ΠΕΤΡΟΥ Ι. ΣΤΕΡΙΩΤΗ
ΥΦΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΕΝ ΤΗ ΑΝΩΤΑΤΗ ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΜΠΟΡΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΔΡΑΣ ΤΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΣΠΟΥΔΑΖΟΝΤΑΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΑΣ

*

ΕΚΔΟΤΗΣ: ΑΡΓΥΡΗΣ ΠΑΠΑΖΗΣΗΣ
ΑΘΗΝΑΙ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ ἀνὰ χεῖρας ἀποτελεῖ βοήθημα τῶν φοιτητῶν τῆς Ἀνωτάτης Σχολῆς Οἰκονομικῶν καὶ Ἐμπορικῶν Ἐπιστημῶν διὰ τὸ μάθημα τῶν Γενικῶν Μαθηματικῶν, ἀλλὰ καὶ παντὸς ἀμυήτου εἰς τὴν Μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν, ἐπιθυμοῦντος νὰ παρακολουθήσῃ τὴν Οἰκονομικὴν Ἐπιστήμην, ὡς ἔχει σήμερον διαμορφωθῆ.

Καθὸ δὲ βοήθημα, δὲν γεννᾷ ζήτημα ὕλης ἤ, τοὐλάχιστον, δὲν εἶναι αὐτὴ ἐκεῖνο ἐξ οὗ θὰ κριθῇ ἐὰν ἐπέτυχεν ἢ οὐ τοῦ σκοποῦ του. Ἡ ὕλη του δὲν δύναται νὰ εἶναι ἄλλη ἀπὸ τὴν συνήθως ἐμπεριλαμβανομένην εἰς τὰ ξένα βοηθήματα τοῦ τύπου τῶν «**Mathématiques Générales Supérieures**», «**General Mathematics**» καὶ «**Calculus**». Τὸ παρὸν θὰ κριθῇ ἐκ τῆς μεθόδου συνθέσεως καὶ ἐκθέσεως τῆς ὕλης καὶ τῆς προσφορότητος τῶν ὑποδείξεων περὶ τοῦ τρόπου χρησιμοποιήσεως τῶν μαθηματικῶν κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν οἰκονομικῶν ζητημάτων. Ἐν τούτῳ δὲ νομίζομεν ὅτι σημαινόντως ἐπρωτοτυπήσαμεν, ὡς θὰ μᾶς ἀναγνωρισθῇ, ἐφ' ὅσον ληφθῶσιν ὑπ' ὄψιν καὶ ὅσα παρακατιόντες ἐκθέτομεν.

Δεδομένης ἀφ' ἑνὸς τῆς ἀνομοιογενοῦς προελεύσεως τῶν φοιτητῶν τῆς Α.Σ.Ο.Ε.Ε., προερχομένων ἄλλων ἐκ Κλασσικῶν, ἄλλων ἐκ Πρακτικῶν Γυμνασίων, καὶ ἄλλων ἐκ Μέσων Ἐμπορικῶν Σχολῶν, καί, συνεπῶς, τοῦ γεγονότος, ὅτι δὲν ἐδιδάχθησαν πάντες καὶ μετὰ τῆς αὐτῆς ἐντελείας τὴν ὕλην τῶν Στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν, ἀφ' ἑτέρου δὲ τῆς μὴ διαθέσεως ἐν τῇ Α.Σ.Ο.Ε.Ε. τοῦ ἀπαιτουμένου διὰ πλήρη διδασκαλίαν τῶν Γενικῶν Μαθηματικῶν χρόνου, εὑρέθημεν ὑποχρεωμένοι νὰ ἐπιλέξωμεν τὰ διὰ τὴν σπουδὴν τῶν Οἰκονομικῶν Ἐπιστημῶν ἀπαραίτητα καὶ βασικὰ στοιχεῖα τούτων, καὶ νὰ ἐμφανίσωμεν ταῦτα ὑπὸ τὴν ἁπλουστάτην δυνατὴν καὶ εὔληπτον μορφήν, φωτιζομένην, ὡς ἐμπρέπει, ἐκ παραδειγμάτων εἰλημμένων ἐκ τοῦ καθ' ἡμέραν οἰκονομικοῦ καὶ γνωστοῦ τοῖς πᾶσι βίου.

Ἐν τῇ προσπαθείᾳ μας ταύτῃ οὐδεμίαν ἔσχομεν οὐσιώδη βοήθειαν ἐξ ἄλλων παρεμφερῶν συγγραφῶν, διότι ἑλληνικαὶ μὲν δὲν ὑπάρχουσιν, αἱ ἐλάχισται δὲ ξέναι προϋποθέτουσιν ἀποφοίτους Σχολῶν Μέσης Ἐκπαιδεύσεως μὲ διδασκαλίαν τῶν Στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν ὑπερπλήρη.

Προτάσεις τινὲς καὶ πολλῶν προτάσεων αἱ ἀποδείξεις δίδονται ἐντεταγμέναι ὅπου δεῖ, ἀλλὰ διὰ στοιχείων μικροτέρου ὀφθαλμοῦ, καθόσον, ἐνῷ ἡ παράλειψίς των θὰ ἠδύνατο, ἴσως, νὰ θεωρηθῇ ἀτέλεια, ἡ μὴ σπουδή των οὐδόλως ἐμποδίζει τὴν ἐντελῆ κατανόησιν τῶν ὡς ἀπαραιτήτων ἀλλὰ καὶ ἀρκούντων πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ τοῦ παρόντος κριθέντων.

Ὡς βοηθήματα εἴχομεν τὸ *Mathematical Analysis for Economists* τοῦ R. ALLEN, τὸ *Differential and Integral Calculus* τοῦ R. COURANT, τὰ *Éléments de Calcul Infinitésimal* τοῦ A. GROSREY καὶ τὰ *Lezioni di Matematica Generale e Finanziaria* τοῦ F. SIBIRANI.

Ἰδιαιτέρως πολύτιμος ὑπῆρξε δι' ἡμᾶς ἡ καθοδήγησις καὶ αἱ συμβουλαὶ τοῦ Καθηγητοῦ κ. **Τριανταφύλλου Γ. Κεραμιδᾶ,** πρὸς ὃν καὶ δημοσίᾳ ἐκφράζομεν τὴν ἄπειρόν μας εὐγνωμοσύνην.

Π. ΣΤΕΡΙΩΤΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἡ Οἰκονομικὴ Ἐπιστήμη, βασιζομένη ἐπὶ τῆς Φιλοσοφίας καὶ τῆς Κοινωνιολογίας, διδάσκεται εἴτε κατὰ τὴν ἱστορικὴν μέθοδον, δηλονότι ἀφηγηματικῶς, εἴτε κατὰ τὴν μεθοδικὴν τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης—τῆς σπουδῆς τῶν συναρτήσεων τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων καὶ τῆς συναγωγῆς πορισμάτων, νόμων, κανόνων, τύπων—, εἴτε καὶ δι᾽ ἀμφοτέρων.

Δύο δὲ στάδια διατρέχει ὁ σπουδάζων τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα: τὸ *ἐταστικὸν* καὶ τὸ *συνθετικόν*. Ἄλλοις λόγοις: πρῶτον ἐπισκοπεῖ καὶ διερευνᾷ τὰ φαινόμενα καὶ τὰ γεγονότα, ἀναλύων ταῦτα εἰς τὰ στοιχεῖα αὐτῶν καὶ διακριβῶν τοὺς μετασχηματισμούς των, τὰς σχέσεις των, τὰς τάσεις των, τὰς φοράς των ἐν τῇ διαρκείᾳ τοῦ χρόνου, καὶ εἶτα συνθέτει, συνάγει τοὺς νόμους, οἵτινες τὰ διέπουσι, τὰς ροπάς, τὰς τροπὰς εἰς ἃς ὑπόκεινται, ὥστε νὰ δύναται νὰ προβλέπῃ. Φυσικά, τοιαύτη σπουδὴ τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων δὲν εἶναι δυνατὴ ἄνευ ἐγγενοῦς καὶ ἐπικτήτου ἱκανότητος πρὸς ἀντικειμενικήν, ἐξαντλητικὴν καὶ ὡλοκληρωμένην παρατήρησιν, ἄνευ αὐστηρᾶς καὶ ἀνεπιψόγου κατὰ πάντα λογικῆς ἐπεξεργασίας, ἐξασφαλιζούσης τὴν πλέον ἀβίαστον γενίκευσιν καὶ μαθηματικὴν τῶν παρατηρουμένων ὑποτύπωσιν, διὰ συμβολικῆς παραστάσεως, ἰδανικῆς συντομίας, σαφηνείας, ἀκριβείας, κομψότητος.

Ἡ γνῶσις, ἄρα, τῶν Γενικῶν Μαθηματικῶν καὶ δὴ ἡ προσοικείωσις τῶν ἀρχῶν καὶ μεθόδων αὐτῶν, ἀποτελεῖ βασικὴν προϋπόθεσιν πρὸς ἀπόκτησιν καὶ ὀργάνωσιν τῶν προεκτεθεισῶν ἱκανοτήτων, ἀπαραιτήτων διὰ τὴν μετὰ μαθηματικῆς ἐντελείας θεώρησιν καὶ κατανόησιν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων, συνεπῶς δὲ καὶ τὸν γόνιμον χειρισμὸν τῶν ζητημάτων τῶν οἰκονομικῶν. Ἡ ἱστορική των ἀντιμετώπισις, ὅσον καὶ ἂν ὑποτεθῇ εὐρεῖα καὶ συνθετική, δὲν ἀρκεῖ. Τὸ ὁσονδήποτε ἀντικειμενικὸν οἰκονομολογικὸν συμπέρασμα πρέπει νὰ καθίσταται ἐν τέλει μετουσιώσιμον εἰς μαθηματικὸν πόρισμα, ἵνα τυγχάνῃ ἀπολύτου παραδοχῆς καὶ προσφέρεται πρὸς πρᾶξιν. Τοῦτο δὲ οὐ μόνον ὡς πρὸς τὰ καθολικώτερα φαινόμενα τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς, ἀλλὰ καὶ τὰ κατὰ περίπτωσιν. Διότι καὶ τὰ κατὰ περίπτωσιν δυνατὸν νὰ ἐγκρύπτουν γενικωτέρας συναφείας καὶ σχέσεις μεγάλου κοινωνικοῦ καὶ πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος, τὸ ὁποῖον καὶ πάλιν τὰ Μαθηματικὰ θ᾽ ἀποκαλύψουν καὶ θ᾽ ἀξιολογήσουν. Νὰ προσθέσωμεν, γενικώτερον, ὅτι τὰ Μαθηματικὰ ὀξύνουν τὸν νοῦν, ὀργανώνουν τὴν συλλογιστικήν, πειθαρχοῦν τὴν λογικὴν ὅδευσιν, ὑποχρεοῦν εἰς εὐθυπορίαν πρὸς τὸ ἑκάστοτε σκοπούμενον ἄνευ λογικῶν χασμάτων ἢ ὑπερπηδήσεων τῶν διαμέσων σταθμῶν, θὰ ἀπετέλει περιττολογίαν.

Σήμερον, ὁπότε αὐτὸ τὸ παρόν, ἀναμφιβόλως δὲ τὸ μέλλον πάσης Ἐπιστήμης—καὶ ὑπεράνω πάσης τῆς Οἰκονομικῆς—κρίνεται ἐκ τοῦ βαθμοῦ μέχρις οὗ μαθηματικεύεται, δὲν δύναται νὰ ἀμφισβητῆται ὅτι τὸ ἐπιστημονικῶς καὶ ὅλως ἰδιαιτέρως τὸ οἰκονομικῶς σκέπτεσθαι τείνει ὁλονὲν περισσότερον νὰ ταυτισθῇ πρὸς τὸ μαθηματικῶς σκέπτεσθαι. Ἐφ᾽ ᾧ καὶ εἰς ὅλας τὰς συγχρονισμένας Ἀνωτάτας Σχολὰς ἔχει πρὸ πολλοῦ εἰσαχθῆ ἡ διδασκαλία τῶν Γενικῶν Μαθηματικῶν. Ὁ σπουδαιότερος δὲ λόγος τῆς εἰσαγωγῆς ταύτης εἶναι οὐχὶ νὰ πλάσσουν μαθηματικούς, ἀλλὰ νὰ συντελέσουν εἰς τὴν μόρφωσιν νέας γενεᾶς οἰκονομικῶν ἀψόγως μαθηματικῶς σκεπτομένων.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ - ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ - ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΔΙΩΝΥΜΟΝ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΟΣ

§. 1. *Εἰσαγωγή.*

Πολλάκις εἰς τὰς Ἐφηρμοσμένας Ἐπιστήμας παρίσταται ἀνάγκη ὅπως, δοθέντων πραγμάτων τινῶν, διαφόρων ἢ ὁμοίων, τοποθετήσωμεν, διατάξωμεν, συνδυάσωμεν ταῦτα κατὰ διαφόρους ὁμάδας. Ὁ ἑκάστοτε προσδιορισμὸς τοῦ πλήθους τῶν ὁμάδων αἵτινες θὰ προκύψωσιν ἀποβαίνει δύσκολος καὶ μακρός, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν δοθέντων πραγμάτων εἶναι μέγας. Δι' ὃ καὶ ἀναζητοῦνται τρόποι καὶ τύποι λύοντες ἀμέσως καὶ εὐκόλως τὰ συναφῆ ζητήματα.

Ἡ σπουδὴ τῶν σχετικῶν προβλημάτων καὶ ἡ εὕρεσις τῶν τύπων δι' ὧν ἐπιτυγχάνεται ἄμεσον καὶ ταχὺ ἀποτέλεσμα εἶναι ἔργον τῆς *Συνδυαστικῆς Ἀναλύσεως*, τὴν ὁποίαν θὰ πραγματευθῶμεν δι' ὅ,τι ἐξυπηρετεῖ τὸν σκοπὸν τοῦ ἀνὰ χεῖρας πονήματος.

Ἡ Συνδυαστικὴ Ἀνάλυσις ἀνεπτύχθη κατὰ τὸν 17ον αἰῶνα ὑπὸ τῶν Fermat καὶ Pascal πρὸς ἐπίλυσιν προβλημάτων τινῶν τῶν τυχηρῶν παιγνίων καὶ εἶναι τὸ sine qua non διὰ τὸν *Λογισμὸν τῶν Πιθανοτήτων*.

Καὶ κατὰ τὴν Ἀρχαιότητα εἶχον τεθῆ προβλήματα τῆς Συνδυαστικῆς Ἀναλύσεως. Ὁ Πλούταρχος ἀναφέρει ὅτι ὁ Ξενοκράτης (4° π.Χ. αἰ.) ἀνεζήτησε τὸν ἀριθμὸν τῶν συλλαβῶν αἵτινες θὰ προκύψωσι διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου. Μεταγενεστέρως ὁ Mersenne ἔθεσε τὸ πρόβλημα: Δοθέντος ὅτι ἑκάστη μελῳδία εἶναι συνδυασμὸς ἤχων ἢ διαστημάτων, δὲν εἶναι δυνατόν, συνδυάζοντες τοὺς φθόγγους τῆς μουσικῆς κλίμακος, νὰ συνθέσωμεν μηχανικῶς τὸ σύνολον τῶν δυνατῶν μελῳδιῶν; Βεβαίως, ἐὰν τὸ τεθὲν πρόβλημα δὲν ἦτο ἀνεπίτευκτον ὡς ἐκ τοῦ μεγίστου ἀριθμοῦ συνδυασμῶν. Πλὴν ἐὰν τοῦτο δὲν ἐπιλύεται καὶ δὲν ἐπιτυγχάνονται παρόμοια ἄλλα, ὡραῖα ἀλλὰ χιμαιρικά, ἡ γνῶσις ἐν τούτοις τῆς Συνδυαστικῆς Ἀναλύσεως εἶναι ἀπαραίτητος πρὸς σπουδὴν πληθύος ζητημάτων καὶ ἰδίᾳ τοῦ βασικοῦ διὰ τὴν Στατιστικὴν Λογισμοῦ τῶν Πιθανοτήτων.

Ναι § 2. Ἁπλαῖ διατάξεις - Ἁπλαῖ μεταθέσεις - Ἁπλοῖ συνδυασμοί.

Θεωροῦμεν πλῆθος ν πραγμάτων. Ταῦτα, πρὸς εὐκολίαν, παριστῶμεν μὲ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ καὶ καλοῦμεν *στοιχεῖα* τοῦ ἐν λόγῳ πλήθους. Τὸ σύνολον τινῶν ἢ ὅλων τῶν στοιχείων, διατεταγμένων ἐν γραμμῇ, καλοῦμεν *ὁμάδα*.

Διὰ ν στοιχείων δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ὁμάδας κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους:

α) Σχηματίζομεν ὁμάδας ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ μ στοιχεῖα ($\mu < \nu$) εἰς τρόπον ὥστε δύο οἱαιδήποτε ἐκ τῶν ὁμάδων νὰ διαφέρωσι μεταξύ των ὡς ἔχουσαι ἢ στοιχεῖόν τι διάφορον ἢ διάταξιν τῶν στοιχείων των διάφορον. Αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι ὁμάδες καλοῦνται *ἁπλαῖ διατάξεις τῶν* **ν** 1. *στοιχείων ληφθέντων ἀνὰ* **μ** *ἢ τῆς τάξεως* **μ**, τὸ πλῆθος των δὲ παρίσταται συμβολικῶς διὰ $\Delta_{\nu,\mu}$, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται: *διατάξεις τῶν* **ν** *ἀνὰ* **μ**.

Οὕτω, διὰ τῶν τριῶν στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ σχηματίζονται αἱ ἑξῆς ἓξ ἁπλαῖ διατάξεις, λαμβανομένων τῶν στοιχείων τούτων ἀνὰ δύο:

$$\alpha_1\alpha_2,\quad \alpha_1\alpha_3,\quad \alpha_2\alpha_1,\quad \alpha_2\alpha_3,\quad \alpha_3\alpha_1,\quad \alpha_3\alpha_2,\quad \text{ἤτοι } \Delta_{3,2} = 6.$$

β) Σχηματίζομεν ὁμάδας ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ ν στοιχεῖα εἰς τρόπον ὥστε αὗται νὰ διαφέρωσι μεταξύ των κατὰ τὴν τάξιν καθ' ἣν τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἶναι τοποθετημένα. Αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι ὁμάδες καλοῦνται *ἁπλαῖ μεταθέσεις τῶν* **ν** *στοιχείων*, τὸ πλῆθος των δὲ παρίσταται συμβολικῶς διὰ M_ν, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται: *μεταθέσεις τῶν* **ν** *στοιχείων*.

Οὕτω, διὰ τῶν τριῶν στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ σχηματίζονται αἱ ἑξῆς ἓξ ἁπλαῖ μεταθέσεις:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\quad \alpha_1\alpha_3\alpha_2,\quad \alpha_2\alpha_3\alpha_1,\quad \alpha_2\alpha_1\alpha_3,\quad \alpha_3\alpha_1\alpha_2,\quad \alpha_3\alpha_2\alpha_1,\quad \text{ἤτοι } M_3 = 6.$$

γ) Σχηματίζομεν ὁμάδας ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ μ στοιχεῖα ($\mu < \nu$) εἰς τρόπον ὥστε δύο οἱαιδήποτε ἐκ τῶν ὁμάδων νὰ διαφέρωσι μεταξύ των ὡς ἔχουσαι ἓν τοὐλάχιστον διάφορον στοιχεῖον. Αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι ὁμάδες καλοῦνται *ἁπλοῖ συνδυασμοὶ τῶν* **ν** *στοιχείων ἀνὰ* **μ** *ἢ τῆς τάξεως* **μ**, τὸ πλῆθος των δὲ παρίσταται συμβολικῶς διὰ $\Sigma_{\nu,\mu}$ ἢ $\binom{\nu}{\mu}$, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται: *συνδυασμοὶ τῶν* **ν** *ἀνὰ* **μ**.

Ναι § 3. Πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ.

Ἔστωσαν τὰ ν στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ καὶ ζητήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν διατάξεών των ἀνὰ μ ἓν, ἤτοι τὸ $\Delta_{\nu,1}$, μ=1

Αἱ διατάξεις τῶν ν στοιχείων ἀνὰ ἓν εἶναι ν, ἤτοι: $\Delta_{\nu,1} = \nu$. Ἐὰν εἰς ἑκάστην ὁμάδα ἥτις ἔχει ἓν στοιχεῖον παραθέσωμεν ἀνὰ ἓν τῶν ὑπολοίπων

$(\nu-1)$ στοιχείων, θὰ ἔχωμεν τὰς διατάξεις τῶν ν ἀνὰ δύο. Ἐπειδὴ ἐξ ἑκάστης τῶν ἀνὰ ἓν θὰ λάβωμεν $(\nu-1)$ διατάξεις δύο στοιχείων, ἐκ τῶν $\Delta_{\nu,1}$ θὰ λάβωμεν ἐν συνόλῳ $\Delta_{\nu,1}\cdot(\nu-1)$. Ἄρα, $\Delta_{\nu,2}=\nu(\nu-1)$, ἀφοῦ $\Delta_{\nu,1}=\nu$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν διατάξεων τῶν ν στοιχείων ἀνὰ τρία, ἤτοι τοῦ $\Delta_{\nu,3}$, παραθέτομεν εἰς ἑκάστην τῶν $\Delta_{\nu,2}$ ἀνὰ ἓν τῶν ὑπολοίπων $(\nu-2)$ στοιχείων, καὶ ἐπειδὴ ἐξ ἑκάστης τῶν $\Delta_{\nu,2}$ θὰ προκύψωσι $(\nu-2)$ ὁμάδες, ἐκ τῶν $\Delta_{\nu,2}$ θὰ προκύψωσι $\Delta_{\nu,2}\cdot(\nu-2)$, ἤτοι: $\Delta_{\nu,3}=\nu(\nu-1)(\nu-2)$, ἐφ' ὅσον, ὡς ἐλέχθη, $\Delta_{\nu,2}=\nu(\nu-1)$. Ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, θὰ εὕρωμεν τὸν γενικὸν τύπον:

$$\Delta_{\nu,\mu}=\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots[\nu-(\mu-1)] \quad \text{ἢ}$$
$$\Delta_{\nu,\mu}=\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+1) \qquad (1)$$

ἤτοι:

*τὸ πλῆθος τῶν ἁπλῶν διατάξεων τῶν **ν** στοιχείων ἀνὰ **μ**, εἶναι τὸ γινόμενον τῶν μ ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες βαίνουσιν ἐλαττούμενοι κατὰ μονάδα, ἀρχῆς γενομένης ἐκ τοῦ **ν**.*

Παράδειγμα: Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν πέντε στοιχείων ἀνὰ τρία ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν 5, 4, 3, ἤτοι:

$$\Delta_{5,3}=5\cdot4\cdot3=60$$

§ 4. Πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ μετ' ἐπαναλήψεως.

Ἐκτὸς τῶν ἁπλῶν διατάξεων τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ, ἔχομεν καὶ τὰς διατάξεις μετ' ἐπαναλήψεως τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ, αἵτινες προκύπτουσιν ἐφ' ὅσον τὸ αὐτὸ στοιχεῖον δύναται νὰ ἐμφανισθῇ εἰς τὴν ὁμάδα ἕως μ φορὰς καὶ αἱ ὁμάδες θεωροῦνται διάφοροι ἀλλήλων ἐὰν διαφέρωσι κατὰ στοιχεῖόν τι ἢ κατὰ τὴν τάξιν καθ' ἣν ἔχουσι διαταχθῆ. Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων μετ' ἐπαναλήψεως παρίσταται διὰ $\Delta'_{\nu,\mu}$.

Οὕτω, αἱ διατάξεις μετ' ἐπαναλήψεως τῶν τριῶν στοιχείων ἀνὰ δύο εἶναι:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\alpha_1 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \\ \alpha_2\alpha_1 & \alpha_2\alpha_2 & \alpha_2\alpha_3 \\ \alpha_3\alpha_1 & \alpha_3\alpha_2 & \alpha_3\alpha_3, \end{array} \qquad \text{ἤτοι } \Delta'_{\nu,\mu}=3^2.$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πλήθους $\Delta'_{\nu,\mu}$ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν κατασκευάσει τὰς ὁμάδας τῶν διατάξεων μετ' ἐπαναλήψεως τῶν ν στοιχείων ἀνὰ $\mu-1$. Διὰ νὰ λάβωμεν τὰς ὁμάδας τῶν διατάξεων μετ' ἐπαναλήψεως ἐκ μ στοιχείων ἑκάστην, ἀρκεῖ εἰς τὰς ὁμάδας τῶν $\mu-1$ στοιχείων νὰ παραθέσωμεν πάντα τὰ ν στοιχεῖα, ἑκάστην φορὰν ἀνὰ ἕν. Οὕτω θὰ ἔχωμεν:

$$\Delta'_{\nu,\mu}=\nu\cdot\Delta'_{\nu,(\mu-1)}.$$

Ἐὰν εἰς τὸ μ δώσωμεν, διαδοχικῶς, τὰς τιμὰς 1, 2, 3, ... , μ, θὰ ἔχωμεν:

$$A'_{\nu,1} = \nu \cdot A'_{\nu,0}$$
$$A'_{\nu,2} = \nu \cdot A'_{\nu,1}$$
$$A'_{\nu,3} = \nu \cdot A'_{\nu,2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A'_{\nu,\mu} = \nu \cdot A'_{\nu,(\mu-1)}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, ἁπλοποιοῦντες τὸ ἀποτέλεσμα καὶ θεωροῦντες, συμβολικῶς, $A'_{\nu,0} = 1$, λαμβάνομεν:

$$A'_{\nu,\mu} = \nu^{\mu} \tag{2}$$

Παράδειγμα: Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων μετ' ἐπαναλήψεως τῶν πέντε στοιχείων ἀνὰ δύο εἶναι:

$$A'_{5,2} = 5^2 = 25$$

§ 5. *Πλῆθος τῶν ἁπλῶν μεταθέσεων.*

Φανερὸν ὅτι αἱ ἁπλαῖ μεταθέσεις τῶν ν στοιχείων εἶναι ἁπλαῖ διατάξεις τῶν ν στοιχείων ἀνὰ ν. Συνεπῶς:

$$M_\nu = A_{\nu,\nu} = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\nu+1) \text{ ἤ}$$
$$M_\nu = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots3\cdot2\cdot1 = 1\cdot2\cdot3\cdots\nu^{*} \tag{3}$$

ἤτοι: *τὸ πλῆθος τῶν ἁπλῶν μεταθέσεων τῶν **ν** στοιχείων εἶναι τὸ γινόμενον τῶν πρώτων **ν** φυσικῶν ἀριθμῶν.*

Παράδειγμα: Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἁπλῶν μεταθέσεων 4 στοιχείων εἶναι:

$$M_4 = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$$

§ 6. *Πλῆθος μεταθέσεων μὲ στοιχεῖα τινὰ ἴσα.*

Ἐάν τινα τῶν ν στοιχείων εἶναι ἴσα μεταξύ των, αἱ λαμβανόμεναι μεταθέσεις καλοῦνται *μεταθέσεις ἔχουσαι καὶ στοιχεῖα ἴσα.*

Ὑποθέσωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν δοθέντων ν στοιχείων ὑπάρχουσιν α στοιχεῖα ἴσα πρὸς a, β στοιχεῖα ἴσα πρὸς b καὶ ὅλα τὰ ἄλλα διάφορα τὸ ἓν τοῦ ἄλλου, ὅτι ἐσχηματίσαμεν τὰς ὁμάδας τῶν μεταθέσεων τῶν ν δοθέντων στοιχείων καὶ ὅτι K τὸ πλῆθος αὐτῶν. Ἐὰν εἰς τὴν θέσιν τῶν α στοιχείων τῶν ἴσων πρὸς a τοποθετήσωμεν εἰς ἑκάστην ὁμάδα α διάφορα στοιχεῖα καὶ τὰ μεταθέσωμεν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, θὰ ἔχωμεν ἐξ ἑκάστης τῶν K ὁμάδων M_α ὁμάδας καὶ ἐν συνόλῳ $K \cdot M_\alpha$ ὁμάδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων θὰ ἔχῃ ἐπὶ πλέον β στοιχεῖα ἴσα πρὸ b. Ἐὰν τώρα εἰς ἑκάστην τῶν $K \cdot M_\alpha$ ὁμάδων εἰς τὰ β στοιχεῖα, τὰ ἴσα πρὸς b, ἀντικαταστήσωμεν

---

* Τὸ γινόμενον $\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots3\cdot2\cdot1$, ἢ $1\cdot2\cdot3\cdots\nu$ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\nu!$ ἢ $\underline{|\nu}$ καὶ ἀναγινώσκεται: ν *παραγοντικόν.*

β διάφορα στοιχεῖα καὶ τὰ μεταθέσωμεν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, θὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστης τῶν ὁμάδων M_β ὁμάδας καὶ ἐν συνόλῳ $K \cdot M_\alpha \cdot M_\beta$. Αἱ οὕτω ληφθεῖσαι ὁμάδες ἔχουσιν ὅλα τὰ στοιχεῖα διάφορα, τὸ πλῆθος των ἄρα εἶναι M_ν. Οὕτω θὰ ἔχωμεν: $K \cdot M_\alpha \cdot M_\beta = M_\nu$ ἢ

$$K = \frac{M_\nu}{M_\alpha \cdot M_\beta} \tag{4}$$

Ἐὰν μεταξὺ τῶν ν στοιχείων ὑπῆρχον καὶ γ στοιχεῖα ἴσα πρὸς c, ὁ παρονομαστὴς τοῦ προηγουμένου τύπου θὰ ἦτο $M_\alpha \cdot M_\beta \cdot M_\gamma$ κ.ο.κ.

Παράδειγμα: Μεταθέτοντες τὰ γράμματα τῆς λέξεως *πέντε*, σχηματίζομεν 60 λέξεις (ἀναγραμματισμὸς) διότι, ἐὰν εἰς τὸν τύπον (4) θέσωμεν ν=5, α=2, θὰ ἔχωμεν: $K = \frac{M_5}{M_2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60.$

3.

§ 7. Πλῆθος τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ.

Ναι

Ἔστω ὅτι ἐσχηματίσαμεν τὰς ὁμάδας τῶν συνδυασμῶν τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ οὕτως ὥστε τὸ πλῆθος αὐτῶν νὰ εἶναι $\Sigma_{\nu,\mu}$. Δοθέντος, ὅτι ἑκάστη ὁμὰς περιέχει μ στοιχεῖα, μεταθέτοντες ταῦτα καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, λαμβάνομεν ἐξ ἑκάστης ὁμάδος (συνδυασμοῦ) M_μ νέας ὁμάδας καὶ ἐκ τῶν $\Sigma_{\nu,\mu}$ ὁμάδων (συνδυασμῶν) $M_\mu \cdot \Sigma_{\nu,\mu}$ ὁμάδας. Ἀλλ' αἱ εὑρεθεῖσαι ὁμάδες εἶναι ἀκριβῶς αἱ διατάξεις τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ, τὸ πλῆθος τῶν ὁποίων εἶναι, ὡς γνωστόν, $\Delta_{\nu,\mu}$. Οὕτω ἔχομεν:

$$M_\mu \cdot \Sigma_{\nu,\mu} = \Delta_{\nu,\mu}, \quad \text{ἐξ ἧς:}$$

$$\Sigma_{\nu,\mu} = \frac{\Delta_{\nu,\mu}}{M_\mu} \tag{5}$$

ἢ καὶ

$$\Sigma_{\nu,\mu} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mu}.$$

Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ τελευταίου κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ $(\nu-\mu)(\nu-\mu-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, λαμβάνομεν:

$$\Sigma_{\nu,\mu} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+1)(\nu-\mu)(\nu-\mu-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mu \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\nu-\mu)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\nu-\mu-1)(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)\cdots(\nu-2)(\nu-1)\nu}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mu \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\nu-\mu)} \tag{6}$$

Ὁ ἀριθμητὴς δίδει τὸ γινόμενον τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν, ἄρα τὰς μεταθέσεις τῶν ν στοιχείων. Ὁ παρανομαστὴς δίδει τὸ γινόμενον τῶν μ πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν (ν—μ) πρώτων τοιούτων, ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν μεταθέσεων τῶν μ ἐπὶ τὰς μεταθέσεις τῶν (ν−μ) στοιχείων. Οὕτω, ἡ ἰσότης (6) γράφεται :

$$\Sigma_{\nu,\mu} = \frac{M_{\nu}}{M_{\mu} \cdot M_{\nu-\mu}} \tag{7}$$

Ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν συμβολίζεται διὰ ν!, οἱ δὲ συνδυασμοὶ τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ διὰ τοῦ συμβόλου $\binom{\nu}{\mu}$, ὁ τύπος (7) γράφεται καὶ οὕτω :

$$\binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!\,(\nu-\mu)!} \tag{8}$$

Παράδειγμα: Οἱ συνδυασμοὶ δέκα στοιχείων ἀνὰ τρία εἶναι, βάσει τοῦ τύπου (7):

$$\Sigma_{10,3} = \frac{M_{10}}{M_3 \cdot M_7} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3 \;\cdot\; 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} = 120.$$

§ 8. *Πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ μετ' ἐπαναλήψεως.*

Ἐὰν εἰς τὰς ὁμάδας τῶν συνδυασμῶν τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ τὸ αὐτὸ στοιχεῖον δύναται νὰ ἐμφανισθῇ ἕως μ φορὰς εἰς τὴν αὐτὴν ὁμάδα — καὶ αἱ ὁμάδες θεωροῦνται διαφορετικαὶ ἐφ' ὅσον διαφέρουσι τοὐλάχιστον κατὰ ἓν στοιχεῖον —, οἱ οὕτω προκύπτοντες συνδυασμοὶ τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ, θὰ καλοῦνται *συνδυασμοὶ τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ μετ' ἐπαναλήψεως*. Τὸ πλῆθος αὐτῶν παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\Sigma'_{\nu,\mu}$.

Οὕτω, διὰ τῶν στοιχείων α_1, α_2, α_3 σχηματίζομεν τοὺς ἑξῆς συνδυασμοὺς ἀνὰ δύο μετ' ἐπαναλήψεως :

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1\alpha_1 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 & \\ & \alpha_2\alpha_2 & \alpha_2\alpha_3 & \\ & & \alpha_3\alpha_3 & \text{ἤτοι } \Sigma'_{3,2} = 6. \end{array}$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πλήθους τῶν $\Sigma'_{\nu,\mu}$ σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως: Ἐφ' ὅσον ἑκάστη ὁμὰς ἔχει μ στοιχεῖα, ὅλαι αἱ ὁμάδες, δηλ. ὅλοι οἱ ὑπ' ὄψιν συνδυασμοί, θὰ περιέχωσιν ἐν συνόλῳ $\mu\cdot\Sigma'_{\nu,\mu}$ στοιχεῖα. Δοθέντος δὲ ὅτι ὅλα τὰ στοιχεῖα εἰς τὸ σύνολον τῶν ὁμάδων περιέχονται ἐξ ἴσου πλειστάκις, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, π.χ. τὸ α_1, θὰ περιέχεται $\dfrac{\mu\cdot\Sigma'_{\nu,\mu}}{\nu}$ φοράς. (10)

Ποσάκις ἕκαστον στοιχεῖον περιέχεται εἰς τὸ σύνολον τῶν ὁμάδων δύναται νὰ ἐξαχθῇ καὶ οὕτω : Ἐὰν ἀπὸ ὅλας τὰς ὁμάδας αἱ ὁποῖαι περιέχουσιν ἓν στοιχεῖον, π.χ. τὸ α_1, ἀφαιρέσωμεν ἓν α_1, προφανῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁμάδων ἐξ ὧν ἀφῃρέθη τὸ στοιχεῖον ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μετ' ἐπαναλήψεως τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ−1, ἤτοι $\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}$ καὶ εἰς τὸ σύνολον τῶν ὁμάδων αὐτῶν αἵτινες περιέχουσι $(\mu-1)\cdot\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}$ στοιχεῖα τὸ στοιχεῖον α_1 θὰ περιέχεται $\dfrac{(\mu-1)\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}}{\nu}$

φοράς. Ἐὰν τώρα εἰς τὸν ἀριθμὸν $\frac{(\mu-1)\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}}{\nu}$ προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχείων ἅτινα ἀφηρέθησαν καὶ ὅστις ἰσοῦται πρὸς $\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}$, διότι ἕκαστος τῶν $\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}$ συνδυασμῶν προέκυψε μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἑνὸς α_1, εὑρίσκομεν ποσάκις περιέχεται τὸ α_1, ἤτοι ἐπανευρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τὸν παρεχόμενον ὑπὸ τοῦ τύπου (10). Οὕτω, ἐξισοῦντες τὰ δύο ἐξαγόμενα, λαμβάνομεν :

$$\frac{\mu\Sigma'_{\nu,\mu}}{\nu}=\frac{(\nu+\mu-1)\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}}{\nu} \tag{11}$$

ὅθεν

$$\Sigma'_{\nu,\mu}=\frac{(\nu+\mu-1)\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}}{\mu} \tag{12}$$

Ἐὰν εἰς τὸν τελευταῖον τύπον ἀντικαταστήσωμεν διαδοχικῶς τὸ μ διὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, ... μ, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας :

$$\Sigma'_{\nu,1}=\frac{\nu}{1}\,\Sigma'_{\nu,0}$$

$$\Sigma'_{\nu,2}=\frac{\nu+1}{2}\,\Sigma'_{\nu,1}$$

$$\Sigma'_{\nu,3}=\frac{\nu+2}{3}\,\Sigma'_{\nu,2}$$

. . . .

. . . .

$$\Sigma'_{\nu,\mu}=\frac{\nu+\mu-1}{\mu}\,\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}.$$

Πολλαπλασιάζοντες ταύτας κατὰ μέλη, ἁπλοποιοῦντες τὸ ἐξαγόμενον καὶ θεωροῦντες, συμβολικῶς, ὅτι $\Sigma'_{\nu,0}=1$, λαμβάνομεν τὸν τύπον:

$$\Sigma'_{\nu,\mu}=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\cdot\cdot\cdot(\nu+\mu-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdot\cdot\mu} \tag{13}$$

Ἀλλ' ὁ μὲν ἀριθμητὴς τοῦ δευτέρου μέλους παριστᾷ τὰς διατάξεις τῶν (ν+μ—1) στοιχείων ἀνὰ μ, ὁ δὲ παρονομαστὴς τὰς μεταθέσεις τῶν μ στοιχείων. Ἤτοι τὸ δεύτερον μέλος παριστᾷ τοὺς ἁπλοῦς συνδυασμοὺς τῶν (ν+μ—1) στοιχείων ἀνὰ μ. Κατὰ συνέπειαν ὁ προηγούμενος τύπος γράφεται καὶ οὕτω :

$$\Sigma'_{\nu,\mu}=\Sigma_{(\nu+\mu-1),\mu} \tag{14}$$

Ναι § 9. *Ἀξιοσημείωτοι ἰδιότητες τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν.*

Θὰ ἀποδείξωμεν δύο βασικὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν :

α)

$$\binom{\nu}{\mu}=\binom{\nu}{\nu-\mu} \tag{15}$$

Βάσει τοῦ τύπου (7) λαμβάνομεν

$$\binom{\nu}{\mu}=\frac{M_\nu}{M_\mu\cdot M_{\nu-\mu}} \quad \text{καὶ} \quad \binom{\nu}{\nu-\mu}=\frac{M_\nu}{M_{\nu-\mu}\cdot M_\mu}$$

τοιούτων, ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν μεταθέσεων τῶν μ ἐπὶ τὰς μεταθέσεις τῶν (ν−μ) στοιχείων. Οὕτω, ἡ ἰσότης (6) γράφεται :

$$\Sigma_{\nu,\mu} = \frac{M_\nu}{M_\mu \cdot M_{\nu-\mu}} \tag{7}$$

Ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν συμβολίζεται διὰ ν!, οἱ δὲ συνδυασμοὶ τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ διὰ τοῦ συμβόλου $\binom{\nu}{\mu}$, ὁ τύπος (7) γράφεται καὶ οὕτω :

$$\binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!\,(\nu-\mu)!} \tag{8}$$

Παράδειγμα : Οἱ συνδυασμοὶ δέκα στοιχείων ἀνὰ τρία εἶναι, βάσει τοῦ τύπου (7) :

$$\Sigma_{10,3} = \frac{M_{10}}{M_3 \cdot M_7} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\ \cdot\ 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} = 120.$$

§ 8. *Πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ μετ' ἐπαναλήψεως.*

Ἐὰν εἰς τὰς ὁμάδας τῶν συνδυασμῶν τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ τὸ αὐτὸ στοιχεῖον δύναται νὰ ἐμφανισθῇ ἕως μ φορὰς εἰς τὴν αὐτὴν ὁμάδα—καὶ αἱ ὁμάδες θεωροῦνται διαφορετικαὶ ἐφ' ὅσον διαφέρουσι τοὐλάχιστον κατὰ ἓν στοιχεῖον—, οἱ οὕτω προκύπτοντες συνδυασμοὶ τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ, θὰ καλοῦνται *συνδυασμοὶ τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ μετ' ἐπαναλήψεως*. Τὸ πλῆθος αὐτῶν παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\Sigma'_{\nu,\mu}$.

Οὕτω, διὰ τῶν στοιχείων α_1, α_2, α_3 σχηματίζομεν τοὺς ἑξῆς συνδυασμοὺς ἀνὰ δύο μετ' ἐπαναλήψεως :

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1\alpha_1 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \\ & \alpha_2\alpha_2 & \alpha_2\alpha_3 \\ & & \alpha_3\alpha_3 \end{array} \qquad \text{ἤτοι } \Sigma'_{3,2} = 6.$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πλήθους τῶν $\Sigma'_{\nu,\mu}$ σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως : Ἐφ' ὅσον ἑκάστη ὁμὰς ἔχει μ στοιχεῖα, ὅλαι αἱ ὁμάδες, δηλ. ὅλοι οἱ ὑπ' ὄψιν συνδυασμοί, θὰ περιέχωσιν ἐν συνόλῳ $\mu \cdot \Sigma'_{\nu,\mu}$ στοιχεῖα. Δοθέντος δὲ ὅτι ὅλα τὰ στοιχεῖα εἰς τὸ σύνολον τῶν ὁμάδων περιέχονται ἐξ ἴσου πλειστάκις, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, π.χ. τὸ α_1, θὰ περιέχεται $\dfrac{\mu \cdot \Sigma'_{\nu,\mu}}{\nu}$ φοράς. (10)

Ποσάκις ἕκαστον στοιχεῖον περιέχεται εἰς τὸ σύνολον τῶν ὁμάδων δύναται νὰ ἐξαχθῇ καὶ οὕτω : Ἐὰν ἀπὸ ὅλας τὰς ὁμάδας αἱ ὁποῖαι περιέχουσιν ἓν στοιχεῖον, π.χ. τὸ α_1, ἀφαιρέσωμεν ἓν α_1, προφανῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁμάδων ἐξ ὧν ἀφῃρέθη τὸ στοιχεῖον ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μετ' ἐπαναλήψεως τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ−1, ἤτοι $\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}$ καὶ εἰς τὸ σύνολον τῶν ὁμάδων αὐτῶν αἵτινες περιέχουσι $(\mu-1)\cdot\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}$ στοιχεῖα τὸ στοιχεῖον α_1 θὰ περιέχεται $\dfrac{(\mu-1)\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}}{\nu}$

φοράς. Ἐὰν τώρα εἰς τὸν ἀριθμὸν $\frac{(\mu-1)\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}}{\nu}$ προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχείων ἅτινα ἀφῃρέθησαν καὶ ὅστις ἰσοῦται πρὸς $\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}$, διότι ἕκαστος τῶν $\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}$ συνδυασμῶν προέκυψε μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἑνὸς α_1, εὑρίσκομεν ποσάκις περιέχεται τὸ α_1, ἤτοι ἐπανευρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τὸν παρεχόμενον ὑπὸ τοῦ τύπου (10). Οὕτω, ἐξισοῦντες τὰ δύο ἐξαγόμενα, λαμβάνομεν:

$$\frac{\mu\Sigma'_{\nu,\mu}}{\nu}=\frac{(\nu+\mu-1)\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}}{\nu} \tag{11}$$

ὅθεν

$$\Sigma'_{\nu,\mu}=\frac{(\nu+\mu-1)\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}}{\mu} \tag{12}$$

Ἐὰν εἰς τὸν τελευταῖον τύπον ἀντικαταστήσωμεν διαδοχικῶς τὸ μ διὰ τῶν ἀριθμῶν $1, 2, 3, \ldots\ldots \mu$, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας:

$$\Sigma'_{\nu,1}=\frac{\nu}{1}\Sigma'_{\nu,0}$$

$$\Sigma'_{\nu,2}=\frac{\nu+1}{2}\Sigma'_{\nu,1}$$

$$\Sigma'_{\nu,3}=\frac{\nu+2}{3}\Sigma'_{\nu,2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma'_{\nu,\mu}=\frac{\nu+\mu-1}{\mu}\Sigma'_{\nu,(\mu-1)}.$$

Πολλαπλασιάζοντες ταύτας κατὰ μέλη, ἁπλοποιοῦντες τὸ ἐξαγόμενον καὶ θεωροῦντες, συμβολικῶς, ὅτι $\Sigma'_{\nu,0}=1$, λαμβάνομεν τὸν τύπον:

$$\Sigma'_{\nu,\mu}=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+\mu-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\mu} \tag{13}$$

Ἀλλ' ὁ μὲν ἀριθμητὴς τοῦ δευτέρου μέλους παριστᾷ τὰς διατάξεις τῶν $(\nu+\mu-1)$ στοιχείων ἀνὰ μ, ὁ δὲ παρονομαστὴς τὰς μεταθέσεις τῶν μ στοιχείων. Ἤτοι τὸ δεύτερον μέλος παριστᾷ τοὺς ἁπλοῦς συνδυασμοὺς τῶν $(\nu+\mu-1)$ στοιχείων ἀνὰ μ. Κατὰ συνέπειαν ὁ προηγούμενος τύπος γράφεται καὶ οὕτω:

$$\Sigma'_{\nu,\mu}=\Sigma_{(\nu+\mu-1),\mu} \tag{14}$$

Ναι § 9. *Ἀξιοσημείωτοι ἰδιότητες τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν.*

Θὰ ἀποδείξωμεν δύο βασικὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν:

α) $$\binom{\nu}{\mu}=\binom{\nu}{\nu-\mu} \tag{15}$$

Βάσει τοῦ τύπου (7) λαμβάνομεν

$$\binom{\nu}{\mu}=\frac{M_\nu}{M_\mu\cdot M_{\nu-\mu}} \quad \text{καὶ} \quad \binom{\nu}{\nu-\mu}=\frac{M_\nu}{M_{\nu-\mu}\cdot M_\mu}$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι καὶ τὰ πρῶτα ἴσα, ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον (15).

β)
$$\binom{\nu}{\mu}+\binom{\nu}{\mu-1}=\binom{\nu+1}{\mu} \tag{16}$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (5) λαμβάνομεν:

$$\binom{\nu}{\mu}+\binom{\nu}{\mu-1}=\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+2)(\nu-\mu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\mu}+$$
$$+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\mu-1)}.$$

Ἐκτελοῦντες τὴν πρόσθεσιν τῶν κλασμάτων τοῦ δευτέρου μέλους, λαμβάνομεν:

$$\binom{\nu}{\mu}+\binom{\nu}{\mu-1}=\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+2)\left[(\nu-\mu+1)+\mu\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\mu}=$$
$$=\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+2)(\nu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\mu}=$$
$$=\frac{(\nu+1)\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots\left[(\nu+1)-\mu+1\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\mu}=\binom{\nu+1}{\mu},$$

ἤτοι ὁ τύπος (16) εἶναι ἀληθής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ***Πόσοι τετραψήφιοι ἀριθμοὶ ἔχοντες διαφορετικὰ ψηφία δύνανται νὰ σχηματισθῶσιν ἐκ τῶν ψηφίων 1, 2, 3, . . . , 9 ;***

Ἀπόκρ. Τὸ πλῆθος τῶν τετραψηφίων τούτων ἀριθμῶν θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν 9 ἀνὰ 4, ἤτοι $\Delta_{9,4}=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024$.

2. ***Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι*** $\Delta_{\nu,\mu}=\Delta_{\nu-1,\mu}+\mu\Delta_{\nu-1,\mu-1}$.

Ἀπόκρ. Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἰσότητος τὰ σύμβολα διὰ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν των, λαμβάνομεν:

$$(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+1)(\nu-\mu)+\mu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+2)(\nu-\mu+1)=$$
$$=(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+1)\left[\nu-\mu+\mu\right]=\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+1).$$

3. ***Πόσα στοιχεῖα διάφορα ἀλλήλων πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῶσιν ἵνα ἔχωμεν 24 ἁπλᾶς διατάξεις ἀνὰ τρία ;***

Ἀπόκρ. Ἐὰν x ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων στοιχείων, θὰ ἔχωμεν: $x(x-1)(x-2)=24$, ἐξ ἧς $x^3-3x^2+2x-24=0$. Τὸ πρῶτον μέλος ταύτης μηδενίζεται διὰ $x=4$, ἄρα ἔχει μίαν ῥίζαν ἴσην πρὸς 4. Αἱ ἄλλαι δύο ῥίζαι ἀπορρίπτονται ὡς φανταστικαί.

4. *Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα :* $\frac{7!\,5!}{6!\,4!}$

'Απόκρ. $\frac{7!\,5!}{6!\,4!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\,\cdot\,1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\,\cdot\,1\cdot2\cdot3\cdot4}=7\cdot5=35.$

√5. *Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :* *

$$\frac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{\nu+1}}:\frac{\nu!}{\nu^{\nu}}$$

'Απόκρ. 'Η δοθεῖσα παράστασις γράφεται :

$$\frac{(\nu+1)!\,\nu^{\nu}}{(\nu+1)^{\nu+1}\cdot\nu!},\quad \text{ἐξ ἧς}\quad \frac{1\cdot2\cdot3\cdots\nu\cdot(\nu+1)\cdot\nu^{\nu}}{1\cdot2\cdot3\cdots\nu\cdot(\nu+1)^{\nu+1}}=\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu}$$

6. *'Αποδεῖξαι τὰς ἰσότητας :*

$$2M_{\nu}-(\nu-1)M_{\nu-1}=M_{\nu}+M_{\nu-1}$$
$$M_{\nu}^{2}:M_{\nu-1}=M_{\nu+1}-M_{\nu}$$

'Απόκρ. 'Η πρώτη ἰσότης εἶναι προφανῶς ἰσότιμος πρὸς τὴν $2M_{\nu}-\nu M_{\nu-1}+$ $+M_{\nu-1}=M_{\nu}+M_{\nu-1}$ ἢ τὴν $M_{\nu}=\nu M_{\nu-1}$, ἥτις εἶναι ἀληθὴς καθόσον $1\cdot2\cdot3\ldots\nu=$ $=\nu\cdot1\cdot2\cdot3\ldots(\nu-1)$. Διὰ τὴν δευτέραν ἰσότητα, ἀντικαθιστῶντες τὰ σύμβολα ὑπὸ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, λαμβάνομεν :

$$\frac{[1\cdot2\cdot3\cdots(\nu-1)\cdot\nu]^{2}}{1\cdot2\cdot3\cdots(\nu-1)}=1\cdot2\cdot3\cdots\nu(\nu+1)-1\cdot2\cdot3\cdots\nu$$

καὶ $1\cdot2\cdot3\cdots(\nu-1)\nu^{2}=1\cdot2\cdot3\cdots\nu[(\nu+1)-1]$ ἢ $1\cdot2\cdot3\cdots(\nu-1)\nu^{2}=1\cdot2\cdot3\cdots\nu\cdot\nu.$

7. *Πόσους ἑξαψηφίους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μὲ τοὺς 1, 1, 2, 2, 3, 3 ;*

'Απόκρ. Τόσους ὅσαι εἶναι αἱ μεταθέσεις τῶν ἓξ στοιχείων ἀνὰ δύο ἴσων, ἤτοι:

$$\frac{6!}{2!\,2!\cdot2!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{2\cdot2\cdot2}=90.$$

8. *Πόσα ζεύγη ἄσσων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μὲ τοὺς τέσσαρας ἄσσους δέσμης παιγνιοχάρτων ;*

'Απόκρ. Τὰ ζεύγη θὰ εἶναι ὅσοι οἱ συνδυασμοὶ τῶν τεσσάρων ἀνὰ δύο, ἤτοι : $\binom{4}{2}=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6.$

9. *Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :*

$$\frac{\binom{\nu}{\mu}p^{\mu}\cdot q^{\nu-\mu}}{\binom{\nu}{\mu-1}p^{\mu-1}\cdot q^{\nu-\mu+1}}$$

* Εἶναι μέρος τῆς ἀποδείξεως τοῦ τύπου τοῦ Stirling (Λογισμὸς τῶν Πιθανοτήτων).

᾿Απόκρ. Τὸ δοθὲν κλάσμα γράφεται :

$$\frac{\nu!}{\mu!\,(\nu-\mu)!}\,p^{\mu}\cdot q^{\nu-\mu} : \frac{\nu!\,p^{\mu-1}\,q^{\nu-\mu+1}}{(\mu-1)!\,(\nu-\mu+1)!}$$

καὶ μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις εὑρίσκομεν ὅτι ἰσοῦται μὲ $\dfrac{(\nu-\mu+1)p}{\mu\cdot q}$.

Ναί § 10. Διώνυμον τοῦ Νεύτωνος.

῾Η εὕρεσις τύπου παρέχοντος τὸ ἀνάπτυγμα τῆς δυνάμεως $(x+\alpha)^{\nu}$ καθίσταται ἀναγκαία ὡς ἐκ τοῦ ὅτι συχνότατα κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς ἔχομεν ἀνάγκην τούτου.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐν λόγῳ τύπου θεωροῦμεν τὰ ν διώνυμα :

$$x+\alpha_1,\quad x+\alpha_2,\ \ldots,\ x+\alpha_{\nu}.$$

Τὸ γινόμενον τούτων θὰ ἰσοῦται, κατὰ τὰ ἐκ τῆς Στοιχειώδους ᾿Αλγέβρας γνωστά, πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γινομένων ἅτινα προκύπτουσιν ὅταν λαμβάνεται εἷς ὅρος καὶ εἷς μόνον ἐξ ἑκάστου τῶν διωνύμων. Οὕτω :

$$(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdots(x+\alpha_{\nu-1})(x+\alpha_{\nu}) = x^{\nu}+A_1x^{\nu-1}+ \\ +A_2x^{\nu-2}+\ldots+A_{\nu-1}x+A_{\nu} \tag{17}$$

ἔνθα ἐτέθη : $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\nu}=A_1$, $\alpha_1\cdot\alpha_2+\alpha_1\cdot\alpha_3+\ldots+\alpha_{\nu-1}\cdot\alpha_{\nu}=A_2$ (ἤτοι τὸ A_2 παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ὅρων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu}$ ἀνὰ δύο), $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_4+\ldots=A_3$ (ἤτοι τὸ A_3 παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ὅρων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu}$ ἀνὰ τρεῖς), $\ldots\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\ldots\cdot\alpha_{\nu}=A_{\nu}$.

᾿Εὰν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu}$ εἶναι ὅλοι ἴσοι μεταξύ των καὶ παραστήσωμεν διὰ τοῦ α τὴν κοινὴν αὐτῶν τιμήν, θὰ ἔχωμεν :

$$A_1=\binom{\nu}{1}\alpha,\quad A_2=\binom{\nu}{2}\alpha^2,\quad A_3=\binom{\nu}{3}\alpha^3,\ \ldots,$$

$$A_{\nu-1}=\binom{\nu}{\nu-1}\alpha^{\nu-1},\quad A_{\nu}=\alpha^{\nu}$$

Οὕτω, ὁ τύπος (17) μετασχηματίζεται εἰς τὸν τύπον :

$$=\binom{\nu}{\nu-1}$$

$$(x+\alpha)^{\nu}=x^{\nu}+\binom{\nu}{1}\alpha x^{\nu-1}+\binom{\nu}{2}\alpha^2x^{\nu-2}+\ldots+\binom{\nu}{\nu-2}\alpha^{\nu-2}x^2+ \\ +\binom{\nu}{\nu-1}\alpha^{\nu-1}x+\alpha^{\nu} \tag{18}$$

ὅστις μᾶς δίδει τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ν δυνάμεως τοῦ διωνύμου $x+\alpha$. ῾Ο τύπος οὗτος καλεῖται τύπος τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος* ἤ, ἁπλῶς, τύπος τοῦ διωνύμου.

* Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦτο, γνωστὸν εἰς τοὺς Μαθηματικοὺς τῆς ***᾿Αλεξανδρινῆς***

Τὸν πρόσθεν τύπον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν συμβολικῶς ὡς ἑξῆς :

$$(x+\alpha)^{\nu}=\sum_{\kappa=0}^{\kappa=\nu}\binom{\nu}{\kappa}\alpha^{\kappa}x^{\nu-\kappa}\ * \tag{19}$$

ἔνθα τὸ σύμβολον $\sum\limits_{\kappa=0}^{\kappa=\nu}$ ἀναγινώσκεται : *ἄθροισμα ἀπὸ $\kappa=0$ ἕως $\kappa=\nu$* καὶ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων οἵτινες προκύπτουσιν ὅταν εἰς τὸ κ δώσωμεν τὰς τιμὰς $0, 1, 2, 3, \ldots, \nu$. Οἱ συντελεσταὶ $\binom{\nu}{\kappa}$ τῶν ὅρων τοῦ διωνύμου καλοῦνται *διωνυμικοὶ συντελεσταί*.

Παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου: α΄) Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^{\nu}$ εἶναι πλῆρες πολυώνυμον, διατεταγμένον κατὰ τὰς *κατιούσας* δυνάμεις τοῦ x καὶ τὰς *ἀνιούσας* τοῦ α. Εἰς ἕκαστον ὅρον τούτου τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοῦ x καὶ α εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς ν. β΄) Τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι $\nu+1$. γ΄) Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῶν ἴσον ἀπεχόντων τῶν ἄκρων εἶναι ἴσοι, καθόσον :

$$\binom{\nu}{1}=\binom{\nu}{\nu-1},\ \binom{\nu}{2}=\binom{\nu}{\nu-2},\ \ldots\ (\S\ 9,\alpha),$$

τοῦθ' ὅπερ δεικνύει ὅτι ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῶσιν οἱ ἡμίσεις τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος, ἐὰν τὸ ν εἶναι περιττός, ἢ οἱ ἡμίσεις πλέον ἑνός, ἐὰν τὸ ν εἶναι ἄρτιος. δ΄) Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (18) ἀντικατασταθῇ τὸ α ὑπὸ τοῦ $-\alpha$, θὰ ἔχωμεν :

$$(x-\alpha)^{\nu}=x^{\nu}-\binom{\nu}{1}\alpha x^{\nu-1}+\binom{\nu}{2}\alpha^{2}x^{\nu-2}-\ldots\pm$$

$$\pm\binom{\nu}{\nu-2}\alpha^{\nu-2}x^{2}\mp\binom{\nu}{\nu-1}\alpha^{\nu-1}x\pm\alpha^{\nu} \tag{20}$$

ἤ, συμβολικῶς :

$$(x-\alpha)^{\nu}=\sum_{\kappa=0}^{\kappa=\nu}(-1)^{\kappa}\binom{\nu}{\kappa}\alpha^{\kappa}\cdot x^{\nu-\kappa} \tag{21}$$

Παραδείγματα

$$(x+\alpha)^{5}=x^{5}+5\alpha x^{4}+10\alpha^{2}x^{3}+10\alpha^{3}x^{2}+5\alpha^{4}x+\alpha^{5}$$

$$(x-\alpha)^{7}=x^{7}-7\alpha x^{6}+21\alpha^{2}x^{5}-35\alpha^{3}x^{4}+35\alpha^{4}x^{3}-21\alpha^{5}x^{2}+7\alpha^{6}x-\alpha^{7}$$

Σχολῆς, διὰ τὰς πρώτας τιμὰς τοῦ ν ἐπεξετάθη δι' οἱανδήποτε ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ν μετὰ τὴν δημιουργίαν τῆς Συνδυαστικῆς Ἀναλύσεως. Ἡ ἐπέκτασίς του δι' οἱανδήποτε, οὐχὶ μόνον ἀκεραίαν, τιμὴν τοῦ ν ὀφείλεται εἰς τὸν Νεύτωνα (1642—1727), δι' ὃ καὶ φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομά του. Newton

* Λαμβάνομεν κατὰ συνθήκην ὅτι $\binom{\nu}{0}=1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΑΙ ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ*

§ 11. Θεμελιώδεις ὁρισμοί.

Ἡ λέξις *τύχη* ἔχει δύο ἐννοίας: τὴν τοῦ ἁπλῶς τυχαίου καὶ τὴν τοῦ εὐνοοῦντος τυχαίου. Ἐκ τούτων ἡ πρώτη ἐνδιαφέρει ἐνταῦθα.

Καίτοι ἡ λέξις τύχη ἐκκαλεῖ εἰς τὸν ἄνθρωπον ἰδέαν σαφῆ, ἐν τούτοις ὁ ὁρισμός της εἶναι δύσκολος. Ὁ ἄνθρωπος, ἐξετάζων τὰ πέριξ αὐτοῦ φαινόμενα καὶ γεγονότα, κατατάσσει ταῦτα εἰς δύο κατηγορίας: εἰς ἐκεῖνα τῶν ὁποίων τοὺς διέποντας νόμους γνωρίζει καὶ εἰς ἐκεῖνα τοὺς νόμους τῶν ὁποίων ἀγνοεῖ. Ὡς αἰτίαν δὲ τῶν γεγονότων, ἅτινα δὲν δύναται νὰ συνδέσῃ δι᾽ αἰτιώδους σχέσεως πρὸς ἄλλα καλῶς καθωρισμένα καὶ νὰ τὰ ὑπαγάγῃ εἰς νόμους, θεωρεῖ τὴν τύχην, λέγει ὅτι τὰ ἐν λόγῳ γεγονότα εἶναι τυχαῖα. Δοθέντος δὲ ὅτι πάντα τὰ ἐν τῷ κόσμῳ συμβαίνοντα εἶναι ἀποτέλεσμα νόμων σταθερῶν, λέγομεν ὅτι γεγονός τι ὀφείλεται εἰς τὴν τύχην, εἶναι τυχαῖον, ὅταν αἱ αἰτίαι, οἱ νόμοι οἵτινες τὸ παρήγαγον εἶναι ἄγνωστοι, ἀσύλληπτοι, μὴ δυνάμενοι νὰ ἀναλυθῶσι καὶ νὰ ὑπολογισθῶσιν.

Ἐὰν τὰ αἴτια εἶναι ἄγνωστα, ἀλλ᾽ ἁπλᾶ, τότε δὲν λέγομεν ὅτι πρόκειται περὶ γεγονότος τυχαίου. Λ.χ. ἡ αὐτοκτονία δὲν θεωρεῖται γεγονὸς τυχαῖον καὶ ὅταν τὰ αἴτιά της εἶναι ἄγνωστα. Ἵνα γεγονός τι θεωρηθῇ τυχαῖον, δέον τὰ αἴτια νὰ εἶναι: 1) πολυπληθῆ καὶ λεπτά, π.χ. ἀποτέλεσμα ρουλέττας (μυϊκὴ δύναμις ρίπτοντος τὴν σφαῖραν, διεύθυνσις σφαίρας, ἀντίστασις ἀέρος)· 2) πολὺ μικρὰ ἀλλ᾽ ἔχοντα μέγα ἀποτέλεσμα, π.χ. αἴτια ἀνατροπῆς βέμβικος (σβούρας) ἰσορροποῦντος ἐπὶ τῆς ἀκίδος του· 3) ἄσχετα ἀλλήλων ἐν στενῷ θεωρούμενα· π.χ. θάνατος ἐκ κεράμου πεσόντος ἐκ στέγης.

Τὸ μέγεθος τῆς τύχης ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μεγέθους τῆς ἀγνοίας. Ποικίλλει ὅθεν κατὰ χρόνον καὶ κατ᾽ ἄτομον. Ὅσον ὁ ἄνθρωπος ἐπεκτείνει τὰς γνώσεις του, τόσον ἡ ἔκτασις τῆς τύχης μειοῦται. Ἡ ἔκλειψις σελήνης ἐθεωρεῖτο ἄλλοτε γεγονὸς τυχαῖον ἀλλὰ δὲν θεωρεῖται σήμερον.

---

* Τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἐλήφθη ἀπὸ τὰ ***Στοιχεῖα Ἀσφαλιστικῶν Μαθηματικῶν*** τοῦ Καθηγητοῦ κ. Τ. **Κεραμιδᾶ**, διότι συντομωτέρα, ἁπλουστέρα, σαφεστέρα καὶ πλέον ἁρμόζουσα εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βοήθημα διατύπωσις εἶναι ἀδύνατος.

Ὁ ἄνθρωπος, ὁδηγούμενος ὑπὸ τῆς ἡδονιστικῆς ἀρχῆς, δρᾷ ἐν μέσῳ τῶν περὶ αὐτὸν φαινομένων καὶ γεγονότων, ὧν τοὺς νόμους ἀγνοεῖ, καθ᾽ ὃν τρόπον νομίζει ὅτι κατὰ πᾶσαν πιθανότητα θὰ ἔχῃ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλαυσιν διὰ τῆς μικροτέρας προσπαθείας. Καὶ ἐπειδὴ πολλὰ τὰ ἄγνωστα, τὰ «τυχαῖα», ἐκτελεῖ διαρκῶς πιθανότητας.

Ἡ πιθανότης δεσπόζει τῶν πράξεών του, εἶναι ἐγγενὴς τῷ ἀνθρώπῳ, συμφυὴς τῇ γνώσει. Τούτου ἕνεκα καὶ ὁ ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος εἶναι δύσκολος καὶ τὰ βασικὰ περὶ πιθανότητος θεωρήματα δὲν δύναται νὰ ἀποδειχθῶσι μαθηματικῶς εἰς τὴν ἐντέλειαν, ἀλλὰ λογικῶς. Ὁ ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος εἶναι δύσκολος, διότι δέον νὰ καθορισθῇ τι δι᾽ ἐννοιῶν ἀκαθορίστων καὶ συγκεχυμένων, λόγῳ τῆς ἁπλότητος καὶ τῆς καθημερινῆς των χρήσεως, ὡς ἀληθές, δυνατόν, ἀμφίβολον, τυχαῖον, προεικαζόμενον κ.τ.λ. Πάντως, ὁ τυπικὸς μαθηματικὸς ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος ἔχει οὕτω:

(1) *Ἡ μαθηματικὴ πιθανότης ἐπελεύσεως γεγονότος τινὸς τυχαίου ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων ἐπελεύσεώς του διὰ τοῦ ἀριθμοῦ πασῶν τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ὅταν πᾶσαι εἶναι ἐξ ἴσου δυναταί.* Laplace

Οὗτος ἀπορρέει ἐξ ἁπλουστάτων συλλογισμῶν. Ὡς, λ.χ., ἐκ τοῦ ὅτι, ἵνα κληρωθῇ ὑπὸ λαχείου 100 ἀριθμῶν εἷς ἐκ τῶν προτέρων ὡρισμένος, ἡ πιθανότης εἶναι $\frac{1}{100}$, ἐνῷ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι 1 000, ἡ πιθανότης εἶναι $\frac{1}{1000}$.

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος ἐνέχει τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι πᾶσαι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι ἐξ ἴσου δυναταί, καίτοι δὲν γνωρίζομεν τὰς αἰτίας τὰς προκαλούσας ταύτας, ἐξ οὗ πολλοὶ εἶπον ὅτι πρόκειται περὶ φαύλου κύκλου. Τοῦτο καὶ ἄλλα λεπτότερα ἔτι ζητήματα ἤγειρον μεγάλας συζητήσεις περὶ τῆς ὀρθότητος φιλοσοφικῶς τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ. Πάντως οὗτος ἱκανοποιεῖ ὑπὲρ πάντα ἕτερον καὶ ἀρκεῖ πλήρως ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως, διότι δίδει τὸν τρόπον τῆς ἀριθμητικῆς ἐκφράσεως τῆς πιθανότητος (εἶναι ποσοτική της διατύπωσις), τοῦτον δὲ καὶ θὰ χρησιμοποιήσωμεν κατωτέρω.

Συμφώνως πρὸς αὐτόν:

(2) *Ἡ πιθανότης εἶναι κλάσμα μικρότερον τῆς μονάδος, ἡ βεβαιότης μονάς, τὸ ἀδύνατον μηδέν.*

(3) *Συχνότης (fréquence) ἐπελεύσεως γεγονότος τινὸς ἐν φαινομένῳ τινὶ καλεῖται ὁ ἀριθμὸς μ τοῦ πλήθους ἐπελεύσεως τοῦ ἐν λόγῳ γεγονότος, ὅταν τὸ φαινόμενον ἐπαναληφθῇ ν φοράς.*

(4) *Σχετικὴ συχνότης ἐπελεύσεως γεγονότος τινὸς ἐπελθόντος μ φοράς,*

φαινομένου ἐπαναληφθέντος n φορὰς ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας, καλεῖται ὁ λόγος $\frac{\mu}{n}$.

Ὁ Λογισμὸς τῶν Πιθανοτήτων σκοπὸν ἔχει τὴν σπουδὴν τῆς σχετικῆς συχνότητος ἐπελεύσεως γεγονότος οὗτινος ἡ ἐπέλευσις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τύχης. *Εἶναι, ἄρα, ἡ ἐπιστήμη τῶν ὁμοίων πολυπληθῶν ἢ ἐπαναλαμβανομένων πολλάκις γεγονότων καὶ φαινομένων τῶν μὴ δυναμένων νὰ ὑπαχθῶσιν εἰς νόμους σταθερούς.*

Γεγονός τι E καλεῖται *σύνθετον* δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων E_1, E_2, E_3, . . . , E_n, ὅταν ἡ ἐπέλευσίς του συνίσταται εἰς τὴν σύγχρονον ἢ διαδοχικὴν ἐπέλευσιν τῶν E_1, E_2, E_3, . . . , E_n.

Δύο γεγονότα λέγονται *ἀνεξάρτητα* ἀλλήλων, ὅταν ἡ ἐπέλευσις ἢ πραγματοποίησις τοῦ ἑνὸς οὐδόλως ἐπηρεάζει τὴν πιθανότητα ἐπελεύσεως τοῦ ἑτέρου.

Τὰ γεγονότα ἡ ἐπέλευσις τινὸς τῶν ὁποίων ἀποκλείει τὴν ἐπέλευσιν πάντων τῶν λοιπῶν καλοῦνται *ἀσυμβίβαστα* πρὸς ἄλληλα.

Γεγονὸς *ἀντίθετον* γεγονότος τινὸς E καλοῦμεν πᾶν ὅ,τι δὲν εἶναι πραγματοποίησις τοῦ E.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς πιθανότητος δέον νὰ γίνῃ δι᾽ ἀπαριθμήσεως τῶν δυνατῶν καὶ εὐνοϊκῶν περιπτώσεων. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἀπαρίθμησις αὕτη (ἄμεσος μέθοδος) εἶναι πρακτικῶς δύσκολος, εὑρέθησαν θεωρήματα δι᾽ ἔμμεσον τρόπον ὑπολογισμοῦ τῆς πιθανότητος.

Τρία εἶναι τὰ βασικὰ θεωρήματα τὰ διέποντα τὰς πιθανότητας—ὧν τὰ δύο πρῶτα ἁπλούστερα καὶ καθημερινῆς χρήσεως—, τὰ ἑξῆς:

§ 12. Θεώρημα τῆς ὁλικῆς πιθανότητος ἢ τῆς προσθέσεως.

Ἡ πιθανότης γεγονότος δυναμένου νὰ ἐπέλθῃ κατὰ διαφόρους τρόπους ἀποκλείοντας ἀμοιβαίως ἀλλήλους ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν πιθανοτήτων τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τοὺς τρόπους τούτους.

Π.χ. Κάλπη περιέχει α λευκάς, β μελαίνας, γ ἐρυθρὰς σφαίρας. Ζητεῖται ἡ πιθανότης, ἐν ᾗ περιπτώσει ἐξαχθῇ μία σφαῖρα, τοῦ νὰ εἶναι αὕτη ἀδιαφόρως λευκὴ ἢ μέλαινα. Ἐνταῦθα αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι $\alpha+\beta+\gamma$, αἱ εὐνοϊκαὶ $\alpha+\beta$, ἄρα ἡ κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμὸν καὶ κατὰ ἄμεσον μέτρησιν πιθανότης: $\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Κατὰ τὸ παρὸν θεώρημα,

α) ἡ πιθανότης τοῦ νὰ εἶναι λευκὴ εἶναι: $\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$

β) ἡ πιθανότης τοῦ νὰ εἶναι μέλαινα εἶναι: $\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$

γ) ἡ πιθανότης τοῦ νὰ εἶναι λευκὴ ἢ μέλαινα εἶναι:

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad (22)$$

Εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο: 1) ἡ ἐξαγωγὴ λευκῆς σφαίρας ἀποκλείει τὴν ἐξαγωγὴν μελαίνης, καὶ ἀντιθέτως, ἤτοι αἱ πιθανότητες ἀποκλείουσιν ἀλλήλας ἀμοιβαίως· 2) ἡ ἐξαγωγὴ μιᾶς σφαίρας λευκῆς ἢ μελαίνης σημαίνει ὁλικὴν ἐπέλευσιν τοῦ γεγονότος· 3) αἱ μερικαὶ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις οὐδὲν κοινὸν στοιχεῖον ἔχουσι.

§ 13. *Θεώρημα τῆς συνθέτου πιθανότητος ἢ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

Ἡ πιθανότης ἐπελεύσεως γεγονότος τινὸς συνθέτου, οὗτινος, δηλαδή, ἡ ἐπέλευσις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συγχρόνου ἢ διαδοχικῆς ἐπελεύσεως ἄλλων, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν πιθανοτήτων ἐπελεύσεως πάντων τῶν μερικῶν γεγονότων.

Ἔστωσαν δύο κάλπαι, ὧν ἡ πρώτη περιέχει 10 λευκὰς σφαίρας καὶ 20 ἄλλας διαφόρους, ἐν ὅλῳ 30, καὶ ἡ δευτέρα 40 λευκὰς καὶ 60 ἄλλας διαφόρους, ἐν ὅλῳ 100. Ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξάγωμεν μίαν σφαῖραν ἐξ ἑκάστης κάλπης, συγχρόνως ἢ διαδοχικῶς, καὶ νὰ εἶναι καὶ αἱ δύο λευκαί, εἶναι, κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμὸν καὶ κατ᾽ ἄμεσον μέτρησιν: Ἑκάστη ἐκ τῶν πρώτων δύναται νὰ συνδυασθῇ πρὸς ἑκάστην τῶν δευτέρων, ἄρα ὅλαι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι: 30×100. Ἑκάστη λευκὴ τῆς πρώτης δύναται νὰ συνδυασθῇ πρὸς ἑκάστην λευκὴν τῆς δευτέρας, ἄρα αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις εἶναι 10×40. Συνεπῶς ἡ κατ᾽ ἄμεσον μέτρησιν πιθανότης εἶναι $\frac{10\cdot40}{30\cdot100}$. Κατὰ τὸ θεώρημα, ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς μιᾶς λευκῆς ἐκ τῆς πρώτης εἶναι $\frac{10}{30}$, ἐκ τῆς δευτέρας $\frac{40}{100}$, ἡ πιθανότης ἄρα ἐξαγωγῆς λευκῆς ἐκ τῶν δύο: $\frac{10\cdot40}{30\cdot100}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ρίπτομεν κύβον· ποία ἡ πιθανότης νὰ ἔχωμεν τὴν ἕδραν 6;

Ἀπόκρ. $\frac{1}{6}$.

2. Ρίπτομεν συγχρόνως δύο κύβους· ποία ἡ πιθανότης νὰ ἔχωμεν καὶ ἐκ τῶν δύο κύβων τὴν ἕδραν 6;

Ἀπόκρ. Πρόκειται περὶ συνθέτου πιθανότητος, ἄρα $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

3. *Ρίπτομεν δύο κύβους συγχρόνως· ποία ἡ πιθανότης ἡ μία τοὐλάχιστον ἕδρα νὰ εἶναι 6 ;*

'Απόκρ. $\frac{11}{36}$. Διότι ἡ πλευρὰ 6 τοῦ πρώτου κύβου δύναται νὰ συνδυασθῇ μὲ τὰς 6 πλευρὰς τοῦ δευτέρου, ἄρα ἔχομεν 6 εὐνοϊκὰς περιπτώσεις· ἡ πλευρὰ 6 τοῦ δευτέρου κύβου δύναται νὰ συνδυασθῇ μὲ τὰς 5 μόνον τοῦ πρώτου (διότι ἡ περίπτωσις νὰ δεικνύωσιν ἀμφότεραι 6 ἐλήφθη ἤδη), ἄρα ἔχομεν ἄλλας 5 εὐνοϊκὰς περιπτώσεις, ἤτοι ἐν ὅλῳ 11, ἐπὶ δυνατῶν 36. Ἢ καὶ ἄλλως : Οἱ συνδυασμοὶ οἱ μὴ περιέχοντες τὸ 6 εἶναι 5×5=25, ἄρα οἱ λοιποὶ 11 τὸ περιέχουν.

4. *Ἐκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν τὰ 13 καρρώ. Ποία ἡ πιθανότης, ὅταν ἐξαγάγωμεν τυχαίως ἓν παιγνιόχαρτον, νὰ εἶναι τοῦτο φιγούρα (φάντης, ντάμα ἢ ρήγας) ;*

'Απόκρ. $\frac{3}{13}$. Διότι ἡ πιθανότης δι' ἑκάστην φιγούραν εἶναι $\frac{1}{13}$, ἄρα ἡ συνολικὴ πιθανότης $\frac{1}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{3}{13}$. Ἐνταῦθα ἐφαρμόζεται τὸ θεώρημα τῆς προσθέσεως, διότι, διὰ τῆς ἐξαγωγῆς, π.χ., τοῦ φάντη : 1) ἀπεκλείσθη ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ντάμας ἢ τοῦ ρήγα· 2) τὸ γεγονὸς ἐπῆλθε πλήρως· 3) οὐδὲν κοινὸν ὑπάρχει μεταξὺ τῶν μερικῶν περιπτώσεων.

5. *Ἐκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν χωριστὰ τὰ 13 καρρὼ καὶ τὰ 13 σπαθιὰ καὶ ἐξάγομεν ἐκ τῶν καρρὼ ἓν καὶ ἐκ τῶν σπαθιῶν ἕτερον· ποία ἡ πιθανότης καὶ τὰ δύο ἐξαχθέντα νὰ εἶναι φιγούρα ;*

'Απόκρ. $\frac{3}{13}\times\frac{3}{13}=\frac{9}{169}$. Διότι ἡ πιθανότης εἶναι σύνθετος.

6. *Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ προηγουμένου παραδείγματος· ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι τοὐλάχιστον τὸ ἓν τῶν ἐξαχθέντων φιγούρα ;*

'Απόκρ. $1-\frac{10^2}{13^2}=\frac{69}{169}$, καθόσον οἱ συνδυασμοὶ οἱ μὴ περιέχοντες φιγούραν εἶναι 10×10=100, ἐνῷ οἱ ὑπόλοιποι περιέχουσι φιγούραν καὶ ἐπειδὴ ὅλοι εἶναι $13^2=169$ ἡ πιθανότης εἶναι $\frac{69}{169}$. Ἢ καὶ διότι αἱ 3 φιγοῦραι τῶν καρρὼ συνδυάζονται μὲ 13 σπαθιὰ καὶ δίδουν εὐνοϊκὰς περιπτώσεις 39, ἐνῷ αἱ 3 φιγοῦραι τῶν σπαθιῶν συνδυάζονται μὲ τὰ 10 (1,2....10) τῶν καρρὼ καὶ ἔχομεν εὐνοϊκὰς περιπτώσεις 3×10=30. Ἄρα ἐν ὅλῳ εὐνοϊκὰς 30+39=69. Αἱ φιγοῦραι τῶν σπαθιῶν ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰς τῶν καρρὼ δὲν ἐλήφθησαν, καθόσον ὑπελογίσθησαν ἤδη.

§ 14. Θεώρημα τοῦ νόμου τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ περιπτώσεων.

Τὸ τρίτον θεώρημα, τὸ καλούμενον καὶ θεώρημα τοῦ Bernoulli, εἶναι τὸ σπουδαιότερον καὶ τὰ πορίσματά του ἀφορῶσιν εἰς τοὺς νόμους τῆς τύχης καὶ δὴ εἰς τὸν *νόμον τῶν μεγάλου ἀριθμοῦ περιπτώσεων*. Ἡ πλήρης σπουδὴ τούτου ἐξέρχεται τῶν ὁρίων τοῦ παρόντος. Συνοπτικῶς περὶ αὐτοῦ τὰ ἑξῆς :

Νόμοι τῆς τύχης εἶναι οἱ κανονίζοντες πῶς θὰ ἐπέλθῃ γεγονός τι τυχαῖον ὅταν τοῦτο ἐπέρχεται πολλάκις. Π.χ. Ρίπτομεν νόμισμα 400 φοράς. Ποσάκις τοῦτο θὰ ἐμφανισθῇ ἀπὸ τὴν μίαν ἢ τὴν ἑτέραν ὄψιν ;

Τὸ θεώρημα τοῦ Bernoulli δίδει τοὺς ἑξῆς πρακτικοὺς κανόνας:

1) *Ὁ ἀριθμὸς ἐπελεύσεως γεγονότος ἐπαναλαμβανομένου μ φορὰς (τοῦ μ αὐξάνοντος ἐπ' ἄπειρον) εἶναι ἀνάλογος τῆς πιθανότητος ἐπελεύσεώς του.*

Π.χ. Εἰς νόμισμα ριπτόμενον 1 000 000 φορὰς ἡ ἐμφάνισις τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἑτέρας ὄψεως δέον νὰ εἶναι: $\frac{1}{2}\cdot 1\,000\,000$. Τοῦτο εἶναι ἡ *ἀπόλυτος συχνότης.*

2) *Ὅσον περισσότερον αὐξάνεται ὁ ἀριθμὸς τῶν περιπτώσεων, ἤτοι ἐπαναλαμβάνεται τὸ φαινόμενον, τόσον μικροτέρα εἶναι ἡ πιθανότης ἐπελεύσεως τοῦ κατὰ τὸν προηγούμενον ὑπολογισμὸν ἀκριβοῦς ἀριθμοῦ ἀπολύτου συχνότητος.* Δηλαδή, ἐὰν τὸ νόμισμα ριφθῇ 100 φορὰς πολὺ πιθανώτερον εἶναι νὰ ἔχωμεν $\frac{1}{2}\times 100=50$ φορὰς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην ὄψιν, παρὰ ἐὰν ριφθῇ 10 000 φορὰς νὰ ἔχωμεν $\frac{1}{2}\times 10\,000=5000$ φορὰς ἑκάστην ὄψιν. Καὶ ἂν ρίψωμεν τὸ νόμισμα 1 000 000 φοράς, λογικῶς ἀδύνατον εἶναι νὰ δεχθῶμεν ὅτι θὰ ἔλθῃ 500 000 ἀκριβῶς ἡ μία καὶ ἄλλας τόσας ἡ ἑτέρα ὄψις. Ἐνῷ, ἐὰν ρίψωμεν τὸ νόμισμα δίς, εὐκολώτατον εἶναι νὰ ἔχωμεν ἑκάστην ὄψιν ἀνὰ μίαν φοράν.

3) *Ὅσον αὐξάνεται ὁ ἀριθμὸς ἐπαναλήψεως φαινομένου τινὸς τόσον ἡ ἀπόλυτος ἀπόκλισις ἀπὸ τῆς ὡς ἄνω ἀπολύτου συχνότητος δύναται νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα, ἀλλ' ἡ σχετικὴ ἀπὸ ταύτης ἀπόκλισις γίνεται μικροτέρα.*

Ἐάν, δηλαδή, νόμισμά τι ριφθῇ 100 φοράς, ὁπότε, κατὰ τὸν νόμον τῆς πιθανότητος, δέον νὰ ἔχωμεν 50 φορὰς ἑκάστην ὄψιν, δυνατὸν ἡ μία ὄψις νὰ ἐμφανισθῇ μέχρι καὶ 40 φορὰς καὶ ἡ ἑτέρα μέχρις 60, δηλαδὴ μὲ ἀπόλυτον ἀπόκλισιν 10 καὶ σχετικὴν $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$. Ἐὰν ριφθῇ 1 000 000 φοράς, δυνατὸν νὰ ἔλθῃ ἡ μία ὄψις 480 000 φορὰς καὶ ἡ ἑτέρα 520 000, ἤτοι μὲ ἀπόλυτον ἀπόκλισιν 20 000 φοράς, ἀλλὰ σχετικὴν $\frac{20\,000}{1\,000\,000}=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$.

Ἤτοι, ὅσον περισσοτέρας φορὰς ἐπαναλαμβάνεται φαινόμενόν τι, τόσον περισσότερον σχετικῶς πλησιάζει νὰ ἐμφανισθῇ ὡς ἡ ἀπόλυτος συχνότης του, ἥτις εὑρίσκεται ἐκ τῆς πιθανότητος ἐπελεύσεώς του. *Τοῦτο δὲ εἶναι ἡ κεντρικὴ ἔννοια τοῦ νόμου τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ περιπτώσεων.* Ἐφ' ᾧ καὶ εἰς τὰ φαινόμενα εἰς ἃ ἐφαρμόζονται αἱ πιθανότητες τὸ πλῆθος τῶν περιπτώσεων δέον νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν μέγα.

Τὰ βασικὰ καὶ στοιχειώδη συμπεράσματα τοῦ θεωρήματος τοῦ Bernoulli δίδουσιν οὐχὶ ἀσφαλεῖς προβλέψεις τοῦ μέλλοντος, ἀλλ' εἰκασίας τόσον προσεγγιζούσας σχετικῶς τὴν ἀκρίβειαν ὅσον πλειότερον ἐπαναλαμβάνεται φαινόμενόν τι.

§ 15. Μαθηματικὴ ἐλπίς.

Πρόδηλον ὅτι ἡ ἀξία ἐλπίδος κέρδους 1 000 000 διαφέρει τῆς ἀξίας ἐλπίδος κέρδους 100 δρχ. Ἡ ἀριθμητικὴ ἔκφρασις ἀξίας ἐλπίδος διατυποῦται διὰ τῆς μαθηματικῆς ἐλπίδος.

Καλοῦμεν μαθηματικὴν ἐλπίδα τὴν δικαίαν τιμὴν ἀγορᾶς ἐλπίδος. Εἶναι δὲ ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τὸ γινόμενον τῆς πιθανότητος τοῦ νὰ κερδίσῃ τις ἐπὶ τὸ ἐλπιζόμενον κέρδος. Π.χ. Ἐὰν εἰς λαχεῖόν τι ὑπάρχουσιν 100 ἀριθμοὶ καὶ πρόκειται νὰ ἐξαχθῇ εἷς κερδίζων 5 000 δρχ., ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς εἶναι : $\frac{1}{100} \times 5000 = 50$.

Δίκαιον θεωρεῖται παίγνιόν τι ὅταν ἡ καταβολὴ τοῦ παίζοντος εἶναι ἴση πρὸς τὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα. Ἤτοι, ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ ὡς ἄνω λαχείου εἶναι 50 δρχ., τὸ παίγνιον εἶναι δίκαιον· ἐὰν ἡ τιμή του εἶναι ἀνωτέρα τῶν 50 δρχ., εἶναι ἄδικον, μειονεκτικὸν διὰ τὸν ἀγοράζοντα λαχεῖον, πλεονεκτικὸν διὰ τὸν διαχειριζόμενον τοῦτο *.

Ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς δύναται νὰ νοηθῇ καὶ ὡς θετικὴ καὶ ὡς ἀρνητική. Οὕτω, εἰς τὸ λαχεῖον τὸ ὁποῖον ἀναφέρομεν ἀνωτέρω ἡ θετικὴ μαθηματικὴ ἐλπὶς τοῦ ἀγοράζοντος τοῦτο εἶναι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ κερδίζῃ $\frac{1}{100}$ ἐπὶ τὸ πραγματικὸν κέρδος $5000 - 50$ (τὸ ἀντίτιμον τοῦ λαχείου), ἤτοι $\frac{1}{100} \times 4\,950 = 49{,}50$, καὶ ἡ ἀρνητική, ἴση πρὸς τὴν πιθανότητα τοῦ νὰ χάσῃ, $\frac{99}{100}$, ἐπὶ τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον θὰ χάσῃ, δρχ. 50, ἤτοι $\frac{99}{100} \times 50 = 49{,}50$. Ἐὰν αἱ δύο εἶναι ἴσαι, τὸ παίγνιον θεωρεῖται *δίκαιον*· ἐὰν ἡ θετικὴ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀρνητικῆς, θεωρεῖται *ἄδικον*· ἐὰν ἀντιθέτως, *πλεονεκτικόν*.

* Οὕτως ὁρίζεται παίγνιόν τι ὡς δίκαιον, μὴ οὔσης δυνατῆς τῆς εὑρέσεως κριτηρίου τοῦ ἀπὸ πάσης ἀπόψεως οἰκονομικῆς, ἠθικῆς κλπ. δικαίου παιγνίου. Διότι πῶς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι παίζει δίκαιον ἀπὸ οἰκονομικῆς ἀπόψεως παίγνιον ἐργάτης παίζων ἐφ' ἅπαξ τὸ ἐξ 100 δρχ. ἡμερομίσθιόν του κορῶνα ἢ γράμματα μετὰ πολυεκατομμυριούχου;

Παίγνιον δίκαιον δύναται νὰ εἶναι παράλογον καὶ παίγνιον ἄδικον λογικόν. Παράλογον εἶναι τὸ νὰ παίξῃ τις κορῶνα ἢ γράμματα ἐφ' ἅπαξ τὴν περιουσίαν του, καίτοι τὸ παίγνιον δίκαιον· λογικὸν εἶναι νὰ ἀσφαλίζεταί τις κατὰ διαφόρων κινδύνων, καίτοι τὸ παίγνιον τῆς ἀσφαλείας εἶναι μαθηματικῶς ἄδικον.

-27-

2.V ΒΙΒΛΙΟΝ Β'

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι
ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΠΟΛΙΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ

§ 16. *Εἰσαγωγή.*

Ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας ἐγένετο σπουδὴ τῶν γεωμετρικῶν ζητημάτων διὰ τῆς Ἀλγέβρας καὶ ἀνεπτύχθη οὕτω γόνιμος δεσμός, τὰ μέγιστα συμβαλὼν εἰς τὴν ἐξέλιξιν τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης. Ὁ δεσμὸς οὗτος ἐτελειοποιήθη ὑπὸ τοῦ *Καρτεσίου* * καὶ ἀνεδείχθη εἰς ἴδιον κλάδον τῆς Γεωμετρίας, ὅστις ἐκλήθη *Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία.*

Σκοπὸς τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ συστηματικὴ σπουδὴ τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων διὰ μεθόδων ἀλγεβρικῶν, ἀναλυτικῶν, καὶ ἀντιστρόφως, ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν ἀναλυτικῶν σχέσεων. Ὁ σκοπὸς 1/2 οὗτος τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας ἐπιτυγχάνεται χάρις εἰς γενικήν τινα μέθοδον καλουμένην *μέθοδον τῶν εὐθυγράμμων συντεταγμένων.* Δι' αὐτῆς ἡ ὀπτικὴ ἐποπτεία διευκολύνει τὴν κατανόησιν τῶν ζητημάτων καὶ ἡ κρίσις καὶ ἡ φαντασία βοηθοῦνται εἰς τὴν γενίκευσιν παρὰ τῆς ὀπτικῆς ἐποπτείας.

Βάσις τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι ὅτι : Σημεῖόν τι ἐν τῷ *συστήματι τῶν εὐθυγράμμων συντεταγμένων* τοῦ Καρτεσίου εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου ὡρισμένον ὑπὸ τῶν συντεταγμένων του, αἵτινες εἶναι αἱ ἀποστάσεις τούτων ἐκ δύο σταθερῶν εὐθειῶν τεμνομένων. Θεωροῦντες τὰς συντεταγμένας ἑκάστου σημείου μιᾶς γραμμῆς, εὑρίσκομεν μεταξὺ τούτων σχέσιν ἰσχύουσαν διὰ πάντα τὰ σημεῖα ταύτης καὶ μόνον, καὶ καλοῦμεν ταύτην *ἐξίσωσιν τῆς γραμμῆς.*

§ 17. *Ἄξων καὶ τμήματα προσανατολισμένα.*

Ἐπὶ εὐθείας τινὸς θεωροῦμεν αὐθαιρέτως δύο κατευθύνσεις ἢ φοράς, ἐξ ὧν ἡ μία θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη, ἡ ἀντίθετος, ἀρνητική.

---

* *René Descartes* (Ἑλληνιστὶ **Καρτέσιος**). Γάλλος φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς (1596—1650).

Απεριόριστος εὐθεῖα ἐφ' ἧς ἔχει ὁρισθῆ ἡ θετικὴ φορὰ καλεῖται ἄξων.

Ἐπὶ ἄξονός τινος λαμβάνομεν αὐθαιρέτως σημεῖόν τι O, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν *ἀρχήν*, ὡς καὶ τμῆμά τι μ ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος εὐθυγράμμων τμημάτων. Οὕτως, εἰς ἕκαστον εὐθύγραμμον τμῆμα AB θ' ἀντιστοιχῇ εἷς ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόλυτος τιμὴ* εἶναι τὸ *μέτρον* τοῦ AB, ἐν σχέσει πρὸς τὸ τμῆμα μ, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ σημεῖον εἶναι + ἢ – ἀναλόγως τοῦ ἂν ἡ ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B φορά του συμπίπτῃ ἢ οὐ πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ὡς θετικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος. Τμῆμά τι AB οὕτως ὁριζόμενον καλεῖται *τμῆμα προσανατολισμένον*, ἔχον ἀρχὴν τὸ A καὶ πέρας τὸ B.

Ἐκ τῶν προειρημένων συνάγομεν εὐκόλως :

$$AB = -BA \quad \text{ἢ καὶ} \quad AB + BA = 0$$

Γενικώτερον δέ, ἐὰν A,B,Γ εἶναι τρία τυχόντα σημεῖα ἄξονός τινος, ἔχομεν πάντοτε :

$$AB + B\Gamma + \Gamma A = 0 \tag{23}$$

Πράγματι· ἐὰν μὲν τὸ A ληφθῇ πρῶτον, τὸ B δεύτερον καὶ τὸ Γ τρίτον, εἶναι φανερὸν ὅτι : $AB + B\Gamma = A\Gamma$ καὶ ἐξ αὐτῆς ἔχομεν τὴν (23). Ἐὰν δὲ ληφθῇ διάφορος διάταξις τῶν A,B,Γ, π.χ. τὸ Γ μεταξὺ τῶν A καὶ B, θὰ ἔχωμεν : $A\Gamma + \Gamma B = AB$, ἢ $AB - \Gamma B - A\Gamma = 0$, ἐξ ἧς ἕπεται ἡ (23).

Ἐάν, ἀντὶ τριῶν, ληφθῶσι περισσότερα σημεῖα, π.χ. A,B,Γ, . . . ,K,Λ, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$AB + B\Gamma + \ldots + K\Lambda + \Lambda A = 0 \tag{24}$$

§ 18 Τετμημέναι τῶν σημείων ἄξονός τινος.

Ἐὰν ἐπὶ ἄξονός τινος ὁρισθῇ ἡ ἀρχὴ O καὶ ἡ μονὰς μετρήσεως, δυνάμεθα εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ ἄξονος νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς. Ἐὰν A εἶναι σημεῖόν τι τοῦ ἄξονος, ὁ ἀριθμὸς x ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὸ A ($x = OA$) καλεῖται *τετμημένη τοῦ σημείου A ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν O*.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν δοθῇ πραγματικός τις ἀριθμὸς x, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἓν σημεῖον καὶ ἓν μόνον, A, τοιοῦτον ὥστε $OA = x$. Εἰς τὸ σημεῖον O ἀντιστοιχεῖ τὸ μηδέν. Οὕτως ἔχομεν *τελείαν ἀντιστοιχίαν* μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων ἄξονός τινος.

Ἐὰν ἐπί τινος ἄξονος δοθῶσι δύο σημεῖα A_1 καὶ A_2 μὲ τετμημένας ἀντιστοίχως x_1 καὶ x_2, τὸ μέτρον (μὲ σημεῖον) τοῦ προσανατολισμένου τμή-

---

* Ἀπόλυτος τιμὴ ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ἄνευ τοῦ σημείου του. Οὕτω, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ (—7) ἢ τοῦ (+7) εἶναι 7 καὶ σημειοῦται οὕτω :

$$|-7| = 7 \quad \text{καὶ} \quad |+7| = 7$$

ματος $A_1 A_2$ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου (23) τῆς προηγουμένης παραγράφου. Οὕτως ἔχομεν :

$$OA_1 + A_1A_2 + A_2O = 0$$

ἐξ ἧς, δοθέντος ὅτι $OA_1 = x_1$ καὶ $OA_2 = x_2$, λαμβάνομεν :

$$A_1A_2 = x_2 - x_1$$

Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο σημείων A_1A_2 μετρεῖται ὑπὸ τοῦ $\boxed{|x_2 - x_1|}$.

+ Πρόβλημα. *Δοθέντος ἐπί τινος ἄξονος τοῦ τμήματος M_1M_2, μὲ τετμημένας τῶν M_1, M_2, ἀντιστοίχως, x_1, x_2, νὰ εὑρεθῇ ἡ τετμημένη x σημείου τινὸς M, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ τμῆμα $M_1 M_2$ εἰς δύο τμήματα ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν k καὶ λ. Ἤτοι $M_1M : M M_2 = k : \lambda$.*

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $M_1M = x - x_1$, $MM_2 = x_2 - x$. Οὕτω θὰ ἔχωμεν :

1 $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{k}{\lambda}$. Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις λαμβάνομεν:

$$\boxed{x = \frac{\lambda x_1 + k x_2}{k + \lambda}} \tag{25}$$

Ὡς μερικὴν περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ M εἶναι μέσον τοῦ M_1M_2, ὁπότε $\dfrac{k}{\lambda} = 1$ καὶ ὁ τύπος (25) γίνεται : $\boxed{x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}}$ (25_1)

§ 19. *Ὀρθογώνιοι καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι.*

Λαμβάνομεν δύο καθέτους μεταξύ των ἄξονας X′X καὶ Ψ′Ψ τεμνομένους εἰς τὸ σημεῖον O (*Σχ. 1*). Ἐπὶ ἑκάστου τούτων ὁρίζομεν τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπ᾽ αὐτῶν τμημάτων, ἥτις δύναται νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ δι᾽ ἀμφοτέρους, δύναται ὅμως νὰ εἶναι καὶ διάφορος δι᾽ ἕκαστον.

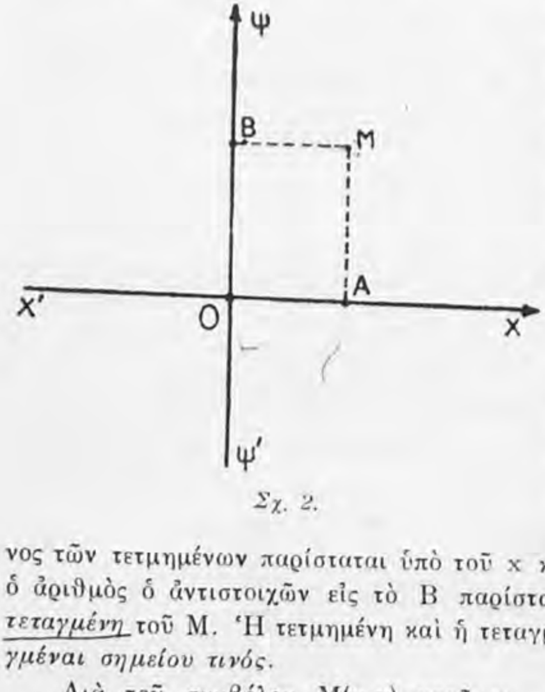
Σχ. 1.

Ὡς θετικὴ φορὰ λαμβάνεται ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος X′X ἡ ἐκ τοῦ O πρὸς τὸ X, ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος Ψ′Ψ ἡ ἐκ τοῦ O πρὸς τὸ Ψ.

Ὁ ἄξων X′X καλεῖται *ἄξων τῶν τετμημένων* ἢ *ἄξων τῶν* x καὶ ὁ ἄξων Ψ′Ψ *ἄξων τῶν τεταγμένων* ἢ *ἄξων τῶν* y. Ἀμφότεροι καλοῦνται *ἄξονες τῶν συντεταγμένων*. Τὸ σημεῖον O λαμβάνεται ὡς ἀρχὴ ἀμφοτέρων καὶ καλεῖται *ἀρχὴ τῶν ἀξόνων*. Οἱ οὕτω ληφθέντες ἄξονες συνιστῶσι *σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων**.

* Ἐὰν οἱ ἄξονες δὲν ἐτέμνοντο καθέτως, θὰ εἴχομεν *σύστημα πλαγιογωνίων ἀξόνων*.

Δοθέντος συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων καὶ σημείου τινὸς Μ *(Σχ. 2)* ἐν τῷ ἐπιπέδῳ των, ἐὰν ἀχθῶσιν ἐκ τούτου αἱ παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας συντεταγμένων, θὰ ὁρισθῶσιν ἐπὶ τούτων τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Αἱ θέσεις τῶν Α καὶ Β ἐπὶ τῶν ἀξόνων μεταβάλλονται, ἐν γένει, ἅμα ὡς μεταβληθῇ ἡ θέσις τοῦ Μ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Συνεπῶς, εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἓν μόνον σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων καὶ ἓν μόνον σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων. Ἐπειδὴ δέ, ὡς εἴδομεν, εἰς ἕκαστον σημεῖον ἑνὸς ἄξονος ἀντιστοιχεῖ εἷς καὶ μόνον ἀριθμός, συνάγομεν ὅτι *εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον ἓν ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν*. Ἀντιστρόφως, ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι *εἰς πᾶν ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ*. Ὁ ἀριθμὸς ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὸ ὡς ἀνωτέρω ὁρισθὲν σημεῖον Α τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων παρίσταται ὑπὸ τοῦ x καὶ καλεῖται *τετμημένη* τοῦ Μ, ὁ ἀριθμὸς ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὸ Β παρίσταται ὑπὸ τοῦ y καὶ καλεῖται *τεταγμένη* τοῦ Μ. Ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη, ὁμοῦ, καλοῦνται *συντεταγμέναι σημείου τινός.*



Σχ. 2.

Διὰ τοῦ συμβόλου Μ(x,y) νοοῦμεν σημεῖον Μ ἔχον τετμημένην x καὶ τεταγμένην y. Οὕτω γράφοντες Σ(3,5) νοοῦμεν σημεῖον τι Σ τοῦ ἐπιπέδου ἔχον τετμημένην 3 καὶ τεταγμένην 5. Ὅταν δὲ λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Σ ἔχει συντεταγμένας 3 καὶ 5, νοοῦμεν τοῦτο ἔχον τετμημένην 3 καὶ τεταγμένην 5, ἤτοι ὁ πρῶτος τοῦ ζεύγους τῶν ἀριθμῶν δίδει τὴν τετμημένην καὶ ὁ δεύτερος τὴν τεταγμένην τοῦ σημείου.

§ 20. Ἀπόστασις δύο σημείων τοῦ ἐπιπέδου.

Ἔστωσαν τὰ σημεῖα $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ *(Σχ. 3)* τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ ἀπόστασις. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ δ τὴν ἀπόστασιν ΜΝ, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΡΝ θὰ ἔχωμεν : $\delta^2 = MP^2 + PN^2$,

ἀλλά, δοθέντος ὅτι : $MP = AB = x_2 - x_1$ καὶ $PN = A'B' = y_2 - y_1$

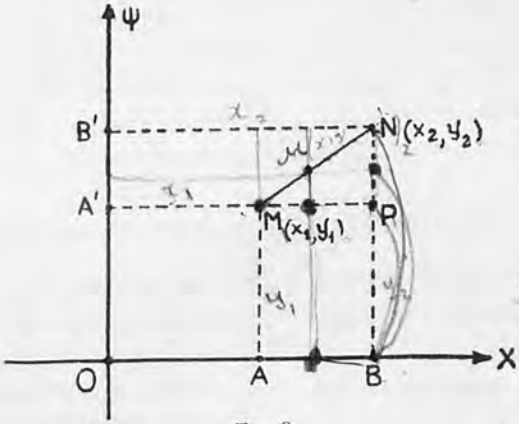
θὰ ἔχωμεν :

$$\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι : $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ καὶ $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$, ἡ τελευταία σχέσις δύναται νὰ γραφῇ : $\delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, ἐξ ἧς :

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad (26)$$

μόνον θετική ρίζα



Σχ. 3

Ἐὰν τὸ ἓν τῶν σημείων συνέπιπτε πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων O(0,0), τὸ ἕτερον δὲ ἦτο τὸ τυχὸν σημεῖον Σ(x,y), θὰ εἴχομεν τὸν τύπον

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (27)$$

ὅστις μᾶς δίδει τὴν ἀπόστασιν τοῦ τυχόντος σημείου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.

Πρόβλημα. ***Δοθέντων δύο σημείων $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου εὐθυγράμμου τμήματος M_1M_2 σημεῖον τι $M(x,y)$ τὸ ὁποῖον νὰ διαιρῇ τὸ τμῆμα εἰς δύο τμήματα ἔχοντα λόγον $\frac{k}{\lambda}$.***

Κατ' ἀρχὴν τὸ νὰ ζητῶμεν νὰ εὕρωμεν σημεῖόν τι M(x,y), σημαίνει ὅτι ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς συντεταγμένας τούτου x,y. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ πρόβλημα τῆς § 18 εὑρίσκομεν ἀμέσως :

$$x = \frac{\lambda x_1 + k x_2}{\lambda + k}, \quad y = \frac{\lambda y_1 + k y_2}{\lambda + k} \qquad (28)$$

Ἐὰν τὰ δοθέντα σημεῖα εἶναι $M_1(2,4)$, $M_2(6,8)$ καὶ ὁ λόγος τῶν δύο τμημάτων 3, θὰ ἔχωμεν : $x = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 6}{4} = 5$, $y = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 8}{4} = 7$.

Ὡς μερικὴν περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ M εἶναι τὸ μέσον τοῦ M_1M_2, ὁπότε, ἐὰν τεθῇ $\frac{k}{\lambda} = 1$, λαμβάνομεν ὡς *συντεταγμένας τοῦ μέσου* δοθέντος τμήματος :

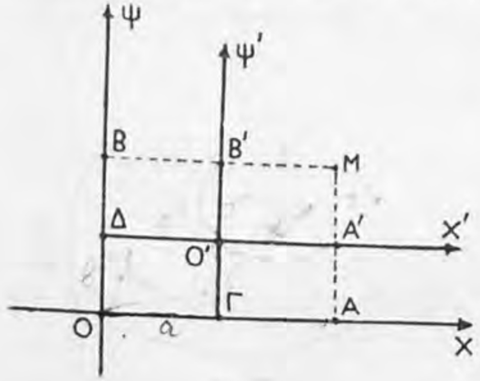
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (29)$$

§ 21. Ἀλλαγὴ τῶν ἀξόνων συντεταγμένων.

Κατὰ τὰ προλεχθέντα, αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων εἰς ὃ ἀναφέρονται. Ἐπειδὴ ἡ λύσις προβλήματός τινος εὐκολύνεται ἐνίοτε μεγάλως διὰ τῆς καταλλήλου ἐκλογῆς τοῦ συστήματος ἀξόνων, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἔχωμεν τύπους παρέχοντας τὰς συντεταγμένας τυχόντος σημείου εἰς σύστημα ἀξόνων διὰ τῶν συντεταγμένων τοῦ ἰδίου σημείου εἰς ἕτερον σύστημα ἀξόνων. Οἱ τύποι οὗτοι καλοῦνται *τύποι μετασχηματισμῶν συντεταγμένων* καὶ ἐκφράζουσι τὴν ὑφισταμένην σχέσιν μεταξὺ τῶν συντεταγμένων τῶν δύο συστημάτων.

§ 22. Παράλληλος μεταφορὰ τῶν ἀξόνων.

Ὁσάκις δίδονται αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς εἰς σύστημα ἀξόνων καὶ ζητεῖται ἡ εὕρεσις τῶν συντεταγμένων τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰς ἕτερον σύστημα ἀξόνων παραλλήλων πρὸς τοὺς ἀρχικούς, ὁμιλοῦμεν περὶ *παραλλήλου μεταφορᾶς τῶν ἀξόνων*, καθόσον τὸ ἓν σύστημα δύναται νὰ συμπέσῃ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου διὰ παραλλήλου κινήσεως (μεταφορᾶς) πρὸς ἑαυτό.



Σχ. 4.

Ἔστω x(ΟΑ), y(ΟΒ) *(Σχ. 4)*: αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ ἐν τῷ συστήματι ἀξόνων ΧΟΨ, καὶ x'(Ο'Α'), y'(Ο'Β') αἱ συντεταγμέναι τούτου ἐν τῷ συστήματι Χ'Ο'Ψ', οὗ οἱ ἄξονες εἶναι παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας τοῦ πρώτου συστήματος.

Συνήθως, τὸ μὲν πρῶτον σύστημα ἀξόνων καλεῖται *παλαιόν*, τὸ δὲ δεύτερον ***νέον*** σύστημα ἀξόνων.

Ἐὰν δι' α, β παρασταθῶσιν αἱ συντεταγμέναι τοῦ Ο' ὡς πρὸς τὸ παλαιὸν σύστημα ἀξόνων, ἤτοι ἐὰν ΟΓ = α, ΟΔ = β, θὰ ἔχωμεν:

$$ΟΑ = ΟΓ + ΓΑ = ΟΓ + Ο'Α'$$
$$ΟΒ = ΟΔ + ΔΒ = ΟΔ + Ο'Β'$$

ἤ, ἄλλως: $\boxed{\begin{aligned} x &= x' + α \\ y &= y' + β \end{aligned}}$ (30), ἐξ ἧς καὶ $\boxed{\begin{aligned} x' &= x - α \\ y' &= y - β \end{aligned}}$ (31)

§ 23. Περιστροφὴ τῶν ἀξόνων περὶ τὴν ἀρχήν.

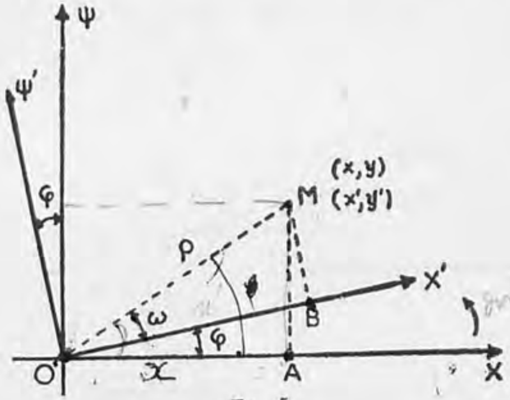
Ἐν προκειμένῳ θὰ θεωρήσωμεν δύο συστήματα ἀξόνων, ἐξ ὧν τὸ ἓν

Ημίτονο γωνίας παρίσταται ὁ λόγος της απέναντι κάθετης πρός τὴν ὑποτείνουσα.
Συνημίτονο γωνίας παρίσταται ὁ λόγος της προσκείμενης κάθετης πρός τὴν ὑποτείνουσα.
Εφαπτομένη = ὁ λόγος της απέναντι κάθετης πρός την προσκείμενη

δύναται νὰ συμπέσῃ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου διὰ *περιστροφῆς* του περὶ τὴν κοινὴν ἀρχήν των κατὰ γωνίαν ὡρισμένην, καλουμένην *γωνίαν περιστροφῆς*.

Ἔστωσαν τὰ συστήματα ἀξόνων : ΧΟΨ καὶ Χ'ΟΨ' *(Σχ. 5)*.

Παραστήσωμεν διὰ φ τὴν *γωνίαν περιστροφῆς*. Αὕτη ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν γωνίαν καθ' ἣν δέον νὰ περιστραφῇ ὁ ἄξων ΟΧ τῶν τετμημένων



Σχ. 5.

κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν (ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου), ὡς δεικνύει τὸ βέλος, μέχρις οὗ συμπέσῃ μετὰ τοῦ ἄξονος ΟΧ', ἤτοι :

$$\varphi = \text{γων.}XOX', \quad \text{ὁπότε καὶ} \quad \varphi = \text{γων.}\Psi O \Psi'$$

Ἔστω τυχὸν σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου τὰς μὲν συντεταγμένας εἰς τὸ σύστημα ΧΟΨ παριστῶμεν διὰ x,y, τὰς δὲ συντεταγμένας εἰς τὸ Χ'ΟΨ' διὰ x', y'.

Οἱ τύποι οἱ συνδέοντες τὰς συντεταγμένας x,y, x',y' τοῦ σημείου Μ εἶναι οἱ ἑξῆς :

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\text{συν}\varphi - y'\text{ημ}\varphi \\ y &= x'\text{ημ}\varphi + y'\text{συν}\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

συν(φ+ω) = x/ρ, x = ρ·συν(φ+ω)

ἐξ ὧν προκύπτουσι καὶ οἱ τύποι :

$$\begin{aligned} x' &= x\text{συν}\varphi + y\text{ημ}\varphi \\ y' &= -x\text{ημ}\varphi + y\text{συν}\varphi \end{aligned} \qquad (33)$$

ημ(φ+ω) = y/ρ, y = ρ·ημ(φ+ω)

Ἡ εὕρεσις τούτων ἐπιτυγχάνεται ὡς ἀκολούθως :

Θέτοντες $X'\widehat{O}M = \omega$ καὶ $OM = \varrho$, λαμβάνομεν :

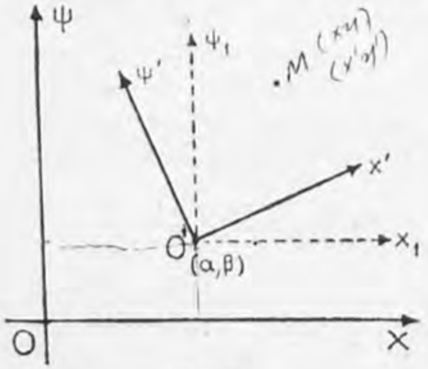
$$\begin{aligned} x &= OA = \varrho\text{συν}(\varphi+\omega) = \varrho\text{συν}\varphi\text{συν}\omega - \varrho\text{ημ}\varphi\text{ημ}\omega \\ y &= AM = \varrho\text{ημ}(\varphi+\omega) = \varrho\text{ημ}\varphi\text{συν}\omega + \varrho\text{συν}\varphi\text{ημ}\omega \end{aligned} \qquad (34)$$

καὶ ἐφ' ὅσον ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΟΜ ἔχομεν : $x' = \varrho\text{συν}\omega$, $y' = \varrho\text{ημ}\omega$ οἱ τύποι (34) μετασχηματίζονται εἰς τοὺς τύπους (32).

Λύοντες τὸ σύστημα (32) ὡς πρὸς x', y', λαμβάνομεν τοὺς τύπους (33).

§ 24. *Γενικὸς μετασχηματισμός.*

Ἐὰν ἡ θέσις δύο συστημάτων ἀξόνων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εἶναι τυχοῦσα, ὁμιλοῦμεν περὶ *γενικοῦ μετασχηματισμοῦ*. Ἡ μετάβασις δὲ ἐκ τοῦ ἑνὸς συστήματος εἰς τὸ ἕτερον ἐπιτυγχάνεται: πρῶτον διὰ μιᾶς περιστροφῆς, μέχρις οὗ οἱ ἄξονες τῶν δύο συστημάτων καταστῶσι μεταξύ των παράλληλοι, καὶ δεύτερον διὰ μιᾶς παραλλήλου μεταφορᾶς, ὁπότε τὰ συστήματα τῶν ἀξόνων θὰ συμπέσωσιν.



Σχ. 6.

Ἔστωσαν τὰ δύο συστήματα τῶν ἀξόνων: ΧΟΨ, Χ'Ο'Ψ' *(Σχ. 6)* καὶ τὸ τυχὸν σημεῖον Μ, ἔχον ἀντιστοίχως συντεταγμένας x,y καὶ x',y'. Παραστήσωμεν τὸ ἐνδιάμεσον σύστημα, ὅπερ θὰ χρησιμοποιήσωμεν, διὰ $X_1O'\Psi_1$ καὶ διὰ x_1, y_1 τὰς συντεταγμένας τοῦ Μ ἐν τῷ συστήματι τούτῳ. Θὰ ἔχωμεν, βάσει τοῦ τύπου (32):

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x'\sigma\upsilon\nu\varphi - y'\eta\mu\varphi \\ y_1 &= x'\eta\mu\varphi + y'\sigma\upsilon\nu\varphi \end{aligned}$$

Καὶ βάσει τοῦ τύπου (30):

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \alpha \\ y &= y_1 + \beta \end{aligned} \qquad (35)$$

ἔνθα α,β αἱ συντεταγμέναι τοῦ Ο' ὡς πρὸς τὸ σύστημα ΧΟΨ.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἰσότητας (35) τὰ x_1, y_1 ὑπὸ τῶν ἴσων των λαμβάνομεν:

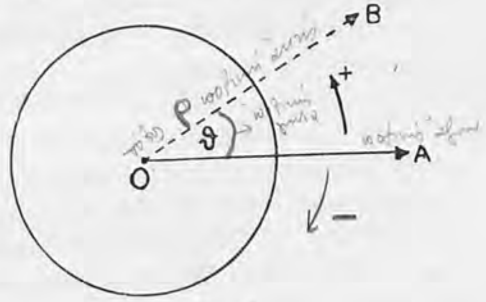
$$\begin{aligned} x &= x'\sigma\upsilon\nu\varphi - y'\eta\mu\varphi + \alpha \\ y &= x'\eta\mu\varphi + y'\sigma\upsilon\nu\varphi + \beta \end{aligned} \qquad (36)$$

§ 25. *Πολικαὶ συντεταγμέναι.*

Ἐκτὸς τῶν Καρτεσιανῶν συντεταγμένων ἔχομεν καὶ ἑτέρας καλουμένας *πολικὰς συντεταγμένας*, δι' ὧν δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν θέσιν σημείου τινὸς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

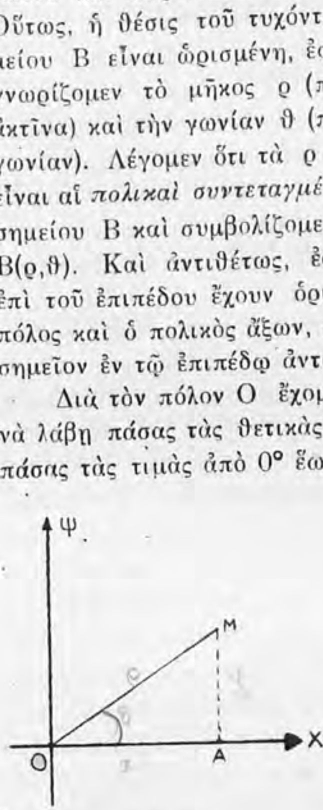
Θεωροῦμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ σταθερὰν ἡμιευθεῖαν ΟΑ *(Σχ. 7)*, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *πολικὸν ἄξονα*. Τὴν ἀρχὴν Ο τοῦ πολικοῦ ἄξονος καλοῦμεν *πόλον*. Ἡ ΟΑ δύναται νὰ περιστραφῇ περὶ τὸ Ο πρὸς δύο ἀντιθέτους κατευθύνσεις. Τὴν κατεύθυνσιν τὴν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου καλοῦμεν, κατὰ συνθήκην, *θετικήν*, καὶ τὴν αὐτὴν πρὸς τὴν τῶν δεικτῶν *ἀρνητικήν*.

Ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου Β τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὸν πόλον καλεῖται *πολικὴ ἀκτὶς* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος ϱ. Ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ πολικὴ ἀκτὶς μετὰ τοῦ πολικοῦ ἄξονος καλεῖται *πολικὴ γωνία* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ ϑ. Οὕτως, ἡ θέσις τοῦ τυχόντος σημείου Β εἶναι ὡρισμένη, ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν τὸ μῆκος ϱ (πολικὴν ἀκτῖνα) καὶ τὴν γωνίαν ϑ (πολικὴν γωνίαν). Λέγομεν ὅτι τὰ ϱ καὶ ϑ εἶναι αἱ *πολικαὶ συντεταγμέναι* τοῦ σημείου Β καὶ συμβολίζομεν τοῦτο Β(ϱ,ϑ). Καὶ ἀντιθέτως, ἐφ' ὅσον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἔχουν ὁρισθῆ ὁ πόλος καὶ ὁ πολικὸς ἄξων, εἰς πᾶν σημεῖον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἀντιστοιχεῖ ἓν ϱ καὶ ἓν ϑ.



Σχ. 7.

Διὰ τὸν πόλον Ο ἔχομεν ϱ=0 καὶ δεχόμεθα ϑ=0. Τὸ μὲν ϱ δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς θετικὰς τιμὰς ἀπὸ 0 ἕως ∞, ἡ δὲ ϑ δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς τιμὰς ἀπὸ 0° ἕως 360°.



Σχ. 8.

Θεωρήσωμεν δύο ὀρθογωνίους ἄξονας, οἵτινες ἔχουσιν ὡς ἀρχὴν τὸν πόλον καὶ ὡς ἄξονα τῶν τετμημένων τὸν πολικὸν ἄξονα. Ἐὰν x καὶ y εἶναι αἱ καρτεσιαναὶ καὶ ϱ καὶ ϑ αἱ πολικαὶ (συντεταγμέναι) σημείου τινὸς Μ (*Σχ. 8*), ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΜ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$x=\varrho\,\text{συν}\vartheta,\quad y=\varrho\,\text{ημ}\vartheta \qquad (37)$$

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \text{εφ}\vartheta=\frac{y}{x} \qquad (38)$$

Οἱ τύποι (37) παρέχουσι τὰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας x,y διὰ τῶν πολικῶν συντεταγμένων ϱ, ϑ. Οἱ τύποι (38), τοὐναντίον, παρέχουσι τὰς πολικὰς συντεταγμένας διὰ τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων.

$\text{συν}\vartheta=\frac{x}{\rho}$ $\quad x=\rho\cdot\text{συν}\vartheta$ $\quad \rho^2=x^2+y^2$

$\text{ημ}\vartheta=\frac{y}{\rho}$ $\quad y=\rho\cdot\text{ημ}\vartheta$ $\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$\text{εφ}\vartheta=\frac{y}{x}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΥΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ

§ 26. **Μεταβληταὶ καὶ σταθεραί.**

Ἐν τῷ καθ' ἡμέραν βίῳ καὶ ἐν τῇ φύσει ὑπάρχουσι *σταθεραὶ* καὶ *μεταβληταὶ ποσότητες*. Ἐπὶ παραδείγματι, τὸ ποσὸν τῆς κατ' ἔτος πιπτούσης εἴς τινα τόπον βροχῆς εἶναι *μεταβλητὴ ποσότης*, ἐνῷ ὁ ἀριθμὸς $\pi=3,14159\ldots$, ἤτοι ὁ λόγος τοῦ μήκους περιφερείας κύκλου πρὸς τὴν διάμετρόν του, ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου τὸ ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας, εἶναι *ποσότητες σταθεραί*.

Αἱ εἰς τὰ μαθηματικὰ ζητήματα θεωρούμεναι ποσότητες διακρίνονται εἰς *μεταβλητὰς* καὶ *σταθεράς*. Καὶ ὡς *μεταβλητὴν* μὲν θεωροῦμεν πᾶσαν ποσότητα δυναμένην νὰ λάβῃ πολλὰς καὶ διαφόρους τιμάς, ὡς *σταθερὰν* δὲ τὴν ἔχουσαν μίαν καὶ ὡρισμένην τιμήν. Οὕτως, εἰς τὸν κύκλον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν του εἶναι μεταβληταὶ καὶ ἐκ τῶν στοιχείων ἅτινα προσδιορίζουσι ταῦτα ἡ μὲν ἀκτὶς εἶναι μεταβλητή, ὁ δὲ π σταθερὰ ποσότης.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ Μαθηματικὰ αἱ ποσότητες μετρούμεναι παριστῶνται δι' ἀριθμῶν καὶ οἱ ἀριθμοὶ διὰ γραμμάτων, πολλάκις μεταβλητὴν λέγοντες νοοῦμεν γράμμα δυνάμενον νὰ λάβῃ πάσας τὰς τιμὰς αἵτινες ἀνήκουσιν εἰς καθωρισμένην τινὰ *τάξιν* (ὁμάδα ἢ σύνολον). Αὕτη δύναται νὰ περιλαμβάνῃ ἅπαντας τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ἢ μόνον τοὺς θετικούς, κτλ., ἢ καὶ μέρος τούτων, ὡς λ.χ., ἅπαντας τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς περιεχομένους μεταξὺ 0 καὶ 1 κ.ο.κ.

Λέγοντες ὅτι εἰς μεταβλητήν τινα δίδομεν μίαν *ἀριθμητικὴν τιμήν*, ἢ ἁπλῶς *μίαν τιμήν*, νοοῦμεν ὅτι ἀντικαθιστῶμεν ταύτην δι' ἀριθμοῦ.

Ἡ τάξις τῶν τιμῶν, ἃς δύναται νὰ λάβῃ μεταβλητή τις, λέγομεν ὅτι ἔχει *χαρακτῆρα συνεχῆ*, ἐάν, περιεχομένων εἰς ταύτην δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β, περιέχωνται ὁμοίως καὶ ἅπαντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἱ περιλαμβανόμενοι μεταξὺ α καὶ β. Π.χ. οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἱ μὴ ὑπερβαίνοντες τὸν ἀριθμὸν β καὶ συγχρόνως μὴ ὄντες μικρότεροι τοῦ α, ἤτοι οἱ ὑποκείμενοι εἰς τὸν περιορισμὸν $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, συνιστῶσι τοιαύτην τάξιν συνεχοῦς χαρακτῆρος. Τοιαύτην τάξιν συνιστᾷ τὸ καλούμενον *διάστημα* (α,β) ἢ $(\alpha\,|\!\!-\!\!-\!\!|\,\beta)$. Ἐὰν εἰς τὴν ἐν λόγῳ τάξιν δὲν συμπεριλαμβάνεται ὁ α ἢ ὁ β ἢ ἀμφότεροι, σημειοῦμεν ἀντιστοίχως: $(\alpha \,-\!\!-\!\!|\, \beta)$, $(\alpha\,|\!\!-\!\!-\, \beta)$, $(\alpha \,-\!\!-\, \beta)$.

Ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων ἄξονός τινος ἔχομεν μίαν τελείαν ἀντιστοιχίαν (§ 18), δυνάμεθα εἰς ὡρισμένην τάξιν πραγματικῶν ἀριθμῶν νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τάξιν τινὰ σημείων. Τὴν τάξιν ταύτην συνιστῶσι τὰ σημεῖα ἐκεῖνα τοῦ ἄξονος, ὧν αἱ τετμημέναι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τῆς ἀντιστοίχου τάξεως.

Ἡ μεταξὺ μιᾶς τάξεως πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ μιᾶς τάξεως σημείων ἑνὸς ἄξονος καθιερωθεῖσα ἀντιστοιχία ἐπιτρέπει νὰ λέγωμεν: *σημεῖον α*, ἀντὶ *τιμὴ α* τῆς μεταβλητῆς x, ὅτι ἡ τιμὴ x_1 τῆς μεταβλητῆς εὑρίσκεται ἀριστερὰ τῆς x_2 ἐὰν $x_1 < x_2$, ὅτι τὸ ἄκρον α τοῦ διαστήματος (α,β) εἶναι τὸ ἀριστερὸν ἐνῷ τὸ β εἶναι τὸ δεξιὸν ἄκρον, ἐὰν $\alpha < \beta$, κ.ο.κ.

Περιοχὴ σημείου τινὸς α καλεῖται τὸ τυχὸν διάστημα τὸ περιέχον ἐντὸς αὐτοῦ τὸ α. Συνήθως τὸ διάστημα τοῦτο λαμβάνεται πολὺ μικρόν, τὸ δὲ α μέσον τούτου. Συμβολικῶς, ἐὰν ε παριστᾷ δοθέντα ἀριθμόν, μία περιοχὴ τῆς τιμῆς $x=\alpha$ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ διαστήματος $[(\alpha-\varepsilon), (\alpha+\varepsilon)]$, ἤτοι: $\alpha-\varepsilon < x < \alpha+\varepsilon$.

Τὸ ἐνδιαφέρον ἔγκειται οὐχὶ εἰς τὸ πῶς μία μεταβλητὴ λαμβάνει διαφόρους τιμάς, ἀλλ᾽ εἰς τὰς ἐπιδράσεις ἃς ἔχει ἡ τοιαύτη μετάβασις ἐκ τῆς μιᾶς τιμῆς εἰς τὴν ἄλλην ἐπὶ τῶν ἄλλων μεταβλητῶν, μεθ᾽ ὧν συνδέεται διὰ σχέσεώς τινος, νόμου τινός. Ἡ μελέτη τῶν ἀμοιβαίων ἀλληλεξαρτήσεων τῶν διαφόρων μεταβλητῶν ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς μελέτης τῶν νόμων οἵτινες διέπουσι τὰς μεταξὺ αὐτῶν σχέσεις, ἐν προκειμένῳ *τοῦ τρόπου* καθ᾽ ὃν *συνήρτηνται* αὗται ἀλλήλαις. Ἐντεῦθεν χρησιμοποιεῖται διεθνῶς ὁ τεχνικὸς ὅρος *συνάρτησις* πρὸς καθορισμὸν τῆς ὑπάρξεως ἀλληλεξαρτήσεως μεταξὺ μεταβλητῶν.

§ 27. *Περὶ μέσων ὅρων.*

Αἱ μνημονικαὶ ἱκανότητες τοῦ ἀνθρώπου εἶναι, ὡς γνωστόν, λίαν περιωρισμέναι, ἐξ οὗ οὗτος δοκιμάζει δυσκολίαν εἰς τὴν παρακολούθησιν τῶν μεταβολῶν φαινομένων, ἅτινα εἶναι συνάρτησις περισσοτέρων μεταβλητῶν ποσοτήτων ἢ ὧν ἡ μεταβολὴ δίδεται διὰ πολλῶν ἀριθμῶν. Ἡ δυσκολία αὐτὴ ἀντιμετωπίζεται διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τῆς *μέσης τιμῆς* ἢ τοῦ *μέσου ὅρου*.

Ὁ μέσος ὅρος εἶναι τὸ στοιχεῖον, ὁ ἀριθμός, ὅστις παραστατικῶς, χαρακτηριστικῶς, δίδει εἰκόνα φαινομένου τινός.

Ὑπὸ μαθηματικὴν ἔποψιν, ὁ Cauchy ὥρισεν ὡς μέσον ὅρον τὸν τυχόντα ὅρον σειρᾶς τινος ἀριθμῶν, ὅστις κεῖται μεταξὺ τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου τῆς σειρᾶς. Ὑπὸ στατιστικὴν ἔποψιν, ὁ μέσος ὅρος σειρᾶς τινος ἀριθμῶν ἐκφραζόντων στατιστικὰ δεδομένα εἶναι εἷς οἱοσδήποτε ἀριθμός, ὅστις, μὴ ὢν μικρότερος τοῦ ἐλαχίστου οὔτε καὶ μεγαλύτερος τοῦ μεγίστου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἶναι ἱκανὸς νὰ παραστήσῃ συνθετικῶς τὰ δεδομένα τῆς σειρᾶς.

Αἱ συνθῆκαι ἃς δέον νὰ πληροῖ ὁ μέσος ὅρος εἶναι: 1) νὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ μικροτέρου καὶ μεγαλυτέρου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ 2) νὰ ἰσοῦται πρὸς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, ἐὰν οὗτοι καταστῶσιν ἴσοι ἀλλήλοις.

Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἀπειρίαν ἀριθμῶν πληρούντων τὰς ἀνωτέρω συνθήκας, δι' ὃ καὶ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἀπειρίαν μέσων ὅρων, ὧν ἡ σπουδὴ ἀνάγεται εἰς τὴν Στατιστικήν*. Ἡ προτίμησις τούτου ἢ ἐκείνου τοῦ τύπου μέσου ὅρου δὲν εἶναι προκαθωρισμένη, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ὑπὸ μελέτην φαινομένου, προτιμωμένου ἐκείνου τοῦ τύπου μέσου ὅρου οὗτινος αἱ ἰδιότητες ἐξυπηρετοῦσι καλύτερον τοὺς σκοποὺς τῆς ἐρεύνης**.

Ἐνταῦθα θὰ δώσωμεν τοὺς κυριωτέρους καὶ τοὺς μᾶλλον ἐν χρήσει τύπους μέσων ὅρων, θεωροῦντες γνωστὰ τὰ περὶ ἀριθμητικῶν καὶ γεωμετρικῶν προόδων.

Α΄. Ἁπλοῖ μέσοι ὅροι.

1. Μέσος ἀριθμητικός.

Ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ἐκλήθη οὕτω, διότι, ἐὰν ὑπολογισθῇ δι' ἀριθμῶν οἵτινες σχηματίζουσι ἀριθμητικὴν πρόοδον, θὰ συμπέσῃ μὲ τὸν ἀριθμόν, τὸν ὅρον, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον, ἐφόσον τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι περιττόν, ἢ μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο κεντρικῶν ὅρων, ἐφόσον τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι ἄρτιον.

Ὁ μέσος ἀριθμητικός, ὃν συνήθως ἀποκαλοῦμεν ἁπλῶς *μέσον ὅρον* καὶ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου M_a, *ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ὅρων* (ἀριθμῶν) *διαιρεθὲν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δίδοντος τὸ πλῆθος τούτων*. Παριστωμένων, ὅθεν, δι' $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\nu$ τῶν ν δοθέντων ἀριθμῶν, ὁ μέσος ἀριθμητικὸς τούτων ἔσται:

$$M_a = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_\nu}{\nu}$$

Παράδειγμα. Αἱ εἰσπράξεις καταστήματός τινος εἰς μίαν ἑβδομάδα ἦσαν αἱ ἑξῆς:

Δευτέρα	Δρχ.	2 510 00
Τρίτη	»	1 680 00
Τετάρτη	»	2 001 50
Πέμπτη	»	2 120 00
Παρασκευὴ	»	1 805 00
Σάββατον	»	2 783 50

Ὁ μέσος ὅρος τῶν εἰσπράξεων καθ' ἡμέραν εἶναι:

$$M_a = \frac{2\,510\,00+1\,680\,00+2\,001\,50+2\,120\,00+1\,805\,00+2\,783\,50}{6} = 2150 \text{ δρ.}$$

* Ὡς ἐπιστήμην, ἄλλωστε, τῶν Μέσων ὅρων καὶ τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν ὁρίζουσι τὴν Στατιστικήν. Πρβλ. A. Bowley, *Elements of Statistics*, μετάφρ. εἰς τὴν Γαλλικήν, σ. 103.

** C. Gini, *Corso di Statistica*, Roma, 1955, σ. 176.

2. Μέσος γεωμετρικός.

Ὁ μέσος γεωμετρικός, ὃν συμβολίζομεν διὰ M_γ, ἐκλήθη οὕτω, διότι, ἐὰν ὑπολογισθῇ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν οἵτινες σχηματίζουσι γεωμετρικὴν πρόοδον, θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸν ὅρον ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι περιττόν, ἢ θὰ εἶναι ὁ μέσος γεωμετρικὸς (ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου) τῶν δύο κεντρικῶν ὅρων, ἐὰν τὸ πλῆθος εἶναι ἄρτιον.

Οὗτος *ἰσοῦται πρὸς τὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου τῶν δοθέντων ὅρων, τὴν ἔχουσαν δείκτην τὸν ἀριθμὸν τὸν δίδοντα τὸ πλῆθος τῶν ὅρων*. Ἤτοι, χρησιμοποιοῦντες τὸν προηγούμενον συμβολισμόν, ἔχομεν :

$$M_\gamma = \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_\nu}$$

Ἐπειδὴ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ μέσου γεωμετρικοῦ καταφεύγομεν, συνήθως, εἰς τοὺς λογαρίθμους, λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος, εὑρίσκομεν :

$$\lambda o\gamma M_\gamma = \frac{\lambda o\gamma\alpha_1 + \lambda o\gamma\alpha_2 + \ldots + \lambda o\gamma\alpha_\nu}{\nu}$$

Ἤτοι *ὁ λογάριθμος τοῦ M_γ ἰσοῦται μὲ τὸν μέσον ἀριθμητικὸν τῶν λογαρίθμων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν*.

Παράδειγμα. Εὑρεῖν τὸν μέσον γεωμετρικὸν τῶν ἀριθμῶν 2, 6, 18.

$$M_\gamma = \sqrt[3]{2 \cdot 6 \cdot 18} = \sqrt[3]{216} = 6.$$

3. Μέσος ἁρμονικός.

Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ *μέσου ἁρμονικοῦ* εἶναι περιωρισμένη. Ὁ μέσος οὗτος φαίνεται ὅτι ἦτο γνωστὸς παρὰ τοῖς ἀρχαίοις Ἕλλησιν ἐν τῇ θεωρίᾳ τῆς μουσικῆς, κατὰ τὴν σύγκρισιν τοῦ μήκους τῶν παλλομένων χορδῶν πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ἤχου των. Ἐκλήθη δὲ οὕτω διότι, ἐὰν ὑπολογισθῇ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν οἵτινες σχηματίζουσιν ἁρμονικὴν πρόοδον*, θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ κεντρικοῦ ὅρου, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι περιττόν, ἢ μετὰ τοῦ μέσου ἁρμονικοῦ τῶν δύο κεντρικῶν ὅρων, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι ἄρτιον.

Ὁ μέσος ἁρμονικὸς ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀντίστροφον τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ τῶν ἀντιστρόφων τῶν δοθέντων ὅρων καὶ παρίσταται συμβολικῶς διὰ τοῦ M_ϱ.

* Ἀριθμοὶ σχηματίζουσιν ἁρμονικὴν πρόοδον, ὅταν οἱ ἀντίστροφοί των σχηματίζωσιν ἀριθμητικήν. **Π.χ.** οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ σχηματίζουσιν ἁρμονικὴν πρόοδον, διότι οἱ ἀριθμοὶ 2, 4, 6, 8 σχηματίζουσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Συμφώνως τῷ ὁρισμῷ θὰ ἔχωμεν:

$$M_0 = \frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_\nu}}$$

Παράδειγμα. Ἐὰν δύο κρουνοὶ πληροῦσι τὸ ἥμισυ δεξαμενῆς ὁ μὲν εἰς 2 ὥρας, ὁ δὲ εἰς 6, ὁλόκληρος ἡ δεξαμενὴ θὰ πληροῦται παρ' ἀμφοτέρων τῶν κρουνῶν, ῥεόντων συγχρόνως, εἰς χρόνον ἴσον πρὸς τὸν μέσον ἁρμονικὸν τῶν ὡρῶν, ἤτοι εἰς:

$$\frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = 3 \text{ ὥρας.}$$

Β'. Σταθμικοὶ μέσοι ὅροι.

Ἐνίοτε οἱ δοθέντες ὅροι, ὧν ζητεῖται ὁ μέσος, δὲν ἔχουσι τὴν αὐτὴν σημασίαν διὰ τὸ ὑπὸ παράστασιν φαινόμενον, ἀλλ' ἡ αὕτη προσδιορίζεται διά τινος συντελεστοῦ, ἤτοι διὰ βάρους τινός, ἢ τινὲς τῶν ὅρων περιέχονται πολλάκις ἐν τῇ διδομένῃ σειρᾷ. Ἐκεῖ ἔνθα οἱ διάφοροι ὅροι σταθμίζονται ἀναλόγως τῆς σπουδαιότητος, τῆς βαρύτητος ἢ τῆς συχνότητος ἐπαναλήψεώς των, χρησιμοποιοῦμεν τοὺς σταθμικοὺς μέσους ὅρους (moyennes pondérées). Π.χ. ἐὰν ἐν τῷ Χρηματιστηρίῳ τίτλος τις ἐπωλήθη εἰς τιμὰς 100, 102, 110 δρχ., ὁ μέσος ἀριθμητικός, δίδων τὴν μέσην τιμὴν πωλήσεως 104, οὐδόλως δίδει ἀκριβῆ εἰκόνα τῆς οὐσιαστικῆς τιμῆς τοῦ τίτλου, ἐὰν τοῦ ὡς ἄνω τίτλου ἐπωλήθησαν πρὸς 100 δρχ. 200 τεμάχια, πρὸς 102 δρχ. 10 καὶ πρὸς 110 δρχ. 20, ἀφοῦ ἡ τιμὴ τοῦ ὄγκου τῶν πωληθέντων εἶναι 100 δρχ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δέον νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ πλῆθος τῶν πωληθέντων τίτλων κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις θὰ μᾶς δίδῃ ἰδέαν τῆς οὐσιαστικῆς τιμῆς, ἀφοῦ δι' αὐτοῦ ἐπιζητοῦμεν νὰ ἔχωμεν παραστατικὴν τιμὴν προσεγγίζουσαν, κατὰ τὸ δυνατόν, τὴν πραγματικότητα.

Οἱ οὕτως εὑρισκόμενοι μέσοι ὅροι καλοῦνται *σταθμικοὶ μέσοι ὅροι*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν *ἁπλῶν μέσων ὅρων*.

Ἐὰν ἐν δοθείσῃ τινὶ σειρᾷ N ὅρων ὑπάρχουσι κ_1 ὅροι ἴσοι πρὸς α_1, κ_2 ὅροι ἴσοι πρὸς $\alpha_2, \ldots, \kappa_\nu$ ὅροι ἴσοι πρὸς α_ν, ὅτε $\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\nu = N$, θὰ ἔχωμεν, ἐφαρμόζοντες τοὺς ἄνω τύπους ἁπλῶν μέσων ὅρων, τοὺς κατωτέρω τύπους τοὺς δίδοντας τοὺς σταθμικοὺς μέσους ὅρους:

$$M'_a = \frac{\overbrace{\alpha_1+\alpha_1+\ldots+\alpha_1}^{\kappa_1} + \overbrace{\alpha_2+\alpha_2+\ldots+\alpha_2}^{\kappa_2} + \ldots + \overbrace{\alpha_\nu+\alpha_\nu+\ldots+\alpha_\nu}^{\kappa_\nu}}{N}$$

Ἤτοι: (1′) $$M'_a = \frac{\varkappa_1 \alpha_1 + \varkappa_2 \alpha_2 + \ldots + \varkappa_\nu \alpha_\nu}{N}$$

ὅστις καλεῖται *σταθμικὸς ἀριθμητικὸς μέσος.*

Παράδειγμα. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τῶν τίτλων θὰ ἔχωμεν ὡς σταθμικὸν ἀριθμητικὸν μέσον:

$$M'_a = \frac{200 \cdot 100 + 10 \cdot 102 + 20 \cdot 110}{200 + 10 + 20} = 100{,}95$$

Ἡ τιμὴ 100,95 δίδει σαφεστέραν ἰδέαν τῆς πραγματικῆς τιμῆς τοῦ τίτλου παρὰ ὁ ἁπλοῦς μέσος ὅρος τῶν τιμῶν, ἤτοι ἡ 104.

Ὁ *σταθμικὸς γεωμετρικὸς μέσος* θὰ εἶναι:

(2′) $$M'_\gamma = \sqrt[N]{\alpha_1^{\varkappa_1} \cdot \alpha_2^{\varkappa_2} \ldots \alpha_\nu^{\varkappa_\nu}}$$

Τέλος ὁ *σταθμικὸς ἁρμονικὸς μέσος* θὰ εἶναι:

(3′) $$M'_\varrho = \frac{N}{\frac{\varkappa_1}{\alpha_1} + \frac{\varkappa_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\varkappa_\nu}{\alpha_\nu}}$$

§ 28. *Συναρτήσεις.*

Ἔστω ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις (1) $y = 2x + 1$. Ἡ παράστασις αὕτη δὲν εἶναι εἰμὴ ἡ διὰ συμβόλων ἔκφρασις τοῦ τρόπου ἀλληλεξαρτήσεως δύο μεταβλητῶν, ἐξ ὧν ἡ μὲν παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος (συμβόλου) x, ἡ δὲ διὰ τοῦ γράμματος (συμβόλου) y.

Εἰς ἑκάστην *αὐθαιρέτως* διδομένην τιμὴν εἰς τὸ x ἔχομεν ὡρισμένας τιμὰς διὰ τὸ y, καθοριζομένας ἐξ αὐτῆς ταύτης τῆς μορφῆς τῆς δοθείσης παραστάσεως· λ.χ. διά: $x = 1, 2, -3, \frac{1}{2}$ ἔχομεν ἀντιστοίχως: $y = 3, 5, -5, 2$. Τὰ x, y παριστῶσι δύο μεταβλητάς· ἀλλ' ἐνῷ τὸ x ἔλαβε τιμὰς *κατὰ βούλησιν*, τὸ y ἔλαβε τιμὰς *ἐξαρτηθείσας* ἐκ τῶν ὑπὸ τοῦ x ληφθεισῶν. Ἡ x, οὕτως, εἶναι *ἀνεξάρτητος μεταβλητή*, ἡ δὲ y *ἐξηρτημένη ἐκ τῆς x μεταβλητὴ* ἢ *συνάρτησις τῆς x*.

Ἐν τῇ ἀνωτέρω ἀλγεβρικῇ παραστάσει (1), ἔνθα τὸ x, λαμβάνον ἀπεριορίστως οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, προσδιορίζει ἑκάστοτε διὰ τὸ y μίαν τελείως ὡρισμένην τιμήν, λέγομεν ὅτι τὸ *πεδίον T ὑπάρξεως* τῆς συναρτήσεως τῆς ὁρισθείσης ὑπὸ τῆς (1), εἶναι *ὁλόκληρον τὸ πραγματικὸν πεδίον*.

Ἐὰν λάβωμεν τὰς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις: $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \lambda o \gamma x$ θὰ ἔχωμεν δύο συναρτήσεις τῆς x, τῶν ὁποίων τὰ πεδία ὑπάρξεως χαρακτηρίζονται ὑπὸ τῶν σχέσεων $-1 \leqslant x \leqslant 1$ καὶ $x > 0$ ἀντιστοίχως, διότι, ἐκτὸς τῶν πεδίων τούτων ὑπάρξεώς των, αἱ συναρτήσεις αὗται δὲν ὑπάρχουσι, δὲν ἔχουσιν ἔννοιαν· π.χ. Διὰ $x=-3$ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς πρώτης $y = \sqrt{-8}$, ἤτοι φανταστικὸν ἀριθμόν, καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $y = \lambda o \gamma(-3)$, ἤτοι τιμὴν ἀπροσδιόριστον, καθόσον οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι λογάριθμον.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα, κατὰ τρόπον γενικώτερον, νὰ λέγωμεν ὅτι *ἡ y εἶναι συνάρτησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, ὅταν εἰς ἑκάστην δηδομένην τιμὴν εἰς τὸ x, ἀνήκουσαν εἰς ὡρισμένην τάξιν T ἀριθμῶν, ἀντιστοιχοῦσι τελείως ὡρισμέναι τιμαὶ τοῦ y καὶ ὅτι ἡ τάξις T ὁρίζει τὸ πεδίον ὑπάρξεως τῆς συναρτήσεως.*

Ἐὰν εἰς μίαν τιμὴν τῆς x ἀντιστοιχῇ μία τιμὴ τῆς y, ἡ συνάρτησις λέγεται *μονότιμος* (μονοσήμαντος), ἐὰν ἀντιστοιχῶσι δύο ἢ περισσότεραι, λέγεται *δίτιμος* (δισήμαντος) ἢ *πλειονότιμος* (πολυσήμαντος).

Ὁ νόμος ὁ καθορίζων τὴν ἀλληλεξάρτησιν τῶν μεταβλητῶν δύναται νὰ εἶναι οἱασδήποτε φύσεως. Ἡμεῖς θὰ ὑποθέσωμεν, γενικῶς, ὅτι οὗτος ἐκφράζεται ὑπὸ μαθηματικῆς τινος σχέσεως, πλὴν δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὑπὸ φυσικοῦ τινος φαινομένου, προτάσεώς τινος, συνόλου τινὸς στατιστικῶν δεδομένων κ.τ.λ. Ἐκεῖνο ὅμως τὸ ὁποῖον ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέρει εἶναι, ὅπως ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι *ὡρισμένη*, ἤτοι δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἀνηκούσης εἰς τὸ πεδίον ὑπάρξεως, νὰ δυνάμεθα νὰ γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως.

§ 29. Εἴδη συναρτήσεων.

Αἱ συναρτήσεις *μιᾶς μεταβλητῆς** διακρίνονται εἰς δύο κατηγορίας, εἰς τὰς *ἀλγεβρικὰς* καὶ *ὑπερβατικὰς συναρτήσεις*, ἀναλόγως τῆς σχέσεως τῆς ὁριζούσης τὴν ἀμοιβαίαν ἐξάρτησιν μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν.

Αἱ ἁπλούστεραι τούτων εἶναι αἱ ἀλγεβρικαί. Ἀλγεβρικὰς καλοῦμεν τὰς συναρτήσεις εἰς ἅς, πρὸς προσδιορισμὸν τῆς τιμῆς των, ἐκτελοῦμεν ἐπὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς πεπερασμένον ἀριθμὸν πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς, πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμόν, διαίρεσιν, ὕψωσιν εἰς δύναμιν ἀκεραίαν καὶ θετικήν, ἐξαγωγὴν ρίζης ἐχούσης δείκτην ἀκέραιον. Ἐὰν πρὸς προσδιορισμὸν τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως ἀρκοῦσιν αἱ τρεῖς πρῶται πράξεις (πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμός), αἱ ἀλγεβρικαὶ συναρτήσεις καλοῦνται *ἀκέραιαι ρηταί*· ἐὰν γίνεται χρῆσις καὶ τῆς διαιρέσεως, *ρηταὶ κλασματικαί*· ἐὰν καὶ ἐξαγωγαὶ ρίζης, *ἄρρητοι*. Οὕτως, ἡ συνάρτησις :

* Ὑπάρχουσι καὶ συναρτήσεις *πλειόνων μεταβλητῶν*, ἀλλὰ περὶ τούτων ἐν τοῖς ἑπομένοις.

$y=3x^2+2x-7$ εἶναι ἀλγεβρικὴ ῥητή, ἀκεραία δευτέρου βαθμοῦ (ἐκ τοῦ βαθμοῦ τοῦ πολυωνύμου), ἡ συνάρτησις $y=\frac{2x^3-5x^2+6x+7}{6x^2-x+9}$ ἀλγεβρικὴ ῥητὴ κλασματική, ἡ συνάρτησις: $y=\sqrt{x^2+1}$ ἀλγεβρικὴ καὶ ἄρρητος.

Αἱ μὴ ἀλγεβρικαὶ συναρτήσεις καλοῦνται *ὑπερβατικαί*, διότι πρὸς καθορισμόν των ὑπερβαίνομεν τὰς ὡς ἄνω βασικὰς ἀλγεβρικὰς πράξεις. Τούτων αἱ συνηθέστεραι εἶναι αἱ 1) τριγωνομετρικαί, 2) αἱ ἐκθετικαὶ συναρτήσεις, αἵτινες ἔχουσι τὴν μορφὴν $y=\alpha^x$, ἔνθα $\alpha>0$, καὶ 3) αἱ λογαριθμικαὶ τῆς μορφῆς $y=\lambda o\gamma_\alpha x$, ἔνθα $\lambda o\gamma_\alpha x$ συμβολίζει τὸν λογάριθμον τοῦ x μὲ βάσιν τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος τὸν ἀριθμὸν α.

Τόσον τὰς ἐκθετικὰς ὅσον καὶ τὰς λογαριθμικὰς συναρτήσεις θὰ σπουδάσωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

§ 30. Συμβολισμός.

Τὰς μεταβλητὰς ποσότητας τὰς παριστῶμεν, συνήθως, διὰ τῶν γραμμάτων x, y, ω, z, ... Ἐὰν ἔχωμεν δύο μόνον μεταβλητάς, παριστῶμεν διὰ τοῦ x τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν καὶ διὰ τοῦ y τὴν συνάρτησιν. Ἐὰν θέλωμεν νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ y εἶναι συνάρτησις τῆς x, χωρὶς νὰ καταδηλώσωμεν καὶ τὴν σχέσιν ἥτις τὰς συνδέει, γράφομεν: $y=\sigma(x)$ ἢ $y=\varphi(x)$ ἢ $y=f(x)$, τοῦθ᾽ ὅπερ ἀναγιγνώσκεται: σίγμα τοῦ x ἢ φὶ τοῦ x ἢ ἒφ τοῦ x *.

Ἵνα παραστήσωμεν τὴν τιμὴν ἣν λαμβάνει ἡ συνάρτησις ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ λάβῃ μίαν ὡρισμένην τιμὴν α, γράφομεν, ἀντὶ τοῦ x, τὴν τιμὴν α, ἤτοι: $\sigma(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$

Π.χ. διὰ τὴν συνάρτησιν $\sigma(x)=2x^2-x+4$, ἔχομεν:

$$\sigma(0)=4, \quad \sigma(1)=5, \quad \sigma(3)=19.$$

Ὅταν ἡ ἀλγεβρικὴ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰς μεταβλητὰς x καὶ y δὲν εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς y, ὅπως εἰς τὰ παραδείγματα τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἡ συνάρτησις λέγεται *πεπλεγμένη* καὶ συμβολίζεται οὕτω:

$$\sigma(x,y)=0 \quad \text{ἢ} \quad \varphi(x,y)=0,$$

π.χ. $3x+2y-1=0$, $y^2-6x=0$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ κ.ο.κ.

§ 31. Ἐξίσωσις γραμμῆς.

Ἐὰν αἱ συντεταγμέναι x, y σημείου τινὸς μεταβάλλωνται ἀνεξαρτήτως ἡ μία τῆς ἄλλης, τὸ σημεῖον μεταβάλλεται καὶ δύναται νὰ καταλάβῃ πᾶσαν

---

* σ πρωτόγραμμα τῆς ἑλληνικῆς λέξεως συνάρτησις, f πρωτόγραμμα τῆς γαλλικῆς λέξεως fonction (=συνάρτησις).

θέσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἐνῷ, ἐὰν μεταξὺ τῶν x καὶ y ὑφίσταται δεσμός τις, ὅστις δηλοῦται διὰ τοῦ συμβόλου σ(x,y)=0 ἢ ἄλλου παρεμφεροῦς, οὔτε τὰ x,y δύνανται νὰ μεταβάλλωνται ἀνεξαρτήτως τὸ ἓν τοῦ ἄλλου, οὔτε τὸ σημεῖον δύναται νὰ καταλαμβάνη ~~τὴν~~ τυχοῦσα~~ν~~ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ θέσιν.

Ἐὰν τὸ x λάβη ὡρισμένην τιμήν, π.χ. α, τὸ y θὰ λάβη τὰς τελείως καθωρισμένας τιμὰς τὰς παρεχομένας ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως σ(α,y)=0. Θὰ εἶναι δὲ αὗται αἱ πραγματικαὶ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως σ(α,y)=0, ἥτις ἔχει ὡς μόνον ἄγνωστον τὸ y. Οὕτως, ἀντιλαμβανόμεθα πλήρως, ὅτι μεταβαλλομένου τοῦ x μεταβάλλεται καὶ τὸ y, πλὴν ὅμως, τὰ ἑκάστοτε ὁριζόμενα σημεῖα ὑπόκεινται εἰς περιορισμὸν ὡς πρὸς τὴν θέσιν τὴν ὁποίαν κατέχουσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Αἱ διάφοροι θέσεις τῶν σημείων τούτων καθορίζουσιν ἕνα ὡρισμένον *τόπον* ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ὅστις καλεῖται *γεωμετρικὸς τόπος* τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν σ(x,y)=0. *Ὁ γεωμετρικὸς τόπος, ὁ οὕτω καθορισθείς, εἶναι γενικῶς μία γραμμή, δι' αὐτὸ καὶ λέγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις σ(x,y)=0 παριστᾷ μίαν γραμμὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἢ ὅτι εἶναι ἡ ἐξίσωσις μιᾶς γραμμῆς.*

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἔχωμεν μίαν γραμμήν, ἥτις παρήχθη κατά τινα νόμον γεωμετρικὸν ἢ μηχανικόν, δυνάμεθα, ὑπὸ ὡρισμένας προϋποθέσεις, νὰ εὕρωμεν μαθηματικὸν τύπον ἐκφράζοντα τὴν σχέσιν τὴν ὑφισταμένην μεταξὺ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς, καὶ μόνον τούτων, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς γραμμῆς.

→Εἶναι τόσον ἁπλοῦν ὅσον καὶ οὐσιῶδες νὰ προσέξωμεν, ὅτι ἡ μορφὴ τῆς γραμμῆς ἥτις θὰ προκύψη ἐξ ἐξισώσεως σ(x,y)=0 ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον ἐκ τοῦ δεσμοῦ τοῦ ὑφισταμένου μεταξὺ τῶν x,y, ἤτοι ἐκ τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως σ(x,y)=0. Πρέπει ἐπίσης νὰ προσέξωμεν, ὅτι *διὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν γραμμὴν ἡ ἐξίσωσις εἶναι διάφορος εἰς διάφορα συστήματα ἀξόνων, ἤτοι ἡ ἐξίσωσις μιᾶς γραμμῆς εἶναι συνυφασμένη μετὰ τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων εἰς ὃ ἀναφέρεται.*

§ 32. Γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων.

Δοθείσης ἐξισώσεως συνδεούσης δύο μόνον μεταβλητὰς x, y, εἶναι εὔκολος ἡ εὕρεσις τῆς γραμμῆς τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν. Ἡ γραμμὴ αὕτη θὰ καλῆται *γραφικὴ παράστασις* ἢ *διάγραμμα* ἢ καὶ *γεωμετρικὴ εἰκὼν* τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἐὰν ἔχωμεν τεμάχιον χάρτου χιλιοστομετρικοῦ καὶ ὁρίσωμεν ἐπ' αὐτοῦ ἓν σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων, δίδοντες αὐθαιρέτους τιμὰς εἰς τὴν x, θὰ εὑρίσκωμεν ὡρισμένας τιμὰς διὰ τὴν y καὶ οὕτω θὰ προκύψη σειρὰ σημείων τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι θὰ ἐπαληθεύωσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν. Τὰ οὕτως εὑρισκόμενα σημεῖα, ἑνούμενα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, θὰ δίδωσι τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως, τόσῳ ἀκριβεστέραν ὅσῳ τὰ σημεῖα εἶναι ἐγγύτερον ἀλλήλων καὶ πλειότερα.

Κατὰ τὴν γραφικὴν παράστασιν μιᾶς συναρτήσεως προσέχομεν τὰ οὐσιώδη χαρακτηριστικὰ τῆς συναρτήσεως, τὰ ὁποῖα θὰ ἀντιστοιχῶσιν εἰς χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας τῆς γραμμῆς, ὡς ἐπὶ παραδείγματι : ἐὰν ἡ γραμμὴ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων διὰ $x=0$ θὰ ἔχωμεν $y=0$· ἐὰν ἡ γραμμὴ εἶναι συμμετρικὴ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, διὰ μίαν τιμὴν τῆς x θὰ εὑρίσκωμεν δύο τιμὰς ἀντιθέτους διὰ τὴν y κ.ο.κ.

Αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν συναρτήσεων, εἰς πλείστας ὅσας ἐπιστήμας καὶ ἰδιαιτέρως εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἐπιστήμην καὶ τὴν στατιστικήν, ἀποτελοῦσιν ἓν τῶν πλέον ἀποτελεσματικῶν μέσων ἐρεύνης καὶ παραστάσεως τῶν συμπερασμάτων πολυαρίθμων παρατηρήσεων, πρὸ παντὸς ὅμως χρησιμεύουσι διὰ τὴν δι' αὐτῶν ἄμεσον παρατήρησιν τῆς πορείας, τῆς κανονικότητος ἢ μή, τῆς τάσεως ἑνὸς φαινομένου, πράγματα ἅτινα δὲν δύνανται εὐκόλως νὰ παρατηρηθῶσι εἰς πίνακα ἀριθμῶν.

Ἡ σπουδαιότης τῶν γραφικῶν παραστάσεων ἔχει πλήρως ἀναγνωρισθῆ καὶ αἱ γραφικαὶ ἐν γένει παραστάσεις τείνουσι νὰ ἐξελιχθῶσιν εἰς ἴδιον ἐπιστημονικὸν κλάδον. Ἡ μεγίστη ἁπλοποίησις τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γραφικὴ παράστασις καὶ ἡ ταχύτης μεθ' ὧν ὁ παρατηρητὴς δύναται νὰ ἀντιληφθῇ μέσῳ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τὴν πορείαν ἑνὸς φαινομένου κατέστησαν τὴν χρῆσιν τούτων ἀπαραίτητον εἰς τὰς ἐφηρμοσμένας ἐπιστήμας.

Ὅταν ἐξετάζωμεν πειραματικῶς τὴν μεταβολὴν μιᾶς ποσότητος y συναρτήσει ἑτέρας x, λαμβάνομεν ὡς ἀποτέλεσμα τῶν παρατηρήσεων ἀριθμόν τινα ἀντιστοίχων τιμῶν καὶ ἐπὶ ἑνὸς συστήματος ἀξόνων σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον μεμακρυσμένα ἀπ' ἀλλήλων. Ἀναζητοῦντες ἐν συνεχείᾳ γραμμὴν ἥτις νὰ διέρχηται διὰ τῶν ἐν λόγῳ σημείων ζητοῦμεν ἐν τῇ πράξει νὰ ἀνεύρωμεν τὸν δεσμὸν τὸν ὑφιστάμενον μεταξὺ τῶν θεωρουμένων μεταβλητῶν. Ὁ δεσμὸς οὗτος θὰ παρέχῃ καὶ ἐνδιαμέσους τιμὰς ἐκείνων ἃς ἐλάβομεν ἀπ' εὐθείας. Ἡ ἐργασία αὕτη καλεῖται *παρεμβολή*, διότι εἰς τὰ γνωστὰ σημεῖα παρεμβάλλομεν ἄλλα, ἵνα ἀποτελεσθῇ μία ὅσον ἔνεστι συνεχὴς γραμμή.

Εἰς ἣν περίπτωσιν ἡ ληφθεῖσα γραμμὴ ἔχει μεγάλην κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον προσέγγισιν πρὸς γνωστὴν μαθηματικὴν γραμμήν, εὑρισκόμεθα πρὸ σχέσεως ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μαθηματικὴ καί, καθὸ τοιαύτη, νὰ μελετηθῇ εὐχερέστερον.

Εἶναι ἀληθὲς ὅτι εἰς τὰς γραφικὰς παραστάσεις, γενικῶς, δὲν ἐπιτυγχάνεται ἡ ἀκρίβεια ἡ παρεχομένη ὑπὸ τοῦ πίνακος, παρέχοντος τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν x καὶ y· πλὴν τοῦτο ἀμελητέαν, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ἔχει ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς ἐμφανίσεως τοῦ φαινομένου.

Παραδείγματα

1ον. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως :

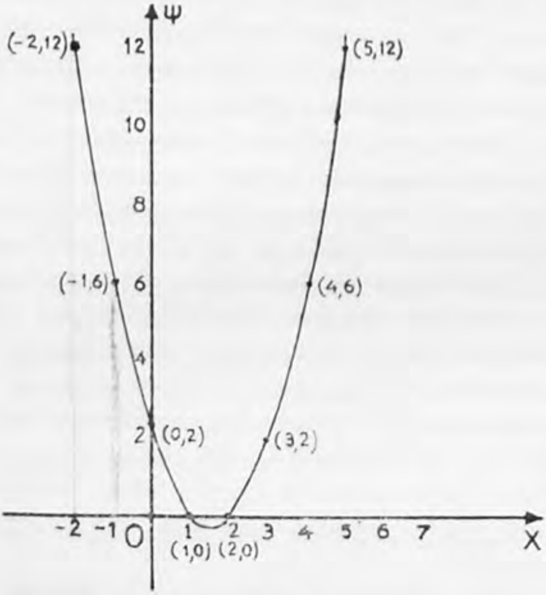
$$y = x^2 - 3x + 2.$$

Ἡ γραφικὴ παράστασις θὰ περιορισθῇ πρὸς τὸ παρὸν εἰς τὴν εὕρεσιν διαφόρων σημείων τῆς καμπύλης, ἅτινα, ἑνούμενα μεταξύ των διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, θὰ δώσουν τὴν γεωμετρικὴν εἰκόνα τῆς συναρτήσεως.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν πίνακα τιμῶν (Πίναξ 1) δίδοντες αὐθαιρέτως διαφόρους τιμὰς εἰς τὴν x καὶ εὑρίσκοντες τὰς διὰ τὴν y ἀντιστοίχους.

Πίναξ 1

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	.	.	.	.	.
y	12	6	2	0	0	2	6	12	.	.	.	.	.



Σχ. 9.

Ἐκ τοῦ πίνακος λαμβάνομεν τὰ ζεύγη (−2, 12), (−1, 6), (0, 2), (1,0), (2,0), . . . τὰ ὁποῖα καθορίζουσι διάφορα σημεῖα, ἅτινα, ἑνούμενα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς *(Σχ. 9)*, θὰ δώσωσι τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως, ἥτις εἶναι μία *παραβολὴ* τὴν ὁποίαν θὰ σπουδάσωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

2ον. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως:

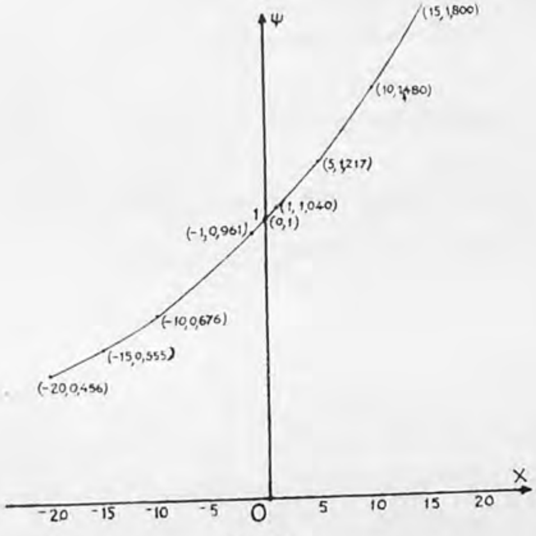
$$y = (1+0{,}04)^x \ *$$

Ὁμοίως, δίδοντες, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι, εἰς τὴν x διαφόρους τιμὰς εὑρίσκομεν ἀντιστοίχους διὰ τὴν y καὶ κατασκευάζομεν τὸν πίνακα τιμῶν (Πίναξ 2). Ἐκ τούτου λαμβάνομεν τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμῶν:

Πίναξ 2

x	−20	−15	−10	−5	−1	0	1	5	10	15
$y=(1{,}04)^x$	0,456	0,555	0,676	0,822	0,961	1	1,040	1,217	1.480	1,800

(−20, 0,456), (−15, 0,555), (−10, 0,676), (−5, 0,822), (−1, 0,061), (0,1), (1, 1,040) κ.ο.κ., καὶ ἐν συνεχείᾳ καθορίζομεν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα, ἅτινα,



Σχ. 10.

ἑνούμενα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς *(Σχ. 10)*, δίδουσι τὴν γεωμετρικὴν εἰκόνα τῆς συναρτήσεως.

Σημειωτέον ὅτι, ἵνα ἡ εἰκὼν ἀποβῇ σαφεστέρα, δὲν ἐλήφθη δι᾽ ἀμφοτέρους τοὺς ἄξονας ἡ αὐτὴ κλῖμαξ.

3ον. Ἡ θερμοκρασία ἔν τινι τόπῳ, μετρηθεῖσα κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς ἡμέρας, ὑπὸ ὡρισμένας τοῦ περιβάλλοντος συνθήκας δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις τοῦ χρόνου.

* Ὁ τύπος οὗτος δίδει, ἐν τῷ συνθέτῳ τόκῳ, τὴν τελικὴν ἀξίαν μιᾶς νομισματικῆς μονάδος εἰς x ἔτη μὲ ἐπιτόκιον 4 %.

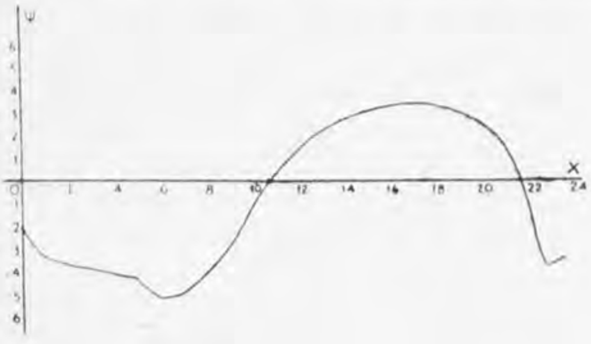
Παραστήσωμεν διὰ y τὴν θερμοκρασίαν καὶ διὰ x τὸν χρόνον καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ τῆς καταγραφῆς τῆς θερμοκρασίας, ἀνὰ ὥραν, εὕρομεν τὰς ἐν τῷ πίνακι 3 ἀναγραφομένας τιμάς.

Ἐκ τοῦ πίνακος λαμβάνομεν τὰ διάφορα ζεύγη τιμῶν καὶ ἀκολούθως προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα, ἅτινα, ἑνούμενα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς *(Σχ. 11)*, δίδουν τὴν εἰκόνα τῆς πορείας τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὸ ὑπ' ὄψιν 24ωρον.

Πίναξ 3

x (εἰς ὥρας)	y (εἰς βαθμ. Κελσίου)
0	−2
1	−3,2
2	−3,5
3	−3,8
4	−4
5	−4,1
6	−5
7	−4,8
8	−4
9	−3
10	−1,5
11	0
12	+1
13	+2
14	+2,5
15	+3
16	+3,2
17	+3,4
18	+3,6
19	+3,2
20	+2,8
21	+2
22	0
23	−3,7
24	−3,5

Σημειοῦμεν ὅτι ἡ συνεχὴς γραμμὴ δὲν δεικνύει τὴν ἀκριβῆ πορείαν τῆς θερμοκρασίας, ἀλλὰ τὴν ἐκφράζει κατὰ προσέγγισιν. Διὰ νὰ ἔχωμεν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν πρέπει νὰ καταχωρῶμεν τὰς θερμοκρασίας κατὰ χρονικὰ διαστήματα μικρότερα, λ.χ. $^1/_4$ τῆς ὥρας.



Σχ. 11.

§ 33. Αὔξουσαι - Φθίνουσαι, Μονότονοι συναρτήσεις.

Ἔστωσαν αἱ μεταβληταὶ x καὶ y, ἐξ ὧν τὴν x θεωροῦμεν ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν καὶ τὴν y ὡς συνάρτησιν τῆς x. Ἐὰν ἡ x λάβῃ δύο οἱασδήποτε τιμὰς ἔστω x_1 καὶ x_2, τότε ἡ y θὰ λάβῃ δύο ἀντιστοίχους τιμὰς y_1 καὶ y_2. *Τὴν διαφορὰν x_2-x_1 καλοῦμεν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, τὴν διαφορὰν y_2-y_1 αὔξησιν τῆς συναρτήσεως.* Π.χ. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι ἡ $y=2x+1$, δίδοντες εἰς τὴν x τὰς τιμὰς 3 καὶ 4 λαμβάνομεν διὰ τὴν y τὰς τιμὰς 7 καὶ 9, ἤτοι: $x_2-x_1=4-3=1$ καὶ $y_2-y_1=9-7=2$.

Ἡ λέξις *αὔξησις*, ἥτις θὰ χρησιμοποιηθῇ εὐρέως ἐν τοῖς ἑπομένοις, ἰδίᾳ ἐν τῷ Διαφορικῷ Λογισμῷ, λαμβάνεται ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς διαφορᾶς μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε τιμῶν, εἴτε τῆς x, εἴτε τῆς y. Οὕτω, ἐὰν λ.χ. ληφθῇ $x_1=9$ καὶ $x_2=5$, ἡ αὔξησις θὰ εἶναι $5-9=-4$, ἀρνητική· ἐνῷ διὰ $x_1=8$ καὶ $x_2=3$ ἡ αὔξησις θὰ εἶναι $8-3=5$, θετική.

Θεωρήσωμεν δύο τυχούσας τιμὰς x_1, x_2, ἔν τινι διαστήματι (α, β), τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τὰς y_1, y_2 ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς συναρτήσεως. *Ἡ συνάρτησις y καλεῖται αὔξουσα ἐν τῷ διαστήματι (α, β), ὅταν ἡ αὔξησις* y_2-y_1 *εἶναι ὁμόσημος τῇ αὐξήσει* x_2-x_1 *ἤτοι ὅταν* $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}>0$. *Ἡ συνάρτησις y καλεῖται φθίνουσα ἐν τῷ διαστήματι (α, β), ὅταν ἡ αὔξησις* y_2-y_1 *εἶναι ἑτερόσημος τῇ αὐξήσει* x_2-x_1, *ἤτοι ὅταν:* $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<0$.

Αἱ αὔξουσαι καὶ φθίνουσαι συναρτήσεις καλοῦνται *μονότονοι συναρτήσεις*.

Παράδειγμα: Ἡ συνάρτησις $y=2x+1$ εἶναι *αὔξουσα διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x*, διότι, ἐὰν $x_1=3$, $x_2=4$ δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τῆς x θὰ ἔχωμεν: $y_1=7$, $y_2=9$, $x_2-x_1=1>0$, $y_2-y_1=2>0$.

Ἡ συνάρτησις $y=-5x+3$ εἶναι *φθίνουσα διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x*, διότι, ἐὰν $x_1=1$, $x_2=3$, θὰ ἔχωμεν: $y_1=-2$, $y_2=-12$, $x_2-x_1=2>0$, $y_2-y_1=-10<0$.

§ 34. Κοινὰ σημεῖα δύο γραμμῶν.

Ἔστωσαν αἱ δύο μεταβληταὶ x, y συνδεόμεναι μεταξύ των διὰ τῶν δύο ἐξισώσεων:

$$\begin{cases} \sigma(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

Εἰς τὴν Ἄλγεβραν, ἡ λύσις τοῦ συστήματος τούτου συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν x, y αἵτινες ἐπαληθεύουσιν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις. Εἰς τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν, δοθέντος ὅτι ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων παριστᾷ γραμμήν, τὰ σημεῖα τῆς ὁποίας ἔχουσι συντεταγμένας ἐπαληθευούσας ταύτην, αἱ τιμαὶ αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ σύστημα δίδουσι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο γραμμῶν, αἱ συντεταγμέναι τῶν ὁποίων θὰ ἐπαληθεύωσιν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις. Ἀντιθέτως· ἐὰν γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις ἀμφοτέρων τῶν ἐξισώσεων, τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο γραμμῶν—ἐφ' ὅσον ὑπάρχουσι τοιαῦτα—δίδουσι τὴν λύσιν τοῦ συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΕΥΘΕΙΑΙ ΕΝ ΤΩ ΕΠΙΠΕΔΩ

Ναί

§ 35. Ἐξίσωσις τῆς εὐθείας.

Πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν μορφήν :

$$Ax+By+\Gamma=0 \qquad (39)$$

ἔνθα Α,Β,Γ τρεῖς σταθεροὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί, τοὐλάχιστον δὲ ὁ εἷς τῶν δύο πρώτων διάφορος τοῦ μηδενός.

Θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι *πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y, ὡς ἡ (39), παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμὴν καί, ἀντιστρόφως, πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.*

Ἐπειδὴ ὁ εἷς τῶν δύο συντελεστῶν (ὄχι συγχρόνως ὁ Α καὶ ὁ Β) δύναται νὰ εἶναι μηδέν, διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

1ον. $A\neq 0$ *καὶ* $B=0$. Ἡ ἐξίσωσις (39) ἀνάγεται εἰς τὴν μορφήν : $Ax+\Gamma=0$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν : $\boxed{(1) \quad x=-\dfrac{\Gamma}{A}}$ ἐξίσωσις

ἥτις ἐπαληθεύεται παρ' ὅλων τῶν σημείων, καὶ μόνον ὑπὸ τούτων, ὧν ἡ τετμημένη εἶναι $-\dfrac{\Gamma}{A}$. Τὰ σημεῖα ταῦτα, ὡς εἶναι φανερόν, κεῖνται *ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν y*. Ἀντιστρόφως, πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι Ψ'Ψ ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς x=k, ἔνθα k θὰ παριστᾷ τὴν κοινὴν τετμημένην ὅλων τῶν σημείων της. Ἐὰν ἀντὶ k τεθῇ $-\dfrac{\Gamma}{A}$, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1).

Ἐὰν συγχρόνως εἶναι καὶ Γ=0, ἡ (39) θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν Αx=0, ἥτις, ἐφόσον $A\neq 0$, ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν σημείων, καὶ μόνον ὑπὸ τούτων, τῶν ἐχόντων τετμημένην μηδέν, θὰ παριστᾷ δὲ καὶ πάλιν μίαν εὐθεῖαν, *τὸν ἄξονα Ψ'Ψ*, ἤτοι ὁ ἄξων τῶν y ἔχει ἐξίσωσιν x=0.

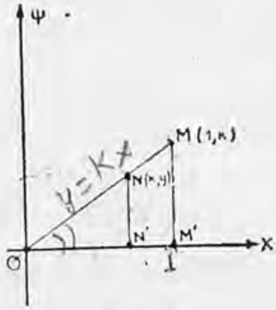
2ον. $B\neq 0$ *καὶ* $A=0$. Ἡ ἐξίσωσις (39) ἀνάγεται εἰς τὴν μορφὴν $By+\Gamma=0$, ἐξ ἧς

$$(2) \quad y=-\frac{\Gamma}{B}, \qquad y=k$$

ἥτις, ὡς εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, παριστᾷ *εὐθεῖαν παράλληλον* τῷ ἄξονι τῶν x καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν εἶναι καὶ $\Gamma=0$, ἡ (39) δίδει $By=0$, καὶ ἐπειδὴ $B\neq 0$, θὰ ἔχωμεν $y=0$, ἥτις παριστᾷ τὸν ἄξονα τῶν x.

3ον. $A\neq 0$, $B\neq 0$, $\Gamma=0$. Ἡ ἐξίσωσις (39) λαμβάνει τὴν μορφὴν $Ax+By=0$, ἐξ ἧς ἔχομεν καὶ $y=-\dfrac{A}{B}x$, ἤ, ἐὰν τεθῇ $-\dfrac{A}{B}=k$, $\boxed{y=kx}$ (40)

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου M(1,k) (*Σχ. 12*) ἐπαληθεύουσι τὴν (40). Ἐὰν λάβωμεν τὸ τυχὸν σημεῖον N(x,y) τῆς εὐθείας OM, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων OMM', ONN' *, ἔχομεν $\dfrac{M'M}{OM'}=\dfrac{N'N}{ON'}$ ἢ $\dfrac{k}{1}=\dfrac{y}{x}$, ἐξ ἧς $y=kx$, ἤτοι τὸ τυχὸν σημεῖον N(x,y) τῆς εὐθείας OM ἔχει συντεταγμένας ἐπαληθευούσας τὴν (40). Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου N(x,y) ἐπαληθεύωσι τὴν (40), ὁπότε καὶ $\dfrac{k}{1}=\dfrac{y}{x}$, τὰ τρίγωνα MM'O καὶ NN'O θὰ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην (τὴν ὀρθὴν) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους. Ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ τὴν γωνίαν MOM' ἴσην πρὸς τὴν NON', ἤτοι τὸ N θὰ εὑρίσκηται ἐπὶ τῆς OM.



Σχ. 12.

Οὕτως ἀπεδείχθη ὅτι *ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $y=kx$ παριστᾷ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων. Καὶ ἀντιστρόφως, πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καὶ διάφορος τούτων ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $y=kx$.*

4ον. Ἔστω $A\neq 0$, $B\neq 0$, $\Gamma\neq 0$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν τὴν *πλήρη μορφὴν* τῆς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς προηγουμένας *μὴ πλήρεις μορφάς*. Καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἐξίσωσις παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν. Πράγματι, ἡ ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ: $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{\Gamma}{B}$ ἢ

$$y=kx+\lambda \qquad (41)$$

Σχ. 13.

ἔνθα ἐτέθη $\boxed{-\dfrac{A}{B}=k,}$ καὶ $\boxed{-\dfrac{\Gamma}{B}=\lambda.}$ Τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς, ἥτις παρίσταται ὑπὸ τῆς (41), εὑρίσκονται ἐὰν εἰς ἑκάστην τῶν τεταγμένων τῶν σημείων τῆς (40) προστίθηται ἡ ποσότης λ. Τὰ σημεῖα, τὰ οὕτως εὑρισκόμενα, θὰ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ εὐθείᾳ $y=kx$ (*Σχ. 13*). Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι πᾶσα εὐθεῖα μὴ παράλληλος

* Τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια ὡς ὀρθογώνια ἔχοντα μίαν γωνίαν, τὴν XOM, κοινήν.

πρὸς τοὺς ἄξονας καὶ μὴ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (41).

Παραδείγματα

1ον. Ἡ ἐξίσωσις $3x-6=0$, ἥτις δύναται νὰ γραφῇ $x=\frac{6}{3}$ ἢ $x=2$, παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι Ψ'Ψ, τέμνουσαν τὸν ἄξονα X'X εἰς σημεῖον ἔχον τετμημένην 2.

2ον. Ἡ ἐξίσωσις $5y+7=0$, ἥτις δύναται νὰ γραφῇ $y=-\frac{7}{5}$, παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι X'X, τέμνουσαν τὸν ἄξονα Ψ'Ψ εἰς σημεῖον ἔχον τεταγμένην $-\frac{7}{5}$.

3ον. Ἡ ἐξίσωσις $3x=y$, παριστᾷ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.

4ον. Ἡ ἐξίσωσις $3x+y-4=0$, ἥτις δύναται νὰ γραφῇ $y=-3x+4$, παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον τῇ εὐθείᾳ $y=-3x$, τέμνουσαν τὸν ἄξονα Ψ'Ψ εἰς σημεῖον ἔχον τεταγμένην 4.

§ 36. *Γωνιακὸς συντελεστὴς ἢ συντελεστὴς κατευθύνσεως εὐθείας.*

Εἴδομεν ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις εὐθείας μὴ παραλλήλου πρὸς τοὺς ἄξονας δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(1)\quad y=kx+\lambda$$

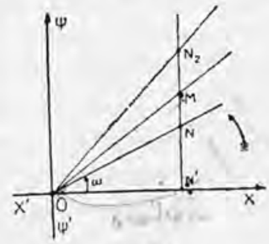
Τὸ λ παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων τοῦ σημείου τομῆς P (*Σχ. 13*) τῆς δοθείσης εὐθείας μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν y καὶ καλεῖται *τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχήν*.

Ὡσαύτως, ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ εἴδομεν, ὅτι διὰ τὸ τυχὸν σημεῖον N(x,y) τῆς εὐθείας OM (*Σχ. 12*) ἔχομεν $\frac{N'N}{ON'}=\frac{M'M}{OM'}$. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{M'M}{OM'}=k$, θὰ εἶναι $\frac{N'N}{ON'}=k$, ἤτοι ὁ λόγος τῆς τεταγμένης πρὸς τὴν τετμημένην τοῦ τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας OM εἶναι σταθερός.

Ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{N'N}{ON'}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ μῆκος τοῦ τμήματος N'N μετρηθέντος ὑπὸ τοῦ ON', δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{N'N}{ON'}$ μετρεῖ τὴν ὕψωσιν τῆς εὐθείας ὑπὲρ τὸν ἄξονα X'X. Ἐὰν διατηρήσωμεν τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως, ἤτοι σταθερὸν τὸ μῆκος ON', ἡ ὕψωσις τῶν διαφόρων εὐθειῶν ὑπὲρ τὸν ἄξονα X'X εἶναι διάφορος καὶ αὐξάνει (*Σχ. 14*) ἀπομακρυνομένης τῆς εὐθείας ἐκ τοῦ ἄξονος X'X.

Οὕτως ἔχομεν: $\frac{N'N}{ON'}<\frac{N'M}{ON'}<\frac{N'N_2}{ON'}$.

Δοθέντος δὲ ὅτι, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, ὁ λόγος $\frac{N'N}{ON'}$ εἶναι ὁ αὐτὸς διὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΟΝ, ὡς καὶ ὅτι ὁ λόγος $\frac{N'M}{ON'}$ θὰ εἶναι ὁ αὐτὸς διὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς ΟΜ κ.ο.κ., συνάγομεν ὅτι *ὁ λόγος αὐτὸς εἶναι χαρακτηριστικὸς δι' ἑκάστην εὐθεῖαν, καθορίζων τὴν ὕψωσιν ὑπὲρ τὸν ἄξονα Χ'Χ καὶ τὴν κατεύθυνσιν ταύτης.* Ἤ, ἄλλως, ὅτι ὁ λόγος τῆς τεταγμένης πρὸς τὴν τετμημένην τοῦ τυχόντος σημείου εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ὁρίζει τὴν ὕψωσιν ἤ, ὡς λέγεται, *τὴν κλίσιν* τῆς εὐθείας. Ὡς εὐνόητον *δὲ ἡ κλίσις τῆς εὐθείας καθορίζει τὴν κατεύθυνσιν ταύτης ἐν ὡρισμένῳ συστήματι ἀξόνων.*



Σχ. 14.

Ἐὰν παραστήσωμεν δι' ω τὴν γωνίαν καθ' ἣν δέον νὰ περιστραφῇ ὁ ἡμιάξων ΟΧ *(Σχ. 14)* κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, μέχρις οὗ συμπέσῃ μετὰ τῆς ΟΝ, ὁ λόγος $\frac{N'N}{ON'}$ δίδει τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ταύτης, ἤτοι $\text{εφ}\omega = \frac{N'N}{ON'}$.

$\frac{y}{x} =$

Ἡ κατεύθυνσις μιᾶς εὐθείας εἶναι οὐσιῶδες στοιχεῖον ταύτης. Ἐπειδὴ δὲ ὁμιλοῦμεν συνήθως περὶ κατευθύνσεως τῆς εὐθείας, διὰ τοῦτο καὶ ὁ δείκτης, ὁ συντελεστὴς ὁ καθορίζων τὴν κλίσιν, τὴν κατεύθυνσιν μιᾶς εὐθείας $\frac{N'N}{ON'}$ καλεῖται *συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς εὐθείας*, ἐνίοτε δέ, καθὸ ἔχων σχέσιν μετὰ τῆς γωνίας ω, καὶ *γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς εὐθείας*.

y

Δοθέντος ὅτι αἱ εὐθεῖαι y=kx καὶ y=kx+λ εἶναι παράλληλοι (§ 35), αὗται θὰ σχηματίζωσι μετὰ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος ΟΧ τὴν αὐτὴν γωνίαν, ἄρα θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν γωνιακὸν συντελεστήν, k.

Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ συντελεστοῦ κατευθύνσεως εὐθείας εἶναι ἄμεσος, ἐφ' ὅσον ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας λάβῃ τὴν μορφήν: y=kx+λ. Ἔστω π.χ. ὅτι ἐδόθη ἡ ἐξίσωσις: 3x–5y+7=0. Λύοντες ταύτην ὡς πρὸς y, ἤτοι δίδοντες εἰς αὐτὴν τὴν προηγουμένην μορφήν, λαμβάνομεν: $y=\frac{3}{5}x+\frac{7}{5}$. ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεώς της εἶναι $\frac{3}{5}$. Ἐὰν διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων εὕρωμεν τὴν γωνίαν, ἥτις ἔχει ἐφαπτομένην ἴσην πρὸς $\frac{3}{5}$, θὰ ἔχωμεν τὴν γωνίαν ω.

Ἐὰν ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἡ εὐθεῖα σχηματίζει μετὰ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος ΟΧ γωνίαν ὀξεῖαν, καὶ ἐὰν εἶναι ἀρνητικός, γωνίαν ἀμβλεῖαν. Ἐὰν εἶναι 0, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὴν μορφὴν $y=\lambda$, ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x. Ἐάν, τέλος, ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως εἶναι ± 1, ἡ εὐθεῖα διχοτομεῖ τὰς γωνίας τῶν ἀξόνων ἢ εἶναι παράλληλος τῇ διχοτόμῳ.

Σπουδαία παρατήρησις. Ἡ εὐθεῖα εἶναι μερικὴ περίπτωσις καμπύλης, εἶναι δηλαδὴ καμπύλη εὐθυγραμμισμένη. Οἵαν δὲ σημασίαν ἔχει ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως διὰ τὴν εὐθεῖαν ἔχει καὶ ἡ παράγωγος διὰ τὰς καμπύλας. Μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ παράγωγος, ὡς θὰ ἴδωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις, εἶναι ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς ἓν σημεῖον ταύτης. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα εἶναι καμπύλη εὐθυγραμμισμένη, ἡ παράγωγός της εἶναι αὐτὸς οὗτος ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεώς της. Ἄρα, οἵαν σημασίαν ἔχει ἡ παράγωγος διὰ τὴν τυχοῦσαν καμπύλην, ἔχει καὶ ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως διὰ τὰς εὐθείας. Εἶναι, δηλ., *ὁ δείκτης τῆς τάσεως, τῆς φορᾶς, τῆς ταχύτητος* τοῦ ὑπὸ τῆς εὐθείας παριστωμένου φαινομένου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ***Εὑρεῖν τὴν τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν καὶ τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῶν εὐθειῶν τῶν ἐχουσῶν ἐξισώσεις :***

$$x-y=0,\quad x+y=0,\quad 2x+3y=0,\quad 2x-3y-3=0$$

$$5x+2y+6=0,\quad -3x+10y-5=0,\quad x-\sqrt{3}\,y+\sqrt{6}=0$$

Ἀπόκρ. $(0 \cdot 1)$, $(0 \cdot -1)$, $\left(0 \cdot -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-1 \cdot \frac{2}{3}\right)$, $\left(-3 \cdot -\frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10}\right)$, $\left(\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

2. ***Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν εὐθείας σχηματιζούσης γωνίαν 60° μετὰ τοῦ ἡμιάξονος OX καὶ ἐχούσης τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἴσην πρὸς 4.***

Ἀπόκρ. Ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς εὐθείας ἰσοῦται μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας τῶν 60°, ἥτις εἶναι $\sqrt{3}$. Ἄρα ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι : $y=\sqrt{3}\,x+4$.

3. ***Νὰ γραφῶσιν αἱ ἐξισώσεις τριῶν παραλλήλων εὐθειῶν ἐχουσῶν συντελεστὴν κατευθύνσεως 2.***

Ἀπόκρ. $y=2x+5$, $y=2x-1$, $y=2x$.

4. ***Νὰ γραφῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας καθέτου τῷ ἄξονι τῶν x.***

Ἀπόκρ. Θὰ εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν y, ἄρα θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν: $x=5$, ἢ $x=-7$, ἢ $x=\frac{1}{2}$ κ.τ.λ.

5. ***Νὰ γραφῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας καθέτου τῷ ἄξονι τῶν y.***

Ἀπόκρ. Θὰ εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x, ἄρα θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν: $y=3$, ἢ $y=-2$, ἢ $y=-\frac{3}{2}$ κ.τ.λ.

6. *Πρὸς τί ἰσοῦται ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως εὐθείας παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν y;*

'Απόκρ. 'Ο συντελεστὴς κατευθύνσεως εἶναι εφ ω καὶ ἐπειδὴ ἐνταῦθα $\omega=90^\circ$, ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως θὰ εἶναι $\varepsilon\varphi 90^\circ = \pm\infty$.

7. *Νὰ γραφῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας διχοτομούσης τὴν γωνίαν ἣν σχηματίζει ὁ θετικὸς ἡμιάξων τῶν y μετὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονος τῶν x.*

'Απόκρ. $y=-x$.

8. *Εὑρεῖν τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως ἑκατέρου τῶν ἀξόνων.*

'Απόκρ. Τοῦ ἄξονος τῶν x εἶναι 0, τοῦ ἄξονος τῶν y $\pm\infty$.

9. *Εὑρεῖν τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν:* $3x+5y-13=0$, $x-2y+3=0$.

'Απόκρ. Λύοντες τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων (§ 34), εὑρίσκομεν (1,2).

10. *Εὑρεῖν τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν* $2x-2y-1=0$ καὶ $5x-5y+6=0$.

'Απόκρ. Αἱ ἐξισώσεις δύνανται νὰ γραφῶσιν: $y=x-\frac{1}{2}$, $y=x+\frac{6}{5}$, ἄρα εἶναι παράλληλοι.

11. *Εὑρεῖν τὴν τομὴν καὶ τὴν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν εὐθειῶν* $x=\alpha$, $y=\beta$.

'Απόκρ. Τὸ σημεῖον τομῆς εἶναι (α,β)· ἡ γωνία 90°.

12. *Εὑρεῖν τὰς κορυφὰς τριγώνου ἔχοντος ὡς πλευρὰς AB:* $2x+y-2=0$ *ΒΓ:* $x-y-1=0$, *ΓΑ:* $y=2$.

'Απόκρ. A (0,2), B (1,0), Γ (3,2).

§ 37. *Κατασκευὴ εὐθείας ἐκ τῆς ἐξισώσεώς της.*

'Εκ τῶν προλεχθέντων δῆλον κατέστη, ὅτι ὑφίσταται ἀνάγκη νὰ μεταβαίνωμεν ἐκ τῆς ἀλγεβρικῆς μορφῆς γραμμῆς τινος εἰς τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν ταύτης καὶ τἀνάπαλιν. Ἤδη θὰ ἴδωμεν τίνι τρόπῳ, δοθείσης τῆς ἀλγεβρικῆς ἐκφράσεως τῆς ἐξισώσεως εὐθείας τινός, θὰ εὕρωμεν τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν ταύτης.

'Επειδὴ διὰ δύο σημείων διέρχεται μία καὶ μόνη εὐθεῖα, προσδιορίζοντες δύο σημεῖα ταύτης ὁρίζομεν τελείως τὴν θέσιν της. Δίδοντες, κατὰ συνέπειαν, δύο αὐθαιρέτους τιμὰς x_1, x_2 εἰς τὸ x, λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς εὐθείας τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς y_1, y_2 τοῦ y. Οὕτως ἔχομεν τὰ δύο ζητούμενα σημεῖα (x_1, y_1), (x_2, y_2), ἅτινα, ἑνούμενα, ὁρίζουσι τελείως τὴν εὐθεῖαν. Συνήθως προτιμῶμεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα τέμνει τοὺς ἄξονας, τὰ προσδιορίζομεν δὲ διὰ τῆς λύσεως συστήματος δύο ἐξισώσεων ὧν ἡ μία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ἡ ἑτέρα ἡ τοῦ ἄξονος, ἤτοι $x=0$ διὰ τὸν ἄξονα τῶν y, καὶ $y=0$ διὰ τὸν ἄξονα τῶν x.

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ εὐθεῖα $2x-y+1=0$. Θέτοντες ἐν τῇ ἐξισώσει $x=1$, εὑρίσκομεν $y=3$· θέτοντες ἐν συνεχείᾳ $x=2$, εὑρίσκομεν $y=5$. Ἑνοῦντες τὰ σημεῖα

(1,3), (2,5), λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν. Διὰ τῆς ἑτέρας μεθόδου, θέτοντες ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς εὐθείας $y=0$, εὑρίσκομεν $x=-\frac{1}{2}$, ἤτοι τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Θέτοντες κατόπιν $x=0$, εὑρίσκομεν $y=1$, ἤτοι τὸ σημεῖον (0,1), τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἄξονος τῶν y. Ἑνοῦντες τὰ σημεῖα $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ καὶ (0,1), λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ***Νὰ εὑρεθῇ ἕτερος τρόπος κατασκευῆς εὐθείας ἧς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν.***

Ἀπόκρ. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι $2x+y+1=0$, ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεώς της θὰ εἶναι -2. Λαμβάνομεν σημεῖόν τι M (1, −2) ἔχον τετμημένην τὴν μονάδα καὶ τεταγμένην ἴσην πρὸς τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς εὐθείας, ἤτοι −2. Ἐν συνεχείᾳ λαμβάνομεν ἕτερον σημεῖον $N\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, τομὴν τῆς εὐθείας μετά τινος τῶν ἀξόνων, π.χ. τοῦ ἄξονος τῶν x. Ἡ ἐκ τοῦ N ἀγομένη παράλληλος τῇ OM εἶναι ἡ ζητουμένη.

2. ***Λάβωμεν ἐξίσωσιν τυχούσης εὐθείας καὶ τυχὸν σημεῖον κείμενον ἐκτὸς ταύτης. Νὰ ἐπαληθευθῇ ὅτι, ἂν αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου, τιθέμεναι ἀντὶ τῶν x καὶ y ἐν τῇ ἐξισώσει, δίδωσιν ἀριθμὸν θετικόν, αἱ συντεταγμέναι σημείου κειμένου εἰς τὸ ἕτερον τῶν μερῶν τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν θὰ δίδωσιν ἀριθμὸν ἀρνητικόν.***

Ὑπόδειξις. Ἡ ἄσκησις θὰ γίνῃ ἐπὶ χιλιοστομετρικοῦ χάρτου κατασκευαζομένης πρῶτον τῆς εὐθείας ἧς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν.

§ 38. Εὐθεῖαι συμπίπτουσαι.

Ἐὰν δύο ἐξισώσεις $Ax+By+\Gamma=0$ καὶ $A'x+B'y+\Gamma'=0$ παριστῶσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, οἱ ὁμώνυμοι συντελεσταὶ τῶν x καὶ y εἶναι ἀνάλογοι, ἤτοι: $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{\Gamma}{\Gamma'}$, καὶ ἀντιστρόφως.

Αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις γράφονται: $y=-\frac{A}{B}x-\frac{\Gamma}{B}$, $y'=-\frac{A'}{B'}-\frac{\Gamma'}{B'}$.

Ἐπειδὴ θεωροῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι συμπίπτουσι, δέον νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως καὶ τὴν αὐτὴν τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχήν, ἤτοι δέον νὰ εἶναι: $-\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'}$, $-\frac{\Gamma}{B}=-\frac{\Gamma'}{B'}$, ἐξ ὧν συνάγεται ὅτι $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{\Gamma}{\Gamma'}$. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον.

$\frac{B A}{B A'} = \frac{A B}{B A'}$

$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$

§ 39. Εὐθεῖαι παράλληλοι.

Ἐὰν δύο ἐξισώσεις $Ax+By+\Gamma=0$ καὶ $A'x+B'y+\Gamma'=0$ παριστῶσι δύο παραλλήλους εὐθείας, οἱ ὁμώνυμοι συντελεσταὶ τῶν x καὶ y εἶναι ἀνάλογοι, ἤτοι : $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}$, καὶ ἀντιστρόφως.

Αἱ δύο εὐθεῖαι, ὡς παράλληλοι, θὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν, ἤτοι τὸν αὐτὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως : $-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{A'}{B'}$ ἢ $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}$. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον.

§ 40. Ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ δοθέντος σημείου.

Ἔστω $M(x_1, y_1)$ δοθὲν σημεῖον καὶ ζητήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας ἥτις διέρχεται δι᾽ αὐτοῦ. Αὕτη θὰ ἔχῃ τὴν μορφήν : (α) $y=kx+\lambda$, ἔνθα k καὶ λ ἄγνωστοι. Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἡ εὐθεῖα διέρχηται διὰ τοῦ σημείου $M(x_1, y_1)$, συνίσταται εἰς τὸ ὅτι αἱ συντεταγμέναι τούτου ἐπαληθεύουσι τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν, ἤτοι : (β) $y_1=kx_1+\lambda$. Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (α) καὶ (β), λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$y-y_1=k(x-x_1) \tag{42}$$

ἥτις εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ δοθέντος σημείου. Ὡς μερικὴν περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων $O(0,0)$. Ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν : $y-0=k(x-0)$, ἤτοι : $y=kx$, τὴν ὁποίαν εὕρομεν εἰς τὴν § 35.

Σημείωσις. Ἡ ἐξίσωσις (42) περιέχει ἕνα ἄγνωστον, τὸν k, τὸν γωνιακὸν συντελεστήν. Θεωρουμένου τοῦ k ὡς παραμέτρου *, ἡ ἐξίσωσις παριστᾷ τὴν *δέσμην τῶν εὐθειῶν* τῶν διερχομένων διὰ τοῦ σημείου $M(x_1, y_1)$.

§ 41. Ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ δύο σημείων.

Ἔστωσαν $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ δύο δοθέντα σημεῖα. Ζητήσωμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τῶν M_1, M_2. Αὕτη διερχομένη διὰ τοῦ σημείου $M_1(x_1, y_1)$ θὰ ἔχῃ, συμφώνως τῷ τύπῳ (42), ἐξίσωσιν (1) $y-y_1=k(x-x_1)$, ἔνθα k ἄγνωστον. Ἵνα διέλθῃ καὶ ἐκ τοῦ M_2, θὰ πρέπῃ αἱ συντεταγμέναι του νὰ ἐπαληθεύωσι τὴν (1), ἤτοι : (2) $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$.

Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν : (3) $\boxed{k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$. Θέτοντες εἰς τὴν (1) τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ k, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$ ἥτις γράφεται καὶ οὕτω :

---

* Παράμετρος ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ λέγεται πᾶσα αὐθαίρετος μεταβλητὴ ἐν συναρτήσει τινί.

$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_1}{x_1-x_1}$ $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_1-x_1}$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \text{ ἢ, ἄλλως : } \boxed{\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}} \qquad (43)$$

Ὁ τύπος οὗτος εἶναι ὁ συνηθέστερον χρησιμοποιούμενος διὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ δύο σημείων.

Παρατηρήσεις : 1. Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ k δεικνύει, ὅτι *ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης δύο σημεῖα ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς διαφορᾶς τῶν τεταγμένων πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετμημένων τῶν σημείων τούτων.*

2. Ὁ τύπος (43) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ συνθήκη ἥτις ὑφίσταται ἵνα τὰ *τρία σημεῖα* (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) *εὑρηνται ἐπ' εὐθείας.*

3. Ὁ τύπος (43) δεικνύει ὅτι *αἱ διαφοραὶ τῶν τεταγμένων δύο οἱωνδήποτε σημείων εὐθείας τινὸς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς διαφορὰς τῶν ἀντιστοίχων τετμημένων.* Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι χαρακτηριστικὴ τῶν εὐθειῶν, διότι, ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ τύπου (43), θὰ ἔχωμεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y, ἤτοι εὐθεῖαν.

Τῆς τελευταίας ἰδιότητος γίνεται εὐρυτάτη χρῆσις εἰς τὴν κατὰ προσέγγισιν ἐκτίμησιν τῶν τιμῶν συναρτήσεως εἰς βραχὺ διάστημα τιμῶν, ὅταν εἶναι γνωσταὶ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἐν λόγῳ διαστήματος. Οὕτως, ἐὰν εἰς τὸ βραχὺ διάστημα (x_1, x_2) ζητῆται ἡ τιμὴ τοῦ y ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τιμήν τινα τοῦ x κειμένην εἰς τὸ θεωρηθὲν διάστημα, χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἀναλογίαν (43).

Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται *γραμμικὴ παρεμβολή* *. Ἐν τῇ πράξει διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἐπιτυγχάνεται ἡ ἀντικατάστασις τόξου καμπύλης τινὸς περιεχομένου μεταξὺ τῶν ἐγγὺς εὑρισκομένων σημείων (x_1, y_1) καὶ (x_2, y_2) ὑπὸ τῆς ἀντιστοίχου χορδῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις εὐθείας δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν : $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$. ***Τί παριστάνουν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β ;***

Ἀπόκρ. Ἡ ἐξίσωσις $Ax+By+\Gamma=0$ γράφεται : $Ax+By=-\Gamma$ ἢ $-\frac{A}{\Gamma}x-\frac{B}{\Gamma}y=1$ ἢ $\dfrac{x}{-\frac{\Gamma}{A}}+\dfrac{y}{-\frac{\Gamma}{B}}=1$. Οὕτως : $\alpha=-\frac{\Gamma}{B}$, $\beta=-\frac{\Gamma}{B}$.

Τὰ σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας μετὰ τῶν ἀξόνων X'X καὶ Ψ'Ψ εἶναι ἀντιστοίχως $M_1\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$ καὶ $M_2\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$.

---

* Πρβλ. Τ. Κεραμιδᾶ, ***Μακροπρόθεσμοι οἰκονομικαὶ πράξεις***, Ἀθῆναι 1947, σ. 25.

+ok

2. Χρησιμοποιουμένης τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, νὰ γίνῃ ἡ κατασκευὴ τῶν εὐθειῶν :

$\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$, $-x+y+5=0$, $3x-2y+1=0$, $y=5x-3$, $y=-x+10$

'Απόκρ. Διὰ τὴν πρώτην λαμβάνομεν ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ σημεῖον M(5,0), ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος τῶν y τὸ σημεῖον N(0,3). Ἑνοῦντες τὰ σημεῖα M καὶ N, λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν. Διὰ τὴν δευτέραν ἐργαζόμεθα ὡς καὶ διὰ τὴν πρώτην ἀφοῦ τὴν γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{x}{5}+\frac{y}{-5}=1$. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς λοιπάς.

3. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι $y=3x-7$, $6x-2y-14=0$, *ὡς καὶ αἱ εὐθεῖαι* $y=-2x+9$, $4x+2y-18=0$, *συμπίπτουσιν.*

'Απόκρ. Δίδομεν εἰς τὴν πρώτην τὴν μορφήν : $3x-y-7=0$ καὶ ἐφ' ὅσον, συμφώνως τῇ § 38, $\frac{3}{6}=\frac{-1}{-2}=\frac{-7}{-14}$, συμπίπτουσιν. Τοῦτ' αὐτὸ δὲ πράττομεν καὶ διὰ τὰς ἄλλας.

4. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι : $y=5x-3$, $10x-2y-3=0$, *ὡς καὶ αἱ :* $y=\frac{5}{2}x-6$, $5x-2y+2=0$ *εἶναι παράλληλοι.*

'Απόκρ. Ἔχομεν : $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ (§ 39). Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς ἄλλας δύο.

5. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου M(3, —2) καὶ παραλλήλων, ἀντιστοίχως, πρὸς τοὺς ἄξονας.

'Απόκρ. Ἡ παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x ἔχει συντελεστὴν κατευθύνσεως 0, ἡ παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν y ἔχει συντελεστὴν κατευθύνσεως ∞. Οὕτως, ἡ διὰ τοῦ M διερχομένη εὐθεῖα καὶ παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν (τύπος 42) : $y+2=0\cdot(x-3)$, ἤτοι $y=-2$. Ἡ ἑτέρα θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν: $y+2=\infty\cdot(x-3)$, ἢ $\frac{y+2}{x-3}=\infty$, ἤτοι $x-3=0$ ἢ $x=3$.

6. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου (2,3) καὶ ἐχούσης συντελεστὴν κατευθύνσεως 2.

'Απόκρ Συμφώνως τῷ τύπῳ (42), θὰ ἔχωμεν $y-3=2(x-2)$, ἢ $y-2x+1=0$.

7. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου (—2,4) καὶ σχηματιζούσης γωνίαν 45° μετὰ θετικοῦ ἡμιάξονος OX.

'Απόκρ. Ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως θὰ εἶναι $k=\text{εφ}45^\circ=1$. Συμφώνως τῷ τύπῳ (42), ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι : $y-4=1\cdot(x+2)$ ἢ $y-x-6=0$.

8. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (—2,1) καὶ εἶναι παράλληλος τῇ διχοτόμῳ τῆς γωνίας ΧΟΨ.

'Απόκρ. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΧΟΨ ἔχει συντελεστὴν κατευθύνσεως εφ$45^\circ=1$, τὸν ὁποῖον θὰ ἔχῃ καὶ ἡ ὑπ' ὄψιν εὐθεῖα. Συνεπῶς αὕτη θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν (τύπος 42) $y-1=1\cdot(x+2)$ ἤ, μετὰ τὰς πράξεις, $y-x-3=0$.

9. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων (—1,2) καὶ (3, —2).

'Απόκρ. Συμφώνως τῷ τύπῳ (43), ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι $\frac{x+1}{-1-3}=\frac{y-2}{2+2}$ ἤ, μετὰ τὰς πράξεις, $x+y-1=0$.

10. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων $(-1,2)$ καὶ $(3,-2)$.

'Απόκρ. Ὡς καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι $x+y-1=0$.

11. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου $(-1, 1)$ καὶ οὔσης παραλλήλου τῇ εὐθείᾳ τῇ διερχομένῃ διὰ τοῦ σημείου $(2,-3)$ καὶ τοῦ σημείου $(-2, 3)$.

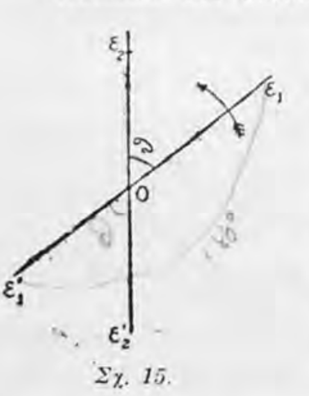
'Απόκρ. Ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς δευτέρας τῶν εὐθειῶν, ἄρα δὲ καὶ τῆς πρώτης, εἶναι $k=\frac{3+3}{-2-2}=-\frac{3}{2}$. Οὕτως, ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας θὰ εἶναι (τύπος 42) $y-1=-\frac{3}{2}(x+1)$ ἤ, μετὰ τὰς πράξεις, $3x+2y+1=0$.

12. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν καὶ τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς $A(1,2)$, $B(6,1)$, $\Gamma(3,4)$, ὡς καὶ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς $A(3,2)$, $B(3,5)$, $\Gamma\left(-1\frac{1}{2}, 2\right)$.

'Απόκρ. Ἡ διάμεσος ΑΔ θὰ διέρχεται ἐκ τοῦ Α(1,2) καὶ τοῦ μέσου Δ, ἔχοντος συντεταγμένας (τύπος 29): $x=\frac{6+3}{2}=4{,}5$, $y=\frac{1+4}{2}=2{,}5$, συνεπῶς θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν $x-7y+13=0$. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὰς λοιπὰς διαμέσους καὶ τὰς διαμέσους τοῦ ἑτέρου τριγώνου.

§ 42. Γωνία δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι $\varepsilon_1\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2\varepsilon_2'$ (*Σχ. 15*), τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Ο. Θεωροῦμεν τὴν μίαν τούτων ὡς *ἀρχικὴν* καὶ τὴν ἑτέραν ὡς *τελικὴν* πλευρὰν τῆς γωνίας ἣν σχηματίζουσιν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. Δοθέντος ὅτι ἐκ τῶν γωνιῶν ἃς σχηματίζουσιν αἱ ἐν λόγῳ εὐθεῖαι θεωροῦμεν μόνον τὰς θετικὰς καὶ μικροτέρας τῶν 180°, ὁμιλοῦντες διὰ τὴν γωνίαν $\varepsilon_1\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2\varepsilon_2'$ θὰ θεωρῶμεν ἐκείνην ἣν διαγράφει ἡ ἀρχικὴ πλευρά, στρεφομένη κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, μέχρις οὗ συμπέσει μετὰ τῆς θετικῆς πλευρᾶς.



Σχ. 15.

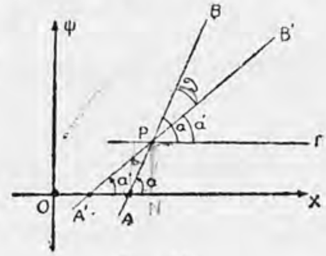
Αἱ εὐθεῖαι $\varepsilon_1\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2\varepsilon_2'$ ὁρίζουσι τέσσαρας γωνίας, ἀνὰ δύο ἴσας ἢ παραπληρωματικάς. Αὗται παρίστανται ὡς ἀκολούθως:

$$(O\varepsilon_1,\ O\varepsilon_2)=(O\varepsilon_1',\ O\varepsilon_2')=\vartheta,\quad (O\varepsilon_2,\ O\varepsilon_1')=(O\varepsilon_2'\ O\varepsilon_1)=180-\vartheta.$$

Έστωσαν ἤδη δύο εὐθεῖαι ΑΒ, Α'Β' *(Σχ. 16)*, ὧν αἱ ἐξισώσεις εἶναι ἀντιστοίχως: $y = k_1x + \lambda_1$, $y = k_2x + \lambda_2$ καὶ ὅτι ζητεῖται ἡ γωνία ϑ ἣν σχηματίζουσιν. Ἐὰν α καὶ α' εἶναι αἱ γωνίαι ἃς σχηματίζουσι μὲ τὸν θετικὸν ἡμιάξονα ΟΧ, θὰ ἔχωμεν: $k_1 = \varepsilon\varphi\alpha$, $k_2 = \varepsilon\varphi\alpha'$, $\vartheta = \alpha - \alpha'$,

$$\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha'}{1 + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\alpha'}$$

ἢ καὶ $$\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \qquad (44)$$



Σχ. 16.

Ἵνα δύο εὐθεῖαι μὴ παράλληλοι τῷ ἄξονι τῶν x ὦσι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\vartheta = 90$, ὁπότε $\varepsilon\varphi\vartheta = \infty$ ἤ, ἕνεκα τοῦ τύπου (44): $1 + k_1 k_2 = 0$,

εφ 90° = ∞

ἢ καί: $$\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}} \qquad (45)$$

Παραδείγματα *1. Εὑρεῖν τὴν γωνίαν τῶν εὐθειῶν* $y = 3x + 5$, $y = 2x - 5$.

3x − y + 5 = 0 2x − y − 5

Βάσει τοῦ τύπου (44) ἔχομεν: $\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{3-2}{1+3\cdot 2} = \frac{1}{7}$.

2. Δεῖξαι ὅτι αἱ εὐθεῖαι $y = \frac{3}{5}x + 1$ *καὶ* $y = -\frac{5}{3}x + 10$ *εἶναι κάθετοι.* Δοθέντος ὅτι οἱ συντελεσταὶ κατευθύνσεως τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι $\frac{3}{5}$ καὶ $-\frac{5}{3}$, ἰσχύει ἡ συνθήκη καθετότητος (45).

3x − 5y + 5 = 0 5x + 3y − 10 = 0

1 + k₁k₂ = 0

SOS

Ἐφαρμογή. ***Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου Μ(6,3) ἀπὸ τῆς εὐθείας.*** (1) $y = -2x + 10$.

2x + y − 10 = 0

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην ἐκ τοῦ Μ καὶ κάθετον τῇ εὐθείᾳ (1). Αὕτη εἶναι τελείως ὡρισμένη, διότι ἔχομεν ἓν σημεῖον ταύτης καὶ τὸν γωνιακὸν συντελεστήν της, ὅστις εἶναι ἀντίθετος καὶ ἀντίστροφος τοῦ γωνιακοῦ συντελεστοῦ τῆς (1), ἤτοι $+\frac{1}{2}$. Συνεπῶς ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ ἔχῃ τὴν ἐξίσωσιν: $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 6)$, ἥτις, μετὰ τὰς πράξεις, γράφεται (2) $y = \frac{x}{2}$. Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Ν, τομῆς τῶν εὐθειῶν (1) καὶ (2), αἵτινες προκύπτουσιν ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων καὶ εἶναι $x = 4$, $y = 2$.

Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων Μ(6,3), Ν(4,2). Ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι:

$$MN = \sqrt{(4-6)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$$

2x + y − 10 = 0

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ***Εὑρεῖν τὴν γωνίαν τῶν εὐθειῶν:*** $y=2x+5$, $y=\frac{1}{3}x+4$, ***ὡς καὶ τῶν εὐθειῶν:*** $\sqrt{3}x-7y+\frac{21}{2}=0$, $2\sqrt{3}x-y+1=0$.

Ἀπόκρ. $\varepsilon\varphi\vartheta=\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=1$, ἢ $\varepsilon\varphi\vartheta=\varepsilon\varphi 45^\circ$, ὁπότε $\vartheta=45^\circ$. Διὰ δὲ τὰς ἄλλας δύο εὐθείας $\vartheta=-120^\circ$.

2. ***Εὑρεῖν τὴν γωνίαν ϑ τῆς εὐθείας*** $y=-x+5$ ***μετὰ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος ΟΧ.***

Ἀπόκρ. Ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου εἶναι ἄμεσος, καθ' ὅσον ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς εὐθείας εἶναι -1. Τοῦτο εὑρίσκεται καὶ βάσει τοῦ τύπου (44), γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τοῦ ἄξονος ΟΧ εἶναι 0, $\vartheta=135^\circ$.

3. ***Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς παραλλήλου ὡς καὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου $M(6,3)$ πρὸς τὴν εὐθεῖαν*** $\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=1$. ***Ὁμοίως τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου $O(0,0)$ πρὸς τὴν εὐθεῖαν:*** $x+\frac{7}{12}y-\frac{7}{2}=0$.

Ἀπόκρ. Ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς δοθείσης εἶναι -2, ἄρα ἡ μὲν παράλληλος τῇ δοθείσῃ ἔχει ἐξίσωσιν: $y-3=-2(x-6)$, ἐξ ἧς: $2x+y-15=0$, ἡ δὲ κάθετος: $y-3=\frac{1}{2}(x-6)$, ἐξ ἧς $y=\frac{x}{2}$. Διὰ τὴν ἑτέραν τῶν εὐθειῶν, ἐργαζόμενοι ὁμοίως, εὑρίσκομεν, ἀντιστοίχως: $y=-\frac{12}{7}x$, $y=\frac{7}{12}x$.

4. ***Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν εὐθείας διερχομένης ἐκ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν:*** $5x-y-7=0$, $7x-y-11=0$ ***καὶ οὔσης παραλλήλου τῷ ἄξονι Χ΄Χ ἢ οὔσης καθέτου τῇ πρώτῃ τῶν εὐθειῶν.***

Ἀπόκρ. Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων δίδει διὰ τὸ κοινὸν σημεῖον $x=2$, $y=3$. Ἡ πρώτη τῶν ζητουμένων εὐθειῶν θὰ ἔχῃ γωνιακὸν συντελεστὴν 0 καὶ θὰ διέρχηται ἐκ τοῦ σημείου (2,3). Θὰ ἔχῃ, ἄρα, ἐξίσωσιν: $y=3$. Ἡ δευτέρα τῶν ζητουμένων εὐθειῶν θὰ ἔχῃ τὴν ἐξίσωσιν:
$(y-3)=-\frac{1}{5}(x-2)$, ἢ $x+5y-17=0$.

5. ***Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν τῶν εὐθειῶν:*** $2x-3y+7=0$, $3x+2y-22=0$.

Ἀπόκρ. Αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι τέμνονται καθέτως εἰς τὸ M(4,5). Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας θὰ διέρχηται διὰ τοῦ M(4,5) καὶ θὰ ἔχῃ γωνιακὸν συντελεστὴν 5 (τύπος 44), ἄρα ἡ ἐξίσωσίς της εἶναι: $y=5x-15$.

$\frac{y}{x}$

6. Ἐὰν $A(1,1)$, $B(1,3)$, $\Gamma(-3,1)$ αἱ κορυφαὶ τριγώνου, δεῖξαι ὅτι ἡ γωνία $(AB,A\Gamma)=90^\circ$ καὶ εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης.

Ἀπόκρ. Αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι κάθετοι ὡς παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς ἄξονας. Ἄγομεν τὴν κάθετον τῇ ΒΓ, ΑΔ, ἥτις θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν $(y-1)=-2(x-1)$ καὶ θὰ τέμνηται μετὰ τῆς ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ(0,2, 2,6). Ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΑΔ θὰ εἶναι περίπου 1,78.

505 *7. Εὑρεῖν τὰς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν (μεσοκαθέτων) τοῦ τριγώνου τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.*

Ἀπόκρ. Τὸ μέσον τῆς ΒΓ ἔχει συντεταγμένας $x=\frac{1-3}{2}=-1$, $y=\frac{3+1}{2}=2$. Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ θὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου $(-1,2)$ καὶ θὰ ἔχῃ γωνιακὸν συντελεστὴν -2. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὰς ὑπολοίπους μεσοκαθέτους.

8. Δεῖξαι ὅτι ἡ ἀπόστασις δ τοῦ τυχόντος σημείου $M(x_1,y_1)$ ἀπὸ τῆς εὐθείας $Ax+By+\Gamma=0$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\delta=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Ἀπόκρ. Θὰ ἐργασθῶμεν ὡς καὶ κατὰ τὸν ἐν § 42 (ἐφαρμογή) τρόπον.

9. Εὑρεῖν τὰς ἐξισώσεις καὶ τὰ μήκη τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ σημεῖα: $A(-1,1)$, $B(2,4)$, $\Gamma(-2,3)$. Δεῖξαι, ἐν συνεχείᾳ, ὅτι αἱ τρεῖς διάμεσοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόκρ. Θὰ προσδιορισθῶσι τὰ μέσα ἑκάστης πλευρᾶς καὶ θὰ λάβωμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων διὰ δύο σημείων (μία κορυφὴ καὶ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς). Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν μηκῶν θὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ τύπος (26). Λαμβάνομεν ἐν συνεχείᾳ τὸ σημεῖον τομῆς δύο διαμέσων καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς τρίτης διαμέσου.

10. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἔχοντος κορυφὰς τὰ σημεῖα ~~A(−1,4), B(−4,−1), Γ(6,−4)~~. A(1,3) B(4,1) Γ(6,5)

Ἀπόκρ. Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ τοῦ ὕψους ΑΔ. Τὸ μῆκος τῆς ΒΓ εἶναι $\sqrt{109}$ καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ΒΓ: $3x+10y+22=0$. Ἡ εὐθεῖα ΑΔ ἔχει ἐξίσωσιν $10x-3y+22=0$ καὶ τέμνεται μετὰ τῆς ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον $\Delta\left(-\frac{286}{109}, -\frac{154}{109}\right)$.

Τὸ μῆκος τῆς ΑΔ εἶναι $\frac{59}{\sqrt{109}}$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου 29,5.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΓΡΑΜΜΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 43. *Γενικά.*

Ἐὰν διαπιστωθῇ ὅτι ἡ πορεία φαινομένου τινὸς προσομοιάζει ἀρκούντως πρὸς γραμμὴν ἧς εἶναι γνωστὴ ἡ μαθηματικὴ ἐξίσωσις, εὐκολυνόμεθα πολὺ κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ φαινομένου ἐὰν μεταπέσωμεν ἐκ τῆς σπουδῆς τούτου εἰς τὴν μαθηματικὴν σπουδὴν τῆς γραμμῆς. Χρησιμοποιοῦμεν οὕτω τὰ μαθηματικά, ὄργανον ἰσχυρὸν πρὸς ἐξαγωγὴν νόμων, πορισμάτων, κανόνων, ἅτινα ἐξ ἴσου θὰ ἰσχύωσι διὰ τὴν μαθηματικὴν ἐξίσωσιν καὶ διὰ τὸ ὑπὸ σπουδὴν φαινόμενον.

Εἶναι γεγονὸς ὅτι οὐδὲν φαινόμενον φυσικόν, οἰκονομικὸν κ.λ.π. ἔχει πορείαν ταυτιζομένην ἀπολύτως πρὸς μαθηματικὴν γραμμήν, ἀλλὰ προσεγγίζουσαν. Πλειστάκις, ὅμως, ἡ προσέγγισις εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἐν τῇ πράξει, ἐνῷ αἱ διαφοραὶ εἶναι ἀμελητέαι, ἡ εὐκολία τῆς σπουδῆς τῶν φαινομένων διὰ μαθηματικῶν γραμμῶν ἔχει ἐξαιρετικὰ πλεονεκτήματα.

Ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐξητάσαμεν τὰς εὐθείας, ἤτοι τὰς γραμμὰς ὧν αἱ ἐξισώσεις εἶναι πρώτου βαθμοῦ, καίτοι τὰ φαινόμενα μόνον εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις καὶ ἐν στενοῖς ὁρίοις ἔχουσι τροχιὰς εὐθείας γραμμῆς. Ἀλλ' ἡ σπουδή των ἦτο ἀπαραίτητος καὶ διὰ τὴν εἰσαγωγὴν πρὸς σπουδὴν γραμμῶν ἀνωτέρας τάξεως, ἤτοι γραμμῶν ὧν αἱ ἐξισώσεις εἶναι ἀνωτέρου βαθμοῦ, καὶ διὰ τὴν ἄσκησιν εἰς τὸν μαθηματικὸν χειρισμὸν πολυπλοκωτέρων ζητημάτων.

Ἤδη θὰ σπουδάσωμεν τὰς *γραμμὰς δευτέρου βαθμοῦ* ἢ *δευτέρας τάξεως*, αἵτινες εἶναι καμπύλαι. Καλοῦνται δὲ οὕτω διότι παρίστανται ἀναλυτικῶς ὑπὸ ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y. Αἱ καμπύλαι αὗται καλοῦνται καὶ *κωνικαὶ τομαί*, ὡς προκύπτουσαι ἐκ τῆς τομῆς ὀρθοῦ κώνου ὑπό τινος ἐπιπέδου, τέμνοντος κατὰ διάφορον κλίσιν κατὰ περίπτωσιν, καὶ εἶναι αὗται ὁ *κύκλος*, ἡ *ὑπερβολή*, ἡ *παραβολὴ* καὶ ἡ *ἔλλειψις*.

§ 44. *Περὶ κύκλου.*

Κύκλος εἶναι ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἡ ὁριζομένη παρὰ τῆς καμπύλης, ἥτις εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἴσον *ἀπεχόντων ἀπὸ ὡρισμένου σημείου, τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καλουμένου κέντρου.*

Ἡ καμπύλη ἡ ὡς ἄνω ἀφορίζουσα τὸν κύκλον καλεῖται *περιφέρεια*.

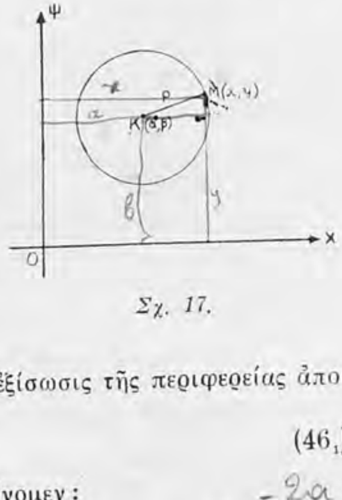
Ἡ σταθερὰ ἀπόστασις τῶν σημείων τῆς περιφερείας ἀπὸ τοῦ κέντρου καλεῖται *ἀκτίς*.

Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι ἡ μετὰ τὴν εὐθεῖαν ἁπλουστέρα τῶν ἐπιπέδων γραμμῶν.

Σημείωσις. Ἐνίοτε χρησιμοποιοῦνται ἀδιακρίτως αἱ λέξεις περιφέρεια καὶ κύκλος πρὸς ἔκφρασιν τῆς περιφερείας.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας προκύπτει εὐκόλως βάσει τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῆς περιφερείας, καθ' ἣν πάντα τὰ σημεῖα της ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ κέντρου.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως τῆς περιφερείας λάβωμεν εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων *(Σχ. 17)* τὸ κέντρον Κ, μὲ συντεταγμένας α, β, τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας μὲ συντεταγμένας x, y καὶ τὴν ἀκτῖνα ἴσην πρὸς ρ.



Σχ. 17.

Τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τῶν Μ καὶ Κ, (§ 20), ἔσται:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2 \qquad (46)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπαληθεύεται παρὰ τῶν συντεταγμένων πάντων τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀπεχόντων ρ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ, καὶ μόνον ὑπὸ τούτων, εἶναι *ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας*.

Ὅταν τὸ κέντρον συμπίπτῃ μετὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, δηλ. ὅταν α = 0, β = 0, ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας ἀποβαίνει:

$$x^2+y^2=\varrho^2 \qquad (46_1)$$

Ἀναπτύσσοντες τὴν ἐξίσωσιν (46) λαμβάνομεν:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-\varrho^2=0$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι πρόκειται περὶ *ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς συντεταγμένας x,y, ἰδίας ὅμως μορφῆς, καθόσον ἐλλείπει ὁ ὅρος ὁ ἔχων xy καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν x^2, y^2 εἶναι ἴσοι.*

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x,y, στερουμένη τοῦ ὅρου τοῦ ἔχοντος xy καὶ ἔχουσα ἴσους τοὺς συντελεστὰς τῶν x^2, y^2, διαιρεθῇ διὰ τοῦ κοινοῦ συντελεστοῦ τῶν x^2, y^2, θὰ λάβῃ τὴν μορφήν:

$$x^2+y^2+kx+\lambda y+\nu=0 \qquad (47)$$

ἥτις παριστᾷ περιφέρειαν. Διότι, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι

$-2\alpha = k$
$-2\beta = \lambda$
$\alpha^2+\beta^2-\varrho^2 = \nu$
(1) $\varrho^2 = \alpha^2+\beta^2$
$\varrho^2 = \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4}$

$$x^2+kx=\left(x+\frac{1}{2}k\right)^2-\frac{1}{4}k^2$$

$$y^2+\lambda y=\left(y+\frac{1}{2}\lambda\right)^2-\frac{1}{4}\lambda^2$$

ἡ ἐξίσωσις (47) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\left(x+\frac{1}{2}k\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\lambda\right)^2=\frac{1}{4}(k^2+\lambda^2)-\nu.$$

Ἡ μορφὴ δὲ αὕτη συμπίπτει πρὸς τὴν (46), ἐὰν ληφθῇ:

$$-\frac{1}{2}k=\alpha,\quad -\frac{1}{2}\lambda=\beta,\quad \frac{1}{4}(k^2+\lambda^2)-\nu=\varrho^2. \tag{48}$$

Οὕτως, ἡ ἐξίσωσις (47) παριστᾷ περιφέρειαν κύκλου ἔχουσαν κέντρον τὸ σημεῖον $\left(-\frac{1}{2}k,\ -\frac{1}{2}\lambda\right)$ καὶ ἀκτῖνα: $\sqrt{\frac{1}{4}(k^2+\lambda^2)-\nu}$.

Ἐνταῦθα, ἐὰν ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι θετικὴ ἡ περιφέρεια εἶναι πραγματική· ἐὰν εἶναι ἀρνητική, ἡ περιφέρεια εἶναι φανταστική—δὲν ὑπάρχει—καὶ ἐὰν τέλος ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι μηδέν, ἡ περιφέρεια καταντᾷ ἓν σημεῖον—τὸ κέντρον της.

Παράδειγμα: ***Νὰ ὁρισθῇ ἡ γραμμὴ ἡ παριστωμένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως*** $x^2+y^2-4x-2y-4=0$.

Ἐπειδὴ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, στερεῖται ὅρου xy καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν x^2, y^2 εἶναι ἴσοι, παριστᾷ περιφέρειαν κύκλου. Διὰ νὰ ὁρισθῇ ἡ τελευταία, πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὸ κέντρον της, διὰ τῶν συντεταγμένων του, καὶ τὴν ἀκτῖνα της. Συμφώνως πρὸς τὰς σχέσεις (48) ἔχομεν:

$$\alpha=-\frac{1}{2}(-4)=2,\quad \beta=-\frac{1}{2}(-2)=1$$

$$\varrho^2=\frac{1}{4}\left[(-4)^2+(-2)^2\right]-(-4)=\frac{1}{4}\cdot 20+4=9\quad \text{καὶ}\quad \varrho=3.$$

Οὕτως ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον (2,1) καὶ ἀκτῖνα $\varrho=3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν περιφερείας ἐχούσης κέντρον τὸ σημεῖον $A(2,3)$ ***καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 4, ὡς καὶ περιφερείας ἐχούσης κέντρον τὸ σημεῖον*** $B(-3,6)$ ***καὶ ἀκτῖνα 5.***

Ἀπόκρ. $(x-2)^2+(y-3)^2=16$, ἐξ ἧς, μετὰ τὰς πράξεις, προκύπτει: $x^2+y^2-4x-6y-3=0$. Διὰ τὴν δευτέραν περιφέρειαν εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^2+y^2+6x-12y+20=0$.

2. Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ σημεῖον $M(4,\ -3)$ ***καὶ διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.***

Ἀπόκρ. Ἡ εὕρεσις τῆς ἐξισώσεως περιφερείας τινὸς προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας. Ἐνταῦθα τὸ κέντρον εἶναι γνωστόν·

ἡ ἀκτὶς θὰ εὑρεθῇ ὡς ἀπόστασις τῶν σημείων $M(4,-3)$ καὶ $O(0,0)$. Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι : $(x-4)^2+(y+3)^2=5^2$, ἥτις, μετὰ τὰς πράξεις, λαμβάνει τὴν μορφήν : $x^2+y^2-8x+6y=0$.

3. Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν περιφερείας ἧς τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, ὡς καὶ τῆς περιφερείας τῆς ἐχούσης κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

Ἀπόκρ. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἔχομεν $\alpha=0$, ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει $\beta=0$. Ἐκ τοῦ τύπου (46) εὑρίσκομεν διὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν : $x^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$, διὰ δὲ τὴν δευτέραν $(x-\alpha)^2+y^2=\varrho^2$.

4. Εὑρεῖν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῶν περιφερειῶν τῶν παριστωμένων ὑπὸ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων :

α) $x^2+y^2-6x+8y-11=0$ β) $x^2+y^2+x-0{,}4y-3{,}71=0$

γ) $x^2+y^2-4y+3=0$ δ) $x^2+y^2-2x-15=0$

Ἀπόκρ. α) $\alpha=-\frac{1}{2}(-6)=3$, $\beta=-\frac{1}{2}\cdot 8=-4$, $\varrho^2=\frac{1}{4}(36+64)+11$ ἢ $\varrho=6$.

β) $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{5}$, $\varrho=2$, γ) $\alpha=0$, $\beta=2$, $\varrho=1$, δ) $\alpha=1$, $\beta=0$, $\varrho=4$.

5. Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον κορυφάς : $A(1,0)$, $B(2,3)$, $\Gamma(-1,0)$.

Ἀπόκρ. Αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν A,B,Γ θὰ ἐπαληθεύωσι τὴν ἐξίσωσιν (47). Ἄρα :

$$\left.\begin{array}{l} 1+k+\nu=0 \\ 13+2k+3\lambda+\nu=0 \\ 1-k+\nu=0 \end{array}\right\}$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τούτου δίδει $k=0$, $\lambda=-4$, $\nu=-1$ καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας εἶναι : $x^2+y^2-4y-1=0$.

6. Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας τῆς ἐχούσης κέντρον $A(-1,-4)$ *καὶ διερχομένης διὰ τοῦ σημείου* $M(7,2)$. *Τῆς περιφερείας ταύτης εὑρεῖν τὰ σημεῖα τομῆς μετὰ τῶν ἀξόνων ὡς καὶ μετὰ τῆς εὐθείας τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῶν σημείων* $P_1(-1,6)$, $P_2(-9,2)$.

Ἀπόκρ. Ἔχομεν $\varrho=\sqrt{(7+1)^2+(2+4)^2}=10$ καὶ ἐξίσωσιν περιφερείας : $x^2+y^2+2x+8y-83=0$. Ἡ διὰ τῶν P_1, P_2 διερχομένη εὐθεῖα ἔχει τὴν ἐξίσωσιν : $x-2y+13=0$. Τὰ σημεῖα ὅθεν τομῆς τῆς περιφερείας μετὰ τῶν ἀξόνων ἀφ' ἑνὸς καὶ τῆς εὐθείας P_1P_2 ἀφ' ἑτέρου δίδονται ὑπὸ τῶν λύσεων τῶν συστημάτων :

$$\left.\begin{array}{l} (x+1)^2+(y+4)^2=100 \\ y=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} (x+1)^2+(y+4)^2=100 \\ x=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x+1)^2+(y+4)^2=100 \\ x-2y+13=0 \end{array}\right\}$$

7. Εὑρεῖν τὰ σημεῖα τομῆς τῆς περιφερείας : $x^2+y^2=65$ *μετὰ τῆς εὐθείας* $3x+y=25$.

Ἀπόκρ. Τὰ ζητούμενα σημεῖα θὰ δοθῶσιν ὡς λύσεις τοῦ συστήματος τῶν δύο ἐξισώσεων : $x^2+y^2=65$ καὶ $3x+y=25$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα (8,1) καὶ (7,4).

8. Εὑρεῖν τὰ σημεῖα τομῆς τῆς περιφερείας τῆς ἐχούσης κέντρον A(−1,3) *καὶ ἀκτῖνα* 6, *μετὰ τῆς εὐθείας* $x-2y+1=0$.

Ἀπόκρ. Θὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων: $x^2+y^2+2x-6y-26=0$, $x-2y+1=0$. Τὰ κοινὰ σημεῖα εἶναι (5,3) καὶ (−4,6, −1,8).

9. Εὑρεῖν τὰ σημεῖα τομῆς τῶν περιφερειῶν:

$$x^2+y^2+2x-4y=0, \quad x^2+y^2+3x-3y-2=0.$$

Ἀπόκρ. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν δύο δοθεισῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν (−2,4), (1,1).

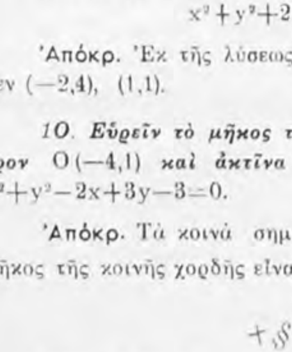
10. Εὑρεῖν τὸ μῆκος τῆς κοινῆς χορδῆς τῆς περιφερείας τῆς ἐχούσης κέντρον O(−4,1) *καὶ ἀκτῖνα* 5 *μετὰ τῆς περιφερείας τῆς ἐχούσης ἐξίσωσιν*: $x^2+y^2-2x+3y-3=0$.

Ἀπόκρ. Τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο περιφερειῶν εἶναι M(1,1), N(−1,−3). Τὸ μῆκος τῆς κοινῆς χορδῆς εἶναι $2\sqrt{5}$.

† § 45. Περὶ παραβολῆς.

Παραβολὴ λέγεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἀπὸ σταθεροῦ σημείου καὶ ἀπὸ σταθερᾶς εὐθείας.

Τὸ σταθερὸν σημεῖον E (*Σχ. 18*) λέγεται *ἑστία* καὶ ἡ σταθερὰ εὐθεῖα, ΔΔ′, *διευθετοῦσα τῆς παραβολῆς*. Ἡ ἐκ τοῦ E ἀγομένη κάθετος τῇ ΔΔ′ λέγεται *ἄξων τῆς παραβολῆς* καὶ τὸ μέσον τοῦ τμήματος EH, ἐξ οὗ, συμφώνως τῷ ὁρισμῷ, διέρχεται ἡ παραβολή, λέγεται *κορυφὴ* ταύτης.



Σχ. 18.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς εἶναι:

$$\boxed{y^2=2\mu x} \tag{49}$$

ἔνθα μ παριστᾷ τὸ μέτρον τοῦ τμήματος EH.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν, λαμβάνομεν ὡς ἄξονα X′X τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς καὶ ὡς ἄξονα Ψ′Ψ τὴν κάθετον ἐπ' αὐτοῦ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς παραβολῆς.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔχομεν: (1) NM=EM.

Ἀλλ' ἔχομεν: $NM=HP=HA+AP=\frac{\mu}{2}+x$ καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου EMP, $EM^2=PM^2+EP^2=y^2+(AP-AE)^2=y^2+\left(x-\frac{\mu}{2}\right)^2$.

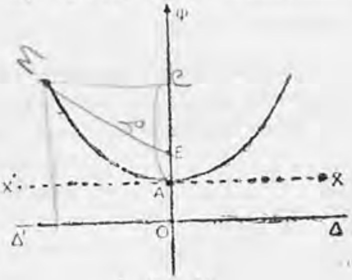
Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (1) τὰ NM καὶ EM ὑπὸ τῶν ἴσων των, εὑρίσκομεν:

$$\frac{\mu}{2}+x=\sqrt{y^2+\left(x-\frac{\mu}{2}\right)^2}.$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν (49).

Ἐὰν ἡ διευθετοῦσα ληφθῇ ὁριζόντιος καὶ ὁ ἄξων τῆς παραβολῆς κατακόρυφος (*Σχ. 19*), ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς παραβολῆς ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$x^2 = 2\mu y \qquad (50)$$



Σχ. 19.

Δεχόμενοι τὴν θέσιν τῆς παραβολῆς τοιαύτην ὥστε ὁ ἄξων τῶν y νὰ εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῆς καμπύλης καὶ ἡ κορυφή της νὰ ἔχῃ συντεταγμένας ξ, η, διὰ τὸ τυχὸν σημεῖον ταύτης M(x,y) θὰ ἰσχύῃ ἐξ ὁρισμοῦ ἡ ἰσότης:

$$\sqrt{(x-\xi)^2+\left(y-\eta-\frac{\mu}{2}\right)^2}=y-\left(\eta-\frac{\mu}{2}\right)$$

Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(x-\xi)^2=2\mu(y-\eta).$$

Ἐκ ταύτης ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις καὶ λύοντες τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς y λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν: $y=\frac{1}{2\mu}x^2-\frac{\xi}{\mu}x+\frac{\xi^2+2\mu\eta}{2\mu}$ ἤ, θέτοντες $\frac{1}{2\mu}=\alpha$, $-\frac{\xi}{\mu}=\beta$ καὶ $\frac{\xi^2+2\mu\eta}{2\mu}=\gamma$, τὴν ἰσοδύναμόν της:

$$\boxed{y=\alpha x^2+\beta x+\gamma} \qquad (51)$$

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς παραβολῆς. 1. Ἡ παραβολὴ εὑρίσκεται ὁλόκληρος πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διευθετούσης. Ἐὰν δοθῇ ὡς ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ἡ (49) ἢ ἡ (50), τότε ἡ παραβολὴ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, διότι αἱ συντεταγμέναι (0,0) τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσίν της.

2. Συμφώνως τῷ τύπῳ 49 (50), ἡ παραβολὴ *εἶναι συμμετρικὴ τῷ ἄξονι* X'X (Ψ'Ψ διὰ τὸν τύπον (50)). Ἐπειδὴ εἰς ἑκάστην θετικὴν τιμὴν τῆς x(y) ἀντιστοιχοῦν δύο τιμαὶ ἀντίθετοι τῆς y(x).

3. *Αὐξανομένης* τῆς x(y διὰ τὸν τύπον (50)) *αὐξάνεται καὶ ἡ y* (x).

4. *Ὁ τύπος (51) εἶναι γενικώτερος τοῦ τύπου (50) καί, ἂν τεθῇ* $\beta=\gamma=0$, *καὶ* $\alpha=\frac{1}{2\mu}$, *εὑρίσκομεν τὸν τύπον (50).*

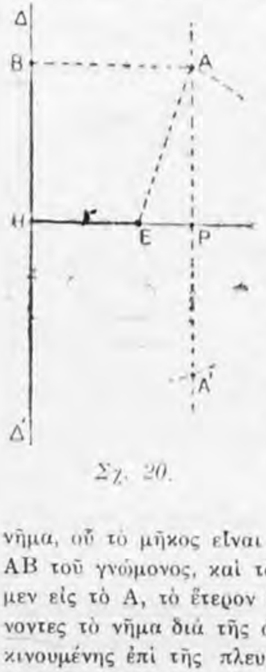
Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ *παριστᾷ παραβολὴν μὲ ἄξονα παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y καὶ κορυφὴν σημεῖον ἔχον συντεταγμένας* $-\frac{\beta}{2\alpha}$, $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ *καὶ ἀντιστρόφως.*

Αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \quad y = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon \quad \text{κτλ.}$$

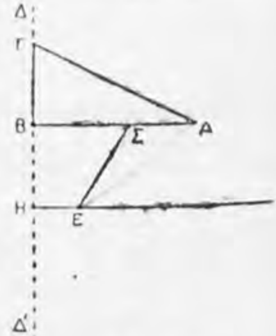
παριστῶσι παραβολὰς *τρίτης, τετάρτης κτλ. τάξεως.*

Κατασκευὴ τῆς παραβολῆς. Δοθείσης τῆς ἑστίας καὶ τῆς διευθετούσης τῆς παραβολῆς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ταύτην, εἴτε διὰ τῆς εὑρέσεως σημείων της, ἅτινα ἑνούμενα θὰ δώσωσι τὴν καμπύλην, εἴτε διὰ συνεχοῦς κινήσεως.



Σχ. 20.

Τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῆς ἑστίας ἀπὸ τὴν διευθετοῦσαν εἶναι ἡ *κορυφὴ* τῆς παραβολῆς. Ἄλλα σημεῖα τῆς παραβολῆς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς ἑξῆς: Ἐξ ἑνὸς τυχόντος σημείου Ρ τῆς ΕΗ (*Σχ. 20*) φέρομεν κάθετον ἐπὶ ταύτην· ἐν συνεχείᾳ, μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα ΗΡ, γράφομεν περιφέρειαν ἥτις τέμνει τὴν ἀχθεῖσαν κάθετον εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α', ἅτινα θὰ εἶναι σημεῖα τῆς παραβολῆς. Τοῦτο δὲ διότι ἔχομεν: ΑΕ=ΗΡ=ΑΒ. Μετακινοῦντες τὸ Ρ, λαμβάνομεν ἄλλα σημεῖα τῆς καμπύλης.



Σχ. 21.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς καμπύλης διὰ συνεχοῦς κινήσεως ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν γνώμονα (*Σχ. 21*), ὃν τοποθετοῦμεν εἰς τρόπον ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ του ΒΓ νὰ μετακινῆται ἐλευθέρως ἐπὶ τῆς διευθετούσης ΔΔ'· ἐν συνεχείᾳ, λαμβάνομεν νῆμα, οὗ τὸ μῆκος εἶναι ἴσον τῇ ἑτέρᾳ καθέτῳ πλευρᾷ ΑΒ τοῦ γνώμονος, καὶ τὸ ἓν μὲν ἄκρον του προσδένομεν εἰς τὸ Α, τὸ ἕτερον δὲ εἰς τὴν ἑστίαν Ε· εἶτα τείνοντες τὸ νῆμα διὰ τῆς ἀκίδος ἥλου ἢ μολυβδοκονδύλου κινουμένης ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ μετακινοῦμεν τὸν γνώμονα κατὰ μῆκος τῆς διευθετούσης· οὕτως, ἡ ἀκὶς γράφει κατὰ τὴν κίνησίν της ταύτην τόξον τῆς παραβολῆς. Τῷ ὄντι, ἐὰν Σ εἶναι τυχοῦσα θέσις τῆς ἀκίδος κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως, θὰ εἶναι: ΑΣ+ΣΒ=ΑΣ+ΣΕ= μῆκος τοῦ νήματος, καὶ συνεπῶς ΣΒ=ΣΕ· ὅθεν τὸ Σ ἀνήκει εἰς τὴν παραβολήν, ἥτις ἔχει ἑστίαν τὸ Ε καὶ διευθετοῦσαν τὴν ΔΔ'.

§ 46. Περὶ ὑπερβολῆς.

Ὑπερβολὴ λέγεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ὧν αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο σταθερῶν σημείων ἔχουσι διαφορὰν δοθεῖσαν καὶ σταθεράν.

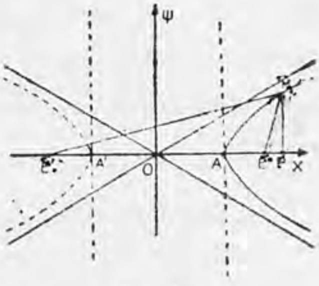
Τὰ δύο σταθερὰ σημεῖα, παριστώμενα δι' Ε καὶ Ε' (*Σχ. 22*), λέγονται *ἑστίαι* τῆς ὑπερβολῆς.

Ἡ ἀπόστασις ΕΕ' λέγεται *ἑστιακὴ ἀπόστασις* καὶ παρίσταται διὰ 2γ. Ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων τῆς ὑπερβολῆς ἀπὸ τῶν ἑστιῶν παρίσταται διὰ 2α.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς εἶναι :

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (52)$$

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὑπερβολῆς, λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν x τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τῶν ἑστιῶν, καὶ ὡς ἄξονα τῶν y τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΕΕ΄.



Σχ. 22.

Διὰ τὸ τυχὸν σημεῖον $M(x,y)$ τοῦ θεωρηθέντος τύπου ἔχομεν : $\boxed{ME'-ME=2\alpha}$ $ME'^2=PE'^2+PM^2$, $ME^2=PE^2+PM^2$ ἢ $ME'^2=(x+\gamma)^2+y^2$, $ME^2=(x-\gamma)^2+y^2$, ἐξ ὧν $ME'=\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}$, $ME=\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}$. Ἀλλ' ἐπειδή, $ME'-ME=2\alpha$, ἕπεται $\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}-\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=2\alpha$, μεταφέροντες τὸ δεύτερον ριζικὸν εἰς τὸ δεύτερον μέλος, ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἁπλοποιοῦντες, λαμβάνομεν :

$$\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=\gamma x-\alpha^2$$

ὑψοῦντες διὰ δευτέραν φορὰν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\alpha^2\gamma^2=\gamma^2x^2+\alpha^4,$$

ἥτις γράφεται :

$$(\gamma^2-\alpha^2)x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2(\gamma^2-\alpha^2)$$

θέτοντες δὲ $\gamma^2-\alpha^2=\beta^2$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$$

ἐξ ἧς, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη δι' $\alpha^2\beta^2$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν (52).

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς. 1. Ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τῆς ὑπερβολῆς (τύπος 52), τὸ συμμετρικὸν τούτου καὶ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἤτοι *ἡ ὑπερβολὴ εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς ἄξονας.*

2. Τὸ συμμετρικὸν παντὸς σημείου τῆς ὑπερβολῆς (τύπος 52) ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἤτοι *ἡ ὑπερβολὴ εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων Ο.* Τὸ Ο καλεῖται *κέντρον* τῆς ὑπερβολῆς.

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις (52) λυθῇ ὡς πρὸς y, λαμβάνομεν :

$$(1) \qquad y=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}\ .$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ νὰ ἔχωμεν σημεῖα πραγματικὰ τῆς καμπύλης, θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι $|x|\geqslant\alpha$· οὕτως, ἡ καμπύλη ἀναπτύσσεται ἐκτὸς τῆς ταινίας τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $x=\pm\alpha$. Ὁ μὲν ἄξων τῶν x τέμνει τὴν καμπύλην εἰς δύο σημεῖα $A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *κορυφαὶ* τῆς ὑπερβολῆς, ὁ δὲ ἄξων τῶν y δὲν τέμνει τὴν καμπύλην. Τούτου ἕνεκα ὁ μὲν ἄξων τῶν x καλεῖται *τέμνων ἄξων*, ὁ δὲ ἕτερος *μὴ τέμνων ἄξων* τῆς ὑπερβολῆς.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν εὐκόλως:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{x^2}}.$$

Ἐκ τῆς τοιαύτης μορφῆς τῆς ἐξισώσεως παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὑπόρριζος ποσότης οὖσα μικροτέρα τῆς μονάδος αἱ τιμαὶ τοῦ y θὰ εἶναι διὰ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης μικρότεραι τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν τεταγμένων τῶν σημείων τῆς εὐθείας $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, ἤτοι ἡ καμπύλη εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον εὑρίσκεται ὁλόκληρος κάτωθεν τῆς εὐθείας $y = \frac{\beta}{\alpha} x$· ἐφ' ὅσον δὲ τὸ x αὐξάνει, ἐπὶ τοσοῦτον ἡ ὑπόρριζος ποσότης πλησιάζει πρὸς τὴν μονάδα καὶ ἡ καμπύλη πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

Ἡ ὑπερβολὴ συνίσταται ἐκ δύο κλάδων καὶ ὁλόκληρος ἀναπτύσσεται ἐντὸς μιᾶς τῶν δύο γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται *ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς*.

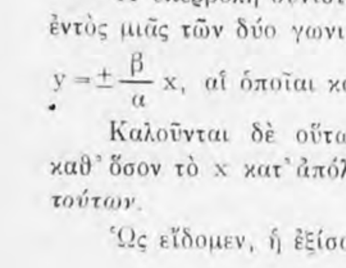
Καλοῦνται δὲ οὕτω, διότι ἡ ὑπερβολὴ *πλησιάζει συνεχῶς* ταύτας, καθ' ὅσον τὸ x κατ' ἀπόλυτον τιμὴν αὐξάνει, *ἀλλ' οὐδέποτε συμπίπτει μετὰ τούτων*.

Ὡς εἴδομεν, ἡ ἐξίσωσις (52) προέκυψεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως:

$$\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$$

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\mu x^2 - \nu y^2 = \xi$, ἔνθα μ, ν, ξ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί, παριστᾷ γραφικῶς ὑπερβολήν.

Κατασκευὴ τῆς ὑπερβολῆς. Δοθείσης τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος ἄξονος, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ὑπερβολὴν εἴτε διὰ τῆς εὑρέσεως σημείων ταύτης, ἅτινα ἑνούμενα θὰ δώσωσι τὴν καμπύλην, εἴτε διὰ συνεχοῦς κινήσεως.

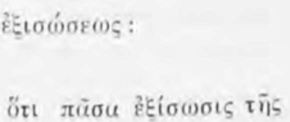


Σχ. 23.

Ἔστω Σ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἄξονος καὶ ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΕΕ'. Μὲ κέντρα τὰ Ε καὶ Ε' καὶ ἀκτῖνας, ἀντιστοίχως, ΣΑ, ΣΑ' *(Σχ. 23)* γράφομεν τέσσαρας περιφερείας, αἵτινες τέμνονται εἰς τὰ τέσσαρα σημεῖα Μ, Μ', Ν, Ν', ἀνήκοντα εἰς τὴν ὑπερβολήν. Τῷ ὄντι διὰ τὸ σημεῖον Μ, ἔχομεν:

$$ME' - ME = A'\Sigma - A\Sigma = A'A = 2\alpha$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τ' ἄλλα τρία σημεῖα Μ', Ν, Ν'. Λαμβάνοντες τὸ Σ εἰς διαφόρους θέσεις εὑρίσκομεν διάφορα σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς.



Σχ. 24.

Ἵνα χαράξωμεν τὴν καμπύλην διὰ συνεχοῦς κινήσεως, λαμβάνομεν κανόνα οὗτινος τὸ ἓν ἄκρον προσαρμόζομεν εἰς τὴν ἑστίαν Ε' εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύναται νὰ στρέφεται περὶ ταύτην *(Σχ. 24)*. Ἐπὶ τοῦ κανόνος σημειοῦμεν τμῆμα Ε'Τ=2α καὶ ἀκολούθως νήματος μήκους ΚΤ προσδένομεν τὸ μὲν ἓν ἄκρον του εἰς τὴν ἑστίαν Ε, τὸ δὲ ἕτερον εἰς τὸ ἄκρον Κ τοῦ κανόνος.

Διὰ τῆς ἀκίδος ἥλου ἢ μολυβδοκονδύλου τείνομεν τὸ νῆμα τηροῦντες τὴν ἀκίδα κατὰ μῆκος τοῦ στρεφομένου κανόνος. Ἡ ἀκὶς γράφει τόξον ὑπερβολῆς. Τῷ ὄντι· διὰ τὴν τυχοῦσαν θέσιν Μ τῆς ἀκίδος ἔχομεν :

$$ME'-ME=(ME'+MK)-(ME+MK)=E'K-TK=E'T=2\alpha$$

§ 47. *Περὶ ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς* Attention

Ἐὰν ἔν τινι ὑπερβολῇ $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις (52) λαμβάνει τὴν μορφήν : $x^2-y^2=\alpha^2$ καὶ τότε ἡ ὑπερβολὴ καλεῖται *ἰσοσκελής*. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς θὰ ἔχωσιν ἐξισώσεις $y=\pm x$, αἵτινες, ὡς γνωστόν, παριστῶσι τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων.

Ἐπειδὴ ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς ἡ ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ ἀναφέρεται ὡς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς, θὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτῆς ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους της. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἐκτελέσωμεν στροφὴν τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων XOΨ περὶ τὸ Ο κατὰ γωνίαν $\varphi=-45^\circ$, ὅτε ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους (32) λαμβάνομεν :

$$x=x'\sigma\upsilon\nu(-45^\circ)-y'\eta\mu(-45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$$

$$y=x'\eta\mu(-45^\circ)+y'\sigma\upsilon\nu(-45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y'),$$

ἐπειδὴ $\eta\mu(-45^\circ)=-\eta\mu 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu(-45^\circ)=\sigma\upsilon\nu 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Κατὰ συνέπειαν ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρὸς τοὺς νέους ἄξονας καθίσταται:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\right]^2-\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y')\right]^2=\alpha^2$$

ἢ

$$(x'+y')^2-(-x'+y')^2=2\alpha^2$$

ἢ καί, μετὰ τὰς πράξεις

$$\boxed{x'y'=\frac{\alpha^2}{2}} \qquad (53)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἡ ἐξίσωσις ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς.

Ἀλλὰ καὶ τὸ ἀντίστροφον ἰσχύει, ἤτοι πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς :

(1) $xy=k^2$ ἢ $y=\frac{k^2}{x}$, ἔνθα k ὡρισμένη σταθερά, παριστᾷ ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς.

Οὕτω *ὡς ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ὧν τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ὡρισμένας καθέτους εὐθείας ἰσοῦται πρὸς σταθερὰν θετικὴν ποσότητα k^2.*

Ἐὰν ἡ ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ ἀναφέρεται εἰς ἄξονας παραλλήλους πρὸς

$MN \cdot \Lambda N = k^2$
$(x-\xi)(y-\eta) = k^2$

τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς καὶ τὸ κέντρον αὐτῆς εἶναι τὸ σημεῖον (ξ, η), τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς (x, y) θὰ ἀπέχη τῶν ἀσυμπτώτων $(x-\xi)$, $(y-\eta)$ καὶ ἡ ἐξίσωσίς της, συμφώνως τῷ δοθέντι ὁρισμῷ, θὰ εἶναι :

$$(2) \qquad (x-\xi)(y-\eta) = k^2 .$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι γενικωτέρα τῆς (1) καὶ δυνάμεθα, θέτοντες $\xi = \eta = 0$, νὰ μεταπέσωμεν ἐκ τῆς (2) εἰς τὴν (1).

Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς :

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (54)$$

παριστᾷ ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν.

Πράγματι· ὁ τύπος (54) δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω :

$$(\gamma x + \delta) y - (\alpha x + \beta) = 0$$

ἢ καὶ οὕτω :

$$xy - \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\delta}{\gamma} y - \frac{\beta}{\gamma} = 0$$

$xy - \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\delta}{\gamma} y - \frac{\beta}{\gamma}$

ἤ, τέλος, ὑπὸ τὴν μορφήν :

$y\left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right) - \frac{\alpha}{\gamma}\left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right) = -\frac{\alpha\delta}{\gamma^2}$

$$(3) \qquad \left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right)\left(y-\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{\gamma^2}$$

$\left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right)\left(y-\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \frac{\gamma\beta-\alpha\delta}{\gamma^2}$

Συγκρίνοντες τὸν τύπον τοῦτον πρὸς τὸν τύπον (2), συνάγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (54), διὰ $\gamma \neq 0$, παριστᾷ ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν, ἧς αἱ ἀσύμπτωτοι εἶναι παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας συντεταγμένων καὶ ἥτις ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον $\left(-\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$.

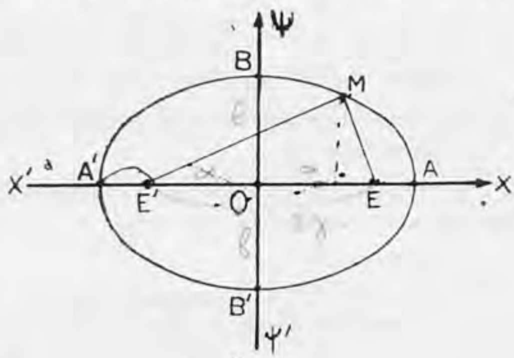
Ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει (1) θεωρήσωμεν, ὅτι τὸ k λαμβάνει διαφόρους τιμάς, θὰ ἔχωμεν σειρὰν ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν ἤ, ὡς λέγεται, *οἰκογένειαν* ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν.

§ 48. *Περὶ ἐλλείψεως.*

Ἔλλειψις λέγεται ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ὧν αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουσιν ἄθροισμα δοθὲν καὶ σταθερόν.

Τὰ δύο σταθερὰ σημεῖα, παριστώμενα δι' Ε καὶ Ε' (*Σχ. 25*), λέγονται *ἑστίαι* τῆς ἐλλείψεως. Ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰς δύο ἑστίας λαμβάνεται ὡς ἄξων Χ'Χ καὶ ὡς ἄξων Ψ'Ψ ἡ κάθετος πρὸς ταύτην εἰς τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΕΕ'. Τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τούτου παριστῶμεν διὰ 2γ καὶ διὰ 2α τὸ σταθερὸν ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων τῆς ἐλλείψεως ἐκ τῶν δύο ἑστιῶν. Ἐάν, συνεπῶς, Μ εἶναι σημεῖον τῆς ἐλλείψεως, θὰ εἶναι : $ME + ME' = 2\alpha$.

Τὸ σημεῖον Ο καλεῖται *κέντρον* τῆς ἐλλείψεως, τὸ τμῆμα ΕΕ′ *ἑστιακὴ ἀπόστασις*, τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ *κορυφαὶ* τῆς ἐλλείψεως. Τὰ τμήματα ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ λέγονται ἀντιστοίχως *μέγας καὶ ἐλάσσων ἄξων* τῆς ἐλλείψεως.



Σχ. 25.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως εἶναι :

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (55)$$

ἔνθα $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν (55) ἐργαζόμεθα ὡς καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως τῆς ὑπερβολῆς.

Ἐὰν $\alpha=\beta$ ἡ ἐξίσωσις (55) λαμβάνει τὴν μορφὴν $x^2+y^2=\alpha^2$, ἤτοι ἡ ἔλλειψις ἀνάγεται εἰς κύκλον.

Ἡ ἐξίσωσις (55), τῆς ἐλλείψεως, δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$. Ἀντιστρόφως, ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς: $\mu x^2+\nu y^2=\xi$, ἔνθα μ, ν, ξ ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ $\mu \neq \nu$, παριστᾷ γραφικῶς ἔλλειψιν.

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως. 1) Ἡ ἔλλειψις εἶναι κυρτὴ πρὸς τὰ ἔξω καὶ κοίλη πρὸς τὰ ἔσω, ὡς καὶ ὁ κύκλος. 2) Ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως, τὸ συμμετρικὸν τούτου πρὸς ἕκαστον τῶν ἀξόνων καὶ πρὸς τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως εὑρίσκεται ἐπὶ ταύτης, ἤτοι ἡ ἔλλειψις εἶναι καμπύλη συμμετρικὴ πρὸς ἑκάτερον τῶν ἀξόνων της καὶ πρὸς τὸ κέντρον αὐτῆς. 3) Ὁ κύκλος εἶναι ἔλλειψις ἧς συνέπεσαν αἱ δύο ἑστίαι.

Κατασκευὴ τῆς ἐλλείψεως. Δοθεισῶν τῶν ἑστιῶν καὶ τοῦ μείζονος ἄξονος τῆς ἐλλείψεως, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ταύτην εἴτε διὰ τῆς εὑρέσεως σημείων της, ἅτινα ἑνούμενα θὰ δώσωσι τὴν καμπύλην, εἴτε διὰ συνεχοῦς κινήσεως.

Λαμβάνομεν τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΕΕ′ καὶ ἐν συνεχείᾳ τὰ τμήματα ΟΑ=ΟΑ′=α. Τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ ἀνήκουσιν εἰς τὴν ἔλλειψιν. Ἐν συνεχείᾳ λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Μ τοῦ τμήματος ΕΕ′ καὶ μὲ κέντρα τὰς ἑστίας καὶ ἀκτῖνας τὰ τμήματα ΑΜ καὶ Α′Μ γράφομεν τέσσαρας περιφερείας τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα τομῆς εἶναι σημεῖα τῆς ἐλλείψεως. Μεταβαλλομένου τοῦ Μ, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὁσαδήποτε σημεῖα τῆς ἐλλείψεως.

Διὰ συνεχοῦς κινήσεως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ἔλλειψιν ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν νῆμα μήκους 2α, οὗ τὰ ἄκρα προσδένομεν εἰς τὰ Ε καὶ Ε′ καὶ τείνομεν αὐτὸ διὰ τῆς ἀκίδος ἥλου ἢ μολυβδοκονδύλου. Ἡ ἀκὶς γράφει τὴν ἔλλειψιν *.

* Ἡ οὕτω κατασκευαζομένη ἔλλειψις καλεῖται *ἔλλειψις τοῦ κηπουροῦ*, ἐκ τοῦ ὅτι τὴν μέθοδον ταύτην χρησιμοποιοῦσιν οἱ κηπουροὶ διὰ τὴν κατασκευὴν ἐλλείψεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ***Εὑρεῖν τὰς συντεταγμένας τῆς κορυφῆς καὶ τῆς ἑστίας τῶν παραβολῶν.***

α) $y=\frac{1}{8}x^2$, β) $y=\frac{1}{4}x^2$, γ) $x=\frac{1}{12}y^2$, δ) $y^2=-8x$.

'Απόκρ. α) (0,0), (0,2), δ) (0,0), (−2,0).

2. ***Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς διευθετούσης τῆς παραβολῆς*** $y^2=12x$.

'Απόκρ. $x=-3$.

3. ***Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς παραβολῆς τῆς ἐχούσης τὴν κορυφήν της εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ τὴν ἑστίαν εἰς τὸ σημεῖον (2,0).***

'Απόκρ. $y^2=8x$.

4. ***Παραβολὴ ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ σημεῖον (1,0) καὶ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων εἰς τὸ σημεῖον (0, −2). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς.***

'Ο ἄξων της θὰ εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι Ψ'Ψ καὶ θὰ διέρχηται διὰ τοῦ (1,0). Τὸ συμμετρικὸν τοῦ (0, −2) ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς (2, −2) εὑρίσκεται ἐπ' αὐτῆς. Οὕτω, δοθέντος ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς εἶναι τῆς μορφῆς $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, θὰ ἔχωμεν: $0=\alpha+\beta+\gamma$, $-2=\gamma$, $-2=4\alpha+2\beta+\gamma$, ἐξ οὗ $\alpha=-2$, $\beta=4$, $\gamma=-2$.

'Απόκρ. $y=-2x^2+4x-2$.

5. ***Παραβολὴ τέμνει τὸν μὲν ἄξονα τῶν τετμημένων εἰς τὰ σημεῖα (1,0) καὶ (2,0), τὸν δὲ ἄξονα τῶν τεταγμένων εἰς τὸ σημεῖον (0,3). Νὰ ὁρισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς καὶ νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις ταύτης.***

'Απόκρ. $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+3$.

6. ***Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ συντεταγμέναι τῶν κοινῶν σημείων τῆς παραβολῆς*** $y^2=4x$ ***καὶ τῆς εὐθείας*** $x-2y+4=0$. ***Νὰ ἐξετασθῇ γραφικῶς ἡ θέσις τῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὴν παραβολήν.***

'Εκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος προκύπτουν διὰ τὸ x καὶ y δύο τιμαὶ πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, ἤτοι ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς.

'Απόκρ. $x=4$, $y=4$.

7. ***Νὰ λυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα :***

$$x^2-4y=0,\quad 2y^2-x=0$$

Θὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τούτων καὶ θὰ καθορισθῶσι τὰ κοινὰ σημεῖα. 'Η πρώτη παραβολὴ εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, ἡ δευτέρα ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.

8. ***Νὰ γραφῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς τῆς ἐχούσης ἡμιάξονας :***

α) $\alpha=4$, $\beta=3$, β) $\alpha=9$, $\beta=1$, γ) $\alpha=4$, $\beta=2$

'Απόκρ. α) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

9. ***Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν ὑπερβολῶν :***

α) $9x^2-16y^2=144$ β) $4x^2-49y^2=196$ γ) $x^2-16y^2=16$

10. Νὰ λυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα :

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1, \quad y=2x-1$$

11. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν καμπυλῶν :

$$9x^2-25y^2=225, \quad x^2+y^2=86$$

Ἀπόκρ. $\pm\frac{15\sqrt{170}}{34}, \quad \frac{3\sqrt{374}}{34}$.

12. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν ἐξισώσεων :

$$\alpha)\ y=\frac{\alpha}{x+\beta}, \quad \beta)\ y=\frac{1}{x+1}, \quad \gamma)\ y=\frac{2}{x-2}$$

Ἡ πρώτη παριστᾷ ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν μὲ ἐξίσωσιν $y=\frac{\alpha}{x'}$, ὡς πρὸς ἄξονας Ο'Χ, Ο'Ψ', ἔνθα ΟΟ' $=-\beta$ καὶ Ο'Ψ' παράλληλον τῷ ἄξονι ΟΨ.

13. Ποία ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ἧς ὁ μείζων ἄξων εἶναι 30 μ. καὶ ὁ ἐλάσσων 24 μ. ;

Ἀπόκρ. $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{144}=1$.

14. Τῆς ἐλλείψεως τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις 2γ καὶ τὸ σημεῖον αὐτῆς Μ τὸ ἔχον τετμημένην $\sqrt{29}$.

Ἀπόκρ. $2\gamma=18$, $M\left(\sqrt{29}, \pm\frac{56}{5}\right)$.

15. Τὰ σημεῖα M_1, (3, 2,4), M_2 (4, 1,8) ἀνήκουσιν εἰς ἔλλειψίν τινα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως θὰ ἔχῃ τὴν μορφήν: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Συνεπῶς πρέπει νὰ εὑρεθῶσι τὰ α καὶ β. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα M_1, M_2 εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως αἱ συντεταγμέναι των θὰ ἐπαληθεύωσι τὴν ἐξίσωσιν καὶ οὕτως ἔχοντες τὰς ἐξισώσεις $\frac{3^2}{\alpha^2}+\frac{2,4^2}{\beta^2}=1$, $\frac{4^2}{\beta^2}+\frac{1,8^2}{\beta^2}=1$, εὑρίσκομεν $\alpha=\pm5$ καὶ $\beta=\pm3$.

Ἀπόκρ. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

16. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ἐλλείψεως $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ μετὰ τῆς εὐθείας $x+2y=6$.

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων.

Ἀπόκρ. (6,0) (0,3).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΚΑΜΠΥΛΑΙ ΤΙΝΕΣ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ

§ 49. *Ὑπερβατικαὶ καμπύλαι.*

Ἅπασαι αἱ γραμμαί, ἃς ἐσπουδάσαμεν ἐν τῷ προηγουμένῳ κεφαλαίῳ, ὀνομάζονται *ἀλγεβρικαὶ γραμμαί*. Ἡ ὀνομασία αὕτη δίδεται γενικῶς εἰς τὰς γραμμὰς ὧν ἡ ἐξίσωσις δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν σ(x, y) = 0, ἔνθα σ(x, y) πολυώνυμόν τι ὡς πρὸς x, y. Ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου σ(x,y) καθορίζει καὶ τὸν *βαθμὸν* τῆς γραμμῆς. Ἐλέχθη ἀνωτέρω, ὅτι αἱ ἄνω τοῦ 1ου βαθμοῦ γραμμαὶ καλοῦνται καὶ καμπύλαι. Κατωτέρω θὰ λέγωμεν ἀδιαφόρως γραμμὰς ἢ καμπύλας.

Αἱ μὴ ἀλγεβρικαὶ γραμμαὶ καλοῦνται *ὑπερβατικαὶ γραμμαὶ* παριστῶσαι γραφικῶς τὰς *ὑπερβατικὰς συναρτήσεις* (§ 29).

Ὡρισμέναι ἐκ τῶν ὑπερβατικῶν καμπύλων ἔχουσι μεγίστην σημασίαν διὰ τὴν Οἰκονομικὴν ἐπιστήμην, τὴν Στατιστικὴν καὶ ἐν γένει διὰ τὰς ἐφηρμοσμένας ἐπιστήμας. Καὶ περὶ τῶν τοιούτων καμπύλων κατωτέρω.

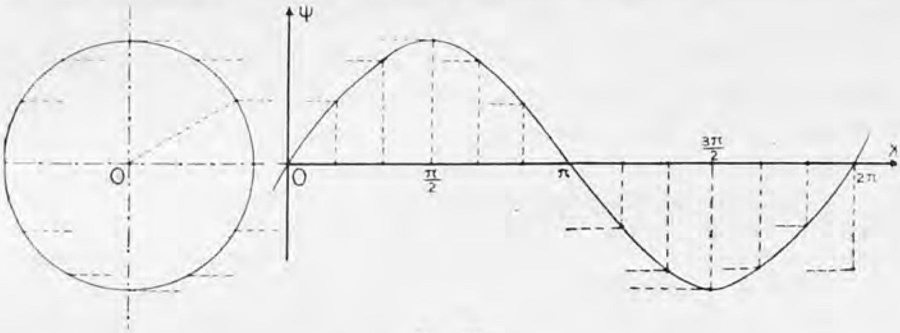
§ 50. *Ἡμιτονοειδὴς καμπύλη.*

Ἡμιτονοειδὴς καμπύλη λέγεται ἡ *γραφικὴ παράστασις* τῆς συναρτήσεως y=ημx*. Αὕτη δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν παράστασιν περιοδικῶν φαινομένων.

Ἡ συνάρτησις y=ημx εἶναι *συνάρτησις περιοδικὴ* μὲ περίοδον 2π. Τοῦτο διότι τὸ ἡμίτονον δὲν ἀλλάσσει ὅταν προσθέτωμεν ἢ ἀφαιρῶμεν εἰς τόξον τι οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν περιφερειῶν. Π.χ. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=$ $=\eta\mu\frac{\pi}{3}$, ἔνθα k παριστᾷ τὸν τυχόντα ἀκέραιον ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν. Καὶ αἱ συναρτήσεις *συνx, εφx, σφx* εἶναι περιοδικαὶ συναρτήσεις, μὲ περίοδον 2π ἡ πρώτη καὶ π αἱ ἕτεραι δύο. Ὡς ἐκ τούτου καὶ τὰ διαγράμματα τούτων παρίστανται ὑπὸ τόξων ὁμοιομόρφων δι' ἕκαστον διάστημα $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$. Συνεπῶς, ἡ σπουδὴ μιᾶς τοιαύτης καμπύλης περιορίζεται εἰς ἓν τοιοῦτον διάστημα, συνήθως εἰς τὸ διάστημα $(0,2\pi)$.

* Τὸ x ἐκφράζει τὸ μῆκος εἰς ἀκτίνια τόξου αὐθαιρέτου, θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ.

Πρὸς χάραξιν τῆς ἡμιτονοειδοῦς διαιροῦμεν τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον Ο *(Σχ. 26)* εἰς ἀριθμόν τινα ἴσων μερῶν (ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν τμημάτων τόσον μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἀκρίβεια τοῦ σχήματος), π.χ. εἰς δώδεκα μέρη. Ἀντιστοίχως διαιροῦμεν τὸ διάστημα $(0,2\pi)$ εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τμημάτων: τὰ σημεῖα ὑποδιαιρέσεως αὐτῶν τῶν μερῶν δίδουσι τὰς τετμημένας τῶν σημείων ἅτινα θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν ἐπὶ τῆς καμπύλης. Ἀντιστοιχίζομεν πρὸς ἑκάστην τῶν ἐν λόγῳ τετμημένων *(Σχ. 26)* τὴν τεταγμένην ἥτις ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου



Σχ. 26.

πρὸς ὃ ἀντιστοιχοῦν αἱ τετμημέναι. Τὰ οὕτω προκύψαντα σημεῖα ἑνοῦμεν διὰ συνεχοῦς γραμμῆς. Ἡ γραμμὴ ἥτις θὰ προκύψῃ θὰ εἶναι ἡ *ἡμιτονοειδὴς καμπύλη*.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰς καμπύλας αἵτινες εἶναι αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν ἄλλων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων. Ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ μὲν συνημιτόνου δίδει καμπύλην καλουμένην *συνημιτονοειδῆ*, τῆς δὲ ἐφαπτομένης καμπύλην καλουμένην *ἐφαπτομενοειδῆ*.

§ 51. Λογάριθμοι καὶ λογαριθμικαὶ καμπύλαι.

Α΄. Ἔστω $\alpha^x=\beta$, ἔνθα α, β δύο τυχόντες θετικοὶ ἀριθμοί. Τοῦτο, ὡς γνωστόν, σημαίνει ὅτι ὁ ἀριθμὸς α ὑψούμενος εἰς τὴν x δύναμιν δίδει τὸν β. Τοῦ α λαμβανομένου θετικοῦ καὶ διαφόρου τῆς μονάδος ὁρίζομεν ὅτι *ὁ x εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ β ὡς πρὸς βάσιν α.*

Ἤτοι γενικῶς: *Λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος θετικοῦ β, ὡς πρὸς βάσιν ἀριθμόν τινα α θετικὸν διάφορον τῆς μονάδος, καλεῖται ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἰς ἣν δέον νὰ ὑψωθῇ ὁ α ἵνα εὑρεθῇ ὁ β.* *

Τὸ σύνολον τῶν λογαρίθμων τῶν διαφόρων ἀριθμῶν ὡς πρὸς τὸν α καλεῖται *λογαριθμικὸν σύστημα μὲ βάσιν α.*

---

* Οἱ λογάριθμοι ὁρίζονται καὶ διὰ δύο ἀντιστοίχων προόδων, ὧν ἡ μὲν πρώτη γεωμετρικὴ ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ ὅρου 1, ἡ δὲ ἑτέρα ἀριθμητικὴ ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ ὅρου 0 καὶ λόγου θετικοῦ. *Βάσις* τοῦ συστήματος τούτου λέγεται ὁ ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου ὁ ἀντίστοιχος πρὸς τὸν ὅρον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου τοῦ ἴσου τῇ μονάδι.

Σημείωσις. Οἱ λογάριθμοι ἐκλήθησαν οὕτω παρὰ τοῦ ἐπινοήσαντος τούτους Σκώτου Napier ὡς ἀριθμοὶ λογάδες (ἐκ τοῦ λέγω - ἐκλέγω), ἤτοι ἀριθμοὶ ἐκλεκτοί, διότι πολὺ εὐκολύνουσι τοὺς ὑπολογισμούς, ἀφοῦ δι' αὐτῶν ὁ πολλαπλασιασμὸς μετατρέπεται εἰς πρόσθεσιν, ἡ διαίρεσις εἰς διαφοράν, ἡ δύναμις εἰς γινόμενον καὶ ἡ ῥίζα εἰς πηλίκον.

Τὰ περὶ λογαρίθμων εἶναι γνωστὰ ἐκ τῆς Στοιχειώδους Ἀλγέβρας. Ἐνταῦθα θὰ ὑπομνήσωμεν τὸν συμβολισμὸν καὶ τὰς κυριωτέρας τούτων ἰδιότητας.

α) Γράφοντες $y=\lambda o\gamma_\alpha x$ νοοῦμεν ὅτι ὡς βάσις ἐλήφθη ὁ ἀριθμὸς α. Παραλείποντες τὸ α καὶ γράφοντες $y=\lambda o\gamma x$ νοοῦμεν ὅτι ἡ βάσις τοῦ συστήματος εἶναι ὁ 10. Τέλος γράφοντες $y=\ln x$, ἢ ἁπλῶς lx, νοοῦμεν ὅτι ἡ βάσις τοῦ συστήματος εἶναι ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς e *, ὅστις ἰσοῦται μὲ 2,71828...

β) *Ἐν ἑκάστῳ λογαριθμικῷ συστήματι ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος εἶναι 0 καὶ ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως 1.*

* Λάβωμεν τὰς προόδους:

$$\ldots\ \varrho^{-2}\quad \varrho^{-1}\quad 1\quad \varrho\quad \varrho^2\quad \varrho^3\quad \varrho^4 \ldots \varrho^\mu \ldots$$
$$\ldots -2\delta\quad -\delta\quad 0\quad \delta\quad 2\delta\quad 3\delta\quad 4\delta \ldots \mu\delta \ldots$$

ἔνθα $\varrho>1$ καὶ $\delta>0$. Οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς προόδου θὰ εἶναι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Ἐὰν θέσωμεν $\mu\delta=1$, ἤτοι $\delta=\dfrac{1}{\mu}$ καὶ $\varrho=1+\dfrac{1}{\mu}$, ἐκ τῶν προηγουμένων προόδων λαμβάνομεν:

$$1\quad \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^1 \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2 \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^3 \ldots \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1} \ldots \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{2\mu} \ldots$$
$$0\quad \frac{1}{\mu}\quad \frac{2}{\mu}\quad \frac{3}{\mu}\ \ldots\ 1\quad \frac{\mu+1}{\mu}\ \ldots\ 2\ \ldots$$

ἔνθα μ λαμβάνεται ἀρκούντως μέγας, ὥστε τὸ $1+\dfrac{1}{\mu}$ νὰ εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος μὲν τῆς μονάδος, ἀλλὰ κατὰ ποσότητα ἐλαχίστην. Αὗται ἀποτελοῦσι λογαριθμικὸν σύστημα, εἰς ὃ βάσις εἶναι ὁ ἀριθμὸς πρὸς ὃν τείνει τὸ $\left(1+\dfrac{1}{\mu}\right)^\mu$, ὅταν τὸ μ αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον (κατωτέρω θὰ ὁμιλῶμεν περὶ τοῦ *ὁρίου* τοῦ $\left(1+\dfrac{1}{\mu}\right)^\mu$), καὶ εἶναι οὗτος ἀριθμὸς ἀσύμμετρος διεθνῶς παριστώμενος διὰ τοῦ e καὶ ἴσος πρὸς 2,7182818...

Ἀνάγκη πρακτικὴ ἐπιβάλλει ὅπως ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος περιλαμβάνῃ, εἰ δυνατόν, πάντας τοὺς ἀριθμούς, ἵνα ἔχωμεν, ὡς χρειάζεται ἐν τῇ πράξει, ἀντιστοίχως τοὺς λογαρίθμους πάντων τῶν ἀριθμῶν. Πρὸς τοῦτο θεωροῦντες ὅτι τὸ μ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον ἐπιτυγχάνομεν τὴν κατ' ἐλάχιστον αὔξησιν τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ ἐξ ἑνὸς ἔχομεν ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρους ἀριθμούς, ἐξ ἑτέρου δὲ ἐπιγίγνεται, *κατ' ἀνάγκην*, *φυσικῶς*, ὁ ἀριθμὸς e, δι' ὃ καὶ ὁ Napier ἔλαβε τοῦτον ὡς βάσιν τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματός του καὶ ὠνομάσθησαν τὸ μὲν σύστημα *Νεπέρειον λογαριθμικὸν σύστημα*, οἱ δὲ λογάριθμοι *Νεπέρειοι* ἢ *φυσικοί*. Σημειωτέον, ὅτι οἱ τοιοῦτοι λογάριθμοι ἐνίοτε καλοῦνται καὶ *ὑπερβολικοί*, καθ' ὅσον ἐκφράζουσι μίαν ἰδιότητα τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς.

Εἰς τοὺς ἐν τῇ πράξει ὑπολογισμοὺς ὡς βάσις λαμβάνεται ὁ 10, ἤτοι τὸ *δεκαδικὸν λογαριθμικὸν σύστημα* ἢ *σύστημα τοῦ Briggs*, καὶ οἱ λογάριθμοι καλοῦνται τότε *κοινοὶ* ἢ *δεκαδικοὶ λογάριθμοι*.

Εἰς τὴν *Μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν* πολὺ χρησιμοποιοῦνται οἱ *Νεπέρειοι λογάριθμοι* μὲ βάσιν τὸν e (ὅρα ὑποσημ. σελ. 80).

γ) *Οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος ἔχουσι λογαρίθμους θετικούς. Οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τῆς μονάδος ἔχουσι λογαρίθμους ἀρνητικούς.*

δ) *Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι λογαρίθμους.*

ε) *Ὁ λογάριθμος γινομένου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων.*

$$\lambda o\gamma_\alpha (A \cdot B) = \lambda o\gamma_\alpha A + \lambda o\gamma_\alpha B.$$

ϛ) *Ὁ λογάριθμος πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν.*

$$\lambda o\gamma_\alpha \left(\frac{A}{B}\right) = \lambda o\gamma_\alpha A - \lambda o\gamma_\alpha B.$$

ζ) *Ὁ λογάριθμος δυνάμεως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐκθέτου ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως τῆς δυνάμεως.*

$$\lambda o\gamma_\alpha (A^\mu) = \mu \cdot \lambda o\gamma_\alpha A.$$

η) *Ὁ λογάριθμος ρίζης ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον διαιρέσεως τοῦ λογαρίθμου τῆς ὑπορρίζου ποσότητος διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.*

$$\lambda o\gamma_\alpha \sqrt[\nu]{A} = \frac{\lambda o\gamma_\alpha A}{\nu}.$$

θ) *Ἀλλαγὴ βάσεως*. Πολλάκις, ὅταν ἔχωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος x ὡς πρὸς βάσιν τινὰ α, παρίσταται ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ὡς πρὸς ἑτέραν βάσιν β. Π.χ., γνωρίζοντες τὸν δεκαδικὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ, νὰ εὕρωμεν τὸν Νεπέρειον λογάριθμον αὐτοῦ καὶ ἀντιστρόφως. Διὰ τὴν μετάβασιν ἐξ ἑνὸς λογαριθμικοῦ συστήματος εἰς ἕτερον σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἔστω ὅτι (1) $\lambda o\gamma_\alpha x = \nu$, ὅτε (2) $x = \alpha^\nu$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (2), ὡς πρὸς βάσιν τὸν ἀριθμὸν β, θὰ ἔχωμεν : $\lambda o\gamma_\beta x = \nu \cdot \lambda o\gamma_\beta \alpha$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ ν διὰ τοῦ ἴσου του εὑρίσκομεν :

$$\lambda o\gamma_\beta x = \lambda o\gamma_\alpha x \cdot \lambda o\gamma_\beta \alpha \tag{56}$$

Ἐντεῦθεν : *Ἔχοντες τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος x ὡς πρὸς βάσιν α καὶ πολλαπλασιάζοντες τοῦτον ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως α ὡς πρὸς βάσιν β, λαμβάνομεν τὸν λογάριθμον τοῦ x ὡς πρὸς τὴν νέαν βάσιν β.*

Οὕτω: Πολλαπλασιάζοντες τὸν δεκαδικὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2,302585, ὅστις εἶναι ὁ Νεπέρειος λογάριθμος τοῦ 10, εὑρίσκομεν τὸν Νεπέρειον λογάριθμον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Καὶ ἀντιστρόφως, πολλαπλασιάζοντες τὸν Νεπέρειον λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 0,4342945, ὅστις εἶναι ὁ δεκαδικὸς λογάριθμος τοῦ e, εὑρίσκομεν τὸν δεκαδικὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

Β΄. Θεωρήσωμεν ἤδη ὡρισμένον καὶ σταθερὸν ἀριθμὸν α ὡς βάσιν δυνάμεώς τινος, μὲ ἐκθέτην μεταβλητήν τινα x, ἤτοι τὴν συνάρτησιν $y=\alpha^x$. Αὕτη καλεῖται *ἐκθετικὴ συνάρτησις*. Ἐπειδὴ δ' ἐξ ἑτέρου ὁ x εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ y μὲ βάσιν α, ἡ τοιαύτη ἐκθετικὴ συνάρτησις καλεῖται καὶ *λογαριθμική*. Ἡ καμπύλη τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς ἐν λόγῳ συναρτήσεως καλεῖται *ἐκθετικὴ ἢ λογαριθμικὴ καμπύλη*. *Συνηθέστερον ὡς λογαριθμικὴν συνάρτησιν λαμβάνομεν τὴν συνάρτησιν ὑπὸ τὴν μορφήν:* $y=\lambda o\gamma_\alpha x$.

Κατὰ ταύτην δίδοντες εἰς τὸ α συγκεκριμένας τιμάς, λ.χ., 2, 3 καὶ $\frac{1}{2}$, λαμβάνομεν τὰς συναρτήσεις:

$$y=\lambda o\gamma_2 x, \quad y=\lambda o\gamma_3 x, \quad y=\lambda o\gamma_{1/2} x.$$

Οἱ κατωτέρω πίνακες (*Πίναξ 1, 2, 3*) καὶ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν τριῶν τούτων συναρτήσεων (*Σχ. 27*) μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τὰ ἑξῆς συμπεράσματα, ὡς πρὸς τὴν λογαριθμικὴν συνάρτησιν $y=\lambda o\gamma_\alpha x$:

Πίναξ 1

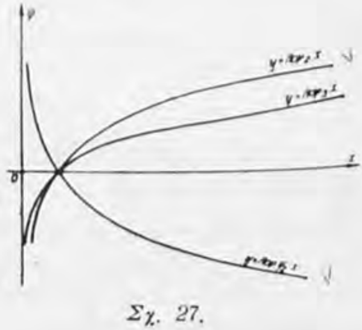
$y=\lambda o\gamma_2 x$	
x	y
1	0
2	1
4	2
.	.
.	.
.	.
$\frac{1}{2}$	−1
$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{8}$	−3
.	.
.	.
.	.
.	.

Πίναξ 2

$y=\lambda o\gamma_3 x$	
x	y
1	0
3	1
9	2
.	.
.	.
.	.
.	.
$\frac{1}{3}$	−1
$\frac{1}{27}$	−3
.	.
.	.
.	.
.	.

Πίναξ 3

$y=\lambda o\gamma_{1/2} x$	
x	y
1	0
2	−1
4	−2
8	−3
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3
.	.
.	.
.	.
.	.



Σχ. 27.

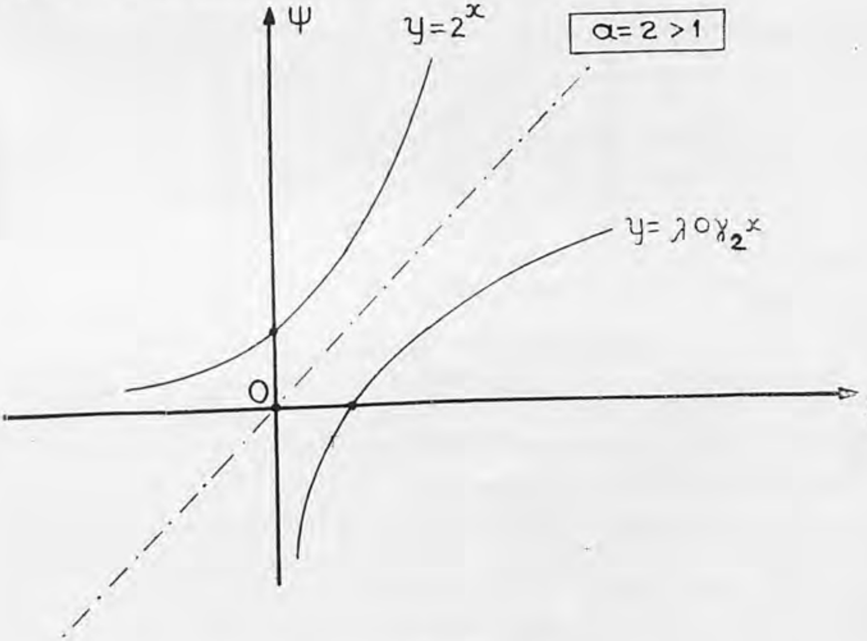
1) Ἐὰν $\alpha>1$, δι' αὐξανομένας τιμὰς τῆς x μεγαλυτέρας τῆς μονάδος ἡ συνάρτησις αὐξάνει συνεχῶς, ἐνῷ διὰ θετικὰς τιμὰς τῆς x μικροτέρας τῆς μονάδος, αἵτινες βαίνουσι μειούμεναι καὶ πλησιάζουσαι συνεχῶς πρὸς τὸ 0, ἡ συνάρτησις λαμβάνει ἀρνητικὰς τιμάς, αἵτινες κατ' ἀπόλυτον τιμὴν αὐξάνουσι συνεχῶς (*Πίναξ 1 καὶ 2*).

2) Ἐὰν $\alpha<1$, δ' αὐξανομένας τιμὰς τῆς x μεγαλυτέρας τῆς μονάδος συνεχῶς ἡ συνάρτησις ἐλαττοῦται λαμβάνουσα ἀρνητικὰς τιμάς, αἵτινες κατ' ἀπόλυτον τιμὴν βαίνουσιν αὐξανόμεναι, ἐνῷ διὰ τὰς τιμὰς τῆς x θετικὰς μὲν ἀλλὰ μικροτέρας τῆς μονάδος, αἵτινες πλησιάζουσι πρὸς τὸ μηδέν, ἡ συνάρτησις λαμβάνει τιμὰς θετικὰς καὶ αὐξανομένας *(Πίναξ 3)*.

§ 52. Ἐκθετικαὶ καμπύλαι. +

Ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ εἴπομεν, τὰς λογαριθμικὰς καμπύλας καλοῦσι καὶ ἐκθετικάς, καθ' ὅσον αἱ ἐκθετικαὶ καὶ λογαριθμικαὶ συναρτήσεις συνδέονται μεταξύ των εἰς τρόπον ὥστε ἑκάστη τούτων νὰ δύναται νὰ προκύψῃ ἐκ τῆς ἑτέρας. Οὕτω π.χ. ἡ λογαριθμικὴ συνάρτησις $y=\lambda o\gamma_2 x$ προκύπτει ἐκ τῆς $x=2^y$ καὶ ἀντιστρόφως.

Πρὸς ἀποφυγὴν παρανοήσεως, ἀνεξαρτήτως τοῦ ὑφισταμένου μεταξύ των δεσμοῦ, *τὰς μὲν καμπύλας τὰς ἐχούσας ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $y=\lambda o\gamma_a x$ θὰ καλοῦμεν λογαριθμικάς, τὰς δὲ ἐχούσας ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $y=a^x$ θὰ καλοῦμεν ἐκθετικάς.*

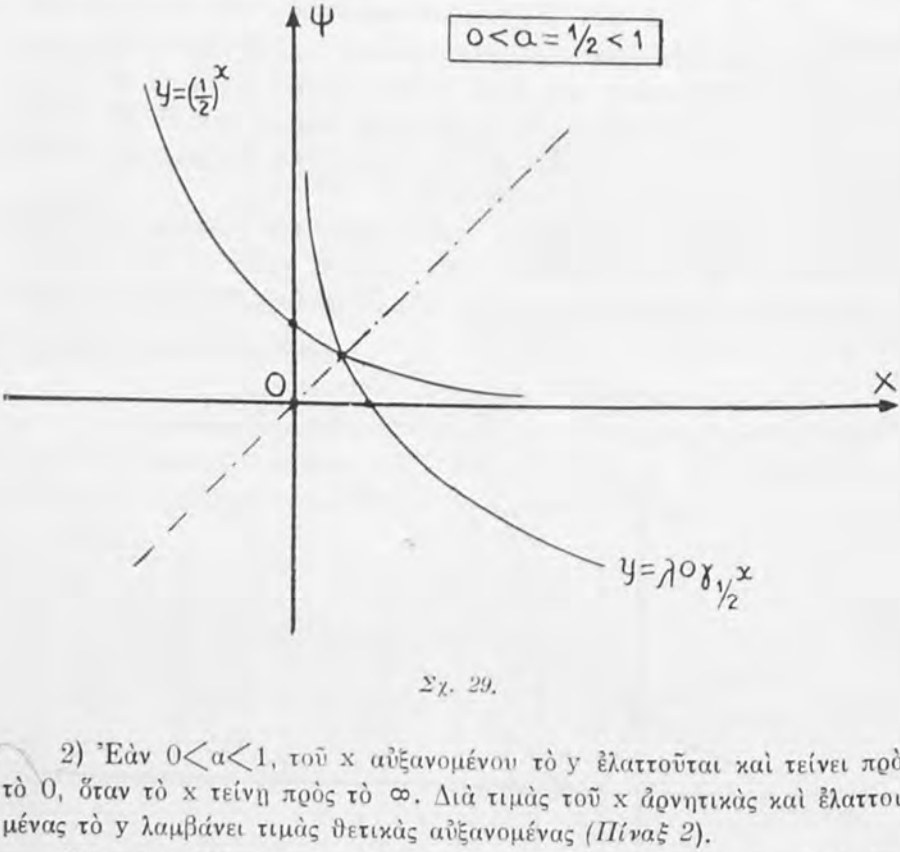


Σχ. 28.

Ἐξετάσωμεν ἤδη τὴν ἐκθετικὴν καμπύλην τὴν ἔχουσαν ἐξίσωσιν $y=\alpha^x$. Δέον νὰ λαμβάνωμεν $\alpha>0$, διότι ἄλλως, ἐὰν $\alpha<0$ καὶ x, π.χ., ἴσον πρὸς $\frac{1}{2}$, θὰ ἔχωμεν τιμὰς φανταστικὰς διὰ τὸ y.

Ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῶν συναρτήσεων $y = 2^x$ καὶ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *(Σχ. 28 καὶ 29)* διαπιστοῦνται εὐκόλως τὰ ἑξῆς :

1) Ἐὰν $\alpha > 1$, αὐξανομένου τοῦ x αὐξάνει καὶ τὸ y, ἐλαττουμένου δὲ τοῦ x καὶ τείνοντος πρὸς τὸ $-\infty$, τὸ y τείνει πρὸς τὸ μηδὲν *(Πίναξ 1)*.



Σχ. 29.

2) Ἐὰν $0 < \alpha < 1$, τοῦ x αὐξανομένου τὸ y ἐλαττοῦται καὶ τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ ∞. Διὰ τιμὰς τοῦ x ἀρνητικὰς καὶ ἐλαττουμένας τὸ y λαμβάνει τιμὰς θετικὰς αὐξανομένας *(Πίναξ 2)*.

Ἐκ τῶν Οἰκονομικῶν Μαθηματικῶν γνωρίζομεν ὅτι ἡ τελικὴ ἀξία κεφαλαίου τινὸς k_o μετὰ n χρονικὰς περιόδους, πρὸς ἐπιτόκιον i, ἐπ' ἀνατοκισμῷ ἔσται : * $k_n = k_o (1 + i)^n$. Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὸν συνήθη συμβολισμόν, θὰ ἔχωμεν : $y = k_o (1 + i)^x$, ἥτις εἶναι μία *γενικωτέρα μορφὴ τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως*, ἀφοῦ, ἐὰν θέσωμεν $k_o = 1$ καὶ $1 + i = \alpha$, θὰ ἔχωμεν : $y = \alpha^x$, ἤτοι τὴν μορφὴν τὴν ὁποίαν ἐσπουδάσαμεν ἀνωτέρω.

Ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῶν συναρτήσεων $y = (1 + 0{,}04)^x$, $y = (1 + 0{,}05)^x$, $y = (1 + 0{,}08)^x$ (Σχ. 30), ἔνθα ἐλήφθη $k_o = 1$, δυνάμεθα

---

* Τ. Κεραμιδᾶ, *Μακροπρόθεσμοι οἰκονομικαὶ πράξεις*, ἔκδ. β' 1941, σ. 12.

νὰ παρακολουθήσωμεν τὴν πορείαν τῆς τελικῆς ἀξίας κεφαλαίου μιᾶς νομισματικῆς μονάδος κατὰ τὰς διαδοχικὰς αὐξήσεις τοῦ χρόνου.

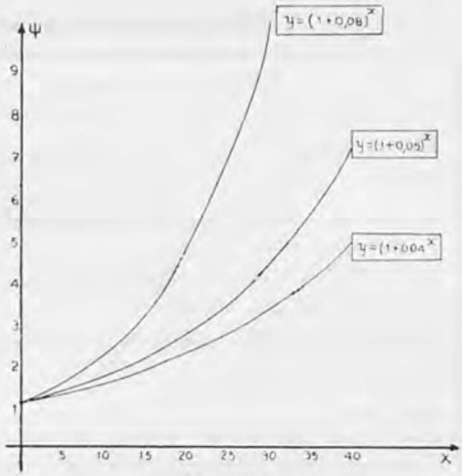
Σημείωσις. Ἐκ τῆς κατασκευῆς τῶν πινάκων τιμῶν τῶν συναρτήσεων $y=2^x$ *Πίναξ 1)* καὶ $y=\lambda o\gamma_2 x$ *(Πίναξ 1 σ. 82)* ἐξάγεται τὸ ἑξῆς συμπέρασμα: Αἱ τιμαὶ αἵτινες δίδονται εἰς τὴν x διὰ μίαν ἐκ τῶν δύο καμπύλων εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς τιμὰς αἵτινες προκύπτουσι διὰ τὴν y τῆς ἄλλης καμπύλης. Συνεπῶς κατασκευάζομεν τὸν πρῶτον πίνακα καὶ δι' ἐναλλαγῆς τῶν x καὶ y ἔχομεν ἀμέσως τὸν δεύτερον.

Πίναξ 1

$y=2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	9
.	.
.	.
.	.
.	.

Πίναξ 2

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	
x	y
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
.	.
.	.
.	.
-1	2
-2	4
-3	8
.	.
.	.
.	.

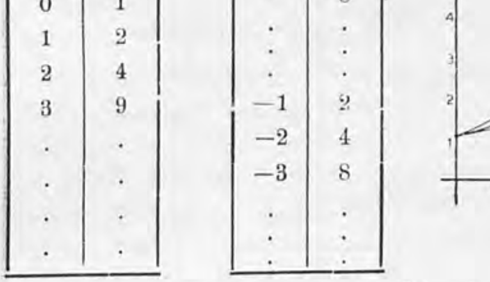


Σχ. 30.

§ 53. Καμπύλη τῶν σφαλμάτων.

Σημαντικὴ καμπύλη, συναντωμένη συχνότατα εἰς τὰς ἐφηρμοσμένας ἐν γένει ἐπιστήμας καὶ δὴ εἰς τὴν Στατιστικήν, εἶναι *ἡ καμπύλη τῶν σφαλμάτων* ἢ *καμπύλη τῶν τυχαίων σφαλμάτων*, *ἡ καὶ καμπύλη τοῦ Gauss καλουμένη* καὶ ἔχουσα τὴν ἐξίσωσιν: $y=ke^{-\beta x^2}$ *, ἔνθα $k>0$.

Ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως *(Σχ. 31)* προκύπτει, ὅτι διὰ τιμὰς τῆς x θετικὰς καὶ αὐξανομένας ἡ y ἐλαττοῦται. Τοῦτ' αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τιμὰς ἀρνητικὰς καὶ



Σχ. 31.

* Ὅρα **Δ. Κωτσάκη**, Θεωρία τῶν σφαλμάτων καὶ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, Ἀθῆναι, 1953, σ. 8.

αὐξανομένας ἀπολύτως τῆς x. Ὁμοίως συνάγεται, ὅτι ἡ καμπύλη θὰ εὑρίσκεται ὁλόκληρος ἄνωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x, διότι δι' οἱασδήποτε (θετικὰς ἢ ἀρνητικὰς) πραγματικὰς τιμὰς τῆς x ἡ y εἶναι θετική.

Ἡ καμπύλη τῶν σφαλμάτων εἶναι *συμμετρικὴ* ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, ὅπερ σημαίνει, ὅτι εὑρεθέντος σημείου τινὸς τῆς καμπύλης, τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y θὰ εὑρίσκεται ἐπίσης ἐπὶ τῆς καμπύλης.

Πίναξ τῶν ἐξισώσεων τῶν διαφόρων γραμμῶν

Εἶδος γραμμῆς	Ἐξίσωσις
Εὐθεῖα γραμμή	$Ax+By+\Gamma=0$
Κύκλος	$x^2+y^2+kx+\lambda y+\nu=0$
Παραβολὴ μὲ ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν x καὶ κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων	$y^2=2\mu x$
Παραβολὴ μὲ ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν y καὶ κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων	$x^2=2\mu y$
Παραβολὴ μὲ ἄξονα παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y	$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$
Παραβολὴ ν τάξεως	$y=\alpha x^\nu+\beta x^{\nu-1}+\ldots+p$
Ὑπερβολή	$\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$
Ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ μὲ ἀσυμπτώτους παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας συντεταγμένων	$y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$
Ἔλλειψις	$\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$
Ἡμιτονοειδής	$y=\eta\mu x$
Λογαριθμικὴ καμπύλη	$y=\lambda o\gamma_\alpha x$
Ἐκθετικὴ καμπύλη	$y=\alpha^x$
Καμπύλη σφαλμάτων	$y=ke^{-\beta x^2}$

Ἐξίσωσις ἀσυμπτώτων $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}\cdot x$.
" " τῆς ἰσ. ὑπερ. $y=\pm x$.
τότε $\underline{\alpha=\beta}$.

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜ.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΠΕΡΙ ΟΡΙΩΝ

§ 54. *Εἰσαγωγή.*

Κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν διαφόρων φαινομένων, φυσικῶν, οἰκονομικῶν κ.λ.π., ὑπεισέρχονται λεπταὶ ἔννοιαι περὶ ἀπειροστῶν, ὁρίων, συνεχείας, μεγίστων, ἐλαχίστων καὶ ἄλλων τοιούτων. Αἱ ἔννοιαι αὗται δέον νὰ καθορισθῶσι σαφῶς καὶ νὰ τακτοποιηθῶσιν εἰς κανόνας καὶ νόμους, δυναμένους νὰ χρησιμοποιηθῶσιν ἐπωφελῶς.

Τὸ τοιοῦτον ἔργον ἀνήκει εἰς τὴν Μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν, διαιρουμένην εἰς δύο κλάδους, τὸν *Διαφορικὸν καὶ τὸν Ὁλοκληρωτικὸν Λογισμόν* *. Τούτους ἐπενόησαν καὶ ἐθεμελίωσαν οἱ *Leibnitz*** καὶ *Newton*.

Ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ θὰ ἐξετάσωμεν τὰ βασικὰ στοιχεῖα τοῦ Διαφορικοῦ καὶ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ, τὰ θεραπεύοντα τὸν σκοπὸν ὃν ἐν ἀρχῇ ἐθέσαμεν καὶ καθ' ἣν μέθοδον ἐξεθέσαμεν.

§ 55. *Ἀκολουθίαι ἀριθμῶν.*

Ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐξετέθη, ἡ παρακολούθησις τῶν τιμῶν συναρτήσεώς τινος y γίνεται ἐν συσχετισμῷ πρὸς τὰς τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, τῶν τιμῶν τῆς x θεωρουμένων ὅτι κεῖνται ἔν τινι διαστήματι ἢ ἔν τινι περιοχῇ ὡρισμένης τιμῆς τῆς x.

* Πρὸ δύο χιλιάδων διακοσίων περίπου ἐτῶν ὁ *Ἀρχιμήδης* (287 - 212 π. Χ.), εἰς τὸ ἔργον του ἐπὶ τῶν κωνοειδῶν καὶ σφαιροειδῶν, χρησιμοποιεῖ κατ' οὐσίαν τὸν Ὁλοκληρωτικὸν Λογισμόν. Καὶ ὁ *Ἀρχιμήδης* δὲν εἶναι μόνον ὁ πρόδρομος τοῦ Ὁλοκληρωτικοῦ ἀλλὰ καὶ τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ γνώστης, διότι, εἰς τὸ ἔργον του περὶ ἑλίκων, προσδιορίζει τὴν ἐφαπτομένην καμπύλης, πρόβλημα θεμελιῶδες τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ.

** *Leibnitz* (Λάϊμπνιτς) (1646 - 1716), Γερμανὸς φιλόσοφος καὶ μαθηματικός. Ὑπὸ τῶν συγχρόνων του ἐχαρακτηρίσθη ὡς ἡ μεγαλυτέρα μετὰ τὸν Ἀριστοτέλη διάνοια.

Τὰς τιμὰς ἃς λαμβάνει ἡ x, ὡς ἐπίσης καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς ἃς θὰ λάβῃ ἡ y, θὰ πρέπῃ νὰ εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ μελετῶμεν ἐπὶ τῷ σκοπῷ νὰ διαπιστωθῇ ἡ πορεία, ἡ τάσις, τὸ ὅριον πρὸς ὃ θὰ τείνωσιν αἱ διάφοροι τιμαὶ τῶν x καὶ y. Τοῦτο θὰ ἐπιτευχθῇ ἐφ' ὅσον τὸ πλῆθος τῶν τιμῶν x καὶ y ταξινομηθῇ κατά τινα τρόπον. Ὁ καλλίτερος καὶ φυσικώτερος τρόπος ταξινομήσεως συνίσταται εἰς τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν τιμῶν πρὸς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5, ...

Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, ... λαμβανόμενοι κατὰ τὴν φυσικήν των σειράν, συνιστῶσιν, ὡς λέγεται, *τὴν ἀκολουθίαν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.*

Οἱ ἀριθμοί : (1) $\frac{\alpha}{1}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{4}, \ldots, \frac{\alpha}{\nu}, \ldots$ δυνάμενοι νὰ ἀντιστοιχισθῶσι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, λέγομεν ὅτι συνιστῶσιν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν. Ἡ ἀντιστοιχία νοεῖται κατὰ τρόπον ὥστε, εἷς ἀριθμός, ὅστις ἐν προκειμένῳ καλεῖται *στοιχεῖον* ἢ *ὅρος τῆς ἀκολουθίας*, νὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς ἕνα ὅρον τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐὰν λάβωμεν τυχόντα ὅρον τῆς ἀκολουθίας (1), π.χ., $\frac{\alpha}{10}$, διαπιστοῦται ἀμέσως ὅτι ἔχει ἀντίστοιχόν του ἐν τῇ ἀκολουθίᾳ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τὸν 10 καί, ἀντιστρόφως, ὁ τυχὼν ὅρος τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, π.χ., ὁ 20, ἔχει ἀντίστοιχόν του ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀκολουθίᾳ τὸν $\frac{\alpha}{20}$.

Ὁμοίως οἱ ἀριθμοί : 1,9 · 1,99 · 1,999 · . . . . συνιστῶσιν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν, διότι οἱ ὅροι ταύτης δύνανται νὰ ἀντιστοιχισθῶσιν, ὡς ἀνωτέρω, πρὸς τοὺς ὅρους τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀντιστρόφως.

Ἰδιαιτέραν σημασίαν ἐν τῇ σπουδῇ τῶν ἀκολουθιῶν ἔχει ὁ *γενικὸς ὅρος*, ἤτοι ὁ ὅρος τῆς ἀκολουθίας ὅστις δύναται νὰ παραγάγῃ οἱονδήποτε ὅρον ταύτης, ἐὰν τὸ γράμμα (ὁ δείκτης) ὅπερ περιέχει ἀντικατασταθῇ ὑπό τινος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν : 1, 2, 3, ... Οὕτως ἐν τῇ ἀκολουθίᾳ τῶν ἀρτίων ἀκεραίων ἀριθμῶν : 2, 4, 6, . . . , 2ν, . . . ὁ γενικὸς ὅρος εἶναι 2ν· ἐν τῇ ἀκολουθίᾳ τῶν περιττῶν ἀκεραίων : 1, 3, 5, . . . , 2ν−1, . . . ὁ γενικὸς ὅρος εἶναι 2ν−1. Αἱ ἀκολουθίαι παρίστανται συνήθως διὰ τοῦ γενικοῦ αὐτῶν ὅρου· οὕτω λέγοντες : *ἡ ἀκολουθία* α_ν, ἐννοοῦμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἀριθμῶν : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, οἵτινες προέκυψαν ἐκ τοῦ γενικοῦ ὅρου α_ν ὅταν ὁ ν ἔλαβε διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 1, 2, 3, ...

Αἱ ἀκολουθίαι α_ν καὶ $-\alpha_\nu$ λέγονται *ἀντίθετοι*, ἐνῷ αἱ α_ν καὶ $\frac{1}{\alpha_\nu}$ λέγονται *ἀντίστροφοι*, ἐφ' ὅσον ἡ α_ν δὲν περιέχει στοιχεῖα ἴσα τῷ μηδενί.

§ 56. Αὔξουσαι καὶ φθίνουσαι ἀκολουθίαι.

Αὔξουσα (ἢ *μὴ φθίνουσα*) λέγεται ἡ ἀκολουθία ἧς οἱ ὅροι εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε ἕκαστος τούτων νὰ εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τῷ ἑπομένῳ του. Ἀντιθέτως, ἐὰν ἕκαστος ὅρος εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος τῷ ἑπομένῳ του, ἡ ἀκολουθία λέγεται *φθίνουσα* (ἢ *μὴ αὔξουσα*).

Παραδείγματα:

Αἱ ἀκολουθίαι:

$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ καὶ $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{\nu}, \ldots$ εἶναι αὔξουσαι·

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu} \ldots$ καὶ $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{\nu+1}{\nu}, \ldots$ εἶναι φθίνουσαι.

Αἱ αὔξουσαι καὶ φθίνουσαι ἀκολουθίαι λέγονται *μονότονοι ἀκολουθίαι**.

§ 57. Ὁρισμοὶ ἐπὶ τῶν ὁρίων τῶν ἀκολουθιῶν.

Ἔστω ἡ αὔξουσα ἀκολουθία: (1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{\nu}{\nu+1}, \ldots$

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας ταύτης, βαίνοντες συνεχῶς αὐξανόμενοι, πλησιάζουσιν ὁλοὲν περισσότερον τὴν μονάδα, εἰς τρόπον ὥστε ἡ προσέγγισίς των γίνεται συνεχῶς μεγαλυτέρα. Τοῦτ' αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐν τῇ φθινούσῃ ἀκολουθίᾳ: (2) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{\nu+1}{\nu}, \ldots$ ἧς οἱ ὅροι, βαίνοντες συνεχῶς ἐλαττούμενοι, πλησιάζουσιν ὁλοὲν περισσότερον τὴν μονάδα. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λέγομεν, ὅτι αἱ ἀνωτέρω ἀκολουθίαι *ἔχουσιν ὅριον*** τὴν μονάδα ἢ *ὅτι τείνουσι* πρὸς τὴν μονάδα. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ συνεχής, ἤ, ὡς ἄλλως δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ἀπεριόριστος προσέγγισις πρὸς τὴν μονάδα εἶναι ἔννοια ἐξαιρετικῶς εὐρεῖα καὶ λεπτή, δυναμένη νὰ δημιουργήσῃ ἀμφιβολίας, ἀκολουθοῦμεν τὴν ἑξῆς πορείαν:

Λαμβάνομεν ἀριθμόν τινα θετικὸν ὁσονδήποτε μικρόν, π.χ. $\frac{1}{1000}$· ἐὰν ὑπάρχῃ ὅρος ἐν ταῖς ἀκολουθίαις (1) καὶ (2) τοιοῦτος ὥστε αὐτὸς καὶ πᾶς

* Ἐκτὸς τῶν μονοτόνων ἀκολουθιῶν ἔχομεν καὶ τὰς *κυμαινομένας*, ὅπως π.χ. ἡ $0, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots$ καὶ $5+0{,}1, 5-0{,}1, 5+0{,}01, 5-0{,}01 \ldots$

** Ὁ Ἀθηναῖος σοφιστὴς *Ἀντιφῶν* (480 - 441 π.Χ.), ἐν τῇ προσπαθείᾳ του νὰ τετραγωνίσῃ τὸν κύκλον, ἐγγράφει εἰς κύκλον τετράγωνον καὶ ἐν συνεχείᾳ ὀκτάγωνον, δεκαεξάγωνον κ.τ.λ. καὶ παρατηρεῖ ὅτι, ἐὰν διπλασιάζωμεν ἐπ' ἄπειρον τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ ἀρχικῶς ληφθέντος τετραγώνου, ἡ περίμετρος τῶν κανονικῶν τούτων πολυγώνων θὰ πλησιάζῃ (θὰ τείνῃ) ὁλοὲν περισσότερον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅτε, ὡς λέγομεν σήμερον, ἡ περίμετρος τῶν ἐν λόγῳ πολυγώνων ἔχει *ὅριον* τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Οὕτω δημιουργεῖ τὴν ἔννοιαν τοῦ ὁρίου.

ἑπόμενός του νὰ διαφέρῃ τῆς μονάδος ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{1000}$, *αἱ ἀκολουθίαι θὰ ἔχωσιν ὅριον τὴν μονάδα*. Πράγματι δὲ τοῦτο συμβαίνει, διότι λαμβάνοντες τοὺς ὅρους τῶν ἀκολουθιῶν ἀπὸ τοῦ χιλιοστοῦ πρώτου ὅρου καὶ πέραν θὰ ἔχωμεν: $\frac{1001}{1002}, \frac{1002}{1003}, \frac{1003}{1004}, \ldots$ καὶ $\frac{1002}{1001}, \frac{1003}{1002}, \frac{1004}{1003}, \ldots$ ὧν ἕκαστος διαφέρει τῆς μονάδος ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{1000}$.

Γενικώτερον, λέγομεν ὅτι ἀπέραντος ἀκολουθία α_ν *ἔχει ὅριον πραγματικὸν ἀριθμὸν* ω *ἢ ὅτι τείνει πρὸς τὸν* ω, *ἐάν, δοθέντος ἀριθμοῦ τινος θετικοῦ καὶ ὁσονδήποτε μικροῦ* ε, *εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ τιμὴ τοῦ* ν *τοιαύτη ὥστε, ὁ ὅρος* α_ν *καὶ πάντες οἱ ἑπόμενοί του νὰ διαφέρωσι τοῦ* ω, *κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν, ὀλιγώτερον τοῦ* ε.

Ἵνα παραστήσωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν ἔχει ὅριον τὸν ἀριθμὸν ω χρησιμοποιοῦμεν τὸν συμβολισμόν: $\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}}\, \alpha_\nu = \omega$ ἢ καὶ $\alpha_\nu \to \omega$*, ὅστις ἀναγινώσκεται: *ὅριον τοῦ* α_ν *ἴσον* ω, *τοῦ* ν *τείνοντος πρὸς τὸ* ∞ ἢ α_ν *τείνει πρὸς τὸ* ∞.

Ὅταν μεταβλητή τις ποσότης x λαμβάνῃ διαδοχικῶς ἀπείρους τιμάς, συνιστώσας ἀκολουθίαν α_ν ἔχουσαν ὅριον τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν ω, λέγομεν ὅτι ἡ μεταβλητὴ x ἔχει ὅριον τὸν ω. Τοῦτο συμβολίζεται οὕτως: $\text{ορ}\, x = \omega$ ἢ $x \to \omega$.

Ἐν τῇ φθινούσῃ ἀκολουθίᾳ: (3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$ παρατηροῦμεν ὅτι, ὅσον μεγαλύτερος λαμβάνεται ὁ δείκτης τοῦ γενικοῦ ὅρου, τόσον οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας πλησιάζουσι περισσότερον πρὸς τὸ 0. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λέγομεν ὅτι *ἡ ἀκολουθία (3) ἔχει ὅριον τὸ 0 ἢ ὅτι τείνει πρὸς τὸ μηδέν*. Ὁμοίως καὶ ἡ ἀκολουθία:

(4) $\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \pm\frac{1}{\nu}, \ldots$ ἔχει ὅριον τὸ 0. Διότι καὶ ἐνταῦθα, ἐὰν λάβωμεν ἀριθμόν τινα θετικὸν αὐθαιρέτως μικρὸν ε, θὰ ἴδωμεν ὅτι ὑπάρχει ὅρος τῆς ἀκολουθίας τοιοῦτος, ὥστε καὶ αὐτὸς καὶ πᾶς ἑπόμενός του νὰ εἶναι κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν μικρότερος τοῦ ε, π.χ. τοῦ $\frac{1}{1000}$. Καὶ πράγματι, ἀπὸ τοῦ χιλιοστοῦ πρώτου ὅρου καὶ πέραν πάντες οἱ ὅροι καὶ τῆς ἀκολουθίας (3) καὶ τῆς ἀκολουθίας (4) εἶναι κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν μικρότεροι τοῦ $\frac{1}{1000}$.

---

* Συνηθέστατα χρησιμοποιεῖται ὁ συμβολισμὸς $\lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = \omega$, ἔνθα lim εἶναι τὰ ἀρχικὰ τῆς λέξεως limite (ὅριον).

Οὕτως ἔχομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν : *Ἀπέραντος ἀκολουθία α_ν ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν ἢ τείνει πρὸς τὸ 0, ἐάν, δοθέντος ἀριθμοῦ τινος θετικοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ, εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ τιμὴ τοῦ ν τοιαύτη, ὥστε ὁ ὅρος α_ν καὶ ὅλοι οἱ ἑπόμενοί του νὰ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικρότεροι τοῦ ε* *. Τοῦτο συμβολίζεται οὕτως : $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\, \alpha_\nu = 0$.

X "Οταν μεταβλητή τις ποσότης x λαμβάνῃ ὡς τιμὰς τοὺς ἀπείρους ὅρους ἀκολουθίας α_ν, ἐχούσης ὅριον τὸ μηδέν, λέγομεν ὅτι ἡ x ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν ἢ ὅτι ἡ x *εἶναι ἀπειροστόν*.

"Εστω νῦν ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν : (5) 1,2,3,4,..., ν,.... Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ὅροι ταύτης αὐξάνουσιν, αὐξανομένου τοῦ πλήθους αὐτῶν, εἰς τρόπον ὥστε, δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου, νὰ εὑρίσκεται ὅρος τῆς ἀκολουθίας, ὅστις ὄχι μόνον αὐτὸς ἀλλὰ καὶ ἕκαστος τῶν ἑπομένων του νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ δοθέντος. Ἡ ἀκολουθία (5) λέγομεν ὅτι *ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον* ἢ *ὅτι τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον*.

Οὕτω : *Λέγομεν ὅτι ἀπέραντός τις ἀκολουθία ἀριθμῶν α_ν ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον ἢ ὅτι τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ἐὰν δοθέντος θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ Μ, ὁσονδήποτε μεγάλου, ὑφίσταται ν τοιοῦτος, ὥστε ὁ ὅρος α_ν καὶ πάντες οἱ ἑπόμενοί του νὰ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλύτεροι τοῦ Μ. Θὰ λέγωμεν δὲ ὅτι τὸ ὅριον εἶναι $+\infty$ ἢ $-\infty$, ἐὰν συμβαίνῃ ὥστε ἀπό τινος ὅρου καὶ ἐφεξῆς οἱ ὅροι νὰ εἶναι ἢ ὅλοι θετικοὶ ἢ ὅλοι ἀρνητικοί.*

X "Οταν μεταβλητή τις ποσότης x λαμβάνῃ ὡς τιμὰς τοὺς ἀπείρους ὅρους τῆς ἀκολουθίας α_ν, ἐχούσης ὅριον τὸ ἄπειρον, λέγομεν ὅτι ἡ *x ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον*. Τοῦτο συμβολίζεται οὕτως : $\text{ορ}\, x = \infty$ ἢ $x \to \infty$.

Παρατηρήσεις. "Εχοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμούς, δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι :

α) Ἡ ἀκολουθία α_ν δύναται νὰ θεωρηθῇ ἔχουσα ὅριον τὸν ἀριθμὸν ω ὅταν ἡ ἀκολουθία τῶν διαφορῶν :

$\omega - \alpha_1,\quad \omega - \alpha_2,\quad \omega - \alpha_3, \ldots\ldots,\quad \omega - \alpha_\nu \ldots\ldots$ ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν.

β) Ἐὰν ἡ ἀκολουθία α_ν ἔχῃ ὅριον τὸν ἀριθμὸν ω, ἡ ἀντίθετός της ἀκολουθία $-\alpha_\nu$ ἔχει ὅριον τὸν $-\omega$, ἤτοι:

$$\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}(-\alpha_\nu) = -\,\text{ορ}\,\alpha_\nu = -\omega$$

γ) Ἐὰν ἡ ἀκολουθία α_ν ἔχῃ ὅριον $\pm\infty$, ἡ ἀκολουθία $k\alpha_\nu$, ἔνθα k εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἔχει ἐπίσης ὅριον τὸ $\pm\infty$ ἐὰν δὲ k εἶναι ἀρνητικός, ἔχει ὅριον τὸ $\mp\infty$.

---

* Ἡ ἀκολουθία : $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \ldots\ldots, (\nu-1), \frac{1}{\nu}, \ldots\ldots$ δὲν ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, διότι δὲν δύναται νὰ προσδιορισθῇ ὅρος ταύτης τοιοῦτος ὥστε αὐτὸς καὶ πᾶς ἑπόμενός του νὰ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικρότερος θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ αὐθαιρέτως μικροῦ.

δ) Ἐὰν ἡ ἀκολουθία a_ν ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν, ἡ ἀκολουθία ka_ν, ἔνθα k πεπερασμένος τις ἀριθμός, ἔχει ὁμοίως ὅριον τὸ μηδέν.

§ 58. Θεωρήματα ἐπὶ τῶν ὁρίων τῶν ἀκολουθιῶν.

Παραθέτομεν τὰ θεωρήματα τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὰ ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν ἄνευ ἀποδείξεων, ἵνα ὁ ἀναγνώστης μὴ ἐπιβαρυνθῇ διὰ θεωριῶν μὴ ἀπαραιτήτων κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἐννοιῶν τῶν ὁρίων*.

Θεώρημα I. *Ἀκολουθία τις ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ ἔχῃ δύο διαφορετικὰ ὅρια (ἀρχὴ τοῦ ἑνιαίου ὁρίου ἀκολουθίας).*

Θεώρημα II. *Ἐὰν ἀκολουθία τις στερουμένη ὅρων ἴσων τῷ μηδενί, ἔχῃ ὅριον τὸ ἄπειρον, ἡ ἀντίστροφός της ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν καὶ ἀντιστρόφως.*

Θεώρημα III. *Ἐὰν ὁ a εἶναι θετικός τις ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος, τότε: 1) Ἡ ἀκολουθία τῶν δυνάμεών του: $a, a^2, a^3, \ldots, a^\nu, \ldots$ ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον·*

2) Ἡ ἀκολουθία τῶν ῥιζῶν τοῦ a μὲ δείκτας θετικούς: $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \ldots, \sqrt[\nu]{a}, \ldots$ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα·

3) Ἡ ἀκολουθία τῶν ῥιζῶν μὲ δείκτας ἀκεραίους ἀρνητικοὺς ἔχει ὅριον τὴν μονάδα.

Θεώρημα IV. *Ἐὰν ὁ a εἶναι θετικός τις ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος, τότε: 1) Ἡ ἀκολουθία τῶν δυνάμεών του: $a, a^2, a^3, \ldots, a^\nu, \ldots$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν·*

2) Ἡ ἀκολουθία τῶν ῥιζῶν τοῦ a μὲ δείκτας θετικούς: $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \ldots, \sqrt[\nu]{a}, \ldots$ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα·

3) Ἡ ἀκολουθία τῶν ῥιζῶν μὲ δείκτας ἀκεραίους ἀρνητικοὺς ἔχει ὅριον τὴν μονάδα.

Θεώρημα V. *Ἐὰν οἱ ὅροι ἀκολουθίας τινὸς βαίνωσιν αὐξανόμενοι καὶ συγχρόνως μένωσι μικρότεροι πεπερασμένου τινὸς ἀριθμοῦ, ἡ ἀκολουθία ἔχει ὅριον. Ὁμοίως, ἐὰν οἱ ὅροι ἀκολουθίας τινὸς βαίνωσιν ἐλαττούμενοι καὶ συγχρόνως μένωσι μεγαλύτεροι δοθέντος τινὸς ἀριθμοῦ, ἡ ἀκολουθία ἔχει ὅριον.*

§ 59. Πράξεις ἐπὶ τῶν ὁρίων τῶν ἀκολουθιῶν.

Διὰ τῶν κατωτέρω παρατιθεμένων θεωρημάτων, ὧν τὴν ἀπόδειξιν παραλείπομεν δι' οὓς λόγους ἀνεφέραμεν ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ,

* Τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἐν λόγῳ θεωρημάτων δύναται ὁ ἐνδιαφερόμενος νὰ ἀνεύρῃ εἰς οἱονδήποτε βιβλίον Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως.

ἐπιτυγχάνεται ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ὁρίου (ἐὰν ὑπάρχῃ) δοθείσης ἀκολουθίας, ὅταν ὁ γενικὸς ὅρος ταύτης εὑρίσκηται διὰ τῆς ἐκτελέσεως ὡρισμένων πράξεων ἐπὶ τῶν γενικῶν ὅρων ἄλλων ἀκολουθιῶν, ὧν τὸ ὅριον εἶναι γνωστόν.

Καλοῦμεν ἄθροισμα, διαφοράν, γινόμενον, πηλίκον κ.τ.λ. περισσοτέρων ἀκολουθιῶν, τὰς ἀκολουθίας ὧν οἱ ὅροι εἶναι ἀθροίσματα, διαφοραί, γινόμενα, πηλίκα κ.τ.λ. τῶν ὅρων οἵτινες ἀντιστοιχοῦσιν ἐν ταῖς δοθείσαις ἀκολουθίαις. Οὕτως ἀπὸ τὰς ἀκολουθίας α_ν καὶ β_ν θὰ ἔχωμεν τὰς ἀκολουθίας: $\alpha_\nu + \beta_\nu$, $\alpha_\nu - \beta_\nu$, $\alpha_\nu \cdot \beta_\nu$, $\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ διὰ $\beta_\nu \neq o$, κ.τ.λ.

Θεώρημα I. Ἐάν: $\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} \alpha_\nu = \omega_1$
$\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} \beta_\nu = \omega_2$ θὰ εἶναι καὶ

$$\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} (\alpha_\nu + \beta_\nu) = \omega_1 + \omega_2 \qquad (57)$$

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς δι' ἕνα οἱονδήποτε ἀλλὰ πεπερασμένον ἀριθμὸν ἀκολουθιῶν.

Πόρισμα. Ἐὰν Α εἶναι ποσότης σταθερὰ πεπερασμένη καὶ $\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} \alpha_\nu = \omega$, θὰ εἶναι: $\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} (\alpha_\nu + A) = \omega + A$.

Θεώρημα II. Ἐάν: $\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} \alpha_\nu = \omega_1$
$\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} \beta_\nu = \omega_2$, θὰ εἶναι καὶ

$$\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} (\alpha_\nu - \beta_\nu) = \omega_1 - \omega_2 \qquad (58)$$

Θεώρημα III. Ἐάν: $\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} \alpha_\nu = \omega_1$
$\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} \beta_\nu = \omega_2$, θὰ εἶναι καὶ

$$\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} (\alpha_\nu \cdot \beta_\nu) = \omega_1 \cdot \omega_2 \qquad (59)$$

Παρατήρησις. Ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τοῦ Θεωρ. I.

Θεώρημα IV. Ἐάν: $\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} \alpha_\nu = \omega$, ἔνθα $\omega \neq 0$, θὰ εἶναι καὶ

$$\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\omega} \qquad (60)$$

Θεώρημα V. Ἐάν: $\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} \alpha_\nu = \omega_1$
$\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} \beta_\nu = \omega_2$, ἔνθα $\omega_2 \neq 0$, θὰ εἶναι καὶ

$$\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \qquad (61)$$

§ 60. Ὅρια συναρτήσεων.

Περὶ συναρτήσεων ὡμιλήσαμεν ἐν § 26 καὶ § 28 - 30, ἔνθα ἐδόθη ὁ ὁρισμὸς τῆς συναρτήσεως καὶ καθωρίσθησαν τὰ διάφορα εἴδη τῶν συναρτήσεων. Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν τὰ ὅρια τῶν συναρτήσεων ἅτινα θὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὴν σπουδὴν τῶν παραγώγων, ἃς θὰ πραγματευθῶμεν ἐν τῷ ἀμέσως ἑπομένῳ κεφαλαίῳ.

Ἔστω $y=\sigma(x)$ συνάρτησίς τις μὲ ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x, ἥτις ὑποθέτομεν ὅτι λαμβάνει τὰς τιμάς : $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Ἐάν, εἰς τὰς τιμὰς ἃς λαμβάνει ἡ x ἀντιστοιχῶσιν αἱ τιμαὶ τῆς y : $y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots$ θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ *ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς y ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀκολουθίαν τῶν τιμῶν τῆς x*.

Ἐὰν ἡ ἀκολουθία x_ν τῶν τιμῶν τῆς x ἔχῃ ὅριον ἀριθμόν τινα α (πεπερασμένον ἢ ἄπειρον) καὶ ἡ ἀκολουθία y_ν τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς y ἔχῃ ὅριον ἀριθμόν τινα β (πεπερασμένον ἢ ἄπειρον), θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις σ(x) ἔχει ὅριον τὸν β, τοῦ x τείνοντος (ἔχοντος ὅριον) πρὸς τὸ α. Τοῦτο συμβολίζεται ὡς ἀκολούθως :

$$\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, y=\beta, \quad \text{ἢ} \quad \underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, \sigma(x)=\beta.$$

Ὁμοίως γράφοντες :

$$\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, \sigma(x)=\infty, \quad \text{ἢ} \quad \underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, \sigma(x)=0,$$

ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις ἔχει ἀντιστοίχως ὅριον τὸ ∞ ἢ τὸ 0, τῆς x ἐχούσης ὅριον τὸν α.

Πρὸς εὐκολωτέραν κατανόησιν τοῦ ὁρίου συναρτήσεως θὰ λάβωμεν διάφορα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ον. $y=\dfrac{1}{x}$.

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως ταύτης δίδει ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν (§ 47). Δίδοντες εἰς τὴν x διαφόρους τιμάς, εὑρίσκομεν ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y, ὡς οἱ κατωτέρω πίνακες *(Πίναξ 1 καὶ 2)* δεικνύουσιν.

Ὁ πρῶτος τῶν πινάκων δεικνύει ὅτι, τῆς x λαμβανούσης τιμὰς ἀρνητικὰς ἀπολύτως αὐξανομένας, ἡ συνάρτησις λαμβάνει ὁμοίως τιμὰς ἀρνητικὰς ἀπολύτως μειουμένας. Ἤτοι, ὅσον περισσότερον προχωροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονος OX', ὡς δεικνύει τὸ βέλος, *(Σχ. 32)*, ἐπὶ τοσοῦτον αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων τῆς καμπύλης τῆς παριστωμένης ὑπὸ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀπολύτως ἐλαττοῦνται, ἤτοι ἡ καμπύλη πλησιάζει συνεχῶς πρὸς τὸν ἄξονα OX'. Ὁμοίως διαπιστοῦμεν, ὅτι ὅσον πλησιάζομεν πρὸς τὸ O κινούμενοι ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονος OX', ἐπὶ τοσοῦτον αἱ τιμαὶ τῆς y αὐξάνουσι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ τείνουσι νὰ ὑπερβῶσιν οἱονδήποτε ἀριθμὸν ὁσονδήποτε μεγάλον.

Ὁ δεύτερος τῶν πινάκων δεικνύει ὅτι, ἐνῷ ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς x ἔχει ὅριον τὸ ∞, ἡ ἀντίστοιχος τῶν τιμῶν τῆς y ἀκολουθία * ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν (§ 58, Θ II.). Τοῦτο γεωμετρικῶς σημαίνει, ὅτι ὅσον ἀπομακρυνόμεθα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς

* Πρόκειται περὶ δύο ἀντιστρόφων ἀκολουθιῶν (§ 55).

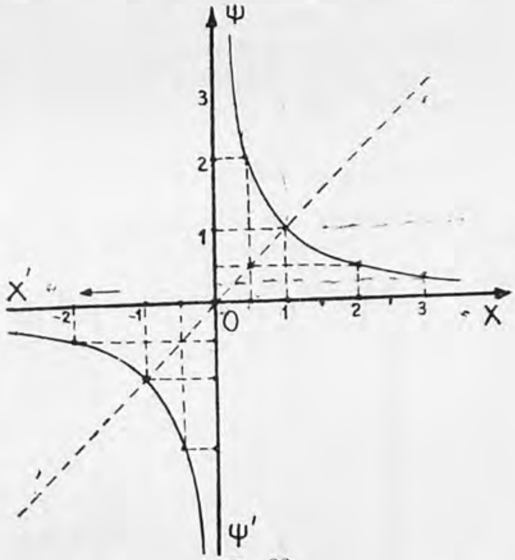
τῶν ἀξόνων κινούμενοι ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος ΟΧ, ἐπὶ τοσοῦτον καὶ ἡ καμπύλη πλησιάζει πρὸς τὸν ἄξονα Χ΄Χ, *χωρὶς ποτὲ νὰ συμπέσῃ μετὰ τούτου.* Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὸν ἄξονα Ψ΄Ψ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λέγομεν ὅτι *οἱ ἄξονες Χ΄Χ καὶ Ψ΄Ψ εἶναι ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης.*

Πίναξ 1

$y=\frac{1}{x}$	
x	y
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$
.	.
.	.
.	.
-100	$-\frac{1}{100}$
.	.
.	.
.	.
-1000	$-\frac{1}{1000}$
.	.
.	.
.	.

Πίναξ 2

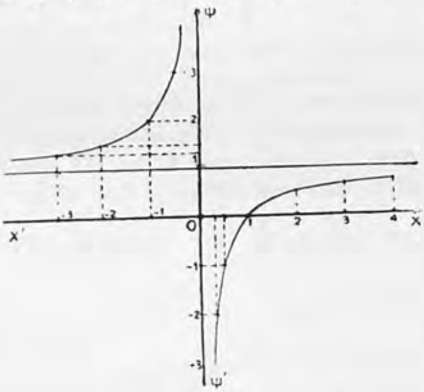
$y=\frac{1}{x}$	
x	y
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
.	.
.	.
.	.
100	$\frac{1}{100}$
.	.
.	.
.	.
1000	$\frac{1}{1000}$
.	.
.	.
.	.



Σχ. 32.

Παράδειγμα 2ον. $y=1-\frac{1}{x}$.

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως ταύ-



Σχ. 33.

Πίναξ 3

$y=1-\frac{1}{x}$	
x	y
-1	2
-2	$\frac{3}{2}$
-3	$\frac{4}{3}$
-4	$\frac{5}{4}$
.	.
.	.
.	.
-1000	$\frac{1001}{1000}$
.	.
.	.

Πίναξ 4

$y=1-\frac{1}{x}$	
x	y
1	0
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{3}{4}$
.	.
.	.
.	.
1000	$\frac{999}{1000}$
.	.
.	.

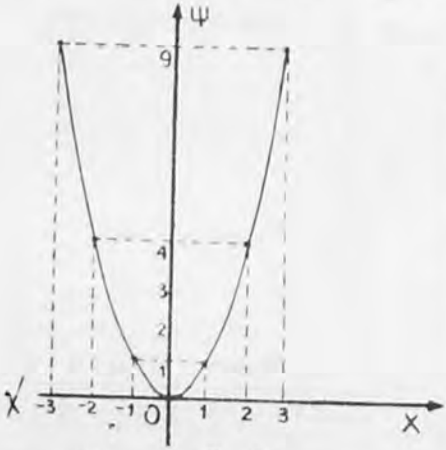
της εἶναι ἰσοσκελὴς ὑπερβολή. Ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων ἀκολουθιῶν τῶν τιμῶν τῶν x, y, *(Πίναξ 3 καὶ 4)* παρατηροῦμεν ὅτι : 1) τῆς ἀκολουθίας τῶν τιμῶν τῆς x ἐχούσης ὅριον τὸ $-\infty$, ἡ ἀντίστοιχος ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς y ἔχει ὅριον τὴν μονάδα·

2) Τῆς ἀκολουθίας τῶν τιμῶν τῆς x ἐχούσης ὅριον τὸ ∞, ἡ ἀντίστοιχος ἀκολουθία ἔχει ὅριον ὁμοίως τὴν μονάδα.

Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία εἶναι ἡ ἑξῆς: 1) *Ἡ καμπύλη ἔχει δύο κλάδους (Σχ. 33),* ἐξ ὧν ὁ εἷς ἄνωθεν τῆς εὐθείας $y=1$ καὶ ὁ ἕτερος κάτωθεν ταύτης. 2) Ἀπομακρυνόμενοι τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, ἀμφότεροι οἱ κλάδοι πλησιάζουσι συνεχῶς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $y=1$, τὴν ὁποίαν ὅμως οὐδέποτε θὰ τάμουν. Ὁμοίως πλησιάζοντες τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων ἀμφότεροι οἱ κλάδοι πλησιάζουσι συνεχῶς τὸν ἄξονα Ψ'Ψ, τὸν ὁποῖον δὲν θὰ τάμουν ποτέ. Συνεπῶς, *ἡ καμπύλη ἔχει ἀσυμπτώτους τὴν εὐθεῖαν $y=1$ καὶ τὸν ἄξονα Ψ'Ψ.*

Παράδειγμα 3ον. $y=x^2$.

Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ἐξίσωσις μιᾶς παραβολῆς (§ 45). Ἐκ τοῦ κατωτέρω πίνακος (*Πίναξ 5*) συνάγομεν ὅτι εἰς τὰς ἀκολουθίας τῶν τιμῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν τῆς x, τῶν ἐχουσῶν ὅριον τὸ $+\infty$ ἢ τὸ $-\infty$, ἀντιστοιχεῖ μία ἀκολουθία τιμῶν, τῆς y ἐχούσης ὅριον τὸ $+\infty$. Ἤτοι ἡ συνάρτησις τείνει πρὸς τὸ ∞ ὅταν ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ $\pm\infty$. Γεωμετρικῶς θὰ ἑρμηνεύσωμεν τοῦτο οὕτως: Ἐὰν ἀπομακρυνώμεθα ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, κινούμενοι ἐπὶ τῶν ἡμιαξόνων OX καὶ OX', ἡ καμπύλη ἀπομακρύνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ ἄξονος X'X (*Σχ. 34*). Ἐπὶ πλέον ἡ καμπύλη εὑρίσκεται ὁλόκληρος ἄνωθεν τοῦ ἄξονος X'X.



Σχ. 34.

Πίναξ 5

$y=x^2$	
x	y
0	0
± 1	1
± 2	4
± 3	9
.	.
.	.
.	.
±10	100
.	.
.	.
.	.

Παρατήρησις. Εἶναι δυνατὸν μία συνάρτησις y τῆς x, ὅταν ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ α, νὰ ἔχῃ ὅριον μόνον διὰ τιμὰς τῆς x μικροτέρας τοῦ α (ὅριον πρὸς τὰ ἀριστερά), ἢ μόνον διὰ τιμὰς τῆς x μεγαλυτέρας τοῦ α (ὅριον πρὸς τὰ δεξιά). Εἶναι ἐπίσης δυνατὸν τὸ ὅριον πρὸς τ' ἀριστερὰ νὰ εἶναι διάφορον τοῦ ὁρίου πρὸς τὰ δεξιά, π.χ. ἐν τῇ συναρτήσει $y=\text{εφ}x$ ὅταν ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ $\frac{\pi}{2}$ διὰ τιμὰς μικροτέρας τοῦ $\frac{\pi}{2}$, ὅριον $\text{εφ}x=+\infty$, ἐνῷ διὰ τιμὰς μεγαλυτέρας τοῦ $\frac{\pi}{2}$, ὅριον $\text{εφ}x=-\infty$.

Σημειοῦμεν, ὅτι πρὸς καθορισμὸν τοῦ ὁρίου μιᾶς συναρτήσεως y, ὅταν ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ α, δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως διὰ $x=\alpha$, ἀλλ' ἀρκεῖ ὅτι ἡ y εἶναι ὡρισμένη ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ α.

Ἐὰν ἀμφότερα τὰ ὅρια συμπίπτωσι, θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι *συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον α.* Περὶ αὐτοῦ θὰ ὁμιλήσωμεν λεπτομερῶς ἐν τῷ ἑπομένῳ κεφαλαίῳ.

§ 61. *Πράξεις ἐπὶ τῶν ὁρίων τῶν συναρτήσεων.*

Ἐπὶ τῶν ὁρίων τῶν συναρτήσεων δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν πράξεις ὁμοίας πρὸς ἐκείνας ἐπὶ τῶν ἀκολουθιῶν, βάσει τῶν κατωτέρω θεωρημάτων, ὧν τὴν ἀπόδειξιν παραλείπομεν.

Θεώρημα I. *Τὸ ὅριον τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος πεπερασμένου ἀριθμοῦ συναρτήσεων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς x, διὰ $x \to \alpha$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ὁρίων.*

Ἤτοι, ἐάν :

$$\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, \sigma_1(x) = \omega_1$$

$$\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, \sigma_2(x) = \omega_2$$

$$\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, [\,\sigma_1(x) \pm \sigma_2(x)\,] = \omega_1 \pm \omega_2 \tag{62}$$

Παράδειγμα: $\underset{x\to 1}{\text{ορ}}(x^3-2x^2+5x+1)=1-2+5+1=5.$

Θεώρημα II. *Τὸ ὅριον τοῦ γινομένου πεπερασμένου ἀριθμοῦ συναρτήσεων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς x, τῆς $x \to \alpha$, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων των.*

Ἤτοι, ἐάν :

$$\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, \sigma_1(x) = \omega_1,$$

$$\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, \sigma_2(x) = \omega_2,$$

$$\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, [\,\sigma_1(x) \cdot \sigma_2(x)\,] = \omega_1 \cdot \omega_2 \tag{63}$$

Πόρισμα. Ἐάν, $\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, \sigma(x) = \omega$

θὰ εἶναι καὶ

$$\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, [\,\sigma(x)\,]^\nu = \omega^\nu \tag{64}$$

Θεώρημα III. *Ἐὰν συνάρτησίς τις τῆς x ἔχῃ ὅριον ἀριθμόν τινα $\omega \neq 0$, τῆς $x \to \alpha$, ἡ ἀντίστροφός της ἔχει ὅριον $\dfrac{1}{\omega}$.*

Ἤτοι, ἐάν : $\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, \sigma(x) = \omega \neq 0,$

θὰ εἶναι καὶ

$$\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\, \frac{1}{\sigma(x)} = \frac{1}{\omega} \tag{65}$$

Παράδειγμα. Δοθέντος ὅτι : $\underset{x\to 2}{\text{ορ}}\,(5x^2-6x+1)=9,$

$$\underset{x\to 2}{\text{ορ}}\, \frac{1}{5x^2-6x+1} = \frac{1}{9}\cdot$$

Θεώρημα IV. *Τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου δύο συναρτήσεων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς x, τῆς $x \to \alpha$, ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῶν ὁρίων τῶν δύο συναρτήσεων, ἐφ' ὅσον τὸ ὅριον τοῦ διαιρέτου εἶναι διάφορον τῷ μηδενί.*

Ἤτοι, ἐάν :

$$\underset{x \to \alpha}{\text{ορ}}\, \sigma_1(x) = \omega_1$$

$$\underset{x \to \alpha}{\text{ορ}}\, \sigma_2(x) = \omega_2 \neq 0, \quad \text{θὰ εἶναι καὶ}$$

$$\underset{x \to \alpha}{\text{ορ}}\, \frac{\sigma_1(x)}{\sigma_2(x)} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{66}$$

Παράδειγμα. Δοθέντος ὅτι : $\underset{x \to 0}{\text{ορ}}\,(3x-5) = -5$, καὶ $\underset{x \to 0}{\text{ορ}}\,(x+6) = 6$, θὰ εἶναι :

$$\underset{x \to 0}{\text{ορ}}\, \frac{3x-5}{x+6} = -\frac{5}{6}.$$

§ 62. *Ἀξιοσημείωτα ὅρια.*

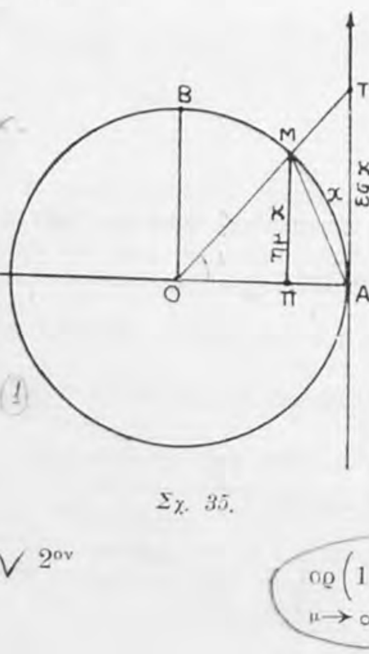
Ἐν τοῖς διαφόροις προβλήμασι τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως συναντῶνται συχνάκις τὰ κατωτέρω ὅρια :

✓ 1ον

$$\underset{x \to 0}{\text{οριον}}\, \frac{\eta\mu x}{x} = 1. \tag{67}$$

Εἰς τριγωνομετρικὸν κύκλον, ἤτοι εἰς κύκλον προσανατολισμένον ἔχοντα ἀκτῖνα ἴσην τῇ μονάδι, λαμβάνοντες τόξον ΑΜ$=x$, τοιοῦτον ὥστε, $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ θὰ ἔχωμεν (Σχ. 34) :

OA = OM = 1



Σχ. 35.

Ἐμβαδὸν τριγώνου ΟΑΜ < ἐμβαδοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΟΜ < ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΟΑΤ, ἐξ οὗ $\frac{1}{2}$ ΟΑ · ΠΜ $<\frac{1}{2}$ ΟΑ τοξ(ΑΜ) $<$ $\frac{1}{2}$ ΟΑ · ΑΤ ἢ $\eta\mu x < x < \varepsilon\varphi x$ ἢ καὶ $1 < \frac{x}{\eta\mu x} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$. Ὅταν $x \to 0$, $\sigma\upsilon\nu x \to 1$. Ὁ λόγος $\frac{x}{\eta\mu x}$ μεγαλύτερος ὢν τῆς μονάδος καὶ περιεχόμενος μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τοῦ λόγου $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ ἔχοντος ὅριον τὴν μονάδα, θὰ ἔχῃ ὡς ὅριον τὴν μονάδα, ἤτοι : $\underset{x \to 0}{\text{ορ}}\, \frac{x}{\eta\mu x} = 1$, καὶ συνεπῶς (§ 61, Θεώρ. III)

$$\underset{x \to 0}{\text{ορ}}\, \frac{\eta\mu x}{x} = 1.$$

✓ 2ον

$$\underset{\mu \to \infty}{\text{ορ}}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu} = e. \tag{62}$$

Τὸ ὅριον τοῦτο, ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ e (ὅρα ὑποσημ. σ. 80), ἰσοῦται πρὸς τὸν *ἀσύμμετρον καὶ ὑπερβατικὸν* * ἀριθμὸν e = 2,7182818284 . . . ὅστις χρησιμοποιεῖται εὐρέως ἐν τῇ Μαθηματικῇ Ἀναλύσει. Ὡς εἴδομεν (§ 51), ὁ e λαμβάνεται ὡς βάσις συστήματος λογαρίθμων, οἵτινες καλοῦνται *φυσικοὶ* ἢ *ὑπερβολικοὶ* ἢ *Νεπέρειοι λογάριθμοι* καὶ *παρίστανται* διὰ τοῦ συμβόλου ln.

3ον $$\underset{x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\alpha}{x} = \pm\infty.$$

4ον $$\underset{x \to \infty}{\text{ορ}} \frac{\alpha}{x} = 0.$$

5ον $$\underset{x \to \infty}{\text{ορ}} \alpha^x = \infty, \quad \text{διὰ } \alpha > 1.$$

6ον $$\underset{x \to \infty}{\text{ορ}} \alpha^x = 0, \quad \text{διὰ } 0 < \alpha < 1.$$

Παρατήρησις. Εἶναι δυνατόν, κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν σχετικῶν θεωρημάτων, ἡ προκύπτουσα τιμὴ διὰ τὸ ὅριον νὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ μὴ ἔχῃ ἔννοιαν, νὰ μὴ εἶναι ὡρισμένη. Ἐπὶ παραδείγματι, δοθεισῶν τῶν συναρτήσεων: $\sigma(x) = x^\alpha$, καὶ $\varphi(x) = \frac{1}{x^\beta}$, ἔνθα $\alpha > 0$, $\beta > 0$, θὰ ἔχωμεν:

$$\underset{x \to 0}{\text{ορ}}\, \sigma(x) = \underset{x \to 0}{\text{ορ}}\, x^\alpha = 0,$$

$$\underset{x \to 0}{\text{ορ}}\, \varphi(x) = \underset{x \to 0}{\text{ορ}} \frac{1}{x^\beta} = \infty,$$

$$\underset{x \to 0}{\text{ορ}}\, [\sigma(x) \cdot \varphi(x)] = \underset{x \to 0}{\text{ορ}}\, x^\alpha \cdot \text{ορ} \frac{1}{x^\beta} = 0 \cdot \infty.$$

Τὸ γινόμενον $0 \cdot \infty$ δὲν ἔχει ἔννοιαν, δὲν ἔχει ὡρισμένην τιμήν. Τὴν μορφὴν ταύτην καλοῦμεν *ἀπροσδιόριστον μορφήν*. Ἐὰν ὅμως ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι: $x^\alpha \cdot \frac{1}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$, θὰ εἶναι: $\underset{x \to 0}{\text{ορ}}\, [\sigma(x) \cdot \varphi(x)] = \underset{x \to 0}{\text{ορ}}\, x^{\alpha-\beta} = 0$, ἐὰν $\alpha > \beta$, ἢ $\underset{x \to 0}{\text{ορ}}\, x^{\alpha-\beta} = 1$, ἐὰν $\alpha = \beta$ ἢ $\underset{x \to 0}{\text{ορ}}\, x^{\alpha-\beta} = \infty$, ἐὰν $\alpha < \beta$.

Πολλάκις ἐκ τῶν πράξεων ἔχομεν καὶ ἄλλας ἀπροσδιορίστους μορφάς, ὡς εἶναι π.χ. αἱ μορφαὶ $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ κ.ο.κ. Εἶναι ὅμως δυνατόν, ὡς διεπιστώθη καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι, ἐφ' ὅσον ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα ὅριον ὡρισμένον τινὰ ἀριθμόν, νὰ εὑρεθῇ συγκεκριμένη τιμὴ διὰ τὴν συνάρτησιν, ἣν καὶ καλοῦμεν *ἀληθῆ τιμὴν* τῆς συναρτήσεως.

Παράδειγμα 1ον. $$\underset{x \to 1}{\text{ορ}} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2} = \underset{x \to 1}{\text{ορ}} \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-2)} = \underset{x \to 1}{\text{ορ}} \frac{x-5}{x-2} = \frac{-4}{-1} = 4.$$

Ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς δοθείσης συναρτήσεως διὰ $x \to 1$, εἶναι 4.

* Ὑπερβατικὸς λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὅστις δὲν εἶναι ῥίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως. Τὸ ὅτι ὁ e εἶναι ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς ἀπέδειξεν ὁ *Hermite* ἐν ἔτει 1783.

Παράδειγμα 2ον. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+7x+8}{2x^2+x-5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{7}{x}+\dfrac{8}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}} = \dfrac{1}{2}.$

Ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς δοθείσης συναρτήσεως διὰ $x \to \infty$ εἶναι $\frac{1}{2}$.

Ἐπὶ τοῦ θέματος τῶν ἀπροσδιορίστων μορφῶν θὰ ἐπανέλθωμεν μετὰ τὴν σπουδὴν τῆς παραγώγου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Δεῖξαι ὅτι αἱ κάτωθι ἀκολουθίαι ἔχουσιν ὅριον τὸ μηδέν.

1. $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, \dots, \dfrac{1}{2^\nu}, \dots$

2. $0{,}2, \quad 0{,}02, \quad 0{,}002 \quad 0{,}0002, \dots$

Δεῖξαι ὅτι αἱ κάτωθι ἀκολουθίαι ἔχουσιν ὅριον τὸ 7.

3. $7+\dfrac{1}{2}, \quad 7+\dfrac{1}{3}, \quad 7+\dfrac{1}{4}, \quad 7+\dfrac{1}{5}, \dots$

4. $7-\dfrac{1}{2}, \quad 7-\dfrac{1}{3}, \quad 7-\dfrac{1}{4}, \quad 7-\dfrac{1}{5}, \dots$

Δεῖξαι ὅτι ἡ ἀκολουθία :

5. $0{,}34, \quad 0{,}3434, \quad 0{,}343434, \dots$ ***τείνει πρὸς τὴν τιμὴν*** $\dfrac{34}{99}$.

Δεῖξαι ὅτι ἡ ἀκολουθία :

6. $0{,}7, \quad 0{,}77, \quad 0{,}777, \dots$ ***ἔχει ὅριον*** $\dfrac{7}{9}$.

Δεῖξαι ὅτι :

7. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \left(3+\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{10^2}+\dots+\dfrac{3}{10^\nu}+\dots\right) = \dfrac{30}{9}$

8. $\lim\limits_{\nu\to\infty} (\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\dots+\alpha\omega^\nu+\dots) = \dfrac{\alpha}{1-\omega}$, ἔνθα $|\omega|<1$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} (x^2-2x+5)=5$

10. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6.$

11. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2-7x-9}{x^2-2x+1} = 2.$

12. $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{\dfrac{x^3+8}{x+2}} = 2\sqrt{3}.$

Εὑρεῖν τὰ κάτωθι ὅρια :

13. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\dots+\nu^2}{\nu^3}$

14. $\underset{\varepsilon \to 0}{\text{ορ}} \dfrac{(x+\varepsilon)^3 - x^3}{\varepsilon}$

Εὑρεῖν τὰ κάτωθι ὅρια ἐκ τοῦ συγγράμματος Τ. Κεραμιδᾶ, *Μακροπρόθεσμοι Οἰκονομικαὶ πράξεις,*

15. $\underset{\mu \to \infty}{\text{ορ}} \left(1 + \dfrac{\delta}{\mu}\right)^{\mu}$ (σ. 18, ἔκδ. 1947).

16. $\underset{x \to \infty}{\text{ορ}} \dfrac{\upsilon^x}{i}$, ἔνθα $\upsilon = \dfrac{1}{1+i}$,

17. $\underset{x \to \infty}{\text{ορ}} (1 - \upsilon^x)$, ἔνθα $\upsilon = \dfrac{1}{1+i}$,

18. $\underset{n \to \infty}{\text{ορ}} (1+0{,}04)^n$.

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὴν τελικὴν ἀξίαν μιᾶς νομισματικῆς μονάδος, τοκισθείσης ἐπ' ἀνατοκισμῷ μὲ ἐπιτόκιον $i = 0{,}04$ (σ. 14).

19. $\underset{n \to \infty}{\text{ορ}} \dfrac{K_n}{(1+i)^n}$,

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὴν παροῦσαν ἀξίαν ἐν τῷ ἀνατοκισμῷ δι' ἄπειρον χρόνον (τύπος (10), σ. 26).

20. $\underset{n \to \infty}{\text{ορ}} \dfrac{1-\upsilon^n}{i}$, ἔνθα $\upsilon = \dfrac{1}{1+i}$.

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὴν παροῦσαν ἀξίαν ράντας διηνεκοῦς, ληξιπροθέσμου ἀμέσου, σ. 49.

ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ

1. *Δοθέντος ἀριθμοῦ τινος θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, π.χ.,* $\dfrac{1}{2^{100}}$, *ὁ ἑκατοστὸς δεύτερος ὅρος τῆς ἀκολουθίας καὶ πᾶς ἑπόμενός του θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ* $\dfrac{1}{2^{100}}$.

2. *Ἡ ἀκολουθία γράφεται :* $\dfrac{2}{10}, \dfrac{2}{10^2}, \dfrac{2}{10^3}, \ldots, \dfrac{2}{10^\nu}, \ldots$ *ὅτε ἀναγόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην.*

3. *Ὁ γενικὸς ὅρος τῆς ἀκολουθίας εἶναι :* $7 + \dfrac{1}{\nu}$. *Ὁ μὲν* 7 *παραμένει σταθερός, ὁ δὲ ὅρος* $\dfrac{1}{\nu}$ *ἔχει ὅριον τὸ* 0.

4. *Ὁμοίως ὡς ἡ 3.*

5. *Ὁ νιοστὸς ὅρος τῆς ἀκολουθίας εἶναι :*

$$\frac{34}{100} + \frac{34}{100^2} + \frac{34}{100^3} + \ldots + \frac{34}{100^\nu}$$ *καὶ γράφεται οὕτω :*

$$\frac{34}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots + \frac{1}{100^{\nu-1}}\right)$$

Τὸ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ἄθροισμα εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων (τὸ ν θεωρεῖται τεῖνον πρὸς τὸ ∞) φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου καὶ συνεπῶς εἶναι, συμφώνως τῷ τύπῳ $\frac{\alpha}{1-\lambda}$, $\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{100}{99}$. *Ὅριον τοῦ νιοστοῦ ὅρου* $=\frac{34}{100}\cdot\frac{100}{99}=\frac{34}{99}$. *Ἄλλως, δοθέντος ἀριθμοῦ αὐθαιρέτως μικροῦ, π.χ.,* $\frac{34}{100^{10}}$ *δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅρον τῆς ἀκολουθίας τοιοῦτον, ὥστε αὐτὸς καὶ πᾶς ἑπόμενός του νὰ διαφέρῃ τοῦ* $\frac{34}{99}$ *ὀλιγώτερον τοῦ* $\frac{34}{100^{10}}$.

6. Ὁμοίως ὡς ἡ 5.

7. Ἄθροισμα ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον 3 *καὶ λόγον* $\frac{1}{10}$.

8. Γενίκευσις τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

9. $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}(x^2-2x+5)=\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\,x^2-\text{ορ}\,2x+\text{ορ}\,5=5.$

10. $\underset{x\to 3}{\text{ορ}}\frac{x^2-9}{x-3}=\underset{x\to 3}{\text{ορ}}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\underset{x\to 3}{\text{ορ}}(x+3)=6.$

11. $\underset{x\to\pm\infty}{\text{ορ}}\frac{2-\frac{7}{x}-\frac{9}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=2.$

12. $\underset{x\to -2}{\text{ορ}}\sqrt{\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}}=2\sqrt{3}$

13. Ἐκ τῆς στοιχειώδους Ἀλγέβρας γνωρίζομεν ὅτι:
$1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$. *Οὕτως ἀναγόμεθα εἰς τὴν ἀναζήτησιν τοῦ ὁρίου:* $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^3}$, *ὅπερ ἰσοῦται μὲ* $\frac{1}{3}$.

14. $(x+\varepsilon)^3=x^3+3x^2\varepsilon+3x\varepsilon^2+\varepsilon^3$. *Τὸ ζητούμενον ὅριον εἶναι* $3x^2$.

15. Θέτοντες $\frac{\delta}{\mu}=\frac{1}{\nu}$ *θὰ ἔχωμεν:* $\left(1+\frac{\delta}{\mu}\right)^{\mu}=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\delta\nu}$

καὶ $\underset{\mu\to\infty}{\text{ορ}}\left(1+\frac{\delta}{\mu}\right)^{\mu}=\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right]^{\delta}=e^{\delta}$ (§ 61, 2ον).

16. $\frac{\upsilon^x}{i}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^x}$. $\underset{x\to\infty}{\text{ορ}}\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^x}=\frac{1}{i}\underset{x\to\infty}{\text{ορ}}\frac{1}{(1+i)^x}=\frac{1}{i}\cdot 0=0.$

17. 1, *18.* ∞

19. $\underset{n\to\infty}{\text{ορ}}\frac{K^n}{(1+i)^n}=K^n\cdot\underset{n\to\infty}{\text{ορ}}\frac{1}{(1+i)^n}=K^n\cdot\frac{1}{\infty}=0$

20. $\frac{1}{i}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

§ 63. *Συνεχεῖς συναρτήσεις.*

Μία τῶν λεπτοτέρων ἀλλὰ καὶ βασικῶν ἐννοιῶν τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως εἶναι καὶ ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας *. Ἐνταῦθα θὰ περιορισθῶμεν εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὰς καλουμένας *συνεχεῖς συναρτήσεις*.

Ἀπὸ τοῦ Καρτεσίου καὶ ἐντεῦθεν ἐδόθησαν πλεῖστοι ὅσοι ὁρισμοὶ τῆς συνεχοῦς συναρτήσεως. Οἱ ὁρισμοὶ τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν σήμερον εἰς τὰ διάφορα συγγράμματα, καίτοι φαινομενικῶς διάφοροι, εἶναι κατὰ βάσιν ὁ ὁρισμὸς τὸν ὁποῖον ἔδωσεν ἐν ἔτει 1821 ὁ *Cauchy* εἰς τὸ *Analyse Algébrique*. Ὁ *Cauchy* χαρακτηρίζει τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας ὡς μίαν στοιχειώδη σχέσιν ἱκανὴν νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ὄργανον ἐρεύνης διὰ τὴν μελέτην μιᾶς συναρτήσεως.

Πρώτην ἰδέαν τῆς συνεχοῦς συναρτήσεως λαμβάνομεν κατὰ τὴν γραφικὴν παράστασιν ταύτης. Ἐφ' ὅσον ἡ καμπύλη ἡ παριστῶσα τὴν συνάρτησιν δὲν παρουσιάζει διακοπὰς ἢ ἅλματα, λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχής· ὅταν δηλαδὴ δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν τὴν καμπύλην ἐπὶ τοῦ χιλιοστομετρικοῦ χάρτου ἑνοῦντες τὰ διάφορα σημεῖα αὐτῆς χωρὶς νὰ ὑψώσωμεν τὴν ἀκίδα τῆς μολυβδίδος **.

Ἰδέαν τῆς συνεχείας λαμβάνομεν παρακολουθοῦντες διὰ τοῦ θερμομέτρου τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὴν διάρκειαν ἑνὸς εἰκοσιτετραώρου. Ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας, θεωρουμένη ὡς συνάρτησις τοῦ χρόνου, θὰ εἶναι συνάρτησις συνεχής. Τὴν συνέχειαν δὲ ταύτην θεωροῦμεν ὡς ἑξῆς: Ἐὰν τὴν πέμπτην π.χ. ὥραν μετὰ μεσημβρίαν ἡ θερμοκρασία ἦτο 10 βαθμῶν, μετὰ πάροδον ἐλαχίστου χρόνου, π.χ. $\frac{1}{1000}$ τοῦ δευτερολέπτου, ἡ θερμοκρασία, ἐὰν μετεβλήθη, θὰ μετεβλήθη κατὰ ποσότητα ἐλαχίστην. Ἐπὶ πλέον, ἐὰν κατά τινα στιγμὴν ἡ θερμοκρασία εἶναι 12,05 καὶ εἶτα

* Ἡ σύγχρονος ἔννοια τῆς συνεχείας εἶχεν ὡς γενεσιουργὸν αἰτίαν τὰς δυσχερείας ἃς συνήντησε κατὰ τὰς ἐρεύνας του ὁ *Fourier* (ὅρα *Lebesgue*, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, 1904).

** Ὅρα *Allen*, Mathematical Analysis for Economists, London, 1953, σ. 100.

ἀνέλθῃ εἰς 12,07 εἴμεθα βέβαιοι ὅτι εἰς ἐνδιάμεσόν τινα στιγμὴν ἡ θερμοκρασία ἦτο 12,06, ἤτοι ἡ θερμοκρασία δύναται νὰ μεταβάλλεται ταχέως ἢ βραδέως, ἄνευ ὅμως ἀποτόμων ἁλμάτων (natura non facit saltus).

Τὰς συναρτήσεις μελετῶμεν πάντοτε εἴτε ἐν τῇ περιοχῇ μιᾶς ὡρισμένης τιμῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔστω $x = \alpha$, ὅτε ἡ περιοχὴ τῆς τιμῆς αὐτῆς, ἤ, ὡς ἄλλως λέγεται, τοῦ σημείου αὐτοῦ, ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ διαστήματος $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$, ἔνθα ε τυχὸν πραγματικὸς ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρός, εἴτε ἔν τινι διαστήματι ὁριζομένῳ ὑπὸ τῶν τιμῶν ἃς λαμβάνει ἡ x. Οὕτως ἡ συνάρτησις θὰ ἐξετασθῇ ἐὰν εἶναι συνεχὴς εἰς ἓν σημεῖον ἢ εἰς ἓν διάστημα.

Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = \sigma(x)$ ἥτις ἐν τῇ περιοχῇ τῆς $x = \alpha$ εἶναι ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη, ὅτε $\sigma(\alpha)$ εἶναι ἀριθμός τις ὡρισμένος καὶ πεπερασμένος. Δίδομεν μικράν τινα αὔξησιν ε εἰς τὸ α (θετικὴν ἢ ἀρνητικήν), ὅτε καὶ ἡ συνάρτησις θὰ αὐξηθῇ (ὑπὸ τὴν ἀλγεβρικὴν ἔννοιαν) κατὰ $\sigma(\alpha + \varepsilon) - \sigma(\alpha)$. Θεωροῦντες ὅτι τὸ ε τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἐὰν καὶ ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως τείνῃ ταυτοχρόνως πρὸς τὸ μηδὲν θὰ λέγωμεν ὅτι *ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν τῆς* $x = \alpha$, *ἤ, ἄλλως, εἰς τὸ σημεῖον* α. Ἡ συνάρτησις διὰ νὰ εἶναι συνεχὴς θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη ὄχι μόνον διὰ $x = \alpha$, ἀλλὰ καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x ἐν τῷ διαστήματι $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$. Ἐπὶ πλέον, θὰ πρέπῃ, *εἰς πᾶσαν πολὺ μικρὰν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, νὰ ἀντιστοιχῇ πάντοτε μία πολὺ μικρὰ αὔξησις τῆς συναρτήσεως.*

Οὕτω δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

1| *Συνάρτησίς τις λέγεται συνεχὴς διά τινα τιμὴν τῆς* $x = \alpha$, *ἐὰν ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως τείνῃ πρὸς τὸ 0 καθ' ὃν χρόνον καὶ ἡ αὔξησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς τείνει πρὸς τὸ 0*, ἤτοι :

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\text{ορ}} \left| \sigma(\alpha + \varepsilon) - \sigma(\alpha) \right| = 0.$$

Ὁ ὁρισμὸς τῆς συνεχοῦς συναρτήσεως δύναται νὰ δοθῇ καὶ οὕτω :

Συνάρτησίς τις $\sigma(x)$ *λέγεται συνεχὴς διά τινα τιμὴν τῆς* $x = \alpha$, *ἐάν* :

$$\underset{x \to \alpha}{\text{ορ}}\ \sigma(x) = \sigma(\alpha),$$

ἤτοι : ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία τιμῶν τῆς x ἔχει ὡς ὅριον τὸ α, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως ἔχουσιν ὡς ὅριον τὸ $\sigma(\alpha)$, ἐφόσον τὸ ὅριον τοῦτο ὑπάρχῃ.

Συνάρτησίς τις καλεῖται συνεχὴς εἰς διάστημά τι, ὅταν εἶναι συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς x *ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ.*

Συνάρτησίς τις μὴ οὖσα συνεχὴς διὰ τιμήν τινα τῆς x καλεῖται *ἀσυνεχὴς* διὰ τὴν τιμὴν ταύτην.

Ἀποδεικνύεται ὅτι : α) Πᾶσα ἀκεραία ρητὴ συνάρτησις (§ 29) εἶναι συνεχὴς δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

β) Αἱ ρηταὶ κλασματικαὶ συναρτήσεις (§ 29) εἶναι συνεχεῖς διὰ τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, αἵτινες δὲν μηδενίζουσι τὸν παρανομαστήν.

Αἱ συνεχεῖς συναρτήσεις ἔχουσι τὰς κατωτέρω ἰδιότητας, τὰς ὁποίας παραθέτομεν ἄνευ ἀποδείξεων.

1) Ἐὰν πλείονες συναρτήσεις σ(x), φ(x), f(x), ... εἶναι συνεχεῖς διὰ x = α, τὰ ἀθροίσματα, αἱ διαφοραί, τὰ γινόμενα αὐτῶν εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις διὰ x = α. Ἐὰν δὲ $\sigma(\alpha) \neq 0$, ὁ λόγος $\dfrac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ εἶναι ἐπίσης συνεχὴς συνάρτησις.

2) Συνάρτησις σ(x) συνεχὴς εἰς διάστημά τι (α, β), ὅταν τὸ x μεταβάλλεται μεταξὺ α καὶ β, λαμβάνει τοὐλάχιστον ἅπαξ, πᾶσαν τιμὴν περιεχομένην μεταξὺ σ(α) καὶ σ(β).

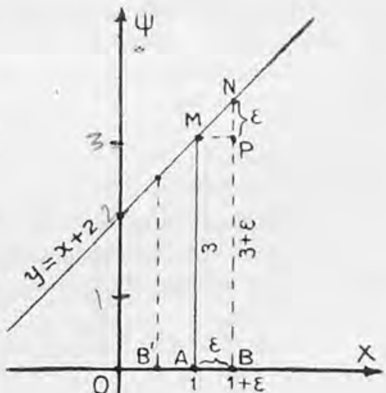
3) Ἐὰν ἡ συνάρτησις σ(x) εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α, β), διὰ μίαν τοὐλάχιστον τιμὴν τῆς x μεταξὺ α καὶ β λαμβάνει τιμὴν μεγαλυτέραν ὅλων τῶν ἄλλων τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνει εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα. Ἐπίσης, διὰ μίαν τοὐλάχιστον τιμὴν τῆς x λαμβάνει μίαν τιμὴν μικροτέραν ὅλων τῶν ἄλλων.

4) Ἐὰν σ(α) καὶ σ(β) εἶναι ἑτερόσημοι, ἡ συνάρτησις μηδενίζεται τοὐλάχιστον ἅπαξ διὰ μίαν τιμὴν τῆς x μεταξὺ α καὶ β.

Παραδείγματα

1ον *Ἡ συνάρτησις $y=x+2$ εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x.*

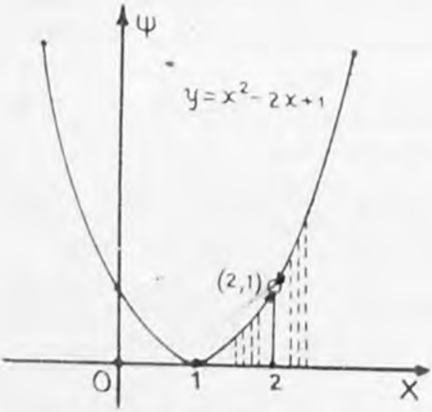
Ἐξετάσωμεν ἐὰν ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι συνεχὴς διὰ τυχοῦσαν τιμὴν τῆς x, ἔστω x=1. Εἰς τὴν ἐν λόγῳ τιμὴν τῆς x ἀντιστοιχεῖ διὰ τὴν συνάρτησιν ἡ τιμὴ y=3. Ἐὰν εἰς τὴν τιμὴν τῆς x δοθῇ μικρὰ αὔξησις ε, θέτοντες ἐν τῇ συναρτήσει τὴν νέαν τιμὴν τῆς x, 1+ε, εὑρίσκομεν διὰ τὴν συνάρτησιν τὴν τιμὴν 3+ε, ἤτοι ὅτι ἡ συνάρτησις ηὐξήθη ὁμοίως κατὰ ποσότητα ε. Ἐὰν $\varepsilon \to 0$, τότε καὶ ἡ νέα τιμὴ τῆς y, ἡ 3 + ε, θὰ τείνῃ πρὸς τὴν ἀρχικὴν τιμὴν 3, ἄρα ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχὴς διὰ τιμὴν x = 1. Ἐπειδὴ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τῆς x, λέγομεν ὅτι *εἶναι συνεχὴς εἰς ὁλόκληρον τὸ πεδίον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.*



Σχ. 36.

Γεωμετρικῶς ἡ συνέχεια τῆς συναρτήσεως διαπιστοῦται ὡς ἀκολούθως :

Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις παριστᾷ εὐθεῖαν *(Σχ. 36)*. Ἔστω δὲ ὅτι OA=1, OB=1+ε, AM=3, BN=3+ε, ὅτε καὶ PN=BN−AM=ε. Ὅταν τὸ B πλησιάζῃ συνεχῶς τὸ Α, τότε καὶ τὸ Ν πλησιάζει συνεχῶς τὸ Μ, ὁμαλῶς, κανονικῶς, χωρὶς ἅλματα. Τὸ αὐτὸ θὰ συνέβαινεν, ὅταν τὸ ε ἐλαμβάνετο ἀρνητικόν, ἤτοι ὅταν ἀντὶ τοῦ Β ἐλαμβάνετο τὸ Β'.



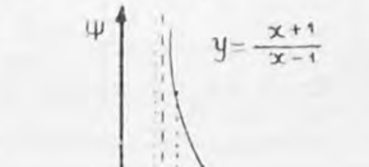
Σχ. 37.

2ον *Ἡ συνάρτησις $y=x^2-2x+1$ εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν $x=2$.*

Πράγματι, ἐὰν τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τῆς x αὐξήσωμεν κατὰ μικρὰν ποσότητα ε, ἡ συνάρτησις θὰ αὐξηθῇ κατὰ τὴν ποσότητα : $(2+\varepsilon)^2-2(2+\varepsilon)+1-(2^2-2\cdot 2+1)=\varepsilon^2+2\varepsilon$ καὶ συνεπῶς, τοῦ ε τείνοντος πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως $\varepsilon^2+2\varepsilon$ τείνει ὁμοίως πρὸς τὸ μηδέν. Ἐὰν λάβωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως (*Σχ.* 37), βλέπομεν ὅτι ἡ καμπύλη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (2,1) καὶ ὅσον αἱ τιμαὶ τῆς x πλησιάζουσι πρὸς τὴν τιμὴν 2, τόσον καὶ ἡ y πλησιάζει συνεχῶς πρὸς τὴν τιμὴν 1. Ἡ συνάρτησις κατὰ συνέπειαν εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν τοῦ $x=2$ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἡ *συνάρτησις εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $x=2$.*

3ον *Ἡ συνάρτησις* $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ *εἶναι ἀσυνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν* $x=1$.

Τοῦτο διότι δὲν εἶναι ὡρισμένη διὰ $x=1$. Ἐκ τῆς γραφικῆς ἐξ ἄλλου παραστάσεως τῆς συναρτήσεως, ἥτις εἶναι ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ (*Σχ.* 38), καταδεικνύεται ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι ἀσυνεχὴς διὰ $x=1$. Καὶ διὰ πᾶσαν ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν θὰ ἔχωμεν ὅτι αὕτη θὰ εἶναι ἀσυνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν τῆς x, ἥτις ὁρίζεται ὡς τομὴ τοῦ ἄξονος τῶν x μετὰ τῆς ἀσυμπτώτου τῆς καμπύλης τῆς παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν y.



Σχ. 38.

4ον *Ἔστω ἡ συνάρτησις E(x)**, *τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἰσοῦται πρὸς τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον τὸν περιεχόμενον ἐν τῇ τιμῇ τῇ διδομένῃ εἰς τὴν x.*

Ἐκ τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὰς τιμὰς τῆς x :

$0,\ 1,\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ -\frac{2}{5}\ \ldots$ ἀντιστοιχοῦσι διὰ τὴν συνάρτησιν αἱ τιμαί :

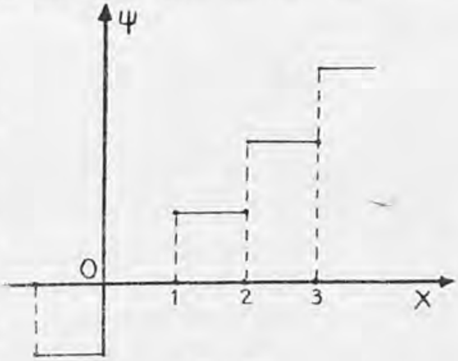
$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ -1,\ldots$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως ταύτης, θὰ ἴδωμεν ὅτι αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x

* Ἡ συνάρτησις αὕτη καλεῖται συνάρτησις τοῦ Legendre.

(Σχ. 39). Ἐξ ἑκάστου τῶν τμημάτων τούτων μεταβαίνομεν εἰς τὸ διαδοχικόν του οὐχὶ κατὰ τρόπον συνεχῆ, ἀλλὰ δι' *ἅλματος*, ἤτοι κατὰ τρόπον *ἀσυνεχῆ*. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑκάστου τμήματος ἡ πορεία εἶναι κανονικὴ καὶ *συνεχής*.

Ἡ συνάρτησις αὕτη, ἥτις λόγῳ τοῦ σχήματός της καλεῖται *κλιμακωτὴ συνάρτησις*, διευκρινίζει ἀκόμη περισσότερον τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας, διότι καταδεικνύει ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συνεχείας θὰ πρέπῃ, διὰ νὰ μεταβῶμεν ἐκ μιᾶς τιμῆς τῆς συναρτήσεως εἰς ἄλλην, νὰ διέλθωμεν ἐξ ὅλων τῶν ἐνδιαμέσων τιμῶν, πρᾶγμα ὅπερ ἀποκλείει τὰ ἅλματα.



Σχ. 39.

§ 64. Σύγκρισις αὐξήσεων συναρτήσεως καὶ ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.—Ἔννοια τῆς παραγώγου.

Ἐν τῷ καθορισμῷ τῆς ἐννοίας τῆς συναρτήσεως (§ 26) ἐτονίσθη ὅτι εἰς τὴν Μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν δὲν ἐνδιαφέρει ἡ μεταβολὴ αὐτὴ καθ' ἑαυτὴν μιᾶς ποσότητος μεταβλητῆς, ἀλλ' ἡ μεταβολὴ ἡ ἐπερχομένη εἰς ἄλλας ποσότητας μεταβλητὰς συνδεομένας μετὰ τῆς πρώτης κατὰ ὡρισμένον τινὰ τρόπον συνιστῶντα συνάρτησιν.

Ὅθεν, προκειμένου περὶ συναρτήσεως μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, τὸ ἐνδιαφέρον ἐντοπίζεται εἰς τὴν παρακολούθησιν τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως ἐν σχέσει πρὸς τὰς μεταβολὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἤ, ἂν χρησιμοποιήσωμεν τὰ γνωστὰ σύμβολα, τῶν μεταβολῶν τῆς y ὡς πρὸς τὰς μεταβολὰς τῆς x.

Εἶναι δυνατὸν νὰ παρακολουθήσωμεν τὰς μεταβολὰς τῆς y ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰς μεταβολὰς τῆς x ἔχοντες τὸν πίνακα τιμῶν ἃς λαμβάνει ἡ y, ὅταν εἰς τὴν x δίδωμεν ὡρισμένας τιμάς. Ὁ τρόπος οὗτος ἀπαιτεῖ πολλὰς πράξεις, δι' ὃ πρακτικῶς ἀποβαίνει δυσχερής. Τὴν δυσχέρειαν ταύτην παρακάμπτει ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη χάρις εἰς τὴν *παράγωγον* περὶ ἧς λεπτομερῶς κατωτέρω.

Ἡ σύγκρισις δύο μεγεθῶν παριστωμένων δι' ἀριθμῶν γίνεται εἴτε δι' ἀφαιρέσεως, εἴτε διὰ διαιρέσεως. Καὶ ἡ μὲν ἀφαίρεσις δίδει τὰς μονάδας καθ' ἃς τὸ ἓν ποσὸν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἑτέρου, ἡ δὲ διαίρεσις δίδει τὸν λόγον τῶν δύο μεγεθῶν, τὸ ποσάκις τὸ ἓν ποσὸν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἑτέρου. Π.χ. πρὸς σύγκρισιν τῶν δύο ἀριθμῶν 20 καὶ 5, ἢ θὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ 20 εἶναι κατὰ 15 μονάδας μεγαλύτερος τοῦ 5, ἢ θὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ 20 εἶναι τετράκις μεγαλύτερος τοῦ 5. Ἐν προκειμένῳ, κατωτέρω, χρησιμοποιεῖται ἡ διὰ διαιρέσεως σύγκρισις, διότι, ὡς θὰ ἴδωμεν, πλὴν τῆς ὡς πρὸς τὸ μέγεθος συγκρίσεως ἀνταποκρίνεται καὶ εἰς ἄλλα οὐσιώδη χαρακτηριστικὰ τῶν φαινομένων.

Ἔστω ἤδη ἡ συνεχὴς καὶ μονότιμος συνάρτησις $y = \sigma(x)$ καὶ δώσωμεν εἰς τὴν x ὡρισμένην τινὰ τιμὴν x_1. Ἡ συνάρτησις θὰ λάβῃ ἀντίστοιχον τιμὴν y_1. Οὕτω θὰ ἔχωμεν $y_1 = \sigma(x_1)$. Ἐὰν ἡ x μεταβληθῇ κατὰ τρόπον συνεχῆ καὶ ἀντὶ τῆς τιμῆς x_1 λάβῃ τὴν τιμὴν $x_1 + \varepsilon$, ἔνθα ὁ ε εἶναι ἀριθμὸς πραγματικὸς πολὺ μικρός, ἡ y θὰ λάβῃ, ἐν γένει, μίαν νέαν τιμὴν $y_1 + k$, εἰς τρόπον ὥστε $y_1 + k = \sigma(x_1 + \varepsilon)$.

Ὁ ε δυνατὸν νὰ εἶναι θετικός, ἀλλὰ δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ ἀρνητικός. Ἐὰν ὁ k εὑρεθῇ ὁμόσημος πρὸς τὸν ε, τότε λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $y = \sigma(x)$ εἶναι *αὔξουσα* (ὅρα § 33) διὰ τὴν τιμὴν $x = x_1$. Ἐάν, τοὐναντίον, οἱ ε καὶ k εἶναι ἑτερόσημοι, τότε λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι *φθίνουσα*. Ἤτοι, *ἐὰν ὁ λόγος* $\frac{k}{\varepsilon}$ *εἶναι θετικός, ἡ συνάρτησις λέγεται αὔξουσα, ἐὰν δὲ εἶναι ἀρνητικὸς ἡ συνάρτησις λέγεται φθίνουσα, διὰ τὴν τιμὴν* x_1 *ἣν ἐθεωρήσαμεν τῆς* x *ἤ, ὡς ἄλλως λέγομεν, διὰ τὸ σημεῖον* x_1. Τοῦτο δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ἄλλως: Ἐὰν ἡ x αὐξάνῃ κατὰ τρόπον συνεχῆ μεταβαίνουσα ἔκ τινος τιμῆς x_1 εἰς ἄλλην μεγαλυτέραν της, καθ' ὃν χρόνον ἡ y αὐξάνει, λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι *αὔξουσα* διὰ $x = x_1$· ἐὰν δὲ συμβαίνῃ τὸ ἀντίθετον ἡ συνάρτησις εἶναι *φθίνουσα*.

Ὁ λόγος $\frac{k}{\varepsilon}$ εἶναι ἀριθμός τις ἀλγεβρικὸς ἔχων ὡρισμένον σημεῖον καὶ μέγεθος. Καὶ τὸ μὲν σημεῖον καθορίζει τὸ *ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα*, πρᾶγμα οὐσιῶδες, ἀφοῦ οὕτως ἔχομεν κριτήριον δι' οὗ δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν τὴν πρὸς τὰ ἄνω ἢ κάτω πορείαν τοῦ ὑπὸ ταύτης ἐκφραζομένου φαινομένου. Τὸ δὲ μέγεθος $\frac{k}{\varepsilon}$ καθορίζει *τὴν ταχύτητα μεθ' ἧς ἡ συνάρτησις αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται, ὅταν ἡ* x *μετὰ τὴν τιμὴν* x_1 *λάβῃ τὴν τιμὴν* $x_1 + \varepsilon$. Πράγματι δέ, ἐὰν ὁ λόγος οὗτος εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀρκετὰ μέγας, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς y εἶναι πολὺ μεγάλη ἐν σχέσει πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς x καὶ συνεπῶς ἡ αὔξησις ἢ ἐλάττωσις τῆς y εἶναι ταχεῖα. Ἀντιθέτως, ἐὰν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ὁ λόγος $\frac{k}{\varepsilon}$ εἶναι πολὺ μικρός, ἡ αὔξησις ἢ ἐλάττωσις τῆς y εἶναι βραδεῖα. *Ἡ ἔνδειξις τῆς ταχύτητος μεθ' ἧς μεταβάλλεται ἡ συνάρτησις ἐν σχέσει πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἀποτελεῖ στοιχεῖον χρησιμώτατον κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν συναρτήσεων ἢ τῶν δι' αὐτῶν σπουδαζομένων φαινομένων.*

Ἀμφότεραι αἱ ἐνδείξεις αὗται, αἱ παρεχόμεναι ὑπὸ τοῦ λόγου $\frac{k}{\varepsilon}$, ὡς πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως, τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς μεταβαλλομένης, δὲν ἔχουσιν ἔννοιαν εἰμὴ μόνον ἐφόσον αἱ ποσότητες k καὶ ε εἶναι πολὺ μικραί.

Πρὸς κατανόησιν ἂς λάβωμεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα. Τραῖνον κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς ὥρας διήνυσεν ἀπόστασιν 100 χιλιομέτρων. Ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι ἡ διαρκής, ἡ ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν τῆς διαδρομῆς, ὡριαία ταχύτης τοῦ τραίνου εἶναι 100 χιλιομέτρων, διαπράττομεν σφάλμα, διότι τὸ τραῖνον κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς μιᾶς ὥρας θὰ εἶχεν ἄλλοτε μικροτέραν καὶ ἄλλοτε μεγαλυτέραν ταχύτητα τῶν 100 χιλ. λόγῳ τῶν στροφῶν, ἀνωφερειῶν, κατωφερειῶν κτλ. Ἐὰν ὅμως ἡ ταχύτης τοῦ τραίνου ἐξετασθῇ δι' ὡρισμένην στιγμὴν καὶ διὰ πολὺ μικρὸν χρονικὸν διάστημα, π.χ. δι' $1/_{10}$ τοῦ λεπτοῦ, διαιροῦντες τὸ διανυθὲν διάστημα διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου εὑρίσκομεν τὴν ταχύτητα τοῦ τραίνου κατὰ τὴν στιγμὴν ἐκείνην μετὰ μεγίστης προσεγγίσεως, μετ' ἀκριβείας δύναταί τις εἰπεῖν, καθόσον εἰς πολὺ μικρὸν χρονικόν τι διάστημα ὁ χρόνος δὲν ἐπαρκεῖ διὰ τὴν μεταβολὴν τῆς ταχύτητος.

Ὁ λόγος $\frac{k}{\varepsilon}$ δὲν σπουδάζεται θεωρουμένων ἁπλῶς τῶν k καὶ ε ὡς πολὺ μικρῶν ποσοτήτων, ἤτοι στατικῶς, ἀλλ' ὡς δυναμένων συνεχῶς νὰ ἐλαττοῦνται, ἤτοι ὡς ἐχόντων ὅριον τὸ μηδέν. Οὕτως, ἐνδιαφερόμενοι πάντοτε διὰ τὰς τιμὰς τοῦ λόγου $\frac{k}{\varepsilon}$, θὰ πρέπῃ νὰ γνωρίζωμεν τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει ὁ λόγος οὗτος ὅταν ἀμφότεραι αἱ αὐξήσεις ε καὶ k τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν.

Ὁ λόγος $\frac{k}{\varepsilon}$, *ὡς καθωρίσθη ἀνωτέρω, δίδει τὴν βασικὴν ἔννοιαν τῆς παραγώγου, εἶναι ἡ grosso modo παράγωγος.*

§ 65. *Ὁρισμὸς τῆς παραγώγου.*

Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = x^2$. Δίδοντες εἰς τὴν x μίαν ὡρισμένην τιμήν, π.χ. $x = 5$, ἔχομεν διὰ τὴν y τὴν τιμὴν 25. Ἐν συνεχείᾳ, δίδοντες εἰς τὴν x μίαν νέαν τιμήν, ἔστω $5+\frac{1}{10}$, ἥτις διαφέρει τῆς προηγουμένης κατὰ $\frac{1}{10}$, εὑρίσκομεν διὰ τὴν y τὴν τιμὴν $\left(5+\frac{1}{10}\right)^2$, ἤτοι $26\frac{1}{100}$, ἥτις διαφέρει τῆς πρώτης τιμῆς τῆς y κατὰ $1\frac{1}{100}$. Συγκρίνωμεν ἤδη τὰς δύο αὐξήσεις καὶ εὕρωμεν τὸν λόγον τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, τὸν $\frac{k}{\varepsilon}$, ὅστις ἐνταῦθα εἶναι:

$$\frac{1\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}} = \frac{\frac{101}{100}}{\frac{1}{10}} = 10{,}10.$$

Ἐκ τῆς τοιαύτης συγκρίσεως τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν μικρὰν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς *ἐπάγεται σχέσις παράγωγος, ἀριθμός*, δίδων *τὴν ποσοστιαίαν* (τὸ ποσάκις) *αὔξησιν τῆς y ἐν σχέσει πρὸς τὴν δοθεῖσαν αὔξησιν τῆς x*, καὶ εἶναι, ὡς προελέχθη, ἡ grosso modo παράγωγος. χονδρικῶς.

Ἐὰν ἀντὶ τῆς τιμῆς $5 + \frac{1}{10}$, ἣν ἐδώσαμεν προηγουμένως εἰς τὴν x, δώσωμεν τὴν τιμὴν $5 + \frac{1}{100}$, θὰ εὕρωμεν ὅτι $\frac{k}{\varepsilon} = 10{,}01$ καὶ ἐὰν λαμβάνωμεν ὁλοὲν μικροτέραν τὴν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὁ λόγος $\frac{k}{\varepsilon}$ θὰ πλησιάζῃ ὁλοὲν περισσότερον πρὸς τὴν τιμὴν 10.

Γενικῶς: Θεωρήσωμεν ἐν τῇ συναρτήσει $y = x^2$ διὰ τὸ x τὴν ὡρισμένην τιμὴν x_0 * ὅτε θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν y μίαν ὡρισμένην τιμήν, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν τιμὴν ταύτην, ἣν καὶ παριστῶμεν, κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὸ x_0, διὰ y_0 ὅτε: $y_0 = x_0^2$. Ἐν συνεχείᾳ δώσωμεν εἰς τὴν x μίαν νέαν τιμὴν $x_0 + \varepsilon$, ἔνθα διὰ τοῦ ε παριστῶμεν ὡρισμένον καὶ πραγματικὸν ἀριθμόν, ὅστις ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο διαφορετικῶν τιμῶν ἃς ἔλαβεν ἡ x. Ἐὰν $y_0 + k$ παριστᾷ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν $x_0 + \varepsilon$, ὅτε $y_0 + k = (x_0 + \varepsilon)^2$, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{k}{\varepsilon} = \frac{(x_0 + \varepsilon)^2 - x_0^2}{\varepsilon} = \frac{x_0^2 + 2x_0\varepsilon + \varepsilon^2 - x_0^2}{\varepsilon} = 2x_0 + \varepsilon.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὸ ὅριον τοῦ λόγου τούτου, θεωροῦντες πλέον ὅτι τὸ ε μεταβάλλεται καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν θὰ ἔχωμεν:

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\text{ορ}} \frac{k}{\varepsilon} = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{ορ}}(2x_0 + \varepsilon) = 2x_0$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\text{ορ}} \frac{k}{\varepsilon} = 2x_0$$

* Τὸ x_0 δὲν ἔχει ἄλλην σημασίαν πλὴν τοῦ ὅτι παριστᾷ μίαν ὡρισμένην τιμὴν ἣν ἔλαβεν ἡ x. Δηλαδή, ἀντὶ νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ x ἔλαβε τὴν τιμὴν 1, 2, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, κ.τ.λ. λέγομεν x_0, ἐννοοῦντες τὴν ὡρισμένην τιμὴν τὴν ὁποίαν ἀρχικῶς ἔλαβεν ἡ x. Τὴν αὐτὴν σημασίαν ἔχουσι καὶ τὰ σύμβολα x_1, x_2, x_3, ...

Τὸ ὅριον τοῦ $\frac{k}{\varepsilon}$, *τὸ* $2x_0$, *εἶναι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως* $y=x^2$ *διὰ τὴν τιμὴν τῆς* $x=x_0$. Π.χ. ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως ταύτης διὰ τὴν τιμὴν τῆς $x=x_0=5$ εἶναι $2\cdot 5=10$.

Ὁμοίως: Ἔστω ἑτέρα τις συνάρτησις $y=x^3+1$. Δίδοντες εἰς τὴν x διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 2 καὶ $2+\varepsilon$ λαμβάνομεν:

$$\frac{k}{\varepsilon}=\frac{[(2+\varepsilon)^3+1]-(2^3+1)}{\varepsilon}=\frac{2^3+3\cdot 2^2\cdot\varepsilon+3\cdot 2\cdot\varepsilon^2+\varepsilon^3+1-2^3-1}{\varepsilon}= \quad = 12$$

$$=3\cdot 2^2+3\cdot 2\cdot\varepsilon+\varepsilon^2. \quad 12+6\varepsilon+\varepsilon^2$$

$\varepsilon \to$ ορ $\frac{k}{\varepsilon}$

Ἐὰν εἰς τὴν x δώσωμεν τὰς τιμὰς 5 καὶ $5+\varepsilon$ καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις θὰ εὕρωμεν $\frac{k}{\varepsilon}=3\cdot 5^2+3\cdot 5\cdot\varepsilon+\varepsilon^2$. Οὕτω διαπιστοῦται ὅτι ὁ λόγος τῶν δύο αὐξήσεων k καὶ ε ἐξαρτᾶται τόσον ἐκ τοῦ ε ὅσον καὶ ἐκ τῆς ἀρχικῆς τιμῆς τὴν ὁποίαν ἐδώσαμεν εἰς τὴν x, ἐνταῦθα ἐκ τοῦ 2 καὶ 5. Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ ε τείνει πρὸς τὸ 0, διὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν: $\underset{\varepsilon\to 0}{\text{ορ}}\frac{k}{\varepsilon}=3\cdot 2^2=12$,

διὰ δὲ τὴν δευτέραν: $\underset{\varepsilon\to 0}{\text{ορ}}\frac{k}{\varepsilon}=3\cdot 5^2=75$.

Ἐὰν ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5 θέσωμεν 8, 10, κ.τ.λ. θὰ εὕρωμεν ἀντιστοίχως:

$\underset{\varepsilon\to 0}{\text{ορ}}\frac{k}{\varepsilon}=3\cdot 8^2$, $\underset{\varepsilon\to 0}{\text{ορ}}\frac{k}{\varepsilon}=3\cdot 10^2$, κ.ο.κ.

Ἡ εὕρεσις τῆς παραγώγου διὰ τῆς ἐκτελέσεως πράξεων ὡς ἄνω δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς x, ἐν δοθείσῃ συναρτήσει, ἀποβαίνει ἐπίπονος, δι' ὃ κατωτέρω διὰ γενικῆς μεθόδου *ἀναζητοῦμεν τύπους*, δι' ὧν, ἀντικαθιστῶντες τὴν σχετικὴν τιμὴν τῆς x, νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{k}{\varepsilon}$ ἀμέσως.

Γενικεύοντες, θεωροῦμεν ὡς πρώτην τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς τὴν x καὶ ὡς δευτέραν τοιαύτην τὴν $x+\Delta x$, ἔνθα τὸ Δx παριστᾷ μικρὰν αὔξησιν (θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν) τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x. Ἀντιστοίχως θεωροῦμεν διὰ τὴν συνάρτησιν ὡς πρώτην τιμὴν τὸ y καὶ ὡς δευτέραν τὸ $y+\Delta y$, ἔνθα Δy παριστᾷ τὴν αὔξησιν (θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν) τῆς συναρτήσεως y. Οὕτως, ἀντὶ τοῦ λόγου $\frac{k}{\varepsilon}$ θὰ ἔχωμεν τὸν λόγον $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ὁρισμός. *Τὸ ὅριον τοῦ λόγου* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, *ἤτοι τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἐφόσον ὑπάρχει, τοῦ* $\Delta x\to 0$, *εἶναι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως y διὰ τὴν θεωρηθεῖσαν τιμὴν x τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.*

Ἡ παράγωγος συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου y' ἢ $\sigma'(x)$ ἤτοι :

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \sigma'(x)$$

Παράδειγμα: Θεωρήσωμεν τὸν τύπον τοῦ ἁπλοῦ τόκου, $I=Kni$, ἔνθα I ὁ τόκος, K τὸ κεφάλαιον, n ὁ χρόνος καὶ i τὸ ἐπιτόκιον. Ἐὰν τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος θεωρηθῶσιν ὡς σταθερά, π.χ. $K=1$, $n=3$, ὁ τόκος θὰ εἶναι συνάρτησις τοῦ ἐπιτοκίου i. Ἔστω ὅτι ἀρχικῶς τὸ ἐπιτόκιον ἦτο $4\,^0/_0$ καὶ κατόπιν ἐγένετο $4{,}05\,^0/_0$. Θὰ ἔχωμεν :

$$i=0{,}04,\quad i+\Delta i^{*}=0{,}0405,\quad \Delta i=0{,}0405-0{,}04=0{,}0005,\quad I=3.0{,}04=0{,}12,$$

$$I+\Delta I=3.0{,}0405=0{,}1215,\quad \Delta I=0{,}0015,\quad \frac{\Delta I}{\Delta i}=\frac{0{,}0015}{0{,}0005}=3,\quad \underset{\Delta i \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta I}{\Delta i}=3.$$

ἤτοι ἡ παράγωγος τῆς θεωρηθείσης συναρτήσεως διὰ τὴν τιμὴν 0,04 τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς i εἶναι 3, ἤτοι ἡ αὔξησις τοῦ τόκου εἶναι τριπλασία τῆς αὐξήσεως τοῦ ἐπιτοκίου.

Οὐσιώδεις παρατηρήσεις. 1) Παράγωγος ὑπάρχει ἐφόσον ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ἔχει ὅριον, διὰ $\Delta x \to 0$.

2) Ἡ συνέχεια συναρτήσεώς τινος εἶναι συνθήκη ἀναγκαία, οὐχὶ ὅμως καὶ ἱκανὴ διὰ τὴν ὕπαρξιν παραγώγου.

3. Ὁ δοθεὶς ὁρισμὸς τῆς παραγώγου ἰσχύει διὰ μονοτίμους συναρτήσεις.

4. Ἡ παράγωγος συναρτήσεως ἢ θὰ εὑρεθῇ διά τινα ὡρισμένην τιμὴν τῆς x, ἢ θὰ εὑρεθῇ κατὰ γενικὸν τύπον, ἤτοι διὰ τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τῆς x, ὅτε ἀντικαθιστωμένου τοῦ x διά τινος τιμῆς του εὑρίσκομεν τὴν παράγωγον διὰ τὴν τιμὴν ταύτην.

5) Δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι δυνατὸν δι' ἄλλας μὲν τιμὰς τῆς x νὰ ἔχῃ παράγωγον καὶ δι' ἄλλας νὰ μὴ ἔχῃ.

Παραδείγματα εὑρέσεως παραγώγου.

1. ***Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως :*** $y=2x+1$.

Ἔχομεν · $$y'=\underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{[2(x+\Delta x)+1]-(2x+1)}{\Delta x}=\underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{2\Delta x}{\Delta x}=2.$$

2. ***Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως*** $y=x^2$ ***διὰ*** $x=2$.

Εὑρίσκομεν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως διὰ τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τῆς x ἤ,

---

* Ἀντὶ ε ἢ Δx γράφομεν Δi. Ἐὰν ἐπρόκειτο δι' αὔξησιν τοῦ n θὰ εἴχομεν Δn, δι' αὔξησιν τοῦ I, ΔI κ.ο.κ.

ώς ἄλλως λέγομεν, εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον x καὶ ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς παραγώγου διὰ x=2.

Ἔχομεν :

$$y' = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} (2x + \Delta x) = 2x,$$

ἤτοι, $y' = 2x$ καὶ διὰ $x=2$, $y' = 2 \cdot 2 = 4$.

Πρὸς διάκρισιν τῆς τιμῆς τῆς παραγώγου διά τινα ὡρισμένην τιμὴν τῆς x, π.χ., x=2, χρησιμοποιοῦμεν τὸν συμβολισμόν: $y'_{x=2} = 4$ ἢ καὶ $(x^2)'_{x=2} = 4$.

β. Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως $y = 2x^3 + 1$ *διὰ* $x = 0$.

Ἔχομεν :

$$y' = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{2(x+\Delta x)^3 + 1 - (2x^3 + 1)}{\Delta x} =$$

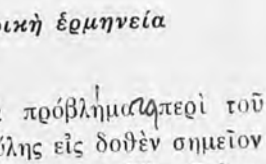
$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{2x^3 + 2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot \Delta x + 2 \cdot 3 \cdot x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 + 1 - 2x^3 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} [2 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2] = 6x^2$$

καὶ $$y'_{x=0} = (6x^2)_{x=0} = 0.$$

§ 66. Ἐφαπτομένη καμπύλης — Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς παραγώγου.

Τὸ ἐξαιρετικὸν ἐνδιαφέρον διὰ τὰ μαθηματικὰ πρόβλημα περὶ τοῦ τρόπου καθ᾽ ὃν δύναται νὰ ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη καμπύλης εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς, ὑπῆρξεν ἡ γενεσιουργὸς αἰτία τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ. Ἐν τῇ ἀναζητήσει τοῦ τρόπου καθ᾽ ὃν δύναται νὰ ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη εἰς σημεῖον καμπύλης τινὸς διετυπώθησαν ὑπὸ τοῦ *Newton* καὶ *Leibniz* αἱ πρῶται ἔννοιαι τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ *.



Σχ. 40.

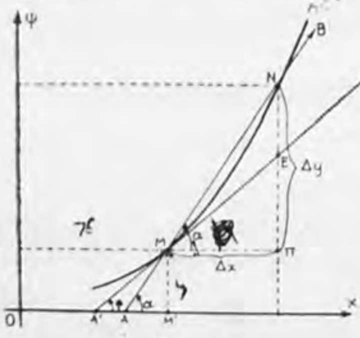
Ἡ σημασία τῆς ἐφαπτομένης εἰς σημεῖόν τι καμπύλης τινὸς ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι αὕτη δεικνύει τὴν κατεύθυνσιν τῆς καμπύλης εἰς τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον, ἢ καὶ ἄλλως, τοῦ φαινομένου τοῦ παριστωμένου παρὰ τῆς καμπύλης. Οὕτως *ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου εἶναι στενῶς συνδεδεμένη μετὰ τῆς ἐννοίας τῆς ἐφαπτομένης τῶν καμπύλων.* Θεωρήσωμεν τὴν καμπύλην ἥτις εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y = \sigma(x)$ καὶ ἐν συνεχείᾳ θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν AB *(Σχ. 40)* τέμνουσαν ταύτην εἰς δύο σημεῖα,

* Εἰς τὴν ὁμώνυμόν του ἕλικα, ὁ Ἀρχιμήδης φέρει ἐφαπτομένην καὶ ὡς ἐκ τούτου εἰκάζεται ὅτι οἱ Ἕλληνες γεωμέτραι ἐγνώριζον μεθόδους δι᾽ ὧν ἠδύνατο νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς δοθὲν σημεῖον καμπύλης.

ἔστω Μ καὶ Ν. Ἐὰν ἡ ΑΒ περιστραφῇ περὶ τὸ σημεῖον Μ, τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς ταύτης μετὰ τῆς καμπύλης, λαμβάνον τὰς διαδοχικὰς θέσεις $N, N_1, N_2, \ldots$, θὰ πλησιάζῃ συνεχῶς πρὸς τὸ Μ. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τῆς ΑΒ τὰ μήκη τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων $MN, MN_1, MN_2, \ldots$, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *χορδαὶ* τῆς καμπύλης καὶ τὰ ὁποῖα σμικρύνονται συνεχῶς, δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἔχοντα ὅριον τὸ μηδέν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον γεωμετρικῶς ἐκφράζει ὅτι τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς *τείνει νὰ συμπέσῃ* πρὸς τὸ Μ καὶ ὅτι ἡ ΑΒ λαμβάνει ὡς *ὁρικὴν θέσιν* τὴν Α΄Β΄.

Κατὰ τὰς τεθείσας προϋποθέσεις, ἐὰν ὑφίσταται ἡ ἐν λόγῳ ὁρικὴ θέσις τῆς ΑΒ, θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ Α΄Β΄ εἶναι ἡ *ἐφαπτομένη* τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ. Εἶναι δυνατὸν νὰ μὴν ὑφίσταται ἡ ὁρικὴ θέσις τῆς ΑΒ, ὡς π.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ συνάρτησις δὲν εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον Μ, ὅτε ἡ καμπύλη δὲν θὰ ἔχῃ ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Σημείωσις. Ἀμέσως κατωτέρω θὰ ἴδωμεν, ὅτι ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς ἐφαπτομένης καμπύλης τινὸς εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς εἶναι ὡρισμένος, συνεπῶς, καὶ ἡ θέσις της τελείως καθωρισμένη. Ἔχοντες δὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς ἓν σημεῖόν της θὰ δυνηθῶμεν νὰ διαπιστώσωμεν ἐὰν ἡ καμπύλη ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ θεωρουμένου σημείου βαίνει ἄνωθεν ἢ κάτωθεν ταύτης, καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν τὴν φορὰν τῆς καμπύλης πλησίον τοῦ σημείου.



Σχ. 41.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τέμνουσαν τὴν καμπύλην $y = \sigma(x)$* εἰς τὰ γειτονικὰ σημεῖα Μ, Ν (Σχ. 41) καὶ ἔστω ὅτι αἱ μὲν συντεταγμέναι τοῦ Μ εἶναι x, y, τοῦ δὲ Ν $x + \Delta x$, $y + \Delta y$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΝΠ, καλουμένου τριγώνου τοῦ *Leibniz*, ἔχομεν:

$$\text{εφ γων. } \Pi M N = \frac{\Pi N}{M\Pi} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$ καὶ ἐὰν ὀνομάσωμεν α τὴν γωνίαν ΠΜΝ

θὰ ἔχωμεν, ὅτι (1) $\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Ὡς δὲ ἐκ τοῦ σχήματος ἐμφαίνεται, ὁ λόγος $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ εἶναι *ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς εὐθείας ΑΒ* (§ 36).

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΑΒ, περιστρεφομένη περὶ τὸ Μ, τείνει, ὡς

* Ὅταν λέγωμεν καμπύλη $y=\sigma(x)$ ἐννοοῦμεν τὴν καμπύλην ἥτις εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως ταύτης.

ἐλέχθη προηγουμένως, νὰ λάβῃ τὴν ὁρικὴν θέσιν Α΄Β΄, ἤτοι νὰ γίνῃ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης, τὸ Δx θὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0 καὶ συγχρόνως τὸ τρίγωνον ΜΝΠ, τὸ ὁποῖον συνεχῶς θὰ σμικρύνεται, θὰ δίδῃ σχέσιν ὁμοίαν πρὸς τὴν (1) οὕτως ὥστε, ὅταν ἡ ΑΒ λάβῃ τὴν ὁρικὴν θέσιν της Α΄Β΄, θὰ ἔχωμεν : $\text{εφφ} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, ἔνθα φ = γωνία ΧΑ΄Β΄.

Συνεπῶς : *Ἐὰν συνάρτησίς τις $\boxed{y = \sigma(x)}$ ἔχῃ, διὰ τιμήν τινα τῆς x, παράγωγον, ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη ἔχει εἰς τὸ διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τῆς x σημεῖον της ἐφαπτομένην τῆς ὁποίας ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμὴν τῆς παραγώγου διὰ τὴν ἐν λόγῳ τιμὴν τῆς x.*

Δοθέντος τοιουτοτρόπως σημείου καμπύλης τινός, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἡ ἐφαπτομένη αὕτη εἶναι εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἔχουσα γωνιακὸν συντελεστὴν τὴν τιμὴν τῆς παραγώγου εἰς τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον.

Παράδειγμα. ***Εὑρεῖν τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης*** $y=x^2$ ***εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς*** (2, 4).

Ἡ ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ σημείου $M(x_1, y_1)$ καὶ ἐχούσης γωνιακὸν συντελεστὴν k, εἶναι, ὡς γνωστὸν (τύπος 42), $\boxed{y-y_1=k(x-x_1)}$. Ἐνταῦθα ἔχομεν $x_1=2$, $y_1=4$. Δοθέντος δὲ ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως εἶναι 2x καὶ ὅτι $k=(x^2)'_{x=2}=4$, ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη θὰ ἔχῃ τὴν ἐξίσωσιν:

$$y-4=4(x-2) \quad \text{ἢ μετὰ τὰς πράξεις:}$$
$$y=4x-4.$$

§ 67. *Χρησιμότης τῆς παραγώγου — Ἔννοια τοῦ Διαφορικοῦ.*

Φύσει ὁ ἄνθρωπος εὐκόλως νοεῖ τὴν κατ᾽ ἀναλογίαν (κατ᾽ εὐθὺν ἢ ἀντίστροφον λόγον) συμμεταβολὴν δύο ποσοτήτων. Π.χ. προκειμένου περὶ δύο ποσοτήτων Α καὶ Β, τῆς Β διπλασιαζομένης, τριπλασιαζομένης κλπ. καὶ ἡ Α νὰ διπλασιάζηται, τριπλασιάζηται κλπ. Ἀντιθέτως, ὅμως, πολὺ δυσκολεύεται νὰ παρακολουθήσῃ συμμεταβολὰς κατὰ πολυπλοκώτερον τρόπον. Π.χ. τῆς Β μεταβαλλομένης, ἡ Α νὰ μεταβάλληται κατὰ τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἢ τὸν λογάριθμον τῆς Β. Ἐπίσης, φύσει ὁ ἄνθρωπος εὐκόλως κατανοεῖ τὴν εὐθεῖαν καὶ δυσκόλως τὰς καμπύλας, καὶ δὴ τὰς περιπλόκους τοιαύτας, ~~καὶ~~ διότι εἰς τὰς εὐθείας ὑφίσταται ἀναλογία.

Οὕτως ὁ ἄνθρωπος, εὐκόλως λογιζόμενος ἐπὶ τῶν κατ᾽ ἀναλογίαν σχέσεων, φύσει πάντοτε τείνει νὰ μετατρέπῃ εἰς κατ᾽ ἀναλογίαν λογισμὸν καὶ πολυπλοκωτάτας σχέσεις ποσοτήτων συμμεταβαλλομένων, θεωρῶν ταύτας κατὰ προσέγγισιν, λέγων ὅτι περίπου, ἀναλόγως, δέον νὰ ἔχῃ οὕτως ἢ ἄλλως. Ἐπίσης τὰ καμπυλόγραμμα φαινόμενα τείνει νὰ μετατρέπῃ εἰς εὐθύγραμμα.

Τὴν τοιαύτην ἀνάγκην τοῦ ἀνθρωπίνου νοῦ, τοῦ κατ' ἀναλογίαν λογίζεσθαι, θεραπεύουσιν ἡ παράγωγος καὶ τὸ περὶ οὗ κατωτέρω *διαφορικόν*, διότι διὰ τούτων μετατρέπονται πολύπλοκοι συμμεταβολαὶ ποσοτήτων εἰς κατ' ἀναλογίαν τοιαύτας μετὰ μεγίστης προσεγγίσεως, προσεγγίσεως ὑπεραρκετῆς διὰ τὸν ἄνθρωπον, κατὰ τὴν σπουδὴν πολυπλόκων καμπύλων καὶ συναρτήσεων, ἤτοι σπουδὴν φαινομένων ἔστω καὶ ἐξαρτωμένων πολυπλόκως ἐκ μιᾶς ἢ πολλῶν μεταβλητῶν. Καὶ ἡ μὲν σύγκρισις τῶν μεταβολῶν ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ συναρτήσεως δίδεται διὰ τῆς παραγώγου, ἤτοι, ὡς ἐλέχθη, διὰ λόγου, ὅστις ἀποτελεῖ κατ' ἀναλογίαν λογισμόν. Ἡ δὲ εὕρεσις τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς μεταβληθείσης, δίδεται διὰ τοῦ *διαφορικοῦ*, ὅπερ κατωτέρω ἐνδελεχῶς θὰ ἐρευνηθῇ καὶ ὅπερ, ὡς θὰ ἴδωμεν, εἶναι τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου ἐπὶ τὴν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, συνεπῶς καὶ αὖθις διὰ κατ' ἀναλογίαν λογισμοῦ. Καί, ἐπίσης, γεωμετρικῶς, ὡς ἡρμηνεύθη ἐν τοῖς προηγουμένοις, ἡ σπουδὴ φαινομένων ἐχόντων καμπυλόγραμμον πορείαν ἀνάγεται διὰ τῆς παραγώγου εἰς σπουδὴν εὐθυγράμμου πορείας, ἤτοι εὐθείας, ἤτοι ἀναλόγου σχέσεως.

Ἀναλυτικῶς: Εἴδομεν (§ 64 - 65) ὅτι ὁ λόγος $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἡ παράγωγος συναρτήσεως καὶ ὅπως ὁ λόγος οὗτος, οὕτω καὶ ἡ παράγωγος σ'(x) δοθείσης συναρτήσεως σ(x) δίδει τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως πέριξ ὡρισμένης τιμῆς τῆς x. Ἐφόσον αἱ ποσότητες Δx καὶ Δy ληφθῶσιν ἀρκούντως μικραί, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν παράγωγον σ'(x) ὑπὸ τοῦ λόγου $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ἤτοι, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \sigma'(x)$, ἐξ οὗ καὶ

$$(1) \qquad \boxed{\Delta y = \sigma'(x) \cdot \Delta x,} \qquad \text{ἢ καὶ}$$

$$\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x) = \sigma'(x) \cdot \Delta x. \tag{69}$$

Ὁ τύπος (69) ἐκφράζει ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως, ἤτοι τὴν παράγωγον, ἐπὶ τὴν μικρὰν αὔξησιν τῆς x, εὑρίσκομεν τὴν αὔξησιν ἥτις ἐπῆλθεν εἰς τὴν συνάρτησιν πλησίον τοῦ σημείου ἔνθα ὑπελογίσθη ἡ παράγωγος. Ἡ οὕτω θεωρηθεῖσα αὔξησις τῆς συναρτήσεως, ἤτοι ἡ *διαφορὰ* τῆς ἀρχικῆς ἀπὸ τῆς νέας τιμῆς τῆς συναρτήσεως, *εἶναι ἡ βασικὴ ἔννοια τοῦ διαφορικοῦ* τό, grosso modo, *διαφορικὸν* τῆς συναρτήσεως διὰ τὴν ὡρισμένην τιμὴν ἣν ἐλάβομεν τῆς x.

Ἐφαρμογαί: 1. Ὁ τύπος (69) ἐπιτρέπει τὸν προσδιορισμὸν τῶν μικρῶν «*σφαλμάτων*» ἢ «*ἀποχῶν*» ἀπό τινος τιμῆς τῆς y. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐὰν κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς τιμῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς διαπραχθῇ μικρόν τι σφάλμα, ὅπερ παραστήσωμεν μὲ Δx, τὸ σφάλμα ὅπερ προσγίγνεται ἐπὶ τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τῆς συναρτήσεως ἰσοῦται, προσεγγιστικῶς, πρὸς τὸ γινόμενον $\sigma'(x)\cdot\Delta x$.

2. Ὁ τύπος ὁ δίδων τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἀκτῖνος ρ εἶναι $\pi\rho^2$. Ἔστω ἤδη κύκλος ἀκτῖνος 10 μ., ὅτε τὸ ἐμβαδόν του ἔσται : $\pi . 10^2 = 3{,}14 \cdot 100 = 314$ τετρ. μέτρα. Ἂς ὑποτεθῇ ἤδη ὅτι κατὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἀκτῖνος ἐγένετο σφάλμα ἑνὸς χιλιοστοῦ τοῦ μέτρου, ἤτοι 0,001 μ. καὶ εὑρέθη αὕτη ἴση πρὸς 10,001 μ. ἀντὶ τοῦ πραγματικοῦ 10 μ. Ποῖαι αἱ συνέπειαι ἐπὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου ;

Ἐν προκειμένῳ ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι ἡ ἀκτίς, ἡ συνάρτησις τὸ ἐμβαδὸν $\pi\rho^2$, καὶ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\pi\rho^2$, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, $2\pi\rho$.

Ἡ παράγωγος ὅθεν τῆς συναρτήσεως διὰ τὴν τιμὴν τῆς ἀκτῖνος 10 μ. εἶναι : $2\times 3{,}14\times 10 = +62{,}8$. Αὕτη δεικνύει :

α) Ἐκ τοῦ ὅτι εἶναι θετική, ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι ὁμόσημος τῇ μεταβολῇ τῆς ἀκτῖνος, ἄρα τοῦ σφάλματος τῆς ἀκτῖνος ὄντος θετικοῦ καὶ τὸ σφάλμα τοῦ ἐμβαδοῦ θὰ εἶναι θετικόν, ἄρα τὸ ἐσφαλμένον ἐμβαδὸν θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀκριβοῦς.

β) Ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐξάνει 62,8 φορὰς πολλαπλασίως (ταχύτερον) τῆς αὐξήσεως τῆς ἀκτῖνος διὰ τιμὴν ταύτης 10 μ.

γ) Ὅτι, ἀφοῦ τὸ ἐμβαδὸν αὐξάνει 62,8 φορὰς πολλαπλασίως τῆς αὐξήσεως τῆς ἀκτῖνος, τὸ σφάλμα, ὡς πρὸς τὸ ἐμβαδόν, θὰ εἶναι κατ' ἀναλογίαν 62,8 ἐπὶ τὸ σφάλμα τῆς ἀκτῖνος $0{,}001 = 0{,}0628$ τ.μ. Τοῦτο εἶναι τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου δι' ἀκτῖνα 10 μ., ἤτοι ἡ κατὰ μεγίστην προσέγγισιν διαφορὰ τοῦ πραγματικοῦ ἐμβαδοῦ ἀπὸ τοῦ ἐσφαλμένου, εὑρεθεῖσα διὰ λογισμοῦ κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ σφάλμα τῆς ἀκτῖνος.

3. Τῇ βοηθείᾳ τῆς παραγώγου, δυνάμεθα, ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐλέχθη, δι' ὡρισμένην τιμὴν τῆς x, καὶ πλησίον τοῦ σημείου τοῦ ἔχοντος ὡς τετμημένην τὴν τιμὴν ταύτην τῆς x ν' ἀντικαταστήσωμεν τὴν συνάρτησιν ὑπὸ γραμμικῆς ἐκφράσεως. Οὕτως ἐπιτυγχάνεται ἡ ἀναγωγὴ εἰς ἄνασιν λογικὴν σχέσιν, ἥτις, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, τὰ μέγιστα διευκολύνει τοὺς ὑπολογισμούς.

Δοθέντος ὅτι x καὶ $x+\Delta x$ παριστῶσι δύο διαδοχικὰς τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (69) θεωρήσωμεν ὡς διαδοχικὰς τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς α καὶ x, ὅτε ὡς αὔξησιν θὰ ἔχωμεν $x-\alpha$, λαμβάνομεν :

$$\sigma(x) - \sigma(\alpha) = \sigma'(\alpha)\cdot(x-\alpha) \quad \text{ἢ}$$

$$\boxed{\sigma(x) = \sigma(\alpha) + \sigma'(\alpha)\cdot(x-\alpha)} \tag{70}$$

Ὁ τύπος (70) δίδει τὴν *γραμμικὴν μορφήν*, ἥτις προσεγγιστικῶς ἀντικαθιστᾷ τὴν δοθεῖσαν συνάρτησιν.

Γεωμετρικῶς: Λάβωμεν σημεῖον τῆς καμπύλης, ἥτις εἶναι ἡ γεωμετρικὴ εἰκὼν τῆς συναρτήσεως $y = σ(x)$, ἔχον τετμημένην $α$ καὶ ἕτερον τοιοῦτον ἔχον τετμημένην x. Ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ δύο σημεῖα δίδεται ὡς γνωστὸν (§ 41, Παρατ. 1) ὡς πηλίκον διαιρέσεως τῆς διαφορᾶς τῶν τεταγμένων διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν τετμημένων τῶν δύο σημείων. Ἀντὶ ὅμως, ὡς ἔδει, τὸ πηλίκον νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως εὐθείας, ἧς τὸ δεύτερον σημεῖον δὲν εἶναι καθωρισμένον, ἐξισοῦται, προσεγγιστικῶς (τύπος 70), πρὸς τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον $x = α$, ἤτοι πρὸς τὸ $σ'(α)$. Οὕτως ἐξηγεῖται γεωμετρικῶς ὁ τύπος (70).

Σημείωσις. Τὸ θέμα τῆς κατὰ προσέγγισιν ἀντικαταστάσεως τμήματός τινος (τόξου τινὸς) καμπύλης δι' ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, εἶναι οὐσιῶδες καὶ θίγοντες τοῦτο θίγομεν τὸ θεμελιῶδες *πρόβλημα τῆς παρεμβολῆς*, τοῦ ὁποίου ἡ λεπτομερὴς ἀνάπτυξις ἐξέρχεται τοῦ πλαισίου τοῦ παρόντος. Καὶ ἐν τοῖς προηγουμένοις (§ 41) δι' ὀλίγων ἐγένετο λόγος περὶ τῆς γραμμικῆς παρεμβολῆς.

Παράδειγμα. ***Δίδεται ἡ παραβολὴ*** $y=x^2+1$ ***καὶ ζητεῖται ἡ εὕρεσις τῆς εὐθείας ἥτις πλησίον τοῦ σημείου*** (1,2) ***θὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν παραβολήν.***

Ἐκ τοῦ τύπου (70) εὑρίσκομεν (ἡ παράγωγος τῆς x^2+1 εἶναι $2x$):

$$y = σ(1) + σ'(1)(x-1) \qquad \text{ἤτοι}$$
$$y = 2 + 2(x-1) \qquad \text{ἐξ ἧς} \quad y = 2x,$$

ἥτις, ὡς γνωστόν, παριστᾷ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.

§ 68. Κανόνες παραγωγίσεως.

Ἁπλαῖ συναρτήσεις — Συναρτήσεις συναρτήσεων — Ἀντίστροφοι συναρτήσεις.

Τὴν συστηματικὴν ἑρμηνείαν τῶν παραγώγων, ἀκολουθεῖ ἡ μέθοδος εὑρέσεως τούτων, ἤτοι ἡ εὕρεσις κανόνων βάσει τῶν ὁποίων θὰ ὑπολογίζεται ἡ παράγωγος δοθείσης συναρτήσεως κατὰ τρόπον ἄμεσον. Ἡ μεγίστη σημασία τῆς παραγώγου ἀξιοποιεῖται, ἐφόσον ἡ εὕρεσις ταύτης γίνεται, εἰ δυνατόν, αὐτομάτως, καὶ τοῦτο διότι ἡ *παράγωγος δὲν εἶναι σκοπός, ἀλλὰ μέσον* δι' οὗ ἐπιτυγχάνεται ἡ ἐφαρμογὴ τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰς φυσικὰς καὶ οἰκονομικὰς ἐπιστήμας. Θὰ ἦτο ἀρκετὰ κοπιῶδες ἐὰν δι' ἑκάστην περίπτωσιν ἐπανελαμβάνετο ἡ ἄλυσις τῶν πράξεων τῶν ἀπαιτουμένων πρὸς εὕρεσιν τῆς παραγώγου.

Πρὶν ἢ δώσωμεν τοὺς κανόνας παραγωγίσεως, ὅτε ἡ ἐργασία τῆς εὑρέσεως τῶν παραγώγων καθίσταται πλέον μηχανική, θὰ εὕρωμεν, συμφώνως τῷ ὁρισμῷ, τὴν παράγωγον ὡρισμένων συναρτήσεων, ἵνα ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐμπεδώσωμεν τὴν θεωρητικὴν ἔννοιαν τῆς παραγώγου, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἔχωμεν προχείρους τὰς παραγώγους συναρτήσεων συναντωμένων συχνότατα.

Ἁπλαῖ Συναρτήσεις :

1. $y = x.$

$$y' = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \qquad \text{ἤτοι :} \quad \boxed{x' = 1}.$$

2. $y = \dfrac{1}{x}.$

$$y' = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2},$$

ἤτοι :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

3. $y = \sqrt{x}.$

$$y' = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

ἤτοι :

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Δίδομεν ἤδη τὰ γενικὰ θεωρήματα ἅτινα παρέχουσι τοὺς διαφόρους κανόνας *παραγωγίσεως*, ἤτοι τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν παραγώγων, διὰ τὰς διαφόρους συναρτήσεις, ἃς ἐν τῇ πράξει συναντῶμεν.

Θεώρημα I. *Ἡ παράγωγος σταθερᾶς εἶναι μηδέν.*

Ἐὰν $y = \alpha$, ἔνθα α σταθερά, θὰ ἔχωμεν : $(\alpha)' = 0$ (71)

Πράγματι, ἐὰν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι σταθερά, ὅπερ σημαίνει ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x ἡ συνάρτησις ἔχει τὴν αὐτὴν τιμήν, ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως Δy εἶναι 0 καὶ

συνεπῶς :

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Θεώρημα II. *Ἡ παράγωγος γινομένου σταθερᾶς ἐπί τινα συνάρτησιν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς σταθερᾶς ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως.*

Ἐὰν $y = \alpha\sigma(x)$, θὰ ἔχωμεν : $y' = \alpha\sigma'(x)$ (72)

Πράγματι ἔχομεν :

$$[\,\alpha\sigma(x)\,]' = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\alpha\sigma(x+\Delta x) - \alpha\sigma(x)}{\Delta x} = \alpha \cdot \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\sigma(x+\Delta x) - \sigma(x)}{\Delta x} = \alpha \cdot \sigma'(x).$$

Θεώρημα III. *Ἡ παράγωγος τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος περισσοτέρων συναρτήσεων, πεπερασμένου πλήθους, ἐχόντων παράγωγον διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς x, ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν δοθεισῶν συναρτήσεων.*

Ἐὰν $\quad y = \sigma(x) \pm \varphi(x) \pm f(x),\quad$ θὰ ἔχωμεν :

$$y' = \sigma'(x) \pm \varphi'(x) \pm f'(x) \tag{73}$$

Πρὸς ἀπόδειξιν θεωροῦμεν κατ' ἀρχὴν τὴν συνάρτησιν $y=\sigma(x)+\varphi(x)$, ἥτις εἶναι ἄθροισμα δύο συναρτήσεων. Χάριν ἁπλουστεύσεως θέτομεν :

$$\sigma(x)=\omega,\quad \varphi(x)=\varphi,\quad \text{ὅτε}\quad (1)\quad y=\omega+\varphi.$$

Ἐὰν τὰς αὐξήσεις τῶν δύο συναρτήσεων, αἵτινες ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὴν αὔξησιν Δx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, παριστῶμεν ἀντιστοίχως διὰ $\Delta\omega$ καὶ $\Delta\varphi$ θὰ ἔχωμεν :

$$(2)\qquad y+\Delta y=(\omega+\Delta\omega)+(\varphi+\Delta\varphi),$$

καὶ ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\Delta y = \Delta\omega + \Delta\varphi$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ :

$$\underset{\Delta x\to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x\to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta\omega}{\Delta x} + \underset{\Delta x\to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x},$$

ἐξ ἧς $\qquad y'=\omega'+\varphi' \quad$ καὶ $\quad y'=\sigma'(x)+\varphi'(x).$

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν $y=\sigma(x)-\varphi(x)$ ὡς καὶ ἐν τῇ γενικωτέρᾳ περιπτώσει καθ' ἣν $y=\sigma(x) \pm \varphi(x) \pm f(x)$.

Θεώρημα IV. *Ἡ παράγωγος γινομένου περισσοτέρων συναρτήσεων, πεπερασμένου πλήθους, ἐχόντων παράγωγον διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς x, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῆς παραγώγου ἑκάστης συναρτήσεως ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων συναρτήσεων.*

Ἐν τῇ περιπτώσει δύο παραγόντων, ἤτοι $y = \sigma(x)\cdot\varphi(x)$, θὰ ἔχωμεν :

$$y' = \sigma'(x)\cdot\varphi(x) + \varphi'(x)\cdot\sigma(x) \tag{74}$$

Ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν $y = \sigma(x)\cdot\varphi(x)\cdot f(x)$, θὰ ἔχωμεν :

$$y' = \sigma'(x)\cdot\varphi(x)\cdot f(x) + \varphi'(x)\cdot\sigma(x)\cdot f(x) + f'(x)\cdot\sigma(x)\cdot\varphi(x) \tag{74_1}$$

Ὑποθέσωμεν ὅτι $y=\sigma(x)\cdot\varphi(x)$. Θέτομεν $\sigma(x)=\omega$, $\varphi(x)=\varphi$, ὅτε (1) $y=\omega\cdot\varphi$. Ἐὰν ἐπὶ πλέον θεωρήσωμεν ὅτι εἰς τὴν αὔξησιν Δx ἀντιστοιχῶσιν αἱ αὐξήσεις Δy, $\Delta\omega$, $\Delta\varphi$, τῶν συναρτήσεων y,ω,φ, θὰ ἔχωμεν :

$$y+\Delta y=(\omega+\Delta\omega)\,(\varphi+\Delta\varphi)$$

ἢ

$$y+\Delta y=\omega\varphi+\varphi\cdot\Delta\omega+\omega\cdot\Delta\varphi+\Delta\omega\cdot\Delta\varphi$$

ἤ, ἕνεκα τῆς (1), $\qquad \Delta y=\varphi\cdot\Delta\omega+\omega\cdot\Delta\varphi+\Delta\omega\cdot\Delta\varphi \qquad$ καὶ

$$\underset{\Delta x\to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi\cdot\underset{\Delta x\to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta\omega}{\Delta x} + \omega\cdot\underset{\Delta x\to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} + \underset{\Delta x\to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta\omega}{\Delta x}\cdot\underset{\Delta x\to 0}{\text{ορ}}\, \Delta\varphi.$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν:

$$y'=\varphi\cdot\omega'+\omega\cdot\varphi'+\omega'\cdot 0$$

ἢ

$$y'=\varphi\cdot\omega'+\omega\varphi'=\sigma'(x)\cdot\varphi(x)+\varphi'(x)\cdot\sigma(x)$$

καθόσον τοῦ $\Delta x \to 0$ τὸ ορ $\Delta\varphi=0$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον θὰ γίνῃ ἡ ἀπόδειξις ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν οἱ παράγοντες εἶναι πλείονες τῶν δύο.

Πόρισμα. *Ἡ παράγωγος δυνάμεως τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐκθέτου ἐπὶ τὴν δύναμιν τῆς x, τῆς ἐχούσης ὡς ἐκθέτην τὸν ἀρχικὸν ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα.*

Ἐὰν $\quad y = x^{\nu}$, θὰ ἔχωμεν

$$y' = \nu\cdot x^{\nu-1} \tag{75}$$

Ἔστω ν ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός. Θὰ ἔχωμεν:

$$y=\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdots x}_{\nu},$$ ἔνθα ν τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων.

Ἐφαρμόζοντες τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἔνθα ἑκάστη συνάρτησις εἶναι x, θὰ ἔχωμεν:

$$y'=x'\cdot\underbrace{x\cdot x\cdots x}_{\nu-1}+x'\cdot\underbrace{x\cdot x\cdots x}_{\nu-1}+\ldots+x'\cdot\underbrace{x\cdot x\cdots x}_{\nu-1}=$$
$$=1\cdot x^{\nu-1}+1\cdot x^{\nu-1}+\ldots+1\cdot x^{\nu-1}=\nu\cdot x^{\nu-1}.$$

Τὸ πόρισμα ἰσχύει καὶ ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν ὁ ν εἶναι οἱοσδήποτε ῥητὸς ἀριθμός *.

Θεώρημα V. *Ἡ παράγωγος πηλίκου δύο συναρτήσεων, ἐχόντων παράγωγον διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς x, καὶ ἡ συνάρτησις διαιρέτης εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἰσοῦται μὲ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν διαιρετέον, καὶ παρονομαστὴν τὸ τετράγωνον τοῦ διαιρέτου.*

Ἐὰν $\quad y=\dfrac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ θὰ ἔχωμεν:

$$y'=\frac{\sigma'(x)\cdot\varphi(x)-\varphi'(x)\cdot\sigma(x)}{(\varphi(x))^2} \tag{76}$$

Θέτομεν $\sigma(x)=\omega$ καὶ $\varphi(x)=\varphi$. Ἐὰν εἰς τὴν αὔξησιν Δx ἀντιστοιχῇ ἡ αὔξησις Δy τῆς συναρτήσεως y καὶ αἱ αὐξήσεις $\Delta\omega$ καὶ $\Delta\varphi$ τῶν δύο ἄλλων συναρτήσεων, ω καὶ φ, θὰ ἔχωμεν:

$$y+\Delta y=\frac{\omega+\Delta\omega}{\varphi+\Delta\varphi}$$ καὶ ἐν συνεχείᾳ:

$$\Delta y=\frac{\omega+\Delta\omega}{\varphi+\Delta\varphi}-\frac{\omega}{\varphi}=\frac{\omega\cdot\varphi+\varphi\cdot\Delta\omega-\omega\cdot\varphi-\omega\cdot\Delta\varphi}{(\varphi+\Delta\varphi)\cdot\varphi}=\frac{\varphi\cdot\Delta\omega-\omega\cdot\Delta\varphi}{(\varphi+\Delta\varphi)\cdot\varphi},$$

$$\text{(1)}\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\varphi\cdot\dfrac{\Delta\omega}{\Delta x}-\omega\cdot\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}}{(\varphi+\Delta\varphi)\cdot\varphi}.$$

* Ὅρα Π. Ζερβόν, Ἀπειροστικὸς Λογισμός, ἔκδ. Β', σελ. 172 - 174.

Δοθέντος ὅτι, ἐξ ὑποθέσεως, αἱ συναρτήσεις y, ω, φ τῆς x ἔχουσι παράγωγον διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς x, θὰ ἔχωμεν :

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \qquad \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta \omega}{\Delta x} = \omega', \qquad \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \varphi'.$$

Οὕτως ἐκ τῆς (1), μετὰ τὴν λῆψιν τοῦ ὁρίου, εὑρίσκομεν :

$$y' = \frac{\varphi \cdot \omega' - \omega \cdot \varphi'}{\varphi^2}$$

ἐξ ἧς, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ω καὶ φ ὑπὸ τῶν ἴσων των, προκύπτει ὁ τύπος (76).

Ἐφαρμογαί.

1. ***Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως*** $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 8$.

Συμφώνως τῷ θεωρήματι III, ἔχομεν :

$y' = (x^3)' + (2x^2)' - (5x)' - (8)'$

$(x^3)' =$ παράγωγος δυνάμεως (Πόρισμα τοῦ Θεωρ. IV) $= 3x^2$.

$(2x^2)' =$ παράγωγος γινομένου σταθερᾶς ἐπὶ συνάρτησιν (Θεωρ. II) $= 2 \cdot 2x = 4x$.

$(5x)' =$ ὁμοίως (Θεωρ. II) $= 5 \cdot 1 = 5$.

$(8)' =$ παράγωγος σταθερᾶς (Θεώρ. I) $= 0$.

Οὕτω : $y' = (x^3 + 2x^2 - 5x - 8)' = 3x^2 + 4x - 5$.

2. ***Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως*** $y = 2x^5 - 5x^4 - 8x^3 + x^2 + 9x - \frac{1}{2}$

Θὰ ἐργασθῶμεν ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$y' = \left(2x^5 - 5x^4 - 8x^3 + x^2 + 9x - \frac{1}{2}\right)' =$$

$$= (2x^5)' - (5x^4)' - (8x^3)' + (x^2)' + (9x)' - \left(\frac{1}{2}\right)' =$$

$$= 2 \cdot (x^5)' - 5 \cdot (x^4)' - 8 \cdot (x^3)' + (x^2)' + 9 \cdot (x)' - \left(\frac{1}{2}\right)' =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot x^4 - 5 \cdot 4 \cdot x^3 - 8 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 9 = 10x^4 - 20x^3 - 24x^2 + 2x + 9.$$

3. ***Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως*** $y = (3x - 7)(2x + 3)$.

Θὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ Θεώρημα IV.

$$y' = (3x - 7)' \cdot (2x + 3) + (2x + 3)' \cdot (3x - 7) =$$

$$= [\,3(x)' - 7'\,] \cdot (2x + 3) + [\,2(x)' + 3'\,]\,(3x - 7) =$$

$$= (3 \cdot 1 - 0)\,(2x + 3) + (2 \cdot 1 + 0)\,(3x - 7) =$$

$$= 3(2x + 3) + 2(3x - 7) = 6x + 9 + 6x - 14 = 12x - 5.$$

4. ***Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως*** $y = \dfrac{2x^2 - 7x + 9}{5}$.

Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις δύναται νὰ γραφῇ $y = \frac{1}{5}\,(2x^2 - 7x + 9)$ καὶ συνεπῶς πρὸς εὕρεσιν τῆς παραγώγου θὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ Θεώρημα II.

$$y' = \frac{1}{5} \cdot (2x^2 - 7x + 9)' = \frac{1}{5}\,(2 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0) = \frac{4}{5}\,x - \frac{7}{5}.$$

Γενικῶς ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος εἶναι ποσότης τις σταθερά, πρὸς εὐκολίαν ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα II ἀντὶ τοῦ θεωρήματος V.

Πᾶς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς τὸ $0 = 1$ καὶ $1 =$ μὲ τὸν ἀριθμ
n n n n

$\frac{\text{ἀριθμὸς}}{0} = \infty$ $\frac{0}{\text{ἀριθ}} = 0$

5. ***Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως*** $y=\frac{1}{3x+5}$.

Ἐνταῦθα θὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ θεώρημα V.

$$y'=\frac{1'\cdot(3x+5)-(3x+5)'\cdot 1}{(3x+5)^2}=\frac{0\cdot(3x+5)-3\cdot 1}{(3x+5)^2}=\frac{-3}{(3x+5)^2}.$$

6. ***Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως*** $y=\frac{1+x^2}{1-x}$.

Θὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ θεώρημα V.

$$y'=\frac{(1+x^2)'\,(1-x)-(1-x)'\,(1+x^2)}{(1-x)^2}=\frac{2x(1-x)-(-1)\,(1+x^2)}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{2x-2x^2+1+x^2}{(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}.$$

Συνάρτησις συναρτήσεως. Ὁρισμός. Ἐὰν y εἶναι συνάρτησις μεταβλητῆς τινος ω, ἔνθα ω εἶναι συνάρτησις μεταβλητῆς x, λέγομεν ὅτι *ἡ y εἶναι συνάρτησις συναρτήσεως τῆς x*. Θέτοντες δὲ $y=\sigma(\omega)$ καὶ $\omega=\varphi(x)$, θὰ ἔχωμεν $y=\sigma[\varphi(x)]$. Ὑποθέτομεν ὅτι ἀμφότεραι αἱ συναρτήσεις $\omega=\varphi(x)$ καὶ $y=\sigma[\varphi(x)]$ εἶναι ὡρισμέναι ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι.

Ἡ εὕρεσις κανόνος ὑπολογισμοῦ τῆς παραγώγου μιᾶς τοιαύτης συναρτήσεως, ἐν συνδυασμῷ πάντοτε πρὸς τοὺς κανόνας οὓς παρέχουσι τὰ προηγούμενα θεωρήματα, εὐκολύνει μεγάλως τὸν ὑπολογισμὸν παραγώγου ὡρισμένων μορφῶν συναρτήσεων.

Θεώρημα VI. *Ἡ παράγωγος ὡς πρὸς x συναρτήσεώς τινος y τῆς μεταβλητῆς ω, ἥτις εἶναι συνάρτησις τῆς x, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου τῆς δοθείσης συναρτήσεως, ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν ω ἐπὶ τὴν παράγωγον ταύτης ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x.*

Ἐὰν $y=\sigma(\omega)$, ἔθα $\omega=\varphi(x)$, θὰ ἔχωμεν : $y=\sigma[\varphi(x)]$

$$y'_x=y'_\omega\cdot\omega'_x \tag{77}$$

ἔνθα οἱ δεῖκται δεικνύουσι τὴν μεταβλητὴν ἣν ἑκάστοτε λαμβάνομεν ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητήν.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος παρατηροῦμεν ὅτι : $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta\omega}\cdot\frac{\Delta\omega}{\Delta x}$. Λαμβάνοντες τὰ ὅρια ἐπιβεβαιοῦμεν ἀμέσως τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος.

Τὸ θεώρημα ἐπεκτείνεται εὐχερῶς καὶ ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν αἱ βοηθητικαί, οὕτως εἰπεῖν, συναρτήσεις εἶναι πλείονες τῆς μιᾶς. Ἐὰν π.χ. ἡ y εἶναι συνάρτησις τῆς ω, ἡ ω τῆς υ καὶ ἡ υ τῆς x, θὰ ἔχωμεν :

$$y'_x=y'_\omega\cdot\omega'_\upsilon\cdot\upsilon'_x \tag{77$_1$}$$

Παραδείγματα. 1. ***Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως*** $y=(x^2-5)^3$

Θέτομεν $x^2-5=\omega$, ὅτε $y=\omega^3$. Συμφώνως τῷ προηγουμένῳ θεωρήματι ἔχομεν :

$$y'_x=y'_\omega\cdot\omega'_x=(\omega^3)'\cdot(x^2-5)'=3\omega^2\cdot 2x$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ ω παρὰ τοῦ ἴσου του, λαμβάνομεν :

$$y'=3(x^2-5)^2\cdot 2x=6x(x^2-5)^2.$$

2. *Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως* $y=\sqrt{x^2+3}$.

Θέτομεν $x^2+3=\omega$, ὅτε $y=\sqrt{\omega}$. Συμφώνως τῷ θεωρήματι VI ἔχομεν:

$$y'_x = y'_\omega \cdot \omega'_x = (\sqrt{\omega})' \cdot (x^2+3)' = \left(\omega^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot (x^2+3)' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \omega^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot (x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Ἀντίστροφοι συναρτήσεις. Ὁρισμός. Δοθείσης μονοτόνου τινὸς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ καὶ λυομένης ταύτης ὡς πρὸς x, εὑρίσκομεν συνάρτησιν τῆς μορφῆς $x=\varphi(y)$, ἔνθα ὡς συνάρτησιν θεωροῦμεν τὴν x καὶ ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὴν y. Αἱ δύο αὗται συναρτήσεις λέγονται *ἀντίστροφοι ἀλλήλων*. Π.χ. αἱ συναρτήσεις $y=x-5$ καὶ $x=y+5$ εἶναι ἀντίστροφοι ἀλλήλων. Ἡ ἀλληλεξάρτησις τῶν x καὶ y εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ἀμφοτέρας τὰς συναρτήσεις.

Ἐνίοτε ἡ εὕρεσις παραγώγου συναρτήσεώς τινος εὐκολύνεται διὰ τῆς εὑρέσεως τῆς παραγώγου τῆς ἀντιστρόφου τῆς δοθείσης συναρτήσεως.

Θεώρημα VII. *Ἐὰν δύο συναρτήσεις $y=\sigma(x)$ καὶ $x=\varphi(y)$ εἶναι ἀντίστροφοι ἀλλήλων, αἱ παράγωγοί των εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι.*

Ἤτοι:
$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{ἢ} \quad \sigma'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \tag{78}$$

Ἔχομεν:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Λαμβάνοντες τὰ ὅρια εὑρίσκομεν τὸν τύπον (78).

Παράδειγμα. *Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως* $y=\sqrt[3]{x}$.

Ἡ ἀντίστροφος τῆς δοθείσης εἶναι $x=y^3$ καὶ ἔχει παράγωγον $3y^2$. Ἄρα ἡ παράγωγος τῆς δοθείσης εἶναι $y'=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

§ 69. Παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως.

Ἡ παράγωγος συναρτήσεως εἶναι, ἐν γένει συνάρτησις τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς ἑπομένως δύναται νὰ ἔχῃ καὶ αὐτὴ παράγωγον, ἥτις λέγεται *δευτέρα παράγωγος* τῆς δοθείσης συναρτήσεως, ἢ *παράγωγος δευτέρας τάξεως*. Ἀναλόγως ἡ παράγωγος τῆς δευτέρας παραγώγου λέγεται *τρίτη παράγωγος* ἢ *παράγωγος τρίτης τάξεως τῆς δοθείσης συναρτήσεως* κ.ο.κ. Τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως θὰ καλοῦμεν πρὸς διάκρισιν *πρώτην παράγωγον* ἢ *παράγωγον πρώτης τάξεως*.

Ἐὰν $y=\sigma(x)$ εἶναι δοθεῖσα συνάρτησις, ἡ δευτέρα αὐτῆς παράγωγος παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\sigma''(x)$ ἢ y'' ἢ y''_{xx} ἢ y''_{x^2}, ἡ τρίτη παράγωγος διὰ $\sigma'''_{(x)}$ ἢ y''' ἢ y'''_{xxx} ἢ y'''_{x^3} κ.ο.κ.

Ἡ δευτέρα, τρίτη κ.τ.λ. παράγωγοι μιᾶς συναρτήσεως, αἵτινες καλοῦνται καὶ *παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως*, *εἶναι ἀναγκαῖαι εἰς πλεῖστα ὅσα ζητήματα ἐφαρμογῶν*, διὰ τὴν εὕρεσιν στοιχείων χρησίμων διὰ τὴν σπουδὴν δοθείσης συναρτήσεως, ὡς εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου δοθείσης συναρτήσεως, ἡ εὕρεσις τῶν σημείων καμπῆς, ἡ ἀνάπτυξις συναρτήσεως εἰς σειρὰν κ.λ.π., περὶ ὧν κατωτέρω.

Ἡ εὕρεσις τῶν παραγώγων ἀνωτέρας τάξεως στηρίζεται εἰς τοὺς κανόνας τοὺς χρησιμοποιουμένους διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς πρώτης παραγώγου. Λαμβάνοντες κατὰ τὰ γνωστὰ τὴν παράγωγον τῆς πρώτης παραγώγου, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ὡς νέαν συνάρτησιν, ἔχομεν τὴν δευτέραν παράγωγον. Ἐν συνεχείᾳ θεωροῦντες τὴν δευτέραν παράγωγον ὡς νέαν συνάρτησιν καὶ λαμβάνοντες τὴν παράγωγόν της εὑρίσκομεν τὴν τρίτην παράγωγον τῆς δοθείσης συναρτήσεως κ.ο.κ.

Παραδείγματα. 1. *Εὑρεῖν τὴν τρίτην παράγωγον τῆς συναρτήσεως* $y=x^5$.

$$y=x^5,\quad y'=5x^4,\quad y''=(y')'=(5x^4)'=5\cdot 4x^3=20x^3,$$
$$y'''=(y'')'=(20x^3)'=60x^2.$$

2. *Εὑρεῖν τὴν τρίτην παράγωγον τῆς συναρτήσεως*: $y=x^2-7x+8$.

$$y=x^2-7x+8,\quad y'=2x-7,\quad y''=(y')'=(2x-7)'=2,\quad y'''=(y'')'=(2)'=0.$$

§ 70. Παράγωγοι τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων.

Α΄. *Παράγωγος τῆς συναρτήσεως* $y=\eta\mu x$.

$$(\eta\mu\, x)'=\sigma\upsilon\nu\, x \qquad (79)$$

Πράγματι,
$$y+\Delta y=\eta\mu(x+\Delta x),$$
$$\Delta y=\eta\mu(x+\Delta x)-\eta\mu x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\eta\mu(x+\Delta x)-\eta\mu x}{\Delta x}\quad \text{ἢ}$$

ἕνεκα *τῶν τύπων μετασχηματισμοῦ*, οὓς χρησιμοποιοῦμεν ἐν τῇ Τριγωνομετρίᾳ *, οἵτινες καὶ *τύποι τῆς προσθαφαιρέσεως* ** καλοῦνται

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\eta\mu\dfrac{\Delta x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\eta\mu\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

* Ὅρα S. *Loney*, Plane Trigonometry Part I, 1949, σ. 93 τύπος II.
** Ἡ λέξις προσθαφαίρεσις, καθαρῶς Ἑλληνική, χρησιμοποιεῖται ὑπὸ πλείστων ξένων συγγραφέων.

Λαμβανομένων δὲ τῶν ὁρίων, τοῦ $\Delta x \to 0$, ὁ μὲν πρῶτος παράγων ἔχει ὅριον τὴν μονάδα (§ 62, 1), ὁ δὲ δεύτερος τὸ συνx καὶ οὕτω εὑρίσκομεν τὸν τύπον (79).

Β΄. *Παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = \text{συν}x$.*

$$(\text{συν}\,x)' = -\text{ημ}\,x \tag{80}$$

Ἐργαζόμενοι κατ' ἀνάλογον τρόπον πρὸς τὸ ημx εὑρίσκομεν τὸν τύπον (80).

Γ΄. *Παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = \text{εφ}x$.*

$$(\text{εφ}x)' = \frac{1}{\text{συν}^2 x} \tag{81}$$

Ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\text{εφ}x = \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}, \quad (\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)'$$

καί, βάσει τοῦ θεωρήματος V (§ 68),

$$(\text{εφ}x)' = \frac{\text{συν}x \cdot \text{συν}x - (-\text{ημ}x)\text{ημ}x}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x}$$

ἤ, δοθέντος ὅτι $\text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x = 1$, $(\text{εφ}x)' = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$.

Δ΄. *Παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = \text{σφ}x$.*

$$(\text{σφ}x)' = -\frac{1}{\text{ημ}^2 x} \tag{82}$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τύπου τούτου θὰ ἐργασθῶμεν ὡς εἰργάσθημεν διὰ τὴν εφx.

Ε΄. *Παράγωγοι τῶν ἀντιστρόφων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων.*

Θὰ εὕρωμεν ἤδη τὰς παραγώγους τῶν συναρτήσεων αἵτινες εἶναι αἱ ἀντίστροφοι τῶν τριγωνομετρικῶν τοιούτων. Ἡ εὕρεσις τούτων βασίζεται εἰς τὸ θεώρημα VII, § 68.

1. Ἡ συνάρτησις $x = \text{ημ}y$ ἔχει ἀντίστροφον τὴν συνάρτησιν $y = \text{τοξημ}x$ (y = τόξον τοῦ ὁποίου τὸ ἡμίτονον εἶναι x), ἥτις ἔχει παράγωγον:

$$(\text{τοξημ}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{83}$$

Μεταβαλλομένου τοῦ **x** ἀπὸ -1 ἕως $+1$ θεωροῦμεν ὅτι τὸ y μεταβάλλεται ἀπὸ -90° ἕως $+90^\circ$.

Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $(\text{ημ}y)' = \text{συν}y$, βάσει τοῦ ἀνωτέρω μνημονευθέντος θεωρήματος, θὰ ἔχωμεν:

$$(\text{τοξημ}x)' = \frac{1}{\text{συν}y}$$

καὶ ἐπειδὴ $\quad \text{συν}y = \pm\sqrt{1-\text{ημ}^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$

λαμβανομένου τοῦ συνy θετικοῦ, λόγῳ τῆς τεθείσης ὑποθέσεως, θὰ ἔχωμεν:

$$(\text{τοξημ}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{ἤτοι τὸν τύπον (83).}$$

2. Ἡ συνάρτησις $x = \sigma\upsilon\nu\, y$ ἔχει ἀντίστροφον τὴν συνάρτησιν $y = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$ ἥτις ἔχει παράγωγον

$y = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$

$$(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{84}$$

Θεωροῦμεν ὅτι μεταβαλλομένου τοῦ x ἀπὸ -1 ἕως $+1$, τὸ y μεταβάλλεται ἀπὸ 180° ἕως 0°.

Γνωστοῦ ὄντος ὅτι : $(\sigma\upsilon\nu y)' = -\eta\mu y$, θὰ ἔχωμεν :

$$(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x)' = -\frac{1}{\eta\mu y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 y}}.$$

ἐξ οὗ, ἀντικαθιστῶντες τὸ συνy ὑπὸ τοῦ ἴσου του x, προκύπτει ὁ τύπος (84).

3. Ἡ συνάρτησις $x = \varepsilon\varphi y$ ἔχει ἀντίστροφόν της τὴν συνάρτησιν $y = \tau o\xi\varepsilon\varphi x$ ἥτις ἔχει παράγωγον :

$$(\tau o\xi\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{85}$$

Μεταβαλλομένου τοῦ x ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, θεωροῦμεν τὸ y μεταβαλλόμενον ἀπὸ -90° ἕως $+90^\circ$.

Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $(\varepsilon\varphi y)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 y}$ καὶ ὅτι $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 y} = 1 + \varepsilon\varphi^2 y$,

θὰ ἔχωμεν :

$$(\tau o\xi\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{(\varepsilon\varphi y)'} = \sigma\upsilon\nu^2 y = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 y},$$

ἐξ οὗ, ἀντικαθιστῶντες τὴν εφy ὑπὸ τοῦ ἴσου της x, προκύπτει ὁ τύπος (85).

4. Ἡ συνάρτησις $x = \sigma\varphi y$ ἔχει ἀντίστροφόν της τὴν συνάρτησιν $y = \tau o\xi\sigma\varphi x$ ἥτις ἔχει παράγωγον :

$$(\tau o\xi\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{86}$$

Μεταβαλλομένου τοῦ x ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, θεωροῦμεν τὸ y μεταβαλλόμενον ἀπὸ -90° ἕως $+90^\circ$ ἢ ἀπὸ 180° ἕως 0°.

Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $(\sigma\varphi y)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 y}$ καὶ ὅτι $\dfrac{1}{\eta\mu^2 y} = 1 + \sigma\varphi^2 y$,

θὰ ἔχωμεν : $$(\tau o\xi\sigma\varphi x)' = \frac{1}{(\sigma\varphi y)'} = -\eta\mu^2 y = -\frac{1}{1+\sigma\varphi^2 y},$$

ἐξ οὗ, ἀντικαθιστῶντες τὴν σφy ὑπὸ τοῦ ἴσου της x, προκύπτει ὁ τύπος (86).

§ 71. *Παράγωγοι ἐκθετικῶν καὶ λογαριθμικῶν συναρτήσεων.*

1. $y = e^x$ Αὕτη ἔχει παράγωγον $y' = (e^x)' = e^x$ e^x (87)

Ἔχομεν :

$$y + \Delta y = e^{x+\Delta x}, \quad \Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x$$

ἢ

$$\Delta y = e^x (e^{\Delta x} - 1) \quad \text{καὶ}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Λαμβάνοντες τὰ ὅρια, εὑρίσκομεν :

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \cdot \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} .$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι $\underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$. Κατὰ συνέπειαν, $\underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x$, ἤτοι $y' = e^x$.

2. $y = a^x$. Αὕτη ἔχει παράγωγον $y' = (a^x)' = a^x \ln a$ (88)

Πρὸς τούτοις θέτομεν $\ln a = \lambda$, ὅτε $a = e^{\lambda}$, $y = (e^{\lambda})^x = e^{\lambda x}$ καὶ $y' = (e^{\lambda x})' = e^{\lambda x} \cdot \lambda$ (§ 68, Θεωρ. VI), ἤτοι $y' = y \cdot \lambda$. Ἀντικαθιστῶντες τὰ y καὶ λ ὑπὸ τῶν ἴσων των εὑρίσκομεν τὸν τύπον (88).

3. $y = \lambda o\gamma_a x$. Αὕτη ἔχει παράγωγον $y' = (\lambda o\gamma_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$ $\frac{1}{x}$ (89)

Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις ἔχει ἀντίστροφον τὴν συνάρτησιν $x = a^y$, τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος, ὡς εἴδομεν ἐν τῇ προηγουμένῃ συναρτήσει, εἶναι $x' = a^y \cdot \ln a$. Συνεπῶς: $y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{a^y \ln a}$, ἐξ οὗ, μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ a^y ὑπὸ τοῦ ἴσου του, εὑρίσκομεν τὸν τύπον (89).

4. $y = \ln x$. Αὕτη ἔχει παράγωγον $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ (90)

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (89), λαμβάνομεν :

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{x} .$$

§ 72. Ὁρισμὸς τοῦ διαφορικοῦ.—Διαφορικὰ ἀνωτέρας τάξεως.

Εἴπομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις (§ 67) ὅτι πρώτην ἰδέαν τοῦ διαφορικοῦ ἔχομεν θεωροῦντες τὴν αὔξησιν ἣν ὑπέστη ἡ συνάρτησις συνεπείᾳ τῆς αὐξήσεως, κατὰ μικράν τινα ποσότητα, τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως σ(x) ἐπὶ τὴν μικρὰν αὔξησιν τῆς x, εὑρίσκομεν ὁλόκληρον τὴν αὔξησιν ἥτις ἐπῆλθεν εἰς τὴν συνάρτησιν πλησίον τοῦ σημείου ἔνθα ὑπελογίσθη ἡ ποσοστιαία μεταβολή. Ἤτοι, $\Delta y = \sigma'(x) \cdot \Delta x$. σ'(x)

Ἐὰν $y = \sigma(x)$ εἶναι δοθεῖσα συνάρτησις, ἔχουσα παράγωγον, *τὸ γινόμενον $\sigma'(x) \cdot \Delta x$ τῆς παραγώγου ἐπὶ τὴν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς,* ἂν *καλεῖται διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου dy.*

Οὕτω $$dy = \sigma'(x) \cdot \Delta x. \tag{91}$$

Συμφώνως τῷ δοθέντι ὁρισμῷ, τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $y = x$ ἔσται :

$$dy = dx = x' \cdot \Delta x \quad \text{ἤτοι}$$
$$dx = \Delta x \tag{92}$$

* Ὅρα ἀπόδειξιν Π. Ζερβόν, σ. 172.

ὅπερ σημαίνει ὅτι *ἡ αὔξησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x ἰσοῦται τῷ διαφορικῷ αὐτῆς.*

Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (91) ἀντικατασταθῇ τὸ Δx ὑπὸ τοῦ ἴσου του dx, εὑρίσκομεν:

$$dy = \sigma'(x) \cdot dx \qquad (93)$$

Ἤτοι: *Πρὸς εὕρεσιν τοῦ διαφορικοῦ δοθείσης συναρτήσεως, εὑρίσκομεν τὴν παράγωγον καὶ ταύτην πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ* dx.

Ἐκ τοῦ τύπου (93) λαμβάνομεν: $\sigma'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, ἤτοι: *ἡ παράγωγος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ πηλίκον διαιρέσεως τοῦ διαφορικοῦ τῆς συναρτήσεως διὰ τοῦ διαφορικοῦ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.*

Παρατήρησις. Ἡ πρᾶξις πρὸς εὕρεσιν τοῦ διαφορικοῦ καλεῖται διαφόρισις, ὅπως ἡ πρᾶξις πρὸς εὕρεσιν τῆς *παραγώγου* καλεῖται παραγώγισις. Αἱ λέξεις *παραγωγίζειν* καὶ *διαφορίζειν* εἶναι ἰσοδύναμοι, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι δοθείσης τῆς παραγώγου εὑρίσκομεν ἀμέσως τὸ διαφορικὸν καὶ ἀντιστρόφως.

Παραδείγματα. 1. *Τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως* $y=x^5$ *εἶναι* $dy=(x^5)'\cdot dx$, *ἤτοι* $dy=5x^4\cdot dx$.

2. *Τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως* $y=x^2-2x+1$ *εἶναι* $dy=(x^2-2x+1)'\cdot dx=(2x-2)dx$.

3. *Τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως* $y=\eta\mu x$ *εἶναι* $dy=(\eta\mu x)'\cdot dx=\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

Διαφορικὰ ἀνωτέρας τάξεως. Ὅπως ἔχομεν παραγώγους ἀνωτέρας τάξεως, οὕτω ἔχομεν καὶ *διαφορικὰ ἀνωτέρας τάξεως*. Τὸ διαφορικὸν συναρτήσεως καλοῦμεν, πρὸς διάκρισιν, *πρῶτον διαφορικὸν* ἢ *διαφορικὸν πρώτης τάξεως*. Τὸ διαφορικὸν τοῦ πρώτου διαφορικοῦ, ὅπερ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου d^2y, καλεῖται *δεύτερον διαφορικὸν* ἢ *διαφορικὸν δευτέρας τάξεως τῆς συναρτήσεως*. Τὸ διαφορικὸν τοῦ d^2y καλεῖται *τρίτον διαφορικὸν* ἢ *διαφορικὸν τρίτης τάξεως* καὶ συμβολίζεται διὰ τοῦ d^3y. Γενικῶς τὸ νιοστὸν διαφορικὸν $d^\nu y$ εἶναι τὸ διαφορικὸν τοῦ προηγουμένου $d^{(\nu-1)}y$.

Ἐπὶ τῶν διαφορικῶν ἔχομεν τὸν γενικὸν τύπον:

$$d(d^{\nu-1}y) = \boxed{d^\nu y = \sigma^{(\nu)}(x)\, dx^\nu}$$

ἐξ οὗ καὶ

$$\sigma^{(\nu)}(x) = \frac{d^\nu y}{dx^\nu}. \quad \text{Π.χ.} \quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}, \quad y'''=\frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Παραδείγματα. 1. *Τὸ δεύτερον διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως* $y=x^4$ *εἶναι* $d^2y=(x^4)''\cdot dx^2=12x^2\cdot(dx)^2$ *ἢ* $12x^2\cdot dx^2$.

2. *Τὸ τρίτον διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως* $y=2x^3-4x^2+5$ *εἶναι:* $d^3y=(2x^3-4x^2+5)'''dx^3=12dx^3$ *ἢ* $12\cdot(dx)^3$.

$\sigma^{(\nu)}$ = νιοστή παρ...

$\sigma^{(2)} = \sigma''$

§ 73. Ἀντικείμενον τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ.

Μετὰ τὴν ἐν τοῖς προηγουμένοις (§ 65–72) λεπτομερῆ ἔκθεσιν περὶ συναρτήσεων, μεταβολῶν τούτων, τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν μεταβαλλομένων, συγκρίσεως τῶν τιμῶν μιᾶς συναρτήσεως πέριξ τιμῆς τινος ταύτης, εἴτε διὰ διαιρέσεως πρὸς εὕρεσιν τῆς παραγώγου εἴτε δι' ἀφαιρέσεως πρὸς εὕρεσιν τοῦ διαφορικοῦ, βλέπομεν ὅτι: *Ἀντικείμενον τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ εἶναι ἡ, εἴτε διὰ διαιρέσεως εἴτε δι' ἀφαιρέσεως, σύγκρισις τῶν διαφόρων τιμῶν συναρτήσεως—ἢ ἄλλως τοῦ φαινομένου τοῦ παριστωμένου διά τινος συναρτήσεως—τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ταύτης μεταβαλλομένων καὶ ἡ εὕρεσις ποσοτικῶν, ἀριθμητικῶν, ἐξαγομένων διδόντων χρησίμους πληροφορίας διὰ τὴν κατεύθυνσιν, τάσιν, τροπὴν καὶ ταχύτητα μεταβολῆς τῶν φαινομένων. Πάντα δὲ ταῦτα ἐρευνώμενα καὶ ἀναλυτικῶς καὶ γεωμετρικῶς.*

§ 74. Πίναξ τῶν παραγώγων στοιχειωδῶν τινων συναρτήσεων.

1. $y = \alpha$ (σταθερά), $\quad y' = 0$.
2. $y = x$, $\quad y' = 1$.
3. $y = \alpha\sigma(x)$, $\quad y' = \alpha\sigma'(x)$.
4. $y = \sigma(x) \pm \varphi(x) \pm f(x)$, $\quad y' = \sigma'(x) \pm \varphi'(x) \pm f'(x)$.
5. $y = \sigma(x)\cdot\varphi(x)$, $\quad y' = \sigma'(x)\cdot\varphi(x) + \varphi'(x)\cdot\sigma(x)$.
6. $y = \sigma(x)\cdot\varphi(x)\cdot f(x)$, $\quad y' = \sigma'(x)\cdot\varphi(x)\cdot f(x) + \varphi'(x)\cdot\sigma(x)\cdot f(x) + f'(x)\cdot\sigma(x)\cdot\varphi(x)$.
7. $y = x^{\nu}$ $\quad y' = \nu\cdot x^{\nu-1}$
8. $y = \dfrac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, $\quad y' = \dfrac{\sigma'(x)\cdot\varphi(x) - \varphi'(x)\cdot\sigma(x)}{(\varphi(x))^2}$.
9. $y = \dfrac{1}{x}$, $\quad y' = -\dfrac{1}{x^2}$.
10. $y = \dfrac{\sigma(x)}{\alpha}$ (α σταθερά), $\quad y' = \dfrac{1}{\alpha}\cdot\sigma'(x)$.
11. $y = \sigma(\omega)$, ἔνθα $\omega = \varphi(x)$, $\quad y'_x = y'_\omega\cdot\omega'_x$.
12. $y = \sigma(x)$, ἔχουσα ἀντίστροφον τὴν $x = \varphi(y)$, $\quad y' = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.
13. $y = \sqrt{x}$ $\quad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
14. $y = \sqrt{\sigma(x)}$, $\quad y' = \dfrac{\sigma'(x)}{2\sqrt{\sigma(x)}}$.
15. $y = \eta\mu x$, $\quad y' = \sigma\upsilon\nu x$.
16. $y = \sigma\upsilon\nu x$, $\quad y' = -\eta\mu x$.

17. $y = \varepsilon\varphi x$, $\qquad y' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

18. $y = \sigma\varphi x$, $\qquad y' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

19. $y = \tau o\xi\eta\mu x$, $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

20. $y = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$, $\qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

21. $y = \tau o\xi\varepsilon\varphi x$, $\qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

22. $y = \tau o\xi\sigma\varphi x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′ *Εὑρεῖν τὰς παραγώγους τῶν κάτωθι συναρτήσεων :*

1. $y=x^4-5x^3+2x^2-8x+11$ (Ὅρα § 68, ἐφαρμογαί, 1. $y'=4x^3-15x^2+4x-8$).
2. $y=5x^5-3x^3+2x^2+8$ (Ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ. $y'=25x^4-9x^2+4x$). ναί
3. $y=x^{\alpha+\beta}$ (Πόρισμα Θεωρ. IV, § 68. $y'=(\alpha+\beta)x^{\alpha+\beta-1}$).
4. $y=x^{-3}-2x^{-\frac{1}{2}}$ (Θ. II καὶ Πόρ. Θ. IV, § 68. $y'=-3x^{-4}+x^{-\frac{3}{2}}$). ναί
5. $y=5x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{1}{5}}+1$ (» » $y'=3x^{-\frac{2}{5}}+\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$). ναί
6. $y=(1+x)(7-x^2)$ (Ὅρα § 68, ἐφαρμογαί, 3. $y'=-3x^2-2x+7$). ναί
7. $y=\dfrac{3}{x+1}$ (» » , 5. $y'=-\dfrac{3}{(x+1)^2}$). ναί
8. $y=\dfrac{x}{x^2+3}$ (» » , 6. $y'=\dfrac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$). ναί
9. $y=\dfrac{x-1}{x^2}$ (» » , ». $y'=\dfrac{2-x}{x^3}$). ναί
10. $y=\dfrac{x^\nu}{(1+x)^\nu}$ (» » » $y'=\dfrac{\nu x^{\nu-1}}{(1+x)^{\nu+1}}$).
11. $y=\sqrt{x^2-2x+3}$ (§ 68, Θεώρ. VI, ἐφαρμ. 2. $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$). ναί
12. $y=\sqrt{\alpha^2-x^2}$ (» » » $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$). ναί
13. $y=\dfrac{4}{3\sqrt{9-x^2}}$ (§ 68, Θεώρ. V καὶ VI. $y'=\dfrac{4x}{3(9-x^2)^{3/2}}$).
14. $y=\dfrac{3+2x}{\sqrt{1+x}}$ (» » » $y'=\dfrac{2x+1}{2(1+x)^{3/2}}$).

15. $y=\sqrt{\dfrac{3x^2-1}{2x^2-1}}$ $\qquad y'=\dfrac{-5x}{\sqrt{3x^2-1}\,(2x^2+1)^{3/2}}\cdot$

16. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad y'=\dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\cdot$

17. $y=\dfrac{t^2}{\sqrt{2t-1}}$ $\qquad y'=\dfrac{3t^2-2t}{(2t-1)^{3/2}}\cdot$

18. $y=\dfrac{\sqrt{t-1}}{(t+2)^2}$ $\qquad y'=\dfrac{3(2-t)}{2(t+2)^3\sqrt{t-1}}\cdot$

19. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2+2}}$ $\qquad y'=\dfrac{6x}{\sqrt{(x^2-4)(x^2+2)^3}}\cdot$

20. $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\qquad y'=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}\cdot$

21. $y=(1-x)\sqrt[3]{(2+x)^2}$ $\qquad y'=-\dfrac{5x+4}{3\sqrt[3]{2+x}}$

22. $y=x(1+x^2)\sqrt{1-x^2}$ $\qquad y'=\dfrac{1+x^2-4x^4}{\sqrt{1-x^2}}$

23. $y=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ $\qquad y'=-\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}\cdot$

24. $y=\eta\mu 3x$ $\qquad y'=3\sigma\upsilon\nu 3x$

25. $y=\eta\mu x^3$ $\qquad y'=3x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x^3$

26. $y=x\sigma\upsilon\nu x$ $\qquad y'=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x.$

27. $y=\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$ $\qquad y'=\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x.$

28. $y=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ $\qquad y'=x\sigma\upsilon\nu x.$

29. $y=\dfrac{\eta\mu^2 x}{1+\eta\mu^2 x}$ $\qquad y'=\dfrac{\eta\mu 2x}{(1+\eta\mu^2 x)^2}\cdot$

30. $y=\sqrt{\dfrac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}$ $\qquad y'=\dfrac{1}{1-\eta\mu x}\cdot$

31. $y=x^8\varepsilon\varphi x$ $\qquad y'=8x^7\varepsilon\varphi x+\dfrac{x^8}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\cdot$

32. $y=\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}$ $\qquad y'=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^2 x}}\cdot$

33. $y=\tau o\xi\eta\mu(1-x)$ $\qquad y'=\dfrac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}\cdot$

34. $y=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu(2x-1)$ $\qquad y'=\dfrac{-1}{\sqrt{x-x^2}}\cdot$

35. $y=\tau o\xi\sigma\varphi(2x+3)$ $\qquad y'=\dfrac{-1}{2x^2+6x+5}\cdot$

36. $y=\tau o\xi\eta\mu\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad y'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot$

37. $y=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad y'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot$

38. $y = \text{τοξεφ} \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

Β' *Εὑρεῖν τὰς παραγώγους τοῦ* ὑπερβολικοῦ συνημιτόνου *chx*, ὑπερβολικοῦ ἡμιτόνου *shx* *καὶ* ὑπερβολικῆς ἐφαπτομένης *thx*. ***Αἱ συναρτήσεις αὗται λέγονται*** ὑπερβολικαί.

39. $y = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$.

40. $y = shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = chx$.

41. $y = thx = \dfrac{shx}{chx}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{ch^2x}$.

Γ' *Εὑρεῖν τὰς παραγώγους τῶν κάτωθι λογαριθμικῶν συναρτήσεων.*

42. $y = \ln \dfrac{x-\beta}{x-\alpha}$ $\qquad y' = \dfrac{\beta-\alpha}{(x-\alpha)\,(x-\beta)}$.

43. $y = \ln\left(x+\alpha+\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}\right)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}}$.

44. $y = \ln(\ln x)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x\ln x}$.

45. $y = \ln \dfrac{1+\text{εφ}\,\dfrac{x}{2}}{1-\text{εφ}\,\dfrac{x}{2}}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\text{συν}x}$.

46. *Εὑρεῖν τὴν τρίτην παράγωγον τῆς συναρτήσεως* $y = x^2 - 7x + 1$.

Ἀπόκρ. $y' = 2x - 7$, $y'' = (y')' = 2$, $y''' = (y'')' = 0$.

47. *Δεῖξαι ὅτι ἡ νιοστὴ παράγωγος τῆς συναρτήσεως* $y = x^\mu$ *εἶναι* $y^{(\nu)} = \mu(\mu-1)\,(\mu-2)\,.\,.\,.\,.\,(\mu-\nu+1)x^{\mu-\nu}$.

Ἀπόκρ. $y' = \mu x^{\mu-1}$, $y'' = (\mu x^{\mu-1})' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$ κ.ο.κ.

48. *Δεῖξαι ὅτι ἡ πέμπτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως* $y = \dfrac{1}{x}$ *ἰσοῦται μὲ*

$$y^{(5)} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x^6} = -\frac{5!}{x^{5+1}}.$$

Ἀπόκρ. $y' = -\dfrac{1}{x^2}$, $y'' = \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)' = 1\cdot\dfrac{2}{x^3}$, κ.ο.κ.

49. *Δεῖξαι ὅτι ἡ νιοστὴ παράγωγος τῆς συναρτήσεως* $y = \eta\mu\lambda x$ *εἶναι*

$$y^{(\nu)} = \lambda^\nu\, \eta\mu \left(\lambda x + \nu\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Απόκρ. $y' = \lambda \sigma \upsilon \nu \lambda x = \lambda \eta \mu \left(\lambda x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$y'' = -\lambda^2 \sigma \upsilon \nu \lambda x = \lambda^2 \eta \mu \left(\lambda x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

. . . .

. . . .

$$y^{(\nu)} = \lambda^{\nu} \eta \mu \left(\lambda x + \nu \frac{\pi}{2}\right).$$

50. ***Δεῖξαι ὅτι ἡ νιοστὴ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = \sigma \upsilon \nu \lambda x$ εἶναι $y^{(\nu)} = \lambda^{\nu} \sigma \upsilon \nu \left(\lambda x + \nu \frac{\pi}{2}\right)$.***

Απόκρ. Ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀσκήσει.

51. ***Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς $y = \frac{1}{2} x^2$ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς (4,8).***

K=4 **Απόκρ.** Ἡ παράγωγος εἰς τὸ σημεῖον $x=4$ εἶναι $\left(\frac{1}{2} x^2\right)'_{x=4} = 4$. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς θὰ ἔχῃ γωνιακὸν συντελεστὴν 4 καὶ θὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου (4,8). Ἄρα θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν (τύπος 42) $y - 8 = 4(x - 4)$, ἥτις μετὰ τὰς πράξεις λαμβάνει τὴν μορφὴν $y = 4x - 8$.

52. ***Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς $y = x^2 - x + 1$ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς (1, 1).***

Απόκρ. Ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀσκήσει εὑρίσκομεν $y=x$.

53. ***Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς $y = \frac{2}{x}$ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς (1, 2).***

Απόκρ. Ἐργαζόμενοι ὡς ἐν ταῖς ἀσκήσεσι 51 καὶ 52, εὑρίσκομεν $y = -2x + 4$.

54. ***Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$.***

Απόκρ. Λύομεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς y.)$y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ καὶ ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομεν τὴν παράγωγον εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον, $y'_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3\sqrt{35}}$.
Ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη ἔχουσα γωνιακὸν συντελεστὴν $-\frac{2}{3\sqrt{35}}$ καὶ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$ ἔχει ἐξίσωσιν $3\sqrt{35}\, y = -2x + 36$.

Θεώρημα του Rolle - Προϋποθέσεις
1) $\sigma(x)$ συνεχής εις το διάστημα $x=\alpha$, έως $x=\beta$
2) $\sigma(\alpha)=\sigma(\beta)$, ακριβώς ίσες.
3) να έχη παράγωγον διά κάθε τιμήν του x ισχύη η σχέση $\alpha<x<\beta$
Πόρισμα: τότε διά τιμή της ξ ώστε $\alpha<\xi<\beta$ η $\sigma'(\xi)=0$

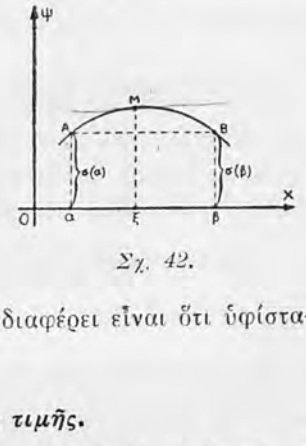
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΣΠΟΥΔΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

§ 75. *Θεώρημα τοῦ Rolle.*

Ἐὰν διά τινα συνάρτησιν $\sigma(x)$ μονότιμον καὶ ἔχουσαν παράγωγον διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x, ἔν τινι διαστήματι (α, β) ἔχωμεν $\sigma(\alpha)=\sigma(\beta)$, θὰ ὑφίσταται τιμὴ τῆς $x=\xi$, ἐν τῷ ἐν λόγῳ διαστήματι, δι' ἣν ἡ παράγωγος εἶναι μηδέν.

Ἐκ τοῦ σχήματος (42) διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ ὑφίσταται σημεῖον Μ, ἔχον τετμημένην ξ, εἰς ὃ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὅτι $\sigma'(\xi)=0$.



Σχ. 42.

Σημείωσις. Εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσι πλείονα τοῦ ἑνὸς σημείου, εἰς ἃ ἡ παράγωγος, ὡς ἀνωτέρω, εἶναι μηδέν. Ἐκεῖνο ὅμως ὅπερ ἐνδιαφέρει εἶναι ὅτι ὑφίσταται ὁπωσδήποτε ἕν.

1) $\varphi(x)$ = συνεχής
2) να υπάρχη παράγωγος σε κάθε τιμή του x
3) [illegible]: $\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}$

§ 76. *Θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς.*

Ἐὰν συνάρτησίς τις $\sigma(x)$ ἔχῃ παράγωγον διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x ἐντὸς διαστήματος (α, β), ὑφίσταται ἐντὸς τοῦ διαστήματος τοὐλάχιστον μία τιμὴ ξ τῆς x, δι' ἥν:

$$\frac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}{\beta-\alpha}=\sigma'(\xi) \tag{94}$$

Γεωμετρικῶς τὸ θεώρημα σημαίνει, ὅτι ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἓν σημεῖον τοῦ τόξου AB, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ σχήματι, εἰς ὃ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου εἶναι παράλληλος τῇ χορδῇ AB.

§ 77. *Κανὼν τοῦ L'Hospital.*

Ἐνίοτε, ἐν τῇ ἀναζητήσει τοῦ ὁρίου πηλίκου δύο συναρτήσεων $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ διὰ $x \to \alpha$, ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ πηλίκου (§ 61, Θ. IV) ὁδηγεῖ εἰς ἀπροσδιόριστον μορφὴν (§ 62, Παρατήρ.). Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ καταφεύγομεν εἰς τέχνασμα (ὅρα § 62 Παραδείγματα) ἢ ἐφαρμόζομεν τὸν ἑξῆς κανόνα: *Ἐὰν τοῦ x τείνοντος πρὸς τὸ a ὁ λόγος τῶν παραγώγων $\sigma'(x)$ καὶ $\varphi'(x)$ τῶν συναρτήσεων $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ ἔχῃ ὅριον, τοῦτο θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ὅριον τοῦ λόγου τῶν δύο συναρτήσεων**.

Ὁ κανὼν οὗτος ὀφείλεται εἰς τὸν μαθηματικὸν *L' Hospital*, παρ' οὗ ἔλαβε καὶ τὸ ὄνομα.

Βάσει τοῦ ἀνωτέρω κανόνος ἔχομεν:

$$\boxed{\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}} \tag{95}$$

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ $\sigma(\alpha)=\varphi(\alpha)=0$, ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς, θὰ ἔχωμεν: $\dfrac{\sigma(x)-\sigma(\alpha)}{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}=\dfrac{(x-\alpha)\sigma'(\xi_1)}{(x-\alpha)\sigma'(\xi_2)}$, ἐξ ἧς $\boxed{\dfrac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\sigma'(\xi_1)}{\sigma'(\xi_2)}}$.

Ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι $x\to\alpha$, τότε $\xi_1\to\alpha$, $\xi_2\to\alpha$ καθόσον οἱ ἀριθμοὶ ξ_1, ξ_2 κεῖνται εἰς τὸ διάστημα (x, α). Συνεπῶς λαμβάνοντες τὰ ὅρια εὑρίσκομεν τὸν τύπον (95).

Ἐὰν ὁ λόγος $\dfrac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}$, τοῦ $x\to\alpha$, λάβῃ ἀπροσδιόριστον μορφὴν καὶ ἐὰν αἱ παράγωγοι πληροῦσι τὰς συνθήκας τὰς ὁποίας πληροῦσι καὶ αἱ συναρτήσεις διὰ τὴν ἰσχὺν τοῦ κανόνος, δυνάμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ λάβωμεν τὸν *λόγον τῶν δευτέρων παραγώγων* κ.ο.κ.

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης εἶναι ἀληθὴς καὶ ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν ὁ λόγος τῶν δύο συναρτήσεων λαμβάνει τὴν μορφὴν $\dfrac{0}{0}$ διὰ $x\to\infty$. Ὁμοίως καὶ ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν ὁ λόγος λάβῃ τὴν μορφὴν $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Παραδείγματα

1. $$\underset{x\to2}{\text{ορ}}\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+8}=\underset{x\to2}{\text{ορ}}\frac{(x^2-3x+2)'}{(x^2-6x+8)'}=\underset{x\to2}{\text{ορ}}\frac{2x-3}{2x-6}=-\frac{1}{2}.$$

2. $$\underset{x\to0}{\text{ορ}}\frac{\eta\mu x}{x}=\underset{x\to0}{\text{ορ}}\frac{(\eta\mu x)'}{x'}=\underset{x\to0}{\text{ορ}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1}=1.$$

3. $$\underset{x\to0}{\text{ορ}}\frac{x\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\underset{x\to0}{\text{ορ}}\frac{(x\eta\mu x)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}=\underset{x\to0}{\text{ορ}}\frac{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=$$
$$=\underset{x\to0}{\text{ορ}}\frac{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x)'}=\underset{x\to0}{\text{ορ}}\frac{2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=2.$$

* Αἱ συναρτήσεις $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ θεωροῦνται ὡρισμέναι καὶ συνεχεῖς ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ α καὶ ὅτι ἔχουσι, ἐν τῇ ἐν λόγῳ περιοχῇ, παραγώγους.

§ 78. *Χαρακτηριστικὰ σημεῖα τῶν καμπύλων.*

Ἐλέχθη ἐν τοῖς προηγουμένοις ὅτι, ἐφ᾽ ὅσον διαπιστωθῇ ὅτι ἡ πορεία φαινομένου τινὸς προσομοιάζει ἀρκούντως πρὸς γραμμήν τινα, ἧς τὴν ἐξίσωσιν γνωρίζομεν, ἡ σπουδὴ τοῦ φαινομένου εὐκολύνεται διὰ τῆς μαθηματικῆς ἐρεύνης τῆς γραμμῆς ταύτης. Ἀλλ᾽ ἡ γραμμὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διερευνηθῇ εἰς πάντα τὰ σημεῖα της, ἀλλ᾽ εἰς τὰ χαρακτηρίζοντα ταύτην, *τὰ χαρακτηριστικά της*, τὰ δίδοντα τὰ οὐσιώδη τῆς πορείας της καὶ συνεπῶς τῆς πορείας τοῦ προσομοιάζοντος φαινομένου. Τὰ σημεῖα δὲ ταῦτα εἶναι ἐκεῖνα εἰς *ἃ ἡ ἀλλαγὴ καταστάσεως τοῦ φαινομένου εἶναι ἐντονωτέρα* καὶ ὁ ἐρευνητὴς εἰς ταῦτα βασίζει κυρίως τὴν ἀνάλυσιν τοῦ φαινομένου.

Ὡς κύρια, γενικὰ χαρακτηριστικὰ σημεῖα γραμμῆς τινος λαμβάνονται ἐνταῦθα τὰ ἑξῆς :

1. *Ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων*, ἐφόσον αὕτη εἶναι σημεῖον τῆς γραμμῆς.
2. *Τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀξόνων παρὰ τῆς γραμμῆς*, ἐφόσον ἡ γραμμὴ τέμνει τοὺς ἄξονας.
3. *Τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς εἰς ἃ αὕτη παύει ἀνερχομένη καὶ ἀρχίζει κατερχομένη καὶ ἀντιστρόφως.*
4. *Τὰ σημεῖα εἰς ἃ ἡ καμπύλη κάμπτεται.*

Ἐὰν ἡ γραμμὴ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, θὰ πρέπῃ ἡ ἐξίσωσίς της νὰ ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων της (0,0).

Τὰ σημεῖα τομῆς τῆς γραμμῆς μετὰ τῶν ἀξόνων θὰ εὑρεθῶσι, κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 34), ἐκ τῆς λύσεως συστήματος δύο ἐξισώσεων, ἐξ ὧν ἡ μία εἶναι ἡ τῆς γραμμῆς καὶ ἡ ἑτέρα ἡ τοῦ ἄξονος.

Ὁ καθορισμὸς τῶν ὑπολοίπων χαρακτηριστικῶν σημείων τῆς γραμμῆς θὰ ἐπιτευχθῇ τῇ βοηθείᾳ τῆς παραγώγου καὶ ἰδίᾳ τοῦ σημείου ταύτης.

§ 79. *Χρησιμότης τοῦ σημείου τῆς παραγώγου.*

Ἐξ αὐτῆς ταύτης τῆς ἐννοίας τῆς παραγώγου συνάγεται ὅτι, ἐὰν ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = \sigma(x)$ διά τινα τιμὴν τῆς $x = \alpha$ εἶναι θετική, ἤτοι ἐὰν $\sigma'(\alpha) > 0$, ἡ συνάρτησις ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου τούτου εἶναι *αὔξουσα* (§ 33), ἤτοι μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν μετὰ τοῦ x. Ἐάν, τοὐναντίον, διὰ τὴν θεωρηθεῖσαν τιμὴν τῆς x εἶναι $\sigma'(\alpha) < 0$, ἡ συνάρτησις εἶναι *φθίνουσα*, ἤτοι μεταβάλλεται κατὰ τὴν ἀντίθετον ἔννοιαν πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς x.

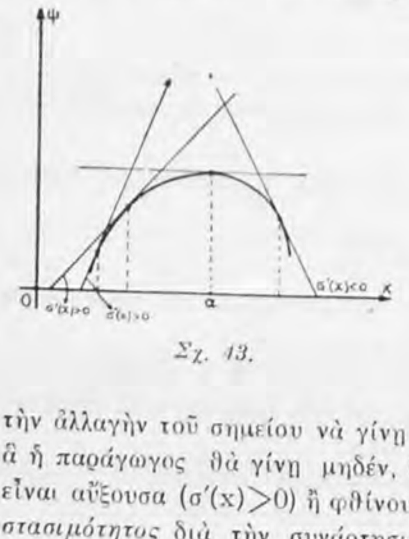
Οὕτω τὸ σημεῖον τῆς παραγώγου καθορίζει τὴν πρὸς τὰ ἄνω ἢ κάτω πορείαν τῆς συναρτήσεως.

Ὅ,τι ἐλέχθη διὰ μίαν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς δύναται νὰ ἰσχύσῃ καὶ διὰ πλῆθος τιμῶν τῆς x, αἵτινες καθορίζουσιν ἓν ὡρισμένον διάστημα. Ὑποτίθεται πάντοτε ὅτι πρόκειται περὶ συναρτήσεως ὡρισμένης, μονοτίμου καὶ συνεχοῦς εἰς σημεῖον ἢ εἰς διάστημα εἰς ὃ ἡ συνάρτησις σπουδάζεται.

§ 80. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα συναρτήσεων – Ὁρισμὸς καὶ εὕρεσις τούτων.

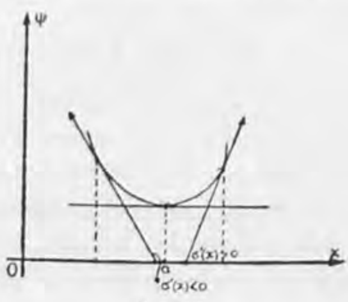
Ἔστω $y=\sigma(x)$ συνάρτησίς τις ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$, ἔχουσα παράγωγον ὁμοίως ὡρισμένην καὶ συνεχῆ.

Ἐὰν ἡ παράγωγος εἶναι θετικὴ μέχρις οὗ ἡ x λάβῃ τὴν τιμὴν α καὶ μετὰ ταῦτα διὰ τὰς τιμὰς τῆς x τὰς μεγαλυτέρας τοῦ α καταστῇ ἀρνητική, ἡ συνάρτησις διέρχεται διὰ τῆς *μεγίστης τιμῆς* ἣν λαμβάνει ἐν τῷ ὑπ' ὄψιν διαστήματι. Τοὐναντίον, ἐὰν ἡ παράγωγος εἶναι ἀρνητικὴ μέχρις οὗ ἡ x λάβῃ τὴν τιμὴν α καὶ μετὰ ταῦτα διὰ τιμὰς τῆς x μεγαλυτέρας τῆς α καταστῇ θετική, ἡ συνάρτησις διέρχεται διὰ τῆς *ἐλαχίστης τιμῆς*, ἣν λαμβάνει ἐν τῷ διαστήματι εἰς ὃ ἡ συνάρτησις σπουδάζεται.



Σχ. 43.

Ἐφόσον ἡ παράγωγος ἐθεωρήθη συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$, καὶ οὖσα θετικὴ (ἀρνητικὴ) καθίσταται ἀρνητικὴ (θετική), θὰ πρέπῃ κατὰ τὴν ἀλλαγὴν τοῦ σημείου νὰ γίνῃ μηδὲν (§ 63, ἰδιότης 4). Τὰ σημεῖα εἰς ἃ ἡ παράγωγος θὰ γίνῃ μηδέν, ἤτοι τὰ σημεῖα εἰς ἃ ἡ συνάρτησις δὲν εἶναι αὔξουσα $(\sigma'(x)>0)$ ἢ φθίνουσα $(\sigma'(x)<0)$, χαρακτηρίζονται ὡς *σημεῖα στασιμότητος* διὰ τὴν συνάρτησιν. Εἰς τὰ σημεῖα δὲ αὐτά, τὰ ὁποῖα εἶναι χαρακτηριστικὰ τῆς καμπύλης, *ἡ συνάρτησις λαμβάνει τιμὴν ἥτις εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἢ ἡ μικροτέρα πασῶν τῶν τιμῶν ἃς λαμβάνει ἐν τῇ περιοχῇ τῶν ἐν λόγῳ σημείων.*



Σχ. 44.

Γεωμετρικῶς παρακολουθοῦντες τὴν μεταβολὴν τῆς παραγώγου, θεωρουμένης ὡς γωνιακοῦ συντελεστοῦ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης, παρατηροῦμεν *(Σχ. 43 καὶ Σχ. 44)* ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὰ σημεῖα στασιμότητος εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x.

Ὁρισμοί. 1. *Καλοῦμεν μεγίστην τιμὴν συναρτήσεώς τινος, διά τινα* *τιμὴν $x = α$, ἢ ἁπλῶς μέγιστον ταύτης, τὴν μεγαλυτέραν τιμὴν τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ συνάρτησις ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ α.*

Οὕτως, ἐὰν ἡ συνάρτησις $y = σ(x)$ εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου α καὶ διὰ μίαν ποσότητα ε ὁσονδήποτε μικράν, ἔχομεν $σ(α) > σ(α - ε)$ καὶ $σ(α) > σ(α + ε)$, ἡ συνάρτησις σ(x) λαμβάνει διὰ $x = α$, τὴν *μεγίστην τιμὴν* ἢ τὸ *μέγιστον* ἤ, ὡς λέγεται διεθνῶς, τὸ *maximum* σ(α).

2. *Καλοῦμεν ἐλαχίστην τιμὴν συναρτήσεώς τινος διά τινα τιμὴν $x = α$ ἢ ἁπλῶς ἐλάχιστον, τὴν μικροτέραν τιμὴν τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ συνάρτησις ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ α.*

Ἐὰν διὰ τὴν θεωρηθεῖσαν ὡς ἀνωτέρω συνάρτησιν $y = σ(x)$ ἔχωμεν :

$$σ(α) < σ(α - ε) \quad \text{καὶ} \quad σ(α) < σ(α + ε),$$

ἡ συνάρτησις λαμβάνει διὰ $x = α$ τὴν *ἐλαχίστην τιμὴν* ἢ τὸ *ἐλάχιστον* ἤ, ὡς λέγεται διεθνῶς, τὸ *minimum* σ(α).

3. Τὸ *μέγιστον* καὶ *ἐλάχιστον*, ὡς ἐθεωρήθησαν ἀνωτέρω, καλοῦνται *σχετικά*, διότι εἶναι σχετικὰ πρὸς τὴν τιμὴν $x = α$, καὶ διότι διὰ τιμὰς τῆς x ἀπεχούσας τῆς α, ἡ συνάρτησις δύναται νὰ λάβῃ καὶ τιμὰς μεγαλυτέρας τοῦ μεγίστου ἢ μικροτέρας τοῦ ἐλαχίστου τῶν ἀντιστοίχων εἰς τὴν ὑπ᾿ ὄψιν τιμὴν τῆς x.

Γενικῶς, συνάρτησίς τις λαμβάνει ἓν *σχετικὸν μέγιστον*, ὁσάκις *παύει νὰ αὐξάνῃ διὰ νὰ ἀρχίσῃ νὰ ἐλαττοῦται*, ἐνῷ λαμβάνει *σχετικὸν ἐλάχιστον* ὁσάκις *παύει νὰ ἐλαττοῦται διὰ νὰ ἀρχίσῃ νὰ αὐξάνῃ*.

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου. Εἴδομεν ὅτι, ἐὰν ἡ συνάρτησις ἔχῃ *σχετικὸν μέγιστον* διὰ $x = α$, ἡ πρώτη παράγωγος λαμβάνει τιμὰς θετικὰς καὶ ἐν συνεχείᾳ τιμὰς ἀρνητικάς, λαμβάνουσα διὰ $x = α$ τιμὴν μηδενικήν. Ἐάν, συνεπῶς, θεωρήσωμεν τὴν πρώτην παράγωγον ὡς νέαν συνάρτησιν, αὕτη ἐλαττοῦται, ἤτοι εἶναι φθίνουσα, καὶ ἡ παράγωγός της, ἥτις εἶναι ἡ *δευτέρα παράγωγος τῆς συναρτήσεως*, διὰ τὴν θεωρουμένην τιμὴν τῆς x εἶναι ἀρνητική. Ἄρα *ἡ τιμὴ τῆς δευτέρας παραγώγου*, $σ''(α)$, διὰ τὴν τιμὴν $x = α$, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον τῆς σ(x), *εἶναι ἀρνητική*.

Ὁμοίως, ἐὰν ἡ συνάρτησις ἔχῃ *σχετικὸν ἐλάχιστον* διὰ $x = α$, ἡ πρώτη αὐτῆς παράγωγος μεταβαίνει ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν εἰς θετικὰς καὶ μηδενίζεται διὰ $x = α$· συνεπῶς, ἡ πρώτη παράγωγος $σ'(x)$ εἶναι αὔξουσα καὶ ἡ παράγωγος ταύτης, ἤτοι ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς συναρτήσεως, εἶναι θετικὴ διὰ τὴν θεωρουμένην τιμὴν τῆς x. Ἄρα *ἡ τιμὴ τῆς δευτέρας παραγώγου*, $σ''(α)$, διὰ τὴν τιμὴν $x = α$, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐλάχιστον, *εἶναι θετική*.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων* δοθείσης συναρτήσεως $y = \sigma(x)$, ἐκτελοῦμεν τὰς ἑξῆς πράξεις:

1. *Εὑρίσκομεν τὴν πρώτην καὶ δευτέραν παράγωγον.*
2. *Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν $\sigma'(x) = 0$, ἥτις προκύπτει ἐξισουμένης τῆς πρώτης παραγώγου πρὸς μηδέν.*
3. *Ἐὰν a εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\sigma'(x) = 0$, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς δευτέρας παραγώγου διὰ $x = a$, ἤτοι τὴν $\sigma''(a)$.*
4. *Ἐὰν συμβαίνῃ $\sigma''(a) < 0$ ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον, ἐὰν δὲ $\sigma''(a) > 0$ ἔχει ἐλάχιστον διὰ $\boxed{x = a}$ ἅτινα καὶ δίδονται ὑπὸ τῆς τιμῆς $\sigma(a)$.*

Παρατήρησις. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐθεωρήσαμεν ὅτι $\sigma''(a) \neq 0$. Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ εἶναι μηδὲν ὄχι μόνον ἡ δευτέρα, ἀλλὰ καὶ ἡ τρίτη κ.λ.π. παράγωγοι καὶ ὅμως ἡ συνάρτησις νὰ ἔχῃ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

Διὰ τὴν τελευταίαν περίπτωσιν, ἡ εὕρεσις τῶν συνθηκῶν ὑπάρξεως μεγίστου ἢ ἐλαχίστου καθίσταται πολύπλοκος καὶ δι' αὐτὸ περιοριζόμεθα εἰς τὴν παράθεσιν τοῦ κατωτέρω κανόνος, ὅστις εἶναι ὁ γενικὸς κανὼν πρὸς εὕρεσιν τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων δοθείσης συναρτήσεως.

Ἵνα συνάρτησίς τις $\sigma(x)$ διὰ $x = a$ ἔχῃ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ πρώτη μὴ μηδενιζομένη παράγωγος τῆς συναρτήσεως διὰ $x = a$ νὰ εἶναι ἀρτίας τάξεως· καὶ ἐὰν $\sigma^{(2\nu)}(a) < 0$ ἔχομεν μέγιστον, ἐὰν δὲ $\sigma^{(2\nu)}(a) > 0$, ἔχομεν ἐλάχιστον. Ἡ τιμὴ τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου δίδεται ὑπὸ τῆς τιμῆς $\sigma(a)$. Ἐὰν ὅμως ἡ πρώτη μὴ μηδενιζομένη παράγωγος εἶναι περιττῆς τάξεως, τότε ἡ συνάρτησις δὲν ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

Παραδείγματα

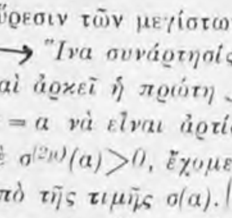
1. ***Εὑρεῖν τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως*** $y = x^3 - 3x + 6$

Ἔχομεν: $\sigma(x) = x^3 - 3x + 6$, $\sigma'(x) = 3x^2 - 3$, $\sigma''(x) = 6x$.

Θέτομεν $\sigma'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, ὅτε εὑρίσκομεν $x = -1$ καὶ $x = 1$. Τὰς τιμὰς ταύτας, αἵτινες μηδενίζουσι τὴν πρώτην παράγωγον, θέτομεν ἐν τῇ δευτέρᾳ παραγώγῳ καὶ λαμβάνομεν:

$$\sigma''(-1) = -6 < 0 \quad \text{καὶ} \quad \sigma''(1) = 6 > 0.$$

Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων, αἵτινες προέκυψαν, συνάγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις διὰ $x = -1$ ἔχει *μέγιστον* καὶ διὰ $x = 1$ *ἐλάχιστον*. Ἡ μεγίστη τιμὴ (maximum) τῆς συναρτήσεως εἶναι $\sigma(-1) = 8$ καὶ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ (minimum) $\sigma(1) = 4$.



Σχ. 45.

2. ***Εὑρεῖν τὰς τιμὰς τῆς*** x ***δι' ἃς ἡ συνάρτησις*** $y = x^2 - 3x + 1$ ***ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.***

Ἔχομεν: $\sigma(x) = x^2 - 3x + 1$, $\sigma'(x) = 2x - 3$, $\sigma''(x) = 2 > 0$, $\sigma'(x) = 2x - 3 = 0$, ἐξ ἧς $x = 1{,}5$.

Τὸ ὅτι ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι ἴση μὲ 2, σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον· τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν τῆς $x = 1{,}5$.

Ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως (*Σχ. 45*) καταδεικνύεται εὐκόλως τὸ ἀνωτέρω ἐξαγόμενον.

---

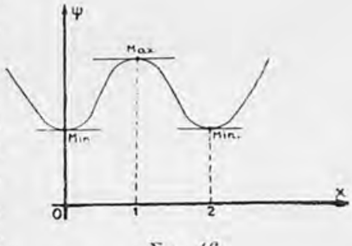
* Ἐν τοῖς ἑπομένοις λέγοντες *μέγιστον* ἢ *ἐλάχιστον* θὰ ἐννοοῦμεν τὸ *σχετικὸν μέγιστον* ἢ *σχετικὸν ἐλάχιστον*.

3. *Νὰ ἐξετασθῇ ἡ πορεία τῆς συναρτήσεως* $\sigma(x)=x^4-4x^3+4x^2+1$ *ὅταν ἡ* x *λαμβάνῃ τιμὰς ἀπὸ* $-\infty$ *ἕως* $+\infty$.

Λαμβάνομεν τὴν πρώτην παράγωγον, ἣν καὶ ἐξισοῦμεν πρὸς 0, $\sigma'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x^2-3x+2)=0$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν τρεῖς τιμὰς τῆς x δι' ἃς μηδενίζεται ἡ παράγωγος, τὰς $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$.

Αἱ τιμαὶ αὗται τῆς x διαιροῦσι τὸ ὅλον διάστημα τῶν τιμῶν τῆς x εἰς τὰ ἑξῆς τέσσαρα διαστήματα·

$(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,+\infty)$.



Σχ. 46.

Εἰς τὸ πρῶτον διάστημα ἔχομεν $\sigma'(x)<0$, εἰς τὸ δεύτερον $\sigma'(x)>0$, εἰς τὸ τρίτον $\sigma'(x)<0$ καὶ εἰς τὸ τέταρτον $\sigma'(x)>0$. Ἄρα εἰς τὸ πρῶτον διάστημα ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα, εἰς τὸ δεύτερον αὔξουσα, εἰς τὸ τρίτον φθίνουσα καὶ εἰς τὸ τέταρτον αὔξουσα.

Τὰ σημεῖα $x=0$, $x=1$, $x=2$ εἶναι σημεῖα στασιμότητος τῆς συναρτήσεως καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὰ ἐν λόγῳ σημεῖα εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x *(Σχ. 46)*.

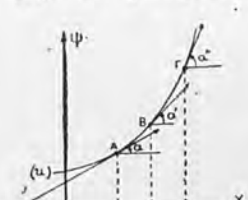
Λάβωμεν τὴν δευτέραν παράγωγον: $\sigma''(x)=12x^2-24x+8$. Θὰ ἔχωμεν:

$\sigma''(0)=8>0$ ἄρα διὰ $x=0$ ἡ $\sigma(x)$ ἔχει *ἐλάχιστον.*
$\sigma''(1)=-4<0$ » » $x=1$ ἡ » » *μέγιστον.*
$\sigma''(2)=8>0$ » » $x=2$ ἡ » » *ἐλάχιστον.*

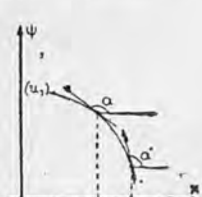
§ 81. Κοῖλα καὶ κυρτὰ δοθείσης καμπύλης — Σημεῖα καμπῆς.

Ἔστω ἡ καμπύλη (κ) *(Σχ. 47)* ἔχουσα ἐξίσωσιν $y=\sigma(x)$. Παρατηροῦμεν ὅτι, δι' αὐξούσας τιμὰς τῆς x ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x αὐξάνει, ἤτοι $\alpha<\alpha'<\alpha''$. Ἄρα καὶ ἡ παράγωγος $\sigma'(x)$ αὐξάνει.

Ἐφ' ὅσον ἡ $\sigma'(x)$ αὐξάνει μετὰ τοῦ x εἶναι συνάρτησις αὔξουσα, ἄρα ἡ παράγωγός της, δηλαδὴ ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς συναρτήσεως ἡ $\sigma''(x)$, εἶναι θετική. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λέγομεν ὅτι *ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα ταύτης πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὸν θετικὸν ἡμιάξονα τῶν y καὶ τὰ κυρτὰ πρὸς τὸν ἀρνητικὸν ἡμιάξονα τῶν y.* Ἐπὶ πλέον ἡ καμπύλη εὑρίσκεται ἄνωθεν τῆς ἐφαπτομένης της εἰς τὸ ὑπ' ὄψιν σημεῖον.



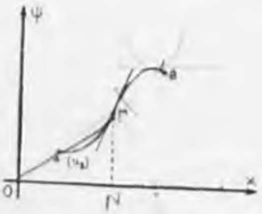
Σχ. 47.



Σχ. 48.

Ἀντιθέτως ἐν τῇ καμπύλῃ (κ_1) *(Σχ. 48)* ἡ γωνία α, οὖσα ἀμβλεῖα βαίνει ἐλαττουμένη μετὰ τοῦ x, ἄρα καὶ ἡ παράγωγος βαίνει ἐλαττουμένη. Ἡ παράγωγος θὰ εἶναι κατὰ συνέπειαν φθίνουσα συνάρτησις καὶ ἡ παράγωγός της $\sigma''(x)$ θὰ εἶναι ἀρνητική. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λέγομεν ὅτι *ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω ἢ πρὸς τὸν ἀρνητικὸν ἡμιάξονα τῶν y καὶ τὰ κυρτὰ πρὸς τὸν θετικὸν ἡμιάξονα τῶν y*. Παρατηρητέον, ἐν τῇ δευτέρᾳ ταύτῃ περιπτώσει, ὅτι ἡ καμπύλη εὑρίσκεται κάτωθεν τῆς ἐφαπτομένης της εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον.

Ἐὰν εἰς σημεῖόν τι Μ καμπύλης τινὸς (κ_1) *(Σχ. 49)* τὰ κοῖλα ταύτης ἀλλάσσουν φοράν, λέγομεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον Μ ἔχομεν *κάμψιν τῆς καμπύλης* καὶ τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται *σημεῖον καμπῆς*.



Σχ. 49.

Εἰς τὸ σημεῖον καμπῆς ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης διαπερᾷ ταύτην.

Διὰ μὲν τὸ τόξον ΑΜ ἔχομεν $\sigma''(x)>0$, διὰ δὲ τὸ τόξον ΜΒ ἔχομεν $\sigma''(x)<0$, ἤτοι εἰς τὸ σημεῖον Μ, ἡ πρώτη παράγωγος παύει νὰ εἶναι αὔξουσα καὶ ἀρχίζει νὰ εἶναι φθίνουσα, ὅπερ σημαίνει ὅτι διὰ τὴν πρώτην παράγωγον ἔχομεν ἐν σημεῖον στασιμότητος καὶ κατὰ συνέπειαν *ἡ δευτέρα παράγωγος θὰ εἶναι μηδὲν ἤτοι* $\sigma''(x)=0$.

Οὕτως *αἱ τιμαὶ τῆς x αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ σημεῖα καμπῆς εἶναι ἐκεῖναι δι' ἃς κατὰ τὴν ἀλλαγὴν σημείου μηδενίζεται ἡ δευτέρα παράγωγος.*

Σημείωσις. Ὁσάκις δὲν εἶναι εὔκολος ἡ διαπίστωσις τοῦ σημείου τῆς $\sigma''(x)$, πρὸ καὶ μετὰ τὴν ὡρισμένην τιμὴν τῆς x δι' ἣν $\sigma''(x)=0$, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν τρίτην παράγωγον, ὅτε, ἐὰν διὰ τὴν ἐν λόγῳ τιμὴν ἔχωμεν $\sigma'''(x)\neq0$, θὰ ἔχωμεν σημεῖον καμπῆς. Γενικώτερον, ὑπάρχει σημεῖον καμπῆς ἐφόσον *ἡ πρώτη κατὰ σειρὰν μὴ μηδενιζομένη παράγωγος διὰ τὴν θεωρουμένην τιμὴν εἶναι τάξεως περιττῆς.*

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα συνάρτησις ὡς καὶ αἱ παράγωγοί της εἶναι συνεχεῖς εἰς τὸ διάστημα εἰς ὃ μελετᾶται ἡ συνάρτησις.

Πρὸς εὐκολωτέραν ἀπομνημόνευσιν παραθέτομεν τὸν κάτωθι πίνακα:

Ἐὰν $\sigma'(x)$ εἶναι
- *θετικὴ* ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα
- *ἀρνητικὴ* » » *φθίνουσα*
- *μηδὲν* » »
  - ἔχει *μέγιστον*, ἐὰν $\sigma''(x)<0$
  - » *ἐλάχιστον*, » $\sigma''(x)>0$

ἐὰν $\sigma''(x)=0$, ἡ συνάρτησις ἔχει σημεῖον καμπῆς.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. ***Εὑρεῖν τὸ σημεῖον καμπῆς τῆς συναρτήσεως*** $y=x^3-9x^2+27x$.
Ἔχομεν: $y'=3x^2-18x+27$, $y''=6x-18$.

Θέτομεν $6x-18=0$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν $x=3$. Ἐὰν ἐν τῇ δευτέρᾳ παραγώγῳ τεθῇ $x=3-\varepsilon$, ἔνθα $\varepsilon>0$, καὶ ἐν συνεχείᾳ $x=3+\varepsilon$, θὰ ἔχωμεν:

$$6(3-\varepsilon)-18=-6\varepsilon<0,$$
$$6(3+\varepsilon)-18=\ 6\varepsilon>0.$$

Συνάγομεν, ὅθεν, ὅτι ἐντεῦθεν μὲν τοῦ σημείου x=3 ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι ἀρνητική, ἤτοι ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω, ἐκεῖθεν δὲ τοῦ σημείου x=3 ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι θετική, ἤτοι ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω, ἄρα ὅτι *τὸ σημεῖον $x=3$ εἶναι σημεῖον καμπῆς.*

Σημείωσις. Διὰ τὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ ὅτι τὸ σημεῖον x=3 εἶναι σημεῖον καμπῆς, λαμβάνομεν τὴν τρίτην παράγωγον τῆς συναρτήσεως $y'''=6$. Ἐφόσον ἡ τρίτη παράγωγος εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἐπιβεβαιοῦται ὅτι ἡ τιμὴ x=3, δι' ἣν μηδενίζεται ἡ δευτέρα παράγωγος, εἶναι ἡ τετμημένη σημείου καμπῆς, ἔχοντος τεταγμένην $y=3^3-9\cdot3^2+27\cdot3=27$ (ὅρα Σημείωσιν § 79).

§ 82. Γενικὴ σπουδὴ καὶ γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων.

Ἡ γνῶσις τῆς χρήσεως τῶν παραγώγων διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς πορείας καὶ τῶν χαρακτηριστικῶν σημείων δοθείσης συναρτήσεως μᾶς ἐπιτρέπει τὴν γενικήν, συστηματικήν, σπουδὴν τῆς συναρτήσεως καὶ τὴν πλήρη γραφικὴν παράστασιν ταύτης. Πρὸς τοῦτο δέον κατὰ τὴν σπουδὴν ν' ἀκολουθήσωμεν τὴν ἑξῆς μέθοδον :

1ον *Νὰ διαπιστώσωμεν ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς x ἢ μόνον εἰς ὡρισμένα διαστήματα.*

2ον *Νὰ προσδιορίσωμεν τὰς τιμὰς τῆς y δι' ἃς $x=0$ καί, εἰ δυνατόν, τὰς τιμὰς τῆς x δι' ἃς $y=0$,* ἐπὶ τῷ σκοπῷ τοῦ καθορισμοῦ τῶν σημείων τομῆς τῆς καμπύλης μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν y καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

3ον *Νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως καὶ ν' ἀναζητήσωμεν τὸ σημεῖον ταύτης* ἐπὶ τῷ σκοπῷ τοῦ καθορισμοῦ τῆς φορᾶς τῆς συναρτήσεως.

4ον *Νὰ προσδιορίσωμεν τὰς τιμὰς τῆς x δι' ἃς ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον, ἐλάχιστον καὶ σημεῖον καμπῆς.*

5ον *Νὰ συντάξωμεν πίνακα τιμῶν τῆς y τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς διαφόρους τιμὰς τῆς x,* ἐπὶ τῷ σκοπῷ τοῦ προσδιορισμοῦ διαφόρων σημείων τῆς καμπύλης.

6ον *Νὰ χαράξωμεν τὴν καμπύλην.*

Ἡ χάραξις τῆς καμπύλης καὶ ἡ ἐν γένει σπουδὴ ταύτης εὐκολύνεται μεγάλως ἐὰν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς κάτωθι περιπτώσεις συμμετρίας :

1. *Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις δὲν ἀλλάσσῃ ὅταν ἀντικαθιστῶμεν τὸ y διὰ τοῦ $-y$, ἡ καμπύλη εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.*

Παράδειγμα. Ἡ παραβολὴ $y^2=6x$.

Συνέπεια. Εὑρεθέντος σημείου τινὸς M(x, y) τῆς καμπύλης, εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ ἕτερον σημεῖον ταύτης M'(x,—y).

2. *Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις δὲν ἀλλάσσῃ ὅταν ἀντικαθιστῶμεν τὸ x διὰ τοῦ $-x$, ἡ καμπύλη εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y.*

Παράδειγμα. Ἡ ἔλλειψις $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Συνέπεια. Εὑρεθέντος σημείου τινὸς $M(x, y)$ τῆς καμπύλης, εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ ἕτερον σημεῖον ταύτης $M(-x, y)$.

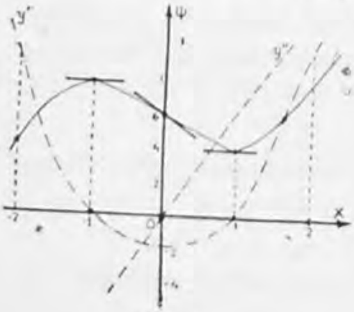
3. *Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις δὲν ἀλλάσσῃ ὅταν ἀντικαθιστῶμεν τὸ x διὰ τοῦ $-x$ καὶ τὸ y διὰ τοῦ $-y$, ἡ καμπύλη εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.*

Παράδειγμα. Ὁ κύκλος $x^2+y^2=25$.

Συνέπεια. Εὑρεθέντος σημείου τινὸς $M(x, y)$ τῆς καμπύλης, εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ ἕτερον σημεῖον ταύτης $M'(-x, -y)$.

Παραδείγματα ἐπὶ τῆς γενικῆς σπουδῆς καὶ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῶν συναρτήσεων.

— α' *Νὰ μελετηθῇ καὶ νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=x^3-3x+6$.*



Σχ. 50.

Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x.

Διὰ $x=0$, $y=6$, ἤτοι τὸ σημεῖον τομῆς μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν y εἶναι (0,6).

Ἡ παράγωγος ταύτης εἶναι $y'=3x^2-3$.

$y'>0$ διὰ $x>1$ ἢ $x<-1$.
$y'<0$ » $-1<x<+1$.
$y''=6x$.
$y'=0$ ἤτοι $3x^2-3=0$ διὰ $x=1$ καὶ $x=-1$.
$y''_{x=-1}=-6<0$, ἔχομεν *μέγιστον*, ὅπερ εἶναι $=8$.
$y''_{x=1}=6>0$, ἔχομεν *ἐλάχιστον*, ὅπερ εἶναι $=4$.
$y''=0$, $6x=0$, ἤτοι διὰ $x=0$ σημεῖον *καμπῆς*.

Πίναξ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $y=x^3-3x+6$

Διὰ x=	−3	−2	−1	0	1	2	3 ....
y=	−12	4	8	6	4	8	24 ....

Ἐν τῷ σχήματι *(Σχ. 50)* καταδεικνύεται σαφῶς ἡ μεταβολὴ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας παραγώγου y' καὶ y''.

β' *Νὰ μελετηθῇ καὶ νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=x^2-5x+6$.*

Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x.

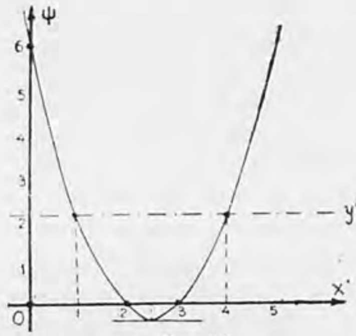
Διὰ $x=0$, $y=6$ τὸ σημεῖον τομῆς μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν y εἶναι (0,6). Διὰ $y=0$ ἔχομεν $x=2$ καὶ $x=3$, τὰ σημεῖα τομῆς μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x εἶναι (2,0) καὶ (3,0).

$y'=2x-5$
$y'>0$ διὰ $x>2,5$
$y'<0$ » $x<2,5$
$y''=2$
$y'=0$ διὰ $x=2,5$, *ἐλάχιστον* $=-\frac{1}{4}$.

Πίναξ τιμῶν

x	y
−1	12
0	6
1	2
1,5	0,75
2	0
2,5	−0,25
3	0
.	.
.	.
.	.
.	.

Ἐν τῷ σχήματι (*Σχ. 51*) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ y'' παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν x.



Σχ. 51.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εὑρεῖν τὰς τιμὰς τῆς x δι' ἃς αἱ κάτωθι συναρτήσεις ἔχουσι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον :

1. $y=x^2+x+6$.   y' = 2x+1   y'' = 2

Ἀπόκρ. Ἔχομεν: $y'=2x+1$, $y''=2$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $y'=2x+1=0$ λαμβάνομεν $x=-\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ $y''>0$ ἡ συνάρτησις διὰ $x=-\frac{1}{2}$ ἔχει *ἐλάχιστον* (minimum).

2. $y=(2x+3)(11-2x)$.

Ἀπόκρ. $y'=-8x+16$, $y''=-8$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $y'=-8x+16=0$ λαμβάνομεν $x=2$. Ἐπειδὴ $y''<0$, ἡ συνάρτησις ἔχει *μέγιστον* (maximum) διὰ $x=2$.

3. $y=x^3-12x^2+45x+30$.

Ἀπόκρ. Διὰ $x=3$ Μέγ., διὰ $x=5$ Ἐλάχ.

4. $y=x^5-75x^3+1620x-1000$.

Ἀπόκρ. Διὰ $x=-3$ Μέγ., διὰ $x=3$ Μέγ., διὰ $x=-6$ Μέγ., διὰ $x=6$ Ἐλάχ.

5. $y=x^4-8\alpha x^3+22\alpha^2x^2-24\alpha^3x+12\alpha^4$.

Ἀπόκρ. Διὰ $x=\alpha$ Ἐλάχ., διὰ $x=2\alpha$ Μέγ., διὰ $x=3\alpha$ Ἐλάχ.

6. $y=\dfrac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$.

Ἀπόκρ. $y'=\dfrac{1+4x^2-4x^4-x^6}{(x^4-x^2+1)^2}=0$ διὰ $x=\pm1$. $y''=\dfrac{8x-16x^3-6x^5\cdot}{(x^4-x^2+1)^2}$ αὕτη διὰ $x=1$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ διὰ $x=-1$ θετική. Συνεπῶς, διὰ $x=1$ Μέγ. καὶ διὰ $x=-1$ Ἐλάχ.

7. $y=x^3-3x^2+3x+5$.

Ἀπόκρ. Ἡ πρώτη παράγωγος μηδενίζεται διὰ $x=1$, ἀλλὰ διὰ τὴν τιμὴν ταύτην ἡ δευτέρα παράγωγος γίνεται μηδέν. Ἐπειδὴ καὶ ἡ τετάρτη παράγωγος εἶναι 0, ἡ συνάρτησις δὲν ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον (§ 80, Παρατήρ.).

8. $y = -\dfrac{6x^4+3x^2-1}{x^3}$. 'Απόκρ. Οὔτε μέγιστον, οὔτε ἐλάχιστον.

9. $y = x\sqrt{ax-x^2}$. 'Απόκρ. Διὰ $x = \dfrac{3}{4}\alpha$ Μέγιστον.

10. $y = x\ln x$. 'Απόκρ. Διὰ $x = \dfrac{1}{e}$ 'Ελάχιστον.

11. $y = \dfrac{x}{\ln x}$. 'Απόκρ. Διὰ $x = e$ 'Ελάχιστον.

12. $y = e^x - 2\sigma\upsilon\nu x + e^{-x}$. 'Απόκρ. Διὰ $x=0$ 'Ελάχιστον.

Δοθεισῶν δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων x καὶ y, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν, εὑρεῖν τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου των.

'Απόκρ. $x+y=\alpha$ σταθερόν. Ἔχομεν: $y=\alpha-x$ καὶ τὸ γινόμενον xy ἰσοῦται μὲ $x(\alpha-x)$, ἤτοι εἶναι μία συνάρτησις τῆς x, ἔστω $\sigma(x)=x\cdot(\alpha-x)$. Ταύτης ὑπολογίζομεν τὴν πρώτην καὶ δευτέραν παράγωγον, $\sigma'(x)=\alpha-2x$, $\sigma''(x)=-2$. Διὰ $x=\dfrac{\alpha}{2}$ ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον ὅπερ εἶναι $\dfrac{\alpha^2}{4}$. Εὐκόλως συνάγομεν ὅτι θὰ ἔχωμεν *τὸ μέγιστον (τὴν μεγίστην τιμὴν) γινομένου τινὸς δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν, ὅταν αἱ δύο μεταβληταὶ γίνωσιν ἴσαι.*

Εὑρεῖν τὰ σημεῖα καμπῆς τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

1. $y=2x^3+3x^2-12x+10$.

'Απόκρ. 'Εξισοῦμεν τὴν δευτέραν παράγωγον μὲ 0. Τὸ σημεῖον καμπῆς ἔχει συντεταγμένας $\left(-\dfrac{1}{2},\ 16\ \dfrac{1}{2}\right)$.

2. $y=x^3-6x^2+5x+6$. 'Απόκρ. $(2,0)$.

3. $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 'Απόκρ. $\left(3,\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

4. $y=x^4-4x^3+x$. 'Απόκρ. Δύο σημεῖα: $(0,0)$ καὶ $(2,-14)$.

Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῆς συναρτήσεως: $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x+3}$.

Συνάρτησις πηλίκον

'Απόκρ. Ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x πλὴν τῶν τιμῶν -1 καὶ -3, αἵτινες εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ παρονομαστοῦ. $y'>0$ διὰ $x<-\sqrt{3}$ καὶ $x>\sqrt{3}$. *Μέγιστον* διὰ $x=-\sqrt{3}$ καὶ εἶναι $=-4\sqrt{3}-7$. *'Ελάχιστον* διὰ $x=\sqrt{3}$ καὶ εἶναι $4\sqrt{3}-7$. Διὰ τιμὰς τῆς x τεινούσας εἰς τὸ $\pm\infty$ ἡ $y\to 1$, ἄρα *ἡ εὐθεῖα $y=1$ εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης.* Διὰ $x\to -1$ ἢ $x\to -3$ τὸ $y\to\pm\infty$. Αἱ εὐθεῖαι $x=-1$ καὶ $x=-3$ εἶναι ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης.

Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῆς συναρτήσεως: $y=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-6x+5}$.

'Απόκρ. Ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀσκήσει.

Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῆς συναρτήσεως: $y=\dfrac{4x-x^2}{(x-2)^2}$.

'Απόκρ. Ὡς αἱ δύο προηγούμεναι ἀσκήσεις.

Νὰ προσδιορισθῶσι τὰ χαρακτηριστικὰ σημεῖα τῆς καμπύλης $y=(1+i)^x$

'Απόκρ. 'Εὰν $x>0$, ἡ συνάρτησις παριστᾷ, ἐν τῷ συνθέτῳ τόκῳ, τὴν τελικὴν ἀξίαν μιᾶς νομισματικῆς μονάδος εἰς χρόνον x ἐπὶ ἐπιτοκίῳ i (ὅρα § 52, 2) καὶ εἶναι πάντοτε θετική.

'Εὰν $x<0$, ὅτε $y=(1+i)^{-x}=\frac{1}{(1+i)^x}$, ἤ, ἐὰν τεθῇ $\frac{1}{1+i}=\upsilon$, $y=\upsilon^x$. 'Η συνάρτησις παριστᾷ τὴν παροῦσαν ἀξίαν μιᾶς νομισματικῆς μονάδος καὶ εἶναι πάντοτε θετική.

Ἤτοι ἡ καμπύλη ἡ παριστωμένη ὑπὸ τῆς συναρτήσεως εὑρίσκεται ἄνωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x.

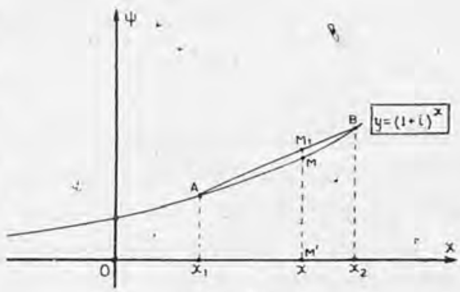
Διὰ $x>0$, θετικαὶ τετμημέναι, $y>1$
» $x<0$, ἀρνητικαὶ » $y<1$

'Εν συνεχείᾳ παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\underset{x\to\infty}{\text{ορ}}(1+i)^x=\infty, \quad \underset{x\to-\infty}{\text{ορ}}(1+i)^x=\underset{x\to\infty}{\text{ορ}}(1+i)^{-x}=\underset{x\to\infty}{\text{ορ}}\frac{1}{(1+i)^x}=0.$$

$y'=(1+i)^x\cdot\ln(1+i)$ $y'>0$ διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τῆς x, διότι καὶ $\ln(1+i)$ εἶναι διὰ $i\neq0$ πάντοτε θετικὸς ἀριθμός, συνεπῶς ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα.

$y''=(1+i)^x\cdot\ln(1+i)\cdot\ln(1+i)$, $y''>0$ διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τῆς x καὶ ἐφόσον $y'''=(1+i)^x[\ln(1+i)]^3\neq0$, ἡ καμπύλη (*Σχ. 52*) στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὸν θετικὸν ἡμιάξονα τῶν x. 'Εκ τοῦ σχήματος καταδεικνύεται, ὅτι κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τελικῆς ἢ τῆς παρούσης ἀξίας διά τινα τιμὴν τῆς x κειμένην ἔν τινι διαστήματι (x_1, x_2), διὰ τῆς μεθόδου τῆς γραμμικῆς παρεμβολῆς, ὅπερ συνίσταται εἰς τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ὑπὸ τῆς χορδῆς AB, διαπράττεται σφάλμα καθ' ὑπεροχήν, τουτέστιν ἀντὶ νὰ ληφθῇ $y=M'M$ λαμβάνεται $M'M_1$, ὅπερ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $M'M_1$.



Σχ. 52.

Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῆς καμπύλης : $y=e^{-x^2}$ (ὅρα § 53).

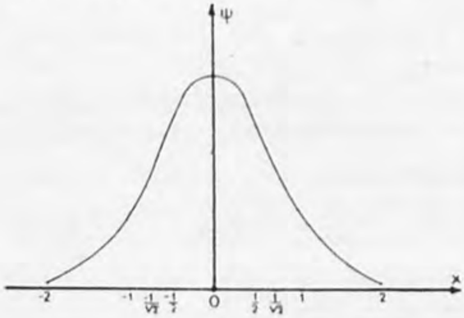
'Απόκρ. Ἔχομεν $y=\frac{1}{e^{x^2}}$ καὶ συνεπῶς $y>0$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x (πραγματικὴν) θετικὴν ἢ ἀρνητικήν. Εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y διότι $\frac{1}{e^{x^2}}=\frac{1}{e^{(-x)^2}}$. Ἔχει ἀσύμπτωτον τὸν ἄξονα τῶν x, καθόσον $\underset{x\to\pm\infty}{\text{ορ}}\frac{1}{e^{x^2}}=0$.

$y'=-2xe^{-x^2}$, $y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}$. Διὰ $y'=0$ ἤτοι $-2xe^{-x^2}=0$, ἔχομεν $x=0$ καὶ $x=\pm\infty$. 'Η δευτέρα παράγωγος διὰ $x=0$ ἰσοῦται μὲ $-2<0$, ἄρα διὰ $x=0$, $y=1=$Μέγιστον. Παραλείπομεν τὴν περίπτωσιν $x=\pm\infty$ ὡς πολύπλοκον.

'Η καμπύλη ἔχει δύο σημεῖα καμπῆς, διότι διὰ (1) $y''=e^{-x^2}(4x^2-2)=0$ λαμβάνομεν $e^{-x^2}=0$ καὶ $4x^2-2=0$. 'Εκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων ἡ μὲν πρώτη ἐπαληθεύεται διὰ $x=\pm\infty$, ἡ δὲ δευτέρα διὰ $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm0{,}707$. Αἱ τιμαὶ

$\pm 0{,}707$ εἶναι αἱ τετμημέναι τῶν σημείων καμπῆς τῆς ὑπ' ὄψιν καμπύλης. Αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων καμπῆς εἶναι: $y = e^{-\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \simeq$ (ὡς ἔγγιστα) $0{,}6065$.

Ἐκ τοῦ σχήματος (*Σχ. 53*) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ καμπύλη ἔχει σχῆμα κώδωνος καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν αἱ καμπύλαι τοῦ εἴδους αὐτοῦ καλοῦνται *κωδωνοειδεῖς* καὶ συναντῶνται εἰς τὴν Στατιστικήν.



Σχ. 53.

Ἐκ τῆς (1), λόγῳ τοῦ ὅτι πάντοτε $e^{-x^2}>0$, ἐξάγεται ὅτι τὸ σημεῖον τῆς y'' ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παράγοντος $4x^2-2$. Ἔχομεν $4x^2-2<0$ ἢ $4\left(x^2-\frac{1}{2}\right)<0$ ἢ καὶ $\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$ διὰ τιμὰς τῆς x κειμένας εἰς τὸ διάστημα $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$· συνεπῶς διὰ τιμὰς τῆς x μεταξὺ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ καὶ $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι ἀρνητική, κατὰ συνέπειαν στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὸν ἀρνητικὸν ἡμιάξονα τῶν y. Διὰ τιμὰς τῆς x ἐκτὸς τοῦ διαστήματος ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὸν θετικὸν ἡμιάξονα τῶν y.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΛΕΙΟΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

§ 83. *Έννοια τῆς συναρτήσεως πλειόνων μεταβλητῶν, συμβολισμὸς καὶ εἴδη τούτων.*

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως, συνισταμένη εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ δεσμοῦ τοῦ ὑφισταμένου μεταξὺ τῆς ποσοτικῆς μεταβολῆς φαινομένου τινὸς καὶ τῶν προκαλουσῶν ταύτην αἰτιῶν, εἰσέδυσεν εἰς ὅλα τὰ πεδία ἐρεύνης.

Ὅ,τι ἐλέχθη ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐπὶ τῶν συναρτήσεων ἀφεώρα συναρτήσεις εἰς ἃς ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ἦτο μία μόνον. Ὁ περιορισμὸς οὗτος ὠφείλετο κυρίως εἰς διδακτικοὺς σκοπούς. Ἡ ποσοτικὴ μεταβολὴ φαινομένου τινὸς εἶναι, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, καὶ ἰδίᾳ τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων, συνέπεια πλειόνων τῆς μιᾶς αἰτιῶν. Ὡς ἐκ τούτου κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν φαινομένων ἔχομεν, συνήθως, συναρτήσεις εἰς ἃς αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ εἶναι πλείονες τῆς μιᾶς, ἤτοι, ὡς λέγομεν, *συναρτήσεις πλειόνων μεταβλητῶν**.

Ἐπὶ παραδείγματι: Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου εἶναι *συνάρτησις δύο μεταβλητῶν*, τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του. Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι *συνάρτησις τριῶν μεταβλητῶν*, τῶν τριῶν διαστάσεών του, μήκους, πλάτους, ὕψους. Ἡ τελικὴ ἀξία τοκισθέντος κεφαλαίου εἶναι *συνάρτησις τριῶν μεταβλητῶν*, τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου, τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου κ.ο.κ.

Συμβολισμός. Ὁ συμβολισμὸς τῶν συναρτήσεων μὲ πλείονας μεταβλητὰς εἶναι ἐπέκτασις τοῦ συμβολισμοῦ τοῦ χρησιμοποιηθέντος διὰ τὰς συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς. Οὕτω τὴν συνάρτησιν δύο μεταβλητῶν συμβολίζομεν οὕτω: $z = \sigma(x, y)$ ἢ $z = \varphi(x, y)$ κ.ο.κ., ἔνθα z *παριστᾷ τὴν συνάρτησιν* καὶ τὰ x, y *τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς*.

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις ἡ συνδέουσα τὰς μεταβλητὰς ποσότητας x, y, z δὲν

* Ὅταν λέγωμεν (ὅρα **Π. Χριστοδουλοπούλου**, Θεωρητικὴ Πολιτικὴ Οἰκονομία, Ἀθῆναι, 1951, σ. 79) ὅτι ἡ ὕψωσις τῆς τιμῆς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν συνεπάγεται ὑψωτικὴν ἐπίδρασιν ἐπὶ τῶν παραγωγικῶν δαπανῶν, ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ τῶν παραγωγικῶν δαπανῶν εἶναι συνάρτησις τῆς τιμῆς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν οἵτινες, ἐὰν λάβωμεν μόνον τοὺς βασικούς, εἶναι τρεῖς. Ὁμοίως, ὅταν λέγωμεν (ἔνθ' ἀνωτέρω, σ. 82) ὅτι τὸ ἀτομικὸν εἰσόδημα ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ἀτομικὸν εἰσόδημα εἶναι συνάρτησις τῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, οἵτινες εἶναι πολλοὶ καὶ οὐχὶ εἷς.

εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς z, γράφομεν $\sigma(x, y, z) = 0$ ἢ $\varphi(x, y, z) = 0$ κ.ο.κ. Ἡ συνάρτησις $z = \sigma(x, y)$ καλεῖται *λελυμένη*, ἐνῷ ἡ συνάρτησις ἣν λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\sigma(x, y, z) = 0$ καλεῖται *πεπλεγμένη*. Οὕτως αἱ συναρτήσεις $z = x + 2y + 1$, $z = x^2 - y^2$ εἶναι *λελυμέναι*, ἐνῷ αἱ συναρτήσεις αἱ λαμβανόμεναι ἐκ τῶν ἐξισώσεων $x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2z = 0$ εἶναι *πεπλεγμέναι*.

Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ z εἶναι συνάρτησις τριῶν μεταβλητῶν, τὰς ὁποίας παριστῶμεν διὰ x_1, x_2, x_3, γράφομεν $z = \sigma(x_1, x_2, x_3)$, καὶ ἐὰν γενικῶς ἡ z εἶναι συνάρτησις ν μεταβλητῶν $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ γράφομεν $z = \sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$. Διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = 0$ παριστῶμεν μίαν συνάρτησιν, εἰς ἣν αἱ μεταβληταὶ ποσότητες εἶναι ν, ἤτοι μία ἡ συνάρτησις καὶ $\nu - 1$ αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί.

Ὁ συμβολισμὸς τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων διὰ τοῦ x μετὰ δείκτου εὐκολύνει τὴν ἀπαρίθμησιν τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων. Δέον ὅμως νὰ μὴ γίνῃ σύγχυσις μετὰ τῶν ὡρισμένων τιμῶν ἃς λαμβάνει ἡ x καὶ διὰ τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν τὸν αὐτὸν συμβολισμόν.

Γενικεύσεις. Ἐπεκτείνοντες τὴν κατάταξιν ἥτις ἐγένετο διὰ τὰς συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς διακρίνομεν καὶ ἐνταῦθα συναρτήσεις *μονοτίμους* καὶ *πλειονοτίμους*, *αὐξούσας* καὶ *φθινούσας* (*μονοτίμους*). Ὁμοίως, δυνάμεθα εἰς τὰς συναρτήσεις μὲ πλείονας μεταβλητὰς νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ *ὁρίου* καὶ τῆς *συνεχείας*. Οὕτω, διὰ τὴν συνάρτησιν $z = \sigma(x, y)$ δύο μεταβλητῶν λέγομεν ὅτι αὕτη *ἔχει ὅριον ἀριθμόν τινα μ*, ὅταν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν ἃς λαμβάνει ἡ συνάρτησις ἔχῃ ὅριον τὸν ἀριθμὸν μ, καθ' ὃν χρόνον αἱ μεταβληταὶ x, y ἔχουσιν ἀντιστοίχως ὅρια ὡρισμένους ἀριθμοὺς α καὶ β. Ὁμοίως θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $z = \sigma(x, y)$ εἶναι *συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον* $x = \alpha$, $y = \beta$, ἐὰν ἡ τιμὴ $\sigma(\alpha, \beta)$ τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ὡρισμένη καὶ ἐὰν ἡ συνάρτησις τείνῃ πρὸς τὴν τιμὴν ταύτην, ὅταν αἱ μεταβληταὶ x καὶ y καθ' οἱονδήποτε τρόπον τείνωσι πρὸς τὰς τιμὰς α καὶ β.

§ 84. Περὶ συνθέτων καὶ πολυσυνθέτων συναρτήσεων.

Σύνθετοι συναρτήσεις. Ἐὰν ἔν τινι συναρτήσει $z = \sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ αἱ μεταβληταὶ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ δὲν εἶναι αὐτοτελεῖς, ἀλλ' εἶναι συναρτήσεις ἑτέρας μεταβλητῆς, ἔστω t, ἡ συνάρτησις καλεῖται *σύνθετος συνάρτησις τῆς t* διότι ἐξαρτᾶται ἐξ αὐτῆς πολλαπλῶς, διὰ τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Πολυσύνθετοι συναρτήσεις. Ἐκτὸς τῶν συναρτήσεων μιᾶς ἢ πλειόνων μεταβλητῶν καὶ τῶν συνθέτων συναρτήσεων ἔχομεν ἀνάγκην καὶ ἄλλων συναρτήσεων. Πλεῖστα εἶναι τὰ φαινόμενα, ἰδίᾳ τὰ οἰκονομικά, ἅτινα ἐξαρτῶνται ἐκ πολλῶν μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων ἀλλήλων, ἀλλὰ καὶ *ἐκ πολλῶν μεταβλητῶν ἐξηρτημένων καὶ μεταξύ των*.

Ἔστω τὸ ἑξῆς ἁπλοῦν παράδειγμα, τὸ ὁποῖον ἐλάβομεν καὶ ἐξητάσαμεν χονδρικῶς ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ : Ὁ ἁπλοῦς τόκος I, εἶναι συνάρτησις τοῦ κεφαλαίου K, τοῦ πλήθους τῶν χρονικῶν περιόδων n καὶ τοῦ ἐπιτοκίου i, ἤτοι $I = \sigma(K, n, i)$. Ἀλλὰ τὸ ἐπιτόκιον i ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρόνου, διότι ἄλλο εἶναι τὸ ἐπιτόκιον διὰ μακροπροθέσμους, ἄλλο διὰ μεσοπροθέσμους καὶ ἄλλο διὰ βραχυπροθέσμους πράξεις, ἔτι δὲ ἄλλο ἐν ὁμαλῇ κοινωνικῇ καταστάσει, ἄλλο ἐν μεγάλῃ προσφορᾷ κεφαλαίων κ.τ.λ. Ἤτοι τὸ i εἶναι συνάρτησις καὶ ἄλλων μεταβλητῶν, ὡς τοῦ πλήθους τῶν κεφαλαίων (z) κ.τ.λ. ἀλλὰ καὶ τοῦ χρόνου. Ἄρα ἔχομεν μίαν συνάρτησιν τῆς μορφῆς $I = \sigma[k, n, i(= \varphi(n, z, \ldots))]$.

Οὕτω, θεωρητικῶς, ὁ τόκος εἶναι συνάρτησις εἰς ἣν αἱ ὡς ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ θεωρούμεναι εἶναι συναρτήσεις πλειόνων μεταβλητῶν, καὶ δὴ καὶ αὐτῶν τούτων τῶν τοῦ τόκου ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Τὰς συναρτήσεις τοῦ εἴδους τούτου καλοῦμεν *πολυσυνθέτους συναρτήσεις*.

Αἱ πολυσύνθετοι συναρτήσεις εἶναι δυσκολώτατον καὶ πολλάκις ἀνέφικτον νὰ σπουδασθῶσι, διότι εἶναι δυσκολώτατον νὰ γνωρίζωμεν τὸν τρόπον καθ᾿ ὃν θὰ ἀλληλοεξαρτῶνται αἱ διάφοροι μεταβληταί. Ἐξ ἑτέρου εἶναι καὶ τὸ *μόνον μέσον ἁπλῆς καὶ σαφοῦς διατυπώσεως πολυπλόκων φαινομένων*. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον διασαφηνίζονται ἐν τῷ νῷ πολύπλοκα φαινόμενα. Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ σπουδάσωμεν ταῦτα μεμονωμένως διά τινας μεταβλητάς, δέον νὰ ὁρίσωμεν τὰς σχέσεις πασῶν τῶν λοιπῶν, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι δυσκολώτατον, θὰ θεωρήσωμεν, ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας, τὰς λοιπὰς γνωστὰς ἢ σταθερὰς καὶ *στατικῶς* θὰ ἐξαγάγωμεν συμπεράσματα, ὄχι βεβαίως συνολικῶς ἀκριβῆ διὰ τὸ φαινόμενον, ἀλλὰ ἀπὸ μιᾶς καὶ μόνης ἐπόψεως τούτου.

Ἡ *δυναμικὴ* σπουδὴ φαινομένου γίνεται λαμβανομένου ὑπ᾿ ὄψιν καὶ τοῦ χρόνου. Ἐὰν δηλαδὴ εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἐγνωρίζομεν τὸν τρόπον μεταβολῆς τοῦ ἐπιτοκίου συναρτήσει τοῦ χρόνου καὶ ἐσπουδάζομεν ταῦτα ἐν τῷ συνόλῳ εἴς τι χρονικὸν διάστημα (α, β), τότε θὰ εἴχομεν *δυναμικὴν* σπουδήν. Ἐφόσον λαμβάνομεν ὑπ᾿ ὄψιν μίαν μόνον μεταβλητὴν καί, ἢ ἀγνοοῦμεν τὰς λοιπάς, ἢ ἐν ὡρισμένῃ περιπτώσει τὰς θεωροῦμεν ὡς ἀμελητέας ἐπιδράσεις, τότε σπουδάζομεν τὸ φαινόμενον στατικῶς καὶ ὡς πρὸς μίαν μεταβλητήν, τῆς ἐπιδράσεως τῶν λοιπῶν μεταβλητῶν διδομένης διὰ τῆς συσχετίσεως (correlation).

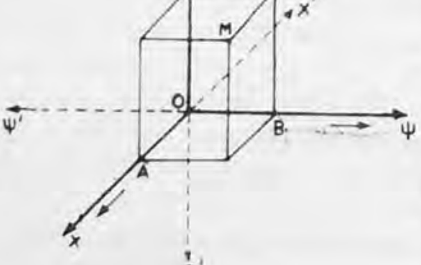
Ἐντεῦθεν, ἐξ ἀπειρίας, πολλοὶ ὑποπίπτουσιν εἰς σφάλματα ἀξιοῦντες ἀκρίβειαν, ἐνῷ ἔδει νὰ ἀξιῶσι *στοχαστικὰ* (ὡς πρὸς στόχον βαίνοντα) συμπεράσματα ὑπὸ ὡρισμένας προϋποθέσεις καὶ δι᾿ ὡρισμένον χρόνον.

Οὕτως : 1) Ἐὰν ζητῆται ὁ τόκος δι᾿ ὡρισμένον χρόνον πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον, ὅτε τὸ i εἶναι ὡρισμένον καὶ σταθερόν, λύομεν τὸ πρόβλημα τοῦ τόκου διὰ τοῦ τύπου $I = k \cdot n \cdot i$. 2) Ἐὰν πρόκειται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀσφάλιστρον ἀσφαλείας ἐν περιπτώσει θανάτου κεφαλῆς τινος, ἐπειδὴ καὶ ὁ χρόνος τοῦ θανάτου εἶναι ἄγνωστος καὶ τὸ ἐπιτόκιον πρὸς ὃ θὰ ἀνατοκίζωνται ἑκάστοτε τὰ ἀσφάλιστρα εἶναι ἄγνωστον, λαμβάνομεν ὡς χρόνον, χρόνον τινὰ πιθανὸν ἐκ πινάκων καὶ ὡς ἐπιτόκιον πιθανόν τι ἐπιτόκιον, μέσον τῶν διαφόρων ἐπιτοκίων πρὸς ἃ πράγματι θὰ ἀνατοκισθῶσι τὰ ἀσφάλιστρα κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἀσφαλείας καὶ θὰ ἔχωμεν ἐξαγόμενον ὄχι ἀπολύτως ἀκριβὲς εἰς ἑκάστην περίπτωσιν, ἀλλὰ στοχαστικῶς ἀκριβὲς καὶ ἐφαρμόσιμον καὶ χρήσιμον ἐν τῇ πράξει, διότι ἡ πεῖρα ἔδειξεν ὅτι ἱδρύματα ἀσφαλιστικά, οὕτως ἐργαζόμενα ἐπὶ ἑκατονταετίας, παρέμειναν ὀργανισμοὶ ἀκλόνητοι, παρὰ τὸ ὅτι, κρίσεις, πόλεμοι, κοινωνικαὶ ἀνωμαλίαι κ.λ.π. ἐπεσυνέβησαν.

Τὰ πολυσύνθετα ὡς ἄνω φαινόμενα, ὧν συνήθως τὸ πλῆθος τῶν μεταβλητῶν, ἤτοι τῶν αἰτιῶν αὐτῶν, ὡς καὶ ὁ τρόπος ἐξαρτήσεώς των ἐξ ἄλλων μεταβλητῶν, ἀλλὰ καὶ ἐξαρτήσεώς των μεταξύ των, δὲν εἶναι ὡρισμένα ἢ γνωστά, παριστῶμεν δι᾽ ἐξισώσεων τῆς μορφῆς $\sigma(x, y, z, w, \ldots) = 0$, ἤτοι διὰ μιᾶς πεπλεγμένης συναρτήσεως, εἰς ἣν τινὲς τῶν μεταβλητῶν ἢ καὶ ἅπασαι ἐξ ὧν ἤρτηται εἶναι συναρτήσεις ἄλλων μεταβλητῶν ἢ καὶ τῶν λοιπῶν μεταβλητῶν τοῦ φαινομένου. Τὰς τοιαύτας συναρτήσεις ἐκαλέσαμεν ἀνωτέρω πολυσυνθέτους συναρτήσεις.

§ 85. Γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων δύο μεταβλητῶν.

Ἐμάθομεν τίνι τρόπῳ δύναται νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς. Ἡ ἐπέκτασις τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι ἀνέφικτος ἐν τῇ περιπτώσει καθ᾽ ἣν ἔχομεν συνάρτησιν πλειόνων τῶν δύο μεταβλητῶν. Διότι ὁ χῶρος ἐν τῷ ὁποίῳ ζῶμεν εἶναι τριῶν διαστάσεων καὶ συνεπῶς ἡ ἐν αὐτῷ παράστασις τοῦ βασικοῦ γεωμετρικοῦ στοιχείου, τοῦ σημείου, θὰ γίνῃ διὰ τριῶν ἀριθμῶν, *τριῶν συντεταγμένων*. Τὸ μέγιστον ἐφαρμόσιμον ὅθεν εἶναι νὰ ληφθῇ μία τῶν μεταβλητῶν ὡς συνάρτησις καὶ δύο ὡς ἀνεξάρτητοι μεταβληταί.



Σχ. 54.

Θεωρήσωμεν, ἐν τῷ χώρῳ, τρεῖς ἄξονας X'OX, Ψ'OΨ, Z'OZ *(Σχ. 54)* καθέτους πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, ὧν τὸ κοινὸν τούτων σημεῖον O λαμβάνεται ὡς κοινὴ ἀρχὴ καὶ τῶν τριῶν ἀξόνων. Ὁ πρῶτος τῶν ἀξόνων X'OX θὰ καλῆται *ἄξων τῶν x* ἢ *τῶν τετμημένων*, ὁ δεύτερος Ψ'OΨ *ἄξων τῶν*

y ἢ *τῶν τεταγμένων* καὶ ὁ τρίτος Z'OZ *ἄξων τῶν z ἢ τῶν κατηγμένων*. Ἡ κοινὴ ἀρχὴ Ο τῶν ἀξόνων θὰ καλῆται *ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων* ἢ ἁπλῶς *ἀρχή*.

Οἱ τρεῖς ἄξονες, ἀνὰ δύο λαμβανόμενοι, ὁρίζουσι τρία ἐπίπεδα, ἅτινα καλοῦνται *ἐπίπεδα συντεταγμένων*. Τὸ ἐπίπεδον ΧΟΨ καλεῖται *ἐπίπεδον τῶν xy*, τὸ ΨΟΖ *ἐπίπεδον τῶν yz* καὶ τὸ ΖΟΧ *ἐπίπεδον τῶν xz*. Ἡ θετικὴ φορὰ ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριῶν ἀξόνων ὁρίζεται ὡς δεικνύουσι ἐν τῷ σχήματι τὰ βέλη, ἤτοι, ἔμπροσθεν, δεξιὰ καὶ ἄνωθεν. Ἐπὶ ἑκάστου τῶν ἀξόνων ὁρίζεται κλῖμαξ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀποστάσεων.

Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου Μ φέρωμεν τρία ἐπίπεδα ἀντιστοίχως παράλληλα πρὸς τὰ τρία ἐπίπεδα συντεταγμένων, θὰ ὁρισθῶσιν ἐπὶ τῶν ἀξόνων τρία τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, τῶν ὁποίων τὰ μέτρα παριστῶμεν ἀντιστοίχως διὰ x, y, z. Οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ x, y, z καλοῦνται *ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι* ἢ *καρτεσιαναὶ ἐν τῷ χώρῳ συντεταγμέναι* τοῦ σημείου Μ καὶ ἐκ τούτων ὁ x καλεῖται *τετμημένη* τοῦ σημείου Μ, ὁ y *τεταγμένη* καὶ ὁ z *κατηγμένη* τοῦ Μ.

Εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ διαστήματος ἀντιστοιχοῦσι τρεῖς ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, οἵτινες εἶναι αἱ συντεταγμέναι τούτου. Ἀντιστρόφως, *εἰς πᾶν σύστημα τριῶν συντεταγμένων x, y, z ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον Μ καὶ ἓν μόνον*. Πράγματι εἰς τοὺς ἀριθμοὺς x, y, z ἀντιστοιχοῦσιν ἐπὶ τῶν ἀξόνων τρία σημεῖα Α,Β,Γ, ἐξ ὧν δύνανται νὰ ἀχθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰ ἐπίπεδα συντεταγμένων, ἅτινα θὰ τέμνωνται εἰς ἓν καὶ μόνον σημεῖον Μ(x, y, z).

Οὕτως ὑφίσταται *μία τελεία ἀντιστοιχία μεταξὺ ἑνὸς σημείου καὶ μιᾶς τριάδος ἀριθμῶν*. Ἐὰν συνεπῶς δοθῇ μία μονότιμος συνάρτησις $z = \sigma(x,y)$, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα πίνακα τιμῶν δίδοντες εἰς τὰ x καὶ y τιμὰς αὐθαιρέτους καὶ εὑρίσκοντες ἀντιστοίχους τιμὰς διὰ τὸ z. Τοιουτοτρόπως λαμβάνομεν ἀπειρίαν σημείων Μ(x,y,z) ἐν τῷ χώρῳ, τὰ ὁποῖα ἐν τῷ συνόλῳ των σχηματίζουσι μίαν ἐπιφάνειαν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν συνάρτησιν $z = \sigma(x, y)$ καὶ θὰ ἔχῃ ὡς ἐξίσωσιν τὴν $z = \sigma(x, y)$. Οὕτω : *πᾶσα συνάρτησις δύο μεταβλητῶν παριστᾷ, γενικῶς, ἐπιφάνειαν ἐν τῷ χώρῳ*.

Ἡ ἐπιφάνεια ἡ παριστωμένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $z = \sigma(x, y)$, ἢ, ὅπερ τὸ αὐτό, ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\sigma(x, y, z) = 0$ εἶναι ὁ *γεωμετρικὸς τόπος τῶν* σημείων ὧν αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν ταύτην.

Ἐὰν αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς Μ ἐπαληθεύωσι δύο συγχρόνως ἐξισώσεις $\sigma(x,y,z) = 0$, $\varphi(x,y,z) = 0$, τὸ σημεῖον εὑρίσκεται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν ἐπιφανειῶν τῶν παριστωμένων ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιφανειῶν, ἥτις θὰ εἶναι μία *γραμμή*.

Παρατηρήσεις. 1. Ἐὰν ἐξίσωσίς τις στερῆται ἑνὸς τῶν x, y, z θὰ παριστᾷ *κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν* *. Οὕτω π.χ., ἡ ἐξίσωσις σ(x, y) = 0 παριστᾷ κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἔχουσαν *ὁδηγὸν* τὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ παριστωμένην ὑπὸ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως γραμμὴν καὶ *γενέτειραν* παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν z.

2. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy εἶναι z = 0, τοῦ τῶν yz εἶναι x = 0 καὶ τοῦ τῶν zx, y = 0. Ὁ ἄξων τῶν x ἔχει ἐξισώσεις y = 0 καὶ z = 0· ὁ ἄξων τῶν y, x = 0 καὶ z = 0, ὁ ἄξων τῶν z, x = 0 καὶ y = 0.

3. Ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ΨΟΖ ἔχει ἐξίσωσιν x = α, ἔνθα α ἡ τετμημένη τοῦ σημείου τῆς τομῆς του μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x. Ὁμοίως, ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ΧΟΖ ἔχει ἐξίσωσιν y=β, ἔνθα β ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου τῆς τομῆς του μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν y. Τέλος ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ΧΟΨ ἔχει ἐξίσωσιν z = γ, ἔνθα γ ἡ κατηγμένη τοῦ σημείου τομῆς του μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν z. Ἀντιστρόφως, αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς x = α ἢ y = β ἢ z = γ παριστῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰ ἐπίπεδα ΨΟΖ, ΧΟΖ, ΧΟΨ.

4. Πᾶν ἐπίπεδον παρίσταται ἐν γένει ὑπὸ ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z καί, ἀντιστρόφως, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς Ax + By + + Γz + Δ = 0 παριστᾷ ἐπίπεδον. Οὕτω, π.χ., ἡ ἐξίσωσις 3x − 2y+z+3 = 0 παριστᾷ ἐπίπεδον.

5. Εὐθεῖά τις ἐν τῷ χώρῳ θὰ παρίσταται ὡς τομὴ δύο ἐπιπέδων καὶ κατὰ συνέπειαν ἀλγεβρικῶς θὰ ἐκφράζεται ὑπὸ δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z.

§ 86. Μερικαὶ παράγωγοι καὶ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τούτων.

Ἐὰν ἐν συναρτήσει μὲ πλείονας μεταβλητὰς θεωρήσωμεν πρὸς στιγμὴν ὅτι, πλὴν μιᾶς, πᾶσαι αἱ λοιπαὶ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ ἔχουσι σταθερὰν τιμήν, θὰ ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν ταύτην ὡς συνάρτησιν μιᾶς μεταβλητῆς. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς μόνην ταύτην τὴν μεταβλητήν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν οὕτω δυναμένων νὰ ληφθῶσι παραγώγων ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Αἱ παράγωγοι αὗται καλοῦνται *μερικαὶ παράγωγοι* τῆς συναρτήσεως καὶ οὐχὶ *ὁλικαὶ* ἐκ τοῦ λόγου ὅτι ὁρίζονται κατόπιν τῶν εἰδικῶν τιμῶν ἃς ἔλαβον τινὲς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

---

* *Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια* καλεῖται ἡ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπὸ εὐθείας κινουμένης παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν καὶ συναντώσης δοθεῖσαν γραμμήν. Ἡ μὲν εὐθεῖα καλεῖται *γενέτειρα*, ἡ δὲ *γραμμὴ* τὴν ὁποίαν συναντᾷ ἡ εὐθεῖα καλεῖται *ὁδηγὸς* τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

Ἔστω $z = \sigma(x, y)$ συνάρτησις μονότιμος δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x, y. Ὑποθέσωμεν ὅτι δίδομεν εἰς τὴν y ὡρισμένην τινὰ τιμήν, ἡ z τότε θὰ παραμείνῃ συνάρτησις τῆς μόνης μεταβλητῆς x καὶ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως ταύτης θὰ εἶναι ἡ *μερικὴ παράγωγος τῆς z ὡς πρὸς x*, διὰ τὴν θεωρηθεῖσαν τιμὴν τῆς y.

Συμβολισμός. Ἡ μερικὴ παράγωγος τῆς z ὡς πρὸς x παρίσταται δι' ἑνὸς τῶν συμβόλων :

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma(x,y)}{\partial x}, \quad \sigma_x(x,y), \quad \sigma_x, \quad z_x.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζεται ἡ *μερικὴ παράγωγος τῆς z ὡς πρὸς y* καὶ παρίσταται δι' ἑνὸς τῶν συμβόλων :

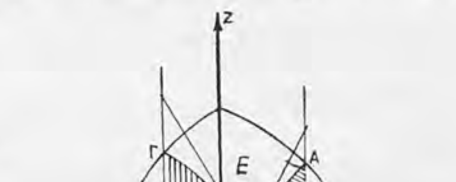
$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial \sigma(x,y)}{\partial y} \quad \sigma_y(x,y), \quad \sigma_y, \quad z_y.$$

Οὕτω θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\sigma(x + \Delta x, y) - \sigma(x, y)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta z}{\Delta x} \qquad (96)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \underset{\Delta y \to 0}{\text{ορ}} \frac{\sigma(x, y + \Delta y) - \sigma(x, y)}{\Delta y} = \underset{\Delta y \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta z}{\Delta y} \qquad (97)$$

Εἰς ἣν περίπτωσιν ἡ z εἶναι συνάρτησις ν μεταβλητῶν, $z = \sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ αἱ μερικαὶ παράγωγοι ταύτης θὰ εἶναι $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_\nu}$. Αὗται ἐλήφθησαν ἐκ τῆς παραγωγίσεως τῆς z, θεωρηθέντος πρὸς στιγμὴν ὅτι πᾶσαι αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, πλὴν μιᾶς, εἶναι σταθεραί.



Σχ. 55.

Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς μερικῆς παραγώγου διευκρινίζει ἀπολύτως τὴν σημασίαν ταύτης. Οὕτως ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας Ε *(Σχ. 55)* τῆς παριστωμένης ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $z = \sigma(x, y)$, λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Μ. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ΧΟΖ, τέμνον τὸν ἄξονα ΟΨ εἰς τὸ σημεῖον Π. Ἐὰν λάβωμεν ΟΠ = β, σταθερόν, ἡ καμπύλη ΑΜΒ, τομὴ τῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ ἐπιπέδου, θὰ ἔχῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου $y = \beta$ ἐξίσωσιν $z = \sigma(x, \beta)$ καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἡ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ἣν ἔχει καὶ ἡ παράγωγος $\dfrac{dz}{dx}$, καθόσον ἡ συνάρτησις δὲν περιέχει εἰμὴ μίαν μόνον μεταβλητήν, συνεπῶς: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{dz}{dx} = \varepsilon\varphi\varphi'$ ἤτοι: *ἡ μερικὴ παράγωγος τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς x ἰσοῦται πρὸς τὸν γωνιακὸν συντελεστὴν τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης ΑΜΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ.*

Ἐργαζόμενοι κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{dz}{dy} = \varepsilon\varphi\vartheta'$ ἤτοι: *ἡ μερικὴ παράγωγος τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς y ἰσοῦται πρὸς τὸν γωνιακὸν συντελεστὴν τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης ΓΜΔ εἰς τὸ σημεῖον Μ.*

Τὸ τεχνικὸν μέρος τῆς εὑρέσεως τῶν μερικῶν παραγώγων δοθείσης συναρτήσεως, δὲν ἐμφανίζει διαφοράν τινα ἐν σχέσει πρὸς τὴν εὕρεσιν τῆς παραγώγου συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς.

Παραδείγματα:

1.	$z = 3x + y - 2,$	$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3,$	$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1.$
2.	$z = 2x^2 - xy + 2y,$	» $= 4x - y,$	» $= -x + 2.$
3.	$z = \sqrt{xy} + \dfrac{x^2}{y}$	» $= \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \dfrac{2x}{y}$	» $= \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \dfrac{x^2}{y^2}.$
4.	$z = \eta\mu y + x^2 \sigma\upsilon\nu y + e^{2x}$	» $= 2x\sigma\upsilon\nu y + 2e^{2x},$	» $= \sigma\upsilon\nu y - x^2 \eta\mu y.$
5.	$\omega = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$	» $= \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}},$	» $= \dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$

§ 87. Παραγώγισις συνθέτων συναρτήσεων.

Ἔστω ἡ *σύνθετος συνάρτησις* $z = \sigma(x, y)$, ἤτοι μία συνάρτησις εἰς ἣν αἱ μεταβληταὶ x, y εἶναι δοθεῖσαι συνεχεῖς συναρτήσεις τῆς αὐτῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς t.

Δίδοντες εἰς τὴν t αὔξησίν τινα Δt, θὰ ἔχωμεν, γενικῶς, διὰ τὰς x, y, z, ἀντιστοίχως, τὰς αὐξήσεις Δx, Δy, Δz.

Ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως Δz θὰ εἶναι:

$\Delta z = \sigma(x+\Delta x, y+\Delta y) - \sigma(x, y)$. Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες τὴν ποσότητα $\sigma(x, y+\Delta y)$, λαμβάνομεν:

y = y+Δy

$$\Delta z = [\,\sigma(x+\Delta x, y+\Delta y) - \sigma(x, y+\Delta y)\,] + [\,\sigma(x, y+\Delta y) - \sigma(x, y)\,].$$

Εἰς τὴν πρώτην ἀγκύλην ἔχομεν τὴν αὔξησιν τῆς συναρτήσεως, θεωροῦντες ὅτι ἡ y διατηρεῖ μίαν ὡρισμένην σταθερὰν τιμὴν $y + \Delta y$. Εἰς τὴν δευτέραν ἀγκύλην ἔχομεν τὴν αὔξησιν τῆς συναρτήσεως, θεωροῦντες ὅτι ἡ x παραμένει σταθερά. Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς (§ 76), δι' ἑκάστην ἀγκύλην, θὰ ἔχωμεν :

$$\Delta z = \sigma'(x+\varepsilon_1 \Delta x,\ y+\Delta y)\,\Delta x+\sigma'(x,\ y+\varepsilon_2 \Delta y)\Delta y,$$

ἔνθα ε_1 καὶ ε_2 δύο ἀριθμοὶ θετικοὶ μικρότεροι τῆς μονάδος, ἤ, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ Δt,

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \sigma(x+\varepsilon_1 \Delta x,\ y+\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \sigma(x,\ y+\varepsilon_2 \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Λαμβάνοντες τὰ ὅρια, θεωρουμένου τοῦ $\Delta t \to 0$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\frac{dz}{dt} = \sigma_x(x,y)\frac{dx}{dt} + \sigma_y(x,y)\frac{dy}{dt} \tag{98}$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ z εἶναι συνάρτησις μιᾶς μόνον μεταβλητῆς, ἔστω τῆς ω, ἥτις εἶναι συνάρτησις ἄλλης μεταβλητῆς x, ὅτε ἡ z εἶναι συνάρτησις συναρτήσεως τῆς x, θὰ ἔχωμεν μερικὴν περίπτωσιν τῆς προηγουμένης συνθέτου συναρτήσεως καθ' ἣν ἡ μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς y, ἡ σ_y, θὰ εἶναι μηδέν, διότι ἡ y θεωρεῖται ὡς σταθερά. Ἐπὶ πλέον ἀντὶ τῆς x θὰ ἔχωμεν ἐν προκειμένῳ τὴν ω καὶ ἀντὶ τῆς t τὴν x. Οὕτως ἐκ τῆς (98) λαμβάνομεν :

$$\frac{dz}{dx} = \sigma_\omega \cdot \omega_x \quad \text{ἢ καὶ} \quad z_x = z_\omega \cdot \omega_x .$$ [77]

Ὁ εὑρεθεὶς τύπος εἶναι ὁ τύπος (77) *ὁ δίδων τὴν παράγωγον συναρτήσεως ἑτέρας συναρτήσεως.*

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (98) ἐπὶ dt λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$dz = \sigma_x(x,y)\,dx + \sigma_y(x,y)\,dy \tag{99}$$

Τὸ γινόμενον $\sigma_x(x,y)\,dx$ καλεῖται *μερικὸν διαφορικὸν* τῆς δοθείσης συναρτήσεως z *ὡς πρὸς x*.

Τὸ γινόμενον $\sigma_y(x,y)\,dy$ καλεῖται *μερικὸν διαφορικὸν* τῆς δοθείσης συναρτήσεως z *ὡς πρὸς y*.

Τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν διαφορικῶν, ὅπερ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (99), *καλεῖται ὁλικὸν διαφορικὸν* τῆς συναρτήσεως.

Ὁ τύπος (98) δίδει τὴν *ὁλικὴν* καλουμένην *παράγωγον τῆς συνθέτου συναρτήσεως z ὡς πρὸς t*.

Ὅ,τι ἐλέχθη διὰ τὰς παραγώγους καὶ τὰ διαφορικὰ τῶν συναρτήσεων μὲ δύο μεταβλητάς, δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν συναρτήσεων τριῶν ἢ καὶ περισσοτέρων ἀκόμη μεταβλητῶν.

Ἐάν, γενικῶς, ἡ z εἶναι συνάρτησις ν μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ μὲ μερικὰς παραγώγους :

$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_\nu}$, ἐὰν μὲν αἱ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι συναρτήσεις ἄλλης μεταβλητῆς t, ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς t εἶναι:

$$\frac{dz}{dt} = z_{x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + z_{x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + z_{x_\nu} \cdot \frac{dx_\nu}{dt},$$

ἐὰν δὲ αἱ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων θὰ ἔχωμεν ὡς ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως:

$$dz = z_{x_1} \cdot dx_1 + z_{x_2} \cdot dx_2 + \ldots + z_{x_\nu} \cdot dx_\nu .$$

Παραδείγματα: 1. *Εὑρεῖν τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως:* $z = 3x + y - 2$.

Ἔχομεν: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad dz = 3 \cdot dx + 1 \cdot dy.$

2. *Εὑρεῖν τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως:* $z = 2x^2 - xy + 2y$.

Ἔχομεν: $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2, \quad dz = (4x - y)dx + (2 - x)dy.$

§ 88. *Παράγωγος πεπλεγμένης συναρτήσεως.*

Ἡ ἐξίσωσις $\sigma(x, y) = 0$ ὁρίζει τὴν y ὡς πεπλεγμένην συνάρτησιν τῆς x (§ 30).

Λαμβάνοντες τὸν τύπον τοῦ ὁλικοῦ διαφορικοῦ τῆς συναρτήσεως $z = \sigma(x, y)$ καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ dx εὑρίσκομεν:

$$\frac{dz}{dx} = \sigma_x(x,y) + \sigma_y(x,y)\frac{dy}{dx}. \qquad \frac{dz}{dx} = \sigma_x(x,y)\frac{dx}{dx} + \sigma_y(x,y)\frac{dy}{dx}$$

Θεωρήσωμεν ἤδη διὰ τὰς x καὶ y τὰς τιμάς των τὰς μηδενιζούσας τὴν συνάρτησιν, ἤτοι τὰς τιμὰς τῶν x, y δι' ἃς $z = 0$ ὅτε καὶ $\frac{dz}{dx} = 0$.

Θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου: $\sigma_x(x, y) + \sigma_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$.

Λύοντες τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς $\frac{dy}{dx}$, θεωροῦντες $\sigma_y(x,y) \neq 0$, λαμβάνομεν:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma_x(x, y)}{\sigma_y(x, y)}} \qquad (100)$$

Παράδειγμα. *Εὑρεῖν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως:* $x^2 + y^2 + x - 2y - 3 = 0$.

Ἔχομεν: $\sigma_x = 2x + 1, \quad \sigma_y = 2y - 2, \quad y' = -\frac{2x+1}{2y-2}.$

§ 89. *Προσεγγιστικὴ τιμὴ τῶν μερικῶν παραγώγων καὶ διαφορικῶν.*

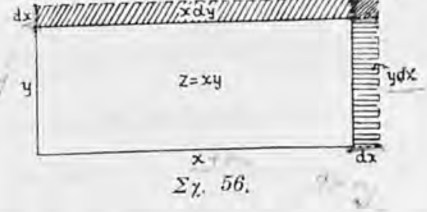
Γνωρίζομεν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς διά τινα τιμὴν τῆς x, δίδει τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως, ἐν σχέσει πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς ἔννοιαν ἔχουσι καὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι συναρτήσεως μὲ πλείονας τῆς μιᾶς μεταβλητῆς.

Ἐν τῇ συναρτήσει $z = \sigma(x, y)$, ἡ μὲν $\sigma_x(x, y)$ ἐκφράζει τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς x, τῆς y παραμενούσης σταθερᾶς, ἡ δὲ $\sigma_y(x, y)$ τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς y, τῆς x παραμενούσης σταθερᾶς.

Ὡς ἐν τῇ συναρτήσει $y = \sigma(x)$ τὸ διαφορικὸν δίδει τὴν κατὰ προσέγγισιν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως (§ 67), οὕτω καὶ ἐν τῇ συναρτήσει z τὸ μερικὸν διαφορικὸν δίδει τὴν κατὰ προσέγγισιν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ἐν σχέσει πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς x ἢ τῆς y. Τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν δίδει τὴν κατὰ προσέγγισιν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὰς μεταβολὰς Δx καὶ Δy τῶν x καὶ y.

Αἱ οὕτω καθορισθεῖσαι προσεγγιστικαὶ τιμαὶ τῶν μεταβολῶν συναρτήσεώς τινος, μὲ πλείονας μεταβλητάς, εἶναι χρήσιμοι πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν μικρῶν διαφορῶν ἢ σφαλμάτων τῶν προκυπτόντων κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως καὶ ὀφειλομένων εἰς μικρὰς μεταβολὰς ἢ εἰς τὴν ἔλλειψιν ἀκριβείας κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων ἐξ ὧν ἤρτηται ἡ συνάρτησις.

Οὕτω, π.χ., ἐὰν z παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχοντος διαστάσεις x καὶ y (*Σχ. 56*), τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι, ὡς γνωστόν, $z = x.y$ καὶ θὰ ἔχῃ μερικὸν διαφορικὸν ὡς πρὸς x τὸ μικρὸν ὀρθογώνιον ydx, μερικὸν διαφορικὸν ὡς πρὸς y τὸ ὀρθογώνιον xdy καὶ ὁλικὸν διαφορικὸν τὸ $\boxed{dz = ydx + xdy}$ τοῦ ὀρθογωνίου $dx \cdot dy$ παραλειπομένου καὶ ἔχοντος ὅριον 0.



Σχ. 56.

Τὰ x καὶ y παριστῶσι τὰ μήκη τὰ εὑρεθέντα κατὰ τὴν μέτρησιν τῶν δύο διαστάσεων καὶ τὰ dx καὶ dy τὰ παρεισφρήσαντα κατὰ τὴν μέτρησιν σφάλματα. Ἐάν, π.χ., τὰ εὑρεθέντα μήκη εἶναι 20 μ. καὶ 30 μ. μὲ ἓν μέγιστον σφάλμα κατὰ τὴν μέτρησιν 0,01 μ., θὰ ἔχωμεν : $dx = dy = 0{,}01$, $dz = 20 \cdot 0{,}01 + 30 \cdot 0{,}01$, ἤτοι $dz = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$ τ.μ., ἤτοι τὸ σφάλμα ὅπερ διεπράχθη ἐπὶ τοῦ ὅλου ἐμβαδοῦ ἰσοῦται μὲ 0,5 τ.μ.

Ἡ τιμὴ ἡ παρεχομένη ὑπὸ τοῦ dz καλεῖται *ἀπόλυτον σφάλμα*. Ὁ λόγος $\frac{dz}{z}$ καλεῖται *σχετικὸν σφάλμα* καὶ ὁ λόγος $\frac{100dz}{z}$ καλεῖται *ἑκατοστιαῖον σφάλμα*. Διὰ τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἔχομεν: ἀπόλυτον σφάλμα 0,5 τ.μ., σχετικὸν σφάλμα $\frac{0,5}{600} = \frac{1}{1200}$ καὶ ἑκατοστιαῖον σφάλμα $\frac{1}{12}$.

Ὅ,τι ἐλέχθη διὰ τὰς συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν ἰσχύει καὶ διὰ συναρτήσεις ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν.

§ 90. Μερικαὶ παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως.

Αἱ μερικαὶ παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial x}$ καὶ $\frac{\partial z}{\partial y}$ συναρτήσεώς τινος z δύο μεταβλητῶν x καὶ y εἶναι καὶ αὐταί, γενικῶς, συναρτήσεις τῶν αὐτῶν μεταβλητῶν· καὶ συνεπῶς, δι' ἑκάστην τούτων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν μερικήν της παράγωγον ὡς πρὸς x καὶ y. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὰς νέας παραγώγους:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

τὰς ὁποίας συμβολίζομεν οὕτω:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Τὰς παραγώγους ταύτας καλοῦμεν *μερικὰς παραγώγους δευτέρας τάξεως* τῆς συναρτήσεως z. Τὰς παραγώγους $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ καλοῦμεν, πρὸς διάκρισιν, *μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως* τῆς z.

Ἔστω, π.χ., ἡ συνάρτησις $z = x^2 + y^2$.

Ἔχομεν: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} = 2,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(2x)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(2y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial(2y)}{\partial y} = 2.$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος συνάγομεν ὅτι: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, ἤτοι ἡ τάξις παραγωγίσεως δὲν ἐνδιαφέρει. Ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύει πάντοτε διὰ τὰς συνήθεις συναρτήσεις*.

Θεωροῦντες καὶ πάλιν τὰς μερικὰς παραγώγους δευτέρας τάξεως ὡς συναρτήσεις τῶν x, y δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν μερικὰς παραγώγους *τρίτης τάξεως* κ.ο.κ. Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν καὶ ὁλικὰ διαφορικὰ δευτέρας, τρίτης τάξεως κ.τ.λ. Αἱ μερικαὶ παράγωγοι δευτέρας, τρίτης κτλ. τάξεως καλοῦνται *μερικαὶ παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως*.

* Ὅρα *R. Courant*, Differential and Integral Calculus, 1950, Vol. I, σ. 471, καὶ Vol. II, σ. 55.

Ἐνίοτε χρησιμοποιεῖται διὰ τὰς μερικὰς παραγώγους καὶ ὁ ἑξῆς συμβολισμός :

$$\sigma_{xx} \quad \text{ἀντὶ} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} \quad \text{ἀντὶ} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yx} \quad \text{ἀντὶ} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\sigma_{yy} \quad \text{ἀντὶ} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xxx} \quad \text{ἀντὶ} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \sigma_{yxx} \quad \text{ἀντὶ} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2},$$

$$\sigma_{yyy} \quad \text{ἀντὶ} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄. ***Εὑρεῖν τὰς μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως τῶν κάτωθι συναρτήσεων :***

1. $z=3xy$ — **Ἀπόκρ.** $\frac{\partial z}{\partial x}=3y \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=3x.$
2. $z=x^3+x^2y+xy^2-5y^3$ — » » $3x^2+2xy+y^2$ » $x^2+2xy-15y^2$
3. $z=\frac{xy}{x+y}$ — » » $\frac{y^2}{(x+y)^2}$ » $\frac{x^2}{(x+y)^2}.$
4. $z=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ — » » $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}$ » $\frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}.$
5. $z=\text{συν}(x^2+y^2)$ — » » $-2x\,\text{ημ}(x^2+y^2)$ » $-2y\,\text{ημ}(x^2+y^2).$
6. $z=e^{x-y}$ — » » e^{x-y} » $-e^{x-y}.$
7. $\omega=\frac{x^2y}{\alpha^2-z^2}$ — » $\omega_x=\frac{2xy}{\alpha^2-z^2}, \quad \omega_y=\frac{x^2}{\alpha^2-z^2}, \quad \omega_z=\frac{2x^2yz}{(\alpha^2-z^2)^2}$

Β. ***Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :***

α. ***Διὰ τὴν συνάρτησιν*** $\omega=\frac{x^2y}{\alpha^2-z^2}$, ***ἰσχύει ἡ ἰσότης*** $\omega_{xyy}=0.$

Ἀπόκρ. Ἐκ τῆς ἀσκήσεως 7 τῆς Α΄ ὁμάδος ἔχομεν :

$$\omega_x=\frac{2xy}{\alpha^2-z^2}, \quad \text{καὶ οὕτω,} \quad \omega_{xy}=\frac{2x}{\alpha^2-z^2} \quad \text{καὶ} \quad \omega_{xyy}=0.$$

β. ***Διὰ τὰς συναρτήσεις*** $\sigma(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ ***καὶ*** $\sigma(x,y)=\text{τοξεφ}\,\frac{y}{x}$ ***ἰσχύει ἡ σχέσις :***

$$\frac{\partial^2\sigma(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma(x,y)}{\partial y^2}=0,$$ ***ἥτις καλεῖται ἐξίσωσις τοῦ*** *Laplace.*

Ἀπόκρ.

$$\frac{\partial^2\sigma(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sigma(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2\sigma(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\sigma(x,y}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν δευτέραν.

Γ΄. ***Εὑρεῖν τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῶν κάτωθι συναρτήσεων :***

1. $z=x^2-6xy+4y^2$ — **Ἀπόκρ.** $dz=2(x-3y)dx+2(-3x+4y)dy.$
2. $z=e^{xy}$ — » $dz=e^{xy}(ydx+xdy).$
3. $z=x^y$ — » $dz=yx^{y-1}\cdot dx+1x^y\ln x\cdot dy$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΠΕΡΙ ΣΕΙΡΩΝ*

§ 91. *Σειραὶ - Ὁρισμὸς - Χρησιμότης.*

Ἐν τοῖς Χρηματιστηρίοις γίνεται κερδοσκοπία δι' ἀλλεπαλλήλου ἐνεχυριάσεως ἀγοραζομένων τίτλων ὡς ἑξῆς**: Ὁ ἔχων χρηματικὸν ποσὸν A ἀγοράζει τίτλους, οὓς ἐνεχυριάζει λαμβάνων r °/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας των, ἤτοι δάνειον $\frac{Ar}{100}$. Διὰ τοῦ ποσοῦ τούτου ἀγοράζει ἐκ νέου τίτλους ἀξίας $\frac{Ar}{100}$, οὓς ἐνεχυριάζει καὶ λαμβάνει r°/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας των, ἤτοι δάνειον $\frac{Ar^2}{100^2}$, δι' οὗ ἀγοράζει ἐκ νέου τίτλους, οὓς ἐνεχυριάζει λαμβάνων νέον δάνειον $\frac{Ar^3}{100^3}$ κ.ο.κ. Ἐν τῇ πράξει εἶναι πάντοτε $r < 100$, ἄρα τὰ ποσὰ A, $\frac{Ar}{100}$, $\frac{Ar^2}{100^2}$, ... βαίνουσιν ἐλαττούμενα καὶ ἀποτελοῦσι *γεωμετρικὴν πρόοδον φθίνουσαν*. Οἱ ὅροι τῆς γεωμετρικῆς ταύτης προόδου εἶναι τμήματα τῆς ὁλικῆς τιμῆς τοῦ φαινομένου, ὅπερ εἶναι ἐνταῦθα τὸ ὅλον ποσὸν δι' οὗ δύναται νὰ κερδοσκοπήσῃ ὁ ἐνεργῶν ὡς ἀνωτέρω. Οἱ ὅροι τῆς προόδου ταύτης, *ἀθροιζόμενοι*, δίδουσι τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου ποσοῦ, ἤτοι τὴν τιμὴν τοῦ φαινομένου ἤ, ἄλλως, τῆς συναρτήσεως τούτου. Ἓν τοιοῦτον ἄθροισμα καλεῖται *σειρά*.

Ὁρισμός. *Καλοῦμεν σειρὰν ἄθροισμα ἀπείρων τὸ πλῆθος ἀριθμῶν ὑποκειμένων εἰς νόμον τινά.*

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἀποτελοῦντες τὴν σειρὰν καλοῦνται *ὅροι* ταύτης.

Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ παριστῶσι τοὺς ὅρους σειρᾶς τινος, αὕτη θὰ εἶναι (1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$ καὶ θὰ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \alpha_\nu$, τοῦ $\sum$ συμβολίζοντος, ὡς γνωστὸν (§ 10), ἓν ἄθροισμα.

---

* Ἴδε ἐπαρκῆ ἀνάπτυξιν τοῦ κεφαλαίου περὶ σειρῶν ἐν τῷ *Differential and Integral Calculus* τοῦ *R. Courant*, Vol. I, ἐκδ. β', σ. 366.

** Ὅρα **Τρ. Κεραμιδᾶ**, *Χρηματιστήρια Ἀξιῶν καὶ Ἐμπορευμάτων*, ἔκδ. β', 1957, § 30.

Χρησιμότης*. Ἡ χρησιμότης τῶν σειρῶν ἔγκειται κυρίως : 1) Εἰς τὴν εὕρεσιν τιμῆς τινος φαινομένου, ἢ τῆς συναρτήσεώς του, ἐκ τῶν μερικῶν τμημάτων ταύτης, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα κερδοσκοπίας ἐν τῷ Χρηματιστηρίῳ. 2) Εἰς τὴν εὕρεσιν σειρᾶς ἀντικαθιστώσης τὴν συνάρτησιν, ἤτοι εἰς τὴν εὕρεσιν τμημάτων ἅτινα προστιθέμενα νὰ δίδωσι τὴν συνάρτησιν. Ἁπλοῦν παράδειγμα παρέχει τὸ διώνυμον τοῦ Νεύτωνος ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι πεπερασμένον. 3) Εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς μεταβολῆς ἥτις ἐπῆλθεν εἰς φαινόμενόν τι, ἤτοι εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς δύο τιμῶν δοθείσης συναρτήσεως διὰ τμημάτων τῆς διαφορᾶς ταύτης βάσει τῶν παραγώγων.

Κατάταξις. Αἱ σειραὶ κατατάσσονται : 1) Εἰς σειρὰς ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι πεπερασμένος ἀριθμὸς καὶ καλοῦνται *συγκλίνουσαι*. 2) Εἰς σειρὰς ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι τὸ ἄπειρον καὶ καλοῦνται *ἀποκλίνουσαι*. 3) Εἰς σειρὰς ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων δὲν δύναται νὰ προσδιορισθῇ καὶ καλοῦνται *ἀπροσδιόριστοι*.

Ἡ σύγκλισις, ἀπόκλισις καὶ ἀπροσδιοριστία σειρᾶς τινος ὁρίζονται καὶ οὕτω :

Θεωρήσωμεν μέρος τῆς σειρᾶς (1) συγκείμενον ἐκ τῶν μ πρώτων ὅρων ταύτης καὶ παραστήσωμεν τοῦτο διὰ s_μ, ἤτοι $s_\mu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} \alpha_\varkappa$.

Ἐὰν $\underset{\mu \to \infty}{\text{ορ}}\, s_\mu = k$, ἔνθα k πεπερασμένος τις ἀριθμός, ἡ σειρὰ εἶναι συγκλίνουσα.

Ἐὰν $\underset{\mu \to \infty}{\text{ορ}}\, s_\mu = \infty$ ἡ σειρὰ εἶναι ἀποκλίνουσα. Ἐὰν τέλος τοῦ μ τείνοντος πρὸς τὸ ἄπειρον δὲν δύναται νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὅριον τοῦ s_μ, ἡ σειρὰ εἶναι ἀπροσδιόριστος.

Κλασσικὸν παράδειγμα σειρᾶς παρέχει ἡ παράστασις :

(2) $\alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \ldots + \alpha\omega^\nu + \ldots$ Τῆς παραστάσεως ταύτης οἱ ὅροι συνιστῶσι γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ὑπόκεινται εἰς νόμον, ἐφόσον ὁ εἷς γίνεται ἐκ τοῦ ἑτέρου διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν λόγον ω. Ἡ παράστασις (2) ἔχει ἔννοιαν ἐφ' ὅσον οἱ ὅροι της προστίθενται, διότι αὐτοτελῶς ἕκαστος ὅρος δὲν ἔχει ἔννοιαν. Αὕτη καλεῖται *γεωμετρικὴ σειρά*.

Ἐν τῇ γεωμετρικῇ σειρᾷ παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

---

* Σειραὶ ἦσαν γνωσταὶ ἀπὸ τῆς ἀρχαιότητος. Ἡ συστηματικὴ ὅμως τούτων σπουδὴ ἤρχισεν ἀφ' ἧς ἐνεφανίσθη ὁ Ἀπειροστικὸς Λογισμὸς (ὅρα *L. Brunschvicg*, *Les étapes de la philosophie Mathématique*, 1929, σ. 183). Ὑπῆρξε μάλιστα ἐποχὴ καθ' ἣν ἡ θεωρία τῶν ἀναπτυγμάτων εἰς σειρὰς ἐκάλυπτεν ἅπαν τὸ πεδίον τῶν μαθηματικῶν (ὅρα *Boutroux*, T. II, σ. 230).

$1^{ον}$ Ἐὰν $\omega \neq 1$, τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της, ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας, ἰσοῦται πρὸς

$$s_\nu = \frac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega - 1} = \boxed{\frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha\omega^\nu}{1-\omega}} \tag{101}$$

$2^{ον}$ Ἐὰν $|\omega| < 1$, τοῦ ν τείνοντος πρὸς τὸ ἄπειρον, $\text{ορ}\,\omega^\nu = 0$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἐκ τοῦ τύπου (101) προκύπτει :

$$\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}}\, s_\nu = \frac{\alpha}{1-\omega} \tag{102}$$

καὶ τότε ἡ γεωμετρικὴ σειρὰ εἶναι *συγκλίνουσα*.

$3^{ον}$ Ἐὰν $|\omega| > 1$, ἡ γεωμετρικὴ σειρὰ εἶναι *ἀποκλίνουσα*.

$4^{ον}$ Ἐὰν $\omega = +1$, ἡ σειρὰ λαμβάνει τὴν μορφήν :

$\alpha + \alpha + \ldots + \alpha + \ldots$ καὶ εἶναι *ἀποκλίνουσα*.

$5^{ον}$ Ἐὰν $\omega = -1$, ἡ σειρὰ λαμβάνει τὴν μορφήν :

$\alpha - \alpha + \alpha - \alpha + \ldots$ καὶ εἶναι *ἀπροσδιόριστος*.

§ 92. Ἄθροισις μερικῶν τιμῶν συναρτήσεων – Κριτήρια συγκλίσεως καὶ ἀποκλίσεως σειρῶν.

Ὡς πρώτην χρησιμότητα τῶν σειρῶν ἐθεωρήσαμεν τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τμημάτων μιᾶς συναρτήσεως ἐπὶ τῷ σκοπῷ τῆς εὑρέσεως ὡρισμένης τιμῆς τῆς συναρτήσεως.

Ἵνα ὑπάρχῃ τιμὴ τῆς συναρτήσεως δέον τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς νὰ δύναται νὰ προσδιορισθῇ, διότι τότε μόνον θὰ ἔχωμεν τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως. Ἤτοι δέον νὰ προσδιορίσωμεν ἐὰν δοθεῖσα σειρὰ εἶναι συγκλίνουσα ἢ οὔ.

Ἐπὶ τούτοις παραθέτομεν, ἄνευ ἀποδείξεως, ὡρισμένα θεωρήματα, ἅτινα συνηθέστερον χρησιμοποιοῦνται πρὸς καθορισμὸν τῆς συγκλίσεως ἢ ἀποκλίσεως δοθείσης σειρᾶς.

Θεώρημα I. *Ἐὰν σειρά τις $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$ συγκλίνῃ, ὁ ὅρος αὐτῆς α_ν ἔχει ὅριον τὸ 0, τοῦ ν τείνοντος πρὸς τὸ ἄπειρον.*

Τὸ ἀντίστροφον, ἐν γένει, δὲν ἀληθεύει. Ὑπάρχουσι σειραὶ δι' ἃς $\underset{\nu \to 0}{\text{ορ}}\, \alpha_\nu = 0$ καὶ δὲν εἶναι συγκλίνουσαι.

Παράδειγμα ἡ σειρά : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\nu} + \ldots$ ἥτις καλεῖται *ἁρμονικὴ σειρά*. Εἰς ταύτην ἔχομεν $\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}}\, \frac{1}{\nu} = 0$, ἀλλά, ὡς ἀποδεικνύεται, ἡ σειρὰ αὕτη εἶναι ἀποκλίνουσα.

Θεώρημα II. *Ἐὰν οἱ ὅροι σειρᾶς τινος, οὓς θεωροῦμεν θετικούς, δὲν ὑπερβαίνωσι τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους ἑτέρας συγκλινούσης σειρᾶς, ἡ σειρὰ εἶναι συγκλίνουσα.*

Θεώρημα III. *Ἐὰν οἱ ὅροι σειρᾶς τινος, οὓς θεωροῦμεν θετικούς, δὲν εἶναι μικρότεροι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων ἑτέρας ἀποκλινούσης σειρᾶς, ἡ σειρὰ εἶναι ἀποκλίνουσα.*

Αἱ σειραί, αἱ συνήθως χρησιμοποιούμεναι πρὸς σύγκρισιν, εἶναι ἡ *γεωμετρικὴ σειρά*, ἡ *ἁρμονικὴ σειρά*, περὶ τῆς συγκλίσεως καὶ ἀποκλίσεως τῶν ὁποίων ἐγένετο λόγος ἀνωτέρω, καὶ ἡ σειρὰ $1 + \frac{1}{2^\varrho} + \frac{1}{3^\varrho} + \ldots +$ $+ \frac{1}{\nu^\varrho} + \ldots$ ἥτις διὰ *$\varrho > 1$ συγκλίνει*, ἐνῷ διὰ *$\varrho = 1$ ἢ $\varrho < 1$ ἀποκλίνει.*

§ 93. Ἀνάπτυξις συναρτήσεων εἰς σειράς.

Ἀνωτέρω (§ 91) ἐτέθη ὡς δευτέρα χρησιμότης τῶν σειρῶν ἡ διὰ μαθηματικῶν μεθόδων ἀνάπτυξις δοθείσης συναρτήσεως εἰς σειράν. Ἤτοι: δοθείσης συναρτήσεως σ(x) νὰ προσδιορισθῶσιν οἱ σταθεροὶ ἀριθμοὶ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$(1) \quad \sigma(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\nu x^\nu + \ldots$$

δι' *ὡρισμένας* τιμὰς τῆς x.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀπησχόλησε τοὺς μαθηματικοὺς τοῦ $18^{ου}$ αἰῶνος. Ἡ ἀναζήτησις λύσεως τοῦ ὡς ἄνω προβλήματος ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι δὲν εἶναι πάντοτε εὔκολος ὁ ὑπολογισμὸς τῆς τιμῆς δοθείσης συναρτήσεως δι' ὡρισμένας τιμὰς τῆς x. *Ἐφόσον ὅμως ἐπιτευχθῇ ἡ ἀνάπτυξις τῆς δοθείσης συναρτήσεως εἰς σειρὰν* κατὰ τὴν ἀνωτέρω μορφὴν (1), θὰ εἶναι δυνατόν, λαμβάνοντες ὡρισμένους ὅρους τῆς σειρᾶς, νὰ ἔχωμεν μίαν *προσεγγιστικὴν τιμὴν* τῆς συναρτήσεως.

Ὅ,τι λέγομεν διὰ τὴν συνάρτησιν ἰσχύει καὶ δι' ἓν φαινόμενον οἰκονομικὸν ἢ φυσικόν, ὅπερ ἐκφράζεται διά τινος συναρτήσεως.

Ἐὰν δεχθῶμεν ὑφισταμένην τὴν ἰσότητα (1), ὑφίσταται καὶ ἡ ἰσότης:

$$(2) \quad \sigma'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + 4\alpha_4 x^3 + \ldots, + \nu\alpha_\nu x^{\nu-1} + \ldots$$

ἥτις προέκυψεν ἐκ τῆς (1) διὰ παραγωγίσεως.

Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν:

$$(3) \quad \sigma''(x) = 2\alpha_2 + 2\cdot 3\alpha_3 x + 3\cdot 4\alpha_4 x^2 + \ldots + (\nu-1)\cdot\nu\alpha_\nu x^{\nu-2} + \ldots$$

$$(4) \quad \sigma'''(x) = 2\cdot 3\alpha_3 + 2\cdot 3\cdot 4\alpha_4 x + \ldots + (\nu-2)\cdot(\nu-1)\cdot\nu\alpha_\nu x^{\nu-3} + \ldots$$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐὰν εἰς τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας θέσωμεν $x = 0$, θὰ ἔχωμεν:

$$\sigma(0) = \alpha_0 \quad \sigma'(0) = \alpha_1 \quad \sigma''(0) = 2\alpha_2 \quad \sigma'''(0) = 2\cdot 3\alpha_3 \ldots$$

[2.3α₃]

ἐξ ὧν λαμβάνομεν :

$$\alpha_0 = \sigma(0),\quad \alpha_1 = \sigma'(0),\quad \alpha_2 = \frac{\sigma''(0)}{2\,!},\quad \alpha_3 = \frac{\sigma'''(0)}{3\,!},\quad \alpha_4 = \frac{\sigma^{(4)}(0)}{4\,!},\ \ldots\ldots$$

ὅτε καὶ $\alpha_\nu = \dfrac{\sigma^{(\nu)}(0)}{\nu\,!}$.

Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (1) τὰ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \ldots.$ διὰ τῶν τιμῶν των λαμβάνομεν :

$$\sigma(x) = \sigma(0) + x\sigma'(0) + \frac{x^2}{2\,!}\,\sigma''(0) + \frac{x^3}{3\,!}\,\sigma'''(0) + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu\,!}\,\sigma^{(\nu)}(0) + \ldots \quad (103)$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ἰσχύει μόνον διὰ τιμὰς τῆς x, δι' ἅς ἡ σειρὰ τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι συγκλίνουσα. Ἐπὶ πλέον, ὁ τύπος (103) ἰσχύει μόνον διὰ συναρτήσεις αἵτινες πληροῦσιν ὡρισμένας συνθήκας.

Παραλείποντες τὴν σπουδὴν τῶν ἐν λόγῳ συνθηκῶν περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν ὅτι *ἡ ἀνάπτυξις εἰς σειράν, ὡς ἀνωτέρω, εἶναι δυνατὴ διὰ συναρτήσεις αἵτινες εἶναι πεπερασμέναι αὐταὶ αὗται καθὼς καὶ αἱ παράγωγοί των, διὰ τὴν τιμὴν τῆς x μηδέν.* Ἐπὶ πλέον, δέον *τοῦ ν αὐξάνοντος εἰς τὸ ἄπειρον, αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν διαδοχικῶν παραγώγων νὰ μὴ ὑπερβαίνωσι πεπερασμένον τινὰ ἀριθμόν.*

Ὁ τύπος (103) δίδει, ὡς λέγεται, τὸ ἀνάπτυγμα συναρτήσεως σ(x) *κατὰ τὴν σειρὰν τοῦ Mac Laurin**.

Ἐνίοτε εἶναι χρήσιμον τὸ ἀνάπτυγμα δοθείσης συναρτήσεως σ(x) κατὰ τὰς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς x − α, ἔνθα α τυχοῦσα τιμὴ τῆς x, ἤτοι :

$$\sigma(x) = A_0 + A_1(x-\alpha) + A_2(x-\alpha)^2 + \ldots. + A_\nu(x-\alpha)^\nu + \ldots.$$

Χρησιμοποιοῦντες τὴν προηγουμένην μέθοδον εὑρίσκομεν :

$$\sigma(x) = \sigma(\alpha) + (x-\alpha)\sigma'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2\,!}\,\sigma''(\alpha) + \ldots. + \frac{(x-\alpha)^\nu}{\nu\,!}\,\sigma^{(\nu)}(\alpha) + \ldots \quad (104)$$

Ὁ τύπος (104) εἶναι γενικώτερος τοῦ προηγουμένου (103), ἀφοῦ ἐκ τοῦ (104) εὑρίσκομεν τὸν (103) ἐὰν τεθῇ α = 0.

Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (104) τεθῇ x − α = ε, ὅτε x = α + ε, θὰ εὕρωμεν :

$$\sigma(\alpha+\varepsilon) = \sigma(\alpha) + \varepsilon\sigma'(\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{2\,!}\,\sigma''(\alpha) + \frac{\varepsilon^3}{3\,!}\,\sigma'''(\alpha) + \ldots. + \frac{\varepsilon^\nu}{\nu\,!}\,\sigma^{(\nu)}(\alpha) + \ldots \quad (104_1)$$

καὶ ἐὰν ἀντὶ τῆς ὡρισμένης τιμῆς α τῆς x θεωρήσωμεν τὴν τυχοῦσαν αὐτῆς τιμήν, ἤτοι ἐὰν τεθῇ ἀντὶ α, x, θὰ ἔχωμεν :

α = x

$$\sigma(x+\varepsilon) = \sigma(x) + \varepsilon\sigma'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2\,!}\,\sigma''(x) + \ldots. + \frac{\varepsilon^\nu}{\nu\,!}\,\sigma^{(\nu)}(x) + \ldots. \quad (105)$$

* Ἐκλήθη οὕτως ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ Ἄγγλου μαθηματικοῦ *Mac Laurin* (1698 - 1746), ὅστις ἀνέφερε ταύτην εἰς τὸ ἔργον του «*Treatise of fluxions*», Edinburgh, 1742.

ἢ καὶ

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\varepsilon\sigma'(x)+\frac{\varepsilon^2}{2!}\sigma''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\nu}{\nu!}\sigma^{(\nu)}(x)+\ldots \quad (106)$$

Ὁ τύπος (106) δίδει τὴν αὔξησιν τῆς συναρτήσεως τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς αὔξησιν ε τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, διὰ σειρᾶς.

Τὰ δεύτερα μέλη τῶν τύπων (104) καὶ (105) καλοῦνται σειραὶ τοῦ *Taylor.* *

Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (105) τεθῇ $x=0$ καὶ $\varepsilon=x$ θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον (103), ἤτοι τὴν σειρὰν τοῦ *Mac Laurin.* Αὕτη δὲν ἔχει τι τὸ ἰδιαίτερον ἐν σχέσει πρὸς τὴν σειρὰν τοῦ Taylor, ἀλλὰ ἀποτελεῖ μερικὴν περίπτωσιν ταύτης. **

Τὸ ἀνάπτυγμα συναρτήσεώς τινος εἰς σειρὰν τοῦ Taylor ἢ τοῦ Mac Laurin δύναται νὰ ἰσχύσῃ καὶ διὰ τὰς συναρτήσεις μὲ πλείονας μεταβλητάς. Οὕτως, ἐὰν συνάρτησίς τις σ(x,y) ἔχῃ μερικὰς παραγώγους πάσης τάξεως, καὶ αἱ παράγωγοι αὗται καθὼς καὶ ἡ συνάρτησις εἶναι πεπερασμέναι ἐν τῇ περιοχῇ σημείου τινός, θὰ ἔχωμεν, ἐὰν διὰ ε καὶ η παραστήσωμεν τὰς αὐξήσεις τῶν x καὶ y :

$$\sigma(x+\varepsilon,\,y+\eta)=\sigma(x,y)+\varepsilon\sigma_x+\eta\sigma_y+\frac{\varepsilon^2}{2!}\sigma_{xx}+\frac{\varepsilon\cdot\eta}{1\cdot1}\sigma_{xy}+\frac{\eta^2}{2!}\sigma_{yy}+\ldots \quad (107)$$

Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (107) τεθῇ $x=0$, $y=0$, $\varepsilon=x$ καὶ $\eta=y$, θὰ προκύψῃ ὁ τύπος :

$$\sigma(x,y)=\sigma(0,0)+x\,\sigma_x(0,0)+y\,\sigma_y(0,0)+\frac{x^2}{2!}\sigma_{xx}(0,0)+$$
$$+\frac{xy}{1\cdot1}\sigma_{xy}(0,0)+\frac{y^2}{2!}\sigma_{yy}(0,0)+\ldots \quad (108)$$

Ὁ τύπος (108) εἶναι ἐπέκτασις τοῦ τύπου (103) καὶ δίδει τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συναρτήσεως σ(x,y) εἰς σειρὰν τοῦ Mac Laurin.

§ 94. Ἀνάπτυξις εἰς σειρὰς τῶν συναρτήσεων e^x, ημx, συνx, ln x. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή.

1. $\sigma(x)=e^x$.

Ἔχομεν :

$\sigma'(x)=\sigma''(x)=\sigma'''(x)=\ldots=\sigma^{(\nu)}(x)=e^x$

x = 0 $\quad\sigma(0)=e^0=1,\ \sigma'(0)=e^0=1,\ \sigma''(0)=e^0=1,\ldots,\ \sigma^{(\nu)}(0)=e^0=1.$

---

* Ἐκλήθησαν οὕτω ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ Ἄγγλου μαθηματικοῦ *Brook Taylor* (1636 - 1731), ὅστις εὗρε τὴν ἀνωτέρω μορφὴν τῶν συντελεστῶν $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ Τὴν ἐργασίαν του ταύτην ἐδημοσίευσεν εἰς τὸ «Methodus incrementorum Directa et Inversa», Londres, 1715.

** Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, δὲν συνιστᾶται ἡ ὀνομασία ἡ διδομένη εἰς τὴν σειρὰν τοῦ *Mac Laurin*, ὅρα *Boutroux*, τομ. II, σ. 254.

Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ τύπῳ (103) τὸν δίδοντα τὸ ἀνάπτυγμα συναρτήσεως εἰς σειρὰν τοῦ Mac Laurin εὑρίσκομεν :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \ldots ^{*} \tag{109}$$

Ἐὰν ληφθῇ x = 1, θὰ ἔχωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ἀριθμοῦ e

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + \ldots \tag{110}$$

Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (109) τεθῇ x = δ, ἔνθα δ τὸ ὀνομαστικὸν ἐπιτόκιον συνεχοῦς ἀνατοκισμοῦ, λαμβάνομεν :

$$e^\delta = 1 + \frac{\delta}{1} + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \ldots \qquad \text{καὶ ἐπειδὴ}$$

$e^\delta = 1 + i$ **, ἔνθα i τὸ πραγματικὸν ἐπιτόκιον μιᾶς ὁλοκλήρου περιόδου, θὰ εἶναι

$$i = e^\delta - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \ldots$$

2. $\sigma(x) = \eta\mu x$ καὶ $\sigma(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Ἔχομεν ·

$\sigma'(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ \sigma''(x) = -\,\eta\mu x,\ \sigma'''(x) = -\,\sigma\upsilon\nu x, \ldots$

x = 0 $\sigma(0) = \eta\mu 0 = 0,\ \sigma'(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1,\ \sigma''(0) = -\,\eta\mu 0 = 0,\ \sigma'''(0) = -\,\sigma\upsilon\nu 0 = -1, \ldots$

Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ τύπῳ (103) λαμβάνομεν :

$$\eta\mu x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{111}$$

Ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν :

$$\sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots ^{***} \tag{112}$$

3. $\sigma(x) = \ln x$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις σ(x) = ln x καθὼς καὶ αἱ παράγωγοι ταύτης δὲν λαμβάνουσι πεπερασμένας τιμὰς διὰ x = 0. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ τύπος (103) ἀλλ' ὁ τύπος (104), λαμβανομένου α = 1. Οὕτω θὰ

ἔχωμεν : $\sigma'(x) = \frac{1}{x},\quad \sigma''(x) = -\frac{1}{x^2},\quad \sigma'''(x) = \frac{2}{x^3}, \ldots$

$\sigma(1) = \ln(1) = 0,\ \sigma'(1) = 1,\ \sigma''(1) = -1,\ \sigma'''(1) = 2.$

---

* Ὁ τύπος οὗτος εἶναι σημαντικὸς καὶ ὀφείλεται εἰς τὸν Ἑλβετὸν μαθηματικὸν *Euler* (1707 - 1783). Δοθέντος δὲ ὅτι ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, θὰ

εἶναι : $e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} + \frac{(ix)^2}{1\cdot 2} + \frac{(ix)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$, ἔνθα $i^2 = -1$ καὶ

(α) $$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{2!} - i\,\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

** Ὅρα Τ. **Κεραμιδᾶ**, *Μακροπρόθεσμοι Οἰκονομικαὶ πράξεις*, σ. 18.

*** Συνδυάζοντες τὸν τύπον (α) τῆς πρώτης ὑποσημειώσεως μετὰ τῶν τύπων (111) καὶ (112) λαμβάνομεν : $e^{ix} = \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x$ καὶ $e^{2\pi i} = \sigma\upsilon\nu 2\pi + i\eta\mu 2\pi$. Καὶ ἐπειδὴ συν2π = 1, ημ2π = 0, ἔχομεν $e^{2\pi i} = 1$. Διὰ τῆς εὑρέσεως τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπετεύχθη ἡ σύνδεσις μεταξὺ τῶν «*μυστηριωδῶν*» ἀριθμῶν π καὶ e.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς παραγώγους τῆς συναρτήσεως διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν των ἐν τῷ τύπῳ (104), λαμβάνομεν :

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots \pm \frac{(x-1)^\nu}{\nu} \mp \ldots$$

Θέτοντες εἰς τὸν εὑρεθέντα τύπον ἀντὶ x, x + 1 λαμβάνομεν :

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad (113)$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ τύπος (113) ἰσχύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, δι' ἣν $|x|<1$. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει καὶ διὰ $x = 1$, ὅτε ἔχομεν :

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή *

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως :

$$\sigma(x) = x^{10} - \frac{1}{24}x^8 + \frac{5}{24} \text{ διὰ } x = 1{,}0125$$

Θέτομεν $\alpha = 1$, ὅτε $x - \alpha = 0{,}0125$.

Ἔχομεν :

$$\sigma(x) = x^{10} - \frac{1}{24}x^8 + \frac{5}{24} \qquad \sigma(1) = \frac{7}{6}$$

$$\sigma'(x) = 10x^9 - \frac{1}{3}x^7 \qquad \sigma'(1) = \frac{29}{3}$$

$$\sigma''(x) = 90x^8 - \frac{7}{3}x^6 \qquad \sigma''(1) = \frac{263}{3}$$

$$\sigma'''(x) = 720x^7 - 14x^5 \qquad \sigma'''(1) = 706$$

$$\sigma^{(4)}(x) = 5040x^6 - 70x^4 \qquad \sigma^{(4)}(1) = 4970$$

$$(x-\alpha) = 0{,}0125 \qquad \frac{(x-\alpha)^2}{2!} = 0{,}000\,078\,125$$

$$\frac{(x-\alpha)^3}{3!} = 0{,}000\,000\,325\,521 \qquad \frac{(x-\alpha)^4}{4!} = 0{,}000\,000\,000\,169\,5422$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (104) λαμβάνομεν $\sigma(1{,}0125) = 1{,}2945795\ldots$

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐφαρμογῆς ἀντιλαμβάνεταί τις τὴν σημασίαν τῆς ἀναπτύξεως συναρτήσεώς τινος εἰς σειράν. Ἐὰν λάβωμεν ὡρισμένους μόνον ὅρους τῆς σειρᾶς ἔχομεν μίαν προσεγγιστικὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως δι' ὡρισμένην τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Ὅσον μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν ἐπιζητοῦμεν τόσον περισσοτέρους ὅρους τῆς σειρᾶς δέον νὰ λαμβάνωμεν. Οἱ παραλειπόμενοι ὅροι τῆς σειρᾶς ἀποτελοῦσιν, ἐν τῷ συνόλῳ των, τὸ *σφάλμα*, ὅπερ προσγίγνεται ἐκ τῆς οὕτω λαμβανομένης προσεγγιστικῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως.

Οὕτω, π.χ. ἐν τῇ ἀναζητήσει τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ e, λαμβάνομεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συναρτήσεως e^x καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὸ x ὑπὸ τοῦ $\frac{1}{2}$, ὅτε

---

* Ὅρα *G. Boaga*, Calcolo numerico, 1949.

εὑρίσκομεν :

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{\nu!}\cdot\frac{1}{2^\nu} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \ldots + \frac{1}{\nu!}\cdot\frac{1}{2^\nu} + \ldots$$

Ἐὰν μὲν λάβωμεν τοὺς τρεῖς πρώτους ὅρους θὰ ἔχωμεν $\sqrt{e} = 1{,}625$, ἐὰν δὲ λάβωμεν πέντε ὅρους θὰ ἔχωμεν $\sqrt{e} = 1{,}6484$, τιμὴ ἥτις εἶναι πολὺ πλησίον πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ e, ὅστις ὡς γνωστὸν ἰσοῦται μὲ 2,7182818 . . . .

Ἐφόσον θὰ ἐπεζητεῖτο μεγάλη προσέγγισις, αἱ πράξεις θὰ αὐξάνωσι καὶ ἐπὶ πλέον ἡ ἀναζήτησις τῶν ὅρων 2!, 3! κτλ. θὰ καθίσταται ἐπίπονος. Διὰ ταῦτα, ἐκτὸς τοῦ ὅτι ὑπάρχουσι πίνακες οἵτινες παρέχουσι τὰ γινόμενα ταῦτα, ἔχομεν καὶ τὸν τύπον τοῦ *De Moivre - Stirling*, ὅστις δίδει προσεγγιστικῶς τὴν τιμὴν τοῦ ν!,

$$\nu! \backsimeq \nu^\nu \cdot e^{-\nu} \cdot \sqrt{2\pi\nu}\left(1 + \frac{1}{11\nu}\right).$$

§ 95. Εὕρεσις τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου συναρτήσεως μιᾶς ἢ πλειόνων μεταβλητῶν διὰ τῶν σειρῶν.

Ἡ ἀνάπτυξις δοθείσης συναρτήσεως εἰς σειράν, ἐκτὸς τῆς μεγίστης πρακτικῆς σημασίας ἣν ἔχει, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ εἰς τὴν a posteriori ἐπαλήθευσιν τῆς θεωρίας περὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων ἐν τῇ περιοχῇ σημείου τινός.

Ἐν τοῖς προηγουμένοις (§ 80), εἴδομεν, ὅτι ἐὰν ἡ συνάρτησις διά τινα τιμὴν τῆς $x = \alpha$, ἔχῃ ἓν μέγιστον ἢ ἓν ἐλάχιστον, θὰ ἰσχύωσιν αἱ ἀνισότητες :

$$(1)\quad \begin{cases} \sigma(\alpha) > \sigma(\alpha - \varepsilon) \\ \sigma(\alpha) > \sigma(\alpha + \varepsilon) \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \sigma(\alpha \pm \varepsilon) - \sigma(\alpha) < 0, \quad \textit{μέγιστον}.$$

$$(2)\quad \begin{cases} \sigma(\alpha) < \sigma(\alpha - \varepsilon) \\ \sigma(\alpha) < \sigma(\alpha + \varepsilon) \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \sigma(\alpha \pm \varepsilon) - \sigma(\alpha) > 0, \quad \textit{ἐλάχιστον}.$$

Αἱ ἀνωτέρω ἀνισότητες ἐκφράζουσιν ὅτι : *ἵνα ἡ συνάρτησις ἔχῃ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τὴν τιμὴν σ(α), πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ αὔξησις* (θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ) *τῆς συναρτήσεως, ὅταν τὸ x αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ κατά τινα ποσότητα ε, νὰ μὴ ἀλλάσσῃ σημεῖον.*

Ἐκ τοῦ τύπου (104_1) λαμβάνομεν :

$$(3)\quad \sigma(\alpha + \varepsilon) - \sigma(\alpha) = \varepsilon\sigma'(\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\sigma''(\alpha) + \frac{\varepsilon^3}{3!}\sigma'''(\alpha) + \ldots + \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!}\sigma^{(\nu)}(\alpha) + \ldots$$

Ἐὰν $\sigma'(\alpha) \neq 0$, δοθέντος ὅτι, ὡς ἀποδεικνύεται, διὰ πολὺ μικρὰς τιμὰς τοῦ ε τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων ὅρων τῆς ἐν λόγῳ σειρᾶς εἶναι μικρότερον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς σειρᾶς, ἐνταῦθα τοῦ $\varepsilon\,\sigma'(\alpha)$, ἡ διαφορὰ $\sigma(\alpha + \varepsilon) - \sigma(\alpha)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ ὅρου $\varepsilon\sigma'(\alpha)$, ὅστις ἀλλάσσει σημεῖον μετὰ τοῦ ε, ἄρα *δὲν θὰ ἔχωμεν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον*. Διὰ νὰ ἔχωμεν κατὰ συνέπειαν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, δέον *ἡ τιμὴ τῆς πρώτης παραγώγου σ'(α) νὰ εἶναι μηδέν.* Ἡ συνθήκη ὅμως αὕτη εἶναι ἀναγκαία, οὐχὶ ὅμως καὶ ἀρκετή, διότι δυνατὸν νὰ μηδενίζεται καὶ ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα συγχρόνως παράγωγος τῆς συναρτήσεως διὰ $x = \alpha$, ὅτε ἐκ τῆς ἰσότητος (3) θὰ προκύψῃ :

$$\sigma(\alpha + \varepsilon) - \sigma(\alpha) = \frac{\varepsilon^3}{3!}\sigma'''(\alpha) + \frac{\varepsilon^4}{4!}\sigma^{(4)}(\alpha) + \ldots + \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!}\sigma^{(\nu)}(\alpha) + \ldots$$

Ἐκ ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ $\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ ὅρου $\frac{\varepsilon^3}{3!}\sigma'''(\alpha)$, οὗτινος λόγῳ τοῦ ὅτι τὸ ε εἶναι εἰς περιττὴν δύναμιν, τὸ σημεῖόν του θὰ μεταβάλλεται, μεταβαλλομένου τοῦ σημείου τοῦ ε. Ἄρα ἡ διαφορὰ θὰ μεταβάλλεται μετὰ τοῦ ε καὶ οὕτω δὲν θὰ ἔχωμεν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

Γενικῶς, συμπεραίνομεν ὅτι ἵνα ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον διὰ $x=\alpha$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ πρώτη μὴ μηδενιζομένη παράγωγος αὐτῆς διὰ $x=\alpha$ νὰ εἶναι *ἀρτίας τάξεως*. Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ἐν λόγῳ παράγωγος εἶναι ἀρνητικὴ θὰ ἰσχύωσιν αἱ ἀνισότητες (1) καὶ *ἡ συνάρτησις θὰ ἔχῃ μέγιστον*, ἐὰν δὲ εἶναι θετική, θὰ ἰσχύωσιν αἱ ἀνισότητες (2) καὶ *ἡ συνάρτησις θὰ ἔχῃ ἐλάχιστον* (ὅρα § 80, Παρατήρησις)

Τὸν κανόνα τοῦτον ἐλάβομεν ὡς ἀληθῆ ἐν § 80 κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου δοθείσης συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς.

Ἔστω ἤδη ἡ συνάρτησις $z=\sigma(x, y)$. Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις z ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον διὰ $x=\alpha$, $y=\beta$, ἐὰν διὰ πᾶν σημεῖον $(\alpha+\varepsilon,\ \beta+\eta)$ κείμενον πλησίον τοῦ σημείου (α, β) ὑφίσταται ἡ ἀνισότης $\sigma(\alpha+\varepsilon, \beta+\eta)<\sigma(\alpha,\beta)$ ἢ $\sigma(\alpha+\varepsilon, \beta+\eta)>\sigma(\alpha, \beta)$.

Ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν θὰ ἔχωμεν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, δέον ἡ διαφορὰ $\sigma(\alpha+\varepsilon, \beta+\eta)-\sigma(\alpha,\beta)$ νὰ μὴ ἀλλάσσῃ σημεῖον διὰ πολὺ μικρὰς τιμὰς τῶν $|\varepsilon|$ καὶ $|\eta|$.

Συνεπῶς, λαμβάνοντες τὸν τύπον (107) καὶ σκεπτόμενοι ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει τῆς συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς, εὑρίσκομεν ὅτι, διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, θὰ πρέπῃ αἱ πρῶται μερικαὶ παράγωγοι ὡς πρὸς x, y νὰ εἶναι μηδέν. Καὶ ἐὰν μέν :

$(\sigma_{xy})^2-\sigma_{x^2}\cdot\sigma_{y^2}<0$ καὶ $\sigma_{y^2}>0$, θὰ ἔχωμεν *μέγιστον*, ἐὰν δέ :

$(\sigma_{xy})^2-\sigma_{x^2}\cdot\sigma_{y^2}<0$ καὶ $\sigma_{y^2}<0$, θὰ ἔχωμεν *ἐλάχιστον*.

Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ἐργασθῶμεν καὶ ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι συνάρτησις πλειόνων τῶν δύο μεταβλητῶν $z=\sigma(x_1, x_2, \ldots)$. Εὑρίσκομεν πάντοτε ὡς ἀναγκαίαν συνθήκην τὸν μηδενισμὸν τῶν παραγώγων πρώτης τάξεως : $\sigma_{x_1}=0$, $\sigma_{x_2}=0$, $\sigma_{x_3}=0, \ldots$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

§ 96. *Γενικά.*

Κατὰ τὰ ἐν ταῖς προηγουμέναις παραγράφοις ἐκτεθέντα, ἡ σπουδὴ τῶν διαφόρων φαινομένων διὰ τῶν παραγώγων, αἵτινες δίδουσι τὰς τάσεις, φοράς, ταχύτητας τῶν φαινομένων, γίνεται διὰ συναρτήσεων ἐχουσῶν παραγώγους καὶ διαφορικὰ καὶ διδουσῶν τὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ φαινομένου εἰς ἀπειροστὰ μέρη τούτου καὶ δι᾽ ἀπειροστὸν χρόνον. Εἶναι ἀνάγκη, ὅμως, ὅπως ἐκ τούτων εὑρίσκωμεν τὰ συμβαίνοντα εἰς πεπερασμένα μέρη τῶν φαινομένων καὶ ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ, ἵνα θεωρῶμεν *ἐξ ὁλοκλήρου τὰ φαινόμενα ἐκ τῶν ἐπὶ μέρους χαρακτηριστικῶν.*

Ἐπίσης, ὅταν ἔχωμεν ἀπειροστὰς μεταβολὰς φαινομένου τινὸς εἰς διάφορα σημεῖα του, ἔχομεν ἀνάγκην νὰ ἀθροίσωμεν ποσότητας ὧν ὁ ἀριθμὸς αὐξάνει εἰς τὸ ἄπειρον, ἀλλ᾽ ἕκαστον τῶν ὁποίων τείνει πρὸς τὸ μηδέν, *ἤτοι ἐκ τῶν ἐπὶ μέρους νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ὅλον διὰ συστηματικῶν μεθόδων.*

Πλὴν τούτων, *ἡ σπουδὴ πράξεώς τινος*, ἀριθμητικῆς ἢ ἀλγεβρικῆς, *ἐκκαλεῖ εἰς τὸν ἀνθρώπινον νοῦν τὴν σπουδὴν τῆς ἀντιστρόφου της πράξεως*, π.χ. τῆς ἀφαιρέσεως διὰ τὴν πρόσθεσιν, τῆς διαιρέσεως διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν, τῆς ῥίζης διὰ τὴν δύναμιν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτουσι τὰ ἑξῆς ζητήματα: 1) *Δοθείσης τῆς παραγώγου (ἢ τοῦ διαφορικοῦ) νὰ εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις ἐξ ἧς παρήχθη ἡ παράγωγος αὕτη, ἤτοι ἡ παράγουσα συνάρτησις.* 2) *Νὰ εὑρεθῇ μέθοδος, κανὼν γενικὸς παρέχων τὸ ἄθροισμα ποσοτήτων, ὧν ἑκάστη τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τὸ δὲ πλῆθος των τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον.*

Τὰ ζητήματα ταῦτα εἶναι ἀντικείμενον σπουδῆς τοῦ *Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ.*

Ἡ ἄθροισις ἀπειροστῶν ὧν τὸ πλῆθος τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ὡς καὶ ἡ ἀντίστροφος τῆς διαφορίσεως πρᾶξις, ἤτοι ἡ εὕρεσις τῆς συναρτήσεως δοθέντος τοῦ διαφορικοῦ ἢ τῆς παραγώγου ταύτης, γίνονται διὰ πράξεως καλουμένης *Ὁλοκληρώσεως**.

* Πολλάκις οἱ μαθηματικοὶ ἀντὶ τῆς λέξεως «*ὁλοκλήρωσις*» χρησιμοποιοῦσι τὴν λέξιν «*τετραγωνισμός*». Ὁ συσχετισμὸς τῶν δύο λέξεων ὀφείλεται, ὡς θὰ ἴδωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις, εἰς τὴν σχέσιν τὴν ὑφισταμένην μεταξὺ ὁλοκληρώματος καὶ ἐμβαδοῦ.

Τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὡς ἄνω ἀπειροστῶν ποσοτήτων καὶ ἡ παράγουσα καλοῦνται *ὁλοκληρώματα*.

Ὁ Ὁλοκληρωτικὸς Λογισμὸς διαιρεῖται εἰς δύο μέρη. Καὶ τὸ μὲν πρῶτον πραγματεύεται τὴν εὕρεσιν τῶν ὁλοκληρωμάτων, τὸ δὲ δεύτερον τὴν λύσιν τῶν *διαφορικῶν ἐξισώσεων*, ἤτοι τῶν ἐξισώσεων τῶν περιεχουσῶν παραγώγους ἢ διαφορικά.

Ὡς σύμβολον δεικνύον τὴν πρᾶξιν τῆς ὁλοκληρώσεως χρησιμοποιεῖται διεθνῶς τὸ $\int$, ἀρχικὸν τῆς Γαλλικῆς λέξεως Somme * (ἄθροισμα).

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς συναρτήσεως ἐκ τῆς παραγώγου ἢ τοῦ διαφορικοῦ ταύτης ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ *ἀορίστου ὁλοκληρώματος*, ἐνῷ ἡ εὕρεσις τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπειροστῶν ὧν τὸ πλῆθος τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ *ὡρισμένου ὁλοκληρώματος*.

Διὰ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ ἐπιτυγχάνεται ἡ λύσις πολλῶν προβλημάτων, κυριώτερα τῶν ὁποίων δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ἡ εὕρεσις ἐμβαδῶν ἐπιφανειῶν, μηκῶν τόξων καὶ ὄγκων στερεῶν, ὡς καὶ ἡ λύσις τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων. Μέχρι τῆς ἐμφανίσεως τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ ἡ λύσις τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων ἐβασίζετο ἐπὶ μεθόδων ἀναλόγων πρὸς τὴν μέθοδον ἥτις ἐχρησιμοποιήθη ὑπὸ τοῦ *Ἀρχιμήδους* πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς ὁριζομένης ὑπό τινος παραβολῆς. Ἡ μέθοδος δὲ τοῦ Ἀρχιμήδους εὑρίσκεται πλησιέστερον πρὸς τὰς νεωτέρας μεθόδους **.

§ 97. *Ἑρμηνεία τοῦ ὡρισμένου Ὁλοκληρώματος.*

Πρὶν ἢ εἰσέλθωμεν εἰς τὴν μελέτην τῶν ὁλοκληρωμάτων, θὰ παραθέσωμεν δύο προβλήματα, ἡ λύσις τῶν ὁποίων θὰ διευκολύνῃ τὴν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος.

Πρόβλημα 1.

Τὸ εἰσόδημα ἑνὸς φυσικοῦ ἢ νομικοῦ προσώπου, ὑφιστάμενον μεταβολὰς κατὰ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία *ἀσυνεχὴς* συνάρτησις τοῦ χρόνου. Ἐπὶ πλέον, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ συσσώρευσις τοῦ εἰσοδήματος δημιουργεῖ κεφάλαιον, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ εἰσόδημα ὡς αὔξησιν τοῦ κεφαλαίου, καὶ τοῦτο, ἐν συνεχείᾳ, ὡς ἄθροισμα τῶν μερῶν ἐξ ὧν συνιστᾶται καὶ ἅτινα εἶναι τὰ μέρη τοῦ συγκεντρωθέντος εἰσοδήματος κατὰ τὰ διαδοχικὰ χρονικὰ διαστήματα.

Εἰς τὸ πεδίον τῆς Ἀριθμητικῆς δὲν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν εἰμὴ *πεπερασμένα* μέρη τοῦ χρόνου καὶ συνεπῶς τοῦ εἰσοδήματος, δι' ὃ τὸ κεφά-

---

* $\int$ autem significat *summam*, γράφει ὁ *Leibnitz*, «Nova methodus pro maximis et minimis...» Acta eruditorum, Leipzig, 1864.

** Ὅρα *E. Goursat*, Cours d'Analyse Mathématiques, Paris, 1943, T. I., σ.164.

λαιον τὸ συσσωρευθὲν μεταξὺ δύο ἐποχῶν θὰ θεωρηθῇ ὡς ἁπλοῦν ἀριθμητικὸν *ἄθροισμα* πεπερασμένου ἀριθμοῦ στοιχείων.

Ὡς μονάδα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν χρονικῶν περιόδων θὰ θεωρήσωμεν ἐν τῷ κατωτέρω παραδείγματι τὸν μῆνα καὶ συνεπῶς τὸ εἰσόδημα θὰ ἐκφρασθῇ εἰς τιμὰς μηνιαίας.

Ἔστω ὅτι τὸ εἰσόδημα ἑνὸς προσώπου εἶναι ὡς ἀκολούθως:

Ἐπὶ	3	μῆνας	δραχ.	10 000	κατὰ	μῆνα
»	2	μῆνας	»	6 000	»	»
»	1	μῆνα	»	3 000	»	»
»	1/2	μῆνα	»	7 000	»	»
»	4	μῆνας	»	5 000	»	»
»	1/2	μῆνα	»	– 4 000	»	»
»	1	μῆνα	»	0	»	»

Πρὸς καθορισμὸν τοῦ ὁλικοῦ εἰσοδήματος *(ὁλοκληρώματος)* κατὰ τὸ δωδεκάμηνον ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις τὰς σημειουμένας ἐπὶ τοῦ κατωτέρω πίνακος (Πίναξ 1).

Πίναξ 1.

Διάρκεια εἰς μῆνας (1)	Εἰσόδημα κατὰ μῆνα (2)	Πράξεις (3)	Εἰσόδημα περιόδου (4)	Προοδευτικὴ συγκέντρωσις: Περίοδος (5)	Προοδευτικὴ συγκέντρωσις: Ὁλικὸν ποσὸν (6)
3	10 000	10 000 × 3	30 000	τέλος 3ου μηνὸς	30 000
2	6000	6000 × 2	12 000	» 5ου »	42 000
1	3000	3000 × 1	3 000	» 6ου »	45 000
1/2	7000	7000 × 1/2	3 500	» 6 1/2 »	48 500
4	5000	5000 × 4	20 000	» 10 1/2 »	68 500
1/2	– 4000	– 4000 × 1/2	– 2 000	» 11 »	66 500
1	0	0 × 1	0	» 12 »	66 500
Δx	$y = \sigma(x)$	$y \cdot \Delta x$	Δz	x	z

Εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:

Ἡ πρώτη στήλη δίδει τὴν διάρκειαν τῶν ἐπὶ μέρους περιόδων καὶ παριστᾷ τὴν αὔξησιν Δx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, ἥτις ἐνταῦθα θεωρεῖται ὁ χρόνος. Ἡ δευτέρα στήλη δίδει τὰς τιμὰς τοῦ εἰσοδήματος, δηλ. τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως $y = \sigma(x)$ τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς τιμὰς τοῦ χρόνου x.

Ἡ τρίτη στήλη δεικνύει τὰς πράξεις αἱ ὁποῖαι ἐγένοντο πρὸς καθορισμὸν τῶν πραγματικῶν τιμῶν τοῦ εἰσοδήματος καὶ αἵτινες ἐσχηματίσθησαν εἰς τὰς μεμονωμένας μερικὰς περιόδους. Αἱ τοιαῦται πράξεις συνίστανται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῆς κατὰ μῆνα τιμῆς τῆς συναρτήσεως y ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους αὐξήσεις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς Δx.

Ἡ τετάρτη στήλη δίδει τὸ ἐξαγόμενον τῶν πράξεων τῆς τρίτης στήλης καὶ ἐκφράζει τὰς αὐξήσεις (θετικὰς καὶ ἀρνητικὰς) Δz τοῦ κεφαλαίου z.

Ἡ πέμπτη στήλη δεικνύει τὰς τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς τοῦ χρόνου. Ἡ ἕκτη στήλη δίδει τὴν προοδευτικὴν ἄθροισιν τῶν αὐξήσεων τῶν παρεχομένων ὑπὸ τῆς στήλης (4) καὶ παριστᾷ συνεπῶς τὸ συγκεντρωθὲν ποσὸν ἢ ἄλλως τὴν ζητουμένην συνάρτησιν z, *τὸ ὁλοκλήρωμα*.

Οὕτω συμβολικῶς ἔχομεν :

$$\Sigma y \cdot \Delta x = \Sigma \Delta z = z$$

ὅπερ ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἐκφράζεται οὕτω :

Ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς συναρτήσεως «εἰσόδημα» δίδει τὴν *συνάρτησιν «κεφάλαιον»· τὸ ὁλοκλήρωμα δὲ τῆς συναρτήσεως $y = \sigma(x)$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν αὐτῆς ταύτης τῆς συναρτήσεως τῶν ἀντιστοιχουσῶν πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.*

Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις ὁλοκλήρωμα z εἶναι ἐπίσης μία συνάρτησις τῆς x.

Ἐκ τοῦ ἀσυνεχοῦς, ὡς λέγεται, πεδίου, ἂς μεταφερθῶμεν εἰς τὸ συνεχὲς πεδίον, ἤτοι *ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς εἰς τὴν Ἀνάλυσιν*. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ αὐξήσεις Δx, Δz, θὰ ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τῶν ἀντιστοίχων dx καὶ dz, αἵτινες εἶναι ἀπειροσταὶ ποσότητες, θεωρουμένου οὕτω ὅτι τὰ μὲν χρονικὰ διαστήματα καθίστανται ὁλοὲν μικρότερα, ἐνῷ τὸ πλῆθος αὐτῶν καθίσταται ὁλοὲν μεγαλύτερον. Ἐνῷ εἰς τὸ ἀσυνεχὲς πεδίον τὸ ὁλικὸν εἰσόδημα εἰς τὸ διάστημα τῶν δώδεκα μηνῶν ἐκφράζεται, ὡς

$$\sum_{x=0}^{x=12} y \cdot \Delta x$$

εἰς τὸ συνεχὲς πεδίον ἐκφράζεται ὡς $\underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \sum_{x=0}^{x=12} y \cdot \Delta x$

Ἀντὶ τοῦ τελευταίου συμβολισμοῦ χρησιμοποιεῖται ὁ συμβολισμός :

$$\int_0^{12} y\, dx, \qquad \text{ἔνθα :}$$

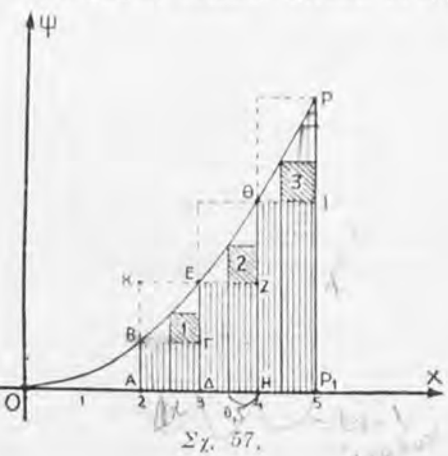
y	εἶναι	*ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις.*
dx	»	τὸ διαφορικὸν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.
$\int$	»	τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως.
0	»	*τὸ κάτω ὅριον ἢ ἡ ἀρχὴ τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως.*
12	»	*τὸ ἄνω ὅριον ἢ τὸ τέλος τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως.*

Τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα δίδει μίαν grosso modo ἰδέαν τοῦ *ὡρισμένου ὁλοκληρώματος*. Τὸ παράδειγμα τοῦτο δύναται νὰ συσχετισθῇ μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ *συνεχοῦς ἀνατοκισμοῦ* *.

Πρόβλημα 2.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς παραβολῆς $y = \frac{1}{5}x^2$, *τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν εὐθειῶν* $x = 2$ *καὶ* $x = 5$.

Τὸ χωρίον οὕτινος ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν εἶναι *(Σχ. 57)*, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ τόξου BP τῆς παραβολῆς, τῶν τεταγμένων AB καὶ P_1P καὶ τοῦ τμήματος AP_1 τοῦ ἄξονος τῶν x. Πρὸς εὕρεσιν τούτου διαιροῦμεν κατ' ἀρχὴν τὸ τμῆμα AP_1 εἰς τρία ἴσα μέρη. Ἐὰν τὰ μήκη τῶν τμημάτων τούτων παρασταθῶσι διὰ Δx, θὰ ἔχωμεν Δx = 1. Ἐκ τῶν σημείων διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν y· ἐκ δὲ τῶν σημείων ἔνθα αἱ παράλληλοι αὗται τέμνουσι τὴν παραβολὴν φέρομεν παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν x. Οὕτως ἐσχηματίσθησαν τρία ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν εἶναι προφανῶς μικρότερον τοῦ ζητουμένου ἐμβαδοῦ. Εἶτα συντάσσομεν τὸν κατωτέρω πίνακα *(Πίναξ 2)*, ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῶν ὡς ἄνω θεωρηθέντων ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων ἰσοῦται πρὸς 10,8. Ἐν συνεχείᾳ διαιροῦμεν τὸ τμῆμα AP_1 εἰς ἓξ ἴσα μέρη, ὅτε τὸ Δx λαμβάνεται ἴσον πρὸς 0,5. Ἐκ τῶν σημείων διαιρέσεως *(Σχ. 58)* φέρομεν παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν y καὶ ἐν συνεχείᾳ, ὡς καὶ προηγουμένως, ἐκ τῶν σημείων τομῆς τῆς παραβολῆς παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν x. Οὕτως ἐσχηματίσθησαν ἓξ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὑπολείπεται καὶ πάλιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου, πλὴν ὅμως, τὸ τῶν δευτέρων ὀρθογωνίων ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν εὑρίσκεται



Σχ. 57.

Σχ. 58.

* Ὅρα Τ. Κεραμιδᾶ, *Μακροπρόθεσμοι Οἰκονομικαὶ πράξεις*, § 5.

πλησιέστερον πρὸς τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν, διότι, ὡς ἐμφαίνεται καὶ ἐκ τοῦ σχήματος 57, προσετέθησαν τὰ ὀρθογώνια τὰ φέροντα ἐνδεικτικῶς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3.

Συντάσσομεν ἐκ νέου τὸν πίνακα τιμῶν (*Πίναξ 3*), ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ἰσοῦται πρὸς 6,775, ἤτοι ἐπιβεβαιοῦται ὅτι τὸ β' ἄθροισμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πρώτου.

Πίναξ 2

x	x^2	$\frac{1}{5}x^2$	$\frac{1}{5}\Delta x \cdot x^2$
2	4	0,8	0,8
3	9	1,8	1,8
4	16	3,2	3,2
$\sum\limits_{x=2}^{x=5} \frac{1}{5} x^2 \Delta x =$			5,8

Πίναξ 3

x	x^2	$\frac{1}{5}x^2$	$\frac{1}{5}\Delta x \cdot x^2$
2	4	0,80	0,400
2,5	6,25	1,25	0,625
3	9	1,80	0,900
3,5	12,25	2,45	1,225
4	16	3,20	1,600
4,5	20,25	4,05	2,025
$\sum\limits_{x=2}^{x=5} \frac{1}{5} x^2 \Delta x =$			6,775

Ἐὰν τὸ διάστημα AP_1 διαιρεθῇ εἰς 12 τμήματα καὶ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω, θὰ προκύψωσι νέα ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν θὰ εἶναι ἀκόμη πλησιέστερον πρὸς τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, ὑπολογιζόμενον δι' *ὡρισμένου ὁλοκληρώματος*, ἰσοῦται πρὸς 7,80.

Ὡς εὐκόλως ἀντιλαμβάνεταί τις, διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ὡς ἄνω ἀναγκαίων πράξεων ἀπαιτεῖται χρόνος πολύς. Διὰ τῶν μεθόδων ἃς θὰ δώσωμεν κατωτέρω θὰ δυνηθῶμεν ὄχι μόνον νὰ ἐξοικονομήσωμεν χρόνον, ἀλλὰ καὶ νὰ ἔχωμεν προσέγγισιν πολὺ μεγάλην.

Διὰ τῶν συνεχῶν διαιρέσεων τοῦ διαστήματος (2,5) λαμβάνομεν τὸ Δx ὁλοὲν μικρότερον καί, ἐὰν συνεχίσωμεν, θὰ πρέπῃ νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν ἃς λαμβάνει τὸ Δx τείνει πρὸς τὸ 0. Ἕνεκα τούτου τὴν ἀνωτέρω ἔκφρασιν τοῦ ἀθροίσματος δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὡς $\underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \sum\limits_{x=2}^{x=5} \frac{1}{5} x^2 \Delta x$ ἤ, διὰ τῶν συμβόλων τῶν ὁλοκληρωμάτων, ὡς $\int_2^5 \frac{1}{5} x^2 dx$.

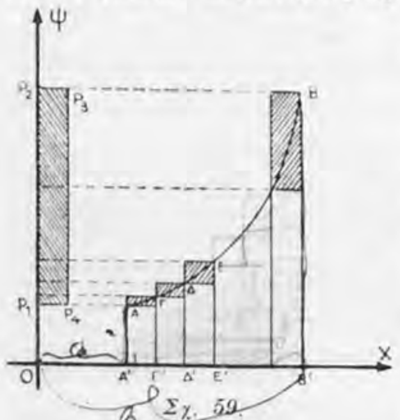
Ἦτο δυνατόν, ἀντὶ τῶν ληφθέντων ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων, νὰ ἐλαμβάνοντο τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα ὡς ὕψος τὴν μεγαλυτέραν τιμὴν ἥτις ἀντιστοιχεῖ διὰ τὴν συνάρτησιν εἰς ἕκαστον διάστημα, ὅπως π.χ. τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΚΕΔ (*Σχ. 57*). Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, θὰ εἴχομεν καὶ πάλιν ἓν ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον, ὡς ἀποδεικνύεται δι᾽ αὐστηρῶν μαθηματικῶν μεθόδων, ἔχει ὅριον τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ προηγουμένου ἀθροίσματος. Τὸ κοινὸν δὲ αὐτὸ ὅριον θὰ θεωροῦμεν ὡς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς καμπύλης BP, τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν τεταγμένων AB καὶ P_1P. Αὐτὸ δὲ τὸ κοινὸν ὅριον εἶναι τὸ *ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα*.

§ 98. Σπουδὴ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος.

Ἔστω $y = \sigma(x)$ συνάρτησίς τις συνεχής, θετικὴ καὶ αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα (α, β). Εἰς τὴν συνάρτησιν ταύτην ἀνήκει τὸ τόξον AB *τοῦ μικτογράμμου χωρίου*, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ τόξου AB *(Σχ. 59)*, τῶν τεταγμένων AA', BB' καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, οὗτινος θὰ ἀναζητήσωμεν τὸ ἐμβαδόν.

Ἔχομεν : $OA' = \alpha$, $OB' = \beta$, $A'A = \sigma(\alpha)$, $B'B = \sigma(\beta)$, $A'B' = \beta - \alpha$. Διαιροῦμεν τὸ τμῆμα $A'B'$ εἰς ν μέρη, τὰ ὁποῖα πρὸς εὐκολωτέραν κατανόησιν θεωροῦμεν ἴσα, καὶ θέτομεν $\dfrac{\beta - \alpha}{\nu} = \Delta x$. Ἐκ τῶν σημείων διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, αἵτινες τέμνουσι τὸ τόξον AB εἰς τὰ σημεῖα $\Gamma, \Delta, E, \ldots$ ἐξ ὧν φέρομεν παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν x.

σ(α)



Σχ. 59.

Παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου χωρίου τὸ ὁποῖον παριστῶμεν διὰ E, περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐχόντων βάσεις ἀντιστοίχως $A'\Gamma'$, $\Gamma'\Delta'$, ... καὶ ὕψη AA', $\Gamma\Gamma'$, ... καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐχόντων τὰς ἰδίας μὲ τὰς τῶν προηγουμένων βάσεις καὶ ὕψη ἀντιστοίχως $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$.... Τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν πρώτων ὀρθογωνίων παριστῶμεν διὰ τοῦ E_1, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δευτέρων διὰ E_2.

Εἶναι φανερὸν ὅτι δι᾽ οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ ν θὰ εἶναι $E_1 < E < E_2$ καὶ συνεπῶς $E_1 < E_2$. Δύναται δὲ τὸ ν νὰ προσδιορισθῇ ἀρκετὰ μέγα εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἐπιφάνεια ἡ ἔχουσα ἐμβαδὸν $E_2 - E_1$ νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα μιᾶς ἐπιφανείας ἐχούσης ἐμβαδὸν ε, ἔνθα ε εἷς δοθεὶς ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρός. Πράγματι ἡ διαφορὰ $E_2 - E_1$ συνίσταται ἐκ τῶν μικρῶν ὀρθογωνίων τὰ ὁποῖα ἐν τῷ σχήματι 59 ἔχουν τονισθῇ διὰ πλαγίων γραμμῶν καὶ τὰ ὁποῖα, ἐὰν μεταφερθῶσι παραλλήλως πρὸς ἑαυτὰ μέχρις οὗ πέσωσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, θὰ ἀποτελέσωσι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον

$P_1P_2P_3P_4$ τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν $P_1P_4 = \Delta x$ καὶ ὕψος $P_1P_2 = \sigma(\beta) - \sigma(\alpha)$. Ἐὰν τὸ ν ληφθῇ ἀρκούντως μέγα, τὸ ὀρθογώνιον $P_1P_2P_3P_4$ θὰ ἀκολουθήσῃ εἰς τὴν σμίκρυνσιν τὸ Δx, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικρότερον τοῦ E. Οὕτω καὶ ἡ διαφορὰ $E_2 - E_1$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα ὅριον τὸ μηδέν, ἐφ' ὅσον τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ὅτε καὶ $\Delta x \to 0$.

Ἐφ' ὅσον ἡ διαφορὰ $E_2 - E_1$ θὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ Δx θὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ E τοῦ μικτογράμμου χωρίου καὶ ἑκάστου τῶν δύο ἐμβαδῶν E_1, E_2 θὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} E_1 = \underset{\nu \to \infty}{\text{ορ}} E_2 = E$$

Τελικῶς συνάγομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν E δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐγγεγραμμένων (ἢ περιγεγραμμένων) εἰς τὸ μικτόγραμμον χωρίον, ἅτινα ἔχουσι βάσιν Δx καὶ ὕψη ἀντιστοίχως $\sigma(\alpha)$, $\sigma(\alpha + \Delta x)$, $\sigma(\alpha + 2\Delta x)$, ... , $\sigma(\alpha + (\nu - 1)\Delta x)$, ἤτοι

$$E = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \left\{ \sigma(\alpha)\Delta x + \sigma(\alpha + \Delta x)\Delta x + \sigma(\alpha + 2\Delta x) \cdot \Delta x + \ldots + \sigma(\alpha + (\nu - 1)) \cdot \Delta x \right\}.$$

Τὰ ὕψη $\sigma(\alpha)$, $\sigma(\alpha + \Delta x)$, $\sigma(\alpha + 2\Delta x)$, ... τῶν ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων εἶναι αἱ διάφοροι τιμαὶ ἃς λαμβάνει ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$, εἰς τὰ σημεῖα A', Γ', Δ', . . ., ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι δυνάμεθα συμβολικῶς νὰ γράψωμεν:

$$E = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \sum_{x=\alpha}^{x=\beta} \sigma(x)\Delta x. \qquad y = 6(x)$$

Ὡς γνωστὸν τοῦτο ἀναγινώσκεται οὕτως: *ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν $\sigma(x) \cdot \Delta x$, ἀπὸ $x = \alpha$ ἕως $x = \beta$, τοῦ Δx τείνοντος πρὸς τὸ μηδέν*. Τὸ ὅριον τοῦτο συμβολίζεται καὶ οὕτω: $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$

καὶ ἀναγινώσκεται: *ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα** ἀπὸ α ἕως β τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$. Τὸ α καλεῖται *κάτω ὅριον* καὶ τὸ β *ἄνω ὅριον* τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος. Ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ καλεῖται *ὁλοκληρωτέα συνάρτησις* καί, ἐὰν τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος ὑφίσταται, λέγομεν ὅτι ἡ $\sigma(x)$ εἶναι *ὁλοκληρώσιμος*.

Ὡς συμπέρασμα λέγομεν ὅτι: τὸ σύμβολον $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ εἶναι *ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα καὶ δίδει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μικτογράμμου χωρίου περικλειομέ-*

* Ἡ λέξις *ὁλοκλήρωμα* ἀναφέρεται τὸ πρῶτον εἰς τὰ γραπτὰ τοῦ *Jacques Bernoulli* (1654 - 1705), Ἑλβετοῦ μαθηματικοῦ, ὅστις ὑπῆρξεν εἷς ἐκ τῶν πρώτων οἵτινες διέδωσαν τὸν Ὁλοκληρωτικὸν Λογισμόν.

νου ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x, τῶν τεταγμένων τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς τετμημένας α καὶ β καὶ τοῦ τόξου τῆς καμπύλης $y = \sigma(x)$ τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν δύο ἐν λόγῳ τεταγμένων.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. *Τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα δὲν εἶναι, κυρίως εἰπεῖν, ἄθροισμα, ἀλλὰ ὅριον ἀθροίσματος.*

2. *Ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι θετικὴ καὶ φθίνουσα, ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, θὰ καταλήξωμεν εἰς τὰ αὐτὰ συμπεράσματα.*

3. *Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι ἀρνητική*, ἤτοι διὰ θετικὰς τιμὰς τῆς x λαμβάνῃ τιμὰς ἀρνητικάς, ὅτε τὸ τόξον ΑΒ εὑρίσκεται κάτωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x, ἕκαστος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος θὰ εἶναι ἀρνητικός. Τοῦτο διότι τὸ μὲν Δx θὰ εἶναι θετικόν, αἱ δὲ τιμαὶ τοῦ $\sigma(x)$ ἀρνητικαί. Συνεπῶς $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = -E$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εὑρίσκομεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ ἐν συνεχείᾳ μεταβάλλομεν τὸ σημεῖον.

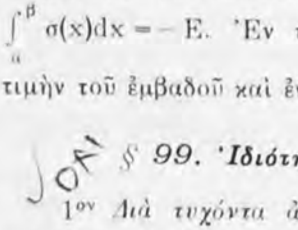
§ 99. Ἰδιότητες τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων.

1ον *Διὰ τυχόντα ἀριθμὸν γ* (περιλαμβανόμενον ἢ μὴ μεταξὺ τῶν α καὶ β) *ἔχομεν* :

$$\int_\alpha^\gamma \sigma(x)dx + \int_\gamma^\beta \sigma(x)dx = \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx \qquad (114)$$

Λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς γεωμετρικῆς ἑρμηνείας τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος, ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης καθίσταται προφανής, ἀρκεῖ ἡ $\sigma(x)$ νὰ εἶναι ὁλοκληρώσιμος εἰς τὰ διαστήματα (α,β), (α,γ), (β,γ).

2ον *Ἐὰν ἐν τῷ διαστήματι (α, β) ἡ καμπύλη $y = \sigma(x)$ διαπερᾷ τὸν ἄξονα τῶν x εἴς τι σημεῖον Γ (Σχ. 60), ἔνθα $x = \gamma$, θὰ ἔχωμεν* :



Σχ. 60.

$$(1) \qquad \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = E_1 - E_2$$

Βάσει τοῦ τύπου (114) ἔχομεν :

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = \int_\alpha^\gamma \sigma(x)dx + \int_\gamma^\beta \sigma(x)dx$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς ὁ δίδων τὸ ἐμβαδὸν E_2 εἶναι ἀρνητικὸς (§ 98, Παρατ. 3), θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα (1).

Ἐὰν $E_1 = -E_2$, ἀναζητοῦντες τὸ ἐμβαδὸν χωρίου θὰ εὕρωμεν τοῦτο ἴσον πρὸς μηδέν. Ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς θὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τμήματος μεμονωμένως καὶ ἐν τέλει θὰ λαμβάνωμεν ὡς ὁλικὸν ἐμβαδὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἐπὶ μέρους προκυπτόντων ἀριθμῶν.

3ον *Ἐὰν ἐν τῷ ὡρισμένῳ ὁλοκληρώματι ἀντιστραφῶσι τὰ ὅρια, τὸ ὁλοκλήρωμα ἀλλάσσει σημεῖον:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} \sigma(x)dx \qquad (115)$$

Κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων (§ 98), ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου, διὰ μὲν τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα τὸ Δx λαμβάνεται θετικόν, διὰ δὲ τὸ δεύτερον ἀρνητικόν. Συνεπῶς ἕκαστος ὅρος τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος θὰ εἶναι ἀρνητικός, ἄρα τὸ ὅλον ἄθροισμα ἀρνητικόν.

§ 100. Σπουδὴ τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος.

Ἐν τῇ εἰσαγωγῇ τοῦ παρόντος κεφαλαίου εἴπομεν ὅτι ὑπάρχουσι δύο εἴδη ὁλοκληρωμάτων, τὰ ὡρισμένα καὶ τὰ ἀόριστα ὁλοκληρώματα, καὶ ὅτι τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἀποτέλεσμα πράξεως ἀντιθέτου πρὸς τὴν παραγώγισιν.

Ἐν τῷ Διαφορικῷ Λογισμῷ ἐλύθη τὸ πρόβλημα: *Δοθείσης συναρτήσεως, εὑρεῖν τὴν παράγωγον ταύτης.*

Ἐν τῷ Ὁλοκληρωτικῷ Λογισμῷ θὰ λυθῇ τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα: *Δοθείσης τῆς παραγώγου, εὑρεῖν τὴν παράγουσαν συνάρτησιν.*

Π.χ. γνωρίζομεν ἐκ τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = x^2$ εἶναι $2x$. Ἤδη τίθεται τὸ ἐρώτημα: Ποίας ἢ ποίων συναρτήσεων ἡ συνάρτησις $2x$ εἶναι παράγωγος;

Γενικῶς: Ἐὰν ἡ παράγωγος δοθείσης συναρτήσεως $\varphi(x)$ εἶναι ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$, ἤτοι ἐὰν $\varphi'(x) = \sigma(x)$, τότε ἡ $\varphi(x)$ καλεῖται *παράγουσα ἢ ἀρχικὴ συνάρτησις* τῆς $\sigma(x)$ ἢ καὶ *ἀόριστον ὁλοκλήρωμα* τῆς $\sigma(x)$ καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου

$$\int \sigma(x)dx = \varphi(x)$$

$\int f(x)dx = \varphi(x)$ $\int \varphi'(x)dx = \varphi(x)$

Εἴπομεν προηγουμένως ὅτι ἡ συνάρτησις ἡ ἔχουσα παράγωγον $2x$ εἶναι ἡ συνάρτησις x^2, πλὴν ὅμως, καὶ αἱ συναρτήσεις $x^2 + 5$, $x^2 + 7$, . . . καὶ γενικῶς ἡ συνάρτησις $x^2 + c$, ἔνθα c παριστᾶ μίαν οἱανδήποτε σταθερὰν ποσότητα, ἔχει παράγωγον $2x$. Συνεπῶς βλέπομεν ὅτι, *δοθείσης παραγώγου, ἐφ' ὅσον ὑπάρχει μία παράγουσα θὰ ὑπάρχωσιν ἄπειροι παράγουσαι ταύτης* διαφέρουσαι μεταξὺ των κατὰ σταθεράν τινα ποσότητα.

Οὕτως, ἐὰν $\varphi'(x) = \sigma(x)$, ἔχομεν:

παρ. $2x$ → x^2+5, x^2+7, x^2 $+c$

$$\int \sigma(x)dx = \varphi(x) + c$$

Ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, ἡ παράγουσα καλεῖται καὶ *ἀόριστον ὁλοκλήρωμα.* Ἡ εὕρεσις τῆς παραγούσης δοθείσης συναρτήσεως καλεῖται *ὁλοκλήρω-*

σις τῆς συναρτήσεως ταύτης καὶ ἡ c, ἥτις παριστᾷ σταθερὰν ποσότητα, καλεῖται *σταθερὰ τῆς ὁλοκληρώσεως*.

Σημείωσις. Τὸ σύμβολον $\int$ εἶναι ἀκριβῶς τὸ αὐτὸ σύμβολον τὸ ὁποῖον ἐχρησιμοποιήθη εἰς τὰ ὡρισμένα ὁλοκληρώματα, θὰ ἴδωμεν δὲ κατωτέρω ὅτι ἔχει τὴν αὐτὴν οἵαν καὶ ἐκεῖνο σημασίαν. Κατωτέρω θὰ ἐξηγηθῇ καὶ ἡ σχέσις ἡ ὑφισταμένη μεταξὺ ὡρισμένου καὶ ἀορίστου ὁλοκληρώματος καὶ ἡ ὀνομασία τούτου. Τὸ dx, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται μετὰ τῆς συναρτήσεως σ(x), εἶναι τὸ διαφορικὸν τοῦ x καὶ συνεπῶς δοθέντος, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, ὅτι $\varphi'(x) = \sigma(x)$, θὰ εἶναι $\sigma(x)dx = \varphi'(x)dx = d\varphi(x)$.

§ 101. *Ὁλοκλήρωσις στοιχειωδῶν τινων συναρτήσεων.*

Ἐν τῷ Διαφορικῷ λογισμῷ ἔχομεν γενικὸν κανόνα παραγωγίσεως παρεχόμενον ἐξ αὐτοῦ τούτου τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραγώγου :

$$\sigma'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\sigma(x+\Delta x) - \sigma(x)}{\Delta x}$$

Ἐν τῷ Ὁλοκληρωτικῷ Λογισμῷ δὲν ἔχομεν γενικὸν κανόνα δυνάμενον νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐν παντὶ πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος μιᾶς οἱασδήποτε συναρτήσεως. Θεωρουμένης τῆς ὁλοκληρώσεως ὡς πράξεως ἀντιθέτου πρὸς τὴν παραγώγισιν, ἔχομεν :

1ον $$d\int \sigma(x)dx = \sigma(x)dx \qquad (116)$$

2ον $$\int d\sigma(x) = \sigma(x) + c \qquad (117)$$

3ον $$\int \alpha\sigma(x)dx = \alpha\int \sigma(x)dx \qquad (118)$$

1) Ἐκ τῆς (118) συνάγομεν ὅτι : *Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ γινομένου σταθερᾶς ἐπὶ συνάρτησιν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς σταθερᾶς ἐπὶ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως.*

4ον $$\int [\sigma_1(x) + \sigma_2(x) + \ldots + \sigma_\nu(x)]\, dx = \int \sigma_1(x)dx + \int \sigma_2(x)dx + \ldots + \int \sigma_\nu(x)dx \qquad (119)$$

2) ἤτοι : ***Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος συναρτήσεων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωμάτων τῶν δοθεισῶν συναρτήσεων.***

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐν τῇ Ἑλληνικῇ βιβλιογραφίᾳ ἀναφέρεται ὡς ***ὁλοκλήρωσις κατὰ μέρη.***

5ον $$\int \sigma(x)d\varphi(x) = \sigma(x)\varphi(x) - \int \varphi(x)d\sigma(x) \qquad (120)$$

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐν τῇ Ἑλληνικῇ βιβλιογραφίᾳ ἀναφέρεται ὡς *ὁλοκλήρωσις κατὰ παράγοντας.*

6ον $\displaystyle\int x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c,\ \mu + 1 \neq 0$ (121)

7ον $\displaystyle\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$ (122)

8ον $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ (123)

9ον $\displaystyle\int \alpha^{x}\,dx = \frac{\alpha^{x}}{\ln a} + c$ (124)

10ον $\displaystyle\int \eta\mu x\,dx = -\,\sigma\upsilon\nu x + c$ (125)

11ον $\displaystyle\int \sigma\upsilon\nu x\,dx = \eta\mu x + c$ (126)

12ον $\displaystyle\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^{2} x} = \varepsilon\varphi x + c$ (127)

13ον $\displaystyle\int \frac{dx}{\eta\mu^{2} x} = -\,\sigma\varphi x + c$ (128)

14ον $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \tau o\xi\eta\mu x + c$ (129)

15ον $\displaystyle\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x + c$ (130)

16ον $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \tau o\xi\varepsilon\varphi x + c$ (131)

Παραδείγματα

1ον $\displaystyle\int 3x^{4}dx = 3\int x^{4}dx = 3\,\frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{3}{5}\,x^{5} + c$

2ον $\displaystyle\int x^{\frac{3}{5}}dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{5}{8}\,x^{\frac{8}{5}} + c$

3ον $\displaystyle\int -7\sqrt[3]{x^{2}}\,dx = -7\int x^{\frac{2}{3}}\,dx = -\frac{21}{5}\,x^{\frac{5}{3}} + c$

4ον $\displaystyle\int (x^{3} + 2x^{2} - 7x + 6)dx = \int x^{3}dx + \int 2x^{2}dx - \int 7x\,dx +$

$$+\int 6dx = \frac{x^{4}}{4} + 2\,\frac{x^{3}}{3} - 7\,\frac{x^{2}}{2} + 6x + c$$

5ον $\int \frac{3(x^2-7x+10)}{x-2}dx = \int \frac{3(x-5)(x-2)}{(x-2)}dx = \int 3(x-5)dx =$

$= 3\int xdx - 3\int 5dx = 3\,\frac{x^2}{2} - 15x + c$

6ον $\int \frac{dx}{ημ^2xσυν^2x} = \int \frac{ημ^2x+συν^2x}{ημ^2xσυν^2x}dx = \int \frac{dx}{ημ^2x} + \int \frac{dx}{συν^2x} =$

$= εφx - σφx + c$

7ον $\int (3x-5)^2dx = \int (9x^2-30x+25)dx = \int 9x^2dx - \int 30xdx +$

$+ \int 25dx = 3x^3 - 15x^2 + 25x + c$

8ον $\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| + c$

9ον $\int \frac{dx}{x^2+α^2} = \frac{1}{α}\ τοξεφ\ \frac{x}{α} + c$

Πρὸς τούτοις θέτομεν : $x = αω$, ὅτε

$$dx = αdω, \quad \int \frac{dx}{x^2+α^2} = \int \frac{αdω}{α^2ω^2+α^2} = \frac{α}{α^2}\int \frac{dω}{ω^2+1}$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὸν τύπον 131, ἔχομεν,

$\frac{α}{α^2}\int \frac{dω}{ω^2+1} = \frac{1}{α}\ τοξ\ εφω$ συνεπῶς : $\int \frac{dx}{x^2+α^2} = \frac{1}{α}\ τοξεφ\ \frac{x}{α} + c$

10ον $\int \frac{dx}{x^2-α^2} = \frac{1}{2α}\ln\left|\frac{x-α}{x+α}\right| + c$

Πράγματι, $\frac{1}{x^2-α^2} = \frac{1}{2α}\left(\frac{1}{x-α} - \frac{1}{x+α}\right)$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ δοθέν, λαμβάνομεν :

$$\int \frac{dx}{x^2-α^2} = \frac{1}{2α}\left(\int \frac{dx}{x-α} - \int \frac{dx}{x+α}\right) = \frac{1}{2α}\left(\int \frac{d(x-α)}{x-α} - \int \frac{d(x+α)}{x+α}\right) =$$

$$= \frac{1}{2α}\left(\ln|x-α| - \ln|x+α|\right) + c = \frac{1}{2α}\ln\left|\frac{x-α}{x+α}\right| + c$$

11ον $\int συν^2xdx = \frac{1}{2}(x + ημxσυνx) + c$

Ἔχομεν : $συν^2xdx = συνx \cdot συνx = συνxdημx$, $\int συν^2xdx = \int συνxdημx =$ $= συνxημx - \int ημxdσυνx$ (τύπος 120) $= συνxημx + \int ημ^2xdx = συνxημx +$ $+ \int (1-συν^2x)dx = συνxημx + x - \int συν^2xdx$ ἤτοι :

$$\int συν^2xdx = συνxημx + x - \int συν^2xdx \quad ἢ$$

$$2\int συν^2xdx = x + ημxσυνx \quad καὶ\ συνεπῶς$$

$$\int συν^2xdx = \frac{1}{2}(x + ημxσυνx)$$

Ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν ὡς ἄνω τρόπον εὑρίσκομεν :

$$\int ημ^2ωdω = \frac{1}{2}(ω - ημωσυνω) + c$$

12ον $$\int \sqrt{\alpha^2-x^2}\, dx$$

Ἐκτελοῦμεν τὴν ἀντικατάστασιν : $x = \alpha\eta\mu\omega$

$$\sqrt{\alpha^2-x^2} = \sqrt{\alpha^2(1-\eta\mu^2\omega)} = \alpha\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$dx = \alpha\sigma\upsilon\nu\omega d\omega, \quad \text{ὅθεν}$$

$$\int \sqrt{\alpha^2-x^2}\, dx = \alpha^2 \int \sigma\upsilon\nu^2\omega d\omega = \frac{\alpha^2}{2}(\omega+\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega) + c$$

καί, ἐπανερχόμενοι εἰς τὴν μεταβλητὴν x, εὑρίσκομεν :

$$\int \sqrt{\alpha^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2} + \frac{\alpha^2}{2}\,\tau o\xi\eta\mu\,\frac{x}{\alpha} + c$$

13ον $$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+\alpha}}$$

Θέτομεν $\omega^2 = x + \alpha$, ὅτε $dx = 2\omega d\omega$· τὸ δοθὲν ὁλοκλήρωμα καθίσταται

$$2\int(\omega^2-\alpha)d\omega = \frac{2\omega^3}{3} - 2\alpha\omega + c \qquad \text{καὶ συνεπῶς}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+\alpha}} = 2\,\frac{(x-2\alpha)\sqrt{x+\alpha}}{3} + c$$

§ 102. *Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος.*

Ἐν τοῖς προηγουμένοις (§ 98) ἐμάθομεν ὅτι, δοθείσης συναρτήσεώς τινος $y = \sigma(x)$, συνεχοῦς, θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς, αὐξούσης ἢ φθινούσης, ἔν τινι διαστήματι (α, β), τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου χωρίου, ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x, τῶν εὐθειῶν $x = \alpha$, $x = \beta$ καὶ τοῦ τόξου τοῦ ὁριζομένου ἐπὶ τῆς δοθείσης καμπύλης ὑπὸ τῶν εὐθειῶν, (γεωμετρικὴ εἰκὼν τῆς $y=\sigma(x)$) δίδεται ὑπὸ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$.

Σχ. 61.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ μικτόγραμμον χωρίον ΑΑ΄Β΄Β (*Σχ. 61*), οὗτινος ἡ μὲν πλευρὰ ΑΑ΄ λαμβάνεται σταθερά, ἡ δὲ ΒΒ΄ μεταβλητή. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου, ὅπερ ἃς παραστήσωμεν διὰ Ε, εἶναι συνάρτησίς τις $\varphi(x)$ τῆς x, καθ' ὅσον τοῦτο μεταβάλλεται μεταβαλλομένης τῆς θέσεως τοῦ Β΄, ἥτις προσδιορίζεται ἐκ τῶν τιμῶν ἃς λαμβάνει ἡ x.

Ἔστω ΟΑ΄ = α καὶ ΟΒ΄ = x. Δίδομεν εἰς τὴν x μικράν τινα αὔξησιν Δx = Β΄Γ΄, ὅτε ἡ μὲν συνάρτησις γίνεται $\sigma(x + \Delta x)$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν Ε αὐξάνεται κατὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ΒΒ΄Γ΄Γ, ὅπερ παριστῶμεν διὰ ΔΕ.

Δοθέντος ὅτι $B'B = \sigma(x)$, $\Gamma'\Gamma = \sigma(x + \Delta x)$, συνάγομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\Delta x \cdot \sigma(x) \leqslant \Delta E \leqslant \Delta x \cdot \sigma(x + \Delta x)$$

ἐξ οὗ:

$$\sigma(x) \leqslant \frac{\Delta E}{\Delta x} \leqslant \sigma(x + \Delta x)$$

καὶ

$$\sigma(x) \leqslant \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta E}{\Delta x} \leqslant \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \sigma(x + \Delta x) = \sigma(x)$$

ὅθεν:

$$\underset{\Delta \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta E}{\Delta x} = \sigma(x)$$

Ἐφ' ὅσον ΔE παριστᾷ τὴν αὔξησιν τοῦ ἐμβαδοῦ E, ὅπερ, ὡς εἴπομεν, εἶναι συνάρτησίς τις $\varphi(x)$, τὸ ἀνωτέρω ὅριον δίδει τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως ταύτης, ἤτοι τὴν $\varphi'(x)$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δοθέντος διὰ τὴν παράγουσαν συναρτήσεώς τινος (§ 100) συνάγεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου, τοῦ ἔχοντος τὴν $B'B$ μεταβλητήν, εἶναι *μία παράγουσα, ἐν ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$*. Οὕτως ἑρμηνεύεται γεωμετρικῶς τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν:

$$(1) \qquad E = \int \sigma(x)dx = \varphi(x) + c.$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι τὸ B' συνέπεσε μετὰ τοῦ A', ὅτε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου θὰ καταστῇ ἴσον πρὸς 0, θὰ ἔχωμεν:

$$\varphi(\alpha) + c = 0 \quad \text{ἤτοι} \quad c = -\varphi(\alpha)$$

καὶ κατὰ συνέπειαν, ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (1), λαμβάνομεν:

$$(2) \qquad E = \varphi(x) - \varphi(\alpha).$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν καὶ τὴν τεταγμένην τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ σημεῖον B', ἔνθα $x = \beta$, θὰ ἔχωμεν ἀφ' ἑνός, λόγῳ τοῦ τύπου (2),

$$E = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

καὶ ἀφ' ἑτέρου, λόγῳ τῆς γεωμετρικῆς ἑρμηνείας ἥτις ἐδόθη εἰς τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα, $E = \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$,

ὅτε:

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \tag{132}$$

Δυνάμεθα ὅθεν νὰ συναγάγωμεν ὅτι: ***Τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα συναρτήσεώς τινος $\sigma(x)$, ἀπὸ α ἕως β, ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῶν δύο τιμῶν ἃς τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τῆς $\sigma(x)$ λαμβάνει διὰ $x = \beta$ καὶ $x = \alpha$.***

Τὴν διαφορὰν $\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)$ σημειοῦμεν οὕτω : $\Big[\varphi(x)\Big]_\alpha^\beta$ ·

Οὕτως ἐδόθη ἡ ἑρμηνεία τοῦ δεσμοῦ τοῦ ὑφισταμένου μεταξὺ τοῦ ὡρισμένου καὶ ἀορίστου ὁλοκληρώματος.

§ 103. Ὁλοκληρώματα μὲ ὅρια τὸ ἄπειρον.

Δοθείσης τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$, τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\infty \sigma(x)dx$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$\int_\alpha^\infty \sigma(x)dx = \underset{\beta\to\infty}{\text{ορ}}\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx,$$

ὁσάκις τοιοῦτον ὅριον ὑπάρχει.

Παραδείγματα:

1. $$\int_0^\infty e^{-x}dx = \underset{\beta\to\infty}{\text{ορ}}\int_0^\beta e^{-x}dx = \underset{\beta\to\infty}{\text{ορ}}\Big[-e^{-x}\Big]_0^\beta = 1-\underset{\beta\to\infty}{\text{ορ}}\, e^{-\beta}=1$$

2. $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} = \underset{\beta\to\infty}{\text{ορ}}\int_0^\beta \frac{dx}{1+x} = \underset{\beta\to\infty}{\text{ορ}}\Big[\ln|1+x|\Big]_0^\beta = \underset{\beta\to\infty}{\text{ορ}}\ln|1+\beta| = \infty.$$

Παραδείγματα ὑπολογισμοῦ ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων.

1. $$\int_3^4 dx = \Big[\,x\,\Big]_3^4 = 4-3=1.$$

2. $$\int_1^2 (x^2-x+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}+2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+1\right)=$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{5}{6}=\frac{11}{6}\cdot$$

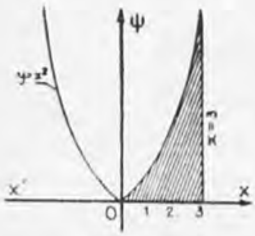
3. $$\int_{-8}^{-3}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}}\cdot$$

Ἐκτελοῦμεν τὴν ἀντικατάστασιν (1) $\omega=\sqrt{1-x}$, ὅτε $x=1-\omega^2$, $x^2=(1-\omega^2)^2$, $dx=-2\omega d\omega$. Δέον ὅμως νὰ γίνῃ καὶ ἀλλαγὴ τῶν ὁρίων, διότι ἡ νέα μεταβλητὴ ω μεταβάλλεται ἀπὸ $\sqrt{1-(-8)}=3$ ἕως $\sqrt{1-(-3)}=2$. Καὶ οὕτω λαμβάνομεν :

$$\int_{-8}^{-3}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}} = -2\int_3^2\frac{(1-\omega^2)^2\omega d\omega}{\omega} = 2\int_2^3 (1-2\omega^2+\omega^4)d\omega =$$
$$=2\left[\omega-\frac{2\omega^3}{3}+\frac{\omega^5}{5}\right]_2^3 = 61\,\frac{1}{15}\cdot$$

Παραδείγματα ὑπολογισμοῦ ἐμβαδῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.

1. *Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς παραβολῆς* $y=x^2$, *τοῦ ἄξονος τῶν* x *καὶ τῆς εὐθείας* $x=3$ *(Σχ. 62).*



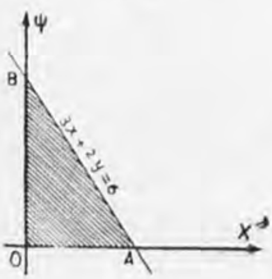
Σχ. 62.

Ἔχομεν: $E=\int_0^3 x^2dx$. Μία παράγουσα ταύτης εἶναι ἡ $\frac{x^3}{3}$, συνεπῶς: $E=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\frac{3^3}{3}=9$ τετραγωνικαὶ μονάδες

2. *Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ὁριζομένου ὑπὸ τῆς εὐθείας* $3x+2y=6$ *καὶ τῶν ἀξόνων (Σχ. 63).*

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται: $y=-\frac{3}{2}x+3$.

Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν δίδεται ὑπὸ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος: $\int_0^2\left(-\frac{3}{2}x+3\right)dx$ καὶ συνεπῶς:



Σχ. 63.

$$E=\int_0^2\left(-\frac{3}{2}x+3\right)dx=\left|-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+3x\right|_0^2=$$

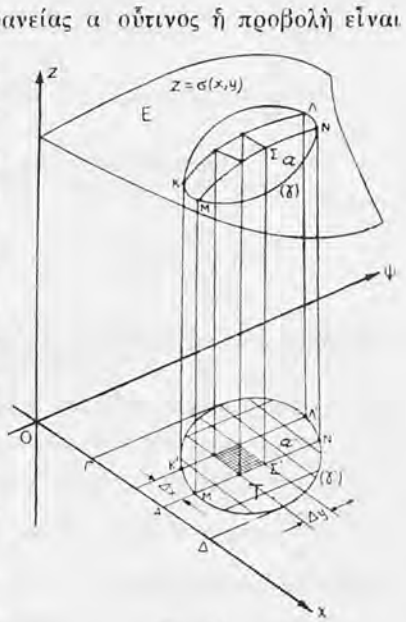
$=3$ τετραγων. μονάδες.

§ 104. Πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα.

Ὡς εἶναι γνωστὸν (§ 98), διὰ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἐπιπέδου ἐπιφανείας. Διὰ τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων γίνονται καὶ ἄλλοι ὑπολογισμοί, ὡς εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ μήκους τόξου τινὸς κ.τ.λ., ὧν ἡ πραγμάτευσις δὲν εἶναι ἔργον τοῦ παρόντος. Ἐφόσον ὅμως ἐξέλθωμεν τοῦ ἐπιπέδου καὶ ζητήσωμεν τὴν λύσιν προβλημάτων ὄγκων ἢ ἐπιφανειῶν ἀναγομένων εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων, θὰ πρέπῃ νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν ἔννοιαν τῶν ἁπλῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων καὶ εἰς τὰ *διπλᾶ* καὶ *τριπλᾶ ὁλοκληρώματα*. Ἐὰν εἰσέλθωμεν εἰς τὸν χῶρον τῶν ν διαστάσεων, θὰ ἔχωμεν, κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ διπλᾶ καὶ τριπλᾶ, τὰ *νιπλᾶ ὁλοκληρώματα*. Ἐν γένει, τὰ διπλᾶ, τριπλᾶ κ.λ.π. ὁλοκληρώματα καλοῦνται *πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα*. Ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς χρησιμοποιοῦνται κυρίως τὰ διπλᾶ καὶ τριπλᾶ ὁλοκληρώματα.

√ ***Διπλᾶ ὁλοκληρώματα.*** Λάβωμεν τὴν συνάρτησιν $z=\sigma(x,y)$ καὶ θεωρήσωμεν ταύτην συνεχῆ διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῶν x καὶ y. Ἡ συνάρτησις αὕτη παριστᾷ, ὡς γνωστόν, ἐπιφάνειαν Ε *(Σχ. 64)*. Ἐπὶ τῆς Ε ἂς λάβωμεν τμῆμα ταύτης α ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς κλειστῆς γραμμῆς (γ) ἥτις προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ κατὰ τὴν γραμμὴν (γ′) ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τούτου τὸ ἐμβαδὸν α′.

Ἔστω σημεῖον Σ (x, y, z) τῆς ἐπιφανείας α οὗτινος ἡ προβολὴ εἶναι τὸ Σ′. Ὅταν τὰ x, y μεταβάλλωνται ταυτοχρόνως, εἰς τρόπον ὥστε τὸ Σ′ νὰ διαγράφῃ τὴν α′, ἡ κατηγμένη ΣΣ′ διαγράφει ὁλόκληρον τὸν κυλινδρικὸν ὄγκον τὸν ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν ἐμβαδῶν α καὶ α′. Δυνάμεθα ὅμως νὰ θεωρήσωμεν τὸν ὄγκον τοῦτον, ὃν καὶ προτιθέμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν, παραγόμενον ὡς ἑξῆς: Τὸ σημεῖον Σ′ νὰ κινῆται εἰς τρόπον ὥστε νὰ διαγράφῃ τὴν εὐθεῖαν Μ′Ν′, ἤτοι τὸ x νὰ διατηρῆται σταθερὸν καὶ νὰ μεταβάλλεται μόνον τὸ y. Τοῦ Σ′ διαγράφοντος τὴν Μ′Ν′, τὸ ἀντίστοιχόν του σημεῖον Σ διαγράφει τὴν καμπύλην ΜΝ, τῆς ὁποίας τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν θέτοντες ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἐπιφανείας τὴν σταθερὰν τιμὴν ἣν ἔχει τὸ x, καθόσον αὕτη εἶναι τομὴ τῆς ἐπιφανείας $z = \sigma(x, y)$ καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ παραλλήλου τῷ ΨΟΖ καὶ τέμνοντος τὸν ἄξονα ΟΧ εἰς τὸ Α. Τὸ ἐμβαδὸν ΜΝΜ′Ν′ ὑπολογίζεται δι᾽ ἑνὸς ὡρισμένου ὁλοκληρώματος. Ἐὰν ἐν συνεχείᾳ θεωρήσωμεν ὅτι μεταβάλλεται τὸ x, τότε ἡ ἐπιφάνεια ΜΝΜ′Ν′ μετακινεῖται παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΨΟΖ *«σαρώνοντας»* ὅλον τὸν κυλινδρικὸν ὄγκον. Θεωροῦντες τὰς κινήσεις τῆς ἐπιφανείας ΜΝΜ′Ν′ ἀπειροστάς, ἀγόμεθα εἰς δευτέραν ὁλοκλήρωσιν.



Σχ. 64

Χωρίζομεν ἤδη τὸ ἐμβαδὸν α′ δι᾽ εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονας ΟΧ καὶ ΟΨ ἀπεχουσῶν ἀντιστοίχως μεταξύ των Δy, Δx. Ἐκ τῶν κορυφῶν τῶν σχηματισθέντων ὀρθογωνίων ὑψοῦμεν καθέτους πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΧΟΨ. Ὁ κυλινδρικὸς ὄγκος ἀποτελεῖται ἀπὸ *«πλάκας»* ὡς ἡ ΚΜΝΛΚ′Μ′Ν′Λ′, ἥτις ἔχει προσεγγιστικῶς ὄγκον ΜΝΜ′Ν′$\cdot \Delta x$. Ἑκάστη δὲ πλὰξ ἀποτελεῖται ἀπὸ πλῆθος *«στηλῶν»* πρισματικῶν ἐχουσῶν προσεγγιστικῶς ὄγκον $\Delta x \cdot \Delta y \cdot$ΣΣ′.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ὄγκου προσθέτομεν πρῶτον τὰς στήλας μιᾶς πλακὸς καὶ ἐν συνεχείᾳ ὅλας τὰς πλάκας.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀθροίσματος τῶν στηλῶν ἐπιτυγχάνεται θεωρουμένου ὅτι τὸ x ἔχει ὡρισμένην τινὰ τιμὴν x_0 καὶ ὅτι τὸ y μεταβάλλεται ἀπὸ ΑΜ′ ἕως ΑΝ′. Ὁ ὄγκος τῆς πλακὸς ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας της

MNM'N' ἐπὶ τὸ πάχος της Δx. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις τῆς MN, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, εἶναι $z = \sigma(x_0, y)$ θὰ ἔχωμεν :

Ἐμβαδὸν $\quad MNM'N' = \int_{AM'}^{AN'} \sigma(x_0, y)dy \quad$ καὶ

Ὄγκος τῆς πλακὸς $\quad KAK'A'MNM'N' = \Delta x \cdot \int_{AM'}^{AN'} \sigma(x_0, y)dy.$

Ἐὰν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ ΟΓ ἕως ΟΔ, ὁ ζητούμενος ὄγκος θὰ ἰσοῦται πρός :

$$\text{ορ} \sum_{\substack{x=O\Gamma \\ \Delta x \to 0}}^{x=O\Delta} \Delta x \int_{AM'}^{AN'} \sigma(x, y)dy = \int_{O\Gamma}^{O\Delta} dx \int_{AM'}^{AN'} \sigma(x, y)dy$$

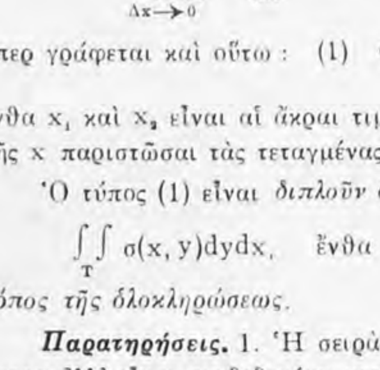
ὅπερ γράφεται καὶ οὕτω : (1) $\quad O = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \sigma(x,y)dydx,$

ἔνθα x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ ἄκραι τιμαὶ τῆς x, αἱ δὲ $y_1(x)$, $y_2(x)$ συναρτήσεις τῆς x παριστῶσαι τὰς τεταγμένας τῶν σημείων τῆς καμπύλης (γ').

Ὁ τύπος (1) εἶναι *διπλοῦν ὁλοκλήρωμα*, ὅπερ γράφεται καὶ οὕτω :

$\int\int_T \sigma(x, y)dydx,$ ἔνθα T παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν α' καὶ καλεῖται *τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως*.

Παρατηρήσεις. 1. Ἡ σειρὰ τῶν δύο ὁλοκληρωμάτων δὲν εἶναι αὐθαίρετος, ἀλλ' εἶναι συνδεδεμένη μετὰ τῆς σειρᾶς τῶν διαφορικῶν dx, dy. Τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα εἶναι συνδεδεμένον μὲ τὸ δεύτερον διαφορικόν. 2. Ὑπολογίζομεν ἐν ἀρχῇ τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα τὸ ὁποῖον συνδέεται μετὰ τοῦ πρώτου διαφορικοῦ. 3. Ἐὰν τεθῇ $z = (x, y) = 1$, τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα (1) δίδει τὸν ὄγκον στερεοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν α' καὶ ὕψος τὴν μονάδα. Συνεπῶς, ὁ ἀριθμὸς ὁ δίδων τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας α' ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν ὅστις προκύπτει ἐκ τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος $\int\int dydx$.



Σχ. 65.

Τριπλᾶ ὁλοκληρώματα. Δι' ἐπεκτάσεως τῆς μεθόδου τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων ἔχομεν τὰ τριπλᾶ ὁλοκληρώματα. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ $Ox_1y_1z_1$ *(Σχ. 65)* διαιροῦμεν τὰς στήλας αἵτινες προέκυψαν προηγουμένως δι' ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΧΟΨ καὶ ἀπεχουσῶν μεταξύ των Δz. Θὰ προκύψουν τοιουτοτρόπως μικρὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ὄγκον $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

Εὐκόλως συνεπάγεται ὅτι :

1. Ὄγκος τῆς στήλης $= \Delta x \cdot \Delta y \int\limits_0^{\Delta(x,y)} dz$, τῶν x, y ὄντων σταθερῶν.

2. Ὄγκος τῆς πλακὸς $= \Delta x \cdot \int\limits_0^{\Gamma(x)} dy \int\limits_0^{\Delta(x,y)} dz$

3) Ὄγκος στερεοῦ $= \int\limits_0^{x_1} dx \int\limits_0^{\Gamma(x)} dy \int\limits_0^{\Delta(x,y)} dz$, ὅπερ γράφεται καὶ οὕτω :

$$\int_0^{x_1} \int_0^{\Gamma(x)} \int_0^{\Delta(x,y)} dz\, dy\, dx.$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ τριπλοῦ τούτου ὁλοκληρώματος ἐπιτυγχάνεται δι' ὑπολογισμοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος πρῶτον ὡς πρὸς z, εἶτα δι' ὑπολογισμοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος ὡς πρὸς y καὶ εἶτα ὡς πρὸς x, ὡς δεικνύουσιν αἱ παρενθέσεις :

$$\left[\int_0^{x_1} \left(\int_0^{\Gamma(x)} \left(\int_0^{\Delta(x,y)} dz \right) dy \right) dx \right]$$

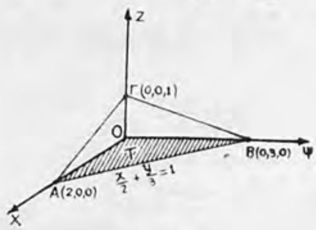
Παραδείγματα

1. *Ὑπολογίσαι τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα* $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x^2)dydx.$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x^2)dydx = \int_0^1 \left[y - yx^2 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 (1-x-x^2+x^3)dx = \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \right.$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

2. *Ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον τετραέδρου ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου* (1) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$ *καὶ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων.*



Σχ. 66.

Θὰ ἔχωμεν : Ὄγκος $= \displaystyle\iint\limits_T z dx dy$, ἔνθα ὁ τόπος T τῆς ὁλοκληρώσεως ὁρίζεται ὑπὸ τῆς εὐθείας AB *(Σχ. 66)*, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν (2) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ (προκυψάσης ἐκ τῆς (1) διὰ $z = 0$), καὶ τῶν ἀξόνων OX καὶ OΨ.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς z λαμβάνομεν $z = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}$. Λύοντες δὲ τὴν (2) ὡς πρὸς x λαμβάνομεν $x = 2\left(1 - \frac{y}{3}\right)$.

Τὰ ὅρια μεταβολῆς τῆς x εἶναι ἀπὸ 0 ἕως $2\left(1-\frac{y}{3}\right)$, τὰ δὲ ὅρια μεταβολῆς τῆς y ἀπὸ 0 ἕως 3. Οὕτω :

$$\iint\limits_{T} z\,dy\,dx=\int_0^3\int_0^{2\left(1-\frac{y}{3}\right)}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)dx\,dy=$$

$$=\int_0^3\left[x-\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{3}\right]_0^{2\left(1-\frac{y}{3}\right)}dy=\int_0^3\left(1-\frac{2y}{3}+\frac{y^2}{9}\right)dy=1.$$

3. *Ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως διὰ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος.*

Ἔχομεν :

$$O=\int_0^2\int_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)}\int_0^{\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{3}\right)}dz\,dy\,dx=1\cdot\int_0^2\int_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)dy\,dx=$$

$$=\int_0^2\left[3\left(1-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2\right]dx=\frac{2\cdot3}{6}\left[-\left(1-\frac{x}{2}\right)^3\right]_0^2=1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ κάτωθι ἀόριστα ὁλοκληρώματα :

1. $\int 3x^3dx.$ **Ἀπόκρ.** $\frac{3}{4}x^4+c.$
2. $\int \frac{1}{5}x^4dx.$ » $0{,}04x^5+c.$
3. $\int x\left(2x-\frac{1}{5}\right)dx.$ » $=\int\left(2x^2-\frac{x}{5}\right)dx=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{10}+c.$
4. $\int (x-1)^3dx.$ » $=\int(x^3-3x^2+3x-1)dx=\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{3x^2}{2}-x+c.$
5. $\int (2x-1)(x-5)dx.$ » $=\int(2x^2-11x+5)dx=\frac{2x^3}{3}-\frac{11x^2}{2}+5x+c.$
6. $\int \frac{x^{1/2}+1}{x}dx.$ » $=\int\left(x^{-1/2}+\frac{1}{x}\right)dx=2x^{1/2}+\ln|x|+c.$
7. $\int \frac{x^2-x+1}{x^3}dx.$ » $=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$
8. $\int \frac{2dx}{3x-1}.$ » $=\frac{2}{3}\int\frac{d(3x-1)}{3x-1}=\frac{2}{3}\ln|3x-1|+c.$
9. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+1}dx.$ » $=\int\frac{d(x^2+5x+1)}{x^2+5x+1}=\ln|x^2+5x+1|+c.$

$\frac{2}{3}\int \frac{d(1+x^{3/2})}{1+x^{3/2}} = \int \frac{2}{3} \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx}{1+x^{3/2}}$

10. $\int \frac{x^{1/2}\,dx}{1+x^{3/2}}$ » $= \frac{2}{3} \ln|1+x^{3/2}| + c.$

11. $\int \sqrt{2x+1}\,dx.$ » Θέτομεν $2x+1=\omega$, ὅτε $x=\frac{\omega-1}{2}$ καὶ $dx=\frac{d\omega}{2}$

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{2}{3}(2x+1)^{3/2} + c.$$

12. $\int\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\right)dx.$ 'Απόκρ. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - \sqrt[5]{x} + c.$

13. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2x\sqrt{x}}\,dx.$ 'Απόκρ. $\frac{x-1}{\sqrt{x}} + \ln|cx|.$

14. $\int ημx\,συνx\,dx.$ 'Απόκρ. $= \int ημx\,dημx = \frac{1}{2}ημ^2x + c.$

15. $\int ημ3x\,dx.$ » $= \frac{1}{3}\int ημ3x\,d(3x) = -\frac{1}{3}συν3x + c.$

16. $\int ημ\frac{1}{3}x\,dx.$ » $= -3συν\frac{x}{3} + c.$

17. $\int ημ^3x\,συνx\,dx.$ » $= \int ημ^3x\,dημx = \frac{1}{4}ημ^4x + c.$

18. $\int e^{2x}\,dx.$ » $= \frac{1}{2}\int e^{2x}\,d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + c.$

19. $\int\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)dx.$ » $= 2\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right).$ $\leftarrow \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}}$

20. $\int 10^{3x}\,dx.$ » $\frac{1}{3}\cdot 10^{3x}\cdot λογe + c$

21. $\int \frac{dx}{6^x}.$ » $= \int 6^{-x}\cdot dx = -\frac{1}{6^x\cdot \ln 6} + c.$

22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ » Θέτοντες: $x=\frac{1}{\omega^2}$, ὅτε $dx=\frac{-2d\omega}{\omega^3}$,

εὑρίσκομεν: $-2\,τοξημ\frac{1}{\sqrt{x}} + c.$

23. $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k}}.$ » Θέτοντες: $y = t + \sqrt{t^2+k}$ λαμβάνομεν:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{2t}{2\sqrt{t^2+k}} = \frac{y}{\sqrt{t^2+k}},$$

$dt = \frac{\sqrt{t^2+k}}{y}\cdot dy.$ 'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| = \ln|t+\sqrt{t^2+k}|.$$

$\ln K = e^K$

$10^a = K$

$\ln K =$

Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ κάτωθι ὡρισμένα ὁλοκληρώματα :

1. $\int_1^2 (x^2+3x-5)dx$. 'Απόκρ. $\left[\frac{x^3}{3}+3\,\frac{x^2}{2}-5x\right]_1^2 = 1\,\frac{5}{6}$.

2. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$ » $\left[\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = 4\,\frac{2}{3}$.

3. $\int_4^{10} x^{-0,8}\cdot dx$ » 2,925

4. $\int_2^3 \frac{xdx}{1+x^2}$. 'Απόκρ. $\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left[\,l\upsilon(1+x^2)\,\right]_2^3 =$

$= \frac{1}{2}\,(\ln 10 - \ln 5) = \frac{1}{2}\,\ln 2 = \ln\sqrt{2}.$

5. $\int_0^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$. 'Απόκρ. $9\,\frac{1}{3}$.

6. $\int_0^{\pi/6} \sigma\upsilon\nu 3x dx$ » $= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/6} \sigma\upsilon\nu 3x d(3x) = \frac{1}{3}\left[\eta\mu 3x\right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{3}$

7. $\int_0^{\pi/2} (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu 2\theta)d\theta$ » $= \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \eta\mu 2\theta d(2\theta) = 0.$

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν ἐλλείψεως.

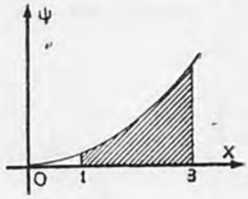
Δοθέντος ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως εἶναι $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εὑρίσκομεν : $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$. Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν Ε θὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ τετάρτου αὐτῆς, ἤτοι :

$$E = 4\int_0^{\alpha} y dx = \frac{4\beta}{\alpha}\int_0^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}dx.$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος $\int\sqrt{\alpha^2-x^2}dx$ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀντικατάστασιν $x=\alpha\eta\mu\omega$. 'Επειδὴ διὰ $x=0$ $\omega=0$, καὶ διὰ $x=\alpha$ $\omega=\pi/2$, θὰ ἔχωμεν :

$$E = \frac{4\beta}{\alpha}\int_0^{\pi/2} \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\omega d\omega = 4\alpha\beta\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega}{2}\right]_0^{\pi/2} = 4\,\alpha\beta\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi\alpha\beta.$$

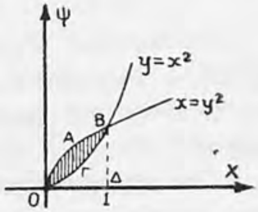
Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς $y = \frac{x^2}{3}$ ***καὶ τῶν εὐθειῶν*** $x = 1$ ***καὶ*** $x = 3$.



Ἔχομεν:

$$E = \int_1^3 \frac{x^2}{3}\,dx = \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^3 = \frac{3^3}{9} - \frac{1}{9} = 2{,}90$$ τετρ. μονάδες (κατὰ προσέγγισιν).

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου, ὅπερ περιέχεται μεταξὺ τῶν παραβολῶν $y = x^2$ ***καὶ*** $x = y^2$.



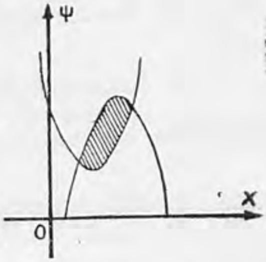
Ἔχομεν: (ΟΑΒΓΟ) = (ΟΑΒΔΟ) − (ΟΓΒΔΟ)

Λύοντες τὸ σύστημα $y = x^2$, $x = y^2$ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο καμπύλων, τὸ Β, ἔχει τετμημένην $x = 1$, ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$E = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$ τετραγωνικαὶ μονάδες.

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν παραβολῶν $y = -x^2 + 5x - 2$ ***καὶ*** $y = x^2 - 3x + 4$.



Εὑρίσκομεν τὰς τετμημένας τῶν σημείων τομῆς των, ἐξισοῦντες τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων, ὅτε λαμβάνομεν: $(x-1)(x-3) = 0$. Ὅθεν διὰ τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν, θὰ ἔχωμεν:

$$E = \int_1^3 (-x^2+5x-2)dx - \int_1^3 (x^2-3x+4)dx = \int_1^3 (-2x^2+8x-6)dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_1^3 = 2\frac{2}{3}$$ τετρ. μονάδες

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 105. Ὁρισμοί.

Τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ εἶναι, ὡς εἴπομεν (§ 97), ἡ λύσις τῶν *διαφορικῶν ἐξισώσεων**. *Διαφορικὴ δὲ ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἰσότης δύο παραστάσεων αἵτινες περιέχουσι παραγώγους ἢ διαφορικά.*

Ἵνα εὕρωμεν π.χ. τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης της ἰσοῦται πρὸς 3x, δέον νὰ ἔχωμεν: $\frac{dy}{dx} = 3x$ ἢ $\frac{dy}{dx} - 3x = 0$ ἢ $dy = 3xdx$, ἥτις εἶναι *διαφορικὴ ἐξίσωσις.*

Ἐὰν διαφορικὴ ἐξίσωσις δὲν περιέχῃ, ἐκτὸς βεβαίως τῶν x καὶ y, εἰμὴ μόνον τὴν πρώτην παράγωγον $\frac{dy}{dx}$ καλεῖται *πρώτης τάξεως*· ἐὰν περιέχῃ τὴν δευτέραν παράγωγον $\frac{d^2y}{dx^2}$, χωρὶς νὰ περιέχῃ καὶ παράγωγον ἀνωτέρας τάξεως, θὰ καλῆται *δευτέρας τάξεως* κ.ο.κ.

Ἡ ἐξίσωσις $\frac{dy}{dx} - 3x = 0$ εἶναι πρώτης τάξεως, ἡ ἐξίσωσις $3\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ εἶναι δευτέρας τάξεως.

Συνάρτησίς τις y ἐπαληθεύουσα δοθεῖσαν διαφορικὴν ἐξίσωσιν καλεῖται *λύσις* ἢ *ὁλοκλήρωμα* τῆς ἐξισώσεως.

Ἡ εὕρεσις τῶν συναρτήσεων y αἵτινες ἐπαληθεύουσι δοθεῖσαν διαφορικὴν ἐξίσωσιν καλεῖται *λύσις* ἢ *ὁλοκλήρωσις* ταύτης.

Ἔστω, π.χ., ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις (1) $\frac{dy}{dx} = y\ (\neq 0)$, τῆς ὁποίας ζητεῖται ἡ λύσις. Δέον, πρὸς τοῦτο, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ συναρτήσεις τῆς x ὧν

* Ἡ ἔκφρασις «*διαφορικὴ ἐξίσωσις*» εἰσήχθη ὑπὸ τοῦ *Leibniz* τὸν αὐτὸν χρόνον καθ' ὃν εἰσήχθη καὶ ἡ λέξις «*παραγωγίζειν*». Ἀμφότεραι αἱ ἐκφράσεις ἀναφέρονται τὸ πρῶτον εἰς ἐπιστολὴν τοῦ *Leibniz* πρὸς τὸν *Newton* ἐν ἔτει 1667.

ἡ παράγωγος ἰσοῦται πρὸς αὐτὴν ταύτην τὴν συνάρτησιν. Κατὰ τὰ εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον λεχθέντα γράφοντες τὴν (1) ὡς $\frac{dy}{y} = dx$, ἔχομεν :

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \qquad \text{καὶ} \quad (2) \quad \ln|y| = x + c$$

ἔνθα c ἡ σταθερὰ τῆς ὁλοκληρώσεως. Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν : $\boxed{y = e^{x+c}}$ ἢ $y = e^c \cdot e^x = c_1 e^x$, ἔνθα ἐτέθη $e^c = c_1$ ὡς παριστῶν αὐθαίρετον σταθεράν.

Δοθέντος ὅτι τὸ c_1 δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ τυχόντος πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, συνάγομεν ὅτι ὑπάρχουσιν *ἄπειροι λύσεις* τῆς (1).

Ἐὰν ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει (1) ἀντικατασταθῇ τὸ y διὰ τοῦ ἴσου του c_1e^x, θὰ ἔχωμεν : $(c_1e^x)' = c_1e^x$, ἤτοι ταυτότητα, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ $y = c_1e^x$ ἐπαληθεύει τὴν (1).

Ἡ εὑρεθεῖσα λύσις $y = c_1e^x$ καλεῖται *γενικὴ λύσις* ἢ *γενικὸν ὁλοκλήρωμα* τῆς ἐξισώσεως, διότι ἐξ αὐτῆς προκύπτουσι, μεταβαλλομένου τοῦ c_1, πᾶσαι αἱ λύσεις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως.

Ἐλύσαμεν ἐν προκειμένῳ μίαν στοιχειώδη διαφορικὴν ἐξίσωσιν. Ἐνδεικτικῶς κατωτέρω θὰ δώσωμεν μεθόδους λύσεως ἁπλῶν τινων διαφορικῶν ἐξισώσεων.

§ 106. Λύσεις ἁπλῶν τινων διαφορικῶν ἐξισώσεων.

Α΄. Ἐξισώσεις πρώτης τάξεως.

Αἱ ἐξισώσεις πρώτης τάξεως ἔχουσιν ἐν γένει τὴν μορφὴν $\sigma(x,y,y') = 0$ καὶ δύνανται ν' ἀναχθῶσιν εἰς τὴν μορφὴν $Mdx + Ndy$, ἔνθα M καὶ N συναρτήσεις, ἐν γένει, τῶν x, y.

Θεωρήσωμεν τὰ ἀκόλουθα εἴδη διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως.

I. *Ἐξισώσεις εἰς ἃς αἱ μεταβληταὶ χωρίζονται.*

II. » *τῆς μορφῆς* $\frac{dy}{dx} = \sigma\left(\frac{y}{x}\right)$.

III. » *γραμμικαί.*

I. **Λύσις διαφορικῆς ἐξισώσεως εἰς ἣν αἱ μεταβληταὶ χωρίζονται.**

Αἱ ἐξισώσεις αὗται, μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, λαμβάνουσι τὴν μορφήν :

$$(1) \qquad \sigma(x)dx + \varphi(y)dy = 0,$$

καὶ τότε λέγομεν ὅτι αἱ *μεταβληταὶ x καὶ y ἐχωρίσθησαν*.

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς (1) εἶναι :

$$\int \sigma(x)dx + \int \varphi(y)dy = c,$$

ἔνθα τὸ c εἶναι αὐθαίρετος σταθερά.

Παραδείγματα

1 *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :* $xdy - ydx = 0$.

Αἱ μεταβληταὶ χωρίζονται, διότι ἡ ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ : $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$.

Ὁλοκληροῦντες λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν · $\ln y = \ln x + c$, ἥτις, δοθέντος ὅτι ὁ c εἶναι αὐθαίρετος σταθερά, δύναται νὰ γραφῇ :

$$\ln y = \ln x + \ln c = \ln cx, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad y = cx$$

2. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :* $2x^2dy = ydx$.

Αἱ μεταβληταὶ χωρίζονται, διότι δύναται αὕτη νὰ γραφῇ :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x^2}, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \ln|y| = -\frac{1}{2x} + c \quad \text{καὶ} \quad y = e^{c - \frac{1}{2x}}$$

II. *Λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς* $\dfrac{dy}{dx} = \sigma\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Διὰ τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς ταύτης θέτομεν $y = vx$, ὅτε $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dv}{dx} + v$. Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$(1) \qquad x\frac{dv}{dx} + v = \sigma(v).$$

Οὕτως ἔχομεν ἐξίσωσιν τῆς προηγουμένης μορφῆς, ἔνθα αἱ μεταβληταὶ χωρίζονται.

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς γενικῆς λύσεως τῆς (1) ἀντικαθιστῶμεν τὸ **v** ὑπὸ τοῦ ἴσου του $\dfrac{y}{x}$.

Παραδείγματα

1. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:* $x\dfrac{dy}{dx} - 2y + x = 0$.

Θέτοντες $y = vx$, ἐξ οὗ $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dv}{dx} + v$, καὶ ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$x\left(x\frac{dv}{dx} + v\right) - 2vx + x = 0,$$

ἧς αἱ μεταβληταὶ χωρίζονται.

Χωρίζοντες τὰς μεταβλητὰς λαμβάνομεν : $\dfrac{dv}{v-1} = \dfrac{dx}{x}$ καὶ ὁλοκληροῦντες

$$\int\frac{dv}{v-1} = \int\frac{dx}{x} \quad \text{ἢ} \quad \ln|v-1| = \ln|x| + \ln|c|,$$

ἔνθα διὰ $\ln|c|$ παριστῶμεν τὴν αὐθαίρετον σταθερὰν τῆς ὁλοκληρώσεως.

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως λαμβάνομεν :

$$v - 1 = cx, \quad \text{ἐξ ἧς προκύπτει :} \quad y = x + cx^2.$$

2. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :* $(x + y)dx + xdy = 0$.

Ἐκτελοῦμεν τὴν ἀντικατάστασιν $y = vx$, ὅτε εὑρίσκομεν : $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dv}{1+2v}$

καὶ ἐκ ταύτης, μετὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν, λαμβάνομεν :

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1+2v| = c$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ v ὑπὸ τοῦ ἴσου του $\dfrac{y}{x}$ εὑρίσκομεν :

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| = c$$

ἐξ ἧς $\quad \ln\left|x\cdot\left(1+\dfrac{2y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right| = c \quad$ ἢ $\quad \ln\left|\left(x^2+2xy\right)^{\frac{1}{2}}\right| = c$

ἢ τέλος, ἐὰν τεθῇ ἀντὶ c $\ln c^{\frac{1}{2}}$, $\quad x^2+2xy = c$.

III. *Λύσις γραμμικῶν ἐξισώσεων.*

Ἐξίσωσίς τις καλεῖται γραμμικὴ ἐὰν εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν καὶ τὴν παράγωγον αὐτῆς.

Πᾶσα γραμμικὴ διαφορικὴ ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς τὴν μορφὴν

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \tag{1}$$

ἔνθα P καὶ Q συναρτήσεις μόνον τῆς x, ἢ σταθεραί.

Πρὸς λύσιν τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως θέτομεν $y = u\cdot v$, ἔνθα τὸ μὲν v παριστᾷ νέαν ἐξηρτημένην μεταβλητήν, τὸ δὲ u συνάρτησιν τῆς x προσωρινῶς ἀπροσδιόριστον.

Διὰ τῆς ἐν λόγῳ ἀντικαταστάσεως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις μετασχηματίζεται οὕτω :

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + Pu\right) = Q. \tag{2}$$

Ἐκλέγομεν τὸ u οὕτως ὥστε νὰ ἐξαλειφθῇ ὁ ὡς πρὸς v ὅρος, ὅτε ἡ (2) ἀνάγεται εἰς τὴν

$$u\frac{dv}{dx} = Q, \tag{3}$$ ἧς χωρίζονται αἱ μεταβληταί.

Ἡ συνάρτησις u προσδιορίζεται ἤδη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\dfrac{du}{dx} + Pu = 0$,

ὅτε $\quad \dfrac{du}{u} = -P dx \quad$ καὶ $\quad u = ce^{-\int P dx}$.

Ταύτης λαμβάνομεν μίαν ἰδιαιτέραν τιμὴν θέτοντες $c = 1$.

Ἀντικαθιστῶντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τῆς u εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν :

$$e^{-\int P dx}\cdot\frac{dv}{dx} = Q \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad dv = Qe^{\int P dx}\cdot dx$$

ὅτε ὁλοκληροῦντες θὰ ἔχωμεν :

$$v = \int Qe^{\int Pdx} dx + c$$

Ἐπανερχόμενοι εἰς τὴν y, εὑρίσκομεν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (1)

$$(4) \qquad y = e^{-\int pdx}\left(\int Qe^{\int pdx} dx + c\right) \surd$$

Μερικὴ περίπτωσις. Ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^{\nu}$ ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ y^{ν} καὶ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀντικατάστασιν $\frac{1}{y^{\nu-1}} = \omega$.

Παραδείγματα

1. ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*** : $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

Ἔχομεν : $P = -\frac{2}{x+1}$, $Q = (x+1)^3$, $\int Pdx = \int -\frac{2dx}{x+1} =$

$$= -2\ln|x+1| = \ln(x+1)^{-2},$$

$$e^{\int Pdx} = e^{\ln(x+1)^{-2}} = (x+1)^{-2}, \quad e^{-\int pdx} = (x+1)^2$$

καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (4) λαμβάνομεν :

$$y = (x+1)^2\left(\int (x+1)^3(x+1)^{-2}dx + c\right) =$$

$$= (x+1)^2\left(\int (x+1)\,dx + c\right) = (x+1)^2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2 + c\right].$$

2. ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*** : $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = (x+1)^2$.

Ἔχομεν :

$$P = -\frac{1}{x+1}, \quad Q = (x+1)^2, \quad \int Pdx = \int -\frac{dx}{x+1} = -\ln|x+1|,$$

$$e^{\int Pdx} = e^{-\ln(x+1)} = e^{\ln(x+1)^{-1}} = \frac{1}{x+1}, \quad e^{-\int Pdx} = x+1.$$

Ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν :

$$y = (x+1)\left(\int (x+1)^2 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot dx + c\right) \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{(x+1)^3}{2} + c(x+1). \quad //$$

Β΄. Ἐξίσωσις τοῦ Clairaut.

Αὕτη ἔχει τὴν μορφήν : $y = x\frac{dy}{dx} + \sigma\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ἔνθα σ συνάρτησις μὴ περιέχουσα εἰμὴ τὴν παράγωγον τῆς y. Ἡ γενικὴ λύσις ταύτης ἐπιτυγχάνεται δι' ἀντικαταστάσεως τῆς παραγώγου $\frac{dy}{dx}$ ὑπὸ αὐθαιρέτου σταθερᾶς c καὶ εἶναι αὕτη $\mathbf{y = cx + \sigma(c)}$.

Γ'. Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς : $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sigma(y)$.

Πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη της ἐπὶ $2dy$, ὅτε λαμβάνομεν :

$$2dy\,\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sigma(y)dy.$$

Τὸ πρῶτον μέλος εἶναι διαφορικὸν τοῦ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ καὶ συνεπῶς ἔχομεν :

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\sigma(y)dy \quad \text{καὶ} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int\sigma(y)dy + c = \varphi(y) + c,$$

ἔνθα ἐτέθη $2\int\sigma(y)dy = \varphi(y)$.

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως λαμβάνομεν :

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)+c}} \quad \text{καὶ} \quad x = c_1 + \int\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)+c}}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθῶσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $(2x^2-1)dy = 2xydx$.

Ἀπόκρ. Αὕτη γράφεται καὶ οὕτω : $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2xdx}{x^2-1}$. Ὁλοκληροῦντες λαμβάνομεν $\ln|y| = \ln|x^2-1| + \ln|c|$ ἐξ ἧς $y = c(x^2-1)$.

2. $ydx - 2xdy = 0$.

Ἀπόκρ. Αὕτη γράφεται καὶ οὕτω : $\dfrac{dx}{x} - 2\dfrac{dy}{y} = 0$. Ὁλοκληροῦντες εὑρίσκομεν : $\ln|x| - 2\ln|y| = c$. Ἐὰν ἀντὶ τῆς c λάβωμεν $\ln\dfrac{1}{2c_1}$, θὰ ἔχωμεν : $\ln\left|\dfrac{x}{y^2}\right| = \ln\dfrac{1}{2c_1}$ καὶ $y^2 = 2c_1x$.

3. $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.

Ἀπόκρ. Ἔχομεν : $\dfrac{1+x}{x}dx + \dfrac{1-y}{y}dy = 0$ καὶ

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy = c, \text{ ἐξ ἧς } \ln xy + (x-y) = c$$

4. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$. **Ἀπόκρ.** $x + y = c(1-xy)$.

5. $\sqrt{x^2+y^2}dx + ydx = xdy$.

Ἀπόκρ. Ἔχομεν : $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} + \dfrac{y}{x}$. Θέτομεν $y = vx$, ὅτε λαμβάνομεν διαδοχικῶς,

$$x\frac{dv}{dx} + v = \sqrt{1+v^2} + v, \quad \int\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int\frac{dx}{x} + c,$$

$$\ln|v + \sqrt{1+v^2}| = \ln|x| + c, \quad v + \sqrt{1+v^2} = x \cdot e^c$$

καί, τέλος, ἀντικαθιστῶντες τὸ v, λαμβάνομεν : $y + \sqrt{x^2+y^2} = cx^2$.

6. $x\dfrac{dy}{dx} - y + \sqrt{y^2 - x^2} = 0.$

'Απόκρ. 'Εργαζόμενοι ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ λαμβάνομεν $x^2 - 2cy + c^2 = 0$

7. $(x^2 - y^2)dy = 2xydx.$

'Απόκρ. Θέτοντες $y = vx$ καὶ ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀσκήσει λαμβάνομεν : $x^2 + y^2 = cy.$

8. $(y^2 - 2xy)dx = (x^2 - 2xy)dy.$

'Απόκρ. 'Ως αἱ δύο προηγούμεναι. $xy(x - y) = c.$

9. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^2.$

'Απόκρ. $P = -\dfrac{1}{x},\quad Q = x^2,\quad e^{-\int P dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x.$ καὶ

$$y = x\left(\int \frac{x^2}{x}dx + c\right) = \frac{x^3}{2} + cx.$$

$x(\int x\,dx + c) = x(\frac{x^2}{2} + c) =$

$e^{\int pdx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ldots}$

$= e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{X}$ δηλ.

$\frac{1}{x}\cdot Q = x$

10. $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} - xy = 1.$

'Απόκρ. Μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς :

$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{x}{1 - x^2}y = \dfrac{1}{1 - x^2}.$ Οὕτω $P = -\dfrac{x}{1 - x^2}$ καὶ $Q = \dfrac{1}{1 - x^2}$

'Εργαζόμενοι ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ λαμβάνομεν :

$$y\sqrt{1 - x^2} = \text{τοξημ}x + c$$

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ 107. Εἰσαγωγή.

Εἰς τὸ παρὸν βιβλίον θὰ δώσωμεν ἐφαρμογὰς τῶν εἰς τὰ προηγούμενα βιβλία ἐκτεθέντων Γενικῶν Μαθηματικῶν. Αἱ ἐφαρμογαὶ αὗται ἀναφέρονται εἰς ζητήματα τῶν Γενικῶν, Οἰκονομικῶν καὶ Ἀσφαλιστικῶν Μαθηματικῶν, ὡς καὶ τῆς Πολιτικῆς Οἰκονομίας.

Διὰ τῶν ἐφαρμογῶν τούτων δὲν θὰ ἐξαντλήσωμεν, βεβαίως, τὴν δι' ἀνωτέρων μαθηματικῶν σπουδὴν τῶν Οἰκονομικῶν καὶ Ἀσφαλιστικῶν Μαθηματικῶν, οὔτε τὴν σπουδὴν τῆς θεωρητικῆς Πολιτικῆς Οἰκονομίας ἢ τῆς Στατιστικῆς ἢ καὶ τῆς ἐνδιαμέσου τούτων Οἰκονομετρίας. Ἀλλ' ἁπλῶς αἱ κατωτέρω ἐφαρμογαὶ θ' ἀποτελέσωσιν ἔνδειξιν τοῦ τρόπου ἐφαρμογῆς τῶν ἐκτεθέντων προηγουμένως μαθηματικῶν ἀρχῶν εἰς ζητήματα τῶν ἀνωτέρω κλάδων.

Ὡς κύρια βοηθήματα ἔσχομεν :

Τρ. Κεραμιδα, Μακροπρόθεσμοι Οἰκονομικαὶ Πράξεις, ἔκδ. β'.

» Στοιχεῖα Ἀσφαλιστικῶν Μαθηματικῶν.

L. Maingie - H. Maurice, Les opérations viagères.

A. Marshall, Principes d'Économie Politique (μετάφρ.).

V. Pareto, Manuel d'Économie Politique.

L. Amoroso, Meccanica Economica. +

G. Tintner, Mathematics and Statistics for Economists.

R. Allen, Mathematical Analysis for Economists.

§ 108. Ἐφαρμογαὶ Γενικῶν Μαθηματικῶν.

1. ***Δοθέντων δύο σημείων ἐν τῷ χώρῳ $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, εὑρεῖν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου $M(x, y, z)$, ὅπερ διαιρεῖ τὸ τμῆμα M_1M_2 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν k καὶ λ, ἤτοι $M_1M : MM_2 = k : \lambda$.***

Θὰ ἐργασθῶμεν κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνον ὃν ἠκολουθήσαμεν διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῶν § 18 καὶ 20 καὶ θὰ εὕρωμεν :

$$x = \frac{\lambda x_1 + k x_2}{\lambda + k}, \quad y = \frac{\lambda y_1 + k y_2}{\lambda + k}, \quad z = \frac{\lambda z_1 + k z_2}{\lambda + k}.$$

2. ***Εὑρεῖν τὰς συντεταγμένας τοῦ μέσου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τῶν σημείων $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.***

Θὰ ἐφαρμοσθῶσιν οἱ τύποι τῶν προηγουμένων ἀσκήσεων καὶ θὰ ληφθῇ $\frac{k}{\lambda}=1$. Οὕτω θὰ εὕρωμεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου εἶναι :

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

3. ***Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν τῶν ἐν τῷ χώρῳ σημείων $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$.***

Θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἐν § 20 καὶ θὰ εὕρωμεν :

$$\delta=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

4. ***Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν σφαίρας ἐχούσης κέντρον $K(\alpha,\beta,\gamma)$ καὶ ἀκτῖνα ϱ.***

Δοθέντος ὅτι ἡ σφαῖρα εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου τῶν ἴσον ἀπεχόντων τοῦ κέντρου, σκεπτόμενοι ὡς ἐν τῷ κύκλῳ, βάσει τοῦ προηγουμένου τύπου, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας εἶναι :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2$$

5. ***Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν σφαίρας ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἀκτῖνα ϱ.***

Θέτοντες ἐν τῷ προηγουμένῳ τύπῳ $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι : $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$.

6. ***Εὑρεῖν τὰς τομὰς τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἀκτῖνα 2μ., ὑπὸ τῶν τριῶν ἐπιπέδων συντεταγμένων.***

Ἡ τομὴ τῆς σφαίρας μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ εἶναι περιφέρεια ἐπὶ τοῦ ΧΟΨ ἔχουσα, ἐπὶ τούτου θεωρουμένη, ἐξίσωσιν : $x^2+y^2=4$. Προέκυψεν δὲ αὕτη ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=4$, ἔνθα ἐτέθη $z=0$. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς τομὰς τῆς ἐν λόγῳ σφαίρας ὑπὸ τῶν ἄλλων δύο ἐπιπέδων.

7. ***Εὑρεῖν τὴν τομὴν τῆς ἐπιφανείας $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, ἥτις καλεῖται ἐλλειψοειδές, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ.***

Ἡ τομὴ εἶναι ἔλλειψις ἥτις θεωρουμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΧΟΨ ἔχει ἐξίσωσιν : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ (§ 48). Ἐφόσον δὲν γίνῃ ἡ διάκρισις ὅτι τὴν ἔλλειψιν θεωροῦμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΧΟΨ δέον νὰ λέγωμεν : ἡ ἔλλειψις : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, $z=0$, ὅτε θὰ ἔχωμεν δύο ἐξισώσεις.

8. ***Εὑρεῖν τὰς τομὰς τῆς ἐπιφανείας $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, ἥτις καλεῖται ὑπερβολοειδές, ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $x=0$, $x=1$, $x=4$.***

Δέον ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἐπιφανείας νὰ τεθῇ $x=0$, ἢ $x=1$ ἢ $x=4$. Θὰ προκύψωσιν οὕτω τρεῖς ὑπερβολαὶ (§ 46)

9. ***Εὑρεῖν τὴν τομὴν τῆς ἐπιφανείας $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=2z$, ἥτις καλεῖται ἐλλειπτικὸν παραβολοειδές, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $z=2$, τοῦ παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ ΧΟΨ.***

Θέτοντες ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς $z=2$ εὑρίσκομεν ὡς τομὴν μίαν ἔλλειψιν.

10. *Εὑρεῖν τὴν τομὴν τῆς ἐπιφανείας* $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 2z$, *ἥτις καλεῖται* **ὑπερβολικὸν παραβολοειδές**, *ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου* $y=4$.

Θέτοντες ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς $y=4$ εὑρίσκομεν ὡς τομὴν μίαν παραβολήν.

η Ἔτος Β.

§ 109. Ἐφαρμογαὶ Οἰκονομικῶν Μαθηματικῶν.

1. Εὕρεσις τῆς τελικῆς ἀξίας κεφαλαίου ἐν συνεχεῖ ἀνατοκισμῷ.

Ἡ θεωρία τοῦ τόκου βασίζεται ἐπὶ τοῦ γεγονότος ὅτι πᾶν κεφάλαιον δανειζόμενον ἔχει παραγωγικὴν ἱκανότητα καὶ ὅτι ἡ παραγωγικὴ ἱκανότης τοῦ κεφαλαίου συνεχῶς αὐξάνει τὸ κεφάλαιον, τῆς παραγωγικῆς ἱκανότητος δυναμένης νὰ μεταβάλληται ἐν τῷ χρόνῳ. Ἡ αὔξησις κεφαλαίου, λόγῳ τῆς παραγωγικῆς ἱκανότητός του, εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ χρόνου n (*).

Ἐνταῦθα τίθεται τὸ ἐρώτημα: Ἐὰν ὁ δανείζων ὑποδιαιρῇ συνεχῶς ὡρισμένην χρονικὴν περίοδον, οὕτως ὥστε ὁ ἀνατοκισμὸς νὰ γίνεται ἀνὰ ἀπειροστὰ χρονικὰ διαστήματα, θὰ λαμβάνῃ συνεχῶς μεγαλύτερα ποσά;

Τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιόδων μ τείνοντος πρὸς τὸ ἄπειρον ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν καὶ δημιουργεῖται οὕτως ἡ ἔννοια τοῦ *συνεχοῦς ἀνατοκισμοῦ*, ἥτις εἶναι καθαρῶς θεωρητική, μὴ ὑπάρχουσα ἐν τῇ πράξει. Ἡ σπουδὴ ὅμως τοῦ συνεχοῦς ἀνατοκισμοῦ παρέχει εὐχέρειαν διὰ τὴν κατανόησιν τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν τὸ μ καθίσταται μέγα καὶ ἐπὶ πλέον δίδει τὸν τρόπον καθ' ὃν ἅπαντες οἱ τύποι οἱ σχετικοὶ πρὸς τὴν κεφαλαιοποίησιν εἰς τὸ ἀριθμητικὸν ἀσυνεχὲς πεδίον, δύνανται νὰ ἐξαχθῶσιν ὡς μερικαὶ περιπτώσεις τούτου.

Ἔστω K_t τὸ κεφάλαιον κατὰ τὸν χρόνον t καὶ K_{t+dt} τὸ κεφάλαιον κατὰ τὴν στιγμὴν $t + dt$. Ἡ διαφορὰ $K_{t+dt} - K_t$ παριστᾷ, ἕνεκα τῶν τόκων του, τὴν μεταβολὴν τοῦ κεφαλαίου κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα dt, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ἀπειροστόν.

Ἐὰν δ_t εἶναι τὸ *στιγμιαῖον ἐπιτόκιον κατὰ τὸν χρόνον* t, θὰ ἔχωμεν: $K_{t+dt} - K_t = K_t \cdot \delta_t \cdot dt$, ὅπου, κατὰ μεγίστην προσέγγισιν, τὸ κεφάλαιον αὐξάνεται κατὰ τὸν ἁπλοῦν τόκον του, ὅστις εἶναι γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.

Ἐπειδὴ ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως δύναται προσεγγιστικῶς νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς τὸ διαφορικὸν ταύτης (§ 67), δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$dK_t = K_t \cdot \delta_t \cdot dt \quad \text{ἢ} \quad (1) \quad K'_t\, dt = K_t \cdot \delta_t \cdot dt,$$

ἔνθα διὰ K'_t παριστῶμεν τὴν παράγωγον τοῦ κατὰ τὸν χρόνον t κεφαλαίου.

Ἐπειδὴ θὰ εἶναι $K'_t > 0$ *διὰ* $t > 0$, *ἡ συνάρτησις* K_t *εἶναι αὔξουσα, ὅπερ σημαίνει ὅτι ὁ ἀνατοκισμὸς αὐξάνει τὸ κεφάλαιον. Διὰ* $t < 0$ *ὅμως,*

(*) Τ. Κεραμιδα, Μακροπρόθεσμοι Οἰκονομικαὶ Πράξεις, σ. 21.

ὅτε καὶ $K'_t < 0$, *ἡ συνάρτησις θὰ εἶναι φθίνουσα, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ προεξόφλησις ἐλαττοῖ τὸ κεφάλαιον.*

Πρὸς εὕρεσιν ἤδη τῆς παραγούσης τῆς συναρτήσεως ὁλοκληροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1), θεωροῦντες χρονικὸν διάστημα ἀπὸ 0 ἕως n.

$$(2) \qquad \int_0^n K'_t \, dt = \int_0^n K_t \, \delta_t \, dt$$

Καὶ ἐπειδὴ
$$\int_0^n K'_t \, dt = \int_0^n d(K_t) = K_n - K_0$$

ἔχομεν :
$$K_n = K_0 + \int_0^n K_t \, \delta_t \, dt \qquad (133)$$

Ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζει ὅτι : *Ἡ ἀξία τοκισθέντος κεφαλαίου τινὸς μετὰ χρόνον n ἰσοῦται μὲ τὴν ἀρχικὴν ἀξίαν τούτου (ἀξία τοῦ κεφαλαίου κατὰ τὸν χρόνον 0) ηὐξημένην κατὰ τοὺς τόκους τοὺς παραχθέντας κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα ἀπὸ 0 ἕως n.*

Διὰ τὴν θεωρητικὴν μελέτην τοῦ συνθέτου τόκου καὶ τῶν συναφῶν πρὸς τοῦτον προβλημάτων, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ εὑρεθῇ τύπος παρέχων τὸ K_t συναρτήσει τοῦ K_0 καὶ δ_t. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ K_t, ὅτε λαμβάνομεν :

$$(3) \qquad \frac{K'_t}{K_t} dt = \delta_t \cdot dt .$$

Ὁλοκληροῦμεν ἀπὸ 0 ἕως n ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (3) καὶ εὑρίσκομεν:

$$(4) \qquad \int_0^n \frac{K'_t}{K_t} dt = \int_0^n \delta_t \, dt .$$

Ἐπειδὴ $d[\ln K_t] = \dfrac{K'_t}{K_t} dt$, ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (4) λαμβάνομεν:

$$\Big[\ln K_t\Big]_0^n = \int_0^n \delta_t \, dt \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \ln K_n - \ln K_0 = \int_0^n \delta_t \, dt$$

καὶ $\ln \dfrac{K_n}{K_0} = \displaystyle\int_0^n \delta_t \, dt$, ἐξ ἧς, τελικῶς, $K_n = K_0 e^{\int_0^n \delta_t \, dt}$ (134)

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὴν τελικὴν ἀξίαν τοῦ κεφαλαίου ἐν τῇ συνεχεῖ κεφαλαιοποιήσει, πρὸς στιγμιαῖον ἐπιτόκιον δ_t *μεταβλητὸν ἐν τῷ χρόνῳ.* Πλὴν ὅμως ὑφίσταται δυσχέρεια ὡς πρὸς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὡς ἐκθέτου ὑπάρχοντος ὡρισμένου ὁλοκληρώματος, διότι εἶναι ἄγνωστον ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν τὸ στιγμιαῖον ἐπιτόκιον ἐν τῷ χρονικῷ διαστήματι (0, n), ἤτοι τὸ δ_t εἶναι ἄγνωστος συνάρτησις τοῦ χρόνου. Ἡ δυσχέρεια παρακάμπεται τιθεμένων διαφόρων ὑποθέσεων ἐπὶ τῆς μορφῆς τοῦ δ_t. Αἱ κυριώτεραι τῶν ὑποθέσεων τούτων εἶναι αἱ ἀκόλουθοι :

1) $\delta_t = \delta$, ἤτοι ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εἶναι σταθερόν, ὅτε

$$K_n = K_0 e^{\delta\int_0^n dt} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{K_n = K_0 e^{\delta n}}$$

Οὗτος εἶναι ὁ γενικὸς τύπος τοῦ συνθέτου τόκου καὶ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $n < 0$, ὅτε $K_{-n} = K_0 e^{-\delta n}$.

Ἐκ τοῦ τελευταίου τύπου συνάγομεν, ὅτι ἡ *προεξόφλησις* δὲν εἶναι ἢ περίπτωσις τοῦ τόκου ἐπὶ ἀρνητικῷ χρόνῳ.

2) $\delta_t = \ln(1+i)$, ὅτε $K_n = K_0 e^{\int_0^n \ln(1+i)dt}$ καὶ ἐπειδὴ

$$\int_0^n \ln(1+i)dt = \ln(1+i)\int_0^n dt = n \cdot \ln(1+i) = \ln(1+i)^n,$$

θὰ ἔχωμεν: $K_n = K_0 e^{\ln(1+i)^n}$ ἐξ ἧς (1) $K_n = K_0(1+i)^n$.

Ἡ γενομένη ὑπόθεσις βασίζεται ἐπὶ τοῦ ἑξῆς: Διαιρέσωμεν τὴν χρονικὴν περίοδον εἰς μ ἴσα μέρη θεωροῦντες ὅτι $\mu \to \infty$. Τὸ στιγμιαῖον ἐπιτόκιον ἔσται $\frac{\delta}{\mu}$. Κατὰ τὸν ἀνατοκισμὸν θὰ ἔχωμεν ὡς τελικὴν ἀξίαν $\text{ορ}\left(1+\frac{\delta}{\mu}\right)^\mu = e^\delta$ (ὅρα ἄσκησ. 15, σ. 101). Ἐὰν ὁ τόκος παρήγετο οὐχὶ δι' ἀνατοκισμοῦ ἀλλὰ δι' ἁπλοῦ τόκου, θὰ εἴχομεν διὰ κεφάλαιον 1 νομ. μονάδος ἀποτέλεσμα $1+i$, καὶ ἐπειδὴ κατὰ τοὺς δύο τρόπους δέον νὰ ἔχωμεν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι: $e^\delta = 1+i$, ὅτε καὶ $\delta = \ln(1+i)$.

Ὁ τύπος (1) εἶναι ὁ γνωστὸς τύπος τῆς τελικῆς ἀξίας κεφαλαίου ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ τόκος παράγεται τὴν τελευταίαν στιγμὴν τῆς χρονικῆς περιόδου τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ ἐπιτόκιον.

2. Τὸ ὀνομαστικὸν ἐπιτόκιον *j* εἶναι πάντοτε μικότερον τοῦ πραγματικοῦ *i* καὶ εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τοῦ μ.

Α'. Τὸ ὀνομαστικὸν ἐπιτόκιον j καὶ τὸ τῆς ἀντιστοίχου χρονικῆς περιόδου ἀντίστοιχον πραγματικὸν ἐπιτόκιον i συνδέονται, ὡς γνωστόν, διὰ τῆς σχέσεως: *

$$(1) \qquad \left(1+\frac{j}{\mu}\right)^\mu = 1+i.$$

Διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν δύο ἐπιτοκίων ἀναπτύσσομεν τὸ πρῶτον μέλος κατὰ τὸ διώνυμον τοῦ Νεύτωνος:

$$1 + \mu\cdot\frac{j}{\mu} + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}\cdot\frac{j^2}{\mu^2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}\cdot\frac{j^3}{\mu^3} + \ldots = 1+i$$

$$\text{ἢ} \qquad j + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}\cdot\frac{j^2}{\mu^2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}\cdot\frac{j^3}{\mu^3} + \ldots = i.$$

* Τ. Κεραμιδᾶ, Μακροπρόθεσμοι Οἰκονομικαὶ Πράξεις, σ. 17.

Ἀφοῦ τὸ j δέον ν' αὐξηθῇ κατ' ἄλλας ποσότητας ἵνα γίνῃ ἴσον τῷ i, ἕπεται ὅτι $j < i$.

Β'. Θ' ἀποδείξωμεν ἤδη ὅτι, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ j ὡς συνάρτησιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιόδων μ, ἡ συνάρτησις αὕτη θὰ εἶναι φθίνουσα, ἤτοι αὐξανομένου τοῦ μ τὸ j θὰ ἐλαττοῦται καὶ ἀντιστρόφως (§ 33 καὶ § 79). Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὅσον περισσότερον αὐξάνει τὸ πλῆθος τῶν ὑποδιαιρέσεων τῆς ἀκεραίας χρονικῆς περιόδου, τόσον τὸ ὀνομαστικὸν ἐπιτόκιον j γίνεται μικρότερον, ἵνα τελικῶς ἔχωμεν ἐπ' ἀνατοκισμῷ τὸ αὐτὸ πραγματικὸν ἐπιτόκιον i.

Πρὸς τοῦτο λύομεν τὴν (1) ὡς πρὸς j καὶ λαμβάνομεν τὴν πρώτην καὶ δευτέραν παράγωγον :

$$(2)\qquad j = \mu\left[(1+i)^{\frac{1}{\mu}} - 1\right],$$

$$(3)\qquad \frac{dj}{d\mu} = (1+i)^{\frac{1}{\mu}}\left[1 - \frac{\ln(1+i)}{\mu}\right] - 1,$$

$$(4)\qquad \frac{d^2j}{d\mu^2} = (1+i)^{\frac{1}{\mu}} \cdot \frac{[\ln(1+i)]^2}{\mu^3}.$$

Ἡ δευτέρα παράγωγος, διὰ μ θετικόν, εἶναι θετική, διότι ἕκαστος τῶν παραγόντων εἶναι θετικός. Ἕνεκα τούτου ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι αὔξουσα συνάρτησις καί, ὡς ἐκ τῆς (3) διαπιστοῦται, τείνει διὰ $\mu \to \infty$ πρὸς τὸ 0. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι αὔξουσα καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, συνάγεται ὅτι διὰ πεπερασμένον πλῆθος περιόδων μ αὕτη θὰ εἶναι ἀρνητική, ἄρα ἡ συνάρτησις j εἶναι φθίνουσα.

3. Εὕρεσις τῆς τελικῆς ἀξίας ράντας ἀμέσου, ληξιπροθέσμου, προσκαίρου ὅρου 1, τοῦ ἐπιτοκίου τείνοντας πρὸς τὸ μηδέν.

Ἔστω ράντα n ὅρων ἴσων πρὸς 1, ἐπιτοκίου i ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν περίοδον.

Ἡ εἰς τὸ τέλος τῶν n περιόδων ἀξία τῶν ὅρων ταύτης εἶναι, ὡς γνωστόν *. $$S_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ ἐπιτόκιον i βαίνει συνεχῶς ἐλαττούμενον.

Ἔχομεν : $S_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \ldots + (1+i) + 1.$

Ἐλαττουμένου τοῦ ἐπιτοκίου ἕκαστος ὅρος ἐλαττοῦται, συνεπῶς καὶ τὸ ἄθροισμα $S_{\overline{n|}}$ θὰ ἐλαττοῦται. Ἐὰν τὸ i συνεχῶς ἐλαττούμενον τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἕκαστος ὅρος θὰ ἔχῃ ὅριον τὴν μονάδα καὶ συνεπῶς :

$$\underset{i \to 0}{\text{ορ}}\, S_{\overline{n|}} = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\ \text{ὅροι}} = n.$$

* Ὅρα **Τ. Κεραμιδᾶ**, Μακροπ. Οἰκονομ. Πράξεις, ἔκδ. β', 1947, τύπος (30).

Εἰς τὸν προηγούμενον ὅμως τύπον, τοῦ i τείνοντος πρὸς τὸ μηδέν, θὰ ἔχωμεν :

$$\underset{i \to 0}{\text{ορ}}\, S_{\overline{n}|} = \underset{i \to 0}{\text{ορ}} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο οἰκονομικῶς δὲν ἔχει ἔννοιαν. Θεωρητικῶς ἀποτελεῖ ἀπροσδιόριστον μορφὴν (§ 62, Παρατήρ.). Πρὸς ἄρσιν τῆς ἀοριστίας ἢ καταφεύγομεν εἰς τεχνάσματα, μετατρέποντες καταλλήλως τὴν μορφὴν τοῦ $S_{\overline{n}|}$, ἢ χρησιμοποιοῦμεν τὸν κανόνα τοῦ L' Hospital (§ 77).

Ἤτοι : Ἢ ἀναπτύσσομεν τὸ $(1+i)^n$ κατὰ τὸ διώνυμον τοῦ Νεύτωνος (§ 10), ὅτε

$$S_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1}{i}\left[1 + \binom{n}{1} i + \binom{n}{2} i^2 + \ldots + i^n - 1\right]$$

$$= n + \frac{n(n-1)}{2!} i + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} i^2 + \ldots + i^{n-1}$$

καὶ ἐπειδὴ διὰ $i \to 0$ πάντες οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους ἔχουσιν ὅριον τὸ μηδέν, ὡς περιέχοντες τὸ i, θὰ εἶναι : $\underset{i \to 0}{\text{ορ}}\, S_{\overline{n}|} = \mathbf{n}$.

Ἤ, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὸν κανόνα τοῦ L' Hospital, θὰ ἔχωμεν :

$$\underset{i \to 0}{\text{ορ}}\, S_{\overline{n}|} = \underset{i \to 0}{\text{ορ}} \frac{\dfrac{d}{di}\left[(1+i)^n - 1\right]}{\dfrac{d(i)}{di}} = \underset{i \to 0}{\text{ορ}} \frac{n(1+i)^{n-1}}{1} = \mathbf{n}.$$

Ἀπὸ οἰκονομικῆς πλευρᾶς ἐνδιαφέρει τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μειώσεως τοῦ ἐπιτοκίου μέχρι ὡρισμένης τιμῆς οὐχὶ μηδενικῆς. Πλήν, ὅμως, θεωρουμένου τοῦ i τείνοντος πρὸς τὸ μηδέν, λαμβάνομεν εἰκόνα τῆς τάσεως τῆς τελικῆς ἀξίας τῆς ὑπ' ὄψιν ράντας. Τὸ εὑρεθὲν δὲ ἀποτέλεσμα ἀνταποκρίνεται πρὸς τὴν πρᾶξιν, διότι, τοῦ $i \to 0$, αἴρεται ὁ ἀνατοκισμὸς καὶ ἔχομεν σειρὰν ἐκ **n**, ἴσων πρὸς 1, ὅρων.

§ 110. *Ἐφαρμογαὶ Ἀσφαλιστικῶν Μαθηματικῶν.*

1. Εὕρεσις τοῦ στιγμιαίου ποσοστοῦ θνησιμότητος καὶ βάσει τούτου εὕρεσις τῶν τύπων πιθανότητος ἐπιβιώσεως καὶ θνησιμότητος.

Ἡ πιθανότης ἵνα ἄτομον ἡλικίας x ἀποθάνῃ εἰς τὸ ἀπειροστὸν διάστημα τοῦ χρόνου $x \vdash\!\!\dashv x+dx$, παρίσταται ὑπὸ τοῦ συμβόλου q(x, x+dx) καὶ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$q(x, x+dx) = \frac{l_x - l_{x+dx}}{l_x}$$

ἔνθα l_x παριστᾷ εἰς πίνακά τινα ἐπιβιώσεως τὸν ἀριθμὸν τῶν ζώντων εἰς τὴν ἡλικίαν x καὶ καλεῖται *συνάρτησις ἐπιβιώσεως* τῆς ὁμάδος ἀτόμων ἣν σπουδάζομεν.

Ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ διαφορικὸν συναρτήσεως ἰσοῦται προσεγγιστικῶς πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς συναρτήσεως (§ 67), θὰ ἔχωμεν:

$$l_{x+dx} - l_x = dl_x = l'_x\, dx$$

ἤ, ἐπειδὴ τὸ l_x εἶναι μεγαλύτερον τοῦ l_{x+dx} διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ζώντων ἐλαττοῦται,

$$l_x - l_{x+dx} = - l'_x\, dx, \quad \text{ὅτε :}$$

$$q(x,\, x+dx) = - \frac{l'_x}{l_x}\, dx.$$

Ἐὰν τεθῇ (1) $\mu_x = - \dfrac{l'_x}{l_x} = - \dfrac{d}{dx} \ln l_x$,

θὰ εὕρωμεν: $q(x,\, x+dx) = \mu_x\, dx.$

Τὸ μ_x καλεῖται *στιγμιαῖον ποσοστὸν θνησιμότητος ἢ δύναμις θνησιμότητος εἰς τὴν ἡλικίαν x* καὶ ἔχει διὰ τὰς ἀσφαλείας τὴν αὐτὴν σημασίαν οἵαν ἔχει τὸ στιγμιαῖον ἐπιτόκιον κεφαλαιοποιήσεως ἐν τῷ συνεχεῖ τόκῳ.

Ὁλοκληρώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι τὰ ὅρια μεταβολῆς τοῦ χρόνου, ὃν παριστῶμεν διὰ t, εἶναι ἀπὸ α ἕως x.

$$\int_\alpha^x \mu_t\, dt = \int_\alpha^x - \frac{d}{dt} \ln l_t\, dt = - \Big[\ln l_t \Big]_\alpha^x = \ln \frac{l_\alpha}{l_x}.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν:

$$l_x = l_\alpha\, e^{-\int_\alpha^x \mu_t\, dt} \tag{135}$$

Ὁ τύπος οὗτος εἶναι ἀκριβῶς ὁ ἐν τοῖς προηγουμένοις εὑρεθεὶς τύπος (134) τοῦ συνεχοῦς ἀνατοκισμοῦ ἀλλὰ μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν. Τοῦτο διότι εἰς μὲν τὸν ἀνατοκισμὸν τὸ κεφάλαιον αὐξάνει, εἰς δὲ τοὺς πίνακας ἐπιβιώσεως ὁ ἀριθμὸς τῶν ζώντων ἐλαττοῦται.

Ἡ πιθανότης ἵνα ἄτομον ἡλικίας x ἐτῶν εὑρίσκεται ἐν ζωῇ μετὰ n ἔτη παρίσταται ὑπὸ τοῦ συμβόλου ${}_np_x$. Ἐπειδὴ δὲ ${}_np_x = \dfrac{l_{x+n}}{l_x}$, θὰ ἔχωμεν, βάσει τοῦ τύπου (135),

$${}_np_x = \frac{l_x\, e^{-\int_x^{x+n} \mu_t\, dt}}{l_x} = e^{-\int_x^{x+n} \mu_t\, dt} \tag{136}$$

Ἡ πιθανότης ἵνα ἄτομον ἡλικίας x ἐτῶν ἀποθάνῃ ἐντὸς n ἐτῶν παρίσταται ὑπὸ τοῦ συμβόλου $|_n q_x$ καὶ εἶναι $|_n q_x = 1 - {}_n p_x$. Ἐὰν χρησιμοποιηθῇ ἡ νέα τιμὴ τοῦ ${}_n p_x$, θὰ ἔχωμεν:

$$|_n q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+n} \mu_t \, dt} \qquad (137)$$

Ἐκ τῶν τύπων (135), (136) καὶ (137) καταδεικνύεται ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς τῶν l_x, ${}_n p_x$ καὶ $|_n q_x$ προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῆς συναρτήσεως μ_t, ἥτις εἶναι ἄγνωστος. Πρὸς ὑπολογισμὸν ὅμως τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος τοῦ ἐκθέτου ἐγένοντο διάφοροι ὑποθέσεις ὡς πρὸς τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως μ_t, ἀκριβῶς ὡς ἐγένετο, ἐν τοῖς προηγουμένοις, καὶ διὰ τὸ στιγμιαῖον ἐπιτόκιον ἀνατοκισμοῦ. Οὕτω, π.χ., ὁ Ἄγγλος ἀναλογιστὴς *Makeham*, ἐκ τῆς ἐμπειρίας ὁδηγηθείς, ἐδέχθη ὅτι ἡ μορφὴ τῆς συναρτήσεως μ_t ἡ ἀνταποκρινομένη περισσότερον πρὸς τὴν πρᾶξιν εἶναι: $\mu_t = \alpha + \beta c^t$, διὰ $\alpha > 0$ *.

Ἡ εὕρεσις τοῦ l_x ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὑποθέσεως τοῦ *Makeham* ἐπιτυγχάνεται οὕτω:

Λαμβάνομεν τὸν τύπον (126) καὶ θέτοντες $\alpha = 0$, εὑρίσκομεν $l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu_t \, dt}$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τοῦτον τὸ μ_t ὑπὸ τοῦ ἴσου του $\alpha + \beta c^t$, ὅτε θὰ ἔχωμεν:

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x (\alpha + \beta c^t) dt} = l_0 e^{-\int_0^x \alpha dt - \int_0^x \beta c^t dt}$$

$$= l_0 e^{-\alpha x - \beta \frac{c^x}{\ln c} + \beta \frac{1}{\ln c}} = l_0 (e^{-\alpha})^x \left(e^{-\frac{\beta}{\ln c}} \right)^{c^x} \cdot e^{\frac{\beta}{\ln c}}$$

καὶ ἐὰν τεθῇ $\quad l_0 e^{\frac{\beta}{\ln c}} = K, \quad e^{-\alpha} = s, \quad e^{-\frac{\beta}{\ln c}} = g,$

θὰ ἔχωμεν: $l_x = K \cdot s^x \cdot g^{c^x}$, ἥτις, βάσει τῆς ὑποθέσεως τοῦ *Makeham*, παρέχει τὸν ἀριθμὸν τῶν ζώντων εἰς τὴν ἡλικίαν x. Αἱ ποσότητες K, s, g εἶναι σταθεραὶ θετικαὶ ποσότητες, αἵτινες δύνανται νὰ ὑπολογισθῶσιν **.

2. Ράντα ζωῆς συνεχής.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι, ἐὰν ὁ ὅρος ράντας ζωῆς καταβάλλεται ἀνὰ $\frac{1}{m}$ τῆς περιόδου καὶ ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{m}$ τῆς νομισματικῆς μονάδος, ἔχομεν *ράνταν*

---

* Ὅρα *W. Levi*, Mathematik der Lebens und Rentenversicherung, 1937, σελ. 32.

** Ὅρα *L. Maingie - H. Maurice*, Les opérations viagères, 1932, σ. 29.

κλασματικήν, ἥτις ἐν τῇ πράξει προσεγγιστικῶς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου * :

$$(1) \qquad \alpha_x{}^{(m)} = \alpha_x + \frac{m-1}{2m}.$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς m τῶν τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ μία νομισματικὴ μονὰς ὡς καὶ ἡ περίοδος, αὐξάνει ἀπεριορίστως, ἡ πληρωμὴ θὰ γίνεται ἑκάστην στιγμὴν διὰ ποσοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς ἀπειροστὸν τμῆμα τῆς μιᾶς νομισματικῆς μονάδος. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν τὴν *συνεχῆ ράνταν*, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\overline{\alpha}_x$, ἧς ἡ τιμὴ εὑρίσκεται ἐκ τῆς (1) ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι τὸ m τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον.

Οὕτως ἔχομεν :

$$\overline{\alpha}_x = \underset{m \to \infty}{\text{ορ}}\, \alpha_x^{(m)} = \underset{m \to \infty}{\text{ορ}} \left(\alpha_x + \frac{m-1}{2m} \right) = \underset{m \to \infty}{\text{ορ}} \left(\alpha_x + \frac{1 - \frac{1}{m}}{2} \right) = \alpha_x + \frac{1}{2}.$$

Διὰ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ δύναται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ $\overline{\alpha}_x$, ὡς ἕπεται.

Ἐὰν διὰ dt παραστήσωμεν τὴν ἀπειροστὴν ποσότητα ἥτις θὰ εἰσπραχθῇ εἰς τὸ χρονικὸν διάστημα $t \vdash\!\dashv t + dt$ παρὰ τοῦ ἀτόμου τοῦ ἔχοντος παροῦσαν ἡλικίαν x ἐτῶν, ἐφόσον τοῦτο εὑρίσκεται ἐν ζωῇ κατ' ἐκείνην τὴν ἐποχήν, ἡ παροῦσα του ἀξία εἶναι σήμερον $\frac{l_{x+t}}{l_x} v_t^t\, dt$.

Ἡ συνολικὴ τιμὴ $\overline{\alpha}_x$ τῆς ράντας θὰ εἶναι συνεπῶς

$$\overline{\alpha}_x = \int_0^{\omega - x} \frac{l_{x+t}}{l_x} v_t^t\, dt \quad \text{ἢ καὶ} \quad \overline{\alpha}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^{\infty} l_{x+t} \cdot v^t \cdot dt.$$

Ἐὰν ἡ ράντα εἶναι μέλλουσα, εὑρίσκομεν ἀμέσως ταύτην θέτοντες ἐν τῷ προηγουμένῳ τύπῳ n ἀντὶ 0.

$$_{n|}\overline{\alpha}_x = \frac{1}{l_x} \int_n^{\infty} l_{x+t} v^t\, dt$$

καὶ ἐὰν εἶναι πρόσκαιρος, θέτοντες n ἀντὶ ω−x

$$\alpha_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{l_x} \int_0^{\infty} l_{x+t}\, v^t\, dt.$$

Ἐργαζόμενοι ἐπὶ πλειόνων κεφαλῶν, δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$\overline{\alpha}_{xyz\ldots} = \frac{1}{l_x\, l_y\, l_z \ldots} \int_0^{\infty} v^t \cdot l_{x+t} \cdot l_{y+t} \cdot l_{z+t} \ldots dt.$$

---

* Ἴδε **Τρ. Κεραμιδᾶν**, Στοιχεῖα Ἀσφαλιστικῶν Μαθηματικῶν, 1947, σ. 45.

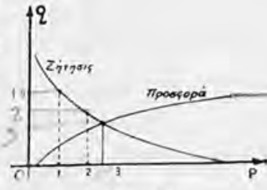
ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

§ 111. *Καμπύλαι προσφορᾶς καὶ ζητήσεως.*

Ἄλλοτε ἐδίδετο ὡς κανὼν ὅτι ἡ προσφορὰ ἀγαθοῦ τινος μετεβάλλετο κατ᾽ εὐθὺν λόγον τῆς αὐξήσεως τῶν τιμῶν καὶ ἡ ζήτησις ἀγαθοῦ τινος κατ᾽ ἀντίστροφον λόγον τῆς αὐξήσεως τούτων. Ἡ τοιαύτη σχέσις ἀπετέλει ἁπλῆν ἀναλογίαν μὴ ὑφισταμένην εἰς τὴν πραγματικότητα ἢ σπανίως καὶ ἐν στενωτάτοις ὁρίοις. Ὁ κανὼν οὗτος, καίτοι γενικῶς δὲν ἰσχύει, προῆλθεν ἐκ τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῆς προσφορᾶς καὶ ζητήσεως πρὸς τὴν τιμήν.

Τὴν ἀλληλεξάρτησιν ταύτην σπουδάσωμεν στατικῶς καὶ εὕρωμεν γραφικῶς τὴν τιμὴν καθ᾽ ἣν θὰ συμπίπτῃ ἡ γνώμη προσφερόντων καὶ ζητούντων (πωλητῶν καὶ ἀγοραστῶν) καὶ θὰ ἐπέλθῃ ἡ συναλλαγὴ δι᾽ ὡρισμένον ἀγαθὸν καὶ δι᾽ ὡρισμένον τόπον καὶ χρόνον.

Ἔστω σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ΟΧΨ (*Σχ. 67*) καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος τῶν x λάβωμεν τὰς τιμάς, ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος τῶν y τὰς ποσότητας ἀγαθοῦ τινος.



Σχ. 67.

Ἐν ὡρισμένῃ ἀγορᾷ καὶ καθ᾽ ὡρισμένας στιγμάς, ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀγορᾶς, εὕρωμεν διὰ διαφόρους τιμὰς τὰς ζητουμένας ἢ προσφερομένας ποσότητας. Αἱ διάφοροι τιμαὶ μετὰ τῶν ἀντιστοίχων ποσοτήτων καθορίζουσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου διάφορα σημεῖα, ἅτινα, ἑνούμενα διὰ συνεχῶν γραμμῶν, ὁρίζουσι τὰς καμπύλας προσφορᾶς καὶ ζητήσεως.

Ἡ ζήτησις θὰ ἐλαττοῦται καὶ θὰ τείνῃ νὰ γίνῃ μηδέν, ἐφ᾽ ὅσον αἱ τιμαὶ αὐξάνουσιν. Ἡ προσφορὰ θ᾽ αὐξάνῃ, ἐφ᾽ ὅσον αἱ τιμαὶ αὐξάνουσι, πλήν, ὅμως, δὲν θὰ φθάσῃ τὸ ἄπειρον, διότι ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς παραγωγῆς, καὶ ἡ παραγωγὴ ἔχει ἐμπόδια καὶ ὅρια.

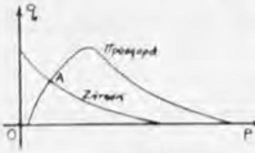
Εἰς ἑκάστην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν οὕτω δύο γραμμάς. Ποῖον ὅμως τὸ εἶδος τῶν γραμμῶν τούτων ; Ἡ μορφὴ τούτων, ὡς καὶ τῶν ἀντιστοίχων ἐξισώσεών των, ποικίλλει κατὰ ἀγαθόν, τόπον καὶ χρόνον. Ἀναλόγως τοῦ ἀγαθοῦ θὰ ἔχωμεν εὐθείας ἢ καμπύλας, κοίλας ἢ κυρτάς, ταχέως ἢ μὴ μεταβαλλομένας.

Ἡ τομὴ τῶν δύο καμπύλων θὰ δίδῃ τὴν τιμὴν καὶ τὸ ποσὸν δι᾽ ἃ ἐν ὡρισμένῳ τόπῳ καὶ χρόνῳ δι᾽ ὡρισμένον ἀγαθὸν συνέπεσεν ἡ γνώμη ἀγοραστῶν καὶ πωλητῶν καὶ ἐπῆλθεν ἡ συναλλαγὴ (ἐνταῦθα $2\,^1/_2$). Λέγομεν δὲ τότε ὅτι ἡ τιμὴ εἰς ἣν ἐγένετο ἡ συναλλαγὴ εἶναι *τιμὴ ἰσορροπίας*. Δι᾽ ἄλλην στιγμήν, ἐπελθούσης μεταβολῆς τῶν τιμῶν, θὰ ἔχωμεν ἄλλας καμπύλας καὶ ἄλλο σημεῖον τομῆς, ἄρα καὶ *ἄλλην τιμὴν ἰσορροπίας*.

Ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ σπουδασθῇ τὸ φαινόμενον τῆς προσφορᾶς καὶ ζητήσεως *συναρτήσει τοῦ χρόνου*, ἤτοι ἐντὸς χρονικοῦ τινος διαστήματος (α, β), θὰ εἴχομεν δυναμικὴν σπουδὴν τοῦ φαινομένου τούτου. Ἀλλὰ τοῖτο δὲν εἶναι ἐφικτὸν ἐν τῇ πράξει καὶ ἐναπόκειται εἰς τὴν Στατιστικὴν νὰ ἐφαρμόσῃ τὴν δοθεῖσαν μαθηματικὴν ἔκφρασιν a posteriori.

Εὕρωμεν ἤδη τὴν *ἐξίσωσιν ἰσορροπίας*. Παραστήσωμεν διὰ p (price - prix) τὴν τιμὴν ζητηθέντος ἢ προσφερθέντος εἴδους τινὸς A ἔν τινι ἀγορᾷ καὶ διὰ q (quantity - quantité) τὴν ζητηθεῖσαν ἢ προσφερθεῖσαν ποσότητα. Ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας (σταθερὸς ἀριθμὸς καταναλωτῶν, σταθεραὶ προτιμήσεις, σταθερὰ πρόσοδος κ.τ.λ.) θὰ ἔχωμεν, ὅτι τὸ q διὰ μὲν τὴν ζήτησιν εἶναι συνάρτησις τοῦ p μονότονος φθίνουσα θετική, διὰ δὲ τὴν προσφορὰν μονότονος αὔξουσα θετική.

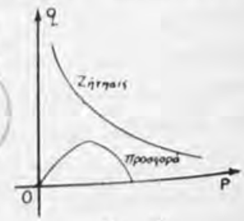
Ἑκάστη τῶν συναρτήσεων τούτων θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $q = \sigma(p)$. Ἐνίοτε, πρὸς διάκρισιν, παριστῶμεν τὴν μὲν συνάρτησιν τῆς ζητήσεως διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $D = \sigma(p)$, τὴν δὲ συνάρτησιν τῆς προσφορᾶς διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $O = f(p)$ *.



Σχ. 68.

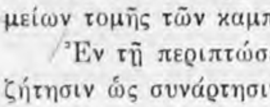
Εἶναι φανερὸν ὅτι *ἡ ἐξίσωσις ἰσορροπίας εἶναι $D(p) = O(p)$*. Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἤτοι αἱ τιμαὶ τοῦ p δι' ἃς ἐπαληθεύεται ἡ ἐξίσωσις, θὰ δώσουν τὰς τιμὰς τοῦ p δι' ἃς ἡ γνώμη τῶν ἀγοραστῶν καὶ πωλητῶν συνέπεσεν.

Ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν ἔχομεν τὴν γεωμετρικὴν ἔκφρασιν προσφορᾶς καὶ ζητήσεως, ἤτοι τὰς καμπύλας προσφορᾶς καὶ ζητήσεως, θ' ἀναζητήσωμεν, διὰ τὰς τιμὰς ἰσορροπίας, τὰς τετμημένας τῶν σημείων τομῆς τῶν καμπύλων.



Σχ. 69.

Ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν θεωροῦμεν τὴν μὲν ζήτησιν ὡς συνάρτησιν φθίνουσαν, τὴν δὲ προσφορὰν ὡς συνάρτησιν αὔξουσαν, αἱ δύο καμπύλαι προσφορᾶς καὶ ζητήσεως, ἢ θὰ ἔχωσιν ἓν κοινὸν σημεῖον *(Σχ. 67)* ἢ οὐδέν. Συνεπῶς ἢ θὰ ἔχωμεν μίαν τιμὴν ἰσορροπίας ἢ δὲν θὰ ἔχωμεν καμμίαν.



Σχ. 70.

Ἐνῷ, γενικῶς, δεχόμεθα ὅτι ἡ ζήτησις ἑνὸς ἢ συνόλου ἀτόμων εἶναι συνάρτησις φθίνουσα, ἡ προσφορὰ εἴς τινας περιπτώσεις, ὡς εἶναι ἡ προσφορὰ κεφαλαίων ἢ ἐργασίας, εἶναι κατ' ἀρχὴν αὔξουσα καὶ κατόπιν φθίνουσα. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν μίαν τιμὴν ἰσορροπίας *(Σχ. 68)* ἢ νὰ μὴ ἔχωμεν τοιαύτην τιμὴν *(Σχ. 69)* ἢ νὰ ἔχωμεν περισσοτέρας *(Σχ. 70)*.

* D, ἀρχικὸν τῆς Γαλλικῆς λέξεως Demande (ζήτησις). O, ἀρχικὸν τῆς Γαλλικῆς λέξεως Offre (προσφορά). Supply
Offers

Pareto

§ 112. Καμπύλαι ἀδιαφορίας.

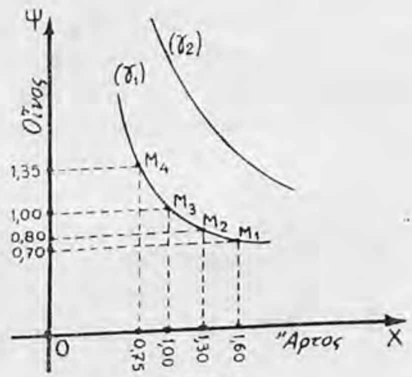
Πρῶτος ὁ Ἄγγλος οἰκονομολόγος *F. Y. Edgeworth* ἐχρησιμοποίησε τὰς *καμπύλας ἀδιαφορίας*, εἶτα δὲ οἱ *Irving Fisher*, *Pareto* κ.λ.π.

Θεωρήσωμεν ἄτομον ἀγόμενον μόνον ἐκ τῶν προτιμήσεών του καὶ τὸ ὁποῖον κατέχει 1 χιλιόγραμμον ἄρτου καὶ 1 χιλιόγραμμον οἴνου. Θεωρήσωμεν ἐπίσης ὅτι δι' ἄλλας αἰτίας τὸ ἐν λόγῳ ἄτομον εἶναι διατεθειμένον νὰ λάβῃ κατά τι μικροτέραν ποσότητα οἴνου καὶ κατά τι μεγαλυτέραν ποσότητα ἄρτου ἢ ἀντιστρόφως. Ὅτι εἶναι τοὐτέστιν *ἀδιάφορον* * εἰς τὸ ἄτομον ἐὰν ἀντὶ νὰ ἔχῃ 1 χιλιόγραμμον οἴνου καὶ 1 χιλιόγραμμον ἄρτου νὰ ἔχῃ, π.χ., 0,9 χιλιόγρ. ἄρτου καὶ 1,2 χιλιόγρ. οἴνου. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι τὸ ἄτομον δὲν προτιμᾷ τὸν ἕνα συνδυασμὸν τοῦ ἄλλου. Εἶναι εὔκολον νὰ ἀντιληφθῇ τις, ὅτι δύναται νὰ ὑπάρξῃ διὰ τὸ ἄτομον τοῦτο πληθὺς τοιούτων συνδυασμῶν, ἐφόσον ὑπάρχει ἀπειρία ζευγῶν ποσοτήτων ἄρτου καὶ οἴνου.

Ἔστωσαν οἱ κάτωθι συνδυασμοὶ ποσοτήτων ἄρτου καὶ οἴνου, οἵτινες βάσει τοῦ συνδυασμοῦ (1 – 1) εἶναι ἀδιάφοροι διὰ τὸ δοθὲν ἄτομον.

Ἄρτος :	1,60	1,30	1,00	0,75
Οἶνος :	0,70	0,80	1,00	1,35

Ἐὰν εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος τῶν x λάβωμεν τὰς ποσότητας τοῦ ἄρτου, ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος τῶν y τὰς ποσότητας τοῦ οἴνου, τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν (1,60 - 0,70) (1,30 - 0,80), (1,00-1,00), (0,75 - 1,35) ὁρίζουσιν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4 *(Σχ. 71)*. Ἑνοῦντες τὰ σημεῖα ταῦτα μεταξύ των θὰ ἔχωμεν τεθλασμένην γραμμήν. Διὰ παρεμβολῆς δὲ θὰ ἔχωμεν τὴν καμπύλην γραμμὴν (γ_1) διερχομένην διὰ τῶν M_1, M_2, M_3, M_4.



Σχ. 71.

Ἡ καμπύλη (γ_1), ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τοὺς ἀνωτέρω συνδυασμούς, τοὺς καθορίζοντας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4, καλεῖται *γραμμὴ* ἢ *καμπύλη ἀδιαφορίας* ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸν βασικὸν συνδυασμὸν (1 – 1).

* Οἰκονομικῶς ἡ *ἀδιαφορία* τοῦ ἐν λόγῳ ἀτόμου ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων ὅπερ διαθέτει διὰ τὴν ἱκανοποίησίν του εἶναι ὡρισμένον καὶ συνεπῶς αἱ μικραὶ διακυμάνσεις τῶν ποσοτήτων εἶναι εἰς αὐτὸ *ἀδιάφοροι*. Οὕτως, ἐὰν τὸ χιλιόγρ. ἄρτου τιμᾶται 3 δραχ., τὸ χιλιόγρ. οἴνου 5 δραχ. καὶ τὸ ἄτομον διαθέτει 8,50 δραχ., δύναται τοῦτο, ἀδιαφόρως δι' αὐτό, ἢ νὰ προμηθευθῇ 1,5 χιλιογρ. ἄρτου καὶ 0,80 χιλιογρ. οἴνου ἢ 1 χιλιογρ. ἄρτου καὶ 1,10 χιλιογρ. οἴνου κ.τ.λ.

Δυνατὸν αἱ προτιμήσεις ἀτόμου τινὸς νὰ κυμαίνωνται περὶ βασικὸν συνδυασμὸν μεγαλυτέρων ἢ μικροτέρων ποσοτήτων, π.χ. περὶ τὸν συνδυασμὸν 1,5 χιλιογρ. οἴνου καὶ 1,5 χιλιογρ. ἄρτου, ὅτε λαμβάνοντες σειρὰν ζευγῶν ἀντιστοιχούντων π.χ. εἰς τὰς ποσότητας :

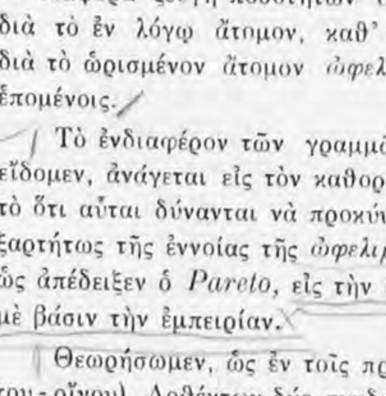
Ἄρτου :	2,00	1,75	1,50	1,25	1,00
Οἴνου :	1,15	1,30	1,50	1,80	2,25

θὰ ἔχωμεν ἑτέραν γραμμὴν ἀδιαφορίας (γ_2). *Αἱ οὕτω προκύπτουσαι καμπύλαι συνιστῶσι δέσμην γραμμῶν ἀδιαφορίας.*

Τὰ διάφορα σημεῖα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς τῆς δέσμης δίδουσι τὰ διάφορα ζεύγη ποσοτήτων οἴνου καὶ ἄρτου ἅτινα εἶναι *«ἀδιάφορα»* διὰ τὸ ἐν λόγῳ ἄτομον, καθ' ὅσον ταῦτα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὴν αὐτὴν διὰ τὸ ὡρισμένον ἄτομον *ὠφελιμότητα*, περὶ ἧς θὰ ὁμιλήσωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Τὸ ἐνδιαφέρον τῶν γραμμῶν ἀδιαφορίας, ἡ χάραξις τῶν ὁποίων, ὡς εἴδομεν, ἀνάγεται εἰς τὸν καθορισμὸν σημείων τινῶν τούτων, ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι αὗται δύνανται νὰ προκύψωσιν ἀπ' εὐθείας ἐκ τῆς ἐμπειρίας, ἀνεξαρτήτως τῆς ἐννοίας τῆς *ὠφελιμότητος*, καὶ δύνανται νὰ χρησιμοποιηθῶσι, ὡς ἀπέδειξεν ὁ *Pareto*, εἰς τὴν ἐπιβεβαίωσιν τῆς ἐννοίας τῆς ὠφελιμότητος μὲ βάσιν τὴν ἐμπειρίαν.

Θεωρήσωμεν, ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις, ζεῦγος x, y, δύο ἀγαθῶν (ἄρτου - οἴνου). Δοθέντων δύο συνδυασμῶν (α ἄρτου - β οἴνου) καὶ (γ, δ), ἐκ τῆς ἐμπειρίας δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν ποῖος ἐκ τῶν δύο συνδυασμῶν προτιμᾶται παρὰ ἀτόμου τινός. Ἐὰν θεωρήσωμεν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ταῦτα θ' ἀντιστοιχῶσιν εἰς τοὺς διαφόρους συνδυασμοὺς τῶν ποσοτήτων τῶν λαμβανομένων ἐκ τῶν δύο εἰδῶν.



Σχ. 72.

Λάβωμεν τὸν συνδυασμὸν (α, β) τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Μ(α, β) *(Σχ. 72)*. Ἐν σχέσει πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο, ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον ΧΟΨ δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη Α καὶ Β. Εἰς τὸ Α ἀνήκουσι τὰ σημεῖα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς συνδυασμοὺς προτιμητέους τοῦ (α, β), εἰς δὲ τὸ Β ἀνήκουσι τὰ σημεῖα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς συνδυασμοὺς οἵτινες δὲν εἶναι προτιμητέοι ἐν σχέσει πρὸς τὸν (α, β) παρ' ἀτόμου τινός.

Τὰ δύο μέρη Α, Β χωρίζονται ὑπὸ γραμμῆς (γ_1), ἥτις εἶναι *ἡ γραμμὴ ἀδιαφορίας ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Μ(α,β).*

'Εν σχέσει πρὸς ἕτερον σημεῖον $N(\gamma, \delta)$, θὰ ἔχωμεν ἑτέραν γραμμὴν ἀδιαφορίας (γ_2) διερχομένην διὰ τοῦ N. Τοιουτοτρόπως ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον θὰ καλυφθῇ ὑπὸ τοιούτων γραμμῶν ἀδιαφορίας. 'Εὰν δὲ εἰς ἑκάστην τῶν γραμμῶν θεωρήσωμεν δείκτην τινὰ αὐξανόμενον, ὅταν ἡ εὐαρέστησις αὐξάνῃ καὶ μειούμενον ὅταν ἡ εὐαρέστησις μειοῦται, θὰ κατασκευάσωμεν ἐμπειρικῶς συνάρτησιν δύο μεταβλητῶν x, y, ἥτις θ' αὐξάνῃ ὅταν ἡ εὐαρέστησις αὐξάνῃ καὶ θὰ μειοῦται ὅταν καὶ ἡ εὐαρέστησις μειοῦται.

'Εὰν ἀντὶ τῶν δύο ἀγαθῶν ληφθῶσι ν τοιαῦτα, θὰ ἔχωμεν γενίκευσιν τοῦ προβλήματος. Τὴν οὕτω δυναμένην νὰ προκύψῃ συνάρτησιν ὁ *Pareto* ὠνόμασεν *ἐνδεικτικὴν συνάρτησιν ὠφελιμότητος*.

§ 113. Εὕρεσις γεωμετρικῆς γραμμῆς ἰσότητος τιμῶν κτήσεως ἀγαθῶν συναρτήσει τῶν ἐξόδων μεταφορᾶς.

Θεωρήσωμεν γεωγραφικὸν χῶρον ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἶναι ἐγκατεστημένοι δύο οἶκοι προσφορᾶς ἀγαθοῦ τινος E. Τὸν ἰδεατὸν τοῦτον χῶρον δεχόμεθα ἐπίπεδον καὶ τὰς ἀποστάσεις ἐπὶ τούτου μετρουμένας δι' εὐθειῶν γραμμῶν. 'Η τιμὴ μονάδος τοῦ E εἰς ἀμφοτέρους τοὺς οἴκους εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ τὸ κόστος μεταφορᾶς εἶναι ἀνάλογον τῆς ἀποστάσεως. 'Εὰν θεωρήσωμεν τὸν ὑπ' ὄψιν χῶρον διῃρημένον εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ ἓν κατέχεται ὑπὸ τῶν πελατῶν τοῦ ἑνὸς οἴκου, τὸ δὲ ἕτερον ὑπὸ τῶν πελατῶν τοῦ ἑτέρου οἴκου, ποία ἡ ὁροθετικὴ γραμμὴ τῶν δύο μερῶν;

Δεδομένου ὅτι ἡ προτίμησις τοῦ ἑνὸς ἢ ἑτέρου οἴκου ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον εἰς τὸ μικρότερον κόστος, πρέπει ἐν τῇ ὁροθετικῇ γραμμῇ νὰ θεωρήσωμεν τοὺς καταναλωτὰς ἐκείνους δι' οὓς ἡ τιμὴ κτήσεως τοῦ ἀγαθοῦ E εἶναι ἡ αὐτὴ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν οἴκων.

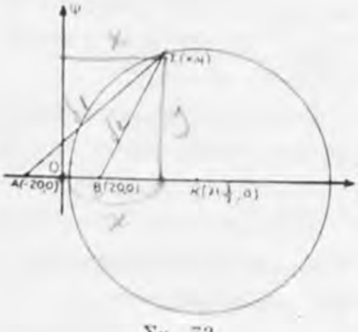
Παραστήσωμεν δι' A καὶ B τοὺς δύο οἴκους καὶ ἔστω, π. χ., ἡ τιμὴ μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς οἴκους 80 δραχ. καὶ αἱ τιμαὶ μεταφορᾶς κατὰ μονάδα διὰ μὲν τὸν οἶκον A 0,06 δραχ., διὰ δὲ τὸν οἶκον B 0,08 δραχ. κατὰ χιλιόμετρον. 'Εὰν καταναλωτής τις εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ὁροθετικῆς γραμμῆς καὶ ἀπέχῃ ἐκ τοῦ A, δ_1 χιλιόμετρα καὶ ἐκ τοῦ B, δ_2 χιλιόμετρα, πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης: $80 + \delta_1 \cdot 0{,}06 = 80 + \delta_2 \cdot 0{,}08$, ἥτις ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν ἰσότητα: $\delta_1 \cdot 0{,}06 = \delta_2 \cdot 0{,}08$.

'Απὸ μαθηματικῆς ἐπόψεως, τὸ πρόβλημα τίθεται ὡς ἑξῆς: Εὑρεῖν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ὧν αἱ ἀποστάσεις δ_1 καὶ δ_2, ἐκ δύο σταθερῶν σημείων A καὶ B, εἶναι τοιαῦται ὥστε: $\delta_1 \cdot 0{,}06 = \delta_2 \cdot 0{,}08$.

Πρὸς τοῦτο, μὲ βάσιν τὴν 'Αναλυτικὴν Γεωμετρίαν, ἐργαζόμεθα ὡς κατωτέρω.

Λαμβάνομεν σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων, εἰς ὃ ὡς ἄξονα τῶν x θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰ Α, Β (*Σχ. 73*) καὶ ὡς ἀρχὴν τῶν ἀξόνων τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ, ἣν καὶ θεωροῦμεν ἴσην, π.χ., πρὸς 40 χιλιόμετρα.

Διὰ τὸ τυχὸν σημεῖον $\Sigma(x,y)$ τοῦ ζητουμένου τόπου αἱ ἀποστάσεις δ_1 καὶ δ_2 ἐκ τῶν Α καὶ Β εἶναι (§ 20):



Σχ. 73.

$$\delta_1 = \sqrt{(x+20)^2+y^2}, \qquad \delta_2 = \sqrt{(x-20)^2+y^2}.$$

Ἐπειδή, ὡς εἴπομεν, $\delta_1 \cdot 0{,}06 = \delta_2 \cdot 0{,}08$, θὰ ἔχωμεν:

$$0{,}06 \cdot \sqrt{(x+20)^2+y^2} = 0{,}08 \cdot \sqrt{(x-20)^2+y^2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ τόπου ὃν ζητοῦμεν. Ἐπειδὴ ὅμως ὑπὸ τὴν μορφὴν ταύτην δὲν δυνάμεθα ν' ἀποφανθῶμεν διὰ τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς, καθιστῶμεν ταύτην ἁπλουστέραν ὡς ἑξῆς: Ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις:

$$0{,}06^2(x^2+40x+400+y^2) = 0{,}08^2(x^2-40x+400+y^2).$$

Ἐν συνεχείᾳ ἐκτελοῦμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων

$$(0{,}06^2-0{,}08^2)x^2+(0{,}06^2-0{,}08^2)y^2+40(0{,}06^2+0{,}08^2)x+400(0{,}06^2-0{,}08^2)=0$$

καὶ διαιροῦμεν διὰ $0{,}06^2-0{,}08^2 = -0{,}0028$. Οὕτω τελικῶς εὑρίσκομεν:

$$(1) \qquad x^2+y^2-142\frac{6}{7}x+400=0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, λόγῳ τοῦ ὅτι εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, ἄνευ ὅρου xy καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων x^2, y^2 εἶναι ἴσοι, παριστᾷ περιφέρειαν κύκλου (§ 44).

Αἱ μὲν συντεταγμέναι τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας (1) εἶναι (τύποι 48):

$$-\frac{1}{2}\left(-142\frac{6}{7}\right) = 71\frac{3}{7}, \qquad -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0, \qquad \text{ἡ δὲ ἀκτίς της:}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(-142\frac{6}{7}\right)^2+0^2\right]-400} = 68\frac{4}{7}.$$

Ἐν συμπεράσματι ἡ ὁροθετικὴ γραμμή, ἡ διαχωρίζουσα τοὺς πελάτας τῶν δύο οἴκων, εἶναι περιφέρεια κύκλου τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἀπέχει $71\frac{3}{7}$ χιλιόμετρα τοῦ Β καὶ ἔχει ἀκτῖνα ἴσην πρὸς $68\frac{4}{7}$. Ἐντὸς δὲ αὐτῆς εὑρίσκεται ὁ οἶκος Β.

Ἐφαρμογὴ ἐν τῇ πράξει. Βάσει τῶν ἀνωτέρω, τὰ μεγάλα καταστήματα ὑπολογίζουσι ποῦ δέον νὰ ἔχωσιν ὑποκαταστήματα, ἵνα μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν κτῶνται πελάτας εἰς διαφόρους συνοικίας ἢ περιοχάς.

§ 114. *Προσδιορισμὸς τοῦ ἐλαχίστου τῶν ἐξόδων παραγωγῆς συναρτήσει τῆς παραγομένης ποσότητος.*

Ἐὰν ἡ ὁλικὴ δαπάνη λειτουργίας ὡρισμένης βιομηχανίας συνίσταται ἐκ τριῶν μερῶν, ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι εὐθέως ἀνάλογον πρὸς τὴν παραχθεῖσαν ποσότητα προϊόντος τινός, τὸ ἕτερον εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῆς παραχθείσης ποσότητος καὶ τὸ τρίτον εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς παραχθείσης ποσότητος, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $y = \alpha x + \frac{\beta}{\gamma+x} + \delta$, ἔνθα y παριστᾷ τὴν ὁλικὴν δαπάνην, x τὴν παραχθεῖσαν ποσότητα καὶ α, β, γ, δ παριστῶσι ποσότητας θετικάς. Τῆς α παριστώσης τὰ ἀναλογικὰ ἔξοδα κατὰ μονάδα προϊόντος, τῶν β καὶ γ τεχνικὰς παραμέτρους καὶ τῆς δ τὰ γενικὰ ἔξοδα.

Ζητεῖται: *Νὰ προσδιορισθῇ διὰ ποίαν ποσότητα x ἐκ τοῦ ἐν λόγῳ προϊόντος ἡ δαπάνη y κατέρχεται εἰς τὸ ἐλάχιστον.*

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ἔγκειται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῆς x δι' ἃς ἡ συνάρτησις, ἤτοι τὸ y, γίνεται ἐλαχίστη. Πρὸς τοῦτο:

1) Λαμβάνομεν (ὅρα § 80) τὴν πρώτην παράγωγον τῆς συναρτήσεως, ἣν ἐξισοῦμεν πρὸς τὸ μηδὲν $y' = \alpha - \frac{\beta}{(\gamma+x)^2} = 0.$

2) Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ εὑρίσκομεν $x = \pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \gamma.$

Ἐκ τῶν δύο λύσεων δεκτὴ εἶναι μόνον ἡ $x = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \gamma$, διότι δέον ἡ ποσότης νὰ εἶναι θετική, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} > \gamma.$

3) Εὑρίσκομεν τὴν δευτέραν παράγωγον τῆς συναρτήσεως καὶ εἰς ταύτην ἀντικαθιστῶμεν τὸ x διὰ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς του:

$$y'' = (y')' = \left(\alpha - \frac{\beta}{(\gamma+x)^2}\right)' = \frac{2\beta}{(\gamma+x)^3}. \quad > 0$$

Ἡ ἀντικατάστασις τοῦ x ὑπὸ τῆς τιμῆς του γίνεται ἵνα διαπιστωθῇ ἐὰν ἡ δευτέρα παράγωγος, διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x, καθίσταται μεγαλυτέρα τοῦ μηδενός, ὅτε θὰ ἔχωμεν ἐλάχιστον.

Ἡ διαπίστωσις τοῦ ὅτι, διὰ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ x, ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ μηδενὸς εἶναι ἄμεσος. Διότι $x>0$, $(\gamma+x)^3>0$ καὶ συνεπῶς $\frac{2\beta}{(\gamma+x)^3}>0$, ἤτοι $y''>0$. Οὕτως ἀποφεύγομεν περιττὰς πράξεις.

4) Ἀντικαθιστῶμεν ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει τὸ x ὑπὸ τοῦ ἴσου του, ὅτε εὑρίσκομεν τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τοῦ y.

$$y_{(\text{ἐλάχ.})} = \alpha\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \gamma\right) + \frac{\beta}{\gamma + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \gamma} + \delta.$$

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν :

$$(1) \qquad y_{(\text{ἐλάχ.})} = 2\sqrt{\alpha\beta} - \alpha\gamma + \delta$$

Ἐφ' ὅσον θὰ εἶναι γνωστά, τὰ α, β, γ, δ, δι' ἀντικαταστάσεως τούτων ἐν τῇ εὑρεθείσῃ τιμῇ τοῦ $x = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \gamma$, εὑρίσκομεν τὴν ποσότητα παραγωγῆς διὰ τὴν ὁποίαν τὰ ἔξοδα εἶναι ἐλάχιστα. Δι' ἀντικαταστάσεως δὲ τῶν α, β, γ, δ ὑπὸ τῶν ἴσων των ἐν τῇ (1) εὑρίσκομεν τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῶν ἐξόδων.

13/10.

§ 115. Ὁριακὴ χρησιμότης — Ὁριακὸν κόστος — Ὁριακὴ πρόσοδος — Ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν — Πολλαπλασιαστὴς ἐπενδύσεως.

Α΄. **Ὁριακὴ χρησιμότης.** Ἡ *ψυχολογικὴ σχολὴ* ὑποστηρίζει ὅτι ἡ ἀξία ἀγαθοῦ τινος ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς *ὁριακῆς* * αὐτοῦ *χρησιμότητος*. Τουτέστιν, ὅτι ἡ ὁριακὴ χρησιμότης ἀγαθοῦ τινος εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἀξίας τοῦ ἐν λόγῳ ἀγαθοῦ.

Ἡ ἱκανοποίησις ἀνάγκης διὰ τῆς διαδοχικῆς χρησιμοποιήσεως μονάδων ἀγαθοῦ τινος προκαλεῖ φθίνουσαν ἀπόλαυσιν εἰς τρόπον ὥστε ἡ χρησιμοποίησις τῆς τελευταίας μονάδος ἐνέχει τὴν μικροτέραν χρησιμότητα. Ἡ τελευταία αὕτη μονὰς τοῦ ἀγαθοῦ, ἥτις καὶ καθορίζει τὰ *σύνορα ἱκανοποιήσεως* τῆς ἀνάγκης τοῦ ὑποκειμένου, εἶναι *ἡ ὁριακὴ χρησιμότης* τοῦ ἀγαθοῦ διὰ τὸ ὑπ' ὄψιν ὑποκείμενον.

Ἡ ἀπώλεια μονάδος τινός, ἐξ ἐκείνων αἵτινες προηγοῦνται τῆς τελευταίας τοιαύτης, δημιουργεῖ κενὸν ὅπερ καλύπτεται διὰ τῆς παρὰ τοῦ ὑποκειμένου παραιτήσεως ἐκ τῆς τελευταίας μονάδος, ἥτις προώρισται νὰ καλύψῃ ἀνάγκην μικροτέρας σπουδαιότητος, διότι ἡ διὰ τὸν σκοπὸν τοῦτον διατεθεῖσα μονὰς θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν τῆς ἀπολεσθείσης τοιαύτης.

* **Ὁριακὸς — ή** (Marginal) ὅρος εἰσαχθεὶς παρὰ τῶν Γερμανῶν εἰς τὴν Πολιτικὴν Οἰκονομίαν καὶ χρησιμοποιούμενος πρὸς ἔνδειξιν τῆς κατὰ τὰ τελευταῖα ὅρια εἰσερχομένης καὶ μόλις ἀπαραιτήτου ποσότητος ἐν τῷ οἰκονομικῷ φαινομένῳ, τῆς, οὕτως εἰπεῖν, συνοριακῆς τοιαύτης. Π. χ. ἡ ὁριακὴ χρησιμότης ὕδατος σημαίνει τὸ τελευταῖον ποτήριον ὕδατος τὸ μόλις, τὸ εἰς τὸ ὅριον τῆς χρησιμότητος, εἰσερχόμενον εἰς τὴν κατανάλωσιν. Δέον νὰ γίνῃ διαστολὴ ἐκ τοῦ ὁρικὸς—ή, ὅπερ σημαίνει τὸ ἄκρον ὅριον ποσότητός τινος. Π.χ. ὁριακὴ τιμὴ εἶναι ἡ τελευταία, ἡ ἐσχάτη τιμή, ἐνῷ ὁρικὴ τιμὴ εἶναι τὸ ὅριον πρὸς ὃ δύναται νὰ φθάσῃ τιμή τις.

Γενικώτερον, ἡ ὁριακὴ ἔννοια χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἔκφρασιν τῆς μεταβολῆς φαινομένου τινὸς εἰς τὸ «ὅριον» διὰ μικρὰς μεταβολὰς τοῦ αἰτίου ἐξ οὗ ἐξαρτᾶται. Συνεπῶς αἱ μεταβολαὶ αὗται, οὖσαι ἀπειροσταί, θὰ μελετηθῶσι διὰ τῶν παραγώγων δι' ὧν, ὡς γνωστόν, δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν τὸν τρόπον μεταβολῆς φαινομένου τινός, ἐν σχέσει πρὸς αἴτιον ἐξ οὗ ἐξαρτᾶται. Τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν θὰ σπουδάσωμεν ἐπὶ συγκεκριμένων περιπτώσεων.

Β'. ***Ὁριακὸν κόστος.*** Ἔστω $K = \Theta(q)$ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ὁλικοῦ κόστους, ἔνθα K τὸ ὁλικὸν κόστος παραγωγῆς τῆς ποσότητος q. Θεωρήσωμεν αὔξησιν Δq τῆς q καὶ ἀντίστοιχον ταύτης ΔK διὰ τὸ K. Τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\Delta K}{\Delta q}$, τοῦ $\Delta q \rightarrow 0$, δίδει τὸ *ὁριακὸν κόστος*.

Ἐπειδὴ $\underset{\Delta q \rightarrow 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{dK}{dq}$, συνάγομεν ὅτι:

Τὸ ὁριακὸν κόστος παραγωγῆς δοθέντος ἀγαθοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως τοῦ ὁλικοῦ κόστους ὡς πρὸς τὴν ποσότητα.

Τὸ σημεῖον καὶ τὸ μέγεθος τῆς παραγώγου K' παρέχουσι πολυτίμους πληροφορίας διὰ τὸ κόστος ἐν σχέσει πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ παραχθέντος ἀγαθοῦ.

Παράδειγμα: Ἔστω ὅτι διὰ τῆς ἐμπειρίας ἔχει προσδιορισθῆ ὅτι ἡ μεταξὺ τοῦ ὁλικοῦ κόστους καὶ τῆς ποσότητος σχέσις εἶναι: $K = 2q^2 + 30$. Τὸ ὁριακὸν κόστος θὰ εἶναι $K_1 = K' = 4q$.

Γ'. ***Ὁριακὴ πρόσοδος.*** Ἔστω ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως $p = f(q)$, ἔνθα ἡ τιμὴ p εἶναι συνάρτησίς τις τῆς ποσότητος q. Αὕτη εἶναι συνεχής, μονότονος καὶ φθίνουσα. Ἡ *ὁλικὴ πρόσοδος* R (Revenu) δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (1) $R = p \cdot q$, ἤτοι ὡς γινόμενον τῆς τιμῆς ἐπὶ τὴν ποσότητα.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω: *ὁριακὴ πρόσοδος* $= \underset{\Delta q \rightarrow 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta R}{\Delta q}$ καὶ ἐπειδὴ τὸ ὅριον τοῦτο εἶναι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως R, θὰ ἔχωμεν ὅτι: *Ἡ ὁριακὴ πρόσοδος εἶναι ἡ παράγωγος R' τῆς ὁλικῆς προσόδου ὡς πρὸς τὴν ποσότητα.* Βάσει τῆς (1) ἔχομεν: $\frac{dR}{dq}$

$$R' = \left(\frac{dp}{dq}\right)q + p \qquad (138)$$

Παράδειγμα. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τῆς ὁλικῆς προσόδου εἶναι $R = q - 2q^2$, ἡ ὁριακὴ πρόσοδος ἔσται: $R' = -4q$.

Δ'. ***Ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν**** . Ἐὰν Y (Yield) παριστᾷ τὸ συνολικὸν *ἐθνικὸν εἰσόδημα*, ἤτοι τὴν ἀξίαν τοῦ παραχθέντος ἐθνικοῦ εἰσο-

* Ὅρα Ἀθαν. **Σμπαρούνη**, Δημοσία Οἰκονομία, Τομ. Α', σ. 113 καὶ Τομ. Β' σ. 206, Ἀθῆναι, 1955.

δήματος προτοῦ γίνουν ἐκπτώσεις διὰ φθορὰν (ἢ ὑποτίμησιν) καὶ ἄλλαι ἀφαιρέσεις δι' ἀνάλωσιν κεφαλαιουχικῶν ἀξιῶν, C (Consupmtion) τὸ τμῆμα τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος τὸ ὁποῖον δαπανᾶται εἰς *κατανάλωσιν* καὶ S (Saving) τὸ τμῆμα τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος ὅπερ *ἀποταμιεύεται* (δὲν καταναλίσκεται), θὰ ἔχωμεν: $Y = C + S$ ἢ $Y = C + I$, ἔνθα I (Investment) παριστᾷ τὸ τμῆμα τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος ὅπερ διατίθεται εἰς ἐπενδύσεις.

Παραστήσωμεν διὰ ΔY μικρὰν αὔξησιν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος καὶ διὰ ΔC τὴν ἀντίστοιχον αὔξησιν τῆς καταναλώσεως. Τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\Delta C}{\Delta Y}$, τοῦ ΔY τείνοντος πρὸς τὸ μηδέν, καλοῦμεν *ὁριακὴν ῥοπὴν πρὸς κατανάλωσιν* (Marginal propensity to cousume), ἤτοι:

Ἡ *ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν* $= \frac{dC}{dY}$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐὰν ἐμπειρικῶς εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις, ἤτοι ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὴν κατανάλωσιν πρὸς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα, δι' ἁπλῆς παραγωγίσεως θὰ ἔχωμεν τὴν ὁριακὴν ῥοπὴν πρὸς κατανάλωσιν.

Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὸν συμβολισμὸν τοῦ *Keynes* *,

Ἡ *ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν* $= \underset{\Delta Y_w \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta C_w}{\Delta Y_w}$, ἔνθα διὰ τοῦ δείκτου w συμβολίζομεν ὅτι τὰ ποσὰ ἐκφράζονται εἰς μονάδας μισθοῦ (Wages).

Ε'. **Πολλαπλασιαστὴς ἐπενδύσεως.** Καλέσωμεν ΔC_w καὶ ΔI_w τὰς αὐξήσεις τῶν C_w καὶ I_w τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὴν αὔξησιν ΔY_w. Θὰ ἔχωμεν:

$$\Delta Y_w = \Delta C_w + \Delta I_w,$$

ἐξ ἧς

$$\Delta C_w = \Delta Y_w - \Delta I_w.$$

Ταύτης διαιροῦμεν διὰ ΔY_w ἀμφότερα τὰ μέλη, $\frac{\Delta C_w}{\Delta Y_w} = 1 - \frac{\Delta I_w}{\Delta Y_w}$ καὶ ἐν συνεχείᾳ λαμβάνομεν τὰ ὅρια, ὅτε ἔχομεν:

$$\underset{\Delta Y_w \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta C_w}{\Delta Y_w} = \underset{\Delta Y_w \to 0}{\text{ορ}} \left(1 - \frac{\Delta I_w}{\Delta Y_w}\right) \quad \text{ἢ καὶ} \quad (1) \quad \frac{dC_w}{dY_w} + \frac{dI_w}{dY_w} = 1$$

Ἤτοι: *ἡ παράγωγος τῆς καταναλώσεως ὡς πρὸς τὸ εἰσόδημα σὺν τῇ παραγώγῳ τῶν ἐπενδύσεων ὡς πρὸς τὸ εἰσόδημα εἶναι σταθερὰ καὶ ἰσοῦται τῇ μονάδι. Ἄρα τῆς μιᾶς αὐξανομένης ἡ ἑτέρα ἐλαττοῦται.*

Ἡ παράγωγος τοῦ εἰσοδήματος ὡς πρὸς τὰς ἐπενδύσεις, ἤτοι $\frac{dY_w}{dI_w}$ παρίσταται διὰ K καὶ καλεῖται *πολλαπλασιαστὴς ἐπενδύσεως* (investment multiplier).

---

* Ὅρα *Keynes*, The general theory of Employment, interest and money.

§ 116. Ὠφελιμότης - Παραγωγικότης.

Α΄. Ὠφελιμότης.

Τὸ οἰκονομικὸν σύνολον ἀποτελεῖται ἐκ μερικῶν συνόλων (Γεωργίας, Βιομηχανίας κ.τ.λ.) ἅτινα σύγκεινται ἐκ πλήθους οἰκονομικῶν μονάδων διαιρουμένων, ἐν ἑκάστῃ μερικῇ περιπτώσει, εἰς *μονάδας παραγωγῆς* καὶ *μονάδας καταναλώσεως*.

Ἡ οἰκονομία ἑκάστης μονάδος παραγωγῆς χαρακτηρίζεται παρ' ὡρισμένου ἀριθμοῦ βασικῶν συναρτήσεων αἵτινες παριστῶσι τὴν *παραγωγικότητα*, περὶ ἧς κατωτέρω. Ἡ οἰκονομία τῶν μονάδων καταναλώσεως διέπεται ὑπὸ μιᾶς βασικῆς συναρτήσεως τῆς *ὠφελιμότητος* *.

Καλοῦμεν δὲ ὠφελιμότητα τὴν ποσοστιαίαν ἔκφρασιν (ἀριθμὸν) τῆς εὐαρεστήσεως ἣν παρέχει εἰς ὡρισμένον ὑποκείμενον ἡ κατανάλωσις, εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου ὡρισμένων ποσοτήτων ἐξ ὡρισμένων οἰκονομικῶν ἀγαθῶν.

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ εὐαρέστησις δύναται νὰ μετρηθῇ καὶ ὅτι εἶναι συνάρτησις τῶν καταναλωθεισῶν ποσοτήτων $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου. Τότε ἡ ὠφελιμότης δίδεται ὡς $\Omega = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$.

Ἕκαστον ὑποκείμενον ἔχει ἰδίαν συνάρτησιν ὠφελιμότητος, καθ' ὅσον αὕτη μετρεῖ τὴν εὐαρέστησιν τοῦ ἀτόμου, ἥτις μεταβάλλεται ἀπὸ ἀτόμου εἰς ἄτομον.

Ἐὰν $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$ παριστῶσι τὰς ποσότητας τὰς ἀναγκαίας διὰ τὸν κορεσμὸν τῶν ἐπὶ μέρους καταναλώσεων, αἱ ἀνισότητες :

$$0 \leqslant x_1 \leqslant \varkappa_1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant \varkappa_2, \quad \ldots, \quad 0 \leqslant x_\nu \leqslant \varkappa_\nu$$

ὁρίζουσι τὴν περιοχὴν (τὸ πεδίον) εἰς ἣν ἡ συνάρτησις ὠφελιμότητος εἶναι ὡρισμένη. Ἡ περιοχὴ αὕτη καλεῖται *ζώνη καταναλώσεως*.

Ὑποθέτομεν ὅτι ἐν τῇ ζώνῃ καταναλώσεως ἡ ὠφελιμότης εἶναι συνάρτησις συνεχὴς τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ καὶ ὅτι ἔχει παραγώγους πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως συνεχεῖς. Τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν ταύτης

$$d\Omega = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} dx_\nu ,$$

παριστᾷ τὴν αὔξησιν τῆς ὠφελιμότητος τὴν ὁποίαν τὸ ἄτομον κτᾶται μεταβαῖνον ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἰς τὸν συνδυασμὸν $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_\nu + dx_\nu$.

Τὸ $d\Omega$ καλεῖται *ὁριακὴ ὠφελιμότης*, αἱ δὲ μερικαὶ παράγωγοι :
$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}$ καλοῦνται *συντελεσταὶ τῆς ὁριακῆς ὠφελιμότητος*.

---

* Ἡ ἔννοια αὕτη εἰσήχθη ὑπὸ τοῦ *Vilfredo Pareto*.

Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ὡς ἄνω ζώνης καταναλώσεως ὑφίστανται αἱ ἀνισότητες :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} > 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} > 0, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} > 0$$

καθ' ὅσον ἐντὸς τῆς ζώνης αὔξησίς τις τῆς καταναλώσεως εἶναι πάντοτε ἀποδεκτή.

Ἐφ' ὅσον αἱ ποσότητες $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ πλησιάζουσι συνεχῶς τὰς *τιμὰς κορεσμοῦ* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots\ldots, \varkappa_\nu$, ἤτοι, ἐφ' ὅσον πλησιάζομεν συνεχῶς τὸ σύνορον τῆς ζώνης καταναλώσεως, αἱ ἀντίστοιχοι ὁριακαὶ ὠφελιμότητες τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν, διότι εἰς τὸ σημεῖον κορεσμοῦ νέα αὔξησις τῆς καταναλώσεως δὲν δημιουργεῖ αὔξησιν τῆς εὐαρεστήσεως.

Ἀντιθέτως, ἐφ' ὅσον μία ἢ περισσότεραι τῶν $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_\nu$ πλησιάζουσι πρὸς τὸ μηδέν, αἱ ἀντίστοιχοι ὁριακαὶ ὠφελιμότητες τείνουσι πρὸς τὸ ἄπειρον. Π.χ. δι' ἄνθρωπον εὑρισκόμενον ἐν ἐρήμῳ καὶ στερούμενον ὕδατος ἡ ὠφελιμότης εἶναι μεγίστη ἐκ τοῦ πρώτου ποτηρίου ὕδατος.

Βέβαιον εἶναι, ὅτι ἡ εὐαρέστησις, ἣν δοκιμάζει ἄτομόν τι ἐκ τῆς καταναλώσεως ὡρισμένων ἀγαθῶν, βαίνει συνεχῶς ἐλαττουμένη διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς καταναλώσεως καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδέν. Δυνάμεθα, κατὰ συνέπειαν, νὰ δεχθῶμεν ὅτι *διαδοχικαὶ ἀναλώσεις ἀγαθοῦ τινος προκαλοῦσι μικροτέραν εὐαρέστησιν.*

Ἡ πρὸς τὰ ἄνω ὅρια τάσις μαθηματικῶς ἐκφράζεται διὰ τῶν δευτέρων παραγώγων π.χ. τῆς εὐαρεστήσεως ἐλαττουμένης, διὰ τῶν ἀνισοτήτων :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} < 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} < 0, \ldots, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\nu^2} < 0$$

αἵτινες ἰσχύουσιν εἰς πᾶν σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς ζώνης καταναλώσεως.

Σημείωσις. Ὑπάρχουσιν ἀγαθὰ *ἐπάλληλα*, ἅτινα ὁμοῦ καταναλισκόμενα ἀλληλοσυμπληροῦνται καὶ προκαλοῦσι μεγαλυτέραν εὐαρέστησιν ἐκείνης ἣν θὰ προεκάλουν καταναλισκόμενα μεμονωμένως. Π.χ. καφὲς καὶ ζάχαρις. Ὑπάρχουσιν ἀγαθὰ *διάλληλα*, ἅτινα προκαλοῦσι μεγαλυτέραν εὐαρέστησιν καταναλισκόμενα μεμονωμένως, π.χ. κρέας καὶ ἰχθύες. Τέλος ὑπάρχουσιν ἀγαθὰ *παράλληλα*, ὧν ἡ κατανάλωσις, σύγχρονος ἢ μή, δὲν ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς εὐαρεστήσεως ἐξ ἑνὸς ἑκάστου. Ἀγαθὰ ἀπολύτως παράλληλα δὲν ὑπάρχουσιν. Οὕτω, π.χ., ἡ ἀκρόασις ὡραίου μουσικοῦ τεμαχίου προκαλεῖ εὐαρέστησιν μετὰ πλούσιον γεῦμα, ἀλλ' ἡ εὐαρέστησις, ἐὰν ἡ μουσικὴ εἶναι καλή, δὲν μεταβάλλεται μεγάλως ἐὰν τὸ ἄτομον ἔλαβε γεῦμα οὐχὶ τόσον πλούσιον.

Ἐὰν x_α, x_β παριστῶσι τὰς ποσότητας ἃς λαμβάνει ἄτομόν τι ἐκ δύο ἀγαθῶν, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ δευτέρα παράγωγος $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ θὰ εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ ἢ μηδὲν ἐφόσον τὰ δύο ἀγαθὰ θὰ εἶναι, ἀντιστοίχως, ἐπάλληλα,

διάλληλα ἢ παράλληλα, ἀφοῦ ἡ τιμὴ τῆς δευτέρας παραγώγου δεικνύει τὴν
μεταβολὴν τῆς εὐαρεστήσεως ἐκ τῆς καταναλώσεως τῶν δύο ἀγαθῶν.

Β΄. *Παραγωγικότης.*

Πολλοὶ ὁρισμοὶ τῆς *παραγωγικότητος* ἔχουσι δοθῆ. Καθ᾽ ἡμᾶς, δοθέν-
τος ὅτι ἡ σχέσις ἡ ὑφισταμένη μεταξὺ τῶν χρησιμοποιηθέντων συντελεστῶν
παραγωγῆς καὶ τῆς ποσότητος ἢ ποιότητος τῶν παραχθέντων ἀγαθῶν δημι-
ουργεῖ τὴν ἔννοιαν τῆς παραγωγικότητος, δύναται αὕτη νὰ ὁρισθῇ οὕτω :
*Παραγωγικότης εἶναι ποσοτικὴ ἔκφρασις (ἀριθμὸς) τῆς ἱκανότητος τοῦ
παράγειν.* Ἵνα δὲ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος δέον νὰ γίνῃ *σύγκρισις τῆς αὐξή-
σεως (ἢ μειώσεως) τοῦ παραχθέντος ἀγαθοῦ πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὔξη-
σιν (ἢ μείωσιν) ἑνὸς ἢ πλειόνων συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς.* Ἡ ἔννοια
τῆς παραγώγου ἐπιβάλλεται καὶ αὖθις.

Μαθηματικῶς ἡ παραγωγικότης τοποθετεῖται ὡς ἑξῆς: Θεωρήσωμεν
ὅτι εἰς μονάδα τινὰ παραγωγῆς (ἐργαστήριον, ἀγροτικὸν συνεταιρισμόν, ἐργο-
στάσιον κ.τ.λ.), διὰ τοῦ συνδυασμοῦ ὡρισμένων ποσοτήτων $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ δο-
θέντων συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, ἐλήφθησαν αἱ ποσότητες $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$
ἀγαθοῦ τινος, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα συνδυασμὸν τῶν
$x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Αἱ ποσότητες q εἶναι, προφανῶς, συναρτήσεις ὅλων τῶν χρησιμοποιη-
θεισῶν ποσοτήτων x. Αἱ ἐξισώσεις αἱ ἐκφράζουσαι τὸν τρόπον τῆς ἐξαρτή-
σεως ἑκάστης παραχθείσης ποσότητος ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$
εἶναι :

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \\
q_2 &= \sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
q_\mu &= \sigma_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Αἱ συναρτήσεις $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu$ εἶναι χαρακτηριστικαὶ ἑκάστης οἰκονο-
μικῆς μονάδος, διότι ἐὰν οἱ νόμοι τῆς τεχνικῆς, ἤτοι τῆς Μηχανικῆς, τῆς
Φυσικῆς, τῆς Χημείας κ.τ.λ., εἶναι παγκόσμιοι, τὰ συστήματα καὶ αἱ μέθο-
δοι ἐκμεταλλεύσεως τούτων δὲν εἶναι πάντοτε τὰ αὐτά.

Ἔχομεν οὕτω μαθηματικὴν διατύπωσιν τοῦ φαινομένου. Ἐὰν ἦτο
δυνατὸν νὰ προσδιορισθῶσιν ἀριθμητικῶς τὰ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, ἐν συναρ-
τήσει πρὸς τὰς ποσότητας $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, θὰ ὑφίστατο νόμος ὅμοιος πρὸς
ἐκείνους τῆς Φυσικῆς καὶ Χημείας καὶ οὕτω θὰ ἦτο δυνατὸν καὶ ἐν τῇ οἰκο-
νομίᾳ νὰ ἔχωμεν λύσεις προβλημάτων ὁμοίων πρὸς ἐκεῖνα τῆς Φυσικῆς καὶ
τῆς Χημείας, πρᾶγμα, ὡς γνωστόν, ἀνέφικτον. Ἡ πεῖρα ἀπέδειξεν ὅτι εἶναι
πάρα πολλοὶ οἱ συνδυασμοὶ τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, εἰς οὓς ἀντιστοιχοῦσιν
αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, ὅλοι τεχνικῶς δυνατοί. Εἰς τὸν παρα-

γωγὸν ἐναπόκειται ἡ ἐκλογὴ τοῦ καταλληλοτέρου, ὑπὸ ἔποψιν οἰκονομικήν, συνδυασμοῦ.

Παραστήσωμεν διὰ $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_\mu$ τὰς τιμὰς τῶν προϊόντων, θεωρουμένας σταθερὰς ἔν τινι χρονικῷ διαστήματι. Θὰ ἔχωμεν:

$$T = \sum_{\xi=1}^{\xi=\mu}{}' p_\xi \cdot q_\xi = \sum_{\xi=1}^{\xi=\mu}{}' p_\xi \cdot \sigma_\xi(x_1\ x_2, \ldots, x_\nu)$$

τὸ διὰ T παρασταθὲν ἄθροισμα δίδει *τὴν τιμὴν τῆς παραγωγῆς εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου.*

Ἡ συνάρτησις T εἶναι συνάρτησις τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ καὶ τὸ διαφορικόν της:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial x_\nu} dx_\nu$$

παριστᾷ *τὴν τιμὴν τοῦ ὁριακοῦ προϊόντος.*

Αἱ μερικαὶ παράγωγοι $\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial x_\nu}$ καλοῦνται *συντελεσταὶ τῶν ὁριακῶν παραγωγικοτήτων* σχετικοὶ πρὸς τοὺς καθ' ἕκαστον συντελεστὰς τῆς παραγωγῆς.

Ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν τὸ προϊὸν εἶναι ἑνιαῖον, ὅτε $\mu = 1$, ἡ μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς ἕνα τῶν συντελεστῶν, π.χ., τὸν x_1, $\frac{\partial q}{\partial x_1}$, καλεῖται *ὁριακὴ φυσικὴ παραγωγικότης* ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν x_1, τὸ δὲ γινόμενον ταύτης ἐπὶ τὴν ἑνιαίαν τιμὴν τοῦ παραχθέντος ἀγαθοῦ $p\,\frac{\partial q}{\partial x_1}$ καλεῖται *ὁριακὴ οἰκονομικὴ παραγωγικότης.*

Ἰσχύουσι γενικῶς αἱ ἀνισότητες:

$$\frac{\partial T}{\partial x_\xi} \geqslant 0, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x_\xi^{\,2}} < 0.$$

Αἱ πρῶται σχέσεις ἐκφράζουσιν, ὅτι αἱ ποσότητες τῶν καθ' ἕκαστα προϊόντων αὐξάνουσιν ἢ τοὐλάχιστον δὲν ἐλαττοῦνται, ὅταν εἷς τῶν συντελεστῶν αὐξάνῃ, τῶν λοιπῶν θεωρουμένων σταθερῶν. *Τοῦτο ὅμως δὲν σημαίνει ὅτι αἱ παραγόμεναι ποσότητες εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ ὑπ' ὄψιν συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς. Συνεπῶς τὸ νὰ θεωρῶμεν ὅτι ἡ παραγωγικότης εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς παραγωγῆς διὰ τῆς διαρκείας τῆς ἐργασίας δὲν εἶναι ὀρθόν.*

Αἱ ἐκ τῆς δευτέρας σχέσεως ἀνισότητες ἐκφράζουσιν ὅτι αἱ πρῶται παράγωγοι εἶναι συναρτήσεις φθίνουσαι, ἐπαληθευομένου οὕτω τοῦ γνωστοῦ ἐκ τῆς ἐμπειρίας νόμου, καθ' ὃν *αἱ διαδοχικαὶ δόσεις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς,* τῶν ὑπολοίπων οἵτινες χρησιμοποιοῦνται παραμενόντων σταθερῶν, *ἔχουσιν ἀπόδοσιν συνεχῶς μειουμένην.* Οὕτως, ἐπὶ παραδείγματι, συμβαίνει μὲ τὴν χρῆσιν τῶν χημικῶν λιπασμάτων, ἔνθα ἡ συνεχὴς αὔξησις χημικῶν λιπασμάτων αὐξάνει μὲν ἀλλὰ συνεχῶς ὀλιγώτερον τὴν γονιμότητα τοῦ ἐδάφους.

Σημείωσις. Τελευταίως ἐδημιουργήθη μία τάσις σπουδῆς τῆς παραγωγικότητος τῶν διαφόρων μονάδων παραγωγῆς στατιστικῶς. Διὰ τοῦ ὅρου δὲ παραγωγικότης ἐννοοῦσιν, ἐν προκειμένῳ, τὸν *λόγον* τῆς συνολικῶς παραχθείσης ποσότητος ἀγαθοῦ τινος, διὰ τῆς συνολικῶς χρησιμοποιηθείσης ποσότητος *ἑνὸς τῶν χρησιμοποιηθέντων συντελεστῶν παραγωγῆς*, γενικῶς τῆς ἐργασίας, τῶν ἄλλων συντελεστῶν θεωρουμένων σταθερῶν.

Ἐν συσχετισμῷ πρὸς τὰς τεχνικὰς δυνατότητας μονάδος τινὸς παραγωγῆς, ἡ ποσότης q τοῦ παραχθέντος προϊόντος εἶναι συνάρτησις τῆς ποσότητος τῶν χρησιμοποιηθέντων συντελεστῶν $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ ἤτοι $q = \sigma(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$.

Ὁ ἀνωτέρω λόγος ἔσται $\frac{\sigma(x_1, x_2, \dots, x_\nu)}{x_\lambda}$, ἔνθα x_λ εἷς τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Ὁ λόγος οὗτος, ἁπλοῦς στατιστικὸς λόγος, δὲν ἀνταποκρίνεται ἀπολύτως πρὸς τὴν ἀλήθειαν. Ἐν τῇ θεωρίᾳ θὰ ἔδει, ὡς ἀνωτέρω, νὰ γίνεται ἡ σύγκρισις τῆς μεταβολῆς τῆς ποσότητος τοῦ παραχθέντος ἀγαθοῦ πρὸς τὴν *μικράν*, τὴν *ἀπειροστὴν* μεταβολὴν τοῦ ὑπ' ὄψιν συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς x_λ.

Ἐν τῇ πράξει βεβαίως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παρακολουθῶνται μεταβολαὶ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς ἀπειροστὰς μεταβολὰς ἑνὸς τῶν συντελεστῶν. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον χρησιμοποιεῖται ὁ ἀνωτέρω λόγος. *Εὐρυτέρα ὅμως χρησιμοποίησις τοῦ λόγου τούτου μᾶς ἀπομακρύνει τοῦ ἐπιδιωκομένου σκοποῦ.* Διὰ νὰ εἴμεθα σαφέστεροι λάβωμεν τὸ ἑξῆς ἁπλοῦν παράδειγμα: Διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως 50 ἐργατῶν ἐργασθέντων ἐπὶ πεντάωρον καὶ ὡρισμένων μονάδων τῶν λοιπῶν συντελεστῶν παρήχθησαν 1000 μονάδες ἀγαθοῦ τινος. Ἐὰν οἱ λοιποὶ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς θεωρηθῶσιν ἀμετάβλητοι καὶ οἱ αὐτοὶ ἐργάται ἐργασθῶσιν ἐπὶ δεκάωρον θὰ ἔχωμεν 2000 μονάδας τοῦ ἀγαθοῦ; Ἀσφαλῶς ὄχι. Ἐὰν ὅμως ἡ αὔξησις ἦτο ἡμισείας ἢ τετάρτου ὥρας, ἡ σύγκρισις θὰ ἦγεν εἰς συμπεράσματα ἀνταποκρινόμενα περισσότερον πρὸς τὴν ἀλήθειαν.

§ 117. Ἐλαστικότης ζητήσεως—Γενίκευσις τῆς ἐλαστικότητος.

Α'. **Ἐλαστικότης ζητήσεως.** Θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $q = \sigma(p)$ ἥτις, ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας, παριστᾷ τὴν ζήτησιν τῆς ποσότητος q (quantité - quantity) ἀγαθοῦ τινος εἰς τὴν τιμὴν p (prix - price). Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι μονότονος, θετική, φθίνουσα, ἔχουσα παράγωγον (ἀρνητικὴν) διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς p.

Ὁ ὅρος ἐλαστικότης ἀποβαίνει ποσοτικὴ ἔκφρασις τῆς ἰδιότητος τοῦ ἐλαστικοῦ φαινομένου τινὸς ὑπὸ τὴν πίεσιν οἰκονομικῶν αἰτίων.

Πρὸς ἑρμηνείαν τῆς *ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως* δώσωμεν ἐν παράδειγμα φαινομένου οὗτινος τὰς μεταβολὰς θὰ θεωρήσωμεν, πρὸς κατανόησιν, οὐχὶ ἀπειροστάς, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ θεωρητικὴ τοποθέτησις τοῦ θέματος, ἀλλ' ἁπλῶς μικράς.

Ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὴν τιμὴν 20 ζητοῦνται 1000 μονάδες ἀγαθοῦ τινος καὶ εἰς τὴν τιμὴν 100 ζητοῦνται 500 μονάδες τοῦ αὐτοῦ ἀγαθοῦ. Τότε θὰ ἔχωμεν: $1000 = \sigma(20)$ τὴν πρώτην φορὰν καὶ $500 = \sigma(100)$ τὴν δευτέραν φοράν. Ἐὰν εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν διὰ τὴν τιμὴν 21, ἤτοι εἰς αὔξησιν τῆς τιμῆς κατὰ μίαν μονάδα, ἔχωμεν ζήτησιν 900 μονάδων τοῦ ἀγαθοῦ καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν διὰ τιμὴν 101 ζήτησιν 490, ποία ἡ γενικὴ μεταβολὴ τοῦ φαινομένου;

Ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως q διὰ τῶν μεταβολῶν τῆς ποσότητος p δύναται νὰ γίνῃ κατὰ δύο τρόπους:

1ον *Διὰ τῶν παραγώγων*, ἤτοι διὰ συγκρίσεως τῆς μεταβολῆς τῆς ζητήσεως πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς τιμῆς καὶ

2ον *Διὰ τῆς ἐλαστικότητος*, ἤτοι διὰ συγκρίσεως τῆς ποσοστιαίας μεταβολῆς τῆς ζητήσεως πρὸς τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς ποσότητος.

Ὁ δεύτερος τρόπος συγκρίσεως προσφέρεται πολλάκις ὡς καταλληλότερος εἰς ζητήματα τῆς Οἰκονομικῆς ἐπιστήμης καὶ τῆς Στατιστικῆς.

Ἐφαρμόσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς τρόπους συγκρίσεως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα. Διὰ τοῦ πρώτου τρόπου, ἤτοι τῆς παραγώγου, θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ δύο πρῶτα ζεύγη τιμῶν τῶν p καὶ q: $\dfrac{900-1000}{21-20} = -100.$

Διὰ τὰ δεύτερα ζεύγη: $\dfrac{490-500}{101-100} = -10.$

Οἱ ἀριθμοὶ −100 καὶ −10, οἵτινες δίδουσι προσεγγιστικῶς δύο τιμὰς τῆς παραγώγου, παρέχουσι ἐνδείξεις τῆς ταχύτητος μεταβολῆς τοῦ φαινομένου καὶ τῆς φορᾶς τούτου. Ἐπειδὴ δὲ οἱ προκύψαντες ἀριθμοὶ εἶναι διάφοροι ἀλλήλων, συνάγεται ὅτι ἡ ταχύτης μεταβολῆς τοῦ φαινομένου εἶναι διάφορος διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ p.

Διὰ τοῦ δευτέρου τρόπου θὰ ἔχωμεν:

α) Σχετικὴ μεταβολὴ τῆς ποσότητος: $\dfrac{-100}{1000}$ ἢ $-10\,\%$

» » τῆς τιμῆς: $\dfrac{1}{20}$ ἢ $5\,\%$

Λόγος ἑκατοστιαίων μεταβολῶν: $\dfrac{-10}{5} = -2$

β) Σχετικὴ μεταβολὴ τῆς ποσότητος: $\frac{-10}{500}$ ἢ $-2\,\%$

» » τῆς τιμῆς: $\frac{1}{100}$ ἢ $1\,\%$

Λόγος ἑκατοστιαίων μεταβολῶν: $\frac{-2}{1} = -2$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σύγκρισις τῶν σχετικῶν, *τῶν ἑκατοστιαίων μεταβολῶν*, ἔδωσεν ὡς ἀποτέλεσμα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν -2. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δίδει *τὸ μέτρον τῆς ἐλαστικότητος* τοῦ ὑπ' ὄψιν φαινομένου.

Ἐὰν ἤδη, ὡς δεῖ, ληφθῇ τὸ ὅριον τοῦ λόγου τῆς σχετικῆς μεταβολῆς τῆς ποσότητος πρὸς τὴν σχετικὴν μεταβολὴν τῆς τιμῆς, τῆς αὐξήσεως τῆς τιμῆς τεινούσης πρὸς τὸ μηδέν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐλαστικότητα ζητήσεως. Ἤτοι ἐὰν παρασταθῇ διὰ E_z ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως, θὰ ἔχωμεν:

$$E_z = \underset{\Delta p \to 0}{o\varrho} \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \underset{\Delta p \to 0}{o\varrho} \frac{p}{q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{p}{q} \cdot \underset{\Delta p \to 0}{o\varrho} \frac{\Delta q}{\Delta p}, \text{ ἢ}$$

ἐπειδὴ $\underset{\Delta p \to 0}{o\varrho} \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{dq}{dp}$,

$$E_z = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} \qquad (139)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς p θὰ εἶναι ἀρνητική, λαμβάνομεν ταύτην, πρὸς εὐκολίαν, θετικὴν καὶ οὕτως ἀντὶ τοῦ τύπου (139) ἔχομεν τὸν τύπον:

$$E_z = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} \qquad (140)$$

Β'. ***Γενίκευσις τῆς ἐλαστικότητος.*** Θεωρήσωμεν συνάρτησίν τινα $y = \sigma(x)$. Ἐὰν εἰς αὔξησιν Δx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἀντιστοιχῇ αὔξησις Δy τῆς συναρτήσεως, ἡ μὲν σχετικὴ αὔξησις τῆς συναρτήσεως εἶναι $\frac{\Delta y}{y}$, ἡ δὲ σχετικὴ αὔξησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς $\frac{\Delta x}{x}$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἐλαστικότητα τῆς συναρτήσεως y διὰ E_y, θὰ ἔχωμεν:

$$E_y = \underset{\Delta x \to 0}{o\varrho} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (141)$$

Ἤτοι: *Ἡ ἐλαστικότης δοθείσης συναρτήσεως $y = \sigma(x)$ δίδεται ὡς γινόμενον τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως ἐπὶ τὸν λόγον* $\frac{x}{y}$.

Προφανὲς εἶναι ὅτι ἐὰν εἰς τὸν τύπον τῆς ἐλαστικότητος τῆς συναρτήσεως y (141) θέσωμεν $x = p$ καὶ $y = q$ θὰ ἔχωμεν τὴν ἐλαστικότητα ζητήσεως (139).

Ἐνίοτε χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἐλαστικότητα τῆς συναρτήσεως $y = \sigma(x)$ ὁ συμβολισμὸς $\frac{E_y}{E_x}$ ἢ ὁ συμβολισμὸς $E_x\,\sigma(x)$ ἢ ἁπλούστερον $E_x\,\sigma$.

Σημείωσις. 1. *Διὰ τὰς συναρτήσεις τῆς μορφῆς $y = ax^\mu$ ἡ ἐλαστικότης ἰσοῦται μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως, μ. Ἤτοι εἰς τὰ φαινόμενα τὰ ἔχοντα ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς ταύτης ἡ ἐλαστικότης εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς τὸν ἐκθέτην.*

Διότι, συμφώνως τῷ τύπῳ (141) ἔχομεν:

$$E_y = \frac{x}{ax^\mu}\,(ax^\mu)' = \frac{x}{ax^\mu}\cdot a\cdot\mu\cdot x^{\mu-1} = \mu.$$

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει, ἤτοι: *Αἱ συναρτήσεις αἱ ἔχουσαι ἐλαστικότητα σταθερὰν ἴσην μὲ μ εἶναι τῆς μορφῆς $y = ax^\mu$.*

Διότι, βάσει τοῦ τύπου (141), ἔχομεν: $\mu = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Ἡ εὕρεσις τῶν συναρτήσεων y, τῶν ἐπαληθευουσῶν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν διαφορικῆς ἐξισώσεως ἧς αἱ μεταβληταὶ χωρίζονται (§ 106, I).

Οὕτως ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἥτις γράφεται $\frac{dy}{y} = \mu\,\frac{dx}{x}$, λαμβάνομεν δι' ὁλοκληρώσεως:

$$\int\frac{dy}{y} = \mu\int\frac{dx}{x}, \quad \text{ἐξ ἧς ἔχομεν:}$$

(1) $\ln y = \mu \ln x + \ln a$, ἔνθα ὡς σταθερὰν τῆς ὁλοκληρώσεως ἐλάβομεν τὸν Νεπέρειον λογάριθμον τοῦ α.

Ἡ (1) γράφεται: $\ln y = \ln x^\mu + \ln a$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν: $y = ax^\mu$ ὅ. ἔ. δ. $y = ax^\mu$

Σημείωσις. 2. Ὡς μερικὴν περίπτωσιν τῆς προηγουμένης προτάσεως τὴν ὁποίαν, ἐξ ὅσων γνωρίζομεν, τὸ πρῶτον παρ' ἡμῶν διατυποῦται, δυνάμεθα ν' ἀναφέρωμεν *τὰς καμπύλας τοῦ Marshall.*

Σημείωσις. 3. Ἐπειδὴ $\frac{dy}{y} = d(\ln y)$ καὶ $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, θὰ ἔχωμεν: $E_y = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}$. Ἤτοι ἡ ἐλαστικότης E_y ἀνάγεται εἰς ἁπλοῦν λόγον τῶν διαφορικῶν τῶν λογαρίθμων τῶν x καὶ y.

Σημείωσις. 4. Ἡ ἔννοια τῆς ἐλαστικότητος ἐπεκτείνεται ἐπὶ πλείστων ὅσων θεμάτων τῆς Πολιτικῆς Οἰκονομίας. Οὕτως ἔχομεν *ἐλαστικότητα προ-*

σφορᾶς, *ἐλαστικότητα ἀπασχολήσεως εἰς τὴν παραγωγὴν* ὡς σύνολον καὶ εἰς τὴν παραγωγὴν παραγωγικῶν ἀγαθῶν κ.τ.λ. (Περὶ τῶν δύο τελευταίων, ὅρα *Keynes, The General Theory of employment, interest and money,* σ. 116). Εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις ὁ τύπος εἶναι ὁ ὡς ἄνω δοθείς.

Παρατηρήσεις. 1. Ἐὰν ἡ x μετρηθεῖσα δι᾽ ἄλλης τινὸς μονάδος εὑρέθη ἴση πρὸς μx, ἡ δὲ y μετρηθεῖσα καὶ αὐτη ὑπὸ ἑτέρας μονάδος εὑρέθη ἴση πρὸς νy, θὰ ἔχωμεν:

$$E_y = \frac{\mu x}{\nu y} \cdot \frac{d(\nu y)}{d(\mu x)} = \frac{\mu x}{\nu y} \cdot \frac{\nu}{\mu} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

ὅπερ δεικνύει ὅτι: *Ἡ ἐλαστικότης εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν x καὶ y.*

2. Ἐὰν ἔχωμεν τὸ *λογαριθμικὸν διάγραμμα* τῆς συναρτήσεως, ἤτοι τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως ἐν συστήματι ἀξόνων, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἀντὶ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους τούτων, παρατηροῦμεν ὅτι: *Ἡ ἐλαστικότης συναρτήσεως εἰς τυχὸν σημεῖον της ἰσοῦται μὲ τὸν γωνιακὸν συντελεστὴν τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο,* καθ᾽ ὅσον $E_y = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}$ (ὅρα σημ. 3), ὡς ἀκριβῶς συμβαίνει διὰ τὴν παράγωγον συναρτήσεως ἧς ἔχομεν τὴν γραφικὴν παράστασιν εἰς σύνηθες ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων.

3. Ἐν τῇ περιπτώσει καθ᾽ ἣν ἔχομεν συνάρτησιν πλειόνων μεταβλητῶν, π.χ. $f(x_1, x_2, \ldots . x_\nu)$, ἀντὶ $\frac{dy}{dx}$ θὰ λαμβάνωμεν τὴν μερικὴν παράγωγον, ὅτε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐλαστικότητα ὡς πρὸς ἑκάστην μεταβλητὴν $x_1, x_2, \ldots . x_\nu$. Οὕτω, π.χ., ἡ ἐλαστικότης τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς x_1 θὰ εἶναι $E_{x_1} f = \frac{x}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}$.

4. *Λέγομεν ὅτι ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως εἰς ἀγοράν τινα εἶναι μεγάλη ἢ μικρά, ἐφόσον ἡ ζητουμένη ποσότης αὐξάνει πολὺ ἢ ὀλίγον μετὰ πτῶσιν τινὰ τῆς τιμῆς καὶ ἐλαττοῦται πολὺ ἢ ὀλίγον μετὰ ὕψωσιν τινὰ τῆς τιμῆς.*

5. *Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς ἐλαστικότητος ζητήσεως εἶναι μεγαλυτέρα διὰ τὰ εἴδη πολυτελείας,* ἔνθα μικρὰ αὔξησις τῆς τιμῆς δύναται νὰ προκαλέσῃ αἰσθητὴν μείωσιν τῆς ζητήσεως. *Διὰ τὰ εἴδη πρώτης ἀνάγκης ἡ ἐλαστικότης εἶναι μικροτέρα,* καθ᾽ ὅσον ἡ ζητουμένη ποσότης δύναται νὰ παραμείνῃ κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον στάσιμος καὶ ἐν τῇ περιπτώσει σημαντικῆς πως μεταβολῆς τῆς τιμῆς.

Γενικῶς ἐπὶ τῆς *ἀπολύτου* τιμῆς τῆς ἐλαστικότητος ζητήσεως ἰσχύουσι τὰ ἑξῆς:

α'. *Ἐὰν συμβαίνῃ ὥστε $E_z = 1$, ἡ ποσοστιαία μεταβολὴ τῆς ζητήσεως εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς τιμῆς.*

β'. *Ἐὰν συμβαίνῃ ὥστε $E_z > 1$,* ὅτε λέγομεν ὅτι *ἡ ζήτησις εἶναι ἐλαστική, ἡ ποσοστιαία μεταβολὴ τῆς ζητήσεως εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ποσοστιαίας μεταβολῆς τῆς τιμῆς.*

γ'. *Ἐὰν συμβαίνῃ ὥστε $E_z = \infty$,* ὅτε λέγομεν ὅτι *ἡ ζήτησις εἶναι ἐντελῶς ἐλαστική, ἡ ποσοστιαία μεταβολὴ τῆς ζητήσεως εἶναι μεγίστη ὡς πρὸς τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς τιμῆς.*

δ'. *Ἐὰν συμβαίνῃ ὥστε $E_z < 1$,* ὅτε λέγομεν ὅτι *ἡ ζήτησις εἶναι ἀνελαστική, ἡ ποσοστιαία μεταβολὴ τῆς ζητήσεως εἶναι μικρὰ ἐν σχέσει πρὸς τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς τιμῆς.*

ε'. *Ἐάν,* τέλος, *συμβαίνῃ ὥστε $E_z = 0$,* ὅτε λέγομεν ὅτι *ἡ ζήτησις εἶναι τελείως ἀνελαστική, ἡ ποσοστιαία μεταβολὴ τῆς ζητήσεως εἶναι ἀπειροστὴ ἢ μηδενικὴ ὡς πρὸς τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς τιμῆς.*

6. *Μεταξὺ ἐλαστικότητος ζητήσεως καὶ ὁριακῆς προσόδου R' ὑφίσταται ἡ σχέσις $E_z = \dfrac{p}{p-R'}$.*

Ἔχομεν (§ 115, Γ') $R' = \left(\dfrac{dp}{dq}\right) q + p$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $\dfrac{dp}{dq}$, εὑρίσκομεν :

$$\frac{dp}{dq} = \frac{R'-p}{q} \quad \text{ὅτε, καὶ} \quad \frac{dq}{dp} = \frac{q}{R'-p}.$$

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $\dfrac{dq}{dp}$ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἐλαστικότητος ζητήσεως (140) εὑρίσκομεν $E_z = \dfrac{p}{p-R'}$.

Εξω

§ 118. Μονοπώλιον.

Μονοπώλιον ἔχομεν ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν ἔν τινι ἀγορᾷ ὁλόκληρος, ἢ σχεδὸν ὁλόκληρος, ἡ προσφορὰ ἢ ἡ ζήτησις ἀγαθοῦ τινος εὑρίσκεται *«εἰς χεῖρας ἑνὸς καὶ μόνου προσώπου»*. Λέγοντες δὲ ἓν πρόσωπον δὲν κυριολεκτοῦμεν, ἀλλὰ νοοῦμεν ἓν ἢ πλειότερα πρόσωπα εἰς ἑνιαίαν ὁμάδα ὠργανωμένα.

Μονοπώλιον δύναται νὰ ὑπάρξῃ καὶ ἐκ μέρους τοῦ ἀγοραστοῦ (π. χ. ἀγορὰ ἐκ μέρους τοῦ κράτους πάσης παραχθείσης ποσότητος ἀγαθοῦ τινος) καὶ ἐκ μέρους τοῦ πωλητοῦ, ὅπερ καὶ συνηθέστερον, ἐξ οὗ καὶ ὁ ὅρος (μόνος-πωλεῖν).

Τεθῶμεν εἰς τὴν δευτέραν καὶ κυριωτέραν περίπτωσιν. Κατὰ ταύτην ὁ μονοπωλητὴς ἢ θὰ ὁρίσῃ τὴν παραχθησομένην ποσότητα καὶ αἱ συνθῆκαι τῆς ἀγορᾶς θὰ καθορίσωσι τὴν τιμήν, ἢ θὰ ὁρίση τὴν τιμὴν καὶ ἡ ἀγορὰ θὰ προσδιορίση τὴν παραχθησομένην ποσότητα. Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ὁ μονοπωλητὴς θὰ ἐνεργήση κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ἀπολαύση τὸ μεγαλύτερον καθαρὸν κέρδος. Π.χ. ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει ἐὰν ἔχη ὑπερπαραγωγήν, θὰ παρακρατήση ἢ θὰ καταστρέψη μέρος ταύτης, ἵνα συγκρατήση τὴν τιμήν.

Ἐκ τοῦ ὅτι ὁ ἀσκῶν τὸ μονοπώλιον εἶναι μόνος, δὲν ἔπεται ὅτι δύναται νὰ ἐνεργήση καὶ αὐθαιρέτως καὶ ἐκτὸς τῶν οἰκονομικῶν νόμων, ἀλλ᾽ ἐντὸς τούτων καθορίζων τὴν τιμὴν ἢ τὴν ποσότητα εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνη τὸ μέγιστον κέρδος καὶ νὰ ἐπέρχεται οἰκονομικὴ ἰσορροπία μεταξὺ προσφορᾶς καὶ ζητήσεως. I-R-

Ἐὰν I παριστᾷ τὸ καθαρὸν κέρδος, R τὴν ὁλικὴν πρόσοδον καὶ K τὸ ὁλικὸν κόστος, θὰ εἶναι (1) $I = R - K$.

Ἀπὸ μαθηματικῆς πλευρᾶς, διὰ τὸ μονοπώλιον θ᾽ ἀναζητήσωμεν τὸ μέγιστον τῆς τιμῆς τοῦ I.

Θεωρήσωμεν πρῶτον τὴν περίπτωσιν καθ᾽ ἣν ὁ μονοπωλητὴς διατηρεῖ σταθερὰν τὴν παραγωγὴν καὶ ἡ ἀγορὰ καθορίζει τὴν τιμήν. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ τιμὴ p ἥτις θὰ ἐπιτρέψη τὴν διάθεσιν ὁλοκλήρου τῆς ποσότητος q ἔσται $p = \varphi(q)$.

Ἐπειδὴ ἡ ὁλικὴ πρόσοδος R εἶναι τὸ γινόμενον τῆς ποσότητος q ἐπὶ τὴν τιμήν, θὰ ἔχωμεν $R = p \cdot q$ ἤ, λόγῳ τοῦ ὅτι $p = \varphi(q)$, $R = q \cdot \varphi(q)$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὁλικὸν κόστος K εἶναι συνάρτησις τῆς ποσότητος q, παριστῶμεν τοῦτο διὰ $K = \Theta(q)$. Ἀντικαθιστῶντες τὰ R καὶ K διὰ τῶν ἴσων των ἐν τῇ (1), λαμβάνομεν:

$$(2) \qquad I = q \cdot \varphi(q) - \Theta(q).$$

Τῆς συναρτήσεως ταύτης θ᾽ ἀναζητήσωμεν, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, τὸ μέγιστον. Πρὸς τοῦτο θὰ εὕρωμεν τὴν πρώτην καὶ δευτέραν παράγωγον τῆς συναρτήσεως καί, ἐν συνεχείᾳ, ἀφοῦ ἐξισώσωμεν τὴν πρώτην παράγωγον μὲ μηδέν, θὰ ἐξετάσωμεν ἐὰν ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι μικροτέρα τοῦ μηδενὸς (§ 80).

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν:

$$(3) \qquad I' = R' - K', \qquad (4) \qquad I'' = R'' - K''$$

Ἐὰν ἀντὶ τῆς (1) λάβωμεν τὴν ἰσοδύναμόν της (2), θὰ ἔχωμεν ἀντὶ τῆς (3) τὴν ἐξίσωσιν:

$$(5) \qquad I' = \varphi(q) + \varphi'(q) \cdot q - \Theta'(q).$$

Ἐξισοῦμεν τὴν πρώτην παράγωγον μὲ μηδὲν

$$(6) \qquad \varphi(q) + \varphi'(q) \cdot q - \Theta'(q) = 0.$$

Ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει (6) ἀντικατασταθῶσι τὰ $\varphi'(q)$, $\varphi(q)$ ὑπὸ τῶν ἴσων τῶν $\frac{dp}{dq}$, p καὶ θέσωμεν $\Theta'(q) = \lambda$, ἔνθα $\Theta'(q)$ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως τοῦ ὁλικοῦ κόστους, θὰ ἔχωμεν :

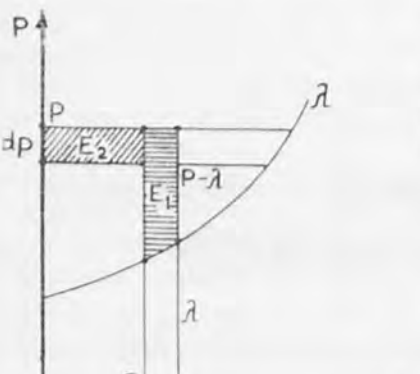
$$(7) \qquad (p - \lambda)\, dq + q\, dp = 0$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι *ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τοῦ μονοπωλίου.*

Ἐκ τῆς λύσεως τῆς (7) θὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ p, δι' ἣν τὸ I θὰ γίνῃ μέγιστον.

Ἐπειδή, ὡς εἴπομεν, θὰ πρέπῃ $I'' < 0$, ἐκ τῆς (4) θὰ ἔχωμεν : $R'' - K'' < 0$ ἢ καὶ $R'' < K''$. Ἡ ἀνισότης αὕτη γράφεται $(R')' < (K')'$ καὶ ἐκφράζει τὴν ἀναγκαίαν συνθήκην σταθερότητος τοῦ μονοπωλίου, ἤτοι ἡ παράγωγος τῆς ὁριακῆς προσόδου θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς παραγώγου τοῦ ὁριακοῦ κόστους (§ 115) καὶ συνεπῶς δέον ἡ ὁριακὴ πρόσοδος νὰ μένῃ μικροτέρα τοῦ ὁριακοῦ κόστους.

Παρατηρήσεις. 1. Ἐκ τῆς (7) διὰ διαιρέσεως διὰ dq λαμβάνομεν : $(p - \lambda) + q\frac{dp}{dq} = 0$. Ἐὰν ἡ ποσότης dp εἶναι πολὺ μικροτέρα τῆς ποσότητος dq, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν προσεγγιστικῶς τὸν λόγον $\frac{dp}{dq}$ ἴσον μὲ 0, ὅτε ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως λαμβάνομεν $p = \lambda$. Ἤτοι ἡ τιμὴ θὰ ἰσοῦται τῇ παραγώγῳ τοῦ ὁλικοῦ κόστους, ἢ ἄλλως ἡ τιμὴ πωλήσεως θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ὁριακὸν κόστος.



Σχ. 74.

2. Γεωμετρικῶς ἡ (7) ἐκφράζει ὅτι ὁ μονοπωλητὴς καθορίζει τὸ q εἰς τρόπον ὥστε τὰ ἐμβαδὰ *(Σχ. 74)* $E_1 = (p - \lambda)\, dq$ καὶ $E_2 = q\, dp$ νὰ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσα.

3. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς πρώτης παραγώγου πρὸς μηδὲν ἔχομεν : $I' = R' - K' = 0$. Ἐκ ταύτης συνάγομεν ὅτι : *Ἡ ποσότης q, ἥτις δίδει εἰς τὸν μονοπωλητὴν τὴν μεγαλυτέραν καθαρὰν πρόσοδον, εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν τὸ ὁριακὸν εἰσόδημα R' ἰσοῦται πρὸς τὸ ὁριακὸν κόστος K'.*

Παραδείγματα

1. *Διὰ τὸ μονοπώλιον εἴδους τινὸς ἔστω ὅτι ἐκ τῆς ἐμπειρίας διὰ στατιστικῆς παρακολουθήσεως ἡ μὲν συνάρτησις τοῦ ὁλικοῦ κόστους εἶναι $K = q^2$, ἡ δὲ συνάρτησις τῆς ζητήσεως $p = 8 - 5q$. Εὑρεῖν διὰ ποίαν ποσότητα ἔχομεν τὸ μέγιστον κέρδος.*

Ἔχομεν : Ὁλικὴ πρόσοδος : $R = p \cdot q = (8 - 5q) \cdot q = 8q - 5q^2$.

Καθαρὰ πρόσοδος : $I = R - K = 8q - 5q^2 - q^2 = 8q - 6q^2$.

Παραγωγίζοντες ἔχομεν : $I' = 8 - 12q$, $R' = 8 - 10q$, $K' = 2q$.

Μηδενίζομεν τὴν πρώτην παράγωγον :

$$I' = 8 - 12q = 0, \text{ ὅτε προκύπτει } q = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Διὰ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τῆς q θὰ εἶναι :

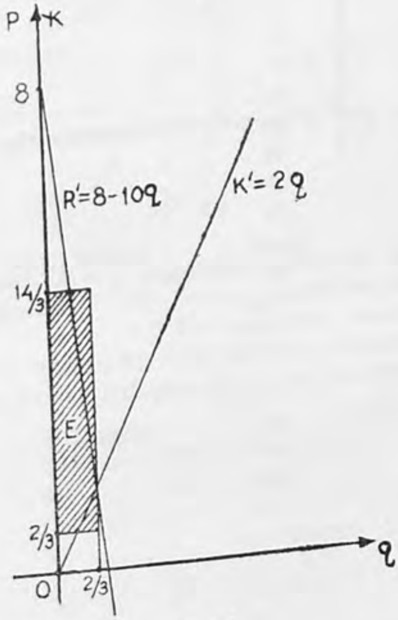
$$p = 8 - 5 \cdot \frac{2}{3} = 8 - \frac{10}{3} = \frac{14}{3}, \quad R = \frac{14}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{28}{9},$$

$$K = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \quad \boxed{I = R - K} = \frac{28}{9} - \frac{4}{9} = \frac{24}{9}.$$

Ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς συναρτήσεως I εἶναι :

$$I'' = R'' - K'' = (8 - 10q)' - (2q)' = -10 - 2 = -12 < 0,$$

ἄρα πληροῦται συνθήκη τοῦ νὰ εἶναι ἡ δευτέρα παράγωγος μικροτέρα τοῦ μηδενός. ἄρα ὑπάρχει μέγιστον.



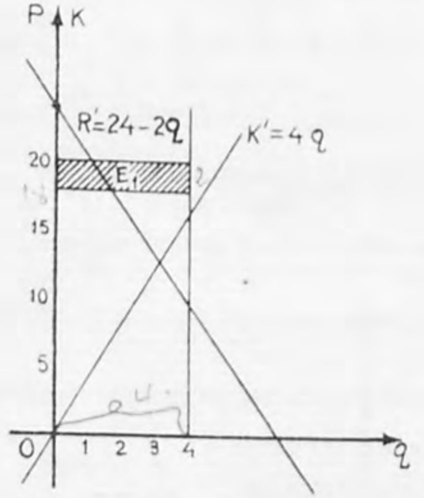
Σχ. 75.

Γεωμετρικῶς τὸ μέγιστον κέρδος $I = \frac{24}{9}$ δίδεται ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ E (*Σχ. 75*), ὅπερ εἶναι διαφορὰ δύο ὀρθογωνίων ἐχόντων βάσιν μὲν ἴσην μὲ $\frac{2}{3}$, ὕψη δέ, ἀντιστοίχως, $\frac{14}{3}$ καὶ $\frac{2}{3}$.

2. *Ἔστω ὅτι, ἐκ τῆς ἐμπειρίας, διὰ στατιστικῆς ἐρεύνης, εὑρέθη ὅτι ἡ καμπύλη ζητήσεως εἴδους τινὸς ἔχει ἐξίσωσιν $p = 24 - q$, καὶ ὅτι συνάρτησις κόστους εἶναι $K = 2q^2 + 40$. Εὑρεῖν τὸ ποσὸν τῆς παραγωγῆς διὰ τὸ ὁποῖον ἔχομεν τὸ μέγιστον κέρδος.*

Ἔχομεν : $R = (24 - q)q = 24q - q^2$, $R' = 24 - 2q$.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν κατάστασιν τῆς ἰσορροπίας τὸ ὁριακὸν κόστος ἰσοῦται πρὸς τὴν ὁριακὴν πρόσοδον, ἤτοι $R' = K'$, θὰ εἶναι : $24 - 2q = 4q$.



Σχ. 76.

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως λαμβάνομεν $q = 4$. Ἄρα ἡ ζητουμένη ποσότης εἶναι 4 μονάδες εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου. Καὶ ἡ δευτέρα συνθήκη $R'' - K'' < 0$ πληροῦται, καθόσον ἔχομεν $-2 - 4 = -6 < 0$.

Γεωμετρικῶς ἡ καθαρὰ πρόσοδος, ὡς ἐν τῷ σχήματι *(Σχ. 76)* ἐμφαίνεται, παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου E, ὅπερ ἔχει βάσιν 4 καὶ ὕψος 20—18, ἤτοι 2.

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΗΜΑΡΤΗΜΕΝΩΝ

Σελὶς	13	στίχος	4	ἀντὶ	M	γράφε	Mν
»	20	»	23	»	σούρας	»	σβούρας
»	25	»	13	»	500	»	5000
»	26	»	11	»	500	»	5000
»	47	»	2	»	0,4	»	0,04
»	47	»	τελευταῖος	»	εἰς x ἔτη μὲ	»	μετὰ x ἔτη πρὸς
»	52	»	29	»	$\frac{N'N}{ON}$	»	$\frac{N'N}{ON'}$
»	56	»	8	»	$-y$	»	$+y$
»	56	»	25	»	$-\frac{A'}{B'}$	»	$-\frac{A'}{B'}x$
»	58	»	29	»	$-\frac{B}{A}$	»	$-\frac{\Gamma}{B}$
»	58	»	29	»	$\alpha=-\frac{\Gamma}{B}$	»	$-\frac{\Gamma}{A}$
»	60	»	31	»	θετικῆς	»	τελικῆς
»	71	»	2	»	$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$	»	$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, [ἔνθα: $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$
»	85	ἐν τῷ πίνακι	1	»	9	»	8
»	90	στίχος	14	»	∞	»	ω
»	98	»	τελευταῖος	»	62	»	68
»	105	»	προτελευταῖος	»	35	»	36
»	106	»	15	»	36	»	37
»	106	»	25	»	37	»	38
»	107	»	1	»	38	»	39
»	123	»	προτελευταῖος	»	παρὰ	»	ὑπὸ
»	129	»	7	»	dy	»	dx
»	141	»	40	»	τοῦ x	»	τοῦ x αὐξανομένου
»	143	»	9	»	79	»	81
»	147	»	22	»	x	»	y
»	157	»	7	»	σ	»	σ'
»	159	»	27 (Σχῆμα)	»	dx	»	dy
»	163	»	19	»	$\varkappa=$	»	$\varkappa=1$
»	176	»	27	»	10,8	»	5,8
»	179	»	4	»	E	»	ε
»	181	»	29	»	παραγώγου	»	συναρτήσεως
»	183	»	6	»	ln a	»	ln α
»	186	»	5	»	$\Delta\to 0$	»	$\Delta x\to 0$
»	196	»	5	»	97	»	96
»	210	»	25	»	l_n	»	l_x
»	211	»	15	»	120	»	135
»	211	»	19	»	$l_0 e^{-\frac{\beta}{\ln c}}$	»	$l_0 e^{\frac{\beta}{\ln c}}$
»	212	»	10	»	α_x	»	$\bar{\alpha}_x$
»	212	»	16 - 18	»	vt	»	v^t
»	223	»	17	»	x, x	»	x_1, x_2

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Σελ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΥΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΕΥΘΕΙΑΙ ΕΝ ΤΩ ΕΠΙΠΕΔΩ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΓΡΑΜΜΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΚΑΜΠΥΛΑΙ ΤΙΝΕΣ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

(4). 3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΠΕΡΙ ΟΡΙΩΝ

Σελ.

(5)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

6

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΣΠΟΥΔΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΛΕΙΟΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΠΕΡΙ ΣΕΙΡΩΝ

4

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ