1. Σκαλιστήρια	5	40	200	10% άξιας	400	0,05
2. Φυτευτήρια	2	10	20	5% »	200	0,005
3. Κοσιές (1)	3	—	—	—	—	—
4. Πηρούνια (1)	3	30	90	—	—	—
5. Θειωτήρ (έπιστήθιος)	1	250	250	30% »	30	0,25
6. Σάκκοι (2)	20	15	300	—	—	—
7. Κιβώτια (τομάτας) (2)	10	15	150	—	—	—
8. Κοφίνια (2)	5	30	150	—	—	—

1) Διά τας κοσιάς ύπολογίζομεν χρηματικήν έπιβάρυνσιν τής μηδικής διά συντήρησιν και έπισκευάς εις αναλογίαν 4 δρχ./στρ. και διά τὰ πηρούνια 2 δρχ. στρ.

2) Διά τούς σάκκους ύπολογίζομεν έπιβάρυνσιν 1 δρχ./στρ.

3) Τήν καλλιέργειαν τομάτας και κουνουπιδίου έπιβαρύνομεν μέ τó σύνολον τών χρηματικών δαπανών πρós συντήρησιν και έπισκευήν τών κιβωτίων και τών κοφινίων, τας όποιάς ύπολογίζομεν άνερχομένας εις 3 δρχ./στρ. και 2 δρχ./στρ. αντίστοιχως.

## Πίναξ 8

Καλλιεργητικά Έργασια, Συντελεστές Παραγωγής και Χρηματικά Δαπάναι  
Κατά Στρέμμα Σίτου (μετά άνοιξιάτικη ή έπισπορον καλλιέργεια).  
Αποδόσεις 230 ΚΓ.

Έργασια	Υλικά		Χρηματικά Δαπάναι				Σύνολο Χρηματικών Δαπανών
	Είδος	Ποσόν	Τιμή Μον.	Υλικών	Έργασ. έπι Συμβάσει	Λοιπά (*)	
1) Διασκοβάρνισμα (1)	—	—	—	—	8,00	94,19	94,19
2) Μεταφορά λιπασμάτων	—	—	—	—	1,13	8,00	8,00
3) Λίπανσις	0-16-0	25 ΚΓ	1,13 δρ.	28,25	4,00	—	1,13
4) Διασκοβάρνισμα	—	—	—	—	8,00	—	32,25
5) Μεταφορά σπόρου	—	—	—	—	1,82	—	8,00
6) Σπορά	σπόρος σίτου	13 ΚΓ	3,50 *	45,50	10,00	—	1,82
7) Κυλίνδρυσμα	—	—	—	—	5,00	—	55,50
8) Ζιζανιοκτονία	2,4	0,128 ΚΓ	42,12 *	5,39	5,00	—	5,00
9) Συγκομιδή	—	—	—	—	62,79	—	10,39
10) Μεταφορά (2)	—	—	—	—	17,33	—	63,79
				79,14	123,07	94,19	17,33
							297,40

1) Όταν ο σίτος ακολουθή σίτον ή καλλιέργεια του έδάφους συνίσταται εις μίαν θερινήν άρσιν και έν διασκοβάρνισμα ή διε καθάρα χρηματική πρόσδοσις είναι 313,50 δρχ.

2) Αι δαπάναι μεταφοράς άνέρχονται εις 4% τής άξιας τής μεταφερομένης ποσότητας προϊόντος ύπολογίζονται επί του ύπο- λούτου τής συνολικής παραγωγής του άπομείνου μετά την ά- φάρισιν έκ ταύτης τής άναλογούσης ποσότητας προϊόντος κατα- βαλλομένου εις τον Όργανισμόν Κωπαιδός διά τέλη, πλέον τò πο- σοστόν του Δήμουσιου, των δύο άνωτέρω προσαυξαίνομώνων κατά τò συγκομιδής προϊόντων εις τους ίδιοκτίησις μηχανών συγκομιδής.

3) Έν τή στήλη ταύτη περιλαμβάνονται τὰ καταβαλλόμενα εις τον Όργανισμόν Κωπαιδός τέλη (διά τον σίτον 15% τής παραγωγής).

\* Ακαθόριστος Πρόσοδος 230 Χ 2,73 = 627,90 Δρχ.  
Χρηματικά Δαπάναι 297,40 \*

Καθάρα Χρηματική Πρόσοδος 330,50 \*



Καλλιεργητικά Έργασια, Συντελεστά Παραγωγής και Χρηματικά Δαπάναι  
Κατά στρέμμα Βάμβακος, Απόδοσις 150 KG

Έργασια	Ημερομηνία	Αριθμός Άρδευσιών	Υ λ ι κ ά			Χρηματικά Δαπάναι				Σύνολον Χρηματ. Δαπανών
			Είδος	Ποσόν	Τιμή Μονάδ.	Υλικών	Έργα- λετων	Έργα- σιών επί συμβάσει	Λοιπαι ( <sup>2</sup> )	
1) Άροσις	( <sup>1</sup> )	—	—	—	—	—	—	—	—	124,80
2) Δισκοβάρνισμα 2X	1/4-15/4	—	—	—	—	—	—	25,00	—	25,00
3) Κυλινδρυσμα	1/4-15/4	—	—	—	—	—	—	16,00	—	16,00
4) Μεταφορά σπόρου	—	—	—	—	—	—	—	5,00	—	5,00
5) Σπορά	15/4-30/4	—	5 KG	3,30	16,50	—	—	0,66	—	0,66
6) Σκέλισμα 1ον	15/5-31/5	5,00	—	—	—	—	—	10,00	—	26,50
7) Άρδευσις 1-2	1/6-30/6	—	—	—	—	—	—	0,25	—	0,25
8) Μεταφορά θείου	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9) Θεωσις 2X	5/6-20/6	3,00	—	—	—	—	—	1,40	—	1,40
10) Σκέλισμα 2ον και έραίωμα	20/6-5/7	15,00	—	2,73	34,94	—	—	0,75	—	35,69
11) Άρδευσις 3	1/7-15/7	—	65 μ <sup>3</sup>	—	—	—	—	0,75	—	0,75
12) Σκέλισμα 3ον	5/7-20/7	10,00	—	—	—	—	—	—	—	—
13) Άρδευσις 4-5	16/7-15/8	—	—	—	—	—	—	0,50	—	0,50
14) Συγκομιδή 1η	10/10-20/10	10,00	—	—	—	—	—	—	—	—
2α	10/11-20/11	10,00	—	—	—	—	—	—	—	—
3η	1/12-10/12	4,00	—	—	—	—	—	—	—	—
15) Μεταφορά	10/10-10/12	2,00	—	—	—	—	—	—	—	—
Σύνολον		59,00			51,44			3,25	89,39	124,80
										268,88

1) Όταν ό βάμβαξ άκολουθή σίτον τότε ή άροσις εκτελείται κατά Σεπτέμβριον—Οκτώβριον. Μετά βάμβακα και γενικώς άνοι-ξιάτικη καλλιέργεια ως και μετά έπίσπορον τοιαύτην ή άροσις εκτελείται έντός του Ιανουαρίου.

2) Έν τή στήλῃ ταύτῃ περιλαμβάνονται τά καταβαλλόμενα εις τόν Όργανισμόν Κωπαιδος τέλη (διά τόν βάμβακα 19,2 KG. βάμβακος κατά στρέμμα διά παραγωγήν άνω τών 128 KG. κατά στρέμμα).

Άκαθάριστος Πρόσδοος 150 X 6,50 = 975,00 Δρ.  
Χρηματικά Δαπάναι

Καθαρά Χρηματική Πρόσδοος

305

## Π ι ν α κ ή 10

Καλλιεργητικά έργασια, συντελεστές παραγωγής και χρηματικά δαπάναι  
Κατά στρέμμα άραβοσίτου (άνοιξεως). Απόδοσις 450 KG

Έργασια	Ημερομηνία	Ανθρώπινη εργασία	Υλικά			Χρηματικά δαπάναι				Σύνολον	
			Είδος	Ποσόν	Τιμή Μον.	Υλικών	Έργων-Λείων	Έργασίων επί συμβάσει	Λοιπαι (')		
1) Άροσις	(')	—	—	—	—	—	—	25,00	135,00	135,00	
2) Μεταφορά λιπασμάτων	1/3-31/3	—	—	—	—	—	—	1,99	—	25,00	
3) Άπανσις	—	—	21-0-0	10 KG	2,15	—	—	—	—	1,99	
4) Δισκοβάρνισμα 2X	1/3-31/3	—	0-16-0	25 KG	1,13	—	—	4,00	—	53,75	
5) Μεταφορά σπόρου	15/4-30/4	—	Σπόρος (ύβριδ.)	4 KG	4,50	—	—	—	—	16,00	
6) Σπόρα	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,72	
7) Σκάλισμα 1ον και άραιώμα	15/5-30/5	10,00	—	—	—	—	—	—	—	28,00	
8) Άρδύσεις 1-4	16/6-31/7	—	—	—	—	—	—	—	—	0,50	
9) Σκάλισμα 2ον μετά προ-χώματος	20/6-5/7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
10) Συγκομιδή	15/8-31/8	20,00	—	—	—	—	—	—	—	1,00	
11) Μεταφορά	—	12,00	—	—	—	—	—	—	—	—	
12) Έκκοκισμός	Σεπτέμβριος	6,00	—	—	—	—	—	—	—	—	
13) Μεταφορά	Σεπτέμβριος	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Σύνολον		48,00					67,75	2,50	146,63	135,00	351,88

1) Ός και εις τον βέμβρακα.

2) Τέλη Όργανισμιού Κοιταχίδος άνερχόμενα εις 15 % της παραγωγής.

Άκαθάρσιτος πρόσδοος  
Χρηματικά Δαπάναι  
Καθαρά χρηματική πρόσδοος

50 X 2 = 900,00 Δρχ.  
351,88 »  
548,12 »

## Π ι ν α κ η 11

Καλλιεργητικά έργασιαι, συντελεστα παραγωγής και χρηματικά δαπάναι  
Κατά στρέμμα άραβόσιτου (έπίτοπος) 'Απόδοσις 200 KG (1)

'Εργασιαι	'Ημερομηνία	'Ανδρωπίτην άραβόσιτα	'Υ λ ι κ ά			Χρηματικά δαπάναι			Σύνολον
			Ειδος	Ποσόν	Τιμή Μον.	'Υλικών	'Εργασ- λείων	'Εργασ. επί συμβάσει	
1) Προάρδευσις	26/ 5-12/ 7	—	άρδ. ύδωρ	60 μ <sup>3</sup>	—	—	—	—	—
2) 'Αροσις	28/ 6-15/ 7	—	—	—	—	—	—	25,00	25,00
3) Μεταφορά λιπάσματος	28/ 6-15/ 7	—	—	—	—	—	—	1,76	1,76
4) Λιπανσις	28/ 6-15/ 7	—	—	—	—	—	—	4,00	4,00
5) Δισκοβάρνισμα	28/ 6-15/ 7	—	—	—	—	—	—	—	—
6) Μεταφορά σπόρου	28/ 6-15/ 7	—	—	—	—	—	—	0,72	0,72
7) Σπορά	16/ 7-31/ 7	—	—	—	—	—	—	10,00	10,00
8) 'Αρδευσις 1η	25/ 7-10/ 8	10,00	σπόρ. ύβρ. άρδ. ύδωρ	4 KG	4,50	—	—	—	—
9) Σκάλισμα 1ον και άραιωμα	1/ 8-15/ 8	—	—	—	—	—	—	—	—
10) 'Αρδευσις 2α	10/ 8-25/ 8	20,00	άρδ. ύδωρ	65 μ <sup>3</sup>	—	—	—	—	—
11) Σκάλισμα μετά παραχώματος	15/10-31/10	12,00	—	—	—	—	—	—	—
12) Συγκομιδή	—	3,00	—	—	—	—	—	—	—
13) Μεταφορά σπαδικων	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14) 'Εκκοκκισμός	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15) Μεταφορά	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16) 'Αποξήρανσις	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Σύνολον		45,00				62,10	2,50	110,65	175,25

1) 'Η απόδοσις εις άραβόσιτον πρό τής άποξηράνεως εις ξηραν-  
τήριον είναι 220 KG.

'Ακαθάρτιστος πρόσδοος

Χρηματικά δαπάναι

Καθαρά χρηματική πρόσδοος

200 X 2 400,00 ΔΡΧ.

175,25 »

224,75 »

**Π ι ν α κ η 12**  
**Καλλιεργητικά έργα (αί, συντελεστά παραγωγή και χρηματικά δαπάναι**  
**κατά στρέμμα ζαχαροτεύτων (άνοιξεως). Απόδοσις 4 τόννοι.**

Έργα (αί)	Ήμερομηνία	Άνθρωποι	Υλικά			Χρηματικά δαπάναι				Σύνολον χρημα- τικών δαπανών
			Είδος	Ποσόν	Τιμή Μον.	Υλικών	Έργων- λαίων	Έργασίων επί συμβάσει	Λοιπά (²)	
1) Άροσις	(¹)	—	—	—	—	—	—	—	—	124,80
2) Μεταφορά λιπάσματος	—	—	—	—	—	—	—	—	—	25,00
3) Άίπανσις	1/2-28/2	—	21-0-0 0 16-0 0 0 48	20 kg. 40 F.g. 15 kg.	2,15 1,13 2,22	—	—	—	—	4,86
4) Δισκοθάρισμα 2X	1/2-28/2	—	—	—	—	—	—	—	—	125,50
5) Κυλινδρoσμα	1/2-28/2	—	—	—	—	—	—	—	—	16,00
6) Μεταφορά σπόρου	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5,00
7) Σπορά	1/4-20/4	—	—	—	—	—	—	—	—	3,60
8) Άρδευσις 1η	1/6-15/6	—	σπόρος	300 kg.	30	—	—	—	—	10,00
9) Σκέλισμα 1ον και 2 ράκιωμz	5/8-20/6	15,00	—	—	—	—	—	—	—	—
10) Άρδευσις 2-3	16/6-15/7	—	—	—	—	—	—	—	—	0,75
11) Σκέλισμα 2ον	5/7 20/7	15,00	—	—	—	—	—	—	—	—
12) Άρδευσις 4-5	16/7-15/8	—	—	—	—	—	—	—	—	6,75
13) Σκέλισμα 3ον	5/8-20/8	12,00	—	—	—	—	—	—	—	—
14) Έκρίζωσις	1/10-15/10	—	—	—	—	—	—	—	—	0,60
15) Συγκέντρωσις ριζών και φόρτωσις	5/10-20/10	15,00	—	—	—	—	—	—	—	—
16) Μεταφορά	5/10 20/10	—	—	—	—	—	—	—	—	40,35
Σύνολον		57,00				216,50	2,10	138,81	124,80	477,21

(1) Ός και εις τόν βάμβακα.

(2) Τέλη Όργανισμού Κοιτίδος ανερχόμενα εις τήν  
δέξιν 19,2 χλγ. βάμβακος κατά στρέμμα.

Άκαθάρτος πρόσδος 4 X 300=1.200,00 Δραχ.  
 Χρηματικά δαπάναι 477,21 »  
 Καθαρά χρηματική πρόσδος 722,97 »

Καλλιεργητικά έργασια, συντελεσται παραγωγής και χρηματικαί δαπάναι κατά στρέμμα ζαχαροτεύτλων (επιπόρων). Απόδοσις 2,5 τόννοι.

Έργασια	Ημερομηνία	Ανθρωπινή εργασία	Υλικά			Χρηματικαί δαπάναι			Σύνολον χρηματικών δαπανών
			Είδος	Ποσόν	Τιμή Μον.	Υλικών	Έργων λείων	Έργασιών επί συμβάσει	
1) Προάρδευσις	25/6—12/7	—	ζρδ. 5δωρ	60 μ <sup>s</sup>	—	—	—	—	
2) Άρσσις	28/6—15/7	—	—	—	—	—	25,00	25,00	
3) Μεταφορά λιπασμάτων	—	—	21-0 0	10 kg.	2,15	—	2,65	2,65	
4) Λίπανσις	28/6—15/7	—	0-16-0	20 kg.	1,13	66,30	—	—	
		—	0-0-48	10 kg.	2,22	—	—	4,00	70,30
5) Δισκοσίβρισιμα 2X	28/6—15/7	—	—	—	—	—	—	16,00	
6) Μεταφορά σπόρου	28/6—15/7	—	—	—	—	—	—	3,60	
7) Σπορά	28/6—15/7	—	σπόρος	3 kg.	30,00	90,00	—	10,00	
8) Κυλίνδρουσμα	28/6—15/7	—	—	—	—	—	—	5,00	
9) Άρδευσις 1—3	16/7—20/8	—	ζρδ. 5δωρ	150 μ <sup>s</sup>	—	—	—	—	
10) Σφάλισμα 1ον και άραίωμα	15/8—25/8	15,00	—	—	—	—	0,75	0,75	
11) Άρδευσις 4	20/8—31/8	—	ζρδ. 5δωρ	50 μ <sup>s</sup>	—	—	—	—	
12) Σφάλισμα 2ον	16/9—30/9	15,00	—	—	—	—	—	—	
13) Σφάλισμα 3ον	16/10—31/10	12,00	—	—	—	—	—	—	
14) Έξριζωσις	Δεκέμβριος	—	—	—	—	—	—	—	
15) Συγκέντρ. ριζών και φόρτωσις	Δεκέμβριος	10,00	—	—	—	—	—	—	
16) Μεταφορά	Δεκέμβριος	—	—	—	—	—	—	—	
Σύνολον		52,00				156,30	2,10	121,25	279,65

Ακαθάριστος πρόσδοσις 2,5 X 300 = 750,00 Δρχ.  
 Χρηματικαί δαπάναι 279,65 »  
 Καθαρά χρηματική πρόσδοσις 470,35 »

## Π ι ν α κ 14

Καλλιεργητικά έργασια, συντελεσται παραγωγής και χρηματικά δαπάναι κατά στρέμμα γεωμήλων (έπισπόρων) Άπόδοσις 1,5 τόννοι

Έργασια	Ήμερομηνία	Άνθρω- πίνη έργ. ώραι	Υ λ ι κ α			Χρηματικά δαπάναι			Σύνολον Χρημα- τικών δαπανών
			Είδος	Ποσόν	Τιμή μονάδος	Υλικών	Έργα- λειών	Έργα- σιών επί συνβάσει	
1) Προάρδευσις	20] 7—31] 7	—	ζρδ. ύδωρ	60 μ <sup>3</sup>	—	—	—	—	—
2) Άροσις	25] 7—5] 8	—	—	—	—	—	—	25,00	25,00
3) Μεταφορά λιπάσματος	—	—	21·0·0	10 kg.	2,15	—	—	4,21	4,21
4) Δίπτανσις	—	—	0·16·0	25 kg.	1,13	105,25	—	4,00	109,25
			0 0·48	25 kg.	2,22	—	—	—	—
5) Δισκοδέσμησις	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6) Αδύλωμα	25] 7—5] 8	—	—	—	—	—	—	15,00	15,00
7) Προδλάστησις σπόρου και με- ταφορά	25] 7—5] 8	—	—	—	—	—	—	—	—
8) Φύτευσις	1] 8—5] 8	4,00	—	170 kg.	2,00	—	—	13,60	13,60
9) Κάλυψις σπόρου	1] 8—5] 8	—	—	—	—	—	—	—	—
10) Άρδεύσεις 1—2	10] 8—31] 8	—	ζρδ. ύδωρ	100 μ <sup>3</sup>	—	—	—	15,00	15,00
11) Σφάλισμα 1ον	25] 8—10] 9	10,00	—	—	—	—	—	—	—
12) Ψεκασμοί 3 Χ	Αύγ. Σεπτ.	—	—	—	—	—	—	—	—
			—	—	—	—	—	—	—
13) Άρδεύσεις 3—4	1] 9—30] 9	—	ζρδ. ύδωρ	100 μ <sup>3</sup>	8,00	—	—	15,00	26,31
14) Σφάλισμα 2ον και παράχλωμα	20] 9—5] 10	20,00	—	—	0,50	—	—	—	—
15) Έκρίζωσις και συλλογή	25] 11—10] 12	10,00	—	—	—	—	—	—	—
16) Φόρτωσις και μεταφορά	25] 11—10] 12	2,00	—	—	—	—	—	—	—
17) Ψεκασμός εις άποθήκη	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Σ ύ ν ο λ ο ν		46,00				472,86	2,50	183,81	659,17

\* Ακαθάριστος πρόσδοσις 1,5 Χ 1000 = 1.500,00 Δρα.  
Χρηματικά δαπάναι 659,17 »  
Καθαρά χρηματική πρόσδοσις 840,83 »



## Π ι ν α κ η 1 5

Καλλιεργητικά έργασιαι, συντελεσται παραγωγής και χρηματικαι δαπάναι  
 Έγκατάστασις 1 Στρ. Μηδικής. Απόδοσις 1ου έτους 0,9 τόννοι

Έργασιαι	Ημερομηνία	Άνω άνω έργασιαι	Υ λ ι κ ά			Χρηματικαι δαπάναι				Λογολογ Σ	
			Ειδος	Ποσόν	Τιμή Μον.	Υλικών	Έργα- λείων	Έργασίων επί συμβάσει	Λοιπαί		
1) Άροσις 2X	112-28 2	—	—	—	—	—	—	—	124,80	124,00	
2) Μεταφορά λιπάσματος	10 3-25 3	—	—	—	—	—	—	—	—	50,00	
3) Λίπανσις	10 3-25 3	—	—	—	—	—	—	—	—	2,26	
4) Σδάρνισμα 2X	10 3-25 3	—	0-16-0	500 KG.	1,13	—	56,50	—	—	60,50	
5) Κυλίνδρουμα	25 3-10 4	—	—	—	—	—	—	—	—	16,00	
6) Μεταφορά σπόρου	25 3-10 4	—	—	—	—	—	—	—	—	5,00	
7) Σπορά	25 3-10 4	—	—	—	—	—	—	—	—	4,50	
8) Βοτάνισμα 2X	15 4-31 5	32,00	—	—	45,00	—	—	—	—	10,00	
9) Αρδεύσεις 1-8	Ιούν.-Σ/βριος	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
10) Κοπή χόρτου 3X	Θέρος Σ/βριος	9,0	—	—	—	—	—	—	—	—	
11) Ανάρδευσις χόρτου 3X	»	3,0	—	—	—	—	—	2,00	—	108,00	
12) Δεματοποίησης 3X	»	—	—	—	—	—	—	—	—	24,03	
13) Μεταφορά	»	1,00	—	—	—	—	—	—	—	—	
Σύνολον		45,00					169,00	2,00	223,79	124,80	519,59

Καλλιεργητικά έργασιαι, συντελεσται παραγωγής και χρηματικά δαπάναι  
Κατά στρέμμα μηδικής και κατ' έτος από 2ου - 5ου έτους. Απόδοσις 1,5 τόννοι

Π ι ν α κ 1 6

Έ ρ γ α σ ι α ι	Ήμερομηνία	Άρθροί έργων	Υ λ ι κ ή		Χρηματικά δαπάναι		Χρηματικόν ζύνολον	
			Είδος	Ποσόν	Έργα- λειών	Έργασίων συμβάσει		Λοιπά
1) Κοπή 1η "Ανάδουσις	10] 5-25] 5	4,00 1,60	— —	— —	0,80 0,40	— —	124,80 0,80 0,40	
2) Δεματοποίησης Μεταφορά	20] 5-5] 6	0,40	—	—	—	36,00 9,03	— 45,03	
3) "Αρδουσις 1-2	25] 5-25] 6	—	—	—	—	—	—	
4) Κοπή 2α λοιπά ως εις πρώτην και μεταφορά	20] 6-5] 7 23] 6-8] 7	4,00 1,60 0,40	—	—	0,80 0,40	36,00	36,00 0,40 9,03	
5) "Αρδουσις 3-4	25] 6-25] 7	—	—	—	—	—	—	
6) Κοπή 3η λοιπά ως εις 1ην και μεταφορά	20] 7-5] 8	4,00 1,60 0,40	—	—	0,80 0,40	36,00	36,00 0,40 9,03	
7) "Αρδουσις 5-6	23] 7-8] 8	—	—	—	—	—	—	
8) Κοπή 4 λοιπά ως εις 1ην και μεταφορά	25] 7-25] 8 20] 8-5] 9 23] 8-8] 9	4,00 1,60 0,40	—	—	0,80 0,40	36,00	36,00 0,40 9,03	
9) "Αρδουσις 7-8	25] 8-25] 9	—	—	—	—	—	—	
10) Κοπή 5η λοιπά ως εις 1ην και μεταφορά	1] 10-15] 10 10] 10-25] 10	4,00 1,60 0,40	—	—	0,80 0,40	36,00	36,00 0,40 9,03	
Σύνολον		30,00			6,00	225,15	124,80	355,95

"Ακαθάρτιστος πρόσδοδος 1ου έτους  $0,9 \times 100 = 900,00$  Δρχ.

" » 2-5 "  $4 \times 1,5 \times 1000 = 6.000,00$  »

Συνολική ακαθάρτιστος πρόσδοδος 6.900,00 »

Χρηματ. δαπάν. 1ου έτους 519,59 Δρ. + Χρηματ.

δαπάναι 2-5 έτων 1.423,80 Δρχ. = Σύν. χρημ. δαπ. 1943,39 Δρ.

Καθαρά χρηματική πρόσδοδος 4.956,61 »  
ήτοι καθ. χρημ. πρόσ. έτησ. 4.956,61 και 991,32 Δρ. κατά στρέμμα

Πίναξ 17

Χορηγούμενοι ποσότητες ύδατος εις τὰς διαφόρους καλλιεργείας ἐν Κωπατίδι  
εις κ. μ. κατὰ στρέμμα. Ἐρδεύσεις διὰ τεχν. βροχῆς

Περίοδος	Σίτος	Βάμβαξ	Ἀραβόσιτος		Ζαχαρότευτ.		Γεώμ. ἐπίστ.	Μηδική
			Ἀνοιξ.	Ἐπίσ.	Ἀνοιξ.	Ἐπίσ.		
16]4—30]4	—	—	—	—	—	—	—	—
1]5—15]5	—	—	—	—	—	—	—	—
16]5—31]5	—	—	—	—	—	—	—	20
1]6—15]6	—	50	55	—	50	—	—	60
16]6—30]6	—	55	65	20	55	20	—	62
1]7—15]7	—	65	65	40	65	40	—	62
16]7—31]7	—	65	65	65	65	50	60	66
1]8—15]8	—	75	—	65	65	75	25	70
16]8—31]8	—	—	—	—	—	50 <sup>(1)</sup>	75	67
1]9—15]9	—	—	—	—	—	25	50	60
16]9—30]9	—	—	—	—	—	—	50 <sup>(2)</sup>	40 <sup>(2)</sup>
Σύνολον	—	300	250	190	300	260	260	510

1) Κατὰ τὸν Αὐγούστον ὑπολογίζονται τρεῖς ἄρδεύσεις ἐκ 50 κ. μ. ἐκάστη.

2) Ἐνίοτε λόγῳ πρῶιμων βροχῶν δὲν παρίσταται ἀνάγκη ἄρδεύσεως κατὰ τὴν περίοδον ταύτην.

Πίναξ 18

Συγκεντρωτικὸς πίναξ Καθαρᾶς Χρηματικῆς προσόδου  
καθ'ὀμάδας καλλιεργειῶν κατὰ στρέμμα καὶ κατ' ἔτος

Ὅμας Καλλιεργειῶν	Καθαρὰ Χρηματικὴ Πρόσοδος Δρχ.
1) Σίτος	313,50
2) Βάμβαξ	706,12
3) Ἀραβόσιτος (ἀνοιξεως)	548,12
4) Ζαχαρότευτλα (ἀνοιξεως)	722,79
5) Σίτος καὶ Ἀραβόσιτος (ἐπίσπορος)	555,35
6) Σίτος καὶ Ζαχαρότευτλα »	800,85
7) Σίτος καὶ Γεώμηλα »	1.171,33
8) Μηδική	991,32

Πίναξ 19

Κατανομή 'Ανθρωπίνης 'Εργασίας εις τὰς διαφόρους Καλλιέργειας  
Κατὰ μῆνα καὶ κατ' Ἔτος εἰς ὥρας κατὰ Στρέμμα

Καλλιέργειαι	'Απρίλιος		Μάϊος		'Ιούνιος		'Ιούλιος		Αύγουστος		Σεπτέμβριος		'Οκτώβριος		Νοέμβριος		Δεκέμβριος		Σύνολον
	1-15	16-30	1-15	16-30	1-15	16-30	1-15	16-30	1-15	16-30	1-15	16-30	1-15	16-30	1-15	16-30	1-15	16-30	
1) Σίτος	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	59,00
2) Βάμβας	-	-	-	-	2,00	11,00	11,50	3,50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	48,00
3) 'Αραβόσιτος	-	-	-	-	-	13,50	6,50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45,00
'Ανοιξέως ἐπίσπορος	-	-	-	-	-	-	-	3,50	13,00	13,50	-	-	-	15,00	-	-	-	-	45,00
4) Ζαχαρότευτλα	-	-	-	-	10,00	5,00	10,00	5,00	8,00	4,00	-	-	-	10,00	5,00	-	-	-	57,00
'Ανοιξέως	-	-	-	-	-	-	-	-	-	15,00	-	15,00	-	12,00	-	-	-	6,00	52,00
ἐπίσπορα	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57,00
5) Γεώμηλα	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4,00	3,50	6,50	13,50	6,50	-	-	-	8,00	46,00
ἐπίσπορα	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	46,00
6) Κουουπίδι	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	46,00
ἐπίσπορο	-	-	-	-	-	-	10,00	-	-	10,00	-	15,00	-	-	-	-	-	-	75,00
7) Τομάτα	-	11,00	19,00	16,00	10,00	23,00	24,00	18,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	134,00
8) Μηδική	-	3,20	0,64	2,80	2,43	3,24	2,43	3,24	2,43	3,24	2,43	0,43	3,84	0,96	-	-	-	-	33,00

# SULLA RIPARTIZIONE GEOGRAFICA DELLE VENDITE E SULLA DISTRIBUZIONE DEI MEZZI DI TRASPORTO DI DIVERSA CAPACITÀ

MARIA PASSAQUINDICI — Roma

## **Representazione**

In queste pagine viene studiato un metodo per determinare come una industria possa ripartire il suo prodotto o i suoi prodotti nei diversi luoghi di vendita in modo da rendere massimo il suo utile o, ciò che è la stessa cosa, da rendere minima la spesa.

Si suppone che questa industria possenga vari centri di distribuzione e vari centri di consumo, e che abbia a disposizione mezzi di trasporto di capacità eventualmente variabile da un mezzo all'altro. Questi mezzi di trasporto sono disponibili ai vari centri di distribuzione. Dapprima viene determinata la suddivisione geografica dei centri di consumo, nel senso di definire i centri che devono essere riforniti, in parte o totalmente, da ogni centro di distribuzione. Tale ripartizione viene effettuata una volta per tutte.

In un secondo tempo, conoscendo i centri di consumo che devono essere riforniti da ogni centro di distribuzione e i mezzi di trasporto disponibili presso questi ultimi, viene determinato come utilizzare in modo ottimo questi mezzi di trasporto: così potrà risultare più vantaggioso che un centro di consumo venga rifornito da più mezzi (che in totale depositano al centro in questione la quantità da esso richiesta), anziché da uno solo con capacità superiore o uguale alla domanda di esso centro. Tale distribuzione varia naturalmente da giorno, dipendendo dall'urgenza con la quale i centri di consumo richiedono il rifornimento.

Questo problema può essere risolto solo con l'ausilio di calcolatori elettronici.

La Soc. Olivetti Bull (Milano) col suo elaboratore elettronico Gamma ET ha risolto per la Soc. Imprese Italiane all'Estero (Torino) verso la fine del 1958 un problema che ha alcuni punti di contatto con la seconda parte di quello trattato in queste pagine. Si trattava di determi-

---

*Ἡ συγγραφεὺς διδάσκει Ἐφαρμογὰς Μηχανογραφίας καὶ Ἠλεκτρονικῆς εἰς τὴν Σχολὴν Στατιστικῆς καὶ Μηχανογραφίας τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ρώμης.*

nare, nella costruzione di una diga, il programma dei getti di calcestruzzo. La diga era suddivisa in speroni ed il calcolatore stabili, giorno per giorno, su quali speroni era possibile eseguire un turno di getto ed il numero del turno, variabile da sperone a sperone: in 62 sec. veniva determinato il programma dei getti dell'intera diga per un giorno lavorativo (1).

### Ripartizione Geografica delle vendite

1.— Supponiamo che una certa industria abbia  $n$  centri di distribuzione (o di produzione) ed  $m$  centri di consumo da rifornire, i quali siano distribuiti in una zona geografica abbastanza vasta.

Ogni centro di distribuzione abbia a disposizione dei mezzi di trasporto, la cui capacità, eventualmente variabile da un mezzo a un altro, sia  $s$ . Ogni mezzo si suppone possa compiere un solo viaggio al giorno. Per viaggio si intende un percorso che, partendo dal centro di distribuzione e toccando vari centri di consumo, ritorni al centro di distribuzione di partenza.

Può darsi, ciò che infatti comunemente accade, che alcuni centri di consumo debbano essere riforniti più spesso di altri. Consideriamo allora un periodo di tempo tale che, durante esso, ogni centro possa essere rifornito un numero intero finito di volte. Se per esempio il centro A deve essere rifornito ogni 14 giorni, il centro B ogni 7 giorni, il centro C ogni 6 giorni e il centro D ogni 4 giorni, si considera il m.c.m. tra 14, 7, 6, 4. Tale m.c.m. è 84; il periodo di tempo da considerare è allora di 84 giorni. Durante questo periodo di tempo

A	verrà rifornito	6	volte
B	»	»	12 »
C	»	»	14 »
D	»	»	21 »

Inoltre si determina la quantità disponibile nel periodo di tempo presso i vari centri di distribuzione.

Si deve ora procedere innanzi tutto alla ripartizione geografica delle vendite, cioè determinare quali e quanti centri di consumo devono essere riforniti, totalmente o parzialmente, da ogni centro di distribuzione. Supponiamo che la domanda non superi l'offerta, cioè che la quantità disponibile presso i centri di distribuzione, sempre nel considerato periodo di tempo, non sia inferiore alla quantità di prodotto richiesta. Se così non fosse, si dovrebbe procedere a una politica di espansione del

1. In questo articolo, per capacità si è intesa la portata massima in volume; se si pensa la capacità come portata massima in peso, allora il costo unitario è quello dell'unità di peso, e la quantità richiesta o disponibile è espressa nell'unità di peso.



mercato, tenendo presente di dover soddisfare a precise condizioni economiche e di gestione aziendale.

Nella supposta ipotesi, si considerino le distanze tra i centri di consumo e i centri di distribuzione, e tra esse si scelga la distanza minima (se non è unica, la scelta è arbitraria tra la minime).

Questa distanza viene ad identificare un centro di consumo e un centro di distribuzione. Può darsi che la domanda di questo centro di consumo superi l'offerta del centro di distribuzione scelto: in questo caso lo si rifornirà parzialmente e si passerà a considerare le distanze tra il centro di consumo rifornito parzialmente e i vari centri di distribuzione, per determinare il centro di distribuzione, o i centri di distribuzione, che ne deve completare il rifornimento. Se non si verifica questo caso, il centro di consumo e il centro di distribuzione si dicono «compatibili». Indichiamoli con  $C_{ii}$  e  $D_i$  rispettivamente. Poiché  $D_i$  rifornisce  $C_{ii}$ ,  $D_i$  avrà disponibile per gli altri centri di consumo la quantità totale diminuita di quella inviata a  $C_{ii}$ . Ora si considera  $D_i$  e, sempre considerando prima le distanze inferiori, si determinano i centri di consumo che  $D_i$  deve ancora rifornire. Se esiste un numero di centri di consumo, la cui domanda totale uguaglia l'offerta di  $D_i$ , si escludono essi centri di consumo e  $D_i$ , e si riprende l'esame della nuova situazione come avanti. Se invece si arriva a un centro di consumo che può venire solo parzialmente rifornito da  $D_i$ , allora la nuova situazione differisce dalla iniziale per il fatto che da essa vengono esclusi  $D_i$  e i centri di consumo da esso riforniti totalmente, mentre il centro di consumo rifornito parzialmente figurerà con domanda inferiore e si partirà da esso per determinare, sempre in base alla distanza minima, quale altro centro di distribuzione prendere in considerazione.

Così si procede e si perviene a una ripartizione geografica, che diremo di «base».

Bisogna ora procadere, se è possibile, a modificare tale ripartizione, in modo da ottimizzarla, relativamente ad una funzione che andremo ad esplicitare, indi a ricercare.

Si è detto che presso ogni centro di distribuzione sono disponibili mezzi di trasporto di diversa capacità, il cui costo al km. varia a seconda della quantità trasportata e della capacità. Consideriamo allora la generica capacità  $s$  e dividiamo l'intervallo  $(0,s)$  in intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra. Tale divisione dipende da  $s$ , cioè dalla capacità:



fig. 1

In ognuno di questi intervalli il costo di trasporto al km. è costante, fissato  $s$ , ed il suo andamento è rappresentato in fig. 2.

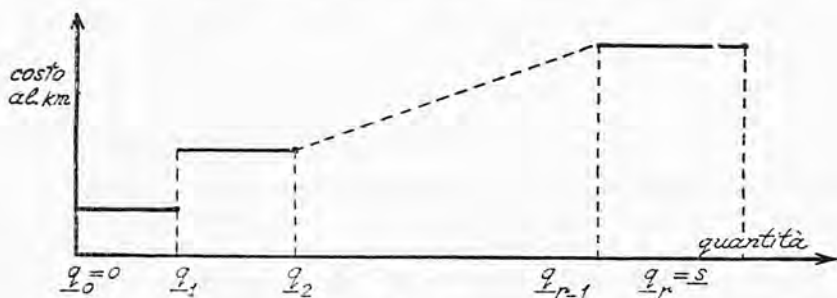


fig. 2

Così un mezzo di trasporto di capacità  $s$ , disponibile al centro di distribuzione  $h$ , che trasporta una quantità compresa tra  $q_h$  e  $q_{h+1}$  costerà, per trasportare tale quantità al centro di consumo  $k$ :

$$c_{hs, q_{h+1}} d_{hk}$$

dove con  $d_{hk}$  si intende la distanza in km. tra il centro di distribuzione  $h$  e il centro di consumo  $k$ , e  $c_{hs, q_{h+1}}$  è il costo al km. per trasportare una quantità maggiore di  $q_h$  e minore o uguale a  $q_{h+1}$  col mezzo di trasporto di capacità  $s$  disponibile in  $h$ . Si calcoli allora per ogni mezzo di trasporto la quantità media trasportata nel periodo di tempo considerato e quindi il costo medio per ogni km. e per ogni unità di volume trasportata. Per il mezzo di trasporto considerato avanti tale media si indicherà con  $\bar{c}_{hs}$ . Si calcoli poi la media di questi costi medi (che dipendono da  $s$ ) per tutte la capacità relativamente a ogni centro di distribuzione: così per il centro di distribuzione  $h$  tale media si indica con  $\bar{c}_h$ . Poniamo:

$$\bar{c}_h d_{hk} = \bar{c}_{hk}$$

ed indichiamo con  $x_{hk}$  la quantità in volume trasportata in media nel periodo di tempo considerato dal centro di distribuzione  $h$  a quello di consumo  $k$ .

La funzione da rendere minima è:

$$f = \bar{c}_{11}x_{11} + \bar{c}_{12}x_{12} + \dots + \bar{c}_{1m}x_{1m} + \dots + \bar{c}_{2m}x_{2m} + \dots + \bar{c}_{n1}x_{n1} + \dots + \bar{c}_{nm}x_{nm}$$

I vincoli sono, indicando con  $X_k$  la quantità media richiesta dal centro di consumo  $k$  e con  $Y_h$  la quantità media disponibile al centro di distribuzione  $h$  nel periodo di tempo considerato:

$$\begin{aligned} x_{h1} + x_{h2} + \dots + x_{hm} &\leq Y_h & (h = 1, 2, \dots, n) \\ x_{1k} + x_{2k} + \dots + x_{nk} &= X_k & (k = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

Nel caso in cui la domanda uguagli l'offerta, nel primo gruppo di vincoli non varrà mai il segno  $<$ .

Ognuno dei vincoli verrà ripetuto tante volte quanti sono i tipi di merce da considerare (tale osservazione vale anche per ogni termine della funzione  $f$ ): qui per semplicità è stata considerato il caso di una sola merce. Questo problema si risolve evidentemente col metodo classico del semplice. Si arriva perciò a una «ottima» ripartizione geografica, definendo in tal modo quali e quanti centri di consumo devono essere riforniti interamente o parzialmente da ogni centro di distribuzione.

### Distribuzione dei mezzi di trasporto

2. Consideriamo ora una qualsiasi zona di distribuzione: in essa vi sarà un solo centro di distribuzione con uno o più centri di consumo; il centro di distribuzione avrà a sua disposizione un certo numero  $p$  di mezzi di trasporto; per semplicità non teniamo conto dell'indice relativo alla zona di distribuzione, perché consideriamo ogni singola zona separatamente, ma teniamo conto dell'indice  $1, 2, \dots, p$ , che indica il mezzo di trasporto considerato. Sarà:

$$c_{ts, q_{h+1}}, \quad t = 1, 2, \dots, p$$

il costo per km. del mezzo  $t$ , di capacità  $s$ , disponibile al centro di distribuzione considerato, quando trasporta una quantità compresa tra  $q_h$  e  $q_{h+1}$  oppure  $q_{h+1}$ .

Si consideri il circuito minimo che parte dal centro di distribuzione e che, tornando ad esso, passa per tutti i centri di consumo. Ordiniamo questi ultimi secondo l'ordine in cui si succedono lungo il tragitto ed indichiamoli:

$$C_1, C_2, \dots, C_l$$

Il problema che ora ci si pone è quello di determinare come i vari mezzi di trasporto distribuiscono la merce lungo questo percorso. Se qualche centro di consumo non è collegato che al centro di distribuzione, tale centro verrà rifornito indipendentemente dagli altri, utilizzando il mezzo più conveniente, scelto in base alla domanda della merce. Scartiamo questo caso, che non presenta alcuna difficoltà.

Alcuni centri avranno necessità di essere riforniti con la massima urgenza, altri no. Distinguiamo perciò i centri di consumo in due categorie:

$$\begin{aligned} \text{centri di massima urgenza: } & C_1, C_2, \dots, C_{l'} \\ \text{centri di minor urgenza: } & C_{l'+1}, \dots, C_l \end{aligned} \quad l' \leq l$$

I centri di massima urgenza li chiameremo centri di urgenza 1 (ciò significa che questi centri vanno riforniti immediatamente, cioè nel primo giorno lavorativo); quelli di minor urgenza li diremo centri di urgenza

$> 1$ , cioè di urgenza 2, 3, 4, ... (ciò vuol dire che essi verranno riforniti il 2°, 3°, 4°, ... giorno lavorativo).

Esaminiamo il problema, considerando le varie eventualità.

Si possono verificare 3 casi :

1° = i mezzi di trasporto non riescono a rifornire totalmente tutti i centri di urgenza 1.

2° = i mezzi di trasporto possono trasportare merce per rifornire totalmente solo i centri di urgenza 1.

3° = i mezzi di trasporto possono rifornire anche centri di urgenza  $> 1$ .

3. Consideriamo il 1° caso.

I centri di urgenza 1 richiedono le quantità (anche ora supponiamo che sia richiesta una sola merce; il considerare più merci porta solo alcune complicazioni di carattere formale):

$$X_1, X_2, \dots, X_l$$

e la quantità disponibile sia  $Y$ .

I mezzi di trasporto disponibili costino al km. rispettivamente:

$$c_{1s}, c_{2s}, \dots, c_{ps}$$

dove  $s$  indica la capacità del mezzo di trasporto, e  $c_{ts}$  ( $t=1, 2, \dots, p$ ) varia a seconda della capacità e della quantità trasportata.

Con  $K_{qr}$  si indichi la distanza in km. tra  $C_q$  e  $C_r$ .

Si hanno allora i vincoli :

$$(1) \quad X_1 + X_2 + \dots + X_l \leq Y$$

$$(2) \quad \sum_t x_{ut} \leq X_u \quad (u=1, 2, \dots, l')$$

$$(t=1, 2, \dots, p)$$

$$(3) \quad \sum_u x_{ut} = s \quad s = \text{variabile a seconda del mezzo}$$

dove  $x_{ut}$  indica la quantità scaricata nel centro di consumo  $u$  dal mezzo di trasporto  $t$ . Nei vincoli (2) vale almeno una volta il segno  $<$ .

La funzione da minimizzare é :

$$f = \sum_1^p [K_{01} c_{1s,s} + K_{12} c_{1s, (s-x_{11})} + K_{22} c_{1s, (s-x_{11}-x_{21})} + \dots + K_{l'0} c_{1s,0}]$$

Il primo e l'ultimo termine di ogni membro della sommatoria sono costanti, perché sono costanti le quantità  $K_{01}$ ,  $K_{l'0}$ ,  $c_{1s,s}$  e  $c_{1s,0}$ . Perciò la funzione  $f$  si riduce a :

$$f = \sum_1^p [K_{12} c_{1s, (s-x_{11})} + \dots + K_{l'-1, l'} c_{1s, (s-x_{11}-\dots-x_{l'-1, l'})}]$$

La parentesi al terzo indice di  $c$  significa che va considerato l'estremo superiore dell'intervallo in cui cade la quantità fra parentesi: cioè ( $q'$ ), per es., é l'estr. sup. dell'intervallo in cui cade ( $q'$ ). Il 2° caso é analogo a questo, tranne che nelle relazioni (2) il  $\leq$  é sostituito dall'= $.$

4. Il 3° caso considera punti di urgenza maggiori di 1.

I vincoli ora sono :

$$(1) \quad X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq Y$$

$$(2) \quad \sum_1^p x_{ut} = X_u \quad (t = 1, 2, \dots, p) \\ (u = 1, 2, \dots, l')$$

$$(2') \quad \sum_1^p x_{u't} \leq X_{u'} \quad (u' = l'+1, \dots, l)$$

$$(3) \quad \sum_1^1 x_{it} = s \quad s = \text{variabile a seconda del mezzo}$$

La nuova funzione  $f$  è evidente: basta infatti sostituire a  $l'$ , 1. E' chiaro che nel rifornire i centri di urgenza maggiore di 1 bisogna dare la precedenza a quelli di urgenza 2, poi a quelli di urgenza 3, e così via. Qui per semplicità i centri di urgenza maggiori di 1 si sono considerati tutti di uguale urgenza: il considerarli di diverse urgenze non complica affatto il problema.

5. E' evidente che tale problema non si può risolvere con il metodo classico del simplesso, perché nella funzione  $f$  da ottimizzare non figurano i costi costanti: essi infatti lo sono solo in intervalli, e rappresentano perciò funzioni continue con un numero finito di discontinuità.

Supponiamo allora di avere trovato una soluzione qualunque al problema e di avere calcolato il relativo valore di  $f$ .

Sia essa una soluzione «base». Costruiamo la tavola del simplesso.

Se i  $c_{ts}$  fossero costanti si sceglierebbe una variabile non di base in modo opportuno (ad es. come nel metodo del simplesso) e relativamente ad essa una variabile di base che viene sostituita colla variabile non di base che ne ha determinato la scelta: in tal modo si migliora di volta in volta il valore della funzione  $f$ .

Qui non è possibile procedere in questo modo, perché la sostituzione delle variabili di base e non di base, scelte come nel metodo classico del simplesso, può non portare alcun contributo, cioè non migliorare — in questo caso diminuire — il valore di  $f$ , e anzi peggiorare la situazione. Si opera però in modo analogo, cioè si opera su ogni variabile non di base come si operava sulla variabile prescelta nel metodo classico del simplesso; per ognuna di esse si sceglie la variabile di base da sostituire. Si calcola il valore della funzione  $f$  in ognuno di questi casi (tanti quante sono le variabili non di base) e, scegliendo il minore fra essi e quello calcolato relativamente alla soluzione base che ha determinato la tavola del simplesso in questione, si decide quali variabili (una di base e una non di base) entrano in gioco per migliorare il valore di  $f$ . Scelte le variabili, si forma la nuova base e si calcola il nuovo valore di  $f$ .

Il processo si arresta quando un tale scambio non porta alcun miglioramento all'ultimo valore calcolato di  $f$ .

È evidente che "utilizzo dei calcolatori elettronici, è indispensabile in entrambi i problemi.

### ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς τὸ ἄρθρον ἐξετάζονται δύο προβλήματα: Τὸ πρῶτον πρόβλημα ἀφορᾷ εἰς τὴν γεωγραφικὴν κατανομὴν τῶν πωλουμένων ἀγαθῶν διὰ μεταφορικῶν μέσων διαφόρου δυναμικότητος. Τὸ κόστος μεταφορᾶς μεταβάλλεται καὶ ἐξαρτᾶται τόσον ἐκ τῆς μεταφερομένης ποσότητος, ὅσον καὶ ἐκ τῆς δυναμικότητος τῶν μεταφορικῶν μέσων. Κατὰ συνέπειαν ἡ συνάρτησις τῆς συνολικῆς δυναμικότητος τῶν μεταφορικῶν μέσων ἐμφανίζεται ὡς μία συνάρτησις μὲ ὠρισμένον ἀριθμὸν ἀσυνεχειῶν. Τὸ δεύτερον πρόβλημα εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῶν συναρτήσεων—κριτηρίων βάσει τῶν ὁποίων τὸ κόστος διανομῆς τῶν πωλουμένων ἀγαθῶν ἐλαχιστοποιεῖται. Τὰ ὡς ἄνω προβλήματα δύνανται νὰ λυθοῦν μόνον τῇ βοηθείᾳ ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστικῶν μηχανῶν.



Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α

# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ\* ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΝ

## ΜΕΘΟΔΟΣ ΛΥΣΕΩΣ ΔΙ' ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΕΓΚΕΦΑΛΟΥ

Τοῦ κ. ΣΠΥΡΟΥ Ε. ΠΕΦΑΝΗ

Προγραμματιστοῦ καὶ Μηχανικοῦ Ἑλεκτρονικῶν Ἑγκεφάλων

### Γ Ε Ν Ι Κ Α

Ἔνα ἀπὸ τὰ πιὸ σπουδαῖα πλεονεκτήματα καὶ χαρακτηριστικὰ τῶν Ἑλεκτρονικῶν Ἑγκεφάλων εἶναι ἡ ἰκανότης των νὰ δίδουν λύσιν εἰς προβλήματα, πού περιλαμβάνουν μεγάλον ὄγκον δυσκόλου ὑπολογιστικῆς ἐργασίας. Ὑπάρχουν πράγματι προβλήματα, πού οἱ ἄνθρωποι ἀποφεύγουν νὰ λύσουν ἐξ αἰτίας τοῦ ὄγκου τῶν ὑπολογισμῶν καὶ ἐπίσης τοῦ μεγάλου χρόνου, πού ἀπαιτεῖται διὰ τὴν λύσιν των. Ὅπωςδὴποτε οἱ Ἑλεκτρονικοὶ Ἑγκεφαλοὶ, ἐκτὸς τῆς ταχύτητος, ἔχουν καὶ τὸ ἐπίσης σπουδαῖον χαρακτηριστικὸν νὰ περιορίζουν εἰς τὸ ἐλάχιστον τὰς πιθανότητας λαθῶν.

Μία κατηγορία προβλημάτων πού διὰ τὴν λύσιν των ἀπαιτοῦν τὴν ἐκτέλεσιν μεγάλου ἀριθμοῦ πράξεων καὶ ἐπίσης μεγάλην προσοχὴν διὰ νὰ μὴ γίνουν λάθη, εἶναι τὰ προβλήματα συστημάτων μεγάλου ἀριθμοῦ γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ γενικώτερα τὰ προβλήματα μητρῶν. Τὰ προβλήματα αὐτὰ παρουσιάζουν μεγάλο ἐνδιαφέρον καὶ ἐμφανίζονται εἰς οἰκονομοτεχνικὰς μελέτας (ἐλαχιστοποίησις κόστους μεταφορᾶς, ὀρθολογικὴ διάταξις συντελεστῶν

\* *Σημείωσις* : Εἰς τὴν μελέτην μας ἀναφερόμεθα εἰς συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ἰσαριθμοὺς πρὸς τὰς ἐξισώσεις ἀγνώστους. Διὰ συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ἀγνώστους πλείονας τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐξισώσεων, τὰ ὅποια συναντῶνται συχνὰ εἰς μελέτας γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἐφαρμόζεται διάφορος τῆς περιγραφομένης μέθοδος λύσεως, γνωστὴ ὡς μέθοδος Simplex.



$$\left[ \begin{array}{cccccccc|c|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1v} & K_1 & \Sigma_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{2v} & K_2 & \Sigma_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{3v} & K_3 & \Sigma_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{v1} & \alpha_{v2} & \alpha_{v3} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{vv} & K_v & \Sigma_v \end{array} \right] \quad (3)$$

Ο μαθηματικός τύπος που χρησιμοποιείται δια την απαλειφὴν εἶναι ὁ ἑξῆς :

$$\alpha_{(\sigma-1)(\mu-1)} = \alpha_{\sigma\mu} - \frac{\alpha_{\sigma 1} \cdot \alpha_{1\mu}}{\alpha_{11}} \quad (4)$$

ὅπου :

$$\begin{aligned} \alpha_{(\sigma-1)(\mu-1)} &= \text{Ὁ νέος ὄρος μετὰ τὴν ἀπαλειφὴν εἰς τὴν} \\ &\quad \text{θέσιν τοῦ ὄρου } \alpha_{\sigma\mu} \\ \alpha_{\sigma\mu} &= \text{Ὁ τυχαῖος ὄρος τοῦ συστήματος} \\ \alpha_{\sigma 1} &= \text{Ὁ πρῶτος ὄρος τῆς στήλης τοῦ } \alpha_{\sigma\mu} \\ \alpha_{1\mu} &= \text{Ὁ πρῶτος ὄρος τῆς σειρᾶς τοῦ } \alpha_{\sigma\mu} \\ \alpha_{11} &= \text{Ὁ πρῶτος ὄρος τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ} \\ &\quad \text{τῆς πρώτης στήλης τοῦ συστήματος.} \end{aligned}$$

*Σημείωσις :* Πρὶν ἐπιχειρήσωμεν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου αὐτῆς πρέπει αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος νὰ τακτοποιηθοῦν ὥστε κατὰ τὴν πρόοδον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῆς γενικῆς ἀπαλειφῆς νὰ ἰσχύη πάντα  $\alpha_{11} \neq 0$ , ἄλλως ἢ λύσις εἶναι ἀδύνατος ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως (4).

Ἐφαρμόζοντες τὸν μαθηματικὸν τύπον (4) εἰς ὅλους τοὺς ὄρους τῆς διατάξεως (3) θὰ λάβωμεν μίαν νέαν διάταξιν τῆς μορφῆς (3) μὲ μίαν σειρὰν καὶ μίαν στήλην ὀλιγωτέραν, δεδομένου ὅτι ὅλοι οἱ ὄροι τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ ὅλοι οἱ ὄροι τῆς πρώτης στήλης μηδενίζονται.

$$\text{Π.χ.} \quad \alpha_{(\sigma-1)(\kappa-1)} = \alpha_{\sigma\kappa} - \frac{\alpha_{\sigma 1} \cdot \alpha_{1\kappa}}{\alpha_{11}} = 0$$

$$\text{ἢ} \quad \alpha_{(\sigma-1)(\kappa-1)} = \alpha_{\nu 1} - \frac{\alpha_{\nu 1} \cdot \alpha_{1\kappa}}{\alpha_{11}} = 0$$

Ἐὰν τώρα πραγματοποιήσωμεν ἀναγωγὴν τῆς διατάξεως ποὺ προέκυψε μετὰ τὴν πρώτην ἀπαλειφὴν εἰς διάταξιν συστήματος ἐξισώσεων ὡς ἡ (1) ἀνωτέρω, θὰ λάβωμεν σύστημα μὲ ἓνα ἄγνωστον ὀλιγώτερον. Συγκεκριμένως θὰ ἔχη ἀπαλειφθῆ ὁ ἄγνωστος  $X_1$ .

Προχωροῦντες κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μετὰ  $(\nu-1)$  ἀπαλειφᾶς θὰ ἔχωμεν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς :

$$\alpha_{11}^{(\nu-1)} X_\nu = K_\nu^{(\nu-1)} \quad (5)$$

Ἄλλὰ ἡ (5) εἶναι ἐξίσωσις μὲ ἓν ἄγνωστον τὴν τιμὴν τοῦ ὁποῖου ὑπολογίζομεν εὐκόλως.

Ἀφοῦ εὑρεθῆ ὡτὼ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἄγνωστου τοῦ  $X_n$  ὀπισθοχωροῦμεν πλέον εἰς τὴν διάταξιν πού εἶχομεν πρὸ τῆς  $(n-1)$  ἀπαλειφῆς (σύστημα 2 ἐξισώσεων μὲ 2 ἄγνωστους) καὶ εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν καὶ δευτέρου ἄγνωστου, τοῦ  $X_{(n-1)}$ . Ἐν συνεχείᾳ ὀπισθοχωροῦμεν εἰς τὴν διάταξιν πού εἶχομεν πρὸ τῆς  $(n-2)$  ἀπαλειφῆς (σύστημα 3 ἐξισώσεων μὲ 3 ἄγνωστους) καὶ διὰ ἀντικαταστάσεως εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ τρίτου ἄγνωστου, τοῦ  $X_{(n-2)}$  κ.ο.κ. Διὰ τῆς μεθόδου αὐτῆς (Back Substitution) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν προοδευτικὰ τὰς τιμὰς ὅλων τῶν ἄγνωστων.

### β. Σύγχρονος ὑπολογισμὸς ὅλων τῶν ἄγνωστων.

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος παρ' ὅλον πού ἐμφανίζεται σχετικῶς ἀπλῆ καὶ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῆ διὰ τὴν λύσιν συστημάτων μικρᾶς τάξεως ἀκόμη καὶ μὲ συνήθεις ἀριθμομηχανὰς γραφείου, δὲν συνιστᾶται δι' ἐφαρμογὴν εἰς τοὺς Ἠλεκτρονικοὺς Ἐγκεφάλους. Τοῦτο διότι καὶ περισσότερον χρόνον ἀπαιτεῖ καὶ διαφοροὶ πρόσθετοι χειρισμοὶ χρειάζονται καὶ συχνὰ ἀπαιτεῖται ἡ κατάστρωσις δύο προγραμμάτων, ἑνὸς διὰ τὴν ἀπαλειφὴν καὶ ἑνὸς διὰ τὴν δι' ἀντικαταστάσεως εὑρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἄγνωστων.

Εἶναι ὁμως δυνατόν ἡ μήτρα τῆς ἀνωτέρω διατάξεως (3) νὰ συμπληρωθῆ μὲ μίαν ἀρνητικὴν μοναδιαίαν μήτραν μὲ  $n$  σειρὰς καὶ  $n$  στήλας ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{cccccccc|ccc}
 \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1n} & | & K_1 & | & \Sigma_{1n} \\
 \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{2n} & | & K_2 & | & \Sigma_{2n} \\
 \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{3n} & | & K_3 & | & \Sigma_{3n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & | & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & | & \dots \\
 \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{nn} & | & K_n & | & \Sigma_{n0}
 \end{array} \quad (6)$$

$$\begin{array}{cccccccc|ccc}
 -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & | & 0 & | & 0 \\
 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & | & 0 & | & 0 \\
 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 & | & 0 & | & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & | & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & | & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & | & \dots & | & \dots
 \end{array}$$

Εἰς τὴν διάταξιν (6) δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν γενικὸν μαθηματικὸν τύπον ἀπαλειφῆς (4). Μετὰ τὴν πρώτην ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (4) ἂν ἀγνοή-

σώμεν τήν στήλην τῶν ὀριζοντίων συνόλων, ἢ ὁποῖα χρησιμοποιεῖται ἀποκλειστικῶς διὰ λόγους ἐλέγχου, θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \alpha^1_{11} & \alpha^1_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha^1_{1(v-1)} & K^1_1 \\
 0 & \alpha^1_{21} & \alpha^1_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha^1_{2(v-1)} & K^1_2 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \alpha^1_{(v-1)1} & \alpha^1_{(v-1)2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha^1_{(v-1)(v-1)} & K^1_{(v-1)} \\
 \hline
 0 & \alpha^1_{v1} & \alpha^1_{v2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha^1_{v(v-1)} & K^1_v \\
 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0
 \end{array} \quad (7)$$

Συνεχίζοντες τήν ἐφαρμογήν τοῦ τύπου (4) μετὰ ἀπὸ (v) ἀπαλειφῆς θὰ λάβωμεν τήν κατωτέρω διάταξιν :

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_1 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_v
 \end{array} \quad (8)$$

Ἡ διάταξις αὕτη ὅμως εἶναι ἐν ἄνυσμα πού περιλαμβάνει (v) ὄρους, τὰς τιμὰς τῶν (v) ἀγνώστων, πού προέκυψαν ὅλοι συγχρόνως.



Ἡ μέθοδος αὐτή ἐκτὸς τοῦ πλεονεκτήματος τῆς ταχύτητος λύσεως δι' Ἠλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου καὶ ἐκτὸς τοῦ ὅτι μᾶς δίδει συγχρόνως τὰς τιμὰς ὄλων τῶν ἀγνώστων μπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ τὴν ταυτόχρονον λύσιν τοῦ ἴδιου συστήματος διὰ περισσοτέρας τῆς μιᾶς στήλας τιμῶν τῶν ἐξισώσεων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀπλῶς προστίθενται εἰς τὴν μήτραν περισσότεροι στήλαι μὲ τὰς τιμὰς τῶν ἐξισώσεων.

### γ. Ἀντιστροφή Μητρῶν

Ἡ ἀνωτέρω περιγραφείσα μέθοδος γενικῆς ἀπαλειφῆς (General Elimination) δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ γενικῶς καὶ διὰ τὴν ἀντιστροφὴν μητρῶν. Καὶ ὡς εἶναι γνωστὸν τὸ πρόβλημα τῆς ἀντιστροφῆς μητρῶν εἶναι κατὰ κάποιον τρόπον ἐπακόλουθον τοῦ προβλήματος τῆς λύσεως συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων μεγάλης τάξεως μὲ ἰσαριθμούς πρὸς τὰς ἐξισώσεις ἀγνώστους. Συχνὰ ἀντὶ νὰ ζητῆται ἡ λύσις ἑνὸς συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων δι' ὠρισμένην σειρὰν ἢ δι' ὠρισμένας σειρὰς τιμῶν ἐξισώσεων (σταθερῶν) ζητεῖται ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ συστήματος ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ποὺ περιέχει νὰ ὑπολογίζωνται δι' οἰανδήποτε σειρὰν τιμῶν ἐξισώσεων (σταθερῶν) δι' ἀπλῆς ἀντικαταστάσεως.

Ὁ μετασχηματισμὸς ποὺ πρέπει νὰ γίνῃ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς εἶναι γνωστὸς ὡς ἀντιστροφή τῆς μήτρας τοῦ συστήματος (Matrix Inversion). Τὸ πρόβλημά μας λοιπὸν εἶναι: Μὲ δεδομένον τὸ σύστημα (1), ἐπομένως μὲ δεδομένην τὴν μήτραν τῆς διατάξεως (2), νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστροφος μήτρα καὶ ἀντιστοίχως τὸ ἀντίστροφον τοῦ συστήματος (1). Ἀπὸ τὴν γενικὴν μαθηματικὴν θεωρίαν περὶ μητρῶν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἀντίστροφος τῆς διατάξεως (2) θὰ ἔχη τὴν μορφήν:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}^i & \alpha_{12}^i & \alpha_{13}^i & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1n}^i \\ \alpha_{21}^i & \alpha_{22}^i & \alpha_{23}^i & \dots & \dots & \dots & \alpha_{2n}^i \\ \alpha_{31}^i & \alpha_{32}^i & \alpha_{33}^i & \dots & \dots & \dots & \alpha_{3n}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{v1}^i & \alpha_{v2}^i & \alpha_{v3}^i & \dots & \dots & \dots & \alpha_{vn}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ K_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ X_v \end{bmatrix} \quad (9)$$

Ἐκ τῆς διατάξεως (9) ἀνωτέρω καθίσταται σαφές ὅτι μὲ δεδομένην τὴν ἀντίστροφον μήτραν ( $A^{-1}$ ) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν εὐκόλως τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων  $X_{1, 2, 3, \dots, v}$ , δι' οἰανδήποτε σειρὰν τιμῶν τῶν σταθερῶν ( $K_1, K_2, K_3, \dots, K_v$ ) δι' ἀπλοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ἀντίστροφου μήτρας ( $A^{-1}$ ) ἐπὶ τὸ ἄνυσμα τῶν σταθερῶν κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μήτρας ἐπὶ ἄνυσμα. Ὅ,τι θὰ χρειασθῇ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτὸν εἶναι ἡ ἐκτέλεσις ἀπλῶν προσθέσεων (ἢ καὶ ἀφαιρέσεων) ἐπὶ ἐκάστης σειρᾶς διὰ τὴν εὔρεσιν τῆς τιμῆς ἐκάστου ἀγνώστου.



Εἰς τὴν διάταξιν αὐτὴν ἐφαρμόζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὸν γενικὸν μαθηματικὸν τύπον τῆς ἀπαλειφῆς :

$$\alpha_{(n-1)(n-1)} = \alpha_{nn} - \frac{\alpha_{n1} \cdot \alpha_{1n}}{\alpha_{11}}$$

ἐπαναληπτικῶς δι' ὅλας τὰς θέσεις. Μετὰ (ν) ἀπαλειφᾶς προκύπτει ἡ πλήρης ἀντίστροφος μήτρα ἢ ( $A^{-1}$ ) ὡς φαίνεται εἰς τὴν κατωτέρω διάταξιν :

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (12)$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha^i_{11} & \alpha^i_{12} & \alpha^i_{13} & \dots & \alpha^i_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha^i_{21} & \alpha^i_{22} & \alpha^i_{23} & \dots & \alpha^i_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha^i_{31} & \alpha^i_{32} & \alpha^i_{33} & \dots & \alpha^i_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha^i_{n1} & \alpha^i_{n2} & \alpha^i_{n3} & \dots & \alpha^i_{nn} \end{array} \right)$$

Πρὶν ὅμως προχωρήσωμεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ προγράμματος Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου διὰ τὴν λύσιν συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ τὴν ἀντίστροφὴν μητρῶν πρέπει ἐδῶ νὰ κάμωμεν μίαν κατὰ τὸ δυνατόν σύντομον παρένθεσιν διὰ νὰ ἀναφερθῶμεν εἰς τὴν συγκρότησιν καὶ τὰ γενικὰ χαρακτηριστικά τῶν Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων.

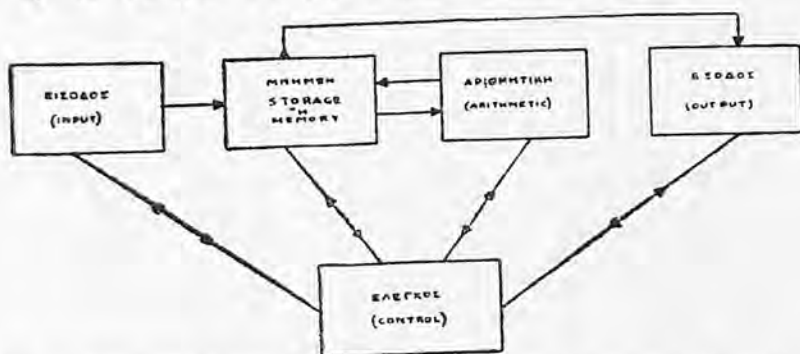
## B. ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΙΣ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΕΓΚΕΦΑΛΩΝ

### α. Γενικά

*Ἡλεκτρονικὸς Ἐγκέφαλος εἶναι κάθε αὐτόματος ἠλεκτρονικὴ μηχανὴ ποὺ ἐκτελεῖ ὑπολογισμοὺς καὶ ἐξάγει συμπεράσματα βάσει προγράμματος μὲ μεγάλην ταχύτητα.* Ἐνας ἄλλος ὀρισμὸς παράλληλος πρὸς τὸν δοθέντα τὸν ὁποῖον διετύπωσεν ὁ Willis H. Ware εἶναι: *«Ἡλεκτρονικὸς Ἐγκέφαλος εἶναι ἓνα σύστημα ἢ μία συσκευὴ, ἢ ὁποῖα ἐπεξεργάζεται πληροφορίας διὰ μιᾶς λογικῆς πορείας καὶ δίδει ἀποτελέσματα».*

Γενικῶς οἱ Ἡλεκτρονικοὶ Ἐγκέφαλοι συγκροτοῦνται ἀπὸ πέντε κύρια τμήματα:

- 1) τὴν Εἴσοδον (Input),
- 2) τὸν Μνήμονα (Memory ἢ Storage),
- 3) τὸν Ἀθροιστὴν ἢ Ἀριθμητικὸν Τμήμα (Accumulator ἢ Arithmetic),
- 4) τὴν Ἐξοδον (Output),
- 5) τὸ Τμήμα Ἐλέγχου (Control Unit) (σχ. 1).



Σχ. 1 Σχηματικὸν διάγραμμα ἐσωτερικῆς ὁργανώσεως Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου.

Αἱ ἀρμοδιότητες ἐνὸς ἐκάστου τῶν τμημάτων εἶναι ἐν συντομίᾳ αἱ κάτωθι:

### β. Ἡ Εἴσοδος

Τὸ τμήμα τοῦτο περιλαμβάνει τὰ κυκλώματα ἀναγνώσεως καὶ εἰσαγωγῆς τῶν πληροφοριῶν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς μηχανῆς. Αἱ πληροφορίες εἰς τοὺς Ἡλεκτρονικοὺς Ἐγκεφάλους δίδονται συνήθως ὑπὸ μορφήν διατρήσεων ἐπὶ διατρήτων δελτίων (σχ. 2) ἢ ἐπὶ διατρήτου ταινίας (σχ. 3) ἢ ὑπὸ μορφήν μαγνητικῶν ἐγγραφῶν ἐπὶ μαγνητικῆς ταινίας (σχ. 4). Ποῖον μέσον παραχθῆς πληροφοριῶν χρησιμοποιεῖται ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν κατασκευὴν καὶ τὰ εἰδικὰ χαρακτηριστικὰ γνωρίσματα τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου.

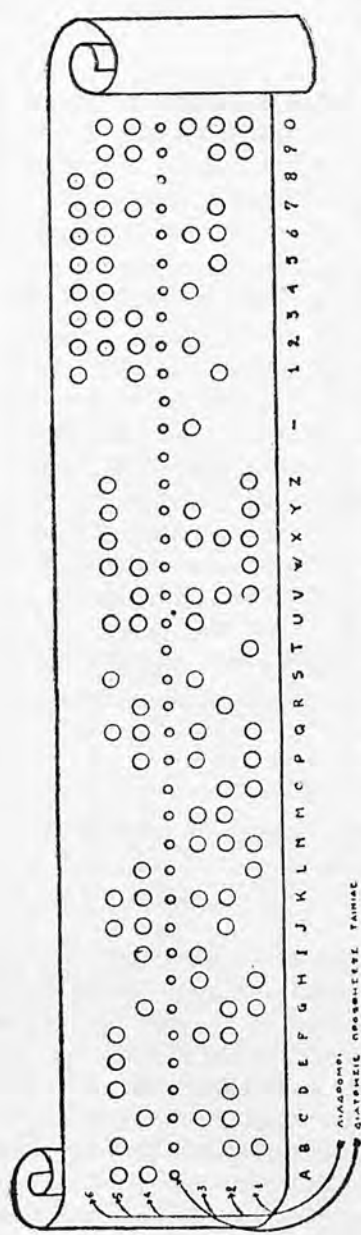
Ἡ καταγραφή τῶν πληροφοριῶν ἐπὶ τῶν δελτίων ἢ τῆς ταινίας γίνεται πάντοτε μὲ κώδικα καὶ ἀπὸ εἰδικὰς βοηθητικὰς μηχανάς.

### γ. Ὁ Μνήμων

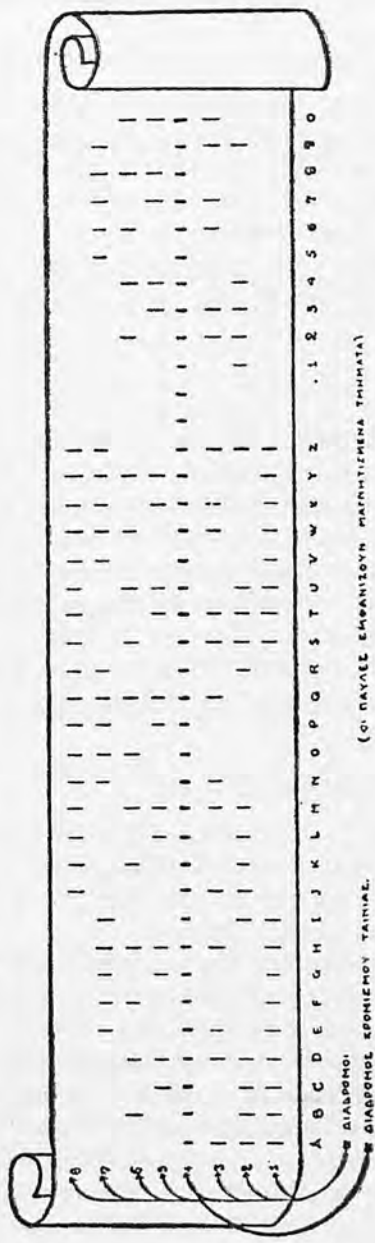
Ὁ μνήμων γενικῶς εἰς τοὺς Ἡλεκτρονικοὺς Ἐγκεφάλους περιλαμβάνει κυκλώματα καὶ μηχανισμοὺς ἀπομνημονεύσεως τῶν πληροφοριῶν ποὺ εἰσέρχονται, τῶν πληροφοριῶν ποὺ κυκλοφοροῦν ἐντὸς τῆς μηχανῆς καὶ τῶν πληροφοριῶν ποὺ ἐξέρχονται ἐξ αὐτῆς. Ὑπὸ τὴν τριπλῆν αὐτὴν ἀποστολὴν τοῦ ὀ μνήμων ἐκτελεῖ σημαντικὸν ρόλον εἰς τὴν ὅλην λειτουργίαν τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου.

Ἀπὸ ἀπόψεως κατασκευῆς, οἱ μνήμονες ὅπως καὶ τὰ τμήματα εἰσόδου





Σχ 3 Διάρθρωτος ταινία β διαδρομών (καναλιών) με διαστήματα επ' αυτής τους διαδικούς συνδυασμούς του αλφαριθμητικού και των αριθμικών.



Σχ 4. Μαγνητική ταινία 7 διαδρομών (καναλιών) με τους διαδικούς συνδυασμούς του αλφαριθμητικού και των αριθμικών. (Οι μαγνητικές έγγραφές εις την πραγματικότητα δεν είναι όμοιές)



τῶν Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων, εἶναι κυκλώματα μηχανικά, ἠλεκτρικά καὶ ἠλεκτρονικά. Συχνὰ συναντῶνται καὶ οἱ μνήμονες μαγνητικῶν πυρήνων (Magnetic Core) καὶ ἐπίσης οἱ μνήμονες μαγνητικά τύμπανα (Magnetic Drums).

#### δ. Ὁ Ἀριθμιστὴς ἢ Ἀριθμητικὸν τμήμα

Εἰς τὸ τμήμα τοῦτο τῶν Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων ἐκτελεῖται ἡ ἀριθμητικὴ καὶ ἡ λογικὴ ἐπεξεργασία τῶν πληροφοριῶν. Ἐδῶ ἐξάγονται τὰ ἀριθμητικὰ ἢ λογικὰ συμπεράσματα. Εἰς τὰ κυκλώματα Accumulator ἢ Arithmetic τροφοδοτοῦνται ἀπὸ τοὺς μνήμονας αἱ πληροφορίες πρὸς ἐπεξεργασίαν καὶ ἀπὸ ἰδιαίτερα κυκλώματα τοῦ Accumulator παρέχονται τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐπεξεργασίας πάλιν εἰς τοὺς μνήμονας.

Κατασκευαστικῶς τὰ κυκλώματα Arithmetic εἶναι ἠλεκτρονικά ἢ ἠλεκτρονικά—μηχανικά.

#### ε. Ἡ Ἐξοδος

Τὸ τμήμα τοῦτο τῶν Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων ἐλέγχει καὶ ἀποδίδει τὰς πληροφορίες ἐξόδου. Αἱ πληροφορίες ἐξόδου (τὰ ἀποτελέσματα) ἀποδίδονται ὑπὸ μορφήν κώδικος καί, ἀναλόγως τοῦ τύπου τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου εἶναι διατρήσεις ἐπὶ διατρήτων δελτίων ἢ διατρήτου ταινίας ἢ μαγνητικαὶ ἐγγραφαὶ ἐπὶ μαγνητικῆς ταινίας. Συχνά, εἰς τοὺς μεγάλους ἰδίως Ἡλεκτρονικούς Ἐγκεφάλους, αἱ πληροφορίες ἐξόδου ἀποδίδονται καὶ ὑπὸ μορφήν καταχωρημένων λέξεων καὶ ἀριθμῶν. Χρησιμοποιοῦνται πρὸς τοῦτο ἠλεκτρονικαὶ μηχαναὶ ποὺ συνδέονται εἰς τὰ κυκλώματα ἐξόδου καὶ «μεταφράζουν» καὶ ἀποδίδουν ἀμέσως τὸν κώδικα ἐξόδου τοῦ Ἐγκεφάλου εἰς χαρακτήρας καὶ ἀριθμούς.

#### στ. Τὸ Τμήμα Ἐλέγχου

Τὰ κυκλώματα Control ἐλέγχουν ὅλην τῆς λειτουργίαν τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου καὶ κατευθύνουν πᾶν ὅ,τι γίνεται μέσα εἰς τὴν μηχανήν. Ἐπιδρῶν καὶ εἰς τὴν Ἐἴσοδον καὶ εἰς τὸν Μνήμονα καὶ εἰς τὸ τμήμα Ὑπολογισμῶν καὶ εἰς τὴν Ἐξοδον.

Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ὅμως τὴν εὐρείαν ἀποστολήν του τὸ τμήμα Ἐλέγχου ἢ ὡς εἶπω ὁ Ἐγκέφαλος τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου, χρειάζεται τὴν στενὴν συνεργασίαν τοῦ «Προγραμματιστοῦ» (Programmer). Προγραμματιστὴς εἶναι ὁ στενὸς συνεργάτης τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου, εἶναι ὁ ἄνθρωπος ποὺ τὸν κατευθύνει. Χωρὶς τοὺς Programmers αἱ θαυμασταὶ αὐταὶ μηχαναὶ, ποὺ τόσα πολλὰ μποροῦν νὰ κάνουν, εἶναι ἓνα ἄβουλο σύνολον καλωδίων, λυχνιῶν καὶ μετάλλων ποὺ δὲν ἔχει καμμίαν ἰκανότητα. Θὰ ἐπιθυμοῦσα ἐδῶ νὰ τελειώσω τὴν παρένθεσιν περὶ Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων (λεπτολόγος ἀνάπτυξις τοῦ θέματος γίνεται εἰς τὸ βιβλίον μου «Ἡλεκτρονικοὶ Ἐγκέφαλοι»), φθάνοντας εἰς τὸν ἄνθρωπον, τὸν ὅποιον οἱ Ἡλεκτρονικοὶ Ἐγκέφαλοι, ἓνα ἀπὸ τὰ τελειότερα δημιουργήματά του, δὲν καταργοῦν, δὲν ξεπερνοῦν, οὔτε κἂν τὸν φθά-

νουν, τὸν ὀδηγοῦν ὁμως εἰς τὴν θέσιν πού πρέπει, εἰς τὴν ἔκδοσιν ὀδηγιῶν, εἰς τὴν διατύπωσιν κατευθύνσεων, εἰς τὴν κατάστρωσιν προγραμμάτων, ἐνῶ τὸν ἀπαλλάσσουν ἀπὸ καταθλιπτικῶν ὄγκων ἐργασιῶν, πού καταδαπανοῦν τὸν χρόνον καὶ τὴν σκέψιν του.

**Γ. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΕΓΚΕΦΑΛΟΥ UNIVAC 120  
ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**

**Γ Ε Ν Ι Κ Α**

Ἦδη εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς μελέτης μας ἀνελύθη τὸ πρόβλημά μας ἐν συνεχεῖς δὲ ἐδόθησαν τὰ γενικά χαρακτηριστικά τῶν Ἑλεκτρονικῶν Ἑγκεφάλων. Τὸ παρὸν Γ' καὶ τελευταῖον μέρος τῆς μελέτης μας ἀναφέρεται εἰς τὴν κατάστρωσιν προγράμματος διὰ τὴν λύσιν συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων δι' Ἑλεκτρονικοῦ Ἑγκεφάλου Univac 120. Τὸ ἴδιον αὐτὸ πρόγραμμα ὡς θὰ ἀναλυθῆ κατωτέρω δύναται μὲ ὠρισμένης ἐλαφρᾶς μεταβολᾶς νὰ χρησιμοποιηθῆ καὶ διὰ τὴν ἀντιστροφὴν μητρῶν. Ἐπιθυμία μου εἶναι νὰ δώσω ἓνα κατὰ τὸ δυνατόν ἀπλούστερον πρόγραμμα διὰ νὰ εἶναι τοῦτο εὐκολώτερον κατανοητόν. Μάλιστα διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἀντὶ νὰ χρησιμοποιήσω ὀρθόδοξον τεχνικὴν προγραμματισμοῦ τοῦ Univac 120 ἐπὶ ὠρισμένων τυποποιημένων διαγραμμάτων θὰ δώσω ἀπλοποιημένον σχέδιον προγράμματος.

*Δεδομένα τοῦ προβλήματος*

Οἱ ὄροι τῆς μήτρας π.χ. τῆς διατάξεως 2 (Α' μέρος) καὶ αἱ σταθεραὶ ( $K_1, K_2, \dots, K_n$ ).

*Ζητοῦνται*

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ( $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ).

*Πρῶτος βρόγχος λύσεως*

Τὸ πρόβλημα θὰ λυθῆ δι' Ἑγκεφάλου Univac 120 καὶ ἐπειδὴ ἡ μηχανὴ αὐτὴ λειτουργεῖ μὲ διάτρητα δελτία (βλέπε σχ. 2) τὰ δεδομένα νὰ τροφοδοτηθοῦν εἰς τὸν Ἑγκέφαλον ὑπὸ μορφήν διατρήσεων ἐπὶ τῶν δελτίων. Ἐπίσης καὶ τὰ ἀποτελέσματα θὰ ἐκδοθοῦν ἀπὸ τὸν Univac ὡς διατρήσεις ἐπὶ δελτίων. Σχεδιάζομεν ἐπὶ ἐνὸς λευκοῦ (ἀχρησιμοποίητου) δελτίου τὰς θέσεις ἐπὶ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ διατρηθοῦν τὰ δεδομένα. Ὡστε τὸ δελτίον λαμβάνει τὴν μορφήν τοῦ σχ. 5, ἥτοι:

Στήλαι : 1 ἕως 3 Ἄριθμὸς ἀπαλειφῆς  
 » : 5 » 7 Ἄριθμὸς σειρᾶς τῆς μήτρας  
 » : 9 » 11 Ἄριθμὸς στήλης τῆς μήτρας

Στήλαι :	13 » 22	Τιμαί τῶν ὄρων τῆς μήτρας μέ πέντε δεκαδικά ( $\alpha_{\sigma\kappa}$ )
» :	24 » 33	Τιμαί τῶν πρώτων ὄρων τῶν σειρῶν ( $\alpha_{\sigma_1}$ )
» :	35 » 44	Τιμαί τῶν πρώτων ὄρων τῶν στηλῶν ( $\alpha_{\kappa}$ )
Στήλη :	45	Χαρακτηρισμός τοῦ Δελτίου τοῦ περιέχοντος τὸν ὄρον $\alpha_{\kappa}$
Στήλαι :	12,23 καὶ 34	Τὸ σύμβολον τῶν $\alpha_{\sigma\kappa}$ , $\alpha_{\sigma_1}$ καὶ $\alpha_{\kappa}$ ἀντιστοιχῶς (θετικά ἢ ἀρνητικά) καὶ συγκεκριμένως διὰ τοὺς ἀρνητικούς ὄρους διατρυπᾶται τὸ μηδὲν τὸ ὁποῖον ὁ Ἐγκέφαλος θεωρεῖ ὡς πλὴν (-).

Μετὰ τὴν σχεδίασιν τοῦ δελτίου διατρυπῶμεν διὰ Διατρητικῆς Μηχανῆς, τῆς ὁποίας ὁ χειρισμός εἶναι ἐν πολλοῖς ὁ αὐτός μετὰ τὸν χειρισμὸν κοινῆς γραφομηχανῆς, ἐπὶ δελτίων τὴν ἀρχικὴν μήτραν.

Χρησιμοποιοῦμεν ἀνά ἓν δελτίον δι' ἕκαστον ὄρον μήτρας. Διατρυπῶμεν ἐπίσης δελτία διὰ τοὺς ὄρους τῆς ἀρνητικῆς μοναδιαίας μήτρας τῆς διατάξεως 6.

Μετὰ τὴν διάτρησιν καὶ τὴν ἐπαλήθευσιν τῆς ὀρθότητος διατρήσεως τῶν ὄρων τῆς μήτρας, τῶν ὄρων τῆς ἀρνητικῆς μοναδιαίας μήτρας καὶ τῶν λοιπῶν στοιχείων ἐπὶ τῶν δελτίων προχωροῦμεν διὰ τῆς Διαλογικῆς Μηχανῆς Διατρήτων Δελτίων εἰς ταξινομήσιν τῶν δελτίων ὥστε νὰ λάβουν τὴν ἐξῆς σειρὰν. (Χρησιμοποιοῦ μόνον τοὺς ἀριθμούς σειρῶν καὶ στηλῶν τῆς μήτρας) :

11, 12, 13, 14, . . . . . 1v, 21, 22, 23, 24, . . . . . 2v, 31, 32, 33, 34,  
 . . . . . 3v, 41, 42, 43, 44, . . . . . 4v, . . . . . v1, v2, v3, v4, . . . . . vv.

Μετὰ τὴν διαλογὴν τῶν δελτίων (σημειώτεον ὅτι ἡ διαλογικὴ μηχανὴ εἶναι μηχανὴ αὐτόματος καὶ ταξινομεῖ μετὰ ταχύτητα 48.000 στηλῶν ὠριαίως) εἶναι ὅλα ἔτοιμα διὰ νὰ τροφοδοτηθοῦν τὰ δελτία εἰς τὸν Ἡλεκτρονικὸν Ἐγκέφαλον.

Ὁ Ἡλεκτρονικὸς Ἐγκέφαλος ἐκτελῶν τὸ κατωτέρω πρόγραμμά του δύναται νὰ διατρυπᾷ τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν του ἐπὶ τοῦ ἰδίου δελτίου εἰς τὴν κάτω ζώνην (βλέπε σχ. 5) ἢ ἐπὶ λευκοῦ δελτίου ποῦ ἀκολουθεῖ ἕκαστον δελτίον τῆς ἀρχικῆς μήτρας. Προτιμῶμεν (διὰ λόγους ὀργανωτικῶς τῆς λειτουργίας τῶν μηχανῶν καὶ διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ διαχωρίσωμεν αὐτομάτως διὰ τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου τὰ δελτία τῆς ἀρχικῆς μήτρας ἀπὸ τὰ δελτία ἐκείνης ποῦ προκύπτει μετὰ τὴν ἀπαλειφὴν) τὴν διάτρησιν τῶν ἀποτελεσμάτων ἐπὶ δελτίου λευκοῦ. Διὰ τοῦτο πρὶν τροφοδοτήσωμεν τὰ δελτία εἰς τὸν Ἐγκέφαλον χρειάζεται παρεμβολὴ λευκῶν δελτίων (ἀδιατρήτων), ὥστε τὰ δελτία μας νὰ λάβουν τὴν τάξιν: "Ἐνα διάτρητον—ἕνα λευκὸν κ.ο.κ. Ἡ ἐργασία τῆς παρεμβολῆς λευκῶν δελτίων ἐκτελεῖται πάλιν δι' αὐτομάτου μηχανῆς, τῆς συζευκτικῆς.

Τὰ δελτία τροφοδοτοῦνται πλέον εἰς τὸν Ἡλεκτρονικὸν Ἐγκέφαλον ὁ ὁποῖος δι' ἕκαστον ζευγὸς δελτίων ἐκτελεῖ τὸ κατωτέρω πρόγραμμα:

1. Τροφοδοτεῖ τὸ πρῶτον δελτίον εἰς τὸν θάλαμον ἀναγνώσεως.
2. Ἀναγιγνώσκει τὸ δελτίον.
3. Ἐλέγχει τὴν ὀρθὴν σειρὰν δελτίων (ἦτοι δελτίον 11—δελτίον λευκόν,



δελτίου 12—δελτίου λευκόν, δελτίου 13—δελτίου λευκόν κ.ο.κ. κατά τὰ ἀνωτέρω). Εἰς περίπτωσιν λαυθασμένης σειρᾶς δελτίων σταματᾷ καὶ δίδει σχετικὴν ἔνδειξιν.

4. Ἀναγνωρίζει τὰ διάτρητα καὶ τὰ λευκὰ δελτία καὶ διὰ τὰ διάτρητα (δελτία μήτρας) προχωρεῖ εἰς τὴν βαθμίδα 5, διὰ τὰ λευκὰ εἰς τὴν βαθμίδα 23.

5. Ἀναγιγνώσκει τὸν ἀριθμὸν ἀπαλειφῆς (στήλαι 1—3 τοῦ δελτίου) καὶ προσθέτει ἓνα. Τὸ ἀποτέλεσμα ἀπομνημονεύεται ὡς νέος ἀριθμὸς ἀπαλειφῆς εἰς οἰκίον μνήμονα.

6. Ἀναγιγνώσκει τὸν ἀριθμὸν σειρᾶς (στήλαι 5—7 τοῦ δελτίου) καὶ ἀφαιρεῖ ἓνα. Τὸ ἀποτέλεσμα ἀπομνημονεύεται ὡς νέος ἀριθμὸς σειρᾶς εἰς οἰκίον μνήμονα.

7. Ἀναγιγνώσκει τὸν ἀριθμὸν στήλης (στήλαι 9—11 τοῦ δελτίου) καὶ ἀφαιρεῖ ἓνα. Τὸ ἀποτέλεσμα ἀπομνημονεύεται ὡς νέος ἀριθμὸς στήλης εἰς οἰκίον μνήμονα.

8. Ἀρχίζει τὴν ἔρευναν πρὸς ἀνεύρεσιν τοῦ δελτίου 11 (τοῦ πρώτου τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ τῆς πρώτης στήλης) τῆς νέας μήτρας ποῦ θέλει προκύψει μετὰ τὴν παροῦσαν ἀπαλειφήν. Πρὸς τοῦτο ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸν νέον ἀριθμὸν σειρᾶς—ποῦ ἔχει ἀπομνημονεύσει ὡς ἄνω (βαθμῆς 6) — τὴν μονάδα. Ἐάν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικόν, ὁ νέος ἀριθμὸς σειρᾶς εἶναι μηδὲν (πρόκειται διὰ τὴν σειρὰν ποῦ ἀπαλείφεται—μηδενίζεται ἐξ ὀλοκλήρου κατὰ τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὸ Α' μέρος τῆς μελέτης) ὥστε δὲν συντρέχει λόγος περαιτέρω διερευνήσεως καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 13. Ἐάν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι θετικόν ὁ νέος ἀριθμὸς σειρᾶς εἶναι 1 ἢ πλέον τοῦ ἑνὸς καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζει τὴν ἔρευναν εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

9. Ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς προηγουμένης βαθμίδος τὴν μονάδα. Ἐάν τὸ νέον ἀποτέλεσμα εἶναι θετικόν, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ νέος ἀριθμὸς σειρᾶς εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ὥστε ἡ ἔρευνα σταματᾷ καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 13. Ἐάν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικόν, ἔχομεν ἀνεύρει δελτίου (ὄρου) τῆς πρώτης σειρᾶς τῆς νέας μήτρας. Διὰ τοῦτο τὸ πρόγραμμα συνεχίζει καὶ εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα τὴν ἔρευναν καὶ διὰ δελτίου (ὄρου) τῆς πρώτης στήλης τῆς νέας μήτρας.

10. Ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸν νέον ἀριθμὸν στήλης—ποῦ ἔχει ἀπομνημονεύσει εἰς τὴν βαθμίδα 7—τὴν μονάδα. Ἐάν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικόν ὁ νέος ἀριθμὸς στήλης εἶναι μηδὲν (πρόκειται διὰ τὴν στήλην ποῦ ἀπαλείφεται—μηδενίζεται ἐξ ὀλοκλήρου κατὰ τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὸ Α' μέρος τῆς παρούσης μελέτης) ὥστε δὲν συντρέχει λόγος περαιτέρω διερευνήσεως καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 13. Ἐάν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι θετικόν, ὁ νέος ἀριθμὸς στήλης εἶναι 1 ἢ πλέον τοῦ ἑνὸς καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζει τὴν ἔρευναν εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα 11.

11. Ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς προηγουμένης βαθμίδος τὴν μονάδα. Ἐάν τὸ νέον ἀποτέλεσμα εἶναι θετικόν, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ νέος ἀριθμὸς στήλης εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ὥστε ἡ ἔρευνα σταματᾷ καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 13. Ἐάν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικόν, ἔχομεν ἀνεύρει δελτίου (ὄρου) τῆς πρώτης στήλης τῆς νέας μήτρας. Δεδομένου



ὅμως ὅτι ὁ ὅρος οὗτος εἶναι καὶ ὅρος τῆς πρώτης σειρᾶς τῆς νέας μήτρας ὡς προέκυψεν ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἔρευναν τοῦ προγράμματος εἰς τὰς βαθμίδας 8 καὶ 9 καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ πρώτη σειρά καὶ ἡ πρώτη στήλη συναντῶνται εἰς τὴν θέσιν μὲ δείκτας 11, ἔχομεν ἀνεύρει τὸν πρῶτον ὅρον τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ τῆς πρώτης στήλης τῆς νέας μήτρας ποῦ θὰ προκύψῃ μετὰ τὴν παρούσαν ἀπαλειφήν. Ὡστε τὸ πρόγραμμά μας συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 12.

12. Ἐκτελεῖται ἡ πρόσθεσις  $1 + 0$  καὶ ὁ Ἐγκέφαλος ἀπομνημονεύει τὴν μονάδα εἰς οἰκεῖον μνήμονα διὰ νὰ τὴν διατρυπήσῃ εἰς τὴν στήλην 45 τοῦ λευκοῦ δελτίου ποῦ ἀκολουθεῖ καὶ νὰ τὸ χαρακτηρίσῃ ἔτσι ὡς τὸ δελτίον (ὄρον) μὲ δείκτας 11 τῆς νέας μήτρας (τὸ πρῶτον δελτίον—ὄρος).

13. Ἐλέγχει ἐὰν τὸ παρὸν διάτρητον δελτίον εἶναι τὸ πρῶτον δελτίον τῆς παλαιᾶς μήτρας—ὡς γνωστὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω τὸ δελτίον τοῦτο πρέπει νὰ ἔχῃ διάτρησιν μονάδος εἰς τὴν στήλην 45. Ἀφαιρεῖ διὰ τοῦτο ἀπὸ ὅ,τι ἀναγιγνώσκει εἰς τὴν στήλην 45 τὴν μονάδα. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικόν, τὸ παρὸν διάτρητον δελτίον δὲν εἶναι τὸ πρῶτον τῆς μήτρας καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 16. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι θετικόν ἔχομεν ἀνεύρει τὸ πρῶτον δελτίον τῆς μήτρας καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα 14.

14. Ἐκτελεῖ τὴν διαίρεσιν  $1 : \alpha_{11}$ , διὰ νὰ ἀνεύρῃ ἂν τὸ  $\alpha_{11}$  εἶναι ἢ ὄχι μηδέν. Εἰς τὴν περίπτωσιν μηδενικοῦ  $\alpha_{11}$ , ἔχομεν ἀδύνατον διαίρεσιν ἀριθμοῦ: μηδενὸς καὶ ὁ Ἐγκέφαλος σταματᾷ καὶ δίδει σχετικὴν ἔνδειξιν. Ἄν  $\alpha_{11} \neq 0$  τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

15. Ἀπομνημονεύεται εἰς οἰκεῖον μνήμονα ὁ ὅρος  $\alpha_{11}$  δηλαδὴ ὁ ὅρος  $\alpha_{\sigma\kappa}$  τοῦ παρόντος δελτίου δεδομένου ὅτι εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς μήτρας καὶ θὰ χρησιμοποιηθῇ κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς ὄλων τῶν ὄρων τῆς νέας μήτρας (λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ σημεῖον τοῦ ὄρου  $+$  ἢ  $-$  ἀναλόγως τῆς διατρήσεως μηδενὸς ἢ μὴ εἰς τὴν στήλην 12 τοῦ δελτίου τὴν ὁποῖαν ὁ Ἐγκέφαλος ἀναγιγνώσκει). Ἐν συνεχείᾳ προχωρεῖ εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

16. Ἀναγιγνώσκει τοὺς συντελεστὰς  $\alpha_{1\kappa}$  (στήλαι 35—44 τοῦ δελτίου) καὶ  $\alpha_{\sigma 1}$  (στήλαι 24—33 τοῦ δελτίου) καὶ τοὺς πολλαπλασιάζει. Τὸ ἀποτέλεσμα ἀπομνημονεύεται εἰς οἰκεῖον μνήμονα καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα. (Λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν ἐπίσης τὰ σημεῖα  $-$  ἢ  $+$  ἀναλόγως τῆς διατρήσεως μηδενὸς ἢ ὄχι εἰς τὰς στήλας 34 καὶ 23).

17. Διαιρεῖ τὸ προηγούμενον ἀποτέλεσμα διὰ τοῦ ὄρου  $\alpha_{11}$  τὸν ὁποῖον ἔχει ἀπομνημονεύσει ὡς ἄνω εἰς τὴν βαθμίδα 15. Ἀπομνημονεύει τὸ νέον ἀποτέλεσμα εἰς οἰκεῖον μνήμονα καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα. (Ἀπομνημονεύει ἐπίσης καὶ τὸ σημεῖον τοῦ  $+$  ἢ  $-$ ).

18. Ἀναγιγνώσκει τὸ  $\alpha_{\sigma\kappa}$  τοῦ παρόντος δελτίου (στήλαι 13—22) καὶ τὸ σημεῖον τοῦ (στήλη 12) καὶ ἀφαιρεῖ ἀπὸ αὐτὸ τὸ προηγούμενον ἀποτέλεσμα. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως αὐτῆς εἶναι ὁ νέος ὅρος τῆς μήτρας ( $\alpha_{(\sigma-1)(\kappa-1)}$ ) ὁ ὁποῖος ἀπομνημονεύεται εἰς οἰκεῖον μνήμονα διὰ νὰ διατρυπηθῇ εἰς τὰς στήλας 13—22 τοῦ λευκοῦ δελτίου ποῦ ἀκολουθεῖ. (Τὸ σημεῖον τοῦ  $+$  ἢ  $-$  εἰς τὴν στήλην 12). Τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.



19. Ἐκ τῶν περιεχομένων τοῦ μηνήμονος ἀριθμοῦ σειρᾶς ἀφαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς σειρᾶς τοῦ παρόντος δελτίου. Ἐάν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι θετικὸν τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ παρὸν διάτρητον δελτίον ἀνήκει εἰς τὴν αὐτὴν σειρὰν μὲ τὸ προηγούμενον του καὶ τὸ πρόγραμμα προωθεῖται εἰς τὴν βαθμίδα ἀπορρίψεως δελτίου. Ἐάν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικὸν τὸ παρὸν δελτίον ἀνήκει εἰς ἄλλην σειρὰν ἀπὸ τὸ προηγούμενον του καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 20.

20. Ἀπομνημονεύεται ὁ ἀριθμὸς σειρᾶς τοῦ παρόντος δελτίου εἰς οἰκίον μηνήμονα καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 21. (Πρόκειται περὶ τοῦ πρώτου δελτίου — ὄρου σειρᾶς).

21. Δεδομένου ὅτι διὰ τὴν φθᾶσιν τὸ πρόγραμμα εἰς τὴν παροῦσαν βαθμίδα ἔχομεν ἀλλαγὴν σειρᾶς τῆς μήτρας πρέπει νὰ ἀλλάξῃ καὶ ὁ ἀπομνημονευμένος πρῶτος ὄρος σειρᾶς. Διὰ τοῦτο τὸ ἀποτέλεσμα τῆς βαθμίδος 18 (βλέπε ἀνωτέρω) ποῦ εἶναι ὁ νέος ὄρος τῆς μήτρας εἶναι συγχρόνως καὶ ὁ νέος πρῶτος ὄρος τῆς σειρᾶς τῆς μήτρας ποῦ ἀκολουθεῖ, ὥστε ἀπομνημονεύεται εἰς οἰκίον μηνήμονα διὰ τὴν διατρύπησιν εἰς τὴν οἰκίαν θέσιν (στήλαι 35—44, τὸ σημεῖον του εἰς τὴν στήλην 35), τῶν λευκῶν δελτίων τῆς σειρᾶς ποῦ ἀκολουθεῖ. Ὁ ὄρος αὐτὸς θὰ ἀλλάξῃ πλέον ὅταν τὸ πρόγραμμα ἀνεύρῃ νέαν ἀλλαγὴν σειρᾶς τῆς μήτρας.

22. Τὸ πρόγραμμα ὑπολογισμῶν καὶ διερευνήσεων διὰ τὸ παρὸν διάτρητον δελτίον ἔληξε καὶ διὰ τοῦτο τὸ δελτίον ἀπορρίπτεται καὶ τροφοδοτεῖται νέον δελτίον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶναι λευκόν. Πάντως τὸ πρόγραμμα διὰ τὸ νέον δελτίον ἀκολουθεῖ τὰς βαθμίδας 1, 2, 3 καὶ 4 καὶ συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 23.

23. Διατρύπη ἐπὶ τοῦ λευκοῦ πλέον δελτίου τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν ποῦ ἐξετελέσθησαν ἐπὶ τοῦ προηγούμενου δελτίου ὡς ἑξῆς :

- Εἰς τὰς στήλας 1—3 τὸν νέον ἀριθμὸν ἀπαλειφῆς,
- Εἰς τὰς στήλας 5—9 τὸν νέον ἀριθμὸν σειρᾶς,
- Εἰς τὰς στήλας 9—11 τὸν νέον ἀριθμὸν στήλης,
- Εἰς τὰς στήλας 13—22 τὸν νέον ὄρον  $\alpha_{3k}$  μετὰ τὴν ἀπαλειφὴν [τὸν ὄρον  $\alpha_{(s-1)(k-1)}$ ] καὶ εἰς τὴν στήλην 12 τὸν ἀριθμὸν 0 ἔφ' ὅσον ὁ ὄρος εἶναι ἀρνητικός.
- Εἰς τὰς στήλας 35—44 τὸν πρῶτον νέον ὄρον τῆς σειρᾶς τῆς μήτρας εἰς τὴν ὁποῖαν (σειρὰν) ἀνήκει τὸ δελτίον (ὄρος) δηλαδὴ τὸν νέον ὄρον  $\alpha_{1k}$  καὶ εἰς τὴν στήλην 34 τὸν ἀριθμὸν 0 ἔφ' ὅσον ὁ ὄρος εἶναι ἀρνητικός.
- Εἰς τὴν στήλην 45 τὸν ἀριθμὸν 1 (1ον δελτίον—ὄρος τῆς νέας μήτρας) ἂν ἐξετελέσθη ἡ βαθμὶς 12 τοῦ προγράμματος διὰ τὸ προηγούμενον διάτρητον δελτίον.

24. Μηδενίζονται πλέον ὅλοι οἱ μηνήμονες τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου ἐκτὸς ἐκείνων ποῦ περιέχουν πληροφορίας ποῦ θὰ χρησιμοποιηθοῦν καὶ εἰς τὰ ἐπόμενα δελτία (ὄρους). Δηλαδὴ μηδενίζονται ὅλοι οἱ μηνήμονες ἐκτὸς τῶν ἑξῆς :

- α) Τοῦ μνήμονος πού περιέχει τὸν ὄρον  $\alpha_{1,1}$
- β) Τοῦ μνήμονος πού περιέχει τὸν ἀριθμὸν σειρᾶς δελτίου,
- γ) Τοῦ μνήμονος πού περιέχει τὸν νέον ὄρον  $\alpha_{1,k}$  τῆς σειρᾶς πού διέρχεται διὰ τῆς μηχανῆς καὶ
- δ) Τοῦ μνήμονος πού ἐνθυμεῖται τὴν σειρὰν τῶν δελτίων (διάτρητον—λευκὸν κ.λ.π.

25. Τέλος, τὸ πρόγραμμα ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἀπόρριψιν τοῦ δελτίου τὸ ὁποῖον πλέον ὡς δελτίον τῆς νέας μήτρας, ἀπορρίπτεται εἰς ἄλλον ὑποδοχέα δελτίων καὶ αὐτομάτως ὁ Ἐγκεφάλος τροφοδοτεῖ νέον δελτίον, τὸ ὁποῖον ἀκολουθεῖ τὸ ἀνωτέρω ἀναλυόμενον πρόγραμμα.

Τὸ ἀνωτέρω πρόγραμμα ἐπαναλαμβάνεται συνεχῶς μέχρις ὅτου ἐξαντληθοῦν ὅλα τὰ δελτία τῆς μήτρας. Μὲ τὸ τέλος τῆς διαδρομῆς ὅλων τῶν δελτίων διὰ τοῦ Ἐγκεφάλου ἔχομεν εἰς τὴν ἐξόδον τοῦ δύο σειρᾶς δελτίων:

- α) Τὰ δελτία τῆς ἀρχικῆς μήτρας τὰ ὁποῖα πλέον μᾶς εἶναι ἄχρηστα εἰς τὸν πρῶτον ὑποδοχέα δελτίων ἐξόδου καὶ
- β) Τὰ δελτία τῆς νέας μήτρας πού προκύπτουν μετὰ τὴν ἀπαλειφήν. Εἰς τὸν δεῦτερον ὑποδοχέα δελτίων ἐξόδου τοῦ Ἐγκεφάλου. Ἡ μήτρα αὕτη ἔχει μίαν σειρὰν καὶ μίαν στήλην ὀλιγωτέραν τῆς προηγουμένης. Τοῦτο δὲ φαίνεται εἰς τὴν πρᾶξιν ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τὰ δελτία τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν πρώτην σειρὰν καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν πρώτην στήλην τῆς μήτρας παραμένουν λευκά, χωρὶς καμμίαν διάτρησιν καὶ τὰ ἀπορρίπτομεν.

Ὁ ἀνωτέρω περιγραφεῖς εἶναι ὁ πρῶτος «βρόγχος» ἐπιλύσεως συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ ἀντιστροφῆς μητρῶν. Πρὶν προχωρήσωμεν εἰς τὸν δεῦτερον καὶ τελευταῖον «βρόγχον» δίδεται κατωτέρω σχηματικῶς τὸ πρόγραμμα τοῦ Ἐγκεφάλου Univac 120 πού περιλαμβάνει τὸν πρῶτον «βρόγχον».

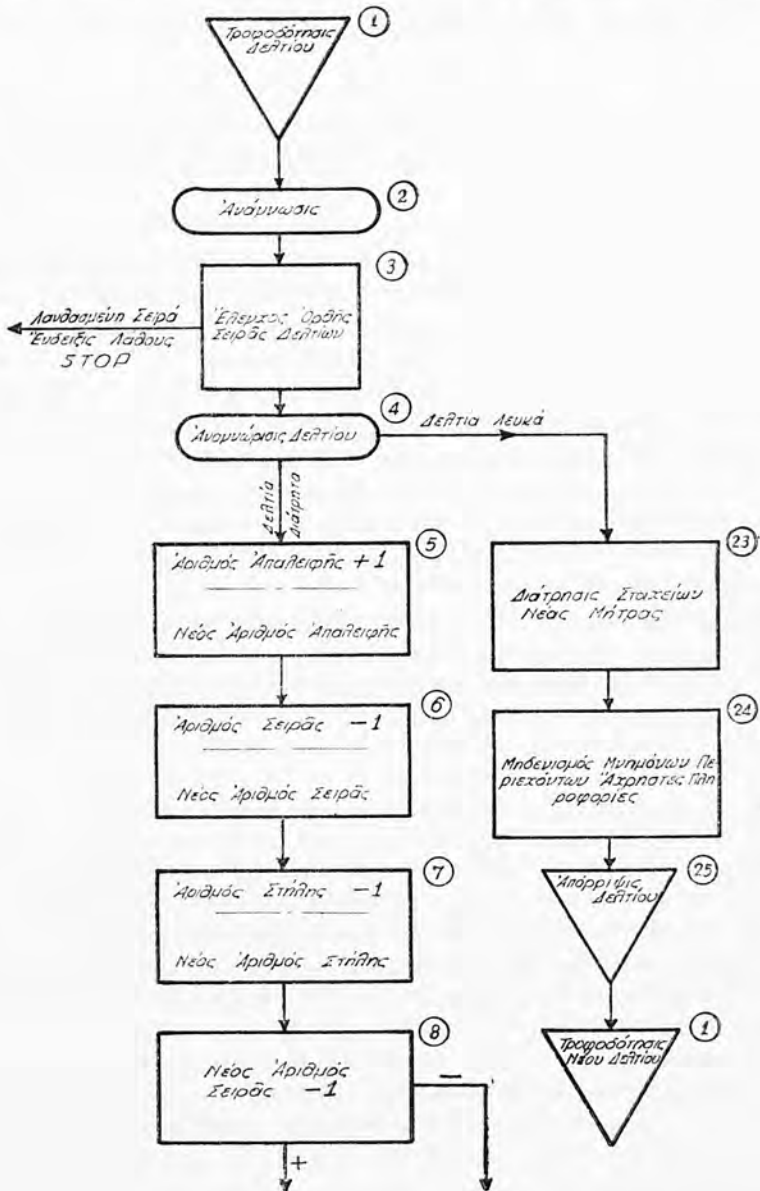
### Δεύτερος βρόγχος λύσεως

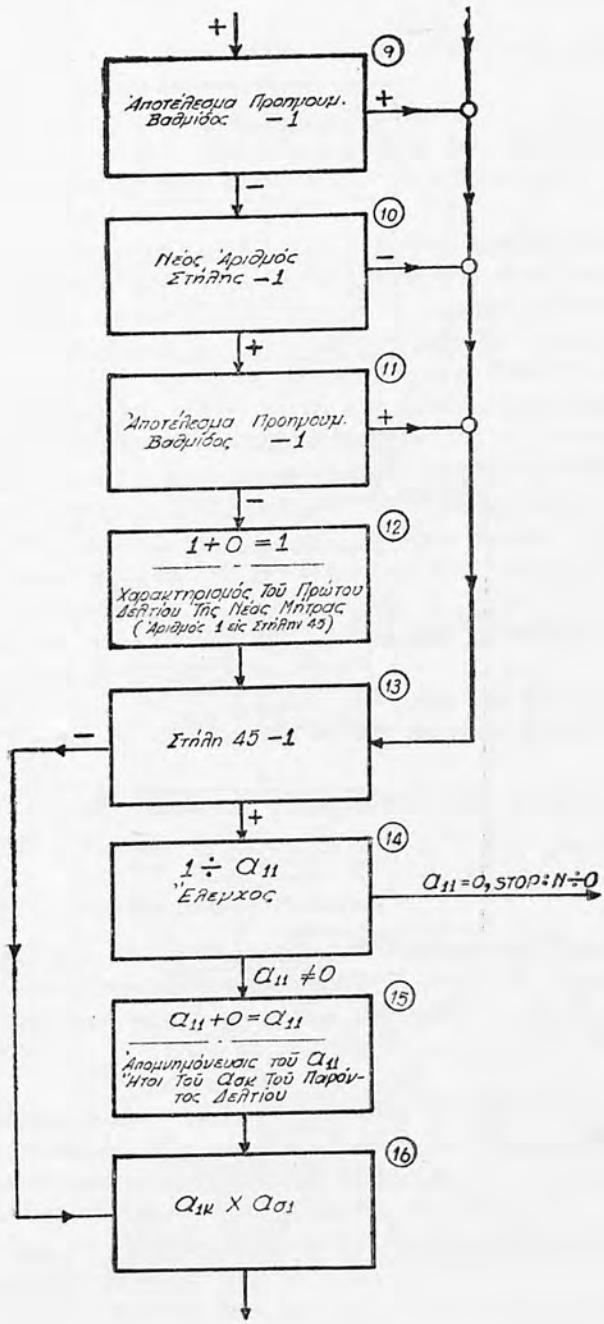
Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πρώτου «βρόγχου» τοῦ προγράμματος ἀπὸ τὸν Ἡλεκτρονικὸν Ἐγκεφάλον ἔχουν προκύψει τὰ δελτία τῆς νέας μήτρας ἐπὶ τῶν ὁποίων ἔχουν διατρυπηθῆ ὅλα τὰ ἀπαραίτητα στοιχεῖα διὰ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν ἐπομένην ἀπαλειφήν ἐκτὸς τῶν ὄρων  $\alpha_{31}$  πού πρέπει νὰ διατρυπηθοῦν εἰς τὰς στήλας 24 ἕως 33 τῶν δελτίων. Διὰ τοῦτο ἐκτελεῖται ὁ κατωτέρω δεῦτερος «βρόγχος», ὡς ἑξῆς:

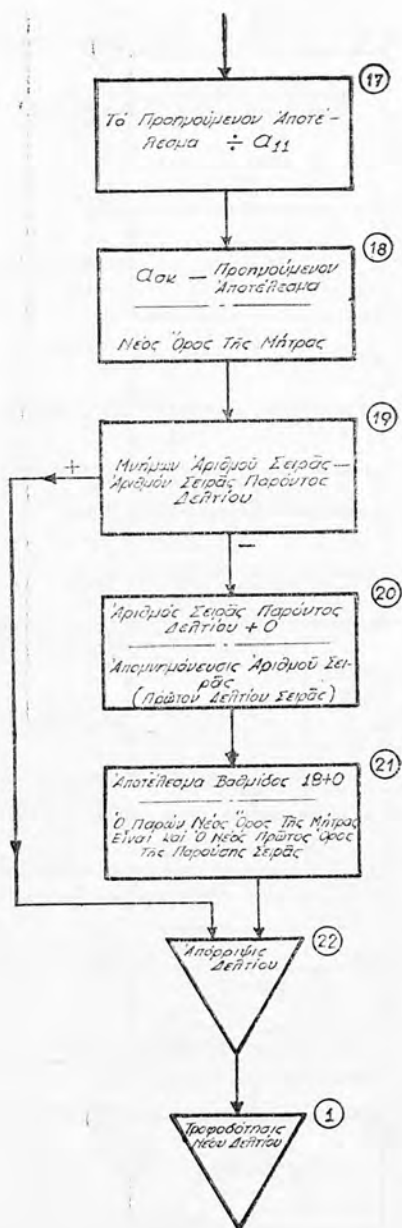
Τὰ δελτία τῆς νέας μήτρας πού προέκυψαν μετὰ τὴν πρώτην ἀπαλειφήν τροφοδοτοῦνται πλέον εἰς τὴν διαλογικὴν μηχανήν. Ἐκτελεῖται διαλογὴ κατ' ἀριθμὸν στήλης ὥστε τὰ δελτία νὰ λάβουν τώρα τὴν διάταξιν: 11, 21, 31, 41, . . .  $v_1$ , 12, 22, 32, 42, . . .  $v_2$ , 13, 23, 33, 43, . . .  $v_3$ , 14, 24, 34, 44, . . .  $v_4$ , 1 $v$ , 2 $v$ , 3 $v$ , 4 $v$ , . . .  $vv$ .

Μὲ τὴν διάταξιν αὐτὴν τὰ δελτία τροφοδοτοῦνται ἐκ νέου εἰς τὸν Ἡλεκ-

Σχηματικόν διάγραμμα προγράμματος UNIVAC 120  
 διά τὸν πρῶτον βρόγχον  
 τῆς λύσεως συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ ἀντιστροφῆς μητρῶν







τρονικόν Ἐγκέφαλον ὁ ὁποῖος ἐκτελεῖ τὸν κατωτέρω δεῦτερον βρόγχον τοῦ προγράμματος.

1. Τροφοδοτεῖ τὸ πρῶτον δελτίον εἰς τὸν θάλαμον ἀναγνώσεως.

2. Ἀναγιγνώσκει τὸ δελτίον.

3. Ἐλέγχει τὴν ὀρθὴν σειρὰν (διαδοχὴν) δελτίων (11, 21, 31, 41 . . . ν1, 12, 22, 32, 42 . . . ν2 κ.λ.π.). Ἐὰν ἡ διαδοχὴ τῶν δελτίων εἶναι λαυθασμένη ὁ Ἐγκέφαλος σταματᾷ καὶ δίδει σχετικὴν ἔνδειξιν λάθους ἂν ὄχι προχωρεῖ εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

4. Ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸ περιεχόμενον τοῦ μνήμονος ἀριθμοῦ στήλης τὸν ἀριθμὸν στήλης τοῦ παρόντος δελτίου. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι θετικὸν τὸ παρὸν δελτίον (ὄρος) ἀνήκει εἰς τὴν ἴδιαν στήλην μὲ τὸ προηγούμενον δελτίον (ὄρος) καὶ ἐπομένως τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 7 ὅπου διατρυπᾶται ὁ ὄρος  $\alpha_{\sigma_1}$  εἰς τὰς στήλας 24–33 καὶ ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 0 εἰς τὴν στήλην 23 ἐφ' ὅσον ὁ  $\alpha_{\sigma_1}$  εἶναι ὄρος ἀρνητικός. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικόν, ἔχομεν ἀλλαγὴν στήλης ὅποτε τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

5. Ἀπομνημονεύεται ὁ ἀριθμὸς στήλης τοῦ παρόντος δελτίου εἰς οἰκίον μνήμονα καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

6. Ἀπομνημονεύεται ὁ ὄρος  $\alpha_{\sigma_k}$  τοῦ παρόντος δελτίου εἰς οἰκίον μνήμονα. Πρόκειται περὶ τοῦ ὄρου  $\alpha_{\sigma_1}$  διὰ ὀλόκληρον τὴν στήλην πού ἀκολουθεῖ.

7. Διατρυπᾶται ὁ ὄρος  $\alpha_{\sigma_1}$  εἰς τὰς στήλας 24–33 τοῦ δελτίου καὶ ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 0 εἰς τὴν στήλην 23 ἂν ὁ  $\alpha_{\sigma_1}$  εἶναι ὄρος ἀρνητικός καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

8. Ἀπορρίπτεται τὸ δελτίον εἰς τὴν ἔξοδον καὶ αὐτομάτως τὸ πρόγραμμα ἐπανέρχεται εἰς τὴν βαθμίδα 1 διὰ νὰ τροφοδοτηθῇ τὸ ἐπόμενο δελτίον.

Ἀκολουθεῖ τὸ σχηματικὸν διάγραμμα τοῦ προγράμματος  $\mu\text{inac } 120$  διὰ τὸν δεῦτερον βρόγχον.

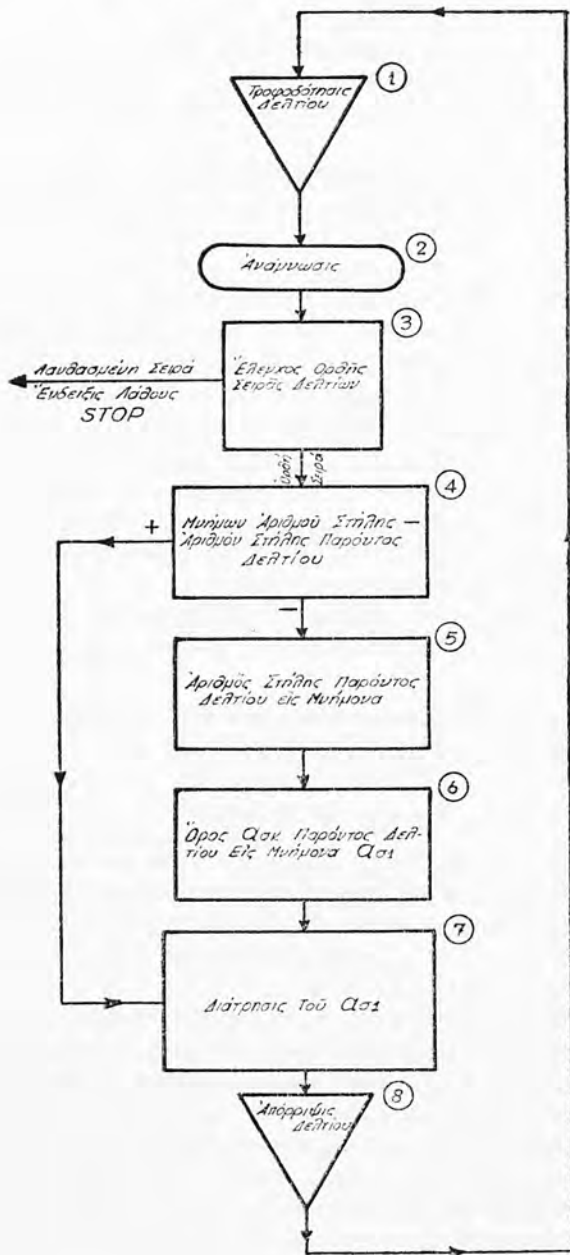
### *Γενικὸν κύκλωμα λύσεως τοῦ προβλήματος*

Τὰ δελτία μετὰ τὴν ἔξοδον τῶν ἐκ τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου τροφοδοτοῦνται ἐκ νέου εἰς τὴν διαλογικὴν μηχανὴν ἢ ὁποία τὰ ταξινομεῖ κατὰ σειρὰν (τῆς μήτρας) ὥστε νὰ λάβουν ἐκ νέου τὴν τάξιν 11, 12, 13, 14, . . . . . 1ν, 21, 22, 23, 24, . . . . . 2ν, 31, 32, 33, 34, . . . . . 3ν, 41, 42, 43, 44, . . . . . 4ν, . . . . . ν1, ν2, ν3, ν4 . . . . . νν.

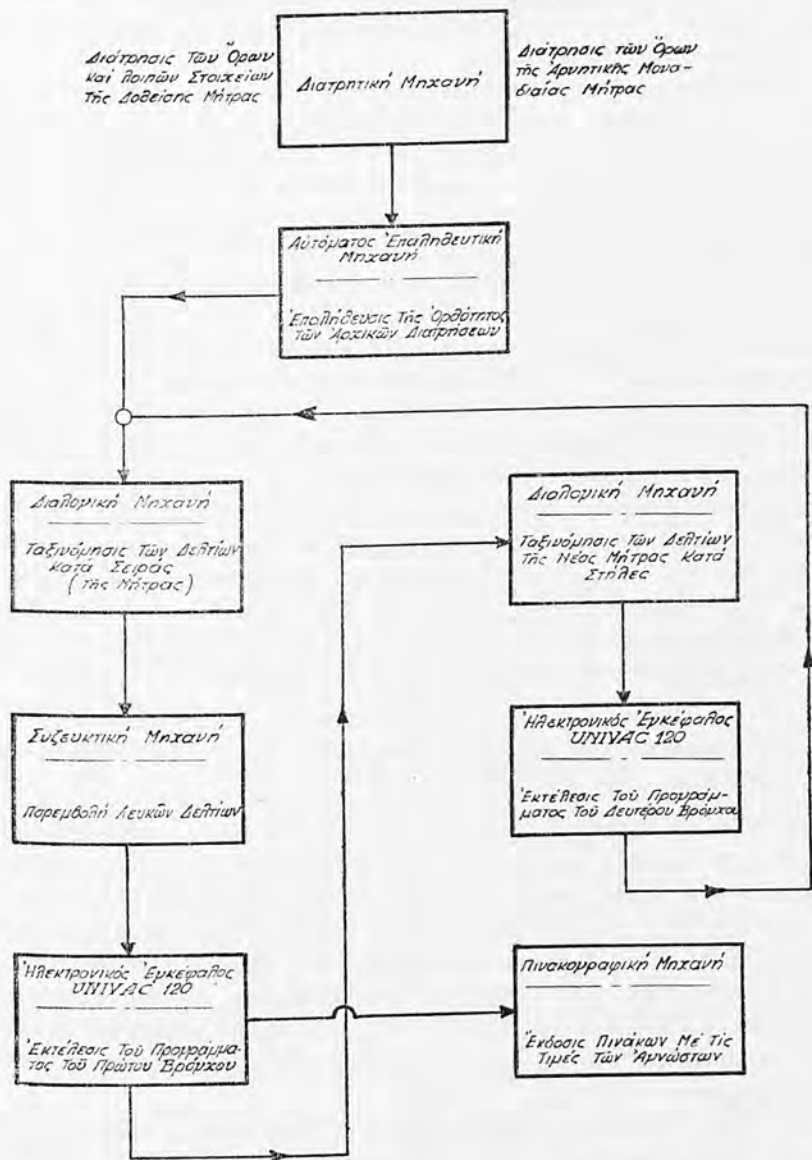
Μετὰ τὴν αὐτόματον αὐτὴν ἐπεξεργασίαν τροφοδοτοῦνται εἰς τὴν συζευκτικὴν ὥστε μετὰ ἕκαστον διάτρητον δελτίον νὰ παρεμβληθῇ ἓνα λευκόν. Ἀφοῦ καὶ ἡ αὐτόματος αὐτὴ ἐπεξεργασία ἐκτελεσθῇ, τὰ δελτία τροφοδοτοῦνται ἐκ νέου εἰς τὸν Ἡλεκτρονικὸν Ἐγκέφαλον διὰ τὴν ἐπανάληψιν καὶ τῶν δύο ἀνωτέρω «βρόγχων» τοῦ προγράμματος ὡς περιεγράφησαν. Τὸ κύκλωμα αὐτὸ ἐπαναλαμβάνεται τόσας φορές ὅσας αἱ σειραὶ τῆς μήτρας. Εἰς τὸ τέλος προκύπτουν ἐπὶ διατρήτων δελτίων ὅλαι συγχρόνως αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων (βλέπε καὶ διάταξιν 8 εἰς τὸ Α' μέρος τῆς παρούσης μελέτης). Τὰ δελτία αὐτὰ τροφο-



Σχηματικόν διάγραμμα προγράμματος UNIVAC 120  
 διά τόν δεύτερον βρόχον τῆς λύσεως συστημάτων γραμμικῶν ἑξισώσεων  
 καί ἀντιστροφῆς μητρῶν



Σχηματικόν διάγραμμα κυκλοφορίας διατρήτων δελτίων διά τῶν μηχανῶν κατὰ τὴν λύσιν συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ τὴν ἀντίστροφὴν μητρῶν



Σημείωσις : Τὰ δελτία ὁδηγοῦνται εἰς τὴν πινακογραφικὴν μηχανὴν μόνον μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἢ διαδρομῶν διὰ τοῦ κλειστοῦ κυκλώματος μηχανῶν : Διαλογικὴ - συζευκτικὴ - Univac - Διαλογικὴ - Univac - Διαλογικὴ κ.ο.κ.

δοτούνται πλέον εις τὴν λογιστικὴν πινακογραφικὴν μηχανήν, ἡ ὁποία ἀποκρυπτογραφεῖ τὰς διατρήσεις καὶ ἐκδίδει πίνακα μετὰ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

Διὰ τὴν ἀπλοποιοθηοῦν περισσότερον αἱ φάσεις λύσεως τοῦ προβλήματος δίδεται κατωτέρω τὸ γενικὸν σχηματικὸν διάγραμμα «κυκλοφορίας» τῶν διατρήτων δελτίων διὰ τῶν μηχανῶν.

Θεωρῶ δὲ ἐπάναγκες νὰ τονίσω ἐδῶ πάλιν ὅτι ἡ ἴδια διαδικασία λύσεως τηρεῖται καὶ προκειμένου περὶ τῆς ἀντιστροφῆς μητρῶν ὡς ἐτονίσθη εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς μελέτης μετὰ ἐλαφρὰς μόνον μεταβολὰς. Ἐπίσης ἔχει ἰδιαιτέραν σημασίαν νὰ μνημονεύσω ὅτι τὰ προγράμματα τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου Univac πού ἐχρησιμοποιήθησαν ἀνωτέρω καὶ ἐπίσης τὸ ὅλον σύστημα «κυκλοφορίας» τῶν διατρήτων δελτίων διὰ τῶν μηχανῶν, ἔχουν συντεθῆ ἔτσι ὥστε νὰ ἀπλουστεύεται ἡ μελέτη διὰ τοὺς μὴ μεμημένους εἰς τὰ τῶν Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων. Ἡ προσπάθειά μου δὲ αὕτη τῆς ἀπλουστεύσεως ἐγένετο εἰς ὠρισμένα σημεῖα εἰς βάρος τῆς ταχύτητος λύσεως καὶ μετὰ αὐξήσιν τοῦ χρόνου χρησιμοποίησεως τῶν μηχανῶν. Ἐπιθυμῶ δὲ αὐτῶν τῶν τελευταίων γραμμῶν νὰ τονίσω ὅτι διὰ τὸν Ἐγκέφαλον Univac 120 εἶναι δυνατόν νὰ καταστρωθῆ περισσότερον πολὺπλοκον πρόγραμμα τὸ ὁποῖον δίδει ταχύτεραν καὶ ἐπίσης ἀπλουστέραν διὰ τοὺς εἰδικούς λύσιν, τὸ πρόγραμμα ὅμως τοῦτο θὰ ἦτο δυσκολώτερον νὰ παρακολουθηθῆ εἰς τὴν ἐξέλιξίν του ἀπὸ μὴ εἰδικούς καὶ ἐπειδὴ ἡ μελέτη μου αὕτη ἀπευθύνεται εἰς εὐρύτερον ἀναγνωστικὸν κοινὸν τὸ ἀπέφυγα. Διὰ τῆς ἴδιας δὲ μεθόδου ἀλλὰ μετὰ συνθετώτερον πρόγραμμα τοῦ Univac 120 ὁ γράφων ἐπέτυχε τὴν λύσιν τῶν 2 συστημάτων τῶν 24 γραμμικῶν ἐξισώσεων μετὰ 24 ἀγνώστους τοῦ ΟΛΠ τῶν ὁποίων ἡ διάταξις καὶ αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων δίδονται εἰς τὰς ἐπομένους σελίδας.

*Λύσις προβλημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ μητρῶν δι' Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων 2ας καὶ 3ης τάξεως.*

Ὁ Univac 120 πού ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ ΟΛΠ πού δίδονται ἀνωτέρω καὶ ἐπίσης ἐχρησιμοποιήθη ὡς τὸ βασικὸν «ἐργαλεῖον» εἰς τὴν μελέτην μας εἶναι Ἡλεκτρονικὸς Ἐγκέφαλος διατρήτων δελτίων (1ης τάξεως). Ἐν τούτοις τὰ προβλήματα αὐτὰ δύνανται νὰ λυθοῦν ταχύτερον διὰ τῶν μεγαλυτέρων Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων (2ας καὶ 3ης τάξεως, βλέπε βιβλίον μου «Ἡλεκτρονικοὶ Ἐγκέφαλοι», Ἀθῆναι 1959). Μάλιστα εἰς τοὺς Ἐγκεφάλους 2ας καὶ 3ης τάξεως ὅπου αἱ μνημονικαὶ ἰκανότητες εἶναι πολὺ μεγάλαι σπανίως εἶναι ἀνάγκη νὰ χρησιμοποιηθοῦν καὶ ἄλλαι ἐκτὸς τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου μηχαναί.

Εἰς τοὺς Ἐγκεφάλους αὐτοὺς ὅλαι αἱ ἐπεξεργασίαι ἐκτελοῦνται τελείως αὐτομάτως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς μηχανῆς μετὰ τὴν ἐλαχίστην παρεμβολὴν τοῦ ἀνθρωπίνου παράγοντος. Ὅμως τὰ προγράμματα λειτουργίας τῶν Ἡλεκτρονικῶν αὐτῶν Ἐγκεφάλων, εἶναι ἐξόχως πολὺπλοκα καὶ διὰ τὴν κανανόησίν των ἢ ἔστω καὶ τὴν ἀπλὴν παρακολούθησίν των ἀπαιτεῖται ὑψηλοῦ ἐπιπέδου εἰδίκευσις εἰς τὴν τεχνικὴν προγραμματισμοῦ καὶ χρησιμοποίησέως των.



Σύστημα 24 Γραμμικών Εξισώσεων του Ο.Α.Π. Νο 2

(Μήτρα — Matrix — 24 σειρών και στηλών)

	W <sub>1</sub>	W <sub>2</sub>	W <sub>3</sub>	W <sub>4</sub>	W <sub>5</sub>	W <sub>6</sub>	W <sub>7</sub>	W <sub>8</sub>	W <sub>9</sub>	W <sub>10</sub>	W <sub>11</sub>	W <sub>12</sub>	W <sub>13</sub>	W <sub>14</sub>	W <sub>15</sub>	W <sub>16</sub>	W <sub>17</sub>	W <sub>18</sub>	W <sub>19</sub>	W <sub>20</sub>	W <sub>21</sub>	W <sub>22</sub>	W <sub>23</sub>	W <sub>24</sub>	
1	9	-10									8	-8													K
2	-6	19		1						4	-16	4		2											0
3			1																						0
4		1		20	-8	1		4	-16	4					2										0
5				-6	21	-8	4	-16	4																0
6				2	-16	20	-16	8												2					0
7					4	-8	21	-16	2											4	-8	1			0
8				2	-8	2	-8	22	-8	1										2	-8	2			0
9				-8	2		1	-8	21	-8	1									2	-8	2			0
10				2				1	-8	21	-8	1		2	-8	2						1			0
11	2	-8							1	-8	20	-6	2	-8	2										0
12	-4	4								1	-10	9	-4	4											K
13											4	-4	9	-10	1										K
14											2	-8	2	-5	20	-8	1								0
15											2	-8	2	1	-8	21	-8	1							0
16				1							2	-8	2	1	-8	21	-8	1							0
17					1						2	-8	2	1	-8	22	-8	2							0
18						1						2	-8	4	2	-15	21	-8	4						0
19							2									8	-16	20	-16	2					0
20																4	-16	4	-8	21	-8	1			0
21									2						4	-16	4	1	-8	20	-8	1			0
22										2				4	-16	4				1	-8	20	-8	1	0
23											2			4	-16	4					1	-8	19	-6	0
24														-8	8							1	-10	9	K

*Τιμαὶ τῶν ἀγνώστων τοῦ Συστήματος Νο 1*

$W_1 = - 1096,36996$	$W_{13} = - 789,43994$
$W_2 = - 529,60354$	$W_{14} = - 214,30165$
$W_3 = - 0 -$	$W_{15} = + 371,20000$
$W_4 = + 719,67477$	$W_{16} = + 958,68916$
$W_5 = + 1259,76336$	$W_{17} = + 1405,01845$
$W_6 = + 1455,39944$	$W_{18} = + 1570,43361$
$W_7 = + 1496,48326$	$W_{19} = + 1605,81591$
$W_8 = + 1313,79397$	$W_{20} = + 1447,99426$
$W_9 = + 817,99987$	$W_{21} = + 1022,55568$
$W_{10} = + 174,25054$	$W_{22} = + 455,54611$
$W_{11} = - 400,59434$	$W_{23} = - 130,04734$
$W_{12} = - 971,91410$	$W_{24} = - 706,30726$

Σημείωσις: Ὡς τιμὴ τῆς σταθερᾶς Β ἐλήφθη τὸ 100.

*Τιμαὶ τῶν ἀγνώστων τοῦ Συστήματος Νο 2*

$W_1 = + 1517,71188$	$W_{13} = + 1608,65293$
$W_2 = + 715,51408$	$W_{14} = + 809,52539$
$W_3 = + - 0 -$	$W_{15} = + 114,29362$
$W_4 = - 468,95040$	$W_{16} = - 397,73968$
$W_5 = - 749,05093$	$W_{17} = - 706,52151$
$W_6 = - 842,72195$	$W_{18} = - 809,42927$
$W_7 = - 830,61135$	$W_{19} = - 799,48487$
$W_8 = - 732,85142$	$W_{20} = - 694,59558$
$W_9 = - 438,74072$	$W_{21} = - 380,35816$
$W_{10} = + 55,75113$	$W_{22} = + 137,58877$
$W_{11} = + 755,31282$	$W_{23} = + 832,53210$
$W_{12} = + 1555,81113$	$W_{24} = + 1631,16696$

Σημείωσις: Ὡς τιμὴ τῆς σταθερᾶς Κ ἐλήφθη τὸ 100.



Οι λόγοι αυτοί επέβαλον εις τὸν γράφοντα νὰ ἀποφύγη τὴν ἀναφορὰν εις τὴν μελέτην μας προγράμματος Ἑλεκτρονικῶν Ἑγκεφάλων 2ας καὶ 3ης τάξεως.

### *Γενικαὶ τινες Παρατηρήσεις*

#### *Οἱ τιμαὶ τῶν ὄρων*

Διὰ τῆς ἀναλυθείσης μεθόδου δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν οἰασδήποτε τάξεως συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ἰσαριθμούς ἀγνώστους ἢ νὰ ἀντιστρέψωμεν οἰασδήποτε τάξεως μήτραν. Συνιστᾶται ἐν τούτοις ὅπως πρὶν ἢ προχωρήσωμεν εις τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου διαμορφώσωμεν κατὰ τὸ δυνατόν τοὺς ὄρους τῆς μήτρας ὥστε νὰ ἀποφευχθῇ ἡ δημιουργία ὄρων μὲ πλείονα τῶν 10 ψηφίων, ὅση εἶναι ἡ μνημονικὴ ἱκανότης ἐκάστης μονάδος τοῦ μνήμονος τῆς μηχανῆς. Ἐν πάσῃ ὁμως περιπτώσει καὶ οἱ ἀριθμοὶ μὲ πλείονα τῶν 10 ψηφίων εἶναι δυνατόν νὰ καλυφθοῦν διὰ τῆς καταστρώσεως καὶ τοῦ προσθέτου βοηθητικοῦ προγράμματος.

#### *Ἡ κυρία διαγωνίος τῆς μήτρας*

Ἰδιαιτέραν σημασίαν ἔχει ἐπίσης ἡ ἀρχικὴ διάταξις τῆς κυρίας διαγωνίου τῆς μήτρας πρὶν προχωρήσωμεν εις τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου ὡς ἐγράφη ἤδη καὶ ἀνωτέρω. Εἰς τὴν κυρίαν διαγωνίον πρέπει κατὰ τὸ δυνατόν νὰ τίθενται οἱ μεγαλύτεροι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ὄροι τῆς μήτρας καὶ εἶναι ὀπωσδήποτε γνωστὸν ὅτι ὀδηγούμεθα εἰς ἀδυναμίαν λύσεως ἐὰν ἔστω καὶ εἰς ὄρος τῆς κυρίας διαγωνίου ἔχει τιμὴν μηδενικὴν.

#### *Ἡ μέθοδος κινητῆς ὑποδιαστολῆς (Floating Decimal)*

Εἰς συνθετώτερον πρόγραμμα λύσεως παρομοίων προβλημάτων διὰ τοῦ Univac 120 εἶναι δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῆς κινητῆς ὑποδιαστολῆς τῶν ὄρων (Floating Decimal). Κατὰ τὴν μέθοδον αὐτὴν ὅλοι οἱ ἐντὸς τοῦ Ἑλεκτρονικοῦ Ἑγκεφάλου κυκλοφοροῦντες ἀριθμοὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν θέσιν ὑποδιαστολῆς ἀνεξαρτήτως τῆς ἀπολύτου τιμῆς των, συνοδεύονται δὲ ἀπὸ δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ 10 διὰ τὴν ἀνεύρεσιν τῆς ἀπολύτου τιμῆς των ὅταν τοῦτο χρειασθῇ.

Π.χ. Οἱ ἀριθμοὶ :

$$123,45 - 12,345 - 1,2345$$

δύναται νὰ γραφοῦν καὶ νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀπὸ τὸν Ἑγκέφαλον ὡς :

$$1,2345 \times 10^2 - 1,2345 \times 10^1 - 1,2345 \times 10^0$$

#### *Ἡ ταχύτης τοῦ Univac 120*

Ἡ μεγίστη ταχύτης τροφοδοτήσεως δελτίων διὰ τοῦ Univac 120 εἶναι 9000 δελτία ἀνὰ ὥραν. Ἡ περιγραφεῖσα ἀνωτέρω μέθοδος ἐκμεταλλεύεται τὴν πλήρη ταχύτητα τῆς μηχανῆς. Ἐν τούτοις ἡ λύσις ἐπιβραδύνεται λόγω τῆς συχνῆς παρεμβολῆς τῶν ἄλλων μηχανῶν (διαλογικῆς καὶ συζευκτικῆς) καὶ τοῦ παράγοντος ἀνθρώπου. Διὰ συνθετωτέρου προγράμματος ὡς ἐκεῖνο πού ὁ γράφων ἐφήρμοσε διὰ τὴν λύσιν τῶν 2 συστημάτων τοῦ ΟΛΠ, ἡ ταχύτης τοῦ Ἑγκεφάλου ἦτο 7500 δελτία ἀνὰ ὥραν. Ἐν τούτοις ἡ λύσις ἦτο ταχύτερα λόγω τῆς ἀραιωτέρας παρεμβολῆς ἄλλων μηχανῶν καὶ τοῦ παράγοντος ἀνθρώπου.

PART 2

S U M M A R I E S

## PART ONE

### **A. A. Lazaris: The Leontief System**

The purpose of this paper is the reader's introduction to the main economic and technical characteristics of the Input-Output Analysis. It is divided into two parts: Part I deal mainly with the open Input-Output system on the basis of an arithmetical example. In this Part the relationship between input-output analysis and National Accounting is also examined and some critical remarks on the whole system are made. Part II provides a mathematical exposition of the main properties of the Leontief matrices as well as a summary of the analytical uses of the closed and open input-output models.

### **D. Koulourianos: The assumption of proportionality**

In this paper the meaning of the proportionality assumption in linear economics is carefully analysed and the realism of this assumption is commented. It shown that although the technical progress makes the proportionality assumption not applicable as a predictive tool, it does not necessarily destroys the use of this assumption as a normative tool, i.e., as a tool of programming. A distinction is therefore made between the descriptive (or predictive) use and the normative use of the proportionality assumption.

### **A. Lazaris-D. Karagiorgas: A Model of Monetary Analysis.**

In this paper an effort is made for the construction of a decision model wich would give answers in questions of monetary and credit policy, such as the problem of the effects of an increase in the effective demand on monetary stability and the Balance of Payments.

The model has been adapted to the monetary conditions of the underdeveloped countries; The computational technique in particular could be applied to the greek statistical possibilities, after perhaps some elaboration of the existing data.

### **D. Karagiorgas: Systems of General Economic Equilibrium and inter-sectoral Analysis.**

In this paper an attempt is made for a comparative evaluation of two basic models of general economic equilibrium, namely: The Walrasian System and Leontief's input-output model. A part of the paper has been devoted to a brief description of the above systems and the rest contains an analysis of their similarities.

### **A. A. Lazaris: A criterion for the optimum allocation of resources in the program of economic development.**

In this article the input-output analysis is applied for the determination of the total (direct and indirect) capital cost of production and imports and the unit capital values for the various commodities are used as «shadow prices» for the allocation of investment resources among the various sectors of the economy.

### **Salv. Cherubino: Input-output Analysis and abstract economics.**

The first paragraph of the paper deals with the relations between production and consumption or prices and employment established by input-output matrix.

The second paragraph introduces a system of linear differential equations between vector of production-prices and vector of their velocities as complete representation of the market reactions.

In the third paragraph conditions of perfect competition and oscillatory properties of the economic system are examined.

Paragraph 4 gives a large classification of economies based on matrix coefficients of the system representing the market.

Programming is the argument of paragraph 5, that is the possibility of obtaining or directing the reaction of the market to some prefixed results.

The last paragraph deals with the concept of abstract economies which arises from the fact that mathematical properties of the system are independent from the meaning of the words «production», «price», «consumption», «employment», «sector», and «market».

### **Vera Cao-Pinna: Progress report on input-output research in Italy.**

The article contains an account of the work accomplished during the past five years in Italy in the field of applied input-output analysis and

the most important studies are described in some detail. Among these studies we mention the analysis of import requirements of the Italian economy, the analysis of the input on the Italian economy of the ship building program and the analysis of energy requirements of the Italian economy.

**Claude B. Bandaloukas: Applications of the input-output system in different countries.**

The author's main object is to provide a brief and simplified account of the applications of the input-output system in various countries, and more specifically in Holland, Denmark, Norway, U.S.A., United Kingdom, Italy and France. There is also a short discussion of the major difficulties connected with the application of this system. Lastly, the author reviews the contributions of these empirical studies in the advancement of economic science.

## PART TWO

### **A. G. Papandreou: Linear Programming: A New Tool for Rational Decision.**

The paper is directed at the formulation of characteristic mathematical problem of linear programming, the investigation of the conditions under which it may be asserted that the problem has a solution, and at the evaluation of the significance of the technique in its substantive applications. The first part of the paper is devoted to an introductory presentation of the relevant mathematical tools which are derived primarily from the fields of set theory and linear algebra. Following a brief discussion of convex sets, the basic properties of a linear programming problem and its dual are examined. The paper concludes with a discussion of the implications of linear programming for the theory of the firm but opens the way for economy-wide applications of the technique, especially those relating to the choice of an investment program for economic development.

### **A. A. Lazaris: The Simplex Algorithm.**

In this paper the classical computational technique of linear programming problems is presented in a simplified manner, for the reader who is mainly interested in the operational knowledge of the simplex method. Particular emphasis is given in the formulation of linear problems and the economic interpretation of the computational procedure. Some short cuts in the iterative technique are also indicated.

### **D. Koulorianos: Two methods of solution of linear problems.**

The author describes in detail the Transportation or Distribution Method and the Modified Distribution Method for the solution of linear programming problems, on the basis of arithmetical examples. The paper gives a simplified non-mathematical account of these methods.



**A. G. P a p a n d r e o n : Agenda for a policy on economic development.**

An attempt is made in this paper to develop a model for policy, directed at the problem of economic development. A basic distinction is made initially, which is adhered to throughout the paper, between resource-allocation schemes and the economic organizations which are coordinated to them. Following a brief discussion of an aggregative Domar-type growth model, an intersectoral growth model is presented along the general lines of Chakravarty's work. The policy problem is introduced in two steps: first, the selection of a technology which takes account of resource scarcities, and, secondly, the selection of an investment program which is consistent with the dynamic path, chosen by the policy authority. The limitations of the «linearity» assumption are examined briefly, and the paper is concluded with a general formulation of the problem of economic organization. It is asserted that the «constitutional authority» will seek a new organization only when it ceases to be satisfied with the dynamic path of the economy, but that considerations other than the dynamic path may be taken into account in the choice of organization.

**Salvatore Cherubino: Some problems of linear programming.**

In the first paragraph of the article the author considers two problems of linear programming and their dual ones. The problems concern production or average of prices in any aggregated sector. In the second paragraph are studied linear programming of main parts of velocities of production or of average of prices in aggregated sectors, whatever the intensities of aggregation. Third paragraphs concerns with definitions of surproduction and accumulation of capitale employed in the  $n$  sectors of the considered economy.

**Des Raj: Use of Programming methods in Sample Surveys.**

The use of linear programming methods in the field of sample surveys is explained. Illustrations are drawn from the Indian National Sample Survey, the Canadian labour force survey and from other surveys. In each case the mathematical problem is formulated and its solution indicated.

**D. G. A t h a n a s a t o s : Optimum Combinations of Competitive Crops at Copais Area (An application of Linear Programming).**

The main objective of this study is to apply linear programming techniques to determine optimum cropping plans for Copais region: The

typical farm operator in the area selected, being familiar with the production of wheat, cotton, alfalfa and corn, wanted an allocation of cropland for some combination of these crops. Given that the typical farm operator has available family labor, sufficient working capital, and equipment to undertake any possible allocation of the crops to the 2—6 acres of cropland, the only fixed factors which might restrict the operator's choice of a production plan are: 1. the number of acres available, and 2. the amount of water available during different periods of the summer season. In addition to these absolute limitations, we assumed some restrictions to alfalfa, potatoes and sugar beets acreage due to high variability of prices.

While several different competitive crops are included in the possibilities of choice, a single method of producing is considered for wheat, cotton, corn (spring), sugar beets (spring) and alfalfa while double cropping system was used such as wheat-corn, wheat-sugar beets and wheat-potatoes. Sugar beets and potatoes were taken under consideration because both are very well adapted to the soil, climate and market conditions. Prices, yields and all other data refer to the 1953—56 period.

The analysis was carried out by the use of standardization method of the linear programming technique.

**Maria Passaquindici: Geographical division of sales and distribution of transportation means of different capacity.**

In this article there are two problems being considered: geographical division of selling and distributing goods by means of conveyance of different capacity. The cost km. for the carriage varies and it depends on both the quantity transported and the capacity of the means of conveyance being considered: it is, therefore, fixed capacity, a continuous function with a finite number of discontinuities. The functions to be minimised are searched for and explicated so that the geographical division will be the best and the distribution of the means of conveyance will cost as little as possible. The double problem can be solved only with the help of electronic calculators.

## A P P E N D I X

**S. Pefanis: Systems of Linear equations and matrix calculus.**

The author, describes the method of using the Univac 120 for the solution of large scale system of linear equations. The same method can be applied in general with other types of computers and the main restrictions as to the scale of the problems is the memory of the machine and the programmer's ability, to formulate the problems.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ἐπιμέλεια:  
ΕΛΕΝΗΣ ΣΠΕΝΤΖΟΥ

## I. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΙΣΡΟΩΝ ΕΚΡΟΩΝ

- «ABC of Input-Output». Part I-Demand under the microscope. The Economist (London), September 1953.
- «ABC of Input-Output». Part II-Facts for new forecasts. The Economist (London), September 1953.
- Alcaide Inchausti, Begue etc. : «La estructura de la Economie Espanola», Instituto de Estudios Politicos. Madrid 1958.
- Arrow Kenneth-Hoffenberg M.: «A Time Series Analysis of Inter-industry Demands», Amsterdam, North Holland Publishing Co 1959:
- » «Import substitution in Leontief models». Econometrica, January 1950.
- Arrow, Selma S. : Comparisons of Input - Output and alternative projections». The Rand Corporation, P - 239, April 1951.
- Balderston Frederick E. : «Scale of Output and Internal Organisation of the Firm», Quarterly Journal of Economics, 1955.
- Barna Tibor (ed.) : «The Structural Interdependence of the Economy», John Wiley and Sons Inc, N.Y. 1955.
- » «The interdependence of the British Economy». Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General), 1952.
  - » Tibor, (editor). «International Seminar on Input-Output Analysis» University of Pisa, 1955.
- Bhatt, Vinayak Vijayphanker : «Capital - output ratios of certain industries : a comparative study of certain countries». The Review of Economics and Statistics, Harvard University Press, August 1954.
- Bjerke K. : «Government Economic Planning and Control in Scandinavia», Cornell University (ed.) Press, 1950.
- Bjerve P. J. : «Planning in Norway 1947 - 56», Amsterdam North Holland Publishing Co, 1959,

- Boselli, Fulvie: «The Leontief model and the Italian matrix». *L'Industria*, Rivista Di Economic Politica, 1953.
- Bou langer, J. J.: «Le problème des interdépendances d'une économie appliquée». *Revue d'Économie Politique*, 1953.
- Bowman, Raymond T.: «Some notes on the capacity concept». *Journal of the American Statistical Association*, September 1953.
- Brambilla, Francesco: «Considerations about Leontief model». *L'Industria* 1953.
- Burtle, James: «Input-Output Analysis as an aid to manpower policy». *International Labor Review*, May 1952.
- Bozuffi R. - Reviglio G.: «The Inversion of the 1950 Italian Input-Output Table». *L'Industria*, Millan, 1955.
- Cameron Burgess: «The construction of the Leontief system». *The Review of Economic Studies*, 1950-1951.
- «Input-Output analysis». *The Economic Record*, May 1954.
- Cao-Pinna, Vera: «Analisi delle relazioni interindustriali di singoli settori produttivi». *L'Industria*, Rivista di Economia Politica, 1954.
- \* «La costruzione del bilancio analitico dell'economia Italiana per il 1950». *L'Industria*, Rivista Di Economia Politica, 1952.
  - » «La Input-Output analysis» come strumento di organizzazione industriale. *Technica ed Organizzazione*, March - April 1952.
  - » «Nuovi metodi di programmazione economica: La Input-Output analysis» *L'Industria*, Rivista di Economia Politica, January 1952.
  - » «Input-Output Analysis», *Dizionario di Economia Politica*, Edizioni di Comunità, Milan, 1955.
  - » «Income Transfers among the Productive Sectors Resulting from Changes in the Relative Price System», *Rivista di Economia Agraria*, Rome 1956.
  - » «Relationship between the Transportation Sector and the Productive System», *Proceedings of the 4th Italian Conference on Transp. Problems*, Italian Automobile Club, Milan, 1956.
  - \* and Righi: «The Interdependence between the Textile Industries and the Productive System», vol. IV of the «Il Problema Tessile Italiano»—vol. IV: National Productivity Committee, Rome, 1957.
- Chabert, Alexander: «Le système d'Input-Output de Wassily Leontief et l'analyse économique quantitative». *Économie Appliquée*, 1950.

Chenery, Hollis B., and Paul Clark: «Applications of Input-Output analysis in Italy». *Econometrica*, January 1953.

» and Mathilda Holzman: «The classification of industries». Harvard Economic Research Project. April 1949.

» «Engineering production functions». *The Quarterly Journal of Economics*, November 1949.

» «The method of Input-Output analysis». Chapter II of «The Structure and Growth of the Italian Economy». Mutual Security Agency, Special Mission to the Italy for Economic Cooperation, Rome, 1953.

» «Overcapacity and the acceleration principle». *Econometrica*, January 1952.

» «Regional analysis.» Annex: data used in the regional analysis. Chapter V of «The Structure and Growth of the Italian Economy». Mutual Security Agency, Special Mission to Italy for Economic Cooperation, Rome, 1953.

» «Structural change». Annex: Table for structural analysis. Rome, Mutual Security Agency, 1953.

» «Analisi delle modificazioni strutturali nell'economia italiana». *L'Industria*, *Rivista di Economia Politica*, 1953.

» «Le interdipendenze strutturali tra l'Italia del Nord e quella del Sud». *L'Industria*, *Rivista di Economia Politica*, 1953.

» «Theoria dell'analisi delle interdipendenze strutturali di un sistema economic». *L'Industria*, *Rivista di Economia Politica*, 1952.

» «Development Policies and Programms» *Econ. Bulletin for Latin America*, U.N. vol. III, 1958.

» Clark P.: «Interindustry Economics», John Wiley and Sons Inc, N.Y. 1959.

» and Others: «Resource Allocation for Economic Development», *Econometrica*, Oct. 1956.

Cherubino S.: «On the Mathematical Fundamentals of the General Economic Equilibrium», *L'Industria*, 1956.

» «Sui fondamenti matematici dell'equilibrio geniale economico», *L'Industria*, 1956.

» «Sulle economic bipartite», *Giorn degli Economisti*, 1957.

» «Sulle matrici quadrate non negative», *Ann. Sc. Norm.*, Pisa s. III vol X, 1956.

» «Calcolo delle Matrici», CNR, Roma, Cremonese 1957.

» «Sulla dinamica economica», *Rend. Lincei*, s. VIII, v. XXII, 1957.



- «Su alcune proprietà delle economie ripartite in settori e sulla loro classificazione dinamica», *Politica Economica*, 1957.
- ⋮ «Sull'evoluzione economica» (Principi di economie astratta) *Rend. Mat. Roma* 1958, vol. 17.
- ⋮ «Sull'economie astratte», *Politica Economica*, 1958.
- ⋮ «Sul concetto di economia astratta», *Rend. Lincei*, s. VIII, vol. XXVI, 1959.
- ⋮ «Osservazioni sulle economie astratte», *Politica Economica*, 1959.
- ⋮ and Passaquindici: «Sui sistemi di disequaglianze lineari e su alcune loro applicazioni», 1958.
- ⋮ «Sull'analisi lineare delle interdipendenze industriali». *L'Industria*, *Rivista di Economia Politica* 1954.
- ⋮ «Sull'analisi delle inrerdipenze strutturali dei settori economici». *L'Industria*, *Rivista di Economia Politica*, 1953.
- ⋮ «Sulla matrice moltiplicatore per un sistema economico divise in settori». *L'Industria*, *Rivista di Economia Politica*, 1952.
- Clark, Paul G.: «Analisi delle prospettive di espansione per l'Economia Italiana nel caso di realizzazione del programma O.E.C.E. per il 1956». *L'Industria*, 1953.
- ⋮ «L'applicazione dello schema Leontief all'economia italiana». *L'Industria*, *Rivista di Economic Politica*, 1952.
- ⋮ «The structure of the Italian economy in 1956». Chapter IV of «The Structure of the Growth of the Italian Economy», *Matual Security Agency, Special Mission to Italy for Economic Cooperations*, Rome, 1953.
- Cowles Commission: «Activity Analysis of Production and Allocation» N.Y. John Wiley and Sons, 1951.
- Dantzig, George B.: «A note on a dynamic Leontief model with substitution». *Econometrica*, January 1953.
- Alex Orden, Philip Wolfe: «Notes on linear programming». (Series of Rand papers on the determination of optimum solutions to systems of linear inequalities. Part (I-XVIII) 1953-1954.
- ⋮ «Programming in a Linear Structure». *Econometrica*, January 1949.
- Davies, George R.: «Input-Output matrices and index numbers». *The Review of Economics and Statistics*, February 1953.
- Debreu, Gerard and I. N. Herstein: Non-negative square matrices. *Econometrica*, October 1953.

- Di Fenizio, Ferdinando: «The matrix reveals the structure of Italian economy». *Review of Economic Conditions in Italy*, March 1953.
- Domar, Evsey D.: «Depreciation, replacement and growth». *The Economic Journal*, March 1953.
- Dorfman, Robert: «The nature and significance of Input-Output». *The Review of Economics and Statistics*, Harvard University Press, May 1954.
- Duesenberry, James S.: «The Leontief Input-Output system». Harvard Economic Research Project, October 1950.
- Ellsworth, P. T.: «The structure of American foreign trade; a new view examined». *The Review of Economics and Statistics*, Harvard University Press, August 1954.
- Evans, W. Duane: «American economy under full employment: a pattern for 1950». *Dun's Review*, July 1947.
- » «The effect of structural matrix errors on Input-Output estimates». Bureau of Labor Statistics, U.S. Department of Labor, 1952.
  - » «The Interindustry Relations Study for 1947». *The Review of Economics and Statistics*, Harvard University Press, 1952.
  - » «Marketing, uses of Input-Output data». *The Journal of Marketing*, July 1952.
- Fabbrini, Luigi: «La matrice dell'economia italiana e gli sviluppi dell'analisi delle interdipendenze strutturali». *Rivista Internazionale di Scienze Sociali*, November - December 1953.
- » «Lo scheme della struttura economica di W. Leontief». *Rivista Internazionale di Scienze Sociali*, March-April 1952.
- Fellner, William: «The capital-output ratio in dynamic economics». Published in *Money, Trade, and Economic Growth*, New York, Mac Millan Co., 1951.
- Fisher, Gene H. and Harry Markowitz: «On predicting a combination of outputs and final demands by Input-Output». The Rand Corporation, RM-954. 3 October 1952.
- Fox, Karl K.: «Some relationships between agriculture and the general economy». *Agricultural Economics Research*, January 1952.
- » «Structural analysis and the measurement of demand for farm products». *The Review of Economics and Statistics*, February 1954.
  - » «Econometric Models of the United States», *Journal of Political Economy*, 1956.
- Freutel G.: «The Eighth District Balance of Trade», *Monthly Review* Federal Reserve Bank of St Louis, June 1952.

- Glaser, Ezra: «Interindustry economics research». *The American Statistician*, April-May 1951.
- Goodwin, Richard M.: «The multiplier as matrix». *The Economic Journal*, December 1949.
- Hawkins, D.: «Some Conditions of Macroeconomic Stability», *Econometrica* XVI, 1948.
- Henderson, J. M.: «The Efficiency of the Coal Industry», Harvard University Press, Cambridge, 1958.
- Henderson Alexander: «The state of Input-Output analysis». Research Project in Intra-Firm Analysis. Discussion Paper. Carnegie Institute of Technology Pittsburgh - Penn - 1953.
- Herstein, I. N.: «Some mathematical methods and techniques in economics». *Quarterly of Applied Mathematics*, Brown University, October 1953.
- Holley, Julian L. «A Dynamic model: Part I - Principles of model structure». *Econometrica*, October 1952.  
«A dynamic model: Part II - Actual model structures and numerical results». *Econometrica*, April 1953.
- Harvard University: «Harvard Economic Research Project».
- Input-Output Analysis: an Appraisal: Papers presented to the Conference on Research in Income and Wealth held in New York in October 1952. Princeton University Press, Princeton, 1956 :
- I: Some basic problems of empirical Input-Output analysis, by Wassily W. Leontief.
  - II: The uses of interindustry relations data and methods, by W. Duane Evans.
  - III: A Review of Input-Output analysis, by Carl Christ.
  - IV: Research required for the application of interindustry economics, by John de Witt Norton.
  - V: A survey of current interindustry models, by Frederick T. Moore.
  - VI: A comparison of the structures of three social accounting systems, by Stanley J. Sigel.
  - VII: Interindustry economics and national income theory, by Herman Liebling.
  - VIII: Input-Output analysis of the Puerto Rican economy, by Amor Gosfield.
- Input-Output Analysis: Technical Supplement, edited by Philip M. Ritz, Princeton University Press, Princeton, 1954 :
- I: Final demand sectors, by Sidney A. Jaffe.

- II: Government, by Irving H. Licht.
- III: Foreign trade, by Murray Weitzman and Philip M. Ritz.
- IV: Construction, by David I. Siskind.
- V: The bill of goods for interindustry analysis, by Sidney S. Nettleba.
- VI: Manufacturing, by Jack Alterman and Morris R. Goldman.
- VII: Mining, fuel, and power, by Jack G. Faucett.
- VIII: Agriculture, by Philip M. Ritz.
- IX: Services and financial intermediaries, by Gabriel Cherin.
- X: Trade, by William I. Karr
- XI: Transportation and related services, by Albert J. Walderhaug.
- Input - Output Relations: Proceedings of a Conference on Inter-Industrial Relations held at Driebergen, Holland. (ed. the Nether. Economic Institute).

## I: Theory

- The Input-Output approach in economic analysis, by Wassily Leontief.
- Indexes of labour productivity as a partial measure of technological change, by Duane Evans.
- Static and dynamic linear general equilibrium models, by R. M. Goodwin.
- Maximization and substitution in linear models of production, by T. C. Koopmans.

## II: Applications

- Input-Output studies in Norway, by Odd Aukrust.
- Experience with Input-Output analysis in the United Kingdom, by T. Barna.
- Experience with Input-Output analysis in the Netherlands, by G. F. Loeb.
- A combination of a macro-economic model and a detailed Input-Output system, by J. Sandee and D. B. J. Shouten.
- The relation between Input-Output analysis and national accounting, by J. Richard N. Stone and J. E. G. Utting.
- Interindustry economics research program of the U.S. government, by Ezra Glaser.
- The international Seminar on Input-Output Analysis: (ed. Tibor Barna) The University of Pisa, Italy, 1955.
- Isard, Walter: «Distance inputs and the space economy». The Quarterly Journal of Economics, 1951.

- » «Interregional and regional Input-Output analysis: a model of a space-economy». *Review of Economics, and Statistics*, 1951.
- Jennings D. and Walker G. Fr.: «The Development of the Basic Input Data in a Linear Programming Application», abstract in *Operations Research (Jorsa)*, June 1956, vol. 4 No 3.
- Kaplan, Norman and Marvin Hoffeberg: «Approaches to Soviet interindustry relationships». The Rand Corporation RM-1202, Santa Monica Calif, March 1954.
- Klein, Lawrence R.: «On the interpretation of Professor Leontief's system». *The Review of Economic Studies*, 1952 - 1953.
- and Goldberger A. S. «An Econometric model of the United States 1929 - 1952», Amsterdam, North Holland Publishing Co, 1955.
- Koopmans, Tjalling C.: «Activity Analysis and its applications», *Papers and Proceedings of the American Economic Association*, May 1953.
- » and Contributors: «Activity Analysis of Production and Allocation», J. Wiley and Sons Inc., N.Y., 1951.
- Kuenne, Robert E.: «The interregional Input-Output model as a derivative of a Walrasian multiple point system». Paper read at the Regional Section of the Econometrica Society Meeting, December 1953.
- » «Walras, Leontief, and the interdependence of economic activities». *The Quarterly Journal of Economics*, August 1954.
- Λάζαρης 'Απ.: «Τὸ σύστημα Λεόντιεφ», *Ἐπιθ. Οἰκον. καὶ Πολιτικῶν Ἐπιστημῶν*, 1957.
- » «Ἐἰσοδαί - Ἐξροαί», *Λογιστικὴ καὶ Οἰκον. Ἐγκυκλοπαίδεια τόμος Γ'.*
- » «Τεχνολογικαὶ μῆτραι τύπου Λεόντιεφ», *Ἐπιθ. Οἰκον. Πολ. Ἐπιστ. Ἀθῆναι*, 1959.
- Lefebvre M.: «Allocation in Space», North Holland Publishing Co, Amsterdam, 1958.
- Leontief Wassily W.: «Input-Output analysis and its use in peace and war economics». *American Economic Review*, May 1949.
- » «Input-Output economics». *Scientific American*, October 1951.
- » «Input-Output tables. I» *Industria*, 1951.
- » «Interrelation of prices output, savings and investement: a study in empirical application of economic theory of general interdependence». *Review of Economics and Statistics*, Harvard University Press, August 1936.
- » «Mathematics in economics». *Bulletin of the American Mathematical Society*, May 1954.

- «Output, employment, consumption and investment». *Quarterly Journal of Economics*, February 1944.
- «Quantitative Input-Output relations in the economic system of the United States». *Review of Economics and Statistics*, Harvard University Press, August 1936.
- and Walter Isard: «Regional applications of Input-Output analysis». Paper presented to the American Winter Meeting of the Econometric Society at Chicago, December 1950.
- «Some basic problems of structural analysis». *Review of Economics and Statistics*, Harvard University Press, 1952.
- «The structure of American economy, 1919 - 1939». New York, Oxford University Press, 1951.
- and others: «Studies on the structure of the American economy: Theoretical and empirical explorations in Input-Output analysis». New York, Oxford University Press, 1953.
- «Wages, profits and prices». *The Quarterly Journal of Economics*, 1946.
- «Wages profits, prices and taxes». *Dun's Review*, June 1947.
- «Some fundamental problems of empirical Input-Output analysis». *L'Industria*, 1952.
- «Structural matrices of national economies». *Econometrica*, July 1949.
- Lomax, K. S.: «Allocation and Programming in Modern Economics», *Transactions of the Manchester Statistical Society Session 1952 - 1953*, Manchester, England.
- Lefebvre: «Allocation in Space», Noth Holland Publishing Co, Amsterdam, 1958.
- Manne, A. S.: «A crude oil allocation problem, scheduling petroleum refinery operations», Harvard University Press, 1957.
- Mercier, Rene: «Comptabilité nationale et tableau économiques». *Econometrica*, 1953.
- Metzler, Lloyd A.: «Taxes and subsidies in Leontief's Input-Output model». *The Quarterly Journal of Economics*, August 1951.
- Miernyk, N.H.: «A Primer of Input-Output economics», Boston, Northeastern University Press, 1957.
- Ministère de France: «Principes d'établissement d'une Comptabilité nationale et d'un tableau économique, Statistiques et études financières», Paris. Imprimerie Nationale, 1952.
- » «Rapport sur les comptes de la Nation», vol. II, Méthodes, An-



- nexe 3, Premiers resultats de l'analyse des Achats et Ventes des secteurs, Paris, Imprimerie Nationale, 1953.
- Ministro del Bilancio: «Relazione generale sulla Economia del Paese, nell'anni 1954, 1955», Presentata al Parlamento dal Ministro del Bilancio, Roma 1954. Parliamentary Acts 1955, 1956.
- Moore, F. and Peterson J.: «Regional Analysis»: An interindustry model of Utah, Review of Economics and Statistics, 1955.
- Morgenstern, Oskar and Max A. Woodbury: «The stability of inverses of Input-Output matrices». *Econometrica* April 1950.
- » «Economic activity Analysis», John Wiley and Sons Inc., N.Y. 1954.
- Moses L. N.: «The stability of interregional Trading Patterns and Input-Output analysis», *American economic Review*, 1955.
- U. S. Mutual Security Agency, Special Mission to Italy for economic Cooperation. «The structure and growth of the Italian economy». Rome 1953.
- National Planning Association: «Local impacts of foreign trade» (forthcoming.)
- Ochsenius V. «The economic development of Colombia». In U.N. Economic Com. for Latin America: Analyses and projection of economic development N.Y. 1955.
- Orden A.I.: «Application of the Simplex method to a variety of matrix problems». In Project Scoop, Manual No 10, April 1952.
- Phillips, Almarin: «The tableau économique as a simple Leontief model». *Quarterly Journal of Economics*, February 1955.
- Platt H: «Input-Output analyse», Meisenheim-Glan, Auton Hain 1957.
- Princeton University Economic Research Project.
- Righi, Camillo: «Calculation and uses of inverse coefficients for two industry sectors within the frame of the Italian Input-Output matrix». *L'Industria*, 1954.
- » «Raffronte fra i metodi matriciale e iterative per la soluzione dello shema Leontief». *L'Industria*, 1952.
- Riley Vera, Gauss S.: «Interindustry Economic Studies». (Bibliography) J. Hopkins Press, Baltimore 18, Maryland, 1955.
- Ritz, Philipp M.: (ed.): «Input-Output analysis». An appraisal, N.Y. National Bureau of economic research Inc. 1955.
- Samuelson, Paul A.: «The stability of equilibrium: linear and nonlinear systems». *Econometrica*, January 1942.

- Shephard, Ronald W.: «An econometric model of interindustry material flows». *Econometrica*, July 1952.
- Solo, Robert: «Industrial capacity as a concept in Input-Output analysis». *The Review of Economics and Statistics*, May 1953.
- Steinthorson, Dallas H.: «Problems in Input-Output analysis of the Canadian economy». Ph. D. Thesis, Harvard University, 1954.
- Stone J. R. N.: «Conceptual problems in Input-Output Work», Paris, OEEC, 1955.
- University of Maryland: «A regional interindustry study of Maryland». September 1954.
- Valavanis-Vail, Stefan: «Leontief's scarce factor paradox». *The Journal of Political Economy*, December 1954.
- von Neumann, John: «A model of general economic equilibrium». *The Review of Economic Studies*, 1945-1946.
- Vore, Gregory P.: «Development of interindustry analysis on a regional basis». Bureau of the Budget, U.S. Executive Office of the President, June 1951.
- Wolfe P.: «The Simplex Method for quadratic programming» in *Econometrica*, July 1959.
- Wong R. D.: «An elementary treatment of an Input-Output system», *Mathematical Review*, January 1956.
- » «Quasi-inverses, associated with Minkowski - Leontief matrices». *Econometrica*, July 1954.
- Wood, Loring: «Comments on the interindustry relations technique». February 1949, NATO, Paris, France.

## II. ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Allen R. G. D.: «Mathematical Economics», Mc Millan and Co Lt, London 1959.
- Altschul, Eugen: «Mathematical programming and Managerial Planning»: A Selected Bibliography. Bibliographic Bulletin No 12, Linda Hall Library, Kansas City, Missouri 1955.
- » «Reorientation in economic theory: Linear and non-linear programming». American mathematical monthly, June 1955.
- Arrow, Kenneth J.: «Import substitution in Leontief models». Econometrica, October 1954.
- » Martin, J. Samuel Karlin: «Game theory methods applied to the optimal expansion of the capacity of a firm». Stanford university, Stanford, California, 1955.
  - » and Leonid Hurwicz: «Dynamic aspects of achieving optimal allocation of resources». Econometrica, January 1952.
- Babbar, M. M.: «Distributions of Solutions of a set of linear equations», (with an application to linear programming). Journal of the American statistical Association, September 1955.
- » Gerhard Tintner, Earl O. Heady: «Programming with consideration of Variation in Input coefficients». Journal of farm economics», May 1955.
- Baumol W: «Activity analysis in One Lesson», American econ. Review, December 1958.
- Bailey, M. J.: «A generalized comparative statics in Linear Programming». The review of economic studies, 1955-1956.
- Beale E. M. L.: «An alternative method of linear programming». Proceedings of the Cambridge philosophical society, October 1954.
- Beckman, Martin J.: «Comparative statics in Linear Programming and the Giffin Paradox». The Review of economic studies, 1955-1956.
- » «Grundbegriffe der produktionstheorie vom standpunkt der Aktivitätsanalyse». Weltwirtschaftliches Archiv, Zeitschrift des

- Institute für Weltwirtschaft an der Universität Kiel, Germany, 1955.
- Bellman R.: Introduction to matrix analysis», Mc Graw-Hill Book Co, Inc., London 1960.
- » «Dynamic programming», Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1957.
- Benson, Purnell H.: «The marginal preference model». An approach in operations research. Abstract in Operations Research, (Jorsa) June 1956.
- Bettelheim C.: «Studies in the theory of Planning, 1958». Economist's Bookshop, London, W.C. 2.
- Bliss, John A.: «A model of Make-or-Buy competition». Journal of the Operations Research Society of America, August 1955.
- Bothwell, Frank E.: «The method of equivalent Linearization». Econometrica, 1952.
- Boulding, K. and Spivey: «Linear programming and the theory of the firm» (in press).
- Case Institute of Technology: «Proceedings of the Conference on Operations research in Marketing». Cleveland, Ohio, 1953.
- Castenada, José: «Introducción a la programación lineal». Revista de Ciencia aplicada, Madrid. 1955.
- Chakravarty: «The logic of investment planning», Economist's Bookshop, London W.C. 2, 1959.
- Charnes, Abraham: «Linear programming», Scientific American, 1954.
- Charnes, Abraham, William W. Cooper and Alexander Henderson: «An introduction to Linear Programming». New York, John Wiley and Sons, inc., 1953.
- Chenery, Hollis B. and Kenneth S. Kretschmer: «Resource allocation for economic development». Econometrica, October 1956.
- Chipman John S.: «Linear programming». The Review of Economics and Statistics, 1953.
- » «A note on stability, workability, and duality in linear economic models». Metroeconomica, 1954.
- Churchman W., Ackoff R., Arnoff L.: «Introduction to Operations Research» 1957. N.Y. J. Wiley and Sons, Inc.
- Cowles Commission: «Activity analysis of production and allocation». N.Y. John Wiley and Sons 1951.
- Γραφείον Οικονομικῶν Ἐρευνῶν Ἀνοτάτης Βιομηχανικῆς

Σγολῆς (ed.): Γομμικὴ οἰκονομικὴ ἀνάπτυξις. (Linear Economics), Ἀθήναι, 1960.

- Dantzig, George B.: «Concepts, origins, and use of Linear Programming». The Rand Corporation, P-980. 1957.
- » «A note on a dynamic Leontief model with substitution». Econometrica, January 1953.
  - » «Programming in linear structure». Econometrica, January 1949.
  - » «Recent advances in linear programming». Management Science, January 1956.
- Davidson, Donald and Patrick Suppes: «Experimental measurement of utility by use of a linear programming model». Econometrica, April 1956.
- Debreu, Gerard, and Israel N. Herstein: «Nonnegative square matrices». Econometrica, 1953.
- Dobb, M.: «An Essay on economic growth and planning» (in press).
- Dorfman, Robert: «Application of linear programming to the theory of the firm, including an analysis of monopolistic firms by non linear programming». Econometrica, January 1954.
- » «Competitive markets and Linear Programming». Econometrica, 1951.
  - » «Mathematical or «Linear», programming»: A non-mathematical exposition». The American economic review, December 1953.
  - » «The nature and significance of Input-Output». The review of economics and statistics, May 1954.
  - » Paul A. Samuelson and Robert M. Solow: «Linear programming and economic analysis». New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- Dvoretzky, Aryeh, and Others: «On the optimal character of the (s,S) policy in inventory theory». Econometrica, 1953.
- Ferguson R., and Sargent L.: «Linear Programming (Fundamentals and Applications)», Mc Graw - Hill Book Co Inc., London 1958.
- Ferney, L. A.: «Mathematical testing of planning policies»: An appraisal of some econometric methods of Plan Optimization. British Management Review, 1952.
- Fox, Karl A. and Richard C. Taenber: «Spatial equilibrium models of the Livestock-Feed economy». The American Economic review, September 1955.
- Frennd, Rudolf J.: «The introduction of Risk into a programming model». Econometrica, July 1956.

- Frisch, Ragnar A. K.: «Dynamic planning». *Econometrica*, July 1956.
- » «Principles of Linear Programming, with particular reference to the double gradient form of the logarithmic potential method». Memorandum, the University Institute of Economics Oslo, Norway, 1954.
- Gale, David: «The basic theorems of real linear equations, inequalities, linear programming, and game theory». *Naval research logistics quarterly*, September 1959.
- » «The theory of linear economic models, London, 1960.
  - » «The Closed Linear Model of production». *Annals of mathematics studies*, No 38, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1956.
  - » and Sven Dan  $\phi$ : «Linear programming». *Nordisk tidsskrift for teknisk  $\phi$ konomi*, Oslo, Norway; Copenhagen, Denmark; and Stockholm, Sweden; October 1954.
- Gass, Saul I.: «Linear programming: Methods and applications». New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1958.
- Gaumnitz, Richard K. and Oswald H. Brownlee: «Mathematics for Decision makers». *Harvard business review* 1956.
- Georgescu-Roegen, Nicholas: «Leontief's system in the light of recent results». *Review of economics and statistics*, August 1950.
- Gardina, Basilio: «La programmazione Lineare della produzione nell'Impresa». *L'Industria*, 1953.
- Goldman, Alan and Albert W. Tucker: «Theory of linear programming». *Annals of mathematics studies*, No 38, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.
- Greenwald, Dakota Ulrich: «Linear programming». New York, The Ronald Press, 1957.
- Harrison, Joseph: «The application of linear programming to valuation problems». *Econometrica*, April 1956.
- Heady, Earl O: «Simplified presentation and logical aspects of linear programming technique». *Journal of Farm Economics*, December 1954.
- » and Candler W: «Linear programming Methods». The Iowa Sta College Pres, Ames, Iowa, 1958.
- Hendrickson, Robert: «The linear program: A brief Statement of theory and Description of procedure on the Univac Computer». *Oro Staff Paper No 15*, The Johns Hopkins University, Chevy Chase Maryland, 1954.



- Henderson, Alexander and Robert Schlaifer: «Mathematical programming—Better Information for better Decision Making». Harvard business review, 1954.
- Herstein, Israel N.: «Some mathematical methods and Techniques in economics». Quarterly of applied mathematics, October 1953.
- Holley, Julian L.: «Note on the inversion of the Leontief matrix». Econometrica, July 1951.
- Hood, William C.: «Linear programming and the firm». The Canadian Journal of Economics, May 1952.
- Institute for Numerical Analysis: «Seminar for linear programming». University of California, Los Angeles, California, 1950.
- Karlin S.: «Mathematical methods and theory in games, programming and economics», Pergamon Press Ltd, London, 1959.
- Koopmans, Tjalling C.: «Activity analysis and its application». Papers and proceedings of the American Economic Association, May 1953.
- and Contributors: «Activity analysis of Production and Allocation». New York, John Wiley & Sons, Inc., 1951.
- Kuhn, Harold W. and Albert W. Tucker: «Linear inequalities and related systems». Annals of mathematics studies, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1956.
- Lange O.: «Essays in economic planning (in press).
- Λάζαρης Α.: «Γραμμικός προγραμματισμός», Έπεθ. Οικ. καὶ Πολ. Ἐπιστ. 1956, Ἀθήνα.
- » «Στοιχεῖα μαθηματικῆς ἀναλύσεως διὰ τὴν σπουδὴν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ», Λογεῖον Κοινῶν. καὶ Οἰκον. Ἐπιστημῶν 1957, Ἀθήνα.
  - » «Προγραμματισμός τῶν ἐπενδύσεων διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν οἰκονομικῶν καθυστερημένων χωρῶν». Μία ἐφαρμογὴ Γραμμικῆς Οἰκον. Ἀναλύσεως (in press).
  - » «Κριτήριο κατανομῆς τῶν διαθέσιμων πόρων εἰς τὸ πρόγραμμα Οἰκονομικῆς Ἀναπτύξεως», εἰς ἔκδοσιν Ἑλλην. Ἐταίρ. Οἰκον. Ἐπιστημῶν (ἢ Οἰκονομικῆ Ἀνάπτυξις τῆς Ἑλλάδος), Ἀθήνα 1960.
- Lemke, Carlton E. and Abraham Charnes: «Extremal problems in linear inequalities». Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pennsylvania, 1953.
- Leontief, Wassily W.: «Mathematics in Economics». Bulletin of the American Mathematical Society, May 1954».
- » «The structure of the american economy, 1919—1939: An empiri-

- cal application of equilibrium analysis». New York, Oxford University Press, 1951.
- » «Studies in the structure of the American economy: Theoretical and empirical explorations in Input-Output analysis. New York, Oxford University Press, 1953.
- Lesourne J.: «Technique économique et gestion industrielle», Dunod, Paris, 1958.
- Lomax, K. S.: «Allocation and programming in modern economics». «Transactions of the Manchester Statistical Society, 1953», Manchester, England.
- Malinvaud, Edmond: «Introduction à l'étude des programmes linéaires». Revue de statistique appliquée, 1955.
- Markowitz, Harry M.: «Computing procedures for Portfolio selection». Naval Research logistics quarterly, March 1957.
- » «The nature and applications of process analysis». The Rand Corporation, RM-1254.
- Martin, Alfred D., JR.: «Mathematical programming of portfolio selections». Management Science, January 1955.
- Massachusetts Institute of Technology: «How Linear-Programming problems arise». Massachusetts Institute Technology, Cambridge, Massachusetts 1953.
- » «Linear programming bibliography». Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1957.
- Morgenstern, Oskar: «Economic Activity analysis». New York, John Wiley & Sons, Inc., 1954.
- » and V. K. Wong: «On the equilibrium of a linear economic system with Non-Dominant Outputs». Econometrica April 1956.
- Morton, George: «Notes on Linear Programming». Econometrica, November 1951.
- National Bureau of Standards: «Contributions to the solution of systems of linear equations and the determination of Eigenvalues». US Government Printing Office, 1954.
- Orden, Alex: «Survey of Research on mathematical solutions of programming problems: Management Science, January, 1955.
- Pearson, Carl E.: «Note on linear programming». Quarterly of Applied Mathematics, July 1956.
- Pollack, Solomon: «Optimization in linear programming: The simplex method». M. A. thesis, George Washington University, 1953.

- The Rand Corporation: «Notes on linear programming». Santa Monica, California.
- Reiter, Stanley: «Additivity in linear models of production». *Econometrica*, July 1951.
- Riley V. and Gass S.: «Linear Programmig and Associated Techniques» (bibliography) ORO. The John Hopkins University, Maryland, 1958.
- Rohde, F. Virginia: «Bibliography on linear programming». Published in operations research, (Jorsa), February 1957.
- Samuelson Paul A.: «Linear programming and economic theory». The Rand Corporation, P-685. May 1955.
- » «Spatial price equilibrium and linear programming». *American Economic Review*, June 1952.
- Second Symposium in Linear Programming: «Proceedings of the second symposium in linear programming». H. Antosiewicz (ed). National Bureau of Standards, US Department of Commerce 1955.
- Solow, Robert M.: «Linear programmig: Lecture XII». Cambridge, Massachusetts Institute of Technology Press, 1953.
- » «On the structure of linear models». *Econometrica*, January 1952.
- Symposium on Linear Programming: *Journal of the royal statistical society*, 1955. Series B (Methodological).
- Thompson, Frederick B.: «Use of games in economic analysis». *Econometrica*, January 1955.
- Tintner, Gerhard: «Stochastic linear programming». *Econometrica*, October 1954.
- » «La teoria dei giochi; la programmazione lineare e l'analisi delle interdipendenze strutturali». *L'Industria*, 1957.
  - » «Stochastic linear programming with applications to agricultural economics». *Econometrica*, July 1955.
- Tucker, Albert W.: «Linear Programming». Industrial quality control, March 1956.
- Us Department of the Air Force and Us Department of Commerce: «Symposium on linear Inequalities and Programming». Washington, 1952.
- U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards: «Quarterly reports». Washington D.C. 1950.
- Vajda Stephen: «Theory of games and Linear Programming». London, Methuen & Company, Ltd., 1956.

- Von Neumann John and Oskar Morgenstern: «Theory of games and economic behavior». Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1955.
- Vazsony A.: «Scientific Programming in Business and Industry», N.Y. 1958, John Wiley & Sons Inc.
- Wagner, Harvey M.: «A Linear Programming solution to dynamic Leontief type models». Management Science, April 1957.
- Whitin, Thomson M.: «Classical theory, Graham's theory and linear programming in International Trade». The quarterly Journal of Economics, November 1953.
- » «Linear Programming and Graham's International Trade Problems», Econometrica, 1953.
- Wilkinson, John J.: «Better Management = Management + Industrial Engineering + Linear Programming», 1956, the Journal of Industrial Engineering.
- Wood, Marshall K.: «Discussion - Linear Models and Allocation». Econometrica, July 1950.
- » «Scientific Techniques for Program Planning.» Air University Quarterly Review, 1949.
- Zabel, Edward J.: «A capacity concept and investment models». Econometrica, April 1956.