ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΚΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1913

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πρῶται ἔννοιαι.

1. Πάντες ἔχομεν ἔννοιαν τοῦ *ἑνὸς* καὶ τῶν *πολλῶν* ἢ τοῦ *πλήθους*.

Ὅταν συγκρίνωμεν πλῆθος, συγκείμενον ἐκ πραγμάτων ὁμοίων (ἢ τῶν ὁποίων τὰς διαφορὰς παραβλέπομεν), πρὸς ἓν τῶν πραγμάτων τούτων, σχηματίζομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ *ἀριθμοῦ*.

Ἀριθμὸς εἶναι ἡ ἔννοια, δι' ἧς ὁρίζομεν τὸ πλῆθος, ἤτοι ἐκφράζομεν πόσα εἶναι τὰ πράγματα, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ πλῆθος.

Παραδείγματος χάριν, ὅταν λέγωμεν: *πέντε ἄνθρωποι, τρία πρόβατα*, αἱ λέξεις *πέντε, τρία*, ἐκφράζουσιν ἀριθμούς.

Τὸ ἓν τῶν πραγμάτων, πρὸς ὃ συγκρίνεται τὸ πλῆθος, λέγεται *μονάς*.

Ἀριθμητικὴ λέγεται ἡ ἐπιστήμη, ἡ πραγματευομένη *περὶ τῶν ἀριθμῶν*.

Ἀρίθμησις.

2. *Ἀρίθμησις* πλήθους τινὸς λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ὁρίζει αὐτό. Λέγεται ὅμως ἀρίθμησις καὶ ἡ διδασκαλία περὶ τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς γραφῆς αὐτῶν.

Ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν καὶ γραφὴ αὐτῶν δι' ἰδιαιτέρων σημείων.

3. Ἡ μονάς, ὅταν θεωρῆται ὡς ἀριθμός, λέγεται ἓν καὶ γράφεται διὰ τοῦ σημείου 1.

Ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς δύο, ὅστις γράφεται διὰ τοῦ σημείου 2.

Ἐὰν δὲ εἰς τὸν δύο προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς τρία, ὅστις γράφεται διὰ τοῦ 3.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον (δηλαδή, προσθέτοντες τὴν μονάδα), σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς *τέσσαρα* (4), *πέντε* (5), *ἕξ* (6), *ἑπτά* (7), *ὀκτώ* (8), *ἐννέα* (9), *δέκα*.

Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν οὕτως, ἐφ' ὅσον θέλωμεν, σχηματίζοντες ἐξ ἑκάστου ἀριθμοῦ ἄλλον, ἔχοντα μίαν μονάδα περισσότερον.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, πᾶς ἀριθμὸς ἐμφανίζεται ὡς συγκείμενος ἐκ μονάδων, ἤτοι ὡς πλῆθος μονάδων.

4. Ἀλλ' ἐὰν εἰς ἕκαστον ἀριθμὸν ἐδίδομεν ἴδιον ὄνομα (ὡς ἐκάμαμεν διὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἕν, δύο,... μέχρι τοῦ δέκα), θὰ ἦτο ἀδύνατον νὰ ἐνθυμώμεθα τόσα ὀνόματα. Διὰ τοῦτο οἱ ἄνθρωποι ἐπενόησαν τρόπον νὰ ἐκφράζωσι τοὺς ἀριθμοὺς δι' ὀλίγων διαφόρων λέξεων καὶ νὰ γράφωσιν αὐτοὺς δι' ὀλίγων σημείων ἢ ψηφίων· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Ἀριθμοί τινες λαμβάνονται ὡς νέαι μονάδες καὶ ἐξ αὐτῶν συντίθενται οἱ ἄλλοι.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, ἢ αἱ νέαι αὗται μονάδες, σχηματίζονται ὡς ἑξῆς.

Τὸν ἀριθμὸν δέκα θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα, ἣν καλοῦμεν *δεκάδα*, ἔπειτα τὸν ἐκ δέκα δεκάδων συγκείμενον ἀριθμόν, ἤτοι τὸν *ἑκατόν*, θεωροῦμεν πάλιν ὡς νέαν μονάδα καὶ καλοῦμεν αὐτὴν *ἑκατοντάδα*, ἔπειτα τὸν ἐκ δέκα ἑκατοντάδων συγκείμενον ἀριθμόν, ἤτοι τὸν *χίλια*, θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα καὶ καλοῦμεν *χιλιάδα*.

Οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦμεν σχηματίζοντες ἐκ δέκα μονάδων μίαν νέαν μονάδα καὶ ἔχομεν τὰς ἑξῆς μονάδας.

μονὰς (ἁπλῆ),
δεκάς,
ἑκατοντάς,
χιλιάς,
δεκὰς χιλιάδων ἢ μυριάς,
ἑκατοντὰς χιλιάδων,
μονὰς ἑκατομμυρίου,

δεκὰς ἑκατομμυρίου,
ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου,
μονὰς δισεκατομμυρίου,
δεκὰς δισεκατομμυρίου,
ἑκατοντὰς δισεκατομμυρίου,
μονὰς τρισεκατομμυρίου,
κτλ. κτλ.

5. Ἡ ἁπλῆ μονὰς λέγεται μονὰς *πρώτης τάξεως*, ἡ δεκὰς λέγεται μονὰς *δευτέρας τάξεως*, ἡ ἑκατοντὰς τρίτης, ἡ χιλιὰς τετάρτης, καὶ οὕτω καθεξῆς.

6. Δυνάμεθα τώρα νὰ δείξωμεν, ὅτι *πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἐξ ἑκάστης νὰ μὴ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα*.

Διότι, ἂς φαντασθῇ τις οἱονδήποτε θέλῃ ἀριθμὸν (παραδείγματος χάριν, τὸν ἀριθμὸν τῶν εἴς τινα σάκκον περιεχομένων κόκκων σίτου)· ἐὰν ἑνώσωμεν δέκα μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, θὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν μίαν δεκάδα· ἐὰν ἔπειτα ἑνώσωμεν ἄλλας δέκα μονάδας, θὰ σχηματίσωμεν μίαν νέαν δεκάδα· καὶ ἐὰν οὕτως ἐξακολουθῶμεν, θὰ χωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς δεκάδας· θὰ περισσεύσουν δὲ καὶ μονάδες ἁπλαῖ (ἂν περισσεύσουν), ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα· διότι, ἂν ἔμενον δέκα, θὰ ἐγίνετο ἐξ αὐτῶν ἄλλη μία δεκάς.

Ἐὰν ἔπειτα κάμωμεν εἰς τὰς δεκάδας ὅ,τι ἐκάμαμεν εἰς τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἐάν, δηλονότι, ἑνώσωμεν αὐτὰς ἀνὰ δέκα, θὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν ἑκατοντάδας τινὰς καὶ θὰ μείνωσιν (ἂν μείνωσι) καί τινες δεκάδες, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα.

Ἐὰν ἔπειτα ἑνώσωμεν ὁμοίως καὶ τὰς ἑκατοντάδας, θὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν χιλιάδας τινάς· ἐνδέχεται δὲ νὰ μείνωσι καί τινες ἑκατοντάδες, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα.

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως, θὰ φθάσωμεν ἀναγκαίως εἰς τάξιν τινὰ μονάδων, ἥτις δὲν θὰ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα καὶ ἐπομένως δὲν θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ ἐξ αὐτῶν μονὰς ἀνωτέρας τάξεως (θὰ συμβῇ δὲ τοῦτο· διότι, εἰς ἑκάστην τάξιν, ὅσον προχωροῦμεν, τόσον αἱ μονάδες γίνονται ὀλιγώτεραι). Τότε ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι ἀναλελυμένος εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ εἰς ἑκάστην τάξιν θὰ εἶναι μονάδες ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα. Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀποτελεσθῇ ἐκ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων χωρὶς νὰ ληφθῶσιν ἐκ μηδεμιᾶς περισσότεραι τῶν ἐννέα.

7. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι, ἵνα ἐκφράσωμεν ἀριθμόν τινα, ἀρκεῖ νὰ δηλώσωμεν πόσας μονάδας ἑκάστης τάξεως περιέχει.

Παραδείγματος χάριν, ἀριθμός τις εἶναι ἐντελῶς εἰς ἡμᾶς γνωστὸς καὶ ὡρισμένος, ὅταν εἰξεύρωμεν, ὅτι σύγκειται:
ἐκ πέντε χιλιάδων, ὀκτὼ ἑκατοντάδων, ἑπτὰ δεκάδων καὶ ἓξ μονάδων.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, δυνάμεθα δι' ὀλίγων διαφόρων λέξεων νὰ ὀνομάσωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμῶν· διότι ἀρκοῦσι τὰ ὀνόματα τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν καὶ τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων.

8. Ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων ὁδηγεῖ καὶ εἰς τὴν γραφὴν αὐτῶν διὰ τῶν σημείων ἢ ψηφίων.

Ἐάν, τῷ ὄντι, γράφωμεν διὰ τῶν ἐννέα ψηφίων τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως (ὅστις ἀριθμὸς δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἐννέα) καὶ προσαρτῶμεν εἰς ἕκαστον ψηφίον τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ, δηλοῦται ἐπαρκῶς πᾶς ἀριθμός· οἷον

6 δεκάδες καὶ 7 μονάδες·
5 ἑκατοντάδες, 3 δεκάδες καὶ 9 μονάδες·
3 χιλιάδες, 2 ἑκατοντάδες, 8 δεκάδες καὶ 4 μονάδες.

Ἀλλὰ τώρα παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ ἕκαστον ψηφίον, εἶναι περιττὸν νὰ γράφηται· διότι τοῦτο γίνεται δῆλον ἐκ τῆς θέσεως τοῦ ψηφίου, ὅταν τὰ ψηφία γραφῶσι κατὰ σειράν· οἷον

ἀντὶ: 6 δεκάδες καὶ 7 μονάδες, γράφεται 67·
ἀντὶ: 5 ἑκατοντ., 3 δεκάδες καὶ 9 μονάδες, γράφεται 539·
ἀντὶ: 3 χιλ., 2 ἑκατοντ., 8 δεκάδες καὶ 4 μονάδες, γράφεται 3284·
κάμνομεν δηλαδὴ τὴν ἑξῆς συμφωνίαν. *Ἕκαστον ψηφίον, γεγραμμένον ὄπισθεν ἄλλου* (πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ), *δηλοῖ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ ἄλλο ψηφίον*· ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον δηλοῖ ἁπλᾶς μονάδας ἢ πρώτης τάξεως, τὸ προτελευταῖον δηλοῖ δεκάδας ἢ μονάδας δευτέρας τάξεως, τὸ πρὸ αὐτοῦ δηλοῖ ἑκατοντάδας ἢ μονάδας τρίτης τάξεως, τὸ πρὸ τούτου χιλιάδας, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ἡ σημασία ἑκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεώς του.

9. Ὅταν ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον γράφομεν διὰ ψηφίων, δὲν ἔχῃ μονάδας τάξεώς τινος, ἡ θέσις τῶν μονάδων τῆς τάξεως ταύτης δὲν πρέπει νὰ μένῃ κενή· διότι τότε τὰ προηγούμενα ψηφία χάνουσι τὴν θέσιν των καὶ ὑποβιβάζονται.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ὁ ἀριθμὸς

5 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες, γραφῇ ὡς ἑξῆς: 57,

τὸ ψηφίον 5, κατὰ τὴν ἀνωτέρω γενομένην συνθήκην, δηλοῖ 5 δεκάδας καὶ ὄχι 5 ἑκατοντάδας· πρέπει λοιπὸν νὰ γραφῇ σημεῖόν τι εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων, διὰ νὰ ἔλθῃ τὸ 5 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων· διὰ τοῦτο ἐπενοήθη τὸ σημεῖον 0 (μηδὲν ἢ μηδενικόν), ὅπερ αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ δὲν ἔχει ἀξίαν, χρησιμεύει δὲ μόνον εἰς τὸ νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἵτινες λείπουσιν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ· (τὰ λοιπὰ ψηφία, ὡς ἔχοντα ἀξίαν, λέγονται πρὸς διάκρισιν *σημαντικὰ ψηφία*)*.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς

5 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες γράφεται 507·

ὁ ἀριθμὸς 8 χιλιάδες καὶ 5 δεκάδες γράφεται 8 050·

ὁ δὲ ἀριθμὸς 3 ἑκατομμύρια, 4 χιλιάδες γράφεται 3 004 000.

Ἐπίσης, 5870 σημαίνει

5 χιλιάδας, 8 ἑκατοντάδας καὶ 7 δεκάδας·

τὸ δὲ 13870 σημαίνει

1 μυριάδα, 3 χιλιάδας, 8 ἑκατοντάδας καὶ 7 δεκάδας.

Σημείωσις. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων γράφονται ὡς ἑξῆς:

1, 10, 100, 1000, 10000, κτλ.

10. Ἡ διὰ τῶν ψηφίων γραφὴ τῶν ἀριθμῶν εἶναι μία ἐκ τῶν εὐφυεστάτων ἐπινοήσεων τοῦ ἀνθρώπου· διότι καὶ σύντομος εἶναι καὶ δέκα μόνον σημεῖα χρειάζεται (διὰ τοῦτο δὲ καὶ τὰς πράξεις τῶν ἀριθμῶν καθιστᾷ εὐκολωτέρας), ἐν ᾧ ἡ διὰ λέξεων γραφὴ αὐτῶν καὶ μακροτέρα εἶναι καὶ μέγα πλῆθος λέξεων ἀπαιτεῖ. Στηρίζεται δὲ ἡ διὰ τῶν ψηφίων γραφή, ὡς εἴδομεν, πρῶτον μὲν ἐπὶ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων καὶ δεύτερον ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω εἰρημένης συμφωνίας (ἐδ. 8).

---

* Τὰ ψηφία ταῦτα λέγονται καὶ ἀραβικοὶ χαρακτῆρες· διότι ἡμεῖς ἐμάθομεν αὐτὰ παρὰ τῶν Ἀράβων (περὶ τὸν 12ον αἰῶνα μ. Χ.) Ἡ ἐφεύρεσις ὅμως αὐτῶν καὶ ἡ μέθοδος τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐπινόησις τῶν Ἰνδῶν, παρὰ τῶν ὁποίων ἔμαθον αὐτὴν οἱ Ἄραβες.

Σημείωσις.

Ἡ ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν, ὡς ἐξετέθη ἐν τοῖς προηγουμένοις, εἶναι θεωρητικῶς τελεία· ἀλλ' ἐν ἑκάστῃ γλώσσῃ γίνονται τροποποιήσεις τινὲς εἰς τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν· μένουσι λοιπὸν λεπτομέρειαί τινες, πρὸς συμπλήρωσιν τῶν περὶ ὀνοματολογίας εἰρημένων.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν δεκάδων ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς λέξεων: *δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐνενήκοντα.*

Οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν ἑκατοντάδων ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς: *ἑκατόν, διακόσια, τριακόσια, τετρακόσια, πεντακόσια, ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἐνεακόσια.*

Οἱ ἀριθμοί, οἱ μικρότεροι τοῦ χίλια, δύνανται νὰ περιέχωσιν ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας ἁπλᾶς, τὸ δὲ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν ἑκατοντάδων του καὶ ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν δεκάδων του καὶ ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν ἁπλῶν μονάδων του· παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει δύο δεκάδας καὶ ὀκτὼ μονάδας, ἀπαγγέλλεται *εἴκοσιν ὀκτώ·* ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει πέντε ἑκατοντάδας, καὶ τρεῖς δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας, ἀπαγγέλλεται *πεντακόσια τριάκοντα ἑπτά·* καὶ ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει πέντε ἑκατοντάδας καὶ δύο δεκάδας, ἀπαγγέλλεται *πεντακόσια εἴκοσι.*

Ἀντὶ δέκα ἕν, δέκα δύο, λέγομεν *ἕνδεκα, δώδεκα.*

Οἱ μεταξὺ τοῦ χίλια καὶ τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυρίου περιεχόμενοι ἀριθμοί, δύνανται νὰ ἔχωσιν ἑκατοντάδας χιλιάδος, δεκάδας χιλιάδος καὶ μονάδας χιλιάδος, ἔτι δὲ καὶ ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας ἁπλᾶς· τουτέστι, σύγκεινται ἐκ τινων χιλιάδων (αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν χιλίων· διότι, χίλιαι χιλιάδες ἀποτελοῦσιν ἓν ἑκατομμύριον) καὶ ἔκ τινος ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια (τὸ δεύτερον τοῦτο μέρος δύναται καὶ νὰ λείπῃ) καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν σύγκειται ἐκ τῶν ὀνομάτων τῶν δύο μερῶν του· οἷον, ὁ ἀριθμὸς 215 873 ἀπαγγέλλεται: διακόσιαι δέκα πέντε χιλιάδες καὶ ὀκτακόσια ἑβδομήκοντα τρία.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 610 307 ἀπαγγέλλεται: ἑξακόσιαι δέκα χιλιάδες καὶ τριακόσια ἑπτά· καὶ ὁ ἀριθμὸς 67 000 ἀπαγγέλλεται: ἑξήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες.

Οἱ μεταξὺ τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυρίου καὶ τοῦ ἑνὸς δισεκατομμυρίου ὑπάρχοντες ἀριθμοὶ σύγκεινται ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἑκατομμυρίων (ὅστις θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ χίλια) καὶ ἔκ τινος ἀριθμοῦ χιλιάδων (ὅστις θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ χίλια καὶ δύναται καὶ ὅλως νὰ λείπῃ) καὶ ἔκ τινος ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια (ὅστις δύναται καὶ νὰ λείπῃ)· καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν σύγκειται ἐκ τῶν τριῶν ὀνομάτων τῶν τριῶν μερῶν του· οἷον, ὁ ἀριθμὸς 315 897 504 ἀπαγγέλλεται: τριακόσια δέκα πέντε ἑκατομμύρια, ὀκτακόσιαι ἐνενήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες καὶ πεντακόσια τέσσαρα· ὁ δὲ ἀριθμὸς 58 004 310 ἀπαγγέλλεται: πεντήκοντα ὀκτὼ ἑκατομμύρια, τέσσαρες χιλιάδες καὶ τριακόσια δέκα.

Ὁμοίως σχηματίζομεν τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν, τῶν μεταξὺ τοῦ ἑνὸς δισεκατομμυρίου καὶ τοῦ ἑνὸς τρισεκατομμυρίου περιεχομένων· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν, θεωροῦμεν αὐτοὺς ὡς συγκειμένους ἐκ μερῶν, τὰ ὁποῖα εἶναι μονάδες, χιλιάδες, ἑκατομμύρια, δισεκατομμύρια, κτλ. Αἱ μονάδες αὗται, ἤτοι οἱ ἀριθμοί, *ἕν, χίλια, ἑκατομμύριον*, κτλ., λέγονται *πρωτεύουσαι* καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ χιλίων μονάδων τῆς ἀμέσως προηγουμένης τάξεως.

Περὶ διαφόρων συστημάτων ἀριθμήσεως.

11. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν ἐν ἀρχῇ καὶ ἐκ τῶν ὁποίων συντίθενται οἱ ἀριθμοί, προχωροῦσιν οὕτως, ὥστε ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι δεκαπλασία τῆς ἀμέσως προηγουμένης· δηλαδή, ἑκάστη περιέχει δεκάκις τὴν προηγουμένην. Ἐκφράζομεν δὲ ἕκαστον ἀριθμόν, δεικνύοντες πόσας μονάδας ἑκάστης τάξεως περιέχει ὁ ἀριθμὸς οὗτος. Εἰς δὲ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν διὰ σημείων, ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων χωρὶς νὰ ληφθῶσιν ἔκ τινος τάξεως περισσότεραι τῶν ἐννέα, παραδεχόμεθα ἐννέα σημεῖα ἢ ψηφία, πρὸς παράστασιν τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν καὶ συμφωνοῦμεν, ὅτι τὸ αὐτὸ ψηφίον θὰ παριστᾷ μονάδας διαφόρων τάξεων, κατὰ τὴν θέσιν αὐτοῦ· ἤτοι, ἁπλᾶς μὲν μονάδας, ἐὰν κατέχῃ τὴν πρώτην ἐκ δεξιῶν θέσιν· δεκάδας δέ, ἐὰν κατέχῃ τὴν δευτέραν θέσιν, ἑκατοντάδας, ἐὰν τὴν τρίτην· καὶ οὕτω καθεξῆς. Στηριζόμενοι δὲ εἰς τὴν συνθήκην ταύτην (καὶ εἰς τὸν σχηματισμόν τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν πάντα ἀριθμὸν διὰ ψηφίων· διότι, ἀρκεῖ, πρὸς τοῦτο, νὰ γράψωμεν πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, κατόπιν αὐτοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι δυνατὸν ὁ ἀριθμὸς νὰ μὴ ἔχῃ μονάδας τάξεώς τινος (ἐκ τῶν κατόπιν τῆς ἀνωτάτης ἐρχομένων), διὰ τοῦτο χρειάζεται καὶ δέκατον σημεῖον, τὸ 0, τὸ ὁποῖον γράφεται εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας δὲν ἔχει ὁ ἀριθμός.

12. Ἀλλ᾽ εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἠδύναντο καὶ ἄλλως νὰ σχηματισθῶσιν· ἠδυνάμεθα, π. χ., ἀντὶ νὰ λάβωμεν, κατὰ προτίμησιν, τὸν 10, νὰ λάβωμεν οἱονδήποτε ἄλλον ἀριθμόν, οἷον τὸν 8, καὶ νὰ σχηματίσωμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, οὕτως, ὥστε ἑκάστη νὰ εἶναι ὀκταπλασία τῆς ἀμέσως προηγουμένης, δηλαδὴ νὰ περιέχῃ αὐτὴν ὀκτάκις· τότε, μονὰς δευτέρας τάξεως θὰ ἦτο ὁ ἀριθμὸς ὀκτὼ (ἢ ἡ ὀκτάς), μονὰς τρίτης τάξεως ὁ ὀκτάκις ὀκτὼ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τότε δέ, ἵνα ἐκφράσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς διὰ λέξεων πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὰς διαφόρους ταύτας μονάδας ἴδια ὀνόματα· καὶ νὰ δεικνύωμεν δι᾽ ἕκαστον ἀριθμὸν πόσας μονάδας ἐξ ἑκάστης τάξεως περιέχει· θὰ περιέχῃ δὲ τότε πᾶς ἀριθμὸς ὀλιγωτέρας τῶν ὀκτὼ μονάδων ἐξ ἑκάστης τάξεως· (ἄλλως θὰ ἐσχηματίζετο ἐξ αὐτῶν μία ἀκόμη μονὰς τῆς ἀμέσως μεγαλητέρας). Διὰ δὲ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, ἐὰν παραδεχθῶμεν τὴν αὐτὴν συμφωνίαν, (ὅτι, δηλαδή, τὸ αὐτὸ ψηφίον παριστᾷ μονάδας διαφόρων τάξεων, κατὰ τὴν θέσιν του), θὰ ἐχρειάζοντο τότε μόνον ὀκτὼ σημεῖα· τουτέστι τὰ ἑπτὰ πρῶτα σημαντικὰ ψηφία καὶ τὸ 0.

Παραδείγματος χάριν, ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ὁ ἀριθμὸς ὀκτὼ θὰ γράφηται ὡς ἑξῆς: 10, ὁ ἐννέα 11, ὁ δέκα 12, κτλ., ὁ ὀκτάκις ὀκτὼ 100· ὁ δὲ ἑκατὸν ὡς ἑξῆς: 144· κτλ.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθῶσιν ἄπειρα συστήματα ἀριθμήσεως, διακρινόμενα ἀπ᾽ ἀλλήλων ἐκ τῆς *βάσεως*, ἤτοι, ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀκολούθου.

Εἰς πᾶν δὲ σύστημα ἀριθμήσεως πάντες οἱ ἀριθμοὶ γράφονται διὰ τόσων ψηφίων, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τῆς βάσεως.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 12, 17, 40 εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα. ('Απ. 14, 21, 50).

2) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος: 70, 107, 43, εἰς ἀριθμοὺς τοῦ δεκαδικοῦ ('Απ. 56, 71, 35).

3) Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς χίλια εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα. ('Απ. 1111101000).

4) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 101010 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος, εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ. ('Απ. 42).

5) Ἐὰν εἰς ἀριθμόν, ἔχοντα δύο ἢ περισσότερα ψηφία, παραλείψωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, προκύπτει ἄλλος ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πόσας δεκάδας περιέχει ἐν συνόλῳ ὁ πρῶτος· ἤτοι, πόσας δεκάδας ἀποτελοῦσι πᾶσαι αἱ μονάδες του, ἑνούμεναι ἀνὰ δέκα.

Ἐὰν δὲ παραλείψωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία, ὁ προκύπτων νέος ἀριθμὸς δεικνύει πόσας ἑκατοντάδας περιέχει ἐν συνόλῳ ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

Ἐὰν δὲ παραλείψωμεν τὰ τρία τελευταῖα, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς δεικνύει πόσας χιλιάδας περιέχει ὁ δοθείς· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 58 709 περιέχει ἐν συνόλῳ δεκάδας μὲν 5870, ἑκατοντάδας δὲ 587, χιλιάδας δὲ 58, μυριάδας δὲ 5.

6) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ τοῦ τριαδικοῦ συστήματος: 100, 200, 210, εἰς ἀριθμοὺς τοῦ πενταδικοῦ. ('Απ. 14, 33, 41).

7) Εἰς ποῖον σύστημα ἀριθμήσεως ὁ ἀριθμὸς ὀγδοήκοντα ἓν γράφεται ὡς ἑξῆς: 100;

Περὶ τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος.

13. Ἴσοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅταν ἑκάστη μονὰς τοῦ ἑνὸς ἔχῃ μίαν τοῦ ἄλλου ἀντίστοιχον καὶ τἀνάπαλιν.

Παραδείγματος χάριν, εἰς πλῆθός τι ἀρτιμελῶν ἀνθρώπων, ὁ ἀριθμὸς τῶν δεξιῶν χειρῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀριστερῶν εἶναι ἴσοι.

14. *Ἄνισοι* δὲ λέγονται, ὅταν μονάδες τινὲς τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχωσιν ἀντιστοίχους εἰς τὸν ἄλλον· τότε, ὁ πρῶτος, ὁ τὰς περισσοτέρας μονάδας ἔχων, λέγεται *μεγαλήτερος* τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος *μικρότερος* τοῦ πρώτου.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 10 εἶναι μεγαλήτερος τοῦ 9, ὡς ἔχων μίαν μονάδα περισσοτέραν.

Σημεῖον τῆς ἰσότητος εἶναι τὸ ἑξῆς: $=$· γράφεται δὲ μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν· οἷον $8=8$.

Σημεῖον τῆς ἀνισότητος εἶναι τὸ ἑξῆς: $<$· γράφεται δὲ ὁ μικρότερος ἀριθμὸς πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας· οἷον

$$8<9, \qquad 12<14, \qquad 8>3.$$

15. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος τῶν ἀριθμῶν γίνονται φανεραὶ ἀμέσως αἱ ἑξῆς ἰδιότητες αὐτῆς.

α΄) *Οἱ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἴσοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἴσοι.*

β΄) *Ἐὰν εἰς ἑκάτερον τῶν ἴσων ἀριθμῶν προστεθῇ μία μονάς, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.*

Διότι αἱ προστεθεῖσαι δύο μονάδες ἀντιστοιχοῦσι πρὸς ἀλλήλας.

Καὶ γενικῶς:

ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος δὲ ταύτης ἕπεται ἀμέσως ἡ ἑξῆς.

Οἱ διπλάσιοι τῶν ἴσων εἶναι ἴσοι καὶ οἱ τριπλάσιοι τῶν ἴσων εἶναι ἴσοι καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐάν, δηλαδή, λάβωμεν ἑκάτερον τῶν ἴσων δύο φοράς, προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν ἀριθμοὶ ἴσοι· καὶ ἐὰν λάβωμεν ἑκάτερον τῶν ἴσων τρεῖς φοράς, προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν ἀριθμοὶ ἴσοι· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Καὶ ἡ ἀνισότης ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας, αἵτινες εἶναι πρόδηλοι.

Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, οἱ ἀριθμοὶ μένουσιν ἄνισοι.

Οἱ διπλάσιοι τῶν ἀνίσων εἶναι ὁμοίως ἄνισοι καὶ οἱ τριπλάσιοι τῶν ἀνίσων εἶναι ὁμοίως ἄνισοι καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐάν, δηλαδή, λάβωμεν ἑκάτερον τῶν ἀνίσων δύο φοράς, προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν ἀριθμοὶ ἄνισοι (ἐκ τοῦ μεγαλητέρου ὁ μεγαλήτερος)· καὶ ἂν λάβωμεν ἑκάτερον τῶν ἀνίσων τρεῖς φοράς, προκύπτουσιν ὁμοίως ἄνισοι· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁρισμοί.

Ἀξίωμα λέγεται πρότασις ἀφ' ἑαυτῆς φανερά.

Ἀξίωμα, λόγου χάριν, εἶναι ἡ ἑξῆς πρότασις.

Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἑνωθῇ πλῆθός τι μονάδων, πάντοτε ἀποτελεῖται ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἢ καὶ ἡ ἑξῆς·

Παντὸς ἀριθμοῦ ὑπάρχει μεγαλήτερος.

Ἀπόδειξις λέγεται συλλογισμὸς (ἢ πολλοὶ συλλογισμοί), δι' οὗ πειθόμεθα, ὅτι πρότασίς τις εἶναι ἀληθής.

Θεώρημα δὲ λέγεται ἡ πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως.

Θεώρημα, λόγου χάριν, εἶναι ἡ ἑξῆς πρότασις.

Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ εἰς ἑκάστην τάξιν νὰ μὴ εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα· (τὴν ἀπόδειξιν ἰδὲ εἰς τὸ ἐδ. 6).

Πόρισμα δὲ λέγεται πρότασις, στηριζομένη ἀμέσως ἐπὶ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων.

Πρόβλημα ἀριθμητικὸν λέγεται πρότασις, ἐν ᾗ ζητεῖται, ἐκ δοθέντων ἀριθμῶν νὰ εὑρεθῇ ἄλλος ἀριθμὸς ἢ ἄλλοι ἀριθμοί.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α′

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

16. *Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί*.

Οἱ εἰς πρόσθεσιν δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται *προσθετέοι*· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται *κεφάλαιον* ἢ *ἄθροισμα*.

Τὸ ἄθροισμα σημειοῦται, ἐὰν γραφῶσιν οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν καὶ τεθῇ μεταξὺ ἑκάστου αὐτῶν καὶ τοῦ ἑπομένου τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως, ἤτοι τὸ $+$· (ὅπερ ἀναγινώσκεται *σύν*).

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 8 παρίσταται ὡς ἑξῆς $5+8$· ἀναγινώσκεται δὲ πέντε σὺν ὀκτώ.

17. Τὸ ἄθροισμα δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς ἐντελῶς ὡρισμένος· διότι εἶναι δεδομέναι πᾶσαι αἱ μονάδες, αἵτινες θὰ ἀποτελέσωσιν αὐτόν. *Εἶναι λοιπὸν ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται· ἀρκεῖ νὰ ληφθῶσι πᾶσαι*.

Σημείωσις. Οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ ὑποτίθεται, ὅτι παριστῶσιν ὁμοειδῆ ποσά· καὶ τὸ ἄθροισμα εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς· ἀλλὰ τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα παριστῶσιν οἱ ἀριθμοί, εἶναι ἀδιάφορα ὡς πρὸς τὰς πράξεις, τὰς ὁποίας κάμνομεν ἐπ' αὐτῶν καὶ ὡς πρὸς τὰς σχέσεις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους· καθώς, λόγου χάριν, δύο πρόβατα καὶ δύο πρόβατα κάμνουν τέσσαρα πρόβατα, οὕτω καὶ δύο μῆλα καὶ δύο μῆλα κάμνουν τέσσαρα μῆλα, καὶ οὕτω καθεξῆς· πάντοτε δύο καὶ δύο κάμνουν τέσσαρα, ἀρκεῖ νὰ εἶναι ὁμοειδῆ. Διὰ τοῦτο ἐν τῇ ἀριθμητικῇ θεωροῦμεν συνήθως τοὺς ἀριθμοὺς ὡς *ἀφῃρημένους*, δηλαδὴ ὡς ἀριθμοὺς ἁπλῶς, χωρὶς νὰ ὁρίζωμεν καὶ τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον οἱ ἀριθμοὶ παριστῶσιν· οἷον ὀκτώ, δύο, δέκα, κτλ. Ὅταν δὲ ὁρίζωμεν καὶ τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον οἱ ἀριθμοὶ παριστῶσι, τότε οἱ ἀριθμοὶ λέγονται *συγκεκριμένοι*· οἷον, ὀκτὼ ἄνθρωποι, τρία ἔτη, πέντε ὀκάδες, κτλ.

Πρόσθεσις κατὰ τὰς ἁπλουστάτας περιπτώσεις

18. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν δύο μονοψηφίους ἀριθμούς· οἷον, τοὺς 7 καὶ 3. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα, προσθέτομεν εἰς τὸν 7 τὰς μονάδας τοῦ 3, τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην· ἤτοι λέγομεν: 7 καὶ 1 κάμνουν 8· καὶ 1 κάμνουν 9· καὶ 1 κάμνουν 10.

Ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 7 τὰς μονάδας τοῦ 3, δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 3 τὰς μονάδας τοῦ 7· εἶναι δὲ προφανές, ὅτι θὰ εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα πάλιν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 10· διότι τὸ ἄθροισμα σχηματίζεται ἐξ 7 μονάδων καὶ ἐκ 3 μονάδων· εἶναι δὲ ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται.

Σημείωσις. Τὴν πρόσθεσιν δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· διότι εὐκόλως μανθάνομεν νὰ ἐνθυμώμεθα τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν.

19. Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, προσθέτομεν δύο ἐξ αὐτῶν· ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμα τούτων προσθέτομεν ἕνα ἄλλον· εἰς τὸ νέον ἄθροισμα ἕνα ἄλλον· καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 6, 8, 2, 5, 6, 9, λέγομεν 6 καὶ 8 κάμνουν 14· 14 καὶ 2 κάμνουν 16· 16 καὶ 5 κάμνουν 21· 21 καὶ 6 κάμνουν 27· καὶ τέλος 27 καὶ 9 κάμνουν 36· (τὰς διαδοχικὰς ταύτας προσθέσεις ἐκτελοῦμεν ἢ ἀπὸ μνήμης ἢ προσθέτοντες εἰς τὸν πολυψήφιον τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου, μίαν μετ' ἄλλην)· ἐπομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι 36.

Σημειωτέον δέ, ὅτι, καὶ κατ' ἄλλην τάξιν, οἱανδήποτε, ἂν λάβωμεν καὶ προσθέσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ εὕρωμεν· διότι, τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖται ἐκ πασῶν τῶν μονάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· εἶναι δὲ ἀδιάφορον πῶς θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται· λόγου χάριν, ἠδυνάμεθα νὰ ἑνώσωμεν αὐτὰς ὡς ἑξῆς: λαμβάνομεν μίαν μονάδα τοῦ 6 καὶ προσθέτομεν αὐτὴν εἰς τὸν 9, ὅτε τοῦτο γίνεται 10, τὸ δὲ 6 γίνεται 5· τότε τὰ δύο 5 κάμνουν καὶ ἄλλο 10 καὶ τὸ 8 καὶ 2 κάμνουν ἄλλο 10· ἔχομεν λοιπὸν 30· τοῦτο, μετὰ τοῦ ἄλλου 6, ἀποτελεῖ τέλος τὸν 36.

Πρόσθεσις ὁσωνδήποτε καὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

20. Πᾶσα πρόσθεσις ἀνάγεται εἰς τὴν ἁπλῆν πρόσθεσιν μονοψηφίων ἀριθμῶν· διότι, εἶναι φανερόν, ὅτι, ἵνα προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε ἀριθμούς, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας αὐτῶν, χωριστὰ τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας, κτλ., καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἔπειτα πάντα τὰ ἀθροίσματα ταῦτα· διότι τότε ἑνοῦνται πᾶσαι αἱ μονάδες τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ σχηματίζουσιν ἕνα μόνον, ὅστις θὰ εἶναι ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμούς:

2 955 408 1 296.

Ἡ πρᾶξις, χάριν εὐκολίας, διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 2\,955 \\ 408 \\ 1\,296 \\ \hline 4\,659 \end{array}$$

Γράφομεν, δηλονότι, τοὺς ἀριθμοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον, οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ἔπειτα ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς ταύτης γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ ἀθροίσματος, καθ' ὅσον εὑρίσκομεν αὐτά.

Κατὰ πρῶτον προσθέτομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας, λέγοντες: 6 καὶ 8 κάμνουν 14· καὶ 5 κάμνουν 19· τὸ ἄθροισμα τῶν ἁπλῶν μονάδων εἶναι λοιπὸν 19 μονάδες· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἔχει μίαν δεκάδα καὶ 9 μονάδας, γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων μόνον τὸ ψηφίον 9 τῶν μονάδων καὶ *κρατοῦμεν* τὴν μίαν δεκάδα, διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μετὰ τῶν δεκάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, λέγομεν: 1 τὸ *κρατούμενον* καὶ 9 κάμνουν 10· καὶ 5 κάμνουν 15· τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων εἶναι λοιπὸν 15 δεκάδες, ἤτοι 1 ἑκατοντὰς καὶ 5 δεκάδες· καὶ τὸ μὲν ψηφίον 5 τῶν δεκάδων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, τὴν δὲ ἑκατοντάδα κρατοῦμεν διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μετὰ τῶν ἑκατοντάδων τῶν προσθετέων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ 2 κάμνουν 3· καὶ 4 κάμνουν 7· καὶ 9 κάμνουν 16· τὸ ἄθροισμα τῶν ἑκατοντάδων εἶναι λοιπὸν 16 ἑκατοντάδες· τουτέστι 1 χιλιὰς καὶ 6 ἑκατοντάδες· καὶ τὸ μὲν ψηφίον 6 τῶν ἑκατοντάδων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, τὴν δὲ μίαν χιλιάδα κρατοῦμεν διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μετὰ τῶν χιλιάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες τέλος εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων, λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ 1 κάμνουν 2· καὶ 2 κάμνουν 4· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν χιλιάδων εἶναι 4 χιλιάδες καὶ τὸ ψηφίον 4 τῶν χιλιάδων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων.

Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι 4659.

Κανὼν τῆς προσθέσεως.

21. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς προσθέσεως.

Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον, οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμήν. Ἔπειτα προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς στήλης τῶν ἁπλῶν μονάδων· καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων μιᾶς στήλης δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς αὐτῆς στήλης· ἐὰν ὅμως ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος ὑποκάτω τῆς στήλης, τὰς δὲ δεκάδας αὐτοῦ προσθέτομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρι τῆς τελευταίας στήλης.

Σημείωσις. Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἰς ἑκάστην στήλην δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, εἶναι ἀδιάφορον, ἂν ἀρχίζωμεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τῆς προσθέσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ προχωρῶμεν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἢ ἂν ἀρχίζωμεν ἀπὸ τῆς προσθέσεως τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ προχωρῶμεν πρὸ τὰ δεξιά. Τοῦτο συμβαίνει, π.χ., εἰς τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν

$$\begin{array}{r} 542 \\ 114 \\ 321 \\ 12 \\ \hline 989. \end{array}$$

Ἀλλ' ὅταν τὸ ἄθροισμα μιᾶς στήλης (ἢ καὶ περισσοτέρων) ὑπερβαίνῃ τὸν 9, ἐὰν ἠρχίζαμεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, θὰ ἤμεθα ἠναγκασμένοι νὰ ἀλλάζωμεν τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον ἐγράψαμεν· π. χ., εἰς τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν

$$\begin{array}{l} 4854 \\ 797 \\ 1568 \\ \hline 5 \\ 71 \\ \dots\dots \\ 7319. \end{array}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν μυριάδων εἶναι 5· ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν χιλιάδων λαμβάνομεν προσέτι 2 μυριάδας· ὥστε τὸ πρῶτον ψηφίον 5 πρέπει νὰ γίνῃ 7. Ὁμοίως τὸ δεύτερον ψηφίον ἀπὸ 1 πρέπει νὰ γίνῃ 3· κτλ.

Διὰ τοῦτο ἀρχόμεθα πάντοτε ἀπὸ τῆς στήλης τῶν ἁπλῶν μονάδων.

Βάσανος τῆς προσθέσεως.

22. *Βάσανος ἢ δοκιμὴ πράξεώς τινος λέγεται ἄλλη τις πρᾶξις, δι' ἧς ἐξελέγχομεν, ἂν ἡ πρώτη ἐγένετο ἄνευ λάθους.*

Ἡ βάσανος τῆς προσθέσεως γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρᾶξιν, προσθέτοντες τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης, κατ' ἄλλην τάξιν· ἤτοι, ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἂν προηγουμένως προεβαίνομεν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω· ἢ καὶ ἄλλως ἀτάκτως. Ἐὰν καὶ πάλιν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις, ὅτι ἡ πρόσθεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

23. Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως, ἐξ ἧς πᾶσαι αἱ ἄλλαι αὐτῆς ἰδιότητες πηγάζουσιν, εἶναι ἡ ἑξῆς.

Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν μένει τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προστεθῶσιν.

Διότι, ὡς καὶ προηγουμένως παρετηρήσαμεν (ἐδ. 17), τὸ ἄθροισμα θὰ ἀποτελεσθῇ ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν μονάδων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν. πᾶς δὲ ἀριθμὸς εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος, ὅταν δοθῶσιν αἱ μονάδες, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσιν αὐτόν.

Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος ἕπονται αἱ ἑξῆς.

1) Δυνάμεθα εἰς πᾶν ἄθροισμα νὰ ἀντικαταστήσωμεν προσθετέους τινὰς διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος αὐτῶν.

Δυνάμεθα, δηλονότι, νὰ συμπτύξωμεν προσθετέους τινὰς εἰς ἕνα μόνον.

Ἂς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς 8, 12, 10, 4, 25· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, καὶ ὅταν, ἀντὶ τῶν προσθετέων 10 καὶ 4, λάβωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 14· ἤτοι, οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 14, 25 θὰ δώσωσι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα ὡς καὶ οἱ δοθέντες ἀριθμοί.

Ἀπόδειξις. Διότι, κατὰ τὴν προειρημένην θεμελιώδη ἰδιότητα, δύναμαι νὰ προσθέσω τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλω· ἂν λοιπὸν ἀρχίσω τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τῶν 10 καὶ 4, θὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα 14 καὶ θὰ ἔχω ἔπειτα νὰ προσθέσω τοὺς ἀριθμοὺς 14, 8, 12, 25· ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων εἶναι εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἡ ἰδιότης αὕτη δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

Εἰς πᾶν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἱονδήποτε προσθετέον δι' ἄλλων ἀριθμῶν, ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα.

Τουτέστι δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα προσθετέον εἰς πολλοὺς ἄλλους.

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 14, 8, 12, 25, δύναμαι πάλιν νὰ ἀντικαταστήσω τὸν 14 διὰ τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 4, οἵτινες ἔχουσιν αὐτὸν ἄθροισμα.

2) Ἵνα προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς ἕνα ἐκ τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 8 εἰς τὸ ἑξῆς ἄθροισμα:

$$4+7+10+12\cdot$$

ἵνα γίνῃ τοῦτο πρέπει νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα, δηλαδὴ νὰ προσθέσωμεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς 4, 7, 10, 12, καὶ ἔπειτα, εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα, νὰ προσθέσωμεν τὸν 8· ἀλλὰ τότε προφανῶς εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 4, 7, 10, 12, 8· ἢ καὶ τῶν ἑξῆς: 4, 15, 10, 12. (ἰδιότης 1)

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ 8 προσετέθη εἰς ἕνα τῶν προσθετέων (τὸν 7) καὶ οὕτω προσετέθη εἰς τὸ ὅλον ἄθροισμα.

3) Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν ὁμοῦ πάντας τοὺς προσθετέους ἀμφοτέρων τῶν ἀθροισμάτων.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο ἀθροίσματα

$$5+12+8 \quad \text{καὶ} \quad 7+22\cdot$$

λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν προστεθῶσιν ὁμοῦ πάντες οἱ προσθετέοι, δηλαδὴ ἂν προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 5, 12, 8, 7, 22.

Ἀπόδειξις. Ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀντικαταστήσωμεν τοὺς προσθετέους 5, 12 καὶ 8 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $5+12+8$, ἔτι δὲ καὶ τοὺς προσθετέους 7 καὶ 22 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $7+22$, θὰ ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

$$5+12+8 \quad \text{καὶ} \quad 7+22,$$

τουτέστι τὰ δύο ἀθροίσματα· ὥστε τὸ ἄθροισμα τούτων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5, 12, 8, 7, 22, εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Σημείωσις. Τὰς ἰδιότητας ταύτας μετεχειρίσθημεν ἤδη προηγουμένως, ἵνα ἀναγάγωμεν τὴν πρόσθεσιν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μονοψηφίων· πρὸς τοῦτο ἐθεωρήσαμεν ἕκαστον ἀριθμὸν ὡς ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

24. *Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμόν, κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος τις δοθεὶς ἀριθμός.*

Ὁ πρῶτος ἀριθμός, ὅστις πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται *μειωτέος*, ὁ δὲ δεύτερος *ἀφαιρετέος*· ὁ δὲ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται *ὑπόλοιπον* ἢ *ὑπεροχὴ* ἢ *διαφορά*.

Ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς.

Διότι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, τὸ ὑπόλοιπον μένει, ἀφοῦ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μειωτέου πάσας τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου· ἐὰν λοιπὸν τὰς προσθέσωμεν πάλιν εἰς τὸ ὑπόλοιπον, θὰ εὕρωμεν προφανῶς τὸν μειωτέον.

Διὰ τοῦτο ἡ ἀφαίρεσις δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἡ Ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις, προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον, δίδει ἄθροισμα τὸν πρῶτον.

Ἡ ἀφαίρεσις σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου —, τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου (γράφεται δὲ πρῶτος ὁ μειωτέος) καὶ ἀναγινώσκεται *πλήν*· οἷον $8 - 6$ σημαίνει, ὅτι ἀπὸ τοῦ 8 πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 6· καὶ ἀναγινώσκεται: ὀκτὼ πλὴν ἕξ.

Σημείωσις. Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν οἱ ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς.

Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου.

25. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μονοψήφιον ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον οἱονδήποτε, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τούτου τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου, τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις μένει, ὅταν ἀφαιρεθῇ καὶ ἡ τελευταία μονὰς τοῦ ἀφαιρετέου, εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ ἀφαιρέσω 5 ἀπὸ 14, λέγω: 14 πλὴν 1 μένουν 13· 13 πλὴν 1 μένουν 12· 12 πλὴν 1 μένουν 11· 11 πλὴν 1 μένουν 10· 10 πλὴν 1 μένουν 9· ἄρα τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 9.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσω τὸν 6 ἀπὸ τοῦ 147, ἀφαιρῶ αὐτὸν μόνον ἀπὸ τῶν 7 μονάδων τοῦ 147 καὶ εὑρίσκω τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον 141.

Ὅταν ὁ μειωτέος δὲν εἶναι μέγας ἀριθμός, αἱ ἀφαιρέσεις αὗται γίνονται ἀμέσως ἀπὸ μνήμης ὥστε λέγομεν ἀμέσως: 9 ἀπὸ 15 μένουν 6· 8 ἀπὸ 17 μένουν 9· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημείωσις. Ὅταν ἔχω νὰ ἀφαιρέσω 9, ἀφαιρῶ 10 καὶ ἔπειτα προσθέτω 1· οἷον, 9 ἀπὸ 537 μένουν 528. Ὁμοίως, ὅταν ἔχω νὰ προσθέσω 9, προσθέτω 10 καὶ ἔπειτα ἀφαιρῶ 1· οἷον, 165 καὶ 9 κάμνουν 174.

Ἀφαίρεσις πολυψηφίου ἀπὸ ἄλλου

26. Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἄλλου (μεγαλητέρου), κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον· ὁ τρόπος ὅμως οὗτος διὰ τὴν ἀφαίρεσιν μεγάλων ἀριθμῶν θὰ ἦτο λίαν ἐπίπονος· ἀλλ' εὐκόλως εὑρίσκομεν ἄλλον, δι' οὗ γίνεται ἡ ἀφαίρεσις συντόμως καὶ εὐκόλως· ὁ τρόπος οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς δύο ἰδιοτήτων, ὧν ἡ ἀλήθεια εἶναι προφανής.

1) Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ αὐτῶν δὲν μεταβάλλεται.

2) Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλου, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀλλεπαλλήλως τὰς μονάδας του, τὰς δεκάδας του, τὰς ἑκατοντάδας του, κτλ.· ἤγουν, ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ μέρη του.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν 12 ἀπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ, ἔστω ἀπὸ τοῦ 47, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω πρῶτον τὰς 2 μονάδας (ὅτε μένουν 45) καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 45, ὅστις μένει, νὰ ἀφαιρέσω τὴν μίαν δεκάδα (ὅτε μένουν 35).

Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τούτων, δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν οἱανδήποτε ἀφαίρεσιν, ἀνάγοντες αὐτὴν εἰς ἄλλας μερικὰς ἀφαιρέσεις, ἐν ἑκάστῃ τῶν ὁποίων ὁ ἀφαιρετέος δὲν ὑπερβαίνει τὸν 10.

Πρὸς τοῦτο, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα κάμνομεν, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

Παράδειγμα Α'. Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 512 ἀπὸ τοῦ 945.

$$\begin{array}{r} 945 \\ \underline{512} \\ 433. \end{array}$$

Κατὰ πρῶτον ἀφαιροῦμεν τὰς δύο μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν μονάδων τοῦ μειωτέου (λέγοντες: 2 ἀπὸ 5 μένουν 3) καὶ γράφομεν τὰς 3 μονάδας, αἱ ὁποῖαι μένουν, εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὴν μίαν δεκάδα τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 4 δεκάδας τοῦ μειωτέου (λέγοντες: 1 ἀπὸ 4 μένουν 3) καὶ γράφομεν τὰς 3 δεκάδας, αἵτινες ἔμειναν, εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων· τέλος, ἀφαιροῦμεν τὰς 5 ἑκατοντάδας ἀπὸ τῶν 9 ἑκατοντάδων καὶ γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τὰς 4 ἑκατοντάδας, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν· ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 433· διότι τοῦτο εὑρήκαμεν ἀφαιρέσαντες ἀπὸ τοῦ μειωτέου 945 πάντα τὰ μέρη τοῦ ἀφαιρετέου 512.

Σημείωσις. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἠδυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἑκατοντάδων καὶ ἔπειτα νὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δεκάδων καὶ ἔπειτα τῶν μονάδων.

Παράδειγμα Β΄. Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 8 472 ἀπὸ τοῦ 29548.

$$\begin{array}{r} 29\,548 \\ 8\,472 \\ \hline 21\,076. \end{array}$$

Λέγομεν: 2 μονάδες ἀπὸ 8 μονάδων μένουν 6 μονάδες· 7 δεκάδες ἀπὸ 4 δεκάδων *δὲν ἀφαιροῦνται*· διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον 10 δεκάδας, ὥστε αἱ 4 δεκάδες του γίνονται 14, καὶ ἔπειτα λέγομεν: 7 ἀπὸ 14 μένουν 7· ἀλλὰ τώρα πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, 10 δεκάδας (διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορά), ἤ, ἀντ' αὐτῶν, μίαν ἑκατοντάδα· λέγομεν λοιπόν: ἓν τὸ κρατούμενον καὶ 4 κάμνουν 5· ἀπὸ 5, μένει 0· ἔπειτα, ἀφαιροῦμεν τὰς 8 χιλιάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν 9 χιλιάδων τοῦ μειωτέου καὶ εὑρίσκομεν 1 χιλιάδα· τέλος, γράφομεν καὶ τὰς 2 μυριάδας τοῦ μειωτέου, ἀπὸ τῶν ὁποίων δὲν ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμέν τι· ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 21076.

Καὶ ἡ ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ πολυψηφίου δύναται νὰ γίνῃ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων:

$$\begin{array}{r} 128 \\ 5 \\ \hline 123 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 251 \\ 8 \\ \hline 243 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 \\ 7 \\ \hline 994 \end{array}$$

Κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.

27. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως. *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δὲ ψηφίον τι τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ ἀφαιρετέου, προσθέτομεν εἰς αὐτὸ 10* (ἵνα καταστήσωμεν δυνατὴν τὴν μερικὴν ταύτην ἀφαίρεσιν), *ἀλλ' ἔπειτα, ἐρχόμενοι εἰς τὸ ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου, αὐξάνομεν αὐτὸ κατὰ μίαν μονάδα πρὶν τὸ ἀφαιρέσωμεν. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων εἶναι τὰ ψηφία τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου.*

Σημείωσις. Τὴν ἀφαίρεσιν ἀρχίζομεν ἐκ δεξιῶν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, δι' ὃν καὶ τὴν πρόσθεσιν.

Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως.

28. Ἵνα ἐξελέγξωμεν, ἂν ἀφαιρεσίς τις ἔγεινεν ἄνευ λάθους, προσθέτομεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὸ ὑπόλοιπον· ἐάν, ὡς ἄθροισμα, εὑρεθῇ ὁ μειωτέος, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις, ὅτι εἰς τὴν ἀφαίρεσιν δὲν ἔγινε λάθος (ἐδ. 24).

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

29. Αἱ ἰδιότητες, ἐφ' ὧν ἐστηρίξαμεν τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλον, γενικεύονται εὐκόλως καὶ ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς.

1) Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ εἰς τὸν μειωτέον, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.

2) Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἀθροίσματος ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀφ' ἑνὸς τῶν προσθετέων.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν 12 ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος

$$15+6+20+9,$$

δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω αὐτὸν ἀπὸ τοῦ 20 (ὅτε τὸ 20 γίνεται 8) καὶ τὸ προκύπτον ἄθροισμα $15+6+8+9$, θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

Διότι, κατὰ τὴν δευτέραν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως (ἐδ. 23), ἐὰν προστεθῇ εἰς αὐτὸ ὁ ἀφαιρετέος 12, προκύπτει ὁ μειωτέος.

3) Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τούτου πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος, τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸ ἄθροισμα

$$3+9+12$$

ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 30, φανερὸν εἶναι, ὅτι ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω διὰ μιᾶς τὰς 24 μονάδας, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἄθροισμα, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω πρῶτον τὰς 3 μονάδας, ἔπειτα τὰς 9 καὶ τέλος τὰς 12 μονάδας· ἤτοι, ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω διὰ μιᾶς ὅλον τὸ ἄθροισμα, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω τὰ μέρη του, τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο· ἀφαιρῶ λοιπὸν τὸν 3 ἀπὸ τοῦ μειωτέου 30 καὶ μένουν 27· ἔπειτα ἀπὸ τοῦ 27, ὅπερ ἔμεινεν, ἀφαιρῶ τὸν 9 καὶ μένουν 18· τέλος ἀπὸ τοῦ 18 ἀφαιρῶ καὶ τὸν 12 καὶ μένουν 6· τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

30. Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων συνάγεται καὶ ἡ ἑξῆς.

Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀριθμοῦ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς αὐτόν, τὸν ἀφαιρετέον τῆς δοθείσης διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου ἀφαιροῦμεν τὸν μειωτέον αὐτῆς.

Ἄς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν $12-8$ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 18.

Κατὰ τὴν πρώτην ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως, ἡ ζητουμένη διαφορὰ δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν προστεθῇ καὶ εἰς τοὺς δύο ἀριθμοὺς ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 8· ἀλλὰ τότε, ὁ μὲν μειωτέος 18 γίνεται $18+8$, ὁ δὲ ἀφαιρετέος $12-8$ γίνεται $12-8+8$ ἤτοι 12· ὥστε ἔχομεν τώρα ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος $18+8$, νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 12· τοῦτο δὲ καθιστᾷ φανερὰν τὴν προκειμένην ἰδιότητα.

Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀριθμῶν ἀφαιρεθῶσιν ἴσοι, τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι ἴσα.

Διότι, ἂν εἰς τὰ ὑπόλοιπα προστεθῶσι πάλιν οἱ ἀφαιρεθέντες ἴσοι, πρέπει νὰ προκύψωσιν ἴσοι ἀριθμοὶ (οἱ ἴσοι μειωτέοι)· τοῦτο ὅμως δὲν θὰ ἐγίνετο, ἂν τὰ ὑπόλοιπα ἦσαν ἄνισα (ἐδάφ. 15).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

31. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι᾽ ἧς ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν πολλάκις καὶ σχηματίζομεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλον ἀριθμόν.*

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἐπαναλάβω τὸν 9 τρεῖς φοράς, 9 καὶ 9 καὶ 9, σχηματίζω ἐξ αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν 27· τοῦτο δὲ εἶναι πολλαπλασιασμός.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι *πρόσθεσις ἀλλεπάλληλος ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἑαυτόν του.*

Εἰς ἕκαστον πολλαπλασιασμὸν δίδονται δύο ἀριθμοί· ἐκ τούτων, ὁ μὲν εἷς πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ, ἤτοι νὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ λέγεται, διὰ τοῦτο, *πολλαπλασιαστέος*· ὁ δὲ ἄλλος δεικνύει, πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πρῶτος καὶ λέγεται *πολλαπλασιαστής*.

Ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται *γινόμενον*.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ 9, πολλαπλασιαστὴς ὁ 3 καὶ γινόμενον ὁ 27.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται καὶ μὲ ἓν ὄνομα, *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου $\times$, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται *ἐπί*· οἷον 5×7 σημαίνει, ὅτι ὁ 5 πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν 7· ἤτοι νὰ ἐπαναληφθῇ ἑπτάκις· ἀναγινώσκεται δὲ *πέντε ἐπὶ ἑπτά.*

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον· διότι γίνεται ἐκ τούτου, πολλάκις προστιθέντος εἰς ἑαυτόν. Ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός· διότι σημαίνει μόνον, ποσάκις θὰ ληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος.

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

32. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς προσθέσεως, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἐὰν ἔχω, λόγου χάριν, νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 6 ἐπὶ 5, ἤτοι νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα

$$6+6+6+6+6,$$

λέγω· 6 καὶ 6 κάμνουν 12· καὶ 6 κάμνουν 18· καὶ 6 κάμνουν 24· καὶ 6 γίνονται 30· λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 5 (ἤτοι τὸ 6×5) εἶναι 30. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν. Εἶναι δὲ τὰ γινόμενα ταῦτα κατατεταγμένα εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅστις λέγεται πυθαγόρειος· διότι, ὡς λέγουσιν, ὁ Πυθαγόρας ἐπενόησεν αὐτόν.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ἡ πρώτη ὁριζοντία σειρὰ περιέχει τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμούς· ἡ δευτέρα περιέχει τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 2, ἤτοι τὰ διπλάσια αὐτῶν· ἡ τρίτη τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 3, ἤτοι τὰ τριπλάσια αὐτῶν· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἵνα δὲ εὕρωμεν εἰς τὸν πίνακα τοῦτον τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, ζητοῦμεν τὸν πολλαπλασιαστέον εἰς τὴν πρώτην ὁριζοντίαν σειράν, τὸν δὲ πολλαπλασιαστὴν εἰς τὴν πρώτην κατακόρυφον· τὸ γινόμενον αὐτῶν εὑρίσκεται ἐκεῖ, ἔνθα συναντῶνται αἱ δύο σειραί, αἵτινες ἄρχονται ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον 35, τοῦ 5 ἐπὶ 7, εὑρίσκεται ἐκεῖ, ἔνθα συναντῶνται ἡ πέμπτη κατακόρυφος σειρὰ καὶ ἡ ἑβδόμη ὁριζοντία.

Σημείωσις. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 1, τὸ γινόμενον εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος, ἅπαξ μόνον λαμβανόμενος· ἤτοι 5×1 εἶναι 5· 8×1 εἶναι 8· κτλ.

Παρατήρησις

Πᾶς πολλαπλασιασμός, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀκολούθως, ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον· διὰ τοῦτο πρέπει *νὰ εἰξεύρωμεν ἐκ στήθους* τὰ εἰς τὸν πίνακα τοῦτον περιεχόμενα γινόμενα.

Θεωρήματα, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ ἐκτέλεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διὰ νὰ ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εἰς πολλαπλασιασμοὺς μονοψηφίων ἀριθμῶν, εἶναι ἀνάγκη νὰ μάθωμεν ἰδιότητάς τινας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὰς ὁποίας ἐκφράζουσι τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α´

33. *Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων· ἤτοι, ἂν γίνῃ ὁ πολλαπλασιαστέος πολλαπλασιαστής, καὶ τἀνάπαλιν.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι εἴτε τὸν 5 πολλαπλασιάσω ἐπὶ 7, εἴτε τὸν 7 ἐπὶ 5, τὸ αὐτὸ γινόμενον θὰ εὕρω.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ δείξω τοῦτο, ἀναλύω τὸν 7 εἰς τὰς μονάδας του καὶ γράφω αὐτὰς εἰς μίαν σειράν, ἐπαναλαμβάνω δὲ τὴν σειρὰν ταύτην πέντε φοράς, ὡς ἑξῆς·

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Ἐὰν τώρα θέλω νὰ εὕρω, πόσαι εἶναι αἱ μονάδες αὗται, δύναμαι νὰ ἀριθμήσω αὐτάς, ὡς ἑξῆς· ἡ πρώτη ὁριζοντία σειρὰ ἔχει 7 μονάδας καὶ ἡ δευτέρα ἄλλας 7, ἡ τρίτη ἄλλας 7, καὶ καθεξῆς· ὥστε αἱ μονάδες αὗται εἶναι $7+7+7+7+7$, ἤτοι 7×5.

Ἀλλὰ δύναμαι καὶ ἄλλως νὰ ἀριθμήσω τὰς αὐτὰς μονάδας, ὡς ἑξῆς· ἡ πρώτη κατακόρυφος στήλη ἔχει 5 μονάδας, ἡ δευτέρα ἄλλας 5, κτλ.· ἄρα αἱ μονάδες αὗται εἶναι

$$5+5+5+5+5+5+5, \quad \text{ἤτοι} \quad 5\times7.$$

Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ἑνώσωμεν τὰς μονάδας ταύτας, πάντοτε ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν θὰ εὕρωμεν· ἄρα θὰ εἶναι τὰ 2 γινόμενα 7×5 καὶ 5×7 εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός· τουτέστιν

$$7\times5=5\times7.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄

34. *Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν ἕκαστος τῶν προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι πάντα τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα $12+8+6$ ἐπὶ τὸν 3 (χωρὶς νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα), ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς προσθετέους 12, 8, 6, ἐπὶ τὸν 3 καὶ τὰ τρία γινόμενα 12×3, 8×3, 6×3, νὰ προσθέσω, ἀφοῦ τὰ εὕρω.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα $12+8+6$ ἐπὶ 3, πρέπει νὰ λάβω αὐτὸ τρίς, ἤτοι νὰ εὕρω τὸ ἑξῆς ἄθροισμα:

$$\begin{array}{c} 12+8+6 \\ 12+8+6 \\ 12+8+6 \\ \hline \end{array}$$

δηλονότι τὸ ἑξῆς: (ἐδ. 23)

$$12+12+12+8+8+8+6+6+6,$$

$$\text{ἢ} \qquad (12\times3)+(8\times3)+(6\times3).$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέρη του.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $12+8+6$ ἐπὶ 3 παρίσταται ὡς ἑξῆς: $(12+8+6)\times3$· ὥστε τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα ἐκφράζεται διὰ τῆς ἰσότητος:

$$(12+8+6)\times3=(12\times3)+(8\times3)+(6\times3).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ´

35. *Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ προστεθῶσι πάντα τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$ (χωρὶς νὰ τὸ εὕρω), ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ ἕνα ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ τὰ γινόμενα 8×5, 8×7 καὶ 8×20 νὰ προσθέσω, ἀφοῦ τὰ εὕρω.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$, δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα $5+7+20$ ἐπὶ τὸν 8 καὶ θὰ εὕρω τὸ αὐτὸ γινόμενον· ἀλλὰ τότε εὑρίσκω (κατὰ τὸ Β´ θεώρημα).

$$(5\times8)+(7\times8)+(20\times8)$$

ἢ $\quad(8\times5)+(8\times7)+(8\times20)\quad$ (κατὰ τὸ Α´ θεώρημα).

Τοῦτο λοιπὸν εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$ παρίσταται ὡς ἑξῆς: $8\times(5+7+20)$· ὥστε τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα ἐκφράζεται διὰ τῆς ἰσότητος

$$8\times(5+7+20)=(8\times5)+(8\times7)+(8\times20).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ´

36. *Ὅταν εἷς ἐκ τῶν παραγόντων λήγῃ εἰς μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν χωρὶς τὰ μηδενικὰ καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 8500 καὶ 37 (τὸν ἕνα ἐπὶ τὸν ἄλλον), ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς 85 καὶ 37 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψω τὰ δύο μηδενικά, τὰ ὁποῖα παρέλειψα.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνω ὡς πολλαπλασιαστέον τὸν ἀριθμὸν 8500 καὶ ὡς πολλαπλασιαστὴν τὸν 37 (τοῦτο ἐπιτρέπεται κατὰ τὸ Α´ θεώρημα).

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8500 ἐπὶ 37, ἀρκεῖ νὰ εὕρω τὸ ἑξῆς ἄθροισμα (ὅπερ ἔχει 37 προσθετέους).

8500
8500
8500
: : : :
8500

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ εὕρω τὸ ἑξῆς·

85
85
85
: :
85

καὶ δεξιὰ αὐτοῦ νὰ γράψω δύο μηδενικά.

Ἀλλὰ τὸ δεύτερον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 85 ἐπὶ 37· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦτο καὶ δεξιὰ αὐτοῦ νὰ γραφῶσι τὰ δύο μηδενικά. Ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 8500 καὶ 37.

Πόρισμα 1ον

37. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 10 ἢ ἐπὶ 100 ἢ ἐπὶ 1000, κτλ., ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἓν μηδενικὸν* (διὰ τὸ 10), *δύο* (διὰ τὸ 100), *τρία* (διὰ τὸ 1000), κτλ.

Διότι, παραλείποντες τὰ μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1 καὶ ἑπομένως θὰ εὕρωμεν ὡς γινόμενον τὸν πολλαπλασιαστέον, δεξιὰ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ γράψωμεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Πόρισμα 2ον

38. *Ὅταν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες λήγωσιν εἰς μηδενικά, παραλείπομεν αὐτά, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς χωρὶς τὰ μηδενικὰ καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.*

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω, παραδείγματος χάριν, τὸν ἀριθμὸν 1800 ἐπὶ 4000, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 18 ἐπὶ 4 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 72 νὰ γράψω τὰ παραλειφθέντα 5 μηδενικά.

Διότι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 1800 ἐπὶ 4000, ἀρκεῖ (κατὰ τὸ θεώρημα) νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 18 ἐπὶ 4000 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψω δύο μηδενικά. Ἀλλὰ πάλιν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 4000 ἐπὶ 18, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 4 ἐπὶ 18 καὶ νὰ γράψω δεξιὰ τοῦ γινομένου τρία μηδενικά. Θὰ ἔχω λοιπὸν νὰ γράψω δεξιὰ τοῦ γινομένου 72, τὸ δλον 5 μηδενικά.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον.

39. Πᾶς πολυψήφιος ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων· οἷον ὁ 7548 εἶναι ἄθροισμα 8 ἁπλῶν μονάδων καὶ 4 δεκάδων καὶ 5 ἑκατοντάδων καὶ 7 χιλιάδων· ἑπομένως (θεώρημα Β΄), *ἵνα πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ ἄλλον ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέρη του* (τὰς μονάδας του, τὰς δεκάδας, κτλ.) *καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.*

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3078 ἐπὶ τὸν 6.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται, συντομίας χάριν, ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 3078 \\ 6 \\ \hline 18468 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὰς 8 μονάδας ἐπὶ τὸν 6, λέγοντες: 6 ἐπὶ 8 γίνονται 48· ἐπειδὴ δὲ αἱ 48 μονάδες κάμνουν 4 δεκάδας καὶ 8 μονάδας, γράφομεν μόνον τὰς 8 μονάδας εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὰς 4 δεκάδας, διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὰς δεκάδας, τὰς ὁποίας θὰ δώσῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν 7 δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὰς 7 δεκάδας ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 6, λέγοντες: 6 ἐπὶ 7 γίνονται 42 δεκάδες καὶ 4 αἱ κρατούμεναι, γίνονται 46· ἐπειδὴ δὲ 46 δεκάδες κάμνουν 6 δεκάδας καὶ 4 ἑκατοντάδας, γράφομεν τὰς 6 δεκάδας εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὰς 4 ἑκατοντάδας.

Τὰς 4 ταύτας ἑκατοντάδας γράφομεν ἀμέσως εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ γινομένου· διότι ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς δὲν ἔχει ἑκατοντάδας καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἔχωμεν γινόμενον ἑκατοντάδων.

Τέλος, πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰς 3 χιλιάδας ἐπὶ τὸν 6 καὶ εὑρίσκομεν 18 χιλιάδας· καὶ τὰ ψηφία ταῦτα γράφομεν ὄπισθεν τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ γινομένου.

Τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι λοιπὸν 18 468.

40. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον ὑποκάτω τοῦ πολυψηφίου καὶ ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμήν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων. Καὶ ἂν μὲν γινόμενόν τι εἶναι μονοψήφιον, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν στήλην τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν· ἂν δὲ εἶναι διψήφιον, γράφομεν ἐκεῖ μόνον τὰς μονάδας του, τὰς δὲ δεκάδας ἑνώνομεν μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀκολούθου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημείωσις. Ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον ἀρχίζομεν ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων, ἐδόθη ἤδη εἰς τὴν πρόσθεσιν.

Πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

41. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίων κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3722 ἐπὶ 782. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς 782 ἀναλυθῇ κατὰ τὴν ἀξίαν τῶν ψηφίων του, εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 700 καὶ 80 καὶ 2, ἤτοι εἶναι $700 + 80 + 2$. Ἑπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα Γ', ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3722 ἐπὶ τὸν 782, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 700 καὶ ἐπὶ 80 καὶ ἐπὶ 2 καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ τρία μερικὰ γινόμενα.

Οἱ μερικοὶ αὐτοὶ πολλαπλασιασμοὶ

3722	3722	3722
700	80	2
2605400	297760	7444,

ἐὰν παραλειφθῶσι τὰ μηδενικά, εἰς ἃ λήγουσιν οἱ πολλαπλασιασταὶ 700 καὶ 80 (κατὰ τὸ Δ' θεώρημα), καταντῶσι πολλαπλασιασμοὶ πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον, οἵτινες ἐκτελοῦνται, ὡς ἐμάθομεν ἤδη (καὶ ἀνάγονται εἰς πολλαπλασιασμοὺς μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον).

Συντομίας χάριν, διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς:

3722	πολλαπλασιαστέος,
782	πολλαπλασιαστής,
7444	μερικὸν γινόμενον τοῦ 2,
297760	μερικὸν γινόμενον τοῦ 80,
2605400	μερικὸν γινόμενον τοῦ 700,
2910604	ἄθροισμα τῶν μερ. γινομένων, ἤτοι τὸ ὁλικὸν γινόμενον.

Τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα γράφομεν δεξιὰ τῶν μερικῶν γινομένων (τοῦ 700 καὶ 80), δὲν λαμβάνουσι μέρος εἰς τὴν πρόσθεσιν· διὰ τοῦτο παραλείπομεν αὐτά· ἀφίνομεν ὅμως κενὸν τὸν τόπον αὐτῶν, ἵνα διατηρηθῇ ἡ ἀξία τῶν ἄλλων ψηφίων. Τότε δὲ ἡ πρᾶξις ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν διαδοχικῶς τὸν πολλαπλασιαστέον 3722 ἐφ' ἕκαστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πρῶτον ἐπὶ 2, ἔπειτα ἐπὶ 8 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 7, νὰ γράφωμεν δὲ τὰ μερικὰ γινόμενα τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον ἑκάστου μερικοῦ γινομένου νὰ εἶναι ὑποκάτω τοῦ ψηφίου, ἐπὶ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν.

42. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ῥηθέντων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑποκάτω ἄγομεν ὁριζοντίαν γραμμήν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον χωριστὰ ἐφ' ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν καὶ γράφομεν ἕκαστον μερικὸν γινόμενον, οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του νὰ εἶναι ὑποκάτω τοῦ ψηφίου, ἐφ' ὃ ἐπολλαπλασιάσαμεν, μετὰ ταῦτα ἄγομεν γραμμὴν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα· τὸ προκύπτον ἄθροισμα εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Παραδείγματα.

47082	1438	250004
33	801	30023
141246	1438	750012
141246	11504	500008
1553706	1151838	750012
		7505870092.

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

43. Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸν *πολλαπλασιασμόν*, ἐπαναλαμβάνομεν αὐτόν, λαμβάνοντες τὸν *πολλαπλασιαστέον* ὡς *πολλαπλασιαστὴν* καὶ τἀνάπαλιν. Ἐὰν καὶ πάλιν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις, ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Ὁ κανὼν οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῆς πρώτης ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (θεώρημα Α΄).

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

44. *Γινόμενον πολλῶν δεδομένων ἀριθμῶν* λέγεται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ εὕρω τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

5, 6, 7, 12,

τὸ ὁποῖον σημειοῦται ὡς ἑξῆς: $5\times6\times7\times12$, πολλαπλασιάζω τὸν 5 ἐπὶ τὸν 6 καὶ εὑρίσκω 30· ἔπειτα πολλαπλασιάζω τὸν 30 ἐπὶ τὸν 7 καὶ εὑρίσκω 210· τέλος πολλαπλασιάζω τὸν 210 ἐπὶ 12 καὶ εὑρίσκω 2520· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν τεσσάρων δοθέντων ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Ὅταν πάντες οἱ παράγοντες λαμβάνωνται ὡς ἀφῃρημένοι ἀριθμοί, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ἀφῃρημένος ἀριθμός· ὅταν δὲ εἷς ἐκ τῶν παραγόντων λαμβάνηται ὡς συγκεκριμένος, οὗτος εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ πολλαπλασιάζεται ἀλλεπαλλήλως ἐφ' ἕκαστον τῶν ἄλλων, οἵτινες, διὰ τοῦτο, λαμβάνονται ἐν τῇ πράξει ὡς ἀφῃρημένοι ἀριθμοί.

Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

45. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει τὰς ἑξῆς δύο θεμελιώδεις ἰδιότητας, ἀπὸ τῶν ὁποίων πηγάζουσι πᾶσαι αἱ ἄλλαι ἰδιότητες αὐτοῦ.

1) *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.*

2) *Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν ἕκαστος τῶν προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι πάντα τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων τὴν μὲν δευτέραν ἀπεδείξαμεν ἤδη (θεώρημα Β΄), τὴν δὲ πρώτην ἀπεδείξαμεν διὰ δύο μόνον παράγοντας (θεώρημα Α΄). Ἵνα δὲ ἀποδείξωμεν καὶ ταύτην γενικῶς, ὁσοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ παράγοντες, ἔχομεν ἀνάγκην βοηθητικῶν τινων θεωρημάτων, τουτέστι τῶν ἑξῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

46. *Ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ δύο ἄλλους, εἶναι τὸ αὐτό, ὡς νὰ πολλαπλασιασθῇ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενόν των.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 8 πολλαπλασιασθῇ ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 4 καὶ 3 (ἤτοι, πρῶτον ἐπὶ τὸν 4, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ 3), εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ πολλαπλασιασθῇ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενόν των 4×3, ἤτοι ἐπὶ 12.

Ἀπόδειξις. Ὅταν πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ 4, εὑρίσκω γινόμενον τὸ ἑξῆς:

$$8+8+8+8\cdot$$

ὅταν δὲ καὶ τοῦτο πολλαπλασιάσω ἐπὶ 3, εὑρίσκω γινόμενον τὸ ἑξῆς:

$$\begin{array}{c} 8+8+8+8 \\ 8+8+8+8 \\ 8+8+8+8\cdot \end{array}$$

ἀλλὰ τοῦτο σύγκειται ἐκ τοῦ 8, ληφθέντος 12 φορὰς καὶ διὰ τοῦτο εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ τὸν 12.

ΘΕΩΡΗΜΑ

47. *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει ἐὰν ἀνταλλαχθῶσι δύο ἐφεξῆς παράγοντες.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὸ γινόμενον

$$8 \times 15 \times 2 \times 7 \times 9$$

δὲν βλάπτεται, ἐὰν ἀνταλλάξω τοὺς δύο ἐφεξῆς παράγοντας 2 καὶ 7· δηλαδή, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἑξῆς: $8 \times 15 \times 7 \times 2 \times 9$.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ ἐκτελέσω τὸν πολλαπλασιασμὸν $8 \times 15 \times 2 \times 7 \times 9$, κατὰ τὴν δεδομένην τάξιν, πρέπει, ἀφοῦ εὕρω τὸ γινόμενον 8×15, ἤτοι 120, νὰ πολλαπλασιάσω αὐτό, πρῶτον ἐπὶ 2 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 7. Ἀλλ' ἀντὶ τούτων, δύναμαι, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενον 2×7, ἢ ἐπὶ τὸ ἴσον του 7×2. Καὶ πάλιν, κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσω τὸ 120 ἐπὶ τὸ γινόμενον 7×2, δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω αὐτό, πρῶτον ἐπὶ 7 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 2. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀνταλλαγὴ τῶν δύο ἐφεξῆς παραγόντων 2 καὶ 7 δὲν βλάπτει τὸ γινόμενον.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου συνάγεται ἡ πρώτη θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

48. *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 4, 5, 8, 12, 6 κατὰ τὴν ἑξῆς τάξιν: $4 \times 5 \times 8 \times 12 \times 6$ καὶ θέλομεν νὰ μετατρέψωμεν αὐτὴν εἰς ἄλλην οἱανδήποτε, οἷον εἰς τὴν ἑξῆς: $8 \times 5 \times 4 \times 6 \times 12$. Διὰ νὰ φέρωμεν τὸν 8 εἰς τὴν πρώτην θέσιν, ἀνταλλάσσομεν αὐτὸν μετὰ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του (ὅτε ἔρχεται ὁ 8 μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρὸς) καὶ ἐξακολουθοῦμεν ἀνταλλάσσοντες αὐτὸν μετὰ τοῦ ἑκάστοτε προηγουμένου του μέχρις οὗ γίνῃ πρῶτος· ὁμοίως φέρομεν καὶ τὸν 5 εἰς τὴν δευτέραν θέσιν καὶ τὸν 4 εἰς τὴν τρίτην (ἐὰν εἶναι ἀνάγκη), καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἰδοὺ αἱ ἀπαιτούμεναι ἀνταλλαγαί.

$$
\begin{gathered}
4 \times 5 \times 8 \times 12 \times 6, \\
4 \times 8 \times 5 \times 12 \times 6, \\
8 \times 4 \times 5 \times 12 \times 6, \\
8 \times 5 \times 4 \times 12 \times 6, \\
8 \times 5 \times 4 \times 6 \times 12.
\end{gathered}
$$

Ἐπειδὴ εἰς ἑκάστην τῶν ἀνταλλαγῶν τούτων δὲν βλάπτεται τὸ γινόμενον, συμπεραίνομεν, ὅτι, εἴτε κατὰ τὴν δοθεῖσαν τάξιν ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός, εἴτε κατ' ἄλλην οἱανδήποτε, πάντοτε τὸ αὐτὸ θὰ προκύψῃ γινόμενον.

Σημείωσις. Ἐκ τῆς ἀποδείξεως ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι, ἐὰν εἰς σειρὰν πολλῶν πραγμάτων ἐπιτρέπηται ἡ ἀνταλλαγὴ δύο οἱωνδήποτε ἐφεξῆς, ἡ σειρὰ τῶν πραγμάτων τούτων δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τάξιν θέλωμεν.

49. Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἕπονται αἱ ἑξῆς.

1) Δυνάμεθα εἰς πᾶν γινόμενον νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς τινας διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν. Δυνάμεθα, δηλονότι, νὰ συμπτύξωμεν παράγοντάς τινας εἰς ἕνα μόνον.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς

8, 12, 10, 4, 25·

λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, καὶ ὅταν, ἀντὶ τῶν παραγόντων 10 καὶ 4, λάβωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν 40· ἤτοι, οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 40, 25 θὰ δώσωσι τὸ αὐτὸ γινόμενον, ὡς καὶ οἱ δοθέντες.

Ἀπόδειξις. Διότι, κατὰ τὴν προειρημένην θεμελιώδη ἰδιότητα, δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλω· ἂν λοιπὸν ἀρχίσω τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀπὸ τῶν 10 καὶ 4, θὰ εὕρω τὸ γινόμενον 40 καὶ θὰ ἔχω ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 40, 8, 12, 25· ἐπομένως, τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων εἶναι εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἡ αὐτὴ ἰδιότης δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἱονδήποτε παράγοντα δι' ἄλλων ἀριθμῶν, ἐχόντων αὐτὸν ὡς γινόμενον.

Τουτέστι, νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα παράγοντα εἰς πολλοὺς ἄλλους.

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

40, 8, 12, 25,

δύναμαι πάλιν νὰ ἀντικαταστήσω τὸν 40 διὰ τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 4, οἵτινες ἔχουσιν αὐτὸν γινόμενον.

2) Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον $4 \times 7 \times 10 \times 12$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 8. Ἵνα γίνῃ τοῦτο, πρέπει νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ γινόμενον· δηλαδὴ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς 4, 7, 10, 12 καὶ ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 8· ἀλλὰ τότε προφανῶς εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

4, 7, 10, 12, 8·

ἢ καὶ τῶν ἑξῆς 4, 56, 10, 12. (ἰδιότης 1)

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ 8 ἐπολλαπλασίασεν ἕνα τῶν παραγόντων (τὸν 7) καὶ τοιουτοτρόπως ἐπολλαπλασίασε τὸ ὅλον γινόμενον.

3) *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὁμοῦ πάντας τοὺς παράγοντας ἀμφοτέρων τῶν γινομένων.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο γινόμενα

$5 \times 12 \times 8$ καὶ 7×22.

Λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ὁμοῦ πάντες οἱ ἀριθμοὶ 5, 12, 8, 7, 22.

Ἀπόδειξις. Ἂν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἤτοι, εἰς τὸ $5 \times 12 \times 8 \times 7 \times 22$, ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 5, 12 καὶ 8, διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν $5 \times 12 \times 8$, ἔτι δὲ καὶ τοὺς παράγοντας 7, 22, διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 7×22, θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

$5 \times 12 \times 8$ καὶ 7×22

τουτέστι τὰ δύο γινόμενα· ὥστε τὸ γινόμενον τούτων καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5, 12, 8, 7, 22, εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Σημείωσις. Ἡ ὁμοιότης τῶν ἰδιοτήτων τούτων πρὸς τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως (ἐδ. 23) εἶναι καταφανής. Ἐννοοῦμεν δὲ τοῦτο εὐκόλως, ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι αἱ ἰδιότητες, περὶ ὧν ὁ λόγος, εἶναι ἀπόρροια τῆς αὐτῆς θεμελιώδους ἰδιότητος, τὴν ὁποίαν αἱ δύο αὗται πράξεις ἔχουσι· τουτέστι τῆς ἀδιαφορίας πρὸς τὴν τάξιν τῶν ἀριθμῶν, ἐφ' ὧν ἐκτελοῦνται.

50. Ἐκ τῆς δευτέρας θεμελιώδους ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἕπεται ἡ ἑξῆς.

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα (χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν), ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο ἀθροίσματα

$3+5+10$ ἐπὶ $8+9$ (πρὶν ἢ εὕρωμεν αὐτά)·

λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ εὑρεθῇ, ἂν προσθέσωμεν τὰ ἑξῆς γινόμενα:

$$\begin{array}{ll} 3\times 8, & 3\times 9, \\ 5\times 8, & 5\times 9, \\ 10\times 8, & 10\times 9. \end{array}$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ θεώρημα Γ' τοῦ ἐδ. 35, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν $3+5+10$ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $8+9$ (χωρὶς νὰ τὸ εὕρω), πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν χωριστὰ ἐπὶ 8 καὶ ἐπὶ 9 καὶ νὰ προσθέσω τὰ δύο γινόμενα· τὰ δύο ταῦτα γινόμενα εἶναι τὰ ἑξῆς:

$$(3+5+10)\times 8 \quad \text{καὶ} \quad (3+5+10)\times 9.$$

Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρω τὰ γινόμενα ταῦτα, ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν· ἄρα, κατὰ τὸ θεώρημα Β' τοῦ ἐδ. 34, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω ἕκαστον ἐκ τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ ἑνώσω τὰ μερικὰ γινόμενα· οὕτως εὑρίσκω, ὅτι τὸ γινόμενον $(3+5+10)\times 8$, ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς γινομένων:

$$3\times 8 \quad \text{καὶ} \quad 5\times 8 \quad \text{καὶ} \quad 10\times 8.$$

Τὸ δὲ γινόμενον $(3+5+10)\times 9$ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς τριῶν:

$$3\times 9 \quad \text{καὶ} \quad 5\times 9 \quad \text{καὶ} \quad 10\times 9.$$

Ἐπομένως, τὰ ἓξ ταῦτα γινόμενα ὁμοῦ, ἀποτελοῦσι τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν δύο ἀθροισμάτων.

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.

51. Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται (χωρὶς νὰ εὑρεθῇ προηγουμένως) κατὰ τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν $18-6$ ἐπὶ τὸν 3 (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτήν)· λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι $(18\times 3)-(6\times 3)$.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὴν διαφορὰν ἐπὶ 3, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω αὐτὴν τρίς· τότε εὑρίσκω

$$(18-6)+(18-6)+(18-6)$$

ἐὰν δὲ εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν τριῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος τούτου προσθέσω τὸν ἀριθμὸν 6, εὑρίσκω 18+18+18, ἤτοι 18×3· καὶ ἐπειδὴ ηὔξησα τὸ ἄθροισμα κατὰ 6+6+6, ἤτοι κατὰ τὸ 6×3, καὶ ἔγινε 18×3, συμπεραίνω ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ἤτοι τὸ γινόμενον (18—6)×3, εἶναι ἴσον μὲ (18×3)—(6×3).

Περὶ τῶν δυνάμεων.

52. Ὅταν πάντες οἱ παράγοντες γινομένου τινὸς εἶναι ἴσοι, τὸ γινόμενον τοῦτο λέγεται *δύναμις* τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων. Καὶ ἂν μὲν οἱ παράγοντες εἶναι δύο, τὸ γινόμενον λέγεται *δευτέρα δύναμις* ἢ *τετράγωνον*· ἂν δὲ τρεῖς, *τρίτη δύναμις* ἢ *κύβος*· ἂν δὲ τέσσαρες, *τετάρτη δύναμις*· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον 5×5×5×5 λέγεται τετάρτη δύναμις τοῦ 5· τὸ δὲ γινόμενον 3×3 λέγεται δευτέρα δύναμις (ἢ τετράγωνον) τοῦ 3, καὶ τὸ γινόμενον 8×8×8 λέγεται τρίτη δύναμις (ἢ κύβος) τοῦ 8.

Τὰς δυνάμεις παριστῶμεν συντόμως ὡς ἑξῆς· γράφομεν μόνον τὸν ἕνα παράγοντα, πρὸς τὰ δεξιὰ δὲ αὐτοῦ καὶ ὑψηλότερα γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων· καλεῖται δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος *ἐκθέτης*.

Παραδείγματος χάριν, ἀντὶ : 8×8×8 γράφομεν 8^3
ἀντὶ : 5×5×5×5 » 5^4
ἀντὶ : 3×3 » 3^2
καὶ 7^5 σημαίνει 7×7×7×7×7.

Σημείωσις. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, αἱ μεγαλήτεραι τοῦ 10, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 100, 1000, 10000, κτλ., εἶναι αἱ διάφοροι δυνάμεις τῆς βάσεως 10.

Διότι εἶναι $10^2 = 10 \times 10 = 100,$
$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$·
καὶ οὕτω καθεξῆς.

Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων

Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα, αἱ ἰδιότητες αὐτῶν θὰ εὑρίσκωνται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· εἶναι δὲ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων ἡ ἑξῆς.

53. *Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐκθέτην δ' ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς δύο δυνάμεις 7^3, 7^5.

Ἡ πρώτη ἐκ τούτων εἶναι τὸ γινόμενον $7\times7\times7$, ἡ δὲ δευτέρα τὸ $7\times7\times7\times7\times7$· ἔχομεν λοιπὸν νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ γινόμενον καί, κατὰ τὴν ἰδιότητα 3 (ἐδ. 49), τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ ἔχῃ 8 παράγοντας καὶ ἴσους τῷ 7, ἤτοι θὰ εἶναι

$$7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7$$

ἢ συντομώτερον 7^8.

Ἄρα ἐδείχθη, ὅτι $7^3\times7^5=7^{3+5}=7^8$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ὁμοῦ οἱ δύο παράγοντες ἢ ἓν ὀλιγώτερον.

Ἄν, λόγου χάριν, ὁ εἷς ἔχῃ 3 ψηφία, ὁ δὲ ἄλλος 5, τὸ γινόμενόν των θὰ ἔχῃ 8 ψηφία ἢ 7.

(Διότι, τὸ γινόμενον θὰ εἶναι μεγαλήτερον μὲν τοῦ 100×10000, ἤτοι τοῦ 1 000 000 (ἤ, τοὐλάχιστον, ἴσον πρὸς τοῦτο), μικρότερον δὲ τοῦ $1000\times100\,000$, ἤτοι τοῦ 100 000 000· ἄρα θὰ ἔχῃ τοὐλάχιστον 7 ψηφία· δὲν δύναται ὅμως νὰ ἔχῃ 9).

2) Ἐκ τοῦ πίνακος, δι' οὗ ἀποδεικνύεται, ὅτι $5\times6=6\times5$ (ἐδ. 33), ἀποδεικνύεται προσέτι, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν

$1+2+3+4+5$, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου 6×5.

Νὰ ἀποδειχθῇ γενικῶς, ὅτι τὸ ἄθροισμα $1+2+3+\ldots+\nu$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου $\nu\,(\nu+1)$, οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ ν.

3) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον, ὅταν εἰς ἕνα παράγοντα προστεθῇ μία μονὰς ἢ καὶ περισσότεραι;

4) Εἰς γινόμενόν τι πρόκειται νὰ αὐξηθῇ εἷς παράγων κατὰ μονάδα· ποῖον παράγοντα πρέπει νὰ αὐξήσωμεν, ὥστε ἡ αὔξησις τοῦ γινομένου νὰ εἶναι μεγίστη;

5) Τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν πολλαπλασιασθέν, δίδει ὡς γινόμενον τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

54. *Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μερίζομεν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη.*

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν 18 δραχμὰς εἰς 3 ἀνθρώπους ἐξ ἴσου, ἡ πρᾶξις, τὴν ὁποίαν θὰ κάμωμεν, εἶναι διαίρεσις.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις πρέπει νὰ μερισθῇ, λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει εἰς πόσα μέρη θὰ μερισθῇ, λέγεται *διαιρέτης*· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως λέγεται *πηλίκον*.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, διαιρετέος εἶναι ὁ 18, διαιρέτης δὲ ὁ 3 καὶ πηλίκον ὁ 6.

Ὁ μερισμὸς δὲν γίνεται πάντοτε ἀκριβῶς *, ἀλλὰ περισσεύει πολλάκις ἀριθμός τις· ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται *ὑπόλοιπον*.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, θέλω νὰ μοιράσω 16 δραχμὰς εἰς 3 ἀνθρώπους ἐξ ἴσου, βλέπω εὐκόλως, ὅτι ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ 5 δραχμὰς καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ μία δραχμή· εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην, διαιρετέος εἶναι ὁ 16, διαιρέτης ὁ 3, πηλίκον (ὄχι ἀκριβὲς) ὁ 5 καὶ ὑπόλοιπον 1.

Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ ἑξῆς : (ὅπερ ἀπαγγέλλεται *διά*)· γράφεται δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο κατόπιν τοῦ διαιρετέου καὶ μετ' αὐτὸ γράφεται ὁ διαιρέτης· οἷον 15 : 3 σημαίνει, ὅτι ὁ 15 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 3 ἴσα μέρη, ἤτοι νὰ διαιρεθῇ διὰ 3· ἀπαγγέλλεται δὲ 15 *διαιρούμενος διὰ* 3, ἤ, συντομώτερον, 15 διὰ 3.

55. Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν (ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς τὴν πρόσθεσιν).

Διότι, ἂν ἔχωμεν, π. χ., νὰ μοιράσωμεν 45 δραχμὰς εἰς 8 ἀνθρώπους, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν κατὰ πρῶτον ἀνὰ μίαν δραχμὴν εἰς ἕκαστον· τότε θὰ μείνωσι 45 — 8, ἤτοι 37 δραχμαί· ἔπειτα ἐκ τῶν 37 δραχμῶν (αἱ ὁποῖαι ἔμειναν) νὰ δώσωμεν πάλιν εἰς ἕκαστον ἀνὰ μίαν δραχμήν· τότε θὰ μείνωσι 37 — 8, ἤτοι 29 δραχμαί· καὶ ἐκ τούτων πάλιν νὰ δώσωμεν ἀνὰ μίαν εἰς καθένα· καὶ οὕτω καθεξῆς· εἰς τὸ τέ-

* Ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ θὰ μάθωμεν, ὅτι πᾶσα διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς τῇ βοηθείᾳ τῶν κλασμάτων.

λος, ἢ δὲν θὰ μείνῃ τίποτε, ἢ θὰ μείνῃ ἀριθμός τις δραχμῶν μικρότερος τοῦ 8. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς διαιρέσεως γίνεται φανερόν, ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ τόσας δραχμάς, ὅσας φορὰς ἀφῃρέσαμεν τὸν 8· δηλαδὴ ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 45 τὸν 8.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως.

56. *Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν ποσάκις χωρεῖ εἷς ἀριθμὸς ἄλλον ἀριθμόν.*

Σημείωσις. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἡ μονάς, τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον πρὸς τὸν διαιρετέον· ὅταν δὲ ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσος πρὸς τὸν διαιρετέον, τὸ πηλίκον εἶναι 1.

Τελεία διαίρεσις

57. Ἡ διαίρεσις λέγεται *τελεία*, ὅταν ὁ διαιρετέος μερίζηται εἰς ἴσα μέρη, χωρὶς νὰ μείνῃ ὑπόλοιπον.

Παραδείγματος χάριν, ἡ διαίρεσις 18:3 εἶναι τελεία καὶ πηλίκον αὐτῆς εἶναι ὁ 6· διότι $18=6+6+6$.

Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἀναλύεται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης, καὶ ἕκαστον μέρος εἶναι ἴσον μὲ τὸ πηλίκον· τὰ μέρη δὲ ταῦτα, ὅταν ἑνωθῶσι πάλιν, θὰ ἀποτελέσωσι τὸν διαιρετέον· ἄρα, *εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.*

Ἀτελὴς διαίρεσις.

58. Ἀτελὴς λέγεται ἡ διαίρεσις, ἐὰν ἀφίνῃ ὑπόλοιπον. Παραδείγματος χάριν, ἡ διαίρεσις 17:3 εἶναι ἀτελής· διότι, ἀφαιροῦντες τὸν 3 ἀπὸ τοῦ 17, ὅσας φορὰς εἶναι δυνατὸν (5 φοράς), εὑρίσκομεν, ὅτι μένει ὑπόλοιπον 2· ὥστε ἡ διαίρεσις 17:3 δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν 17:3 ἀφῃρέσαμεν τὸν 3 πέντε φορὰς ἀπὸ τοῦ 17 καὶ ἔμεινε 2, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὁ 17 σύγκειται ἐκ τοῦ 3, λαμβανομένου 5 φοράς, καὶ ἐκ τοῦ 2, ἤτοι εἶναι

$$17=(3+3+3+3+3)+2$$

ἢ $$17=(3\times5)+2.$$

59. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι

εἰς πᾶσαν ἀτελῆ διαίρεσιν, ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ὅταν εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προστεθῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον.

Σημείωσις. Ἡ πρότασις αὕτη ἀληθεύει καὶ περὶ πάσης διαιρέσεως, ἀρκεῖ ὡς ὑπόλοιπον τῆς τελείας διαιρέσεως νὰ θεωρηθῇ τὸ 0.

Κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα (ἐδ. 55) τὸ ὑπόλοιπον εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Παρατήρησις.

60. Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὡς ἑξῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 53 διὰ τοῦ 9.

Πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην 9 ἐπὶ 1, ἐπὶ 2, ἐπὶ 3, κτλ., κατὰ σειρὰν καὶ εὑρίσκω

$$9\times1=9,\quad 9\times2=18,\quad 9\times3=27,\quad 9\times4=36,$$
$$9\times5=45,\quad 9\times6=54.$$

Ἐκ τούτων βλέπω, ὅτι ὁ 9 χωρεῖ εἰς τὸν 53 μόνον 5 φορὰς (διότι 9×5 εἶναι 45, ἀλλὰ 9×6 εἶναι 54· μεγαλήτερον δηλονότι τοῦ 53)· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι 5, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον μένει, ὅταν ἀπὸ τοῦ 53 ἀφαιρέσω τὸ 9 πέντε φοράς, εἶναι 8.

Ἀλλὰ καὶ ὁ τρόπος οὗτος, ὡς καὶ ὁ ἄλλος, ὅστις ἀπαιτεῖ ἀλλεπαλλήλους ἀφαιρέσεις, δὲν εἶναι κατάλληλος, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι, διότι καὶ χρόνον ἀπαιτοῦσι καὶ κόπον πολύν. Διὰ τοῦτο ἐπενόησαν ἄλλον τρόπον συντομώτερον, καθ' ὃν ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις, καὶ τὸν ὁποῖον θὰ μάθωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.

61. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν, πρὶν ἀκόμη ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, πόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον, κάμνομεν ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης μεγαλήτερος τοῦ διαιρετέου· ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο, τόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, ἡ διαίρεσις 175 : 18.

Ἐὰν γράψω δεξιὰ τοῦ 18 ἓν μηδενικὸν (δηλαδὴ ἂν τὸν πολλαπλασιάσω ἐπὶ 10) γίνεται 180 καὶ ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον 175· ἐκ τούτον βλέπω, ὅτι τὸ δεκαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 18 ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον 175· τοῦτο σημαίνει, ὅτι δὲν ἐμπεριέχεται ὁ διαιρέτης 18 εἰς τὸν διαιρετέον 10 φοράς, ἀλλ' ὀλιγώτερον· ἄρα τὸ πηλίκον δὲν εἶναι 10, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 10 καὶ διὰ τοῦτο εἶναι μονοψήφιον.

Ἔστω καὶ ἡ διαίρεσις 5892 : 65.

Διὰ νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης 65 μεγαλήτερος τοῦ διαιρετέου 5892, χρειάζονται δύο μηδενικά· διότι ὁ 6500 ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον, ἀλλ' ὁ 650 εἶναι μικρότερος αὐτοῦ. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ διαιρετέος 5892 περιέχει τὸν διαιρέτην 10 φοράς, ὄχι ὅμως 100 φοράς· ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ 10, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 100· ἐπομένως θὰ ἔχῃ δύο ψηφία.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ εὑρίσκω, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 185421 : 12 ἔχει πέντε ψηφία, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 89004 : 905 ἔχει δύο ψηφία· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Περὶ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν γίνεται ἡ διαίρεσις.

62. Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἐκτελεῖται συντόμως ἡ διαίρεσις, διακρίνομεν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

1) ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον,

2) ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

Διαίρεσις, ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.

63. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἂν εἶναι καὶ ὁ διαιρέτης μονοψήφιος, ἡ διαίρεσις γίνεται ἀπὸ μνήμης· διότι ἐκ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος ἐνθυμούμεθα ἀμέσως τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ ὁποῖον ἐμπεριέχεται εἰς τὸν διαιρετέον.

Ἄν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 75 διὰ τοῦ 8, ἐνθυμούμεθα ἀμέσως, ὅτι εἶναι $8 \times 9 = 72$, ἀλλὰ $8 \times 10 = 80$· ἄρα πηλίκον εἶναι ὁ 9· τὸ δὲ ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν, ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 75 τὸ γινόμενον 72· εἶναι δὲ 3.

64. Ἂν δὲ ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος, μεταχειριζόμεθα τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3858 διὰ τοῦ 525· ἤτοι νὰ εὕρωμεν, πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 525 εἰς τὸν 3858.

Διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

Αἱ 5 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρέτου δὲν περιέχονται εἰς τὰς μονάδας, οὐδὲ εἰς τὰς δεκάδας τοῦ διαιρετέου, ἀλλὰ μόνον εἰς τὰς 38 ἑκατοντάδας αὐτοῦ· περιέχονται δὲ 7 φορὰς μόνον (διότι τὸ 5 εἰς τὸ 38 περιέχεται 7 φοράς). Ἐκ τούτου συμπεραίνω, ὅτι τὸ πηλίκον δὲν εἶναι μεγαλήτερον τοῦ 7· ἀλλ' εἶναι ἢ 7 ἢ μικρότερον τοῦ 7 (διότι αἱ 5 ἑκατοντάδες, ἤτοι ὁ 500, περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον 7 φοράς· ἀλλὰ ὁ 525, ὡς μεγαλήτερος τοῦ 500, δυνατὸν νὰ μὴ περιέχηται εἰς αὐτὸν 7 φοράς).

Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 7, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 525, καὶ εὑρίσκω γινόμενον 3675, ἤτοι μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Ἐκ τούτου βλέπω, ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι 7· ἀφαιρῶν δὲ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον 3675 (τοῦ πηλίκου 7 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 525), εὑρίσκω τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, ὅπερ εἶναι 183.

Ὡς δεύτερον παράδειγμα ἔστω ἡ διαίρεσις

$$8569 : 2854.$$

Τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (διότι 2854×10 εἶναι 28540, ἤτοι μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου) καὶ διὰ νὰ τὸ εὕρω, παρατηρῶ, ὅτι αἱ 2 χιλιάδες τοῦ διαιρέτου περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον (δηλαδὴ εἰς τὰς 8 χιλιάδας του) 4 φορὰς μόνον, ὥστε καὶ ὅλος ὁ διαιρέτης 2854 δὲν περιέχεται εἰς τὸν διαιρετέον περισσότερον ἀπὸ 4 φοράς· ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶναι ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 4, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2854 καὶ εὑρίσκω γινόμενον 11416, ὅπερ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 3, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εὑρίσκω γινόμενον 8562, μικρότερον τοῦ διαιρετέου· λοιπὸν τὸ πηλίκον εἶναι 3.

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ὑπόλοιπον, ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 8569 τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ἤτοι τὸ 8562, καὶ εὑρίσκω τὸ ὑπόλοιπον 7· ὥστε ἐξετελέσθη ἡ διαίρεσις.

65. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἶναι μονοψήφιον, λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου (ἂν εἶναι ἰσοψήφιοι) ἢ τὸ πρῶτον διψήφιον τμῆμα αὐτοῦ (ἂν ἔχῃ ὁ διαιρετέος ἓν ψηφίον περισ-

σότερον) τὸ πηλίκον, ὅπερ εὑρίσκομεν, θὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλήτερον τοῦ ζητουμένου.

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν δὲ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπ' αὐτό, καὶ ἂν μὲν τὸ προκύπτον γινόμενον χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον, τότε τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτοι καθεξῆς, ἕως οὗ εὕρωμεν ἓν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον νὰ περιέχηται εἰς τὸν διαιρετέον.

Συνήθως ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς φαίνεται.

6083	703	50379	6902
5624	8	48314	7
459.		2065.	

Σημείωσις. Ὅταν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶναι μεγαλήτερον τοῦ 5, εἶναι προτιμότερον νὰ αὐξάνωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον κατὰ μονάδα, πρὶν διαιρέσωμεν δι' αὐτοῦ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου (ἢ τὰ δύο πρῶτα)· διότι τοιουτοτρόπως, εὑρίσκομεν ταχύτερον τὸ πηλίκον. Ἂν ἔχωμεν, π. χ., νὰ διαιρέσωμεν τὸν 8381 διὰ τοῦ 2954, κατὰ τὸν ἀνωτέρω τεθέντα κανόνα, θὰ διαιρέσωμεν τὸ 8 διὰ τοῦ 2· καὶ ἐπειδὴ τὸ 2 εἰς τὸ 8 περιέχεται 4 φοράς, θὰ συμπεράνωμεν, ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4· δοκιμάζοντες δέ, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι 2· τοῦτο θὰ εὑρίσκομεν ταχύτερον, ἐὰν ἐσκεπτόμεθα, ὅτι ὁ διαιρέτης ἔχει σχεδὸν 3 χιλιάδας καὶ ὅτι αἱ 3 χιλιάδες χωροῦσιν εἰς τὰς 8 χιλιάδας 2 μόνον φοράς· ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἢ 2 ἢ μεγαλήτερον τοῦ 2 (διότι ὁ διαιρέτης 2954, ὡς μικρότερος τοῦ 3000, ἐνδέχεται νὰ χωρῇ περισσοτέρας φορὰς εἰς τὸν διαιρετέον).

Διαίρεσις, ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

66. Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον, ἡ διαίρεσις ἀναλύεται εἰς ἄλλας, ἐξ ὧν ἑκάστη ἔχει πηλίκον μονοψήφιον· γίνεται δὲ τοῦτο, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν

$$52629 : 24,$$

ἤτοι, νὰ μοιράσωμεν 52629 δραχμὰς ἐξ ἴσου εἰς 24 ἀνθρώπους.

Λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀπ' ἀρχῆς, ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον.

Ἐνταῦθα λαμβάνομεν τὰς 52 χιλιάδας καὶ μοιράζομεν αὐτὰς εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους

$$\begin{array}{r|l} 52'629 & 24 \\ \cline{2-2} 48 & 2 \\ \cline{1-1} 4. & \end{array}$$

Εἰς τὴν πρώτην ταύτην μερικὴν διαίρεσιν, διαιρετέος εἶναι ὁ 52 (χιλιάδες), διαιρέτης ὁ 24, πηλίκον 2 (χιλιάδες) καὶ ὑπόλοιπον 4 (χιλιάδες).

Αἱ 4 χιλιάδες, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν, ὁμοῦ μὲ τὰς 629 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν ἐξ ἀρχῆς, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 4629, ὅστις μένει ἀκόμη νὰ μοιρασθῇ εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν (ὡς καὶ εἰς τὴν πρώτην) λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου, ἀπ' ἀρχῆς αὐτοῦ, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνομεν λοιπὸν τὰς 46 ἑκατοντάδας καὶ ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

$$\begin{array}{r|l} 46'29 & 24 \\ \cline{2-2} 24 & 1 \\ \cline{1-1} 22 & \end{array}$$

εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον 1 ἑκατοντάδα καὶ ὑπόλοιπον 22 ἑκατοντάδας.

Αἱ 22 ἑκατοντάδες, αἵτινες ἔμειναν, ἑνωθεῖσαι μετὰ τῶν 29 μονάδων, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 2229, τὸν ὁποῖον πρέπει ἀκόμη νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου (ἀπ' ἀρχῆς), ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνομεν λοιπὸν τὰς 222 δεκάδας καὶ ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

$$\begin{array}{r|l} 222'9 & 24 \\ \cline{2-2} 216 & 9 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον 9 δεκάδας καὶ ὑπόλοιπον 6 δεκάδας.

Αἱ 6 δεκάδες, αἵτινες ἔμειναν καὶ αἱ 9 μονάδες, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 69, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ μοιράσωμεν ἀκόμη εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

$$\begin{array}{r|l} 69 & 24 \\ \cline{2-2} 48 & 2 \\ \cline{1-1} 21. & \end{array}$$

Ἡ διαίρεσις αὕτη δίδει πηλίκον μονοψήφιον, τὸ 2, καὶ κατάλοιπον τὸ 21.

Ὥστε ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη καὶ πηλίκον μὲν εὑρήκαμεν 2 χιλιάδας, 1 ἑκατοντάδα, 9 δεκάδας καὶ 2 μονάδας, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 2192· ὑπόλοιπον δὲ 21.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ, ὡς ἕπεται:

52΄629	24
48	2000
46΄29	100
24	90
222΄9	2
216	
69΄	
48	
21.	

Παρατηρήσεις περὶ τῆς διατάξεως τῆς διαιρέσεως.

1) Δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 4 δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ καταβιβάζωμεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου, ὅσα ἀφήκαμεν εἰς τὴν πρώτην μερικὴν διαίρεσιν, ἤτοι τὰ 629, ἀλλὰ μόνον τὸ πρῶτον ἐξ αὐτῶν, ἤτοι τὸ 6, διότι αὐτὸ μόνον χρειάζεται εἰς τὴν δευτέραν μερικὴν διαίρεσιν· διότι εἰς αὐτήν, μόνον τὸ 46 διαιροῦμεν, τὰ δὲ ἄλλα ψηφία τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 4629 τὰ ἀφίνομεν. Ἐπίσης δεξιὰ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου 22 δυνάμεθα νὰ καταβιβάζωμεν μόνον τὸ πρῶτον ἐκ τῶν παραλειφθέντων ψηφίων, ἤτοι τὸ 2, διότι τὰ ἄλλα δὲν χρειάζονται εἰς τὴν τρίτην διαίρεσιν. Διὰ ταῦτα, εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν καταβιβάζομεν ἀπὸ ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου κατὰ σειράν.

2) Καὶ τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα ἐγράψαμεν δεξιὰ τοῦ ψηφίου 2, ἵνα σημαίνῃ 2 χιλιάδας, καὶ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 1, ἵνα σημαίνῃ μίαν ἑκατοντάδα καὶ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 9, διὰ νὰ σημαίνῃ 9 δεκάδας, τὰ μηδενικά, λέγω, ταῦτα, δύνανται νὰ παραλείπωνται· ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἰς μίαν σειράν, κατὰ τὴν τάξιν, καθ' ἣν εὑρίσκονται, ἤτοι 2192· διότι τότε τὸ 2 σημαίνει χιλιάδας καὶ τὸ 1

σημαίνει ἑκατοντάδας καὶ τὸ 9 δεκάδας. Ἡ πρᾶξις τότε διατάσσεται συντομώτερον ὡς ἑξῆς.

```
52'629 | 24
48     |-----
-----   2192
 46
 24
-----
 222
 216
-----
   69
   48
  ----
   21.
```

Ἀλλ' ὅταν διατάσσωμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον, πρέπει νὰ προσέχωμεν εἰς τὰ ἑξῆς.

Ἂν εἰς μερικήν τινα διαίρεσιν, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν εὕρωμεν πηλίκον (ἄν, δηλαδή, ὁ διαιρέτης δὲν χωρῇ εἰς τὸν προκύπτοντα τότε ἀριθμόν), *τότε πρέπει νὰ γράφωμεν ἓν μηδενικὸν δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου· τοῦτο δέ, ἵνα διατηρῆται ἡ ἀξία αὐτῶν.* Τοῦτο συμβαίνει, λ. χ., εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα:

```
355'68 | 171
342    |-----
------   208
 1368
 1368
------
    0.
```

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης δὲν ἔχει δεκάδας· ἐγράψαμεν λοιπὸν 0 εἰς τὴν θέσιν των· ἄλλως τὸ ψηφίον 2 δὲν θὰ ἐσήμαινεν ἑκατοντάδας.

3) Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος, ἀφαιροῦμεν τὰ γινόμενα αὐτοῦ χωρὶς νὰ τὰ γράφωμεν· ἡ πρᾶξις τότε λαμβάνει τὴν ἑξῆς διάταξιν:

```
58'74 | 8          21014 | 7
 27   |----         0014 |-----
  34   734             0.  3002
   2.
```

Κανὼν τῆς διαιρέσεως.

67. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς γενικὸς κανὼν τῆς διαιρέσεως.

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι᾽ ἄλλου, χωρίζομεν ἀπ᾽ ἀρχῆς τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον (πρὸς τοῦτο χωρίζομεν ἢ τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, ἢ ἓν περισσότερον) *διαιροῦμεν τὸ χωρισθὲν μέρος διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ μέρους, τὸ ὁποῖον διῃρέσαμεν, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρέτου.*

Τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ὅπερ γράφομεν δεξιὰ τοῦ πρώτου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον διῃρέσαμεν, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρέτου. Τὸν προκύπτοντα τότε ἀριθμὸν διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου.

Ἐὰν δὲ εἰς μερικήν τινα διαίρεσιν, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν τὸ ἁρμόδιον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν διαιρῆται ὁ προκύπτων ἀριθμὸς διὰ τοῦ διαιρετέου, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Συντομίαι.

1η.

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 10, ἡ διαίρεσις γίνεται τάχιστα, ὡς ἑξῆς.

Χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου· τότε τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὸ δὲ χωρισθὲν ψηφίον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

Οἷον, ἡ διαίρεσις 15489 : 10 δίδει πηλίκον 1548 καὶ ὑπόλοιπον 9· ἡ δὲ διαίρεσις 8750 : 10 δίδει πηλίκον 875 καὶ ὑπόλοιπον 0.

Ὁ *λόγος τούτου* εἶναι ὁ ἑξῆς.

Διὰ νὰ διαιρέσω τὸν 15489 διὰ τοῦ 10, πρέπει νὰ εὕρω πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 10 εἰς τὸν 15489, ἤτοι, πόσας δεκάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς 15489· ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει τὸ ὅλον 1548 δεκάδας καὶ 9 μονάδας, ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι 1548, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι αἱ 9 μονάδες.

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 100, ἡ διαίρεσις γίνεται τάχιστα, ὡς ἑξῆς. *Χωρίζομεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ διαιρετέου·* τότε τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

Οἷον, ἡ διαίρεσις 5897 : 100 δίδει πηλίκον 58 καὶ ὑπόλοιπον 97.

Διότι τὸ πηλίκον δεικνύει, πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 100 εἰς τὸν 5897· ἤτοι, πόσας ἑκατοντάδας τὸ ὅλον ἔχει ὁ ἀριθμὸς 5897· ἔχει δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος 58 ἑκατοντάδας (διότι αἱ 5 χιλιάδες ἀποτελοῦσι 50 ἑκατοντάδας).

Καὶ γενικῶς: *Ὅταν ὁ διαιρέτης ἀποτελῆται ἐκ τῆς μονάδος, ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, χωρίζομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης·* τότε τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα τὸ ὑπόλοιπον.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ κανόνος τούτου γίνεται ὡς καὶ τῶν δύο προηγουμένων.

2α.

Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ εἰς τὸ τέλος μηδενικά, παραλείπομεν αὐτά, παραλείπομεν δὲ καὶ ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου· τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον τότε εὑρίσκομεν, εἶναι τὸ ζητούμενον· ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀληθὲς ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, πρέπει, δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς συντομευθείσης διαιρέσεως, νὰ γράψωμεν καὶ τὰ παραλειφθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου μὲ τὴν σειράν των.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 759431 διὰ τοῦ 18000. Διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον, πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὰς 18 χιλιάδας ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 759431, ὅσας φορὰς δύναμαι. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ χιλιάδες δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ μονάδων, οὔτε ἀπὸ δεκάδων, οὔτε ἀπὸ ἑκατοντάδων, πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὰς 18 χιλιάδας ἀπὸ τῶν 759 χιλιάδων τοῦ διαιρετέου, ὅσας φορὰς δύναμαι· τουτέστι, πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν ἀριθμὸν 759 διὰ τοῦ 18, διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον· τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ ἀπαρτίζηται ἐκ τῶν χιλιάδων, αἵτινες ἐνδέχεται νὰ μείνωσι, καὶ ἐκ τῶν 431 μονάδων, τὰς ὁποίας παρελείψαμεν.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

```
875(4 | 25(0          487(08 | 4(00
 75   | 35              8    | 121
 125                    7
 125                    308.
   04.
```

Σημείωσις. Εἰς τὴν συντομίαν ταύτην ὑπάγεται προδήλως καὶ ἡ πρώτη· ἀναφέρομεν δ' αὐτὴν ἰδιαιτέρως, χάριν μείζονος σαφηνείας.

3η.

Ὅταν τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου εἶναι πάντα 9, ἡ διαίρεσις συντομεύεται ὡς ἀκολούθως.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 589875421 διὰ τοῦ 999·
τουτέστι, νὰ μοιράσωμεν 589875421 δραχμὰς εἰς 999 ἀνθρώπους.

Διὰ νὰ εὐκολύνω τὴν διαίρεσιν, παραδέχομαι ἀκόμη ἕνα ἄνθρωπον καὶ γίνονται 1000· τότε (κατὰ τὴν 1ην συντομίαν) θὰ λάβῃ ἕκαστος 589875 δραχμὰς καὶ θὰ περισσεύσωσι 421.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ εἷς ἄνθρωπος δὲν ὑπάρχει, τὸ μερίδιόν του, ἤτοι αἱ 589875 δραχμαί, ἔμεινε· τοῦτο δέ, ἑνούμενον μετὰ τοῦ ὑπολοίπου 421, δίδει 590296 δραχμάς, αἱ ὁποῖαι πρέπει ἀκόμη νὰ μοιρασθῶσιν εἰς τοὺς 999 ἀνθρώπους· γίνεται δὲ τοῦτο διὰ νέας διαιρέσεως 590296 : 999.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν κάμνω τὴν αὐτὴν συντομίαν καὶ εὑρίσκω ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τῶν 999 ἀνθρώπων 590 δραχμὰς καὶ θὰ μείνωσι καὶ 886 δραχμαί.

Ὥστε ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη καὶ ἔδωκε πηλίκον 589875+590, ἤτοι 590465, κατάλοιπον δὲ 886.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς·

```
589507 | 9999          175603 | 99
  9507 | 58                 3 | 1756
  9565.                  1759 |   17
                           59 | 1773  πηλίκον
                           76.
```

Δι' ὁμοίου τρόπου ἐσυντομεύθη καὶ ἡ ἑπομένη διαίρεσις (εἰς τὴν ὁποίαν παρεδέχθην 2 ἀνθρώπους).

21508954	998	
21508	21508	
954	43	
43970	1	
43	21552	πηλίκον
970		
1056		
1		
56		
58 ὑπόλοιπον.		

Σημείωσις. Ὅταν τὸ πηλίκον μέλλῃ νὰ ἔχῃ πολλὰ ψηφία, εἶναι δὲ καὶ ὁ διαιρέτης πολυψήφιος, σχηματίζομεν κατὰ πρῶτον πίνακα, περιέχοντα τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ἐννέα μονοψηφίους ἀριθμοὺς κατὰ σειράν· τότε δι' ἁπλῆς ἐπόψεως τοῦ πίνακος τούτου, εὑρίσκομεν ἀμέσως, εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν, τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν διαιρετέον καὶ ἑπομένως εὑρίσκομεν τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου· ὥστε ἡ διαίρεσις καὶ συντομώτερον ἐκτελεῖται καὶ ἀσφαλέστερον.

Τὸ αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ κάμνωμεν, καὶ ὅταν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πολλὰς διαιρέσεις· διότι τότε ὁ πίναξ, τὸν ὁποῖον ἅπαξ ἐσχηματίσαμεν, χρησιμεύει εἰς ἁπάσας τὰς διαιρέσεις ταύτας.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

68. *Ἀφοῦ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν θέλωμεν νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν αὐτῆς, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον (ἐὰν ὑπάρχῃ)· ἐὰν τότε εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις, ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους* (ἐδ. 59).

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑπομένων θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄

69. *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν βλάπτεται, τὸ ὑπόλοιπον ὅμως πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ἔστω ἡ διαίρεσις 58 : 9, ἥτις δίδει πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 4· λέγω, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἐφ' ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 5, τὸ μὲν πηλίκον μένει πάλιν 6, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 4 γίνεται 4×5.

Ἀπόδειξις. Ὅσας φορὰς δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω τὸν 9 ἀπὸ τοῦ 58, τόσας φορὰς δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω καὶ τὸ $9+9+9+9+9$ ἀπὸ τοῦ $58+58+58+58+58$· διότι ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρῶ ἕκαστον 9 ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου 58 (τὸ πρῶτον 9 ἀπὸ τοῦ πρώτου 58, τὸ δεύτερον ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ οὕτω καθεξῆς)· ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$\begin{array}{r} 58+58+58+58+58 \\ 9+\ 9+\ 9+\ 9+\ 9 \\ \hline 49+49+49+49+49 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Ἀλλ' ὅταν ἀφαιρέσω 6 φορὰς τὸ 9 ἀπὸ τοῦ 58, μένει ὑπόλοιπον 4· ἄρα ὅταν ἀφαιρέσω 6 φορὰς τὸ $9+9+9+9+9$ ἀπὸ τοῦ $58+58+58+58+58$, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον $4+4+4+4+4$.

Ἐκ τούτου βλέπω, ὅτι τὸ γινόμενον 9×5 περιέχεται 6 φορὰς εἰς τὸ γινόμενον 58×5· μένει δὲ ὑπόλοιπον 4×5, ὅπερ εἶναι προφανῶς μικρότερον τοῦ 9×5.

Ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, βλέπομεν, ὅτι θὰ μείνῃ τελεία καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν· ὅθεν ἕπεται ἡ πρότασις.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην τελείας διαιρέσεως ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται καὶ ἡ διαίρεσις μένει πάλιν τελεία.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην τῆς τελείας διαιρέσεως δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, ἡ διαίρεσις 36 : 4, ἥτις δίδει πηλίκον 9. Κατὰ τὴν ἰδιότητα πάσης τελείας διαιρέσεως (ἐδ. 57), θὰ εἶναι $36 = 4 \times 9$· ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἴσους ἀριθμοὺς (τὸν 36 καὶ τὸν

$4\times9)$ ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 5, πάλιν μένουσιν ἴσοι·

ὅθεν ἕπεται $36\times5=(4\times9)\times5$,

ἢ $36\times5=(4\times5)\times9$. (ἐδ. 49, ἰδιότ. 2)

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 36×5 σύγκειται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 4×5, ἐνειάκις ληφθέντος· ἤτοι περιέχει αὐτὸν ἐννέα φοράς· ἐπομένως ὁ 36×5 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4×5 καὶ δίδει πηλίκον 9.

Σημείωσις. Δι' ὁμοίου τρόπου δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἐκ τῆς γενικῆς ἰδιότητος τῆς διαιρέσεως (ἐδ. 59)· ἀλλ' ἡ τοιαύτη ἀπόδειξις εἶναι δυσκολωτέρα.

Ἵνα δώσωμεν ἐφαρμογήν τινα τῆς ἰδιότητος ταύτης, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 5, ἔστω τὸν 857505· ἐὰν διπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους, τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται, ἀλλ' ὁ διαιρέτης γίνεται 10 καὶ ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται ἁπλούστατα· οὕτως, εὑρίσκομεν πηλίκον 171501. Ὁμοίως, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 25, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 4 καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον δι' 100.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄

70. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ* (ἐὰν διαιρῆται ἀκριβῶς).

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ γινόμενον

$$5\times12\times8\times7$$

καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 4· λέγω, ὅτι ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα παράγοντα αὐτοῦ, οἷον τὸν 12, διὰ τοῦ 4· ἤτοι λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶναι

$$5\times3\times8\times7.$$

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος, τετράκις ληφθείς, δίδει τὸν διαιρετέον.

Τῷ ὄντι, κατὰ τὴν δευτέραν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 49), εἶναι $(5\times3\times8\times7)\times4=5\times(3\times4)\times8\times7=5\times12\times8\times7$.

Πόρισμα.

71. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.*

Διότι, ἄν, λόγου χάριν, πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $18\times4\times12\times9\times7$ διὰ τοῦ 9, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν παράγοντα 9 διὰ τοῦ διαιρέτου 9· ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι

$$18\times4\times12\times1\times7,$$

ἤ $$18\times4\times12\times7\cdot$$

διότι ἡ μονὰς 1, ὡς παράγων, δύναται νὰ παραλείπηται.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ´

72. *Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν ἀλλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου* (τουτέστι, πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος· ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου, καὶ οὕτω καθεξῆς).

Αἱ διαιρέσεις ὑποτίθεται, ὅτι γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 360 διὰ τοῦ γινομένου $2\times3\times5$· ἐὰν πρῶτον εὕρω τὸ γινόμενον τοῦτο (ὅπερ εἶναι 30) καὶ ἔπειτα ἐκτελέσω τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκω πηλίκον 12· λέγω δέ, ὅτι τὸ αὐτὸ πηλίκον θὰ εὕρω, καὶ ἂν διαιρέσω τὸν 360, πρῶτον διὰ 2, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διαιρέσω διὰ 3 καὶ ἔπειτα τὸ νέον πηλίκον διὰ 5.

Ἀπόδειξις. Ὁ διαιρετέος 360 εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου $2\times3\times5$, ἐπὶ τὸ πηλίκον 12·

ἤτοι $$360=(2\times3\times5)\times12,$$

ἤ $$360=2\times3\times5\times12.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν, ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τὸν 360 (ἢ τὸ ἴσον αὐτοῦ γινόμενον) διὰ 2, θὰ εὕρωμεν πηλίκον (ἐδ. 71) τὸ ἑξῆς: $3\times5\times12$· ἐὰν δὲ τὸ πηλίκον τοῦτο διαιρέσωμεν διὰ 3, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸ 5×12· ἐὰν δὲ τὸ νέον τοῦτο πηλίκον διαιρέσωμεν διὰ 5, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸ 12, τουτέστι, τὸ αὐτὸ πηλίκον, ὅπερ εὕρομεν, διαιρέσαντες τὸν 360 διὰ μιᾶς διὰ τοῦ γινομένου $2\times3\times5$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ´

73. *Ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα πηλίκα.*

Αἱ διαιρέσεις ὑποτίθενται, ὅτι γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς.

Ἂς ὑποθέσωμεν, λόγου χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα

$12+20+40$ διὰ τοῦ 4 (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτό)·

ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν προσθετέον 12 διὰ τοῦ 4, εὑρίσκομεν πηλίκον 3, ἐὰν δὲ τὸν 20, εὑρίσκομεν πηλίκον 5, καὶ τέλος ὁ 40 δίδει πηλίκον 10· λέγω δέ, ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι

$$3+5+10.$$

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ ἀριθμὸς οὗτος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην, δίδει (ἐδ. 34)

$$(3+5+10)\times 4=(3\times 4)+(5\times 4)+(10\times 4)=12+20+40\cdot$$

τουτέστι τὸν διαιρετέον.

Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

Ἴσοι ἀριθμοί, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρούμενοι, δίδουσιν ἴσα πηλίκα (ἡ διαίρεσις ὑποτίθεται τελεία).

Διότι, ἂν τὰ πηλίκα πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν διαιρέτην, πρέπει νὰ δίδωσιν ἴσα γινόμενα (τοὺς ἴσους διαιρετέους)· τοῦτο ὅμως δὲν θὰ ἐγίνετο, ἂν τὰ πηλίκα ἦσαν ἄνισα· διότι τῶν ἀνίσων τὰ ἰσοπολλαπλάσια εἶναι ἄνισα.

Παρατήρησις.

74. Ἡ διαίρεσις, ὡς ἐξ ἀρχῆς εἴδομεν, δύναται νὰ ὁρισθῇ, ἢ ὡς *μερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἴσα* ἢ *ὡς εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει πόσας φορὰς χωρεῖ ἀριθμός τις ἄλλον.* Διὰ τοῦτο, ἡ διαίρεσις ἐμφανίζεται ὑπὸ δύο διαφόρους ὄψεις, αἵτινες ὡς πρὸς τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις καὶ ὡς πρὸς τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς εἶναι ἐντελῶς ἀδιάφοροι, διακρίνονται ὅμως σαφέστατα ἀπ' ἀλλήλων ἐν τοῖς προβλήμασιν.

Ἵνα δείξωμεν τοῦτο, ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα.

1) Πόσον ἀξίζει 1 πῆχυς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου 15 πήχεις ἀξίζουν 75 δραχμάς;

Φανερὸν εἶναι, ὅτι πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 75 τῶν δραχμῶν εἰς 15 ἴσα μέρη καὶ ἕκαστον μέρος θὰ εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς πήχεως.

Ἐν τῇ πράξει ταύτῃ ὁ διαιρετέος 75 δραχμαὶ εἶναι συγκεκριμένος ἀριθμός, ὁ δὲ διαιρέτης 15 εἶναι ἀφῃρημένος· τὸ δὲ πηλίκον, *ὡς μέρος τοῦ διαιρετέου 75*, εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτόν.

2) *Μὲ 75 δραχμὰς πόσους πήχεις δύναμαι νὰ ἀγοράσω ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς πωλεῖται 15 δραχμάς;*

Διὰ νὰ ἀγοράσω 1 πῆχυν, πρέπει νὰ δώσω 15 δραχμάς· τότε μοῦ μένουν 75 — 15, ἤτοι 60 δραχμαί· διὰ νὰ ἀγοράσω καὶ ἄλλον πρέπει ἐκ τῶν 60 δραχμῶν νὰ δώσω πάλιν 15· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐντεῦθεν βλέπω, ὅτι τόσους πήχεις θὰ ἀγοράσω, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 75 τὸν 15· ὥστε πάλιν θὰ διαιρέσω τὸν 75 διὰ 15. Ἐν τῇ πράξει ταύτῃ ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ 75 καὶ 15 θεωροῦνται ὡς ἀφῃρημένοι καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως εἶναι ἐπίσης ἀφῃρημένος ἀριθμός, λαμβάνει δὲ ἔπειτα τὴν σημασίαν, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα καὶ ἥτις δύναται νὰ εἶναι οἱαδήποτε.

Ὅταν θέλω νὰ διακρίνω τὰς δύο ταύτας διαιρέσεις ἀπ' ἀλλήλων, θὰ λέγω τὴν μὲν πρώτην *μερισμὸν* καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς *μερίδιον*, τὴν δὲ δευτέραν *μέτρησιν* καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς *λόγον* (ὑποθέτω τὰς διαιρέσεις τελείας).

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἶναι τόσα, ὅσα ἔχει ὁ διαιρετέος περισσότερα τοῦ διαιρέτου ἢ ἀκόμη ἕν.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις, πολλαπλασιάζων τὸν ἀριθμὸν 21, νὰ δίδῃ γινόμενον, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία νὰ εἶναι ὅμοια· λόγου χάριν 5.

(Ἀπ. Ὑπάρχουσιν ἄπειροι τοιοῦτοι ἀριθμοί· ὁ ἐλάχιστος ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ 26455).

3) Πότε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δὲν βλάπτεται, ἂν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον μία μονὰς ἢ καὶ περισσότεραι; καὶ πόσας μονάδας πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον, διὰ νὰ αὐξήσῃ τὸ πηλίκον κατὰ μίαν μονάδα;

4) Ἐὰν ὁ διαιρετέος πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, ὁ δὲ διαιρέτης μένῃ ὁ αὐτός, ποίαν μεταβολὴν πάσχουσι τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον;

5) Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν διαιρέσεώς τινος, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου· νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως θὰ εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεγαλήτερον τοῦ διαιρέτου τῆς πρώτης διαιρέσεως· καὶ ἴσον μὲν θὰ εἶναι, ἂν τὸ

ὑπόλοιπον τῆς πρώτης διαιρέσεως εἶναι μικρότερον τοῦ πηλίκου αὐτῆς, μεγαλήτερον δέ, ἂν τοὐναντίον.

6) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 853 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ ὀκταδικοῦ.

(Αἱ 853 ἁπλαῖ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ ἀπαρτίζουσι τόσας μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως (ἤτοι ὀκτάδας), ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸν 8 ὁ 853· διότι, 8 μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀπαρτίζουσι μίαν τῆς ἑπομένης· διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 853 διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ἀπαρτίζονται 106 μονάδες δευτέρας τάξεως καὶ μένουσιν ἁπλαῖ μονάδες 5.

Αἱ 106 μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως ἀπαρτίζουσιν ὁμοίως τόσας μονάδας τῆς τρίτης τάξεως, ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸν 8 ὁ 106, ἤτοι 13· μένουσι δὲ καὶ 2 μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ 13 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως ἀπαρτίζουσι μίαν τῆς τετάρτης τάξεως καὶ περισσεύουν καὶ 5 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως, συνάγεται ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 853 θὰ γράφηται εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ὡς ἑξῆς: 1525.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{l|llll}
853 & 8 & & & \\ \cline{2-2}
\ 53 & 106 & \multicolumn{1}{|l}{8} & & \\ \cline{3-3}
\ \ 5 & \ 26 & \ 13 & \multicolumn{1}{|l}{8} & \\ \cline{4-4}
 & \ \ 2 & \ \ 5 & 1. &
\end{array}$$

Ἐπειδὴ αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἐν τῷ ὀκταδικῷ συστήματι εἶναι αἱ ἑξῆς·

1, 8, 8×8, $8\times8\times8$, $8\times8\times8\times8$, κτλ.,

ἢ 1, 8, 8^2, 8^3, 8^4, κτλ.,

ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς παρίσταται εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ὡς ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν:

$$5+(8\times2)+(8^2\times5)+(8^3\times1)\cdot$$

εἰς δὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα παρίσταται ὡς ἄθροισμα τῶν ἑξῆς:

$$3+(10\times5)+(10^2\times8)).$$

7) Νὰ τραπῇ ὁ εἰς τὸ τριαδικὸν σύστημα γεγραμμένος ἀριθμὸς 1202 εἰς τὸ κοινὸν σύστημα.

(Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν:

$$2+3^2\times2+3^3\times1, \text{ ἤτοι τῶν } 2+18+27\cdot$$

καὶ ἑπομένως εἶναι ὁ 47).

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

Ὁρισμοί.

75. *Διαιρετὸς* λέγεται ἀριθμός τις δι' ἄλλου, ἐὰν διαιρῆται δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς (ἤτοι, χωρὶς νὰ μένῃ ὑπόλοιπον). Οἷον, ὁ 15 εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ὁ 20 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, κτλ. Ὁ δὲ διαιρῶν ἀκριβῶς ἀριθμόν τινα λέγεται *διαιρέτης αὐτοῦ*· παραδείγματος χάριν, ὁ 5 εἶναι διαιρέτης τοῦ 15, ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τοῦ 20, κτλ.

Ἀριθμός τις λέγεται *πολλαπλάσιον* ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν γίνηται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· οἷον, ὁ 15 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 (διότι $15=5\times3$), ὁ 24 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6 (διότι $24=6\times4$), κτλ. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις, πολλαπλασιαζόμενος, παράγει ἄλλον, λέγεται *παράγων αὐτοῦ*· οἷον, ὁ 5 εἶναι παράγων τοῦ 15, ὁ 6 εἶναι παράγων τοῦ 24, κτλ.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ καὶ ταῦτα μόνα.

Οἱ διαιρέται παντὸς ἀριθμοῦ καὶ οἱ παράγοντες αὐτοῦ εἶναι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.

Σημείωσις. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἀριθμός τις διαιρεῖ ἄλλον, ἐννοοῦμεν, ὅτι διαιρεῖ αὐτὸν ἀκριβῶς.

Θεωρήματα περὶ τῆς διαιρετότητος.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄

76. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 10 καὶ 25 καὶ 30· λέγω, ὅτι διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 10+25+30.

Ἀπόδειξις. Διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 10, 25 καὶ 30 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5, ἤτοι σύγκειται ἐκ πολλῶν 5·

καὶ ὁ μὲν 10 εἶναι 5+5,
ὁ δὲ 25 εἶναι 5+5+5+5+5,
ὁ δὲ 30 εἶναι 5+5+5+5+5+5·
ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 10+25+30 εἶναι
5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5,

ἤτοι σύγκειται καὶ αὐτὸ ἐκ πολλῶν 5· ὥστε εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5.

Πόρισμα.

77. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ 9 διαιρεῖ τὸν 27· λέγω, ὅτι θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἤτοι

27×2,	27×3,		27×4,...
Διότι τὸ	27×2	εἶναι	27+27,
τὸ	27×3	εἶναι	27+27+27· κτλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄

78. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ 3 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 21 καὶ 12· λέγω, ὅτι θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 21—12.

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ 21 εἶναι 3+3+3+3+3+3+3·
ὁ δὲ 12 εἶναι 3+3+3+3·
ἄρα ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 3+3+3·

ἤτοι σύγκειται καὶ αὐτὴ ἐκ πολλῶν 3· ὥστε εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς.

79. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἄλλον.*

Διότι, ὁ δεύτερος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι ἡ διαφορά, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν, ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τὸν πρῶτον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ´

80. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ᾽ αὐτοῦ, οἱονδήποτε πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου.*

Ἀπόδειξις. Διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εὑρίσκεται, ὅταν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ ὁ διαιρέτης, ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν. Ἂν λοιπὸν προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, μετά τινας ἀφαιρέσεις θὰ εὕρωμεν πάλιν τὸν πρῶτον διαιρετέον, ἑπομένως καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, ἡ ἀφαίρεσις αὕτη εἶναι μέρος τῆς ἐργασίας, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κάμωμεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον· καὶ διὰ τοῦτο δὲν βλάπτει αὐτό.

Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 2 καὶ 5, 4 καὶ 25, 8 καὶ 125, 3 καὶ 9, καὶ 11. Χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος δι᾽ αὐτῶν.

Πολλάκις εἶναι ὠφέλιμον νὰ εἰξεύρωμεν, ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι᾽ ἄλλου, χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν (μάλιστα δὲ διὰ τοὺς ἀνωτέρω μικροὺς ἀριθμούς)· καὶ ἂν δὲν εἶναι διαιρετός, νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Εἰς τοῦτο χρησιμεύουσι τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 2 καὶ 5).

81. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ διὰ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ τελευταίου ψηφίου του.*

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, ὁ τυχὼν ἀριθμός, ὁ 9438· λέγω ὅτι, ἂν διαιρεθῇ διὰ 2 ἢ διὰ 5, θὰ ἀφήσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφίνει καὶ τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον 8· ἑπομένως, ἂν διὰ 5 διαιρεθῇ, θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 3, ἂν δὲ διὰ 2, θὰ ἀφήσῃ 0.

Ἀπόδειξις. Ἑκάστη δεκὰς εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 2 καὶ τοῦ 5 (διότι εἶναι $10 = 2 \times 5$)· ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ πάσας τὰς δεκάδας του, ἀνὰ μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 2 ἢ διὰ 5 δὲν βλάπτεται (ἐδ. 80). Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχει 943 δεκάδας καὶ 8 μονάδας· ἂν λοιπὸν παραλείψωμεν τὰς δεκάδας του, ἀνὰ μίαν, θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 8 μονάδας· ἄρα, τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν 8 μονάδων του εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Πόρισμα.

1) Οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶναι

0 ἢ 2 ἢ 4 ἢ 6 ἢ 8,

διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2· λέγονται δὲ οἱ διὰ τοῦ 2 διαιρετοὶ ἀριθμοὶ *ἄρτιοι*.

Οἱ δὲ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶναι

1 ἢ 3 ἢ 5 ἢ 7 ἢ 9,

δὲν εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2, (ἀλλ' ἀφίνουσιν ὑπόλοιπον 1)· λέγονται δὲ οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ *περιττοί*.

2) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον του εἶναι ἢ 0 ἢ 5.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 4 καὶ 25).

82. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ διὰ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ.*

Ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς ὁ 459 386· λέγω, ὅτι, εἴτε τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὅλον διαιρέσωμεν διὰ 4, εἴτε μόνον τὸν 86 (ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του κατὰ τὴν τάξιν αὐτῶν), ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν. Ὅμοιον δὲ θὰ συμβαίνῃ, ἂν διαιρέσωμεν διὰ 25.

Ἀπόδειξις. Ἑκάστη ἑκατοντὰς εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 4 καὶ τοῦ 25 (διότι $100 = 4 \times 25$)· ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ πάσας τὰς ἑκατοντάδας του, ἀνὰ μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 4 ἢ διὰ 25 δὲν βλάπτεται (ἐδ. 80). Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει

4593 ἑκατοντάδας καὶ 86 μονάδας· ἂν λοιπὸν παραλείψωμεν τὰς ἑκατοντάδας του, ἀπὸ μίαν μίαν, θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 86 μονάδας· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν 86 μονάδων του εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Πόρισμα.

83. *Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 (ἢ διὰ 25), ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμόν, διαιρετὸν διὰ 4 (ἢ διὰ 25).* Ἐπομένως, διὰ 25 διαιροῦνται ὅσοι ἀριθμοὶ λήγουσιν εἰς 00 ἢ 25 ἢ 50 ἢ 75.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 8 καὶ 125).

84. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 8 ἢ διὰ τοῦ 125 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ.*

Ἔστω τυχὼν ἀριθμός, ὁ 75 429 804· λέγω, ὅτι, εἴτε τοῦτον ὅλον διαιρέσωμεν διὰ 8, εἴτε μόνον τὸν 804 (τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία του κατὰ τὴν τάξιν των), ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν. Τὸ αὐτὸ δὲ λέγω καὶ περὶ τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ 125.

Ἀπόδειξις. Ἑκάστη χιλιὰς εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 8 καὶ τοῦ 125 (διότι $1000 = 8 \times 125$)· ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ πάσας τὰς χιλιάδας του, ἀπὸ μίαν μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 8 ἢ διὰ τοῦ 125 δὲν βλάπτεται. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει 75429 χιλιάδας καὶ 804 μονάδας· ἂν λοιπὸν παραλείψωμεν τὰς χιλιάδας του, ἀπὸ μίαν μίαν, θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 804 μονάδας· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 804 εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Πόρισμα.

85. *Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 (ἢ διὰ 125), ἐὰν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμόν, διαιρετὸν διὰ 8 (ἢ διὰ 125).*

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 9 καὶ 3).

86. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 9 ἢ διὰ*

3 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ εὑρίσκομεν, διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.

Ἔστω τυχὼν ἀριθμός, ὁ 4758· λέγω, ὅτι, εἴτε τοῦτον διαιρέσωμεν διὰ 9, εἴτε τὸ ἄθροισμα $4+7+5+8$ (ἤτοι 24), ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν. Τὸ αὐτὸ δὲ λέγω καὶ περὶ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 3.

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐκ 475 δεκάδων καὶ ἐξ 8 ἁπλῶν μονάδων· ἂν ἐκ μιᾶς δεκάδος (ἤτοι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 10), ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, μένει ὑπόλοιπον μία μονάς, ἤτοι, ἡ δεκὰς γίνεται μονὰς ἁπλῆ· ἂν λοιπὸν ἐκ τῶν 475 δεκάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀφαιρέσωμεν ἐξ ἑκάστης τὸ 9, θὰ μείνωσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν 475 μονάδες καὶ 8 μονάδες· ἤτοι θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς $475+8$. Ἐὰν δὲ πάλιν ἐξ ἑκάστης τῶν 47 δεκάδων τοῦ 475, ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς $47+5+8$. Ἐὰν δὲ τέλος ἐξ ἑκάστης τῶν 4 δεκάδων τοῦ 47, ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς

$$4+7+5+8, \text{ ἤτοι ὁ } 24.$$

Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εὕρομεν, ἀφαιρέσαντες ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ πολλάκις τὸ 9· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ὑπόλοιπον τούτου εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ (ὅταν διαιρεθῶσι δι' 9).

Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει, καὶ ὅταν διαιρέσωμεν διὰ 3· διότι ὁ ἀφαιρεθεὶς ἀριθμός, ὡς συγκείμενος ἐκ πολλῶν 9, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3.

Πόρισμα.

87. *Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9· τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τοῦ 3.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 849408 διαιρεῖται διὰ 3· διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 33 καὶ εἶναι διαιρετὸν διὰ 3· διὰ τοῦ 9 δὲ διαιρούμενος, θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 6 (ὅσον ἀφίνει καὶ ὁ 33).

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 8 941 608 διαιρεῖται διὰ τοῦ 9 (ἑπομένως καὶ διὰ τοῦ 3, κατὰ τὸ πόρισμα 77), διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 36, δηλαδὴ διαιρετὸν διὰ 9.

Σημείωσις. Καὶ εἰς τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς ἀθροίσεως τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ αὐτὸ θεώρημα, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ 9 (ἢ διὰ τοῦ 3)· δυνάμεθα δὲ νὰ ἐξακολουθήσωμεν οὕτως ἐφαρμόζοντες τὸ αὐτὸ θεώρημα, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ἀριθμόν, ἔχοντα ἓν ψηφίον, ὅτε τὸ ὑπόλοιπον εὑρίσκεται ἀμέσως. Παραδείγματος χάριν, τοῦ ἀριθμοῦ 598 432 803, τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 42· τούτου δὲ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 6· ὥστε 6 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 9· διὰ δὲ τοῦ 3 διαιρεῖται ἀκριβῶς.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι, ἀθροίζοντες τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ παραλείπωμεν τὰ 9 ἢ καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 9· διότι ἡ παράλειψις αὐτῶν δὲν βλάπτει τὸ ὑπόλοιπον· ὥστε διὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ἀριθμὸν ἐργαζόμεθα, συντομώτερον, ὡς ἑξῆς:

5 καὶ 8 κάμνουν 13 (ἔξω τὰ 9) 4· 4 καὶ 4. . . 8· 8 καὶ 3. . . 11 (ἔξω τὰ 9) 2· 2 καὶ 2. . . 4· 4 καὶ 8. . . 12 (ἔξω τὰ 9) 3· 3 καὶ 3 . . . 6.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 11).

88. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 11 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἀναλύοντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς διψήφια τμήματα* (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων) *καὶ προσθέτοντες τὰ τμήματα ταῦτα.*

Τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ ἔχῃ καὶ ἓν μόνον ψηφίον.

Ἔστω ὁ τυχὼν ἀριθμός, ὁ 6574158· ἐὰν ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς τὰ τμήματα 58, 41, 57 καὶ 6, λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων τούτων, ἤτοι τὸ $6+57+41+58$, διαιρούμενον διὰ 11, δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θὰ δώσῃ καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός.

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐξ 65741 ἑκατοντάδων καὶ ἐκ 58 μονάδων· ἄν, ἐκ μιᾶς ἑκατοντάδος (ἢ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 100), ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φορὰς (ἤτοι, ἂν ἀφαιρέσωμεν 11×9, ἤτοι 99), μένει ὑπόλοιπον μία μονάς, ἤτοι ἡ ἑκατοντὰς γίνεται μονὰς ἁπλῆ. Ἂν λοιπὸν ἐξ ἑκάστης τῶν 65741 ἑκατοντάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φοράς, θὰ μείνωσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν 65 741 μονάδες καὶ 58 μονάδες, τουτέστι θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς $65741+58$. Ἐὰν δὲ πάλιν ἐξ ἑκάστης τῶν 657 ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ 65741 ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φοράς, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς

$$657+41+58.$$

Ἐὰν δὲ τέλος, ἐξ ἑκάστης τῶν 6 ἑκατοντάδων τοῦ 657 ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φοράς, μένει ὁ ἀριθμὸς

$$6+57+41+58.$$

Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εὑρήκαμεν, ἀφαιρέσαντες πολλάκις τὸ 11 ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ· ἄρα (ἐδ. 80) τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ὑπόλοιπον τούτου εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό, ὅταν διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 11.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ τοὺς διαιρέτας 33 καὶ 99. Διότι ὁ ἀφαιρούμενος ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 99 καί, κατ' ἀκολουθίαν, πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 33.

Ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα $6+57+41+58$ παραλείψωμεν ἐξ ἑκάστου μέρους τὰ πολλαπλάσια τοῦ 11, τὸ ὑπόλοιπον δὲν βλάπτεται, εὑρίσκομεν δὲ ἄθροισμα τὸ $6+2+8+3$, ἤτοι 19· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο, διαιρούμενον διὰ 11, δίδει ὑπόλοιπον 8, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον 8.

Πόρισμα.

89. *Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' 11, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται (ἐκ δεξιῶν), εἶναι διαιρετὸν δι' 11.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 859 584 ἀναλύεται εἰς τὰ τμήματα 84, 95 καὶ 85 καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $85+95+84$, ἤτοι 264.

Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὸ αὐτὸ θεώρημα καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον 264, εὑρίσκομεν τὰ τμήματα 64 καὶ 2, ἅτινα δίδουσιν ἄθροισμα 66· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 11.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 358 970 412 ἀναλύεται εἰς τὰ τμήματα 12, 04, 97, 58 καὶ 3, ταῦτα δὲ ἔχουσιν ἄθροισμα

$$3+58+97+4+12·$$

καὶ παραλειπομένων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 11, τὸ ἄθροισμα τοῦτο γίνεται

$$3+3+9+4+1, \quad \text{ἤτοι} \quad 20·$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ 20 ἀφίνει ὑπόλοιπον 9, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμός, διαιρούμενος διὰ 11, θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 9.

*Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 9 καὶ διὰ τοῦ 11.

Ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τῶν ὑπολοίπων· στηρίζεται δὲ ἐπὶ τῶν ἑπομένων θεωρημάτων περὶ τῶν ὑπολοίπων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

90. *Τὸ ὑπόλοιπον ἀθροίσματος, ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην, δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον προσθετέον διὰ τοῦ ὑπολοίπου του* (ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην).

Ἔστω τυχὸν ἄθροισμα, τὸ $12+25+32$· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην 7, δὲν βλάπτεται, ἂν θέσωμεν, ἀντὶ τοῦ 12, τὸ ὑπόλοιπόν του (ἤτοι τὸ 5) καὶ ἀντὶ τοῦ 25, τὸ ὑπόλοιπόν του 4 καὶ ἀντὶ τοῦ 32, τὸ ὑπόλοιπόν του 4· λέγω, δηλαδή, ὅτι, εἴτε τὸ δοθὲν ἄθροισμα $12+25+32$ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 7, εἴτε τὸ $5+4+4$, ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν.

Ἀπόδειξις. Διότι ἀφῃρέσαμεν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου 7· τοῦτο δὲ δὲν βλάπτει τὸ ὑπόλοιπον (ἐδ. 80).

ΘΕΩΡΗΜΑ

91. *Τὸ ὑπόλοιπον γινομένου, ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην, δὲν βλάπτεται ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον παράγοντα διὰ τοῦ ὑπολοίπου του* (ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην).

Ἔστω τυχὸν γινόμενον, τὸ 52×684· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην 11, δὲν βλάπτεται, ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ παράγοντος 52, τὸ ὑπόλοιπόν του 8 καὶ ἀντὶ τοῦ παράγοντος 684, τὸ ὑπόλοιπόν του 2.

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον 52×684 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμα $52+52+52+\ldots+52$ (οὗτινος οἱ προσθετέοι εἶναι ἑξακόσιοι ὀγδοήκοντα τέσσαρες)· ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ἀντὶ ἑκάστου προσθετέου, θέσωμεν τὸ ὑπόλοιπόν του (ἤτοι τὸ 8), δὲν βλάπτεται τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀθροίσματος καὶ θὰ ἔχωμεν τὸ ἄθροισμα

$$8+8+8+\ldots+8, \quad \text{ἤτοι τὸ} \quad 8\times684.$$

Καὶ πάλιν τὸ γινόμενον 8×684 εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα

$684 + 684 + \ldots + 684$ (ὅπερ ἔχει ὀκτὼ προσθετέους) καὶ ἂν ἐφαρμόσωμεν πάλιν τὸ προηγούμενον θεώρημα, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα $2 + 2 + \ldots + 2$, ἤτοι τὸ 2×8, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δι' 11.

Ἐκ τούτου γίνεται φανερὰ ἡ ὀρθότης τοῦ ἑπομένου κανόνος.

92. *Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην, εὑρίσκομεν τὰ ὑπόλοιπα τῶν δύο παραγόντων, ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην τοῦτον, καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτά· τότε δὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ὑπολοίπων καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν πρέπει νὰ ἔχωσιν ἴσα ὑπόλοιπα.*

Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τὸν ἑξῆς πολλαπλασιασμόν, τὸν ὁποῖον δοκιμάζομεν διὰ τοῦ 9.

$$\begin{array}{r} 5207 \\ 331 \\ \hline 5207 \\ 15621 \\ 15621 \\ \hline 1723517 \end{array}$$

5	7
8	8

Ἡ δοκιμὴ γίνεται ὡς ἑξῆς: ἀφοῦ γράψωμεν δύο εὐθείας, τεμνομένας ἐν σχήματι σταυροῦ, σημειοῦμεν εἰς τὰς δύο ἄνω γωνίας τὰ ὑπόλοιπα, 5 καὶ 7, τῶν δύο παραγόντων, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα 5×7 καὶ γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου 35, ἤτοι τὸ 8, εἰς μίαν τῶν ὑποκάτω γωνιῶν· τέλος, εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου 1723517, τὸ ὁποῖον πρέπει (ἂν δὲν ἔγεινε λάθος) νὰ εἶναι καὶ αὐτὸ 8, καὶ γράφομεν αὐτὸ εἰς τὴν τελευταίαν γωνίαν.

Ὁμοία δοκιμὴ γίνεται καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν. *Λαμβάνομεν τὰ ὑπόλοιπα τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιάζομεν τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως· ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς πρέπει (ἂν δὲν ἔγεινε λάθος τι) νὰ δίδῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ δίδει καὶ ὁ διαιρετέος.*

Ὁ κανὼν οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 90 καὶ 91, ἔτι δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφ. 59. Τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ παραλείπομεν, ὡς εὐκόλως εὑρισκομένην.

Σημείωσις. Ἡ διὰ τῶν ὑπολοίπων δοκιμὴ μικρὰν ἔχει ἀξίαν· διότι, καὶ ὅταν ἐπιτυγχάνῃ, δὲν δυνάμεθα μετὰ βεβαιότητος νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος· ἄν, λόγου χάριν, ἔγινε λάθος τι καὶ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9, ἡ διὰ τοῦ 9 δοκιμὴ δὲν δύναται νὰ ἐξελέγξῃ αὐτὸ (ὡς, λόγου χάριν, ὅταν τὰ ψηφία τοῦ γινομένου μείνωσι μὲν τὰ αὐτά, ἀλλάξωσιν ὅμως θέσιν)· διότι παραλείπει τὰ πολλαπλάσια τοῦ 9.

Αἱ ἄλλαι δοκιμαὶ (ἐδ. 43 καὶ 68) εἶναι ἀσφαλέστεραι, ἀλλὰ καὶ εἰς αὐτὰς ἐνδέχεται νὰ ὑποπέσῃ τις εἰς νέα λάθη. Διὰ τοῦτο νομίζομεν, ὅτι ἡ ἀρίστη δοκιμὴ ἑκάστης ἀριθμητικῆς πράξεως εἶναι ἡ μετὰ προσοχῆς ἐπανάληψις αὐτῆς.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, δίδουσιν ὑπόλοιπα ἴσα.

Διότι διαφέρουσι κατὰ τὸν διαιρέτην (ἐδ. 80).

2) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 4.

Ἡ ἀπόδειξις τούτου στηρίζεται εἰς τὸ ἑξῆς: ἂν ἀπὸ μιᾶς δεκάδος ἀφαιρέσωμεν τὸ 4 δίς, ἡ δεκὰς γίνεται 2.

3) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 8, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 8.

4) Ἀριθμὸς οἱοσδήποτε, εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 6, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου ἑκάστου τῶν ἄλλων ψηφίων εἶναι διαιρετὸν διὰ 6.

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000, . . ., διαιρούμενοι διὰ 6, δίδουσιν ὑπόλοιπον 4.

5) Ἀριθμὸς οἱοσδήποτε, εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 11, ἐὰν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων) ὑπὲρ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας, εἶναι 0 ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 11.

Εἰς τὴν πρότασιν ταύτην φθάνομεν, ἐάν, ἀφοῦ ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα διψήφια (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων), προσθέσωμεν εἰς ἕκαστον τμῆμα τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει αὐτὸ δεκάδας, συνάμα δὲ ἀφαιρέσωμεν τὰς προστεθείσας μονάδας (ἄν, λόγου χάριν, τὸ τμῆμα εἶναι 68, θὰ γράψωμεν $66+8-6$).

6) Ἀριθμὸς οἱοσδήποτε εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 7, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων του εἶναι διαιρετὸν διὰ 7.

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι ἑκάστη δεκὰς γίνεται 3, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς ὁ 7.

7) Ἀριθμὸς οἱοσδήποτε εἶναι διαιρετὸς διὰ 37, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τριψηφίων τμημάτων, εἰς ἃ ἀναλύεται (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων), εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 37 (τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ ἔχῃ δύο μόνον ψηφία ἢ καὶ ἓν μόνον).

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι ἑκάστη χιλιὰς (ἤτοι ὁ 1000) γίνεται ἁπλῆ μονάς, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς πολλαπλάσιόν τι τοῦ 37 ($999=37\times27$).

8) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 7, ἐὰν ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 7.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης στηρίζεται ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 90 καὶ 91 καὶ ἐπὶ τούτου, ὅτι δὲν ὑπάρχουσι δύο ἀριθμοί, μικρότεροι τοῦ 7, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα, προστιθέμενα, νὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ τοῦ 7.

9) Τὸ γινόμενον τριῶν ἐφεξῆς ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 6.

10) Τὸ γινόμενον δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 6.

11) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν.

12) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ἀνταλλαχθῶσι τὰ ψηφία ἀριθμοῦ τινος, ἡ μεταβολὴ αὐτοῦ (αὔξησις ἢ ἐλάττωσις), θὰ εἶναι πάντοτε πολλαπλάσιον τοῦ 9.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ

Ὁρισμοί

93. *Κοινὸς διαιρέτης* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ἀριθμός τις, ἐὰν διαιρῇ αὐτοὺς πάντας ἀκριβῶς.

Παραδείγματος χάριν, τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

16, 24, 36, 20,

κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 2· διότι διαιρεῖ αὐτοὺς πάντας· τῶν αὐτῶν δὲ ἀριθμῶν κοινὸς διαιρέτης εἶναι καὶ ὁ 4.

94. *Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται (ὡς δεικνύει καὶ τὸ ὄνομά του) ὁ μέγιστος ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 16, 24, 40, ἔχουσι τοὺς ἑξῆς κοινοὺς διαιρέτας: 1, 2, 4, 8· καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι ὁ 8·

Ἐὰν ἀριθμοί τινες δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην, πλὴν τῆς μονάδος, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*.

Τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 3, 5 καὶ 9.

Θεωρήματα περὶ τῶν κοινῶν διαιρετῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

95. *Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἂν ἐξ ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀφαιρεθῇ ἄλλος.*

Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τοὺς τυχόντας ἀριθμοὺς

40, 128, 320, 72·

λέγω, ὅτι οἱ κοινοὶ αὐτῶν διαιρέται δὲν βλάπτονται, ἄν, λόγου χάριν, ἀπὸ τοῦ 320 ἀφαιρέσω τὸν 72· λέγω δηλαδή, ὅτι

οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν	40,	128,	320,	72·
καὶ οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν	40,	128,	248,	72,

εἶναι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.

Ἀπόδειξις Διότι, πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς πρώτης σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν, ὡς διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 320 καὶ 72, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 248 (ἐδ. 78)· ἑπομένως θὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῆς δευτέρας σειρᾶς. Καὶ πάλιν, πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς δευτέρας σειρᾶς, ὡς διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 248 καὶ 72, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 320 (ἐδ. 76)· ἑπομένως θὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῆς πρώτης σειρᾶς.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι καὶ αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀριθμῶν ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

Πόρισμα.

96. *Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕνα τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεώς του δι' ἄλλου μικροτέρου.*

Διότι, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου, ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν, θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν τοῦ μεγαλητέρου τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διὰ τοῦ μικροτέρου· δὲν θὰ βλαφθῶσι δὲ οἱ κοινοὶ διαιρέται· διότι εἰς ἑκάστην τῶν ἀφαιρέσεων τούτων δὲν βλάπτονται.

Παραδείγματος χάριν, χωρὶς νὰ βλάψω τοὺς κοινοὺς διαιρέτας, δύναμαι ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν

	40,	128,	320,	72,	νὰ λάβω
τοὺς ἑξῆς:	40,	128,	248,	72·	καὶ ἀντὶ τούτων
τοὺς ἑξῆς:	40,	128,	176,	72·	καὶ ἀντὶ τούτων
τοὺς ἑξῆς:	40,	128,	104,	72·	καὶ τέλος, ἀντὶ τούτων
τοὺς ἑξῆς:	40,	128,	32,	72·	

εἶναι δὲ ὁ 32 τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 320 διὰ 72.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0, παραλείπεται.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ	120,	40,	32·
καὶ οἱ	80,	40,	32·
καὶ οἱ	40,	40,	32·
ἤτοι οἱ		40,	32,

ἔχουσι προδήλως τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

97. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἐξ αὐτῶν, ἐὰν διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους.*

Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τοὺς ἀριθμοὺς 40, 80, 120, 8, ἐξ ὧν ὁ μικρότερος (ὁ 8) διαιρεῖ πάντας τοὺς ἄλλους· λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι ὁ 8.

Ἀπόδειξις. Ὁ 8 εἶναι κοινὸς διαιρέτης διότι διαιρεῖ ἑαυτὸν (καὶ δίδει πηλίκον 1), διαιρεῖ δὲ καὶ τοὺς ἄλλους πάντας· ἄλλος ὅμως ἀριθμός, μεγαλήτερος τοῦ 8, δὲν δύναται νὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 40, 80, 120, 8· διότι δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 8, ὡς μικρότερόν του· ἄρα ὁ 8 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 40, 80, 120, 8.

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.

98. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν προηγουμένων προτάσεων, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. Πρὸς τοῦτο, διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, καί, ἐὰν μὲν δὲν μείνῃ ὑπόλοιπον, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (κατὰ τὸ θεώρημα 97). Ἐὰν δὲ μείνῃ ὑπόλοιπον, λαμβάνομεν αὐτὸ ἀντὶ τοῦ μεγαλητέρου καὶ οὕτως ἔχομεν δύο ἄλλους ἀριθμούς· τουτέστι, τὸ ῥηθὲν ὑπόλοιπον καὶ τὸν μικρότερον ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας, οὓς ἔχουσι καὶ οἱ δύο δοθέντες (πόρισμα 96)· ἑπομένως ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.

Καὶ ἐπὶ τούτων ποιοῦμεν τὰ αὐτὰ καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, ἀλλάσσοντες τοὺς ἀριθμούς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς δύο ἀριθμούς, ἐξ ὧν ὁ μεγαλήτερος νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ μικροτέρου ἀκριβῶς· τότε ὁ μικρότερος οὗτος θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν, ὡς παράδειγμα, οἱ ἑξῆς ἀριθμοί: 72 καὶ 414.

Διαιροῦντες τὸν 414 διὰ 72, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 54· ὥστε ἀντ' αὐτῶν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τοὺς ἑξῆς δύο: 72 καὶ 54.

Διαιροῦντες τὸν 72 διὰ τοῦ 54, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 18· ὥστε ἀντὶ τούτων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τοὺς ἑξῆς δύο: 54 καὶ 18.

Διαιροῦντες τὸν 54 διὰ 18, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0· ὥστε ὁ 18 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 414 καὶ 72.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται, συντομίας χάριν, ὡς ἑξῆς·

	5	1	3
414	72	45	18
54	18	0.	

Αἱ διαιρέσεις εἶναι διατεταγμέναι κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι τὸ πηλίκον ἑκάστης γράφεται ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου αὐτῆς, ἡ δὲ ὑποκάτω τοῦ διαιρέτου θέσις φυλάσσεται διὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἐπομένης διαιρέσεως.

Ἐὰν εὑρεθῇ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἡ μονάς, τοῦτο σημαίνει, ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παράδειγμα.

	19	1	1	7	2
625	32	17	15	2	1
32	15	2	1	0	
305					
288					
17					

Κανών.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

99. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· ἔπειτα, ἂν μείνῃ ὑπόλοιπον, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως διαιροῦντες ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς αὐτὸν ὑπολοίπου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0· ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.*

Παρατήρησις. Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τοῦτον εἰς δύο οἱουσδήποτε ἀριθμούς, θὰ εὕρωμεν ἐξάπαντος, μετά τινας διαιρέσεις, ὑπόλοιπον 0· διότι τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἀλλεπαλλήλων διαιρέσεων, τὰς ὁποίας κάμνομεν, προβαίνουσιν ἐλαττούμενα· ὅταν δὲ ἀριθμός τις ἐξακολουθῇ νὰ ἐλαττῶται, ἐπὶ τέλους καταντᾷ μηδέν, καὶ κατὰ μίαν μονάδα ἂν γίνηται ἡ ἐλάττωσις.

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν.

100. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν αὐτῶν προτάσεων (ἐδ. 95 – 97), δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν. Πρὸς τοῦτο, διαιροῦμεν πάντας τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν· καὶ ἂν μὲν πάντα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι 0, ὁ ἀριθμός, δι' οὗ διῃρέσαμεν, εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (κατὰ τὸ θεώρ. 97), εἰ δὲ μή, ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀριθμούς, ὧν τὰ ὑπόλοιπα δὲν εἶναι 0, ἕκαστον διὰ τοῦ ὑπολοίπου του· οὕτως ἔχομεν νέαν σειρὰν ἀριθμῶν, οἵτινες (κατὰ τὸ πόρισμα 96) ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας, οὓς ἔχουσι καὶ οἱ δοθέντες· ἐπομένως ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην. Ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων ἐργαζόμεθα ὡς καὶ ἐπὶ τῶν πρώτων καὶ ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ἀριθμόν τινα, ὅστις νὰ διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους ἀκριβῶς· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος.

(Αἱ διαιρέσεις ἐκτελοῦνται χωριστά).

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ	432,	504,	324,	60·
διὰ 60	12,	24,	24,	60·
διὰ 12	12,	0,	0,	0·

ὥστε ὁ 12 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν, πρὸς τούτοις, οἱ ἑξῆς ἀριθμοί:

	36,	40,	48,	56,	24·
διὰ 24	12,	16,	0,	8,	24·
διὰ 8	4,	0,	0,	0,	0·
διὰ 4	4,	0,	0,	0,	0·

ὥστε ὁ 4 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

***101**. Ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου ἀριθμῶν, περισσοτέρων τῶν δύο, ἐπιδέχεται μεγάλην ἐλευθερίαν περὶ τὴν τάξιν τῶν πράξεων· διότι εἰς ἑκάστην ἀντικατάστασιν δυνάμεθα, οἱονδήποτε θέλωμεν ἐκ τῶν ἀριθμῶν, νὰ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον ἀφίνει διαιρούμενος δι' ἄλλου (τοὺς δὲ λοιποὺς νὰ ἀφήσωμεν, ὡς εἶναι). Οὕτω προκύπτουσι πολλοὶ τρόποι τῆς εὑρέσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου, ὧν τινες δυνατὸν νὰ εἶναι εὐκολώτεροι τῶν ἄλλων, ἂν καὶ πάντες φέρουσι προφανῶς εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Ἄξιος ἰδιαιτέρας προσοχῆς εἶναι ὁ ἑξῆς τρόπος.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸ πόρισμα 96 εἰς δύο μόνον ἀριθμούς, διατηρῶμεν δὲ τοὺς ἄλλους ἀμεταβλήτους, φθάνομεν ἐπὶ τέλους εἰς τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, ὅστις ἑπομένως δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ αὐτούς, χωρὶς νὰ βλαφθῶσιν οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· ἄρα οὐδὲ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τοὺς αὐτοὺς ὡς καὶ προηγουμένως ἀριθμούς:

	432,	504,	324,	60·	ἀντὶ τούτων,
λαμβάνω	τοὺς ἑξῆς: 432,	72,	324,	60·	καὶ ἀντὶ τούτων,
	τοὺς ἑξῆς: 0,	72,	324,	60·	

εἶναι δὲ ὁ 72 μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 432 καὶ 504.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

102. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο οἱουσδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Οὐ μόνον δὲ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης, ἀλλὰ καὶ πάντες οἱ κοινοὶ διαιρέται διατηροῦνται ἀμετάβλητοι εἰς τὴν ἀντικατάστασιν ταύτην.

103. Δυνάμεθα κατ' ἀκολουθίαν, νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην πολλῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκοντες πρῶτον τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἐξ αὐτῶν· ἔπειτα τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τούτου καὶ ἑνὸς ἄλλου, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς (ὡς καὶ εἰς τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων)· ὁ τελευταῖος εὑρισκόμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος ἀπαιτεῖ συνήθως περισσοτέρας πράξεις ἢ ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθείς.

Σημείωσις. Δι' ὁμοίου τρόπου ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικατασταθῶσιν ὁσοιδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

104 *Κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Ἔστωσαν τυχόντες ἀριθμοί, οἱ ἑξῆς: 336, 168, 144, 96, τῶν ὁποίων μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 24, ὡς ἑξῆς φαίνεται·

336,	168,	144,	96·
48,	72,	48,	96·
48,	24,	0,	0·
0,	24,	0,	0.

Λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι δὲν ἔχουσιν ἄλλους κοινοὺς διαιρέτας ἢ μόνον τοὺς διαιρέτας τοῦ 24.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἵνα εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 24, ἀντικατεστήσαμεν τοὺς δοθέντες ἀριθμοὺς διὰ τῶν 48, 72, 96· τοῦτο δὲ δὲν ἔβλαψε τοὺς κοινοὺς διαιρέτας αὐτῶν (πόρισμα 96)· ἔπειτα πάλιν ἀντικατεστήσαμεν καὶ τούτους διὰ τῶν 48, 24, ὅπερ καὶ τοῦτο δὲν ἔβλαψε τοὺς κοινοὺς διαιρέτας· ἑπομένως οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι διαιρέται τοῦ 24.

Καὶ πάντες δὲ οἱ διαιρέται τοῦ 24 εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 24.

ΘΕΩΡΗΜΑ

105. *Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕνα ἀριθμόν, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ἔστωσαν δύο τυχόντες ἀριθμοί, οἱ 60 καὶ 204, τῶν ὁποίων μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 12, ὡς ἑξῆς φαίνεται·

204,	60·
24,	60·
24,	12·
0,	12·

λέγω, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 8, τὰ γινόμενα αὐτῶν 204×8 καὶ 60×8 θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 12×8, καὶ αἱ πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ ἀπαιτούμεναι ἀντικαταστάσεις εἶναι αἱ ἑξῆς·

204×8	60×8
24×8	60×8
24×8	12×8
0	12×8

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 69, ὅταν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕνα ἀριθμόν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Διὰ τοῦτο, ἂν διαιρέσωμεν τὸν 204×8 διὰ τοῦ 60×8, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον τὸν 24×8· (ὁ 24 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 204 διὰ τοῦ 60)· καὶ ἂν ἔπειτα διαιρέσωμεν τὸ 60×8 διὰ τοῦ 24×8, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον τὸ 12×8 (12 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 60 διὰ 24)· καὶ τέλος, ἂν διαιρέσωμεν τὸ 24×8 διὰ τοῦ 12×8, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0· ὥστε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 204×8 καὶ 60×8 εἶναι 12×8.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ περισσοτέρους ἀριθμούς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

106. *Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἂς λάβωμεν τοὺς τυχόντας ἀριθμούς, οἷον τοὺς

42 70 182

οἵτινες ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 14. Λέγω, ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν διαιρέτου 7, τὰ πηλίκα, τὰ ὁποῖα θὰ λάβωμεν, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 6, 10, 26, θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ πηλίκον τοῦ 14 διὰ 7, ἤτοι τὸν 2.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τῶν ἀριθμῶν 6, 10, 26, μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁ μ· τότε τῶν ἀριθμῶν 6×7, 10×7, 26×7 μέγιστος κοινὸς διαιρέτης θὰ εἶναι ὁ $\mu\times7$ (ἐδ. 105)· ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 6×7, 10×7, 26×7, εἶναι αὐτοὶ οἱ ληφθέντες 42, 70, 182, (διότι 6, 10 καὶ 26 εἶναι τὰ πηλίκα αὐτῶν διαιρουμένων δι' 7) καὶ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 14· ὥστε θὰ εἶναι $\mu\times7=14$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ μ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 14 διὰ 7· τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Σημείωσις. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου δύναται ἐνίοτε νὰ συντομευθῇ ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου. Διότι, ἂν εἰξεύρωμεν, ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην δ, διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ τούτου, καὶ ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν εὑρεθέντων πηλίκων· ἀφοῦ δὲ εὕρωμεν αὐτόν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν δ καὶ ἔχομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν 1500, 1800, 7500 (οἵτινες διαιροῦνται πάντες δι' 100), εὑρίσκομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν

15, 18, 75, ὅστις εἶναι 3,

καὶ τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα ἐπὶ 100· ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 300 θὰ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

107. *Ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀριθμοὶ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, τὰ πηλίκα θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Ἂς παραστήσωμεν τρεῖς τυχόντας ἀριθμοὺς διὰ τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν διὰ τοῦ Μ, τὰ δὲ πηλίκα αὐτῶν (ὅταν διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν Μ) διὰ α, β, γ· λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, διῃρέθησαν διὰ Μ, καὶ ὁ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης Μ διῃρέθη διὰ Μ, καὶ ἑπομένως ἔγινεν 1. Ἄρα οἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαντες ἀριθμοὶ α, β, γ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα· ἤτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παρατήρησις.

Διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου παριστῶμεν τοὺς ἀριθμούς, ἐφ' ὧν σκεπτόμεθα, ὅταν οἱ συλλογισμοί, τοὺς ὁποίους κάμνομεν πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, μένωσιν οἱ αὐτοί, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀριθμοί. Ἡ παράστασις αὕτη τῶν ἀριθμῶν καθιστᾷ σαφεστέραν τὴν γενικότητα τῶν ἀποδείξεων, ἐν ᾧ, ὅταν λαμβάνωμεν ὡρισμένους ἀριθμούς, ἡ ἀπόδειξις φαίνεται, ὡς ἂν ἐγίνετο μόνον διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Ἐπίσης παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων τοὺς ἀριθμούς, ὅταν εἶναι ἄγνωστοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

108. *Ἐὰν ἀριθμοὶ διαιρούμενοι διὰ κοινοῦ τινος αὐτῶν διαιρέτου δίδωσι πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὁ διαιρέτης οὗτος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.*

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τυχόντες ἀριθμοί, δ κοινός τις αὐτῶν διαιρέτης, καὶ α, β, γ τὰ πηλίκα τῶν Α, Β, Γ διαιρεθέντων διὰ δ· λέγω ὅτι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ διαιρέτης δ' εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ.

Ἀπόδειξις. Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἔχουσιν ἐξ ὑποθέσεως μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ α×δ, β×δ, γ×δ, τουτέστιν οἱ Α, Β, Γ, θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 1×δ, ἤτοι δ· (ἐδ. 105)· τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Σημείωσις. Εἰς ἕκαστον θεώρημα διακρίνομεν *ὑπόθεσιν* καὶ *συμπέρασμα*. Τοῦ θεωρήματος τούτου ὑπόθεσις εἶναι, *ὅτι τὰ πηλίκα α, β, γ, ἅτινα ἔδωκαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, διαιρεθέντες διὰ δ, εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα*, συμπέρασμα δὲ εἶναι, *ὅτι ὁ διαιρέτης δ, ὁ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ διαιρέσας, εἶναι ὁ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης*. Τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχει ὑπόθεσιν μέν, *ὅτι ὁ διαιρέτης δ, ὁ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ διαιρέσας, εἶναι ὁ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης*, συμπέρασμα δέ, *ὅτι τὰ πηλίκα, α, β, γ, ἅτινα ἔδωκαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, διαιρεθέντες διὰ δ, εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα*. Ὅταν δύο θεωρήματα εἶναι τοιαῦτα, ὥστε *ἡ ὑπόθεσις τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι συμπέρασμα τοῦ ἄλλου*, καὶ τἀνάπαλιν, τὰ θεωρήματα ταῦτα λέγονται *ἀντίστροφα* πρὸς ἄλληλα. Τοιαῦτα εἶναι τὰ δύο τελευταῖα θεωρήματα.

Θεμελιῶδες θεώρημα.

Περὶ τῶν διαιρετῶν τοῦ γινομένου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

109. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῶν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, διαιρεῖ τὸν ἄλλον.*

Ἔστω τὸ τυχὸν γινόμενον Α×Β καὶ ἂς διαιρῇ αὐτὸ ὁ ἀριθμὸς Δ· ἂς εἶναι δὲ ὁ Δ πρῶτος πρὸς τὸν Α· λέγω, ὅτι ὁ Δ θὰ διαιρῇ τὸν Β.

Ἀπόδειξις. Οἱ ἀριθμοὶ Δ καὶ Α ἔχουσιν ἐξ ὑποθέσεως μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ $\Delta \times B$ καὶ $A \times B$ θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ $1 \times B$, ἤτοι τὸ Β. (ἐδ. 105).

Ἐπειδὴ δὲ ὁ Δ διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς $\Delta \times B$ καὶ $A \times B$ (τὸν μὲν πρῶτον ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τὸν δὲ δεύτερον ἐξ ὑποθέσεως), θὰ διαιρῇ (ἐδ. 104) καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν, τουτέστι τὸν Β· τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Σημείωσις. Ἀριθμός τις δύναται νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων, χωρὶς νὰ διαιρῇ μήτε τὸν ἕνα μήτε τὸν ἄλλον· οἷον ὁ 8 διαιρεῖ τὸ γινόμενον 6×4· ἐνῷ δὲν διαιρεῖ οὔτε τὸν 6 οὔτε τὸν 4.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ οἱ διαιρέται αὐτῶν θὰ εἶναι ἐπίσης πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

2) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $A+B$ καὶ ἡ διαφορὰ $A-B$ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ἢ 1 ἢ 2.

3) Ἐὰν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β καὶ ὁ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιασθῶσι, τὸ προκύπτον γινόμενον εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν $A \times \Gamma$, $A \times \Delta$, $B \times \Gamma$, $B \times \Delta$.

4) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 15, ἄθροισμα δὲ τὸν 120. (Ἀπ. (15, 105) ἢ (45, 75).

5) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 21 γινόμενον δὲ 6615.

6) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 12 καὶ ἄθροισμα μικρότερον τοῦ 100.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁρισμοί

110. *Πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται ὁ μὴ ἔχων ἄλλους διαιρέτας ἢ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα.*

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί.

Σύνθετος δὲ λέγεται ὁ μὴ πρῶτος.

Σημείωσις. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*, χωρὶς νὰ εἶναι *πρῶτοι καθ' ἑαυτούς*· οἷον οἱ ἀριθμοὶ 6, 25, 49 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἀλλ' οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν εἶναι πρῶτος.

Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

111. *Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον παραγόντων πρώτων.*

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Μ· λέγω, ὅτι ὁ Μ εἶναι γινόμενον παραγόντων πρώτων.

Ἀπόδειξις. Διότι, ὁ Μ ὡς σύνθετος θὰ διαιρῆται ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μικροτέρου του (ἐκτὸς τῆς μονάδος)· ἄρα θὰ εἶναι γινόμενον δύο ἀριθμῶν μικροτέρων του (μεγαλητέρων ὅμως τοῦ 1)· καὶ ἂν μὲν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πρῶτοι, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη· ἂν δέ τις ἐξ αὐτῶν εἶναι σύνθετος ἀναλύεται καὶ αὐτὸς ἐπίσης εἰς γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν μικροτέρων του (μεγαλητέρων ὅμως τοῦ 1)· καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐπειδὴ δέ, ὅσον προχωροῦμεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν ταύτην, οἱ παράγοντες, ἐξ ὧν γίνεται ὁ Μ, γίνονται μικρότεροι, ἀλλ' ὄχι μικρότεροι τοῦ 2 (διότι πάντοτε ὑπερβαίνουσι τὴν μονάδα), ἕπεται, ὅτι θὰ φθάσωμεν ἐπὶ τέλους εἰς παράγοντας μὴ δυναμένους πλέον νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα ἀριθμῶν μικροτέρων των καὶ οἵτινες διὰ τοῦτο θὰ εἶναι πρῶτοι.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 6 ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3, οἵτινες εἶναι πρῶτοι· ἤτοι $6 = 2 \times 3$.

Ὁ 24 ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον 4×6· καὶ ὁ μὲν 4 ἀναλύεται πάλιν εἰς τὸ γινόμενον 2×2, ὁ δὲ 6 εἰς τὸ 2×3· ὥστε εἶναι.

$$24 = 4\times6 = 2\times2\times2\times3,$$
$$\text{ἢ καὶ } 24 = 2^3\times3.$$

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 56 ἔχομεν

$$56 = 7\times8 = 7\times2\times4 = 7\times2\times2\times2.$$
$$\text{ἢ καὶ } 56 = 2^3\times7.$$

Σημείωσις. Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ μάθωμεν γενικήν τινα μέθοδον τῆς ἀναλύσεως ταύτης τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι τὰ ἁπλούστατα στοιχεῖα, ἐξ ὧν γίνονται πάντες οἱ ἀριθμοὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Διὰ τοῦτο οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καὶ αἱ ἰδιότητες αὐτῶν ἔχουσι τὴν μεγίστην ῥοπὴν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Πρὶν ὅμως προβῶμεν εἰς τὴν σπουδὴν αὐτῶν, πρέπει νὰ μάθωμεν, πῶς εὑρίσκονται.

Εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.

112. Ἡ ἑξῆς μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ἀποχωρίσωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τῶν ἄλλων, λέγεται *κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους*.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ ἀποχωρίσωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμούς, οἵτινες περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 1000.

Γράφομεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν τάξιν·
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ... 1000
καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν καὶ διαγράφομεν πάντας τοὺς μὴ πρώτους ἀριθμούς, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

Ὁ 2 εἶναι προφανῶς πρῶτος ἀριθμός. Ἀλλὰ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 δὲν εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί· ὅθεν διαγράφομεν αὐτά· πρὸς τοῦτο ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ἑπομένου ἀριθμοῦ 3 ἀριθμοῦμεν ἀνὰ δύο καὶ διαγράφομεν πάντοτε τὸν δεύτερον ἀριθμόν, ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6, 8, 10, . . .

Ὁ μετὰ τὸν 2 ἐρχόμενος ἀριθμός, ὁ 3, εἶναι πρῶτος, ὡς μὴ πολλαπλάσιον τοῦ 2. Ἵνα δὲ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3, ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ τριπλασίου 3×3, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 9· (διότι τὸ διπλάσιον τοῦ 3, ἤτοι 3×2 εἶναι ἤδη διαγεγραμμένον ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2) καὶ διαγράφομεν, ἀπὸ τοῦ 9 καὶ ἐφεξῆς, πάντα τρίτον ἀριθμόν· οὕτω διαγράφονται οἱ ἀριθμοὶ 12, 15, 18 κτλ., ἤτοι τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον θὰ διαγράφωνται ἐκ δευτέρου καί τινες ἤδη διαγεγραμμένοι ἀριθμοί· τοῦτο ὅμως δὲν βλάπτει.

Ὁ ἀριθμὸς 4 διεγράφη ἤδη ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2· διεγράφησαν δὲ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2. Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν πολλαπλασίων παντὸς συνθέτου ἀριθμοῦ· διότι ταῦτα εἶναι πολλαπλάσια τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἐξ ὧν γίνεται ὁ σύνθετος· ὥστε ἀρκεῖ νὰ διαγράφωμεν μόνον τὰ πολλαπλάσια τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

Ὁ μετὰ τὸν 3 ἀμέσως ἐρχόμενος μὴ διαγεγραμμένος ἀριθμός, ὁ 5, εἶναι πρῶτος ἀριθμός· διότι δὲν εἶναι πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν μικροτέρων του. Ἵνα δὲ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ 5×5, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 25, (διότι τὰ μικρότερα πολλαπλάσια τοῦ 5, ἤτοι 5×2, 5×3, 5×4, εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 5) καὶ διαγράφομεν ἀπὸ τούτου καὶ ἐφεξῆς πάντα πέμπτον ἀριθμόν· οὕτω διαγράφονται οἱ ἀριθμοὶ 25, 30, 35, 40, . . ., ἤτοι πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5 (ὧν τινα εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα).

Ὁ μετὰ τὸν 5 ἀμέσως ἐρχόμενος μὴ διαγεγραμμένος ἀριθμός, ὁ 7, εἶναι πρῶτος ἀριθμός· διότι δὲν εἶναι πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν μικροτέρων του. Ἵνα δὲ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ 7×7· ἤτοι ἀπὸ τοῦ 49· (διότι τὰ μικρότερα πολλαπλάσια τοῦ 7, ἤτοι τὰ 7×2, 7×3, 7×4, 7×5, 7×6, εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 7) καὶ διαγράφομεν ἀπὸ τούτου καὶ ἐφεξῆς πάντα ἕβδομον ἀριθμόν.

Παρατηρητέον δὲ ἐν γένει, ὅτι, ὅταν μέλλωμεν νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια οἱουδήποτε πρώτου ἀριθμοῦ, τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον θὰ ἀπαντήσωμεν, εἶναι τὸ τετράγωνόν του· διότι τὰ μικρότερα θὰ εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα, ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων. Ὅταν π. χ. ἔλθωμεν εἰς τὸν 11 καὶ θέλωμεν νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, τὰ πολλαπλάσια 11×2, 11×3, . . ., 11×10 θὰ εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα, ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 11· ὥστε πρῶτον θὰ ἀπαντήσωμεν καὶ θὰ διαγράψωμεν τὸ 11×11, ἤτοι τὸ 121. Ὁμοίως, ὅταν ἔλθωμεν εἰς τὸν πρῶτον ἀριθμὸν 13, θὰ ἀρχίσωμεν νὰ διαγράφωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ 13×13, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 169· διότι τὰ μικρότερα πολλαπλάσια αὐτοῦ θὰ εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης συνάγεται, ὅτι, ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000 περιλαμβανομένους, ἀρκεῖ κατὰ τὸν προειρημμένον τρόπον νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια πάντων τῶν πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 37, (τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον 1369 εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 1000). Διότι τότε οἱ ἀπομείναντες ἀριθμοὶ δὲν θὰ διαγραφῶσιν, ὅσον καὶ ἂν προχωρήσωμεν, καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι πολλαπλάσια οὐδενὸς ἀριθμοῦ· ἄρα εἶναι πρῶτοι.

Ἐργαζόμενοι κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ μεταξὺ 1 καὶ 1000 περιεχόμενοι πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ γεγραμμένοι ἐν τῷ ἑξῆς πίνακι.

1	59	139	233	337	439	557	653	769	883
2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	

Περὶ τοῦ πλήθους τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

113. *Τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον·* λέγω δηλαδή, ὅτι, ὅσους καὶ ἂν εὕρῃ τις πρώτους ἀριθμούς, πάντοτε ὑπάρχουσι καὶ ἄλλοι.

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι εὑρήκαμεν πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς ἑξῆς: Α, Β, Γ, Δ, ... Π.
ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενόν των $Α \times Β \times Γ \times Δ \times \ldots \times Π$ καὶ εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν μίαν μονάδα, προκύπτει ἀριθμός τις

$$(Α \times Β \times Γ \times Δ \times \ldots \times Π) + 1,$$

ὃν παριστῶ διὰ τοῦ Ω.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος Ω θὰ διαιρῆται διά τινος πρώτου ἀριθμοῦ (δι' ἑαυτοῦ, ἂν εἶναι πρῶτος, δι' ἄλλου δὲ μικροτέρου, ἂν εἶναι σύνθετος)· ἀλλ' οὐδεὶς ἐκ τῶν δοθέντων πρώτων ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ, . . . , Π, δύναται νὰ διαιρῇ τὸν Ω. Διότι, ἕκαστος ἐξ αὐτῶν διαιρεῖ τὸ γινόμενον $Α \times Β \times Γ \times Δ \times \ldots \times Π$ (ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ)· ἂν λοιπὸν διῄρει καὶ τὸν Ω, θὰ διῄρει καὶ τὴν διαφοράν των, ἤτοι τὴν μονάδα, ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ὑπάρχει καὶ ἄλλος τις πρῶτος ἀριθμὸς ἐκτὸς τῶν δοθέντων, δηλαδὴ ἐκεῖνος ὅστις διαιρεῖ τὸν Ω.

Ἰδιότητες τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

114. *Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρὸς πάντα ἀριθμὸν μὴ διαιρούμενον δι' αὐτοῦ.*

Ἄς λάβωμεν τὸν τυχόντα πρῶτον ἀριθμόν, ἔστω τὸν 7, καὶ ἄλλον οἱονδήποτε ἀριθμὸν Α, μὴ διαιρετὸν δι' αὐτοῦ· λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς 7, ὡς πρῶτος, δὲν ἔχει ἄλλους διαιρέτας ἢ 1 καὶ 7· ἑπομένως οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δύο ἀριθμῶν 7 καὶ Α δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἄλλοι ἢ 1 καὶ 7. Ἀλλ' ὁ 7 δὲν εἶναι κοινὸς διαιρέτης· διότι ἐξ ὑποθέσεως δὲν διαιρεῖ τὸν Α· ἄρα ὁ μόνος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι ἡ μονάς· ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

ΘΕΩΡΗΜΑ

115. *Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενόν τι, θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου.*

Ἔστω τὸ γινόμενον $Α \times Β$ καὶ ἂς διαιρῇ αὐτὸ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π. Λέγω, ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων Α, Β.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἂν μὲν ὁ Π διαιρῇ τὸν Α, τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον· ἂν δὲ δὲν διαιρῇ τὸν Α, θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτὸν (ἐδ. 114) καὶ διὰ τοῦτο θὰ διαιρῇ τὸν Β (ἐδ. 109).

Τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη διὰ δύο παράγοντας· μένει δ' ἔτι νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ περισσοτέρους.

Ἄς διαιρῇ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π τὸ γινόμενον $Α \times Β \times Γ$ τῶν τριῶν παραγόντων Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων Α, Β, Γ.

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον $Α \times Β \times Γ$ θὰ τραπῇ εἰς γινόμενον δύο μόνον παραγόντων $(Α \times Β)$ καὶ Γ, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς δύο παράγοντας Α, Β διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν (ἐδ. 49)· ἐπομένως ὁ Π. θὰ διαιρῇ ἢ τὸν Γ, ἢ τὸν ἀριθμὸν $Α \times Β$. Ἀλλ' ἐὰν διαιρῇ τὸ γινόμενον $Α \times Β$, θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων Α, Β.

Ἄρα ὁ Π διαιρεῖ τοὐλάχιστον ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων Α, Β, Γ.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας.

Πόρισμα 1ον

116. *Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ δύναμιν ἀριθμοῦ τινος, θὰ διαιρῇ καὶ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.*

Ἄς διαιρῇ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π τὴν πέμπτην δύναμιν τοῦ Α, ἤτοι τὸ $Α^5$· λέγω, ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ καὶ τὸν Α.

Διότι, τὸ $Α^5$ εἶναι $Α \times Α \times Α \times Α \times Α$· ὁ δὲ Π, ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον τοῦτο, θὰ διαιρῇ καὶ ἕνα παράγοντα αὐτοῦ, ἤτοι τὸν Α.

Πόρισμα 2ον

117. *Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενον παραγόντων πρώτων, θὰ εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων.*

Διότι, ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον, θὰ διαιρῇ ἕνα τοὐλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων· ἄρα θὰ εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον διαιρεῖ· διότι πρῶτος ἀριθμὸς μόνον δι' ἑαυτοῦ διαιρεῖται. (Ἡ μονὰς δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).

ΘΕΩΡΗΜΑ

118. *Ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα, οἱ παράγον-*

τες ἀμφοτέρων εἶναι οἱ αὐτοί καὶ ἕκαστος περιέχεται εἰς ἀμφότερα ἰσάκις.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο ἴσων γινομένων ἔχει τὸν παράγοντα 7· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄλλο θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν παράγοντα καὶ ὅσους παράγοντας 7 ἔχει τὸ ἕν, τόσους θὰ ἔχῃ καὶ τὸ ἄλλο.

Ἀπόδειξις. Διότι, ὁ 7 ὡς παράγων τοῦ πρώτου γινομένου θὰ διαιρῇ αὐτό· ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον ὡς ἴσον τῷ πρώτῳ. Ἀλλ' ὅταν ἀριθμὸς πρῶτος (ὡς ὁ 7) διαιρῇ τὸ γινόμενον παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσος τινὶ ἐξ αὐτῶν (ἐδ. 117)· ἄρα καὶ τὸ δεύτερον γινόμενον θὰ ἔχῃ τὸν παράγοντα 7.

Καὶ ὅσους παράγοντας ἴσους τῷ 7 ἔχει τὸ ἓν γινόμενον, τόσους θὰ ἔχῃ καὶ τὸ ἄλλο. Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἓν ἔχει τρεῖς παράγοντας 7, τὸ δὲ ἄλλο δύο μόνον. Ἐὰν τότε διαιρέσωμεν τὰ ἴσα γινόμενα διὰ τοῦ 7 δὶς (ὅπερ γίνεται, ἂν ἀπ' ἀμφοτέρων ἐξαλείψωμεν δύο παράγοντας 7), πρέπει νὰ εὕρωμεν γινόμενα ἴσα (σελ. 59). Ἀλλ' ἡ ἰσότης τῶν νέων τούτων γινομένων εἶναι ἀδύνατος· διότι τὸ μὲν ἓν θὰ ἔχῃ τὸν παράγοντα 7 ἅπαξ, τὸ δὲ ἄλλο δὲν θὰ ἔχῃ αὐτόν. Ἄρα ὅσους παράγοντας 7 ἔχει τὸ ἓν γινόμενον, τόσους ἔχει καὶ τὸ ἄλλο.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι, ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα, οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ μόνον κατὰ τὴν τάξιν δύνανται νὰ διαφέρωσι.

Πόρισμα

119. *Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, πάντοτε τοὺς αὐτοὺς παράγοντας θὰ εὕρωμεν.*

Πῶς ἐκτελεῖται ἡ ἀνάλυσις τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

120. Ἡ μέθοδος, δι' ἧς ἐκτελοῦμεν συνήθως τὴν ἀνάλυσιν τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐδόθη πρὸς ἀνάλυσιν ὁ ἀριθμὸς 504.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ τοῦ 2· ἐκτελοῦντες δὲ τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν πηλίκον 252· ὅθεν εἶναι

$$504 = 2 \times 252$$

καὶ ὁ ἀριθμὸς 252 διαιρεῖται διὰ 2 καὶ δίδει πηλίκον 126

ὥστε εἶναι $252=2\times126$

καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $504=2\times2\times126$ (ἐδ. 49)·

ὁ ἀριθμὸς 126 διαιρεῖται πάλιν διὰ 2 καὶ δίδει πηλίκον 63· ὥστε εἶναι

$$126=2\times63,$$

ἄρα $504=2\times2\times2\times63$ (ἐδ. 49).

Ὁ ἀριθμὸς 63 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 2· διαιρεῖται ὅμως διὰ τοῦ 3 (ἐδ. 87) καὶ δίδει πηλίκον 21·

ὥστε εἶναι $63=3\times21$

καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $504=2\times2\times2\times3\times21$·

ὁ 21 διαιρεῖται πάλιν διὰ 3 καὶ δίδει πηλίκον 7·

ὥστε εἶναι $504=2\times2\times2\times3\times3\times7$·

ἐπειδὴ δὲ ὁ 7 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ἡ ἀνάλυσις ἐτελείωσεν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς·

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$$504=2^3\times3^2\times7.$$

Ἂς λάβωμεν ὡς δεύτερον παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 186 984· δι' αὐτὸν εὑρίσκομεν ἐργαζόμενοι ὁμοίως.

186984	2
93492	2
46746	2
23373	3
7791	3
2597	7
371	7
53	53
1	

$$186984=2^3\times3^2\times7^2\times53$$

*Παρατηρήσεις.

1) Ὡς διαιρέτας δοκιμάζομεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν τάξιν των ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ 2· δοκιμάζομεν δὲ ἕκαστον ἐπανειλημμένως, μέχρις οὗ παύσῃ νὰ εἶναι διαιρέτης· ἔκτοτε πλέον δὲν δοκιμάζομεν αὐτὸν εἰς τὰ ἑπόμενα πηλίκα· διότι, ἂν διῄρει ἓν ἐξ αὐτῶν, (οἷον τὸ 2597), θὰ διῄρει καὶ πάντα τὰ προηγούμενα πηλίκα ὡς πολλαπλάσια τούτου (τοῦ 2597).

2) Ἐὰν ὁ πρὸς ἀνάλυσιν δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον γνωστῶν παραγόντων, ἢ φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως ὡς τοιοῦτος, συντομεύομεν τὴν πρᾶξιν ἀναλύοντες χωριστὰ ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 100000, ἐπειδὴ εἶναι

$$100000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10,$$

ἀρκεῖ νὰ ἀναλύσωμεν ἕκαστον τῶν παραγόντων 10 εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας· καὶ ἐπειδὴ $10 = 2 \times 5$, ἕπεται

$$100000 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$$

ἢ $$100000 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

ἢ καὶ $$100000 = 2^5 \times 5^5.$$

Ὁμοίως, ἂν δοθῇ πρὸς ἀνάλυσιν ὁ ἀριθμὸς 84000, παρατηροῦμεν, ὅτι οὗτος ἀναλύεται εἰς τὸ 84×1000

ἐπειδὴ δὲ εἶναι $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

καὶ $1000 = 2^3 \times 5^3$, ἕπεται

$$84000 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 2^3 \times 5^3 = 2^2 \times 2^3 \times 3 \times 7 \times 5^3$$

ἢ $$84000 = 2^5 \times 3 \times 5^3 \times 7.$$ (ἐδ. 53)

3) Ὁ πίναξ τῆς σελίδος 88 χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ διακρίνωμεν ἀμέσως, ἂν ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ 1000 εἶναι πρῶτος ἢ μή· καὶ δι' αὐτοῦ ἀποφεύγομεν ματαίας δοκιμάς.

Ὑπάρχουσι δὲ πίνακες τῶν πρώτων ἀριθμῶν πολὺ μεγαλήτεροι (ἐν τοῖς λογαριθμικοῖς πίναξι τοῦ Dupuis ἐν σελίσι 130 — 141 εὑρίσκονται οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ 1 μέχρι 10000).

Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας δεικνύει σαφέστερον τὰς ἰδιότητας αὐτῶν καὶ καθιστᾷ ἁπλουστάτην τὴν λύσιν πολλῶν ἀριθμητικῶν ζητημάτων· μάλιστα δὲ τῶν ζητημάτων τῆς διαιρετότητος.

Α') ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

121. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας ἐκτελεῖται κατὰ τὰς γενικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 49) καὶ τὸ γινόμενον προκύπτει καὶ αὐτὸ ἀναλελυμένον εἰς πρώτους παράγοντας.

Παράδειγμα. Ἀναλύοντες τοὺς ἀριθμοὺς 360 καὶ 336, εὑρίσκομεν

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$336 = 2^4 \times 3 \times 7,$$

ὅθεν $$360 \times 336 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 2^4 \times 3 \times 7,$$

καὶ ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 2^3, 2^4 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 2^7 (ἐδ. 53), καὶ τοὺς παράγοντας 3^2, 3 διὰ τοῦ γινομένου των 3^3, θὰ ἔχομεν

$$360 \times 336 = 2^7 \times 3^3 \times 5 \times 7.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

122. *Ἀριθμὸς ἀναλελυμένος ὑψοῦται εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν* (ἤτοι εἰς τὸ τετράγωνον), *ἐὰν διπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται πάντων τῶν παραγόντων του· εἰς τὴν τρίτην, ἂν τριπλασιασθῶσι· καὶ ἐν γένει εἰς τὴν μυοστήν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ μ.*

Σημείωσις. Ἐὰν παράγων τις δὲν ἔχῃ ἐκθέτην, ἵνα ἀληθεύῃ ἡ πρότασις αὕτη, πρέπει νὰ θεωρῆται ἐκθέτης αὐτοῦ ἡ μονὰς 1.

Τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ διὰ πάσας τὰς ἑπομένας προτάσεις, ἐν αἷς γίνεται λόγος περὶ ἐκθετῶν.

Ἀπόδειξις. Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 308. Ἀναλύοντες αὐτὸν εἰς πρώτους παράγοντας εὑρίσκομεν

$$308 = 2^2 \times 7 \times 11 \cdot$$ ὅθεν

$$308 \times 308 = 2^2 \times 7 \times 11 \times 2^2 \times 7 \times 11 = 2^2 \times 2^2 \times 7 \times 7 \times 11 \times 11$$

$$\text{ἢ } 308^2 = 2^4 \times 7^2 \times 11^2.$$

Ὁμοίως εἶναι

$$308\times308\times308=2^2\times7\times11\times2^2\times7\times11\times2^2\times7\times11=$$
$$=2^2\times2^2\times2^2\times7\times7\times7\times11\times11\times11$$

ἤτοι $$308^3=2^6\times7^3\times11^3.$$

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις διὰ πάντα ἐκθέτην.

ΘΕΩΡΗΜΑ

123. *Ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνον, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ διαιρῶνται πάντες διὰ τοῦ 2· καὶ τότε μόνον· κύβος δέ, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων του διαιρῶνται πάντες διὰ τοῦ 3· καὶ τότε μόνον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς ὁ $2^4\times3^2\times7^4\times13^2$, τοῦ ὁποίου πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες ἔχουσιν ἐκθέτας ἀρτίους. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τετράγωνον τοῦ ἑξῆς ἀριθμοῦ $2^2\times3\times7^2\times13$, (ὃν εὑρίσκομεν διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας πάντας διὰ 2). Διότι τὸ τετράγωνον τούτου κατὰ τὰ προηγούμενα θὰ εὑρεθῇ ἂν διπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων του· τότε δὲ προκύπτει ὁ $2^4\times3^2\times7^4\times13^2$, ἤτοι ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

Ἔστω πάλιν τυχὼν ἀριθμός, ὁ $5^3\times7^2\times11^2$, τοῦ ὁποίου οἱ πρῶτοι παράγοντες δὲν ἔχουσι πάντας τοὺς ἐκθέτας ἀρτίους· (ὁ 5 ἔχει ἐκθέτην μὴ ἄρτιον).

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου· διότι παντὸς τετραγώνου οἱ πρῶτοι παράγοντες ἔχουσι τοὺς ἐκθέτας πάντας ἀρτίους ὡς προκύπτοντας ἐξ ἄλλων ἐκθετῶν διὰ τοῦ διπλασιασμοῦ.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $3^9\times5^6\times7^9\times11^3$, οὗτινος οἱ παράγοντες ἔχουσι πάντας τοὺς ἐκθέτας διαιρετοὺς διὰ 3, εἶναι κύβος· εἶναι δὲ κύβος τοῦ ἀριθμοῦ $3^3\times5^2\times7^3\times11$, ὃν εὑρίσκομεν διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας αὐτοῦ πάντας διὰ τοῦ 3.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς $2^5\times3^6\times7^9$ δὲν εἶναι κύβος οὐδενὸς ἀριθμοῦ· διότι οἱ ἐκθέται αὐτοῦ δὲν εἶναι πάντες διαιρετοὶ διὰ 3· ἀλλ' οἱ ἐκθέται παντὸς κύβου εἶναι πάντες διαιρετοὶ διὰ 3· διότι προκύπτουσιν ἐξ ἄλλων ἐκθετῶν διὰ τοῦ τριπλασιασμοῦ.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶσαν δύναμιν καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως.

Β') ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Πότε ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου.

Ἔχοντες δύο ἀριθμοὺς ἀναλελυμένους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, δυνάμεθα ἀμέσως νὰ διακρίνωμεν, ἂν ὁ εἷς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἄλλου· τὸ δὲ γνώρισμα τῆς διαιρετότητος μανθάνομεν ἐκ τοῦ ἑξῆς θεμελιώδους θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

124. *Διὰ νὰ εἶναι ἀριθμός τις διαιρετὸς δι' ἄλλου, πρέπει ὁ διαιρετέος νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τοσάκις τοὐλάχιστον, ὁσάκις περιέχει αὐτὸν ὁ διαιρέτης· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ*

Ἀπόδειξις. Ὅταν ἡ διαίρεσις γίνηται ἀκριβῶς, ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου· ἤτοι (ἐδ. 49, ἰδιότ. 3) εἶναι τὸ γινόμενον πάντων τῶν παραγόντων τοῦ διαιρέτου καὶ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ πηλίκου· ἄρα ὁ διαιρετέος θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον τοὐλάχιστον τοσάκις, ὁσάκις περιέχει αὐτὸν ὁ διαιρέτης (Δύναται δὲ καὶ ἄλλους παράγοντας νὰ περιέχῃ μὴ ὑπάρχοντας ἐν τῷ διαιρέτῃ, ἢ νὰ περιέχῃ παράγοντά τινα περισσοτέρας φορὰς ἢ ὁ διαιρέτης. Οἱ τοιοῦτοι θὰ εἶναι παράγοντες τοῦ πηλίκου). Τοῦτο δ' ἀρκεῖ· λέγω δηλαδή, ὅτι, ἐὰν ὁ διαιρετέος περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον ὄχι ὀλιγώτερον ἢ ὁ διαιρέτης, ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς. Διότι, ἂν ἀπὸ τῶν παραγόντων τοῦ διαιρετέου ἐξαλείψωμεν πάντας, ὅσους ἔχει καὶ ὁ διαιρέτης, καὶ ἰσάκις ἕκαστον, οἱ μένοντες παράγοντες τοῦ διαιρετέου θὰ ἀποτελῶσι τὸ πηλίκον.

Παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11^3 \times 17$
εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $2^2 \times 3 \times 5 \times 11^3$.

(διότι ὁ πρῶτος περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ δευτέρου καὶ ἕκαστον οὐχὶ ὀλιγώτερον ἢ ὁ δεύτερος).

Τὸ δὲ πηλίκον ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων· ἐκ τοῦ 2 δίς, ἐκ τοῦ 3 ἅπαξ καὶ ἐκ τοῦ 17· εἶναι λοιπὸν $2^2 \times 3 \times 17$.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς $3^5\times7^2\times11\times13^2$
εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $7^2\times11\times13$
καὶ τὸ πηλίκον εἶναι $3^5\times13$

Ὁ δὲ ἀριθμὸς $2^2\times3^4\times5\times7^2$ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ $2^2\times3\times5^2$ διότι ἔχει τὸν πρῶτον παράγοντα 5 ἅπαξ μόνον, ἐνῷ ὁ διαιρέτης ἔχει αὐτὸν δίς.

* Εὕρεσις πάντων τῶν διαιρετῶν δοθέντος ἀριθμοῦ.

125. Στηριζόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀφοῦ ἀναλύσωμεν αὐτὸν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας.

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 1008· ἀναλύοντες αὐτὸν εὑρίσκομεν $1008=2^4\times3^2\times7$.

Διὰ νὰ εὕρω πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς.

Ἕκαστος διαιρέτης τοῦ 1008 δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας ἢ τοὺς 2, 3 καὶ 7· καὶ τὸν μὲν 2 δύναται νὰ περιέχῃ ἢ οὐδόλως ἢ ἅπαξ, ἢ δίς, ἢ τρίς, ἢ τετράκις· ὥστε ἕκαστος διαιρέτης τοῦ 1008 ἐξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ ἕνα ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων:

$$1,\quad 2,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad 2^4,$$

διότι, ὅταν μηδόλως περιέχῃ τὸν 2, δύναμαι νὰ γράψω εἰς τὴν θέσιν αὐτοῦ τὴν μονάδα ὡς παράγοντα· τὸν δὲ 3 θὰ περιέχῃ ἢ οὐδόλως ἢ ἅπαξ ἢ δίς· ὥστε ἐξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ καὶ ἕνα ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων

$$1,\quad 3,\quad 3^2$$

τὸν δὲ 7 θὰ περιέχῃ ἢ οὐδόλως ἢ ἅπαξ μόνον· ὥστε θὰ περιέχῃ καὶ ἕνα ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων $1,\quad 7.$

Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι, ἕκαστος διαιρέτης τοῦ 1008 θὰ εἶναι γινόμενον τριῶν παραγόντων, ἐξ ὧν

ὁ μὲν πρῶτος εἶναι εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν $1,\ 2,\ 2^2\ 2^3\ 2^4.$
ὁ δὲ δεύτερος εἷς ἐκ τῶν $1,\ 3,\ 3^2.$
ὁ δὲ τρίτος εἷς ἐκ τῶν $1,\ 7.$

Διὰ νὰ εὕρω λοιπὸν ἕνα διαιρέτην τοῦ 1008, ἀρκεῖ νὰ λάβω ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ ἕνα οἱονδήποτε ἐκ τῆς δευτέρας καὶ ἕνα οἱονδήποτε ἐκ τῆς τρίτης· ἔπειτα νὰ σχηματίσω τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ληφθέντων ἀριθμῶν· τὸ γινόμενον τοῦτο θὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ 1008· διότι, ὁ 1008 περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτοῦ καὶ ἕκαστον ἐξ ἴσου ἢ καὶ περισσότερον. Καὶ διὰ νὰ εὕρω πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ 1008, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας, ἔπειτα πάλιν ἕκαστον τῶν προκυπτόντων γινομένων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης σειρᾶς· τὰ τελευταῖα ταῦτα γινόμενα θὰ εἶναι πάντες οἱ διαιρέται τοῦ 1008.

Πολλαπλασιάζων ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας, εὑρίσκω τὰ ἑξῆς γινόμενα:

1,	2,	2^2	2^3	2^4
3,	2×3	$2^2\times3$	$2^3\times3$	$2^4\times3$
3^2	2×3^2	$2^2\times3^2$	$2^3\times3^2$	$2^4\times3^2$

Πολλαπλασιάζων δὲ ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης σειρᾶς, εὑρίσκω τὰ ἑξῆς γινόμενα:

1	2	2^2	2^3	2^4
3	2×3	$2^2\times3$	$2^3\times3$	$2^4\times3$
3^2	2×3^2	$2^2\times3^2$	$2^3\times3^2$	$2^4\times3^2$
7	2×7	$2^2\times7$	$2^3\times7$	$2^4\times7$
3×7	$2\times3\times7$	$2^2\times3\times7$	$2^3\times3\times7$	$2^4\times3\times7$
$3^2\times7$	$2\times3^2\times7$	$2^2\times3^2\times7$	$2^3\times3^2\times7$	$2^4\times3^2\times7$,

ταῦτα δὲ εἶναι πάντες οἱ διαιρέται τοῦ 1008.

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τοὺς σεσημειωμένους πολλαπλασιασμούς, εὑρίσκομεν

1	2	4	8	16
3	6	12	24	48
9	18	36	72	144
7	14	28	56	112
21	42	84	168	336
63	126	252	504	1008,

126. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας καὶ σχηματίζομεν πίνακα συγκείμενον ἐκ τόσων ὁριζοντίων σειρῶν, ὅσοι εἶναι οἱ διάφοροι πρῶτοι παράγοντες τοῦ ἀριθμοῦ. Ἑκάστη δὲ τῶν σειρῶν τούτων περιέχει πρώτην τὴν μονάδα· ἔπειτα ἕνα πρῶτον παράγοντα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τὰς *δυνάμεις αὐτοῦ κατὰ σειρὰν μέχρι τῆς ἐν τῷ δοθέντι ἀριθμῷ περιεχομένης.*

Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς δευτέρας· ἔπειτα ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης, καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰ τελευταῖα γινόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τελευταίας σειρᾶς, εἶναι πάντες οἱ διαιρέται τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν τοῦ 1008 εἶναι $5\times3\times2$, ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκφράζουσι, πόσους ἀριθμοὺς ἔχει ἑκάστη σειρά. Τοῦτο ἀληθεύει γενικῶς περὶ παντὸς ἀριθμοῦ.

Γ' ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐκ τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς διαιρετότητος (ἐδ. 124) ἀποδεικνύονται εὐκολώτατα τὰ ἑξῆς θεωρήματα περὶ τῶν πρὸς ἀλλήλους πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ον

127. *Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οὐδένα ἔχουσι πρῶτον παράγοντα κοινόν· καὶ ἀντιστρόφως· οἱ μηδένα ἔχοντες πρῶτον παράγοντα κοινὸν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ $2\times3\times5^2$, $2^3\times7$, $11^3\times7$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι, οὐδένα δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ον

128. *Ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ δυνάμεις εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Διότι, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ δὲν ἔχωσι κανένα πρῶτον παράγοντα κοινόν, οὐδὲ αἱ δυνάμεις αὐτῶν θὰ ἔχωσι τοιοῦτον.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ον

129. *Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται δι' ἄλλων ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι, ἀριθμός τις Α διαιρεῖται δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν $2^3\times7$, $3\times5^2\times11$, 13×17^2, οἵτινες ὡς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, ἔχουσιν ὅλως διαφόρους παράγοντας (ὁ αὐτὸς δηλαδὴ πρῶτος παράγων δὲν εὑρίσκεται εἰς δύο ἀριθμούς) λέγω, ὅτι, ὁ ἀριθμὸς Α θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Διότι, ὁ Α πρέπει νὰ περιέχῃ (ἐδ. 124) πάντας τοὺς παράγοντας 2^3, 3^2, 5, 7, 11, 13, 17, τουτέστι πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν, καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου τούτου.

Σημείωσις. Ὅταν ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ δύο ἄλλων, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, (ἢ διὰ πολλῶν ἄλλων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο), δυνατὸν νὰ μὴ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 72 διαιρεῖται διὰ τοῦ 24 καὶ διὰ τοῦ 12, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 288.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εὐκολύνει τὴν εὕρεσιν τῶν γνωρισμάτων τῆς διαιρετότητος, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι *σύνθετος*· παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ διαιρῆται ἀριθμός τις διὰ τοῦ 6, ἤτοι διὰ 2×3, ἀνάγκη νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ. (Διότι, οἱ 2 καὶ 3 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους).

Ἐπίσης διὰ τοῦ 12 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν διαιρῆται διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ 4· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Δ΄ ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΝΑΛΕΛΥΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εὑρίσκεται κατὰ τὸ ἑπόμενον θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

130. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον περιέχον μόνον τοὺς κοινοὺς αὐτῶν πρώτους παράγοντας, ἕκαστον δὲ μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκθέτην του.*

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι, πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν: 360, 900, 672.

Ἀναλύοντες αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εὑρίσκομεν

$$360 = 2^3\times3^2\times5$$
$$900 = 2^2\times3^2\times5^2$$
$$672 = 2^5\times3\times7$$

Οἱ κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες τῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ 2 (δίς) καὶ ὁ 3 (ἅπαξ)· λέγω, ὅτι, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον $2^2 \times 3$, ἤτοι ὁ 12.

Ἀπόδειξις. Ὅτι ὁ ἀριθμὸς $2^2 \times 3$ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἶναι πρόδηλον· διότι, πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες αὐτοῦ περιέχονται εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ ἢ ἰσάκις ἢ περισσάκις. Ὅτι δὲ εἶναι καὶ ὁ μέγιστος, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Διὰ νὰ εἶναι ἀριθμός τις κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, δὲν πρέπει νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας ἢ τοὺς εἰς πάντας κοινούς· τουτέστι τὸν 2 καὶ τὸν 3· (διότι, ἂν περιέχῃ οἱονδήποτε ἄλλον πρῶτον παράγοντα, δὲν θὰ διαιρῇ πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς· ἂν λόγου χάριν περιέχῃ τὸν 5, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 672, ἂν δὲ περιέχῃ τὸν 7, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 360, οὐδὲ τὸν 900· ἂν δὲ περιέχῃ τὸν 11, δὲν θὰ διαιρῇ κανένα)· καὶ τὸν μὲν 2 δὲν δύναται νὰ περιέχῃ περισσότερον ἢ δίς, τὸν δὲ 3 μόνον ἅπαξ (διότι, ἂν περιέχῃ τὸν 2 τρίς, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 900, ἂν δὲ περιέχῃ τὸν 3 δίς, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 672). Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ κοινὸς διαιρέτης $2^2 \times 3$ περιέχει πάντας τοὺς δυνατοὺς παράγοντας καὶ οὐδεμίαν πλέον αὔξησιν ἐπιδέχεται, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης· ἄρα εἶναι ὁ μέγιστος τῶν κοινῶν διαιρετῶν.

Σημείωσις. Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δὲν ἔχωσι πρώτους παράγοντας κοινούς, λαμβάνεται ὡς κοινὸς παράγων αὐτῶν ἡ μονάς· οἱ ἀριθμοὶ τότε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ε΄ ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ

ΕΥΡΕΣΙΣ ΑΥΤΟΥ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

Ὁρισμοί.

131. *Κοινὸν πολλαπλάσιον* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 24 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 6· διότι, διαιρεῖται δι' ἑκάστου τούτων ἀκριβῶς.

Κοινὰ πολλαπλάσια δοθέντων ἀριθμῶν, οἷον τῶν 3, 5, 8, ὑπάρχουσιν ἄπειρα· διότι, τὸ γινόμενον αὐτῶν $3 \times 5 \times 8$ ἢ 120 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον· καὶ πᾶν πολλαπλάσιον τούτου εἶναι πολλαπλάσιον κοινὸν τῶν 3, 5, 8 (ἐδ. 77).

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται (ὡς καὶ τὸ ὄνομα δεικνύει) τὸ μικρότερον ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Παραδείγματος χάριν, τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι τὸ 12· διότι οὐδεὶς μικρότερος τοῦ 12 ἀριθμός, διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ πάντων τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4.

Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοί, ἔχουσι πάντοτε ἐλάχιστόν τι κοινὸν πολλαπλάσιον· διότι, οὐδὲν κοινὸν πολλαπλάσιον δύναται νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ μεγίστου ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας γίνεται κατὰ τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

132. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας* (κοινοὺς καὶ μὴ κοινούς)· *καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην του.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν:

720, 240, 462.

Ἀναλύοντες τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, εὑρίσκομεν, ὅτι εἶναι

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$
$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$
$$462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$$

Οἱ πρῶτοι παράγοντες τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι οἱ ἑξῆς: 2, 3, 5, 7, 11. Καὶ μέγιστος ἐκθέτης τοῦ μὲν 2 εἶναι ὁ 4, τοῦ δὲ 3 εἶναι ὁ 2, τῶν δὲ 5, 7, 11 ἡ μονάς (ἐδ. 122, Σημ.)· λέγω δέ, ὅτι, τὸ γινόμενον

$$2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$$

εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἀπόδειξις. Ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἶναι προφανές· διότι περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας ἑκάστου καὶ ὄχι ὀλιγώτερον (ἐδ. 124)· ὅτι δὲ εἶναι καὶ τὸ ἐλάχιστον, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἐξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν (διότι, ἂν λόγου χάριν δὲν περιέχῃ τὸν 11, δὲν θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 462· καὶ ἂν δὲν περιέχῃ τὸν 2, δὲν θὰ διαιρῆται δι' οὐδενός)· καὶ θὰ περιέχῃ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην ὄχι μικρότερον ἢ οὗτοι (διότι, ἂν λόγου χάριν ἔχῃ τὸν 2 τρὶς μόνον, ἤτοι ἂν ἔχῃ τὸν 2^3, δὲν θὰ διαιρῆται διὰ τῶν 720 καὶ 240, ἂν δὲ ἔχῃ τὸν 3 ἅπαξ μόνον, δὲν θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 720). ὥστε ἕκαστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἐξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ τοὺς ἑξῆς παράγοντας 2^4, 3^2, 5, 7, 11.

Ἄρα τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον $2^4\times3^2\times5\times7\times11$, ὅπερ ἔχει μόνους τούτους παράγοντας, τοὺς ἀναγκαίως ὑπάρχοντας εἰς πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον, εἶναι τὸ ἐλάχιστον.

Πόρισμα 1ον

133. *Κοινὰ πολλαπλάσια δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι μόνα τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.*

Διότι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον Π θὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας, ἐξ ὧν γίνεται τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Ε· ἑπομένως τὸ Π θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ Ε, ἤτοι θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Ε· ὅτι δὲ καὶ ἀντιστρόφως πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ Ε εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον, εἶναι προφανές.

Πόρισμα 2ον

134. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν.*

Διότι, οὐδεὶς πρῶτος παράγων εἶναι κοινὸς εἰς δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων, ὥστε τὸ ἐλάχιστον αὐτῶν κοινὸν πολλαπλάσιον θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν. Ἐὰν λοιπὸν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας ἑκάστου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον θὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν

$$3\times5^2\times7,\qquad 2^3\times11^2,\qquad 13\times17^2$$

εἶναι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα

$$3\times5^2\times7\times2^3\times11^2\times13\times17^2,$$

ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι μικρότερον τοῦ γινομένου αὐτῶν.

*ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εὑρίσκεται καὶ ἄνευ τῆς ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς πρώτους παράγοντας· στηρίζεται δὲ ἡ εὕρεσις αὐτοῦ ἐπὶ τῶν ἑξῆς θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

135. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο τυχόντες ἀριθμοί, Δ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν καὶ Ε τὸ ἐλάχιστον αὐτῶν κοινὸν πολλαπλάσιον· λέγω, ὅτι εἶναι

$$\text{Ε}\times\text{Δ}=\text{Α}\times\text{Β}$$

Ἀπόδειξις. Διότι, ἂν ἀναλύσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς Α καὶ Β εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ σχηματίσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην Δ καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν Ε κατὰ τὰ προηγούμενα θεωρήματα (ἐδ. 130 καὶ 132), εἰς μὲν τὸν Ε θὰ περιέχωνται οἱ μὴ κοινοὶ παράγοντες καὶ οἱ κοινοὶ μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην αὐτῶν· εἰς δὲ τὸν Δ θὰ περιέχωνται οἱ ἐπίλοιποι παράγοντες, τουτέστιν οἱ κοινοὶ μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην των· ὥστε ἐκ τῶν παραγόντων τῶν δύο ἀριθμῶν Α, Β τινὲς μὲν ἀπαρτίζουσι τὸν Ε, οἱ δὲ λοιποὶ τὸν Δ· ἐπομένως εἶναι $\text{Δ}\times\text{Ε}=\text{Α}\times\text{Β}$.

Πόρισμα.

136. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Διότι, τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι $\text{Α}\times\text{Β}$ ἢ καὶ $\text{Δ}\times\text{Ε}$· ἐὰν δὲ τοῦτο διαιρεθῇ διὰ Δ, θὰ δώσῃ πηλίκον τὸ Ε.

ΘΕΩΡΗΜΑ

137. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.*

Ἔστωσαν τυχόντες ἀριθμοὶ οἱ ἑξῆς·

Α, Β, Γ, Δ

καὶ Ε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α καὶ Β· λέγω, ὅτι,

οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ

καὶ οἱ Ε, Γ, Δ

ἔχουσιν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Ἀπόδειξις. Διότι, πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ, ὡς κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α καὶ Β, θὰ εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ Ε (ἐδ. 133)· ἄρα θὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν ἀριθμῶν Ε, Γ, Δ. Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Ε, Γ, Δ, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ Ε, θὰ εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τῶν Α καὶ Β (ἐδ. 77)· ἄρα θὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι καὶ αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀριθμῶν ἔχουσι τὰ αὐτὰ κοινὰ πολλαπλάσια· ἄρα ἔχουσι καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου πολλῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν (ὡς καὶ τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν). Πρὸς τοῦτο, δοθέντων τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ, εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Ε τῶν Α, Β· ἔπειτα τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Ζ τῶν Ε, Γ· καὶ τέλος τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Η τῶν Ζ, Δ. Τὸ Η θὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ μικρότεροι τοῦ 20 ἀριθμοὶ οἱ πρῶτοι πρὸς αὐτόν.

2) Νὰ εὑρεθῶσι πάντες οἱ κοινοὶ διαιρέται δύο ἀριθμῶν (ἢ καὶ περισσοτέρων).

Ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος ἐξ αὐτῶν (ἐδ. 104).

3) Νὰ διακρίνωμεν, ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 45 ἢ διὰ 18 (ἐδ. 129, Παρατήρησις).

4) Τὸ διπλάσιον τετραγώνου δὲν εἶναι τετράγωνον, οὐδὲ τὸ τριπλάσιον· καὶ γενικῶς τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου ἐπὶ ἄλλον, ὅστις εἶναι τετράγωνον, δὲν δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον (ἐδ. 123).

5) Νὰ ἀποδειχθῶσιν αἱ ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου (ἐδ. 104, 105, 106, 107, 108) διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

6) Νὰ δειχθῇ ἡ ἑξῆς πρότασις· «Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου, εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον»· καὶ ἀντιστρόφως «ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς γινόμενον, εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς ἕκαστον παράγοντα τοῦ γινομένου» (ἐδ. 127).

7) Ἐκ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν καὶ ἐκ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν νὰ εὕρωμεν τοὺς ἀριθμούς.

Τὸ δοθὲν κοινὸν πολλαπλάσιον Ε ὀφείλει νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου Δ καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον (ἐδ. 132)· τουτέστιν ὀφείλει νὰ εἶναι Ε διαιρετὸν διὰ Δ. Τὸ δὲ πρόβλημα ἐπιδέχεται ἐν γένει πολλὰς λύσεις· ἂν λόγου χάριν δοθῇ $\Delta = 2^2 \times 3$ καὶ $E = 2^5 \times 3 \times 7$, ἑκάτερος τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν θὰ περιέχῃ ὡς παράγοντα τὸν Δ (ἤτοι τὸν 12), θὰ περιέχῃ δὲ καὶ τὸν ἕνα τῶν ἀριθμῶν ἑκάστης τῶν ἑξῆς σειρῶν.

$$\begin{array}{ll} 1, & 2^3 \\ 1, & 3 \\ 1, & 6 \end{array}$$

ὥστε αἱ λύσεις εἶναι αἱ ἑξῆς τέσσαρες·

$$\left|\begin{array}{l} A = 12 = \Delta \\ B = 12 \times 168 = E \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} A = 12 \times 3 \\ B = 12 \times 56 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} A = 12 \times 8 \\ B = 12 \times 21 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} A = 12 \times 24 \\ B = 12 \times 7 \end{array}\right|$$

8) Ἐὰν πάντες οἱ διαιρέται ἀριθμοῦ γραφῶσιν εἰς μίαν σειρὰν κατὰ τάξιν μεγέθους, τὸ γινόμενον δύο διαιρετῶν ἐξ ἴσου ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων θὰ εἶναι πάντοτε ἴσον τῷ ἀριθμῷ.

9) Ἐὰν ἀριθμός τις δὲν εἶναι διαιρετὸς δι᾽ οὐδενὸς ἐκ τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχει, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι πρῶτος, (ἐδ. 112).

Ἔστω τοιοῦτος ἀριθμὸς ὁ Α· ἐὰν δὲν εἶναι πρῶτος, θὰ ἀναλύηται εἰς γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν· ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι εἶναι $A = \Pi \times \Pi'$, τότε

$$A^2 = \Pi^2 \times \Pi'^2.$$

Ἀλλ᾽ ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ἀδύνατος· διότι ἑκάτερον τῶν τετραγώνων Π^2, Π'^2 ὑπερβαίνει τὸν Α· ἄρα τὸ δεύτερον μέρος ὑπερβαίνει τὸ $A \times A$, ἤτοι τὸ A^2.

10) Εὑρεῖν δύο ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἔχοντας γινόμενον μὲν 24, ἄθροισμα δὲ 11.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Πρῶται ἔννοιαι.

138. Ἐὰν τὸ πρᾶγμα, ὅπερ παριστᾷ ἡ μονὰς 1, μοιρασθῇ εἰς ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν μερῶν τούτων, ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὅλον θεωρούμενον, πρέπει νὰ παρασταθῇ διὰ νέου ἀριθμοῦ. Καὶ ἂν μὲν τὸ πρᾶγμα μοιρασθῇ εἰς δύο ἴσα, ἑκάτερον ἐκ τούτων λέγεται *ἥμισυ* καὶ παρίσταται ὡς ἑξῆς: $\frac{1}{2}$· ἂν δὲ εἰς τρία ἴσα μοιρασθῇ, ἕκαστον λέγεται *ἓν τρίτον* καὶ γράφεται $\frac{1}{3}$, ἂν δὲ εἰς τέσσαρα, ἕκαστον λέγεται *ἓν τέταρτον* $\left(\frac{1}{4}\right)$ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὰ δύο ἡμίση ἑκάστου πράγματος συναποτελοῦσιν (ὅταν ἑνωθῶσι) τὸ ὅλον πρᾶγμα· ὥστε εἶναι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Καὶ τὰ τρία τρίτα ἑκάστου πράγματος συναποτελοῦσι τὸ ὅλον πρᾶγμα· ὥστε εἶναι $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$.

Ὁμοίως εἶναι $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$, κτλ.

Ὥστε οἱ νέοι ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.... εἶναι μέρη τέλεια τῆς μονάδος 1· ἤτοι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῆς ἂν διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι δίδομεν τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς.

Ὁρισμοί.

139. *Κλασματικὴ μονὰς* λέγεται πᾶν μέρος τέλειον τῆς μονάδος 1, τουτέστι πᾶν μέρος αὐτῆς, ὅπερ πολλάκις ληφθὲν δίδει αὐτήν· αὐτὴ δὲ ἡ μονὰς 1 λέγεται *ἀκεραία*.

140. *Ἀκέραιοι ἀριθμοὶ* λέγονται οἱ ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος 1 διὰ τῆς ἐπαναλήψεως γινόμενοι, ὡς $1+1$ ἢ 2, $1+1+1$ ἢ 3, κτλ. ἔτι δὲ καὶ αὐτὴ ἡ μονὰς 1.

Κλασματικοὶ ἀριθμοί, ἢ ἁπλῶς *κλάσματα*, λέγονται οἱ γινόμενοι ἐκ μιᾶς κλασματικῆς μονάδος δι' ἐπαναλήψεως· οἷον $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ (δύο τρίτα), $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ (τρία πέμπτα)· ἔτι δὲ καὶ αὗται αἱ κλασματικαὶ μονάδες.

Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων ἢ καὶ μία μονάς.

Γραφὴ τῶν κλασμάτων.

141. Ἕκαστον κλάσμα γράφεται διὰ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν· καὶ ὁ μὲν πρῶτος δεικνύει, πόσας μονάδας (κλασματικάς) ἔχει τὸ κλάσμα· ὁ δὲ δεύτερος δηλοῖ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τούτων, ἤτοι δεικνύει, εἰς πόσα μέρη διῃρέθη ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ ἔδωκε τὴν κλασματικήν.

Καὶ ὁ μὲν πρῶτος λέγεται *ἀριθμητής*, ὁ δὲ δεύτερος (ὁ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων δηλῶν) λέγεται *παρονομαστής*, οἱ δὲ δύο ὁμοῦ λέγονται *ὅροι* τοῦ κλάσματος· Γράφεται δὲ ὁ παρονομαστὴς ὑποκάτω τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ χωρίζεται ἀπ' αὐτοῦ διὰ γραμμῆς· οἷον·

τὸ ἓν πέμπτον γράφεται (ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴπομεν): $\frac{1}{5}$,

ὁ ἀριθμὸς δύο τρίτα ἤτοι $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, γράφεται $\frac{2}{3}$,

ὁ ἀριθμὸς τρία δεύτερα, ἤτοι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, γράφεται $\frac{3}{2}$

κτλ. κτλ.

Σημείωσις. Ὅταν ἀπαγγέλλωμεν τὸ κλάσμα, τὸν μὲν ἀριθμητὴν ἀπαγγέλλομεν ὡς ἀριθμητικὸν ἀπόλυτον ὄνομα, τὸν δὲ παρονομαστὴν ὡς τακτικόν· οἷον τρία ὄγδοα $\left(\frac{3}{8}\right)$, πέντε ἕβδομα $\left(\frac{5}{7}\right)$ κτλ.

Παρατήρησις.

142. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος εἶναι ἴσοι, ὡς $\frac{5}{5}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \dots$ τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα· διότι, $\frac{2}{2}$ εἶναι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, $\frac{3}{3}$ εἶναι $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$· ταῦτα δέ, ὡς ἐμάθομεν ἐξ ἀρχῆς, ἀποτελοῦσι τὴν μονάδα 1.

Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος. Διότι π. χ. τὸ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ χρειάζεται λοιπὸν ἀκόμη δύο πέμπτα, $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὴν μονάδα 1.

Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλήτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Διότι π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{7}{6}$ σύγκειται ἐξ 6 ἕκτων (ἅτινα ἀποτελοῦσιν 1) καὶ ἐξ ἑνὸς ἕκτου· ὥστε ὑπερβαίνει τὴν μονάδα 1.

Τροπὴ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.

143. Ἡ ἀκεραία μονὰς 1 δύναται, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἴσους ὅρους· ὡς $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$ κτλ.

Καὶ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα, ἐὰν αἱ μονάδες αὐτοῦ τραπῶσιν εἰς κλάσματα.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 8 εἰς πέμπτα (ἤτοι εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν 5), ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι ἑκάστη ἀκεραία μονὰς ἔχει 5 πέμπτα· ἄρα αἱ 8 μονάδες θὰ ἔχωσιν 8 φορὰς 5 πέμπτα, ἤτοι 5×8 πέμπτα· ὥστε εἶναι

$$8 = \frac{5 \times 8}{5} = \frac{40}{5}.$$

Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν δοθέντα.

Περὶ τῶν μικτῶν ἀριθμῶν.

Τροπὴ αὐτῶν εἰς κλάσματα.

144. *Μικτὸς ἀριθμὸς* λέγεται ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος· οἷον $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{6}$ κτλ.

Ὁ μικτὸς ἀριθμὸς τρέπεται εἰς κλασματικόν· διότι τὸ ἀκέραιον μέρος του τρέπεται εἰς κλάσμα.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $5\frac{3}{4}$ διὰ νὰ τρέψω αὐτὸν εἰς κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ τρέψω τὸν ἀκέραιον μέρος 5 εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν 4 (διότι, καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἔχει παρονομαστὴν 4). Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα ὁ ἀκέραιος 5 τρεπόμενος εἰς τέταρτα γίνεται:

$$\frac{5\times4}{4} \text{ ἢ } \frac{20}{4},$$

ὥστε ὁ μικτὸς $5\frac{3}{4}$ γίνεται $\frac{20}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}$

ἀλλὰ 20 τέταρτα καὶ 3 τέταρτα ἀποτελοῦσιν 23 τέταρτα (καθὼς 20 μῆνες καὶ 3 μῆνες ἀποτελοῦσιν 23 μῆνας, 20 δραχμαὶ καὶ 3 δραχμαὶ ἀποτελοῦσιν 23 δραχμάς, κτλ.)· ὥστε εἶναι

$$5\frac{3}{4}=\frac{23}{4}.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλασματικὸν πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιόν του ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος.

145. Ἐὰν κλάσμα τι περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας (ὅτε ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλήτερος τοῦ παρονομαστοῦ), δυνάμεθα νὰ ἀποχωρίσωμεν αὐτάς.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{12}{5}$, ὅπερ περιέχει ἀκεραίας μονάδας· διότι, ὁ ἀριθμητὴς 12 ὑπερβαίνει τὸν παρονομαστὴν 5.

Ἐπειδὴ 5 πέμπτα ἑνούμενα ἀποτελοῦσι μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἂν ἀπὸ τῶν 12 πέμπτων λάβωμεν τὰ 5, σχηματίζομεν ἐξ αὐτῶν μίαν ἀκεραίαν μονάδα, μένουσι δὲ ἀκόμη $12-5$, ἤτοι 7 πέμπτα· ἐὰν δὲ καὶ ἐκ τῶν 7 τούτων πέμπτων λάβωμεν τὰ 5, σχηματίζομεν ἄλλην μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ μένουν ἀκόμη 2 πέμπτα (τὰ ὁποῖα δὲν ἀποτελοῦσιν ἀκεραίαν μονάδα)· ὥστε ὁ ἀριθμὸς $\frac{12}{5}$ ἀνελύθη εἰς 2 ἀκέραια καὶ $\frac{2}{5}$, ἤτοι εἶναι

$$\frac{12}{5}=2+\frac{2}{5}, \text{ ἢ } 2\frac{2}{5}.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τόσαι ἀκέραιαι μονάδες σχηματίζονται ἐκ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ ἀριθμητής του τὸν παρονομαστήν του· ὥστε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ δοθέντος κλάσματος εὑρίσκεται, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ ἀποχωρίσωμεν τὸν εἰς κλάσμα περιεχόμενον ἀκέραιον, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι ὁ ἐν τῷ κλάσματι περιεχόμενος ἀκέραιος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν μείνῃ) εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ μένοντος κλάσματος, (ὅπερ θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν τὸν τοῦ δοθέντος κλάσματος).

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἰδὲ ἐδ. 143).

Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

146. *Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.*

Ὁ ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 31) διατηρεῖται καὶ ἐνταῦθα ἤτοι *πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ οἱουδήποτε, εἴτε ἀκεραίου εἴτε κλασματικοῦ, εἶναι ἡ ἐπανάληψις αὐτοῦ πολλάκις.*

Καὶ τὰ ὀνόματα πολλαπλασιαστέος, πολλαπλασιαστής, γινόμενον, διατηροῦσι τὴν σημασίαν αὐτῶν.

Ἔστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{3}{5}$· λέγω, ὅτι, ἂν τὸ κλάσμα τοῦτο πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5 (ἤτοι ἐπαναληφθῇ πέντε φοράς), θὰ δώσῃ γινόμενον 3.

Ἀπόδειξις. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ καὶ ἐπαναληφθὲν 5 φορὰς δίδει

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)$$

Ἕκαστον μέρος τοῦ $\frac{3}{5}$ λαμβάνεται πεντάκις· ὥστε γίνεται 1 ἀκέραιον· ἄρα τὸ $\frac{3}{5}$ θὰ γίνῃ 3 ἀκέραια.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι εἶναι $\frac{3}{5}\times 5=3$.

Πόρισμα.

147. *Πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ $\frac{5}{6}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5 διὰ τοῦ 6.

Διότι, τὸ $\frac{5}{6}$ ἑξάκις ληφθὲν γίνεται 5, ἤτοι:

$$\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}=5\cdot$$

ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, ὁ 5 ἐμοιράσθη εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ ἕκαστον ἐκ τούτων εἶναι $\frac{5}{6}$·

Σημείωσις. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἂν πρόκειται νὰ μοιράσωμεν τὸν 5 εἰς 6 ἴσα μέρη, φανερὸν εἶναι ὅτι δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν ἑκάστην μονάδα αὐτοῦ εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἔπειτα τὰ 5 πηλίκα· ἐπειδὴ δὲ ἐξ ἑκάστης μονάδος προκύπτει πηλίκον $\frac{1}{6}$, θὰ ἔχωμεν πηλίκον $\frac{5}{6}$·

Παρατήρησις.

148. Ἡ διαίρεσις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν γίνεται νῦν τελεία διὰ τῶν κλασμάτων· καὶ τὸ πηλίκον παρίσταται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην· ὥστε, ἂν μὲν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι κλάσμα μὴ περιέχον ἀκεραίας μονάδας· ἂν δὲ τοὐναντίον ὁ διαιρετέος εἶναι μεγαλήτερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον ἔχει ἀκεραίας μονάδας· καὶ θὰ εἶναι ἀκέραιον μέν, ἂν ἡ διαίρεσις (ἐκτελουμένη ὡς ἐν τῷ Α' Βιβλίῳ ἐμάθομεν) δὲν ἀφίνῃ ὑπόλοιπον, μικτὸν δέ, ἂν τοὐναντίον.

Παραδείγματος χάριν, τὸ πηλίκον τοῦ 8 διὰ 10 εἶναι $\frac{8}{10}$·

Τὸ πηλίκον τοῦ 24 διὰ 3 εἶναι $\frac{24}{3}$, ἤτοι 8 ἀκέραια·

τὸ δὲ πηλίκον τοῦ 25 διὰ 8 εἶναι $\frac{25}{8}$, ἤτοι $3\frac{1}{8}$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι, ὅταν ἡ διαίρεσις τῶν ἀκεραίων (ἣν ἐμάθομεν ἐν τῷ Α' Βιβλίῳ) ἀφίνῃ ὑπόλοιπον τὸ ἀκριβὲς πηλίκον σύγκειται ἐκ τοῦ διὰ τῆς πράξεως εὑρισκομένου ἀκεραίου πηλίκου καὶ ἐκ τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.

Περὶ τῆς ἰσότητος τῶν κλασμάτων.

Ὁρισμοί.

149. *Ἴσα* λέγονται δύο κλάσματα, ἐάν, ἰσάκις λαμβανόμενα (τουτέστιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαζόμενα) γίνωνται ἀκέραιοι ἴσοι.

Ἄνισα δὲ λέγονται, ἐὰν γίνωνται ἀκέραιοι ἄνισοι· καὶ μεγαλύτερον λέγεται τὸ παράγον τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον, μικρότερον δέ, τὸ παράγον τὸν μικρότερον.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{4}$ ἢ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$· ἐὰν λάβωμεν ἑκάτερον τούτων δὶς (ἤτοι ἂν διπλασιάσωμεν αὐτά), γίνονται

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4},$$

ἤτοι γίνονται ἀμφότερα 1.

ἄρα ἑκάτερον τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{4}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος 1· διότι, διπλασιασθὲν ἔδωκε τὴν μονάδα 1· ἀνάγκη λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν αὐτὰ ὡς ἴσα· (ἄλλως θὰ εἶχεν ἡ μονὰς 1 δύο διάφορα ἡμίση).

Τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{2}$· διότι, λαμβανόμενα ἑξάκις γίνονται ἀμφότερα ἀκέραια καὶ τὸ μὲν $\frac{2}{3}$ γίνεται 4, τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ γίνεται 3.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἀνάγεται ἡ ἰσότης καὶ ἡ ἀνισότης τῶν κλασμάτων εἰς τὴν ἰσότητα καὶ ἀνισότητα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Ἐὰν τὰ κλάσματα ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ὡς $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$· ἡ ἰσότης ἢ ἡ ἀνισότης αὐτῶν γίνεται φανερὰ ἐκ τῶν ἀριθμητῶν αὐτῶν.

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄

150. *Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτει κλάσμα ἴσον· ἐπίσης καὶ ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἔστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι του ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν· οἷον τὸν 3· τότε ἐκ τοῦ $\frac{2}{5}$ προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{6}{15}$· λέγω δέ, ὅτι εἶναι $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$.

Ἀπόδειξις. Ἂν λάβωμεν τὸ κλάσμα $\frac{6}{15}$ 15 φορὰς (ἤτοι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ 15) θὰ προκύψῃ ὁ ἀκέραιος 6·
ἀλλὰ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ ἰσάκις ληφθὲν δίδει 6· διότι,

ἂν ληφθῇ πέντε φοράς, δίδει	2,
ἂν δέκα φοράς, δίδει	2×2 ἢ 4,
ἂν δέκα πέντε φοράς, δίδει	2×3 ἢ 6.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι εἶναι $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$.

Ἔστω ἐπίσης τυχὸν κλάσμα, οὗτινος ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην, οἷον τὸ $\frac{8}{10}$· λέγω, ὅτι, ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν διαιρέτου, 2, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{4}{5}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{8}{10}$.

Ἀπόδειξις. Διότι, τὸ $\frac{8}{10}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{4}{5}$, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τούτου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 2· ἄρα $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

151. *Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ τὸ ὅλον κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· καὶ ἂν ὁ ἀριθμητὴς διαιρεθῇ, καὶ τὸ ὅλον κλάσμα διαιρεῖται, ἤτοι μοιράζεται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ.*

Λέγω δηλαδή, ὅτι, ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής, καὶ τὸ κλάσμα διπλασιάζεται· ἂν τριπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής, καὶ τὸ κλάσμα τριπλασιάζεται· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{3}{8}$· ἂν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής του γίνεται $\frac{6}{8}$, φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι τὰ 6 ὄγδοα εἶναι διπλάσια τῶν 3 ὀγδόων· ὁμοίως τὸ $\frac{9}{8}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{3}{8}$· διότι ἐτριπλασιάσθη ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων του (ἀπὸ 3 ἔγινεν 9).

Ἔστω καὶ τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$· ἂν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητής του διὰ 3, γίνεται $\frac{2}{7}$· εἶναι δὲ τὸ $\frac{2}{7}$ τὸ τρίτον τοῦ $\frac{6}{7}$· διότι, τὸ $\frac{6}{7}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{2}{7}$.

Σημείωσις. Ἐν γένει, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐξάνῃ, καὶ τὸ κλάσμα αὐξάνει.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.

152. *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, τὸ ὅλον κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· καὶ ἂν ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ, τὸ ὅλον κλάσμα πολλαπλασιάζεται.*

Λέγω δηλαδή, ὅτι, ἂν ὁ παρονομαστὴς διπλασιασθῇ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 2, ἤτοι γίνεται τὸ ἥμισυ τοῦ πρίν· ἐὰν ὁ παρονομαστὴς τριπλασιασθῇ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 3, ἤτοι γίνεται τὸ τρίτον τοῦ πρίν· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἔστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ 5 ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν, οἷον τὸν 8· τότε προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{2}{5\times 8}$ ἢ $\frac{2}{40}$. λέγω, ὅτι τὸ $\frac{2}{5\times 8}$ εἶναι τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{2}{5}$· ἤτοι, ἂν ληφθῇ 8 φοράς, θὰ δώσῃ τὸ $\frac{2}{5}$.

Ἀπόδειξις. Τὸ κλάσμα $\frac{2}{5\times 8}$ λαμβανόμενον 8 φοράς, ἤτοι πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 8, γίνεται (ἐδ. 151) $\frac{2\times 8}{5\times 8}$· τοῦτο δὲ (κατὰ τὸ Α' Θεώρημα) εἶναι ἴσον τῷ $\frac{2}{5}$· ἄρα τὸ $\frac{2}{5\times 8}$ εἶναι τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{2}{5}$.

Ἔστω πρὸς τούτοις τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς διαιρεῖται διὰ 4· λέγω, ὅτι, ἂν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστὴς 8 διὰ τοῦ 4, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{3}{2}$ θὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ δοθέντος $\frac{3}{8}$, ἤτοι $\frac{3}{8}\times 4=\frac{3}{2}$.

Ἀπόδειξις. Διότι, τὸ $\frac{3}{8}$ ἐπὶ 4 πολλαπλασιαζόμενον δίδει (ἐδάφ. 151) $\frac{3\times 4}{8}$ ἤτοι $\frac{3\times 4}{2\times 4}$ ἤτοι $\frac{3}{2}$.

Σημείωσις. Ἐν γένει, ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐξάνῃ τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται· διότι αἱ μονάδες του γίνονται μικρότεραι.

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

Ἁπλοποίησις τοῦ κλάσματος λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους.

Ἡ ἁπλοποίησις γίνεται, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος κλάσματος ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην· διότι, διαιροῦντες δι᾽ αὐτοῦ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος, εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἔχον ὅρους μικροτέρους καὶ ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.

Παραδείγματος χάριν τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$ ἁπλοποιεῖται, ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι του διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν παράγοντος 5· γίνεται δὲ $\frac{3}{4}$.

Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως ἀποκτῶμεν σαφεστέραν ἰδέαν τῶν κλασμάτων· διότι π. χ. σαφεστέραν ἰδέαν ἔχομεν τοῦ $\frac{3}{4}$ ἢ τοῦ ἴσου του $\frac{45}{60}$ ἢ τοῦ $\frac{39}{52}$.

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (ὡς $\frac{6}{3}$, $\frac{10}{2}$, κτλ.) ἁπλοποιοῦντες τὸ κλάσμα λαμβάνομεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα $\left(\frac{2}{1}, \frac{5}{1} \text{ κτλ.}\right)$· ἀλλὰ τότε τὸ κλάσμα παριστᾷ ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἐδ. 143). Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι, δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τοὺς ἀκεραίους καὶ ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, προκύπτει κλάσμα, οὗ τινος οἱ ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (ἐδ. 107)· τὸ τοιοῦτο δὲ κλάσμα λέγεται, ὅτι εἶναι *ἀνηγμένον εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους* ἢ ὅτι εἶναι *ἀνάγωγον*· διότι, δὲν ὑπάρχει ἄλλο ἴσον αὐτῷ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους· ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

153. *Ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματός τινος εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ κλάσμα τοῦτο εἶναι ἀνάγωγον· τουτέστι δὲν ὑπάρχει ἄλλο κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὸν κλάσμα ἔχον ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους, οἷον τὸ $\frac{5}{8}$, καὶ ἄλλο οἱονδήποτε κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτό, τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἔστω δηλαδὴ $$\frac{5}{8}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot$$

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ β καὶ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ 8, τὰ προκύπτοντα κλάσματα θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσα, ὡς ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα· ὅθεν ἕπεται:

$$\frac{5\times\beta}{8\times\beta}=\frac{\alpha\times8}{\beta\times8}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσα, ἂν δὲν ἔχωσιν ἀριθμητὰς ἴσους·
ἄρα εἶναι: $5\times\beta=\alpha\times8$·
ἐπειδὴ δὲ ὁ 8 διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\alpha\times8$, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πρὸς αὐτὸ ἴσον $5\times\beta$· καὶ ἐπειδὴ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν παράγοντα 5, θὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον παράγοντα β (ἐδ. 109)· ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ β διὰ 8, θὰ ἔχωμεν:

$$\beta=8\times\pi\cdot$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα $5\times\beta=\alpha\times8$ τὸν β διὰ τοῦ γινομένου $8\times\pi$, λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα

$$5\times8\times\pi=8\times\alpha$$

καὶ διαιροῦντες τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς διὰ τοῦ 8, εὑρίσκομεν

$$\alpha=5\times\pi.$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι οἱ ὅροι α, β παντὸς κλάσματος ἴσου πρὸς τὸ $\frac{5}{8}$ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ $\frac{5}{8}$·
ἄρα δὲν δύναται νὰ εἶναι μικρότεροι· ἑπομένως οὐδὲν ὑπάρχει κλάσμα ἴσον τῷ $\frac{5}{8}$ καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους.

Πόρισμα 1ον.

154. *Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι ἴσα, καὶ οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσοι καὶ οἱ παρονομασταὶ ὡσαύτως ἴσοι.*

Διότι, ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{5}{8}$ θὰ εἶναι

$$\alpha=5\times\pi \quad \text{καὶ} \quad \beta=8\times\pi\cdot$$

διὰ νὰ εἶναι δὲ καὶ τοῦτο ἀνάγωγον, ἀνάγκη ὁ π (ὅστις εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ὅρων του α καὶ β) νὰ εἶναι 1· ἀλλὰ τότε εἶναι $\alpha=5$ καὶ $\beta=8$.

Πόρισμα 2ον

155. *Πάντα τὰ ἴσα ἀλλήλοις κλάσματα προκύπτουσιν ἐξ ἑνὸς ἀναγώγου κλάσματος, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4,. . .*

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

156. *Ὁμώνυμα λέγονται ὅσα κλάσματα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν*· τουτέστιν, ὅσα γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος· οἷον $\frac{5}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$ κτλ.

Ἑτερώνυμα δὲ λέγονται, τὰ ἔχοντα διαφόρους παρονομαστάς· τουτέστιν, ὅσα γίνονται ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων, οἷον $\frac{3}{5}, \frac{2}{9}$ κτλ.

157. Ἔχοντες ἑτερώνυμα κλάσματα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλα ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα (ἓν πρὸς ἓν) καὶ ὁμώνυμα· τοῦτο λέγεται *τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων εἰς ὁμώνυμα ἢ ἀναγωγὴ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.*

Ἡ τροπὴ αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδ. 150 καὶ γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας:

1ος) Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.

Διότι, τὰ οὕτω προκύπτοντα κλάσματα εἶναι ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα, ἕκαστον πρὸς τὸ ἐξ οὗ προέκυψεν (ἐδ. 150)· ἔχουσι δὲ καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τουτέστι τὸ γινόμενον τῶν δύο παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Ἔστωσαν, ὡς παράδειγμα, τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{3}{8}$, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν προηγούμενον κανόνα εὑρίσκομεν:

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times8}{5\times8}=\frac{16}{40},$$
$$\frac{3}{8}=\frac{3\times5}{8\times5}=\frac{15}{40}.$$

2ος) Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ὁσαδήποτε καὶ ἂν εἶναι, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν λοιπῶν.

Διότι, διὰ τοῦ τρόπου τούτου ἐξ ἑκάστου κλάσματος προκύπτει ἄλλο ἴσον· ἔχουσι δὲ τὰ νέα κλάσματα πάντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τουτέστι τὸ γινόμενον πάντων τῶν δοθέντων παρονομαστῶν.

Ἔστωσαν, ὡς παράδειγμα, τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{8}$.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα, εὑρίσκομεν

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times7\times8}{5\times7\times8}=\frac{224}{280},$$

$$\frac{3}{7}=\frac{3\times5\times8}{7\times5\times8}=\frac{120}{280},$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1\times5\times7}{8\times5\times7}=\frac{35}{280}.$$

3ος) *Ἐὰν ἔχωμεν κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων παρονομαστῶν, δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν αὐτὸ κοινὸν παρονομαστήν. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν αὐτὸ δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν καὶ ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἔχει τὸν παρονομαστὴν τοῦτον.*

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}$.

Ὁ ἀριθμὸς 36 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 2, 3, 9 καὶ 12· ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν κανόνα τοῦτον, εὑρίσκομεν:

$$36:2=18 \qquad \frac{1}{2}=\frac{1\times18}{2\times18}=\frac{18}{36},$$

$$36:3=12 \qquad \frac{2}{3}=\frac{2\times12}{3\times12}=\frac{24}{36},$$

$$36:9=4 \qquad \frac{5}{9}=\frac{5\times4}{9\times4}=\frac{20}{36},$$

$$36:12=3 \qquad \frac{7}{12}=\frac{7\times3}{12\times3}=\frac{21}{36}.$$

Συμβαίνει δὲ νὰ ἔχωσι πάντα τὰ νέα κλάσματα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν 36, διότι, ἕκαστος ἐκ τῶν δοθέντων παρονομαστῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, τῆς ὁποίας αὐτὸς εἶναι διαιρέτης, διαιρετέος δὲ ὁ 36 (ἐδ. 57).

Ὅταν εἷς ἐκ τῶν δοθέντων παρονομαστῶν εἶναι διαιρετὸς διὰ τῶν λοιπῶν, καθιστῶμεν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστὴν κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}, \frac{2}{15}$.

Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 15 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 5 καὶ 15, ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα καὶ εὑρίσκομεν

$$15:5=3 \qquad \frac{3}{5}=\frac{3\times3}{5\times3}=\frac{9}{15},$$

$$\frac{2}{15}=\frac{2}{15}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι, τὰ κλάσματα $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{24}$

τρέπονται εἰς εἰκοστὰ τέταρτα $\frac{4}{24}, \frac{16}{24}, \frac{6}{24}, \frac{5}{24}$

Σημείωσις. Εἰς τὸν κανόνα τοῦτον περιλαμβάνονται καὶ οἱ δύο προηγούμενοι. Διότι, τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν εἶναι προφανῶς κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν· τοῦτο δὲ γίνεται κοινὸς παρονομαστὴς κατὰ τὸν πρῶτον καὶ κατὰ τὸν δεύτερον κανόνα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

158. *Ἐὰν τὰ δοθέντα κλάσματα εἶναι ἀνάγωγα, ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον δύνανται νὰ ἀποκτήσωσιν, εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.*

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{7}{18}$, ἅτινα εἶναι ἀνάγωγα καὶ τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ 5, 8, 12, 18 ἔχουσιν ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τὸν 360· λέγω, ὅτι, δὲν δύνανται νὰ γίνωσιν ὁμώνυμα μὲ παρονομαστὴν μικρότερον τοῦ 360.

Ἀπόδειξις. Διότι, πᾶν κλάσμα ἴσον μὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{1}{5}$ θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν πολλαπλάσιόν τι τοῦ 5 (ἐδ. 155)· ὁμοίως πᾶν κλάσμα ἴσον τῷ ἀναγώγῳ $\frac{3}{8}$ θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν πολλαπλάσιόν τι τοῦ 8 καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε ὁ κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον θὰ ἔχωσι τὰ ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα κλάσματα, θὰ εἶναι ἐξ ἀνάγκης κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων παρονομαστῶν 5, 8, 12, 18· ἐὰν λοιπὸν θέλωμεν τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, θὰ λάβωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον 360.

Παρατήρησις.

Ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα χρησιμεύει 1) εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν αὐτῶν, ὡς ἀμέσως θὰ ἴδωμεν, καὶ 2) εἰς τὸ νὰ διακρίνωμεν εὐκόλως τὴν ἰσότητα ἢ τὴν ἀνισότητα αὐτῶν· διότι, ἐκ δύο κλασμάτων ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον ἀριθμητήν.

ΠΡΑΞΕΙΣ

Ἐπὶ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Α') ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

159. *Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοί.*

Αἱ μονάδες, τὰς ὁποίας ἔχουσιν οἱ ἀριθμοί, δύνανται νὰ εἶναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

Ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον λέγεται καὶ πάλιν τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως· οἱ δὲ εἰς πρόσθεσιν δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται *προσθετέοι.*

Διὰ νὰ προστεθῶσι δύο ἢ περισσότερα κλάσματα, πρέπει νὰ εἶναι ὁμώνυμα· ἤτοι νὰ γίνωνται πάντα ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος. Διὰ τοῦτο, ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν κλάσματα, *ἐὰν δὲν εἶναι ὁμώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα.*

Ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων ἐκτελεῖται τότε κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα:

160. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομεν μόνον τοὺς ἀριθμητάς των, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ κλάσματα $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$

εἶναι φανερὸν ὅτι 1 ὄγδοον καὶ 3 ὄγδοα καὶ 5 ὄγδοα κάμνουν $1+3+5$ ἤτοι 9 ὄγδοα (καθὼς 1 βιβλίον καὶ 3 βιβλία καὶ 5 βιβλία κάμνουν 9 βιβλία)· ὥστε:

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{8}=1+\frac{1}{8} \qquad \text{(ἐδ. 145).}$$

Παραδείγματα.

1) Νὰ προστεθῶσι τὰ δύο κλάσματα $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{1}{6}$.

τρέπω αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκω

$$\frac{1}{5}=\frac{6}{30}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{5}{30}$$

καὶ προσθέτων εὑρίσκω:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30}$$

2) Νὰ προστεθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$.

τρέπω αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκω

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$
$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

ὅθεν προσθέτων εὑρίσκω:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

Σημείωσις. Τὸ ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος εἶναι μικτὸς ἀριθμός· οἷον $1+\frac{1}{2}$ γράφεται ὡς ἑξῆς $1\frac{1}{2}$.

Πρόσθεσις τῶν μικτῶν.

161. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς

$$3\frac{5}{8}, \qquad 10\frac{2}{9}.$$

Οἱ ἀκέραιοι χωριστὰ προστιθέμενοι δίδουσι 13· τὰ δὲ κλάσματα γίνονται κατὰ πρῶτον ὁμώνυμα.

$$\frac{5}{8}=\frac{45}{72}, \quad \frac{2}{9}=\frac{16}{72},$$

ἔπειτα προστιθέμενα δίδουσιν ἄθροισμα $\frac{61}{72}$.

ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων μικτῶν εἶναι $13\frac{61}{72}$,

διότι, τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐσχηματίσαμεν ἑνώσαντες τὰς μονάδας των. Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς μικτοὺς

$$2\frac{1}{2} \text{ καὶ } 5\frac{5}{6},$$

τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων εἶναι 7,

τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶναι $\frac{8}{6}=1\frac{2}{6}=1\frac{1}{3}$.

ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων μικτῶν εἶναι $7+1+\frac{1}{3}=8\frac{1}{3}$.

Ὁμοίως, εὑρίσκεται, ὅτι, τὸ ἄθροισμα τῶν μικτῶν

$$5\frac{1}{2} \text{ καὶ } 6\frac{2}{3} \text{ καὶ } 15\frac{5}{6} \text{ εἶναι } = 28.$$

Σημείωσις. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀκέραιον καὶ μικτόν, προσθέτομεν τὸν ἀκέραιον εἰς τὸν ἀκέραιον μικτοῦ,

$$\text{οἷον } 5\frac{1}{6}+2=7\frac{1}{6}.$$

Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσμα καὶ μικτόν, προσθέτομεν τὸ κλάσμα εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ·

$$\text{οἷον } 5\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=5+1=6, \qquad 3\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=3\frac{1}{2}.$$

Παρατήρησις.

Ἡ πρόσθεσις ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἴτε ἀκεραίων εἴτε κλασματικῶν ἀνάγεται πάντοτε εἰς πρόσθεσιν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Διότι, πάντες οἱ προσθετέοι δύνανται νὰ γίνωσι κλάσματα καὶ μάλιστα ὁμώνυμα· τότε δὲ ἡ πρόσθεσις αὐτῶν καταντᾷ πρόσθεσις τῶν ἀριθμητῶν των. Διὰ τοῦτο ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 23) μένει ἀληθής, οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ καὶ ἂν εἶναι οἱ προσθετέοι· ἑπομένως μένουσιν ἀληθεῖς καὶ πᾶσαι αἱ ἐξ αὐτῆς πηγάζουσαι ἰδιότητες καὶ ἀποδεικνύονται ἐξ αὐτῆς ἀπαραλλάκτως (ἐδ. 23. 1, 2, 3).

Β) ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

Ὁρισμοί

162. *Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τὰς μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.*

Αἱ μονάδες δυνατὸν νὰ εἶναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν λέγεται καὶ πάλιν *μειωτέος*, ὁ δὲ δεύτερος *ἀφαιρετέος*· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται *ὑπόλοιπον* ἢ *διαφορά*.

Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου, θὰ ἀποτελέσωμεν προδήλως τὸν μειωτέον· ὅθεν ὁ *μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου.*

Διὰ τοῦτο ἡ ἀφαίρεσις δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ἑξῆς.

163. *Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον δίδει ὡς ἄθροισμα τὸν πρῶτον.*

Ἀφαίρεσις κλασμάτων.

Διὰ νὰ ἀφαιρεθῇ κλάσμα ἀπὸ ἄλλου, πρέπει νὰ εἶναι ὁμώνυμον πρὸς αὐτό. Διὰ τοῦτο, ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλου, *ἐὰν δὲν εἶναι ὁμώνυμα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.*

Ἡ ἀφαίρεσις γίνεται τότε κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

164. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλου ὁμωνύμου, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{5}{12}$ ἀπὸ $\frac{7}{12}$· φανερὸν εἶναι, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ 7 δωδέκατα ἀφαιρέσωμεν 5 δωδέκατα, θὰ μείνωσι 2 δωδέκατα (καθώς, ἐὰν ἀπὸ 7 μῆνας ἀφαιρέσωμεν 5 μῆνας, μένουσι 2 μῆνες)·

ἄρα $$\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12} \text{ ἢ } =\frac{1}{6}$$

Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον, ὅτι, ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{1}{6}$ ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{5}$.

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα· καὶ ὁ μὲν ἀφαιρετέος $\frac{1}{6}$ γίνεται $\frac{5}{30}$, ὁ δὲ μειωτέος $\frac{1}{5}$ γίνεται $\frac{6}{30}$· ὥστε ἡ διαφορὰ εἶναι $\frac{1}{30}$·

ἤτοι: $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{6}{30}-\frac{5}{30}=\frac{1}{30}$.

Ἀφαίρεσις μικτῶν.

165. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰς δύο διαφοράς.*

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μικτὸν $2\frac{1}{3}$ ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $7\frac{2}{5}$, ἀφαιροῦμεν τοὺς ἀκεραίους χωριστά: $7-2=5$

ἔπειτα τὰ κλάσματα: $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{1}{15}$·

ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι: $5\frac{1}{15}$.

166. Ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου, ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων δὲν γίνεται. Ἵνα ἄρωμεν τὸ ἐμπόδιον τοῦτο, *λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τὴν ἑνώνομεν μὲ τὸ κλάσμα αὐτοῦ, ἀφοῦ τρέψωμεν αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον.*

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $3\frac{1}{5}$ ἀπὸ $8\frac{2}{15}$ καὶ τρέψωμεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, θὰ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $3\frac{3}{15}$ ἀπὸ $8\frac{2}{15}$· καὶ ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{3}{15}$ (τοῦ ἀφαιρετέου) δὲν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ $\frac{2}{15}$ (τοῦ μειωτέου), λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τρέπομεν αὐτὴν εἰς δέκατα πέμπτα· τότε θὰ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μικτὸν $3\frac{3}{15}$ ἀπὸ τοῦ $7+\frac{15}{15}+\frac{2}{15}$, ἤτοι ἀπὸ τοῦ $7\frac{17}{15}$. Ἀφαιροῦντες τότε κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $4\frac{14}{15}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $8\frac{1}{3}-4\frac{4}{5}=3\frac{8}{15}$,

$$12\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}=3\frac{5}{6}.$$

Τὸ αὐτὸ κάμνομεν, καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ ἀκεραίου (ἢ καὶ κλάσμα ἀπὸ ἀκεραίου)· οἷον

$$5-2\frac{1}{3}=4+\frac{3}{3}-2\frac{1}{3}=2\frac{2}{3}.\quad 8-\frac{2}{7}=7+\frac{7}{7}-\frac{2}{7}=7\frac{5}{7}.$$

Σημείωσις. Ἐὰν ἀπὸ μικτοῦ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀκέραιον, ἀφαιροῦμεν τοῦτον ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ μικτοῦ· οἷον

$$5\frac{1}{3}-2=3\frac{1}{3},\qquad 8\frac{2}{5}-8=\frac{2}{5}.$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ μικτοῦ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τοῦ κλάσματος τοῦ μικτοῦ·

οἷον $2\frac{1}{5}-\frac{1}{8}=2\frac{8}{40}-\frac{5}{40}=2\frac{3}{40}$.

Ὁμοίως $4\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=3+\frac{6}{6}+\frac{1}{6}-\frac{2}{6}=3\frac{5}{6}$.

Παρατήρησις.

Καὶ ἡ ἀφαίρεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων. Διὰ τοῦτο αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 29) ἀληθεύουσι καὶ περὶ πάσης ἀφαιρέσεως.

Γενίκευσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

167. Μέχρι τοῦδε ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς ἐσήμαινε *τὴν ἐπανάληψιν ἑνὸς ἀριθμοῦ*, ἡ δὲ διαίρεσις *τὸν μερισμὸν ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς ἴσα μέρη*· αὗται δὲ εἶναι αἱ πρῶται, αἱ φυσικαί, τῶν πράξεων τούτων ἔννοιαι.

Ἀλλ' ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων ὁδηγούμενοι οἱ ἄνθρωποι ἔφθασαν εἰς τὴν ἰδέαν νὰ γενικεύσωσι τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδὴ νὰ δώσωσιν εἰς τὸ ὄνομα *πολλαπλασιασμὸς* ἄλλην σημασίαν, γενικωτέραν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εἶχε πρίν.

Εἰς τὴν γενίκευσιν ταύτην φθάνομεν ὡς ἑξῆς· ἂν ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα: «Πόσον ἀξίζουν 5 ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 12 δραχμάς;» φανερὸν εἶναι, ὅτι, θὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν 12, 5 φοράς· τουτέστι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος θὰ κάμωμεν πολαπλασιασμόν, 12×5. Ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων ἀπὸ 5 γίνῃ $5\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{5}{8}$, πάλιν θέλομεν ἡ πρᾶξις, δι' ἧς λύεται τὸ πρόβλημα, νὰ λέγηται πολλαπλασιασμός, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Ὅταν εὑρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος ἑνὸς πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος, πρέπει νὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμόν (τουτέστι νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων).

Διὰ νὰ εὕρω πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ ἡ ὅλη ὀκᾶ ἀξίζει 12 δραχμὰς

τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς θὰ ἀξίζῃ τὸ ὄγδοον τῶν 12 δρ. ἤτοι $\frac{12}{8}$ τῆς δραχμῆς (κατὰ τὸ ἐδ. 148)·

καὶ ἑπομένως τὰ 5 ὄγδοα αὐτῆς θὰ ἀξίζουν $\frac{12}{8} \times 5$ ἢ $\frac{12 \times 5}{8}$ δρ. (κατὰ τὸ ἐδ. 151).

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἔγιναν τώρα δύο πράξεις· πρῶτον μὲν ἐμερίσθη ὁ ἀριθμὸς 12 εἰς ὀκτὼ ἴσα μέρη· ἔπειτα δὲ ἐλήφθη τὸ ἓν μέρος 5 φοράς, ἤτοι ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 5. Αἱ δύο αὗται πράξεις ὁμοῦ πρέπει νὰ ὀνομασθῶσι τώρα πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμοῦ 12 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ (κατὰ τὴν νέαν, τὴν γενικὴν σημασίαν τῆς λέξεως), διὰ νὰ ἀληθεύῃ ὁ ἀνωτέρω εἰρημένος κανών, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων εἶναι κλασματικός.

168. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἑξῆς.

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα εἶναι ἐπανάληψις μέρους τινὸς τοῦ ἀριθμοῦ.

Ποῖον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος· ποσάκις δὲ θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ.

Ὥστε γενικῶς ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον οἱονδήποτε (ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν) πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἑξῆς.

169. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐπαναλαμβάνομεν* *ἕνα ἀριθμὸν ἢ μέρος τι αὐτοῦ, καὶ σχηματίζομεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλον ἀριθμόν.*

Ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου μέρος, ἢ τὸ ὅλον, θὰ ἐπαναλάβωμεν, λέγεται *πολλαπλασιαστέος*· ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις μᾶς δεικνύει, ποῖα καὶ πόσα μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου θὰ λάβωμεν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἐξαγόμενον, λέγεται *πολλαπλασιαστής*· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται *γινόμενον*.

Σχηματίζομεν δὲ τὸ γινόμενον, ὅταν δοθῶσιν οἱ ἀριθμοί, κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

170. *Δι᾽ ἑκάστην ἀκεραίαν μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ λαμβάνομεν ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον, δι᾽ ἑκάστην δὲ κλασματικὴν λαμβάνομεν τὸ ὁμώνυμον μέρος αὐτοῦ.*

οἷον $\alpha \times 4$ σημαίνει $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha$· διότι, $4=1+1+1+1$·

$\alpha \times \frac{2}{3}$ σημαίνει $\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}$· διότι, $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.

ἔνθα α εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ $\frac{\alpha}{3}$ τὸ τρίτον αὐτοῦ.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς καταντᾷ μερισμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μία κλασματικὴ μονάς.

Διότι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶναι $12 \times \frac{1}{4}=\frac{12}{4}=3$.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον· διότι, σύγκειται ἐξ αὐτοῦ ἢ ἔκ τινος μέρους αὐτοῦ. Ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός.

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν νέον τοῦτον πολλαπλασιασμὸν ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζεται, αὐξάνει μέν, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος 1, ἐλαττοῦται δέ, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικρότερος αὐτῆς (μένει δὲ ὁ αὐτός, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 1).

Καὶ τῷ ὄντι· διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ $\frac{5}{3}$ πρέπει νὰ λάβω τὸ τρίτον τοῦ 8 (ἤτοι τὸ $\frac{8}{3}$) πέντε φοράς· ἀλλὰ τὸ τρίτον τοῦ 8, ὅταν ληφθῇ τρεῖς φοράς, δίδει τὸν 8· ἄρα, ὅταν ληφθῇ 5 φοράς, θὰ δώσῃ περισσότερον τοῦ 8. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω δὲ τὸν 8 ἐπὶ $\frac{3}{5}$, πρέπει νὰ λάβω τρεῖς φορὰς τὸ πέμπτον τοῦ 8· ἀλλὰ τὸ πέμπτον τοῦ 8 πρέπει νὰ ληφθῇ πέντε φορὰς διὰ νὰ δώσῃ τὸν 8· ἄρα, ὅταν ληφθῇ 3 φορὰς μόνον, θὰ δώσῃ ὀλιγώτερον τοῦ 8.

Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.

171. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.*

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον 20 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ 20 καὶ νὰ λάβωμεν αὐτὸ τρίς.

Ἀλλὰ τὸ ὄγδοον τοῦ 20 εἶναι $\frac{20}{8}$ (ἐδ. 148)

καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{20}{8}$ εἶναι $\frac{20\times3}{8}$ (ἐδ. 151)·

ὅθεν: $$20\times\frac{3}{8}=\frac{20\times3}{8} \text{ ἢ } \frac{60}{8}, \text{ ἤτοι } 7\frac{4}{8} \text{ ἢ } 7\frac{1}{2}.$$

Σημείωσις. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ 20 καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ τριπλασίου τοῦ 20 εἶναι εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός· τοῦτο δὲ ἀληθεύει γενικῶς περὶ παντὸς ἀριθμοῦ.

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.

172. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπ' ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν, καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν θέτομεν ἀριθμητήν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν παρονομαστήν.*

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{3}{7}$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἕβδομον τοῦ $\frac{4}{5}$ καὶ νὰ λάβωμεν αὐτὸ τρίς.

Τὸ ἕβδομον τοῦ $\frac{4}{5}$ εἶναι $\frac{4}{5\times7}$ (ἐδ. 152)

τὸ δὲ τριπλάσιον του $\frac{4}{5\times7}$ εἶναι $\frac{4\times3}{5\times7}$ (ἐδ. 151) ἄρα εἶναι: $$\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{4\times3}{5\times7} \text{ ἤτοι } \frac{12}{35}.$$

Παρατήρησις.

Ἐκ τοῦ ἐξαγομένου τούτου γίνεται ἀμέσως φανερόν, ὅτι εἶναι:

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\times\frac{4}{5},$$

ὡσαύτως εἶναι: $$20\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}\times20$$

ὥστε καὶ ὁ νέος πολλαπλασιασμὸς ἔχει τὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων.

Σημείωσις. Εἰς τὸν κανόνα τοῦτον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων περιλαμβάνονται καὶ οἱ κανόνες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον (ἐδ. 151) καὶ ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα (ἐδ. 171). Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παριστῶνται οἱ ἀκέραιοι ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Καὶ τῷ ὄντι εἶναι: $$5\times\frac{7}{9}=\frac{5}{1}\times\frac{7}{9}=\frac{5\times7}{1\times9}=\frac{5\times7}{9}.$$

$$\frac{8}{15}\times3=\frac{8}{15}\times\frac{3}{1}=\frac{8\times3}{15\times1}=\frac{8\times3}{15}.$$

Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ.

173. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος του καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰ δύο γινόμενα.*

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς δύναται νὰ εἶναι ἢ ἀκέραιος ἢ κλασματικός, διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1) Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $7\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 4· τὸ γινόμενον θὰ εἶναι:

$$\left(7\frac{5}{8}\right)+\left(7\frac{5}{8}\right)+\left(7\frac{5}{8}\right)+\left(7\frac{5}{8}\right)$$

ἢ $$7+7+7+7+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}$$

ἤτοι: $$7\times4+\frac{5}{8}\times4.$$

2) Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $7\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$.

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ τρίτον τοῦ μικτοῦ $7\frac{5}{8}$ καὶ νὰ λάβωμεν τοῦτο δίς.

Ἀλλὰ τὸ τρίτον τοῦ μικτοῦ $7\frac{5}{8}$ εἶναι $\frac{7}{3}+\frac{5}{8\times 3}$ διότι, τοῦτο τρεῖς φορὰς λαμβανόμενον, ἤτοι ἐπὶ 3 πολλαπλασιαζόμενον, κατὰ τὰ ἀνωτέρω δίδει τὸν μικτὸν $7+\frac{5}{8}$. Τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ $\frac{7}{3}+\frac{5}{8\times 3}$ εἶναι

$$\frac{7\times 2}{3}+\frac{5\times 2}{8\times 3},$$

τοῦτο δὲ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἀκεραίου μέρους 7 καὶ τὸ γινόμενον τοῦ κλασματικοῦ μέρους $\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ $\frac{2}{3}$· ἄρα ἔχομεν

$$\left(7\frac{5}{8}\right)\times\frac{2}{3}=7\times\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}.$$

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς γενικωτέρα πρότασις.

174. *Ἄθροισμα οἱονδήποτε πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν ἕκαστος τῶν προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα* (παράβαλε ἐδ. 45, 2).

Παραδείγματος χάριν εἶναι

$$\left(3+\frac{1}{8}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}\right)\times 8=24+1+\frac{16}{7}+\frac{24}{10}=29+\frac{24}{35},$$

$$\left(5+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)\times\frac{7}{8}=\frac{5\times 7}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{7}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{7}{8}.$$

Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτόν.

175. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο μικτούς, πολλαπλασιάζομεν*

1) τοὺς δύο ἀκεραίους,

2) τὰ δύο κλάσματα,

3) τὸν ἀκέραιον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου,

4) τὸν ἀκέραιον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πρώτου·

καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰ τέσσαρα ταῦτα γινόμενα.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο μικτοὺς

$$\left(4\frac{2}{5}\right)\times\left(8\frac{7}{10}\right)$$

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς δύναται νὰ γίνῃ κλάσμα, θὰ ἔχωμεν πολλαπλασιασμὸν μικτοῦ ἐπὶ κλασματικόν, καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι

$$\left(4\frac{2}{5}\right)\times\left(8\frac{7}{10}\right)=4\times\left(8\frac{7}{10}\right)+\frac{2}{5}\times\left(8\frac{7}{10}\right)$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ τάξις τῶν παραγόντων εἶναι ἀδιάφορος ὡς πρὸς τὸ γινόμενον (ἐδ. 172, Παρ.), θὰ εἶναι:

$$\left(4\frac{2}{5}\right)\times\left(8\frac{7}{10}\right)=\left(8\frac{7}{10}\right)\times4+\left(8\frac{7}{10}\right)\times\frac{2}{5}$$

καὶ ἑπομένως

$$\left(4\frac{2}{5}\right)\times\left(8\frac{7}{10}\right)=8\times4+\frac{7}{10}\times4+8\times\frac{2}{5}+\frac{7}{10}\times\frac{2}{5}.$$

Τὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα εἶναι:

$$32,\ \frac{28}{10}\ \text{ἢ}\ 2\frac{8}{10},\qquad \frac{16}{5}\ \text{ἢ}\ 3\frac{1}{5},\qquad \frac{14}{50},$$

ἄρα τὸ γινόμενον τῶν μικτῶν εἶναι $37+\frac{8}{10}+\frac{1}{5}+\frac{14}{50}$, ἤτοι

$$37+\frac{40}{50}+\frac{10}{50}+\frac{14}{50},\ \text{ἢ}\ \ 38\frac{14}{50},\ \text{ἢ}\ \ 38\frac{7}{25}.$$

Σημείωσις. Ἐπειδὴ οἱ μικτοὶ τρέπονται εἰς κλάσματα, δύναταί τις νὰ ἀποφύγῃ τὰς πράξεις τῶν μικτῶν, ἐὰν τρέπῃ αὐτοὺς πρὶν εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα ἐκτελῇ τὰς πράξεις· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι δυσκολώτερον· ὅθεν προτιμότερον εἶναι νὰ ἐκτελῶνται αἱ πράξεις τῶν μικτῶν, ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν.

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ γενικωτέρα πρότασις.

176. *Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα (χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν), ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα* (παράβαλε ἐδ 50).

Παραδείγματος χάριν εἶναι

$$\left(\frac{2}{5}+6+\frac{7}{10}\right)\times\left(10+\frac{5}{7}\right)=$$

$$=\frac{2}{5}\times10+6\times10+\frac{7}{10}\times10+\frac{2}{5}\times\frac{5}{7}+6\times\frac{5}{7}+\frac{7}{10}\times\frac{5}{7}=$$

$$=4+60+7+\frac{2}{7}+\frac{30}{7}+\frac{1}{2}=76\frac{1}{14}.$$

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

177. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν, ἐξ ὧν τινες ἢ καὶ πάντες εἶναι κλασματικοί, ὁρίζεται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους (ἐδ. 44) καὶ σημειοῦται ὁμοίως.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{7}$

τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων εἶναι $\frac{2\times3}{3\times10}$

τὸ δὲ γινόμενον τούτου καὶ τοῦ τρίτου εἶναι $\frac{2\times3\times7}{3\times10\times8}$

καὶ τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν τέταρτον εἶναι $\frac{2\times3\times7\times1}{3\times10\times8\times7}$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι:

Τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων παρίσταται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Τοῦτο ἀληθεύει, καὶ ὅταν τινὲς τῶν παραγόντων εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί· ἀρκεῖ νὰ γράφωνται ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Σημείωσις. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων συμβαίνουσιν ἐνίοτε ἁπλοποιήσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ κάμνωμεν.

Παραδείγματος χάριν εἰς τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν γινόμενον, ἤτοι εἰς τὸ κλάσμα $\frac{2\times3\times7\times1}{3\times10\times7\times8}$

δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ 3, ἔπειτα διὰ 7 καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ ἁπλούστερον κλάσμα

$$\frac{2\times1}{10\times8}$$

ἐὰν δὲ καὶ τούτου τοὺς ὅρους διαιρέσωμεν διὰ 2, εὑρίσκομεν τὸ ἔτι ἁπλούστερον $\frac{1}{10\times4}$ ἢ $\frac{1}{40}$

τοῦτο δέ, εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμητὴν καὶ ἕνα παρονομαστὴν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ γινόμενον· ἂν λοιπὸν ἀριθμός τις εἶναι καὶ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστής, παραλείπεται.

Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς οἱωνδήποτε ἀριθμῶν διατηρεῖ πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· διότι ἔχει τὰς δύο θεμελιώδεις ἰδιότητας αὐτοῦ (ἐδ. 45)· Ἐκ τούτων τὴν μὲν δευτέραν εὕρομεν ἤδη (ἐδ. 174), ἡ δὲ πρώτη ἀποδεικνύεται ἐν τῷ ἑξῆς θεωρήματι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

178. *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.*

Ἂν πάντες οἱ παράγοντες εἶναι ἀκέραιοι, τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον (ἐδ. 48), εἰ δὲ μή, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον πάντων τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν (οἱ τυχὸν ὑπάρχοντες ἀκέραιοι παράγοντες ὑποτίθεται ἔχοντες παρονομαστὴν τὸ 1)· τὰ δὲ δύο ταῦτα γινόμενα, ὡς γινόμενα ἀκεραίων ἀριθμῶν, δὲν ἀλλάσσουσι, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοί. Ὥστε τὸ γινόμενον θὰ ἔχῃ πάντοτε τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

179. Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος ἕπονται αἱ ἑξῆς (αἵτινες ἀποδεικνύονται ἀπαράλλακτα ὡς ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν).

1) Δυνάμεθα εἰς τὸ γινόμενον νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς τινας διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν· ἢ καὶ τοὐναντίον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἱονδήποτε παράγοντα δι' ἄλλων ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν γινόμενον· δυνάμεθα δηλονότι νὰ συμπτύξωμεν παράγοντάς τινας εἰς ἕνα μόνον, ἢ καὶ τοὐναντίον νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα παράγοντα εἰς πολλοὺς ἄλλους.

Παραδείγματος χάριν εἰς τὸ γινόμενον

$$\frac{2}{3}\times 5\times \frac{3}{2}\times 8\times \frac{5}{8}$$

δύναμαι νὰ ἀντικαταστήσω τοὺς δύο παράγοντας $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 1, καὶ τοὺς 8, $\frac{5}{8}$ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 5· οὕτως εὑρίσκω

$$5\times 5 \text{ ἤτοι } 25.$$

2) *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸν ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου.*

Π. χ. ἵνα πολλαπλασιάσω τὸ γινόμενον $\frac{1}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{4}{9}$ ἐπὶ 7 ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν παράγοντα $\frac{2}{7}$ ἐπὶ 7· οὕτως εὑρίσκω $\frac{1}{5}\times 2\times\frac{4}{9}$.

3) *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς παράγοντας ἀμφοτέρων τῶν γινομένων.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον τῶν δύο γινομένων

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{9} \qquad \frac{8}{9}\times\frac{5}{7}$$

εἶναι $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{5}{7}$ ἢ $\frac{3\times 8}{2\times 9\times 9}$ ἢ $\frac{4}{3\times 9}$ ἤτοι $\frac{4}{27}$.

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.

180. *Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.*

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν

$$\frac{7}{8}-\frac{4}{9} \qquad \text{ἐπὶ} \qquad \frac{2}{3}.$$

Ἡ διαφορὰ αὐτή, ἐὰν τὰ κλάσματα γίνωσιν ὁμώνυμα, γίνεται

$$\frac{7\times 9}{8\times 9}-\frac{4\times 8}{9\times 8} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{7\times 9-4\times 8}{8\times 9}$$

Τὸ κλάσμα τοῦτο πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $\frac{2}{3}$ κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων· ἵνα δὲ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 ὁ ἀριθμητής, ὅστις εἶναι διαφορὰ δύο ἀκεραίων, ἐφαρμόζομεν τὴν πρότασιν τοῦ ἐδ. 51· οὕτως εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον

$$\frac{7\times 9\times 2-8\times 4\times 2}{8\times 9\times 3}$$

τοῦτο δὲ εἶναι ἡ διαφορὰ δύο κλασμάτων, ἡ ἑξῆς.

$$\frac{7\times 9\times 2}{8\times 9\times 3}-\frac{8\times 4\times 2}{8\times 9\times 3} \text{ ἤτοι τῶν } \frac{7\times 2}{8\times 3}-\frac{4\times 2}{9\times 3}\cdot$$

ὅθεν ἔχομεν

$$\left(\frac{7}{8}-\frac{4}{9}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{7\times 2}{8\times 3}-\frac{4\times 2}{9\times 3}=\frac{7}{8}\times\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}.$$

Δυνάμεις τῶν κλασμάτων.

Αἱ δυνάμεις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὁρίζονται, ὡς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 52) καὶ σημειοῦνται ὁμοίως.

181. *Ἵνα ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς δύναμιν, ὑψοῦμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.*

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$, ἤτοι τὸ γινόμενον $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι

$$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3\times3}{5\times5}=\frac{3^2}{5^2}$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$ σημειοῦται ὡς ἑξῆς $\left(\frac{3}{5}\right)^2$,

ἕπεται ὅτι
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}.$$

Παρατήρησις.

Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀποδεικνύεται ἀπαραλλάκτως (ἐδ. 53).

Παραδείγματος χάριν εἶναι

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2\times\left(\frac{3}{8}\right)^4=\left(\frac{3}{8}\right)^6.$$

Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος.

182. *Ἴσοι ἀριθμοὶ ἐπὶ ἴσους πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι γινόμενα ἴσα.*

Ἔστω $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$· λέγω, ὅτι, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\times\gamma=\beta\times\delta$.

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι οἱ ἴσοι ἀριθμοὶ α καὶ β ἑπταπλασιαζόμενοι γίνονται ἀμφότεροι 4 (ἴδε ἐδ. 149), οἱ δὲ ἴσοι γ καὶ δ δεκαπλασιαζόμενοι γίνονται ἀμφότεροι 12. Ἐὰν τότε πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο γινόμενα $\alpha\times\gamma$ καὶ $\beta\times\delta$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 7×10, εὑρίσκομεν (κατὰ τὰς γενικὰς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἰδιότητας), ὅτι ἀμφότερα γίνονται 4×12, τουτέστιν ἀκέραιοι ἴσοι· ἄρα τὰ γινόμενα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ὁμοίως δεικνύεται, καὶ ὅτι *ἄνισοι ἐπὶ ἴσους πολλαπλασιαζόμενοι μένουσιν ἄνισοι.*

Γενίκευσις τῆς διαιρέσεως.

Τὴν διαίρεσιν ὁρίζομεν γενικῶς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς.

183. *Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον (ἢ πολλαπλασιάζων τὸν δεύτερον), δίδει τὸν πρῶτον.*

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται *πηλίκον*. Ἐκ δὲ τῶν δοθέντων ὁ μὲν πρῶτος λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ δεύτερος *διαιρέτης*.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον τῆς διαιρέσεως *ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.*

Παραδείγματα.

Ἡ διαίρεσις $12:3$ σημαίνει νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 3 νὰ δίδῃ γινόμενον 12· φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εὑρίσκεται, ἂν μερισθῇ ὁ 12 εἰς τρία ἴσα μέρη.

Ἡ δὲ διαίρεσις $5:\frac{1}{3}$ σημαίνει νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{1}{3}$ νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν 5· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ 15· διότι $15\times\frac{1}{3}=5$.

Κανὼν γενικὸς τῆς διαιρέσεως.

184. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι, ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{4}{9}$ διὰ τοῦ $\frac{3}{5}$· τουτέστι νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{3}{5}$ νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν $\frac{4}{9}$.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{3}{5}$, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ πέμπτον αὐτοῦ τρεῖς φοράς· ἤτοι τὰ τρία πέμπτα αὐτοῦ· ἄρα τὰ τρία πέμπτα τοῦ ζητουμένου πηλίκου θὰ εἶναι $\frac{4}{9}$· ἑπομένως τὸ ἓν πέμπτον αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{4}{9\times3}$ (ἤτοι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{4}{9}$). καὶ τὰ πέντε πέμπτα τοῦ πηλίκου, ἤτοι ὅλον τὸ πηλίκον, θὰ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ $\frac{4}{9\times3}$ ἤτοι $\frac{4\times5}{9\times3}$·

τὸ πηλίκον λοιπὸν τοῦ $\frac{4}{9}$ διὰ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{4\times5}{9\times3}$ ἢ $\frac{4}{9}\times\frac{5}{3}$.

Ὅτι δὲ ἀληθῶς τοῦτο εἶναι τὸ πηλίκον, ἐξελέγχεται εὐκόλως· διότι τὸ γινόμενόν του ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{5}$ εἶναι

$$\frac{4}{9}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{5} \text{ ἤτοι } \frac{4}{9}, \text{ τουτέστιν ὁ διαιρετέος.}$$

Παραδείγματα.

$$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2},$$

$$12:\frac{2}{3}=12\times\frac{3}{2}=18,$$

$$3\frac{1}{4}:\frac{5}{6}=\left(3+\frac{1}{4}\right)\times\frac{6}{5}=3\times\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{6}{5}=$$

$$=\frac{18}{5}+\frac{3}{10}=\frac{39}{10}=3\frac{9}{10}$$

Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι, διὰ τῆς γενικεύσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

Σημείωσις. Ὁ ἀνωτέρω ἀποδειχθεὶς κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν δι' ἀκεραίου· ἀρκεῖ ὁ ἀκέραιος διαιρέτης νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Παραδείγματος χάριν $\frac{5}{7}:8=\frac{5}{7}:\frac{8}{1}=\frac{5}{7}\times\frac{1}{8}=\frac{5}{7\times8}$.

Παρατήρησις.

185. Διὰ μικτοῦ διαιρέτου δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἄλλως ἢ τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα.

Παραδείγματος χάριν $2:\left(3+\frac{1}{8}\right)=2:\frac{25}{8}=2\times\frac{8}{25}=\frac{16}{25}$.

$$3\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}:\frac{5}{2}=\left(3+\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}+\frac{1}{5}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}.$$

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς τελείας διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν διατηροῦνται καὶ ἐπὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν· ἀποδεικνύονται δὲ ἀπαράλλακτα ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων· διὰ τοῦτο ἀναγράφομεν αὐτὰς ἐνταῦθα παραλείποντες τὰς ἀποδείξεις ὡς εὐκόλως εὑρισκομένας.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'

186. *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{2}{5} : \frac{3}{8}$ δὲν βλάπτεται, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι, διαιρετέος καὶ διαιρέτης, ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 5×8· τότε ὁ διαιρετέος γίνεται 2×8, ὁ δὲ διαιρέτης 3×5· ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{2 \times 8}{3 \times 5}$.

Ὁμοίως, ἂν ἔχω νὰ διαιρέσω $3 : 2\frac{1}{2}$, πολλαπλασιάζω διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 2 καὶ γίνονται $6 : 5$· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{6}{5}$ ἢ $1\frac{1}{5}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

187. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἂν λόγου χάριν ἔχω νὰ διαιρέσω τὸ γινόμενον $8 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$ διὰ τοῦ 4, διαιρῶ τὸν παράγοντα 8 καὶ εὑρίσκω τὸ πηλίκον $2 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$.

Πόρισμα.

188. Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.

Π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{3}{5} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{20}$ διὰ $\frac{8}{9}$ εἶναι $\frac{3}{5} \times \frac{1}{20}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'

189. *Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν ἀλληλοδιαδόχως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου* (τουτέστι πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου, καὶ οὕτω καθεξῆς).

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'

190. *Ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα πηλίκα.*

Σημείωσις. Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, δύνανται νὰ θεωρήματα ταῦτα νὰ ἀποδειχθῶσι καὶ διὰ τῶν θεωρημάτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ τρόπου δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις.

191. Διαφορὰ διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ μειωτέος αὐτῆς καὶ ὁ ἀφαιρετέος χωριστὰ καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου πηλίκου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.

Περὶ κλασμάτων ἐχόντων ὅρους οἱουςδήποτε ἀριθμούς.

192. Διὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν κλασμάτων, τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην· οἷον τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ τοῦ 8 παρίσταται ὡς ἑξῆς: $\frac{12}{8}$

Ἐάν, χάριν τῆς γενικότητος, μεταχειρισθῶμεν τὴν παράστασιν ταύτην τοῦ πηλίκου δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, φθάνομεν εἰς παραστάσεις τοιαύτας:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} \qquad \frac{4}{\frac{2}{5}} \qquad \frac{\frac{5}{6}}{8} \qquad \frac{2\frac{1}{2}}{3}$$

$$\text{ἀντὶ} \quad \frac{2}{5}:\frac{3}{7} \qquad 4:\frac{2}{5} \qquad \frac{5}{6}:8 \qquad 2\frac{1}{2}:3.$$

Αἱ παραστάσεις αὗται λέγονται *κλάσματα σύνθετα*· ἐκλήθησαν δὲ κλάσματα, διότι ἔχουσι πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων, ὡς ἀμέσως θὰ δειχθῇ.

Πρέπει ὅμως νὰ ἐνθυμώμεθα, ὅτι ταῦτα οὐδὲν ἄλλο σημαίνουσιν ἢ τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν.

193. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα ἡ παράστασις $\frac{\alpha}{\beta}$, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, λέγεται *κλάσμα*· σημαίνει δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ β.

194. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ἀμέσως, ὅτι εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}\times\beta=\alpha$· τοῦτο δὲ εἶναι ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν κλασμάτων (ἐδ. 146).

195 Ἐκ τοῦ Α´ θεωρήματος (ἐδ. 186) τῆς διαιρέσεως συνάγεται ἀμέσως ὅτι: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\gamma}$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ γ.

ἐξ οὗ γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ ἐν τῷ ἐδ. 150 ἀποδειχθεῖσα γενικὴ ἰδιότης τῶν ἁπλῶν κλασμάτων ἀληθεύει περὶ πάντων.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἕπεται, ὅτι, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καὶ τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ὡς καὶ τὰ ἁπλᾶ (κατὰ τοὺς κανόνας 1ον καὶ 2ον).

Ἂν δηλαδὴ ἔχωμεν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\delta}, \qquad \frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma\times\beta}{\delta\times\beta}.$$

196. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων τούτων γίνεται ὡς καὶ τῶν ἁπλῶν, ἀφοῦ ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Δηλαδὴ εἶναι $\frac{\alpha}{\delta}+\frac{\beta}{\delta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\delta}$ (κατὰ τὸ θεώρ. τοῦ ἐδ. 190).

$\frac{\alpha}{\delta}-\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha-\beta}{\delta}$ (κατὰ τὸ ἐδ. 191).

197. Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐκτελεῖται κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τῶν ἁπλῶν κλασμάτων.

Διότι, ἔστωσαν τὰ τυχόντα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $\alpha:\beta$, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τι π (ἀκέραιον ἢ κλασματικόν). Ἐπίσης, ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $\gamma:\delta$, θὰ εὕρωμεν ὡς πηλίκον ἀριθμόν τινα ϱ. Διὰ ταῦτα θὰ εἶναι:

$$\alpha=\beta\times\pi, \qquad \gamma=\delta\times\varrho,$$

ἄρα (ἐδ. 182) $\quad \alpha\times\gamma=\beta\times\pi\times\delta\times\varrho=(\beta\times\delta)\times(\pi\times\varrho)$,

καὶ ἑπομένως $\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta}=\pi\times\varrho=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\times\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$.

Ἀφ' οὗ ἀπεδείχθη ὁ κανὼν διὰ δύο κλάσματα, ἀποδεικνύεται δι' ὁσαδήποτε (κατὰ τὸν συνήθη τρόπον).

Σημείωσις. Ὑποθέτοντες $\delta=1$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\gamma=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta} \qquad \text{(παράβαλε ἐδ. 151).}$$

198. Καὶ ἡ διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε κλασμάτων ἐκτελεῖται κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν ἁπλῶν κλασμάτων (ἐδ. 148)· λέγω δηλαδή, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ διαιρεθέντος διὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma}$, διότι, τοῦτο πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{\gamma}{\delta}$ δίδει $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma}\times\frac{\gamma}{\delta}$, ἤτοι $\frac{\alpha\times\delta\times\gamma}{\beta\times\gamma\times\delta}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$, τουτέστι τὸν διαιρετέον.

Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \gamma}$

Σημείωσις. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\delta = 1$, προκύπτει

$$\frac{\alpha}{\beta} : \gamma = \frac{\alpha}{\beta \times \gamma} \qquad \text{(παράβαλε ἐδ. 152).}$$

Θεώρημα περὶ τῶν ἴσων κλασμάτων.

199. *Ἐὰν ἴσων κλασμάτων προστεθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι ὅροι, προκύπτει κλάσμα ἴσον.*

Ἔστωσαν ἴσα τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{\Gamma}, \frac{\delta}{\Delta}$. Ἐὰν διαιρέσω τὸ α διὰ τοῦ Α, θὰ εὕρω πηλίκον ἀριθμόν τινα ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, ὅντινα παριστῶ διὰ τοῦ ρ· τὸ αὐτὸ δὲ πηλίκον θὰ εὕρωμεν ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἐκ τῶν διαιρέσεων β διὰ Β, γ διὰ Γ, δ διὰ Δ· καὶ θὰ εἶναι

$$\alpha = A \times \rho, \quad \beta = B \times \rho, \quad \gamma = \Gamma \times \rho, \quad \delta = \Delta \times \rho,$$

ὅθεν καὶ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = A \times \rho + B \times \rho + \Gamma \times \rho + \Delta \times \rho$,

ἢ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = (A + B + \Gamma + \Delta) \times \rho$ (ἐδ. 174).

ἄρα $$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{A + B + \Gamma + \Delta} = \rho \text{ ἤτοι } = \frac{\alpha}{A}.$$

Προβλήματα λυόμενα δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ.

Τὰ κυριώτερα τῶν τοιούτων προβλημάτων εἶναι τὰ ἑξῆς:

1) Νὰ ἐπαναλάβωμεν ἀριθμὸν πολλάκις.

2) Νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων ἐξ ἑνὸς πράγματος, ὅταν εἰξεύρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος αὐτοῦ.

Οἷον νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως, ὅταν εἷς πῆχυς ἀξίζῃ $12 \frac{1}{2}$ δραχμάς. Κατὰ τὸν νέον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, *ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν τῶν μονάδων.*

Ὥστε ἡ ἀξία τῶν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως εἶναι $\left(12 \frac{1}{2}\right) \times \frac{7}{8}$ ἤτοι $10 \frac{15}{16}$ δρ.

3) Νὰ εὑρεθῇ μέρος τι ὡρισμένον δοθέντος ἀριθμοῦ·

οἷον νὰ εὑρεθῶσιν τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ 40.

Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 40 εἶναι $\frac{40}{3} + \frac{40}{3}$ ἤτοι $\frac{40 \times 2}{3}$ ἢ $40 \times \frac{2}{3}$.

ἤτοι τὰ δύο τρίτα τοῦ 40 εἶναι τὸ γινόμενόν του ἐπὶ $\frac{2}{3}$.

Σημείωσις. Ἐὰν ζητῆται μέρος τι τέλειον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, οἷον τὸ $\frac{1}{5}$, ἡ πρᾶξις δι' ἧς εὑρίσκεται τοῦτο, εἶναι κυρίως διαίρεσις.

4) Νὰ τρέψωμεν ἀριθμόν τινα συγκεκριμένον εἰς ἄλλον κατωτέρας τάξεως καὶ ὁμοειδῆ.

Οἷον νὰ τρέψωμεν $8\frac{2}{5}$ ὀκάδας εἰς δράμια.

Αἱ 8 ὀκάδες ἔχουσι δράμια 400×8 καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἔχουσι δράμια $400\times\frac{2}{5}$ (διότι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἔχει δράμ. $400\times\frac{1}{5}$)· ἄρα αἱ $8\frac{2}{5}$ ὀκάδες ἔχουσι δράμ. $400\times 8+400\times\frac{2}{5}$, ἤτοι $400\times\left(8\frac{2}{5}\right)$ ἢ 3360 δράμια.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, ἵνα τρέψωμεν ἀριθμὸν συγκεκριμένον εἰς ἄλλον ὁμοειδῆ καὶ κατωτέρας τάξεως, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει, πόσας μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεως ἔχει μία μονὰς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο περιλαμβάνεται εἰς τὸ ἑξῆς γενικώτερον.

5) Νὰ τραπῇ ἀριθμὸς εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστήν.

οἷον νὰ τραπῇ ὁ $8\frac{2}{5}$ εἰς τετρακοσιοστά, ἢ ὁ $\frac{5}{7}$ εἰς δωδέκατα.

Πρόδηλον εἶναι, ὅτι

$$8\frac{2}{5}=\frac{8\frac{2}{5}\times 400}{400}=\frac{8\times 400+\frac{2}{5}\times 400}{400}=\frac{3360}{400},$$

ὥστε ὁ $8\frac{2}{5}$ εἶναι ἴσος μὲ 3360 τετρακοσιοστά.

Ὡσαύτως εἶναι $$\frac{5}{7}=\frac{\frac{5}{7}\times 12}{12}=\frac{\frac{60}{7}}{12}=\frac{8\frac{4}{7}}{12}$$

Ὥστε $\frac{5}{7}$ εἶναι ἴσον μὲ 8 δωδέκατα καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ δωδεκάτου, ἢ κατὰ προσέγγισιν ἴσον μὲ 8 δωδέκατα.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι, ἵνα τρέψωμεν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστὴν (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν), πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας τοῦ γινομένου.

Σημείωσις. Σκοπὸς τῆς τοιαύτης τροπῆς εἶναι νὰ ἀποκτήσωμεν σαφεστέραν ἰδέαν τινῶν κλασμάτων ἐκφράζοντες αὐτὰ δι' ἄλλων γνωστοτέρων· π. χ. ἀντὶ $\frac{5}{7}$ τοῦ ἔτους σαφέστερον καὶ εὐκολώτερον εἰς τὴν ἀντίληψιν ἡμῶν εἶναι 8 μῆνες $\left(=\frac{8}{12}\right)$, καὶ ἀντὶ $8\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς σαφέστερον εἶναι 8 ὀκάδες καὶ 160 δράμια.

Προβλήματα λυόμενα διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

Τὰ κυριώτερα τῶν τοιούτων προβλημάτων εἶναι τὰ ἑξῆς:

1) Νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη.

2) Νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος πράγματός τινος, ὅταν εἰξεύρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων του·

οἷον νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς ὀκᾶς ὅταν $15\frac{1}{2}$ ὀκ. ἀξίζουν $72\frac{2}{5}$ δραχ.

Ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $15\frac{1}{2}$, πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν $72\frac{2}{5}$ ἑπομένως εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ $72\frac{2}{5}$ διὰ $15\frac{1}{2}$· πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους ἐπὶ 10 εὑρίσκομεν πηλίκον $\frac{724}{155}$

3) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ἐκ δοθέντος μέρους αὐτοῦ·

οἷον νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{5}$ εἶναι 60·

τὸ ἓν πέμπτον αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{60}{3}$ καὶ τὰ 5 πέμπτα, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμός, θὰ εἶναι $\frac{60}{3}\times 5$, ἤτοι $60:\frac{3}{5}$.

4) Νὰ τραπῇ ἀριθμὸς συγκεκριμένος εἰς ἄλλον ἀνωτέρας τάξεως·

οἷον νὰ τραπῶσιν $615\frac{1}{2}$ μῆνες εἰς ἔτη·

ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν, ἐὰν πολλαπλασιάσῃ τὸν 12 (διότι 1 ἔτος ἔχει 12 μῆνας), θὰ δώσῃ τοὺς $615\frac{1}{2}$ μῆνας· ὥστε εἶναι τὸ πηλίκον $615\frac{1}{2}:12$, ἢ 51 ἔτη καὶ $\frac{3}{12}$ καὶ $\frac{1}{24}$ τοῦ ἔτους, ἤτοι 51 ἔτη $\frac{7}{24}$ τοῦ ἔτους

Τὸ πρόβλημα τοῦτο περιλαμβάνεται εἰς τὸ ἑξῆς γενικώτερον.

5) Δοθέντων δύο ἀριθμῶν, νὰ εὑρεθῇ, πῶς ἀποτελεῖται ὁ πρῶτος ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

οἷον νὰ εὑρεθῇ, πῶς ἀποτελεῖται ὁ 35 ἐκ τοῦ $\frac{2}{5}$ καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ·

ἤγουν ποσάκις πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ πόσα μέρη αὐτοῦ, ἵνα ἀποτελέσωμεν τὸν 35.

Διαιροῦντες τὸν 35 διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$ εὑρίσκομεν, ὅτι εἶναι $35 = \frac{2}{5} \times \left(87\frac{1}{2}\right)$.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, τὸ $\frac{2}{5}$, ἂν ληφθῇ 87 φοράς, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ, ἅπαξ ληφθέν, ἀποτελοῦσι τὸν 35· ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 35 διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$.

Ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται *λόγος* τοῦ 35 πρὸς τὸ $\frac{2}{5}$ (παράβλ. ἐδ. 74).

Προβλήματα διάφορα.

1) $18\frac{1}{2}$ πήχεις ὑφάσματός τινος ἀξίζουσιν 70 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν 10 πήχεις καὶ $\frac{2}{5}$ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Λύσις. Ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει $\frac{70}{18\frac{1}{2}}$ ἢ $\frac{140}{37}$ τῆς δραχμῆς καὶ ἑπομένως οἱ $10\frac{2}{5}$ ἀξίζουν $\frac{140}{37} \times \left(10\frac{2}{5}\right)$, ἤτοι $\frac{140 \times 52}{5 \times 37}$ ἢ $\frac{28 \times 52}{37}$.

2) Μὲ $12\frac{1}{2}$ δραχμὰς ἀγοράζει τις 8 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσας ὀκάδας ἀγοράζει μὲ $40\frac{1}{5}$ δραχμάς;

Λύσις. Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει $\frac{8}{12\frac{1}{2}}$ τῆς ὀκᾶς καὶ μὲ $40\frac{1}{5}$ ἀγοράζει $8 \times \frac{40\frac{1}{5}}{12\frac{1}{2}}$, ἢ $8 \times \frac{402}{125}$.

3) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ τρίτον αὐξηθὲν κατὰ 8 γίνεται 14;

Λύσις. Τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 6 καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς εἶναι 18.

4) Πατὴρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ λάβῃ ὁ υἱός του τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας του, ἡ δὲ θυγάτηρ του τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς καὶ ὅ,τι περισσεύσῃ νὰ λάβῃ ἡ σύζυγός του. Ἡ σύζυγός του ἔλαβεν 9000 δραχμάς· πόσας ἔλαβον τὰ τέκνα καὶ πόση ἦτο ἡ περιουσία;

Λύσις. Τὰ δύο τέκνα ἔλαβον ὁμοῦ τὰ $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας, ἤτοι τὰ $\frac{31}{40}$ αὐτῆς· ἄρα ἡ σύζυγος ἔλαβε τὰ λείποντα $\frac{9}{40}$· ταῦτα δὲ ἦσαν 9000· ἄρα ἡ περιουσία ἦτο $\frac{9000\times 40}{9}$ ἤτοι 40000 δραχμαί· καὶ ὁ μὲν υἱὸς ἔλαβε 15000, ἡ δὲ θυγάτηρ 16000.

5) Δεξαμενή τις πληροῦται ὑπὸ μιᾶς κρήνης εἰς 12 ὥρας καὶ ὑπὸ ἄλλης χωριστὰ εἰς 15 ὥρας· ἐὰν ῥέωσι καὶ αἱ δύο συγχρόνως, εἰς πόσας ὥρας θὰ πληρώσωσι τὴν δεξαμενήν;

Λύσις. Εἰς μίαν ὥραν πληροῖ ἡ πρώτη κρήνη τὸ $\frac{1}{12}$ τῆς δεξαμενῆς, ἡ δὲ δευτέρα τὸ $\frac{1}{15}$. Ἄρα ὁμοῦ πληροῦσιν εἰς μίαν ὥραν τὰ $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$ τῆς δεξαμενῆς· ἤτοι τὰ $\frac{9}{60}$ ἢ $\frac{3}{20}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἐπειδὴ δὲ τὰ $\frac{3}{20}$ χρειάζονται μίαν ὥραν, ἵνα πληρωθῶσι, τὸ $\frac{1}{20}$ χρειάζεται $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας, καὶ τὰ $\frac{20}{20}$, ἤτοι ὅλη ἡ δεξαμενή, χρειάζεται $\frac{20}{3}$ τῆς ὥρας, ἤτοι 6 ὥρας καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας, ἢ 6 ὥρας καὶ 40 λεπτὰ πρῶτα.

6) Ἐργάτης τις ἐξετέλεσε τὰ $\frac{3}{5}$ ἔργου τινὸς εἰς 8 ἡμέρας· ἄλλος ἐργάτης ἐξετέλεσε τὰ $\frac{2}{9}$ αὐτοῦ εἰς 5 ἡμέρας· εἰς πόσας ἡμέρας οἱ δύο οὗτοι ἐργάται ὁμοῦ θὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἐπίλοιπον ἔργον;

Λύσις. Ὁ πρῶτος, ἐπειδὴ εἰς 8 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου, θὰ ἐκτελέσῃ εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{3}{40}$ αὐτοῦ. Ὁ δεύτερος, ἐπειδὴ ἐκτελεῖ εἰς 5 ἡμέρας τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ἔργου, θὰ ἐκτελέσῃ εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{2}{45}$ αὐτοῦ.

Ἂν λοιπὸν εἰργάζοντο ὁμοῦ, θὰ ἐξετέλουν εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{3}{40}+\frac{2}{45}$ ἤτοι τὰ $\frac{43}{360}$ τοῦ ἔργου· καὶ ἑπομένως τὸ ὅλον ἔργον εἰς $\frac{360}{43}$ τῆς ἡμέρας (ἴδε προηγούμενον πρόβλημα).

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχουσιν ἐκτελεσθῆ τὰ $\frac{2}{9}+\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου, ἤτοι τὰ $\frac{37}{45}$

αὐτοῦ, μένουσι πρὸς ἐκτέλεσιν τὰ $\frac{8}{45}$ τοῦ ἔργου· ἑπομένως οἱ δύο ἐργάται χρειάζονται πρὸς τοῦτο ἡμέρας

$$\frac{360}{43}\times\frac{8}{45} \text{ ἢ } \frac{64}{43} \text{ ἢ } 1\,\frac{21}{43}.$$

7) Πεζὸς διανύων 17 στάδια εἰς 2 ὥρας διώκεται ὑπὸ ἱππέως, ὅστις ἀνεχώρησε 10 ὥρας μετ' αὐτὸν καὶ διανύει 28 στάδια εἰς 3 ὥρας· μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ὁ ἱππεὺς θὰ φθάσῃ τὸν πεζόν;

Λύσις. Τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ἐξεκίνησεν ὁ ἱππεύς, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ πεζοῦ ἦτο 85 στάδια (διότι τόσα διατρέχει ὁ πεζὸς εἰς 10 ὥρας)· ἐπειδὴ δὲ καθ' ἑκάστην ὥραν ἡ ἀπόστασις αὕτη ἐλαττοῦται κατὰ $\frac{28}{3}-\frac{17}{2}$ (διότι ὁ μὲν ἱππεὺς διανύει $\frac{28}{3}$ στάδια τὴν ὥραν, ὁ δὲ πεζὸς $\frac{17}{2}$), ἤτοι κατὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ σταδίου, ἕπεται, ὅτι τόσαι ὧραι θὰ περάσουν, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ $\frac{5}{6}$ εἰς τὸν 85, ἤτοι 85: $\frac{5}{6}$ ἢ $85\times\frac{6}{5}$ ἤτοι 17×6 ἢ 102 ὧραι.

8) Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ πίπτει· πεσοῦσα δὲ ἀπό τινος ὕψους καὶ ἀναπηδήσασα τρίς, ὑψώθη κατὰ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν εἰς ὕψος $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεος. Ἐκ πόσου ὕψους ἔπεσε τὸ πρῶτον;

Λύσις. Τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, εἰς ὑψώθη κατὰ τὴν δευτέραν ἀναπήδησιν, εἶναι $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως· ἄρα τὸ ῥηθὲν ὕψος εἶναι $\frac{1}{8}\times\frac{9}{2}$ τὸ δὲ ὕψος τοῦτο εἶναι τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, εἰς ὃ ὑψώθη κατὰ τὴν πρώτην ἀναπήδησιν ἄρα τὸ ὕψος τῆς πρώτης ἀναπηδήσεως εἶναι $\frac{1}{8}\times\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}$ τέλος τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ ἔπεσε κατὰ πρῶτον ἡ σφαῖρα· ἄρα τὸ ἀρχικὸν ὕψος εἶναι

$$\frac{1}{8}\times\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}, \quad \text{ἤτοι} \quad 11\,\frac{25}{64} \text{ πήχεις.}$$

9) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ αὐξανόμενα κατὰ 9 νὰ δίδωσι τὸν ἀριθμὸν 30. ('Απ. 40).

10) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ τὸ $\frac{1}{9}$ αὐξανόμενα κατὰ 1 δίδουσι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ. (Ἀπ. 72).

11) Δεξαμενὴ δύναται νὰ πληρωθῇ ὑπὸ τριῶν κρηνῶν· καὶ ἡ μὲν πρώτη μόνη πληροῖ αὐτὴν εἰς 40 ὥρας, ἡ δὲ δευτέρα μόνη εἰς 30 ὥρας, καὶ ἡ τρίτη εἰς 20· εἰς πόσας ὥρας καὶ αἱ τρεῖς συγχρόνως ῥέουσαι θὰ πληρώσωσι τὴν δεξαμενήν; $\left(\text{Ἀπ. } 9\frac{3}{13}\right)$

12) Ἐκ πίθου περιέχοντος 100 ὀκάδας οἴνου ἀφαιροῦνται 20 ὀκάδες καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος· ἐκ τοῦ κράματος ἀφαιροῦνται πάλιν 20 ὀκάδες καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος· τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ τρίτην φοράν, πόσος οἶνος θὰ περιέχηται τότε ἐν τῷ κράματι;

Λύσις. Εἰς ἑκάστην ἀφαίρεσιν ἀφαιροῦνται τὰ $\frac{20}{100}$ ἢ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἐν τῷ πίθῳ ὑπάρχοντος οἴνου (διότι ἐκ τῶν 100 ὀκάδων τοῦ ἐν τῷ πίθῳ ὑπάρχοντος ὑγροῦ ἀφαιροῦνται αἱ 20), ὥστε κατὰ μὲν τὴν πρώτην ἀφαίρεσιν ἦτο οὗτος 100 ὀκάδες καὶ ἀφῃρέθη τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ, ἄρα ἔμειναν τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι ἔμεινεν $100\times\frac{4}{5}$· εἰς τὴν δευτέραν ἀφαίρεσιν ἀφῃρέθη τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $100\times\frac{4}{5}$, ὥστε ἔμειναν τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι $100\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$· ὁμοίως ἔμειναν μετὰ τὴν τρίτην ἀφαίρεσιν $100\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$, τουτέστιν ὀκ. $51\frac{1}{5}$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους ὅρους, προκύπτει κλάσμα, ὅπερ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν.

Ἔστωσαν τὰ τυχόντα κλάσματα:

$$\frac{\alpha}{A},\quad \frac{\beta}{B},\quad \frac{\gamma}{\Gamma},\quad \frac{\delta}{\Delta},$$

καὶ ἐξ αὐτῶν μέγιστον μὲν ἔστω τὸ $\frac{\alpha}{A}$, ἐλάχιστον δὲ τὸ $\frac{\delta}{\Delta}$.

Ἐὰν αὐξήσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν ἄλλων, ὥστε νὰ γίνωσιν ἴσα πρὸς τὸ πρῶτον (ἂς γίνωσι δὲ τότε οἱ ἀριθμηταὶ β΄, γ΄, δ΄) καὶ ἔπειτα ἐφαρμόσωμεν τὴν πρότασιν τοῦ ἐδ. 199, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\alpha+\beta'+\gamma'+\delta'}{A+B+\Gamma+\Delta},$$

ἄρα εἶναι: $\frac{\alpha}{A} > \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A+B+\Gamma+\Delta}$.

ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως.

2) Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, τὸ κλάσμα αὐξάνει μέν, ἐὰν εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος, ἐλαττοῦται δέ, ἐὰν εἶναι μεγαλύτερον αὐτῆς.

Τοῦτο εἶναι ἄμεσον ἀκολούθημα τοῦ προηγουμένου.

3) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, ὧν οἱ παρονομασταὶ διαφέρουσι, δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ (ἅτινα ὑποτίθενται ἀνάγωγα) εἶναι ἴσον τῷ ἀκεραίῳ Μ, θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha}{\beta} = M - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{M\delta-\gamma}{\delta}. \qquad (\iota)$$

τὸ δεύτερον δὲ τοῦτο κλάσμα ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι εἶναι ἀνάγωγον· ἐξ οὗ συνάγεται τὸ ἀδύνατον τῆς ἰσότητος (ι)· διότι β καὶ δ εἶναι διάφορα (ἐδ. 154).

Καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἀναγώγων κλασμάτων ἐχόντων διαφόρους παρονομαστὰς δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

4) Τὸ γινόμενον δύο ἀναγώγων κλασμάτων δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἐκτὸς ἂν ὁ παρονομαστὴς ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν διαιρῇ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἄλλου.

5) Ἐὰν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν μίαν δραχμὴν εἰς 9 ἀνθρώπους καὶ παραδεχθῶμεν ἀκόμη ἕνα ἄνθρωπον (κατὰ τὴν μέθοδον τῆς σελίδος 52), ἕκαστος θὰ λάβῃ $\frac{1}{10}$ τῆς δραχμῆς καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ τὸ μερίδιον τοῦ προσθέτου ἀνθρώπου, ἤτοι $\frac{1}{10}$. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὸν νέον μερισμὸν τοῦ $\frac{1}{10}$ τούτου κάμωμεν τὸ αὐτό, εὑρίσκομεν, ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$ καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ $\frac{1}{100}$ πρὸς νέαν διανομήν. Ἐξακολουθοῦντες οὕτως, ἐφ' ὅσον θέλωμεν, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ εἶναι

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^{\nu}}$$

θὰ περισσεύσῃ δὲ πρὸς διανομὴν $\frac{1}{10^{\nu}}$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἰσότης:

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^{\nu}}+\frac{1}{10^{\nu}}\times\frac{1}{9}.$$

Νὰ δειχθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἡ ἰσότης

$$\frac{\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\gamma}{\beta^{2}}+\frac{\alpha\gamma^{2}}{\beta^{3}}+\cdots+\frac{\alpha\gamma^{\nu-1}}{\beta^{\nu}}+\frac{\alpha\gamma^{\nu}}{\beta^{\nu}}\times\frac{1}{\beta-\gamma},$$

ἐν ᾗ β καὶ γ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ $\beta>\gamma$.

6) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 72 ἀληθεύει, καὶ ὅταν αἱ διαιρέσεις δὲν γίνωνται ἀκριβῶς.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς α διαιρούμενος διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀκεραίων $\beta\times\gamma\times\delta$ δίδει πηλίκον π καὶ ὑπόλοιπον υ· τότε θὰ εἶναι

$$\alpha=(\beta\times\gamma\times\delta)\times\pi+\upsilon \qquad \text{καὶ} \qquad \upsilon<\beta\times\gamma\times\delta.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν, ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τὸν α διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος β, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι $\gamma\times\delta\times\pi+\frac{\upsilon}{\beta}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἀκέραιον μέρος του θὰ εἶναι $\gamma\times\delta\times\pi+\varepsilon$ (ὅπου ε σημαίνει τὸν ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\upsilon}{\beta}$ περιεχόμενον μέγιστον ἀκέραιον, ὅστις θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ $\gamma\times\delta$· διότι, $\upsilon<\beta\times\gamma\times\delta$).

Ἐὰν δὲ καὶ τὸ ἀκέραιον τοῦτο πηλίκον διαιρεθῇ διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος γ, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι $\pi\times\delta+\frac{\varepsilon}{\gamma}$ καὶ τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος θὰ εἶναι $\pi\times\delta+\vartheta$ (ὅπου ϑ σημαίνει τὸν μέγιστον ἀκέραιον τὸν ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\varepsilon}{\gamma}$ περιεχόμενον, ὅστις θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ δ· διότι $\varepsilon<\gamma\times\delta$). Τέλος, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἀκέραιον τοῦτο πηλίκον διὰ τοῦ τελευταίου παράγοντος δ, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸ $\pi+\frac{\vartheta}{\delta}$, ὅπερ θὰ ἔχῃ ἀκέραιον μέρος τὸ π (διότι $\vartheta<\delta$).

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁρισμοί.

200 Ἐκ τῶν κλασματικῶν μονάδων ὅσαι ἔχουσι παρονομαστὴν 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ., ὅσαι δηλαδὴ προκύπτουσιν, ὅταν ἡ ἀκεραία μονὰς 1 διαιρεθῇ εἰς 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. ἴσα μέρη, λέγονται *δεκαδικαὶ μονάδες*.

Αἱ κλασματικαὶ δεκαδικαὶ μονάδες εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς:

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10000}, \ldots \text{ κλπ.}$$

εἶναι δὲ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν δεκαπλασία τῆς ἀκολούθου.

201. *Δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ* λέγονται οἱ ἐκ μιᾶς δεκαδικῆς μονάδος γινόμενοι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως οἷον 3 δέκατα $\left(\frac{3}{10}\right)$, 145 ἑκατοστὰ $\left(\frac{145}{148}\right)$ κτλ. εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὑπάγονται εἰς τὰ κλάσματα, καὶ ἐπομένως ὅσα ἐμάθομεν περὶ τῶν κλασμάτων ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν δεκαδικῶν. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων τούτων εἶναι ἢ 10, ἢ 100, ἢ 1000 κτλ. (ἤτοι ἡ μονὰς 1 ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν), αἱ πράξεις αὐτῶν γίνονται εὐκολώτερον, ἢ αἱ πράξεις τῶν ἄλλων κλασμάτων, (τὰ ὁποῖα πρὸς διάκρισιν λέγονται κοινά). Διὰ τοῦτο διαλαμβάνομεν περὶ αὐτῶν ἰδιαιτέρως.

Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

202. Ἂν φαντασθῶμεν εἰς μίαν σειρὰν τὰς ἀκεραίας μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν ἐν τῇ ἀριθμήσει, καὶ τὰς δεκαδικὰς κλασματικὰς μονάδας, ὡς ἑξῆς:

$$\ldots, 1000, \quad 100, \quad 10, \quad 1, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000} \ldots$$

ἑκάστη ἐκ τῶν μονάδων τούτων εἶναι δεκαπλασία τῆς ἀμέσως ἑπομένης. Διὰ τοῦτο πᾶς ἀριθμὸς ἐκ μιᾶς τῶν μονάδων τούτων σχηματιζόμενος δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἐξ ἑκάστης νὰ μὴ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν 9 (ἴδε ἐδ. 6)· π.χ. ὁ ἀριθμὸς $\frac{123}{1000}$ ἀναλύεται εἰς $\frac{3}{1000}$, $\frac{2}{100}$, καὶ $\frac{1}{10}$. Ἐὰν δὲ παραδεχθῶμεν καὶ τὴν ἀρχήν, ὅτι *πᾶν ψηφίον γραφόμενον κατόπιν ἄλλου σημαίνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως*, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ὡς καὶ τοὺς ἀκεραίους. Κατὰ τὴν ἀρχὴν ταύτην κατόπιν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων (τὰ ὁποῖα δὲν θὰ εἶναι περισσότερα τῶν 9, ἄλλως θὰ ἐσχηματίζετο ἐξ αὐτῶν μία ἀκεραία μονάς), κατόπιν τούτου γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν (τὰ ὁποῖα ὁμοίως δὲν θὰ εἶναι περισσότερα τῶν 9), κατόπιν τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Εἶναι ὅμως ἀνάγκη νὰ διακρίνωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ πρὸς τοῦτο γράφομεν ἀμέσως κατόπιν αὐτοῦ ὑποδιαστολήν· ὥστε ἡ ὑποδιαστολὴ χωρίζει τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους.

Παραδείγματα.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 4 δεκάδας, 7 μονάδας (ἢ 47 ἀκεραίας μονάδας) καὶ 3 δέκατα, γράφεται κατὰ τὰ προειρημένα ὡς ἑξῆς: 47,3 ἀντὶ $47\frac{3}{10}$.

Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 2 μονάδας, 5 δέκατα καὶ 8 ἑκατοστά, γράφεται ὡς ἑξῆς: 2,58 ἀντὶ $2\frac{5}{10}\frac{8}{100}$ ἢ $2\frac{58}{100}$.

Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 32 ἀκεραίας μονάδας καὶ 2 ἑκατοστὰ καὶ 5 χιλιοστά, γράφεται ὡς ἑξῆς: 32,025 ἀντὶ τοῦ $32\frac{2}{100}\frac{5}{1000}$ ἢ $32\frac{25}{1000}$.

Ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάτων, διότι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει δέκατα· κάμνομεν δηλαδὴ ὅ,τι κάμνομεν καὶ εἰς τὴν γραφὴν τῶν ἀκεραίων μονάδων (οἷον 80, 704, 2003 κτλ.).

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀκέραιον μέρος, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων καὶ κατόπιν αὐτοῦ θέτομεν τὴν ὑποδιαστολήν.

Οἷον ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 6 δέκατα, γράφεται ὡς ἑξῆς· 0,6 ἀντὶ $\frac{6}{10}$· ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 3 δέκατα καὶ 5 δεκάκις χιλιοστὰ (ἢ μυριοστά), γράφεται ὡς ἑξῆς· 0,3005 ἀντὶ $\frac{3}{10}+\frac{5}{10000}$ ἢ $\frac{3005}{10000}$.

Δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ λέγονται, ὅσα εἶναι κατόπιν τῆς ὑποδιαστολῆς.

Πῶς ἀπαγγέλλεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς γεγραμμένος ὡς ἀκέραιος.

203. Δεκαδικὸν ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους:

1) Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων αὐτοῦ·
οἷον 5,82 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς 5 ἀκέραια, 8 δέκατα καὶ 2 ἑκατοστά.

2) Ἀπαγγέλλομεν τὰ ψηφία, ὡς ἐὰν ἐσχημάτιζον ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἤτοι χωρὶς νὰ προσέξωμεν εἰς τὴν ὑποδιαστολήν), προσαρτῶμεν ὅμως κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου.

Οἷον 3,12 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 312 ἑκατοστά.

Διότι, ὁ ἀριθμὸς 3,12 σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς:

$$3+\frac{1}{10}+\frac{2}{100} \text{ ἢ } \frac{300}{100}+\frac{10}{100}+\frac{2}{100},$$

ἑπομένως ἔχει 312 ἑκατοστά.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 0,605 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 605 χιλιοστά.

Διότι, $\frac{6}{10}+\frac{5}{1000}$ γίνονται $\frac{600}{1000}+\frac{5}{1000}$ ἤτοι $\frac{605}{1000}$.

Σημείωσις. Οἱ δύο αὐτοὶ τρόποι εἶναι χρήσιμοι, μόνον ὅταν τὰ ψηφία εἶναι ὀλίγα· ὅταν δὲ εἶναι πολλὰ ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα:

3) *Ἀναλύομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ὅσα θέλωμεν τμήματα καὶ ἀπαγγέλλομεν αὐτὰ κατὰ σειράν, ἕκαστον χωριστά, ὡς ἂν ἦτο ἀκέραιος ἀριθμός· προσαρτῶμεν ὅμως κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τμήματος.*

Οἷον 87, 108349 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς:
87 ἀκέραια 108 χιλιοστὰ καὶ 349 ἑκατομμυριοστά.

Διότι, $\frac{1}{10}+\frac{8}{1000}$ κάμνουν 108 χιλιοστὰ καὶ $\frac{3}{10000}+\frac{4}{100000}+\frac{9}{1000000}$ κάμνουν 349 ἑκατομμυριοστά.

Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς:
87 ἀκέραια, 10 ἑκατοστά, 83 μυριοστὰ καὶ 49 ἑκατομμυριοστά, ἢ καὶ ὡς ἑξῆς: 87 ἀκέραια καὶ 108349 ἑκατομμυριοστά.

Σημείωσις. Συνήθως χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς δύο τμήματα, τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ δεκαδικόν, καὶ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον χωριστά· οἷον 78,759 ἀπαγγέλλεται 78 ἀκέραια καὶ 759 χιλιοστά.

Πῶς γράφονται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὡς κοινὰ κλάσματα.

204. Ἐπειδὴ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι κλάσματα, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν αὐτοὺς καὶ μὲ παρονομαστήν, ὡς καὶ τὰ ἄλλα κλάσματα· πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Διὰ νὰ γράψωμεν δοθὲν δεκαδικὸν κλάσμα ὡς κοινόν, παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ γράφομεν τὸν τότε προκύπτοντα ἀκέραιον ὡς ἀριθμητήν, ὑπ' αὐτὸν δὲ γράφομεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ἀντὶ 25,607 δύναμαι νὰ γράψω $\frac{25607}{1000}$.

Διότι, ὁ ἀριθμὸς 25,607 σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν:

$$25+\frac{6}{10}+\frac{7}{1000} \text{ ἢ } \frac{25000}{1000}+\frac{600}{1000}+\frac{7}{1000}$$

καὶ ἑπομένως ἔχει 25607 χιλιοστά.

205. Καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δοθῇ κοινὸν κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, τὸ κλάσμα τοῦτο εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός· ἵνα δὲ γράψωμεν αὐτὸ ὡς δεκαδικόν, γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν χωριστὰ καὶ ἔπειτα χωρίζωμεν πρὸς τὸ τέλος αὐτοῦ διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ δοθεὶς παρονομαστής.

Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{17}{10}$ γράφεται 1,7· τὸ δὲ κλάσμα $\frac{378}{100}$ γράφεται 3,78.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ, (ὅπερ δὲν βλάπτει αὐτόν)· οἷον τὸ κλάσμα $\frac{12}{1000}$ γράφεται $\frac{0012}{1000}$ ἤτοι 0,012.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄

206. *Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν βλάπτεται, ἐὰν γραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.*

Διότι, ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν ἔχει ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν (ἐδ. 202)· ἡ δὲ θέσις αὕτη δὲν ἀλλάσσει διὰ τῆς γραφῆς τῶν μηδενικῶν· ὥστε ἕκαστον ψηφίον διατηρεῖ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν εἶναι 1,5 = 1,50 = 1,500 = 1,5000 κτλ.· διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων ἔχει μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ 5 δέκατα.

Ὁμοίως ἀντὶ τοῦ ἀκεραίου 7 δυνάμεθα νὰ γράφωμεν 7,0 ἢ 7,00 κτλ.

Σημείωσις. Ἡ ἰδιότης αὕτη τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν συνάγεται καὶ ἐκ τῆς γενικῆς ἰδιότητος τῶν κλασμάτων (ἐδ. 150)· φαίνεται δὲ τοῦτο ἀμέσως, ἐὰν γραφῶσιν οἱ δεκαδικοὶ ὡς κλάσματα κοινά.

Διότι $$\frac{15}{10} = \frac{150}{100} = \frac{1500}{1000} \text{ κτλ.}$$

Ὁμοίως εἶναι: $$7 = \frac{70}{10} = \frac{700}{100} \text{ κτλ.}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄

207. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἔμπρός, μίαν θέσιν (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100), τρεῖς (διὰ τὸ 1000), κτλ.*

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κτλ., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ὀπίσω, μίαν θέσιν (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100), τρεῖς (διὰ τὸ 1000), κτλ.

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι εἶναι:

$$2,75 \times 10 = 27,5,$$
$$65,92 \times 100 = 6592,$$

καὶ $$13,503 : 10 = 1,3503.$$

Ἀπόδειξις. Ὅταν εἰς τὸν ἀριθμὸν 2,75 μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἔμπρός, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 27,5· καὶ αἱ μὲν δύο μονάδες γίνονται 2 δεκάδες (ἤτοι δεκαπλασιάζονται), τὰ δὲ 7 δέκατα γίνονται 7 ἀκέραια (ἤτοι δεκαπλασιάζονται· διότι, 1 ἀκέραιον = 10 δέκατα), τὰ δὲ 5 ἑκατοστὰ γίνονται 5 δέκατα· ὥστε πάντα τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ 2,75 ἐδεκαπλασιάσθησαν· ἄρα καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς ἐδεκαπλασιάσθη.

Ὁμοίως εἰς τὸν ἀριθμὸν 65,92, ὅταν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ δύο θέσεις πρὸς τὰ ἔμπρός, ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ ἑκατονταπλασιάζεται· ἄρα καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς ἑκατονταπλασιάζεται.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν.

Σημείωσις. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ἢ εἰς τὴν ἀρχήν του (ὅπου χρειάζονται)· τοῦτο δὲ δὲν βλάπτει τὸν δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2,5 ἐπὶ 1000, πρέπει νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ ἔμπρός· ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα, διότι εἶνε ἔμπρὸς ἓν μόνον ψηφίον (τὸ 5). Ἐὰν ὅμως γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν 2,5 ὡς ἑξῆς: 2,500, μετατίθεται ἡ ὑποδιαστολὴ καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 2500.

Ὁμοίως ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 0,32 : 100 γράφομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὡς ἑξῆς: 000,32 (ὅπερ οὐδόλως βλάπτει αὐτόν)· ἔπειτα μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ ὀπίσω καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 0,0032.

Πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

208. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, κάμνομεν πρῶτον νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων (γίνεται δὲ τοῦτο, ἂν γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τινῶν ἐξ αὐτῶν ἓν ἢ περισσότερα μηδενικά).*

Ἔπειτα προσθέτομεν αὐτοὺς ὡς καὶ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς· εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μετὰ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων τῶν ἀριθμῶν.

Παράδειγμα

Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοί

42,951 6,0032 0,3

42,9510
6,0032
0,3000
ἄθροισμα 49,2542.

Ἡ ὀρθότης τοῦ κανόνος τούτου δεικνύεται ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἐδ. 20)· στηρίζεται δὲ ἐπὶ τούτου, ὅτι δέκα μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως προηγουμένης.

Σημείωσις. Ἡ γραφὴ τῶν μηδενικῶν εἰς τὸ τέλος τῶν προσθετέων ἀριθμῶν εἶνε περιττή· διότι ταῦτα εἰς τὴν πρόσθεσιν δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν. Ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν τοὺς ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην· ἔπειτα προσθέτομεν ὡς καὶ πρίν.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται τότε ὡς ἑξῆς φαίνεται:

5,408
0,3
15,08
0,0001
ἄθροισμα 20,7881

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

209. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλου, κάμνομεν πρῶτον νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ὡς ἂν ἦσαν ἀκέραιοι· εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μετὰ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον δίδει ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἁπλῶν μονάδων.*

Παραδείγματα.

1) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 8,1256 ἀπὸ τοῦ 20,75

20,7500
8,1256
ὑπόλοιπον 12,6244

2) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 16,36 ἀπὸ τοῦ 27

27,00
16,36
ὑπόλοιπον 10,64

3) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 7 ἀπὸ 8,598

$$\begin{array}{lr} & 8{,}598 \\ & 7{,} \\ \hline \text{ὑπόλοιπον} & 1{,}598 \end{array}$$

Σημείωσις. Καὶ ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ μὴ γράφωμεν τὰ μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ νὰ νοῶμεν μόνον αὐτά.

Ἡ ὀρθότης τοῦ κανόνος τούτου τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν ἀποδεικνύεται, ὡς καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· στηρίζεται δὲ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀρχῶν.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

210. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὡς ἂν μὴ ὑπῆρχον αἱ ὑποδιαστολαί· ἔπειτα χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς εἰς τὸ γινόμενον τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσιν οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 8,5 καὶ 15,35:

$$\begin{array}{r} 15{,}35 \\ 8{,}5 \\ \hline 7675 \\ 12280 \\ \hline 130{,}475 \end{array}$$

λέγω, ὅτι, τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι 130,475.

Διὰ νὰ πεισθῶμεν περὶ τούτου, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ὡς κοινὰ κλάσματα· τότε ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν

$\frac{1535}{100} \times \frac{85}{10}$, ἄρα τὸ γινόμενον εἶναι $\frac{1535 \times 85}{1000}$,

πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν αὐτοῦ, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀκεραίους 1537 καὶ 85 (τοῦτο δὲ ἐγένετο· διότι ἐπολλαπλασιάσαμεν χωρὶς νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ὑποδιαστολάς) καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ 1000· τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν χωρίσωμεν δι' ὑποδιαστολῆς τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ· ὅσα δηλαδὴ δεκαδικὰ ψηφία ἔχουσιν οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ γινόμενον δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, ὅσα δηλαδὴ μέλλομεν νὰ χωρίσωμεν, γράφομεν εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται·

οἷον

$$\begin{array}{r} 0{,}28 \\ 0{,}03 \\ \hline 0{,}0084 \end{array}$$

Παρατήρησις.

Ὁ κανὼν ἐφαρμόζεται προφανῶς, καὶ ὅταν εἷς ἐκ τῶν παραγόντων εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

1) Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.

211 Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 32,568 διὰ τοῦ ἀκεραίου 12.

Δια νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην, στηριζόμεθα εἰς τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως, καθ' ἥν, ἔχοντες νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ μέρη του καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἔπειτα τὰ πηλίκα (ἐδ. 190).

Διαιροῦμεν λοιπὸν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος 32 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 8:

$$\begin{array}{r|l} 32{,}568 & 12 \\ \cline{2-2} 24\phantom{{,}568} & 2{,}714 \\ \cline{1-1} 85 & \\ 84 & \\ \cline{1-1} 16 & \\ 12 & \\ \cline{1-1} 48 & \\ 48 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Τὸ ἀκέραιον ὑπόλοιπον 8, ὅπερ πλέον δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 12, τρέπομεν εἰς δέκατα (1 ἀκέραιον=10 δέκατα) καὶ γίνεται 80 δέκατα· ταῦτα δὲ ἑνούμενα μετὰ τῶν 5 δεκάτων τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσιν 85 δέκατα (τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τῶν 85 δεκάτων σχηματίζομεν ἀμέσως καταβιβάζοντες τὸ ψηφίον 5, δεξιᾷ τοῦ ὑπολοίπου 8). Διαιροῦντες καὶ τὰ 85 δέκατα δια τοῦ 12 εὑρίσκομεν πηλίκον 7 δέκατα καὶ ὑπόλοιπον

1 δέκατον· τοῦτο δὲ (ὅπερ εἶναι $=10$ ἑκατοστά), ἑνούμενον μὲ τὰ 6 ἑκατοστὰ τοῦ διαιρετέου, ἀποτελεῖ 16 ἑκατοστά· διαιροῦντες καὶ ταῦτα διὰ τοῦ 12, εὑρίσκομεν πηλίκον 1 ἑκατοστὸν καὶ ὑπόλοιπον 4 ἑκατοστα ($=40$ χιλιοστά)· ταῦτα δὲ ἑνούμενα τέλος μετὰ τῶν 8 χιλιοστῶν τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 48 χιλιοστά, τὰ ὁποῖα διαιρούμενα διὰ 12 δίδουσι πηλίκον 4 χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 0· ὥστε ἡ διαίρεσις ἐτελείωσε καὶ εὑρέθη πηλίκον 2,714.

212. Ἐκ τούτου συνάγεται ὁ ἑπόμενος κανών:

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἂν μὴ ὑπῆρχεν ἡ ὑποδιαστολή, ἤτοι ὡς ἂν ἦτο ὁ διαιρετέος ἀκέραιος· καὶ ὅσα μὲν ψηφία τοῦ πηλίκου προέρχονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου εἶναι ἀκέραια, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι δεκαδικά.

Σημείωσις. Ἐὰν ἡ διαίρεσις ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν τρέποντες αὐτὸ εἰς δεκαδικὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως (ὅπερ γίνεται γραφομένου ἑνὸς μηδενικοῦ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ)· Ἐξακολουθοῦντες δὲ τοιουτοτρόπως, ἢ θὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον ἀκριβῶς (ἂν μείνῃ ὑπόλοιπον 0), ἢ θὰ εὕρωμεν αὐτό, μεθ' ὅσης ἂν θέλωμεν προσεγγίσεως.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ διαίρεσις

0,37	3
07	0,1233. . .
10	
10	
. . .	

Φανερὸν εἶναι, ὅτι, ὅσον καὶ ἂν προχωρήσωμεν διαιροῦντες, οὐδέποτε θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0 (τοῦτο δὲ σημαίνει, ὅτι τὸ πηλίκον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ· τὴν δὲ αἰτίαν τούτου θὰ μάθωμεν παρακατιόντες). Δυνάμεθα ὅμως νὰ προσεγγίσωμεν διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, ὅσον θέλωμεν. Διότι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι

	0,123	καὶ $\frac{1}{3}$ τοῦ χιλιοστοῦ
ἢ	0,1233	καὶ $\frac{1}{3}$ τοῦ μυριοστοῦ
ἢ	0,12333	καὶ $\frac{1}{3}$ ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ
ἢ	0,123333	καὶ $\frac{1}{3}$ ἑκατομμυριοστοῦ

καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐὰν δηλαδὴ διακόψωμέν που τὴν διαίρεσιν, τὸ εὑρεθὲν δεκαδικὸν πηλίκον διαφέρει τοῦ ἀκριβοῦς κατὰ $\frac{1}{3}$ μιᾶς μονάδος τῆς τελευταίας τάξεως τοῦ πηλίκου. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ εὕρωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς διαφέροντας ἀπὸ τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου ὀλιγώτερον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ· ἂν λόγου χάριν προστάξῃ τις νὰ εὕρωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διαφέροντα τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου ὀλιγώτερον ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν μέχρι τῶν ἑκατομμυριοστῶν, ὅτε εὑρίσκομεν 0,123333.

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον 3,12 : 7 μὲ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ, διαιροῦμεν, μέχρις οὗ εὕρωμεν τὰ χιλιοστὰ τοῦ πηλίκου καὶ εὑρίσκομεν 0,445. (Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι 0,445 καὶ $\frac{5}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ).

Ὅταν δὲ τὸ κλάσμα, δι' οὗ συμπληροῦται τὸ δεκαδικὸν πηλίκον, ὑπερβαίνῃ τὸ ἥμισυ (ὅταν δηλονότι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρέτου), ἐὰν κάμωμεν αὐτὸ ἕν, προσεγγίζομεν περισσότερον εἰς τὸ ἀκριβὲς πηλίκον.

Οὕτω π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι 0,445 καὶ $\frac{5}{7}$ ἑνὸς χιλιοστοῦ· ἐπειδὴ δὲ τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ ὑπερβαίνουσι τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, γράφομεν ἀντ' αὐτῶν ἓν χιλιοστὸν καὶ οὕτως εὑρίσκομεν 0,446, ὅπερ πλησιάζει πρὸς τὴν ἀλήθειαν περισσότερον ἢ τὸ 0,445· διότι τὸ 0,446 διαφέρει τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου κατὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ, ἐνῷ τὸ 0,445 διαφέρει κατὰ $\frac{5}{7}$ χιλιοστοῦ, καὶ τὸ μὲν 0,446 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀληθοῦς, τὸ δὲ 0,445 μικρότερον.

Παρατήρησις.

213. Καὶ ἀκέραιος δι' ἀκεραίου διαιρεῖται κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον· διότι ὁ ἀκέραιος διαιρετέος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικός, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι μηδενικά.

Παραδείγματα.

$$\begin{array}{r|l} 35 & 20 \\ \hline 150 & 1,75 \\ 100 & \\ 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 2 & 3 \\ \hline 20 & 0,666\ldots \\ 20 & \\ 20 & \\ \ldots & \end{array}$$

Τὸ μὲν πηλίκον τοῦ 35 διὰ 20 ἐκφράζεται ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ καὶ εἶναι 1,75, τὸ δε πηλίκον τοῦ 2 διὰ 3 δὲν ἐκφράζεται ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ· κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ εἶναι 0,666 ἢ μᾶλλον 0,667.

2) Διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ.

214. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, μεταθέτομεν πρῶτον τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ εἰς τοὺς δύο ἴσας θέσεις πρὸς τὰ ἔμπρός, ὥστε νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος· ἔπειτα διαιροῦμεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα.*

Ἐὰν ὁ διαιρετέος δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ δεκαδικὰ ψηφία, διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τὸ ὀρθὸν τοῦ κανόνος τούτου, ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι μεταθέτοντες τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἔμπρὸς ἴσας θέσεις καὶ εἰς τοὺς δύο ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἐπὶ 10, ἂν κατὰ μίαν θέσιν μετεθέσαμεν· ἐπὶ 100, ἂν κατὰ δύο θέσεις· ἐπὶ 1000, ἐὰν κατὰ τρεῖς, κτλ.). Κατὰ δὲ τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως (ἐδ. 186) τὸ πηλίκον τότε δὲν ἀλλάσσει.

Παραδείγματα.

1) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 25,16 διὰ 3,2.

```
251,6 | 32
 276    7,8625
  200
   80
   160
     0
```

2) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 0,3 διὰ 2,48.

```
 30  | 248
 300   0,120...
  520
  240
  ...
```

3) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 21,75 διὰ 3,21.

```
2175 | 321
 2490  6,77 ...
 2430
 ....
```

215. Ἐπειδὴ αἱ πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνονται, ὡς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων, ἐνῷ τῶν κοινῶν κλασμάτων αἱ πράξεις εἶναι ὀλιγώτερον ἁπλαῖ, διὰ τοῦτο εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς ἀριθμητικῆς προτιμῶνται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί· τρέπονται δὲ καὶ τὰ κοινὰ κλάσματα εἰς δεκαδικὰ εἴτε ἀκριβῶς εἴτε κατὰ προσέγγισιν.

Ἡ τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν· διότι πᾶν κλάσμα εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του (ἐδ. 147). Τὸ δὲ πηλίκον τοῦτο ἐκφράζεται, ὡς εἴδομεν, διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἢ ἀκριβῶς ἢ μὲ ὅσην θέλωμεν προσέγγισιν.

Παραδείγματα.

1) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ εἰς δεκαδικόν.

$$\begin{array}{l|l} 3 & 8 \\ \cline{2-2} 30 & 0{,}375 \\ \;\;60 & \\ \;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;0 & \end{array}$$

ὅθεν $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

2) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ εἰς δεκαδικόν.

$$\begin{array}{l|l} 2 & 7 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}285714\ldots \\ \;\;60 & \\ \;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;2 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\ldots & \end{array}$$

ὅθεν $\frac{2}{7} = 0{,}285714$, μὲ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ.

Ἄλλα μὲν τῶν κοινῶν κλασμάτων τρέπονται εἰς δεκαδικὰ ἀκριβῶς, ἄλλα δὲ ὄχι· διακρίνονται δὲ τὰ πρῶτα ἀπὸ τῶν δευτέρων διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

216. *Διὰ νὰ τρέπηται κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς, πρέπει ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ νὰ μὴ περιέχῃ ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τοῦ 2 καὶ τοῦ 5· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.*

Ἔστω τυχὸν ἀνάγωγον κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\xi}$ καὶ ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι ὑπάρχει δεκαδικόν τι κλάσμα ἴσον αὐτῷ, ἔστω τὸ $\frac{A}{100000}$, ἢ $\frac{A}{10^\rho}$, ἤτοι ἔστω $\frac{\alpha}{\xi}=\frac{A}{10^\rho}$

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 153 οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{A}{10^\rho}$ θὰ εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ (ὅπερ εἶναι ἀνάγωγον)· ἄρα ὁ ξ θὰ διαιρῇ τὸν 10^ρ *ἐπομένως δὲν θὰ περιέχῃ* (ἐδ. 124) *ἄλλους πρώτους παράγοντας πλὴν τῶν 2 καὶ 5* (τούτους μόνον περιέχει ὁ 10^ρ).

Τοῦτο δὲ ἀρκεῖ· διότι ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{2^4\times5}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν περιέχει ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τῶν 2 καὶ 5. Διὰ νὰ τραπῇ τοῦτο εἰς δεκαδικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι αὐτοῦ ἐπὶ 5^3 (διὰ νὰ ἔχωσιν ἀμφότεροι οἱ πρῶτοι παράγοντες 2 καὶ 5 ἴσους ἐκθέτας)· διότι τότε γίνεται:

$$\frac{\alpha\times5^3}{2^4\times5^4}=\frac{\alpha\times5^3}{2\times2\times2\times2\times5\times5\times5\times5}=\frac{\alpha\times5^3}{10\times10\times10\times10}=\frac{\alpha\times5^3}{10^4},\ \text{ἤτοι}\ \frac{\alpha\times5^3}{10000}$$

ἐτράπη λοιπὸν τὸ δοθὲν κλάσμα εἰς δεκαδικόν· καὶ ἂν γραφῇ ὡς συνήθως, θὰ ἔχῃ 4 δεκαδικὰ ψηφία (ὅσος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τῶν δύο παραγόντων τοῦ παρονομαστοῦ του), ἐὰν εἶναι ἀνάγωγον.

Παραδείγματα.

1) Τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς· διότι ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ εἶναι 2^3· διὰ νὰ τραπῇ δὲ εἰς δεκαδικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὅροι του ἀμφότεροι ἐπὶ 5^3· τότε γίνεται $\frac{3\times5^3}{1000}$ ἢ 0,375· τὸ αὐτὸ δὲ εὑρίσκομεν καὶ διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν 3 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 8 κατὰ τὰ προειρημένα.

2) Τὸ κλάσμα $\frac{8}{15}$ δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς· διότι ὁ παρονομαστής του εἶναι 3×5· ὥστε ἔχει τὸν πρῶτον παράγοντα 3 (διάφορον τῶν 2 καὶ 5)· ἐπομένως, ἂν διαιρέσωμεν τὸ 8 διὰ 15, κατὰ τὸ ἐδάφιον 213, ἡ διαίρεσις οὐδέποτε θὰ λάβῃ πέρας.

Παρατήρησις.

217. Ὅταν τὸ κοινὸν κλάσμα δὲν δύναται νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, ἡ δεκαδικὴ διαίρεσις τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ δὲν ἔχει τέλος. Ἐξακολουθοῦντες ὅμως αὐτὴν πλησιάζομεν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὸ κοινὸν κλάσμα· δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν δεκαδικὸν κλάσμα διαφέρον τοῦ δοθέντος κοινοῦ ὀλιγώτερον πάσης δοθείσης δεκαδικῆς μονάδος. Ἂν λ. χ. προστάξῃ τις να εὕρωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διαφέροντα τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον ἑνὸς χιλιοστοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, μέχρις οὗ εὕρωμεν τὰ χιλιοστὰ τοῦ πηλίκου· διότι τότε εὑρίσκομεν, ὅτι εἶναι $\frac{2}{3}=0{,}666+\frac{2}{3}$ τοῦ χιλιοστοῦ· ὥστε τὸ δεκαδικὸν 0,666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον ἑνὸς χιλιοστοῦ.

Ὁμοίως τὸ 0,6666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{10000}$

καὶ τὸ 0,66666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{100000}$

καὶ τὸ 0,666666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{1000000}$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τούτου φθάνομεν εἰς τὴν ἰδέαν, ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{2}{3}$ θὰ ἀπετελεῖτο, ἂν ἦτο δυνατὸν νὰ ἑνώσωμεν 6 μονάδας ἐξ ἑκάστης δεκαδικῆς τάξεως (ἤτοι 6 δέκατα, 6 ἑκατοστά, κτλ.) καὶ δύναται ἑπομένως νὰ θεωρηθῇ ὡς συγκείμενον ἐξ ἀπείρου πλήθους δεκαδικῶν μονάδων ἐντελῶς ὡρισμένων.

Τὸ αὐτὸ δὲ δύναται νὰ λεχθῇ καὶ περὶ παντὸς κλάσματος μὴ δυναμένου νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν· διότι τὰ δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ἐπιχειροῦντες νὰ τρέψωμεν αὐτὸ εἰς δεκαδικόν, εἶναι ἅπαντα ἐντελῶς ὡρισμένα.

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι, πᾶν κλάσμα ἀποτελεῖται ἐκ δεκαδικῶν μονάδων, ὧν τὸ πλῆθος εἶναι ἢ πεπερασμένον (ὅταν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος δὲν περιέχῃ ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τῶν 2 καὶ 5), ἢ ἄπειρον (ὅταν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, ἀναγώγου ὄντος, περιέχῃ ἄλλον τινὰ πρῶτον παράγοντα)· ἑπομένως τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἢ πεπερασμένον ἀριθμὸν ψηφίων ἢ ἄπειρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

218. *Ὅταν κοινὸν κλάσμα τρέπηται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὸ δεκαδικὸν τοῦτο, ἀπό τινος ψηφίου καὶ ἐφεξῆς, ἀποτελεῖται ἔκ τινων ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.*

Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$.

$$\begin{array}{l|l} 4 & 7 \\ \hline 40 & 0{,}571428 \\ \ \ 50 & \\ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 4 & \end{array}$$

τρέποντες αὐτὸ εἰς δεκαδικόν, παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων θὰ εἶναι πάντα μικρότερα τοῦ 7· οὐδὲν δὲ ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι 0 (διότι τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν)· ἄρα δὲν δύνανται νὰ μείνωσιν ἄλλα ὑπόλοιπα ἢ τὰ ἑξῆς ἕξ: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι, ἀφοῦ κάμωμεν τὸ πολὺ ἓξ διαιρέσεις, θὰ εὕρωμεν ἐξ ἀνάγκης ἓν ὑπόλοιπον καὶ πρὶν εὑρεθέν· τότε θὰ ἐπαναρχίσωμεν τὰς ἤδη γενομένας διαιρέσεις καὶ ἑπομένως θὰ εὑρίσκωμεν τὰ αὐτὰ ψηφία τοῦ πηλίκου καὶ κατα τὴν αὐτὴν τάξιν· τοῦτο δὲ θὰ γίνηται ἐπ' ἄπειρον.

Ὁρισμοί.

219. *Περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα* λέγεται τὸ ἔχον ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία ἀποτελούμενα (ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς) ἔκ τινων ψηφίων τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Τὸ σύνολον τῶν οὕτως ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων λέγεται *περίοδος*.

Τὸ περιοδικὸν λέγεται *ἁπλοῦν* μέν, ἐὰν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν· *μικτὸν* δέ, κατὰ τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν· τότε δὲ τὰ προηγούμενα τῆς πρώτης περιόδου δεκαδικὰ ψηφία ἀποτελοῦσι τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος.

Παραδείγματα.

Τὸ κλάσμα 0,727272 . . . . . εἶναι περιοδικὸν ἁπλοῦν· ἡ δὲ περίοδος αὐτοῦ εἶναι 72.

Τὸ δὲ κλάσμα 0,82535535535 . . . . . εἶναι περιοδικὸν μικτόν· ἡ περίοδος αὐτοῦ εἶναι 535, τὸ δὲ μὴ περιοδικὸν μέρος εἶναι 82.

Σημείωσις. Κατὰ τὰ προηγουμένως ἀποδειχθέντα (ἐδ. 218), ὅταν κοινὸν κλάσμα τρέπηται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα ψηφία, τὸ δεκαδικὸν τοῦτο εἶναι περιοδικόν· καὶ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου καὶ τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους (ἂν ὑπάρχῃ) εἶναι μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος.

Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ δίδει περιοδικὸν ἁπλοῦν ἔχον περίοδον ἑξαψήφιον· τὸ δὲ $\frac{3}{11}$ δίδει ὅμοιον ἔχον περίοδον διψήφιον.

Εὕρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν περιοδικὸν κλάσμα.

Ἁπλᾶ περιοδικά.

220. Ἔστω κατὰ πρῶτον οἱονδήποτε ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα ἄνευ ἀκεραίου μέρους· οἷον τὸ 0,727272...

Ἂς λάβωμεν ἐξ αὐτοῦ περιόδους τινάς, ἔστω τρεῖς· τότε ἔχομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,727272·
τὸν ἀριθμὸν τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 100, (ὥστε ἡ ὑποδιαστολὴ νὰ προχωρήσῃ κατὰ μίαν περίοδον) καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 72,7272.

Ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶχεν ἀκόμη μίαν περίοδον (ἤτοι ἂν εἶχεν ἀκόμη 72 ἑκατομμυριοστά), ἡ διαφορὰ αὐτοῦ καὶ τοῦ προηγουμένου θὰ ἦτο ἀκριβῶς 72 ἀκέραια. Ἄρα ἡ διαφορά των θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀκεραίου 72 κατὰ 72 ἑκατομμυριοστά· τουτέστιν ἡ ῥηθεῖσα διαφορὰ εἶναι

$$72 - \frac{72}{1000000} \text{ ἢ } 72 - \frac{72}{10^6}$$

Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι 99 φορὰς ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,727272· (διότι ἐλάβομεν αὐτὸν 100 φορὰς καὶ ἔγινεν 72,7272 καὶ ἀπὸ τούτου ἀφῃρέσαμεν αὐτὸν μίαν φοράν). Ὥστε, ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ 99, θὰ δώσῃ τὸν δεκαδικὸν τοῦτον· ἤτοι εἶναι:

$$0{,}727272 = \frac{72}{99} - \frac{72}{10^6} \times \frac{1}{99}.$$

Ἂν ἐλαμβάνομεν 4 περιόδους τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, θὰ εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$0{,}72727272 = \frac{72}{99} - \frac{72}{10^8} \times \frac{1}{99}.$$

Ἂν δὲ 5, θὰ εὑρίσκομεν

$$0{,}7272727272 = \frac{72}{99} - \frac{72}{10^{10}} \times \frac{1}{99}$$ καὶ οὕτω καθεξῆς·

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ὁσασδήποτε περιόδους καὶ ἂν λάβωμεν κατὰ σειρὰν ἀπ' ἀρχῆς τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, ὁ ἀποτελούμενος ὑπ' αὐτῶν ἀριθμὸς θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{72}{99}$. Ἀλλ' ἡ διαφορά των δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δεκαδικῆς μονάδος· διότι, ἐὰν λάβωμεν τέσσαρας περιόδους, ἡ διαφορὰ εἶναι $\frac{72}{99}\times\frac{1}{10^8}$ ἤτοι μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10^8}$· ἂν λάβωμεν πέντε, ἡ διαφορὰ γίνεται μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10^{10}}$, ἂν ἕξ, ἡ διαφορὰ γίνεται μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10^{12}}$, καὶ οὕτω καθεξῆς· καὶ ἂν ἦτο δυνατὸν νὰ λάβωμεν πάσας τὰς περιόδους τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, θὰ ἀπετελεῖτο ὁ ἀριθμὸς $\frac{72}{99}$.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι, ἂν τὸ δοθὲν περιοδικὸν παράγηται ἐκ τῆς τροπῆς κοινοῦ τινος κλάσματος, τὸ κλάσμα τοῦτο θὰ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{72}{99}$· διότι, ὅταν δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα ψηφία παράγηται ἐκ τῆς τροπῆς κοινοῦ κλάσματος, καθ' ὅσον λαμβάνομεν περισσότερα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ τούτου, κατὰ τοσοῦτον προσεγγίζομεν πρὸς τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παρήχθη (ἐδ. 217).

Ὅτι δὲ ἀληθῶς τὸ δοθὲν περιοδικὸν 0,72727272.... παράγεται ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{72}{99}$, δεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ὅταν τρέπω τὸ κλάσμα $\frac{72}{99}$ εἰς δεκαδικόν, διὰ νὰ εὕρω τὰ δύο πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία, πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν 7200 διὰ 99. Ἀλλ' ἀντὶ νὰ διαιρέσω τὸν ἀριθμὸν 7200 εἰς 99 ἴσα μέρη, δύναμαι νὰ διαιρέσω αὐτὸν εἰς 100 ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα τὸ περισσεῦον ἓν μερίδιον νὰ διαιρέσω πάλιν εἰς 99 ἴσα μέρη (ἰδὲ σελ. 52). Διαιρῶ τοιουτοτρόπως τὸν 7200 καὶ εὑρίσκω πηλίκον 72 καὶ ὑπόλοιπον 72. Ἄρα ἐξακολουθῶν τὴν πρᾶξιν, θὰ εὑρίσκω πάντοτε τὰ αὐτὰ ψηφία 7,2· τουτέστι θὰ εὕρω τὸ περιοδικὸν 0,727272....

221. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται τὸ ἑξῆς θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται ἁπλοῦν περιοδικὸν ἄνευ ἀκεραίου μέρους, ἔχει ἀριθμητὴν μὲν μίαν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει ἐξ αὐτῆς, ὅταν πάντα τὰ ψηφία αὐτῆς γίνωσιν 9.

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμός, ὅστις εὑρίσκεται κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο, εἶναι πάντοτε κλασματικὸς (ἑπομένως παράγει τὸ δεκαδικὸν περιοδικόν), πλὴν ὅταν πάντα τὰ ψηφία τῆς περιόδου εἶναι 9· ὅταν δηλαδὴ τὸ δοθὲν περιοδικὸν εἶναι 0,999999.....

διότι τότε ὁ ἀριθμὸς πρὸς ὃν προσεγγίζομεν λαμβάνοντες ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον περισσότερα ψηφία (ὁ κατὰ τὸ θεώρημα εὑρισκόμενος), εἶναι $\frac{9}{9}$ ἢ $\frac{99}{99}$ ἢ $\frac{999}{999}$ κτλ. τουτέστιν 1 ἀκέραιον. Ἄρα τὸ περιοδικὸν τοῦτο *ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγεται.* Ὅτι δὲ προσεγγίζομεν εἰς τὴν μονάδα 1, ὅταν λαμβάνωμεν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον περισσότερα ψηφία αὐτοῦ, ἀποδεικνύεται ἁπλούστατα καὶ ἐκ τούτου, ὅτι τὸ 0,9 διαφέρει τῆς μονάδος 1 κατὰ $\frac{1}{10}$, τὸ 0,99 διαφέρει ἀπ' αὐτῆς κατὰ $\frac{1}{100}$, τὸ 0,999 κατὰ $\frac{1}{1000}$, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι ἅπασαι αἱ δεκαδικαὶ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ 0,999.... ἀποτελοῦσι τὴν ἀκέραιον μονάδα 1.

222. Εἰς τὰ προηγούμενα ἀνάγεται εὐκόλως καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν ἁπλοῦν περιοδικὸν ἔχον ἀκέραιον μέρος.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 45,722722722....

Ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀκεραίου 45 καὶ τοῦ ἁπλοῦ περιοδικοῦ 0,722722722...., φανερὸν εἶναι, ὅτι παράγεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ

$$45\frac{722}{999} \text{ ἤτοι } \frac{45\times999+722}{999}.$$

Ἐὰν τὰ περιοδικὰ ψηφία εἶναι πάντα 9, τὸ περιοδικὸν ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγεται· οἷον τὸ κλάσμα 14,999999....

Αἱ δὲ μονάδες αὐτοῦ συναποτελοῦσιν, ἂν ληφθῶσιν ἅπασαι, τὸν ἀκέραιον 15.

Παρατήρησις.

223. Τὸ κατὰ τὰ προηγούμενα εὑρισκόμενον κοινὸν κλάσμα (ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν ἁπλοῦν περιοδικὸν) ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ δὲν εἶναι ἀνάγωγον. Ἀλλ' ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ, ὡς λήγων εἰς 9, δὲν ἔχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5. Οὐδὲ δύναται νὰ ἀποκτήσῃ τοὺς παράγοντας τούτους ἐν τῇ ἁπλοποιήσει τοῦ κλάσματος· διότι τότε διαιρεῖται διά τινος τῶν παραγόντων του.

Ἐντεῦθεν συνάγεται τὸ ἑξῆς θεώρημα:

224. *Ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ὅπερ παράγει ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα, δὲν ἔχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5.*

Μικτὰ περιοδικά.

225. Ταῦτα ἀνάγονται εὐκόλως εἰς ἁπλᾶ περιοδικά.
Διότι ἔστω, λ. χ., τὸ μικτὸν περιοδικὸν 18,7542742742...

Ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρὸς (διὰ νὰ ἀρχίζῃ ἡ περίοδος ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν), λαμβάνομεν τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 1875,427427...

Τὸ περιοδικὸν τοῦτο παράγεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ $1875+\frac{427}{999}$ ἤτοι ἐκ τοῦ κοινοῦ κλάσματος

$$\frac{1875\times999+427}{999} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1873552}{999}$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 1875, 427427... προκύπτει ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 1873552 διὰ 999, τὸ μικτὸν περιοδικὸν 18,75427427..., ὅπερ ἔχει τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ἁπλοῦν ψηφία, ἀλλ' ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ὑποδιαστολὴ εὑρίσκεται δύο θέσεις πρίν, θὰ προκύπτῃ προφανῶς ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 18735, 52 διὰ 999, ἤτοι ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{1873552}{99900}$.

226. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν μικτὸν περιοδικόν, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἐμπρός, ὥστε νὰ καταστήσωμεν αὐτὸ ἁπλοῦν, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, ἐξ οὗ τὸ ἁπλοῦν τοῦτο παράγεται, καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ 10, ἂν μίαν θέσιν μετεθέσαμεν τὴν ὑποδιαστολὴν διὰ 100, ἂν δύο καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημείωσις. Ἐὰν πάντα τὰ περιοδικὰ ψηφία εἶναι 9, τὸ μικτὸν περιοδικὸν ἐξ οὐδενὸς παράγεται κοινοῦ κλάσματος·
οἷον τὸ κλάσμα 7,8399999....

Αἱ δὲ μονάδες αὐτοῦ (ἂν ἅπασαι ληφθῶσιν), ἀποτελοῦσι τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 7,84· τοῦτο καὶ ἀμέσως δύναται νὰ ἀποδειχθῇ (ἐδ. 221, Σημ.)· εὑρίσκεται δὲ καὶ διὰ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος.

Παρατήρησις.

227. Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται μικτὸν περιοδικόν, οὐδέποτε λήγει εἰς 0. Εἰς τὸ ἀνωτέρω δοθὲν παράδειγμα ὁ ἀριθμητὴς εἶναι $1875 \times 999 + 427$· γράφεται δὲ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$1875 \times 1000 - 1875 + 427, \text{ ἤτοι } 1875427 - 1875$$

ἐξ οὗ φαίνεται, ὅτι, ἵνα λήγῃ εἰς 0, ἔπρεπε τὸ τελευταῖον ψηφίον 5 τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς περιόδου· ἤτοι μὲ τὸ 7· τότε ὅμως καὶ τὸ ψηφίον τοῦτο 5 θὰ περιελαμβάνετο εἰς τὴν περίοδον (ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως· διότι τότε τὸ περιοδικὸν θὰ ἦτο 18,7742742742. . . . καὶ θὰ εἶχε περίοδον 742· θὰ ἤρχιζε δὲ ἡ περίοδος μίαν θέσιν πρίν).

Ὁ δὲ παρονομαστὴς 99×100 ἔχει, ὡς ἀμέσως φαίνεται, ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, ἑκάτερον μὲ ἐκθέτην 2 (διότι $100 = 2^2 \times 5^2$)· τουτέστι τοσάκις ἑκάτερον, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος μικτοῦ περιοδικοῦ.

Ἁπλοποιοῦντες δὲ τὸ κλάσμα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξαλείψωμεν ἢ τὸν παράγοντα 2 (ἅπαξ ἢ πολλάκις) ἢ τὸν παράγοντα 5· ἀλλ' οὐχὶ ἀμφοτέρους· διότι τότε, θὰ διῃροῦντο οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος διὰ 10, ὅπερ ἀδύνατον (διότι ὁ ἀριθμητὴς δὲν λήγει εἰς 0). Ὥστε ὁ παρονομαστὴς τοῦ προκύπτοντος ἀναγώγου κλάσματος θὰ διατηρήσῃ τὸν ἕνα τοὐλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 μὲ τὸν αὐτὸν καὶ πρὶν ἐκθέτην.

Ἐντεῦθεν συνάγεται τὸ θεώρημα:

228. *Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται μικτὸν περιοδικόν, περιέχει τὸν ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων· δύναται δὲ νὰ ἔχῃ καὶ τὸν ἄλλον μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μικρότερον.*

229. Συνοψίζοντες ἅπαντα τὰ περὶ τῶν δεκαδικῶν εἰρημένα, συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς:

1) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ κλάσματος περιέχῃ μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 (ἢ τὸν ἕνα μόνον ἐξ αὐτῶν, ἢ ἀμφοτέρους), τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

2) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχῃ μήτε τὸν παράγοντα 2 μήτε τὸν παράγοντα 5, τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα.

Τὸ κλάσμα τοῦτο δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν (ἐδ. 216)· ἄρα παράγει περιοδικὸν δεκαδικόν· παράγει δὲ ἁπλοῦν· διότι ἂν παρῆγε μικτόν, ὁ παρονομαστής του θὰ περιεῖχεν ἕνα τοὐλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 (ἐδ. 228).

3) *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος περιέχῃ τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 ἢ καὶ ἀμφοτέρους, περιέχῃ δὲ πλὴν αὐτῶν καὶ ἄλλους παράγοντας, τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει μικτὸν περιοδικόν.*

Τὸ κλάσμα τοῦτο, ὡς μὴ τρεπόμενον ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν (ἐδ. 216), θὰ παράγῃ περιοδικὸν δεκαδικόν· παράγει δὲ μικτόν· διότι, ἂν παρῆγεν ἁπλοῦν, δὲν θὰ περιεῖχεν ὁ παρονομαστής του οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5 (ἐδ. 224).

4) *Πᾶν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα παράγεται ἔκ τινος κοινοῦ κλάσματος, ὅπερ ἀποτελοῦσιν ἅπασαι αἱ μονάδες αὐτοῦ ὁμοῦ λαμβανόμεναι· ἐξαιροῦνται μόνον ἐκεῖνα, ὧν πάντα τὰ περιοδικὰ ψηφία εἶναι 9· διότι ταῦτα ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγονται· καὶ τούτων ὅμως αἱ μονάδες, ἅπασαι ληφθεῖσαι, συναποτελοῦσιν ἀριθμόν, ἀκέραιον μὲν τῶν ἁπλῶν, δεκαδικὸν δὲ τῶν μικτῶν.*

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς Α μὴ ἔχων τὸν παράγοντα 2 μηδὲ τὸν 5, διαιρεῖ ἀριθμόν τινα, οὗτινος πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9, ἤτοι διαιρεῖ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς μία μονάς.

Ἐὰν δὲ ἐκ πασῶν τῶν τοιούτων δυνάμεων τοῦ 10 λάβωμεν τὴν ἐλαχίστην, ὁ ἐκθέτης αὐτῆς δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου ἐν τῷ περιοδικῷ κλάσματι τῷ παραγομένῳ ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\text{A}}$ ἢ καὶ ἐκ παντὸς κλάσματος $\frac{\text{B}}{\text{A}}$ ἀναγώγου.

2) Εἰς περιοδικόν τι κλάσμα, οἷον εἰς τὸ 0,58585858. . . δυνάμεθα ὡς περίοδον νὰ λάβωμεν ἢ 58 ἢ 5858 ἢ 585858 κτλ. . . τότε κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 221 παράγεται τὸ περιοδικὸν ἐκ τῶν ἑξῆς κοινῶν κλασμάτων:

$$\frac{58}{99}, \qquad \frac{5858}{9999}, \qquad \frac{585858}{999999} \text{ κτλ.}$$

Νὰ δειχθῇ ἐκ τῶν προτέρων ἡ ἰσότης τῶν κλασμάτων τούτων.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁρισμοί.

230. *Ποσὸν* λέγεται πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν· οἷον τὸ μῆκος, ἡ ἐπιφάνεια, ὁ ὄγκος, τὸ βάρος τῶν σωμάτων εἶναι ποσά, καὶ ὁ χρόνος ἐπίσης.

231. *Μέτρησις* τοῦ ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ὡρισμένον καὶ γνωστόν, τὸ ὁποῖον λέγεται *μονάς*. Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν, πόσαι μονάδες καὶ πόσα καὶ ποῖα μέρη τῆς μονάδος ἀποτελοῦσι τὸ ποσόν· ἤτοι πῶς ἀποτελεῖται τὸ ποσὸν ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν της, καθὼς ἀποτελεῖται τὸ ποσὸν ἐκ τῆς μονάδος του καὶ ἐκ τῶν μερῶν της, ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται, ὅτι παριστᾷ τὸ ποσόν. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, εὕρωμεν, ὅτι, ποσόν τι ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος του τετράκις ληφθείσης, ὁ παριστῶν αὐτὸ ἀριθμὸς εἶναι ὁ 4. Ἐὰν δὲ ἀποτελῆται ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ τετάρτου αὐτῆς, ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν αὐτὸ εἶναι $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, ἤτοι $\frac{7}{4}$.

Διὰ νὰ ἀποφύγωσιν ὅσον τὸ δυνατὸν τὰ κλάσματα (τὰ ὁποῖα διὰ τοὺς πολλοὺς εἶναι δύσκολα), ἔλαβον εἰς τὴν μέτρησιν ὡρισμένα τινὰ μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος καὶ ταῦτα ἐθεώρησαν ὡς νέας μονάδας καὶ ἔδωκαν εἰς αὐτὰ ἴδια ὀνόματα. Παραδείγματος χάριν, τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς ὠνόμασαν *δράμιον* καὶ ἑπομένως ἀντὶ νὰ λέγωσιν, ὅτι βάρος τι εἶναι 5 ὀκάδες καὶ $\frac{160}{400}$ τῆς ὀκᾶς, λέγουσιν, ὅτι εἶναι 5 ὀκάδες καὶ 160 δράμια. Ὁμοίως τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας ὠνόμασαν *λεπτὸν πρῶτον*, τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς *λεπτὸν* κτλ.

Ἐπίσης διὰ νὰ ἀποφύγωσι τοὺς λίαν μεγάλους ἀριθμούς, οἵτινες προκύπτουσιν, ὅταν τὸ ποσὸν εἶναι λίαν μέγα ὡς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ἔλαβον ὡρισμένα τινὰ πολλαπλάσια αὐτῆς ὡς νέας μονάδας καὶ ἔδωκαν εἰς αὐτὰ ἴδια ὀνόματα. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς τοίχου, ἀρκεῖ ὁ πῆχυς. Ἀλλ' ἐὰν ἔχωμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν Ἀθηνῶν ἀπὸ τῆς Κωνσταντινουπόλεως, λαμβάνομεν 1000 πήχεις ὡς μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν *στάδιον*, καὶ δι' αὐτῆς ἐκφράζομεν τὴν ἀπόστασιν.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον δύναται ποσόν τι νὰ παριστᾶται δι' ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ πολλῶν ἄλλων, ὁμοειδῶν μὲν ἀλλ' ἐχόντων διαφόρους μονάδας καὶ διάφορα ὀνόματα. Ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται *συμμιγὴς ἀριθμός*.

232. Ἐκ τούτων ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμόν:

Συμμιγὴς ἀριθμὸς εἶναι ἀριθμὸς σύνθετος ἐξ ἄλλων, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι πολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος ἢ μέρη αὐτῆς, ἔχοντα ἴδιον ὄνομα ἕκαστον.

Οἷον 8 ὀκάδες καὶ 250 δράμια εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός.

Σημείωσις. Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶναι *πάντοτε* συγκεκριμένοι.

Μονάδες διάφοροι καὶ ὀνόματα αὐτῶν.

Τὰ διάφορα ἔθνη δὲν λαμβάνουσι δι' ἕκαστον ποσὸν οὔτε τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν μονάδα οὔτε τὰς αὐτὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς· (μόνον διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπεκράτησαν αἱ αὐταὶ μονάδες εἰς πάντα τὰ πεπολιτισμένα ἔθνη). Διὰ τοῦτο ἐκθέτομεν ἐν τοῖς ἑπομένοις τὰ κυριώτερα εἴδη τῶν συμμιγῶν, μάλιστα δὲ ὅσα ἡμεῖς μεταχειριζόμεθα.

Μονάδες μήκους.

1) Γαλλικὸν μέτρον ἢ βασιλικὸς πῆχυς.

Ἡ κυριωτέρα μονὰς τοῦ μήκους, τῆς ὁποίας ἡ χρῆσις ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐξαπλοῦται, εἶναι τὸ γαλλικὸν *μέτρον*. Ἡ μονὰς αὕτη συνδέεται πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γῆς· διότι ὡρίσθη οὕτως, ὥστε ἡ περιφέρεια τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς νὰ ἔχῃ μῆκος 40 000 000 μέτρα.

Παρ' ἡμῖν τὸ γαλλικὸν μέτρον ὠνομάσθη *βασιλικὸς πῆχυς*.

Μέτρον ἢ βασιλικὸς πῆχυς, ἀρχικὴ μονάς·

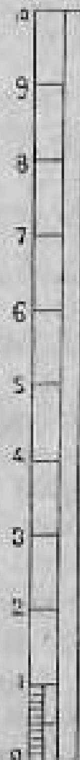
παλάμη $= \frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως· *Στάδιον* = 1000 μέτρα.

δάκτυλος $= \frac{1}{10}$ τῆς παλάμης·

γραμμή $= \frac{1}{10}$ τοῦ δακτύλου.

Κατὰ ταῦτα εἶναι:

$$1^{\text{πήχ.}} = 10^{\text{παλ.}} = 100^{\text{δακτ.}} = 1000^{\text{γρ.}}$$
$$1^{\text{παλ.}} = 10^{\text{δακτ.}} = 100^{\text{γρ.}}$$
$$1^{\text{δακτ.}} = 10^{\text{γρ.}}$$



Τὸ ἀπέναντι σχῆμα παριστᾷ παλάμην διῃρημένην εἰς δακτύλους.

Καθὼς βλέπομεν αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου εἶναι δεκαδικαί· τοῦτο δὲ ἐγένετο διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν πράξεων· διότι πᾶς ἀριθμὸς παριστῶν μῆκος ἤτοι συγκείμενος ἐκ μέτρων, παλαμῶν, δακτύλων καὶ γραμμῶν, παρίσταται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων ἀκέραιον μέρος τοὺς πήχεις, δέκατα δὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν παλαμῶν, ἑκατοστὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων καὶ χιλιοστὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν.

οἷον $15^{\text{πήχ.}}\ 2^{\text{παλ.}}\ 3^{\text{δακτ.}}\ 5^{\text{γραμ.}}$ εἶναι $= 15^{\text{πήχ.}},235$.

Ἐπομένως αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν τούτων ἀριθμῶν ἀνάγονται εἰς τὰς πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς $15^{\text{πήχ.}}$ 235 ἀπαγγέλλεται κατὰ τὰ περὶ ἀπαγγελίας τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἰρημένα (ἐδ. 213) καὶ ὡς ἑξῆς· 152 παλάμαι καὶ 35 γραμμαί, ἢ 15235 γραμμαί, ἢ 1523 δάκτυλοι καὶ 5 γραμμαί, κτλ.

2) Τεκτονικὸς πῆχυς.

Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι τὰ 75 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου· μεταχειρίζονται δ' αὐτὸν εἰς τὰς οἰκοδομὰς καὶ εἰς τὰ οἰκόπεδα.

3) Πήχεις τοῦ ἐμπορίου.

Εἰς τὸ ἐμπόριον διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων μεταχειρίζονται τὸν μικρὸν πῆχυν τῆς Κωνσταντινουπόλεως, ὅστις λέγεται ἐνδεζὲ καὶ εἶναι $0,^{\text{πήχ}}648$ (ἤτοι 648 χιλιοστὰ τοῦ γαλλικοῦ μέτρου)· καὶ τὸν μεγαλύτερον, ὅστις λέγεται *ἀρσίν*, καὶ εἶναι $0^{\mu},669$· διαιρεῖται δὲ ἕκαστος τούτων εἰς 8 *ῥούπια*.

4) *Ὀργυιά.*

Ἡ ὀργυιὰ εἶναι παλαιοτέρα ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους· ἔχει δὲ τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις:

Ὀργυιά, ἀρχικὴ μονάς·

πούς $= \frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς·

δάκτυλος $= \frac{1}{12}$ τοῦ ποδός·

γραμμή $= \frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου.

Ἡ χρῆσις τῆς ὀργυιᾶς καὶ τῶν ὑποδιαιρέσεων αὐτῆς ἤρχισεν ἤδη νὰ γίνηται σπανιωτέρα. Ἡ σχέσις αὐτῆς πρὸς τὸ μέτρον εἶναι ἡ ἑξῆς·

$1^{\text{ὀργ.}} = 1,^{\text{μέτ.}}94904$ καὶ $1^{\text{μέτ.}} = 0^{\text{ὀργ.}}\ 3^{\text{πόδ.}}\ 0^{\text{δακ.}}\ 11^{\text{γραμ.}}\frac{296}{1000}$

$1^{\text{πούς}} = 0,^{\text{μέτ.}}32484$.

Μονάδες ἐπιφανείας.

Μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

Εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον ἐπιφάνεια ἐπίπεδος περικλειομένη ὑπὸ τεσσάρων ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ὀρθὰς γωνίας.

Τετραγωνικὸς πῆχυς λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ ἕνα πῆχυν.

Τετραγωνικὴ παλάμη λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μία παλάμη ($= \frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως)· εἶναι δὲ ἡ τετραγωνικὴ παλάμη τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως. Ἐὰν τῷ ὄντι θέσωμεν 10 τετραγωνικὰς παλάμας εἰς μίαν σειρὰν καὶ προσαρμόσωμεν αὐτάς, θὰ ἀποτελεσθῇ ἓν ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν ἕνα πῆχυν καὶ ὕψος $\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως, ἤτοι μίαν παλάμην. Ἐὰν δὲ 10 τοιαῦτα ὀρθογώνια προσαρμόσωμεν (κατὰ τὰς μεγαλυτέρας πλευράς των), θ' ἀποτελεσθῇ ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς· ὥστε ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς περιέχει 10×10 ἤτοι 100 τετραγωνικὰς παλάμας.

Τετραγωνικὸς δάκτυλος λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι εἷς δάκτυλος ($=\frac{1}{10}$ τῆς παλάμης $=\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου)· εἶναι δὲ ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης καὶ τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως.

Καὶ ἐνταῦθα αἱ ὑποδιαιρέσεις εἶναι δεκαδικαί, ὥστε πᾶς ἀριθμὸς παριστῶν ἐπιφάνειαν, ἤτοι συγκείμενος ἐκ τετρ. πήχεων, τετρ. παλαμῶν, τετρ. δακτύλων, γράφεται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός·

οἷον $3^{\text{τ. πήχ.}}\ 15^{\text{τ. πλ.}}\ 2^{\text{τ. δακτ.}}$ γράφεται $3^{\text{τ. πήχ.}}\ 1502$·

ἀπαγγέλλεται δὲ (συμφώνως πρὸς τὰ ἐν τῷ ἐδ. 213 εἰρημένα) κατὰ πολλοὺς τρόπους· π. χ. 3 τ. πήχεις, 15 τ. παλάμαι καὶ 2 τ. δάκτυλοι, ἢ 315 τ. παλάμαι καὶ 2 τ. δάκτυλοι, ἢ 31502 τ. δάκτυλοι.

Τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς εἶναι τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι εἷς τεκτονικὸς πῆχυς· εἶναι δὲ ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων. Ἡ σχέσις αὐτοῦ πρὸς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$1 \text{ τετρ. τεκ. πῆχυς} = \frac{9}{16} \text{ τοῦ τετρ. μέτρου}$$

καὶ ἑπομένως 1 τετραγων. μέτρ. $= \frac{16}{9}$ τοῦ τεκτ. τετρ. πήχεως.

Διὰ τὰς μεγάλας ἐπιφανείας μεταχειρίζονται παρ' ἡμῖν τὸ *βασιλικὸν στρέμμα* = 1000 τετρ. μέτρα.

Ἐὰν νοηθῇ τὸ βασιλικὸν στρέμμα ὡς τετράγωνον, ἡ πλευρά του θὰ εἶναι ὡς ἔγγιστα $31^{\text{μέτρ.}}\ 662$ $\left(\text{κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{1000}\right)$.

Τὸ *παλαιὸν στρέμμα* εἶναι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 55 μικροὺς πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

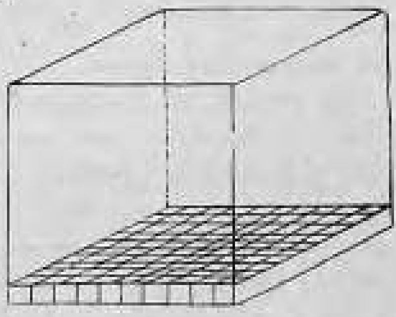
Εἶναι δὲ τὸ παλαιὸν στρέμμα ἴσον μὲ 1,27 βασιλικὰ στρέμματα.

Ἑπομένως τὸ βασιλικὸν στρέμμα εἶναι ἴσον μὲ 0,787 τοῦ παλαιοῦ στρέμματος.

Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

Μονὰς τῶν ὄγκων λαμβάνεται ὁ κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Εἶναι δὲ ὁ κύβος στερεὸν περικλειόμενον ὑπὸ 6 τετραγώνων ἴσων. Καὶ ἂν μὲν ἡ μονὰς τοῦ μήκους, εἶναι τὸ μέτρον, ἡ μονὰς τῶν ὄγκων λέγεται *κυβικὸν μέτρον*· ἂν δὲ ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι ἡ παλάμη, ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου λέγεται *κυβικὴ παλάμη*· ἂν δὲ ὁ δάκτυλος, ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου λέγεται *κυβικὸς δάκτυλος*, κτλ.

Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου.



Ἐὰν τῷ ὄντι θέσωμεν εἰς μίαν σειρὰν 10 κυβικὰς παλάμας καὶ προσαρμόσωμεν αὐτάς, σχηματίζομεν στερεὸν ἔχον μῆκος 1 πῆχυν, πλάτος ὅμως καὶ ὕψος μίαν παλάμην· ἐὰν δὲ 10 τοιαῦτα στερεὰ θέσωμεν ἐπί τινος ἐπιπέδου καὶ προσαρμόσωμεν αὐτὰ κατὰ τὰς ἐπιμήκεις ἐπιφανείας των, σχηματίζομεν στερεὸν ἔχον μῆκος καὶ πλάτος ἴσα μὲ 1 πῆχυν, ὕψος ὅμως μίαν παλάμην.

Ἐὰν τέλος 10 τοιαῦτα στερεὰ θέσωμεν ἐπ' ἀλλήλων καὶ προσαρμόσωμεν, σχηματίζομεν τὸ κυβικὸν μέτρον· ὥστε τὸ κυβικὸν μέτρον σύγκειται ἐκ χιλίων κυβικῶν παλαμῶν, ἢ ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι τὸ χιλιοστὸν τοῦ κυβικοῦ πήχεως

Ὁμοίως σύγκειται ἡ κυβικὴ παλάμη ἐκ 1000 κυβικῶν δακτύλων καὶ ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς κυβικῆς παλάμης.

Λίτρα λέγεται ἡ χωρητικότης τῆς κυβικῆς παλάμης, ἤτοι ἡ χωρητικότης κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μία παλάμη. Εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον περιέχονται κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα 1000 λίτραι.

Ἡ λίτρα εἶναι ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

Κοιλὸν λέγεται τὸ δέκατον τοῦ κυβικοῦ πήχεως, ἤτοι ὁ ὄγκος, ὅσον ἔχουσιν 100 κυβικαὶ παλάμαι· γίνεται δὲ τούτου χρῆσις ἰδίως εἰς τοὺς δημητριακοὺς καρπούς.

Παρατήρησις.

Αἱ μονάδες τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ὄγκων λέγονται *θεωρητικαὶ μονάδες*· διότι δὲν μετροῦμεν ἀμέσως δι' αὐτῶν τὰς ἐπιφανείας καὶ τοὺς ὄγκους, ἀλλ' ἐμμέσως· μετροῦμεν δηλ. διὰ τῆς μονάδος τοῦ μήκους γραμμάς τινας τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ ὄγκου καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν διὰ τοῦ λογαριασμοῦ, πόσας μονάδας ἔχει ἡ ἐπιφάνεια ἢ ὁ ὄγκος (τὰ περὶ τούτων διδάσκει λεπτομερῶς ἡ Γεωμετρία).

Μονάδες βάρους.

Οἱ Γάλλοι παραδεχθέντες τὸ μέτρον ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ μήκους ἐσχέτισαν πρὸς ταύτην καὶ τὰς λοιπὰς μονάδας· ὅθεν καὶ τὰς μονάδας τοῦ βάρους. Διὰ τοῦτο παρεδέχθησαν τὰς ἑξῆς μονάδας βάρους:

Γραμμάριον, ἢ δραχμὴ (Gramme).

Τοῦτο εἶναι τὸ βάρος ὕδατος, ὅσον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον (τὸ ὕδωρ πρέπει νὰ εἶναι καθαρὸν καὶ ἀπεσταγμένον καὶ εἰς θερμοκρασίαν 4,1 βαθμῶν τοῦ κοινοῦ θερμομέτρου).

Χιλιόγραμμον (Kilogramme) = 1000 γραμμάρια.

Τὸ χιλιόγραμμον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ μία κυβικὴ παλάμη, ἤτοι τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ὕδατος.

Τόννος λέγεται τὸ βάρος χιλίων χιλιογράμμων, ἤτοι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον.

Τὰς μονάδας ταύτας τοῦ βάρους παρεδέχθησαν καὶ οἱ Βέλγοι καὶ οἱ Ὀλλανδοὶ καὶ οἱ Γερμανοί, πλὴν τοῦ ὅτι ἀντὶ τοῦ χιλιογράμμου μεταχειρίζονται οἱ Γερμανοὶ τὸ φούντιον (Pfund), ὅπερ ἔχει βάρος 500 γραμμαρίων.

Παρ' ἡμῖν καὶ παρὰ τοῖς Τούρκοις μονάδες βάρους ἐν χρήσει εἶναι αἱ ἑξῆς:

Ὀκᾶ ἀρχικὴ μονάς. *Στατὴρ* = 44 ὀκάδες.

Δράμιον $= \frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς.

Ἡ σχέσις τῆς ὀκᾶς πρὸς τὸ χιλιόγραμμον εἶναι ἡ ἑξῆς:

1 ὀκᾶ = 1280 γραμμάρια.

1 δράμ. $= 3\frac{1}{5}$ γραμμάρια.

Τὸ δὲ χιλιόγραμμον εἶναι $312\frac{1}{2}$ δράμια = 0,78.... τῆς ὀκᾶς· μία λίτρα ὕδατος εἶναι λοιπὸν $312\frac{1}{2}$ δράμια.

Μονάδες νομισμάτων.

(Ἑλληνικαί).

Δραχμὴ ἀρχικὴ μονάς. *πεντάδραχμον* = 5 δραχμαί.

λεπτὸν $= \frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς. *εἰκοσάδραχμον* = 20 δραχμαί.

Σημείωσις. Περὶ τῶν νομισματικῶν μονάδων τῶν διαφόρων ἐθνῶν ἴδε μικράν μου ἀριθμητικήν.

Μονάδες χρόνου.

(ἐν χρήσει παρὰ πᾶσι τοῖς πεπολιτισμένοις ἔθνεσιν).

Ἡμέρα ἢ *νυχθήμερον*, ἀρχικὴ μονάς. *Μὴν* $=30$ ἡμέραι.

Ὥρα $=\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας. *Ἔτος* $=12$ μῆνες $=365$ ἡμέραι.

Λεπτὸν πρῶτον $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας.

λεπτὸν δεύτερον $=\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Παρατήρησις.

Οἱ μῆνες ἔχουσιν ἄλλοι μὲν 30, ἄλλοι δὲ 31 ἡμέρας· ὁ δὲ Φεβρουάριος ἔχει 28 διὰ τὰ κοινὰ ἔτη, 29 δὲ διὰ τὰ ἐμβόλιμα ἢ δίσεκτα, ἅτινα ἔχουσι 366 ἡμέρας, ἐν ᾧ τὰ κοινὰ ἔχουσι 365.

Σημείωσις. Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειοῦνται διὰ μιᾶς ὀξείας· οἷον 30΄· τὰ δὲ δεύτερα διὰ δύο· οἷον 15΄΄.

Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι

$$1^{\text{ἡμ.}}=24^{\text{ὡρ.}}=1440'=86400''$$
$$1^{\text{ὡρ.}}=60'=3600''$$
$$1'=60''$$

Σημείωσις. Ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα θεωρεῖται ἴση μὲ 12 ὥρας, ἐκτὸς ἂν εἰς τὸ πρόβλημα ὁρίζηται ἄλλως.

Διαίρεσις τῆς περιφερείας.

(παραδεδεγμένη ὑπὸ πάντων τῶν πεπολιτισμένων ἐθνῶν).

Πᾶσα περιφέρεια κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 μέρη ἴσα, τὰ ὁποῖα λέγονται *μοῖραι*. Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 *λεπτὰ πρῶτα* καὶ ἕκαστον λεπτὸν πρῶτον εἰς 60 *λεπτὰ δεύτερα*.

Σημείωσις. Αἱ μοῖραι σημειοῦνται δι' ἑνὸς μηδενικοῦ, ὅπερ γράφεται ὀλίγον ὑπεράνω καὶ δεξιᾷ τοῦ ἀριθμοῦ, οἷον 72^0· τὰ πρῶτα λεπτὰ δι' ἑνὸς τόνου καὶ τὰ δεύτερα διὰ δύο· οἷον $23^0\ 48'\ 32''$.

Γενικὴ Παρατήρησις

234. Ὅσα εἴδη συμμιγῶν ἔχουσι μονάδας μὲ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις, γράφονται ὡς δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς οἱασδήποτε ἐκ τῶν μονάδων των, καὶ ἐπομένως ἀνάγονται εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ὥστε αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἀνάγονται εἰς πράξεις ἐπὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Αἱ γαλλικαὶ μονάδες τῶν μέτρων καὶ τῶν σταθμῶν ἔχουσι τὸ προτέρημα τοῦτο· ἐκτὸς δὲ τούτου βασίζονται ἐπὶ τοῦ μέτρου, ὅπερ ἕνεκα τῆς σχέσεώς του πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γῆς, δύναται πάντοτε νὰ εὑρίσκηται. Διὰ τὰ δύο ταῦτα πλεονεκτήματα ἐπεκράτησε τὸ γαλλικὸν μετρικὸν σύστημα τῶν μονάδων οὐ μόνον καθ' ἅπασαν τὴν Γαλλίαν, ἀλλὰ καὶ εἰς ἄλλα κράτη (τὸ Βέλγιον, τὴν Ὁλλανδίαν, τὴν Ἑλβετίαν), εἰσήχθη δὲ καὶ παρ' ἡμῖν διὰ βασιλικοῦ διατάγματος (τοῦ 1836), ἀλλ' ἡ ὁλοσχερὴς παραδοχὴ αὐτοῦ δὲν κατωρθώθη ἀκόμη παρ' ἡμῖν.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις πραγματευόμενοι τὰς πράξεις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν λαμβάνομεν τὰ παραδείγματα ἐκ τῶν συμμιγῶν τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις· τοῦτο δέ, διότι τῶν ἄλλων αἱ πράξεις γίνονται εὐκολώτερον ὡς πράξεις δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἁπλοῦν, ἤτοι εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος.

235. *Ἐὰν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του, γίνεται ἀκέραιος ἀριθμός.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 18$^{στατ.}$ 32$^{οκ.}$ 250^{δρ}, ὅστις πρόκειται νὰ τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του, ἤτοι εἰς δράμια.

Κατὰ πρῶτον τρέπομεν τοὺς στατῆρας εἰς ὀκάδας καὶ ἔπειτα τὰς ὀκάδας εἰς δράμια, ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδὴ 1 στατὴρ ἔχει 44 ὀκάδας, οἱ 18 ἔχουσι 44×18, ἤτοι 792 ὀκάδας· ἔχει δὲ ὁ συμμιγὴς πρὸς τούτοις καὶ 32 ὀκάδας, ὥστε οἱ 18 στατῆρες καὶ αἱ 32 ὀκάδες γίνονται 824 ὀκάδες.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια, αἱ 824 ὀκάδες ἔχουσι δράμια 400×824, ἤτοι 329600·
ἔχει δὲ ὁ συμμιγὴς πρὸς τούτοις 250 δράμια· ὥστε τὸ ὅλον γίνονται

329850 δράμια·

ἐτράπη λοιπὸν ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἰς δράμια.

Διάταξις τῆς πράξεως.

Πρὸς εὐκολίαν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς:

$$
\begin{array}{rlll}
 & 18^{\sigma\tau.} & 32^{\grave{o}\kappa.} & 250^{\delta\rho.} \\
 & 18 & & \\
 & 44 & & \\
\hline
 & 72 & & \\
 & 72 & & \\
\hline
 & 792^{\grave{o}\kappa.} & & \\
 & 32 & & \\
\hline
 & 824^{\grave{o}\kappa.} & & \\
 & 400 & & \\
\hline
 & 329600^{\delta\rho.} & & \\
 & 250 & & \\
\hline
 & 329850^{\delta\rho.} = 18^{\sigma\tau.} & 32^{\grave{o}\kappa.} & 250^{\delta\rho.}
\end{array}
$$

236. *Ἐὰν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως* (ἀνωτέρας τῆς τελευταίας), *γίνεται κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ καὶ μικτός.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ συμμιγὴς

$$4^{\acute{\eta}\mu.} \quad 10^{\tilde{\omega}\rho.} \quad 48' \quad 32'',$$

ὅστις πρόκειται νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν.

Αἱ μὲν ἡμέραι καὶ αἱ ὧραι γίνονται ἀκέραιος ἀριθμὸς ὡρῶν, ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν, εἶναι δὲ $4^{\acute{\eta}\mu.}\ 10^{\tilde{\omega}\rho.} = (24 \times 4) + 10 = 106$ ὧραι· τὸ δὲ ἄλλο μέρος τοῦ συμμιγοῦς (ἤτοι τὰ $48'\ 32''$) τρέπομεν πρῶτον εἰς δεύτερα λεπτά, ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν:

$$48'\ 32'' = (60'' \times 48) + 32'' = 2880'' + 32'' = 2912''.$$

Μένει ἀκόμη νὰ τρέψωμεν τὰ $2912''$ εἰς ὥρας (ἢ εἰς μέρη τῆς ὥρας)· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ μάθωμεν, πόσον μέρος τῆς ὥρας εἶναι τὸ $1''$· δηλαδὴ πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει μία ὥρα:

$$1^{\tilde{\omega}\rho.} = 60' = 60'' \times 60 = 3600''.$$

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $1''$ εἶναι τὸ $\frac{1}{3600}$ τῆς ὥρας, τὰ $2912''$ εἶναι $\frac{2912}{3600}$ τῆς ὥρας.

Ἄρα ὁ δοθεὶς συμμιγὴς ἐτράπη εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν.

$$106\frac{2912}{3600} \text{ ἢ } 106\frac{728}{900} \text{ ἢ } 106\frac{182}{225}.$$

237. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος του, τρέπομεν τὰ μέρη, ὧν αἱ μονάδες εἶναι μεγαλύτεραι τῆς δοθείσης, εἰς ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν τῆς μονάδος ταύτης· τὰ δὲ μέρη, ὧν αἱ μονάδες εἶναι μικρότεραι, τρέπομεν εἰς κλάσμα τῆς αὐτῆς μονάδος.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ κλάσματος τούτου, τρέπομεν πρῶτον τὰ ῥηθέντα μέρη εἰς τὸ τελευταῖον ἐξ αὐτῶν καὶ ἔπειτα ὑπὸ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως ἀποτελοῦσι τὴν ὁρισθεῖσαν μονάδα.

Παραδείγματα.

1) $5^{\text{όκ.}}\ \ 220^{\text{δρ.}} = 5\dfrac{220}{400}$ ἢ $5\dfrac{11}{20}$ τῆς ὀκᾶς.

Ὁ αὐτὸς συμμιγὴς εἶναι $= \dfrac{2220}{17600}$ τοῦ στατῆρος ἢ $\dfrac{111}{880}$.

2) $2^{\text{ὀργ.}}\ 3^{\pi}\ 6\ \ 4^{\gamma\rho} = 2\dfrac{508}{864}$ ἢ $2\dfrac{127}{216}$ τῆς ὀργυιᾶς·

ὁ αὐτὸς συμμιγὴς εἶναι $=15\dfrac{76}{144}$ ἢ $15\dfrac{19}{36}$ τοῦ ποδός·

ὁ αὐτὸς συμμιγὴς εἶναι $=186\dfrac{4}{12}$ ἢ $186\dfrac{1}{3}$ τοῦ δακτύλου.

Σημείωσις. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ὑποτίθεται, ὅτι ὁ συμμιγὴς σύγκειται ἐξ ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐνίοτε δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ κλάσμα τι τῆς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, ὡς π. χ. ὁ συμμιγὴς

$$2^{\text{στ.}}\quad 15^{\text{όκ.}}\quad 265^{\text{δρ.}}\ \frac{1}{3}$$

Διὰ νὰ τρέψωμεν τοῦτον εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων, παρατηροῦμεν, ὅτι

$$2^{\text{στ.}}\ 15^{\text{όκ.}} = 103^{\text{όκ.}}\ 265^{\text{δρ.}} = \frac{265}{400} \text{ τῆς ὀκᾶς·}$$

$$\frac{1}{3} \text{ τοῦ δραμίου} = \frac{1}{3} \text{ τοῦ } \frac{1}{400} \text{ ἢ } = \frac{1}{1200} \text{ τῆς ὀκᾶς·}$$

ὥστε ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἶναι $103^{\text{όκ.}}\dfrac{265}{400} + \dfrac{1}{1200}$ τῆς ὀκᾶς·

$$\text{ἢ } 103\,\frac{796}{1200}$$

Τροπὴ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

238. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται κλασματικός τις συγκεκριμένος ἀριθμός, οἷον ὁ $\dfrac{17}{5}$ τῆς ὀκᾶς, νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Κατὰ πρῶτον ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας τοῦ δοθέντος κλάσματος καὶ εὑρίσκομεν $\frac{17}{5}$ ὀκ. $= 3^{\text{οκ}} \frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς.

Μένει λοιπὸν νὰ τρέψωμεν τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια· καὶ πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ $\frac{2}{5}$ ἐπὶ 400· διότι 1 ὀκᾶ $=$ 400 δράμια, ἄρα $\frac{1}{5}$ ὀκ. $= \frac{400}{5}$ δρ. καὶ $\frac{2}{5}$ ὀκ. $= 400 \times \frac{2}{5}$ δρ. Οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι $\frac{2}{5}$ ὀκ. $= 160$ δρ. Ἐτράπη λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{17}{5}$ τῆς ὀκᾶς εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν: $3^{\text{οκ.}}\ 160^{\text{δρ}}$.

Διάταξις τῆς πράξεως.

$\frac{17}{5}$ ὀκ.

$$\begin{array}{r|ll} 17 & 5 & \\ \cline{2-3} 2 & 3^{\text{οκ.}} & 160^{\text{δρ}} \\ 400 & & \\ \cline{1-1} 800 & & \\ 30 & & \\ 0 & & \end{array}$$

Σημειωτέον δέ, ὅτι ἡ πρᾶξις αὕτη κατ᾿ οὐδὲν διαφέρει ἀπὸ τοῦ μερισμοῦ τῶν 17 ὀκάδων εἰς 5 ἴσα μέρη· διότι, ἂν 5 ἄνθρωποι μοιρασθῶσι 17 ὀκάδας, θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{17}{5}$ τῆς ὀκᾶς.

239. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών:

Διὰ νὰ τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν εἰς συμμιγῆ, ἐξάγομεν πρῶτον τὸν ἐν αὐτῷ περιεχόμενον ἀκέραιον (ἂν περιέχηται)· καὶ πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν κλασματικόν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν μείνῃ) τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως παριστᾷ μονάδας τῆς τάξεως ταύτης, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως.

Σημείωσις. Ἐὰν εἰς μίαν τῶν διαιρέσεων τούτων δὲν εὑρεθῇ πηλίκον (ἂν δηλαδὴ ὁ διαιρέτης ὑπερβαίνῃ τὸν διαιρετέον), λαμβάνομεν ὡς πηλίκον αὐτῆς τὸ 0 καὶ ὡς ὑπόλοιπον αὐτῆς τὸν διαιρετέον της καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα.

Παραδείγματα.

$\frac{3}{5}$ στατ. $=26^{\text{όκ.}}$ $160^{\text{δρ.}}$

$\frac{4}{3}$ ὥρας $=1^{\text{ὡρ.}}$ $20'$

$\frac{6}{7}$ ἡμέρας $=23^{\text{ὡρ.}}$ $8'$ $34'\frac{2}{7}$.

Πράξεις συμμιγῶν ἀριθμῶν.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

240. *Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται ὡς καὶ ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων δηλαδὴ προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης τάξεως ἀρχίζοντες ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς τελευταίας. Καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως δὲν ἀποτελῇ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, γράφομεν αὐτὸ ὁλόκληρον, ὅταν ὅμως ἀποτελῇ, τότε διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες τῆς τάξεως ταύτης ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀθροίσματος, τὸ δὲ πηλίκον ἑνοῦμεν μὲ τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.*

Σημείωσις. Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην.

Ὅτι δὲ πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς οἱ προσθετέοι, ἐννοεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ.

Παραδείγματα.

$15^{\text{ὡρ.}}$	$20'$	$40''$
6	$0'$	$38''$
	$15'$	$48''$
1	$10'$	
$22^{\text{ὡρ.}}$	$47'$	$6''$

$18^{\text{στ.}}$	$40^{\text{όκ.}}$	$350^{\text{δρ.}}$
	27	75
42	2	125
$61^{\text{στ.}}$	$26^{\text{όκ.}}$	$150^{\text{δρ.}}$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

241. *Καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων δηλαδὴ ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ μειωτέου, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν τῆς* τελευταίας τάξεως. *Ἐὰν δὲ ἀριθμός τις τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, αὐξάνομεν αὐτὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσαι ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· φροντίζοντες ὅμως νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα μίαν μονάδα εἰς τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἐν τῷ ἀφαιρετέῳ* (κατὰ τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως ἐδ. 29, 1).

Σημείωσις. Πρὸς εὐκολίαν τῆς πράξεως γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν στήλην.

Ὅτι δὲ πρέπει ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς, ἐννοεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ.

Παραδείγματα.

$65^{\text{όργ.}}$	$4^{\pi.}$	$2^{\delta.}$	$10^{\gamma\rho.}$
$6^{\text{όργ.}}$	$5^{\pi.}$	$8^{\delta.}$	$5^{\gamma\rho.}$
$58^{\text{όργ.}}$	$4^{\pi.}$	$6^{\delta.}$	$5^{\gamma\rho.}$

$182^{\sigma\tau.}$	$12^{\text{όκ.}}$	$250^{\delta\rho.}$
	$32^{\text{όκ.}}$	$320^{\delta\rho.}$
$181^{\sigma\tau.}$	$23^{\text{όκ.}}$	$330^{\delta\rho.}$

$2^{\text{ημ.}}$			
	$10^{\text{ώρ.}}$	$30'$	$30''$
$1^{\text{ημ.}}$	$13^{\text{ώρ.}}$	$29'$	$30''$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

1) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

242. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν μερῶν του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.*

Ἡ ὀρθότης τοῦ κανόνος τούτου συνάγεται ἀμέσως ἐκ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 134)· διότι ὁ συμμιγὴς εἶναι ἄθροισμα τῶν μερῶν του.

Παρατήρησις.

Ἐὰν εἰς μερικόν τι γινόμενον περιέχωνται μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ μερικὸν γινόμενον τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· τοῦτο δὲ λέγεται *κατάταξις τῶν μονάδων*.

Παραδείγματα.

1) Ἔχομεν 12 *σάκκους* καφέ, ἐξ ὧν ἕκαστος περιέχει $1^{\sigma\tau.}$ $15^{\text{όκ.}}$ $250^{\delta\rho.}$ πόσος καφὲς περιέχεται εἰς τοὺς 12 *σάκκους;*

Φανερὸν εἶναι, ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν συμμιγῆ $1^{\sigma\tau.}$ $15^{\text{όκ.}}$ $250^{\delta\rho.}$ δώδεκα φοράς, τουτέστι νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 12.

Διάταξις τῆς πράξεως.

$1^{\sigma\tau.}$	$15^{\delta\rho.}$	$250^{\delta\rho.}$
		12
$12^{\sigma\tau.}$	$180^{\delta\kappa.}$	$3000^{\delta\rho.}$
$16^{\sigma\tau.}$	$11^{\delta\kappa.}$	$200^{\delta\rho.}$

Κατάταξις

$3000^{\delta\rho.} = 7^{\delta\kappa.}\quad 200^{\delta\rho.}$
$187^{\delta\kappa.} = 4^{\sigma\tau.}\quad 11^{\delta\kappa.}$

ὥστε τὸ γινόμενον εἶναι $16^{\sigma\tau.}\ 11^{\delta\kappa.}\ 200^{\delta\rho.}$

2) Διὰ νὰ διατρέξῃ τις ἓν στάδιον, χρειάζεται $1^{\omega\rho.}\ 10'\ 15''$. πόσας ὥρας χρειάζεται, ἵνα διατρέξῃ 25 στάδια;

$1^{\omega\rho.}$	$10'$	$15''$
		25
$25^{\omega\rho.}$	$250'$	$375''$
$29^{\omega\rho.}$	$16'$	$15''$

Κατάταξις

$375'' = 6'\quad 15''$
$256' = 4^{\omega\rho.}\quad 16'$

2) Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.

243. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου* (ἤτοι διὰ νὰ μερίσωμεν συμμιγῆ εἰς ἴσα μέρη), *διαιροῦμεν χωριστὰ ἕκαστον τῶν μερῶν του διὰ τοῦ ἀκεραίου* (κατὰ τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως, ἐδ. 190).

Ὅταν δὲ ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος τοῦ συμμιγοῦς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ ἑνοῦμεν αὐτὰς μὲ τὰς ὁμοίας μονάδας τοῦ συμμιγοῦς, πρὶν διαιρέσωμεν αὐτάς. Διὰ τοῦτο ἀρχίζομεν τὴν διαίρεσιν ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰς μονάδας τῶν κατωτέρων.

Παράδειγμα.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν $250^{\sigma\tau.}\ 18^{\delta\kappa.}\ 350^{\delta\rho.}$ ἑνὸς πράγματος εἰς 15 ἀνθρώπους· τοὐτέστι νὰ μερίσωμεν τὸν συμμιγῆ εἰς 15 ἴσα μέρη.

Κατὰ πρῶτον μοιράζομεν τοὺς 250 στατῆρας καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι λαμβάνει ἕκαστος 16 στατῆρας καὶ περισσεύουν 10 στατῆρες. Τοὺς 10 τούτους στατῆρας τρέπομεν εἰς ὀκάδας καὶ εὑρίσκομεν 440 ὀκάδας.

ἔχει δὲ ὁ συμμιγὴς καὶ 18 ὀκάδας, ὥστε ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 458 ὀκάδας εἰς τοὺς 15 ἀνθρώπους. Ἐκ τούτων λαμβάνει ἕκαστος 30 ὀκάδας καὶ περισσεύουν καὶ 8 ὀκάδες. Τὰς 8 ταύτας ὀκάδας τρέπομεν εἰς δράμια καὶ εὑρίσκομεν 3200 δράμια· ἔχει δὲ ὁ συμμιγὴς καὶ 350 δράμια· λοιπὸν ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν δράμια 3550. Ἐκ τούτων δὲ λαμβάνει ἕκαστος 236 δράμια καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ δραμίου.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l}
250^{\sigma\tau.}\quad 18^{\grave{o}\kappa.}\quad 350^{\delta\rho.} & 15 \\ \hline
 & 16^{\sigma\tau.}\quad 30^{\grave{o}\kappa.}\quad 236^{\delta\rho.}\ \frac{10}{15} \\
100 & \\
10 & \\
44 & \\ \hline
440 & \\
18 & \\ \hline
458^{\grave{o}\kappa.} & \\
08 & \\
400 & \\ \hline
3200 & \\
350 & \\ \hline
3550^{\delta\rho.} & \\
55 & \\
100 & \\
10 &
\end{array}$$

Παρατήρησις.

244. Ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου, ἡ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον γινομένη, εἶναι μερισμὸς τοῦ συμμιγοῦς εἰς μέρη ἴσα· οὐχὶ δὲ μέτρησις τοῦ συμμιγοῦς δι' ἄλλου ἀριθμοῦ, ἥτις λέγεται μὲν καὶ αὐτὴ διαίρεσις, διαφέρει ὅμως τοῦ μερισμοῦ οὐσιωδῶς (ἰδὲ ἐδ. 74, παρατ.).

Εἰς τοιαύτην διαίρεσιν π. χ. ἄγει τὸ ἑξῆς πρόβλημα· 15 *στατῆρες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν* 1 *τάλληρον, πόσον ἀξίζουν* $250^{\sigma\tau.}$ $18^{\grave{o}\kappa.}$ $350^{\delta\rho.}$ (ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος); Φανερὸν εἶναι, ὅτι τόσα τάλληρα (καὶ μέρη αὐτοῦ) ἀξίζουν, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ συμμιγὴς τοὺς 15 στατῆρας (καὶ τὰ μέρη τοῦ στατῆρος)· ὥστε ἡ πρᾶξις ἐνταῦθα εἶναι μέτρησις· πρέπει δηλονότι νὰ μετρηθῇ ὁ συμμιγὴς $250^{\sigma\tau.}$ $18^{\grave{o}\kappa.}$ $350^{\delta\rho.}$ διὰ τῶν 15 στατήρων. Περὶ τῆς τοιαύτης διαιρέσεως θὰ διαλάβωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

245. Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον δύναται νὰ γίνῃ καὶ κατὰ τὴν ἑξῆς μέθοδον, ἥτις λέγεται *μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν* (προτιμᾶται δὲ ἡ μέθοδος αὐτή, ὅταν ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς εἶναι πολυψήφιος ἀριθμός).

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ $12^{\text{ὡρ.}}\ 45'\ 50''$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 280.

Διὰ νὰ κάμωμεν τοῦτο, θὰ πολλαπλασιάσωμεν πάλιν ἕκαστον μέρος τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν 280.

Καὶ αἱ μὲν 12 ὧραι ἐπὶ 280 πολλαπλασιασθεῖσαι γίνονται 12×280 ὧραι, ἤτοι 3360 ὧραι.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τώρα τὰ $45'$ ἐπὶ 280, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν $60'$ (ἤτοι μίαν ὥραν) ἐπὶ 280, θὰ εὑρίσκομεν γινόμενον 280 ὥρας.

Τουτέστιν $60'\times280=280^{\text{ὡρ.}}$

ἄρα $30'\times280=140^{\text{ὡρ.}}$ διότι τὰ $30'$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν $60'$.

καὶ $15'\times280=\ \ 70^{\text{ὡρ.}}$ διότι τὰ $15'$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν $30'$.

ὥστε $45'\times280=210^{\text{ὡρ.}}$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι εὑρήκαμεν τὸ γινόμενον τῶν $45'$ ἐπὶ 280 ἀναλύσαντες τὰ $45'$ εἰς $30'$ (ἥμισυ τῆς ὥρας) καὶ εἰς $15'$ (ἥμισυ τῶν $30'$)· ἤτοι ἀνελύσαμεν τὰ $45'$ εἰς μέρη τῆς ὥρας ἁπλᾶ, τοιαῦτα δηλονότι, ὥστε νὰ πολλαπλασιάζωνται εὐκόλως, οἷον τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κτλ.).

Μένει ἀκόμη νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ $50''$ ἐπὶ τὸν 280.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι:

$1'\times280=280'=4^{\text{ὡρ.}}\ 40'$

ἄρα $30''\times280=\quad 2^{\text{ὡρ.}}\ 20'$ (διότι $30''$ εἶναι $\frac{1}{2}$ τοῦ $1'$)

καὶ $20''\times280=\quad 1^{\text{ὡρ.}}\ 33'\ 20''$ (διότι $20''=\frac{1}{3}$ τοῦ $1'$)

ἄρα $50''\times280=\quad 3^{\text{ὡρ.}}\ 53'\ 20''$.

Ἀφοῦ ἐπολλαπλασιάσαμεν πάντα τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς, δὲν μένει ἄλλο ἢ νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθέντα μερικὰ γινόμενα.

$12^{\text{ώρ.}} \times 280 = 3360^{\text{ώρ.}}$			
$45' \times 280 = 210^{\text{ώρ.}}$			
$50'' \times 280 =$	$3^{\text{ώρ.}}$	$53'$	$20''$
ἄρα τὸ γινόμενον εἶναι:	$3573^{\text{ώρ.}}$	$53'$	$20''$

Διάταξις τῆς πράξεως.

Πρὸς συντομίαν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς:

		$12^{\text{ώρ.}}$	$45'$	$50''$
		280		
		$3360^{\text{ώρ.}}$		
$45'$	$30'$ δίδουσιν	140		
	$15'$ δίδουσιν	70		($1'$ δίδει $4^{\text{ώρ.}}$ $40'$)
$50''$	$30''$ δίδουσιν	2	$20'$	
	$20''$ δίδουσιν	1	$33'$	$20''$
	γινόμενον	$3573^{\text{ώρ.}}$	$53'$	$20'$

Παραδείγματα.

1)

	$5^{\text{στ.}}$	$27^{\text{όκ.}}$	$300^{\text{δρ.}}$
	320		
	1600		
$22^{\text{όκ.}} = \frac{1}{2}$ στατ.	160		
$5\frac{1}{2}$ ὀκ. $= \frac{1}{4}$ τῶν 22 ὀκ.	40		
	($1^{\text{όκ.}}$ δίδει $320^{\text{όκ.}} = 7^{\text{στ.}}$ $12^{\text{όκ.}}$)		
$100^{\text{δρ.}} = \frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς	1	$36^{\text{όκ.}}$	
γινόμενον	$1801^{\text{στ.}}$	$36^{\text{όκ.}}$	

2)

	$5^{\text{δρ.}}$	$60^{\text{λεπ.}}$
	412	
	2060	
$50^{\lambda.} = \frac{1}{2}$ δρ.	206	
$10^{\lambda.} = \frac{1}{5}$ τῶν 50	41	20
	$2307^{\text{δρ.}}$	$20^{\lambda.}$

Σημ. Περισσότερα παραδείγματα ἴδε ἐν τῇ πρακτικῇ ἀριθμητικῇ.

3) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλασματικῶν καὶ ἐπὶ μικτῶν.

246 *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.*

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν συμμιγῆ $3^{\omega\rho.}$ 10′ 20′′ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$, πολλαπλασιάζω αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ 5 καὶ εὑρίσκω $15^{\omega\rho.}$ 50′ 100′′·
ἔπειτα διαιρῶ τὸ γινόμενον τοῦτο διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκω

$$1^{\omega\rho.}\ 58'\ 57''\frac{1}{2}.$$

Τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ $\frac{5}{8}$.

Διότι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 169), διὰ νὰ πολλαπλασιάσω οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{5}{8}$, ἀρκεῖ νὰ λάβω τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ πεντάκις, ἢ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πενταπλασίου αὐτοῦ.

Σημείωσις. Ἐνίοτε δύναται νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος καὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{7}{8}$, ἀναλύομεν αὐτὸ εἰς $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$ καὶ $\frac{1}{8}$ καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐφ' ἕκαστον τούτων χωριστὰ (κατὰ τὸ ἐδ. 170).

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{4}{8}$, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου· διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{2}{8}$, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου γινομένου· καὶ τέλος, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{1}{8}$, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ δευτέρου γινομένου.

247. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ, ἔπειτα καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα αὐτοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα* (κατὰ τὸ ἐδ. 170).

4) Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος.

248. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν* *τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ ἀντεστραμμένον κλάσμα* (ἰδὲ ἐδ. 182).

Σημείωσις. Διὰ μικτοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἄλλως ἢ τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα (ἰδὲ ἐδ. 185).

Παρατήρησις.

Καὶ ἡ διαίρεσις αὕτη τοῦ συμμιγοῦς διὰ κλάσματος εἶναι μερισμὸς πολλαπλασίου τινὸς τοῦ συμμιγοῦς· διὸ καὶ δίδει ἐξαγόμενον ὁμοειδὲς πρὸς τὸν συμμιγῆ διαιρετέον· διαφέρει δὲ τῆς μετρήσεως τοῦ συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ὁμοειδοῦς, ἥτις καὶ αὐτὴ λέγεται διαίρεσις· περὶ τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ διαλάβωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

5) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.

249 *Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς εἶναι* (κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐδ. 169) *ἡ ἐπανάληψις αὐτοῦ καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ πρὸς σχηματισμὸν ἄλλου συμμιγοῦς, ὅστις θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.*

Ὁ πολλαπλασιαστέος λαμβάνεται τοσάκις, ὅσας μονάδας μιᾶς τάξεως ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς (τὴν μονάδα ταύτην ὁρίζει τὸ πρόβλημα)· δι' ἕκαστον δὲ μέρος τῆς μονάδος ταύτης, ὅπερ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής, λαμβάνεται τὸ ὁμώνυμον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου· ὥστε καὶ ἐνταῦθα, ὡς εἰς πάντα πολλαπλασιασμόν, τὸ μὲν γινόμενον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἐξ οὗ ἀποτελεῖται, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ θεωροῦνται ὡς ἀφηρημένοι ἀριθμοί. Παραδείγματος χάριν εἰς τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Μία βρύσις δίδει καθ' ὥραν $120^{\text{ὀκ.}}$ $150^{\text{δρ.}}$ ὕδωρ· πόσον θὰ δώσῃ εἰς $15^{\text{ὡρ.}}$ καὶ 20';

πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ συμμιγὴς $120^{\text{ὀκ.}}$ $150^{\text{δρ.}}$ καὶ πρέπει νὰ ληφθῇ ὅλος 15 φορὰς (διότι κάθε ὥραν δίδει $120^{\text{ὀκ.}}$ $150^{\text{δρ.}}$) καὶ τὸ ἑξηκοστὸν αὐτοῦ εἴκοσι φοράς, (διότι εἰς τὸ 1' δίδει τὸ ἑξηκοστὸν τῶν $120^{\text{ὀκ.}}$ $150^{\text{δρ.}}$) ἑπομένως πολλαπλασιαστὴς εἶναι ὁ ἀφηρημένος ἀριθμὸς $15\frac{20}{60}$ ἢ $15\frac{1}{3}$.

Εἰς δὲ τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Βρύσις τις δίδει εἰς ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν $120^{\text{ὀκ.}}$ $150^{\text{δρ.}}$ ὕδωρ· πόσον θὰ δώσῃ εἰς $15^{\text{ὡρ.}}$ 20';

ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ αὐτός· ἀλλ' ἐνταῦθα πρέπει νὰ ληφθῇ τόσας φοράς, ὅσα πρῶτα λεπτὰ ἔχει ὁ συμμιγὴς $15^{\text{ὡρ.}}\ 20'$, ἤτοι 920 φοράς· πολλαπλασιαστὴς ἄρα εἶναι ὁ ἀκέραιος 920.

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ ἄλλον ἢ τρέπομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος (ἐκείνης, ἣν ὁρίζει τὸ πρόβλημα, δι' ἣν λαμβάνεται ὁλόκληρος ὁ πολλαπλασιαστέος) καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, ἢ μεταχειριζόμεθα τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν, ὡς ἑξῆς φαίνεται.

Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $2^{\text{ταλ.}}\ 3^{\text{δρ.}}\ 50^{\text{λεπ.}}$· πόσον ἀξίζουν $35^{\text{ὀκ.}}\ 350^{\text{δρ.}}$ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ συμμιγὴς $2^{\text{ταλ.}}\ 3^{\text{δρ.}}\ 50^{\text{λεπ.}}$, πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ συμμιγὴς $35^{\text{ὀκ.}}\ 350^{\text{δρ.}}$ $\left(\text{ἢ μᾶλλον ὁ ἀριθμὸς } 35\,\frac{350}{400}\right)$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς πολλαπλασιαστοῦ ὡς ἀριθμοὺς ὀκάδων, (διότι τῆς ὀκᾶς ἡ ἀξία ἐδόθη), θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ $2^{\text{τ.}}\ 3^{\text{δρ.}}\ 50^{\text{λ.}}$ ἐπὶ τὸν μικτὸν $35\,\frac{350}{400}$ ἢ $35\,\frac{7}{8}$.

Κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον ὡς ἑξῆς:

		$2^{\text{ταλ.}}$	$3^{\text{δρ.}}$	$50^{\text{λ.}}$
		$35^{\text{ὀκ.}}$	$350^{\text{δράμ.}}$	
ἀξία τῶν $35^{\text{ὀκάδ.}}$	πρὸς $2^{\text{ταλ.}}$	$70^{\text{ταλ.}}$		
	πρὸς $2\frac{1}{2}$ δρ. $= \frac{1}{2}$ ταλ.	17	$2^{\text{δρ.}}$	$50^{\text{λ.}}$
	πρὸς $1^{\text{δρ.}}$ $= \frac{1}{5}$ ταλ.	7		
ἀξία τῶν $350^{\text{δραμ.}}$	τῶν $200 = \frac{1}{2}$ ὀκ.	1	1	75
	τῶν 100	0	3	$37\frac{1}{2}$
	τῶν 50	0	1	$68\frac{3}{4}$
		$96^{\text{ταλ.}}$	$4^{\text{δρ.}}$	$31^{\text{λ.}}\frac{1}{4}$

Κατὰ πρῶτον εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῶν 35 ὀκ. πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 35 (κατὰ τὸ ἐδ. 245)· ἔπειτα, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $350^{\text{δράμ.}}$, ἀναλύομεν αὐτὰ εἰς 200 ($=\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς) καὶ 100 ($=\frac{1}{2}$ τῶν 200) καὶ 50 ($=\frac{1}{2}$ τῶν 100) καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων χωριστά, ἤτοι εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν αὐτῶν ἐκ τῆς ἀξίας τῆς μιᾶς ὀκᾶς.

Ἔστω προσέτι τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Μὲ ἓν τάλληρον ἀγοράζει τις $35^{\text{όκ.}}$ $350^{\text{δρ.}}$ ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀγοράζει μὲ $2^{\text{τάλ.}}$ $3^{\text{δρ.}}$ $50^{\text{λεπ.}}$

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ συμμιγὴς $35^{\text{όκ.}}$ $350^{\text{δράμ.}}$ πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ συμμιγὴς $2^{\text{τάλ.}}$ $3^{\text{δραχ.}}$ $50^{\text{λεπ.}}$ $\left(\text{ἢ } 2+\frac{3}{5}+\frac{50}{500} \text{ τοῦ ταλ.}\right)$:

		$35^{\text{όκ.}}$	$350^{\text{δρ.}}$	
		$2^{\text{τάλ.}}$	$3^{\text{δρ.}}$	$50^{\text{λ.}}$
μὲ $2^{\text{τάλ.}}$ ἀγοράζει τις	ἀπὸ $35^{\text{όκ.}}$	$70^{\text{όκ.}}$		
	ἀπὸ $200^{\text{δρ.}}$	1		
	ἀπὸ $100^{\text{δρ.}}$	0,	$200^{\text{δρ.}}$	
	ἀπὸ $50^{\text{δρ.}}$	0,	$100^{\text{δρ.}}$	
μὲ $2\frac{1}{2}$ δρ. $=\frac{1}{2}$ τάλ. ἀγοράζει τις		17	375	
μὲ 1 δρ. $=\frac{1}{5}$ τάλ. ἀγοράζει τις		7	70	
	Τὸ ὅλον	$96^{\text{όκ.}}$	$345^{\text{δρ.}}$	

Παρατήρησις.

Εἰς ἀμφότερα τὰ προβλήματα ταῦτα οἱ παράγοντες εἶναι οἱ αὐτοί, ἐν τούτοις τὰ γινόμενα διαφέρουσι κατὰ τὰς μονάδας τῶν κατωτέρων τάξεων. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν, πῶς συμβαίνει τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι, ἂν τραπῶσιν ἀμφότεροι οἱ συμμιγεῖς εἰς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς (ὁ μὲν εἰς εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων, ὁ δὲ ἄλλος εἰς ἀριθμὸν ταλλήρων), τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός, οἱοσδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ ἂν ληφθῇ ὡς πολλαπλασιαστέος. Ἀλλὰ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ ἀριθμὸς οὗτος θὰ εἶναι ἀριθμὸς ταλλήρων, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἀριθμὸς ὀκάδων. Διὰ τοῦτο τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις· ἀλλὰ τὸ μένον κλάσμα, ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει θὰ τραπῇ εἰς δραχμὰς καὶ λεπτά, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ εἰς δράμια· ἐπειδὴ δὲ αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ ταλλήρου εἶναι διάφοροι τῶν τῆς ὀκᾶς, θὰ προκύψωσι διάφορα ἐξαγόμενα.

250. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ ὑπάγεται ὡς μερικὴ περίπτωσις ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου συγκεκριμένου ἐπὶ συμμιγῆ· διότι ὁ συγκεκριμένος ἀκέραιος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συμμιγὴς ἔχων μίαν μόνην τάξιν μονάδων.

Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Ἐργάτης λαμβάνει δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας 5 δραχμάς· πόσον θὰ λάβῃ, ἂν ἐργασθῇ $7^{\text{ωρ.}}$ 40';

		$5^{\text{δρ.}}$	
		$7^{\text{ωρ.}}$	40'
διὰ τὰς $7^{\text{ωρ.}}$	....	$35^{\text{δρ.}}$	
διὰ τὰ 40'	διὰ $30' = \frac{1}{2}$ ὥρ.	$2^{\text{δρ.}}$	$50^{\text{λ.}}$
	διὰ $10 = \frac{1}{3}$ τῶν 30'	0	$83\frac{1}{3}$
	Τὸ ὅλον	$38^{\text{δρ.}}$	$33\frac{1}{3}$

Σημείωσις. Ὑπάρχουσι προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται νὰ πολλαπλασιασθῇ συμμιγής τις (ἐν γένει συγκεκριμένος ἀριθμὸς) ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους· ἕκαστος τῶν μερικῶν τούτων πολλαπλασιασμῶν ἐκτελεῖται τότε κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα· τοιοῦτον εἶναι λόγου χάριν τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Ἡ διὰ τοῦ σιδηροδρόμου μεταφορὰ ἑνὸς στατῆρος εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς σταδίου στοιχίζει 5 λεπτὰ (ἢ 1 λεπτὸν) τῆς δραχμῆς· πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ μεταφορὰ $20^{\text{στ.}}$ $33^{\text{οκ.}}$ εἰς ἀπόστασιν 12 σταδίων καὶ 500 μέτρων;

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου εὑρίσκομεν πρῶτον, πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ μεταφορὰ τῶν $20^{\text{στ.}}$ $33^{\text{οκ.}}$ εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς σταδίου· καὶ ἔπειτα, πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ μεταφορὰ αὐτῶν εἰς ἀπόστασιν $12^{\text{στ.}}$ καὶ $500^{\text{μ.}}$ καὶ τὸ μὲν πρῶτον θὰ εὑρεθῇ, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν συγκεκριμένον ἀριθμὸν $5^{\text{λ.}}$ (ἢ $1^{\text{λ.}}$) ἐπὶ τὸν συμμιγῆ $20^{\text{στ.}}$ $33^{\text{οκ.}}$, ὅτε εὑρίσκομεν γινόμενον $103^{\text{λ.}}\frac{3}{4}$ $\left(ἢ\ 20\frac{3}{4}\right)$, τὸ δὲ δεύτερον εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ τὸν συμμιγῆ $12^{\text{στδ.}}$ $500^{\text{μετ.}}$, ὅτε εὑρίσκομεν γινόμενον $12^{\text{δρ.}}$ $96^{\text{λ.}}\frac{7}{8}$ $\left(ἢ\ 2^{\text{δρ.}}\ 59\frac{3}{8}\right)$. Ἔχομεν λοιπὸν ἐνταῦθα γινόμενον τριῶν παραγόντων, ἐξ ὧν πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ συγκεκριμμένος ἀριθμὸς $5^{\text{λ.}}$ (ἢ $1^{\text{λ.}}$), οἱ δὲ δύο ἄλλοι εἶναι πολλαπλασιασταί.

Τοιοῦτον εἶναι καὶ τὸ ἑξῆς·

Τὰ φύλακτρα τῶν ἐμπορευμάτων ἔν τινι ἀποθήκῃ εἶναι 4 λεπτὰ (ἢ 1 λεπτὸν) καθ' ἡμέραν δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον· πόσον θὰ πληρώσῃ τις διὰ 65τ.μ. 40 καὶ διὰ 25ἡμ. 12ὥρ.;

6) **Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.**

Ἐν ἑκάστῳ προβλήματι λυομένῳ διὰ τῆς διαιρέσεως συμμιγοῦς δι' ἄλλου ὁ εἷς ἐκ τῶν δοθέντων συμμιγῶν (ὁ διαιρετέος) θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ ἄλλου (τοῦ διαιρέτου) καὶ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ (τοῦ πηλίκου)· ἐπειδὴ δὲ ὁ ζητούμενος οὗτος ἀριθμὸς δύναται ἐν τῷ γινομένῳ νὰ εἶναι ἢ πολλαπλασιαστέος ἢ πολλαπλασιαστής, διακρίνομεν δύο εἰδῶν προβλήματα διαιρέσεως.

Προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους *(μερισμός)*.

Ἐν τοῖς προβλήμασι τοῦ πρώτου εἴδους *ζητεῖται ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἕνα τῶν δοθέντων παράγει τὸν ἄλλον.*

Ἐνταῦθα ὁ διαιρετέος γίνεται ἐκ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ (καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ) καὶ εἶναι διὰ τοῦτο ὁμοειδὴς πρὸς αὐτόν.

Παράδειγμα προβλήματος τοῦ πρώτου εἴδους ἔστω τὸ ἑξῆς:

3στ. 18ὀκ. 300δρ. ἐξ ἑνὸς πράγματος ἐπωλήθησαν 58δρ. 60λ. πρὸς πόσον ἐπωλήθη ὁ στατήρ;

Ὁ ζητούμενος ἀριθμός, τουτέστιν ἡ τιμὴ ἑκάστου στατῆρος, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν συμμιγῆ 3στ. 18ὀκ. 300δρ., θὰ δώσῃ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 58δρ. 60λ.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου τρέπομεν τὸν διαιρέτην 3στ. 18ὀκ. 300δρ. εἰς ἀριθμὸν στατήρων (διότι τοῦ στατῆρος ἡ ἀξία ζητεῖται) καὶ εὑρίσκομεν $3\frac{75}{176}$ τοῦ στατῆρος ἢ $\frac{603}{176}$ τοῦ στατῆρος. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς: «$\frac{603}{176}$ τοῦ στατῆρος ἐπωλήθησαν 58δρ. 60λ. πόσον ἐπωλήθη ὁ εἷς στατήρ;»· ἡ ἀξία τοῦ $\frac{1}{176}$ τοῦ στατῆρος θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν μερίσωμεν τὰς 58δρ. 60λ. εἰς 603 ἴσα μέρη· καὶ ἡ ἀξία ἑνὸς στατῆρος θὰ εὑρεθῇ, ἂν λάβωμεν 176 φορὰς τὸ μερίδιον τοῦτο· ἤτοι ἂν διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ 58δρ. 60λεπ. διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{603}{176}$ (ἐδ. 248).

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν διαιρέτην εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος (ἣν ὁρίζει τὸ πρόβλημα) καὶ διὰ τούτου νὰ διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον.

Σημείωσις. Ἡ πρᾶξις γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἤτοι ἔχει μόνον μίαν τάξιν μονάδων. Ὅταν δὲ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἡ πρᾶξις καταντᾷ μερισμὸς τοῦ συμμιγοῦς εἰς ἴσα μέρη (ἐδ. 243), διὰ τοῦτο τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους λέγω προβλήματα μερισμοῦ.

Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους (*μέτρησις*).

Ἐν τοῖς προβλήμασι τοῦ δευτέρου εἴδους ζητεῖται *ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν ἕνα ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν νὰ παράγῃ τὸν ἄλλον.* Ἐνταῦθα ὁ διαιρετέος γίνεται ἐκ τοῦ διαιρέτου (καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ) ἑπομένως εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς αὐτόν.

Παράδειγμα προβλήματος τοῦ δευτέρου εἴδους ἔστω τὸ ἑξῆς·

Ἐργάτης τις λαμβάνει καθ' ἡμέραν $4^{\delta\rho.}$ $30^{\lambda.}$· εἰς πόσας ἡμέρας ἐργαζόμενος θὰ λάβῃ $389^{\delta\rho.}$ $15^{\lambda.}$;

Ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἐὰν πολλαπλασιάσῃ τὸν συμμιγῆ $4^{\delta\rho.}$ $30^{\lambda.}$, πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν $389^{\delta\rho}$ $15^{\lambda.}$.

Ἐὰν τρέψωμεν ἀμφοτέρους τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εἰς λεπτά, τὸ πρόβλημα καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς:

Ἐργάτης λαμβάνει καθ' ἡμέραν $430^{\lambda\epsilon\pi.}$, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ λάβῃ $38915^{\lambda\epsilon\pi.}$;

Φανερὸν εἶναι, ὅτι τόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς 38915 τὸν 430 ἡ πρᾶξις ἄρα εἶναι μέτρησις καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς εἶναι ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς $\frac{38915}{430}$, ὅστις ἐνταῦθα, καθ' ἃ ὁρίζει τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ παριστᾷ ἡμέρας· ἐὰν δὲ τρέψωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἰς ἡμέρας καὶ μέρη αὐτῆς, εὑρίσκομεν, ὅτι πρέπει νὰ ἐργασθῇ $90^{\dot\eta\mu.}$ καὶ $6^{\tilde\omega\rho.}$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι εἰς τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου, *τρέπομεν τοὺς συμμιγεῖς εἰς ἀριθμοὺς τῆς ἐλαχίστης ἐκ τῶν μονάδων των (ὅτε γίνονται ἀκέραιοι ἀριθμοί), καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς ἀκεραίους τούτους· τὸ δὲ εἶδος τοῦ πηλίκου προσδιορίζεται ἐκ τοῦ προβλήματος.*

Σημείωσις. Μερικαὶ περιπτώσεις τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς δι᾿ ἀκεραίου ὁμοειδοῦς καὶ ἡ διαίρεσις ἀκεραίου διὰ συμμιγοῦς ὁμοειδοῦς τῷ ἀκεραίῳ. Διότι δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι τοῦ ἑνὸς τῶν συμμιγῶν ἐμηδενίσθησαν τὰ μέρη πάντα πλὴν ἑνὸς καὶ μόνου. Τοῦτο συμβαίνει π. χ. εἰς τὰ ἑξῆς προβλήματα:

Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς πράγματος 6 ὀκάδας· πόσαι δραχμαὶ χρειάζονται, διὰ νὰ ἀγοράσῃ 175^{ὀκ.} 300^{δρ.};

Κτίστης τις κτίζει εἰς μίαν ὥραν 4^{ποδ.} 8^{δακ.} τοῖχον· εἰς πόσας ὥρας θὰ κτίσῃ 52^{δεν.};

Ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τούτων γίνεται κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Ὁμοίως λύονται τὰ προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ συμμιγὴς διὰ κλάσματος ὁμοειδοῦς, ἢ νὰ διαιρεθῇ κλάσμα διὰ συμμιγοῦς ὁμοειδοῦς· οἷον:

Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς πράγματος $\frac{3}{5}$ τοῦ στατῆρος· πόσαι δραχμαὶ χρειάζονται διὰ νὰ ἀγοράσῃ 28^{στ.} 15^{ὀκ.} 300^{δρ.} ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Ἐνταῦθα ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ τρέπονται εἰς δράμια κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα· (ἢ ὁ συμμιγὴς τρέπεται εἰς ἀριθμὸν στατήρων).

Ἵνα διανύσῃ ὁδοιπόρος τις ἓν στάδιον, χρειάζεται 2^{ὥρ.} 5΄ 40΄΄· πόσα στάδια θὰ διανύσῃ εἰς $\frac{22}{5}$ τῆς ὥρας;

Καὶ ἐνταῦθα δύνανται νὰ τραπῶσιν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ εἰς δεύτερα λεπτά, (ἢ νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν).

Σημείωσις. Ὑπάρχουσι προβλήματα, ὧν ἡ λύσις ἀπαιτεῖ διαίρεσιν ἑνὸς συγκεκριμένου ἀριθμοῦ ἀλλεπαλλήλως διὰ δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων· ἑκάστη τῶν μερικῶν τούτων διαιρέσεων δύναται νὰ εἶναι ἢ μερισμὸς ἢ μέτρησις· ἐκτελεῖται δὲ κατὰ τὰ προειρημένα. Τοιοῦτον εἶναι λόγου χάριν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἐπλήρωσέ τις 130^{δρ.} 40^{λ.} διὰ τὴν μεταφορὰν 70^{στ.} 16^{ὀκ.} 200^{δρ.} ἐμπορευμάτων· ἐκ πόσης ἀποστάσεως μετέφερεν αὐτά, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι δι᾿ ἕκαστον στατῆρα μεταφερόμενον εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς σταδίου πληρώνει τις 5^{λ.} (ἢ 1^{λ.});

Εὑρίσκομεν πρῶτον, πόσον ἐπλήρωσε δι᾿ ἕκαστον στατῆρα (διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν 130^{δρ.} 40^{λ.} διὰ τοῦ 70^{στ.} 16^{ὀκ.} 200^{δρ.} καὶ ἔπειτα, εἰς ποίαν ἀπόστασιν μετεφέρθη ὁ στατὴρ (διαιροῦντες τὸ ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως εὑρεθὲν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5^{λ.} (ἢ διὰ τοῦ 1^{λ.}).

Τοιαῦτα εἶναι καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα:

1) Ἐπλήρωσέ τις διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν ἐμπορευμάτων του ἀπὸ Πατρῶν εἰς Ἀθήνας (221 στάδια) 552$^{δρ.}$ 50$^{λ.}$, πόσους στατῆρας ἐζύγιζον; (τὸ αὐτὸ τιμολόγιον).

Εὑρίσκομεν πρῶτον, πόσον ἐπλήρωσε δι' ἕκαστον στάδιον (μερισμὸς) καὶ ἔπειτα, πόσοι ἦσαν οἱ στατῆρες, οἵτινες μετεφέρθησαν.

2) Διὰ τὴν φύλαξιν τῶν ἐμπορευμάτων του ἔν τινι ἀποθήκῃ ἐπὶ 14 ἡμέρας ἐπλήρωσέ τις 65$^{δρ.}$ 40$^{λ.}$ πόσα τετραγωνικὰ μέτρα κατεῖχον τὰ ἐμπορεύματα αὐτοῦ, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον καὶ δι' ἑκάστην ἡμέραν πληρώνει φύλακτρα 3 λεπτά.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Μὲ 1 τάλληρον ἀγοράζει τις 2$^{στ.}$ 15$^{ὀκ.}$ 300$^{δρ.}$ ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσα τάλληρα χρειάζονται, διὰ νὰ ἀγοράσῃ 72 στατῆρας;

$\left(\text{'Απ. } 30^{ταλ.}\ \frac{222}{415}\right)$.

2) Ἐργάτης τις λαμβάνει καθ' ὥραν $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ, διὰ νὰ λάβῃ 15$^{δρ.}$ 30$^{λ.}$;

$\left(\text{'Απ. } 17^{ωρ.}\ 29'\ \frac{1}{7}\right)$.

3) Μία μοῖρα περιφερείας τινὸς ἔχει μῆκος 1$^{δακτ.}$ 8$^{γρ.}$· πόσον μῆκος ἔχουσι 32° 6' 20'' τῆς αὐτῆς περιφερείας;

$\left(\text{'Απ. } 4^{πδ.}\ 5^{δ.}\ 6^{γρ.}\ \frac{1}{9}\right)$.

4) Πόσος χρόνος εἶναι ἀπὸ τῆς 1 Ἀπριλίου 1844 μέχρι τῆς 21 Μαΐου 1887;

('Απ. 43$^{ετ.}$ 1$^{μ.}$ 21$^{ημ.}$).

5) Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσεν 120 μίλια εἰς 2$^{ημ.}$ 8$^{ωρ.}$ 45'· πόσα μίλια διήνυσε καθ' ὥραν;

$\left(\text{'Απ. } 2^{μιλ.}\ \frac{26}{724}\right)$.

6) Σιδηρόδρομός τις διανύει καθ' ὥραν στάδια 35,8· πόσα στάδια διανύει εἰς 12$^{ωρ.}$ 25' 40''; ('Απ. στάδια 444,91 . .).

7) Σιδηροῦ τινὸς ἐλάσματος μία παλάμη ἔχει βάρος 5$^{ὀκ.}$ 250$^{δρ.}$, πόσον βάρος ἔχουσι 2$^{μετρ.}$, 18 ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἐλάσματος; ('Απ. 122$^{ὀκ.}$ 250$^{δρ.}$).

8) Πόσον ἀξίζουν 12$^{στ.}$ 16$^{ὀκ.}$ 200$^{δρ.}$ ἀνθράκων πρὸς 6$^{δρ.}$ 20$^{λ.}$ τὸν στατῆρα;

$\left(\text{'Απ. } 75^{δρ.}\ 72\ \frac{1}{2}\ \text{λεπτά}\right)$.

9) Ἐπλήρωσέ τις 80$^{δρ.}$ 40$^{λεπτ.}$ διὰ φύλακτρα τῶν ἐμπορευμάτων του, ἅτινα κατεῖχον 4$^{τμ.}$, 60· πόσας ἡμέρας ἔμειναν τὰ ἐμπορεύματα ἐν τῇ ἀποθήκῃ; τὰ φύλακτρα εἶναι 7 λεπτὰ δι' ἕκαστον τ. μ. καὶ δι' ἑκάστην ἡμέραν.

Προβλήματα ἐπὶ τῶν μέτρων καὶ τῶν σταθμῶν.

1) Νὰ τραπῶσιν 23 $\frac{3}{8}$ μικροὶ πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἰς μέτρα γαλλικά.

Λύσις. Ἐπειδὴ εἷς μικρὸς πῆχυς (ἐνδεζὲ) εἶναι $0^{\mu.}$ 648, οἱ 23 $\frac{3}{8}$ μικροὶ θὰ εἶναι μέτρα $0,648 \times 23 \frac{3}{8}$. Πολλαπλασιάζοντες τὸν δεκαδικὸν ἐπὶ 23 καὶ ἔπειτα ἐπὶ $\frac{3}{8}$, εὑρίσκομεν, ὅτι $23^{\pi.}$ ἐνδεζὲ καὶ $\frac{3}{8}$ αὐτῶν $= 15^{\mu.}$ 147.

2) Νὰ τραπῶσιν 67,8 μέτρα εἰς μικροὺς πήχεις ἐνδεζέ.

Λύσις. Ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 0,648, θὰ δώσῃ $67^{\mu.}$ 8, ἄρα εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{67,8}{0,648}$.

3) Νὰ τραπῶσι $2^{\sigma\tau.}$ $18^{\text{ὀκ.}}$ $250^{\delta\rho.}$ εἰς τόνους, χιλιόγραμμα καὶ γραμμάρια.

Λύσις. Οἱ $2^{\sigma\tau.}$ $18^{\text{ὀκ.}}$ γίνονται $106^{\text{ὀκ.}}$ καὶ ἐπειδὴ ἡ ὀκᾶ ἔχει $1280^{\gamma\rho.}$, αἱ $106^{\text{ὀκ.}}$ γίνονται 1280×106, ἤτοι $135680^{\gamma\rho\alpha\mu.}$ Τὸ δράμιον εἶναι $3^{\gamma\rho\alpha\mu.}$ καὶ $\frac{1}{5}$ ἢ 3,2· ἄρα τὰ $250^{\delta\rho.}$ εἶναι $3,2 \times 250$, ἤτοι $800^{\gamma\rho.}$ ἄρα ὁ δοθεὶς συμμιγὴς γίνεται τὸ ὅλον $136480^{\gamma\rho\alpha\mu.}$ ἤτοι $136^{\chi\iota\lambda\iota o\gamma\rho.}$ καὶ $480^{\gamma\rho\alpha\mu.}$

4) Νὰ τραπῶσι $2^{\tau o\nu.}$, $152^{\chi\iota\lambda\iota o\gamma\rho.}$ καὶ $620^{\gamma\rho\alpha\mu.}$ εἰς στατῆρας, ὀκάδας καὶ δράμια.

Λύσις. Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τὸ ὅλον γραμ. 2152620· ἄρα εἶναι δράμια $\frac{2152620}{3,2}$ ἤτοι δράμια 672693 $\frac{3}{4}$· ταῦτα δὲ γίνονται $38^{\sigma\tau.}$ $9^{\text{ὀκ.}}$ $293^{\delta\rho.}$ $\frac{3}{4}$.

5) Νὰ τραπῶσι 25 ὀργυιαὶ καὶ 2 πόδες εἰς γαλλικὰ μέτρα.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ ὀργυιὰ εἶναι $1^{\mu.}$, 94904, αἱ 25 $\frac{1}{3}$ θὰ εἶναι μέτρα $1,94904 \times 25 \frac{1}{3}$ ἤτοι $49^{\mu.}$, 37568.

6) Νὰ τραπῶσι 582 παλαιὰ στρέμματα εἰς βασιλικά.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἓν παλαιὸν στρέμμα εἶναι 1,27 βασιλικά, τὰ 582 παλαιὰ εἶναι $1,27 \times 582$ βασιλικά, ἤτοι 739.14.

7) Οἰκόπεδόν τι εἶναι 620 τεκτονικῶν τετρ. πήχεων· πόσα τετραγων. μέτρα ἔχει;

Λύσις. Εἷς τεκτον. τετραγ. πῆχυς εἶναι $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγ. μέτρου.

ἄρα 620 » » » εἶναι $\frac{9}{16} \times 620$, ἤτοι 348 τ. μ., 75.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ'.

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

Ὁρισμοί.

254. *Τετράγωνον ἀριθμοῦ, ἢ δευτέρα δύναμις αὐτοῦ*, λέγεται τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον δίδει, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του (ἰδὲ ἐδ. 51).

Παραδείγματος χάριν, τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι 5×5, ἤτοι 25, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 11 εἶναι 11×11, ἤτοι 121· τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ $\frac{1}{2}$ εἶναι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ἤτοι $\frac{1}{4}$.

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 12) εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς·

ἀριθμοὶ	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12
τετράγωνα	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	121,	144.

Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου (οἷον ὁ 10, ὁ 12 κτλ.), δὲν εἶναι τετράγωνον οὐδενὸς ἀριθμοῦ, ὡς ἀποδεικνύεται ἐν τῷ ἑξῆς θεωρήματι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

255. *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου τινός, δὲν εἶναι οὐδὲ κλάσματος τετράγωνον.*

Ἔστω τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου· οἷον ὁ 10· λέγω, ὅτι ὁ 10 δὲν εἶναι οὐδὲ κλάσματος τετράγωνον.

Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι κλάσμα τι $\frac{\alpha}{\xi}$, (ὅπερ δύναμαι νὰ ὑποθέσω ἀνάγωγον), ἔχει τετράγωνον τὸ 10, ἤτοι, ὅτι εἶναι

$$\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^2 = 10, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha^2}{\xi^2} = 10 \quad (\text{ἐδ. } 181).$$

Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον, ἤτοι οἱ δύο ἀριθμοὶ α καὶ β δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν διαιρέτην· ἄρα καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν α^2 καὶ β^2 δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν διαιρέτην (ἐδ. 128)· ὅθεν καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ θὰ εἶναι ἀνάγωγον καὶ ἑπομένως εἶναι ἀδύνατον νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς ὁ παρονομαστής του τὸν ἀριθμητήν του· ὥστε τὸ κλάσμα τοῦτο $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 10· ἄρα ὁ 10 δὲν εἶναι τετράγωνον οὐδενὸς κλάσματος.

Παρατήρησις.

256. Ἐὰν ἀναλύσωμεν δοθέντα ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ἂν εἶναι τετράγωνον ἢ ὄχι (ἐδ. 123).

Ἀλλὰ καὶ δι' ἄλλων τινῶν γνωρισμάτων δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ διακρίνωμεν, ὅτι ἀριθμός τις δὲν εἶναι τετράγωνον· τοιαῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς δύο.

1) *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν ψηφίων*

2, 3, 7, 8,

δὲν εἶναι τετράγωνον.

Διότι ἐκ τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, συνάγομεν ἀμέσως, ὅτι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τελευταίου ψηφίου του· *π. χ.* τὸ τετράγωνον τοῦ 47 λήγει εἰς τὸ ψηφίον 9, ὡς καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 7.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν δὲν λήγουσιν εἰς οὐδὲν ἐκ τῶν ψηφίων 2, 3, 7, 8, συμπεραίνομεν, ὅτι οὐδὲν τετράγωνον λήγει εἴς τι τῶν ψηφίων τούτων.

2) *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν* (ὡς οἱ 50, 15000, κτλ.), *δὲν εἶναι τετράγωνον.*

Διότι, ἂν ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνον ἄλλου, ὁ ἄλλος οὗτος θὰ λήγῃ εἰς 0· ἀλλ' ὅταν ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 0, τὸ τετράγωνόν του θὰ λήγῃ εἰς διπλάσια μηδενικά, ἤτοι θὰ λήγῃ εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν μηδενικῶν (κατὰ τὸ ἐδ. 38)· ὥστε ὁ ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις λήγει εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν, δὲν δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον ἄλλου·

Διὰ νὰ διακρίνωμεν δέ, ἂν κλάσμα τι εἶνε τετράγωνον ἢ ὄχι ἔχομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

257. *Κλάσμα ἀνάγωγον δὲν δύναται νὰ εἶνε τετράγωνον, ἐκτὸς ἂν ἑκάτερος τῶν ὅρων του εἶνε τετράγωνον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κλάσμα ἀνάγωγον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$· ἂν τὸ κλάσμα τοῦτο εἶναι τετράγωνον, θὰ εἶναι τετράγωνον κλάσματος καὶ ὄχι ἀκεραίου, διότι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός, ἂς ὑποθέσωμεν λοιπόν, ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τετράγωνον κλάσματός τινος $\frac{\mu}{\nu}$, ὅπερ ὑποθέτω ἀνάγωγον, τότε θὰ εἶναι:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\mu}{\nu}\times\frac{\mu}{\nu}=\frac{\mu^2}{\nu^2}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι ἀνάγωγον, καὶ τὸ $\frac{\mu^2}{\nu^2}$ θὰ εἶναι ἀνάγωγον (ἐδ. 128)· ἀλλὰ καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον· ὅταν δὲ δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι ἴσα, καὶ οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν εἶναι χωριστὰ ἴσοι καὶ οἱ παρονομασταὶ ἴσοι (ἐδ. 154)· ἐντεῦθεν συνάγομεν, ὅτι θὰ εἶναι

$\alpha=\mu^2$ καὶ $\beta=\nu^2$. Τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

Σημείωσις. Κλάσμα μὴ ἀνάγωγον δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον χωρὶς νὰ εἶναι οἱ ὅροι του. Π. χ. τὸ κλάσμα

$$\frac{2}{8}\left(=\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ καὶ τὸ } \frac{8}{50}\left(=\frac{4}{25}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^2.$$

Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες εἶναι τετράγωνα ἄλλων, λέγονται *τέλεια τετράγωνα*· οἷον οἱ ἀριθμοὶ 49 $(=7^2)$, $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\frac{16}{25}\left(\frac{4}{5}\right)^2$, εἶναι τέλεια τετράγωνα.

Ὁρισμοί.

258. *Τετραγωνικὴ ῥίζα* ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει αὐτὸν τετράγωνον.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 81 εἶναι ὁ 9· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 9 εἶναι 81· ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{25}{36}$ εἶναι τὸ $\frac{5}{6}$· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{5}{6}$ εἶναι $\frac{25}{36}$, κτλ.

Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παριστῶμεν διὰ τοῦ σημείου $\sqrt{}$, τὸ ὁποῖον λέγεται ῥιζικόν· οἷον $\sqrt{49}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 49, ἤγουν τὸ 7, καὶ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{1}{4}$, ἤτοι τὸ $\frac{1}{2}$.

259. *Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος·* οἷον τοῦ 58 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 7· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶναι 49 (καὶ χωρεῖ εἰς τὸν 58) τοῦ δὲ 8 εἶναι 64, τουτέστι μεγαλύτερον τοῦ 58. Ὁμοίως τοῦ 17 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 4, καὶ τοῦ 17 $\frac{1}{2}$ τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὡσαύτως ὁ 4· τοῦ δὲ 25 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 5.

260. Τετραγωνικὴ δὲ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ λέγεται ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν τὸ ν, τὸ μέγιστον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶναι $\frac{14}{10}$· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{14}{10}$, ἤτοι τὸ $\frac{196}{100}$, χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν 2· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{15}{10}$ δὲν χωρεῖ εἰς τὸν 2, διότι εἶναι $\frac{225}{100}$ ἢ 2,25.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

261. *Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης* δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὴν τετρ. ῥίζαν αὐτοῦ, ἢ τὴν ἀκριβῆ (ἂν εἶναι τέλειον τετράγωνον), ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν ὡρισμένην.

Κατὰ πρῶτον θὰ μάθωμεν, πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δοθέντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἢ ἀκριβῶς, ἂν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἂν δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Διότι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπάγονται, ὡς θὰ ἴδωμεν, καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

262. Ἂν μὲν ὁ δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετρ. ῥίζα αὐτοῦ (ἢ ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος), θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς τετρ. ῥίζης 100, ἤτοι μικροτέρα τοῦ 10· ἄρα θὰ εἶναι μονοψήφιος· εὑρίσκομεν δ' αὐτὴν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· διότι ἐκ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος ἐνθυμούμεθα ἀμέσως τὰ τετράγωνα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 49 εἶναι 7· διότι $7\times7=49$. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 35 (κατὰ προσέγγ. μονάδος), εἶναι ὁ 5· διότι τὸ τετράγωνον αὐτοῦ (ἤτοι τὸ 25) χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν καὶ μένει καὶ ὑπόλοιπον 10· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀμέσως μεγαλυτέρου ἀκεραίου, (τοῦ 6), δὲν χωρεῖ.

Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 100, ἡ τετραγ. ῥίζα αὐτοῦ (ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ προσεγγίζουσα), θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 10· ἤτοι θὰ ἔχῃ δεκάδας. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ῥίζαν ταύτην, ἔχομεν ἀνάγκην τοῦ ἑξῆς θεωρήματος:

ΘΕΩΡΗΜΑ

263. *Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο τυχόντες ἀριθμοὶ α καὶ β· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι $\alpha+\beta$· τὸ δὲ τετράγωνον τούτου θὰ εἶναι τὸ γινόμενον

$$(\alpha+\beta)\times(\alpha+\beta), \text{ ἢ } (\alpha+\beta)^2\cdot$$

τὸ γινόμενον τοῦτο, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 50, σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς τεσσάρων μερικῶν γινομένων

$$\alpha\times\alpha, \quad \alpha\times\beta \quad \beta\times\alpha \quad \beta\times\beta$$

ἢ

$$\alpha^2 \quad \alpha\times\beta \quad \alpha\times\beta \quad \beta^2$$

καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι

$$\alpha^2+2\times\alpha\times\beta+\beta^2$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ἡ ἰσότης

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\times\alpha\times\beta+\beta^2$$

Παραδείγματα.

Τὸ 11 εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν 10 καὶ 1· τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ 11 σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 10 (ὅπερ εἶναι 100) καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 1 (ἤτοι 1) καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δύο μερῶν (ἢ $2\times10\times1$)· ὥστε $11^2=100+1+20=121$.

Ὁμοίως τὸ τετράγωνον τοῦ 12 (ἢ $10+2$) σύγκειται ἐκ τοῦ 100 καὶ ἐκ τοῦ 4 καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου τοῦ 20, ἤτοι εἶναι 144.

Καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 102 (ὅπερ 102 εἶναι ἄθροισμα τοῦ 100 καὶ τοῦ 2) εἶναι ἴσον τῷ $100^2+2^2+400=10000+404=10404$.

Πόρισμα.

264. *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαφέρωσι κατὰ μονάδα, τὰ τετράγωνα αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Διότι· ἂν ὁ μικρότερος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν παρασταθῇ διὰ τοῦ α, ὁ μεγαλύτερος θὰ εἶναι $\alpha+1$, καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν θὰ εἶναι,

τοῦ μὲν μικροτέρου α^2;

τοῦ δὲ μεγαλυτέρου $(\alpha+1)^2$ ἤτοι $\alpha^2+2\alpha+1$·

διαφέρουσι δὲ ἀπ᾿ ἀλλήλων τὰ δύο ταῦτα τετράγωνα κατὰ $2\alpha+1$, τουτέστι κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ $\alpha+1$.

265. Δυνάμεθα τώρα νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ· (τὴν ἀκριβῆ, ἂν εἶναι τέλειον τετράγωνον, εἰ δὲ μή, τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος).

Ἃς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 3854· πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὑπερβαίνει τὸν 100, ἡ τετραγ. ῥίζα αὐτοῦ θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ 10· ἄρα θὰ σύγκειται ἐκ δεκάδων δ καὶ ἐκ μονάδων μ· καὶ διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὴν ὡς ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ δ δεκάδες (ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ $\delta\times10$) καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων μ· τουτέστι

$$\delta\times10+\mu.$$

Τὸ δὲ τετράγωνον αὐτῆς, (τὸ ὁποῖον θὰ χωρῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμός), θὰ σύγκειται (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα):

1) Ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων (τουτέστιν ἐκ τοῦ $(\delta\times10)\times(\delta\times10)$ ἤτοι $(\delta^2\times100)$.

2) Ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας (ἤτοι ἐκ τοῦ $2\times\delta\times10\times\mu$).

3) Ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων (ἤτοι μ^2).

Ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 3854, ὡς περιέχων τὸ τετράγωνον τῆς ῥίζης του, θὰ σύγκειται ἐκ τῶν τριῶν τούτων μερῶν καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου, (ἂν δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον)· τουτέστιν εἶναι:

$$3854=\delta^2\times100+2\times\delta\times10\times\mu+\mu^2+\upsilon \qquad (1).$$

Ἐκ τῶν μερῶν τούτων αἱ δ^2 ἑκατοντάδες δὲν δύνανται νὰ περιέχονται ἢ εἰς τὰς 38 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ· ἀλλὰ τὸ μέγιστον τετράγωνον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ὁ 38 εἶναι τὸ 36· ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων εἶναι 36 καὶ ἑπομένως $\delta=6$· (ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 3854 περιέχεται μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τῶν 6 δεκάδων, ἤτοι τοῦ 3600, καὶ τοῦ τετραγώνου τῶν 7 δεκάδων, ἤτοι τοῦ 4900· ὥστε ἡ ῥίζα του δὲν δύναται νὰ ἔχῃ 7 δεκάδας). Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι:

Αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης παντὸς ἀριθμοῦ εὑρίσκονται, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ἑκατοντάδων του.

Ἀφοῦ εὑρήκαμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκαδικῶν ($\delta=6$), μένει ἀκόμη νὰ εὕρωμεν τὰς μονάδας μ· πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (1) τὰς 36 ἑκατοντάδας καὶ εὑρίσκομεν

$$254=2\times6\times10\times\mu+\mu^2+\nu. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἀποτελοῦσι τὸν 254, ὁ πρῶτος εἶναι δεκάδες ($12\times\mu$ δεκάδες)· ἄρα δὲν δύναται νὰ περιέχηται ἢ μόνον εἰς τὰς 25 δεκάδας· ἀλλ' εἰς τὰς 25 ταύτας δεκάδας περιέχονται καὶ αἱ δεκάδες τοῦ ὑπολοίπου ν (ἂν ἔχῃ) καὶ αἱ δεκάδες τοῦ τετραγώνου μ^2 (ἂν ἔχῃ)· ὥστε θὰ εἶναι:

$$25\geqq12\times\mu.$$

Ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ *ψηφίον μ τῶν μονάδων δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ψηφίου, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὰς 25 δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου 254 διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης.*

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ 2 δοκιμάζομεν τὸ ψηφίον 2. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸν 254 πρέπει νὰ περιέχηται τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν 6 δεκάδων ἐπὶ τὰς 2 μονάδας, ἤτοι τὸ γινόμενον 120×2, καὶ τὸ τετράγωνον τῶν 2 μονάδων, ἤτοι τὸ 2×2· ὥστε πρέπει νὰ περιέχηται τὸ γινόμενον 122×2· τοῦ γινομένου δὲ τούτου ὁ μὲν εἷς παράγων εἶναι τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 2, ὁ δὲ ἄλλος σχηματίζεται, ἂν διπλασιάσωμεν τὰς εὑρεθείσας 6 δεκάδας καὶ δεξιᾷ τοῦ διπλασίου αὐτῶν γράψωμεν τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 2. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι 244 καὶ περιέχεται ἀληθῶς εἰς τὸν ἀριθμὸν 254· ἀφαιροῦντες δὲ αὐτὸ ἀπὸ τούτου εὑρίσκομεν τέλος καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, τὸ 10.

Ὥστε εὑρέθη ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3854 κατὰ προσέγγισιν μονάδος· εἶναι δὲ ὁ ἀριθμὸς 62.

Διάταξις τῆς πράξεως.

38'54	62
36	122
25'4	2
24 4	244
10	

Ὁμοίως ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν οἱουδήποτε ἀκεραίου. Διότι ἔστω, ὡς παράδειγμα, ὁ ἀριθμὸς

58742.

Κατὰ τὰ προηγούμενα αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης του θὰ εὑρεθῶσιν, ἂν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν 587 ἑκατοντάδων του· ἡ δὲ ῥίζα τοῦ 587 εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω:

5'87	24
4	44
18'7	4
176	176
11	

καὶ εἶναι 24· ὥστε αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης τοῦ 58742 εἶναι 24· μένει ἀκόμη πρὸς εὕρεσιν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων· τοῦτο δὲ (κατὰ τὰ προαποδειχθέντα) δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ψηφίου, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων (ἤτοι διὰ τοῦ 48) τὰς δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τετραγώνου τῶν 24 δεκάδων· τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶναι 11 ἑκατοντάδες (αἵτινες ἔμειναν ἐκ τῶν 587 ἑκατοντάδων, ἀφ' ὧν ἀφῃρέσαμεν τὸ τετράγωνον τῶν 24 δεκάδων) καὶ 42 μονάδες, ἤτοι εἶναι 1142. Διαιροῦντες τὰς 114 δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου τούτου διὰ τοῦ 48, εὑρίσκομεν τὸ ψηφίον 2, ὅπερ γράφομεν δεξιᾷ τοῦ 48 καὶ ὑποκάτω αὐτοῦ καὶ πολλαπλασιάζομεν· ἐπειδὴ δὲ τὸ προκύπτον γινόμενον 964 περιέχεται εἰς τὸ ὑπόλοιπον 1142, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι 2· ἀφαιροῦντες τέλος τὸ γινόμενον 964 ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου 1142, εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως 178.

Διάταξις τῆς πράξεως.

5'87'42	242	
4	44	482
18'7	4	2
176	176	964
1142		
964		
178		

Ὥστε ἐξήχθη ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 58742 κατὰ προσέγγισιν μονάδος· εἶναι δὲ ὁ 242.

266. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης·

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ (ἀκριβῶς, ἂν εἶναι τετράγωνος, εἰ δὲ μή, κατὰ προσέγγισιν μονάδος), χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα διψήφια, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων· ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου τμήματος, ὅπερ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ δύναται νὰ εἶναι διψήφιον ἢ μονοψήφιον· ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τμήματος τούτου θὰ εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης. Ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ τμήματος, ἐξ οὗ εὑρέθη, καὶ δεξιᾷ τοῦ μένοντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον τμῆμα, ὅτε σχηματίζεται ἀριθμός τις· τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χωρίζομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας καὶ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας του διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ῥίζης.

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιᾷ τοῦ διαιρέτου αὐτῆς καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ σχηματισθέντος ἀριθμοῦ (οὗ τὰς δεκάδας διῃρέσαμεν), τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιᾷ τοῦ πρώτου· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ψηφίον, οὗ τὸ γινόμενον νὰ ἀφαιρῆται· τὸ ψηφίον τοῦτο θὰ εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης· καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ δεξιᾷ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάσωμεν τὸ ἀκόλουθον τμῆμα, σχηματίζεται δεύτερός τις ἀριθμός.

Καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διαιροῦμεν τὰς δεκάδας διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο εὑρεθέντα ψηφία τῆς ῥίζης, καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον δεξιᾷ τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ἐπ᾿ αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ δευτέρου σχηματισθέντος ἀριθμοῦ, τὸ εὑρεθὲν ψηφίον εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τοιουτοτρόπως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις οὗ καταβιβασθῶσι πάντα τὰ διψήφια τμήματα. Τὸ εἰς τὸ τελευταῖον τμῆμα ἀντιστοιχοῦν πηλίκον θὰ εἶναι τὸ τελευταῖον τῆς ῥίζης ψηφίον· τὸ δὲ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦν ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως. Καὶ ἂν μὲν εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο 0, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ εὑρέθη ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἀκριβῶς· εἰ δὲ μή, εὑρέθη κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Παραδείγματα.

```
16'81'72 | 410
16       |  81   820
 0 81    |   1
   81    |  81
    0 72
```

```
9'36'36 | 306
9       |  606
0 36 36 |    6
  36 36 | 3636
      0
```

```
8'48 | 29
4    |   49
44'8 |    9
44 1 |  441
   7
```

Παρατηρήσεις

1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς τετρ. ῥίζης εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζεται ὁ ἀριθμός. Διὰ τοῦτο ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἔχει, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν ψηφίων αὐτοῦ (ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι ἄρτιον), ἢ τὸ ἥμισυ τῶν ψηφίων αὐτοῦ ἓν ἔτι προσλαβόντων, (ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι περιττόν).

2) Δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὥστε μία τῶν διαιρέσεων, τὰς ὁποίας κάμνομεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δεύτερον, τὸ τρίτον κτλ. ψηφίον τῆς ῥίζης, νὰ δίδῃ

πηλίκον μεγαλύτερον τοῦ 9. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τοῦ 9· (τοῦτο συνέβη εἰς τὸν ἀριθμὸν 848).

3) Δυνατὸν ἐπίσης νὰ συμβῇ, ὥστε μία τῶν προειρημένων διαιρέσεων νὰ δίδῃ πηλίκον 0 (ὡς εἰς τὸν ἀριθμὸν 93636)· τότε τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ῥίζης εἶναι 0· γράφομεν δὲ αὐτὸ δεξιᾷ τῶν ἄλλων καὶ καταβιβάζοντες καὶ τὸ ἑπόμενον τμῆμα ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα.

4) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ διπλάσιον τῆς ῥίζης. Ἂν λόγου χάριν εὑρέθη ῥίζα ὁ ἀριθμὸς 62, τὸ ὑπόλοιπον δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν 124· διότι, ἂν ἔμενεν ὑπόλοιπον 125, ἢ μεγαλύτερον τούτου, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ περιεῖχε τὸ τετράγωνον τοῦ 62 καὶ τὸ ἄθροισμα $62+63$· ἄρα θὰ περιεῖχε καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ κατὰ μονάδα μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ (τοῦ 63)· ὅπερ εἶναι $62^2+62+63$· (κατὰ τὸ πόρισμα 264). Ἐπομένως δὲν θὰ ἦτο ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ὁ 62, ἀλλ' ὁ 63, ἢ καὶ ἄλλος μεγαλύτερος ἀριθμός.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

267 *Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς $42\frac{2}{5}$· τὸ μέγιστον ἀκέραιον τετράγωνον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος, θὰ περιέχηται προδήλως εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος του, ἤτοι εἰς τὸ 42· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ 36· ἄρα 6 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀμφοτέρων κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ὁμοίως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 142, 75 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ ῥίζα τοῦ 142, ἤτοι τὸ 11, καὶ ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ $\frac{1500}{8}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ 187, ἤτοι ὁ 13.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$.

268. Ἡ εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν, $\frac{1}{\nu}$ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου κατὰ προσέγγισιν μονάδος· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς:

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ Α κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, τουτέστι νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν ν, τὸ μέγιστον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς Α· ἔστω τοιοῦτο τὸ $\frac{\varrho}{\nu}$, ἤτοι ἔστω

$$\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^2 \leqq A, \quad \text{ἀλλὰ} \quad \left(\frac{\varrho+1}{\nu}\right)^2 > A\cdot$$

ἢ

$$\frac{\varrho^2}{\nu^2} \leqq A, \quad \text{ἀλλὰ} \quad \frac{(\varrho+1)^2}{\nu^2} > A.$$

Ἐκ τούτου ἕπεται $\varrho^2 \leqq A \times \nu^2$, ἀλλὰ $(\varrho+1)^2 > A \times \nu^2$.

Αἱ δὲ ἀνισότητες αὗται δεικνύουσιν, ὅτι ὁ ἀκέραιος ϱ εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς $A \times \nu^2$· τουτέστιν ὁ ϱ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $A \times \nu^2$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

269. Ἐκ τούτου συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ *πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ν, ἤτοι ἐπὶ* ν^2, *καὶ ἐξάγομεν τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ γινομένου* $(A \times \nu^2)$ *κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τὴν δὲ ῥίζαν ταύτην διαιροῦμεν διὰ ν.*

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 5^2, ἤτοι ἐπὶ 25, καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 50· τούτου ἐξάγομεν τὴν τετρ. ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ εἶναι 7· τὴν ῥίζαν ταύτην 7 διαιροῦμεν διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν $\frac{7}{5}$. Αὕτη δὲ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$.

Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{60}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ 60^2 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον $60^2 \times \frac{2}{3}$ ἢ $60 \times 20 \times 2$ τουτέστι 2400· τοῦ γινομένου τούτου ἐξάγομεν τὴν τετραγ. ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκομεν 48· διαιροῦμεν τέλος αὐτὴν διὰ τοῦ 60 καὶ ὁ οὕτω εὑρισκόμενος ἀριθμὸς $\frac{48}{60}$ ἢ $\frac{4}{5}$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{2}{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{60}$.

Ἂν τέλος ζητῆται ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ 5,1 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$, πολλαπλασιάζομεν: $5{,}1 \times 12^2$ καὶ εὑρίσκομεν $5 \times 144 + \frac{1}{10} \times 144 = 720 + 14{,}4$ ἢ 734,4· τοῦ γινομένου τούτου λαμβάνομεν τὸ ἀκέραιον μέρος (ἐδ. 277) τὸ 734, καὶ τούτου ἐξάγομεν τὴν τετρ. ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος. ὅτε εὑρίσκομεν 27· ὥστε ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ 5,1 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$ εἶναι $\frac{27}{12}$, ἢ $2\frac{1}{4}$.

Συνήθως τὸ κλάσμα τῆς προσεγγίσεως ἔχει παρονομαστὴν δύναμίν τινα τοῦ 10· ζητεῖται δηλονότι νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ Α κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^{\sigma}}$· τότε ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ προηγουμένου κανόνος γίνεται εὐκολωτέρα· διότι, ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμοῦ Α ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ 10^{σ}, ἤτοι ἐπὶ τὸ $10^{\sigma} \times 10^{\sigma}$, ἢ $10^{2\sigma}$, γίνεται εὐκολώτατα.

Παραδείγματα.

1) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10000}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸν 2 ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 10000, ἤτοι γράφω δεξιᾷ τοῦ 2 ὀκτὼ μηδενικὰ καὶ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ 200000000 ἐξάγω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκω 14142· τὴν ῥίζαν ταύτην διαιρῶ διὰ 10000 καὶ ἔχω 1,4142, ἥτις εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10000}$.

2) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{12}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸ $\frac{12}{7}$ ἐπὶ 1000^2 καὶ τοῦ γινομένου $\frac{12}{7} \times 1000^2$ λαμβάνω τὸ ἀκέραιον μέρος, ὅπερ εἶναι 1714285 καὶ ἐξάγω τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος· ὅτε εὑρίσκω 1309· διαιρῶ ἔπειτα τὴν ῥίζαν ταύτην διὰ 1000 καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 1,309 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{12}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

Σημείωσις. Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου $\frac{12}{7} \times 1000^2$, τρέπω τὸ κλάσμα $\frac{12}{7}$ εἰς δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα μεταθέτω τὴν ὑποδιαστολὴν 6 θέσεις πρὸς τὰ ἔμπρός, παραλείπω δὲ πάντα τὰ μετ' αὐτὴν ψηφία.

3) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 18,65924467 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 100^2, ἤτοι ἐπὶ 10000 καὶ εὑρίσκω τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου, ὅπερ εἶναι 186592· τούτου ἐξάγω τὴν τετρ. ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ εὑρίσκω 431· διαιρῶ τὴν ῥίζαν ταύτην δι' 100 καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 4,31 εἶναι ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ δοθέντος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

Ὁμοίως εὑρίσκω, ὅτι ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 0,000068 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$ εἶναι 0,008.

Παρατήρησις.

270. Ἂν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, οὗτινος ζητεῖται ἡ τετρ. ῥίζα, εἶναι τέλειον τετράγωνον (καὶ τοιοῦτος γίνεται πάντοτε, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του), παραλείπομεν αὐτόν, ἐξάγομεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ ἀκριβῶς, ἂν εἶναι δυνατόν, ἢ κατὰ προσέγγισιν, καὶ ταύτην διαιροῦμεν ἔπειτα διὰ τῆς τετρ. ῥίζης τοῦ παρονομαστοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ζητῆται ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $\frac{2}{3}$, γράφομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς: $\frac{6}{9}$· ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ 6 κατὰ προσέγγισίν τινα, ἔστω $\frac{1}{100}$, καὶ εὑρίσκομεν 2,44· διαιροῦντες δ' αὐτὴν διὰ τῆς τετραγ. ῥίζης τοῦ 9, ἤτοι διὰ 3, εὑρίσκομεν 0,81.

Ἐὰν συμβῇ νὰ εἶναι ἀμφότεροι οἱ ὅροι τετράγωνα τέλεια, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος εὑρίσκεται ἀκριβῶς· ἀρκεῖ νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ῥίζα καὶ τῶν δύο ὅρων· π. χ. ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $\frac{4}{25}$ εἶναι $\frac{2}{5}$, τοῦ δὲ 0,0016 εἶναι 0,04.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 5, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων δὲν εἶναι 2· ἤ, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 6, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἄρτιον· ἤ, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 1, ἢ 4 ἢ 9, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι περιττόν.

2) Ἐὰν κλάσμα τι εἶναι τέλειον τετράγωνον, καὶ τὸ γινόμενον τῶν ὅρων αὐτοῦ εἶναι ἐπίσης τέλειον τετράγωνον· καὶ τἀνάπαλιν ἀληθεύει.

Διότι, ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τετράγωνον, ἂν μὲν εἶναι ἀνάγωγον, θὰ εἶναι $\alpha=\mu^2$, $\beta=\nu^2$ (ἐδ. 257)· ἄρα καὶ $\alpha\times\beta=\mu^2\times\nu^2=(\mu\times\nu)^2$· ἂν δὲ ἔχωσιν οἱ ὅροι του κοινόν τινα διαιρέτην δ, μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τούτου θὰ γίνωσιν ἀμφότεροι τέλεια τετράγωνα, ὥστε θὰ εἶναι:

$$\alpha=\mu^2\times\delta, \text{ καὶ } \beta=\nu^2\times\delta,$$

ἄρα καὶ

$$\alpha\times\beta=\mu^2\times\nu^2\times\delta^2=(\mu\times\nu\times\delta)^2.$$

Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν τὸ γινόμενον τῶν δύο ὅρων $\alpha\times\beta$ εἶναι ἴσον τῷ τετραγώνῳ ϱ^2, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον· διότι εἶναι

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\beta}{\beta\times\beta}=\frac{\varrho^2}{\beta^2}=\left(\frac{\varrho}{\beta}\right)^2.$$

3) Παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

Διότι, πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $2\nu+1$ (ἔνθα ὁ ν δηλοῖ ἀκέραιόν τινα ἀριθμόν)· ἑπομένως τὸ τετράγωνόν του εἶναι $4\times\nu^2+4\times\nu+1$· ἢ $4\nu\times(\nu+1)+1$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν ν καὶ $\nu+1$ ὁ ἕτερος εἶναι πάντοτε ἄρτιος, τὸ γινόμενον $4\nu\times(\nu+1)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 8.

4) Πᾶς περιττὸς ἀριθμός, ὅστις εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 4 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

Ἡ πρότασις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι, ὅταν τὰ τετράγωνα δύο ἀριθμῶν ἔχωσιν ἄθροισμα περιττὸν ἀριθμόν, ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ἄρτιος, ὁ δὲ ἄλλος περιττός.

5) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν, ὧν οὐδέτερος εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, εἶναι πάντοτε διαιρετὴ διὰ 3.

6) Πόσα τέλεια τετράγωνα περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν 18951;

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ΄.

ΜΕΘΟΔΟΙ

Περὶ ποσῶν ἀναλόγων.

271. Πολλάκις ποσόν τι ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἄλλου ἢ ἀπὸ πολλῶν ἄλλων. Παραδείγματος χάριν, τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα θὰ δώσῃ τις, διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων, τοὺς ὁποίους θὰ ἀγοράσῃ· διότι εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ περισσοτέρους πήχεις θὰ δώσῃ περισσότερα χρήματα. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, οἵτινες χρειάζονται, διὰ νὰ κτίσωσι τοῖχόν τινα, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕψους τοῦ τοίχου καὶ ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ πλάτους αὐτοῦ· ἔτι δὲ καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, ἐν αἷς θὰ κτισθῇ ὁ τοῖχος, καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὡρῶν τῆς ἡμερησίας ἐργασίας.

272. Δύο ποσὰ λέγονται *ἀνάλογα*, ἐὰν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν προξενῇ πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματα.

Ἂν δύο ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 5 δραχμάς,
2×3 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος ἀξίζουν 5×3 δραχμάς· καὶ
$2\times\frac{1}{8}$ » » » » » $5\times\frac{1}{8}$ »
καὶ οὕτω καθεξῆς·
ὥστε ἡ ἀξία ἑνὸς πράγματος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων του εἶναι ἀνάλογα.

Ἂν ἐργάτης τις λαμβάνῃ ἡμερομίσθιον	4	δραχμάς,
διὰ 2 ἡμέρας θὰ λάβῃ	4×2	δραχμάς,
διὰ 5 ἡμέρας θὰ λάβῃ	4×5	δραχμάς,
διὰ $6\frac{1}{5}$ ἡμέρας θὰ λάβῃ	$4\times6\frac{1}{5}$	δραχμάς·

ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ μισθὸς τοῦ ἐργάτου καὶ αἱ ἡμέραι τῆς ἐργασίας του εἶναι ἀνάλογα.

Ἂν ὁδοιπόρος τις διανύῃ εἰς 1 ὥραν $7\frac{1}{2}$ στάδια,

θὰ διανύσῃ εἰς 4 ὥρας $\left(7\frac{1}{2}\right)\times 4$ στάδια

καὶ εἰς $\frac{1}{8}$ ὥρας $\left(7\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{8}$ στάδια·

ἄρα αἱ ὧραι τῆς ὁδοιπορίας καὶ τὰ διανυόμενα στάδια εἶναι ἀνάλογα·

Ἂν εἰς 8 ἀνθρώπους

διανεμηθῶσιν ἐξ ἴσου 400 δρ., θὰ λάβῃ ἕκαστος 50·

ἂν διανεμηθῶσι 400×2 δρ. » » 50×2·

ἂν διανεμηθῶσι $400\times\frac{5}{6}$ δρ. » » $50\times\frac{5}{6}$·

καὶ οὕτω καθεξῆς· (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων μένει ὁ αὐτός)· ὥστε τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διανέμεται, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου εἶναι ἀνάλογα (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων πρέπει νὰ μένῃ ἀμετάβλητος).

Σημείωσις. Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν, ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ συναυξάνωσιν, εἶναι καὶ ἀνάλογα· διότι, λόγου χάριν, τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδίου καὶ τὰ ἔτη αὐτοῦ συναυξάνουσι καὶ ὅμως δὲν εἶναι ἀνάλογα.

Ποσὰ ἀντίστροφα.

273. Δύο ποσὰ λέγονται *ἀντίστροφα* ἢ *ἀντιστρόφως ἀνάλογα*, ὅταν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν προξενῇ διαίρεσιν τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Παραδείγματα.

Ἐὰν 1 ἐργάτης τελειώνῃ ἔργον τι εἰς 12 ἡμέρας,

2 ἐργάται θὰ τελειώσωσιν αὐτὸ εἰς $\frac{12}{2}$ ἡμέρας

καὶ 8 ἐργάται » » εἰς $\frac{12}{8}$ ἡμέρας·

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, ἐν αἷς ἐκτελοῦσιν οὗτοι ἔργον τι, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

Ἐὰν 12 ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου 600 δρ.,

θὰ λάβῃ ἕκαστος 50 δρ.

Ἐὰν 12×8 ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου τὸ αὐτὸ ποσόν,

θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{50}{8}$ δρ.

Ἐὰν δὲ $\frac{12}{4}$ ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου τὸ αὐτὸ ποσόν,

θὰ λάβῃ ἕκαστος 50×4 δρ.

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων, οἵτινες θὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου ποσόν τι, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

Σημείωσις. Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν, ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀνομοίως (τουτέστιν αὐξανομένου τοῦ ἑνὸς ἐλαττοῦται τὸ ἄλλο), εἶναι καὶ ἀντίστροφα· διότι π. χ. ἂν μία ἅμαξα συρομένη ὑπὸ δύο ἵππων διατρέχῃ τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν εἰς Πειραιᾶ διάστημα εἰς 1 ὥραν, συρομένη ὑπὸ 4 δὲν θὰ διατρέξῃ αὐτὸ εἰς $\frac{1}{2}$ ὥραν· οὐδὲ συρομένη ὑπὸ 8 θὰ διατρέξῃ αὐτὸ εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας.

Παρατήρησις.

274. Ὅταν ἐξετάζωμεν, ἂν ποσόν τι εἶναι ἀνάλογον πρὸς ἄλλο, ἢ ἀντίστροφον πρὸς αὐτό, ἀφίνομεν ἀμετάβλητα πάντα τὰ ἄλλα ποσά, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἐνδέχεται νὰ ἐξαρτᾶται τὸ ποσὸν τοῦτο.

Παραδείγματος χάριν, ὅταν ἄνθρωποί τινες θὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου ποσόν τι χρημάτων, ἐὰν θέλω νὰ μάθω τὴν σχέσιν τοῦ μεριδίου πρὸς τὸ ποσόν, ὅπερ διανέμεται, πρέπει νὰ ἀφήσω τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων ἀμετάβλητον· τότε δὲ (ἐδ. 289, παράδειγμα 4ον) εὑρίσκω, ὅτι τὸ μερίδιον καὶ τὸ ποσόν, ὅπερ διανέμεται, εἶναι ἀνάλογα. Ὁμοίως, ἂν θέλω νὰ μάθω τὴν σχέσιν τοῦ μεριδίου πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων, εἰς τοὺς ὁποίους γίνεται ἡ διανομή, πρέπει νὰ ἀφήσω τὸ διανεμόμενον ποσὸν ἀμετάβλητον· τότε δὲ εὑρίσκω (ἐδ. 290, παράδειγμα 2ον), ὅτι τὸ μερίδιον καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

Περὶ ἀριθμῶν ἀναλόγων.

275. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἴσους τὸ πλῆθος, ἐὰν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, οἷον οἱ ἀριθμοὶ 10, 15, 30, 100 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 2, 3, 6, 20, διότι προκύπτουσιν ἐκ τούτων πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 5.

Καὶ οἱ δεύτεροι δὲ ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς πρώτους· διότι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ $\frac{1}{5}$.

Μέθοδοι.

276. *Μέθοδος* λέγεται τρόπος τις γενικός, διὰ τοῦ ὁποίου λύομεν εἶδός τι προβλημάτων.

Στοιχειώδη προβλήματα λέγω ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τρίτος, ὅστις εὑρίσκεται ἐκ τῶν δοθέντων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ διαιρέσεως· τοιαῦτα, λόγου χάριν, εἶναι τὰ ἑξῆς δύο γενικὰ προβλήματα:

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία μονάδων τινῶν (ἑνὸς πράγματος), ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος (ἐξ ἑνὸς πράγματος), ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀξία μονάδων τινῶν τοῦ αὐτοῦ πράγματος.

Διότι τὸ μὲν πρῶτον λύεται δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, τὸ δὲ δεύτερον διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

277. *Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν* λύει τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, τί γίνεται ἓν ποσόν, ὅταν μεταβληθῇ ἄλλο ποσὸν ἀνάλογον τούτου ἢ ἀντίστροφον.

Λέγεται δὲ μέθοδος τῶν τριῶν, διότι εἰς αὐτὴν δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἐξ αὐτῶν πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος.

Δύο ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν παριστῶσι τὰ ποσά, ὁποῖα ἦσαν πρίν· ὁ δὲ ἄλλος παριστᾷ τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ· ζητεῖται δὲ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀναλύονται εἰς δύο στοιχειώδη καὶ λύονται, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

Πρόβλημα.

12 πήχεις ὑφάσματός τινος ἀξίζουν 65 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν 35 πήχεις ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀνάλογα, τὸν ἀριθμὸν τῶν πήχεων καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν· κατὰ πρῶτον ἦσαν οἱ πήχεις 12 καὶ αἱ δραχμαὶ 65· τώρα ἔγιναν οἱ πήχεις 35· πόσαι θὰ γίνουν αἱ δραχμαί;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς

Ἀφοῦ οἱ 12 πήχεις ἀξίζουν 65 δραχ., ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει $\frac{65}{12}$ δρχ. καὶ ἀφοῦ ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει $\frac{65}{12}$ δρ., οἱ 35 πήχεις ἀξίζουν $\frac{65}{12} \times 35$ δρχ. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνελύθη εἰς τὰ ἑξῆς δύο στοιχειώδη.

1) Οἱ 12 πήχεις ἀξίζουν 65 δραχμάς· πόσον ἀξίζεις ὁ εἷς πῆχυς;

2) Ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει $\frac{65}{12}$ δραχ. πόσον ἀξίζουν οἱ 35 πήχεις;

Πρόβλημα.

Ἐργάται τινὲς ἐργαζόμενοι 7 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 10 ἡμέρας· ἂν εἰργάζοντο 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελον τελειώσῃ τὸ ἔργον;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀντίστροφα, τὰς ὥρας τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ τὰς ἡμέρας, εἰς τὰς ὁποίας οἱ ἐργάται τελειώνουσι τὸ ἔργον· κατὰ πρῶτον ἦσαν αἱ ὧραι 7 καὶ αἱ ἡμέραι 10, τώρα αἱ ὧραι ἔγιναν 9, πόσαι θὰ γίνωσιν αἱ ἡμέραι;

Πρῶτον θὰ εὕρωμεν, πόσαι θὰ γίνωσιν αἱ ἡμέραι, ὅταν αἱ ὧραι ἀπὸ 7 γίνωσιν 1, (ὅταν δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν διαιρεθῇ διὰ 7) καὶ πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ὅταν εἰργάζοντο 7 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐχρειάσθησαν 10 ἡμέρας διὰ νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον· ἂν λοιπὸν εἰργάζοντο μόνον 1 ὥραν καθ' ἡμέραν θὰ ἐχρειάζοντο ἡμέρας 10×7 (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 7· διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν διῃρέθη διὰ 7, εἶναι δὲ ταῦτα ἀντίστροφα ποσά). Ἀφ' οὗ δὲ χρειάζονται 10×7 ἡμέρας, ὅταν ἐργάζωνται μίαν ὥραν καθ' ἡμέραν, ἂν εἰργάζοντο 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ ἐχρειάζοντο ἡμέρας $\frac{10 \times 7}{9}$ (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν διῃρέθη δι' 9· διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 9).

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἶναι 7ἡμ. $\frac{7}{9}$ ἤτοι 7ἡμ. καὶ 7ὧρ.

Κανὼν γενικός.

278. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Γράφομεν εἰς ἕνα στίχον τὰς πρώτας τιμὰς τῶν δύο ποσῶν, ἔπειτα εἰς δεύτερον στίχον τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς καὶ τὴν ζητουμένην νέαν τιμὴν τοῦ ἄλλου, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ· φροντίζομεν δέ, ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ νὰ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ γραμμῆς ὁριζοντίας. Τούτων γενομένων, *ἵνα εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν χ, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν (τὸν ὁμοειδῆ αὐτοῦ) ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ἄλλων ὡς εἶναι γεγραμμένοι, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.*

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ 1ον πρόβλημα, γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς·

πηχ.	δραχ.
12	65
35	χ

καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα (πολλαπλασιάζομεν δηλαδὴ τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ, ἤτοι τὸν 65, ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{12}{35}$ ἀντεστραμμένον· διότι τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα) καὶ εὑρίσκομεν

$\chi = 65 \times \frac{35}{12}$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις $\chi = 189\frac{7}{12}$.

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ τὸ 2ον πρόβλημα, γράφομεν πάλιν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς·

ὧρ. ἐργ.	ἡμέραι
7	10
9	χ

καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα εὑρίσκομεν $\chi = 10 \times \frac{7}{9} = \frac{70}{9}$.

Ἐνταῦθα ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἀποτελοῦσιν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ ὡς εἶναι γεγραμμένοι, διότι τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Ὁμοίως, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Ταχυδρόμος βαδίζων $5\frac{1}{2}$ ὥρας καθ' ἡμέραν διανύει ἀπόστασίν τινα εἰς 18 ἡμέρας· πόσας ὥρας πρέπει νὰ βαδίζῃ καθ' ἡμέραν, ἵνα διανύσῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν εἰς 12 ἡμέρας;

γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς:

ὧραι ὁδοιπ.	ἡμέραι
$5\frac{1}{2}$	18
χ	12

ὅθεν, ἐπειδὴ τὰ δύο ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα,

$$\chi = 5\frac{1}{2} \times \frac{18}{12} = \frac{99}{12}, \text{ ἤτοι } \chi = 8 \text{ ὡρ. } \frac{1}{4}.$$

Ὁμοίως, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα:

Μὲ 35 δραχμὰς καὶ 60 λεπτὰ ἀγοράζει τις 6 $\frac{1}{2}$ ὀκάδας βουτύρου· πόσον ἀγοράζει μὲ 128 δραχμὰς καὶ 30 λεπτά;
γράφομεν ἀριθμοὺς ὡς ἔπεται

$$\begin{array}{cc} \text{δραχ.} & \text{ὀκάδ.} \\ 35{,}60 & 6\frac{1}{2} \\ \overline{128{,}30} & \chi \end{array}$$

ὅθεν $$\chi = 6\frac{1}{2} \times \frac{128{,}30}{35{,}60} = 6\frac{1}{2} \times \frac{1283}{356} = \frac{13 \times 1283}{2 \times 356}$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν

$$\chi = 23^{\text{ὀκ.}}\frac{303}{712} \quad \text{ἢ} \quad 23^{\text{ὀκ.}} \; 170^{\text{δρ}} \; \frac{20}{89}.$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσεν 70 μίλια εἰς 9 $\frac{1}{2}$ ὥρας· εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ 125 μίλια; $\left(\text{Ἀπ. } 16^{\text{ὡρ}}\ 57'\ \frac{6}{7}\right)$.

2) Διὰ νὰ γίνῃ ἔνδυμά τι ἐχρειάσθησαν 3 $\frac{1}{2}$ πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $1^{\text{πήχ.}}\frac{3}{8}$· πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὸ αὐτὸ ἔνδυμα ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως; $\left(\text{Ἀπ. } 5\frac{1}{2}\right)$.

3) Πόσοι πήχεις ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος 1 $\frac{2}{8}$ τοῦ πήχεως χρειάζονται διὰ νὰ καλυφθῇ τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου, ὅπερ ἔχει μῆκος μὲν 5 πήχεις, πλάτος δὲ 4; (Ἀπ. 16).

4) Εἴς τι φρούριον ὑπάρχουσι τροφαὶ διὰ 45 ἡμέρας· ἐὰν γίνῃ ἀνάγκη νὰ ἐξαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ 60 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος ἄνθρωπος ἐν αὐτῷ; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{3}{4}\right)$.

5) Εἰς πολεμικόν τι πλοῖον, ὅπερ ἔχει πλήρωμα 750 ἄνδρας, ὑπάρχουσι τροφαὶ διὰ 50 ἡμέρας· τὸ πλοῖον τοῦτο ἀπαντῆσαν διέσωσε 35

ναυαγούς· πόσας ἡμέρας θὰ διαρκέσωσι τώρα αἱ τροφαί; ἤ, ἂν θέλωσι νὰ διαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ πάλιν 50 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος;

(Αἱ τροφαὶ θὰ διαρκέσωσι 47 ἡμέρας, θὰ περισσεύσουν δὲ καὶ 605 σιτηρέσια· ἢ θὰ λαμβάνῃ ἕκαστος τὰ $\frac{150}{157}$ τοῦ πρώτου σιτηρεσίου).

6) Ὡρολόγιόν τι, ὅπερ ὑστερεῖ 6 λεπτὰ εἰς 24 ὥρας, ἐτέθη εἰς συμφωνίαν μὲ ἀκριβὲς ὡρολόγιον, καθ' ἣν στιγμὴν τοῦτο ἐδείκνυε μεσημβρίαν· τίς θὰ εἶναι ἡ ἀληθὴς ὥρα, ὅταν τὸ πρῶτον ὡρολόγιον θὰ δεικνύῃ 8 μετὰ μεσημβρίαν; $\left(\text{Ἀπ. 8ὥρ. } 2' \frac{2}{239}\right)$.

7) Ἀτμάμαξά τις διανύουσα 30 στάδια καθ' ὥραν ἀνεχώρησε διευθυνομένη εἰς πόλιν ἀπέχουσαν 350 στάδια· μετὰ τρεῖς ὥρας ἀνεχώρησε πρὸς τὴν αὐτὴν πόλιν δευτέρα ἀτμάμαξα διανύουσα 75 στάδια εἰς 2 ὥρας· ποία ἐκ τῶν δύο θὰ φθάσῃ πρώτη εἰς τὴν πόλιν ταύτην;

('Απ. Ἡ πρώτη θὰ φθάσῃ 40' πρὸ τῆς δευτέρας).

8) Εἷς τι φρούριον ἦσαν 810 στρατιῶται καὶ εἶχον τὴν 1 Μαρτίου τροφὰς δι' ὅλον τὸν μῆνα τοῦτον· τὴν νύκτα τῆς 7 Μαρτίου, γενομένης ἐξόδου, ἐφονεύθησαν 80 στρατιῶται· μέχρι τίνος θὰ διαρκέσωσι τώρα αἱ τροφαί; ('Απ. μέχρι τῆς 3 Ἀπριλίου τὴν ἑσπέραν).

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

279. Ἡ μέθοδος αὕτη λύει τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τί γίνεται ἓν ποσόν, ὅταν μεταβληθῶσιν ἄλλα, πρὸς ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι τὸ ποσὸν τοῦτο ἢ ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον.

Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ πολλῶν ποσῶν καὶ ἔπειτα αἱ νέαι τιμαὶ ὅλων τῶν ἄλλων πλὴν ἑνός· τούτου δὲ ἡ νέα τιμὴ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀναλύονται εἰς δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν· διὰ τοῦτο δὲ ἡ μέθοδος, δι' ἧς λύομεν αὐτά, λέγεται *σύνθετος* μέθοδος τῶν τριῶν (ἡ δὲ μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται πρὸς διάκρισιν *ἁπλῆ*).

Ὁ τρόπος τῆς λύσεως τῶν τοιούτων προβλημάτων γίνεται φανερὸς ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

Πρόβλημα.

18 ἐργάται ἐργαζόμενοι 7 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 25 ἡμέρας· πόσας ὥρας καθ' ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζωνται 52 ἐργάται, ἂν θέλωσι νὰ τελειώσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 15 ἡμέρας;

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο κατατάσσω τὰ δεδομένα ὡς καὶ προηγουμένως:

ἐργ.	ἡμ.	ὡρ.
18	7	25
52	x	15

ἔπειτα σκέπτομαι ὡς ἑξῆς.

Ἂν μόνον οἱ ἐργάται μεταβληθῶσι καὶ ἀπὸ 18 γίνωσι 52 (ἀλλ' αἱ ἡμέραι, εἰς τὰς ὁποίας θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον, νὰ μείνωσιν αἱ αὐταὶ 25), αἱ ὧραι θὰ γίνωσι (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν)

$$7\times\frac{18}{52}$$

(διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν τῆς καθημερινῆς ἐργασίας εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα).

Ἂν δὲ ἔπειτα μεταβληθῶσιν αἱ ἡμέραι καὶ ἀπὸ 25 γίνωσι 15, (ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν νὰ μείνῃ ὡς εἶναι, ἤτοι 52), αἱ ὧραι θὰ γίνωσι (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν)

$$7\times\frac{18}{52}\times\frac{25}{15}\qquad \text{ἢ } 7\times\frac{9}{26}\times\frac{5}{3}\qquad \text{ἢ } 7\times\frac{3}{26}\times5$$

(διότι αἱ ὧραι τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ ἡ ἐργασία, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα).

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν εἶναι $\frac{105}{26}$, ἤτοι $4^{\omega\rho}$ $2'\ \frac{4}{13}$.

Σημείωσις. Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ ὡς ἑξῆς· εὑρίσκομεν, πόσας ὥρας ἐργασίας ἀπαιτεῖ τὸ ἔργον δι' ἕνα ἄνθρωπον. Ἐπειδὴ οἱ 18 ἐργάται ἐργάζονται 7 ὥρας καθ' ἑκάστην ἐπὶ 25 ἡμέρας, τὸ ἔργον χρειάζεται δι' ἕνα ἄνθρωπον ὥρας ἐργασίας $25\times7\times18$· καὶ ἐπειδὴ εἶναι 52 οἱ ἐργάται, πρέπει ἕκαστος νὰ ἐργασθῇ ὥρας $\frac{25\times7\times18}{52}$. καὶ ἐπειδὴ πρέπει νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον εἰς 15 ἡμέρας, πρέπει νὰ ἐργάζηται ἕκαστος καθ' ἡμέραν $\frac{25\times7\times18}{52\times15}$ ὥρας.

Πρόβλημα.

20 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐχρειάσθησαν 25 ἡμέρας, διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 200 πήχεων, πλάτος 4 καὶ βάθος 2. Εἰς πόσας ἡμέρας 50 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 80 πήχεων, πλάτος 8 καὶ βάθος 3;

Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς καὶ προηγουμένως:

$$\begin{array}{cccccc} \text{ἐργ.} & \text{ὡρ.} & \text{ἡμερ.} & \text{μῆκ.} & \text{πλάτ.} & \text{βάθ.} \\ \dfrac{20}{50} & \dfrac{8}{9} & \dfrac{25}{x} & \dfrac{200}{80} & \dfrac{4}{8} & \dfrac{2}{3}. \end{array}$$

ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἂν μόνον οἱ ἐργάται ἀπὸ 20 γίνωσι 50 (τὰ δὲ ἄλλα πάντα μείνωσιν ὡς εἶναι), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{20}{50}$ (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν) καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50}$$

(διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ τὸ ἔργον, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα)·

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 200, πλάτος 4 καὶ βάθος 2.

Ἂν ἔπειτα μεταβληθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν τῆς καθημερινῆς ἐργασίας (τὰ δὲ ἄλλα μείνωσιν ὡς εἶναι, ἤτοι οἱ ἐργάται 50 καὶ ἡ τάφρος ἡ αὐτή), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{8}{9}$ (κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν· διότι αἱ ὧραι τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ ἡ ἐργασία, εἶναι ἀντίστροφα) καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9}$$

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, ἵνα σκάψωσι τὴν πρώτην τάφρον.

Ἂν ἔπειτα μεταβληθῇ τὸ μῆκος τῆς τάφρου καὶ ἀπὸ 200 γίνῃ 80 (τὰ δ' ἄλλα πάντα μείνωσιν ὡς εἶναι, ἤτοι ἐργάται 50, ὧραι ἐργασίας 9, πλάτος 4 καὶ βάθος 2), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{80}{200}$ (διότι τὸ μῆκος τῆς τάφρου καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ἀνάλογα) καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200}.$$

Ἂν ἔπειτα μεταβληθῇ τὸ πλάτος τῆς τάφρου καὶ ἀπὸ 4 γίνῃ 8, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{8}{4}$ καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200} \times \frac{8}{4}.$$

Ἂν τέλος μεταβληθῇ τὸ βάθος καὶ γίνῃ 3 ἀπὸ 2 (τὰ δ' ἄλλα μείνωσιν ὡς εἶναι, ἤτοι ἐργάται 50, ὧραι ἐργασίας 9, μῆκος τάφρου 80, πλάτος 8) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{3}{2}$, καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200} \times \frac{8}{4} \times \frac{3}{2},$$

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 80, πλάτος 8 καὶ βάθος 3.

Ἁπλοποιοῦντες τὸ γινόμενον τοῦτο, εὑρίσκομεν $\frac{8}{3} \times 4$ ἤτοι $\frac{32}{3}$ ἢ $10^{\text{ημ.}}$ καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς ἡμέρας ἤτοι 10 ἡμέρας καὶ 6 ὥρας· (διότι ἡ καθημερινὴ ἐργασία εἶναι 9 ὧραι).

Σημείωσις. Αἱ ἡμέραι κατὰ τὰς ὁποίας διαρκεῖ ἡ ἐργασία, δὲν εἶναι ἀκριβῶς ἀνάλογοι πρὸς τὸ βάθος τῆς τάφρου· διότι, ὅσον γίνεται βαθυτέρα ἡ τάφρος, τόσον γίνεται δυσκολωτέρα ἡ ἐκφορὰ τῶν χωμάτων· ἀλλὰ τὴν διαφορὰν ταύτην παραβλέπομεν.

280. Ἐὰν τώρα εἰς τὰ λυθέντα προβλήματα παραβάλωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς εἶναι κατατεταγμένα, συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὁμοειδῆ αὐτοῦ ἀριθμὸν (τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ) *ἀλλεπαλλήλως ἐφ' ἕκαστον τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν δύο τιμῶν ἑκάστου ποσοῦ· ἀντιστρέφομεν ὅμως προηγουμένως τὸ κλάσμα, ἐὰν τὸ ποσόν του εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου.*

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα:

1) Διὰ τὴν τροφὴν 160 στρατιωτῶν ἐπὶ 25 ἡμέρας ἐχρειάσθησαν

1850 δραχμαί· πόσας ἡμέρας θὰ φθάσωσιν 8510 δραχμαὶ διὰ τὴν τροφὴν 400 στρατιωτῶν; ('Απ. 46).

2) Ἄνθρωπός τις ἐργαζόμενος 6 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐξετέλεσε τὰ $\frac{2}{5}$ ἔργου τινὸς εἰς 25 ἡμέρας· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζηται καθ' ἡμέραν διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ὑπόλοιπον ἔργον εἰς 15 ἡμέρας; ('Απ. 15).

3) Βιβλίον τι ἔχει 250 σελίδας· ἑκάστη σελὶς ἔχει 32 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος 40 γράμματα· ἐὰν τὸ βιβλίον τοῦτο τυπωθῇ οὕτως, ὥστε εἰς ἑκάστην σελίδα νὰ εἶναι 36 στίχοι, καὶ εἰς ἕκαστον στίχον 45 γράμματα, ἐκ πόσων σελίδων θ' ἀποτελῆται;

('Απ. 198· ἡ τελευταία δὲν θὰ εἶναι πλήρης).

4) Ἔργον τι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 12 ἡμέρας· πρὸς τοῦτο ἐμισθώθησαν 15 ἐργάται, οἵτινες ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔργου εἰς 10 ἡμέρας· δύνανται οὗτοι μόνοι νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς τεταγμένης προθεσμίας; καί, ἂν δὲν δύνανται, πόσοι ἐργάται ἀκόμη πρέπει νὰ μισθωθῶσι; ('Απ. ἀκόμη 10 ἐργάται).

5) Ἐπωλήθησαν 40 βαρέλια μετὰ τοῦ ἐν αὐτοῖς περιεχομένου οἴνου ἀντὶ 6750 δραχμῶν, ἕκαστον δὲ βαρέλιον περιεῖχε 420 ὀκάδας οἴνου· πόσον πρέπει νὰ πωληθῶσι 32 βαρέλια μετὰ τοῦ ἐν αὐτοῖς περιεχομένου οἴνου, ἐὰν ἕκαστον περιέχῃ 350 ὀκάδας οἴνου τῆς αὐτῆς ποιότητος; ἡ τιμὴ ἑκάστου βαρελίου κενοῦ εἶναι τῶν μὲν πρώτων 25 δραχμαί, τῶν δὲ δευτέρων 22. $\left('Απ.\ 4537^{δρ.}\ \frac{1}{3}\right)$.

6) Λεωφόρος τις μήκους 240 μέτρων καὶ πλάτους 30 καὶ ἔχουσα ἑκατέρωθεν ἑαυτῆς 60 δένδρα κανονικῶς φυτευμένα, ἐκόστισε 12000 δραχμάς· πόσον θὰ κοστίσῃ ἄλλη λεωφόρος (ἐπὶ ὁμοίου ἐδάφους) μήκους 300 μέτρων πλάτους ἴσου τῇ πρώτῃ καὶ ἔχουσα ἑκατέρωθεν ἑαυτῆς 80 δένδρα κανονικῶς φυτευμένα;

Λύσις. Ἂν ἡ ἀπόστασις τῶν δένδρων ἀπ' ἀλλήλων ἦτο ἡ αὐτὴ εἰς ἀμφοτέρας τὰς λεωφόρους, ἔπρεπεν ἐπὶ μήκους 300 μέτρων νὰ ἔχῃ ἡ δευτέρα 75 δένδρα καὶ θὰ ἐκόστιζε τότε δρ. 15000· ἀλλ' ἔχει δένδρα 80, ἤτοι τὰ δένδρα αὐτῆς εἶναι πυκνότερον φυτευμένα· ἄρα θὰ κοστίσῃ περισσότερον τῶν 15000· ἀλλὰ κατὰ τὴν αὐτὴν ὑπόθεσιν διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δευτέρα λεωφόρος 80 δένδρα, ἔπρεπεν ἀναλόγως νὰ ἔχῃ μῆκος 320 μέτρα (ἐνῷ ἔχει 300) καὶ θὰ ἐκόστιζε τότε δρ. 16000· καὶ ἐπειδὴ ἡ δευτέρα ἔχει μῆκος μόνον 300 μέτρα, συνάγεται ὅτι θὰ κοστίσῃ ὀλιγώτερον τῶν 16000.

Ὥστε ἡ δευτέρα λεωφόρος θὰ στοιχίσῃ περισσοτέρας τῶν 15000 δρ. ἀλλ' ὀλιγωτέρας τῶν 16000.

7) Τὸ φορτίον ἑνὸς πλοίου ἀπετελεῖτο ἀπὸ 360 βαρέλια πλήρη οἴνου καὶ ἀπὸ 540 βαρέλια πλήρη ἐλαίου· ἡ δὲ ἀξία τοῦ φορτίου ἦτο 12600 δραχμαί· τὸ πλοῖον τοῦτο καταληφθὲν ὑπὸ σφοδρᾶς τρικυμίας ὑπέστη ἀβαρίαν καθ' ἣν ἐρρίφθησαν εἰς τὴν θάλασσαν 270 βαρέλια οἴνου καὶ 420 βαρέλια ἐλαίου· ποία εἶναι τώρα ἡ ἀξία τοῦ μείναντος φορτίου; (τὰ βαρέλια ἑκάστου εἴδους εἶναι ὅλα ἴσα).

('Απ. μεγαλυτέρα τῶν 2800 δραχ. ἀλλὰ μικροτέρα τῶν 3150).

8) 150 στρατιῶται ἐξώδευσαν εἰς ἓν ἔτος 48120 δραχμὰς διὰ τὴν τροφήν των καὶ 9000 δρ. διὰ τὴν ἐνδυμασίαν των· πόσοι στρατιῶται (τοῦ αὐτοῦ Κράτους) θὰ δαπανήσουν εἰς ἓν ἔτος διὰ τὴν τροφήν των 28872 καὶ διὰ τὴν ἐνδυμασίαν των 5400; ('Απ. 90).

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΣΥΝΕΖΕΥΓΜΕΝΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

281. Ὡς σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ἡ οὕτω καλουμένη «*συνεζευγμένη μέθοδος*».

Παράδειγμα τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου ταύτης ἔστω τὸ ἑξῆς.

Νὰ εὕρωμεν, πόσα ρωσσικὰ ρούβλια κάμνουσιν 1800 τουρκικαὶ λίραι, ἠξεύροντες, ὅτι 12 τουρκικαὶ λίραι κάμνουσιν 11 ἀγγλικάς, 26 δὲ ἀγγλικαὶ λίραι κάμνουσιν 165 ρούβλια.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς δύο προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς ἑξῆς φαίνεται·

α´) 26 ἀγγλικαὶ λίραι κάμνουν 165 ρούβλια·
11 » » πόσα ρούβλια;

Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν, ὅτι 11 ἀγγλικαὶ λίραι, ἤτοι 12 τουρκικαί, κάμνουν ρούβλια $165 \times \frac{11}{26}$.

β´) 12 τουρκικαὶ λίραι κάμνουν ρούβλια $165 \times \frac{11}{26}$
1800 » » » πόσα ρούβλια;

λύοντες δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν, ὅτι 1800 τουρκικαὶ λίραι κάμνουν ῥού-

βλια $\dfrac{165 \times 11 \times 1800}{26 \times 12}$ ἢ $10471^{\text{ῥούβ.}} \dfrac{2}{13}$.

Ὡς δεύτερον παράδειγμα, ἔστω καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἔμπορος ἔφερεν ἐκ Παρισίων εἰς Ἀθήνας 2500 πήχεις ἑνὸς ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἠγόρασε πρὸς 1 φρ. 15 τὸ μέτρον· ἐξώδευσε δὲ διὰ ναῦλον καὶ δασμὸν 32 ἐπὶ τοῖς 100 (ἤτοι διὰ πρᾶγμα ἀξίας 100 δραχμῶν ἐξώδευσε 32δρ.)· πόσον τοῦ κοστίζει ὁ μικρὸς πῆχυς ἐν Ἀθήναις, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ χρυσοῦ εἰκοσαφράγκου εἶναι 24 δραχμαί;

Γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον ὡς ἑξῆς·

$$
\begin{aligned}
\chi^{\text{δραχμαί}} &= 1^{\text{μικρὸς πῆχ.}}\\
1^{\text{μικ. πῆχ.}} &= 0{,}648^{\text{μέτρα}}\\
1^{\text{μέτρον}} &= 1{,}15^{\text{φράγ. χρυσᾶ}}\\
20^{\text{φρ. χρ.}} &= 24^{\text{δραχ.}}
\end{aligned}
$$

πρὸ τῶν ἐξόδων $100^{\text{δραχ.}} = 132^{\text{δραχ.}}$ μετὰ τὰ ἔξοδα.

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀναλύεται εἰς τὰ ἑξῆς τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

α΄) Ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρισίοις 100δρ., τόσον κοστίζει ἐν Ἀθήν. 132· ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρ. 24δρ., πόσον ἐν Ἀθήναις;

Λύοντες τὸ πρόβλημα τοῦτο εὑρίσκομεν, ὅτι, ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρισίοις 24δρ. ἤτοι 20 χρυσᾶ φράγκα, κοστίζει ἐν Ἀθήναις

$$132 \times \frac{24}{100} \text{ δρ.}$$

β΄) Ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρ. 20 φρ. χρυσᾶ, ἐν Ἀθήναις κοστίζει $132 \times \dfrac{24}{100}$ δρ. ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρ. 1 φρ 15 χρυσᾶ, πόσον κοστίζει ἐν Ἀθήναις; Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ μέτρον κοστίζει ἐν Ἀθήναις $132 \times \dfrac{24}{100} \times \dfrac{1{,}15}{20}$ δρ.

γ΄) Ἡ ἀξία τοῦ μέτρου ἐν Ἀθήναις εἶναι $132 \times \dfrac{24}{100} \times \dfrac{1{,}15}{20}$ δραχμ. ποία εἶναι ἡ ἀξία τῶν 0,648 τοῦ μέτρου (ἤτοι τοῦ μικροῦ πήχεως);

Λύοντες καὶ τοῦτο, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ μικροῦ πήχεως ἐν Ἀθήναις εἶναι $132 \times \dfrac{24}{100} \times \dfrac{1{,}15}{20} \times \dfrac{648}{1000}$ ἤτοι 1δρ., 18. . . .

282. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὴν λύσιν ταύτην πρὸς τὰ δεδομένα ὡς εἶναι κατατεταγμένα, συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸ γράμμα, δι' οὗ παρίσταται ὁ ἄγνωστος, δεξιᾷ δ' αὐτοῦ τὸν ἰσοδύναμόν του ἀριθμόν. Ὑπ' αὐτοὺς γράφομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πάντα τὰ ζεύγη τῶν ἰσοδυνάμων ἀριθμῶν, ἕκαστον εἰς ἕνα στίχον καὶ οὕτως, ὥστε ἕκαστος στίχος νὰ ἀρχίζῃ μὲ τὸ εἶδος, εἰς τὸ ὁποῖον τελειώνει ὁ προηγούμενος αὐτοῦ· πρέπει δὲ τότε (ἂν τὰ δεδομένα εἶναι ἐπαρκῆ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος) νὰ συμβαίνῃ, ὥστε ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς τοῦ τελευταίου στίχου νὰ εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὸν ἄγνωστον.

Τούτων γενομένων, *πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς πρὸς τὰ δεξιᾷ τοῦ ἀγνώστου εὑρισκομένους ἀριθμοὺς καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ὑποκάτω τοῦ ἀγνώστου εὑρισκομένων ἀριθμῶν· τὸ πηλίκον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

Συνήθως ὁ μεσάζων μεταξὺ πωλητοῦ καὶ ἀγοραστοῦ καὶ εὐκολύνων τὴν πώλησιν, λαμβάνει, ὡς ἀμοιβὴν ὡρισμένον τι μέρος τῆς ἀξίας τοῦ πράγματος (λόγου χάριν ἓν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, ἓν τέταρτον ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, ἥμισυ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν κλπ. κλπ.). Ἐπίσης ὁ εἰσπράττων χρήματα τοῦ Δημοσίου ἢ καὶ ἰδιωτῶν, λαμβάνει ποσοστόν τι· ἐπίσης οἱ ὑπάλληλοι τῶν καταστημάτων λαμβάνουσι ποσοστόν τι τῶν ὑπ' αὐτῶν πωλουμένων κτλ. κτλ.

Τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν οὐδόλως διαφέρουσι τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων:

1) Μεσίτης τις ἐπώλησεν οἰκίαν ἀντὶ 42000 δρ. λαμβάνει δὲ διὰ τὴν μεσιτείαν του $1/_2$ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν (ὅπερ γράφεται $1/_2\,^0/_0$) ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς οἰκίας· πόσα θὰ λάβῃ;

$$\text{ἐκ τῶν } 100 \text{ λαμβάνει } \frac{1}{2} \text{ δρ.}$$

$$\text{ἐκ τῶν } 42000 \quad \text{»} \quad \chi$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ ποσὸν ὅπερ λαμβάνει εἶναι ἀνάλογον τῆς ἀξίας τοῦ πωληθέντος πράγματος, ἔπεται

$$\chi = \frac{1}{2}\,\frac{42000}{100} = \frac{1}{2}.\,420 = 210 \text{ δρ.}$$

2) Εἰσπράκτωρ τις τοῦ Δημοσίου εἰσέπραξεν φόρους 95450 δρ. ἐὰν λαμβάνῃ $\frac{1}{4}$ ἐπὶ τοῖς 100, πόσα δικαιοῦται νὰ λάβῃ ἐκ τῶν εἰσπραχθέντων χρημάτων;

$$\text{ἐκ τῶν } 100 \text{ λαμβάνει } \frac{1}{4}$$

$$\text{ἐκ τῶν } 95450 \quad » \quad \chi$$

ὅθεν
$$\chi = \frac{1}{4}\,\frac{95450}{100} = 238{,}62 \ldots$$

Σημειωτέον δέ, ὅτι τὰ προβλήματα ταῦτα εἶναι προβλήματα ἁπλοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἰδὲ σελ. 142)· διότι ὁ λαμβάνων λόγου χάριν ἐν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, λαμβάνει τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ ποσοῦ, ὁ λαμβάνων $\frac{1}{4}$ ἐπὶ τοῖς χιλίοις, λαμβάνει τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ $\frac{1}{1000}$ ἤτοι τὸ $\frac{1}{4000}$ τοῦ ποσοῦ καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

283. *Τόκος* λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει, ὅστις δανείζει χρήματα.

Ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος λέγεται *ἐπιτόκιον*· ὁρίζεται δὲ τοῦτο διὰ συμφωνίας ἰδιαιτέρας μεταξὺ τοῦ δανείζοντος καὶ τοῦ δανειζομένου.

Τὸ ποσὸν τῶν δανειζομένων χρημάτων λέγεται *κεφάλαιον*.

Ὁ τόκος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ κεφαλαίου καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτοκίου, ἔτι δὲ καὶ ἐκ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν διαρκεῖ τὸ δάνειον.

Ὁ τόκος εἶναι ἢ *ἁπλοῦς* ἢ *σύνθετος*· καὶ ἁπλοῦς μὲν λέγεται ὁ τόκος, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου· σύνθετος δέ, ὅταν ὁ τόκος ἑκάστου ἔτους δίδῃ καὶ αὐτὸς τόκον εἰς τὰ ἑπόμενα ἔτη· ὥστε εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐκ τῆς προσθέσεως προκύπτον ποσὸν λαμβάνεται ὡς κεφάλαιον διὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος.

Ἐάν τις π. χ. δανεισθῇ 500 δρ. μὲ ἐπιτόκιον 10°/₀ καὶ μὲ τόκον ἁπλοῦν, εἰς μὲν τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ χρεωστῇ 550 δρ. (500 κεφάλαιον καὶ 50 τόκον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους 600 (500 κεφάλαιον καὶ 100 τόκον), εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου 650, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἀλλ' ἐὰν ὁ τόκος εἶναι σύνθετος, εἰς μὲν τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ χρεωστῇ 550 δρ. (500 κεφάλαιον καὶ 50 τόκον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου 605 δρ. (550 κεφ. καὶ 55 τόκ.), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ τρίτου 665,50 (605 κεφ. καὶ 60,50 τόκ.)· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁ σύνθετος τόκος λέγεται καὶ *ἀνατοκισμός*, τὸ δὲ ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται, ὅτι *ἀνατοκίζεται*.

Ἐνταῦθα διαλαμβάνομεν μόνον περὶ τοῦ ἁπλοῦ τόκου.

284. Εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου παρουσιάζονται 4 ποσά·

1) τὸ κεφάλαιον,

2) ὁ τόκος,

3) τὸ ἐπιτόκιον,

4) ὁ χρόνος, ἤτοι ἡ διάρκεια τοῦ δανείου.

Τὰ ποσὰ ταῦτα εἶναι ἀνὰ δύο, ἢ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα.

Ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων.

Διότι, εἶναι φανερόν, ὅτι διπλάσιον κεφάλαιον φέρει διπλάσιον τόκον, τριπλάσιον κεφάλαιον, τριπλάσιον τόκον (ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον)· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὡσαύτως εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. χρόνον, ὁ τόκος γίνεται διπλάσιος, τριπλάσιος κτλ. (τῶν λοιπῶν μενόντων ἀμεταβλήτων).

Ἐπίσης, διπλασιαζομένου τοῦ ἐπιτοκίου, διπλασιάζεται καὶ ὁ τόκος (τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου μενόντων ἀμεταβλήτων), κτλ.

Τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶναι ἀντίστροφα· διότι, ἂν π. χ. κεφάλαιον 500 δρ. χρειάζηται δύο ἔτη διὰ νὰ φέρῃ τόκον 50 δραχ. (πρὸς 5 τοῖς ἑκατόν), διπλάσιον κεφάλαιον δανειζόμενον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον 5, διὰ νὰ φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον, χρειάζεται μόνον ἓν ἔτος· κεφάλαιον δὲ 250 δραχ. δανειζόμενον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον, ἵνα φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον, χρειάζεται 4 ἔτη.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου θὰ λύωνται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν (ἁπλῆν ἢ σύνθετον).

285. Εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου δίδονται τρία ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποσῶν καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον δύναται νὰ εἶναι ἢ ὁ τόκος, ἢ τὸ κεφάλαιον, ἢ τὸ ἐπιτόκιον, ἢ ὁ χρόνος, συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου εἶναι τεσσάρων εἰδῶν. Ἐν τοῖς ἑπομένοις λύομεν ἓν ἐξ ἑκάστου εἴδους.

Πρόβλημα 1ον (ἄγνωστον ὁ τόκος).

Πόσον τόκον φέρουσιν 7850 δραχμαὶ εἰς 3 ἔτη πρὸς 7 τοῖς ἑκατόν; (ἀντὶ 7 τοῖς ἑκατὸν γράφεται συντομίας χάριν 7 %).

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς:

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	7
7850	3	χ

ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ τόκος χ εἶναι ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον· ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν κανόνα τοῦ ἐδ. 272, εὑρίσκομεν:

$$\chi=7\times\frac{7850}{100}\times\frac{3}{1}=\frac{7\times7850\times3}{100},\ \text{ἢ}\ \chi=1648{,}50\ \text{δρ.}$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ ἀγνώστου χ συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

286. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα (ἤτοι τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον), καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν δι' 100.*

Πρόβλημα 2ον (ἄγνωστον τὸ κεφάλαιον).

Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν ἐπὶ $2\frac{1}{2}$ ἔτη πρὸς 9 % ἔφερε τόκον 820 δραχμάς;

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς:

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	9
χ	$2\frac{1}{2}$	820

ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ κεφάλαιον πρὸς μὲν τὸν τόκον εἶναι ἀνάλογον, πρὸς δὲ τὸν χρόνον ἀντίστροφον· ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, εὑρίσκομεν:

$$\chi=100\times\frac{1}{2\frac{1}{2}}\times\frac{820}{9}=\frac{820\times100}{9\times2\frac{1}{2}}.$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ ἀγνώστου κεφαλαίου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

287. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων (ἐπιτοκίου καὶ χρόνου).*

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ἐὰν διπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος, ὅπερ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου χ, εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{1640 \times 100}{9 \times 5} = \frac{1640 \times 20}{9} = 3644^{\text{δρ.}},\ 44\frac{4}{9}.$$

Πρόβλημα 3ον (ἄγνωστον ὁ χρόνος).

Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 25800 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς $8\frac{1}{2}$ *%₀ θὰ φέρῃ τόκον 2590δρ.,60;*

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον:

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	8.50
25800	χ	2590,60

Ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ χρόνος εἶναι ἀνάλογος μὲν τοῦ τόκου, ἀντίστροφος δὲ τοῦ κεφαλαίου· ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (ἐδ. 278) εὑρίσκομεν:

$$\chi = 1 \times \frac{100}{25800} \times \frac{2590,60}{8.50} = \frac{100 \times 2590,60}{8,50 \times 25800}.$$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

288. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον* (εἰς ἔτη), *πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων* (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{100 \times 259060}{850 \times 25800} = \frac{25906}{85 \times 258}$$

ἤτοι $\chi = 1^{\text{ἔτ.}}\ 2^{\text{μῆν.}},\ 5^{\text{ἡμέρ.}}\ \frac{591}{2193}.$

Πρόβλημα 4ον (ἄγνωστον τὸ ἐπιτόκιον).

Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 3058 δραχμῶν καὶ ἔφερεν εἰς 5 ἔτη καὶ 4 μῆνας τόκον 820 δρ.;

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον ὡς ἑξῆς:

κεφ.	ἔτη	τόκος
3058	$5\frac{1}{3}$	820
100	1	χ

ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ τόκος χ (τῶν 100 δρ. εἰς 1 ἔτος) εἶναι ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον· ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα, εὑρίσκομεν:

$$\chi = 820 \times \frac{100}{3058} \times \frac{1}{5\frac{1}{3}} = \frac{820 \times 100}{3058 \times (5\frac{1}{3})}$$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

289. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων (κεφαλαίου καὶ χρόνου).*

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3 ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, ὅπερ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ, εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{820 \times 100 \times 3}{3058 \times 16} = \frac{410 \times 100 \times 3}{3058 \times 8} = \frac{123000}{24464},$$ ἤτοι $\chi = 5{,}02\,{}^0/_0$ περίπου.

Παρατήρησις.

290. Οἱ τέσσαρες εὑρεθέντες κανόνες περὶ τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου περιλαμβάνονται εἰς ἕνα, τὸν ἑξῆς.

Ἂν μὲν ζητῆται ὁ τόκος, πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100· ἂν δὲ ζητῆται ἄλλο τι, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δοθέντων.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Πόσον τόκον φέρουσιν 1527 δραχμαὶ καὶ 80 λεπτὰ εἰς 8 μῆνας πρὸς 7 $^0/_0$; (Ἀπ. 71,29 . . .).

2) Δανείσας τις χρήματα πρὸς $7\frac{1}{2}$ $^0/_0$ ἔλαβε μετὰ 3 ἔτη τόκον 270 δραχμάς· πόσα ἐδάνεισεν; (Ἀπ. 1200).

3) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι τοκιζόμενον πρὸς 8 $^0/_0$ διπλασιάζεται; (γίνεται δηλαδὴ ὁ τόκος ἴσος μὲ τὸ κεφάλαιον). (Ἀπ. 12ἔτ. 6μ.).

4) Διὰ νὰ ἀσφαλίσῃ τις τὸ φορτίον ἑνὸς πλοίου, πρέπει νὰ πληρώσῃ $^1/_2$ τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ φορτίου, ἥτις εἶναι 85000 δραχμαί· πόσον θὰ πληρώσῃ δι' ἀσφάλιστρα; (Ἀπ. 425δρ.).

5) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 25000 δραχμῶν· τὴν οἰκίαν ταύτην ἐνοικιάζει 180 δραχμὰς κατὰ μῆνα· ἐξοδεύει ὅμως κατ' ἔτος δι' ἐπισκευάς, ὕδωρ, φόρον κτλ. δραχμὰς 300· πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει ἐκ τῶν χρημάτων του κατ' ἔτος; (Ἀπ. 7,44 $^0/_0$).

6) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 7500 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 90 λεπτὰ τὴν

ὀκᾶν· ἐπώλησε δ' αὐτὸ μετὰ 3 μῆνας πρὸς 1,10· πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος ἐκέρδησεν; ('Απ. $88\frac{8}{9}$ %).

7) Σιτέμπορός τις ἠγόρασε σῖτον πρὸς 36 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· μετὰ 7 μῆνας θέλει νὰ πωλήσῃ αὐτὸν καὶ νὰ κερδίσῃ ἐπὶ τῶν χρημάτων του 10 %· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν;

('Απ. 38 λεπτὰ $\frac{1}{10}$ τοῦ λεπτοῦ).

8) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 72000 δραχμῶν καὶ κτῆμα ἀντὶ 36800 δραχμῶν· καὶ ἐκ μὲν τῆς οἰκίας ἀπολαμβάνει ἐτησίως 4500 δραχμάς· ἐκ δὲ τοῦ κτήματος 1200· πόσον τοῖς ἑκατὸν ἀπολαμβάνει ἐκ τῶν δύο τούτων ὁμοῦ; ('Απ. 5,24 . . .).

9) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ τόκος τοῦ κεφαλαίου κ εἰς η ἡμέρας εἶναι:

$\frac{\kappa.\ \eta.}{6000}$, ἐὰν τοκίζηται πρὸς 6 %,

$\frac{\kappa.\ \eta.}{8000}$ » » » $4\frac{1}{2}$ %,

$\frac{\kappa.\ \eta.}{7200}$ » » » 5 %.

ΠΕΡΙ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

291. *Ὑφαίρεσις* λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐκπίπτεται ἐξ ἑνὸς χρέους, ὅταν τὸ χρέος τοῦτο πληρώνηται πρὸ τῆς διορίας του.

Ὑπάρχουσι δὲ δύο εἰδῶν ὑφαιρέσεις, ἡ *ἐξωτερικὴ* καὶ ἡ *ἐσωτερική*.

α΄. Ὑφαίρεσις ἐξωτερική.

292. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος ὅλου τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ χρεωστικὸν γραμμάτιον, διὰ τὸν χρόνον, ὅστις θὰ περάσῃ ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ. Ἐπομένως τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως δὲν διαφέρουσι ποσῶς ἀπὸ τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου.

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἑξῆς:

Πρόβλημα.

Γραμμάτιον 2500 δραχμῶν προεξοφλεῖται 8 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς $7\frac{1}{2}$ %· πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ;

Τὸ ζητούμενον εἶναι ὁ τόκος τῶν 2500 δραχμῶν εἰς 8 μῆνας, πρὸς $7\frac{1}{2}$ %· ὁ τόκος οὗτος εἶναι

$$\frac{2500\times(7\frac{1}{2})\times\frac{8}{12}}{100} \text{ ἢ } 25\times\frac{2}{3}\times\left(7\frac{1}{2}\right) \text{ ἢ } 25\times\frac{1}{3}\times15,$$

ἤτοι 25×5 ἢ 125 δραχ.

ὥστε τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου (ἤτοι αἱ 2500 δραχ.) θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ 125 δραχ., ἐπομένως θὰ πληρωθῇ μὲ μόνον 2375 δραχμάς.

Παρατήρησις.

Ἐκ τῶν 2500 δραχμῶν πληρώνονται μόνον αἱ 2375, καὶ ὅμως κρατεῖται ὁ τόκος τῶν 2500. Ἐκ τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις δὲν εἶναι δικαία. Ἀλλ' οἱ ἔμποροι μεταχειρίζονται αὐτὴν διὰ τὴν εὐκολίαν· δικαιολογεῖται δὲ διὰ τῆς ἀμοιβαιότητος.

Σημ. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως παρεμβαίνουσι τὰ ἑξῆς 4 ποσά: τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου, ὁ χρόνος, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ ὑφαίρεσις· τὰ δὲ 4 προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται ἓν ἐκ τούτων ὅταν δοθῶσι τὰ ἄλλα τρία, οὐδόλως διαφέρουσιν ἀπὸ τῶν 4 προβλημάτων τοῦ τόκου.

β'. Ὑφαίρεσις ἐσωτερική

293. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς ποσότητος τὴν ὁποίαν πληρώνει, ὅστις προεξοφλεῖ τὸ γραμμάτιον, διὰ τὸν χρόνον, ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν λήγει τὸ γραμμάτιον.

Διὰ νὰ μάθωμεν, πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις, ἂς λάβωμεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

Γραμμάτιον 1200 δραχμῶν προεξοφλεῖται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 %, πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;

Ἡ ζητουμένη ὑφαίρεσις δὲν εἶναι τώρα ὁ τόκος τῶν 1200 δραχμῶν, (εἰς τρεῖς μῆνας), ἀλλ' ὀλιγοτέρων, δηλαδὴ ἐκείνων, τὰς ὁποίας θὰ πληρώσῃ ὁ ἐξαργυρῶν τὸ γραμμάτιον· ὥστε αἱ 1200 δραχ. θὰ ἀποτελῶνται ἐκ τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον πληρώνει ὁ ἐξαργυρῶν τὸ γραμμάτιον, καὶ ἐκ τοῦ τόκου τοῦ ποσοῦ τούτου διὰ 3 μῆνας πρὸς 8 %.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. εἰς 3 μῆνας πρὸς 8 %· ὁ τόκος οὗτος εἶναι

$$\frac{100\times\frac{3}{12}\times8}{100} \text{ ἢ } 2 \text{ δραχμαί.}$$

ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

100 δραχμαὶ τοκιζόμεναι σήμερον γίνονται μετὰ 3 μῆνας 102· ἂν λοιπὸν ἔχῃ τις νὰ λάβῃ μετὰ 3 μῆνας 102 δραχμὰς καὶ πωλήσῃ σήμερον τὸ γραμμάτιόν του, θὰ λάβῃ μόνον 100 καὶ θὰ χάσῃ τὰς 2 (ὅστις εἶναι ὁ τόκος τῶν 100)·

(ὥστε εἰς 102 δραχμὰς γίνεται ὑφαίρεσις 2 δρ.

εἰς μίαν δραχμὴν » » $\frac{2}{102}$,

καὶ εἰς 1200 δραχμὰς θὰ γίνῃ ὑφαίρεσις $\frac{2}{102}\times 1200$ ἢ $\frac{1200}{51}$

ἤτοι $23^{\delta\rho.}\ 52^{\lambda.}\ \frac{16}{17}$.

Ἐπειδὴ ἡ ὑφαίρεσις καὶ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου εἶναι ἀνάλογα (διότι εἰς διπλάσιον ποσὸν γίνεται προδήλως διπλασία ὑφαίρεσις, εἰς τριπλάσιον, τριπλασία κτλ.) δυνάμεθα, ἀφοῦ εὕρωμεν, ὅτι εἰς 102 δραχμάς, γίνεται ὑφαίρεσις 2, νὰ εὕρωμεν τὴν ὑφαίρεσιν τῶν 1200 δραχμῶν καὶ διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν

$$\begin{array}{cc} \text{ποσὸν} & \text{ὑφαιρ.} \\ 102 & 2 \\ \hline 1200 & \chi \end{array}$$

ὅθεν $$\chi = 2\times\frac{1200}{102} = \frac{1200}{51}.$$

294. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν, πολλαπλασιάζομεν τὸ εἰς τὸ γραμμάτιον περιεχόμενον ποσὸν ἐπὶ τὸν τόκον τῶν ἑκατὸν δραχμῶν διὰ τὸν χρόνον, ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τόκου τούτου καὶ τοῦ 100.

295. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνεται σήμερον διὰ τὸ γραμμάτιον, λέγεται *παροῦσα ἀξία* αὐτοῦ. Εὑρίσκεται δὲ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὅλου ποσοῦ τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ περιεχομένου, ἀφαιρεθῇ ἡ ὑφαίρεσις.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου τῶν 1200 δραχμῶν εἶναι $1200 - 23^{\delta\rho.}\ 52^{\lambda.}\ \frac{16}{17}$, τουτέστι $1176^{\delta\rho.}\ 47^{\lambda.}\ \frac{1}{17}$.

Δύναται δὲ νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως ἡ παροῦσα ἀξία ὡς ἑξῆς·

102 δραχμαὶ (πληρωτέαι μετὰ 3 μῆνας πρὸς 8 %) ἔχουσι παροῦσαν ἀξίαν 100· πόση εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία 1200 δραχμῶν; (πληρωτέων ἐπίσης μετὰ 3 μῆνας πρὸς 8 %).

Ἡ παροῦσα ἀξία καὶ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου εἶναι προφανῶς ἀνάλογα· ὅθεν

$$\overset{\text{παροῦσα ἀξία}}{\frac{100}{\chi}} \qquad \overset{\text{ποσόν}}{\frac{102}{1200}} \qquad \text{καὶ } \chi = 100 \times \frac{1200}{102} = \frac{1200 \times 100}{102}.$$

εἶναι δὲ εὔκολον νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ παροῦσα ἀξία, τὴν ὁποίαν οὕτως εὑρίσκομεν, καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις συναποτελοῦσι τὸ ὅλον ποσὸν τοῦ γραμματίου, ἤτοι τὰς 1200 δραχμάς.

Σημείωσις. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι μὲν ἀνάλογος τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ περιεχομένου ποσοῦ, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀνάλογος οὔτε τοῦ χρόνου οὔτε τοῦ ἐπιτοκίου. Διότι, διπλασιαζομένου τοῦ χρόνου, ἡ ὑφαίρεσις δὲν γίνεται διπλασία, ἀλλὰ κατά τι μικροτέρα ἢ διπλασία· ὁμοίως, διπλασιαζομένου τοῦ ἐπιτοκίου, ἡ ὑφαίρεσις γίνεται μεγαλυτέρα, ἀλλ' ὄχι καὶ διπλασία. Τῷ ὄντι εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διὰ τοὺς 3 μῆνας ἡ ὑφαίρεσις εἶναι $\frac{1200 \times 2}{102}$· διὰ δὲ 6 μῆνας θὰ εἶναι $\frac{1200 \times 4}{104}$. τοῦτο δ' εἶναι ὀλιγώτερον τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου· διότι τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{1200 \times 4}{102}$.

296. Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι γνωστὴ ἡ ὑφαίρεσις καὶ ζητεῖται ὁ χρόνος ἢ τὸ ἐπιτόκιον ἢ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου, ἀνάγονται εὐκόλως εἰς προβλήματα τόκου· διότι ἡ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας διὰ τὸν χρόνον, ὅστις μεσολαβεῖ ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Ἐὰν π. χ. δοθῇ τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Γραμμάτιόν τι ἐξωφλήθη 9 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 % καὶ ἔπαθεν ὑφαίρεσιν 70 δραχμῶν· πόσον ἦτο τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου;

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον, ποῖον κεφάλαιον εἰς 9 μῆνας πρὸς 8 % φέρει τόκον 70 δραχμάς· τὸ κεφάλαιον τοῦτο θὰ εἶναι τὸ ποσόν, μὲ τὸ ὁποῖον ἐπληρώθη τὸ γραμμάτιον, ἤτοι ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ, ἐὰν δὲ εἰς αὐτὴν προστεθῇ ἡ ὑφαίρεσις, θὰ προκύψῃ τὸ ὅλον ποσὸν τοῦ γραμματίου.

Ἐὰν δὲ δοθῇ τὸ ἑξῆς:

Εἰς γραμμάτιον 1500 δραχμῶν ἐξοφληθὲν 16 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἔγινεν ὑφαίρεσις 120 δραχμῶν· πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔγινεν ἡ ὑφαίρεσις;

σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Αἱ 120 δραχμαὶ εἶναι ὁ τόκος τῶν 1500—120, ἤτοι τῶν 1380 δραχμῶν (δι' ὧν ἐξωφλήθη τὸ γραμμάτιον) εἰς 16 μῆνας· ζητεῖται δὲ τὸ ἐπιτόκιον.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου 1872,25 δρ. προεξοφλουμένου 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 8 %.

('Απ. 48,63 . . .).

2) Γραμμάτιον 2500 δραχμῶν προεξωφλήθη 14 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ ἀντὶ δραχμῶν 2150· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις; ('Απ. 12 %).

3) Πωλήσας τις οἰκίαν ἀντὶ 32700 δραχμῶν, ἐκέρδησεν 9 % ἐπὶ τοῦ ποσοῦ, δι' οὗ εἶχεν ἀγοράση αὐτήν· πόσον τὴν εἶχεν ἀγοράση;

('Απ. 30000).

4) Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον 1743 δραχμῶν, ὅπερ προεξοφλεῖται πρὸς 7 % διὰ 1400 δραχμῶν;

$\left(\text{'Απ. } 3^{\text{ἔτ.}} \frac{1}{2} \right)$.

5) Πόσων δραχμῶν εἶναι τὸ γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη πρὸς 8 % διὰ 3890 δραχμῶν $4\frac{1}{2}$ μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ;

('Απ. 4006,70).

6) Ἔχει τις δύο γραμμάτια τὸ μὲν ἓν 7500 δραχμῶν πληρωτέον μετὰ 8 μῆνας, τὸ δὲ ἄλλο 4800 πληρωτέον μετὰ 15 μῆνας· ἐὰν θέλῃ νὰ ἀνταλλάξῃ αὐτὰ ἀντὶ ἑνὸς μόνου γραμματίου πληρωτέου μετὰ ἓν ἔτος, πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8 %; $\left(\text{'Απ. } 12405 \frac{15}{17} \right)$.

7) Ἔμπορος ἠγόρασε παρ' ἄλλου πράγματα ἀξίας $3816^{\text{δρ}}$ μὴ δυνάμενος δὲ νὰ πληρώσῃ ἀμέσως, θέλει νὰ ἐκδώσῃ γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ 5 μῆνας μὲ ἐπιτόκιον 8 %· πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο; ('Απ. 3943,20).

Μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.

297. *Νὰ μερισθῇ ἀριθμός*, οἷον ὁ 180, *εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν*, οἷον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, σημαίνει νὰ γίνῃ τόσα μέρη, ὅσοι εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ ἀνάλογα πρὸς αὐτούς, ἤτοι τὰ μέρη ταῦτα νὰ γίνωνται ἴσα πρὸς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπί τινα ἀριθμόν.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμός, ὅστις πρόκειται νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, ἦτο ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $2+3+5$, ἤτοι 10, τὰ μέρη θὰ ἦσαν προφανῶς 2, 3, 5· ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο διπλάσιος, ἤτοι 20, τὰ μέρη θὰ ἦσαν διπλάσια, 4, 6, 10· ἂν ἦτο τριπλάσιος, ἤτοι 30, τὰ μέρη θὰ ἦσαν τριπλάσια, 6, 9, 15· καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἕκαστον *μέρος εἶναι ἀνάλογον τοῦ μεριστέου ἀριθμοῦ*· ἑπομένως δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, προτείνοντες αὐτὸ ὡς ἑξῆς.

Ὅταν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι 10, τὸ πρῶτον μέρος εἶναι 2, ὅταν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι 180, ποῖον θὰ εἶναι τὸ πρῶτον μέρος;

$$\begin{array}{cc} \text{μεριστέος ἀριθμός} & \text{μέρος α'} \\ 10 & 2 \\ 180 & \chi \end{array} \qquad \text{ἄρα } \chi = 2 \times \frac{180}{10} \text{ ἤτοι } \chi = 36.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὰ ἄλλα μέρη· καὶ τὰ τρία μέρη εἶναι

$$\frac{180}{10} \times 2, \qquad \frac{180}{10} \times 3, \qquad \frac{180}{10} \times 5.$$

298. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν κανόνα.

Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐφ' ἕκαστον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ τὰ γινόμενα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζομεν, δύνανται νὰ πολλαπλασιασθῶσι πάντες ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, χωρὶς νὰ βλαφθῶσι τὰ μέρη· ἢ καὶ νὰ διαιρεθῶσι πάντες διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ. Διότι, ἂν π. χ. πρόκειται νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν τινα Κ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, τὰ μέρη θὰ εἶναι

$$K \times \frac{2}{10}, \qquad K \times \frac{3}{10}, \qquad K \times \frac{5}{10}, \qquad 10 = 2+3+5.$$

Ἂν δὲ ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5 λάβωμεν τοὺς 2×8, 3×8, 5×8, τὰ μέρη θὰ εἶναι

$$K\times\frac{2\times8}{10\times8},\quad K\times\frac{3\times8}{10\times8},\quad K\times\frac{5\times8}{10\times8}.$$

διότι τὸ ἄθροισμα $2\times8+3\times8+5\times8$ εἶναι 10×8· ὥστε τὰ μέρη ἔμειναν τὰ αὐτά.

Ὁμοίως καὶ ἡ διαίρεσις τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5 διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ δὲν βλάπτει τὰ μέρη.

Διὰ ταῦτα, ἐὰν ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν τινα ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $2\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, πολλαπλασιάζομεν τούτους ἐπὶ 18 (διὰ νὰ γίνωσιν ἀκέραιοι) καὶ γίνονται 45, 102, 8· ἔπειτα μερίζομεν ἀναλόγως τῶν 45, 102, 8· ὅπερ εἶναι εὐκολώτερον. Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν ἀναλόγως τῶν 100, 200, 500, μερίζομεν ἀναλόγως τῶν 1, 2, 5, ὅπερ εἶναι εὐκολώτερον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

299. *Προβλήματα ἑταιρείας λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ἐπιχειρήσεώς τινος εἰς ἐκείνους, οἵτινες τὴν ἀνέλαβον.*

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀνάγονται εἰς τὸν μερισμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα· γίνεται δὲ τοῦτο φανερὸν ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

Πρόβλημα α'.

Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρείαν διά τινα ἐπιχείρησιν καὶ κατέβαλον τὰ ἑξῆς ποσά. Ὁ πρῶτος 7500 δραχμάς, ὁ δεύτερος 12000 δρ. καὶ ὁ τρίτος 22500. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδισαν 2800 δραχμάς· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δραχμῆς (δηλαδὴ τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον θὰ ἐλάμβανέ τις, ἂν κατέβαλλε 1 δραχμὴν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν), ὁ πρῶτος ἐπειδὴ κατέβαλεν 7500 δραχμάς, θὰ λάβῃ $7500\times\delta$, ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ $12000\times\delta$ καὶ ὁ τρίτος $22500\times\delta$· τὰ τρία δὲ ταῦτα

$$7500\times\delta,\qquad 12000\times\delta,\qquad 22500\times\delta$$

θὰ συναποτελῶσι τὸ ὅλον κέρδος, ἤτοι τὰς 2800 δρ.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ λύσωμεν τὸ προκείμενον πρόβλημα, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 2800 δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν καταβολῶν 7500, 12000, 22500· ἐκτελοῦντες τὸν μερισμὸν τοῦτον, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἐδ. 298, εὑρίσκομεν τὰ μέρη:

$$\frac{2800\times7500}{42000},\quad \frac{2800\times12000}{42000},\quad \frac{2800\times22500}{42000}$$

ἢ $\frac{2\times750}{3}$, $\frac{2\times1200}{3}$, $\frac{2\times2250}{3}$, ἤτοι 500, 800, 1500.

Πρόβλημα β΄.

Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησίν τινα μὲ 8000 δραχμάς· μετὰ πέντε δὲ μῆνας προσέλαβε συνέταιρον, ὅστις καὶ οὗτος κατέβαλεν 8000 δραχμάς· δέκα δὲ μῆνας μετὰ ταῦτα προσέλαβε καὶ τρίτον συναίτερον, ὅστις κατέβαλε καὶ αὐτὸς τὸ αὐτὸ ποσὸν 8000 δρ. Τρία ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εὑρέθη, ὅτι ἐκέρδησαν 3800 δραχμάς. Πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο αἱ μὲν καταβολαὶ εἶναι αἱ αὐταί· διότι ἕκαστος τῶν συνεταίρων κατέβαλεν 8000 δραχμάς· ἀλλ' οἱ χρόνοι, καθ' οὓς αἱ καταβολαὶ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, εἶναι διάφοροι· διότι τοῦ μὲν πρώτου τὰ χρήματα ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 36 μῆνας, τοῦ δὲ δευτέρου 31, τοῦ δὲ τρίτου 21. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὸ κέρδος τῶν 800 εἰς ἕνα μῆνα, ὁ μὲν πρῶτος θὰ λάβῃ $36\times\delta$, ὁ δὲ δεύτερος $31\times\delta$, ὁ δὲ τρίτος $21\times\delta$· τὰ τρία δὲ ταῦτα μερίδια

$$36\times\delta,\qquad 31\times\delta,\qquad 21\times\delta$$

θὰ συναποτελῶσι τὸ ὅλον κέρδος, ἤτοι τὰς 3800 δραχμάς.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 3800 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν χρόνων 36, 31, 21, καθ' οὓς αἱ καταβολαὶ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν· ἐπομένως τὰ μερίδια εἶναι

$$3800\times\frac{36}{88},\qquad 3800\times\frac{31}{88},\qquad 3800\times\frac{21}{88},$$

ἤτοι $1554^{\delta}\,\frac{6}{11}$, $1338\,\frac{7}{11}$, $906\,\frac{9}{11}$.

Πρόβλημα γ΄.

Ἄνθρωπός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησίν τινα μὲ 2000 δραχμάς· μετὰ ἓν ἔτος προσέλαβε συναίτερον, ὅστις κατέβαλεν 7000 δρ., ὀκτὼ δὲ μῆνας *μετὰ τοῦτον προσέλαβε καὶ τρίτον συνέταιρον, ὅστις κατέβαλεν 6000 δραχμάς· τρία δὲ ἔτη μετὰ τὴν πρόσληψιν τούτου εὑρέθη, ὅτι ἐκέρδησαν 18000 δραχμάς· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;*

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων διαφέρουσι καὶ οἱ χρόνοι, καθ' οὓς ταῦτα ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.

Ὁ πρῶτος κατέβαλε 2000 δρ. διὰ 56 μῆνας.

Ὁ δεύτερος κατέβαλε 7000 δρ. διὰ 44 μῆνας.

Ὁ τρίτος κατέβαλε 6000 δρ. διὰ 36 μῆνας.

Λύσις. Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δρ. εἰς ἕνα μῆνα, τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δρ. εἰς 56 μῆνας, θὰ εἶναι $56 \times \delta$, καὶ τὸ κέρδος τῶν 2000 δρ. εἰς 56 μῆνας, θὰ εἶναι $56 \times 2000 \times \delta$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ κέρδος τῶν 7000 δρ. εἰς 44 μῆνας εἶναι $44 \times 7000 \times \delta$, καὶ τὸ κέρδος τῶν 6000 δρ. εἰς 36 μῆνας εἶναι $36 \times 6000 \times \delta$. Ἐπομένως τὰ μερίδια τῶν συναιτέρων εἶναι κατὰ σειράν:

τοῦ α'	$56 \times 2000 \times \delta$,
τοῦ β'	$44 \times 7000 \times \delta$,
τοῦ γ'	$36 \times 6000 \times \delta$,

καὶ τὰ τρία ταῦτα μερίδια θὰ συναποτελέσωσι τὸ ὅλον κέρδος, ἤτοι τὰς 18000 δραχμάς.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀρ-*κεῖ νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 18000 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν* 56×2000, 44×7000, 36×6000, *ἤτοι τῶν γινομένων, ἅτινα εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸ κεφάλαιον ἑκάστου ἐπὶ τὸν χρόνον καθ' ὃν ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.*

Διαιροῦντες τοὺς ἀριθμοὺς τούτους διὰ 1000, ἔχομεν νὰ μερίσωμεν τὸν 18000 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 56×2, 44×7, 36×6 καὶ ἐκτελοῦντες τὸν μερισμόν, εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς μερίδια:

$$\alpha'\colon 3169\frac{43}{53}, \qquad \beta'\colon 8716\frac{52}{53}, \qquad \gamma'\colon 6113\frac{11}{53}.$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς πυρίτιδος λαμβάνονται συνήθως 16 μέρη νίτρου, 3 μέρη ἄνθρακος καὶ 2 μέρη θείου· πόσαι ὀκάδες ἐξ ἑκάστης τῶν ὑλῶν τούτων χρειάζονται διὰ νὰ κατασκευασθῶσιν 840 ὀκ. πυρίτιδος; (Ἀπ. 640 ὀκ. νίτρου, 120 ὀκ. ἄνθρακος καὶ 80 ὀκ. θείου).

2) Ἔμπορος ἐχρεωκόπησεν ἔχων μὲν 12000 δρ., ὀφείλων δὲ εἰς μὲν τὸν Α 5800 δρ., εἰς δὲ τὸν Β 7600, εἰς δὲ τὸν Γ 9400· πόσας ἐκ τῶν 12000 πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῶν ὀφειλομένων εἰς αὐτόν;

$\left(\text{Ἀπ. ὁ Α } 3052\frac{36}{57}, \text{ ὁ Β } 4000, \text{ ὁ Γ } 4947\frac{21}{57}\right).$

3) Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησίν τινα μὲ κεφάλαιον 10000 δρ. μετὰ 8 μῆνας προσέλαβε καὶ συναίτερον, ὅστις κατέβαλεν 6000 δρ.· δύο δὲ ἔτη μετὰ ταῦτα εὗρον, ὅτι ἐκέρδησαν 2900 δρ. πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἑκάτερος ἐξ αὐτῶν; (Ἀπ. ὁ α' 2000, ὁ δὲ β' 900).

4) Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μοιρασθῇ ἡ περιουσία του εἰς τὰ τρία τέκνα του ὡς ἑξῆς· ὁ δεύτερος υἱὸς νὰ λάβῃ τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς μερίδος τοῦ πρώτου· ἡ δὲ κόρη νὰ λάβῃ τὴν μερίδα τοῦ πρώτου καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μερίδος τοῦ δευτέρου· ἡ περιουσία σύγκειται ἐξ 78000 δραχμῶν· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστον τέκνον;

(Ἀπ. ὁ α' υἱὸς 24000, ὁ β' 20000, ἡ δὲ κόρη 34000).

5) Θεῖός τις ἀφίνει εἰς τοὺς τρεῖς ἀνεψιούς του τὴν περιουσίαν του συνισταμένην ἐκ δραχ. 9372· διατάσσει δὲ νὰ λάβῃ ἕκαστος τόσα, ὥστε τὰ μερίδια αὐτῶν κατατιθέμενα εἰς τὴν Τράπεζαν ἐπὶ τόκῳ ἁπλῷ 5 % νὰ γίνωνται ἴσα, ὅταν θὰ συμπληρώνωσι τὸ 21ον ἔτος τῆς ἡλικίας των· ὁ πρῶτος εἶναι 12 ἐτῶν, ὁ δεύτερος 9 καὶ ὁ τρίτος 5· πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος; (Ἀπ. ὁ α' 3456, ὁ β' 3132, ὁ γ' 2784).

6) Ἔργον τι ἐξετελέσθη ὑπὸ 2 ἐργατῶν, ἐξ ὧν ὁ μὲν πρῶτος εἰργάσθη 7 ἡμέρας ἐπὶ 6 ὥρας καθ' ἡμέραν· ὁ δὲ δεύτερος 12 ἡμέρας ἐπὶ 4 ὥρας καθ' ἡμέραν. Ἔλαβον δὲ ὡς πληρωμὴν δραχμὰς 45· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος; (Ἀπ. ὁ α' 21, ὁ δὲ δεύτερος 24).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΙΞΕΩΣ

300. Τὰ κυριώτερα προβλήματα τῆς ἀναμίξεως εἶναι δύο εἰδῶν.

α') Ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος πραγμάτων, τῶν ὁποίων δίδονται αἱ ποσότητες καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου.

β') Ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο πραγμάτων, καὶ ζητεῖται, πόσον θὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα ὡρισμένον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν.

Προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους.

Πρόβλημα.

Ἀνέμιξέ τις τριῶν εἰδῶν οἴνους· ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 50 λεπτά, ἔλαβεν 100 ὀκάδας· ἐκ τοῦ δευτέρου τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 35 λεπτά, ἔλαβε 250· καὶ ἐκ τοῦ τρίτου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 80 λεπτά, ἔλαβε 50 ὀκάδας· πόση θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;

Φανερὸν εἶναι, ὅτι, διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀρκεῖ *νὰ εὕρω τὴν ἀξίαν ἑκάστου τῶν ἀναμιχθέντων οἴνων*, ἔπειτα ἐξ αὐτῶν τὴν *ἀξίαν τοῦ μίγματος*· μετὰ δὲ ταῦτα *νὰ μερίσω τὴν ἀξίαν τοῦ μίγματος εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι καὶ αἱ ὀκάδες αὐτοῦ*· τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς τοῦ μίγματος.

Ἀξία τοῦ πρώτου οἴνου	$50 \times 100 = 5000$	λεπτὰ
» » δευτέρου »	$35 \times 250 = 8750$	»
» » τρίτου »	$80 \times 50 = 4000$	»
ἑπομένως ἀξία τοῦ μίγματος	17750	λεπτά.

Τὸ μῖγμα σύγκειται ἐξ ὀκάδων $100 + 250 + 50$, ἤτοι 400.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ 400 ὀκάδες τοῦ μίγματος ἀξίζουν 17750 λεπτά, ἡ μία ὀκᾶ αὐτοῦ θὰ ἀξίζῃ $\frac{1775}{40}$ ἢ 44λ. $\frac{3}{8}$.

Πρόβλημα.

Συνεχωνεύθησαν 20 γραμμάρια ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,900 μετὰ 50 γραμμαρίων ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,835· ποῖος θὰ εἶναι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ κράματος;

Σημείωσις. Λέγοντες, ὅτι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ ἀργύρου εἶναι 0,900, ἐννοοῦμεν, ὅτι μόνον τὰ $\frac{900}{1000}$ αὐτοῦ εἶναι καθαρὸς ἄργυρος τὰ δὲ ἄλλα $\frac{100}{1000}$ εἶναι ἄλλα μέταλλα εὐτελῆ.

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὡς καὶ τὰ πρὸς αὐτὸ ὅμοια, λύεται κατὰ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τῆς ἀναμίξεως. Διότι εἶναι προφανές, ὅτι ἀρκεῖ πρὸς λύσιν αὐτοῦ, νὰ εὕρωμεν *τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ὅστις ὑπάρχει εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν ἀναμιχθέντων μετάλλων*, ἔπειτα ἐκ τούτων *τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ὅστις ὑπάρχει εἰς τὸ κρᾶμα καὶ* τέλος νὰ *μερίσωμεν τὸ ποσὸν τοῦτο εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ μίγματος.* Τὸ πηλίκον θὰ εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ὅστις ὑπάρχει εἰς ἑκάστην μονάδα τοῦ κράματος, τουτέστιν ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ κράματος.

καθαρ. ἀργ. τοῦ πρώτου $0{,}900 \times 20 = 18$, γραμμάρια
» » » δευτέρου $0{,}835 \times 50 = 41$, 75 »
ἑπομένως καθαρὸς ἄργυρος τοῦ κράματος $= 59$, γρ. 75.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κρᾶμα σύγκειται ἐκ $50 + 20$, ἤτοι 70 γραμμαρίων, συνάγεται, ὅτι ἕκαστον γραμμάριον τοῦ κράματος ἔχει ἄργυρον καθαρὸν $\frac{59{,}75}{70}$ ἢ 0,853...

Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους.

Πρόβλημα.

Οἰνοπώλης τις ἔχει δύο εἰδῶν οἴνους· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 45 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 80, θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 800 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 60 λεπτά· πόσον θὰ βάλῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν, ὅτι μία ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους ἐπωλεῖτο χωριστὰ 45 λεπτά· τώρα δὲ εἰς τὸ μῖγμα εὑρισκομένη θὰ πωλῆται 60· ὥστε δι' ἑκάστην ὀκᾶν τοῦ πρώτου εἴδους θὰ κερδίζῃ ὁ οἰνοπώλης 15 λεπτά· ἀλλὰ πάλιν θὰ ζημιώνηται δι' ἑκάστην ὀκᾶν τοῦ δευτέρου 20 λεπτὰ (διότι χωριστὰ ἐπωλεῖτο 80 λεπτὰ καὶ τώρα εἰς τὸ μῖγμα εὑρισκομένη θὰ πωλῆται 60).

Λοιπὸν 1 ὀκᾶ τοῦ α' εἴδους κερδίζει 15 λεπτά·
1 ὀκᾶ τοῦ β' εἴδους χάνει 20 λεπτά·

ἄρα, ἂν βάλῃ ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους 20 ὀκάδας, θὰ κερδίσῃ 15×20 λεπτά· ἂν δὲ ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους βάλῃ 15 ὀκάδας, θὰ χάσῃ 20×15· καὶ ἐπειδὴ 15×20 εἶναι ἴσον μὲ τὸ 20×15, συμπεραίνομεν, ὅτι οὔτε κέρδος θὰ ἔχῃ οὔτε ζημίαν, ἂν ἀναμίξῃ

20 ὀκάδας ἐκ τοῦ α'
καὶ 15 ὀκάδας ἐκ τοῦ β'·

ὥστε, ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ μῖγμα 35 ὀκάδων, ἔπρεπε νὰ βάλῃ

20 ὀκάδας ἐκ τοῦ α',
καὶ 15 » ἐκ τοῦ β'.

ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ μῖγμα μιᾶς ὀκᾶς, ἔπρεπε νὰ βάλῃ

$$\text{ἐκ τοῦ α΄ εἴδους } \frac{20}{35},$$

$$\text{ἐκ τοῦ β΄ εἴδους } \frac{15}{35}.$$

Λοιπὸν διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 800 ὀκάδων, πρέπει νὰ βάλῃ

$$\text{ἐκ τοῦ α΄ εἴδους } \frac{20}{35} \times 800, \text{ ἤτοι } 457^{\text{ὀκ.}} \frac{1}{7}$$

$$\text{ἐκ τοῦ β΄ εἴδους } \frac{15}{35} \times 800, \text{ ἤτοι } 342^{\text{ὀκ.}} \frac{6}{7}.$$

Πρόβλημα.

Ἔχει τις δύο ὄγκους ἀργύρου· καὶ τοῦ μὲν πρώτου ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,935, τοῦ δὲ δευτέρου 0,880· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου διὰ νὰ σχηματίσῃ 5 ὀκάδας ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,900;

Ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους εἰσάγει εἰς τὸ κρᾶμα 0,035 ἀργύρου περισσότερον τοῦ ἀπαιτουμένου (διότι τὸ κρᾶμα πρέπει νὰ ἔχῃ βαθμὸν καθαρότητος 0,900)· ἑκάστη δὲ ὀκᾶ τοῦ δευτέρου εἰσάγει εἰς τὸ κρᾶμα 0,020 ἀργύρου ὀλιγώτερον τοῦ ἀπαιτουμένου. Ὥστε ἐξ ἑκάστης ὀκᾶς τοῦ α΄ εἴδους περισσεύει ἄργυρος 0,035 τῆς ὀκᾶς, ἐξ ἑκάστης δὲ ὀκᾶς τοῦ β΄ λείπει ἄργυρος 0,020 τῆς ὀκᾶς.

Ἐὰν λοιπὸν βάλῃ 20 ὀκάδας ἐκ τοῦ α΄, θὰ περισσεύῃ ἄργυρος

$$0{,}035 \times 20 \text{ ὀκάδες·}$$

ἐὰν δὲ βάλῃ 35 ὀκάδας ἐκ τοῦ δευτέρου, θὰ λείπῃ ἄργυρος

$$0{,}020 \times 35 \text{ ὀκάδες.}$$

Ὥστε, ἐὰν βάλῃ 20 ὀκάδας ἐκ τοῦ α΄ καὶ 35 ὀκάδας ἐκ τοῦ δευτέρου, ὅσος ἄργυρος λείπει ἐκ τοῦ ἑνὸς εἴδους, τόσος περισσεύει ἐκ τοῦ ἄλλου, καὶ ἐπομένως τὸ κρᾶμα οὔτε περισσότερον τοῦ ἀπαιτουμένου θὰ περιέχῃ ἄργυρον, οὔτε ὀλιγώτερον.

Ἂν λοιπὸν ἤθελε νὰ κάμῃ κρᾶμα 55 ὀκάδων, ἔπρεπε νὰ βάλῃ

20 ὀκ. ἐκ τοῦ α΄

καὶ 35 ὀκ. ἐκ τοῦ β΄,

ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ κρᾶμα 1 ὀκ., ἔπρεπε νὰ βάλῃ

$$\frac{20}{55} \text{ ἐκ τοῦ α΄}$$

$$\text{καὶ } \frac{35}{55} \text{ ἐκ τοῦ β΄,}$$

Λοιπὸν διὰ νὰ κάμῃ κρᾶμα 5 ὀκάδων, πρέπει νὰ βάλῃ

$$\frac{20}{55}\times 5 \text{ ἐκ τοῦ } α', \text{ ἤτοι } 1 \text{ ὀκ. } 327 \text{ δρ. } \frac{3}{11}$$

$$\text{καὶ } \frac{35}{55}\times 5 \text{ ἐκ τοῦ } β', \text{ ἤτοι } 3 \text{ ὀκ. } 72 \text{ δρ. } \frac{8}{11}$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα

1) Σιτέμπορος ἀνέμιξε τρία εἴδη σίτου· καὶ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου εἴδους ἔλαβεν 800 ὀκάδας, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 1500 καὶ ἐκ τοῦ τρίτου 2000· πρὶν τὰ ἀναμίξῃ, ἐπώλει τὸ πρῶτον εἶδος πρὸς 40 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, τὸ δεύτερον πρὸς 30 καὶ τὸ τρίτον πρὸς 25· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ κερδίσῃ 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ;

Σημείωσις. Θὰ εὕρωμεν πρῶτον, πόσον ἀξίζει τὸ μῖγμα, ἔπειτα θὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν ἀξίαν τοῦ μίγματος τὸν τόκον αὐτῆς πρὸς 10 % (δι' ἓν ἔτος) καὶ τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ μίγματος· διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ ὀκάδες τοῦ μίγματος, θὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον· οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν πρὸς 32 λεπτὰ καὶ $\frac{21}{43}$ τοῦ λεπτοῦ.

2) Οἰνοπώλης ἔχει δύο εἰδῶν οἶνον· καὶ τοῦ μὲν πρώτου εἴδους πωλεῖ τὴν ὀκᾶν 80 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 45· θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 2800 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου τὴν ὀκᾶν νὰ πωλῇ 54 λεπτὰ καὶ νὰ κερδίσῃ 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου τῶν οἴνων;

Σημείωσις. Διὰ νὰ κερδίσῃ 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος, ἀρκεῖ νὰ κερδίσῃ 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας ἑκάστης ὀκᾶς· πρέπει λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν τιμὴν τῆς ὀκᾶς ἑκάστου εἴδους 8 %· ὥστε πρέπει νὰ λάβωμεν ὡς τιμὴν τοῦ α' εἴδους 86λ., 4, ὡς τιμὴν δὲ τοῦ δευτέρου 48λ., 6· καὶ ἔπειτα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα ὡς τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους τῆς ἀναμίξεως· οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ μὲν τοῦ α' εἴδους 400 ὀκάδας, ἐκ δὲ τοῦ β' 2400.

3) Ἔχει τις 85 δράμια ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶναι 0,900 καὶ θέλει νὰ ἀναβιβάσῃ τὸν βαθμὸν τῆς καθαρότητος αὐτοῦ εἰς 0,975· πόσον καθαρὸν ἄργυρον πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μετ' αὐτοῦ;

('Απ. 255 δράμια).

4) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 850 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 95 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, ἔπειτα 2800 ὀκάδας πρὸς 1,05 καὶ τέλος 1890 ὀκάδας πρὸς 90 λεπτά· ἐὰν τώρα θέλῃ νὰ πωλήσῃ ὅλον τὸ ἔλαιον τοῦτο διὰ μιᾶς, πρὸς πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ μὴ ζημιωθῇ; καὶ πρὸς πόσον, ἂν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 30% ἐπὶ τῆς ἀξίας του;

(Ἀπ. 98λ. $\frac{193}{554}$, ἂν δὲ θέλῃ νὰ κερδίσῃ 30%, θὰ πωλήσῃ πρὸς 1δρ., 27 $\frac{236}{277}$).

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ

301. *Ἀριθμητικὸν μέσον ἢ μέσος ὅρος* διαφόρων ποσῶν ὁμοειδῶν λέγεται τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διῃρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει τὸ πλῆθος αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 12, 18 καὶ 30 εἶναι $\frac{12+18+30}{3}$, ἤτοι 20· ὁ δὲ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 20, 35, 40, 61 εἶναι $\frac{156}{4}$ ἢ 39.

Τοὺς μέσους ὅρους μεταχειριζόμεθα εἰς πολλὰς περιστάσεις.

Ὑποθέσωμεν λόγου χάριν, ὅτι ἐμετρήσαμεν τῆς μῆκος μιᾶς γραμμῆς τρεῖς φοράς· καὶ τὴν μὲν πρώτην φορὰν εὑρήκαμεν, ὅτι εἶναι 5, 8 μέτρα, τὴν δὲ δευτέραν 5, 76, τὴν δὲ τρίτην 5, 758 (εὑρήκαμεν δὲ διαφόρους ἀριθμοὺς εἰς τὰς τρεῖς καταμετρήσεις διὰ τὰ λάθη εἰς ἃ ὑποπίπτομεν ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων ἡμῶν)· τότε ὡς πιθανωτέραν τιμὴν τοῦ μήκους τῆς γραμμῆς λαμβάνομεν τὸν μέσον ὅρον τῶν τριῶν εὑρεθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι

$\frac{1}{3}(5,8+5,76+5,758)$, ἢ 5,772 . . .

Ὡς παράδειγμα τῶν μέσων ὅρων, ἔστω καὶ τὰ ἑξῆς·

Τὰ εἰσοδήματα τῶν τελωνείων κράτους τινὸς ἦσαν

τῷ	1880	δραχμαὶ	7 489 851
τῷ	1881	»	8 500 314
τῷ	1882	»	8 358 705
τῷ	1883	»	9 005 015
τῷ	1884	»	10 267 519
τῷ	1885	»	12 665 758·

ζητεῖται ὁ μέσος ὅρος τῶν εἰσοδημάτων τῶν τελωνείων κατὰ τὰ ἓξ ταῦτα ἔτη.

Προσθέτοντες τὰ εἰσοδήματα τῶν ἓξ ἐτῶν, εὑρίσκομεν 56287162 καὶ λαμβάνοντες τὸ ἕκτον τούτου, εὑρίσκομεν ὡς μέσον ὅρον 9381193,66..

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Ζ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

302. *Ἐξίσωσις* λέγεται ἰσότης συνδέουσα πρὸς ἄλληλα γνωστὰ καὶ ἄγνωστα.

Παραδείγματος χάριν, ἡ ἰσότης $3\chi=12$ συνδέει τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν χ μετὰ τῶν γνωστῶν 3 καὶ 12· εἶναι λοιπὸν ἐξίσωσις.

Ὁμοίως ἡ ἰσότης $\frac{\chi}{2}+5=3\chi-5$ εἶναι ἐξίσωσις.

Καὶ ἡ ἰσότης $3\chi-\psi=1$, ἥτις συνδέει πρὸς ἀλλήλους δύο ἀγνώστους ἀριθμοὺς χ, ψ καὶ γνωστοὺς ἀριθμούς, εἶναι ἐξίσωσις.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως (ὅταν περιέχῃ ἕνα ἄγνωστον) λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀγνώστου αὐτῆς, ἤτοι ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις τιθέμενος ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου χ καθιστᾷ τὴν ἐξίσωσιν ἀληθῆ, ἤτοι ἐπαληθεύει αὐτήν.

303. Τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων θὰ μάθωμεν ἀλλαχοῦ λεπτομερῶς. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν μόνον τοῦτο, ὅτι ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητος καὶ ἐπὶ τῶν γενικῶν ἰδιοτήτων τῶν τεσσάρων πράξεων.

Αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος, ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων, εἶναι αἱ ἑξῆς·

1) Ἐὰν εἰς ἴσα προσθέσωμεν ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.
2) Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρέσωμεν ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.
3) Ἐὰν ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.
4) Ἐὰν ἴσα διαιρέσωμεν δι' ἴσων, προκύπτουσιν ἴσα.

Λύσις μιᾶς ἐξισώσεως μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν, πῶς γίνεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων, θὰ λάβωμεν ἁπλᾶ τινα παραδείγματα.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5\chi=85$.

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν $\chi=17$, ὥστε ὁ ἄγνωστος εἶναι 17· οὗτος δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς (καὶ οὗτος μόνος) τιθέμενος ἀντὶ τοῦ χ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν καθιστᾷ αὐτὴν ἀληθῆ· καὶ ὄντως εἶναι $5\times17=85$.

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $2\chi-3=17$.

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα τὸν ἀριθμὸν 3, ὅτε προκύπτει $2\chi-3+3=17+3$ ἢ $2\chi=20$· διαιροῦμεν τώρα ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ 2 καὶ εὑρίσκομεν $\chi=10$· ὥστε ὁ μόνος ἀριθμὸς ὁ τὴν ἐξίσωσιν ἐπαληθεύων εἶναι ὁ 10· καὶ τῷ ὄντι εἶναι $2\times10-3=17$ ἢ $17=17$.

Ἔστω καὶ ἡ ἐξίσωσις $2\chi+8=7\chi-12$.

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα τὸν ἀριθμὸν 12, ὅτε εὑρίσκομεν $2\chi+8+12=7\chi-12+12$· ἤτοι $2\chi+20=7\chi$· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἴσων τούτων 2χ, ὅτε εὑρίσκομεν

$$2\chi-2\chi+20=7\chi-2\chi \qquad \text{ἢ} \quad 20=(7-2)\chi,$$

τουτέστιν $20=5\chi$·

τέλος διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν $4=\chi$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 4, ἂν τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ (καὶ μόνος οὗτος), ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν· καὶ τῷ ὄντι θέτοντες 4 εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ χ, εὑρίσκομεν $2\times4+8=7\times4-12$, ἢ $16=16$, ὅπερ ἀληθές· ἂν ὅμως τεθῇ ἄλλος οἱοσδήποτε ἀριθμὸς ἀντὶ τοῦ χ, ἡ ἰσότης δὲν ἀληθεύει.

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi}{2}-1=\frac{\chi+1}{3}$.

Πρὸς λύσιν αὐτῆς πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ 2. 3 (ἤτοι ἐπὶ κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομασμῶν 2 καὶ 3) καὶ εὑρίσκομεν

$$2.\,3.\,\frac{\chi}{2}-1.2.3.=2.\,3.\,\frac{\chi+1}{3}$$

ἤτοι
$$3\chi-6=2\,(\chi+1)$$
ἢ
$$3\chi-6=2\chi+2·$$

προσθέτομεν ἔπειτα εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα τὸν ἀριθμὸν 6, ὅτε εὑρίσκομεν

$$3\chi=2\chi+8·$$

ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἴσων τὸν ἀριθμὸν 2χ, ὅτε εὑρίσκομεν

$$3\chi-2\chi=2\chi+8-2\chi,$$

ἤτοι
$$\chi=8.$$

Ὥστε ὁ μόνος ἀριθμός, ὅστις λύει τὴν ἐξίσωσιν, εἶναι ὁ 8· καὶ τῷ ὄντι ἔχομεν $\frac{8}{2}-1=\frac{8+1}{3}$ ἢ $4-1=3$, ὅπερ ἀληθές.

Σημείωσις. Μία ἐξίσωσις μόνον ἕνα ἄγνωστον δύναται νὰ προσδιορίση· ἂν δὲ ἐξίσωσίς τις περιέχῃ ἀγνώστους περισσοτέρους τοῦ ἑνός, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν οἱασδήποτε τιμὰς θέλωμεν εἰς πάντας τοὺς ἄλλους, πλὴν ἑνός. Τότε οὗτος ἀπομένει μόνος ἄγνωστος ἐν τῇ ἐξισώσει καὶ προσδιορίζεται ἐξ αὐτῆς.

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $2χ-3ψ=1$. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν ψ τὴν τιμὴν 1, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $2χ-3=1$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $χ=2$· ἐὰν δὲ δώσωμεν εἰς τὸν ψ τὴν τιμὴν 2, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $2χ-6=1$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $χ=3\frac{1}{2}$, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Λύσις δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις $χ+ψ=30$

$$χ-ψ=18.$$

Ἐνταῦθα πρέπει νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἐπαληθεύωσι καὶ τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις (ἤτοι νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα μὲν 30, διαφορὰν δὲ 18).

Ἐὰν προσθέσωμεν ἴσα εἰς ἴσα, εὑρίσκομεν

$$χ+ψ+χ-ψ=48$$

ἢ $$χ+χ+ψ-ψ=48 \text{ ἢ } 2χ=48\cdot$$

ὅθεν καὶ $χ=24$.

Ἀφοῦ εὑρήκαμεν τὸν χ, θέτομεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ εἰς μίαν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, ἔστω εἰς τὴν $χ+ψ=30$, καὶ εὑρίσκομεν

$$24+ψ=30\cdot \text{ ὅθεν } ψ=6.$$

Ὥστε οἱ μόνοι ἀριθμοὶ οἱ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις ἐπαληθεύοντες εἶναι ὁ 24 καὶ ὁ 6· καὶ ὄντως εἶναι

$$24+6=30 \text{ καὶ } 24-6=18.$$

Ἔστωσαν προσέτι αἱ δύο ἐξισώσεις

$$3χ-ψ=2$$
$$7χ+2ψ=48\cdot$$

ἐὰν τώρα προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας, δὲν θὰ φύγῃ ὁ ἄγνωστος ψ (ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα συνέβη)· διότι, εἰς τὴν μίαν προστίθεται 2ψ, εἰς δὲ τὴν ἄλλην ἀφαιρεῖται ψ· ἀλλ' εἶναι εὔκολον νὰ γίνῃ καὶ εἰς τὴν πρώτην 2ψ ἀντὶ ψ· ἀρκεῖ νὰ διπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα αὐτῆς· τότε ἡ πρώτη ἐξίσωσις γίνεται $6χ-2ψ=4$.
ἡ δὲ δευτέρα εἶναι $7χ+2ψ=48\cdot$

ὅθεν προσθέτοντες ἴσα εἰς ἴσα λαμβάνομεν

$$13\chi = 52 \cdot \text{ ὅθεν } \chi = 4.$$

Ἐὰν δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ θέσωμεν εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, λαμβάνομεν $28 + 2\psi = 48$,
ἐξ ἧς $2\psi = 20$ καὶ $\psi = 10$·
ὥστε οἱ μόνοι ἀριθμοί, οἱ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις ἐπαληθεύοντες, εἶναι

$$\chi = 4 \text{ καὶ } \psi = 10.$$

Σημείωσις. Ἐν γένει, ὅταν θέλωμεν διὰ τῆς προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων ἢ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως αὐτῶν νὰ φύγῃ ὁ εἷς ἄγνωστος, (καὶ τοιουτοτρόπως νὰ εὐκολυνθῇ ἡ λύσις), πρέπει νὰ κάμωμεν, ὥστε ὁ ἄγνωστος οὗτος νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις· γίνεται δὲ τοῦτο πάντοτε, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἑκατέραν τῶν ἐξισώσεων μὲ τὸν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιάζει τὸν ἄγνωστον ἐν τῇ ἄλλῃ.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

304. Πᾶσαι αἱ προηγούμεναι μέθοδοι τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων ὑπάγονται εἰς τὴν μέθοδον τῶν ἐξισώσεων· συνίσταται δὲ αὕτη εἰς τοῦτο· εὑρίσκομεν ἐξίσωσίν τινα, ἥτις συνδέει τὰ γνωστὰ τοῦ προβλήματος πρὸς τὸν ἄγνωστον αὐτοῦ (ἤτοι τὰ δεδομένα πρὸς τὸ ζητούμενον)· ἔπειτα λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τὴν μέθοδον ταύτην, ἂς ἐφαρμόσωμεν αὐτὴν εἰς τὰ ἤδη λυθέντα (διὰ τῶν ἄλλων μεθόδων) προβλήματα.

1) *15 ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 128 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν 40 ὀκ. ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;*

Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὴν ἀξίαν τῶν 40 ὀκάδων, ἡ ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς θὰ εἶναι $\frac{\chi}{40}$.

ἀλλ' ἐπειδὴ 15 ὀκάδες ἀξίζουν 128 δραχμάς, ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς θὰ εἶναι $\frac{128}{15}$, ἄρα θὰ εἶναι $\frac{\chi}{40} = \frac{128}{15}$.

ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἐπὶ 40 (δηλαδὴ ἀμφότερα τὰ ἴσα αὐτῆς), εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{40 \times 128}{5},$$

τὸ ἐξαγόμενον δὲ τοῦτο δίδει καὶ ὁ κανὼν τοῦ ἐδαφίου 278.

2) *Ἐργάται τινὲς ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 15 ἡμέρας· πόσας ὥρας ἔπρεπε νὰ ἐργάζωνται καθ' ἡμέραν, ἂν ἤθελον νὰ τελειώσωσιν αὐτὸ εἰς 12 ἡμέρας;*

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν· ὅταν ἡ ἐργασία διαρκέσῃ 12 ἡμέρας, ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν, καθ' ἃς ἐκτελεῖται, θὰ εἶναι $12χ$· ὅταν δὲ διαρκέσῃ 15 ἡμέρας, ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν, καθ' ἃς ἐκτελεῖται, εἶναι 15×8· ἐντεῦθεν συνάγομεν, ὅτι θὰ εἶναι $12χ = 15 \times 8$ καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ 12, εὑρίσκομεν $χ = \frac{15 \times 8}{12}$, ἤτοι $χ = 10$.

Προβλήματα τόκου.

Ἔστω κ τὸ κεφάλαιον, τ ὁ τόκος, ε τὸ ἐπιτόκιον καὶ χ ὁ χρόνος (εἰς ἔτη).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 100 δραχμαὶ φέρουσιν εἰς ἓν ἔτος τόκον ε δραχμάς, ἡ μία δραχμὴ φέρει εἰς ἓν ἔτος τόκον $\frac{ε}{100}$, καὶ αἱ κ δραχμαὶ εἰς ἓν ἔτος φέρουσι τόκον $\frac{ε.κ}{100}$, ἄρα αἱ κ δραχμαὶ εἰς χ ἔτη θὰ φέρωσι τόκον $\frac{κ.ε.χ}{100}$, εἶναι λοιπὸν $τ = \frac{κ.ε.χ}{100}$. (Παράβαλε ἐδ. 286).

Σημείωσις. Ἀντὶ $κ \times ε \times χ$ ἐγράψαμεν διὰ συντομίαν κ. ε. χ· ἡ γραφὴ αὕτη τοῦ γινομένου εἶναι συνήθης, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ παριστῶνται διὰ γραμμάτων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἥτις συνδέει τὰ τέσσαρα ποσὰ (κεφάλαιον, ἐπιτόκιον, τόκον καὶ χρόνον), δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως τὸ ἕν, ὅταν ἔχωμεν τὰ τρία ἄλλα.

Ἐὰν λόγου χάριν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον κ ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων, πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ 100 καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $100.\ τ = κ.\ ε.\ χ.$ (α)

ἔπειτα διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ γινομένου ε. χ· τότε εὑρίσκομεν $\frac{100.\ τ.}{ε.\ χ} = κ.$ (παράβαλε ἐδ. 287).

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα (α) διὰ τοῦ γινομένου κ. ε· τότε εὑρίσκομεν

$$\frac{100\tau}{\varkappa.\ \varepsilon.} = \chi. \qquad \text{(παράβαλε ἐδ. 288).}$$

Ἐὰν τέλος θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον ε διαιροῦμεν τὰ ἴσα (α) διὰ τοῦ γινομένου κ. χ καὶ εὑρίσκομεν

$$\frac{100.\tau}{\varkappa.\ \chi} = \varepsilon \qquad \text{(παράβαλε ἐδ. 289}$$

Ὥστε πάντα τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λύονται ἐκ μιᾶς μόνης ἐξισώσεως

$$\tau = \frac{\varkappa.\ \varepsilon.\ \chi}{100}.$$

Σημείωσις. Ὁμοίως λύονται τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\upsilon = \frac{\varkappa.\ \chi.\ \varepsilon}{100 + \chi.\ \varepsilon},$$

τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν κατὰ τὰ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 294 ἐκτεθέντα καὶ ἐν τῇ ὁποίᾳ υ σημαίνει τὴν ὑφαίρεσιν (ἐσωτερικήν).

Μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.

Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς Κ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ.

Τὰ ζητούμενα μέρη τοῦ Κ ὡς ἀνάλογα τῶν α, β, γ, θὰ εἶναι

$$\alpha\chi, \quad \beta\chi, \quad \gamma\chi,$$

τοῦ χ ὄντος ἀγνώστου ἀριθμοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ μέρη τοῦ Κ, προστιθέμενα δίδουσι τὸν Κ, ἕπεται

$$\alpha\chi + \beta\chi + \gamma\chi = K$$

ἤτοι

$$(\alpha + \beta + \gamma).\chi = K \qquad \text{(ἐδ. 174)}$$

καὶ ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\alpha+\beta+\gamma$, εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{K}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

ὥστε τὰ μέρη τοῦ Κ θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha K}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad \frac{\beta K}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad \frac{\gamma K}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Προβλήματα ἀναμίξεως.

1) *Ἔχει τις σῖτον τριῶν εἰδῶν· τοῦ πρώτου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 30 λεπτά, τοῦ δευτέρου 25, τοῦ δὲ τρίτου 22· ζητεῖται, ἂν ἀναμίξῃ 800 ὀκάδας ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους καὶ 1000 ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ 1800 ἐκ τοῦ τρίτου, πόση θὰ εἶναι ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;*

Ἔστω χ ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος· ἐπειδὴ τὸ μίγμα συνίσταται ἐξ $800+1000+1800$ ὀκάδων, ἡ ἀξία αὐτοῦ θὰ εἶναι $(800+1000+1800) \cdot \chi$.

Ἀλλ' ἡ ἀξία τοῦ μίγματος εὑρίσκεται καὶ ἐκ τῶν ἀξιῶν τῶν μερῶν του καὶ τὸ μὲν πρῶτον μέρος, ἤτοι αἱ 800 ὀκάδες τοῦ πρώτου εἴδους, ἀξίζει 30×800 λεπτά, τὸ δὲ δεύτερον 25×1000, καὶ τὸ τρίτον 22×1800 ὥστε ἡ ἀξία τοῦ μίγματος εἶναι λεπτὰ

$$30 \times 800 + 25 \times 1000 + 22 \times 1800$$

ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(800+1000+1800)\chi = 30 \times 800 + 25 \times 1000 + 22 \times 1800$$

καὶ $$\chi = \frac{30 \times 800 + 25 \times 1000 + 22 \times 1800}{800+1000+1800} = \frac{886}{36} = 24\frac{11}{18}.$$

2) *Ἔχει τις δύο εἰδῶν οἴνους· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 55 λεπτά, τοῦ δευτέρου 90· θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 1200 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 60 λεπτά· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους;*

Ἔστωσαν χ αἱ ὀκάδες, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους, καὶ ψ αἱ ὀκάδες τοῦ δευτέρου.

Ἐπειδὴ τὸ μῖγμα θὰ ἔχῃ 1200 ὀκάδας, θὰ εἶναι προφανῶς

$$\chi + \psi = 1200.$$

Ἡ ἀξία τοῦ μίγματος θὰ εἶναι λεπτὰ 60×1200 ἀλλ' αἱ χ ὀκάδες τοῦ πρώτου εἴδους ἀξίζουν λεπτὰ 55χ, αἱ δὲ ψ ὀκάδες τοῦ δευτέρου ἀξίζουν 90ψ· ἄρα ἡ ἀξία τοῦ μίγματος θὰ εἶναι

$$55\chi + 90\psi.$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἐξίσωσις $55\chi + 90\psi = 60 \times 1200$.

Ἔχομεν λοιπὸν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τὰς δύο ἐξισώσεις

$$\chi + \psi = 1200$$

$$55\chi + 90\psi = 60 \cdot 1200.$$

Πρὸς λύσιν τῶν ἐξισώσεων τούτων πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐπὶ 90 καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτῆς τὴν δευτέραν· τότε ἐξαφανίζεται ὁ ἄγνωστος ψ καὶ εὑρίσκομεν

$$90\chi - 55\chi = 1200 \cdot 90 - 1200 \cdot 60$$

ἢ $$(90 - 55)\chi = 1200\,(90 - 60) \qquad (\S\ 51)$$

$$\text{ὅθεν καὶ } \chi = 1200 \cdot \frac{90-60}{90-55} \text{ ἢ } 1200 \cdot \frac{30}{35} \text{ ἢ } 1200 \cdot \frac{6}{7}.$$

$$\text{ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ } \psi = 1200 \cdot \frac{60-55}{90-55} \text{ ἢ } 1200 \cdot \frac{1}{7}.$$

Σημείωσις. Ἐὰν τὰ ποσά, τὰ ὁποῖα θὰ ἀναμιχθῶσιν, εἶναι τριῶν ἢ καὶ περισσοτέρων εἰδῶν, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα δύο ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους. Θὰ εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ λάβωμεν τὰ ἄλλα ποσὰ ὡς θέλομεν, ἐκτὸς δύο, ἅτινα θὰ προσδιορίσωσιν αἱ δύο ἐξισώσεις· διὰ τοῦτο τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τότε ἀπείρους λύσεις.

Συνεζευγμένη μέθοδος.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρῶτον πρόβλημα τοῦ ἐδ. 281, ὑποθέτομεν, ὅτι πάντα τὰ ἐν αὐτῷ περιεχόμενα νομίσματα τρέπονται εἰς ἓν μόνον εἶδος, ἔστω εἰς δραχμάς. Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀξία τῆς τουρκικῆς λίρας εἰς δραχμάς, β ἡ ἀξία τῆς ἀγγλικῆς καὶ γ ἡ ἀξία τοῦ ῥουβλίου, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις (κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος):

$\gamma\chi = 1800.\ \alpha$, διότι χ ῥούβλια κάμνουν 1800 λίρας τουρκικάς,
$12\alpha = 11.\ \beta$, διότι 12 λίρ. τουρκ. κάμνουν 11 ἀγγλικάς,
$26\beta = 165.\ \gamma$, διότι 26 ἀγγλ. λίραι κάμνουν 165 ῥούβλια.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἴσα ἐπὶ ἴσα, εὑρίσκομεν $\chi.\ 12.\ 26.\ \alpha.\ \beta.\ \gamma = 1800.\ 11.\ 165.\ \alpha.\ \beta.\ \gamma.$
καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\alpha.\ \beta.\ \gamma$,

$$\chi.\ 12.\ 26 = 1800.\ 11.\ 165\cdot$$

ὅθεν
$$\chi = \frac{1800.\ 11.\ 165}{12.\ 26}$$

Πρὸς ἄσκησιν περὶ τὴν μέθοδον τῶν ἐξισώσεων λύομεν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 200 εἰς δύο μέρη, ὧν ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι 18.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰ δύο μέρη διὰ τῶν γραμμάτων χ καὶ ψ, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις:

$$\chi + \psi = 200$$

καὶ
$$\chi - \psi = 18.$$

Πρὸς λύσιν τῶν ἐξισώσεων τούτων προσθέτομεν αὐτὰς καὶ εὑρίσκομεν $2\chi = 218$· ἄρα $\chi = 109$·
καὶ ἐπειδὴ $\chi + \psi = 200$, θὰ εἶναι $109 + \psi = 200$, ἄρα $\psi = 91$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τρίτον προστιθέμενα νὰ δίδωσιν τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον ἀριθμόν.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ χ, τὸ ἥμισυ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{\chi}{2}$ καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ $\frac{\chi}{3}$, θὰ εἶναι δὲ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}=\chi-1.$$

Πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ 6 καὶ εὑρίσκομεν

$$3\chi+2\chi=6\chi-6 \qquad \text{ἢ } 5\chi=6\chi-6$$

καὶ προσθέτοντες 6 εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα, $\quad 5\chi+6=6\chi$

καὶ ἀφαιροῦντες 5χ ἀπ' ἀμφοτέρων εὑρίσκομεν $\quad 6=\chi.$

3) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τέταρτον διαφέρει ἀπὸ τοῦ τρίτου κατὰ μονάδα.

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{3}-\frac{\chi}{4}=1.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ αὐτήν, πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ 3.4 ἤτοι 12, ὅτε εὑρίσκομεν $4\chi-3\chi=12$, ἤτοι $\chi=12$.

4) Ἔχει τις δύο εἰδῶν οἶνον· τοῦ α' εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 70 λεπτά, τοῦ δευτέρου 50· θέλει δὲ νὰ κάμῃ μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 65 λεπτά, νὰ βάλῃ ὅμως ἐκ τοῦ α' εἴδους 100 ὀκάδας περισσότερον ἢ ἐκ τοῦ β'· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ βάλῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους;

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων τοῦ α' εἴδους καὶ ψ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων τοῦ β'. Ἐν πρώτοις θὰ εἶναι

$$\chi-\psi=100\cdot$$

ἡ ἀξία τοῦ μίγματος εἶναι $65.(\chi+\psi)$ λεπτά· ἡ δὲ ἀξία τῶν μερῶν του εἶναι 70χ τοῦ α' καὶ 50ψ τοῦ β'· ὥστε εἶναι

$$65(\chi+\psi)=70\chi+50\psi \quad \text{ἢ} \quad 15\psi=5\chi \quad \text{ἢ} \quad \chi=3\psi.$$

Λύοντες τὰς δύο ἐξισώσεις $\chi-\psi=100$ καὶ $\chi=3\psi$, εὑρίσκομεν

$$\chi=150,\ \psi=50.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

305. *Λόγος* τοῦ ἀριθμοῦ α πρὸς τὸν β λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει, πῶς ἀποτελεῖται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Ὁ λόγος σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον σύγκειται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ (παρβλ. σελ. 144 πρόβλημα 5ον).

Ἐάν π. χ. εἶναι $\alpha = \beta + \beta + \frac{\beta}{2}$, ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι $1+1+\frac{1}{2}$ ἤτοι $\frac{5}{2}$.

Σημείωσις. Ὁμοίως ὁρίζεται καὶ ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ὁμοειδῶν ποσῶν.

306. *Ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι τὸ πηλίκον* $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι $2\frac{3}{5}$· τοῦτο σημαίνει, ὅτι εἶναι
$$\alpha = \beta + \beta + \frac{\beta}{5} + \frac{\beta}{5} + \frac{\beta}{5}$$
ἢ
$$\alpha = \left(1+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)\beta \qquad \text{(ἐδ. 174)}$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ β,
$$\frac{\alpha}{\beta} = 1+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5} = 2\frac{3}{5},$$
ὥστε ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ β.

Διὰ τοῦτο ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ καὶ διὰ τοῦ α : β.

307. *Ἀναλογία* εἶναι ἡ ἰσότης δύο λόγων·

οἷον $\frac{12}{8} = \frac{6}{4}$ ἢ 12 : 8 = 6 : 4 εἶναι ἀναλογία.

Σημείωσις. Ὅταν ἡ ἀναλογία γράφηται διὰ τεσσάρων ἀριθμῶν, ὡς ἑξῆς· 12 : 8 = 6 : 4, οἱ εἰς τὰ ἄκρα εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ (οἱ 12 καὶ 4) λέγονται *ἄκροι* τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ ἄλλοι δύο λέγονται *μέσοι* καὶ οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ λέγονται ὅροι τῆς ἀναλογίας. Πρὸς τούτοις οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ τῶν δύο λόγων (ὁ 12 καὶ 6) λέγονται *ἡγούμενοι*, οἱ δὲ δεύτεροι λέγονται *ἑπόμενοι*.

308. Ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι ὑπάγονται εἰς τὰς ἰσότητας, αἱ ἰδιότητες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐκ τῶν γενικῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητος· ὥστε εἶναι περιττὸν νὰ γίνηται ἰδιαίτερος λόγος περὶ αὐτῶν· διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα εἰς τὰς ἑξῆς δύο ἰδιότητας.

1) *Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.*

Ἔστω ἡ ἀναλογία $\alpha:\beta=\gamma:\delta$

$$\text{ἢ } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ $\beta\times\delta$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\beta\times\delta=\frac{\gamma}{\delta}\times\delta\times\beta$$

ἢ $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$ ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν·

Καὶ ἀντιστρόφως· ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\beta\times\delta$, προκύπτει

$$\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\delta}=\frac{\beta\times\gamma}{\beta\times\delta} \qquad \text{ἢ } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \qquad \text{ἢ } \alpha:\beta=\gamma:\delta$$

ὥστε, ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον δύο ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι *συνιστῶσιν ἀναλογίαν*, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἄκροι εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ ἑνὸς γινομένου, μέσοι δὲ οἱ παράγοντες τοῦ ἄλλου.

2) *Ἐὰν προστεθῶσιν οἱ ὁμοταγεῖς ὅροι ὁσωνδήποτε λόγων ἴσων, προκύπτει λόγος ἴσος.*

Ἔστωσαν ἴσοι οἱ λόγοι

$$\frac{\alpha}{A},\ \frac{\beta}{B},\ \frac{\gamma}{\Gamma},\ \frac{\delta}{\Delta},$$

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{\Gamma}, \frac{\delta}{\Delta}$, εἶναι ἴσα, ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους αὐτῶν ὅρους, προκύπτει κλάσμα ἴσον (ἐδ. 199) ἄρα καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A+B+\Gamma+\Delta}$ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ προηγούμενα· τοῦτέστιν ὁ λόγος τοῦ $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ πρὸς τὸ $A+B+\Gamma+\Delta$ εἶναι ἴσος πρὸς τοὺς δοθέντας ἴσους λόγους.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν ὁσωνδήποτε λόγων προστεθῶσιν οἱ ὁμοταγεῖς ὅροι, προκύπτει λόγος, ὅστις περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐκ τῶν δοθέντων λόγων.

2) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὁμοταγεῖς ὅροι ὁσωνδήποτε ἀναλογιῶν, προκύπτει ἀναλογία.

3) Ἐὰν οἱ ὁμοταγεῖς ὅροι δύο ἀναλογιῶν προστεθῶσι, πότε προκύπτει ἀναλογία ἀληθής;

ΤΕΛΟΣ