ΑΝΤΩΝΙΟΥ Χ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητοῦ Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς Πειραιῶς

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΕΥΧΟΣ III

ΠΕΙΡΑΙΕΥΣ 1970

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὰ πρῶτα προβλήματα Optimization, ἐνεφανίσθησαν εἰς θέματα Φυσικῆς καὶ Γεωμετρίας. Εἰς αὐτὰ ἐζητοῦντο αἱ ἀκρότατοι τιμαὶ συναρτήσεων ὑπὸ ὡρισμένους περιορισμοὺς καὶ ἡ ἐπίλυσίς των ἐγένετο τῇ βοηθείᾳ μεθόδων διαφορικοῦ λογισμοῦ καὶ λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν.

Κατὰ τὴν ἀρχὴν ὅμως τῆς τελευταίας εἰκοσιπενταετίας ἡ ραγδαία ἐξέλιξις τῶν Μαθηματικῶν Μεθόδων τῆς Οἰκονομικῆς, ἔδωσεν ὡς νέαν μορφήν, τοῦ τομέως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων, τὸν Μαθηματικὸν Προγραμματισμόν.

Εἰς τὴν Οἰκονομικήν, ἡ μαθηματικὴ διατύπωσις κάθε προβλήματος αὐτῆς, καλεῖται ὑπόδειγμα (model) τοῦ προβλήματος. Αἱ δὲ ἐφαρμογαὶ ἀπέδειξαν, ὅτι, κάθε μορφὴ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ, παρέχει μεγαλυτέραν εὐχέρειαν εἰς τὴν λῆψιν τῶν ἀποφάσεων, ὅταν ἔχῃ ὑποδείγματα ἐκ τοῦ Μαθηματικοῦ Προγραμματισμοῦ.

Οὕτω τὰ Μαθηματικὰ Προγράμματα χαρακτηρίζονται σήμερον, ὡς τὰ Μαθηματικὰ τῶν Μακροοικονομικῶν καὶ Μικροοικονομικῶν Προγραμμάτων.

Τὸ παρὸν τεῦχος ἀποτελεῖ μίαν εἰσαγωγὴν τῶν Μεθόδων καὶ Ἐφαρμογῶν τοῦ Μαθηματικοῦ Προγραμματισμοῦ εἰς τὴν Οἰκονομικήν.

Ὅσον ἀφορᾷ δὲ τὸ θεωρητικὸν μαθηματικὸν μέρος τῶν ἀλγορίθμων (ὕπαρξις καὶ εὕρεσις), ὡς καὶ τῶν ὑπολοίπων προτάσεων, τοῦτο θὰ περιέχεται εἰς τὸ ἑπόμενον τεῦχος, ὁμοῦ μετὰ γενικῶν ὑποδειγμάτων Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ καὶ Θεωρίας Παιγνίων.

Ἂν καὶ δὲν δίδωνται, εἰς τὸ παρόν, αἱ ἀποδείξεις τῶν χρησιμοποιουμένων μαθηματικῶν προτάσεων, ἐν τούτοις διὰ τὴν μελέτην αὐτοῦ ἀπαιτοῦνται ὁπωσδήποτε βασικαὶ γνώσεις, ἐκ τῆς Γραμμικῆς Ἀλγέβρας καὶ τῆς Ἀναλύσεως.

Ἐξ ἄλλου, δὲν πρέπει ν' ἀγνοῆται τὸ γεγονός, ὅτι τὰ περισσότερα ἐκ τῶν ὑποδειγμάτων τῶν ἐφαρμογῶν, ἐπιλύονται διὰ τῶν ἐπιστημονικῶν προγραμμάτων τῶν Ἠλεκτρονικῶν Ὑπολογιστῶν, μὲ βάσιν τὰς ἐπιστημονικὰς γλώσσας αὐτῶν (FORTRAN, ALGOL κλπ) καὶ τὰς μεθόδους τῆς Ἀριθμητικῆς Ἀναλύσεως.

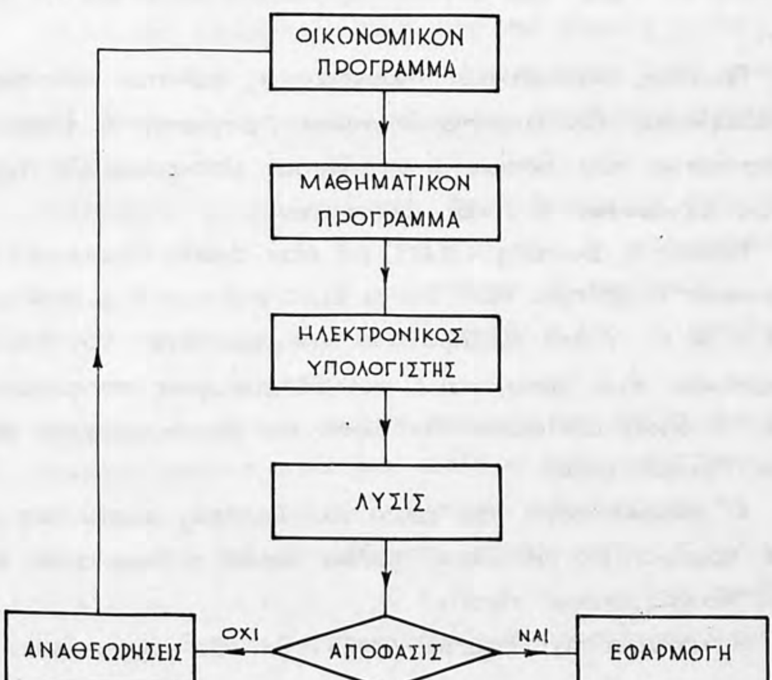
Εὔστοχος θὰ παραμένῃ πάντοτε ἡ ἀπορία, τὴν ὁποίαν διετύπωσε, διὰ τὸν Μαθηματικὸν Προγραμματισμόν, ὁ Dantzig πρὸ δεκαετίας εἰς διεθνὲς συνέδριον :

" Εἶναι ἀληθινὸν μυστήριον, εἰς τομεὺς, τόσον πολλῶν ἐφαρμογῶν εἰς τὰ καθημερινὰ προβλήματα, νὰ ἔχῃ προκαλέσει τόσον ὀλίγον ἐπιστημονικὸν ἐνδιαφέρον πρὸ τοῦ δευτέρου παγκοσμίου πολέμου ".

Νοέμβριος 1970 **Α.Χ.Π.**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἔχει ἀποδειχθῆ σήμερον, ὅτι, κάθε μορφὴ Προγραμματισμοῦ, παρέχει μεγαλυτέραν εὐχέρειαν εἰς τὴν λῆψιν τῶν ἀποφάσεων, ὅταν ἔχῃ ὑποδείγματα ἐκ τοῦ Μαθηματικοῦ Προγραμματισμοῦ. Τὸ κατωτέρω διάγραμμα ἀναφέρεται εἰς τὴν διαδικασίαν τῆς ἀντιμετωπίσεως Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ, διὰ τοῦ Μαθηματικοῦ τοιούτου.



Ἐκ τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγράμματος προκύπτει τὸ Μαθηματικὸν Πρόγραμμα. Ἀναζητεῖται ὁ ἀ λ γ ό ρ ι θ μ ο ς τοῦ Μαθηματικοῦ Προγράμματος καὶ ἐν συνεχείᾳ (ὅταν οἱ ἐκ τοῦ ἀλγορίθμου ὑπολογισμοὶ ἐκφεύγουν τῶν συνήθων δυνατοτήτων) τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐπιστημονικῶν γλωσσῶν, τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, δημιουργεῖται τὸ ἀντίστοιχον ἐ π ι σ τ η μ ο ν ι κ ὸ ν πρόγραμμα, τὸ ὁποῖον "εἰσάγεται" εἰς τὸν ἠλεκτρονικὸν ὑπολογιστήν, ἐκ τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ λύσις.

Ἐὰν ἡ λύσις γίνῃ ἀποδεκτή, τότε ἕπεται ἡ διαδικασία τῆς ἐφαρμογῆς της.

Ἐὰν ἡ λύσις δὲν γίνῃ ἀποδεκτὴ (μερικῶς ἢ ὁλικῶς) τότε γίνονται τροποποιήσεις ἢ/καὶ ἀναθεωρήσεις καὶ οὕτω ἔχομεν ἐπάνοδον εἰς τὸ ἀρχικὸν βῆμα τῆς διαδικασίας.

Ὁ Μαθηματικὸς Προγραμματισμὸς δίδει ἀπάντησιν εἰς τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ Ο ἰ κ ο ν ο μ ι κ ο ῦ Ἀ ξ ι ώ μ α τ ο ς, ὁ προσδιορισμὸς τῶν μεγίστων ἢ ἐλαχίστων τιμῶν διὰ μεγέθη ἐξαρτώμενα ἐκ διαφόρων παραμέτρων.

Γενικῶς, Μαθηματικὸν Πρόγραμμα, καλεῖται κάθε πρόβλημα προσδιορισμοῦ τῶν ἀκροτάτων τιμῶν (μεγίστων ἢ ἐλαχίστων) συναρτήσεων, τῶν ὁποίων αἱ μεταβληταὶ ὑπόκεινται εἰς περιορισμοὺς ἐξισώσεων ἢ / καὶ ἀνισώσεων.

Πρῶτος ὁ Dantzig (1947), μὲ μίαν ὁμάδα ἐρευνητῶν, ἔθεσε τὸ γενικὸν πρόβλημα τῶν Γ ρ α μ μ ι κ ῶ ν π ρ ο γ ρ α μ μ ά τ ω ν (δηλ. μαθηματικῶν προγραμμάτων τῶν ὁποίων αἱ συναρτήσεις εἶναι γραμμικαί) καὶ ἐδημιούργησε τὴν μέθοδον Simplex, ἡ ὁποία ἀπετέλεσε τὴν βάσιν τῆς ἀναπτύξεως τῶν Μαθηματικῶν Προγραμμάτων.

Αἱ προϋπάρχουσαι τοῦ ἔργου τοῦ Dantzig κυριώτεραι μαθηματικαὶ ἐργασίαι, εἰς τὰς ὁποίας πολλὰ ὀφείλει ἡ θεωρία τῶν Μαθηματικῶν Προγραμμάτων, εἶναι :

Ἡ ἐργασία τοῦ Fourier (1823) ἐπὶ τῶν γραμμικῶν ἀνισώσεων.

Ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss (1826).

Τὸ θεώρημα τῶν Minkowski – Farkas (1896–1903) διὰ τοῦ ὁποίου δύναται ν' ἀποδειχθῆ τὸ θεώρημα τοῦ δ υ ϊ σ μ ο ῦ.

Αἱ ἐργασίαι τῶν Von Neumann (1928) καὶ Ville (1938) ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν μαθηματικῶν παιγνίων.

Ἡ ἐργασία τοῦ Motzkin (1936) ἐπὶ τῶν γραμμικῶν ἀνισοτήτων.

Ἡ ἐργασία τοῦ Kantorovich (1939) ἐπὶ τοῦ προβλήματος τοῦ Προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγῆς.

Αἱ ἐργασίαι τῶν Hitchcock (1941) καὶ Koopmans (1944) ἐπὶ τοῦ προβλήματος τῶν μεταφορῶν.

Μετὰ τὴν ὑπὸ τοῦ Dantzig θεμελίωσιν τῶν γραμμικῶν προγραμμάτων ἡ ὁμὰς τῶν Tucker, Kuhn καὶ Gale (1951) ἀπέδειξε, τῇ βοηθείᾳ προτάσεων καὶ παρατηρήσεων τοῦ Von Neumann, τὸ θεώρημα τοῦ δυϊσμοῦ.

Παραλλήλως οἱ Orden καὶ Dantzig (1953) ἀπέδειξαν ὅτι ὁ πίναξ τῆς μεθόδου simplex ἑνὸς γραμμικοῦ προγράμματος περιέχει καὶ τὴν ἀρίστην λύσιν τοῦ δυϊκοῦ του προγράμματος.

Ἀξιόλογος ὑπῆρξεν ἡ προσφορὰ τοῦ Gomory (1958) εἰς τὰ Δ ι ο φ α ν τ ι κ ὰ γραμμικὰ προγράμματα (δηλ. γραμμικὰ προγράμματα τῶν ὁποίων αἱ μεταβληταὶ λαμβάνουν ἀκεραίας μόνον τιμάς).

Παράλληλα μὲ τὰ γραμμικὰ προγράμματα οἱ Kuhn καὶ Tucker (1950) ἐθεμελίωσαν τὰ Μ ὴ γ ρ α μ μ ι κ ὰ προγράμματα, δηλ. μαθηματικὰ προγράμματα μὲ συναρτήσεις μὴ γραμμικάς.

Εἰς τὴν ἀνάπτυξιν αὐτῶν πολὺ συνέβαλε καὶ ἡ μέθοδος τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange.

Ἡ σημερινὴ βιβλιογραφία ἡ ἀναφερομένη εἰς τὰ γραμμικὰ καὶ μὴ γραμμικὰ προγράμματα ἔχει πολλὰ νὰ παρουσιάσῃ τόσον εἰς τὸν θεωρητικὸν τομέα, ὅσον καὶ εἰς τὸν τομέα τῶν ἀλγορίθμων.

Μὲ σκοπὸν τὴν ἀντιμετώπισιν προβλημάτων π ο λ υ σ τ α δ ι α κ ο ῦ χ α ρ α κ τ ῆ ρ ο ς – ἤτοι προβλημάτων τῶν ὁποίων ἡ διαδικασία ἀριστοποιήσεως ὁλοκληροῦται τμηματικῶς –

ὁ Bellman (1954) ἐδημιούργησε τὴν ἀρχὴν ἀριστοποιήσεως τοῦ Δυναμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

Ἡ συμβολὴ τοῦ Καραθεοδωρῆ (1935) εἰς τὸν λογισμὸν τῶν μεταβολῶν ἐβοήθησεν εἰς τὴν δημιουργίαν ὑποδειγμάτων δυναμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἐξ ἄλλου ἕνα πλῆθος προβλημάτων τοῦ Δυναμικοῦ Προγραμματισμοῦ χρησιμοποιεῖ τὰ γραφήματα.

Ὁ Madansky (1959) μὲ βάσιν, ὅτι, τὰ δεδομένα τῶν περισσοτέρων προβλημάτων, δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλὰ μεταβαλλόμενα συμφώνως πρὸς κατανομὰς πιθανοτήτων ἐδημιούργησε τὰ Στοχαστικὰ Προγράμματα.

Τέλος κατὰ τὴν τελευταίαν δεκαετίαν καὶ μὲ βάσιν τὰς ἰδέας τοῦ Fortet (1959), ἐπὶ τῆς δυαδικῆς Ἀλγέβρας τοῦ Boole, ἐδημιουργήθησαν τὰ Pseudo-Boolean προγράμματα.

Τ' ἀνωτέρω εἴδη μαθηματικῶν προγραμμάτων ἀπαντῶνται κυρίως εἰς τὰς τεχνολογικὰς καὶ οἰκονομικὰς ἐφαρμογάς.

Ἐξ ἄλλου βασικὸν ρόλον εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν προγραμμάτων ἔπαιξαν καὶ αἱ οἰκονομικαὶ θεωρίαι τῶν :

Quesnay (1759) Tableau Economique

Walras (1874) Eléments d'économie politique

Leontief (1936) Input-Output Model

Von Neumann (1937) Equilibrium Model

Σήμερον τὰ μαθηματικὰ προγράμματα χαρακτηρίζονται ὡς τὰ **μαθηματικὰ τῶν οἰκονομικῶν προγραμμάτων.**

Δὲν νοεῖται οἰκονομικὸς προγραμματισμὸς ἄνευ τῶν μαθηματικῶν προγραμμάτων.

Ἡ οἰκονομετρία, τὰ οἰκονομικὰ παίγνια ἢ Input-Output ἀνάλυσις, ἡ θεωρία τῆς γενικῆς ἰσορροπίας, ἡ μακροοικονομικὴ καὶ μικρο-οικονομικὴ ἀνάλυσις, τὰ οἰκονομικὰ τῆς εὐημερίας κλπ συναναπτύσσονται σήμερον μετά τῶν μαθηματικῶν προγραμμάτων.

Προβλήματα προγραμματισμοῦ τά ὁποῖα ἔχουν ὡς ὑποδείγματα τά μαθηματικά προγράμματα εἶναι κυρίως τά τῆς μ ε γ ι σ τ ο π ο ι ή σ ε ω ς τ ο ῦ κ έ ρ δ ο υ ς κ α ί ἐ λ α χ ι σ τ ο π ο ι ή σ ε ω ς τ ο ῦ κ ό σ τ ο υ ς.

Μερικαί βασικαί μορφαί αὐτῶν εἶναι τά προβλήματα:

Τῆς διαίτης (παροχή ὡρισμένων θρεπτικῶν οὐσιῶν, ἐκ δοθέντων προϊόντων, μέ κόστος παροχῆς ἐλάχιστον).

Τῶν μειγμάτων (ἀνάλογον πρόβλημα, ἀναφερόμενον εἰς τά διϋλιστήρια, μεταλλουργίας κλπ).

Τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ εἰσοδήματος καλλιεργείας.

Τῶν μεταφορῶν.

Τῆς παραγωγῆς τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας (ἐλάχιστον κόστος παραγωγῆς, δίκτυα διανομῆς κλπ).

Τῆς κυκλοφορίας (ἐλαχιστοποίησις χρόνου ἀργοπορίας, μεγιστοποίησις ἐξυπηρετήσεως, εἰδική περίπτωσις τῶν ἀερολιμένων).

Τῶν ἀποθεμάτων.

Τῆς κατανομῆς προσωπικοῦ (μεγιστοποίησις τῆς ἀποδοτικότητος).

Τοῦ χρονικοῦ προγραμματισμοῦ.

Τοῦ κόστους διαφημίσεως.

Τῆς ἀντικαταστάσεως μηχανῶν.

Τῶν ἐπενδύσεων.

Τῶν χημικῶν βιομηχανιῶν.

Τοῦ ἐλέγχου ποιότητος.

Τῆς ἀξιοπιστίας.

Τοῦ marketing κλπ.

Τέλος τά μαθηματικά προγράμματα συνδέονται ὀργανικά καί μέ ἄλλα μαθηματικά ὑποδείγματα.

Οὕτω συνδυασμός τῶν γραμμικῶν προγραμμάτων μέ τήν ἐφηρμοσμένην ἄλγεβραν τοῦ Boole παρέχει λύσεις εἰς προβλήματα τῆς θ ε ω ρ ί α ς π λ η ρ ο φ ο ρ ι ῶ ν.

Προβλήματα τοῦ δυναμικοῦ προγραμματισμοῦ παρακολουθοῦνται καὶ παρουσιάζονται τῇ βοηθείᾳ τῆς θεωρίας τῶν γ ρ α φ η μ ά τ ω ν.

Αἱ Π ι θ α ν ό τ η τ ε ς καὶ ἡ Σ τ α τ ι σ τ ι κ ὴ εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ τὰ στοχαστικὰ προγράμματα.

Ἐξ ἄλλου εἰδικαὶ μέθοδοι, τῆς Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ῆ ς Ἀ ν α λ ύ σ ε ω ς, ἐπιτρέπουν τὴν ἀναζήτησιν τῶν λύσεων τῶν μαθηματικῶν προγραμμάτων, διὰ τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΝ

1.1 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ. Αἱ συναρτήσεις τῶν μαθηματικῶν προγραμμάτων εἶναι ἐν γένει συναρτήσεις τῆς μορφῆς :

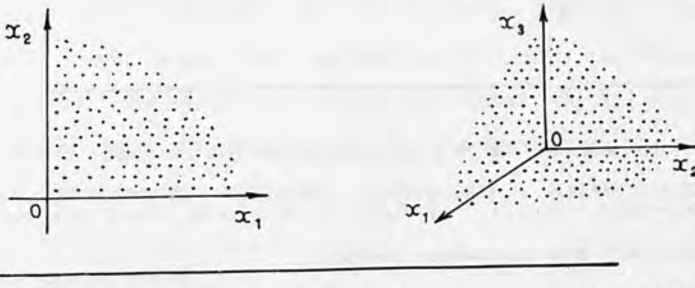
$$f : R^n \rightarrow R$$

δηλ. πραγματικαί συναρτήσεις τῶν n πραγματικῶν μεταβλητῶν ἤτοι :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x), \; x \in R^n$$

Ἐξ ἄλλου εἰς τά περισσότερα ἐκ τῶν μαθηματικῶν προγραμμάτων αἱ μεταβληταί $x_1, x_2, \cdots, x_n$ εἶναι μή ἀρνητικαί *) δηλ.

$$0 \leq x_i \; (i = 1, 2, \cdots, n)$$



*) Ἀντιστοιχοῦν συνήθως εἰς ποσότητας τεχνικοοικονομικῶν μεγεθῶν.

Ἐξ ἄλλου κάθε πραγματική μεταβλητή x τῇ βοηθείᾳ τῆς : $x = x^+ - x^-$, ἔνθα $x^+ = \max(0, x)$, $x^- = \max(0, -x)$ ἀντικαθίσταται ὑπό τῶν δύο μή ἀρνητικῶν μεταβλητῶν x^+, x^-

Θά συμβολίζεται δέ τοῦτο μέ :

$$0 \leq x,\ x \in R^n$$

1.2 ΟΡΙΣΜΟΣ. Μαθηματικόν πρόγραμμα καλεῖται ἐν γένει κάθε πρόβλημα τῆς μορφῆς :

Ζητεῖται νά εὑρεθῆ ἡ μεγίστη (ἀντιστοίχως ἐλαχίστη) τιμή μιᾶς συναρτήσεως $f(x)/R^n$ ὅταν $x \in K \subset R^n$

Ἤ συντόμως :

Ζητεῖται

$$\max_{x \in K \subset R^n} f(x) \quad \text{ἤ} \quad \min_{x \in K \subset R^n} f(x)$$

Δηλαδή εἰς τά μαθηματικά προγράμματα ζητεῖται ὁ προσδιορισμός τῶν ἀκροτάτων τιμῶν συναρτήσεων τῶν ὁποίων αἱ μεταβληταί ὑπόκεινται εἰς τ ό ν π ε ρ ι ο ρ ι σ μ ό ν νά εἶναι συντεταγμέναι τῶν σημείων δ ο θ έ ν τ ο ς σ υ ν ό λ ο υ $K \subset R^n$.

1.3 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ. Εἰς αὐτά τό σύνολον K ὁρίζεται ὡς τομή ἡμιχώρων καί ὑπερεπιπέδων τοῦ χώρου R^n, προερχομένων ἐκ γραμμικῶν ἀνισώσεων καί ἐξισώσεων.*)

Οὕτω γ ρ α μ μ ι κ ό ν π ρ ό γ ρ α μ μ α καλεῖται κάθε μαθηματικόν πρόγραμμα τῆς μορφῆς :

---

*) Τό σύνολον $D = \{ x : x \in R^n,\ \varphi(x) \{\geq, \leq\}\ b \}$

μέ $\varphi(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$, $a_i,\ b \in R$, $i = 1, 2, \cdots, n$ ὁρίζει εἰς τόν χῶρον R^n ἕνα ἡμίχωρον αὐτοῦ.

Τό σύνολον $H = \{ x : x \in R^n,\ \varphi(x) = b \}$

ὁρίζει εἰς τόν χῶρον R^n ἕν ὑπερεπίπεδον αὐτοῦ.

Ζητεῖται νά εὑρεθῇ :

$$\max f(x) \quad \text{ἤ} \quad \min f(x)$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$\varphi_j(x) \{\geq, =, \leq\} b_j, \; j = 1, 2, \cdots, m \tag{1}$$

$$x \geq 0 \tag{2}$$

ἔνθα f, φ_j αἱ γραμμικαί συναρτήσεις :

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$\varphi_j(x) = a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \cdots + a_{jn} x_n$$

μέ c_i, a_{ji}, b_j, δοθέντας πραγματικούς ἀριθμούς.

Ἤ ἰσοδυνάμως :

Ζητεῖται νά εὑρεθῇ τό διάνυσμα $x \in R^n$, τό ὁποῖον :

α) Νά ἱκανοποιῇ τήν (2)

β) Νά ἐπαληθεύῃ τάς (1)

γ) Νά μεγιστοποιῇ (ἀντιστοίχως ἐλαχιστοποιῇ) τήν συνάρτησιν f.

Τό πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος ἔχει θετικήν ἀπάντησιν εἰς τήν περίπτωσιν, κατά τήν ὁποίαν, τό οὕτω προκῦπτον σύνολον Κ, εἶναι ἕνα κ υ ρ τ ό ν π ο λ ύ ε δ ρ ο ν.

Ἡ ἔννοια αὕτη ἐπιτρέπει τόν προσδιορισμόν τῆς ἀ ρ ί σ τ η ς λ ύ σ ε ω ς τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος, ἤτοι τοῦ διανύσματος $x \in R^n$, τό ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τήν (2), ἐπαληθεύει τάς (1) καί μεγιστοποιεῖ (ἀντιστοίχως ἐλαχιστοποιεῖ) τήν συνάρτησιν f.

Τυπικάς περιπτώσεις γραμμικῶν προγραμμάτων περιέχουν τά :

1.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1/ Ζητεῖται νά εὑρεθῇ :

$$\max f = 2x_1 + x_2 + x_3$$

ύπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 10$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2/ Ζητεῖται νά εὑρεθῆ :

$$\min f = x_1 - 2x_2$$

ύπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3/ Ζητεῖται νά εὑρεθῆ :

$$\max f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

ύπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$$

$$2x_1 - x_2 + x_4 = 8$$

$$4x_1 + 6x_2 - x_3 \leq 7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

4/ Ζητεῖται νά εὑρεθῆ :

$$\min f = 5x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1+3x_2+2x_3 \geq 5$$

$$4x_1-x_2+x_3 \geq 7$$

$$2x_1+x_2-x_3 \geq 4$$

x_1, x_2, x_3 ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοί.

1.5 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ. Οὕτω καλεῖται ἡ τρίτη *) (χρονολογικῶς) μέθοδος τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως.

Εἰς τὴν Οἰκονομίαν τεχνολογία, δοθέντος οἰκονομικοῦ φορέως, καλεῖται τὸ σύνολον ὅλων τῶν δυνατῶν δραστηριοτήτων αὐτοῦ. Ἡ μαθηματικὴ δὲ διατύπωσις μιᾶς τεχνολογίας καλεῖται ὑπόδειγμα αὐτῆς.

Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ἀναφέρεται εἰς τὰ ἐκ γραμμικῶν προγραμμάτων ὑποδείγματα.

Εἰς αὐτόν :

Ἡ συνάρτησις τοῦ προγράμματος καλεῖται οἰκονομικὴ καὶ τὸ ἀκρότατον αὐτῆς ζητεῖται συμφώνως πρὸς τὸ οἰκονομικὸν ἀξίωμα.

Οἱ περιορισμοὶ τοῦ προγράμματος καλοῦνται τεχνολογικοὶ ἤ/καὶ θεσμολογικοὶ περιορισμοὶ καὶ συνιστοῦν τὴν ποιοτικὴν καὶ ποσοτικὴν ἔκφρασιν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Ἐξ ἄλλου ἡ μὴ ἀρνητικότης τῶν μεταβλητῶν προκύπτει ἐκ τῆς φύσεως τῶν προβλημάτων του.

1.6 ΑΡΧΑΙ. Ὡς γνωστὸν ἡ κατασκευή, κάθε ὑποδείγματος τῆς Οἰκονομικῆς, βασίζεται κυρίως εἰς τὰς ὑποθέσεις τοῦ ἀντιστοίχου οἰκονομικοῦ προβλήματος.

Προκειμένου λοιπὸν νὰ προκύψῃ ὡς ὑπόδειγμα οἰκονομικοῦ προ

---

*) Πρώτη ἡ θεωρία τῶν παιγνίων (Von Neumann 1928) καὶ δευτέρα ἡ Input-output Analysis (Leontief 1936)

βλήματος ἕνα γραμμικὸν πρόγραμμα πρέπει διὰ τὰ δεδομένα αὐτοῦ νὰ ἰσχύουν αἱ κατωτέρω ἀρχαί :

α) **Ἀρχὴ διαιρετότητος** : Αἱ μεταβληταὶ δύνανται νὰ λάβουν κάθε τιμὴν τοῦ διαστήματος $[0, +\infty)$.

Διὰ τῆς ἀρχῆς αὐτῆς ἐξασφαλίζεται ἡ ἀξιοπιστία τῶν ἀποτελεσμάτων. Οὕτως, ἐὰν αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν ἑνὸς γραμμικοῦ προγράμματος πρέπει νὰ ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (π.χ. εἶναι μονάδες ἀδιαιρέτου προϊόντος) καὶ ἡ ἀρίστη λύσις δίδει εἰς αὐτὰς ρητὰς τιμὰς (δηλ. δέχεται τὴν διαίρεσιν αὐτῶν) τότε ἡ λύσις γίνεται παραδεκτὴ καὶ ἐν συνεχείᾳ προσαρμόζεται εἰς τὴν πραγματικότητα, προκειμένου νὰ ἐφαρμοσθῇ.*)

Ἡ ἀρχὴ τῆς διαιρετότητος ἐπιτρέπει τὴν χρησιμοποίησιν ἑκάστης δραστηριότητος εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον αὐτῆς.

β) **Ἀρχὴ σταθερῶν ἀναλογιῶν** : Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῆς ποσότητος ἑνὸς μεγέθους ἐπὶ $\lambda > 0$ προϋποθέτει τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ λ τῶν ποσοτήτων, ὅλων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς αὐτοῦ.

Διὰ τῆς ἀρχῆς αὐτῆς ἐπιτυγχάνεται ὁ πολλαπλασιαστικὸς χαρακτὴρ τῆς γραμμικότητος τῶν συναρτήσεων τοῦ προγράμματος (π.χ. ἂν ἡ μονὰς ἑνὸς προϊόντος ἀπαιτεῖ 5, 10, ··· μονάδες ἐκ τῶν συντελεστῶν A, B, ··· τότε αἱ x_1 μονάδες αὐτοῦ θ' ἀπαιτοῦν $5x_1, 10x_1, \cdots$ μονάδες τῶν συντελεστῶν).

Ἡ ἀρχὴ τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἐπιτρέπει τὴν ἀποσύνθεσιν τοῦ προϊόντος εἰς τὸ σύνολον τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς αὐτοῦ.

γ) **Ἀρχὴ προσθετικότητος** : Ἡ χρησιμοποίησις, περισσοτέρων τῆς μιᾶς παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, προϋποθέτει τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀντιστοίχων ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς αὐτῶν.

Διὰ τῆς ἀρχῆς αὐτῆς ἐπιτυγχάνεται ὁ ἀθροιστικὸς χαρακτὴρ

---

*) Ἡ ἀρχὴ αὐτὴ δὲν ἰσχύει εἰς τὰ γραμμικὰ Διοφαντικὰ προγράμματα.

τῆς γραμμικότητος τῶν συναρτήσεων τοῦ προγράμματος (π.χ. ἐάν ἡ μονάς τοῦ προϊόντος I ἀπαιτῆ 5, 10,··· μονάδας ἐκ τῶν συντελεστῶν A, B,··· καί ἡ μονάς τοῦ προϊόντος II ἀπαιτῆ 4, 11,··· μονάδας ἐκ τῶν συντελεστῶν A, B,··· τότε διά τήν παραγωγήν μιᾶς μονάδος ἐκ τῶν προϊόντων I, II ἀπαιτοῦνται 9, 21,··· μονάδες ἐκ τῶν συντελεστῶν A, B,···). Συνδέεται δέ ἡ ἀρχή αὔτη ἀρρήκτως μέ τήν ἀρχήν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

1.7 ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΙΣ ΚΕΡΔΟΥΣ. Μέ βάσιν τάς ἀνωτέρω ἀρχάς δύνανται νά προκύψουν, ὡς ὑποδείγματα τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους παραγωγῆς, γραμμικά προγράμματα.

Εἰς τήν περίπτωσιν καθ' ἥν δέν δίδεται τό ἀνά μονάδα κέρδος, ἀλλά τό ἀνά μονάδα ἔσοδον, γίνεται δεκτή ἡ ὑπόθεσις :

Ἡ μεγιστοποίησις τῶν ἐσόδων συνεπάγεται καί τήν μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους.

Τυπικόν παράδειγμα μεγιστοποιήσεως κέρδους ἀποδίδει τό :

Πρόβλημα : Ζητεῖται ἡ μεγιστοποίησις τοῦ κέρδους ἡμερησίας παραγωγῆς ἐπιχειρήσεως παραγούσης τά προϊόντα I, II μέ κέρδος ἀνά μονάδα ἀντιστοίχως 20 καί 30 χρηματικάς μονάδας, ὅταν :

α) Ἡ παραγωγή γίνεται διά μηχανῶν A, B καί Γ.

β) Κάθε μονάς τοῦ προϊόντος I ἀπασχολεῖ ἑκάστην τῶν μηχανῶν ἀπό μίαν ὥραν, ἐνῶ κάθε μονάς τοῦ προϊόντος II ἀπασχολεῖ τήν μηχανήν A μίαν ὥραν, τήν μηχανήν B δύο ὥρας καί τήν μηχανήν Γ τέσσαρας ὥρας.

γ) Αἱ μηχαναί A, B, Γ δύνανται νά λειτουργήσουν ἡμερησίως 5, 6, 10 ὥρας ἀντιστοίχως.

Ἐάν x_1, x_2 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ παραγόμεναι μονάδες τῶν προϊόντων I, II, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τό μέγιστον ἡμερήσιον κέρδος τῆς παραγωγῆς, τότε προκύπτει τό γραμμικόν πρόγραμμα :

Νά εὑρεθῇ

$$\max f = 20x_1 + 30x_2$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Πράγματι, εἰς τὰς μονάδας x_1, x_2 τῶν προϊόντων I καὶ II ἀντιστοιχεῖ συνολικὸν κέρδος $20x_1 + 30x_2$ χρ. μονάδων, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ μέγιστον.

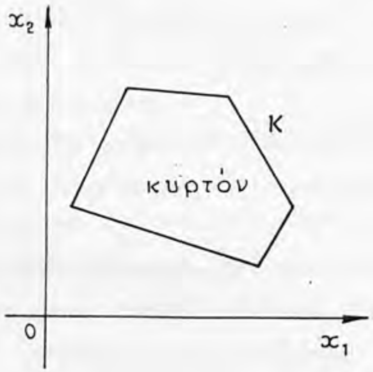
Διὰ τὰς μονάδας x_1, x_2 τῶν προϊόντων I καὶ II ἡ μηχανὴ A ἀπασχολεῖται $1\cdot x_1 + 1\cdot x_2$ ὥρας, αἱ ὁποῖαι δὲν δύνανται νὰ ὑπερβοῦν τὰς πέντε. Οὕτω προκύπτει ἡ πρώτη ἀνίσωσις*) τῶν περιορισμῶν κ.ο.κ.

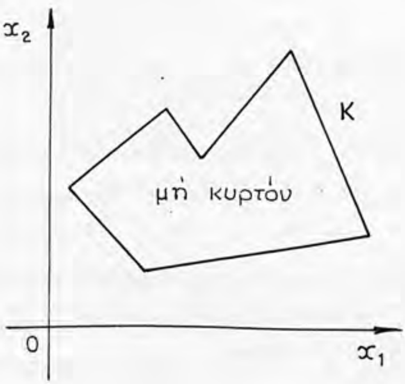
Ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κέρδους, ἤτοι τῆς ἀρίστης λύσεως τοῦ ἀνωτέρω γραμμικοῦ προγράμματος ἐπιτυγχάνεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κατωτέρω θεωρήματος :

Αἱ ἀκρότατοι τιμαὶ κάθε γραμμικῆς συναρτήσεως

$$f = c_1x_1 + c_2x_2$$

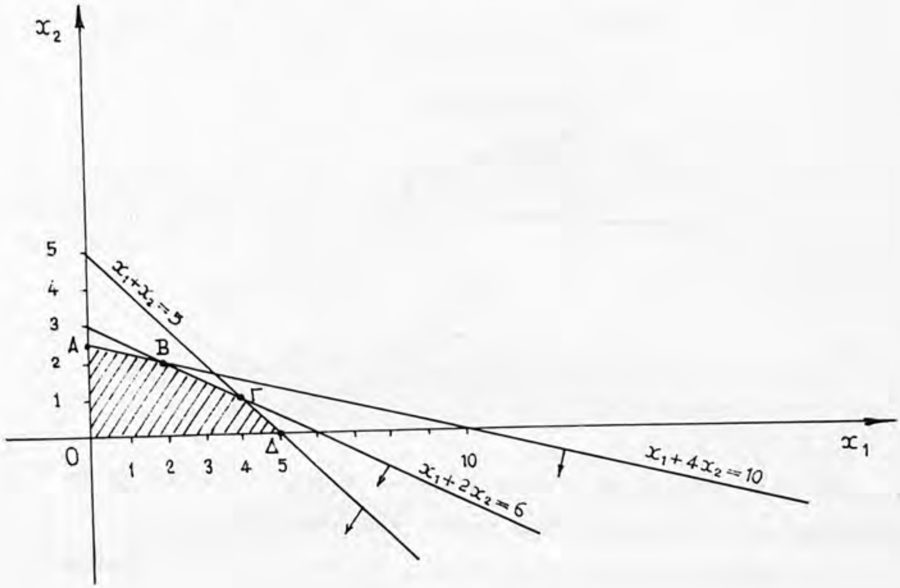
μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἕνα κυρτὸν πολύγωνον $K \subset R^2$, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου.





*) Ὀρθότερον ἀνισοεξίσωσις

Κατ' ἀρχὴν αἱ ἀνισώσεις*) ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ κυρτὸν πολύγωνον ΟΑΒΓΔ



μὲ Α(0,2,5), Β(2,2), Γ(4,1) καὶ Δ(5,0). Εἰς τὴν κορυφὴν Γ τοῦ ὁποίου ἀντιστοιχεῖ τὸ μέγιστον κέρδος

$$f = 20.4 + 30\cdot 1 = 110 \text{ χρ. μονάδες}$$

μὲ $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ μονάδες παραγωγῆς.

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς κορυφῆς Γ δύναται νὰ γίνῃ τῇ βοηθείᾳ τῆς κατωτέρω γραφικῆς μεθόδου :

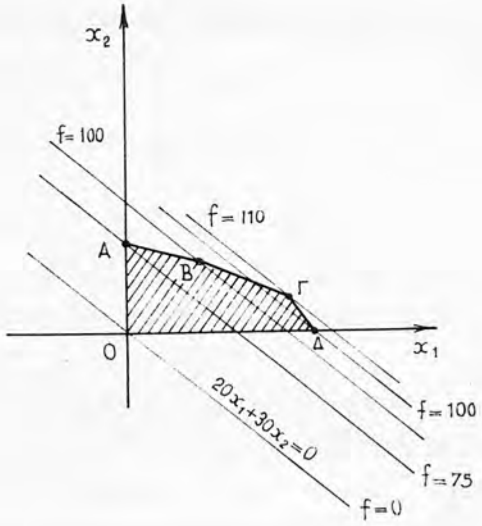
Ἡ συνάρτησις f μηδενίζεται διὰ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας

$$20x_1 + 30x_2 = 0.$$

Διὰ τὰ σημεῖα τῶν ἐκ τῶν Α, Β, Γ, Δ, ἀγομένων παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τὴν ἀνωτέρω εὐθεῖαν, ἡ f λαμβάνει θετικὰς τιμάς.

---

*) Π.χ. ἡ $x_1+x_2 \leq 5$ ὁρίζει τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν $x_1+x_2=5$ καὶ περιέχει τὴν ἀρχὴν 0 (διότι $0+0<5$).



Ἡ περισσότερον τῆς εὐθείας $20x_1+30x_2=0$ ἀπέχουσα ἐκ τῶν παραλλήλων εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Γ διερχομένη παράλληλος.

Αἱ κατωτέρω βασικαὶ περιπτώσεις συμπληρώνουν τὴν ἀνωτέρω ἐξέτασιν τῶν γραμμικῶν προγραμμάτων.

1.8 ΑΠΕΙΡΙΑ ΛΥΣΕΩΝ. Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως τῆς ἀρίστης λύσεως ἑνὸς γραμμικοῦ προγράμματος εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένη.

Δύναται δὲ αὕτη ν' ἀντιστοιχῇ εἰς ἕνα ἢ περισσότερα διανύσματα. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ ὑφίσταται *μία ἀπειρία ἀρίστων λύσεων*, μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως.

Ἐπαλήθευσις τούτου γίνεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ προγράμματος:

Νὰ εὑρεθῇ

$$\max f = x_1 + x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

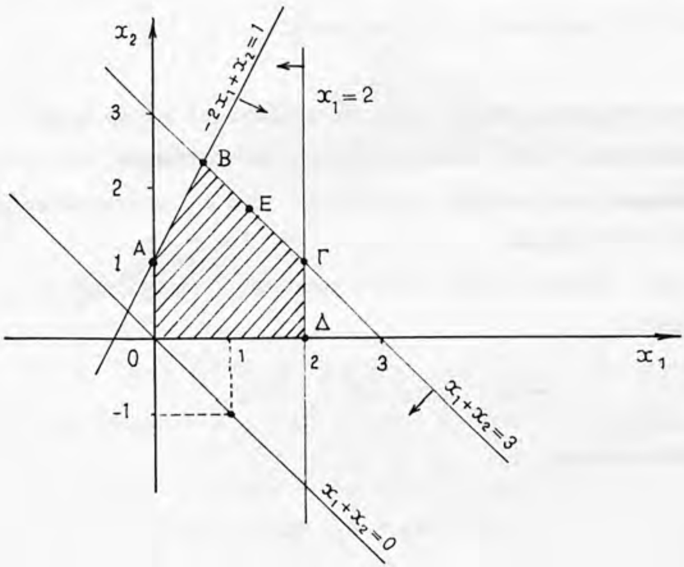
$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

αἱ ἀνισώσεις*) τοῦ ὁποίου ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὸ κυρτὸν πολύγωνον ΟΑΒΓΔ



μὲ $A(0,1)$, $B(\frac{2}{3},\frac{7}{3})$, $Γ(2,1)$ καὶ $Δ(2,0)$.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τῶν Β καὶ Γ ἔχει ἐξίσωσιν $x_1+x_2=3$ καὶ ὡς ἐκ τούτου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν μὲ ἐξίσωσιν $x_1+x_2=0$, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν $f=0$, ἔπεται ὅτι διὰ κάθε σημείου τῆς ΒΓ προκύπτει καὶ μία ἀρίστη λύσις τοῦ προγράμματος, μὲ τιμὴν $\max f = 3$.

---

*) Π.χ. ἡ $-2x_1+x_2 \leq 1$ ὁρίζει τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν $-2x_1+x_2=1$ καὶ περιέχει τὴν ἀρχὴν 0 (διότι $-2\cdot0+0<1$).

Πράγματι διά τά σημεία Β, Γ, Ε (x_1, x_2) τῆς ΒΓ είναι :

$$f = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3$$

$$f = 2 + 1 = 3$$

$$f = x_1 + x_2 = 3$$

Εἰς τόν οἰκονομικόν προγραμματισμόν, ὅταν ἡ ἀρίστη λύσις δέν εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένη, τότε ὑπάρχει ἡ δυνατότης ἐφαρμογῆς ἐναλλακτικῶν λύσεων βάσει κριτηρίων, τά ὁποῖα δέν περιέχονται εἰς τούς περιορισμούς τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος.

1.9 ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ $K \subset R^3$. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἰσχύει *) :

Αἱ ἀκρόταται τιμαί κάθε γραμμικῆς συναρτήσεως $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ μέ πεδίον ὁρισμοῦ ἕνα κυρτόν πολύεδρον $K \subset R^3$, ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς κορυφάς τοῦ πολυέδρου.

Ἐφαρμογή τούτου γίνεται εἰς τό γραμμικόν πρόγραμμα :

Νά εὑρεθῇ :

$$\max f = 10x_1 + 12x_2 + 12x_3$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

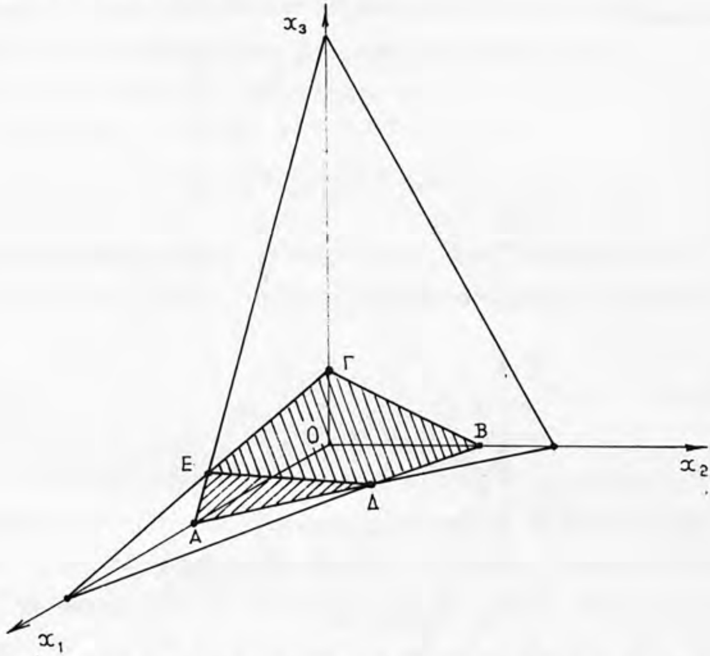
Αἱ ἀνισώσεις **) τοῦ ἀνωτέρω προγράμματος ὁρίζουν εἰς τόν

---

*) Γενίκευσις τοῦ θεωρήματος τῆς 1.7 .

**) Π.χ. ἡ $3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$ ὁρίζει τόν ἡμίχωρον, ὁ ὁποῖος δημιουργεῖται ἀπό τό ἐπίπεδον $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$ καί περιέχει τήν ἀρχήν 0 (διότι $3.0 + 2.0 + 0 < 3$).

χῶρου R^3 τὸ κυρτὸν πολύεδρον ΟΒΓΑΔΕ



μὲ $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $\Gamma(0,0,\frac{1}{2})$, $\Delta(\frac{1}{2},\frac{3}{4},0)$, $E(\frac{10}{11},0,\frac{3}{11})$.

Εἰς τὴν κορυφὴν Δ, τοῦ ὁποίου ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγίστη τιμὴ

$$\max f = 10\frac{1}{2} + 12\frac{3}{4} = 14 .$$

1.10 ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΥΡΤΟΥ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟΥ. Τὰ κατωτέρω παραδείγματα ἀναφέρονται εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ Κ εἶναι ἁπλῶς κ υ ρ τ ὸ ν ὑ π ο σ ύ ν ο λ ο ν *) τοῦ R^2.

1ον. Ἔστω τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῆ

$$\min f = 200x_1 + 200x_2$$

---

*) Ἕνα σύνολον $C \subset R^2$ καλεῖται κυρτὸν $\Leftrightarrow$. Διὸ κάθε ζεῦγος σημείων Α, Β αὐτοῦ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἀνήκει εἰς αὐτό.

ὑπό τούς περιορισμούς :

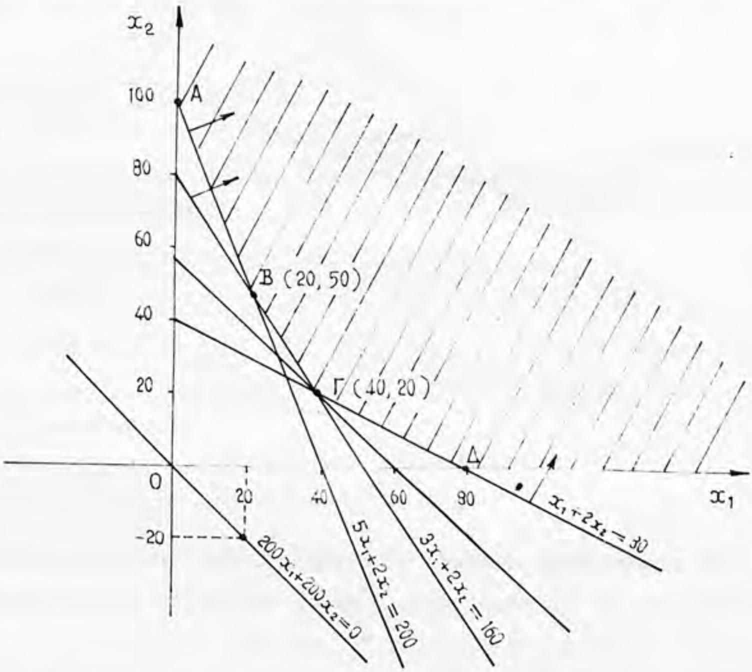
$$x_1 + 2\,x_2 \ \geq\ 80$$

$$3\,x_1 + 2\,x_2 \ \geq\ 160$$

$$5\,x_1 + 2\,x_2 \ \geq\ 200$$

$$x_1,\, x_2 \ \geq\ 0$$

Αἱ ἀνισώσεις *) τοῦ προγράμματος τούτου ὁρίζουν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τό κατωτέρω (γραμμοσκιασμένον) κυρτόν ὑποσύνολον αὐτοῦ :



Εἰς τό ἀκραῖον σημεῖον **) Γ (40, 20), τοῦ ἀνωτέρω ὑποσυνόλου ἀντι-

---

*) Π.χ. ἡ $x_1+2x_2 \geq 80$ ὁρίζει τό ἡμιεπίπεδον τό ὁποῖον δημιουργεῖται ἀπό τήν εὐθεῖαν $x_1+2x_2 = 80$ καί δέν περιέχει τήν ἀρχήν O (διότι $0+2.0 < 80$).

**) Οὕτω καλεῖται κάθε σημεῖον κυρτοῦ συνόλου, τό ὁποῖον δέν δύναται νά εἶναι ἐσωτερικόν οἱουδήποτε εὐθυγράμμου τμήματος τοῦ συνόλου.

στοιχεῖ ἡ τιμή *) $\min f = 200 \cdot 40 + 200 \cdot 20 = 12000$.

Ὥστε ὑπάρχει πεπερασμένη ἀρίστη λύσις διά τό πρόγραμμα, πρᾶγμα, τό ὁποῖον δέν συμβαίνει, ἐάν ἀντί τοῦ min τεθῆ max.

2ον: Ἔστω τό γραμμικόν πρόγραμμα:

Νά εὑρεθῆ

$$\max f = 3x_1 + 2x_2$$

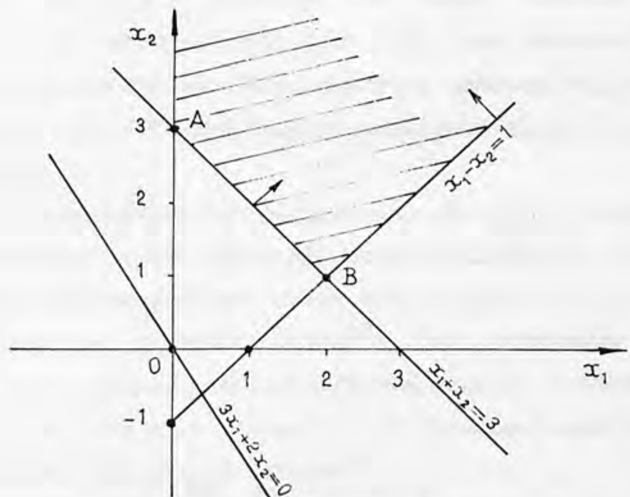
ὑπό τούς περιορισμούς:

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Αἱ ἀνισώσεις **) τοῦ προγράμματος τούτου ὁρίζουν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τό κατωτέρω (γραμμοσκιασμένον) κυρτόν σύνολον αὐτοῦ ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι ἡ ζητουμένη μεγίστη τιμή τῆς f ἰσοῦται πρός $+\infty$.



*) Ἐκ τοῦ Γ διέρχεται ἡ πλησιεστέρα παράλληλος πρός τήν εὐθεῖαν μέ ἐξίσωσιν $200x_1 + 200x_2 = 0$ (ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν $f = 0$).

**) π.χ. ἡ $x_1 - x_2 \leq 1$ ὁρίζει τό ἡμιεπίπεδον, τό ὁποῖον δημιουργεῖται ἀπό τήν εὐθεῖαν $x_1 - x_2 = 1$ καί περιέχει τήν ἀρχήν 0 (διότι $0 - 0 < 1$).

Ὥστε δὲν ὑπάρχει πεπερασμένη ἀρίστη λύσις διὰ τὸ πρόγραμμα, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν συμβαίνει, ἐὰν ἀντὶ τοῦ max τεθῆ min.

Περίπτωσις ὑποβιβασμοῦ τῶν διαστάσεων τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος μελετᾶται εἰς τὸ κατωτέρω :

1.11 ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἡ παραγωγὴ τῶν προϊόντων I, II, III μιᾶς ἐπιχειρήσεως διὰ τῶν μηχανικῶν συγκροτημάτων αὐτῆς Α, Β, Γ ἀκολουθεῖ τὴν κατωτέρω διαδικασίαν :

	I				II			III	
Διαδοχικαὶ φάσεις :	Α	Γ	Β	Γ	Α	Β	Γ	Β	Γ
Ὡριαῖαι ἀποδόσεις :	2	30	12	15	2	12	15	8	12

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ποσότητες τῶν προϊόντων I, II, III διὰ τὰς ὁποίας τὸ μηνιαῖον κέρδος παραγωγῆς καθίσταται μέγιστον ὅταν:

α) Μηνιαίως αἱ ὧραι ἐργασίας τῶν Α, Β, Γ εἶναι ἀντιστοίχως 500, 600, 400.

β) Αἱ μηνιαῖαι ζητήσεις τῶν προϊόντων I, II, III δὲν ὑπερβαίνουν ἀντιστοίχως τὰς 250, 1250, 1500 μονάδας.

γ) Αἱ κατὰ μονάδα εἰσπράξεις ἐκ τῆς διαθέσεως τῶν προϊόντων I, II, III εἶναι ἀντιστοίχως 300, 250 καὶ 400 χρ. μονάδες.

Ἐὰν x_1, x_2, x_3 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ παραγόμεναι μονάδες τῶν προϊόντων I, II, III, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ μέγιστον μηνιαῖον κέρδος τῆς παραγωγῆς, τότε προκύπτει τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\max f = 300x_1 + 250x_2 + 400x_3$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \leq 500$$

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{12} + \frac{x_3}{8} \leq 600$$

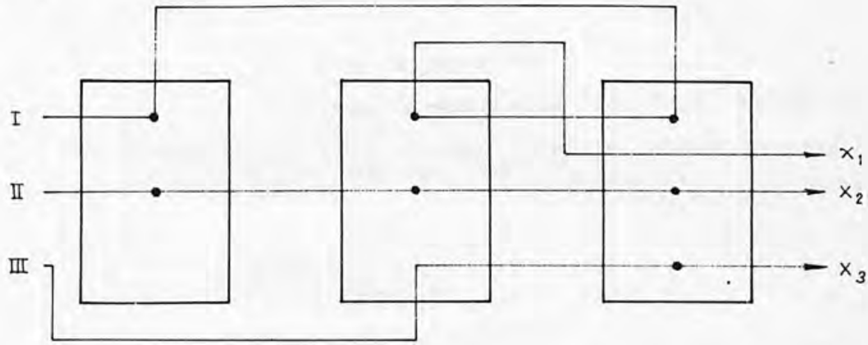
$$\frac{x_1}{30} + \frac{x_1}{15} + \frac{x_2}{15} + \frac{x_3}{12} \leq 400$$

$$0 \leq x_1 \leq 250$$

$$0 \leq x_2 \leq 1250$$

$$0 \leq x_3 \leq 1500$$

μὲ βοηθητικὸν διάγραμμα :



Πράγματι εἰς τὰς μονάδας x_1, x_2, x_3 τῶν προϊόντων I, II, III ἀντιστοιχοῦν ἔσοδα $300x_1 + 250x_2 + 400x_3$ χρηματικῶν μονάδων, ἡ μεγιστοποίησις τῶν ὁποίων δίδει καὶ τὸ μέγιστον μηνιαῖον κέρδος τῆς παραγωγῆς.

Διὰ τὰς μονάδας x_1, x_2 τῶν προϊόντων I καὶ II τὸ συγκρότημα A ἀσχολεῖται μηνιαίως $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}$ ὥρας, αἱ ὁποῖαι δὲν δύνανται νὰ ὑπερβοῦν τὰς πεντακοσίας.

Οὕτω προκύπτει ἡ πρώτη ἀνίσωσις τῶν περιορισμῶν κ.ο.κ.

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῆς ὑποθέσεως ἐπὶ τῶν μηνιαίων ζητήσεων προκύπτουν αἱ τρεῖς τελευταῖαι ἀνισώσεις τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος.

Τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα γράφεται :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\max f = 300x_1 + 250x_2 + 400x_3$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 \leq 1000 \qquad (1)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 14.400 \qquad (2)$$

$$6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 24000 \qquad (3)$$

$$x_1 \leq 250 \qquad (4)$$

$$x_2 \leq 1250 \qquad (5)$$

$$x_3 \leq 1500 \qquad (6)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Ἐκ τῶν (4), (5), (6) προκύπτουν αἱ ἀνισώσεις :

$$2x_1 \leq 500$$

$$2x_2 \leq 2500$$

$$3x_3 \leq 4500$$

καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ :

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 7500,$$

ἤτοι ἀνίσωσις "ἰσχυροτέρα" τῆς (2).

Ὁμοίως ἐκ τῶν (4), (5), (6) προκύπτουν αἱ ἀνισώσεις :

$$6x_1 \leq 1500$$

$$4x_2 \leq 5000$$

$$5x_3 \leq 7500$$

καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ :

$$6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 14000,$$

ἤτοι ἀνίσωσις "ἰσχυροτέρα" τῆς (3).

Κατόπιν τούτων φανερὸν εἶναι ὅτι αἱ ἀνισώσεις (2) καὶ (3) δύνανται νὰ παραληφθοῦν ἐκ τῶν περιορισμῶν τοῦ προγράμματος, ὡς "περιεχόμεναι" εἰς τὰς (4), (5) καὶ (6).

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ πρόκειται περὶ μεγιστοποιήσεως τῆς συναρτήσεως f, τίποτε δέν έμποδίζει (άφοῦ αἱ (2), (3) δέν ὑφίστανται) νά ληφθῆ ἡ μεγαλυτέρα τιμή τοῦ x_3 ἤτοι $x_3 = 1500$.

Ἤδη τό πρόγραμμα περιορίζεται εἰς τό ὑποπρόγραμμα :

Νά εὑρεθῆ :

$$\max g = 300\,x_1 + 250\,x_2$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 \leq 1000$$

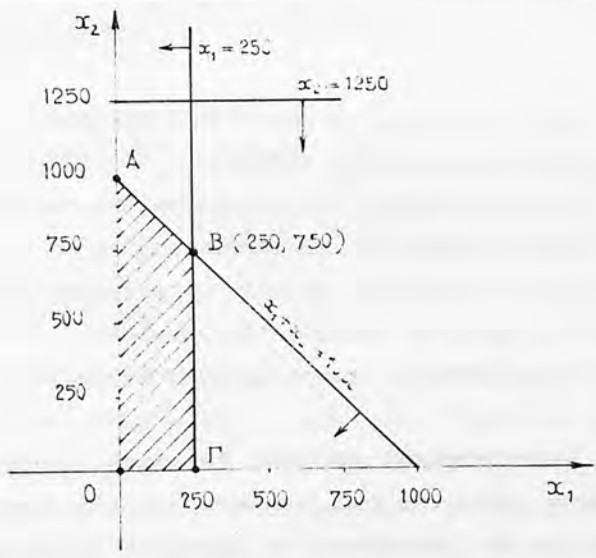
$$x_1 \leq 250$$

$$x_2 \leq 1250$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Τοῦ προγράμματος τούτου ἡ λύσις εὑρίσκεται κατωτέρω γραφικῶς.

Κατ' ἀρχήν αἱ ἀνισώσεις ὁρίζουν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τό τραπέζιον ΟΑΒΓ



μέ Α (0, 1000), Β (250, 750) καί Γ (250, 0).

Εἰς τήν κορυφήν Β τοῦ τραπεζίου τούτου ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγίστη τιμή τῆς $g = 300 \cdot 250 + 250 \cdot 750 = 262500$ χρηματικαί μονάδες μέ $x_1 = 250$ καί $x_2 = 750$ μονάδες παραγωγῆς.

Κατόπιν τούτου ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ ἀρχικοῦ προγράμματος εἶναι ή $x_1 = 250$, $x_2 = 750$, $x_3 = 1500$ μὲ ἀντίστοιχον μεγίστην τιμήν:

$$f = 300 \cdot 250 + 250 \cdot 750 + 400 \cdot 1500 = 862\,500$$

χρηματικάς μονάδας.

1.12 ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ. Γενικῶς εἰς τὸ πρόβλημα τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους παραγωγῆς ἀντιστοιχεῖ τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα.

Νὰ εὑρεθῆ:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j \ , \ j = 1, 2, \cdots, m \qquad (1)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (2)$$

ἔνθα:

n = ὁ ἀριθμὸς τῶν προϊόντων παραγωγῆς

c_i = ἡ κατὰ μονάδα εἴσπραξις ἐκ τῆς διαθέσεως τοῦ προϊόντος i

x_i = ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς μονάδων τοῦ προϊόντος i

m = ὁ ἀριθμὸς τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς

a_{ji} = ἡ ἀπαιτουμένη ποσότης τοῦ συντελεστοῦ j, διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος i

b_j = ὁ μέγιστος ἀριθμὸς διατιθεμένων μονάδων τοῦ συντελεστοῦ j

1.13 ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΙΣ ΚΟΣΤΟΥΣ. Τὰ ἑπόμενα ὑποδείγματα προβλημάτων κόστους, ἔχουν ὡς βάσιν καὶ αὐτὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Προϋποθέτουν δὲ γνωστὸν τὸ κατὰ μονάδα ἔξοδον.

Ἐξ ἄλλου ταυτόχρονος θεώρησις μεγιστοποιήσεως κέρδους καὶ ἐλαχιστοποιήσεως κόστους ἐξετάζεται εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦ δυϊσμοῦ.

Τυπικὸν παράδειγμα ἐλαχιστοποιήσεως κόστους ἀποδίδει τό:

Πρόβλημα. Ὁ κατωτέρω πίναξ ἀναφέρεται εἰς τὴν παραγωγὴν τῶν προϊόντων I, II, III μιᾶς ἐπιχειρήσεως διὰ τῶν μηχανικῶν συγκροτημάτων Α καὶ Β αὐτῆς :

	I	II	III
Ἡμερησία παραγωγὴ τοῦ Α :	1	3	5
Ἡμερησία παραγωγὴ τοῦ Β :	2	2	2

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσας ἡμέρας θὰ δύναται ἡ ἐπιχείρησις ν' ἀντιμετωπίσῃ ζητήσεις 80, 160 καὶ 200 μονάδων **τουλάχιστον**, ἐὰν τὸ ἡμερήσιον κόστος ἑκάστου συγκροτήματος αὐτῆς εἶναι 200 χρηματικαὶ μονάδες.

Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἡμέραι παραγωγῆς τῶν Α, Β, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἐλάχιστον κόστος τότε προκύπτει τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min f = 200x_1 + 200x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 + 2x_2 \geq 80$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 160$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Πράγματι· εἰς τὰς x_1, x_2 ἡμέρας ἐργασίας, τῶν συγκροτημάτων Α καὶ Β, ἀντιστοιχεῖ κόστος $200x_1 + 200x_2$, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον.

Εἰς τὰς x_1, x_2 ἡμέρας ἐργασίας τῶν συγκροτημάτων Α καὶ Β ἀντιστοιχεῖ παραγωγὴ $1\cdot x_1 + 2\cdot x_2$ μονάδων τοῦ προϊόντος I, ἡ ὁποία δὲν πρέπει νὰ ὑπολείπεται τῆς ζητήσεως τῶν ὀγδοήκοντα μονάδων. Οὕτω προκύπτει ἡ πρώτη ἀνίσωσις τῶν περιορισμῶν κ.ο.κ.

Ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος, εὑρεθεῖσα εἰς τὴν 1.10, δίδει τιμὴν ἐλαχίστου κόστους $f = 12000$ χρηματικὰς μονάδας διὰ $x_1 = 40$, $x_2 = 20$ ἡμέρας ἐργασίας.

Εἰς τὰ ὑποδείγματα τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ κόστους περιλαμβάνεται καὶ τὸ πρόβλημα τῆς διαίτης. Τυπικὸν παράδειγμα τοῦ ὁποίου ἀποτελεῖ τὸ ἑξῆς :

1.14 ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Τὰ εἴδη διατροφῆς I, II περιέχουν κατὰ μερίδα ποσότητας 1, 0, 1, 2 καὶ 0, 1, 2, 1 ἀντιστοίχως ἐκ τῶν θρεπτικῶν οὐσιῶν Α, Β, Γ, Δ.

Νὰ εὑρεθῶν αἱ μερίδες ἑνὸς προγράμματος διατροφῆς ἐκ τῶν I, II ὅταν :

α) Τοῦτο πρέπει νὰ περιέχῃ ἀπαραιτήτως ποσότητας 4, 6, 20, 17 ἐκ τῶν Α, Β, Γ, Δ καὶ

β) Τὸ κατὰ μερίδα κόστος τῶν I καὶ II εἶναι ἀντιστοίχως 100 καὶ 40 χρηματικαὶ μονάδες.

Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ μερίδες τῶν I, II, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἐλάχιστον κόστος τότε προκύπτει τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min f = 100x_1 + 40x_2$$

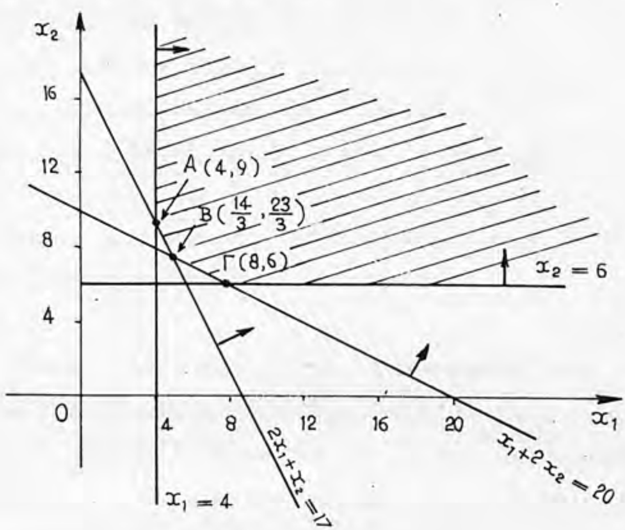
ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 \geq 4$$
$$x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$2x_1 + x_2 \geq 17$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Πράγματι· εἰς τὰς x_1, x_2 μερίδας τῶν εἰδῶν I καὶ II ἀντιστοιχεῖ κόστος $100x_1 + 40x_2$, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον.

Εἰς τὰς x_1, x_2 μερίδας τῶν εἰδῶν I καὶ II ἀντιστοιχοῦν $2x_1 + 1x_2$ μονάδες τῆς θρεπτικῆς οὐσίας Δ, αἱ ὁποῖαι δὲν δύνανται νὰ εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν δεκα ἑπτὰ μονάδων. Οὕτω προκύπτει ἡ τετάρτη ἀνίσωσις τῶν περιορισμῶν κ.ο.κ.

Αἱ ἀνισώσεις *) ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὸ κατωτέρω (γραμμοσκιασμένον) κυρτὸν ὑποσύνολον αὐτοῦ :



εἰς τὸ ἀκραῖον σημεῖον A(4,9), τοῦ ὁποίου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ τοῦ ἐλαχίστου κόστους $f = 100 \cdot 4 + 40 \cdot 9 = 760$ χρηματικαὶ μονάδες μὲ $x_1 = 4$ καὶ $x_2 = 9$ μερίδας τῶν I, II.

1.15 ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ. Γενικῶς, εἰς τὸ πρόβλημα τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ κόστους παραγωγῆς, ἀντιστοιχεῖ τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα:

Νὰ εὑρεθῆ :

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \geq b_j, \quad j = 1, 2, \cdots, m \qquad (1)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (2)$$

---

*) π.χ. ἡ $x_1 \geq 4$ ὁρίζει τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν $x_1 = 4$ καὶ δὲν περιέχει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων O (διότι $0 < 4$).

ἔνθα :

n = ὁ ἀριθμὸς τῶν μέσων παραγωγῆς

c_i = τὸ κατὰ μονάδα ἔξοδον διὰ τὴν ἀπόκτησιν τοῦ μέσου i

x_i = ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς μονάδων τοῦ μέσου i

m = ὁ ἀριθμὸς τῶν προϊόντων παραγωγῆς

b_j = τὸ κατώτερον ὅριον μονάδων παραγωγῆς τοῦ προϊόντος j

a_{ij} = ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ προϊόντος j, ὁ ὁποῖος προέρχεται ἐκ τῆς ἀναλύσεως μιᾶς μονάδος τοῦ μέσου i

1.16 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Εἰς τὰ ἐξετασθέντα ἀνωτέρω προβλήματα Γραμμικοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ, οἱ περιορισμοὶ εἶχον τὴν μορφὴν ἀνισώσεων, ἡ δὲ ἀρίστη λύσις εὑρισκομένη εἰς μίαν κορυφὴν (ἀκραῖον σημεῖον) ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου (ὑποσυνόλου), ἐπηλήθευε μόνον τὰς ἐξισώσεις τῶν δι' αὐτοῦ διερχομένων εὐθειῶν (ἐπιπέδων) ἐνῶ διὰ τοὺς ὑπολοίπους περιορισμοὺς ἴσχυεν ἡ ἀνίσωσις.

Ἡ οἰκονομικὴ σημασία τούτου μελετᾶται κατωτέρω.

Ἔστω τὸ πρόβλημα μεγιστοποιήσεως τῆς 1.7, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρίστη λύσις $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ ἐπαληθεύει τὰς ἐξισώσεις τῶν δύο πρώτων περιορισμῶν, ἐνῶ διὰ τοῦ τρίτου περιορισμοῦ παρέχει πλεόνασμα 2 ὡρῶν (διότι $x_1 + 4x_2 + 2 = 10$) διὰ τὴν μηχανὴν Γ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐκμεταλλευθῇ ἡ ἐπιχείρησις.

Ἔστω τὸ πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως τῆς 1.13, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρίστη λύσις $x_1 = 40$, $x_2 = 20$ ἐπαληθεύει τὰς ἐξισώσεις τῶν δύο πρώτων περιορισμῶν, ἐνῶ διὰ τοῦ τρίτου περιορισμοῦ παρέχει πλεόνασμα 40 μονάδων (διότι $5x_1 + 2x_2 - 40 = 200$) διὰ τὸ προϊὸν III, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ ἐπιπτώσεις διὰ τὴν ἐπιχείρησιν.

Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ κόστους, τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα τοῦ ἑπομένου προβλήματος κ α τ α ν ο μ ῆ ς, ἔχει μεταβλητὰς μὲ τιμὰς 0 ἢ 1 καὶ περιορισμοὺς μόνον ἐξισώσεις.

1.17 ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ὁ κατωτέρω πίναξ ἀναφέρεται εἰς τὸ κατὰ μονάδα κόστος τῆς παραγωγῆς τῶν προϊόντων $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ διὰ τῶν διαφορετικῶν μεθόδων (μηχανῶν) M_1, M_2, M_3, M_4*) :

	M_1	M_2	M_3	M_4
Π_1	1	8	4	1
Π_2	5	7	6	5
Π_3	3	5	4	2
Π_4	3	1	6	3

Ζητεῖται νὰ γίνη παραγωγὴ μὲ τὸ ἐλάχιστον κόστος.

Ἔστω $x_{ij}=1$ ὅταν τὸ προϊὸν Π_i παράγεται διὰ τῆς μεθόδου M_j, $(i, j=1,2,3,4)$

$x_{ij}=0$ ὅταν τὸ προϊὸν Π_i δὲν παράγεται διὰ τῆς μεθόδου M_j, τότε προκύπτει τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα.

Νὰ εὑρεθῆ

$$\min f = x_{11}+8x_{12}+4x_{13}+x_{14}+5x_{21}+\cdots+3x_{41}+x_{42}+6x_{43}+3x_{44}$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}=1\ ,\quad i=1,2,3,4$$

$$x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+x_{4j}=1\ ,\quad j=1,2,3,4$$

$$x_{ij}=0 \text{ ἢ } 1,\ i,j=1,2,3,4$$

Πράγματι εἰς τὴν ζητουμένην κατανομὴν ἀντιστοιχεῖ κόστος

$$1\cdot x_{11}+8\cdot x_{12}+\cdots+3\cdot x_{44}$$

τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον.

---

*) Π.χ. τὸ προϊὸν Π_2 παραγόμενον διὰ τῆς μεθόδου M_3 ἔχει κόστος 6 χρηματικὰς μονάδας.

Ἡ πρώτη ὁμὰς τῶν ἐξισώσεων τῶν περιορισμῶν προκύπτει ἐκ τοῦ περιορισμοῦ : Κάθε προϊὸν Π_i πρέπει νὰ παραχθῇ ὑπὸ μιᾶς μόνον, ἐκ τῶν μεθόδων M_1, M_2, M_3, M_4.

Ἡ δευτέρα ὁμὰς τῶν ἐξισώσεων τῶν περιορισμῶν προκύπτει ἐκ τοῦ περιορισμοῦ : Κάθε μέθοδος M_j πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν παραγωγὴν ἑνὸς μόνον, ἐκ τῶν προϊόντων $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$.

Τὸ ἀνωτέρω ὑπόδειγμα εἶναι βέβαια γραμμικὸν πρόγραμμα ἀλλ' ὅμως δὲν παύει νὰ εἶναι ἕνα πρόβλημα συνδυαστικοῦ χαρακτῆρος. Ἡ ἄποψις αὐτὴ ἐπέτρεψεν εἰς τὸν Kuhn νὰ δημιουργήσῃ ἕνα εἰδικὸν ἀλγόριθμον δι' αὐτό, στηριζόμενος εἰς ἕνα θεώρημα τοῦ König.

Κατωτέρω γίνεται ταυτόχρονος παρουσίασις τοῦ ἀλγορίθμου καὶ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος.

1.18 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΤΟΥ KUHN

ΒΗΜΑ 1ον : Εὕρεσις τῶν ἐλαχίστων τιμῶν τῶν στηλῶν τοῦ πίνακος.

	1	8	4	1
	5	7	6	5
	3	5	4	2
	3	1	6	3
min	1	1	4	1

ΒΗΜΑ 2ον : Ἀφαίρεσις ἐκ τῶν στοιχείων ἑκάστης στήλης, τῶν εὑρεθεισῶν ἀντιστοίχως ἐλαχίστων τιμῶν.

0	7	0	0
4	6	2	4
2	4	0	1
2	0	2	2

ΒΗΜΑ 3ον : Διαχωρισμὸς τῶν ἐμφανισθέντων μηδενικῶν, εἰς "πλαισιούμενα„

*) Δηλ. τῶν ἐντὸς τῶν φατνίων εὑρισκομένων μηδενικῶν, τὰ ὁποῖα δὲν δύνανται νὰ εἶναι περισσότερα τοῦ ἑνὸς εἰς ἑκάστην γραμμὴν καὶ στήλην.

καὶ "διαγραφόμενα".

$$\begin{array}{cccc} \boxed{0} & 7 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & \boxed{0} & 1 \\ 2 & \boxed{0} & 2 & 2 \end{array}$$

Ἐάν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλαισιουμένων μηδενικῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν (γραμμῶν), τότε ἡ ἀρίστη λύσις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς θέσεις αὐτῶν.

Ἐάν ὄχι τότε :

ΒΗΜΑ 4ον : Ἐκτέλεσις τῶν ἐντολῶν*) :

α) Σημείωσις τῶν γραμμῶν εἰς τὰς ὁποίας δὲν ὑπάρχουν πλαισιούμενα μηδενικά.

β) Σημείωσις κάθε στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ἕνα διαγραφόμενον μηδενικὸν εἰς μίαν ἢ περισσοτέρας, ἐκ τῶν σημειωθεισῶν γραμμῶν.

γ) Σημείωσις κάθε γραμμῆς, ἡ ὁποία ἔχει ἕνα τουλάχιστον πλαισιούμενον μηδενικόν, εἰς μίαν σημειωθεῖσαν στήλην.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{0} & 7 & \cancel{0} & \cancel{0} & \\ 4 & 6 & 2 & 4 & * \\ 2 & 4 & \boxed{0} & 1 & \\ 2 & \boxed{0} & 2 & 2 & \end{array}$$

ΒΗΜΑ 5ον : Διαγραφὴ τῶν μὴ σημειωθεισῶν γραμμῶν καὶ τῶν σημειωθεισῶν στηλῶν.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{0} & 7 & \cancel{0} & \cancel{0} & \\ 4 & 6 & 2 & 4 & * \\ 2 & 4 & \boxed{0} & 1 & \\ 2 & \boxed{0} & 2 & 2 & \end{array}$$

καὶ εὕρεσις τῆς ἐλαχίστης τιμῆς τοῦ τμήματος τοῦ πίνακος τοῦ περιέχοντος τὰς μὴ διαγραφείσας γραμμὰς καὶ στήλας.

Ἐλαχίστη τιμὴ 2

*) Αἱ ἐντολαὶ β καὶ γ ἔχουν ἐπαναληπτικὸν χαρακτῆρα.

ΒΗΜΑ 6ον: Ἀφαίρεσις τῆς εὑρεθείσης τιμῆς ἐκ τῶν στοιχείων τῶν μὴ διαγραφεισῶν στηλῶν καὶ πρόσθεσις αὐτῆς εἰς τὰ στοιχεῖα τῶν διαγραφεισῶν γραμμῶν.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}$$

καὶ ἐπανάληψις τοῦ τρίτου βήματος

$$\begin{array}{cccc} \boxed{0} & 7 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 2 & 4 & \cancel{0} & 2 \\ 2 & 4 & \boxed{0} & 1 \\ 2 & \boxed{0} & 2 & 2 \end{array}$$

Μὴ ἐπιτευχθείσης τῆς ἀρίστης λύσεως ὁ ἀλγόριθμος συνεχίζεται μέ:

ΒΗΜΑ 4ον:

$$\begin{array}{ccccc} & & * & & \\ \boxed{0} & 7 & \cancel{0} & \cancel{0} & \\ 2 & 4 & \cancel{0} & 2 & * \\ 2 & 4 & \boxed{0} & 1 & * \\ 2 & \boxed{0} & 2 & 2 & \end{array}$$

ΒΗΜΑ 5ον:

$$\begin{array}{ccccc} & & * & & \\ \boxed{0} & 7 & \cancel{0} & \cancel{0} & \\ 2 & 4 & \cancel{0} & 2 & * \\ 2 & 4 & \boxed{0} & 1 & * \\ 2 & \boxed{0} & 2 & 2 & \end{array}$$

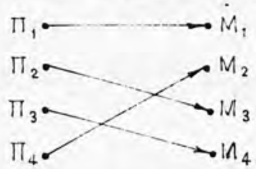
Ἐλαχίστη τιμὴ 1

ΒΗΜΑ 6ον:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \boxed{0} & 7 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 3 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & 3 & \cancel{0} & \boxed{0} \\ 2 & \boxed{0} & 8 & 2 \end{array}$$

ὅτε ἡ ἀρίστη λύσις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ζεῦξιν :



μὲ ἀντίστοιχον κόστος

$$1 + 1 + 6 + 2 = 10 .$$

Τὸ ἑπόμενον πρόβλημα κατανομῆς ἂν καὶ ἀναφέρεται εἰς μεγιστοποίησιν, ἐπιλύεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ προηγουμένου ἀλγορίθμου.

1.19 ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Αἱ ἀτομικαὶ παραγωγικαὶ ἱκανότητες τῶν ἐργαζομένων E_1, E_2, E_3, E_4, δυναμένων ν' ἀπασχοληθοῦν εἰς τὰς διαφορετικὰς θέσεις (μηχανὰς) M_1, M_2, M_3, M_4 ἔχουν τὴν ἀκόλουθον βαθμολογίαν *):

	M_1	M_2	M_3	M_4
E_1	8	5	7	6
E_2	9	1	8	3
E_3	7	3	2	1
E_4	1	6	9	4

Ζητεῖται νὰ γίνῃ κατανομὴ τοῦ ἀνωτέρω προσωπικοῦ εἰς τρόπον ὥστε νὰ προκύψῃ τὸ μέγιστον τῆς ἀποδόσεώς του.

Ἔστω $x_{ij} = 1$ ὅταν ὁ E_i τοποθετηθῇ εἰς τὴν θέσιν M_j $(i, j = 1, 2, 3, 4)$

$= 0$ ὅταν ὁ E_i δὲν τοποθετηθῇ εἰς τὴν θέσιν M_j

τότε προκύπτει τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

---

*) π.χ. ὁ E_4 ἐργαζόμενος εἰς τὴν θέσιν M_2 βαθμολογεῖται μὲ 6 μονάδας.

Νά εὑρεθῆ :

$$\max f = 8x_{11}+5x_{12}+7x_{13}+6x_{14}+9x_{21}+\cdots+x_{41}+6x_{42}+9x_{43}+4x_{44}$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}=1\ ,\quad i=1,2,3,4$$

$$x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+x_{4j}=1,\quad j=1,2,3,4$$

$$x_{ij}=0 \text{ ἤ } 1,\quad i,j=1,2,3,4$$

Πράγματι εἰς τήν ζητουμένην κατανομήν ἀντιστοιχεῖ ἀπόδοσις

$$8x_{11}+5x_{12}+\cdots+4x_{44}\ ,$$

τῆς ὁποίας ζητεῖται τό μέγιστον.

Ἡ πρώτη ὁμάς τῶν ἐξισώσεων προκύπτει ἐκ τῆς ὑποθέσεως: Κάθε ἐργαζόμενος E_i πρέπει νά καταλάβη μίαν μόνον, ἐκ τῶν θέσεων M_1, M_2, M_3, M_4.

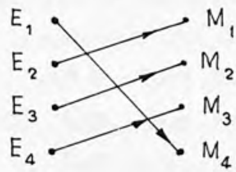
Ἡ δευτέρα ὁμάς τῶν ἐξισώσεων προκύπτει ἐκ τῆς ὑποθέσεως: Κάθε θέσις M_j πρέπει νά χρησιμοποιηθῆ ὑπό ἑνός μόνον ἐκ τῶν ἐργαζομένων E_1, E_2, E_3, E_4.

Διά τόν προσδιορισμόν τῆς ἀρίστης λύσεως εὑρίσκεται ἡ μεγίστη τιμή τοῦ πίνακος καί ἐξ αὐτῆς ἀφαιροῦνται αἱ τιμαί αὐτοῦ.

Διά τό ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ μεγίστη τιμή τοῦ πίνακος εἶναι 9 καί μετά τήν ἀφαίρεσιν προκύπτει :

1	4	2	3
0	8	1	6
2	6	7	3
8	3	0	5

Ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ ἀνωτέρω ἀλγόριθμος τοῦ Kuhn ἐφαρμοζόμενος ἐπί τοῦ προκύψαντος πίνακος δίδει τήν ἀρίστην λύσιν, ἡ ὁποία ἐνταῦθα*) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ζεῦξιν :



μὲ ἀντίστοιχον μεγίστην ἀπόδοσιν $9+3+9+6 = 27$.

1.20 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ εὑρεθῇ :

$$\max f = 30x_1 + 50x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 16 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Νὰ εὑρεθῇ :

$$\max f = 2x_1 - x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\geq 8 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 11 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 9 \end{aligned}$$

3. Νὰ εὑρεθῇ :

$$\max f = 3x_1 + 2x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &\geq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

---

*) Νὰ ἐπαληθευθῇ.

4. Νά εὑρεθῆ :

$$\max f = x_1 + x_2$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$-x_1 + x_2 \leq 0$$
$$x_1 \leq 4$$

5. Νά εὑρεθῆ :

$$\max f = x_1 - 2x_2$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 0$$
$$x_1 \leq 4$$

6. Νά εὑρεθῆ :

$$\min f = 2x_1 - x_2$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$-x_1 + x_2 \leq 0$$
$$x_1 \leq 4$$

7. Νά εὑρεθῆ :

$$\min f = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 0$$
$$x_3 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

8. Νά εὑρεθῆ :

$$\max f = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

9. Ἡ διαφήμισις τῶν προϊόντων μιᾶς ἑταιρείας γίνεται διά τηλεοπτικῆς ἐκπομπῆς, ἡ ὁποία δέν δύναται νά ὑπερβῆ τό εἰκοσάλεπτον. Ἡ ἐκπομπή περιλαμβάνει διαφημίσεις καί διασκεδαστικήν ταινίαν. Ἐάν τό κόστος προβολῆς τῆς ταινίας εἶναι 500 χρηματικαί μονάδες ἀνά λεπτόν καί τῶν διαφημίσεων 3000 χρηματικαί μονάδες ἀνά λεπτόν, ζητεῖται νά γίνη ἡ ἐκπομπή μέ τό ἐλάχιστον δυνατόν κόστος, δοθέντος ὅτι αἱ μέν διαφημίσεις δύνανται νά εἶναι διαρκείας 2 ἕως 5 λεπτῶν, ἡ δέ διάρκεια προβολῆς τῆς διασκεδαστικῆς ταινίας δέν δύναται νά ὑπερβῆ τά 17 λεπτά.

10. Ἔστω, ὅτι, ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι διά κάθε λεπτόν προβολῆς ἐκ μέν τῆς διασκεδαστικῆς ταινίας ἀναμένεται προσέλκυσις 50.000 νέων τηλεθεατῶν, ἐκ δέ τῶν διαφημίσεων 5 νέων τηλεθεατῶν, τοῦ προγράμματος τῆς ἐκπομπῆς.
Ζητεῖται νά γίνη ἡ ἐκπομπή μέ τόν μέγιστον ἀναμενόμενον ἀριθμόν τηλεθεατῶν.

11. Ἔστωσαν 10% καί 90% αἱ ἀναλογίαι πάχεος καί ἰσχνοῦ εἰς τό κρέας μόσχου καί 40% καί 60% ἀντιστοίχως εἰς τό κρέας χοίρου. Ἐάν αἱ ἀνάγκαι ἑνός γεύματος δέν ὑπερβαίνουν τά 10 κιλά μερίδων ἰσχνοῦ καί τά 4 κιλά μερίδων πάχεος κρέατος, ζητεῖται νά εὑρεθοῦν αἱ ἀπαιτούμεναι ποσότητες τῶν δύο εἰδῶν κρέατα. μέ τό ἐλάχιστον δυνατόν κόστος ὅταν ἡ τιμή τοῦ κιλοῦ δι' ἑκάτερον ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως 10 καί 45 χρημ. μονάδες.

12. Ὁ κατωτέρω πίναξ ἀναφέρεται εἰς τά δύο ὑποπροϊόντα τῆς διϋλίσεως τοῦ ἀκαθάρτου πετρελαίου : βαρέα ἔλαια καί ἀεριέλαιον.

	Βαρέα ἔλαια εἰς τόννους	Ἀεριέλαια εἰς τόννους
Ἀπόσταξις ὑπό ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν	500 000	600 000
Ἀποθείωσις	700000	500 000
Καταλυτικός ἀνασχηματισμός	400000	
Καταλυτική πυρόλυσις		450000

Οὕτως διά τά βαρέα ἔλαια ἀπαιτοῦνται αἱ διαδοχικαί ἐπεξεργασίαι : ἀπόσταξις ὑπό ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν, ἀποθείωσις καί καταλυτικός ἀνασχηματισμός μέ τεχνολογικά ὅρια, ἐτησίας παραγωγῆς ἀντιστοίχως 500 000, 700 000, 400 000 τόννους.

Διά τό ἀεριέλαιον ἀπαιτοῦνται : ἀπόσταξις ὑπό ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν, ἀποθείωσις καί καταλυτική πυρόλυσις, μέ τεχνολογικά ὅρια ἐτησίας παραγωγῆς ἀντιστοίχως 600 000, 500 000, 450 000 τόννους.

Ἐάν ἡ τιμή τοῦ τόννου τῶν βαρέων ἐλαίων εἶναι 7 χρηματικαί μονάδες καί τοῦ τόννου τοῦ ἀεριελαίου 5 χρηματικαί μονάδες, ζητεῖται νά εὑρεθῇ ἡ παραγωγή μέ τό μέγιστον δυνατόν κέρδος.

13. Ἕν ἐπιπλοποιεῖον διαθέτει 500 ὥρας ἐργασίας διά τήν κατασκευήν ξυλίνων τραπεζῶν, γραφείων καί βιβλιοθηκῶν, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμός δέν δύναται νά ὑπερβῇ τάς 40, 30 καί 10 μονάδας ἀντιστοίχως.

Διά τήν κατασκευήν αὐτῶν χρησιμοποιεῖ δύο διαφορετικούς τύπους ξυλείας, τῶν ὁποίων διαθέτει ποσότητας 1500 καί 1000 μονάδων αὐτῶν.

Κάθε τράπεζα, γραφεῖον καί βιβλιοθήκη χρειάζεται 5, 9, 12 μονάδες ἀντιστοίχως τοῦ πρώτου τύπου ξυλείας καί 2, 4, 1 μονάδες ἀντιστοίχως τοῦ δευτέρου τύπου ξυλείας.

Διά τήν κατασκευήν μιᾶς τραπέζης, ἑνός γραφείου καί μιᾶς βιβλιοθήκης ἀπαιτοῦνται ἀντιστοίχως 3, 5 καί 10 ὧραι ἐργασίας, ἐνῶ τά ἀντίστοιχα κέρδη ἀνέρχονται εἰς 50, 150 καί 100 χρηματικάς μονάδας.

Ζητεῖται νά γίνῃ ἡ κατασκευή μέ τό μέγιστον δυνατόν κέρδος.

14. Πτηνοτροφεῖον ἐκτρέφει κοτόπουλα, "παπάκια" καί γαλόπουλα τά ὁποῖα πωλεῖ πρός 20, 30 καί 50 ἀντιστοίχως χρηματικάς μονάδας.

Ἐάν ὁ χῶρος αὐτοῦ εἶναι διά 500 πτηνά, αἱ δέ συνθῆκαι δέν ἐπιτρέπουν τήν ἐκτροφήν περισσοτέρων, ἀπό 300 κοτόπουλα καί 100 παπάκια ζητεῖται νά εὑρεθῇ ἡ παραγωγή μέ τό μέγιστον δυνατόν κέρδος.

15. Ὁ κατωτέρω πίναξ ἀναφέρεται εἰς τάς δυνατότητας τῆς ἑβδομαδιαίας παραγωγῆς τῶν προϊόντων I, II, III μιᾶς βιομηχανίας, δι' ἕκαστον τῶν ὁποίων πρό τῆς τελικῆς συναρμολογήσεως ἀπαιτοῦνται δύο φάσεις ἐπεξεργασίας.

	I	II	III
Φάσις 1η	20 000	30 000	12 000
Φάσις 2α	30 000	10 000	10 000
Συναρμολόγησις I	20 000		
» II		12 000	
» III			8 000

Ἐάν ἡ τιμή τῶν προϊόντων τούτων εἶναι ἀντιστοίχως 150, 120, 140 χρηματικαί μονάδες, ζητεῖται νά εὑρεθῇ ἡ παραγωγή μέ τό μέγιστον δυνατόν κέρδος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

2.1 ΒΟΗΘΗΤΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ. Αἱ κατωτέρω βοηθητικαὶ προτάσεις εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ τὴν θεωρίαν τῶν γραμμικῶν προγραμμάτων.

1) Ἡ ἀνίσωσις $\varphi_j(x) \geq 0$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀνίσωσιν: $-\varphi_j(x) \leq 0$.

2) Ἡ ἐξίσωσις $\varphi_j(x) = 0$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα τῶν ἀνισώσεων:

$$\varphi_j(x) \geq 0$$
$$-\varphi_j(x) \geq 0.$$

3) Ἡ ἀνίσωσις $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \leq b_j$ μετατρέπεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n + x_{n+1} = b_j ,$$

διὰ τῆς προσθέσεως εἰς τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς τῆς χ α λ α ρ ᾶ ς*) μεταβλητῆς $x_{n+1} \geq 0$.

4) Ἡ ἀνίσωσις $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \geq b_j$ μετατρέπεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - x_{n+1} = b_j ,$$

διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἐκ τοῦ πρώτου μέλους αὐτῆς τῆς χαλαρᾶς μεταβλητῆς $x_{n+1} \geq 0$.

---

*) Προτιμᾶται τῶν ὅρων : ἀποκλίσεως, βοηθητικῆς, προσθετικῆς, ἀδρανείας, διότι διὰ τῆς εἰσαγωγῆς αὐτῆς χαλαροῦται ἡ ἀνίσωσις καὶ καθίσταται ἐξίσωσις.

Ἤδη προκύπτει ἡ :

2.2 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Κάθε γραμμικὸν πρόγραμμα δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \qquad (2)$$

Πράγματι τῇ βοηθείᾳ τῶν χαλαρῶν μεταβλητῶν, κάθε σύστημα γραμμικῶν ἀνισώσεων μετατρέπεται εἰς σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων.

Ἐξ ἄλλου διὰ τῆς :

$$\max f = -\min(-f)$$

κάθε πρόγραμμα μεγιστοποιήσεως μετατρέπεται εἰς πρόγραμμα ἐλαχιστοποιήσεως.

Ἡ ἀνωτέρω μορφὴ καλεῖται τ υ π ι κ ὴ μ ο ρ φ ὴ τῶν γραμμικῶν προγραμμάτων.

Ἄλλαι ἐκφράσεις αὐτῆς εἶναι αἱ :

α) Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j \ , \ j = 1, 2, \cdots, m \qquad (1)$$

$$x_i \geq 0 \ , \ i = 1, 2, \cdots, n \qquad (2)$$

β) Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min c \cdot x$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$A \cdot x = b \qquad (1)$$

$$x \geq 0 \qquad (2)$$

ἔνθα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $c = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$

γ) Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min\left\{c \cdot x \,/\, A \cdot x = b,\ 0 \leq x\right\}.$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω πρώτην ἔκφρασιν τῆς τυπικῆς μορφῆς ἀναφέρονται τά :

2.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ον Τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min f = 2x_1 + 3x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν χαλαρῶν μεταβλητῶν $x_3, x_4, x_5 \geq 0$ γίνεται :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min f = 2x_1 + 3x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

2ον. Τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα

Νὰ εὑρεθῆ :

$$\max f = x_1 - 2x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 \geq 4$$
$$2x_1 + x_2 \geq 4$$
$$-x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν χαλαρῶν μεταβλητῶν $x_3, x_4, x_5 \geq 0$ καὶ τῆς ἀντικαταστάσεως $f = -g$ γίνεται :

Νὰ εὑρεθῆ :

$$\min g = -x_1 + 2x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 - x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 - x_4 = 4$$
$$-x_1 + x_2 - x_5 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

3ον. Τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῆ :

$$\min f = x_1 + x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$2x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν χαλαρῶν μεταβλητῶν $x_3, x_4 \geq 0$ γίνεται :

Νὰ εὑρεθῆ :

$$\min f = x_1 + x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$2x_1 + x_2 - x_4 = 2$$
$$x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Διὰ τὰ γραμμικὰ προγράμματα ἰσχύουν οἱ ἑπόμενοι :

2.4 ΟΡΙΣΜΟΙ.

1) Λ ύ σ ι ς τοῦ προγράμματος καλεῖται κάθε λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1).
2) Δ υ ν α τ ὴ λ ύ σ ι ς τοῦ προγράμματος καλεῖται κάθε λύσις αὐτοῦ, ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ καὶ τὸν περιορισμὸν (2).
3) Ἀ ρ ί σ τ η λ ύ σ ι ς τοῦ προγράμματος καλεῖται ἡ δυνατὴ λύσις αὐτοῦ, ἡ ὁποία ἐλαχιστοποιεῖ τὴν συνάρτησιν f.

Εἶναι δέ :

$$x^\circ = \text{ἀρίστη λύσις} \Longleftrightarrow A \cdot x^\circ = b\,,\ 0 \leq x^\circ \ \text{καὶ}\ c \cdot x^\circ \leq c \cdot x \quad \forall x.$$

Ἔστω τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min f = x_2 - x_1$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Δι' αὐτὸ

$x_1 = -1,\ x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = 3,\ x_5 = 6$ εἶναι μία λύσις,

$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 2,\ x_5 = 5$ εἶναι μία δυνατὴ λύσις,

καὶ $x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 9,\ x_4 = x_5 = 0$ εἶναι ἡ ἀρίστη λύσις.

2.5 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Κάθε γραμμικόν πρόγραμμα δύναται νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν :

Νά εὑρεθῆ :

$$\min c \cdot x$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$A \cdot x \geq b \qquad (1)$$

$$x \geq 0 \qquad (2)$$

Πράγματι τῆ βοηθεία τῆς πρώτης καί δευτέρας προτάσεως, τῆς 2.1, αἱ μέν ἀνισώσεις ἀλλάσσουν στροφήν, αἱ δέ ἐξισώσεις καθίστανται ἀνισώσεις.

Οὕτω τό γραμμικόν πρόγραμμα :

Νά εὑρεθῆ :

$$\min f = 2x_1 + 3x_2$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad ,$$

δύναται νά λάβη τήν μορφήν :

Νά εὑρεθῆ :

$$\min f = 2x_1 + 3x_2$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 - x_2 \geq 2$$

$$-x_1 + x_2 \geq -2$$

$$-x_1 - 2x_2 \geq -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ἡ ἀνωτέρω μορφή τῶν γραμμικῶν προγραμμάτων καλεῖται κ α ν ο ν ι κ ή μ ο ρ φ ή.

Ἐκ τῶν προηγουμένων μορφῶν, ἡ μέν τυπική μορφή χρησιμοποιεῖται εἰς τούς ἀλγορίθμους, ἡ δέ κανονική εἰς τόν θεωρητικόν τομέα (ὕπαρξις λύσεων, δυϊσμός κλπ).

Ἐάν τό σύστημα τῶν (1) περιέχη ταυτοχρόνως ἐξισώσεις καί ἀνισώσεις, τότε ἡ μορφή καλεῖται μ ι κ τ ή.*)

2.6 ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ. Κατωτέρω ἡ τυπική μορφή:

Νά εὑρεθῆ:

$$\min c\cdot x$$

ὑπό τούς περιορισμούς:

$$Ax = b \qquad (1)$$

$$x \geq 0 \qquad (2)$$

Θά συνοδεύεται ἐκ τῶν ὑποθέσεων**):

$$m < n$$

$$r(A) = m$$

Ἐξ αὐτῶν ἡ πρώτη ὑπόθεσις δηλ. ὁ ἀ ρ ι θ μ ό ς τ ῶ ν ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ν μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς τ ο ῦ ἀ ρ ι θ μ ο ῦ τ ῶ ν μ ε τ α β λ η τ ῶ ν, ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξιν ἀπειρίας λύσεων διά τό σύστημα τῶν (1) καί ἐπιτρέπει οὕτω τήν ἀναζήτησιν τῆς ἀρίστης λύσεως ἐκ τοῦ ὑποσυνόλου τῶν δυνατῶν λύσεων αὐτοῦ.

Ἡ ὑπόθεσις αὐτή ἰσχύει γενικῶς εἰς τά ὑποδείγματα τοῦ Οἰκονομικοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, τά ὁποῖα περιέχουν ἀνισώσεις διαμορφουμένας εἰς ἐξισώσεις, δι' εἰσαγωγῆς τῶν χαλαρῶν μεταβλητῶν.

Ἡ δευτέρα ὑπόθεσις δηλ. ἡ τ ά ξ ι ς τ ῆ ς μ ή τ ρ α ς Α ἴ σ η π ρ ό ς m, ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξιν ἀντιστρόφου μιᾶς (τουλάχιστον) τετραγωνικῆς ὑπομήτρας τῆς Α, μέ m γραμμάς καί στήλας.

Ἔστω τό γραμμικόν πρόγραμμα:

---

*) Ὡς τό τρίτον παράδειγμα τῆς 2.3 καί τό ἀνωτέρω.

**) Ἡ περίπτωσις $r(A) = m = n$ δέν ἔχει ἔννοιαν διά τόν προγραμματισμόν, διότι τότε τό σύστημα τῶν (1) ἔχει μόνον μίαν λύσιν.

Νά εὑρεθῆ :
$$\min f = 3x_1+5x_2$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$-2x_1+x_2+x_3=2$$
$$x_1-3x_2+x_4=-4$$
$$x_1+2x_2+x_5=1$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0,$$

τοῦτο πληροῖ τάς ἀνωτέρω ὑποθέσεις, ἀλλά στερεῖται δυνατῶν λύσεων, διότι :

$$x_3+x_4+x_5=-1,$$

ὡς προκύπτει δι' ἀθροίσεως τῶν μελῶν τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ.

Διά τήν τυπικήν μορφήν μέ τάς ἀνωτέρω ὑποθέσεις ἰσχύουν οἱ κατωτέρω :

2.7 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ – ΟΡΙΣΜΟΙ

1) Ἡ j στήλη τῆς μήτρας A θά συμβολίζεται μέ A_j.

Οὕτω διά τό πρόγραμμα τῆς 2.4 ὅπου εἶναι :

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

θά εἶναι :

$$A_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_4=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) Τό σύνολον τῶν δεικτῶν τῶν μεταβλητῶν τοῦ προγράμματος θά συμβολίζεται μέ $J=\{1,2,\cdots,n\}$.

3) Κάθε σύνολον ἐκ m στηλῶν τῆς μήτρας A, τῶν ὁποίων ἡ ἀντίστοιχος τετραγωνική μήτρα ἔχει ἀντίστροφον, καλεῖται **β ά σ ι ς** τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος.

Τὸ σύνολον τῶν δεικτῶν τῶν στηλῶν μιᾶς βάσεως θὰ συμβολίζεται μὲ K καὶ ἡ ἀντίστοιχος μήτρα μὲ A_K.
Οὕτω διὰ τὸ πρόγραμμα τῆς 2.4 τὸ σύνολον (τῶν στηλῶν) $\{A_1, A_2, A_3\}$ συνιστᾷ μίαν βάσιν αὐτοῦ, διότι ἡ μήτρα :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ A_K = & \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} , \quad K = \{1, 2, 3\}$$

ἀντιστρέφεται*).

4) Αἱ m μεταβληταὶ x_j, $j \in K$ τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς μίαν βάσιν, καλοῦνται μ ε τ α β λ η τ α ὶ α ὐ τ ῆ ς.
Αἱ ὑπόλοιποι μεταβληταὶ x_j, $j \in \bar{K}$ (ἔνθα $\bar{K} = J - K$) καλοῦνται δ ε υ τ ε ρ ε ύ ο υ σ α ι μ ε τ α β λ η τ α ί.

Οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα μεταβληταὶ τῆς βάσεως εἶναι αἱ x_1, x_2, x_3, ἐνῷ δευτερεύουσαι εἶναι αἱ x_4, x_5.

5) Κάθε δυνατὴ λύσις τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθεῖσαν βάσιν αὐτοῦ καὶ ἔχει μηδενικὰς τὰς δευτερευούσας μεταβλητὰς αὐτῆς, καλεῖται δ υ ν α τ ὴ β α σ ι κ ὴ λ ύ σ ι ς, ἢ ἁπλῶς β α σ ι κ ὴ λ ύ σ ι ς, τοῦ προγράμματος.
Οὕτως εἰς τὴν ἀνωτέρω βάσιν ἀντιστοιχεῖ ἡ βασικὴ λύσις :

$$x_1 = 4 \ , \ x_2 = 1 \ , \ x_3 = 9 \ , \ x_4 = x_5 = 0 .$$

6) Μία βασικὴ λύσις, μὲ μίαν ἢ περισσοτέρας μεταβλητὰς βάσεως μηδενικάς, καλεῖται ἐ κ φ υ λ ι σ μ έ ν η.

---

*) Ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης της εἶναι $3 \neq 0$.

7) Ἡ ὑπομήτρα τῆς c, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἐκ τῶν στοιχείων c_j, $j \in K$ θὰ συμβολίζεται μὲ c_K.

Οὕτω διὰ τὸ πρόγραμμα τῆς 2.4, ἔνθα :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{array} \\ c = & \left[\begin{array}{ccccc} -1, & 1, & 0, & 0, & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

καὶ τὴν ἀνωτέρω βάσιν θὰ εἶναι :

$$c_K = [-1, 1, 0]$$

8) Ἡ ἀντίστροφος μήτρα τῆς A_K θὰ συμβολίζεται μὲ a_K

$$a_K = A_K^{-1}.$$

2.8 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἐὰν διὰ τὴν μήτραν A_K μιᾶς βάσεως ἰσχύη $A_K^{-1} \cdot b \geq 0$ τότε :

$$x_K = A_K^{-1} \cdot b$$

$$x_{\bar{K}} = 0$$

θὰ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος βασικὴ λύσις τοῦ προγράμματος.

Πράγματι, ἐπειδὴ αἱ δευτερεύουσαι μεταβληταὶ κάθε βασικῆς λύσεως εἶναι μηδέν, δηλ. $x_j = 0 \quad j \in \bar{K}$, διὰ τοῦτο ἕπεται, ὅτι τὸ σύστημα:

$$Ax = b$$

περιορίζεται εἰς τὸ :

$$A_K x_K = b,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου :

$$x_K = A_K^{-1} \cdot b.$$

Οὕτω διὰ τὸ πρόγραμμα τῆς 2.4 καὶ τὴν βάσιν τῆς 2.7 εἶναι :

$$K = \{1, 2, 3\}$$

$$\bar{K} = \{4, 5\}$$

$$A_K^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ὅτε :

$$x_\kappa = A_\kappa^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

δηλ. $x_1 = 4 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 9,$

ἐνῶ $x_4 = x_5 = 0.$

2.9 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἔστω τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min cx$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Ἐὰν τοῦτο :

1. Ἔχῃ μίαν (τουλάχιστον) δυνατὴν (πεπερασμένην)[*)] λύσιν, τότε θὰ ἔχῃ ἐπίσης καὶ μίαν (τουλάχιστον) βασικὴν λύσιν.
2. Ἔχῃ μίαν (τουλάχιστον) ἀρίστην (πεπερασμένην) λύσιν, τότε θὰ ἔχῃ ἐπίσης καὶ μίαν (τουλάχιστον) ἀρίστην βασικὴν λύσιν.

2.10 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. Μὲ βάσιν τὸ ἀνωτέρω θεμελιῶδες θεώρημα δύναται ν᾽ ἀναζητηθῇ ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος, ἐκ τοῦ συνόλου τῶν βασικῶν λύσεων αὐτοῦ, τὸ πλῆθος τῶν ὁποίων εἶναι πεπερασμένον, διότι δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν ἀριθμὸν C_n^m.

Τὴν δημιουργίαν μιᾶς πεπερασμένης ἀκολουθίας βασικῶν λύσεων

$$x^1, x^2, \cdots, x^o \quad \text{μὲ} \quad cx^1 > cx^2 > \cdots > cx^o,$$

ἡ ὁποία ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἀρίστην λύσιν ἐπιτυγχάνει ἡ μέθοδος τοῦ Dantzig:

---

*) Δηλαδὴ αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν της πεπερασμέναι.

2.11 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX *)

ΒΗΜΑ 1 : Εὕρεσις μιᾶς βασικῆς λύσεως x καὶ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτὴν διανύσματος : $u = c_K \cdot \alpha_K$.

ΒΗΜΑ 2 : Εὕρεσις τῶν διαφορῶν $\delta_j = c_j - uA_j$, $j \in J$.

'Εὰν $\delta_j \geq 0 \ \forall \ j \in J$, τότε ἡ βασικὴ λύσις x εἶναι καὶ ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ προγράμματος.

'Εὰν ὑπάρχη $\delta_s < 0$ τότε :

ΒΗΜΑ 3 : Εὕρεσις τοῦ διανύσματος $y \in R^n$ μέ :

$$y_K = -\alpha_K A_s \ , \ y_s = 1 \ \text{καὶ} \ y_j = 0 \ \forall \ j \in \overline{K + \{s\}}.$$

'Εὰν $y \geq 0$, τότε $\min cx = -\infty$.

'Εὰν ὑπάρχη $y_j < 0$, $j \in K$ τότε :

ΒΗΜΑ 4 : Εὕρεσις τῆς τιμῆς

$$\theta = \min_{j \in K} \left\{ -\frac{x_j}{y_j} \ / \ y_j < 0 \right\} = -\frac{x_r}{y_r}$$

καὶ ἐπάνοδος εἰς τὸ πρῶτον βῆμα μὲ νέαν βασικὴν λύσιν, τὴν $x + \theta y$ καὶ ἀντίστοιχον σύνολον δεικτῶν βάσεως, τὸ $K - \{r\} + \{s\}$.

2.12 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\max f = 4x_1 + 6x_2 + 20x_3 + 17x_4$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 100$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

---

*) Τὸ ὄνομα τοῦ ἀλγορίθμου ἀνήκει εἰς ἔννοιαν τῆς Τοπολογίας, ἡ ὁποία συνεδέθη μὲ γραμμικὰ προγράμματα κατὰ τὰς πρώτας ἐφαρμογὰς αὐτῶν.

Ὑπάρχουν δὲ διάφοροι παρουσιάσεις, παραλλαγαὶ καὶ ἐπεκτάσεις αὐτα[illegible]

Προκειμένου νά ἐφαρμοσθῆ ὁ ἀνωτέρω ἀλγόριθμος γίνεται, ἀφ' ἑνός μέν εἰσαγωγή χαλαρῶν μεταβλητῶν, ἀφ' ἑτέρου ἀντικατάστασις τῆς f διά τῆς $g = -f$.

Οὕτω προκύπτει τό γραμμικόν πρόγραμμα :

Νά εὑρεθῆ :

$$\min g = -4x_1 - 6x_2 - 20x_3 - 17x_4$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 100$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 40$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Διά τό ἀνωτέρω πρόγραμμα εἶναι :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{array} \\ c = & \left[\begin{array}{cccccc} -4, & -6, & -20, & -17, & 0, & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{array} \\ A = & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$r(A) = 2$$

$$b = \begin{bmatrix} 100 \\ 40 \end{bmatrix}$$

ὅτε :

ΒΗΜΑ 1 : Ἐάν ἐκλεγῆ $K = \{1, 6\}$ τότε :

$$\bar{K} = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_K = A_K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_K = [-4, 0]$$

$$x_K = a_K b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 40 \end{bmatrix}$$

καὶ $$x = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$$ ἡ βασικὴ λύσις,

ἐνῶ $$u = c_K a_K = [-4, 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-4, 0] \text{, ὁπότε :}$$

ΒΗΜΑ 2 : Εἶναι

$$\delta_1 = -4 - [-4, 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\delta_2 = -6 - [-4, 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -6 < 0$$

$$\delta_3 = -20 - [-4, 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -16 < 0$$

$$\delta_4 = -17 - [-4, 0] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -9 < 0$$

$$\delta_5 = 0 - [-4, 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4$$

$$\delta_6 = 0 - [-4, 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Λόγῳ τῶν ἀρνητικῶν τιμῶν ὁ ἀλγόριθμος συνεχίζεται.

Ἐκλέγεται *) $s = 3$ ὁπότε :

ΒΗΜΑ 3 : Εἶναι :

$$y_K = -a_K A_3 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ἤτοι : $y_1 = -1 < 0$, $y_6 = -2 < 0$

καὶ $y_3 = 1$, $y_2 = y_4 = y_5 = 0$ δοθέντος, ὅτι $\overline{K + \{s\}} = \{2, 4, 5\}$.

---

*) Ὅταν αἱ ἀρνητικαὶ τιμαὶ εἶναι περισσότεραι τῆς μιᾶς, τότε ἐκλέγεται ὁ δείκτης, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μικροτέραν ἀρνητικὴν τιμήν.

Λόγῳ τῶν ἀρνητικῶν τιμῶν ὁ ἀλγόριθμος συνεχίζεται μέ :

ΒΗΜΑ 4 : Εἶναι :

$$\theta = \min\left\{-\frac{100}{-1}, -\frac{40}{-2}\right\} = 20 \quad \text{μέ } r=6,$$

ὁπότε γίνεται ἐπάνοδος είς τό :

ΒΗΜΑ 1 : Μέ βασικήν λύσιν :

$$x+\theta y = \begin{bmatrix}100\\0\\0\\0\\0\\40\end{bmatrix} + 20\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}80\\0\\20\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

καί $\quad K = \{1,6\} - \{6\} + \{3\} = \{1,3\}$,

ὁπότε : $\quad \bar{K} = \{2, 4, 5, 6\}$

$$A_K = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$$

$$c_K = [-4, -20]$$

$$a_K = A_K^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$u = c_K a_K = [-4, -20]\begin{bmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{bmatrix} = [-4, -8]$$

ΒΗΜΑ 2 : Εἶναι : $\quad \delta_1 = -4 - [-4, -8]\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 0$

$$\delta_2 = -6 - [-4, -8]\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 2$$

$$\delta_3 = -20 - [-4, -8]\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 0$$

$$\delta_4 = -17 - [-4, -8] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 < 0$$

$$\delta_5 = -0 - [-4, -8] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4$$

$$\delta_6 = -0 - [-4, -8] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 8$$

Λόγῳ τῆς ἀρνητικῆς τιμῆς ὁ ἀλγόριθμος συνεχίζεται μὲ $s = 4$ εἰς τό :

ΒΗΜΑ 3 : Εἶναι :

$$y_\kappa = -a_\kappa \cdot A_4 = -\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ἤτοι

$$y_1 = -\frac{3}{2} < 0 \quad , \quad y_3 = -\frac{1}{2} < 0$$

καί $y_4 = 1$, $y_2 = y_5 = y_6 = 0$ δοθέντος, ὅτι $\overline{K + \{s\}} = \{2, 5, 6\}$.

Λόγῳ τῶν ἀρνητικῶν τιμῶν ὁ ἀλγόριθμος συνεχίζεται μέ :

ΒΗΜΑ 4 : Εἶναι :

$$\theta = \min \left\{ -\frac{80}{-\frac{3}{2}} , -\frac{20}{-\frac{1}{2}} \right\} = 40 \quad \text{μὲ } r = 3$$

ὁπότε γίνεται ἐπάνοδος εἰς τό :

ΒΗΜΑ 1 : Μὲ βασικὴν λύσιν :

$$x + \theta y = \begin{bmatrix} 80 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 40 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

καί $K = \{1, 3\} - \{3\} + \{4\} = \{1, 4\}$

ὁπότε :

$$\bar{K} = \{2, 3, 5, 6\}$$

$$A_K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_K = [-4, -17]$$

$$a_K = A_K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u = c_K a_K = [-4, -17] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-4, -9].$$

ΒΗΜΑ 2 : Εἶναι :

$$\delta_1 = -4 - [-4, -9] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\delta_2 = -6 - [-4, -9] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\delta_3 = -20 - [-4, -9] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$\delta_4 = -17 - [-4, -9] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\delta_5 = 0 - [-4, -9] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4$$

$$\delta_6 = 0 - [-4, -9] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 9$$

Ἐπειδὴ δὲ $\delta_j \geq 0 \quad \forall \ j \in J$ διὰ τοῦτο ἕπεται, ὅτι ἡ τελευταία βασικὴ λύσις εἶναι καὶ ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ προγράμματος, ἤτοι :

$$x^{\circ} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{μὲ} \ \min g = -4 \cdot 20 - 17 \cdot 40 = -760.$$

Κατόπιν τούτων ἡ ἀρίστη λύσις, τοῦ ἀρχικοῦ προγράμματος, θά εἶναι ἐπίσης ἡ x^0 μέ $\max f = -\min g = 760$.

2.13 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΕΙΣ. Εἰς τόν ἀνωτέρω ἀλγόριθμον δύνανται νά γίνουν αἱ ἑπόμεναι ἁπλοποιήσεις :

1) Ἐάν ἐκλεγῇ $A_K = I$ τότε *):

$$a_K = A_K^{-1} = I$$

$$u = c_K a_K = c_K \cdot I = c_K$$

$$\delta_j = c_j - c_K A_j \ , \ j \in J$$

$$y_K = -a_K A_j = -I \cdot A_j = -A_j$$

2) Διά κάθε $j \in K$ ἰσχύει $\delta_j = 0$

Πράγματι :

$$\delta_j = c_j - u A_j = c_j - c_K \cdot a_K \cdot A_j = c_j - c_K \cdot A_K^{-1} A_j =$$

$$= c_j - c_K \cdot e_j = c_j - c_j = 0.$$

Κατά συνέπειαν, οἱ ὑπολογισμοί τοῦ δευτέρου βήματος, πρέπει νά περιορίζωνται μόνον εἰς τά δ_j, $j \in \bar{K}$.

2.14 ΠΙΝΑΚΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ. Ὁ ἑπόμενος πίναξ περιέχει, μετά τήν τρίτην στήλην του, τά στοιχεῖα τοῦ προγράμματος.

		$\vec{c}$	-4	-6	$\downarrow s$ -20	-17	0	0	
u	Στῆλαι βασικῆς	$\downarrow b$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
-4	A_1	100	1	0	1	2	1	0	
0	A_6	40	0	1	2	1	0	1	$\leftarrow r$
	-400	δ_j	0	-6	-16	-9	4	0	

*) Ἐφαρμογή τούτων ἠδύνατο νά γίνῃ εἰς τό πρόγραμμα τῆς 2.12 ἀπό τήν πρώτην φάσιν τοῦ ἀλγορίθμου.

Εἰς τὰς τρεῖς πρώτας στήλας καὶ εἰς τὴν τελευταίαν γραμμὴν περιέχει ἐκφράσεις τοῦ ἀλγορίθμου simplex ὡς ἀκολούθως:

Ἐπὶ τῆς δευτέρας στήλης ἀναγράφονται αἱ στῆλαι A_j, $j \in K$, ἤτοι

A_1, A_6 δοθέντος, ὅτι ἐλήφθη $K = \{1,6\}$.

Ἐν συνεχείᾳ, ἐπειδὴ $A_K = I$ ἕπεται ὅτι $u = c_K = [-4, 0]$, ὅπερ καταχωρεῖται ἐπὶ τῆς πρώτης στήλης.

Ἐξ ἄλλου αἱ ἐπὶ τῆς τρίτης στήλης συντεταγμέναι τοῦ διανύσματος b δίδουν, ἀντιστοίχως, τὰς θετικὰς τιμὰς τῆς βασικῆς λύσεως, ἤτοι

$$x_1 = 100, \quad x_6 = 40.$$

Ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς συναρτήσεως

$$g = -4 \cdot 100 - 0 \cdot 40 = -400$$

τίθεται κάτωθεν τοῦ A_6.

Ὁ προσδιορισμὸς τῶν διαφορῶν δ_j γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ c (τῆς πρώτης γραμμῆς) ἀφαιρεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν στηλῶν u καὶ A_j (π.χ. $uA_4 = (-4) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -8$ καὶ $\delta_4 = -17 - (-8) = -9$), τὸ δὲ ἐξαγόμενον καταχωρεῖται εἰς τὴν τελευταίαν γραμμήν.

Λόγῳ τῶν ἀρνητικῶν τιμῶν τῶν δ_j ἡ εὑρεθεῖσα βασικὴ λύσις δὲν εἶναι ἡ ἀρίστη, ὁπότε διὰ $s = 3$ θὰ εἶναι:

$$y_K = -\alpha_K A_3 = -A_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ δοθέντος, ὅτι } \alpha_K = A_K = I.$$

Ἤδη

$$-y_K = A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

δηλ. τὸ διάνυσμα τῶν στοιχείων τῆς ἕκτης στήλης, ὁπότε ἐκ τῶν λόγων

$$\frac{100}{1}, \quad \frac{40}{2}$$

(τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τρίτης καὶ ἕκτης στήλης) μικροτέραν τιμὴν ἔχει ὁ δεύτερος καὶ οὕτως ὁρίζονται αἱ τιμαί:

$$\theta = 20 \text{ καὶ } r = 6.$$

Κατόπιν τούτων θὰ συνεχισθῇ ὁ πίναξ μὲ $K = \{1, 3\}$, ὁπότε ἐπὶ τοῦ νέου τμήματος τοῦ πίνακος καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας στήλης αὐτοῦ ἀναγράφονται αἱ στῆλαι A_1, A_3 (ἡ A_6 ἀντεκατεστάθη ὑπὸ τῆς A_3).

		$\vec{c}$	-4	-6	-20	-17	0	0	
u	Στῆλαι βασικῆς	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
-4	A_1	100	1	0	1	2	1	0	
0	A_6	40	0	1	2	1	0	1	← r
	-400	δ_j	0	-6	-16	-9	4	0	
-4	A_1	80	1	-0,5	0	1,5	1	-0,5	
-20	A_3	20	0	0,5	1	0,5	0	0,5	← r
	-720	δ_j	0	2	0	-1	4	8	

Ἐπὶ τῆς τρίτης στήλης ἀναγράφονται αἱ θετικαὶ τιμαὶ τῆς νέας βασικῆς λύσεως, ἤτοι:

$$x_1 + \theta y_1 = 100 + 20\,(-1) = 80$$
$$x_3 + \theta y_3 = 0 + 20 \cdot 1 = 20$$

Ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως:

$$x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 40$$

προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$0 \cdot x_1 + 0,5\,x_2 + x_3 + 0,5\,x_4 + 0\,x_5 + 0,5\,x_6 = 20,$$

τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ καταλαμβάνουν τὴν δευτέραν γραμμὴν τοῦ νέου τμήματος. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἐξάγεται ταχέως, διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν στοιχείων τῆς τετάρτης γραμμῆς τοῦ πρώτου τμήματος διὰ 2 ἤτοι:

40	0	1	2	1	0	1
20	0	0,5	1	0,5	0	0,5

Ἐκ τῆς (πρώτης) ἐξισώσεως:

$$x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 100$$

προκύπτει τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀνωτέρω :

$$x_1 + (20 - 0{,}5\,x_2 - 0{,}5\,x_4 - 0{,}5\,x_6) + 2x_4 + x_5 = 100$$

$$1 \cdot x_1 - 0{,}5\,x_2 + 0 \cdot x_3 + 1{,}5\,x_4 + x_5 - 0{,}5\,x_6 = 80\,,$$

τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ καταλαμβάνουν τὴν πρώτην γραμμὴν τοῦ νέου τμήματος. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἐξάγεται ταχέως δι' ἀφαιρέσεως ἐκ τῶν στοιχείων τῆς τρίτης γραμμῆς, τοῦ πρώτου τμήματος τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς τετάρτης γραμμῆς αὐτοῦ, πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{1}{2} = 0{,}5$ ἤτοι :

100	1	0	1	2	1	0
40·0,5	0·0,5	1·0,5	2·0,5	1·0,5	0·0,5	1·0,5
80	1	−0,5	0	1,5	1	−0,5

Διὰ τῶν ἀνωτέρω ἐπετεύχθη $A_\kappa = I$ καὶ διὰ τὴν νέαν βασικὴν λύσιν

$$x_1 = 80\,,\ x_3 = 20\,,\ x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0,$$

τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστοιχος τιμή,

$$g = -4 \cdot 80 - 20 \cdot 20 = -720\,,$$

τίθεται κάτωθεν τῆς A_3, ἐνῷ

$$u = c_\kappa = [-4, -20\,],$$

ὅπερ καταχωρεῖται ἐπὶ τῆς πρώτης στήλης. Ὁ προσδιορισμὸς τῶν διαφορῶν δ_j γίνεται, ὡς ἀνωτέρω,

$$(\text{π.χ. } \delta_2 = -6 - [(-4)(-0{,}5) + (-20) \cdot 0{,}5\,] = 2\,),$$

αἱ δὲ τιμαὶ των ἀναγράφονται εἰς τὴν τελευταίαν γραμμήν.

Λόγῳ τῆς ἀρνητικῆς τιμῆς τοῦ δ_4 ἡ εὑρεθεῖσα βασικὴ λύσις δὲν εἶναι ἡ ἀρίστη, ὁπότε διὰ $s = 4$ θὰ εἶναι :

$$y_\kappa = -a_\kappa A_4 = -A_3 = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}$$

καὶ

$$-y_\kappa = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix},$$

ἤτοι τὸ διάνυσμα τῶν στοιχείων τῆς ἑβδόμης στήλης, ὁπότε ἐκ τῶν λόγων $\frac{80}{1{,}5}, \frac{20}{0{,}5}$ (τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τρίτης καὶ ἑβδόμης στήλης) μικροτέραν τιμὴν ἔχει ὁ δεύτερος καὶ οὕτως ὁρίζονται αἱ τιμαὶ $\theta = 40$ καὶ $r = 4$.

Κατόπιν τούτων θὰ συνεχισθῆ ὁ πίναξ μὲ $K = \{1, 4\}$, ὁπότε ἐπὶ τοῦ νέου τμήματος τοῦ πίνακος καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας στήλης αὐτοῦ ἀναγράφονται

		$\vec{c}$	−4	−6	−20	−17	0	0
u	Στῆλαι βασικῆς	$\downarrow b$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
−4	A_1	100	1	0	1	2	1	0
0	A_6	40	0	1	2	1	0	1
	−400	δ_j	0	−6	−16	−9	4	0
−4	A_1	80	1	−0,5	0	1,5	1	−0,5
−20	A_3	20	0	0,5	1	0,5	0	0,5
	−720	δ_j	0	2	0	−1	4	8
−4	A_1	20	1	−2	−3	0	1	−2
−17	A_4	40	0	1	2	1	0	1
	−760	δ_j	0	3	2	0	4	9

αἱ στῆλαι A_1, A_4 (ἡ A_3 ἀντεκατεστάθη ὑπὸ τῆς A_4).

Ἤδη διὰ διαιρέσεως τῶν στοιχείων τῆς δευτέρας γραμμῆς (τοῦ δευτέρου τμήματος) διὰ 0,5 προκύπτουν τὰ στοιχεῖα τῆς δευτέρας γραμμῆς τοῦ νέου τμήματος, ἤτοι :

20	0	0,5	1	0,5	0	0,5
40	0	1	2	1	0	1

Δι' ἀφαιρέσεως, ἐκ τῶν στοιχείων τῆς πρώτης γραμμῆς (τοῦ δευτέρου τμήματος), τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς δευτέρας γραμμῆς (τοῦ τμήματος τούτου), πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{1,5}{0,5} = 3$, προκύπτουν

80	1	−0,5	0	1,5	1	−0,5
20·3	0·3	0,5·3	1·3	0,5·3	0·3	0,5·3
20	1	−2	−3	0	1	−2

ἤτοι τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς τοῦ νέου τμήματος.

Διά τῶν ἀνωτέρω ἐπετεύχθη $A_K = I$ καί διά τήν νέαν βασικήν λύσιν

$$x_1 = 20,\ x_4 = 40,\ x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0\ ,$$

τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστοιχος τιμή

$$g = -4\cdot 20 - 17\cdot 40 = -760$$

τίθεται κάτωθεν τῆς A_4 , ἐνῶ

$$u = c_K = [-4, -17]\ ,$$

ὅπερ καταχωρεῖται ἐπί τῆς πρώτης στήλης. Ὁ προσδιορισμός τῶν διαφορῶν δ_j γίνεται ὡς ἀνωτέρω

$$(\text{π.χ. } \delta_3 = -20 - [(-4)\cdot(-3) + (-17)\cdot 2] = 2)\ ,$$

αἱ δέ τιμαί των ἀναγράφονται εἰς τήν τελευταίαν γραμμήν.

Λόγῳ τῆς μή ἀρνητικότητος τῶν δ_j ἡ τελευταία βασική λύσις εἶναι ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ προγράμματος, ἤτοι

$$x_1^\circ = 20\ ,\ x_4^\circ = 40\ ,\ x_2^\circ = x_3^\circ = x_5^\circ = x_6^\circ = 0$$

μέ min $g = -760$.

Ἡ ἀνωτέρω ἐφαρμογή τῆς μεθόδου Simplex ἀνταποκρίνεται εἰς τό κατωτέρω πρόβλημα τοῦ "φαρμακοποιοῦ".

2.15 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Προκειμένου νά παρασκευασθοῦν τά εἴδη διατροφῆς I καί II ἀπαιτοῦνται ἀνά μερίδα αἱ θρεπτικαί οὐσίαι Α, Β, Γ, Δ κατά ποσότητας 1, 0, 1, 2 καί 0, 1, 2, 1 ἀντιστοίχως.

Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί πωλήσεως τῶν Α, Β, Γ, Δ ὅταν :

α) Αἱ διατιθέμεναι ποσότητες αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως 4, 6, 20, 17 καί

β) Ἡ κατά μερίδα ἀξία τῶν I καί II δέν ὑπερβαίνῃ τάς τιμάς 100 καί 40 ἀντιστοίχως.

Ἐάν x_1, x_2, x_3, x_4 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ κατά μονάδα τιμαί πωλήσεως τῶν Α, Β, Γ, Δ αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τό μέγιστον κέρδος, τότε προκύπτει τό γραμμικόν πρόγραμμα :

Νά εὑρεθῇ :

$$\max g = 4x_1 + 6x_2 + 20x_3 + 17x_4$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 100$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Πράγματι εἰς τὰς τιμὰς x_1, x_2, x_3, x_4 τῶν Α, Β, Γ καὶ Δ ἀντιστοιχοῦν ἔσοδα

$$4x_1 + 6x_2 + 20x_3 + 17x_4$$

χρηματικῶν μονάδων, ἡ μεγιστοποίησις τῶν ὁποίων δίδει καὶ τὸ μέγιστον κέρδος.

Διὰ τὰς τιμὰς x_1, x_2, x_3, x_4 τῶν Α, Β, Γ καὶ Δ μία μερὶς τοῦ εἴδους Ι πωλεῖται πρὸς $1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2x_4$ χρηματικὰς μονάδας, αἱ ὁποῖαι δὲν δύνανται νὰ ὑπερβοῦν τὰς ἑκατὸν τοιαύτας. Οὕτω προκύπτει ἡ πρώτη ἀνίσωσις τῶν περιορισμῶν κ.ο.κ.

Τὴν ἐκτεθεῖσαν ἀνάπτυξιν τῆς μεθόδου simplex συμπληρώνουν αἱ κατωτέρω βασικαὶ παρατηρήσεις :

2.16 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1η : Ὅταν χαλαραὶ μεταβληταὶ προστίθενται εἰς τὰς ἀνισώσεις τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος καὶ εἶναι $b > 0$ (ὡς εἰς τὸ πρόγραμμα τῆς 2.12), τότε πρώτη βασικὴ (μὴ ἐκφυλισμένη) λύσις τοῦ προγράμματος εἶναι ἡ :

$$x_K = b, \quad x_{\bar{K}} = 0.$$

Τῷ ὄντι, τότε δύναται νὰ ληφθῇ, ὡς πρώτη βάσις, τὸ σύνολον τῶν στηλῶν, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς χαλαρὰς μεταβλητάς, ὁπότε :

$$A_K = I$$

καὶ

$$x_K = A^{-1} \cdot b = I \cdot b = b$$

ἐνῷ

$$x_{\bar{K}} = 0.$$

2.17 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2α : Τὸ κατωτέρω παράδειγμα ἀναφέρεται εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἰς τὸ τρίτον βῆμα τοῦ ἀλγορίθμου διαπιστοῦται ὅτι δὲν ὑπάρχει πεπερασμένη ἀρίστη λύσις.

Ἔστω τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min f = -x_1 + x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_5 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

καὶ ἡ βασικὴ λύσις αὐτοῦ :

$$x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 9,\ x_4 = x_5 = 0$$

μέ :

$$K = \{1, 2, 3\}$$

$$\bar{K} = \{4, 5\}$$

$$A_K = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ὁπότε :

$$\alpha_K = A_K^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_K = [-1,\ 1,\ 0]$$

$$u = c_K \alpha_K = [-1, 1, 0] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left[0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]$$

$$\delta_4 = 0 - \left[0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}$$

$$\delta_5 = 0 - \left[\, 0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \,\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} < 0$$

$$s = 5$$

$$y_\kappa = -\alpha_\kappa A_5 = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{2}{3}, \; y_2 = \frac{1}{3}, \; y_3 = 1, \; y_4 = 0, \; y_5 = 1.$$

Ἐπειδὴ $y \geq 0$, διὰ τοῦτο ἕπεται, ὅτι $\min f = -\infty$.

Ἡ περίπτωσις αὐτὴ δὲν ἔχει ἔννοιαν διὰ τὸν Οἰκονομικὸν Προγραμματισμόν. Ὅταν δὲ παρουσιασθῇ πρέπει νὰ γίνῃ ἐπανεξέτασις τῶν Οἰκονομοτεχνικῶν δεδομένων καὶ ἀναθεώρησις τῶν περιορισμῶν αὐτῶν.

2.18 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 3η : Εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας δὲν ἐξασφαλίζονται αἱ συνθῆκαι*) τῆς 2.16 καὶ ζητεῖται νὰ ἐφαρμοσθῇ, ἡ ἀνωτέρω πινακοποίησις τῆς μεθόδου, τότε, ἀφοῦ καταστοῦν ὅλα τὰ δεύτερα μέλη θετικά, προστίθενται εἰς τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων νέαι μεταβληταὶ αἱ τ ε χ ν η τ α ὶ τοιαῦται, ὥστε νὰ προκύψῃ ἡ μοναδιαία μήτρα.

Ἔστω τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min f = x_1 + 2x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$6x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

---

*) π.χ. 1) Ὅταν αἱ χαλαραὶ μεταβληταὶ ἀφαιροῦνται

2) ὅταν ὑπάρχουν ἀρνητικαὶ τιμαὶ εἰς τὰ δεύτερα μέλη καὶ

3) ὅταν δὲν ὑπάρχουν χαλαραὶ μεταβληταὶ καὶ μοναδιαία ὑπομήτρα τῆς A.

Διά τῆς εἰσαγωγῆς τῶν τεχνητῶν μεταβλητῶν x_1^a, $x_2^a \geq 0$, τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων τοῦ προγράμματος μετασχηματίζεται εἰς τό :

$$6x_1 - 2x_2 + x_3 + x_1^a = 4$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_2^a = 3$$
μέ: $$x_1, x_2, x_3, x_1^a, x_2^a \geq 0$$

Προκειμένου δέ αἱ τεχνηταί μεταβληταί ν' ἀποκλεισθοῦν ἐκ τῆς θέσεως τῶν μεταβλητῶν βάσεως, τῆς ἀρίστης λύσεως, ἡ συνάρτησις ἀντικαθίσταται ὑπό τῆς

$$f' = x + 2x_2 + M(x_1^a + x_2^a)$$

μέ M πολύ μεγάλον θετικόν ἀριθμόν.

2.19 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 4η : Τά κατωτέρω παραδείγματα ἀναφέρονται εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ ἐκφυλισμοῦ τῶν βασικῶν λύσεων

1) Ἔστω τό γραμμικόν πρόγραμμα :

Νά εὑρεθῆ :

$$\min f = -x_1 + x_2$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

καί ὅτι πρώτη βασική λύσις αὐτοῦ εἶναι ἡ :

$$x_3 = 4, \ x_4 = 2, \ x_5 = 5, \ x_1 = x_2 = 0$$

μέ: $$K = \{3, 4, 5\}$$
$$\bar{K} = \{1, 2\}$$
$$A_K = a_K = I$$
$$c_K = [0, 0, 0]$$
$$u = c_K \cdot a_K = [0, 0, 0]$$
$$\delta_1 = -1 < 0$$
$$\delta_2 = 1$$
$$s = 1$$

$$y_K = -\alpha_K A_1 = -\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ y_3 = -2,\ y_4 = y_5 = -1$$

$$\theta = \min \left\{ -\frac{4}{-2},\ -\frac{2}{-1},\ -\frac{5}{-1} \right\} = 2$$

ὁπότε :

$$r = 3 \ \text{ἤ} \ 4$$

Ἡ νέα βασικὴ λύσις αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ἤτοι ἐκφυλισμένη μὲ $K = \{1, 4, 5\}$ ἢ $\{1, 3, 5\}$

$$x_1 = 2,\quad x_4 = 0,\quad x_5 = 3 \quad \text{καὶ} \quad x_3 = x_4 = 0$$
$$x_1 = 2,\quad x_3 = 0,\quad x_5 = 3 \quad \text{καὶ} \quad x_2 = x_4 = 0$$

Διὰ $K = \{1, 4, 5\}$

εἶναι : $\overline{K} = \{2, 3\}$

$$A_K = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_K = A_K^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_K = [-1,\ 0,\ 0]$$

$$u = c_K a_K = [-1, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-\tfrac{1}{2}, 0, 0]$$

$$\delta_2 = 1 - [-\tfrac{1}{2}, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} > 0$$

$$\delta_3 = 0 - [-\tfrac{1}{2}, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} > 0$$

Ὥστε ἡ ἀνωτέρω ἐκφυλισμένη βασικὴ λύσις εἶναι καὶ ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ προγράμματος μὲ $\min f = -2$.

Ἡ αὐτὴ τιμὴ προκύπτει καὶ διὰ $K = \{1, 3, 5\}$.

2) Ἔστω τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min f = x_1 + 2x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 - x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 - x_4 = 4$$
$$-x_1 + x_2 - x_5 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

καὶ ἡ ἐκφυλισμένη βασικὴ λύσις αὐτοῦ :

$$x_2 = 4,\ x_3 = 0,\ x_5 = 3,\ x_1 = x_4 = 0$$

μὲ
$$K = \{2, 3, 5\}$$
$$\bar{K} = \{1, 4\}$$

$$A_K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c_K = [\ 2,\ \ 0,\ \ 0\ ]$$

$$\alpha_K = A_K^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$u = c_K \alpha_K = [\ 2, 0, 0\ ] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [\ 0, 2, 0\ ]$$

$$\delta_1 = 1 - [\ 0, 2, 0\ ] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -3 < 0$$

$$\delta_4 = 0 - [\ 0, 2, 0\ ] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2$$

$s = 1$

$$y_K = -\alpha_K A_1 = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 1,\quad y_2 = -2,\ y_3 = -3,\ \ y_4 = 0,\ \ y_5 = -3$$

$$\theta = \min \left\{ -\frac{4}{-2},\ -\frac{0}{-3},\ -\frac{3}{-3} \right\} = 0$$

$r = 3$

Εἰς τὰς τιμὰς $s=1,\ r=3,\ \theta=0$ ἀντιστοιχεῖ ἡ νέα βασικὴ λύσις:

$$x_1=0,\quad x_2=4,\quad x_5=3,\quad x_3=x_4=0,$$

ἡ ὁποία:

1ον: Εἶναι ἐπίσης ἐκφυλισμένη

2ον: Ἔχει τὸ αὐτὸ διάνυσμα μὲ τὴν προηγουμένην

καὶ 3ον: Δίδει τὴν αὐτὴν τιμὴν συναρτήσεως μὲ τὴν προηγουμένην.

Τὸ φαινόμενον τοῦτο, δηλαδὴ ἡ ἐπανεμφάνισις τῆς (ἐκφυλισμένης) βασικῆς λύσεως καὶ μετὰ τὴν ἀλλαγὴν βάσεως καλεῖται κύκλος.

Διὰ τὴν νέαν ἐκφυλισμένην βασικὴν λύσιν εἶναι:

$$K=\{1,2,5\}$$

$$\bar{K}=\{3,4\}$$

$$A_K=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&0\\-1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$C_K=\begin{bmatrix}1,&2,&0\end{bmatrix}$$

$$\alpha_K=A_K^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\2&-1&0\\-3&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$u=C_K\alpha_K=\begin{bmatrix}1,2,0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&0\\2&-1&0\\-3&-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3,-1,0\end{bmatrix}$$

$$\delta_3=0-\begin{bmatrix}3,-1,0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}=3$$

$$\delta_4 = 0 - \begin{bmatrix} 3, -1, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 < 0$$

$$s = 4$$

$$y_\kappa = -\alpha_\kappa A_4 = - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 1,\ y_2 = -1,\ y_3 = 0,\ y_4 = 1,\ y_5 = -2$$

$$\theta = \min \left\{ -\frac{4}{-1}, -\frac{3}{-2} \right\} = \frac{3}{2}$$

$$r = 5$$

Ἤδη ἡ νέα βασικὴ λύσις

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

δὲν εἶναι ἐκφυλισμένη καὶ ὁ ἀλγόριθμος δίδει αὐτήν, ὡς τὴν ἀρίστην.

Εἰδικαὶ μέθοδοι ἐπιτρέπουν τὴν ἀντιμετώπισιν τῆς περιπτώσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ κύκλος συνεχίζεται μὲ νέαν ἐκφυλισμένην λύσιν.

2.20 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16. Νὰ εὑρεθῇ :

$$\max f = 5x_1 + 3x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15$$
$$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

17. Νά εὑρεθῆ :

$$\min f = -2x_1$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

18. Νά εὑρεθῆ :

$$\min f = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$$
$$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$
$$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

19. Νά εὑρεθῆ :

$$\max f = x_1 + 1{,}5x_2 + 5x_3 + 2x_4$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 4$$
$$2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

20. Νά εὑρεθῆ :

$$\min f = -2x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_4$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 20$$
$$2x_1 + 16x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$$
$$3x_1 - x_2 - 5x_3 + 10x_4 \leq -10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

21. Νά εὑρεθῆ :

$$\max f = 0{,}75x_1 - 20x_2 + 0{,}5x_3 - 6x_4$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$0{,}25\,x_1 - 8\,x_2 - x_3 + 9\,x_4 \leq 0$$
$$0{,}5\,x_1 - 12\,x_2 - 0{,}5\,x_3 + 3\,x_4 \leq 0$$
$$x_3 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

22. Προκειμένου νὰ παρασκευασθοῦν τὰ μείγματα Α,Β,Γ χρησιμοποιοῦνται 2000, 2500, 1200 μονάδες τῶν πρώτων ὑλῶν Ι, ΙΙ, ΙΙΙ συμφώνως πρὸς τὰς ἑξῆς ἀναλογίας :

Τὸ μεῖγμα Α περιέχει 20 % τὸ πολὺ ἐκ τῆς ΙΙΙ καὶ 60 % τὸ ὀλιγώτερον ἐκ τῆς Ι.

Τὸ μεῖγμα Β περιέχει 60 % τὸ πολὺ ἐκ τῆς ΙΙΙ καὶ 15 % τὸ ὀλιγώτερον ἐκ τῆς Ι καὶ τὸ μεῖγμα Γ περιέχει 50 % τὸ πολὺ ἐκ τῆς ΙΙΙ. Ἐὰν ἡ τιμὴ πωλήσεως τῆς μονάδος τῶν Α,Β,Γ εἶναι ἀντιστοίχως 34, 28,5, 22,5 χρηματικαὶ μονάδες καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τῶν Ι, ΙΙ, ΙΙΙ εἶναι ἀντιστοίχως 35, 25, 20 χρηματικαὶ μονάδες, τότε ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν αἱ μονάδες τῶν Ι, ΙΙ, ΙΙΙ κατὰ μεῖγμα εἰς τρόπον ὥστε νὰ προκύψῃ τὸ μέγιστον κέρδος.

23. Μία μηχανὴ παράγει τὰ προϊόντα Ι, ΙΙ, ΙΙΙ μὲ ἀντίστοιχον κατὰ μονάδα κέρδος 4, 12, 3 χρηματικὰς μονάδας.

Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐκ 45 ὡρῶν ἑβδομαδιαία παραγωγὴ τῆς μηχανῆς εἰς τρόπον ὥστε νὰ προκύψῃ τὸ μέγιστον κέρδος ὅταν:

α) Ἡ ὡριαία ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν Ι, ΙΙ, ΙΙΙ εἶναι ἀντιστοίχως 50, 25, 75 μονάδες.

β) Αἱ δυνατότητες πωλήσεως τῶν Ι, ΙΙ, ΙΙΙ εἶναι ἀντιστοίχως 1000, 500, 1500 μονάδες.

24. Ἡ παραγωγὴ τῶν προϊόντων Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, ΙV διὰ τῶν μηχανῶν Α,Β,Γ ἀπαιτεῖ τὰς ἑξῆς ὥρας ἐργασίας, ἀνὰ μονάδα προϊόντος :

	Α	Β	Γ
Ι	10	6	4,5
ΙΙ	5	6	18
ΙΙΙ	2	2	1,5
ΙV	1	2	6

Ζητεῖται νά προσδιορισθῆ ἡ παραγωγή τῶν I, II, III, IV, εἰς τρόπον ὥστε νά προκύψη τό μέγιστον κέρδος ὅταν :

α) Τό κέρδος κατά μονάδα τῶν I, II, III, IV εἶναι ἀντιστοίχως 9, 7, 2, 4 χρηματικαί μονάδες.

β) Αἱ μηχαναί Α, Β, Γ δύνανται νά λειτουργοῦν ἀντιστοίχως 50, 36, 81 ὥρας.

25. Ἡ παραγωγή τῶν προϊόντων I, II, III, IV διά τῶν μηχανῶν Α, Β, Γ ἀπαιτεῖ τάς ἑξῆς ὥρας ἐργασίας, ἀνά μονάδα προϊόντος :

	Α	Β	Γ
I	3	4	2
II	3	1	2
III	2	1	3
IV	5	2	1

Ζητεῖται νά προσδιορισθῆ ἡ παραγωγή τῶν I, II, III, IV εἰς τρόπον ὥστε ν' ἀντιστοιχῆ εἰς αὐτήν ὁ ἐλάχιστος χρόνος ὅταν :

α) Ὁ ἀριθμός τῶν ζητουμένων μονάδων τῶν I, II, III, IV εἶναι ἀντιστοίχως 10, 40, 50, 20.

β) Αἱ μηχαναί Α, Β, Γ δύνανται νά λειτουργοῦν ἀντιστοίχως 80, 30, 130 ὥρας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΕΙΔΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

3.1 ΔΥΪΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ. Τὰ γραμμικὰ προγράμματα :

Νὰ εὑρεθῇ :	Νὰ εὑρεθῇ :
$\min c \cdot x$	$\max u \cdot b$
ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :	ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :
$A \cdot x \geq b$	$u \cdot A \leq c$
$x \geq 0$	$u \geq 0$

καλοῦνται δ υ ϊ κ ὰ γραμμικὰ προγράμματα.

Οὕτω τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min f = 100x_1 + 40x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 \geq 4$$
$$x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$2x_1 + x_2 \geq 17$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ἢ: Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min [\,100, 40\,] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 20 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

ἔχει δυϊκὸν τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\max \left[u_1, u_2, u_3, u_4 \right] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 20 \\ 17 \end{bmatrix}$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\left[u_1, u_2, u_3, u_4 \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \leq \left[\ 100, 40\ \right]$$

$$\left[u_1, u_2, u_3, u_4 \right] \geq 0$$

ἢ : Νὰ εὑρεθῇ :

$$\max \varphi = 4u_1 + 6u_2 + 20u_3 + 17u_4$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$u_1 + u_3 + 2u_4 \leq 100$$

$$u_2 + 2u_3 + u_4 \leq 40$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0$$

Τὰ ἀνωτέρω δυϊκὰ γραμ. προγράμματα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ γνωστὰ προβλ. τῆς διαίτης*)

---

*) σελ. 32

καὶ τοῦ φαρμακοποιοῦ *) καὶ ἔχουν κοινὸν πίνακα τόν :

	x_1	x_2	max
u_1	1	0	4
u_2	0	1	6
u_3	1	2	20
u_4	2	1	17
min	100	40	

Διὰ τὰ δυϊκὰ γραμμικὰ προγράμματα ἰσχύει τὸ θεμελιῶδες θεώρημα:

3.2 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΔΥΪΣΜΟΥ. Ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ ἀρίστη λύσις $x^\circ(u^\circ)$ ἑνὸς γραμμικοῦ προγράμματος θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ ἀρίστη λύσις $u^\circ(x^\circ)$ τοῦ δυϊκοῦ του καὶ μάλιστα θὰ ἰσχύῃ :

$$c \cdot x^\circ = u^\circ \cdot b .$$

Οὕτως εἰς τὸ πρόβλημα τῆς διαίτης, ἡ ἀρίστη λύσις εἶναι $x_1^\circ = 4$ $x_2^\circ = 9$ μὲ $\min f = 760$ καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ φαρμακοποιοῦ, ἡ ἀρίστη λύσις εἶναι**) $u_1^\circ = 20$ $u_2^\circ = 0$ $u_3^\circ = 0$ $u_4^\circ = 40$ μὲ $\max \varphi = 760$.

Ἐξ ἄλλου διὰ τὴν τυπικὴν μορφὴν τῶν γραμμικῶν προγραμμάτων ἰσχύει ἡ:

3.3 ΠΡΟΤΑΣΙΣ : Τὸ δυϊκὸν πρόγραμμα τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min cx$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

εἶναι τὸ πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\max ub$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν :

$$uA \leq c$$

---

*) σελ. 68 Ἀντὶ τῶν f, x_1, x_2, x_3, x_4 νὰ τεθοῦν $\varphi, u_1, u_2, u_3, u_4$.

**) καὶ $u_5^\circ = u_6^\circ = 0$ διὰ τὰς χαλαρὰς μεταβλητάς.

3.4 ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ : Κάθε γραμμικὸν πρόγραμμα τοῦ ὁποίου αἱ μεταβληταὶ πρέπει νὰ λαμβάνουν μόνον ἀκεραίας τιμὰς καλεῖται Διοφαντικόν.

Εἰδικὴν περίπτωσιν, τῶν γραμμικῶν Διοφαντικῶν προγραμμάτων, ἀποτελοῦν γραμμικὰ προγράμματα τῶν 1.17, 1.19 τῶν ὁποίων αἱ μεταβληταὶ λαμβάνουν τὰς τιμὰς 0 ἢ 1.

Ἐξ ἄλλου μικτὰ καλοῦνται τὰ γραμμικὰ προγράμματα, τῶν ὁποίων ὡρισμέναι μόνον μεταβληταὶ λαμβάνουν ἀκεραίας τιμάς.

Μίαν ἀπάντησιν εἰς τὸν γενικὸν γραμμικὸν Διοφαντικὸν προγραμματισμὸν δίδουν οἱ ἀλγόριθμοι τοῦ Gomory.

Παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῶν Διοφαντικῶν προγραμμάτων, εἰς τὸν προγραμματισμόν, εἶναι τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὴν κατανομὴν προσωπικοῦ.

3.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑ : Ἡ λειτουργία μιᾶς ὑπηρεσίας ἀεροδρομίου ἀπαιτεῖ ἀνὰ τετράωρον τὴν κατωτέρω σύνθεσιν προσωπικοῦ :

	1	2	3	4	5	6
ΩΡΑΙ	00 − 04	04 − 08	08 − 12	12 − 16	16 − 20	20 − 24
ΑΤΟΜΑ	3	8	10	8	14	5

Δοθέντος, ὅτι ἡ ἐργασία, ἑκάστου ἀτόμου τῆς ὑπηρεσίας εἶναι συνεχὲς ὀκτάωρον, ζητεῖται ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς προσωπικοῦ, ὁ δυνάμενος νὰ καλύψῃ τὰς ἀνωτέρω ἀνάγκας.

Ἐὰν x_i, $i = 1, 2, \cdots, 6$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργαζομένων, οἱ ὁποῖοι ἀναλαμβάνουν ἐργασίαν τὴν $(i-1)4$ ὥραν, τότε προκύπτει τὸ γραμμ. πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ : $\min f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 \geq 8$$
$$x_2 + x_3 \geq 10$$
$$x_3 + x_4 \geq 8$$
$$x_4 + x_5 \geq 14$$
$$x_5 + x_6 \geq 5$$
$$x_6 + x_1 \geq 3$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοί.

Πράγματι εἰς τὰ ἕξ τετράωρα, ἀλλαγῆς προσωπικοῦ, ἀντιστοιχεῖ συνολικὸς ἀριθμὸς ἐργαζομένων $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον.

Οἱ ἐργαζόμενοι x_1+x_2, κατὰ δύο πρῶτα τετράωρα δὲν πρέπει νὰ ὑπολείπωνται τῶν ὀκτώ. Οὕτω προκύπτει ἡ πρώτη ἀνίσωσις τῶν περιορισμῶν κ.ο.κ.

Ὁ ἀλγόριθμος simplex δίδει*) ἀρίστην λύσιν :

$$x_1=0\,,\ x_2=10\,,\ x_3=0\,,\ x_4=12\,,\ x_5=2\,,\ x_6=3$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἡ κατανομὴ προσωπικοῦ :

1	2	3	4	5	6
3					3
	10	10			
			12	12	
				2	2

3.6 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ : Ἔστω, ὅτι τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῆ :

$$\min c \cdot x$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$A \cdot x = b$$
$$x \geq 0\,,$$

ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα οἰκονομικὸν πρόβλημα. Τότε εἶναι δυνατὸν τὰ δεδομένα c, A, b νὰ ὑπόκεινται εἰς τυχαῖα σφάλματα, δηλαδὴ ν᾿ ἀκολουθοῦν κατανομὰς πιθανοτήτων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πρόγραμμα θὰ καλῆται γ ρ α μ μ ι κ ὸ ν σ τ ο χ α σ τ ι κ ὸ ν π ρ ό γ ρ α μ μ α.

Ἡ μελέτη, τῶν προγραμμάτων τούτων, γίνεται τῇ βοηθείᾳ Στατιστι-

*) Νὰ ἐπαληθευθῆ.

κῶν μεθόδων.

Εἰς τὰς εἰδικὰς μορφὰς τῶν γραμμικῶν προγραμμάτων ἀνήκουν καὶ τὰ προγράμματα τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τό :

3.7 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο θεωρεῖται χρονολογικῶς, ὡς τὸ πρῶτον πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ ἔχει διαφόρους μορφὰς μὲ κεντρικὴν προσπάθειαν, τὴν διανομὴν προϊόντων εἰς τρόπου, ὥστε νὰ προκύπτῃ :

α) ἐλάχιστον κόστος μεταφορᾶς

β) ἐλάχιστος χρόνος διακινήσεως τῶν μεταφορικῶν μέσων

γ) μεγίστη κάλυψις τῆς ζητήσεως αὐτῶν κλπ.

Ἱστορικῶς ἡ πρώτη λύσις, μιᾶς περιπτώσεως τοῦ προβλήματος, ἐδόθη ὑπὸ τοῦ Monge, κατὰ τὸ 1776, εἰς τὴν μελέτην του " Déblai et remblai ".

Ἐξ ἄλλου κατὰ τὸ 1859 εἶχεν τεθῆ εἰς τὸν Hamilton τὸ πρόβλημα τοῦ traveling salesman.

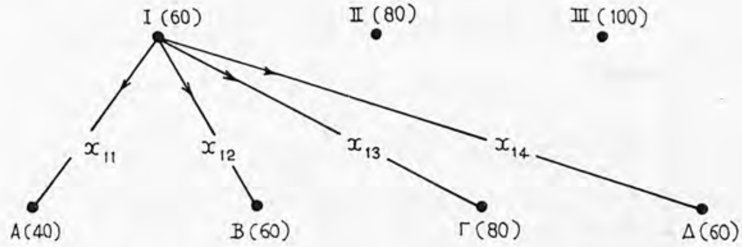
Τυπικὴν μορφήν, τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ κόστους μεταφορᾶς, δίδει καὶ τὸ κάτωθι :

3.8 ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ : Παραγωγὴ 60, 80, 100 μονάδων ἑνὸς προϊόντος, προορίζεται νὰ μεταφερθῇ ἐκ τῶν ἀποθηκῶν Ι, ΙΙ, ΙΙΙ ἀντιστοίχως, εἰς τὰ κέντρα καταναλώσεως Α, Β, Γ, Δ μὲ ἀντιστοίχους ζητήσεις 40, 60, 80, 60 μονάδων. Ζητεῖται νὰ γίνῃ ἡ μεταφορά, ὅταν τὸ κόστος μεταφορᾶς παρέχεται *) ὑπὸ τοῦ πίνακος :

	Α	Β	Γ	Δ
Ι	1	2	3	4
ΙΙ	4	3	2	0
ΙΙΙ	0	2	2	1

*) Π.χ. τὸ κόστος μεταφορᾶς μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος ἐκ τῆς ΙΙ εἰς τὸ Γ εἶναι 2 χρηματικαὶ μονάδες.

Παραστατικῶς θά εἶναι :



ἔνθα x_{ij}, $i=1,2,3$, $j=1,2,3,4$ αἱ μεταφερόμεναι ποσότητες, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τό ἐλάχιστον κόστος μεταφορᾶς· τότε προκύπτει τό γραμμικόν πρόγραμμα :

Νά εὑρεθῆ :

$$\min f = 1x_{11}+2x_{12}+3x_{13}+4x_{14}+4x_{21}+3x_{22}+2x_{23}+0x_{24}+0x_{31}+2x_{32}+2x_{33}+1x_{34}$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &= 60 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &= 80 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &= 100 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31} &= 40 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} &= 60 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &= 80 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} &= 60 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,3 \quad & j=1,2,3,4 \end{aligned}$$

Πράγματι εἰς τήν ζητουμένην μεταφοράν ἀντιστοιχεῖ κόστος $1\cdot x_{11}+2x_{12}+\cdots+1\cdot x_{34}$ χρηματικῶν μονάδων, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τό ἐλάχιστον.

Αἱ τρεῖς πρῶται ἐξισώσεις τῶν περιορισμῶν ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς "ἐκροάς„ ἐκ τῶν I, II, III, ἐνῶ αἱ τρεῖς τελευταῖαι εἰς τάς "εἰσροάς„ τῶν A, B, Γ καί Δ.

3.9 ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ : Γενικῶς, εἰς τό πρόβλημα τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ κόστους μεταφορᾶς, ἀντιστοιχεῖ τό γραμμικόν πρόγραμμα :

Νά εὑρεθῇ :

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ , \quad i = 1, 2, \cdots, m \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ , \quad j = 1, 2, \cdots, n \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \ , \quad i = 1, 2, \cdots, m \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

ἔνθα :

m = ὁ ἀριθμός τῶν τόπων προελεύσεως $A_1, A_2, \cdots, A_m$.

a_i = ὁ ὑπό τοῦ τόπου A_i ἀριθμός τῶν διαθεσίμων μονάδων τοῦ προϊόντος.

n = ὁ ἀριθμός τῶν τόπων προορισμοῦ $B_1, B_2, \cdots, B_n$.

b_j = ὁ ὑπό τοῦ τόπου B_j ἀριθμός τῶν ζητουμένων μονάδων τοῦ προϊόντος.

c_{ij} = τό κόστος μεταφορᾶς μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος ἐκ τοῦ τόπου A_i εἰς τόν τόπον B_j.

x_{ij} = ὁ ζητούμενος ἀριθμός μονάδων, αἱ ὁποῖαι θά μεταφερθοῦν ἐκ τοῦ τόπου A_i εἰς τόν τόπον B_j.

Ὁ πίναξ τούτου εἶναι ὁ :

	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1j} x_{1j}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2j} x_{2j}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	$\cdots$	c_{ij} x_{ij}	$\cdots$	c_{in} x_{in}	a_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mj} x_{mj}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n	

καί διά νά ἔχῃ ἔννοιαν πρέπει :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

δηλ. ἡ ζήτησις εἶναι μικροτέρα τῆς προσφορᾶς, τότε ὑποτίθεται, ὅτι ὑπάρχει ἐπὶ πλέον εἷς τόπος προορισμοῦ B_{n+1}, μὲ ζήτησιν

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

μονάδων προϊόντος καὶ ἀντιστοίχους τιμὰς κόστους μεταφορᾶς μηδέν.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ ἀναζήτησις τῆς ἀρίστης λύσεως τοῦ προγράμματος διὰ τῆς μεθόδου Simplex εἶναι κοπιώδης λόγῳ τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ τῶν μεταβλητῶν.

Ἡ ἰδιομορφία ὅμως τῶν περιορισμῶν τοῦ προγράμματος, ἐπιτρέπει τὴν δημιουργίαν εἰδικοῦ ἀλγορίθμου διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀρίστης λύσεως.

Βάσις τοῦ ἀλγορίθμου τούτου εἶναι ἡ κατωτέρω θεμελιώδης :

3.10 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ : Ἔστω μία λύσις τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος τῆς 3.8 *) :

	A	B	Γ	Δ	
I	40	20			60
II		40	40		80
III			40	60	100
	40	60	80	60	240

μὲ ἀντίστοιχον κόστος :

$1\cdot 40 + 2\cdot 20 + 3\cdot 40 + 2\cdot 40 + 2\cdot 40 + 1\cdot 60 = 420$ χρηματικὰς μονάδας.

*) Αὕτη εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς : Εἰς τὸ φατνίον (1,1) ἢ "βορειοδυτικὴν γωνίαν" τοῦ πίνακος ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $x_{11} = \min(40, 60) = 40$. Ἀκολούθως δὲ $x_{12} = \min(60, 60-40) = 20$, $x_{22} = \min(60-20, 80) = 40$, $x_{23} = \min(80, 80-40) = 40$, $x_{33} = \min(80-40, 100) = 40$, καὶ $x_{34} = 60$.

Ἤδη ἐὰν μετακινηθῇ κυκλικῶς μία μονὰς τοῦ προϊόντος, τότε δύναται νὰ προκύψῃ διὰ τὴν ἀνωτέρω τιμὴν κόστους :

1ον **Αὔξησις** : Ἔστω ὅτι γίνεται ἡ κυκλικὴ μετακίνησις *)

$$\left\{ (1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (2,2) \right\}$$

μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος,

	Α	Β	Γ	Δ	
I	40	$\overset{-1}{20}$	$+1$		60
II		$\overset{+1}{40}$	$\overset{-1}{40}$		80
III			40	60	100
	40	60	80	60	240

τότε ἐκ τοῦ πίνακος τῶν τιμῶν τοῦ κόστους προκύπτει αὔξησις αὐτοῦ κατὰ $-2+3-2+3=2$ χρηματικὰς μονάδας καὶ οὕτω κρίνεται ἀσύμφορος ἡ ἀνωτέρω κυκλικὴ μετακίνησις.

2ον **Μείωσις** : Ἔστω ὅτι γίνεται ἡ κυκλικὴ μετακίνησις

$$\left\{ (2,3),\ (2,4),\ (3,4),\ (3,3) \right\}$$

μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος :

	Α	Β	Γ	Δ	
I	40	20			60
II		40	$\overset{-1}{40}$	$+1$	80
III			$\underset{+1}{40}$	$\underset{-1}{60}$	100
	40	60	80	60	240

τότε ἐκ τοῦ πίνακος τῶν τιμῶν κόστους προκύπτει μείωσις αὐτοῦ κατὰ $-2+0-1+2=-1$ χρηματικὰς μονάδας καὶ οὕτω κρίνεται συμφέρουσα ἡ

---

*) Μία μονὰς ἐκ τῶν 20 τοῦ φατνίου (1, 2) μεταφέρεται εἰς τὸ κενὸν φατνίον (1, 3), ἐνῶ ταυτοχρόνως (διὰ νὰ ἐπαληθεύεται τὸ σύστημα τῶν περιορισμῶν) μία μονὰς ἐκ τῶν 40 τοῦ φατνίου (2, 3) μεταφέρεται εἰς τὰς 40 τοῦ φατνίου (2, 2) καὶ κλείει ὁ κύκλος.

ἀνωτέρω κυκλικὴ μετακίνησις.

3ον **Σταθερότης**: Ἔστω ὅτι γίνεται ἡ κυκλικὴ μετακίνησις

$$\{(1,1),\ (1,3),\ (3,3),\ (3,1)\}$$

μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος.

	Α	Β	Γ	Δ	
Ι	−1 40	20	+1		60
ΙΙ		40	40		80
ΙΙΙ	+1		−1 40	60	100
	40	60	80	60	240

Ἡ μετακίνησις αὕτη οὐδεμίαν μεταβολὴν ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω τιμῆς τοῦ κόστους ἐπιφέρει, διότι ἐκ τοῦ πίνακος τῶν τιμῶν κόστους προκύπτει $-1+3-2+0=0$.

Κατόπιν τούτων καὶ μὲ βάσιν τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ἀναζητεῖται διὰ τὸ κόστος ἡ μεγίστη μείωσις αὐτοῦ. Ἔστω δηλαδὴ ὅτι γίνεται ἡ κυκλικὴ μετακίνησις $\{(2,3),(2,4),(3,4),(3,3)\}$ θ μονάδων τοῦ προϊόντος.

	Α	Β	Γ	Δ	
Ι	40	20			60
ΙΙ		40	−θ 40	+θ	80
ΙΙΙ			+θ 40	−θ 60	100
	40	60	80	60	240

Ἡ νέα τιμὴ κόστους ἰσοῦται πρός: $420-2\theta+0\cdot\theta-1\cdot\theta+2\cdot\theta=420-\theta$

Ἐπειδὴ δὲ πρέπει $40-\theta,\ \theta,\ 60-\theta,\ 40+\theta \geq 0$, ἔπεται ὅτι ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τοῦ θ θὰ εἶναι $\theta=40$ μον. τοῦ προϊόντος, ὁπότε προκύπτει ἡ νέα λύσις τοῦ προγράμματος:

	Α	Β	Γ	Δ	
Ι	40	20			60
ΙΙ		40		40	80
ΙΙΙ			80	20	100
	40	60	80	60	240

μέ τιμήν κόστους 420 − θ = 420 − 40 = 380 χρηματικάς μονάδας. Εἶναι προφανές ὅτι μία ἀκολουθία κυκλικῶν μετακινήσεων τῆς ἀνωτέρω μορφῆς θά δίδη τήν ἀρίστην λύσιν τοῦ προγράμματος. Τοῦτο ἐξασφαλίζει ὁ ἑξῆς:

3.11 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ:

Βῆμα 1ον: Εὕρεσις μιᾶς βασικῆς λύσεως τοῦ προγράμματος καί τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς κόστους.

	Α	Β	Γ	Δ	
I	40	20			60
II		40	40		80
III			40	60	100
	40	60	80	60	240

μέ κόστος 420 χρηματικάς μονάδας.

Βῆμα 2ον: Συμπλήρωσις τοῦ ὑποπίνακος τῶν τιμῶν κόστους τῆς εὑρεθείσης λύσεως.

1	2		
	3	2	
		2	1

μέ π λ α σ μ α τ ι κ ά ς τιμάς κόστους εἰς τρόπον, ὥστε διά κάθε κυκλικήν μετακίνησιν τό κόστος (τῆς λύσεως) νά παραμείνη ἀμετάβλητον.*)

	0	1	0	−1
1	**1**	**2**	1	0
2	2	**3**	**2**	1
2	2	3	**2**	**1**

*) Πρᾶγμα τό ὁποῖον ἐνεφανίσθη εἰς τρίτην περίπτωσιν τῆς 3.10. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διά χρήσεως βοηθητικῶν τιμῶν ἐπί τῶν περιθωρίων. Αὗται (δηλ. αἱ 1, 2, 2 καί 0, 1, 0, −1) ἐκλέγονται κατά τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ τιμή ἑκάστου φατνίου τοῦ πίνακος, νά εἶναι τό ἄθροισμα τῶν βοηθητικῶν τιμῶν τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς καί στήλης αὐτοῦ.

Βῆμα 3ον: Εὕρεσις τῆς διαφορᾶς τῆς μήτρας τῶν τιμῶν κόστους ἀπὸ τὴν μήτραν τῶν τιμῶν τοῦ (εἰς τὸ προηγούμενον βῆμα) κατασκευασθέντος πίνακος.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2^* & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἐάν ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς διαφορᾶς εἶναι μὴ θετικοὶ ἀριθμοί, τότε ἡ εὑρεθεῖσα λύσις εἶναι καὶ ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ προγράμματος.

Ἐάν μεταξὺ τῶν στοιχείων τῆς διαφορᾶς ὑπάρχουν θετικοὶ ἀριθμοί τότε γίνεται κυκλικὴ μετακίνησις μὲ βάσιν τὸ φατνίον τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγαλυτέραν θετικὴν τιμὴν καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐπάνοδος εἰς δεύτερον βῆμα μὲ τὴν νέαν λύσιν.

	Α	Β	Γ	Δ	
I	40 −θ	20 +θ			60
II		40 −θ	+θ 40		80
III	+θ		−θ 40	60	100
	40	60	80	60	240

Ἡ νέα τιμὴ κόστους ἰσοῦται πρός:

$$420 + 0\cdot\theta - 1\cdot\theta + 2\cdot\theta - 3\cdot\theta + 2\cdot\theta - 2\cdot\theta = 420 - 2\cdot\theta$$

Ἐπειδὴ δὲ πρέπει $40-\theta,\ \theta,\ 20+\theta,\ 40+\theta \geq 0$, διὰ τοῦτο ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τοῦ θ θὰ εἶναι $\theta = 40$, ὁπότε προκύπτει ἡ νέα λύσις

	Α	Β	Γ	Δ	
I		60			60
II			80		80
III	40			60	100
	40	60	80	60	240

μὲ τιμὴν κόστους $420 - 2\cdot\theta = 420 - 2\cdot 40 = 340$ χρηματικὰς μονάδας.

Βῆμα 2ον: Ὑποπίναξ τῶν τιμῶν κόστους τῆς λύσεως :

.	2		
		2	
0			1

Συμπλήρωσις τοῦ ὑποπίνακος :

	0	1	2	1
1	1	**2**	3	2
0	0	1	**2**	1
0	**0**	1	2	**1**

Βῆμα 3ον : Εὕρεσις τῆς διαφορᾶς :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & 1^{*} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Κυκλικὴ μετάθεσις

	Α	Β	Γ	Δ	
Ι		60			60
ΙΙ			80 $-\theta$	$+\theta$	80
ΙΙΙ	40		$+\theta$	$-\theta$ 60	100
	40	60	80	60	240

Ἡ νέα τιμὴ κόστους ἰσοῦται πρὸς $340 - 2\theta + 0\cdot\theta - 1\cdot\theta + 2\cdot\theta = 340 - \theta$.

Ἐπειδὴ δὲ πρέπει $\theta,\ 60-\theta,\ 80-\theta \geq 0$ διὰ τοῦτο ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τοῦ θ θὰ εἶναι $\theta = 60$, ὁπότε προκύπτει ἡ λύσις

	Α	Β	Γ	Δ	
Ι		60			60
ΙΙ			20	60	80
ΙΙΙ	40		60		100
	40	60	80	60	240

μὲ τιμὴν κόστους $340-\theta = 340-60 = 280$ χρηματικὰς μονάδας.

Βῆμα 2ον: Ὑποπίναξ τῶν τιμῶν κόστους τῆς λύσεως :

	2		
		2	0
0		2	

Συμπλήρωσις τοῦ ὑποπίνακος :

	0	1	2	0
1	1	**2**	3	**1**
0	0	1	**2**	**0**
0	**0**	1	**2**	0

Βῆμα 3ον: Εὕρεσις τῆς διαφορᾶς :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ἐπειδὴ τὰ στοιχεῖα τῆς διαφορᾶς αὐτῆς εἶναι μὴ θετικοὶ ἀριθμοί, διὰ τοῦτο ὁ ἀλγόριθμος τερματίζεται μὲ ἀρίστην λύσιν τὴν ἀνωτέρω καὶ ἐλάχιστον κόστος 280 χρηματικὰς μονάδας.

3.12 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

26. Νὰ εὑρεθῇ τῇ βοηθείᾳ τοῦ πίνακος τῆς μεθόδου simplex, τοῦ προβλήματος τοῦ φαρμακοποιοῦ*), ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ προβλήματος τῆς διαίτης**).

27. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ δομὴ τῶν ἀρίστων λύσεων δύο δυϊκῶν γραμμικῶν προγραμμάτων.

---

*) Σελ. 68

**) Σελ. 32

28. Νά εὑρεθῆ τό δυϊκόν πρόγραμμα τοῦ γραμμικοῦ προγράμματος τοῦ προβλήματος τῶν μεταφορῶν*)

29. Νά μετασχηματισθῆ τό Διοφαντικόν γραμμικόν πρόγραμμα :

Νά εὑρεθῆ :

$$\max f = 4x_1+5x_2+x_3$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$3x_1+2x_2 \leq 10$$

$$x_1+4x_2 \leq 11$$

$$3x_1+3x_2+x_3 \leq 13$$

x_1, x_2, x_3 ἀκέραιοι μή ἀρνητικοί

εἰς γραμμικόν πρόγραμμα μέ μεταβλητάς, τῶν ὁποίων αἱ τιμαί νά εἶναι 0 ἤ 1.

30. Ὁ χρόνος μεταβάσεως λεωφορείων τοῦ αὐτοῦ τύπου, ἐκ τῶν σταθμῶν I, II, III, εἰς τάς ἀφετηρίας τῶν διαδρομῶν Α, Β, Γ, Δ δίδεται ὑπό τοῦ πίνακος :

	Α	Β	Γ	Δ
I	13	11	15	20
II	17	14	12	13
III	18	18	15	12

καί μετρᾶται εἰς πρῶτα λεπτά**)

Δοθέντος, ὅτι διά τάς κυκλοφοριακάς ἀνάγκας, ἀπαιτοῦνται εἰς τάς ἀφετηρίας τῶν διαδρομῶν Α, Β, Γ, Δ ἀντιστοίχως 3, 3, 4, 5 λεωφορεῖα καί οἱ σταθμοί I, II, III διαθέτουν ἀντιστοίχως 2, 6, 7 λεωφορεῖα, ζητεῖται νά γίνη κατανομή μέ τόν ἐλάχιστον δυνατόν χρόνον μεταβάσεως.

---

*) Σελ. 87

**) Π.χ. ὁ χρόνος μεταβάσεως ἑνός λεωφορείου ἐκ τοῦ σταθμοῦ II εἰς τήν ἀφετηρίαν Γ εἶναι (κατά μέσον ὅρον) 12 πρῶτα λεπτά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

4.1 **ΟΡΙΣΜΟΣ** : Κάθε μαθηματικόν πρόγραμμα, τού όποίου αί συναρτήσεις f ή/καί φ_j είναι μή γραμμικαί καλεϊται μ η γ ρ α μ μ ι κ ό ν.

Παραδείγματα :

1) Ζητεϊται νά εύρεθή :

$$\min f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3 + 5x_1 + 6x_2 + x_3$$

ύπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 12$$
$$6x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2) Ζητεϊται νά εύρεθή :

$$\max f = 2x_1 + 5x_2$$

ύπό τούς περιορισμούς :

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 \geq 10$$
$$x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

3) Ζητεϊται νά εύρεθή :

$$\max f = 4x_1^2 + 5x_1x_2 + 6x_2^2 + 7x_1 - 8x_2$$

ύπό τούς περιορισμούς :

$$x_1^2 + 3x_2^3 - 5x_1x_2 + 8x_1 + 7x_2 \leq 100$$
$$7x_1^3 + 2x_1x_2^2 + 5x_1 \leq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ἐκ τῶν μὴ γραμμικῶν προγραμμάτων τὰ περισσότερον ἐρευνηθέντα εἶναι τά : τετραγωνικὰ προγράμματα. Οὕτω καλοῦνται τὰ μὴ γραμμικὰ προγράμματα τῆς μορφῆς :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min f = c \cdot x + x' \cdot Q \cdot x$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$A \cdot x = b$$
$$x \geq 0$$

ἔνθα Q μία συμμετρικὴ μήτρα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω, τετραγωνικὸν εἶναι τὸ τοῦ πρώτου παραδείγματος. Πράγματι τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω μορφήν :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min f = [5, 6, 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [x_1, x_2, x_3] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

4.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ : Ἡ δημιουργία ὑποδειγμάτων, τοῦ Γραμμικοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ, στηρίζεται (ὡς ἐδείχθη) ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῶν ἀρχῶν αὐτοῦ, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν τῶν μεταβλητῶν τῆς οἰκονομικῆς συναρτήσεως καὶ τῶν γραμμικῶν περιορισμῶν εἶναι σταθεραί.

Ὁ μὴ Γραμμικὸς Οἰκονομικὸς Προγραμματισμὸς ἀναφέρεται εἰς τὰ ἐκ μὴ γραμμικῶν προγραμμάτων ὑποδείγματα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν τῶν μεταβλητῶν εἶναι συναρτήσεις αὐτῶν.

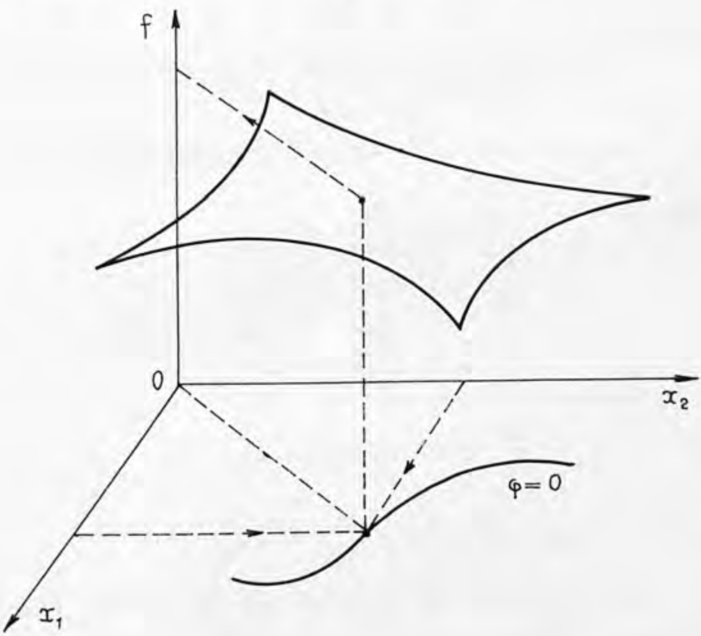
Οὕτως εἰς προβλήματα προγραμματισμοῦ, ἔνθα ὑφίστανται συναρτήσεις ζητήσεως, προσφορᾶς, κόστους, ἐσόδων, παραγωγῆς κλπ, τὰ προκύπτοντα ὑποδείγματα εἶναι συνήθως μὴ γραμμικά.

Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ γραμμικὰ προγράμματα, διὰ τὰ μὴ γραμμικὰ προγράμματα δὲν ἔχει εὑρεθῆ γενικὸς ἀλγόριθμος.

Ἐκτὸς τῶν θεμελιωδῶν συνθηκῶν τῶν Kuhn καὶ Tucker ὑπάρχουν ἀλγόριθμοι, διὰ μὴ γραμμικὰ προγράμματα, εἰδικῶν μορφῶν.

Κατωτέρω γίνεται μελέτη τοῦ μὴ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ τῇ βοηθείᾳ τῆς κλασσικῆς μεθόδου τῆς Ἀναλύσεως :

4.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΩΝ ΤΟΥ LAGRANGE : Κατ' αὐτήν, ὅταν ζητοῦνται νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκρόταται τιμαὶ μιᾶς συναρτήσεως $f(x_1, x_2)$, ὑπὸ τὸν περιορισμὸν $\varphi(x_1, x_2) = 0$,



τότε διὰ τὴν συνάρτησιν :

$$F = f + \lambda\varphi, \ \lambda \in R \quad (\lambda \text{ πολλαπλασιαστὴς τοῦ Lagrange})$$

καὶ τὸ σύστημα*):

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \qquad (3)$$

ἰσχύει:

Ἐὰν (x_1^*, x_2^*, x_3^*) εἶναι μία λύσις τοῦ συστήματος τῶν (1), (2) καὶ (3), τότε τὸ σημεῖον $M(x_1^*, x_2^*)$ ἐ ν δ έ χ ε τ α ι ν' ἀντιστοιχῇ εἰς ζητουμένην ἀκροτάτην τιμὴν τῆς f.

Παράδειγμα: Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκρόταται τιμαὶ τῆς συναρτήσεως

$$f = 10 + x_1 + 3x_2 - \frac{x_1^2}{2} - x_2^2$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν:

$$\varphi = 2x_1 + 3x_2 - 13 = 0.$$

Εἶναι $F = 10 + x_1 + 3x_2 - \frac{x_1^2}{2} - x_2^2 + \lambda \cdot (2x_1 + 3x_2 - 13)$

ὁπότε τὸ σύστημα:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 - x_1 + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 3 - 2x_2 + 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2x_1 + 3x_2 - 13 = 0$$

ἔχει λύσιν τὴν $\quad x_1^* = \frac{43}{17}, \; x_2^* = \frac{45}{17}, \; \lambda^* = \frac{13}{17}$.

Ἡ λύσις αὕτη ἀντιστοιχεῖ εἰς μέγιστον τῆς συναρτήσεως f. Πράγματι ἐκ τοῦ περιορισμοῦ ἕπεται:

$$x_2 = \frac{13 - 2x_1}{3}$$

*) Ὑποτίθεται ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαὶ παράγωγοι καὶ εἶναι συνεχεῖς.

ὁπότε ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται :

$$f = 10 + x_1 + 13 - 2x_1 - \frac{x_1^2}{2} - \left(\frac{13 - 2x_1}{3}\right)^2 .$$

Διὰ τὴν τελευταίαν εἶναι :

$$\frac{df}{dx_1} = 1 - 2 - x_1 + \frac{52}{9} - \frac{8}{9} x_1 = 0 \quad \text{ὅταν } x_1 = \frac{43}{17}$$

ἐνῶ :

$$\frac{d^2 f}{dx_1^2} = -1 - \frac{8}{9} = -\frac{17}{9} < 0$$

Διὰ τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν τῆς μεθόδου τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος :

4.4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ :

Διὰ τὰς ἀκροτάτας τιμὰς τῆς f ἰσχύει :

$$df = 0 \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς $\varphi = 0$ προκύπτει καί :

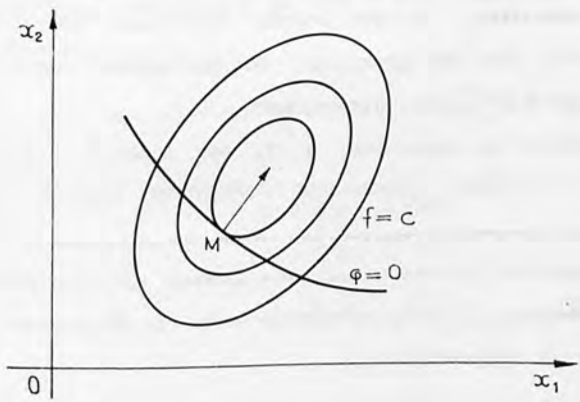
$$d\varphi = 0 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) προκύπτουν :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

ἤ $$\frac{dx_2}{dx_1} = -\partial f / \partial x_1 : \partial f / \partial x_2 = -\partial \varphi / \partial x_1 : \partial \varphi / \partial x_2 ,$$



ὅτε αἱ ζητούμεναι ἀκρόταται τιμαὶ θ' ἀντιστοιχοῦν εἰς σημεῖα $M(x_1^*, x_2^*)$, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ καμπύλη μὲ ἐξίσωσιν :

$$\varphi(x_1, x_2) = 0$$

ἔχει κοινὴν ἐφαπτομένην μὲ καμπύλην τῆς οἰκογενείας τῶν καμπύλων μὲ ἐξίσωσιν :

$$f(x_1, x_2) = c.$$

4.5 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ : Ὅταν ζητοῦνται νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκρόταται τιμαὶ μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς $\varphi_j(x) = 0$, $j = 1, 2, \cdots, m$ τότε διὰ τὴν συνάρτησιν :

$$F = f + \sum \lambda_j \varphi_j \,, \quad \lambda_j \in R \quad (\lambda_j \text{ πολλαπλασιασταὶ τοῦ Lagrange})$$

καὶ τὸ σύστημα *):

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m \qquad (2)$$

ἰσχύει :

Ἐὰν $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_m^*)$ εἶναι μία λύσις τοῦ συστήματος τῶν (1) καὶ (2), τότε τὸ σημεῖον $M(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ ἐνδέχεται ν' ἀντιστοιχῇ εἰς ζητουμένην ἀκροτάτην τιμὴν τῆς f.

Μίαν ἐφαρμογὴν τῆς ἀνωτέρω μεθόδου**) εἰς τὸν Μὴ Γραμμικὸν Οἰκονομικὸν Προγραμματισμόν, παρέχει τὸ κατωτέρω πρόβλημα :

4.6 ΠΡΟΒΛΗΜΑ : Ἡ ἀνὰ μονάδα παραγωγὴ τῶν προϊόντων I, II μιᾶς βιομηχανίας διὰ τῶν μηχανικῶν συγκροτημάτων αὐτῆς A καὶ B ἀπαιτεῖ 1,2 καὶ 4,3 ὥρας ἀντιστοίχως.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ποσότητες x_1, x_2 τῶν I καὶ II, διὰ τὰς ὁποίας τὸ κέρδος τῆς μηνιαίας παραγωγῆς καθίσταται μέγιστον, ὅταν :

---

*) Ὑποτίθεται ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαὶ παράγωγοι καὶ εἶναι συνεχεῖς.

**) Αἱ δυσκέρειαι, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν κατὰ τὸν ἔλεγχον τῶν λύσεων δὲν συνιστοῦν αὐτὴν ὡς ἀποτελεσματικήν.

α) Μηνιαίως αἱ ὧραι ἐργασίας τῶν A καὶ B εἶναι ἀντιστοίχως 500 καὶ 600.

β) Αἱ συναρτήσεις ζητήσεως τῶν I καὶ II δίδουν ἀντιστοίχως :

$$p_1 = 100 - \frac{x_1}{2}$$

$$p_2 = 200 - \frac{x_2}{2} \; .$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει τό μή γραμμικόν πρόγραμμα :

Νά εὑρεθῆ :

$$\max f = \left(100 - \frac{x_1}{2}\right) \cdot x_1 + \left(200 - \frac{x_2}{2}\right) \cdot x_2$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 + 4x_2 \leq 500$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 600$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Πράγματι, εἰς τάς ποσότητας x_1, x_2 τῶν προϊόντων I καί II, ἀντιστοιχοῦν ὁλικά ἔσοδα

$$\left(100 - \frac{x_1}{2}\right) x_1 + \left(200 - \frac{x_2}{2}\right) x_2 ,$$

ἡ μεγιστοποίησις τῶν ὁποίων δίδει καί τό μέγιστον μηνιαῖον κέρδος παραγωγῆς.

Διά τάς ποσότητας x_1, x_2 τῶν προϊόντων I καί II, τό συγκρότημα A ἀσχολεῖται μηνιαίως $1 \cdot x_1 + 4x_2$ ὥρας, αἱ ὁποῖαι δέν δύνανται νά ὑπερβοῦν τάς πεντακοσίας.

Οὕτω προκύπτει ἡ πρώτη ἀνίσωσις τῶν περιορισμῶν κ.ο.κ.

Τό ἀνωτέρω πρόγραμμα δύναται νά ἀντικατασταθῆ ὑπό τοῦ ἑξῆς:

Νά εὑρεθῆ :

$$\min g = x_1\left(\frac{x_1}{2} - 100\right) + x_2\left(\frac{x_2}{2} - 200\right)$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$x_1 + 4x_2 \leq 500$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 600$$
$$x_1, x_2 \geq 0 ,$$

τὸ ὁποῖον μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν χαλαρῶν μεταβλητῶν *) γράφεται :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\min g = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - 100x_1 - 200x_2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\varphi_1 = x_1 + 4x_2 + u_1^2 - 500 = 0$$

$$\varphi_2 = 2x_1 + 3x_2 + u_2^2 - 600 = 0$$

$$\varphi_3 = x_1 - u_3^2 = 0$$

$$\varphi_4 = x_2 - u_4^2 = 0$$

Ἤδη ἐκ τῆς

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4$$

προκύπτει τὸ σύστημα :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_1 - 100 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_2 - 200 + 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = 2\lambda_1 u_1 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_2} = 2\lambda_2 u_2 = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_3} = -2\lambda_3 u_3 = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_4} = -2\lambda_4 u_4 = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 + 4x_2 + u_1^2 - 500 = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 2x_1 + 3x_2 + u_2^2 - 600 = 0 \qquad (8)$$

---

*) Ἡ μορφὴ τῶν ὁποίων δὲν ἐπιτρέπει νέας ἀνισώσεις, διότι ἰσχύει $u_i^2 \geq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = x_1 - u_3^2 = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_4} = x_2 - u_4^2 = 0 \qquad (10)$$

Ἡ ζητουμένη ἐλαχίστη τιμὴ τῆς g θ' ἀντιστοιχῇ εἰς ζεῦγος x_1, x_2 διὰ τὸ ὁποῖον :

$$0 < x_1 \leq 200, \qquad 0 < x_2 \leq 400 \qquad (11)$$

Πράγματι εἰς τὰ ζεύγη x_1, x_2 μέ :

$$x_1 = x_2 = 0 \quad \text{ἤ} \quad x_1 = 0,\ 0 < x_2 \leq 400 \quad \text{ἤ} \quad 0 < x_1 \leq 200,\ x_2 = 0$$

δὲν ἀντιστοιχοῦν τιμαὶ τῆς g μικρότεραι, ἐκείνων τοῦ ἀνωτέρω ζεύγους.

Ἤδη ἐκ τῶν (11) καὶ τῶν $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ προκύπτουν $u_3, u_4 \neq 0$, ὁπότε αἱ (5) καὶ (6) δίδουν :

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

καὶ τὸ σύστημα περιορίζεται εἰς τό :

$$x_1 - 100 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \qquad (1')$$

$$x_2 - 200 + 4\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \qquad (2')$$

$$\lambda_1 \cdot u_1 = 0 \qquad (3')$$

$$\lambda_2 \cdot u_2 = 0 \qquad (4')$$

$$x_1 + 4x_2 + u_1^2 - 500 = 0 \qquad (5')$$

$$2x_1 + 3x_2 + u_2^2 - 600 = 0 \qquad (6')$$

$$x_1 - u_3^2 = 0 \qquad (7')$$

$$x_2 - u_4^2 = 0 \qquad (8')$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3'),(4') προκύπτουν αἱ :

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

2) $\lambda_1 = u_2 = 0$

3) $\lambda_2 = u_1 = 0$

4) $u_1 = u_2 = 0$

Διά τάς δύο πρώτας εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ὅτι αἱ ὑπόλοιποι ἐξισώσεις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος δέν συναληθεύουν.

Ἀντιθέτως διά τάς δύο ἐπομένας αἱ ὑπόλοιποι ἐξισώσεις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος συναληθεύουν καί δή διά :

$$x_1^* = \frac{1300}{17}, \quad x_2^* = \frac{1800}{17}$$

$$x_1^* = 180 \quad , \quad x_2^* = 80 \quad \text{ἀντιστοίχως.}$$

Εἰς τάς τιμάς αὐτάς ἀντιστοιχοῦν αἱ τιμαί

$$g = -\frac{345000}{17} \quad , \quad g = -14.600 \quad \text{τῆς συναρτήσεως τοῦ προγράμματος.}$$

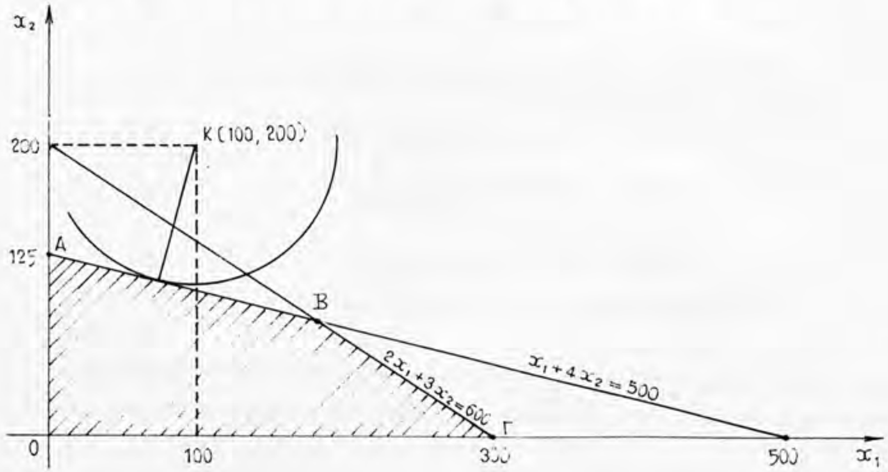
Ἐξ αὐτῶν ἡ πρώτη εἶναι καί ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ προγράμματος. Τοῦτο ἐπαληθεύεται καί μέ τήν γεωμετρικήν λύσιν.

Κατ' αὐτήν αἱ μέν καμπύλαι τῆς οἰκογενείας, μέ ἐξίσωσιν :

$$x_1\left(\frac{x_1}{2} - 100\right) + x_2\left(\frac{x_2}{2} - 200\right) = C$$

$$\text{ἤ} \qquad (x_1 - 100)^2 + (x_2 - 200)^2 = 2C + 10000 + 40.000$$

εἶναι αἱ περιφέρειαι κέντρου Κ (100, 200) καί ἀκτῖνος $\sqrt{2C + 50.000}$, οἱ δέ περιορισμοί ὁρίζουν τό κυρτόν τετράπλευρον ΟΑΒΓ.



Ἐκ τῶν περιφερειῶν ἡ ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ Κ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ τετραπλεύρου ΟΑΒΓ ἤτοι :

$$d = \frac{1 \cdot 100 + 4 \cdot 200 - 500}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{400}{\sqrt{17}}$$

θ' ἀντιστοιχῆ εἰς τὴν ζητουμένην ἐλαχίστην τιμήν.

Πράγματι ἡ λύσις τοῦ συστήματος :

$$(x_1 - 100)^2 + (x_2 - 200)^2 = \frac{160.000}{17}$$

$$x_1 + 4x_2 = 500$$

εἶναι ἡ :

$$x_1 = \frac{1300}{17} \quad , \quad x_2 = \frac{1800}{17}$$

δηλ. ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα.

Ὥστε διὰ $\quad x_1 = \frac{1300}{17} = 76{,}4 \, , x_2 = \frac{1800}{17} = 105{,}8$

προκύπτει τὸ μέγιστον κέρδος $f = -g = \frac{345000}{17} = 20294{,}1$ χρημ. μονάδες.

4.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

31. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῆ :

$$\max f = -6x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

32. Νὰ εὑρεθῆ ἡ παραγωγὴ μὲ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς 12ης ἀσκήσεως *), ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ τόννου τῶν βαρέων ἐλαίων δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως

$$p_1 = 7 - \frac{x_1}{10000} \, ,$$

---

*) Σελ. 43.

ὅπου x_1 ἡ παραγομένη ποσότης αὐτῶν, ἐνῷ ἡ τιμὴ τοῦ τόννου τοῦ ἀεριελαίου παραμένει σταθερὰ εἰς τὰς 5 χρηματικὰς μονάδας.

33. Τὸ αὐτὸ ὅταν

α) ἡ τιμὴ τοῦ τόννου τῶν βαρέων ἐλαίων δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως :

$$p_1 = 7 - \frac{x_1}{10000} ,$$

ὅπου x_1 ἡ παραγομένη ποσότης αὐτῶν καὶ

β) ἡ τιμὴ τοῦ τόννου τοῦ ἀεριελαίου δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως :

$$p_2 = 5 - \frac{x_2}{50000} ,$$

ὅπου x_2 ἡ παραγομένη ποσότης αὐτῶν.

34. Ὁ κατωτέρω πίναξ ἀναφέρεται εἰς τὰς δυνατότητας τῆς μηνιαίας παραγωγῆς, ἐπιβατικῶν καὶ φορτηγῶν αὐτοκινήτων μιᾶς ἑταιρείας:

	ΕΠΙΒΑΤΙΚΑ	ΦΟΡΤΗΓΑ
Ἐπεξεργασία μεταλλικῶν μερῶν	25 000	35 000
Συναρμολόγησις μηχανῶν	33 333	16 667
Συναρμολόγησις ἐπιβατικῶν	25 500	
Συναρμολόγησις φορτηγῶν		15 000

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ παραγωγὴ μὲ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος, ὅταν

α) ἡ τιμὴ τῶν ἐπιβατικῶν δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως

$$p_1 = 625 - \frac{x_1}{60} ,$$

ὅπου x_1 ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγομένων ἐπιβατικῶν καὶ

β) ἡ τιμὴ τῶν ἐπιβατικῶν εἶναι 250 χρηματικαὶ μονάδες.

35. Τὸ αὐτό, ὅταν

α) ἡ τιμὴ τῶν ἐπιβατικῶν δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως

$$p_1 = 625 - \frac{x_1}{60} ,$$

ὅπου x_1 ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγομένων ἐπιβατικῶν καὶ

β) ἡ τιμὴ τῶν φορτηγῶν δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως

$$p_2 = 400 - \frac{x_2}{30} ,$$

ὅπου x_2 ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγομένων φορτηγῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

5.1 Τά δυναμικά προγράμματα, ἐν ἀντιθέσει πρός τά γραμμικά καί μή γραμμικά, δέν ἔχουν σταθεράν μαθηματικήν μορφήν. Διά νά χαρακτηρισθῆ ἕνα πρόγραμμα, ὡς δυναμικόν, θά πρέπει ν' ἀντιστοιχῆ εἰς ἕνα πρόβλημα π ο λ υ σ τ α δ ι α κ ο ῦ χαρακτῆρος.

Αἱ μέθοδοι τοῦ γραμμικοῦ καί μή γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, τῆς θεωρίας τῶν γραφημάτων, τοῦ λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν, τῶν στοχαστικῶν διαδικασιῶν, τῆς συναρτησιακῆς ἀναλύσεως κλπ χρησιμοποιοῦνται κατά τόν σχηματισμόν καί τήν ἀναζήτησιν τῆς ἀρίστης λύσεως τῶν δυναμικῶν προγραμμάτων, ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀ ρ χ ῆ ς τ ο ῦ B e l l m a n.

'Ο δυναμικός προγραμματισμός ἐξετάζει τήν ἐξέλιξιν κάθε συστήματος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη φάσις (τῆς ἐξελίξεώς του) εἶναι δυνατόν νά ὑπόκειται εἰς τήν τύχην ἤ/καί νά ἐλέγχεται (ὑπό τοῦ ἀνθρώπου). Τό δέ σύστημα ὑπόκειται εἰς τήν τύχην, ὅταν, εἰς ἑκάστην φάσιν τῆς ἐξελίξεως αὐτοῦ, ἡ παρέμβασις τῆς τύχης προηγῆται τῆς ἀνθρωπίνης ἀποφάσεως.

Οὕτως αἱ ἀκραῖαι περιπτώσεις τοῦ δυναμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι, ἀφ' ἑνός μέν ἡ α ὐ σ τ η ρ ῶ ς π ρ ο κ α θ ο ρ ι σ μ έ ν η (deterministic), ὅπου δέν ὑφίσταται παρέμβασις τῆς τύχης καί ἀφ' ἑτέρου ἡ σ τ ο χ α σ τ ι κ ή, ὅπου ἡ ἀνθρωπίνη ἀπόφασις δέν παρεμβαίνει ἀμέσως.

Τό σύστημα περιγράφεται εἰς κάθε φάσιν αὐτοῦ, δἰ ἑνός συνόλου παραμέτρων, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται μ ε τ α β λ η τ α ί κ α τ α σ τ ά σ ε ω ς τοῦ συστήματος.

Εἰς ἑκάστην φάσιν τοῦ συστήματος ἀντιστοιχεῖ μία ἐ π ι λ ο γ ή ἀ π ο φ ά σ ε ω ν. Τό ἀποτέλεσμα μιᾶς ἀποφάσεως εἶναι εἷς μετασχηματισμός τῶν μεταβλητῶν καταστάσεως.

Σκοπός τῆς διαδικασίας τοῦ Δυναμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ εὕρεσις τῆς ἀρίστης τιμῆς συναρτήσεων τῶν μεταβλητῶν καταστάσεως.

Π ο λ ι τ ι κ ή καλεῖται κάθε κανών λήψεως ἀποφάσεων (ἐπιτρεπομένων ὑπό τοῦ συστήματος). Ἀ ρ ί σ τ η π ο λ ι τ ι κ ή καλεῖται ἡ πολιτική, τῆς ὁποίας αἱ ἀποφάσεις ἀριστοποιοῦν τήν συνάρτησιν τῶν μεταβλητῶν καταστάσεως. Τήν ἁπλῆν σκέψιν, ὅτι μία ἀρίστη πολιτική δέν δύναται νά σχηματιστῇ παρά ἀπό ἀρίστας ὑποπολιτικάς, τήν ἐκφράζει ἡ Ἀρχή τοῦ Bellman.

5.2 ΑΡΧΗ ΤΟΥ BELLMAN : **Μία ἀρίστη πολιτική ἔχει τήν ἰδιότητα, ὅτι οἱαδήποτε καί ἐάν εἶναι ἡ ἀρχική κατάστασις καί ἡ ἀρχική ἀπόφασις, αἱ ἀπομένουσαι ἀποφάσεις πρέπει ν' ἀποτελοῦν μίαν ἀρίστην πολιτικήν ἐν σχέσει πρός τήν κατάστασιν, τήν προερχομένην ἐκ τῆς πρώτης ἀποφάσεως.**

Διά τήν ἐφαρμογήν τῆς ἀνωτέρω ἀρχῆς προαπαιτεῖται τό ὑπόδειγμα τῶν μεταβλητῶν καταστάσεως τοῦ συστήματος.

Ἐν συνεχείᾳ ἐάν εἶναι γνωστή ἡ ἀρχική*) κατάστασις τοῦ συστήματος, τότε δἰ ἐπιλύσεως τοῦ ὑποδείγματος προκύπτει ἡ ἀρίστη λύσις-ὑποπολιτική τῆς πρώτης φάσεως τῆς διαδικασίας αὐτοῦ. Αὕτη θ' ἀποτελῇ τήν ἀρχικήν κατάστασιν τοῦ συστήματος κατά τήν ἀρχήν τῆς δευτέρας φάσεως τῆς διαδικασίας αὐτοῦ κ.ο.κ.

Κατωτέρω δίδεται ἡ λύσις δύο προβλημάτων προγραμματισμοῦ

---

*) Αὕτη δύναται νά εἶναι ἡ ἀρχή ἤ τό τέλος τῆς διαδικασίας.

δί ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τοῦ Bellman.

Εἰς τὸ πρῶτον ὡς ἀρχικὴ κατάστασις τοῦ συστήματος λαμβάνεται ἡ ἀρχὴ τῆς διαδικασίας αὐτοῦ.

Εἰς τὸ δεύτερον ὡς ἀρχικὴ κατάστασις τοῦ συστήματος λαμβάνεται τὸ τέλος τῆς διαδικασίας αὐτοῦ.

5.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ : Ὁ κατωτέρω πίναξ ἀναφέρεται*) εἰς τὰ κέρδη ἐκ τῶν ἐπενδύσεων κεφαλαίων ὕψους 0, 1, 2, 3, 4 ἑκατομμυρίων χρηματικῶν μονάδων, εἰς τοὺς οἰκονομικοὺς τομεῖς I, II, III, IV :

	I	II	III	IV
0	0	0	0	0
1	0,45	0,41	0,25	0,33
2	0,78	0,65	0,50	0,48
3	1,02	0,80	0,73	0,56
4	1,23	0,88	0,90	0,60

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος, ὅταν τὸ διατιθέμενον πρὸς ἐπένδυσιν κεφάλαιον εἶναι ὕψους 4 ἑκατομμυρίων χρηματικῶν μονάδων.

Ἐὰν $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$, $v_4(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ συναρτήσεις κέρδους ἐκ τῶν ἐπενδύσεων κεφαλαίου ὕψους x ($x = 0, 1, 2, 3, 4$) εἰς τοὺς τομεῖς I, II, III, IV, τότε ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ :

$$\max \left\{ v_1(x_1) + v_2(x_2) + v_3(x_3) + v_4(x_4) \right\}$$

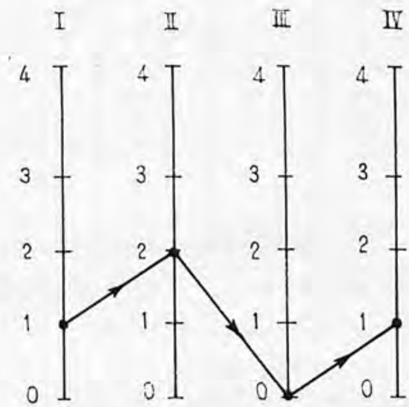
ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

$$x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad i = 1, 2, 3, 4 .$$

*) Π.χ. κεφάλαιον ὕψους 3 τοποθετούμενον εἰς τὸν οἰκονομικὸν τομέα II ἀποφέρει κέρδος 0,80.

Κάθε ἐπένδυσις ὕψους 4 θά ἀποτελῇ μίαν πολιτικήν τοῦ προβλήματος. Οὕτως ἡ ἐπένδυσις κατά τήν ὁποίαν κεφάλαιον : ὕψους 1 τοποθετεῖται εἰς τήν I, ὕψους 2 τοποθετεῖται εἰς τόν II, ὕψους 0 τοποθετεῖται εἰς τόν III, ὕψους 1 τοποθετεῖται εἰς τόν IV



εἶναι μία πολιτική μέ ἀντίστοιχον κέρδος $0,45+0,65+0,+0,33 = 1,43$.

Ἡ πολιτική αὐτη θά συμβολίζεται συντόμως μέ $(1,2,0,1)$.

Ἐάν f_1, f_{12}, f_{13}, f_{14} εἶναι ἀντιστοίχως αἱ συναρτήσεις τῆς ἀρίστης πολιτικῆς ἐπενδύσεων διά τά σύνολα $\{I\}$, $\{I,II\}$, $\{I,II,III\}$, $\{I,II,III,IV\}$, τότε ἡ διαδικασία τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τοῦ Bellman θά ἔχη ὡς κατωτέρω :

Βῆμα 1ον : Διά τόν τομέα I ἰσχύει προφανῶς $f_1(A) = v_1(A)$

Βῆμα 2ον : Διά τούς τομεῖς I καί II θά εἶναι :

$$f_{12}(A) = \max\{ f_1(x) + v_2(A-x) \}$$

μέ ἀντίστοιχον πίνακα ἀρίστης ὑποπολιτικῆς :

A	f_1	v_2	f_{12}	Ἀρίστη ὑποπολιτική
0	0	0	0	(0, 0)
1	0,45	0,41	0,45	(1, 0)
2	0,78	0,65	0,86	(1, 1)
3	1,02	0,80	1,19	(2, 1)
4	1,23	0,88	1,43	(2,2) ἤ (3,1)

Βῆμα 3ον: Διὰ τοὺς τομεῖς Ι, ΙΙ καὶ ΙΙΙ θὰ εἶναι :

$$f_{13}(A) = max\left\{ f_{12}(x) + v_3(A-x) \right\}$$

μὲ ἀντίστοιχον πίνακα ἀρίστης ὑποπολιτικῆς :

A	f_{12}	v_3	f_{13}	Ἀρίστη ὑποπολιτική
0	0	0	0	(0, 0, 0)
1	0,45	0,25	0,45	(1, 0, 0)
2	0,86	0,50	0,86	(1, 1, 0)
3	1,19	0,73	1,19	(2, 1, 0)
4	1,43	0,90	1,44	(2, 1, 1)

Βῆμα 4ον: Δι' ὅλους τοὺς τομεῖς θὰ εἶναι :

$$f_{14}(A) = max\left\{ f_{13}(x) + v_4(A-x) \right\}$$

μὲ ἀντίστοιχον πίνακα ἀρίστης πολιτικῆς :

A	f_{13}	v_4	f_{14}	Ἀρίστη πολιτική
0	0	0	0	(0, 0, 0, 0)
1	0,45	0,33	0,45	(1, 0, 0, 0)
2	0,86	0,48	0,86	(1, 1, 0, 0)
3	1,19	0,56	1,19	(2,1,0,0) ἤ (1,1,0,1)
4	1,44	0,60	1,52	**(2, 1, 0, 1)**

Ὥστε ἡ ἀρίστη πολιτικὴ τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ (2, 1, 0, 1) ἤτοι κεφάλαιον : ὕψους 2 τοποθετεῖται εἰς τὴν Ι, ὕψους 1 τοποθετεῖται εἰς τὴν ΙΙ καὶ ὕψους 1 τοποθετεῖται εἰς τὴν ΙΙΙ μὲ ἀντίστοιχον κέρδος 1,52 ἑκατομμυρίων χρηματικῶν μονάδων.

5.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ : Ζητεῖται ὁ ἐτήσιος προγραμματισμὸς τῶν ἀποθεμάτων, ὅταν :

α) Ὁ ἐπανεφοδιασμὸς γίνεται ἀνὰ δίμηνον.

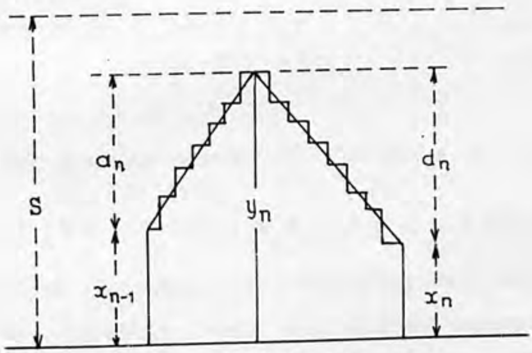
β) Ἡ ζήτησις καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ ἀγορᾶς παρέχωνται ὑπὸ τοῦ πίνακος :

Περίοδος : n	1	2	3	4	5	6
Ζήτησις : d_n	8	5	3	2	7	4
Τιμὴ ἀγορᾶς : p_n	11	18	13	17	20	10

γ) Τὸ ὅριον ἀποθέματος εἶναι $S = 9$.

δ) Τὸ ἀρχικὸν ἀπόθεμα εἶναι 2 καὶ τὸ τελικὸν ἀπόθεμα (πρέπει νὰ) εἶναι 0.

Ἐάν x_n τὸ ἀπόθεμα κατὰ τὸ τέλος τῆς n περιόδου, a_n ἡ ἀγορασθησομένη ποσότης κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς n περιόδου καὶ y_n τὸ ἀπόθεμα μετὰ τὴν ἀγορὰν τῆς ποσότητος a_n.



← περίοδος n →

τότε θὰ εἶναι :

$$0 \leq x_{n-1}, x_n, y_n \leq S \qquad (1)$$

$$x_{n-1} + a_n = y_n \qquad (2)$$

$$x_n + d_n = y_n \qquad (3)$$

$$S = 9, \; x_0 = 2, \; x_6 = 0 \qquad (4)$$

Ἐάν $v_1(x_0, x_1)$, $v_2(x_1, x_2)$, $v_3(x_2, x_3)$, $v_4(x_3, x_4)$, $v_5(x_4, x_5)$, $v_6(x_5, x_6)$ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ συναρτήσεις ἐξόδων ἀγορᾶς κατὰ τὰς περιόδους 1, 2, 3, 4, 5 καὶ 6, τότε ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ :

$$\min \sum_{i=1}^{6} v_i\,(x_{i-1}, x_i)$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς (1), (2), (3) καὶ (4).

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) προκύπτει εὐκόλως ὅτι :

$$a_n = x_n + d_n - x_{n-1} \qquad (5)$$

Ἐξ ἄλλου διὰ τὴν μεταβλητὴν καταστάσεως x_n ἰσχύει :

$$\max\,(0, x_{n-1} - d_n) \leq x_n \leq \min\,(S - d_n, x_{n+1} + d_{n+1}) \qquad (6)$$

Πράγματι ἐκ τῶν (1) καὶ (5) προκύπτουν ἀντιστοίχως :

$$0 \leq x_n,\ 0 \leq x_n + d_n - x_{n-1} \text{ ἢ } x_{n-1} - d_n \leq x_n \text{ ὅτε}$$
$$\max\,(0, x_{n-1} - d_n) \leq x_n$$

Ὁμοίως ἐκ τῶν (1), (3) καὶ (5) προκύπτουν ἀντιστοίχως :

$$x_n + d_n \leq S \quad \text{ἢ} \quad x_n \leq S - d_n$$

$$0 \leq x_{n+1} + d_{n+1} - x_n \text{ ἢ } x_n \leq x_{n+1} + d_{n+1} \text{ ὅτε } x_n \leq \min\,(S - d_n, x_{n+1} + d_{n+1}).$$

Ἤδη ἐάν

$$f_6,\ f_{65},\ f_{64},\ f_{63},\ f_{62},\ f_{61}$$

εἶναι ἀντιστοίχως αἱ συναρτήσεις τῆς ἀρίστης πολιτικῆς διὰ τὰ σύνολα

$$\{6\},\ \{6, 5\},\ \{6, 5, 4\},\ \{6, 5, 4, 3\},\ \{6, 5, 4, 3, 2\}, \{6, 5, 4, 3, 2, 1\},$$

τότε ἡ διαδικασία τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τοῦ Bellman θὰ ἔχῃ ὡς κατωτέρω :

Βῆμα 1ον : Διὰ τὴν ἕκτην περίοδον εἶναι $x_6 = 0$ (ἐκ τῆς (4)) καὶ

$$\max\,(0, x_4 - 7) \leq x_5 \leq \min\,(9\text{-}7, 0+4)$$

ἢ

$$\max\,(0, x_4 - 7) \leq x_5 \leq 2 \qquad (7) \quad (\text{ἐκ τῆς (6) διὰ } n = 5)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ (5) διὰ $n = 6$ δίδει $a_6 = 0 + 4 - x_5$

ὅτε :

$$v_6\,(x_5, x_6) = p_6 a_6 = 10\,(4 - x_5)$$

καί

$$f_6(x_5) = \min 10\,(4 - x_5).$$

Ἡ μορφή ὅμως τῶν περιορισμῶν (7) δέν ἐπιτρέπει τόν καθορισμόν ἀρίστης ὑποπολιτικῆς διά τό βῆμα τοῦτο.

Βῆμα 2ον: Διά τάς περιόδους ἕκτην καί πέμπτην εἶναι:

$$\max(0,\, x_4 - 7) \leq x_5 \leq 2 \qquad (7)$$

καί
$$\max(0,\, x_3 - 2) \leq x_4 \leq \min(9-2,\, x_5 + 7)$$

ἤ
$$\max(0,\, x_3 - 2) \leq x_4 \leq 7 \qquad (8) \quad (\text{ἐκ τῆς (6) διά } n=4)$$

Ἐκ τῶν (7) καί (8) προκύπτει:

$$0 \leq x_5 \leq 2 \qquad (9)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ (5) διά $n = 5$ δίδει

$$a_5 = x_5 + 7 - x_4$$

ὅτε*):
$$v_5(x_4, x_5) + f_6(x_5) = a_5 p_5 + f_6(x_5) = 20(x_5 + 7 - x_4) + 10\,(4 - x_5) =$$
$$= 180 - 20x_4 + 10x_5$$

Ἤδη εὐκόλως προκύπτει ὅτι εἶναι:

$$f_{65}(x_4) = \min(180 - 20x_4 + 10x_5)$$
$$0 \leq x_5 \leq 2$$

διά**) $x_5 = 0$.

Ὥστε διά τάς περιόδους ἕκτην καί πέμπτην ὑφίσταται ἡ ἀρίστη ὑποπολιτική $x_6 = 0,\ x_5 = 0$ ἤ $a_6 = 0 + 4 - 0 = 4$.

Βῆμα 3ον: Διά τάς περιόδους ἕκτην, πέμπτην καί τετάρτην εἶναι:

---

*) Διά νά μή δημιουργηθοῦν νέοι συμβολισμοί, γράφεται $f_6(x_5)$ δηλ. min συναρτήσεως ἀλλά νοεῖται καί τίθεται ἡ συνάρτησις.

**) Δοθέντος ὅτι ὁ συντελεστής τοῦ x_5 εἰς τήν συνάρτησιν εἶναι θετικός.

$$\max(0, x_3-2) \leq x_4 \leq 7 \qquad (8)$$

καί $$\max(0, x_2-3) \leq x_3 \leq \min(9-3, x_4+2)$$

ἤ $\max(0,x_2-3) \leq x_3 \leq \min(6, x_4+2)$ (10) (ἐκ τῆς (6) διά $n=3$)

Ἐξ ἄλλου ἡ (5) διά $n=4$ δίδει $a_4 = x_4+2-x_3$, ὅτε:

$$v_4(x_3, x_4)+f_{65}(x_4) = a_4 p_4 + f_{65}(x_4) = 17(x_4+2-x_3)+180-20x_4 =$$

$$= 214-17x_3-3x_4$$

Ἤδη εὐκόλως προκύπτει ὅτι εἶναι :

$$f_{64}(x_3) = \min_{\max(0, x_3-2) \leq x_4 \leq 7} (214-17x_3-3x_4)$$

διά*) $x_4 = 7$.

Ὥστε διά τάς περιόδους ἕκτην, πέμπτην καί τετάρτην ὑφίσταται ἡ ἀρίστη ὑποπολιτική $x_6=0$, $x_5=0$, $x_4=7$ ἤ $a_6=4$, $a_5=0+7-7=0$.

Βῆμα 4ον: Διά τάς περιόδους ἕκτην, πέμπτην, τετάρτην καί τρίτην εἶναι :

$$\max(0, x_2-3) \leq x_3 \leq \min(6, 7+2)$$

ἤ $\max(0, x_2-3) \leq x_3 \leq 6$ (11) (ἐκ τῆς (10) διά $x_4=7$)

καί $$\max(0, x_1-5) \leq x_2 \leq \min(9-5, x_3+3)$$

$\max(0, x_1-5) \leq x_2 \leq \min(4, x_3+3)$ (12) (ἐκ τῆς (6) διά $n=2$)

Ἐξ ἄλλου ἡ (5) διά $n=3$ δίδει $a_3 = x_3+3-x_2$, ὅτε :

---

*) Δοθέντος ὅτι ὁ συντελεστής τοῦ x_4 εἰς τήν συνάρτησιν εἶναι ἀρνητικός.

$$v_3(x_2,x_3)+f_{64}(x_3)=a_3p_3+f_{64}(x_3)=13(x_3+3-x_2)+193-17x_3=$$
$$=232-13x_2-4x_3\,.$$

Ἤδη εὐκόλως προκύπτει ὅτι εἶναι :

$$f_{63}(x_2)=\min_{\max(0,x_2-3)\leq x_3\leq 6}(232-13x_2-4x_3)$$

διά *) $x_3=6$.

Ὥστε διά τάς περιόδους ἕκτην, πέμπτην, τετάρτην καί τρίτην ὑφίσταται ἡ ἀρίστη ὑποπολιτική $x_6=0,\ x_5=0,\ x_4=7,\ x_3=6$ ἤ $a_6=4,\ a_5=0,\ a_4=7+2-6=3$.

Βῆμα 5ον : Διά τάς περιόδους ἕκτην, πέμπτην, τετάρτην, τρίτην καί δευτέραν εἶναι :

$$\max(0,x_1-5)\leq x_2\leq \min(4,6+3)$$

ἤ $\max(0,x_1-5)\leq x_2\leq 4$ (13) (ἐκ τῆς (12) διά $x_3=6$)

καί $\max(0,2-8)\leq x_1\leq \min(9-8,x_2+5)$

ἤ $0\leq x_1\leq 1$ (14) (ἐκ τῆς (6) διά $n=1$)

Ἐκ τῶν (13) καί (14) προκύπτει :

$$0\leq x_2\leq 4 \qquad (15)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ (5) διά $n=2$ δίδει $a_2=x_2+5-x_1$

ὅτε :

$$v_2(x_1,x_2)+f_{63}(x_2)=18(x_2+5-x_1)+208-13x_2=298-18x_1+5x_2\,.$$

Ἤδη εὐκόλως προκύπτει, ὅτι εἶναι

$$f_{62}(x_1)=\min_{0\leq x_2\leq 4}(298-18x_1+5x_2)$$

διά**) $x_2=0$.

---

*) Δοθέντος ὅτι ὁ συντελεστής τοῦ x_4 εἰς τήν συνάρτησιν εἶναι ἀρνητικός.

**) Δοθέντος ὅτι ὁ συντελεστής τοῦ x_2 εἰς τήν συνάρτησιν εἶναι θετικός.

῞Ωστε διὰ τὰς περιόδους ἕκτην, πέμπτην, τετάρτην καὶ δευτέραν ὑφίσταται ἡ ἀρίστη ὑποπολιτικὴ $x_6 = 0$, $x_5 = 0$, $x_4 = 7$, $x_3 = 6$, $x_2 = 0$ ἢ $a_6 = 4$, $a_5 = 0$, $a_4 = 3$, $a_3 = 6+3-0 = 9$.

Βῆμα 6ον : Διὰ τὴν ζητουμένην ἀρίστην πολιτικὴν (τοῦ συνόλου περιόδων) τοῦ προβλήματος ἡ (5) διὰ $n=1$ δίδει $a_1 = x_1+8-2 = x_1+6$ ὅτε :

$$v_1(x_0, x_1) + f_{62}(x_1) = a_1 p_1 + f_{62}(x_1) = 11(x_1+6) + 298 - 18x_1 =$$

$$= 364 - 7x_1 .$$

῎Ηδη εὐκόλως προκύπτει ὅτι εἶναι :

$$f_{61}(x_1) = \min_{0 \le x_1 \le 1} (364 - 7x_1)$$

διὰ *) $x_1 = 1$.

῞Ωστε ἡ ἀρίστη πολιτικὴ τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ $x_0 = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$, $x_4 = 7$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ ἢ $a_1 = 7$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 3$, $a_5 = 0$, $a_6 = 4$ μὲ ἐλαχίστην τιμὴν ἐξόδων 357 χρηματικὰς μονάδας.

5.5 ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ : Τὸ πρόγραμμα τοῦ προβλήματος τῶν ἐπενδύσεων τῆς 5.3 εἶναι τυπικὴ περίπτωσις τοῦ προγράμματος :

Νὰ εὑρεθῇ ἀκροτάτη **) τιμὴ τῆς συναρτήσεως :

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = v_1(x_1) + v_2(x_2) + \cdots + v_n(x_n)$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$$

$$x_i \ge 0,$$

ἔνθα $v_i(x_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ δοθεῖσαι πραγματικαὶ συναρτήσεις καὶ $a > 0$.

Αἱ συναρτήσεις $v_i(x_i)$ δύνανται νὰ εἶναι γραμμικαὶ ἤ/καὶ μὴ γραμμικαί.

Εἰς τὴν περίπτωσιν δὲ κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ συναρτήσεις εἶναι μὴ γραμ-

---

*) Δοθέντος ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ x_1 εἰς τὴν συνάρτησιν εἶναι ἀρνητικός.

**) max ἢ min.

μικαί, ἐφαρμόζεται ἡ ἐκτεθεῖσα *) μέθοδος τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange.

Ἡ εὕρεσις τῆς ἀκροτάτης τιμῆς τῆς συναρτήσεως F, διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ Bellman, ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς θεωρήσεως τῆς ἐννοίας τοῦ πολυσταδιακοῦ χαρακτῆρος.

Εἰς τὸν Οἰκονομικὸν Προγραμματισμόν, ἡ γενίκευσις τοῦ προβλήματος τῶν ἐπενδύσεων, ἀναφέρεται εἰς κάθε Οἰκονομικὴν πηγήν, ἡ ὁποία διαθέτει μίαν ποσότητα τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἀξιοποιήσῃ εἰς διαφόρους δραστηριότητας, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι, τὰ ἔσοδα ἐκ τῶν διαφόρων δραστηριοτήτων, ἔχουν κοινὴν μονάδα μετρήσεως καὶ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀλλήλων.

Οὕτως, ἐκ τῶν δραστηριοτήτων, προκύπτει ὁ οἰκονομικὸς ὁρίζων τοῦ προβλήματος, δηλ. τὸ σύνολον τῶν φάσεων ἢ περιόδων αὐτοῦ καὶ ἐκ τῶν ἐσόδων αἱ συναρτήσεις v_i τοῦ προγράμματος.

Ἐξ ἄλλου τὸ πρόγραμμα τοῦ προβλήματος τῶν ἀποθεμάτων τῆς 5.4 εἶναι τυπικὴ περίπτωσις τοῦ προγράμματος :

Νὰ εὑρεθῇ ἀκροτάτη**) τιμὴ τῆς συναρτήσεως :

$$F(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(x_0, x_1) + v_2(x_1, x_2) + \dots + v_n(x_{n-1}, x_n),$$

δοθέντος, ὅτι ἑκάστη μεταβλητὴ αὐτῆς δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς διαστημάτων, ὁριζομένων ὑπὸ τῶν ὑπολοίπων.

Τέλος διὰ τὰ στοχαστικὰ δυναμικὰ προγράμματα ἀπαραίτητοι εἶναι αἱ ἁλύσεις τοῦ Markov, ὡς καὶ αἱ ἄλλαι στοχαστικαὶ διαδικασίαι.

Τὸ πλῆθος τῶν μορφῶν καὶ ἰδιοτήτων τῶν δυναμικῶν προγραμμάτων, δύναται ν' ἀνεύρῃ τις εἰς εἰδικὰς μονογραφίας.***)

---

*) σελ.

**) max ἢ min

***) βλ. [1] [5]

5.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

36. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος εἰς τὸ πρόβλημα τῶν ἐπενδύσεων, ὅταν τὸ διατιθέμενον πρὸς ἐπένδυσιν κεφάλαιον εἶναι ὕψους 5 ἑκατομμυρίων χρηματικῶν μονάδων καὶ ὁ πίναξ κερδῶν εἶναι ὁ :

	I	II	III	IV
0	0	0	0	0
1	0,25	0,22	0,20	0,19
2	0,48	0,42	0,44	0,38
3	0,68	0,62	0,60	0,64
4	0,74	0,70	0,68	0,72
5	0,92	0,90	0,84	0,81

37. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν κόστος εἰς τὸ πρόβλημα τῶν ἀποθεμάτων, ὅταν :

n	1	2	3	4	5	6
d_n	5	7	12	10	3	2
p_n	8	9	10	9	7	6

καὶ $s = 12$, $x_0 = 4$, $x_6 = 0$.

38. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ διαδρομὴ ἐλαχίστου κόστους μὲ ἀφετηρίαν τὴν πόλιν A_1 καὶ προορισμὸν τὴν πόλιν A_{10}, ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ κόστους τῶν δυνατῶν μετακινήσεων εἶναι :

$C(A_1A_2) = 2$, $C(A_1A_3) = 4$, $C(A_1A_4) = 3$, $C(A_2A_5) = 7$, $C(A_2A_6) = 4$

$C(A_2A_7) = 6$, $C(A_3A_5) = 3$, $C(A_3A_6) = 2$, $C(A_3A_7) = 4$, $C(A_4A_5) = 4$

$C(A_4A_6) = 1$, $C(A_4A_7) = 5$, $C(A_7A_8) = 1$, $C(A_5A_9) = 4$, $C(A_6A_8) = 8$

$C(A_6A_9)=3, C(A_7A_8)=3, C(A_7A_9)=3, C(A_8A_{10})=3, C(A_9A_{10})=4$

χρηματικαὶ μονάδες.

39. Ὁ κατωτέρω πίναξ ἀναφέρεται εἰς τὰ ποσοστὰ τῶν ἐλαττωματικῶν τεμαχίων, τῆς παραγωγῆς τῶν προϊόντων I, II, III, ἔνθα α ὁ ἀριθμὸς τῶν τεχνικῶν ἐλέγχου κάθε προϊόντος :

α	I	II	III
0	0,40	0,60	0,80
1	0,20	0,40	0,50
2	0,15	0,20	0,30

Ζητεῖται νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐλαττωματικῶν τεμαχίων τῆς παραγωγῆς, ὅταν προσληφθοῦν δύο ἐπὶ πλέον τεχνικοί.

40. Ἐπιχείρησις διαθέτει η μηχανὰς διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν προϊόντων I, II αὐτῆς.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κέρδος τῆς εἰς N στάδια παραγωγῆς, ὅταν :

α). Αἱ τιμαὶ πωλήσεως τῶν I καὶ II εἶναι ἀντιστοίχως $p_1(x), p_2(x)$ δηλ. συναρτήσεις τοῦ ἀριθμοῦ x, τῶν χρησιμοποιουμένων μηχανῶν.

β). Ἐκ τῶν ἀρχικῶς χρησιμοποιηθεισῶν x μηχανῶν, δι' ἕκαστον προϊόν, εἰς τὸ ἑπόμενον στάδιον παραγωγῆς, χρησιμοποιοῦνται ἐκ νέου (λόγῳ φθορᾶς) $g_1(x), g_2(x)$ ἀντιστοίχως μηχαναί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ : Ὡς γνωστὸν προβλήματα παιγνίων (παιγνιοχάρτων, ζατρικίου, κύβων κλπ) εἶχον προκαλέσει τὸ ἐνδιαφέρον μεγάλων μαθηματικῶν, ὡς τῶν Huyghens, Pascal, Fermat, Bernoulli, Gauss, οἱ ὁποῖοι καὶ εἶχον δώσει σχετικὰς λύσεις.

Ἡ μαθηματικοποίησις ὅμως τῆς θεωρίας τῶν παιγνίων, ὀφείλεται εἰς τὰς ἐργασίας τοῦ Borel (1921) καὶ κυρίως τοῦ Neumann (1928), ἐνῷ ἡ ἐφαρμογή των εἰς τὴν Οἰκονομικὴν εἶναι ἔργον τῶν Neumann καὶ Morgenstern (1944).

Διὰ τῆς θεωρίας τῶν παιγνίων ἐπιτυγχάνεται ἡ μελέτη, ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ λῆψις τῶν ἀποφάσεων ἐπὶ καταστάσεων σ υ γ κ ρ ο ύ σ ε ω ς σ υ μ φ ε ρ ό ν τ ω ν κατὰ τὴν διεκδίκησιν μεριδίων*)

Διὰ τὴν περιγραφὴν τῆς συγκρούσεως τῶν οἰκονομικῶν συμφερόντων ἡ θεωρία τῶν παιγνίων ἀπετέλεσεν τὴν βάσιν τῶν Οἰκονομικῶν Παιγνίων, διὰ τῶν ὁποίων μελετῶνται προβλήματα : ὀ λ ι γ ο π ω λ ί ο υ, δ ι μ ε ρ ο ῦ ς μ ο ν ο π ω λ ί ο υ, γ ε ν ι κ ῆ ς ἰ σ ο ρ ρ ο π ί α ς, ο ἰ κ ο ν ο μ ι κ ῶ ν

---

*) Οἱ τρόποι δράσεως τοῦ ἀνθρώπου εἰς τὸ ἀρχαιότερον τοῦτο πρόβλημα τοῦ κόσμου, εἶναι οἱ ἑξῆς τρεῖς : Ὁ (ἔνοπλος) ἀγών, αἱ διαπραγματεύσεις καὶ τὰ παίγνια.

διακυμάνσεων κλπ.

Ἐκτὸς τῶν ἐφαρμογῶν των εἰς τὴν Οἰκονομικήν, τὰ παίγνια πολλὰ προσέφερον καὶ εἰς τὴν μελέτην τῶν πολιτικῶν καὶ στρατηγικῶν προβλημάτων, δοθέντος ὅτι ἔννοιαι ποιοτικοῦ χαρακτῆρος, ὅπως χρησιμότης, προτίμησις, συνεργασία, συμμαχία, συνασπισμός, ἐπικράτησις, διαιτησία, ἀπειλή, διαπραγματεύσεις, μάχη, διαμάχη, καταδίωξις, πόλωσις κλπ ἔχουν περιγραφῆ μὲ τὴν γλῶσσαν τῶν μαθηματικῶν, ὥστε νὰ δίδουν σαφῆ κριτήρια εἰς τοὺς ἡγήτορας διὰ τὴν λῆψιν τῶν ἀποφάσεων.

Ἀναλόγως διαφόρων χαρακτηριστικῶν, ἐμφανιζομένων εἰς τὰ παίγνια, ταῦτα διακρίνονται εἰς παίγνια : τύχης, στρατηγικῆς, συνεργασίας, πεπερασμένα, ἀπέραντα, μὲ 1,2,...,ν πρόσωπα, μὲ ἄθροισμα κερδῶν μηδέν, μὲ ἄθροισμα κερδῶν διάφορον τοῦ μηδενός, πλήρους πληροφορίας, ἀτελοῦς πληροφορίας, ἐναντίον τῆς φύσεως, μὲ ποινάς κλπ.

Εἰς τὰ παίγνια τύχης τὸ ἀποτέλεσμα ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικῶς ἐκ τῆς τύχης, χωρὶς νὰ δύνανται οἱ παῖκται νὰ ἐπέμβουν.

Οὕτω, τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ, συγκεντροῦται εἰς τά :

6.2 ΠΑΙΓΝΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ : Οὕτω καλοῦνται τὰ παίγνια, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ἀποτέλεσμα δὲν ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικὰ ἐκ τῆς τύχης, ἀλλὰ διαμορφοῦται κατόπιν τῆς ἐπεμβάσεως τῶν παικτῶν.

Ἡ ἐπέμβασις τῶν παικτῶν γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν κανόνων τοῦ παιγνίου, οἱ ὁποῖοι τίθενται ὑπὸ τῶν παικτῶν ἤ/καὶ προϋπάρχουν, γενόμενοι ἀποδεκτοί.

Αἱ δυνατότητες ἐπεμβάσεως, αἱ ὁποῖαι προσφέρονται εἰς κάθε παίκτην καλοῦνται στρατηγικαὶ τοῦ παίκτου· ἐκ τοῦ τρόπου δὲ κατὰ τὸν ὁποῖον ἐπιλέγονται αἱ στρατηγικαί, ἐκ μέρους τῶν παικτῶν, προσδιορίζεται καὶ τὸ ἀποτέλεσμα ἑκάστης παιζομένης παρτίδος τοῦ παιγνίου δι' ἕκαστον παίκτην.

Οὕτω τὰ παίγνια ταῦτα ἔχουν νόημα, ὅταν οὐδεὶς παίκτης ἐλέγχει ὅλας τὰς στρατηγικάς, διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζεται τὸ ἀποτέλεσμα, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ νοηθῇ ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν (αὔξησις οἰκονομικῆς ἰσχύος, νίκη ἐπὶ ἀντιπάλου κλπ) ἢ τὴν στενὴν τοιαύτην (κέρδος εἰς χρηματικὰς μονάδας).

Τὰ πρῶτα παίγνια στρατηγικῆς εἶναι τά :

6.3 ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΔΥΟ ΠΡΟΣΩΠΑ ΚΑΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΕΡΔΩΝ ΜΗΔΕΝ:

Οὕτω καλοῦνται τὰ παίγνια στρατηγικῆς μεταξὺ δύο ἀντιπάλων, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ κέρδη τοῦ ἑνὸς ἰσοῦνται πρὸς τὰς ζημίας τοῦ ἄλλου.

Πρόσωπον δὲ δύναται νὰ εἶναι καὶ μία ὁμὰς τῆς ὁποίας τὰ μέλη ἔχουν ἓν καὶ μόνον κοινὸν συμφέρον, ἤτοι τὴν ἀριστοποίησιν τοῦ κοινοῦ κέρδους.

Εἰς τὸ τέλος κάθε παρτίδος ὁ ἡττημένος πληρώνει εἰς τὸν νικητὴν συμφώνως πρὸς τοὺς κανόνας τοῦ παιγνίου.

Παράδειγμα 1ον : Οἱ ἀντίπαλοι Α, Β ἀνακοινώνουν συγχρόνως ἕνα ἀριθμόν. Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἄρτιοι ἢ περιττοί, τότε ὁ Α πληρώνει εἰς τὸν Β ποσὸν μιᾶς χρηματικῆς μονάδος. Ἐὰν ὅμως ἐκ τῶν ἀριθμῶν ὁ εἷς εἶναι περιττὸς καὶ ὁ ἕτερος ἄρτιος, τότε ὁ Β πληρώνει εἰς τὸν Α ποσὸν μιᾶς χρηματικῆς μονάδος.

Ἐὰν ὁ Α ἀκολουθῇ τὴν στρατηγικὴν s_1 (ἀντιστοίχως s_2) ὅταν ἀνακοινῇ ἄρτιον (ἀντιστοίχως περιττὸν) καὶ ὁ Β ἀκολουθεῖ τὴν στρατηγικὴν σ_1 (ἀντιστοίχως σ_2) ὅταν ἀνακοινῇ ἄρτιον (ἀντιστοίχως περιττὸν) τότε ὁ πίναξ κερδῶν τοῦ Α εἶναι ὁ ἑπόμενος*).

*) Εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ πίναξ κερδῶν τοῦ Β σχηματίζεται ἐκ τῶν ἀντιθέτων τιμῶν τοῦ πίνακος κερδῶν τοῦ Α.

Πίναξ κερδῶν τοῦ A

		B	
		σ_1	σ_2
A	s_1	-1	1
	s_2	1	-1

Παράδειγμα 2ον: Οἱ ἀντίπαλοι A καὶ B ἀνακοινώνουν συγχρόνως ἕνα ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3.

Ἐὰν συμπίπτουν εἰς τὴν ἐκλογὴν τοῦ ἀριθμοῦ, τότε ὁ A πληρώνει εἰς τὸν B ποσὸν χρηματικῶν μονάδων ὅσος εἶναι ὁ ἀνακοινωθεὶς ἀριθμός.

Ἐὰν δὲν συμπίπτουν εἰς τὴν ἐκλογήν, τότε ὁ B πληρώνει εἰς τὸν A ποσὸν χρηματικῶν μονάδων ὅσος εἶναι ὁ ἀνακοινωθεὶς ὑπὸ τοῦ A ἀριθμός.

Ἐὰν ὁ A ἀκολουθῇ τὴν στρατηγικὴν s_i ὅταν ἀνακοινῇ i ($i = 1, 2, 3$) καὶ ὁ B ἀκολουθῇ τὴν στρατηγικὴν σ_j ὅταν ἀνακοινῇ j ($j = 1, 2, 3$), τότε ὁ πίναξ κερδῶν τοῦ A εἶναι ὁ ἑπόμενος*):

Πίναξ κερδῶν τοῦ A

			B	
		σ_1	σ_2	σ_3
	s_1	-1	1	1
A	s_2	2	-2	2
	s_3	3	3	-3

*) Εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ πίναξ κερδῶν τοῦ B σχηματίζεται ἐκ τῶν ἀντιθέτων τιμῶν τοῦ πίνακος κερδῶν τοῦ A.

Γενικῶς, ἐάν ἕνα παίγνιον ἔχῃ συμφώνως πρός τούς κανόνας αὐτοῦ, πίνακα κερδῶν τοῦ Α τόν ἑπόμενον :

Πίναξ κερδῶν τοῦ Α

		B							
		σ_1	σ_2	. . .	σ_j	. . .	σ_n
	s_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1j}	. . .	a_{1n}
	s_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2j}	. . .	a_{2n}
	.	.	.		.		.
A	.	.	.		.		.
	.	.	.		.		.
	s_i	a_{i1}	a_{i2}	. . .	a_{ij}	. . .	a_{in}
	.	.	.		.		.
	.	.	.		.		.
	.	.	.		.		.
	s_m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mj}	. . .	a_{mn}

μέ a_{ij} τό κέρδος τοῦ Α ὅταν οὗτος ἀκολουθῇ τήν στρατηγικήν s_i καί ὁ Β ἀκολουθῇ τήν στρατηγικήν σ_j, τότε :

Σκοπός τοῦ Α εἶναι νά μεγιστοποιήσῃ τό κέρδος του, ἐνῶ τοῦ Β νά ἐλαχιστοποιήσῃ τό ἀποτέλεσμα τοῦτο. Οὕτως ἐάν οἱ ἀντίπαλοι εἶναι " ἔξυπνοι καί συνετοί ", τότε :

Ὁ Α παραδεχόμενος, ὅτι ὁ Β δυνατόν νά τοῦ ἐπιτρέψῃ κέρδος ἐλάχιστον καί ἀκολουθῶν τήν στρατηγικήν s_i εἶναι βέβαιος, ὅτι θά λάβῃ κέρδος ἴσον πρός :

$$\min_j a_{ij}.$$

Ἐπομένως θά πρέπει νά ἐκλέξῃ ἐκείνην τήν στρατηγικήν s_i, διά τήν ὁποίαν τό ἀντίστοιχον $\min_j a_{ij}$ εἶναι μέγιστον, δηλ.

ὁ Α θά λάβῃ κέρδος τουλάχιστον ἴσον πρός :

$$e_A = \max_i \min_j a_{ij} .$$

Ὁ Β παραδεχόμενος, ὅτι ὁ Α δυνατόν νά ἐπιτύχῃ μέγιστον κέρδος καί ἀκολουθῶν τήν στρατηγικήν σ_j θά ἔχῃ μεγίστην ζημίαν ἴσην πρός :

$$\max_i a_{ij} .$$

Ἐπομένως θά πρέπει νά ἐκλέξῃ ἐκείνην τήν στρατηγικήν σ_j, διά τήν ὁποίαν τό ἀντίστοιχον $\max_i a_{ij}$ εἶναι ἐλάχιστον, δηλ. ὁ Β δέν θά πρέπει νά ἔχῃ ζημίαν μεγαλυτέραν ἀπό :

$$e_B = \min_j \max_i a_{ij} .$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι :

$$e_B \geq e_A .$$

6.4 ΠΑΙΓΝΙΑ ΚΑΘΑΡΑΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ : Οὕτω καλοῦνται τά παίγνια στρατηγικῆς, μέ δύο πρόσωπα καί ἄθροισμα κερδῶν μηδέν, διά τά ὁποῖα ἰσχύει :

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v$$

δι' ἕν τουλάχιστον ζεῦγος στρατηγικῶν.

Κάθε ζεῦγος (i, j), διά τό ὁποῖον ἰσχύει ἡ ἀνωτέρω ἰσότης, ὁρίζει ἕνα σαγματικόν σημεῖον ἤ σημεῖον ἰσορροπίας τοῦ παιγνίου, τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν τιμήν τοῦ πίνακος τῶν κερδῶν τοῦ Α, ἡ ὁποία εἶναι ἡ μικροτέρα τῆς γραμμῆς της καί ἡ μεγαλυτέρα τῆς στήλης της.

Ἡ κοινή τιμή v καλεῖται τιμή τοῦ παιγνίου.

Τά παίγνια, τῶν ἀνωτέρω δύο παραδειγμάτων, δέν εἶναι προφανῶς παίγνια καθαρᾶς στρατηγικῆς.

Ἀντιθέτως τό παίγνιον μέ πίνακα κερδῶν τοῦ Α τόν ἑπόμενον:

Πίναξ κερδῶν τοῦ A

		B					
		σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	min
A	s_1	9	3	1	8	0	0
	s_2	6	5	$\boxed{4}$	6	7	4
	s_3	2	4	3	3	8	2
	s_4	5	6	2	2	1	1
	max	9	6	4	8	8	4

εἶναι ἕνα παίγνιον καθαρᾶς στρατηγικῆς μὲ τιμὴν $v = 4$.

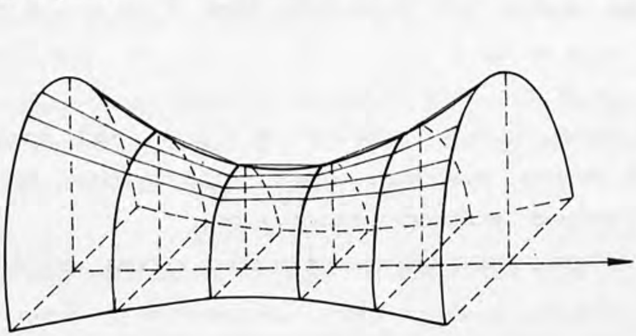
Ὁμοίως τὸ παίγνιον μὲ πίνακα κερδῶν τοῦ A τὸν ἑπόμενον:

Πίναξ κερδῶν τοῦ A

			B		
					min
A	s_1	3	8	$\boxed{2}$	2
	s_2	4	7	$\boxed{2}$	2
		5	1	-4	-4
	max	5	8	2	

εἶναι ἕνα παίγνιον καθαρᾶς στρατηγικῆς, μὲ δύο σαγματικὰ σημεῖα καὶ τιμὴν $v = 2$.

Ὁ ὅρος, σαγματικὸν σημεῖον, προκύπτει ἐκ τῆς ἀντιστοίχου γεωμετρι-



κῆς ἑρμηνείας τῆς γενικευμένης περιπτώσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀντὶ τῶν a_{ij} ὑφίστανται τιμαὶ συναρτήσεως κέρδους $f(x,y)/\Delta \subseteq R^2$.

6.5 ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΙΚΤΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ : Οὕτω καλοῦνται τὰ παίγνια μὲ δύο πρόσωπα καὶ ἄθροισμα κερδῶν μηδέν, τὰ ὁποῖα στεροῦνται σαγματικοῦ σημείου. Τυπικὸν παράδειγμα ἀποτελεῖ τὸ παίγνιον μὲ πίνακα κερδῶν τοῦ Α τὸν ἑπόμενον :

Πίναξ κερδῶν τοῦ Α

		B σ_1	σ_2	σ_3	min
A	s_1	4	-2	5	-2
	s_2	-1	3	1	-1
	max	4	3	5	

Εἰς τὸ παίγνιον αὐτὸ προφανῶς δὲν ὑπάρχει σαγματικὸν σημεῖον.

Οὕτως ἐὰν ὁ παίκτης Α ἀκολουθήσῃ τὴν στρατηγικὴν s_1 μὲ πιθανότητα 25% καὶ τὴν στρατηγικὴν s_2 μὲ πιθανότητα 75%, τότε θὰ ἔχῃ μέσον κέρδος ἀντιστοίχως :

$4\cdot 0{,}25 + (-1)\cdot 0{,}75 = 0{,}25$ ὅταν ὁ Β ἀκολουθῇ τὴν στρατηγικὴν σ_1

$(-2)\cdot 0{,}25 + 3\cdot 0{,}75 = 1{,}75$ ὅταν ὁ Β ἀκολουθῇ τὴν στρατηγικὴν σ_2

$5\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0{,}75 = 2$ ὅταν ὁ Β ἀκολουθῇ τὴν στρατηγικὴν σ_3.

Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος $(0{,}25,\ 0{,}75)$ καλεῖται μία μικτὴ στρατηγικὴ τοῦ παίκτου Α.

Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, ἐὰν ὁ παίκτης Α ἀκολουθήσῃ τὴν στρατηγικὴν s_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ μὲ πιθανότητα x_i, τότε μικτὴ στρατηγικὴ αὐτοῦ καλεῖται ἡ διατεταγμένη m-ας μὴ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m) \text{ μὲ } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Ἀντιστοίχως, ἐὰν ὁ παίκτης Β ἀκολουθήσῃ τὴν στρατηγικὴν σ_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$, μὲ πιθανότητα y_j, τότε μικτὴ στρατηγικὴ αὐτοῦ καλεῖται ἡ διατεταγμένη n-ας μὴ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν $(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)$ μὲ

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Διά τά παίγνια μικτῆς στρατηγικῆς ἰσχύει τό :

6.6 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ NEUMANN: Διά τόν παίκτην Α ὑπάρχει μία ἀρίστη μικτή στρατηγική $(x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots, x_m^\circ)$, διά τήν ὁποίαν τό μέσον κέρδος του εἶναι μεγαλύτερον ἤ ἴσον μιᾶς ποσότητος v (τιμῆς τοῦ παιγνίου).

Διά τόν παίκτην Β ὑπάρχει μία ἀρίστη μικτή στρατηγική $(y_1^\circ, y_2^\circ, \cdots, y_n^\circ)$, διά τήν ὁποίαν ἡ μέση ζημία του εἶναι μικροτέρα ἤ ἴση τῆς v.

Ἐφαρμογή : Ἐάν (x_1, x_2) εἶναι μία μικτή στρατηγική τοῦ παίκτου Α εἰς τό ἀνωτέρω παίγνιον, τότε προκύπτει τό γραμμικόν πρόγραμμα :

Νά εὑρεθῆ :

$$\max v$$

ὑπό τούς περιορισμούς :

$$4x_1 - x_2 \geq v$$
$$-2x_1 + 3x_2 \geq v$$
$$5x_1 + x_2 \geq v$$
$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Πράγματι, ἐάν ὁ παίκτης Α ἀκολουθήσῃ τήν στρατηγικήν s_1 μέ πιθανότητα x_1 καί τήν στρατηγικήν s_2 μέ πιθανότητα x_2, τότε θά ἔχῃ μέσον κέρδος $4 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2$, ἐφ' ὅσον ὁ Β θ' ἀκολουθῇ τήν στρατηγικήν σ_1. Οὕτω προκύπτει ἡ πρώτη ἀνίσωσις τῶν περιορισμῶν, ἐάν v εἶναι ἡ τιμή τοῦ παιγνίου κ.ο.κ.

Ἡ πρώτη τῶν ἀνισώσεων λόγῳ τῆς $x_1 + x_2 = 1$ δίδει :

$$4x_1 - (1 - x_1) \geq v$$
$$5x_1 - v \geq 1 \qquad (1)$$

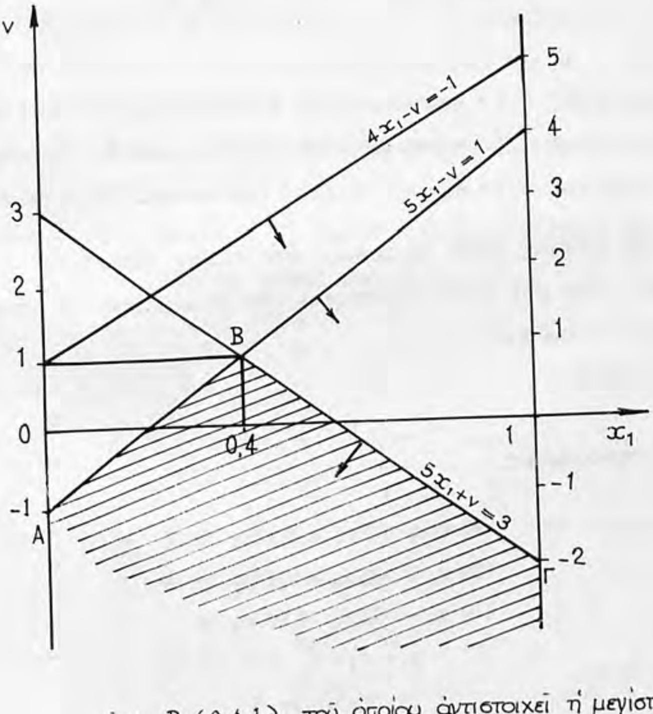
Ὁμοίως ἡ δευτέρα ἀνίσωσις δίδει :

$$-2x_1+3(1-x_1) \geq v$$
$$-5x_1-v \geq -3$$
$$5x_1+v \leq 3 \qquad (2)$$

Τέλος ἡ τρίτη ἀνίσωσις δίδει :

$$5x_1+(1-x_1) \geq v$$
$$4x_1-v \geq -1 \qquad (3)$$

Ἤδη αἱ ἀνισώσεις *) (1), (2), (3) ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων x_1, v τὸ κατωτέρω (γραμμοσκιασμένον) κυρτὸν ὑποσύνολον αὐτοῦ :



εἰς τὸ ἀκραῖον σημεῖον B (0,4,1), τοῦ ὁποίου ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγίστη τιμὴ

*) Π.χ. ἡ $5x_1-v \geq 1$ ὁρίζει τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν $5x_1-v=1$ καὶ δὲν περιέχει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.

τοῦ v, μὲ v = 1 καὶ $x_1^\circ = 0{,}4$ ὅτε $x_2^\circ = 0{,}6$.

῾Η ἑπομένη ἐφαρμογὴ ἀναφέρεται εἰς :

6.7 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΝ ΠΑΙΓΝΙΟΝ : Ἔστω ὅτι ὁ ἀνταγωνισμὸς μεταξὺ δύο ἐπιχειρήσεων A καὶ B δίδει πίνακα πωλήσεων διὰ τὴν A τὸν ἑπόμενον :

Πίναξ πωλήσεων τῆς A

		B			
		σ_1	σ_2	σ_3	min
	s_1	90	100	110	90
A	s_2	110	100	90	90
	s_3	120	100	80	80
	max	120	100	110	

ἔνθα :

s_1 (ἀντιστοίχως σ_1) ἡ στρατηγικὴ τῆς A (ἀντιστοίχως B): αὔξησις τιμῶν

s_2 (ἀντιστοίχως σ_2) ἡ στρατηγικὴ τῆς A (ἀντιστοίχως B): διατήρησις τιμῶν

s_3 (ἀντιστοίχως σ'_3) ἡ στρατηγικὴ τῆς A (ἀντιστοίχως B) : πτῶσις τιμῶν.

Εἰς τὸ παίγνιον αὐτὸ προφανῶς δὲν ὑπάρχει σαγματικὸν σημεῖον. Ἐὰν (x_1, x_2, x_3) εἶναι μία μικτὴ στρατηγικὴ τῆς ἐπιχειρήσεως A τότε προκύπτει τὸ γραμμικὸν πρόγραμμα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\max v$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\begin{aligned} 90\,x_1 + 110\,x_2 + 120\,x_3 &\geq v \\ 100\,x_1 + 100\,x_2 + 100\,x_3 &\geq v \\ 110\,x_1 + 90\,x_2 + 80\,x_3 &\geq v \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Πράγματι, ἐὰν ἡ ἐπιχείρησις A ἀκολουθήσῃ τὴν στρατηγικὴν s_1, μὲ πιθανότητα x_1, τὴν στρατηγικὴν s_2 μὲ πιθανότητα x_2, καὶ τὴν στρατηγικὴν μὲ πιθανότητα x_3, τότε θὰ ἔχῃ μέσον ἀριθμὸν πωλήσεων $90x_1+100x_2+120x_3$ ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιχείρησις Β θ' ἀκολουθῇ τὴν στρατηγικὴν σ_1. Οὕτω προκύπτει ἡ πρώτη ἀνίσωσις τῶν περιορισμῶν, ἐὰν v εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ παιγνίου.

Μία ἀρίστη λύσις τοῦ ἀνωτέρω προγράμματος δηλ. μία ἀρίστη μικτὴ στρατηγικὴ εἶναι ἡ *) $x_1^\circ = 0{,}50$, $x_2^\circ = 0{,}50$, $x_3^\circ = 0$ μὲ $v = 100$.

6.8 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

41. Οἱ ἀντίπαλοι Α, Β ἀνακοινώνουν δὶς καὶ συγχρόνως ἀπὸ ἕνα ἀριθμόν. Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἀνακοινωθέντων ἀρτίων εἶναι :

α) 0, 2, 4 τότε ὁ Β πληρώνει εἰς τὸν Α 5 χρηματικὰς μονάδας

β) 1 (ἀντιστοίχως 3) τότε ὁ Α πληρώνει εἰς τὸν Β 3 (ἀντιστοίχως 4) χρηματικὰς μονάδας.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ πίναξ κερδῶν τοῦ παίκτου Α.

42. Νὰ προσδιορισθῇ γραφικῶς ἡ ἀρίστη μικτὴ στρατηγικὴ τοῦ παίκτου Α ὅταν ὁ πίναξ κερδῶν αὐτοῦ εἶναι ὁ :

		B		
		σ_1	σ_2	σ_3
A	s_1	-1	5	-3
	s_2	9	-5	17

43. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀρίστη μικτὴ στρατηγικὴ τοῦ παίκτου Α ὅταν ὁ πίναξ κερδῶν αὐτοῦ εἶναι ὁ :

		B		
		σ_1	σ_2	σ_3
A	s_1	6	0	3
	s_2	8	-2	3
	s_3	4	6	5

*) Νὰ ἐπαληθευθῇ.

44. Νά προσδιορισθῇ ἡ ἀρίστη μικτή στρατηγική τοῦ παίκτου Β είς τά παίγνια τῶν ἀνωτέρω δύο ἀσκήσεων.

45. Νά μελετηθῇ τό γινόμενον : $x \cdot A \cdot y$, ἔνθα :

x τό διάνυσμα (γραμμή) τῆς μικτῆς στρατηγικῆς τοῦ παίκτου Α,

Κ ἡ μήτρα τοῦ πίνακος τῶν κερδῶν τοῦ παίκτου Α καί

y τό διάνυσμα (στήλη) τῆς μικτῆς στρατηγικῆς τοῦ παίκτου Β.

ΠΙΝΑΞ ΟΡΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Bellman, R. and Dreyfus, S. : Applied Dynamic Programming. Princeton 1962.
2. Dantzig, G. : Linear programming and extensions. Princeton 1963.
3. Dorfman, R. Samuelson, P, A. and Solow, R, M. : Linear programming and economic analysis. Mc Graw-Hill 1958.
4. Gass, S.I. : Linear programming. Mc Graw-Hill 1958.
5. Hadley, G.F. : Linear programming. Addison-Wesley, 1962.
6. Kaufmann, A. et Gruon, R. : La programmation dynamique. Dunod 1965.
7. Künzi, H. Krelle, W. und Oettli, W. : Nichtlineare Programmierung. Springer-Verlag, 1962.
8. Luce, R. and Raiffa, H. : Games and Decisions. Wiley 1964.
9. Neumann, J. and Morgenstern, O. : Theory of games and Economic Behavior. Princeton. 1944.
10. Simonnard, M. : Programmation Linéaire. Dunod 1962.
11. Vajda, S. : Readings in Mathematical programming. J. Wiley 1958.
12. Vajda, S. : The theory of games and Linear programming. Methuen and Co Ltd. 1956.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΟΝ ΙΙ

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

ΕΙΔΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ