Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Σελ. 69 - 80 , 155 - 176.

ΑΘΗΝΑΙ 1976

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ βιβλίον αὐτό, τὸ ὁποῖον διαφέρει ἐν μέρει ἀπὸ προηγουμένας ἐκδόσεις του, ἔχει χαρακτῆρα σπουδαστικοῦ βοηθήματος διὰ τὴν μελέτην τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ, βασικοῦ τομέως τῶν οἰκονομικοδιοικητικῶν σπουδῶν. Ἡ διδασκαλία τοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τὰς Ἑλληνικὰς Οἰκονομικὰς Σχολὰς παρουσίαζεν ἀρχικῶς σοβαρὰς δυσχερείας λόγῳ τῆς ἐλλείψεως τῆς ἀπαιτουμένης μαθηματικῆς προπαρασκευῆς τῶν σπουδαστῶν. Κατὰ τὴν τελευταίαν ὅμως δεκαετίαν ἐσημειώθη σημαντικὴ πρόοδος διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς συστηματικῆς διδασκαλίας τῆς γραμμικῆς ἀλγέβρας καὶ διὰ τῆς ἐν γένει προσαρμογῆς τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰς ἀνάγκας τῶν ἐν λόγῳ σχολῶν καὶ οὕτω καθίσταται σήμερον οὐσιωδῶς εὐχερεστέρα ἡ διδασκαλία καὶ κατανόησις τῶν γενικῶν ἀρχῶν καὶ τῆς τεχνικῆς τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἀπαιτεῖται ἐντούτοις πληρέστερος συντονισμὸς μεταξὺ μαθηματικῶν καὶ οἰκονομολόγων ὅσον ἀφορᾷ τὴν διδακτέαν ὕλην τῶν μαθηματικῶν, πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως. Εἰς τινας περιπτώσεις παρανοεῖται ἡ βασικὴ ἀρχὴ ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἰς τὰς οἰκονομικοδιοικητικὰς σχολὰς ἀποτελοῦν ἁπλῶς βοηθητικὸν ὄργανον ἀναλύσεως διὰ τοὺς οἰκονομολόγους καὶ ὄχι αὐτοσκοπόν, ὡς συμβαίνει εἰς τὰς μαθηματικὰς σχολάς. Κατὰ συνέπειαν ἡ ἐπέκτασις τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν, πέραν τῶν ὁρίων τὰ ὁποῖα θέτει ἡ δεοντολογία τῆς διδασκαλίας τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ τῶν ἄλλων τεχνικῶν οἰκονομικῶν μαθημάτων, ἐπιφέρει ἀνεπίτρεπτον μετατόπισιν τοῦ κέντρου βάρους τῶν σπουδῶν. Τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει βεβαίως νὰ ἀντιμετωπισθῇ διὰ τῆς μελέτης τοῦ γενικοῦ προγράμματος σπουδῶν τῶν ἐνδιαφερομένων σχολῶν.

Μολονότι τὸ παρὸν βιβλίον ἔχει κυρίως χαρακτῆρα σπουδαστικοῦ βοηθήματος, δυναμένου ἴσως νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ εἰς ἕνα εἰσαγωγικὸν κύκλον μεταπτυχιακῶν σπουδῶν, περιλαμβάνει ἐν τούτοις καὶ ὡρισμένα πορίσματα ἐργασιῶν τοῦ ὑποφαινομένου ἀναφορικῶς πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως, τὰ πολλαπλᾶ κριτήρια ἐπιλογῆς καὶ γενικῶς τὴν θεωρίαν τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ. Εἰς τὸ 4ον κεφάλαιον, εἰδικώτερον, ἐπιχειρεῖται μία θεωρητικὴ γενίκευσις τοῦ ἀντικειμένου ἐρεύνης τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἡ βασικὴ σκέψις ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται καὶ ἡ διάταξις τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου, εἶναι ὅτι πάντα τὰ προβλήματα τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι προβλήματα ἐπιλογῆς, δυνάμενα νὰ καταταγοῦν εἰς δύο κατηγορίας: α) Εἰς προβλήματα οἰκονομικῆς καὶ λειτουργικῆς συνεπείας, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναζητοῦνται λύσεις πραγματοποιήσιμοι ἀπὸ ἀπόψεως διαθεσίμων πόρων καὶ συνθηκῶν λειτουργίας τῶν ἐξεταζομένων οἰκονομικῶν μονάδων. β) Εἰς προβλήματα ἀριστοποιήσεως, εἰς τὰ ὁποῖα ἐπιδιώκεται ἐπὶ πλέον ἡ ἐξεύρεσις οἰκονομικῶς ἀρίστης λύσεως. Κατὰ τὴν διάταξιν τῆς ὕλης δὲν ἐθεωρήθη ἀναγκαῖος ὁ διαχωρισμὸς μεταξὺ μικροοικονομικῶν καὶ μακροοικονομικῶν προβλημάτων προγραμματισμοῦ, ἤτοι προβλημάτων ἀφορώντων εἰς τὸν προγραμματισμὸν τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, δεδομένου ὅτι ἐκ τῆς ἐξετάσεως ἑκάστης μεθόδου καθίστανται σαφεῖς αἱ δυνατότητες ἐφαρμογῆς αὐτῆς εἰς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην κατηγορίαν προβλημάτων.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰδικώτερον τὸν προγραμματισμὸν οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ἡ ἔμφασις κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν σχετικῶν προβλημάτων τίθεται ἐπὶ τῶν πραγματικῶν μεγεθῶν, ἀνεξαρτήτως ἂν ταῦτα διὰ λόγους στατιστικῆς παρακολουθήσεως ἐκφράζωνται εἰς νομισματικὰς μονάδας. Τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον διὰ τὴν κατανόησιν τῆς οὐσίας τῶν προβλημάτων προγραμματισμοῦ οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως καὶ πρὸς ἀποφυγὴν τῆς συγχύσεως μεταξὺ κυρίων καὶ δευτερευόντων χαρακτηριστικῶν τῶν ὡς ἄνω προβλημάτων, ὡς εἶναι π.χ. τὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ νομισματικοπιστωτικοῦ ἐποικοδομήματος. Δυστυχῶς, παρ' ἡμῖν ἡ οἰκονομικὴ σκέψις δεσπόζεται ἀπὸ ἕνα μυωπικὸν νομισματικὸν δογματισμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει πολλάκις ὡς συνέπειαν νὰ προτάσσωνται, εἰς τὴν κλίμακα ἀξιολογήσεως τῶν προτεινομένων διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν μέτρων, νομισματικῆς καὶ πιστωτικῆς φύσεως μέτρα, σχέσιν ἔχοντα μὲ τὰς καταθέσεις, τὰ ἐπιτόκια, τὰς πιστώσεις, τὴν χρηματιστηριακὴν ἀγορὰν κλπ. Εἶχε πολὺ δίκαιον πράγματι ὁ καθηγητὴς R. Frisch ὅταν ἔγραφεν: «Ὅστις προσπαθεῖ νὰ ἐξετάσῃ τὸ πρόβλημα τοῦ οἰκονομικοῦ σχεδιασμοῦ ἀρχίζων νὰ ὁμιλῇ περὶ νομισματικῆς κυκλοφορίας, ἐπιτοκίων καὶ τὰ τοιαῦτα, ἀποδεικνύει ἐξ αὐτοῦ τοῦ γεγονότος ὅτι δὲν ἀντιλαμβάνεται καθόλου τὸ πρόβλημα. Ἡ κρίσις αὕτη δυνατὸν νὰ φαίνεται αὐστηρά, ἀλλὰ τόσοι ἀδέξιοι χειρισμοὶ τῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων ἔχουν προέλθει ἀπὸ τὸν νομισματικὸν τρόπον τοῦ σκέπτεσθαι, ὥστε πρέπει νὰ εἶμαι ἐντελῶς σαφὴς ἐπὶ τοῦ σημείου αὐτοῦ».

Ὡς εἶναι φυσικόν, ἰδιαιτέρως ἐξετάζονται ἐνταῦθα αἱ κλασικαὶ πλέον μέθοδοι προγραμματισμοῦ, ἤτοι ἡ Ἀνάλυσις Εἰσροῶν-Ἐκροῶν καὶ ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμος. Ἐξετάζεται ἐπίσης ἀναλυτικῶς ἡ τεχνικὴ τῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν (shadow prices), ἡ ὁποία δικαίως θεωρεῖται ἓν ἐκ τῶν σπουδαιοτέρων ἐπιτευγμάτων τῆς θεωρίας τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ. Εἰς ἓν ἐγχειρίδιον εἰσαγωγικοῦ κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον χαρακτῆρος, ὡς εἶναι τὸ παρόν, δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ ἐξετασθοῦν ὅλα τὰ ζητήματα θεωρίας καὶ τεχνικῆς τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ. Οὕτω, δὲν ἐπεχειρήθη ἡ ἐξέτασις διαφόρων προεκτάσεων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἢ ἡ παρουσίασις εἰδικῶν τομέων ἐρεύνης, ὡς εἶναι, π.χ., ὁ Προγραμματισμὸς κατ' Ἀκεραίας Μονάδας

(Integer Programming), ὁ Μή-Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς (Non-Linear Programming), ὁ Δυναμικὸς Προγραμματισμός, τὸ Ὑπόδειγμα τοῦ προβλήματος τῆς Μεταφορᾶς (Transportation Model) κλπ. Νομίζομεν ὅτι τὰ θέματα ταῦτα πρέπει νὰ ἐξετάζωνται εἰς ἕνα κύκλον μεταπτυχιακῶν σπουδῶν, ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν διεγαγωγὴν συστηματικῆς ἐργασίας διὰ τὴν δοκιμαστικὴν ἐφαρμογὴν τῶν διαφόρων μεθόδων εἰς συγκεκριμένα προβλήματα. Ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς ἐπανεκδόσεως τοῦ βιβλίου, ἐπεχειρήθη ἡ ἐν μέρει τοὐλάχιστον κάλυψις τοῦ θέματος τῆς ἐπιλογῆς σχεδίων ἐπενδύσεως (κεφ. 16). Ἡ ἱκανοποιητικὴ διαπραγμάτευσις τοῦ σημαντικοῦ αὐτοῦ τομέως τοῦ προγραμματισμοῦ ἀπαιτεῖ εἰδικὸν τόμον μὲ θέμα τὴν ἀνάλυσιν καὶ ἀξιολόγησιν τῶν σχεδίων ἐπενδύσεως, τόσον ἀπὸ ἰδιωτικοοικονομικῆς ὅσον καὶ ἀπὸ κοινωνικοοικονομικῆς ἀπόψεως.

Ἀθῆναι, Ἰανουάριος 1976.

Α.Α. Λάζαρης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΙΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1

Γενικά

1.1. Ἡ ἀνεπάρκεια τῶν μέσων ἱκανοποιήσεως τῶν ἀνθρωπίνων ἀναγκῶν ἐπιβάλλει τὴν ἐφαρμογὴν ὀρθολογικῆς τινος διαδικασίας κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἑκάστοτε διαθεσίμων ποσοτήτων ἐκ τῶν μέσων αὐτῶν. Ὁ Οἰκονομικὸς Προγραμματισμὸς ἀναφέρεται εἰς τὸ σύνολον τῶν οἰκονομικῶν σκέψεων αἱ ὁποῖαι καθορίζουν τὴν μορφὴν τῆς ὀρθολογικῆς αὐτῆς διαδικασίας, ἤτοι τὸν τρόπον ***κατανομῆς*** τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ μέσων πρὸς ἐπίτευξιν διαφόρων οἰκονομικῶν σκοπῶν. Συνεπῶς ὁ Οἰκονομικὸς Προγραμματισμὸς δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ὁ κλάδος τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης ὁ ἀφορῶν εἰς ***τὴν σπουδὴν καὶ συστηματοποίησιν τῆς διαδικασίας καταστρώσεως τοῦ σχεδίου δράσεως*** τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν μονάδων.

Ἡ προσπάθεια ὀρθολογικῆς ἀξιοποιήσεως τῶν διαθεσίμων πόρων εἶναι θεμελιῶδες φαινόμενον τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς, δύναται δὲ νὰ λεχθῇ ὅτι κατ' ἀρχὴν πᾶσαι αἱ οἰκονομικαὶ μονάδες, ἀνεξαρτήτως σκοποῦ καὶ μεγέθους, ***προγραμματίζουν***, δηλαδὴ ἐπιδιώκουν νὰ ἐξεύρουν λύσεις αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον εἰς τὴν ἐπίτευξιν τῶν τιθεμένων οἰκονομικῶν σκοπῶν.

1.2. Εἰδικώτερον ὁ Οἰκονομικὸς Προγραμματισμὸς ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὴν ἐξέτασιν καὶ ἐπίλυσιν (1) ***προβλημάτων οἰκονομικῆς ἐπιλογῆς***. Τὰ προβλήματα ταῦτα χαρακτηρίζονται ἀπὸ δύο βασικὰ γνωρίσματα: ***Πρῶτον***, ἐπιδέχονται περισσοτέρας τῆς μιᾶς (τοὐλάχιστον δύο) λύσεις. ***Δεύτερον***, περιλαμβάνουν εἰς τὴν διατύπωσίν των εἰδικὴν σχέσιν (ἢ σχέσεις) βάσει τῆς ὁποίας προσδιορίζονται ἐκ τοῦ συνόλου τῶν λύσεων μία ἢ περισσότεραι λύσεις ἱκανοποιοῦσαι τὴν σχέσιν ταύτην. Αἱ οὕτω προσδιοριζόμεναι λύσεις ἀποτελοῦν τὰς πλέον σημαντικὰς ἢ τὰς μόνας σημαντικὰς λύσεις, ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς οἰκονομικῆς ἀρχῆς ἡ ὁποία ἐνδιαφέρεται διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ δεδομένου προβλήματος ἐπιλογῆς.

Τὰ δύο ὡς ἄνω γνωρίσματα τῶν προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ ἀποτελοῦν, ἐξ ἄλλης ἀπόψεως, τὰς συνθήκας ὑπάρξεως τῆς οἰκονομικῆς ἐπιλογῆς. Ἡ πολλαπλότης τῶν λύσεων εἶναι ἀναγκαία συνθήκη ἐπιλογῆς, καθ' ὅσον ἐπιλογὴ δὲν νοεῖται εἰς περίπτωσιν ὑπάρ-

---

1) Ὡς «ἐπίλυσις» προβλήματος νοεῖται ἐνταῦθα ἡ διαδικασία προσδιορισμοῦ τῆς λύσεως ἢ τῶν λύσεων τοῦ ἐν λόγῳ προβλήματος.

ξεως μιᾶς καὶ μόνης λύσεως. Ἀλλ' ἡ συνθήκη αὕτη δὲν εἶναι ἐπαρκής. Διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς ἐπιλογῆς ἀπαιτεῖται ὁ προσδιορισμὸς (διαχωρισμὸς) μιᾶς ἢ περισσοτέρων λύσεων ἱκανοποιουσῶν ὡρισμένην σχέσιν, ἤτοι ἀπαιτεῖται ἡ ὕπαρξις ἑνὸς *κριτηρίου ἐπιλογῆς*. Τὸ κριτήριον ἐπιλογῆς ἀποτελεῖ ἐπίσης ἀναγκαίαν ἀλλ' οὐχὶ ἐπαρκῆ συνθήκην ἐπιλογῆς, καθ' ὅσον τοῦτο δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ παρὰ μόνον ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τῆς πολλαπλότητος τῶν λύσεων. Κατὰ συνέπειαν ἀμφότεραι αἱ συνθῆκαι εἶναι ἀναγκαῖαι καὶ ἐπαρκεῖς ἀπὸ ἀπόψεως ἐπιλογῆς μόνον ὅταν συνυπάρχουν.

1.3. Τὰ προβλήματα οἰκονομικῆς ἐπιλογῆς εἶναι δυνατὸν νὰ καταταγοῦν εἰς δύο γενικὰς κατηγορίας, ἤτοι εἰς προβλήματα *ἁπλῆς συνεπείας* καὶ εἰς προβλήματα *ἀριστοποιήσεως*. Τὰ προβλήματα τῆς πρώτης κατηγορίας ἀφοροῦν εἰς τὸν προσδιορισμὸν λύσεων αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς *πραγματοποιήσιμοι* ἀπὸ τριῶν ἀπόψεων: α) ἀπὸ ἀπόψεως σημείων τῶν μεταβλητῶν τὰς ὁποίας περιλαμβάνουν, β) ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικῶν δυνατοτήτων τῶν παραγωγικῶν μονάδων εἰς τὰς ὁποίας ἀναφέρονται καὶ γ) ἀπὸ ἀπόψεως συνθηκῶν λειτουργίας (ἰδίᾳ τεχνολογικῶν συνθηκῶν) τῶν ἐν λόγῳ παραγωγικῶν μονάδων. Εἰδικωτέρα ἀνάλυσις ἀκολουθεῖ εἰς τὰς ἑπομένας παραγράφους. Τὰ προβλήματα τῆς δευτέρας κατηγορίας ἀφοροῦν εἰς τὸν προσδιορισμὸν πραγματοποιησίμων λύσεων αἱ ὁποῖαι ταυτοχρόνως μεγιστοποιοῦν ἢ ἐλαχιστοποιοῦν δοθεῖσαν συνάρτησιν ὠφελιμότητος ἢ κόστους, ἀντιστοίχως.

1.4. Γενικῶς, μία λύσις δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς πραγματοποιήσιμος ἀπὸ ἀπόψεως σημείων τῶν μεταβλητῶν, ἂν τὰ ὑπ' αὐτῆς προσδιοριζόμενα οἰκονομικὰ μεγέθη λαμβάνουν τιμὰς συμβιβαζομένας μὲ τὴν φύσιν των. Οὕτω, π.χ., δὲν εἶναι οἰκονομικῶς δυνατὴ μία λύσις ἡ ὁποία προσδιορίζει ἀρνητικὰ ἐπίπεδα δραστηριότητος διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα δύνανται νὰ εἶναι θετικά, ἂν οἱ ἀντίστοιχοι κλάδοι λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγήν, ἢ μηδενικά, ἂν οὗτοι δὲν λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγήν. Ἀρνητικὴ χρησιμοποίησις ἑνὸς κλάδου δὲν εἶναι νοητή. Κατ' ἀντιστοιχίαν καὶ ὑφ' ὡρισμένας προϋποθέσεις δὲν εἶναι ἐπίσης νοητὴ ἀρνητικὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων τῶν διαφόρων συντελεστῶν παραγωγῆς (1).

Αἱ συνεπεῖς πρὸς τὴν φύσιν τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν λύσεις δύνανται νὰ χαρακτηρισθοῦν ἐπίσης καὶ ὡς *οἰκονομικῶς σημαντικαί*. Ὁ διαχωρισμὸς (ἐπιλογὴ) τῶν οἰκονομικῶς σημαντικῶν λύσεων ἀπὸ

1) Ἐξαιρέσει τῶν περιπτώσεων καθ' ἃς ἡ παραγωγὴ ὄχι μόνον δὲν συνεπάγεται ἀνάλωσιν ὡρισμένων συντελεστῶν, ἀλλ' ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴν περαιτέρω αὔξησιν τῆς ἀρχικῆς ποσότητος αὐτῶν.

τὰς μὴ οἰκονομικῶς σημαντικὰς λύσεις δύναται νὰ πραγματοποιηθῇ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς καταλλήλου *κριτηρίου σημαντικότητος*.

1.5. Λύσις πραγματοποιήσιμος ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικῶν δυνατοτήτων ἤ, ἐν συντομίᾳ, οἰκονομικῶς δυνατή, καλεῖται πᾶσα λύσις δυναμένη νὰ ὑποστηριχθῇ πλήρως ὑπὸ τῶν διαθεσίμων πόρων τῆς οἰκονομικῆς μονάδος. Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι ἔχουν προσδιορισθῆ, κατόπιν ὑπολογισμοῦ, αἱ ποσότητες συντελεστῶν αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν παραγωγὴν δεδομένης ποσότητος ἐξ ἑνὸς ἀγαθοῦ ω. Ἂν δοθεῖσα οἰκονομικὴ μονὰς δύναται νὰ διαθέσῃ τὰς ποσότητας ταύτας, λέγομεν ὅτι ἡ λύσις ἡ ἀναφερομένη εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐν λόγῳ ποσοτήτων εἶναι *οἰκονομικῶς δυνατή*, ὡς πρὸς τὴν ὑπ' ὄψιν οἰκονομικὴν μονάδα. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν ἡ λύσις χαρακτηρίζεται ὡς *μὴ δυνατὴ οἰκονομικῶς*. Ἡ ἐπιλογὴ τῶν οἰκονομικῶς δυνατῶν λύσεων ἀπὸ τὰς μὴ οἰκονομικῶς δυνατὰς τοιαύτας προϋποθέτει τὴν χρησιμοποίησιν εἰδικοῦ κριτηρίου ἐπιλογῆς. Τὸ κριτήριον τοῦτο ἐξασφαλίζει τὴν συνέπειαν τῶν λύσεων πρὸς τὰς ὑφισταμένας οἰκονομικὰς δυνατότητας.

Αἱ οἰκονομικῶς δυναταὶ λύσεις εἶναι ταυτοχρόνως καὶ οἰκονομικῶς σημαντικαί. Ἑπομένως ἡ ἐξασφάλισις τοῦ οἰκονομικῶς πραγματοποιησίμου μιᾶς λύσεως συνεπάγεται καὶ ἐξασφάλισιν τῆς οἰκονομικῆς σημαντικότητος αὐτῆς.

1.6. *Λειτουργικῶς πραγματοποιήσιμος* δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ μία λύσις ἂν αὐτὴ εὑρίσκεται εἰς συνέπειαν μὲ τὰς συνθήκας διαρθρώσεως καὶ λειτουργίας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται. Ἔστω, π.χ., ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω χρησιμοποιεῖται μία ἀποκλειστικὴ παραγωγικὴ μέθοδος, συνεπαγομένη τὴν ἀνάλωσιν 3 μονάδων ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α καὶ 2 μονάδων ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Β. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὁ συνδυασμὸς 3 μονάδες Α καὶ 1 μονὰς Β δὲν δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς τεχνολογικῶς πραγματοποιήσιμος λύσις, ὅσον ἀφορᾷ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἐνδιαφερόμεθα εἰδικώτερον διὰ τὴν τεχνολογικὴν συνέπειαν τῆς λύσεως. Αἱ τεχνολογικῶς δυναταὶ λύσεις δύνανται προφανῶς νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς λειτουργικῶς δυναταὶ λύσεις, δεδομένου ὅτι αἱ συνθῆκαι λειτουργίας τῶν οἰκονομικῶν μονάδων εἶναι στενῶς συνυφασμέναι μὲ τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας αὐτῶν. Δυνατὸν βεβαίως ἡ λειτουργικὴ συνέπεια τῶν λύσεων νὰ ἀναφέρεται εἰς μὴ τεχνολογικὰ χαρακτηριστικὰ ἢ τουλάχιστον εἰς μὴ ἀμιγῶς τεχνολογικὰ χαρακτηριστικὰ τῶν οἰκονομικῶν μονάδων. Οὕτω, ἂν ὡς οἰκονομικὴ μονὰς θεωρηθῇ ὁλόκληρος ἡ ἐθνικὴ οἰκονομία μιᾶς χώρας, εἰς τὰ σχετικὰ προβλήματα προγραμματισμοῦ δυνατὸν νὰ ὑπεισέρχωνται διάφοροι συντελεσταὶ οἱ ὁποῖοι δὲν δύνανται νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς τεχνολογικῆς φύσεως, ὑπὸ τὴν συνήθη ἔννοιαν τοῦ ὅρου, ὡς εἶναι, π.χ., ἡ «ροπὴ πρὸς κατανάλωσιν» (1) καὶ ἡ συμπληρωματικὴ πρὸς αὐτὴν «ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν» (2). Ὁ διαχωρισμὸς τῶν λειτουργικῶς δυνατῶν λύσεων ἀπὸ τὰς μὴ λειτουργικῶς δυνατὰς τοιαύτας γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει κριτηρίου ἐπιλογῆς ἀναφερομένου εἰς τὰ πλέον σημαντικὰ λειτουργικὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ ὑπ' ὄψιν οἰκονομικοῦ συστήματος. Αἱ λειτουργικῶς δυναταὶ λύσεις εἶναι προφανῶς καὶ οἰκονομικῶς σημαντικαὶ καὶ κατὰ συνέπειαν, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, δὲν ἀπαιτεῖται ἔλεγχος τῆς οἰκονομικῆς σημαντικότητος τῶν λύσεων.

1.7. Ἡ δευτέρα κατηγορία τῶν προβλημάτων ἐπιλογῆς περιλαμβάνει, ὡς ἤδη ἐλέχθη, προβλήματα ἀριστοποιήσεως, τὰ ὁποῖα ἀφοροῦν εἰς τὸν προσδιορισμὸν πραγματοποιησίμων (οἰκονομικῶς καὶ λειτουργικῶς) λύσεων πληρουσῶν ταὐτοχρόνως ὡρισμένα κριτήρια μεγιστοποιήσεως οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος ἢ ἐλαχιστοποιήσεως οἰκονομικῆς θυσίας. Θὰ διακρίνωμεν ἐνταῦθα δύο εἰδικὰς ἐννοίας ἀριστοποιήσεως: τὴν *προαριστοποίησιν* καὶ τὴν *γνησίαν ἀριστοποίησιν*. Ἡ πρώτη ἀφορᾷ εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν καλουμένων *ἀποδοτικῶν συνδυασμῶν* καὶ ἔχει συνήθως περιωρισμένην ἐφαρμογήν, ὡς διευκρινίζεται διὰ τοῦ ἀκολούθου παραδείγματος. Ἔστω ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος ἑνὸς ἀγαθοῦ ω εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραγωγικαὶ μέθοδοι, χαρακτηριζόμεναι ἀπὸ τὰς ὑφ' ἑκάστης χρησιμοποιουμένας ποσότητας συντελεστῶν παραγωγῆς Α καὶ Β:

	Μέθοδοι παραγωγῆς τοῦ ω							
	Ὁμὰς 1η				Ὁμὰς 2α			
	α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η
Ποσότης συντελ. Α	3	4	3	5	2	2,5	2	2,5
» » Β	2	2	3	3	2,5	2,5	3	4

Ἄς ἐξετάσωμεν πρῶτον τὰς μεθόδους α–δ. Ἐξ ἁπλῆς παρατηρήσεως συμπεραίνομεν ὅτι ἡ μέθοδος α εἶναι οἰκονομικωτέρα τῆς μεθόδου β, καθ' ὅσον ἡ πρώτη χρησιμοποιεῖ μίαν μονάδα ὀλιγωτέραν ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α καὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Β, διὰ τὴν παρα-

1) Ἤτοι τὸ καταναλισκόμενον ποσοστὸν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος.

2) Ἐν τούτοις ἡ ροπὴ πρὸς κατανάλωσιν καὶ (συνεπῶς) ἡ ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν χαρακτηρίζονται ἐνίοτε ὡς τεχνολογικαὶ παράμετροι, ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν, καθ' ὅσον τὰ καταναλισκόμενα ἀγαθὰ εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθοῦν ὡς «συντελεσταὶ παραγωγῆς» ἐργατικῆς δυνάμεως.

γωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω. Ἐπίσης ἡ α εἶναι προτιμητέα τῆς γ, καθ' ὅσον ἡ τελευταία χρησιμοποιεῖ μὲν τόσας μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α ὅσας καὶ ἡ α, ἀλλ' ἀπαιτεῖ μίαν μονάδα περισσοτέραν ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Β. Ἡ α τέλος εἶναι οἰκονομικωτέρα τῆς δ, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖ περισσοτέρας ποσότητας καὶ ἐκ τῶν δύο συντελεστῶν. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ α εἶναι *ἡ ἀρίστη* μέθοδος παραγωγῆς τοῦ ἀγαθοῦ ω, ὡς πρὸς τὰς λοιπὰς μεθόδους τῆς πρώτης ὁμάδος, καθ' ὅσον ἐν συγκρίσει πρὸς αὐτὰς ἀπαιτεῖ *ὀλιγωτέραν ποσότητα ἐκ τοῦ ἑνὸς συντελεστοῦ ἢ ἐκ τοῦ ἑτέρου ἢ καὶ ἐκ τῶν δύο ταυτοχρόνως καὶ οὐχὶ περισσοτέραν ἐξ οὐδενός*. Ἡ ὑπογραμμιζομένη ἔκφρασις ἀποτελεῖ τὴν διατύπωσιν ἑνὸς κριτηρίου ἀποδοτικῶν συνδυασμῶν, χρησιμοποιουμένου συνήθως εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν καὶ τὸν προγραμματισμόν. Ἐκ τῆς ἐξετάσεως κατ' ἀνάλογον τρόπον τῶν μεθόδων παραγωγῆς τῆς δευτέρας ὁμάδος, καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ μέθοδος ε εἶναι ἡ οἰκονομικωτέρα ἐξ αὐτῶν ἀπὸ ἀπόψεως ἀπαιτουμένων ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν Α καὶ Β.

Ἡ ἐπιλογὴ τῆς μεθόδου α ἐκ τῆς πρώτης ὁμάδος καὶ τῆς μεθόδου ε ἐκ τῆς δευτέρας ὁμάδος ἀποτελεῖ πρᾶξιν ἀριστοποιήσεως. Μολονότι δὲν γνωρίζομεν τὰς τιμὰς τῶν συντελεστῶν Α καὶ Β, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ κόστος παραγωγῆς τοῦ ἀγαθοῦ ω εἰς νομισματικὰς μονάδας βάσει τῆς μεθόδου α καὶ τῆς μεθόδου ε, δυνάμεθα, ἐκ μόνης τῆς ἀνωτέρω συγκρίσεως (καὶ ὑποθέτοντες ὅτι οἱ συντελεσταὶ Α καὶ Β δὲν εἶναι ἐλεύθερα ἀγαθά, ἤτοι ἔχουν θετικὰς τιμάς), νὰ ἀποφανθῶμεν μετὰ βεβαιότητος ὅτι ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω μεθόδων εἶναι ἀρίστη συγκρινομένη πρὸς τὰς λοιπὰς μεθόδους τῆς ὁμάδος εἰς ἣν ἀνήκει. Τὴν διαδικασίαν ταύτην ἀμέσου συγκρίσεως καλοῦμεν *προαριστοποίησιν*.

Ἀλλ' ἤδη τίθεται τὸ ἐρώτημα: Ποίαν ἐκ τῶν δύο ὡς ἄνω ἐπιλεγεισῶν μεθόδων πρέπει τελικῶς νὰ προτιμήσωμεν διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἀγαθοῦ ω; Καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ ἐφαρμοσθεῖσα προηγουμένως διαδικασία συγκρίσεως δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐν προκειμένῳ, καθ' ὅσον ἡ μὲν μέθοδος α εἶναι οἰκονομικωτέρα τῆς μεθόδου ε ὡς πρὸς τὴν κατανάλωσιν τοῦ συντελεστοῦ Β, ἡ δὲ ε εἶναι οἰκονομικωτέρα τῆς α ὡς πρὸς τὴν κατανάλωσιν τοῦ συντελεστοῦ Α. Οὕτω, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἄμεσος σύγκρισις τῶν παραγωγικῶν μεθόδων πρὸς ἐπιλογὴν τῆς ἀποδοτικωτέρας δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις.

1.8. Ἐρχόμεθα ἤδη εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς *γνησίας ἀριστοποιήσεως*. Ἂς ἐξετάσωμεν ἐκ νέου τὰς δύο μεθόδους α καὶ ε, ὑποθέτοντες ὅτι εἶναι γνωσταὶ αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν Α καὶ Β, ἔστω τ_1 καὶ τ_2, ἀντιστοίχως. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ συνολικὸν κόστος παραγωγῆς τοῦ ἀγαθοῦ ω θὰ εἶναι:

βάσει τῆς μεθόδου α : $3\tau_1 + 2\tau_2$

» » » ε : $2\tau_1 + 2{,}5\,\tau_2$

Κατὰ συνέπειαν ἡ μέθοδος α θὰ εἶναι οἰκονομικωτέρα τῆς ε (καὶ συνεπῶς καὶ τῶν λοιπῶν μεθόδων ἀμφοτέρων τῶν ὁμάδων), ἂν $3\tau_1+2\tau_2<2\tau_1+2{,}5\tau_2$. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν ($: 3\tau_1 + 2\tau_2 > 2\tau_1 + 2{,}5\,\tau_2$) ἡ μέθοδος ε θὰ εἶναι οἰκονομικωτέρα τῆς μεθόδου α. Εἶναι βεβαίως ἐνδεχόμενον νὰ ἔχωμεν: $3\tau_1 + 2\tau_2 = 2\tau_1 + 2{,}5\,\tau_2$, ὁπότε ἀμφότεροι αἱ μέθοδοι εἶναι οἰκονομικῶς ἰσοδύναμοι καὶ ἄριστοι ἔναντι ὅλων τῶν ἄλλων μεθόδων τῶν δύο ὁμάδων. Διὰ τοῦ ἀριθμητικοῦ καθορισμοῦ τῶν τ_1, τ_2 καὶ τῆς ἐκτελέσεως τῶν σημειουμένων πράξεων δεικνύεται ἀμέσως ποία ἐκ τῶν τριῶν περιπτώσεων ἰσχύει.

Προφανῶς ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ἐπιλογῆς τῆς ἀρίστης μεθόδου, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *διαδικασίαν γνησίας ἀριστοποιήσεως*, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ ἄνευ προηγουμένης ἐπιλογῆς τῶν μεθόδων α καὶ ε διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς προαριστοποιήσεως. Πρὸς τοῦτο θὰ ἤρκει ὁ σχηματισμὸς τοῦ κόστους παραγωγῆς τοῦ ω βάσει ἑκάστης μεθόδου καὶ ἡ ἐν συνεχείᾳ ἐπιλογὴ τῆς μεθόδου ἡ ὁποία συνεπάγεται τὸ μικρότερον κόστος. Οὐδεὶς συνεπῶς περιορισμὸς ὑφίσταται εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῆς διαδικασίας γνησίας ἀριστοποιήσεως.

Τὸ ληφθὲν παράδειγμα εἶναι κλασσικὴ περίπτωσις *ἐλαχιστοποιήσεως* κόστους παραγωγῆς. Τὸ κύριον χαρακτηριστικὸν τῶν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως εἶναι ὅτι ἐπιδιώκεται ἡ ἐκτέλεσις *ὡρισμένου* οἰκονομικοῦ ἔργου διὰ τῆς *ἐλαχίστης* δυνατῆς οἰκονομικῆς θυσίας. Ἡ γνησία ἀριστοποίησις, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀλλαχοῦ, ἐφαρμόζεται ἀναλόγως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν *μεγιστοποιήσεως* τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος (π.χ. τοῦ κέρδους ἐπιχειρήσεως). Γενικῶς εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐπιδιώκεται τὸ *μέγιστον* οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα διὰ τῆς ἀρίστης δυνατῆς ἀξιοποιήσεως *δεδομένων* οἰκονομικῶν μέσων.

Πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως, ἡ μὲν προαριστοποίησις θὰ ἀναφέρεται συνήθως ὡς διαδικασία ἐπιλογῆς ἀποδοτικῶν συνδυασμῶν, ἡ δὲ γνησία ἀριστοποίησις θὰ καλεῖται ἁπλῶς ἀριστοποίησις.

1.9. Τὰ ἀνωτέρω (1.3 – 1.8) λεχθέντα δύνανται νὰ συνοψισθοῦν ἐνταῦθα ὡς ἀκολούθως : Τὰ προβλήματα οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ἤτοι τὰ προβλήματα οἰκονομικῆς ἐπιλογῆς, εἶναι δυνατὸν νὰ καταταγοῦν εἰς δύο γενικὰς κατηγορίας. Ἡ πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει προβλήματα τῶν ὁποίων ἡ ἐπίλυσις ἀποσκοπεῖ εἰς τὸν προσδιορισμὸν λύσεων πραγματοποιησίμων ἀπὸ οἰκονομικῆς καὶ λειτουργικῆς ἀπόψεως (1), ἤτοι λύσεων εὑρισκομένων ἐν συνεπείᾳ πρὸς τὰς οἰκονομικὰς

1) Αἱ λύσεις αὗται εἶναι ἐπίσης καὶ οἰκονομικῶς σημαντικαί.

δυνατότητας καὶ τὰς συνθήκας λειτουργίας τῶν οἰκονομικῶν μονάδων εἰς τὰς ὁποίας ἀφοροῦν. Διὰ τοῦτο καὶ προβλήματα (ἁπλῆς) συνεπείας (1) καλοῦνται. Συνοπτικῶς θὰ λέγωμεν ὅτι εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα ἐπιζητοῦνται λύσεις πληροῦσαι *τὸ ἀξίωμα τῆς συνεπείας*.

Ἡ δευτέρα κατηγορία περιλαμβάνει προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ἐπιδιώκεται ἡ ἐξεύρεσις συνεπῶν (=πραγματοποιησίμων) λύσεων πληρουσῶν ὅμως ἐπὶ πλέον *τὸ ἀξίωμα τῆς οἰκονομικότητος* (2), ἤτοι τῆς ἐπιτεύξεως τοῦ ἀρίστου οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος, δι' ὃ καὶ προβλήματα ἀριστοποιήσεως καλοῦνται.

1.10. Γενικῶς θὰ ὀνομάζωμεν *πρόγραμμα* πᾶσαν λύσιν ἑνὸς προβλήματος ἐπιλογῆς. Συνάγεται εὐκόλως ὅτι ἓν πρόγραμμα δύναται νὰ εἶναι *πραγματοποιήσιμον* ἢ *μὴ πραγματοποιήσιμον*, ἀναλόγως ἐὰν πληροῖ ἢ ὄχι τὸ ἀξίωμα τῆς συνεπείας. Ἓν πραγματοποιήσιμον πρόγραμμα καλεῖται *ἄριστον πρόγραμμα* ἐὰν ταυτοχρόνως ἱκανοποιῇ καὶ τὸ ἀξίωμα τῆς οἰκονομικότητος.

1.11. Ἡ κατάστρωσις προγράμματος οἰκονομικῆς δράσεως, ἀνταποκρινομένου ἐπιτυχῶς πρὸς τοὺς σκοποὺς καὶ τὰς συνθήκας τῆς προγραμματιζούσης οἰκονομικῆς μονάδος, ἐξαρτᾶται ἀπὸ πλείστους παράγοντας. Μεταξὺ τῶν παραγόντων αὐτῶν ἡ μέθοδος ὑπολογισμοῦ τοῦ προγράμματος ἐπέχει ἰδιαιτέραν σημασίαν (3).

Βασικῆς σημασίας διὰ τὴν ἐπιλογὴν τῆς καταλλήλου μεθόδου προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ ἐξακρίβωσις *τῆς μορφῆς τῆς οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως* ἡ ὁποία διέπει τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν σύστημα.

Ὡς γνωστὸν ἡ οἰκονομικὴ ἀλληλεξάρτησις ἀποτελεῖ θεμελιῶδες χαρακτηριστικὸν τῶν οἰκονομικῶν συστημάτων. Αὕτη δύναται νὰ νοηθῇ ὑπὸ τρεῖς κυρίως μορφάς: Ὡς *ἀνταγωνιστικὴ* ἀλληλεξάρτησις, ὡς *συνεργατικὴ* ἀλληλεξάρτησις καὶ ὡς *μικτὴ* ἀλληλεξάρτησις.

1.12. *Ἡ συνεργατικὴ ἀλληλεξάρτησις* εἶναι ἡ κλασσικὴ μορφὴ οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως, τύπου Walras-Cassel, ἡ χαρακτηρίζουσα κυρίως τὰ μακροοικονομικὰ συστήματα, δηλαδὴ τὰ συστήματα τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν. Πρὸς πληρεστέραν κατανόη-

1) Ὁ χαρακτηρισμὸς τῶν προβλημάτων τῆς πρώτης κατηγορίας ὡς προβλημάτων *ἁπλῆς* συνεπείας γίνεται πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὰ προβλήματα τῆς δευτέρας κατηγορίας, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐπίσης προβλήματα συνεπείας, ἐπιπροσθέτως ὅμως ἱκανοποιοῦν καὶ τὸ ἀξίωμα τῆς οἰκονομικότητος.

2) Ἢ ἄλλως καλούμενον «οἰκονομικὸν ἀξίωμα».

3) Ἡ πληρότης καὶ ἀκρίβεια τῶν πληροφοριῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων βασίζεται ὁ ὑπολογισμὸς εἶναι ἐπίσης σημαντικοὶ παράγοντες διὰ τὴν κατάστρωσιν ἐπιτυχοῦς προγράμματος. Οἱ παράγοντες αὐτοὶ – ἐν πολλοῖς στατιστικῆς ἢ λογιστικῆς φύσεως – δὲν ἐξετάζονται ἐνταῦθα.

σιν τῆς μορφῆς ταύτης ἀλληλεξαρτήσεως θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι δοθεῖσα οἰκονομία ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἐπὶ μέρους κλάδους παραγωγῆς, τοὺς Α, Β καὶ Γ, ἕκαστος τῶν ὁποίων παράγει ἓν ὁμοιογενὲς προϊόν. Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα δεικνύονται αἱ ὑποθετικαὶ σχέσεις τῶν κλάδων αὐτῶν.

Πίναξ κατανομῆς προϊόντων

	Α	Β	Γ	Συνολική Ποσότης
Α		30	20	50
Β	40		20	60
Γ	30	10		40

Ὁ πίναξ οὗτος δύναται νὰ ἐξετασθῇ κατὰ σειρὰς ἢ κατὰ στήλας. Ἡ *κατὰ σειρὰς* ἐξέτασις δεικνύει *τί δίδει* ἕκαστος κλάδος εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους, δηλαδὴ τὸν τρόπον κατανομῆς τοῦ συνολικῶς παραχθέντος ἐντὸς τῆς περιόδου προϊόντος ἑκάστου κλάδου μεταξὺ τῶν λοιπῶν κλάδων. Οὕτω, ἡ πρώτη σειρὰ δεικνύει ὅτι ὁ Α κλάδος δίδει προϊὸν 30 μονάδων(1) εἰς τὸν Β καὶ 20 μονάδων εἰς τὸν Γ. Αἱ δύο ἑπόμεναι σειραὶ δεικνύουν τὸν τρόπον κατανομῆς τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τῶν κλάδων Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως. Ἡ ἐξέτασις τοῦ πίνακος *κατὰ στήλας* δεικνύει *τί λαμβάνει* ἕκαστος κλάδος ἀπὸ τοὺς ἄλλους κλάδους, κατὰ τὴν δοθεῖσαν περίοδον, πρὸς παραγωγὴν τοῦ προϊόντος του. Οὕτω, π.χ., ὁ κλάδος Α λαμβάνει (ὡς πρώτας ὕλας κλπ.) 40 μονάδας ἐκ τοῦ προϊόντος τοῦ Β καὶ 30 μονάδας ἐκ τοῦ προϊόντος τοῦ Γ. Αἱ δύο ἑπόμεναι στῆλαι δεικνύουν ἀντιστοίχως τὰς ποσότητας προϊόντων τὰς ὁποίας λαμβάνουν οἱ κλάδοι Β καὶ Γ. Ἐν ἄλλοις λόγοις ὁ πίναξ δεικνύει τὰς *διακλαδικὰς* συναλλαγὰς τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας.

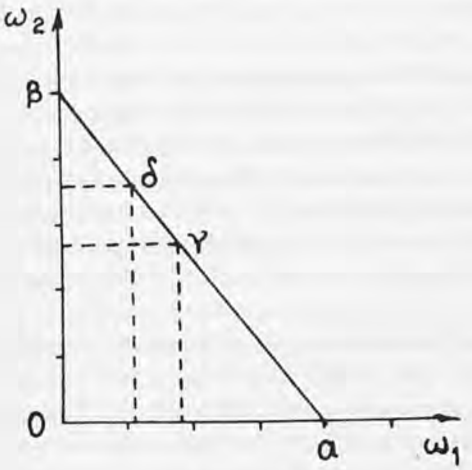
Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τὴν ἑπομένην παραγωγικὴν περίοδον ὁ κλάδος Β πρέπει (ἔστω διὰ τεχνικοὺς λόγους) νὰ λάβῃ περισσοτέραν ποσότητα προϊόντος ἐκ τοῦ κλάδου Α. Προφανῶς τοῦτο θὰ ἀπαιτήσῃ αὔξησιν τῆς συνολικῆς παραγωγῆς τοῦ κλάδου Α. Πρὸς ὑποστήριξιν ὅμως τῆς μεγαλυτέρας παραγωγῆς τοῦ κλάδου Α θὰ ἀπαιτηθῇ ἀντιστοίχως αὔξησις τῶν ὑπ' αὐτοῦ λαμβανομένων ποσοτήτων προϊόντων τῶν ἄλλων κλάδων. Ἀλλ' ἐκ τοῦ λόγου τούτου θὰ προκληθῇ αὔξησις

1) Τὰ προϊόντα μετροῦνται εἰς φυσικὰς μονάδας.

τῆς συνολικῆς παραγωγῆς τῶν κλάδων Β καὶ Γ καὶ συνεπῶς αὔξησις τῶν ὑπὸ τῶν κλάδων αὐτῶν λαμβανομένων προϊόντων ἐκ τῶν ἄλλων κλάδων. Κατὰ συνέπειαν μεταβολὴ ἑνὸς ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος ὁδηγεῖ εἰς μεταβολὴν πάντων τῶν λοιπῶν στοιχείων του. Αἱ μεταβολαὶ αὗται ἀποσκοποῦν εἰς τὴν ὑποστήριξιν τῶν μεταβληθέντων ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν κλάδων. Διὰ τοῦτο ἀκριβῶς λέγομεν ὅτι ὑφίσταται σχέσις συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως μεταξὺ τῶν κλάδων αὐτῶν.

Τὰ προβλήματα προγραμματισμοῦ τὰ ἀφορῶντα εἰς οἰκονομικὰ συστήματα συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως ἀνήκουν κατὰ κανόνα εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν προβλημάτων ἐπιλογῆς, ἤτοι ἀποσκοποῦν εἰς τὸν προσδιορισμὸν πραγματοποιησίμων (οἰκονομικῶς καὶ λειτουργικῶς) λύσεων. Τὰ προβλήματα ταῦτα ἐξετάζονται συνήθως διὰ τῆς μεθόδου τῆς Ἀναλύσεως Εἰσροῶν - Ἐκροῶν (Input - Output Analysis), ἡ ὁποία ἀποτελεῖ σημαντικὸν τομέα τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ.

1.13. *Ἡ ἀνταγωνιστικὴ ἀλληλεξάρτησις* ἀπαντᾶται τόσον εἰς τὰ μακροοικονομικὰ ὅσον καὶ εἰς τὰ μικροοικονομικὰ συστήματα (π.χ. τὰς



Διάγραμμα 1

ἐπιχειρήσεις). Πρὸς κατανόησιν τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῆς μορφῆς ταύτης λαμβάνομεν τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα: Ἔστω ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἀγαθοῦ ω_1 ἀπαιτοῦνται 2,5 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α, διὰ δὲ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἀγαθοῦ ω_2 ἀπαιτοῦνται 2 μονάδες ἐκ τοῦ αὐτοῦ συντελεστοῦ. Ἡ διαθέσιμος ποσότης ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α εἶναι 10 μονάδες. Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ποσότητος ταύτης εἶναι δυνατὸν νὰ παραχθοῦν, κατ' ἀνώτατον ὅριον, 4 μονάδες ἐκ τοῦ ω_1 ἢ 5 μονάδες ἐκ τοῦ ω_2 ἢ διάφοροι συνδυασμοὶ ποσοτήτων τῶν ω_1 καὶ ω_2, οἱ ὁποῖοι καταναλίσκουν συνολικῶς 10 μονάδας τοῦ συντελεστοῦ Α. Τὰς δυνατότητας αὐτὰς παριστῶμεν γραφικῶς εἰς τὸ διάγραμμα 1.

Τὸ τμῆμα εὐθείας αβ παριστᾷ ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς τῶν ἀγαθῶν ω_1 καὶ ω_2 οἱ ὁποῖοι εἶναι δυνατὸν νὰ πραγματοποιηθοῦν ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως ὁλοκλήρου τῆς διαθεσίμου ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ Α ([1]). Ἐκ τῆς συγκρίσεως δύο οἱωνδήποτε συνδυασμῶν ἐπὶ τῆς αβ δεικνύεται ὅτι ἡ αὔξησις τῆς ποσότητος τοῦ ἑνὸς ἀγαθοῦ καθίσταται δυνατὴ *μόνον* διὰ τῆς μειώσεως τῆς ποσότητος τοῦ ἄλλου ἀγαθοῦ. Οὕτω, ἡ μετάβασις ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ γ πρὸς τὸν συνδυασμὸν δ, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει μεγαλυτέραν (ἢ ὁ συνδυασμὸς γ) ποσότητα ἐκ τοῦ ω_2, καθιστᾷ ἀναγκαίαν τὴν μείωσιν τῆς ποσότητος τοῦ ω_1. Ἐν ἄλλοις λόγοις, τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς ἑκάστου ἀγαθοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς τοῦ ἑτέρου ἀγαθοῦ. Ἡ ἀλληλεξάρτησις αὕτη εἶναι ἀνταγωνιστικῆς μορφῆς, καθ' ὅσον αὔξησις τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς τοῦ ἑνὸς ἀγαθοῦ ὁδηγεῖ εἰς μείωσιν τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς τοῦ ἑτέρου. Ταυτόχρονος αὔξησις τῆς ποσότητος ἀμφοτέρων τῶν ἀγαθῶν θὰ ἦτο δυνατὴ μόνον εἰς περίπτωσιν αὐξήσεως καὶ τῆς ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ Α.

Τὰ προβλήματα τοῦ προγραμματισμοῦ τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὰ οἰκονομικὰ συστήματα ἀνταγωνιστικῆς ἀλληλεξαρτήσεως ἀνήκουν εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν προβλημάτων ἐπιλογῆς, ἤτοι ἀποσκοποῦν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς οἰκονομικῶς ἀρίστης λύσεως μεταξὺ τῶν πολλῶν (ἐνίοτε ἀπείρων, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα) πραγματοποιησίμων λύσεων τὰς ὁποίας ἐπιδέχονται. Τὰ προβλήματα ταῦτα ἐξετάζονται διὰ διαφόρων μεθόδων κυρίως δὲ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ (Linear Programming), ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ εἰδικὴν μαθηματικο-οικονομικὴν τεχνικὴν ἀναπτυχθεῖσαν κατὰ τὴν τελευταίαν δεκαπενταετίαν.

1.14. *Ἡ μικτὴ ἀλληλεξάρτησις* εἶναι μῖγμα ἀμφοτέρων τῶν προηγουμένως ἐξετασθεισῶν μορφῶν ἀλληλεξαρτήσεως καὶ ἀπαντᾶται συνήθως εἰς τὰ προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἡ ἀναδιάρθρωσις μιᾶς ὑπαναπτύκτου οἰκονομίας καὶ ἡ ἐπιδίωξις τεθέντων προγραμματικῶν σκοπῶν, ὡς εἶναι, π.χ., ἡ καθ' ὡρισμένον ποσοστὸν αὔξησις τοῦ κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος ἐντὸς δοθείσης περιόδου, προϋποθέτει σκόπιμον κατανομὴν τῶν πρὸς ἐπένδυσιν κεφαλαίων μεταξὺ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν κλάδων, πρὸς ἐπαύξησιν τῆς παραγωγικῆς αὐτῶν δυναμικότητος. Δοθέντος ὅμως ὅτι τὰ πρὸς ἐπένδυσιν κεφάλαια εὑρίσκονται ἐν ἀνεπαρκείᾳ, ἡ διενέργεια ἐπενδύσεων εἰς ἕνα κλάδον σημαίνει κατ' ἀνάγκην μείωσιν τῶν δυνατοτήτων ἐπενδύσεως εἰς τοὺς λοιποὺς κλάδους. Ὑφίσταται

1) Ὑποτίθεται πρὸς ἁπλούστευσιν ὅτι ὁ ὁριακὸς λόγος μετασχηματισμοῦ μεταξὺ τῶν ἀγαθῶν ω_1 καὶ ω_2 εἶναι σταθερός.

συνεπῶς σχέσις ἀνταγωνιστικῆς ἀλληλεξαρτήσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων, ὅσον ἀφορᾷ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν κεφαλαιακῶν πόρων τῆς οἰκονομίας, πρὸς ἐπαύξησιν τῆς παραγωγικῆς των δυναμικότητος. Ἐξ ἄλλου μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς ὑπὸ ἀνάπτυξιν οἰκονομίας ὑφίσταται ἐπίσης συνεργατικὴ ἀλληλεξάρτησις, κατὰ τὴν ἔννοιαν Walras, καθ' ὅσον ἡ παραγωγικὴ λειτουργία τῶν κλάδων αὐτῶν προϋποθέτει χρησιμοποίησιν τῶν προϊόντων ἀλλήλων. Οὕτω τὸ πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως χαρακτηρίζεται ταυτοχρόνως ἀπὸ ἀμφοτέρας τὰς μορφὰς οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ἡ ἀνταγωνιστικὴ ἀλληλεξάρτησις συνδέεται μὲ τὴν διενέργειαν ἐπενδύσεων καὶ τὴν ἀναδιάρθρωσιν τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος, αὕτη δύναται νὰ ὀνομασθῇ καὶ ***διαρθρωτικὴ*** ἀλληλεξάρτησις. Ἡ συνεργατικὴ ἀλληλεξάρτησις, ἐξ ἄλλου, θὰ ἠδύνατο νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς ***λειτουργικὴ*** ἀλληλεξάρτησις, καθ' ὅσον ἐκδηλοῦται κατὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος (1).

Τὰ προβλήματα τῆς μικτῆς ἀλληλεξαρτήσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξετασθοῦν διὰ συνδυασμοῦ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ καὶ τῆς Ἀναλύσεως Εἰσροῶν - Ἐκροῶν.

1.15. Ὁ Οἰκονομικὸς Προγραμματισμὸς καλεῖται εἰδικώτερον ***Μικροοικονομικὸς Προγραμματισμὸς*** ὅταν ἀφορᾷ εἰς τὴν διαδικασίαν καταστρώσεως τοῦ προγράμματος δράσεως μεμονωμένων παραγωγικῶν μονάδων, καὶ ***Μακροοικονομικὸς Προγραμματισμὸς*** ἐὰν ἀναφέρεται εἰς τὴν διαδικασίαν καταρτίσεως τοῦ προγράμματος δράσεως μεγάλων ὁμάδων παραγωγικῶν μονάδων ἢ ὁλοκλήρου τῆς οἰκονομίας μιᾶς χώρας. Εἰς τὰς ἀνὰ χεῖρας παραδόσεις, μετὰ τὴν ἐξέτασιν βασικῶν τινῶν ἐννοιῶν καὶ ὑποθέσεων ἰσχυουσῶν τόσον ἀπὸ μακροοικονομικῆς ὅσον καὶ ἀπὸ μικροοικονομικῆς ἀπόψεως, ἡ ἀνάλυσις προσανατολίζεται βαθμιαίως εἰς τὴν

---

1) Εἰς τὴν πραγματικότητα αἱ οἰκονομικαὶ μονάδες (ἢ οἰκονομικοὶ κλάδοι) διέπονται συνήθως τόσον ὑπὸ τῆς συνεργατικῆς ὅσον καὶ ὑπὸ τῆς ἀνταγωνιστικῆς ἀλληλεξαρτήσεως, καθ' ὅσον ἀφ' ἑνὸς μὲν λόγῳ τοῦ *καταμερισμοῦ τῶν ἔργων* ὑποχρεοῦνται εἰς συνεργασίαν μὲ ἄλλας οἰκονομικὰς μονάδας (συνεργατικὴ ἀλληλεξάρτησις), ἀφ' ἑτέρου δέ, λόγῳ τῆς *ἀνεπαρκείας* τῶν οἰκονομικῶν πόρων αὐτῶν, ἀντιμετωπίζουν κατὰ κανόνα ζήτημα ἐπιλογῆς μεταξὺ διαφόρων οἰκονομικῶν σκοπῶν (ἀνταγωνιστικὴ ἀλληλεξάρτησις). Τὰ προβλήματα ὅμως τῶν οἰκονομικῶν μονάδων χαρακτηρίζονται ὡς συνεργατικῆς, ἀνταγωνιστικῆς ἢ μικτῆς ἀλληλεξαρτήσεως, ἀναλόγως τῆς σημασίας τὴν ὁποίαν παρουσιάζουν αἱ διάφοροι μορφαὶ ἀλληλεξαρτήσεως εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα. Οὕτω, π.χ., ἂν εἰς μίαν οἰκονομικὴν μονάδα ἐνδιαφερόμεθα μόνον διὰ τὸν τρόπον κατανομῆς τῆς δεδομένης ποσότητος ἑνὸς συντελεστοῦ μεταξὺ διαφόρων σκοπῶν καὶ οὐχὶ διὰ τὰς σχέσεις συνεργασίας τῆς ἐν λόγῳ μονάδος μὲ ἑτέρας οἰκονομικὰς μονάδας, τὸ σχετικὸν πρόβλημα προγραμματισμοῦ θὰ εἶναι ἀνταγωνιστικῆς ἀλληλεξαρτήσεως.

διερεύνησιν προβλημάτων μακροοικονομικοῦ προγραμματισμοῦ, εἰδικώτερον δὲ προβλημάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

1.16. Ἐξ ὅσων μέχρι τοῦδε ἐλέχθησαν καθίσταται σαφὲς ὅτι ὁ οἰκονομικὸς προγραμματισμὸς ἔχει σαφῶς ***κανονιστικὸν*** χαρακτῆρα. Ἡ ἐπίλυσις τῶν προβλημάτων ἐπιλογῆς, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸ ἀντικείμενον ἐρεύνης τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, καθορίζει οὐσιαστικῶς ***τὸ δέον γενέσθαι*** ἀπὸ οἰκονομικῆς ἀπόψεως. Τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν βάσιν καὶ ἀφετηρίαν διὰ τὴν ἄσκησιν οἰκονομικῆς πολιτικῆς πρὸς διαμόρφωσιν, κατὰ τὸ δυνατόν, τῆς οἰκονομικῆς πραγματικότητος συμφώνως πρὸς τὰς ἐπιθυμίας τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων. Ἐξ οὗ καὶ ἡ μεγίστη σημασία τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως. Θὰ ἦτο μάλιστα δυνατὸν νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ ***περιγραφικὴ*** (ἢ ***θετικὴ***) οἰκονομικὴ ἀνάλυσις, ἡ ὁποία διερευνᾷ τὰς διαρθρωτικὰς καὶ λειτουργικὰς σχέσεις, τῶν οἰκονομικῶν συστημάτων, παρουσιάζει πρακτικὸν ἐνδιαφέρον ἐμμέσως, καθ' ὃ μέτρον αὕτη ὑποβοηθεῖ εἰς τὴν διατύπωσιν προβλημάτων κανονιστικῆς φύσεως, ἤτοι προβλημάτων προγραμματισμοῦ. Ἡ προήγησις αὕτη τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως, ἔναντι τῶν ἄλλων κλάδων τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης δικαιολογεῖ, ἀπὸ μιᾶς ἀπόψεως, τὴν παρατηρουμένην σήμερον μεγάλην συγκέντρωσιν ἐπιστημονικῶν δυνάμεων εἰς τὸν νέον αὐτὸν τομέα οἰκονομικῆς ἐρεύνης.

1.17. Ὁ Οἰκονομικὸς Προγραμματισμὸς θὰ ἠδύνατο νὰ διακριθῇ εἰς ***παθητικὸν*** καὶ ***ἐνεργητικόν***, ἀναλόγως ἐὰν ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ ἐπιλεγομένου προγράμματος συνίσταται ἁπλῶς εἰς τὴν προσαρμογὴν τῆς συμπεριφορᾶς τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων εἰς τὰς ***προβλεπομένας*** ἐξελίξεις τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς ἤ, ἀντιθέτως, τὸ πρόγραμμα τοῦτο ἀφορᾷ εἰς τὸν οὐσιώδη ἐπηρεασμὸν τῆς οἰκονομικῆς ἐξελίξεως πρὸς ἐπιθυμητὰς κατευθύνσεις, δι' ἐσκεμμένης δράσεως τῶν ὡς ἄνω ἀτόμων. Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι ὁ ἐνεργητικὸς προγραμματισμὸς ὑπερέχει τοῦ παθητικοῦ προγραμματισμοῦ ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως. Ἀλλ' ὁ βαθμὸς πραγματοποιήσεως τῶν ἐπιθυμητῶν μεταβολῶν εἰς τὴν οἰκονομικὴν ζωὴν ἐξαρτᾶται κατὰ βάσιν ἐκ τοῦ βαθμοῦ πραγματοποιήσεως τοῦ ἐπιλεγομένου προγράμματος δράσεως, ὅπερ ἐν ὑστάτῃ ἀναλύσει, ἀνάγεται εἰς τὴν ἱκανότητα τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων νὰ ἐπηρεάζουν οὐσιωδῶς τὴν οἰκονομικὴν ζωήν. Ἰδιαιτέραν σημασίαν παρουσιάζει ἡ ἱκανότης αὕτη εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν κρατικῶν οἰκονομικῶν προγραμμάτων, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιδιώκεται συνήθως ὁ ἀποφασιστικὸς ἐπηρεασμὸς τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς. Προφανῶς ἡ ἔκτασις καὶ ἡ σημασία τοῦ κρατικοῦ οἰκονομικοῦ προγράμματος, ὡς καὶ ὁ βαθμὸς πραγματοποιήσεως αὐτοῦ, συναρτῶνται ἀμέσως πρὸς τὴν ἔκτασιν καὶ ἀποτελεσματικότητα τοῦ ***κρατικοῦ παρεμβατισμοῦ***. Τοῦτο ἐξηγεῖ διατί εἰς τὰς καλουμένας «ἐλευθέρας οἰκονομίας», ὅπου ὁ κρατικὸς παρεμβατισμὸς ἔχει συνήθως ρυθμιστικὸν ρόλον, ἡ δὲ οἰκονομικὴ ζωὴ διαμορφοῦται κυρίως ἐκ τῆς ἀλληλεπιδράσεως τῶν δυνάμεων τῆς ἀγορᾶς, ἡ ἀποτελεσματικότης τοῦ κρατικοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι μᾶλλον περιωρισμένη, ἐνῶ, ἀντιθέτως, αὕτη εἶναι σημαντικὴ εἰς οἰκονομίας χαρακτηριζομένας ἀπὸ ἐκτεταμένον καὶ συστηματικὸν παρεμβατισμὸν τοῦ κράτους εἰς τὴν οἰκονομικὴν ζωήν.

1.18. Πρὶν προβῶμεν εἰς τὴν συστηματικὴν παρουσίασιν τῆς θεωρίας καὶ τεχνικῆς τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ, διευκρινίζομεν εἰς τὰ δύο ἑπόμενα κεφάλαια βασικάς τινας οἰκονομικὰς καὶ μαθηματικὰς ἐννοίας, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν ἐπακολουθοῦσαν ἀνάλυσιν. Πρέπει νὰ σημειωθῇ ἐνταῦθα ὅτι κατεβλήθη προσπάθεια ὀργανικῆς συνδέσεως τῆς ὕλης τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου πρὸς τὰ δημοσιευθέντα ἤδη ὑφ' ἡμῶν Εἰσαγωγικὰ Μαθήματα Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως, ἰδίᾳ δὲ πρὸς τὴν θεωρίαν τῆς παραγωγῆς καὶ τὴν θεωρίαν τῆς γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας, αἱ ὁποῖαι, ὁμοῦ μετὰ τῆς θεωρίας ἐπιλογῆς, ἀποτελοῦν τὸ ἀναλυτικὸν ὑπόβαθρον τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ.

2

Βασικαὶ οἰκονομικαὶ ἔννοιαι καὶ ὑποθέσεις

2.1. Παραγωγικὴ δραστηριότης, τεχνολογία, οἰκονομικαὶ δυνατότητες

Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον ἀναφερόμεθα μόνον εἰς τὰς πλέον σημαντικὰς ἐννοίας καὶ ὑποθέσεις, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται συχνάκις εἰς τὴν ἐπακολουθοῦσαν ἀνάλυσιν. Πλεῖσται ἄλλαι ἔννοιαι καὶ ὑποθέσεις ἐξετάζονται εἰς τὰ οἰκεῖα κεφάλαια τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου.

2.1.1. Ἡ θεμελιώδης ἔννοια τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ ἔννοια τῆς *παραγωγικῆς δραστηριότητος*. Ὡς «παραγωγικὴ δραστηριότης» νοεῖται ὁ συγκεκριμένος συνδυασμὸς ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς (1) πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς μονάδος ἑνὸς οἰκονομικοῦ ἔργου. Οὕτω, π.χ., ὁ συνδυασμός: 7 κιλὰ τομάτας, 1/3 ὧραι ἐργασίας, 1/2 κιλὸν καυσίμου ὕλης (μαζοὺτ) καὶ 1 κυτίον, ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν παραγωγὴν ἑνὸς κιλοῦ τοματοπολτοῦ, ἀποτελεῖ μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα. Γενικῶς, ἂν εἰς δοθεῖσαν περίοδον διατίθενται ποσότητες α, β, γ, ..., ν, ἐκ τῶν συντελεστῶν Α, Β, Γ, ..., Ν, πρὸς παραγωγὴν τῆς μονάδος ὡρισμένου οἰκονομικοῦ ἔργου, ὁ ποσοτικὸς συνδυασμὸς (α, β, γ, ..., ν) συνιστᾷ μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω δοθέντος ὁρισμοῦ εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος προκύπτει ὅτι ἐνταῦθα ἐνδιαφερόμεθα μόνον διὰ τὸν ποσοτικὸν συσχετισμὸν τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς πρὸς τὴν μονάδα τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου καὶ οὐχὶ διὰ τὴν πραγματικὴν τεχνολογικὴν διαδικασίαν χρησιμοποιήσεως τῶν συντελεστῶν αὐτῶν. Οὕτω, εἰς τὸ ληφθὲν παράδειγμα δὲν περιλαμβάνονται πληροφορίαι περὶ τοῦ *τρόπου*

---

1) Ὁ ὅρος «συντελεστὴς παραγωγῆς» δὲν χρησιμοποιεῖται ἐνταῦθα ὑπὸ τὴν συνήθη ἔννοιαν τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας, ἀλλ' ὑποδηλοῖ πᾶν συγκεκριμένον (ὑλικὸν ἢ ἄϋλον) ἀγαθὸν τὸ ὁποῖον λαμβάνει μέρος εἰς τὴν παραγωγὴν ἑτέρου ἀγαθοῦ. Διακριτικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ «συντελεστοῦ», ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην, εἶναι ἡ *ὁμοιογένεια* τοῦ εἰς τὴν παραγωγὴν χρησιμοποιουμένου ἀγαθοῦ. Οὕτω, π.χ., ὁμιλοῦμεν περὶ τῶν συντελεστῶν: «μηχάνημα α' τύπου», «μηχάνημα β' τύπου» ἢ «ἐργασία ἀνδρῶν», «ἐργασία γυναικῶν» κλπ., ἀντὶ νὰ χρησιμοποιοῦμεν ἀορίστως τοὺς ὅρους «Κεφάλαιον» καὶ «Ἐργασία».

χρησιμοποιήσεως τῶν συντελεστῶν (π.χ. τῆς ἐργασίας), διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ τοματοπολτοῦ, ἤτοι περὶ τοῦ τεχνολογικοῦ συσχετισμοῦ τῶν συντελεστῶν αὐτῶν. Βεβαίως διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἑνὸς συγκεκριμένου παραγωγικοῦ ἔργου ἐνδιαφέρει τόσον ὁ ποσοτικὸς ὅσον καὶ ὁ τεχνολογικὸς συσχετισμὸς τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς. Θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῇ ὁ ὅρος ***παραγωγικὴ διαδικασία*** πρὸς ὑποδήλωσιν τόσον τοῦ ποσοτικοῦ ὅσον καὶ τοῦ τεχνολογικοῦ συσχετισμοῦ τῶν συντελεστῶν δι' ἐκτέλεσιν ὡρισμένου οἰκονομικοῦ ἔργου.

Ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς οἱονδήποτε (θετικὸν) ἐπίπεδον – ἐὰν βεβαίως ἐπιτρέπουν αἱ διαθέσιμοι ποσότητες συντελεστῶν. Τὸ ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος μετρεῖται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων [1] τοῦ παραγομένου οἰκονομικοῦ ἔργου.

2.1.2. Ἡ ἔκφρασις «μονὰς τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου» ἔχει χαρακτῆρα γενικὸν καὶ καλύπτει τόσον τὴν περίπτωσιν τῆς παραγωγῆς ἑνὸς μόνον ἀγαθοῦ, ἐκ δοθείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος, ὅσον καὶ τὴν περίπτωσιν τῆς ταυτοχρόνου παραγωγῆς πλειόνων ἀγαθῶν, ἐκ τῆς δραστηριότητος ταύτης. Οὕτω, ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ὁ τεχνολογικὸς μετασχηματισμὸς ποσοτήτων ὡρισμένων ἀγαθῶν (συντελεστῶν) πρὸς παραγωγὴν ἑτέρου ἢ ἑτέρων ἀγαθῶν. Αἱ μετασχηματιζόμεναι (ἤτοι ἀναλισκόμεναι) ποσότητες ἀγαθῶν καλοῦνται συνήθως ***εἰσροαί***, αἱ δὲ ἐκ τοῦ μετασχηματισμοῦ προκύπτουσαι νέαι ποσότητες ἀγαθῶν καλοῦνται ***ἐκροαί***.

Ἂν διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ὡρισμένων ποσοτήτων συντελεστῶν ἐντὸς δεδομένης περιόδου πραγματοποιῆται ἡ παραγωγὴ 1 μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ ω_1, 1/2 μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ ω_2 καὶ 2 μονάδων ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ ω_3, ὡς μονὰς τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου δύναται νὰ ὁρισθῇ ὁ συνδυασμὸς τῶν ὡς ἄνω ποσοτήτων τῶν ἐν λόγῳ ἀγαθῶν. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἔκφρασις «ν μονάδες οἰκονομικοῦ ἔργου» ὑποδηλοῖ τὸν συνδυασμόν: ν μονάδων ω_1, $\nu/2$ μονάδων ω_2 καὶ 2ν μονάδων ω_3, ὅπου ν δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Τὰ ἀγαθὰ τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τῆς αὐτῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος καλοῦνται ***συμπαράγωγα***. Ἓν ἢ περισσότερα ἀγαθὰ δοθείσης ὁμάδος συμπαραγώγων εἶναι ἐνίοτε δυνατὸν νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς ***κύρια***, λόγῳ τῆς οἰκονομικῆς σπουδαιότητος αὐτῶν. Τὰ λοιπὰ συμπαράγωγα ἀγαθὰ καλοῦνται ***δευτερεύοντα***. Οὕτω, π.χ., ἐκ τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος τῆς ἀλέσεως τοῦ σίτου προκύπτει τὸ ἄλευρον ὡς κύριον ἀγαθὸν καὶ τὰ πίτυρα ὡς δευτερεῦον συμπαράγωγον.

---

1) Ὁ καθορισμὸς τῆς μονάδος δι' ἕκαστον ἀγαθὸν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρησιμοποιουμένου μετρικοῦ συστήματος.

Εἰς περίπτωσιν παραγωγῆς ἑνὸς μόνον ἀγαθοῦ ω διὰ δοθείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος, ἡ μονὰς τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου συμπίπτει μὲ τὴν μονάδα τοῦ ἀγαθοῦ ω (καθοριζομένην διὰ καταλλήλου μετρικοῦ συστήματος). Εἰς περίπτωσιν ὑπάρξεως συμπαραγώγων εἶναι κατ' ἀρχὴν δυνατὸν ἡ μονὰς τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς οἱονδήποτε τεχνολογικῶς δυνατὸν συνδυασμὸν ποσοτήτων τῶν συμπαραγομένων ἀγαθῶν. Διὰ λόγους ὅμως ἁπλότητος, ὁ εἰς τὴν μονάδα τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου ἀντιστοιχῶν συνδυασμὸς περιλαμβάνει μίαν μόνον μονάδα ἐξ ἑνὸς τοὐλάχιστον (συνήθως κυρίου) ἀγαθοῦ, ὡς εἰς τὸ προαναφερθὲν παράδειγμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης εἶναι «*ἀνηγμένη*», ὡς πρὸς τὸ ἐν λόγῳ ἀγαθόν.

Ἡ μονὰς τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου εἶναι τέλος δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς μίαν νομισματικὴν μονάδα, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὴν συνολικὴν ἀξίαν δεδομένης ποσότητος ἢ ποσοτήτων ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἀγαθῶν.

2.1.3. Δύο ἢ περισσότεραι παραγωγικαὶ δραστηριότητες ἀναφερόμεναι εἰς τὴν παραγωγὴν τοῦ αὐτοῦ ἀγαθοῦ ἢ οἰκονομικοῦ ἔργου καλοῦνται *ὁμοκλαδικαί*, ὡς ἀνήκουσαι εἰς τὸν αὐτὸν κλάδον. Οὕτω, π.χ., ἀποτελοῦν ὁμοκλαδικὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας δύο ἢ περισσότεραι μέθοδοι παραγωγῆς σάπωνος (τῆς αὐτῆς ποιότητος).

Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἀνεφέρθημεν εἰς τὴν διαδικασίαν τῆς προαριστοποιήσεως, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῶν ἀποδοτικῶν συνδυασμῶν ἀγαθῶν. Ὡς προκύπτει καὶ ἐκ τοῦ ἐκεῖ χρησιμοποιηθέντος παραδείγματος, ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης εἶναι, ὑφ' ὡρισμένας προϋποθέσεις, δυνατὸν νὰ συγκριθῇ ἀπ' εὐθείας μὲ ἑτέρας ὁμοκλαδικὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ κριτηρίου ἀποδοτικότητος. Θὰ καλοῦμεν *ἀποδοτικὴν* μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα ὅταν δὲν ὑφίσταται ἑτέρα παραγωγικὴ δραστηριότης παράγουσα τὸ αὐτὸ οἰκονομικὸν ἔργον διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ὀλιγωτέρας ποσότητος ἐξ ἑνὸς ἢ πλειόνων συντελεστῶν καὶ οὐχὶ περισσοτέρας ποσότητος ἐξ οὐδενὸς συντελεστοῦ. Κατὰ συνέπειαν δύο ἢ περισσότεραι ταυτοχρόνως ὁμοκλαδικαὶ παραγωγικαὶ δραστηριότητες δύνανται νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς ἀποδοτικαὶ ὅταν δὲν εἶναι συγκρίσιμοι κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ κριτηρίου ἀποδοτικότητος [1].

Εἰς περίπτωσιν ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων χρησιμοποιουσῶν τὰς αὐτὰς ἀκριβῶς ποσότητας συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ παραγουσῶν, πλὴν τῆς μονάδος τοῦ κυρίου ἀγαθοῦ, καὶ ἕτερα συμπαράγωγα ἀγαθά, ὡς ἀποδοτικωτέρα χαρακτηρίζεται ἡ δραστηριότης ἡ ὁποία, ἐν συγκρίσει πρὸς τὰς λοιπάς, παράγει περισσοτέραν ποσότητα ἐξ ἑνὸς ἢ πλειόνων συμπαραγώγων, καὶ οὐχὶ ὀλιγωτέραν ἐξ οὐδενός.

1) Βλ. καὶ παράδειγμα μεθόδων α καὶ ε εἰς 1.7.

Ἐὰν δὲν ἰσχύῃ ὁ κανὼν αὐτός, δὲν ὑφίσταται συγκρισιμότης. Εἶναι προφανῶς δυνατὴ ἡ περίπτωσις ἐφαρμογῆς τοῦ κριτηρίου ἀποδοτικότητος καθ' ἣν δοθεῖσα παραγωγικὴ δραστηριότης πλεονεκτεῖ ἔναντι ἑτέρας ἢ ἑτέρων καὶ ἀπὸ ἀπόψεως εἰσροῶν καὶ ἀπὸ ἀπόψεως ἐκροῶν, ταυτοχρόνως, ἤτοι καὶ ὡς πρὸς τὴν οἰκονομικωτέραν χρησιμοποίησιν τῆς ποσότητος ἑνὸς ἢ πλειόνων συντελεστῶν καὶ ὡς πρὸς τὴν μεγαλυτέραν παραγωγὴν ἑνὸς ἢ πλειόνων συμπαραγομένων ἀγαθῶν.

Τινές, ὁμιλοῦντες περὶ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ἔχουν ὑπ' ὄψιν των μόνον τὰς δραστηριότητας αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἤδη ὑποστῆ τὸν ἔλεγχον τοῦ κριτηρίου ἀποδοτικότητος, ἤτοι ὑποθέτουν ὡς περατωθὲν τὸ στάδιον τῆς προαριστοποιήσεως. Νομίζομεν ὅτι ἡ ὑπόθεσις αὕτη δὲν δικαιολογεῖται πάντοτε, τουλάχιστον ἀπὸ ἀπόψεως ὁρολογίας.

2.1.4. Τὸ σύνολον τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τὰς ὁποίας ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν της μία οἰκονομικὴ μονὰς εἰς δοθεῖσαν περίοδον ἀποτελεῖ τὰς ***τεχνολογικὰς δυνατότητας*** ἢ τὸν ***τεχνολογικὸν ὁρίζοντα*** ἢ τὴν ***τεχνολογιαν*** τῆς ἐν λόγῳ μονάδος, κατὰ τὴν περίοδον ταύτην. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ τεχνολογία προσδιορίζει τὸ εἶδος τῶν δυναμένων νὰ παραχθοῦν ἀγαθῶν ὑπὸ δοθείσης παραγωγικῆς μονάδος, ὡς καὶ τὴν μέθοδον παραγωγῆς αὐτῶν. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἤδη λεχθέντων, θὰ ὀνομάζωμεν ***ἀποδοτικὴν*** μίαν τεχνολογίαν ἐὰν αὐτὴ περιλαμβάνῃ μόνον ἀποδοτικὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας.

2.1.5. Αἱ ἐντὸς δεδομένης περιόδου διατιθέμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς ὑπὸ μιᾶς οἰκονομικῆς μονάδος ἀποτελοῦν ***τὰς οἰκονομικὰς δυνατότητας αὐτῆς***. Αἱ οἰκονομικαὶ δυνατότητες, ἐν συνδυασμῷ μὲ τὰς τεχνολογικὰς δυνατότητας, προσδιορίζουν ***τὰς παραγωγικὰς δυνατότητας*** τῆς οἰκονομικῆς μονάδος, εἰς δεδομένην περίοδον. Ἀντὶ τοῦ τελευταίου τούτου ὅρου θὰ χρησιμοποιοῦμεν ἐνίοτε ἰσοδυνάμως τὸν ὅρον ***τεχνικοοικονομικαὶ δυνατότητες*** τῆς οἰκονομικῆς μονάδος.

2.2. Ὑποθέσεις

2.2.1. ***Σταθεραὶ ἀναλογίαι.*** Αἱ εἰς ἑκάστην παραγωγικὴν δραστηριότητα χρησιμοποιούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν σχέσιν πρὸς τὴν παραγομένην ποσότητα τῶν ἀγαθῶν, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐπιπέδου τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Ἔστω, π.χ., ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐξ ἑνὸς ἀγαθοῦ ω ἀπαιτοῦνται 3, 4 καὶ 5 μονάδες ἐκ τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως. Διὰ τὴν παραγωγὴν 3, 4, 6, . . . , ν μονάδων ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ θὰ ἀπαιτηθοῦν 3, 4, 6, . . . , ν φορὰς αἱ ἀρχικαὶ ποσότητες 3, 4, 5, τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, Α, Β καὶ Γ, οὕτως ὥστε:

$$\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{6}{18}=\ldots=\frac{\nu}{3\nu}=\frac{1}{3}=\frac{\text{ποσότης } \omega}{\text{ποσότης Α}}=\text{σταθερὸς ἀριθμὸς}$$

$$\frac{3}{12}=\frac{4}{16}=\frac{6}{24}=\ldots=\frac{\nu}{4\nu}=\frac{1}{4}=\frac{\text{ποσότης } \omega}{\text{ποσότης Β}}=\text{σταθερὸς ἀριθμὸς}$$

$$\frac{3}{15}=\frac{4}{20}=\frac{6}{30}=\ldots=\frac{\nu}{5\nu}=\frac{1}{5}=\frac{\text{ποσότης } \omega}{\text{ποσότης Γ}}=\text{σταθερὸς ἀριθμὸς}$$

2.2.2. *Πεπερασμένος ἀριθμὸς παραγωγικῶν δραστηριοτήτων*. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν δὲν ἀποκλείει τὴν ὑποκατάστασιν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, ὡς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ νομισθῇ ἐκ πρώτης ὄψεως. Ἁπλῶς ἀποκλείει τοιαύτην ὑποκατάστασιν ἐντὸς τῆς αὐτῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος, ἅπαξ καθορισθείσης. Πᾶσα ὑποκατάστασις μεταξὺ συντελεστῶν παραγωγῆς δέον συνεπῶς νὰ θεωρῆται ἢ ὡς καθορίζουσα νέαν παραγωγικὴν δραστηριότητα ἢ ὡς ὑποδηλοῦσα συνδυασμὸν διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δυναμένων ἑκάστοτε νὰ χρησιμοποιηθοῦν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ αὐτοῦ ἀγαθοῦ ἢ διαφόρων ἀγαθῶν ἐντὸς μιᾶς οἰκονομικῆς μονάδος, εἶναι περιωρισμένος.

2.2.3. *Προσθετικότης*. Δύο ἢ καὶ περισσότεραι παραγωγικαὶ δραστηριότητες εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν ταυτοχρόνως εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον (προϋποτιθεμένου ὅτι αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες συντελεστῶν τὸ ἐπιτρέπουν)· τότε ἡ συνολικῶς προστιθεμένη ποσότης συντελεστῶν παραγωγῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν αἱ ὁποῖαι θὰ ἐχρησιμοποιοῦντο ἂν ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης ἐλάμβανε χώραν ἐντὸς διαφόρου χρονικῆς περιόδου. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει διὰ τὸ σύνολον τῶν παραγομένων ἀγαθῶν. Ἔστω, π.χ., ὅτι δύο παραγωγικαὶ δραστηριότητες Π_1 καὶ Π_2 χρησιμοποιοῦνται ταυτοχρόνως εἰς ἐπίπεδα 3 καὶ 2 ἀντιστοίχως. Ἂν ἡ Π_1 ἀπαιτῇ 2, 1/2, 1 μονάδας ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς Α, Β, Γ, ἀντιστοίχως, διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω_1, ἡ δὲ Π_2 ἀπαιτῇ 3, 1, 1 μονάδας ἐκ τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν, διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω_2, θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ σημειούμενα ἐπίπεδα δράσεως:

Ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς:

$2\times 3+3\times 2=12$	μονάδες ἐκ τοῦ συντ.	Α
$1/2\times 3+1\times 2=3\ 1/2$	» » » »	Β
$1\times 3+1\times 2=5$	» » » »	Γ

καὶ σύνολον παραγομένων ἀγαθῶν: 3 μονάδες ω_1 καὶ 2 μονάδες ω_2.

Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῆς ὑποθέσεως τῆς προσθετικότητος εἶναι ὅτι ἡ ταυτόχρονος χρησιμοποίησις διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων δὲν ἐπηρεάζει εὐνοϊκῶς ἢ δυσμενῶς τὸ συνολικὸν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα ἢ τὸ συνολικὸν κόστος.

2.2.4. Διαιρετότης. Ὑποτίθεται ὅτι ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὄχι μόνον εἰς οἱονδήποτε ἀκέραιον, ἀλλὰ καὶ εἰς οἱονδήποτε ([1]) κλασματικὸν ἐπίπεδον, ἄνευ καταστρατηγήσεως τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Οὕτω ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης Π_1 (τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος) ὑποτίθεται ὅτι δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς ἐπίπεδα 1/10, 1/500 κλπ. μὲ ἀποτέλεσμα τὴν δαπάνην 1/10, 1/500 κλπ. ἐκ τῶν ποσοτήτων 2, 1/2, 1 τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ, καὶ παραγωγὴν 1/10, 1/500 κλπ. ἐκ τῆς μονάδος τοῦ προϊόντος ω_1.

2.2.5. Κύριον πλεονέκτημα τῆς ἐννοίας τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος εἶναι ὅτι συμφωνεῖ πρὸς τὴν οἰκονομικὴν καὶ λογιστικὴν πρᾶξιν. Ἡ γενικὴ συνάρτησις παραγωγῆς τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως, ἡ ὁποία βασίζεται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῆς ἀπεριορίστου δυνατότητος ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν, μολονότι χρήσιμος διὰ λόγους θεωρητικῆς γενικεύσεως, εἶναι ἀνεφάρμοστος πρακτικῶς. Ὁ ἐπιχειρηματίας ἀντιλαμβάνεται συνήθως τὴν ἐπιχείρησίν του ὡς ἓν σύνολον παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ἑκάστη τῶν ὁποίων χρησιμοποιεῖ ὡρισμένας ποσότητας συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ παράγει ὡρισμένον οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα. Ὑποκατάστασις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς θεωρεῖται μὲν δυνατὴ ἐντὸς ὡρισμένων ὁρίων, ἀλλ' ὡς καθορίζουσα νέας παραγωγικὰς δραστηριότητας ἢ συνδυασμοὺς παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Αἱ τεχνικαὶ συνθῆκαι τῶν περισσοτέρων ἐπιχειρήσεων δὲν ἐπιτρέπουν τὴν ὑποκατάστασιν συντελεστῶν παραγωγῆς ἐντὸς τῆς αὐτῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος.

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, μολονότι ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται ὡς περιοριστική, εἶναι βάσιμος θεωρητικῶς. Ἐὰν αἱ ποσότητες τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν μέρος εἰς μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα, μεταβάλλωνται ἀναλόγως, οὐδεὶς λόγος ὑπάρχει ὅπως μὴ διατηρῆται σταθερὰ ἡ σχέσις μεταξὺ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων παραγωγῆς καὶ παραγομένης ποσότητος ἀγαθῶν, ἀνεξαρτήτως ἐπιπέδου τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Αἱ εἰς τὴν πρᾶξιν παρατηρούμεναι περιπτώσεις μὴ ἀναλογικῆς ἀποδόσεως ὀφείλονται εἰς τὴν διατήρησιν σταθερᾶς τῆς ποσότητος ἑνὸς τῶν χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν καθ' ὃν χρόνον αἱ ποσότητες τῶν ἄλλων μεταβάλλον-

1) Θετικόν.

ται ἢ εἰς τὴν ἐμφάνισιν ἐσωτερικῶν οἰκονομιῶν κατὰ τὴν λειτουργίαν τῶν παραγωγικῶν μονάδων καὶ εἰς τὴν χρησιμοποίησιν νέων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἐμφάνισις θετικοῦ ὁριακοῦ προϊόντος ἑνὸς συντελεστοῦ δυνατὸν νὰ ὀφείλεται εἰς τὴν μὴ πλήρη χρησιμοποίησιν τῶν ἄλλων συντελεστῶν παραγωγῆς, εἰς προγενεστέραν παραγωγικὴν περίοδον. Οὕτω, π.χ., ἐὰν διὰ τὴν πλήρη παραγωγικὴν ἀξιοποίησιν μιᾶς μηχανῆς ἀπαιτοῦνται 5 μονάδες ἐργασίας καὶ εἰς δεδομένην περίπτωσιν χρησιμοποιοῦνται μόνον 4 μονάδες ἐργασίας, εἶναι δυνατὴ ἡ αὔξησις τοῦ παραγομένου προϊόντος διὰ τῆς προσθήκης μιᾶς ἀκόμη μονάδος ἐργασίας καὶ ἄνευ οὐδεμιᾶς μεταβολῆς τῆς ποσότητος τῶν ἄλλων συντελεστῶν παραγωγῆς. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν εἶναι (ὡς θὰ ἴδωμεν ἀλλαχοῦ) κανονιστικῆς φύσεως ἀπὸ ἀπόψεως Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ, καὶ ἀναφέρεται μᾶλλον εἰς τὴν διατήρησιν μιᾶς τεχνικῶς optimum σχέσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν εἰς ὅλα τὰ στάδια παραγωγῆς, δηλαδὴ μιᾶς σχέσεως ἡ ὁποία ἀποκλείει τὴν ἀτελῆ χρησιμοποίησιν τῶν συντελεστῶν αὐτῶν. Ἐξ ἄλλου, εἰς περιπτώσεις ἐσωτερικῶν οἰκονομιῶν λόγῳ αὐξήσεως τῆς κλίμακος παραγωγῆς (οἰκονομίαι πληθοπαραγωγῆς) πρόκειται συνήθως περὶ ἀλλαγῆς μεθόδου παραγωγῆς, ἤτοι περὶ χρησιμοποιήσεως νέων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Διὰ τὰς νέας ταύτας δραστηριότητας ἰσχύει, ἐντὸς ὡρισμένων ὁρίων, ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, ἐφ' ὅσον χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸ optimum, δηλαδὴ ἄνευ ὑποαπασχολήσεως ἑνὸς ἢ περισσοτέρων συντελεστῶν (1).

Ἡ ὑπόθεσις τοῦ περιωρισμένου ἀριθμοῦ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μᾶλλον σύμφωνος πρὸς τὴν πραγματικότητα. Μὲ ἐξαίρεσιν ἴσως τὴν γεωργίαν καί τινας χημικὰς βιομηχανίας, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑφ' ἑκάστης οἰκονομικῆς μονάδος διαθεσίμων δραστηριοτήτων, ἤτοι παραγωγικῶν μεθόδων χρησιμοποιήσεως τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, εἶναι περιωρισμένος. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀναφερθεισῶν ἐξαιρέσεων δυνατὸν αἱ ἑκάστοτε τεχνολογικαὶ καὶ οἰκονο-

1) Αἱ ὑποθέσεις περὶ σταθερῶν ἀναλογιῶν καὶ περιωρισμένου ἀριθμοῦ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ἔχουν ἰδιαιτέραν σημασίαν διὰ τὴν θεωρίαν τῆς ἀπασχολήσεως εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας. Εἰς τὰς χώρας αὐτὰς παρατηρεῖται συνήθως σοβαρὰ ἀνεργία μὴ δυναμένη νὰ θεραπευθῇ οὔτε δι' αὐξήσεως τῆς ἐνεργοῦ ζητήσεως κατὰ τὰ κεϋνσιανὰ διδάγματα (αὔξησις ἐνεργοῦ ζητήσεως δημιουργεῖ συνήθως πληθωρισμόν), οὔτε δι' ἀντικαταστάσεως — μέσῳ τοῦ μηχανισμοῦ τῆς ἀγορᾶς — τοῦ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ συντελεστοῦ (π χ. τοῦ κεφαλαίου) ὑπὸ τοῦ συντελεστοῦ «ἐργασία», συμφώνως πρὸς τὴν νεοκλασσικὴν θεωρίαν τῆς ὁριακῆς ἀποδοτικότητος. Ἡ ἐπίμονος ἀνεργία ὀφείλεται προφανῶς εἰς τὴν περιωρισμένην δυνατότητα ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Ἀντιμετώπισις τῆς ἀνεργίας εἰς τὰς χώρας αὐτὰς εἶναι δυνατὴ μόνον δι' ἀναλόγου αὐξήσεως τῆς ποσότητος τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν.

μικαὶ συνθῆκαι νὰ περιορίζουν σημαντικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν οἰκονομικῶς βασίμων (καὶ ἀποδοτικῶν) παραγωγικῶν δραστηριοτήτων.

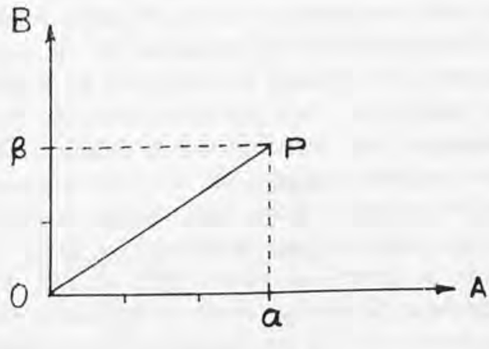
Ἡ ὑπόθεσις τῆς προσθετικότητος φαίνεται, ἐκ πρώτης ὄψεως, ὡς μὴ γενικῶς ἰσχύουσα. Οὕτω, π.χ., εἰς βιομηχανικάς τινας ἐκμεταλλεύσεις ἡ παραγομένη θερμότης ἐκ καταναλώσεως ποσότητος ἄνθρακος δυνατὸν νὰ χρησιμοποιῆται ταυτοχρόνως ὑπὸ δύο ἢ περισσοτέρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Ἂν αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες ἐχρησιμοποιοῦντο εἰς διαφόρους χρονικὰς περιόδους θὰ ἦτο προφανῶς ἀναγκαία ἡ κατανάλωσις περισσοτέρου ἄνθρακος. Παρόμοιαι περιπτώσεις παρατηροῦνται εἰς διαφόρους κλάδους τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς. Εἰς τὰς περιπτώσεις ὅμως αὐτὰς δυνάμεθα – ἄνευ ἀλλοιώσεως τῆς οὐσίας – νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἐν ἀλληλοεπιδράσει παραγωγικὰς δραστηριότητας ὡς συνιστώσας μίαν *νέαν* παραγωγικὴν δραστηριότητα. Συνεπῶς ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην ἡ ὑπόθεσις περὶ προσθετικότητος δὲν παραβιάζεται.

Ἡ ὑπόθεσις τῆς διαιρετότητος δυνατὸν νὰ ἰσχύῃ εἴς τινας περιπτώσεις, κατὰ κανόνα ὅμως εἶναι ἀντιπραγματική. Π.χ., εἰς τὴν παραγωγὴν διαρκῶν ἀγαθῶν (πλοίων, αὐτοκινήτων, ραδιοφώνων κλπ.) τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων εἶναι νοητὰ μόνον εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς. Ἡ ὑπόθεσις τῆς διαιρετότητος εἶναι ἐν τούτοις χρήσιμος ἀπὸ ὑπολογιστικῆς ἀπόψεως. Εἰς τὰς συγκεκριμένας περιπτώσεις πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ φύσις τῶν παραγομένων ἀγαθῶν καὶ νὰ γίνωνται αἱ ἀναγκαῖαι προσαρμογαὶ εἰς τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀναλύσεως.

Μαθηματικὸς συμβολισμὸς τῶν οἰκονομικῶν ἐννοιῶν — Στοιχεῖα γραμμικῆς Ἀλγέβρας

3.1. Παραγωγικαὶ δραστηριότητες καὶ διανύσματα

3.1.1. Ὡς εἴδομεν, «παραγωγικὴ δραστηριότης» εἶναι ὁ συγκεκριμένος συνδυασμὸς ποσοτήτων τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς μονάδος τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου. Ἔστω, π.χ., ὁ συνδυασμὸς 3 μονάδων τοῦ συντελεστοῦ A καὶ 2 μονάδων τοῦ συντελεστοῦ B, πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω. Ὁ συνδυασμὸς οὗτος δύναται νὰ παρασταθῇ εἰς τὸ καρτεσιανὸν σύστημα συντεταγμένων ὡς ἀκολούθως:



Διάγραμμα 2

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων τοῦ ἀνωτέρω συστήματος μετροῦνται αἱ ποσότητες τοῦ συντελεστοῦ A καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων αἱ ποσότητες τοῦ συντελεστοῦ B. Τὸ σημεῖον P τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας (3,2) παριστᾷ τὴν ὡς ἄνω παραγωγικὴν δραστηριότητα. Ἡ αὐτὴ παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται ἐπίσης νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος OP, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων, πέρας τὸ σημεῖον P καὶ διεύθυνσιν τὴν τῆς εὐθείας ἡ ὁποία διέρχεται ἐκ τῶν σημείων O καὶ P. Τὸ τμῆμα τοῦτο καλεῖται γεωμετρικῶς ***διάνυσμα***.

3.1.2. Γενικῶς διάνυσμα καλεῖται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον ὡρισμένον προσανατολισμόν, ἤτοι ὡρισμένην διεύθυνσιν καὶ φοράν. Διὰ τὸν συμβολισμὸν ἑνὸς διανύσματος δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν τὰ γράμματα τῶν ἄκρων αὐτοῦ μὲ μίαν ἐπιγραμμήν, π.χ., διὰ τὸ διάνυσμα τοῦ διαγράμματος 2 γράφομεν : $\overline{OP}$.

Τὰ διανύσματα διακρίνονται γενικῶς εἰς ***ἐλεύθερα***, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἔχουν ὡς ἀρχὴν οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ χώρου καὶ εἰς ***ἐντετοπισμένα***. Τὰ ἐντετοπισμένα διανύσματα διακρίνονται περαιτέρω εἰς ***ὀλισθαίνοντα***, δυνάμενα νὰ ἔχουν ὡς ἀρχὴν οἱονδήποτε σημεῖον μιᾶς εὐθείας, διεύθυνσιν δὲ τὴν τῆς εὐθείας, καὶ εἰς ***ἐφαρμοστά***, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡρισμένον σημεῖον ἐφαρμογῆς (σταθερὰν ἀρχήν). Ἐνταῦθα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ διανύσματα τῆς τελευταίας κατηγορίας, εἰδικώτερον δὲ μὲ διανύσματα ἔχοντα ὡς σημεῖον ἐφαρμογῆς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

Ἐξ ἁπλῆς παρατηρήσεως προκύπτει εὐκόλως ὅτι τὰ ὡς ἄνω διανύσματα δύνανται νὰ ὁρισθοῦν πλήρως διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ σημείου εἰς ὃ περατοῦνται. Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον ἓν διάνυσμα ἔχον ὡς ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ πέρας τὸ δοθὲν σημεῖον. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, εἰς ἕκαστον διανυσμα, συρόμενον ἐκ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων, ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον, εἰς ὃ τὸ ἐν λόγῳ διάνυσμα περατοῦται. Λόγῳ τῆς ἀντιστοιχίας ταύτης δυνάμεθα νὰ ὁμιλῶμεν ἀδιαφόρως περὶ διανυσμάτων ἢ σημείων. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἕκαστον σημεῖον ὁρίζεται πλήρως ἐκ τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ γραφοῦν ἀναλυτικῶς ὡς μία στήλη (ἢ σειρὰ) διατεταγμένων ἀριθμῶν, ἕκαστον διάνυσμα, ἔχον ὡς ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος, δύναται ἐπίσης νὰ παρασταθῇ ὡς μία στήλη (ἢ σειρὰ) διατεταγμένων ἀριθμῶν. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ὀνομάζονται ***στοιχεῖα*** τοῦ διανύσματος καὶ ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὰς συντεταγμένας τοῦ πέρατος αὐτοῦ. Οὕτω, π.χ., τὸ διάνυσμα OP θὰ εἶναι (¹) :

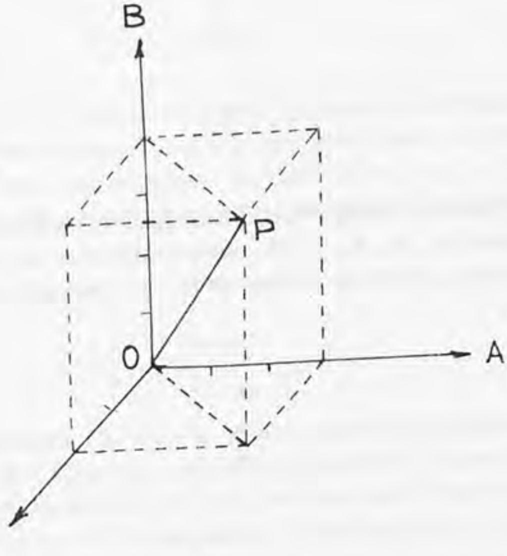
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Διὰ τῆς ὡς ἄνω στήλης διατεταγμένων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν προφανῶς καὶ τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ διάνυσμα $\overline{OP}$ (ἢ εἰς τὸ σημεῖον P) τοῦ διαγρ. 2.

1) Αἱ περιβάλλουσαι τὴν στήλην τῶν ἀριθμῶν ἀγκῦλαι ὑποδηλοῦν ὅτι δὲν ἐνδιαφερόμεθα δι' ἕνα ἕκαστον ἀριθμὸν κεχωρισμένως ἀλλὰ διὰ τὸ διατεταγμένον σύνολον αὐτῶν.

3.1.3. Ἂν πρὸς παραγωγὴν τῆς μονάδος ἑνὸς ἀγαθοῦ ἀπαιτοῦνται 3,6 καὶ 4 μονάδες ἐκ τῶν τριῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως, ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης διὰ τὸ ἐν λόγῳ ἀγαθὸν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς διάνυσμα $\overline{OP}$ ἐντὸς τοῦ τρισδιαστάτου χώρου.

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν κατηγμένων τοῦ κατωτέρω τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων μετροῦνται αἱ ποσότητες τοῦ συντελεστοῦ Γ.



Διάγραμμα 3

Ἀλγεβρικῶς τὸ διάνυσμα $\overline{OP}$ θὰ εἶναι :

$$\overline{OP} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.1.4. Ὁ ἀριθμὸς τῶν συντελεστῶν οἱ ὁποῖοι λαμβάνουν μέρος εἰς δοθεῖσαν παραγωγικὴν δραστηριότητα καθορίζει προφανῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀξόνων τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ συνεπῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστάσεων τοῦ χώρου ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖται τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἐν λόγῳ παραγωγικὴν δραστηριότητα διάνυσμα.

Ἂν εἰς μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα ὑπεισέρχωνται περισσότεροι τῶν τριῶν παραγωγικοὶ συντελεσταὶ (1), τὸ ἀντιστοιχοῦν διάνυ-

1) Βλ. ὑποσημ. σελ. 17.

σμα ἀνήκει εἰς τὸν καλούμενον ***ὑπερχῶρον***, δηλ. εἰς τὸν νοητὸν χῶρον ὁ ὁποῖος ἔχει περισσοτέρας τῶν τριῶν διαστάσεις. Γραφικὴ παράστασις τοιούτου διανύσματος δὲν εἶναι δυνατή, ἡ ἀλγεβρικὴ ὅμως παράστασις αὐτοῦ ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι ἁπλῆ. Οὕτω, ἄν, π.χ., εἰς μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα λαμβάνουν μέρος οἱ παραγωγικοὶ συντελεσταὶ Α, Β, Γ καὶ Δ εἰς ποσότητας 1, 2, 4 καὶ 3 μονάδας, ἀντιστοίχως, τὸ σχετικὸν διάνυσμα θὰ εἶναι:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Γενικῶς, δοθεῖσα παραγωγικὴ δραστηριότης, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖ τοὺς συντελεστὰς $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$ κατὰ ποσότητας $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ μονάδας, ἀντιστοίχως, δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἡ κάτωθι νιὰς διατεταγμένων ἀριθμῶν:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{bmatrix}$$

3.1.5. Εἰς περίπτωσιν παραγωγικῆς δραστηριότητος ἡ ὁποία περιλαμβάνει πλείονα τοῦ ἑνὸς παραγόμενα ἀγαθά, ἤτοι ***συμπαράγωγα***, ὁ ἀνωτέρω μαθηματικὸς συμβολισμὸς δὲν εἶναι πάντοτε ἐπαρκής. Ὁ συμβολισμὸς οὗτος ἐκφράζει μόνον τὰς ἀπαιτουμένας ποσότητας συντελεστῶν διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου, ἤτοι τὰς ***εἰσροάς***. Δυνατὸν ὅμως εἰς τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν πρόβλημα νὰ εἶναι ἀναγκαία ἡ ρητὴ ἀναγραφὴ καὶ τῶν ποσοτήτων τῶν παραγομένων ἀγαθῶν, ἤτοι τῶν ***ἐκροῶν***, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν κατὰ τὰ γνωστὰ τὴν μονάδα τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου τῆς δοθείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα διάνυσμα πρέπει νὰ περιλαμβάνῃ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν τόσον τὰς εἰσροάς, ὅσον καὶ τὰς ἐκροάς. Πρὸς διάκρισιν ὅμως τῶν στοιχείων τῶν εἰσροῶν ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῶν ἐκροῶν, τὰ πρῶτα προσημαίνονται ἀρνητικῶς, τὰ δὲ δεύτερα θετικῶς. Οὕτω, π.χ., ἂν ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως 3, 2 καὶ 1 μονάδων ἐκ τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως, παράγωνται ταυτοχρόνως 1 μονὰς ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ ω_1 καὶ 2 μονάδες ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ ω_2, ἡ σχετικὴ παραγωγικὴ δραστηριότης θὰ ἠδύνατο νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ ἀκολούθου διανύσματος:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ἐνίοτε εἶναι, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀλλαχοῦ, χρήσιμος ἡ καθ' ὅμοιόν τρόπον παρουσίασις καὶ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων αἱ ὁποῖαι παράγουν τὴν μονάδα ἑνὸς συγκεκριμένου ἀγαθοῦ. Οὕτω, π.χ., ἡ δραστηριότης τοῦ διαγρ. 2, διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἀγαθοῦ ω, θὰ ἠδύνατο νὰ γραφῇ ὡς:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{ἀντὶ} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.1.6. Ὡς εἴδομεν (3.1.1.), ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος χρησιμοποιεῖ 3 μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α καὶ 2 μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Β καὶ συνεπῶς αἱ σχέσεις τῆς ποσότητος τοῦ παραγομένου προϊόντος πρὸς τὰς χρησιμοποιουμένας ποσότητας συντελεστῶν Α καὶ Β εἶναι $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{2}$, ἀντιστοίχως. Ἡ αὐτὴ παραγωγικὴ δραστηριότης εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν 2 μονάδων θὰ ἀπαιτήσῃ, συμφώνως πρὸς τὴν ***ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν***, ($2 \times 3 =$) 6 μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α καὶ ($2 \times 2 =$) 4 μονάδας ἐν τοῦ συντελεστοῦ Β, οὕτως ὥστε θὰ ἔχωμεν πάλιν τὰς ἀρχικὰς σχέσεις ποσότητος παραγομένου προϊόντος καὶ ποσοτήτων χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν Α καὶ Β:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{καὶ} \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον 2 δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ***γινόμενον*** τοῦ ἀντιστοίχου διανύσματος OP (διάγρ. 2) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2. Τὸ γινόμενον τοῦτο ὁρίζομεν ὡς:

$$2 \times \overline{OP} = 2 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

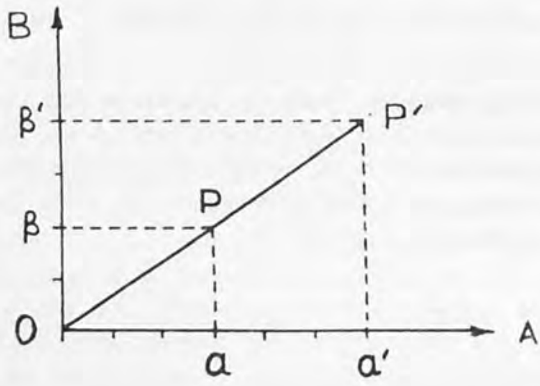
Πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ σημειουμένου πολλαπλασιασμοῦ, πολλαπλασιάζομεν ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2 καὶ σχηματίζομεν διάνυσμα μὲ στοιχεῖα τὰ γινόμενα 6(=2×3) καὶ 4(=2×2), ἀντιστοίχως :

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Γενικῶς, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δοθὲν διάνυσμα ἐπὶ ἀριθμὸν σχηματίζομεν ἓν νέον διάνυσμα μὲ στοιχεῖα τὰ γινόμενα τῶν στοιχείων τοῦ δοθέντος διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, π.χ. :

$$\kappa \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa\alpha_1 \\ \kappa\alpha_2 \\ \kappa\alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \kappa\alpha_\nu \end{bmatrix}$$

Γεωμετρικῶς τὸ γινόμενον δοθέντος διανύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν ρ (1) δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἑνὸς νέου διανύσματος μὲ συντεταγμένας πέρατος ρ φορὰς τὰς συντεταγμένας πέρατος τοῦ δοθέντος διανύσματος. Οὕτω,



Διάγραμμα 4

π.χ., τὸ γινόμενον 2 × $\overline{OP}$ (τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον 2, δύναται νὰ παρασταθῇ

1) ρ δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμός, θετικός, ἀρνητικὸς ἢ μηδέν.

διὰ τοῦ διανύσματος $\overline{OP'}$ (διάγρ. 4), τὸ ὁποῖον ἔχει πέρας τὸ σημεῖον P', μὲ συντεταγμένας Oα'(= 2 × Oα) καὶ Oβ'(= 2 × Oβ).

3.1.7. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν δοθὲν διάνυσμα ἐπὶ τὴν μονάδα, λαμβάνομεν διάνυσμα μὲ στοιχεῖα ἀνὰ ἓν ἴσα πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ δοθέντος. Τὰ δύο διανύσματα καλοῦμεν τότε ***ἴσα***.

Γενικῶς «ἴσα» εἶναι δύο ἢ περισσότερα διανύσματα ἂν ἀνήκουν εἰς τὸν αὐτὸν χῶρον καὶ ἔχουν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα αὐτῶν ἀνὰ ἓν ἴσα.

Ἔστωσαν, π.χ., τὰ διανύσματα (1) :

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν :

$$\alpha_1 = \beta_1, \; \alpha_2 = \beta_2, \; \ldots, \; \alpha_\nu = \beta_\nu .$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος προκύπτει ὅτι δύο ἢ καὶ περισσότερα ἴσα διανύσματα ἐκφράζουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα, καὶ δὴ ἀνεξαρτήτως ἐὰν ἐφαρμόζεται ἢ ὄχι ἡ αὐτὴ τεχνολογικὴ διαδικασία χρησιμοποιήσεως τῶν συντελεστῶν (2).

3.1.8. Δύο μὴ ἴσα διανύσματα (3) διαφέρουν ἐξ ὁρισμοῦ εἰς ἓν ἢ περισσότερα στοιχεῖα. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἄν, π.χ., ἔχωμεν τὰ διανύσματα **α** καὶ **β**, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$$

Τὸ σύμβολον ≠ ὑποδηλοῖ ἀκριβῶς τὴν ἔλλειψιν σχέσεως ἰσότητος μεταξὺ τῶν δύο διανυσμάτων.

---

1) Εἰς περίπτωσιν μὴ συγκεκριμένης γεωμετρικῆς ἀπεικονίσεως τῶν διανυσμάτων, θὰ χρησιμοποιοῦμεν πρὸς συμβολισμὸν τὰ γράμματα α, β, γ, κλπ.

2) Θεωρητικῶς, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν μεθόδους παραγωγῆς ὡρισμένου ἀγαθοῦ, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν κατὰ τὴν τεχνολογικὴν διαδικασίαν τῆς παραγωγῆς, ἀλλὰ περιλαμβάνουν τὰς αὐτὰς ποσοτικὰς σχέσεις συντελεστῶν καὶ παραγομένων ἀγαθῶν.

3) Ὑποτίθεται ὅτι τὰ διανύσματα ταῦτα ἀνήκουν εἰς τὸν αὐτὸν γεωμετρικὸν χῶρον, ἤτοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων.

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

1) Ἅπαντα τὰ στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς διανύσματος εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ἑτέρου. Ἔστω, π.χ. :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Τότε λέγομεν ὅτι τὸ α εἶναι «μεγαλύτερον» τοῦ β. Τὴν σχέσιν ταύτην θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου « $\gg$ ». Ἤτοι γράφομεν :

$$\alpha \gg \beta$$

Γενικῶς, ἂν α καὶ β εἶναι διανύσματα ν στοιχείων, ἔχομεν

$$\alpha \gg \beta \text{ (1) ἀκριβῶς ὅταν } \alpha_\iota > \beta_\iota \text{ διὰ } \iota = 1, 2, \ldots, \nu$$

2) Οὐδὲν στοιχεῖον τοῦ ἑνὸς διανύσματος εἶναι μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου στοιχείου τοῦ ἑτέρου διανύσματος καὶ *τουλάχιστον ἓν* στοιχεῖον τοῦ πρώτου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου στοιχείου τοῦ δευτέρου. Π.χ. :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{ἢ} \quad \beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Τότε λέγομεν ἐπίσης ὅτι τὸ διάνυσμα α εἶναι «μεγαλύτερον» τοῦ β, ἀλλὰ πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον $>$. Ἤτοι γράφομεν :

$$\alpha > \beta$$

Γενικῶς ἔχομεν :

$$\alpha > \beta \text{ (2) ὅταν } \alpha_\iota \geq \beta_\iota \text{ διὰ } \iota = 1, 2, \ldots, \nu \text{ καὶ } \alpha_\iota > \beta_\iota$$

διὰ μίαν τοὐλάχιστον τιμὴν τοῦ ι.

1) Ἀντὶ $\alpha \gg \beta$ δυνάμεθα ἐπίσης νὰ γράψωμεν $\beta \ll \alpha$, ὁπότε λέγομεν ὅτι τὸ β εἶναι «μικρότερον» τοῦ α.

2) Ἀντὶ $\alpha > \beta$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἰσοδυνάμως : $\beta < \alpha$.

3) Τέλος, δυνατὸν ἄλλα μὲν στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς διανύσματος νὰ εἶναι μικρότερα, ἄλλα δὲ μεγαλύτερα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ ἑτέρου διανύσματος. Π.χ. :

$$\alpha \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \beta \equiv \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

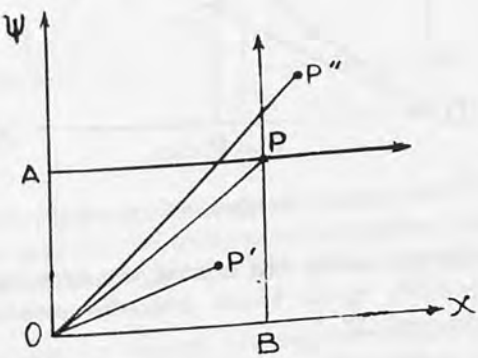
Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δὲν ὑφίσταται συγκρισιμότης τῶν διανυσμάτων κατὰ τὴν ἔννοιαν τῶν συμβόλων $\gg$ καὶ $>$. Συμβολικῶς γράφομεν :

$$\alpha \,⋕\, \beta$$

Κατωτέρω θὰ ἐκφράσωμεν γεωμετρικῶς (εἰς τὸν χῶρον τῶν 2 διαστάσεων) τὴν συγκρισιμότητα ἢ μὴ συγκρισιμότητα τῶν διανυσμάτων, κατὰ τὴν ἔννοιαν τῶν συμβόλων $\gg$, $>$ καὶ ⋕.

Περίπτωσις 1η

Ὡς δεικνύει τὸ διάγρ. 5, τὸ διάνυσμα $\overline{OP}$ εἶναι «μεγαλύτερον» πάντων τῶν διανυσμάτων τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ πέρας αὐτῶν ***ἐντὸς*** (1) τοῦ παραλ-



Διάγραμμα 5

ληλογράμμου ΟΑΡΒ, καθ' ὅσον ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὰ στοιχεῖα (αἱ

1) Ἡ ἔκφρασις «*ἐντὸς* τοῦ παραλληλογράμμου ΟΑΡΒ», ὑποδηλοῖ πάντα τὰ σημεῖα τοῦ παραλληλογράμμου πλὴν τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

συντεταγμέναι τοῦ πέρατος) τῶν τελευταίων εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ $\overline{OP}$. Γράφομεν συνεπῶς:

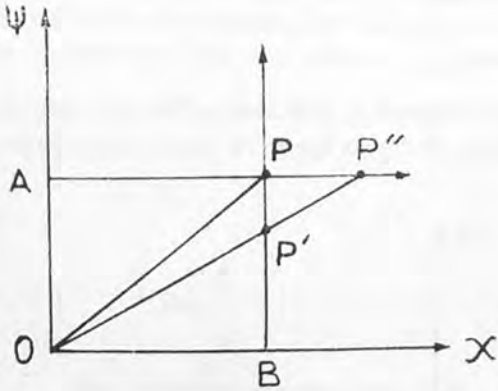
$$\overline{OP} \gg \overline{OP'}$$

Ἀντιθέτως, πάντα τὰ διανύσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ πέρας αὐτῶν *ἐντὸς* τῆς περιοχῆς τῆς ὁριζομένης ἐκ τῶν σημειουμένων προεκτάσεων, πέραν τοῦ σημείου P, τῶν εὐθειῶν AP καὶ BP, εἶναι «μεγαλύτερα» τοῦ $\overline{OP}$. Οὕτω, π.χ., γράφομεν:

$$\overline{OP} \ll \overline{OP''}$$

Περίπτωσις 2α

Τὸ διάνυσμα $\overline{OP}$ εἶναι «μεγαλύτερον» (κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου $>$) πάντων τῶν διανυσμάτων τῶν ἐχόντων τὸ πέρας αὐτῶν *ἐπὶ* τῶν πλευρῶν AP καὶ BP τοῦ παραλληλογράμμου OAPB, καθ' ὅσον ἑκα-



Διάγραμμα 6

στον τῶν διανυσμάτων αὐτῶν ἔχει ἓν στοιχεῖον ἴσον πρὸς τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον τοῦ $\overline{OP}$, τὸ δὲ ἕτερον στοιχεῖον μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου στοιχείου τοῦ $\overline{OP}$.

Οὕτω, π.χ., εἰς τὸ διάγρ. 6 ἔχομεν:

$$\overline{OP} > \overline{OP'}$$

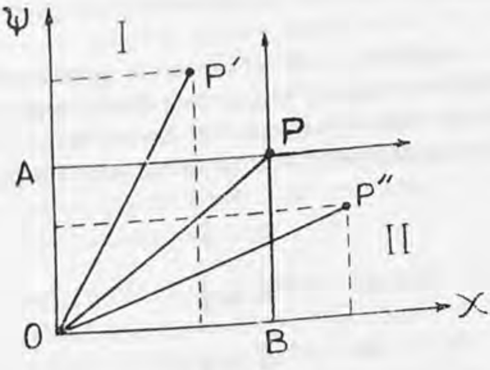
Ἀντιθέτως, πᾶν διάνυσμα ἔχον τὸ πέρας αὐτοῦ *ἐπὶ* τῶν σημειουμένων προεκτάσεων, πέραν τοῦ P, τῶν εὐθειῶν AP καὶ BP εἶναι «μεγαλύτερον» τοῦ OP, καθ' ὅσον τότε τὸ ἓν στοιχεῖον τοῦ διανύσματος αὐτοῦ θὰ εἶναι μεγαλύτερον, τὸ δὲ ἕτερον ἴσον πρὸς τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον τοῦ $\overline{OP}$. Π.χ.:

$$OP < \overline{OP''}$$

Ἐκ τῆς ἐξετάσεως τῶν περιπτώσεων 1 καὶ 2 προκύπτει ὅτι, διανύσματα συγκρίσιμα, κατὰ τὴν ἔννοιαν τῶν συμβόλων $\gg$ καὶ $>$, ὡς πρὸς δοθὲν διάνυσμα OP, εἶναι ἅπαντα τὰ διανύσματα τὰ ἔχοντα τὸ πέρας αὐτῶν *εἰς* (1) τὴν περιοχὴν τοῦ παραλληλογράμμου OAPB ἢ *εἰς* τὴν περιοχὴν τὴν ὁριζομένην ἐκ τῶν προεκτάσεων τῶν εὐθειῶν AP καὶ BP.

Περίπτωσις 3η

Προφανῶς τὸ διάνυσμα $\overline{OP}$ (διάγρ. 7) δὲν εἶναι συγκρίσιμον πρὸς τὰ διανύσματα OP' καὶ $\overline{OP''}$. Τὸ διάνυσμα $\overline{OP'}$ ἔχει τὴν ψ-συντεταγμένην (2) αὐτοῦ μεγαλυτέραν τῆς ἀντιστοίχου συντεταγμένης τοῦ $\overline{OP}$, τὴν δὲ χ-συντεταγμένην μικροτέραν τῆς ἀντιστοίχου συντεταγμένης τοῦ $\overline{OP}$. Αἱ ἀντίθετοι σχέσεις ἰσχύουν μεταξὺ $\overline{OP}$ καὶ $\overline{OP''}$. Γενικῶς δὲν εἶναι συγκρίσιμα



Διάγραμμα 7

---

1) Ἡ ἔκφρασις «*εἰς* τὴν περιοχὴν τοῦ παραλληλογράμμου OAPB» ὑποδηλοῖ ἅπαντα τὰ σημεῖα τοῦ παραλληλογράμμου, συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν σημείων τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

2) Ἀντὶ τοῦ ὅρου «συντεταγμέναι πέρατος» τοῦ διανύσματος δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὁ ὅρος «συντεταγμέναι προβολαὶ» ἢ ἁπλῶς «συντεταγμέναι» τοῦ διανύσματος. Αἱ τελευταῖαι αὗται — ὁριζόμεναι ὡς ἡ διαφορὰ μεταξὺ συντεταγμένων πέρατος καὶ συντεταγμένων ἀρχῆς τοῦ διανύσματος — εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν διανυσμάτων τὰ ὁποῖα ἐκπορεύονται ἐκ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος συμπίπτουν πρὸς τὰς συντεταγμένας πέρατος.

πρὸς τὸ δοθὲν διάνυσμα $\overline{OP}$ ἅπαντα τὰ διανύσματα τῶν ὁποίων τὸ πέρας εὑρίσκεται *ἐντὸς* τῶν περιοχῶν I καὶ II.

Ὅταν ὁμιλοῦμεν γενικῶς περὶ συγκρισίμων διανυσμάτων κατὰ τὴν ἔννοιαν τῶν συμβόλων $\gg$ καὶ $>$, χωρὶς ὅμως νὰ εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ προσδιορίσωμεν ποῖον ἐκ τῶν δύο συμβόλων ἰσχύει, χρησιμοποιοῦμεν τὸ γενικὸν σύμβολον «$\geq$» (ἢ $\leq$).

Οὕτω, π.χ., $\alpha \geq \beta$ σημαίνει ὅτι ὁπωσδήποτε :

$$\alpha \neq \beta$$

καὶ $\qquad \alpha \gg \beta$

ἢ $\qquad \alpha > \beta$ (1)

Κατὰ συνέπειαν τὸ σύμβολον $\geq$, καλύπτει ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τὰς προσδιοριζομένας ὑπὸ τῶν συμβόλων $\gg$ καὶ $>$.

Πλὴν τοῦ συμβόλου $\geq$, θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῇ ἐπίσης τὸ γενικώτερον σύμβολον «$\geqq$» (ἢ $\leqq$), πρὸς ὑποδήλωσιν τόσον τῆς δυνατότητος ἰσότητος, ὅσον ἐπίσης καὶ τῆς δυνατότητος ἀνισότητος, κατὰ τὴν ἔννοιαν τῶν συμβόλων $\gg$ καὶ $>$. Οὕτω, π.χ., $\alpha \geqq \beta$ σημαίνει :

$$\alpha = \beta$$

ἢ $\qquad \alpha \gg \beta$

ἢ $\qquad \alpha > \beta$ (2)

3.1.9. Ἐφ' ὅσον μαθηματικῶς ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης παριστᾶται ὡς διάνυσμα (=στήλη διατεταγμένων ἀριθμῶν), τὴν διαδικασίαν ***προαριστοποιήσεως*** ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων (βλ. 1.7) δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὑπὸ μορφὴν συγκρίσεως τῶν διανυσμάτων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς δραστηριότητας ταύτας. Οὕτω, ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ παραδείγματος τῆς παραγράφου 1.7, ἔχομεν τὰς ὁμοκλαδικὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix},$$

---

1) Ἂν $\alpha \leq \beta$ τότε ἔχομεν $\alpha \neq \beta$ καὶ $\alpha \ll \beta$ ἢ $\alpha < \beta$.

2) Ἂν $\alpha \leqq \beta$ τότε ἔχομεν $\alpha = \beta$ ἢ $\alpha \ll \beta$ ἢ $\alpha < \beta$.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}, \ \sigma\tau = \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}, \ \zeta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \eta = \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Αἱ περιπτώσεις συγκρισιμότητος εἰς ἃς ἐφαρμόζεται ἡ προαριστοποίησις εἶναι :

	ὁμὰς 1η		*ὁμὰς 2α*	
	$\alpha < \beta$		$\varepsilon < \sigma\tau$	
	$\alpha < \gamma$	καὶ	$\varepsilon < \zeta$	
	$\alpha \ll \delta$		$\varepsilon \ll \eta$	
γενικῶς	$\alpha < \beta, \gamma, \delta$		$\varepsilon < \sigma\tau, \zeta, \eta$	γενικῶς

Ἐκ τῶν συγκρίσεων αὐτῶν προκύπτει ὅτι αἱ ἀποδοτικαὶ παραγωγικαὶ δραστηριότητες ἑκάστης ὁμάδος ἐκφράζονται διὰ τῶν «μικροτέρων» διανυσμάτων α καὶ ε.

Περίπτωσις μὴ συγκρισιμότητος ὑφίσταται, ὡς παρατηροῦμεν, μεταξὺ τῶν διανυσμάτων α καὶ ε. Κατὰ συνέπειαν δὲν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν, βάσει τῆς διαδικασίας προαριστοποιήσεως, ποία ἐκ τῶν δύο παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ διανύσματα ταῦτα, εἶναι ἡ πλέον ἀποδοτική.

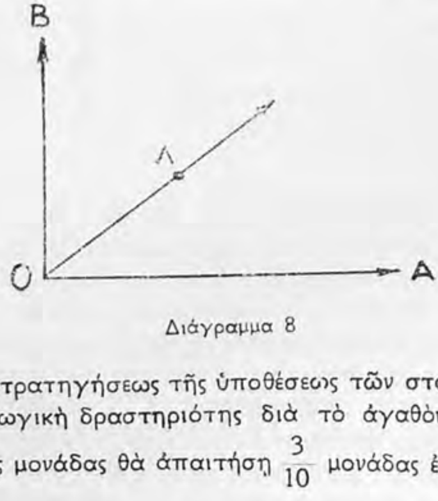
3 1.10. Γενικῶς, δοθέντος ἑνὸς ἀριθμοῦ ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθοῦν εὐχερῶς αἱ ἀποδοτικώτεραι ἐκ τῶν δραστηριοτήτων αὐτῶν (ἐὰν ὑπάρχουν), ἐφ' ὅσον τὰ διανύσματα τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν ταύτας εἶναι συγκρίσιμα κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου $\geq$ (1). Εἰδικώτερον, ἐὰν τὰ διανύσματα τὰ ὁποῖα παριστοῦν τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας περιέχουν μόνον στοιχεῖα εἰσροῶν (μὲ θετικὴν προσήμανσιν), ὡς εἰς τὰς περιπτώσεις τῆς παραγρ. 3.1.9., τὸ «μικρότερον» διάνυσμα ὁρίζει τὴν πλέον ἀποδοτικὴν δραστηριότητα. Εἰς περίπτωσιν ὅμως καθ' ἣν τὰ διανύσματα τῶν ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων περιλαμβάνουν ταυτοχρόνως στοιχεῖα εἰσροῶν, μὲ ἀρνητικὸν σημεῖον, καὶ στοιχεῖα ἐκροῶν, μὲ θετικὸν σημεῖον, τότε ἰσχύει μὲν ὁ κανὼν τῆς συγκρίσεως κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου $\geq$, ἀλλ' αἱ ἀποδοτικώτεραι παραγωγικαὶ δραστηριότητες εἶναι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ «μεγαλύτερα» καὶ οὐχὶ εἰς τὰ «μικρότερα» διανύσματα. Ἂς λάβωμεν, π.χ., τὰς ὁμοκλαδικὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας αἱ ὁποῖαι ἐκφράζονται διὰ τῶν διανυσμάτων α καὶ β :

1) Τὸ σύμβολον $\geqslant$ ὑποδηλοῖ ὡς εἴπομεν ἀμφότερα τὰ σύμβολα $\gg$ καὶ $>$.

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \text{καὶ } \beta = \begin{vmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Ἐπειδὴ τὰ στοιχεῖα τοῦ α εἶναι ἀνὰ ἓν ἴσα ἢ μεγαλύτερα (ἀλγεβρικῶς) ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ β ἔχομεν: $\alpha > \beta$. Εἰδικώτερον ἡ πρώτη παραγωγικὴ δραστηριότης περιλαμβάνει ἀφ' ἑνὸς μὲν μεγαλυτέραν ποσότητα ἐκ τοῦ δευτέρου ἀγαθοῦ, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὀλιγωτέραν ποσότητα ἐκ τοῦ πρώτου συντελεστοῦ, ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν δευτέραν δραστηριότητα. Κατὰ συνέπειαν ἡ πρώτη δραστηριότης, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ «μεγαλύτερον» διάνυσμα, εἶναι ἀποδοτικωτέρα τῆς δευτέρας (1).

3.1.11. Συμφώνως πρὸς τὴν *ὑπόθεσιν τῆς διαιρετότητος*, ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ διεξαχθῇ ὄχι μόνον εἰς οἱονδήποτε (2) ἀκέραιον ἀλλὰ καὶ εἰς οἱονδήποτε κλασματικὸν ἐπίπεδον δρά-



Διάγραμμα 8

σεως, ἄνευ καταστρατηγήσεως τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Οὕτω, ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης διὰ τὸ ἀγαθὸν ω (3.1.1) εἰς τὸ ἐπίπεδον $\frac{1}{10}$ τῆς μονάδας θὰ ἀπαιτήσῃ $\frac{3}{10}$ μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α καὶ $\frac{2}{10}$ μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Β. Διανυσματικῶς:

1) Ἐφ' ὅσον αἱ ὁμοκλαδικαὶ παραγωγικαὶ δραστηριότητες εἶναι *ἀνηγμέναι* ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ ἀγαθόν, τὰ διανύσματα αὐτῶν εἶναι δυνατὸν νὰ συγκριθοῦν μόνον κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου $>$, διότι θὰ ὑφίσταται ὁπωσδήποτε ἰσότης μεταξὺ δύο τουλάχιστον ἀντιστοίχων στοιχείων. Ἡ σύγκρισις κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου $\gg$ εἶναι δυνατὴ μόνον εἰς περίπτωσιν μὴ ἀνηγμένων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων.

2) Θετικόν.

$$\frac{1}{10} \times OP = \frac{1}{10} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν καὶ ἡ ὑπόθεσις τῆς διαιρετότητος ὁδηγοῦν εἰς *γραμμικὰς* συναρτήσεις παραγωγῆς, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζονται γεωμετρικῶς ὡς εὐθεῖαι γραμμαί (1), μὲ ἀφετηρίαν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

Ἐκ τοῦ διαγράμματος 8 καταφαίνεται ὅτι μία γραμμικὴ συνάρτησις παραγωγῆς δύναται νὰ νοηθῇ ὡς προκύπτουσα ἐκ δοθείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος (ἤτοι ἐξ ἑνὸς διανύσματος (2)), ἂν τὰ ἐπίπεδα δράσεως αὐτῆς λαμβάνουν μὴ ἀρνητικὰς τιμάς.

3.1.12. Ἂν τὸ ἐπίπεδον δράσεως μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος, π.χ., τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος διὰ τὸ ἀγαθὸν ω (3.1.1.), εἶναι μηδέν, ὅπερ ὑποδηλοῖ *ἀπραξίαν* τῆς οἰκονομικῆς μονάδος ὡς πρὸς τὴν παραγωγικὴν ταύτην δραστηριότητα, θὰ ἔχωμεν :

$$0 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τὸ διάνυσμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος καλεῖται *μηδενικὸν* (3) καὶ παριστᾶται διὰ τοῦ συμβόλου **0**. Τὸ μηδενικὸν διάνυσμα εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον θὰ εἶναι :

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.1.13. Χρήσιμος ἀπὸ οἰκονομικῆς ἀπόψεως εἶναι ἡ ἔννοια τῆς *μὴ ἀρνητικότητος* ἑνὸς διανύσματος. Ἡ ἔννοια αὕτη δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος καὶ τῶν ὁρισθέντων ἀνωτέρω

1) Αἱ γραμμαὶ αὗται καλοῦνται ἀκριβέστερον *ἡμιευθεῖαι* ἢ *ἀκτῖνες*, καθ' ὅσον δὲν ἐπεκτείνονται ἑκατέρωθεν τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

2) Τοῦ διανύσματος $\overline{ΟΛ}$, ἐν προκειμένῳ.

3) Τὸ διάνυσμα τοῦτο θεωρεῖται ὅτι ἔχει ἀρχὴν καὶ πέρας τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων καὶ τυχοῦσαν κατεύθυνσιν.

(3.1.8.) συμβόλων ἀνισότητος. Ἔστω, π.χ., ὅτι ἔχομεν τὰς σχέσεις :

$$\alpha \gg 0$$

$$\text{καὶ} \qquad \alpha > 0$$

ὅπου α εἶναι δοθὲν διάνυσμα ν στοιχείων. Συμφώνως πρὸς τὴν ἔννοιαν τῶν συμβόλων $\gg$ καὶ $>$, ἡ πρώτη σχέσις σημαίνει ὅτι ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ α εἶναι μεγαλύτερα τοῦ μηδενὸς ($\alpha_\iota > 0$ διὰ $\iota = 1, 2, \ldots, \nu$), ἤτοι εἶναι θετικά, π.χ. :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ἡ δὲ δευτέρα σημαίνει ὅτι ἓν ἢ περισσότερα (οὐχὶ ὅμως ὅλα) στοιχεῖα τοῦ α εἶναι θετικὰ τὰ δὲ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ μηδὲν ($\alpha_\iota \geq 0$ διὰ $\iota = 1, 2, \ldots, \nu$ καὶ $\alpha_\iota > 0$ δι' ἓν τουλάχιστον ι), π.χ. :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ($\alpha \gg 0$) λέγομεν ὅτι τὸ διάνυσμα α εἶναι *θετικόν*. Εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ($\alpha > 0$) χαρακτηρίζομεν τὸ διάνυσμα α ὡς *ἡμιθετικόν*. Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις οὐδὲν στοιχεῖον τοῦ α εἶναι ἀρνητικὸν (: $\alpha_\iota \not< 0$). Συνοπτικῶς δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν μεταξὺ τῶν διανυσμάτων α καὶ 0 τὸ γενικώτερον σύμβολον $\geq$, ἀντὶ τῶν συμβόλων $\gg$ καὶ $>$. Ἤτοι :

$$\alpha \geq 0$$

Ἡ σχέσις αὕτη σημαίνει ἀφ' ἑνὸς μὲν μὴ ἀρνητικότητα, ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$\alpha \neq 0$$

Διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ ἔτι γενικωτέρου συμβόλου $\geqq$ καλύπτομεν ἁπάσας τὰς περιπτώσεις μὴ ἀρνητικότητος [1], ἤτοι :

$$\alpha \geqq 0 \quad \text{ἀντὶ} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \gg 0 \\ \alpha > 0 \\ \alpha = 0 \end{array} \right.$$

---

1) Ἡ ἔννοια τῆς *μὴ θετικότητος* δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς $\alpha \leqq 0$, ὁπότε ἔχομεν, ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως, $\alpha \ll 0$, $\alpha < 0$ ἢ $\alpha = 0$.

Ἂν τὸ διάνυσμα $\mathbf{\alpha}$ περιλαμβάνῃ ταυτοχρόνως στοιχεῖα θετικὰ καὶ ἀρνητικά, τότε γράφομεν

$$\mathbf{\alpha} \not\gtrless 0$$

3.1.14. Ἐφ' ὅσον αἱ ποσότητες ἑνὸς παραγωγικοῦ συντελεστοῦ μετροῦνται ἐπὶ ἑνὸς συγκεκριμένου ἄξονος τοῦ συστήματος συντεταγμένων, ἡ μονὰς μετρήσεως τῆς ποσότητος τοῦ ἐν λόγῳ συντελεστοῦ δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς διάνυσμα μὲ συντεταγμένην ὡς πρὸς τὸν οἰκεῖον ἄξονα τὴν μονάδα καὶ τὰς λοιπὰς συντεταγμένας ἴσας πρὸς τὸ μηδέν. Οὕτω, εἰς τὸ διάγρ. 2 θὰ ἔχωμεν διανύσματα :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ἀντιπροσωπεύοντα τὰς μονάδας μετρήσεως τῶν συντελεστῶν Α καὶ Β, ἀντιστοίχως. Ταῦτα καλοῦμεν ***μοναδιαῖα διανύσματα.***

Γενικῶς, εἰς τὸν ν - διάστατον χῶρον θὰ ἔχωμεν τὰ μοναδιαῖα διανύσματα :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix},$$

τὰ ὁποῖα οἰκονομικῶς παριστοῦν μονάδας μετρήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ἐπὶ τῶν ν ἀξόνων τοῦ συστήματος συντεταγμένων. Τὰ διανύσματα ταῦτα παριστῶμεν συνήθως διὰ τοῦ συμβόλου :

$$\mathbf{e}_\iota \quad \text{διὰ} \quad \iota = 1, 2, \ldots, \nu$$

ὅπου ν ὁ ἀριθμὸς τῶν διαστάσεων τοῦ χώρου καὶ συνεπῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος. Ἡ ἑκάστοτε τιμὴ τοῦ ι προσδιορίζει τὴν θέσιν τῆς μονάδος ἐντὸς τῆς στήλης τοῦ διανύσματος. Οὕτω, π.χ., ἂν $\nu = 4$ καὶ $\iota = 2$, θὰ ἔχωμεν :

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.1.15. Μέχρι τοῦδε ἠσχολήθημεν μὲ μαθηματικὰς ἐννοίας καὶ παραστάσεις ἀναφερομένας εἰς μεμονωμένας παραγωγικὰς δραστηριότητας. Εἰς τὰς ἑπομένας παραγράφους θὰ ἀσχοληθῶμεν κυρίως μὲ τὸν χειρισμὸν περισσοτέρων τῆς μιᾶς παραγωγικῶν δραστηριοτήτων.

Εἰς 2.2.3 ὑπεθέσαμεν ὅτι δύο ἢ περισσότεραι παραγωγικαὶ δραστηριότητες, χρησιμοποιούμεναι ταυτοχρόνως εἰς δεδομένα ἐπίπεδα, ἀπορροφοῦν ποσότητας συντελεστῶν ἴσας πρὸς τὰς ἀπορροφωμένας ποσότητας συντελεστῶν ἂν ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης ἐχρησιμοποιεῖτο ἐντὸς διαφόρου χρονικῆς περιόδου· τὸ αὐτὸ ἰσχύει διὰ τὸ σύνολον τῶν παραγομένων ἀγαθῶν (*ὑπόθεσις προσθετικότητος*). Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ταυτόχρονος χρησιμοποίησις διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων θεωρεῖται ὡς μὴ ἐπηρεάζουσα εὐνοϊκῶς ἢ δυσμενῶς τὸ συνολικὸν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα ἢ τὴν συνολικὴν οἰκονομικὴν θυσίαν.

Μαθηματικῶς τὰ ἀνωτέρω δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τῆς *προσθέσεως διανυσμάτων*. Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι τὰ διανύσματα :

$$\overline{OK} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad O\Lambda = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

παριστοῦν δύο παραγωγικὰς δραστηριότητας, ταυτοχρόνως χρησιμοποιουμένας εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος (βλ. διάγρ. 9). Αἱ ἀναλισκόμεναι ποσότητες τῶν συντελεστῶν, ἔστω Α καὶ Β, θὰ εἶναι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, 5 καὶ 7 μονάδες, ἀντιστοίχως. Τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δίδεται καὶ ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν δύο διανυσμάτων. Ἡ πρᾶξις αὕτη ὁρίζεται ὡς «πρόσθεσις» τῶν δύο διανυσμάτων καὶ συμβολίζεται ὡς κάτωθι :

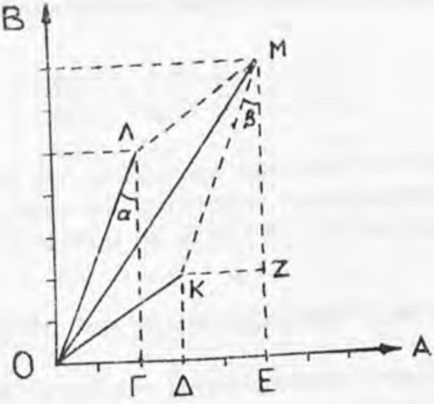
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Γενικῶς, διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα διανύσματα τοῦ αὐτοῦ χώρου σχηματίζομεν ἓν νέον διάνυσμα μὲ στοιχεῖα τὰ ἀθροίσματα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν προσθετέων διανυσμάτων (1), π.χ. :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\nu \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_\nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \rho_1 \\ \beta_2 + \beta_2 + \ldots + \rho_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_\nu + \beta_\nu + \ldots + \rho_\nu \end{vmatrix}$$

1) Ὁ κανὼν οὗτος ἰσχύει (ὑπὸ ἀλγεβρικὴν ἔννοιαν) καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν διανυσμάτων.

Ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ ἀθροίσματος τῶν διανυσμάτων $\overline{\mathrm{OK}}$ καὶ $\overline{\mathrm{O\Lambda}}$, ἀνωτέρω, δεικνύεται εἰς τὸ διάγραμμα 9. Τὸ διάνυσμα $\overline{\mathrm{OM}}$, εἶναι



Διάγραμμα 9

τὸ ***διαγώνιον διάνυσμα*** τοῦ παραλληλογράμμου ΟΛΜΚ, καὶ ἔχει συντεταγμένας τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων συντεταγμένων τῶν διανυσμάτων $\overline{\mathrm{OK}}$ καὶ $\overline{\mathrm{O\Lambda}}$ (1) (2).

3.1.16. Ἂν αἱ ὑπὸ τῶν διανυσμάτων $\overline{\mathrm{OK}}$ καὶ $\overline{\mathrm{O\Lambda}}$ παριστώμεναι παραγωγικαὶ δραστηριότητες χρησιμοποιοῦνται ταυτοχρόνως εἰς ἐπίπεδα 3 καὶ 2 μονάδων, ἀντιστοίχως, πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀναλισκομένων ποσοτήτων συντελεστῶν Α καὶ Β πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν :

$$3 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***γραμμικὸν συνδυασμὸν διανυσμάτων***. Γενικῶς "γραμμικὸν συνδυασμὸν διανυσμάτων" καλοῦμεν τὸ ἄθροισμα διανυσμά-

1) Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΛΓ καὶ ΚΜΖ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἐκ κατασκευῆς ἴσας καὶ τὰς ὀξείας γωνίας α καὶ β ἐπίσης ἴσας, λόγῳ τῆς παραλληλίας τῶν πλευρῶν αὐτῶν. Συνεπῶς ΟΓ = ΚΖ. Ἀλλὰ ΚΖ = ΔΕ. Ἑπομένως ΟΓ = ΔΕ. Ἐξ ἄλλου ΟΕ = ΟΔ + ΔΕ = ΟΔ + ΟΓ. Οὕτω ἀπεδείχθη ὅτι ἡ τεταγμένη τοῦ Μ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τεταγμένων τῶν σημείων Κ καὶ Λ. Καθ' ὅμοιον τρόπον δύναται νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσότης μεταξὺ τῆς τετμημένης τοῦ Μ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετμημένων τῶν σημείων Κ καὶ Λ.

2) Ἂν τὰ προστιθέμενα διανύσματα παριστάνουν δυνάμεις, ὡς συνήθως συμβαίνει εἰς τὴν Μηχανικήν, τὸ παραλληλόγραμμον καλεῖται «παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων».

των ἑκάστου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν (¹). Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς σχετικῆς παραστάσεως, ἐκτελοῦμεν τοὺς σημειουμένους πολλαπλασιασμοὺς κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα νέα διανύσματα. Οὕτω, διὰ τὴν ἀνωτέρω παράστασιν θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ τελευταίου διανύσματος τῆς ἰσότητος δεικνύουν τὸ σύνολον τῶν ἀναλισκομένων ποσοτήτων συντελεστῶν Α καὶ Β, ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ΟΚ καὶ ΟΛ εἰς τὰ ἐπίπεδα 3 καὶ 2, ἀντιστοίχως.

3.2. Παραγωγικαὶ δραστηριότητες καὶ μῆτραι

Αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες τὰς ὁποίας διαθέτει μία οἰκονομικὴ μονὰς πρὸς ἐκτέλεσιν ἑνὸς ἢ περισσοτέρων οἰκονομικῶν ἔργων εἶναι συνήθως περιωρισμένου ἀριθμοῦ *(ὑπόθεσις πεπερασμένου ἀριθμοῦ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων)*. Τὸ σύνολον τῶν ἐν λόγῳ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων καθορίζει, ὡς εἴπομεν, τὰς τεχνολογικὰς δυνατότητας ἢ ἁπλῶς τὴν *τεχνολογίαν* τῆς οἰκονομικῆς μονάδος. Τὰ κατωτέρω συμπαρατιθέμενα διανύσματα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας δοθείσης οἰκονομικῆς μονάδος, ἀποτελοῦν παράδειγμα τοιαύτης τεχνολογίας:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ἀπαλείφοντες τὰς ἐσωτερικὰς ἀγκύλας τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως λαμβάνομεν τὴν ἁπλουστέραν τοιαύτην:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἡ παράστασις αὕτη καλεῖται μαθηματικῶς *μήτρα*.

Γενικῶς, ἡ μήτρα εἶναι πίναξ ἀριθμῶν διατασσομένων εἰς σχῆμα ὀρθογώνιον. Ἡ διάταξις τῶν ἀριθμῶν (στοιχείων) ὁρίζεται ἐκ τῆς θέσεως αὐτῶν εἰς τὰς *γραμμὰς* καὶ τὰς *στήλας* τῆς μήτρας. Ἂν $\iota (=1, 2, \ldots, \mu)$ συμβολίζῃ τυχοῦσαν γραμμὴν τῆς μήτρας καὶ $\kappa (=1, 2, \ldots, \nu)$

1) Ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

τυχοῦσαν στήλην αὐτῆς, $\alpha_{\iota\kappa}$ εἶναι τὸ στοιχεῖον τῆς μήτρας τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ι καὶ τῆς στήλης κ.

Συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω συμβολισμόν, ἡ γενικῆς μορφῆς μήτρα μ σειρῶν καὶ ν στηλῶν $-\mu \times \nu$ *τάξεως*— δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \ldots & \alpha_{3\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} \ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

ἢ συντόμως: $\begin{bmatrix} \alpha_{\iota\kappa} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} \iota = 1, 2, \ldots, \mu \\ \kappa = 1, 2, \ldots, \nu \end{array}$

3.3. Ὁρισμοί

3.3.1. Ἂν μία μήτρα $\mu \times \nu$ (1) τάξεως ἔχῃ ἀριθμὸν γραμμῶν ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν ($\mu=\nu$), αὕτη καλεῖται ***τετραγωνικὴ μήτρα***, π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.2. Μία τετραγωνικὴ μήτρα ἔχουσα στοιχεῖα $\alpha_{\iota\kappa}=0$ ὅπου $\iota \neq \kappa$ καλεῖται ***διαγώνιος*** μήτρα. Π.χ., ἡ μήτρα:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις αἱ διαγώνιοι μῆτραι ἔχουν μηδενικὰ πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἐκτὸς ἐνδεχομένως τῶν στοιχείων τῆς ***κυρίας διαγωνίου*** (2).

3.3.3. Ἡ διαγώνιος μήτρα ἡ ὁποία ἔχει εἰς τὴν κυρίαν διαγώνιον

---

1) Τὰ μ καὶ ν θεωροῦνται βεβαίως ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

2) Κυρία διαγώνιος τετραγωνικῆς μήτρας καλεῖται ἡ ἐξ ἀριστερῶν καὶ ἄνω ἀρχομένη διαγώνιος.

αὐτῆς μονάδας καλεῖται *μοναδιαία μήτρα* καὶ παριστᾶται διὰ τοῦ συμβόλου I, π.χ.:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (^1)$$

3.3.4. Τετραγωνικὴ μήτρα ἔχουσα $\alpha_{\iota\kappa} = 0$ ὅπου $\iota < \kappa$ ἢ $\iota > \kappa$ καλεῖται καὶ *τριγωνικὴ* μήτρα. Π.χ., αἱ μῆτραι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

εἶναι τριγωνικαί. Εἰδικώτερον ἡ A καλεῖται *ὑποδιαγώνιος*, ὡς ἔχουσα μὴ μηδενικὰ στοιχεῖα ἐπὶ καὶ ὑπὸ τὴν κυρίαν διαγώνιον, ἡ δὲ B *ὑπερδιαγώνιος*, ἐπειδὴ τὰ μηδενικὰ στοιχεῖα αὐτῆς κεῖνται ἐπὶ καὶ ὑπὲρ τὴν κυρίαν διαγώνιον.

3.3.5. Μήτρα ἔχουσα περισσοτέρας τῆς μιᾶς γραμμὰς καὶ μίαν μόνον στήλην ($\nu = 1$ καὶ $\mu > \nu$) ἀποτελεῖ ἁπλοῦν διάνυσμα, π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Μήτρα ἔχουσα μίαν μόνον γραμμὴν καὶ περισσοτέρας τῆς μιᾶς στήλας ($\nu > \mu$ καὶ $\mu = 1$) ἀποτελεῖ ἐπίσης διάνυσμα, π.χ.:

$$[2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]$$

Τὰ διανύσματα τῆς μορφῆς ταύτης (ὡς καὶ πᾶσαι αἱ γραμμαὶ μιᾶς μήτρας) καλοῦνται *διανύσματα - γραμμαί*. Πρὸς διάκρισιν, τὰ διανύσματα τῆς προηγουμένης μορφῆς (ὡς καὶ πᾶσαι αἱ στῆλαι μιᾶς μήτρας) καλοῦνται *διανύσματα - στῆλαι*.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ μητρῶν καὶ δια-

---

1) Ἐνίοτε ἡ μήτρα I ἐκφράζεται διὰ τῶν καλουμένων «δ Kronecker» ὡς:

$$I \equiv [\delta_{\iota\kappa}] \qquad \text{ὅπου } \delta_{\iota\kappa} = \begin{cases} 1 & \text{διὰ } \iota = \kappa \\ 0 & \text{διὰ } \iota \neq \kappa \end{cases}$$

νυσμάτων εἶναι διττή: Μία μήτρα σύγκειται ἐκ διανυσμάτων, ἀλλὰ καὶ ἓν διάνυσμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εἰδικὴ περίπτωσις μήτρας.

3.3.6. Ἡ μήτρα ἡ ὁποία ἔχει μόνον μηδενικὰ στοιχεῖα καλεῖται *μηδενικὴ* μήτρα, π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3.7. Ἂν $\mu = \nu = 1$ τότε ἡ μήτρα καταλήγει εἰς ἓν στοιχεῖον, ἤτοι ἕνα ἀριθμόν. Ὑπάρχει πλήρης ἰσοδυναμία μεταξὺ ἀριθμῶν καὶ μητρῶν τάξεως 1×1.

3.3.8. Δοθεισῶν δύο μητρῶν Α καὶ Β, τάξεως $\mu \times \nu$, καλοῦμεν *ἀντίστοιχα* ἢ *ὁμοτάξια* τὰ στοιχεῖα αὐτῶν $\alpha_{\iota\kappa}$ καὶ $\beta_{\iota\kappa}$, τὰ χαρακτηριζόμενα ἀπὸ τοὺς αὐτοὺς δείκτας. Οὕτω, π.χ., τὰ στοιχεῖα α_{35} καὶ β_{35} εἶναι ὁμοτάξια, ὡς ἀνήκοντα εἰς τὴν τρίτην γραμμὴν καὶ πέμπτην στήλην τῶν μητρῶν Α καὶ Β, ἀντιστοίχως.

3.3.9. Δύο μῆτραι εἶναι *ἴσαι* ὅταν εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ ἔχουν ἅπαντα τὰ ὁμοτάξια στοιχεῖα αὐτῶν ἀνὰ ἓν ἴσα. Ἔστω αἱ μῆτραι

$$A = [\alpha_{\iota\kappa}] \quad \text{καὶ} \quad B = [\beta_{\iota\kappa}],$$

τάξεως $\mu \times \nu$. Λέγομεν ὅτι αἱ μῆτραι αὗται εἶναι ἴσαι, συμβολικῶς $A = B$, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $\alpha_{\iota\kappa} = \beta_{\iota\kappa}$, διὰ ὅλας τὰς τιμὰς ι καὶ κ.

Δύο μῆτραι εἶναι *ἄνισοι* ἂν εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ τὰ ὁμοτάξια στοιχεῖα αὐτῶν εἶναι συγκρίσιμα κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου $\geq$. Οὕτω $A \geq B$ σημαίνει $\alpha_{\iota\kappa} \geq \beta_{\iota\kappa}$ διὰ $\iota = 1, 2, \ldots, \mu$ καὶ $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$ (1).

3.3.10. ***Διανεμημέναι μῆτραι.*** Δοθεῖσα μήτρα τάξεως $\mu \times \nu$ δύναται, συμφώνως πρὸς 3.3.5., νὰ ἀναλυθῇ (διανεμηθῇ) εἰς μ διανύσματα - γραμμὰς ἢ ν διανύσματα - στήλας. Τὰ διανύσματα ταῦτα ἀποτελοῦν «ὑπομήτρας», ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀρχικὴν μήτραν. Οὕτω, π.χ., ἡ μήτρα Α:

---

1) Ὑποτίθεται ὅτι αἱ μῆτραι εἶναι $\mu \times \nu$ τάξεως.

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \ldots \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \ldots \alpha_{3\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} \ldots \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν ***διανεμημένης*** μήτρας μὲ ὑπομήτρας τὰς μ γραμμὰς αὐτῆς:

$$A \equiv \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_\mu \end{bmatrix}$$

ὅπου $A_\iota \equiv [\alpha_{\iota 1} \quad \alpha_{\iota 2} \ldots \alpha_{\iota\nu}]$ διὰ $\iota = 1. 2, \ldots, \mu$. Ἐπίσης ἡ A δύναται νὰ γραφῇ ὡς:

$$A \equiv [\, A^{(1)} \quad A^{(2)} \quad A^{(3)} \ldots A^{(\nu)} \,]$$

ὅπου
$$A^{(\kappa)} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{1\kappa} \\ \alpha_{2\kappa} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu\kappa} \end{bmatrix}, \qquad \text{διὰ} \quad \kappa = 1, 2, \ldots, \nu$$

Ἡ A δύναται ἐπίσης νὰ διαχωρισθῇ καὶ κατὰ διαφόρους ἄλλους, τρόπους, π.χ.:

$$A \equiv \left[\begin{array}{cc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \ldots \alpha_{2\nu} \\ \hline \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \ldots \alpha_{3\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} \ldots \alpha_{\mu\nu} \end{array}\right] \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix}$$

ὅπου τὰ σύμβολα A_{11}, A_{12} κλπ. ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ὑπομήτρας τῆς A.

Ὁ ὡς ἄνω διαχωρισμὸς μητρῶν εἶναι ἐνίοτε ἀναγκαῖος, πρὸς ὑποδήλωσιν τῆς εἰδικῆς σημασίας τῶν στοιχείων ἑκάστης ὑπομήτρας ἢ διὰ λόγους ὑπολογιστικούς (1). [illegible]

3.4. Πράξεις ἐπὶ μητρῶν

Εἰς τὸ παρὸν τμῆμα δίδονται οἱ κυριώτεροι κανόνες χειρισμοῦ τῶν μητρῶν. Ἡ ἐκμάθησις τῶν κανόνων αὐτῶν εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν διατύπωσιν καὶ σπουδὴν βασικῶν προβλημάτων προγραμματισμοῦ.

3.4.1. Πρόσθεσις μητρῶν. Ἂν $A = [\alpha_{\iota\kappa}]$ καὶ $B = [\beta_{\iota\kappa}]$ εἶναι μῆτραι τάξεως $\mu \times \nu$, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ὁρίζεται ὡς ἡ νέα μήτρα Γ, τῆς αὐτῆς τάξεως, μὲ στοιχεῖα $\gamma_{\iota\kappa} = \alpha_{\iota\kappa} + \beta_{\iota\kappa}$. Συμβολικῶς γράφομεν:

$$A + B = \Gamma = [\gamma_{\iota\kappa}]$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις, διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρας μήτρας $\mu \times \nu$ τάξεως, σχηματίζομεν νέαν μήτραν τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ στοιχεῖα τὰ ἀθροίσματα τῶν ὁμοταξίων στοιχείων τῶν προστιθεμένων μητρῶν.

Παράδειγμα :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 \\ 3+1 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ὁμοίως :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Ἡ διαφορὰ δύο μητρῶν A καὶ B, τάξεως $\mu \times \nu$, συμβολικῶς $A - B$, εἶναι ἡ μήτρα Γ τῆς αὐτῆς τάξεως, μὲ στοιχεῖα $\gamma_{\iota\kappa} = \alpha_{\iota\kappa} - \beta_{\iota\kappa}$.

Οὕτω, ἂν $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ καὶ $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, θὰ ἔχωμεν :

$$\Gamma = A - B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἡ διαφορὰ $A - A$, ὅπου A ἔστω $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, θὰ εἶναι :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Βλ. καὶ 3.4.4.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι ἡ μηδενικὴ μήτρα εἶναι ἡ διαφορὰ δύο ἴσων μητρῶν.

3.4.2. Πολλαπλασιασμὸς μήτρας ἐπὶ ἀριθμόν. Ἔστω ἡ μήτρα $A = [\alpha_{\iota\kappa}]$ καὶ λ οἱοσδήποτε ἀριθμός. Τὸ γινόμενον τῆς μήτρας ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ὁρίζεται ὡς:

$$\lambda A = \lambda[\alpha_{\iota\kappa}] = [\lambda\alpha_{\iota\kappa}]$$

Ἤτοι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μήτραν ἐπὶ ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τῆς μήτρας ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ τὰ οὕτω λαμβανόμενα γινόμενα θέτομεν, ἀντιστοίχως, ὡς στοιχεῖα μιᾶς νέας μήτρας.

Παράδειγμα:

$$3 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῆς μοναδιαίας μήτρας I ἐπὶ ἀριθμὸν λ δίδει τὴν διαγώνιον μήτραν:

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & \lambda \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots \lambda \end{bmatrix}$$

ἡ ὁποία καλεῖται ***βαθμωτὴ*** μήτρα.

3.4.3. Πολλαπλασιασμὸς μήτρας ἐπὶ μήτραν. Πρὸς ἐκμάθησιν τῆς πράξεως ταύτης ἀπαιτεῖται ἰδιαιτέρα προσοχή. Ἐν πρώτοις ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο μητρῶν ὁρίζεται μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ ἀριθμὸς τῶν στηλῶν τῆς πρώτης εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν τῆς δευτέρας μήτρας, ὁπότε λέγομεν ὅτι αἱ μῆτραι εἶναι ***συμβιβασταί***. Ἔστωσαν, π.χ., αἱ συμβιβασταὶ μῆτραι Α, τάξεως $\mu \times \nu$, καὶ Β, τάξεως $\nu \times \rho$. Τὸ γινόμενον αὐτῶν ὁρίζεται ὡς ἡ μήτρα Γ, ἔχουσα γραμμὰς ὅσας καὶ ἡ Α καὶ στήλας ὅσας καὶ ἡ Β, δηλ. $\mu \times \rho$ τάξεως, καὶ μὲ στοιχεῖα προσδιοριζόμενα ὡς ἀκολούθως: Ἔστω γενικῶς ὅτι θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ στοιχεῖον $\gamma_{\iota\kappa}$ τῆς Γ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ι γραμμῆς καὶ τῆς κ στήλης τῆς Γ. Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τῆς γραμμῆς ι τῆς μήτρας Α ἐπὶ ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τῆς στήλης κ τῆς μήτρας Β κατὰ σειρὰν (ἤτοι πρῶτον μὲ πρῶτον, δεύτερον μὲ δεύτερον κ.ο.κ.) καὶ προσθέτομεν ἐν συνεχείᾳ τὰ οὕτω προκύπτοντα γινόμενα. Τὸ λαμβανόμενον ἄθροισμα θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ $\gamma_{\iota\kappa}$.

Οὕτω θὰ εἶναι:

$$\gamma_{\iota\kappa} = \alpha_{\iota 1}\beta_{1\kappa} + \alpha_{\iota 2}\beta_{2\kappa} + \alpha_{\iota 3}\beta_{3\kappa} + \dots + \alpha_{\iota\nu}\beta_{\nu\kappa} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\nu} \alpha_{\iota\lambda}\beta_{\lambda\kappa}$$

ὅπου $\alpha_{\iota\lambda}$ καὶ $\beta_{\lambda\kappa}$ εἶναι στοιχεῖα τῆς ι γραμμῆς τῆς Α καὶ τῆς κ στήλης τῆς Β, ἀντιστοίχως.

Ἔστω, π.χ., ὅτι:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Αἱ Α καὶ Β εἶναι συμβιβασταὶ μῆτραι, συνεπῶς τὸ γινόμενον αὐτῶν, συμβολικῶς ΑΒ, δύναται νὰ ὁρισθῇ. Ἡ νέα μήτρα Γ (= ΑΒ) θὰ ἔχῃ κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα 2 γραμμὰς καὶ 3 στήλας. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ στοιχεῖον γ_{11}, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν καὶ τὴν πρώτην στήλην τῆς Γ, λαμβάνομεν τὴν πρώτην γραμμὴν τῆς μήτρας Α καὶ τὴν πρώτην στήλην τῆς μήτρας Β, πολλαπλασιάζομεν κατὰ σειρὰν τὰ στοιχεῖα αὐτῶν (πρῶτον μὲ πρῶτον, δεύτερον μὲ δεύτερον κ.ο.κ.) καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα:

$$3 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 2 = 9$$

Τὸ ἄθροισμα 9 εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ γ_{11}.

Ἀναλόγως τὸ στοιχεῖον γ_{12} θὰ εἶναι:

$$3 \times 4 + 2 \times 6 + 0 \times 2 = 24$$

Τὸ στοιχεῖον γ_{23}:

$$1 \times 5 + 4 \times 3 + 3 \times 0 = 17 \qquad \text{κ.ο.κ.}$$

Συνεπῶς:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 24 & 21 \\ 19 & 34 & 17 \end{bmatrix} \qquad \dots \text{παράδ. 1}$$

Ὁμοίως :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 12 \end{bmatrix} \qquad \ldots \text{παράδ. 2}$$

Ἂν ἔχωμεν δύο μήτρας, ἐξ ὧν ἡ μία εἶναι μοναδιαία, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν ἄλλην μήτραν, π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \ldots \text{παράδ. 3}$$

Γενικῶς $AI = A$. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἡ μοναδιαία μήτρα καλεῖται καὶ *ταυτοτικὴ* μήτρα.

Ἐπειδή, ὡς ἐλέχθη προηγουμένως, τὰ διανύσματα εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις μητρῶν, ὁ πολλαπλασιασμὸς μήτρας ἐπὶ διάνυσμα καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς διανύσματος ἐπὶ διάνυσμα ἀκολουθοῦν τὸν γενικὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν (1). Οὕτω:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 22 \end{bmatrix} \qquad \ldots \text{παράδ. 4}$$

Ὁμοίως :

$$[2 \quad 3 \quad 4] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = [20 \quad 46] \qquad \ldots \text{παράδ. 5}$$

Ἐπίσης :

$$[1 \quad 4 \quad 5 \quad 6] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = [1 + 8 + 15 + 30] = [54] \ldots \text{παράδ. 6}$$

καὶ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [3 \quad 2 \quad 5 \quad 4] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 10 & 8 \\ 9 & 6 & 15 & 12 \end{bmatrix} \qquad \ldots \text{παράδ. 7}$$

Ἂν εἰς τὸ παράδ. 1, ἀνωτέρω, ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῶν πολλαπλασιαζομένων μητρῶν, λαμβάνομεν:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

1) Βλ. καὶ 3.5.1.

Οὕτω διατασσόμεναι αἱ ὡς ἄνω μῆτραι δὲν εἶναι συμβιβασταὶ καὶ συνεπῶς ἡ σημειουμένη πρᾶξις δὲν εἶναι ἐκτελεστή. Τὸ αὐτὸ ἀκριβῶς παρατηροῦμεν ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν πολλαπλασιαζομένων μητρῶν εἰς τὰ παραδ. 4, 5 καὶ 7. Ἀντιθέτως, εἰς τὸ παράδ. 2 ἀλλαγὴ τῆς σειρᾶς τῶν πολλαπλασιαζομένων μητρῶν δίδει γινόμενον:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

δυνάμενον νὰ ὑπολογισθῇ, καθ' ὅσον αἱ μῆτραι ἐξακολουθοῦν καὶ μετὰ τὴν ἀλλαγὴν σειρᾶς νὰ εἶναι συμβιβασταί. Ὁμοίως, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀλλαγῆς σειρᾶς τῶν πολλαπλασιαζομένων μητρῶν εἰς τὸ παράδ. **6**, ὁπότε λαμβάνομεν:

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Ἂν ἐν τούτοις ἐκτελέσωμεν τοὺς ἀνωτέρω σημειουμένους πολλαπλασιασμούς, θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{διὰ τὸ πρῶτον γινόμενον}$$

καὶ

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 12 & 15 & 18 \\ 5 & 20 & 25 & 30 \end{bmatrix} \qquad \text{διὰ τὸ δεύτερον γινόμενον.}$$

Τὰ ἀποτελέσματα ταῦτα εἶναι, ὡς θὰ παρετήρησεν ὁ σπουδαστής, *ἐντελῶς* διάφορα τῶν ἀντιστοίχων ἀποτελεσμάτων τῶν παραδ. 2 καὶ 6.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ γνωστὸς νόμος περὶ ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον $\alpha\beta = \beta\alpha$, *δὲν ἰσχύει* προκειμένου περὶ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ἔχομεν γενικῶς $AB \neq BA$. Καθίσταται συνεπῶς ἀναγκαῖον νὰ διακρίνωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, π.χ., τῆς μήτρας B μὲ τὴν μήτραν A, εἰς *προπολλαπλασιασμὸν* τῆς B μὲ τὴν A, ὁπότε ἔχομεν τὸ γινόμενον AB, καὶ εἰς *μεταπολλαπλασιασμὸν* τῆς B μὲ τὴν A, ὁπότε ἔχομεν τὸ γινόμενον BA.

Ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων ἰσχύει κατ' ἐξαίρεσιν εἴς τινας περιπτώσεις πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν. Ἡ πρώτη εἶναι ἡ περίπτωσις πολλαπλασιασμοῦ μήτρας μὲ ἄλλην μοναδιαίαν τοιαύτην.

Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ παραδ. 3 δύναται εὐκόλως νὰ δειχθῇ ὅτι $AI=IA$ (1). Ἑτέρα περίπτωσις ἀναφέρεται εἰς 3.4.6. (Δ), κατωτέρω.

Πρέπει ἐξ ἄλλου νὰ σημειωθῇ ὅτι ἐνῷ εἰς τὴν συνήθη ἄλγεβραν: $\alpha\beta=0$ σημαίνει $\alpha=0$ ἢ $\beta=0$ ἢ $\alpha=\beta=0$, εἰς τὴν ἄλγεβραν μητρῶν $AB=0$ δὲν σημαίνει κατ' ἀνάγκην ὅτι αἱ μῆτραι αὗται εἶναι μηδενικαί.

Π.χ., ἂν $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1\,{}^{1}/_{3} \end{bmatrix}$ καὶ $B=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, θὰ εἶναι: $AB=0$.

Ἐν συνόψει, διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν μητρῶν ὁ σπουδαστὴς πρέπει νὰ ἐνθυμῆται ὅτι: α) ἡ ἐκτέλεσις τῆς πράξεως καθίσταται δυνατὴ μόνον ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στηλῶν τῆς πρώτης μήτρας ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν τῆς δευτέρας μήτρας, β) κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως συσχετίζομεν—συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα κανόνα—γραμμὰς τῆς πρώτης μήτρας μὲ στήλας τῆς δευτέρας μήτρας (2) καὶ γ) γενικῶς $AB\neq BA$. Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν περισσοτέρας τῶν δύο μήτρας, τότε πολλαπλασιάζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὰς δύο πρώτας μήτρας, ἐν συνεχείᾳ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὴν τρίτην μήτραν, ἂν βεβαίως αὕτη εἶναι συμβιβαστὴ πρὸς τὸ εὑρεθὲν γινόμενον, κ.ο.κ.

3.4.4. Ἐνίοτε πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο μητρῶν διαχωρίζομεν ταύτας καταλλήλως εἰς ὑπομήτρας (βλ. 3.3.10.). Οὕτω, π.χ., ἂν γράψωμεν:

$$A=\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right]=[A_1 \quad A_2] \quad \text{καὶ}$$

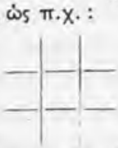
$$B=\left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_1 \\ \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Τὸ γινόμενον AB δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς:

$$AB=[A_1 \quad A_2]\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}=A_1B_1+A_2B_2,$$

1) Ἀλλ' ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἡ μοναδιαία μήτρα I πρέπει νὰ εἶναι διαφόρου τάξεως κατὰ τὸν προπολλαπλασιασμὸν ἐπὶ δοθεῖσαν μήτραν A ἢ κατὰ τὸν μεταπολλαπλασιασμόν, ἂν ἡ τελευταία αὕτη εἶναι τάξεως $\mu\times\nu$, ὅπου $\mu\neq\nu$.

2) Πρὸς ἀποφυγὴν λαθῶν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως βοηθητικὸν διάγραμμα, ὡς π.χ.:



τοῦ ὁποίου αἱ ὁριζόντιοι γραμμαὶ παριστοῦν τὰς γραμμάς, αἱ δὲ κάθετοι τὰς στήλας τῆς μήτρας ἥτις θὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο δοθεισῶν μητρῶν.

ὡς δεικνύει ἡ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἀντὶ τῆς ἀπ' εὐθείας ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο μητρῶν τάξεως 2×3 καὶ 3×2, πολλαπλασιάζομεν δύο μήτρας τάξεως 1×2 καὶ 2×1, ἀντιστοίχως, μὲ στοιχεῖα τὰς ὑπομήτρας A_1, A_2 καὶ B_1, B_2. Προφανῶς πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὑπομητρῶν ἀπαιτεῖται ὅπως αὗται εἶναι συμβιβασταί, κατὰ συνέπειαν ὁ διαχωρισμὸς πρέπει νὰ εἶναι *ὅμοιος*.

3.4.5. *Ἐναλλαγὴ μήτρας.* Ἀπὸ μίαν μήτραν A δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μίαν νέαν μήτραν, τῆς ὁποίας αἱ γραμμαὶ εἶναι στῆλαι τῆς A καὶ (συνεπῶς) αἱ στῆλαι αὐτῆς γραμμαὶ τῆς A. Ἡ πρᾶξις αὕτη καλεῖται «ἐναλλαγή», ἡ δὲ προκύπτουσα μήτρα «ἐνηλλαγμένη» τῆς A καὶ συμβολίζεται διὰ τοῦ συμβόλου A'. Οὕτω ἂν

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & 6 & 7\end{bmatrix},\quad \text{τότε}\quad A'=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\\ 5 & 7\end{bmatrix}$$

Προφανῶς: $(A')'=A$.

3.4.6. *Ἀντιστροφὴ μήτρας.*

A. Ἡ *ἔννοια τῆς ἀντιστρόφου μήτρας.* Εἰς τὴν στοιχειώδη ἄλγεβραν ἀριθμός τις καλεῖται *ἀντίστροφος* δοθέντος ἄλλου, διαφόρου τοῦ μηδενός, ὅταν τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα. Οὕτω, π.χ., ὁ ἀριθμὸς α εἶναι ἀντίστροφος τοῦ β ($\neq0$) ἂν

$$\alpha\beta=1$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ἔχομεν $\alpha=\dfrac{1}{\beta}$, ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἀντίστροφος δοθέντος ἄλλου δύναται νὰ γραφῇ ὡς κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὸν δοθέντα ἀριθμόν (1).

Ἐπειδὴ $\dfrac{1}{\beta}=\beta^{-1}$, ἡ ἀρχικὴ σχέσις γίνεται:

$$\beta^{-1}\beta=1$$

Διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν ἡ διαίρεσις δύο ἀριθμῶν δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον ἀριθμὸν τοῦ διαιρέτου. Οὕτω, π.χ., ἀντὶ $\dfrac{30}{6}$ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν $\dfrac{1}{6}\times30$ ἢ $6^{-1}\times30$.

1) Ὁ ἀριθμὸς β εἶναι ἐπίσης ἀντίστροφος τοῦ ἀριθμοῦ α, δυνάμει τῆς σχέσεως $\alpha\beta=1$, ἐξ ἧς $\beta=\dfrac{1}{\alpha}$.

Γενικῶς $\frac{\chi}{\psi} = \psi^{-1}\chi$.

Κατ' ἐπέκτασιν τῶν ἀνωτέρω, θὰ ὀνομάσωμεν μήτραν τινά, ἔστω Ε, ***ἀντίστροφον*** δοθείσης ***τετραγωνικῆς*** (1) μήτρας Α, ἂν τὸ γινόμενον ΕΑ ἰσοῦται πρὸς τὴν μοναδιαίαν μήτραν I (2). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην γράφομεν ἀναλόγως $E = A^{-1}$.

Εἶναι ἀνάγκη βεβαίως νὰ γνωρίζωμεν πῶς ἀντιστρέφεται δοθεῖσα τετραγωνικὴ μήτρα. Πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται προηγουμένως γνῶσις στοιχείων τινῶν ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ὁριζουσῶν. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα παραθέτομεν συνοπτικῶς εἰς τὰς ἑπομένους παραγράφους.

Β. *Ὁρίζουσαι.* Μία μήτρα εἶναι, ὡς ἐλέχθη, πίναξ διατεταγμένων ἀριθμῶν καὶ οὐχὶ εἷς ἀριθμός. Ἀπὸ τὰ στοιχεῖα μιᾶς μήτρας εἶναι ἐν τούτοις δυνατὸν νὰ ληφθοῦν, διὰ καταλλήλων πράξεων καὶ συνδυασμῶν, διάφοροι ἀριθμητικαὶ τιμαί. Μία ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν εἶναι καὶ ἡ ὁρίζουσα. Ἔστω, π.χ., ἡ τετραγωνικὴ μήτρα

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν διαγωνίως τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας λαμβάνομεν τὰ γινόμενα 3×4 καὶ 1×5. Ἀφαιροῦντες ἐν συνεχείᾳ τὸ δεύτερον γινόμενον ἀπὸ τὸ πρῶτον θὰ ἔχωμεν: $3 \times 4 - 1 \times 5 = 7$. Ὁ ἀριθμὸς 7 εἶναι ἡ ὁρίζουσα ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ὡς ἄνω μήτραν.

Ἡ ὁρίζουσα παριστᾶται διὰ τοῦ πίνακος ἀριθμῶν τῆς ἀντιστοίχου μήτρας, πλαισιουμένου ὅμως — πρὸς διάκρισιν — μὲ δύο καθέτους γραμμὰς ἀντὶ τῶν γνωστῶν ἀγκυλῶν. Οὕτω, π.χ., ἡ προηγουμένη ὁρίζουσα παριστᾶται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Ὁμιλοῦμεν περὶ στοιχείων, γραμμῶν, στηλῶν καὶ κυρίας διαγωνίου τῆς ὁριζούσης, ὡς ἀκριβῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μήτρας. Αἱ ὁρίζουσαι ὅμως ἔχουν πάντοτε ἀριθμὸν γραμμῶν ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν, ὡς ἀναφερόμεναι ***μόνον*** εἰς τετραγωνικὰς μήτρας.

Ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν ἡ ὁρίζουσα νιοστῆς τάξεως $(\nu \times \nu)$ τῆς μήτρας $A = [\alpha_{\iota\kappa}]$, συμβολίζεται ὡς:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots\ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots\ldots & \alpha_{2\nu} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \ldots\ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = |A|,$$

1) Μόνον αἱ τετραγωνικαὶ μῆτραι δύνανται νὰ ἀντιστραφοῦν.
2) Ἡ I εἶναι τάξεως οἵας καὶ ἡ Α.

καὶ εἶναι ἀριθμός, ὅστις προκύπτει ἀπὸ ὡρισμένην ὑπολογιστικὴν διαδικασίαν.

Ἡ διαδικασία αὕτη εἶναι ἁπλῆ προκειμένου περὶ ὁριζούσης δευτέρας τάξεως (2×2), ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὸ προηγουμένως ληφθὲν ἀριθμητικὸν παράδειγμα. Δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαγωνίως τὰ στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον τῶν στοιχείων τῆς κυρίας διαγωνίου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἕτερον γινόμενον. Ἡ προκύπτουσα διαφορὰ θὰ εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ὁριζούσης. Ἂν ὅμως ἡ ὁρίζουσα εἶναι νιοστῆς τάξεως ($\nu > 2$), τότε ἐπιδιώκεται ἀναγωγὴ τῆς ὁριζούσης εἰς συνδυασμόν τινα ὁριζουσῶν δευτέρας τάξεως, εὐχερῶς ὑπολογιζομένων. Πρὸς ἐκμάθησιν τῆς σχετικῆς διαδικασίας εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἐννοίας τῆς *ἐλάσσονος* καὶ τοῦ *συμπαράγοντος*.

Ἐλάσσων ἑνὸς στοιχείου δοθείσης ὁριζούσης καλεῖται ἡ ὁρίζουσα ἡ ὁποία σχηματίζεται ἂν ἀφαιρεθοῦν ἐκ τῆς δοθείσης ἡ στήλη καὶ ἡ γραμμὴ ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖται τὸ στοιχεῖον. Ἔστω, π.χ., ἡ ἀκόλουθος ὁρίζουσα τρίτης τάξεως:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

Ἡ ἐλάσσων τοῦ στοιχείου 1 θὰ εἶναι $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$, τοῦ στοιχείου 4 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$, τοῦ στοιχείου 0: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$, τοῦ στοιχείου 7: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ κ.ο.κ.

Προφανῶς τὰ στοιχεῖα ὁριζούσης νιοστῆς τάξεως ἔχουν ἐλάσσονας $\nu-1$ τάξεως.

Συμπαράγων ἢ *ἀλγεβρικὸν συμπλήρωμα* στοιχείου δοθείσης ὁριζούσης καλεῖται ἡ ἐλάσσων τοῦ στοιχείου *προσημασμένη*, μὲ θετικὸν μὲν σημεῖον ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν τοῦ στοιχείου εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, μὲ ἀρνητικὸν δὲ σημεῖον ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν τοῦ στοιχείου εἶναι περιττὸς ἀριθμός [1]. Οὕτω, οἱ συμπαράγοντες τῶν στοιχείων 1, 4, 0, καὶ 7, εἰς τὴν ἀνωτέρω ὁρίζουσαν, θὰ εἶναι κατὰ σειράν:

$$+\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, \; +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \text{ καὶ } -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

1) Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν μορφὴν τῶν ὁριζουσῶν οἱ δεῖκται τῶν στοιχείων δὲν γράφονται μέν, ἀλλὰ νοοῦνται.

Πρὸς ὑπολογισμὸν δοθείσης ὁριζούσης τρίτης τάξεως προχωροῦμεν τώρα ὡς ἀκολούθως:

α) Προσδιορίζομεν τοὺς συμπαράγοντας τυχούσης γραμμῆς (ἢ στήλης) τῆς ὁριζούσης.

β) Σχηματίζομεν τὰ γινόμενα τῶν συμπαραγόντων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς ληφθείσης γραμμῆς (ἢ στήλης).

γ) Εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὡς ἄνω γινομένων (ἀφοῦ ὑπολογίσωμεν τὰς εἰς αὐτὰ περιεχομένας ὁριζούσας δευτέρας τάξεως).

Παράδειγμα 1ον. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν προηγουμένως σημειωθεῖσαν ὁρίζουσαν τρίτης τάξεως. Πρὸς τοῦτο:

α) Προσδιορίζομεν τοὺς συμπαράγοντας τῶν στοιχείων τῆς πρώτης, ἔστω, στήλης κατὰ σειρὰν (ἐκ τῶν ἄνω):

$$+\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

β) Σχηματίζομεν τὰ γινόμενα τῶν συμπαραγόντων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα:

$$1 \times \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad -4 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad 6 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

γ) Ὑπολογίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων αὐτῶν:

$$1 \times \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 6 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \text{(1)} =$$

$$= 1 \times (-35) - 4 \times (-5) + 6 \times 15 = 75$$

Ὁ ἀριθμὸς 75 εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὡς ἄνω ὁριζούσης τρίτης τάξεως.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω πρὸς ὑπολογισμὸν ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

---

1) Τὸ ἄθροισμα τοῦτο καλεῖται *ἀνάπτυγμα* τῆς ὁριζούσης *κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης*.

Οἱ συμπαράγοντες τῶν στοιχείων τῆς πρώτης γραμμῆς εἶναι:

$$+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, \quad +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν συμπαραγόντων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης, εἶναι:

$$1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 24 + 30 = 7$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω περιγραφεῖσαν διαδικασίαν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν πᾶσαν ὁρίζουσαν νιοστῆς τάξεως ($\nu > 3$). Ὅταν ὅμως ἡ ὁρίζουσα εἶναι τάξεως ἀνωτέρας τῆς τρίτης, οἱ συμπαράγοντες τῶν στοιχείων αὐτῆς εἶναι τάξεως τρίτης ἢ ἀνωτέρας καὶ πρὸς ὑπολογισμὸν αὐτῶν ἀπαιτεῖται δι' ἕνα ἕκαστον ἡ ἐφαρμογὴ τῆς αὐτῆς διαδικασίας πρὸς ἀναγωγήν του εἰς ὁριζούσας δευτέρας τάξεως. Συνεπείᾳ τούτου, ἡ ὡς ἄνω μέθοδος ὑπολογισμοῦ καθίσταται ἐπίπονος καὶ δυσεφάρμοστος εἰς τὴν πρᾶξιν. Ἀντ' αὐτῆς χρησιμοποιοῦνται τότε ἄλλαι ἁπλούστεραι μέθοδοι ὑπολογισμοῦ. Ἐνταῦθα δὲν θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὰς ἐν λόγῳ μεθόδους, διότι δὲν ἐνδιαφερόμεθα ἀμέσως διὰ πρακτικὰς ἐφαρμογάς.

Γ. ***Ἰδιότητες ὁριζουσῶν***. Σημειοῦμεν ἐνταῦθα, ἄνευ ἀποδείξεως, τινὰς ἐκ τῶν βασικῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁριζουσῶν.

Δοθείσης μιᾶς τετραγωνικῆς μήτρας A:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

α) Ἡ ἐναλλαγὴ τῶν γραμμῶν τῆς A διὰ τῶν ὁμοταξίων στηλῶν αὐτῆς δὲν μεταβάλλει τὴν τιμὴν τῆς ὁριζούσης $|A|$:

$$|A| = |A'|$$

β) Ἡ ἐναλλαγὴ δύο γραμμῶν (ἢ δύο στηλῶν) τῆς A μεταβάλλει μόνον τὸ σημεῖον τῆς ὁριζούσης $|A|$:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

γ) Πολλαπλασιασμὸς μιᾶς γραμμῆς (ἢ στήλης) τῆς A ἐπὶ ἀριθμὸν τινά, συνεπάγεται πολλαπλασιασμὸν τῆς $|A|$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \dots & \lambda\alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \lambda |A|$$

δ) Πρόσθεσις τοῦ πολλαπλασίου μιᾶς γραμμῆς (ἢ στήλης) τῆς A εἰς ἑτέραν γραμμὴν (ἢ στήλην) τῆς A, δὲν μεταβάλλει τὴν $|A|$:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu 2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ (\alpha_{21} + \lambda\alpha_{11}) & (\alpha_{22} + \lambda\alpha_{12}) & \dots & (\alpha_{2\nu} + \lambda\alpha_{1\nu}) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

ε) Ὅταν μιὰ ὁρίζουσα ἔχῃ δύο γραμμὰς (ἢ στήλας) ἴσας, ἡ τιμὴ αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Δ. ***Ἡ διαδικασία τῆς ἀντιστροφῆς μήτρας.*** Ἐρχόμεθα ἤδη εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς διαδικασίας ἀντιστροφῆς μητρῶν.

Πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς ἀντιστροφῆς δοθείσης τετραγωνικῆς μήτρας ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως:

α) Ὑπολογίζομεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν μήτραν ὁρίζουσαν.

β) Ἂν αὕτη εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός (1), σχηματίζομεν μήτραν μὲ

1) Ἂν ἡ ὁρίζουσα ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδὲν ἡ ἀντιστροφὴ δὲν εἶναι δυνατή, καθ' ὅσον ἀποκλείεται τότε ἡ ἐκτέλεσις τῶν ὑπὸ στοιχεῖον (δ) ἀναφερομένων διαιρέσεων.

στοιχεῖα τοὺς συμπαράγοντας τῶν στοιχείων τῆς ὑπὸ ἀντιστροφὴν μήτρας.

γ) Εὑρίσκομεν τὴν ἐνηλλαγμένην τῆς νέας μήτρας.

δ) Διαιροῦμεν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς ἐνηλλαγμένης μήτρας διὰ τῆς ὑπολογισθείσης ὁριζούσης τῆς ἀρχικῆς μήτρας.

Ἡ οὕτω προκύπτουσα μήτρα εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς ἀρχικῆς.

Ἔστω γενικῶς ἡ μήτρα Α

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Ἂν $|A| \neq 0$, τότε σχηματίζομεν μήτραν μὲ στοιχεῖα τοὺς συμπαράγοντας τῶν στοιχείων τῆς Α:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω μήτραν, $A_{\iota\kappa}$, γενικῶς, εἶναι ὁ συμπαράγων τοῦ στοιχείου $\alpha_{\iota\kappa}$ τῆς Α.

Ἂν ἐναλλάξωμεν τὰς σειρὰς μὲ τὰς στήλας τῆς προηγουμένης μήτρας καὶ διαιρέσωμεν ἐν συνεχείᾳ πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς ἐνηλλαγμένης μήτρας διὰ $|A|$, λαμβάνομεν τὴν ἀντίστροφον τῆς Α:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{21}}{|A|} & \dfrac{A_{31}}{|A|} \\[2ex] \dfrac{A_{12}}{|A|} & \dfrac{A_{22}}{|A|} & \dfrac{A_{32}}{|A|} \\[2ex] \dfrac{A_{13}}{|A|} & \dfrac{A_{23}}{|A|} & \dfrac{A_{33}}{|A|} \end{bmatrix}$$

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα ἀντιστροφῆς μήτρας: Ἂς λάβωμεν τὴν μήτραν

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

ἡ ὁποία ἔχει ὁρίζουσαν μὲ τιμὴν 18. Ἡ μήτρα ἡ ἔχουσα στοιχεῖα τοὺς συμπαράγοντας τῶν στοιχείων τῆς προηγουμένης εἶναι :

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & -1 & -3 \\ -6 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἐναλλάσσοντες τὰς σειρὰς μὲ τὰς στήλας τῆς τελευταίας μήτρας καὶ διαιροῦντες ἐν συνεχείᾳ πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς ἐνηλλαγμένης μήτρας διὰ 18, λαμβάνομεν τὴν μήτραν :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{18} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀντίστροφος τῆς ἀρχικῆς τοιαύτης.

Ἂν προ-πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν ἀντίστροφον μήτραν ἐπὶ τὴν ἀρχικήν, θὰ λάβωμεν τὴν μοναδιαίαν μήτραν I :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

συμφώνως πρὸς τὰ προηγουμένως (3.4.6 A) ὁρισθέντα, διὰ τὴν ἀντιστροφήν (1). Τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δίδει ἐπίσης καὶ ὁ μεταπολλαπλασιασμὸς τῆς ὡς ἄνω ἀντιστρόφου μήτρας ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν μήτραν, ὡς δύναται νὰ διαπιστώσῃ ὁ σπουδαστής, ἐκτελῶν τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτόν. Γενικῶς (καὶ κατ' ἐξαίρεσιν τοῦ κανόνος περὶ μὴ ἰσχύος τῆς ἀρχῆς τῆς ἀντιμεταθέσεως εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν) (2) :

$$A^{-1} A = AA^{-1} = I$$

1) Ἑπομένως ἡ πρᾶξις αὕτη δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ πρὸς ἔλεγχον τῆς ὀρθότητος τῶν ὑπολογισμῶν διὰ τὴν ἀντιστροφὴν δοθείσης μήτρας.

2) Βλ. 3.4.3.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ ἀντίστροφος A^{-1} μήτρα δοθείσης μήτρας A εἶναι *μοναδική*, ἤτοι δὲν ὑπάρχει ἑτέρα μήτρα ἡ ὁποία πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὴν A νὰ δίδῃ ὡς γινόμενον τὴν μοναδιαίαν μήτραν I. Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι πλὴν τῆς A^{-1}, ὑπάρχει ἡ μήτρα B, ἥτις δίδει : $AB = I$. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει :

$$A^{-1} = A^{-1} I = A^{-1}(AB) = (A^{-1} A) B = IB = B$$

Ἑπομένως ἡ B εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἀρχικὴ ἀντίστροφος μήτρα A^{-1}.

3.5. Ἐσωτερικὸν γινόμενον διανυσμάτων

3.5.1. Καλοῦμεν *ἐσωτερικὸν* ἢ *ἀριθμητικὸν γινόμενον* δύο διανυσμάτων (τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ στοιχείων), τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν διανυσμάτων αὐτῶν. Οὕτω, π.χ., τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν διανυσμάτων :

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

θὰ εἶναι :

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 + \ldots + \alpha_\nu \beta_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \beta_i = \zeta,$$

ὅπου ζ ἀποτελεῖ ἕνα ἀριθμόν.

Τὸ γινόμενον τοῦτο δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἐπίσης καὶ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν, ἐφ' ὅσον τὰ διανύσματα δύνανται, ὡς εἴδομεν, νὰ θεωρηθοῦν ὡς μῆτραι. Ἀλλ' ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἐπιβάλλεται ὅπως τὰ πολλαπλασιαζόμενα διανύσματα ἐκφράζωνται ὑπὸ μορφὴν συμβιβαστῶν μητρῶν. Οὕτω, ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου τῶν ἀνωτέρω διανυσμάτων, προπολλαπλασιάζομεν τὸ διάνυσμα **β**, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ μήτραν τάξεως $\nu \times 1$, ἐπὶ τὸ διάνυσμα **α'**, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐνηλλαγμένον τοῦ **α** καὶ ἀποτελεῖ μήτραν τάξεως $1 \times \nu$ (1). Αἱ μῆτραι αὖται

---

1) Ἀπὸ γεωμετρικῆς ἀπόψεως δὲν ἔχει σημασίαν ἂν ἓν διάνυσμα ἐμφανίζεται ὡς σειρὰ (μήτρα τάξεως $1 \times \nu$) ἢ ὡς στήλη (μήτρα τάξεως $\nu \times 1$) διατεταγμένων ἀριθμῶν. Εἶναι ζήτημα συμβολισμοῦ.

εἶναι συμβιβασταὶ καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha'\beta = [\,\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \alpha_3 \ldots \alpha_\nu\,] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\nu \end{bmatrix} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \ldots + \alpha_\nu\,\beta_\nu = \zeta\ (^1)$$

Τὸ αὐτὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἂν προπολλαπλασιάσωμεν τὸ διάνυσμα **α**, ἐπὶ τὸ ἐνηλλαγμένον διάνυσμα **β'** τοῦ **β**, ἤτοι:

$$\beta'\alpha = [\,\beta_1 \;\; \beta_2 \;\; \beta_3 \ldots \beta_\nu\,] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} \begin{aligned} &= \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 + \ldots + \beta_\nu\,\alpha_\nu = \\ &\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \ldots + \alpha_\nu\,\beta_\nu = \zeta. \end{aligned}$$

3.5.2. Δύο διανύσματα τῶν ὁποίων τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδὲν καλοῦνται ***ὀρθογώνια διανύσματα***. Οὕτω, π.χ., τὰ διανύσματα:

$$\overline{\text{ΟΓ}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ καὶ } \overline{\text{ΟΔ}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

τοῦ διαγράμματος 10 εἶναι ὀρθογώνια, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$(\overline{\text{ΟΓ}})' \cdot \overline{\text{ΟΔ}} = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} = 0$$

Τὰ ***μοναδιαῖα*** διανύσματα εἶναι προφανῶς ὀρθογώνια διανύσματα, καθ' ὅσον τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον αὐτῶν, λαμβανομένων ἀνὰ δύο, ἰσοῦ-

---

1) Ἐπειδή, συμφώνως πρὸς 3.3.7, ὑπάρχει πλήρης ἀντιστοιχία μεταξὺ μητρῶν τάξεως 1×1 καὶ ἀριθμῶν, τοῦ λοιποῦ δὲν θὰ χρησιμοποιοῦμεν ἀγκύλας διὰ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ γινομένου διανύσματος - γραμμῆς ἐπὶ διάνυσμα - στήλην.

ται, πρὸς τὸ μηδὲν ([1]).

3.5.3. Τὸ ***μῆκος*** ἑνὸς διανύσματος ὁρίζεται ὡς ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. Ἔστω διάνυσμα α, ν στοιχείων. Τὸ μῆκος αὐτοῦ, συμβολιζόμενον διὰ $|\alpha|$, εἶναι:

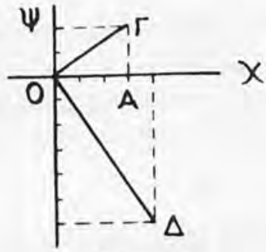
$$|\alpha| = [\alpha' \alpha]^{1/2} = (\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^2)^{1/2}$$

Οὕτω, τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος

$$\mathrm{O\Gamma} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

τοῦ διαγράμματος 10 θὰ εἶναι:

$$\mathrm{O\Gamma}\,(^2) = ((\mathrm{O\Gamma})' \times \overline{\mathrm{O\Gamma}})^{1/2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



Διάγρ. 10

3.5.4. Ἡ ***ἀπόστασις*** μεταξὺ δύο διανυσμάτων (σημείων) α καὶ β — συμβολικῶς $|\alpha - \beta|$ — ἐκφράζεται διὰ τοῦ μήκους τοῦ διανύσματος $(\alpha - \beta)$ ([3]). Οὕτω:

$$|\alpha - \beta| = |(\alpha - \beta)' \cdot (\alpha - \beta)|^{1/2} = [\sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i - \beta_i)^2]^{1/2}$$

3.5.5. Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ γινομένου δύο συμβιβαστῶν μητρῶν γενικῶς, δύναται, κατόπιν τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων, νὰ ἐκφρασθῇ ὑπὸ

1) Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον παντὸς διανύσματος ἐπὶ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα εἶναι μηδὲν καὶ κατὰ συνέπειαν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ τελευταῖον ὡς ὀρθογώνιον ἔναντι ὅλων τῶν διανυσμάτων τοῦ χώρου.

2) Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δὲν ἀπαιτεῖται ὁ συμβολισμὸς | |, καθ' ὅσον ὁ διὰ γραμμάτων συμβολισμὸς (ἄνευ ἐπιγραμμῆς) ἐκφράζει τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος.

3) Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τοῦ παραλληλογράμμου δύναται εὐκόλως νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ $(\alpha - \beta)$ προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως εἰς τὸ α τοῦ $-\beta$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντίθετον τοῦ β, ἤτοι ἔχει στοιχεῖα τὰ στοιχεῖα τοῦ β ἀρνητικῶς προσημασμένα.

μορφὴν ἐσωτερικῶν γινομένων διανυσμάτων. Ἔστωσαν, π.χ., αἱ συμβιβασταὶ μῆτραι :

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \dots \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} \dots \alpha_{\mu\nu} \end{vmatrix} \quad \text{καὶ} \quad B = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \dots \beta_{1\rho} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \dots \beta_{2\rho} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} \dots \beta_{\nu\rho} \end{vmatrix}$$

Τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας Γ, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὸ γινόμενον αὐτῶν ($\Gamma = AB$), εἶναι κατ' οὐσίαν ἐσωτερικὰ γινόμενα τῶν διανυσμάτων-γραμμῶν τῆς A ἐπὶ τὰ διανύσματα-στήλας τῆς B. Οὕτω, π.χ., τὸ στοιχεῖον γ_{11}, θὰ εἶναι, κατὰ τὰ γνωστά, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν στοιχείων τῆς πρώτης γραμμῆς τῆς A ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης τῆς B, ἤτοι θὰ εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον :

$$[\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \dots \alpha_{1\nu}] \cdot \begin{vmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{\nu 1} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \dots + \alpha_{1\nu}\beta_{\nu 1} = \gamma_{11}$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ Γ, ἡ ὁποία εἶναι τάξεως $\mu \times \rho$ (1), ἀπαρτίζεται ἀπὸ $\mu \times \rho$ ἐσωτερικὰ γινόμενα, ὡς τὸ ἀνωτέρω, ἀκριβῶς ὅσα εἶναι καὶ τὰ στοιχεῖα αὐτῆς.

3.6. Γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα καὶ βάσεις

3.6.1. Ἡ ἔννοια τῆς γραμμικῆς ἀνεξαρτησίας. Ὡς εἴδομεν (3.1.16), γραμμικὸς συνδυασμὸς διανυσμάτων καλεῖται τὸ ἄθροισμα διανυσμάτων τοῦ αὐτοῦ χώρου (2) ἑκάστου πολλαπλασιαζομένου μὲ ἕνα ἀριθμόν. Οὕτω, π.χ., τὸ ἄθροισμα :

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + \lambda_\nu \boldsymbol{\alpha}_\nu = \sum_{\iota=1}^{\nu} \lambda_\iota \boldsymbol{\alpha}_\iota ,$$

ὅπου τὰ $\boldsymbol{\alpha}_\iota$ εἶναι διανύσματα τὰ δὲ λ_ι ἀριθμοί, ἀποτελεῖ γραμμικὸν συνδυασμὸν διανυσμάτων.

1) Ἤτοι ἔχει σειρὰς ὅσας καὶ ἡ A καὶ στήλας ὅσας καὶ ἡ B.

2) Τοῦ λοιποῦ ἡ φράσις «τοῦ αὐτοῦ χώρου» θὰ τίθεται μόνον ἐὰν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ νοηθῇ ἐκ τοῦ κειμένου.

Ἂν ἐκ δοθέντος συνόλου διανυσμάτων, ἔστω τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ἓν ἐξ αὐτῶν, π.χ. τὸ δ, δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν λοιπῶν διανυσμάτων:

$$\delta = \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \gamma ,$$

ὅπου λ_ι εἶναι ἀριθμοί, λέγομεν ὅτι τὸ ὡς ἄνω σύνολον εἶναι σύνολον *γραμμικῶς ἐξηρτημένων* διανυσμάτων. Ἡ ἔννοια τῆς γραμμικῆς ἐξαρτήσεως ἐν προκειμένῳ ὑποδηλοῖ πλεονασμόν τινα, καθ' ὅσον τὸ διάνυσμα δ θὰ ἠδύνατο νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ σημειωθέντος γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν λοιπῶν διανυσμάτων (1).

Ἐάν, ἀντιθέτως, οὐδὲν διάνυσμα τοῦ συνόλου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ἄλλων, λέγομεν ὅτι τὸ ἐν λόγῳ σύνολον εἶναι σύνολον *γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων* διανυσμάτων. Προφανῶς, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἕκαστον διάνυσμα τοῦ συνόλου εἶναι ἀναντικατάστατον, ἤτοι δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ (ἀντικατασταθῇ) διὰ συνδυασμοῦ τῶν λοιπῶν.

Αἱ ὡς ἄνω ἔννοιαι ἐκφράζονται μαθηματικῶς ὡς ἑξῆς:

Δοθέντος ἑνὸς συνόλου διανυσμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, λέγομεν ὅτι ταῦτα εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα ὅταν ὑπάρχουν ἀριθμοὶ λ_ι $(\iota = 1, 2, \ldots, \nu)$ οὐχὶ πάντες ἴσοι πρὸς τὸ μηδὲν καὶ τοιοῦτοι ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ κάτωθι σχέσις:

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_\nu \alpha_\nu = 0 \tag{1}$$

ἢ συνοπτικῶς:

$$\sum_{\iota=1}^{\nu} \lambda_\iota \alpha_\iota = 0$$

Ἀντιθέτως, καλοῦμεν γραμμικῶς ἀνεξάρτητα τὰ διανύσματα ταῦτα ἂν ἰσχύῃ ἡ σχέσις (1) μόνον διὰ $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_\nu = 0$.

Οἱ ὁρισμοὶ οὗτοι ἀντιστοιχοῦν πλήρως πρὸς τὰ προηγουμένως λεχθέντα. Οὕτω, π.χ., ἂν τὸ διάνυσμα α_ν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ:

$$\alpha_\nu = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_{\nu-1} \alpha_{\nu-1} ,$$

τότε θὰ ἔχωμεν καί:

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_{\nu-1} \alpha_{\nu-1} + (-1) \alpha_\nu = 0$$

1) Ἓν σύνολον διανυσμάτων μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται καὶ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένον, διότι τὸ ἐν λόγῳ διάνυσμα δύναται νὰ γραφῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν λοιπῶν διανυσμάτων, μὲ πολλαπλασιαστὰς ἴσους πρὸς τὸ μηδέν.

μὲ ἕνα τουλάχιστον συντελεστὴν (ἤτοι τὸν συντελεστὴν (-1) τοῦ α_ν) διάφορον τοῦ μηδενός. Ἐπομένως, συμφώνως πρὸς τὸν μαθηματικὸν ὁρισμόν, τὰ διανύσματα ταῦτα εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα. Ἄν, ἐξ ἄλλου, ἐκκινήσωμεν ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὰ διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ μαθηματικοῦ ὁρισμοῦ, ἤτοι:

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_\nu \alpha_\nu = 0$$

διὰ ἓν τουλάχιστον $\lambda_i \neq 0$, ἔστω π.χ. $\lambda_\nu \neq 0$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$-\lambda_\nu \alpha_\nu = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_{\nu-1} \alpha_{\nu-1}$$

Ἐπομένως τὸ α_ν δύναται νὰ γραφῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν λοιπῶν διανυσμάτων:

$$\alpha_\nu = -\lambda_1/\lambda_\nu\, \alpha_1 - \lambda_2/\lambda_\nu\, \alpha_2 - \ldots - \lambda_{\nu-1}/\lambda_\nu\, \alpha_{\nu-1}$$

Ἂς λάβωμεν π.χ, τὰ διανύσματα:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ καὶ } \delta = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Τὰ διανύσματα ταῦτα εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$3\alpha + 2\beta + 4\gamma = \delta$$

ἢ ἀναλυτικῶς:

$$3\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times3+2\times2+4\times0 \\ 3\times2+2\times0+4\times1 \\ 3\times2+2\times1+4\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Ἀντιθέτως τὰ διανύσματα

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ καὶ } \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διότι ἡ παράστασις $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3$ ἰσχύει προφανῶς μόνον διὰ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

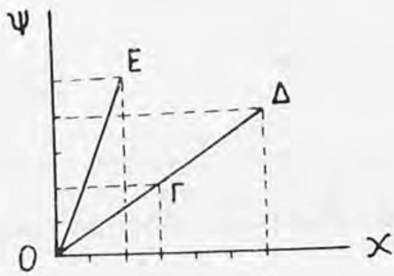
Ἡ ἔννοια τῆς γραμμικῆς ἐξαρτήσεως διανυσμάτων δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ γραφικῶς, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ χώρου τῶν δύο ἢ τριῶν διαστάσεων. Ἔστωσαν, π.χ., τὰ διανύσματα τοῦ χώρου τῶν δύο διαστάσεων :

$$O\Gamma \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad O\Delta \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Κατὰ τὰ γνωστά, λέγομεν ὅτι τὰ διανύσματα ταῦτα εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$2\, O\Gamma = \overline{O\Delta} \qquad (1)$$

ἤτοι, τὸ ἓν ἐκ τῶν διανυσμάτων δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ ἑτέρου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν. Γεωμετρικῶς ἡ σχέσις (1) σημαίνει (βλ. καὶ 3.1.6) ὅτι τὰ διανύσματα ΟΓ καὶ $\overline{O\Delta}$ εἶναι ***συγγραμμικά***, ἤτοι κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς διερχομένης ἐκ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ κατωτέρω διάγραμμα :



Διάγραμμα 11

Γενικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι πάντα τὰ συγγραμμικὰ διανύσματα εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα.

Ἂς λάβωμεν τώρα τὰ διανύσματα :

$$O\Gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad OE \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Τὰ διανύσματα ταῦτα δὲν κεῖνται ἀμφότερα ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας διερχομένης ἐκ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων (βλ. διάγρ. 11) καὶ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, διότι ἔχομεν :

$$\lambda\, O\Gamma \neq \overline{OE}$$

διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ λ.

Ἂς λάβωμεν ἤδη τὰ τρία διανύσματα:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \text{ καὶ } \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix},$$

τὰ ὁποῖα ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι μὴ μηδενικά, ἤτοι, συμφώνως πρὸς τὸν συμβολισμὸν τῆς παρ. 3.1.13, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma \geqslant \mathbf{0}$. Τὰ διανύσματα ταῦτα εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα ἂν ἓν τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν δύο ἄλλων. Ἔστω, ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta = \gamma \tag{1}$$

ἤ, ἀναλυτικῶς:

$$\begin{aligned} \alpha_1\lambda_1 + \beta_1\lambda_2 &= \gamma_1 \\ \alpha_2\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 &= \gamma_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Ἐκ τῆς λύσεως ([1]) τοῦ συστήματος (2), ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους λ_1 καὶ λ_2, λαμβάνομεν:

$$\lambda_1 = \frac{\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \quad \text{καὶ} \quad \lambda_2 = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \tag{3}$$

Καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ παράστασις (1) δὲν ἰσχύει μόνον ἐὰν $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$ καὶ $\gamma_1\beta_2 \neq \gamma_2\beta_1$ καὶ $\alpha_1\gamma_2 \neq \alpha_2\gamma_1$. Ἀλλ' ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἂν β_1 καὶ β_2 εἶναι διάφορα τοῦ μηδενός, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

ἤτοι, οἱ λόγοι τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ καὶ $\boldsymbol{\beta}$ εἶναι ἴσοι. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἕκαστον ἐκ τῶν δύο διανυσμάτων δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μέσῳ τοῦ ἑτέρου, πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ἤτοι τὰ διανύσματα ταῦτα εἶναι συγγραμμικά. Ἂν ἐξ ἄλλου ὑποθέσωμεν ὅτι $\beta_1 = 0$, τότε: 1) $\beta_2 \neq 0$, διότι $\boldsymbol{\beta} \geqslant 0$ καὶ 2) $\alpha_1 = 0$, διότι $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 = 0$ καὶ συνεπῶς $\alpha_2 \neq 0$ (ἐφ' ὅσον $\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0$). Τὰ διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ καὶ $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ εἶναι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην συγγραμμικά, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν: $\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\beta}$, ὅπου $\lambda = \alpha_2/\beta_2$ ([2]). Κατὰ συνέπειαν εἰς ἀμφοτέρας

1) Διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως.

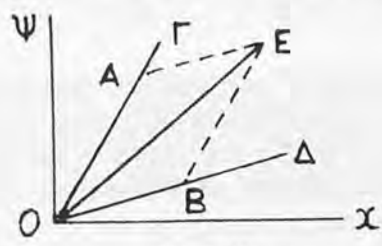
2) Ἂν θέσωμεν $\beta_2 = 0$, δεικνύεται εὐκόλως ὅτι θὰ εἶναι ἐπίσης $\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\beta}$, ὅπου $\lambda = \alpha_1/\beta_1$.

τὰς περιπτώσεις θὰ ἔχωμεν: $\alpha = \lambda\beta + 0\gamma$, ἐξ ἧς προκύπτει ὅτι τὰ διανύσματα α, β καὶ γ ἀποτελοῦν σύνολον γραμμικῶς ἐξηρτημένων διανυσμάτων. Τέλος, ἂν οἱ ἀριθμηταὶ τῶν κλασμάτων εἰς (3) ἰσοῦνται ἐπίσης πρὸς τὸ μηδέν, θὰ εἶναι $\alpha_1/\alpha_2 = \beta_1/\beta_2 = \gamma_1/\gamma_2$, ἐξ οὗ συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι καὶ τὰ τρία διανύσματα α, β, γ συγγραμμικά. Κατὰ συνέπειαν εἰς ***πᾶσαν περίπτωσιν*** τρία διανύσματα ἐντὸς τοῦ διδιαστάτου χώρου ἀποτελοῦν σύνολον γραμμικῶς ἐξηρτημένων διανυσμάτων.

Τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα ἰσχύουν βεβαίως a fortiori καὶ εἰς περίπτωσιν συνόλων τὰ ὁποῖα περιλαμβάνουν περισσότερα ἀπὸ τρία διανύσματα τοῦ χώρου τῶν δύο διαστάσεων. Ἔστωσαν, π.χ., τὰ διανύσματα τοῦ διδιαστάτου χώρου α_1, α_2, α_3 καὶ α_4, ἐξ ὧν τὰ α_1, α_2 καὶ α_3 ἀποτελοῦν σύνολον γραμμικῶς ἐξηρτημένων διανυσμάτων, ἤτοι $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 = \mathbf{0}$, διὰ μίαν τουλάχιστον τιμὴν λ_i, διάφορον τοῦ μηδενός. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν: $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + 0\alpha_4 = \mathbf{0}$, ἐξ ἧς προκύπτει ἀμέσως ὅτι τὰ διανύσματα α_1, α_2, α_3 καὶ α_4 εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα.

Ἐκ τῆς προηγηθείσης ἀναλύσεως προέκυψεν ὅτι εἰς τὸν χῶρον τῶν 2 διαστάσεων δὲν δύνανται νὰ εὑρεθοῦν σύνολα περιέχοντα περισσότερα τῶν δύο γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων.

Εἰς τὸ διάγραμμα 12 τὰ διανύσματα $\overline{\text{ΟΓ}}$ καὶ $\overline{\text{ΟΔ}}$ εἶναι προφανῶς



Διάγρ. 12

γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Ἂς λάβωμεν ἐπὶ πλέον τὸ διάνυσμα $\overline{\text{ΟΕ}}$. Συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ΟΕ} = \text{ΟΑ} + \text{ΟΒ} \tag{1}$$

Ἀλλὰ τὰ διανύσματα ΟΑ καὶ $\overline{\text{ΟΒ}}$ εἶναι (ὑπο)πολλαπλάσια τῶν διανυσμάτων $\overline{\text{ΟΓ}}$ καὶ $\overline{\text{ΟΔ}}$, ἀντιστοίχως. Ἔστω δὲ ὅτι:

$$\text{ΟΑ} = \lambda_1\text{ΟΓ}$$

$$\text{ΟΒ} = \lambda_2\text{ΟΔ}$$

ὅπου λ_1 καὶ λ_2 εἶναι ἀριθμοί (1).

1) Ἐν προκειμένῳ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι θετικοί, εἰς ἄλλας ὅμως περιπτώ-

Κατὰ συνέπειαν ἡ (1) γίνεται

$$\overline{ΟΕ} = \lambda_1 \overline{ΟΓ} + \lambda_2 \overline{ΟΔ},$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις τὸ διάνυσμα $\overline{ΟΕ}$ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων $\overline{ΟΓ}$ καὶ $\overline{ΟΔ}$. Προφανῶς ὅμως, πλὴν τοῦ διανύσματος $\overline{ΟΕ}$, καὶ πᾶν ἕτερον διάνυσμα τοῦ χώρου τῶν δύο διαστάσεων εἶναι δυνατὸν νὰ γραφῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ὡς ἄνω δύο διανυσμάτων.

Κατ᾽ ἀναλογίαν τῶν λεχθέντων περὶ τῆς γραμμικῆς ἀνεξαρτησίας διανυσμάτων τοῦ χώρου τῶν 2 διαστάσεων, δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς τὸν χῶρον τῶν 3 διαστάσεων δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθοῦν σύνολα περιλαμβάνοντα περισσότερα τῶν τριῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων.

Σύνολα ἐκ τριῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν εὐχερῶς, ἀρκεῖ τὰ ἐν λόγῳ διανύσματα νὰ μὴ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου ἐκ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

Γενικῶς, εἰς τὸν χῶρον τῶν ν διαστάσεων εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθοῦν σύνολα ἔχοντα οὐχὶ περισσότερα τῶν ν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων.

3.6.2. Βάσεις. «Βάσις» ἑνὸς χώρου ν διαστάσεων καλεῖται πᾶν σύνολον ν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων τοῦ ἐν λόγῳ χώρου. Οὕτω, εἰς τοὺς χώρους τῶν 2, 3 διαστάσεων ἔχομεν, ἀντιστοίχως, βάσεις ἐκ δύο, τριῶν γραμμικῶν ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων. Ἐκ τῶν ἤδη λεχθέντων καθίσταται σαφὲς ὅτι :

α) Δὲν ὑφίσταται μία μοναδικὴ βάσις εἰς ἕνα χῶρον ἀλλὰ πολλαὶ τοιαῦται, καὶ

β) Οἱονδήποτε διάνυσμα τοῦ χώρου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὑπὸ μορφὴν γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων δοθείσης βάσεως τοῦ ἐν λόγῳ χώρου. Διὰ τοῦτο ἀκριβῶς λέγομεν ὅτι ἑκάστη βάσις *περιγράφει* τὸν χῶρον εἰς ὃν ἀνήκουν τὰ διανύσματα αὐτῆς.

Μία συνήθως χρησιμοποιουμένη βάσις εἶναι ἡ ἀποτελουμένη ἐκ τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων δοθέντος χώρου. Οὕτω, π.χ., εἰς τὸν χῶρον τῶν 3 διαστάσεων δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ὡς βάσιν τὰ διανύσματα :

σεις εἰς ἐξ αὐτῶν ἢ καὶ ἀμφότεραι δύνανται νὰ εἶναι ἀρνητικοί. Οὕτω, π.χ., ἂν θεωρήσωμεν ὡς γραμμικῶς ἀνεξάρτητον σύνολον τὸ ζεῦγος τῶν $\overline{ΟΓ}$ καὶ $\overline{ΟΕ}$, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ $\overline{ΟΔ}$ ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν πρώτων (κανὼν τοῦ παραλληλογράμμου) μὲ πολλαπλασιαστὰς τοῦ μὲν διανύσματος $\overline{ΟΓ}$ ἀρνητικὸν ἀριθμόν, τοῦ δὲ διανύσματος $\overline{ΟΕ}$ θετικὸν ἀριθμόν.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ καὶ } \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τὰ ὁποῖα δύναται εὐκόλως νὰ δειχθῇ ὅτι ἀποτελοῦν σύνολον γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων. Γενικῶς εἰς τὸν χῶρον τῶν ν διαστάσεων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς βάσιν τὰ διανύσματα $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, . . . καὶ $\mathbf{e}_\nu$, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχει ν–1 μηδενικὰ στοιχεῖα καὶ τὴν μονάδα εἰς ἣν θέσιν καθορίζει ὁ δείκτης αὐτοῦ. Τυχὸν διάνυσμα τοῦ ν-διαστάτου χώρου, π.χ., τὸ διάνυσμα

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{bmatrix}$$

δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν $\mathbf{e}_i$ ὡς κάτωθι:

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_\nu\,\mathbf{e}_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i\,\mathbf{e}_i$$

Εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας παρατηρήσεως ὅτι οὐδεὶς ὑπολογισμὸς ἀπαιτεῖται διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ, ὅταν τὰ διανύσματα αὐτοῦ εἶναι μοναδιαῖα. Οἱ πολλαπλασιασταὶ οὗτοι εἶναι ἀντιστοίχως τὰ στοιχεῖα τοῦ ἑκάστοτε διανύσματος. Οὕτω, π.χ., τὸ διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

Τοῦτο ἀποτελεῖ ἓν ὑπολογιστικὸν πλεονέκτημα τῶν βάσεων αἱ ὁποῖαι σύγκεινται μόνον ἀπὸ μοναδιαῖα διανύσματα, ἔναντι ἄλλων βάσεων.

Οὕτω, π.χ., ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν τὰ δύο διανύσματα

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ καὶ } \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

θὰ ἔχωμεν:

$$\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{\beta} + \lambda_2\boldsymbol{\gamma} \tag{1}$$

ἢ ἀναλυτικῶς:

$$\begin{aligned} 3 &= 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 2 &= \lambda_1 + 5\lambda_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν πολλαπλασιαστῶν λ_1 καὶ λ_2 τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ (1), ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$, συναρτήσει τῶν διανυσμάτων τῆς νέας βάσεως, ἀπαιτεῖται ἡ λύσις τοῦ συστήματος (2). Ἐκ τῆς λύσεως αὐτῆς λαμβάνομεν $\lambda_1 = 1\,{}^2/_7$ καὶ $\lambda_2 = 1/7$. Συνεπῶς ἡ παράστασις (1) γίνεται:

$$\alpha = 1\,{}^2/_7\,\beta + 1/7\,\gamma$$

3.6.3. Δοθείσης μιᾶς βάσεως ἑνὸς χώρου, ἡ ἔκφρασις οἱουδήποτε διανύσματος τοῦ αὐτοῦ χώρου ὡς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως ταύτης εἶναι ***μοναδική***. Ὑφίσταται δηλαδὴ μόνον ***ἕνας τρόπος*** ἐκφράσεως τοῦ ἐν λόγῳ διανύσματος ὡς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν διανυσμάτων τῆς ληφθείσης βάσεως. Ἔστωσαν, π.χ., τὰ διανύσματα βάσεως τοῦ ν-διαστάτου χώρου, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_\nu$ καὶ $\boldsymbol{\beta}$ τυχὸν διάνυσμα (ν στοιχείων). Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν, κατὰ τὰ γνωστά:

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + \lambda_\nu\,\boldsymbol{\alpha}_\nu = \boldsymbol{\beta} \qquad (1)$$

ὅπου λ_ι $(\iota = 1, 2, \ldots, \nu)$ εἶναι ὡρισμένοι ἀριθμοί. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τὸ $\boldsymbol{\beta}$ δύναται νὰ γραφῇ ἐπίσης καὶ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν $\boldsymbol{\alpha}_\iota$ μὲ πολλαπλασιαστὰς λ'_ι, (ἐξ ὧν εἷς τουλάχιστον εἶναι διάφορος τοῦ ἀντιστοίχου λ_ι), ἤτοι:

$$\lambda'_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda'_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + \lambda'_\nu\boldsymbol{\alpha}_\nu = \boldsymbol{\beta} \qquad (2)$$

Ἀφαιροῦντες τὴν (2) ἐκ τῆς (1), λαμβάνομεν:

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)\,\boldsymbol{\alpha}_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)\,\boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + (\lambda_\nu - \lambda'_\nu)\,\boldsymbol{\alpha}_\nu = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Ἀλλ' ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὰ διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}_\iota$ θὰ εἶναι (1) γραμμικῶς ἐξηρτημένα, ὅπερ ἀντίκειται πρὸς τὴν ἀρχικὴν ὑπόθεσιν ὅτι ταῦτα ἀποτελοῦν βάσιν, ἤτοι εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Οὕτω ἡ σχέσις (2) ἰσχύει μόνον ἐὰν $\lambda'_\iota = \lambda_\iota$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ι. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ $\boldsymbol{\beta}$ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μόνον κατὰ ἕνα τρόπον ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τῆς ληφθείσης βάσεως.

1) Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς παραγρ. 3.6.1.

Οἱ ἀριθμοὶ (πολλαπλασιασταὶ) λ_i τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ (1) ἀποτελοῦν τὰς *συντεταγμένας* πέρατος τοῦ διανύσματος β, ἤτοι τὰ *στοιχεῖα* αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ἀνωτέρω βάσιν.

3.6.4. Ἀντικατάστασις ἑνὸς διανύσματος δι' ἑτέρου διανύσματος εἰς δοθεῖσαν βάσιν. Ἂς λάβωμεν ἐκ νέου τὴν βάσιν τοῦ ν-διαστάτου χώρου τὴν ἀπαρτιζομένην ἐκ τῶν διανυσμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καὶ τυχὸν διάνυσμα γ, τοῦ αὐτοῦ χώρου, διάφορον τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \ldots + \mu_\nu\,\alpha_\nu = \gamma\,, \tag{1}$$

ὅπου μ_i εἶναι ὡρισμένοι ἀριθμοί, ἐξ ὧν εἷς τουλάχιστον, ἔστω μ_1, θὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἐπειδὴ καὶ $\gamma \neq 0$. Ἂν τώρα εἰς τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ διάνυσμα α_1 διὰ τοῦ γ, τὸ νέον σύνολον : $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$, γ θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα, καθ' ὅσον, ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, τὸ γ θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ γραφῇ ὡς διαφορετικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς $0\alpha_1 + \mu_2'\alpha_2 + \ldots + \mu_\nu'\alpha_\nu = \gamma$ τῶν (ἀνεξαρτήτων) διανυσμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὰ λεχθέντα εἰς τὴν παράγρ. 3.6.3 [1].

Ἐπὶ πλέον πᾶν ἕτερον διάνυσμα ν στοιχείων, μὴ μηδενικόν, π.χ., τὸ δ, δύναται νὰ γραφῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$, γ, ὡς δεικνύεται ἐν συνεχείᾳ. Προφανῶς τὸ δ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς :

$$\rho_1\alpha_1 + \rho_2\alpha_2 + \ldots + \rho_\nu\,\alpha_\nu = \delta \tag{2}$$

ὅπου α_i $(i = 1, \ldots, \nu)$ τὰ διανύσματα τῆς ἀρχικῆς βάσεως καὶ ρ_i ἀριθμοί, ἐξ ὧν εἷς τουλάχιστον εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός [2]. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν (1) ἐπὶ ἀριθμόν τινα θ καὶ ἀφαιρέσωμεν τὴν νέαν παράστασιν ἀπὸ τὴν (2), θὰ ἔχωμεν :

$$(\rho_1 - \theta\mu_1)\,\alpha_1 + (\rho_2 - \theta\mu_2)\,\alpha_2 + \ldots + (\rho_\nu - \theta\mu_\nu)\,\alpha_\nu = \delta - \theta\gamma \tag{3}$$

ἐξ ἧς :

$$(\rho_1 - \theta\mu_1)\,\alpha_1 + (\rho_2 - \theta\mu_2)\,\alpha_2 + \ldots + (\rho_\nu - \theta\mu_\nu)\,\alpha_\nu + \theta\gamma = \delta \tag{4}$$

Ἂν θέσωμεν $\theta = \rho_1/\mu_1$, ἡ (4) γίνεται :

$$(\rho_2 - \theta\mu_2)\,\alpha_2 + \ldots + (\rho_\nu - \theta\mu_\nu)\,\alpha_\nu + \theta\gamma = \delta \tag{5}$$

1) Ἤδη (βλ. παράστ. (1)) τὸ γ διετυπώθη ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, κατὰ τρόπον μοναδικόν.

2) Ἐφ' ὅσον καὶ $\delta \neq 0$.

Ἤτοι, τὸ διάνυσμα **δ** δύναται νὰ γραφῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ν ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_\nu$, γ. Οὕτω τὰ διανύσματα ταῦτα ἀποτελοῦν *νέαν* βάσιν τοῦ ν-διαστάτου χώρου.

3.7. Βαθμός, ἁπλοῖ μετασχηματισμοὶ καὶ ἰσοδυναμία μητρῶν

*3.7.1. **Βαθμὸς μήτρας.*** Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν εἶναι ξ ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων - γραμμῶν (στηλῶν) δοθείσης μήτρας, θὰ εἶναι ἐπίσης ξ καὶ ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων - στηλῶν (γραμμῶν) τῆς μήτρας. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος καλεῖται «βαθμὸς» τῆς μήτρας. Ἐν ἄλλοις λόγοις βαθμὸς μιᾶς μήτρας καλεῖται ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων - γραμμῶν ἢ στηλῶν τὰ ὁποῖα περιλαμβάνει ἡ μήτρα αὕτη. Ἔστω, π.χ., ἡ μήτρα:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Αὕτη ἔχει βαθμὸν 2, καθ' ὅσον μόνον δύο ἐκ τῶν στηλῶν της παριστοῦν ἀνεξάρτητα γραμμικῶς διανύσματα (τοῦ διδιαστάτου χώρου) (1), ἐνῷ ἐξ ἄλλου ἀμφότεραι αἱ γραμμαὶ αὐτῆς δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα (τοῦ τριδιαστάτου χώρου).

Ὁ βαθμὸς (2) μήτρας A τάξεως $\mu \times \nu$ — συμβολικῶς παριστώμενος διὰ $\rho(A)$ — δὲν δύναται, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μ, ἂν $\mu < \nu$ ἢ τοῦ ν, ἂν $\nu < \mu$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τετραγωνικῆς μήτρας μιοστῆς τάξεως καὶ βαθμοῦ μ, τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων (γραμμῶν ἢ στηλῶν) τῆς ἐν λόγῳ μήτρας ἀποτελεῖ ***βάσιν*** τοῦ χώρου τῶν μ διαστάσεων.

Πολλάκις, ἀντὶ τοῦ ἀνωτέρω δοθέντος ὁρισμοῦ τοῦ βαθμοῦ μήτρας βάσει τῆς ἐννοίας τῆς γραμμικῆς ἀνεξαρτησίας διανυσμάτων, χρησιμοποιεῖται ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός: «Βαθμὸς» μήτρας καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ χαρακτηρίζων τὴν τάξιν τῆς ***μεγαλυτέρας μὴ μηδενικῆς ὁριζούσης*** ἡ ὁποία δύναται νὰ μορφωθῇ ἐκ τῆς δοθείσης μήτρας. Οὕτω, π.χ., ἂν εἰς δοθεῖσαν τετραγωνικὴν μήτραν A, μιοστῆς τάξεως, ἔχωμεν $|A| \neq 0$, θὰ εἶναι καὶ $\rho(A) = \mu$. Ἡ μήτρα A καλεῖται τότε ***ὁμαλὴ*** μήτρα. Ἂν $|A| = 0$ (ὁπότε ἡ A καλεῖται ***μὴ ὁμαλὴ*** μήτρα) μία δὲ ἐκ τῶν ἐλασσόνων ὁριζουσῶν

1) Ἡ τρίτη στήλη εἶναι διπλασία τῆς δευτέρας.

2) Τινὲς παρ' ἡμῖν (π.χ. ὁ καθηγητὴς Χ. Φουσιάνης) χρησιμοποιοῦν τὸν ὅρον «τάξις μήτρας» ἀντὶ τοῦ ὅρου «βαθμὸς μήτρας», πρὸς ἀποφυγὴν δὲ συγχύσεως ὁμιλοῦν περὶ «μητρῶν $\mu \times \nu$» καὶ οὐχὶ περὶ «μητρῶν τάξεως $\mu \times \nu$».

μικροτέρας τάξεως, ἔστω $(\mu-1)\times(\mu-1)$, εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, θὰ εἶναι καὶ $\rho(A)=\mu-1$.

Ἡ ἰσοδυναμία τῶν δύο αὐτῶν ὁρισμῶν τοῦ βαθμοῦ μήτρας, δὲν θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ ἐνταῦθα.

3.7.2. ***Ἁπλοῖ μετασχηματισμοὶ μητρῶν.*** «Ἁπλοῖ μετασχηματισμοὶ» μιᾶς μήτρας καλοῦνται οἱ ἀκόλουθοι τύποι μεταβολῶν αὐτῆς:

α) Ἡ ἐναλλαγὴ μιᾶς γραμμῆς τῆς μήτρας μὲ μίαν ἄλλην γραμμὴν αὐτῆς. Π.χ., ἐκ τῆς μήτρας Α:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

λαμβάνομεν τὴν μήτραν Β:

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

κατόπιν ἐναλλαγῆς τῶν δύο πρώτων γραμμῶν τῆς Α.

β) Ὁ πολλαπλασιασμὸς οἱασδήποτε γραμμῆς τῆς μήτρας ἐπὶ δοθέντα ἀριθμόν, ***διάφορον*** τοῦ μηδενός. Π.χ., ἐκ τῆς Α λαμβάνομεν τὴν Γ:

$$\Gamma=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς δευτέρας γραμμῆς τῆς Α ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2.

γ) Ἡ πρόσθεσις τοῦ πολλαπλασίου μιᾶς γραμμῆς τῆς μήτρας εἰς ἑτέραν γραμμὴν τῆς μήτρας. Π.χ., ἐκ τῆς Α λαμβάνομεν τὴν Δ:

$$\Delta=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 10 & 9 & 5 \end{bmatrix},$$

κατόπιν προσθέσεως εἰς τὴν τρίτην γραμμὴν τῆς Α τοῦ τριπλασίου τῆς ***πρώτης*** γραμμῆς αὐτῆς.

Οἱ ἁπλοῖ μετασχηματισμοὶ δύνανται προφανῶς νὰ ἐφαρμοσθοῦν ἀναλόγως καὶ ἐπὶ τῶν στηλῶν δοθείσης μήτρας. Οὕτω, κατόπιν προσθέσεως τοῦ διπλασίου τῆς πρώτης στήλης τῆς Α εἰς τὴν τρίτην στήλην αὐτῆς καὶ ἐναλλαγῆς τῆς οὕτω προκυπτούσης νέας στήλης μὲ τὴν δευτέραν στήλην λαμβάνομεν τὴν μήτραν Ε :

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Βάσει τῶν ὡς ἄνω μετασχηματισμῶν ἐπὶ τῶν γραμμῶν ἢ στηλῶν δοθείσης ἀρχικῆς μήτρας δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, εἰς ***πᾶσαν περίπτωσιν***, μίαν νέαν μήτραν ἁπλουστάτης μορφῆς. Ἡ μήτρα αὕτη περιέχει μονάδας ἢ μηδενικὰ στοιχεῖα εἰς τὴν κυρίαν διαγώνιον (1) αὐτῆς, πάντα δὲ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα της εἶναι ἴσα πρὸς τὸ μηδέν. Ἔστωσαν πρὸς διευκρίνισιν τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα :

Παράδειγμα 1ον

Ἐκ τῆς $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, διὰ προσθέσεως εἰς τὴν δευτέραν γραμμὴν τῆς πρώτης γραμμῆς, κατόπιν πολλαπλασιασμοῦ αὐτῆς ἐπὶ (–2), λαμβάνομεν :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ἐκ τῆς Β, διὰ προσθέσεως τοῦ διπλασίου τῆς δευτέρας γραμμῆς εἰς τὴν πρώτην γραμμήν, λαμβάνομεν :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ἤδη δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν πρώτην γραμμὴν ἐπὶ $\frac{1}{3}$ καὶ τὴν δευτέραν γραμμὴν ἐπὶ (–1) ὁπότε λαμβάνομεν :

$$A_4 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

1) Προκειμένου περὶ μὴ τετραγωνικῆς μήτρας, ὡς κυρίαν διαγώνιον αὐτῆς θὰ θεωροῦμεν τὴν κυρίαν διαγώνιον τῆς μεγαλυτέρας τετραγωνικῆς μήτρας ἡ ὁποία δύναται νὰ προκύψη ἐκ τῆς ἐν λόγῳ μήτρας, ἂν ἀφαιρεθοῦν αἱ τελευταῖαι ν-μ στῆλαι αὐτῆς, εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν $\nu > \mu$ ἢ αἱ τελευταῖαι μ-ν γραμμαὶ αὐτῆς, ἂν $\mu > \nu$.

Παράδειγμα 2ον

Ἐκ τῆς $B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, δι' ἐναλλαγῆς τῆς τρίτης μὲ τὴν πρώτην στήλην, θὰ ἔχωμεν:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ἀφαιροῦντες ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης στήλης τῆς B_2 τὸ διπλάσιον καὶ τριπλάσιον, ἀντιστοίχως, τῆς πρώτης στήλης, λαμβάνομεν:

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ἤδη, ἀφαιροῦντες τὸ διπλάσιον τῆς δευτέρας στήλης ἀπὸ τὴν πρώτην καὶ προσθέτοντες τὸ τετραπλάσιον τῆς δευτέρας εἰς τὴν τρίτην στήλην, καταλήγομεν εἰς τὴν

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.7.3. Ἰσοδύναμοι μῆτραι. Αἱ μῆτραι αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ δοθείσης ἀρχικῆς μήτρας δι' ἐκτελέσεως ἐπὶ τῶν γραμμῶν (ἢ στηλῶν) αὐτῆς ἁπλῶν μετασχηματισμῶν λέγομεν ὅτι εἶναι ***ἰσοδύναμοι*** μεταξύ των καὶ ὡς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μήτραν. Ἡ ἔννοια τῆς ἰσοδυναμίας ταύτης καθίσταται σαφὴς ἂν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν τὰ ἀκόλουθα:

Ὡς ἤδη ἐλέχθη, ὁ βαθμὸς ρ(A) δοθείσης μήτρας A ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν ὅστις χαρακτηρίζει τὴν τάξιν τῆς μεγαλυτέρας ***μὴ μηδενικῆς*** ὁριζούσης ἡ ὁποία εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ ἐκ τῆς A. Οὕτω ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ A εἶναι τετραγωνικὴ μήτρα μιοστῆς τάξεως καὶ $|A| \neq 0$ θὰ ἔχωμεν καὶ $\rho(A) = \mu$. Ἀλλὰ συμφώνως πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν ὁριζουσῶν (βλ. 3.4.6. Γ) ἡ μὴ μηδενικὴ τιμὴ ὁριζούσης δὲν μετατρέπεται εἰς μηδενικὴν τοιαύτην, ἐάν: α) ἐναλλάξωμεν τὰς γραμμὰς (ἢ τὰς στήλας) τῆς ἀντιστοίχου μήτρας [1], β) πολλαπλασιάσωμεν μίαν γραμμὴν (ἢ στήλην) τῆς μήτρας ἐπὶ δοθέντα ἀριθμὸν [2], γ) προσθέσωμεν εἰς μίαν γραμμὴν (ἢ στήλην) τῆς μήτρας τὸ πολλαπλάσιον ἑτέρας γραμμῆς (ἢ στήλης) [3].

Κατὰ συνέπειαν ὁ βαθμὸς δοθείσης μήτρας παραμένει ***ἀμετάβλητος*** ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς ἁπλῶν μετασχηματισμῶν ἐπὶ τῶν γραμμῶν ἢ στηλῶν

1) Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην μεταβάλλεται μόνον τὸ σημεῖον τῆς ὁριζούσης.
2) Ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης πολλαπλασιάζεται τότε ἐπὶ τὸν ἀριθμόν.
3) Ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης παραμένει ἀμετάβλητος.

τῆς μήτρας. Ἐν ἄλλοις λόγοις δύο ἢ περισσότεραι ἰσοδύναμοι μῆτραι ἔχουν τὸν αὐτὸν βαθμόν, ἤτοι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων (στηλῶν ἢ γραμμῶν).

Τὸ συμπέρασμα αὐτὸ εἶναι σημαντικὸν ὅσον ἀφορᾷ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ βαθμοῦ δοθείσης μήτρας, διότι δι' ἀναγωγῆς αὐτῆς κατόπιν μετασχηματισμοῦ εἰς ἰσοδύναμον μήτραν ἁπλουστάτης μορφῆς, δυνάμεθα, μετροῦντες τὰ μοναδιαῖα διανύσματα (1) τῆς ἰσοδυνάμου μήτρας, νὰ εὕρωμεν ἀμέσως τὸν βαθμὸν τῆς ἀρχικῆς μήτρας. Οὕτω, εἰς τὰ ἀνωτέρω ληφθέντα παραδείγματα, θὰ ἔχωμεν :

$$\rho(A_1) = \rho(A_4) = 2 \qquad \rho(B_1) = \rho(B_4) = 2$$

3.8. Συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων

Τὰ μέχρι τοῦδε λεχθέντα περὶ μητρῶν καὶ διανυσμάτων ἀποτελοῦν, νομίζομεν, ἐπαρκῆ προπαρασκευὴν πρὸς κατανόησιν τῶν βασικῶν σημείων τῆς θεωρίας τῶν ***συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων*** (2). Τὰ συστήματα ταῦτα ἔχουν μεγίστην σημασίαν ἀπὸ ἀπόψεως προγραμματισμοῦ, καθ' ὅσον πλεῖστα τῶν προβλημάτων ἐπιλογῆς εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπωθοῦν ὑπὸ μορφὴν συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων.

3.8.1. Γραμμικοὶ συνδυασμοὶ διανυσμάτων καὶ συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων. Ἂς λάβωμεν τὴν κάτωθι παράστασιν :

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \ldots + x_\nu \alpha_\nu = \beta \tag{1}$$

ὅπου α_i καὶ β εἶναι διανύσματα μ στοιχείων καὶ x_i ἄγνωστοι ἀριθμοί.

Ἀναλυτικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$x_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu 1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu 2} \end{bmatrix} + \ldots + x_\nu \begin{bmatrix} \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{2\nu} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\mu \end{bmatrix} \tag{2}$$

ὅπου γενικῶς α_{ik} εἶναι τὸ i στοιχεῖον τοῦ διανύσματος k καὶ β_i τὸ i στοιχεῖον τοῦ β.

---

1) Τὰ ὁποῖα ὡς εἴπομεν εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα (βλ. 3.6.1).

2) «Γραμμικαὶ ἐξισώσεις» καλοῦνται ὡς γνωστὸν αἱ ἐξισώσεις αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνουν μόνον πρώτου βαθμοῦ ἀγνώστους μεταβλητάς.

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν, κατόπιν ἐκτελέσεως τῶν πράξεων, τὴν παράστασιν (3)

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1\nu} x_\nu \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{2\nu} x_\nu \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{\mu 1} x_1 + \alpha_{\mu 2} x_2 + \dots + \alpha_{\mu\nu} x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\mu \end{bmatrix} \tag{3}$$

ἐξ ἧς, βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἴσων διανυσμάτων, καταλήγομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{matrix} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1\nu} x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{2\nu} x_\nu = \beta_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{\mu 1} x_1 + \alpha_{\mu 2} x_2 + \dots + \alpha_{\mu\nu} x_\nu = \beta_\mu \end{matrix} \tag{4}$$

Γενικῶς δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἑκάστη παράστασις τῆς μορφῆς (1), ὅπου δοθὲν διάνυσμα ἐκφράζεται ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς ἑτέρων διανυσμάτων, μὲ πολλαπλασιαστὰς ἀγνώστους μεταβλητάς, ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓν σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως: Ἐκ δοθέντος συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων δυνάμεθα, δι' ἀποσπάσεως τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ κατανομῆς αὐτῶν κατὰ στήλας, νὰ διατυπώσωμεν μίαν παράστασιν τῆς μορφῆς (1). Συνεπῶς αἱ παραστάσεις αὗται ἀποτελοῦν συνοπτικὴν διατύπωσιν ἀντιστοίχων συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων.

Τὸ σύστημα (4) δύναται ἐπίσης νὰ διατυπωθῇ ὑπὸ μορφὴν μητρῶν, ὡς ἀκολούθως : Ἂν ὁρίσωμεν τὴν μήτραν A, τάξεως $\mu \times \nu$, μὲ στοιχεῖα α_{ik} τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος καὶ τὴν μήτραν (=διάνυσμα - στήλη) :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_\nu \end{bmatrix}$$

δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀντὶ τοῦ (4) :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \dots \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} \dots \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\mu \end{bmatrix} \qquad (5)\,(^1)$$

ἤ, συνοπτικῶς :

$$A\chi = \beta \qquad (6)\,(^2)$$

3.8.2. Δυνατότης ἐπιλύσεως ἑνὸς συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων. Δοθέντων τῶν β_i καὶ τῶν συντελεστῶν (στοιχείων) $\alpha_{i\kappa}$, ἐπίλυσις τοῦ συστήματος (4) σημαίνει νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ τῶν χ_i τοιαῦται ὥστε νὰ ἐπαληθεύουν ταυτοχρόνως τὰς ν ἐξισώσεις τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὴν ἀρχικὴν παράστασιν (1). Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἐπίλυσις τοῦ συστήματος ὑποδηλοῖ τὴν δυνατότητα ἐκφράσεως τοῦ **β** ὡς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν $\boldsymbol{\alpha}_i$, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ στήλη **β** καὶ αἱ στῆλαι $\boldsymbol{\alpha}_i$ (τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα εἶναι συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων χ_i , εἰς τὸ σύστημα (4)) ἀποτελοῦν σύνολον γραμμικῶς ἐξηρτημένων διανυσμάτων.

Ἄν, ἀντιθέτως, δὲν ὑπάρχουν τιμαὶ χ_i ἱκανοποιοῦσαι τὰς ἐξισώσεις τοῦ (4) καὶ βάσει τῶν ὁποίων νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ τὸ **β** ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν $\boldsymbol{\alpha}_i$, ὡς εἰς τὴν παράστασιν (1), λέγομεν ὅτι τὸ ἐν λόγῳ σύστημα δὲν ἔχει λύσιν. Τὰ $\boldsymbol{\alpha}_i$ καὶ τὸ **β** ἀποτελοῦν ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει σύνολον γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι ἡ ἔννοια τῆς ἐπιλύσεως ἑνὸς συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων εἶναι στενῶς συνυφασμένη μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς γραμμικῆς ἐξαρτήσεως διανυσμάτων.

Ἄς ὑποθέσωμεν εἰδικώτερον ὅτι $\boldsymbol{\beta} \neq 0$ καὶ ἄς ἐξετάσωμεν τὰς μήτρας :

$$A = [\,\alpha_{i\kappa}\,] \quad \text{καὶ} \quad A_\beta = [\,\alpha_{i\kappa}, \beta_i\,]$$

Ἡ Α εἶναι, ὡς καὶ προηγουμένως, ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος (4), ἡ δὲ A_β εἶναι μήτρα *ἐπηυξημένη* ὡς πρὸς τὴν Α κατὰ τὰ στοιχεῖα β_i τοῦ **β**. Αἱ ὡς ἄνω μῆτραι θὰ ἠδύναντο ἐπίσης νὰ διατυπωθοῦν, βάσει τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων ὡς :

1) Πρὸς μετατροπὴν τῆς (5) εἰς (4) ἀρκεῖ ἡ ἐκτέλεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $A\chi$ καὶ ἡ ἐξίσωσις τῶν στοιχείων τοῦ προκύπτοντος διανύσματος πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος **β**.

2) Ἡ (6) ἐνθυμίζει τὴν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi = \beta$, ὅπου α καὶ β εἶναι γνωστοὶ ἀριθμοὶ καὶ χ ἄγνωστον μέγεθος.

$$A \quad [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu] \quad \text{καὶ} \quad A_\beta \quad [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \beta]$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ βαθμὸς τῆς A(¹) εἶναι : $\rho(A)=\kappa$. Ὁ βαθμὸς τῆς A_β δύναται νὰ εἶναι : $\rho(A_\beta) \geqslant \rho(A)=\kappa$.

Προφανῶς ἡ περίπτωσις $\rho(A_\beta) < \rho(A)$ ἀποκλείεται, καθ' ὅσον ἡ μήτρα A_β περιλαμβάνει ὅλας τὰς στήλας τῆς A καὶ μίαν ἐπὶ πλέον καὶ κατὰ συνέπειαν ὁ βαθμὸς τῆς A_β θὰ εἶναι *τουλάχιστον* ἴσος πρὸς τὸν βαθμὸν τῆς A.

Ἤδη δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν :

Δοθὲν σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων, ἔχον μήτραν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων A καὶ ἐπηυξημένην αὐτῆς A_β, δύναται νὰ ἐπιλυθῇ, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $\rho(A)=\rho(A_\beta)$. Ἂν $\rho(A)<\rho(A_\beta)$ τὸ ἐν λόγῳ σύστημα δὲν ἔχει λύσιν.

Ἡ ἰσότης $\rho(A)=\rho(A_\beta)=\kappa$ ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ β, ἐπισυναπτόμενον εἰς τὴν A, δὲν ἀλλάζει τὸν ἀριθμὸν κ τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων. Ἐν ἄλλοις λόγοις τὸ β δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν α_i, ὅπερ σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν τιμαὶ τῶν χ_i ἐπαληθεύουσαι τὴν παράστασιν (1), καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα (4) δύναται νὰ λυθῇ.

Ἡ ἀνισότης $\rho(A)<\rho(A_\beta)$ σημαίνει ὅτι τὸ διάνυσμα β, ἐπισυναπτόμενον εἰς τὴν A, καθιστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων $\kappa+1$. Οὕτω καὶ ὁ βαθμός της A_β θὰ εἶναι $\rho(A_\beta)=\kappa+1$, ὅπερ σημαίνει ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ διάνυσμα β ἐπὶ τῇ βάσει τῶν διανυσμάτων α_i. Κατὰ συνέπειαν δὲν ὑπάρχουν τιμαὶ τῶν χ_i ἐπαληθεύουσαι τὴν παράστασιν (1), ἤτοι τὸ σύστημα (4) δὲν ἔχει λύσιν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ἐπίσης ὅτι αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (4) δὲν εἶναι συμβιβασταὶ μεταξύ των, καθ' ὅσον δὲν ἐπαληθεύουν πᾶσαι μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν χ_i. Ἂς λάβωμεν, π.χ., τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} 3\chi_1 + \chi_2 &= 2 \\ 2\chi_1 + 2\chi_2 &= 1 \\ \chi_1 + 3\chi_2 &= 2 \end{aligned}$$

Ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων A τοῦ συστήματος εἶναι :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{μὲ ἰσοδύναμον τὴν} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ἐξ ἧς καταφαίνεται ὅτι $\rho(A)=2$.

---

1) Ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων τῆς A.

Ἐξ ἄλλου, ἡ ἐπηυξημένη μήτρα A_β τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος εἶναι :

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ μὲ ἰσοδύναμον τὴν } I \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ἐξ ἧς συμπεραίνομεν ὅτι $\rho(A_\beta) = 3$.

Οὕτω ἔχομεν: $\rho(A_\beta) > \rho(A)$ καὶ συνεπῶς τὸ ἐξεταζόμενον σύστημα δὲν ἔχει λύσιν. Δὲν δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ προσδιορίσωμεν τιμὰς τῶν χ_1 καὶ χ_2 τοιαύτας ὥστε νὰ ἐπαληθεύουν ταυτοχρόνως καὶ τὰς τρεῖς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Αἱ ἐξισώσεις αὐτοῦ, λαμβανόμεναι ἀνὰ δύο ἔχουν λύσιν, ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη δὲν ἱκανοποιεῖ καὶ τὴν τρίτην ἐξίσωσιν (1).

3.8.3. ***Ἀριθμὸς τῶν λύσεων.*** Ἤδη γεννᾶται τὸ ἐρώτημα : Δοθέντος ἑνὸς συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων δυναμένου νὰ ἐπιλυθῇ, ὡς εἶναι, π.χ., τὸ σύστημα (4) ὅταν $\rho(A) = \rho(A_\beta)$, πόθεν ἐξαρτᾶται ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων αὐτοῦ ; Ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτὸ δίδει ἡ ἀκόλουθος πρότασις. Τὸ ἐν λόγῳ σύστημα ἔχει *α) μίαν καὶ μόνην λύσιν ἂν* $\rho(A) = \rho(A_\beta) = \nu$ *καὶ β) ἀπείρους λύσεις ἂν* $\rho(A) = \rho(A_\beta) < \nu$.

Περίπτωσις 1η : $\rho(A) = \rho(A_\beta) = \nu$. Δυνάμεθα τότε νὰ ἔχωμεν α) $\nu = \mu$, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων μ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων ν, ὁπότε καὶ ἡ μήτρα A εἶναι τετραγωνική, β) $\nu < \mu$ ὅπερ σημαίνει ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγνώστων (2).

A'. Ἂς ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι $\mu = \nu$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ μήτρα A εἶναι ***ὁμαλή***, ὅπερ σημαίνει ὅτι $|A| \neq 0$ καὶ συνεπῶς ἡ A ἔχει ἀντίστροφον τὴν μήτραν A^{-1}. Ἐκ τῆς συνοπτικῆς μορφῆς (6) τοῦ συστήματος (4), κατόπιν πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ A^{-1} ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, λαμβάνομεν :

$$A^{-1}A\chi = I\chi = A^{-1}\beta \quad \text{ἤτοι} \quad \chi = A^{-1}\beta \qquad (7)\,(3)$$

---

1) Π.χ. ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν $\chi_1 = 3/4$ καὶ $\chi_2 = -1/4$, ἀλλ' αἱ τιμαὶ αὗται δὲν ἐπαληθεύουν τὴν τρίτην ἐξίσωσιν, διότι $1 \times 3/4 + 3 \times (1/4) \neq 2$.

2) Ἡ περίπτωσις $\mu < \nu$ ἀποκλείεται διότι ἀντιτίθεται πρὸς τὴν ὑπόθεσιν $\rho(A) = \nu$, ἐφ' ὅσον μέγ. $\rho(A) =$ ἐλάχ. (μ, ν).

3) Ἡ μορφὴ (6) ὑπενθυμίζει τὴν λύσιν $\chi = \alpha^{-1}\beta$ τῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha\chi = \beta$.

Ἡ (7) ἀποτελεῖ λύσιν τῆς (6) καὶ συνεπῶς εἶναι συνοπτικὴ μορφὴ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (4). Ἐπειδὴ ἡ A^{-1} ἀποτελεῖ μοναδικὴν ἀντίστροφον τῆς A (βλ. 3.6.3.) θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην καὶ τὰ ν στοιχεῖα τοῦ διανύσματος $A^{-1}\beta$ μοναδικά, καὶ – συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος διανυσμάτων – ἀνὰ ἓν ἴσα πρὸς τὰ ν στοιχεῖα τοῦ διανύσματος χ. Ἐν ἄλλοις λόγοις ὅταν $\rho(A) = \rho(A_\beta) = \nu = \mu$, ὑπάρχει μία μόνον λύσις εἰς τὴν (6) καὶ συνεπῶς καὶ εἰς τὸ σύστημα (4).

Τοῦτο θὰ ἠδύνατο νὰ λεχθῇ καὶ ἄλλως: Ἐφ' ὅσον $\rho(A) = \nu = \mu$, αἱ στῆλαι τῆς A ἀποτελοῦν βάσιν καὶ συνεπῶς ὑπάρχουν τιμαὶ $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\mu$, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν κατὰ τρόπον μοναδικὸν τὴν στήλην β, ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν στηλῶν τῆς A.

Β'. Ἔστω ὅτι $\mu > \nu$, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγνώστων. Ἡ ἐξίσωσις (6) δύναται τότε νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν διανεμημένων μητρῶν ὡς ἀκολούθως:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} \ldots & \alpha_{\nu\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} \ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\nu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\mu \end{bmatrix} \tag{7}$$

ἤ, συνοπτικῶς: $\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \chi = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$

Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ν γραμμαὶ τῆς A_1 εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα (1). Ἀλλ' ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει αἱ ὑπόλοιποι μ–ν γραμμαὶ τῆς μήτρας A, ἤτοι αἱ γραμμαὶ τῆς A_2, θὰ εἶναι διανύσματα γραμμικῶς ἐξηρτημένα ἐκ τῶν προηγουμένων, καὶ δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ αὐτῶν.

Δυνάμεθα προφανῶς νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν μητρῶν (2).

$$A_1\chi = \beta_1 \tag{8}$$

1) Εἰς τὸ σύστημα (4), δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῶν ἐξισώσεων, οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ἀνωτέρω ὑπόθεσις.

2) Ἡ A_1 εἶναι τάξεως νιοστῆς καὶ ἡ χ τάξεως $\nu \times 1$. Συνεπῶς τὸ γινόμενον $A_1\chi = \beta_1$ εἶναι μήτρα (διάνυσμα - στήλη) τάξεως $\nu \times 1$.

'Επειδὴ αἱ ν γραμμαὶ τῆς A_1 εἶναι ἐξ ὑποθέσεως γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα, ἡ δὲ μήτρα αὕτη εἶναι τάξεως νιοστῆς, θὰ εἶναι καὶ $|A_1| \neq 0$. Κατὰ συνέπειαν ἡ λύσις τῆς (8):

$$\chi = A_1^{-1} \beta_1 \tag{9}$$

θὰ εἶναι μοναδικὴ (βλ. 3.6.3.). Αὕτη ἀποτελεῖ ἐπίσης λύσιν καὶ τῶν ν πρώτων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (4). Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα ἂν ἡ ἐν λόγῳ λύσις ἰσχύῃ καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν μητρῶν (1)

$$A_2\chi = \beta_2 \tag{10}$$

'Εφ' ὅσον ἐξ ὑποθέσεως $\rho(A) = \rho(A_\beta) = \nu$, αἱ ν (πρῶται) γραμμαὶ τῆς A_β εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητοι, αἱ δὲ ὑπόλοιποι μ−ν γραμμαὶ αὐτῆς εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημέναι ἐκ τῶν πρώτων. Κατὰ συνέπειαν ἑκάστη ἐκ τῶν μ−ν γραμμῶν τῆς A_β δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ν γραμμῶν τῆς A_β. Ἂν λάβωμεν, π.χ., τὴν μιοστὴν γραμμήν, θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned}[\alpha_{\mu 1} \dots \alpha_{\mu\nu}, \beta_\mu] = \lambda_1[\alpha_{11} \dots \alpha_{1\nu}, \beta_1] + \lambda_2[\alpha_{21} \dots \alpha_{2\nu}, \beta_2] + \dots \\ + \lambda_\nu[\alpha_{\nu 1} \dots \alpha_{\nu\nu}, \beta_\nu]\end{aligned} \tag{α}$$

ὅπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ ἀποτελοῦν τοὺς πολλαπλασιαστὰς τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ. 'Εκ τῆς (α), δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων, λαμβάνομεν:

$$[\alpha_{\mu 1} \dots \alpha_{\mu\nu}, \beta_\mu] = [\sum_{\iota=1}^{\nu} \lambda_\iota \alpha_{\iota 1}, \dots, \sum_{\iota=1}^{\nu} \lambda_\iota \alpha_{\iota\nu}, \sum_{\iota=1}^{\nu} \lambda_\iota \beta_\iota] \tag{β}$$

ἐξ ἧς:

$$\alpha_{\mu\kappa} = \sum_{\iota=1}^{\nu} \lambda_\iota \alpha_{\iota\kappa} \quad \text{διὰ} \quad \kappa = 1, 2, \dots \nu \tag{γ_1}$$

καὶ

$$\beta_\mu = \sum_{\iota=1}^{\nu} \lambda_\iota \beta_\iota \tag{γ_2}$$

'Επειδὴ ἡ λύσις τῆς $A_1\chi = \beta_1$ ἀποτελεῖ, ὡς εἴπομεν, καὶ λύσιν τῶν ν πρώτων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (4), θὰ εἶναι:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\iota\kappa} X_\kappa = \beta_\iota \quad \text{διὰ} \quad \iota = 1, 2, \dots, \nu \tag{δ}$$

ὅπου X_κ εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν χ_κ.

'Αντικαθιστῶντες τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τῶν β_ι εἰς τὴν (γ_2), θὰ ἔχωμεν:

$$\beta_\mu = \sum_{\iota=1}^{\nu} \lambda_\iota \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\iota\kappa} X_\kappa \tag{ε}$$

1) 'Η A_2 εἶναι τάξεως $(\mu-\nu)\times\nu$, ἡ χ εἶναι τάξεως $\nu\times 1$, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν $A_2\chi=\beta_2$ εἶναι τάξεως $(\mu-\nu)\times 1$.

Ἐπομένως :

$$\beta_\mu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(\sum_{\iota=1}^{\nu} \lambda_\iota \, \alpha_{\iota\kappa} \right) \chi_\kappa \qquad (\sigma\tau)$$

Οἱ συντελεσταὶ $\sum_{\iota=1}^{\nu} \lambda_\iota \, \alpha_{\iota\kappa}$ τῶν χ_κ εἰς τὴν (στ) εἶναι ἴσοι πρὸς τοὺς συντελεστὰς $\alpha_{\mu\kappa}$, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς (γ_1).

Συνεπῶς :

$$\beta_\mu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\mu\kappa} \, \chi_\kappa , \qquad (\zeta)$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ μιοστὴ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (4) ἐπαληθεύεται διὰ τῶν χ_κ, αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν καὶ τὰς ν πρώτας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει προφανῶς δι' ὅλας τὰς $(\mu-\nu)$ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (4).

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι τὸ σύστημα (4) ἔχει μίαν μόνην λύσιν ἂν $\rho(A) = \rho(A_\beta) = \nu$, ἀνεξαρτήτως ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβλητῶν ν εἶναι ἴσος ἢ μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐξισώσεων μ.

Ἐὰν $\mu > \nu$, αἱ $\mu - \nu$ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος χαρακτηρίζονται ἀφ' ἑνὸς μὲν ὡς ***συμβιβασταὶ*** πρὸς τὰς ἀρχικὰς ν ἐξισώσεις, ἐπειδὴ ἱκανοποιοῦνται διὰ τῆς αὐτῆς λύσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὡς ***πλεονάζουσαι***, καθ' ὅσον δὲν λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος. Τὸ σύστημα τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζουν αἱ ἀρχικαὶ ν ἐξισώσεις καλοῦμεν ***ἀνεξάρτητον σύστημα***. Ἔστω τὸ κάτωθι σύστημα ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} 3\chi_1 + 2\chi_2 &= 12 \\ \chi_1 + 2\chi_2 &= 8 \\ 3\chi_1 + 3\chi_2 &= 15 \\ 3\chi_1 + \chi_2 &= 9 \end{aligned}$$

Δύναται εὐκόλως νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος καὶ ἡ ἐπηυξημένη αὐτῆς (διὰ τῶν συντελεστῶν τοῦ δεξιοῦ μέλους) ἔχουν βαθμὸν 2.

Συνεπῶς τὸ σύστημα ἔχει λύσιν. Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου καὶ $\nu = 2$, τὸ σύστημα ἔχει μίαν καὶ μόνην λύσιν. Πράγματι, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν $\chi_1 = 2$ καὶ $\chi_2 = 3$. Αἱ τιμαὶ αὗται τῶν χ_1 καὶ χ_2 ἐπαληθεύουν καὶ τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, αἱ ὁποῖαι διὰ τοῦτο χαρακτηρίζονται ὡς συμβιβασταὶ πρὸς τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις.

Περίπτωσις 2α: $\rho(A) = \rho(A_\beta) = \xi < \nu$. Θὰ διακρίνωμεν τὰς ὑποπεριπτώσεις ὅπου $\xi = \mu$ καὶ $\xi < \mu$.

Δ'. Ἂν ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι $\xi = \mu$. Αἱ μῆτραι A καὶ χ δύνανται τότε νὰ διαχωρισθοῦν ὡς ἑξῆς :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots \alpha_{1\mu} & \dots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \dots \alpha_{2\mu} & \dots \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} \dots \alpha_{\mu\mu} & \dots \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} = [A_1 \quad A_2] \quad \text{καὶ} \quad \chi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\mu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}$$

Ἀντὶ τῆς συνοπτικῆς μορφῆς $A\chi = \beta$, δυνάμεθα τώρα νὰ θέσωμεν

$$[A_1 \quad A_2] \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \beta \qquad (1)$$

ἐξ ἧς

$$A_1\chi_1 + A_2\chi_2 = \beta$$

ἤτοι :

$$A_1\chi_1 = \beta - A_2\chi_2 \qquad (2)$$

Ἂν δώσωμεν αὐθαιρέτους τιμὰς εἰς τὰ στοιχεῖα τοῦ χ_2, τὰ ὁποῖα θὰ καλοῦμεν διὰ τοῦτο ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τοῦ συστήματος, καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειουμένας πράξεις εἰς τὸ δεξιὸν μέλος τῆς (2), θὰ λάβωμεν μήτραν (διάνυσμα) τάξεως $\mu \times 1$. Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου ἡ A_1 εἶναι μήτρα ὁμαλή [1], ἡ ἐξίσωσις μητρῶν (2) δύναται νὰ λυθῇ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀντίστροφον A_1^{-1}, ὁπότε θὰ εἶναι :

$$\chi_1 = A_1^{-1}\beta + A_1^{-1}A_2\bar{\chi}_2 \qquad (3)$$

ὅπου $\bar{\chi}_2$ εἶναι τὸ διάνυσμα τῶν δοθεισῶν τιμῶν εἰς τὰ στοιχεῖα τοῦ χ_2. Τὸ προκῦπτον ἀποτέλεσμα μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων τοῦ δεξιοῦ σκέλους τῆς (3) εἶναι διάνυσμα - στήλη μ στοιχείων, ἅτινα ἀποτελοῦν προφανῶς μίαν λύσιν τῆς (2). Τὴν λύσιν ταύτην θὰ συμβολίσωμεν διὰ $\bar{\chi}_1$. Ἐξ ἄλλου δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$\begin{bmatrix} \bar{\chi}_1 \\ \bar{\chi}_2 \end{bmatrix} = \bar{\chi}$$

1) Ἐφ' ὅσον εἶναι τάξεως $\mu \times \mu$ καὶ $\mu = \xi$.

ὅπου $\bar{\chi}$ ἀποτελεῖ μίαν λύσιν τοῦ συστήματος $A\chi = \beta$. Τὸ $\bar{\chi}_2$ τμῆμα τῆς λύσεως προσδιορίζεται αὐθαιρέτως, τὸ δὲ $\bar{\chi}_1$ τμῆμα αὐτῆς εὑρίσκεται ἐκ τῆς λύσεως ἑνὸς συστήματος τῆς μορφῆς (2), συναρτήσει τοῦ $\bar{\chi}_2$. Ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ δώσωμεν ἀπείρους τιμὰς εἰς τὰ στοιχεῖα τοῦ χ_2, εἰς ἑκάστην δὲ $(\nu - \mu)$ - ιάδα τοιούτων τιμῶν ἀντιστοιχεῖ μία νέα μ - ιὰς τιμῶν τῶν χ_1, καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ σύστημα $A\chi = \beta$ ἔχει ἀπείρους λύσεις. Εἰδικώτερον ὁμιλοῦμεν περὶ *ν - μ παραμετρικῆς* ἀπειρίας λύσεων, ἐπειδὴ ἀκριβῶς $\nu - \mu$ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος τῆς λύσεως προσδιορίζονται αὐθαιρέτως.

Παράδειγμα : Ἔστω, π.χ., τὸ σύστημα ἐξετάσεων :

$$3\chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3 = 17$$

$$2\chi_1 + 2\chi_2 + 4\chi_3 = 30$$

Ἂν θέσωμεν, π.χ., $\chi_3 = 5$ καὶ λύσωμεν ὡς πρὸς χ_1 καὶ χ_2, λαμβάνομεν:

$$\chi_1 = 2 \quad \text{καὶ} \quad \chi_2 = 3$$

Προφανῶς ἡ λύσις τοῦ συστήματος θὰ ἦτο διάφορος, ἂν ἐδίδετο μία ἄλλη τιμὴ εἰς τὸ χ_3 ἢ ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ_3 καθωρίζετο αὐθαιρέτως ἡ τιμὴ μιᾶς ἄλλης μεταβλητῆς. Ἐν προκειμένῳ λέγομεν ὅτι τὸ σύστημα ἔχει *μονοπαραμετρικὴν* ἀπειρίαν λύσεων, ἐπειδὴ ἑκάστη λύσις ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ αὐθαιρέτου προσδιορισμοῦ τῆς τιμῆς μιᾶς ἐκ τῶν τριῶν μεταβλητῶν.

Β'. Ἔστω ἤδη ὅτι $\xi < \mu$. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἓν ἀνεξάρτητον σύστημα ἀπαρτιζόμενον ἀπὸ ξ ἐξισώσεις. Τὸ σύστημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ ἐφ' ὅσον $\rho(A) = \rho(A_\beta) = \xi$, ἔχει δὲ $\nu - \xi$ παραμετρικὴν ἀπειρίαν λύσεων, ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι $\nu > \xi$. Αἱ λύσεις αὗται ἱκανοποιοῦν καὶ τὰς ὑπολοίπους $\mu - \xi$ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος $A\chi = \beta$, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν γραμμικοὺς συνδυασμοὺς τῶν ξ ἀνεξαρτήτων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (1). Οὕτω αἱ $\mu - \xi$ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι συμβιβασταὶ πρὸς τὰς λοιπάς, ταυτοχρόνως ὅμως πλεονάζουν, ἐφ' ὅσον δὲν συμβάλλουν εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος.

Κατὰ συνέπειαν ἂν $\rho(A) = \rho(A_\beta) = \xi < \nu$, τὸ σύστημα $A\chi = \beta$ ἔχει $\nu - \xi$ παραμετρικὴν ἀπειρίαν λύσεων, ἀνεξαρτήτως ἐὰν $\mu = \xi$ ἢ $\mu > \xi$ (2).

1) Ἐφ' ὅσον $\rho(A) = \rho(A_\beta) = \xi$, αἱ $\mu - \xi$ γραμμαὶ τῆς A_β εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημέναι ἐκ τῶν ὑπολοίπων ξ γραμμῶν αὐτῆς, δι' ὃ χαρακτηρίζομεν καὶ τὰς $\mu - \xi$ ἐξισώσεις ὡς ἐξηρτημένας ἐκ τῶν λοιπῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος.

2) Ἡ περίπτωσις $\mu < \xi$ δὲν εἶναι δυνατὴ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ βαθμοῦ τῆς μήτρας.

3.8.4. Βασικαὶ λύσεις. «Βασικὴ λύσις» ἑνὸς συστήματος $A\chi = \beta$, ὅπου $\rho(A) = \rho(A_\beta) = \xi < \nu$, καλεῖται ἡ λύσις ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται ἂν δώσωμεν τιμὴν μηδὲν εἰς $\nu - \xi$ ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τοῦ συστήματος, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ ὑπόλοιποι ξ μεταβληταὶ αὐτοῦ συσχετίζονται μὲ μίαν ὁμαλὴν ὑπομήτραν τῆς A, ξ τάξεως, αἱ στῆλαι τῆς ὁποίας ἀποτελοῦν *βάσιν* τοῦ ξ-διαστάτου χώρου. Αἱ μεταβληταὶ αὗται καλοῦνται *βασικαὶ μεταβληταί* (1).

Παράδειγμα. Ἔστω τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} 2\chi_1 + 3\chi_2 + \chi_3 &= 13 \\ \chi_1 + 4\chi_2 + 2\chi_3 &= 17 \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ ἡ ἐπηυξημένη αὐτῆς κατὰ τὰς σταθερὰς τοῦ δεξιοῦ μέλους, ἔχουν βαθμὸν 2 καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα εἶναι ἐπιλύσιμον. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ὁ βαθμὸς οὗτος εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγνώστων, τὸ σύστημα ἔχει ἀπείρους λύσεις. Ἂν θέσωμεν $\chi_3 = 0$, λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} 2\chi_1 + 3\chi_2 &= 13 \\ \chi_1 + 4\chi_2 &= 17 \end{aligned} \quad \text{ἢ} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 17 \end{bmatrix} \qquad (\beta)$$

Ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν εἶναι ὁμαλὴ μὲ ἀντίστροφον $\begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$.

Οὕτω :

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 4\,{}^1/_5 \end{bmatrix}$$

Συνεπῶς ἡ βασικὴ λύσις τοῦ συστήματος (α) θὰ εἶναι : $\chi_1 = 1/5$, $\chi_2 = 4\,{}^1/_5$ καὶ $\chi_3 = 0$, μὲ βασικὰς (ἐξηρτημένας) μεταβλητὰς τὰς χ_1 καὶ χ_2 καὶ ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὴν χ_3. Προφανῶς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν δύο ἀκόμη βασικὰς λύσεις εἰς τὸ ἐν λόγῳ σύστημα, ἂν θέσωμεν ἐκ περιτροπῆς $\chi_1 = 0$ καὶ $\chi_2 = 0$, τὰς δὲ ἑτέρας δύο μεταβλητὰς θεωρήσωμεν ὡς βασικάς.

Γενικῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν βασικῶν λύσεων ἑνὸς συστήματος τὸ ὁποῖον ἔχει ἀπείρους λύσεις, δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν τῶν βάσεων αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ συγκροτηθοῦν ἐκ τῶν στηλῶν τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος: Οὕτω. π.χ., ἂν $\rho(A) = \xi = \mu < \nu$ ὁ ἀριθμὸς τῶν βα-

1) Ἂν, πλὴν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, λαμβάνουν τιμὴν μηδὲν καὶ μία ἢ περισσότεραι βασικαὶ μεταβληταί, λέγομεν ὅτι ἡ βασικὴ λύσις εἶναι «ἐκφυλισμένη».

σικῶν λύσεων δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν τῶν ν στηλῶν λαμβανομένων ἀνὰ μ [1] ὅστις εἶναι:

$$\Sigma_\nu^\mu = \frac{1.2\ldots\nu}{1.2\ldots\mu(1.2\ldots\nu-1.2\ldots\mu)} = \frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}$$

Οὕτω εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συστήματος (α), ἀνωτέρω, ἔχομεν

$$\Sigma_3^2 = \frac{1.2.3}{1.2(1)} = 3$$

3.8.5. Ὁμογενῆ καὶ μὴ ὁμογενῆ συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων. Ἂν εἰς τὴν παράστασιν (1) τῆς 3.8.1 θέσωμεν $\beta = 0$, λαμβάνομεν τὸν συνδυασμόν:

$$\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 + \ldots + \chi_\nu\alpha_\nu = 0 \qquad (\alpha)$$

ὅστις, ἀναπτυσσόμενος, δίδει τὸ γραμμικὸν σύστημα:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu = 0 \\ \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu = 0 \\ \quad\vdots \\ \alpha_{\mu 1}\chi_1 + \alpha_{\mu 2}\chi_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}\chi_\nu = 0 \end{array} \qquad (\beta)$$

Τὸ σύστημα τοῦτο καλεῖται *ὁμογενὲς* σύστημα.

Κατ' ἀντιδιαστολήν, τὸ σύστημα $A\chi = \beta$, ὅπου $\beta \neq 0$, καλεῖται *μὴ ὁμογενὲς* σύστημα.

Τὸ (β) ἔχει λύσιν: $\chi_1 = \chi_2 = \ldots = \chi_\nu = 0$. Πλὴν τῆς λύσεως ταύτης, δύναται νὰ ἔχῃ ἐπίσης καὶ μὴ μηδενικὴν λύσιν μόνον ἐὰν $\rho(A) = \xi < \nu$, ὁπότε αἱ στῆλαι τῆς A, ἤτοι τὰ διανύσματα α_i, εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα, ἡ δὲ παράστασις (α) [2] ἐπαληθεύεται (βλ. 3.6.1.) καὶ διὰ τιμὰς τῶν χ_i οὐχὶ πάσας ἴσας πρὸς τὸ μηδέν. Ἂν δοθοῦν αὐθαίρετοι τιμαὶ εἰς $\nu - \xi$ μεταβλητάς, ἡ λύσις τοῦ (β) εἶναι δυνατὴ κατὰ τὰ ἐν τμ. 3.8.3. (περίπτωσις 2) λεχθέντα. Δοθείσης

1) Δυνατὸν ὅμως ὁ ἀριθμὸς τῶν βασικῶν λύσεων νὰ εἶναι μικρότερος, ἂν ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν περιλαμβάνῃ καὶ στήλας πολλαπλασίας ἄλλων στηλῶν, μετὰ τῶν ὁποίων δὲν δύνανται αὗται νὰ ἀποτελέσουν βάσιν.

2) Καὶ συνεπῶς καὶ τὸ σύστημα (β).

μιᾶς λύσεως, ἔστω π.χ.: $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$, δυνάμεθα προφανῶς νὰ λάβωμεν ἑτέραν λύσιν $\lambda\chi_1, \lambda\chi_2, \ldots, \lambda\chi_\nu$, ἤτοι:

$$\alpha_1(\lambda\chi_1) + \alpha_2(\lambda\chi_2) + \ldots + \alpha_\nu(\lambda\chi_\nu) = 0,$$

ὅπου λ εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμός.

*3.8.6 **Μέθοδος ἐπιλύσεως συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων.*** Θὰ ἀσχοληθῶμεν διὰ βραχέων μὲ τὰς συνήθεις μεθόδους ἐπιλύσεως συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων.

Α) Μέθοδος ἀντιστροφῆς μήτρας. Ἐκ τῆς προηγηθείσης ἀναλύσεως (3.8.3. περίπτωσις 1Α) εἴδομεν ὅτι ἡ λύσις ἑνὸς συστήματος ἔχοντος ὁμαλὴν μήτραν συντελεστῶν Α εἶναι δυνατὴ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν του διὰ τῆς ἀντιστρόφου μήτρας A^{-1}. Ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ ὅταν ἡ μήτρα Α εἶναι μὴ ὁμαλή, κατόπιν προσδιορισμοῦ ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος ἑνὸς «ὑποσυστήματος» ἔχοντος ὁμαλὴν μήτραν συντελεστῶν (βλ. 3.8.3. περιπτώσεις 1 Β καὶ 2).

Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου ταύτης τὸ κύριον ὑπολογιστικὸν πρόβλημα συνίσταται εἰς τὸν ἀριθμητικὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀντιστρόφου μήτρας ([1]).

***Β) Κανὼν** Cramer.* Ἡ ἀντίστροφος A^{-1} τῆς ὁμαλῆς μήτρας Α δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς $\frac{1}{A} \cdot A^{+}$, ὅπου ἡ A^{+} εἶναι ἡ ἐνηλλαγμένη μήτρα τῶν ἀλγεβρικῶν συμπληρωμάτων τῶν στοιχείων τῆς Α (βλ. 3.4.6. Δ). Οὕτω ἡ λύσις τοῦ συστήματος $A\chi = \beta$, ἤτοι $\chi = A^{-1}\beta$, δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς

$$\chi = \frac{A^{+}}{A} \cdot \beta$$

ἢ ἀναλυτικῶς:

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A} & \cdots\cdots & \frac{A_{\nu 1}}{A} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{A_{1\nu}}{A} & \cdots\cdots & \frac{A_{\nu\nu}}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

---

1) Πλὴν τῆς περιγραφείσης εἰς 3.4.6 διαδικασίας, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπίσης τὴν ἀκόλουθον διαδικασίαν πρὸς ἀντιστροφὴν δοθείσης τετραγωνικῆς μήτρας Α: Ἐπαυξάνομεν τὴν Α διὰ τῆς μοναδιαίας μήτρας Ι (τῆς αὐτῆς τάξεως) καὶ ἐπὶ τῆς νέας μήτρας [Α, Ι] ἐκτελοῦμεν ἁπλοὺς μετασχηματισμοὺς μέχρις ὅτου τὸ Α μέρος αὐτῆς μετα-

Συνεπῶς :

$$\chi_\iota = \frac{1}{|A|}(A_{1\iota}\beta_1 + \ldots + A_{\nu\iota}\beta_\nu) =$$

$$= \frac{1}{|A|}\sum_{\kappa=1}^{\nu} A_{\kappa\iota}\beta_\iota = \frac{1}{|A|}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\iota A_{\kappa\iota} \quad \text{καὶ} \quad \iota = 1, 2, \ldots, \nu$$

Ἀλλὰ $\Sigma\,\beta_\iota A_{\kappa\iota}$ εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα (κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης ι) τῆς ὁριζούσης ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μήτραν A ἂν ἡ ι στήλη αὐτῆς ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς στήλης β. Συνεπῶς δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸν ἀκόλουθον κανόνα : Ἡ τιμὴ δοθείσης μεταβλητῆς χ_ι εἶναι ἴση πρὸς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὴν ὁρίζουσαν ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς A κατόπιν ἀντικαταστάσεως τῆς ι στήλης αὐτῆς διὰ τῆς στήλης β τῶν σταθερῶν τοῦ συστήματος καὶ διαιρέσεως διὰ τῆς ὁριζούσης $|A|$. Π.χ., ἡ τιμὴ τῆς χ_2 θὰ εἶναι :

$$\chi_2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \beta_\nu \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu\nu} & \ldots & \alpha_{1\nu} \end{vmatrix}}$$

Ὁ κανὼν οὗτος εἶναι γνωστὸς ὡς κανὼν Cramer.

Γ) Διαδικασία *Gauss.* Ἔστω :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} \ldots \alpha_{\nu\nu} & \beta_\nu \end{bmatrix}$$

ἡ ἐπηυξημένη A_β τῆς ὁμαλῆς μήτρας A τοῦ συστήματος $A\chi = \beta$. Ἂν εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν αὐτῆς εἶναι $\alpha_{11} \neq 0$ [1], προσθέτομεν εἰς ἑκάστην

τραπῇ εἰς μοναδιαίαν μήτραν. Τότε τὸ I μέρος αὐτῆς θὰ ἔχῃ μετατραπῇ εἰς τὴν ἀντίστροφον A^{-1}.

1) Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν θέτομεν ὡς πρώτην οἱανδήποτε γραμμὴν ι εἰς τὴν ὁποίαν $\alpha_{\iota 1} \neq 0$.

(πλὴν τῆς πρώτης) γραμμὴν ι τῆς A_β τὴν πρώτην γραμμὴν πολλαπλασιασμένην ἐπὶ $-\frac{\alpha_{\iota 1}}{\alpha_{11}}$, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον μήτραν :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ 0 & \alpha'_{22} & \alpha'_{23} \ldots \alpha'_{2\nu} & \beta'_2 \\ 0 & \alpha'_{32} & \alpha'_{33} \ldots \alpha'_{3\nu} & \beta'_3 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & \alpha'_{\nu 2} & \alpha'_{\nu 3} \ldots \alpha'_{\nu\nu} & \beta'_\nu \end{bmatrix}$$

ἥτις ἔχει ν–1 μηδενικὰ στοιχεῖα εἰς τὴν πρώτην στήλην αὐτῆς.

Τὸ στοιχεῖον α_{11} καλοῦμεν *ἀξονικὸν στοιχεῖον*. Μὲ ἀξονικὸν στοιχεῖον τὸ δεύτερον στοιχεῖον τῆς δευτέρας στήλης, ἤτοι τὸ α'_{22}, προχωροῦμεν εἰς τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν ν–2 στοιχείων τὰ ὁποῖα κεῖνται ὑπὸ τὸ α'_{22}, κ.ο.κ., διὰ τὰς λοιπὰς γραμμάς. Τελικῶς καταλήγομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον ὑπερδιαγώνιον μήτραν, ἰσοδύναμον πρὸς τὴν A :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ 0 & \alpha''_{22} & \alpha''_{23} \ldots \alpha''_{2\nu} & \beta''_2 \\ 0 & 0 & \alpha''_{33} \ldots \alpha''_{3\nu} & \beta''_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots \alpha''_{\nu\nu} & \beta''_\nu \end{bmatrix}$$

Τὸ σύστημα $A\chi = \beta$ δύναται τότε νὰ γραφῇ ὡς

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ 0 & \alpha''_{22} \ldots \alpha''_{2\nu} & \beta''_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots \alpha''_{\nu\nu} & \beta''_{\nu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta''_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta''_\nu \end{bmatrix}$$

ἢ

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu &= \beta_1 \\ \alpha''_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha''_{2\nu}\chi_\nu &= \beta''_2 \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad &\quad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \quad &\quad \cdot \\ \cdot \quad &\quad \cdot \\ \alpha''_{\nu\nu}\chi_\nu &= \beta''_\nu \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως τοῦ συστήματος λαμβάνομεν $x_\nu = \beta_\nu / \alpha_{\nu\nu}$. Τὴν τιμὴν ταύτην ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς προηγουμένας $\nu-1$ ἐξισώσεις καὶ λύομεν ἀμέσως τὴν προτελευταίαν ἐξίσωσιν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς τιμῆς τῆς $x_{\nu-1}$, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ μοναδικὴ μεταβλητὴ τῆς ἐξισώσεως ταύτης. Τὴν τιμὴν τῆς $x_{\nu-1}$ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς προηγουμένας $\nu-2$ ἐξισώσεις, λύοντες ἀμέσως τὴν τρίτην ἐξίσωσιν, κ.ο.κ., μέχρι προσδιορισμοῦ τῆς τιμῆς τῆς x_1 ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως. Ἡ διαδικασία αὕτη εἶναι γνωστὴ ὡς ***μέθοδος ἀπαλοιφῆς*** *Gauss* ἢ ἁπλῶς ***διαδικασία*** *Gauss*.

Ἡ αὐτὴ διαδικασία ἰσχύει ἐὰν $\rho(A) = \xi < \nu$, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι εἰς τὸ τελικὸν σύστημα δὲν μηδενίζονται οἱ συντελεσταὶ τῶν τελευταίων $\nu-\xi$ ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος εἶναι $\mu = \xi$, τότε τὸ τελικὸν σύστημα θὰ ἔχῃ τὴν ἀκόλουθον μορφήν:

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1\xi}x_\xi + \ldots + \alpha_{1\nu}x_\nu &=& \beta_1 \\
\alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2\xi}x_\xi + \ldots + \alpha_{2\nu}x_\nu &=& \beta_2 \\
\vdots & & \vdots \\
\alpha_{\xi\xi}x_\xi + \ldots + \alpha_{\xi\nu}x_\nu &=& \beta_\xi
\end{array}$$

Τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει βασικὰς μεταβλητὰς τὰς $x_1, x_2, \ldots, x_\xi$ καὶ δύναται νὰ λυθῇ, κατὰ τὴν προηγουμένην διαδικασίαν εὐθὺς ὡς δοθοῦν αὐθαιρέτως τιμαὶ εἰς τὰς $\nu-\xi$ ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς αὐτοῦ (1).

Δ) Διαδικασία *Gauss - Jordan*. Ἡ μέθοδος αὕτη διαφέρει ἀπὸ τὴν προηγουμένην μόνον εἰς ἓν σημεῖον. Ἀντὶ νὰ ἀπαλείφωνται, δι' ἁπλῶν μετασχηματισμῶν τῶν γραμμῶν τῆς A_β, μόνον οἱ κείμενοι ὑπὸ τὸ ἑκάστοτε ἀξονικὸν στοιχεῖον συντελεσταί, ἡ διαδικασία αὕτη ἐφαρμόζεται πρὸς ἀπαλοιφὴν ***καὶ*** τῶν ***ὑπὲρ*** τὸ ἀξονικὸν στοιχεῖον συντελεστῶν. Οὕτω, εἰς περίπτωσιν συστήματος μὲ ὁμαλὴν μήτραν, καταλήγομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{array}{lllll}
\alpha'_{11}x_1 & & & & = \beta'_1 \\
& \alpha'_{22}x_2 & & & = \beta'_2 \\
& & \alpha'_{33}x_3 & & = \beta'_3 \\
& & \ddots & & \vdots \\
& & & \alpha'_{\nu\nu}x_\nu & = \beta'_\nu
\end{array}$$

1) Ἂν $\mu > \xi$ αἱ τελευταῖαι $\mu-\xi$ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ἀπαλείφονται, διότι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων αὐτῶν μηδενίζονται κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἁπλῶν μετασχηματισμῶν ἐπὶ τῶν γραμμῶν τῆς A_β.

ἐξ οὗ προσδιορίζεται ἀμέσως ἡ τιμὴ ἑκάστης μεταβλητῆς $\chi_i = \dfrac{\beta_i}{\alpha_{ii}}$. Ἂν ὁ βαθμὸς τῆς Α εἶναι $\xi < \nu$, τὸ ἀνωτέρω σύστημα τροποποιεῖται διὰ τῆς παρεμβολῆς $\nu - \xi$ ὅρων εἰς ἑκάστην ἐξίσωσιν, ἀντιστοιχούντων εἰς ἰσαρίθμους ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς. Διὰ τὴν λύσιν τοῦ νέου συστήματος ἐφαρμόζομεν τὴν αὐτὴν διαδικασίαν, ἀφοῦ ὁρίσωμεν (αὐθαιρέτως), ὡς καὶ προηγουμένως, τὰς τιμὰς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Ε) Κανονικὰ συστήματα. Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τῆς προηγουμένης παραγράφου συνίσταται εἰς τὴν ἐκτέλεσιν μιᾶς ἀκόμη πράξεως μετασχηματισμοῦ ἐφ' ἑκάστης γραμμῆς ι αὐτοῦ, ἤτοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $1/\alpha_{ii}$, ὁπότε λαμβάνομεν τὸ σύστημα

$$\begin{array}{lllll} \chi_1 & & & & = \beta_1'' \\ & \chi_2 & & & = \beta_2'' \\ & & \chi_3 & & = \beta_3'' \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \chi_\nu = \beta_\nu'' \end{array}$$

ἐξ οὗ προσδιορίζονται αὐτομάτως αἱ τιμαὶ τῶν χ_i. Τὸ σύστημα τοῦτο, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς μήτραν τῶν συντελεστῶν τὴν I, καλεῖται ***κανονικὴ μορφὴ*** τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος ἢ ***κανονικὸν σύστημα***. Ἡ κανονικὴ μορφὴ τοῦ συστήματος $A\chi = \beta$, ὅπου $\rho(A) = \xi = \mu < \nu$ θὰ εἶναι προφανῶς:

$$\begin{array}{lllll} \chi_1 & & & & + \alpha_{1(\mu+1)}' \chi_{\mu+1} + \ldots + \alpha_{1\nu}' \chi_\nu = \beta_1' \\ & \chi_2 & & & + \alpha_{2(\mu+1)}' \chi_{\mu+1} + \ldots + \alpha_{2\nu}' \chi_\nu = \beta_2' \\ & & \chi_3 & & + \alpha_{3(\mu+1)}' \chi_{\mu+1} + \ldots + \alpha_{3\nu}' \chi_\nu = \beta_3' \\ & & \cdot & & \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\ & & & & \chi_\mu + \alpha_{\mu(\mu+1)}' \chi_{\mu+1} + \ldots + \alpha_{\mu\nu}' \chi_\nu = \beta_\mu' \end{array}$$

ὅπου αἱ $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\mu$ εἶναι αἱ βασικαί, αἱ δὲ $\chi_{\mu+1}, \ldots, \chi_\nu$ αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ τοῦ συστήματος. Τὸ σύστημα λύεται εὐθὺς ὡς δοθοῦν τιμαὶ εἰς τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς. Ἂν αἱ τελευταῖαι αὗται λάβουν τιμὰς μηδέν, τὰ β_i' ἀποτελοῦν μίαν βασικὴν λύσιν, ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\mu$.

Εἰς περίπτωσιν μεγάλων συστημάτων ἐξισώσεων, ὡς εἶναι συνήθως τὰ συστήματα τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ πλεῖστα τῶν προβλημάτων προγραμματισμοῦ, αἱ ἀνωτέρω περιγραφεῖσαι μέθοδοι ἐπιλύσεως, λόγῳ τοῦ τεραστίου ὄγκου πράξεων τὰς ὁποίας ἀπαιτοῦν, δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν εἰ μὴ μόνον διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ὑπολογιστικῶν ἀριμηχανῶν ὑψηλῆς ταχύτητος. Εὐτυχῶς ἡ ἀλματώδης ἐξέλιξις τῶν καλουμένων ***ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν***, ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν παράλληλον ἀνάπτυξιν τῆς ὑπολογιστικῆς τεχνικῆς, καθιστοῦν σήμερον δυνατὴν τὴν λύσιν προβλημάτων προγραμματισμοῦ μεγάλης κλίμακος, εἰς ἐλάχιστον χρόνον καὶ εἰς σχετικῶς χαμηλὸν κόστος. Εἰς τὴν ἐξέλιξιν ταύτην ὀφείλεται εἰς σημαντικὸν βαθμὸν καὶ ἡ ταχεῖα ἀνάπτυξις τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ἰδίᾳ πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν αὐτοῦ.

3.9. Βασικαὶ ἔννοιαι τῆς θεωρίας τῶν συνόλων

3.9.1. Ὁρισμοὶ καὶ σύμβολα. Συνήθως «σύνολον» καλεῖται μία συλλογὴ (1) πραγμάτων, ἐχόντων κοινήν τινα ἰδιότητα. Τὰ «πράγματα» ταῦτα, καλούμενα ***στοιχεῖα*** ἢ ***μέλη*** τοῦ συνόλου, δύνανται νὰ εἶναι οἱαδήποτε ἀντικείμενα τῆς ἐμπειρίας ἢ τῆς σκέψεώς μας. Παραδείγματα: 1) Τὸ σύνολον τῶν κατοίκων τῶν Ἀθηνῶν. 2) Τὸ σύνολον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν. 3) Τὸ σύνολον τῶν λύσεων ἑνὸς προβλήματος. Συμβολικῶς, τὰ μὲν σύνολα παριστῶμεν συνήθως διὰ κεφαλαίων γραμμάτων: Α, Β, . . . , τὰ δὲ στοιχεῖα διὰ μικρῶν γραμμάτων: α, β, . . . , ἢ διὰ γενικῶν συμβόλων, ὡς, π.χ., χ, ψ, ω ἢ x, y, z.

Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι ἓν στοιχεῖον α ***ἀνήκει*** εἰς δοθὲν σύνολον Α χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον $\in$ καὶ γράφομεν: «$\alpha \in A$». Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι ἓν στοιχεῖον β δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον Α χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον $\notin$ καὶ γράφομεν: $\beta \notin A$.

Ἓν σύνολον δύναται νὰ προσδιορισθῇ εἴτε ***δι' ἀναγραφῆς***, εἴτε διὰ ***περιγραφῆς*** τῶν στοιχείων αὐτοῦ. Ἔστω, π.χ., τὸ σύνολον Α τῶν περιττῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ **τῶν** ἀριθμῶν 10 καὶ 20. Βάσει τοῦ πρώτου τρόπου προσδιορισμοῦ γράφομεν:

$$A = \{11, 13, 15, 17, 19\},$$

βάσει δὲ τοῦ δευτέρου τρόπου:

$$A = \{x \mid x \text{ περιττὸς ἀριθμὸς καὶ } 10 < x < 20\}.$$

Εἰς τὸν δεύτερον τρόπον συμβολισμοῦ ἡ κάθετος γραμμὴ μετὰ τοῦ συμβόλου x δεξιὰ αὐτῆς ἔχει τὴν ἔννοιαν «ὅπου x εἶναι. . .», ἡ δὲ πρότασις «περιττὸς ἀριθμὸς καὶ $10 < x < 20$» (2), ὁρίζει ποῖοι ἀριθμοὶ δύναν-

1) Συνώνυμοι λέξεις: «τάξις», «οἰκογένεια», «ὁλότης».
2) Προτάσεις τῆς μορφῆς αὐτῆς καλοῦνται εἰς τὴν Λογικὴν «ἀνοικταὶ προτά-

ται νὰ ἀποτελέσουν στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α. Συνεπῶς ἡ πρότασις αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς *κριτήριον ἐπιλογῆς* στοιχείων διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ συνόλου Α, δι' ὃ καὶ καλεῖται *συνολοδομικὴ πρότασις*.

Τὰ σύνολα δύνανται νὰ ἔχουν πεπερασμένον ἀριθμὸν στοιχείων, ὁπότε καλοῦνται *πεπερασμένα* (π.χ. τὸ σύνολον Α, ἀνωτέρω), ἢ ἄπειρον ἀριθμῶν στοιχείων, ὁπότε καλοῦνται *ἀπειροσύνολα* (π.χ. τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος).

Ἓν σύνολον ἔχον μόνον ἓν στοιχεῖον καλεῖται *μονοσύνολον*.

Διὰ λόγους μαθηματικῆς συνεπείας ὁρίζομεν ἓν σύνολον τὸ ὁποῖον οὐδὲν στοιχεῖον περιέχει. Τοῦτο καλοῦμεν *κενὸν σύνολον*, παριστώμενον διὰ τοῦ συμβόλου Θ. Οὕτω, π.χ., τὸ σύνολον :

$$\Theta = \{ x \mid x \text{ εἶναι τριψήφιος ἀριθμὸς καὶ } 0 < x < 99 \}$$

εἶναι κενὸν σύνολον.

Δύο σύνολα καλοῦνται *ἴσα* ἂν ἔχουν τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς στοιχεῖα. Π.χ. ἂν $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{\gamma, \alpha, \beta\}$ λέγομεν ὅτι τὰ σύνολα ταῦτα εἶναι ἴσα, συμβολικῶς : $A = B$ (1). Ἤτοι γράφομεν $A = B$, ἐὰν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Β καὶ ἀντιστρόφως. Συνοπτικῶς: $\forall \alpha \in A \Rightarrow \alpha \in B$ καὶ $\forall \beta \in B \Rightarrow \beta \in A$, ὅπου «$\forall \alpha$» σημαίνει «διὰ πᾶν στοιχεῖον α» καὶ «$\Rightarrow$» σημαίνει «ἕπεται ὅτι . . .».

Ἐὰν ὡρισμένα στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου ἱκανοποιοῦν πλὴν τῆς ἀρχικῆς συνολοδομικῆς προτάσεως καὶ μίαν ἄλλην πρότασιν ἐπιλογῆς, ταῦτα δύνανται νὰ ἀποτελέσουν ἓν νέον σύνολον, καλούμενον *ὑποσύνολον* τοῦ δοθέντος. Π.χ., τὸ σύνολον Β τῶν ἀριστούχων σπουδαστῶν μιᾶς τάξεως εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου Α τῶν σπουδαστῶν τῆς τάξεως ταύτης. Ἂν x εἶναι τυχὸν στοιχεῖον τοῦ Β, θὰ ἔχωμεν :

$$B = \{ x \mid x \in A \text{ καὶ εἶναι ἀριστοῦχος σπουδαστής} \},$$

Γενικῶς ὁρίζομεν ἓν σύνολον Β ὡς ὑποσύνολον ἑτέρου συνόλου Α, ἐὰν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Α (2). Συμβολικῶς γράφομεν : $B \subseteq A$ ἢ $A \supseteq B$. Ἂν ἔχωμεν ταυτοχρόνως $B \subseteq A$ καὶ $B \supseteq A$ (3) τὰ σύνολα Α καὶ Β εἶναι ἴσα. Ἐξ ἄλλου, $A \subseteq A$ καὶ $B \subseteq B$, ἤτοι πᾶν σύνολον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του.

Τὸ Β καλεῖται *γνήσιον ὑποσύνολον* τοῦ Α, ἂν ἔχωμεν $B \subseteq A$ καὶ

σεις», καθ' ὅσον δύνανται νὰ ἐλεγχθοῦν, ἂν εἶναι ἀληθεῖς ἢ ψευδεῖς, μόνον μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ γενικοῦ συμβόλου x διὰ συγκεκριμένου ἀριθμοῦ.

1) Ἡ τάξις τῶν στοιχείων ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν δὲν ἔχει σημασίαν.

2) Συνοπτικῶς : $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$.

3) Ἤτοι : $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$ καὶ $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

οὐχὶ $B \supseteq A$ (1), ὁπότε τὸ σύνολον A ἔχει ἓν τουλάχιστον στοιχεῖον ἐπὶ πλέον ὡς πρὸς τὸ σύνολον B. Συμβολικῶς γράφομεν: $B \subset A$ ἢ $A \supset B$.

Κατὰ παραδοχὴν τὸ κενὸν σύνολον ἀποτελεῖ ὑποσύνολον παντὸς ἑτέρου συνόλου.

Εἰς ἑκάστην συγκεκριμένην περίπτωσιν ἔχομεν ὑπ' ὄψιν μας ἓν *γενικὸν σύνολον* ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμεθα. Π.χ., ὅταν ὁμιλοῦμεν περὶ διαφόρων κατηγοριῶν σπουδαστῶν μιᾶς τάξεως, ἔχομεν ὑπ' ὄψιν μας τὸ γενικὸν σύνολον τῶν σπουδαστῶν τῆς τάξεως. Τὸ γενικὸν σύνολον καλεῖται ἐπίσης καὶ ***σύνολον ἀναφορᾶς***, συμβολίζεται δὲ διὰ τοῦ γράμματος Γ.

3.9.2. Πράξεις ἐπὶ συνόλων. α) Ἕνωσις. Δοθέντων δύο συνόλων A καὶ B καλοῦμεν ***ἕνωσιν*** αὐτῶν τὸ σύνολον Γ τῶν στοιχείων τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὸ A ἢ εἰς τὸ B ἢ εἰς ἀμφότερα. Συμβολικῶς γράφομεν:

$$\Gamma = A \cup B$$

Παράδειγμα: Ἂν $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{3, 2, 5\}$ θὰ εἶναι καὶ $\Gamma = A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$. Ἡ ἕνωσις συνόλων δύναται νὰ ἐπεκταθῇ εἰς πλείονα σύνολα. Οὕτω, π.χ., ἐκ τῶν συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ σύνολον $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$ ἢ συνοπτικῶς: $\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i$. Προφανῶς $A \cup A = A$.

β) Τομή. Εἰς τὸ προαναφερθὲν ἀριθμητικὸν παράδειγμα τὰ σύνολα A καὶ B ἔχουν κοινὰ δύο στοιχεῖα, ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 3. Βάσει τῶν στοιχείων αὐτῶν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν σύνολον $\Delta = \{2, 3\}$. Ἡ πρᾶξις αὕτη καλεῖται *τομὴ* τῶν συνόλων A καὶ B. Γενικῶς «τομὴ» δοθέντων συνόλων καλεῖται ἡ πρᾶξις κατασκευῆς ἑνὸς νέου συνόλου ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν στοιχείων τῶν ἐν λόγῳ συνόλων. Ἡ τομὴ συνόλων συμβολίζεται διὰ τοῦ «$\cap$», ἤτοι, διὰ τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα θὰ ἔχωμεν

$$\Delta = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ καὶ } x \in B\}$$

Εἰς περίπτωσιν πλειόνων συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, ἡ τομὴ (2) αὐτῶν θὰ εἶναι: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu$ ἢ συνοπτικῶς $\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i$. Προφανῶς: $A \cap A = A$.

Ὁ συμβολισμὸς $A \cap B = \Theta$ σημαίνει ὅτι οὐδὲν κοινὸν στοιχεῖον ὑφίσταται μεταξὺ A καὶ B. Τὰ σύνολα A καὶ B καλοῦνται τότε ***ξένα*** πρὸς ἄλληλα.

---

1) Ἤτοι: $\forall x \in B \rightarrow x \in A$ καὶ οὐχὶ $\forall x \in A \rightarrow x \in B$.

2) Οἱ ὅροι «ἕνωσις» καὶ «τομὴ» ὑποδηλοῦν τόσον τὰς σχετικὰς πράξεις, ὅσον καὶ τὰ ἐξ αὐτῶν προκύπτοντα νέα σύνολα.

γ) Διαφορά. Δοθέντων δύο συνόλων A καὶ B, ὁρίζομεν ὡς ***διαφορὰν*** τοῦ συνόλου B ἀπὸ τὸ σύνολον A, συμβολικῶς $A-B$, τὸ σύνολον τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ A τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ B. Εἰδικῶς ἂν τὸ B εἶναι ἓν ἐκ τῶν ὑποσυνόλων τοῦ γενικοῦ συνόλου U, ἡ διαφορὰ $U-B$ καλεῖται ***συμπλήρωμα*** τοῦ B εἰς τὸ U καὶ συμβολίζεται διὰ B′. Συνεπῶς

$$B' = \{x \mid x \in U \text{ καὶ } x \notin B\}$$

3.9.3. Καρτεσιανὸν γινόμενον συνόλων. Ἂς λάβωμεν τὰ σύνολα $A=\{\alpha_1, \alpha_2\}$ καὶ $B=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. Βάσει τῶν στοιχείων τῶν συνόλων αὐτῶν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰ ζεύγη στοιχείων: (α_1, β_1), (α_1, β_2), (α_1, β_3), (α_2, β_1), (α_2, β_2), (α_2, β_3), τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς ***πρῶτον*** στοιχεῖον ἓν στοιχεῖον ἐκ τοῦ A καὶ ὡς ***δεύτερον*** ἓν στοιχεῖον ἐκ τοῦ B. Τὰ ὡς ἄνω ζεύγη χαρακτηρίζονται ὡς ***διατεταγμένα***. Ἤδη δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ σύνολον Γ, μὲ στοιχεῖα τὰ διατεταγμένα ταῦτα ζεύγη:

$$\Gamma = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in A \text{ καὶ } \beta \in B\}$$

Τὸ σύνολον Γ, καλοῦμεν ***καρτεσιανὸν γινόμενον*** τοῦ συνόλου A ἐπὶ τὸ σύνολον B, καὶ συμβολίζομεν διὰ $A \times B$. Ἡ τάξις τῶν στοιχείων εἶναι οὐσιώδης. Ἂν εἰς τὰ ἀνωτέρω ζεύγη ἀντιστρέψωμεν τὴν τάξιν τῶν στοιχείων, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $B \times A$, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ $A \times B$. Τὴν ἔννοιαν τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπεκτείνωμεν ἐπὶ τριῶν ἢ περισσοτέρων συνόλων. Ἔστωσαν, π.χ., τὰ σύνολα A, B καὶ Γ μὲ τυπικὰ στοιχεῖα α, β καὶ γ, ἀντιστοίχως. Τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων τριάδων

$$A \times B \times \Gamma = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha \in A, \beta \in B, \gamma \in \Gamma\}$$

Γενικῶς ἐκ δοθέντων συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_\nu$, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_\nu$, μὲ στοιχεῖα διατεταγμένας νιάδας $(\alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_\nu)$, ὅπου $\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2, \dots, \alpha_\nu \in A_\nu$.

3.9.4. Σημειοσύνολα. Ἓν ἰδιαιτέρως χρήσιμον σύνολον εἶναι τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν διὰ τοῦ R. Γραφικῶς τὸ σύνολον αὐτὸ δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς εὐθεῖα γραμμή (1).

1) Ἐπὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς ὁρίζομεν ἓν σημεῖον διὰ τὸν ἀριθμὸν 0 καὶ δεξιὰ αὐτοῦ ἕτερον σημεῖον διὰ τὸν ἀριθμὸν 1. Πᾶς ἀριθμὸς x τοῦ R δύναται τότε νὰ παρασταθῇ δι' ἑνὸς σημείου ἐπὶ τῆς εὐθείας, κειμένου εἰς ἀπόστασιν $|x|$ (ὅπου $|x|$

Ἂν λάβωμεν δύο σύνολα ἴσα πρὸς R, τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι: $R \times R$ ἢ συμβολικῶς R^2. Γεωμετρικῶς τὸ σύνολον R^2 ἀποτελεῖ τὸν διδιάστατον χῶρον, μὲ ὁριζόντιον ἄξονα ἀναφορᾶς τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν (κατὰ τὰ ἀνωτέρω) εἰς τὸ ἓν R, συμβολικῶς παριστώμενον διὰ R_1, καὶ κάθετον ἄξονα τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἕτερον R, συμβολιζόμενον διὰ R_2. Τὰ διατεταγμένα ζεύγη (χ, ψ) (1) τοῦ R^2 δύνανται συνεπῶς νὰ παρασταθοῦν ὡς *σημεῖα* μὲ τετμημένην χ καὶ τεταγμένην ψ. Γενικῶς ἂν λάβωμεν ν σύνολα ἴσα πρὸς R, συμβολικῶς $R_1, R_2, \ldots, R_\nu$, τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον αὐτῶν $R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_\nu = R^\nu$, ἔχει ὡς γεωμετρικὸν ἰσοδύναμον αὐτοῦ τὸν ν-διάστατον χῶρον, μὲ στοιχεῖα διατεταγμένας νιάδας, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς σημεῖα τοῦ χώρου αὐτοῦ. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν καλοῦμεν τὸ σύνολον R^ν ***σύνολον σημείων*** ἢ ***σημειοσύνολον*** (2).

Κατόπιν τῶν λεχθέντων εἰς 3.1.2 καθίσταται προφανὲς ὅτι δυνάμεθα ἐπίσης νὰ θεωρήσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ R^ν καὶ ὡς ***διανύσματα***, ἔχοντα ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

3.9.5. ***Σχέσεις.*** Καλοῦμεν «σχέσιν» ἀπὸ ἓν σύνολον Β εἰς ἓν σύνολον Γ πᾶν ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου Β×Γ. Οὕτω, π.χ., τὸ ὑποσύνολον Α τοῦ R^2 εἰς τὸ διάγρ. 13 ἀποτελεῖ «σχέσιν», ὁριζομένην εἰδικώτερον ὡς:

$$A = \{(\chi, \psi) \mid \chi \in R_1, \ \psi \in R_2, \ 3 \leqslant \chi \leqslant 7 \text{ καὶ } 3 \leqslant \psi \leqslant 6\}$$

Ἤτοι τὸ Α περιλαμβάνει ὅλα τὰ ζεύγη (χ, ψ) τοιαῦτα ὥστε τὸ χ ἔχει τιμὰς ἀπὸ 3 ἕως 7, τὸ δὲ ψ τιμὰς 3 ἕως 6. Αἱ τιμαὶ τοῦ χ ἀπὸ 3 ἕως 7 ἀποτελοῦν ἓν ὑποσύνολον Π τοῦ R_1,

$$\Pi = \{\chi \mid \chi \in R_1 \text{ καὶ } 3 \leqslant \chi \leqslant 7\}$$

τὸ ὁποῖον καλεῖται εἰδικώτερον ***περιοχὴ*** τῆς σχέσεως Α. Αἱ τιμαὶ τοῦ ψ ἀπὸ 3 ἕως 6 ἀποτελοῦν ἓν ὑποσύνολον Ε τοῦ R_2,

$$E = \{\psi \mid \psi \in R_2 \text{ καὶ } 3 \leqslant \psi \leqslant 6\}$$

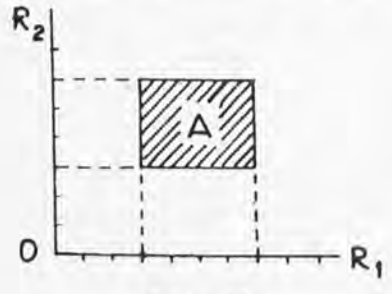
τὸ ὁποῖον καλεῖται ***ἔκτασις*** τῆς σχέσεως Α. Ἡ τομὴ τῶν ὑποσυνόλων αὐτῶν, ἤτοι τὸ σύνολον $\Pi \cap E$ καλεῖται ***πεδίον*** τῆς σχέσεως Α.

εἶναι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ x, ἤτοι ἡ μεγίστη τιμὴ μεταξὺ x καὶ $-x$) καὶ δεξιὰ τοῦ 0, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι θετικὸς ἢ ἀριστερὰ τοῦ 0, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός.

1) Ὑποτίθεται ὅτι τὰ χ καὶ ψ παριστοῦν τυπικὰ στοιχεῖα τῶν R_1 καὶ R_2, ἀντιστοίχως.

2) Προφανῶς τὸ σημειοσύνολον R^ν εἶναι ἐπίσης καὶ ἀπειροσύνολον, ὡς ἔχον ἄπειρον ἀριθμὸν στοιχείων (σημείων).

Εἰς περίπτωσιν σχέσεως ἐχούσης ὡς στοιχεῖα αὐτῆς διατεταγμένας νιάδας - σημεῖα τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_\nu$, ὡς πε-



Διάγρ. 13.

ριοχὴ αὐτῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡρισμένον ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_{\nu-1}$ καὶ ὡς ἔκτασις αὐτῆς ὡρισμένον ὑποσύνολον τοῦ R_ν.

3.9.6. ***Συνάρτησις.*** Ἡ συνάρτησις εἶναι σχέσις, εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστον στοιχεῖον τῆς περιοχῆς της συσχετίζεται μὲ ἓν καὶ μόνον ἓν στοιχεῖον τῆς ἐκτάσεως αὐτῆς. Παράδειγμα, ἡ σχέσις :

$$F = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \text{ καὶ } y = 2x + 2\}$$

ἥτις ἔχει περιοχὴν τὸ R_1 καὶ ἔκτασιν τὸ R_2. Αὕτη γεωμετρικῶς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς εὐθεῖα γραμμὴ ἐντὸς τοῦ διδιαστάτου χώρου. Καθίσταται προφανὲς ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἕκαστον στοιχεῖον x τῆς περιοχῆς τῆς σχέσεως ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓν καὶ μόνον ἓν στοιχεῖον y τῆς ἐκτάσεως αὐτῆς. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν λέγομεν ὅτι ἡ σχέσις F εἶναι συνάρτησις. Ὀνομάζομεν ***ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν*** τῆς συναρτήσεως τὸ σύμβολον x καὶ ***ἐξηρτημένην μεταβλητὴν*** τῆς συναρτήσεως τὸ σύμβολον y. Τὰ σύμβολα ταῦτα δύνανται νὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ συγκεκριμένα στοιχεῖα (ἀριθμοὺς) τῶν R_1 καὶ R_2, ἀντιστοίχως, συμφώνως πάντοτε πρὸς τὸν κανόνα συσχετισμοῦ αὐτῶν $y = 2x + 2$. Ἂν ὁ κανὼν συσχετισμοῦ τῶν στοιχείων x καὶ y δὲν ἀναγράφεται ρητῶς, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν ἀκόλουθον συμβολισμὸν πρὸς ὑποδήλωσιν τῆς σχέσεως F :

$$F = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \text{ καὶ } y = f(x)\}$$

ὅπου τὸ σύμβολον f δηλοῖ τὴν ***μονοσήμαντον*** συσχέτισιν τῶν στοιχείων x πρὸς τὰ στοιχεῖα y.

3.9.7. ***Ἀπεικονίσεις, μετασχηματισμοί.*** Εἰς τὴν συνάρτησιν F, ἡ συσχέτισις ἑνὸς στοιχείου x πρὸς ἓν καὶ μόνον ἓν στοιχεῖον y ἢ $f(x)$ δύναται νὰ νοηθῇ καὶ ὡς *ἀπεικόνισις* ἢ ὡς *μετασχηματισμὸς* τοῦ x εἰς τὸ y, ὁπότε λέγομεν ὅτι τὸ x ***ἀπεικονίζεται*** ἢ ***μετασχηματίζεται*** εἰς y, κατὰ τὸν κανόνα f. Τὸ y (1) καλεῖται ***εἰκὼν*** ἢ ***εἴδωλον*** τοῦ x.

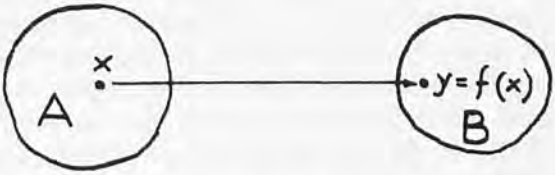
Ἂς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν:

$$\Phi = \{ (\chi, \psi) \mid \chi \in A \text{ καὶ } \psi \in B \text{ καὶ } \psi = \varphi(\chi) \}$$

Συμβολικῶς δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\varphi : A \longrightarrow B \quad \text{ἢ} \quad A \xrightarrow{\varphi} B$$

Ἡ ἔννοια τοῦ συμβολισμοῦ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις εἶναι ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ A ἀπεικονίζονται ἢ μετατρέπονται εἰς στοιχεῖα τοῦ B κατὰ τὸν κανόνα φ. Διαγραμματικῶς:



Διάγρ. 14.

Σύνθετοι συναρτήσεις. Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις:

$$\Phi_1 = \{ (\chi, \psi) \mid \chi \in A \,,\ \psi \in B \text{ καὶ } \psi = \varphi_1(\chi) \}$$

$$\Phi_2 = \{ (\psi, \omega) \mid \psi \in B \,,\ \omega \in \Gamma \text{ καὶ } \omega = \varphi_2(\psi) \}$$

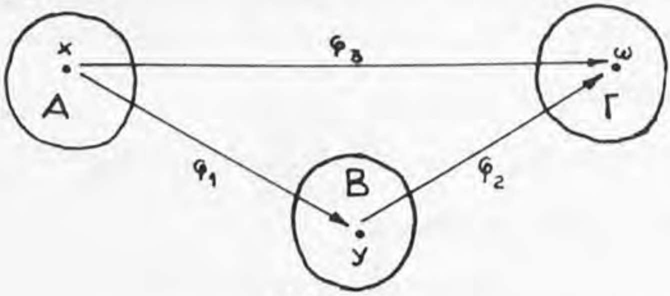
Εἰς τὴν πρώτην συνάρτησιν συσχετίζονται στοιχεῖα τοῦ A πρὸς στοιχεῖα τοῦ B, κατὰ τὸν κανόνα φ_1 ($\varphi_1 : A \rightarrow B$), εἰς δὲ τὴν δευτέραν συνάρτησιν συσχετίζονται στοιχεῖα τοῦ B πρὸς στοιχεῖα τοῦ Γ, κατὰ τὸν κανόνα φ_2 ($\varphi_2 : B \rightarrow \Gamma$). Ἐκ τῶν $\psi = \varphi_1(\chi)$ καὶ $\omega = \varphi_2(\psi)$ λαμβάνομεν: $\omega = \varphi_2[\varphi_1(\chi)]$. Ἡ νέα συνάρτησις

$$\Phi_3 = \{ (\chi, \omega) \mid \chi \in A \text{ καὶ } \omega \in \Gamma \text{ καὶ } \omega = \varphi_3(\chi) = \varphi_2[\varphi_1(\chi)] \},$$

εἰς τὴν ὁποίαν συσχετίζονται στοιχεῖα τοῦ A πρὸς στοιχεῖα τοῦ Γ, κατά τινα κανόνα φ_3 ($\varphi_3 : A \rightarrow \Gamma$), ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ σύνθεσιν τῶν κανόνων φ_1

1) Ἢ τὸ ἴσον του f(x).

καὶ φ_2, καλεῖται *σύνθετος συνάρτησις* ἢ *συνάρτησις συναρτήσεων*. Διαγραμματικῶς :



Διάγρ. 15.

Ἡ ἔννοια τῆς συνθέτου συναρτήσεως δύναται βεβαίως νὰ ἐπεκταθῇ εἰς οἱονδήποτε ἀριθμὸν συναρτήσεων.

3.9.8. Γραμμικοὶ μετασχηματισμοί. Ἔστω ἡ μήτρα A, τάξεως $\mu \times \nu$. Τὸ διάνυσμα (σημεῖον) $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ τοῦ μ-διαστάτου χώρου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εἴδωλον ἑνὸς διανύσματος $\mathbf{x}$ τοῦ ν-διαστάτου χώρου. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ σχέσις $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ ὑποδηλοῖ ἀπεικόνισιν ἢ μετασχηματισμὸν στοιχείων $\mathbf{x}$ τοῦ ν-διαστάτου χώρου εἰς στοιχεῖα $\mathbf{y}$ τοῦ μ-διαστάτου χώρου, μέσῳ τῆς μήτρας A, ἡ ὁποία διὰ τοῦτο καλεῖται καὶ «ἐκτελεστής». Οἱ διὰ μητρῶν μετασχηματισμοὶ καλοῦνται καὶ ***γραμμικοὶ μετασχηματισμοί***. Ὁ χαρακτηρισμὸς αὐτὸς ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ μετασχηματισμοὶ βάσει μητρῶν διατηροῦν τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἀριθμόν. Ἤτοι ἂν $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$ καὶ $\mathbf{y}_3 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$, θὰ εἶναι καὶ $\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$. Ἔστω, π.χ., ὅτι

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ καὶ } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

Τότε :

$$\mathbf{y}_3 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(x_1 + x'_1) + \alpha_{12}(x_2 + x'_2) \\ \alpha_{21}(x_1 + x'_1) + \alpha_{22}(x_2 + x'_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 \\ \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$$

Τὸ σημεῖον $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ τοῦ διδιαστάτου χώρου ἔχει εἰκόνα τὸ σημεῖον $(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)$ τοῦ αὐτοῦ χώρου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν εἰκόνων τῶν προσθετέων $\mathbf{x}_1$ καὶ $\mathbf{x}_2$.

Ἐπίσης ἂν $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ θὰ ἔχωμεν καί :

$$\lambda\mathbf{y} = \lambda A\mathbf{x} = A(\lambda\mathbf{x}), \text{ ὅπου } \lambda \text{ εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμός.}$$

Παράδειγμα:

Ἂν $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{bmatrix}$

Τότε

$$\lambda A\mathbf{x} = A(\lambda\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\lambda x_1 + \alpha_{12}\lambda x_2 \\ \alpha_{21}\lambda x_1 + \alpha_{22}\lambda x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{y}$$

3.10. Δυαδικαὶ σχέσεις καὶ διατεταγμένα σύνολα

3.10.1. Δοθέντος ἑνὸς συνόλου A καὶ μιᾶς προτάσεως Π, εἶναι δυνατὸν νὰ εἴπωμεν ἂν ἡ πρότασις αὕτη ἰσχύῃ ἢ δὲν ἰσχύῃ δι' ἓν ἕκαστον ζεῦγος στοιχείων τοῦ A. Ἔστω, π.χ., ὅτι A εἶναι τὸ σύνολον τῶν μελῶν μιᾶς οἰκογενείας, ἡ δὲ πρότασις Π, ἡ συνδέουσα ζεύγη (x, y) στοιχείων (μελῶν) τῆς A εἶναι «x εἶναι ἡλικίας οὐχὶ μεγαλυτέρας τῆς τοῦ y».Προφανῶς δι' ἑκάστην συγκεκριμένην δυάδα στοιχείων τοῦ A ἡ πρότασις Π ἰσχύει ἢ δὲν ἰσχύει. Ἂς θέσωμεν : $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, ὅπου τὰ σύμβολα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν καὶ ὡς «ὀνόματα» τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας. Ἄν, π.χ., ἡ πρότασις Π ἀληθεύῃ διὰ τὸ ζεῦγος (α, β), γράφομεν συμβολικῶς : $\alpha\Pi\beta$. Προφανῶς ἡ πρότασις Π ἀποτελεῖ μίαν σχέσιν (ὑπὸ τὴν συνήθη ἔννοιαν τοῦ ὅρου (1)) μεταξὺ α καὶ β. Ἡ σχέσις αὕτη καλεῖται εἰδικώτερον ***δυαδικὴ σχέσις*** ὡς ἀναφερομένη εἰς ζεύγη στοιχείων τοῦ A. Τὸ α καλεῖται ***ἡγούμενον στοιχεῖον***, τὸ δὲ β ***ἑπόμενον στοιχεῖον***, ὡς πρὸς τὴν σχέσιν Π. Λέγομεν ἀναλόγως ὅτι : τὸ α ***προηγεῖται*** τοῦ β καὶ (συνεπῶς) τὸ β ***ἕπεται*** τοῦ α, ὡς πρὸς τὴν σχέσιν Π (2).

3.10.2. Ἑκάστη δυαδικὴ σχέσις χαρακτηρίζεται ὑπὸ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἐκ τῶν κάτωθι ἰδιοτήτων :

1) ***Ἀντανακλαστικότης*** : $\alpha\Pi\alpha$, ἤτοι ἕκαστον στοιχεῖον εὑρίσκεται εἰς σχέσιν Π μὲ τὸν ἑαυτόν του.

2) ***Μεταβατικότης*** : Ἂν $\alpha\Pi\beta$ καὶ $\beta\Pi\gamma \Rightarrow \alpha\Pi\gamma$ (3), ἤτοι ἂν ἡ Π ἰσχύῃ διὰ τὰ ζεύγη (α, β) καὶ (β, γ) θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὸ ζεῦγος (α, γ).

3) ***Συμμετρικότης*** : $\alpha\Pi\beta \Rightarrow \beta\Pi\alpha$. Ἐν ἄλλοις λόγοις ἡ τάξις τῶν στοιχείων τοῦ ζεύγους δὲν ἔχει σημασίαν.

---

1) Βλ. ὅμως καὶ 3.10.3.

2) Αἱ φράσεις αὗται δὲν ἔχουν προφανῶς τοπικὴν ἢ χρονικὴν ἔννοιαν. Ἡ πραγματικὴ ἔννοια των ἐξαρτᾶται ἑκάστοτε ἐκ τοῦ περιεχομένου τῆς προτάσεως Π.

3) Ὑπενθυμίζομεν ὅτι τὸ σύμβολον « $\Rightarrow$ » σημαίνει «ἕπεται ὅτι . . .».

4) *Ἀντισυμμετρικότης*: αΠβ καὶ βΠα $\Rightarrow$ α = β. Ἤτοι ἡ τάξις τῶν στοιχείων ἔχει σημασίαν, ἐκτὸς ἐὰν α = β.

Εἰδικώτερον εἰς τὸ προηγουμένως ληφθὲν παράδειγμα ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες: 1) Ἀντανακλαστικότης: αΠα (ἤτοι ὁ α δὲν εἶναι περισσότερον ἠλικιωμένος τοῦ ἑαυτοῦ του). 2) Μεταβατικότης: Προφανῶς ἂν αΠβ καὶ βΠγ $\Rightarrow$ αΠγ. 3) Ἀντισυμμετρικότης: αΠβ καὶ βΠα δὲν εἶναι δυνατὸν εἰ μὴ μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν α καὶ β ἔχουν τὴν αὐτὴν ἡλικίαν, ὁπότε γράφομεν συμβολικῶς α = β.

Ἡ σχέσις Π εἰς τὸ ἐν λόγῳ παράδειγμα καλεῖται εἰδικώτερον *τάξις*, ὡς χαρακτηριζομένη ὑπὸ τῶν ἀνωτέρω τριῶν ἰδιοτήτων. Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς πάντα τὰ ζεύγη τῶν στοιχείων τοῦ Α, καλεῖται *ὁλικὴ* τάξις.

3.10.3. Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν δυαδικὴν σχέσιν ἀπὸ μιᾶς ἄλλης ἀπόψεως. Ὁρίζομεν τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον Α $\times$ Α, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ διάγραμμα 16 (1). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι, πλὴν τῶν ζευγῶν (α, α), (β, β), (γ, γ) καὶ (δ, δ) (2), τὰ μόνα ζεύγη τὰ ὁποῖα πληροῦν τὴν δυαδικὴν σχέσιν Π εἶναι: (β, α), (β, γ), (β, δ), (α, γ) καὶ (γ, δ). Τὰ ζεύγη ταῦτα

Διάγρ. 16.

ἀποτελοῦν, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ διάγραμμα, ἓν ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου Α $\times$ Α καὶ συνεπῶς εἶναι σχέσις κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ τμ. 3.9.5. Γενικῶς εἰς πᾶσαν δυαδικὴν σχέσιν ἐπὶ τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου Σ ἀντιστοιχεῖ ἓν ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου Σ$\times$Σ, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκουν ἅπαντα τὰ ζεύγη τὰ ἱκανοποιοῦντα τὴν σχέσιν ταύτην. Ἀντιστρόφως, δοθέντος ἑνὸς ὑποσυνόλου τοῦ Σ $\times$ Σ τοῦτο ὁρίζει μίαν δυαδικὴν σχέσιν ἐπὶ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Σ.

Ἤδη δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ Α εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἡ δυαδικὴ σχέσις Π μεταξὺ τῶν ὡς ἄνω ζευγῶν, ἤτοι:

1) Τὸ Α $\times$ Α λέγεται ἐπίσης καὶ καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα ὡς ἐκ τοῦ σχήματος αὐτοῦ.

2) Ταῦτα δὲν παρουσιάζουν ἐνδιαφέρον διὰ τὴν διάταξιν τῶν στοιχείων τοῦ Α.

{β, α, γ, δ}(1). Τὸ σύνολον αὐτὸ καλεῖται ***διατεταγμένον σύνολον*** καὶ θεωρεῖται ὡς διάφορον τοῦ ἀρχικοῦ συνόλου Α, καθ' ὅσον, ἐνταῦθα ἐνδιαφερόμεθα ὄχι μόνον διὰ τὴν ταυτότητα ἀλλὰ καὶ διὰ τὴν διάταξιν τῶν στοιχείων. Πρὸς διάκρισιν συμβολίζομεν τὸ νέον σύνολον διὰ (Α, Π), ὅπου Π εἶναι ἡ δυαδικὴ σχέσις μὲ τὴν ὁποίαν εἶναι ἐφωδιασμένον τὸ σύνολον Α.

Θὰ ἐξετάσωμεν δύο ἀκόμη περιπτώσεις δυαδικῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν ἐνδιαφέρον ἀπὸ ἀπόψεως προγραμματισμοῦ.

3.10.4. Τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον R^ν, τοῦ ὁποίου, ὡς εἴδομεν, τὰ στοιχεῖα εἶναι σημεῖα ἢ διανύσματα εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον, εἶναι ἓν σύνολον διατεταγμένον βάσει τῆς δυαδικῆς σχέσεως «x οὐχὶ μικρότερον τοῦ y», ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου $\leqq$ (βλ. σελ. 36). Ἡ δυαδικὴ σχέσις $\leqq$ ἐπὶ τῶν στοιχείων τοῦ R^ν ἀποτελεῖ «τάξιν» διότι χαρακτηρίζεται ἀπό: ἀντανακλαστικότητα: ($x \leqq x$), μεταβατικότητα ($x \leqq y$ καὶ $y \leqq z \Rightarrow x \leqq z$) καὶ ἀντισυμμετρικότητα ($x \leqq y$ καὶ $y \leqq x \Rightarrow x = y$).

Ἀλλ' ἡ τάξις αὐτὴ εἶναι ***μερική***, καθ' ὅσον δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐφ' ὅλων τῶν ζευγῶν (x, y)(2) τοῦ R^ν (βλ. 3.1.8 καὶ εἰδικώτερον διάγραμμα 7). Οὕτω, βλέπομεν ὅτι ἡ ἔννοια τῆς ***προαριστοποιήσεως*** παραγωγικῶν δραστηριοτήτων (βλ. 1.7, καὶ 3.1.9), ἢ ἄλλως καλουμένης ***διανυσματικῆς ἀριστοποιήσεως***, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς «μερικῆς τάξεως» τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου R^ν, βάσει τῆς δυαδικῆς σχέσεως $\leqq$.

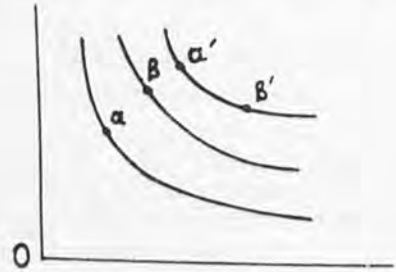
3.10.5. Δυνατὸν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου νὰ ἐκφράζουν διαφόρους ἐπιδιώξεις ἑνὸς φορέως οἰκονομικῆς πολιτικῆς (κράτους, ἐπιχειρηματίου κλπ.), ὁπότε τίθεται ζήτημα συγκριτικῆς ἀξιολογήσεως τῶν ἐπιδιώξεων αὐτῶν κατὰ σειρὰν προτεραιότητος. Μία δυαδικὴ σχέσις ἡ ὁποία ἱεραρχεῖ πλήρως τὰ στοιχεῖα τοῦ ἐν λόγῳ συνόλου δίδεται ἐκ τῆς προτάσεως «α οὐχὶ προτιμότερον τοῦ β», συμβολικῶς «$\alpha \preccurlyeq \beta$», ὅπου α καὶ β εἶναι δύο τυχόντα στοιχεῖα τοῦ συνόλου. Ἡ σχέσις $\preccurlyeq$ εἶναι ἀντανακλαστική, μεταβατικὴ καὶ ἀντισυμμετρική. Ἡ ἀντισυμμετρικότης ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι $\alpha \preccurlyeq \beta \Rightarrow \beta \preccurlyeq \alpha$ μόνον ἐὰν ὑφίσταται ***ἀδιαφορία*** προτιμήσεως μεταξὺ α καὶ β, ὁπότε γράφομεν συμβολικῶς $\alpha \sim \beta$.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἀντὶ τῆς δυαδικῆς σχέσεως $\preccurlyeq$ θὰ ἠδύναντο νὰ χρησιμοποιηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις: 1) «α ὀλιγώτερον ἐνδιαφέρον τοῦ β», συμβολικῶς $\alpha \prec \beta$ καὶ 2) «α ἐξ ἴσου ἐνδιαφέρον πρὸς τὸ β»,

1) Ἐκ τῶν βΠα καὶ αΠγ προκύπτει κατόπιν ἐφαρμογῆς τῆς ἰδιότητος τῆς μεταβατικότητος, βΠγ. Ἐπίσης ἐκ τῶν βΠγ καὶ γΠδ προκύπτει βΠδ. Συνεπῶς τὰ ζεύγη (β, γ) καὶ (β, δ) προκύπτουν ἐκ τῶν ζευγῶν (β, α), (α, γ) καὶ (γ, δ). Ἐκ τῶν ζευγῶν αὐτῶν προκύπτει ἐπίσης ἀμέσως καὶ ἡ διάταξις: β, α, γ, δ.

2) Τὰ ζεύγη (x, y) ἀποτελοῦν στοιχεῖα τοῦ $R^\nu \times R^\nu = R^{2\nu}$.

συμβολικῶς «$\alpha \sim \beta$». Ἡ πρώτη ἐκ τῶν σχέσεων αὐτῶν εἶναι μόνον μεταβατική, ἡ δὲ δευτέρα εἶναι ἀντανακλαστική, μεταβατική καὶ συμμετρική (: $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$, ἤτοι δὲν ἔχει σημασίαν ἡ σειρὰ τῶν στοιχείων), καὶ καλεῖται εἰδικώτερον *σχέσις ἰσοδυναμίας*. Γραφικῶς, αἱ ὡς



Διάγρ. 17.

ἄνω δύο δυαδικαὶ σχέσεις δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τοῦ γνωστοῦ χάρτου καμπυλῶν ἀδιαφορίας. Εἰς τὸ διάγραμμα 17 ἡ σχέσις «$\prec$» ἐφαρμόζεται ἐπὶ σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης ἀδιαφορίας, π.χ., $\alpha \prec \beta$, ἐνῶ ἡ σχέσις ἰσοδυναμίας ἐφαρμόζεται ἐπὶ σημείων κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης ἀδιαφορίας, π.χ., $\alpha' \sim \beta'$.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων ἡ διάταξις τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου «καταστάσεων» ἢ ἐπιδιώξεων ἔχει ***ὑποκειμενικὸν*** χαρακτῆρα, ἤτοι ἐξαρτᾶται κατὰ βάσιν ἐκ τῆς κρίσεως (προτιμήσεως) τοῦ φορέως καὶ δὲν δύναται νὰ ἐλεγχθῇ δι' ***ἀντικειμενικῶν*** κριτηρίων, ὡς π.χ. συμβαίνει εἰς τὰς περιπτώσεις τῆς σχέσεως $\leqq$ ἐπὶ τοῦ R^{ν}.

3.11. Κυρτὰ σύνολα καὶ κυρτοὶ κῶνοι

3.11.1. Δοθέντων δύο σημείων χ_1 καὶ χ_2, ἡ εὐθεῖα ἢ δὲ διερχομένη ἐκ τῶν σημείων αὐτῶν δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς τὸ σημειοσύνολον :

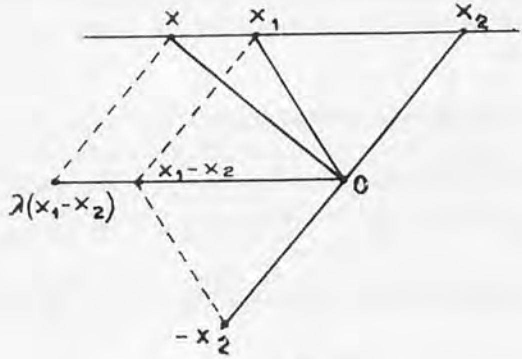
$$X = \{\chi \mid \chi = \lambda\chi_1 + (1-\lambda)\chi_2, \ \forall \lambda \in R\}$$

Εἰς τὸ διάγραμμα 18 ἂς θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα χ, χ_1, χ_2, κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὡς διανύσματα ἐκπορευόμενα ἐκ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων. Βλέπομεν ὅτι τὸ $(\chi_1 - \chi_2)$ προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τοῦ χ_1 καὶ τοῦ $-\chi_2$ (τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντίθετον τοῦ χ_2), κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου. Ἐξ ἄλλου (κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα)

$$\chi = \lambda(\chi_1 - \chi_2) + \chi_2, \quad \text{ἤτοι :} \quad \chi = \lambda\chi_1 + (1-\lambda)\chi_2$$

ὅπου λ εἶναι ἐνταῦθα ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος.

Ἐκ τοῦ διαγρ. 18 καθίσταται προφανὲς ὅτι ἂν τὸ σημεῖον χ κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος εὐθείας τοῦ συνδέοντος τὰ σημεῖα χ_1 καὶ χ_2, δυνάμεθα

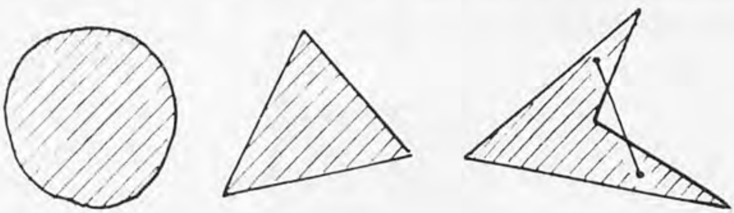


Διάγρ. 18.

να γράψωμεν: $\chi = \lambda\chi_1 + (1-\lambda)\chi_2$, ὅπου $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Συνεπῶς τὸ ἐν λόγῳ τμῆμα εὐθείας δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς τὸ σημειοσύνολον Χ:

$$X = \{ \chi \mid \chi = \lambda\chi_1 + (1-\lambda)\chi_2, \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \}$$

3.11.2. Ἓν σημειοσύνολον καλεῖται κυρτὸν σύνολον ἂν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τμήματος εὐθείας τὸ ὁποῖον συνδέει δύο οἱαδήποτε σημεῖα αὐτοῦ



19α 19β 19γ

ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τὸ σύνολον. Π.χ., τὰ διαγράμματα 19α καὶ 19β εἶναι κυρτὰ σύνολα. Ἀντιθέτως τὸ διάγρ. 19γ εἶναι μὴ κυρτὸν σύνολον.

Ἐν ἄλλοις λόγοις ἓν σύνολον Χ εἶναι κυρτὸν ἄν, εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν $\chi_1, \chi_2 \in X$, εἶναι ἐπίσης καὶ $\chi \in X$ διὰ πᾶν σημεῖον χ, τοιοῦτον ὥστε νὰ ἰσχύῃ ὁ γραμμικὸς συνδυασμός:

$$\chi = \lambda\chi_1 + (1-\lambda)\chi_2, \quad \text{διὰ} \quad 0 < \lambda < 1$$

Ἡ τομὴ δύο ἢ περισσοτέρων κυρτῶν συνόλων εἶναι κυρτὸν σύνολον. Ἔστωσαν, π.χ., τὰ σημειοσύνολα Α καὶ Β καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν

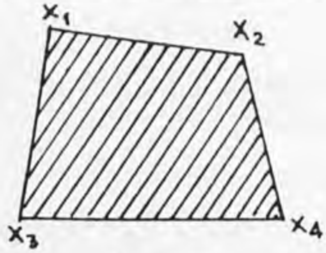
$\Gamma = A \cap B$. Ἂν λάβωμεν δύο τυχόντα σημεῖα α καὶ β τοῦ Γ, ταῦτα εἶναι ἐπίσης καὶ σημεῖα τοῦ συνόλου Α καὶ τοῦ συνόλου Β. Ἀλλὰ τὰ σύνολα ταῦτα εἶναι κυρτὰ καὶ συνεπῶς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τμήματος εὐθείας τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ σημεῖα α καὶ β ἀνήκουν τόσον εἰς τὸ Α ὅσον καὶ εἰς τὸ Β, ἄρα ἀνήκουν καὶ εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν Γ. Κατὰ συνέπειαν τὸ Γ εἶναι κυρτὸν σύνολον.

3.11.3. Ὁ γραμμικὸς συνδυασμὸς $\chi = \lambda\chi_1 + (1-\lambda)\chi_2$ διὰ $0 < \lambda < 1$ καλεῖται καὶ ***κυρτὸς συνδυασμός***. Γενικῶς «κυρτὸς συνδυασμὸς» ἑνὸς ἀριθμοῦ σημείων (ἢ διανυσμάτων) $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$, εἶναι ὁ συνδυασμὸς $\chi = \lambda_1\chi_1 + \lambda_2\chi_2 + \ldots + \lambda_\nu\chi_\nu = \sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i\chi_i$ διὰ $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ καὶ $\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i = 1$. Ὁ κυρτὸς συνδυασμὸς καλεῖται ***γνήσιος κυρτὸς συνδυασμὸς*** ἂν $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ καὶ $\sum_i^{\nu}\lambda_i < 1$.

Προφανῶς, δοθέντος ἑνὸς ἀριθμοῦ σημείων $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν διαφόρους κυρτοὺς συνδυασμοὺς τῶν σημείων αὐτῶν, μεταβάλλοντες τὰς τιμὰς τῶν λ_i (1). Δύναται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν δυνατῶν κυρτῶν συνδυασμῶν τῶν σημείων $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$, ἤτοι :

$$X = \{\chi \mid \chi = \sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i\chi_i, \ \forall\lambda_i > 0, \ \sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i = 1\}$$

ἀποτελεῖ ἓν κυρτὸν σημειοσύνολον. Τὸ σύνολον αὐτὸ καλοῦμεν ***κυρτὴν θήκην*** τῶν σημείων $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$ ἢ ***κυρτὸν πολύεδρον***. Εἰς τὸν διδιά-



Διάγρ. 20.

στατον χῶρον τὸ κυρτὸν πολύεδρον τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐξ ὅλων τῶν κυρτῶν συνδυασμῶν τῶν σημείων $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ (βλ. διάγρ. 20), ἀποτελεῖ ἓν τετράπλευρον.

---

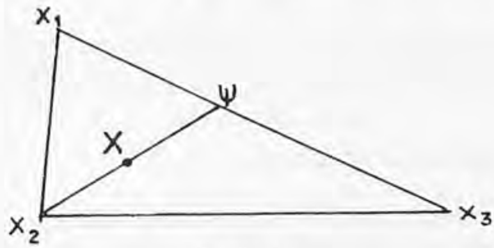
1) Βεβαίως τηρουμένων πάντοτε τῶν περιορισμῶν $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ καὶ $\Sigma\lambda_i = 1$. Τὰ λ_i ἀποτελοῦν κατ' οὐσίαν σταθμικοὺς συντελεστὰς τῶν σημείων $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$.

3.11.4. Ἕν σημεῖον χ κυρτοῦ πολυέδρου μὴ δυνάμενον νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ***γνήσιος κυρτὸς συνδυασμὸς*** ἑτέρων σημείων τοῦ πολυέδρου καλεῖται ***ἀκραῖον σημεῖον***. Οὕτω, τὸ κυρτὸν τετράπλευρον τοῦ διαγρ. 20 ἔχει ὡς ἀκραῖα σημεῖα τὸ χ_1, χ_2, χ_3 καὶ χ_4, τὰ ὁποῖα δὲν δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ ἑτέρων σημείων α καὶ β τοῦ τετραπλεύρου τοιοῦτοι ὥστε:

$$\chi = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta \quad \text{καὶ} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Ὁ περιορισμὸς αὐτὸς ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι ἓν ἀκραῖον σημεῖον δὲν εὑρίσκεται «μεταξὺ» δύο (ἢ περισσοτέρων) ἄλλων σημείων τοῦ συνόλου.

3.11.5. Πᾶν σημεῖον χ ἑνὸς πολυέδρου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ἀκραίων σημείων τοῦ πολυέδρου. Π.χ., εἰς



Διάγρ. 21.

τὸ διάγραμμα 21 τὸ σημεῖον χ τοῦ κυρτοῦ συνόλου Χ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκραῖα σημεῖα: χ_1, χ_2 καὶ χ_3, δύναται νὰ ἐκφρασθῇ, κατὰ τὰ γνωστά, ὡς ὁ κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν σημείων χ_2 καὶ ψ:

$$\chi = \lambda\chi_2 + (1-\lambda)\psi, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

Ἐξ ἄλλου: $\quad \psi = \mu\chi_1 + (1-\mu)\chi_3, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1$

Συνεπῶς:

$$\chi = \lambda\chi_2 + (1-\lambda)[\mu\chi_1 + (1-\mu)\chi_3] = \mu(1-\lambda)\chi_1 + \lambda\chi_2 + (1-\lambda)(1-\mu)\chi$$

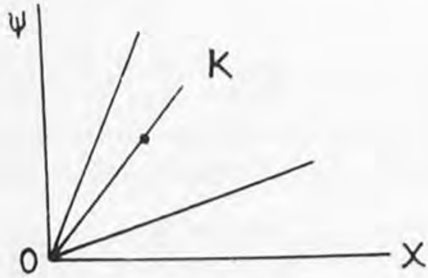
ὅπου $\mu(1-\lambda), \lambda, (1-\lambda)(1-\mu) \geqslant 0$ ἐξ ὁρισμοῦ καὶ $\mu(1-\lambda)+\lambda+(1-\lambda)(1-\mu)=1$

Ἑπομένως τὸ σημεῖον χ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν ἀκραίων σημείων χ_1, χ_2 καὶ χ_3 τοῦ συνόλου Χ.

3.11.6. Ἓν σημειοσύνολον Κ καλεῖται ***κῶνος***, ἐάν, δι' ἕκαστον σημεῖον αὐτοῦ $\mathbf{x}$, τὸ σημεῖον $\lambda\mathbf{x}$, ὅπου $\lambda \geqslant 0$, ἀνήκῃ ἐπίσης εἰς τὸ Κ. Κατὰ συνέπειαν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸν κῶνον Κ ὡς:

$$K = \{ \mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}, \text{ διὰ πᾶν } \lambda \geqslant 0 \text{ καὶ } \forall \mathbf{x} \in K \}$$ (1)

Π.χ. εἰς τὸ διάγρ. 22 τὸ «ἄφρακτον» (2) σημειοσύνολον K ἀποτελεῖ κῶνον, εἰς τὸν διδιάστατον χῶρον.



Διάγρ. 22.

Τὸ σημεῖον O καλεῖται ***κορυφὴ*** τοῦ κώνου. Δοθεὶς κῶνος καλεῖται ***κυρτὸς κῶνος*** ἂν εἶναι κυρτὸν σύνολον, π.χ., ὁ κῶνος τοῦ διαγρ. 24 εἶναι κυρτός.

3.12 Σύνολα λύσεων

3.12.1. Ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ καὶ $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$, ὅπου α, β, γ, δ εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοί, καὶ x_1, x_2, x_3 μεταβλητὰ μεγέθη, ὁρίζουν, ἡ μὲν πρώτη ***εὐθεῖαν γραμμὴν*** ἐντὸς τοῦ διδιαστάτου χώρου, ἡ δὲ δευτέρα ***ἐπίπεδον*** ἐντὸς τοῦ τριδιαστάτου χώρου. Κατ' ἀναλογίαν ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_\nu x_\nu = \zeta, \tag{1}$$

ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καὶ ζ εἶναι ὡρισμένοι ἀριθμοί, καὶ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ μεταβλητὰ μεγέθη, λέγομεν ὅτι ὁρίζει ἓν ***ὑπερεπίπεδον*** τοῦ ν-διαστάτου χώρου. Ἂν θέσωμεν :

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu] \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_\nu \end{bmatrix}$$

---

1) Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ, ὡς εἰδικαὶ περιπτώσεις κώνων θὰ ἠδύνατο νὰ θεωρηθοῦν ὁλόκληρος ὁ χῶρος, τυχοῦσα διανυσματικὴ ἀκτίς, ἢ ἀκόμη καὶ ἡ ἀρχὴ τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

2) Ἓν σημειοσύνολον A καλεῖται «ἄφρακτον» ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ θετικὸς ἀριθμὸς ρ τοιοῦτος ὥστε $|\alpha| < \rho$, διὰ πᾶν στοιχεῖον $\alpha \in A$.

ἡ ἐξίσωσις (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_\nu \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} = \zeta \tag{2}$$

Τὸ ἀντίστοιχον ὑπερεπίπεδον ὁρίζεται ὡς τὸ σημειοσύνολον X εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκουν πάντα τὰ σημεῖα $\mathbf{x}$ τὰ ἱκανοποιοῦντα τὴν ἐξίσωσιν (1) ἢ (ὅπερ τὸ αὐτὸ) τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον (2):

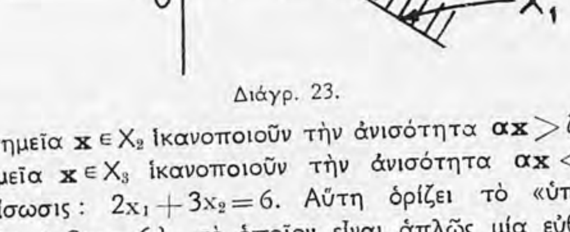
$$X = \{\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} = \zeta\} \tag{3}$$

Τὸ διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ καλεῖται ***κανονικὸν διάνυσμα*** τοῦ ὑπερεπιπέδου X.

3.12.2. Δοθὲν ὑπερεπίπεδον διανέμει τὸν χῶρον εἰς τρία ξένα πρὸς ἄλληλα (βλ. σελ. 99) σημειοσύνολα, ἤτοι:

$$X_1 = \{\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} = \zeta\}$$
$$X_2 = \{\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} > \zeta\}$$
$$X_3 = \{\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} < \zeta\}$$

Τὸ X_1 εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ ὑπερεπίπεδον. Τὰ δύο ἄλλα σημειοσύνολα καλοῦνται ***ἀνοικτοὶ χῶροι*** ἡ δὲ ἕνωσις αὐτῶν $X_2 \cap X_3$ περιλαμβάνει ἅπαντα τὰ σημεῖα τοῦ χώρου, πλὴν τῶν σημείων τοῦ X_1. Εἰδικώτερον,



Διάγρ. 23.

πάντα τὰ σημεῖα $\mathbf{x} \in X_2$ ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνισότητα $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} > \zeta$ καὶ ἅπαντα τὰ σημεῖα $\mathbf{x} \in X_3$ ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνισότητα $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} < \zeta$. Ἔστω, π.χ., ἡ ἐξίσωσις: $2x_1 + 3x_2 = 6$. Αὕτη ὁρίζει τὸ «ὑπερεπίπεδον» $X_1 = \{x \mid 2x_1 + 3x_2 = 6\}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἁπλῶς μία εὐθεῖα γραμμὴ εἰς τὸν διδιάστατον χῶρον (διάγρ. 23).

Ἂν θέσωμεν $2x_1 + 3x_2 > 6$ καὶ $2x_1 + 3x_2 < 6$, λαμβάνομεν τὰ σημειοσύνολα X_2 καὶ X_3, ἀντιστοίχως, τῶν ὁποίων ἡ ἕνωσις $X_2 \cup X_3$ περιλαμβάνει ἅπαντα τὰ σημεῖα τοῦ διδιαστάτου χώρου τὰ εὑρισκόμενα ἑκατέρωθεν (καὶ οὐχὶ ἐπὶ) τῆς εὐθείας γραμμῆς X_1. Τὸ X_2 περιλαμβάνει εἰδικώτερον ἅπαντα τὰ σημεῖα τοῦ χώρου τὰ κείμενα *ὑπεράνω* τῆς εὐθείας, τὸ δὲ X_3 περιλαμβάνει ἅπαντα τὰ σημεῖα τοῦ χώρου κείμενα *ὑπὸ* τὴν εὐθεῖαν (¹).

Προφανῶς : $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = R^2$, ὅπου R^2 εἶναι ὁ διδιάστατος χῶρος, καὶ $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \Theta$. Ἤτοι, τὰ ἐν λόγῳ σημειοσύνολα, ἐξαντλοῦν πλήρως τὸν χῶρον καὶ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν.

Τὰ X_2 καὶ X_3 δύνανται νὰ μετατραποῦν εἰς ***κλειστοὺς ἡμιχώρους***, ἂν εἰς ἕκαστον περιληφθοῦν ἐπὶ πλέον καὶ τὰ σημεῖα τοῦ ὑπερεπιπέδου X_1 (ἤτοι τῆς εὐθείας γραμμῆς, εἰς τὸ παράδειγμά μας). Θὰ εἶναι συνεπῶς :

$$X_2' = \{ \mathbf{x} \mid \alpha\mathbf{x} > \zeta \} \quad \text{καὶ} \quad X_3' = \{ \mathbf{x} \mid \alpha\mathbf{x} < \zeta \}$$

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει : $X_1 = X_2' \cap X_3'$, ἤτοι τὸ ὑπερεπίπεδον X_1 δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἡ τομὴ τῶν κλειστῶν ἡμιχώρων X_2' καὶ X_3'.

3.12.3. Τὰ ὑπερεπίπεδα καὶ οἱ ἡμιχῶροι (κλειστοὶ ἢ ἀνοικτοὶ) εἶναι ***κυρτὰ σύνολα***. Οὕτω, π.χ., ἐὰν $\mathbf{x}_1$ καὶ $\mathbf{x}_2$ εἶναι σημεῖα ἑνὸς ὑπερεπιπέδου, ἤτοι $\alpha\mathbf{x}_1 = \zeta$ καὶ $\alpha\mathbf{x}_2 = \zeta$ (ὅπου α εἶναι τὸ κανονικὸν διάνυσμα τοῦ ὑπερεπιπέδου), τότε πάντα τὰ σημεῖα $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, διὰ $\lambda \leq 1$, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ τμήματος εὐθείας τοῦ συνδέοντος τὰ $\mathbf{x}_1$ καὶ $\mathbf{x}_2$ (βλ. 3.11.2), ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τὸ ὑπερεπίπεδον. Πράγματι :

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha\,[\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{x}_2] = \lambda\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\,\alpha\mathbf{x}_2 = \lambda\zeta + (1-\lambda)\,\zeta = \zeta.$$

Ὁμοίως, ἂν $\alpha\mathbf{x}_1 < \zeta$ καὶ $\alpha\mathbf{x}_2 < \zeta$ καὶ $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, $0 < \lambda < 1$, θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ $\alpha\mathbf{x} = \lambda\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\alpha\mathbf{x}_2 < \lambda\zeta + (1-\lambda) = \zeta$.

3.12.4. Δοθέντος ἑνὸς ὑπερεπιπέδου, πᾶν σημεῖον αὐτοῦ ἱκανοποιεῖ ἐξ ὁρισμοῦ τὴν ἀντίστοιχον ἐξίσωσιν καὶ συνεπῶς ἀποτελεῖ ***λύσιν*** αὐτῆς. Τὸ ***σύνολον τῶν λύσεων*** τῆς ἐξισώσεως τοῦ ὑπερεπιπέδου εἶναι προφανῶς αὐτὸ τοῦτο τὸ ὑπερεπίπεδον. Ὁμοίως, οἱ ἡμιχῶροι ἀποτελοῦν «σύνολα λύσεων» τῶν ἀνισοτήτων αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς ἐν λόγῳ ἡμιχώρους.

Τὸ σύνολον λύσεων ἑνὸς συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ὑπερεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἐξισώσεις του, ἤτοι ἀπὸ τὴν τομὴν αὐτῶν. Καθ' ὅμοιον τρόπον, τὸ σύνολον τῶν λύσεων ἑνὸς συστήματος γραμμικῶν ἀνισοτήτων εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἡμιχώρων, οἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἀνισότητας ταύτας.

Ἐπειδὴ ἡ τομὴ τῶν κυρτῶν συνόλων εἶναι ἐπίσης κυρτὸν σύνολον (βλ. 3.11.2), τὰ σύνολα τῶν λύσεων γραμμικῶν συστημάτων ἢ γραμμικῶν ἀνισοτήτων εἶναι ***κυρτά***.

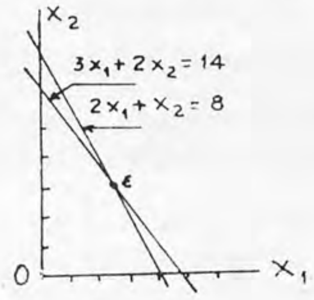
1) Διὰ νὰ προσδιορισθῇ εἰς ποῖον ἐκ τῶν δύο ἡμιχώρων ἀντιστοιχεῖ δοθεῖσα ἀνισότης, ἐξετάζεται ἂν αὕτη ἀληθεύῃ διὰ $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (ἤτοι διὰ $x_1 = 0$ καὶ $x_2 = 0$, εἰς τὸ ληφθὲν παράδειγμα), ὁπότε ὁ ζητούμενος ἡμιχῶρος εἶναι ὁ περιέχων τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων, ἄλλως πρόκειται περὶ τοῦ ἑτέρου ἡμιχώρου.

Παραδείγματα.

Α'. Ἔστω τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 14 \\ 2x_1 + x_2 &= 8 \end{aligned} \qquad (1)$$

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο σημειοσύνο-



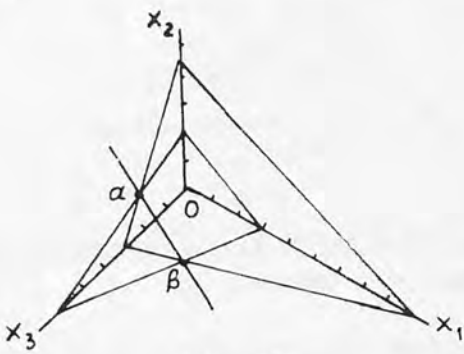
Διάγρ. 24.

λα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν εὐθείας γραμμὰς εἰς τὸν διδιάστατον χῶρον (διάγρ. 24). Ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ συστήματος (1). Τὸ σύνολον τοῦτο ἔχει μόνον ἓν σημεῖον, τὸ ε, μὲ συντεταγμένας $x_1 = 3$ καὶ $x_2 = 2$ (1).

Β'. Ἔστω τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad (2)$$

τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις ἀντιστοιχοῦν εἰς ἐπίπεδα τοῦ τριδιαστάτου χώρου (διάγρ. 25).



Διάγρ. 25.

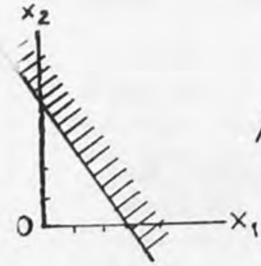
1) Σύνολον περιέχον ἓν μόνον σημεῖον θεωρεῖται ἐπίσης ὡς κυρτὸν σύνολον.

Ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη ἐκ τῶν σημείων α καὶ β καὶ ἀποτελεῖ τὸ σύνολον τῶν (ἀπείρων) λύσεων τοῦ συστήματος (2) ([1]).

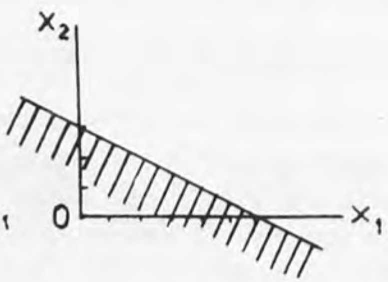
Γ'. Ἔστω τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 9 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \end{aligned} \qquad (3)$$

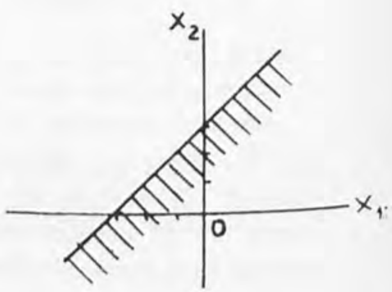
αἱ ἀνισότητες τοῦ ὁποίου ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς τρεῖς κλειστοὺς ἡμιχώρους τῶν διαγραμμάτων 26α, 26β καὶ 26γ. Ἡ τομὴ τῶν ἡμιχώρων



26α

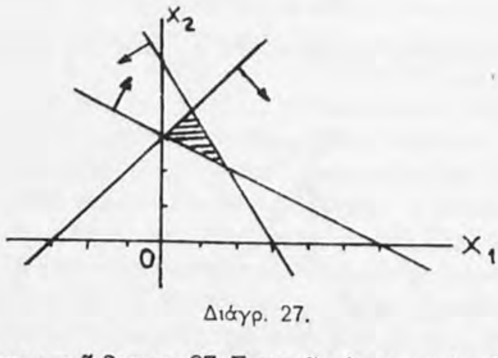


26β



26γ

αὐτῶν, εἶναι ἡ περιοχὴ ἡ καλυπτομένη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ διαγραμ-



Διάγρ. 27.

μισμένου τριγώνου τοῦ διαγρ. 27. Συνεπῶς ἡ περιοχὴ αὕτη ἀποτελεῖ τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ συστήματος (3).

1) Ἂν τὰ ὑπερεπίπεδα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι παράλληλα, ἤτοι δὲν τέμνονται, ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι τὸ *κενὸν σύνολον*, ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ σύστημα δὲν ἔχει λύσιν.

4

Θεωρητική ἐπισκόπησις τῆς διαδικασίας ἐπιλογῆς

4.1 Γενικὰ

Ὡς εἴπομεν (βλ. 1.2 καὶ 1.3) ἡ ἐπίλυσις ἑνὸς προβλήματος οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ἀνεξαρτήτως ἐὰν τοῦτο εἶναι πρόβλημα ἁπλῆς συνεπείας ἢ πρόβλημα ἀριστοποιήσεως, συνίσταται εἰς τὴν ***ἐπιλογὴν*** μιᾶς λύσεως ἢ ἑνὸς «συνόλου» λύσεων, αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν ἓν προκαθωρισμένον κριτήριον.

Ἡ ἐφαρμογὴ μιᾶς διαδικασίας ἐπιλογῆς διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων ἀριστοποιήσεως εἶναι προφανής, δὲν εἶναι ὅμως ἐξ ἴσου προφανὴς προκειμένου περὶ τῶν προβλημάτων ἁπλῆς συνεπείας. Θὰ ἦτο συνεπῶς σκόπιμον, διὰ λόγους θεωρητικῆς γενικεύσεως καὶ ἑνοποιήσεως τοῦ ἀντικειμένου ἐρεύνης τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ, νὰ προβληθῇ ἰδιαιτέρως ἡ ἀναγκαιότης ἐφαρμογῆς μιᾶς διαδικασίας ἐπιλογῆς καὶ διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων τῆς κατηγορίας ταύτης. Ὡς θὰ ἴδωμεν, ἡ κυρία διαφορὰ μεταξὺ προβλημάτων ἁπλῆς συνεπείας καὶ προβλημάτων ἀριστοποιήσεως συνίσταται οὐχὶ εἰς τὴν διαδικασίαν ἐπιλύσεως αὐτῶν, ἀλλ' εἰς τὸ «μέγεθος» τῶν σχετικῶν συνόλων λύσεων. Τὰ σύνολα ταῦτα καθίστανται ὁλονὲν «μικρότερα», ὡς προχωροῦμεν ἀπὸ τὰ πρῶτα πρὸς τὰ δεύτερα προβλήματα.

4.2 Ἐπιλογὴ λύσεων ἁπλῆς συνεπείας

4.2.1. Εἰς τὴν ἐπακολουθοῦσαν ἀνάλυσιν χρησιμοποιεῖται ὁ συμβολισμὸς τῆς θεωρίας τῶν συνόλων (βλ. 3.9) ὁ ὁποῖος, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἁπλουστεύει εἰς τὸ ἔπακρον τὴν ἐπιχειρηματολογίαν, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐξασφαλίζει πλήρη γενικότητα εἰς τὰ ἐξαγόμενα συμπεράσματα. Ἔστωσαν:

R : Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

R^ν : Τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον ν συνόλων R, τὸ ὁποῖον ταυτίζεται μὲ τὸν ν-διάστατον χῶρον.

X_ι, $(\iota = 1, 2, \ldots, \nu)$: οἱ ἄξονες τοῦ συστήματος συντεταγμένων τοῦ χώρου R^ν καὶ

$$x = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \vdots \\ x_\nu \end{matrix}$$ τυχὸν στοιχεῖον (διατεταγμένη νιάς) τοῦ R_ν.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ R^ν ἀποτελοῦν, ὡς γνωστόν, σημεῖα ἢ διανύσματα (βλ. 3.9.4.).

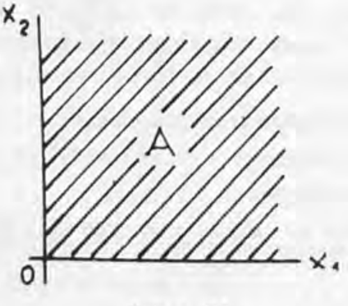
Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς δοθεῖσαν οἰκονομίαν λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγὴν ν συντελεσταί, ἕκαστος τῶν ὁποίων συμβολίζεται διὰ τοῦ δείκτου $\iota\,(=1, 2, \ldots, \nu)$ καὶ ὅτι αἱ ποσότητες αὐτῶν μετροῦνται ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων ἀξόνων X_ι τοῦ R^ν. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ σημεῖον x ὑποδηλοῖ ***συνδυασμὸν*** ποσοτήτων $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, ἐκ τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν.

4.2.2. Ἤδη δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἐπὶ τοῦ R^ν τὸ ἀκόλουθον ὑποσύνολον αὐτοῦ:

$$A = \{x \mid x \in R^\nu \text{ καὶ } x \geqq 0\} \tag{1}$$

Τὸ ὑποσύνολον A περιλαμβάνει πάντα τὰ σημεῖα x τοῦ R^ν $(=x \in R^\nu)$ τὰ ὁποῖα πληροῦν τὴν πρότασιν «$x \geqq 0$». Ἡ ἔννοια τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι ὅτι δι' ἕκαστον στοιχεῖον x_ι τοῦ x πρέπει νὰ ἰσχύῃ $x_\iota > 0$, μὴ ἀποκλειομένης καὶ τῆς περιπτώσεως $x_\iota = 0$ δι' ἅπαντα τὰ ι ταυτοχρόνως (βλ. 3.1.13). Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ πρότασις «$x \geqq 0$» ἀποτελεῖ ***κριτήριον ἐπιλογῆς***, ἐξ ὅλων τῶν σημείων (ἢ συνδυασμῶν) τοῦ R^ν, μόνον τῶν μὴ ἀρνητικῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τοὺς ***οἰκονομικῶς σημαντικοὺς συνδυασμούς***. Ἀποκλείονται δηλαδή, ὡς μὴ οἰκονομικῶς σημαντικοί, πάντες οἱ ποσοτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς οἱ ὁποῖοι ὑποδηλοῦν ἀρνητικὴν χρησιμοποίησιν ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἐκ τῶν συντελεστῶν αὐτῶν. Διὰ τοῦτο ἡ πρότασις $x \geqq 0$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ***κριτήριον οἰκονομικῆς σημαντικότητος*** τῶν συνδυασμῶν x.

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ παραγωγῆς εἶναι μόνον δύο, τὸ σύνολον A τῶν οἰκονομικῶς σημαντικῶν συνδυασμῶν δύναται νὰ παρα-



Διάγρ. 28.

σταθῇ γραφικῶς διὰ τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου τοῦ συστήματος συντεταγμένων (διάγρ. 28).

4.2.3. Ἂν αἱ διαθέσιμοι ποσότητες τῶν συντελεστῶν $1, 2, \ldots, \nu$ εἶναι $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$, ἀντιστοίχως, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὰς ***οἰκονομικὰς δυνατότητας*** τῆς δοθείσης οἰκονομίας διὰ τοῦ σημείου

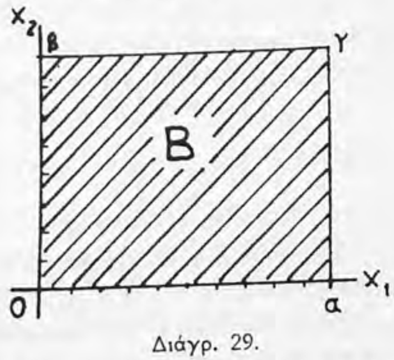
$$\pi = \begin{vmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_\nu \end{vmatrix}$$

τοῦ συνόλου A. Θὰ ὀνομάζωμεν ***οἰκονομικῶς δυνατοὺς*** τοὺς συνδυασμοὺς ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, οἱ ὁποῖοι εἶναι πραγματοποιήσιμοι ἐπὶ τῇ βάσει τῶν οἰκονομικῶν δυνατοτήτων **π**. Οἱ συνδυασμοὶ οὗτοι ἀποτελοῦν ἓν ὑποσύνολον τοῦ A, τὸ B:

$$B = \{x \mid x \in A \text{ καὶ } x \leqq \pi\} \tag{2}$$

Ἡ πρότασις «$x \leqq \pi$» ἀποτελεῖ ἐνταῦθα τὸ κριτήριον ἐπιλογῆς τῶν οἰκονομικῶς δυνατῶν συνδυασμῶν τοῦ A. Ἡ πρότασις αὕτη, ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν πρότασιν «$x \geqq 0$», καλύπτει ὅλας τὰς περιπτώσεις πλήρους, μερικῆς ἢ μηδενικῆς χρησιμοποιήσεως τῶν διαθεσίμων ποσοτήτων ἑνὸς ἢ περισσοτέρων συντελεστῶν παραγωγῆς ταυτοχρόνως.

Εἰς περίπτωσιν δύο συντελεστῶν, ἐξ ὧν διατίθενται ποσότητες $\pi \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$, τὸ σύνολον B, τῶν οἰκονομικῶς δυνατῶν συνδυασμῶν, δεικνύεται εἰς τὸ διάγρ. 29.



Διάγρ. 29.

4.2.4. Θὰ ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι εἰς τὴν ἐν λόγῳ οἰκονομίαν εἶναι τεχνολογικῶς δυνατὴ ἡ παραγωγὴ ἀγαθῶν $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\rho$ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως, ἀντιστοίχως, τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων:

$$\mu_1 = \begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{\nu 1} \end{vmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{\nu 2} \end{vmatrix}, \ldots, \mu_\rho \begin{vmatrix} \mu_{1\rho} \\ \mu_{2\rho} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{\nu\rho} \end{vmatrix}$$

αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν προφανῶς σημεῖα (ἢ διανύσματα) τοῦ A [1].

Τὰ γενικὰ στοιχεῖα $\mu_{\iota\kappa}$ ($\iota = 1, 2, \ldots, \nu$ καὶ $\kappa = 1, 2, \ldots, \rho$) εἶναι μὴ ἀρνητικὰ καὶ δεικνύουν τὴν ποσότητα τοῦ συντελεστοῦ ι ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω_κ βάσει τῆς ἀντιστοίχου παραγωγικῆς δραστηριότητος μ_κ.

Συνοπτικῶς δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$M = (\mu_{\iota\kappa}),$$

ὅπου M εἶναι μήτρα τάξεως $\nu \times \rho$, με στοιχεῖα $\mu_{\iota\kappa}$.

Ἂν ἐκ τοῦ συνόλου N τῶν μὴ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν λάβωμεν ἀριθμοὺς λ_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, \rho$), ἐκφράζοντας ἀντιστοίχως τὰ ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων μ_κ, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἓν ὑποσύνολον Γ τοῦ B, περιλαμβάνον ἅπαντας τοὺς ***οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατοὺς*** συνδυασμοὺς τοῦ τελευταίου :

$$\Gamma = \{ x \mid x \in B \quad \text{καὶ} \quad x = M\lambda \} \tag{3}$$

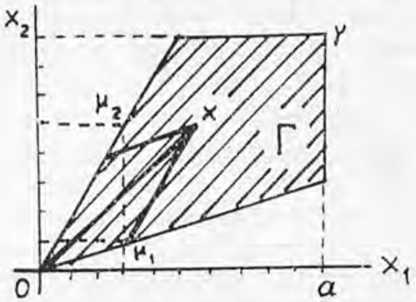
ὅπου $$\lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_\rho \end{vmatrix}$$

Τὸ ὑποσύνολον Γ ὡρίσθη ἐπὶ τοῦ B βάσει τοῦ κριτηρίου «$x = M\lambda$» ἤ, ἀναλυτικῶς, «$x = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_\rho\mu_\rho$». Τὸ κριτήριον τοῦτο ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι, ἐκ τῶν σημείων x τοῦ οἰκονομικῶς πραγματοποιησίμου συνόλου B, πρέπει νὰ ἐπιλεγοῦν μόνον ἐκεῖνα τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς μὴ ἀρνητικοὶ γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho$. Τὰ οὕτω ἐπιλεγόμενα σημεῖα x εἶναι ὄχι μόνον οἰκονο-

1) Δὲν εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως τὰ $\mu_1, \ldots, \mu_\rho$ εἶναι καὶ σημεῖα τοῦ B.

μικῶς ἀλλὰ καὶ τεχνολογικῶς πραγματοποιήσιμα, καθ' ὅσον ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει αἱ συντεταγμέναι ἑκάστου x παριστοῦν τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ὑφισταμένων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ εἰς ὡρισμένα ἐπίπεδα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, ἀντιστοίχως. Σημεῖα x μὴ δυνάμενα νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν $\mu_1, \ldots, \mu_p$, ἀποκλείονται τῆς ἐπιλογῆς, ὡς μὴ τεχνολογικῶς πραγματοποιήσιμα.

Εἰς τὸ διάγραμμα 30 δεικνύεται τὸ σύνολον Γ, τῶν οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν, ὡς ἓν ὑποσύνολον τοῦ



Διάγρ. 30.

Β (διάγρ. 29), ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι αἱ ὑφιστάμεναι παραγωγικαὶ δραστηριότητες εἶναι ἡ $\mu_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ καὶ ἡ $\mu_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν ἀγαθῶν ω_1 καὶ ω_2, ἀντιστοίχως.

Ἐκ τοῦ διαγρ. 30 καθίσταται σαφὲς ὅτι πᾶν σημεῖον $x \in \Gamma$ δύναται (κανὼν τοῦ παραλληλογράμμου) νὰ ἐκφρασθῇ ὡς μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν μ_1 καὶ μ_2.

4.2.5. Εἰς τὸ προηγούμενον τμῆμα ὡρίσθη τὸ Γ ὡς σύνολον τῶν συνδυασμῶν x οἱ ὁποῖοι εἶναι ***ταυτοχρόνως*** οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατοί. Οἱ ***τεχνολογικῶς*** συνδυασμοὶ x ἀποτελοῦν ἓν σύνολον Γ', τοιοῦτον ὥστε : $\Gamma \subset \Gamma' \subset A$ (¹), ἤτοι :

$$\Gamma' = \{ x \mid x \in A \quad \text{καὶ} \quad x = M\lambda \} \tag{3'}$$

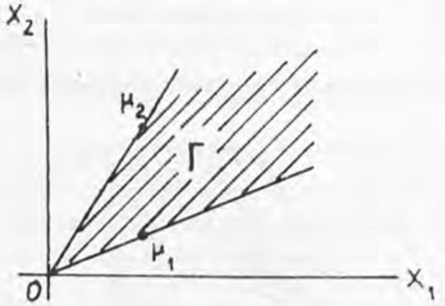
Ἤτοι, τὸ σύνολον Γ' περιλαμβάνει ἅπαντας τοὺς τεχνολογικῶς πραγματοποιησίμους συνδυασμούς, ἀνεξαρτήτως ἐὰν οὗτοι εἶναι ἢ ὄχι καὶ οἰκονομικῶς πραγματοποιήσιμοι. Δυνάμεθα βεβαίως νὰ ὁρίσωμεν τὸ σύνολον Γ ὡς τομὴν (βλ. 3.9.2) τῶν συνόλων Β καὶ Γ' :

$$\Gamma = \Gamma' \cap B \tag{3''}$$

1) Τὸ σύμβολον $\subset$ δηλοῖ, ὡς εἴπομεν (3.9.1), σχέσιν γνησίου ὑποσυνόλου πρὸς σύνολον.

Τὸ σύνολον Γ' ἀποτελεῖ περίπτωσιν κυρτοῦ κώνου (βλ. 3.11.6) μὲ κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

Εἰς τὸ διάγρ. 31 δεικνύεται ὁ κῶνος τῶν τεχνολογικῶς πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς παραγωγικὰς



Διάγρ. 31.

δραστηριότητας μ_1 καὶ μ_2, τοῦ ληφθέντος ἀριθμητικοῦ παραδείγματος. Προφανῶς πᾶν σημεῖον $x \in \Gamma'$ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν μ_1 καὶ μ_2.

Διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ συνόλου Γ περατοῦται ἡ ***πρώτη φάσις*** τῆς διαδικασίας ἐπιλογῆς, ἡ ἀφορῶσα εἰς τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων ***οἰκονομικῆς καὶ λειτουργικῆς συνεπείας***. Ἡ διαδικασία αὕτη μᾶς ὡδήγησεν ἀπὸ τὸ γενικὸν σύνολον R^ν εἰς τὸ ὑποσύνολον Γ τῶν οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατῶν συνδυασμῶν, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἑξῆς κατὰ σειρὰν κριτηρίων :

α) Τοῦ κριτηρίου οἰκονομικῆς σημαντικότητος : $x \geqq 0$

β) Τοῦ κριτηρίου τῶν οἰκονομικῶς δυνατῶν συνδυασμῶν : $x \leqq \pi$

γ) Τοῦ κριτηρίου τῶν τεχνολογικῶς δυνατῶν συνδυασμῶν : $x = M\lambda$

Ἐν ἄλλοις λόγοις οἱ ἐπιλεγέντες τελικῶς συνδυασμοὶ x εἶναι τοιοῦτοι ὥστε :

$$0 \leqq x = M\lambda \leqq \pi \ (^1)$$

4.3 Ἐπιλογὴ ἀρίστης λύσεως

4.3.1. Ἤδη δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν ***διαδικασίαν ἀριστοποιήσεως***, ἤτοι εἰς τὴν ***δευτέραν*** (καὶ τελευταίαν) ***φάσιν*** τῆς διαδικασίας ἐπιλογῆς, ἡ ὁποία ἀφορᾷ εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν οἰκονομικῶς ἀρίστων συνδυασμῶν x. Ἡ φάσις αὕτη ἐπιλογῆς δὲν εἶναι πάντοτε

1) Ἐπειδὴ ἡ σχέσις $\mathbf{0} \leqq x$ ἐμπεριέχεται εἰς τὰς δύο ἄλλας σχέσεις, δύναται νὰ παραλειφθῇ.

ἀναγκαία. Εἰς πλεῖστα προβλήματα, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου, ἡ ἐπιλογὴ τῶν οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατῶν λύσεων θεωρεῖται ἐπαρκὴς διὰ τὴν τελικὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν.

Ὡς εἴπομεν, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν δύο ἐννοίας ἀριστοποιήσεως, τὴν προαριστοποίησιν καὶ τὴν «γνησίαν ἀριστοποίησιν» (βλ. 1.7). Δοθείσης τῆς τεχνολογικῆς μήτρας μιᾶς οἰκονομίας, ἡ διαδικασία προαριστοποιήσεως συνίσταται εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῶν πλέον ἀποδοτικῶν δραστηριοτήτων μεταξὺ τῶν διαφόρων ὁμοκλαδικῶν δραστηριοτήτων (βλ. 1.6). Ἀνωτέρω ὑπετέθη ὅτι ἡ τεχνολογικὴ μήτρα M ἀποτελεῖται ἀπὸ παραγωγικὰς δραστηριότητας μὴ ὁμοκλαδικάς, ἤτοι παραγούσας διαφορετικὰ ἀγαθά, κατὰ συνέπειαν δὲν τίθεται ζήτημα ἐφαρμογῆς τῆς διαδικασίας προαριστοποιήσεως εἰς τὴν μήτραν ταύτην. Ἂν ἐν τούτοις ὑποθέσωμεν ὅτι πᾶσαι αἱ δραστηριότητες $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ (ἢ τινὲς ἐξ αὐτῶν) εἶναι ὁμοκλαδικαί, δυνάμεθα διὰ τῆς γνωστῆς διαδικασίας ἀπαλοιφῆς (βλ. 1.7 καὶ 3.1.9), νὰ προσδιορίσωμεν μίαν νέαν τεχνολογικὴν μήτραν ἡ ὁποία εἶναι ἀποδοτικωτέρα τῆς ἀρχικῆς (βλ. 2.1.4). Τοῦτο σημαίνει ὅτι, τὸ νέον σύνολον Δ τῶν οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν θὰ εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην «μικρότερον» τοῦ ἀντιστοίχου συνόλου Γ τοῦ τμήμ. 4.2.4, καθ' ὅσον τὸ κριτήριον ἐπιλογῆς τοῦ νέου συνόλου θὰ εἶναι $M^*\lambda^*$, ὅπου M^* καὶ λ^* εἶναι ὑπομῆτραι τῶν M καὶ λ, ἀντιστοίχως. Θὰ ἔχωμεν δηλαδὴ ἀντὶ τῆς (3):

$$\Gamma^* = \{x \mid x \in B \quad \text{καὶ} \quad x = M^*\lambda^*\} \tag{4}$$

Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι αἱ δραστηριότητες $\mu_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ καὶ $\mu_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ εἶναι ὁμοκλαδικαί. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ μ_2 ἀπορρίπτεται, ὡς χρησιμοποιοῦσα, ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν μ_1, περισσοτέραν ποσότητα ἐκ τοῦ δευτέρου συντελεστοῦ καὶ οὐχὶ ὀλιγωτέραν ἐκ τοῦ πρώτου συντελεστοῦ. Συνεπῶς, τὰ οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς πραγματοποιήσιμα σημεῖα δὲν εἶναι πλέον ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ συνόλου Γ, εἰς τὸ διάγρ. 30, ἀλλὰ μόνον ὅσα ἐξ αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τοῦ τμήματος εὐθείας ἐντὸς τοῦ B, τοῦ ἀρχομένου ἀπὸ τὸ 0 καὶ διερχομένου ἐκ τοῦ μ_1. Συνεπῶς τὸ σύνολον Γ^* θὰ εἶναι ἐν προκειμένῳ :

$$\Gamma^* = \{x \mid x \in B \quad \text{καὶ} \quad x = \lambda_1\mu_1\}$$

Ὁμοίως, τὸ σύνολον τῶν τεχνολογικῶς δυνατῶν συνδυασμῶν δὲν εἶναι πλέον ὁλόκληρος ὁ κῶνος Γ' ἀλλὰ ἕτερος κῶνος, Γ'', «μικρότερος» τοῦ ἀρχικοῦ :

$$\Gamma'' = \{x \mid x \in A \quad \text{καὶ} \quad x = M^*\lambda^*\} \tag{4'}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀριθμητικοῦ παραδείγματος ὁ νέος κῶνος εἶναι:

$$\Gamma'' = \{ x \mid x \in A \quad \text{καὶ} \quad x = \lambda_1 \mu_1 \}$$

καὶ ἀντιστοιχεῖ γεωμετρικῶς εἰς τὴν διανυσματικὴν ἀκτῖνα [1] τὴν διερχομένην ἐκ τοῦ σημείου μ_1, εἰς τὸ διάγρ. 31.

4.3.2. Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν διαδικασίαν «γνησίας ἀριστοποιήσεως», μὲ ἀφετηρίαν τὸ σύνολον Γ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται εἰς σελ. 120, ἀνωτέρω.

Ἔστω ὅτι ἡ ὑπ' ὄψει οἰκονομία ἐνδιαφέρεται μόνον διὰ τοὺς οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατοὺς συνδυασμούς, οἱ ὁποῖοι ἀριστοποιοῦν ταυτοχρόνως δοθεῖσαν συνάρτησιν $k = \varphi(x)$ [2] [3]. Τὴν συνάρτησιν ταύτην θὰ ὀνομάσωμεν ***συνάρτησιν ἐπιλογῆς***. Ἂν θέσωμεν

$$\overset{*}{k} = \varphi(x)\,\mathrm{opt}$$

διὰ τὴν ἀρίστην τιμὴν τοῦ k, τότε δυνάμεθα νὰ ἐπιλέξωμεν ἐκ τοῦ Γ τὸ ὑποσύνολον Δ τῶν οἰκονομικῶς ἀρίστων λύσεων:

$$\Delta = \{ x \mid x \in \Gamma \quad \text{καὶ} \quad \overset{*}{k} = \varphi(x)\,\mathrm{opt} \} \tag{5}$$

Ἡ πρότασις $\overset{*}{k} = \varphi(x)\,\mathrm{opt}$ ἀποτελεῖ τὸ κριτήριον τῆς ἐπιλογῆς ταύτης. Τὰ κριτήρια ἐπιλογῆς οἰκονομικῶς ἀρίστων λύσεων θὰ καλοῦμεν ἐπίσης καὶ ***οἰκονομικοὺς στόχους ἢ ἐπιδιώξεις*** τῆς ἐν λόγῳ οἰκονομίας.

Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι αἱ ἀνωτέρω ληφθεῖσαι παραγωγικαὶ δραστηριότητες μ_1 καὶ μ_2 δίδουν κέρδος 3 καὶ 4,5 νομ. μονάδας, ἀντιστοίχως, ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν μονάδων τῶν ἀγαθῶν ω_1 καὶ ω_2. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ συνάρτησις ἐπιλογῆς, θὰ εἶναι ἡ ***συνάρτησις κέρδους***

$$k = 3x_1 + 4{,}5x_2, \tag{α}$$

ἥτις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον:

$$k = \alpha x, \tag{β}$$

ὅπου $\alpha = [3 \quad 4.5]$ καὶ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

1) Ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς ἀποτελεῖ εἰδικὴν περίπτωσιν κώνου, καθ' ὅσον πληροῖ τὸν ὁρισμὸν τῆς παραγρ. 3.11.6.

2) Ὁ ὅρος «ἀριστοποίησις» καλύπτει, ὡς γνωστόν, τόσον τὴν περίπτωσιν τῆς ***μεγιστοποιήσεως***, ἐὰν ἡ συνάρτησις ἀφορᾷ εἰς οἰκονομικὸν κέρδος, ὅσον καὶ τὴν περίπτωσιν τῆς ***ἐλαχιστοποιήσεως***, ὅταν ἡ συνάρτησις ἀναφέρεται εἰς οἰκονομικὴν θυσίαν (π.χ. κόστος παραγωγῆς).

3) Ἀντὶ τοῦ συνολοθεωρητικοῦ συμβολισμοῦ τῆς σ. 102), πρὸς ἔκφρασιν μιᾶς συναρτήσεως χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τὸν κανόνα ἐπιλογῆς τοῦ ὑποσυνόλου τῆς συναρτήσεως ταύτης ἐκ τοῦ σχετικοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου.

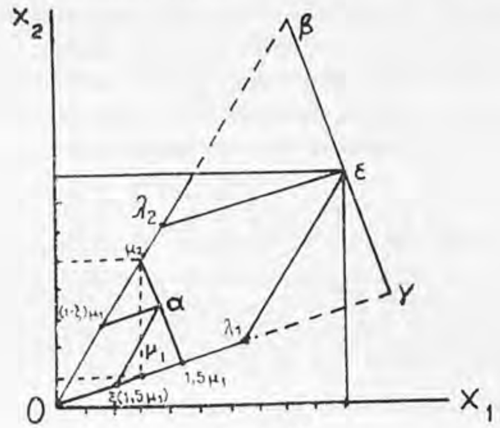
Συμβολικῶς θὰ θέσωμεν:

$$\overset{*}{k} = (\alpha x)\ \mu\varepsilon\gamma \qquad (\gamma)$$

διὰ τὸ κριτήριον τῆς ἀρίστης ἢ τῶν ἀρίστων λύσεων. Κατὰ συνέπειαν τὸ σύνολον Δ τῶν ἀρίστων λύσεων θὰ εἶναι:

$$\Delta = \{x \mid x \in \Gamma \ \text{ καὶ } \ \overset{*}{k} = (\alpha x)\ \mu\varepsilon\gamma\} \qquad (\delta)$$

Ὁ γεωμετρικὸς προσδιορισμὸς τοῦ συνόλου Δ δεικνύεται εἰς τὸ διάγρ. 32. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ συνδέον τὰ σημεῖα μ_2 καὶ $1{,}5\,\mu_1$



Διάγρ. 32.

ἀποτελεῖ μίαν «γραμμὴν ἴσου κέρδους», διότι ἕκαστον σημεῖον αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς συνδυασμὸν τῶν δραστηριοτήτων μ_1 καὶ μ_2 ὁ ὁποῖος δίδει κέρδος 4,5 νομ. μονάδας. Τοῦτο εἶναι προφανὲς διὰ τὰ σημεῖα μ_2 καὶ $1{,}5\ \mu_1$ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος [1]. Πᾶν ἕτερον σημεῖον αὐτοῦ, π.χ., τὸ σημεῖον α εἶναι, κατὰ τὰ γνωστὰ (βλ. 3.11.3), κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν σημείων μ_2 καὶ $(1{,}5\ \mu_1)$, ἤτοι: $\alpha = \xi\mu_2 + (1-\xi)(1{,}5\ \mu_2)$ διὰ $0 < \xi < 1$. Ἀλλὰ τὸ κέρδος τοῦ μ_2 εἰς ἐπίπεδον ξ εἶναι: $4{,}5\ \xi$, τὸ δὲ κέρδος τοῦ μ_1 εἰς ἐπίπεδον $(1{,}5)(1-\xi)$ εἶναι: $3 \times (1{,}5)(1-\xi) = 4{,}5 - 4{,}5\ \xi$. Συνεπῶς τὸ κέρδος τοῦ συνδυασμοῦ α εἶναι: $4{,}5\,\xi + 4{,}5 - 4{,}5\,\xi = 4{,}5$. Κατὰ συνέπειαν πᾶς συνδυασμὸς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος δίδει τὸ αὐτὸ κέρδος, δι' ὃ καὶ καλοῦμεν τοῦτο «γραμμὴν ἴσου κέρδους». Προφανῶς πάντα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ συνδέοντα σημεῖα τῶν ἀκτίνων αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἐκ τῶν σημείων μ_1 καὶ μ_2 καὶ τὰ ὁποῖα εἶναι ἐπίσης παράλληλα πρὸς τὸ ἀνωτέρω, εἶναι ἐπίσης γραμμαὶ ἴσου κέρδους. Αἱ γραμμαὶ αὗται δει-

1) Ἡ μ_2 εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος δίδει, ὡς εἴπομεν, κέρδος 4,5 ν.μ. Ἡ μ_1 δίδει κέρδος 3 ν.μ., συνεπῶς ἡ μ_1 εἰς ἐπίπεδον 1,5 δίδει κέρδος 4,5 ν.μ.

κνύουν προφανῶς ὁλονὲν μεγαλύτερον κέρδος καθὼς ἀπομακρυνόμεθα ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ ὁλονὲν μικρότερον κέρδος καθὼς πλησιάζομεν πρὸς αὐτήν. Ἡ γραμμὴ ἴσου κέρδους ἥτις ἀπέχει ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος περισσότερον πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἐχούσης κοινὰ σημεῖα [1] μὲ τὸ σύνολον Β τῶν οἰκονομικῶς πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν, εἶναι ἡ δεικνύουσα τὸ μέγιστον κέρδος, ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν διαθεσίμων ποσοτήτων συντελεστῶν παραγωγῆς, βάσει τῶν δραστηριοτήτων μ_1 καὶ μ_2. Εἰς τὸ διάγρ. 32 ἡ γραμμὴ αὕτη εἶναι ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα β καὶ γ καὶ ἔχουσα κοινὸν τὸ σημεῖον ε μὲ τὸ σύνολον Β. Τὸ σημεῖον ε ἀποτελεῖ τὴν ἀρίστην λύσιν, ἡ ὁποία πληροῖ τὸ κριτήριον (γ), ἤτοι μεγιστοποιεῖ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως (α).

Βάσει τοῦ κανόνος τοῦ παραλληλογράμμου ἔχομεν $\varepsilon = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$, ὅπου λ_1 καὶ λ_2 ἀποτελοῦν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων x_1 καὶ x_2 εἰς τὸ τεθὲν πρόβλημα. Τὰ λ_1 καὶ λ_2 δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν ἀριθμητικῶς, εἴτε ἐκ τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς, εἴτε ἐκ τοῦ συστήματος [2]:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix},$$

ἐξ οὗ λαμβάνομεν $\lambda_1 = 2\,^1/_6$ καὶ $\lambda_2 = 1\,^1/_6$. Συνεπῶς τὸ μέγιστον κέρδος θὰ εἶναι: $3 \times 2\,^1/_6 + 4{,}5 \times 1\,^1/_6 = 11{,}75$ ν.μ. Εἰς τὸ παράδειγμά μας τὸ σύνολον τῶν ἀρίστων λύσεων ἔχει ἓν μόνον στοιχεῖον (λύσιν), ἤτοι εἶναι:

$$\Delta = \{\varepsilon\}$$

Πολλαπλᾶ κριτήρια ἀριστοποιήσεως

Διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ συνόλου τῶν οἰκονομικῶς ἀρίστων λύσεων δὲν τερματίζεται κατ' ἀνάγκην ἡ διαδικασία ἀριστοποιήσεως. Δυνατὸν ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ νὰ ἐνδιαφέρεται διὰ τὴν ἱκανοποίησιν πλειόνων κριτηρίων ἀριστοποιήσεως [3], ὁπότε τίθεται ζήτημα ***συνθέτου ἀριστοποιήσεως***, κατ' ἀντιδιαστολὴν πρὸς τὴν ***ἁπλῆν*** τοιαύτην, ἥτις βασίζεται ἐπὶ ἑνὸς μοναδικοῦ κριτηρίου ἐπιλογῆς.

Ἡ διαδικασία συνθέτου ἀριστοποιήσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ κατὰ δύο τρόπους, τοὺς ὁποίους ἐξετάζομεν κατωτέρω.

1) Ἢ κοινὸν σημεῖον.

2) Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον ε εἶναι ἐπίσης καὶ τὸ σημεῖον πλήρους ἀπασχολήσεως τῶν δύο συντελεστῶν, θὰ ἔχωμεν $\varepsilon = \pi = \begin{bmatrix}10\\8\end{bmatrix}$.

3) Π.χ. εἰς περίπτωσιν μακροοικονομικοῦ προγραμματισμοῦ δυνατὸν ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ νὰ ἔχῃ ὡς ἐπιδιώξεις τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, τὴν μεγιστοποίησιν τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως καὶ τὴν ἐλαχιστοποίησιν τοῦ ἐλλείμματος τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου.

Α΄ τρόπος ἀριστοποιήσεως

Ἔστω τὸ σύνολον:

$$K = (\overset{*}{k}_1, \overset{*}{k}_2, \overset{*}{k}_3, \overset{*}{k}_4), \tag{6}$$

τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα ἀποτελοῦν κριτήρια ἀριστοποιήσεως, ἢ οἰκονομικὰς ἐπιδιώξεις, ἤτοι

$$\overset{*}{k}_i = \varphi_i(x) \text{ opt} \qquad i = 1, \ldots, 4$$

Εὑρισκομένη ἐνώπιον πλειόνων κριτηρίων ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ προβῇ εἰς μίαν διάταξιν ἢ ἱεράρχησιν αὐτῶν κατὰ σειρὰν ***σημαντικότητος***, εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ ταῦτα καταλλήλως εἰς τὴν διαδικασίαν ἐπιλογῆς.

Ἡ ἱεράρχησις τῶν στοιχείων τοῦ K εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ βάσει τῆς δυαδικῆς σχέσεως «... οὐχὶ σημαντικώτερον τοῦ ...», συμβολικῶς «$\preccurlyeq$» (βλ. 3.10.5), ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ εἶναι πράγματι εἰς θέσιν νὰ ***συγκρίνῃ*** τὰ στοιχεῖα ταῦτα διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἐν λόγῳ δυαδικῆς σχέσεως. Οὐσιαστικῶς ἡ προϋπόθεσις αὕτη συνίσταται εἰς τὴν ἱκανότητα τῆς οἰκονομικῆς ἀρχῆς νὰ χρησιμοποιήσῃ ἓν κριτήριον συγκριτικῆς ἀξιολογήσεως, κατὰ ζεύγη, τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν στοιχεῖα τοῦ K. Τὸ κριτήριον τοῦτο θὰ ὀνομάζωμεν εἰδικώτερον ***ὑπερκριτήριον***. Δοθέντος ἑνὸς ὑπερκριτηρίου καὶ ἑνὸς ζεύγους στοιχείων τοῦ K, π.χ., $(\overset{*}{k}_1, \overset{*}{k}_2)$, ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἀποφανθῇ ἂν εἶναι $\overset{*}{k}_1 \preccurlyeq \overset{*}{k}_2$ ἢ $\overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_1$. Ἡ δυαδικὴ σχέσις $\preccurlyeq$ ἀποτελεῖ ***τάξιν*** (βλ. 3.10.4), καθ' ὅσον χαρακτηρίζεται ἀπὸ 1) «ἀνταναклαστικότητα» (ἀληθεύει ὅτι, π.χ., $\overset{*}{k}_1 \preccurlyeq \overset{*}{k}_1$), 2) «μεταβατικότητα» (ἂν $\overset{*}{k}_1 \preccurlyeq \overset{*}{k}_2$ καὶ $\overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_3 \Rightarrow \overset{*}{k}_1 \preccurlyeq \overset{*}{k}_3$), ἥτις ἐξασφαλίζει ***συνέπειαν*** κατὰ τὴν σύγκρισιν τῶν στοιχείων τοῦ K, καὶ 3) «ἀντισυμμετρικότητα» (ἡ σειρὰ τῶν στοιχείων ἑκάστου ζεύγους ἔχει κατὰ κανόνα σημασίαν). Ἡ σχέσις $\preccurlyeq$ δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς δύο ἄλλας δυαδικὰς σχέσεις, ἤτοι τὴν σχέσιν «... ὀλιγώτερον σημαντικὸν τοῦ ...», συμβολικῶς «$\prec$», καὶ τὴν σχέσιν «...ἐξ ἴσου σημαντικὸν πρὸς τὸ ...», συμβολιζομένην διὰ «$\sim$» (βλ. 3.10.5). Ἡ σχέσις $\prec$ χαρακτηρίζεται ἀπὸ μεταβατικότητα καὶ δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὅταν εἴμεθα βέβαιοι ὅτι, π.χ., ἰσχύει $\overset{*}{k}_1 \preccurlyeq \overset{*}{k}_1$ καὶ οὐχὶ $\overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_1$, ὁπότε γράφομεν: $\overset{*}{k}_1 \prec \overset{*}{k}_2$. Ἐν ἄλλοις λόγοις ἡ σχέσις $\prec$ ὑποδηλοῖ σαφῆ προτίμησιν τῆς οἰκονομικῆς ἀρχῆς εἰς ἓν ἐκ τῶν δύο στοιχείων τοῦ ζεύγους, ἐνῷ ἡ σχέσις $\preccurlyeq$, ἤτοι «... οὐχὶ σημαντικώτερον τοῦ ...» δὲν δηλοῖ τοιαύτην προτίμησιν. Ἐνδέχεται δηλαδὴ νὰ ἔχωμεν, ταυτοχρόνως, π.χ., $\overset{*}{k}_1 \preccurlyeq \overset{*}{k}_2$ καὶ $\overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_1$. Λέγομεν τότε ὅτι τὰ στοιχεῖα

$\overset{*}{k}_1$ καὶ $\overset{*}{k}_2$ τοῦ συνόλου K εἶναι *ἰσοδύναμα*, ἡ δὲ οἰκονομικὴ ἀρχὴ δεικνύει *ἀδιαφορίαν* ἐπιλογῆς μεταξὺ αὐτῶν. Εἰς αὐτὴν ἀκριβῶς τὴν περίπτωσιν χρησιμοποιοῦμεν τὴν δυαδικὴν σχέσιν «$\sim$». ἤτοι «...ἐξ ἴσου σημαντικὸν πρὸς τό...» καὶ γράφομεν

$$\overset{*}{k}_1 \sim \overset{*}{k}_2$$

ἀντί: $\overset{*}{k}_1 \preccurlyeq \overset{*}{k}_2$ καὶ $\overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_1$. Ἡ σχέσις «$\sim$» εἶναι σχέσις *ἰσοδυναμίας* (βλ. 3.10.5), ὡς χαρακτηριζομένη ταυτοχρόνως ἀπὸ ἀντανακλαστικότητα, μεταβατικότητα καὶ συμμετρικότητα (¹).

Ἔστω ἤδη ὅτι ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ διατάσσει ὡς ἀκολούθως τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου K :

$$\overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_3 \sim \overset{*}{k}_1 \prec \overset{*}{k}_4 \tag{7}$$

Ἡ διάταξις αὕτη ὁρίζει τὴν σειρὰν προτεραιότητος τῶν κριτηρίων $\overset{*}{k}_i$ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σημαντικότητος αὐτῶν. Οὕτω τὸ κριτήριον $\overset{*}{k}_4$ ἀξιολογεῖται ὡς τὸ σημαντικώτερον ὅλων. Ἕπονται τὰ κριτήρια $\overset{*}{k}_1$ καὶ $\overset{*}{k}_3$, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑφίσταται ἰσοδυναμία. Τὸ κριτήριον $\overset{*}{k}_2$, χαρακτηριζόμενον ὡς οὐχὶ σημαντικώτερον τοῦ $\overset{*}{k}_3$ (καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου αὐτοῦ $\overset{*}{k}_1$), κατατάσσεται τελευταῖον εἰς τὴν κλίμακα σημαντικότητος, καθ' ὅσον ἐκ τοῦ συμβολισμοῦ δὲν ἀποκλείεται τὸ ἐνδεχόμενον $\overset{*}{k}_2 \prec \overset{*}{k}_3$.

Βάσει τῆς ἀνωτέρω ἱεραρχήσεως ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ δύναται τώρα νὰ προχωρήσῃ εἰς τὴν διαδικασίαν ἀριστοποιήσεως, ὡς ἀκολούθως:

Μὲ ἀφετηρίαν τὸ σύνολον Γ τῶν οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν, καὶ μὲ κριτήριον ἐπιλογῆς τὸ $\overset{*}{k}_4 = \varphi_4(x)\,\mathrm{opt}$, ὁρίζει τὸ ὑποσύνολον Δ τοῦ Γ :

$$\Delta = \{x \mid x \in \Gamma \text{ καὶ } \overset{*}{k} = \varphi_4(x)\,\mathrm{opt}\} \tag{8}$$

Τὸ σύνολον Δ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ σημαντικώτερον κριτήριον $\overset{*}{k}_4$, εἶναι τὸ σύνολον ἀριστοποιήσεως τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει τὴν οἰκονομικὴν ἀρχὴν περισσότερον ἐξ ὅλων τῶν συνόλων ἀριστοποιήσεως τῶν δυναμένων νὰ προσδιορισθοῦν βάσει τῶν ἄλλων κριτηρίων. Τὸ σύνολον τοῦτο δυνατὸν νὰ ἔχῃ ἓν ἢ περισσότερα στοιχεῖα. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὅταν δηλαδὴ $\Delta = \{x\}$, ἡ διαδικασία ἀριστοποιήσεως τερμα-

1) Ἀντὶ $\overset{*}{k}_1 \preccurlyeq \overset{*}{k}_2$, $\overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_1$, $\overset{*}{k}_1 \sim \overset{*}{k}_2$ καὶ $\overset{*}{k}_2 \prec \overset{*}{k}_1$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἰσοδυνάμως: $\overset{*}{k}_2 \succcurlyeq \overset{*}{k}_1$, $\overset{*}{k}_1 \succcurlyeq \overset{*}{k}_2$, $\overset{*}{k}_2 \sim \overset{*}{k}_1$ καὶ $\overset{*}{k}_1 \succ \overset{*}{k}_2$, ἀντιστοίχως.

τίζεται, ἄνευ χρησιμοποιήσεως τῶν λοιπῶν κριτηρίων ἐπιλογῆς, καθ' ὅσον ἐπιλογὴ εἶναι νοητὴ μόνον ἂν ὑφίστανται περισσότεροι τοῦ ἑνὸς συνδυασμοὶ (=λύσεις). Ὁ προσδιορισθεὶς μοναδικὸς συνδυασμὸς ἀποτελεῖ τότε τὴν ἀρίστην λύσιν τοῦ προβλήματος βάσει τοῦ κριτηρίου $\overset{*}{k}_4$. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ὅταν δηλαδὴ τὸ σύνολον Δ περιλαμβάνῃ πλείονας συνδυασμούς, ἐξ ὁρισμοῦ ἰσοδυνάμους, ὡς πρὸς τὸ κριτήριον $\overset{*}{k}_4$, ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ δύναται νὰ προχωρήσῃ περαιτέρω εἰς τὴν διαδικασίαν ἀριστοποιήσεως, ἐφαρμόζουσα ἀδιαφόρως ἓν ἐκ τῶν δύο ἑπομένων, ἰσοδυνάμων ἀπὸ ἀπόψεως σημαντικότητος, κριτηρίων, ἔστω τὸ $\overset{*}{k}_1$. Οὕτω δύναται εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὑποσύνολον Ε τοῦ Δ:

$$E = \{ x \mid x \in \Delta \ \text{καὶ} \ \overset{*}{k}_1 = \varphi_1(x)\,\text{opt} \}, \tag{9}$$

τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ ἐκ κατασκευῆς ἀμφότερα τὰ κριτήρια $\overset{*}{k}_4$ καὶ $\overset{*}{k}_1$, ταυτοχρόνως.

Ἡ διαδικασία δύναται νὰ συνεχισθῇ, κατὰ τὰ γνωστά, ἂν τὸ Ε περιλαμβάνῃ πλείονα τοῦ ἑνός, ὁπότε χρησιμοποιοῦμεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\overset{*}{k}_1$ κριτήριον $\overset{*}{k}_3$, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ὑποσυνόλου Ζ τοῦ Ε

$$Z = \{ x \mid x \in E \ \text{καὶ} \ \overset{*}{k}_3 = \varphi_3(x)\,\text{opt} \} \tag{10}$$

Τὸ Ζ εἶναι ἄριστον ὡς πρὸς τὰ τρία κριτήρια $\overset{*}{k}_4$, $\overset{*}{k}_1$ καὶ $\overset{*}{k}_3$, ταυτοχρόνως. Ἂν τοῦτο περιλαμβάνῃ πλείονα στοιχεῖα, προχωροῦμεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ὑποσυνόλου Η, βάσει τοῦ κριτηρίου $\overset{*}{k}_2$:

$$H = \{ x \mid x \in Z \ \text{καὶ} \ \overset{*}{k}_2 = \varphi_2(x)\,\text{opt} \} \tag{11}$$

Τὸ Η εἶναι ἄριστον ὡς πρὸς ἅπαντα τὰ δοθέντα κριτήρια, ταυτοχρόνως.

Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω θὰ χρησιμοποιήσωμεν ἓν ἀριθμητικὸν παράδειγμα (1). Ἔστω ὅτι μία οἰκονομικὴ μονὰς ἔχει τὰς κάτωθι τεχνικοοικονομικὰς δυνατότητας:

$$\Pi_0 \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \Pi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

ὅπου, Π_0 εἶναι τὸ διάνυσμα τῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως καὶ Π_1, Π_2 παραγωγικαὶ δραστηριότητες διὰ τὴν παρα-

1) Εἰς τὸ προηγουμένως χρησιμοποιηθὲν παράδειγμα εἴχομεν μόνον μίαν ἀρίστην λύσιν (βλ. διαγρ. 32) καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν τὴν διαδικασίαν συνθέτου ἀριστοποιήσεως βάσει τοῦ παραδείγματος αὐτοῦ.

γωγὴν τῆς μονάδος τῶν ἀγαθῶν ω_1, ω_2. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ οἰκονομικὴ μονὰς ἐνδιαφέρεται, ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν διαθεσίμων ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν, βάσει τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_1 καὶ Π_2, ἀφ' ἑτέρου δὲ διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τῆς ἀπασχολήσεως τοῦ συντελεστοῦ Β.

Ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῆς δευτέρας ταύτης ἐπιδιώξεως θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ἡ ἀκόλουθος: Ἡ οἰκονομικὴ μονὰς ἐνδιαφέρεται νὰ ἐφαρμόσῃ παραγωγικοὺς συνδυασμοὺς οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦν ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέραν ποσότητα ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Β, πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς ἀπελευθερώσεως τοῦ ἀποθηκευτικοῦ χώρου τὸν ὁποῖον καταλαμβάνουν αἱ ποσότητες τοῦ ἐν λόγῳ συντελεστοῦ. Οὕτω θὰ ἐπιτραπῇ ἡ ἀγορὰ ἑνὸς ἀγαθοῦ, ἔστω ω_3, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐλπίζει ἡ οἰκονομικὴ μονὰς νὰ ἀποκομίσῃ κέρδος διὰ προσωρινῆς ἀποθηκεύσεως αὐτοῦ καὶ μεταπωλήσεώς του μετὰ πάροδον χρονικῆς τινος περιόδου.

Ἐν ἄλλοις λόγοις ἔχομεν ἐν προκειμένῳ δύο κριτήρια ἐπιλογῆς ἀρίστων λύσεων εἰς τὸ δοθὲν πρόβλημα. Τὸ πρῶτον ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ διατυπωθῇ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν κατὰ μονάδα κερδῶν τῶν ἀγαθῶν ω_1 καὶ ω_2, τὰ ὁποῖα ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι 1 καὶ 2 νομ. μονάδες, ἀντιστοίχως. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὴν *συνάρτησιν κέρδους*:

$$x_1 + 2x_2 = k_1 \tag{α}$$

ἥτις ἐπιδιώκεται νὰ μεγιστοποιηθῇ. Κατὰ συνέπειαν τὸ κριτήριον ἐπιλογῆς βάσει τοῦ κέρδους θὰ εἶναι:

$$\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = \overset{*}{k}_1 \tag{β}$$

ὅπου $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ αἱ τιμαὶ τῶν x_1, x_2 αἱ μεγιστοποιοῦσαι τὴν (α). Τὸ ἕτερον κριτήριον ἐπιλογῆς δύναται νὰ διατυπωθῇ βάσει τῶν δοθεισῶν ἤδη πληροφοριῶν ὅσον ἀφορᾷ τὴν κατανάλωσιν τοῦ συντελεστοῦ Β κατὰ μονάδα παραγωγῆς τῶν ἀγαθῶν ω_1 καὶ ω_2. Ὡς δεικνύεται εἰς τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας Π_1 καὶ Π_2, τὰ ἀγαθὰ ω_1 καὶ ω_2 ἀπαιτοῦν, κατὰ μονάδα, 3 καὶ 1 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Β, ἀντιστοίχως. Συνεπῶς ἡ συνάρτησις ἀπασχολήσεως τοῦ Β εἶναι:

$$3x_1 + x_2 = k_2, \tag{γ}$$

τὸ δὲ κριτήριον μεγιστοποιήσεως τῆς ἀπασχολήσεως τοῦ Β:

$$3\bar{\bar{x}}_1 + \bar{\bar{x}}_2 = \overset{*}{k}_2, \tag{δ}$$

ὅπου $\bar{\bar{x}}_1$ καὶ $\bar{\bar{x}}_2$ εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν x_1 καὶ x_2 αἱ μεγιστοποιοῦσαι τὴν (γ).

Ὁ πρῶτος τρόπος συνθέτου ἀριστοποιήσεως βάσει τῶν κριτηρίων $\overset{*}{k}_1$ καὶ $\overset{*}{k}_2$ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἂν ἡ οἰκονομικὴ μονὰς δὲν ἔχῃ σαφῆ ἀριθμητικὴν ἀντίληψιν τοῦ προσδοκωμένου κατὰ μονάδα κέρδους τοῦ ἀγαθοῦ ω_3. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δυνατὸν αὔτη νὰ κρίνῃ ἁπλῶς ὅτι τὸ $\overset{*}{k}_1$ εἶναι σημαντικώτερον τοῦ $\overset{*}{k}_2$ ἢ καὶ ἀντιθέτως. Τὸ ὑπερκριτήριον ἱεραρχήσεως τῶν δοθέντων κριτηρίων, κατὰ τάξιν σημαντικότητος, εἶναι προφανῶς ἡ μεγιστοποίησις τοῦ ***συνολικοῦ*** κέρδους τὸ ὁποῖον ἀναμένει ἡ οἰκονομικὴ μονὰς τόσον ἐκ τῆς παραγωγῆς ω_1 καὶ ω_2, ὅσον καὶ ἐκ τῆς ἀγορᾶς καὶ μεταπωλήσεως ω_3. Τὸ κέρδος τοῦτο θὰ χαρακτηρίσωμεν ***προσδοκώμενον κέρδος***. Κατ' ἀντιδιαστολήν, τὸ τμῆμα τοῦ κέρδους αὐτοῦ τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὴν παραγωγὴν τῶν ω_1 καὶ ω_2 θὰ χαρακτηρίσωμεν ***τρέχον κέρδος***.

Ἐκ τῶν τεχνικοοικονομικῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος καὶ θέτοντες x_1, x_2 διὰ τὰ ζητούμενα ἐπίπεδα τῶν δραστηριοτήτων Π_1 καὶ Π_2, θὰ ἔχωμεν :

$$x_1\Pi_1 + x_2\Pi_2 \leqslant \Pi_0$$

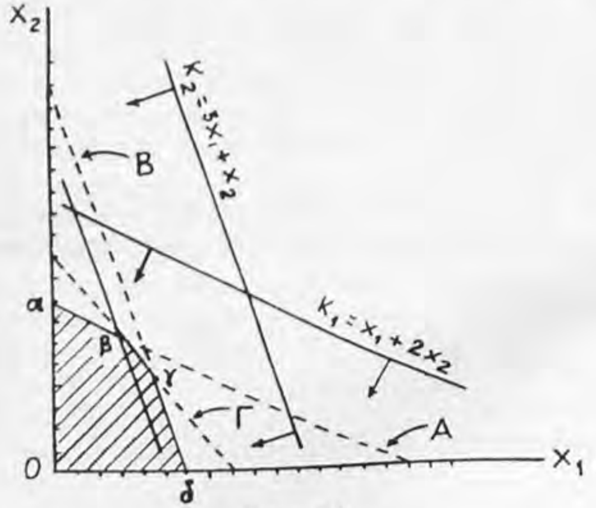
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0$$

καὶ ἀναλυτικῶς (κατόπιν ἐκτελέσεως τῶν πράξεων) :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqslant 16 \\ 3x_1 + x_2 &\leqslant 18 \\ x_1 + 0{,}8x_2 &\leqslant 8 \\ x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{ε}$$

Ἡ μὴ ἀρνητικότης τῶν x_1 καὶ x_2 ἀποτελεῖ προφανῶς κριτήριον οἰκονομικῆς σημαντικότητος διὰ τὰ ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως τῶν Π_1 καὶ Π_2, ἐπειδὴ δὲν νοεῖται ἐνταῦθα ἀρνητικὴ παραγωγὴ τῶν ἀγαθῶν ω_1 καὶ ω_2. Γραφικῶς αἱ ἀνισότητες τοῦ συστήματος (ε) προσδιορίζουν κατὰ τὰ γνωστά, κλειστοὺς ἡμιχώρους (βλ. 3.12.2) εἰς τὸν διδιάστατον χῶρον. Ἡ τομὴ τῶν ἡμιχώρων αὐτῶν εἶναι ἡ κυρτὴ περιοχὴ 0αβγδ τοῦ διαγρ. 33, ἥτις ἀποτελεῖ τὸ σύνολον λύσεων τοῦ συστήματος (ε), καὶ περιλαμβάνει πάντας τοὺς οἰκονομικῶς καὶ σημαντικοὺς καὶ τεχνικοοικονομικῶς δυνατοὺς συνδυασμοὺς ποσοτήτων τῶν ω_1 καὶ ω_2.

Αἱ διὰ τῶν κυρτῶν τόξων δεικνυόμεναι γραμμαὶ εἶναι γραμμαὶ περιορισμοῦ τῆς πραγματοποιησίμου περιοχῆς, τὰ δὲ σημεῖα ἑκάστης γραμμῆς ἐκφράζουν συνδυασμοὺς ποσοτήτων τῶν ἀγαθῶν ω_1 καὶ ω_2 οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦν πλήρως τὴν διαθέσιμον ποσότητα τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ. Δοθεισῶν ὡρισμένων τιμῶν τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς x_1 καὶ x_2, ἡ μὲν συνάρτησις (α) δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς γραμμὴ ἴσου κέρδους, παράλληλος πρὸς τὴν γραμμὴν περιορισμοῦ τοῦ συντελεστοῦ Α [1], ἡ δὲ



Διάγρ. 33.

συνάρτησις (γ) ὡς γραμμὴ ἴσης ἀπασχολήσεως τοῦ συντελεστοῦ Β, παράλληλος πρὸς τὴν γραμμὴν περιορισμοῦ τοῦ ἐν λόγῳ συντελεστοῦ [1]. Αἱ γραμμαὶ αὗται κινούμεναι παραλλήλως πρὸς ἑαυτὰς καὶ πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος, ὁρίζουν ἑτέρας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν προφανῶς ὁλονὲν μικρότερον κέρδος καὶ μικροτέραν ἀπασχόλησιν τοῦ Β. Ὅταν ἡ γραμμὴ ἴσου κέρδους συμπέσῃ μὲ τὴν γραμμὴν περιορισμοῦ τοῦ συντελεστοῦ Α, δεικνύει συνδυασμοὺς ποσοτήτων ἀγαθῶν ω_1 καὶ ω_2 οἱ ὁποῖοι δίδουν τὸ μέγιστον κέρδος τῆς οἰκονομικῆς μονάδος. Εἰδικώτερον, ἐξ ὅλων τῶν συνδυασμῶν τῆς γραμμῆς αὐτῆς, μόνον οἱ κείμενοι ἐπὶ τοῦ τμήματος αβ ἐνδιαφέρουν, διότι εἶναι οἰκονομικῶς καὶ τεχνικῶς δυνατοί, ἐφ' ὅσον ἀνήκουν ταυτοχρόνως καὶ εἰς τὴν περιοχὴν 0αβγδ. Συνδυασμοὶ κείμενοι ἐπὶ κατωτέρας γραμμῆς ἴσου κέρδους δίδουν ὀλιγώτερον κέρδος καὶ συνεπῶς ἀπορρίπτονται. Ἐπίσης ἀπορρίπτονται, οἱ συνδυασμοί, κείμενοι εἰς οἱανδήποτε ἀνωτέραν γραμμὴν ἴσου κέρδους, ὡς μὴ πραγματοποιήσιμοι. Οὕτω τὸ τμῆμα εὐθείας αβ ἀποτελεῖ σύνολον τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα x εἶναι ἄριστοι λύσεις τοῦ τεθέντος προβλήματος, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ κριτηρίου τοῦ μεγίστου κέρδους $\overset{*}{k}_1$. Καθ'

1) Καθ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων εἰς τὰς ἀντιστοίχους ἐξισώσεις εἶναι οἱ αὐτοί. Ἂν λάβωμεν τὰ σχετικὰ ἐσωτερικὰ γινόμενα βλέπομεν ὅτι ταῦτα ὁρίζουν «ὑπερεπίπεδα» εἰς τὸν διδιάστατον χῶρον ἔχοντα τὸ αὐτὸ «*κανονικὸν* διάνυσμα» (βλ.3.12.1).

ὅμοιον τρόπον σκεπτόμενοι, καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι τὸ τμῆμα εὐθείας γδ ἀποτελεῖ τὸ σύνολον τῶν ἀρίστων λύσεων αἱ ὁποῖαι μεγιστοποιοῦν τὴν ἀπασχόλησιν τοῦ συντελεστοῦ Β, ἂν τὸ κριτήριον $\overset{*}{k}_2$ χρησιμοποιηθῇ μεμονωμένως, ἤτοι ἄνευ συνδυασμοῦ πρὸς τὸ $\overset{*}{k}_1$, πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ οἰκονομικὴ μονὰς θεωρεῖ τὸ κριτήριον $\overset{*}{k}_1$ ὡς σημαντικώτερον τοῦ κριτηρίου $\overset{*}{k}_2$, συμβολικῶς $\overset{*}{k}_1 \succ \overset{*}{k}_2$. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει πρέπει νὰ προχωρήσῃ εἰς σταδιακὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτῆς διὰ τῆς ἐφαρμογῆς *πρῶτον* τοῦ κριτηρίου $\overset{*}{k}_1$, μέσῳ τοῦ ὁποίου ἐπιλέγεται τὸ σύνολον, τὸ συγκείμενον ἐξ ὅλων τῶν σημείων τοῦ τμήματος εὐθείας αβ, συμβολικῶς Λ_1, καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Λ_1 (1), τὸ κριτήριον $\overset{*}{k}_2$ πρὸς ἐπιλογὴν τοῦ τελικοῦ συνόλου Λ_2. Τὸ σύνολον τοῦτο περιλαμβάνει λύσεις αἱ ὁποῖαι εἶναι ταυτοχρόνως ἄριστοι ἀπὸ ἀπόψεως ἀμφοτέρων τῶν κριτηρίων, καὶ δὴ συμφώνως πρὸς τὴν ἀξιολόγησσιν αὐτῶν ὑπὸ τῆς οἰκονομικῆς μονάδος. Γραφικῶς ἡ ἐπιλογὴ τοῦ Λ_2 γίνεται διὰ τῆς παραλλήλου μετατοπίσεως τῆς γραμμῆς ἴσης ἀπασχολήσεως τοῦ Β πρὸς τὰ ἀριστερὰ μέχρις ὅτου ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸ σύνολον Λ_1. Ὡς δεικνύεται εἰς τὸ διάγραμμα ἡ ἐπαφὴ αὕτη πραγματοποιεῖται εἰς τὸ σημεῖον β τοῦ Λ_1. Κατὰ συνέπειαν τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι καὶ ἡ μοναδικὴ λύσις, ἡ περιεχομένη εἰς Λ_2. Ἡ λύσις αὕτη ἀποτελεῖ συνδυασμὸν ποσοτήτων τῶν ω_1 καὶ ω_2, ὁ ὁποῖος μεγιστοποιεῖ τὸ κέρδος τῆς οἰκονομικῆς μονάδος. Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς μεγιστοποιήσεως ταύτης προσδιορίζει ταυτοχρόνως τὴν μεγίστην δυνατὴν ἀπασχόλησιν τοῦ συντελεστοῦ Β. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον β εἶναι σημεῖον τομῆς τῶν γραμμῶν περιορισμοῦ οἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς συντελεστὰς Α καὶ Γ, αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ x_1 καὶ x_2 ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος (2):

$$x_1 + 2x_2 = 16$$

$$x_1 + 0{,}8x_2 = 8$$

ἥτις εἶναι $x_1 = 2{,}6$ καὶ $x_2 = 6{,}7$. Συνεπῶς τὸ μέγιστον κέρδος θὰ εἶναι $\overset{*}{k}_1 = 2{,}6 + 2 \times 6{,}7 = 16$ ν.μ., ἡ δὲ μεγίστη ἀπασχόλησις τοῦ συντελεστοῦ Β θὰ εἶναι $\overset{*}{k}_2 = 3 \times 2{,}6 + 6{,}7 = 14{,}5$ μονάδες. Ἤτοι ἐκ τῆς συνολικῆς ποσότητος τῶν 18 μονάδων τοῦ Β, παραμένουν μόνον 3,5 μονάδες εἰς ἀποθήκας.

1) Τὸ Λ_1 ἔχει ἀπείρους λύσεις καὶ συνεπῶς δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ δευτέρου κατὰ σειρὰν σπουδαιότητος κριτηρίου.

2) Βλ. 3.12.4.

Προφανῶς ἡ ἀνωτέρω λύσις εἶναι συνάρτησις τῆς ἀξιολογήσεως τοῦ κριτηρίου τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ τρέχοντος κέρδους ($\overset{*}{k}_1$) ὡς σπουδαιοτέρου ἀπὸ οἰκονομικῆς ἀπόψεως ἀπὸ τὸ κριτήριον $\overset{*}{k}_2$ τῆς μεγίστης ἀπασχολήσεως τοῦ συντελεστοῦ Β. Ἂν ὅμως ἡ οἰκονομικὴ μονὰς θεωρήσῃ ὡς δευτερευούσης σημασίας τὸ τρέχον κέρδος, διότι προσδοκᾷ σημαντικὰ μελλοντικὰ κέρδη [1] ἐκ τῆς πλήρους ἀπελευθερώσεως τοῦ ἀποθηκευτικοῦ χώρου τὸν ὁποῖον καταλαμβάνῃ ἡ διαθέσιμος ποσότης τοῦ συντελεστοῦ Β, τότε ὁρίζει κατὰ τάξιν σπουδαιότητος ὡς πρῶτον τὸ $\overset{*}{k}_2$ καὶ δεύτερον τὸ $\overset{*}{k}_1$. Ἐκ τοῦ διαγράμματος καθίσταται σαφὲς ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα γδ ἀποτελεῖ πλέον τὸ πρῶτον σύνολον λύσεων, $Λ_1$, ἐπιλεγόμενον βάσει τοῦ κριτηρίου $\overset{*}{k}_2$, τὸ δὲ σημεῖον γ τοῦ $Λ_1$ ἀποτελεῖ τὸ μοναδικὸν στοιχεῖον τοῦ ὑποσυνόλου $Λ_2$, τὸ ὁποῖον ἐπιλέγεται διὰ τῆς ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμογῆς τοῦ κριτηρίου $\overset{*}{k}_1$. Τὸ γ εἶναι ἡ τομὴ τῶν γραμμῶν περιορισμοῦ αἱ ὁποῖαι ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς συντελεστὰς Β καὶ Γ. Συνεπῶς αἱ συντεταγμέναι x_1 καὶ x_2, τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος:

$$3x_1 + x_2 = 18$$

$$x_1 + 0{,}8x_2 = 8$$

ἥτις εἶναι $x_1 = 4{,}57$ καὶ $x_2 = 4{,}29$. Συνεπῶς ἡ μεγίστη ἀπασχόλησις τοῦ Β εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ εἶναι $\overset{*}{k}_2 = 3 \times 4{,}57 + 4{,}29 = 18$ μονάδες, τὸ δὲ μέγιστον τρέχον κέρδος θὰ εἶναι $\overset{*}{k}_1 = 4{,}57 + 2 \times 4.29 = 13{,}15$ ν.μ.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῆς λύσεως ταύτης (ὅπου $\overset{*}{k}_2 \succ \overset{*}{k}_1$) πρὸς τὴν προηγουμένως ληφθεῖσαν λύσιν (ὅπου $\overset{*}{k}_1 \succ \overset{*}{k}_2$), καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ σειρὰ προτεραιότητος τῶν κριτηρίων ἐπιλογῆς εἶναι κρισίμου σημασίας ἀπὸ ἀπόψεως ἀποτελεσμάτων.

Β' τρόπος ἀριστοποιήσεως

Εἰς τὰ προηγούμενα ὑπετέθη ὅτι ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἱεραρχήσῃ ***κατὰ τάξιν*** σπουδαιότητος (in the ordinal sense) τὸ σύνολον K τῶν κριτηρίων ἐπιλογῆς. Κατόπιν τῆς ἱεραρχήσεως ταύτης ἡ διαδικασία ἀριστοποιήσεως, βάσει πλειόνων κριτηρίων, καταλήγει εἰς μίαν διαδοχικὴν ἐφαρμογὴν τῶν κριτηρίων αὐτῶν, κατὰ τὴν ὁρισθεῖσαν σειράν. Ἤδη θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ εἶναι εἰς θέσιν νὰ

1) Ὑποθέτομεν πάλιν ὅτι τὰ κέρδη ταῦτα δὲν δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν ἀριθμητικῶς, ὑπὸ τῆς οἰκονομικῆς μονάδος.

ἀξιολογήση *ποσοτικῶς* (in the cardinal sense) τὰ κριτήρια ἐπιλογῆς, βάσει δοθέντος ὑπερκριτηρίου ὠφελιμότητος. Τοῦτο κατ' οὐσίαν σημαίνει ὅτι ὑφίσταται ἡ δυνατότης *μετατροπῆς* τῶν μονάδων ἀξίας ἑκάστου κριτηρίου εἰς μονάδας ἀξίας τοῦ ὑπερκριτηρίου. Ἀλλ' ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ μαθηματικῶς τὸ ὑπερκριτήριον, βάσει τῶν συναρτήσεων τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων, ἡ δὲ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος ἀριστοποιήσεως νὰ ἐπιδιωχθῇ εὐθέως διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ οὕτω διατυπουμένου ὑπερκριτηρίου.

Διὰ τὰς συναρτήσεις τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων ἔχομεν :

$$k_\iota = \varphi_\iota(x)\ (^1) \qquad \iota = 1, .., 4 \tag{12}$$

καὶ διὰ τὴν συνάρτησιν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ ὑπερκριτήριον

$$\mathbf{K} = \omega(x) \tag{13}$$

Αὐτὸ τοῦτο τὸ ὑπερκριτήριον δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς

$$\overset{*}{\mathbf{K}} = \omega(x)\,\mathrm{opt}, \tag{14}$$

ἤτοι ὡς ἡ ἀρίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως (13). Ἂν θέσωμεν

$$\mathbf{K}_\iota = \omega_\iota(k_\iota) \tag{15}$$

διὰ τὴν μετατροπὴν τῶν μονάδων k_ι εἰς μονάδας τοῦ ὑπερκριτηρίου (συμβολικῶς $\omega_\iota : k_\iota \rightarrow \mathbf{K}_\iota$), δυνάμεθα, βάσει τῆς (12), νὰ γράψωμεν

$$\mathbf{K}_\iota = \omega_\iota\{\varphi_\iota(x)\} \qquad \iota, = 1, .., 4 \tag{16}$$

$\mathbf{K}_\iota$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν μονάδων ἀξίας τοῦ ὑπερκριτηρίου, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς k_ι μονάδας ἀξίας τοῦ κριτηρίου $\overset{*}{k}_\iota$. Κατὰ συνέπειαν θὰ ἔχωμεν ἀντὶ τῆς (13)

$$\mathbf{K} = \sum_\iota \mathbf{K}_\iota = \sum_\iota \omega_\iota\{\varphi_\iota(x)\}\ (^2) \tag{17}$$

Ἡ συνάρτησις (17) εἶναι, ὡς παρατηροῦμεν, σύνθετος, διατυπουμένη ὡς

1) $k_\iota = \varphi_\iota(x)$ εἶναι ἡ γενικὴ συνάρτησις, ἡ ὁποία ἀριστοποιουμένη λαμβάνε τὴν μορφὴν $\overset{*}{k}_\iota = \varphi_\iota(x)$ opt.

2) Ἂν ἡ ἀριστοποίησις δὲν ὑποδηλοῖ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις μόνον μεγιστοποίησιν ἢ μόνον ἐλαχιστοποίησιν, τότε μετατρέπομεν καταλλήλως τὰς συναρτήσει μεγιστοποιήσεως εἰς συναρτήσεις ἐλαχιστοποιήσεως ἢ ἀντιθέτως.

συνάρτησις συναρτήσεων. Ἐν ἄλλοις λόγοις ὁ μετασχηματισμός :

$$\omega : x \to \mathbf{K}$$

ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν μετασχηματισμῶν :

$$\omega_i : k_i \to \mathbf{K}_i$$

οἱ ὁποῖοι ἐμπεριέχουν ἤδη τοὺς μετασχηματισμούς :

$$\varphi_i : x \to k_i$$

Ἤδη, ἀντὶ τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων ἐπιλογῆς $\overset{*}{k}_i = \varphi_i\,(x)\,\mathrm{opt}$, χρησιμοποιουμένων κατὰ τὴν σειρὰν ἱεραρχήσεως αὐτῶν εἰς τὴν διαδικασίαν ἀριστοποιήσεως, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τοῦ συνόλου Γ, τῶν οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατῶν συνδυασμῶν, τὸ ὑπερκριτήριον

$$\overset{*}{\mathbf{K}} = \omega\,(x)\,\mathrm{opt} = \sum_i \omega_i\,\{\,\varphi_i\,(x)\,\}\,\mathrm{opt} \tag{18}$$

πρὸς ἐπιλογὴν τοῦ συνόλου τῶν ἀρίστων λύσεων. Τὸ σύνολον τοῦτο θὰ εἶναι :

$$\Delta = \{\, x \mid x \in \Gamma \ \text{καὶ}\ \overset{*}{\mathbf{K}} = \sum_i \omega_i\,\{\,\varphi_i\,(x)\,\mathrm{opt}\,\}\tag{19}$$

Ἡ ἱκανοποίησις τοῦ ὑπερκριτηρίου $\overset{*}{\mathbf{K}}$ δὲν σημαίνει βεβαίως κατ' ἀνάγκην καὶ ἱκανοποίησιν τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων $\overset{*}{k}_i$. Τοιαύτη ἱκανοποίησις εἶναι δυνατὴ ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ἓν ἕκαστον τῶν συνόλων Δ_i $(i = 1, .., 4)$ [1], τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς ***ἀπ' εὐθείας*** ἐφαρμογὴν τῶν κριτηρίων k_i ἐπὶ τοῦ συνόλου Γ, ἀποτελοῦν ὑποσύνολα τοῦ Δ, ἤτοι ἂν

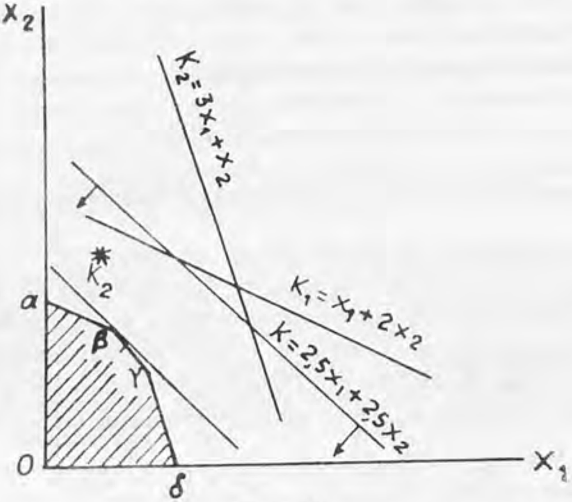
$$\Delta_i \subseteq \Delta$$

Ἂν $\Delta_i = \Delta$ τότε ἔχομεν ἐπὶ πλέον ***λειτουργικὴν ἰσοδυναμίαν*** μεταξὺ τοῦ μερικοῦ κριτηρίου $\overset{*}{k}_i$ καὶ τοῦ ὑπερκριτηρίου $\overset{*}{\mathbf{K}}$, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀρίστων λύσεων δύναται νὰ προσδιορισθῇ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ἀδιαφόρως τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου κριτηρίου.

Κατωτέρω περιγράφεται ὁ δεύτερος τρόπος συνθέτου ἀριστοποιήσεως βάσει τοῦ προηγουμένου ἀριθμητικοῦ παραδείγματος. Εἰς τὸ διάγρ. 34 δεικνύεται ἡ περιοχὴ πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν καὶ αἱ γραμμαὶ τῶν συναρτήσεων $k_1 = x_1 + 2x_2$ καὶ $k_2 = 3x_1 + x_2$, ὡς ἀκριβῶς καὶ

1) Τὰ σύνολα ταῦτα εἶναι : $\Delta_i = \{\, x \mid x \in \Gamma$ καὶ $\overset{*}{k}_i \,\}$ διὰ $i = 1, .., 4$.

εἰς τὸ διάγρ. 33. Τὸ ὑπερκριτήριον ἀριστοποιήσεως εἶναι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ μεγιστοποίησις τοῦ συνολικοῦ προσδοκωμένου



Διάγρ. 34.

κέρδους, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ τρέχον κέρδος ἐκ τῆς παραγωγῆς ἀγαθῶν ω_1 καὶ ω_2 καὶ ἀπὸ τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον προβλέπεται νὰ δημιουργήσῃ ἐμμέσως ἡ ἀπασχόλησις τοῦ συντελεστοῦ Β. Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι: 1) Μία μονὰς τρέχοντος κέρδους ἀντιστοιχεῖ πρὸς μίαν μονάδα προσδοκωμένου κέρδους. Κατὰ συνέπειαν ἡ συνάρτησις τρέχοντος κέρδους δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐκπεφρασμένη εἰς μονάδας τοῦ ὑπερκριτηρίου, ἤτοι:

$$\mathbf{K}_1 = k_1 = x_1 + 2x_2 \tag{α}$$

ὅπου $\mathbf{K}_1$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν μονάδων τοῦ ὑπερκριτηρίου αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν (ἐνταῦθα ἰσοῦνται) εἰς k_1 μονάδας τρέχοντος κέρδους.

2) Ἑκάστη ἀπασχολουμένη μονὰς τοῦ συντελεστοῦ Β δημιουργεῖ δυνατότητα κέρδους 0,50 ν.μ. Τὸ κέρδος τοῦτο ὑποτίθεται ὅτι δύναται νὰ πραγματοποιήσῃ ἡ οἰκονομικὴ μονὰς ἂν χρησιμοποιήσῃ τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς ἑκάστην μονάδα τοῦ Β ἀποθηκευτικὸν χῶρον πρὸς (ἀγορὰν καὶ) ἀποθήκευσιν ἀγαθοῦ τινὸς ω_3, τὸ ὁποῖον προβλέπεται νὰ μεταπωλήσῃ μετὰ πάροδον χρόνου τινὸς εἰς ὡρισμένας τιμὰς (ἀνωτέρας τῶν τιμῶν ἀγορᾶς καὶ τοῦ κόστους ἀποθηκεύσεως). Ἑπομένως ἐκ τῆς ἀπόψεως ταύτης ἑκάστη ἀπασχολουμένη μονὰς τοῦ Β ἀντιστοιχεῖ πρὸς 1/2 μονάδας προσδοκωμένου κέρδους, ἤτοι:

$$\mathbf{K}_2 = 0.5\, k_2 = 0.5\,(3x_1 + x_2) \tag{β}$$

Ἡ συνάρτησις **Κ** τοῦ μελλοντικοῦ κέρδους θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν (α) καὶ (β):

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = 2.5\, x_1 + 2.5\, x_2 \qquad (\gamma)$$

Κατὰ συνέπειαν τὸ ὑπερκριτήριον θὰ εἶναι:

$$\overset{*}{\mathbf{K}} = 2.5\, \bar{x}_1 + 2.5\, \bar{x}_2 \qquad (\delta)$$

ὅπου $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ εἶναι τιμαὶ τῶν x_1 καὶ x_2 μεγιστοποιοῦσαι τὴν (γ).

Ἡ γραμμὴ τῆς (γ) δεικνύεται εἰς τὸ διάγρ. 34. Ἡ γραμμὴ αὕτη μετακινουμένη παραλλήλως καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἔρχεται τὸ πρῶτον εἰς ἐπαφὴν μὲ τὴν περιοχὴν πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν εἰς τὸ σημεῖον β. Κατὰ συνέπειαν τὸ σημεῖον τοῦτο ἀποτελεῖ ἀρίστην λύσιν τοῦ προβλήματος. Ὡς εἴδομεν (βλ. σ. 133) αἱ συντεταγμέναι τοῦ β εἶναι $x_1 = 2{,}6$ καὶ $x_2 = 6{,}7$. Συνεπῶς τὸ μέγιστον προσδοκώμενον κέρδος θὰ εἶναι:

$$\overset{*}{\mathbf{K}} = 2{,}5 \times 2{,}6 + 2{,}5 \times 6{,}7 = 23{,}25$$

Ἡ *μεγιστοποίησις* τοῦ προσδοκομένου κέρδους ἐξασφαλίζει καὶ πρωτογενῆ μεγιστοποίησιν τοῦ τρέχοντος κέρδους ([1]).

Συμπεράσματα

Ἐκ τῆς προηγηθείσης ἀναλύσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξαχθοῦν τὰ κάτωθι γενικὰ συμπεράσματα:

1) Κύριον χαρακτηριστικὸν ὅλων τῶν προβλημάτων τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ἤτοι τόσον τῶν προβλημάτων ἁπλῆς συνεπείας ὅσον καὶ τῶν προβλημάτων ἀριστοποιήσεως, εἶναι ἡ ἐφαρμογὴ διὰ τὴν λύσιν αὐτῶν μιᾶς διαδικασίας ἐπιλογῆς. Κατὰ συνέπειαν δικαιολογεῖται ἡ ἤδη διατυπωθεῖσα (βλ. 1.2) γενικὴ πρότασις καθ' ἣν ***ὁ Οἰκονομικὸς Προγραμματισμὸς ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὴν ἐξέτασιν προβλημάτων ἐπιλογῆς.***

2) Ἡ διαδικασία ἀριστοποιήσεως δυνατὸν νὰ βασίζεται οὐχὶ ἐπὶ ἑνὸς ἀλλὰ ἐπὶ πλειόνων κριτηρίων ἐπιλογῆς. Ἡ λύσις τοῦ σχετικοῦ προβλήματος προϋποθέτει τότε τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς ***ὑπερκριτηρίου***, δυναμένου νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν ἀξιολόγησιν τῆς σπουδαιότητος τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων. Ἡ ἀξιολόγησις αὕτη δύναται νὰ γίνῃ κατὰ δύο τρόπους: Ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ ἱεραρχεῖ τὰ κριτήρια εἴτε ***κατὰ τάξιν***

---

1) Δύναται νὰ δειχθῇ εὐκόλως ὅτι ἂν αὐξηθῇ οὐσιωδῶς τὸ ἀναμενόμενον κέρδος ἐκ τῆς ἀπασχολήσεως μονάδων τοῦ Β, ἡ γραμμὴ τῆς συναρτήσεως προσδοκωμένου κέρδους προσδιορίζει ἄριστα σημεῖα ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος γδ.

σπουδαιότητος, εἴτε *ποσοτικῶς*, μὲ βάσιν πάντοτε τὸ δοθὲν ὑπερκριτήριον. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ μία διαδικασία σταδιακῆς ἀριστοποιήσεως διὰ τῆς διαδοχικῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων, ἐφ' ὅσον βεβαίως εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπιλογή, ἤτοι ἐφ' ὅσον ἕκαστον ἐκ τῶν προσδιοριζομένων ἀρίστων συνόλων περιλαμβάνει περισσοτέρας τῆς μιᾶς λύσεις. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι εὐχερὴς ἡ σαφὴς μαθηματικὴ διατύπωσις τῆς συναρτήσεως τοῦ ὑπερκριτηρίου, βάσει τῶν συναρτήσεων τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων, ὁπότε τὸ οὕτω διαμορφούμενον ὑπερκριτήριον εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ εὐθέως διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ συνόλου τῶν ἀρίστων λύσεων.

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς ὡς ἄνω περιπτώσεις, ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ ἐπιδιώκει ἀριστοποίησιν μιᾶς συναρτήσεως *τελικῆς ὠφελιμότητος*, τῆς συναρτήσεως τοῦ ὑπερκριτηρίου, ἀνεξαρτήτως ἐὰν εἶναι ἢ δὲν εἶναι εἰς θέσιν νὰ προσδώσῃ εἰς τὴν συνάρτησιν ταύτην σαφῆ μαθηματικὴν διατύπωσιν. Ἡ ἀριστοποίησις τῆς συναρτήσεως τοῦ ὑπερκριτηρίου ἀποτελεῖ τὸν *τελικὸν σκοπὸν* τῆς δεδομένης οἰκονομίας, τουλάχιστον ὅσον ἀφορᾷ τὴν περίοδον, τὴν ὁποίαν καλύπτει τὸ τιθέμενον πρόβλημα. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης ἡ ἱκανοποίησις εἰς διαφόρους βαθμοὺς τῶν συναρτήσεων τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων, ἀποτελεῖ *μέσον* διὰ τὴν ἐπίτευξιν τοῦ ὡς ἄνω σκοποῦ.

3) Ἐφ' ὅσον ἡ διαδικασία ἐπιλογῆς ἀρίστων λύσεων ἕπεται τῆς διαδικασίας ἐπιλογῆς λύσεων ἁπλῆς συνεπείας, τὸ σύνολον τῶν ἀρίστων λύσεων εἶναι κατ' ἀνάγκην ὑποσύνολον (συνήθως γνήσιον) τοῦ συνόλου τῶν οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν. Γενικῶς ἡ πλήρης διαδικασία ἐπιλογῆς λύσεων ἁπλῆς συνεπείας καὶ ἀρίστων λύσεων ὁδηγεῖ εἰς τὴν συνεχῆ σμίκρυνσιν τῶν προσδιοριζομένων συνόλων, εἰς τρόπον ὥστε τὸ (τελευταῖον) σύνολον τῶν ἀρίστων λύσεων νὰ εἶναι τὸ «μικρότερον» ὅλων.

Βάσει τοῦ χρησιμοποιηθέντος εἰς τὰ προηγούμενα συμβολισμοῦ, ἡ διαδικασία αὕτη εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθῇ συνοπτικῶς διὰ τῆς ἀκολούθου «ἁλύσεως» συνόλων :

$$\mathbb{R}^{\nu} \supset A \supset B \supset \Gamma \supset \Delta \supseteq E \ldots$$

ΜΕΡΟΣ
ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΗ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΣΥΝΕΠΕΙΑ

5

'Ανάλυσις Εἰσροῶν - 'Εκροῶν: Στατικὸν 'Υπόδειγμα

5.1 Εἰσαγωγὴ

'Ως ἤδη ἐλέχθη, ἡ ἀνάλυσις εἰσροῶν - ἐκροῶν χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μελέτην καὶ λύσιν προβλημάτων συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως. Αὕτη ἀποτελεῖ μέθοδον ἐρεύνης διαμορφωθεῖσαν ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Harvard W. Leontief, δι' ὃ καὶ «σύστημα Leontief» καλεῖται ἐνίοτε.

Εἰδικώτερον, αἱ ἐργασίαι τοῦ καθηγητοῦ Leontief ἀφοροῦν εἰς τὴν κατάστρωσιν ἑνὸς συστήματος γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας, προοριζομένου διὰ τὴν μελέτην μακροοικονομικῶν προβλημάτων, ὡς εἶναι, π.χ., τὸ πρόβλημα τῆς πλήρους ἀπασχολήσεως καὶ τοῦ προγραμματισμοῦ ἀναπτύξεως μιᾶς οἰκονομίας. Τὸ σύστημα τοῦτο ἀποτελεῖ λογικὴν συνέχειαν τῶν συστημάτων γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας τῶν Quesnay, Walras, Pareto καὶ Cassel, τὰ ὁποῖα σκοπὸν εἶχον νὰ δώσουν μίαν ἐποπτικὴν περιγραφὴν τῆς οἰκονομίας καὶ νὰ προσδιορίσουν τὴν φύσιν τῶν σχέσεων συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν μεγεθῶν. 'Ο ἴδιος ὁ καθηγητὴς Leontief θεωρεῖ τὴν κλασσικὴν ἐργασίαν του ἐπὶ τῆς διαρθρώσεως τῆς ἀμερικανικῆς οἰκονομίας (1) ὡς προσπάθειαν καταστρώσεως ἑνὸς Tableau Economique διὰ τὰς 'Ηνωμένας Πολιτείας.

'Αλλ' ἐνῷ οἱ κλασσικοὶ οἰκονομολόγοι τῆς γενικῆς ἰσορροπίας οὐδέποτε διενοήθησαν νὰ χρησιμοποιήσουν τὸ σύστημά των διὰ πρακτικὰς ἀναλύσεις, ὁ καθηγητὴς Leontief ἀντιθέτως ἐπεδίωξε νὰ παρουσιάσῃ ἓν σύστημα τὸ ὁποῖον θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν πρακτικῶν προβλημάτων. Τὸ πολύπλοκον τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων καὶ ἰδίως ἡ ἔλλειψις ἐπαρκῶν στατιστικῶν στοιχείων καὶ καταλλήλων ὑπολογιστικῶν μέσων καθίστα οὐτοπικὴν πᾶσαν προσπάθειαν πρακτικῆς χρησιμοποιήσεως τῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν Walras καὶ Pareto. Οὕτω τὰ συστήματα ταῦτα, παρὰ τὴν θεωρητικήν των μεγαλοπρέπειαν, ἐγκατελείφθησαν βαθμιαίως χάριν τῶν

1) W. Leontief «The Structure of American Economy 1919 - 1939», N. Y. 1941 (νέα ἔκδοσις 1953).

μαρσαλλιανῶν συστημάτων μερικῆς ἰσορροπίας, εἰς τὰ ὁποῖα ἐξητάζοντο ἰδιαιτέρως αἱ οἰκονομικαὶ μεταβολαὶ ἐντὸς ὡρισμένων ἀγορῶν καὶ ἀπεφεύγετο ἡ παρακολούθησις τῶν ἐπιδράσεων τῶν μεταβολῶν αὐτῶν ἐντὸς ὁλοκλήρου τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Ἡ ἀναζωογόνησις τοῦ συστήματος τῆς γενικῆς ἰσορροπίας ὑπὸ τοῦ Cassel (1918) δὲν ἤλλαξε κατὰ βάσιν τὴν κρατοῦσαν τάσιν. Καὶ τοῦτο διότι ὁ Cassel, συνεχίσας τὴν κλασσικὴν παράδοσιν, ἐνδιεφέρθη κυρίως διὰ τὴν μαθηματικὴν θεμελίωσιν τοῦ συστήματός του καὶ δὲν ἔθεσε ζήτημα πρακτικῆς ἐφαρμογῆς αὐτοῦ.

Ὁ καθηγητὴς Leontief (1941) εἶναι ὁ πρῶτος οἰκονομολόγος ὁ ὁποῖος ἀντικατέστησε τὰ ἀφῃρημένα ἀλγεβρικὰ σύμβολα τοῦ συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας διὰ συγκεκριμένων στατιστικῶν στοιχείων καὶ ἐπεχείρησε νὰ χρησιμοποιήσῃ τὸ σύστημα τοῦτο διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τῆς οἰκονομικῆς πραγματικότητος. Τὸ ἐγχείρημα ἦτο βεβαίως τολμηρόν, ἀλλ' ἡ ἀνάληψις αὐτοῦ καθίστατο δυνατὴ κατόπιν τῆς ἐν τῷ μεταξὺ ἐπελθούσης σοβαρᾶς βελτιώσεως τῶν συνθηκῶν ἀπὸ ἀπόψεως στατιστικῶν δεδομένων εἰς Ἀμερικὴν καὶ τῆς ἀναπτύξεως τῶν ὑπολογιστικῶν μηχανῶν ὑψηλῆς ταχύτητος. Ἐξ ἄλλου, ἡ προϊοῦσα σημασία τῶν προβλημάτων πλήρους ἀπασχολήσεως καὶ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ κατὰ τὴν μεταπολεμικὴν περίοδον προώθησεν ἐπίσης σημαντικῶς τὰς ἐρευνητικὰς ἐργασίας ἐπὶ τῆς πρακτικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ συστήματος γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας.

5.2 Ὑποθέσεις

Αἱ βασικαὶ ὑποθέσεις τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν ἔχουν ὡς ἀκολούθως :

α) Ἡ οἰκονομία εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρεθῇ εἰς ἕνα ἀριθμὸν παραγωγικῶν κλάδων.

β) Ἕκαστος κλάδος παράγει ἓν *μόνον* προϊὸν καὶ καθ' *ὡρισμένην* μέθοδον ἢ παραγωγικὴν δραστηριότητα.

γ) Αἱ ὑφ' ἑκάστου κλάδου ἀπορροφώμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν ἀναλογίαν πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ ἐξ αὐτῶν παραγομένου προϊόντος (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν).

Ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ εἶδος τῶν εἰς τὴν πρώτην ὑπόθεσιν ἀναφερομένων κλάδων ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ποσότητος καὶ ποιότητος τῶν διατιθεμένων στατιστικῶν πληροφοριῶν, τῶν δυνατοτήτων τῶν ὑπολογιστικῶν μέσων (ἀριθμομηχανῶν), ὡς ἐπίσης καὶ ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἐξεταζομένου θέματος. Ἐνταῦθα ἀνακύπτει τὸ πρόβλημα τῆς συμπτύξεως τῶν ἐπὶ μέρους οἰκονομικῶν μονάδων εἰς γενικωτέρας ὁμάδας ἢ ἄλλως τῆς *συγκεν-*

τρωτικῆς ταξινομήσεως (aggregation) τῶν στατιστικῶν στοιχείων [1]. Τοιοῦτον πρόβλημα δὲν ὑφίστατο διὰ τοὺς κλασσικοὺς οἰκονομολόγους τῆς γενικῆς ἰσορροπίας, οἱ ὁποῖοι ἐνδιεφέροντο μόνον δι' ἀλγεβρικὰς ἀποδείξεις. Πρακτικὴ ὅμως ἐφαρμογὴ τοῦ ὡς ἄνω συστήματος εἶναι ἀδύνατος ἄνευ συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων, ὄχι μόνον λόγῳ τῶν δυσχερειῶν ἐξευρέσεως ἀναλυτικῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν, ἀλλὰ καὶ διότι ὁ μέγας ὄγκος τῶν πληροφοριῶν αὐτῶν θὰ ἠμπόδιζε τὴν χρησιμοποίησίν των. Ὡς λέγει ὁ καθηγητὴς Leontief, τὸ πρόβλημα δὲν εἶναι ἡ ἐκλογὴ μεταξὺ συγκεντρωτικῆς καὶ ἀναλυτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν, ἀλλ' ἡ ἐκλογὴ μεταξὺ μεγαλυτέρου ἢ μικροτέρου βαθμοῦ συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως. Οὕτω, π.χ., ἐὰν πρόκειται νὰ ἐξετασθῇ ἀπό τινος ἀπόψεως ἡ θέσις τῆς κλωστοϋφαντουργίας ἐντὸς μιᾶς οἰκονομίας, δὲν γεννᾶται ζήτημα χρησιμοποιήσεως ἀναλυτικῶν στατιστικῶν στοιχείων δι' ὅλας τὰς ἐπὶ μέρους κλωστοϋφαντουργικὰς ἐπιχειρήσεις, γεννᾶται μόνον ζήτημα ἐκλογῆς μεταξὺ συγκεντρωτικῶν στοιχείων διὰ τὴν κλωστοϋφαντουργίαν, λαμβανομένην ὡς ἑνιαῖον κλάδον παραγωγῆς, καὶ συγκεντρωτικῶν ἐπίσης στοιχείων ἀναφερομένων εἰς μικρὸν σχετικῶς ἀριθμὸν ὑποκλάδων, εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ διαιρεθῇ ἡ κλωστοϋφαντουργία (π.χ. ἐριουργίαν, βαμβακουργίαν κλπ.). Ὅσον ὁ βαθμὸς συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων εἶναι μεγαλύτερος, τόσον ἐλαττοῦται ἡ πληροφοριακὴ δύναμις τῶν στοιχείων αὐτῶν, ἐνῷ ἀντιθέτως διευκολύνεται ὁ ὑπολογιστικὸς χειρισμός των. Ἐπιβάλλεται ὅθεν ἡ ἐκλογὴ τοῦ βαθμοῦ συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως, ὁ ὁποῖος ἀφ' ἑνὸς μὲν δὲν θίγει στατιστικὰς πληροφορίας χρησίμους διὰ τὸ ἐξεταζόμενον θέμα, ἀφ' ἑτέρου δὲ διευκολύνει κατὰ τὸ δυνατὸν τοὺς ὑπολογισμούς.

Ἡ δευτέρα ὑπόθεσις, ἀνωτέρω, σημαίνει ὅτι εἰς τὸ σύστημα Leontief δὲν τίθεται ζήτημα ἀριστοποιήσεως τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος, καθ' ὅσον τοιαύτη ἀριστοποίησις προϋποθέτει δυνατότητα ἐκλογῆς μεταξὺ διαφόρων παραγωγικῶν μεθόδων, ὁδηγουσῶν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα.

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν εἶναι θεμελιώδης εἰς τὴν ἀνάλυσιν εἰσροῶν - ἐκροῶν, ὡς ἐπίσης καὶ εἰς τὰ κλασσικὰ συστήματα γενικῆς ἰσορροπίας. Τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι αἱ πραγματικαὶ παραγωγικαὶ συναρτήσεις θεωροῦνται ὡς συμφωνοῦσαι κατ' ἀνάγκην πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, ἀλλ' ἁπλῶς ἡ ὑπόθεσις αὕτη λαμβάνεται ὡς μία ἱκανοποιητικὴ προσέγγισις εἰς τὴν πραγματικότητα.

Ἐκ τῶν ὑποθέσεων (β) καὶ (γ) προκύπτει ὅτι εἰς τὰς παραγωγικὰς

---

1) Ὡς «συγκεντρωτικὴ ταξινόμησις» στατιστικῶν στοιχείων νοεῖται ἡ συλλογὴ στοιχείων περὶ τῆς δραστηριότητος τῶν διαφόρων κλάδων, θεωρουμένων ὡς *αὐτοτελῶν μονάδων*, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν συλλογὴν ἀναλυτικῶν στοιχείων περὶ τῆς δραστηριότητος τῶν ἐπὶ μέρους οἰκονομικῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τοὺς ἐν λόγῳ κλάδους.

συναρτήσεις τοῦ συστήματος Leontief οἱ συντελεσταὶ παραγωγῆς εἶναι αὐστηρῶς συμπληρωματικοὶ καὶ συνεπῶς τὸ οριακὸν προϊὸν ἑκάστου εἶναι μηδέν. Τὸ προϊὸν δύναται νὰ αὐξηθῇ μόνον ἂν αἱ ποσότητες ὅλων τῶν συντελεστῶν, οἱ ὁποῖοι λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγὴν δεδομένου προϊόντος, αὐξηθοῦν καθ' ὡρισμένην ἀναλογίαν, καθοριζομένην ὑπὸ τῶν τεχνολογικῶν συνθηκῶν τῆς δεδομένης παραγωγῆς.

5.3 Τὸ βασικὸν ὑπόδειγμα

5.3.1. Ἀναλύομεν κατωτέρω τὰ κύρια σημεῖα τοῦ συστήματος Leontief βάσει ἑνὸς ἀριθμητικοῦ παραδείγματος.

Τὸ κεντρικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι ὁ ***πίναξ εἰσροῶν - ἐκροῶν*** (input - output table), ὁ ὁποῖος ὁμοιάζει κατὰ βάσιν πρὸς τὸ Tableau Economique τοῦ François Quesnay, καὶ καταγράφει συστηματικῶς τὰς ροὰς ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας, ἐντὸς μιᾶς δεδομένης χρονικῆς περιόδου.

Ὁ πίναξ 1, κατωτέρω, ἀποτελεῖ τὸν πίνακα εἰσροῶν - ἐκροῶν τοῦ χρησιμοποιουμένου παραδείγματος. Ὁ πίναξ οὗτος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία λογιστικὴ (ex post) κατάστασις, ἀπεικονίζουσα τὰς ***διακλαδικὰς*** σχέσεις τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας κατὰ τὸ ληφθὲν ἔτος τ, ὡς ἐπίσης καὶ τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ κατὰ τὸ αὐτὸ ἔτος παραχθέντος τελικοῦ προϊόντος. Ὁ πίναξ 1, ἐξεταζόμενος κατὰ στήλας, δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς δύο βασικοὺς τομεῖς, τὸν ***παραγωγικὸν τομέα*** — ὁ ὁποῖος ὑποδιαιρεῖται εἰς τὸν κλάδον τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς (γεωργία - όρυχεῖα κλπ.), τὸν κλάδον τῆς μεταποιήσεως (βιομηχανία - βιοτεχνία) καὶ τοὺς «λοιποὺς κλάδους» — καὶ τὸν ***τομέα τῆς τελικῆς ζητήσεως***, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν κατανάλωσιν, τὰς ἐπενδύσεις καὶ τὰς ἐξαγωγάς. Ἐκ τῆς κατὰ σειρὰς ἐπισκοπήσεως τοῦ πίνακος εἶναι δυνατὸν νὰ διακριθοῦν ἐπίσης δύο τομεῖς, ὁ ***παραγωγικὸς τομεὺς*** (ὡς καὶ προηγουμένως) καὶ ***ὁ τομεὺς τῶν ὑπηρεσιῶν*** τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων τοῦ Ἰδιωτικοῦ τομέως, ***τῶν εἰσαγωγῶν καὶ τῶν φόρων.***

Εἰδικώτερον, ἡ κατὰ στήλας ἐξέτασις τοῦ πίνακος 1 δεικνύει τὰς «εἰσροὰς» (inputs), ἤτοι τὴν ἀξίαν τῶν ὑφ' ἑκάστου οἰκονομικοῦ κλάδου ἀπορροφωμένων ποσοτήτων ἀγαθῶν (ἢ ὑπηρεσιῶν), κατὰ τὰς πηγὰς προελεύσεως αὐτῶν. Αἱ ποσότητες αὗται ἐκφράζονται εἰς νομισματικὰς ἀξίας, διότι μέτρησις εἰς φυσικὰς μονάδας προϋποθέτει πλήρη ὁμοιογένειαν τῶν προϊόντων ἑκάστου κλάδου, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν ἰσχύει εἰς περίπτωσιν συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως. Οὕτω, αἱ τρεῖς πρῶται στῆλαι δεικνύουν τὰς ἀξίας τῶν ἀγαθῶν (ἢ ὑπηρεσιῶν) τὰ ὁποῖα ἀπορροφῶνται ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν κλάδων, διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος αὐτῶν κατὰ τὸ ἔτος τ. Ὁ κλάδος, π.χ., τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς ἐχρησιμοποίησε κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ προϊὸν τοῦ κλάδου τῆς μεταποιήσεως ἀξίας 20 νομισματικῶν μονάδων (ν.μ.), προϊόντα τῶν λοιπῶν κλάδων ἀξίας 20 ν.μ., εἰσαγόμενα προϊόντα ἀξίας 5 ν.μ., προσωπικὰς ὑπηρεσίας 100 ν.μ. καὶ ἐπλήρωσε φόρους 10 ν.μ.

Ἀναλόγως ἑρμηνεύονται καὶ αἱ ἑπόμεναι δύο στῆλαι. Αἱ στῆλαι τῆς τελικῆς ζητήσεως δεικνύουν τὸν τρόπον διανομῆς τοῦ *τελικοῦ προϊ-*

Πίναξ 1

Εἰσροαὶ - Ἐκροαὶ (καὶ Τελικὴ Ζήτησις) κατὰ τὸ ἔτος τ

ΕΙΣΡΟΑΙ / ΕΚΡΟΑΙ	Πρωτογενὴς παραγωγή	Μεταποίησις	Λοιποὶ κλάδοι	Τελικὴ Ζήτησις					Σύνολον
				Κατανάλωσις		Ἐπένδυσις (α)			
				Ἰδιωτική	Δημοσία	Πάγιαι	Ἀποθεματ.	Ἐξαγωγαί	
Πρωτογενὴς παραγωγή		60	20	50	7		8	10	155
Μεταποίησις	20		60	60	20	30	10	20	220
Λοιποὶ κλάδοι	20	40		40	20	15		10	145
Εἰσαγωγαί	5	30	10	10	3				58
Ἰδιωτικὸς τομεὺς (Ὑπηρεσία προσώπων)	100	70	45						215
Δημόσιος τομεὺς (Φόροι)	10	20	10	20					60
Σύνολον	155	220	145	180	50	45	18	40	853

(α) Ἰδιωτικὴ Ἐπένδυσις.

όντος τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας, κατὰ τὸ ἔτος τ, μεταξὺ καταναλώσεως (ἰδιωτικῆς καὶ δημοσίας), ἐπενδύσεων καὶ ἐξαγωγῶν. Ἡ εἰς τὴν στήλην τῆς ἰδιωτικῆς καταναλώσεως ἀναγραφομένη ἀξία 20 ν.μ. ἐκ φόρων ὑποτίθεται ὅτι ἐκφράζει τὸ ἀντίτιμον τῆς ὑπὸ τῶν ἰδιωτῶν καταναλώσεως κρατικῶν ὑπηρεσιῶν κατὰ τὸ δοθὲν ἔτος.

Ἡ κατὰ σειρὰς ἐξέτασις τοῦ πίνακος δεικνύει τὰς «ἐκροὰς» (outputs), ἤτοι τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ παραχθέντος συνολικοῦ προϊόντος ἑκάστου κλάδου κατὰ τὸ ἔτος τ. Οὕτω, π.χ., ἡ πρώτη σειρὰ τοῦ πίνακος δεικνύει ὅτι ἐκ τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς τοῦ ἔτους τ ἀξίας 155 ν.μ. διετέθη προϊὸν ἀξίας 60 ν.μ., διὰ τὸν κλάδον τῆς μεταποιήσεως, ὡς πρῶται ὗλαι κ.λ.π., 20 ν.μ. διὰ τοὺς λοιποὺς κλάδους, 50 ν.μ. δι' ἰδιωτικὴν κατανάλωσιν, 7 ν.μ. διὰ δημοσίαν κατανάλωσιν, 8 ν.μ. δι' ἀποθέματα καὶ τέλος προϊὸν ἀξίας 10 ν.μ. δι' ἐξαγωγάς (1).

'Αναλόγως ἑρμηνεύονται καὶ αἱ ἑπόμεναι δύο σειραί (2).

'Ο πίναξ 1 δεικνύει ὅτι ἡ ἀξία τοῦ συνολικοῦ προϊόντος ἑκάστου παραγωγικοῦ κλάδου (ἄθροισμα κονδυλίων ἀντιστοίχου σειρᾶς) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν χρηματικῶν καταβολῶν τοῦ αὐτοῦ κλάδου (ἄθροισμα κονδυλίων ἀντιστοίχου στήλης). Τοῦτο συμβαίνει διότι εἰς τὴν ἀξίαν δι' ὑπηρεσίας προσώπων συμπεριλαμβάνονται ἐνταῦθα καὶ τὰ ἐπιχειρηματικὰ κέρδη.

'Η τετάρτη σειρὰ καθορίζει τὸν τρόπον διαθέσεως τῶν εἰσαγομένων ἀγαθῶν μεταξὺ τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων καὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως. 'Η πέμπτη σειρὰ δεικνύει τὴν ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν κλάδων καταβληθεῖσαν, εἰς τὸν ἰδιωτικὸν τομέα τῆς οἰκονομίας, ἀξίαν διὰ τὰς χρησιμοποιηθείσας ὑπηρεσίας προσώπων (ἐργασίαν). Τέλος εἰς τὴν ἕκτην σειρὰν ἀναγράφονται αἱ ἐκ φόρων ἐπιβαρύνσεις τῶν παραγωγικῶν κλάδων καὶ τῆς καταναλώσεως. Αἱ ἐπιβαρύνσεις αὗται ἀποτελοῦν θεωρητικῶς τὸ ἀντίτιμον τῶν κρατικῶν ὑπηρεσιῶν πρὸς τὴν οἰκονομίαν, ἤτοι τῶν ὑπηρεσιῶν τῶν πάσης φύσεως προσώπων τὰ ὁποῖα ἐργάζονται διὰ λογαριασμὸν τοῦ κράτους.

'Ως ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ πίνακος 1, τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν σειρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν στηλῶν. 'Επειδὴ δὲ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν τριῶν πρώτων σειρῶν ἰσοῦνται, ἀνὰ ἕν, πρὸς τὰ συνολικὰ ἀθροίσματα τῶν τριῶν πρώτων στηλῶν, ἕπεται ὅτι τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων σειρῶν (ἀξία εἰσαγωγῶν + ἀξία ὑπηρεσιῶν προσώπων + φόροι), ἰσοῦται πρὸς τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν στηλῶν τῆς τελικῆς ζητήσεως.

5.3.2. 'Ελέχθη ἤδη ὅτι ὁ πίναξ 1 ἔχει ἁπλῶς λογιστικὴν σημασίαν, ὡς ἀπεικονίζων τὰς λαβούσας χώραν κατὰ τὸ ἔτος τ συναλλακτικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν κλάδων τῆς δοθείσης οἰκονομίας. 'Απὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης ὁ πίναξ οὗτος θὰ ἠδύνατο νὰ παραβληθῇ πρὸς τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν (3). 'Η μετατροπὴ τοῦ πίνακος 1 ἀπὸ ἁπλῆν

---

1) Δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ *ἐνδοκλαδικαὶ* ροαί, ἤτοι ἡ ἀξία τοῦ προϊόντος τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ κλάδου τοῦ παράγοντος τούτου.

2) Καθίσταται προφανὲς ὅτι ἂν ἐνδιαφερώμεθα, οὐχὶ διὰ τὰς *πραγματικὰς* ροὰς ἀγαθῶν (καὶ ὑπηρεσιῶν), ὡς συμβαίνει ἐνταῦθα, ἀλλὰ διὰ τὰς *χρηματικὰς* ροὰς μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀποτέλεσμα τῶν πραγματικῶν ροῶν, τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος θὰ δεικνύουν κατὰ σειρὰς εἰσροὰς (ἀντὶ ἐκροὰς) καὶ κατὰ στήλας ἐκροὰς (ἀντὶ εἰσροάς).

3) Βλ. σχετικὴν σύγκρισιν εἰς 5.4, κατωτέρω.

λογιστικὴν κατάστασιν εἰς *ἀναλυτικὸν ὄργανον* — δυνάμενον νὰ παρακολουθήσῃ τὰς ἐπιδράσεις τῶν μεταβολῶν τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν μεγεθῶν — εἶναι ἐν τούτοις δυνατή, *διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ἀφ' ἑνὸς μὲν τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν*, ἀφ' ἑτέρου δὲ σταθερῶν τιμῶν διὰ τὰ διάφορα ἀγαθά.

Συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, αἱ ὑφ' ἑκάστου παραγωγικοῦ κλάδου ἀπορροφώμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν σχέσιν πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ ἐξ αὐτῶν παραγομένου προϊόντος, ἀνεξαρτήτως ἐπιπέδου (καὶ χρόνου δράσεως) τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐπὶ τῇ ὑποθέσει τῶν

Πίναξ 2

Συντελεσταὶ Εἰσροῆς

	Π(α)	Μ	Λ
Π	0/155 = 0	60/220 = 0.272	20/145 = 0,137
Μ	20/155 = 0,129	0/220 = 0	60/145 = 0,414
Λ	20/155 = 0,129	40/220 = 0,182	0/145 = 0
Ε	5/155 = 0,032	30/220 = 0,136	10/145 = 0,069
Υ	100/155 = 0,645	70/220 = 0,318	45/145 = 0,311
Φ	10/155 = 0,065	20/220 = 0,092	10/145 = 0,069
	Σύνολον 1,000	1,000	1,000

(α) Τὰ σύμβολα Π, Μ, κλπ. εἶναι τὰ ἀρχικὰ γράμματα τῶν ὀνομάτων τῶν κλάδων τοῦ πίνακος 1.

σταθερῶν τιμῶν [1] καὶ δοθέντος τοῦ πίνακος 1, δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἡ μορφὴ τῆς παραγωγικῆς συναρτήσεως ἑκάστου κλάδου διὰ σειρᾶς τεχνολογικῶν συντελεστῶν, οἱ ὁποῖοι λαμβάνονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν κονδυλίων τῶν εἰσροῶν τῶν ἐν λόγῳ κλάδων διὰ τῆς ἀξίας τοῦ ὑπ' αὐτῶν παραχθέντος συνολικοῦ προϊόντος [2]. Οἱ συντελεσταὶ οὗτοι εἶναι γνωστοὶ ὡς «συντελεσταὶ εἰσροῆς» (input coefficients) ἢ ὡς «τεχνολογικοὶ συντελεσταί».

Ἡ ἔννοια τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς εἶναι προφανής. Οὕτω, ὁ συντελεστὴς 0,272 (πρῶτος εἰς τὴν στήλην Μ) καθορίζει τὴν ἀξίαν τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς, τὸ ὁποῖον χρησι-

1) Ὡς σταθεραὶ δύναται νὰ θεωρηθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ ἔτους τ, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ὁ πίναξ 1.

2) Μολονότι ἐνδιαφέρουν κυρίως αἱ σχέσεις πραγματικῶν ποσοτήτων, ἡ χρησιμοποίησις ἐνταῦθα σταθερῶν τιμῶν καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ἐκτίμησιν τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν εἰς νομισματικὰς ἀξίας.

μοποιεῖται ὑπὸ τοῦ κλάδου τῆς μεταποιήσεως κατὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου ἀξίας μιᾶς νομ. μονάδος. Ἀνάλογον ἑρμηνείαν δίδομεν καὶ εἰς τοὺς λοιποὺς συντελεστὰς εἰσροῆς.

5.3.3. Ὁ εἰς τὸν πίνακα 1 γενόμενος διαχωρισμὸς μεταξὺ παραγωγικοῦ τομέως καὶ τελικῆς ζητήσεως ἐπιδιώκει νὰ τονίσῃ ὅτι εἰς τὸ ἐξεταζόμενον οἰκονομικὸν σύστημα τὰ κονδύλια τῆς τελικῆς ζητήσεως λαμβάνονται ὡς ***δεδομένα*** (ἐξωγενῆ), ἐπὶ τῇ βάσει δὲ τῶν κονδυλίων αὐτῶν πρέπει νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὁ βαθμὸς παραγωγικῆς ἀπασχολήσεως τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἑκάστοτε ὕψος (καὶ τὴν σύνθεσιν) τῆς τελικῆς ζητήσεως.

Διὰ νὰ καταδειχθῇ τώρα ἡ ἀναλυτικὴ ἀξία τοῦ πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν, κατόπιν τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ κονδύλια τελικῆς ζητήσεως μεταβάλλονται ὡς ἀκολούθως: Τὰ μὲν κονδύλια τῆς καταναλώσεως αὐξάνουν κατὰ 5 %, τὰ δὲ κονδύλια τῶν ἐπενδύσεων καὶ τῶν ἐξαγωγῶν αὐξάνουν κατὰ 10 %. Τὸ προκῦπτον ἐκ τῶν ὡς ἄνω μεταβολῶν πρόβλημα εἶναι νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ***ἐπίπεδα δράσεως*** τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν εἰσαγωγῶν καὶ τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα διὰ νὰ ἱκανοποιήσουν τὴν αὐξηθεῖσαν τελικὴν ζήτησιν. Ἡ συνεργατικὴ ἀλληλεξάρτησις μεταξὺ τῶν διαφόρων τομέων τῆς οἰκονομίας ἐκδηλοῦται εἰς τὴν ἀνάγκην ***αὐξήσεως*** τῶν διακλαδικῶν ροῶν καὶ τῶν ἐπιπέδων δράσεως τῶν διαφόρων κλάδων, εἰς τρόπον ὥστε νὰ καταστοῦν πραγματοποιήσιμοι αἱ προγραμματισθεῖσαι μεταβολαὶ εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν μας τὰς πληροφορίας τῶν πινάκων 1 καὶ 2 καὶ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν τὸν πίνακα 3.

Εἰς τὸν πίνακα 3 τὰ κονδύλια τελικῆς ζητήσεως ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰ κονδύλια τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ πίνακος 1, μεταβληθέντα συμφώνως πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος. Τὰ X_1 X_2 καὶ X_3 παριστοῦν τὰς ζητουμένας ἀξίας συνολικῆς παραγωγῆς, ἢ ἄλλως τὰ ***ἐπίπεδα δράσεως***, τῶν τριῶν κλάδων, κατὰ τὴν σειρὰν τοῦ πίνακος. Αἱ ἐγγραφαὶ εἰς τὰς στήλας τοῦ παραγωγικοῦ τομέως ὑπελογίσθησαν ὡς γινόμενα τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα δράσεως X_1, X_2 καὶ X_3 [1].

Λύσις τοῦ τεθέντος προβλήματος σημαίνει νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν X_1, X_2, X_3, ἐξ ὧν τιμῶν δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν ἐν συνεχείᾳ πᾶσαι αἱ ἐγγραφαὶ τοῦ πίνακος 3.

---

1) Ἐφ' ὅσον ἕκαστος συντελεστὴς εἰσροῆς ἀποτελεῖ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς ἀντιστοίχου ἐγγραφῆς (εἰσροῆς) ἑνὸς κλάδου διὰ τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τοῦ αὐτοῦ κλάδου, ἡ ὡς ἄνω ἐγγραφὴ (εἰσροῆς) δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ εἰσροῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον δράσεως τοῦ κλάδου.

Προχωροῦμεν ὡς ἀκολούθως :

Ὡς γνωρίζομεν, ἑκάστη τῶν τριῶν πρώτων σειρῶν δεικνύει τὸν τρόπον διανομῆς τοῦ προϊόντος τῶν ἀντιστοίχων παραγωγικῶν κλάδων μεταξὺ τῶν κλάδων τούτων καὶ τῶν διαφόρων ὑποτομέων τῆς τελικῆς ζητήσεως. Συνεπῶς τὸ ἄθροισμα τῶν κονδυλίων ἑκάστης σειρᾶς

Πίναξ 3

ΕΙΣΡΟΑΙ / ΕΚΡΟΑΙ	Πρωτογενὴς παραγωγὴ	Μεταποίησις	Λοιποὶ κλάδοι	Τελικὴ ζήτησις: Κατανάλωσις		Ἐπενδύσεις		Ἐξαγωγαὶ	Σύνολον
				Ἰδιωτική	Δημοσία	Πάγιαι	Ἀποθεμ.		
Πρωτογενὴς παραγωγὴ		0,272 X_2	0,137 X_3	52,5	7,35		8,8	11	X_1
Μεταποίησις	0,129 X_1		0,414 X_3	63	21	33	11	22	X_2
Λοιποὶ κλάδοι	0,129 X_1	0,182 X_2		42	21	16,5		11	X_3
Εἰσαγωγαὶ	0,032 X_1	0,136 X_2	0,069 X_3	10,5	3,15				X_4
Ἰδιωτικὸς τομεὺς (Ὑπηρεσίαι προσώπων)	0,645 X_1	0,318 X_2	0,311 X_3						X_5
Δημόσιος τομεὺς (Φόροι)	0,065 X_1	0,092 X_2	0,069 X_3	21					X_6
Σύνολον	X_1	X_2	X_3	189	52,5	49,5	19,8	44	X

πρέπει νὰ ἰσοῦται ἐξ ὁρισμοῦ πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ ἀντιστοίχου κλάδου. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης (βλ. πίν. 3) εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ τὸ ἀκόλουθον σύστημα ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} 0 \quad &+ 0{,}272\,X_2 + 0{,}137\,X_3 + 79{,}65 = X_1 \\ 0{,}129\,X_1 &+ 0 \quad + 0{,}414\,X_3 + 150 = X_2 \\ 0{,}129\,X_1 &+ 0{,}182\,X_2 + 0 \quad + 90{,}5 = X_3 \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὡς ἄνω συστήματος λαμβάνομεν :

$$X_1 = 164 \qquad X_2 = 234 \qquad X_3 = 154$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τιμῶν τούτων καὶ κατόπιν ἐκτελέσεως τῶν σημειουμένων πολλαπλασιασμῶν, ὁ πίναξ 3 λαμβάνει τὴν μορφὴν τοῦ πίνακος 4 :

Π ί ν α ξ 4 (α)

ΕΙΣΡΟΑΙ / ΕΚΡΟΑΙ	Πρωτογενὴς παραγωγή	Μεταποίησις	Λοιποὶ κλάδοι	Τελικὴ ζήτησις					
				Κατανάλωσις		Ἐπενδύσεις			
				Ἰδιωτική	Δημοσία	Πάγιαι	Ἀποθεματ.	Ἐξαγωγαί	Σύνολον
Πρωτογενὴς παραγωγή		63,2	21,2	52,5	7,3		8,8	11	164
Μεταποίησις	21		63	63	21	33	11	22	234
Λοιποὶ κλάδοι	21,5	42		42	21	16,5		11	154
Εἰσαγωγαί	5,3	32	11	10,5	3,2				62
Ἰδιωτικὸς τομεὺς (Ὑπηρεσίαι προσώπων)	105,6	75,5	48						229,1
Δημόσιος τομεὺς (Φόροι)	10,6	21,3	10,8	21					63,7
Σύνολον	164	234	154	189	52,5	49,5	19,8	44	906,8

(α) Κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς μετεβλήθησαν ἐλαφρῶς ὡρισμένα ποσὰ πρὸς ἀποφυγὴν τῶν πολλῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἰς τὰς ἐγγραφάς.

Ἤδη ἡ ἀπάντησις τοῦ τεθέντος προβλήματος δίδεται εκ τῶν ἐγγραφῶν τῆς στήλης τῶν συνόλων τοῦ πίνακος.

Τὸ ἐπίπεδον δράσεως τοῦ κλάδου Π	ηὐξήθη ἀπὸ	155 εἰς	164	ἤτοι κατὰ	6 %	περ.
» » » » » Μ	» »	220 »	234	» »	6,3 %	»
» » » » » Λ	» »	145 »	164	» »	6,2 %	»
» » τῶν εἰσαγωγῶν	» »	58 »	62	» »	6,9 %	»
» » εἰσοδημάτων ἰδιωτικ. τομέως	» »	215 »	229,1	» »	6,5 %	»
Ἡ φορολογικὴ ἐπιβάρυνσις	» »	60 »	63,7	» »	6,2 %	»

Ἡ διάρθρωσις τοῦ πίνακος 4 δεικνύει ἐπίσης τὰς μεταβολὰς εἰς τὰς εἰσροὰς καὶ ἐκροὰς αἱ ὁποῖαι ἦσαν ἀναγκαῖαι πρὸς παραγωγὴν τοῦ νέου συνολικοῦ προϊόντος τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων.

Ὁλόκληρον τὸ πλέγμα τῶν διακλαδικῶν σχέσεων τοῦ πίνακος 4 δεικνύεται εἰς τὸ διάγραμμα 35 (1).

5.3.4. Εἶναι πρόδηλος ἡ πρακτικὴ σπουδαιότης τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως. Ἄν, π.χ., αἱ ὑποτεθεῖσαι μεταβολαὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως ἀποτελοῦν ἀντικειμενικοὺς σκοποὺς ἑνὸς οἰκονομικοῦ προγράμματος, πραγματοποιητέους εἰς τὸ τέλος μιᾶς, ἔστω, τριετίας ἀπὸ τοῦ ἔτους τ, τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος 4 δεικνύουν τὰς ἀναγκαίας προϋποθέσεις, ἀπὸ ἀπόψεως ἐπιπέδων δράσεως τῶν παραγωγικῶν κλάδων, ἀξίας διακλαδικῶν ροῶν, ἐπιπέδου εἰσαγωγῶν καὶ ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως (2), τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῶν σκοπῶν τοῦ ὡς ἄνω προγράμματος. Ἐν ἄλλοις λόγοις τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος 4 ἐξασφαλίζουν τὴν συνέπειαν τῶν προγραμματικῶν στόχων πρὸς τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας λειτουργίας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Ἐξ ἄλλου, ἂν ἐξ ὑπαρχουσῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν προκύπτῃ ὅτι ὁ κεφαλαιακὸς ἐξοπλισμὸς ὡρισμένων παραγωγικῶν κλάδων καὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ δὲν ἐπιτρέπουν τὴν σχεδιασθεῖσαν ἐπέκτασιν ἢ ὅτι τὸ ἀπόθεμα συναλλάγματος τῆς ἐν λόγῳ οἰκονομίας (λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν καὶ τῶν ἐξαγωγῶν) δὲν ἐπιτρέπει τὴν ἀπαιτουμένην αὔξησιν τῶν εἰσαγωγῶν, τότε συμπεραίνομεν ὅτι οἱ σκοποὶ τοῦ προγράμματος δὲν δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς οἰκονομικῶς πραγματοποιήσιμοι (3). Ἐκ τοῦ συμπεράσματος αὐτοῦ αἱ ἁρμόδιαι ἀρχαὶ δύνανται νὰ ἀχθοῦν εἰς ἀποφάσεις οἰκονομικῆς πολιτικῆς διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ, πρώτων ὑλῶν κ.λ.π. τῆς δοθείσης οἰκονομίας, τὰ ὁποῖα ἀποκαλύπτει ἡ σύγκρισις τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος 4 καὶ τῶν πραγματικῶν δυνατοτήτων τῆς οἰκονομίας. Ἂν τοιαύτη λύσις εἶναι ἀδύνατος, τότε καθίσταται ἀναγκαία ἡ ἀναπροσαρμογὴ τοῦ προγράμματος (ποσοτικῶς ἢ χρονικῶς), ἐπὶ τῇ βάσει τῶν διαθεσίμων οἰκονομικῶν πόρων. Οὕτω, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ταύτης ἀφ' ἑνὸς μὲν προσδιορίζονται αἱ συνθῆκαι ***λειτουργικῆς συνεπείας*** τῶν τιθεμένων στόχων τοῦ προγράμματος, ἀφ' ἑτέρου δέ, ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ὑπολογιζομένων ἐπιπέδων δράσεως τῶν διαφόρων κλάδων πρὸς τὰς πραγματικὰς παραγωγικὰς

1) Εἰς τὸ διάγραμμα αὐτὸ ἡ ἰδιωτικὴ κατανάλωσις καὶ αἱ ἐπενδύσεις ἐμφανίζονται ὡς εἴσροαὶ τοῦ ἰδιωτικοῦ τομέως τῆς οἰκονομίας, τὰ κονδύλια τῆς δημοσίας καταναλώσεως ὡς εἴσροαὶ τοῦ δημοσίου τομέως, αἱ δὲ ἐξαγωγαὶ καὶ εἰσαγωγαὶ ἐμφανίζονται ὡς εἴσροαὶ καὶ ἔκροαὶ (ἀντιστοίχως) τοῦ τομέως τοῦ ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου.

2) Βλ. εἰδικώτερον 5.8.

3) Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι οἱ στόχοι οὗτοι θεωροῦνται ὡς μὴ οἰκονομικῶς πραγματοποιήσιμοι ἂν καὶ μόνον ἐν ἐκ τῶν ὑπολογιζομένων ἐπιπέδων δράσεως ὑπερβαίνῃ τὰς δυνατότητας τοῦ ἀντιστοίχου κλάδου, καθ' ὅσον ὑποτίθεται ὅτι δὲν ὑφίσταται δυνατότης ὑποκαταστάσεως τοῦ προϊόντος ἑνὸς κλάδου διὰ προϊόντων τῶν ἄλλων κλάδων, ἐκτὸς ἐὰν αἱ ἐλλείπουσαι ποσότητες προϊόντος δύνανται νὰ καλυφθοῦν δι' εἰσαγωγῶν.

δυνατότητας τῶν κλάδων αὐτῶν, ἐλέγχεται ἡ *οἰκονομικὴ συνέπεια τῶν προγραμματιζομένων στόχων*.

Τὸ κυριώτερον πλεονέκτημα τοῦ συστήματος εἰσροῶν - ἐκροῶν, ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, εἶναι ὅτι παρέχει τὴν δυνατότητα παρακολουθήσεως τόσον τῶν *ἀμέσων* ὅσον καὶ τῶν *ἐμμέσων* οἰκονομικῶν συνεπειῶν δοθείσης μεταβολῆς εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν. Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι εἰς μίαν χώραν μελετᾶται ἡ ἐκτέλεσις ἑνὸς στεγαστικοῦ προγράμματος ἐπενδύσεων. Δὲν εἶναι κατ' ἀρχὴν δύσκολον νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ποσότητες σιδήρου, τσιμέντου καὶ λοιπῶν οἰκοδομικῶν ὑλικῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ὡς ἄνω ἐκτέλεσιν. Πρέπει ὅμως νὰ ληφθῇ ἐπίσης ὑπ' ὄψιν ὅτι, πρὸς ἐξασφάλισιν τῶν ἀναγκαιουσῶν ποσοτήτων, π.χ., σιδήρου, ἀπαιτοῦνται ἀνάλογοι ποσότητες σιδηρομεταλλεύματος, συγκοινωνιακῶν ὑπηρεσιῶν, καυσίμου ὕλης κ.λ.π. ἢ ἐνδεχομένως ἀνάλογος ποσότης συναλλάγματος, πρὸς εἰσαγωγὴν τοῦ σιδήρου ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ. Καθίσταται εὐκόλως ἀντιληπτὸν πόσον πολύπλοκον ἀποβαίνει τὸ συνολικὸν πλέγμα τῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι ἀναφαίνονται κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ὡς ἄνω προγράμματος ἢ οἱουδήποτε ἄλλου προγράμματος ἐπενδύσεων ἢ καταναλώσεως. Ἡ ἀνάλυσις εἰσροῶν - ἐκροῶν παρέχει τὴν δυνατότητα εὐχεροῦς παρακολουθήσεως τοῦ πολυπλόκου αὐτοῦ πλέγματος σχέσεων.

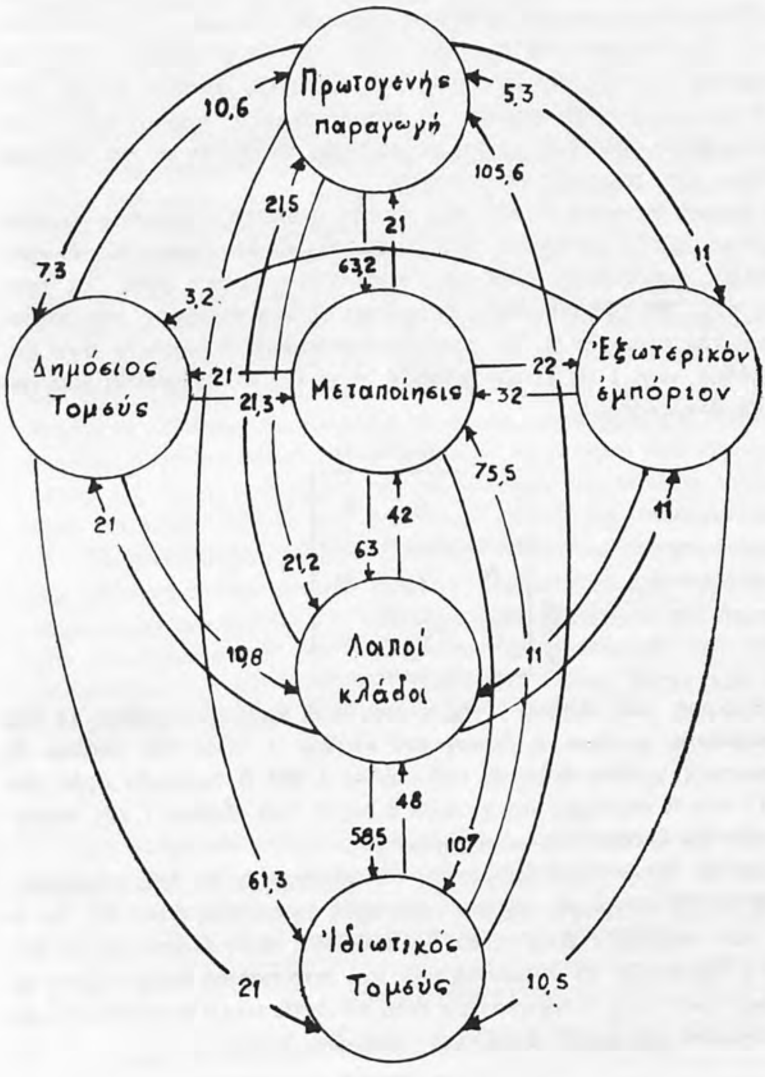
5.3.5. Μέχρι τοῦδε ὑπετίθετο ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν διαφόρων ἀγαθῶν (καὶ ὑπηρεσιῶν) παραμένουν σταθεραὶ καὶ ὅτι μόνον αἱ ποσότητες αὐτῶν εἶναι μεταβληταί. Εἶναι ἐν τούτοις δυνατὴ ἡ κατάστρωσις ἑνὸς ὑποδείγματος εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ποσότητες λαμβάνονται ὡς σταθερὰ μεγέθη, αἱ δὲ τιμαὶ δύνανται νὰ μεταβάλλωνται. Αἱ μεταβληταὶ τιμαὶ τοῦ ὑποδείγματος δύνανται τότε νὰ ταξινομηθοῦν εἰς δύο κατηγορίας, τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τιμὰς καὶ τὰς ἐξηρτημένας τοιαύτας (1).

Ἂν εἰς τὸ ὑπόδειγμα τῶν μεταβλητῶν τιμῶν ληφθοῦν ὡς ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, π.χ., οἱ ἐργατικοὶ μισθοὶ καὶ ὡς ἐξηρτημέναι μεταβληταὶ αἱ τιμαὶ τῶν προϊόντων τῶν διαφόρων κλάδων, τότε θὰ ἦτο δυνατόν, διὰ χρησιμοποιήσεως τοῦ ὑποδείγματος τούτου (2), νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἄμεσοι καὶ ἔμμεσοι ἐπιδράσεις ἐπὶ τοῦ κόστους καὶ τῶν τιμῶν διαφόρων προϊόντων, αἱ ἀπορρέουσαι ἀπὸ δοθεῖσαν μεταβολὴν εἰς τοὺς ἐργατικοὺς μισθούς (3). Τὰ προβλήματα τῆς ἐπιπτώσεως τῶν ἐμμέσων φόρων, τῶν ὅρων ἐμπορίου μεταξὺ γεωργίας καὶ βιομηχανίας καὶ γενι-

1) Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ ἐξετασθὲν (ἀνοικτὸν) ὑπόδειγμα, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ μεταβληταὶ ποσότητες ταξινομοῦνται εἰς τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν παραγωγικῶν τομέων (ἐξηρτημέναι μεταβληταί) καὶ τὴν τελικὴν ζήτησιν (ἀνεξάρτητα μεγέθη).

2) Κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν ἐν τμήματι (5.3.3), ἀνωτέρω, ἐφαρμοσθέντα.

3) Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο θὰ ἦτο χρήσιμον, π.χ., διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν ἐπιδράσεων σχεδιαζομένης ἀναπροσαρμογῆς ἐργατικῶν μισθῶν λόγῳ πληθωρισμοῦ.



Διάγραμμα 35.

κῶς προβλήματα νομισματικῆς φύσεως θὰ ἠδύναντο κατ' ἀρχὴν νὰ ἐρευνηθοῦν δι' ἑνὸς τοιούτου ὑποδείγματος.

5.3.6. Μία ἐκ τῶν ἐφαρμογῶν τοῦ ὑποδείγματος Leontief εἶναι καὶ ἡ καλουμένη ***διαχωρικὴ ἀνάλυσις εἰσροῶν - ἐκροῶν***, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὴν παρακολούθησιν ὄχι μόνον τῶν διακλαδικῶν ἀλλὰ καὶ τῶν διαχωρικῶν ροῶν τῶν ἀγαθῶν, ἤτοι τῶν ροῶν ἀγαθῶν μεταξὺ διαφόρων περιοχῶν μιᾶς οἰκονομίας. Ἡ ἐφαρμογὴ αὕτη παρουσιάζει ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον, ἰδίᾳ διὰ χώρας μὲ σοβαρὰς διαφορὰς εἰς τὰ ἐπίπεδα ἀναπτύξεως ἀπὸ περιοχῆς εἰς περιοχήν.

Ἡ βασικὴ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἁπλῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν καὶ τῆς διαχωρικῆς ἀναλύσεως συνίσταται εἰς τὴν διάσπασιν τῶν ἐγγραφῶν ἑκάστης διακλαδικῆς ροῆς εἰς πλείονας διαχωρικὰς ροάς. Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι μία οἰκονομία διαιρεῖται εἰς δύο περιοχάς, τὴν περιοχὴν Α καὶ τὴν περιοχὴν Β. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ ἐκροὴ χ ἀπὸ δοθέντα κλάδον, π.χ. I εἰς ἕτερον κλάδον, π.χ. II, θὰ ἐμφανισθῇ κατανεμημένη ὡς ἀκολούθως :

		Κλάδος II	
		Α	Β
Κλάδος I	Α	χ_1	χ_2
	Β	χ_3	χ_4

χ_1 εἶναι ἡ ἐκροὴ τοῦ κλάδου I τῆς περιοχῆς Α πρὸς τὸν κλάδον II τῆς αὐτῆς περιοχῆς, χ_2 εἶναι ἡ ἐκροὴ τοῦ κλάδου I πρὸς τὸν κλάδον II τῆς Β περιοχῆς, χ_3 εἶναι ἡ ἐκροὴ τοῦ κλάδου I τῆς Β περιοχῆς πρὸς τὸν κλάδον II τῆς Α περιοχῆς καὶ χ_4 εἶναι ἡ ἐκροὴ τοῦ κλάδου I τῆς περιοχῆς Β πρὸς τὸν κλάδον τῆς αὐτῆς περιοχῆς.

Οὕτω, εἰς περίπτωσιν διαιρέσεως τῆς οἰκονομίας εἰς δύο περιοχάς, ἀντὶ μιᾶς ἁπλῆς ἐγγραφῆς ἔχομεν τέσσαρας ἐγγραφάς, ἤτοι 2^2. Ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν περιοχῶν εἶναι μ, θὰ ἔχωμεν, ἀντὶ μιᾶς ἐγγραφῆς, μ^2 ἐγγραφάς (1). Προφανῶς τὰ ὑπολογιστικὰ καὶ στατιστικὰ προβλήματα ἐν προκειμένῳ εἶναι πολὺ δυσχερέστερα ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα προβλήματα εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἁπλῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν.

5.4. Πίναξ εἰσροῶν - ἐκροῶν καὶ ἐθνικοὶ λογαριασμοί

5.4.1. Ὁ πίναξ εἰσροῶν - ἐκροῶν δύναται, ὡς ἐλέχθη, νὰ παρα-

1) Εἰς τὴν πρᾶξιν αἱ ἐγγραφαὶ εἶναι συνήθως πολὺ ὀλιγώτεραι διότι δὲν πραγματοποιοῦνται πάντοτε ροαὶ μεταξὺ ὅλων τῶν περιοχῶν.

βληθῇ πρὸς τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν. Ἐκ τῶν πληροφοριῶν τοῦ πίνακος τούτου δυνάμεθα, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἐθνικοὺς λογαριασμούς, νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ὕψος τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος καὶ τὸν τρόπον διαθέσεως αὐτοῦ κατὰ δοθεῖσαν περίοδον.

Ὑπάρχουν ἐν τούτοις σημαντικαὶ διαφοραὶ μεταξὺ τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν καὶ τοῦ πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν. Αἱ κυριώτεραι ἐκ τῶν διαφορῶν αὐτῶν εἶναι αἱ ἑξῆς δύο: α) εἰς τὸν πίνακα τῶν εἰσροῶν - ἐκροῶν περιέχονται πληροφορίαι περὶ τοῦ τελικοῦ προϊόντος μιᾶς οἰκονομίας ἐντὸς μιᾶς δοθείσης περιόδου, ὡς συμβαίνει μὲ τοὺς ἐθνικοὺς λογαριασμούς, ἐπὶ *πλέον* ὅμως περιέχονται καὶ πληροφορίαι περὶ τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν τῆς δοθείσης οἰκονομίας, αἱ ὁποῖαι ἀποκλείονται ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν. β) Ἐπειδὴ ἡ λογιστικὴ βάσις διὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν εἶναι αἱ ἀγοραὶ καὶ πωλήσεις ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων, δὲν λαμβάνονται συνήθως ὑπ' ὄψιν κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, βάσει τοῦ ἀνωτέρω πίνακος, τὰ ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ εἰσρέοντα εἰσοδήματα. Συνεπῶς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα, ὡς δίδεται ἐκ τοῦ πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν, εἶναι συνήθως κατώτερον τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, ὡς τοῦτο καθορίζεται εἰς τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν, κατὰ τὸ ποσὸν τῶν ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ εἰσρεόντων εἰσοδημάτων.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος δύναται νὰ προσδιορισθῇ κατὰ δύο τρόπους ἐκ τοῦ πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν: α) Διὰ προσθέσεως τῶν ἀθροιστικῶν κονδυλίων τῆς καταναλώσεως (ἰδιωτικῆς καὶ δημοσίας) καὶ τῶν ἐπενδύσεων καὶ τῆς ἀφαιρέσεως (προσθέσεως) τοῦ ἐλλείμματος (πλεονάσματος) τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου. Οὕτω, βάσει τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 1 ἔχομεν:

$$180 + 50 + 45 + 18 - 18 = 275$$

Τὸ συνολικὸν ποσὸν 275 ἀποτελεῖ τὸ ἀκαθάριστον ἐθνικὸν εἰσόδημα (gross value added) τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους (¹).

β) Διὰ προσθέσεως τῶν εἰσοδημάτων ἐξ ὑπηρεσιῶν τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων τοῦ Ἰδιωτικοῦ τομέως καὶ τῶν φόρων:

$$215 + 60 = 275$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι ἐπὶ τοῦ πίνακος 4 λαμβάνομεν:

Ἀκαθ. ἐθν. εἰσόδημα: $241{,}5 + 69{,}3 - 18 = 292{,}8$

ἢ $229{,}1 + 63{,}7 = 292{,}8$

1) Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω σημειωθείσας ἐπιφυλάξεις καὶ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἐν τῷ πίνακι ἀναγραφομένη ἀξία τῶν ἐπενδύσεων εἶναι ἀκαθάριστος.

Ἐκ τῶν πινάκων 1 καὶ 4 δυνάμεθα τώρα νὰ σχηματίσωμεν τοὺς ἀναλυτικοὺς λογαριασμοὺς τοῦ πίνακος 5.

Οἱ λογαριασμοὶ I-IV ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀναλόγους λογαριασμοὺς τοῦ συστήματος ἐθνικῶν λογαριασμῶν. Ὁ λογαριασμὸς V συναντᾶται μόνον εἰς τὸ σύστημα εἰσροῶν - ἐκροῶν.

Εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας σημειώσεως ὅτι ἑκάστη ἐγγραφὴ τοῦ πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν ἀποτελεῖ ἐκ κατασκευῆς «χρέωσιν» (εἰσροὴν) ἑνὸς κλάδου ἢ τομέως καὶ ταυτοχρόνως «πίστωσιν» (ἐκροὴν) ἑνὸς ἄλλου κλάδου ἢ τομέως (1). Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης ὁ πίναξ εἰσροῶν - ἐκροῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία ἁπλοποιημένη λογιστικὴ μορφὴ ***διπλογραφικῆς*** παρακολουθήσεως τῶν συναλλαγῶν ὁλοκλήρου τῆς οἰκονομίας.

Ἐφ' ὅσον ὁ πίναξ 1 παριστᾷ λογιστικὴν κατάστασιν τῆς οἰκονομίας διὰ τὸ δοθὲν ἔτος, οἱ ἐκ τοῦ πίνακος τούτου ἀπορρέοντες λογαριασμοὶ ἀναφέρονται εἰς ***πραγματοποιηθέντα*** οἰκονομικὰ μεγέθη. Ἀντιθέτως οἱ ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 4 διαμορφούμενοι λογαριασμοὶ ἀναφέρονται εἰς τὰ ***ὑπολογισθέντα*** ἐπίπεδα τῶν ὡς ἄνω μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα (ἐπίπεδα) εἶναι ἀναγκαῖα πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς νέας τελικῆς ζητήσεως τῆς οἰκονομίας.

5.4.2. Ἡ λογιστικὴ συνέπεια καθιστᾷ χρήσιμον τὸν πίνακα εἰσροῶν - ἐκροῶν καὶ ἀπὸ καθαρᾶς στατιστικῆς ἀπόψεως. Οὕτω διὰ τῆς συστηματικῆς καταχωρήσεως εἰς τὸν ἐν λόγῳ πίνακα στατιστικῶν στοιχείων περὶ τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος μιᾶς οἰκονομίας, ἐντὸς δοθείσης περιόδου, ὡς ἐπίσης καὶ περὶ τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν αἱ ὁποῖαι ἔλαβον χώραν κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον, παρέχεται ἡ δυνατότης ἐποπτικῆς ἐξετάσεως τῶν στοιχείων αὐτῶν καὶ συνεπῶς ἐκκαθαρίσεως τυχὸν ἀσυνεπειῶν ἢ συμπληρώσεως πληροφοριακῶν κενῶν (2).

5.4.3. Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ δαπάναι καταναλώσεως τοῦ ἰδιωτικοῦ ἢ δημοσίου τομέως εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ἐσόδων τοῦ ἀντιστοίχου τομέως, ἀντὶ ἀποταμιεύσεως σημειοῦται ***ὑπερκατανάλωσις*** ἢ ἄλλως ***ἀρνητικὴ ἀποταμίευσις***.

Ἡ συνολικὴ ἐγχώριος ἀποταμίευσις δοθέντος ἔτους εἰς μίαν οἰκονομίαν εἶναι συνεπῶς δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ ὡς τὸ (ἀλγεβρικὸν) ἄθροισμα τῆς ἀποταμιεύσεως καὶ ὑπερκαταναλώσεως, τῆς τελευταίας ἐχούσης ἀρνητικὸν σημεῖον. Παραδείγματα :

1) Ἐὰν εἰς τὸν πίνακα εἰσροῶν - ἐκροῶν, πλὴν τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν, καταγράφωνται ἐπίσης καὶ αἱ ***ἐνδοκλαδικαὶ*** συναλλαγαί, ἤτοι αἱ παροχαὶ ἑκάστου κλάδου εἰς τὸν ἑαυτόν του, θὰ ἔχωμεν ἐγγραφάς τινὰς αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ταυτοχρόνως χρέωσιν καὶ πίστωσιν τοῦ αὐτοῦ κλάδου.

2) Εἰς τινας περιπτώσεις εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθοῦν ἐκ τῶν σχέσεων τοῦ πίνακος (π.χ. τῆς ἰσότητος τοῦ ἀθροίσματος τῶν σειρῶν καὶ στηλῶν) τυχὸν ἐλλείποντα στατιστικὰ στοιχεῖα.

Πίναξ 5

Ἐθνικοὶ Λογαριασμοὶ καὶ Διακλαδικαὶ Συναλλαγαὶ διὰ τὰ ἔτη τ καὶ ψ (α)

	Πραγματικὰ δεδομένα διὰ τὸ ἔτος τ		Προβλέψεις διὰ τὸ ἔτος ψ		% Μεταβολαὶ μεταξὺ ἐτῶν τ καὶ ψ
I. *Εἰσοδήματα καὶ καταναλωτικαὶ δαπάναι ἰδιωτῶν*					
α) Εἰσόδημα (μισθοί, κέρδη κλπ.)		215		229,1	6,5
β) Δαπάναι καταναλώσεως		180		189	5
γ) Διαφορὰ (ἀποταμίευσις)		35		40,1	14,5
II. *Ἔσοδα καὶ ἔξοδα Δημοσίου*					
α) Ἔσοδα (φόροι)		60		63,7	6,2
β) Ἔξοδα (κατανάλωσις)		50		52,5	5
γ) Διαφορὰ (ἀποταμίευσις)		10		11,2	12
III. *Ἐξωτερικὸν ἐμπόριον*					
α) Εἰσαγωγαὶ		58		62	7
β) Ἐξαγωγαὶ		40		44	5
γ) Ἔλλειμμα Ἐμπορ. Ἰσοζυγίου		18		18	0
IV. *Ἐπένδυσις - Ἀποταμίευσις*					
α) Ἐπένδυσις		63		69,3	10
Παγία	45		49,5		
Ἀποθέματα	18		19,8		
β) Ἀποταμίευσις		63		69,3	10
Ἰδιωτῶν	35		40,1		
Δημοσίου	10		11,2		
Ἔλλειμμα Ἐμπ. Ἰσοζυγίου (β)	18		18		
V. *Διακλαδικαὶ συναλλαγαὶ*					
α) Ἀγοραὶ (εἰσροαί)		220		231,9	4,5
ὑπὸ Πρωτ. Παραγωγῆς	40		42,5		
» Μεταποιήσεως	100		105,2		
» Λοιπῶν κλάδων	80		84,2		
β) Πωλήσεις (ἐκροαί)		220		231,9	4,5
ὑπὸ Πρωτ. Παραγωγῆς	80		84,4		
» Μεταποιήσεως	80		84		
» Λοιπῶν Κλάδων	60		63,5		

α) Διὰ τοῦ συμβόλου ψ παριστᾶται τὸ ἔτος εἰς ὃ ἀναφέρεται ὁ πίναξ 4.

β) Τὸ ἔλλειμμα τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποταμίευσις ἐξωτερικοῦ, χρηματοδοτοῦσα ἰσόποσον ἐπένδυσιν τῆς δοθείσης οἰκονομίας ἢ ὡς μείωσις τοῦ συναλλαγματικοῦ ἀποθέματος τῆς οἰκονομίας ταύτης, τὸ δὲ πλεόνασμα τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου ὡς ἀποταμίευσις τοῦ ἐσωτερικοῦ χρησιμοποιουμένη εἰς ἀλλοδαπήν, ἢ ὡς αὔξησις τοῦ συναλλαγματικοῦ ἀποθέματος.

		Εἰσόδημα	Κατανάλωσις	Ἀποταμίευσις (εἰς ν.μ.)
I)	Ἰδιωτικὸς τομεύς:	200	250	50
	Δημόσιος » :	80	90	–10
	Σύνολον ἐγχωρίου ἀποταμιεύσεως			40
II)	Ἰδιωτικὸς τομεύς:	200	250	50
	Δημόσιος » :	50	100	–50
	Σύνολον ἐγχωρίου ἀποταμιεύσεως			0
III)	Ἰδιωτικὸς τομεύς:	200	250	50
	Δημόσιος » :	40	100	–60
	Σύνολον ἐγχωρίου ἀποταμιεύσεως			–10

Εἰς τὸ τελευταῖον παράδειγμα ἡ οἰκονομία παρουσιάζει ὑπερκατανάλωσιν 10 ν.μ., καλυπτομένην ἐνδεχομένως ἐξ ἀποταμιεύσεων τοῦ ἐξωτερικοῦ ἢ ἐκ μειώσεως τοῦ συναλλαγματικοῦ ἀποθέματος τῆς οἰκονομίας ἤτοι διὰ χρησιμοποιήσεως ἀποταμιεύσεων προηγουμένων ἐτῶν. Εἰς ἀμφοτέρας ὅμως τὰς περιπτώσεις θὰ παρατηρηθῇ ἰσόποσον ἔλλειμμα τοῦ ἐξωτερικοῦ τομέως (ἤτοι τοῦ λογαριασμοῦ τοῦ ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου ἢ γενικώτερον τοῦ ἰσοζυγίου πληρωμῶν τῆς οἰκονομίας).

Ἡ συνολικὴ ἀποταμίευσις ἥτις τίθεται εἰς τὴν διάθεσιν μιᾶς οἰκονομίας ἐντὸς δοθέντος ἔτους πρὸς κάλυψιν ἐπενδύσεων (ἢ ὑπερκαταναλώσεως) τῆς οἰκονομίας ταύτης εὑρίσκεται ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα τῆς ἐγχωρίου ἀποταμιεύσεως προστεθῇ καὶ τὸ ἔλλειμμα τοῦ ἐξωτερικοῦ τομέως ἢ ἐξ αὐτῆς ἀφαιρεθῇ τὸ «πλεόνασμα» τοῦ ἐν λόγῳ τομέως. Τὸ πλεόνασμα τοῦτο ἀποτελεῖ ἐγχώριον ἀποταμίευσιν χρησιμοποιουμένην ὅμως εἰς τὸ ἐξωτερικόν.

Καθίσταται προφανὲς ὅτι ἂν εἶναι δεδομέναι αἱ εἰσροαὶ καὶ ἐκροαὶ (κατανάλωσις) τοῦ ἰδιωτικοῦ καὶ δημοσίου τομέως, ὡς καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ τομέως τῆς οἰκονομίας, δύναται νὰ προσδιορισθῇ εὐκόλως τὸ ἐπίπεδον τῶν καθαρῶν ἐγχωρίων ἐπενδύσεων.

5.5. Ἀνοικτὰ καὶ κλειστὰ ὑποδείγματα

Πάντα τὰ ὑποδείγματα τοῦ συστήματος εἰσροῶν - ἐκροῶν τὰ ὁποῖα περιλαμβάνουν, ὡς καὶ τὸ ἤδη ἐξετασθὲν ὑπόδειγμα, ἕνα τομέα τελικῆς ζητήσεως, ἐξωγενῶς καθοριζόμενον, χαρακτηρίζονται ὡς «ἀνοικτά». Τὰ ὑποδείγματα ταῦτα προῆλθον ἐκ τῶν «κλειστῶν» ὑποδειγμάτων εἰσροῶν-ἐκροῶν, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχει τομεὺς τελικῆς ζητήσεως, τὰ δὲ ἐπίπεδα δράσεως πάντων τῶν οἰκονομικῶν κλάδων θεωροῦνται ὡς καθοριζόμενα ἐντὸς τοῦ συστήματος (ἐνδογενῶς). Εἰς τὰ κλειστὰ ὑποδείγματα τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα ἐν τῷ συνόλῳ λαμβάνονται ὡς εἷς παραγωγικὸς κλάδος, τοῦ ὁποίου ἐκροαὶ (προϊόντα) εἶναι αἱ πρὸς τοὺς λοιποὺς κλάδους τῆς οἰκονομίας παρεχόμεναι ὑπηρεσίαι καὶ εἰσροαὶ εἶναι ἡ κατα νάλωσις διαφόρων προϊόντων ἐγχωρίως παραγομένων ἢ εἰσαγομένων ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ.

Τὸ ἐξωτερικὸν ἐμπόριον ἐπίσης θεωρεῖται εἰς τὰ κλειστὰ ὑποδείγματα ὡς ἰδιαίτερος παραγωγικὸς κλάδος, μὲ εἰσροὰς τὰ ἐξαγόμενα προϊόντα καὶ ἐκροὰς τὰ εἰσαγόμενα τοιαῦτα [1]. Σταθεροὶ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ καθορίζονται ἐν προκειμένῳ διὰ πάντας τοὺς οἰκονομικοὺς κλάδους. Στατιστικαὶ δυσχέρειαι καὶ ἰδίως ὁ ἀπρόβλεπτος χαρακτὴρ τῆς ἐξελίξεως ὡρισμένων τομέων, π.χ. τοῦ τομέως τῶν ἐξαγωγῶν, ὤθησαν εἰς τὴν ἐγκατάλειψιν τῶν κλειστῶν ὑποδειγμάτων καὶ τὴν ἀποδοχὴν τῶν ἀνοικτῶν τοιούτων. Τὰ ἀνοικτὰ συστήματα ἐξ ἄλλου εἶναι ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των πρόσφορα διὰ τὴν μελέτην προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐξετασθέντος ὑποδείγματος. Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα ὑποτίθεται συνήθως ὅτι τὰ ἐπίπεδα δράσεως ὡρισμένων τομέων, π.χ. τοῦ κρατικοῦ τομέως καὶ τοῦ τομέως τῶν ἐξαγωγῶν, καθορίζονται ἐξωγενῶς ὡς σκοποὶ τοῦ οἰκονομικοῦ προγράμματος καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν εἰσαγωγῶν καὶ τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως, τὰ ὁποῖα θὰ ἐπιτρέψουν τὴν πραγματοποίησιν τῶν ἐν λόγῳ σκοπῶν.

5.6. Στατικὰ καὶ δυναμικὰ ὑποδείγματα

Εἰς τὸ προηγουμένως ἐξετασθὲν ὑπόδειγμα καθορίζονται τὰ ἐπίπεδα εἰσροῶν καὶ ἐκροῶν τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα διὰ τὴν ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως. Εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ συνέπειαι τῶν ἐπενδύσεων ἐπὶ τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τῶν διαφόρων κλάδων καὶ δὲν ἐξετάζεται ἡ διαχρονικὴ ἐξέλιξις τῶν ἐπιπέδων δράσεως τῶν κλάδων αὐτῶν. Διὰ τοῦτο τὸ ὑπόδειγμα χαρακτηρίζεται ὡς ***στατικόν***.

Τὰ στατικὰ ὑποδείγματα δυνατὸν νὰ εἶναι ἀνοικτὰ ἢ κλειστά, ἀναλόγως ἐὰν περιέχεται εἰς αὐτὰ ἰδιαίτερος τομεὺς τελικῆς ζητήσεως ἢ ἐὰν πάντα τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν οἰκονομικῶν κλάδων ἀλληλοκαθορίζωνται ἐντὸς τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος (ἐνδογενῶς).

Διὰ τῶν στατικῶν ὑποδειγμάτων εἶναι, ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη, γενικῶς δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῶν μεταβολῶν εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν καὶ εἰς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἐγγραφῶν πινάκων εἰσροῶν - ἐκροῶν ἀνηκόντων εἰς διαφόρους χρονικὰς περιόδους (συγκριτικὴ στατική), ἀλλὰ δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ περιγραφὴ τῆς ἐξελίξεως τῶν διαφόρων μεγεθῶν εἰς τὸ μεταξὺ τῶν ἐν λόγῳ περιόδων

1) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται ὅτι οἱ ὅροι «κλειστὸν ἢ ἀνοικτὸν» ὑπόδειγμα δὲν σημαίνουν ἀποκλεισμὸν ἢ μὴ τοῦ ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου ἀπὸ τὸ ὑπόδειγμα.

χρονικὸν διάστημα. Πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ κενοῦ αὐτοῦ ὁ καθηγητὴς Λεόντιεφ ἐπενόησε τὰ ***δυναμικὰ*** ὑποδείγματα, εἰς τὰ ὁποῖα εἰσάγονται ὁ ***χρόνος*** καὶ αἱ ***μεταβολαὶ τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ*** τῶν παραγωγικῶν κλάδων ὡς ὑπολογιστικοὶ παράγοντες. Τὰ δυναμικὰ ὑποδείγματα διακρίνονται ὡσαύτως εἰς ἀνοικτὰ καὶ κλειστά, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ γνωστοῦ κριτηρίου.

5.7. Μαθηματικὴ ἐπισκόπησις τῆς στατικῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν

5.7.1. Κλειστὸν ὑπόδειγμα. Ἂν X_ι παριστᾷ τὴν ἀξίαν [1] τοῦ ***συνολικοῦ*** ἐτησίου προϊόντος τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου ι καὶ $\chi_{\iota\kappa}$ τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ ἐν λόγῳ προϊόντος ἡ ὁποία ἀπορροφᾶται ἐντὸς μιᾶς περιόδου (π.χ. ἑνὸς ἔτους) ὑπὸ τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου κ διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας X_κ τοῦ κλάδου τούτου, τότε αἱ συναλλακτικαὶ σχέσεις τῶν ν παραγωγικῶν κλάδων μιᾶς οἰκονομίας, κατὰ τὴν ὡς ἄνω περίοδον, δύνανται νὰ παρασταθοῦν διὰ τοῦ ἀκολούθου συστήματος ἐξισώσεων :

$$
\begin{array}{rcl}
X_1 - \chi_{12} - \chi_{13} - \dots - \chi_{1\nu} & = & 0 \\
-\chi_{21} + X_2 - \chi_{23} - \dots - \chi_{2\nu} & = & 0 \\
-\chi_{31} - \chi_{32} + X_3 - \dots - \chi_{3\nu} & = & 0 \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
-\chi_{\nu 1} - \chi_{\nu 2} - \chi_{\nu 3} - \dots + X_\nu & = & 0
\end{array} \qquad (1)
$$

ἢ συνοπτικῶς :

$$
X_\iota - \sum_{\kappa=1}^{\nu} \chi_{\iota\kappa} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \iota = 1, 2, \dots, \nu \\ \text{καὶ } \iota \neq \kappa \end{array} \right. \qquad (1')
$$

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) παριστοῦν ἁπλῶς λογιστικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν παραγωγικῶν κλάδων, ὡς ἀπεικονίζουσαι τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τῶν κλάδων αὐτῶν, κατὰ τὴν δοθεῖσαν περίοδον. Δι' ὃ καὶ καλοῦνται εἰδικώτερον ***ἐξισώσεις κατανομῆς***. Οὕτω, ἡ πρώτη ἐξίσωσις δεικνύει ὅτι τὸ συνολικὸν ἐτήσιον προϊὸν τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου 1 διανέμεται ἐξ ὁλοκλήρου μεταξὺ τῶν λοιπῶν κλάδων 2, 3, . . . , ν [2]. Ἀνάλογος ἑρμηνεία πρέπει νὰ δοθῇ καὶ εἰς τὰς λοιπὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

---

1) Ἡ ἀξία τῶν προϊόντων ἀποτιμᾶται εἰς σταθερὰς τιμάς.

2) Εἰς τὸ X_1 δὲν συμπεριλαμβάνεται ἡ ἀξία τῆς ὑπὸ τοῦ κλάδου 1 καταναλι-

Εἰς τὸ σύστημα (1) τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα ἐν τῷ συνόλῳ θεωροῦνται ὡς εἷς παραγωγικὸς κλάδος, ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν, ὁ ὁποῖος προσφέρει εἰς τοὺς λοιποὺς κλάδους τὰς ὑπηρεσίας του (ἐργασίαν) καὶ ἀπορροφᾷ καταναλωτικὰ ἀγαθά. Ὁμοίως, ὁ κρατικὸς τομεὺς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παραγωγικὸς κλάδος, προσφέρων ὑπηρεσίας διοικήσεως, ἀσφαλείας κ.λ.π., εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους καὶ καταναλίσκων μέρος τοῦ προϊόντος τῶν κλάδων αὐτῶν (1). Τὸ ἐξωτερικὸν ἐμπόριον δύναται ἐπίσης νὰ θεωρηθῇ ὡς ἰδιαίτερος κλάδος, ἀπορροφῶν τὰ ***ἐξαγόμενα*** προϊόντα τῶν λοιπῶν κλάδων καὶ προσφέρων εἰς αὐτοὺς τὰ ***εἰσαγόμενα*** ἐκ τῆς ἀλλοδαπῆς προϊόντα.

Αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀξιῶν τῶν ὑφ᾽ ἑκάστου κλάδου καταναλισκομένων προϊόντων ἐντὸς μιᾶς περιόδου καὶ τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον δύνανται νὰ παρασταθοῦν διὰ μιᾶς σειρᾶς ἐξισώσεων τῆς μορφῆς :

$$\alpha_{\iota\kappa} = \frac{\chi_{\iota\kappa}}{X_\kappa} \qquad \begin{cases} \iota = 1, 2, \ldots, \nu \\ \kappa = 1, 2, \ldots, \nu \end{cases} \tag{2}$$

Τὸ $\alpha_{\iota\kappa}$ εἶναι «συντελεστὴς εἰσροῆς» (2) καὶ καθορίζει τὴν ὑπὸ τοῦ κλάδου κ καταβαλλομένην ἀξίαν εἰς τὸν κλάδον ι διὰ τὴν χρησιμοποίησιν ποσότητος προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου πρὸς παραγωγὴν προϊόντος τοῦ κλάδου κ ἀξίας μιᾶς νομισματικῆς μονάδος. Οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς θεωροῦνται ***σταθεροί***, ἀνεξαρτήτως τοῦ βαθμοῦ καὶ τῆς περιόδου ἀπασχολήσεως τῶν οἰκείων κλάδων (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν). Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν δι᾽ ἕκαστον κλάδον ἰσοῦται προφανῶς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν «εἰσροῶν» αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν τοῦ ὡς ἄνω κλάδου. Ἐνταῦθα ὑποτίθεται γενικῶς, πρὸς ὁμοιομορφίαν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰσροῶν δι᾽ ὅλους τοὺς παραγωγικοὺς κλάδους εἶναι ν, ἤτοι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν παραγωγικῶν κλάδων τοῦ συστήματος, ἀλλ᾽ ὑποτίθεται ἐπίσης ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ μερικῶν ἐκ τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἤδη λεχθέντα, οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς διὰ τὸν κλάδον 1 θὰ εἶναι :

σκομένης ποσότητος ἰδίου προϊόντος, δι᾽ ὃ καὶ εἰς τὴν συνοπτικὴν παράστασιν (1') δὲν ἀθροίζονται τὰ στοιχεῖα $\chi_{\iota\kappa}$ ὅταν $\iota = \kappa$.

1) Τὸ κόστος τῶν ὡς ἄνω προϊόντων καλύπτεται ἐκ τῶν φορολογικῶν ἐσόδων, τὰ ὁποῖα καταβάλλονται εἰς τὸ Κράτος ὑπὸ τῶν λοιπῶν κλάδων, ὡς ἀντιπαροχὴ διὰ τὰς κρατικὰς ὑπηρεσίας.

2) Βλ. 5.3.2., ἀνωτέρω.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\nu 1} \end{bmatrix}$$

Κατ' ἀναλογίαν, οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς τῶν κλάδων 2 καὶ ν θὰ εἶναι:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\nu 1} \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{3\nu} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix},$$

ἀντιστοίχως.

Αἱ ἀνωτέρω στῆλαι (διανύσματα) τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς παριστοῦν προφανῶς τὰς *παραγωγικὰς δραστηριότητας* τῶν ἀντιστοίχων κλάδων, αἱ ὁποῖαι δεικνύουν τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας παραγωγῆς προϊόντος ἀξίας μιᾶς μονάδος τῶν κλάδων αὐτῶν.

Ἐκ τῶν στηλῶν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῶν διαφόρων κλάδων δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν τὴν *μήτραν τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς*, δι' ὁλόκληρον τὴν ἐξεταζομένην οἰκονομίαν:

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3\nu} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν ἐνταῦθα αἱ ἐνδοκλαδικαὶ συναλλαγαί, ἤτοι ἡ ὑφ' ἑκάστου κλάδου κατανάλωσις ἰδίου προϊόντος, θὰ θέσωμεν συμβατικῶς $\chi_{\iota\iota} = 0$ καί:

$$\alpha_{\iota\iota} = \frac{0}{X_\iota} = 0 \quad (\iota = 1, 2, \ldots, \nu)$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ κυρία διαγώνιος ($\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$) τῆς μήτρας Α περιλαμβάνει μόνον μηδενικὰ στοιχεῖα.

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς (ἐξισώσεις 2) δυνάμεθα τώρα, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸ σύστημα (1), νὰ σχηματίσωμεν τὸ κάτωθι σύστημα ἐξισώσεων :

$$
\begin{array}{rcl}
X_1 - \alpha_{12}X_2 - \alpha_{13}X_3 - \ldots - \alpha_{1\nu}X_\nu &=& 0 \\
-\alpha_{21}X_1 + X_2 - \alpha_{23}X_3 - \ldots - \alpha_{2\nu}X_\nu &=& 0 \\
-\alpha_{31}X_1 - \alpha_{32}X_2 + X_3 - \ldots - \alpha_{3\nu}X_\nu &=& 0 \\
\vdots & & \vdots \\
-\alpha_{\nu 1}X_1 - \alpha_{\nu 2}X_2 - \alpha_{\nu 3}X_3 - \ldots + X_\nu &=& 0
\end{array}
\qquad (4)
$$

ἢ συνοπτικῶς :

$$
X_\iota - \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\iota\kappa} X_\kappa = 0 \qquad \begin{cases} \iota = 1, 2, \ldots, \nu \\ \alpha_{\iota\kappa} = 0 \text{ διὰ } \iota = \kappa \end{cases}
$$

Ἐφ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς παραμένουν σταθεροί, αἱ ἀξίαι τῶν συνολικῶν προϊόντων δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἄγνωστοι μεταβληταὶ εἰς τὸ σύστημα (4). Ἡ ἀκολουθουμένη διαδικασία λύσεως τοῦ συστήματος στηρίζεται εἰς τὰ περὶ *ὁμογενῶν* συστημάτων ὁριζόμενα ([1]). Ἤτοι, λύσις μὲ τιμὰς τῶν μεταβλητῶν διαφόρους τοῦ μηδενὸς εἶναι δυνατὴ μόνον ἂν ἡ $\nu \times \nu$ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι μηδὲν καὶ μία τουλάχιστον ἐκ τῶν $\mu \times \mu$ ὁριζουσῶν (διὰ $\mu = 1, 2, \ldots, \nu - 1$) εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ εἰς τὰς μ μεταβλητὰς τοῦ συστήματος, δηλαδὴ νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως μ κλάδων, συναρτήσει τῶν αὐθαιρέτως προσδιοριζομένων ἐπιπέδων δράσεων $\nu - \mu$ κλάδων.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (4) δύνανται νὰ ὀνομασθοῦν *ἐξισώσεις λειτουργικῆς συνεπείας*, διότι, δοθέντων τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς $\alpha_{\iota\kappa}$, τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν διαφόρων κλάδων τὰ προσδιοριζόμενα ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος εὑρίσκονται εἰς συνέπειαν πρὸς τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας λειτουργίας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος.

Τὸ ὑπόδειγμα τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται διὰ τοῦ συστήματος ἐξισώσεων (4) χαρακτηρίζεται ὡς «στατικόν», καθόσον ἡ λύσις αὐτοῦ δὲν ἐπηρεάζεται ἀπὸ μεταβολὰς τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ τῆς οἰκονομίας καὶ δὲν δίδει διαχρονικὰς μεταβολὰς τῶν ἐπιπέδων δράσεως $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$, ἀλλ' εἰκονίζει μόνον μίαν κατάστασιν ex post ἰσορροπίας. Εἶναι βεβαίως

1) Βλ. 3.8.5.

δυνατὸν νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῶν ὡς ἄνω ἐπιπέδων δράσεως μεταξὺ δύο χρονικῶν σημείων (συγκριτικὴ στατική), ἀλλὰ δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ παρακολούθησις τῶν μεταβολῶν αὐτῶν κατὰ τὴν *διάρκειαν* δοθείσης περιόδου. Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο χαρακτηρίζεται ἐξ ἄλλου ὡς «κλειστόν», διότι δὲν περικλείει ἐξωγενεῖς μεταβλητάς. Ἅπαντα τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν οἰκονομικῶν κλάδων, τὰ ὁποῖα ὑποδηλοῦνται διὰ τῶν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$, ἀλληλοκαθορίζονται ἐντὸς τοῦ ὑποδείγματος.

5.7.2. ***Ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα.*** Βασικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ «ἀνοικτοῦ» ὑποδείγματος εἶναι ὅτι ὡρισμέναι τῶν ἐν αὐτῷ μεταβλητῶν θεωροῦνται ὡς ἀνεξαρτήτως (ἐκτὸς τοῦ ὑποδείγματος) καθοριζόμεναι. Οὕτω θὰ ἠδύνατο, π.χ., νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τὸ ἐπίπεδον καταναλώσεως προϊόντων ὑπὸ τῶν φυσικῶν προσώπων (1), ὁπότε ὁ σχετικὸς κλάδος ***οἰκονομοῦντα ἄτομα*** χαρακτηρίζεται ὡς ἐξωτερικὸς τομεὺς διὰ τὸ ὑπόδειγμα καὶ διασπᾶται εἰς τοὺς ὑποτομεῖς Ἰδιωτικὴ Κατανάλωσις καὶ Ὑπηρεσίαι Προσώπων, τῶν ὑποτομέων τούτων μόνον χαλαρῶς συνδεομένων.

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ νιοστὸς κλάδος εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦ συστήματος ἐξισώσεων (4) ἀντιπροσωπεύει τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα, πρὸς μετατροπὴν τοῦ ὡς ἄνω ὑποδείγματος ἀπὸ κλειστοῦ εἰς ἀνοικτὸν ἡ νιοστὴ ἐξίσωσις ἀπαλείφεται, αἱ δὲ ἐπὶ μέρους ἀξίαι τῶν ἀπορροφωμένων ὑπὸ τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων προϊόντων τῶν ὑπολοίπων κλάδων (1, 2, 3, . . . , μ) (2) μεταφέρονται εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος τοῦ συστήματος καὶ λαμβάνονται ὡς γνωσταὶ σταθεραὶ $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_\mu$, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὰ κονδύλια τῆς τελικῆς ζητήσεως :

$$\begin{array}{rcl} X_1 - \alpha_{12} X_2 - \alpha_{13} X_3 - \ldots - \alpha_{1\mu} X_\mu &=& \Psi_1 \\ -\alpha_{21} X_1 + X_2 - \alpha_{23} X_3 - \ldots - \alpha_{2\mu} X_\mu &=& \Psi_2 \\ -\alpha_{31} X_1 - \alpha_{32} X_2 + X_3 - \ldots - \alpha_{3\mu} X_\mu &=& \Psi_3 \\ \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{\mu 1} X_1 - \alpha_{\mu 2} X_2 - \alpha_{\mu 3} X_3 - \ldots + X_\mu &=& \Psi_\mu \end{array} \qquad (5)$$

καὶ συνοπτικῶς

$$X_\iota - \sum_{\kappa=1}^{\mu} \alpha_{\iota\kappa} X_\kappa = \Psi_\iota \qquad \begin{cases} \iota = 1, 2, \ldots, \mu \\ \mu = \nu - 1 \\ \alpha_{\iota\kappa} = 0 \text{ διὰ } \iota = \kappa \end{cases} \qquad (5')$$

1) Ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὴν κατανάλωσιν προϊόντων ὑπὸ τῶν ἐπιχειρήσεων.
2) Δηλαδὴ οἱ νιοστοὶ ὅροι τῶν ὑπολοίπων ἐξισώσεων.

Τὸ σύστημα (5) εἶναι μὴ ὁμογενὲς [1] καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ μ ἐξισώσεις καὶ μ ἀγνώστους, δύναται δὲ νὰ λυθῇ ἂν ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους αὐτοῦ εἶναι βαθμοῦ ἴσου πρὸς τὸν βαθμὸν τῆς ἀνωτέρω μήτρας ἐπηυξημένης διὰ τῆς στήλης τῶν σταθερῶν Ψ_i (βλ. 3.8.3. περίπτ. 1 Α).

Λόγῳ τῆς ἰδιαιτέρας οἰκονομικῆς σπουδαιότητος τῶν ἀνοικτῶν ὑποδειγμάτων, παραθέτομεν κατωτέρω ἀναλυτικῶς τὴν διαδικασίαν λύσεως τοῦ συστήματος (5).

Συμφώνως πρὸς τὸν συμβολισμὸν τῶν μητρῶν τὸ σύστημα (5) δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & -\dots & -\alpha_{1\mu} \\ -\alpha_{21} & 1 & -\alpha_{23} & -\dots & -\alpha_{2\mu} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & 1 & -\dots & -\alpha_{3\mu} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ -\alpha_{\mu 1} & -\alpha_{\mu 2} & -\alpha_{\mu 3} & -\dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_\mu \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Ὁ πρῶτος παράγων τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους τῆς (6) ἀποτελεῖ τὴν «τεχνολογικὴν μήτραν» καὶ περιλαμβάνει τοὺς σταθεροὺς συντελεστὰς τοῦ συστήματος (5). Θὰ παραστήσωμεν ταύτην διὰ τοῦ συμβόλου A^*.

Ἡ τεχνολογικὴ μήτρα ἀποτελεῖ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς μοναδιαίας μήτρας :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

καὶ τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς Α (λαμβανομένου βεβαίως ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ κυρία διαγώνιος τῆς τελευταίας μήτρας περιλαμβάνει μόνον μηδενικὰ στοιχεῖα). Δυνάμεθα οὕτω νὰ παραστήσωμεν περιληπτικῶς τὴν τεχνολογικὴν μήτραν ὡς ἀκολούθως :

$$A^* = [I - A] \qquad (8)$$

1) Βλ. 3.8.5.

Ἡ τεχνολογικὴ μήτρα $[I-A]$ καλεῖται συνήθως «μήτρα τύπου Λεόντιεφ», δύναται δὲ νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ ὁρίζουσα αὐτῆς $|I-A|$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς (βλ. 5.7.3). Ὁ δεύτερος παράγων τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους τῆς ἐξισώσεως (6) ἀποτελεῖ τὸ διάνυσμα τῶν προσδιοριστέων μεταβλητῶν τοῦ συστήματος (5), τὸ δὲ δεξιὸν μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης παριστᾶ τὸ διάνυσμα τῆς τελικῆς ζητήσεως. Ἂν θέσωμεν περιληπτικῶς Χ καὶ Ψ διὰ τὸ διάνυσμα τῶν προσδιοριστέων μεταβλητῶν καὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως, ἀντιστοίχως, τότε ἡ ἐξίσωσις (6), καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα (5), δύναται νὰ λάβη τὴν συνοπτικὴν μορφήν:

$$[I-A] \cdot X = \Psi \tag{9}$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (9) ἐπὶ τὴν μήτραν $[I-A]^{-1}$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς τεχνολογικῆς μήτρας, λαμβάνομεν:

$$[I-A]^{-1} \cdot [I-A] \cdot X = [I-A]^{-1} \cdot \Psi \tag{10}$$

Καὶ ἐπειδὴ $[I-A]^{-1} \cdot [I-A] \cdot X = IX = X$

ἡ ἐξίσωσις (10) γίνεται:

$$X = [I-A]^{-1} \cdot \Psi \tag{11}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (11) καθίσταται προφανὲς ὅτι, δοθέντος τοῦ διανύσματος τελικῆς ζητήσεως, πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$ ἀπαιτεῖται προηγουμένως ἀντιστροφὴ τῆς τεχνολογικῆς μήτρας καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐκτέλεσις τοῦ εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως σημειουμένου πολλαπλασιασμοῦ.

Ἀναλυτικῶς ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (11) (καὶ συνεπῶς καὶ τοῦ συστήματος (5)), ἔχει ὡς ἀκολούθως:

Θέτομεν:

$$[A_{\iota\kappa}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\mu} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\mu} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ A_{\mu 1} & A_{\mu 2} & \ldots & A_{\mu\mu} \end{bmatrix},$$

διὰ τὴν μήτραν ἡ ὁποία ἔχει στοιχεῖα τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τῶν στοιχείων τῆς τεχνολογικῆς μήτρας $[I-A]$, καὶ

$$[A_{\iota\kappa}]' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{\mu 1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{\mu 2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ A_{1\mu} & A_{2\mu} & \dots & A_{\mu\mu} \end{bmatrix}$$

διὰ τὴν ἐνηλλαγμένην τῆς $[A_{\iota\kappa}]$. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$[I-A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|I-A|} & \frac{A_{21}}{|I-A|} & \dots & \frac{A_{\mu 1}}{|I-A|} \\ \frac{A_{12}}{|I-A|} & \frac{A_{22}}{|I-A|} & \dots & \frac{A_{\mu 2}}{|I-A|} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \frac{A_{1\mu}}{|I-A|} & \frac{A_{2\mu}}{|I-A|} & \dots & \frac{A_{\mu\mu}}{|I-A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1\mu} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2\mu} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ E_{\mu 1} & E_{\mu 2} & \dots & E_{\mu\mu} \end{bmatrix}$$

ὅπου :

$$E_{\iota\kappa} = \frac{A_{\kappa\iota}}{|I-A|} \qquad (12)$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ λύσις τῆς (6) θὰ εἶναι :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1\mu} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2\mu} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ E_{\mu 1} & E_{\mu 2} & \dots & E_{\mu\mu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_\mu \end{bmatrix}$$

ἤτοι :

$$\begin{aligned} X_1 &= E_{11}\Psi_1 + E_{12}\Psi_2 + E_{13}\Psi_3 + \dots + E_{1\mu}\Psi_\mu \\ X_2 &= E_{21}\Psi_1 + E_{22}\Psi_2 + E_{23}\Psi_3 + \dots + E_{2\mu}\Psi_\mu \\ X_3 &= E_{31}\Psi_1 + E_{32}\Psi_2 + E_{33}\Psi_3 + \dots + E_{3\mu}\Psi_\mu \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ X_\mu &= E_{\mu 1}\Psi_1 + E_{\mu 2}\Psi_2 + E_{\mu 3}\Psi_3 + \dots + E_{\mu\mu}\Psi_\mu \end{aligned} \qquad (13)$$

καὶ συνοπτικῶς :

$$X_\iota = \sum_{\kappa=1}^{\mu} E_{\iota\kappa}\Psi_\kappa \qquad (\iota = 1, \dots, \mu) \qquad (13')$$

Οἰκονομικῶς, ὁ ὅρος $E_{11}\Psi_1$ ἐκφράζει τὸ τμῆμα τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 1 τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν Ψ_1 αὐτοῦ τούτου τοῦ προϊόντος. Ὁ ὅρος $E_{12}\Psi_2$ παριστᾷ τὸ τμῆμα τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 1, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν Ψ_2 τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 2, κ.ο.κ. Γενικῶς οἱ συντελεσταὶ $E_{ικ}$ δεικνύουν κατὰ πόσον τὸ συνολικὸν προϊὸν τοῦ κλάδου ι αὐξάνει ἂν ἡ τελικὴ ζήτησις διὰ τὸ προϊὸν τοῦ κλάδου κ αὐξηθῇ κατὰ 1 μονάδα (τῶν ἄλλων κονδυλίων ζητήσεως παραμενόντων ἀμεταβλήτων). Ἐκ τῆς (12) καταφαίνεται ὅτι ἡ τιμὴ τῶν συντελεστῶν $E_{ικ}$ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς ὁριζούσης τῆς τεχνολογικῆς μήτρας καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς τιμῆς ***ὅλων*** τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Κατὰ συνέπειαν ἡ ἱκανοποίησις δοθείσης αὐξήσεως τῆς ζητήσεως, π.χ., βιομηχανικῶν προϊόντων, εἶναι κατ' ἀρχὴν δυνατὴ κατόπιν ὡρισμένων ὁμορρόπων μεταβολῶν, ***ἀμέσων*** ἢ ***ἐμμέσων*** εἰς τὰ ἐπίπεδα δράσεως ὅλων τῶν παραγωγικῶν κλάδων (1). Τοῦτο ἀκριβῶς ἐκφράζεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῆς συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν οἰκονομικῶν κλάδων.

Ἡ διδομένη λύσις (13) καθορίζει τὰ ἐπίπεδα δράσεως $X_1, X_2, \ldots X_\mu$ τῶν παραγωγικῶν κλάδων $1, 2, \ldots, \mu$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπαραίτητα πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς δοθείσης τελικῆς ζητήσεως $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_\mu)$.

Ἐκ τῆς λύσεως (13) δὲν εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῆς ὑφ' ἑκάστου κλάδου καταβαλλομένης ἀξίας δι' ἐργασίαν καὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως (2) τῆς ἐξεταζομένης οἰκονομίας (3). Τοιοῦτος προσδιορισμὸς καθίσταται ἐν τούτοις δυνατός, ἂν γνωρίζωμεν τοὺς «συντελεστὰς εἰσροῆς ἐργασίας» δι' ἕκαστον κλάδον. Οἱ συντελεσταὶ οὗτοι καθορίζουν τὴν καταβαλλομένην ὑπὸ τῶν ἀντιστοίχων κλάδων ἀξίαν διὰ τὴν ἐργασίαν ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας μιᾶς νομισματικῆς μονάδος τῶν ἐν λόγῳ κλάδων. Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ οὗτοι παραμένουν σταθεροί, ὡς καὶ οἱ λοιποὶ συντελεσταὶ εἰσροῆς. Ἂν χαρακτηρίσωμεν διὰ τοῦ γράμματος ν τὸν τομέα «Ὑπηρεσίαι Προσώπων» ἢ «Ἐργασία» τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας, θὰ ἔχωμεν γενικῶς:

$$\left.\begin{aligned} \chi_{\nu\kappa} &= \alpha_{\nu\kappa} X_\kappa \\ \kappa &= 1, 2, \ldots, \mu \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

1) Ἡ αὐτὴ ἔννοια θὰ ἠδύνατο νὰ διατυπωθῇ ἐπίσης ὡς ἀκολούθως: Μία αὔξησις τῆς τελικῆς ζητήσεως ἑνὸς ὡρισμένου προϊόντος προκαλεῖ ἀμέσους καὶ ἐμμέσους αὐξήσεις εἰς τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς ὅλων τῶν παραγωγικῶν κλάδων.

2) Ὁ ὅρος «ἐργατικὴ ἀπασχόλησις» χρησιμοποιεῖται ἐνταῦθα ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν, περιλαμβάνων τὰς πάσης φύσεως παραγωγικὰς ὑπηρεσίας προσώπων.

3) Ὡς ἐλέχθη, ἡ νιοστὴ ἐξίσωσις ἡ ἀναφερομένη εἰς τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα (καὶ συνεπῶς καὶ εἰς τὴν ἐργασίαν), ἀπηλείφθη ἀπὸ τὸ σύστημα (5).

ὅπου $\alpha_{\nu\kappa}$ παριστᾶ τὸν σταθερὸν συντελεστὴν εἰσροῆς ἐργασίας τοῦ κλάδου κ καὶ $\chi_{\nu\kappa}$ τὴν συνολικῶς καταβαλλομένην ἀξίαν δι' ἐργασίαν ὑπὸ τοῦ κλάδου κ διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου.

Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ μέση τιμὴ μονάδος τῆς ἐργασίας (π.χ. τὸ ὡρομίσθιον) εἶναι ἴση πρὸς τὴν σταθερὰν τ_ν, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ προσδιορίσωμεν δι' ἕκαστον κλάδον παραγωγῆς τὸ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως (εἰς ὥρας ἐργασίας):

$$\chi'_{\nu\kappa} = \frac{\alpha_{\nu\kappa} X_\kappa}{\tau_\nu} \qquad (15)$$

$$\kappa = 1, 2, \ldots, \mu$$

Ἂν εἰς τὸ σύστημα (15) ἀντικαταστήσωμεν τὸ X_κ διὰ τῆς τιμῆς του, ὡς αὕτη ὁρίζεται ἐκ τῶν λύσεων (13), λαμβάνομεν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \chi'_{\nu\kappa} = \dfrac{\alpha_{\nu\kappa}}{\tau_\nu} (E_{\kappa 1}\Psi_1 + E_{\kappa 2}\Psi_2 + \ldots + E_{\kappa\mu}\Psi_\mu) \\ \qquad\qquad\qquad (\kappa = 1, 2, \ldots, \mu) \end{array}\right\} \qquad (16)$$

ἐξ οὗ καταφαίνεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως εἰς δοθέντα κλάδον κ ἐξαρτᾶται ἐξ *ὅλων* τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν τῆς οἰκονομίας καὶ ἐκ τοῦ ὕψους *ὅλων* τῶν κονδυλίων τελικῆς ζητήσεως.

Ἡ συνολικὴ ἐργατικὴ ἀπασχόλησις εἰς τὴν οἰκονομίαν (X'_ν) εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τῶν ἐπὶ μέρους κλάδων τῆς οἰκονομίας:

$$X'_\nu = \chi'_{\nu 1} + \chi'_{\nu 2} + \ldots + \chi'_{\nu\mu} \qquad (17)$$

Ἡ ἐξίσωσις (17) δεικνύει ἐξ ἄλλου τὸν τρόπον κατανομῆς τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (17) τὰς τιμὰς τῶν $\chi'_{\nu\kappa}$, ὡς αὗται δίδονται εἰς (16), θὰ ἔχωμεν:

$$X'_\nu = \frac{1}{\tau_\nu} (\alpha_{\nu 1} E_{11}\Psi_1 + \alpha_{\nu 1} E_{12}\Psi_2 + \ldots + \alpha_{\nu 1} E_{1\mu}\Psi_\mu)$$

$$+ \frac{1}{\tau_\nu} (\alpha_{\nu 2} E_{21}\Psi_1 + \alpha_{\nu 2} E_{22}\Psi_2 + \ldots + \alpha_{\nu 2} E_{2\mu}\Psi_\mu) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{\tau_\nu} (\alpha_{\nu\mu} E_{\mu 1}\Psi_1 + \alpha_{\nu\mu} E_{\mu 2}\Psi_2 + \ldots + \alpha_{\nu\mu} E_{\mu\mu}\Psi_\mu)$$

$$\text{ἢ} \quad X_\nu' = \frac{\Psi_1}{\tau_\nu}(\alpha_{\nu 1}E_{11} + \alpha_{\nu 2}E_{21} + \ldots + \alpha_{\nu\mu}E_{\mu 1}) +$$
$$+ \frac{\Psi_2}{\tau_\nu}(\alpha_{\nu 1}E_{12} + \alpha_{\nu 2}E_{22} + \ldots + \alpha_{\nu\mu}E_{\mu 2}) + \ldots$$
$$+ \frac{\Psi_\mu}{\tau_\nu}(\alpha_{\nu 1}E_{1\mu} + \alpha_{\nu 2}E_{2\mu} + \ldots + \alpha_{\nu\mu}E_{\mu\mu}) \qquad (18)$$

καὶ συνοπτικῶς:

$$X_\nu' = \frac{\Psi_1}{\tau_\nu}\sum_{\iota=1}^{\mu}\alpha_{\nu\iota}E_{\iota 1} + \frac{\Psi_2}{\tau_\nu}\sum_{\iota=1}^{\mu}\alpha_{\nu\iota}E_{\iota 2} + \ldots + \frac{\Psi_\mu}{\tau_\nu}\sum_{\iota=1}^{\mu}\alpha_{\nu\iota}E_{\iota\mu} \qquad (18')$$

Ὁ ὅρος $\frac{\Psi_1}{\tau_\nu}\sum_{\iota=1}^{\mu}\alpha_{\nu\iota}E_{\iota 1}$ προσδιορίζει τὴν αὔξησιν τῆς συνολικῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τὴν ὀφειλομένην εἰς αὔξησιν κατὰ Ψ_1 μονάδας τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 1.

Γενικῶς ὁ ὅρος $\frac{\Psi_\kappa}{\tau_\nu}\sum_{\iota=1}^{\mu}\alpha_{\nu\iota}E_{\iota\kappa}$ $(\kappa = 1, 2, \ldots, \mu)$ δίδει τὴν αὔξησιν τῆς ἀπασχολήσεως τὴν ὀφειλομένην εἰς τὴν αὔξησιν τῆς συνολικῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου κ κατὰ Ψ_κ μονάδας.

Κατ' ἀναλογίαν οἱ συντελεσταὶ $\frac{1}{\tau_\nu}\sum_{\iota=1}^{\mu}\alpha_{\nu\iota}E_{\iota\kappa}$ $(\kappa = 1, 2, \ldots, \mu)$, καλούμενοι συνήθως «συντελεσταὶ ὁλικῆς ἀπασχολήσεως», προσδιορίζουν τὴν αὔξησιν τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τῆς οἰκονομίας, τὴν προερχομένην ἐκ τῆς αὐξήσεως κατὰ μίαν μονάδα τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, \mu)$.

Ἕκαστος συντελεστὴς ὁλικῆς ἀπασχολήσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦ συντελεστοῦ «ἀμέσου ἀπασχολήσεως» καὶ τῶν «συντελεστῶν ἐμμέσου ἀπασχολήσεως». Ὁ πρῶτος δεικνύει τὴν ὑπὸ τοῦ οἰκείου κλάδου ἀμέσως ἀπορροφωμένην ποσότητα ἐργασίας διὰ τὴν ἱκανοποίησιν μιᾶς μονάδος τελικῆς ζητήσεως ἐκ τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου, καὶ παριστᾶται διὰ τῶν στοιχείων $\frac{1}{\tau_\nu}\alpha_{\nu\kappa}E_{\kappa\kappa}$ $(\kappa=1, 2, \ldots, \mu)$. Οἱ δεύτεροι δεικνύουν τὴν ὑπὸ τῶν λοιπῶν κλάδων τῆς οἰκονομίας ἀπορροφωμένην ποσότητα ἐργασίας, διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν προϊόντων τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται ὡς πρῶται ὕλαι κλπ., πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας μιᾶς μονάδος τοῦ δοθέντος κλάδου κ. Οἱ ἔμμεσοι συντελεσταὶ παριστῶνται διὰ τῶν στοιχείων $\frac{1}{\tau_\nu}\sum_{\iota=1}^{\mu}\alpha_{\nu\iota}E_{\iota\kappa}$, διὰ $\kappa = 1, 2, \ldots, \mu$ ἀλλὰ $\kappa \neq \iota$.

Ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως εἶναι προφανής.

Καταφαίνεται ἤδη ὅτι ἐκ τῆς λύσεως (13) καὶ τῆς ἐξισώσεως (18) εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς ἑκάστου κλάδου καὶ τὰ ἐπίπεδα ἀπασχολήσεως τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα πρὸς ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως τῶν προϊόντων τῶν ἐν λόγῳ κλάδων. Αἱ οὕτω προσδιοριζόμεναι τιμαὶ λύσεως εἰς τὰς οἰκονομικὰς μεταβλητὰς (ἐπίπεδα δράσεως παραγωγικῶν τομέων καὶ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως) χαρακτηρίζονται ὡς ***συνεπεῖς***, καθ' ὅσον ἀναφέρονται εἰς τὴν ἁρμονικὴν (1) συνεργασίαν τῶν παραγωγικῶν κλάδων πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς δοθείσης τελικῆς ζητήσεως, ἡ δὲ λύσις λέγομεν ὅτι εἶναι ***λειτουργικῶς πραγματοποιήσιμος***. Ἡ σύγκρισις τῶν τιμῶν αὐτῶν πρὸς τὰς πραγματικὰς συνθήκας τῆς οἰκονομίας θὰ δείξῃ κατὰ πόσον τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τελικῆς ζητήσεως (2) εἶναι ἐπίσης καὶ ***οἰκονομικῶς πραγματοποιήσιμον***. Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης θὰ δειχθῇ ἐπίσης ἂν ἐπιβάλλεται προηγουμένως ἄρσις τῶν τυχὸν ὑπαρχουσῶν στενοτήτων (λόγῳ ἐλλείψεως κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ εἴς τινας παραγωγικοὺς κλάδους ἢ λόγῳ ἀνεπαρκοῦς ποσότητος ἐργασίας), ἢ ἂν ἡ τελικὴ ζήτησις πρέπει νὰ προσαρμοσθῇ ἀναλόγως, εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἱκανοποίησις αὐτῆς βάσει τῶν ὑπαρχουσῶν δυνατοτήτων τῆς οἰκονομίας.

Τὸ ἀνωτέρω περιγραφὲν ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα εἶναι ***στατικόν***, ὡς καὶ τὸ προηγούμενον, διότι δὲν παρακολουθεῖ διαχρονικὰς μεταβολὰς τῶν μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$, ἀλλὰ δίδει μόνον λύσεις ἰσορροπίας αὐτῶν εἰς δεδομένην περίοδον ἢ συνολικὰς μεταβολὰς τῶν μεταβλητῶν μεταξὺ δύο χρονικῶν περιόδων (συγκριτικὴ στατική).

5.7.3. ***Ἰδιότητες τῶν μητρῶν Λεόντιεφ.*** Ἡ μήτρα τύπου Λεόντιεφ ἔχει ὡρισμένας μαθηματικὰς ἰδιότητας αἱ ὁποῖαι ἀντικατοπτρίζουν ἰδιότητας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Αἱ κυριώτεραι ἐκ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν εἶναι αἱ ἀκόλουθοι (3):

1η $\quad \sum_{\iota=1}^{\nu} \alpha_{\iota\kappa} \leqslant 1 \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots, \nu)$

2α $\quad \alpha_{\iota\kappa} \geqslant 0 \qquad (\iota, \kappa = 1, 2, \ldots, \nu)$

3η $\quad 0 < |I - A| < 1$

4η $\quad [I - A]^{-1} = (I + A + A^2 + A^3 + \ldots),$

1) Ἄνευ μεγαλυτέρας ἢ μικροτέρας παραγωγῆς τῶν ἐπὶ μέρους παραγωγικῶν κλάδων.

2) Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ δυνατὸν νὰ ἀποτελῇ προγραμματικὸν σκοπόν.

3) Βλ. Dorfman Samuelson and Solow «Linear programming and Economic Analysis» Mcgraw Hill 1958 σ. 253 κ.ἑ. Ἐπίσης βλ. Morgenstern A. (edit.) Economic activity analysis, σ. 341 κ.ἑ.

ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ἀποτελεῖ ***συγκλίνουσαν*** σειράν.

5η : Πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς $[I-A]^{-1}$ εἶναι μὴ ἀρνητικὰ καὶ μεγαλύτερα, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς $[I-A]$.

Συμφώνως πρὸς τὴν πρώτην ἰδιότητα, τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων τῶν στηλῶν τῆς Α δὲν εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος. Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῆς ἰδιότητος αὐτῆς εἶναι ὅτι τὸ σύνολον τῶν πληρωμῶν τοῦ δοθέντος κλάδου κ διὰ προϊόντα ἄλλων κλάδων, πρὸς παραγωγὴν τοῦ προϊόντος τούτου δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀξίαν τοῦ προϊόντος. Ἡ συνήθης μάλιστα περίπτωσις εἶναι $\Sigma\, \alpha_{ik} < 1$.

Ἡ δευτέρα ἰδιότης ὁρίζει ὅτι ἡ ἑκάστοτε «εἰσροὴ» τοῦ δοθέντος κλάδου κ ἀπὸ ἄλλους κλάδους $(\iota = 1, 2, \ldots, \nu)$ εἶναι μέγεθος μὴ ἀρνητικόν. Τοῦτο προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2), δεδομένου ὅτι $X_k > \chi_{ik} \geqslant 0$, καὶ σημαίνει ὅτι δὲν εἶναι νοητὸν νὰ λαμβάνῃ ὁ κλάδος κ ἀρνητικὸν προϊὸν ἀπὸ τοὺς λοιποὺς κλάδους.

Προφανῶς ἐκ τῆς 1ης ἰδιότητος θὰ εἶναι : $\alpha_{ik} < 1$.

Αἱ ἰδιότητες 1 καὶ 2 ἀποτελοῦν ***ἀναγκαίας*** καὶ ***ἐπαρκεῖς*** συνθήκας διὰ τὸν χαρακτηρισμὸν μιᾶς μήτρας ὡς τύπου Λεόντιεφ. Αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες 3, 4 καὶ 5 εἶναι παράγωγοι τῶν ἰδιοτήτων 1 καὶ 2.

Συμφώνως πρὸς τὴν 3ην ἰδιότητα, ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας τύπου Λεόντιεφ, $|I-A|$, εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος [1].

Ἡ ἰδιότης αὕτη σημαίνει ὅτι πληροῦνται αἱ συνθῆκαι ἰσορροπίας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον περιγράφει ἡ $[I-A]$.

Ἡ 4η ἰδιότης χρησιμοποιεῖται εὐρύτατα εἰς τὰς διακλαδικὰς ἀναλύσεις διὰ τὴν λύσιν μεγάλων συστημάτων ἐξισώσεων. Ὡς γνωστόν, ἡ ἀντιστροφὴ τῆς μήτρας $[I-A]$ εἶναι, εἰς περίπτωσιν μεγάλων συστημάτων, δυσχερέστατον ὑπολογιστικὸν πρόβλημα, ἡ λύσις τοῦ ὁποίου δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὴ ἄνευ τῆς χρησιμοποιήσεως ἠλεκτρονικῶν ἀριθμομηχανῶν. Βάσει τῆς 4ης ὅμως ἰδιότητος ἡ ἐξίσωσις (11) γίνεται :

$$X = [I + A + A^2 + A^3 + \ldots]\Psi = [\Psi + A\Psi + A^2\Psi + \ldots] \qquad (19)$$

Ἐπειδὴ ἡ σύγκλισις τῆς σειρᾶς $[I + A + A^2 + A^3 + \ldots]$ εἶναι σχετικῶς ταχεῖα [2], δυνάμθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ διάνυσμα Χ κατὰ προσ-

1) Βλ. D. Hawkins and H. Simon, «Note: Some conditions of macroeconomic stability» Econometrica, 1949.

2) Sal Cherubino : Sull' analisi delle inderdepedenze stutturali dei settori economici εἰς L' industria No 1, 1953 (σ. 39 κ.ἑ.) καὶ H. Chenery, P. Clark κλπ. The structure of Italian economy M.S.A. Rome, 1953. Ἡ σειρὰ

ἔγγισιν μιᾶς δυνάμεως τοῦ A, π.χ. τῆς 4ης δυνάμεως (1):

$$\overset{*}{X} = [\Psi + A\Psi + A^2\Psi + A^3\Psi + A^4\Psi] \qquad (21)$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς ταύτης, ἡ ὁποία εἶναι συνήθως γνωστὴ ὡς «πολλαπλασιαστικὴ διαδικασία Cornfield-Leontief» (2), δὲν παρουσιάζει σοβαρὰ προβλήματα ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν σχετικῶς μεγάλων τεχνολογικῶν μητρῶν, δύναται δὲ νὰ γίνῃ μὲ συνήθεις ἀριθμομηχανὰς γραφείου (3).

Ἡ 5η ἰδιότης ἀπορρέει προφανῶς ἐκ τῆς 4ης ἰδιότητος. Ἐφ' ὅσον $[I-A]^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \ldots$ καὶ πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς A εἶναι μὴ ἀρνητικὰ (2α ἰδιότης) θὰ ἔχωμεν καὶ τὰ στοιχεῖα τῶν A^2, A^3 κλπ. μὴ ἀρνητικά. Ἡ I ἔχει ἐπίσης μὴ ἀρνητικὰ στοιχεῖα ἐξ ὁρισμοῦ, κατὰ συνέπειαν τὰ στοιχεῖα τῆς $[I-A]^{-1}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν I, A, A^2, κλπ. θὰ εἶναι ἐπίσης μὴ ἀρνητικά. Ἐξ ἄλλου ἐὰν θέσωμεν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς $[I-A]$ μὲ θετικὸν σημεῖον λαμβάνομεν τὴν μήτραν $(I+A)$, ἥτις εἶναι:

$$[I+A] < [I + A + A^2 + A^3 + \ldots] = [I-A]^{-1} \qquad (22)$$

ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως προκύπτει ὅτι ἕκαστον στοιχεῖον τῆς $[I-A]^{-1}$ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον τῆς $(I+A)$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἀπὸ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀντιστοίχου στοιχείου τῆς $(I-A)$.

5.7.4. Σύγκρισις ὑπολογιζομένων καὶ δυνατῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς. Ὡς γνωρίζομεν ἤδη, ἡ σύγκρισις μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων

$I + A + A^2 + A^3 + \ldots$ καλεῖται ἐπίσης καὶ «σειρὰ Newmann» (βλ. Morgenstern: Economic activity analysis σ. 291).

1) Ὁ βαθμὸς προσεγγίσεως ἐξαρτᾶται κυρίως ἐκ τῆς ταχύτητος συγκλίσεως τῶν ὅρων A, A^2, A^3, ... Ἂν ἐπιτευχθῇ μία σταθερὰ σχέσις συγκλίσεως τῶν ὅρων εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάνυσμα X μετὰ μεγίστης προσεγγίσεως, διὰ συνυπολογισμοῦ τοῦ ἀποτελέσματος μιᾶς πολλαπλασιαστικῆς διαδικασίας, ἥτις ἔχει λόγον τὴν σταθερὰν ταύτην σχέσιν. Βλ. σχετικῶς: C. Righi: Raffronto fra I metodi matriciale e iterativo per la solutione dello schema di Leontief (nota tecnica) εἰς l' Industria, No 1, 1952.

2) Βλ. Dorfman, Samuelson κλπ. «Linear programming κλπ.» σ. 253. Πρβ. καὶ R. Goodwin «The multiplier as a matrix» Econ. Journal. Dec. 1949.

3) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πολλαπλασιασμῶν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι, κατὰ προσέγγισιν, $P\nu^2$, ὅπου $P =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων εἰς μίαν σειρὰν τύπου (20) καὶ $\nu =$ ἡ τάξις τῆς μήτρας A, δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν κλάδων τοῦ ἐξεταζομένου οἰκονομικοῦ συστήματος. Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ X διὰ τῆς συνήθους μεθόδου τῆς ἀντιστροφῆς τῆς μήτρας ἀπαιτοῦνται περίπου ν^3 πολλαπλασιασμοί. Κατὰ συνέπειαν, ἡ διαδικασία Cornfield - Leontief συμφέρει ἐὰν $P < \nu$, ὡς πράγματι συμβαίνει κατὰ κανόνα εἰς τὰς πραγματικὰς περιπτώσεις.

παραγωγῆς τῶν διαφόρων κλάδων, τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται πρὸς ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως καὶ τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τὰ ὁποῖα προσδιορίζονται ἐκ τῶν ὑφισταμένων δυνατοτήτων ἑκάστου κλάδου, εἶναι βασικῆς σημασίας ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικῆς πολιτικῆς. Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν ἂν οἱ σκοποὶ τοῦ προγράμματος (ἡ ἐπιλεγεῖσα τελικὴ ζήτησις) εἶναι πραγματοποιήσιμοι ἢ ἐάν, ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, ἀπαιτῆται ὅπως ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ λάβῃ ἀπόφασιν διὰ τὴν ἀναπροσαρμογὴν τῶν σκοπῶν αὐτῶν, βάσει τῶν δυνατοτήτων τῆς οἰκονομίας ἢ διὰ τὴν διεύρυνσιν τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τῶν κλάδων οἱ ὁποῖοι καθιστοῦν μὴ πραγματοποιήσιμον τὸ πρόγραμμα.

Κατωτέρω γίνεται μία ἀναλυτικὴ παρουσίασις τοῦ θέματος τῆς συγκρίσεως μεταξὺ ὑπολογιζομένων καὶ δυνατῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς.

Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι: α) ἡ οἰκονομία ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς κλάδους 1 καὶ 2 καὶ β) σκοπεῖται ἱκανοποίησις τελικῆς ζητήσεως ἀξίας Ψ_1 καὶ Ψ_2 ἐκ τῶν προϊόντων τῶν κλάδων 1 καὶ 2, ἀντιστοίχως.

Αἱ ἐξισώσεις κατανομῆς τῆς παραγωγῆς τῶν δύο κλάδων θὰ εἶναι τότε:

$$\begin{aligned} X_1 - \alpha_{12} X_2 &= \Psi_1 \\ -\alpha_{21} X_1 + X_2 &= \psi_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

ὅπου X_1, X_2 ἐκφράζουν τὴν ἀξίαν τῆς συνολικῆς παραγωγῆς τῶν δύο κλάδων καὶ α_{12}, α_{21} εἶναι οἱ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ εἰσροῆς.

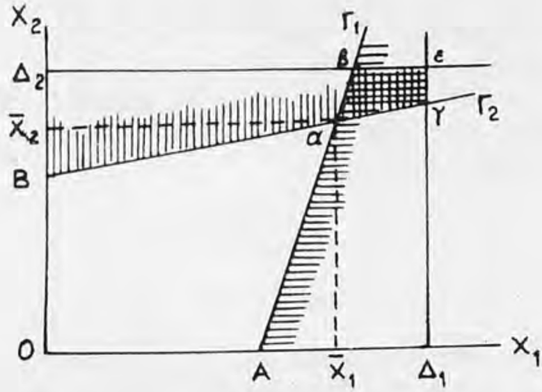
Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι Δ_1 καὶ Δ_2 παριστοῦν τὰς ὑφισταμένας παραγωγικὰς δυναμικότητας τῶν κλάδων 1 καὶ 2, ἀντιστοίχως (1). Διὰ νὰ ἀποφανθῶμεν ἂν τὸ τεθὲν πρόγραμμα εἶναι πραγματοποιήσιμον πρέπει νὰ συγκρίνωμεν τὰς ὡς ἄνω δυναμικότητας τῶν κλάδων μὲ τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς αὐτῶν, ὡς ταῦτα προκύπτουν ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (1).

Εἰς τὸ διάγρ. 36 αἱ εὐθεῖαι $\Delta_1\varepsilon$ καὶ $\Delta_2\varepsilon$ προσδιορίζουν, ὁμοῦ μετὰ τῶν ἀξόνων τοῦ συστήματος συντεταγμένων, τὴν περιοχὴν πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν $O\Delta_1\varepsilon\Delta_2$ τῆς ἐξεταζομένης οἰκονομίας, ἤτοι τὰς παραγωγικάς της δυνατότητας, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δυναμικοτήτων Δ_1 καὶ Δ_2 τῶν δύο κλάδων αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα Γ_1 ἐκφράζει τὴν πρώτην, ἡ δὲ εὐθεῖα Γ_2 τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (1) (2). Πᾶν ση-

1) Μετρουμένας εἰς ἀξίαν προϊόντος ἑκάστου κλάδου.

2) Ὑποτίθεται ὅτι ἡ Γ_1 τέμνει τὸν ἄξονα τῶν X_1 εἰς τὸ σημεῖον $\Psi_1 (= A)$ καὶ τὸν ἄξονα τῶν X_2 εἰς τὸ σημεῖον $-\frac{\Psi_1}{\alpha_{12}}$, ἡ δὲ Γ_2 τέμνει τὸν ἄξονα τῶν X_1 εἰς τὸ σημεῖον $-\frac{\Psi_2}{\alpha_{21}}$ καὶ τὸν ἄξονα τῶν X_2 εἰς τὸ σημεῖον $+\Psi_2 (=B)$. Τὰ σημεῖα A καὶ B ἐκφράζουν συνεπῶς τὰ ἐπίπεδα τῶν τελικῶν ζητήσεων Ψ_1 καὶ Ψ_2, ἀντιστοίχως.

μεῖον τῆς Γ_1 παριστᾷ συνεπῶς συνδυασμὸν τιμῶν τῶν X_1, X_2, ἱκανοποιοῦντα τὴν πρώτην ἐξίσωσιν. Οἰκονομικῶς τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς τοῦ πρώτου κλάδου εἶναι τοιοῦτον ὥστε *νὰ ἐπαρκῇ*



Διάγρ. 36.

ἀκριβῶς διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς τελικῆς ζητήσεως Ψ_1 καὶ τῶν τρεχουσῶν παραγωγικῶν ἀναγκῶν τοῦ κλάδου 2. Πᾶν σημεῖον κείμενον δεξιὰ τῆς Γ_1 (καὶ ἐντὸς τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου τοῦ συστήματος συντεταγμένων) ἐκφράζει τιμὰς τῶν X_1, X_2, αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὴν ἀνισότητα τῆς μορφῆς:

$$X_1 - \alpha_{12} X_2 > \Psi_1 .$$

Ἡ ἀνισότης αὕτη ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι ἡ παραγωγὴ X_1 τοῦ κλάδου 1 εἶναι *μεγαλυτέρα* τῆς ἀπαιτουμένης πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς τελικῆς ζητήσεως καὶ τῶν τρεχουσῶν παραγωγικῶν ἀναγκῶν τοῦ κλάδου 2. Ἀντιθέτως πᾶν σημεῖον κείμενον ἀριστερὰ τῆς Γ_1 (καὶ ἐντὸς τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου) ὁρίζει τιμὰς τῶν X_1, X_2 αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνισότητα:

$$X_1 - \alpha_{12} X_2 < \Psi_1,$$

ἥτις ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι ἡ συνολικὴ παραγωγὴ τοῦ κλάδου 1, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τμήματος αὐτῆς τὸ ὁποῖον καλύπτει τὰς ἀνάγκας τοῦ κλάδου 2, δὲν ἐπαρκεῖ πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς τελικῆς ζητήσεως Ψ_1.

Κατ' ἀναλογίαν, ἡ Γ_2 ἀποτελεῖ τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων τὰ ὁποῖα παριστοῦν τιμὰς τῶν X_1, X_2 πληρούσας τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος, καὶ πᾶν σημεῖον κείμενον ἄνωθεν μὲν τῆς $Γ_2$ ἀντιστοιχεῖ εἰς παραγωγὴν τοῦ κλάδου 2 μεγαλυτέραν, κάτωθεν δὲ τῆς $Γ_2$ μικροτέραν τῆς ἀπαιτουμένης πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς τελικῆς ζητήσεως $Ψ_2$ καὶ τῶν παραγωγικῶν ἀναγκῶν τοῦ κλάδου 1.

Ἡ περιοχὴ τῶν πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν τῶν ἐπιπέδων X_1, X_2 εἶναι, ὡς εἴπομεν, τὸ παραλληλόγραμμον $ΟΔ_1εΔ_2$. Ἐκ τῶν συνδυασμῶν αὐτῶν, μόνον οἱ κείμενοι εἰς τὴν περιοχὴν αβεγ, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῶν $Γ_1$, $Γ_2$ καὶ τῶν $Δ_1ε$ καὶ $Δ_2ε$ ἱκανοποιοῦν ταυτοχρόνως ἀμφότερα τὰ κονδύλια τῆς τελικῆς ζητήσεως $Ψ_1$ καὶ $Ψ_2$, ἤ, κατ' ἄλλην διατύπωσιν, τὸ σύστημα ἀνισοτήτων :

$$X_1 - α_{12}X_2 \geqslant Ψ_1$$

$$-α_{21}X_1 + \quad X_2 \geqslant Ψ_2 .$$

Εἷς ἐξ ὅλων τῶν συνδυασμῶν τῆς περιοχῆς αβεγ, ὁ συνδυασμὸς α, ἱκανοποιεῖ τὸ σύστημα (1), δηλαδὴ ὁρίζει τιμὰς $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος αὐτοῦ ([1]). Ἐξ ἄλλου, μολονότι πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιοχῆς αβεγ ἐκφράζουν τιμὰς τῶν X_1, X_2 αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν, ὡς ἐλέχθη, τὴν τελικὴν ζήτησιν ($Ψ_1$, $Ψ_2$), μόνον τὸ σημεῖον α δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ πλέον ἀποδοτικόν, ἀπὸ οἰκονομικῆς ἀπόψεως, διότι τοῦτο ὁρίζει ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν κλάδων 1 καὶ 2 τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν *ἀκριβῶς* τὴν τελικὴν ζήτησιν (καὶ τὰς παραγωγικὰς ἀνάγκας τῶν κλάδων αὐτῶν), δηλαδὴ ἄνευ δημιουργίας παραγωγικοῦ πλεονάσματος. Τοιοῦτον παραγωγικὸν πλεόνασμα ([2]) ὑποδηλοῦν ἀκριβῶς πάντα τὰ λοιπὰ σημεῖα τῆς περιοχῆς αβεγ.

Ἤδη, μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (1), δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ λύσις αὐτὴ εἶναι πραγματοποιήσιμος, καθ' ὅσον τὸ σημεῖον α, τὸ ὁποῖον τὴν ἐκφράζει, εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς περιοχῆς πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν $ΟΔ_1εΔ_2$. Μὴ πραγματοποιήσιμος θὰ ἦτο ἡ λύσις ἂν τὸ σημεῖον αὐτῆς εὑρίσκετο ἐκτὸς τῆς περιοχῆς $ΟΔ_1εΔ_2$. Τὸ διάγραμμα 37 παριστᾷ μίαν τοιαύτην περίπτωσιν.

Ἂν τὸ σημεῖον τῆς λύσεως εὑρίσκεται ὄχι ἁπλῶς εἰς τὴν περιοχὴν πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν, ἀλλ' *ἐντὸς* τῆς περιοχῆς ταύτης ([3]), τότε εἶναι δυνατὴ βελτίωσις ὅσον ἀφορᾷ τὸ ἐπίπεδον ἱκανοποιήσεως ἑνὸς

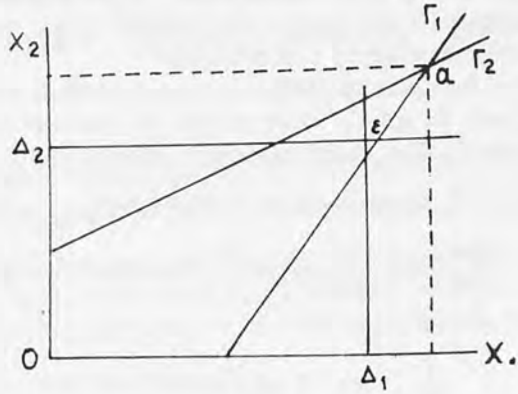
---

1) Ἐφ' ὅσον τὸ σημεῖον α εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν $Γ_1$ καὶ $Γ_2$, ἀνήκει εἰς ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας, ἐπομένως τὸ ζεῦγος τιμῶν $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, τὰς ὁποίας ὁρίζει, ἱκανοποιοῦν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1).

2) Τοῦ ἑνὸς ἢ ἀμφοτέρων τῶν κλάδων.

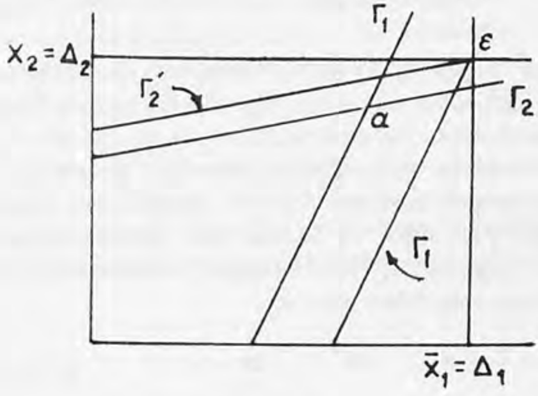
3) Τοιαῦτα εἶναι πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιοχῆς πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν, πλὴν τῶν σημείων τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληγράμμου $ΟΔ_1εΔ_2$.

ἢ περισσοτέρων κονδυλίων τελικῆς ζητήσεως. Τοῦτο ἀκριβῶς συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς λύσεως α τοῦ διαγρ. 36. Τὸ διάγρ. 38 ἐκφρά-



Διάγρ. 37.

ζει μίαν νέαν λύσιν, ε, ἡ ὁποία ἀνταποκρίνεται εἰς αὔξησιν ἀμφοτέρων τῶν κονδυλίων τῆς τελικῆς ζητήσεως, τοιαύτην ὥστε νὰ ἀξιοποιοῦνται



Διάγρ. 38.

πλήρως αἱ ὑφιστάμεναι παραγωγικαὶ δυνατότητες ἀμφοτέρων τῶν κλάδων τῆς οἰκονομίας (1).

5.7.5. *Ἡ συνθήκη Hawkins - Simon.* Ἤδη τίθεται τὸ ἐρώτημα: ὑπὸ ποίας προϋποθέσεις ἡ λύσις τοῦ συστήματος ἐξισώσεων κατα-

1) Αἱ Γ_1', Γ_2' εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς Γ_1, Γ_2, καθ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων X_1, X_2, τοῦ ἀντιστοίχου συστήματος, εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων X_1, X_2, εἰς τὸ σύστημα (1), τὸ ὁποῖον περιγράφουν αἱ Γ_1, Γ_2.

νομῆς εἶναι οἰκονομικῶς σημαντική, (βλ. σελ. 4) ἤτοι περιλαμβάνει θετικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ (1), ἢ — διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ προηγουμένως ληφθὲν παράδειγμα — ποῖαι προϋποθέσεις ἐξασφαλίζουν ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν Γ_1 καὶ Γ_2 κεῖται ἐντὸς τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου τοῦ συστήματος συντεταγμένων ;

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν μας τὸ διάγρ. 36, συμπεραίνομεν εὐχερῶς ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν Γ_1 καὶ Γ_2 κεῖται ἐντὸς τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου ὅταν ἡ κλίσις τῆς Γ_1 εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κλίσεως τῆς Γ_2.

Ἡ κλίσις τῆς Γ_1 προσδιορίζεται ἐκ τοῦ λόγου $\dfrac{1}{\alpha_{12}}$, ἡ δὲ κλίσις τῆς Γ_2 ἐκ τοῦ λόγου $\dfrac{\alpha_{21}}{1} = \alpha_{21}$. Ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω συνθήκη πληροῦται ὅταν :

$$\frac{1}{\alpha_{12}} > \alpha_{21} \quad \text{ἢ} \quad 1 - \alpha_{12}\alpha_{21} > 0 \tag{1}$$

Ἡ (1) δύναται ἐπίσης νὰ διατυπωθῇ ὡς :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & 1 \end{vmatrix} > 0 \tag{2}$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ Γ_1 καὶ Γ_2 τέμνονται εἰς τὸ θετικὸν τεταρτημόριον ὅταν ἡ ὁρίζουσα τοῦ ἀντιστοίχου συστήματος ἐξισώσεων κατανομῆς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ μηδενός. Οἱ D. Hawkins καὶ H. Simon ἔδειξαν (2) ὅτι ἡ θετικότης τῆς ὁριζούσης ἀποτελεῖ, εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, ἀναγκαίαν καὶ ἐπαρκῆ συνθήκην διὰ τὴν ἐξασφάλισιν ἰσορροπίας εἰς τὸ οἰκονομικὸν σύστημα, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ προσδιορισμοῦ μὴ ἀρνητικῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν διαφόρων κλάδων. Δι' ὃ καὶ «συνθήκη Hawkins - Simon» συνήθως καλεῖται.

---

1) Προφανῶς λύσις περιλαμβάνουσα μίαν ἢ περισσοτέρας μεταβλητὰς μὲ ἀρνητικὴν τιμὴν δὲν παρουσιάζει οἰκονομικὸν ἐνδιαφέρον, διότι δὲν δύναται νὰ νοηθῇ περίπτωσις ἀρνητικῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς.

2) Βλ. D. Hawkins and P. Simon: Some Conditions of Macroeconomic Stability. Econometrica, 1949.

6

Ἀνάλυσις Εἰσροῶν - Ἐκροῶν: Δυναμικὸν Ὑπόδειγμα

6.1. Διακλαδικοὶ συντελεσταὶ ἐπενδύσεως καὶ κλαδικὸς συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως

6.1.1. Διακλαδικαὶ ροαὶ καὶ ἐπενδύσεις. Ὡς ἐξετέθη εἰς τὸ κεφάλαιον 5, ἡ συνολικὴ παραγωγὴ X_ι (1) δοθέντος κλάδου ι διατίθεται πρὸς κάλυψιν τελικῆς ζητήσεως Ψ_ι καὶ διὰ παραγωγικὰς ἀνάγκας τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας, $\sum_{\kappa=1}^{\nu} x_{\iota\kappa}$.

Τὸ διατιθέμενον εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν τμῆμα τοῦ συνολικοῦ ἐτησίου προϊόντος τοῦ κλάδου ι συνιστᾷ τὸ καλούμενον «τελικὸν προϊὸν» τοῦ κλάδου, ἤτοι τὸ τμῆμα τοῦ συνολικοῦ προϊόντος, τὸ ὁποῖον παραμένει διαθέσιμον ἐντὸς τῆς περιόδου. Τὸ τελικὸν τοῦτο προϊόν, τὸ ὁποῖον θὰ παραστήσωμεν ἐνταῦθα εἰδικώτερον διὰ τοῦ συμβόλου Y_ι διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα: τὴν κατανάλωσιν C_ι καὶ τὴν ἐπένδυσιν I_ι, ἡ ὁποία ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν αὔξησιν τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ τῆς οἰκονομίας. Οὕτω:

$$Y_\iota = C_\iota + I_\iota \text{ (2)} \qquad \iota = 1, 2, \ldots, \nu \tag{1}$$

Ἂν θέσωμεν τώρα $I_{\iota\kappa}$ διὰ τὴν ἀξίαν τοῦ τελικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου ι τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται ὡς ἐπένδυσις ὑπὸ τοῦ κλάδου κ, θὰ ἔχωμεν:

$$I_\iota = I_{\iota 1} + I_{\iota 2} + \ldots + I_{\iota\nu} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} I_{\iota\kappa} \quad \text{διὰ} \quad \iota = 1, 2, \ldots, \nu \tag{2}$$

Ἡ (2) ἀποτελεῖ ταυτότητα καὶ σημαίνει ὅτι τὸ συνολικῶς διατιθέμενον δι' ἐπενδύσεις προϊὸν τοῦ κλάδου ι ἰσοῦται ἀναγκαίως πρὸς τὰς ἐπενδύσεις τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας ἐκ τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου ι.

Ἤδη τὸ σύστημα ἐξισώσεων κατανομῆς τῆς οἰκονομίας ἐν τῷ συνόλῳ δύναται νὰ γραφῇ ὡς

1) Ἐκφραζομένη εἰς νομισματικὰς μονάδας.

2) Δὲν λαμβάνεται ἐνταῦθα ὑπ' ὄψιν τὸ ἐξωτερικὸν ἐμπόριον, διὰ λόγους ἁπλοποιητικούς.

$$
\left.
\begin{array}{l}
\chi_{11}+\chi_{12}+\ldots+\chi_{1\nu}+C_1+I_{11}+I_{12}+\ldots+I_{1\nu}=X_1\\
\chi_{21}+\chi_{22}+\ldots+\chi_{2\nu}+C_2+I_{21}+I_{22}+\ldots+I_{2\nu}=X_2\\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\\
\chi_{\nu 1}+\chi_{\nu 2}+\ldots+\chi_{\nu 3}+C_\nu+I_{\nu 1}+I_{\nu 2}+\ldots+I_{\nu\nu}=X_\nu
\end{array}
\right\} \qquad (3)
$$

Τὸ σύστημα τοῦτο δεικνύει, κατὰ τὰ γνωστά, τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ συνολικοῦ προϊόντος ἑκάστου κλάδου. Τὸ χ_{ik} παριστᾷ, ὡς ἐλέχθη, τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου ι ἡ ὁποία ἀπορροφᾶται ὑπὸ τοῦ κλάδου κ διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς τρεχούσης παραγωγῆς. Κατὰ συνέπειαν πρόκειται περὶ τῆς ἀξίας τῶν *μέσων παραγωγῆς* τὰ ὁποῖα παράγει ὁ κλάδος ι καὶ *καταναλίσκει ἐξ ὁλοκλήρου ὁ κλάδος κ ἐντὸς τοῦ ἔτους*, κατὰ τὴν διαδικασίαν τῆς παραγωγῆς τοῦ προϊόντος του. Τὰ C_i παριστοῦν τὴν ἀξίαν τῶν προϊόντων τοῦ κλάδου ι τὰ ὁποῖα ἀπορροφῶνται ὑπὸ τῆς τελικῆς καταναλώσεως, τὸ δὲ I_{ik} παριστᾷ τὴν ἀξίαν τῶν πρὸς ἐπένδυσιν διατιθεμένων προϊόντων τοῦ κλάδου ι πρὸς τὸν κλάδον κ, διὰ τὴν *αὔξησιν* τοῦ κεφαλαιακοῦ δυναμικοῦ τοῦ τελευταίου κλάδου.

Σαφέστερον αἱ ὡς ἄνω σχέσεις δεικνύονται εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

Πίναξ

κατανομῆς συνολικοῦ προϊόντος

Συνολική παραγωγή ἑκάστου κλάδου	Παροχαί διὰ τὴν τρέχουσαν παραγωγήν	Τελικὸν προϊόν	Κατανάλωσις	Ἐπενδύσεις κατὰ κλάδους ἐκροῆς	Ἐπενδύσεις κατὰ κλάδους ἐκροῆς καὶ εἰσροῆς
X_1	$\chi_{11}\ \chi_{12}\ldots\chi_{1\nu}$	Y_1	C_1	I_1	$I_{11}\ I_{12}\ldots I_{1\nu}$
X_2	$\chi_{21}\ \chi_{22}\ldots\chi_{2\nu}$	Y_2	C_2	I_2	$I_{21}\ I_{22}\ldots I_{2\nu}$
.	. .	.	.	.	. .
.	. .	.	.	.	. .
.	. .	.	.	.	. .
X_ν	$\chi_{\nu 1}\ \chi_{\nu 2}\ldots\chi_{\nu\nu}$	Y_ν	C_ν	I_ν	$I_{\nu 1}\ I_{\nu 2}\ldots I_{\nu\nu}$
X	$X^{(1)}\ X^{(2)}\ldots X^{(\nu)}$	Y	C	I	$I^{(1)}\ I^{(2)}\ldots I^{(\nu)}$

Ἐπειδὴ τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος ἀποτιμῶνται εἰς νομισματικὰς μονάδας, δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ταῦτα, ὄχι μόνον κατὰ σειράς, ἀλλὰ καὶ κατὰ στήλας. Οὕτω ἐκ τῆς πρώτης στήλης λαμβάνομεν τὴν *συνολικὴν ἐθνικὴν παραγωγὴν* X:

$$
X=\sum_{i=1}^{\nu} X_i \qquad (4)
$$

Ἐκ τῆς προσθέσεως κατὰ στήλας τῶν διακλαδικῶν παροχῶν διὰ τὴν τρέχουσαν παραγωγήν, θὰ ἔχωμεν:

$$X^{(\kappa)} = \sum_{\iota=1}^{\nu} x_{\iota\kappa}, \qquad \kappa = 1, 2, \ldots, \nu \tag{5}$$

Ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν καθαρῶν τελικῶν προϊόντων Y_ι τῶν διαφόρων κλάδων λαμβάνομεν τὸ ***ἐθνικὸν εἰσόδημα*** Y:

$$Y = \sum_{\iota=1}^{\nu} Y_\iota \tag{6}$$

Ὁμοίως ἔχομεν:

$$C = \sum_{\iota=1}^{\nu} C_\iota \tag{7}$$

διὰ τὴν συνολικὴν κατανάλωσιν

καὶ

$$I = \sum_{\iota=1}^{\nu} I_\iota \tag{8}$$

διὰ τὴν συνολικὴν ἐπένδυσιν τῆς οἰκονομίας.

Τέλος ἐκ τῆς προσθέσεως κατὰ στήλας τῶν παροχῶν εἰς τοὺς διαφόρους κλάδους δι' ἐπενδύσεις λαμβάνομεν τὴν συνολικὴν ἀξίαν τῆς ἐτησίας ἐπενδύσεως ἑκάστου κλάδου:

$$I^{(\kappa)} = \sum_{\iota=1}^{\nu} I_{\iota\kappa} \qquad \kappa = 1, 2, \ldots, \nu \tag{9}$$

Ἐκ τοῦ πίνακος ἔχομεν ἐπίσης:

$$X = \sum_{\kappa} X^{(\kappa)} + Y \tag{10}$$

ἐξ ἧς:

$$Y = X - \sum_{\kappa} X^{(\kappa)} \tag{11}$$

ἤτοι τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα ἰσοῦται πρὸς τὴν συνολικὴν ἀξίαν τῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς μεῖον τὰς διακλαδικὰς παροχὰς διὰ τὴν τρέχουσαν παραγωγήν.

Ἐξ ἄλλου:

$$Y = C + I \tag{12}$$

καὶ

$$I = \sum_{\kappa} I^{(\kappa)} \tag{13}$$

6.1.2. ***Τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ εἰσροῆς καὶ συντελεσταὶ ἐπενδύσεως.*** Ὡς γνωστὸν αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀξιῶν τῶν ὑφ' ἑκάστου κλάδου καταναλισκομένων προϊόντων διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς τρεχούσης παραγωγῆς ἐντὸς μιᾶς περιόδου καὶ τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον δύνανται νὰ παρασταθοῦν διὰ μιᾶς σειρᾶς ἐξισώσεων τῆς μορφῆς:

$$\alpha_{\iota\kappa} = \frac{x_{\iota\kappa}}{X_\kappa} \quad \begin{matrix} \iota = 1, 2, \ldots, \nu \\ \kappa = 1, 2, \ldots, \nu \end{matrix} \tag{14}$$

Τὸ $\alpha_{\iota\kappa}$ ἀποτελεῖ τὸν τεχνολογικὸν συντελεστὴν εἰσροῆς, ὁ ὁποῖος καθορίζει τὴν ὑπὸ τοῦ κλάδου κ καταβαλλομένην ἀξίαν εἰς τὸν κλάδον ι διὰ τὴν χρησιμοποίησιν ποσότητος προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου, ὑπὸ μορφὴν πρώτων ἢ ἡμικατειργασμένων ὑλῶν καὶ λοιπῶν παραγωγικῶν μέσων, πρὸς παραγωγὴν προϊόντος τοῦ κλάδου κ ἀξίας μιᾶς χρηματικῆς μονάδος.

Πλὴν τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς ἔχομεν ἐπίσης καὶ ἑτέραν κατηγορίαν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, οἱ ὁποῖοι προσδιορίζουν πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ὁ κεφαλαιακὸς ἐξοπλισμὸς ἑκάστου κλάδου διὰ νὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ αὔξησις τῆς παραγωγῆς κατὰ μίαν μονάδα ἐτησίως. Τοὺς συντελεστὰς αὐτοὺς καλοῦμεν *διακλαδικοὺς συντελεστὰς ἐπενδύσεως* καὶ ὁρίζομεν ὡς :

$$\beta_{\iota\kappa} = I_{\iota\kappa}/\Delta X_\kappa \quad (\iota, \kappa = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{15}$$

ΔX_κ εἶναι ἡ αὔξησις τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου κ ἡ ἐπιτυγχανομένη διὰ τῆς αὐξήσεως τῶν ἐπενδύσεων τοῦ κλάδου αὐτοῦ κατὰ $I_{\iota\kappa}$, ἐκ προϊόντων τοῦ κλάδου ι. Συνεπῶς ὁ λόγος $I_{\iota\kappa}/\Delta X_\kappa$ δεικνύει τὴν ἀξίαν τῶν ὑπὸ κλάδου ι παρεχομένων παραγωγικῶν μέσων εἰς τὸν κλάδον κ, διὰ τὴν παραγωγὴν ὑπὸ τοῦ τελευταίου προσθέτου προϊόντος ἀξίας 1 νομ. μονάδος (1).

Θὰ παραστήσωμεν διὰ τοῦ B τὴν μήτραν τῶν διακλαδικῶν συντελεστῶν ἐπενδύσεως $\beta_{\iota\kappa}$, ἤτοι :

$$B = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \ldots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \ldots & \beta_{2\nu} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} \ldots & \beta_{\nu\nu} \end{vmatrix} \tag{16}$$

Μεταξὺ τῶν συντελεστῶν $\alpha_{\iota\kappa}$ καὶ τῶν συντελεστῶν $\beta_{\iota\kappa}$ ὑφίσταται ὡρισμένη σχέσις (2). Ὡς εἴπομεν, $\alpha_{\iota\kappa}$ δεικνύει τὴν ἀξίαν τοῦ κατὰ μονάδα παραγωγῆς κ ἀναλισκομένου ἐντὸς τοῦ ἔτους προϊόντος ι, ὑπὸ μορφὴν

1) Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι αἱ ἀπαιτούμεναι διὰ τὴν αὔξησιν $\Delta X_{\iota\kappa}$ ποσότητες προϊόντος ἐκ τῶν ἄλλων κλάδων δι' ἐπενδύσεις εἰς τὸν κλάδον κ εἶναι ἐπαρκεῖς.

2) Βλ. εἰδικώτερον : O. Lange «The output - investment ratio and input - output analysis» εἰς Econometrica, April 1960.

παραγωγικῶν μέσων. Διὰ τὴν αὔξησιν κατὰ μίαν μονάδα τοῦ προϊόντος κ κατὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος θὰ χρειασθῇ ἡ ἐπὶ πλέον κατανάλωσις $\alpha_{\iota\kappa}$ μονάδων ἐκ τοῦ ι. Ταυτοχρόνως ὅμως πρέπει νὰ αὐξηθῇ ἀντιστοίχως τὸ ἀπόθεμα τῶν μέσων παραγωγῆς τοῦ κλάδου κ ἐκ τῶν προϊόντων τοῦ κλάδου ι. Ἡ ἀπαιτουμένη αὔξησις ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ρυθμὸν ἐτησίας καταναλώσεως (ἀποσβέσεως) τῶν μέσων παραγωγῆς τοῦ κλάδου τούτου.

Ἄς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι τὰ ὑπὸ τοῦ κλάδου ι παρεχόμενα προϊόντα (π.χ. μηχαναὶ) εἰς τὸν κλάδον κ, πρὸς ἐπαύξησιν τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ τοῦ τελευταίου, διαρκοῦν 15 ἔτη. Ἄν τὸ χρησιμοποιούμενον ἐτησίως τμῆμα εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον, π.χ., πρὸς τὸ 1/15 τῆς συνολικῆς ἀξίας τῶν προϊόντων αὐτῶν, διὰ τὴν αὔξησιν τῆς ἐτησίας καταναλώσεως αὐτῶν κατὰ $\alpha_{\iota\kappa}$, πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς αὐξήσεως τῆς ἐτησίας παραγωγῆς τοῦ κλάδου κ κατὰ 1 μονάδα, θὰ ἀπαιτηθῇ ἐπένδυσις προϊόντος ι ἀξίας 15 $\alpha_{\iota\kappa}$. Δηλαδή :

$$\beta_{\iota\kappa} = 15\,\alpha_{\iota\kappa} \tag{17}$$

Γενικῶς, ἂν $\Pi_{\iota\kappa}$ εἶναι ἡ περίοδος διαρκείας τῶν προϊόντων ι τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖ δι' ἐπενδύσεις ὁ κλάδος κ, θὰ ἔχωμεν

$$\beta_{\iota\kappa} = \Pi_{\iota\kappa}\,\alpha_{\iota\kappa} \tag{18}$$

Οὕτω, οἱ τεχνολογικοὶ περιορισμοὶ τῆς παραγωγῆς δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τῶν συντελεστῶν $\alpha_{\iota\kappa}$, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τεχνολογικοὺς περιορισμοὺς τῆς τρεχούσης παραγωγῆς καὶ τῶν συντελεστῶν $\beta_{\iota\kappa}$, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τοὺς τεχνολογικοὺς περιορισμοὺς τῆς διαδικασίας αὐξήσεως τῆς παραγωγῆς. Προφανῶς ἀντὶ τῶν συντελεστῶν $\beta_{\iota\kappa}$ δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰ γινόμενα $\alpha_{\iota\kappa}\Pi_{\iota\kappa}$.

6.1.3 Κλαδικοὶ συντελεσταὶ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς παραγωγῆς. Ἐκ τῶν (9) καὶ (15) λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} I^{(\kappa)} &= \sum_{\iota} \beta_{\iota\kappa}\,\Delta X_{\kappa} \\ &= \Delta X_{\kappa} \sum_{\iota} \beta_{\iota\kappa} \end{aligned} \tag{19}$$

Καὶ ἐκ τῆς (19)

$$\frac{I^{(\kappa)}}{\Delta X_{\kappa}} = \sum_{\iota} \beta_{\iota\kappa} = \beta_{\kappa} \tag{20}$$

Τὸ β_{κ} ἀποτελεῖ τὸ ποσὸν τοῦ κεφαλαίου τὸ ὁποῖον εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἐπενδυθῇ εἰς τὸν κλάδον κ, ὑπὸ μορφὴν προϊόντων τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας, πρὸς αὔξησιν τῆς ἀξίας τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου αὐτοῦ κατὰ μίαν μονάδα. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ ὀνομάσωμεν τὸ β_κ ***συντελεστὴν ἐπενδύσεως*** τοῦ κλάδου ἢ ***κλαδικὸν συντελεστὴν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως*** τῆς παραγωγῆς. Ἐκ τῆς (20) βλέπομεν ὅτι ὁ κλαδικὸς συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διακλαδικῶν συντελεστῶν ἐπενδύσεως. Ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν (18) καὶ (20) λαμβάνομεν :

$$\beta_\kappa = \sum_i \alpha_{i\kappa} \Pi_{\kappa}, \qquad (21)$$

ἐξ ἧς συμπεραίνομεν ὅτι οἱ κλαδικοὶ συντελεσταὶ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν εἰσροῆς ἐπὶ τὰς περιόδους διαρκείας τῶν προϊόντων τῶν διαφόρων κλάδων, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται δι' ἐπένδυσιν ὑπὸ τοῦ κλάδου κ.

6.2. Ἐπενδύσεις καὶ ἀναδιάρθρωσις τῆς οἰκονομίας — Δυναμικὴ ἀνάλυσις εἰσροῶν - ἐκροῶν

6.2.1. Τὸ πρόβλημα τῆς ἀναπτύξεως μιᾶς οἰκονομίας δύναται βασικῶς νὰ ἀναχθῇ εἰς ἓν πρόβλημα συσσωρεύσεως ὑλικοῦ κεφαλαίου πρὸς ἐπαύξησιν τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τῶν διαφόρων κλάδων τῆς ἐν λόγῳ οἰκονομίας. Ἀλλ' ἡ συσσώρευσις αὕτη εἶναι συνήθως συνυφασμένη μὲ μίαν ἀλλαγὴν τῆς διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἡ κεφαλαιακὴ συσσώρευσις εὐνοεῖ περισσότερον ὡρισμένους κλάδους καὶ ὀλιγώτερον ἄλλους. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὑπαναπτύκτων γεωργικῶν χωρῶν ἡ διαδικασία κεφαλαιακῆς συσσωρεύσεως ἀποσκοπεῖ κατὰ κανόνα εἰς τὴν ἐξασφάλισιν τῶν ὑλικῶν προϋποθέσεων διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς «ἐκβιομηχανίσεως», πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἐκδηλοῦται μὲ ἔντονον συγκέντρωσιν ἐπενδύσεων εἰς τὸν τομέα τῆς μεταποιητικῆς δραστηριότητος.

Ἐνταῦθα θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ καθ' ὡρισμένον τρόπον ἀναδιάρθρωσις δοθείσης οἰκονομίας, μέσῳ τῶν ἐπενδύσεων, ἀποτελεῖ προγραμματικὸν σκοπόν, καὶ θὰ ἐξετάσωμεν τὴν λειτουργικὴν καὶ οἰκονομικὴν συνέπειαν τοῦ ἐν λόγῳ σκοποῦ. Ἐπειδὴ τὸ ἐνδιαφέρον μας συγκεντροῦται κυρίως εἰς τὰς μεταβολὰς τῆς διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν ἐνταῦθα μίαν μορφὴν ***δυναμικῆς*** ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ συνδυασμὸν τοῦ στατικοῦ ὑποδείγματος εἰσροῶν - ἐκροῶν καὶ τῶν διακλαδικῶν συντελεστῶν ἐπενδύσεως, τοὺς ὁποίους ἐξητάσαμεν προηγουμένως (1).

1) Ἡ δυναμικὴ αὕτη ἀνάλυσις, μολονότι ἔχει ὡς ἀφετηρίαν τὴν δυναμικὴν ἀνάλυσιν εἰσροῶν - ἐκροῶν τοῦ καθηγητοῦ Λεόντιεφ, εἶναι σημαντικῶς ἁπλουστέρα ταύτης ἀπὸ μαθηματικῆς ἀπόψεως.

Πλὴν τῶν γνωστῶν συμβόλων, θὰ χρησιμοποιήσωμεν ἐπίσης καὶ τὰ ἀκόλουθα σύμβολα :

$X_{\iota\tau}$: ἡ παραγωγικὴ δυναμικότης τοῦ κλάδου ι κατὰ τὸ ἔτος τ, μετρουμένη βάσει τῆς ἀξίας τῆς μεγίστης δυνατῆς παραγωγῆς τοῦ κλάδου κατὰ τὸ ἔτος αὐτό.

$\Delta X_{\iota(\tau+1)}$: ἡ αὔξησις τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τοῦ κλάδου ι μεταξὺ τῶν περιόδων τ καὶ $\tau+1$.

C_{τ} = $[C_{\iota\tau}]$, εἶναι μήτρα τάξεως $\nu\times 1$, μὲ στοιχεῖα $C_{\iota\tau}$ ἕκαστον τῶν ὁποίων δεικνύει τὴν ἀξίαν τῶν ἀγαθῶν τοῦ κλάδου ι ($\iota=1, 2,\ldots,\nu$), τῶν καταναλισκομένων (ὑπὸ τοῦ ἰδιωτικοῦ ἢ τοῦ δημοσίου τομέως) κατὰ τὸ ἔτος τ.

E_{τ} = $[I_{\iota\tau}]$, εἶναι μήτρα τάξεως $\nu\times 1$, μὲ στοιχεῖα $I_{\iota\tau}$, ἕκαστον τῶν ὁποίων δεικνύει τὴν ἀξίαν τῶν ἀγαθῶν τοῦ κλάδου ι τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται ὑπὸ μορφὴν ἐπενδύσεων εἰς τοὺς ν κλάδους τῆς οἰκονομίας (βλ. καὶ πίν. σελ. 182).

Θὰ ὑποθέσωμεν «χρονικὴν ὑστέρησιν» ἑνὸς ἔτους μεταξὺ ἐπενδύσεως καὶ αὐξήσεως παραγωγικῆς δυναμικότητος. Ἤτοι, ἂν διενεργηθοῦν ἐπενδύσεις ἐντὸς τοῦ ἔτους τ εἰς δοθέντα κλάδον, ἡ αὔξησις τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος αὐτοῦ θὰ λάβῃ χώραν κατὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος $\tau+1$.

6.2.2. Ἔστω ἤδη ὅτι ἐνδιαφερόμεθα νὰ αὐξήσωμεν τὰς παραγωγικὰς δυναμικότητας τῶν κλάδων 1, 2, . . . , ν τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος $\tau+1$, ὡς ἀκολούθως :

$$\Delta X_{1(\tau+1)},\ \Delta X_{2(\tau+1)},\ \ldots,\ \Delta X_{\nu(\tau+1)} \tag{1}$$

Αἱ μεταβολαὶ $\Delta X_{\iota(\tau+1)}$ ἀποτελοῦν συνεπῶς προγραμματικοὺς στόχους. Ἂν αἱ μεταβολαὶ αὗται δὲν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς δυναμικότητας $X_{\iota\tau}$ τῶν διαφόρων κλάδων κατὰ τὸ ἔτος τ, πραγματοποιούμεναι θὰ ὁδηγήσουν εἰς μίαν ἀλλαγὴν τῆς διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος $\tau+1$. Ἡ ἀλλαγὴ διαρθρώσεως ἐν προκειμένῳ ἔχει ἁπλῶς τὴν ἔννοιαν τῆς μεταβολῆς τοῦ ποσοστοῦ συμμετοχῆς ἑκάστου κλάδου εἰς τὴν συνολικὴν παραγωγικὴν δυναμικότητα τῆς οἰκονομίας (ἢ τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα). Ἡ διάρθρωσις τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος τ θὰ ἠδύνατο νὰ ἐκφρασθῇ διὰ μιᾶς σειρᾶς σχέσεων τῆς ἀκολούθου μορφῆς :

$$\frac{X_{\iota\tau}}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_{\kappa\tau}} = \gamma_{\iota\tau} \qquad \iota = 1, 2, \ldots, \nu \tag{2}$$

ὅπου $\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_{\kappa\tau}$ εἶναι ἡ συνολικὴ παραγωγικὴ δυναμικότης τῆς οἰκονομίας, μετρουμένη διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν παραγωγικῶν δυναμικοτήτων τῶν ν κλάδων αὐτῆς, καὶ $\gamma_{\iota\kappa}$ εἶναι τὸ ποσοστὸν συμμετοχῆς τοῦ κλάδου ι εἰς τὴν συνολικὴν παραγωγικὴν δυναμικότητα τῆς οἰκονομίας.

Διὰ τὸ ἔτος τ+1 ἡ διάρθρωσις τῆς οἰκονομίας ἐκφράζεται ἀναλόγως διὰ τῶν σχέσεων :

$$\gamma_{\iota(\tau+1)} = \frac{X_{\iota(\tau+1)}}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_{\kappa(\tau+1)}} \qquad \iota=1, 2, \ldots, \nu \qquad (3)$$

ὅπου

$$X_{\iota(\tau+1)} = X_{\iota\tau} + \Delta X_{\iota(\tau+1)} \qquad (4)$$

καὶ

$$\sum_{\kappa}^{\nu} X_{\kappa(\tau+1)} = \sum_{\kappa} X_{\kappa\tau} + \sum_{\kappa} \Delta X_{\kappa(\tau+1)} \qquad (5)$$

Μεταβολὴν τῆς διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας μεταξὺ τῶν ἐτῶν τ καὶ τ+1 θὰ ἔχωμεν ἂν ὅλα ἢ τινὰ ἐκ τῶν ποσοστῶν $\gamma_{\iota\tau}$ καὶ $\gamma_{\iota(\tau+1)}$, διαφέρουν, ἤτοι ἄν :

$$\begin{vmatrix} \gamma_{1\tau} \\ \gamma_{2\tau} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{\nu\tau} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} \gamma_{1(\tau+1)} \\ \gamma_{2(\tau+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{\nu(\tau+1)} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Τὰ διανύσματα ταῦτα, τὰ ὁποῖα θὰ συμβολίσωμεν διὰ γ_τ καὶ $\gamma_{\tau+1}$, ἐκφράζουν προφανῶς τὴν διάρθρωσιν τῆς οἰκονομίας κατὰ τὰ ἔτη τ καὶ τ+1, δι' ὃ καὶ δύνανται νὰ ὀνομασθοῦν ***διανύσματα διαρθρώσεως***. Δὲν θὰ ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα διατὶ ἐπελέγη τὸ διάνυσμα διαρθρώσεως $\gamma_{\tau+1}$ καὶ οὐχὶ ἕτερον διάνυσμα διαρθρώσεως π.χ. $\gamma'_{\tau+1}$. Ἐν ἄλλοις λόγοις δὲν θὰ ἐξετάσωμεν τὸν τρόπον ἐπιλογῆς τῶν $\Delta X_{\iota(\tau+1)}$ ἐκ τῶν ὁποίων ἐξαρτᾶται τὸ $\gamma_{\tau+1}$. Θὰ ὑποθέσωμεν μόνον ὅτι αἱ μεταβολαὶ τῆς διαρθρώσεως μεταξὺ τ καὶ τ+1 εἶναι τοιαῦται ὥστε ἐν συνδυασμῷ καὶ μὲ ἀναλόγους μεταβολὰς τῆς διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας κατὰ τὰ ἑπόμενα ἔτη νὰ ὁδηγήσουν εἰς μίαν τελικὴν διάρθρωσιν τῆς οἰκονομίας, ἡ ὁποία (διάρθρωσις) ὑποτίθεται ὅτι ἀποτελεῖ τὸν στόχον ἑνὸς μακροχρονιωτέρου προγράμματος (1).

1) Ἡ μέθοδος αὕτη προγραμματισμοῦ, διὰ διασπάσεως ἑνὸς π.χ. πενταετοῦς προγράμματος εἰς ἐτήσια «ὑποπρογράμματα», τὰ ὁποῖα ὁδηγοῦν εἰς τὴν βαθμιαίαν πραγματοποίησιν τῶν στόχων τοῦ γενικωτέρου προγράμματος, συμφωνεῖ ἀπολύτως μὲ τὴν ἀκολουθουμένην εἰς τὴν πρᾶξιν τεχνικὴν προγραμματισμοῦ.

6.2.3. Προηγουμένως ἐτέθη ὡς προγραμματικὸς σκοπὸς ἡ πραγματοποίησις αὐξήσεων $\Delta X_{i(\tau+1)}$ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας. Προφανῶς λόγῳ τῆς σχέσεως (3) θὰ ἠδύνατο νὰ τεθῇ ἰσοδυνάμως ὡς προγραμματικὸς σκοπὸς ἡ πραγματοποίησις τῆς διαρθρώσεως $\gamma_{\tau+1}$. Κατόπιν τῆς διευκρινίσεως ταύτης θὰ θέσωμεν ὡς ἀφετηρίαν τῆς ἀναλύσεως τὰς μεταβολὰς $\Delta \mathring{X}_{i(\tau+1)}$.

Τὰ ἐξεταστέα προβλήματα εἶναι: α) νὰ προσδιορισθοῦν κατὰ κλάδους αἱ ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῶν μεταβολῶν $\Delta \mathring{X}_{i(\tau+1)}$ καὶ β) νὰ ἐλεγχθῇ ἡ λειτουργικὴ καὶ οἰκονομικὴ συνέπεια τοῦ τεθέντος προγραμματικοῦ σκοποῦ.

Α΄. *Ὑπολογισμὸς ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων*. Ἂν θεωρηθῇ ὡς δεδομένη ἡ μήτρα τῶν διακλαδικῶν συντελεστῶν ἐπενδύσεων (βλ. σ. 184), αἱ συνολικαὶ ἐπενδύσεις κατὰ κλάδον ἐκροῆς δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν ἐκ τοῦ γινομένου:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \dots \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \dots \beta_{2\nu} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} \dots \beta_{\nu\nu} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \Delta X_{1(\tau+1)} \\ \Delta X_{2(\tau+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta X_{\nu(\tau+1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_{11}\Delta \mathring{X}_{1(\tau+1)} + \beta_{12}\Delta \mathring{X}_{2(\tau+1)} + \dots + \beta_{1\nu}\Delta \mathring{X}_{\nu(\tau+1)} \\ \beta_{21}\Delta \mathring{X}_{1(\tau+1)} + \beta_{22}\Delta \mathring{X}_{2(\tau+1)} + \dots + \beta_{2\nu}\Delta \mathring{X}_{\nu(\tau+1)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \beta_{\nu 1}\Delta \mathring{X}_{1(\tau+1)} + \beta_{\nu 2}\Delta \mathring{X}_{2(\tau+1)} + \dots + \beta_{\nu\nu}\Delta \mathring{X}_{\nu(\tau+1)} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Τὰ ν στοιχεῖα τοῦ διανύσματος τοῦ δεξιοῦ μέλους δύνανται, βάσει τοῦ τύπου $\beta_{i\kappa} = I_{i\kappa}/\Delta X_\kappa$ (βλ. τύπον 15 εἰς 6.1.2), νὰ γραφοῦν ὡς:

$$\begin{vmatrix} I_{11(\tau)} + I_{12(\tau)} + \dots + I_{1\nu(\tau)} \\ I_{21(\tau)} + I_{22(\tau)} + \dots + I_{2\nu(\tau)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ I_{\nu 1(\tau)} + I_{\nu 2(\tau)} + \dots + I_{\nu\nu(\tau)} \end{vmatrix} \tag{8}$$

ὅπου τὸ $I_{i\kappa(\tau)}$ ἀποτελεῖ τὰς ἐπενδύσεις τοῦ κλάδου κ ἐκ προϊόντος τοῦ κλάδου ι κατὰ τὸ ἔτος τ.

Βάσει τοῦ τύπου (2) τῆς παραγρ. 6.1.1 τὸ διάνυσμα (8) δύναται νὰ γραφῇ ὡς:

$$\begin{bmatrix} I_{1\tau} \\ I_{2\tau} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{\nu\tau} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

ὅπου $I_{i\tau}$ ἀποτελεῖ τὴν συνολικὴν ἀξίαν τῶν ἀγαθῶν τοῦ κλάδου ι τὰ ὁποῖα ἀπορροφῶνται ὑπὸ μορφὴν ἐπενδύσεων ὑπὸ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας, κατὰ τὸ ἔτος τ. Βάσει τοῦ τεθέντος συμβολισμοῦ εἰς 6.2.1. τὸ διάνυσμα (9) δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ συμβόλου E_τ. Κατὰ συνέπειαν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν συνοπτικῶς ἀντὶ τῆς (7):

$$B\,\Delta\,X_{(\tau+1)} = E_\tau \qquad (10)$$

ὅπου B εἶναι ἡ μήτρα τῶν διακλαδικῶν συντελεστῶν ἐπενδύσεως καὶ $\Delta\,\dot{X}_{(\tau+1)}$ τὸ διάνυσμα τῶν μεταβολῶν $\Delta\,X_{i(\tau+1)}$.

Β΄. *Λειτουργικὴ καὶ οἰκονομικὴ συνέπεια τοῦ προγραμματικοῦ σκοποῦ*

Αἱ ἐπενδύσεις ἀποτελοῦν (βλ. 6.1.1) ἓν τμῆμα τῆς τελικῆς ζητήσεως τῆς οἰκονομίας. Θὰ ὑποθέσωμεν πρὸς ἁπλούστευσιν, ὅτι ἡ τελικὴ ζήτησις τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος τ ἀποτελεῖται μόνον ἐκ τῶν ὡς ἄνω προσδιορισθεισῶν ἐπενδύσεων καὶ τῶν κονδυλίων καταναλώσεως, $C_{i\tau}$, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸ διάνυσμα:

$$C_\tau = \begin{bmatrix} C_{1\tau} \\ C_{2\tau} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{\nu\tau} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

τὰ κονδύλια $C_{i\tau}$ θεωροῦνται ἐπίσης ὡς δεδομένα (1). Οὕτω ἡ τελικὴ ζήτησις τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος τ θὰ εἶναι:

1) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν $C_{i\tau}$ δυνατὸν νὰ ἐβασίσθη, π.χ., εἰς μελέτας οἰκογενειακῶν προϋπολογισμῶν.

$$C_\tau + E_\tau = \begin{bmatrix} C_{1\tau} \\ C_{2\tau} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{\nu\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{1\tau} \\ I_{2\tau} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{\nu\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1\tau} + I_{1\tau} \\ C_{2\tau} + I_{2\tau} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{\nu\tau} + I_{\nu\tau} \end{bmatrix} = Y_\tau \qquad (12)$$

Συνθήκη λειτουργικῆς συνεπείας. Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς τελικῆς ζητήσεως καὶ ὑποθέτοντες γνωστὴν τὴν τεχνολογικὴν μήτραν τῆς οἰκονομίας $[I - A]$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$[I - A]\, X_\tau = Y_\tau \qquad (13)$$

ὅπου X_τ εἶναι τὸ διάνυσμα τῶν ζητουμένων ἐπιπέδων δράσεως $X_{\iota\tau}$ (μετρουμένων εἰς νομισματικὰς μονάδας) τῶν κλάδων ι κατὰ τὴν περίοδον τ. Ἡ λύσις τῆς (13) θὰ εἶναι, κατὰ τὰ γνωστά :

$$X_\tau = [I - A]^{-1}\, Y_\tau \qquad (14)$$

Ἡ ἐξίσωσις (14) ἀποτελεῖ τὴν *συνθήκην λειτουργικῆς συνεπείας* τοῦ τεθέντος προγραμματικοῦ στόχου, ἤτοι τῶν μεταβολῶν $\Delta \mathring{X}_{\iota(\tau+1)}$. Προφανῶς ἂν αἱ μεταβολαὶ αὗται ἦσαν διάφοροι, θὰ ἦτο ἐπίσης διάφορον καὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀπαιτουμένων κατὰ κλάδους ἐπενδύσεων καὶ συνεπῶς, δοθέντος τοῦ διανύσματος τῆς καταναλώσεως C_τ, θὰ εἴχομεν ἄλλας τιμὰς διὰ τὰ $X_{\iota\tau}$.

Συνθῆκαι οἰκονομικῆς συνεπείας. Ὁ τεθεὶς προγραμματικὸς στόχος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς οἰκονομικῶς συνεπὴς ἂν ἡ λύσις (14) πληροῖ τὰς ἀκολούθους συνθήκας :

α) Τὰ ἐπίπεδα δράσεως δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνουν τὰς ἀντιστοίχους παραγωγικὰς δυναμικότητας τῶν κλάδων κατὰ τὸ ἔτος τ, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι :

$$\begin{bmatrix} X_{1\tau} \\ X_{2\tau} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{\nu\tau} \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} \mathring{X}_{1\tau} \\ \mathring{X}_{2\tau} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathring{X}_{\nu\tau} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Ἐὰν $X_{\iota\tau} > \mathring{X}_{\iota\tau}$, ἔστω καὶ διὰ μίαν τιμὴν τοῦ ι, πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ τεθεὶς προγραμματικὸς σκοπὸς δὲν δύναται νὰ πραγματοποιηθῇ [1].

β) Ἡ συνολικῶς ἀπαιτουμένη ἐργατικὴ ἀπασχόλησις δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὰς δυνατότητας τῆς οἰκονομίας ἀπὸ ἀπόψεως ἐργατικοῦ δυναμικοῦ κατὰ τὸ ἔτος τ.

Ἔστωσαν $\alpha_{(\nu+1)\iota}$ οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς ἐργασίας, οἱ ὁποῖοι δεικνύουν τὴν ὑπὸ τοῦ κλάδου ι καταβαλλομένην ἀμοιβὴν δι' ἐργασίαν (ἥτις ἐμφανίζεται ὡς κλάδος $\nu+1$ εἰς τὸ σύστημα) πρὸς παραγωγὴν προϊόντος τοῦ κλάδου ι ἀξίας 1 νομισματικῆς μονάδος. Αἱ συνολικῶς καταβαλλόμεναι ἀμοιβαὶ δι' ἐργασίαν ἐντὸς τοῦ ἔτους τ θὰ εἶναι τότε [2]:

$$X_{(\nu+1)\tau} = \alpha_{(\nu+1)1} X_{1\tau} + \alpha_{(\nu+1)2} X_{2\tau} + \ldots + \alpha_{(\nu+1)\nu} X_{\nu\tau} \qquad (16)$$

Ἂν μ εἶναι ἡ μέση τιμὴ τῆς ἐργασίας μετρουμένης εἰς «ἐργάτας-ἔτη» [3] θὰ ἔχωμεν συνολικῶς ἀπαιτουμένην ἐργατικὴν ἀπασχόλησιν, κατὰ τὸ ἔτος τ, διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ προγράμματος: $X_{(\nu+1)\tau}/\mu$. Ἡ δευτέρα συνθήκη δύναται τώρα νὰ ἐκφρασθῇ ὡς

$$X_{(\nu+1)\tau}/\mu \leqslant N_\tau\,, \qquad (17)$$

ὅπου N_τ εἶναι τὸ ἐργατικὸν δυναμικὸν τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος τ.

γ) Αἱ ἀπαιτούμεναι συνολικαὶ ἐπενδύσεις

$$I_\tau = [\, I_{1\tau} + I_{2\tau} + \ldots + I_{\nu\tau}\,]$$

τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος τ δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνουν τὰς δυνατότητας χρηματοδοτήσεως αὐτῶν. Εἰς τὰς δυνατότητας αὐτὰς περιλαμβάνεται, πλὴν τῶν ἐγχωρίων ἀποταμιευτικῶν πόρων, καὶ ὡρισμένον ἐπίπεδον ἀποταμιεύσεων ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς πραγματοποιήσιμον διὰ τὸ ἔτος τ. Οἱ ἐγχώριοι ἀποταμιευτικοὶ πόροι κατὰ τὸ ἔτος τ, συμβολικῶς $S_{\sigma\tau}$, δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν [4] ἐκ τῆς διαφορᾶς μεταξὺ εἰσοδημάτων καὶ καταναλώσεως, ἤτοι θὰ εἶναι:

$$S_{\sigma\tau} = X_{\nu+1} - \Sigma\, C_{\iota\tau} \qquad (18)$$

1) Ἐκτὸς ἐὰν εἶναι δυνατὴ ἡ ἐξουδετέρωσις ἐλλειμμάτων τῆς ἐγχωρίου παραγωγῆς δι' εἰσαγωγῶν. Ἀλλ' ἡ ἐξουδετέρωσις αὐτὴ τελεῖ ὑπὸ τὸν περιορισμὸν τῆς συνθήκης (17) κατωτέρω.

2) Βλ. καὶ σ. 171.

3) Ἡ μονὰς αὐτὴ ἐκφράζει τὴν συνολικῶς καταβαλλομένην ἐργασίαν ἑνὸς ἐργάτου κατὰ τὴν διάρκειαν ἑνὸς ἔτους.

4) Βάσει τῶν τεθεισῶν ὑποθέσεων.

Ἂν $S_{\xi\tau}$ εἶναι τὸ μέγιστον ἐπίπεδον ἀποταμιεύσεων ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ὑπὸ τῆς ἐξεταζομένης οἰκονομίας, τὸ σύνολον τῶν διαθεσίμων ἀποταμιευτικῶν πόρων τῆς οἰκονομίας ταύτης διὰ τὸ ἔτος τ θὰ εἶναι [1]:

$$S_\tau = S_{o\tau} + S_{\xi\tau} \tag{19}$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ τρίτη συνθήκη οἰκονομικῆς συνεπείας θὰ εἶναι:

$$I_\tau \leqslant S_\tau \tag{20}$$

6.2.4. Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ λύσις (14) ἱκανοποιεῖ τὰς συνθήκας οἰκονομικῆς συνεπείας (15), (17) καὶ (20). Ἔστω δὲ εἰδικώτερον ὅτι $X_{\iota\tau} = \mathring{X}_{\iota\tau}$, δι' ἓν τοὐλάχιστον ι, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ παραγωγικὴ δυναμικότης ἑνὸς τουλάχιστον κλάδου χρησιμοποιεῖται πλήρως κατὰ τὸ ἔτος τ [2]. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν λύσιν ἑνὸς νέου προβλήματος, ὁμοίου πρὸς τὸ προηγουμένως τεθέν, κατόπιν προσδιορισμοῦ προγραμματικῶν μεταβολῶν $\Delta \mathring{X}_{\iota(\tau+2)}$, διὰ τὰς παραγωγικὰς δυναμικότητας τῶν ν κλάδων τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος τ+2.

Συνοπτικῶς θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ ἔτος τ+1:

$$[I - A]\, X_{\tau+1} = Y_{\tau+1} \tag{α}$$

Ἡ μήτρα τῆς τελικῆς ζητήσεως $Y_{\tau+1}$ θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μητρῶν τῆς καταναλώσεως $C_{\tau+1}$ καὶ τῶν ἐπενδύσεων $E_{\tau+1}$, ἤτοι:

$$Y_{\tau+1} = C_{\tau+1} + E_{\tau+1}$$

Ἐξ ἄλλου

$$E_{\tau+1} = B\, \Delta \mathring{X}_{\tau+2}$$

ὅπου B εἶναι ἡ μήτρα τῶν διακλαδικῶν συντελεστῶν ἐπενδύσεως καὶ $\Delta \mathring{X}_{\tau+2}$ εἶναι ἡ μήτρα τῶν προγραμματισθεισῶν μεταβολῶν $\Delta \mathring{X}_{\iota(\tau+2)}$, εἰς τὰ ἐπίπεδα τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τῶν διαφόρων κλάδων. Ἐκ τῆς (α) ἔχομεν τὴν λύσιν:

$$X_{\tau+1} = [I - A]^{-1}\, Y_{\tau+1}, \tag{β}$$

ἥτις ἀποτελεῖ καὶ συνθήκην λειτουργικῆς συνεπείας τοῦ προγράμματος.

1) Δυνατὸν νὰ ὑφίστανται ἐπίσης περιθώρια χρησιμοποιήσεως συναλλαγματικοῦ ἀποθέματος πρὸς χρηματοδότησιν ἐπενδύσεων.

2) Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν $X_{\iota\tau} < \mathring{X}_{\iota\tau}$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ι, θὰ ἔχωμεν ὑποαπασχόλησιν εἰς ὅλους τοὺς κλάδους. Κατὰ συνέπειαν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ αὐξηθῇ ἡ τελικὴ ζήτησις δι' αὐξήσεως τῶν ἐπενδύσεων καὶ νὰ ἐπιταχυνθῇ οὕτω ἡ προγραμματισθεῖσα μακροχρονιωτέρα ἀναδιάρθρωσις τῆς οἰκονομίας.

Τὸ πρόγραμμα εἶναι οἰκονομικῶς πραγματοποιήσιμον ἂν πληροῦνται αἱ συνθῆκαι :

$$X_{\tau+1} \leq \mathring{X}_{\tau+1} \qquad (\gamma)$$

$$X_{(\nu+1)(\tau+1)}/\mu \leq N_{\tau+1} \qquad (\delta)$$

καὶ

$$I_{\tau+1} \leq S_{\tau+1} \qquad (\varepsilon)$$

ὅπου $\mathring{X}_{\tau+1}$ εἶναι τὸ διάνυσμα τῶν παραγωγικῶν δυναμικοτήτων τῶν ν κλάδων τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος $\tau+1$. Προφανῶς θὰ εἶναι :

$$\mathring{X}_{\tau+1} = \mathring{X}_{\tau} + \Delta\mathring{X}_{\tau+1} = \begin{bmatrix} \mathring{X}_{1\tau} \\ \mathring{X}_{2\tau} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathring{X}_{\nu\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\mathring{X}_{1(\tau+1)} \\ \Delta X_{2(\tau+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta X_{\nu(\tau+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathring{X}_{1\tau} + \Delta\mathring{X}_{1(\tau+1)} \\ \mathring{X}_{2\tau} + \Delta\mathring{X}_{2(\tau+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathring{X}_{\nu\tau} + \Delta\mathring{X}_{\nu(\tau+1)} \end{bmatrix}$$

Ἂν τὸ τεθὲν πρόγραμμα εἶναι πραγματοποιήσιμον κατὰ τὰ ἀνωτέρω, προχωροῦμεν ὁμοίως εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ προγράμματος τοῦ ἔτους $\tau+3$, κ.ο.κ.

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα

I. Δεδομένα. Ἡ τεχνολογικὴ μήτρα $[I-A]$ καὶ ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν ἐπενδύσεως B, δοθείσης οἰκονομίας ἐχούσης τρεῖς κλάδους παραγωγῆς, συμβολιζομένων διὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2 καὶ 3, εἶναι :

$$[I-A] = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.25 & 1 & -0.2 \\ -0.2 & -0.15 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς ἐργασίας διὰ τοὺς τρεῖς κλάδους, ἀντιστοίχως εἶναι : 0.55, 0.65 καὶ 0.6, τὸ ἐργατικὸν δυναμικὸν εἶναι 100 μονάδες ἐργασίας, κατὰ τὸ ἔτος τ, ἡ δὲ μέση τιμὴ ἐργασίας εἶναι 6 ν.μ. Αἱ παραγωγικαὶ δυναμικότητες τῶν τριῶν κλάδων κατὰ τὸ ἔτος τ εἶναι :

$$\mathring{X}_{1\tau} = 350$$

$$\mathring{X}_{2\tau} = 350$$

$$\mathring{X}_{3\tau} = 300$$

Κατὰ συνέπειαν τὸ διάνυσμα τῆς διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας διὰ τὸ ἔτος τ θὰ εἶναι :

$$\gamma_\tau = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.35 \\ 0.30 \end{bmatrix}$$

II. Στόχος. Ὡς στόχος τοῦ προγράμματος τίθεται ἡ διενέργεια ἐπενδύσεων εἰς τοὺς κλάδους 2 καὶ 3 τῆς οἰκονομίας, εἰς τρόπον ὥστε νὰ πραγματοποιηθῇ τὸ ἑπόμενον ἔτος τ+1 ἡ διάρθρωσις :

$$\gamma_{\tau+1} = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.38 \\ 0.32 \end{bmatrix}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι θὰ αὐξηθῇ καταλλήλως ἡ παραγωγικὴ δυναμικότης μόνον εἰς τοὺς κλάδους 2 καὶ 3.

Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος διαρθρώσεως καὶ τῶν τεθεισῶν ἀνωτέρω ὑποθέσεων θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\mathring{X}_{1(\tau+1)}}{\sum_{\kappa=1}^{3} \mathring{X}_{\kappa(\tau+1)}} = \frac{350 + 0}{1000 + \Delta\mathring{X}_{2(\tau+1)} + \Delta\mathring{X}_{3(\tau+1)}} = 0.30 \qquad (1)$$

$$\frac{\mathring{X}_{2(\tau+1)}}{\sum_{\kappa=1}^{3} \mathring{X}_{\kappa(\tau+1)}} = \frac{350 + \Delta\mathring{X}_{2(\tau+1)}}{1000 + \Delta\mathring{X}_{2(\tau+1)} + \Delta\mathring{X}_{3(\tau+1)}} = 0.38 \qquad (2)$$

$$\frac{\mathring{X}_{3(\tau+1)}}{\sum_{\kappa=1}^{3} \mathring{X}_{\kappa(\tau+1)}} = \frac{300 + \Delta\mathring{X}_{3(\tau+1)}}{1000 + \Delta\mathring{X}_{2(\tau+1)} + \Delta\mathring{X}_{3(\tau+1)}} = 0.32 \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων λαμβάνομεν $\Delta\mathring{X}_{2(\tau+1)} = 93.4$ καὶ $\Delta\mathring{X}_{3(\tau+1)} = 73.2$. Οὕτω τὸ διάνυσμα $\Delta\mathring{X}_{\tau+1}$ τῶν αὐξήσεων θὰ εἶναι :

$$\Delta\mathring{X}_{\tau+1} = \begin{bmatrix} 0 = \Delta\mathring{X}_{1(\tau+1)} \\ 93.4 = \Delta\mathring{X}_{2(\tau+1)} \\ 73.2 = \Delta\mathring{X}_{3(\tau+1)} \end{bmatrix}$$

III. Ὑπολογισμὸς ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων. Αἱ ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις κατὰ κλάδον ἐκροῆς διὰ τὰς ἀνωτέρω αὐξήσεις τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τῶν διαφόρων κλάδων δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τοῦ γινομένου :

$$B \Delta X_{\tau+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 93.4 \\ 73.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.62 \\ 40.64 \\ 57.30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1\tau} \\ I_{2\tau} \\ I_{3\tau} \end{bmatrix}$$

Οὕτω τὸ σύνολον τῶν ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων θὰ εἶναι : 162,56. Αἱ ἐπενδύσεις αὗται κατανέμονται κατὰ κλάδους εἰσροῆς ὡς ἑξῆς :

$$I^{(1)} = (0.5 + 0.2 + 0.6) \times 0 = 0$$

$$I^{(2)} = (0.3 + 0.2 + 0.3) \times 93.4 = 74.72$$

$$I^{(3)} = (0.5 + 0.3 + 0.4) \times 73.2 = 87.84$$

IV. Λειτουργικὴ συνέπεια τοῦ στόχου. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὑπολογισμοῦ διεπιστώθησαν αἱ ἀπαιτούμεναι κατὰ κλάδους ἐκροῆς ἐπενδύσεις κατὰ τὸ ἔτος τ διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ στόχου $y_{\tau+1}$, ὑπὸ τὰς τεθείσας ὑποθέσεις. Ἔστω ἤδη ὅτι πλὴν τῶν ἐπενδύσεων τοῦ ἔτους τ γνωρίζομεν ἐπίσης καὶ τὰ κονδύλια τῆς καταναλώσεως κατὰ κλάδον ἐκροῆς τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς ἑξῆς :

$$\begin{bmatrix} C_{1\tau} = 135 \\ C_{2\tau} = 130 \\ C_{3\tau} = 133 \end{bmatrix}$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ τελικὴ ζήτησις τῆς οἰκονομίας διὰ τὸ ἔτος τ θὰ εἶναι (1) :

$$\begin{bmatrix} Y_{1\tau} = 135 + 64.62 \\ Y_{2\tau} = 130 + 40.64 \\ Y_{3\tau} = 133 + 57.30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199.62 \\ 170.64 \\ 190.30 \end{bmatrix}$$

ἤτοι, συνολικῶς $Y_\tau = 560.56$.

Βάσει τῆς τεχνολογικῆς μήτρας [I – A] καὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸ σύστημα :

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.25 & 1 & -0.2 \\ -0.2 & -0.15 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\tau} \\ X_{2\tau} \\ X_{3\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 170 \\ 190 \end{bmatrix}$$

1) Ὑποτίθεται ὅτι ἡ οἰκονομία εἶναι κλειστὴ καὶ δὲν ἔχομεν οὕτω ἐξωτερικὸν τομέα.

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν (1):

$$X_{1\tau} = 320$$

$$X_{2\tau} = 310$$

$$X_{3\tau} = 300$$

Αἱ ἀνωτέρω λύσεις ἐξασφαλίζουν τὴν συνέπειαν τοῦ προγραμματισθέντος στόχου πρὸς τὰς συνθήκας λειτουργίας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Δι' ὃ καὶ καλοῦμεν τὴν συνέπειαν ταύτην λειτουργικὴν ἢ *ἐσωτερικήν*.

V. Οἰκονομικὴ συνέπεια τοῦ στόχου. Ὁ ἔλεγχος τῆς οἰκονομικῆς συνεπείας δύναται ἐνταῦθα νὰ γίνῃ ἀπὸ τριῶν ἀπόψεων.

α) Ἀπὸ ἀπόψεως παραγωγικῶν δυνατοτήτων τῶν τριῶν κλάδων.

β) Ἀπὸ ἀπόψεως ἐργατικοῦ δυναμικοῦ.

γ) Ἀπὸ ἀπόψεως ἀποταμιευτικῶν δυνατοτήτων.

Ἐπειδή:

$$\begin{bmatrix} X_{1\tau} = 350 \\ X_{2\tau} = 350 \\ X_{3\tau} = 300 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} X_{1\tau} = 320 \\ X_{2\tau} = 310 \\ X_{3\tau} = 300 \end{bmatrix}$$

ἡ εὑρεθεῖσα λύσις εἶναι πραγματοποιήσιμος ἀπὸ ἀπόψεως παραγωγικῶν δυνατοτήτων τῶν τριῶν κλάδων τῆς οἰκονομίας (2).

Ἐξ ἄλλου βάσει τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς ἐργασίας καὶ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν τῶν $X_{i\tau}$ θὰ ἔχωμεν συνολικὰς ἀμοιβὰς δι' ἐργασίαν:

$$X_{(\nu+1)\tau} = 0.55 \times 320 + 0.65 \times 310 + 0.6 \times 300 = 558 \text{ ν.μ. περίπου}$$

Αἱ ἀμοιβαὶ αὗται ἀποτελοῦν, εἰς τὸ παράδειγμά μας, καὶ τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα τῆς οἰκονομίας. Συνεπῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ἐργασίας θὰ εἶναι (βάσει τῆς μέσης τιμῆς 6 ν.μ.) : 558/6 = 93 μονάδες.

Ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι τὸ ἐργατικὸν δυναμικὸν κατὰ τὸ ἔτος τ εἶναι 100 μονάδες, προκύπτει ἐκ τῆς συγκρίσεως ὅτι ὁ τεθεὶς στόχος εἶναι πραγματοποιήσιμος καὶ ἀπὸ ἀπόψεως ἐργατικοῦ δυναμικοῦ.

1) Κατὰ προσέγγισιν τιμαί.

2) Ὡς παρατηροῦμεν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ τελευταίου κλάδου χρησιμοποιεῖται πλήρως ἡ παραγωγικὴ δυναμικότης αὐτοῦ. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο προέκυψε λόγῳ σκοπίμου χειρισμοῦ τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων, πρὸς ἀποφυγὴν ἀναπροσαρμογῆς τῆς τελικῆς ζητήσεως.

Τέλος ἡ συνολικὴ ἀποταμίευσις τῆς οἰκονομίας εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα μεῖον τὰς δαπάνας καταναλώσεως, ἤτοι θὰ εἶναι: 558 – 398 = 160. Αἱ ἀποταμιεύσεις αὗται εἶναι ἴσαι [1] πρὸς τὰς ἐπενδύσεις τοῦ ἔτους τ. Οὕτω καὶ ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης ὁ τεθεὶς στόχος ἀναδιαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος τ+1 εἶναι πραγματοποιήσιμος.

Δυνάμεθα προφανῶς νὰ συνεχίσωμεν τὴν διαδικασίαν ἀναδιαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας διὰ τῆς μεταβολῆς τῶν παραγωγικῶν δυναμικοτήτων τῶν κλάδων αὐτῆς κατὰ τὸ ἔτος τ+2 κ.ο.κ. Τὸ οὐσιῶδες εἰς τὴν ἀνάλυσιν ταύτην, ἥτις ἀποσκοπεῖ εἰς τὸν σταδιακὸν προγραμματισμὸν τῆς ἀναδιαρθρώσεως μιᾶς οἰκονομίας, διὰ καταλλήλου κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων, εἶναι ἡ κατάρτισις λειτουργικῶς καὶ οἰκονομικῶς πραγματοποιησίμων ἐτησίων προγραμμάτων. Ἡ ἀνάλυσις εἶναι *δυναμικὴ* καθ' ὅσον παρακολουθεῖ τὰς διαχρονικὰς μεταβολὰς τῆς διαρθρώσεως δοθείσης οἰκονομίας συνεπείᾳ τῆς διενεργείας ἐπενδύσεων καὶ δὲν ὑποθέτει ὡς δεδομένην τὴν διάρθρωσιν ταύτην, ὡς ἀκριβῶς συμβαίνει μὲ τὴν στατικὴν ἀνάλυσιν εἰσροῶν - ἐκροῶν.

Ἂν ἡ προγραμματισθεῖσα ἀναδιάρθρωσις πραγματοποιηθῇ [2], κατὰ τὸ ἔτος τ+1 ἡ παραγωγικὴ δυναμικότης ἑκάστου κλάδου θὰ εἶναι:

	Αὔξησις ἔναντι ἔτους τ
$\bar{X}_{1(\tau+1)} = 350$	0,0 %
$\bar{X}_{2(\tau+1)} = 443.4$	26,0 %
$\bar{X}_{3(\tau+1)} = 373.2$	24,0 %

Αἱ νέαι αὗται παραγωγικαὶ δυναμικότητες πρέπει νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν κατάρτισιν τοῦ ἑπομένου ἐτησίου προγράμματος ἀναδιαρθρώσεως διὰ τὸ ἔτος τ+2.

1) Ἡ μικρὰ διαφορὰ 2.5 ν.μ. ὀφείλεται εἰς στρογγυλεύσεις ποσῶν.

2) Τοῦτο βεβαίως ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐφαρμοσθησομένης οἰκονομικῆς πολιτικῆς καὶ ἐκ τῆς δυνατότητος τοῦ κράτους νὰ ἐπηρεάζῃ οὐσιωδῶς τὴν οἰκονομικὴν ζωὴν (βλ. καὶ σ. 14).

Τὰ μαρξιστικὰ σχήματα ἀναπαραγωγῆς

7.1. Γενικὰ

Ἡ ἀνάλυσις εἰσροῶν - ἐκροῶν παρουσιάζει μεγάλην ὁμοιότητα μὲ τὰ *ὑποδείγματα ἀναπαραγωγῆς* τὰ ὁποῖα διετύπωσεν ὁ Κὰρλ Μὰρξ εἰς τὸ κλασσικὸν ἔργον του «Τὸ Κεφάλαιον» [1]. Τὰ σχήματα ταῦτα εἶναι βασικῆς σημασίας διὰ τὴν σπουδὴν τῶν μεθόδων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τὰς σοσιαλιστικὰς χώρας.

Ὁ Μὰρξ διαιρεῖ τὴν ἀξίαν τοῦ ἀκαθαρίστου ἐθνικοῦ προϊόντος μιᾶς χρονικῆς περιόδου, π.χ., ἑνὸς ἔτους, εἰς τὰ ἑξῆς μέρη :

α) Εἰς τὴν ἀξίαν c τῶν ἀγαθῶν ὑλικοῦ κεφαλαίου τὰ ὁποῖα ἀναλίσκονται, χρησιμοποιούμενα εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἔτους.

β) Εἰς τὴν ἀξίαν v τῆς χρησιμοποιουμένης ἐργατικῆς δυνάμεως ἐντὸς τοῦ ἔτους. Τὸ v χαρακτηρίζεται καὶ ὡς ***μεταβλητὸν κεφάλαιον.***

γ) Εἰς τὴν ὑπεραξίαν m, ἡ ὁποία εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀτομικιστικῆς συναλλακτικῆς οἰκονομίας συμπίπτει μὲ τὸ κέρδος.

Οὕτω τὸ ἀκαθάριστον ἐθνικὸν προϊὸν (ΑΕΠ) δοθέντος ἔτους θὰ εἶναι :

$$\text{ΑΕΠ} = c + v + m \tag{1}$$

Τὸ τμῆμα c τοῦ Α.Ε.Π. ἀντιστοιχεῖ προφανῶς πρὸς τὰς ἀποσβέσεις τοῦ ὑλικοῦ κεφαλαίου. Ὡς ἐκ τούτου τὸ (καθαρὸν) ἐθνικὸν εἰσόδημα Υ, τῆς περιόδου θὰ εἶναι :

$$Y = \text{ΑΕΠ} - c = v + m \tag{2}$$

Ὁ Μὰρξ ὑποθέτει ὅτι ἡ οἰκονομία διαιρεῖται εἰς δύο βασικοὺς τομεῖς : Τὸν τομέα I, παραγωγῆς κεφαλαιακῶν ἀγαθῶν καὶ τὸν τομέα

1) Τινές, ὡς π.χ. ὁ O. Lange (Introduction to Econometrics, Pergammon Press 1962, σ.σ. 218 καὶ 219), θεωροῦν ὅτι ὁ Leontief ἐπηρεάσθη βασικῶς ἐκ τῆς μαρξιστικῆς ἀναλύσεως καὶ ἐκ τῆς σοβιετικῆς τεχνικῆς τῶν ἰσοζυγίων παραγωγῆς, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν λογαριασμοὺς εἰσροῶν - ἐκροῶν δι' ἕκαστον κλάδον παραγωγῆς. Πάντως εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ Leontief ἐδημοσίευσε τὰς πρώτας σκέψεις του ἐπὶ τοῦ θέματος τὸ ἔτος 1925, ἐνῷ ἀκόμη ἔζη εἰς τὴν Σοβιετικὴν Ἕνωσιν.

μέα II. Ὁ τομεὺς II δίδει (καταναλωτικὰ) προϊόντα ἀξίας u_1 εἰς τοὺς ἐργάτας ἀμφοτέρων τῶν τομέων καὶ προϊὸν ἀξίας u_2 εἰς τοὺς κεφαλαιούχους. Αἱ δύο ἑπόμεναι σειραὶ τοῦ πίνακος δεικνύουν τὰ εἰσοδήματα τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν κεφαλαιούχων, κατὰ τομεῖς. Ἡ ἐξέτασις τῶν δύο πρώτων στηλῶν τοῦ πίνακος δεικνύει, ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν ἀξίαν τῶν εἰσροῶν ἑκάστου τομέως εἰς ἀγαθὰ ὑλικοῦ κεφαλαίου καὶ ἐργατικὰς ὑπηρεσίας, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὰ εἰσοδήματα - κέρδη τῶν κεφαλαιούχων. Αἱ δύο ἑπόμεναι στῆλαι δεικνύουν τὴν τελικὴν ζήτησιν καταναλωτικῶν ἀγαθῶν ὑπὸ τῶν ὁμάδων Ε καὶ Κ. Ἐξισοῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν εἰσροῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκροῶν τοῦ τομέως I λαμβάνομεν τὴν συνθήκην (7). Ἐξ ἄλλου ἐξισοῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκροῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν εἰσροῶν τοῦ τομέως II θὰ ἔχωμεν :

$$u_1 + u_2 = c_2 + v_2 + m_2 \tag{9}$$

Ἀλλ' ἡ συνολικὴ κατανάλωσις ἰσοῦται ἐξ ὑποθέσεως [1] πρὸς τὸ καθαρὸν ἐθνικὸν εἰσόδημα. Ἤτοι :

$$u_1 + u_2 = v_1 + v_2 + m_1 + m_2 \tag{10}$$

Συνεπῶς δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$v_1 + v_2 + m_1 + m_2 = c_2 + v_2 + m_2 \tag{11}$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν τὴν συνθήκην ἰσορροπίας (7) :

$$v_1 + m_1 = c_2$$

Τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν ὄχι μόνον εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ἑκάστη ὁμὰς καταναλωτῶν καταναλίσκει ὁλόκληρον τὸ εἰσόδημά της, ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$u_1 = v_1 + v_2$$

καὶ $$u_2 = m_1 + m_2$$

ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ μία ὁμὰς δανείζει μέρος τοῦ εἰσοδήματός της εἰς τὴν ἄλλην ὁμάδα, ἥτις καὶ χρησιμοποιεῖ τοῦτο πρὸς κατανάλωσιν. Εἰς τὴν δευτέραν ταύτην περίπτωσιν δὲν ἰσχύουν αἱ ἀνω-

1) Ἐπειδὴ ἡ οἰκονομία εἶναι στάσιμος καὶ δὲν σχηματίζεται καθαρὸν ὑλικὸν κεφάλαιον.

τέρω ἰσότητες, ἀλλ' ἰσχύει ἡ ἰσότης τοῦ ἀθροίσματος τῶν μελῶν αὐτῶν, ἤτοι :

$$n_1 + n_2 = v_1 + v_2 + m_1 + m_2$$

7.3. Ὑπόδειγμα διευρυνομένης παραγωγῆς

Ὡς εἴπομεν, τὸ κύριον χαρακτηριστικὸν τοῦ ὑποδείγματος αὐτοῦ εἶναι ἡ καθαρὰ αὔξησις τοῦ ὑλικοῦ κεφαλαίου τῆς οἰκονομίας καὶ ἡ αὔξησις τῆς συνολικῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως, ἡ ὁποία καθιστᾶ δυνατὴν τὴν διεύρυνσιν τῶν παραγωγικῶν δυνατοτήτων τῆς οἰκονομίας. Αἱ αὐξήσεις αὗται πραγματοποιοῦνται, κατὰ τὸν Μάρξ, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ἑνὸς μόνον μέρους m', τῆς ὑπεραξίας m πρὸς κατανάλωσιν καὶ διὰ τῆς διαθέσεως τῆς ὑπολοίπου ὑπεραξίας $m - m'$, κατὰ ἓν μέρος m_c πρὸς αὔξησιν τοῦ ὑλικοῦ κεφαλαίου, κατὰ τὸ ὑπόλοιπον δὲ μέρος m_v διὰ τὴν χρησιμοποίησιν περισσοτέρων ἐργατικῶν δυνάμεων. Οὕτω ἡ συνολικὴ ὑπεραξία m δοθέντος ἔτους διανέμεται ὡς ἀκολούθως :

$$m = m' + m_c + m_v \tag{12}$$

ἤ, ἀναλυτικῶς δι' ἕκαστον κλάδον :

$$m_1 = m_1' + m_{1c} + m_{1v} \tag{13}$$

καὶ

$$m_2 = m_2' + m_{2c} + m_{2v} \tag{14}$$

Τὸ ἀκαθάριστον ἐθνικὸν προϊὸν θὰ εἶναι συνεπῶς :

$$\begin{aligned} \text{ΑΕΠ} &= c + v + m' + m_c + m_v = \\ &= c_1 + c_2 + v_1 + v_2 + m_1' + m_2' + m_{1c} + m_{2c} + m_{1v} + m_{2v} \end{aligned} \tag{15}$$

Ἡ συνολικὴ ζήτησις ἀγαθῶν ὑλικοῦ κεφαλαίου, ἤτοι προϊόντων τοῦ κλάδου I θὰ ἀποτελῆται τώρα, ἐκ τῆς ζητήσεως πρὸς ἀποκατάστασιν τῶν φθορῶν τοῦ ὑλικοῦ κεφαλαίου κατὰ τὸ δοθὲν ἔτος, καὶ ἐκ τῆς ζητήσεως πρὸς αὔξησιν τοῦ ὑλικοῦ κεφαλαίου, ἤτοι θὰ εἶναι : $c_1 + c_2 + m_{1c} + m_{2c}$. Εἰς κατάστασιν ἰσορροπίας ἡ ζήτησις αὕτη πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀξίαν τῆς παραγωγῆς τοῦ τομέως I, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι :

$$c_1 + c_2 + m_{1c} + m_{2c} = c_1 + v_1 + m_1' + m_{1c} + m_{1v} \tag{16}$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν :

$$\boxed{c_2 + m_{2c} = v_1 + m'_1 + m_{1v}} \qquad (17)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ συνολικὴ ζήτησις διὰ καταναλωτικὰ ἀγαθὰ θὰ ἀποτελῆται, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἀπὸ τὴν ζήτησιν πρὸς κάλυψιν τῆς τρεχούσης καταναλώσεως $v_1 + v_2 + m'_1 + m'_2$, ἀφ' ἑτέρου ἀπὸ τὴν ζήτησιν καταναλωτικῶν ἀγαθῶν $m_{1v} + m_{2v}$ πρὸς ἐπαύξησιν τῆς ἀπασχολήσεως εἰς τοὺς δύο τομεῖς. Θὰ εἶναι δηλαδή: $v_1 + v_2 + m'_1 + m'_2 + m_{1v} + m_{2v}$. Εἰς κατάστασιν ἰσορροπίας ἡ ζήτησις αὕτη καταναλωτικῶν ἀγαθῶν πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀξίαν τῆς παραγωγῆς τοῦ κλάδου II, ἤτοι πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$c_2 + v_2 + m'_2 + m_{2v} + m_{2c} = v_1 + v_2 + m'_1 + m'_2 + m_{1v} + m_{2v} \qquad (18)$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν ἐκ νέου τὴν ἁπλουστέραν σχέσιν (17). Ἡ σχέσις αὕτη δύναται συνεπῶς νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ συνθήκη ἰσορροπίας μεταξὺ τῶν δύο τομέων, εἰς περίπτωσιν διευρυνομένης ἀναπαραγωγῆς. Εἰδικώτερον αὕτη δεικνύει ὅτι ὑφίσταται ἰσορροπία ἐὰν (καταναλωτικὰ) προϊόντα τοῦ τομέως II, ἀξίας $c_2 + m_{2c}$, χρησιμοποιούμενα πρὸς κατανάλωσιν ὑπὸ τῶν ἀσχολουμένων μὲ τὴν παραγωγὴν εἰς τὸν τομέα I, ἀνταλλάσσωνται μὲ (κεφαλαιακὰ) προϊόντα τοῦ τομέως I, ἀξίας $v_1 + m'_1 + m_{1v}$, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸν τομέα II, πρὸς ἀποκατάστασιν τῶν φθορῶν τοῦ ὑλικοῦ κεφαλαίου καὶ αὔξησιν τοῦ κεφαλαιακοῦ δυναμικοῦ.

Ἂν διαχωρίσωμεν, ὡς καὶ προηγουμένως, τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα ἐκ τῶν παραγωγικῶν τομέων καὶ κατατάξωμεν ταῦτα εἰς τὰς δύο κατηγορίας Ε καὶ Κ, δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα εἰσροῶν - ἐκροῶν τῆς οἰκονομίας.

ΕΙΣΡΟΑΙ / ΕΚΡΟΑΙ	I	II	Τελικὴ Ζήτησις: Ε (κατανάλ.)	Κ (κατανάλ.)	Ἐπένδυσις I	Ἐπένδυσις II	Σύνολον
I	c_1	c_2	—	—	α_1	α_2	X_1
II	—	—	u_1	u_2	β_1	β_2	X_2
Ε (εἰσόδημα)	v_1	v_2					v
Κ (εἰσόδημα)	m_1	m_2					m

Ὁ πίναξ οὗτος διαφέρει ἀπὸ τὸν προηγούμενον διότι περιλαμβάνει ἐπὶ πλέον εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν καὶ δύο στήλας (καθαρῶν) ἐπενδύσεων, ἀνὰ μίαν δι' ἕκαστον τομέα. Εἰς τὴν πρώτην ἐκ τῶν στηλῶν αὐτῶν ἀναγράφονται αἱ ἐπενδύσεις α_1 εἰς κεφαλαιακὰ προϊόντα τοῦ κλάδου Ι καὶ αἱ ἐπενδύσεις β_1, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ἀποθέματα καταναλωτικῶν ἀγαθῶν χρησιμοποιηθησομένων διὰ τὴν αὔξησιν τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως εἰς τὸν τομέα Ι, κατὰ τὴν ἑπομένην περίοδον. Ἀνάλογος ἑρμηνεία πρέπει νὰ δοθῇ καὶ εἰς τὰς ἐγγραφὰς α_2 καὶ β_2 τῆς δευτέρας στήλης ἐπενδύσεως, τῆς ἀφορώσης εἰς τὸν τομέα ΙΙ. Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ὅτι :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= m_{1c} \\ \alpha_2 &= m_{2c} \\ \beta_1 &= m_{1v} \\ \beta_2 &= m_{2v} \end{aligned} \tag{19}$$

Εἰς κατάστασιν ἰσορροπίας θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὰ γνωστά :

Διὰ τὸν τομέα Ι :

$$c_1 + c_2 + \alpha_1 + \alpha_2 = c_1 + v_1 + m_1 \tag{20}$$

ἢ

$$c_2 + \alpha_1 + \alpha_2 = v_1 + m_1$$

Ἀλλὰ $m_1 = m_1' + m_{1v} + m_{1c}$. Ἀντικαθιστῶντες τὸ m_1 διὰ τῆς ὡς ἄνω τιμῆς του, ὡς ἐπίσης καὶ τὰς τιμὰς τῶν α_1 καὶ α_2 ἐκ τῶν (19), λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$c_2 + m_{1c} + m_{2c} = v_1 + m_1' + m_{1v} + m_{1c}, \tag{21}$$

ἥτις ἁπλοποιουμένη καταλήγει εἰς τὴν συνθήκην (17).

Διὰ τὸν τομέα ΙΙ :

$$u_1 + u_2 + \beta_1 + \beta_2 = c_2 + v_2 + m_2 \tag{22}$$

Ἀλλά : $u_1 + u_2 = v_1 + v_2 + m_1' + m_2'$ καὶ $m_2 = m_2' + m_{2v} + m_{2c}$. Ἀντικαθιστῶντες διὰ τῶν ὡς ἄνω τιμῶν τὰ $u_1 + u_2$ καὶ m_2, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ β_1 καὶ β_2 ἐκ τῶν (19), θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$v_1 + v_2 + m_1' + m_2' + m_{1v} + m_{2v} = c_2 + v_2 + m_2' + m_{2v} + m_{2c} \tag{23}$$

ἥτις ἁπλοποιουμένη καταλήγει ἐπίσης εἰς τὴν συνθήκην (17).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως καθίσταται νομίζομεν σαφὲς ὅτι τὰ μαρξιστικὰ σχήματα ἀναπαραγωγῆς διαφέρουν ἀπὸ τὸ σύστημα εἰσροῶν - ἐκροῶν κυρίως ὅσον ἀφορᾷ τὸν βαθμὸν τῆς κλαδικῆς ἀναλύσεως τῆς οἰκονομίας. Πράγματι, ἂν μὲ ἀφετηρίαν τὰ ὡς ἄνω σχήματα προβῶμεν εἰς ἀνάλυσιν ἑκάστου τῶν δύο τομέων τῆς οἰκονομίας εἰς περισσοτέρους ὑποτομεῖς, καταλήγομεν εἰς ἕνα τυπικὸν σύστημα ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν ([1]).

1) Δυνατὸν κατὰ τὴν ἀνάλυσιν ταύτην νὰ δημιουργηθοῦν προβλήματα κατατάξεως ὡρισμένων τομέων οἱ ὁποῖοι παράγουν ταυτοχρόνως κεφαλαιακὰ καὶ καταναλωτικὰ ἀγαθά, ὡς εἶναι, π.χ., ἡ βιομηχανία παραγωγῆς τρακτὲρ καὶ αὐτοκινήτων ἰδιωτικῆς χρήσεως.

Ὑπόδειγμα Domar - Harrod

8.1. Τὸ Ὑπόδειγμα Domar

Αἱ ἐπενδύσεις, πραγματοποιούμεναι, ἀφ' ἑνὸς μὲν αὐξάνουν τὸ συνολικὸν ἀπόθεμα τοῦ ὑλικοῦ κεφαλαίου τῆς οἰκονομίας καὶ συνεπῶς τὸ παραγωγικὸν δυναμικὸν αὐτῆς, ἀφ' ἑτέρου δὲ δημιουργοῦν ἐνεργὸν ζήτησιν, λόγῳ τῶν χρηματικῶν δαπανῶν μὲ τὰς ὁποίας αὗται εἶναι συνυφασμέναι. Τὰς δύο ταύτας βασικὰς οἰκονομικὰς ἐπιδράσεις τῶν ἐπενδύσεων λαμβάνει ὑπ' ὄψιν ὁ καθηγητὴς E. Domar διὰ τὴν θεμελίωσιν ἑνὸς ὑποδείγματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, τὸ ὁποῖον εἶναι γενικώτερον γνωστὸν ὡς «ὑπόδειγμα Domar». Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο περιγράφομεν κατωτέρω.

Ἄς ἀρχίσωμεν ἐξετάζοντες τὰς ἐπενδύσεις ὡς πηγὴν αὐξήσεως τοῦ παραγωγικοῦ δυναμικοῦ τῆς οἰκονομίας. Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὑφίσταται ὡρισμένη σχέσις, συμβολιζομένη διὰ τοῦ σ, μεταξὺ τῶν ἐπενδύσεων καὶ τῆς αὐξήσεως τοῦ παραγωγικοῦ δυναμικοῦ ἡ ὁποία προκαλεῖται ἐκ τῶν ἐπενδύσεων αὐτῶν. Ἂν θέσωμεν ΔP, διὰ τὴν αὔξησιν τοῦ παραγωγικοῦ δυναμικοῦ (P) τῆς οἰκονομίας κατὰ τὴν περίοδον τ, μετρουμένου εἰς τὴν ἀξίαν τῆς παραγομένης ποσότητος ἀγαθῶν, $I_{\tau-1}$ διὰ τὰς ἐπενδύσεις τῆς προηγουμένης περιόδου, αἱ ὁποῖαι ὑποτίθεται ὅτι δημιουργοῦν τὴν αὔξησιν τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος ΔP_τ (1), θὰ ἔχωμεν ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\sigma = \frac{\Delta P_\tau}{I_{\tau-1}} \tag{1}$$

Ἡ (1) εἶναι ἡ πρώτη βασικὴ σχέσις τοῦ ὑποδείγματος Domar. Θὰ ὀνομάσωμεν τὸ σ ***συντελεστὴν παραγωγικότητος τῶν ἐπενδύσεων***. Ὁ συντελεστὴς οὗτος δεικνύει πόσον αὐξάνει τὸ συνολικὸν παραγωγικὸν δυναμικὸν τῆς οἰκονομίας ἐκ τῆς αὐξήσεως κατὰ μίαν μονάδα τῶν ἐπενδύσεων (2).

1) Ὑποθέτομεν δηλαδὴ ὑστέρησιν μιᾶς περιόδου μεταξὺ αὐξήσεων τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος καὶ ἐπενδύσεων.

2) Ὁ συντελεστὴς σ πιθανὸν νὰ διαφέρῃ ἀπὸ τὸν συντελεστὴν αὐξήσεως τοῦ παραγωγικοῦ δυναμικοῦ τοῦ κλάδου εἰς τὸν ὁποῖον λαμβάνουν χώραν αἱ ἐπενδύσεις. Ἡ διαφορὰ αὕτη δυνατὸν νὰ προέρχεται ἐξ ἐνδεχομένων δυσμενῶν ἐπιπτώσεων ἐπὶ

Οὕτω, π.χ., ἄν $I_{\tau-1} = 100$ καὶ $\Delta P_\tau = 50$, θὰ ἔχωμεν $\sigma = \frac{1}{2}$, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἑκάστη μονὰς ἐπενδύσεων αὐξάνει τὸ παραγωγικὸν δυναμικὸν τῆς οἰκονομίας κατὰ 1/2 μονάδας.

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὰς ἐπενδύσεις ἀπὸ ἀπόψεως δημιουργίας ἐνεργοῦ ζητήσεως.

Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν θεωρίαν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὅτι ἂν ΔΙ εἶναι ἡ ἐτησία αὔξησις τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἐπενδύσεων Ι, ἡ ἐξ αὐτῆς προερχομένη ἐτησία αὔξησις ΔΥ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ εἰσοδήματος (Υ) ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ὡς ἄνω αὐξήσεως τῶν ἐπενδύσεων ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ὁ ὁποῖος εἶναι μέγεθος ἀντίστροφον τῆς ὁριακῆς ῥοπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν, ἤτοι τῆς σχέσεως μεταξὺ αὐξήσεως τῆς ἀποταμιεύσεως καὶ αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος. Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ αὔξησις τῶν ἐπενδύσεων μιᾶς περιόδου ὁδηγεῖ εἰς αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν περίοδον [1]. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς διὰ τὴν περίοδον τ:

$$\Delta Y_\tau = \frac{\Delta I_\tau}{s} \qquad (2)$$

ὅπου s εἶναι ἡ ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν. Ἡ (2) εἶναι ἡ δευτέρα σχέσις τοῦ συστήματος Domar.

Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι κατὰ τὴν περίοδον τ—1 ἡ οἰκονομία ἰσορροπεῖ εἰς ἐπίπεδον πλήρους ἀπασχολήσεως. Καθίσταται προφανὲς ὅτι πρὸς διατήρησιν τῆς καταστάσεως ταύτης ἰσορροπίας καὶ κατὰ τὴν ἑπομένην περίοδον πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῇ κατὰ τὴν περίοδον αὐτὴν ὁλόκληρος ἡ νεοδημιουργηθεῖσα παραγωγικὴ δυναμικότης, ΔP_τ. Ἐν ἄλλοις λόγοις, πρέπει ἡ αὔξησις τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος, ἡ ὁποία προῆλθεν ἐκ τῆς διενεργείας ηὐξημένων ἐπενδύσεων. Ἐὰν ἡ συνθήκη αὕτη δὲν πληρωθῇ, τότε δυνατόν: α) νὰ παραμείνῃ ἀδρανὲς τὸ νεοδημιουργηθὲν ὑλικὸν κεφάλαιον· β) νὰ χρησιμοποιηθῇ μὲν τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἀλλὰ νὰ μείνῃ ἀχρησιμοποίητον τμῆμα τοῦ προϋφισταμένου ὑλικοῦ κεφαλαίου, ἢ τέλος γ) δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ μὲν ὁλόκληρον τὸ ὑφιστάμενον κεφάλαιον καὶ νὰ παραμείνῃ ἀχρησιμοποίητος ποσότης ἐργασίας. Θὰ προέκυπτε συνεπῶς πρόβλημα ὑποαπασχολήσεως τῆς διαθεσίμου ποσότητος κεφαλαίου ἢ τῆς διαθεσίμου ποσότητος ἐργασίας. Καὶ εἰς τὴν πρώτην ὅμως περίπτωσιν θὰ προεκαλεῖτο κατ' οὐσίαν «λανθάνουσα» ὑποαπασχόλησις

παραγωγικῶν μονάδων ἄλλων τομέων κτλ. Ἐνταῦθα ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὴν αὔξησιν τοῦ παραγωγικοῦ δυναμικοῦ τῆς οἰκονομίας ἐν τῷ συνόλῳ καὶ ὄχι διὰ τὴν αὔξησιν τοῦ παραγωγικοῦ δυναμικοῦ ἑνὸς συγκεκριμένου κλάδου.

1) Δὲν ὑφίσταται δηλαδὴ οὐδεμία χρονικὴ ὑστέρησις μεταξὺ αὐξήσεως τῶν ἐπενδύσεων καὶ αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος.

τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἡ διαθέσιμος ποσότης ἐργασίας χρησιμοποιεῖται μὲ παραγωγικότητα μικροτέραν ἀπὸ τὴν δυνητικὴν τοιαύτην, δηλαδὴ ἐκείνην ἡ ὁποία θὰ καθίστατο δυνατὴ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ὁλοκλήρου τῆς ποσότητος τοῦ ὑφισταμένου ὑλικοῦ κεφαλαίου. Ἐξ ἄλλου ἂν ἡ αὔξησις τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος ἦτο μεγαλυτέρα τῆς αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος, θὰ ἐδημιουργοῦντο πληθωρικαὶ πιέσεις, λόγῳ ἀδυναμίας τῆς οἰκονομίας νὰ ἱκανοποιήσῃ τὴν ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν. Οὕτω, διὰ νὰ ἐξασφαλισθῇ κατὰ τὴν περίοδον τ πλήρης ἀπασχόλησις ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς ἀρίστης δυνατῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ καὶ νὰ διατηρηθῇ ἡ νομισματικὴ σταθερότης, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη:

$$\Delta P_\tau = \Delta Y_\tau \,, \tag{3}$$

ἥτις ἀποτελεῖ καὶ *συνθήκην ἰσορροπίας* διὰ τὸ οἰκονομικὸν σύστημα.

Ἡ (3) εἶναι ἡ τρίτη βασικὴ ἐξίσωσις τοῦ ὑποδείγματος Domar. Ἐκ ταύτης, δι' ἀντικαταστάσεως ἐκ τῶν (1) καὶ (2), λαμβάνομεν:

$$\sigma I_{\tau-1} = \frac{\Delta I_\tau}{s} \tag{4}$$

Ἑπομένως:

$$\boxed{\frac{\Delta I_\tau}{I_{\tau-1}} = \sigma s} \tag{5}$$

Ἡ (5) ἀποτελεῖ συνοπτικὴν διατύπωσιν τοῦ ὑποδείγματος Domar καὶ δεικνύει ὅτι πρὸς ἐξασφάλισιν τοῦ ἐπιπέδου ἰσορροπίας πλήρους ἀπασχολήσεως τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος, ἄνευ νομισματικῶν διαταραχῶν, ἐπιβάλλεται ὅπως τὸ ποσοστὸν αὐξήσεως τῶν ἐπενδύσεων καθ' ἑκάστην περίοδον (π.χ. κατ' ἔτος) ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ὁριακῆς ροπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν ἐπὶ τὸν συντελεστὴν παραγωγικότητος τῶν ἐπενδύσεων.

Ἂν ἡ ὁριακὴ ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν θεωρηθῇ ἴση πρὸς τὴν μέσην ροπὴν πρὸς ἀποταμίευσιν, τὸ ποσοστὸν αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, $\Delta Y_\tau / Y_{\tau-1}$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ποσοστὸν αὐξήσεως τῶν ἐπενδύσεων, $\Delta I_\tau / I_{\tau-1}$. Ἂν θέσωμεν:

$$s = \frac{I_{\tau-1}}{Y_{\tau-1}} = \text{σταθερὸν}\,(^1) \text{ καὶ } \sigma = \frac{\Delta P_\tau}{I_{\tau-1}} = \frac{\Delta Y_\tau}{I_{\tau-1}} \,,$$

ἡ (5) λαμβάνει πράγματι τὴν μορφήν:

$$\frac{\Delta I_\tau}{I_{\tau-1}} = \frac{\Delta Y_\tau}{I_{\tau-1}} \cdot \frac{I_{\tau-1}}{Y_{\tau-1}} = \frac{\Delta Y_\tau}{Y_{\tau-1}} \tag{6}$$

1) Ἐπειδὴ ἡ ἀποταμίευσις ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐπένδυσιν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $s = I/Y$ ἀντὶ $s = S/Y$.

Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\frac{\Delta Y_\tau}{Y_{\tau-1}} = \sigma s \qquad (7)$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ποσοστὸν ἐτησίας αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος ($\Delta Y_\tau / Y_{\tau-1}$) ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ροπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν ἐπὶ τὸν συντελεστὴν παραγωγικότητος τῶν ἐπενδύσεων. Ἂν, π.χ., $\sigma = 1/3$ καὶ $s = 1/4$, τότε τὸ ποσοστὸν αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος διὰ τὴν ἀντίστοιχον περίοδον θὰ εἶναι :

$$1/3 \times 1/4 = 1/12 \text{ ἢ } 8{,}3\,\%$$

Τὸ ὑπόδειγμα Domar, παρὰ τὴν ἁπλότητά του, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν μελέτην μακροχρονίων προβλημάτων, ὡς εἶναι κατ' ἐξοχὴν τὰ προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

8.2. Τὸ ὑπόδειγμα **Harrod** καὶ ἡ ἔννοια τοῦ γενικοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ εἰσοδήματος

8.2.1. Ἕτερον βασικὸν ὑπόδειγμα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως εἶναι τὸ καλούμενον «ὑπόδειγμα Harrod», τὸ ὁποῖον καὶ ἐξετάζομεν κατωτέρω.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ συνολικὸν ***κεφάλαιον*** τῆς οἰκονομίας κατὰ τὴν ἀρχὴν δοθείσης περιόδου εἶναι Κ. Διὰ τοῦ ὅρου «κεφάλαιον» νοεῖται ἡ ἀξία τοῦ συνόλου τῶν παραγωγικῶν μέσων εἰς δοθεῖσαν περίοδον. Θὰ ὑποθέσωμεν ἐν συνεχείᾳ ὅτι τὸ συνολικῶς παραγόμενον ***εἰσόδημα*** [1] τῆς οἰκονομίας, ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ κεφαλαίου Κ, εἶναι Υ. Δυνάμεθα τώρα νὰ ὁρίσωμεν τὴν σχέσιν :

$$\beta = \frac{K}{Y}$$

ὅπου β δεικνύει πόσον κεφάλαιον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος εἰσοδήματος καὶ καλεῖται ***συντελεστὴς κεφαλαίου - εἰσοδήματος*** (capital - output coefficient) ἤ, ἀκριβέστερον, ***γενικὸς συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ εἰσοδήματος***, κατ' ἀντιδιαστολὴν πρὸς τοὺς κλαδικοὺς συντελεστὰς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως (βλ. καὶ 6.1.3) [2]. Οὕτω, π.χ., $\beta = 3$ σημαίνει ὅτι ἀπαιτεῖται ὑλικὸν κεφάλαιον ἀξίας 3 ν.μ. μονάδων διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος πραγματικοῦ εἰσοδήματος. Ἂν ὁ συντελεστὴς οὗτος θεωρηθῇ σταθερός, θὰ ἔχωμεν ἐπίσης :

---

1) Πρόκειται περὶ τοῦ πραγματικοῦ εἰσοδήματος.

2) Ἡ σχέσις μεταξὺ γενικοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως καὶ κλαδικῶν συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως δεικνύεται εἰς 8.3.1, κατωτέρω.

$$\beta = \frac{\Delta K}{\Delta Y}$$

ὅπου ΔΚ καὶ ΔΥ ὑποδηλοῦν αὔξησιν τοῦ κεφαλαίου καὶ αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος, ἀντιστοίχως.

Ἀλλά, ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ αὔξησις τοῦ κεφαλαίου ἀποτελεῖ τὴν ἐπένδυσιν I (1). Συνεπῶς :

$$\beta = \frac{I}{\Delta Y} \tag{1}$$

Ἡ (1) ἀποτελεῖ τὴν πρώτην βασικὴν σχέσιν τοῦ ὑποδείγματος Harrod. Ἡ δευτέρα σχέσις τοῦ ὑποδείγματος αὐτοῦ στηρίζεται εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς μέσης ῥοπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν s', ἥτις ἀποτελεῖ ποσοστὸν καθοριζόμενον ἐκ τῆς σχέσεως τῆς συνολικῆς ἀποταμιεύσεως S πρὸς τὸ συνολικὸν εἰσόδημα Y. Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ ἔχομεν :

$$s' = \frac{S}{Y} \tag{2}$$

Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ῥοπὴ αὕτη παραμένει ἀμετάβλητος.

Διὰ τὴν ἐξασφάλισιν ἰσορροπίας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος εἰς δοθὲν ἐπίπεδον ἀπαιτεῖται, ὡς γνωστόν, ὅπως αἱ ἀποταμιεύσεις αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὸ ἐν λόγῳ ἐπίπεδον ἰσορροπίας ἰσοῦνται πρὸς τὰς ἑκουσίας ἐπενδύσεις τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου :

$$I = S \tag{3}$$

Ἡ (3) ἀποτελεῖ συνθήκην ἰσορροπίας τοῦ συστήματος Harrod.

Κατόπιν καταλλήλων ἀντικαταστάσεων ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἡ (3) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\beta \Delta Y = s'Y$$

ἐξ ἧς :

$$\boxed{\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{s'}{\beta}} \tag{4}$$

Ἡ (4) ἀποτελεῖ τὴν διαρθωτικὴν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος Harrod. Συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, διὰ τὴν ἐξασφάλισιν μιᾶς καταστάσεως ἰσορροπίας εἰς τὴν οἰκονομίαν, ἀπαιτεῖται ὅπως τὸ ποσοστὸν ἐτησίας αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος ΔΥ/Υ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς μέσης ῥοπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν πρὸς τὸν συντελεστὴν κεφαλαιακῆς

1) Ἡ ἐπένδυσις I θεωρεῖται *ἑκουσία*, ἤτοι εἶναι ἐπένδυσις εἰς τὴν ὁποίαν δὲν περιλαμβάνονται ἀποθέματα ἀγαθῶν λόγῳ ἀζητησίας αὐτῶν.

ἐπιβαρύνσεως τοῦ εἰσοδήματος. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (4) βλέπομεν ἐπίσης ὅτι τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα αὐξάνει τόσον ταχύτερον ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ῥοπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν καὶ ὅσον μικρότερος εἶναι ὁ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ εἰσοδήματος. Καθίσταται προφανὲς ὅτι, δοθείσης τῆς αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος (ὡς προγραμματικοῦ στόχου) καὶ τοῦ συντελεστοῦ β, δυνάμεθα ἐκ τῆς (4) νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ποσοστὸν ἀποταμιεύσεων s', τὸ ὁποῖον ἐπιτρέπει τὴν πραγματοποίησιν τῆς ὡς ἄνω αὐξήσεως, ἄνευ ἀνισορροπίας τῆς οἰκονομίας. Οὕτω ἂν $\Delta Y/Y = 0{,}06$ καὶ $\beta = 4$, *πρέπει* νὰ εἶναι $s' = 0{,}24$. Ἐὰν τὸ ποσοστὸν τοῦτο δὲν δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ λόγῳ χαμηλῆς ῥοπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν καὶ ἀδυναμίας συμπληρώσεως τῆς διαφορᾶς ἐξ ἄλλων πηγῶν (π.χ. ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ), λέγομεν ὅτι ὁ προγραμματισθεὶς στόχος δὲν εἶναι ***οἰκονομικῶς πραγματοποιήσιμος***. Ἐνδεχομένως εἴς τινας περιπτώσεις θὰ ἦτο δυνατὴ καὶ μείωσις τοῦ β, δι᾽ ἐφαρμογῆς καταλλήλων ὀργανωτικῶν ἢ τεχνολογικῶν μεθόδων παραγωγῆς (βλ. σ. 219). Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ζήτημα πραγματικόν, ἐξαρτώμενον ἀπὸ τὰς εἰδικὰς συνθήκας ἑκάστης οἰκονομίας.

Γενικῶς δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ συνθήκη (4) δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς κριτήριον οἰκονομικῆς συνεπείας τῶν προγραμματιζομένων αὐξήσεων τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος. Τὸ κριτήριον τοῦτο χρησιμοποιεῖται συνήθως κατὰ τὴν κατάρτισιν τοῦ προγράμματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

8.2.2. Τὸ ὑπόδειγμα Harrod ἀντιστοιχεῖ κατὰ βάσιν εἰς τὸ ὑπόδειγμα Domar, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω. Τὰ ὑποδείγματα ταῦτα συνοπτικῶς ἐμφανίζονται ὡς κάτωθι :

Ὑπόδειγμα *Domar*	***Ὑπόδειγμα*** *Harrod* (1)
1) Συντελεστὴς παραγωγικότητος κεφαλαίου : $\sigma = \dfrac{\Delta P_\tau}{I_{\tau-1}}$	1) Συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως $\beta = \dfrac{I_{\tau-1}}{\Delta Y_\tau}$
2) Ἐξίσωσις πολλαπλασιαστοῦ : $\Delta Y_\tau = \dfrac{\Delta I_\tau}{s}$	2) Μέση ῥοπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν : $s' = \dfrac{S_{\tau-1}}{Y_{\tau-1}}$
3) Συνθήκη ἰσορροπίας: $\Delta Y_\tau = \Delta P_\tau$	3) Συνθήκη ἰσορροπίας: $I_{\tau-1} = S_{\tau-1}$
Συνεπῶς :	Συνεπῶς :
4) Διαρθρωτικὴ ἐξίσωσις: $\dfrac{\Delta I_\tau}{I_{\tau-1}} = \sigma s$	4) Διαρθρωτικὴ ἐξίσωσις : $\dfrac{\Delta Y_\tau}{Y_{\tau-1}} = \dfrac{s'}{\beta}$

1) Ὑποτίθεται χρονικὴ ὑστέρησις μιᾶς περιόδου μεταξὺ ἐπενδύσεων καὶ αὐξήσεως πραγματικοῦ εἰσοδήματος.

Ἡ βασικὴ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ὑποδείγματος Domar καὶ τοῦ ὑποδείγματος Harrod εἶναι ὅτι τὸ πρῶτον ἀναφέρεται εἰς τὴν ἰσορροπίαν ἐπιπέδου πλήρους ἀπασχολήσεως τῆς οἰκονομίας, ἐνῶ τὸ δεύτερον εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐπίπεδον ἰσορροπίας, προσδιοριζόμενον ἐκ τῆς ἰσότητος ἀποταμιεύσεως καὶ ἑκουσίας ἐπενδύσεως. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης τὸ ὑπόδειγμα Harrod δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς γενικώτερον τοῦ ὑποδείγματος Domar. Πρὸς σύγκρισιν τῶν δύο ὑποδειγμάτων θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἀμφότερα ἐξετάζουν τὰς συνθήκας ἰσορροπίας τῆς οἰκονομίας εἰς ἐπίπεδον πλήρους ἀπασχολήσεως (ὑπὸ τὴν προηγουμένως τεθεῖσαν ἔννοιαν).

Ἐπειδὴ $\Delta Y_\tau = \Delta P_\tau$ (Domar (3)) δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸν συντελεστὴν παραγωγικότητος κεφαλαίου (Domar (1)) ὡς :

$$\sigma = \frac{\Delta Y_\tau}{I_{\tau-1}}$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως λαμβάνομεν :

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{I_{\tau-1}}{\Delta Y_\tau}$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς (1) Harrod ἔχομεν :

$$\beta = \frac{I_{\tau-1}}{\Delta Y_\tau}$$

Συνεπῶς :

$$\frac{1}{\sigma} = \beta$$

Δηλαδὴ ὁ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ εἰσοδήματος εἶναι ἀντίστροφος τοῦ συντελεστοῦ παραγωγικότητος τοῦ κεφαλαίου.

Ἐκ τῆς (2) Domar ἔχομεν :

$$s = \frac{\Delta I_\tau}{\Delta Y_\tau}$$

Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου ὅτι ἡ μέση ῥοπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν εἰς τὸ σύστημα Harrod λαμβάνεται σταθερά. Κατὰ συνέπειαν ἐκ τῆς (2) Harrod :

$$s' = \frac{S}{Y} = \frac{\Delta S}{\Delta Y}$$

ἤτοι δὲν ὑφίσταται διαφορὰ μεταξὺ ὁριακῆς καὶ μέσης ῥοπῆς πρὸς ἀποταμιεύσεως.

Ἀλλά :

$$\Delta S_\tau = \Delta I_\tau$$

Συνεπῶς ἔχομεν: $s' = \dfrac{\Delta I_\tau}{\Delta Y_\tau} = s$

δι' ἀμφότερα τὰ συστήματα.

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων ἡ (4) Domar δύναται νὰ γραφῇ ὡς:

$$\frac{\Delta I_\tau}{I_{\tau-1}} = \frac{s}{\beta} = \frac{s'}{\beta}$$

Ἀλλὰ τότε (ἐκ συγκρίσεως πρὸς τὴν (4) Harrod):

$$\frac{\Delta I_\tau}{I_{\tau-1}} = \frac{\Delta Y_\tau}{Y_{\tau-1}} = \frac{s}{\beta}$$

Ἤδη εἰς τὸ συμπέρασμα αὐτὸ κατελήξαμεν καὶ προηγουμένως, ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν εἰς τὸ ὑπόδειγμα Domar εἶναι ἴση πρὸς τὴν μέσην ῥοπὴν πρὸς ἀποταμίευσιν. Οὕτω ἔχομεν πλήρη ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν σχέσεων τῶν δύο συστημάτων. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ὁμιλοῦμεν πολλάκις περὶ ἑνὸς ἑνιαίου ***ὑποδείγματος*** *Domar - Harrod*.

8.3. Προσδιορισμὸς τοῦ γενικοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως

8.3.1. Γενικὸς συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς παραγωγῆς. Θὰ ὁρίσωμεν ὡς γενικὸν συντελεστὴν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς παραγωγῆς, β', τὸν λόγον τῆς συνολικῆς ἐτησίας ἐπενδύσεως I πρὸς τὴν ἐτησίαν αὔξησιν ΔX τῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς.

$$\frac{I}{\Delta X} = \beta' \tag{1}$$

Ὁ συντελεστὴς οὗτος δεικνύει τὸ ποσὸν τοῦ κεφαλαίου τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐπενδυθῇ διὰ νὰ αὐξηθῇ ἡ συνολικὴ ἐθνικὴ παραγωγὴ κατὰ μίαν μονάδα.

Προφανῶς ἡ αὔξησις ΔX θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν αὐξήσεων ΔX_κ τῆς παραγωγῆς τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας, ἤτοι θὰ εἶναι:

$$\Delta X = \Sigma \Delta X_\kappa \tag{2}$$

Ἐκ τῆς (13 τῆς σ. 183) καὶ τῆς (2) ἀνωτέρω, ὁ γενικὸς συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως δύναται νὰ γραφῇ ὡς κάτωθι:

$$\beta' = \frac{I}{\Delta X} = \frac{\Sigma I^{(\kappa)}}{\Sigma \Delta X_\kappa} \tag{3}$$

'Αλλά: $\beta' = \frac{\Sigma I^{(\kappa)}}{\Sigma \Delta X_\kappa} = \frac{I^{(1)}}{\Delta X_1}\lambda_1 + \frac{I^{(2)}}{\Delta X_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{I^{(\nu)}}{\Delta X_\nu}\lambda_\nu =$

$$= \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \ldots + \beta_\nu\lambda_\nu = \sum_\kappa \beta_\kappa\lambda_\kappa, \quad (4)$$

ὅπου $\beta_\kappa = \frac{I^{(\kappa)}}{\Delta X_\kappa}$ καὶ λ_κ εἶναι ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου κ πρὸς τὴν συνολικὴν αὔξησιν τῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς.

$$\lambda_\kappa = \frac{\Delta X_\kappa}{\Delta X} \quad (5)$$

Συνεπῶς θὰ εἶναι καί:

$$\sum_\kappa \lambda_\kappa = 1 \quad (6)$$

'Εκ τῆς (4) καθίσταται σαφὲς ὅτι ὁ γενικὸς συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς παραγωγῆς ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῶν κλαδικῶν συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως. Ἡ συμβολὴ ἑκάστου κλαδικοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως εἰς τὸν σχηματισμὸν τοῦ γενικοῦ συντελεστοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν λ_κ, τὰ ὁποῖα κατ' οὐσίαν ἀποτελοῦν συντελεστὰς σταθμίσεως τῆς σπουδαιότητος τῶν β_κ, κατὰ τὴν διαμόρφωσιν τοῦ β'.

'Επειδὴ (βλ. σ.σ. 185 - 186): $\beta_\kappa = \Sigma\beta_{\iota\kappa} = \Sigma\alpha_{\iota\kappa}\Pi_{\iota\kappa}$

Θὰ ἔχωμεν: $\beta' = \sum_\kappa \beta_\kappa\lambda_\kappa = \sum_\kappa(\sum_\iota \beta_{\iota\kappa})\lambda_\kappa = \sum_\kappa(\sum_\iota \alpha_{\iota\kappa}\Pi_{\iota\kappa})\lambda_\kappa.$ (7)

'Εκ τῆς (7) καταφαίνεται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ γενικοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς παραγωγῆς εἶναι συνάρτησις τῶν τιμῶν τῶν κλαδικῶν συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως (β_κ) ἢ τῶν διακλαδικῶν συντελεστῶν ἐπενδύσεως ($\beta_{\iota\kappa}$), ἐν ὑστάτει δὲ ἀναλύσει, εἶναι συνάρτησις ὅλων τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς ($\alpha_{\iota\kappa}$) καὶ τῶν περιόδων διαρκείας $\Pi_{\iota\kappa}$ τῶν μέσων παραγωγῆς.

'Αλλὰ ὁ συντελεστὴς β' ἐξαρτᾶται ἐπίσης καὶ ἐκ τῶν τιμῶν τῶν λ_κ. Αἱ τιμαὶ αὗται ἐκφράζουν, ὡς εἴδομεν, τὰ ποσοστὰ τῆς αὐξήσεως τῆς παραγωγῆς τῶν κλάδων πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς συνολικῆς παραγωγῆς τῆς οἰκονομίας. Οὕτω, ἡ τιμὴ τῶν λ_κ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς αὐξήσεως τοῦ συνολικοῦ προϊόντος ἑκάστου κλάδου καὶ ἐκ τῆς αὐξήσεως τῆς συνολικῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς. 'Επειδὴ ἡ τελευταία εἶναι ἄθροισμα τῶν αὐξήσεων τῆς παραγωγῆς τῶν διαφόρων κλάδων, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι τὰ λ_κ ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν αὐξήσεων τῆς συνολικῆς παραγωγῆς ὅλων τῶν κλάδων.

'Αλλὰ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν κλαδικῶν συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως, ἔχομεν:

$$I^{(\kappa)} / \beta_\kappa = \Delta X_\kappa$$

ἐξ ἧς συμπεραίνομεν ὅτι δοθέντων τῶν β_κ (δηλαδὴ τῶν τεχνολογικῶν συνθηκῶν αὐξήσεως τῆς παραγωγῆς ἑνὸς κλάδου) ἡ αὔξησις ΔX_κ τῆς παραγωγῆς τοῦ κλάδου ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν $I^{(\kappa)}$, ἤτοι ἐκ τῶν διενεργουμένων εἰς τὸν κλάδον συνολικῶν ἐπενδύσεων. Κατὰ συνέπειαν καὶ ὁ λόγος λ_κ δι' ἕκαστον κλάδον εἶναι συνάρτησις τοῦ ὕψους τῶν ἐπενδύσεων εἰς τοὺς διαφόρους κλάδους τῆς οἰκονομίας.

Ἐκ τῆς προηγηθείσης ἀναλύσεως συνάγεται ὅτι ὁ γενικὸς συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς παραγωγῆς ἐκφράζει, ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰς ***καθαρῶς τεχνολογικὰς συνθήκας τῆς παραγωγῆς***, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸν ***τρόπον κατανομῆς*** τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας (1).

8.3.2. ***Γενικὸς συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως εἰσοδήματος.*** Μέχρι τοῦδε ἐξητάσαμεν τὴν σχέσιν τῶν συνολικῶν ἐπενδύσεων πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς ἢ ἄλλως τὸ συνολικὸν ἐθνικὸν προϊόν. Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα τὴν σχέσιν $I/\Delta Y$ τῶν συνολικῶν ἐπενδύσεων πρὸς τὴν συνολικὴν αὔξησιν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, ἥτις προσδιορίζει, συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ἤδη ὁρισμὸν (8.2.1), τὸν γενικὸν συντελεστὴν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ εἰσοδήματος.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τελικῶν προϊόντων Y_i, τῶν διαφόρων κλάδων. Ἐκ τῆς (11) τῆς σ. 183 ἔχομεν ἐξ ἄλλου ὅτι τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα Y ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐθνικὴν παραγωγὴν X, μεῖον τὰς διακλαδικὰς ροὰς $\Sigma X^{(\kappa)}$. Ἐν ἄλλοις λόγοις, τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα ἀποτελεῖ ἓν ποσοστὸν τῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς. Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι καὶ ἡ αὔξησις ΔY τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος ἀποτελεῖ ἐπίσης ἓν ποσοστὸν τῆς αὐξήσεως ΔX τῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς. Ἂν παραστήσωμεν τὸ ποσοστὸν αὐτὸ διὰ τοῦ ρ θὰ ἔχωμεν

$$\Delta Y = \rho \Delta X.$$

Κατὰ συνέπειαν δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν σχέσιν $I/\Delta Y$ διὰ τῆς $I/\rho\Delta X$. Ἂν θέσωμεν : $\beta = I/\rho\Delta Y$ θὰ ἔχωμεν (ἐκ τῆς (1) ἀνωτέρω),

$$\frac{I}{\rho \Delta X} = \beta = \frac{\beta'}{\rho}$$

Ἑπομένως :

$$\rho\beta = \beta' \qquad (8)$$

Ἡ (8) καθορίζει τὴν σχέσιν μεταξὺ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς

---

1) Ἐκ τούτου καταφαίνεται ὅτι ὑφίσταται πρόβλημα ἀριστοποιήσεως τῆς τιμῆς τῶν λ_κ, πρὸς μεγιστοποίησιν τοῦ ἐθνικοῦ προϊόντος (ἢ τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος). Βλ. σχετικῶς O. Lange «Introduction to Econometrics» 1960.

ἐπιβαρύνσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος καὶ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς. Ἐπειδὴ ρ εἶναι κλασματικὸς ἀριθμὸς (καὶ β', β > 0) θὰ εἶναι καί:

$$\beta > \beta' \qquad (8')$$

Προφανῶς τὰ ἤδη λεχθέντα περὶ τοῦ συντελεστοῦ β', ὅσον ἀφορᾷ τὸν τρόπον προσδιορισμοῦ αὐτοῦ, ἰσχύουν ἀναλόγως καὶ διὰ τὸν συντελεστὴν β'. Οὕτω θὰ ἔχωμεν: $\beta = \sum_{\kappa} \beta'_{\kappa} \lambda_{\kappa}$ ὅπου $\beta'_{\kappa} = \frac{I^{(\kappa)}}{\Delta Y_{\kappa}}$ καὶ $\lambda_{\kappa} = \frac{\Delta Y_{\kappa}}{\Delta Y}$. Δηλαδὴ ὁ συντελεστὴς οὗτος ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν κλαδικῶν (ἢ εἰδικῶν) συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως εἰσοδήματος καὶ τοῦ τρόπου κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας.

8.4. Σχέσις ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως καὶ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως

Ὁ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ εἰσοδήματος δύναται νὰ ληφθῇ ὡς σταθερὸν μέγεθος κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν ὡρισμένων ὑπολογισμῶν, ἀλλὰ τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι θεωρεῖται γενικῶς ἀμετάβλητος. Οὐσιαστικαὶ μεταβολαὶ εἰς τὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ προέλθουν συνεπείᾳ μεταβολῆς αὐτοῦ τούτου τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως. Αἱ μεταβολαὶ αὗται παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον καὶ διὰ τοῦτο προβαίνομεν κατωτέρω εἰς τὴν ἐξέτασίν των.

8.4.1. Θεωροῦμεν σκόπιμον πρὸς κατανόησιν τῶν κατωτέρω ἐκτιθεμένων νὰ προβῶμεν εἰς ὡρισμένας ἐννοιολογικὰς διευκρινήσεις. Θὰ διακρίνωμεν τρεῖς διαφόρους τιμὰς τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως εἰσοδήματος: ***τὴν τεχνικῶς ἀρίστην τιμήν, τὴν οἰκονομικῶς ἀρίστην τιμὴν*** καὶ ***τὴν πραγματικὴν τιμὴν*** αὐτοῦ.

Τεχνικῶς ἀρίστη τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως δύναται νὰ θεωρηθῇ ἡ λαμβανομένη ἐκ τῆς καταλλήλου (βλ. 8.3.1) σταθμίσεως ***τῶν τεχνικῶς ἀρίστων τιμῶν*** τῶν συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῶν διαφόρων κλάδων. Αἱ τελευταῖαι αὗται τιμαὶ ἀντιστοιχοῦν, εἰς ἑκάστην περίπτωσιν, εἰς τὰς ἀρίστας τεχνολογικὰς συνθήκας λειτουργίας τοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ. Ἔστω, π.χ., ὅτι πάγιος μηχανικὸς ἐξοπλισμὸς ἀξίας 100 ν.μ. δύναται νὰ παράγῃ, ἐντὸς δοθείσης παραγωγικῆς περιόδου, προϊὸν ἀξίας 25 ν.μ., ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ ἀπαιτούμενον ἐργατικὸν προσωπικὸν ἔχει πλήρως ἱκανοποιητικὴν κατάρτισιν διὰ τὸν χειρισμὸν τοῦ ὡς ἄνω ἐξοπλισμοῦ. Τότε καὶ ἡ σχέσις μεταξὺ χρησιμοποιουμένου παγίου κεφαλαίου καὶ παραγομένου προϊόντος εἰς τὸν ἀντίστοιχον κλάδον, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ κλάδου θὰ εἶναι $100/25 = 4$. Ἂν ὅμως ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον τεχνικῆς καταρτίσεως τοῦ ἐργατικοῦ προσωπικοῦ εἶναι κατώτερον τοῦ ἀπαιτουμένου, δὲν θὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ παραγωγὴ προϊόντος ἀξίας 25 ν.μ. ἀλλὰ ὀλιγωτέρου, π.χ. 20 ν.μ. Ἀλλὰ τότε καὶ ἡ τιμὴ τοῦ σχετικοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως θὰ αὐξηθῇ εἰς 5 $\left(=\frac{100}{20}\right)$. Θεωροῦμεν τὴν τιμὴν 4 τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως ὡς τεχνικῶς ἀρίστην, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ἀκριβῶς ὅτι κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ἀντιστοίχου κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ ὑφίστανται πᾶσαι αἱ ἀπαιτούμεναι τεχνικαὶ προϋποθέσεις διὰ τὴν ἀποδοτικωτέραν δυνατὴν χρησιμοποίησίν του. Ἐκ τῆς καταλλήλου σταθμίσεως τῶν ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην ἀρίστων τιμῶν τῶν εἰδικῶν συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως, λαμβάνομεν τὴν τεχνικῶς ἀρίστην τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως ἐν τῷ συνόλῳ.

Καθίσταται προφανὲς ὅτι ἀναλόγως τοῦ μορφωτικοῦ ἐπιπέδου τῶν ἐργαζομένων ἑκάστης χώρας καὶ τοῦ βαθμοῦ τῆς ἐξασφαλίσεως τῶν γενικωτέρων προϋποθέσεων διὰ τὴν ἀρτίαν λειτουργίαν τοῦ τεχνικοῦ ἐξοπλισμοῦ ὡρισμένου τύπου, ὡς ἐπίσης καὶ ἀναλόγως τῆς ὀρθότητος τοῦ προγράμματος ἐπενδύσεων, τὸ ὁποῖον καθορίζει τὴν κατανομὴν αὐτῶν, ἡ ἀποδοτικότης τοῦ ἐξοπλισμοῦ αὐτοῦ εἶναι διάφορος. Ἀντιστοίχως, ἡ *πραγματικὴ τιμὴ* τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως, δηλαδὴ ἡ ὑπολογιζομένη στατιστικῶς βάσει πραγματικῶν δεδομένων τῆς λειτουργίας τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ, δύναται νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν τεχνικῶς ἀρίστην τιμὴν (ἰδίως εἰς τὰς ἀνεπτυγμένας χώρας) ἢ νὰ εἶναι οὐσιωδῶς μεγαλυτέρα ταύτης ὡς παρατηρεῖται συνήθως εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας.

Ἡ οἰκονομικῶς ἀρίστη τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως εἶναι ἡ διαμορφουμένη ἐκ τῆς ἀρίστης δυνατῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας. Τὸ πρόβλημα τῆς ἀρίστης κατανομῆς τῶν διενεργουμένων ἐπενδύσεων θὰ ἐξετασθῇ ἀλλαχοῦ, κατὰ συνέπειαν δὲν πρόκειται νὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰδικώτερον ἐνταῦθα τὴν ἔννοιαν τῆς οἰκονομικῶς ἀρίστης τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως.

8.4.2. Εἴδομεν ὅτι ἡ πραγματικὴ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως εἰς τὰς ἀνεπαρκῶς ἀνεπτυγμένας χώρας δύναται νὰ εἶναι οὐσιωδῶς ἀνωτέρα τῆς τεχνικῶς ἀρίστης τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ, λόγῳ ἐλλείψεως τῶν τεχνικῶν καὶ ὀργανωτικῶν προϋποθέσεων διὰ τὴν πλήρη παραγωγικὴν ἀξιοποίησιν (καὶ ἱκανοποιητικὴν συντήρησιν) τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ (1). Κατὰ συνέπειαν, καθ' ὅ μέτρον ἐξασφαλίζονται αἱ προϋποθέσεις αὗται, αὐξάνει ἡ ἀποδοτικότης τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ, δηλαδὴ μειοῦται ἡ τιμὴ τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως.

Ἀλλ' ἡ ἐξασφάλισις τῶν ἀνωτέρω προϋποθέσεων εἶναι προφανῶς συνάρτησις, εἰς σημαντικὸν βαθμόν, τοῦ γενικωτέρου ρυθμοῦ οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, ὅστις ἐν συνεχείᾳ ἐξαρτᾶται οὐσιωδῶς ἐκ τοῦ ποσοστοῦ ἐτησίας ἀποταμιεύσεως. Ὑφίσταται δηλαδή, ἐν ὑστάτῃ ἀναλύσει, μία θετικὴ συσχέτισις μεταξὺ αὐξήσεως τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως καὶ αὐξήσεως τοῦ βαθμοῦ ἀποδοτικότητος τοῦ κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ. Ἐν ἄλλοις λόγοις, αὐξανομένης τῆς ἀποταμιεύσεως εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας ἡ πραγματικὴ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως μειοῦται καὶ τείνει νὰ φθάσῃ τὴν τεχνικῶς ἀρίστην τιμὴν αὐτοῦ. Χαρακτηριστικὰ εἶναι ἐν προκειμένῳ τὰ ἀναφερόμενα ὑπὸ τοῦ B. Horvat στοιχεῖα διὰ τὴν Γιουγκοσλαβικὴν οἰκονομίαν (2), συμφώνως πρὸς τὰ ὁποῖα ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως κεφαλαίου ἐδιπλασιάσθη περίπου εἰς διάστημα τεσσάρων ἐτῶν. Ἡ εὐνοϊκὴ αὕτη ἐξέλιξις ἀποδίδεται εἰδικώτερον εἰς τὴν βελτίωσιν τῶν ὀργανωτικῶν καὶ μορφωτικῶν προϋποθέσεων τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι ἡ σχετικῶς βραχυχρόνιος αὕτη συσχέτισις τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως καὶ τοῦ βαθμοῦ ἀποδοτικότητος τοῦ κεφαλαίου (ἢ ἀντιστρόφως, τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως) πρέπει νὰ λαμβάνεται ἰδιαιτέρως ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν διενέργειαν σχετικῶν ὑπολογισμῶν ἀναφερομένων εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας.

Πλὴν ὅμως τῆς βραχυχρονίου ταύτης ἐπιδράσεως μεταξὺ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως καὶ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως ὑφίσταται καὶ μακροχρόνιος ἐπίδρασις μεταξὺ αὐτῶν, συνισταμένη εἰς τὴν βελτίωσιν τῶν τεχνικῶν μεθόδων παραγωγῆς καὶ τὴν βαθμιαίαν μείωσιν αὐτῆς

---

1) Δὲν πρέπει βεβαίως νὰ συγχέεται ὁ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως, ὅστις δεικνύει τὴν ἀποδοτικότητα τοῦ χρησιμοποιουμένου κεφαλαίου, καὶ ὁ συντελεστὴς τῆς σχέσεως κεφαλαίου - ἐργασίας (capital - labour coefficient), ὅστις δεικνύει τὸν βαθμὸν κεφαλαιακότητος τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας. Ἡ τιμὴ τοῦ τελευταίου συντελεστοῦ εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας εἶναι πολὺ μικρά, ἐν συγκρίσει μὲ τὴν τιμὴν αὐτοῦ εἰς τὰς ἀνεπτυγμένας οἰκονομίας. Πρέπει ἐξ ἄλλου νὰ τονισθῇ ὅτι, θεωροῦντες τὴν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως οὐσιωδῶς ἀνωτέραν ἀπὸ τὴν τεχνικῶς ἀρίστην τιμὴν αὐτοῦ, δὲν κάμνομεν ἐμμέσως καὶ σύγκρισιν πρὸς τὸν ἀντίστοιχον συντελεστὴν τῶν ἀνεπτυγμένων χωρῶν. Ἁπλῶς συγκρίνομεν τὸν πραγματικὸν βαθμὸν ἀποδόσεως τοῦ ἐπενδυομένου κεφαλαίου πρὸς τὸν βαθμὸν ἀποδόσεως τὸν ὁποῖον τὸ κεφάλαιον τοῦτο θὰ εἶχεν ἂν ὑφίσταντο αἱ ἀπαραίτητοι τεχνικαὶ καὶ ὀργανωτικαὶ προϋποθέσεις διὰ τὴν πλήρη παραγωγικὴν ἀξιοποίησίν του.

2) B. Horvat: The optimum rate of Saving, εἰς Economic Journal, 1958.

ταύτης τῆς τεχνικῶς ἀρίστης τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ ἐπιβαρύνσεως. Ἡ διαδικασία αὐτὴ ἀποτελεῖ θεμελιῶδες χαρακτηριστικὸν τῆς τεχνικῆς ἐξελίξεως καὶ εἶναι, μακροχρονίως θεωρουμένη, μία ἐκ τῶν κυριωτέρων συνεπειῶν τῆς ἀποταμιευτικῆς λειτουργίας. Μεγαλυτέραν πάντως σημασίαν ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῶν ὑπαναπτύκτων χωρῶν παρουσιάζει ἡ χαρακτηρισθεῖσα ὡς βραχυχρόνιος ἐπίδρασις τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως, ἥτις τείνει νὰ μειώσῃ τὴν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ ὡς ἄνω συντελεστοῦ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς τεχνικῶς ἀρίστης τιμῆς αὐτοῦ.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐπίδρασις προϋποθέτει κυρίως χρησιμοποίησιν ἑνὸς σημαντικοῦ τμήματος τῶν διενεργουμένων ἀποταμιεύσεων εἰς εἰδικὰς ἐπενδύσεις πρὸς ἀνύψωσιν τοῦ τεχνικοῦ καὶ μορφωτικοῦ ἐπιπέδου τῶν ἐργαζομένων καὶ δημιουργίαν εὐνοϊκῶν ὀργανωτικῶν συνθηκῶν διὰ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόδοσιν τοῦ μηχανικοῦ ἐξοπλισμοῦ.

8.4.3. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων τίθεται ἤδη τὸ ἐρώτημα ἐὰν οἱαδήποτε αὔξησις τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως συνεπάγεται εὐνοϊκὰς ἐπιδράσεις ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως. Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτὸ πρέπει νὰ εἶναι, νομίζομεν, ἀρνητική. Αὔξησις τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως, μολονότι θεωρητικῶς δημιουργεῖ ὁλονὲν καὶ μεγαλυτέρας δυνατότητας ἀναπτύξεως τοῦ βιοτικοῦ ἐπιπέδου τοῦ πληθυσμοῦ μελλοντικῶς, πέραν ὡρισμένου ὁρίου ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ὑπέρμετρον ἐπιβάρυνσιν τοῦ βιοτικοῦ ἐπιπέδου τοῦ παρόντος καὶ τοῦ ἀμέσου μέλλοντος, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον προκαλεῖ δυσμενεῖς ἐπιδράσεις ἐπὶ τῆς ἀποδοτικότητος τῆς ἐργασίας καὶ συνεπῶς καὶ τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως. Εἴς τινας περιπτώσεις γενικοῦ ἐνθουσιασμοῦ διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν, εἶναι νοητὴ καὶ μείωσις ἀκόμη τοῦ βιοτικοῦ ἐπιπέδου δι' ὡρισμένην περίοδον, ἄνευ δυσμενῶν ἐπιπτώσεων ἐπὶ τῆς ἀποδοτικότητος ἐργασίας. Γενικῶς ὅμως πρέπει νὰ θεωρῆται βέβαιον ὅτι ἡ παραγνώρισις ἐπὶ μακρὸν τῆς σημασίας τῆς βελτιώσεως τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως τοῦ πληθυσμοῦ πρὸς ἐνίσχυσιν τῆς προσπαθείας τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ὁδηγεῖ τελικῶς εἰς ὑπονόμευσιν τῆς προσπαθείας ταύτης.

Οὕτω, ἀφ' ἑνὸς μὲν ὑποβιβάζεται ἐπικινδύνως τὸ ἐπίπεδον καταναλώσεως τοῦ πληθυσμοῦ, τὸ ὁποῖον εἰς τὰς ὑποναπτύκτους χώρας εἶναι ἤδη λίαν χαμηλόν, ἀφ' ἑτέρου δὲ δὲν καθίσταται δυνατὴ ἡ πλήρης ἀξιοποίησις τῶν δημιουργουμένων ἀποταμιευτικῶν δυνατοτήτων, μὲ ἀποτέλεσμα τὴν ματαίωσιν τῆς πραγματοποιήσεως, ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει, τῆς προβλεπομένης εἰς τὸ ἀπώτερον μέλλον οἰκονομικῆς προόδου.

Ἡ μείωσις τοῦ βαθμοῦ ἀποδοτικότητος τοῦ κεφαλαίου ἤ, ἄλλως, ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως πρέπει νὰ θεωρῆται ἀναπότρεπτος συνέπεια τῆς αὐξήσεως τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως πέραν ὡρισμένου ὁρίου. Δὲν εἶναι βεβαίως δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ a priori τὸ ὅριον αὐτό. Εἰς ἑκάστην συγκεκριμένην περίπτωσιν ἀναπτύξεως ἐξαρτᾶται πρωτίστως ἀπὸ τὸ ἤδη ὑφιστάμενον ἐπίπεδον διαβιώσεως τοῦ πληθυσμοῦ, τὸν τρόπον διανομῆς τοῦ εἰσοδήματος καὶ ἀπὸ ψυχολογικοὺς παράγοντας, ὡς εἶναι, π.χ., ὁ βαθμὸς ἐμπιστοσύνης τῶν λαϊκῶν μαζῶν εἰς τὴν πολιτικὴν οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ὁπωσδήποτε, μολονότι τὸ κρίσιμον ὅριον δὲν εἶναι ἐπιδεκτικὸν ἀκριβοῦς προσδιορισμοῦ, εἶναι δυνατόν, εἰς τὰς συγκεκριμένας πάντοτε περιπτώσεις, νὰ καθορισθῇ μία *περιοχὴ* ποσοστῶν ἀποταμιεύσεως (π.χ. 20 - 30 %) πέραν τῆς ὁποίας πᾶν ἐκλεγόμενον ποσοστὸν ἀποταμιεύσεως νὰ χαρακτηρίζεται ὡς ἀσύμφορον, τόσον ἀπὸ ἀπόψεως τοῦ συμφέροντος τῶν καταναλωτῶν ὅσον καὶ γενικώτερον ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς διαδικασίας τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως (1).

---

1) Βλ. μέθοδον ὑπολογισμοῦ εἰς : Α. Α. Λάζαρη «Οἰκονομετρικὴ διερεύνησις τῆς σχέσεως μεταξὺ ἀποταμιεύσεως καὶ καταναλώσεως» Ἀθῆναι 1961.

9

Μακροδυναμικὰ ὑποδείγματα προγραμματισμοῦ

9.1. Γενικά

Κατὰ τὴν διαδικασίαν καταστρώσεως τοῦ προγράμματος ἀναπτύξεως μιᾶς οἰκονομίας γίνονται συνήθως ὑπολογισμοὶ πρὸς ἔλεγχον τῆς λειτουργικῆς καὶ οἰκονομικῆς συνεπείας τῶν προγραμματικῶν ἐπιδιώξεων. Οὕτω καθορίζονται γενικά τινα πλαίσια ἐντὸς τῶν ὁποίων πρέπει, κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον, νὰ ἀναπτυχθῇ ὁ λεπτομερὴς προγραμματισμὸς τῆς οἰκονομίας.

Χαρακτηριστικὸν τῶν ὑπολογισμῶν αὐτῶν εἶναι ὅτι γίνεται ἐκτίμησις τῆς ἐξελίξεως βασικῶν τινῶν γενικῶν ἢ κλαδικῶν μεγεθῶν (τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, τῆς ἀποταμιεύσεως, τῆς ἀπασχολήσεως κλπ.), δι' ὡρισμένον ἀριθμὸν ἐτῶν, βάσει ἁπλῶν ὑπολογιστικῶν μεθόδων ὡς εἶναι, π.χ. ἡ μέθοδος τοῦ ἀνατοκισμοῦ. Τὰ ὑποδείγματα ταῦτα ἀποτελοῦν συνήθως διαχρονικὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ὑποδείγματος Domar - Harrod καὶ στηρίζονται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὁ ἐτήσιος ρυθμὸς μεταβολῆς τῶν ἐξεταζομένων οἰκονομικῶν μεγεθῶν παραμένει σταθερὸς καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς ὑπ' ὄψιν περιόδου.

Κατωτέρω ἀναφερόμεθα εἰς χαρακτηριστικάς τινας περιπτώσεις τοιούτων ὑποδειγμάτων.

9.2. Ὑπόδειγμα I

9.2.1. Σύμβολα. Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰ κάτωθι σύμβολα:

Y_0, Y_ν : τὸ ἐπίπεδον ἐθνικοῦ εἰσοδήματος κατὰ τὰ ἔτη 0 καὶ ν, ἀντιστοίχως.

$\Delta Y_\nu = Y_\nu - Y_0$: αὔξησις ἐθνικοῦ εἰσοδήματος μεταξὺ τῶν ἐτῶν 0 καὶ ν.

α : τὸ (σταθερὸν) ποσοστὸν ἐτησίας αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος.

P_0, P_ν : συνολικὸς πληθυσμὸς ἔτους 0 καὶ ἔτους ν, ἀντιστοίχως

p : τὸ ποσοστὸν ἐτησίας καθαρᾶς αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ (ὑπολογιζόμενον μετ' ἀφαίρεσιν τοῦ ποσοστοῦ θνησιμότητος καὶ μεταναστεύσεως).

$y_0 = Y_0 / P_0$: μέσον κατὰ κεφαλὴν εἰσόδημα ἔτους 0.

$y_\nu = Y_\nu / P_\nu$: » » » » » ν.

W_0, W_ν : Τὸ ἐργατικὸν δυναμικὸν (εἰς ἐργάτας - ἔτη) κατὰ τὰ ἔτη 0 καὶ ν, ἀντιστοίχως.

$\Delta W_\nu = W_\nu - W_0$: ἡ αὔξηση τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ἐτῶν 0 καὶ ν.

$\lambda = W_0/P_0 = W_\nu / P_\nu$: τὸ ποσοστὸν τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ πρὸς τὸν συνολικὸν πληθυσμόν.

E_0, E_ν : τὸ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως κατὰ τὰ ἔτη 0 καὶ ν, ἀντιστοίχως.

A_0 : τὸ ἐπίπεδον τῆς ἀνεργίας (ἀνοικτῆς ἢ λανθανούσης) κατὰ τὸ ἔτος 0.

I : ἡ συνολικὴ ἐπένδυσις τῆς περιόδου ἀπὸ 0 ἕως ν–1.

S_0 : ἡ συνολικὴ ἐγχώριος ἀποταμίευσις τῆς περιόδου ἀπὸ 0 ἕως ν–1.

S_ξ : ἡ συνολικὴ ἀποταμίευσις ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ κατὰ τὴν περίοδον ἀπὸ 0 ἕως ν–1.

s : ἡ μέση ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν.

β : ὁ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ εἰσοδήματος.

γ : ὁ συντελεστὴς τῆς σχέσεως κεφαλαίου - ἐργασίας, ὁ ὁποῖος δεικνύει τὴν ἀπαιτουμένην ποσότητα κεφαλαίου κατὰ μονάδα ἐργασίας (ἤτοι κατὰ ἐργάτην - ἔτος).

Εἰς ἃς περιπτώσεις τινὰ ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμβόλων χρησιμοποιοῦνται πρὸς ὑποδήλωσιν προγραμματικῶν στόχων λαμβάνουν μίαν ἐπιγραμμήν.

9.2.2. Στόχος τοῦ προγράμματος. Ἐπιδιώκεται ἡ πραγματοποίησις ἑνὸς ἐπιπέδου $\bar{y}_\nu$, κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος κατὰ τὸ ἔτος ν, μεγαλυτέρου κατὰ μ φορὰς (μ > 1) τοῦ ἐπιπέδου y_0, τοῦ κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος τοῦ ἔτους 0, ἤτοι :

$$\bar{y}_\nu = \mu y_0 \tag{1}$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὁρισμοῦ τὸ μέσον κατὰ κεφαλὴν εἰσόδημα δεδομένου ἔτους εἶναι ἡ σχέσις μεταξὺ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος καὶ πληθυσμοῦ τοῦ ἐν λόγῳ ἔτους, ἡ ἐπιδίωξις (1) δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν ἐπιδίωξιν τῆς πραγματοποιήσεως ἑνὸς ἐπιπέδου $\bar{Y}_\nu$, τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος τοῦ ἔτους ν, τοιούτου ὥστε :

$$\bar{Y}_\nu = \bar{y}_\nu P_\nu = \mu y_0 P_\nu \tag{2}$$

'Αλλά, δοθείσης μιᾶς σταθερᾶς ἐτησίας αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, θὰ εἶναι (1) : $Y_v = Y_0 (1 + \alpha)^v$. Συνεπῶς, θὰ ἔχωμεν :

$$\bar{Y}_v = Y_0 (1 + \bar{\alpha})^v , \tag{3}$$

ὅπου $\bar{\alpha}$ εἶναι ὁ ἐτήσιος ρυθμὸς αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ ἐξασφαλίσῃ ἐπίπεδον ἐθνικοῦ εἰσοδήματος $\bar{Y}_v$ ἐντὸς v ἐτῶν. Οὕτω τελικῶς, ἀντὶ τοῦ ἀρχικοῦ στόχου $\bar{y}_v$, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἰσοδυνάμως ὡς στόχον τὴν πραγματοποίησιν μέσου ἐτησίου ρυθμοῦ αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος ἴσου πρὸς $\bar{\alpha}$.

9.2.3. 'Επιπτώσεις. 1) Δοθέντος τοῦ ἐτησίου ρυθμοῦ αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος $\bar{\alpha}$, ἡ αὔξησις τοῦ εἰσοδήματος μεταξὺ τῶν ἐτῶν 0 καὶ v, ἤτοι κατὰ τὴν περίοδον τοῦ προγράμματος, θὰ εἶναι :

$$\Delta Y_v = \bar{Y}_v - Y_0 \tag{4}$$

Συνεπῶς τὸ σύνολον τῶν ***ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων*** διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς αὐξήσεως ταύτης θὰ εἶναι :

$$I = \beta \Delta Y_v = \beta Y_0 [(1 + \bar{\alpha})^v - 1] \tag{5}$$

2) 'Εξ ἄλλου, δοθεισῶν τῶν ἐπενδύσεων, ἡ συνολικὴ αὔξησις τῆς ἀπασχολήσεως μεταξὺ τῶν περιόδων 0 καὶ v θὰ εἶναι :

$$E_v - E_0 = \Delta E_v = I/\gamma \tag{6}$$

*9.2.4. **Ἔλεγχος οἰκονομικῆς συνεπείας τοῦ προγραμματικοῦ στόχου.*** Διὰ νὰ εἶναι οἰκονομικῶς πραγματοποιήσιμος ὁ ρυθμὸς ἐτησίας αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος $\bar{\alpha}$, καὶ συνεπῶς ὁ τεθεὶς στόχος $\bar{y}_v$ τοῦ κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος διὰ τὸ ἔτος v, πρέπει νὰ ἰσχύουν αἱ κάτωθι συνθῆκαι :

$$\alpha) \quad I \leqslant S_\sigma + S_\xi \tag{7}$$

καὶ

$$\beta) \quad \Delta E_v \leqslant \Delta W_v + A_0 \tag{8}$$

Συμφώνως πρὸς τὴν πρώτην ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνθηκῶν πρέπει αἱ ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ προγράμματος νὰ μὴ ὑπερβαίνουν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐγχωρίων ἀποταμιεύσεων (S_σ) διὰ

1) Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ ἀνατοκισμοῦ.

τὴν περίοδον τῶν ἐτῶν 0 ἕως ν καὶ τῶν ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ δυναμένων νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀποταμιεύσεων (S_ξ), κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ ἀποταμιεύσεις δοθείσης περιόδου μετατρέπονται εἰς ἐπενδύσεις κατὰ τὴν αὐτὴν πεοίοδον, ἀλλ' ὅτι μεταξὺ ἐπενδύσεων καὶ αὐξήσεως τοῦ πραγματικοῦ εἰσοδήματος τῆς οἰκονομίας ὑφίσταται ὑστέρησις ἑνὸς ἔτους. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν δὲν ὑπολογίζονται αἱ ἀποταμιεύσεις τοῦ νιοστοῦ ἔτους, καθ' ὅσον αὗται, δημιουργοῦσαι ἐπενδύσεις ἐντὸς τοῦ ἔτους αὐτοῦ, ὁδηγοῦν εἰς αὔξησιν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος κατὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος $\nu+1$, τὸ ὁποῖον δὲν ἐξετάζεται εἰς τὸ πρόγραμμα.

Προφανῶς τὸ σύνολον τῶν ἀποταμιεύσεων τοῦ ἐσωτερικοῦ κατὰ τὴν περίοδον ἀπὸ μηδὲν ἕως ν–1 ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐτησίων ἀποταμιεύσεων τῆς ἐν λόγῳ περιόδου. Ἤτοι, δοθείσης τῆς σταθερᾶς ῥοπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν s, θὰ ἔχωμεν :

$$S_\sigma = s\,[Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{\nu-1}]$$

$$= s\,[Y_0 + Y_0(1+\bar{\alpha}) + Y_0(1+\bar{\alpha})^2 + \ldots + Y_0(1+\bar{\alpha})^{\nu-1}]$$

καὶ

$$S_\sigma = \frac{s\,Y_0[(1+\bar{\alpha})^\nu - 1]}{\bar{\alpha}} \qquad (9)$$

Ἂν S_ξ ἀποτελεῖ μίαν ἐκτίμησιν τῶν δυνατοτήτων δανεισμοῦ ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ κατὰ τὴν περίοδον τῶν ἐτῶν 0 ἕως ν–1, ἡ συνθήκη (7) γίνεται :

$$I \leq \frac{s\,Y_0[(1+\bar{\alpha})^\nu - 1]}{\bar{\alpha}} + S_\xi$$

ἢ (ἐκ τῆς 5)

$$\boxed{\beta\,Y_0[(1+\bar{\alpha})^\nu - 1] \leq \frac{s\,Y_0[(1+\bar{\alpha})^\nu - 1]}{\bar{\alpha}} + S_\xi} \qquad (10)$$

Ἂν θέσωμεν $S_\xi = 0$, βλέπομεν ὅτι ἡ (10) γίνεται :

$$\beta \leq \frac{s}{\bar{\alpha}}$$

ἐξ ἧς, ἀφοῦ θέσωμεν τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, λαμβάνομεν τὴν γνωστὴν συνθήκην ἰσορροπίας τοῦ συστήματος Domar - Harrod :

$$\bar{\alpha} = \frac{s}{\beta} \qquad (11)$$

Συμφώνως πρὸς τὴν συνθήκην (8), ἀνωτέρω, πρέπει ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ προγράμματος συνολικὴ αὔξησις ΔE_ν τῆς ἀπασχολήσεως κατὰ τὴν περίοδον τῶν ἐτῶν ἀπὸ 0 ἕως ν, νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῆς συνολικῆς αὐξήσεως ΔW_ν τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον καὶ τῆς ἀνεργίας A_0, τῆς περιόδου 0. Ὁ πληθυσμὸς τοῦ ἔτους ν, βάσει σταθερᾶς ἐτησίας αὐξήσεως αὐτοῦ κατὰ ποσοστὸν p, θὰ εἶναι :

$$P_\nu = P_0(1+p)^\nu \tag{12}$$

Συνεπῶς :

$$W_\nu = \lambda P_\nu = \lambda P_0(1+p)^\nu \tag{13}$$

καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὁρισμοῦ $\lambda P_0 = W_0$, δυνάμεθα ἀντὶ τῆς (13) νὰ γράψωμεν :

$$W_\nu = W_0(1+p)^\nu \tag{14}$$

Ἑπομένως :

$$\Delta W_\nu = W_\nu - W_0 = W_0[(1+p)^\nu - 1] \tag{15}$$

Ἐξ ἄλλου, ἐξ ὁρισμοῦ :

$$\Delta E_\nu = I/\gamma$$

καὶ (ἐκ τῆς 5)

$$\Delta E_\nu = \beta \Delta Y_\nu / \gamma = \frac{\beta}{\gamma} Y_0[(1+\bar{\alpha})^\nu - 1] \tag{16}$$

Οὕτω ἡ συνθήκη (8) γίνεται :

$$\boxed{\frac{\beta}{\gamma} Y_0[(1+\bar{\alpha})^\nu - 1] < W_0[(1+p)^\nu - 1] + A_0} \tag{17}$$

Ἂν εἰς τὴν συνθήκην (10) θέσωμεν τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος ἀντὶ τοῦ σημείου τῆς ἀνισότητος [1] δυνάμεθα προφανῶς νὰ διατυπώσωμεν ἐκ τῆς συνθήκης ταύτης καὶ τῆς (17) μίαν ἑνιαίαν συνθήκην :

$$\boxed{\frac{s}{\alpha} Y_0[(1+\bar{\alpha})^\nu - 1] + \bar{S}_\xi \leq \gamma W_0[(1+p)^\nu - 1] + \gamma A_0} \tag{18}$$

ἥτις πληρουμένη ἐξασφαλίζει ταυτοχρόνως τὴν συνέπειαν τοῦ τεθέντος προγραμματικοῦ στόχου $\bar{y}_\nu$, τόσον ὡς πρὸς τὰς δυνατότητας χρηματοδοτήσεως τῶν ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων ὅσον ἐπίσης καὶ πρὸς τὰς δυνατότητας διαθέσεως τοῦ ἀπαραιτήτου ἐργατικοῦ δυναμικοῦ :

1) Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ἀποταμίευσις S_ξ προσδιορίζεται εἰς ἐπίπεδον τοιοῦτον ὥστε, ὁμοῦ μετὰ τῶν ἐγχωρίων ἀποταμιεύσεων S_σ, νὰ ἐξασφαλίζῃ ἀκριβῶς τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων. Θεωρητικῶς εἶναι βεβαίως νοητὴ καὶ ἡ περίπτωσις ἀρνητικῆς τιμῆς τῆς S_ξ.

9.4.2. Ἐπιπτώσεις ἐπὶ τῶν ἐπενδύσεων. Ἐξετάζοντες κεχωρισμένως τὸν πρῶτον στόχον θὰ ἔχωμεν, βάσει τοῦ ὑποδείγματος I [1], σύνολον ἀπαιτουμένων ἀποταμιεύσεων διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ $\bar{Y}_\nu$

$$I_{(1)} = \beta Y_0 [\,(1 + \bar{\alpha})^\nu - 1\,] \tag{3}$$

ὅπου $I_{(1)}$ εἶναι αἱ ἐπενδύσεις αἱ ἀπορρέουσαι ἐκ τοῦ πρώτου στόχου καὶ $\bar{\alpha}$ εἶναι τὸ ἀπαιτούμενον ἐτήσιον ποσοστὸν αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος.

Ἐκ τοῦ στόχου τῆς πλήρους ἀπασχολήσεως ἔχομεν (βλ. σχέσιν (3) ὑποδείγματος II):

$$I_{(2)} = \gamma\, W_0 [(1 + p)^\nu - 1] + \gamma\, A_0 \tag{4}$$

ὅπου $I_{(2)}$ εἶναι αἱ ἀπαιτούμεναι πρὸς πραγματοποίησιν τοῦ δευτέρου τούτου στόχου ἐπενδύσεις.

9.4.3. Λειτουργικὴ καὶ οἰκονομικὴ συνέπεια. 1) Προφανῶς ταυτόχρονος ἐπιδίωξις τῶν ἀνωτέρω δύο στόχων σημαίνει ὅτι οἱ στόχοι οὗτοι πρέπει νὰ εἶναι ***συμβιβαστοὶ*** ἤτοι ***λειτουργικῶς συνεπεῖς***. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν μόνον ἄν:

$$I_{(1)} = I_{(2)} \tag{5}$$

ἤτοι, ἂν αἱ ἐκ τοῦ πρώτου στόχου ἀπορρέουσαι ἐπενδύσεις ἰσοῦνται ἀκριβῶς πρὸς τὰς ἐκ τοῦ δευτέρου στόχου ἀπορρεούσας τοιαύτας.

Βεβαίως ἀντὶ τῆς (5) δυνάμεθα (βάσει τῶν (3) καὶ (4) τοῦ ἐξεταζομένου ὑποδείγματος) νὰ γράψωμεν:

$$\boxed{\beta Y_0 [(1 + \bar{\alpha})^\nu - 1] = \gamma W_0 [\,(1 + p)^\nu - 1] + \gamma A_0} \tag{6}$$

Καθίσταται ἤδη προφανὲς πόσον δυσχερὴς εἶναι ἡ ταυτόχρονος πραγματοποίησις τῶν ὡς ἄνω δύο στόχων. Μόνον ἐκ συμπτώσεως αἱ διάφοροι παράμετροι τοῦ ὑποδείγματος εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουν τιμὰς πληρούσας τὴν συνθήκην (6).

2) Ἡ οἰκονομικὴ συνέπεια εἰς τὸ ἐξεταζόμενον ὑπόδειγμα ἐξασφαλίζεται ἐκ τῆς πληρώσεως τῆς συνθήκης:

$$I_{(1)} = I_{(2)} \leqslant S_\sigma + S_\xi \tag{7}$$

1) Βλ. σχέσιν (5) τοῦ ὑποδείγματος I.

Ἤτοι, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ἐξασφαλίσεως λειτουργικῆς συνεπείας $I_{(1)} = I_{(2)}$), πρέπει αἱ ἀπαιτούμεναι ἀποταμιεύσεις νὰ μὴ ὑπερβαίνουν τὰς ἐγχωρίους καὶ τὰς ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ δυναμένας νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀποταμιεύσεις.

9.5. Ὑπόδειγμα IV

Τὸ ὑπόδειγμα αὐτὸ διαφέρει ἀπὸ τὰ προηγούμενα οὐσιωδῶς. Ἡ οἰκονομία δὲν ἐξετάζεται πλέον ὡς ἓν ἀδιαίρετον σύνολον, ἀλλὰ θεωρεῖται ἀποτελουμένη ἀπὸ τρεῖς βασικοὺς τομεῖς, τὸν τομέα τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς, τὸν τομέα τῆς μεταποιήσεως καὶ τὸν τομέα τῶν ὑπηρεσιῶν, καὶ παρακολουθοῦνται αἱ ἐξελίξεις τῶν τομέων αὐτῶν ἀπὸ ἀπόψεως εἰσοδήματος, ἀπασχολήσεως καὶ ἐπενδύσεων. Εἰς τὸ ὑπόδειγμα δὲν ἐξετάζονται, ἐν τούτοις, αἱ διατομεακαὶ ἢ διακλαδικαὶ συναλλαγαί, καὶ συνεπῶς τοῦτο διαφέρει οὐσιωδῶς καὶ ἀπὸ τὸ ὑπόδειγμα εἰσροῶν - ἐκροῶν. Λόγῳ τῆς διαιρέσεως ταύτης τῆς οἰκονομίας, πλὴν τῶν μέχρι τοῦδε χρησιμοποιηθέντων συμβόλων, θὰ χρησιμοποιηθοῦν ἐπίσης καὶ ὡρισμένα νέα σύμβολα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται εἰς τὰς ἑπομένας παραγράφους.

9.5.1. Στόχοι τοῦ προγράμματος. α) Ἡ πραγματοποίησις μέσου κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος $\bar{y}_\nu$, διὰ τὸ ἔτος ν, τοιούτου ὥστε:

$$\bar{y}_\nu = \mu y_0, \quad \mu > 1 \tag{1}$$

Ὁ στόχος $\bar{y}_\nu$ δύναται, κατὰ τὰ γνωστὰ νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸν στόχον α, ἤτοι εἰς τὴν πραγματοποίησιν ἐτησίου ρυθμοῦ αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος τοιούτου ὥστε:

$$\bar{y}_\nu = Y_\nu / P_\nu = Y_0 (1 + \alpha)^\nu / P_\nu \tag{2}$$

β) Ἡ κατανομὴ τῆς ὑπολογιζομένης αὐξήσεως ΔY_ν, τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος τοῦ ἔτους ν, ἐν συγκρίσει πρὸς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα τοῦ ἔτους 0, μεταξὺ τῶν τομέων τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς τῆς μεταποιήσεως καὶ τῶν ὑπηρεσιῶν, κατὰ ποσοστὰ δ_1, δ_2 καὶ δ_3, ἀντιστοίχως.

Προφανῶς:

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \geqslant 0 \quad \text{καὶ} \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1 \tag{3}$$

Διὰ τῆς πραγματοποιήσεως τοῦ δευτέρου στόχου ἐπιδιώκεται ἡ ***ἀναδιάρθρωσις*** τῆς οἰκονομίας καθ' ὡρισμένον τρόπον, π.χ., διὰ τῆς ταχυτέρας ἀναπτύξεως τοῦ κλάδου τῆς μεταποιήσεως. Τοῦτο θὰ ἔχῃ προφανῶς συνεπείας καὶ εἰς τὸν τρόπον κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων καὶ τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως μεταξὺ τῶν τριῶν τομέων.

9.5.2. Ἐπιπτώσεις. 1) Ἡ συνολικὴ αὔξησις ΔY_ν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος κατὰ τὴν περίοδον τοῦ προγράμματος θὰ εἶναι :

$$\Delta Y_\nu = Y_\nu - Y_0 = Y_0[(1+\alpha)^\nu - 1] \tag{4}$$

2) Βάσει τῆς αὐξήσεως ταύτης καὶ τῶν ποσοστῶν κατανομῆς δ_1, δ_2 καὶ δ_3, δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κατὰ τομεῖς αὐξήσεις τοῦ εἰσοδήματος, $\Delta Y_{\nu 1}$, $\Delta Y_{\nu 2}$ καὶ $\Delta Y_{\nu 3}$ (1) :

$$\begin{aligned} \Delta Y_{\nu 1} &= \delta_1 \Delta Y_\nu \\ \Delta Y_{\nu 2} &= \delta_2 \Delta Y_\nu \\ \Delta Y_{\nu 3} &= \delta_3 \Delta Y_\nu \end{aligned} \tag{5}$$

3) Δοθεισῶν τῶν ὡς ἄνω αὐξήσεων, ἡ ποσοστιαία κατανομὴ τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος κατὰ τομεῖς τὸ ἔτος ν θὰ εἶναι :

$$\frac{Y_{01} + \Delta Y_{\nu 1}}{Y_\nu}, \quad \frac{Y_{02} + \Delta Y_{\nu 2}}{Y_\nu}, \quad \frac{Y_{03} + \Delta Y_{\nu 3}}{Y_\nu} \tag{6}$$

ὅπου Y_{01}, Y_{02}, Y_{03} εἶναι τὰ ἐπίπεδα εἰσοδήματος τῶν τριῶν τομέων κατὰ τὸ ἔτος 0. Ἡ ὡς ἄνω ποσοστιαία κατανομὴ δύναται νὰ συγκριθῇ μὲ τὴν ἀντίστοιχον κατανομὴν τοῦ ἔτους 0 :

$$\frac{Y_{01}}{Y_0}, \quad \frac{Y_{02}}{Y_0}, \quad \frac{Y_{03}}{Y_0} \tag{7}$$

4) Βάσει τῶν αὐξήσεων κατὰ τομεῖς τοῦ εἰσοδήματος καὶ τῶν συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ εἰσοδήματος β_1, β_2 καὶ β_3 τῶν ὡς ἄνω τομέων, δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις I_1, I_2 καὶ I_3, τῶν τομέων αὐτῶν (2) :

$$\begin{aligned} I_1 &= \Delta Y_{\nu 1} \beta_1 \\ I_2 &= \Delta Y_{\nu 2} \beta_2 \\ I_3 &= \Delta Y_{\nu 3} \beta_3 \end{aligned} \tag{8}$$

Οὕτω τὸ σύνολον τῶν ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων I, διὰ τὴν οἰκονομίαν θὰ εἶναι :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \tag{9}$$

---

1) Οἱ δεῖκται 1, 2 καὶ 3 ἀναφέρονται ἀντιστοίχως εἰς τὸν τομέα τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς, τῆς μεταποιήσεως καὶ τῶν ὑπηρεσιῶν.

2) Βλ. καὶ σ. 185.

5) Ἐκ τῶν κατὰ τομεῖς ἐπενδύσεων καὶ τῶν συντελεστῶν τῆς σχέσεως κεφαλαίου καὶ ἐργασίας γ_1, γ_2, γ_3 εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπαιτουμένη κατὰ τομεῖς αὔξησις τῆς ἀπασχολήσεως ΔE_{v1}, ΔE_{v2} καὶ ΔE_{v3}:

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{v1} &= I_1 / \gamma_1 \\
\Delta E_{v2} &= I_2 / \gamma_2 \\
\Delta E_{v3} &= I_3 / \gamma_3
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Οὕτω τὸ σύνολον τῆς ἀπαιτουμένης αὐξήσεως τῆς ἀπασχολήσεως διὰ τὴν οἰκονομίαν θὰ εἶναι:

$$\Delta E_v = \Delta E_{v1} + \Delta E_{v2} + \Delta E_{v3} \tag{11}$$

6) Ἐξ ἄλλου ἡ ποσοστιαία κατανομὴ τῆς ἀπασχολήσεως κατὰ τομεῖς διὰ τὸ ἔτος ν θὰ εἶναι:

$$\frac{E_{02} + \Delta E_{v1}}{E_v}, \quad \frac{E_{02} + \Delta E_{v2}}{E_v}, \quad \frac{E_{03} + \Delta E_{v3}}{E_v} \tag{12}$$

ὅπου E_{01}, E_{02} καὶ E_{03} εἶναι τὰ ἐπίπεδα ἀπασχολήσεως εἰς τοὺς τρεῖς τομεῖς κατὰ τὸ ἔτος 0 καὶ $E_v = E_0 + \Delta E_v$.

Ἡ κατανομὴ αὐτὴ δύναται νὰ συγκριθῇ μὲ τὴν ἀντίστοιχον κατανομὴν τοῦ ἔτους 0, ἥτις εἶναι:

$$E_{01} / E_0, \quad E_{02} / E_0, \quad E_{03} / E_0 \tag{13}$$

9.5.3. ***Ἔλεγχος συνεπείας.*** Οἱ τεθέντες στόχοι εἶναι οἰκονομικῶς πραγματοποιήσιμοι ὑφ' ἃς συνθήκας εἶναι ἐπίσης οἰκονομικῶς πραγματοποιήσιμον τὸ πρόγραμμα τοῦ ὑποδείγματος I, ἤτοι ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις καὶ ἡ ἀπαιτουμένη αὔξησις τῆς ἀπασχολήσεως δὲν ὑπερβαίνουν τὰς δυνατότητας τῆς οἰκονομίας, αἱ ὁποῖαι εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἐπενδύσεων ὑποτίθεται ὅτι δύνανται νὰ διευρυνθοῦν διὰ τῆς εἰσροῆς ἀποταμιεύσεων ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ (1). Οὕτω αἱ συνθῆκαι συνεπείας θὰ εἶναι:

$$\alpha) \quad I \leqslant S_\sigma + S_\xi$$

καὶ

$$\beta) \quad \Delta E_v \leqslant \Delta W_v + A_0$$

1) Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀπασχολήσεως θὰ ἦτο ἐπίσης δυνατὸν νὰ ὑποτεθῇ εἰσροὴ ἐργατικῶν δυνάμεων ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ. Ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ δὲν γίνεται συνήθως διὰ τὰς ὑπαναπτύκτους οἰκονομίας, αἱ ὁποῖαι ἀντιμετωπίζουν ἀντιθέτως πρόβλημα μεταναστεύσεως.

9.5.4. Εἶναι προφανῶς δυνατὸν νὰ διατυπωθοῦν διάφορα ὑποδείγματα ὅμοια πρὸς τὸ ἀνωτέρω περιγραφέν, μὲ μεγαλυτέραν ἀνάλυσιν τῆς οἰκονομίας κατὰ τομεῖς καὶ διαφόρους προγραμματικοὺς στόχους.

Τὰ μακροδυναμικὰ ὑποδείγματα, γενικῶς, τὰ ὁποῖα χαρακτηρίζονται ἀπὸ τὴν διαχρονικὴν παρακολούθησιν τῶν ἐξελίξεων τῆς οἰκονομίας ἢ βασικῶν τομέων αὐτῆς, θὰ ἠδύναντο νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὴν χάραξιν τῶν ὁρίων ἑνὸς ἀναλυτικοῦ προγραμματισμοῦ οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, βασιζομένου εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν διακλαδικῶν σχέσεων. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν τὰ γενικὰ ταῦτα ὑποδείγματα δύνανται νὰ συνδυασθοῦν πρὸς τὰ ὑποδείγματα εἰσροῶν - ἐκροῶν. Ἀπὸ μιᾶς ἀπόψεως τὰ πρῶτα θὰ ἠδύναντο νὰ ἀποτελέσουν ἀφετηρίαν ἐφαρμογῆς τῶν δευτέρων. Οὕτω, π.χ., ὁ προσδιορισμὸς ἑνὸς στόχου, συνισταμένου εἰς τὴν αὔξησιν τοῦ κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος καθ' ὡρισμένον ποσοστὸν ἐτησίως, κατὰ τὴν διάρκειαν δοδείσης περιόδου, ὡς καὶ ἡ διερεύνησις τῶν γενικῶν ἐπιπτώσεων τοῦ στόχου αὐτοῦ ἀπὸ ἀπόψεως ἐπενδύσεων, ἀπασχολήσεως καὶ εἰσοδήματος, εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ δι' ἑνὸς μακροδυναμικοῦ ὑποδείγματος, ὡς τὰ ἀνωτέρω ἀναφερθέντα. Ἡ κατὰ κλάδους λεπτομερὴς διερεύνησις τῶν ἐπιπτώσεων τοῦ τεθέντος στόχου δύναται ἐν συνεχείᾳ νὰ πραγματοποιηθῇ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς ἑνὸς ὑποδείγματος διακλαδικῆς ἀναλύσεως. Εἰς τὴν πρᾶξιν, τὸ τελικὸν πρόγραμμα ἀναπτύξεως εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψῃ ἀπὸ διαδοχικὰς προσαρμογὰς τῶν μακροοικονομικῶν στόχων, αἱ ὁποῖαι καθίστανται ἀναγκαῖαι ὑπὸ τὸ φῶς τῆς διακλαδικῆς ἀναλύσεως.

9.6. Παραμετρικὴ ἀνάλυσις

9.6.1. ***Γενικά.*** Εἰς τὰ ἀνωτέρω ἐξετασθέντα ὑποδείγματα θεωροῦνται ὡς δεδομέναι αἱ τιμαὶ ὡρισμένων παραμέτρων, ὡς εἶναι π.χ. ἡ ῥοπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν s, ὁ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως β καὶ τὸ ποσοστὸν ἐτησίας αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ p. Αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων αὐτῶν ἀποτελοῦν ***περιορισμοὺς*** διὰ τὴν λύσιν τῶν τιθεμένων προβλημάτων προγραμματισμοῦ.

Πρέπει ἐν τούτοις νὰ σημειωθῇ ὅτι αἱ τιμαὶ αὗται, εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων, εἶναι ἐπιδεκτικαὶ μεταβολῆς, βραχυχρονίως ἢ μακροχρονίως, εἴτε κατόπιν ἐφαρμογῆς καταλλήλου οἰκονομικῆς πολιτικῆς, εἴτε ἐξ ἄλλων λόγων. Εἶναι χρήσιμον ἀπὸ ἀπόψεως προγραμματισμοῦ νὰ γνωρίζωμεν εἰς δεδομένην περίοδον μέχρι ποίου βαθμοῦ ὑφίσταται δυνατότης μεταβολῆς τῶν τιμῶν τῶν διαφόρων παραμέτρων, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται εἰς ἓν ὑπόδειγμα. Ἡ χρησιμότης τῆς γνώσεως ταύτης καθίσταται προφανὴς ὅταν διαπιστοῦται ἀδυναμία πραγματοποιήσεως τῶν προγραμματικῶν στόχων βάσει ὡρισμένων τιμῶν τῶν παραμέτρων. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι ἐνδεχόμενον, ἡ ἐπανεξέτασις τοῦ προγράμματος, βάσει τῶν νέων τιμῶν τῶν παραμέτρων, νὰ ἀποδεικνύῃ ὅτι εἶναι πραγματοποιήσιμοι οἱ προγραμματικοὶ στόχοι ἢ τουλάχιστον νὰ ὁδηγῇ εἰς σημαντικὴν σμίκρυνσιν τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ προγραμματισθέντων καὶ πραγματοποιησίμων στόχων.

Θὰ ὀνομάζωμεν *παραμετρικὴν ἀνάλυσιν* τὴν *διερεύνησιν* τῶν δυνατοτήτων μεταβολῆς τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων καὶ τὴν *ἐπανεξέτασιν* τοῦ προγράμματος βάσει τῶν νέων αὐτῶν τιμῶν. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ παραμετρικὴ ἀνάλυσις δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ συγκεκριμένων περιπτώσεων προγραμματισμοῦ. Ἐνταῦθα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ τὴν γενικὴν ἐξέτασιν τοῦ θέματος, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ ὑπόδειγμα I, ἀνωτέρω.

9.6.2. *Διερεύνησις τῆς μεταβλητότητος τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων καὶ ἐπανεξέτασις τοῦ προγράμματος*: 1) Ἀφετηρίαν τῆς ἀναλύσεως θὰ θέσωμεν τὰς συνθήκας οἰκονομικῆς συνεπείας (10) καὶ (17) τοῦ ὑποδείγματος I, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν συνοπτικῶς τὸ ἐν λόγῳ ὑπόδειγμα (1). Εἰδικώτερον, θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ τῶν συνθηκῶν αὐτῶν πληροῦται μόνον ἡ συνθήκη (17).

Ἡ μὴ πλήρωσις τῆς συνθήκης (10) σημαίνει ὅτι δὲν ἐπαρκοῦν οἱ συνολικοὶ ἀποταμιευτικοὶ πόροι τῆς οἰκονομίας διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῶν ὑπολογισθεισῶν ἐπενδύσεων, ἤτοι:

$$I > S_\sigma + S_\xi \qquad (\alpha)$$

ἢ ἀναλυτικῶς:

$$\beta Y_0[(1+\alpha)^\nu - 1] > \frac{s}{\alpha}[(1+\alpha)^\nu - 1] + S_\xi \qquad (\beta)$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὅσον ἀφορᾷ μὲν τὸ ἐργατικὸν δυναμικόν, οὐδὲν πρόβλημα ὑφίσταται διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ προγράμματος. Πρόβλημα δημιουργεῖται μόνον λόγῳ ἀνεπαρκείας ἀποταμιευτικῶν πόρων.

2) Ἡ (β) ἀνωτέρω περιλαμβάνει δύο παραμέτρους, ἤτοι τὸν συντελεστὴν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως β καὶ τὴν ῥοπὴν πρὸς ἀποταμίευσιν s. Ἡ παραμετρικὴ ἀνάλυσις ἐν προκειμένῳ ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν διερεύνησιν τῆς δυνατότητος καλύψεως ἢ σμικρύνσεως τῆς διαφορᾶς

$$I - (S_\sigma + S_\xi) = D \qquad (\gamma)$$

μεταξὺ ἐπενδύσεων καὶ ἀποταμιεύσεων. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν εἶναι δυνατὴ ἡ μεταβολὴ τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων β καὶ s, εἰς τρόπον ὥστε νὰ αὐξηθοῦν οἱ ἀποταμιευτικοὶ πόροι ἢ νὰ μειωθοῦν αἱ ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις.

1) Αἱ συνθῆκαι αὗται καλοῦνται *ἀνηγμέναι* σχέσεις, καθ' ὅσον περιλαμβάνουν κατόπιν καταλλήλων ἀντικαταστάσεων ὅλας τὰς λοιπὰς σχέσεις τοῦ ὑποδείγματος.

3) Ὡς δεικνύεται εἰς τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἀνισότητος (β), ἡ αὔξησις τῶν ἀποταμιευτικῶν πόρων εἶναι δυνατὴ διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς τιμῆς τῆς παραμέτρου s. Ἀλλὰ τὸ s εἶναι ἡ *ροπὴ* πρὸς ἀποταμίευσιν, ἤτοι ἐκφράζει τὴν διάθεσιν τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων, νὰ ἀποταμιεύουν ποσοστὸν ἐκ τοῦ εἰσοδήματός των. Ἡ διάθεσις αὕτη εἶναι συνισταμένη διαφόρων ψυχολογικῶν παραγόντων, ἀναγομένων κυρίως εἰς τὴν ἀνάγκην ἐξασφαλίσεως ἑνὸς ἀποθέματος ἀσφαλείας ἔναντι ἀπροβλέπτων ἢ προβλεπομένων μελλοντικῶν ἀναγκῶν, ἀλλ' ἐπηρεάζεται ἐπίσης καὶ ἐκ τῆς προσδοκωμένης ἀποδοτικότητος τῶν ἀποταμιεύσεων, ἤτοι ἐκ τοῦ εἰσοδήματος (τόκου ἢ κερδῶν) τὸ ὁποῖον ἀναμένουν οἱ ἀποταμιευταὶ ἐκ τῆς τοποθετήσεως τῶν ἀποταμιεύσεών των εἰς τραπεζικὰς καταθέσεις, χρηματιστηριακὰς ἀξίας κτλ.

Καθίσταται προφανὲς ὅτι, δοθέντος τοῦ ἐπιπέδου εἰσοδήματος, σκόπιμος αὔξησις τῆς ροπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν εἶναι κυρίως δυνατὴ δι' αὐξήσεως τῆς ἀποδοτικότητος τῶν ἀποταμιεύσεων. Οὕτω ἡ ὕψωσις τοῦ ἐπιτοκίου καταθέσεων ἢ ἡ λῆψις μέτρων αὐξήσεως τῆς ἀποδοτικότητος τῶν χρηματιστηριακῶν ἀξιῶν (1) εἶναι πιθανὸν νὰ ἐνισχύσουν τὴν ἐπιθυμίαν πρὸς ἀποταμίευσιν τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων καὶ δὴ εἰς σχετικῶς βραχὺ χρονικὸν διάστημα. Τινὲς ὑποστηρίζουν ὅτι διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς ἀποδοτικότητος τῶν τοποθετουμένων εἰς καταθέσεις ἢ χρηματιστηριακὰς ἀξίας ἀποταμιεύσεων δὲν ἐπηρεάζεται οὐσιωδῶς ἡ ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν, ἀλλὰ μᾶλλον ἀλλάζει ἡ κατανομὴ τῶν ἀποταμιεύσεων μεταξύ, ἀφ' ἑνὸς τῶν ταμιακῶν διαθεσίμων ἢ ἀποθησαυρίσεως, καὶ ἀφ' ἑτέρου τῶν ὡς ἄνω τοποθετήσεων. Ἐπειδή, ὡς ἐξάγεται ἐκ τῆς μέχρι τοῦδε ἀναλύσεως, ἡ ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν s ὑποδηλοῖ τὸ ποσοστὸν τῶν ἀποταμιεύσεων αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν παραγωγικῶς, ἤτοι διὰ χρηματοδότησιν ἐπενδύσεων, ἡ δὲ ἀποθησαύρισις συνιστᾷ κατ' οὐσίαν μὴ παραγωγικὴν μορφὴν ἀποταμιεύσεως, δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι μία ἀνακατανομὴ τῶν ἀποταμιεύσεων ὑπὲρ τῶν τραπεζικῶν καταθέσεων καὶ τῶν χρηματιστηριακῶν ἀξιῶν, ἰσοδυναμεῖ μὲ αὔξησιν τοῦ s.

Πλὴν ὅμως τοῦ ὡς ἄνω ἐπηρεασμοῦ τῆς τιμῆς τοῦ s, εἶναι δυνατὸν εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις νὰ ἐφαρμοσθῇ πολιτικὴ αὐξήσεως τοῦ s ἔστω καὶ παρὰ τὴν ἐπιθυμίαν τῶν ἀποταμιευτῶν. Τοιαύτη εἶναι π.χ. ἡ περίπτωσις αὐξήσεως τῶν συνολικῶν ἀποταμιεύσεως τῆς οἰκονομίας διὰ καταλλήλου φορολογικῆς πολιτικῆς ἢ διὰ δημιουργίας νέου χρήματος. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι προκαλεῖται ***ἀναγκαστικὴ ἀποταμίευσις***, καθ' ὅσον οἱ ἔχοντες σταθερὰ εἰσοδήματα μειώνουν ἀναγ-

1) Ὅταν εἰς μίαν οἰκονομίαν τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα ἐμφανίζουν εὐαισθησίαν ἔναντι τοῦ πληθωρισμοῦ, ἡ ἐξασφάλισις τῆς σταθερᾶς ἀξίας τῶν ἀποταμιεύσεων διὰ καταλλήλων ρητρῶν (ὡς π.χ. εἶναι ἡ ρήτρα χρυσοῦ) δυνατὸν νὰ ἀποτελέσῃ ἀποφασιστικῆς σημασίας παράγοντα διὰ τὴν διενέργειαν καταθέσεων ἢ τὴν ἀγορὰν ὁμολογιῶν.

καστικῶς τὴν κατανάλωσίν των, λόγῳ τῆς ὑψώσεως τῶν τιμῶν τῶν ἀγαθῶν, ἡ ὁποία εἶναι συνήθης συνέπεια τῆς δημιουργίας τοῦ νέου χρήματος. Πρέπει πάντως νὰ σημειωθῇ ὅτι εἶναι λίαν πιθανὸν αἱ αὐξήσεις τῶν φόρων καὶ ἡ δημιουργία νέου χρήματος νὰ ἐξασθενίσουν τὴν ἀποταμιευτικὴν διάθεσιν τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων, εἰς τρόπον ὥστε ἡ αὔξησις τοῦ s διὰ τῶν ὡς ἄνω μέτρων νὰ ἐξουδετεροῦται ἢ νὰ ὑπερεξουδετεροῦται ἐκ τῆς μειώσεως τῆς τιμῆς τοῦ s, λόγῳ ἀντιδράσεων τῶν ἀποταμιευτῶν (1).

4) Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη, κατόπιν τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων, ὅτι θεωρεῖται δυνατὴ ἡ αὔξησις τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως ἀπὸ s εἰς s′ (2), καθ' ὅλην τὴν περίοδον τοῦ προγράμματος (3). Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ συνολικὴ ἀποταμίευσις πρὸς χρηματοδότησιν τῶν ἐπενδύσεων τοῦ προγράμματος θὰ αὐξηθῇ κατὰ ΔS_σ:

$$\Delta S_\sigma = \frac{(s' - s)}{\alpha} \left[(1 + \alpha)^\nu - 1 \right] \tag{δ}$$

ἡ δὲ διαφορὰ D, ὡς ὁρίζεται εἰς τὴν (γ), θὰ μειωθῇ εἰς D_1:

$$D_1 = D - \Delta S_\sigma \tag{ε}$$

Ἐὰν $D_1 > 0$ πρέπει νὰ συνεχισθῇ ἡ προσπάθεια ἐξισορροπήσεως διὰ μεταβολῆς τῆς τιμῆς τῆς ἑτέρας παραμέτρου, ἤτοι τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως β.

5) Ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς ἀνισότητος (β) παρατηροῦμεν ὅτι αἱ συνολικῶς ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ προγραμματικοῦ στόχου μειοῦνται ἂν μειωθῇ ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως β. Ἡ μείωσις αὕτη σημαίνει, ὡς γνωστόν, αὔξησιν τῆς ἀποδοτικότητος τοῦ κεφαλαίου. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει εἶναι πράγματι δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ ὡρισμένον ἐπίπεδον ἐθνικοῦ εἰσοδήματος (καὶ συνεπῶς ὡρισμένον μέσον κατὰ κεφαλὴν εἰσόδημα) μὲ ὀλιγωτέρας ἐπενδύσεις. Ἐκ τῆς ἀναλύσεως τοῦ τμήματος 8.4 εἴδομεν ὅτι μείωσις τῆς τιμῆς τοῦ β εἶναι δυνατὴ διὰ τῆς βελτιώσεως τῶν ὀργανωτικῶν μεθόδων τῆς παραγωγῆς καὶ συνεπείᾳ μεταβολῶν τῆς τεχνικῆς. Ἀλλ' ἡ μεταβολὴ τῶν συνθηκῶν αὐτῶν, εἶναι ὡς εἴδομεν ἐν πολλοῖς ἀπόρ-

1) Εἰδικώτερον ἡ πληθωρικὴ αὔξησις τιμῶν δυνατὸν νὰ ὁδηγήσῃ εἰς μετατροπὴν μεγάλου μέρους τῶν ἀποταμιεύσεων εἰς ἀποθησαύρισιν εἰς σταθερὰς ἀξίας (π.χ. χρυσᾶς λίρας).

2) Ἐὰν ἡ αὔξησις αὕτη ἐπιτυγχάνεται δι' ἀναγκαστικῶν μέτρων (φορολογικῶν κλπ.) δὲν δυνάμεθα πλέον νὰ ὁμιλῶμεν περὶ ροπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν, διότι ὁ ὅρος ῥοπὴ ἐκφράζει τὴν ἀποταμιευτικὴν διάθεσιν τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων.

3) Βλ. ὅμως καὶ 9.6.3.

ροια τῶν αὐξητικῶν μεταβολῶν τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως. Κατὰ συνέπειαν ἡ αὔξησις τοῦ s ἐπηρεάζει ὄχι μόνον ἀμέσως τὴν διαφορὰν D, ἀνωτέρω, ἀλλὰ καὶ ἐμμέσως διὰ τῆς μειώσεως τοῦ β. Ἡ παροῦσα ἀνάλυσις δὲν ὑπεισέρχεται εἰς τὴν διερεύνησιν τῆς σχέσεως ταύτης μεταξὺ τῶν παραμέτρων s καὶ β. Θὰ ὑποθέσωμεν πρὸς ἁπλούστευσιν ὅτι θεωρεῖται δυνατὴ ἡ διὰ καταλλήλων μέτρων μείωσις τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως ἀπὸ β εἰς β΄. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει αἱ συνολικῶς ἀπαιτούμεναι ἀποταμιεύσεις θὰ μειωθοῦν κατὰ ΔΙ:

$$\Delta I = (\beta - \beta')Y_0[(1+\alpha)^\nu - 1] \qquad (\sigma\tau)$$

ἡ δὲ διαφορὰ D_1, ὡς ὁρίζεται εἰς (ε), θὰ μειωθῇ εἰς D_2:

$$D_2 = D_1 - \Delta I \qquad (\zeta)$$

Ἐὰν $D_2 < 0$, πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ ἀνισορροπία μεταξὺ ἐπενδύσεων καὶ ἀποταμιεύσεων παύει νὰ ὑφίσταται ἢ ὅτι ὑφίστανται πράγματι περιθώρια περαιτέρω αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ καὶ τοῦ κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος.

Ἐὰν $D_2 > 0$, καθίσταται προφανὲς ὅτι, ἡ ἀνισορροπία μεταξὺ ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων καὶ ἀποταμιευτικῶν πόρων ἐξακολουθεῖ νὰ ὑφίσταται, ἀλλ' ἡ ἀρχικὴ διαφορὰ D ἐμειώθη εἰς τὸ ἐπίπεδον D_2. Δυνατὸν τότε νὰ καταστῇ ἀναγκαία ἡ ἐπανεξέτασις τοῦ ὅρου S_f τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς (β), ἤτοι νὰ διερευνηθῇ ἡ δυνατότης αὐξήσεως τῶν ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ ἀποταμιεύσεων.

Ἂν δὲν καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐξουδετέρωσις τῆς ἀνισορροπίας οὔτε διὰ τῆς προσφυγῆς εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἀποταμίευσιν, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γίνῃ ***ἀναπροσαρμογὴ*** τοῦ τεθέντος προγραμματικοῦ στόχου, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐξασφαλίζεται ἡ οἰκονομικὴ συνέπεια αὐτοῦ.

9.6.3. Κλιμακωτὴ ἀναπροσαρμογὴ τῶν ὑπολογισμῶν. Εἰς τὰ ἀνωτέρω ὑπετέθη ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων s καὶ β μεταβάλλονται, αἱ δὲ νέαι τιμαὶ αὐτῶν ἰσχύουν δι' ὁλόκληρον τὴν περίοδον τοῦ προγράμματος. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἐγένετο διὰ λόγους ἁπλοποιητικούς. Πλέον ρεαλιστικὴ ἀντιμετώπισις θὰ ἦτο ἂν ὑπετίθετο ὅτι ἡ τιμὴ ἑκάστης παραμέτρου μεταβάλλεται βαθμιαίως ἐντὸς τῆς ἐν λόγῳ περιόδου. Βεβαίως ὁ ρυθμὸς μεταβολῆς ἑκάστης τιμῆς δυνατὸν νὰ εἶναι οὐσιωδῶς διάφορος.

1) Βεβαίως ἡ τιμὴ τοῦ γενικοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως ἐξαρτᾶται, ὡς γνωρίζομεν, καὶ ἐκ τοῦ τρόπου κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων (βλ. σ. 216). Ἀλλ' ἐνταῦθα δὲν ἐξετάζεται ἡ περίπτωσις αὕτη, διότι ἡ οἰκονομία εἰς τὸ ὑπόδειγμα Ι θεωρεῖται ὡς ἓν σύνολον.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὰς πραγματικὰς περιπτώσεις προγραμματισμοῦ εἶναι ἀναγκαία ἡ *χρονικὴ κλιμάκωσις* τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων, τουλάχιστον διὰ τὴν πρώτην [1] ὑποπερίοδον τοῦ προγραμματισμοῦ (π.χ. διὰ τὴν πρώτην τριετίαν), κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι εὐχερεστέρα καὶ ἡ πρόβλεψις τῶν ἐνδεχομένων μεταβολῶν.

Ἀλλ' ὑπενθυμίζομεν ὅτι τὰ ἐξεταζόμενα ὑποδείγματα ἀποσκοποῦν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν ὁρίων ἐντὸς τῶν ὁποίων πρέπει νὰ ἀναπτυχθῇ ὁ λεπτομερὴς προγραμματισμὸς τῆς οἰκονομίας. Συνεπῶς δὲν ἀποτελεῖ σοβαρὸν μειονέκτημα τῆς ἀναλύσεως ἡ χρησιμοποίησις ἑνιαίων τιμῶν τῶν παραμέτρων δι' ὁλόκληρον τὴν περίοδον τοῦ προγράμματος [2].

9.6.4. *Ἀναπροσαρμογὴ τοῦ προγραμματικοῦ στόχου.* Ὡς εἴπομεν, ἐὰν κατόπιν ἐπανεξετάσεως τοῦ προγράμματος, βάσει τῶν ἀναθεωρηθεισῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων, ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ προγραμματικὸς στόχος δὲν δύναται νὰ πραγματοποιηθῇ, ἐπιβάλλεται ἀναπροσαρμογὴ τοῦ ἐν λόγῳ στόχου. Ἡ ἀναπροσαρμογὴ αὕτη εἰς τὸ παράδειγμά μας ἀφορᾷ εἴτε εἰς τὴν μείωσιν τοῦ ποσοστοῦ ἐτησίας αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος α, εἴτε εἰς τὴν αὔξησιν τῆς περιόδου τοῦ προγράμματος [3], εἰς τρόπον ὥστε νὰ καταστῇ εὐχερεστέρα κατ' ἔτος ἡ προσπάθεια αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος καὶ τὰ ἐξασφαλισθῇ οὕτω ἰσορροπία μεταξὺ ἐπενδύσεων καὶ ἀποταμιεύσεων [4].

1) Ἀπὸ τῆς στιγμῆς τοῦ ὑπολογισμοῦ.

2) Εἰς τὴν παροῦσαν ἀνάλυσιν ὑπετέθη ὅτι δὲν ὑφίσταται κώλυμα ἀπὸ ἀπό-
ψεως ἐργατικοῦ δυναμικοῦ διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ προγραμματικοῦ στόχου.
Κατὰ συνέπειαν δὲν ἐνδιαφέρει εἰδικώτερον ἐνταῦθα ἡ ἐξέτασις τῆς παραμέτρου p,
ἤτοι τοῦ ποσοστοῦ ἐτησίας αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ. Συνήθως ἡ τιμὴ τοῦ p λαμ-
βάνεται ὡς σταθερὰ δι' ὁλόκληρον τὴν περίοδον τοῦ προγράμματος. Εἶναι ἐν τούτοις
δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν διάφοροι τιμαὶ τοῦ p εἰς ἓν ὑπόδειγμα μακροχρονίου
προγραμματισμοῦ, ἐφ' ὅσον ἀναμένεται ὅτι εἶναι δυνατὸς ὁ ἐπηρεασμὸς τοῦ ποσο-
στοῦ αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ, διὰ διαφόρων μέτρων, ὡς εἶναι π.χ. τὰ μέτρα ἐλέγ-
χου τῶν γεννήσεων ἢ ἐπηρεασμοῦ τοῦ μεταναστευτικοῦ ρεύματος.

3) Εἶναι βεβαίως δυνατὴ ταυτόχρονος ἀναπροσαρμογὴ τοῦ ποσοστοῦ α καὶ
τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐτῶν ν.

4) Ἡ ἀναπροσαρμογὴ ὡς πρὸς α δύναται νὰ γίνῃ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν
παραγώγων ὡς πρὸς $\bar{\alpha}$ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος (γ), ἤτοι τῶν
$dI/d\alpha$ καὶ $dS/d\bar{\alpha}$ καὶ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $(dI/d\alpha - dS/d\bar{\alpha})\,\Delta\bar{\alpha} = D_2$, ὡς πρὸς
Δα. Ἡ μεταβολὴ Δα εἶναι ἡ μείωσις τοῦ α, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται πρὸς ἀποκατάστα-
σιν ἰσορροπίας μεταξὺ ἐπενδύσεων καὶ ἀποταμιεύσεων, καὶ $\dot{D}_2$ εἶναι ἡ διαφορὰ μετα-
ξὺ ἐπενδύσεων καὶ ἀποταμιεύσεων ἡ προσδιοριζομένη ἐκ τῆς (γ). Ἀναλόγως ἐργαζό-
μεθα καὶ διὰ τὴν ἀναπροσαρμογὴν ὡς πρὸς ν. Οἱ ἀπαιτούμενοι ὑπολογισμοὶ εἶναι
συνήθως δυσχερεῖς λόγῳ τῆς πολυπλόκου μαθηματικῆς μορφῆς τῶν σχετικῶν τύπων.
Ἐνίοτε ἡ γραφικὴ λύσις τῶν προβλημάτων ἀναπροσαρμογῆς εἶναι προτιμοτέρα τῆς
ἀλγεβρικῆς τοιαύτης.

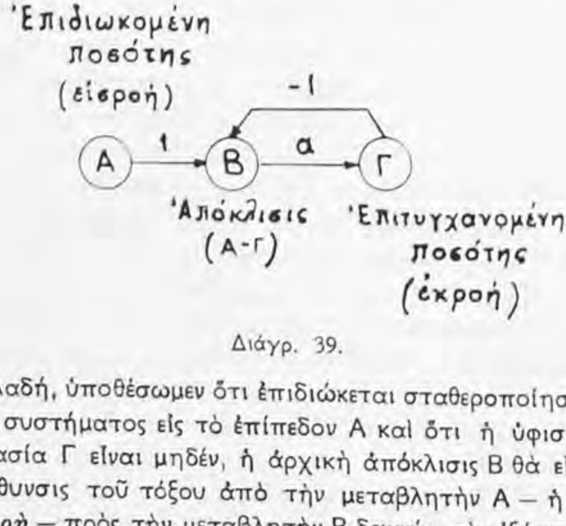
10

Τὰ συστήματα «ἀνατροφοδοτήσεως»

10.1. Ἡ προσπάθεια χρησιμοποιήσεως ὑπὸ τῶν οἰκονομολόγων μεθόδων ἀναλύσεως ἐφαρμοζομένων ἤδη ἐπιτυχῶς εἰς τὰς θετικὰς ἐπιστήμας ἀποτελεῖ ἀξιοσημείωτον χαρακτηριστικὸν τῆς ἐξελίξεως τῆς οἰκονομικῆς μεθοδολογίας, κατὰ τὴν τελευταίαν ἰδίως δεκαπενταετίαν. Ὁ σαφῶς «κανονιστικὸς» προσανατολισμὸς τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης — ἡ ὁποία καλεῖται σήμερον νὰ δώσῃ ἀπαντήσεις εἰς συγκεκριμένα προβλήματα οἰκονομικῆς πολιτικῆς τῶν ἐπὶ μέρους οἰκονομικῶν μονάδων ἢ τοῦ Κράτους καὶ τῆς ἐθνικῆς οἰκονομίας ἐν τῷ συνόλῳ — κατέστησεν ἀναγκαῖον τὸν ἐκσυγχρονισμὸν τοῦ μεθοδολογικοῦ ἐξοπλισμοῦ τῶν οἰκονομολόγων. Ὁ ἐκσυγχρονισμὸς οὗτος ἐπεδιώχθη τόσον διὰ τῆς ἀναπροσαρμογῆς τῶν παλαιῶν μεθόδων καὶ τῆς διαμορφώσεως νέων τοιούτων, ὅσον καὶ διὰ τῆς «κατ' ἀναλογίαν» χρησιμοποιήσεως μεθόδων ἐρεύνης ἄλλων προηγμένων ἐπιστημῶν, ὡς εἶναι αἱ θετικαὶ ἐπιστῆμαι. Ὁ οἰκονομολόγος ἔχει βεβαίως ἐπίγνωσιν τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ συμπεριφορὰ τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων δὲν χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸν ὑψηλὸν βαθμὸν συστηματικότητος ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ συνήθως γνώρισμα τῆς συμπεριφορᾶς τῶν φυσικῶν φαινομένων. Κατὰ συνέπειαν δὲν ἀναμένει, ἐκ τῆς «κατ' ἀναλογίαν» ἐφαρμογῆς εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἐπιστήμην μεθόδων τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, σχολαστικὴν μαθηματικὴν ἀκρίβειαν ὅσον ἀφορᾷ τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀναλύσεώς του. Ἐνδιαφέρεται κυρίως διὰ μίαν κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον αὐστηρὰν πειθάρχησιν τῶν σπουδαιοτέρων μεταβλητῶν τοῦ προβλήματός του, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνῃ μίαν ποσοτικὴν διερεύνησιν τοῦ πλέγματος τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων μὲ ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον θὰ διευκολύνῃ τὴν κατανόησιν καὶ λύσιν τοῦ ἐν λόγῳ προβλήματος.

Ἡ μεταφορὰ τῆς ἀναλυτικῆς πρακτικῆς τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν εἰς τὸ οἰκονομικὸν πεδίον γίνεται συνήθως διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ***φυσικῶν ἀναλόγων*** (physical analogues). «Φυσικὸν ἀνάλογον» καλεῖται πᾶν ὑπόδειγμα τοῦ ὁποίου ἡ κατασκευὴ ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν διάρθρωσιν καὶ λειτουργίαν ἑνὸς φυσικοῦ (μηχανικοῦ, ἠλεκτρικοῦ κλπ.) συστήματος. Ἐνταῦθα θὰ ἀσχοληθῶμεν εἰδικώτερον μὲ τὴν οἰκονομικὴν σημασίαν μιᾶς ὡρισμένης κατηγορίας φυσικῶν ἀναλόγων, τὰ ὁποῖα βασίζονται ἐπὶ τῶν καλουμένων ***συστημάτων ἀνατροφοδοτήσεως*** (feed-back systems).

10.2. «Συστήματα ἀνατροφοδοτήσεως» ὀνομάζουν οἱ μηχανικοὶ καὶ οἱ ἠλεκτρολόγοι μίαν εὐρυτάτην κατηγορίαν συστημάτων, ἡ ὁποία περιλαμβάνει τοὺς πάσης φύσεως θερμοστάτας, τοὺς σταθεροποιητὰς ἠλεκτρικῆς τάσεως, τοὺς «αὐτομάτους πιλότους» διὰ τὸν ἔλεγχον τῆς γραμμῆς πλεύσεως τῶν ἀεροπλάνων κλπ. Κύριον λειτουργικὸν γνώρισμα τῶν συστημάτων αὐτῶν — τὰ ὁποῖα καλοῦνται ἐπίσης καὶ συστήματα *αὐτομάτου ἐλέγχου* ἢ *σερβομηχανισμοὶ* (servomechanisms) — εἶναι ἡ αὐτόματος διατήρησις μιᾶς ἐπιθυμητῆς ποσότητος ἢ καταστάσεως (π.χ. ὡρισμένης θερμοκρασίας) καὶ ἡ ἐξουδετέρωσις τῶν ἀποκλίσεων ἐκ τῆς ποσότητος ἢ καταστάσεως ταύτης. Οὕτω, π.χ., τὸ θερμοστατικὸν σύστημα τῶν ψυγείων καὶ τῶν θερμοσιφώνων τίθεται αὐτομάτως εἰς λειτουργίαν ὁσάκις παρατηρεῖται ἀπόκλισις τῆς θερμοκρασίας ἀπὸ ὡρισμένον ἐπίπεδον, καθορισθὲν ἐκ τῶν προτέρων, καὶ ἐξακολουθεῖ νὰ λειτουργῇ μέχρις ἐξαλείψεως τῆς ἀποκλίσεως ταύτης. Τὸ βασικὸν ἀναλυτικὸν σχῆμα ἑνὸς συστήματος αὐτομάτου ἐλέγχου δεικνύεται κατωτέρω :



Διάγρ. 39.

Ἄν, δηλαδή, ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπιδιώκεται σταθεροποίησις τῆς θερμοκρασίας ἑνὸς συστήματος εἰς τὸ ἐπίπεδον Α καὶ ὅτι ἡ ὑφισταμένη ἀρχικῶς θερμοκρασία Γ εἶναι μηδέν, ἡ ἀρχικὴ ἀπόκλισις Β θὰ εἶναι ἴση πρὸς Α. Ἡ κατεύθυνσις τοῦ τόξου ἀπὸ τὴν μεταβλητὴν Α — ἡ ὁποία καλεῖται καὶ *εἰσροὴ* — πρὸς τὴν μεταβλητὴν Β δεικνύει τὴν ἐξάρτησιν τῆς δευτέρας μεταβλητῆς ἀπὸ τὴν πρώτην, ὁ δὲ ὑπεράνω τοῦ τόξου ἀριθμὸς 1 ἀποτελεῖ τὸν συντελεστὴν συσχετίσεως μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ ἀρχικὴ ἀπόκλισις Β εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰσροὴν Α. Ἐπειδὴ ἡ Α ἐπηρεάζει τὴν Β χωρὶς νὰ ἐπηρεάζεται ταυτοχρόνως ἀπὸ αὐτήν, λέγομεν ὅτι μεταξὺ Α καὶ Β ὑφίσταται σχέσις *μονοπλεύρου* ἐξαρτήσεως.

Ἡ ἀπόκλισις Β θέτει τώρα εἰς λειτουργίαν τὸ σύστημα αὐτομάτου ἐλέγχου, τὸ ὁποῖον ἐπιδιώκει ἀκριβῶς τὴν ἐξουδετέρωσιν πάσης ἀποκλίσεως καὶ τὴν ἐπίτευξιν τῆς ποσότητος Α. Ἀποτέλεσμα τῆς λειτουργίας ταύτης εἶναι ἡ αὔξησις τῆς ποσότητος (θερμοκρασίας) Γ τοῦ συστήματος (βλ. κατεύθυνσιν τόξου μεταξὺ Β καὶ Γ). Ἡ αὔξησις τῆς ἐν λόγῳ ποσότητος — τὴν ὁποίαν καλοῦμεν καὶ *ἐκροὴν* — προσδιορίζεται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς ἀποκλίσεως Β καὶ τὸν συντελεστὴν συσχετίσεως μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς Γ. Ἐνταῦθα ὑπετέθη ὅτι ὁ συντελεστὴς οὗτος εἶναι $\alpha < 1$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἀρχικὴ ἐκροή, δηλαδὴ ἡ ἐπιτυγχανομένη ἐντὸς μιᾶς περιόδου αὔξησις τῆς θερμοκρασίας, θὰ εἶναι $\Gamma = \alpha B$. Ἡ ποσότης αὕτη ἀφαιρουμένη ἀπὸ τὴν ἐπιδιωκομένην ποσότητα Α, προσδιορίζει τὴν νέαν ἀπόκλισιν Β, ἥτις διατηρεῖ τὸ σύστημα ἐν λειτουργίᾳ. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ διαφορὰ Α – Γ (ὅπου Γ τὸ *ἑκάστοτε* ἐπιτυγχανόμενον ἐπίπεδον θερμοκρασίας) *ἀνατροφοδοτεῖται* εἰς τὸ σύστημα ἐλέγχου ὡς εἰσροὴ καὶ προσδιορίζει τὴν νέαν ἀπόκλισιν, ἡ ὁποία τοιουτοτρόπως διατηρεῖ τὴν λειτουργίαν τοῦ συστήματος, δημιουργοῦσα νέαν αὔξησιν τῆς Γ καὶ συνεπῶς νέαν ἀπόκλισιν (Α – Γ) κ.ο.κ. μέχρις ὅτου $A - \Gamma = 0$, δηλαδὴ μέχρις ἐξουδετερώσεως πάσης ἀποκλίσεως. Ἡ διαδικασία τῆς αὐτομάτου μετατροπῆς τῆς ἑκάστοτε ἐκροῆς εἰς εἰσροὴν πρὸς διατήρησιν τοῦ συστήματος ἐν λειτουργίᾳ καλεῖται *αὐτοδιέγερσις* τοῦ συστήματος. Τὸ τόξον ἀπὸ τὴν Γ πρὸς τὴν Β, μὲ συντελεστὴν συσχετίσεως –1, ὑποδηλοῖ ὅτι ἡ ἀρχικὴ ἀπόκλισις *μειοῦται* ἑκάστοτε κατὰ ποσὸν *ἴσον* πρὸς τὴν δημιουργουμένην νέαν θερμοκρασίαν.

Ὑφίσταται προφανῶς μία σχέσις διπλῆς ἐξαρτήσεως ἢ ἀλληλεξαρτήσεως μεταξὺ τῶν ποσοτήτων Β καὶ Γ, καθ' ὅσον ἡ Β προσδιορίζει τὴν Γ (μὲ συντελεστὴν συσχετίσεως $+\alpha$) καὶ ἡ Γ τὴν Β (μὲ συντελεστὴν συσχετίσεως –1). Ἡ διαδικασία ἀλληλοεπηρεασμοῦ τῶν δύο ποσοτήτων συνεχίζεται μέχρι πλήρους ἐξουδετερώσεως τῆς διαφορᾶς Α – Γ.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω περιγραφῆς καθίσταται προφανὴς ἡ ἔννοια τοῦ ὅρου «ἀνατροφοδότησις». Ὁ ὅρος οὗτος ἐκφράζει τὸ γεγονὸς ὅτι, ἡ προκύπτουσα ἐκροὴ ἐκ τῆς λειτουργίας τοῦ συστήματος ἐλέγχου ἐπιστρέφει εἰς αὐτὸ ὡς εἰσροὴ ἢ ἄλλως *τροφοδοτεῖ ἐκ νέου* τὸ σύστημα (ἀνατροφοδότησις).

Τὸ ἀνωτέρω περιγραφὲν σύστημα ἐμφανίζει ἀρνητικὴν ἀνατροφοδότησιν, καθ' ὅσον ἡ ἐκροὴ ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν συνεχῆ μείωσιν τῆς ἀποκλίσεως μέχρι μηδενισμοῦ ταύτης. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις (βλ. ἑπομένας παραγράφους) τὰ συστήματα ἐλέγχου ἐμφανίζουν θετικὴν ἀνατροφοδότησιν.

Ἡ ἀλληλεξάρτησις μεταξὺ Β καὶ Γ, εἰς τὸ περιγραφὲν σύστημα, δημιουργεῖ κλειστὸν κύκλωμα (βλ. διάγρ. 39), τὸ ὁποῖον οἱ μηχανικοὶ ὀνομάζουν συνήθως «βρόγχον». Τὰ συστήματα ἐλέγχου τὰ περιλαμβάνοντα μόνον ἕνα βρόγχον, δυνάμεθα νὰ ἀποκαλέσωμεν συστήματα «ἁπλῆς ἀνατροφοδοτήσεως». Τὰ συστήματα ἅτινα περιλαμβάνουν δύο ἢ περισσοτέρους βρόγχους, ὀνομάζομεν ἀντιστοίχως συστήματα «διπλῆς ἢ «πολλαπλῆς ἀνατροφοδοτήσεως».

10.3. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων περὶ τῆς φύσεως καὶ λειτουργίας τῶν συστημάτων αὐτομάτου ἐλέγχου, εἶναι εὔκολον νὰ κατανοηθῇ ἡ σημασία τῶν συστημάτων αὐτῶν διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ λεχθῇ ὅτι τὰ οἰκονομικὰ συστήματα (ἢ ὑποδείγματα) περιλαμβάνουν διαφόρους μεταβλητάς, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται μεταξύ των εἰς σχέσιν ἀλληλεξαρτήσεως ἢ μονοπλεύρου ἐξαρτήσεως. Ἂς λάβωμεν, π.χ., τὸ ἀκόλουθον οἰκονομικὸν ὑπόδειγμα [1].

$$Y = C + \bar{I} \qquad (1)$$

$$C = \alpha Y$$

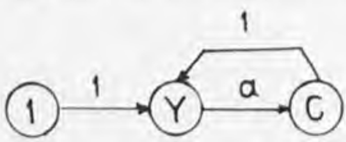
ὅπου Y = εἰσόδημα

C = κατανάλωσις

$\bar{I}$ = «ἐξωγενῶς» προσδιοριζομένη ἐπένδυσις

α = ροπὴ πρὸς κατανάλωσιν < 1.

Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ὡς ἓν σύστημα ἁπλῆς ἀνατροφοδοτήσεως, συνδέον τὰς μεταβλητὰς Y, C, $\bar{I}$:



Διάγρ. 40.

Τὰ τόξα μετὰ τῶν συντελεστῶν συσχετίσεως δεικνύουν, ὡς καὶ προηγουμένως (διάγρ. 39), τὴν κατεύθυνσιν καὶ τὸν τρόπον ἐξαρτήσεως τῶν μεταβλητῶν ἀπ' ἀλλήλων. Οὕτω, βλέπομεν ὅτι ἡ $\bar{I}$ ἐπηρεάζει θετικῶς κατὰ τὸ αὐτὸ ποσὸν (συντελεστὴς 1) τὴν Y, ἡ ὁποία ἐπηρεάζει ἐπίσης θετικῶς κατὰ ποσὸν αY (συντελεστὴς α) τὴν C, ἐν συνεχείᾳ δὲ ἡ C αὐξάνει κατὰ τὸ αὐτὸ ποσὸν (συντελεστὴς 1) τὴν Y. Ὅταν ἐν ἢ περισσότερα τόξα κατευθύνονται πρὸς δοθεῖσαν μεταβλητήν, αἱ ποσοτικαὶ ἐπιδράσεις τῶν σχετικῶν πρὸς τὰ τόξα ταῦτα μεταβλητῶν προστίθενται διὰ νὰ προσδιορίσουν τὴν δοθεῖσαν μεταβλητήν. Οὕτω εἰς τὸ διάγρ. 40 θὰ ἔχωμεν :

$$Y = 1C + 1\bar{I} = C + \bar{I} \qquad (\alpha)$$

διὰ τὰς ἐπιδράσεις τῶν μεταβλητῶν C καὶ $\bar{I}$ ἐπὶ τῆς Y, καί :

$$C = \alpha Y \qquad (\beta)$$

διὰ τὴν ἐπίδρασιν τῆς Y ἐπὶ τῆς C.

---

1) Δοθέντος ὅτι εἰς τὰ «φυσικὰ ἀνάλογα» λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν μόνον αἱ μεταβολαί, πρὸς ἁπλούστευσιν ἐκρίθη σκόπιμος ἡ παράλειψις ἀπὸ τὰ χρησιμοποιούμενα οἰκονομικὰ ὑποδείγματα τῶν σταθερῶν μεγεθῶν.

Ἐκ τῶν (α) καὶ (β) συγκροτεῖται τὸ ὑπόδειγμα (1) καὶ κατὰ συνέπειαν ἀποδεικνύεται ἡ ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ ὑποδείγματος τούτου καὶ τοῦ συστήματος ἀνατροφοδοτήσεως τοῦ διαγρ. 40.

Τὸ σύστημα τοῦ διαγρ. 40 περιλαμβάνει τὸν βρόγχον $Y \rightarrow C \rightarrow Y$. Ὁ βρόγχος οὗτος περιγράφει τὴν ἀλληλεξάρτησιν μεταξὺ τοῦ εἰσοδήματος καὶ τῆς καταναλώσεως, ἥτις προκαλεῖ τὴν δευτερογενῆ αὐτοδιέγερσιν καὶ λειτουργίαν τοῦ συστήματος ἀνατροφοδοτήσεως, μετὰ τὴν πρωτογενῆ διέγερσιν ἐκ τῶν ἐπενδύσεων $\bar{I}$. Ἂν, εἰς τὴν ἐξίσωσιν (α), ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸν τρόπον ἐπιδράσεως τῶν C καὶ $\bar{I}$ ἐπὶ τῆς Y, θέσωμεν τὴν τιμὴν τῆς C ἐκ τῆς (β), λαμβάνομεν τὴν *ἀνηγμένην* ἐξίσωσιν:

$$Y = \frac{1}{1-\alpha}\,\bar{I} \qquad (\gamma)$$

ὅπου $\frac{1}{1-\alpha}$ ἀποτελεῖ τὸν *κεϋνσιανὸν πολλαπλασιαστήν*. Ὁ πολλαπλασιαστὴς οὗτος εἶναι στατικός, καθ' ὅσον δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν ἐνταῦθα αἱ τυχὸν χρονικαὶ ὑστερήσεις (time lags) μεταξὺ εἰσοδήματος καὶ καταναλώσεως.

Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὁ βρόγχος $Y \rightarrow C \rightarrow Y$ ἐκφράζει τὴν πολλαπλασιαστικὴν διαδικασίαν μεταξὺ εἰσοδήματος καὶ καταναλώσεως, τὴν προκαλουμένην ἐκ τῶν ἐξωγενῶν ἐπενδύσεων. Προφανῶς ἡ λειτουργία τοῦ συστήματος ἀνατροφοδοτήσεως παύει εὐθὺς ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν πολλαπλασιαστικῶν ἐπιδράσεων γίνῃ ἴσον πρὸς αY, ὁπότε πληροῦνται αἱ σχέσεις τοῦ ὑποδείγματος (1).

Ἂν, ἀντὶ τοῦ ὑποδείγματος (1), ἔχομεν τὸ ὑπόδειγμα:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + \bar{G} \\ C &= \alpha Y \\ I &= \beta Y \end{aligned} \qquad (2)$$

ὅπου Y, C, α ἔχουν τὴν προηγουμένως ὑποδειχθεῖσαν ἔννοιαν, καὶ

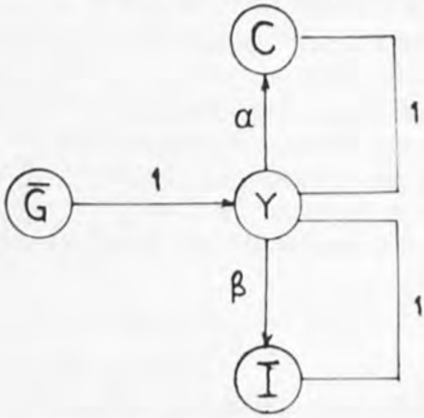
I = ἐνδογενὴς ἐπένδυσις, δηλ. ἐπένδυσις προσδιοριζομένη ἐντὸς τοῦ ὑποδείγματος συναρτήσει τοῦ εἰσοδήματος Y

$\bar{G}$ = κρατικαὶ δαπάναι, ἐξωγενῶς καθοριζόμεναι

β = ὁ ἐπιταχυντής, δηλ. ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως τῶν ἐπενδύσεων πρὸς τὸ εἰσόδημα,

λαμβάνομεν τὸ σύστημα διπλῆς ἀνατροφοδοτήσεως τοῦ διάγρ. 41.

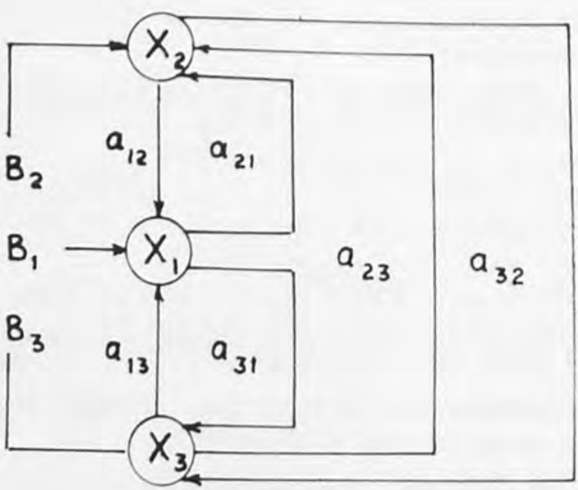
Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ὁ βρόγχος $Y \to C \to Y$ παριστᾷ, ὡς καὶ προηγουμένως, τὸν κεϋνσιανὸν πολλαπλασιαστήν, ὁ δὲ βρόγχος $Y \to I \to Y$



Διάγρ. 41.

τὸν ἐπιταχυντήν. Οἱ δύο βρόγχοι εὑρίσκονται ὑπὸ ἀλληλεπίδρασιν καὶ συνεπῶς μεμονωμένη ἐξέτασις ἑκάστου δὲν εἶναι δυνατὴ (ἐκτὸς ἐὰν $\beta = 0$ ὁπότε ὁ δεύτερος βρόγχος ἀπαλείφεται).

Ἡ αὔξησις τῶν μεταβλητῶν τοῦ οἰκονομικοῦ ὑποδείγματος δημιουργεῖ ἀντίστοιχον ἐπέκτασιν τοῦ παριστῶντος τοῦτο συστήματος ἀνατρο-



Διάγρ. 42.

φοδοτήσεως. Τὸ σύστημα τοῦ διαγρ. 42, ἀνωτέρω, περιλαμβάνει ἓξ μεταβλητὰς καὶ ἐκφράζει τὰς διακλαδικὰς σχέσεις μιᾶς οἰκονομίας ἀποτελουμένης ἀπὸ 3 κλάδους καὶ ἀποσκοπούσης εἰς τὴν ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως.

Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι πολλαπλῆς ἀνατροφοδοτήσεως καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν κάτωθι πίνακα εἰσροῶν - ἐκροῶν.

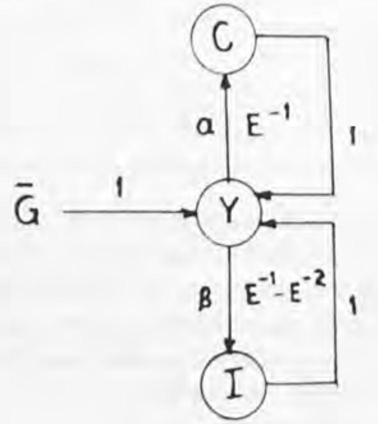
ΕΚΡΟΑΙ \ ΕΙΣΡΟΑΙ	1	2	3	Τελικὴ ζήτησις	Σύνολον
1		$\alpha_{12}X_2$	$\alpha_{13}X_3$	B_1	X_1
2	$\alpha_{21}X_1$		$\alpha_{23}X_3$	B_2	X_2
3	$\alpha_{31}X_1$	$\alpha_{32}X_2$		B_3	X_3

ὅπου X_1, X_2, X_3 εἶναι τὸ συνολικὸν προϊὸν τῶν κλάδων 1, 2, 3, ἀντιστοίχως, $\alpha_{ικ}$ ὁ συντελεστὴς εἰσροῆς τοῦ κλάδου κ ἀπὸ τὸν κλάδον ι πρὸς παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου κ, καὶ B_1, B_2, B_3 τὸ πρὸς τελικὴν ζήτησιν διατιθέμενον ποσὸν τῶν κλάδων 1, 2, 3. Ἐκ τοῦ διάγρ. 42 καταφαίνεται ὅτι αἱ μεταβληταὶ B_1, B_2, B_3 καθορίζονται ἐκτὸς τοῦ συστήματος, ἐνῶ αἱ μεταβληταὶ X_1, X_2, X_3 ἀλληλοπροσδιορίζονται ἐντὸς τοῦ συστήματος.

10.4. Μέχρι τοῦδε ἠσχολήθημεν μὲ συστήματα ἀνατροφοδοτήσεως τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν στατικὰ οἰκονομικὰ ὑποδείγματα. Ἡ αὐτὴ περίπου τεχνικὴ χρησιμοποιεῖται καὶ προκειμένου περὶ δυναμικῶν οἰκονομικῶν ὑποδειγμάτων. Ὡς γνωστόν, ἓν οἰκονομικὸν ὑπόδειγμα καλεῖται δυναμικὸν ἂν αἱ ἐν αὐτῷ μεταβληταὶ προσδιορίζωνται χρονικῶς. Οὕτω, π.χ., ἀντὶ τοῦ στατικοῦ ὑποδείγματος (2), ἀνωτέρω, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἔχωμεν τὸ κάτωθι δυναμικὸν ἰσοδύναμον αὐτοῦ :

$$
\begin{aligned}
Y_\tau &= C_\tau + I_\tau + \bar{\bar{G}}_\tau \\
C_\tau &= \alpha Y_{\tau-1} \qquad (2') \\
I_\tau &= \beta(Y_{\tau-1} - Y_{\tau-2})
\end{aligned}
$$

ὅπου ὁ δείκτης τ παριστᾷ ὡρισμένην χρονικὴν περίοδον. Ἡ πρώτη ἐξίσωσις σημαίνει ὅτι τὸ εἰσόδημα τῆς περιόδου τ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς ἰδιωτικὰς δαπάνας διὰ κατανάλωσιν καὶ ἐπενδύσεις καὶ τὰς δαπάνας τοῦ Κράτους, κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον. Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις σημαίνει ὅτι ἡ ἰδιωτικὴ κατανάλωσις τῆς περιόδου τ προσδιορίζεται (κατὰ τὸν συντελεστὴν α) ἀπὸ τὸ εἰσόδημα τῆς προηγουμένης περιόδου τ—1. Ἡ τρίτη ἐξίσωσις ἐκφράζει τὴν ὑπόθεσιν ὅτι αἱ ἰδιωτικαὶ ἐπενδύσεις τῆς περιόδου τ ἐξαρτῶνται (κατὰ τὸν συντελεστὴν ἐπιταχύνσεως β) ἐκ τῆς αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος μεταξὺ τῶν δύο προηγουμένων περιόδων. Γίνεται συνεπῶς δεκτή, συμφώνως πρὸς τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις, ἡ ὕπαρξις χρονικῶν ὑστερήσεων μεταξὺ ἰδιωτικῶν δαπανῶν (καταναλώσεως καὶ ἐπενδύσεως) καὶ εἰσοδήματος. Εἰς τὸ σύστημα ἀνατροφοδοτήσεως αἱ χρονικαὶ ὑστερήσεις ἐκφράζονται διὰ καταλλήλων ἐνδείξεων εἰς τὰ ἀντίστοιχα τόξα συσχετισμοῦ.



Διάγρ. 5.

Τὸ σύμβολον E^{-1} παριστᾷ ὑστέρησιν μιᾶς περιόδου τὸ δὲ σύμβολον E^{-2} ὑστέρησιν δύο περιόδων. Κατὰ συνέπειαν ἡ ὑστέρησις εἰσοδήματος - καταναλώσεως (τ—1) ἐμφανίζεται ὡς E^{-1}, ἡ δὲ ὑστέρησις εἰσοδήματος - ἐπενδύσεων ὡς $E^{-1} - E^{-2}$.

Δυνατὸν αἱ χρονικαὶ ἐξαρτήσεις τῶν μεταβλητῶν ἑνὸς οἰκονομικοῦ ὑποδείγματος νὰ ἐκδηλοῦται ὄχι μόνον κατὰ συγκεκριμένας χρονικὰς περιόδους (period analysis) ἀλλ' ἐπίσης καὶ ὡς ***συνεχεῖς μεταβολαὶ*** (rate analysis). Μαθηματικῶς αἱ κατὰ περιόδους μεταβολαὶ παριστῶνται δι' ἐξισώσεων ***διαφορῶν*** (βλ. ὑπόδειγμα 2'), αἱ δὲ συνεχεῖς μεταβολαὶ δι' ἐξισώσεων ***διαφορικῶν***. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις (ὑποδείγματα Kalecki, Goodwin, κλπ.) δυνατὸν νὰ ἔχωμεν μικτὰ συστήματα ἐξισώσεων (difference - differencial systems)

10.5. Τὰ «φυσικὰ ἀνάλογα», χρησιμοποιούμενα διὰ τὴν περιγραφὴν οἰκονομικῶν ὑποδειγμάτων, πλεονεκτοῦν πολλάκις ἔναντι τῶν ἁπλῶν συστημάτων ἐξισώσεων, διότι ἐπιτρέπουν τὴν παρουσίασιν τῶν συνθηκῶν λειτουργίας τῶν ἐξεταζομένων οἰκονομικῶν συστημάτων μὲ ἐξαιρετικὴν σαφήνειαν. Ἡ *λειτουργική συνέπεια* τῶν λύσεων προβλημάτων προγραμματισμοῦ, ἀναφερομένων εἰς τὰ ἐν λόγῳ συστήματα, θὰ ἠδύνατο συνεπῶς νὰ ἐξετασθῇ καὶ βάσει τῶν «φυσικῶν ἀναλόγων». Ἐξ ἄλλου, εἴς τινας περιπτώσεις, ἡ μετατροπὴ τοῦ οἰκονομικοῦ ὑποδείγματος εἰς τὸ «φυσικὸν ἀνάλογον» αὐτοῦ παρέχει τὴν δυνατότητα χρησιμοποιήσεως ὑπὸ τοῦ οἰκονομολόγου τῆς ὑπολογιστικῆς τεχνικῆς τοῦ μηχανικοῦ διὰ τὴν λύσιν οἰκονομικῶν προβλημάτων. Τοῦτο καθίσταται ἰδιαιτέρως ἐμφανὲς εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν δυναμικῶν ὑποδειγμάτων, τὰ ὁποῖα ὑφ' ὡρισμένας συνθήκας συμπεριφέρονται κυματοειδῶς. Ἡ «ἁρμονικὴ ἀνάλυσις» ἢ ἡ ἀνάλυσις τῶν σειρῶν Fourier θὰ ἠδύναντο τότε νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὴν μελέτην καὶ «ρύθμισιν» τῶν ἐν λόγῳ ὑποδειγμάτων.

Εἰδικώτερον ὅσον ἀφορᾷ τὴν «ρύθμισιν» (regulation) τῶν οἰκονομικῶν συστημάτων, οἱ οἰκονομολόγοι ἔχουν νὰ ὠφεληθοῦν πολλαπλῶς ἀπὸ τὴν πρακτικὴν τῶν μηχανικῶν καὶ τῶν ἠλεκτρολόγων. Μὲ τὴν σημερινὴν ἐξέλιξιν τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τῆς μελέτης «κανονιστικῶν» προβλημάτων, δηλ. προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ ἢ γενικώτερον οἰκονομικῆς πολιτικῆς, ἡ ἔννοια τῆς «ρυθμίσεως» ἀποκτᾷ ὁλονὲν μεγαλυτέραν σημασίαν. Κλασσικὸν παράδειγμα οἰκονομικοῦ συστήματος αὐτομάτου ἐλέγχου εἶναι οἱ «αὐτόματοι» σταθεροποιηταὶ (Build-in Stabilisers), οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται εἴς τινας χώρας πρὸς ἐξουδετέρωσιν τῶν διακυμάνσεων εἰς τὴν οἰκονομικὴν δραστηριότητα καὶ τὴν ἀπασχόλησιν. Ὡς γνωστόν, οἱ αὐτόματοι σταθεροποιηταὶ αὐξάνουν τὴν ἐνεργὸν ζήτησιν, ὅταν αὕτη μειωθῇ κάτωθεν ἑνὸς ὁρίου, διὰ τῆς αὐτομάτου μειώσεως τῶν φόρων καταναλώσεως, τῆς αὐξήσεως τῶν ἐπιδομάτων ἀνεργίας κλπ. Ἡ λειτουργία καὶ διάρθρωσις τοῦ συστήματος τούτου ὁμοιάζει εἰς σημαντικὸν βαθμὸν μὲ τὰ μηχανικὰ σερβοσυστήματα.

Εἴς τινας περιπτώσεις ἡ τεχνικὴ τῶν φυσικῶν ἀναλόγων ἔχει χρησιμοποιηθῇ ἐπιτυχῶς διὰ τὴν κατασκευὴν μηχανικῶν, ἠλεκτρικῶν κλπ. ὑποδειγμάτων τῆς οἰκονομίας ἐν τῷ συνόλῳ, διὰ διδακτικοὺς σκοπούς.

10.6. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε ἐκτεθέντων καθίσταται νομίζομεν σαφὲς ὅτι ὑφίσταται ἰσχυρὰ συγγένεια μεταξὺ τῶν συστημάτων τοῦ οἰκονομολόγου καὶ τῶν συστημάτων τοῦ μηχανικοῦ καὶ ὅτι εἶναι, ὡς ἐκ τούτου, συμφέρουσα εἰς πλείστας περιπτώσεις ἡ κατ' ἀναλογίαν χρησιμοποίησις ὑπὸ τοῦ πρώτου τῶν μεθόδων ἐρεύνης τοῦ δευτέρου. Ἤδη, ἐσημειώθη οὐσιώδης πρόοδος πρὸς τὴν κατεύθυνσιν αὐτὴν μὲ τὰς πρωτοποριακὰς ἐργασίας τοῦ οἰκονομολόγου A. W. Phillips (1950), τοῦ μηχανικοῦ Arnold Tustin (1953) καὶ ἄλλων.

Δὲν θὰ ἔπρεπε βεβαίως νὰ νομισθῇ ὅτι ὑπερεκτιμῶμεν τὰς δυνατότητας πρὸς βελτίωσιν τῆς μεθοδολογικῆς πρακτικῆς τῶν οἰκονομολόγων, τὰς ἀπορρεούσας ἐκ τοῦ συσχετισμοῦ τῶν οἰκονομικῶν συστημάτων πρὸς τὰ μηχανικά των ἀντίστοιχα. Τὰ οἰκονομικὰ προβλήματα ἐμφανίζουν ἰδιοτυπίας, αἱ ὁποῖαι δὲν ἐπιδέχονται πάντοτε μηχανιστικὴν ἀνάλυσιν. Δὲν πρέπει ὅμως ἀντιθέτως νὰ ὑποτιμῶμεν τὰς ὡς ἄνω δυνατότητας, καθ' ὅσον τοῦτο θὰ εἶχεν ὡς συνέπειαν, εἰς πολλὰς περιπτώσεις, καταβολὴν ἀσκόπων προσπαθειῶν, ἐκ μέρους τῶν οἰκονομολόγων διὰ τὴν ἀνάπτυξιν μεθόδων ἐρεύνης, τὰς ὁποίας θὰ ἦτο δυνατόν, ὡς ἐτονίσαμεν εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον, νὰ δανεισθοῦν ἀπὸ ἐπιστήμας περισσότερον προηγμένας τῆς ἰδικῆς των.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΙΣ

11

Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς

11.1. Γενικὰ

Ὡς ἐλέχθη (βλ. σ. 12), ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἐξέτασιν προβλημάτων ἀριστοποιήσεως, ἤτοι προβλημάτων μεγιστοποιήσεως ἢ προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως. Βασικὸν χαρακτηριστικὸν τῶν ἐν λόγῳ προβλημάτων εἶναι ὅτι διέπονται ἀπὸ ἀνταγωνιστικὴν ἀλληλεξάρτησιν, ὑφ' ἣν ἔννοιαν ἐκτίθεται εἰς τὸ παράδειγμα τῆς σελ. 11 τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου. Ἐκ τοῦ διαγρ. 1 καθίσταται προφανὲς ὅτι, δοθείσης τῆς ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ Α (10 μονάδες), εἶναι δυνατὸν νὰ πραγματοποιηθοῦν ἄπειροι συνδυασμοὶ ποσοτήτων τῶν ἀγαθῶν ω_1 καὶ ω_2. Οἱ συνδυασμοὶ οὗτοι παριστῶνται ὑπὸ τῶν σημείων τοῦ τμήματος εὐθείας αβ. Τίθεται συνεπῶς τὸ ἐρώτημα: Ποῖος ἐκ τῶν συνδυασμῶν αὐτῶν πρέπει νὰ ἐπιλεγῇ τελικῶς;

Θὰ ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα τὰς γενικὰς ἀρχὰς τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ καὶ τὴν τεχνικὴν ἐφαρμογῆς αὐτοῦ ἐπὶ προβλημάτων μεγιστοποιήσεως. Ἡ τεχνικὴ αὕτη δὲν εἶναι ὡς θὰ ἴδωμεν οὐσιωδῶς διάφορος εἰς περίπτωσιν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως. Εἰς τὸ πρῶτον τμῆμα τῆς ἐπακολουθούσης ἀναλύσεως δίδεται, ἐπὶ τῇ βάσει ἑνὸς ἀριθμητικοῦ παραδείγματος, ἰδιαιτέρα ἔμφασις εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἑρμηνείαν τῆς μεθόδου. Ἡ ἑρμηνεία αὕτη, μολονότι δὲν εἶναι πλήρης ἀπὸ μαθηματικῆς ἀπόψεως, εἶναι ἐν τούτοις ***πρακτικῶς ἐπαρκὴς*** διὰ τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ ἔχουν ἁπλῶς μίαν λειτουργικὴν γνῶσιν τοῦ θέματος. Ἡ μαθηματικὴ γενίκευσις, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ ἐξέτασις τοῦ σπουδαιοτάτου ἀπὸ θεωρητικῆς ἀπόψεως ***δυαδικοῦ προβλήματος***, ἀκολουθοῦν εἰς τὰ ἑπόμενα τμήματα τοῦ παρόντος κεφαλαίου.

Αἱ βασικαὶ οἰκονομικαὶ ὑποθέσεις, αἱ ὁποῖαι προσδιορίζουν καὶ τὸν μαθηματικὸν χαρακτῆρα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, εἶναι αἱ εἰς τὸ κεφάλαιον 2 ἐκτεθεῖσαι ὑποθέσεις περὶ ***σταθερῶν ἀναλογιῶν***, ***προσθετικότητος*** καὶ ***διαιρετότητος***. Ὡς θὰ ἴδωμεν, αἱ ὑποθέσεις αὗται ὁδηγοῦν εἰς τὴν διατύπωσιν προβλημάτων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ***συνάρτησις ἀριστοποιήσεως***, ἤτοι τὸ κριτήριον ἐπιλογῆς εἶναι γραμμικῆς μορφῆς, αἱ δὲ ***συνθῆκαι περιορισμοῦ*** τῶν λύσεων ἐκφράζονται ὑπὸ μορφὴν συστημάτων γραμμικῶν ἀνισοτήτων ἢ ἐξισώσεων.

11.2. Οἰκονομικὴ ἀνάλυσις

11.2.1. Δεδομένα τοῦ προβλήματος. Διὰ τὴν διατύπωσιν ἑνὸς οἰκονομικοῦ προβλήματος Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἀπαιτοῦνται γενικῶς: α) τὰ *τεχνολογικὰ* δεδομένα, τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸ σύνολον τῶν παραγωγικῶν μεθόδων τὰς ὁποίας δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ ἡ οἰκονομικὴ μονάς, β) τὰ *οἰκονομικὰ* δεδομένα, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὸ σύνολον τῶν διαθεσίμων πόρων τῆς οἰκονομικῆς μονάδος καὶ γ) τὸ *κριτήριον ἐπιλογῆς* τῆς οἰκονομικῶς ἀρίστης λύσεως. Θὰ χρησιμοποιήσωμεν ἐνταῦθα ἓν συγκεκριμένον ἀριθμητικὸν παράδειγμα διὰ τὴν ἐξέτασιν ἑνὸς προβλήματος μεγιστοποιήσεως. Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ἔχουν ὡς κάτωθι:

α) *Τεχνολογικὰ δεδομένα.* Ἡ ἐπιχείρησις Ε ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν της τὰς παρωγωγικὰς δραστηριότητας Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 καὶ Π_5:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \Pi_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν ἀγαθῶν ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 καὶ ω_5, ἀντιστοίχως.

Συνοπτικῶς, τὰ τεχνολογικὰ δεδομένα τῆς ἐπιχειρήσεως ἢ ἄλλως ἡ «τεχνολογία» αὐτῆς δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τῆς μήτρας Τ:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 & \Pi_5 \end{array} \\ T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 \end{array} \end{array}$$

Ἡ στήλη Π_1 σημαίνει ὅτι πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ ω_1 ἀπαιτοῦνται 2 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α, 2 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Κ καὶ οὐδεμία μονὰς ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Γ. Ἀναλόγως ἑρμηνεύονται καὶ οἱ λοιπαὶ στῆλαι (διανύσματα).

β) *Οἰκονομικὰ δεδομένα.* Κατὰ τὸν χρόνον τοῦ ὑπολογισμοῦ ἡ ἐπιχείρησις Ε δύναται νὰ διαθέσῃ 100, 80, 150 μονάδας [1] ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς Α, Β, Γ, ἀντιστοίχως. Τὸν περιορισμὸν αὐτὸν δυ-

---

1) Αἱ «μονάδες» μετρήσεως καθορίζονται ἐκ τοῦ χρησιμοποιουμένου μετρικοῦ συστήματος.

νάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὑπὸ μορφὴν τοῦ διανύσματος Π_0:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix}$$

γ) *Κριτήριον ἐπιλογῆς.* Ἡ ἐπιχείρησις ἀποβλέπει εἰς τὴν ἐπίτευξιν τοῦ μεγίστου δυνατοῦ κέρδους ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν διαθεσίμων ποσοτήτων συντελεστῶν. Κατὰ συνέπειαν ἀρίστη λύσις θεωρεῖται ἡ λύσις ἡ ὁποία μεγιστοποιεῖ τὸ κέρδος. Πρὸς διατύπωσιν τοῦ κριτηρίου ἐπιλογῆς τῆς ἀρίστης λύσεως, πρέπει νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν τὰ ἀναμενόμενα καθαρὰ κατὰ μονάδα κέρδη ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν ἀγαθῶν ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 καὶ ω_5. Ὑποθέτομεν ὅτι τὰ κέρδη ταῦτα εἶναι : 2, 2, 3, 4 καὶ 6 νομισματικαὶ μονάδες, ἀντιστοίχως. Προφανῶς ταῦτα θὰ ἠδύνατο νὰ θεωρηθοῦν ἐπίσης καὶ ὡς καθαρὰ κέρδη τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 καὶ Π_5, χρησιμοποιουμένων εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ καθαροῦ κέρδους ἀφαιρεῖται τὸ κατὰ μονάδα κόστος ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν ἀντιστοίχων ἀγαθῶν.

11.2.2. Διατύπωσις τοῦ προβλήματος. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω δεδομένων προβαίνομεν τώρα εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος.

Ἂν θέσωμεν λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 καὶ λ_5, διὰ τὰ ζητούμενα ἐπίπεδα τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 καὶ Π_5, ἀντιστοίχως, τότε ἡ συνάρτησις $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 \tag{1}$$

ἐκφράζει τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον ἡ ἐπιχείρησις ἐπιδιώκει νὰ καταστήσῃ μέγιστον (1). Προφανῶς μερικὰ λ δυνατὸν νὰ λάβουν τιμὴν μηδέν, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ ἀντίστοιχος παραγωγικὴ δραστηριότης δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὸ πρόγραμμα. Δὲν δύνανται ὅμως νὰ λάβουν ἀρνητικὴν τιμήν, διότι οὐδεμίαν ἔννοιαν ἔχει ἡ ἀρνητικὴ χρησιμοποίησις μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος.

Ὁ τελικὸς περιορισμὸς τοῦ προγράμματος δράσεως τίθεται βεβαίως ὑπὸ τῆς ὑπαρχούσης ποσότητος συντελεστῶν παραγωγῆς. Δέον συνεπῶς νὰ εἶναι (2) :

1) Γνωρίζομεν ὅτι τὸ καθαρὸν κέρδος τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος Π_1 εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος εἶναι 2. Ἂν συνεπῶς λ_1 εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῆς Π_1, τότε θὰ ἔχωμεν $2\lambda_1$ διὰ τὸ συνολικὸν κέρδος ἐκ τῆς παραγωγικῆς ταύτης δραστηριότητος. Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ τὰς λοιπὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας καὶ προσθέτοντες τὰ ἐπὶ μέρους γινόμενα λαμβάνομεν τὴν συνάρτησιν κέρδους $\varphi(\lambda)$.

2) Ἐφ' ὅσον Π_1 ὑποδηλοῖ χρησιμοποίησιν ὡρισμένων μονάδων ἐκ τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος τοῦ ω_1, ἡ παραγωγὴ λ_1 μονάδων

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 < \Pi_0 \qquad (2)$$

ἤ, ἐκφράζοντες ἀριθμητικῶς τὰ διανύσματα:

$$\lambda_1\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + \lambda_4\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + \lambda_5\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} < \begin{bmatrix}100\\80\\150\end{bmatrix}$$

ἢ ἀναλυτικώτερον:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 &< 100 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 1\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 &< 80 \qquad (3) \\ 0\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 &< 150 \end{aligned}$$

Ἡ σημασία τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων εἶναι προφανής. Ἡ πρώτη σημαίνει ὅτι ἡ συνολικῶς δαπανωμένη ποσότης ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ προγράμματος δράσεως δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν συνολικῶς διατιθεμένην ποσότητα τῶν 100 μονάδων τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ. Ἀνάλογος ἑρμηνεία πρέπει νὰ δοθῇ καὶ εἰς τὰς ἄλλας δύο ἀνισότητας. Οὕτω τὸ σύστημα (3) σημαίνει ὅτι αἱ ὑπὸ τοῦ προγράμματος προβλεπόμεναι συνολικαὶ ποσότητες τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνουν τὰς ἀντιστοίχως διαθεσίμους ποσότητας τῶν συντελεστῶν αὐτῶν. Συνοπτικῶς λοιπὸν τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιχειρήσεως Ε δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῶν λ, τοιαῦται ὥστε:

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 = \text{μέγιστον}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν:

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 < \Pi_0$$

Πρὶν προχωρήσωμεν, εἶναι ἀνάγκη, πρὸς διευκόλυνσιν τῶν ὑπολογισμῶν, ὅπως μετατρέψωμεν τὰς ἀνωτέρω ἀνισότητας εἰς ἰσότητας. Ἡ μετατροπὴ μιᾶς ἀνισότητος εἰς ἰσότητα δύναται νὰ γίνῃ δι' ἁπλῆς προσθήκης εἰς τὸ ἀσθενέστερον μέρος τῆς ἀνισότητος τῆς διαφορᾶς ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἀνισότητος ταύτης. Π.χ. ἡ ἀνισότης $5 < 8$ μετατρέπεται εἰς ἰσότητα ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸ ἀριστερὸν μέλος τὴν διαφορὰν

τοῦ ω_1, ἢ – ὅπερ τὸ αὐτὸ – ἡ χρησιμοποίησις τῆς Π_1 εἰς τὸ ἐπίπεδον λ_1, θὰ ἀπαιτήσῃ (βάσει τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν) $\lambda_1\Pi_1$ ποσότητας ἐκ τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν. Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ τὰς λοιπὰς δραστηριότητας σχηματίζομεν τὴν παράστασιν (2).

$8-5=3$. Ἡ ἀκολουθουμένη ἐνταῦθα διαδικασία μετατροπῆς τῶν ἀνισοτήτων εἰς ἰσότητας δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς. Ὁρίζομεν τρία νέα διανύσματα Π_6, Π_7, Π_8, τοιαῦτα ὥστε:

$$\Pi_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οἰκονομικῶς τὸ Π_6 σημαίνει ὅτι ἐπιτρέπει τὴν *μὴ χρησιμοποίησιν* μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α. Τὰ Π_7 καὶ Π_8 ἐπιτρέπουν τὴν μὴ χρησιμοποίησιν μιᾶς μονάδος ἐκ τῶν συντελεστῶν Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως. Τὰ δύο μηδενικὰ εἰς ἕκαστον διάνυσμα σημαίνουν ὅτι ἡ *μὴ* χρησιμοποίησις ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ δὲν ἀπαιτεῖ δαπάνας ἐκ τῶν δύο ἄλλων συντελεστῶν. Λόγῳ τῆς οἰκονομικῆς των σημασίας θὰ ὀνομάσωμεν τὰ Π_6, Π_7 καὶ Π_8 «διανύσματα ἀδρανείας».

Ἂν τώρα ὡρισμέναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς παραμένουν ἀχρησιμοποίητοι, διότι εἶναι πολλάκις τεχνικῶς ἀδύνατος ἡ χρησιμοποίησις τῶν διαθεσίμων ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ ἄνευ ὑπάρξεως ποσοτήτων ἐκ τῶν ἄλλων συντελεστῶν (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν), τὰ ἀντίστοιχα διανύσματα ἀδρανείας πρέπει νὰ περιλαμβάνωνται εἰς τὸ πρόγραμμα δράσεως ὑπὸ κατάλληλα ἐπίπεδα. Θὰ ὀνομάσωμεν τὰ ἐπίπεδα ταῦτα «ἐπίπεδα ἀδρανείας», καθόσον χρησιμοποίησις εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον ἑνὸς διανύσματος ἀδρανείας σημαίνει ἁπλῶς μὴ χρησιμοποίησιν ὡρισμένων ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Αἱ τιμαὶ τῶν ἐπιπέδων ἀδρανείας δὲν δύνανται νὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ μηδενὸς (δηλαδὴ ἀρνητικαὶ) οὔτε μεγαλύτεραι τῶν ποσοτήτων τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν.

Ἂν θέσωμεν λ_6, λ_7, λ_8 διὰ τὰ ἐπίπεδα ἀδρανείας τῶν Π_6, Π_7 καὶ Π_8, ἀντιστοίχως, τότε ἡ παράστασις (2) γίνεται:

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 + \lambda_6\Pi_6 + \lambda_7\Pi_7 + \lambda_8\Pi_8 = \Pi_0 \qquad (4)$$

ἤ, ἀναλυτικώτερον:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 + 1\lambda_6 + 0\lambda_7 + 0\lambda_8 &= 100 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 1\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 + 0\lambda_6 + 1\lambda_7 + 0\lambda_8 &= 80 \qquad (5) \\ 0\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 + 0\lambda_6 + 0\lambda_7 + 1\lambda_8 &= 150 \end{aligned}$$

Τὸ σύστημα (5) σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον τῶν παραγωγικῶς χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων συντελεστῶν σὺν τῷ συνόλῳ τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὰς συνολικῶς διαθεσίμους ποσότητας συντελεστῶν.

Ἂν τέλος ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν ζημιοῦται ἡ ἐπιχείρησις Ε ἐκ τῆς μὴ χρησιμοποιήσεως ὡρισμένων ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν (1), τότε τὸ καθαρὸν ἀποτέλεσμα ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς διανυσμάτων ἀδρανείας εἰς τὸ πρόγραμμα, ὑφ' οἱονδήποτε ἐπίπεδον, εἶναι μηδὲν καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις φ(λ) μένει ἀμετάβλητος.

Μετὰ τὸν καθορισμὸν τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας τὸ πρόβλημα δύναται νὰ λάβῃ ὁριστικὴν διατύπωσιν ὡς ἀκολούθως :

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ (μὴ ἀρνητικαὶ) τιμαὶ τῶν λ, τοιαῦται ὥστε :

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 = \text{μέγιστον} \tag{6}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν :

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 + \lambda_6\Pi_6 + \lambda_7\Pi_7 + \lambda_8\Pi_8 = \Pi_0 \tag{7}$$

Ἂν θέσωμεν (ἐκ νέου) :

$$T \equiv \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

διὰ τὴν τεχνολογικὴν μήτραν τῆς Ε, ἀντὶ τῶν Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 καὶ Π_5,

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix},$$

διὰ τὰ ζητούμενα ἐπίπεδα δράσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων καὶ $K \equiv [2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6]$, διὰ τὰ κατὰ μονάδας κέρδη τῶν δραστηριοτήτων αὐτῶν, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιχειρήσεως Ε ὡς ἑξῆς :

---

1) Δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ διαφυγὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς μὴ χρησιμοποιήσεως ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν. Πάντως εἶναι ἐνδεχόμενον ὅπως ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων συντελεστῶν προκαλῇ ζημίας, ἂν π.χ. δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ διατήρησις καὶ ἐπαναχρησιμοποίησις αὐτῶν.

Νὰ εὑρεθοῦν μὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῶν λ, τοιαῦται ὥστε :

$$[2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \varphi(\lambda) = \text{μέγιστον} \tag{8}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix} \tag{9}$$

ἢ συνοπτικῶς :

$$K\Lambda = \varphi(\lambda) = \text{μέγιστον} \tag{10}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν :

$$T\Lambda \leqslant \Pi_0 \tag{11}$$

Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας, τὰ ὁποῖα ἔχουν κέρδος μηδέν, ἡ μήτρα T μετατρέπεται εἰς T* :

$$T^* = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

τὰ δὲ διανύσματα Λ καὶ K εἰς :

$$\Lambda^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad K^* = [2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Οὕτω τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιχειρήσεως δύναται νὰ διατυπωθῇ ἐκ νέου ὡς κάτωθι :

Νὰ εὑρεθοῦν μὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῶν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8$, τοιαῦται ὥστε:

$$[2\ 2\ 3\ 4\ 6\ 0\ 0\ 0]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\\ \lambda_7\\ \lambda_8\end{bmatrix} = \varphi(\lambda) = \text{μέγιστον} \qquad (12)$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν:

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\\ \lambda_7\\ \lambda_8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}100\\ 80\\ 150\end{bmatrix} \qquad (13)$$

ἢ συνοπτικῶς:

$$K^*\Lambda^* = \varphi(\lambda) = \text{μέγιστον} \qquad (15)$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν:

$$T^*\Lambda^* = \Pi_0$$

11.2.3. Λύσις τοῦ προβλήματος. Ἡ παράστασις (7), ἡ ὁποία εἶναι περιληπτικὴ μορφὴ τοῦ συστήματος (5), ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις(1). Αἱ ἐκ τῶν λύσεων αὐτῶν πληροῦσαι ταυτοχρόνως καὶ τὴν μὴ ἀρνητικότητα τῶν λ, καλοῦνται ***δυναταὶ*** ἢ ***πραγματοποιήσιμοι λύσεις***, καθ' ὅσον, ἀφ' ἑνὸς μὲν εἶναι οἰκονομικῶς σημαντικαί, διότι ἐξασφαλίζουν μὴ ἀρνητικότητα τοῦ ἐπιπέδου τῶν δραστηριοτήτων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἱκανοποιοῦν τὸ κριτήριον τῆς οἰκονομικῆς καὶ λειτουργικῆς συνεπείας, ἤτοι συμφωνοῦν πρὸς τοὺς περιορισμοὺς τῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ καὶ πρὸς τὰς λειτουργικὰς (τεχνολογικὰς) συνθήκας τῆς οἰκονομικῆς μονάδος, ἐκφραζομένας διὰ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_5$. Ἡ ἐπιχείρησις Ε δὲν ἐνδιαφέρεται βεβαίως δι' ὅλας τὰς δυνατὰς λύσεις, ἀλλὰ μόνον δι' ἐκείνην ἢ ἐκείνας τὰς λύσεις αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν ταυτοχρόνως τὴν (6), ἤτοι καθιστοῦν μέγιστον τὸ αναμε-

1) Βλ. 11.3.1., κατωτέρω.

νόμενον κέρδος. Αἱ λύσεις αὗται καλοῦνται *ἄριστοι λύσεις*, ἢ εἰδικώτερον ἐν προκειμένῳ, *λύσεις μεγιστοποιήσεως*. Πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀρίστων λύσεων ἐφαρμόζεται μία σταδιακὴ ὑπολογιστικὴ διαδικασία, γνωστὴ ὡς μέθοδος Simplex. Ἡ μέθοδος αὕτη χρησιμοποιεῖται ἀκριβῶς πρὸς ἀνίχνευσιν τῶν ἀρίστων λύσεων, διὰ συστηματικῆς ἐξετάσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ πραγματοποιησίμων λύσεων.

Πρῶτον στάδιον ὑπολογισμῶν. Ἐκλέγομεν ὡς ἀφετηρίαν τῶν ὑπολογισμῶν τὴν ἁπλουστέραν δυνατὴν λύσιν, θέτοντες $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$ καὶ $\lambda_6=100$, $\lambda_7=80$, $\lambda_8=150$. Ἡ λύσις αὕτη σημαίνει ὅτι οὐδεμία παραγωγικὴ δραστηριότης χρησιμοποιεῖται, ἐφ' ὅσον τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_5$ εἶναι μηδέν, αἱ δὲ διατιθέμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραμένουν ἀχρησιμοποίητοι (ἤτοι ἀπορροφοῦνται ἀπὸ τὰ διανύσματα ἀδρανείας, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα λ_6, λ_7 καὶ λ_8 λαμβάνουν τὴν μεγίστην τιμήν). Κατὰ συνέπειαν καὶ τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι μηδέν :

$$\varphi(\lambda) = 2\times 0 + 2\times 0 + 3\times 0 + 4\times 0 + 6\times 0 = 0$$

Πρὶν προχωρήσωμεν πρὸς εὕρεσιν καλυτέρας λύσεως, θὰ καταγράψωμεν συστηματικῶς τὰ τεχνικὰ καὶ οἰκονομικὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς ἐπίσης καὶ τὴν ἀρχικὴν λύσιν ὡς κατωτέρω :

Πινάκιον Α'

Κ.Κ.	→					2	2	3	4	6
↓	Β	Π_0	Π_6	Π_7	Π_8	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
	Π_6	100	1			2	2	1	2	2
	Π_7	80		1		2		1	1	2
	Π_8	150			1		1	2	1	2
Ο.Κ.	→					−2	−2	−3	−4	−6

Ἐὰν ἀφήσωμεν πρὸς στιγμὴν κατὰ μέρος τὴν τελευταίαν σειράν, τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ πινακίου εἶναι μᾶλλον σαφές.

α) Κάτωθεν τοῦ στοιχείου Β, τὸ ὁποῖον συμβολίζει τὴν λέξιν «βάσις», ἐγγράφονται τὰ ἐκλεγόμενα διανύσματα πρὸς κατάστρωσιν τοῦ ἑκάστοτε προγράμματος (¹). Ταῦτα ἀπὸ μαθηματικῆς ἀπόψεως ἀποτελοῦν σύνολον γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων (βλ. 3.6.2).

β) Κάτωθεν τοῦ Π_0 σημειοῦνται αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς Α, Β καὶ Γ. Ταυτοχρόνως ὅμως οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ παριστοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως (ἢ ἀδρανείας, ὡς ἐν προκειμένῳ) τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων τῆς βάσεως. Ὡς δεικνύεται εἰς τὸ πινάκιον Α', αἱ 100, 80 καὶ 150 μονάδες ἐκ τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως, καθορίζουν τὰ ἐπίπεδα τῶν διανυσμάτων Π_6, Π_7 καὶ Π_8. Οὕτω, αἱ στῆλαι κάτωθεν τῶν Β καὶ Π_0 παριστοῦν ὁμοῦ τὸ ἑκάστοτε ἐκλεγόμενον πρόγραμμα, ὡς καθορίζουσαι τὰ ἐκλεγόμενα διανύσματα καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

γ) Εἰς τὰς ὑπολοίπους στήλας τοῦ πινακίου ἀναγράφονται πάντα τὰ διανύσματα δράσεως ἢ ἀδρανείας, μετὰ τῶν στοιχείων αὐτῶν. Τὰ μηδενικὰ στοιχεῖα δὲν ἀναγράφονται.

δ) Κατὰ τὰ γνωστά (²), πάντα τὰ διανύσματα $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_8$ δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως Π_6, Π_7, Π_8.

Ἂς λάβωμεν, π.χ., τὸ διάνυσμα διαθεσίμων συντελεστῶν Π_0. Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν:

$$\Pi_0 = 100\,\Pi_6 + 80\,\Pi_7 + 150\,\Pi_8$$

$$= 100\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 80\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 150\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}100\\80\\150\end{bmatrix}$$

Εἰς τὸν ἀνωτέρω γραμμικὸν συνδυασμόν, ὡς πολλαπλασιασταὶ τῶν διανυσμάτων ἐτέθησαν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ διανύσματος Π_0. Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τοῦ συνδυασμοῦ αὐτοῦ εἶναι ὅτι αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ διατίθενται ἐξ ὁλοκλήρου, ἂν τὸ ἐκλεγόμενον πρόγραμμα περιλαμβάνῃ τὸ διάνυσμα Π_6 εἰς ἐπίπεδον 100, τὸ διάνυσμα Π_7 εἰς ἐπίπεδον 80 καὶ τὸ διάνυσμα Π_8 εἰς ἐπίπεδον 150. «Διατίθενται ἐξ ὁλοκλήρου» σημαίνει ἐνταῦθα – λόγῳ τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος – ὅτι δὲν χρησιμοποιοῦνται. Ἡ ἑρμηνεία εἶναι προφανῶς πλέον ἐνδιαφέρουσα ὅταν εἰς τὸ πρόγραμμα περιλαμβάνωνται καὶ διανύσματα δράσεως (=παραγωγικαὶ δραστηριότητες), ὡς συμβαίνει εἰς τὰ πινάκια Β' καὶ Γ', κατωτέρω.

Ὁμοίως, τὸ διάνυσμα Π_1 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς:

1) Θὰ καλοῦμεν ἐνίοτε τὰ διανύσματα τοῦ προγράμματος διανύσματος βάσεως.
2) Βλ. 3.6.

$$\Pi_4 = 2\Pi_6 + 1\Pi_7 + 1\Pi_8$$

$$= 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

Εἰς τὸν συνδυασμὸν αὐτὸν ἐτέθησαν ὁμοίως ὡς πολλαπλασιασταὶ τῶν διανυσμάτων τὰ στοιχεῖα τοῦ Π_4. Γενικῶς πᾶν διάνυσμα τοῦ πινακίου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐκλεγομένου προγράμματος, ἂν θέσωμεν ὡς πολλαπλασιαστὰς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ὑπ' ὄψιν διανύσματος.

Ποία τώρα εἶναι ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῆς ἐκφράσεως ἑνὸς διανύσματος δράσεως, π.χ. τοῦ Π_4, ὡς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος. Δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἔννοιαν ταύτην ὡς ἑξῆς: Αἱ ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τὴν χρησιμοποίησιν π.χ. τοῦ διανύσματος δράσεως Π_4 εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος ἰσοῦνται ἀκριβῶς πρὸς τὰς ποσότητας αἱ ὁποῖαι ἀπορροφοῦνται ἀπὸ τὰ διανύσματα: Π_6 εἰς ἐπίπεδον 2, Π_7 εἰς ἐπίπεδον 1 καὶ Π_8 εἰς ἐπίπεδον 1. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἔχομεν ἐνώπιόν μας *δύο* διαφόρους συνδυασμοὺς τῆς *αὐτῆς* ποσότητος παραγωγικῶν συντελεστῶν. Δεδομένου ὅτι εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ γνωρίζωμεν τὸ καθαρὸν κέρδος ἑκάστου συνδυασμοῦ (διότι δίδεται ὑπὸ τοῦ προβλήματος τὸ ὑφ' ἑκάστου διανύσματος ἀναμενόμενον καθαρὸν κέρδος), δυνάμεθα νὰ ἀποφασίσωμεν ἐὰν συμφέρῃ ἢ ὄχι ἡ ἀφαίρεσις ποσοτήτων συντελεστῶν ἀπὸ τὰ διανύσματα τοῦ προγράμματος, διὰ τὴν δραστηριοποίησιν ἑνὸς νέου διανύσματος. Ἐνταῦθα βεβαίως ἡ σύγκρισις αὕτη γίνεται αὐτομάτως, διότι γνωρίζομεν ὅτι τὰ διανύσματα ἀδρανείας δίδουν μηδὲν καθαρὸν κέρδος, ὁπότε συμφέρει ὁπωσδήποτε ἡ εἰσαγωγὴ ἑνὸς διανύσματος δράσεως εἰς τὸ πρόγραμμα. Ὅταν ὅμως τὸ πρόγραμμα περιλαμβάνῃ καὶ διανύσματα δράσεως (ὡς εἰς τὰ ἑπόμενα πινάκια Β', καὶ Γ') τότε ἡ ἀνωτέρω σύγκρισις εἶναι βασικῆς σημασίας διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀρίστης λύσεως.

Ὡς παρατηροῦμεν, τὰ διανύσματα $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_8$, ἐκφραζόμενα ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος, δὲν ἀλλάσσουν ἀριθμητικὴν μορφήν, παραμένοντα ὡς ἀκριβῶς ἐδόθησαν ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ προβλήματος. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει *μόνον* εἰς τὴν πρώτην φάσιν (πρῶτον πινάκιον) τῶν ὑπολογισμῶν, λόγῳ τῆς ἀριθμητικῆς φύσεως τῶν (μοναδιαίων) διανυσμάτων ἀδρανείας, τὰ ὁποῖα ἐπελέγησαν εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα ἤτοι ὡς διανύσματα βάσεως (1). Οὕτω, ἐκλέγοντες ὡς ἀφετηρίαν ἓν πρόγραμμα ἀπαρτιζόμενον ἀπὸ τὰ διανύσματα ἀδρανείας, εἰς οὐδένα ὑπολογισμὸν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προβῶμεν κατὰ τὴν

1) Βλ. σσ. 72 - 73, ἀνωτέρω.

κατάστρωσιν τοῦ πρώτου πινακίου. Ἀρκεῖ νὰ καταγράψωμεν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος κατὰ τὴν ὑποδειχθεῖσαν σειρὰν (πινάκιον Α').

ε) Τὰ στοιχεῖα Κ.Κ., εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον τοῦ πινακίου, σημαίνουν «καθαρὸν κέρδος». Ἡ φορὰ τῶν βελῶν δεικνύει ὅτι τὰ τετραγωνίδια τῆς ἔναντι σειρᾶς καὶ τῆς κάτωθεν στήλης χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ καθαροῦ κέρδους ἑκάστου διανύσματος. Ἐπειδὴ τὰ διανύσματα ἀδρανείας ἔχουν καθαρὸν κέρδος μηδέν, τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια μένουν κενά, ἀναγράφεται δὲ μόνον τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ διανύσματα δράσεως, συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

στ) Εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου ἐγγράφεται *ἡ διαφορὰ καθαροῦ κέρδους*, ἡ λαμβανομένη ἐκ τῆς ὑπὸ στοιχεῖον δ', ἀνωτέρω, ὑποδειχθείσης συγκρίσεως. Τὴν διαφορὰν ταύτην καλοῦμεν *ὁριακὸν κέρδος* τοῦ ἀντιστοίχου διανύσματος. Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι θέλομεν νὰ καθορίσωμεν ποίαν ἐπίδρασιν θὰ ἔχῃ ἐπὶ τοῦ καθαροῦ κέρδους ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος δράσεως Π_3. Πρῶτον, ἐκφράζομεν τοῦτο ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, κατὰ τὰ γνωστά:

$$\Pi_3 = 1\Pi_6 + 1\Pi_7 + 2\Pi_8$$

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις σημαίνει ὅτι, ἡ ἀπαιτουμένη ποσότης συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ Π_3 εἰς ἐπίπεδον δράσεως 1, εἶναι ἴση μὲ τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν τὸ διάνυσμα Π_6 εἰς ἐπίπεδον 1, τὸ διάνυσμα Π_7 εἰς ἐπίπεδον 1 καὶ τὸ διάνυσμα Π_8 εἰς ἐπίπεδον 2.

Δεύτερον, *συγκρίνομεν* τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ὁποῖον δίδουν οἱ δύο ἀνωτέρω συνδυασμοὶ [1] τῶν *αὐτῶν ποσοτήτων* συντελεστῶν παραγωγῆς. Γνωρίζομεν ὅτι πάντα τὰ διανύσματα ἀδρανείας φέρουν ἐξ ὑποθέσεως καθαρὸν κέρδος μηδὲν (ἤτοι $1 \times 0 + 1 \times 0 + 2 \times 0 = 0$, ὅπου τὰ τρία πρῶτα μηδενικὰ εἶναι τὰ καθαρὰ κέρδη τῶν Π_6, Π_7, Π_8), τὸ δὲ Π_3 εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος φέρει κέρδος 3. Συγκρίνοντες συνεπῶς λαμβάνομεν $0 - 3 = -3$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ «ὁριακὸν κέρδος» τοῦ διανύσματος Π_3 εἶναι 3 μονάδες [2]. Ἑπομένως ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ Π_3 εἰς τὸ πρόγραμμα δύναται νὰ βελτιώσῃ τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως. Κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον γίνεται ὁ προσδιορισμὸς τοῦ «ὁριακοῦ

1) Ὡς παριστῶνται ἐκ τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως.

2) Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τοῦ ὁριακοῦ κέρδους ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ Π_3 τίθεται ὡς ἀφαιρετέος, δὲν πρέπει δὲ νὰ ἐκλαμβάνεται ὡς ὁριακὴ ζημία, ἡ ὁποία σημειοῦται διὰ θετικοῦ σημείου. Ὁ τρόπος αὐτὸς παρουσιάσεως ἔχει ὡρισμένα ὑπολογιστικὰ πλεονεκτήματα.

κέρδους» ὅλων τῶν διανυσμάτων. Γενικῶς, ὅταν ὑπάρχῃ ἓν ἢ περισσότερα ἀρνητικὰ στοιχεῖα εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου, βελτίωσις τοῦ συνολικοῦ κέρδους εἶναι δυνατὴ δι' εἰσαγωγῆς εἰς τὸ πρόγραμμα ἑνὸς ἐκ τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων. Κατ' ἀναλογίαν, ὅταν ἓν στοιχεῖον εἶναι θετικόν, ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ ἀντιστοίχου διανύσματος μειώνει τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως, ὡς τοῦτο καθορίζεται ὑπὸ τοῦ ἤδη ἐκλεγέντος προγράμματος. Ὅταν ἓν ἢ περισσότερα στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου εἶναι μηδέν, οὔτε κέρδος οὔτε ζημία προκαλοῦνται ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν σχετικῶν διανυσμάτων εἰς τὸ πρόγραμμα.

Λόγῳ τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας, τὰ ὁποῖα δίδουν κέρδος μηδέν, οὐδεμία σχεδὸν σκέψις ἀπαιτεῖται διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου Α'. ***Ἁπλῶς ἐγγράφομεν τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης σειρᾶς τοῦ πινακίου εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς τελευταίας σειρᾶς αὐτοῦ, μὲ ἀντίθετον σημεῖον.***

ζ'. Κατόπιν τῶν ὅσων ἤδη ἐλέχθησαν, ἁπλῆ ἐπισκόπησις τοῦ πινακίου Α' δεικνύει ὅτι ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ ἐπιτύχῃ καθαρὸν κέρδος ἂν μεταβάλῃ τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα. Τὸ πρόβλημα εἶναι τώρα πῶς θὰ γίνῃ ἡ μεταβολή. Εἰδικώτερον πρέπει νὰ καθορισθοῦν : α) Ποῖον διάνυσμα πρέπει νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὸ πρόγραμμα καὶ β) ποῖον διάνυσμα πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τοῦ προγράμματος (1).

Ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιχείρησις ἐνδιαφέρεται διὰ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος, λογικὸν εἶναι νὰ ἐπιζητῆται ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος τὸ ὁποῖον δίδει τὸ μεγαλύτερον ὁριακὸν κέρδος. Ἐνταῦθα τὸ διάνυσμα αὐτὸ εἶναι τὸ Π_5, τὸ ὁποῖον δίδει ὁριακὸν κέρδος 6 ν.μ. Γενικῶς ἐπιβάλλεται ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ***ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν***, ὁ εὑρισκόμενος εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου (2).

Πρὸς καθορισμὸν τοῦ διανύσματος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τοῦ προγράμματος, ἀντικαθιστώμενον ὑπὸ τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος, σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως : Ἐφ' ὅσον τὸ Π_5 εἶναι τὸ πλέον ἐπικερδὲς διάνυσμα εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος, συμφέρει ἡ χρησιμοποίησις αὐτοῦ εἰς τὸ ἀνώτατον δυνατὸν ἐπίπεδον δράσεως. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς

---

1) Ἡ ἐξεταζομένη μέθοδος ἐρεύνης προχωρεῖ δι' ἀντικαταστάσεως, εἰς ἕκαστον βῆμα, ἑνὸς διανύσματος δι' ἑτέρου διανύσματος. Δὲν ἔχει διαμορφωθῆ μέχρι τοῦδε μέθοδος ταυτοχρόνου ἀντικαταστάσεως περισσοτέρων τοῦ ἑνὸς διανυσμάτων δοθέντος προγράμματος δι' ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ ἄλλων διανυσμάτων.

2) Ἂν ὑπάρχουν εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν δύο ἢ περισσότεροι *ἴσοι* ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ μὲ ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέραν τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῶν ἄλλων ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ἐκλέγεται πρὸς εἰσαγωγὴν εἰς τὸ πρόγραμμα οἱονδήποτε ἐκ τῶν διανυσμάτων τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς ἴσους ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.

ποσότητος τῶν ἐν ἀδρανείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς, κυρίως δὲ [1] ἐκ τῆς ποσότητος τοῦ ἐν σχετικῇ (ὡς πρὸς τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας τοῦ $Π_5$) ἀνεπαρκείᾳ εὑρισκομένου συντελεστοῦ [2]. Ὁ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ συντελεστὴς προσδιορίζεται ἐκ τοῦ μικροτέρου τῶν πηλίκων τὰ ὁποῖα λαμβάνονται ἂν διαιρέσωμεν τὰς ποσότητας καὶ τῶν τριῶν συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ $Π_5$. Ἐνταῦθα ἔχομεν $100/2=50$, $80/2=40$, $150/2=75$, συνεπῶς ὁ συντελεστὴς Β εἶναι ὁ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ εὑρισκόμενος καὶ καθορίζει ἀνώτατον ἐπίπεδον δράσεως τοῦ $Π_5$ 40 μονάδας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι **ὁλόκληρος** ἡ ποσότης τοῦ συντελεστοῦ Β ($40 \times 2 = 80$) χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα $Π_7$ (τὸ ὁποῖον ὑποδηλοῖ ἀδράνειαν τοῦ συντελεστοῦ Β), δὲν ἔχει θέσιν εἰς τὸ πρόγραμμα. Γενικῶς, πρὸς καθορισμὸν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος: Διαιροῦμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ $Π_0$ διὰ τῶν ἀντιστοίχων θετικῶν [3] στοιχείων τοῦ εἰσερχομένου διανύσματος καὶ καθορίζομεν ἐν συνεχείᾳ ὡς «ἐξερχόμενον» τὸ διάνυσμα τοῦ προγράμματος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ μικρότερον πηλῖκον [4]. Τὸ εἰσερχόμενον διάνυσμα $Π_5$ καὶ τὸ ἐξερχόμενον διάνυσμα $Π_7$ καταδεικνύονται διὰ τῶν ἐντόνων καθέτων καὶ ὁριζοντίων γραμμῶν τοῦ πινακίου.

η. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ περατοῦται τὸ πρῶτον στάδιον τῶν ὑπολογισμῶν. Μηχανικῶς αἱ μέχρι τοῦδε ὑποδειχθεῖσαι κινήσεις ἔχουν ὡς ἀκολούθως:

1) Κατάστρωσις τοῦ πινακίου Α΄ βάσει τῶν δοθεισῶν πληροφοριῶν. Ἐγγραφὴ εἰς τὸ πινάκιον τῶν διανυσμάτων δράσεως καὶ ἀδρανείας κατὰ

---

1) Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

2) Εἶναι ἐνδεχόμενον τὸ ἀνώτατον ἐπίπεδον δράσεως τοῦ διανύσματος μὲ τὸ μεγαλύτερον ὁριακὸν κέρδος νὰ εἶναι οὐσιωδῶς χαμηλότερον ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον δράσεως ἑτέρου διανύσματος ἔχοντος μικρότερον ὁριακὸν κέρδος, οὕτως ὥστε τελικῶς τὸ συνολικὸν κέρδος ἐκ τοῦ δευτέρου νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ συνολικοῦ κέρδους τοῦ πρώτου. Ἐν ἄλλοις λόγοις τὸ ληφθὲν κριτήριον τοῦ μεγαλυτέρου ὁριακοῦ κέρδους λαμβάνεται μόνον ὡς κατὰ τεκμήριον ὀρθόν. Ἡ συνέχεια τῶν ὑπολογισμῶν θὰ δείξῃ ἂν τὸ ἑκάστοτε εἰσερχόμενον διάνυσμα θὰ παραμείνῃ ὁριστικῶς εἰς τὸ πρόγραμμα ἢ θὰ ἐκτοπισθῇ ὑπὸ ἄλλου διανύσματος ἔχοντος μικρότερον ὁριακὸν κέρδος.

3) Δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν τὰ μηδενικὰ καὶ τὰ ἀρνητικὰ στοιχεῖα.

4) Ἂν εὑρεθοῦν δύο ἢ περισσότερα πηλῖκα *ἴσα* καὶ *μικρότερα* τῶν ἄλλων πηλίκων, πρὸς εὕρεσιν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως: Διαιροῦμεν τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα κεῖνται ἀμέσως δεξιὰ τῶν διαιρετέων τῶν ἴσων πηλίκων (καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου κατὰ σειρὰν διανύσματος ἀδρανείας), διὰ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος. Τὸ διάνυσμα τῆς βάσεως τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ (ἀλγεβρικῶς) μικρότερον ἐκ τῶν οὕτω ληφθέντων πηλίκων, χαρακτηρίζεται ὡς «ἐξερχόμενον» διάνυσμα. Ἂν δύο ἢ περισσότερα ἐκ τῶν νέων πηλίκων, εἶναι ἴσα καὶ μικρότερα τῶν ἄλλων πηλίκων, συνεχίζεται ὁ ὑπολογισμὸς καθ' ὅμοιον τρόπον, μὲ διαιρετέους τὰ ἀμέσως ἑπόμενα στοιχεῖα, κ.ο.κ., μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ἓν (ἀλγεβρικῶς) μικρότερον πηλῖκον. Ἡ περίπτωσις αὕτη καλεῖται «περίπτωσις ἐκφυλισμένης λύσεως» (βλ. 11.3.4).

τὴν ὑποδειχθεῖσαν τάξιν· ἐγγραφὴ τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰ καθαρὰ κέρδη τῶν διανυσμάτων εἰς τὰ οἰκεῖα τετραγωνίδια τῆς πρώτης σειρᾶς τοῦ πινακίου· ἐγγραφὴ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἀλλὰ μὲ ἀρνητικὸν σημεῖον εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου (βλ. πινάκιον Α').

2) Καθορισμὸς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος, βάσει τοῦ ἀρνητικοῦ στοιχείου μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ εὑρισκομένου εἰς τὴν τελευταίαν σειράν.

3) Καθορισμὸς τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος, βάσει τοῦ μικροτέρου ἐκ τῶν πηλίκων τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν στοιχείων τοῦ Π_0 διὰ τῶν ἀντιστοίχων *θετικῶν* στοιχείων τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος.

Καταφαίνεται ὅτι ὁ χρόνος τοῦ μηχανικοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ πινακίου Α' εἶναι ἐλάχιστος.

Δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν. Μὲ ἀφετηρίαν τὰς πληροφορίας τοῦ πινακίου Α', προχωροῦμεν εἰς τὸ δεύτερον στάδιον τῶν ὑπολογισμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων τελικῶς συντίθεται τὸ πινάκιον Β'.

Τὸ πινάκιον Β' διαφέρει σημαντικῶς ἀπὸ τὸ πινάκιον Α'. Αἱ διαφοραὶ ὀφείλονται εἰς τὴν ἀντικατάστασιν εἰς τὴν βάσιν τοῦ διανύσματος Π_7 διὰ τοῦ διανύσματος Π_5. Λόγῳ τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης κατέστη ἀναγκαῖον, ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ ὑπολογισθοῦν ἐκ νέου τὰ ἐπίπεδα τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ ἀναπροσαρμοσθοῦν τὰ στοιχεῖα πάντων τῶν διανυσμάτων $\Pi_1, \ldots, \Pi_8$, εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύναται ἓν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τῆς νέας βάσεως.

Πινάκιον Β'

Κ.Κ.	→					2	2	3	4	6
	Β	Π_0	Π_6	Π_7	Π_8	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
	Π_6	20	1	-1			2		1	
→ 6	Π_5	40		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	Π_8	70		-1	1	-2	1	1		
Ο.Κ.	→	240		3		4	-2		-1	

Δὲν εἶναι δύσκολον νὰ ἑρμηνευθῇ οἰκονομικῶς διατί ἀπαιτεῖται ὑπολογισμὸς νέων ἐπιπέδων διὰ τὰ διανύσματα τῆς βάσεως. Καθωρίσθη ἤδη ὅτι τὸ ἀνώτατον δυνατὸν ἐπίπεδον δράσεως τοῦ Π_5 εἶναι 40 μονάδες. Διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ Π_5 εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἀπαιτοῦνται : 1) ὁλόκληρος ἡ ἐν ἀδρανείᾳ ποσότης τοῦ συντελεστοῦ Β (συνεπῶς τὸ Π_7 ἀφαιρεῖται ἐκ τῆς βάσεως), 2) 80 μονάδες (2 × 40), ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα Π_6 ἐξακολουθεῖ νὰ παραμένῃ εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ ἐπίπεδον ἀδρανείας 20 μονάδας (=100–80), 3) 80 μονάδας (2×40) ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Γ καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα ἀδρανείας Π_8 παραμένει εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ ἐπίπεδον 70 μονάδας (= 150 – 80).

Ἡ ἀριθμητικὴ ἀναπροσαρμογὴ τῶν διανυσμάτων $\Pi_1, \ldots, \Pi_8$, οὕτως ὥστε νὰ δύναται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως εἶναι ἀναγκαία, ὡς ἤδη ἐλέχθη, διὰ τὴν σύγκρισιν τοῦ καθαροῦ κέρδους ἑκάστου διανύσματος πρὸς τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ὁποῖον δίδει ἡ αὐτὴ ποσότης συντελεστῶν χρησιμοποιουμένη ὅμως ὑπὸ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως. Ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς θὰ καταφανῇ ἂν ὑπάρχῃ δυνατότης καταρτίσεως ἄλλου καλλιτέρου προγράμματος ἢ ἐὰν τὸ ἤδη καταρτισθὲν εἶναι τὸ ζητούμενον.

Οὕτω, π.χ., τὸ διάνυσμα Π_3 εἰς τὸν νέον πίνακα πρέπει νὰ ἔχῃ στοιχεῖα α, β, γ, τοιαῦτα ὥστε νὰ ἱκανοποιῆται ὁ γραμμικὸς συνδυασμός (1) :

$$\alpha\Pi_6 + \beta\Pi_5 + \gamma\Pi_8 = \Pi_3$$

ἤτοι, ἀναλυτικῶς :

$$\alpha + 2\beta + 0 = 1$$

$$0 + 2\beta + 0 = 1$$

$$0 + 2\beta + \gamma = 2$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω συστήματος λαμβάνομεν $\alpha=0$, $\beta = \frac{1}{2}$ καὶ $\gamma = 1$, Ἑπομένως τὸ διάνυσμα Π_3, μετὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναπροσμογὴν αὐτοῦ, ἐμφανίζεται εἰς τὸ πινάκιον Β' ὡς :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ὁμοίως, τὸ διάνυσμα Π_4 πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὸ πινάκιον Β' στοιχεῖα α, β, γ, τοιαῦτα ὥστε :

1) Βλ. καὶ σσ. 73 - 74, ἀνωτέρω.

$$\alpha\Pi_6 + \beta\Pi_5 + \gamma\Pi_8 = \Pi_4$$

$$\alpha + 2\beta + 0 = 2$$

$$0 + 2\beta + 0 = 1$$

$$0 + 2\beta + \gamma = 1$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος λαμβάνομεν $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ καὶ $\gamma = 0$. Ἑπομένως τὸ Π_4 ὑπὸ τὴν νέαν του μορφὴν θὰ εἶναι:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Μετὰ τὴν ἀναπροσαρμογὴν ἁπάντων τῶν διανυσμάτων (δράσεως καὶ ἀδρανείας), κατὰ τὰ ἀνωτέρω, καθίσταται εὐχερὴς ἡ διαπίστωσις, κατὰ τὴν ἤδη περιγραφεῖσαν (σ. 264) διαδικασίαν, τῆς δυνατότητος περαιτέρω βελτιώσεως τοῦ προγράμματος διὰ τῆς εἰσαγωγῆς εἰς αὐτὸ ἑνὸς νέου διανύσματος δράσεως.

Οὕτω, π.χ., ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος Π_4, κατόπιν ἀφαιρέσεως ἑτέρου διανύσματος ἐξ αὐτοῦ, εἶναι συμφέρουσα. Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς νέας ἀριθμητικῆς μορφῆς αὐτοῦ ἔχομεν:

$$1\Pi_6 + 1/2\Pi_5 + 0\Pi_8 = \Pi_4$$

ἤτοι, αἱ ὑπὸ τοῦ Π_4 ἀπορροφούμεναι ποσότητες συντελεστῶν δύνανται ἐπίσης νὰ χρησιμοποιηθοῦν καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους τῆς ὡς ἄνω σχέσεως, ὁπότε δίδουν καθαρὸν καθαρὸν κέρδος:

$$1 \times 0 + 1/2 \times 6 + 0 \times 0 = 3$$

ἐνῶ τὸ Π_4 δίδει καθαρὸν κέρδος 4. Ἑπομένως ἔχομεν $3 - 4 = -1$.

Ἀνάλογος σύγκρισις δεικνύει ὅτι τὸ διάνυσμα Π_1 δὲν συμφέρει νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὸ πρόγραμμα.

Βεβαίως κατόπιν τῶν συγκρίσεων αὐτῶν εἰσάγομεν, ὡς καὶ προηγουμένως, εἰς τὸ πρόγραμμα τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον ἐπιφέρει τὴν μεγαλυτέραν αὔξησιν εἰς τὸ συνολικὸν κέρδος, ἤτοι τὸ διάνυσμα Π_2, ἐν προκειμένῳ.

Μηχανικῶς ἡ κατάστρωσις τοῦ πινακίου Β', γίνεται ὡς ἀκολούθως:

α) Αἱ δύο πρῶται σειραὶ τοῦ πινακίου Α' μεταφέρονται εἰς τὸ πινάκιον Β' ἄνευ οὐδεμιᾶς μεταβολῆς ([1]).

β) Εἰς τὴν βάσιν ἀναγράφεται τὸ διάνυσμα $Π_6$ ἀντὶ τοῦ διανύσματος $Π_7$. Ἀριστερὰ τοῦ $Π_6$ ἀναγράφεται τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ διανύσματος, ἤτοι 6 νομισματικαὶ μονάδες.

γ) Διαιροῦνται πάντα τὰ στοιχεῖα τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὴν σειρὰν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος $Π_7$ εἰς τὸ πινάκιον Α', διὰ τοῦ στοιχείου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς αὐτῆς καὶ τῆς στήλης τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος εἰς τὸ πινάκιον Α'. Τὰ προκύπτοντα πηλίκα ἐγγράφονται εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς σειρᾶς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος $Π_6$, εἰς τὸ πινάκιον Β'. Οὕτω, π.χ., τὸ ἕβδομον στοιχεῖον τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ $Π_6$ (πινάκ. Β') προσδιορίζεται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ στοιχείου 1, ἑβδόμου εἰς τὴν σειρὰν ἔναντι τοῦ $Π_7$ εἰς τὸ πινάκιον Α', διὰ τοῦ στοιχείου 2, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς αὐτῆς σειρᾶς καὶ τῆς στήλης τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος εἰς τὸ πινάκιον Α'. Ὁ σπουδαστὴς δύναται νὰ ἐλέγξῃ δι' ἀναλόγων ὑπολογισμῶν τὰς λοιπὰς ἐγγραφὰς τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ $Π_6$ εἰς τὸ πινάκιον Β'.

δ) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ πινακίου Β' χρειάζεται περισσοτέραν προσοχήν. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ τετραγωνίδιον τ τοῦ πινακίου Β' ([2]).

1) Εὑρίσκομεν τὸ στοιχεῖον τοῦ ἀντιστοίχου τετραγωνιδίου τ' εἰς τὸ πινάκιον Α' ([3]).

2) Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ εὑρεθὲν στοιχεῖον τοῦ τ' τὸ γινόμενον τοῦ στοιχείου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς τοῦ τ' καὶ τῆς στήλης τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος εἰς τὸ πινάκιον Α', ἐπὶ τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς στήλης τοῦ τ εἰς τὸ πινάκιον Β' καὶ τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ «εἰσερχομένου διανύσματος» εἰς τὸ πινάκιον Β'.

3) Τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν ἐγγράφομεν εἰς τὸ τετραγωνίδιον τ (τοῦ πινακίου Β').

Διὰ νὰ κατανοηθῇ ὁ τελευταῖος ὑπολογισμὸς χρειάζεται παρακολούθησις τῶν ὑποδεικνυομένων κινήσεων ἐπὶ τῶν πινακίων Α' καὶ Β'. Μὲ ὀλίγην ἐξάσκησιν ὁ ὑπολογισμὸς αὐτὸς γίνεται σχεδὸν αὐτομάτως, ὡς δύναται νὰ διαπιστώσῃ ὁ σπουδαστὴς πειραματιζόμενος βάσει τῶν δε-

1) Ὅταν τὰ πινάκια τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐνσωματοῦνται εἰς ἕνα πίνακα, δὲν ἀπαιτεῖται βεβαίως ἐπανάληψις τῶν δύο πρώτων σειρῶν.

2) τ δύναται νὰ εἶναι οἱονδήποτε τετραγωνίδιον, ἐκτὸς βεβαίως τῶν τετραγωνιδίων τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος, τὰ ὁποῖα ὑπολογίζονται κατὰ τὰ ὑπὸ στοιχεῖον γ' ἀναγραφόμενα.

3) Τὸ στοιχεῖον τοῦτο δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

δομένων τῶν πινακίων Α' καὶ Β'. Δίδομεν ἐνταῦθα μερικὰ παραδείγματα:

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ πρῶτον στοιχεῖον τοῦ Π_0 εἰς τὸ πινάκιον Β'. 1) Τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον εἰς τὸ πινάκιον Α' εἶναι 100. 2) Ἀπὸ τὸ 100 ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ στοιχείου 2, εὑρισκομένου εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς τοῦ 100 μὲ τὴν στήλην τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος Π_5 εἰς τὸ πινάκιον Α', ἐπὶ τὸ στοιχεῖον 40, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς στήλης τοῦ πρὸς ὑπολογισμὸν στοιχείου καὶ τῆς σειρᾶς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος Π_5 εἰς τὸ πινάκιον Β'. 3) Ἐγγράφομεν τὴν διαφορὰν $100-2\times 40=20$ εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον κάτωθεν τοῦ Π_0.

Καθ' ὅμοιον τρόπον, πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τετάρτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ Π_0 εἰς τὸ πινάκιον Β' ἔχομεν:

$$0-2\times 0=0$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἕκτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ Π_8 ἔχομεν:

$$1-2\times 0=1$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τρίτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ Π_8 ἔχομεν:

$$0-2\times 1/2=-1 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

ε) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου Β' γίνεται, εἴτε δι' ἐφαρμογῆς τῶν ὑπὸ στοιχεῖον δ' λεχθέντων, εἴτε δι' ἐφαρμογῆς τῶν ὑπὸ στοιχεῖον στ' (πρῶτον στάδιον ὑπολογισμῶν) λεχθέντων. Οὕτω, πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τρίτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου Β' ἔχομεν:

$$0-(-6\times 1/2)=3 \quad \text{ἢ} \quad 0\times(-1)+6\times 1/2+0\times(-1)-=3$$

ὅπου 0, 6, 0 παριστοῦν τὰ καθαρὰ κέρδη τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ὁποίων θὰ ἠδύνατο νὰ ἐκφρασθῇ τὸ διάνυσμα Π_7, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τρίτον στοιχεῖον τῆς τελευταίας σειρᾶς.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἕκτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου Β' ἔχομεν:

$$(-2)-(-6)\times 0=-2 \quad \text{ἢ} \quad (0\times 2+6\times 0+0\times 1)-2=-2$$

Ἐπειδὴ οἱ ὡς ἄνω δύο τρόποι ὑπολογισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμοι, δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ταυτοχρόνως πρὸς ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῶν ἐγγραφῶν ἑκάστου νέου πινακίου. Ἂν δηλαδὴ παρατηρηθῇ διαφορὰ ἀποτελέσματος τῶν δύο ὑπολογισμῶν σημαίνει ὅτι ἔγινε λάθος εἰς τὴν σύνταξιν τοῦ πινακίου.

Μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν τῶν ὑπολογισμῶν, ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὸ πινάκιον Β'. Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ νέον πρόγραμμα ($Π_6$: 20, $Π_5$: 40, $Π_8$: 70) εἶναι καλλίτερον ἀπὸ τὸ ἀρχικὸν ($Π_6$: 100, $Π_7$: 80, $Π_8$: 150) διότι δίδει καθαρὸν κέρδος 240 νομισματικὰς μονάδας (40×6). Τὸ καθαρὸν κέρδος καταγράφεται ὡς πρῶτον στοιχεῖον τῆς τελευταίας σειρᾶς ([1]). Παρατηροῦμεν ὅμως ἐπίσης ὅτι δύο ἐκ τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς φέρουν ἀρνητικὸν σημεῖον, ὅπερ σημαίνει ὅτι εἶναι δυνατὴ περαιτέρω βελτίωσις τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως δι' εἰσαγωγῆς εἰς τὴν βάσιν τοῦ διανύσματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τὸ ἀρνητικὸν στοιχεῖον μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν, ἤτοι τοῦ $Π_2$ καὶ δι' ἀφαιρέσεως τοῦ $Π_6$, ἐπειδὴ $20/2 < 70/1$. Ἐπομένως οἱ ὑπολογισμοὶ δέον νὰ συνεχισθοῦν διὰ τὴν κατάρτισιν νέου πινακίου.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ δίδομεν τὸ γενικὸν κριτήριον τῆς μεθόδου Simplex περὶ τῆς συνεχίσεως ἢ μὴ τῶν ὑπολογισμῶν.

Κριτήριον Simplex. Μετὰ τὴν κατάρτισιν ἑκάστου πινακίου :

1) Ἂν ἓν ἢ περισσότερα στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς φέρουν ἀρνητικὸν σημεῖον, βελτίωσις τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος εἶναι δυνατὴ καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ συνεχίζονται, ἐκτὸς ἂν πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος εἶναι μὴ θετικὰ ([2]), ὁπότε συνήθως σημαίνει ὅτι τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν ἢ ἔχει λανθασμένην διατύπωσιν· 2) ἂν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι μὴ ἀρνητικὰ ([3]), τὸ ἐν λόγῳ πινάκιον περιέχει τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ πρέπει νὰ σταματήσουν. Τὸ μέγιστον οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα δίδεται ἐκ τοῦ πρώτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς.

Συνέχεια ὑπολογισμῶν. Ἡ κατάστρωσις τοῦ ἑπομένου πινακίου γίνεται βάσει τῶν πληροφοριῶν τοῦ πινακίου Β', ὅπως ἀκριβῶς ἐγένετο ἡ κατάστρωσις τοῦ πινακίου Β', βάσει τῶν πληροφοριῶν τοῦ πινακίου Α' ([4]).

---

1) Τὸ στοιχεῖον αὐτό, μολονότι δὲν ὑποδηλοῖ ὁριακὸν κέρδος, τίθεται εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν διότι ἐξομοιοῦται ὑπολογιστικῶς πρὸς τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς ταύτης.

2) Ἤτοι ἀρνητικὰ ἢ μηδέν.

3) Ἤτοι θετικὰ ἢ μηδέν.

4) Ὡς δύναται νὰ διαπιστώσῃ ὁ σπουδαστής, ἕκαστον διάνυσμα εἰς τὸ πινάκιον Γ' ἔχει προσαρμοσθῇ ἀριθμητικῶς, εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, μὲ πολλαπλασιαστὰς τὰ νέα στοιχεῖα αὐτοῦ. Ἡ ἀναπροσαρμογὴ αὐτὴ δυνατὸν νὰ γίνεται μὲ ἀφετηρίαν τὸ πινάκιον Α' ἢ τὸ πινάκιον Β'. Οὕτω, π.χ., τὸ $Π_1$ εἰς τὸ πινάκιον γ' πρέπει νὰ ἔχῃ

Πινάκιον Γ'

Κ.Κ.	→					2	2	3	4	6
	Β	Π_0	Π_6	Π_7	Π_8	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
→ 2	Π_2	10	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			1		$\frac{1}{2}$	
6	Π_5	40		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	Π_8	60	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2		1	$-\frac{1}{2}$	
Ο.Κ.	→	260	1	2		4				

Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τοῦ πινακίου Γ' συνάγεται ὅτι : α) Τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ νέου προγράμματος (260 ν.μ.) εἶναι ἀνώτερον τοῦ καθαροῦ κέρδους τοῦ προηγουμένου προγράμματος (240 ν.μ.). β) Οὐδὲν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι ἀρνητικόν· συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον Simplex, τὸ πινάκιον Γ' περιέχει τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως, ἤτοι $\Pi_2 : 10$, $\Pi_5 : 40$ καὶ $\Pi_8 : 60$ καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ πρέπει νὰ σταματήσουν. Τὸ ζητούμενον μέγιστον κέρδος εἶναι 260 νομισματικαὶ μονάδες.

Τὰ ἀποτελέσματα τοῦ πινακίου Γ' ἱκανοποιοῦν ἐπίσης τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Οὕτω ἔχομεν :

Ἐπίπεδον δράσεως τοῦ $\Pi_1 = \lambda_1 = 0$

» » » $\Pi_2 = \lambda_2 = 10$

» » » $\Pi_3 = \lambda_3 = 0$

» » » $\Pi_4 = \lambda_4 = 0$

» » » $\Pi_5 = \lambda_5 = 40$

στοιχεῖα α, β, γ τοιαῦτα ὥστε : $\alpha\Pi_2 + \beta\Pi_5 + \gamma\Pi_8 = \Pi_4$, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰ διανύσματα Π_2, Π_5, Π_8 καὶ Π_4 ὡς ταῦτα ἐμφανίζονται εἰς τὸ πινάκιον Α', ἤ : $\alpha'\Pi_2 + \beta'\Pi_5 + \gamma'\Pi_8 = \Pi_4$, ἂν ἐκφράσωμεν τὰ διανύσματα ταῦτα ὑφ' οἵαν μορφὴν ἐμφανίζονται εἰς τὸ πινάκιον Β'. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀντιστοίχων συστημάτων θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha = \alpha' = 1/2, \quad \beta = \beta' = 1/2, \quad \gamma = \gamma' = -1/2.$$

'Επίπεδον ἀδρανείας τοῦ $\Pi_6 = \lambda_6 = 0$

» » » $\Pi_7 = \lambda_7 = 0$

» » » $\Pi_8 = \lambda_8 = 60$ (1)

Συνεπῶς αἱ (6) καὶ (7) (2) γίνονται :

$$\varphi(\lambda) = 2 \times 0 + 2 \times 10 + 3 \times 0 + 4 \times 0 + 6 \times 40 = 260 = \text{μέγιστον}$$

καὶ $\quad 0\Pi_1 + 10\Pi_2 + 0\Pi_3 + 0\Pi_4 + 40\Pi_5 + 0\Pi_6 + 0\Pi_7 + 60\Pi_8 = \Pi_0$

ἢ ἀναλυτικώτερον :

$$0 \times 2 + 10 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 2 + 40 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 0 + 60 \times 0 = 100$$
$$0 \times 2 + 10 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 40 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 1 + 60 \times 0 = 80$$
$$0 \times 0 + 10 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 1 + 40 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 60 \times 1 = 150$$

'Εκθέτομεν κατωτέρω συστηματικῶς τὸ εὑρεθὲν πρόγραμμα :

Ἄριστον πρόγραμμα δράσεως τῆς ἐπιχειρήσεως Ε

'Επιλεγεῖσαι Παρ. Δραστ. (Ε.π.δ.)	'Επίπεδον δράσεως Ε.π δ.	Κέρδος κατὰ μονάδα Ε.π.δ.	Σύνολον κέρδους ἐξ ἑκάστης Ε.π.δ.	Συνολικὸν κέρδος τοῦ προγράμματος	'Αχρησιμοποίητος ποσότης συντελεστοῦ
Π_2	10	2	20	$\boxed{240}$	60 μον. ἐκ τοῦ συντελ. Γ
Π_5	40	6	240		

Παρατηρήσεις. 1. Τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου μεγιστοποιήσεως (3) παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον.

Τὸ πρῶτον στοιχεῖον παριστᾷ πάντοτε τὸ «μέγιστον» οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα (κέρδος, παραγωγὴ κλπ.).

1) 'Η μὴ χρησιμοποίησις τῶν 60 μονάδων τοῦ συντελεστοῦ Γ ὀφείλεται προφανῶς εἰς τὴν ἔλλειψιν ἀντιστοίχων ποσοτήτων ἐκ τῶν συμπληρωματικῶν συντελεστῶν Α καὶ Β (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν).

2) Βλ. σ. 258.

3) «Πινάκιον μεγιστοποιήσεως» καλεῖται συνήθως τὸ τελευταῖον πινάκιον τῶν ὑπολογισμῶν, εἰς τὰ προβλήματα μεγιστοποιήσεως.

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ διανύσματα ἀδρανείας, ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους διαθεσίμους ποσότητας συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα, λαμβάνομεν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ μέγιστον κέρδος. Οὕτω, ἐνταῦθα :

$$1 \times 100 + 2 \times 80 + 0 \times 150 = 260$$

Ἡ σχέσις αὕτη ὀφείλεται εἰς τὴν λεγομένην «δυαδικὴν» φύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἕκαστον πρόβλημα μεγιστοποιήσεως ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓν «δυαδικὸν» πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως καὶ ἀντιστρόφως. Αἱ λύσεις τῶν δύο προβλημάτων δίδονται ὑπὸ τοῦ τελικοῦ πινακίου τῶν ὑπολογισμῶν. Ἐνταῦθα τὰ στοιχεῖα 1, 2, 0 τῆς τελευταίας σειρᾶς, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ διανύσματα ἀδρανείας, ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ «δυαδικοῦ» προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως. Τὴν σχέσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν πρὸς ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῶν ὑπολογισμῶν. Ἂν τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα γινομένων δίδῃ ἀποτέλεσμα διάφορον τοῦ πρώτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς, τότε οἱ ὑπολογισμοὶ εἶναι λανθασμένοι.

Ἡ ἀνάπτυξις τῆς σημασίας τῆς δυαδικῆς φύσεως τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, ὡς καὶ ἡ λύσις τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ πρόβλημα μεγιστοποιήσεως τῆς ἐπιχειρήσεως Ε, γίνεται εἰς τὸ τελευταῖον τμῆμα τοῦ παρόντος κεφαλαίου.

γ) Τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι μὴ ἀρνητικά. τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὴν βάσιν ἑνὸς ἐκ τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων δὲν αὐξάνει τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα, δυνατὸν δὲ νὰ τὸ μειώσῃ. Εἰδικώτερον, τὸ στοιχεῖον 4, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα Π_1, ὑποδηλοῖ ὅτι ἡ χρησιμοποίησις τῆς δραστηριότητος αὐτῆς θὰ προεκάλει ζημίας εἰς τὴν ἐπιχείρησιν Ε. Τὸ ὕψος τῶν ζημιῶν θὰ ἦτο ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τοῦ ἀντιστοίχου προϊόντος ω_1 ἐπὶ 4, ἤτοι ἐπὶ τὴν κατὰ μονάδα ζημίαν τὴν ὁποίαν ἀκριβῶς παριστᾷ τὸ στοιχεῖον 4. Τὰ μηδενικὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς μὴ ἐπιλεγείσας παραγωγικὰς δραστηριότητας Π_3 καὶ Π_4, ἔχουν τὴν ἔννοιαν ὅτι ἡ εἰσαγωγὴ ἑκάστης τῶν δραστηριοτήτων αὐτῶν εἰς τὸ πρόγραμμα, κατόπιν βεβαίως ἐξαγωγῆς ἐξ αὐτοῦ μιᾶς (ἢ περισσοτέρων) ἐκ τῶν συμπεριληφθεισῶν ἤδη δραστηριοτήτων, δὲν προκαλεῖ μεταβολὴν εἰς τὸ συνολικὸν κέρδος (260 ν.μ.) τῆς ἐπιχειρήσεως Ε. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐν προκειμένῳ, ἔχομεν ***περισσοτέρας τῆς μιᾶς ἀρίστας λύσεις***, δηλαδὴ λύσεις αἱ ὁποῖαι, ὑπὸ τὰς δοθείσας τεχνικοοικονομικὰς συνθήκας, συμφέρουν ἐξ ἴσου τὴν ἐπιχείρησιν καὶ δὲν «δεσπόζονται» ὑπὸ οὐδεμιᾶς καλυτέρας λύσεως.

Τὸ πινάκιον Δ', κατωτέρω, δεικνύει μίαν νέαν ἀρίστην λύσιν εἰς τὸ δοθὲν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως, ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς εἰσαγωγῆς εἰς τὸ πρόγραμμα τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος $Π_3$ καὶ ἐξαγωγῆς τῆς $Π_8$ ([1]).

Πινάκιον Δ'

Κ.Κ.	→					2	2	3	4	6
	Β	$Π_0$	$Π_6$	$Π_7$	$Π_8$	$Π_1$	$Π_2$	$Π_3$	$Π_4$	$Π_5$
2	$Π_2$	10	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			1		$\frac{1}{2}$	
6	$Π_5$	10	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	2			$\frac{3}{4}$	1
3	$Π_3$	60	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2		1	$-\frac{1}{2}$	
Ο.Κ.	→	260	1	1		6			4	

Οὕτω, μετὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς $Π_3$ τὸ κέρδος παραμένει εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν 260 νομισματικῶν μονάδων. Τὸ νέον πρόγραμμα ἐκτίθεται κατωτέρω συστηματικῶς :

Ἐπιλεγεῖσαι Παρ. δραστηριότητες (Ε.π.δ.)	Ἐπίπεδον δράσεως (Ε.π.δ.)	Κέρδος κατὰ μονάδα (Ε.π.δ.)	Συνολικὸν κέρδος τοῦ Προγράμματος	Ἀχρησιμοποίητες ποσότητες συντελεστῶν
$Π_2$	10	2		
$Π_3$	60	3	260	οὐδεμία
$Π_5$	10	6		

Εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας σημειώσεως ὅτι μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς $Π_3$ εἰς τὸ πρόγραμμα οὐδεμία ποσότης ἐκ τῶν συντελεστῶν Α, Β, Γ παραμένει ἀχρησιμοποίητος. Ἐνταῦθα ὑπετέθη ὅτι ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς δὲν ζημιώνει τὴν ἐπιχείρησιν. Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως ζημία εἶναι δυνατὸν νὰ προκληθῇ λόγῳ, π.χ. ἐξόδων

1) Ὡς παρατηροῦμεν εἰς τὸ πινάκιον Δ', ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ $Π_3$ εἰς τὴν βάσιν εἰς ἐπίπεδον 60 ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν μείωσιν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ $Π_5$ ἀπὸ 40 εἰς 10, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἀπελευθερωθοῦν αἱ ἀναγκαῖαι ποσότητες συντελεστῶν αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ὡς ἄνω ἐπιπέδου τοῦ $Π_3$.

ἀποθηκεύσεως τῶν ἀχρησιμοποιήτων ποσοτήτων ἢ ἀδυναμίας διατηρήσεως αὐτῶν. Ὑπὸ τοιαύτας συνθήκας ἡ λύσις τοῦ πινακίου Δ', ἥτις ὁδηγεῖ εἰς πλήρη χρησιμοποίησις (ἢ ἀπασχόλησιν) τῶν διατιθεμένων ποσοτήτων συντελεστῶν παραγωγῆς, θὰ ἠδύνατο νὰ προκριθῇ ἀντὶ τῆς λύσεως τοῦ πινακίου Γ' (1).

Σύνοψις τῆς ὑπολογιστικῆς διαδικασίας. Ἡ διαδικασία λύσεως τῶν προβλημάτων μεγιστοποιήσεως δύναται νὰ συνοψισθῇ ὡς ἀκολούθως·

α) Ταξινόμησις καὶ ἔλεγχος τῶν πληροφοριῶν. Ἀπαιτοῦνται συνήθως πληροφορίαι περί: 1) τῆς ποσότητος καὶ τοῦ εἴδους τῶν διαθεσίμων οἰκονομικῶν μέσων (συντελεστῶν παραγωγῆς ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν), 2) τῶν διαθεσίμων μεθόδων δράσεως (παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν) καὶ 3) τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος (κέρδους, παραγωγῆς κλπ.) τὸ ὁποῖον ἐπιζητεῖται ὅπως καταστῇ μέγιστον, πρὸς διατύπωσιν τοῦ κριτηρίου ἐπιλογῆς.

β) Καθορισμὸς διανυσμάτων ἀδρανείας.

γ) Διατύπωσις τοῦ προβλήματος (καὶ ἔλεγχος τῆς «γραμμικότητος» αὐτοῦ).

δ) Κατάρτισις τοῦ πινακίου Α' δι' εἰσαγωγῆς τῶν πληροφοριῶν καὶ τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας εἰς τὰς οἰκείας θέσεις καὶ δι' ἐγγραφῆς τῶν στοιχείων τῆς πρώτης σειρᾶς εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς τελευταίας σειρᾶς μὲ ἀντίθετον σημεῖον.

ε) Καθορισμὸς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος (βλ. σελ. 265).

στ) Καθορισμὸς τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος (βλ. σ.σ. 265-266).

ζ) Κατάστρωσις τοῦ δευτέρου πινακίου ὡς ἀκολούθως:

1) Εἰσαγωγὴ τοῦ εἰσερχομένου διανύσματος εἰς τὴν βάσιν.

2) Ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ νέου διανύσματος (βλ. σελ. 270).

3) Ὑπολογισμὸς τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ πινακίου (βλ. σ.σ. 270 καὶ 271).

η) Ἐπισκόπησις τοῦ δευτέρου πινακίου πρὸς καθορισμόν:

1) Τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος τοῦ νέου προγράμματος.

2) Τῆς δυνατότητος περαιτέρω βελτιώσεως τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος (ἐφαρμογὴ «κριτηρίου Simplex»).

Ἂν ὑπάρχῃ δυνατότης βελτιώσεως, τότε ἐπιβάλλεται:

θ) Κατάρτισις τρίτου πινακίου κατὰ τὰ γνωστά, κ.ο.κ., μέχρις ὅτου ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ κριτηρίου Simplex δείξῃ ὅτι ἐπετεύχθη τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως ἢ ὅτι λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἀδύνατος.

---

1) Ἡ λύσις τοῦ πινακίου Γ' θὰ ἔδιδε ἐξ ἄλλου εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην κέρδος ὀλιγώτερον τῶν 260 ν.μ., καθ' ὅσον ἐκ τοῦ κέρδους τῶν 260 ν.μ. θὰ ἔπρεπε νὰ ἀφαιρεθοῦν αἱ ζημίαι ἐκ τῆς μὴ πλήρους χρησιμοποιήσεως τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς.

ι) Ἔλεγχος τῆς οἰκονομικῆς λογικῆς τοῦ «ἀρίστου» προγράμματος δράσεως διὰ συσχετίσεως πρὸς τὰ δεδομένα καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος.

ια) Συστηματικὴ διατύπωσις τοῦ εὑρεθέντος «ἀρίστου» προγράμματος δράσεως διὰ σαφοῦς καθορισμοῦ: 1) τοῦ εἴδους καὶ τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν, 2) τοῦ συνολικῶς ἐπιτυγχανομένου οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ προγράμματος, 3) τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τοῦ προγράμματος ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πινακίων ὑπολογισμοῦ δὲν εἶναι συνήθως μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς, δυνατὸν δὲ νὰ εἶναι πολὺ μικρότερος. Πρὸς διευκόλυνσιν τῶν ὑπολογισμῶν συνιστῶνται τὰ ἀκόλουθα: α) Χρῆσις τετραγωνισμένου χάρτου διὰ τὴν κατάστρωσιν τῶν πινακίων, β) ἐνσωμάτωσις τῶν πινακίων εἰς ἕνα συνεχῆ πίνακα, οὕτως ὥστε νὰ ἀποφεύγεται ἡ ἐπανάληψις τῶν δύο πρώτων σειρῶν καὶ νὰ διευκολύνεται ὁ ὑπολογισμὸς ἑκάστου πινακίου δι' ἀμέσου συσχετίσεως πρὸς τὸ προηγούμενον πινάκιον, γ) Ὅταν τὸ «εἰσερχόμενον» διάνυσμα ἔχῃ ἓν ἢ περισσότερα μηδενικὰ στοιχεῖα, τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν σειρῶν τῶν μηδενικῶν στοιχείων μεταφέρονται ἀναλλοίωτα εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τοῦ νεοκαταρτιζομένου πινακίου. Ὁμοίως, πάντα τὰ στοιχεῖα τῶν στηλῶν αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς μηδενικὰ στοιχεῖα τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος μεταφέρονται ἀναλλοίωτα εἰς τὰς ἀντιστοίχους θέσεις τοῦ νεοκαταρτιζομένου πινακίου. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν μηδενισμὸν τοῦ ὑπὸ στοιχ. 2 τῆς σελ. 270 προσδιοριζομένου γινομένου. Εἰς τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις εἶναι νομίζομεν σκόπιμον νὰ σημειοῦνται αἱ ἐν λόγῳ στῆλαι ἢ σειραί, τὰ δὲ στοιχεῖα των νὰ μεταφέρωνται ἀμέσως εἰς τὸ νέον πινάκιον.

11.3. Μαθηματικὴ Ἀνάλυσις

11.3.1. Γενικά. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων καθίσταται σαφὲς ὅτι τὸ γενικὸν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ δύναται (κατόπιν μετατροπῆς τῶν ἀνισοτήτων εἰς ἰσότητας) νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

$$\mathrm{K}\Lambda = \varphi(\lambda)\ \mu\varepsilon\gamma \tag{1}$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς:

$$\mathrm{T}\Lambda = \Pi_0 \tag{2}$$

καὶ

$$\Lambda \geqslant 0 \tag{3}$$

ὅπου Κ, Λ, Τ καὶ Π_0 εἶναι μῆτραι τάξεως $1\times\nu$, $\nu\times 1$, $\mu\times\nu$ καὶ $\mu\times 1$, ἀντιστοίχως. Αἱ στῆλαι τῆς Τ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν καὶ ὡς ὑπομῆτραι (διανύσματα) τάξεως $\mu\times 1$, ἤτοι :

$$T \equiv [\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\nu]$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ διάνυσμα Λ τὸ ὁποῖον νὰ ἱκανοποιῇ ταυτοχρόνως τὰς (1), (2) καὶ (3), ἀνωτέρω.

Ἐκ τῆς θεωρίας τῶν γραμμικῶν συστημάτων ἐξισώσεων (βλ. 3.8) γνωρίζομεν ὅτι ἓν σύστημα τῆς μορφῆς (2) ἔχει λύσιν μόνον ἂν $\rho(T)=\rho(T, \Pi_0)$, ἤτοι ἂν ὁ βαθμὸς τῆς μήτρας Τ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν βαθμὸν τῆς ἐπηυξημένης μήτρας (T, Π_0). Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι τὸ διάνυσμα Π_0 δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν στηλῶν (διανυσμάτων) τῆς μήτρας Τ, ὅπερ οἰκονομικῶς σημαίνει ὅτι οἱ περιορισμοὶ τοῦ τεθέντος προβλήματος εἶναι μὴ συμβιβαστοί. Ἐξ ἄλλου ἂν $\rho(\Pi)=\rho(T, \Pi_0)=\nu$, ὅπου ν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων λ_i τοῦ συστήματος, ἤτοι τῶν στοιχείων τοῦ Λ, τὸ σύστημα (2) ἔχει μίαν μόνον λύσιν. Τὸ σύστημα ἔχει ἀπείρους λύσεις ἂν $\rho(T)=\rho(T, \Pi_0)<\nu$. Ἡ τελευταία αὕτη περίπτωσις παρουσιάζει πράγματι ἐνδιαφέρον ἀπὸ ἀπόψεως Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, καθ' ὅσον, δοθέντος ἑνὸς κριτηρίου ἐπιλογῆς, ὡς εἶναι π.χ. τὸ κριτήριον (1) ἀνωτέρω, δύναται τότε νὰ τεθῇ ζήτημα ἐπιλογῆς μιᾶς (ἢ περισσοτέρων) ἐκ τῶν ἀπείρων λύσεων τοῦ συστήματος (2).

Εἰς τὴν ἐπακολουθοῦσαν ἀνάλυσιν θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σύστημα (2) ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις. Ἐπὶ πλέον θὰ θέσωμεν $\rho(T)=\mu$, ὅπερ σημαίνει ὅτι οὐδεμία ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (2) πλεονάζει, ἤτοι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν συμβάλλει εἰς τὴν διαμόρφωσιν τοῦ «συνόλου» τῶν λύσεων ([1]).

11.3.2. Ὁρισμοί. Συμφώνως πρὸς τὰ ἤδη λεχθέντα (βλ. σ.σ. 260-261), πᾶσα λύσις τῆς (2) ἱκανοποιοῦσα ἐπίσης καὶ τὴν (3) ἀποτελεῖ ***πραγματοποιήσιμον λύσιν*** τοῦ προβλήματος, πᾶσα δὲ πραγματοποιήσιμος λύσις ἱκανοποιοῦσα ταυτοχρόνως καὶ τὴν (1) ἀποτελεῖ ***ἀρίστην λύσιν*** αὐτοῦ. Μία πραγματοποιήσιμος λύσις ἔχουσα ὄχι περισσότερα ἀπὸ μ στοιχεῖα λ_i θετικὰ καλεῖται ***βασικὴ*** ([2]) ***πραγματοποιήσιμος λύσις***. Θὰ ὀνομάζωμεν ***βασικὴν ἀρίστην λύσιν*** πᾶσαν βασικὴν πραγματοποιήσιμον λύσιν ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ ἐπίσης καὶ τὴν (1).

11.3.3. Βασικὰ θεωρήματα. Προβαίνομεν ἤδη εἰς τὴν διατύπωσιν καὶ ἀπόδειξιν θεωρημάτων τινῶν βασικῆς σημασίας διὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

---

1) Βλ. καὶ σ. 112, ἀνωτέρω.
2) Βλ. καὶ σ. 90, ἀνωτέρω.

Θεώρημα 1ον. Ἂν $Λ_1$ καὶ $Λ_2$ εἶναι δύο πραγματοποιήσιμοι λύσεις εἰς τὸ σύστημα (2), ὁ κυρτὸς συνδυασμός [1] : $ξΛ_1 + (1-ξ)Λ_2$ διὰ $0 \leqslant ξ \leqslant 1$, ἀποτελεῖ ἐπίσης πραγματοποιήσιμον λύσιν τοῦ συστήματος (2).

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς : Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως

$$TΛ_1 = Π_0 \quad \text{καὶ} \quad TΛ_2 = Π_0 ,$$

θὰ εἶναι καί :

$$T[ξΛ_1 + (1-ξ)Λ_2] = ξTΛ_1 + (1-ξ)TΛ_2 = ξΠ_0 + (1-ξ)Π_0 = Π_0.$$

Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ τὰ στοιχεῖα τῶν $Λ_1$ καὶ $Λ_2$ εἶναι μὴ ἀρνητικά, τὰ στοιχεῖα τῆς νέας λύσεως θὰ εἶναι ἐπίσης μὴ ἀρνητικά, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ξ μεταξὺ μηδὲν καὶ 1.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος προκύπτει ὅτι τὸ σημειοσύνολον τῶν λύσεων ἑνὸς προβλήματος Γραμμικοῦ Προγραμματισμαῦ εἶναι ***κυρτὸν σύνολον*** [2].

Ὁρισμός : Θὰ ὀνομάζωμεν ***ἀκραίαν λύσιν***, πᾶσαν πραγματοποιήσιμον λύσιν, ἥτις παριστᾶται δι' ἑνὸς ἀκραίου σημείου [3] τοῦ κυρτοῦ συνόλου τῶν λύσεων. Ἐν ἄλλοις λόγοις μία ἀκραία λύσις δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γνήσιος κυρτὸς συνδυασμός [4] δύο ἄλλων ***πραγματοποιησίμων λύσεων***.

Θεώρημα 2ον. Ἐὰν $Λ_1$ καὶ $Λ_2$ εἶναι δύο ἄριστοι λύσεις ὑπάρχουν ἄπειροι ἄριστοι λύσεις.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐξ ὁρισμοῦ $KΛ_1 = KΛ_2 = φ(λ)\,μεγ$. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα 1, ἐπειδὴ πᾶς κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν $Λ_1$ καὶ $Λ_2$ ἀποτελεῖ πραγματοποιήσιμον λύσιν, θὰ εἶναι τοιαύτη λύσις καὶ πᾶς γνήσιος κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν $Λ_1$ καὶ $Λ_2$, ἤτοι : $ξΛ_1 + (1-ξ)Λ_2$, διὰ $0 < ξ < 1$. Ἀλλὰ

$$K[ξΛ_1 + (1-ξ)Λ_2] = ξKΛ_1 + (1-ξ)KΛ_2 = φ(λ)\,μεγ.,$$

ἤτοι ἡ νέα λύσις εἶναι ἐπίσης ἀρίστη λύσις.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προέκυψεν ὅτι ἂν ἓν πρόβλημα Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἔχῃ πλείονας τῆς μιᾶς ἀρίστας λύσεις, ἔχει ἀπείρους ἀρίστας λύσεις.

---

1) Βλ. σ. 110, ἀνωτέρω.
2) Βλ. καὶ ὁρισμὸν κυρτοῦ συνόλου εἰς σ. 109, ἀνωτέρω.
3) Βλ. σ. 111, ἀνωτέρω.
4) Βλ. σ. 110, ἀνωτέρω.

Θεώρημα 3ον. Μία πραγματοποιήσιμος λύσις Λ εἶναι ἀκραία λύσις ἂν περιλαμβάνῃ οὐχὶ πλείονας τοῦ μ θετικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων λ_ι, τὰ δὲ διανύσματα (στῆλαι) τῆς Τ τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὰς ἀποτελοῦν σύνολον γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων.

Ἐπειδὴ ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις ἡ λύσις Λ εἶναι βασικὴ πραγματοποιήσιμος λύσις (βλ. 11.3.2) δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸ θεώρημα 3 καὶ ὡς ἑξῆς: Πᾶσα βασικὴ πραγματοποιήσιμος λύσις Λ εἶναι ἀκραία λύσις.

Ἀπόδειξις: Ἔστω ὅτι τὰ πρῶτα $\xi \leqslant \mu$ διανύσματα (στῆλαι) τῆς Τ, ἤτοι τὰ $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\xi$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

Ἐξ ὑποθέσεως θὰ ἔχωμεν τότε:

$$\sum_{\iota=1}^{\xi} \lambda_\iota \Pi_\iota = \Pi_0$$

καὶ $$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$, ἥτις εἶναι βασικὴ πραγματοποιήσιμος λύσις (1).

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ Λ δὲν εἶναι ἀκραία λύσις. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφράσωμεν ταύτην ὡς γνήσιον κυρτὸν συνδυασμὸν δύο ἄλλων πραγματοποιησίμων λύσεων Λ_1, καὶ Λ_2, ἐχουσῶν τυπικὰ στοιχεῖα λ^1_ι, καὶ λ^2_ι, ἀντιστοίχως, ἤτοι:

$$\Lambda = \alpha\Lambda_1 + (1-\alpha)\,\Lambda_2 \quad \text{καὶ} \quad 0 < \alpha < 1$$

ἢ $$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\lambda^1_1 \\ \alpha\lambda^1_2 \\ \vdots \\ \alpha\lambda^1_\xi \\ \alpha\lambda^1_{\xi+1} \\ \vdots \\ \alpha\lambda^1_\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\alpha)\lambda^2_1 \\ (1-\alpha)\lambda^2_2 \\ \vdots \\ (1-\alpha)\lambda^2_\xi \\ (1-\alpha)\lambda^2_{\xi+1} \\ \vdots \\ (1-\alpha)\lambda^2_\nu \end{bmatrix}$$

1) Ἂν $\xi < \mu$ ἔχομεν τὴν περίπτωσιν τῆς ἐκφυλισμένης βασικῆς λύσεως (βλ. ὑποσημ. σ. 90, ἀνωτέρω).

Καὶ ἐπειδὴ $0 < \alpha < 1$ καὶ $\lambda_i^1, \lambda_i^2 > 0$ θὰ εἶναι καὶ $\lambda_i^1 = \lambda_i^2 = 0$ διὰ $i = \xi+1, \ldots, \nu$. Συνεπῶς αἱ Λ_1 καὶ Λ_2 εἶναι βασικαὶ πραγματοποιήσιμοι λύσεις. Ἤτοι :

$$\sum_{i=1}^{\xi} \lambda_i^1 \Pi_i = \Pi_0 \quad \text{καὶ} \quad \sum_{i=1}^{\xi} \lambda_i^2 \Pi_i = \Pi_0 .$$

Συνεπῶς :

$$\sum_{i=1}^{\xi} \lambda_i^1 \Pi_i - \sum_{i=1}^{\xi} \lambda_i^2 \Pi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{\xi} (\lambda_i^1 - \lambda_i^2)\, \Pi_i = \mathbf{0}$$

δηλαδὴ τὰ διανύσματα Π_i ($i = 1, \ldots, \xi$) ἀποτελοῦν σύνολον γραμμικῶς ἐξηρτημένων διανυσμάτων [1], ὅπερ ἀντίκειται πρὸς τὴν ἀρχικὴν ὑπόθεσιν ὅτι ταῦτα ἀποτελοῦν σύνολον γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων. Ἑπομένως συμπεραίνομεν ὅτι ἡ λύσις Λ εἶναι ἀκραία λύσις.

Θεώρημα 4ον. Ἐὰν Λ εἶναι μία ἀκραία λύσις, τὰ διανύσματα (στῆλαι) τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς θετικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων λ_i τῆς Λ ἀποτελοῦν σύνολον γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων.

Ἀπόδειξις: Ἔστω ὅτι θετικὰς τιμὰς λαμβάνουν αἱ πρῶται $\xi < \mu$ μεταβληταὶ λ_i τῆς Λ, ὁπότε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν : $\sum_{i=1}^{\xi} \lambda_i \Pi_i = \Pi_0$. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ ὡς ἄνω ξ διανύσματα Π_i εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα τότε θὰ εἶναι κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ $\sum_{i=1}^{\xi} \zeta_i \Pi_i = \mathbf{0}$, διὰ τιμὰς τῶν ζ_i οὐχὶ πάσας ἴσας πρὸς τὸ μηδέν. Συνεπῶς διὰ πᾶσαν σταθερὰν α θὰ ἔχωμεν : $\sum_{i=1}^{\xi} (\lambda_i + \alpha\zeta_i)\, \Pi_i = \Pi_0$ καὶ $\sum_{i=1}^{\xi} (\lambda_i - \alpha\zeta_i)\, \Pi_i = \Pi_0$. Ἂν ἐπιλέξωμεν καταλλήλως μίαν θετικὴν τιμὴν τοῦ α, δυνάμεθα προφανῶς νὰ ἐξασφαλίσωμεν τὴν μὴ ἀρνητικότητα τῶν $(\lambda_i + \alpha\zeta_i)$ καὶ $(\lambda_i - \alpha\zeta_i)$. Κατὰ συνέπειαν αἱ λύσεις $\Lambda_1 = (\lambda_i + \alpha\zeta_i, \ldots, \lambda_\xi + \alpha\zeta_\xi, 0, \ldots, 0)$ καὶ $\Lambda_2 = (\lambda_i - \alpha\zeta_i, \ldots, \lambda_\xi - \alpha\zeta_\xi, 0, \ldots, 0)$ εἶναι δύο πραγματοποιήσιμοι λύσεις, βάσει τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἀντίκειται πρὸς τὴν ἀρχικὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ λύσις Λ εἶναι ἀκραία καὶ συνεπῶς (συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμὸν) δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς δύο ἄλλων πραγματοποιησίμων λύσεων. Συνεπῶς τὰ ξ διανύσματα Π_i εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

Τὸ θεώρημα 4 εἶναι προφανῶς τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος 3

1) Βλ. σ. 67, ἀνωτέρω.

καὶ θὰ ἠδύνατο νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς : Πᾶσα ἀκραία λύσις εἶναι βασικὴ πραγματοποιήσιμος λύσις, ἤτοι περιλαμβάνει οὐχὶ πλείονας τῶν μ θετικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν λ_ι .

Θεώρημα 5ον. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκραίων λύσεων εἰς τὸ σύστημα (2) εἶναι πεπερασμένος.

Ἀπόδειξις: Βάσει τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων, ἑκάστη ἀκραία λύσις εἶναι βασικὴ πραγματοποιήσιμος λύσις καὶ ἀντιστρόφως. Συνεπῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκραίων λύσεων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν βασικῶν λύσεων. Ἐξ ἄλλου [1] ὁ ἀριθμὸς τῶν βασικῶν λύσεων εἰς τὸ σύστημα (2) εἶναι πεπερασμένος καὶ δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμὸν $\Sigma^\mu_\nu = \dfrac{\nu!}{\mu!\,(\nu-\mu)!}$. Οὕτω καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν βασικῶν πραγματοποιησίμων λύσεων, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ἓν μέρος τοῦ συνόλου τῶν βασικῶν λύσεων, εἶναι ἐπίσης πεπερασμένος.

Θεώρημα 6ον (θεμελιῶδες). Τουλάχιστον μία ἐκ τῶν ἀκραίων λύσεων εἶναι ἀρίστη λύσις [2].

Ἀπόδειξις: Ὡς γνωρίζομεν [3], δοθέντος ἑνὸς κυρτοῦ συνόλου, πᾶν σημεῖον αὐτοῦ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν ἀκραίων σημείων τοῦ συνόλου. Κατὰ συνέπειαν, δοθέντος τοῦ κυρτοῦ συνόλου τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων τοῦ συστήματος (2), ἑκάστη πραγματοποιήσιμος λύσις (σημεῖον) δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν ἀκραίων λύσεων (σημείων) τοῦ ἐν λόγῳ συνόλου. Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι αἱ ἀκραῖαι λύσεις εἶναι $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_\rho$, καὶ ἔστω ἡ ἀρίστη λύσις Λ, ἤτοι ἡ μεγιστοποιοῦσα τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $K\Lambda = \varphi(\lambda)$. Αὕτη δύναται νὰ γραφῇ ὡς $\Lambda = \sum_{\iota=1}^{\rho} \alpha_\iota \Lambda_\iota$, ὅπου $\sum_{\iota=1}^{\rho} \alpha_\iota = 1$ καὶ ἕκαστον $\alpha_\iota \geqslant 0$. Οὕτω :

$$K\Lambda = K\,(\sum_{\iota=1}^{\rho} \alpha_\iota \Lambda_\iota)\,(^4) = \sum_{\iota=1}^{\rho} \alpha_\iota K \Lambda_\iota = \varphi(\lambda) \text{ μεγ.}$$

Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ Λ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀκραίων λύσεων

1) Βλ. σ. 91, ἀνωτέρω.

2) Τὸ θεώρημα τοῦτο θὰ ἠδύνατο νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: Ἡ γραμμικὴ συνάρτησις $K\Lambda = \kappa_1\lambda_1 + \kappa_2\lambda_2 + \ldots + \kappa_\nu\lambda_\nu = \varphi(\lambda)$ λαμβάνει τὴν ἀρίστην (μεγίστην) τιμὴν αὐτῆς εἰς ἓν ἀκραῖον σημεῖον τοῦ συνόλου τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων τοῦ συστήματος $T\Lambda = \Pi_0$.

3) Βλ. σ. 111, ἀνωτέρω.

4) Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις μεγιστοποιήσεως, ἡ ὁποία ἐκφράζεται εἰς τὸ πρόβλημά μας ὡς $K\Lambda = \varphi(\lambda)$μεγ., εἶναι γραμμική.

Λ_ι $(\iota = 1, \ldots, \rho)$ τότε ἔχομεν: $K\Lambda \geqslant K\Lambda_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, \rho)$. Ἔστω ἤδη ὅτι μία ἐκ τῶν ἀκραίων λύσεων, ἡ Λ_β, δίδει $K\Lambda_\beta \geqslant K\Lambda_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, \rho)$. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς: $K\Lambda \leqslant K \sum_{\iota=1}^{\rho} \alpha_\iota \Lambda_\beta = K\Lambda_\beta$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι ἡ Λ εἶναι ἀρίστη λύσις θὰ εἶναι $K\Lambda = K\Lambda_\beta$, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ ἀκραία λύσις Λ_β εἶναι ἀρίστη λύσις. Ἀνάλογος διαδικασία ἀποδείξεως ἰσχύει καὶ εἰς περίπτωσιν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι ἐὰν ὑπάρχῃ μία ἀρίστη λύσις, ὑπάρχει μία ἀκραία ἀρίστη λύσις καὶ συνεπῶς μία βασικὴ ἀρίστη λύσις. Ἐξ ἄλλου ([1]) ἂν ὑπάρχουν πλείονες τῆς μιᾶς ἀκραῖαι ἄριστοι λύσεις, ὑπάρχουν ἄπειροι ἄριστοι λύσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν ἀκραίων ἀρίστων λύσεων. Ἐν ἄλλοις λόγοις αἱ ἀκραῖαι ἄριστοι λύσεις ἀποτελοῦν τὰ ἀκραῖα σημεῖα ἑνὸς κυρτοῦ συνόλου ἀρίστων λύσεων, τὸ ὁποῖον εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων.

11.3.4. Ὁ ἀλγόριθμος Simplex. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων προκύπτουν τὰ ἑξῆς σημαντικὰ συμπεράσματα.

α) Πρὸς ἐντοπισμὸν τῆς ἀρίστης λύσεως (ἢ λύσεων) εἰς ἓν πρόβλημα Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἀρκεῖ ἡ ἐξέτασις *μόνον* τῶν ἀκραίων, ἢ ἄλλως, τῶν βασικῶν πραγματοποιησίμων λύσεων (θεώρημα 6ον).

β) Ἡ διαδικασία ἐξετάσεως τῶν ἀκραίων λύσεων δὲν εἶναι ἀτέρμων, ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκραίων λύσεων εἶναι πεπερασμένος (θεώρημα 5ον).

γ) Ἐὰν ὑπάρχουν δύο ἄριστοι λύσεις, ὑπάρχουν ἄπειροι ἄριστοι λύσεις (θεωρήματα 2 καὶ 6).

δ) Ἡ ἀρίστη λύσις δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν μ ([2]) θετικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν λ_ι (θεωρήματα 2 καὶ 4).

Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ θεώρημα (5) ἐγγυᾶται τὸ πεπερασμένον τῆς διαδικασίας ἀναζητήσεως μεταξὺ τῶν ἀκραίων λύσεων τῆς ἀρίστης λύσεως, εἰς περιπτώσεις σχετικῶς μεγάλων προβλημάτων δυνατὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν πρὸς ἐξέτασιν ἀκραίων λύσεων νὰ εἶναι τόσον μέγας ὥστε νὰ καθίσταται πρακτικῶς ἀδύνατος ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ὡς ἄνω διαδικασίας. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἀπαιτεῖται ἡ χρησιμοποίησις μιᾶς ὑπολογιστικῆς τεχνικῆς ἡ ὁποία νὰ περιορίζῃ οὐσιωδῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πρὸς ἐξέτασιν λύσεων, χωρὶς ταυτοχρόνως νὰ δημιουργῇ κίνδυνον παρακάμψεως τῆς ἀρίστης λύσεως. Ἡ μέθοδος Simplex, ἐπινοηθεῖσα ὑπὸ τοῦ

1) Βλ. καὶ θεώρημα 2, ἀνωτέρω.

2) μ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος $T\Lambda = \Pi_0$, ὁ ὁποῖος ὑπετέθη ὅτι εἶναι ἴσος πρὸς τὸν βαθμὸν τῶν μητρῶν T καὶ (T, Π_0). Εἰς τὸ ἀριθμητικὸν παράδειγμα τοῦ τμήμ. 11.2, ὅπου $\mu = 3$, ἤτοι ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς (Α, Β καὶ Γ), ἡ ἀρίστη λύσις περιλαμβάνει τρεῖς θετικὰς τιμὰς τῶν λ_ι (βλ. σ. 274).

Ἀμερικανοῦ μαθηματικοῦ George Dantzig, ἀποτελεῖ μίαν τοιαύτην τεχνικήν.

Διὰ τῆς μεθόδου Simplex ἐπιδιώκεται : α) Ὁ προσδιορισμὸς μιᾶς ἀρχικῆς ἀκραίας λύσεως. β) Ὁ ἔλεγχος αὐτῆς βάσει ἑνὸς κριτηρίου διὰ προσδιορισθῇ ἂν εἶναι ἀρίστη ἢ ὄχι. Εἰς καταφατικὴν περίπτωσιν οὐδεὶς ἐπὶ πλέον ὑπολογισμὸς ἀπαιτεῖται. Ἄλλως γ) ἀναζητεῖται μία νέα ἀκραία λύσις, κ.ο.κ., μέχρις ὅτου τὸ κριτήριον ἐλέγχου δείξῃ ὅτι ἐπετεύχθη ἡ ζητουμένη ἀρίστη λύσις ἢ ὅτι οὐδεμία τοιαύτη λύσις ὑπάρχει (1).

Προσδιορισμὸς τῆς ἀρχικῆς ἀκραίας λύσεως Εἰς τὸ ληφθὲν ἀριθμητικὸν παράδειγμα (βλ. 11.2) ἡ ἀρχικὴ ἀκραία λύσις ἢ ἄλλως βασικὴ πραγματοποιήσιμος λύσις δίδεται σχεδὸν αὐτομάτως διὰ τῆς μετατροπῆς τῶν ἀνισοτήτων τοῦ συστήματος ἀνισοτήτων (3) εἰς τὸ σύστημα ἐξισώσεων (5) (2). Ἡ λύσις αὕτη εἶναι (3) :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \quad \text{καὶ} \quad \lambda_6 = 100, \quad \lambda_7 = 80 \quad \text{καὶ} \quad \lambda_8 = 150,$$

ὅπου λ_6, λ_7 καὶ λ_8 εἶναι βασικαὶ μεταβληταί, ἀναφερόμεναι εἰς τὰ μοναδιαῖα διανύσματα Π_6, Π_7, Π_8, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν βάσιν τοῦ τριδιαστάτου χώρου. Τὰ διανύσματα ταῦτα, τὰ ὁποῖα ἐκαλέσαμεν εἰδικώτερον «διανύσματα ἀδρανείας», ἀποτελοῦν ὁμοῦ μετὰ τῶν ἐπιπέδων χρησιμοποιήσεως αὐτῶν (ἤτοι τῶν τιμῶν τῶν λ_6, λ_7, λ_8) τὸ πρῶτον πρόγραμμα.

Πάντα τὰ διανύσματα $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_8$, δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν κατὰ τρόπον μοναδικὸν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως Π_6, Π_7 καὶ Π_8 (4). Ἀπὸ οἰκονομικῆς ἀπόψεως τοῦτο ἔχει μεγάλην σημασίαν, διότι ἐξασφαλίζεται τοιουτοτρόπως ἡ δυνατότης ἐξετάσεως διανυσμάτων μὴ περιεχομένων εἰς τὸ δοθὲν πρόγραμμα, κατὰ τὴν διαδικασίαν τῆς συγκρίσεως τῆς ἀναφερομένης εἰς σελ. 263, ἀνωτέρω. Ἂν τὰ διανύσματα τοῦ προγράμματος δὲν ἀπετέλουν βάσιν τοῦ χώρου εἰς ὃν ἀνήκουν πάντα τὰ διανύσματα τῆς ἐπηυξημένης τεχνολογικῆς μήτρας T* (βλ. σ. 259), εἴτε δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ δοθὲν διάνυσμα ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν πρώτων, εἴτε θὰ ὑπῆρχον πολλοὶ τρόποι ἐκφράσεως αὐτοῦ ὡς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν διανυσμάτων τοῦ προ-

1) Δυνατὸν νὰ προκύπτῃ, ὡς θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἡ λύσις εἶναι «ἄφρακτος», ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς σχετικῆς συναρτήσεως ἀριστοποιήσεως τείνει εἰς τὸ ∞, ἢ τὸ −∞, ἀναλόγως ἂν πρόκειται διὰ συνάρτησιν μεγιστοποιήσεως ἢ ἐλαχιστοποιήσεως, ἀντιστοίχως.

2) Βλ. σσ. 256 καὶ 257.

3) Βλ. σ. 261.

4) Λόγῳ τῆς φύσεως τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων, οἱ πολλαπλασιασταὶ τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ εἶναι αὐτὰ ταῦτα τὰ στοιχεῖα τοῦ ἐκφραζομένου διανύσματος (βλ. σ. 73 καὶ σ. 263).

γράμματος καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ ἦτο λίαν δυσχερὴς ὑπολογιστικῶς ἡ σύγκρισις τῆς σ. 263.

Πολλάκις, ἰδίᾳ προκειμένου περὶ προβλημάτων μεγιστοποιήσεως, ὡς τὸ ἐξεταζόμενον εἰς 11.2, ἀνωτέρω, ἡ ἁπλῆ μετατροπὴ τῶν ἀνισοτήτων εἰς ἰσότητας ἐξασφαλίζει τὴν πρώτην βασικὴν πραγματοποιήσιμον λύσιν. Ἐὰν ὅμως τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν, προχωροῦμεν, μετὰ τὴν μετατροπὴν τῶν ἀνισοτήτων εἰς ἰσότητας, εἰς τὴν χρησιμοποίησιν θετικῶν «πλασματικῶν μεταβλητῶν», ἀντιστοιχουσῶν εἰς μοναδιαῖα διανύσματα, κατὰ τὴν ἐφαρμοζομένην διαδικασίαν εἰς τὸ δυαδικὸν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως (βλ. 11.4).

Συνθήκη ἀριστοποιήσεως. Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀκραίας ἢ βασικῆς πραγματοποιησίμου λύσεως, πρέπει νὰ ἐξετασθῇ ἂν αὕτη εἶναι ἀρίστη λύσις, ἤτοι λύσις μεγιστοποιοῦσα τὴν τιμὴν τῆς ***συναρτήσεως - σιόχου*** [1], εἰς περίπτωσιν προβλήματος μεγιστοποιήσεως ἢ ἡ ἐλαχιστοποιοῦσα τὴν τιμὴν τῆς ἐν λόγῳ συναρτήσεως, εἰς περίπτωσιν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως.

Ἂς λάβωμεν ἐκ νέου τὸ πρόβλημα μεγιστοποιήσως : $T\Lambda = \Pi_0$, $\Lambda > 0$ καὶ $K\Lambda = \varphi(\lambda)$μεγ. Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι : α) αἱ μ πρῶται στῆλαι τῆς μήτρας ἀποτελοῦν μίαν βάσιν, Β, τοῦ μ-διαστάτου χώρου [2], ἤτοι ἔχομεν $B = [\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\mu]$, β) τὸ διάνυσμα :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_\mu \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

μὲ θετικὰ στοιχεῖα λ_i, εἶναι μία ἀκραία λύσις τοῦ τεθέντος προβλήματος.

Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς :

$$\lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2 + \ldots + \lambda_\mu \Pi_\mu = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \Pi_i = \Pi_0 \qquad (1)$$

1) «Συνάρτησιν - στόχον» θὰ ὀνομάζωμεν τὴν συνάρτησιν ἥτις ἀποτελεῖ κριτήριον ἀριστοποιήσεως. Εἰς τὸ ληφθὲν ἀριθμητικὸν παράδειγμα αὕτη ἦτο ἡ συνάρτησις κέρδους φ(λ).

2) Δυνάμεθα νὰ ἀριθμήσωμεν καταλλήλως τὰ διανύσματα Π_i τῆς Τ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἡ ὑπόθεσις (α).

μὲ τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(\lambda)$:

$$\kappa_1\lambda_1 + \kappa_2\lambda_2 + \ldots + \kappa_\mu\lambda_\mu = \sum_{\iota=1}^{\mu} \kappa_\iota\lambda_\iota = \zeta_0 \tag{2}$$

Ἂν θέσωμεν $K_B = (\kappa_1, \kappa_1, \ldots, \kappa_\mu)$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀντὶ τῆς (2).

$$K_B \Lambda_B = \zeta_0 \tag{2'}$$

Ἕκαστον διάνυσμα Π_ι ($\iota = 1, \ldots, \nu$) τῆς Τ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τῆς Β, κατὰ τρόπον μοναδικόν. Ἂς λάβωμεν, π.χ., τὸ διάνυσμα Π_σ. Τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ ὡς:

$$\Pi_\sigma = \alpha_{1\sigma}\Pi_1 + \alpha_{2\sigma}\Pi_2 + \ldots + \alpha_{\mu\sigma}\Pi_\mu = \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\iota\sigma}\Pi_\iota \tag{3}$$

ὅπου $\alpha_{\iota\sigma}$ ($\iota = 1, \ldots, \mu$) εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ Π_σ ὡς πρὸς τὴν βάσιν Β. Ἐν ἄλλοις λόγοις:

$$\overline{\Pi}_\sigma = B^{-1}\Pi_\sigma \tag{4}$$

ὅπου $\overline{\Pi}_\sigma$ εἶναι ἡ νέα μορφὴ τοῦ Π_σ, μὲ στοιχεῖα $\alpha_{\iota\sigma}$. Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον:

$$K_B\overline{\Pi}_\sigma = \zeta_\sigma \tag{5}$$

δεικνύει τὴν συνολικὴν ἀξίαν (κέρδος) ἥτις δίδεται ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\mu$, εἰς ἐπίπεδα $\alpha_{1\sigma}$, $\alpha_{2\sigma}, \ldots, \alpha_{\mu\sigma}$, ἀντιστοίχως. Ὁρίζομεν τὴν διαφοράν:

$$\zeta_\sigma - \kappa_\sigma \tag{6}$$

ὅπου κ_σ εἶναι τὸ κέρδος τοῦ Π_σ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος. Ἤδη δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

Δοθείσης μιᾶς ἀκραίας (βασικῆς πραγματοποιησίμου) λύσεως εἰς τὸ ὑπ' ὄψιν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως, ἀντιστοιχούσης εἰς τιμὴν τῆς $\varphi(\lambda)$: ζ_0 $(= K_B \Delta_B)$, ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι μεγίστη ἐάν:

$$\zeta_\sigma - \kappa_\sigma \geqslant 0 \tag{7}$$

διὰ πᾶν διάνυσμα Π_σ τῆς μήτρας T, τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει εἰς τὴν βάσιν B.

Ἂς λάβωμεν τυχοῦσαν πραγματοποιήσιμον λύσιν:

$$x_\iota \geqslant 0 \qquad \iota = 1, 2, \ldots, \nu$$

$$x_1\Pi_1 + x_2\Pi_2 + \ldots + x_\nu\Pi_\nu = \Pi_0 \tag{8}$$

ἥτις δίδει τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(\lambda)$:

$$\zeta^* = \kappa_1 x_1 + \kappa_2 x_2 + \ldots + \kappa_\nu x_\nu \tag{9}$$

βάσει τῆς (3), ἡ (8) δύναται νὰ γραφῇ ὡς κάτωθι :

$$x_1 \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\iota 1} \Pi_\iota + x_2 \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\iota 2} \Pi_\iota + \ldots + x_\nu \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\iota \nu} \Pi_\iota = \Pi_0 \tag{10}$$

Ἐκ τῆς (10), θέτοντες ἐκτὸς παρενθέσεως τὰ $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\mu$, λαμβάνομεν :

$$(\sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa \alpha_{1\kappa}) \Pi_1 + (\sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa \alpha_{2\kappa}) \Pi_2 + \ldots + (\sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa \alpha_{\mu\kappa}) \Pi_\mu = \Pi_0 \tag{11}$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ διάνυσμα Π_0 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ κατὰ τρόπον μοναδικὸν μέσῳ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως $[\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\mu]$, συγκρίνοντες πρὸς τὴν (1), θὰ ἔχωμεν :

$$\lambda_\iota = \sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa \alpha_{\iota\kappa}, \qquad \iota = 1, 2, \ldots, \mu \tag{12}$$

Ἂς ἐξετάσωμεν ἤδη τὴν συνάρτησιν (9).

Προφανῶς ἕκαστον διάνυσμα Π_κ τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὴν βάσιν B, ἐκφραζόμενον ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τῆς B θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned} \Pi_\kappa &= \rho_1 \Pi_1 + \rho_2 \Pi_2 + \ldots + \rho_\kappa \Pi_\kappa + \ldots + \rho_\mu \Pi_\mu = \\ &= 0 \cdot \Pi + 0 \cdot \Pi_2 + \ldots + 1 \cdot \Pi_\kappa + \ldots + 0 \cdot \Pi_\mu \end{aligned} \tag{13}$$

Κατὰ συνέπειαν θὰ εἶναι καί :

$$\zeta_\kappa = 0 \cdot \kappa_1 + 0 \cdot \kappa_2 + \ldots + 1 \cdot \kappa_\iota + \ldots + 0 \cdot \kappa_\mu = \kappa_\kappa \tag{14}$$

Οὕτω :

$$\zeta_\kappa - \kappa_\kappa = 0 \tag{15}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ (7) ἰσχύει ὄχι μόνον διὰ τὰ ἐκτὸς τῆς βάσεως διανύσματα τῆς T, ὡς ὑπετέθη, ἀλλὰ καὶ διὰ τὰ διανύσματα τῆς βάσεως. Ἐν ἄλλοις λόγοις :

$$\zeta_\sigma \geqslant \kappa_\sigma \qquad \text{διὰ} \quad \sigma = 1, 2, \ldots, \nu$$

Ἑπομένως, ἐκ τῆς (9) θὰ ἔχωμεν :

$$\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \ldots + \zeta_\nu x_\nu \geqslant \zeta^* \tag{16}$$

καθ' ὅσον τὰ x εἶναι μὴ ἀρνητικά.

Βάσει τῆς (5), ἡ (16) γράφεται ὡς :

$$(K_B \overline{\Pi}_1) x_1 + \ldots + (K_B \overline{\Pi}_\nu) x_\nu \geqslant \zeta^* \tag{17}$$

ὅπου $\overline{\Pi}_1, \ldots, \overline{\Pi}_\nu$, εἶναι ἡ μορφὴ τῶν διανυσμάτων $\Pi_1, \ldots, \Pi_\nu$, ἐκφραζομένων μέσῳ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως B. Θέτοντες ἐκτὸς παρενθέσεως τὰ $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\mu$, λαμβάνομεν :

$$(\sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa \alpha_{1\kappa}) \kappa_1 + \ldots + (\sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa \alpha_{\mu\kappa}) \kappa_\mu \geqslant \zeta^* \tag{18}$$

ἥτις, βάσει τῆς (12), γίνεται :

$$\zeta_0 = \lambda_1 \kappa_1 + \lambda_2 \kappa_2 + \ldots + \lambda_\mu \kappa_\mu \geqslant \zeta^* \tag{19}$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ τιμὴ ζ_0 τῆς $\varphi(\lambda)$, εἶναι ἴση ἢ μεγαλυτέρα πάσης ἄλλης τιμῆς ζ^*, ἀντιστοιχούσης εἰς μίαν πραγματοποιήσιμον λύσιν. Ἐν ἄλλοις λόγοις ἡ τιμὴ ζ_0 εἶναι μεγίστη.

Βελτίωσις δοθείσης βασικῆς πραγματοποιησίμου (καὶ μὴ ἀρίστης) λύσεως. Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν δὲν ἰσχύει ἡ συνθήκη (7), ὁπότε ἔχομεν :

$$\zeta_\sigma - \kappa_\sigma < 0 \tag{20}$$

διὰ μίαν τουλάχιστον τιμὴν τοῦ σ, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως - στόχου δὲν εἶναι μεγίστη, ἑπομένως ἐπιβάλλεται ἡ συνέχισις τῆς διαδικασίας ἀναζητήσεως τῆς ἀρίστης λύσεως.

Ἂς λάβωμεν ἐκ νέου τὴν βασικὴν πραγματοποιήσιμον λύσιν $\Lambda_B = B^{-1}\Pi_0$, ἥτις δίδει τιμὴν $\zeta_0 = K_B \Lambda_B$ εἰς τὴν συνάρτησιν - στόχον, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $\zeta_\sigma - \kappa_\sigma < 0$, διὰ μίαν τουλάχιστον τιμὴν τοῦ σ.

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει ὅτι :

$$\Pi_\sigma - \sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\iota\sigma} \Pi_\iota = \mathbf{0} \tag{21}$$

Προσθέτοντες τὴν ὡς ἄνω ταυτότητα, πολλαπλασιαζομένην ἐπὶ θ, εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν :

$$\theta \Pi_\sigma + \sum_{\iota=1}^{\mu} (\lambda_\iota - \theta \alpha_{\iota\sigma}) \Pi_\iota = \Pi_0 \tag{22}$$

Ἡ (22) ἀποτελεῖ μίαν πραγματοποιήσιμον λύσιν ἐὰν $\theta \geqslant 0$ καὶ $\lambda_\iota - \theta\alpha_{\iota\sigma} \geqslant 0$ διὰ $\iota = 1, \ldots, \mu$.

Ἡ ἀντίστοιχος ἀξία τῆς συναρτήσεως - στόχου θὰ εἶναι :

$$\zeta' = \theta \kappa_\sigma + \sum_{\iota=1}^{\mu} (\lambda_\iota - \theta \alpha_{\iota\sigma}) \kappa_\iota \tag{23}$$

Ἀλλὰ $\zeta_0 = K_B \Lambda_B = \sum_{i=1}^{\mu} \kappa_i \lambda_i$ καὶ $\zeta_\sigma = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{i\sigma} \kappa_i$. Συνεπῶς ἡ (23) δύναται νὰ γραφῇ:

$$\zeta' = \zeta_0 - \theta(\zeta_\sigma - \kappa_\sigma) \tag{24}$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $\zeta_\sigma - \kappa_\sigma < 0$, θὰ ἔχωμεν $\zeta' > \zeta_0$ διὰ πᾶσαν τιμὴν $\theta > 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει συμφέρει ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ ἀντιστοίχου διανύσματος Π_σ εἰς τὸ πρόγραμμα. Εἰδικώτερον διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ διανύσματος Π_σ ἐκλέγομεν τὸ διάνυσμα τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ $\zeta_\sigma - \kappa_\sigma < 0$ μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν (¹). Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ διανύσματος τὸ ὁποῖον δέον νὰ ἐξέλθῃ ἐκ τῆς βάσεως (ἤτοι ἐκ τοῦ προγράμματος) ἀντικαθιστώμενον ὑπὸ τοῦ Π_σ, σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως: Ὡς εἴπομεν, διὰ νὰ εἶναι πραγματοποιήσιμος ἡ νέα λύσις, πρέπει νὰ ἔχωμεν $\theta > 0$ καὶ $\lambda_i - \theta\alpha_{i\sigma} > 0$. Ἂν $\alpha_{i\sigma} < 0$ διὰ πᾶσαν τιμὴν i, ἡ λύσις εἶναι πραγματοποιήσιμος διὰ *πᾶσαν* θετικὴν τιμὴν τοῦ θ. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ αὐξήσωμεν ἀπεριορίστως τὴν τιμὴν τοῦ θ, αὐξάνοντες ἐπίσης ἀπεριορίστως καὶ τὴν τιμὴν τῆς ζ'. Ὁμιλοῦμεν τότε περὶ ***ἀφράκτου λύσεως***. Ἂν $\alpha_{i\sigma} > 0$, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\lambda_i}{\alpha_{i\sigma}} \geq \theta \quad \text{διὰ} \quad i = 1, 2, \ldots, \mu$$

Εἰδικώτερον ἄν:

$$\frac{\lambda_\rho}{\alpha_{\rho\sigma}} = \theta \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda_\rho - \theta\alpha_{\rho\sigma} = 0$$

διὰ δοθεῖσαν τιμὴν ρ τοῦ i, τὸ ἀντίστοιχον διάνυσμα Π_ρ περιέχεται εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ ἐπίπεδον $0 (= \lambda_\rho - \theta\alpha_{\rho\sigma})$, ἐν ἄλλοις λόγοις ἐξέρχεται τῆς βάσεως. Κατὰ συνέπειαν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐξερχομένου διανύσματος, ἐκ τῶν πηλίκων $\pi_i = \lambda_i / \alpha_{i\sigma}$ ἐκλέγομεν τὸ διάνυσμα τῆς βάσεως τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ***μικρότερον*** π_i. Καὶ ἐπειδὴ $\lambda_i > 0$, ἐξετάζομεν μόνον τὰ πηλῖκα π_i διὰ τὰ ὁποῖα $\alpha_{i\sigma} > 0$ (²).

Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ «εἰσερχομένου» καὶ «ἐξερχομένου» διανύσματος, σχηματίζεται ἡ νέα βάσις, πάντα δὲ τὰ διανύσματα τῆς μήτρας (T, Π_0), πρέπει νὰ προσαρμοσθοῦν ἀριθμητικῶς, εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως ταύτης. Οὕτω π.χ., ἂν $\bar{B}$ εἶναι ἡ νέα βάσις, τυχὸν διάνυσμα Π_ρ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\bar{\Pi}_\rho$, εἰς τρόπον ὥστε θὰ ἔχωμεν:

$$\Pi_\rho = \bar{B}\bar{\Pi}_\rho, \quad \text{ἤτοι} \quad \bar{\Pi}_\rho = \bar{B}^{-1}\Pi_\rho$$

Οἱ σχετικοὶ ὑπολογισμοὶ διὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναπροσαρμογὴν

1) Βλ. καὶ σ. 265, ἀνωτέρω.
2) Βλ. καὶ σ.σ. 265 - 266, ἀνωτέρω.

τῶν διανυσμάτων τῆς μήτρας (T, Π_0) πρὸς τὴν νέαν βάσιν δύνανται νὰ συνοψισθοῦν ὡς κάτωθι:

1) Πᾶν στοιχεῖον $\alpha_{\rho\kappa}$ [1] τῆς ὡς ἄνω μήτρας μετατρέπεται εἰς $\alpha'_{\rho\kappa}$ δι' ἁπλῆς διαιρέσεως βάσει τοῦ ἀξονικοῦ στοιχείου $\alpha_{\rho\sigma}$:

$$\alpha'_{\rho\kappa} = \frac{\alpha_{\rho\kappa}}{\alpha_{\rho\sigma}} \qquad \kappa = 1, 2, \ldots, \nu, \nu+1$$

ὅπου ὁ δείκτης $\nu+1$ ἀναφέρεται εἰς τὸ διάνυσμα Π_0.

2) Πᾶν στοιχεῖον $\alpha_{\iota\kappa}$ (διὰ $\iota \neq \rho$) μετατρέπεται εἰς $\alpha'_{\iota\kappa}$ βάσει τοῦ τύπου:

$$\alpha'_{\iota\kappa} = \alpha_{\iota\kappa} - \frac{\alpha_{\iota\sigma}}{\alpha'_{\rho\kappa}} \quad \text{διὰ} \quad \kappa = 1, 2, \ldots, \nu+1$$

3) Πᾶν στοιχεῖον $\zeta_\kappa - \kappa_\kappa$ μετατρέπεται εἰς $(\zeta_\kappa - \kappa_\kappa)'$ βάσει ἀναλόγου τύπου:

$$(\zeta_\kappa - \kappa_\kappa)' = (\zeta_\kappa - \kappa_\kappa) - \frac{\zeta_\sigma - \kappa_\sigma}{\alpha'_{\rho\kappa}}$$

Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ἀντικαταστάσεως δοθέντος διανύσματος Π_ρ τῆς βάσεως δι' ἑτέρου διανύσματος Π_σ ἐκτὸς αὐτῆς καὶ ἀναπροσαρμογῆς πάντων τῶν διανυσμάτων $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\nu$, Π_0 εἰς τὴν νέαν βάσιν, ἀποτελεῖ κατ' οὐσίαν ἐφαρμογὴν τῆς γνωστῆς μεθόδου ἀπαλοιφῆς Gauss - Jordan, διὰ τῆς ὁποίας, ἐκκινοῦντες ἀπὸ δοθὲν κανονικὸν σύστημα ἐξισώσεων, καταλήγομεν εἰς ἕτερον τοιοῦτον [2]. Ὁ ἀλγόριθμος Simplex ἀποτελεῖ εἰδικὴν ἐφαρμογὴν τῆς ὡς ἄνω μεθόδου, καθ' ὅσον βασίζεται εἰς τὴν ἐπιλογὴν ἑνὸς *ὡρισμένου* ἀξονικοῦ στοιχείου, χρησιμοποιουμένου διὰ τὴν ἀπαλοιφήν, κατὰ τὰ εἰδικώτερον ἀναπτυσσόμενα εἰς σ. 94 κ.ἑ. Τὸ ἐν λόγῳ ἀξονικὸν στοιχεῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς στήλης ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $\zeta_\sigma - \kappa_\sigma < 0$ μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ εἰς τὴν σειρὰν ἡ ὁποία δίδει τὸ μικρότερον μὴ ἀρνητικὸν πηλίκον $\lambda_\iota \,/\, \alpha_{\iota\sigma}$. Ὡς εὐκόλως δύναται νὰ διαπιστωθῇ, ἡ διαδικασία μεταβάσεως ἐξ ἑνὸς πινακίου εἰς ἕτερον, εἰς τὸ ἀριθμητικὸν παράδειγμα τοῦ τμήμ. 11.2, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν μετάβασιν ἀπὸ μιᾶς ἀκραίας (ἤτοι βασικῆς πραγματοποιησίμου) λύσεως εἰς ἑτέραν τοιαύτην, μέσῳ τῆς διαδικασίας Gauss - Jordan, κατόπιν καταλλήλου ἐπιλογῆς, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τοῦ ἀξονικοῦ στοιχείου ἐφ' οὗ στηρίζεται ἡ ἑκάστοτε ἐφαρμοζομένη διαδικασία ἀπαλοιφῆς.

Προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως. Τὰ προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ δὲν διαφέρουν κατ' οὐσίαν ὑπο-

1) ρ εἶναι ὁ δείκτης τοῦ ἐξερχομένου διανύσματος τῆς βάσεως.

2) Βλ. σ. 96, ἀνωτέρω.

λογιστικῶς ἀπὸ τὰ προβλήματα μεγιστοποιήσεως. Μαθηματικῶς, δοθὲν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως θὰ ἠδύνατο νὰ μετατραπῇ εἰς ἓν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως, τὸ ὁποῖον διαφέρει ἀπὸ τὸ πρῶτον μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τῆς συναρτήσεως - στόχου. Οὕτω, π.χ. ἂν ἐπιδιώκεται ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς συναρτήσεως : $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_\nu x_\nu$, βάσει ὡρισμένων περιορισμῶν, τὸ σχετικὸν πρόβλημα δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ἓν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως, εἰς τὸ ὁποῖον ἐπιδιώκεται ἡ μεγιστοποίησις τῆς συναρτήσεως : $-\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \ldots - \alpha_\nu x_\nu$, βάσει τῶν αὐτῶν περιορισμῶν.

Θὰ ἠδυνάμεθα ἐν τούτοις νὰ ἐφαρμόσωμεν εὐθέως τὴν διαδικασίαν τῆς μεθόδου Simplex διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως, ἄνευ μετατροπῆς αὐτοῦ εἰς πρόβλημα μεγιστοποιήσεως. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως - στόχου εἰς τὸ πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως ἐπιδιώκεται νὰ καταστῇ ὅσον τὸ δυνατὸν μικροτέρα, δοθείσης μιᾶς βασικῆς πραγματοποιησίμου λύσεως, ἡ λύσις αὕτη εἶναι ἀρίστη ἂν $\zeta_\sigma - \kappa_\sigma < 0$, διὰ $\sigma = 1, 2, \ldots, \nu$. Ἀντιθέτως ἂν $\zeta_\sigma - \kappa_\sigma > 0$ καὶ $\theta > 0$ ἡ δοθεῖσα λύσις δύναται νὰ βελτιωθῇ, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς αὐτῆς ἀκριβῶς διαδικασίας τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζομεν εἰς τὰ προβλήματα μεγιστοποιήσεως. Ἐκ τῆς (24) καθίσταται σαφὲς ὅτι δοθεῖσα τιμὴ τῆς συναρτήσεως - στόχου εἰς ἓν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως εἶναι ἐλαχίστη ἂν δι' οἱανδήποτε τιμὴν ζ' τῆς ἐν λόγῳ συναρτήσεως ἔχωμεν $\zeta_0 \leq \zeta'$, ὅπερ σημαίνει $\theta(\zeta_\sigma - \kappa_\sigma) \leq 0$, ἤτοι $\zeta_\sigma - \kappa_\sigma \leq 0$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ σ. Ἐκ τῆς (24) βλέπομεν ἐπίσης ὅτι ἡ τιμὴ ζ_0 βελτιοῦται, ἤτοι καθίσταται μικροτέρα, ἂν $(\zeta_\sigma - \kappa_\sigma) > 0$, διὰ μίαν τουλάχιστον τιμὴν τοῦ σ καὶ $\theta > 0$. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῶν (23) καὶ (24) προκύπτει ὅτι ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως - στόχου δύναται νὰ μειωθῇ ἀπεριορίστως ἂν $\zeta_\sigma - \kappa_\sigma > 0$ καὶ $\alpha_{\iota\sigma} \leq 0$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ι. Αὕτη εἶναι ἡ δευτέρα περίπτωσις «ἀφράκτου λύσεως» (1).

Κριτήριον *Simplex*. Δυνάμεθα τώρα νὰ διατυπώσωμεν τὸ κριτήριον Simplex (2) ὡς ἀκολούθως : Δοθείσης μιᾶς βασικῆς πραγματοποιησίμου λύσεως $\Lambda_B = B^{-1}\Pi_0$ εἰς τὸ σύστημα ἐξισώσεων $T\Lambda = \Pi_0$, μὲ τιμὴν τῆς συναρτήσεως - στόχου $\zeta_0 = K_B \Lambda_B$, ἡ ζ_0 εἶναι ἀρίστη, εἰς μὲν τὰ προβλήματα μεγιστοποιήσεως, ἂν $(\zeta_\sigma - \kappa_\sigma) \geq 0$, εἰς δὲ τὰ προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως ἂν $(\zeta_\sigma - \kappa_\sigma) \leq 0$, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ σ. Ἂν $\zeta_\sigma - \kappa_\sigma < 0$, διὰ τὰ πρῶτα καὶ $\zeta_\sigma - \kappa_\sigma > 0$, διὰ τὰ δεύτερα καὶ $\alpha_{\iota\sigma} > 0$ διὰ μίαν τουλάχιστον τιμὴν τοῦ ι, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως - στόχου δύναται νὰ βελτιωθῇ εἰς πᾶσαν θετικὴν τοῦ θ, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς εἰς τὴν βάσιν τοῦ

---

1) Βλ. διαδικασίαν ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου Simplex ἐπὶ προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως εἰς 11.4.3, κατωτέρω.

2) Βλ. καὶ σ. 272 ἀνωτέρω.

διανύσματος Π_σ, κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα. Ἂν $\alpha_{\iota\sigma} < 0$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ι, τότε τὸ Π_σ δύναται νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὸ πρόγραμμα εἰς οἱονδήποτε θετικὸν ἐπίπεδον θ (1).

Ὡς προκύπτει ἐκ τῆς προηγηθείσης ἀναλύσεως, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου Simplex ὁδηγούμεθα σταθερῶς εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς τελικῆς (ἀρίστης ἢ ἀφράκτου) λύσεως τοῦ προβλήματος. Ὡς εἴδομεν, ὅταν $\theta > 0$, εἰς ἕκαστον στάδιον ὑπολογισμῶν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως - στόχου αὐξάνει, προκειμένου περὶ τῶν προβλημάτων μεγιστοποιήσεως, ἂν $\zeta_\kappa - \kappa_\kappa < 0$ καὶ μειοῦται ἐπὶ προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως, ἂν $\zeta_\kappa - \kappa_\kappa > 0$. Κατὰ συνέπειαν εἰς ἕκαστον στάδιον ἕνας ἀριθμὸς βασικῶν πραγματοποιησίμων λύσεων ἀποκλείεται τῆς ἐξετάσεως, διότι αἱ λύσεις αὗται δὲν βελτιώνουν τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως - στόχου. Τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτὸ τῆς μεθόδου Simplex εἶναι λίαν σημαντικὸν ἀπὸ ὑπολογιστικῆς ἀπόψεως, διότι καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ἀποφασιστικὴν μείωσιν τοῦ ὄγκου ἐργασίας διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος. Οὕτω δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἐξετάσωμεν ὅλα τὰ ἀκραῖα σημεῖα τοῦ κυρτοῦ συνόλου τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀρίστης λύσεως. Διὰ τῆς μεθόδου Simplex, δοθείσης μιᾶς βασικῆς πραγματοποιησίμου (ἤτοι ἀκραίας) λύσεως, προχωροῦμεν εἰς τὴν ἀνίχνευσιν τῆς ἀρίστης λύσεως, μεταβαίνοντες ἀπὸ ἓν ἀκραῖον σημεῖον εἰς ἕτερον (γειτονικὸν) ἀκραῖον σημεῖον, κατὰ τρόπον ὥστε νὰ βελτιοῦται συνεχῶς ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως - στόχου. Οὕτω διὰ τῆς ἐν λόγῳ διαδικασίας ἀνιχνεύσεως ἀποκλείονται ἀκραῖα σημεῖα τὰ ὁποῖα ὁδηγοῦν εἰς χειροτέρευσιν τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως - στόχου.

Πρόβλημα δημιουργεῖται ἂν $\theta = 0$, ὁπότε, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς (24), ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως - στόχου δὲν μεταβάλλεται. Τιμὴ $\theta = 0$ δύναται νὰ προκύψῃ ἂν προσδιορίζωνται δύο (ἢ περισσότερα) ἐλάχιστα πηλίκα $\pi_\iota = \lambda_\iota / \alpha_{\iota\sigma}$, ἀντὶ ἑνός, ὡς ὑπεθέτομεν μέχρι τοῦδε. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει κατὰ τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὴν βάσιν ἑνὸς διανύσματος Π_σ ἐξέρχονται δύο (ἢ περισσότερα) διανύσματα ἐξ αὐτῆς. Οὕτω προκύπτει μία βασικὴ ἐκφυλισμένη λύσις (2) ἔχουσα ὀλιγωτέρας ἀπὸ μ (3) θετικὰς τιμὰς τῶν σχετικῶν ἀγνώστων. Δοθείσης μιᾶς τοιαύτης λύσεως, καθίσταται προφανὲς ὅτι εἶναι πιθανὸν νὰ ἔχωμεν εἰς τὴν συνέχειαν τῶν ὑπολογισμῶν $\pi_\iota = \lambda_\iota / \alpha_{\iota\sigma} = 0$, ἂν $\lambda_\iota = 0$. Καὶ ἐπειδὴ $\pi_\iota = 0$ εἶναι ἓν ἐλάχιστον μὴ ἀρνητικὸν πηλίκον, θὰ ἔχωμεν καὶ $\theta = 0$,

1) Ἐπειδὴ εἰς τὰ πραγματικὰ προβλήματα δὲν ἔχει συνήθως ἔννοιαν μία ἄφρακτος λύσις, δυνατὸν νὰ πρόκειται περὶ ἐσφαλμένης διατυπώσεως τοῦ ἐξεταζομένου προβλήματος.

2) Βλ. ὑποσ. σ. 90, ἀνωτέρω.

3) μ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως (βλ. σ. 279) ἴσον πρὸς τὸν βαθμὸν τῆς μήτρας Τ.

συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον ἐπιλογῆς τῆς τιμῆς τοῦ θ [1]. Ἐνταῦθα δὲν θὰ ἀσχοληθῶμεν εἰδικώτερον μὲ τὸ πρόβλημα τῆς ἐκφυλισμένης λύσεως, διὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ ὁποίου ἔχει ἀφιερωθῆ ἓν σημαντικὸν τμῆμα τῆς φιλολογίας τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἀπὸ ὑπολογιστικῆς ἀπόψεως ἡ περίπτωσις ἐκφυλισμένης λύσεως ἀντιμετωπίζεται μᾶλλον εὐχερῶς. Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ ἑκάστοτε ἐξερχομένου διανύσματος δύναται νὰ γίνῃ βάσει τῆς ὑποδεικνυομένης εἰς τὴν ὑποσημ. 4 τῆς σ. 266, ἀνωτέρω, μεθόδου [2].

11.4. Δυαδικότης

11.4.1. Ἔννοια τῆς δυαδικότητος. Ὡς ἤδη ἐλέχθη, εἰς ἕκαστον πρόβλημα μεγιστοποιήσεως ἀντιστοιχεῖ ἓν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως καὶ ἀντιστρόφως. Οὕτω, εἰς τὸ δοθὲν εἰς 11.2 πρόβλημα μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως Ε :

$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 = \varphi(\lambda) \text{ μέγιστον}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν :

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 < \Pi_0 ,$$

ἀντιστοιχεῖ τὸ πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως :

$$100\mu_1 + 80\mu_2 + 150\mu_3 = \psi(\mu) \text{ ἐλάχιστον}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν :

$$\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3 \geqslant P_0$$

ὅπου μ_1, μ_2, μ_3 εἶναι μεταβληταί, συσχετιζόμεναι πρὸς τὰ διανύσματα :

$$P_1 \equiv \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad P_2 \equiv \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad P_3 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ ἀντιστοίχως,}$$

---

1) Βλ. σ. 290, ἀνωτέρω.

2) Πρέπει νὰ σημειωθῆ ὅτι ὁ ἀλγόριθμος Simplex δὲν εἶναι ὁ μοναδικὸς ἀλγόριθμος ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Χρησιμοποιοῦνται ἐνίοτε καὶ ἄλλοι ἀλγόριθμοι, οἱ ὁποῖοι παρουσιάζουν ὑπολογιστικὰ πλεονεκτήματα εἰς εἰδικὰς κατηγορίας προβλημάτων. Βλ. σχετικῶς Charnes - Cooper : Management Models κ.τ.λ., Τόμος I. Wiley, N.Y. 1961.

καὶ
$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Τὸ ὡς ἄνω πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως χαρακτηρίζεται ὡς τὸ ***δυαδικὸν*** τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως, τὸ ὁποῖον καλεῖται ***ἀρχικὸν*** πρόβλημα. Ὁ λόγος τοῦ χαρακτηρισμοῦ αὐτοῦ ὀφείλεται εἰς τὴν μαθηματικὴν συμμετρίαν τῶν δύο προβλημάτων.

Ἂς διατυπώσωμεν ἐκ νέου ἀμφότερα τὰ προβλήματα ὑπὸ μορφὴν μητρῶν :

Ἀρχικὸν πρόβλημα (μεγιστοποιήσεως)	Δυαδικὸν πρόβλημα (ἐλαχιστοποιήσεως)
$[2\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 6] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \varphi(\lambda)$ μέγιστον	$[100\ \ 80\ \ 150] \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \psi(\mu)$ ἐλάχιστον
ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :	ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :
$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$
καὶ $\lambda_1, \ldots, \lambda_5 \geqslant 0$	καὶ $\mu_1, \mu_2\ \mu_3 \geqslant 0$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δύο προβλημάτων προκύπτουν τὰ ἀκόλουθα :

α) Ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβλητῶν μ τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνισοτήτων (α΄ σύστημα ἀνισοτήτων), τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν μεταβλητῶν λ τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνισοτήτων (α΄ σύστημα ἀνισοτήτων) τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος.

β) Ἡ μήτρα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος εἶναι ἡ ἐνηλλαγμένη τῆς μήτρας:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος. Δηλαδὴ ἀμφότεραι αἱ μῆτραι ἔχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα, ἀλλὰ αἱ σειραὶ τῆς μιᾶς ἀποτελοῦν στήλας τῆς ἄλλης.

γ) Ἡ ἐξίσωσις ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος περιλαμβάνει τὴν μήτραν:

$$[100 \quad 80 \quad 150],$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἐνηλλαγμένη τῆς μήτρας:

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix},$$

τοῦ δεξιοῦ σκέλους τοῦ α' συστήματος ἀνισοτήτων τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως.

δ) Ἡ ἐξίσωσις μεγιστοποιήσεως τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος περιλαμβάνει τὴν μήτραν:

$$[2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6],$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἐνηλλαγμένη τῆς μήτρας:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

τοῦ δεξιοῦ σκέλους τοῦ α' συστήματος ἀνισοτήτων τοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως.

ε) Εἰς τὸ δυαδικὸν πρόβλημα, τὸ ἀριστερὸν σκέλος τοῦ α' συστήματος ἀνισοτήτων συσχετίζεται πρὸς τὸ δεξιὸν σκέλος τοῦ συστήματος διὰ τοῦ συμβόλου $\geqslant$, τὸ ὁποῖον σημαίνει «οὐχὶ μικρότερον ἀπὸ . . .». Εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα, τὸ ἀριστερὸν σκέλος τοῦ συστήματος ἀνισοτήτων συσχετίζεται πρὸς τὸ δεξιὸν σκέλος τοῦ συστήματος διὰ τοῦ συμβόλου $\leqslant$, τὸ ὁποῖον σημαίνει «οὐχὶ μεγαλύτερον ἀπό . . .».

Τὰ δυαδικὰ χαρακτηριστικὰ β—ε καθίστανται πλέον ἐμφανῆ ἂν διατυπώσωμεν συνοπτικῶς τὰ δύο προβλήματα βάσει τοῦ συμβολισμοῦ τῆς σ. 258 καὶ θέτοντες :

$$M \equiv \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

Ἀρχικὸν Πρόβλημα	Δυαδικὸν Πρόβλημα
$K\Lambda$ μέγιστον	$\Pi_0' M$ ἐλάχιστον
ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :	ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :
$T\Lambda \leqslant \Pi_0$	$T' M \geqslant K'$
καὶ $\Lambda \geqslant 0$	καὶ $M \geqslant 0$

Ἡ συνισταμένη τῶν ὡς ἄνω χορακτηριστικῶν δυαδικότητος ἐκδηλοῦται εἰς τὴν θεμελιώδη σχέσιν (1) :

$$K\Lambda \text{ μέγιστον} = \Pi_0' M \text{ ἐλάχιστον}$$

Ἡ σχέσις αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως :

$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 = \varphi(\lambda),$$

ἥτις εὑρίσκεται διὰ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως, ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως :

$$100\,\mu_1 + 80\,\mu_2 + 150\,\mu_3 = \psi(\mu),$$

ἥτις δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως.

1) Ἐνταῦθα δὲν θὰ ἀσχοληθῶμεν εἰδικώτερον μὲ τὴν μαθηματικὴν θεωρίαν τῆς δυαδικότητος. Βλ. σχετικῶς Charnes, Cooper and Henderson : An Introduction to Linear Programming, Jhon Wiley N.Y. 1953.

Ἐάν τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα δὲν ἔχῃ λύσιν, τὸ δυαδικὸν πρόβλημα ἐπίσης δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ λύσιν.

Τὸ δυαδικὸν πρόβλημα εἶναι πρόβλημα μεγιστοποιήσεως ἂν τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἶναι πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἰσχύουν τὰ ἀνωτέρω περιγραφέντα χαρακτηριστικὰ τῆς δυαδικότητος.

11.4.2. Ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῆς δυαδικότητος. Ἡ δυαδικότης εἰς τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμὸν παρουσιάζει ἐξαιρετικὴν οἰκονομικὴν σπουδαιότητα. Τοῦτο θὰ καταστῇ σαφὲς ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ληφθέντος ἀριθμητικοῦ παραδείγματος.

Ὡς εἴδομεν, τὸ δυαδικὸν πρόβλημα τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως Ε εἶναι :

$$100\mu_1 + 80\mu_2 + 150\mu_3 = \psi(\mu) = \text{ἐλάχιστον} \qquad (1)$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν :

$$\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3 \geqslant P_0$$

ἤ, ἀναλυτικῶς :

$$\begin{aligned} 2\mu_1 + 2\mu_2 + 0\mu_3 &\geqslant 2 \\ 2\mu_1 + 0\mu_2 + \mu_3 &\geqslant 2 \\ \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 &\geqslant 3 \\ 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 &\geqslant 4 \\ 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 &\geqslant 6 \end{aligned} \qquad (2)$$

Ἂς ἐξετάσωμεν ἐν πρώτοις τὴν οἰκονομικὴν ἔννοιαν τῶν μεταβλητῶν μ_1, μ_2, μ_3.

Ὡς προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς συγκρίσεως πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος καὶ πρὸς τὰς διαπιστωθείσας σχέσεις δυαδικότητος, οἱ συντελεσταὶ τῶν μ: 100, 80 καὶ 150, εἰς τὴν συνάρτησιν $\psi(\mu)$, ἐκφράζουν τὰς εἰς τὴν διάθεσιν τῆς ἐπιχειρήσεως εὑρισκομένας ποσότητας τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως. Αἱ ποσότητες αὗται δὲν δύνανται βεβαίως νὰ προστεθοῦν ἀπ' εὐθείας, λόγῳ ἀνομοιογενείας. Ὅ,τι δύναται νὰ προστεθῇ εἶναι αἱ «ἀξίαι» τὰς ὁποίας ἀντιπροσωπεύουν αἱ ἐν λόγῳ ποσότητες. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ θεωρήσωμεν τὰς μεταβλητὰς μ_1, μ_2, μ_3, εἰς τὴν συνάρτησιν $\psi(\mu)$, ὡς ἀξίας ἢ «τιμὰς» τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως. Οὕτω, $100\mu_1$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ συνολικὴ ἀξία τῆς διαθεσίμου ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ Α, $80\mu_2$ ἡ συνολικὴ ἀξία τῆς διαθεσίμου ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ Β, καὶ $150\mu_3$ ἡ συνολικὴ ἀξία τῆς διαθεσίμου ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ Γ, ἡ δὲ συνάρτησις $\psi(\mu)$ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀξιῶν αὐτῶν. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἐπιδιώκεται νὰ καταστῇ ὅσον τὸ δυνατὸν μικρότερον.

Ἀλλ' ἤδη τίθεται τὸ ἐρώτημα: Ποία εἶναι ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν μεταβλητῶν μ_1, μ_2 καὶ μ_3 ὡς τιμῶν τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ;

Προφανῶς ἡ ἐπιχείρησις Ε ὀφείλει τὸ κέρδος αὐτῆς εἰς τὴν παραγωγήν της ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, εἰς τὰς ἀπαιτουμένας διὰ τὴν παραγωγὴν ταύτην ποσότητας συντελεστῶν. Ὁ καταλογισμὸς (imputation) τῆς συμβολῆς ἑκάστου συντελεστοῦ εἰς τὸ συνολικῶς ἐπιτυγχανόμενον κέρδος εἶναι δυνατός, ἐὰν ἐπιλεγοῦν «τιμαὶ» τῶν συντελεστῶν τοιαῦται ὥστε ἑκάστη νὰ ἐκφράζῃ τὴν συμβολὴν εἰς τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς παραγωγικῆς χρησιμοποιήσεως τῆς μονάδος τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ θεωρήσωμεν ὅτι αἱ «τιμαὶ» μ_1, μ_2, μ_3 ἀποτελοῦν πράγματι *ὑπολογιστικὰς τιμὰς* καταλογισμοῦ τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τοὺς συντελεστὰς Α, Β καὶ Γ. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὰ γινόμενα $100\mu_1$, $80\mu_2$, $150\mu_3$ ἐκφράζουν τὴν συμβολὴν τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως, εἰς τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως, τὸ δὲ ἄθροισμα: $100\mu_1 + 80\mu_2 + 150\mu_3$ δεικνύει τὴν κατανομὴν τοῦ κέρδους αὐτοῦ μεταξὺ τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν.

Ἤδη διευκρινίζεται εἰς σημαντικὸν βαθμὸν ἡ ἔννοια τῆς βασικῆς σχέσεως:

$$\varphi(\lambda) \text{ μέγιστον} = \psi(\mu) \text{ ἐλάχιστον}$$

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῶν μ_1, μ_2 καὶ μ_3 ἐκλέγονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ καθιστοῦν δυνατὴν τὴν πλήρη κατανομὴν τοῦ συνολικοῦ μεγίστου κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς Α, Β καὶ Γ, δὲν εἶναι νοητὸν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\psi(\mu)=100\mu_1+80\mu_2+150\mu_3$, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὴν κατανομὴν ταύτην, νὰ διαφέρῃ ἀπὸ τὸ συνολικὸν μέγιστον κέρδος, τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται ἀπὸ τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως:

$$\varphi(\lambda) = \angle\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5$$

Πλήρης κατανόησις τῆς οἰκονομικῆς ἐννοίας τῆς βασικῆς σχέσεως θὰ καταστῇ ἐν τούτοις δυνατὴ ὅταν διευκρινίσωμεν τὸν λόγον διὰ τὸν ὁποῖον ἡ συνολικῶς καταλογιζομένη ἀξία $\psi(\mu)$ πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη δυνατή.

Ὁ καταλογισμὸς τοῦ κέρδους, ὑπὸ τὴν ὡς ἄνω ἔννοιαν, δύναται ἐπίσης νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς παραγωγῆς τῆς μονάδος ἑκάστου προϊόντος. Αὐτὴν ἀκριβῶς τὴν ἔννοιαν ἔχουν αἱ ἀνισότητες τοῦ συστήματος (2) εἰς τὸ δυαδικὸν πρόβλημα.

Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν πρώτην ἀνισότητα τοῦ συστήματος. Καθίσταται προφανὲς ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν μ εἰς τὴν ἀνισότητα ταύτην εἶναι τὰ στοιχεῖα τῆς δραστηριότητος $Π_1$, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται, ὡς γνωρίζομεν, διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος $ω_1$. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα ἁπλῶς ἐμφανίζονται ἐνταῦθα κατὰ σειράν, ἐνῷ εἰς τὸ πρόβλημα μεγιστοποιήσεως ἐμφανίζονται εἰς στήλην, ἐξακολουθοῦν δὲ νὰ παριστοῦν τὰς ἀντιστοίχως χρησιμοποιουμένας ποσότητας τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ $ω_1$. Ἐφ' ὅσον αἱ ποσότητες αὗται πολλαπλασιάζονται μὲ τὰς ὑπολογιστικὰς τιμὰς $μ_1$, $μ_2$, $μ_3$, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους γινομένων, ἤτοι τὸ ἀριστερὸν σκέλος τῆς πρώτης ἀνισότητος, δεικνύει τὸ κέρδος τὸ κατανεμόμενον εἰς τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν αἱ ὁποῖαι ἀπορροφῶνται ἐκ τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος $Π_1$, χρησιμοποιουμένης εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος. Τὸ οὕτω κατανεμόμενον κέρδος δὲν δύναται, συμφώνως πρὸς τὴν διατύπωσιν τῆς ἀνισότητος, νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ 2. Ἀλλ' ὡς γνωστόν, τὸ δεξιὸν σκέλος τοῦ συστήματος ἀνισοτήτων περιλαμβάνει τὰ καθαρὰ κέρδη τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων $Π_1, \ldots, Π_5$. Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς 2 ἐκφράζει τὸ κέρδος τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος $Π_1$. Δυνάμεθα τώρα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς πρώτης ἀνισότητος τοῦ συστήματος (2) ὡς ἀκολούθως :

Τὸ συνολικὸν κέρδος τὸ κατανεμόμενον εἰς τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς αἱ ὁποῖαι ἀπορροφῶνται ὑπὸ τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος $Π_1$ δὲν δύναται νὰ εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ καθαρὸν κέρδος τῆς δραστηριότητος ταύτης, τὸ πραγματοποιούμενον ἐκ τῆς πωλήσεως τῆς μονάδος τοῦ παραγομένου προϊόντος $ω_1$. Ἀναλόγως δυνάμεθα νὰ ἑρμηνεύσωμεν τὰς ὑπολοίπους ἀνισότητας τοῦ συστήματος (2), αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας $Π_2, \ldots, Π_5$ τῆς ἐπιχειρήσεως Ε.

Εἶναι βεβαίως οἰκονομικῶς δικαιολογημένον, ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν τιμῶν μ, τὸ ἐξ ἑκάστης δραστηριότητος κέρδος νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ συνολικῶς κατανεμόμενον κέρδος εἰς τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς τὰς ὁποίας ἀπασχολεῖ ἡ ἐν λόγῳ παραγωγικὴ δραστηριότης. Μία τοιαύτη ὑπέρβασις θὰ εἶχε τὴν ἔννοιαν τῆς μὴ πλήρους κατανομῆς τοῦ ἐπιτυγχανομένου κέρδους εἰς τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Ἐν ἄλλοις λόγοις, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ τιμαὶ μ θὰ ἦσαν μικρότεραι τῶν ἀπαιτουμένων διὰ τὴν πλήρη κατανομὴν τοῦ κέρδους μεταξὺ τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ. Ἀλλ' αἱ ἀνισότητες τοῦ συστήματος (2) καθιστοῦν δυνατὴν τὴν περίπτωσιν συνολικῶς κατανεμομένου εἰς τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν ἑκάστης δραστηριότητος κέρδους μεγαλυτέρου ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον κέρδος ἐκ τοῦ προϊόντος τῆς παραγωγικῆς ταύτης δραστηριότητος. Ποίαν οἰκονομικὴν ἔννοιαν δύναται νὰ ἔχῃ ἡ ἀνισότης αὕτη ;

Ἡ ἐπιχείρησις ἐπιδιώκει ὡς γνωστὸν νὰ χρησιμοποιήσῃ μόνον παραγωγικὰς δραστηριότητας αἱ ὁποῖαι μεγιστοποιοῦν τὸ καθαρὸν κέρδος αὐτῆς. Ὅταν ὅμως τὸ συνολικῶς κατανεμόμενον εἰς τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν μιᾶς δραστηριότητος κέρδος (συνοπτικῶς: «τὸ κατανεμόμενον κέρδος» τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος) εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κέρδους τοῦ ἐπιτυγχανομένου ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ προϊόντος τῆς δραστηριότητος, καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ ἐπιχείρησις ζημιοῦται ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς δραστηριότητος ταύτης. Ζημιοῦται διότι αἱ ἀπορροφώμεναι ὑπὸ τῆς δραστηριότητος ποσότητες συντελεστῶν θὰ ἠδύναντο, χρησιμοποιούμεναι εἰς τὰς καταλλήλους δραστηριότητας, νὰ δώσουν κέρδος ἴσον πρὸς τὸ συνολικῶς κατανεμόμενον κέρδος εἰς τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν τῆς δοθείσης δραστηριότητος, ἤτοι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κέρδος τὸ πραγματοποιούμενον ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ προϊόντος τῆς δραστηριότητος ταύτης. Κατὰ συνέπειαν τὸ «κατανεμόμενον κέρδος» δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς «κόστος» διὰ τὴν ἐπιχείρησιν, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι διὰ τὴν χρησιμοποίησιν δοθείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος, ἔστω $Π_1$, ἡ ἐπιχείρησις δεσμεύει ποσότητας συντελεστῶν παραγωγῆς, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιούμεναι εἰς ἄλλην ἢ ἄλλας παραγωγικὰς δραστηριότητας θὰ παρεῖχον τὴν ***εὐκαιρίαν*** δημιουργίας κέρδους. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν πρὸς χαρακτηρισμὸν τοῦ ὡς ἄνω «κόστους» χρησιμοποιεῖται ἐνίοτε ὁ ὅρος «κόστος λόγῳ ἀπολεσθείσης εὐκαιρίας» (opportunity cost). Θὰ καλοῦμεν τοῦτο συνοπτικῶς ***ὑπολογιστικὸν κόστος*** (1). Βεβαίως ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ ἔχῃ κέρδος ἐκ τῆς δεσμεύσεως ὡρισμένων ποσοτήτων συντελεστῶν εἰς τὴν δραστηριότητα $Π_1$. Ἐὰν τὸ κέρδος αὐτὸ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπολογιστικὸν κόστος σημαίνει ὅτι ἡ χρησιμοποίησις τῆς $Π_1$ εἶναι συμφέρουσα, διότι αἱ ἀπολεσθεῖσαι εὐκαιρίαι χρησιμοποιήσεως τῶν δεσμευθεισῶν εἰς τὴν $Π_1$ ποσοτήτων συντελεστῶν δὲν δίδουν τότε κέρδος μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κέρδος τῆς $Π_1$. Ἂν ὅμως τὸ ὑπολογιστικὸν κόστος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κέρδους τῆς $Π_1$, ἡ χρησιμοποίησις αὐτῆς δὲν εἶναι συμφέρουσα.

Ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιχείρησις ἐπιδιώκει μεγιστοποίησιν τῶν κερδῶν της, πρέπει νὰ μὴ χρησιμοποιῇ παραγωγικὰς δραστηριότητας τῶν ὁποίων τὸ κατανεμόμενον κέρδος ἢ ἄλλως τὸ ὑπολογιστικὸν κόστος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ καθαροῦ κέρδους τῶν δραστηριοτήτων αὐτῶν. Πρέπει συνεπῶς ἡ ἐπιχείρησις, ἐν τῇ ἐπιδιώξει τοῦ μεγίστου κέρδους, νὰ ἀποβλέπῃ εἰς τὴν ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέραν μείωσιν τοῦ ὑπολογιστικοῦ κόστους, ἤτοι εἰς τὴν ***ἐλαχιστοποίησιν*** τοῦ κόστους αὐτοῦ. Τοῦτο ἀκρι-

1) Προφανῶς τὸ «ὑπολογιστικὸν κόστος» δύναται νὰ διαφέρῃ οὐσιωδῶς τοῦ κόστους ἀγορᾶς τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Τὸ ὑπολογιστικὸν κόστος δεικνύει ποίαν ἀξίαν ἔχουν διὰ τὴν δοθεῖσαν ἐπιχείρησιν αἱ διαθέσιμοι ποσότητες συντελεστῶν, ἀνεξαρτήτως τῆς τιμῆς κτήσεως αὐτῶν.

βῶς ἐξηγεῖ διατί ἐπιζητεῖται ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς $\psi(\mu)$, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸ κατανεμόμενον κέρδος ἢ ἄλλως τὸ ὑπολογιστικὸν κόστος τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς παραγωγικῆς αὐτῆς διαδικασίας.

Προφανῶς, ἐξ ὁρισμοῦ τῶν τιμῶν τῶν μ (αἱ ὁποῖαι ἀποσκοποῦν εἰς τὴν *πλήρη* κατανομὴν τοῦ ἐπιτυγχανομένου κέρδους μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς) δὲν εἶναι δυνατὸν ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς $\psi(\mu)$ νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς μεγίστης τιμῆς τῆς $\varphi(\lambda)$. Οὕτω καθίσταται ἀπολύτως σαφὴς ἡ ἔννοια τῆς βασικῆς σχέσεως

$$\varphi(\lambda)\ \text{μέγιστον} = \psi(\mu)\ \text{ἐλάχιστον}$$

Ὅταν ἡ ἐπιχείρησις, ἐπιδιώκουσα τὸ μέγιστον αὐτῆς κέρδος, ἀπορρίπτῃ δοθεῖσαν παραγωγικὴν δραστηριότητα, τότε τὸ ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως τῆς δραστηριότητος ταύτης, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τοῦ ἀντιστοίχου λ κατὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως, θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν. Ἐξ ἄλλου, εἰς τὸ δυαδικὸν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως, τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν συμφέρει ἡ χρησιμοποίησις τῆς δοθείσης δραστηριότητος ἐκφράζεται διὰ τῆς ὑπερισχύσεως τοῦ σημείου $>$ εἰς τὴν ἀντίστοιχον ἀνισότητα κατὰ τὴν τελικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου. Ἡ ὑπερίσχυσις τοῦ σημείου $>$ σημαίνει ὅτι τὸ ὑπολογιστικὸν κόστος τῆς δοθείσης δραστηριότητος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κέρδους αὐτῆς καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν δὲν συμφέρει ἡ χρησιμοποίησίς της.

Αἱ ἐκλεγόμεναι παραγωγικαὶ δραστηριότητες ἐμφανίζονται μὲ θετικὰ ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως, ἤτοι μὲ τιμὰς τῶν ἀντιστοίχων λ μεγαλυτέρας τοῦ μηδενός. Εἰς τὸ δυαδικὸν πρόβλημα ἡ ἐπιλογὴ αὕτη ἐκφράζεται μὲ τὴν ὑπερίσχυσιν τοῦ σημείου $=$ εἰς τὴν ἀντίστοιχον ἀνισότητα κατὰ τὴν τελικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω, καὶ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ πινακίου Γ' τὸ ὁποῖον δίδει μίαν ἀρίστην λύσιν εἰς τὸ πρόβλημα μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν εὐχερῶς τὰς ἀνισότητας (2) τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος, ὡς αὗται ἐμφανίζονται κατὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ :

$$\begin{aligned} 2\mu_1 + 2\mu_2 + 0\mu_3 &> 2 \\ 2\mu_1 + 0\mu_2 + \mu_3 &= 2 \\ \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 &= 3 \\ 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 &= 4 \\ 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 &= 6 \end{aligned} \qquad (2')$$

Εἰς σύστημα (2΄) ἡ πρώτη σχέσις (ἡ ἀνισότης) ὑποδηλοῖ τὸ γεγονὸς τῆς ἀπορρίψεως ὡς ἀντιοικονομικῆς τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος Π_1. Τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος εἰς τὴν δευτέραν καὶ τὴν τελευταίαν σχέσιν ἐκφράζει τὴν ἐκλογὴν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_2 καὶ Π_5. Τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος εἰς τὰς δύο ὑπολοίπους σχέσεις (τρίτη καὶ τετάρτη ἐξίσωσις) ἐκφράζει τὸ γεγονὸς ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι παραγωγικαὶ δραστηριότητες Π_3 καὶ Π_4 θὰ ἠδύναντο νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἄνευ μειώσεως τοῦ συνολικοῦ μεγίστου κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως. Τοῦτο, ὡς εἴδομεν, ὑποδηλοῦται καὶ διὰ τοῦ μηδενικοῦ ὁριακοῦ κέρδους τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων εἰς τὸ πινάκιον Γ΄.

Ἂν κατὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως ὡρισμέναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς παραμένουν ἀχρησιμοποίητοι, εἰς τὰς ἀντιστοίχους ἀνισότητας, κατὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως, ὑπερισχύει τὸ σημεῖον $<$. Τὸ σημεῖον τοῦτο σημαίνει ἀκριβῶς ὅτι αἱ ἀπορροφώμεναι κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ποσότητες τοῦ ἀντιστοίχου (πρὸς τὴν ἀνισότητα) συντελεστοῦ εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν συνολικῶς διαθεσίμων ποσοτήτων τοῦ συντελεστοῦ τούτου. Εἰς τὸ δυαδικὸν πρόβλημα ἡ κατάστασις αὕτη ἐκφράζεται διὰ τοῦ μηδενισμοῦ τοῦ ὑπολογιστικοῦ κόστους μ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸν δοθέντα συντελεστήν. Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τοῦ μηδενισμοῦ τῆς ὑπολογιστικῆς τιμῆς εἶναι προφανής : Ἐφ' ὅσον ὁ ἐν λόγῳ συντελεστὴς εὑρίσκεται ἐν ἐπαρκείᾳ, ἐν σχέσει πρὸς τὰς ποσότητας τῶν ἄλλων συντελεστῶν, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐλεύθερον ἀγαθόν, τουλάχιστον ὅσον ἀφορᾷ τὸ συγκεκριμένον πρόβλημα, καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν παρουσιάζει ἰδιαίτερον οἰκονομικὸν ἐνδιαφέρον διὰ τὴν ἐπιχείρησιν. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ὑποδηλοῦται διὰ τοῦ μηδενισμοῦ τοῦ ὑπολογιστικοῦ κόστους τοῦ συντελεστοῦ.

Ἡ πλήρης ἀπασχόλησις τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς κατὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως ὑποδηλοῦται διὰ τῆς ὑπερισχύσεως τοῦ σημείου $=$ εἰς τὰς ἀνισότητας τοῦ προβλήματος τούτου. Εἰς τὸ δυαδικὸν πρόβλημα ἡ πλήρης ἀπασχόλησις ἑνὸς συντελεστοῦ ἐκφράζεται διὰ τοῦ θετικοῦ ὑπολογιστικοῦ κόστους αὐτοῦ. Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τοῦ θετικοῦ ὑπολογιστικοῦ κόστους εἶναι σαφής : Ἐφ' ὅσον ὁ συντελεστὴς εὑρίσκεται ἐν ἀνεπαρκείᾳ παρουσιάζει οἰκονομικὸν ἐνδιαφέρον διὰ τὴν ἐπιχείρησιν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ὑποδηλοῦται διὰ τοῦ θετικοῦ ὑπολογιστικοῦ κόστους αὐτοῦ.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω καὶ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ πινακίου Γ΄, τὸ ὁποῖον δίδει μίαν ἀρίστην λύσιν εἰς τὸ πρόβλημα μεγιστοποιήσεως καὶ προσδιορίζει ταυτοχρόνως πλήρη ἀπασχόλησιν τῶν συντελεστῶν Α καὶ Β καὶ ὑποαπασχόλησιν τοῦ συντελεστοῦ Γ, συμπεραίνομεν ὅτι : $\mu_1, \mu_2 > 0$ καὶ $\mu_3 = 0$. Ἑπομένως τὸ σύστημα (2΄) γίνεται :

$$\begin{aligned} 2\mu_1 + 2\mu_2 &> 2 \\ 2\mu_1 \qquad &= 2 \\ \mu_1 + \ \mu_2 &= 3 \qquad\qquad (2'') \\ 2\mu_1 + \ \mu_2 &= 4 \\ 2\mu_1 + 2\mu_2 &= 6 \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς δευτέρας σχέσεως τοῦ συστήματος λαμβάνομεν $\mu_1 = 1$. Ἀντικαθιστῶντες τὸ μ_1 διὰ τῆς τιμῆς του εἰς τὴν τρίτην σχέσιν (ἐξίσωσιν), λαμβάνομεν $\mu_2 = 2$. Αἱ τιμαὶ $\mu_1 = 1$ καὶ $\mu_2 = 2$ ἐπαληθεύουν πλήρως, ὡς δύναται νὰ διαπιστώσῃ ὁ σπουδαστής, τὸ σύστημα (2''). Κατὰ συνέπειαν ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος αὐτοῦ.

Ἂν ἐξ ἄλλου εἰς τὴν συνάρτησιν:

$$\psi(\mu) = 100\,\mu_1 + 80\,\mu_2 + 150\,\mu_3$$

ἀντικαταστήσωμεν τὰ μ_1, μ_2 καὶ μ_3 διὰ τῶν τιμῶν των, λαμβάνομεν:

$$\psi(\mu) = 100 \times 1 + 80 \times 2 + 150 \times 0 = 260$$

Ἡ εὑρεθεῖσα συνολικὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\psi(\mu)$ εἶναι ἴση ἀκριβῶς πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(\lambda)$. Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου ὅτι ἡ τιμὴ 260 εἶναι καὶ ἡ ἐλαχίστη δυνατὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\psi(\mu)$, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως ἀπορρίπτεται ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης Π_1, ἡ ὁποία ἔχει ὑπολογιστικὸν κόστος μεγαλύτερον τοῦ κέρδους αὐτῆς, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ ὑπολογιστικὸν κόστος ἐξ ὁρισμοῦ ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν *πλήρη* κατανομὴν τοῦ ἐπιτυγχανομένου κέρδους μεταξὺ τῶν (ἐν ἀνεπαρκείᾳ) συντελεστῶν. Συνεπῶς ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς $\psi(\mu)$ δὲν δύναται νὰ εἶναι οὔτε μεγαλυτέρα, οὔτε μικροτέρα τῆς μεγίστης τιμῆς τῆς $\varphi(\lambda)$.

Οὕτω, ἱκανοποιεῖται βάσει τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν καὶ τὸ αἴτημα τῆς ἐλαχιστοποιήσεως:

$$100\,\mu_1 + 80\,\mu_2 + 150\,\mu_3 = \psi(\mu) \text{ ἐλάχιστον},$$

ἐπομένως ἡ λύσις $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$ καὶ $\mu_3 = 0$ ἀποτελεῖ καὶ λύσιν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως.

Ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ πινακίου Γ', τὸ ὁποῖον δίδει τὴν ἀρίστην λύσιν εἰς τὸ πρόβλημα μεγιστοποιήσεως, διαπιστοῦται ὅτι αἱ τιμαὶ $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$ καὶ $\mu_3 = 0$ δίδονται πράγματι, ὡς ὑποπροϊὸν τῶν ὑπολογισμῶν τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος, εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου, ἔναντι τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας $Π_6$, $Π_7$ καὶ $Π_8$. Τὰ διανύσματα ταῦτα ἀντιστοιχοῦν ὡς γνωστὸν εἰς τοὺς συντελεστὰς Α, Β καὶ Γ καὶ ὑποδηλοῦν μὴ χρησιμοποίησιν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν αὐτῶν. Ἡ εἰσαγωγή, π.χ., τοῦ διανύσματος $Π_7$ εἰς τὸ πρόγραμμα καὶ εἰς ἐπίπεδον ἔστω 20 μονάδων θὰ εἶχε τὴν ἔννοιαν τῆς χρησιμοποιήσεως ὑπὸ τῆς ἐπιχειρήσεως 20 μονάδων ὀλιγώτερον ἐκ τοῦ ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστοῦ Β, μὲ ἀποτέλεσμα τὴν μείωσιν τῶν κερδῶν αὐτῆς κατὰ $20 \times 2 = 40$ μονάδας, διότι ἑκάστη μονὰς ἐκ τοῦ συντελεστοῦ, μὴ χρησιμοποιουμένη, προκαλεῖ μείωσιν τῶν κερδῶν ἴσην πρὸς τὴν ὑπολογιστικὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ τούτου ($\mu = 2$). Μείωσις κερδῶν προκαλεῖται ἐπίσης ἐκ τῆς μὴ πλήρους χρησιμοποιήσεως τοῦ ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστοῦ Α. Ἡ μείωσις αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων μονάδων ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α, διότι ἡ ὑπολογιστικὴ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα ($\mu = 1$). Ὁ συντελεστὴς Γ εὑρίσκεται ἐν ἐπαρκείᾳ, ἐν συγκρίσει μὲ τοὺς δύο ἄλλους συντελεστάς, καὶ ἑπομένως ἡ ὑπολογιστικὴ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι μηδέν.

Ἡ ὑπολογιστικὴ τιμὴ τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν, ἡ ὁποία δεικνύει τὴν οἰκονομικήν των σημασίαν ἤ, ἄλλως, τὴν συμβολὴν τῆς μονάδος αὐτῶν εἰς τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως, ἀποτελεῖ δείκτην ἐξαιρετικῆς οἰκονομικῆς σπουδαιότητος, προκειμένου περὶ ἐπεκτάσεως τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος τῆς ἐπιχειρήσεως. Οὕτω, βάσει τῆς ὑπολογιστικῆς τιμῆς ἑνὸς ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστοῦ ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ ἀποφασίσῃ ἂν συμφέρῃ νὰ ὑποβληθῇ εἰς τὰ ἔξοδα διὰ τὴν αὔξησιν τῆς ποσότητος τοῦ ἐν λόγῳ συντελεστοῦ. Ἔστω, π.χ., ὅτι ἡ ὑπολογιστικὴ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ «ἐργασία» εἶναι 8 νομισματικαὶ μονάδες. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ συντελεστοῦ κατὰ μίαν μονάδα [1] θὰ αὐξήσῃ τὸ καθαρὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως κατὰ 8 ν.μ., ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι ἡ καταβαλλομένη ἀμοιβὴ διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς νέας μονάδος ἐργασίας δὲν εἶναι διάφορος τῆς μέχρι τοῦδε πληρωνομένης. Αὔξησις τῆς ἐν λόγῳ ἀμοιβῆς ὑποδηλοῖ ἀντίστοιχον μείωσιν τῆς ἐπὶ πλέον συμβολῆς τῆς ἐργασίας εἰς τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως. Ἡ συμβολὴ αὕτη μηδενίζεται ὅταν ἡ αὔξησις ἰσοῦται πρὸς 8 ν.μ. καὶ καθίσταται ἀρνητικὴ ἂν ὑπερβαίνῃ τὰς 8 ν.μ. Οὕτω ὁ ἐπιχειρηματίας δύναται ἐκ τῆς συγκρίσεως τοῦ ὑπολογιστικοῦ κόστους ἑνὸς συντελεστοῦ καὶ τοῦ κόστους ἀποκτήσεως αὐτοῦ [2], νὰ καθορίσῃ ἂν συμφέρῃ ἡ ἐπέ-

1) Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι ὑπάρχουν ἐπαρκεῖς ποσότητες ἐκ τῶν ἄλλων συντελεστῶν παραγωγῆς.

2) Ἐὰν ὁ συντελεστὴς εἶναι διαρκὲς ἀγαθὸν (π.χ. μηχανήματα, ἀποθῆκαι κλπ.) διὰ νὰ καθορισθῇ ἂν συμφέρῃ ἡ παραγωγικὴ ἐπέκτασις τῆς ἐπιχειρήσεως δι' αὐξήσεως τῆς ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ γίνεται σύγκρισις μεταξὺ τῆς ὑπολογιστικῆς τιμῆς καὶ τοῦ κόστους ἐξ ἀποσβέσεως τοῦ συντελεστοῦ, τὸ ὁποῖον ἐνσωματοῦται εἰς τὸ κόστος παραγωγῆς τοῦ προϊόντος.

κτασις τῆς παραγωγῆς δι' αὐξήσεως τῆς ποσότητος τοῦ ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστοῦ.

Ἡ *ὑπερεκτίμησις* τοῦ ὑπολογιστικοῦ κόστους, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ προσδιορισμοῦ αὐτοῦ εἰς ἐπίπεδον ἀνώτερον τοῦ πραγματικοῦ, εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ προκαλέσῃ ζημίας εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, καθ' ὅσον δύναται νὰ ὁδηγήσῃ εἰς τὴν σκέψιν ὅτι ἐπιτρέπει ἀπόκτησιν προσθέτων μονάδων ἐκ τοῦ σχετικοῦ συντελεστοῦ εἰς ὑψηλὸν κόστος ἀγορᾶς. Ἄν, π.χ., ἡ πραγματικὴ ὑπολογιστικὴ τιμὴ ἑνὸς συντελεστοῦ εἶναι 10 ν.μ. καὶ ἐκτιμᾶται αὕτη ἐσφαλμένως εἰς 15 ν.μ. εἶναι πιθανὸν ἡ ἐπιχείρησις νὰ προβῇ εἰς τὴν ἀγορὰν προσθέτων μονάδων τοῦ συντελεστοῦ καὶ εἰς τιμὴν ἀνωτέρα κατὰ 10 ν.μ., ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν μέχρι τοῦδε καταβαλλομένην, μὲ ἀποτέλεσμα τὴν πρόκλησιν ζημιῶν. Ἡ *ὑποεκτίμησις* τῆς ὑπολογιστικῆς τιμῆς εἶναι ἐπίσης ἐπιζημία, καθ' ὅσον παρεμποδίζει τὴν ἀγορὰν προσθέτων μονάδων ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ, αἱ ὁποῖαι θὰ παρεῖχον τὴν εὐκαιρίαν αὐξήσεως τῶν συνολικῶν κερδῶν τῆς ἐπιχειρήσεως. Προσδιορισμὸς τῆς ὑπολογιστικῆς τιμῆς ἑνὸς συντελεστοῦ εἰς ἐπίπεδον, π.χ., 8 ν.μ. κατώτερον τῆς πραγματικῆς ὑπολογιστικῆς τιμῆς ἡ ὁποία εἶναι ἔστω 11 ν.μ., ἐμποδίζει τὴν ἀγορὰν μονάδων τοῦ συντελεστοῦ εἰς τιμὴν π.χ. ἀνωτέρα κατὰ 9 ν.μ., ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν μέχρι τοῦδε καταβαλλομένην, αἱ ὁποῖαι ἐν τούτοις χρησιμοποιούμεναι θὰ συνέβαλλον εἰς τὴν αὔξησιν τῶν κερδῶν. Οὕτω ὁ ἀκριβὴς προσδιορισμὸς τῆς ὑπολογιστικῆς τιμῆς, πρὸς ἀποφυγὴν ὑπερεκτιμήσεως ἢ ὑποεκτιμήσεως αὐτῆς εἶναι βασικῆς σημασίας διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς πολιτικῆς τῆς ἐπιχειρήσεως ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀπόκτησιν ἢ μὴ προσθέτων μονάδων ἐκ δεδομένου συντελεστοῦ.

11.4.3. Λύσις τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως βάσει τῆς μεθόδου Simplex. Ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἡ λύσις τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως δίδεται ὡς ὑποπροϊὸν τῶν ὑπολογισμῶν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς λύσεως τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως. Κατὰ συνέπειαν οὐδεμία ὑπολογιστικὴ προσπάθεια εἶναι ἀναγκαία διὰ τὴν λύσιν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος ὅταν ἔχῃ ἤδη λυθῇ τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ δυαδικὸν πρόβλημα εἶναι (ἐνταῦθα) πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως, ἡ λύσις αὐτοῦ παρουσιάζει ἐνδιαφέρον ἀπὸ ἀπόψεως διαδικασίας λύσεως τῶν προβλημάτων τῆς κατηγορίας ταύτης.

Ὡς εἴδομεν (βλ. σ. 292, ἀνωτέρω), ἡ μέθοδος Simplex ἐφαρμόζεται εἰς τὰ προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως κατὰ βάσιν ὡς καὶ εἰς τὰ προβλήματα μεγιστοποιήσεως, μὲ ὡρισμένας μόνον προσαρμογὰς τῆς ὑπολογιστικῆς διαδικασίας, αἱ ὁποῖαι καθίστανται ἀναγκαῖαι λόγῳ τῆς μαθηματικῆς φύσεως τῶν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως.

Διατυποῦμεν κατωτέρω ἐκ νέου τὸ δυαδικὸν πρόβλημα.

Νὰ εὑρεθοῦν μὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῶν μ_1, μ_2, μ_3, τοιαῦται ὥστε :

$$100\,\mu_1 + 80\,\mu_2 + 150\,\mu_3 = \psi(\mu) \text{ ἐλάχιστον}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν :

$$P_1\mu_1 + P_2\mu_2 + P_3\mu_3 \geqslant P_0$$

ἤ, ἀναλυτικῶς :

$$\begin{aligned} 2\,\mu_1 + 2\,\mu_2 + 0\,\mu_3 &\geqslant 2 \\ 2\,\mu_1 + 0\,\mu_2 + \mu_3 &\geqslant 2 \\ \mu_1 + \mu_2 + 2\,\mu_3 &\geqslant 3 \\ 2\,\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 &\geqslant 4 \\ 2\,\mu_1 + 2\,\mu_2 + 2\,\mu_3 &\geqslant 6 \end{aligned}$$

Τὸ πρῶτον βῆμα διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ εἶναι ἡ μετατροπὴ τῶν ἀνισοτήτων εἰς ἰσότητας. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν διανυσμάτων :

$$P_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

μὲ ἀντίστοιχα ἐπίπεδα αὐτῶν μ_4, μ_5, μ_6, μ_7, μ_8.

Τὰ διανύσματα ταῦτα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ διανύσματα ἀδρανείας τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος, ἀλλὰ διαφέρουν ἀπὸ τὰ τελευταῖα διότι περιέχουν τὴν μονάδα μὲ ἀρνητικὸν σημεῖον. Ἡ διαφορὰ αὕτη ὀφείλεται εἰς τὴν διάφορον φορὰν τοῦ σημείου τῶν ἀνισοτήτων εἰς τὰ δύο προβλήματα. Θὰ καλοῦμεν τὰ διανύσματα $P_1, \ldots, P_8$ ***διανύσματα ὑπερπληρώσεως***, καθ' ὅσον ὑποδηλοῦν ὑπερπλήρωσιν τῶν τιθεμένων ὑπὸ τοῦ διανύσματος P_0, περιορισμῶν τοῦ προβλήματος. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ εἰσαγωγὴ τῶν διανυσμάτων ὑπερπληρώσεως δὲν ἐπηρεάζει τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\psi(\mu)$.

Τὸ πρόβλημα δύναται νὰ διατυπωθῇ τώρα ὡς κάτωθι.

Νὰ εὑρεθοῦν μὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῶν $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8$ τοιαῦται ὥστε :

$$100\mu_1 + 80\mu_2 + 150\mu_3 + 0\mu_4 + 0\mu_5 + 0\mu_6 + 0\mu_7 + 0\mu_8 = \psi(\mu) \text{ ἐλάχιστον}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν :

$$\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3 + \mu_4 P_4 + \mu_5 P_5 + \mu_6 P_6 + \mu_7 P_7 + \mu_8 P_8 = P_0$$

ἤ, ἀναλυτικῶς :

$$2\mu_1 + 2\mu_2 + 0\mu_3 - 1\mu_4 + 0\mu_5 + 0\mu_6 + 0\mu_7 + 0\mu_8 = 2$$

$$2\mu_1 + 0\mu_2 + 1\mu_3 + 0\mu_4 - 1\mu_5 + 0\mu_6 + 0\mu_7 + 0\mu_8 = 2$$

$$1\mu_1 + 1\mu_2 + 2\mu_3 + 0\mu_4 + 0\mu_5 - 1\mu_6 + 0\mu_7 + 0\mu_8 = 3$$

$$2\mu_1 + 1\mu_2 + 1\mu_3 + 0\mu_4 + 0\mu_5 + 0\mu_6 - 1\mu_7 + 0\mu_8 = 4$$

$$2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + 0\mu_4 + 0\mu_5 + 0\mu_6 + 0\mu_7 - 1\mu_8 = 6$$

Εἰς τὸ πρόβλημα μεγιστοποιήσεως, μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας, ἦτο δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ ἁπλουστέρα πραγματοποιήσιμος βασικὴ λύσις τοῦ ἀντιστοίχου συστήματος ἐξισώσεων διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν διανυσμάτων τούτων εἰς τὴν βάσιν μὲ ἐπίπεδα 100, 80 καὶ 150 ἀντιστοίχως, καὶ τοῦ μηδενισμοῦ τῶν ἐπιπέδων τῶν λοιπῶν διανυσμάτων. Ἡ λύσις αὕτη, μολονότι ἔδιδε κέρδος μηδέν, ἀπετέλει μίαν ὑπολογιστικῶς πρόσφορον ἀφετηρίαν διὰ τὴν διαδικασίαν τῆς ἀνιχνεύσεως τῆς ἀρίστης λύσεως. Τοιαύτη λύσις δὲν δύναται νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ δυαδικὸν πρόβλημα ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω μορφήν, λόγῳ τῆς ἀρνητικότητος τῶν διανυσμάτων $P_4, \ldots, P_8$.

Οὕτω, ἂν θέσωμεν $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ (κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν διαδικασίαν λύσεως τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως, εἰς τὸ ὁποῖον ἐτέθη $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, εἰς τὸ ἀρχικὸν στάδιον), τὸ σύστημα (α) εἶναι δυνατὸν νὰ λυθῇ μὲ τιμάς :

$$\mu_4 = -2$$

$$\mu_5 = -2$$

$$\mu_6 = -3$$

$$\mu_7 = -4$$

$$\mu_8 = -6$$

Ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη ἀντιστρατεύεται πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῆς μὴ ἀρνητικότητος τῶν $\mu_4 - \mu_8$. Πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς δυσχερείας ταύτης, καὶ πρὸς διαμόρφωσιν μιᾶς ἀφετηρίας ὑπολογισμοῦ ὁμοίας πρὸς τὴν ἀφετηρίαν τῆς διαδικασίας μεγιστοποιήσεως, εἰσάγομεν εἰς τὸ πρόβλημα μίαν σειρὰν *πλασματικῶν διανυσμάτων* :

$$P_9 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

μὲ ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως μ_9, μ_{10}, μ_{11}, μ_{12}, μ_{13}, ἀντιστοίχως. Τὰ διανύσματα ταῦτα παρέχουν μίαν φυσικὴν βάσιν διὰ τὴν ἔναρξιν τῆς διαδικασίας τοῦ ὑπολογισμοῦ.

Καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ τελικὴ λύσις τοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως πρέπει νὰ εἶναι ἀπηλλαγμένη τῶν πλασματικῶν διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα ὑπεισέρχονται εἰς τὸ πρόβλημα μόνον βοηθητικῶς, κατὰ τὰ ἀρχικὰ στάδια. Διὰ νὰ ἐξασφαλισθῇ ἡ ἀπόρριψις τῶν διανυσμάτων αὐτῶν ἀπὸ τὴν τελικὴν λύσιν, τὰ συνδέομεν μὲ ὡρισμένας θετικὰς τιμὰς M, αἱ ὁποῖαι ὑποτίθεται ὅτι εἶναι τόσον μεγάλαι ὥστε ὅταν περιέχωνται εἰς τὴν λύσιν καθιστοῦν τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως ψ(μ) ἀπείρως μεγάλην καὶ συνεπῶς ἀποκλείουν τὴν ἐπιδιωκομένην ἐλαχιστοποίησιν.

Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν πλασματικῶν διανυσμάτων εἰς τὸ δυαδικὸν πρόβλημα καὶ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν M, τὸ πρόβλημα τοῦτο διαμορφοῦται ὡς ἀκολούθως.

Νὰ εὑρεθοῦν μὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῶν $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{13}$, τοιαῦται ὥστε :

$$100\mu_1 + 80\mu_2 + 150\mu_3 + M\mu_9 + M\mu_{10} + M\mu_{11} + M\mu_{12} + M\mu_{13} =$$
$$= \psi(\mu)\ \text{ἐλάχιστον} \quad (^1) \qquad (1)$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\begin{aligned} 2\mu_1 + 2\mu_2 + 0\mu_3 - 1\mu_4 + 1\mu_9 &= 2 \\ 2\mu_1 + 0\mu_2 + 1\mu_3 - 1\mu_5 + 1\mu_{10} &= 2 \\ 1\mu_1 + 1\mu_2 + 2\mu_3 - 1\mu_6 + 1\mu_{11} &= 3 \\ 2\mu_1 + 1\mu_2 + 1\mu_3 - 1\mu_7 + 1\mu_{12} &= 4 \\ 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 - 1\mu_8 + 1\mu_{13} &= 6 \end{aligned} \qquad (2)$$

1) Πρὸς ἁπλούστευσιν τῆς διατυπώσεως ἀφῃρέθησαν οἱ (μηδενικοὶ) ὅροι, οἱ ὁποῖοι δὲν ἐπηρεάζουν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Ἤδη δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_8 = 0$$

ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\mu_9 = 2, \quad \mu_{10} = 2, \quad \mu_{11} = 3, \quad \mu_{12} = 4, \quad \mu_{13} = 6$$

Ἡ λύσις αὕτη, ἡ ὁποία συνεπάγεται τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὸ πρόγραμμα μόνον τῶν πλασματικῶν διανυσμάτων, δίδει τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\psi(\mu)$:

$$100 \times 0 + 80 \times 0 + 150 \times 0 + 2M + 2M + 3M + 4M + 6M = 17M$$

Ἐπειδὴ τὸ M εἶναι ἐξ ὑποθέσεως μέγας ἀριθμός, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\psi(\mu)$ καθίσταται ἐπίσης μεγάλη καὶ συνεπῶς ἡ εὑρεθεῖσα λύσις δὲν πληροῖ τὸ αἴτημα τῆς ἐλαχιστοποιήσεως. Ἡ λύσις ὅμως αὕτη δύναται νὰ ἀποτελέσῃ μίαν ὑπολογιστικῶς πρόσφορον βάσιν διὰ τὴν ἐξεύρεσιν τῆς ζητουμένης λύσεως. Συστηματικῶς ἡ πρώτη λύσις, ὡς ἐπίσης καὶ ὁλόκληρος ἡ ὑπολογιστικὴ διαδικασία πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀρίστης λύσεως εἰς τὸ δυαδικὸν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως, περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας Α' – Η', κατωτέρω.

Κατόπιν τῆς διευκρινήσεως τῆς ἐννοίας τῶν διανυσμάτων ὑπερπληρώσεως καὶ τῶν πλασματικῶν διανυσμάτων, ὡς καὶ τῆς φύσεως τῶν τιμῶν M, ἡ κατάστρωσις τῶν πινακίων τοῦ ὑπολογισμοῦ δὲν παρουσιάζει δυσχέρειαν κατανοήσεως. Οἱ ὑπολογισμοὶ μεταβάσεως ἀπὸ πινακίου εἰς πινάκιον διαφέρουν *μόνον* εἰς ἓν σημεῖον, ἀπὸ τοὺς ἀντιστοίχους ὑπολογισμοὺς τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως : Πρὸς καθορισμὸν τοῦ εἰσερχομένου διανύσματος εἰς τὸ πρόγραμμα, ἀντὶ νὰ ἐκλέγωμεν τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἀρνητικὸν στοιχεῖον μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου, ὡς κάμνομεν εἰς τὰ προβλήματα μεγιστοποιήσεως, ἐκλέγομεν τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ *μεγαλύτερον θετικὸν* στοιχεῖον τῆς τελευταίας σειρᾶς (1). Οὕτω, εἰς τὸ πινάκιον Α' ἐκλέγομεν ὡς εἰσερχόμενον διάνυσμα τὸ P_1, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μεγαλύτερον θετικὸν στοιχεῖον τῆς τελευταίας σειρᾶς, ἤτοι ἐν προκειμένῳ εἰς τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον περιέχει τὰ περισσότερα M. Καθ' ὅμοιον τρόπον προσδιορίζομεν τὰ εἰσερχόμενα διανύσματα τῶν ἄλλων πινακίων.

Τὸ κριτήριον Simplex ἐφαρμόζεται ἀναλόγως. Ἤτοι οἱ ὑπολογισμοὶ συνεχίζονται ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν θετικὰ στοιχεῖα εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν καὶ τερματίζονται ὅταν ἡ τελευταία σειρὰ περιλαμβάνῃ μόνον μὴ θετικὰ στοιχεῖα, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἐπετεύχθη ἡ ἀρίστη λύσις.

1) Βλ. καὶ σ. 292, ἀνωτέρω.

δηλαδὴ ἡ λύσις $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, καὶ $\mu_3 = 0$, ἡ ὁποία ἐλαχιστοποιεῖ τὴν συνάρτησιν $\psi(\mu)$. Ὁ ὅρος οὗτος πραγματοποιεῖται εἰς τὸ πινάκιον Η', τὸ ὁποῖον δύναται συνεπῶς νὰ ἀποκληθῇ «πινάκιον ἐλαχιστοποιήσεως». Ὡς δύναται νὰ διαπιστώσῃ ὁ σπουδαστής, εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου αὐτοῦ περιλαμβάνεται ἐπίσης ὡς ὑποπροϊὸν τῶν ὑπολογισμῶν καὶ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως.

Ὑπολογισμὸς τῆς ἀρίστης λύσεως τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως

Πινάκιον Α'

			M	M	M	M	M						100	80	150
	B	P_0	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_1	P_2	P_3
M	P_9	2	1					−1					2	2	
M	P_{10}	2		1					−1				$\boxed{2}$		1
M	P_{11}	3			1					−1			1	1	2
M	P_{12}	4				1					−1		2	1	1
M	P_{13}	6					1					−1	2	2	2
		17 M						−M	−M	−M	−M	−M	9M	6M	6M
													−100	−80	−150

Πινάκιον Β'

M	P_9		1	−1				−1	1					$\boxed{2}$	−1
100	P_1	1		1/2					−1/2				1		1/2
M	P_{11}	2		−1/2	1				1/2	−1				1	$1\frac{1}{2}$
M	P_{12}	2		−1		1			1		−1			1	
M	P_{13}	4		−1			1		1			−1		2	1
		8M		$-2\frac{1}{2}$ M				−M	$3\frac{1}{2}$	−M	−M	−M		6M	$1\frac{1}{2}$M
		+100		+50					−50					−80	−100

Πινάκιον Γ'

			M	M	M	M	M						100	80	150
	B	P_0	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_1	P_2	P_3
80	P_2		1/2	−1/2				-1/2	1/2					1	−1/2
100	P_1	1		1/2					-1/2				1		1/2
M	P_{11}	2	−1/2		1			1/2		−1					$\boxed{2}$
M	P_{12}	2	−1/2	−1/2		1		1/2	1/2		−1				1/2
M	P_{13}	4	−1				1	1				−1			2
		8M	−3M	$-1\frac{1}{2}$M				2M	$\frac{1}{2}$M	−M	−M	−M			$4\frac{1}{2}$M
		+100	+40	+10				−40	−10						−140

Πινάκιον Δ'

80	P_2	1/2	3/8	−1/2	1/4			-3/8	+1/2	-1/4				1	
100	P_1	1/2	1/8	1/2	-1/4			-1/8	-1/2	-1/4			1		
150	P_3	1	-1/4		1/2			1/4		-1/2					1
M	P_{12}	$1\frac{1}{2}$	-3/8	-1/2	-1/4	1		3/8	1/2	1/4	−1				
M	P_{13}	2	-1/2		−1		1	1/2		$\boxed{1}$		−1			
		$3\frac{1}{2}$M	$-1\frac{7}{8}$ M	$-1\frac{1}{2}$M	$-2\frac{1}{4}$ M	−M	−M	7/8M	1/2M	$1\frac{1}{4}$M	−M	−M			
		+240	+5	+10	+70			−5	−10	−70					

Πινάκιον Ε′

			M	M	M	M	M						100	80	150
	B	P_0	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_1	P_2	P_3
80	P_2	1	1/4	−1/2			1/4	−1/4	1/2			−1/4		1	
100	P_1		1/4	1/2			−1/4	−1/4	−1/2			1/4	1		
150	P_3	2	−1/2				1/2	1/2				−1/2			1
M	P_{12}	1	−1/4	−1/2		1	−1/4	1/4	$\boxed{1/2}$		−1	1/4			
	P_6	2	−1/2		−1		1	1/2		1		−1			
		M	−1¼ M	−1½ M			−1¼ M	1/4M	1/2M		−M	1/4M			
		+300	−30	+10			+70	+30	−10			−70			

Πινάκιον ΣΤ′

80	P_2		1/2			−1	1/2	−1/2			1	−1/2		1	
100	P_1	1				1	−1/2				−1	1/2	1		
150	P_3	2	−1/2				1/2	1/2				−1/2			1
	P_5	2	−1/2	−1		2	−1/2	$\boxed{1/2}$	1		−2	1/2			
	P_6	2	−1/2		−1		1	1/2		1		−1			
			−M	−M	−M	−M	−M								
		400	−35			20	65	35			−20	−65			

Πινάκιον Ζ'

			M	M	M	M	M						100	80	150
	B	P_0	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_1	P_2	P_3
80	P_2	2		−1		1			1		−1			1	
100	P_1	1				1	−1/2				−1	1/2	1		
150	P_3			1		−2	1		−1		$\boxed{2}$	−1			1
	P_4	4	−1	−2		4	−1	1	2		−4	1			
	P_6			1	−1	−2	$1^1/_2$		−1	1	2	$-1^1/_2$			
		260	−M	−M	−M	−M	−M								
				+70		−120	+100	−70			+120	−100			

Πινάκιον Η'

80	P_2	2		−1/2			1/2		1/2			−1/2		1	1/2
100	P_1	1		1/2					−1/2				1		1/2
	P_7			1/2		−1	−1/2		−1/2		1	−1/2			1/2
	P_4	4	−1				1	1				−1			−2
	P_6				1		1/2			1		−1/2			1
		260	−M	−M	−M	−M	−M								
				+10			40		−10			−40			−60

12

Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς καὶ Ἀνάλυσις Εἰσροῶν - Ἐκροῶν

12.1. Γενικὰ

Κατὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ συστήματος εἰσροῶν-ἐκροῶν (βλ. σ. 143 κ.ἑ.), ὑπετέθη ὅτι, ἕκαστος κλάδος τῆς οἰκονομίας παράγει ἓν μόνον προϊὸν καὶ καθ' ὡρισμένην μέθοδον ἢ παραγωγικὴν δραστηριότητα. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη, ὡς ἐσημειώθη, ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι εἰς τὸ σύστημα εἰσροῶν-ἐκροῶν δὲν τίθεται ζήτημα ἀριστοποιήσεως τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος, καθ' ὅσον ἡ ἀριστοποίησις προϋποθέτει δυνατότητα ἐπιλογῆς μεταξὺ διαφόρων ὁμοκλαδικῶν (1) παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ἤτοι δραστηριοτήτων παραγουσῶν τὸ αὐτὸ ἀγαθόν. Πρέπει ἐν τούτοις νὰ τονισθῇ ὅτι εἰς μίαν οἰκονομίαν λειτουργοῦσαν ὑπὸ τὸ καθεστὼς τοῦ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ ὑποτίθεται ὅτι αἱ δυνάμεις τῆς ἀγορᾶς τείνουν νὰ διαμορφώσουν τὴν τεχνολογικὴν μήτραν τῆς οἰκονομίας κατὰ τρόπον ὥστε ἕκαστον ἀγαθὸν νὰ παράγεται ὑπὸ τῆς οἰκονομικῶς ἐπωφελεστέρας παραγωγικῆς δραστηριότητος. Ὑποτίθεται δηλαδὴ ὅτι οἱ ἰδιῶται ἐπιχειρηματίαι, ἐν τῇ προσπαθείᾳ των πρὸς μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους, ἐπιλέγουν τὰς ἀποδοτικωτέρας μεθόδους παραγωγῆς δι' ἕκαστον ἀγαθόν. Θὰ ἠδύνατο συνεπῶς νὰ ὑποστηριχθῇ, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὑποθέσεως ταύτης, ὅτι εἰς δεδομένην χρονικὴν περίοδον ἡ τεχνολογικὴ μήτρα τῆς οἰκονομίας, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν-ἐκροῶν, περιλαμβάνει τὰς πλέον ἀποδοτικὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας. Ἐν ἄλλοις λόγοις, μολονότι δὲν τίθεται ζήτημα ***προγραμματικῆς ἐπιλογῆς***, ἤτοι ἐπιλογῆς ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς προγραμματικῆς ἐπεξεργασίας τῶν οἰκονομικῶν δεδομένων, ὡς π.χ. συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἑκάστοτε χρησιμοποιουμένη τεχνολογικὴ μήτρα εἰς τὴν ἀνάλυσιν εἰσροῶν-ἐκροῶν ἔχει ἐπιλεγῇ ὑπὸ τῶν δυνάμεων τῆς ἀγορᾶς βάσει μιᾶς διαδικασίας ***λειτουργικῆς ἐπιλογῆς***, ὀφειλομένης εἰς αὐτὴν ταύτην τὴν λειτουργίαν τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος.

Ἡ τεχνολογικὴ μήτρα λαμβάνεται ὡς δεδομένη ὄχι μόνον εἰς τὸ στατικὸν ὑπόδειγμα εἰσροῶν - ἐκροῶν, ἀλλ' ὡς εἴδομεν (σ. 181 κ.ἑ.), καὶ εἰς τὸ δυναμικὸν ὑπόδειγμα εἰσροῶν - ἐκροῶν, εἰς τὸ ὁποῖον ἐξετάζεται τὸ πρόβλημα τῆς ἀναδιαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας διὰ τῆς ταχυτέρας

---

1) Βλ. σ. 19, ἀνωτέρω.

ἀναπτύξεως ὡρισμένων παραγωγικῶν κλάδων, ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ἀνάπτυξιν ἄλλων κλάδων.

Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς τῆς τεχνολογικῆς μήτρας μιᾶς οἰκονομίας εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστον ἀγαθὸν δύναται νὰ παραχθῇ διὰ περισσοτέρων τῆς μιᾶς (ὁμοκλαδικῶν) παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Ἡ λύσις τοῦ ὡς ἄνω προβλήματος εἶναι βασικῆς σημασίας, ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, διὰ δύο κυρίως λόγους: Ἐν πρώτοις, ἡ διαδικασία λειτουργικῆς ἐπιλογῆς τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ἡ ὁποία συμφώνως πρὸς τὴν κλασσικὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν, ὑποτίθεται ὅτι εἶναι συνέπεια τοῦ μηχανισμοῦ διαμορφώσεως τῶν τιμῶν, δὲν εἶναι πάντοτε ἀποτελεσματική, ἀκριβῶς λόγῳ τῆς πλημμελοῦς λειτουργίας τοῦ μηχανισμοῦ αὐτοῦ, ἰδία εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας. Δεύτερον, καὶ ἂν ἀκόμη ὑποτεθῇ ὅτι ἡ λειτουργία τοῦ μηχανισμοῦ διαμορφώσεως τῶν τιμῶν καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ἐπιλογὴν τῶν συμφερωτέρων ἑκάστοτε παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, βάσει τοῦ κριτηρίου τοῦ μεγίστου κέρδους, ἡ ἐπιλογὴ αὐτὴ δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ κατ' ἀνάγκην ὡς ἡ πλέον ἐνδεδειγμένη ἀπὸ ἀπόψεως ἐθνικῆς οἰκονομίας. Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν τὰ κριτήρια ἐπιλογῆς εἶναι συνήθως διάφορα τῶν ἰδιωτικοοικονομικῶν κριτηρίων καὶ ἀποβλέπουν εἰς οἰκονομικοὺς στόχους μακροχρονίου σημασίας. Ἀπὸ ἀπόψεως ἐθνικῆς οἰκονομίας δυνατόν, π.χ., νὰ ἐπιδιώκεται ἡ ἐπιλογὴ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων αἱ ὁποῖαι μεγιστοποιοῦν (ἢ ἐλαχιστοποιοῦν) τὴν ἐργατικὴν ἀπασχόλησιν τῆς οἰκονομίας ἢ ἐνισχύουν τὴν ἐθνικὴν ἄμυναν ἢ ἐλαχιστοποιοῦν τὸ ποσὸν τῶν ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων διὰ τὴν ἐπίτευξιν ὡρισμένης αὐξήσεως τῆς τελικῆς ζητήσεως. Τέλος δυνατὸν ἡ ἐπιλογὴ ὡρισμένων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, βάσει κοινωνικοοικονομικῶν κριτηρίων, νὰ εἶναι σαφῶς ἐπιζημία διὰ τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐπενδεδυμένα κεφάλαια εἰς τὴν χρησιμοποίησιν ἄλλων ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Ἡ διαφορὰ αὐτὴ μεταξὺ ἰδιωτικοοικονομικῶν καὶ κοινωνικοοικονομικῶν κριτηρίων ἐπιλογῆς ἀποτελεῖ ἰσχυρὸν ἐπιχείρημα ὑπὲρ τῆς κρατικῆς προγραμματικῆς ἐπιλογῆς, κυρίως εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὑπαναπτύκτων χωρῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπιδιώκουν νὰ ἐπιτύχουν ταχεῖαν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν, ἤτοι νὰ ἀνέλθουν εἰς ὑψηλὰ ἐπίπεδα οἰκονομικῆς δραστηριότητος καὶ εἰσοδήματος εἰς σχετικῶς βραχὺ χρονικὸν διάστημα.

12.2. Τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τῆς προγραμματικῆς ἐπιλογῆς τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ἀπὸ ἀπόψεως ἐθνικῆς οἰκονομίας θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι:

α) Εἰς ἕκαστον κλάδον εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν περισσότεραι τῆς μιᾶς παραγωγικαὶ δραστηριότητες πρὸς παραγωγὴν ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀγαθοῦ. β) Ἡ ἐπιλογὴ τῆς οἰκονομικωτέρας παραγωγικῆς δραστηριότητος ἐξ ἑκάστης ὁμάδος ὁμοκλαδικῶν δραστηριοτήτων ἐπιδιώκεται νὰ γίνῃ βάσει τοῦ κριτηρίου τῆς *ἐλαχιστοποιήσεως* τοῦ ἀπαιτουμένου κεφαλαίου πρὸς ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως. Ἐπειδή, ὡς συμβαίνει συνήθως εἰς τὰ προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, ἡ προγραμματιζομένη τελικὴ ζήτησις εἶναι ἀνωτέρα τῆς δυναμένης νὰ πραγματοποιηθῇ βάσει τῆς ὑφισταμένης παραγωγικῆς δυναμικότητος τῶν διαφόρων κλάδων, τὸ ὡς ἄνω κριτήριον λαμβάνει τὴν μορφὴν τῆς *ἐλαχιστοποιήσεως τῶν ἐπενδύσεων* (δηλαδὴ τῆς ποσότητος τοῦ *νέου* κεφαλαίου), αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς ὑπερβαλλούσης τὰς ἀρχικὰς δυνατότητας τῆς οἰκονομίας αὐξήσεως τῆς τελικῆς ζητήσεως. Τὴν ζήτησιν αὐτὴν θὰ ὀνομάζωμεν *πλεονάζουσαν τελικὴν ζήτησιν*. Ἐξ ἄλλου ζήτημα ἐπιλογῆς παραγωγικῶν δραστηριοτήτων δύναται νὰ τεθῇ μόνον ὅταν πρόκειται νὰ γίνουν νέαι ἐπενδύσεις, ὁπότε πρέπει νὰ ἀποφασισθῇ ποίαν μορφὴν πρέπει νὰ λάβῃ τὸ νεοδημιουργούμενον ὑλικὸν κεφάλαιον εἰς ἕκαστον κλάδον παραγωγῆς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, λέγοντες ἐνταῦθα ἐπιλογὴν τεχνολογικῆς μήτρας, ἀναφερόμεθα εἰς τὴν τεχνολογικὴν μήτραν τὴν προκύπτουσαν ἐκ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων αἱ ὁποῖαι λειτουργοῦν βάσει τῶν νέων ἐπενδύσεων.

Τὸ κριτήριον τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῶν ἐπενδύσεων διὰ τὴν ἐπιλογὴν τῆς τεχνολογικῆς μήτρας τῆς οἰκονομίας εἶναι συνήθως τὸ πλέον ἐνδεδειγμένον κριτήριον εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὑπαναπτύκτων χωρῶν, αἱ ὁποῖαι χαρακτηρίζονται ἀπὸ ἀνεπάρκειαν τοῦ συντελεστοῦ «κεφάλαιον»(1).

12.2.1. Δεδομένα τοῦ προβλήματος. Τὸ πρόβλημα τῆς προγραμματικῆς ἐπιλογῆς τῆς ἀρίστης τεχνολογικῆς μήτρας, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως, θὰ ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα βάσει ἑνὸς ἀριθμητικοῦ παραδείγματος.

Τεχνολογικαὶ δυνατότητες. Θὰ ὑποθέσωμεν πρὸς ἀπλούστευσιν ὅτι ἡ ἐξεταζομένη οἰκονομία εἶναι κλειστὴ (ἤτοι δὲν ἔχει συναλλαγὰς μὲ ἄλλας οἰκονομίας) καὶ ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς παραγωγικοὺς κλάδους, τοὺς ὁποίους θὰ συμβολίσωμεν διὰ τῶν γραμμάτων Α, Β καὶ Γ.

Ἕκαστος κλάδος δύναται νὰ παράγῃ ἓν μόνον ἀγαθὸν ἀλλὰ κατὰ διαφόρους τρόπους, ἤτοι διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως περισσοτέρων τῆς μιᾶς παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Αἱ τεχνολογικαὶ αὗται δυνατότητες δεικνύονται εἰς τὴν κάτωθι μήτραν:

1) Βλ. Α. Α. Λάζαρη: Προγραμματισμὸς τῶν ἐπενδύσεων διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν οἰκονομικῶς καθυστερημένων χωρῶν. Ἀθῆναι 1960 (σ.σ. 8 - 9).

Ἀγαθά	Κλάδος Α		Κλάδος Β		Κλάδος Γ		
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	Π_6	Π_7
Κλάδου Α	1.0	1.0	0.3	−0.4	−0.2	−0.1	−0.6
Κλάδου Β	−0.3	−0.5	1.0	1.0	−0.4	−0.5	−0.1
Κλάδου Γ	−0.4	−0.3	−0.5	−0.3	1.0	1.0	1.0
Συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως	2.0	3.7	0.75	1.5	3.0	4.7	2.5

Αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες συμβολίζονται διὰ τῶν συμβόλων $\Pi_1, \ldots, \Pi_7$. Ὡς δεικνύεται εἰς τὸν πίνακα, διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος των, οἱ μὲν κλάδοι Α καὶ Β δύνανται νὰ χρησιμοποιήσουν ἕκαστος δύο παραγωγικὰς δραστηριότητας, ὁ δὲ κλάδος Γ δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ τρεῖς παραγωγικὰς δραστηριότητας.

Ἡ μορφὴ ἑκάστης παραγωγικῆς δραστηριότητος εἶναι ἡ συνήθης εἰς τὸ σύστημα εἰσροῶν - ἐκροῶν. Εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πίνακος περιλαμβάνονται οἱ κλαδικοὶ συντελεσταὶ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς παραγωγῆς ([1]). Εἰς ἕκαστον κλάδον ἀντιστοιχοῦν πλείονες συντελεσταί, καθ᾽ ὅσον τὸ ὕψος τῆς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως κατὰ μονάδας παραγωγῆς εἰς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν κλάδον ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς χρησιμοποιουμένης παραγωγικῆς μεθόδου (δραστηριότητος). Οὕτω, π.χ., ὁ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ κλάδου Α εἶναι 2 ἢ 2.5 ν.μ., ἀναλόγως ἐὰν διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος του χρησιμοποιῆται ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης Π_1 ἢ Π_2.

Πλεονάζουσα τελικὴ ζήτησις. Ἡ πλεονάζουσα τελικὴ ζήτησις Ζ, ἤτοι ἡ μὴ δυναμένη νὰ ἱκανοποιηθῇ βάσει τῆς ὑπαρχούσης παραγωγικῆς δυναμικότητος τῆς οἰκονομίας καὶ ἀπαιτοῦσα ὡς ἐκ τούτου προσθέτους ἐπενδύσεις, ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι ([2]):

$$Z = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος Ζ ἀποτελοῦν ἀξίας προϊόντων τῶν κλάδων Α, Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως. Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ ὁμιλῶμεν ἁπλῶς περὶ ζητήσεως Ζ καὶ θὰ ἐννοῶμεν τὴν πλεονάζουσαν τελικὴν ζήτησιν.

1) Βλ. σ.σ. 185 - 186, ἀνωτέρω.

2) Διὰ τὸν τρόπον ὑπολογισμοῦ τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως, βλ. Α. Α. Λάζαρη, op. cit. σ.σ. 29 καὶ 30.

12.2.2. Ἡ φύσις τοῦ προβλήματος. Βάσει τῶν ἀνωτέρω τεχνολογικῶν δεδομένων καὶ τῆς ζητήσεως Z δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα :

Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τεχνολογικὴ μήτρα βάσει τῆς ὁποίας ἡ ζήτησις Z δύναται νὰ ἱκανοποιηθῇ μὲ τὴν ἐλαχίστην δαπάνην κεφαλαίου. Ἐπειδὴ βάσει τῶν δοθεισῶν ἀνωτέρω τεχνολογικῶν δυνατοτήτων εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθοῦν πολλαὶ τεχνολογικαὶ μῆτραι τῆς οἰκονομίας, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιλαμβάνει μίαν μόνον παραγωγικὴν δραστηριότητα δι' ἕκαστον κλάδον, τὸ ὡς ἄνω πρόβλημα εἶναι πρόβλημα ***ἐπιλογῆς τῆς ἀρίστης τεχνολογικῆς μήτρας***, βάσει τοῦ κριτηρίου τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῶν ἐπενδύσεων.

12.2.3. Διατύπωσις τοῦ προβλήματος. Ἡ μαθηματικὴ διατύπωσις τοῦ ὡς ἄνω προβλήματος εἶναι ἁπλῆ, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω.

Ἂς θέσωμεν $x_1, x_2, \ldots$ καὶ x_7, διὰ τὰ ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ καὶ Π_7 ἀντιστοίχως. Προφανῶς τὰ ἐπίπεδα ταῦτα πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικά, ἤτοι : $x_1, x_2, \ldots, x_7 \geqslant 0$. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως γνωρίζομεν ὅτι διὰ τὴν χρησιμοποίησιν δοθείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος ἀπαιτεῖται ἐπένδυσις (ὑπὸ μορφὴν παγίων ἐγκαταστάσεων, μηχανημάτων κλπ.) ἀξίας ἴσης πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ ὡς ἄνω συντελεστοῦ. Κατὰ συνέπειαν διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων $\Pi_1, \Pi_2 \ldots$ καὶ Π_7 εἰς ἐπίπεδα $x_1, x_2, \ldots$ καὶ x_7, ἀντιστοίχως, ἀπαιτεῖται συνολικὴ ἐπένδυσις :

$$2x_1 + 3.7x_2 + 0.75x_3 + 1.5x_4 + 3x_5 + 4.7x_6 + 2.5x_7 .$$

Συμφώνως πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος ἡ ἱκανοποίησις τῆς ζητήσεως Z πρέπει νὰ ἐπιδιωχθῇ διὰ τῆς ἐλαχίστης δυνατῆς θυσίας κεφαλαίου, ἤτοι διὰ τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῶν ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἐπιβάλλεται ὅπως τὰ ἐπίπεδα $x_1, x_2, \ldots$ καὶ x_7 ἐπιλεγοῦν κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν :

$$2x_1 + 3.7x_2 + 0.75x_3 + 1.5x_4 + 3x_5 + 4.7x_6 + 2.5x_7 = \varphi(x) \text{ ἐλάχιστον} \qquad (1)$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1\Pi_1 + x_2\Pi_2 + x_3\Pi_3 + x_4\Pi_4 + x_5\Pi_5 + x_6\Pi_6 + x_7\Pi_7 = Z \qquad (2)$$

καὶ

$$x_1, x_2, \ldots, x_7 \geqslant 0 \qquad (3)$$

Ἀναλυτικῶς ἡ (2) δύναται νὰ γραφῇ ὡς κάτωθι :

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 0.3x_3 - 0.4x_4 - 0.2x_5 - 0.1x_6 - 0.6x_7 &= 100 \\
-0.3x_1 - 0.5x_2 + x_3 + x_4 - 0.4x_5 - 0.5x_6 - 0.1x_7 &= 120 \quad (2') \\
-0.4x_1 - 0.3x_2 - 0.5x_3 - 0.3x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 80
\end{aligned}
$$

Θέτοντες : $A = [\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_7]$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_7 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad K = [2,\ 3.7,\ 0.75,\ 1.5,\ 3,\ 4.7,\ 2.5]$$

δυνάμεθα νὰ γράψωμεν συνοπτικῶς :

$$KX = \varphi(x) \text{ ἐλάχιστον}$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$AX = Z \qquad (5)$$

$$X \geqslant 0 \qquad (6)$$

12.2.4. Λύσις τοῦ προβλήματος. Προφανῶς τὸ ὡς ἄνω πρόβλημα εἶναι τυπικὸν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ καὶ δύναται νὰ λυθῇ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς γνωστῆς, ἐκ τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου [1], ὑπολογιστικῆς διαδικασίας. Πρὸς διευκόλυνσιν τῆς ὑπολογιστικῆς διαδικασίας καὶ ἀμέσου ἐφαρμογῆς τοῦ ἀλγορίθμου Simplex, εἰσάγομεν τὰ πλασματικὰ διανύσματα Π_8, Π_9 καὶ Π_{10} μὲ μὴ ἀρνητικὰ ἐπίπεδα x_8, x_9 καὶ x_{10}, ἀντιστοίχως, καὶ μεγάλας θετικὰς τιμὰς M [2]. Οὕτω τὸ πρόβλημα διαμορφοῦται τελικῶς ὡς ἑξῆς.

Νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) = 2x_1 + 3.7x_2 + 0.75x_3 + 1.5x_4 + 3x_5 + 4.7x_6 + 2.5x_7 + \\
+ Mx_8 + Mx_9 + Mx_{10} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$x_1\Pi_1 + x_2\Pi_2 + \ldots + x_{10}\Pi_{10} = Z \qquad (8)$$

καὶ

$$x_1, x_2, \ldots, x_{10} \geqslant 0 \qquad (9)$$

1) Βλ. εἰδικώτερον 11.4.3.

2) Βλ. σ. 309, ἀνωτέρω.

Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ ἀλγορίθμου Simplex διὰ τὴν λύσιν τοῦ ὡς ἄνω προβλήματος δεικνύεται εἰς τὰ κατωτέρω παρατιθέμενα πινάκια Α' – Δ'. Ἡ ἀρίστη λύσις περιέχεται εἰς τὸ πινάκιον Δ'. Συμφώνως πρὸς τὴν λύσιν αὐτὴν ἡ ἱκανοποίησις τῆς ζητήσεως Ζ πρέπει νὰ ἐπιδιωχθῇ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_1 (τοῦ κλάδου Α) Π_4 (τοῦ κλάδου Β) καὶ Π_5 (τοῦ κλάδου Γ), εἰς ἐπίπεδα 287.5, 323 καὶ 292, ἀντιστοίχως. Τὸ ἐλάχιστον συνολικὸν κόστος κεφαλαίου, ἤτοι αἱ ἀπαιτούμεναι ἐλάχισται ἐπενδύσεις διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς λύσεως ταύτης εἶναι :

$$2 \times 287.5 + 1.5 \times 323 + 3 \times 292 = 1935.5$$

Οὕτω ἡ ἀρίστη τεχνολογικὴ μήτρα διὰ τὴν οἰκονομίαν εἶναι :

$$[\Pi_1, \Pi_4, \Pi_5] = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.2 \\ -0.3 & 1 & -0.4 \\ -0.4 & -0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἡ εὑρεθεῖσα λύσις τοῦ προβλήματος πρέπει βεβαίως νὰ ἐλεγχθῇ ἂν εἶναι οἰκονομικῶς πραγματοποιήσιμος, ἤτοι ἂν αἱ ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις δύνανται νὰ καλυφθοῦν ἐξ ἀποταμιευτικῶν πόρων (ἐσωτερικοῦ καὶ ἐξωτερικοῦ) (1).

12.3. Τὸ δυαδικὸν πρόβλημα

Αἱ ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ τῶν παραγομένων προϊόντων. Συμφώνως πρὸς τὰ ἤδη ἐκτεθέντα εἰς τὸ τμῆμα 11.4, ἀνωτέρω, εἰς ἕκαστον ἀρχικὸν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἀντιστοιχεῖ ἓν δυαδικὸν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως καὶ ἀντιθέτως. Τὸ προηγουμένως ἐξετασθὲν πρόβλημα (12.2.3), ἦτο πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως, κατὰ συνέπειαν τὸ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦν δυαδικὸν πρόβλημα πρέπει καὶ εἶναι πρόβλημα μεγιστοποιήσεως. Ἡ λύσις τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος δίδεται ὡς ὑποπροϊὸν τῶν ὑπολογισμῶν διὰ τὴν λύσιν τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως καὶ συνεπῶς δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γίνουν νέοι ὑπολογισμοί. Τὴν λύσιν ταύτην ἀποτελοῦν αἱ τιμαί : 6.555, 6.16 καὶ 6.77 τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ Δ' πινακίου, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ τρία πλασματικὰ διανύσματα.

Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῶν ὡς ἄνω τιμῶν δὲν εἶναι δύσκολον νὰ προσδιορισθῇ, κατόπιν τῶν ἤδη λεχθέντων περὶ τῶν πλασματικῶν τιμῶν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος εἰς 11.4. Αὗται ἀποτελοῦν πράγματι ὑπολογιστικὰς τιμὰς τῶν ἀγαθῶν τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν κλάδων Α, Β

---

1) Βλ. σ. 192, ἀνωτέρω.

καὶ Γ καὶ ἀποσκοποῦν εἰς τὸν καταλογισμὸν (κατανομὴν) τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου μεταξὺ τῶν ποσοτήτων τῶν ὡς ἄνω ἀγαθῶν τὰ ὁποῖα περιλαμβάνει ἡ ζήτησις Ζ. Ἐπειδὴ τὸ ἀπαιτούμενον ἐλάχιστον κόστος κεφαλαίου εἶναι ὡς εἴδομεν: 1935.5 ν.μ., αἱ ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ πρέπει νὰ εἶναι τοιαῦται ὥστε, πολλαπλασιαζόμεναι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ποσότητας τῆς ζητήσεως Ζ, νὰ δίδουν συνολικὴν μεγίστην ἀξίαν τῆς ἐν λόγῳ ζητήσεως 1935.5 ν.μ.

Πράγματι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ διάνυσμα τῆς ζητήσεως Ζ ἐπὶ τὸ διάνυσμα τῶν εὑρεθεισῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν, λαμβάνομεν:

$$[6.555 \quad 6.16 \quad 6.77] \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 80 \end{bmatrix} = 1936.3$$

Πινάκιον Α΄

			M	M	M	2	3.7	1	1.5	3	4.7	2.5
	B	Z	Π_8	Π_9	Π_{10}	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	Π_6	Π_7
M	Π_8	100	1			1	1	−0.3	−0.4	−0.2	−0.1	−0.6
M	Π_9	120		1		−0.3	−0.5	1	1	−0.4	−0.5	−0.1
M	Π_{10}	80			1	−0.4	−0.3	−0.5	−0.3	$\boxed{1}$	1	1
		300M				0.3M	0.2M	0.2M	0.3M	0.4M	0.4M	0.3M
						−2	−3.7	−1	−1.5	−3	−4.7	−2.5

Πινάκιον Β΄

M	Π_8	116	1		0.2	$\boxed{0.92}$	0.94	−0.4	−0.46		0.1	−0.4
M	Π_9	152		1	0.4	−0.46	−0.62	0.8	0.88		−0.1	0.3
3	Π_5	80			1	−0.4	−0.3	−0.5	−0.3	1	1	1
		268M			-0.4M	0.46 M	0.32 M	0.4M	0.42 M			-0.1M
		240			3	−3.2	−4.6	−2.5	−2.4		−1.7	0.5

Ἡ μικρὰ διαφορὰ 1936.3 – 1935.5 = 0.8 ὀφείλεται εἰς στρογγυλεύσεις τῶν ποσῶν κατὰ τὸν ὑπολογισμόν.

Προφανῶς ἐξ ὁρισμοῦ δὲν εἶναι δυνατὸν ἡ μεγίστη «ἀξία» τῆς τελικῆς ζητήσεως Ζ, εἰς μονάδας κεφαλαίου, νὰ εἶναι διάφορος τῆς ἐλαχίστης ποσότητος ἐπενδύσεων, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἱκανοποιηθῇ ἡ ἐν λόγῳ ζήτησις. «Ἀξία» τῆς ζητήσεως μεγαλυτέρα δὲν θὰ ἦτο δυνατὴ καθ' ὅσον ὁ λόγος ὑπάρξεως τῆς ἐν λόγῳ «ἀξίας» εἶναι ἀκριβῶς τὸ ποσὸν τῶν διενεργουμένων ἐπενδύσεων. Ἐξ ἄλλου «ἀξία» τῆς ζητήσεως μικροτέρα τοῦ κόστους κεφαλαίου θὰ εἶχε τὴν ἔννοιαν ὅτι αἱ ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ τῶν ἀγαθῶν τῶν τριῶν κλάδων θὰ ἦσαν κατώτεραι ἐκείνων αἱ ὁποῖαι ἐξασφαλίζουν πλήρη κατανομὴν τῶν ἐπενδύσεων εἰς τὰ κονδύλια τῆς ζητήσεως.

Ἤδη δυνάμεθα νὰ προβῶμεν εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ δυαδικοῦ προ-

Πινάκιον Γ'

			M	M	M	2	3.7	1	1.5	3	4.7	2.5
	B	Z	Π_8	Π_9	Π_{10}	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	Π_6	Π_7
2	Π_1	126	1.087		0.217	1	1.022	-0.434	–0.5		0.1087	-0.435
M	Π_9	210	0.5	1	0.5		0.15	0.6	$\boxed{0.65}$		–0.05	0.1
3	Π_5	130.5	0.435		1.087		0.108	-0.634	–0.5	1	1.043	0.826
		210M	-0.5M		-0.5M		0.15 M	0.6M	0.65 M		-0.05M	0.1M
		643.5	3.48		3.7		–1.33	–3.89	–4		-1.353	-0.892

Πινάκιον Δ'

2	Π_1	287.5	1.47	0.77	0.602	1	1.137	0.02			0.14	-0.358
1.5	Π_4	323	0.77	1.54	0.77		0.23	0.909	1		0.77	0.154
3	Π_5	292	0.82	0.77	1.47		0.223	–0.22		1	1.08	0.903
			–M	–M	–M							
		1935.5	6.555	6.16	6.77		–0.41	-0.256				-0.276

βλήματος, βασιζόμενοι εἰς τὰ δεδομένα τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως. Ἂν θέσωμεν μ_1, μ_2 καὶ μ_3 διὰ τὰς ὑπολογιστικὰς τιμὰς τῶν ἀγαθῶν τῶν τριῶν κλάδων, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴν τελικὴν ζήτησιν, θὰ ἔχωμεν:

$$100\,\mu_1 + 120\,\mu_2 + 80\mu_3 = \varphi(\mu) \text{ μέγιστον} \qquad (1)$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.3 & -0.4 \\ 1 & -0.5 & -0.3 \\ -0.3 & 1 & -0.5 \\ -0.4 & 1 & -0.3 \\ -0.2 & -0.4 & 1 \\ -0.1 & -0.5 & 1 \\ -0.6 & -0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 2 \\ 3.7 \\ 1 \\ 1.5 \\ 3 \\ 4.7 \\ 2.5 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

καὶ

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3 \geqslant 0 \qquad (3)$$

Ἡ πρώτη μήτρα τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τοῦ συστήματος (2) εἶναι ἡ ἐνηλλαγμένη μήτρα τῶν τεχνολογικῶν δεδομένων τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος. Ὁμοίως τὸ διάνυσμα τοῦ δεξιοῦ μέλους τοῦ συστήματος (2) εἶναι τὸ ἐνηλλαγμένον τοῦ διανύσματος K τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος. Διὰ νὰ καταστῇ σαφεστέρα ἡ ἔννοια τῶν ἀνισοτήτων τοῦ συστήματος (2), ἐκτελοῦμεν τὰς σχετικὰς πράξεις μητρῶν καὶ διατυποῦμεν τὸ σύστημα τοῦτο ἐκ νέου ὡς κάτωθι:

$$\begin{aligned} \mu_1 &\leqslant 0.3\,\mu_2 + 0.4\,\mu_3 + 2 \\ \mu_1 &\leqslant 0.5\,\mu_2 + 0.3\,\mu_3 + 3.7 \\ \mu_2 &\leqslant 0.3\,\mu_1 + 0.5\,\mu_3 + 1 \\ \mu_2 &\leqslant 0.4\,\mu_1 + 0.3\,\mu_3 + 1.5 \\ \mu_3 &\leqslant 0.2\,\mu_1 + 0.4\,\mu_2 + 3 \\ \mu_3 &\leqslant 0.1\,\mu_1 + 0.5\,\mu_2 + 4.7 \\ \mu_3 &\leqslant 0.6\,\mu_1 + 0.1\,\mu_2 + 2.5 \end{aligned} \qquad (4)$$

Ἐξ ὅσων ἤδη ἐλέχθησαν εἰς 11.4.2 καὶ εἰς τὸ παρὸν τμῆμα (12.3) ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῶν ἀνισοτήτων τοῦ συστήματος (4) καθίσταται προφανής. Αἱ ἀνισότητες αὗται ἀντιστοιχοῦν κατὰ σειρὰν εἰς τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_7$. Αἱ ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ μ_1,

μ_2 καὶ μ_3 ὁρίζονται κατὰ τρόπον ὥστε νὰ μὴ δύνανται νὰ ὑπερβοῦν τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν παραγωγὴν ἑκάστου ἀγαθοῦ βάσει τῶν δοθεισῶν μεθόδων. Τὸ ἐν λόγῳ κόστος κεφαλαίου ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τμήματα: τὸ *ἄμεσον κόστος* κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον εἶναι ὡς παρατηροῦμεν ὁ κλαδικὸς συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως, ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὴν δοθεῖσαν δραστηριότητα, καὶ *τὸ ἔμμεσον κόστος* κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ εἰς κεφάλαιον ἀξία τῶν εἰσροῶν ἑκάστης δραστηριότητος. Προφανῶς εἰς τὸ τελικὸν πρόγραμμα (εἰς τὴν ἐκλεγομένην ἀρίστην τεχνολογικὴν μήτραν) περιλαμβάνονται δραστηριότητες αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς σχέσεις τοῦ συστήματος (4) πληρουμένας διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος. Αἱ ἐκ τοῦ τελικοῦ προγράμματος ἀπορριπτόμεναι δραστηριότητες πρέπει νὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς σχέσεις τοῦ συστήματος (4) εἰς ἃς ὑπερισχύει τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος. Ἡ ὑπερίσχυσις τοῦ σημείου τῆς ἀνισότητος ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ συνολικὸν (ἄμεσον καὶ ἔμμεσον) κόστος κεφαλαίου [1], τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς δοθείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος, ὑπερβαίνει τὴν ἀξίαν (εἰς μονάδας κεφαλαίου) τοῦ τελικοῦ προϊόντος τῆς ἐν λόγῳ δραστηριότητος καὶ συνεπῶς αὕτη δὲν συμφέρει νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς τὴν παραγωγήν. Ἀποδοτικαὶ εἶναι μόνον αἱ δραστηριότητες διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν συνολικὸν κόστος χρησιμοποιήσεώς των ἴσον πρὸς τὴν ὑπολογιστικὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος αὐτῶν.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν μας τὴν λύσιν τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως, συμφώνως πρὸς τὴν ὁποίαν ἐπελέγησαν τελικῶς αἱ δραστηριότητες Π_1, Π_4 καὶ Π_5, τὸ σύστημα (4) πρέπει νὰ ἔχῃ τὴν μορφήν:

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= 0.3\,\mu_2 + 0.4\,\mu_3 + 2 \\
\mu_1 &< 0.5\,\mu_2 + 0.3\,\mu_3 + 3.7 \\
\mu_2 &< 0.3\,\mu_1 + 0.5\,\mu_3 + 1 \\
\mu_2 &= 0.4\,\mu_1 + 0.3\,\mu_3 + 1.5 \\
\mu_3 &= 0.2\,\mu_1 + 0.4\,\mu_2 + 3 \\
\mu_3 &< 0.1\,\mu_1 + 0.5\,\mu_2 + 4.7 \\
\mu_3 &< 0.6\,\mu_1 + 0.1\,\mu_2 + 2.5
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Αἱ πρώτη, τετάρτη καὶ πέμπτη ἰσότητες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἐκλεγομένας δραστηριότητας Π_1, Π_4 καὶ Π_5. Αἱ ἀνισότητες τοῦ συστήματος (5) ἀντιστοιχοῦν κατὰ σειρὰν εἰς τὰς ἀπορριπτομένας δραστηριότητας

1) Τὸ κόστος τοῦτο ἐκφράζεται βάσει τῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν.

Π_2, Π_3, Π_6 καὶ Π_7. Ἀντικαθιστῶντες τώρα τὰς εὑρεθείσας, ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος, τιμὰς τῶν μ_1, μ_2 καὶ μ_3 εἰς τὸ σύστημα (5), βλέπομεν ὅτι πληροῦνται πράγματι ὅλαι αἱ σχέσεις τοῦ συστήματος αὐτοῦ:

$$\begin{aligned}
6.555 &\simeq 0.3 \times 6.16 + 0.4 \times 6.77 + 2 = 6.556\ (^1)\\
6.555 &< 0.5 \times 6.16 + 0.3 \times 6.77 + 3.7 = 8.811\\
6.16 &< 0.3 \times 6.555 + 0.5 \times 6.67 + 1 = 6.351\\
6.16 &\simeq 0.4 \times 6.555 + 0.3 \times 6.77 + 1.5 = 6.153 \qquad (6)\\
6.77 &\simeq 0.2 \times 6.555 + 0.4 \times 6.16 + 3 = 6.765\\
6.77 &< 0.1 \times 6.555 + 0.5 \times 6.16 + 4.7 = 8.441\\
6.77 &< 0.6 \times 6.555 + 0.1 \times 6.16 + 2.5 = 7.049
\end{aligned}$$

12.4. Ἐπιλογὴ μεταξὺ ἐγχωρίου παραγωγῆς καὶ εἰσαγωγῶν

Ἀνωτέρω, διὰ λόγους ἁπλουστεύσεως τῆς ἀναλύσεως, ὑπετέθη ὅτι δὲν ὑπάρχουν οἰκονομικαὶ συναλλαγαὶ τῆς οἰκονομίας μὲ τὸ ἐξωτερικόν. Τὸ ἀρχικὸν ὑπόδειγμα δύναται ἐν τούτοις νὰ ἐπεκταθῇ εἰς τρόπον ὥστε νὰ περιλάβῃ καὶ τὴν δυνατότητα ἐξαγωγῶν καὶ εἰσαγωγῶν ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ. Εἰδικώτερον ὅσον ἀφορᾷ τὰς εἰσαγωγὰς εἶναι δυνατὸν νὰ ὑποτεθῇ ὅτι ἓν μέρος αὐτῶν χρηματοδοτεῖται δι' ἀντιστοίχων ἐξαγωγῶν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διὰ δανεισμοῦ ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ ἢ διὰ μειώσεως τοῦ συναλλαγματικοῦ ἀποθέματος. Ἀπὸ ἀπόψεως προγραμματισμοῦ οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ἐνδιαφέρον παρουσιάζει κυρίως νὰ ἀποφασισθῇ ἂν θὰ προτιμηθοῦν αἱ εἰσαγωγαὶ ἀντὶ τῆς ἐγχωρίου παραγωγῆς, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αὗται εἶναι δυνατὸν νὰ καλυφθοῦν δι' ἀντιστοίχων ἐξαγωγῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι θέλομεν νὰ ἐλέγξωμεν ἂν εἶναι συμφέρουσα ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ ἀγαθοῦ τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ κλάδου Α, ἔναντι ἐξαγωγῶν ἐκ τῶν ἀγαθῶν τῶν κλάδων Β καὶ Γ. Θὰ ὀνομάζωμεν τὰ ἀγαθὰ τῶν κλάδων Α, Β καὶ Γ : α, β καὶ γ, ἀντιστοίχως.

Τὸ συναλλαγματικὸν κόστος διὰ τὴν εἰσαγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ α εἶναι, ἔστω, ἴσον πρὸς 0.80 δολλάρια, ἡ δὲ τιμὴ τῶν ἐξαγωγίμων ἀγαθῶν τῶν β καὶ γ, εἰς δολλάρια, εἶναι 1.6 καὶ 0.4, ἀντιστοίχως. Κατὰ συνέπειαν διὰ τὴν εἰσαγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ α ἀπαιτεῖται ἡ ἐξαγωγὴ 0.5 (= 0.80/1.6) μονάδων ἐκ τοῦ β καὶ 2 (= 0.80/0.40) ἐκ τοῦ γ.

---

1) Τὸ σύμβολον $\simeq$ ὑποδηλοῖ ἰσότητα κατὰ προσέγγισιν. Αἱ μικραὶ διαφοραὶ ὀφείλονται εἰς στρογγυλεύσεις δεκαδικῶν ψηφίων.

Οὕτω δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν δύο ἐπὶ πλέον «παραγωγικὰς δραστηριότητας» διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ α, τὰς ὁποίας συμβολίζομεν διὰ τῶν E_1 καὶ E_2 :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν ἔχει ὡς ἐκροὴν τὴν μονάδα τοῦ α καὶ εἰσροὴν 0.5 μονάδας ἐκ τοῦ β, ἡ δὲ δευτέρα ἔχει τὴν αὐτὴν ἐκροὴν καὶ εἰσροὴν 2 μονάδας ἐκ τοῦ γ. Τὸ νέον πρόβλημα, τὸ ὁποῖον προκύπτει μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὴν τεχνολογικὴν μήτραν τῶν «παραγωγικῶν δραστηριοτήτων» E_1 καὶ E_2, δὲν διαφέρει τοῦ ἀρχικοῦ ἀπὸ ὑπολογιστικῆς ἀπόψεως.

12.5. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν

Ὡς καθίσταται προφανὲς ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων, ἡ ἀνάλυσις εἰσροῶν - ἐκροῶν καὶ ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς βασίζονται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Τὴν μεθοδολογικὴν καὶ ἁπλοποιητικὴν ἀξίαν τῆς ὡς ἄνω ὑποθέσεως οὐδεὶς ἀμφισβητεῖ. Ἠγέρθησαν ὅμως σοβαραὶ ἀμφισβητήσεις ἐὰν αὐτὴ εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν περιγραφὴν πραγματικῶν καταστάσεων. Τὰ προβαλλόμενα ἐν προκειμένῳ ἐπιχειρήματα εἶναι, ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι εἰς τὰς παραγωγικὰς μονάδας παρατηρεῖται ἐνίοτε τὸ φαινόμενον τῆς μὴ ἀναλόγου κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως — εἴτε ὑπὸ τὴν μορφὴν τῆς φθινούσης, εἴτε ὑπὸ τὴν μορφὴν τῆς αὐξούσης ἀποδόσεως — ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι αἱ μεταβολαὶ τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν καὶ ἰδίως ἡ ἐξέλιξις τῆς τεχνικῆς ἐπιφέρουν σοβαρὰς μεταβολὰς εἰς τοὺς τεχνολ γικοὺς συντελεστάς.

Μολονότι τὸ ἐπιχείρημα τῶν μεταβολῶν τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν συντελεστῶν, καὶ τὸ ἐπιχείρημα τῆς μὴ ἀναλόγου κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως, δὲν ἔχουν πάντοτε τὴν εἰς αὐτὰ ἀποδιδομένην σημασίαν, ἡ ἀνωτέρω κριτικὴ εἶναι, νομίζομεν, κατὰ βάσιν ὀρθή, λόγῳ κυρίως τῆς σοβαρότητος τοῦ ἐπιχειρήματος περὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς τεχνικῆς. Δεδομένου μάλιστα ὅτι δὲν εἶναι κατ' ἀρχὴν δυνατὸν νὰ προβλεφθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς τεχνικῆς, δὲν εἶναι ἐπίσης δυνατὸν νὰ περιληφθοῦν καὶ αἱ σχετικαὶ μεταβολαὶ τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν εἰς τὸ ὑπόδειγμα ἀναλύσεως.

Βεβαίως ἡ τεχνικὴ δὲν μεταβάλλεται οὐσιωδῶς ἐντὸς σχετικῶς βραχέος χρονικοῦ διαστήματος καὶ συνεπῶς ἡ σταθερότης τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ βραχυχρονίως ὡς μία ἱκανοποιητικὴ προσέγγισις εἰς τὴν πραγματικότητα. Διὰ μακροτέρας ὅμως περιόδους (π.χ. διὰ περιόδους 3 - 5 ἢ περισσοτέρων ἐτῶν) ἡ μεταβλητότης τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀγνοηθῇ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ προγνωστικὴ ἱκανότης τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν εἶναι μᾶλλον περιωρισμένη. Δὲν δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν μιᾶς ὡρισμένης περιόδου διὰ νὰ προβλέψωμεν ἀσφαλῶς τὰς μελλοντικὰς οἰκονομικὰς ἐξελίξεις, λόγῳ ἀκριβῶς τῶν ἀπροβλέπτων μεταβολῶν εἰς τοὺς συντελεστὰς αὐτούς. Πρέπει νὰ ὁμολογηθῇ ὅτι ἡ μέχρι τοῦδε χρησιμοποίησις τοῦ συστήματος εἰσροῶν - ἐκροῶν καὶ ἄλλων γραμμικῶν συστημάτων δι' οἰκονομικὴν πρόγνωσιν δὲν εἶχε τὰ ἀναμενόμενα ἀποτελέσματα. Τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι ἄλλη τις μέθοδος προγνώσεως θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῇ μὲ μεγαλυτέρας πιθανότητας ἐπιτυχίας πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν. Ἡ κτηθεῖσα πεῖρα, ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τῶν «οἰκονομικῶν βαρομέτρων» μέχρι τῶν σημερινῶν πολυπλόκων οἰκονομετρικῶν ὑποδειγμάτων, κατέστησε τοὺς οἰκονομολόγους λίαν ἐπιφυλακτικοὺς ὅσον ἀφορᾷ τὰς προγνωστικὰς δυνατότητας τῆς ἐπιστήμης των.

Θὰ ἠδύνατό τις, κατόπιν τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων, νὰ ἐρωτήσῃ ἐὰν εἶναι ὀρθὸν νὰ βασιζώμεθα ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν διὰ τὴν μελέτην προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ ἢ διὰ τὴν κατάρτισιν προγραμμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο εἶναι ἀνενδοιάστως καταφατική. Διὰ νὰ γίνῃ ὅμως ἀντιληπτὴ ἡ ἀπάντησις αὐτή, εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνῃ σαφὴς διάκρισις μεταξὺ δύο ἐννοιῶν, ἤτοι τῆς ***περιγραφικῆς*** (descriptive) καὶ τῆς ***κανονιστικῆς*** (normative) ἐννοίας τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ὑπὸ τὴν περιγραφικὴν αὐτῆς ἔννοιαν ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν περιγραφὴν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων καὶ τὴν οἰκονομικὴν πρόγνωσιν. Ὑποτίθεται δηλαδὴ ὅτι αἱ παραγωγικαὶ συναρτήσεις συμπεριφέρονται καθ' ὡρισμένον ἁπλοῦν τρόπον καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι δυνατὴ ἡ προβολὴ τῶν οἰκονομικῶν ἐξελίξεων καὶ εἰς τὸ μέλλον. Αἱ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαι κριτικαὶ παρατηρήσεις καὶ γενικῶς αἱ συνήθως διατυπούμεναι παρατηρήσεις ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἀφοροῦν ἀκριβῶς εἰς τὴν ὑπόθεσιν ταύτην ὑπὸ τὴν περιγραφικήν της ἔννοιαν.

Ἡ ὑπόθεσις ὅμως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν χρησιμοποιεῖται εἰς τὸν οἰκονομικὸν προγραμματισμόν, οὐχὶ ὑπὸ τὴν περιγραφικήν, ἀλλὰ ὑπὸ τὴν κανονιστικὴν αὐτῆς ἔννοιαν. Ὑπὸ τὴν τελευταίαν ταύτην ἔννοιαν, ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν συνδέεται μὲ τὸ βασικὸν πρόβλημα τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον συνίσταται εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῆς ἀρίστης οἰκονομικῆς διαρθρώσεως, δηλαδὴ τῶν καλυτέρων ἐκ τῶν ***ὑφισταμένων*** παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἐπιλογῆς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἔννοια τῆς μελλοντικῆς ἐξελίξεως δὲν ὑπεισέρχεται κατ' ἀρχὴν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ προγραμματισμοῦ.

Όταν, π.χ., ὁ μηχανικός προγραμματίζῃ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς ἔργου, ἔχει νὰ ἐπιλέξῃ τὴν καλυτέραν – βάσει ὡρισμένων κριτηρίων – ἐκ τῶν *ὑφισταμένων τεχνικῶν μεθόδων* διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἔργου αὐτοῦ. Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι αἱ τεχνικαὶ μέθοδοι θὰ μεταβληθοῦν εἰς τὸ μέλλον. Τοῦτο ὅμως δὲν δύναται προφανῶς νὰ ἐπηρεάσῃ τὴν διατύπωσιν καὶ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον ἀντιμετωπίζει ὁ μηχανικός. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι κανονιστικοῦ χαρακτῆρος, καὶ ἡ λύσις του καθορίζει τί *πρέπει* νὰ γίνῃ καὶ ὄχι τί πράγματι θὰ γίνῃ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁ οἰκονομικὸς προγραμματισμός, γενικώτερον, θέτει προβλήματα κανονιστικοῦ χαρακτῆρος, ἡ λύσις τῶν ὁποίων συνίσταται εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῆς ἀρίστης παραγωγικῆς δραστηριότητος μεταξὺ τῶν ὑφισταμένων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, πρὸς ἐπίτευξιν ὡρισμένου σκοποῦ, ὡς ἀκριβῶς εἴδομεν εἰς τὸ τμῆμα 12.2 τοῦ παρόντος κεφαλαίου.

Ὡς ἐλέχθη, παραγωγικὴ δραστηριότης εἶναι ὁ συγκεκριμένος συνδυασμὸς τῶν συντελεστῶν πρὸς παραγωγὴν ἑνὸς ἀγαθοῦ. Κατὰ συνέπειαν, «ἀρίστη παραγωγικὴ δραστηριότης» σημαίνει ἄριστος συνδυασμὸς τῶν συντελεστῶν διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἐν λόγῳ ἀγαθοῦ. Ἡ διατήρησις ὅμως τοῦ ἀρίστου παραγωγικοῦ συνδυασμοῦ – ὡς βεβαίως καὶ οἱουδήποτε ἄλλου παραγωγικοῦ συνδυασμοῦ – εἶναι δυνατὴ μόνον ἂν οἱ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ παραγωγῆς παραμένουν σταθεροὶ κατὰ κλίμακα παραγωγῆς καὶ διαχρονικῶς, *ἂν δηλαδὴ ἡ συνάρτησις παραγωγῆς συμπεριφέρεται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν*. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς εἶναι προφανὴς ὁ κανονιστικὸς χαρακτὴρ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Τὰ ἀνωτέρω δὲν σημαίνουν ὅτι, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν προβλεπομένων ἐπενδύσεων, ἡ ἐπιλεγεῖσα παραγωγικὴ δραστηριότης θὰ λειτουργῇ ἀκριβῶς ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Διάφορα αἴτια τεχνικῆς ἢ ἄλλης φύσεως (ὡς π.χ. ἡ ἔλλειψις πλήρους διαιρετότητος τῶν παραγομένων ἀγαθῶν ἢ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς) δημιουργοῦν ἀποκλίσεις ἀπὸ τὸ παραγωγικὸν optimum τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Αἱ ἀποκλίσεις αὗται δὲν θίγουν ἐν τούτοις οὐσιωδῶς τὴν σταθερότητα τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, ὅσον ἀφορᾷ τὴν δοθεῖσαν παραγωγικὴν δραστηριότητα. Κατὰ συνέπειαν εἶναι δυνατόν, μετὰ τὴν ἐπιλογὴν τῆς δραστηριότητος ταύτης, νὰ «προβλεφθοῦν» μελλοντικαὶ ἐξελίξεις, *ὑπὸ τὸν ὅρον ὅμως τῆς ἐκτελέσεως τοῦ σχετικοῦ προγράμματος ἐπενδύσεων*.

Βεβαίως εἶναι δυνατὴ ἡ ἀντικατάστασις εἰς τὸ μέλλον τῆς ἐπιλεγείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος δι' ἄλλης καλυτέρας, ἥτις βασίζεται ἐπὶ νεωτέρων τεχνικῶν ἐξελίξεων, μὲ συνέπειαν τὴν ἀλλοίωσιν τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, ἀλλ' ἡ ἀντικατάστασις αὕτη εἶναι συνήθως ἀσύμφορος, ἂν δὲν ἔχουν προηγουμένως ἀποσβεσθῇ αἱ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀρχικῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος διενεργηθεῖσαι ἐπενδύσεις. Ὁπωσδήποτε, πρὸς ἀποφυγὴν ἐσφαλμένων ἐκτιμήσεων, ἐπιβάλλεται ἡ ἐπανεξέτασις τοῦ καταρτισθέντος προγράμματος κατὰ περιόδους καὶ ἡ προσαρμογὴ αὐτοῦ εἰς τὰς ἑκάστοτε διαμορφουμένας νέας συνθήκας καὶ τεχνικὰς ἐξελίξεις. Τοῦτο καθίσταται ἄλλωστε δυνατὸν καὶ ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι αἱ προβλεπόμεναι ὑπὸ τοῦ προγράμματος ἐπενδύσεις δὲν γίνονται ἐφ' ἅπαξ ἐντὸς μιᾶς βραχείας χρονικῆς περιόδου, ἀλλ' ἐκτελοῦνται τμηματικῶς ἐντὸς μιᾶς σχετικῶς μακρᾶς χρονικῆς περιόδου.

13

Τὸ ἄριστον ποσοστὸν ἀποταμιεύσεως

13.1. Γενικὰ

13.1.1. Εἰς τὰς θεωρητικὰς συζητήσεις περὶ οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, ὡς ἐπίσης καὶ εἰς τὰς πρακτικὰς ἀναλύσεις τοῦ προγραμματισμοῦ τῶν ἐπενδύσεων, ἐξέχουσαν θέσιν κατέχει τὸ πρόβλημα τῆς ἀποταμιεύσεως. Δὲν θὰ ἦτο ὑπερβολὴ νὰ λεχθῇ ὅτι μία ἐκ τῶν σπουδαιοτέρων ἀποφάσεων τῆς ἀρχῆς ἥτις προγραμματίζει τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν μιᾶς χώρας εἶναι ἡ ἀπόφασις ἡ ἀφορῶσα εἰς τὸ ποσοστὸν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀποταμιεύεται κατ' ἔτος πρὸς διενέργειαν παραγωγικῶν ἐπενδύσεων.

Βεβαίως, ἡ λῆψις ἀποφάσεως περὶ τοῦ καθορισμοῦ τοῦ ποσοστοῦ τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, τὸ ὁποῖον θὰ διατίθεται πρὸς ἀποταμίευσιν, παρὰ τὴν μεγάλην σπουδαιότητά της, δὲν σημαίνει καὶ λύσιν ὡρισμένων βασικῶν προβλημάτων σχετιζομένων ἀμέσως ἢ ἐμμέσως μὲ τὰς ἀποταμιεύσεις. Τὸ πρῶτον πρόβλημα εἶναι νὰ ἐξασφαλισθῇ ἡ δυνατότης αὐξήσεως τῶν ἀποταμιεύσεων εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐκλεγόμενον ποσοστὸν ἐτησίας ἀποταμιεύσεως. Ἀντιμετώπισις τοῦ προβλήματος τούτου προϋποθέτει τὴν ὕπαρξιν ἢ δημιουργίαν εἰδικῶν θεσμῶν διευκολυνόντων τὴν αὔξησιν καὶ συγκέντρωσιν τῶν ἀποταμιεύσεων, ἐνδεχομένως δὲ καὶ ἐπέκτασιν τοῦ κρατικοῦ παρεμβατισμοῦ εἰς διαφόρους σφαίρας τῆς οἰκονομικῆς δραστηριότητος. Τὸ δεύτερον πρόβλημα εἶναι νὰ ἐξασφαλισθῇ ἡ μετατροπὴ τῶν συγκεντρουμένων ἀποταμιεύσεων εἰς ἐπενδύσεις. Εἶναι ἐνδεχόμενον διὰ λόγους τεχνικῆς ἢ ὀργανωτικῆς ἀνεπαρκείας ἢ συνεπείᾳ ἐλλείψεως τῶν μορφωτικῶν προϋποθέσεων εἰς τὰς εὐρείας μάζας τοῦ ἐργαζομένου πληθυσμοῦ, ὅστις εἶναι ὁ βασικὸς φορεὺς τῆς διαδικασίας οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, νὰ μὴ καταστῇ δυνατὴ ἡ μετατροπὴ τῶν δημιουργουμένων ἀποταμιεύσεων εἰς ἐπενδύσεις. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὄχι μόνον δὲν προωθεῖται ἡ οἰκονομικὴ ἀνάπτυξις τῆς χώρας ἀλλὰ δημιουργοῦνται ἀντιθέτως δυνάμεις ἀντιστροφῆς τῆς ἀνοδικῆς κινήσεως τῆς οἰκονομίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ ὑποβιβάσουν τελικῶς τὸ ἀρχικὸν ἐπίπεδον ἀπασχολήσεως καὶ εἰσοδήματος. Ἡ κεϋνσιανὴ θεωρία περὶ ἐνεργοῦ ζητήσεως καὶ αἱ παλαιότεραι ἀπόψεις περὶ τῆς ἀντιπαραγωγικῆς φύσεως τοῦ φαινομένου τῆς ἀποθησαυρίσεως ἀναφέρονται ἀκριβῶς εἰς τὰς δυσμενεῖς οἰκονομικὰς συνεπείας τῆς ἀποταμιεύσεως, ὅταν αὕτη, ἀντὶ νὰ μετατρέπεται εἰς ἐπενδύσεις, παραμένῃ ἀχρησιμοποίητος. Ἐκ τῶν σχετικῶν ἀναλύσεων κατεδείχθη τὸ ἀβάσιμον τοῦ νόμου τοῦ Say καὶ γενικώτερον τῶν κλασσικῶν ἀπόψεων περὶ τῆς αὐτομάτου ἐξασφαλίσεως παραγωγικῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ἀποταμιεύσεων μέσῳ τῶν μεταβολῶν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τόκου. Ἤδη ὁ Malthus (καὶ ἀργότερον ὁ Lauderdale) εἶχεν ὀρθῶς ἐπισημάνει, πολὺ πρὶν ἴδῃ τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος ἡ «Γενικὴ Θεωρία» τοῦ Κέϋνς, τὴν σημασίαν τῆς ἐνεργοῦ ζητήσεως ὅσον ἀφορᾷ τὴν διαμόρφωσιν τοῦ ἑκάστοτε ἐπιπέδου οἰκονομικῆς ἰσορροπίας καὶ εἶχε διαισθανθῆ πόσον κρίσιμος παράγων διὰ τὴν ἰσορροπίαν ταύτην ἦτο ὁ τρόπος χρησιμοποιήσεως τοῦ ἀποταμιευομένου ποσοστοῦ τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος.

Ἀλλὰ καὶ ἂν ἀκόμη ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἐτήσιον ποσὸν ἀποταμιεύσεως χρησιμοποιεῖται ἐξ ὁλοκλήρου πρὸς διενέργειαν ἐπενδύσεων, τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι αἱ ἐπενδύσεις αὗται εἶναι κατ' ἀνάγκην παραγωγικοῦ χαρακτῆρος ἢ ὅτι ἡ *κατανομὴ* τῶν πραγματοποιουμένων ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων ἐγένετο κατὰ τρόπον ἐξασφαλίζοντα τὴν μεγίστην δυνατὴν αὔξησιν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος. Γενικώτερον, δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ ἀντιμετώπισις τοῦ προβλήματος τῶν ἐπενδύσεων, τόσον ἀπὸ ποσοτικῆς ὅσον καὶ ποιοτικῆς ἀπόψεως, ἀποτελεῖ βασικὴν προϋπόθεσιν διὰ τὴν ἐξασφάλισιν τοῦ ὑψηλοῦ ρυθμοῦ οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως τῆς δεδομένης οἰκονομίας.

Κατὰ συνέπειαν, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ λῆψις ἀποφάσεως περὶ τοῦ ἐπιπέδου ἀποταμιεύσεως εἶναι βασικῆς σημασίας διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν μιᾶς χώρας, ἡ προϋπόθεσις αὕτη δὲν εἶναι ἐπαρκής. Ἀπαιτεῖται ἡ ἐξασφάλισις τῆς δυνατότητος πραγματοποιήσεως τοῦ ἀντιστοίχου ἐπιπέδου ἀποταμιεύσεως καὶ τῆς μετατροπῆς αὐτῆς εἰς τὰς πλέον παραγωγικὰς ἐπενδύσεις πρὸς ἐπίτευξιν τῆς μεγίστης δυνατῆς ἀποδόσεως αὐτῶν.

Ἐνταῦθα δὲν θὰ ἐξετάσωμεν τὰ εἰδικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα γεννῶνται ἀναφορικῶς πρὸς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ προγραμματιζομένου ἐπιπέδου ἀποταμιεύσεων καὶ τὴν μετατροπὴν τῶν ἀποταμιεύσεων αὐτῶν εἰς ἐπενδύσεις. Ἐξ ἄλλου θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ διενεργούμεναι ἀποταμιεύσεις μετατρέπονται εἰς παραγωγικὰς ἐπενδύσεις καὶ ὅτι αἱ ἐπενδύσεις αὗται κατανέμονται ἐντὸς τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸν καλλίτερον τρόπον. Κατόπιν τῶν ὑποθέσεων αὐτῶν θὰ συγκεντρώσωμεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν συνεπειῶν τοῦ ἐπιπέδου ἀποταμιεύσεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς συνολικῆς καταναλώσεως, τῆς ὁποίας ἡ αὔξησις ἀποτελεῖ, ἐν ὑστάτῃ ἀναλύσει, τὸν κύριον στόχον τῆς πολιτικῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἐφ' ὅσον τὸ ἄθροισμα τῆς συνολικῆς καταναλώσεως καὶ τῆς συνολικῆς ἀποταμιεύσεως ἐντὸς μιᾶς περιόδου συνιστᾷ τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα τῆς περιόδου ταύτης, δοθέντος ἑνὸς ἐπιπέδου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, ἡ αὔξησις κατὰ μίαν μονάδα τῆς ἀποταμιεύσεως ὁδηγεῖ εἰς αὐτόματον μείωσιν κατὰ μίαν μονάδα τῆς καταναλώσεως. Ὥστε ἀπὸ στατικῆς ἀπόψεως (δηλαδὴ δοθέντος τοῦ ἐπιπέδου εἰσοδήματος μιᾶς περιόδου), μεταβολαὶ τοῦ ἐπιπέδου ἀποταμιεύσεως ὑποδηλοῦν ἴσας καὶ ἀντιθέτους μεταβολὰς εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς καταναλώσεως. Ἀλλὰ ἡ ἀποταμίευσις, χρησιμοποιουμένη δι' ἐπενδύσεις, αὐξάνει τὴν συνολικὴν ποσότητα ὑλικοῦ κεφαλαίου τῆς οἰκονομίας, μὲ τελικὸν ἀποτέλεσμα τὴν δυνατότητα μεγαλυτέρας παραγωγῆς καὶ συνεπῶς καὶ καταναλώσεως, εἰς τὸ μέλλον. Ἐπομένως, ἀπὸ δυναμικῆς ἀπόψεως, ἡ αὔξησις τῆς ἀποταμιεύσεως ἐπηρεάζει αὐξητικῶς τὸ ἐπίπεδον καταναλώσεως. Οὕτω ἡ ἐπίδρασις τῶν μεταβολῶν τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἀποταμιεύσεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς καταναλώσεως εἶναι διττή : Μία αὔξησις τῆς ἀποταμιεύσεως, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπιφέρει μείωσιν τῆς καταναλώσεως κατὰ τὴν περίοδον ἐντὸς τῆς ὁποίας αὕτη λαμβάνει χώραν, ἀφ' ἑτέρου δὲ προκαλεῖ αὔξησιν τῆς καταναλώσεως εἰς τὰς ἑπομένας περιόδους. Καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν δύο ὡς ἄνω ἀντιρρόπων ἐπιδράσεων εἶναι δυνατὸν νὰ λαμβάνῃ τιμὴν θετικήν, ἀρνητικήν.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, τὸ πρόβλημα τὸ ὁποῖον θὰ διερευνήσωμεν δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως : Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ἄριστον ποσοστὸν ἀποταμιεύσεως ([1]) μιᾶς ἀναπτυσσομένης οἰκονομίας, τὸ ὁποῖον ἐξασφαλίζει μεγιστοποίησιν τοῦ ἐπιπέδου συνολικῆς καταναλώσεως ἐντὸς δοθείσης περιόδου.

Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ κατανάλωσις ἀποτελεῖ τελικὸν σκοπὸν πάσης οἰκονομικῆς προσπαθείας, εἶναι εὔλογον νὰ τίθεται ἐνταῦθα ὑπὸ ἐξέτασιν νὸ πρόβλημα τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς καταναλώσεως. Τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρὰ τὴν ἐξόφθαλμον σπουδαιότητά του, τίθεται εἰς δευτέραν μοῖραν, ἰδίᾳ εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας, εἰς τὰς ὁποίας ἡ ἀνάγκη ἐξοικονομήσεως ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέρων ἀποταμιευτικῶν πόρων διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ ρυθμοῦ οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως εἶναι λίαν πιεστική. Ἐκ τῆς τοιαύτης ὅμως παραμελήσεως τῆς ἐξετάσεως τοῦ προβλήματος τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως δὲν γίνεται ἀντιληπτὸν ὅτι ἡ πέραν ἑνὸς ὁρίου αὔξησις τοῦ ἀποταμιευομένου ποσοστοῦ δύναται νὰ ὁδηγήσῃ εἰς σοβαρὰν μείωσιν τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως, τουλάχιστον ἐντὸς ὡρισμένης περιόδου, καὶ ἂν ἀκόμη λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς αὐξητικὰς ἐπιδράσεις τῆς ἀποταμιεύσεως ἐπὶ τῆς καταναλώσεως. Ἐν ἄλλοις λόγοις, μεταβαλλομένου τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως μεταβάλλεται καὶ ἡ τιμὴ τῆς συνισταμένης τῶν δύο ἀντιρ-

1) Ὁ ὅρος «ποσοστὸν ἀποταμιεύσεως» χρησιμοποιεῖται ἀντὶ τοῦ ὅρου «ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν», ὅστις ὑποδηλοῖ μᾶλλον ἑκουσίαν ἐπιλογὴν μιᾶς σχέσεως μεταξὺ ἀποταμιεύσεως καὶ εἰσοδήματος ὑπὸ τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων. Εἰς τὰς ἀναπτυσσομένας οἰκονομίας ἡ σχέσις αὕτη δυνατὸν νὰ διαμορφοῦται εἰς σημαντικὸν βαθμὸν συνεπείᾳ καταλλήλου κρατικῆς παρεμβάσεως.

ρόπων ἐπιδράσεων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως, εἰς τρόπον ὥστε ἂν προηγουμένως ἦτο θετικὴ δυνατὸν νὰ ἀποβῇ ἀρνητική. Ποῖον εἶναι λοιπὸν τὸ ἄριστον ποσοστὸν ἀποταμιεύσεως, τὸ ὁποῖον καθιστᾷ τὸ ἐπίπεδον τῆς συνολικῆς καταναλώσεως μέγιστον ἐντὸς δοθείσης περιόδου;

Ἡ ἀξία τῆς ἀπαντήσεως εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτὸ εἶναι προφανής. Ἐξ ἄλλου ἡ διερεύνησις τῆς σχέσεως ἀποταμιεύσεως - καταναλώσεως θὰ ἠδύνατο νὰ ἀποτελέσῃ ἐνδεχομένως μίαν βάσιν διὰ τὴν ἐκτίμησιν grosso modo τῶν συνεπειῶν τῆς ἐπιλογῆς ὡρισμένου μὴ «ἀρίστου» ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως.

Τὸ πρόβλημα τῆς σχέσεως μεταξὺ ἀποταμιεύσεως καὶ καταναλώσεως δὲν ἔτυχε τῆς δεούσης προσοχῆς εἰς τὴν διεθνῆ οἰκονομικὴν βιβλιογραφίαν. Αἱ προσπάθειαι συστηματικῆς ἐξετάσεως εἶναι σχετικῶς ὀλίγαι. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς δύο βασικὰ αἴτια. ***Πρῶτον***, εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὰς ὑπὸ καθεστὼς οἰκονομικοῦ φιλελευθερισμοῦ ἀνεπτυγμένας χώρας δὲν παρουσιάζει ἰδιαιτέραν σημασίαν ἓν πρόβλημα κατ' ἐξοχὴν «κανονιστικῆς» φύσεως, ὡς εἶναι τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς ἑνὸς optimum ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεων. Τὸ πραγματοποιούμενον ἑκάστοτε μέσον ἐτήσιον ποσοστὸν ἀποταμιεύσεως εἰς τὰς φιλελευθέρας αὐτὰς χώρας εἶναι συνέπεια ἀναριθμήτων οἰκονομικῶν ἀποφάσεων τῶν μεμονωμένων ἀτόμων καὶ ἐπιχειρήσεων, ἐν μέρει δὲ καὶ τοῦ κράτους. Αἱ ἀποφάσεις αὗται, πλὴν ἐνδεχομένως τῶν σχετικῶν κρατικῶν ἀποφάσεων κατὰ τὴν διαμόρφωσιν τῆς φορολογικῆς πολιτικῆς καὶ τοῦ προϋπολογισμοῦ τῶν δημοσίων δαπανῶν, δὲν ἐπηρεάζονται οὐσιωδῶς ἀπὸ τὰς γενικὰς ἐπιδιώξεις τῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς. Ἡ πολιτικὴ ἐπιτοκίων καὶ ὁ ἐν γένει μηχανισμὸς τοῦ τραπεζικοῦ συστήματος μολονότι ἐπηρεάζουν ἔν τινι μέτρῳ τὸν τρόπον τοποθετήσεως τῶν δημιουργουμένων ἀποταμιεύσεων, φαίνεται νὰ μὴ ἀσκοῦν οὐσιώδη ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς ἑκάστοτε ῥοπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν. ***Δεύτερον***, εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας, ὅπου ὁ κρατικὸς παρεμβατισμὸς παρουσιάζει μεγάλην ἔντασιν πρὸς τὸν σκοπὸν κυρίως τῆς ἐξασφαλίσεως τῶν προϋποθέσεων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, ἡ οἰκονομικὴ πολιτικὴ ἀποβλέπει εἰς τὴν ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέραν αὔξησιν τῶν ἀποταμιεύσεων. Δεδομένου ὅτι κατὰ τὴν περίοδον τῆς οἰκονομικῆς στασιμότητος εἰς τὰς χώρας αὐτὰς ἡ ῥοπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν εἶναι λίαν χαμηλή, οἱαδήποτε αὔξησις τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως θεωρεῖται ὡς ἀμιγὲς καλόν, ὄχι μόνον ὅσον ἀφορᾷ τὴν διαδικασίαν οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῶν καταναλωτῶν. Ἡ αὔξησις τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως πέραν ἑνὸς ὁρίου θέτει ἐν τούτοις τὸ πρόβλημα τῆς ὑπερμέτρου ἐπιβαρύνσεως τοῦ ἐπιπέδου συνολικῆς καταναλώσεως. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἓν ἐκ τῶν βασικῶν προβλημάτων τῆς Οἰκονομικῆς τῆς Εὐημερίας καὶ ἀφορᾷ εἰδικώτερον εἰς τὴν εὕρεσιν ἑνὸς μέτρου διαχρονικῆς ἐξισορροπήσεως τῆς ἱκανοποιήσεως τῶν ἀποταμιευτῶν τῶν διαφόρων γενεῶν. Ἐκ τῆς ἐπακολουθούσης ἀναλύσεως θὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ ἐξαγωγὴ συμπερασμάτων, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν ἐνδεχομένως χρησιμότητα τόσον ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικῆς πολιτικῆς ὅσον καὶ διὰ τὴν κατανόησιν τῶν ἀναφερθέντων θεωρητικῶν προβλημάτων.

13.2. Τὸ ὑπόδειγμα

13.2.1. Τὸ ἐπίπεδον τῶν ἐπενδύσεων τοῦ ἔτους τ. Ἐκ τοῦ ὑποδείγματος Domar - Harrod (σ. 214) ἔχομεν:

$$\frac{\Delta I_\tau}{I_{\tau-1}} = \frac{I_\tau - I_{\tau-1}}{I_{\tau-1}} = \frac{s'}{\beta} \tag{1}$$

ὅπου I_τ καὶ $I_{\tau-1}$ εἶναι αἱ ἐπενδύσεις τοῦ ἔτους τ καὶ τ–1, ἀντιστοίχως, β εἶναι ὁ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ εἰσοδήματος καὶ s′ εἶναι τὸ ποσοστὸν ἀποταμιεύσεως τῆς περιόδου τοῦ προγράμματος. Τὸ ποσοστὸν τοῦτο ἀντιδιαστέλλεται πρὸς τὴν ῥοπὴν πρὸς ἀποταμίευσιν τῆς περιόδου 0, τὴν ὁποίαν θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ s. Ἡ τελευταία αὕτη, εἰς κατάστασιν ἰσορροπίας τῆς οἰκονομίας, ὁρίζεται ὡς ἡ σχέσις μεταξὺ ἐπενδύσεως καὶ εἰσοδήματος τῆς ἀρχικῆς περιόδου, ἤτοι:

$$s = \frac{I_0}{Y_0}.$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν:

$$I_\tau = \left(1 + \frac{s'}{\beta}\right) I_{\tau-1} \tag{2}$$

Συνεπῶς:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left(1 + \frac{s'}{\beta}\right) I_0 \\
I_2 &= \left(1 + \frac{s'}{\beta}\right) I_1 = \left(1 + \frac{s'}{\beta}\right)^2 I_0 \\
&\;\;\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
I_\tau &= \left(1 + \frac{s'}{\beta}\right) I_{\tau-1} = \left(1 + \frac{s'}{\beta}\right)^\tau I_0
\end{aligned} \tag{3}$$

Ἐκ τοῦ τύπου (3) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐπίπεδον τῶν ἐπενδύσεων οἱουδήποτε ἔτους τ, συναρτήσει τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως s′, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι γνωρίζομεν τὸν συντελεστὴν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως β καὶ τὸ ἐπίπεδον ἐπενδύσεων τῆς ἀρχικῆς περιόδου I_0. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὁ τύπος (3) περιγράφει τὴν διαχρονικὴν ἐξέλιξιν τοῦ ἐπιπέδου ἐπενδύσεων ὑπὸ τὰς τεθείσας ὑποθέσεις.

13.2.2. Ἐπίπεδον εἰσοδήματος ἔτους τ. Βάσει τῆς ἐξισώσεως τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἔχομεν :

$$Y_\tau - Y_0 = \frac{I_\tau - I_0}{s'}$$

ἐξ ἧς, κατόπιν ἀντικαταστάσεως ἐκ τῆς (3) καὶ θέτοντες $I_0 = sY_0$, λαμβάνομεν :

$$Y_\tau = Y_0 \left[\frac{s}{s'} \left(1 + \frac{s'}{\beta} \right)^\tau - \frac{s}{s'} + 1 \right] \qquad (4)$$

Ὁ τύπος (4) δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ συνολικοῦ εἰσοδήματος τοῦ ἔτους τ, Y_τ, συναρτήσει τῶν μεταβολῶν τοῦ s' καὶ δοθεισῶν τῶν τιμῶν τῶν Y_0, β καὶ s.

13.2.3. Ἐπίπεδον καταναλώσεως ἔτους τ. Ἐπειδὴ ἡ κατανάλωσις δοθέντος ἔτους τ, συμβολικῶς C_τ, εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ :

$$C_\tau = Y_\tau - I_\tau$$

δυνάμεθα, κατόπιν ἀντικαταστάσεως τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν τῶν Y_τ καὶ I_τ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν τύπον :

$$C_\tau = Y_0 \left[\left(1 + \frac{s'}{\beta} \right)^\tau \left(\frac{s}{s'} - s \right) - \frac{s}{s'} + 1 \right] \qquad (5)$$

ὅστις δίδει τὸ ἐπίπεδον τῶν ἐπενδύσεων τοῦ ἔτους τ, συναρτήσει τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεων s' καὶ δοθεισῶν τῶν τιμῶν τῶν Y_0, β καὶ s.

13.2.4. Συνολικὴ κατανάλωσις τῆς περιόδου τοῦ προγράμματος. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ περίοδος τοῦ προγράμματος περιλαμβάνῃ τ ἔτη, ἡ συνολικὴ κατανάλωσις τῆς ὡς ἄνω περιόδου θὰ εἶναι :

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_\tau = \sum_{i=1}^{\tau} C_i$$

Ἡ κατανάλωσις ΣC_i δύναται νὰ προσδιορισθῇ συναρτήσει τῆς τιμῆς τοῦ s' κατόπιν καταλλήλων ἀντικαταστάσεων βάσει τοῦ τύπου (5).

Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ ἐξετάσωμεν μόνον τὸ πρόβλημα τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ ἐπιπέδου C_τ, συναρτήσει τῆς τιμῆς τοῦ s' [1].

---

1) Μία πληρεστέρα μαθηματικὴ διερεύνησις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, ὡς ἐπίσης καὶ τοῦ προβλήματος τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς συνολικῆς καταναλώσεως τῆς περιόδου τοῦ προγράμματος, ΣC_τ, γίνεται εἰς Α. Λάζαρη : Οἰκονομετρικὴ διερεύνησις τῆς σχέσεως μεταξὺ ἀποταμιεύσεως καὶ καταναλώσεως. Ἀθῆναι 1961.

13.3. Μεταβολὴ τοῦ ἐπιπέδου C_τ ὡς πρὸς s'

Ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ τύπου (5), μία αὔξησις τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως s' θὰ προκαλέσῃ *αὐξητικὴν* ἐπίδρασιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως C_τ, διότι τὸ s' εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{s'}{\beta}$ καὶ συνεπῶς αὐξάνει τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^\tau$. Δεδομένου δὲ ὅτι ὁ παράγων $\left(\frac{s}{s'}-s\right)$ τοῦ γινομένου $\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^\tau\left(\frac{s}{s'}-s\right)$ εἶναι πάντοτε θετικός, ἡ αὐξητικὴ αὕτη ἐπίδρασις ἀντανακλᾶται ἐπὶ τοῦ ὡς ἄνω γινομένου καὶ συνεπῶς καὶ ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ C_τ. Ἐξ ἄλλου αὐξητικὴ ἐπίδρασις ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ C_τ προκαλεῖται καὶ ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τὸ s' εὑρίσκεται εἰς τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\left(-\frac{s}{s'}\right)$, τὸ ὁποῖον φέρει ἀρνητικὸν σημεῖον.

Ἡ αὔξησις ὅμως τοῦ s' προκαλεῖ ταυτοχρόνως *μειωτικὴν* ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ C_τ, διότι εὑρίσκεται εἰς τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{s}{s'}$, εἰς τὴν παράστασιν $\left(\frac{s}{s'}-s\right)$ καὶ συνεπῶς ἐπηρεάζει *μειωτικῶς* τὴν τιμὴν τοῦ γινομένου $\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^\tau\left(\frac{s}{s'}-s\right)$, μέσῳ δὲ αὐτῆς καὶ τὴν τιμὴν τοῦ C_τ. Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ s' μειοῦται, τότε θὰ ἔχωμεν τὰς ἀντιθέτους μεταβολάς.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν συστηματικῶς τὴν ἐπίδρασιν τῶν μεταβολῶν τοῦ s' ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως C_τ ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν τιμὴν τῆς παραγώγου $\frac{dC_\tau}{ds'}$ (1).

Τὴν τιμὴν ταύτην, ἥτις ἐκφράζει τὴν μεταβολὴν τῆς C_τ συνεπείᾳ μιᾶς ἀπειροστικῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς τοῦ ποσοστοῦ s', πολλαπλασιάζομεν ἐν συνεχείᾳ μὲ τὴν πραγματικὴν μεταβολὴν $\Delta s'$ τοῦ ποσοστοῦ τῆς ἀποταμιεύσεως, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν συνολικὴν μεταβολὴν ΔC_τ τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως:

$$\Delta C_\tau = \Delta s' \cdot \frac{dC_\tau}{ds'} \tag{6}$$

Ἡ πρώτη παράγωγος τῆς C_τ ὡς πρὸς s' εἶναι:

1) Ἡ παροῦσα ἀνάλυσις προϋποθέτει γνῶσιν τῶν στοιχείων τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ.

$$\frac{dC_\tau}{ds'} = Y_0\left[\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^\tau\left(-\frac{s}{s'^2}\right)+\frac{\tau}{\beta}\left(\frac{s}{s'}-s\right)\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}+\frac{s}{s'^2}\right] \quad (7)$$

Συνεπῶς :

$$\Delta C_\tau = Y_0\Delta s'\left[\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^\tau\left(-\frac{s}{s'^2}\right)+\frac{\tau}{\beta}\left(\frac{s}{s'}-s\right)\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}+\frac{s}{s'^2}\right] \quad (8)$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς συνολικῆς μεταβολῆς τῆς καταναλώσεως δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἂν δοθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν Y_0, s', s, τ καὶ β.

13.4. Μεγιστοποίησις τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως C_τ

13.4.1. Προσδιορισμὸς τῆς ἀρίστης τιμῆς τοῦ **s'**. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀρίστης τιμῆς τοῦ s', ἥτις μεγιστοποιεῖ τὸ ἐπίπεδον καταναλώσεως δοθέντος ἔτους, θέτομεν :

$$\frac{dC_\tau}{ds'} = 0 \quad (9)$$

καὶ λύομεν ὡς πρὸς s'. Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ s' ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν παράγωγον $\frac{d^2C_\tau}{ds'}$, καὶ ἂν πληροῦται ἡ συνθήκη :

$$\frac{d^2C_\tau}{ds'} < 0 \quad (10)$$

τότε ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ s' εἶναι ἡ «ἀρίστη», δηλαδὴ ἐκείνη ἡ ὁποία καθιστᾷ μέγιστον τὸ ἐπίπεδον τῆς συνολικῆς καταναλώσεως C_τ (1).

Ἐκ τοῦ μηδενισμοῦ τῆς πρώτης παραγώγου θὰ ἔχωμεν (κατόπιν ἀντικαταστάσεως ἐκ τῆς (7)) :

$$Y_0\left[\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^\tau\left(-\frac{s}{s'^2}\right)+\left(\frac{s}{s'}-s\right)\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}\times\frac{\tau}{\beta}+\frac{s}{s'^2}\right]=0 \quad (11)$$

Ἡ ἀπ' εὐθείας λύσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ὡς πρὸς s' δὲν εἶναι, καθ' ὅσον τουλάχιστον γνωρίζομεν, δυνατή. Ὡς ἐκ τούτου θὰ ἐφαρμόσωμεν μίαν διαδικασίαν ἐμμέσου λύσεως, ὡς κάτωθι :

Ἐκ τῆς (11) ἔχομεν :

$$Y_0\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^\tau\left(\frac{s}{s'^2}\right)=Y_0\left[\left(\frac{s}{s'}-s\right)\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}\times\frac{\tau}{\beta}+\frac{s}{s'^2}\right] \quad (12)$$

1) Βεβαίως οἰκονομικῶς ἐνδιαφέρουσαν λύσιν θὰ ἔχωμεν μόνον ἂν τὸ εὑρισκόμενον s' εἶναι θετικὸν καὶ μικρότερον τῆς μονάδος.

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (12) διὰ $Y_0 \frac{s}{s'^2}\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}$, λαμβάνομεν:

$$1+\frac{s'}{\beta}=\frac{(1-s')\tau s'}{\beta}+\frac{1}{\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}} \tag{13}$$

ἐξ ἧς:

$$\beta=s'(\tau-s'\tau-1)+\frac{\beta}{\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}} \tag{14}$$

Ἡ (14) ἀποτελεῖ μίαν συνθήκην ἁπλουστέραν τῆς συνθήκης (12), διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀρίστης τιμῆς τοῦ s'. Ἐὰν δηλαδὴ θέσωμεν εἰς τὴν (14) τιμὴν τοῦ s' τοιαύτην ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἐξίσωσις, δοθέντος τοῦ τ καὶ τοῦ β, ἡ ἐν λόγῳ τιμὴ θὰ εἶναι καὶ ἡ μεγιστοποιοῦσα τὸ ἐπίπεδον καταναλώσεως τοῦ ἔτους τ (ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι καὶ ἡ δευτέρα παράγωγος τοῦ C_τ εἶναι ἀρνητική).

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς «κρισίμου» τιμῆς τοῦ s', ἤτοι τῆς τιμῆς ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν συνθήκην (14), δύναται νὰ γίνῃ διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου, ἤτοι διὰ τῆς κατασκευῆς τῆς καμπύλης τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (14) [1].

Εἰς τὸν πίνακα 1 κατωτέρω δεικνύονται αἱ τιμαὶ τοῦ s' αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν συνθήκην 14 διὰ διαφόρους τιμὰς τῶν τ καὶ β.

Πίναξ 1

«Κρίσιμοι» τιμαὶ (εἰς ἑκατοστὰ) τοῦ s' διὰ τὸ ἐπίπεδον καταναλώσεως C_τ

τ \ β	2	3	3.5	4	5	0.5
5	4	3	2.5	2	1	0.5
10	59	34	24	14	6	4
15	77	63	56	50	34	20
20	84	76	72	67	58	47
25	88	81	78	74	68	62

Αἱ ληφθεῖσαι τιμαὶ τοῦ τ ἀνταποκρίνονται εἰς τὰ συνήθη χρονικὰ περιθώρια τῶν διαφόρων προγραμμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἀπὸ

1) Βλ. σχ. Α. Α. Λάζαρη op. cit. σ.σ. 39 - 43.

τῆς ἀπόψεως τοῦ ἐνταῦθα ἐξεταζομένου προβλήματος τιμαὶ $\tau = 10$ ἢ $\tau = 15$, εἶναι περισσότερον ἐνδιαφέρουσαι. Ἡ ἐπιδίωξις μεγιστοποιήσεως τῆς καταναλώσεως διὰ $\tau < 10$ δυνατὸν νὰ ἐξασθενῇ σοβαρῶς τὴν διαδικασίαν τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, ἐνῶ ἐξ ἄλλου μεγιστοποίησις τῆς καταναλώσεως διὰ $\tau > 15$ ἀποτελεῖ λίαν ἀπομεμακρυσμένην ἐπιδίωξιν καὶ συνεπῶς εἶναι μᾶλλον μειωμένης σημασίας διὰ τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα, τὰ ὁποῖα ὑποβάλλονται εἰς θυσίας διὰ τὴν ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ αὐτοῦ. Ἡ ἀριθμητικὴ ἀνάλυσις ἐνισχύει, ὡς θὰ ἴδωμεν, τὰς ἀνωτέρω ἐπιφυλάξεις.

Τιμὴ τοῦ β ἴση πρὸς 2 εἶναι μᾶλλον χαμηλὴ (1), ὄχι μόνον διὰ τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας, εἰς τὰς ὁποίας ἡ ἀποδοτικότης τοῦ κεφαλαίου εἶναι κατὰ κανόνα χαμηλή, λόγῳ ἐλλείψεως τῶν ἀναγκαιουσῶν τεχνικῶν, οἰκονομικῶν καὶ ὀργανωτικῶν προϋποθέσεων, ἀλλὰ ἀκόμη καὶ διὰ τὰς ἀνεπτυγμένας χώρας. Τιμαὶ $\beta > 6$ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν μᾶλλον ὑψηλαὶ ἀκόμη καὶ διὰ τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας. Ὁ κατωτέρω παρατιθέμενος πίναξ, ὅστις ἐλήφθη ἀπὸ τὸ βιβλίον τοῦ H. Leibenstein: Economic Backwardness and Economic Growth (σ. 246), δίδει μίαν ἰδέαν περὶ τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνει συνήθως ὁ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ εἰσοδήματος.

Πίναξ 2

Συντελεσταὶ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως εἰσοδήματος (β)

Χῶραι	Περίοδος	Τιμὴ β
Η.Π.Α.	1879 – 1929	3.0
Σουηδία	1896 – 1929	3.3
Αὐστραλία	1913 – 1938	3.9
Καναδᾶς	1911 – 1939	4.2
Μεγ. Βρεταννία	1865 – 1909	5.9
Ἰαπωνία	1913 – 1939	6.1
Ὁλλανδία	1913 – 1939	7.4
Γαλλία	1852 – 1912	7.4
Μεξικὸν	1946 – 1950	2.7
Κεϋλάνη	1946 – 1950	4.0
Βρετ. Γουϊνέα	1943 – 1950	3.5

Κατὰ τὸν Leibenstein τιμὴ $\beta = 3$ εἶναι μᾶλλον χαμηλὴ διὰ τὰς περισσοτέρας ὑπαναπτύκτους χώρας, ἐνῶ τιμὴ $\beta > 5$ εἶναι μᾶλλον ὑψηλή. Οἱ περισσότεροι ἐρευνηταὶ θεωροῦν ὅτι αἱ πιθαναὶ τιμαὶ τοῦ β διὰ τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας κυμαίνονται μεταξὺ 3.5 – 5.0. Ἡ τιμὴ 4 δύ-

1) Δὲν πρέπει νὰ λησμονῆται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως εἶναι ἡ μέση σταθμικὴ τιμὴ δι' ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν (βλ. 8.3.2).

ναται νὰ θεωρηθῇ ὡς «κανονική» διὰ τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας τῶν ἡμιανεπτυγμένων χωρῶν.

Ὁπωσδήποτε ἡ διερεύνησις γίνεται βάσει διαφόρων τιμῶν τοῦ β μεταξὺ 2 καὶ 6 εἰς τρόπον ὥστε νὰ καλύπτῃ τὰς πιθανὰς περιπτώσεις.

Αἱ τιμαὶ τοῦ s' ἀπὸ 0.06 ἕως 0.40 καλύπτουν, νομίζομεν, τὰς «λειτουργικῶς» σημαντικωτέρας τιμάς, τὰς ὁποίας εἶναι δυνατὸν νὰ λάβῃ τὸ ποσοστὸν ἀποταμιεύσεως. Ἀλλὰ αἱ τιμαὶ αὗται δὲν ἐπιτρέπουν πλήρη διερεύνησιν τῆς σχέσεως ἀποταμιεύσεως - καταναλώσεως καὶ καθίσταται ἀναγκαῖον νὰ συμπληρωθῇ ἡ ἐξέτασις καὶ μὲ τιμὰς ἀνωτέρας τοῦ 0.40.

13.4.2. Ἡ δευτέρα συνθήκη μεγιστοποιήσεως τοῦ C_τ *ὡς πρὸς* s'.
Διὰ τὸν χαρακτηρισμὸν μιᾶς κρισίμου τιμῆς τοῦ s' ὡς «ἀρίστης» ἀπαιτεῖται νὰ πληροῦται, πλὴν τῆς σχέσεως (9) καὶ ἡ σχέσις (10), ὡς πρὸς τὴν τιμὴν αὐτήν. Ἐκ τῆς (7) προχωροῦμεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς δευτέρας παραγώγου τοῦ C_τ ὡς πρὸς s'. Ἡ παράγωγος αὕτη ἐμφανίζεται ὡς ἀκολούθως :

$$\frac{d^2C_\tau}{ds'}=Y_0\Bigg[\frac{\tau}{\beta}\left(-\frac{s}{s'^2}\right)\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}+\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau}\left(\frac{2s}{s'^3}\right)+$$

$$-\frac{\tau s}{\beta s'^2}\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}+\frac{\tau(\tau-1)}{\beta^2}\left(\frac{s}{s'}-s\right)\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-2}-\frac{2s}{s'^3}\Bigg] \quad (15)$$

Θέτοντες κοινὸν παράγοντα $\frac{2sY_0}{s'^3\beta}\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\frac{d^2C_\tau}{ds'}=\frac{2sY_0}{s'^3\beta}\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}\left[-s'\tau+\beta+s'+\frac{s'^2\tau(1-s')(\tau-1)}{2(\beta+s')}-\frac{\beta}{\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}}\right]$$

Ἐπειδή :

$$\frac{2sY_0}{s'^3\beta}\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}>0$$

θέτομεν :

$$-s'\tau+\beta+s'+\frac{s'^2\tau(1-s')(\tau-1)}{2(\beta+s')}-\frac{\beta\cdot}{\left(1+\frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}}<0 \quad (16)$$

ἀντὶ τῆς συνθήκης $\quad \frac{d^2C_\tau}{ds'}<0.$

Ἡ σχέσις (16) δύναται τελικῶς νὰ γραφῇ :

$$s'\tau + \psi_2 > \frac{s'\tau(\psi_1 + s'^2)}{2(\beta + s')} + (\beta + s') \tag{17}$$

ὅπου $\quad \psi_1 = s'\tau - s'^2\tau - s' \quad$ καὶ $\quad \psi_2 = \dfrac{\beta}{\left(1 + \dfrac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}}$

Γενικὴ ἀλγεβρικὴ ἐπαλήθευσις τῆς συνθήκης (17) δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ s' μεταξὺ 0 καὶ 1 δὲν εἶναι εὐχερής. Προβαίνομεν οὕτω εἰς τὴν ἐπαλήθευσιν αὐτῆς ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν τιμῶν τοῦ πίνακος (1). Ἐκ τῆς τοιαύτης ἐπαληθεύσεως βεβαιούμεθα ὅτι αἱ «κρίσιμοι» τιμαὶ τοῦ s' εἶναι ἐπίσης καὶ «ἄρισται» τιμαί, ἤτοι μεγιστοποιοῦν τὸ ἐπίπεδον τῆς καταναλώσεως διὰ δοθὲν ἔτος τ.

13.4.3. ***Μέγιστα ἐπίπεδα καταναλώσεως ἔτους τ.*** Πρὸς ἐξαγωγὴν ἀριθμητικῶν τιμῶν διὰ τὰ μέγιστα δυνατὰ ἐπίπεδα καταναλώσεως τοῦ ἔτους τ, τὰ ὁποῖα ἐπιτυγχάνονται βάσει τῶν ἀνωτέρω προσδιορισθεισῶν ἀρίστων τιμῶν τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως s', χρησιμοποιοῦνται ὡς ἀφετηρία τὰ ἑλληνικὰ δεδομένα τοῦ 1958 ὅσον ἀφορᾷ τὸ ἀρχικὸν εἰσόδημα Y_0, ἤτοι 83.3 δισ. δρχ. Διὰ τὴν ἀρχικὴν ῥοπὴν πρὸς ἀποταμίευσιν s ἐλήφθη τιμὴ 0,133. Ἡ τιμὴ αὕτη ἰσοῦται περίπου πρὸς τὴν μέσην καθαρὰν ῥοπὴν πρὸς ἀποταμίευσιν τῶν ἐτῶν 1955-58 [1].

Βάσει τοῦ τύπου :

$$C_\tau = \left[\left(\frac{s}{s'} - s\right)\left(1 + \frac{s'}{\beta}\right)^{\tau} - \frac{s}{s'} + 1\right] Y_0$$

δυνάμεθα τώρα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ «μέγιστα» ἐπίπεδα τῆς καταναλώσεως διὰ τὰς ἀντιστοίχους «ἀρίστας τιμὰς» τοῦ s'. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα καταναλώσεως ἀναγράφονται εἰς τὸν πίνακα 3.

Εἰς ἕκαστον τετραγωνίδιον τοῦ πίνακος ἀναγράφονται δύο ἀριθμοί. Ὁ πρῶτος δεικνύει τὸ «ἄριστον» ποσοστὸν ἀποταμιεύσεως s' (βλ. καὶ πίν. 1) ὁ δὲ ἕτερος ἀριθμὸς δεικνύει τὸ ἐπίπεδον τῆς καταναλώσεως, εἰς δισ. δραχμάς.

13.4.4. ***Ἐπίδρασις τῶν μεταβολῶν τῆς τιμῆς τοῦ β ἐπὶ τοῦ C_τ καὶ τῆς ἀρίστης τιμῆς τοῦ s'.*** Α. Ἐργαζόμενοι ἐπὶ τοῦ τύπου (5), ὅστις μᾶς δίδει τὸ ἐπίπεδον C_τ τῆς καταναλώσεως τοῦ ἔτους τ, δυνάμε-

1) Τὰ στοιχεῖα ταῦτα χρησιμοποιοῦνται εἰς Α. Λάζαρη op. cit.

θα νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ἐπιδράσεις ἐπὶ τοῦ ὡς ἄνω ἐπιπέδου ἐκ τῶν μεταβολῶν τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως β· Ἂν παραγωγίσωμεν τὸ C_τ ὡς πρὸς β λαμβάνομεν :

$$\frac{dC_\tau}{d\beta} = \tau Y_0 \left(\frac{s}{s'} - s\right)\left(1 + \frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}\left(-\frac{s'}{\beta^2}\right) \qquad (18)$$

Ἐκ τῆς ἐξετάσεως τῆς (18) βλέπομεν ὅτι τὸ σημεῖον τῆς $dC/d\beta$ εἶναι πάντοτε ἀρνητικὸν διὰ τὰς οἰκονομικῶς ἀνεκτὰς τιμὰς τῶν β, s καὶ τ. Κατὰ συνέπειαν μία αὔξησις τῆς τιμῆς β ἐπιφέρει μειωτικὴν μεταβολὴν ἐπὶ τοῦ C_τ, καὶ ἀντιστρόφως.

Τοιαύτη βεβαίως ἐπίδρασις εἶναι οἰκονομικῶς δικαιολογημένη ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ αὐξητικὴ μεταβολὴ τοῦ β ὑποδηλοῖ μείωσιν τῆς εἰσοδηματικῆς ἀποδόσεως τῶν ἐπενδύσεων καὶ συνεπῶς μείωσιν τοῦ ἐπιπέδου εἰσοδήματος καὶ καταναλώσεως.

Πίναξ 3

«Μέγιστα» ἐπίπεδα καταναλώσεως C_τ

τ \ β	2	3	3.5	4	5	6
5	.04 / 111	.03 / 90	.025 / 87	.02 / 83	.01 / 82	.005 / 81
10	.59 / 166	.34 / 120	.24 / 105	.14 / 100	.06 / 94	.04 / 90
15	.77 / 506	.63 / 179	.56 / 132	.5 / 110	.34 / 108	.2 / 100
20	.84 / 2.412	.76 / 388	.72 / 225	.67 / 191	.58 / 130	.47 / 115
25	.88 / 13.627	.81 / 1.670	.78 / 533	.74 / 339	.68 / 160	.62 / 144

Ἡ συνολικὴ μεταβολὴ ΔC_τ τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως C_τ, λόγῳ δοθείσης μεταβολῆς $\Delta\beta$ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως β, θὰ εἶναι :

$$\Delta C_\tau = \Delta\beta \frac{dC_\tau}{d\beta} \tag{19}$$

Ἡ μεταβολὴ αὕτη δύναται νὰ ὑπολογισθῇ βάσει τοῦ τύπου (18) καὶ δοθεισῶν τῶν τιμῶν τῶν s, τ, καὶ $\Delta\beta$.

Ἂν ἐξετάσωμεν τὸν πίνακα 1 (ἢ τὸν πίνακα 3) κατὰ σειράς, βλέπομεν ὅτι αἱ ἄρισται τιμαὶ τοῦ s', αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ τ, μεταβάλλονται ἀντιστρόφως πρὸς τὰς μεταβολὰς τοῦ συντελεστοῦ β. Οὕτω π.χ. ἔχομεν διὰ $\tau = 10$:

β	s'
2	.59
3	.34
3.5	.24
4	.14
5	.06
6	.04

Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ εἰσοδηματικὴ ἀπόδοσις τῶν διενεργουμένων ἐπενδύσεων (δηλαδὴ ὅσον μεγαλύτερος ὁ συντελεστὴς β), τόσον μικροτέρα εἶναι ἡ ἀρίστη τιμὴ τοῦ ὁριακοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως, s', ἡ ὁποία μεγιστοποιεῖ τὸ ἐπίπεδον καταναλώσεως δοθέντος ἔτους τ τοῦ προγράμματος. Ὁ καταναλωτὴς ἑπομένως ἔχει συμφέρον νὰ προβαίνῃ εἰς σχετικῶς μεγάλας θυσίας ὅσον ἀφορᾷ τὸ ἐπίπεδον καταναλώσεως μόνον ἐὰν ὁ συντελεστὴς εἰσοδηματικῆς ἀποδόσεως τῶν ἐπενδύσεων (δηλαδὴ τὸ $1/\beta$) εἶναι ἀρκετὰ ὑψηλός, ὥστε νὰ καθιστᾷ δυνατὴν τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως εἰς τὸ δοθὲν ἔτος.

13.4.5. ***Ἐπίδρασις τῶν μεταβολῶν τοῦ τ ἐπὶ τοῦ C_τ καὶ τῆς ἀρίστης τιμῆς τοῦ s'.*** Ἐκ τοῦ τύπου (5) ἔχομεν :

$$\frac{dC_\tau}{d\tau} = Y_0\left(\frac{s}{s'} - s\right) l_v \left(1 + \frac{s'}{\beta}\right)^\tau \tag{20}$$

ὅπου l_v = φυσικὸς λογάριθμος.

Ἡ παράγωγος $dC_\tau / d\tau$ ἔχει σημεῖον θετικόν, ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ ἐπίπεδον C_τ αὐξάνει αὐξανομένου τοῦ χρόνου τ. Ἡ συνολικὴ αὔξησις θὰ εἶναι:

$$\Delta C_\tau = \Delta\tau Y_0 \left(\frac{s}{s'} - s \right) l_v \left(1 + \frac{s'}{\beta} \right)^\tau \qquad (21)$$

ὅπου $\Delta\tau =$ μεταβολὴ τοῦ τ.

Ἐκ τῆς συνθήκης:

$$\beta = s'(\tau - s'\tau - s') + \frac{\beta}{\left(1 + \frac{s'}{\beta}\right)^{\tau-1}}$$

καθίσταται προφανὲς ὅτι αἱ ἐπιδράσεις τῶν μεταβολῶν τοῦ τ ἐπὶ τῆς ἀρίστης τιμῆς τοῦ s' εἶναι ταυτοχρόνως καὶ αὐξητικαὶ καὶ μειωτικαί. Ἐκ τῆς ἐξετάσεως ὅμως τοῦ πίνακος 1 (ἢ τοῦ πίνακος 3) κατὰ στήλας βλέπομεν ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν ἐπιδράσεων αὐτῶν εἶναι αὐξητικὴ ἐπὶ αὐξήσεως τοῦ τ καὶ ἀντιθέτως. Οὕτω, διὰ $\beta = 3$ ἔχομεν:

τ	s′
5	3
10	34
15	63
20	76
25	81

Ὁ πίναξ οὗτος δεικνύει ὅτι αὐξανομένου τοῦ τ αὐξάνεται καὶ ἡ ἀρίστη τιμὴ τοῦ s' ἀλλὰ κατὰ φθίνοντα λόγον.

13.5. Συμπεράσματα

Ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ πίνακος 3 ὁδηγούμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς καταναλώσεως C_τ ἀνέρχεται εἰς λίαν ὑψηλὰ ἐπίπεδα ὅταν ἡ τιμὴ τῶν τ καὶ s' εἶναι μεγάλη καὶ ἡ τιμὴ τοῦ β μικρά.

Ἀλλὰ ἐν πρώτοις πρέπει νὰ ἀποκλεισθοῦν αἱ μικραὶ τιμαὶ (κάτω τοῦ 3) τοῦ β ὅσον ἀφορᾷ τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας. Αἱ χῶραι αὗται ὡς γνωστὸν στεροῦνται εἰς σημαντικὸν βαθμὸν ὅλων ἐκείνων τῶν προϋποθέσεων (ἔργων ὑποδομῆς, ὀργανωτικῶν μεθόδων, καταλλήλου τεχνικῆς μορφώσεως τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ κλπ.), αἱ ὁποῖαι ἐξασφαλίζουν τὴν δυνατότητα ὑψηλῆς ἀποδοτικότητος τῶν ἐπενδύσεων καὶ συνεπῶς καθιστοῦν χαμηλὴν τὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως. Ἐξ ἄλλου ὑψηλαὶ τιμαὶ τοῦ τ ὑποδηλοῦν ἀναβολὴν τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως διὰ τὸ ἀπώτερον μέλλον. Προφανῶς, ἂν ἡ τιμὴ τοῦ τ ὑπερβαίνῃ ἐν ὅριον ἀντοχῆς τῶν καταναλωτῶν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ συμφέρουσα δι' αὐτοὺς οἱ ὁποῖοι ὑφίστανται τὴν θυσίαν τῆς ἀποταμιεύσεως εἰς τὸ παρόν. Τὸ ὅριον τοῦτο ἀντοχῆς ἐξαρτᾶται βεβαίως ἀπὸ πλείστους παράγοντας, ὡς εἶναι π.χ., ἡ ἡλικία τοῦ ἀποταμιευτοῦ, ὁ βαθμὸς ἐμπιστοσύνης του εἰς τὸ πολιτικὸν καὶ οἰκονομικὸν μέλλον τῆς χώρας, αἱ οἰκογενειακαὶ ὑποχρεώσεις κλπ. Ἰδιαιτέρως ἡ ἡλικία εἶναι παράγων βασικῆς σημασίας διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ οἰκονομικοῦ ὁρίζοντος τοῦ οἰκονομοῦντος ἀτόμου. Τὸ ἄτομον τοῦτο ἐπηρεάζεται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἀπὸ τὸ μῆκος τῆς προσδοκωμένης περιόδου ζωῆς, ἀφ' ἑτέρου δὲ — κυριώτερον — ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τῆς ὡς ἄνω περιόδου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἐλπίζει νὰ διατηρήσῃ ἀκμαίας τὰς σωματικὰς καὶ πνευματικάς του δυνάμεις, διὰ νὰ δυνηθῇ νὰ ἀπολαύσῃ τὰ ἀγαθὰ τῆς οἰκονομικῆς προόδου. Νομίζομεν ὅτι τιμὴ τοῦ τ σημαντικῶς ἀνωτέρα τῶν 15 ἐτῶν δὲν δύναται ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης νὰ θεωρηθῇ συμφέρουσα διὰ τὸν καταναλωτήν. Ἐνδεχομένη τιμὴ τοῦ τ μεταξὺ 10 καὶ 15 ἐτῶν θὰ ἠδύνατο νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐκφράζουσα τὸ ὅριον χρονικῆς ἀντοχῆς τοῦ καταναλωτοῦ.

Ἡ ὑψηλὴ τιμὴ τοῦ ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως s' ὑποδηλοῖ βεβαίως ὑψηλὴν τιμὴν τοῦ μέσου ποσοστοῦ ἀποταμιεύσεως τῆς περιόδου τ, δηλαδὴ τοῦ μὴ καταναλισκομένου τμήματος τοῦ συνολικοῦ εἰσοδήματος τῆς περιόδου ταύτης. Ὅσον ὑψηλότερον εἶναι τὸ s' τόσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ παροῦσα θυσία τοῦ καταναλωτοῦ καὶ τόσον περισσότερον ἀπομακρύνεται χρονικῶς ἡ μεγιστοποίησις τοῦ συνολικοῦ ἐπιπέδου καταταλώσεως (βλ. πίνακα 4). Κατὰ συνέπειαν τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ καταναλωτοῦ διὰ τὴν μελλοντικὴν αὔξησιν τῆς καταναλώσεως καθίσταται ὁλονὲν μικρότερον ὅταν αὐξάνῃ τὸ ποσοστὸν ἀποταμιεύσεως s'.

Εἰς τὸν πίνακα 4 δεικνύεται ἡ ἐξέλιξις τοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως C_τ διὰ $\beta = 3.5$ καὶ τιμὰς τ : 5, 10, 15, 20, 25 εἰς δύο περιπτώσεις : ἤτοι διὰ $s' = 0, 24$ καὶ $s' = 0{,}78$.

Ὡς παρατηροῦμεν εἰς τὸν πίνακα 4, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ s' εἶναι 0.78, τὸ ἐπίπεδον καταναλώσεως εἶναι μέχρι τὸ 15ον ἔτος κατώτερον τοῦ ἀντιστοίχου ἐπιπέδου καταναλώσεως τὸ ὁποῖον διαμορφοῦται μὲ τιμὴν τοῦ s' : 0.24.

Λίαν ὑψηλὰ ποσοστὰ ἀποταμιεύσεως δὲν συμφέρουν ὄχι μόνον ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τοῦ καταναλωτοῦ, ἀλλὰ ἐπίσης καὶ ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς διαδικασίας οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, ὡς ἄλλωστε ἐτονίσθη εἰς τὴν παράγρ. 8.4.3. Ἂν μάλιστα ληφθῇ ὑπ' ὄψιν τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας τὸ βιοτικὸν ἐπίπεδον εἶναι λίαν χαμηλόν, καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ αὔξησις τῆς καταναλώσεως ἀποτελεῖ βασικὸν παράγοντα διὰ τὴν ἐξασφάλισιν ὑψηλῆς ἀποδοτικότητος τῆς ἐργασίας καὶ διαμόρφωσιν τιμῆς συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως προσεγγιζούσης τὸ τεχνικῶς ἄριστον ἐπίπεδον αὐτῆς. Ὅσον χαμηλότερα εἶναι τὰ ἐπίπεδα καταναλώσεως καὶ ὅσον περισσότερον χρόνον ἀναβάλλεται ἡ

Πίναξ 4

τ \ s'	0,24	0,78
0	72.2	72.2
5	86	77
10	105 (opt)	92
15	133	130
20	169	244
25	221	533 (opt)

οὐσιαστικὴ βελτίωσις αὐτῶν, τόσον μεγαλυτέρα καθίσταται ἡ διαφορὰ μεταξὺ πραγματικῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως καὶ τεχνικῶς ἀρίστης τιμῆς αὐτοῦ ([1]). Ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἀνωτέρω ἀριθμητικὸν παράδειγμα, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἂν τὸ ὁριακὸν ποσοστὸν ἀποταμιεύσεως εἶναι 0.78, ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ β πρέπει νὰ εἶναι οὐσιωδῶς μεγαλυτέρα. Ἀλλὰ τότε τὰ ὑπολογιζόμενα ἐπίπεδα καταναλώσεως καὶ τὰ εἰς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦντα ἐπίπεδα ἐθνικοῦ εἰσοδήματος ***δὲν δύνανται νὰ πραγματοποιηθοῦν***.

1) Βλ. σσ. 217 - 218, ἀνωτέρω.

14

Στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν παιγνίων

14.1. Γενικά

Ἀντικείμενον τῆς θεωρίας τῶν παιγνίων εἶναι ἡ ἐξέτασις προβλημάτων τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τῆς ἀνταγωνιστικῆς συμπεριφορᾶς δύο ἢ περισσοτέρων ἀτόμων (ἢ ὁμάδων ἀτόμων). Τὸ κύριον χαρακτηριστικὸν τῶν προβλημάτων αὐτῶν εἶναι ἡ ὕπαρξις ἀντιθέτων οἰκονομικῶν ἢ ἄλλης φύσεως συμφερόντων. Οὕτω, π.χ., εἶναι καταφανὴς ἡ ὕπαρξις ἀνταγωνιστικότητος καὶ ἀντιθέσεως συμφερόντων εἰς τὴν περίπτωσιν δύο μεγάλων παραγωγικῶν μονάδων ἑκάστη τῶν ὁποίων ἐπιδιώκει διὰ τῆς πολιτικῆς πωλήσεων νὰ κατακτήσῃ ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλύτερον τμῆμα δοθείσης ἀγορᾶς. Τοῦτο εἶναι τὸ κλασσικὸν πρόβλημα τοῦ δυοπωλίου. Ἐπίσης ἀνταγωνιστικότης καὶ ἀντίθεσις συμφερόντων ἐκδηλοῦται εἰς τὴν σφαῖραν τῆς πολιτικῆς ἢ τῆς στρατιωτικῆς πρακτικῆς, εἰς τὴν περίπτωσιν παιγνίων ὡς τὸ ζατρίκιον, τὸ μπρίτζ, τὸ πόκερ κλπ.

Εἰδικώτερον ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς θεωρίας τῶν παιγνίων ἐνδιαφέρουν κυρίως προβλήματα ἀνταγωνιστικότητος εἰς τὰ ὁποῖα ἕκαστον ἄτομον (ἢ ὁμὰς ἀτόμων) δύναται νὰ ἐπηρεάσῃ *μόνον ἐν μέρει* τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἡ λύσις ἐπηρεάζεται καὶ ἐκ τῶν ἀποφάσεων (καὶ τῆς συμπεριφορᾶς) ἄλλων ἀτόμων (ἢ ὁμάδων ἀτόμων), ἢ καὶ ἐκ τυχαίων περιστατικῶν. Οὕτω, εἰς περίπτωσιν στρατιωτικῶν ἐπιχειρήσεων, ἡ ἔκβασις τοῦ ἀγῶνος εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῶν ἀποφάσεων καὶ τῆς στρατιωτικῆς τεχνικῆς *ἀμφοτέρων* τῶν ἀντιπάλων παρατάξεων, ἐνδεχομένως ὅμως καὶ τυχαίων περιστατικῶν, ὡς εἶναι, π.χ., αἱ κρατοῦσαι κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ἐπιχειρήσεων καιρικαὶ συνθῆκαι. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ζατρικίου, ἐξ ἄλλου, ἡ ἔκβασις τοῦ ἀγῶνος εἶναι κυρίως ἀποτέλεσμα τῆς ἐφαρμοζομένης τεχνικῆς ὑπὸ τῶν δύο παικτῶν.

Εἰς τὴν θεωρίαν παιγνίων, ὡς *παίγνιον* ὁρίζεται ἀκριβῶς μία κατάστασις ἀνταγωνιστικότητος ἢ ἀντιτιθεμένων συμφερόντων, εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστον ἐκ τῶν συμμετεχόντων ἀτόμων (ἢ ὁμάδων ἀτόμων) δύναται νὰ ἐπηρεάσῃ μόνον ἐν μέρει τὴν ἔκβασιν τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος. Ἐπειδὴ ὑποτίθεται ὅτι ὑφίσταται δυνατότης *ἐπιλογῆς* μεταξὺ διαφόρων τρόπων ἐνεργείας, τὸ προκῦπτον πρόβλημα δι' ἕκαστον ἄτομον εἶναι ἡ λῆψις τοιαύτης ἀποφάσεως ἢ ἀποφάσεων δράσεως ὥστε νὰ ἐπιτύχῃ τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ (οἰκονομικοῦ ἢ ἄλλης φύσεως) συμφέροντός του.

Ἡ ἀνταγωνιστικὴ συμπεριφορὰ τῶν συμμετεχόντων εἰς ἓν παίγνιον ἀτόμων ἐκδηλοῦται ἐπὶ τῇ βάσει ὡρισμένων *κανόνων*, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν κατ' οὐσίαν περιορισμοὺς εἰς τὴν συμπεριφορὰν ταύτην. Οὕτω, π.χ., οἱ παῖκται τοῦ ζατρικίου ἔχουν τὴν δυνατότητα νὰ ἐκτελέσουν ὡρισμένας κινήσεις εἰς ἑκάστην περίπτωσιν, αἱ ὁποῖαι καθορίζονται ἐκ τῶν κανόνων τοῦ παιγνίου. Ὁμοίως εἰς τὰς στρατιωτικὰς ἐπιχειρήσεις, τὰ ἀντίπαλα στρατεύματα δροῦν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν κανόνων τῆς στρατιωτικῆς τέχνης. Ἐπομένως ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης τὸ «παίγνιον» θὰ ἠδύνατο νὰ ὁρισθῇ ὡς τὸ σύνολον τῶν κανόνων οἱ ὁποῖοι καθορίζουν τὸν τρόπον ἐκδηλώσεως τῆς ἀνταγωνιστικῆς συμπεριφορᾶς τῶν εἰς αὐτὸ συμμετεχόντων ἀτόμων.

Ἡ ἀρχικὴ διατύπωσις τῆς θεωρίας παιγνίων ἐγένετο κατὰ τὸ ἔτος 1921 ὑπὸ τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Emile Borel. Τὴν θεωρίαν ταύτην ἀνέπτυξεν ἀργότερον (1928) ὁ J. von Neumann, ὁ ὁποῖος, ἐν συνεργασίᾳ μετὰ τοῦ O. Morgenstern, ἐδημοσίευσε τὸ ἔτος 1944 τὸ κλασσικὸν ἔργον: «Θεωρία Παιγνίων καὶ Οἰκονομικὴ Συμπεριφορά» [1].

Μολονότι διὰ τῆς θεωρίας τῶν παιγνίων ὁ J. von Neumann ἐπεδίωξε νὰ μελετήσῃ κυρίως οἰκονομικὰ προβλήματα, ἡ θεωρία αὕτη ἀπεδείχθη ὅτι δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ, μὲ μεγαλυτέραν μάλιστα ἀποτελεσματικότητα, καὶ ἐπὶ μὴ οἰκονομικῶν προβλημάτων, ὡς εἶναι τὰ προβλήματα τῆς στρατιωτικῆς τεχνικῆς. Ἀπὸ ἀπόψεως προγραμματισμοῦ ἡ θεωρία παιγνίων παρουσιάζει ἐπίσης ἐνδιαφέρον. Ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω (14.7), τὰ προβλήματα τῆς θεωρίας παιγνίων δύνανται νὰ μετατραποῦν εὐκόλως εἰς συνήθη προβλήματα Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, ἐπιλυόμενα διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀλγορίθμου Simplex.

14.2. Ἡ μήτρα πληρωμῶν

Εἰς ἓν παίγνιον τὸ κέρδος τοῦ νικητοῦ παίκτου (ἢ παικτῶν) δυνατὸν νὰ εἶναι χρηματικὸν ἢ οἱασδήποτε ἄλλης φύσεως. Ἐνταῦθα θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ κέρδος εἶναι χρηματικόν. Θὰ ὑποθέσωμεν ἐπίσης ὅτι ὑπάρχουν εἰς ἕκαστον παίγνιον δύο παῖκται (ἢ δύο ὁμάδες παικτῶν) καὶ ὅτι τὸ κέρδος τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται πρὸς τὴν ζημίαν τοῦ ἑτέρου. Ἡ ζημία προφανῶς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς (ἀρνητικὸν) κέρδος, ὑπὸ τὴν ἀλγεβρικὴν ἔννοιαν. Οὕτω, π.χ., ἂν εἰς ἓν παίγνιον τὸ κέρδος τοῦ ἑνὸς παίκτου εἶναι 6 ν.μ., τοῦ ἑτέρου θὰ εἶναι −6 ν.μ. Τὰ παίγνια ταῦτα χαρακτηρίζονται συνήθως ὡς ***παίγνια μηδενικοῦ συνολικοῦ κέρδους*** (zero - sum games), ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν κερδῶν ἀμφοτέρων τῶν παικτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν.

---

1) J. von Neumann and O. Mongenstern: «Theory of Games and Economic Behaviour», Princeton Press, 1944.

῞Ας ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι εἰς ἓν συγκεκριμένον παίγνιον οἱ δύο παῖκται, τοὺς ὁποίους θὰ ὀνομάζωμεν A καὶ B, ἔχουν εἰς τὴν διάθεσίν των ὁ μὲν A τέσσαρες τρόπους ἐνεργείας, συμβολιζομένους διὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 καὶ 4, ὁ δὲ B δύο τρόπους ἐνεργείας, συμβολιζομένους διὰ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2. ῞Εκαστος τρόπος ἐνεργείας καλεῖται εἰδικώτερον *στρατηγικὴ* εἰς τὴν θεωρίαν τῶν παιγνίων. Καθίσταται προφανὲς ὅτι τὸ κέρδος (ἢ ἡ ζημία) ἑκάστου παίκτου δύναται νὰ προσδιορισθῇ μόνον ἐὰν ἀμφότεροι οἱ παῖκται ἐπιλέξουν στρατηγικήν. ῞Ας ἐξετάσωμεν ἐν πρώτοις τὸ πρόβλημα ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τοῦ παίκτου A.

Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι :

1) ἡ στρατηγικὴ 1 δίδει κέρδος −2 ἢ 3 ν.μ., ἀναλόγως ἂν ὁ B ἐφαρμόζῃ τὴν στρατηγικὴν 1 ἢ 2, ἀντιστοίχως.

2) ἡ 2 δίδει : −1 ἢ 1 ν.μ., ἂν ὁ B ἐφαρμόζῃ τὴν 1 ἢ 2, ἀντιστοίχως.

3) ἡ 3 δίδει : 3 ἢ 2 ν.μ., ἂν ὁ B ἐφαρμόζῃ τὴν 1 ἢ 2, ἀντιστοίχως.

4) ἡ 4 δίδει : −2 ἢ 8 ν.μ., ἂν ὁ B ἐφαρμόζῃ τὴν 1 ἢ 2, ἀντιστοίχως.

Τὰς πληροφορίας αὐτὰς δυνάμεθα νὰ καταγράψωμεν συστηματικῶς εἰς τὸν κάτωθι πίνακα :

Πίναξ 1

		Στρατηγικὴ B	
		1	2
Στρατηγικὴ A	1	−2	3
	2	−1	1
	3	3	2
	4	−2	8

᾽Εφ᾽ ὅσον τὸ παίγνιον ἐξετάζεται ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τοῦ παίκτου A, τὰ θετικὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος 1 ὑποδηλοῦν θετικὸν κέρδος τὰ δὲ ἀρνητικὰ ἀρνητικὸν κέρδος, ἤτοι ζημίαν. Οὕτω π.χ. τὸ στοιχεῖον −1 σημαίνει ζημίαν 1 ν.μ. διὰ τὸν A. ᾽Αλλ᾽ ἐπειδή, ὡς εἴπομεν, τὸ κέρδος τοῦ ἑνὸς παίκτου ἀποτελεῖ ἴσην ἀκριβῶς ζημίαν διὰ τὸν ἕτερον παίκτην καὶ ἀντιθέτως, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ἀνωτέρω πίναξ δεικνύει ἐπίσης καὶ τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν τοῦ παίκτου B, ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν στοιχείων. Οὕτω, π.χ., τὸ στοιχεῖον 8 τοῦ πίνακος ἀποτελεῖ κέρδος −8 ν.μ., ἤτοι ζημίαν, διὰ τὸν Β, ἐνῷ ἀντιθέτως τὸ στοιχεῖον -1 ὑποδηλοῖ κέρδος διὰ τὸν Β 1 ν.μ., διότι ἔχομεν : $-(-1)=1$.

Προφανῶς, ἐκ τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ τοῦ κέρδους ἑκάστου παίκτου προκύπτει ὅτι ὁ Α πρέπει νὰ ἐπιδιώκῃ μεγιστοποίησιν κέρδους, ὁ δὲ Β ἐλαχιστοποίησιν τῆς ζημίας. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ὁ μὲν Α χαρακτηρίζεται ὡς *μεγιστοποιῶν*, ὁ δὲ Β ὡς *ἐλαχιστοποιῶν* παίκτης.

Ὁ πίναξ 1, ὁ ὁποῖος περιέχει τὸ κέρδος τοῦ Α εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἐπιλογῆς στρατηγικῆς ὑπὸ ἀμφοτέρων τῶν παικτῶν, καλεῖται *μήτρα πληρωμῶν*.

Ἂν οἱ παῖκται Α καὶ Β ἔχουν εἰς τὴν διάθεσίν των μ καὶ ν διαφόρους τρόπους ἐνεργείας, ἀντιστοίχως, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν γενικὴν μήτραν πληρωμῆς :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{22} \ldots \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \ldots \alpha_{3\nu} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} \ldots \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω μήτραν τὸ γενικὸν στοιχεῖον $\alpha_{\iota\kappa}$ ὑποδηλοῖ προφανῶς τὸ κέρδος τοῦ παίκτου Α, ὅταν οὗτος ἐπιλέξῃ τὴν στρατηγικὴν $\iota(=1,2,\ldots,\mu)$ ὁ δὲ παίκτης Β ἐπιλέξῃ τὴν στρατηγικὴν $\kappa(=1,2,\ldots,\nu)$. Τὸ κέρδος τοῦ Β εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι : $-\alpha_{\iota\kappa}$.

14.3. Ἡ ἀρχὴ maximin καὶ minimax

Ἂς ἐξετάσωμεν ἐκ νέου τὸν πίνακα 1. Ἂν ὁ παίκτης Α ἐπιλέξῃ τὴν στρατηγικὴν 1 θὰ ἔχῃ τὴν βεβαιότητα ὅτι τὸ κέρδος αὐτοῦ δὲν θὰ εἶναι κατώτερον τοῦ -2, ἤτοι τοῦ μικροτέρου στοιχείου τῆς πρώτης σειρᾶς. Ἐν ἄλλοις λόγοις τὸ κέρδος αὐτὸ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν τὸ ὁποῖον δίδει ἡ στρατηγικὴ 1. Σκεπτόμενοι ἀναλόγως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐλάχιστον κέρδος τῆς στρατηγικῆς 2 εἶναι -1, τῆς στρατηγικῆς 3 εἶναι 2, καὶ τῆς στρατηγικῆς 4 εἶναι -2. Ἐπειδὴ ὁ Α ἐπιλέγει ἐλευθέρως στρατηγικήν, δύναται νὰ προβῇ εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῆς στρατηγικῆς ἡ ὁποία ἐξασφαλίζει τὸ μέγιστον (maximum) ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐλαχίστων (minima) κερδῶν. Αὐτὴ χαρακτηρίζεται ὡς *στρατηγικὴ maximin*. Ἡ στρατηγικὴ maximin εἰς τὸ παράδειγμά μας εἶναι ἡ 3, ἥτις ἐξασφαλίζει εἰς τὸν Α κέρδος τουλάχιστον 2.

Ἂν ὁ παίκτης Β ἐπιλέξῃ τὴν στρατηγικὴν 1, ἡ ζημία αὐτοῦ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὰς 3 ν.μ., ἤτοι τὸ μέγιστον στοιχεῖον τῆς πρώτης στήλης. Ἂν ἐπιλέξῃ τὴν στρατηγικὴν 2, ἡ ζημία αὐτοῦ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ μέγιστον στοιχεῖον τῆς δευτέρας στήλης, ἤτοι τὰς 8 ν.μ. Προφανῶς οὗτος ἔχει συμφέρον νὰ ἐπιλέξῃ τὴν στρατηγικὴν ἡ ὁποία ἐξασφαλίζει τὸ ἐλάχιστον (minimun) ἐκ τῶν μεγίστων (maxima) στοιχείων τῶν στηλῶν τῆς μήτρας πληρωμῶν. Αὕτη χαρακτηρίζεται ὡς στρατηγικὴ minimax. Εἰς τὸ παράδειγμά μας ἡ στρατηγικὴ minimax εἶναι ἡ 1, ἡ ὁποία περιορίζει τὴν ζημίαν τοῦ Β εἰς ἓν ἀνώτατον ὅριον 3 ν.μ.

Οὕτω, βλέπομεν ὅτι ἀμφότεροι οἱ παῖκται δύνανται, βάσει τοῦ πίνακος πληρωμῶν, νὰ ἐπιλέξουν μίαν στρατηγικὴν ἡ ὁποία ἐξασφαλίζει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ὡρισμένον κέρδος, μὴ δυνάμενον νὰ μειωθῇ διὰ τῆς παρεμβάσεως τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν.

Γενικῶς, ἂν ἡ μήτρα πληρωμῶν εἶναι $\mu \times \nu$ τάξεως μὲ στοιχεῖα $\alpha_{\iota\kappa}$, ἐὰν ὁ παίκτης Α ἐπιλέξῃ τὴν στρατηγικὴν 1 εἶναι βέβαιος ὅτι θὰ πληρωθῇ τουλάχιστον τὸ μικρότερον ἐκ τῶν στοιχείων τῆς πρώτης σειρᾶς, ἤτοι :

$$\min_{\kappa} \alpha_{1\kappa}$$

Ἂν ἐκλέξῃ γενικῶς τὴν στρατηγικὴν ι ($\iota = 1, 2, \ldots, \mu$) εἶναι βέβαιος ὅτι θὰ λάβῃ τουλάχιστον :

$$\min_{\kappa} \alpha_{\iota\kappa}$$

Τὸ κέρδος τοῦτο καλεῖται *ἀξία τῆς στρατηγικῆς ι* τοῦ παίκτου Α. Ἀλλ' ἐπειδὴ οὗτος δύναται νὰ ἐπιλέξῃ κατὰ βούλησιν οἱανδήποτε στρατηγικὴν ι, ἐπιλέγει τὴν στρατηγικὴν ἐκείνην ἡ ὁποία καθιστᾷ τὸ $\min\limits_{\kappa} \alpha_{\iota\kappa}$ ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλύτερον. Ἐν ἄλλοις λόγοις ὁ Α δύναται νὰ ἐπιτύχῃ κέρδος τουλάχιστον :

$$\max_{\iota} \min_{\kappa} \alpha_{\iota\kappa}$$

Τὸ κέρδος τοῦτο καλεῖται *ἀξία τοῦ παιγνίου*, ὡς πρὸς τὸν παίκτην Α. Ἀναλόγως σκεπτόμενοι διὰ τὸν παίκτην Β, καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν μας ὅτι οὗτος εἶναι ὁ ἐλαχιστοποιῶν παίκτης, θὰ ἔχωμεν :

$$\max_{\iota} \alpha_{\iota 1}$$

ζημίαν, ἂν ὁ Β ἐπιλέξῃ τὴν στρατηγικὴν 1 καὶ γενικῶς :

$$\max_{\iota} \alpha_{\iota\kappa}$$

ἂν ἐπιλέξῃ τὴν στρατηγικὴν κ ($=1, 2, \ldots, \nu$). Τὸ $\max \alpha_{\iota\kappa}$ καλεῖται *ἀξία τῆς στρατηγικῆς κ*, τοῦ παίκτου Β. Ἐπειδὴ οὗτος χρησιμοποιεῖ κατὰ βούλησιν οἱανδήποτε στρατηγικὴν κ, ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ ἐπιλέξη ἐκείνην τὴν στρατηγικὴν ἡ ὁποία ἐλαχιστοποιεῖ τὴν ζημίαν $\max\limits_{\iota} \alpha_{\iota\kappa}$. Ἐν ἄλλοις λόγοις ὁ Β δύναται νὰ κρατήσῃ τὴν ζημίαν αὐτοῦ εἰς ἐπίπεδον οὐχὶ ἀνώτερον τοῦ :

$$\min_{\kappa} \max_{\iota} \alpha_{\iota\kappa}$$

Ἡ ἀξία $\min \max \alpha_{\iota\kappa}$ καλεῖται ***ἀξία τοῦ παιγνίου***, ὡς πρὸς τὸν παίκτην Β.

14.4. Σημεῖον ἰσορροπίας

Εἶναι ἐνδεχόμενον εἰς ἓν παίγνιον νὰ ἔχωμεν :

$$\max_{\iota} \min_{\kappa} \alpha_{\iota\kappa} = \min_{\kappa} \max_{\iota} \alpha_{\iota\kappa}$$

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λέγομεν ὅτι τὸ παίγνιον ἔχει ἓν ***σημεῖον ἰσορροπίας*** ἢ ***λύσιν ἰσορροπίας***. Τοῦτο συμβαίνει προφανῶς ὅταν τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἐλαχίστων στοιχείων τῶν σειρῶν συμπίπτει μὲ τὸ ἐλάχιστον ἐκ τῶν μεγίστων στοιχείων τῶν στηλῶν. Ἓν ἀριθμητικὸν παράδειγμα δίδεται διὰ τῆς κατωτέρω μήτρας πληρωμῶν :

$$\begin{array}{lcc}
 & & \begin{array}{c}\text{minima}\\ \text{σειρῶν}\end{array} \\
 & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ -5 \\ 2 \end{array} \\
\text{maxima στηλῶν} & \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 2 \end{array} &
\end{array}$$

Ὡς παρατηροῦμεν, τὸ στοιχεῖον 2 εἶναι ταυτοχρόνως τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἐλαχίστων τῶν σειρῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον ἐκ τῶν μεγίστων τῶν στηλῶν. Ἐπομένως τὸ παίγνιον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἀνωτέρω μήτραν ἔχει λύσιν ἰσορροπίας τὸν συνδυασμὸν τῆς 3ης στρατηγικῆς τοῦ Α καὶ τῆς 3ης στρατηγικῆς τοῦ Β. Ὁ συνδυασμὸς οὗτος δίδει κέρδος 2 ν.μ. εἰς τὸν Α (καὶ συνεπῶς ζημίαν 2 ν.μ. εἰς τὸν Β).

Προφανῶς εἰς τὴν περίπτωσιν ὑπάρξεως λύσεως ἰσορροπίας ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν ὁ Α δύναται νὰ ἐπιτύχῃ κέρδος 2 ν.μ. καὶ ὁ Β νὰ κρατήσῃ τὴν ζημίαν του εἰς ἐπίπεδον 2 ν.μ., ὁσασδήποτε φορὰς παίζεται τὸ ἐν λόγῳ παίγνιον καὶ ἀνεξαρτήτως ἐὰν ὁ εἷς γνωρίζῃ ἢ ὄχι τὰς προθέσεις τοῦ ἄλλου.

Τὰ παίγνια τὰ ὁποῖα ἔχουν σημεῖον ἰσορροπίας ὁρίζονται ὡς ***αὐστηρῶς καθωρισμένα παίγνια***.

14.5. Μῆτραι πληρωμῶν ἄνευ σημείου ἰσορροπίας. Καθαρὰ καὶ μικτὴ στρατηγικὴ

14.5.1. Ὅταν ἕνας πίναξ πληρωμῶν δὲν ἔχῃ σημεῖον ἰσορροπίας καὶ τὸ παίγνιον ἐπαναλαμβάνεται εἶναι δυνατὸν νὰ δημιουργηθῇ μία ἀσταθὴς κατάστασις, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι δὲν ὑπάρχει ἓν ὡρισμένον ζεῦγος τρόπων ἐνεργείας τοῦ ὁποίου τὸ ἀποτέλεσμα νὰ ἱκανοποιῇ ἀμφοτέρους τοὺς παίκτας. Οὕτω, π.χ., εἰς τὸν πίνακα 1, ἀνωτέρω, ἡ maximin στρατηγικὴ τοῦ Α εἶναι ἡ στρατηγικὴ 3, ἥτις δίδει ἐλάχιστον κέρδος 2 ν.μ. Ἡ minimax στρατηγικὴ τοῦ παίκτου Β εἶναι ἡ 1, ἥτις δίδει μεγίστην ζημίαν 3 ν.μ. Ἐὰν ὅμως ὁ Α ἐπιλέξῃ πράγματι τὴν στρατηγικὴν 3 καὶ ὁ Β τὴν στρατηγικὴν 1, ὁ Α διαπιστώνει ὅτι τὸ κέρδος του (ἡ ἀξία τοῦ παιγνίου) εἶναι 3, ἤτοι μεγαλύτερον τοῦ ἀναμενομένου βάσει τῆς maximin ἀρχῆς. Ἐξ ἄλλου ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Α ἐπιμένει νὰ χρησιμοποιῇ κατ᾽ ἐπανάληψιν τὴν maximin στρατηγικὴν 3, ὁ Β δυνατὸν νὰ ἀντιληφθῇ τὴν προτίμησίν του ταύτην, ὁπότε θὰ διαπιστώσῃ ὅτι εἶναι συμφερώτερον δι᾽ αὐτὸν νὰ χρησιμοποιῇ οὐχὶ τὴν minimax στρατηγικὴν 1, ἀλλὰ τὴν στρατηγικὴν 2, ἡ ὁποία βελτιώνει τὸ ἀποτέλεσμά του κατὰ μίαν μονάδα. Ἐννοεῖται ὅτι ἂν ὁ Α ἀντιληφθῇ τὴν νέαν ταύτην προτίμησιν τοῦ Β εἶναι δυνατὸν νὰ τοῦ αὐξήσῃ τὴν ζημίαν ἀπὸ 2 εἰς 8 ν.μ. ἐκλέγων, ἀντὶ τῆς maximin στρατηγικῆς 3, τὴν στρατηγικὴν 4. Ἀλλὰ τότε ὁ Β, ἀντιλαμβανόμενος τὴν μεταβολὴν αὐτὴν θὰ ἔχῃ συμφέρον νὰ χρησιμοποιήσῃ ἐκ νέου τὴν στρατηγικὴν 1, ἐκ τῆς ὁποίας θὰ ἔχῃ κέρδος (θετικὸν) 2 ν.μ., κ.ο.κ.

Ἡ ἀσταθὴς αὕτη κατάστασις εἶναι συνέπεια, ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν τῆς μὴ ὑπάρξεως σημείου ἰσορροπίας εἰς τὸν πίνακα 1, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ τῆς ἑκάστοτε ἐπιλογῆς ὑπὸ τῶν παικτῶν τρόπων ἐνεργείας δυναμένων νὰ προβλεφθοῦν. Ἀμφότεροι συνεπῶς οἱ παῖκται ἔχουν συμφέρον νὰ ἐξασφαλίσουν τὸ ἀπρόβλεπτον τῆς ἐπιλογῆς των. Τοῦτο θὰ ἠδύνατο πράγματι νὰ ἐπιτευχθῇ ἂν ἑκάστη στρατηγικὴ χρησιμοποιῆται οὐχὶ ἀποκλειστικῶς ἀλλὰ ἐναλλασσομένη μὲ ἄλλας κατὰ τρόπον ἀπρόβλεπτον διὰ τὸν ἀντίπαλον παίκτην. Τὸ κυριώτερον ὅμως πρόβλημα εἶναι νὰ προσδιορισθῇ ἡ *συχνότης ἐπιλογῆς* ἑκάστης στρατηγικῆς, ἡ ὁποία ἐγγυᾶται ἀριστοποίησιν τῆς μέσης ἀξίας τοῦ παιγνίου. Ἡ ἀξία αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀξιῶν ἑκάστης «παρτίδας» τοῦ παιγνίου, διῃρημένου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν «παρτίδων».

Ἡ κυριωτέρα ἀξία τῆς θεωρίας παιγνίων ἔγκειται ἀκριβῶς εἰς τὸ ὅτι δίδει τὴν μέθοδον προσδιορισμοῦ τῶν συχνοτήτων ἐπιλογῆς τῶν διαφόρων τρόπων ἐνεργείας, οὕτως ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται ἡ ἀριστοποίησις τοῦ μέσου ἀποτελέσματος δι᾽ ἀμφοτέρους τοὺς παίκτας, ταυτοχρόνως. Ἐν ἄλλοις λόγοις, διὰ τῆς ἐπιλογῆς τῶν ὡς ἄνω συχνοτήτων προσδιορίζεται μία λύσις εἰς τὸ παίγνιον, ἤτοι ἓν σημεῖον ἰσορροπίας τὸ ὁποῖον λείπει ἀπὸ τὴν μήτραν πληρωμῶν.

14.5.2. Πρὶν προχωρήσωμεν περαιτέρω, θὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς *καθαρᾶς* καὶ τῆς *μικτῆς στρατηγικῆς*.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν πίνακα 1, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ παίκτης Α ἐφαρμόζει «καθαρὰν στρατηγικὴν» ἂν χρησιμοποιῇ *ἀποκλειστικῶς* τὴν στρατηγικὴν 1 ἢ τὴν 2 ἢ τὴν 3 ἢ τὴν 4, εἰς τὰς διαφόρους παρτίδας τοῦ παιγνίου. Ἀκριβέστερον ἂν οὗτος χρησιμοποιῇ μόνον τὴν 1, ὁρίζομεν τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα (1, 0, 0, 0), τὸ ὁποῖον ὑποδηλοῖ ἀκριβῶς τὴν ἀποκλειστικότητα τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς 1. Τὸ διάνυσμα αὐτὸ ἀποτελεῖ κατὰ συνέπειαν ἔκφρασιν καθαρᾶς στρατηγικῆς. Ἡ ἀποκλειστικὴ χρησιμοποίησις τῆς 2 μᾶς δίδει τὸ διάνυσμα καθαρᾶς στρατηγικῆς: (0, 1, 0, 0), τῆς 3 τὸ διάνυσμα (0, 0, 1, 0) καὶ τῆς 4 τὸ διάνυσμα (0, 0, 0, 1). Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ παίκτου Β, ἔχομεν τὰ διανύσματα τῆς καθαρᾶς στρατηγικῆς (1, 0) καὶ (0, 1), ἀναλόγως ἐὰν ὁ Β χρησιμοποιῇ ἀποκλειστικῶς εἰς τὰς διαφόρους ἐπαναλήψεις τοῦ παιγνίου μόνον τὴν στρατηγικὴν 1 ἢ μόνον τὴν στρατηγικὴν 2, ἀντιστοίχως.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὁ παίκτης Α χρησιμοποιεῖ εἰς τὰς ἐπαναλήψεις τοῦ παιγνίου τὰς 1, 2, 3 καὶ 4 μὲ ὡρισμένην συχνότητα ἑκάστην. Ἔστω, π.χ., ὅτι ἐπὶ 20 παρτίδων τοῦ παιγνίου χρησιμοποιεῖ (πάντοτε βεβαίως κατὰ τρόπον ἀπρόβλεπτον διὰ τὸν Β) 2 φορὰς τὴν 1, 4 φορὰς τὴν 2, 8 φορὰς τὴν 3 καὶ 6 φορὰς τὴν 4. Αἱ συχνότητες χρησιμοποιήσεως θὰ εἶναι τότε: 0.1, 0.2, 0.4 καὶ 0.3 διὰ τὰς 1, 2, 3 καὶ 4, ἀντιστοίχως, Βάσει τῶν συχνοτήτων αὐτῶν δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ διάνυσμα: (0.1 0.2 0.4 0.3). Τὸ διάνυσμα τοῦτο λέγομεν ὅτι ἐκφράζει μίαν «μικτὴν στρατηγικήν». Ἀλλαγὴ τῶν συχνοτήτων σημαίνει ἀλλαγὴν μικτῆς στρατηγικῆς [1]. Ὁμοίως εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ παίκτου Β δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν διαφόρους τύπους μικτῆς στρατηγικῆς βάσει τῶν συχνοτήτων ἐπιλογῆς τῆς στρατηγικῆς 1 καὶ τῆς στρατηγικῆς 2. Οὕτω, π.χ., τὸ διάνυσμα: (2/5, 3/5) ἐκφράζει μίαν μικτὴν στρατηγικήν, μὲ συχνότητα ἐπιλογῆς τῆς 1 : 2/5 καὶ τῆς 2 : 3/5.

Γενικῶς, ἂν οἱ Α καὶ Β ἔχουν εἰς τὴν διάθεσίν των μ καὶ ν τρόπους ἐνεργείας, ἀντιστοίχως, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν διανύσματα μικτῆς στρατηγικῆς διὰ τοὺς ἐν λόγῳ παίκτας βάσει συχνοτήτων ἐπιλογῆς ἑκάστου τρόπου ἐνεργείας. Ἂν θέσωμεν $x_1, x_2, \ldots, x_\iota, \ldots, x_\mu$ διὰ τὰς συχνότητας ἐπιλογῆς τῶν τρόπων ἐνεργείας $1, 2, 3, \ldots, \iota, \ldots, \mu$ τοῦ παίκτου Α καὶ $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\kappa, \ldots, \psi_\nu$ διὰ τὰς συχνότητας ἐπιλογῆς τῶν τρόπων ἐνεργείας $1, 2, \ldots, \kappa, \ldots, \nu$ τοῦ παίκτου Β, θὰ ἔχωμεν τὰ διανύσματα μικτῆς στρατηγικῆς:

1) Ἑκάστη καθαρὰ στρατηγικὴ δύναται προφανῶς νὰ θεωρηθῇ ὡς εἰδικὴ περίπτωσις μικτῆς στρατηγικῆς.

Διὰ τὸν Α : $(x_1, x_2, \ldots, x_\iota, \ldots, x_\mu)$, ὅπου $\sum_{\iota=1}^{\mu} x_\iota = 1$

» » Β : $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\kappa, \ldots, \psi_\nu)$, ὅπου $\sum_{\kappa=1}^{\nu} \psi_\kappa = 1$

Θὰ προχωρήσωμεν κατωτέρω εἰς τὴν λύσιν τοῦ παιγνίου τοῦ πίνακος 1, ἤτοι εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀρίστης μικτῆς στρατηγικῆς ἑκάστου παίκτου. Ἡ ἀρίστη μικτὴ στρατηγικὴ ἀμφοτέρων τῶν παικτῶν προσ ιορίζει ἓν κοινὸν σημεῖον ἰσορροπίας. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος θὰ γίνῃ πρῶτον διὰ γραφικῆς μεθόδου, δεύτερον διὰ γενικῆς ἀλγεβρικῆς μεθόδου.

14.6. Γραφικὴ λύσις

14.6.1. Ἡ γραφικὴ μέθοδος λύσεως, τὴν ὁποίαν θὰ περιγράψωμεν κατωτέρω, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εὐχερῶς ἐπὶ παιγνίων τὰ ὁποῖα ἔχουν μήτραν πληρωμῶν 2×2, $2\times\nu$ ἢ $\mu\times2$. Εἰς τὸ πρόβλημά μας ἡ μήτρα πληρωμῶν εἶναι τάξεως 4×2. Ὁ παίκτης Β δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ οἱανδήποτε μικτὴν στρατηγικὴν βάσει διαφόρων συχνοτήτων ἐπιλογῆς τῆς στρατηγικῆς 1 καὶ τῆς στρατηγικῆς 2. Ἂν θέσωμεν γενικῶς x διὰ τὴν συχνότητα τῆς 1, ἡ συχνότης τῆς 2 θὰ εἶναι προφανῶς: $1-x$. Ἐὰν ὁ Α χρησιμοποιῇ ἀποκλειστικῶς τὴν στρατηγικὴν 1, ἢ ἄλλως τὴν καθαρὰν στρατηγικὴν (1, 0, 0, 0), ἡ μέση ἀξία (ζημία) ψ τοῦ παιγνίου διὰ τὸν Β, ἤτοι ἡ μέση ζημία κατὰ «παρτίδα» παιγνίου θὰ εἶναι :

$$\psi = -2x + 3(1-x) = 3-5x \qquad (1)$$

Ὁμοίως, ἂν ὁ Α χρησιμοποιῇ ἀποκλειστικῶς τὴν στρατηγικὴν 2 ἢ 3 ἢ 4, ἡ μέση ἀξία τοῦ παιγνίου διὰ τὸν Β θὰ εἶναι, ἀντιστοίχως :

$$\psi = -x + 1 - x = 1 - 2x \qquad (2)$$

$$\psi = 3x + 2(1-x) = x + 2 \qquad (3)$$

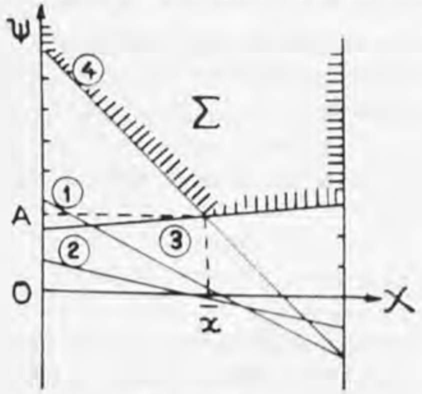
$$\psi = -2x + 8(1-x) = 8 - 10x \qquad (4)$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις (1) – (4) ἐκφράζονται γραφικῶς εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ 0 ἕως 1 τοῦ ἄξονος τῶν x (1), ὡς δεικνύεται εἰς τὸ διάγραμμα 43.

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ (1) μετρεῖται τὸ κέρδος τοῦ Α καὶ συνεπῶς ἡ ζημία τοῦ Β. Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀπὸ 0 ἕως 1, ὁ Β ὑφίσταται μέσην ζημίαν τὸ πολὺ ἴσην πρὸς τὴν μεγαλυτέραν ἐκ τῶν τεταγμένων τῶν σημείων

1) Ἡ κλῖμαξ μετρήσεως ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ εἶναι μικροτέρα τῆς κλίμακος μετρήσεως ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων (1), (2), (3) καὶ (4), τὰ ὁποῖα σημεῖα ἔχουν ὡς τετμημένην τὴν ἐν λόγῳ τιμὴν τοῦ x. Προφανῶς ὁ B, ἐν τῇ προσπαθείᾳ του ὅπως ἐλαχιστοποιήσῃ τὴν ζημίαν του, θὰ ἐπιλέξῃ τὴν τιμὴν $\bar{x}$



Διάγρ. 43.

τοῦ x, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἡ μικροτέρα ἐκ τῶν ὡς ἄνω μεγίστων τεταγμένων τῶν σημείων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἐπιλέγει τὴν τιμὴν τοῦ x εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἡ ἐλαχίστη τετμημένη τοῦ κυρτοῦ συνόλου **Σ**, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἐκ τῶν κάτω ἐκ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων.

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ $\bar{x}$ εἶναι ἴση πρὸς 6/11, καὶ εὑρίσκεται ἢ διὰ τῆς ἀπ' εὐθείας μετρήσεως ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x ἢ διὰ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος:

$$x + 2 = \psi$$

$$8 - 10x = \psi$$

τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν αἱ ἐξισώσεις (3) καὶ (4). Ὁ B πρέπει ἐπομένως νὰ χρησιμοποιήσῃ τὴν μικτὴν στρατηγικὴν (6/11, 5/11), ἡ ὁποία ἐλαχιστοποιεῖ τὰς ζημίας του, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ὁ A δὲν δύναται διὰ τῆς δράσεώς του νὰ αὐξήσῃ ταύτας ἄνωθεν τοῦ ἐπιπέδου OA. Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ διαγράμματος καθίσταται σαφὲς ὅτι ὁ A ἔχει συμφέρον νὰ χρησιμοποιήσῃ εἰς ὡρισμένην συχνότητα μόνον τὴν στρατηγικὴν 3 καὶ τὴν στρατηγικὴν 4. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ μέσου κέρδους τοῦ A (ἢ τῆς μέσης ζημίας τοῦ B δύναται νὰ προσδιορισθῇ δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ x εἰς τὴν (3) ἢ τὴν (4) ἐξίσωσιν:

$$OA = \psi = 1 \times \frac{6}{11} + 2 = 8 - 10 \times \frac{6}{11} = \frac{28}{11} = 2\,\frac{6}{11}$$

14.6.2. Εἰς τὰς ἑπομένας παραγράφους θὰ ἐξετάσωμεν δύο ἀκόμη παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῆς γραφικῆς μεθόδου λύσεως τῶν προβλημάτων τῆς θεωρίας παιγνίων.

Α. Ἔστω ἡ μήτρα πληρωμῶν:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

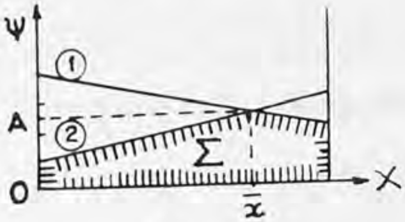
Ἡ μήτρα αὕτη δὲν ἔχει σημεῖον ἰσορροπίας. Θὰ ἐξετάσωμεν τὴν λύσιν τοῦ σχετικοῦ προβλήματος ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τοῦ Α. Ἂν θέσωμεν x διὰ τὴν συχνότητα ἐπιλογῆς τῆς στρατηγικῆς 1 τοῦ Α, θὰ ἔχωμεν 1–x διὰ τὴν συχνότητα ἐπιλογῆς τῆς στρατηγικῆς 2 αὐτοῦ. Ἡ μέση πληρωμὴ πρὸς τὸν Α θὰ εἶναι:

$$\psi = 2x + 4(1-x) = 4 - 2x \qquad (1)$$

ἢ

$$\psi = 3x + (1-x) = 2x + 1 \qquad (2)$$

ἀναλόγως ἐὰν ὁ Β χρησιμοποιῇ τὴν καθαρὰν στρατηγικήν του (1,0) ἢ (0,1). Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἐκφράζονται εἰς τὸ διάγραμμα 44 καὶ εἰς τὸ διάστημα 0 ἕως 1, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα x.



Διάγρ. 44.

Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀπὸ 0 ἕως 1, ὁ Α ἔχει μέσον κέρδος τουλάχιστον ἴσον πρὸς τὴν μικροτέραν τεταγμένην τῶν σημείων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων (1) καὶ (2), τὰ ὁποῖα σημεῖα ἔχουν ὡς τετμημένην τὴν ἐν λόγῳ τιμὴν τοῦ x. Προφανῶς ὁ Α, ἐν τῇ προσπαθείᾳ του ὅπως μεγιστοποιήσῃ τὸ κέρδος του, θὰ ἐπιλέξῃ τὴν τιμὴν $\bar{x}$ τοῦ x, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τῶν ἐλαχίστων ὡς ἄνω τεταγμένων. Ἤτοι, ἐπιλέγει τὴν τιμὴν $\bar{x}$ τοῦ x εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγαλυτέρα τεταγμένη τῶν σημείων τοῦ κυρτοῦ συνόλου **Σ**, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἐκ τῶν ἄνω ὑπὸ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων (1) καὶ (2).

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ $\bar{x}$ εἶναι ἴση πρὸς 3/4 ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ διαγράμματος καὶ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Συνεπῶς ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ἀπαιτεῖ ὅπως ὁ Α ἐφαρμόζῃ τὴν μικτὴν στρατηγικήν: (3/4, 1/4), διὰ νὰ ἐπιτύχῃ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ μειωθῇ ἐκ τῆς δράσεως τοῦ Β.

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ μέσου κέρδους ΟΑ εἶναι :

$$OA = \psi = 4 - 2 \times 3/4 = 2 \times 3/4 + 1 = 2\,{}^1\!/_2$$

Βάσει τῶν δεδομένων τῆς μήτρας πληρωμῶν εἶναι δυνατὸν νὰ λυθῇ γραφικῶς τὸ πρόβλημα καὶ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ Β (ἐφ' ὅσον ἡ μήτρα εἶναι τάξεως 2×2).

Β. Ἔστω ἡ μήτρα πληρωμῶν :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

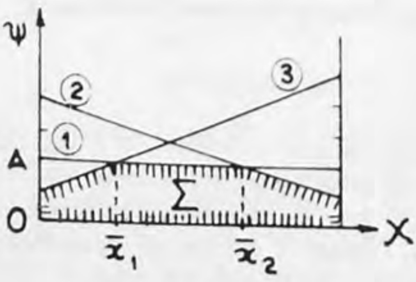
ἥτις, ἐξεταζομένη ἐκ τῆς ἀπόψεως τοῦ παίκτου Α, δίδει τὸ κάτωθι σύστημα ἐξισώσεων :

$$\psi = 2x + 2(1-x) = 2 \qquad (1)$$

$$\psi = x + 4(1-x) = 4 - 3x \qquad (2)$$

$$\psi = 5x + 1 - x = 4x + 1 \qquad (3)$$

Ἡ, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, γραφικὴ λύσις τοῦ συστήματος δίδεται εἰς τὸ διάγραμμα 45.



Διάγρ. 45.

Ὡς παρατηροῦμεν, τὸ ἐν λόγῳ πρόβλημα δὲν ἔχει μίαν μόνον λύσιν ὡς καὶ τὰ προηγούμενα, ἀλλὰ ἀπείρους τοιαύτας. Ἤτοι πᾶσαι αἱ τιμαὶ $\bar{x}_1 \leqslant x \leqslant \bar{x}_2$ ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ προβλήματος. Συνεπῶς ὑπάρχουν ἄπειροι περιπτώσεις μικτῆς στρατηγικῆς, αἱ ὁποῖαι δίδουν μέσον κέρδος ΟΑ. Ἡ μικτὴ στρατηγικὴ ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $\bar{x}_1$ εἶναι : (1/4, 3/4) καὶ ἡ μικτὴ στρατηγικὴ ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $\bar{x}_2$ εἶναι : (2/3, 1/3). Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ΟΑ εἶναι προφανῶς : $OA = \psi = 2$.

14.7. Ἀλγεβρικὴ λύσις : Θεωρία παιγνίων καὶ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς

Ἡ μέθοδος γραφικῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τῆς θεωρίας παιγνίων ἔχει, ὡς εἴπομεν, περιωρισμένην σημασίαν, ἐφ' ὅσον δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἐπὶ προβλημάτων τὰ ὁποῖα ἔχουν μήτρας πληρωμῶν 2×2, $2\times\nu$ ἢ $\mu\times2$ (1). Εἰς τὰς γενικωτέρας περιπτώσεις ἐφαρμόζεται ἀλγεβρικὴ ἀνάλυσις, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀρίστης στρατηγικῆς. Τὴν ἀνάλυσιν ταύτην θὰ ἐφαρμόσωμεν ἐνταῦθα παραδειγματικῶς διὰ τὴν λύσιν τοῦ ἐξετασθέντος γραφικῶς ἀρχικοῦ προβλήματος, τοῦ ὁποίου ἡ μήτρα πληρωμῶν ἔχει ὡς κάτωθι :

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \tag{1}$$

14.7.1. Λύσις τοῦ προβλήματος ὡς πρὸς τὸν παίκτην Α. Θὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόβλημα πρῶτον ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τοῦ παίκτου Α. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι x_ι ($\iota = 1, 2, 3, 4$) εἶναι ἡ ζητουμένη συχνότης χρησιμοποιήσεως τῆς στρατηγικῆς ι τοῦ Α. Προφανῶς θὰ εἶναι :

$$x_\iota \geqslant 0 \quad \iota = 1, \ldots, 4 \tag{2}$$

καὶ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \tag{3}$$

Τὸ ἀναμενόμενον μέσον κέρδος τοῦ Α θὰ εἶναι :

$$-2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4$$

ἢ

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 \tag{4}$$

ἀναλόγως ἐὰν ὁ Β χρησιμοποιῇ τὴν στρατηγικὴν 1 ἢ 2.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι κ εἶναι τὸ μικρότερον ἐκ τῶν ἀνωτέρω κερδῶν. Θὰ ἔχωμεν τότε :

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &\geqslant \kappa \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 &\geqslant \kappa \end{aligned} \tag{5}$$

Ἐπειδὴ διὰ λόγους ὑπολογιστικοὺς (βλ. ὑποσ. σ. 362) θέλομεν νὰ ἐξασφαλισθῇ ἡ μὴ ἀρνητικότης τοῦ ἐλαχίστου κέρδους, προσθέτομεν 2 μο-

1) Εἶναι βεβαίως δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ, μετὰ δυσχερείας, ἡ μέθοδος αὐτὴ καὶ εἰς περιπτώσεις μητρῶν πληρωμῶν τάξεως 3×3 ἢ $3\times\nu$ καὶ $\mu\times3$.

νάδας εἰς ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας πληρωμῶν, ἤτοι τόσας μονάδας ὅση εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἀπόλυτος τιμὴ τῶν ἀρνητικῶν στοιχείων τῆς μήτρας. Ἡ προσθήκη αὕτη δὲν ἐπηρεάζει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ἤτοι δὲν μεταβάλλει τὴν ἀρίστην μικτὴν στρατηγικήν, αὐξάνει μόνον κατὰ δύο μονάδας τὸ μέσον κέρδος τοῦ Α.

Οὕτω ἡ μήτρα πληρωμῶν γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

τὸ δὲ σύστημα (5):

$$\left.\begin{aligned} x_2 + 5x_3 &\geqslant K \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 10x_4 &\geqslant K \end{aligned}\right. \qquad (7)$$

ὅπου

$$K = \kappa + 2 > 0 \qquad (8)$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ x_ι διὰ Κ εἰς (2), (3) καὶ (7), λαμβάνομεν:

$$\frac{x_\iota}{K} \geqslant 0 \qquad \iota = 1, \ldots, 4 \qquad (^1) \qquad (9)$$

$$\frac{x_1}{K} + \frac{x_2}{K} + \frac{x_3}{K} + \frac{x_4}{K} = \frac{1}{K} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} 1\frac{x_2}{K} + 5\frac{x_3}{K} &\geqslant 1 \\ 5\frac{x_1}{K} + 3\frac{x_2}{K} + 4\frac{x_3}{K} + 10\frac{x_4}{K} &\geqslant 1 \end{aligned}\right| \qquad (11)$$

Ὁ Α πρέπει νὰ ἐπιλέξῃ μικτὴν στρατηγικὴν (ἤτοι τιμὰς τῶν x_ι) ἡ ὁποία ***μεγιστοποιεῖ*** τὸ κέρδος Κ. Ἀλλὰ ἡ μεγιστοποίησις τοῦ Κ ὑποδηλοῖ προφανῶς ***ἐλαχιστοποίησιν*** τῆς τιμῆς τοῦ κλάσματος 1/Κ. Ἂν θέσωμεν πρὸς ἀπλούστευσιν:

$$\frac{1}{K} = \lambda \quad \text{καὶ} \quad \frac{x_\iota}{K} = \psi_\iota\,, \quad \iota = (1, 2, 3, 4) \qquad (12)$$

δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν, βάσει τῶν (9), (10) καὶ (11), τὸ κάτωθι πρόβλημα:

---

1) Προφανῶς ἡ (9) ἀληθεύει ἐπειδὴ $x_\iota \geqslant 0$ καὶ $K > 0$.

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = \lambda \text{ ελαχ.} \tag{13}$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\psi_i \geqslant 0 \quad \text{διὰ} \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{14}$$

καὶ

$$\left.\begin{aligned} \psi_2 + 5\psi_3 &\geqslant 1 \\ 5\psi_1 + 3\psi_2 + 4\psi_3 + 10\psi_4 &\geqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Οὕτω βλέπομεν ὅτι ***τὸ πρόβλημα τοῦ Α καταλήγει τελικῶς εἰς ἓν τυπικὸν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ.*** Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται ἐπομένως, νὰ λυθῇ κατὰ τὰ γνωστά, ἤτοι διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου Simplex. Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα, δεικνύεται ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ τῆς ἀρίστης λύσεως. Ἡ διαδικασία αὕτη ἐφηρμόσθη μετὰ τὴν εἰσαγωγὴ τῶν διανυσμάτων ὑπερπληρώσεως [1] P_5, P_6 καὶ τῶν πλασματικῶν διανυσμάτων P_7, P_8, εἰς τὴν μήτραν τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος 15, τῆς ὁποίας αἱ στῆλαι παριστῶνται διὰ τῶν P_1, P_2, P_3, P_4. Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν διανυσμάτων ὑπερπληρώσεως δὲν μεταβάλλει τὴν συνάρτησιν (13). Αὕτη μεταβάλλεται μόνον διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν πλασματικῶν διανυσμάτων, διὰ τὰ ὁποῖα τίθεται τιμὴ Μ κατὰ μονάδα χρησιμοποιήσεώς των, ὅπου Μ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως μέγας ἀριθμός[2].

Ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ προβλήματος τὸ ὁποῖον διατυποῦται ὑπὸ τῶν (13), (14) καὶ (15), δίδεται εἰς τὸ πινάκιον Γ' καὶ εἶναι :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_2 = 0 \\ \psi_3 &= 0.2 \\ \psi_4 &= 0.02 \end{aligned} \tag{16}$$

Ἡ ***ἐλαχίστη*** τιμὴ τῆς συναρτήσεως (10) εἶναι : $\lambda = 0.22$.

Ἐπειδὴ $\lambda = \frac{1}{K}$, δυνάμεθα τώρα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ***μεγίστην*** τιμὴν τοῦ Κ ὡς

$$K = \frac{1}{\lambda \text{ ἐλάχ.}} = \frac{1}{0.22} = \frac{100}{22}.$$

Ἀλλά : $\psi_i = \frac{x_i}{K}$. Συνεπῶς : $x_i = K\psi_i$. Οὕτω, αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τῶν συχνοτήτων x_1, x_2, x_3 καὶ x_4 θὰ εἶναι :

---

1) Βλ. σ. 307, ἀνωτέρω.
2) Βλ. σ. 309, ἀνωτέρω.

$$x_1 = K\psi_1 = \frac{100}{22} \times 0 = 0$$

$$x_2 = K\psi_2 = \frac{100}{22} \times 0 = 0$$

$$x_3 = K\psi_3 = \frac{100}{22} \times \frac{20}{100} = \frac{10}{11}$$

καὶ
$$x_4 = K\psi_4 = \frac{100}{22} \times \frac{2}{100} = \frac{1}{11}$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ *ἀρίστη μικτὴ στρατηγικὴ* διὰ τὸν Α εἶναι :

$$(0,\ 0,\ 10/11,\ 1/11) \tag{17}$$

Ἤτοι, ὁ Α πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ μόνον τὴν στρατηγικὴν 3 μὲ συχνό-

Πινάκιον Α'

			1	1	1	1			M	M
	B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
M	P_7	1	0	1	5	0	−1	0	1	0
M	P_8	1	5	3	4	$\boxed{10}$	0	−1	0	1
		2M	5M −1	4M −1	9M −1	10M −1	−M	−M		

Πινάκιον Β'

M	P_7	1	0	1	$\boxed{5}$	0	−1	0	1	0
1	P_4	0.1	0.5	0.3	0.4	1	0	−0.1	0	0.1
		M −0.1	−0.5	M −0.7	5M −0.6		−M	−0.1		−M 0.1

Πινάκιον Γ'

1	P_3	0.2	0	0.2	1	0	−0.2	0	0.2	C
1	P_4	0.02	0.5	0.22	C	1	0.08	−0.1	−0.08	0.1
		0.22	−0.5	−0.58			−0.12	−0.1	0.12 −M	0.1 −M

τητα 10/11 καὶ τὴν στρατηγικὴν 4 μὲ συχνότητα 1/11. Τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν συχνοτήτων ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα, ἤτοι ἱκανοποιεῖ τὴν (3).

Ὡς προκύπτει ἐκ τῆς (8), τὸ μέγιστον μέσον κέρδος ([1]) τοῦ Α, ὅταν χρησιμοποιῇ τὴν ἀνωτέρω στρατηγικήν, εἶναι :

$$\kappa = K - 2 = \frac{100}{22} - 2 = 2\frac{6}{11}$$

ἤτοι ὅση ἀκριβῶς ἦτο ἡ εὑρεθεῖσα διὰ τῆς γραφικῆς λύσεως ζημία τοῦ Β.

14.7.2. Λύσις τοῦ προβλήματος ὡς πρὸς τὸν παίκτην Β. Ἂς θέσωμεν : μ_1 καὶ μ_2, διὰ τὴν ζητουμένην συχνότητα χρησιμοποιήσεως τῆς στρατηγικῆς 1 καὶ τῆς στρατηγικῆς 2, ἀντιστοίχως, τοῦ παίκτου Β. Προφανῶς θὰ εἶναι :

$$\mu_1, \quad \mu_2 \geqslant 0 \tag{1}$$

καὶ

$$\mu_1 + \mu_2 = 1 \tag{2}$$

Ἡ ἀναμενομένη μέση ζημία τοῦ Β, ὅταν ὁ Α χρησιμοποιῇ ἀποκλειστικῶς τὴν 1 ἢ 2 ἢ 5 ἢ 4 στρατηγικὴν δίδεται, ἀντιστοίχως, ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

$$\left.\begin{array}{r} -2\mu_1 + 3\mu_2 \\ -\mu_1 + \mu_2 \\ 3\mu_1 + 2\mu_2 \\ -2\mu_1 + 8\mu_2 \end{array}\right\} \tag{3}$$

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ζ εἶναι ἡ μεγίστη ἐκ τῶν ἀνωτέρω ζημιῶν. Θὰ ἔχωμεν τότε :

$$\left.\begin{array}{r} -2\mu_1 + 3\mu_2 \leqslant \zeta \\ -\mu_1 + \mu_2 \leqslant \zeta \\ 3\mu_1 + 2\mu_2 \leqslant \zeta \\ -2\mu_1 + 8\mu_2 \leqslant \zeta \end{array}\right\} \tag{4}$$

Πρὸς ἐξασφάλισιν, διὰ λόγους ὑπολογιστικοὺς (βλ. ὑποσημ. σ. 366), τῆς μὴ ἀρνητικότητος τῆς μεγίστης ζημίας, προσθέτομεν, ὡς καὶ προηγουμένως, 2 μονάδας εἰς ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος (4). Ἡ προσθήκη αὕτη δὲν ἐπηρεάζει τὸν ὑπολογισμὸν διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀρίστης στρατηγικῆς τοῦ Β, ἁπλῶς αὐξάνει

1) Τὸ κέρδος αὐτὸ εἶναι μέγιστον, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι δὲν δύναται κατ' οὐδένα τρόπον νὰ τὸ μειώσῃ ὁ Β διὰ τῆς πολιτικῆς του.

κατὰ δύο μονάδας τὴν ζημίαν.Κατόπιν τῆς μεταβολῆς αὐτῆς λαμβάνομεν :

$$
\left.\begin{aligned}
5\mu_2 &\leqslant Z\\
\mu_1 + 3\mu_2 &\leqslant Z\\
5\mu_1 + 4\mu_2 &\leqslant Z\\
10\mu_2 &\leqslant Z
\end{aligned}\right\} \qquad (5)
$$

ὅπου :

$$Z = \zeta + 2 \qquad (6)$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ Z τὰ μ_1 καὶ μ_2 εἰς (1), (2) καὶ (5), λαμβάνομεν [1] :

$$\frac{\mu_1}{Z}, \quad \frac{\mu_2}{Z} \geqslant 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\mu_1}{Z} + \frac{\mu_2}{Z} = \frac{1}{Z} \qquad (8)$$

καὶ

$$
\left.\begin{aligned}
5\,\frac{\mu_2}{Z} &\leqslant 1\\
\frac{\mu_1}{Z} + 3\,\frac{\mu_2}{Z} &\leqslant 1\\
5\,\frac{\mu_1}{Z} + 4\,\frac{\mu_2}{Z} &\leqslant 1\\
10\,\frac{\mu_2}{Z} &\leqslant 1
\end{aligned}\right\} \qquad (9)
$$

Ὁ Β πρέπει νὰ ἐπιλέξῃ τιμὰς τῶν μ_1 καὶ μ_2 τοιαύτας ὥστε νὰ ἐπιτύχῃ τὴν ***ἐλαχίστην*** δυνατὴν τιμὴν τῆς ζημίας Z.Ἀλλὰ ἐλαχιστοποίησις τοῦ Z ὑποδηλοῖ προφανῶς μεγιστοποίησιν τῆς τιμῆς του κλάσματος 1/Z.

Ἂν θέσωμεν :

$$\frac{1}{Z} = \xi \quad \text{καὶ} \quad \frac{\mu_1}{Z} = \varphi_1, \quad \frac{\mu_2}{Z} = \varphi_2 \qquad (10)$$

καὶ ἀντικαταστήσωμεν καταλλήλως εἰς (7), (8) καὶ (9), δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα :

Νὰ εὑρεθῇ :

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \xi \;\mu\epsilon\gamma \qquad (11)$$

---

1) Ἡ (7) ἀληθεύει διότι $\mu_1, \mu_2 \geqslant 0$ καὶ $Z = \zeta + 2 > 0$.

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\left.\begin{aligned} 5\varphi_2 &\leqslant 1 \\ \varphi_1 + 3\varphi_2 &\leqslant 1 \\ 5\varphi_1 + 4\varphi_2 &\leqslant 1 \\ 10\varphi_2 &\leqslant 1 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

καὶ $$\varphi_1,\ \varphi_2 \geqslant 0 \quad (13)$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις, ***τὸ πρόβλημα τοῦ Β εἶναι ἓν τυπικὸν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ.*** Ὅ,τι ὅμως παρουσιάζει ἐξαιρετικὸν πράγματι ἐνδιαφέρον, τόσον ἀπὸ θεωρητικῆς ὅσον καὶ ἀπὸ ὑπολογιστικῆς ἀπόψεως, εἶναι ἡ διαπίστωσις ὅτι τὸ ὡς ἄνω πρόβλημα τοῦ παίκτου Β εἶναι ἁπλῶς τὸ ***δυαδικὸν*** τοῦ ἐξετασθέντος ἤδη προβλήματος τοῦ παίκτου Α. Ἡ συγκριτικὴ ἐξέτασις τῶν προβλημάτων αὐτῶν, κατόπιν διατυπώσεών των ὑπὸ μορφὴν μητρῶν, καθιστᾶ προφανῆ τὴν ὑφισταμένην μεταξύ των σχέσιν δυαδικότητος :

Τὸ πρόβλημα τοῦ Α	Τὸ πρόβλημα τοῦ Β
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \lambda$ ἐλαχ.	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \xi$ μεγ.
ὑπὸ τοὺς περιορισμούς:	ὑπὸ τοὺς περιορισμούς:
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
καὶ $\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4 \geqslant 0$	καὶ $\varphi_1,\ \varphi_2 \geqslant 0$

Κατὰ συνέπειαν δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προβῶμεν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀρίστης λύσεως διὰ τὸ πρόβλημα τοῦ Β. Ἡ λύσις αὕτη ἔχει ἤδη ὑπολογισθῆ ὡς ὑποπροϊὸν τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τοῦ Α διὰ τῆς μεθόδου Simplex. Πρόκειται πράγματι περὶ τῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν 0.12 καὶ 0.1, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ πλασματικὰ διανύσματα P_7 καὶ P_8, εἰς τὸ Γ' πινάκιον. Συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα εἰς σ. 304, ἀνωτέρω, πρέπει νὰ εἶναι :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0.12 \\ \varphi_2 &= 0.10 \end{aligned} \qquad (14)$$

Αἱ τιμαὶ αὗται ἐπαληθεύουν πράγματι τὰς (11), (12) καὶ (13). Εἰδικώτερον ἱκανοποιοῦν μὲ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος τὰς δύο τελευταίας σχέσεις τοῦ συστήματος (12), αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῆς στρατηγικῆς 3 καὶ τῆς στρατηγικῆς 4 τοῦ Α ([1]). Ἐξ ἄλλου, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τιμῶν αὐτῶν τῶν φ_1 καὶ φ_2, λαμβάνομεν :

$$\xi\ \mu\varepsilon\gamma = \lambda\ \varepsilon\lambda\alpha\chi.$$

διότι :

$$\xi\ \mu\varepsilon\gamma = \varphi_1 + \varphi_2 = 0.12 + 0.10 = 0.22$$

καὶ $\lambda\ \varepsilon\lambda\alpha\chi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 0 + 0 + 0.2 + 0.02 = 0.22$

Ἐκ τῆς (10) ἔχομεν : $Z = \dfrac{1}{\xi}$, ἐπομένως ἡ ***ἐλαχίστη*** τιμὴ τοῦ Ζ θὰ εἶναι :

$$\frac{1}{\xi\ \mu\varepsilon\gamma} = \frac{100}{22} = 4\,\frac{6}{11} \qquad (16)$$

Ἐκ τῶν τιμῶν τῶν φ_1, φ_2 καὶ Ζ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν εὐκόλως τὴν συχνότητα μ_1 τῆς στρατηγικῆς 1 καὶ τὴν συχνότητα μ_2 τῆς στρατηγικῆς 2 τοῦ παίκτου Β. Βάσει τῆς (10), θὰ ἔχωμεν :

$$\mu_1 = Z\varphi_1 = \frac{100}{22} \times \frac{12}{100} = \frac{6}{11}$$

καὶ

$$\mu_2 = Z\varphi_2 = \frac{100}{22} \times \frac{10}{100} = \frac{5}{11}$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ ***ἀρίστη μικτὴ στρατηγικὴ*** τοῦ παίκτου Β εἶναι :

$$(6/11,\ \ 5/11) \qquad (17)$$

Ἤτοι, ὁ Β πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ τὴν στρατηγικὴν 1 μὲ συχνότητα 6/11 καὶ τὴν στρατηγικὴν 2 μὲ συχνότητα 5/11. Τὸ ἄθροισμα τῶν συχνοτήτων αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα καὶ συνεπῶς ἱκανοποιεῖ τὴν (2).

Ἐκ τῶν (6) καὶ (16), δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ***ἐλαχίστην*** μέσην ζημίαν ζ τοῦ Β, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μικτὴν στρατηγικὴν (17) :

$$\zeta = Z - 2 = 4\,\frac{6}{11} - 2 = 2\,\frac{6}{11} \qquad (18)$$

Ἡ ἐλαχίστη αὕτη ζημία ἰσοῦται πρὸς τὸ εὑρεθὲν ἤδη μέγιστον μέσον κέρδος κ τοῦ Α.

---

1) Βλ. σ. 302 καὶ 303, ἀνωτέρω.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Τὸ γενικὸν πρόβλημα προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγῆς κατὰ τὸν L. V. Kantorovitch

15.1. Εἰσαγωγή

Κατὰ τὸ ἔτος 1939, ἤτοι δέκα σχεδὸν ἔτη πρὸ τῆς δημοσιεύσεως τῶν πρώτων ἐργασιῶν ἐπὶ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Λένινγκραντ ἐδημοσίευσε μίαν ἐργασίαν τοῦ Ρώσσου μαθηματικοῦ L. Kantorovitch, ὑπὸ τὸν τίτλον «Μαθηματικαὶ μέθοδοι ὀργανώσεως καὶ προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγῆς». Ἡ ἐργασία αὕτη, μεταφρασθεῖσα εἰς τὴν ἀγγλικὴν (1) μετὰ μίαν ὁλόκληρον εἰκοσαετίαν, προεκάλεσε ζωηρὰν ἔκπληξιν εἰς τοὺς μαθηματικοὺς καὶ οἰκονομολόγους, τοὺς ἔχοντας ὑπ' ὄψιν των τὴν ἀγγλοσαξωνικὴν κυρίως φιλολογίαν ἐπὶ τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ: Ἡ κεντρικὴ ἰδέα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, ἡ μαθηματικὴ διατύπωσις τοῦ σχετικοῦ προβλήματος καὶ ἡ βασικὴ διαδικασία ὑπολογισμοῦ τῆς λύσεως αὐτοῦ διὰ διαδοχικῶν προσεγγίσεων, ἐξετίθεντο διὰ πρώτην φορὰν καὶ μὲ ἐξαιρετικὴν σαφήνειαν εἰς τὴν ἐν λόγῳ ἐργασίαν. Τὸ σπουδαιότερον ὅμως εἶναι ὅτι ὁ Kantorovitch, ἐν τῇ προσπαθείᾳ του ὅπως διαμορφώσῃ ἓν σύστημα ἐλέγχου τῆς ἀρίστης λύσεως, ἔθεσε κατ' οὐσίαν τὸ πρόβλημα τῆς δυαδικότητος (2). Οἱ ***πολλαπλασιασταὶ λύσεως*** ἢ ἄλλως αἱ καλούμεναι ***ἀντικειμενικῶς καθωρισμέναι ἀξίαι*** τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν βάσιν τῆς ὑπολογιστικῆς τεχνικῆς Kantorovich, δὲν εἶναι παρὰ αἱ «ὑπολογιστικαὶ τιμαί», αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς μεταβλητὰς τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ (3).

Κατὰ τὴν γνώμην τοῦ Ἀμερικανοῦ μαθηματικοῦ G. Dantzig, εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται ὡς γνωστὸν ὁ ἀλγόριθμος Simplex, «ἐὰν ἡ ἐργασία τοῦ Kantorovitch ἐξετιμᾶτο δεόντως κατὰ τὸν χρόνον τῆς πρώτης δημοσιεύσεώς της, ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς θὰ εἶχεν ἐνδεχομένως ἀναπτυχθῆ περισσότερον. Δυστυχῶς ἡ ἐργασία αὕτη παρέμεινεν ἀγνω-

1) L. V. Kantorovitch: «Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production», Management Science, Vol. 6, 1960.

2) Βλ. 11.4., ἀνωτέρω.

3) Βλ. σ. 299, ἀνωτέρω.

στος ἐπὶ δύο δεκαετίας, . . . » [1]. Τόσον ὁ G. Dantzig ὅσον καὶ ὁ T. Koopmans [2], ἀναγνωρίζουν ὅτι ὁ Kantorovitch ἦτο ὁ πρῶτος ὁ ὁποῖος ἔδωσε σαφῆ μαθηματικὴν διατύπωσιν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ καὶ ἀντιμετώπισεν ὑπολογιστικῶς τὸ πρόβλημα τοῦτο.

Πλὴν τῆς ἀνωτέρω ἀναφερθείσης ἐργασίας, ὁ Kantorovitch ἐδημοσίευσε, μετὰ τὸ ἔτος 1939, πολυαρίθμους ἄλλας ἐργασίας ἐπὶ θεμάτων προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγῆς. Κατὰ τὸ ἔτος 1959 ἐδημοσίευσεν ἐργασίαν, ὑπὸ τὸν τίτλον : «Οἰκονομικὸς Λογισμὸς καὶ χρησιμοποίησις τῶν οἰκονομικῶν πόρων» [3], εἰς τὴν ὁποίαν συνοψίζονται τὰ κυριώτερα πορίσματα τῶν ἐρευνῶν του καὶ ἐπιχειρεῖται μία γενίκευσις τοῦ συστήματός του. Ἡ γενίκευσις αὕτη, καὶ ἰδίᾳ ἡ προσπάθεια τοῦ συγγραφέως νὰ συσχετίσῃ τὰς ὑπολογιστικὰς τιμὰς μὲ τὴν μαρξιστικὴν θεωρίαν περὶ ἀξίας, ἀπετέλεσαν ἀντικείμενον κριτικῆς ὑπὸ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ V. Nemtchinov [4], τοῦ οἰκονομολόγου A. Kats [5] καὶ ἄλλων. Πάντες ὅμως ἀναγνωρίζουν ὅτι τὸ σύστημα Kantorovitch δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἐπωφελῶς διὰ τὴν λύσιν πρακτικῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων, ὡς εἶναι, π.χ., τὰ προβλήματα τῆς μεταφορᾶς καὶ τῆς ὀρθολογικῆς ἀξιοποιήσεως τοῦ ὑφισταμένου κεφαλαιακοῦ ἐξοπλισμοῦ καὶ τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ πρώτων ὑλῶν, κ.τ.λ.

Ἀπὸ ἀπόψεως μαθηματικῆς διαρθρώσεως, πάντα τὰ προβλήματα τὰ ἐξεταζόμενα ὑπὸ τοῦ Kantorovitch εἰς τὴν τελευταίαν του ἐργασίαν ἀποτελοῦν παραλλαγὰς ἢ ὑποπεριπτώσεις ἑνὸς γενικοῦ μαθηματικοῦ προβλήματος, τὸ ὁποῖον ὁ συγγραφεὺς χαρακτηρίζει ὡς ***γενικὸν ἢ θεμελιῶδες πρόβλημα προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγῆς***. Εἰς τὰ ἑπόμενα ἐπιχειρεῖται μία συστηματικὴ παρουσίασις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, τόσον ἀπὸ θεωρητικῆς ὅσον καὶ ἀπὸ ὑπολογιστικῆς ἀπόψεως.

15.2. Μαθηματικὴ διατύπωσις τοῦ γενικοῦ προβλήματος

15.2.1. Θὰ ἐξετάσωμεν γενικῶς μίαν περίπτωσιν παραγωγῆς εἰς τὴν ὁποίαν ἔχομεν τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας [6] $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$

1) G. Dantzig : «Linear Programming and Extensions», 1963, Princeton University Press, σ. 23.

2) T. Koopmans : «Three Essays on the state of economic science», McGraw Hill, N.Y. 1957, σ. 68.

3) L. V. Kantorovitch : «Calcul économique et utilisation des ressources», (Γαλλ. Μετάφρ.), Dunod, Paris, 1963.

4) Βλ. πρόλογον V. Nemtchinov, εἰς ἐργασίαν Kantorovitch : Calcul économique, κ.τ.λ.

5) A. Kats : Concerning a fallacious concept of economic calculations, εἰς περιοδικὸν Problems of Economics, Vol. III, No 7.

6) Ἡ ὑπὸ τοῦ Κ. χρησιμοποιουμένη ὁρολογία καὶ τὰ μαθηματικὰ σύμβολα

καὶ τὰ ἀγαθὰ 1, 2, 3, ..., μ. Ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης, π.χ. ἡ α_κ, χαρακτηρίζεται ἀπὸ ἓν διάνυσμα:

$$\alpha_\kappa = \begin{bmatrix} \alpha_{1\kappa} \\ \alpha_{2\kappa} \\ \alpha_{3\kappa} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu\kappa} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα $\alpha_{\iota\kappa}$ ($\iota = 1, \ldots, \mu$) παριστοῦν ποσότητας τῶν ἀγαθῶν 1, 2, ..., μ. Αἱ ποσότητες αὗται εἶναι «εἰσροαί», ἤτοι δαπανῶνται εἰς τὴν ἐν λόγῳ δραστηριότητα, ἂν $\alpha_{\iota\kappa} < 0$. Ἂν, ἀντιθέτως, $\alpha_{\iota\kappa} > 0$, αὗται εἶναι «ἐκροαί», ἤτοι ἐκφράζουν παραγομένας ποσότητας τῶν ἀντιστοίχων ἀγαθῶν [1]. Δυνατὸν βεβαίως νὰ ἔχωμεν $\alpha_{\iota\kappa} = 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ ἀγαθὸν ι δὲν συμμετέχει εἰς τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα α_κ. Οὕτω, αἱ τεχνολογικαὶ συνθῆκαι παραγωγῆς, εἰς τὴν ἐξεταζομένην περίπτωσιν, δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τῆς τεχνολογικῆς μήτρας A:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots & \alpha_\nu \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \ldots & \alpha_{3\nu} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \alpha_{\mu3} \ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2)$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι: α) Τὰ ἀγαθὰ τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται ὡς συντελεσταὶ παραγωγῆς, εἶναι τὰ 1, 2, 3, ..., ρ. β) Διὰ τὰ ὑπόλοιπα ἀγαθὰ ρ+1, ρ+2, ..., μ ἐπιδιώκεται ἡ μεγιστοποίησις τῆς παραγωγῆς των [2], ἀλλὰ κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ἐξασφαλίζεται ἐπίσης καὶ ὡρισμένη ***ἐπιθυμητὴ ἀναλογία*** μεταξὺ τῶν ποσοτήτων αὐτῶν. Οὕτω, π.χ., ἂν πρόκειται διὰ τὰ ἀγαθὰ 5, 6 καὶ 7, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἐπιθυμητὴ ἀνα-

---

προσηρμόσθησαν εἰς τὴν ὁρολογίαν καὶ τὰ σύμβολα τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου. Οὕτω, π.χ., ἀντὶ τοῦ ὅρου «μέσον ἢ τρόπος ὀργανώσεως παραγωγῆς» τοῦ K, χρησιμοποιεῖται ὁ ἰσοδύναμος ὅρος «παραγωγικὴ δραστηριότης».

1) Ἑπομένως αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ εἶναι τῆς μορφῆς τῆς περιγραφομένης εἰς τὴν παράγρ. 3.15 (σ. 28), ἀνωτέρω.

2) Δυνατὸν ἐπίσης νὰ ἐπιδιώκεται ταυτοχρόνως καὶ ἡ ἱκανοποίησις δοθείσης τελικῆς ζητήσεως τινῶν ἐξ αὐτῶν.

λογία ὁρίζεται εἰς 1 : 3 : 2, σημαίνει ὅτι ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τῆς παραγωγῆς των, ἀλλὰ ταυτοχρόνως πρέπει ἡ ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ 6 νὰ εἶναι *τουλάχιστον* τριπλασία, τοῦ δὲ ἀγαθοῦ 7 τουλάχιστον διπλασία, τῆς ποσότητος τοῦ ἀγαθοῦ 5. Γενικῶς, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ διάνυσμα ζ :

$$\zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_{\mu-\rho} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

μ-στῆς τάξεως, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα ζ_σ ($\sigma = 1, 2, \ldots, \mu-\rho$) εἶναι ἀριθμοὶ ἐκφράζοντες τὴν ἐπιθυμητὴν ἀναλογίαν, διὰ τὰ ἀγαθὰ $\rho+1$, $\rho+2$, ... καὶ μ, ἀντιστοίχως. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ ὀνομάζωμεν τὸ ζ ***διάνυσμα ἐπιθυμητῶν ἀναλογιῶν***. Θὰ ὀνομάζωμεν ***μονάδα συνθέτου παραγωγῆς*** τὴν μονάδα χρησιμοποιήσεως τοῦ διανύσματος ζ. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμητικοῦ παραδείγματος ἡ μονὰς συνθέτου παραγωγῆς σημαίνει παραγωγὴν 1, 3 καὶ 2 μονάδων ἐκ τῶν ἀγαθῶν 5, 6 καὶ 7, ἀντιστοίχως.

Θὰ καλοῦμεν ***πρόγραμμα παραγωγῆς*** τὸ διάνυσμα π :

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_\nu \end{bmatrix}$$

τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$ εἶναι μὴ ἀρνητικὰ καὶ παριστοῦν ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$, ἀντιστοίχως. Βάσει τοῦ προγράμματος π δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰς συνολικῶς παραγομένας καὶ τὰς συνολικῶς καταναλισκομένας ποσότητας τῶν ἀγαθῶν 1, 2, ..., μ. Οὕτω διὰ τὸ ἀγαθὸν ι, θὰ ἔχωμεν τὴν συνολικὴν ποσότητα x_ι :

$$x_\iota = \alpha_{\iota 1}\pi_1 + \alpha_{\iota 2}\pi_2 + \ldots + \alpha_{\iota\nu}\pi_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_{\iota\kappa}\pi_\kappa \quad (4)$$

$$\iota = 1, 2, \ldots, \mu$$

Τὰ ἀγαθὰ διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν $x_\iota < 0$ σημαίνει ὅτι καταναλίσκονται (ὡς συντελεσταὶ παραγωγῆς) εἰς ποσότητας $|x_\iota|$.

Ἂς ὁρίσωμεν τώρα τὸ διάνυσμα **β**:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\rho \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5$$

μ-στῆς τάξεως, μὲ στοιχεῖα $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\rho < 0$ καὶ τοιαῦτα ὥστε:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_{1\kappa}\pi_\kappa \geqslant \beta_1 \\ x_2 &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_{2\kappa}\pi_\kappa \geqslant \beta_2 \\ &\cdot \qquad\qquad \cdot \\ &\cdot \qquad\qquad \cdot \\ &\cdot \qquad\qquad \cdot \\ x_\rho &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_{\rho\kappa}\pi_\kappa \geqslant \beta_\rho \end{aligned} \quad (6)$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις, τὰ στοιχεῖα $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\rho$ ἐκφράζουν τὰ ὅρια τῆς καταναλώσεως διὰ τοὺς συντελεστὰς 1, 2, . . . , ρ, ἀντιστοίχως (1). Οὕτω, π.χ., $\beta_1 = -100$ σημαίνει ὅτι ἡ συνολικῶς διαθέσιμος ποσότης τοῦ συντελεστοῦ 1 εἶναι 100 μονάδες καὶ συνεπῶς ὁ ἀριθμὸς -100 προσδιορίζει τὸ ὅριον τῆς παραγωγικῆς καταναλώσεως τοῦ ἐν λόγῳ συντε-

1) Ἂν ἐπιδιώκεται ἡ ἱκανοποίησις δοθείσης τελικῆς ζητήσεως ὡρισμένων ἐκ τῶν ἀγαθῶν $\rho+1, \rho+2, \ldots, \mu$, θὰ ἔχωμεν ἐπίσης $\beta_\iota > 0$, διὰ τὰ ἀντίστοιχα ἀγαθά. Ἐξ ἄλλου, δυνατὸν νὰ ἔχωμεν $\beta_\iota = 0$, ἂν χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν παραγωγὴν καὶ ἐνδιάμεσα ἀγαθά, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ συνολικὴ παραγωγὴ ἰσοῦται πρὸς τὴν συνολικὴν κατανάλωσίν των.

λεστοῦ. Θὰ ὀνομάζωμεν ἐνταῦθα τὸ β, *διάνυσμα οἰκονομικῶν δυνατοτήτων* (1).

15.2.2. Ἤδη δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν σαφῶς τὸ γενικὸν μαθηματικὸν πρόβλημα προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγῆς.

Δοθέντων τῶν διανυσμάτων (τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, τοῦ διανύσματος (τῶν οἰκονομικῶν δυνατοτήτων) β καὶ τοῦ διανύσματος (τῶν ἐπιθυμητῶν ἀναλογιῶν) ζ, νὰ προσδιορισθῇ τὸ διάνυσμα (τοῦ προγράμματος παραγωγῆς) π, τοιοῦτον ὥστε :

α) $\quad \pi \geqslant 0 \quad$ ἢ $\quad \pi_\kappa \geqslant 0 \qquad (\kappa=1, 2, \ldots, \nu)$

β) $\quad x_\iota \geqslant \beta_\iota \qquad (\iota=1, \ldots, \rho)$

ὅπου: $\quad x_\iota = \sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\iota\kappa}\, \pi_\kappa$

καὶ γ) νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ συνάρτησις :

$$\varphi(\pi) = \underset{1 \leqslant \sigma \leqslant \mu-\rho}{\text{ελαχ.}} \frac{x_{\rho+\sigma}}{\zeta_\sigma}$$

ὅπου (συμφώνως πρὸς τὴν (4)) :

$$\begin{aligned} x_{\rho+\sigma} &= \alpha_{(\rho+\sigma)1}\,\pi_1 + \alpha_{(\rho+\sigma)2}\,\pi_2 + \ldots + \alpha_{(\rho+\sigma)\nu}\,\pi_\nu = \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{(\rho+\sigma)\kappa}\,\pi_\kappa \end{aligned}$$

Ἡ ἔννοια τῆς συνθήκης γ εἶναι ἡ ἀκόλουθος : Ἐφ' ὅσον ἐπιδιώκεται, ὡς εἴπομεν, ἡ μεγιστοποίησις τῆς παραγωγῆς τῶν ἀγαθῶν $\rho+1, \rho+2, \ldots, \mu$, ἐξασφαλιζομένης ταυτοχρόνως καὶ τῆς ἐπιθυμητῆς ἀναλογίας τῶν ἀγαθῶν αὐτῶν, ἡ ἀνωτέρω μεγιστοποίησις μετατρέπεται εἰς μεγιστοποίησιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τῆς συνθέτου παραγωγῆς, ἤτοι τοῦ ἐπιπέδου χρησιμοποιήσεως τοῦ διανύσματος ζ. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι διὰ τὸ ἄριστον πρόγραμμα τὸ ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως τοῦ ζ εἶναι θ, ἡ δὲ παραγωγὴ τοῦ ἀγαθοῦ $\rho+\sigma$ εἶναι $x_{\rho+\sigma}$ $(\sigma=1, 2, \ldots, \mu-\rho)$. Θὰ εἶναι τότε :

$$\theta\zeta_\sigma \leqslant x_{\rho+\sigma} \qquad \text{ἢ} \qquad \theta \leqslant \frac{x_{\rho+\sigma}}{\zeta_\sigma} \qquad (\sigma=1, 2, \ldots, \mu-\rho)$$

Προφανῶς ὑπάρχει μία τουλάχιστον τιμὴ τοῦ σ, π.χ. : σ^*, διὰ τὴν

1) Προφανῶς, ἐπειδὴ $\beta_\iota < 0$, αἱ σχέσεις (6) ἔχουν τὴν ἔννοιαν ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῶν x_ι πρέπει νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῶν ἀντιστοίχων β_ι, ἤτοι : $|x_\iota| \leqslant |\beta_\iota|$

ὁποίαν τὸ πηλίκον $x_{\rho+\sigma^*}/\zeta_{\sigma^*}$ εἶναι ἐλάχιστον, ὁπότε, διὰ τὸ ἐν λόγῳ ἄριστον πρόγραμμα π, θὰ ἔχωμεν :

$$\theta = \varepsilon\lambda\alpha\chi.\ \frac{x_{\rho+\sigma^*}}{\zeta_{\sigma^*}} = \varphi(\pi)$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν, γενικῶς :

$$\theta = \underset{1 \leqslant \sigma \leqslant \mu-\rho}{\varepsilon\lambda\alpha\chi.}\ \frac{x_{\rho+\sigma}}{\zeta_\sigma} = \varphi(\pi).$$

Ἂς λάβωμεν, π.χ., τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

εἰς τὰς ὁποίας συμμετέχουν τὰ ἀγαθὰ 1 καὶ 2, ὡς εἰσροαὶ καὶ τὰ ἀγαθὰ 3, 4 καὶ 5, ὡς ἐκροαί, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αὗται χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸ πρόγραμμα εἰς ἐπίπεδα $\pi_1 = 4$, $\pi_2 = 6$ καὶ $\pi_3 = 2$, ἀντιστοίχως. Ἡ συνολικὴ παραγωγὴ θὰ εἶναι τότε :

διὰ τὸ ἀγαθὸν 3 : $4 \times 3 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 28$

» » » 4 : $4 \times 1 + 6 \times 1 + 2 \times 1 = 12$

» » » 5 : $4 \times 2 + 6 \times 3 + 2 \times 2 = 30$

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ διάνυσμα τῶν ἐπιθυμητῶν ἀναλογιῶν εἶναι :

$$\zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

πρᾶγμα τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ παραγωγὴ τῶν ἀγαθῶν 3 καὶ 5 πρέπει νὰ εἶναι διπλασία τῆς τοῦ ἀγαθοῦ 4, θὰ ἔχωμεν τὰ πηλίκα : 28/2, 12/1, 30/2. Τὸ μικρότερον ἐξ αὐτῶν, ἤτοι τό : 12/1, προσδιορίζει τιμὴν τοῦ $\theta = 12$.

Προφανῶς, δοθέντος τοῦ διανύσματος ζ τῶν ἐπιθυμητῶν ἀναλογιῶν, τιμὴ $\theta > 12$ δὲν δύναται νὰ πραγματοποιηθῇ. Οὕτω, τὸ πρόβλημα τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς παραγωγῆς ὑπὸ τοιαύτας συνθήκας εἶναι πρόβλημα ἀνάλογον πρὸς τὰ προβλήματα τύπου maximin τῆς θεωρίας παιγνίων ([1]), καθ' ὅσον ἐπιδιώκεται νὰ καταστῇ *μέγιστον* τὸ *ἐλάχιστον* ἐκ τῶν πηλίκων $x_{\rho+\sigma}/\zeta_\eta$.

Ἓν πρόγραμμα παραγωγῆς π, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὰς συνθήκας α καὶ β εἶναι *πραγματοποιήσιμον*. Ἂν ἱκανοποιῇ ἐπίσης καὶ τὴν συνθήκην γ καλεῖται *ἄριστον πρόγραμμα*.

Καθίσταται προφανὲς ὅτι τὸ ἐξετασθὲν ἤδη εἰς 11.2 πρόβλημα Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ δύναται νὰ προκύψῃ ὡς εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ προβλήματος Kantorovich, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης παράγει ἓν μόνον ἀγαθὸν καὶ ὅτι ἐπιδιώκεται, οὐχὶ ἡ μεγιστοποίησις τῆς παραγωγῆς, ἀλλὰ ἡ μεγιστοποίησις τῆς ἀξίας (ἢ τοῦ καθαροῦ κέρδους) τῆς παραγωγῆς. Ἐπίσης δύναται εὐκόλως νὰ δειχθῇ ὅτι ἀποτελεῖ κατ' οὐσίαν εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ προβλήματος Kantorovitch τὸ πρόβλημα τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν (ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα), εἰς τὸ ὁποῖον ἐπιδιώκεται ἡ ἱκανοποίησις δεδομένης τελικῆς ζητήσεως, βάσει ὡρισμένων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ἁπασῶν χρησιμοποιουμένων εἰς τὴν τελικὴν λύσιν.

15.2.3. Ὡς εἴπομεν ἤδη κατὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, εἰς τὸ ἄριστον πρόγραμμα εἰσέρχονται μόνον αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες διὰ τὰς ὁποίας τὸ συνολικὸν ὑπολογιστικὸν κόστος (τὸ προσδιοριζόμενον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν καταναλισκομένων ποσοτήτων συντελεστῶν ἐπὶ τὰς ὑπολογιστικὰς τιμὰς αὐτῶν) εἶναι ἴσον πρὸς τὸ κατὰ μονάδα κέρδος τοῦ παραγομένου ἀγαθοῦ. Οὕτω, π.χ., διὰ τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα Π_5, ἡ ὁποία εἰσέρχεται εἰς τὸ ἄριστον πρόγραμμα (βλ. σ. 273) ἔχομεν ([2]):

$$2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 = 6$$

ἢ

$$6 - 2\mu_1 - 2\mu_2 - 2\mu_3 = 0$$

ὅπου μ_1, μ_2, μ_3 εἶναι ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν καὶ 6 εἶναι τὸ κατὰ μονάδα κέρδος τοῦ παραγομένου ἀγαθοῦ.

Διὰ τὰς μὴ ἀποδοτικὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας τὸ ὑπολογιστικὸν κέρδος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κατὰ μονάδα κέρδους τοῦ παραγομένου ἀγαθοῦ. Οὕτω, διὰ τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα Π_1, ἡ ὁποία

1) Βλ. 14.3, ἀνωτέρω.

2) Βλ. τελευταίαν ἐξίσωσιν συστήματος (2') εἰς σελ. 302.

δὲν εἰσέρχεται εἰς τὸ ἄριστον πρόγραμμα, ἔχομεν (βλ. σ. 302 πρώτην ἐξίσωσιν συστήματος 2′):

$$2\mu_1 + 2\mu_2 + 0\mu_3 > 2$$

ἢ (ἄλλως):

$$2 - 2\mu_1 - 2\mu_2 - 0\mu_3 < 0$$

Ὁ Kantorovitch χρησιμοποιεῖ, καθ' ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον, τὴν τεχνικὴν τῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας ὀνομάζει εἰδικώτερον ***ἀντικειμενικῶς καθωρισμένας ἀξίας*** τῶν ἀγαθῶν ἢ ***πολλαπλασιαστὰς λύσεως***, διὰ νὰ κρίνῃ ἂν δοθὲν πρόγραμμα παραγωγῆς εἶναι ἄριστον, ἤτοι ἂν περιέχῃ τὰς πλέον ἀποδοτικὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας.

Ἡ βασικὴ σκέψις εἶναι ἡ ἰδία: Μία παραγωγικὴ δραστηριότης θεωρεῖται ὡς ἀποδοτικὴ ἂν τὸ συνολικὸν ὑπολογιστικὸν κόστος αὐτῆς (τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν καταναλισκομένων ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν ἐπὶ τὰς ὑπολογιστικὰς τιμὰς αὐτῶν) εἶναι ἴσον πρὸς τὴν συνολικὴν ὑπολογιστικὴν ἀξίαν τῶν παραγομένων ἀγαθῶν. Οὕτω, π.χ., δοθείσης τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

καὶ τῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 καὶ λ_5 τῶν ἀντιστοίχων ἀγαθῶν, ἡ δραστηριότης αὕτη εἶναι ἀποδοτική, ἂν:

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2\lambda_3 + \lambda_4 + 3\lambda_5$$

ἢ (ἄλλως):

$$-2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 + 3\lambda_5 = 0$$

Ἀντιθέτως, ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης εἶναι μὴ ἀποδοτικὴ ἂν

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 > 2\lambda_3 + \lambda_4 + 3\lambda_5$$

ἢ (ἄλλως):

$$2\lambda_3 + \lambda_4 + 3\lambda_5 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 < 0$$

Γενικῶς, ἂν ἔχωμεν τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\mu \end{bmatrix}$$

καὶ ὑπολογιστικὰς τιμὰς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\mu$, τῶν ἀντιστοίχων ἀγαθῶν, ἡ α εἶναι ἀποδοτικὴ ἄν:

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_\mu \alpha_\mu = \sum_{\iota=1}^{\mu} \lambda_\iota \alpha_\iota = 0$$

Εἶναι μὴ ἀποδοτικὴ ἄν:

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_\mu \alpha_\mu = \sum_{\iota=1}^{\mu} \lambda_\iota \alpha_\iota < 0$$

Πρὸς δικαιολόγησιν τῆς ἐφαρμοζομένης διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀρίστης λύσεως ὑπολογιστικῆς διαδικασίας, ὁ Kantorovitch διατυπώνει καὶ ἀποδεικνύει (1) τὸ κάτωθι θεμελιῶδες, διὰ τὸ σύστημά του, θεώρημα:

15.2.4. Θεμελιῶδες θεώρημα. Διὰ νὰ εἶναι ἄριστον δοθὲν πρόγραμμα π, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχουν πολλαπλασιασταὶ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ (ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ (2) τῶν ἀγαθῶν 1, 2, . . . , μ), οἱ ὁποῖοι νὰ πληροῦν τὰς ἀκολούθους συνθήκας:

α) $$\lambda_\iota \geqslant 0 \quad (\iota=1, 2, \ldots, \mu) \quad \text{μεγ.} \ \lambda_{\rho+\sigma} > 0, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant \mu-\rho$$

Ἤτοι, οἱ πολλαπλασιασταὶ λ_ι πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ καὶ τουλάχιστον εἷς ἐξ αὐτῶν, ἐκ τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰ παραγόμενα ἀγαθὰ $\rho+1, \ldots, \mu$, πρέπει νὰ εἶναι θετικός.

β) $$\sum_{\iota=1}^{\mu} \lambda_\iota \alpha_{\iota\kappa} \leqslant 0 \qquad (\kappa = 1, \ldots, \nu)$$

Ἤτοι, δι' ἑκάστην παραγωγικὴν δραστηριότητα ἡ συνολικὴ ὑπολογιστικὴ ἀξία τῶν παραγομένων ἀγαθῶν δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ συνολικὸν ὑπολογιστικὸν κόστος.

γ) $$\sum_{\iota=1}^{\mu} \lambda_\iota \alpha_{\iota\kappa} = 0 \qquad \text{ἐὰν} \quad \pi_\kappa > 0$$

Ἤτοι, διὰ τὰς χρησιμοποιουμένας παραγωγικὰς δραστηριότητας τὸ ὑπολογιστικὸν κόστος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ὑπολογιστικὴν ἀξίαν τῆς παραγωγῆς.

δ) $\lambda_\iota = 0$ ἐὰν $x_\iota > \beta_\iota$ $(1 \leqslant \iota \leqslant \rho)$, ἢ $x_\iota > \zeta_{\iota-\rho}\,\varphi(\pi)$ $(\rho + 1 \leqslant \iota \leqslant \mu)$.

Ἤτοι, αἱ ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ εἶναι μηδὲν διὰ τοὺς συντελεστὰς παραγωγῆς οἱ ὁποῖοι δὲν χρησιμοποιοῦνται πλήρως καὶ διὰ τὰ παραγόμενα

1) L. V. Kantorovitch «Le calcul économique etc.» σ.σ. 249–251.
2) Θὰ χρησιμοποιοῦμεν τὸν γνωστὸν ὅρον «ὑπολογιστικαὶ τιμαί», ἀντὶ τοῦ ὅρου «ἀντικειμενικῶς καθωρισμέναι ἀξίαι».

ἀγαθὰ τῶν ὁποίων αἱ ποσότητες πλεονάζουν, ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ἐπιθυμητὴν ἀναλογίαν.

Ἐκ τῆς ἐξετάσεως τῶν συνθηκῶν α - δ καθίσταται προφανὲς ὅτι τὸ σύστημα ὑπολογιστικῶν τιμῶν τοῦ Kantorovitch εἶναι οὐσιαστικῶς τὸ ἴδιον μὲ τὸ σύστημα ὑπολογιστικῶν τιμῶν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ὡς δύναται νὰ διαπιστώσῃ ὁ προσεκτικὸς ἀναγνώστης, ἑκάστη ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνθηκῶν προσδιορίζει ἰδιότητας τῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, αἱ ὁποῖαι ἐξητάσθησαν ἀναλυτικῶς εἰς 11.4.2, ἀνωτέρω (1).

15.3. Ὑπολογιστικὴ διαδικασία λύσεως τοῦ γενικοῦ προβλήματος

15.3.1 Θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω, βάσει ἑνὸς ἀριθμητικοῦ παραδείγματος, τὴν ἐφαρμοζομένην ὑπὸ τοῦ L. Kantorovitch ὑπολογιστικὴν τεχνικὴν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀρίστης λύσεως εἰς τὸ γενικὸν πρόβλημα προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγῆς.

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ἔχουν ὡς ἀκολούθως :

α) ***Μήτρα παραγωγικῶν δραστηριοτήτων***:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 & -3 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2.5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

Ἤτοι, διατίθενται ἑπτὰ παραγωγικαὶ δραστηριότητες, εἰς τὰς ὁποίας συμμετέχουν πέντε ἀγαθά, τά : 1, 2, 3, 4 καὶ 5. Ἐξ αὐτῶν, τὰ 1 καὶ 2 χρησιμοποιοῦνται ὡς συντελεσταί, διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν ὑπολοίπων ἀγαθῶν 3, 4 καὶ 5.

β) ***Διάνυσμα οἰκονομικῶν δυνατοτήτων*** :

$$\beta = \begin{bmatrix} -20 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

1) Βλ. εἰδικώτερον σ. 303.

Ἤτοι, διατίθενται ποσότητες 20 καὶ 30 μονάδες, ἐκ τῶν ἀγαθῶν (συντελεστῶν) 1 καὶ 2, ἀντιστοίχως.

γ) ***Διάνυσμα ἐπιθυμητῶν ἀναλογιῶν*** :

$$\zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Ἤτοι, ζητεῖται ἡ παραγωγὴ τῶν ἀγαθῶν 4, 5 καὶ 6 εἰς ἀναλογίαν 1 : 2 : 3, ἀντιστοίχως.

Ὁ προγραμματικὸς στόχος συνίσταται εἰς τὴν ***μεγιστοποίησιν τῆς συνθέτου παραγωγῆς*** τῶν ἀγαθῶν 4, 5 καὶ 6. Κατὰ συνέπειαν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ πρόγραμμα π, ἤτοι τὰ ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως τῶν δραστηριοτήτων $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$, τὰ ὁποῖα ἐξασφαλίζουν τὴν ἐν λόγῳ μεγιστοποίησιν. Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐφαρμόζεται ἡ ἀκόλουθος σταδιακὴ διαδικασία.

1) Ἐκλέγομεν ὡς ἀφετηρίαν τῶν ὑπολογισμῶν μίαν μόνον παραγωγικὴν δραστηριότητα, π.χ., τὴν α_6, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὸ μέγιστον δυνατὸν ἐπίπεδον (1). Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ προσδιορίζεται προφανῶς ἐκ τῆς ποσότητος τοῦ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ συντελεστοῦ. Διαιροῦντες τὰς ποσότητας -20 καὶ -30 διὰ τῶν ἀντιστοίχων εἰσροῶν τῆς α_6, λαμβάνομεν : $-20/-1 = 20$ καὶ $-30/-1 = 30$. Συνεπῶς ἡ διαθέσιμος ποσότης τοῦ συντελεστοῦ 1, ὅστις εὑρίσκεται ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ, προσδιορίζει ἀνώτατον δυνατὸν ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως τῆς α_6 : $\pi_6 = 20$. Οὕτω τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα παραγωγῆς π_α, θὰ εἶναι :

$$\pi_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

2) Ὑπολογίζομεν τὰς ποσότητας x_1, x_2, x_3, x_4 καὶ x_5, διὰ τὰ ἀγαθὰ 1, 2, 3, 4 καὶ 5, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρω προγράμματος, ὁπότε λαμβάνομεν :

---

1) Τὸ πρόβλημα τῆς ἀρχικῆς ἐπιλογῆς ἐξετάζεται εἰς Kantorovitch op. cit. σελ. 284.

$$20\alpha_6 = 20 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ 60 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

καὶ συνεπῶς :

$$\begin{aligned} x_1 &= -20 \\ x_2 &= -20 \\ x_3 &= \ \ 60 \\ x_4 &= \ \ 20 \\ x_5 &= \ \ 40 \end{aligned} \qquad (6)$$

3) Ὑπολογίζομεν τὰς μὴ χρησιμοποιουμένας ποσότητας τῶν συντελεστῶν, τὸν μέγιστον ἀριθμὸν μονάδων συνθέτου παραγωγῆς καὶ τὰς πλεοναζούσας ποσότητας τῶν ἀγαθῶν 3, 4 καὶ 5. Βάσει τοῦ ὡς ἄνω προγράμματος παρατηροῦμεν ὅτι : α) Ἐξαντλεῖται πλήρως ἡ ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ (συντελεστοῦ) 1, δι' ὃ καὶ δὲν καθίσταται δυνατὴ ἡ χρησιμοποίησις τῆς α_6 εἰς ἐπίπεδον ἀνώτερον τοῦ 20. β) Παραμένουν ἀχρησιμοποίητοι 10 μονάδες ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ (συντελεστοῦ) 2, ἐφ' ὅσον ἐκ τῆς συνολικῆς ποσότητος τῶν 30 μονάδων χρησιμοποιοῦνται αἱ 20 μονάδες. γ) Ἐπιτυγχάνεται παραγωγὴ 60, 20 καὶ 40 μονάδων ἐκ τῶν ἀγαθῶν 3, 4 καὶ 5, ἀντιστοίχως. Ἐκ τῶν ποσοτήτων αὐτῶν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν εὐκόλως τὸν μέγιστον ἀριθμὸν μονάδων συνθέτου παραγωγῆς $\theta = \varphi(\pi_\alpha)$, λαμβάνοντες τὸ μικρότερον ἐκ τῶν πηλίκων :

$$60/1 = 60, \quad 20/2 = 10, \quad 40/3 = 13{,}33$$

Ἤτοι $\theta = 20/2 = 10$ [1]. Προφανῶς ἀριθμὸς μονάδων συνθέτου παραγωγῆς μεγαλύτερος τοῦ 10 δὲν εἶναι πραγματοποιήσιμος, λόγῳ ἐλλείψεως ποσοτήτων ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ 4.

Ἤδη δυνάμεθα εὐκόλως νὰ προσδιορίσωμεν τὰς πλεοναζούσας ποσότητας τῶν ἀγαθῶν 5, 6 καὶ 7. Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 10 τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἐπιθυμητῶν ἀναλογιῶν 1, 2, 3 καὶ ἀφαιροῦντες τὰ προκύπτοντα γινόμενα ἐκ τῶν ποσοτήτων 60, 20 καὶ 40, τῶν ἀγαθῶν 3, 4 καὶ 5, ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν :

---

1) Τὰ πηλίκα ταῦτα προσδιορίζονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τῆς ποσότητος τῶν ἀγαθῶν διὰ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ διανύσματος τῶν ἐπιθυμητῶν ἀναλογιῶν.

$$
\begin{array}{llll}
\text{πλεόνασμα ἀγαθοῦ} & 3: & 60-(1\times 10)=50 \\
\text{»} \quad\quad \text{»} & 4: & 20-(2\times 10)=\ 0 \\
\text{»} \quad\quad \text{»} & 5: & 40-(3\times 10)=10
\end{array}
$$

Τὰ ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν συνοπτικῶς διὰ τοῦ ἀκολούθου γραμμικοῦ συνδυασμοῦ διανυσμάτων:

$$\boldsymbol{\beta} + 10\boldsymbol{\zeta} = 20\boldsymbol{\alpha}_6 + 10\bar{\mathbf{e}}_2 + 50\bar{\mathbf{e}}_3 + 10\bar{\mathbf{e}}_5 \tag{7}$$

ὅπου: $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$ καὶ $\bar{\mathbf{e}}_4$ εἶναι μοναδιαῖα ἀρνητικὰ διανύσματα, ἤτοι:

$$\bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{e}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{e}}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Προφανῶς, ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}_6$, $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$ καὶ $\mathbf{e}_5$, οἱ πολλαπλασιασταὶ αὐτῶν πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικοί.

Ὁ γραμμικὸς συνδυασμὸς διανυσμάτων ἀναλυτικῶς δύναται νὰ γραφῇ ὡς:

$$\begin{bmatrix} -20 \\ -30 \\ 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ 60 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

4) Σχηματίζομεν ἐκ τῶν διανυσμάτων $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\alpha}_6$, $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$, $\bar{\mathbf{e}}_5$ τὴν μήτραν A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Δύναται εὐκόλως νὰ δειχθῇ (1) ὅτι ἡ μήτρα αὕτη ἀποτελεῖ *βάσιν* τοῦ 5-διαστάτου χώρου. Συνεπῶς πᾶν διάνυσμα (σημεῖον) τοῦ ἐν λόγῳ χώρου δύναται νὰ γραφῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τῆς A καὶ δὴ κατὰ τρόπον μοναδικόν.

---

1) Βλ. σ.σ. 72 - 80, ἀνωτέρω.

5) Ἤδη πρέπει νὰ ἐλεγχθῇ ἂν τὸ πρόγραμμα π_α εἶναι ἄριστον. Πρὸς τοῦτο πρέπει, συμφώνως πρὸς τὸ θεμελιῶδες θεώρημα, νὰ προσδιορισθοῦν πολλαπλασιασταὶ (ἤτοι ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ ὅλων τῶν ἀγαθῶν) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$, πληροῦντες τὰς συνθήκας α – δ τοῦ ὡς ἄνω θεωρήματος. Βάσει τῶν τιμῶν αὐτῶν πρέπει :

α) $-\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 + 2\lambda_5 = 0$, ἢ συνοπτικῶς $\boldsymbol{\lambda\alpha}_6 = 0$,

ὅπου $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ εἶναι τὸ διάνυσμα τῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν. Ἐπειδὴ ἡ $\boldsymbol{\alpha}_6$ ἐκλέγεται βάσει τοῦ προγράμματος π_α, ἡ διαφορὰ μεταξὺ ὑπολογιστικῆς ἀξίας τῆς παραγωγῆς καὶ ὑπολογιστικοῦ κόστους πρέπει νὰ εἶναι μηδὲν (συνθήκη γ τοῦ θεωρήματος).

β) $\boldsymbol{\lambda}\bar{\mathbf{e}}_2 = 0.\lambda_1 - \lambda_2 + 0.\lambda_3 + 0.\lambda_4 + 0.\lambda_5 = \lambda_2 = 0$,

διότι ἡ $\bar{\mathbf{e}}_2$ ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι πλεονάζουν ποσότητες τοῦ ἀγαθοῦ (συντελεστοῦ) 2 καὶ συνεπῶς πρέπει (συμφώνως πρὸς τὴν συνθήκην δ τοῦ θεωρήματος) νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδὲν ἡ τιμὴ τοῦ ἀντιστοίχου πολλαπλασιαστοῦ.

γ) Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$\boldsymbol{\lambda}\bar{\mathbf{e}}_3 = 0$, ἤτοι $\lambda_3 = 0$, διὰ τὸ ἀγαθὸν 3

καὶ $\boldsymbol{\lambda}\bar{\mathbf{e}}_5 = 0$, ἤτοι $\lambda_5 = 0$, διὰ τὸ ἀγαθὸν 5.

Τέλος, ἐπειδὴ μᾶς ἐνδιαφέρουν μόνον αἱ σχετικαὶ τιμαὶ τῶν λ_i, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν αὐθαιρέτως τὴν συνολικὴν ὑπολογιστικὴν ἀξίαν μιᾶς συνθέτου μονάδος παραγωγῆς ἴσην πρὸς 1, ἤτοι :

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \quad \text{ἢ} \quad \boldsymbol{\lambda\zeta} = 1$$

Πρέπει δηλαδὴ νὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω :

$$\boldsymbol{\lambda\zeta} = 1, \quad \boldsymbol{\lambda\alpha}_6 = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}\bar{\mathbf{e}}_2 = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}\bar{\mathbf{e}}_3 = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}\bar{\mathbf{e}}_5 = 0 \qquad (9)$$

καὶ ἐπειδὴ ἐθέσαμεν $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\alpha}_6, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_5)$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν, συνοπτικῶς :

$$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \qquad (10)$$

ὅπου $\mathbf{e}_1$ εἶναι τὸ ***μοναδιαῖον*** διάνυσμα : (1, 0, 0, 0, 0).

Ἀλλὰ ἡ μήτρα $\mathbf{A}$ ἀποτελεῖ, ὡς εἴπομεν, βάσιν τοῦ 5 - διαστάτου χώρου καὶ συνεπῶς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ διάνυσμα $\boldsymbol{\lambda}$, δηλαδὴ τὰς τιμὰς τῶν πολλαπλασιαστῶν $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$, ἐκ τοῦ γινομένου τῆς ἀντιστρόφου τῆς A ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\mathbf{e}_1$, ἤτοι :

$$\lambda = \mathbf{e}_1 A^{-1} \tag{11}$$

Ἐπειδὴ A^{-1} εἶναι :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 0 & -1 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 1.5 & -1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

θὰ ἔχωμεν :

$$[1, 0, 0, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 0 & -1 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 1.5 & -1 \end{bmatrix} = [0.5, 0, 0, 0.5, 0] \tag{13}$$

Συνεπῶς θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.5 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_4 &= 0.5 \\ \lambda_5 &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

6) Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν τῶν λ_i πρέπει νὰ διαπιστωθῇ ἐὰν ἐπαληθεύουν αἱ συνθῆκαι α καὶ β τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος (1). Ἡ συνθήκη α πληροῦται, διότι $\lambda_i \geqslant 0$ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν λ_i. Διὰ τὴν συνθήκην β ἔχομεν :

$$\lambda\,\alpha_1 = 0.5 \times (-2) + 0 \times (-1) + 0 \times 2 + 0.5 \times 1 + 0 \times 1 = -0.5$$
$$\lambda\,\alpha_2 = 0.5 \times (-3) + 0 \times (-2) + 0 \times 1 + 0.5 \times 2 + 0 \times 2 = -0.5$$
$$\lambda\,\alpha_3 = 0.5 \times (-1) + 0 \times (-3) + 0 \times 1 + 0.5 \times 1 + 0 \times 1 = 0$$
$$\lambda\,\alpha_4 = 0.5 \times (-3) + 0 \times (-1) + 0 \times 2 + 0.5 \times 1 + 0 \times 0 = -1$$
$$\lambda\,\alpha_5 = 0.5 \times (-4) + 0 \times (-1) + 0 \times 1 + 0.5 \times 3 + 0 \times 3 = -0.5$$
$$\lambda\,\alpha_6 = 0.5 \times (-1) + 0 \times (-1) + 0 \times 3 + 0.5 \times 1 + 0 \times 2 = 0$$
$$\lambda\,\alpha_7 = 0.5 \times (-1) + 0 \times (-2) + 0 \times 2.5 + 0.5 \times 2 + 0 \times 0.5 = 0.5$$

1) Αἱ συνθῆκαι γ καὶ δ πληροῦνται ἐξ ὁρισμοῦ τῶν λ_i (βλ. (9) ἢ (10)).

Οὕτω παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν τιμὰς μὴ θετικὰς δι' ὅλα τὰ γινόμενα $\lambda\,\alpha_\kappa$, πλὴν τῆς τιμῆς τοῦ $\lambda\,\alpha_7$, ἡ ὁποία εἶναι θετική. Ἤτοι ἡ συνθήκη β δὲν πληροῦται καὶ συνεπῶς τὸ πρόγραμμα π_α δὲν εἶναι ἄριστον. Ἐξ ἄλλου, ἐφ' ὅσον $\lambda\,\alpha_7 > 0$, ἤτοι ἡ συνολικὴ ἀξία τῆς παραγωγῆς τῆς δραστηριότητος α_7 εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κόστους αὐτῆς, σημαίνει ὅτι ἡ χρησιμοποίησις τῆς α_7 εἶναι συμφέρουσα, διότι τοιουτοτρόπως δύναται νὰ αὐξηθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῆς συνθέτου παραγωγῆς [1].

Τὸ προκῦπτον, ἐν προκειμένῳ, πρόβλημα εἶναι νὰ προσδιορισθῇ, ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως τῆς α_7, ἀφ' ἑτέρου δὲ αἱ ἐπιπτώσεις ἐκ τῆς ἐπιλογῆς ταύτης.

7) Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐπιπέδου τῆς α_7, προχωροῦμεν ὡς κάτωθι: Ἐκφράζομεν τὴν α_7 ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως Α, κατὰ τὰ γνωστά [2], ὁπότε ἡ α_7 λαμβάνει τὴν μορφὴν $\bar{\alpha}_7$, τοιαύτην ὥστε:

$$A\bar{\alpha}_7 = \alpha_7, \qquad \text{ἤτοι} \qquad \bar{\alpha}_7 = A^{-1}\,\alpha_7$$

Ἀριθμητικῶς, θὰ ἔχωμεν:

$$A^{-1}\,\alpha_7 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 0 & -1 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 1.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2.5 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Κατὰ συνέπειαν θὰ εἶναι:

$$\alpha_7 = 0.5\,\zeta + 1\cdot\alpha_6 + 1\cdot\bar{e}_2 + 1\cdot\bar{e}_3 + 3\cdot\bar{e}_5 \qquad (17)$$

ἐξ ἧς:

$$\mathbf{0} = \alpha_7 - 0.5\,\zeta - \alpha_6 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3 - 3\cdot\bar{e}_5 \qquad (18)$$

Ἂς θέσωμεν ε διὰ τὸ μέγιστον δυνατὸν ἐπίπεδον τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος α_7, ἤτοι διὰ τὸ μέγιστον ἐπίπεδον αὐτῆς τὸ ὁποῖον δὲν παραβιάζει τὴν μὴ ἀρνητικότητα τῶν συντελεστῶν τῶν διανυσμάτων α_6, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ καὶ $\bar{e}_5$. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (18) ἐπὶ ε, λαμβάνομεν:

$$\mathbf{0} = \varepsilon\,\alpha_7 - 0.5\,\varepsilon\,\zeta - \varepsilon\,\alpha_6 - \varepsilon\,\bar{e}_2 - \varepsilon\,\bar{e}_3 - 3\,\varepsilon\,\bar{e}_5 \qquad (19)$$

---

1) Ἐὰν ἔχωμεν περισσοτέρας παραγωγικὰς δραστηριότητας μὲ ἀξίαν $\Sigma\lambda\alpha_\kappa > 0$, ἐκλέγομεν διὰ τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὸ πρόγραμμα τὴν ἔχουσαν μεγαλυτέραν ἀξίαν $\Sigma\lambda\alpha_\kappa$.

2) Βλ. σ.σ. 73 - 74, ἀνωτέρω.

Δυνάμεθα προφανῶς νὰ προσθέσωμεν τὴν (19) κατὰ μέλη εἰς τὴν (7), ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$\beta + 10\zeta = -0.5\,\varepsilon\zeta + (20 - 1 \times \varepsilon)\,\alpha_6 + (10 - 1 \times \varepsilon)\,\bar{e}_2 + \\ + (50 - 1 \times \varepsilon)\,\bar{e}_3 + (10 - 3 \times \varepsilon)\,\bar{e}_5 + \varepsilon\,\alpha_7 \qquad (20)$$

Προφανῶς, διὰ τὴν ἐξασφάλισιν τῆς μὴ ἀρνητικότητος τῶν συντελεστῶν τῶν διανυσμάτων α_6, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ καὶ $\bar{e}_5$ εἰς τὴν (20), πρέπει ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ ε νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μικρότερον τῶν πηλίκων (1):

$$\frac{20}{1} = 20, \quad \frac{10}{1} = 10, \quad \frac{50}{1} = 50, \quad \frac{10}{3} = 3.33$$

ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι: $\varepsilon = 3.33$.

Ἂν θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ε εἰς τὴν (20), λαμβάνομεν:

$$\beta + 10\zeta = -0.5 \times 3.33\,\zeta + 16.67\,\alpha_6 + 6.67\,\bar{e}_2 + 46.66\,\bar{e}_3 + 3.33\,\alpha_7$$

$$\text{ἢ} \quad \beta + 11.66\,\zeta = 16.67\,\alpha_6 + 6.67\,\bar{e}_2 + 46.67\,\bar{e}_3 + 3.33\,\alpha_7 \qquad (21)$$

Ἡ (21) ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓν νέον πρόγραμμα π_β, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως 16.67 καὶ 3.33 διὰ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας α_6 καὶ α_7, ἀντιστοίχως, καὶ μηδενικὰ ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως διὰ τὰς λοιπὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$. Εἶναι δηλαδή:

$$\pi_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16.67 \\ 3.33 \end{bmatrix}$$

Εἰς τὸ πρόγραμμα π_β ἀντιστοιχεῖ, ὡς βλέπομεν εἰς τὴν (21), μεγαλύτερος ἀριθμὸς μονάδων συνθέτου παραγωγῆς, ἐν συγκρίσει πρὸς τὸ πρόγραμμα π_α, ἤτοι 11.66 ἔναντι 10.

8. Εἰς τὴν παράστασιν (21), ἀντιστοιχεῖ ἡ μήτρα $A_2 = (\zeta, \alpha_6, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \alpha_7)$, ἤτοι ἀριθμητικῶς:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 2.5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

---

1) Ἡ διαδικασία αὕτη εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἐφαρμοζομένην εἰς τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμὸν (βλ. σ. 289 κ.ἑ.).

Ἡ ἀντίστροφος τῆς A_2 εἶναι [1]:

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 7/12 & 0 & 0 & 1/4 & 1/6 \\ -5/6 & 0 & 0 & -1/2 & 1/3 \\ 7/6 & -1 & 0 & -1/2 & 1/3 \\ -2\,^1/_3 & 0 & -1 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1/2 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Συνεπῶς αἱ νέαι ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ τῶν ἀγαθῶν θὰ εἶναι :

$$\lambda = \mathbf{e}_1 A_2^{-1} = (7/12 \quad 0 \quad 0 \quad 1/4 \quad 1/6)$$

ἤτοι :

$$\lambda_1 = 7/12$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_4 = 1/4$$

$$\lambda_5 = 1/6$$

9. Αἱ νέαι ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ πληροῦν τὴν συνθήκην α τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος. Ὁμοίως πληροῦν τὰς συνθήκας β καὶ γ διότι :

$$\boldsymbol{\lambda\alpha}_1 = 7/12 \times (-2) + 0 \times (-1) + 0 \times (2) + 1/4 \times 1 + 1/6 \times 1 = -3/4$$

$$\boldsymbol{\lambda\alpha}_2 = 7/12 \times (-3) + 0 \times (-2) + 0 \times \ 1 \ + 1/4 \times 2 + 1/6 \times 2 = -11/12$$

$$\boldsymbol{\lambda\alpha}_3 = 7/12 \times (-1) + 0 \times (-3) + 0 \times \ 1 \ + 1/4 \times 1 + 1/6 \times 1 = -1/6$$

$$\boldsymbol{\lambda\alpha}_4 = 7/12 \times (-3) + 0 \times (-1) + 0 \times \ 2 \ + 1/4 \times 1 + 1/6 \times 0 = -1\,^1/_2$$

$$\boldsymbol{\lambda\alpha}_5 = 7/12 \times (-4) + 0 \times (-1) + 0 \times \ 1 \ + 1/4 \times 3 + 1/6 \times 3 = -1\,^1/_{12}$$

$$\boldsymbol{\lambda\alpha}_6 = 7/12 \times (-1) + 0 \times (-1) + 0 \times \ 3 \ + 1/4 \times 1 + 1/6 \times 2 = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda\alpha}_7 = 7/12 \times (-1) + 0 \times (-2) + 0 \times 2^1/_2 + 1/4 \times 2 + 1/6 \times 1/2 = 0$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις, $\boldsymbol{\lambda\alpha}_\kappa \leqslant 0$ δι' ὅλας τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας καὶ $\boldsymbol{\lambda\alpha}_6 = \boldsymbol{\lambda\alpha}_7 = 0$ διὰ τὰς ἐκλεγομένας παραγωγικὰς δραστη-

---

1) Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀντιστρόφου ὁ K. χρησιμοποιεῖ τεχνικὴν ἡ ὁποία ἐνθυμίζει τὸν ἀλγόριθμον Simplex (βλ. Kantorovitch op. cit. σ. 282).

ριότητας α_6 καὶ α_7. Τέλος αἱ εὑρεθεῖσαι ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ πληροῦν ἐπίσης τὴν συνθήκην δ, διότι ἔχομεν $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ διὰ τὰς ὑπολογιστικὰς τιμὰς αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἀγαθὸν (συντελεστὴν) 2, τὸ ὁποῖον δὲν καταναλίσκεται πλήρως καὶ εἰς τὸ ἀγαθὸν 3, τοῦ ὁποίου ἡ συνολικὴ ποσότης πλεονάζει, ἐν συγκρίσει πρὸς τὰς ὑπολογισθείσας μονάδας συνθέτου παραγωγῆς [1].

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἐλέγχου τοῦ προγράμματος π_β, βάσει τῶν νέων ὑπολογιστικῶν τιμῶν προκύπτει συνεπῶς ὅτι τὸ πρόγραμμα τοῦτο εἶναι ἄριστον, ἤτοι μεγιστοποιεῖ ὑπὸ τὰς τεθείσας συνθήκας τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων συνθέτου παραγωγῆς.

Εἰς τὸ ληφθὲν ἀριθμητικὸν παράδειγμα ἡ ἀρίστη λύσις ἐπιτυγχάνεται διὰ δύο προσεγγίσεων. Γενικῶς, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων προσεγγίσεων εἰς τὸ γενικὸν πρόβλημα Kantorovitch εἶναι πεπερασμένος καὶ σχετικῶς μικρός, ὡς καὶ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ [2].

---

1) Βλ. παράστασιν (21).
2) Βλ. L. V. Kantorovitch, op. cit. σ. 184.

Ἡ μέθοδος Παπανδρέου διὰ τὴν ἐπιλογήν σχεδίων ἐπενδύσεων[1]

16.1. Εἰσαγωγή

Ὁ μακροοικονομικὸς προγραμματισμὸς ἀφορᾶ κυρίως εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῶν συνολικῶν ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων πρὸς ἐπίτευξιν τεθέντων στόχων αναπτύξεως μιᾶς οἰκονομίας, ὡς ἐπίσης καὶ εἰς τὴν ἀρίστην δυνατὴν κατανομὴν τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν κλάδων. Ἀλλ' ἡ πραγματοποίησις τῶν ἐπενδύσεων δὲν εἶναι δυνατὴ ἄνευ μετατροπῆς των εἰς συγκεκριμένα ἔργα ἢ ὡς γενικώτερον καλοῦνται εἰς *σχέδια ἐπενδύσεως* (projects). Κατὰ συνέπειαν ὁ μακροοικονομικὸς προγραμματισμὸς πρέπει νὰ συμπληροῦται διὰ τοῦ μικροοικονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ὁ ὁποῖος ἀφορᾶ εἰς τὴν διαδικασίαν ἐπιλογῆς τῶν σχεδίων ἐπενδύσεως, ἐντὸς τῶν πλαισίων δοθέντος προγράμματος ἀναπτύξεως.

Ποία ἡ μορφὴ καὶ τὰ κριτήρια τῆς διαδικασίας ταύτης ; Διακρίνομεν δύο γενικὰς περιπτώσεις : Πρῶτον, ἐπιλογὴ σχεδίων ἐπενδύσεως ἀπὸ ἰδιωτικοοικονομικῆς ἀπόψεως καὶ δεύτερον ἐπιλογὴ σχεδίων ἐπενδύσεως ἀπὸ κοινωνικοοικονομικῆς ἀπόψεως. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ ἀτομικὸν συμφέρον τοῦ ἰδιώτου-ἐπιχειρηματίου ἀποτελεῖ τὸ κίνητρον ἐπιλογῆς. Ἐπειδὴ τὸ συμφέρον αὐτὸ ἐκφράζεται κατὰ κανόνα, ἐντὸς τῆς ἀτομικῆς συναλλακτικῆς οἰκονομίας, διὰ τῆς ἐπιδιώξεως τοῦ μεγίστου δυνατοῦ κέρδους, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ μεγιστοποίησις τοῦ κέρδους ἀποτελεῖ τὸ κριτήριον ἐπιλογῆς σχεδίων ἐπενδύσεως ὑπὸ τῶν ἰδιωτῶν. Ὡς γνωστόν, ἡ ζήτησις δι' ἀγαθὰ ἐπενδύσεως ὡρισμένου τύπου ἐξαρτᾶται : α) ἐκ τῆς σχέσεως τῆς προσδοκωμένης ὁριακῆς ἀποδοτικότητος τῆς ἐπενδύσεως καὶ τοῦ ἐπιτοκίου, εἰς τὸ ὁποῖον δύνανται νὰ δανεισθοῦν ἢ νὰ δανείσουν τὰ κεφάλαια τῶν οἱ ἰδιῶται-ἐπιχειρηματίαι β) ἐκ τῆς συγκρίσεως τῆς καθαρᾶς ἀποδόσεως τῆς ἐν λόγῳ ἐπενδύσεως πρὸς τὴν ἀπόδοσιν διαζευκτικῶν δυνατοτήτων ἐπενδύσεως. Ὁ προσδιορισμὸς τῆς προσδοκωμένης ὁριακῆς ἀποδοτικότητος ἀποτελεῖ βασικὸν στοιχεῖον τοῦ ἰδιωτικοοικονομικοῦ ὑπολογισμοῦ ([2]) ὁ ὁποῖος ἀποσκοπεῖ γενικῶς εἰς τὴν σύγ-

(1) Βλ. Andreas G. Papandreou — Uri Zohar: Project Selection for National Plans καὶ The Impact Approach to Project Selection, ἐκδόσεις τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ York (Toronto, 1974).

(2) Γενικῶς, ἂν θέσωμεν Κ διὰ τὴν ἀξίαν ἐπενδύσεως διαρκείας ζωῆς ν ἐτῶν καὶ A_1, A_2 ... A_ν διὰ τὰς ἀναμενομένας ἐτησίας καθαρὰς εἰσπράξεις ἐκ τοῦ παραγωγικοῦ ἀποτε-

κρισιν κόστους καὶ ἀποτελέσματος τῆς ἐπενδύσεως ἢ τῶν ἐπενδύσεων μὲ τελικὴν ἐπιδίωξιν τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τῆς ἐπιλογῆς σχεδίων ἐπενδύσεως ἀπὸ κοινωνικοοικονομικῆς ἀπόψεως, ἡ συνήθως ἐφαρμοζομένη μέθοδος ὑπολογισμοῦ βασίζεται ἐπίσης εἰς τὴν σύγκρισιν κόστους καὶ ἀποτελέσματος τῆς ἐπενδύσεως, ἀλλὰ πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ ***κοινωνικοῦ*** κέρδους. Ἡ ὑπολογιστικὴ διαδικασία δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς εἰς τὰς δύο περιπτώσεις. Ἁπλῶς, ἀντὶ τῶν ἰδιωτικοοικονομικῶν ἐννοιῶν κόστους καὶ ἀποτελέσματος, χρησιμοποιοῦνται αἱ εὐρύτεραι ἔννοιαι τοῦ ***κοινωνικοῦ κόστους*** καὶ ***κοινωνικοῦ ἀποτελέσματος***. Πρὸς τοῦτο εἶναι ἀναγκαία ἡ προσαρμογὴ τοῦ ἰδιωτικοοικονομικοῦ ὑπολογισμοῦ εἰς δύο κυρίως κατευθύνσεις : Πρῶτον, λαμβάνονται ὑπ᾿ ὄψιν στοιχεῖα κόστους καὶ ἀποτελέσματος τὰ ὁποῖα ἐνδιαφέρουν ἀπὸ κοινωνικοοικονομικῆς ἀπόψεως, ὡς εἶναι π.χ. αἱ ἐξωτερικαὶ (θετικαὶ ἢ ἀρνητικαὶ) οἰκονομίαι. Δεύτερον, αἱ τιμαὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ δυνατὸν νὰ διαφέρουν οὐσιωδῶς ἀπὸ τὰς τιμὰς ἀγορᾶς ἂν αἱ τελευταῖαι δὲν διαμορφοῦνται ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ. Ὁμιλοῦμεν τότε περὶ χρησιμοποιήσεως ***ὑπολογιστικῶν τιμῶν*** (shadow prices). Δύναται συνεπῶς νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ μέθοδος κοινωνικοῦ κόστους καὶ κοινωνικοῦ ἀποτελέσματος ἀποτελεῖ προσαρμογὴν ἢ «διόρθωσιν» τῆς ἰδιωτικοοικονομικῆς μεθόδου κόστους-ἀποτελέσματος πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς διασφαλίσεως τοῦ συμφέροντος τοῦ κοινωνικοῦ συνόλου. Ἡ μέθοδος ἀποβλέπει κατ᾿ οὐσίαν εἰς τὴν ὑπολογιστικὴν ἐξομοίωσιν (simulation) τοῦ καθεστῶτος τοῦ πλήρους ἀνταγωνισμοῦ, τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται ὅτι, δοθείσης τῆς οἰκονομικῆς καὶ κοινωνικῆς διαρθρώσεως καὶ τῶν προτιμήσεων τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων, ἐξασφαλίζει ἀριστοποίησιν τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος.

Ὁ καθηγητὴς Α.Γ. Παπανδρέου κρίνει τὴν μέθοδον τοῦ κοινωνικοῦ κόστους καὶ κοινωνικοῦ ἀποτελέσματος, ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν, ὡς ἀνεπαρκῆ διὰ τὴν ἐπιλογὴν σχεδίων ἐπενδύσεων ἀπὸ κοινωνικοοικονομι-

---

λέσματος τῶν ἐπενδύσεων (μετ᾿ ἀφαίρεσιν τοῦ κόστους τῶν συμπληρωματικῶν συντελεστῶν), θὰ ἔχωμεν :

$$K = \frac{A_1}{1+\rho} + \frac{A_2}{(1+\rho)^2} + \dots + \frac{A_\nu}{(1+\rho)^\nu}$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ προσδοκωμένη ὁριακὴ ἀποδοτικότης τῶν ἐπενδύσεων. Ἡ τιμὴ τοῦ ρ προσδιορίζεται ἐκ τοῦ ὡς ἄνω τύπου ὡς ὁ συντελεστὴς προεξοφλήσεως ὁ ὁποῖος ἐξισώνει τὸ ἄθροισμα τῶν παρουσῶν ἀξιῶν τῶν καθαρῶν εἰσπράξεων πρὸς τὴν ἀξίαν Κ τῆς ἐπενδύσεως. Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι : $A_1 = A_2 = \dots = A_\nu$, λαμβάνομεν τὴν ἁπλουστέραν σχέσιν :

$$K = \frac{A}{\rho} + \left[1 - \frac{1}{(1+\rho)^\nu}\right]$$

τῆς ὁποίας ὅριον εἶναι : Κ=Α/ρ, διὰ μεγάλας τιμὰς τοῦ ν. (Βλ. Α.Α. Λάζαρη: Θεωρία ἀπασχολήσεως καὶ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος. Ἀθῆναι 1974, σ.σ. 57 κ.ἑ.)

κῆς ἀπόψεως, διὰ δύο τουλάχιστον βασικοὺς λόγους: Πρῶτον, ἡ μέθοδος αὕτη δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ κοινωνία ὡς ἑνιαῖον σύνολον θέτει προγραμματικοὺς στόχους καὶ ἔχει σαφῶς καθωρισμένην κλίμακα προτιμήσεων ὡς πρὸς τὰς διαζευτικὰς δυνατότητας κοινωνικοοικονομικῆς ἀναπτύξεως. Εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ κοινωνικαὶ προτιμήσεις καὶ προοπτικαὶ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι οὐσιωδῶς διάφοροι ἢ εὐρύτεροι τῶν ἰδιωτικοοικονομικῶν προτιμήσεων καὶ προοπτικῶν, αἱ ὁποῖαι ὑποτίθεται ὅτι ἐκφράζονται καὶ ἐξυπηρετοῦνται διὰ τῆς ἀνταγωνιστικῆς λειτουργίας τῆς ἀγορᾶς. Ἐξ ἄλλου ἡ κοινωνία ὡς ἑνιαῖον σύνολον δύναται νὰ θέτῃ στόχους μεταβολῆς τοῦ κοινωνικοῦ καὶ οἰκονομικοῦ status quo, τὸ ὁποῖον ἀντιθέτως ἡ παραδοσιακὴ μέθοδος ἐπιλογῆς λαμβάνει ὡς δεδομένον καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν δύναται νὰ ἀξιολογήσῃ πιθανὰς ἐπιπτώσεις ἑνὸς σχεδίου ἐπενδύσεως ἐπὶ τοῦ τρόπου διανομῆς τοῦ εἰσοδήματος ἢ ἐπὶ τῆς καθόλου διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας. Δεύτερον, τὰ προγράμματα ἀναπτύξεως τῶν διαφόρων χωρῶν θέτουν συνήθως ὄχι ἕνα ἀλλὰ πολλοὺς στόχους κοινωνικῆς καὶ οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Κατὰ συνέπειαν τὰ σχέδια ἐπενδύσεως πρέπει νὰ ἀξιολογοῦνται ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς συμβολῆς των, θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς, ὡς πρὸς ἕνα ἕκαστον τῶν στόχων αὐτῶν. Ἡ μέθοδος τοῦ κοινωνικοῦ κόστους καὶ ἀποτελέσματος δὲν εἶναι ἐνδεδειγμένη διὰ τὴν ἀξιολόγησιν αὐτὴν διότι καταλήγει εἰς μίαν μονοδιάστατον ἀπάντησιν περὶ τοῦ κοινωνικοῦ κέρδους, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ κατ' οὐσίαν ἐπέκτασιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἰδιωτικοοικονομικοῦ κέρδους.

Ὁ καθηγητὴς Α.Γ. Παπανδρέου εἰς τὴν μέθοδον τοῦ κοινωνικοῦ κόστους καὶ ἀποτελέσματος ἀντιτάσσει τὴν ***μέθοδον τῶν ἐπιπτώσεων*** (impact approach), ἡ ὁποία ἀναγνωρίζει εὐθέως ὅτι ἡ κοινωνία δύναται νὰ ἔχῃ σαφῶς καθωρισμένας προτιμήσεις καὶ νὰ θέτῃ ἰδίους προγραμματικοὺς στόχους, ἀποβλέποντας ἐνίοτε καὶ εἰς τὴν μεταβολὴν αὐτοῦ τούτου τοῦ οἰκονομικοῦ καὶ κοινωνικοῦ καθεστῶτος. Οὕτω ἡ μέθοδος αὕτη ἐξετάζει τὰς ἐπιπτώσεις ἑνὸς σχεδίου ἐπενδύσεως ἐπὶ τῆς πραγματοποιήσεως ἑνὸς ἑκάστου τῶν προγραμματικῶν στόχων καὶ καταλήγει εἰς πολυδιαστάτους (διανυσματικὰς) ἐκτιμήσεις, ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὴν μονοδιάστατον (ἀριθμητικὴν) ἐκτίμησιν τῆς παραδοσιακῆς μεθόδου. Τὸ βασικὸν θεωρητικὸν πλεονέκτημα τῆς μεθόδου εἶναι ὅτι δι' αὐτῆς ἐπιτυγχάνεται ἡ ὀργανικὴ σύνδεσις μεταξὺ μακροοικονομικοῦ καὶ μικροοικονομικοῦ πραγματισμοῦ, ἤτοι μεταξὺ τοῦ γενικοῦ προγράμματος ἀναπτύξεως καὶ τῶν ἐπὶ μέρους σχεδίων ἐπενδύσεως τὰ ὁποῖα τὸ συγκροτοῦν. Ἡ διαδικασία ἐπιλογῆς τῶν τελευταίων γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει κριτηρίων τὰ ὁποῖα ἀντανακλοῦν τὴν ***πολλαπλότητα*** τῶν στόχων τοῦ προγράμματος ἀναπτύξεως. Ἐξ ἄλλου ἡ μέθοδος τῶν ἐπιπτώσεων ὠθεῖ τὸν προγραμματιστὴν νὰ ἐξετάσῃ τὸ πρόβλημα τῆς ὀργανωτικῆς δομῆς τῆς οἰκονομίας. Ὁ βαθμὸς τῆς διοικητικῆς ἀποκεντρώσεως καὶ αἱ ἁρμοδιότητες τῶν λαμβανόντων τὰς ἀποφάσεις ὀργάνων ὡς καὶ αἱ σχέσεις μεταξὺ αὐτῶν εἶναι κρισίμου σημασίας διὰ τὴν ἀνάλυσιν τῶν συνεπειῶν δοθέντος σχεδίου ἐπενδύσεως.

Κατωτέρω ἐκτίθενται συνοπτικῶς αἱ θεωρητικαὶ βάσεις τῆς μεθόδου τῶν ἐπιπτώσεων.

16.2. Καταστάσεις τῆς οἰκονομίας

Ἡ **κατάστασις** (state) μιᾶς οἰκονομίας εἰς δοθεῖσαν περίοδον δύναται νὰ περιγραφῇ διὰ τοῦ καθορισμοῦ τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνουν αἱ κυριώτεραι μεταβληταὶ τῆς οἰκονομίας κατὰ τὴν περίοδον ταύτην. Συνήθεις μεταβληταὶ εἰς τὰ μακροοικονομικὰ ὑποδείγματα εἶναι τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα, ἡ κατανάλωσις, ἡ ἐπένδυσις, ἡ ἀπασχόλησις κλπ. Αἱ μεταβληταὶ αὗται δυνατὸν νὰ ἀφοροῦν εἰς τὴν οἰκονομίαν ἐν τῷ συνόλῳ ἢ εἰς διαφόρους κλάδους ἢ οἰκονομικὰς περιοχάς, ἀναλόγως πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἀναλύσεως τοῦ ὑποδείγματος. Γενικῶς, ἂν θέσωμεν $X_{\nu\tau}$ διὰ τὴν τιμὴν τῆς ν-οστῆς οἰκονομικῆς μεταβλητῆς κατὰ τὸν χρόνον τ, ὅπου $\nu = 1, 2, \ldots, N$ καὶ $\tau = 1, 2, \ldots, T$, λαμβάνομεν τὴν μήτραν :

$$[X_{\nu\tau}] \equiv \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \ldots & X_{1\tau} \ldots & X_{1T} \\ X_{21} & X_{22} \ldots & X_{2\tau} \ldots & X_{2T} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ X_{\nu 1} & X_{\nu 2} \ldots & X_{\nu\tau} \ldots & X_{\nu T} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ X_{N1} & X_{N2} \ldots & X_{N\tau} \ldots & X_{NT} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

ἡ ὁποία δεικνύει τὴν «πορείαν» ἢ «διαδρομὴν» (trajectory) τῆς οἰκονομίας κατὰ τὴν χρονικὴν περίοδον ἀπὸ 1 ἕως Τ. Ἡ μήτρα $X_{\nu\tau}$ περιγράφει ἐπίσης μίαν κατάστασιν τῆς οἰκονομίας κατὰ τὴν περίοδον ταύτην. Ἡ προγραμματίζουσα ἀρχή, ἡ ὁποία ὑποτίθεται ὅτι εἶναι τὸ συνειδητὸν ὄργανον τῆς κοινωνίας διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν στόχων καὶ τὴν ἱεράρχησιν τῶν κοινωνικῶν προτιμήσεων ὀφείλει νὰ ἐπιλέξῃ μίαν κατάστασιν τῆς οἰκονομίας ἀπὸ τὸ «σύνολον» $[\mathbf{X}_{\nu\tau}]$ τῶν καταστάσεων τῆς οἰκονομίας, τὸ ὁποῖον ἔχει στοιχεῖα μήτρας τῆς μορφῆς $[X_{\nu\tau}]$. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα ὁρίζονται προφανῶς ἂν δοθοῦν διάφοροι τιμαὶ εἰς τὰς μεταβλητὰς $X_{\nu\tau}$. Ἐπειδὴ ἡ προγραμματίζουσα ἀρχὴ ἐνδιαφέρεται μόνον διὰ τὰ οἰκονομικῶς προγραμματοποιήσιμα στοιχεῖα τοῦ ἀνωτέρω συνόλου, ὁρίζομεν τὸ πραγματοποιήσιμον ὑποσύνολον $[\bar{\mathbf{X}}_{\nu\tau}]$, τὸ ὁποῖον ἔχει στοιχεῖα $[\bar{X}_{\nu\tau}]$, ἤτοι πρα-

γματοποιησίμους διαδρομὰς τῆς οἰκονομίας. Βεβαίως ἡ προγραμματίζουσα
ἀρχὴ θεωρεῖ μίαν οἰκονομικὴν διαδρομὴν ὡς πραγματοποιήσιμον βάσει
τῶν ὑποκειμενικῶν της κριτηρίων, τὰ ὁποῖα οὐσιαστικῶς ἐκφράζει ἡ ἐπι-
λογὴ ὑπ' αὐτῆς τοῦ οἰκονομικοῦ ὑποδείγματος προγραμματισμοῦ.

16.3. Καταστάσεις τῆς κοινωνίας

Ἡ προγραμματίζουσα ἀρχή, ὡς ἐκπρόσωπος τῆς κοινωνίας, δὲν ἐνδια-
φέρεται διὰ τὰς καταστάσεις τῆς οἰκονομίας καθ' ἑαυτάς, ἀλλὰ διὰ τὰς
καταστάσεις τῆς κοινωνίας εἰς τὰς ὁποίας αἱ πρῶται ἀντιστοιχοῦν.
Τὸ πρόγραμμα ἀναπτύξεως ἀποβλέπει συνήθως εἰς τὸν σκόπιμον ἐπηρεα-
σμὸν τῆς οἰκονομίας διὰ τὴν τελικὴν ἐπίτευξιν ὅ μόνον οἰκονομικῶν ἀλλὰ
καὶ κοινωνικῶν στόχων. Κατὰ συνέπειαν ἐνδιαφέρει νὰ προσδιορισθῇ ἡ
κοινωνικὴ διαδρομή, βάσει δεικτῶν οἱ ὁποῖοι νὰ ἐκφράζουν κοινωνικῶς
οἰκονομικὰς καὶ μὴ οἰκονομικὰς μεταβλητάς ὡς εἶναι π.χ. ἡ προστασία
τοῦ περιβάλλοντος, ἡ ἐθνικὴ ἄμυνα, ἡ ποιότης ζωῆς κλπ. Τοῦτο σημαίνει
ὅτι εἶναι ἀναγκαία μιὰ γενικὴ κοινωνικὴ θεωρία τῆς ὁποίας ὀργανικὸν
τμῆμα θὰ ἦτο ἡ οἰκονομικὴ θεωρία(1). Ἀλλὰ πρὸς τὸ παρὸν τοιαύτη γε-
νικὴ θεωρία δὲν ὑφίσταται καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ περιγραφὴ τῆς κοινωνι-
κῆς διαδρομῆς πρέπει νὰ βασισθῇ εἰς τὴν κοινωνικὴν προσαρμογὴν τῶν
οἰκονομικῶν ὑποδειγμάτων. Ἐν προκειμένῳ ἡ μετάβασις ἀπὸ δοθεῖσαν
κατάστασιν τῆς οἰκονομίας εἰς τὴν ἀντίστοιχον κατάστασιν τῆς κοινωνίας
εἶναι δυνατὴ διὰ τῆς μετατροπῆς τῶν Ν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν εἰς
—ἔστω— Μ ***μεταβλητὰς - κοινωνικοὺς δείκτας***. Εἰς τινας περιπτώσεις αἱ
οἰκονομικαὶ μεταβληταὶ ἀποτελοῦν ὡς ἔχουν κοινωνικοὺς δείκτας, ὡς συμ-
βαίνει π.χ. μὲ τὴν κατανάλωσιν. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις ὁ προσδιορισμὸς
τοῦ ἀντιστοίχου κοινωνικοῦ δείκτου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν κατάλληλον με-
τασχηματισμὸν τῶν οἰκονομικῶν μεταβλητῶν. Οὕτω, βάσει π.χ. τῶν δει-
κτῶν τῆς βιομηχανικῆς παραγωγῆς μιᾶς περιοχῆς, τῆς συνθέσεως τῆς
παραγωγῆς κλπ. δύναται νὰ κατασκευασθῇ ὁ δείκτης τῆς προστασίας
τοῦ περιβάλλοντος.

---

(1) Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ ἀνάγκη ἐξετάσεως τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων ἐντὸς
τοῦ κοινωνικοῦ χώρου καὶ ἡ ἀξιολόγησις τῶν κοινωνικῶν ἐπιπτώσεων αὐτῶν ἀποτελεῖ
βασικὴν θέσιν τῆς παπανδρεϊκῆς πολιτικοκοινωνικῆς φιλοσοφίας, ἡ ὁποία διαφαίνεται εἰς
παλαιοτέρας θεωρητικὰς ἐργασίας τοῦ συγγραφέως (βλ. π.χ. Economics as a Science
1958), ὡς καὶ εἰς πλέον προσφάτους ἐργασίας αὐτοῦ (βλ. Man's Freedom 1969 καὶ Pa-
ternalistic Capitalism, 1972). Ἡ ἀπόρριψις τοῦ στείρου ἀκαδημαισμοῦ περὶ καθαρᾶς
οἰκονομικῆς ἐπιστήμης καὶ ἡ ἀνάλυσις τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων ἐντὸς τοῦ γενικωτέ-
ρου κοινωνικοοικονομικοῦ χώρου ἀποτελεῖ σημαντικὴν πρόοδον, ὄχι μόνον θεωρητικὴν
ἀλλὰ καὶ ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικῆς πολιτικῆς, ἰδίᾳ εἰς τὸν τομέα τοῦ προγραμματισμοῦ
ἀναπτύξεως.

Ἂν θέσωμεν $K_{\mu\tau}$ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ μ-οστοῦ κοινωνικοῦ δείκτου κατὰ τὸν χρόνον τ, ὅπου μ = 1, 2, ..., M καὶ τ = 1, 2, ..., T ὡς καὶ προηγουμένως, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν μήτραν:

$$[K_{\mu\tau}] \equiv \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \ldots & K_{1\tau} \ldots & K_{1T} \\ K_{21} & K_{22} \ldots & K_{2\tau} \ldots & K_{2T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{\mu 1} & K_{\mu 2} \ldots & K_{\mu\tau} \ldots & K_{\mu T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1} & K_{M2} \ldots & K_{M\tau} \ldots & K_{MT} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

ἡ ὁποία περιγράφει μίαν κατάστασιν ἢ διαδρομὴν τῆς κοινωνίας κατὰ τὴν περίοδον ἀπὸ 1 ἕως T. Δύναται νὰ ὁρισθῇ τὸ σύνολον $[\mathbf{K}_{\mu\tau}]$ μὲ τὰ στοιχεῖα $[K_{\mu\tau}]$. Ἀλλ' ἡ προγραμματίζουσα ἀρχὴ ἐνδιαφέρεται μόνον διὰ τὸ ὑποσύνολον $[\bar{\mathbf{K}}_{\mu\tau}]$ τῶν πραγματοποιησίμων κοινωνικῶν διαδρομῶν $[\bar{K}_{\mu\tau}]$. Προφανῶς τὸ $[\bar{\mathbf{K}}_{\mu\tau}]$ ἔχει στενὴν σχέσιν μὲ τὸ $[\bar{\mathbf{X}}_{\nu\tau}]$. Γενικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι δοθεῖσα πραγματοποιήσιμος κοινωνικὴ διαδρομὴ $[\bar{K}_{\mu\tau}]$ προέρχεται ἐκ τοῦ μετασχηματισμοῦ μιᾶς ἢ περισσοτέρων πραγματοποιησίμων οἰκονομικῶν διαδρομῶν $[\bar{X}_{\nu\tau}]$.

Ὑποτίθεται ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ $[\mathbf{K}_{\mu\tau}]$ δύνανται νὰ ἱεραρχηθοῦν πλήρως διὰ τῆς δυαδικῆςσχέσεως(1) P, ἡ ὁποία σημαίνει «μὴ κατώτερον τοῦ ...», εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἰσχύῃ τὸ ἀξίωμα τῆς συγκρισιμότητος καὶ τῆς μεταβατικότητος, ἤτοι:

Πρῶτον, διὰ στοιχεῖα γενικῶς $[K_{\mu\tau}]', [K_{\mu\tau}]'' \in [\mathbf{K}_{\mu\tau}]$
εἴτε $[K_{\mu\tau}]' \ P \ [K_{\mu\tau}]''$ ἢ $[K_{\mu\tau}]'' \ P \ [K_{\mu\tau}]'$ (3)

Δεύτερον, διὰ στοιχεῖα $[K_{\mu\tau}]', [K_{\mu\tau}]'', [K_{\mu\tau}]''' \in [\mathbf{K}_{\mu\tau}]$

ἐὰν $[K_{\mu\tau}]' \ P \ [K_{\mu\tau}]''$
καὶ $[K_{\mu\tau}]'' \ P \ [K_{\mu\tau}]'''$ (4)
τότε $[K_{\mu\tau}]' \ P \ [K_{\mu\tau}]'''$

Ἡ προγραμματίζουσα ἀρχὴ περιορίζεται εἰς τὴν σύγκρισιν πραγματοποιησίμων κοινωνικῶν διαδρομῶν. Κατὰ συνέπειαν, ἐπὶ τοῦ συνόλου $[\bar{\mathbf{K}}_{\mu\tau}]$ ὁρίζεται διὰ τῶν ὡς ἄνω συγκρίσεων ἓν ὑποσύνολον $[\dot{\mathbf{K}}_{\mu\tau}]$, τὸ

(1) Βλ. ἀνωτέρω σ.σ. 105 κ.ἑ.

ὁποῖον δύναται νὰ ὀνομασθῇ ***σύνολον ἐπιλογῆς***, μὲ στοιχεῖα κοινωνικὰς διαδρομὰς $[\dot{K}_{\mu\tau}]$ διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$[\dot{K}_{\mu\tau}]\ P\ [\tilde{K}_{\mu\tau}] \tag{5}$$

$$\text{διὰ}\quad [\bar{K}_{\mu\tau}] \in [\bar{\mathbf{K}}_{\mu\tau}] \text{ καὶ } [\dot{K}_{\mu\tau}] \in [\dot{\mathbf{K}}_{\mu\tau}]$$

16.4. Ἐπιλογὴ σχεδίων ἐπενδύσεως: Θεωρητικὸς κανὼν

Αἱ ἐπιπτώσεις [impact] ἑνὸς σχεδίου ἐπενδύσεως ἐπὶ τῆς οἰκονομικῆς διαδρομῆς ὁρίζονται ἐκ τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς οἰκονομικῆς διαδρομῆς ὡς αὕτη διαμορφοῦται κατόπιν τῆς ἐκτελέσεως τοῦ σχεδίου ἐπενδύσεως καὶ τῆς οἰκονομικῆς διαδρομῆς ἄνευ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἐν λόγῳ σχεδίου. Συμβολικῶς :

$$[d_{(\varepsilon)}] = [\bar{X}_{\nu\tau}]_{(\varepsilon)} - [\bar{X}_{\nu\tau}] \tag{6}$$

ὅπου $[d_{(\varepsilon)}]$ εἶναι ἡ μήτρα τῶν ἐπιπτώσεων τοῦ σχεδίου ἐπενδύσεως, $[X_{\nu\tau}]_{(\varepsilon)}$ εἶναι ἡ κατάστασις τῆς οἰκονομίας μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ σχεδίου ἐπενδύσεως καὶ $[X_{\nu\tau}]$ ἡ κατάστασις τῆς οἰκονομίας ἄνευ τοῦ σχεδίου ἐπενδύσεως. Ἀναλυτικῶς θὰ εἶναι :

$$[d_{(\varepsilon)}] \equiv \begin{bmatrix} \bar{X}_{11(\varepsilon)} - \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12(\varepsilon)} - \bar{X}_{12} \cdots & \bar{X}_{1T(\varepsilon)} - \bar{X}_{1T} \\ \bar{X}_{21(\varepsilon)} - \bar{X}_{21} & \bar{X}_{22(\varepsilon)} - \bar{X}_{22} \cdots & \bar{X}_{2T(\varepsilon)} - \bar{X}_{2T} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{X}_{N1(\varepsilon)} - \bar{X}_{\nu 1} & \bar{X}_{N2(\varepsilon)} - \bar{X}_{N2} \cdots & \bar{X}_{NT(\varepsilon)} - \bar{X}_{NT} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Ἡ μὴ ἐφαρμογὴ ἑνὸς σχεδίου ἐπενδύσεως δύναται νὰ ἐκφρασθῇ συμβολικῶς διὰ τῆς ἐξισώσεως τῆς μήτρας τῶν ἐπιπτώσεων μὲ τὴν μηδενικὴν μήτραν :

$$[d_{(\varepsilon)}] = [0] \tag{8}$$

Ἐπειδὴ τελικῶς ἡ προγραμματίζουσα ἀρχὴ ἐνδιαφέρεται διὰ τὰς ἐπιπτώσεις τῶν σχεδίων ἐπενδύσεως(1) ἐπὶ τῆς κοινωνικῆς διαδρομῆς, ἀντὶ τῆς μήτρας τῶν διαφορῶν (7) θὰ ἔχωμεν :

---

(1) Ἡ ἀνάλυσις αὕτη δύναται εὐκόλως νὰ ἐπεκταθῇ καὶ ἐπὶ τῶν ὀργανικῶν συνόλων τῶν σχεδίων ἐπενδύσεως τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν «προγράμματα», ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπτώσεων τῶν ἐπὶ μέρους σχεδίων εἶναι διάφορον τῶν ἐπιπτώσεων τοῦ προγράμματος.

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{11(\varepsilon)} - \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12(\varepsilon)} - \bar{K}_{12} & \cdots & \bar{K}_{1T(\varepsilon)} - \bar{K}_{1T} \\ \bar{K}_{21(\varepsilon)} - \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22(\varepsilon)} - \bar{K}_{22} & \cdots & \bar{K}_{2T(\varepsilon)} - \bar{K}_{2T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{K}_{M1(\varepsilon)} - \bar{K}_{M1} & \bar{K}_{M2(\varepsilon)} - \bar{K}_{M2} & \cdots & \bar{K}_{MT(\varepsilon)} - \bar{K}_{MT} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

ὅπου γενικῶς $\bar{K}_{\mu\tau}$ εἶναι ἡ τιμή τοῦ μ-στοῦ δείκτου κατά τόν χρόνον τ ἄνευ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ σχεδίου ἐπενδύσεως καί $\bar{K}_{\mu\tau(\varepsilon)}$ ἡ τιμή τοῦ αὐτοῦ δείκτου κατά τόν χρόνον τ κατόπιν τῆς ἐκτελέσεως τοῦ σχεδίου (ε). Συνεπῶς αἱ διαφοραί τῶν στοιχείων τῆς ἀνωτέρω μήτρας δεικνύουν τάς ἐπιπτώσεις δοθέντος σχεδίου ἐπενδύσεως (ε) ἐπί τῶν κοινωνικῶν δεικτῶν κατά τήν περίοδον ἀπό 1 ἕως Τ.

Διά τήν ἐπιλογήν δοθέντος σχεδίου ἐπενδύσεως τό πρόγραμμα ἀναπτύξεως λαμβάνεται ὡς δεδομένον. Κατά συνέπειαν ἐξετάζεται τό ὁριακόν πρόβλημα τῆς προσθήκης ἑνός ἐπί πλέον σχεδίου ἐπενδύσεως εἰς τό πρόγραμμα ἀναπτύξεως. Τό κέντρον ἀποφάσεων τῆς περιοχῆς εἰς τήν ὁποίαν ἀναφέρεται τό σχέδιον ἐπενδύσεως (1) δύναται νά ἀκολουθήση την ἑξῆς διαδικασίαν ἐπιλογῆς:

α) προσδιορίζει τό σύνολον τῶν πραγματοποιησίμων διαζευκτικῶν σχεδίων ἐπενδύσεως

β) ἐπί τοῦ προηγουμένου συνόλου ὁρίζει τό ὑποσύνολον τῶν σχεδίων ἐπενδύσεως τά ὁποῖα «δεσπόζουν», ὑπό τήν ἔννοιαν τῆς προαριστοποιήσεως (βλ. σ. 6 ἀνωτέρω), ἐφ' ὅλων τῶν ὑπολοίπων σχεδίων του συνόλου

γ) ὁρίζει ἐπί τοῦ προηγουμένου ὑποσυνόλου ἕν νέον ὑποσύνολον τῶν ἀρίστων σχεδίων ἐπενδύσεως καί

δ) συγκρίνει τό ἄριστον σχέδιον (ἤ σχέδια) μέ τό μηδενικόν σχέδιον ἤτοι μέ τήν κατάστασιν μή ἐφαρμογῆς τοῦ ἐν λόγῳ σχεδίου ἐπενδύσεως.

Τό σύνολον τῶν πραγματοποιησίμων σχεδίων ἐπενδύσεως ἀποτελεῖται ἀπό σχέδια ἐπενδύσεως ἕκαστον τῶν ὁποίων δύναται νά πραγματοποιηθῇ ἐπί τῇ βάσει τῶν πόρων τούς ὁποίους ἔχει εἰς τήν διάθεσίν του τό κέντρον ἀποφάσεως. Διά τόν προσδιορισμόν τοῦ συνόλου τῶν σχεδίων τά ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς δεσπόζουσαν θέσιν ἐξετάζονται συγκριτικῶς ἐπί

---

(1) Ὑποτίθεται ὅτι ὑφίσταται διοικητική ἀποκέντρωσις ὅσον ἀφορᾶ τά ὄργανα ἐπιλογῆς σχεδίων ἐπενδύσεως, ἐντός βεβαίως τῶν πλαισίων τῆς στρατηγικῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

τῇ βάσει τῶν κοινωνικῶν δεικτῶν αἱ ἐπιπτώσεις ὅλων τῶν σχεδίων τοῦ συνόλου τῶν πραγματοποιησίμων σχεδίων ἐπενδύσεως. Ἔστω π.χ. τὰ ἑξῆς πραγματοποιήσιμα σχέδια :

Σχέδιον 1

Δείκτης	Χρόνος 1	2	3
Κατανάλωσις	5	5	6
Μόλυνσις περιβαλλοντος	−2	−2	−2

Σχέδιον 2

Δείκτης	Χρόνος 1	2	3
Καταναλωσις	4	5	5
Μόλυνσις περιβαλλοντος	−2	−2	−2

Σχέδιον 3

Δεικτης	Χρόνος 1	2	3
Καταναλωσις	4	4	7
Μόλυνσις περιβάλλοντος	−2	−2	−1

Σχέδιον 4

Δείκτης	Χρόνος 1	2	3
Κατανάλωσις	3	4	6
Μόλυνσις περιβάλλοντος	−4	−2	−1

Αἱ τιμαὶ τῶν δεικτῶν ἐκφράζουν διαφορὰς τῆς μορφῆς τῶν στοιχείων τῆς μήτρας (9), δηλαδὴ δεικνύουν τὰς ἐπιπτώσεις τῶν σχεδίων ἐπὶ τῆς οἰκονομικῆς διαδρομῆς. Ἡ συγκρισις τῶν σχεδίων ἀνὰ δύο δεικνυει ὅτι τὸ σχέδιον 1 δεσπόζει τοῦ σχεδίου 2 διότι δίδει μεγαλυτέραν κατανάλωσιν χωρὶς νὰ χειροτερεύῃ τὴν μόλυνσιν τοῦ περιβάλλοντος (ἡ ὁποία λαμβάνει ἀρνητικὰς τιμάς), ἐνῶ τὸ σχέδιον 3 δεσπόζει τοῦ σχεδίου 4, διότι δίδει καὶ μεγαλυτέραν κατανάλωσιν καὶ μεγαλυτέραν προστασίαν περιβάλλοντος. Ἐξ ἄλλου τὰ σχέδια 1 καὶ 3 δὲν εἶναι συγκρίσιμα ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν καὶ κατὰ συνέπειαν ἀπαρτίζουν τὸ σύνολον τῶν «δεσποζόντων» σχεδίων. Τὸ ἄριστον σχέδιον πρέπει νὰ ἐπιλεγῇ μεταξὺ αὐτῶν(1).

Ἡ διαδικασία ἐπιλογῆς τοῦ ἀρίστου σχεδίου (ἢ ἀρίστων σχεδίων) ἀπαιτεῖ γενικῶς σύγκρισιν τῶν ἐπιπτώσεων ὅλων τῶν δεσποζόντων σχεδίων διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ κριτηρίου P : «μὴ κατώτερον τοῦ....» Ἐν προκειμένῳ τὸ κριτήριον αὐτὸ δὲν ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς συγκρίσεως δύο κοινωνικῶν διαδρομῶν ὡς εἴδομεν εἰς 16.3, ἀνωτέρω, ἀλλὰ ἐπὶ διαφορῶν τῶν κοινωνικῶν διαδρομῶν. Τοῦτο βεβαίως ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι αἱ ἐπιπτώσεις ἑκάστου σχεδίου ἐκφράζονται ὡς διαφοραὶ μεταξὺ τῆς κοινωνικῆς διαδρομῆς πρὸ καὶ τῆς διαδρομῆς ταύτης μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ σχεδίου. Οὕτω ἂν θέσωμεν $K_{\mu\tau}$ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ μ-στοῦ δείκτου κατὰ τὸν χρόνον τ πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῶν σχεδίων [α] καὶ [ε] καὶ $\bar{K}_{\mu\tau(\alpha)}$ $\bar{K}_{\mu\tau(\varepsilon)}$ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ αὐτοῦ δείκτου μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ὡς ἄνω σχεδίων(2), ἡ προγραμματίζουσα ἀρχὴ ὑποτίθεται ὅτι δύναται νὰ ἀποφασίσῃ ἂν :

$$(\bar{K}_{\mu\tau(\alpha)} - \bar{K}_{\mu\tau})\ P\ (\bar{K}_{\mu\tau(\varepsilon)} - \bar{K}_{\mu\tau})$$
$$\text{ἢ}\ (\bar{K}_{\mu\tau(\varepsilon)} - \bar{K}_{\mu\tau})\ P\ (\bar{K}_{\mu\tau(\alpha)} - \bar{K}_{\mu\tau})$$

Ἐκ συγκρίσεων τῆς ἀνωτέρω μορφῆς, ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν δεσποζόντων σχεδίων, ὁρίζεται τὸ σύνολον τῶν ἀρίστων σχεδίων. Ἀλλ' ἡ ὕπαρξις ἀρίστου ἢ ἀρίστων σχεδίων δὲν προδικάζει κατ' ἀνάγκην τὴν τελικὴν ἐπιλογήν των εἰς τὸ πρόγραμμα ἀναπτύξεως. Ταῦτα πρέπει ἐπίσης νὰ συγκριθοῦν μὲ τὸ μηδενικὸν σχέδιον διὰ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ κατάστασις τὴν ὁποίαν δημιουργοῦν εἶναι προτιμοτέρα ἀπὸ τὴν κατάστασιν τῆς μὴ ἐκτελέσεώς των.

16.5. Ἐπιλογὴ σχεδίων ἐπενδύσεως: Λειτουργικὸς κανὼν

Ἡ σύγκρισις ὑπὸ τοῦ κέντρου ἀποφάσεων τῶν ἐπιπτώσεων τῶν σχεδίων ἐπενδύσεως ὑποδηλοῖ κατ' οὐσίαν σύγκρισιν μητρῶν τύπου (9), πρᾶγμα τὸ ὁποῖον καθίσταται πρακτικῶς ἀδύνατον, ἰδίᾳ ὅταν τὰ N καὶ T λαμβάνουν σχετικῶς μεγάλας τιμάς. Πρὸς ἁπλούστευσιν τοῦ προβλήματος ἐπιλογῆς, αἱ χρονικαὶ σειραὶ τῶν διαφορῶν τῶν μεταβλητῶν εἰς τὰς μήτρας τύπου (9), αἱ ὁποῖαι διαφοραὶ δεικνύουν τὰς ἐπιπτώσεις

(1) Δοθέντων τῶν κριτηρίων ἐπιλογῆς εἶναι βεβαίως δυνατὸν ἀμφότερα τὰ σχέδια νὰ εἶναι ἄριστα.

(2) Ἡ ἐκτέλεσις νοεῖται διαζευκτικὴ καὶ ὄχι ταυτόχρονος.

δοθέντων σχεδίων ἐπενδύσεως, ἀθροίζονται ἀφοῦ προηγουμένως ὑπολογισθῇ ἡ παροῦσα ἀξία ἑκάστης διαφορᾶς βάσει καταλλήλων συντελεστῶν προεξοφλήσεως, προσδιοριζομένων ὑπὸ τῆς (κεντρικῆς) προγραμματιζούσης ἀρχῆς. Οὕτω, ἂν π.χ. θέσωμεν $\Psi_{11}, \Psi_{12}, \ldots, \Psi_{1T}$ διὰ τὴν σειρὰν τῶν ἐπιπτώσεων δοθέντος σχεδίου ἐπενδύσεως ἐπὶ τοῦ κοινωνικοῦ δείκτου 1 καὶ ρ διὰ τὸν σχετικὸν δείκτην προεξοφλήσεως, ἡ παροῦσα ἀξία τῆς σειρᾶς τῶν ἐπιπτώσεων θὰ εἶναι :

$$\sum_{\tau=1}^{T} \psi_{1\tau}(1+\rho_1)^{-\tau} \tag{10}$$

Ἂν ἡ παράστασις (10) διαιρεθῇ διὰ T λαμβάνομεν μίαν μέσην ἐτησίαν παροῦσαν ἀξίαν :

$$\frac{1}{T}\sum_{\tau=1}^{T} \Psi_{1\tau}\,(1+\rho_1)^{-\tau}$$

ἡ ὁποία διευκολύνει τὰς συγκρίσεις. Ἂς θέσωμεν :

$$[\rho] \equiv \begin{bmatrix} (1+\rho_1)^{-1} & (1+\rho_2)^{-1} \ldots & (1+\rho_M)^{-1} \\ (1+\rho_1)^{-2} & (1+\rho_2)^{-2} \ldots & (1+\rho_M)^{-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (1+\rho_1)^{-T} & (1+\rho_2)^{-T} \ldots & (1+\rho_M)^{-T} \end{bmatrix} \tag{11}$$

διὰ τὴν μήτραν τῶν προεξοφλήσεων, ὅπου $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_M$ εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν προεξοφλήσεως τῶν ἀντιστοίχων κοινωνικῶν μεταβλητῶν καί :

$$[\Lambda_{\nu\tau}] \equiv \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \ldots & \Lambda_{1T} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \ldots & \Lambda_{2T} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Lambda_{M1} & \Lambda_{\mu 2} \;\ldots & \Lambda_{MT} \end{bmatrix} \tag{12}$$

διὰ τὴν μήτραν τῶν διαφορῶν τύπου (9), ὅπου γενικῶς $\Lambda_{\nu\tau} = \bar{K}_{\tau\nu(\varepsilon)} - \bar{K}_{\nu\tau}$. Δυνάμεθα τώρα νὰ ὁρίσωμεν τὸν ἀκόλουθον μετασχηματισμόν :

α) Σχηματίζομεν τὰ ἐσωτερικὰ γινόμενα[1]. τῶν σειρῶν τῆς $[\Lambda_{\nu\tau}]$

(1) Βλ. σ. 63 ἀνωτέρω.

ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους στήλας τῆς [ϱ] διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἀθροίσματος τῶν παρουσῶν ἀξιῶν τῶν κονωνικῶν μεταβλητῶν. Ἤτοι, π.χ. :

$$[\Lambda_{11} \;\; \Lambda_{12} \ldots \Lambda_{1T}] \begin{bmatrix} (1+\rho_1)^{-1} \\ (1+\rho_1)^{-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (1+\rho_1)^{-T} \end{bmatrix} = \Lambda_{11}(1+\rho_1)^{-1}+\Lambda_{12}(1+\rho_1)^{-2}+\ldots+ + \Lambda_{1T}(1+\rho_1)^{-T} = \sum_{\tau=1}^{T}(1+\rho_1)^{-\tau}\Lambda_{1\tau}$$

διὰ τὴν πρώτην στήλην καὶ πρώτην σειρὰν καὶ γενικῶς :

$$\sum_{\tau=1}^{T}(1+\rho_\mu)^{-\tau}\,.\,\Lambda_{\mu\tau} \tag{13}$$

διὰ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς μιοστῆς σειρᾶς ἐπὶ τὴν μιοστὴν στήλην.

β) Πολλαπλασιάζομεν τὰ ἐσωτερικὰ γινόμενα ἐπὶ 1/T διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν μέσην ἐτησίαν παροῦσαν ἀξίαν τῶν κοινωνικῶν μεταβλητῶν. Ἤτοι, γενικῶς :

$$\frac{1}{T}\sum_{\tau=1}^{T}(1+\rho_\mu)^{-\tau}\Lambda_{\mu\tau} \tag{14}$$

Οὕτω λαμβάνομεν τὸ διάνυσμα τῶν μέσων παρουσῶν ἀξιῶν τῶν Μ μεταβλητῶν :

$$[B_\mu] \equiv \begin{bmatrix} B_1 \\ \cdot \\ B_2 \\ \cdot \\ B_\mu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_M \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1/T\sum_{\tau=1}^{T}(1+\rho_1)^{-\tau}\;\Lambda_{1\tau} \\ 1/T\sum_{\tau=1}^{T}(1+\rho_2)^{-\tau}\;\Lambda_{2\tau} \\ \cdot \\ 1/T\sum_{\tau=1}^{T}(1+\rho_\mu)^{-\tau}\;\Lambda_{\mu\tau} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1/T\sum_{\tau=1}^{T}(1+\rho_M)^{-\tau}\;\Lambda_{M\tau} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Κατὰ συνέπειαν ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμὸς μετατρέπει τὴν μήτραν τῶν διαφορῶν $[\Lambda_{\nu\tau}]$, εἰς τὸ διάνυσμα $[B_\mu]$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἀντὶ νὰ συγκρίνωμεν τὰς ἐπιπτώσεις δοθέντων σχεδίων ἐπενδύσεων διὰ τῆς συγκρίσεως τῶν διαφορῶν τῶν ἀντιστοίχων κοινωνικῶν διαδρομῶν (ὡς αὗται διαμορφοῦνται μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἐν συνόλῳ σχεδίων), συγκρίνομεν τὰς ἁπλουστέρας παραστάσεις τῶν στηλῶν-διανυσμάτων τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν τὰς μέσας ἐτησίας παρούσας ἀξίας τῶν σχετικῶν διαφορῶν. Ἡ ὑπολογιστικὴ διευκόλυνσις ἐκ τῆς μετατροπῆς αὐτῆς εἶναι προφανής, διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ὁμιλοῦμεν περὶ *λειτουργικοῦ κανόνος* ἐπιλογῆς. Κατόπιν τοῦ μετασχηματισμοῦ προχωροῦμεν εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῆς διαδικασίας ἐπιλογῆς τοῦ ἀρίστου σχεδίου ἐπενδύσεως κατὰ τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα (βλ. 16. 4).

16.6. Συμπερασματικαὶ παρατηρήσεις

Ἡ ἀνωτέρω σκιαγραφηθεῖσα μέθοδος τῶν ἐπιπτώσεων περιγράφει μίαν διαδικασίαν ἐπιλογῆς σχεδίων ἐπενδύσεως ἡ ὁποία ἐπιβεβαιοῦται βασικῶς ἐκ τῆς οἰκονομικῆς πρακτικῆς. Ὡς ὁ γράφων γνωρίζει ἐκ προσωπικῆς πείρας, οἱ οἰκονομικοὶ ἐμπειρογνώμονες τοῦ ΟΗΕ ἐφαρμόζουν συνήθως παρομοίαν τεχνικὴν ἀναλύσεως διὰ τὴν ἔνταξιν τῶν σχεδίων ἐπενδύσεως εἰς δοθὲν πρόγραμμα ἀναπτύξεως. Κατὰ κανόνα χρησιμοποιοῦνται πολλαπλᾶ κριτήρια ἐπιλογῆς, ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν πολλαπλότητα τῶν στόχων τοῦ προγράμματος ἀναπτύξεως. Οὕτω, αἱ ἐκτιμήσεις τῶν ἐπιπτώσεων τῶν σχεδίων ἀναπτύξεως εἶναι διανυσματικῆς φύσεως, καθόσον ἐπιχειρεῖται ἀξιολόγησις τῆς συμβολῆς τῶν σχεδίων ὡς πρὸς ἕνα ἕκαστον προγραμματικὸν στόχον. Τὰ πολλαπλᾶ κριτήρια ἐπιλογῆς, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν κατ' οὐσίαν τρόπον ἐφαρμογῆς εἰς τὴν πρᾶξιν τῶν κοινωνικῶν δεικτῶν τῆς μεθόδου Παπανδρέου, ἐξασφαλίζουν τὴν ὀργανικὴν ἑνότητα μεταξὺ οἰκονομικοῦ προγράμματος καὶ σχεδίων ἐπενδύσεως.

Τὸ κύριον πρόβλημα εἰς τὴν πρᾶξιν εἶναι ἡ ἐπιλογὴ τοῦ ἀρίστου ἢ ἀρίστων σχεδίων ἐπενδύσεως ἐξ ἑνὸς συνόλου σχεδίων τῶν ὁποίων αἱ ἐπιπτώσεις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ μαθηματικῶς συγκρισίμων διανυσμάτων ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω (βλ. 16.4) ἔννοιαν περὶ δεσποζόντων διανυσμάτων. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς τὰ κριτήρια ἐπιλογῆς ἱεραρχοῦνται βάσει τῆς σχετικῆς σπουδαιότητος τῶν ἀντιστοίχων στόχων τοῦ προγράμματος καὶ ἀκολουθεῖται μία σταδιακὴ διαδικασία ἐφαρμογῆς τῶν κριτηρίων αὐτῶν κατὰ τὴν σειρὰν προτεραιότητός των. Ἡ διαδικασία αὐτὴ περιγράφεται ἀναλυτικῶς εἰς τὸ κεφ. 4 τοῦ παρόντος βιβλίου (σσ. 126 κέ.). Συνήθως ἀποφεύγεται εἰς τὴν πρᾶξιν ἡ μετατροπὴ τῶν ἐπὶ μέρους ἐπιπτώσεων τῶν σχεδίων ἐπενδύσεως εἰς ἕνα γενικὸν δείκτην κοινωνικῆς ὠφελιμότητος ἢ κοινωνικοῦ κέρδους (βλ. ἀνωτέρω σ. 122 κ.έ.), καθ' ὅσον δὲν καθίσταται συνήθως ἐφικτὸς ὁ προσδιορισμὸς τῶν συντελεστῶν σταθμίσεως ἢ μετατροπῆς τῶν ὡς ἄνω ἐπιπτώσεων.

'Επὶ πλέον εἰς τὴν πρᾶξιν ὁρίζεται συνήθως ἓν διάνυσμα - στόχος διὰ τὸ τελευταῖον ἔτος τοῦ προγράμματος ἀναπτύξεως καὶ ἐπιλέγονται βάσει τῶν ἐπιπτώσεών των ἐκεῖνα τὰ σχέδια διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνονται κατὰ τὸν οἰκονομικώτερον δυνατὸν τρόπον αἱ προγραμματικαὶ ἐπιδιώξεις, ἐντὸς τῆς τεθείσης χρονικῆς περιόδου. Βασικῶς ἡ μέθοδος Παπανδρέου καλύπτει θεωρητικῶς τὰς ὡς ἄνω περιπτώσεις καὶ ἐπὶ πλέον διανοίγει περαιτέρω σημαντικὰς προοπτικὰς εἰς τὸν τομέα τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aitken, A.C.: Determinants and Matrices. Oliver and Boyd, 1949.

Allen, R.G.D.: Mathematical Economics. London, Mc Millan 1956.

Baumol, W.: Activity Analysis in one Lesson. Amer. Econ. Review December 1958.

Baumol, N.J.: Economic Theory and Operations Research. Prentice-Hall, N.J. 1961.

Bellman, R.: Dynamic Programming, Princeton Univers. Press, 1957.

Bellman, R.: Introduction to Matrix Analysis. N. York 1960 (McGraw Hill).

Benner C., Newhouse A., Rader C., Yates R.: Topics in Modern Algebra. Harper and Brothers N.Y. 1962.

Berge, C.: Espaces Topologiques. Dunod, Paris 1959.

Bettelheim, C.: Studies in the Theory of Planning. London 1959.

Bjerve, J.P.: Planning in Norway 1947 - 1956. North Holland Publ. Co-Amsterdam 1959.

Brambilla, F.: Osservazioni intorno al modello di Leontief. L'Industria. 1953 (No 1).

Carr, Gr. and Howe, Ch.: Quantitative decision procedures in management and economics. McGraw - Hill, N.Y. 1964.

Chakravarty, S.: The logic of Investment Planning. North Holland Publishing Company, Amsterdam. 1959.

Chakravarty, S.: The existence of an optinum savings program, Econometrica Vol. 30 (1962).

Charnes A., Cooper, W., Henderson, A.: Introduction to Linear Programming, Jhon Wiley & Sons, Inc., New York, 1943.

Chenery, H.B.: The Application of Investment Criteria. The Quarterly Journal of Economics, Vol LXVII, No 1, February 1953.

Chenery, H.B.: The role of Industrialisation in Development Programs. The American Economic Review, Vol. YLV, No 2, May 1955.

Chenery, H.B.: Development policies and Programs. Economic Bulletin for Latin America, Vol. III, 1958.

Chenery, H.B. and Clark. P.: Application of Input - Output Analysis in Italy. Econometrica, Januaey 1953.

Chenery, H.B. and Clark, P.: Theoria delle Analysi delle Interdipendenze Strutturali in uno Sistema Economico. L' Industria, 1952 (No 4).

Chenery, H.B. and Clark. P.: Le Interdipendenze Strutturali fra l' Italia del Nord e quella del Sud l' Industria 1953 (No 1).

Chenery, H.B. and Kretschncer, K.: Resource Allocation for Economic Development. Econometrica. Vol. 24, No 4, October 1956.

Churchman G.N., Ackoff R.L., Arnoff E.L.: Indroduction to Operation Research. J. Wiley N.Y. 1957.

Dantzig. G.B.: Maximization of a Linear Function of Variebles subject to Linear Inequalities. Chap. XXI εἰς Koopmans Activity Analysis.

Dantzig. G.B.: The Dual Simplex Algorithm. Rand Report RM-1270, the Rand Corporation Santa Monica, California 1954.

Dantzig. G.B.: Linear Programming and Extensions, Princeton Univ. Press, 1963.

Δασκαλόπουλου, Δ.: 'Ανώτερα Μαθηματικά (τόμ. I). 'Αθῆναι 1960.

Dean B., Sasteni M., Gupta S.: Mathematics for Modern Management. John Wiley and Sons, N.Y. 1963.

Debrew, G.: Theory of Value. John Wiley. N.Y. 1959.

Domar E.: Essays on the theory of Economic Growth. Oxford Univ. Press, N. York, 1957.

Ferguson, R.O. and Sargen, L.F.: Linear Programming: Fundamentals and Applications. Mc Graw - Hill, N. York, 1958.

Finkbeiner, D.: Introduction to matrices and Linear Transformations. W. Freeman Co, San Francisco, 1960.

Frisch, R.: Formulazione di un Piano di Sviluppo Nazionale Come Problema di Programmazione Convessa. L' Industria, 1956.

Frisch, R.: Maxima, Dunod, Paris 1960.

Gass, S.I.: Linear Programming: Methods and Applications, Mc Graw Hill, N. York 1958.

Georgescu-Roegen, N.: Some properties of a generalized Leontief Model εἰς Activity Analysis, 1951.

Glicksman, A.M.: Linear Programming and the theory of Games. J. Wiley, N.Y. 1963.

Hadley, G.: Linear Algebra. Addison -Wesley, 1961.

Hausdorff, F.: Set theory. Chelsea Publishing Co. N.Y. 1950.

Haukins, D.: Some Conditions of Macroeconomic Stability Econometrica, XVI (1948).

Heady, F.O.: Simplified Presentation and Logical Aspects of Linear

Programming Technique Journal of Farm Economics Proceedings 1954.

Heady. F.O. and Candller, H.: Linear Programming Methods. The Iowa State College Press. Iowa 1958.

Kantorovirch, L.: Methods of Organizing and Planning Production. Management Science, July 1960.

Kantorovitch, L.: Calcul Economique et Utilisation des Ressources Dunod, Paris, 1963.

Kemeny J., Mirkil H., Thomson G., Snell J.: Finite Mathematical Structures, Prentice Hall 1959.

Koopmans, T. (edited).: Activity Analysis of Production and Allocation. Cowles Commission Monograph 13, John Viley & Sons Jnc., New York, 1951.

Lange, O.: Introduction to Econometrics. Pergamon Press. London 1952.

Lange, O.: The output - inestiment ratio and Input - Output Analysis. Econometrica, April 1960.

Λάζαρη, Α.Α.: Γραμμικὸς Προγραμματισμός. 'Επιθ. Οἰκον. καὶ Πολιτ. 'Επιστημῶν, 1956.

Λάζαρη, Α.Α.: Στοιχεῖα μαθηματικῆς ἀναλύσεως διὰ τὴν σπουδὴν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, 'Αρχεῖον Οἰκονομικῶν καὶ Κοινωνικῶν 'Επιστημῶν, (τόμ. 37). 1957.

Λάζαρη, Α.Α.: The Proportionality assumption in planning. Proceedings of the Palermo Conference on Operational Research in Economics. Vol. 2.

Λάζαρη, Α.: Τὸ Σύστημα Λεόντιεφ. 'Επιθεώρησις Οἰκονομικῶν καὶ Πολιτικῶν 'Επιστημῶν, 1957.

Λάζαρη, Α.: Εἰσροαὶ - 'Εκροαί. Εἰς Λογιστικὴν καὶ Οἰκονομικὴν 'Εγκυκλοπαιδείαν. Τόμος Γ'.

Λάζαρη, Α.: Τεχνολογικαὶ μῆτραι τύπου Λεόντιεφ. 'Επιθ. Οἰκον. καὶ Πολιτ. 'Επιστημῶν, 1959.

Λάζαρη, Α.Α.: Προγραμματισμὸς τῶν ἐπενδύσεων διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν οἰκονομικῶς καθυστερημένων χωρῶν. 'Αθῆναι, 1960.

Λάζαρη, Α.Α.: Οἰκονομετρικὴ διερεύνησις τῆς σχέσεως μεταξὺ ἀποταμιεύσεως καὶ καταναλώσεως. 'Αθῆναι, 1961.

Λάζαρη, Α.Α.: Εἰσαγωγικὰ Μαθήματα Οἰκονομικῆς 'Αναλύσεως. 'Αθῆναι, 1962.

Λάζαρη, Α.Α.: Στοιχεῖα Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ. 'Αθῆναι, 1963

Λάζαρη, Α.Α.: Κριτήρια ἐπιλογῆς καὶ Οἰκονομικὸς Προγραμματισμός, Σπουδαί, τόμος 1964 - 65 (τεῦχ. 2).

Leontief, W.: Structural Matrices and National Economics, Proceedings of the International Statistical Conference, 1947, Vol. V.

Leontief, W.: Recent developments in the Study of inter-industrial relationships. Amer. Econ. Rev., May 1949.

Leontief, W.: The Structure of American Economy 1929-39. Oxford Univ. Press, 1951.

Leontief, W.: Some basic problems of Structural Analysis. Rev. Econ. Stat., February 1952.

Leontief, W. and others: Studies in the Structure of the American Economy. Oxford Univ. Press, 1953.

Lesourne, J.: Technique Economique et Gestion Industrielle, Dunod, Paris, 1958.

Massé, P.: Le Choix des investissements. Dunod, Paris, 1959.

McKinsey, J.: Introduction to the theory of Games. McGraw-ΘHill, N.Y. 1952.

Menderson, B.: Introduction to Topolgy, Blackie and Son, London 1963.

Morgenstern, O.: Economic Activity Analysis. Chapman and Hall Ltd., London 1954.

Μπανταλούκα, Κ.: Ὀργανωτικὴ τῶν Ἐπιχειρήσεων - Διοικητικὴ καὶ Ἐπιτελική. Πειραιεύς, 1964.

National Bureau of Econ. Research: Input - Output Analysis. An Appraisal. Princeton Univ. Press 1955.

Νεγρεπόντη, Μ. - Δελιβάνη: Οἰκονομικὸς Προγραμματισμός. Θεσσαλονίκη, 1963.

Newmann, J. von and Morgestern, O.: Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton Univ. Press, 3rd ed. 1953.

Παπανδρέου, Α.Γ.: Προβλήματα τῆς Πολιτικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναπτύξεως. Εἰς Γραμ. Οἰκ. Ἀνάλυσιν (Ἐκδ. Α.Β.Σ., 1960).

Παπανδρέου, Α.Γ.: Γραμμικὸς Προγραμματισμός. «Σπουδαί», 1959-60. τόμ. 3 - 4.

Παπανδρέου, Α.Γ.: Fundamentals of Model Construction in Macroeconomics. Athens 1962.

Παπανδρέου, Α.Γ.: A. strategy for greek economic development. Athens, 1962.

Παπανδρέου, Α.Γ. καὶ Λάζαρη, Α.Α.: Τμηματικαὶ διαρθρώσεις εἰς τὴν κανονιστικὴν ἀνάλυσιν. Σπουδαί, τόμος 1959 - 60 (τεύχ. 11 - 12).

Papandreou, A.G. - Zohar, Uri: Project Selection for National Plans - York University - Toronto, 1974.

P a p a n d r e o u, A.G. - Z o h a r, U r i : The impact approach to Project Selection - York University - Toronto, 1974.

P a r e t o, V. : Manuel d' Economie Politique. Paris 1907.

P i l l o t o n, F. : Analisi Effetti Indotti nello Schema Leontieviano delle interdipendenze Strutturali. L' Industria 1952 (No 4).

R a d n e r, R. : Notes on the theory of planning. Κέντρον Οἰκον. Ἐρευνῶν. Ἀθῆναι 1963.

R i g h i, C. : Raffronto Fra i Metodi Matricialle e Iterativo per la soluzione dello Schema di Leontief (Nota Tecnica). L' Industria 1952 (No 4).

Σ τ ε ρ ι ώ τ η, Π.Ι. : Γραμμικὸς Προγραμματισμός, Πίναξ Λεόντιεφ καὶ Ἐξισώσεις Διαφορᾶς, 1960.

T i n t n e r, G. : La Teoria dei Giochi, La Programmazione Lineare e l' Analysi delle interdipendenze Strutturali. L' Industria, 1957,.

U. N. E c o n. C o m m i s i o n for A s i a : Programming Techniques for Economic Development, Bangkok, 1960.

U. N. E c o n. C o m m i s s i o n for A s i a : Formulating industrial development Programmes, Bangkok, 1961.

V a j d a, S. : The Theory of Games and Linear Programming. John Wiley & Sons, Inc., N. York, 1956.

V a z s a n y i, A. : Scientific Programming in Business and Industry. John Wiley & Sons, N. York. 1958.

W a d e, T. : Algebra of Vectors and Matrices Addison - Wesley Press, 1951.

W a l r a s, L. : Eléments d' Economie Politique Pure. Paris 1926.

W i l l i a m s, J.D. : The compleat Strategyst. McGraw - Hill, N.Y. 1954.

P a s s a d i e r a, A.O. – [illegible]: [illegible] Techniques [illegible], York University, Toronto, 1970.

P e s t e l, E.: [illegible] of Economic [illegible].

P i l l i n g e r, P.: [illegible] Industry [illegible] interdependence [illegible].

R a d n e r, R.: Notes on the theory of planning, [illegible], Athens, 1963.

R o g h i, G.: Raffronto Fra i Metodi Statistici e Tecnici per la soluzione degli Schemi di Leontief (Input Output) [illegible].

R a s m u s s e n, P.N.: [illegible] Intersectoral [illegible], 1960.

T i n t n e r, G.: La Teoria dei Giochi, la Programmazione Lineare e l'Analisi delle Interdipendenze [illegible], 1953.

U.N. [illegible]: [illegible] Techniques of Economic Development, Bangkok, 1960.

U.N. [illegible]: [illegible] Development Programming, Bangkok, 1961.

V a j d a, S.: The Theory of Games and Linear Programming, John Wiley & Sons, Inc., N. York, 1956.

V a z s o n y i, A.: Scientific Programming in Business and Industry, John Wiley & Sons, N. York, 1958.

W a l d, A.: [illegible] Wiley, New York, 1950.

W a l r a s, L.: Éléments d'économie politique pure, Paris 1926.

W i l l i a m s, J.D.: The Compleat Strategyst, McGraw-Hill, New York, 1954.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ