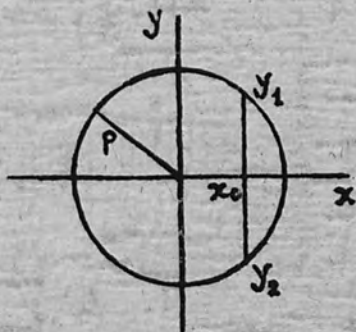
W. ALLEN SPIVEY
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΤΟΥ MICHIGAN UNIVERSITY

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΝ



ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ
ΑΝΔΡΕΟΥ Γ. ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ Α.Β.Σ.Π.

ΑΘΗΝΑΙ
1966

W. ALLEN SPIVEY
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΤΟΥ MICHIGAN UNIVERSITY

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΝ

W. ALLEN SPIVEY received his A.B., A.M., and Ph.D. degrees from the University of North Carolina and is Associate Professor of Statistics in the University of Michigan School of Business Administration. Currently on leave from Michigan, he is serving as Visiting Associate Professor at the Institute in Basic Mathematics for Application to Business, Harvard University. Dr. Spivey is a member of the American Economics Association, the American Statistical Association, and the Mathematical Association of America.

ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ
ΑΝΔΡΕΟΥ Γ. ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ Α.Β.Σ.Π.

ΑΘΗΝΑΙ
1966

'Ανάτυπον ἐκ τοῦ τεύχ. 6, τόμ. ΙΣΤ', τοῦ
περιοδικοῦ «Σπουδαὶ» τῆς Α.Β.Σ. Πειραιῶς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΒΑΣΙΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΤΙΝΑ ΕΠΙ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΜΗΤΡΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΔΥΑΔΙΚΟΤΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1ον

ΒΑΣΙΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

Σύνολα

Θὰ ἀρχίσωμεν μὲ μίαν ἔννοιαν φαινομενικῶς ἁπλῆν, ἔχουσαν διαισθητικὸν ἀντίστοιχον εἰς τὴν καθ' ἡμέραν ἐμπειρίαν. Τὴν ἔννοιαν τοῦ ***συνόλου*** ἀντικειμένων ἢ στοιχείων. Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ μαθηματικὸς εἰς τὴν τυπικὴν ἀνάπτυξιν μαθηματικῶν συστημάτων θὰ προετίμα νὰ θεωρήσῃ τὸν ὅρον «σύνολον» ὡς ἀκαθόριστον, εἶναι εὐχερὲς νὰ δείξωμεν τόσον τὴν σημασίαν ὅσον καὶ τὴν χρῆσιν τοῦ ὅρου. ***Σύνολον*** εἶναι πᾶσα καλῶς καθωρισμένη συλλογὴ στοιχείων διακρινομένων ἀλλήλων, καὶ εἶναι ὅρος συνώνυμος τῶν ὅρων «ὁμάς», «ὁλότης», «τάξις». Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἔννοια αὕτη εἶναι γενική, πρέπει νὰ προσέξωμεν τὰ ἑξῆς δύο σημεῖα : ἓν σύνολον ἀποτελεῖται ἐκ διαφόρων μεταξύ των στοιχείων οὕτως ὥστε ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου εἶναι «ξεχωριστὸ» ἀντικείμενον καὶ δύο στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου δὲν εἶναι ὅμοια, δηλ. δὲν ταυτίζονται.

Τὰ σύνολα θὰ συμβολίζωνται γενικῶς διὰ κεφαλαίων γραμμάτων, ὅπως $A, B, \ldots, T, X$, καὶ τὰ στοιχεῖα ἢ μέλη τῶν συνόλων διὰ μικρῶν γραμμάτων, $\alpha, \beta, \ldots \chi$. Ἀφοῦ θὰ ἐκλαμβάνωμεν τὰ ἀντικείμενα ὡς μέλη συνόλων [1], προσδιορίζομεν τὸ σύμβολον «ἀνήκει εἰς», $\in$:
$\alpha \in A$ σημαίνει ὅτι τὸ α εἶναι στοιχεῖον (μέλος) τοῦ συνόλου A. Θὰ εὕρωμεν χρήσιμον καὶ τὸ σύμβολον «δὲν ἀνήκει εἰς», οὕτως ὅταν γράφωμεν $\alpha \notin A$ ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ στοιχεῖον α δὲν εἶναι μέλος τοῦ συνόλου A.

Ἂν ἓν σύνολον περιέχῃ μόνον ὀλίγα στοιχεῖα, δύναται τότε νὰ προσδιορισθῇ δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του μεταξὺ ἀγκυλῶν, ὡς :

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Πλέον χρήσιμος τρόπος προσδιορισμοῦ ἑνὸς συνόλου, ὅμως, εἶναι νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἰδιότητα τὴν ὁποίαν ἔχουν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου. Π.χ. ἂν χ

---

1) Θὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἓν στοιχεῖον εἶναι πάντοτε μέλος συνόλου τινός. Δὲν θὰ ἐπιτρέψωμεν τὴν ὕπαρξιν στοιχείων μὴ ἀνηκόντων εἰς ἓν σύνολον.

τὸ σύμβολον τὸ δυνάμενον νὰ ἀντιπροσωπεύσῃ πᾶν στοιχεῖον εἰς τὸ σύνολον Β ἀνωτέρω, τότε δυνάμεθα νὰ ἀναγνωρίσωμεν τὸ σύνολον Β οὕτω :

$$B = \{ \chi \mid \chi \text{ ἀκέραιος ἀριθμὸς } 1 \leqq \chi \leqq 10 \}$$

δηλ. τὸ Β εἶναι τὸ σύνολον ὅλων ἐκείνων τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα περιγράφει τὸ χ (ὅπου χ ἀκέραιος ἀριθμὸς $1 \leqq \chi \leqq 10$)

Ἡ γενικότης τῆς ἐννοίας τοῦ συνόλου δύναται νὰ διασαφηνισθῇ κατ' ἀρκετοὺς τρόπους. Π.χ. δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν σύνολα ἀποτελούμενα ἀπὸ πεπερασμένον ἀριθμὸν στοιχείων, σύνολα περιέχοντα ἀπεριόριστον ἀριθμὸν στοιχείων ἢ ἀκόμα σύνολα ἀποτελούμενα ἀπὸ ἓν μόνον στοιχεῖον, π.χ. τὸ σύνολον $\{\alpha\}$. Πράγματι, τὰ μονοσύνολα ἔχουν μεγάλην σπουδαιότητα καὶ πρέπει νὰ ἑρμηνεύωνται μετὰ προσοχῆς, καθ' ὅσον τὸ σύνολον $\{\alpha\}$ δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ στοιχεῖον α. Διὰ νὰ κατανοηθῇ ἡ διαφορὰ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει Ἑταιρεία Προστασίας Οἰκονομολόγων μὲ κατὰ τόπους παραρτήματα ἀνὰ τὴν χώραν καὶ ὅτι τὸ παράρτημα τῆς πόλεώς σας ἔχει ὡς μέλη δύο φιλοστόργους κυρίας. Ἂν ἡ μία ἐξ αὐτῶν παραιτηθῇ, τότε τὸ παράρτημα (σύνολον) ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἑνὸς ἀπομείναντος μέλους. Ὁπωσδήποτε ἡ κυρία αὕτη διαφέρει τοῦ συνόλου (παραρτήματος) μολονότι εἶναι τὸ μόνον μέλος.

Ἐκτὸς τούτου, τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων δύνανται νὰ εἶναι οἱαδήποτε καθωρισμένα ἀντικείμενα ἢ καὶ σύνολα (ὁπότε ὁμιλοῦμεν περὶ «συλλογῆς συνόλων» ἀντὶ «συνόλου συνόλων»). Θὰ παραδεχθῶμεν ἐπίσης τὸ «κενὸν σύνολον», ἤτοι τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον οὐδὲν στοιχεῖον περιλαμβάνει. Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ὕπαρξις κενοῦ συνόλου ἢ «μηδενικοῦ» (ὡς καλεῖται) φαίνεται παράδοξος, θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο παρέχει σημαντικὴν εὐχέρειαν εἰς τὴν ἀνάλυσιν καί, ἐπὶ πλέον, ἡ ἔννοια δὲν εἶναι, ὡς κατ' ἀρχὰς φαίνεται, θεωρητική. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι καὶ ἡ ἀπομείνασα κυρία παραιτεῖται. Τὸ παράρτημα τότε καθίσταται μὴ ἐνεργητικὸν (τὸ σύνολον εἶναι κενόν), ἀλλὰ δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς ἐὰν δὲν ὑπῆρχε παράρτημα εἰς τὴν πόλιν καθ' ὁλοκληρίαν. Θὰ ὁρίσωμεν ἐπίσης ὅτι τὸ κενὸν σύνολον εἶναι ὑποσύνολον παντὸς συνόλου καὶ θὰ συμβολίσωμεν αὐτὸ (τὸ κενὸν σύνολον) διὰ τοῦ συμβόλου $\emptyset$.

Πράξεις ἐπὶ συνόλων

Δύο στοιχεῖα καλοῦνται ἴσα, $\chi = \psi$, ἂν χ καὶ ψ εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ στοιχεῖον. Οὕτως ἡ λέξις «ἴσον» εἰς τὰ μαθηματικὰ δηλοῖ τὸ αὐτὸ μὲ τὴν λέξιν «ἄλλως»· ὅταν λέγωμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα χ καὶ ψ εἶναι ἴσα, ἐννοοῦμεν ὅτι ταῦτα εἶναι δύο ὀνομασίαι τοῦ αὐτοῦ ἀντικειμένου. Οὕτως, ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος δύο συνόλων : τὰ σύνολα Α, Β εἶναι ἴσα ἂν περιέχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα. Παρατηρήσατε ὅτι οὐδὲν ἀναφέρεται περὶ τῆς σειρᾶς τῶν στοιχείων. Ὅταν τὰ Α καὶ Β περιλαμβάνουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα — ἀσχέτως κατὰ ποίαν σειρὰν — καλοῦνται ἴσα.

Δοθέντος ἑνὸς συνόλου, φυσικὴ εἶναι ἡ σκέψις νὰ ὑποδιαιρέσωμεν τοῦτο καὶ νὰ θεωρήσωμεν τμήματα αὐτοῦ. Τὰ τμήματα ἑνὸς συνόλου λέγονται ὑποσύνολα (subsets), καὶ εἰδικώτερον :

Τὸ σύνολον P εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου T ἂν πᾶν στοιχεῖον τοῦ P εἶναι στοιχεῖον τοῦ T.

Θὰ παραστήσωμεν τοῦτο γράφοντες $P \subset T$, «τὸ P περιέχεται εἰς τὸ T», ἤ, ἐνίοτε $T \supset P$, «Τὸ T περιέχει τὸ P». Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ὁ ὁρισμὸς τοῦ ὑποσυνόλου δὲν δηλοῖ κατ' ἀνάγκην ὅτι τὸ σύνολον P εἶναι τμῆμα τοῦ T κατὰ τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ P εἶναι «μικρότερον» ἢ περιέχει ὀλιγώτερα στοιχεῖα τοῦ T. Ὁ ὁρισμὸς ἐπιτρέπει εἰς τὸ P νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ T, ὡς δύναται εὐχερῶς νὰ γίνῃ ἀντιληπτόν [2]. Ἂν ἔχωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ P εἶναι ὑποσύνολον τοῦ T ἀλλὰ τὸ T περιέχει ἓν ἢ πλείονα στοιχεῖα μὴ περιεχόμενα εἰς τὸ P, τότε τὸ P καλεῖται ***γνήσιον ὑποσύνολον*** (proper subset) τοῦ T καὶ γράφομεν $P \subsetneqq T$.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἔχομεν δύο σύνολα A, B [3]. Τότε δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ἀρκετὰ δυνατὰ σύνολα. Ἓν προφανὲς σύνολον εἶναι τὸ προκῦπτον ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν στοιχείων τῶν A καὶ B:

Ἡ ***ἕνωσις*** τῶν A καὶ B, $(A \cup B)$, εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν στοιχείων τῶν ἀνηκόντων ἢ εἰς τὸ A ἢ εἰς τὸ B ἢ εἰς ἀμφότερα.

Συμβολικῶς:

$$A \cup B = \{\chi \mid \chi \in A \text{ ἢ } \chi \in B\}$$

Παράδειγμα: ἂν $A = \{1, \text{σκύλος}, \text{καναρίνι}, \bar{X}\}$, $B = \{1, \text{καναρίνι}, \bar{\Gamma}\}$, τότε $A \cup B = \{1, \text{σκύλος}, \text{καναρίνι}, \bar{X}, \bar{\Gamma}\}$. Σημειώσατε ὅτι, μολονότι τὸ στοιχεῖον «καναρίνι» ἐμφανίζεται εἰς ἀμφότερα τὰ σύνολα A, B, ἐμφανίζεται μόνον ἅπαξ εἰς τὸ σύνολον $A \cup B$.

Ἂν A καὶ B ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν καὶ ἄλλα σύνολα.

Ἡ *τομὴ* τῶν A καὶ B εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ἀμφότερα τὰ A καὶ B. Τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ:

$$A \cap B = \{\chi \mid \chi \in A \text{ καὶ } \chi \in B\}$$

Περαιτέρω, ἂν τὰ A καὶ B ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα, εἶναι λογικὸν νὰ θελήσωμεν νὰ θεωρήσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ B τὰ μὴ περιλαμβανόμενα εἰς τὸ A.

Ἔστωσαν τὰ A καὶ B· ἡ ***διαφορὰ*** $B - A$ εἶναι τὸ ὑποσύνολον τοῦ B τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα δὲν εἶναι εἰς τὸ A, ἢ

$$B - A = \{\chi \mid \chi \in B \text{ καὶ } \chi \notin A\}.$$

Τελικῶς, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν A καὶ B εἶναι τοιαῦτα ὥστε ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ B περιέχονται εἰς τὸ A. Ἔχομεν οὕτω εἰδικὴν περίπτωσιν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρω περιπτώσεως — περίπτωσιν ἐπαρκῶς σημαντικὴν διὰ νὰ τῆς δώσωμεν εἰδικὴν ὀνομασίαν:

---

2) Ὁπωσδήποτε ἂν $A \subset B$ καὶ $B \subset A$ τότε $A = B$.

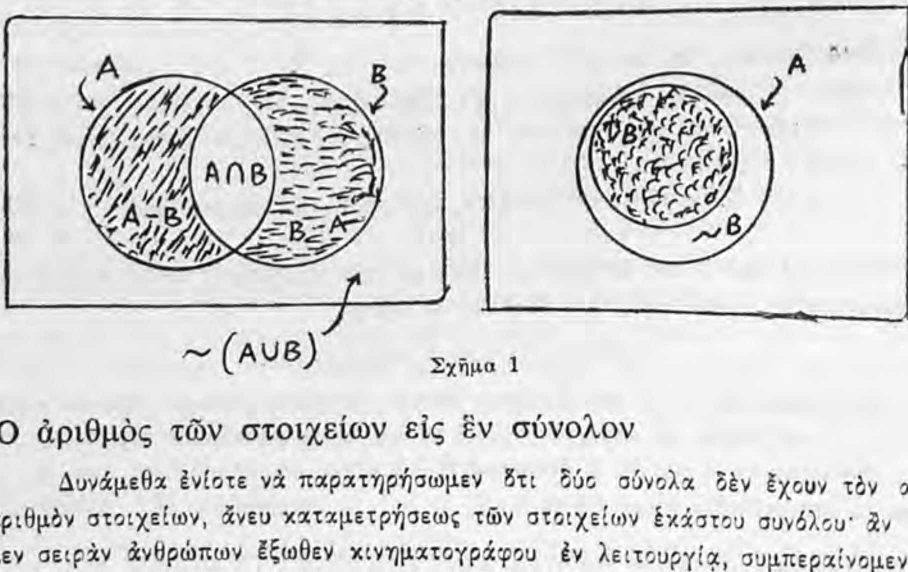
3) Θὰ λάβωμεν κατὰ συνθήκην ὅτι ὅλα τὰ σύνολα εἶναι ὑποσύνολα δοθέντος (ἢ γενικοῦ) συνόλου. Αὐτό, ὁμοῦ μετὰ τῆς ἀνωτέρω ἀναφερθείσης συνθήκης ὅτι ἓν στοιχεῖον πρέπει πάντοτε νὰ ἀνήκῃ εἰς ἓν σύνολον, θὰ μᾶς ἐξασφαλίσῃ τὴν ἔλλειψιν παραδόξων εἰς τὴν σπουδήν μας τῶν συνόλων.

Ἔστωσαν τὰ A καὶ B καὶ $B \subset A$· τότε, ὅταν λέγωμεν ***συμπλήρωμα τοῦ B εἰς τὸ A*** ἐννοοῦμεν τὸ σύνολον τῶν στοιχείων εἰς τὸ A τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχουν εἰς τὸ B καὶ ἐκφράζομεν αὐτὸ γράφοντες $\sim B$.

Ἕκαστος τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν δύναται νὰ γενικευθῇ εἰς τρία ἢ πλείονα σύνολα. Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὰ σύνολα $A_1, A_2, \ldots A_\nu$, ὅπου ν οἱοσδήποτε θετικὸς ἀκέραιος ἀριθμός, τότε ἡ ἕνωσις τῶν δοθέντων συνόλων, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$, εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τῶν ἀνηκόντων εἰς ἓν τουλάχιστον τῶν δοθέντων συνόλων καὶ ἡ τομή, $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu$, εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τῶν ἀνηκόντων εἰς ὅλα τὰ δοθέντα σύνολα.

Εὐχερῶς τώρα κατανοοῦμεν τὴν μεγάλην χρησιμότητα τοῦ κενοῦ συνόλου. Π.χ. ἂν ἐξακριβώσωμεν ὅτι $A \cap B = \emptyset$, γνωρίζομεν ὅτι τὰ A καὶ B δὲν ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα (ἤ, ὡς λέγομεν ἐνίοτε, τὰ A καὶ B εἶναι ἀμοιβαίως ἀποκλειστικὰ σύνολα). Ὁμοίως, τὸ σύνολον $B - A$ δυνατὸν νὰ εἶναι κενόν, ἢ δυνατὸν νὰ ἔχωμεν $\sim A = \emptyset$, ὅπου $A \subset B$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ σημαίνῃ ὅτι $A = B$[4].

Αἱ ἔννοιαι αὗται δύνανται εὐχερῶς νὰ παρασταθοῦν μέσῳ διαγραμμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι γνωστὰ ὡς Βέννια διαγράμματα (Venn diagrams).



Σχῆμα 1

Ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων εἰς ἓν σύνολον

Δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι δύο σύνολα δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων, ἄνευ καταμετρήσεως τῶν στοιχείων ἑκάστου συνόλου· ἂν ἴδωμεν σειρὰν ἀνθρώπων ἔξωθεν κινηματογράφου ἐν λειτουργίᾳ, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν καθισμάτων τοῦ κινηματογράφου περιέχει ὀλιγώτερα στοιχεῖα ἢ τὸ σύνολον τῶν ἀνθρώπων τῶν ἐπιθυμούντων νὰ ἴδουν τὴν ταινίαν κατ' αὐτὴν τὴν ὥραν, καὶ καταλήγοντες εἰς αὐτὸ τὸ συμπέρασμα, δὲν γνωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχείων εἰς ἕκαστον σύνολον. Οὕτω, προσδιορίζομεν ἂν δύο σύνολα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων σχηματίζοντες ἀντιστοιχίαν τῶν στοιχείων εἰς τὰ δύο σύνολα. Ἂν ἡ ἀντιστοιχία εἶναι πλήρης — δὲν ὑπάρχουν στοιχεῖα ὑπολειπόμενα

4) Ἂς λεχθῇ παρεμπιπτόντως ὅτι εἶναι λογικώτερον νὰ λέγωμεν «τὸ» κενὸν σύνολον παρὰ «ἓν» κενὸν σύνολον, διότι ὑπάρχει μόνον ἓν τοιοῦτον σύνολον. Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι ὑπάρχουν δύο κενὰ σύνολα, ἔστωσαν X καὶ Ψ. Ἀφοῦ τὸ κενὸν σύνολον εἶναι ὑποσύνολον παντὸς συνόλου, ἔχομεν $X \subset Y$ καὶ ἐπίσης $\Psi \subset X$, ὅπερ συνεπάγεται ὅτι $X = \Psi$.

εἰς ἓν σύνολον — λέγομεν ὅτι ταῦτα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων. Ἡ ἀρχὴ αὕτη τῆς ἀντιστοιχίας εἶναι ἡ βάσις μιᾶς ἐννοίας μαθηματικῆς μεγάλης σημασίας, γνωστῆς ὡς ***«ἀντιστοιχία ἓν πρὸς ἕν»***.

Τὰ σύνολα $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ καὶ $T = \{\chi, \psi, \omega, \ldots\}$ θεωροῦνται εὑρισκόμενα εἰς ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἕν, ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν ζεύγη στοιχείων οὕτως ὥστε ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Σ νὰ ἀντιστοιχῇ μὲ ἓν καὶ μόνον στοιχεῖον τοῦ T καὶ ἀντιστρόφως.

Ὅταν δύο σύνολα δύνανται νὰ τοποθετηθοῦν εἰς ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἕν, καλοῦνται ***ἰσοδύναμα*** ($A \leftrightarrow B$). Δυστυχῶς ἡ λέξις ἰσοδύναμος εἶναι συνώνυμος τῆς λέξεως «ἴσος» εἰς τὴν καθ' ἡμέραν χρῆσιν, οὕτως ὁ ὁρισμὸς οὗτος ἀπαιτεῖ προσοχήν. Δύο σύνολα δύνανται, βεβαίως, νὰ εἶναι ἰσοδύναμα, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ στοιχεῖα των διαφέρουν εὑρέως: σύνολον 15 ἐλεφάντων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς σύνολον 15 ποδοσφαιρικῶν γηπέδων ἢ πρὸς πᾶν ἕτερον σύνολον περιέχον 15 στοιχεῖα.

Ἡ γνωστή μας ἀρίθμησις εἶναι στενῶς συνδεδεμένη πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς ἀντιστοιχίας ἓν πρὸς ἕν. Ἔστωσαν τὰ σύνολα: A ὡς ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, καὶ B ὡς ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα θέλομεν νὰ ἀριθμήσωμεν. Ἀριθμοῦμεν θέτοντες εἰς ἀντιστοιχίαν ἀκεραίους ἀριθμοὺς πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ B, διαδοχικῶς, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ 1, καὶ ὁ τελευταῖος ἀκέραιος σχηματίζων ζεῦγος μὲ στοιχεῖον τοῦ B εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων τοῦ B. Δυνάμεθα ὁμοίως νὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς θετικοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς — ἢ «φυσικοὺς ἀριθμοὺς» ὡς οὗτοι ἐνίοτε καλοῦνται — διὰ νὰ εἰσαγάγωμεν δύο νέας τάξεις συνόλων: τὰ πεπερασμένα καὶ τὰ ἀπειροσύνολα. Πεπερασμένον εἶναι τὸ σύνολον τὸ ὁποῖον περιέχει στοιχεῖα τῶν ὁποίων ἡ ἀρίθμησις δύναται νὰ περατωθῇ. Ἤτοι:

Ἔστωσαν τὰ I, σύνολον ὅλων τῶν θετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν $\{1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\}$ καὶ I_ν τὸ ὑποσύνολον τοῦ I, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν

$$I_\nu = \{\chi \mid \chi \in I \text{ καὶ } 1 \leqq \chi \leqq \nu\}$$

(Δηλ. τὸ I_ν εἶναι τὸ ὑποσύνολον τοῦ I ἀποτελούμενον ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς $1, 2, \ldots, \nu$). Τότε, ἓν σύνολον Σ εἶναι πεπερασμένον ἂν $\Sigma \leftrightarrow I_\nu$. Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι πεπερασμένον, ὡς ὡρίσθη, δὲν σημαίνει «μικρόν». Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἠλεκτρονίων εἰς τὸ σύμπαν εἶναι «μέγα», ἀλλ' ὑπάρχει σύνολον I_ν ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό.

Εὐχερῶς ὁρίζομεν τώρα ἓν ἀπειροσύνολον: ἓν σύνολον εἶναι ἀπειροσύνολον ἂν δὲν εἶναι οὔτε κενὸν οὔτε πεπερασμένον. Διαισθητικῶς, ἓν ἀπειροσύνολον εἶναι ἓν σύνολον περιέχον τόσα στοιχεῖα ὥστε ἡ ἀρίθμησίς των οὐδέποτε θὰ ἤρχετο εἰς πέρας. Παράδειγμα συνόλου στερουμένου «τελευταίου» στοιχείου εἶναι τὸ σύνολον I ὅλων τῶν θετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Εἰς τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἂν χ καὶ ψ ἀνήκουν εἰς τὸ I, τότε $\chi+\psi$ καὶ $\chi\psi$ ἀνήκουν εἰς τὸ I ἐπίσης. Ἂς ὑποτεθῇ τώρα ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιος χ ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ τελευταῖον μέλος τοῦ I. Ἀλλὰ $\chi + 5 \in I$· ἔχομεν ἀντίφασιν — τὸ χ δὲν δύναται νὰ εἶναι τὸ τελευταῖον στοιχεῖον τοῦ I.

Τὰ ἀπειροσύνολα εἶναι ἐνδιαφέροντα καὶ παίζουν σπουδαῖον ρόλον εἰς τὰ θεωρητικά καὶ ἐφηρμοσμένα μαθηματικά. Ἓν τῶν ἐνδιαφερόντων χαρακτηριστικῶν εἶναι ὅτι ἓν ἀπειροσύνολον δύναται νὰ τεθῇ εἰς ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἓν μὲ ἓν γνήσιον ὑποσύνολόν του(5). Ἂς θεωρηθῇ, π.χ., τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀρτίων ἀκεραίων ἀριθμῶν $I_e = \{2, 4, 6, \ldots, 2\nu, \ldots\}$. Τὸ σύνολον αὐτὸ εἶναι καὶ ἀπειροσύνολον καὶ γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ I, καὶ εἷς τρόπος νὰ δειχθῇ ἡ ἀντιστοιχία ἓν πρὸς ἓν μεταξὺ I καὶ I_e εἶναι ὁ κάτωθι :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots\ldots & \nu \ldots\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 \ldots\ldots & 2\nu \ldots\ldots \end{array}$$

Σύνολά τινα ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ μὴ δύνανται νὰ τεθοῦν εἰς ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἓν μὲ τὸ I, μολονότι εἶναι ἀπειροσύνολα. Δηλ. ἂν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ἐκ τῶν συνόλων αὐτῶν σχηματίσουν ζεύγη μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ I, τότε ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ I θὰ ἐξαντληθοῦν καὶ θὰ ἔχουν ἀπομείνει στοιχεῖα εἰς τὸ σύνολον. Παράδειγμα τοιούτου συνόλου εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μεταξὺ 0 καὶ 1. Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ σύνολον αὐτὸ εἶναι ἀπειροσύνολον, δὲν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον I. Ὑπάρχουν «περισσότεροι» πραγματικοὶ ἀριθμοὶ εἰς τὸ σύνολον ἢ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἰς τὸ I. Αἱ δύο αὗται σειραὶ ἀπεριοριστίας ὁδηγοῦν εἰς τοὺς κάτωθι ὁρισμούς :

Ἓν ἀπειροσύνολον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον I ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καλεῖται ***ἀριθμητὸν ἀπειροσύνολον***· εἰ δ' ἄλλως καλεῖται ***μὴ ἀριθμητὸν ἀπειροσύνολον***.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν χ καὶ ψ ($\chi \neq \psi$) καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων τμήματος εὐθείας εἶναι παραδείγματα μὴ ἀριθμητῶν ἀπειροσυνόλων.

Ὁ ἀναγνώστης ἴσως ἔχῃ τώρα τὴν ἐντύπωσιν ὅτι παραθέτομεν ὁρισμοὺς ἐπὶ ὁρισμῶν ἄνευ σκοποῦ, ἀπομακρυνόμενοι συνεχῶς δυνατῶν ἐφαρμογῶν κατὰ τὴν ἀνάλυσιν, συμβαίνει ὅμως αἱ ἔννοιαι αὗται νὰ εἶναι οὐσιώδους βαρύτητος τόσον εἰς τὰ θεωρητικὰ ὅσον καὶ εἰς τὰ ἐφηρμοσμένα μαθηματικά. Ἡ ἔννοια τῆς μὴ δυναμένης νὰ ἀριθμηθῇ ἀπεριοριστίας, π.χ., χρησιμοποιεῖται εὐρέως. Τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀριθμητόν, ὅπως καὶ τὰ σύνολα τῶν σημείων εὐθειῶν καὶ τμημάτων καμπυλῶν καὶ ἡ γνῶσις εἶναι θεμελιώδης εἰς τὴν συνέχειαν καὶ ἱκανότητα διαφορισμοῦ τῶν συναρτήσεων — ἐννοιῶν εὑρισκομένων εἰς τὴν βάσιν πολλῶν ἐφαρμογῶν. Τῷ ὄντι, ἀπειροσύνολα ἀριθμητὰ ἢ μὴ προῆλθον ἀπὸ τὰ αἰτήματα τοῦ ὑλικοῦ κόσμου τὰ βασιζόμενα ἐπὶ τῆς χρήσεως τῶν ἀριθμῶν, ὡς κατανοεῖται ἐκ τῆς ἀναπτύξεως τοῦ ἀριθμητικοῦ μας συστήματος. Ἡ πρᾶξις τῆς ἀφαιρέσεως, ἐπὶ παραδείγματι, ὡδήγησεν ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀκεραίων (θετικῶν, ἀρνητικῶν καὶ μηδενός). Ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως προεκάλεσεν ἑτέραν ἐπέκτασιν οὕτως ὥστε νὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ

5) Εἰς τυπικωτέραν μαθηματικὴν ἀνάπτυξιν, ἓν ἀπειροσύνολον ὁρίζεται ὡς σύνολον ἔχον τὴν ἰδιότητα ταύτην (δηλ. σύνολον ἰσοδύναμον πρὸς γνήσιον ὑποσύνολόν του). Τότε τὸ πεπερασμένον σύνολον ὁρίζεται ὡς σύνολον μὴ δυνάμενον νὰ τεθῇ εἰς ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἓν μὲ γνήσιον ὑποσύνολόν του.

θεώρησις ἀριθμῶν τῆς μορφῆς π/ρ, ἔνθα π καὶ ρ ἀκέραιοι, $\rho \neq 0$. Ἡ ἐξαγωγὴ τετραγωνικῶν ριζῶν ἐπέφερεν ἑτέρας δύο ἐπεκτάσεις τοῦ συστήματος. Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι θετικῶν ἀριθμῶν ὡς $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, δὲν ἠδύναντο νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς κανονικὰ κλάσματα· τοιοῦτοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν (σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν) (6). Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ὡς ἡ $\sqrt{-2}$, ὡδήγησαν εἰς τὸ σύστημα τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν (ἡ ἄτυχος λέξις «φανταστικὸς» εἶναι ὑπόλειμμα προηγουμένου αἰῶνος· ὁ φανταστικὸς ἀριθμὸς ἔχει σταθερὰν ὕπαρξιν εἰς τὰ μαθηματικὰ ὡς πᾶς ἕτερος ἀριθμός) (7). Αἱ συνδυασμέναι πράξεις τῆς προσθέσεως πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἐξαγωγῆς τετραγωνικῶν ριζῶν ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δίδουν τὸ σύστημα τῶν μιγάδων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν μορφὴν $\alpha + \beta i$, ὅπου α καὶ β πραγματικοὶ καὶ $i = \sqrt{-1}$. Τὸ κάτωθι διάγραμμα ἀνακεφαλαιώνει τὰς ἰδέας αὐτάς.

Φυσικοὶ ἀριθμητοὶ (ἀπεριόριστοι ἀριθμητοὶ)
Μηδὲν
Ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι (ἀπεριόριστοι ἀριθμητοὶ)
— ἀκέραιοι (ἀπεριόριστοι ἀριθμητοὶ)

ἀκέραιοι (ἀπεριόριστοι ἀριθμητοὶ)
κλάσματα (ἀπερ. ἀριθ.)
— σύμμετροι (ἀπερ. ἀριθ.)

σύμμετροι (ἀπερ. ἀριθ.)
ἀσύμμετροι (ἀπερ. μὴ ἀριθμητοὶ)
— πραγμτικοὶ β = (ἀπερ. μὴ ἀριθμητοὶ)

πραγμτικοὶ β = (ἀπερ. μὴ ἀριθμητοὶ)
φανταστικοὶ $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ (ἀπερ. μὴ ἀριθμητοὶ)
— μιγάδες $\alpha + \beta i$, α καὶ β πραγματικοὶ (ἀπεριόρ. μὴ ἀριθμητοὶ)

---

6) Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς ἀπεριόριστοι δεκαδικαὶ ἐπεκτάσεις, ὡς π.χ. 0,35291784392... Αἱ δεκαδικαὶ ἐπεκτάσεις συμμέτρων ἀριθμῶν εἶναι ἐπίσης ἀπεριόριστοι (1/3=0,33333..., 8/7=1, 142857142857..) ἀλλ' εἰς ἑκάστην ἐπέκτασιν τὰ ψηφία μετά τινα θέσιν ἐπαναλαμβάνονται καθ' ὁμάδας ὡς τὸ (3) καὶ (142857) ἀνωτέρω. Ὑπάρχει ἓν θεώρημα, π.χ., κατὰ τὸ ὁποῖον ἕκαστος περιοδικὸς δεκαδικὸς εἶναι σύμμετρος καὶ ἀντιστρόφως. Δύναται ἐπίσης νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν τὴν ἰδιότητα ταύτην· οὐδεὶς σαφὴς τύπος εἶναι γνωστὸς διὰ τὴν διαδοχὴν τῶν στοιχείων εἰς τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς.

7) Ἀφοῦ $\sqrt{-2} = \sqrt{2}\,\sqrt{-1}$, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὸν φανταστικὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὡς $\sqrt{2}i$, δηλ. ὡς γινόμενον τῆς ρίζης θετικοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καὶ i, ὅπου $i = \sqrt{-1}$. Ἐκ τούτου, πᾶς φανταστικὸς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $\sqrt{-k}$ δύναται νὰ γραφῇ $\sqrt{k}i$.

Πολλὰ ἐνδιαφέροντα χαρακτηριστικὰ ἀπειροσυνόλων εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναφερθοῦν. Ὑπάρχουν, ἐπὶ παραδείγματι, ὑψηλότεραι «σειραὶ» (ἢ «τάξεις») ἀπειροριστίας περὶ τῶν ὁποίων ἀσχολεῖται ἡ θεωρία τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν, καὶ ὑπάρχουν συναρπαστικὰ θεωρήματα περὶ αὐτῶν (ἡ ἕνωσις καὶ ἡ τομὴ δύο ἀπειροσυνόλων μὴ ἀριθμητῶν εἶναι μὴ ἀριθμητὰ ἀπειροσύνολα, κλπ.) ἡ ἐξέτασις τῶν ὁποίων εὑρίσκεται, δυστυχῶς, ἐκτὸς τοῦ θέματός μας.

Διατεταγμένα ζεύγη καὶ συναρτήσεις

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως χρησιμοποιεῖται κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ἐνίοτε μετὰ προσοχῆς, ἐνίοτε ἐλαστικῶς, ἐνίοτε λανθασμένως· ἐνίοτε τὴν χρησιμοποιοῦμεν διὰ νὰ ἐκφράσωμεν χαλαρὰν σχέσιν μεταξὺ μεταβλητῶν, δημιουργοῦντες οὕτω τὴν δυνατότητα (ἴσως ἐξ ἀμελείας) νὰ νομίσουν ἄλλοι ὅτι αἱ μεταβληταὶ συσχετίζονται καθ' ὡρισμένον καὶ ἐντονώτερον τρόπον ἢ εἰς τὴν πραγματικότητα. Ὁ προσεκτικὸς ὁρισμὸς τῆς συναρτήσεως εἶναι ἐπιτακτικός, ὄχι μόνον διὰ τὴν κατανόησιν τῶν ἀκολούθως ἀναπτυσσομένων, ἰδίᾳ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἀλλ' ἐπίσης, ἕνεκα τῆς ἀσαφείας τῆς δημιουργηθείσης ὑπὸ τῆς ποικιλίας τῶν χρήσεων τῆς συναρτήσεως εἰς ἐφαρμογάς, τοιοῦτος ὁρισμὸς ἀξίζει νὰ δοθῇ ὀρθῶς. Θὰ θεωρήσωμεν ἀρχικῶς προκαταρκτικάς τινας ἰδέας.

Ἡ πρώτη εἰσαγομένη ἔννοια εἶναι τοῦ *ζεύγους* στοιχείων. Ἔστω τὸ σύνολον $A = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$. Τότε ἓν ζεῦγος τοῦ A εἶναι ὑποσύνολον τοῦ A, $\{\alpha, \beta\}$, συνιστάμενον ἐκ δύο στοιχείων, α, β τοῦ A. Ἂς θεωρήσωμεν ἐπιπροσθέτως τὴν σειρὰν τῶν στοιχείων τοῦ ζεύγους οὕτως ὥστε νὰ ὁρίσωμεν ποῖον στοιχεῖον προηγεῖται καὶ ποῖον ἕπεται· τὸ σύνολον τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν α καὶ β, ὁμοῦ μετὰ τῆς καθωρισμένης σειρᾶς αὐτῶν, καλεῖται ***διατεταγμένον ζεῦγος*** (ordered pair) καὶ δηλοῦται διὰ (α, β).

Τὰ διατεταγμένα ζεύγη (α, β) καὶ (γ, δ) καλοῦνται ἴσα μόνον ὅταν $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$. Ὁπωσδήποτε, τὰ ζεύγη (σύνολα) $\{\alpha, \beta\}$ καὶ $\{\gamma, \delta\}$ εἶναι ἴσα ἂν $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$, ἢ $\alpha = \delta$ καὶ $\beta = \gamma$.

Ἔστωσαν τὰ σύνολα $M = \{\theta, \iota, \varkappa, . . .\}$ καὶ $N = \{\rho, \sigma, \tau, . . .\}$. Ἑκάστη ἐκλογὴ ἑνὸς στοιχείου τοῦ M καὶ ἑνὸς τοῦ N ὁρίζει διατεταγμένον ζεῦγος, ἔστω (ι, τ). Θὰ ἐπιτρέψωμεν, διὰ λόγους ἁπλότητος, τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐννοίας τοῦ διατεταγμένου ζεύγους καὶ ἂν τὰ δύο στοιχεῖα αὐτοῦ εἶναι ἴσα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν ἓν διατεταγμένον ζεῦγος, ἔστω τῆς μορφῆς (α, α), εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διάταξις οὐδεμίαν σημασίαν ἔχει. Παραθέτομεν τὴν ἐπεξήγησιν ταύτην διότι, ὅταν σχηματίζωνται διατεταγμένα ζεύγη ἐκ πλειόνων τοῦ ἑνὸς συνόλων, ἡ πιθανότης νὰ ἔχουν τὰ σύνολα κοινὰ στοιχεῖα προκύπτει φυσικῷ τῷ λόγῳ, καὶ ἡ ἐκλογὴ ἑνὸς στοιχείου ἐκ τοῦ ἑνὸς συνόλου καὶ ἑνὸς στοιχείου ἐκ τοῦ ἑτέρου συνόλου θὰ ἠδύνατο νὰ δώσῃ διατεταγμένα ζεύγη τῆς μορφῆς (α, α). Τοιαῦτα διατεταγμένα ζεύγη εἶναι σπουδαιότατα, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Ἂς ἐπιστρέψωμεν εἰς τὰ σύνολα $M = \{\theta, \iota, \varkappa, ...\}$ καὶ $N = \{\rho, \sigma, \tau, ...\}$. Ἔστω χ τὸ σύμβολον τὸ ἀντιπροσωπεῦον οἱονδήποτε στοιχεῖον τοῦ M (Δηλ. τὸ χ εἶναι μεταβλητὴ ὡς πρὸς τὸ M) καὶ ἔστω ψ μεταβλητὴ ὡς πρὸς τὸ N. Τότε ἑκάστη ἐκλογὴ στοιχείου $\chi \in M$ καὶ $\psi \in N$ ὁρίζει ἓν διατεταγμένον ζεῦγος (χ, ψ). Ἂς θεωρήσωμεν ἓν διατεταγμένον ζεῦγος ὡς ἓν ἀντικείμενον καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῶν σχηματιζομένων ἐκ τῶν συνόλων M καὶ N. Τὸ νέον αὐτὸ σύνολον — ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ὁποίου εἶναι διατεταγμένον ζεῦγος — καλεῖται καρτεσιανὸν γινόμενον τῶν συνόλων M καὶ N ἤ, βραχύτερον, τὸ σύνολον γινομένου, καὶ ἐκφράζεται μὲ $M \times N$ (8). Εἰς τὴν παραστατικὴν τῶν συνόλων, τὸ σύνολον αὐτὸ ὁρίζεται ὡς

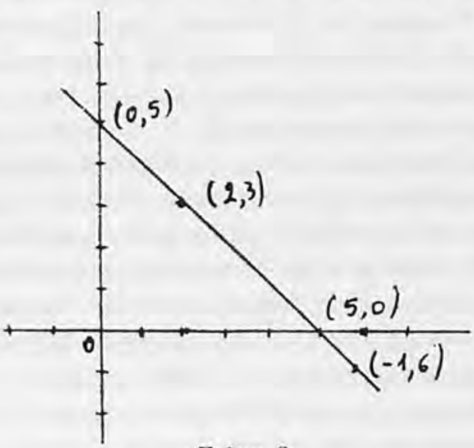
$$M \times N = \{(\chi, \psi) \mid \chi \in M \text{ καὶ } \psi \in N\}$$

Τὸ πραγματικὸν ἐπίπεδον τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας παρέχει ἴσως τὸ πλέον γνωστὸν παράδειγμα συνόλου γινομένου. Ἕκαστον σημεῖον εἰς τὸ ἐπίπεδον ἀντιπροσωπεύεται ὑφ' ἑνὸς διατεταγμένου ζεύγους πραγματικῶν ἀριθμῶν (χ, ψ), καὶ εἰς τὴν ἀπεικόνισιν ταύτην ἡ σπουδαιότης τῆς διατάξεως εἶναι εὐχερῶς ἀντιληπτή, διότι τὸ σημεῖον $(2, 5)$ δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ σημεῖον $(5, 2)$. Ἔστωσαν τὰ σύνολα $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ καὶ $P = \{\rho_1, \rho_2\}$. Τότε $\Pi \times P$ εἶναι τὸ σύνολον:

$$\{(\pi_1, \rho_1), (\pi_1, \rho_2), (\pi_2, \rho_1), (\pi_2, \rho_2), (\pi_3, \rho_1), (\pi_3, \rho_2)\}.$$

(Παρατηρήσατε ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ διατεταγμένου ζεύγους δὲν ἀπαιτεῖ οὔτε ἰσοδυναμίαν μεταξὺ τῶν συνόλων M καὶ N οὔτε ὅτι πρέπει νὰ εἶναι διάφορα μεταξύ των).

Εἴμεθα πλέον ἕτοιμοι νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως. Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν ἰσότητα (ἐξίσωσιν) $\chi + \psi = 5$ (9). Γραφικῶς εἰς τὸ ἐπίπεδον, αὕτη



Σχῆμα 2

8) Ἡ ἔννοια τοῦ διατεταγμένου ζεύγους δὲν περιλαμβάνει ἰδέας ἔξωθεν τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, ὡς «εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ» ἢ «προηγούμενον τοῦ». Ἓν διατεταγμένον ζεῦγος καθορίζεται ἂν ἀναφέρωμεν τὰ δύο στοιχεῖα του καὶ ποῖον εἶναι τὸ πρῶτον στοιχεῖον του. Ὁ καθορισμὸς οὗτος ἐκφράζεται σαφῶς ἂν ὁρίσωμεν τὸ σύνολον τὸ περιέχον τὰ δύο στοιχεῖα καὶ κατόπιν τὸ σύνολον τὸ ἀποτελούμενον ἐκ μόνον τοῦ πρώτου στοιχείου:

$$\{(\alpha, \beta), (\alpha)\}$$

9) Ἡ χρῆσις τοῦ συμβόλου ἰσότητος εἰς τὰς ἐξισώσεις διαφέρει τῆς χρήσεώς του μεταξὺ στοιχείων καὶ συνόλων. Εἰς ἐξίσωσιν ὅπως $\chi+\psi=5$, τὸ σύμβολον ἰσότητος δηλοῖ

θὰ δώσῃ εὐθεῖαν πᾶν σημεῖον τῆς ὁποίας δύναται νὰ ἀντιπροσωπευθῇ ὑφ' ἑνὸς διατεταγμένου ζεύγους (χ, ψ) τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδιότητα τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων του νὰ εἶναι 5. Τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (χ, ψ) τοιοῦτον ὥστε $\chi+\psi=5$ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου ὅλων τῶν σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν χ, ψ, καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον εἶναι τὸ σύνολον γινομένου $X\times\Psi$, ὅπου X εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ, καὶ Ψ εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ. Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις $\chi+\psi=5$ κατευθύνει τὴν προσοχήν μας εἰς ὑποσύνολον τοῦ συνόλου γινομένου - ὑποσύνολον, πρέπει νὰ σημειωθῇ, μὲ τὸ χαρακτηριστικὸν ὅτι δοθεὶς ἀριθμὸς χ δὲν ἐμφανίζεται ὡς τὸ πρῶτον στοιχεῖον διατεταγμένου ζεύγους πλέον τῆς μιᾶς φορᾶς. Τὸ παράδειγμα αὐτὸ ὁδηγεῖ εἰς τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς συναρτήσεως:

Ἔστωσαν τὰ σύνολα Σ καὶ Τ καὶ ὑποτεθείσθω ὅτι εἰς ἕκαστον $\chi\in\Sigma$ εἰς κανὼν ἢ ἀντιστοιχία προσδιορίζει ἓν καὶ μόνον στοιχεῖον $\psi\in T$. Τότε ὁ κανὼν οὗτος ὁρίζει ἓν σύνολον φ διατεταγμένων ζευγῶν καὶ τὸ σύνολον αὐτὸ καλεῖται συνάρτησις τοῦ Σ πρὸς τὸ Τ.

Ἡ συνάρτησις εἶναι λοιπὸν σύνολον — σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν — καὶ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου γινομένου, $\Sigma\times T$. Ὁ κανὼν ἢ ἀντιστοιχία εἶναι ἡ ἰδιότης, ἡ ὁποία προσδιορίζει τὸ σύνολον, ἢ ποῖα ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ $\Sigma\times T$ θὰ περιληφθοῦν εἰς ὑποσύνολον καλούμενον σύνολον συναρτήσεως.

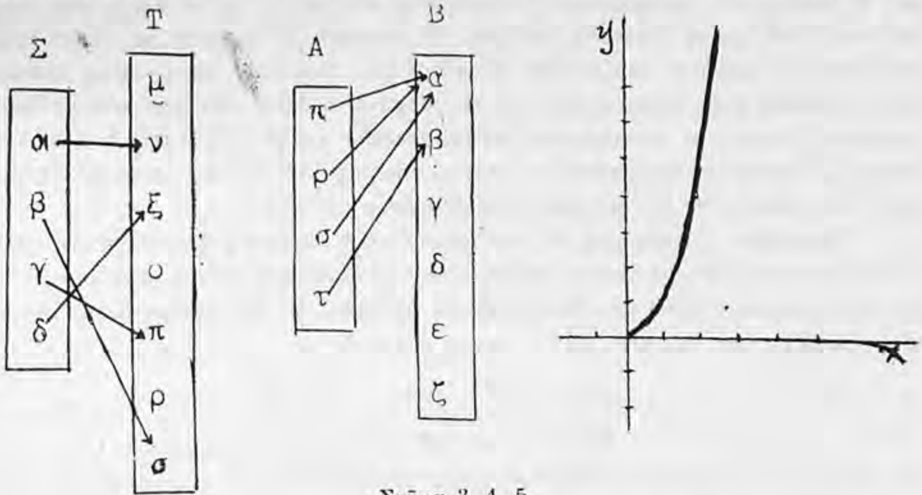
Τὸ σύνολον Σ καλεῖται ἡ περιοχὴ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως φ καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν στοιχείων $\psi\in T$ τὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται δεύτερα εἰς τὰ διατεταγμένα ζεύγη εἰς τὴν φ καλεῖται *ἔκτασις* τῆς συναρτήσεως. Τὸ σύμβολον ψ καλεῖται ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς χ καὶ γράφεται πολλάκις φ(χ). Ἡ ἔκτασις τῆς φ — ἡ ὁποία εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Τ — καλεῖται τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως φ. Ὁμοίως, ἂν χ εἶναι μεταβλητὴ ὡς πρὸς Σ, τότε τὸ χ καλεῖται ἡ *ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ* τῆς συναρτήσεως· ἂν ψ εἶναι μεταβλητὴ ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν τῆς φ, τότε τὸ ψ καλεῖται *ἐξηρτημένη μεταβλητή*. Τὰ σχήματα 3-5 θὰ διευκολύνουν τὴν κατανόησιν τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως.

Ἔστω X τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἔστω Υ τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ ἔστω φ τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (χ, ψ), ἔνθα $\psi=\varphi(\chi)=\chi^2$.

Τὸ σχῆμα 3 πληροῖ τὰς προϋποθέσεις τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως. Ἐδῶ ἡ ἔκτασις τῆς συναρτήσεως εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Τ. Τὸ σχῆμα 4 δεικνύει μίαν συνάρτησιν, ἡ ὁποία ἔχει τὰ διατεταγμένα ζεύγη {(π, α), (ρ, α), (σ, α), (τ, β)}. Δύο διατεταγμένα ζεύγη δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ πρῶτον στοιχεῖον —ὅπως ἀπαιτεῖται— ἀλλὰ διατεταγμένα τινὰ ζεύγη ἔχουν τὸ αὐτὸ δεύτερον στοιχεῖον — ὅπερ ἐπιτρέπεται. Τὸ σχῆμα 5 εἶναι κλασσικωτέρα παρουσίασις μιᾶς συναρτήσεως. Ἐδῶ

ὑποθετικὴν ἰσότητα· ἡ ἰσότης ἐπαληθεύεται μόνον διὰ τὰς τιμὰς χ καὶ ψ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων εἶναι 5 — ὄχι δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ. Εἰς ἰσότητας ἐπαληθευομένας δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν τὸ σύμβολον ἰσότητος ἔχει συνήθως τρεῖς γραμμὰς ≡ καὶ ἡ ἰσότης καλεῖται ταυτότης δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν.

τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν εἶναι τὸ σύνολον $(\chi, \psi = \chi^2)$, $\chi \geqq 0$. Ἡ συνάρτησις αὕτη παρουσιάζει ἰδιότητα, τὴν ὁποίαν δὲν ἔχουν αἱ ἄλλαι: ἕκαστον στοιχεῖον $\psi \in \Psi$ ἔχει ἓν ἀντίστοιχον, ἓν «ταῖρι» εἰς X. Ὅταν ἡ ἔκτασις τῆς



Σχῆμα 3, 4, 5.

συναρτήσεως εἶναι ὁλόκληρον τὸ Ψ, λέγομεν ὅτι ἔχομεν συνάρτησιν τοῦ X ἐπὶ τοῦ (onto) Ψ. Συνάρτησις ἐπὶ τοῦ Ψ εἶναι λοιπὸν εἰδικὴ περίπτωσις συναρτήσεως ὡς πρὸς Ψ: ἂν συνάρτησις εἶναι ἐπὶ τοῦ Ψ, εἶναι καὶ ὡς πρὸς Ψ, ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφον δὲν συμβαίνει πάντοτε, ὡς εἴδομεν εἰς τὰ σχήματα 3 καὶ 4.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις δὲν ὁρίζεται πλήρως, ἂν δὲν λάβουν χώραν τρεῖς προδιαγραφαί: τὸ σύνολον περιοχῆς, τὸ σύνολον Ψ καὶ ὁ κανὼν τῆς σχέσεως. Κατ' αὐστηρὰν ἐξέτασιν, ἡ ἐξίσωσις $\psi = \chi^2$ δὲν ὁρίζει συνάρτησιν ἂν δὲν προσδιορισθοῦν τὰ σύνολα περιοχῆς καὶ ἐκτάσεως. Π.χ. ἂν λάβωμεν X ὡς τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ Ψ ὡς τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ $\psi = \chi^2$ γραφικῶς εἶναι διάφορος ἐκείνης τοῦ σχήματος 5 κατὰ τὸ ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι τώρα ὡρισμένη διὰ $\chi < 0$. Οὕτως, ὁ διάφορος προσδιορισμὸς τοῦ συνόλου περιοχῆς δύναται νὰ δώσῃ διάφορον σύνολον συναρτήσεως καὶ ἂν ἀκόμη χρησιμοποιῆται ὁ αὐτὸς κανὼν ἀντιστοιχίας.

Ὑπάρχουν ἄλλοι συμβολισμοὶ μιᾶς συναρτήσεως, οἱ ὁποῖοι τονίζουν τὴν σπουδαιότητα τῶν ὑπ' αὐτὴν κειμένων συνόλων. Ἡ ἀμέσως ἀνωτέρω ἐξετασθεῖσα συνάρτησις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς $\varphi : X \rightarrow \Psi$, ὅπου X τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, Ψ τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως δίδονται ὑπὸ $\psi = \varphi(\chi) = \chi^2$. Λέγομεν ἐνίοτε ὅτι ἡ X ἀπεικονίζεται ἐντὸς τῆς Ψ ὑπὸ τῆς φ, ἢ ὅτι ἡ X μετασχηματίζεται εἰς Ψ, καὶ οὕτω θὰ ἐκλαμβάνωμεν τὰς λέξεις «ἀπεικόνισις» καὶ «μετασχηματισμὸς» συνωνύμους τῆς λέξεως «συνάρτησις». Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις, ἐπὶ παραδείγματι, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀπεικόνισις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (ἢ τοῦ ἄξονος τῶν χ) εἰς τοὺς μὴ ἀρνητικοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς (μὴ ἀρνητικὸν τμῆμα τοῦ ἄξονος τῶν ψ). Ἕτερος εἰς συμβολισμὸς συναρτήσεως εἶναι $\varphi : (\chi, \psi)$. Οὗτος παρουσιάζει τὸ πλεονέκτημα τῆς ἐμφάσεως ἐπὶ τοῦ ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν, ὅπου $\chi \in X$ καὶ $\psi \in \Psi$.

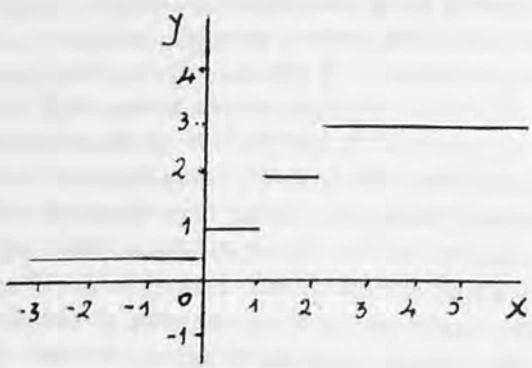
Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τῆς συναρτήσεως εἶναι, βεβαίως, γενικός. Τὰ σύνολα X καὶ Ψ δυνατὸν νὰ συνίστανται ἐξ οἱωνδήποτε στοιχείων, καὶ ὁ κανὼν τῆς σχέσεως δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀποτελῇ ἰσότητα. Ἡ περιοχὴ X δυνατὸν νὰ εἶναι συλλογὴ συνόλων· ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ συνάρτησις καλεῖται ***συνάρτησις συνόλων***. Ἂν ἡ ἔκτασις μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ὑποσύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτησις καλεῖται ***συνάρτησις πραγματικῶν τιμῶν***. Ἐπίσης, ὁ κανὼν ἀντιστοιχίας δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ λέξεων, δειχθῇ ὑπὸ πίνακος, παρασταθῇ γραφικῶς ἢ προσδιορισθῇ διὰ μαθηματικῆς ἐξισώσεως ἢ τύπου.

Περαιτέρω διασάφησις θὰ βοηθήσῃ εἰς τὴν ἀπονομὴν ἐμφάσεως ἐπὶ τῆς ποικιλίας τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας μιᾶς συναρτήσεως. Ἔστωσαν X τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, Ψ τὸ σύνολον ὅλων τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ὁ κανὼν ἀντιστοιχίας :

$$
\begin{aligned}
\varphi(\chi) &= 1/2 \quad \text{ὅταν} \quad \chi \leqq 0,\\
\varphi(\chi) &= 1 \quad \text{»} \quad 0 < \chi \leqq 1,\\
\varphi(\chi) &= 2 \quad \text{»} \quad 1 < \chi \leqq 2,\\
\varphi(\chi) &= 3 \quad \text{»} \quad 2 < .
\end{aligned}
$$

Τὸ σχῆμα 6 παρουσιάζει γραφικῶς τὴν συνάρτησιν ταύτην (καλουμένην κλιμακωτήν).

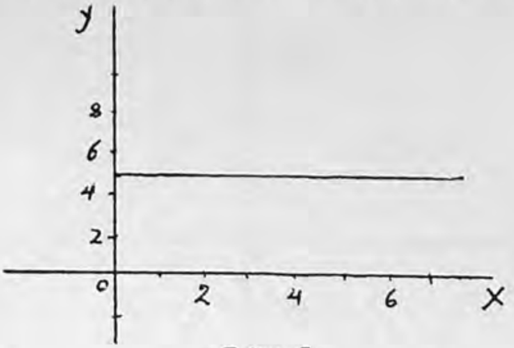
Ἤ, ἔστωσαν X τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, Ψ τὸ σύνο-



Σχῆμα 6

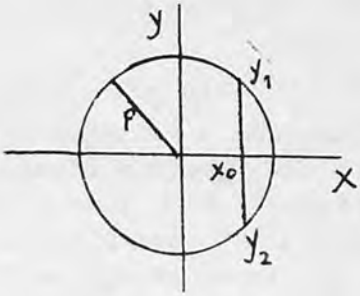
λον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μεγαλυτέρων τοῦ 2 καὶ κανὼν σχέσεως $\varphi(\chi)=5$. Γραφικῶς ἡ συνάρτησις δεικνύεται εἰς τὸ σχ. 7. Ἕκαστον στοιχεῖον $\chi \in X$ ἀπεικονίζεται εἰς ἓν στοιχεῖον τοῦ Ψ, τὸ στοιχεῖον 5, οὕτως ὥστε οἱ μὴ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἀπεικονίζονται εἰς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν 5. Συνάρτησις ἔχουσα τὴν ἰδιότητα ὥστε ἕκαστον στοιχεῖον εἰς τὴν περιοχὴν νὰ δύναται νὰ ἀπεικονισθῇ εἰς ἓν στοιχεῖον τοῦ συνόλου Ψ καλεῖται ***σταθερὰ συνάρτησις*** ἢ, ἁπλῶς, ***σταθερά***.

Πρέπει νὰ κατανοηθῇ ὅτι μία βασικὴ ἰδιότης τῆς συναρτήσεως εἶναι ὅτι δύο διατεταγμένα ζεύγη εἰς τὸ σύνολον δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ πρῶτον στοιχεῖον (μολονότι πλείονα τοῦ ἑνὸς διατεταγμένα ζεύγη δυνατὸν νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ δεύτερον στοι-



Σχῆμα 7

χεῖον). Εἰς τινα βιβλία μαθηματικῶν αὕτη καλεῖται συνάρτησις μιᾶς τιμῆς, καὶ ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως διευρύνεται διὰ νὰ περιλάβῃ καὶ συναρτήσεις πολλῶν τιμῶν, εἰς τὰς ὁποίας πλείονα τοῦ ἑνὸς στοιχεῖα εἰς τὴν ἔκτασιν εὑρίσκονται εἰς ἀντιστοιχίαν πρὸς δοθὲν στοιχεῖον εἰς τὴν περιοχήν. Θὰ περιορίσωμεν τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ὅρου μόνον εἰς τῆς συναρτήσεις μιᾶς τιμῆς, καὶ ἄλλα ὑποσύνολα τοῦ συνόλου γινομένου θὰ καλοῦνται *σχέσεις*. Σχέσις, λοιπόν, εἶναι ἁπλῶς καὶ μόνον σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν, καὶ δὲν ἀπαιτεῖται δύο διατεταγμένα ζεύγη νὰ μὴ ἔχουν τὸ αὐτὸ πρῶτον στοιχεῖον. Ὡς παράδειγμα σχέσεως ἂς θεωρήσωμεν

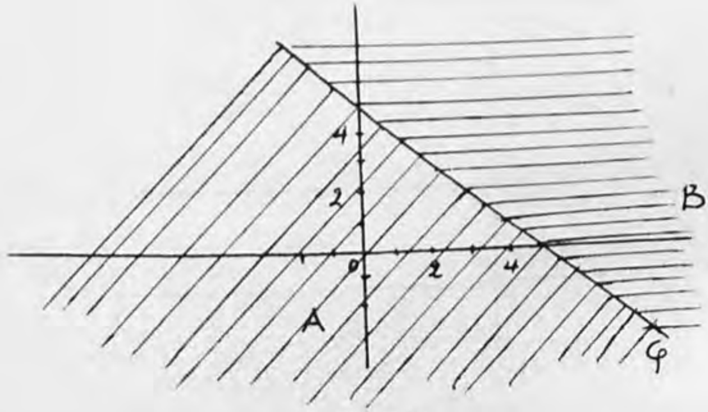


Σχῆμα 8

γραφικῶς τὴν ἐξίσωσιν κύκλου μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα ρ, $χ^2 + ψ^2 = ρ^2$, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 8. Ἐδῶ τὸ στοιχεῖον $χ_0$ εὑρίσκεται εἰς ἀντιστοιχίαν μὲ δύο τιμάς, $ψ_1$, $ψ_2$, οὕτως, ἡ ἐξίσωσις $χ^2 + ψ^2 = ρ^2$ δὲν ὁρίζει συνάρτησιν κατὰ τὸν ὁρισμόν μας· εἶναι παράδειγμα σχέσεως.

Ἐξισώσεις καὶ ἀνισότητες εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα (γραμμικὸν) σύνολον συναρτήσεως εἰς ἐπίπεδον (δισδιάστατον χῶρον) τοῦ ὁποίου ὁ κανὼν εἶναι $ψ = 5 - χ$. Τότε τὸ σύνολον συναρτήσεως εἶναι $\varphi = \{(\chi, \psi) \mid \psi = 5 - \chi\}$ ([10]). Τὸ σύνολον αὐτὸ ἐνίοτε καλεῖται σύνολον λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\psi = 5 - \chi$. Τὰ σημεῖα (χ, ψ) θὰ κεῖνται ἀπ' εὐθείας ἂν παρασταθοῦν γραφικῶς, ἐξ οὗ καὶ τὸ ὄνομα γραμμικὴ συνάρτησις.



Σχῆμα 9

Ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς βάσις πρὸς προσδιορισμὸν ἄλλων συνόλων σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον. Ἂς ἐξετάσωμεν τὸ σύνολον σημείων (χ, ψ), ὁριζόμενον ὑπό :

$$A = \{(\chi, \psi) \mid \psi < 5 - \chi\}$$

ἔνθα δι' ἕκαστον χ, τὸ ψ ἐπαληθεύει τὴν αὐστηρὰν γραμμικὴν ἀνισότητα $\psi < 5 - \chi$ (ἤ, ὅπως θὰ γράφωμεν, $\chi + \psi - 5 < 0$). Τὸ σημειοσύνολον τὸ ὁριζόμενον μέσῳ γραμμικῆς ἀνισότητος καλεῖται ***ἡμιχῶρος*** ἢ χῶρος λύσεως τῆς ἀνισότητος. Ἕτερος ἡμιχῶρος εἶναι τὸ σημειοσύνολον :

$$B = \{(\chi, \psi) \mid \chi + \psi - 5 > 0\}.$$

Τὰ σύνολα φ, A καὶ B ἐμφανίζονται εἰς τὸ σχῆμα 9 ([11]).

Βλέπομεν ἐδῶ ὅτι μία εὐθεῖα χωρίζει τὸ ἐπίπεδον εἰς τρία ἀμοιβαίως ἀπο κλειστικὰ ἡμισύνολα, τῶν ὁποίων ἡ ἕνωσις εἶναι τὸ ἐπίπεδον : τὸ σύνολον τῶν σημείων κάτωθεν τῆς γραμμῆς, ἐπὶ τῆς γραμμῆς καὶ ὑπὲρ τὴν γραμμήν. Τὸ σύνολον τῶν σημείων ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἶναι τὸ ***σύνορον*** τῶν συνόλων A καὶ B. Ὅταν ἓν σύνολον ὁρίζηται οὕτως ὥστε νὰ περικλείῃ τὸ σύνορόν του, ὡς, π.χ.,

$$\Gamma = \{(\chi, \psi) \mid \chi + \psi - 5 \leqq 0\},$$

τὸ ὁποῖον εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι ὁ ἡμιχῶρος ὁμοῦ μετὰ τῶν σημείων ἐπὶ τῆς γραμμῆς, καλεῖται ***κλειστὸν σύνολον*** (καὶ ἡ ἀνισότης καλεῖται ἀσθενὴς

10) Ἂν ἄλλως δὲν ὁρίζηται, θὰ ἀντιλαμβανώμεθα ὅτι τὰ σύνολα περιοχῆς καὶ ἐκτάσεως τῶν ὑπὸ ἐξέτασιν συναρτήσεων εἶναι τὰ μέγιστα ὑποσύνολα τοῦ συνόλου ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

11) Ἀφοῦ τὰ σύνολα φ, A καὶ B εἶναι ἀπειροσύνολα, αὐτό, ὡς καὶ τὰ ἄλλα εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο, εἶναι ἀτελὲς γραμμογράφημα : τέλειον θὰ ἦτο ἐὰν ἐπεξετείνετο πρὸς τὸ ἄπειρον πρὸς ὅλας τὰς κατευθύνσεις τοῦ ἐπιπέδου.

ἀνισότης). Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν τὸ σύνολον Γ καλεῖται ***κλειστὸς ἡμιχῶρος*** ὡς εἶναι τὸ σύνολον

$$\Delta = \{(\chi, \psi) \mid \chi + \psi - 5 \geq 0.$$

Σύνολον μὴ περιλαμβάνον τὸ σύνορόν του καλεῖται ***ἀνοικτὸν σύνολον*** καὶ ἡμιχῶροι ὁριζόμενοι ὑπὸ αὐστηρῶν ἢ ἰσχυρῶν γραμμικῶν ἀνισοτήτων (τὰ σύνολα Α καὶ Β, π.χ.) καλοῦνται ***ἀνοικτοὶ ἡμιχῶροι*** ([12]).

Αἱ ἔννοιαι αὗται δύνανται νὰ ἀνακεφαλαιωθοῦν ὡς ἀκολούθως:

Ἀνοικτὸς ἡμιχῶρος εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τὸ ἐπαληθεῦον ἰσχυρὰν γραμμικὴν ἀνισότητα $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma < 0$ ἢ $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma > 0$· κλειστὸς ἡμιχῶρος εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τὸ ἐπαληθεῦον τὴν ἀσθενῆ ἀνισότητα $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma \leq 0$ ἢ $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma \geq 0$ (ὅπου α, β, γ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ α, β ὄχι ἀμφότερα μηδενικά) ([13]).

Ἂς ἐξετάσωμεν δύο γραμμικὰς ἐξισώσεις τῶν ὁποίων τὰ διαγράμματα δὲν εἶναι συγγραμμικά.

(1) $$\chi + \psi - 5 = 0$$

(2) $$-\chi + \psi + 2 = 0.$$

Τότε ὑπάρχει ἓν διατεταγμένον ζεῦγος (χ, ψ) τὸ ὁποῖον ταυτοχρόνως θὰ ἐπαληθεύῃ τὰς δύο ἐξισώσεις, καὶ ἀπὸ τὸ διάγραμμα τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν (σχ. 10) φαίνεται ὅτι τὸ διατεταγμένον ζεῦγος εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς (7/2, 3/2). Ἂν φ καὶ θ τὰ σύνολα τῶν διατεταγμένων ζευγῶν ποὺ ἐπαληθεύουν τὰς (1) καὶ (2), ἀντιστοίχως, τότε τὸ σύνολον $\varphi \cap \theta$ εἶναι τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεως τῶν δύο ἐξισώσεων, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν ὑπὸ κρίσιν περίπτωσιν ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς σημείου (7/2, 3/2). Ὅταν $\varphi \cap \theta$ ἀποτελῆται ἐξ ἑνὸς μόνον σημείου, αἱ γραμμικαὶ ἐξισώσεις εἶναι ***ἀνεξάρτητοι***. Ἂν τὰ διαγράμματα τῶν δύο γραμμικῶν ἐξισώσεων εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι, τότε ἡ τομὴ εἶναι κενὸν σύνολον· δὲν ὑπάρχει ταυτόχρονος λύσις καὶ αἱ ἐξισώσεις εἶναι ***ἀσυμβίβαστοι***. Ἂν τὰ διαγράμματα δύο ἐξισώσεων εἶναι ἡ αὐτὴ εὐθεῖα (αἱ γραμμαὶ εἶναι συγγραμμικαί), τότε ὑπάρχουν ἄπειροι λύσεις (ἡ τομὴ ἔχει ἄπειρα σημεῖα) καὶ αἱ ἐξισώσεις εἶναι ***ἐξηρτημέναι***. Ὡς παράδειγμα τῆς περιπτώσεως ταύτης, θεωρήσατε τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ τὴν

(3) $$10\chi + 10\psi - 50 = 0.$$

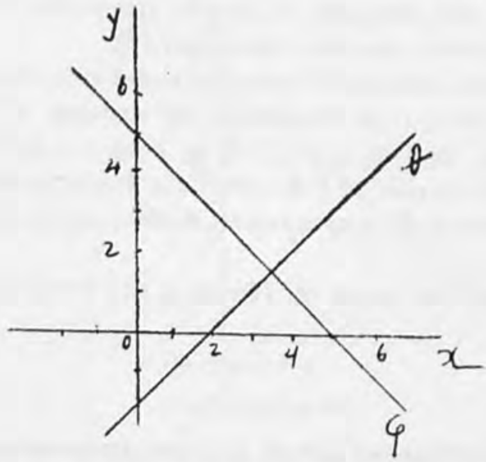
Τὸ διάγραμμα τῆς (3) εἶναι ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ἐκείνου τῆς (1)· ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἁπλῶς ἡ (1) πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ 10. Γενικώτερον, ἂν δύο γραμμικαὶ ἐξισώσεις εἶναι ἐξηρτημέναι, τότε ἡ μία εἶναι σταθερὸν πολλαπλάσιον τῆς ἄλλης.

---

12) Δύναται νὰ δειχθῇ ἀπὸ τὸ ἀμέσως ἀνωτέρω γραμμογράφημα ὅτι τὸ κλειστὸν σύνολον Δ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ ἀνοικτοῦ συνόλου Α καὶ ὅτι τὸ ἀνοικτὸν σύνολον Α εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ κλειστοῦ συνόλου Δ. Αὕτη εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις θεωρήματος (τὸ συμπλήρωμα ἀνοικτοῦ συνόλου εἶναι κλειστὸν καὶ ἀντιστρόφως), τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται εἰς τὴν Τοπολογίαν, κλάδον τῶν μαθηματικῶν εἰς τὸν ὁποῖον ἐξετάζονται αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν συνόλων καὶ μετασχηματισμῶν.

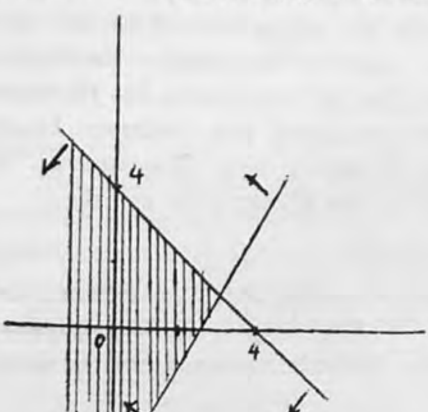
13) Οἱ ὁρισμοὶ οὗτοι ἀναφέρονται εἰς δισδιάστατον χῶρον· δύνανται νὰ γενικευθοῦν εἰς χώρους περισσοτέρων διαστάσεων.

Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἐξετάσωμεν τὸ σύνολον τῶν σημείων, τὸ ὁποῖον ταυτοχρόνως ἐπαληθεύει τὰς ἀντιστοίχους γραμμικὰς ἀνισότητας. Τὰ σύνολα λύσεως, ὡς ἐκεῖνα τῶν ἐξισώσεων καὶ ἀνισοτήτων, εἶναι τομαὶ συνόλων, ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ σύνολα εἶναι ἡμιχῶροι, οὐδέποτε ὑπάρχει μία μόνον λύσις—

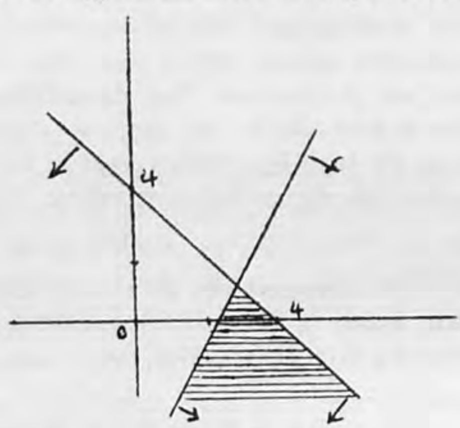


Σχῆμα 10

ἡ τομὴ εἶναι ἢ ἄπειρον ἢ κενὸν σύνολον. Αὕτη εἶναι σοβαρὰ διάκρισις μεταξὺ ζευγῶν ἐξισώσεων καὶ ἀνισοτήτων καὶ θὰ ἔπρεπε νὰ κατανοηθῇ καλῶς. Π.χ. θεωρήσατε δύο τεμνομένας ἐπὶ ἐπιπέδου εὐθείας. Ἡ ταυτόχρονος λύσις τῶν ἐξισώσεων εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς των, ἀλλὰ τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεως τῶν ἀντι-



Σχῆμα 11α
Σύνολον λύσεως διὰ
$\chi+\psi-4<0$
$2\chi-\psi-5<0$



Σχῆμα 11β
Σύνολον λύσεως διὰ
$\chi+\psi-4<0$
$2\chi-\psi-5>0$

στοίχων ἀνισοτήτων εἶναι σφηνοειδὴς περιοχὴ εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ σύνολον εἶναι ἀπειροσύνολον (Σχ. 11α καὶ 11β).

Ἐὰν ὅμως αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι (ἀλλ' ὄχι συγγραμμικαὶ) ὑπάρχουν τρεῖς δυνατότητες : αἱ ἀνισότητες ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν (τὰ σύμβολα ἀνισότητος δείχνουν πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν), καὶ ἡ τομὴ τῶν ἡμιχώρων εἶναι ἡμιχῶρος αἱ ἀνισότητες δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καὶ ἡ τομὴ τῶν ἡμιχώρων εἶναι ἄπειρος «λωρίς» εἰς τὸ ἐπίπεδον· αἱ ἀνισότητες δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καὶ ἡ τομὴ τῶν ἡμιχώρων εἶναι κενή. Παραδείγματα τινὰ θὰ μᾶς βοηθήσουν.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις εὐθειῶν $\chi+2\psi-6=0$ καὶ $\chi+2\psi-10=0$.

Περίπτωσις 1η : Αἱ ἀνισότητες ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν. Ἔχομεν τὰς ἀνισότητας

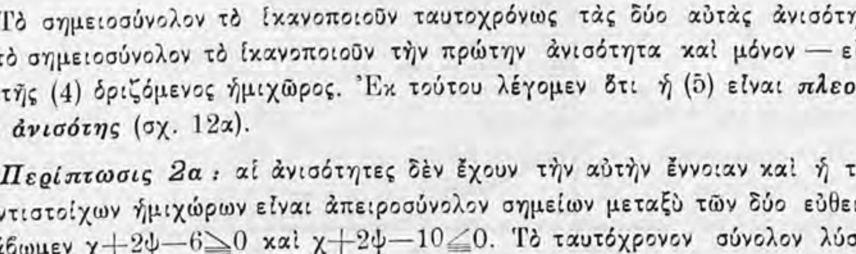
(4) $$\chi+2\psi-6 \leqq 0$$

(5) $$\chi+2\psi-10 \leqq 0.$$

Τὸ σημειοσύνολον τὸ ἱκανοποιοῦν ταυτοχρόνως τὰς δύο αὐτὰς ἀνισότητας εἶναι τὸ σημειοσύνολον τὸ ἱκανοποιοῦν τὴν πρώτην ἀνισότητα καὶ μόνον — εἶναι ὁ ὑπὸ τῆς (4) ὁριζόμενος ἡμιχῶρος. Ἐκ τούτου λέγομεν ὅτι ἡ (5) εἶναι ***πλεονάζουσα ἀνισότης*** (σχ. 12α).

Περίπτωσις 2α : αἱ ἀνισότητες δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καὶ ἡ τομὴ τῶν ἀντιστοίχων ἡμιχώρων εἶναι ἀπειροσύνολον σημείων μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν. Ἂς λάβωμεν $\chi+2\psi-6\geqq 0$ καὶ $\chi+2\psi-10\leqq 0$. Τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεως εἶναι ἡ λωρὶς τοῦ σχ. 12β, ἐκτεινομένη πρὸς τὸ ἄπειρον ἄνω ἀριστερὰ καὶ κάτω δεξιά.

Περίπτωσις 3η : αἱ ἀνισότητες δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καὶ τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεως εἶναι κενόν. Ἂς λάβωμεν τὰς ἀνισότητας $\chi+2\psi-6\leqq 0$ καὶ $\chi+2\psi-10\geqq 0$. Ἐμφανῶς, δὲν ὑπάρχουν σημεῖα ταυτοχρόνως ἱκανοποιοῦντα τὰς ἀπαιτήσεις ταύτας. Τὸ σύνολον λύσεως εἶναι κενὸν (σχ. 12γ) καὶ αἱ ἀνισότητες καλοῦνται ***ἀσυμβίβαστοι***.



Σχῆμα 12

Παραμένει μία δυνατότης δι' ἀνισότητας. Δύο ἀνισότητες δυνατὸν νὰ ἔχουν οὕτως ὥστε ἡ μία νὰ εἶναι σταθερὸν πολλαπλάσιον τῆς ἄλλης. Ὁ ἀναγνώστης θὰ εὕρῃ διδακτικὴν τὴν ἀπαρίθμησιν τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων τῆς περιπτώσεως αὐτῆς· ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ἂν αἱ ἀνισότητες εἶναι ἰσχυραὶ ἢ ἀσθενεῖς ὡς καὶ ἐκ τῆς ἐννοίας τῶν ἀνισοτήτων.

Ἐξέτασις τοῦ ταυτοχρόνου συνόλου λύσεως τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀνισοτήτων εἶναι ἐπέκτασις τῶν προηγηθεισῶν παρατηρήσεων· ἐν πάσῃ περιπτώσει, τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεως εἶναι ἡ τομὴ τῶν ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων ὁριζομένων ἡμιχώρων.

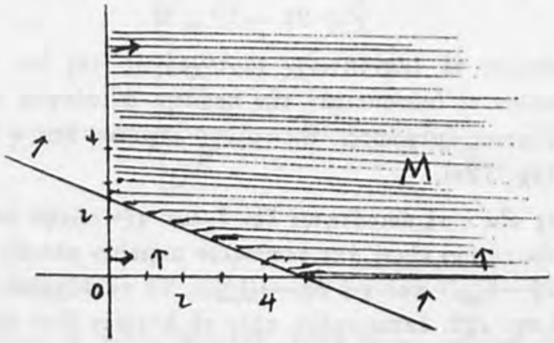
Ἔστωσαν

(6) $\chi \geqq 0$

(7) $\psi \geqq 0$

(8) $\chi + 2\psi - 5 \geqq 0$

Ἡ τομὴ Μ δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 13. Αὐτὸ εἶναι παράδειγμα ἀπεριορίστου συνόλου. Ἓν σημειοσύνολον εἰς τὸ ἐπίπεδον καλεῖται ***περιωρισμένον*** ἂν κεῖται ἐντὸς κύκλου μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ μὴ ἄπειρον ἀκτῖνα κ' ἄλλως καλεῖται ***ἀπεριόριστον***. Ἐνίοτε εἶναι χρήσιμον νὰ προσδιορίζωμεν τὴν κατεύθυνσιν ὡς πρὸς τὴν ὁποίαν τὸ σύνολον εἶναι ἀπεριόριστον. Τὸ



Σχῆμα 13

σύνολον Μ τοῦ σχ. 13 εἶναι περιωρισμένον ἀριστερὰ ἢ ἐκ τῶν κάτω καὶ ἀπεριόριστον δεξιὰ ἢ ἐκ τῶν ἄνω.

Ἀκόμη ἓν σύνολον ἀνισοτήτων εἶναι

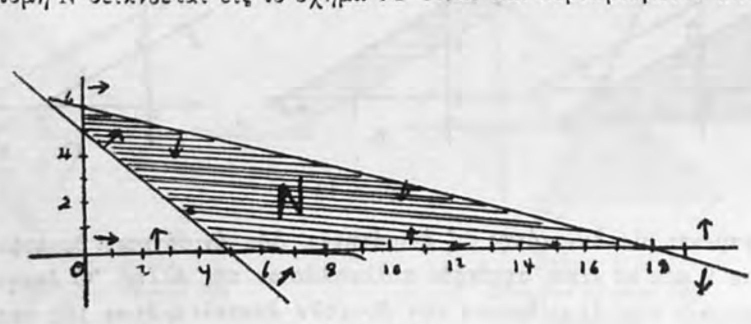
(9) $\chi \geqq 0$

(10) $\psi \geqq 0$

(11) $\chi + \psi - 5 \geqq 0$

(12) $\chi + 3\psi - 18 \leqq 0$

Ἡ τομὴ Ν δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 14· εἶναι καὶ περιωρισμένον καὶ κλειστὸν σύνολον.



Σχῆμα 14

Συστήματα συντεταγμένων

Κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν θεμάτων τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τὸ κεφάλαιον 3 θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ ἡ ὑπ' αὐτὸν γεωμετρία, οὕτω θὰ πρέπει νὰ

γίνουν ὡρισμένα σχόλια ἐπὶ τῆς σχέσεως μεταξὺ γεωμετρίας καὶ ἀλγέβρας. Ὡς ἴσως ἀνεμένετο, ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστοιχίας ἓν πρὸς ἓν παρέχει τὸν σύνδεσμον μεταξὺ γεωμετρίας καὶ ἀλγέβρας, οὕτω θὰ θεωρήσωμεν γραφικῶς τὴν μέθοδον τῆς καθιδρύσεως τοιαύτης ἀντιστοιχίας διὰ τὴν πραγματικὴν γραμμὴν καὶ τὸ ἐπίπεδον.

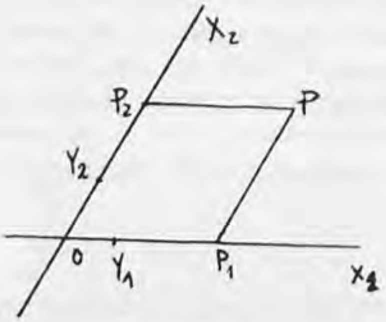
Ὑποτεθείσθω ὅτι ἔχομεν καθωρισμένην τινὰ εὐθεῖαν καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς δύο σημεῖα, Ο καὶ Υ. Τὸ Ο καλεῖται ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ Υ τὸ σημεῖον μονάδος. Τὸ Ο διαιρεῖ τὴν εὐθεῖαν εἰς δύο ἀκτῖνας (εὐθείας ἐκτεινομένας εἰς τὸ ἄπειρον ὡς πρὸς μίαν μόνον κατεύθυνσιν). Ἡ ἀκτὶς ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ Υ καλεῖται ἡ θετικὴ ἀκτίς, ἡ τὸ Υ εὑρίσκεται εἰς θετικὴν κατεύθυνσιν ἐκ τοῦ Ο· τὸ σημεῖον Θ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἀρνητικῆς ἀκτῖνος, ἡ τὸ Θ εὑρίσκεται εἰς ἀρνητικὴν κατεύθυνσιν ἐκ τοῦ Ο. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΥ χρησιμοποιεῖται ὡς μονὰς μετρήσεως

κατὰ τὴν μέτρησιν μηκῶν ἐπὶ τῆς γραμμῆς· εἰς ἕκαστον σημεῖον Ρ ἐπὶ τῆς θετικῆς ἀκτῖνος ὁρίζομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΟΡ, τοῦ μήκους ὄντος τῆς ἀναλογίας (σχέσεως μεταξὺ) τοῦ μήκους τοῦ ΟΡ πρὸς ἐκεῖνο τοῦ ΟΥ. Εἰς ἕκαστον σημεῖον Θ ἐπὶ τῆς ἀρνητικῆς ἀκτῖνος ὁρίζομεν τὸν ἀρνητικὸν τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ μετροῦντος τὸ μῆκος ΟΘ. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι ὡς ἀρχὴ ὁρίζεται τὸ Ο (ὁ ἀριθμὸς 0) καὶ ὅτι εἰς τὸ σημεῖον Υ ὁρίζεται ὁ 1. Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι κατ' αὐτὴν τὴν μέθοδον τίθεται εἰς ἀντιστοιχίαν πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας μὲ ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν καὶ ὅτι οὐδεὶς πραγματικὸς ἀριθμὸς τίθεται εἰς ἀντιστοιχίαν μὲ ἓν σημεῖον πλέον ἢ ἅπαξ· ὅταν ἀντιστοιχία ἓν πρὸς ἓν χρησιμοποιηθῇ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης μεταξὺ τῶν σημείων τῆς εὐθείας καὶ τοῦ συνόλου ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, λέγομεν ὅτι μία (μονοδιάστατος) συντεταγμένη εἰσήχθη ἐπὶ τῆς εὐθείας.

Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν δισδιάστατον χῶρον λαμβάνοντες δύο τυχούσας τεμνομένας εὐθείας, καλουμένας ὁ ἄξων τῶν χ_1 καὶ ὁ ἄξων τῶν χ_2, ἐκλέγοντες θετικὴν κατεύθυνσιν ἐφ' ἑκάστου ἄξονος καὶ δημιουργοῦντες μονοδιάστατον σύστημα συντεταγμένων ἐφ' ἑκάστου ἄξονος μέσῳ ἐκλεγείσης μονάδος μήκους. Συγκεκριμένως, ἔστωσαν: Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῶν γραμμῶν, Υ_1 καὶ Υ_2 τὰ σημεῖα ἐπὶ τῶν ἀξόνων χ_1 καὶ χ_2, ἀντιστοίχως, ἕκαστον διάφορον τοῦ Ο, καὶ Υ_1 καὶ Υ_2 ἕκαστον εἰς θετικὴν κατεύθυνσιν ἐκ τοῦ Ο. Τότε δύναται νὰ εἰσαχθῇ σύστημα συντεταγμένων ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ_1 μὲ ἀρχήν του τὸ Ο καὶ μονάδα μετρήσεως τὸ Υ_1, καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ_2 μὲ Ο καὶ Υ_2 ὡς ἀρχὴν καὶ μονάδα μετρήσεως, ἀντιστοίχως. Πρέπει νὰ καταστῇ σαφὲς ὅτι αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ εἶναι κάθετοι καὶ ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $Ο\Upsilon_1$ καὶ $Ο\Upsilon_2$ δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος.

Εἰς ἕκαστον σημεῖον Ρ εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον ἢ τὸ ἐπίπεδον δύναται νὰ ὁρισθῇ ἓν διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, καλουμένων «συντεταγμένων» τοῦ σημείου. Σύρατε δύο εὐθύγραμμα τμήματα ἐκ τοῦ Ρ, τὸ ἓν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ_1, τὸ ἕτερον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ_2, καὶ ὀνομάσατε τὰ σημεῖα τομῆς τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων μὲ τοὺς ἄξονας χ_1 καὶ

χ_2, P_1 καὶ P_2, ἀντιστοίχως. Ὁ εἰς τὸ P_1 ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ_1 ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς καλεῖται ἡ χ_1 συντεταγμένη ἢ **τετμημένη** τοῦ σημείου P, καὶ ὁ εἰς τὸ P_2 ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ_2 ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς καλεῖται ἡ χ_2 συντεταγμένη ἢ **τεταγμένη** τοῦ P. Οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοί, χ_1 καὶ χ_2 ὁρίζονται ὡς αἱ συντεταγμέ-



Σχῆμα 15

ναι τοῦ σημείου P καὶ τὸ σημεῖον δηλοῦται ὑπὸ τοῦ συμβόλου (χ_1, χ_2). Ἡ μέθοδος αὕτη, ἑπομένως, ὁρίζει ἓν διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν δι' ἕκαστον σημεῖον P εἰς τὸ ἐπίπεδον, καὶ εἶναι ἐμφανὲς ὅτι, δοθέντος σημείου P, ἡ μέθοδος ἄγει εἰς ἓν μόνον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν χ_1 καὶ χ_2. Ἀντιστρόφως, δοθέντων δύο τυχόντων πραγματικῶν ἀριθμῶν χ_1 καὶ χ_2, δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον P ἔχον χ_1 καὶ χ_2 ὡς συντεταγμένας. Διότι βάσει τῶν μονοδιαστάτων συστημάτων συντεταγμένων τῶν εἰσαχθέντων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τῶν σχηματιζουσῶν τοὺς ἄξονας, ἂν ἔχωμεν τὰ χ_1 καὶ χ_2, θὰ ὑπάρχουν σημεῖα P_1 καὶ P_2 καὶ μόνον αὐτὰ ἔχοντα τοὺς ἀριθμοὺς ὡς τετμημένην καὶ τεταγμένην, ἀντιστοίχως. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ἐκ τῶν P_1 καὶ P_2 τὰ παράλληλα πρὸς τοὺς ἄξονας θὰ συναντηθοῦν εἰς τὸ σημεῖον P, καὶ τὸ σημεῖον θὰ ἔχῃ χ_1 καὶ χ_2 ὡς πρώτην καὶ δευτέραν συντεταγμένην, καὶ διαισθητικῶς ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι ὑπάρχει μόνον ἓν τοιοῦτον σημεῖον P. Ἀντιστοιχία ἓν πρὸς ἓν μεταξὺ τῶν σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δύναται νὰ δημιουργηθῇ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, καὶ ὅταν τοῦτο συμβῇ λέγομεν ὅτι ἓν γραμμικὸν σύστημα συντεταγμένων εἰσήχθη εἰς τὸ ἐπίπεδον ἢ δισδιάστατον χῶρον.

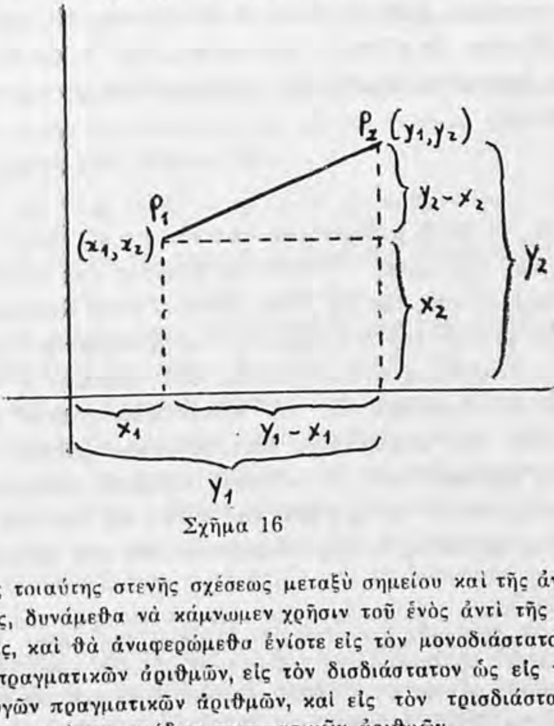
Ὁμοίως δυνάμεθα τὰ κατασκευάσωμεν τρισδιάστατον χῶρον. Λαμβάνομεν τρεῖς τεμνομένας εὐθείας, τυχούσας ἀλλὰ μὴ κειμένας ὅλας εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καλοῦμεν αὐτὰς τοὺς ἄξονας τῶν χ_1, χ_2, χ_3, ἐκλέγομεν θετικὴν κατεύθυνσιν ἐφ' ἑκάστου ἄξονος, καὶ δημιουργοῦμεν μονοδιάστατον σύστημα συντεταγμένων ἐφ' ἑκάστου ἄξονος. Τότε μία διατεταγμένη τριὰς (ordered triple) πραγματικῶν ἀριθμῶν, σχετίζεται πρὸς ἓν σημεῖον καὶ δύναται περαιτέρω νὰ δειχθῇ ὅτι, δοθείσης τυχούσης διατεταγμένης τριάδος πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ μέθοδος ἄγει εἰς ἓν καὶ μόνον ἓν ἐν συσχετισμῷ σημεῖον. Τοῦτο καθιδρύει ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἓν μεταξὺ σημείων καὶ διατεταγμένων τριάδων πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ κατ' αὐτὸν

τὸν τρόπον δύναται τὰ καθιδρυθῆ γραμμικὸν σύστημα συντεταγμένων εἰς τὸ τρισδιάστατον χῶρον [14].

Ἡ συσχέτισις μεταξὺ σημείου καὶ διατεταγμένης ὁμάδος πραγματικῶν ἀριθμῶν δηλοῖ ὅτι δυνάμεθα νὰ συσχετίσωμεν ἓν σημεῖον πρὸς μίαν ὁμάδα 7 πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἢ ἔτι γενικώτερον, πρὸς ὁμάδα ν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔνθα ν πᾶς θετικὸς ἀκέραιος. Δυνάμεθα τότε νὰ καθορίσωμεν ν-διάστατον χῶρον R_ν ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων νιάδων $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ πραγματικῶν ἀριθμῶν· ἑκάστη νιὰς καλεῖται σημεῖον τοῦ χώρου, καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$ καλοῦνται ἡ πρώτη, δευτέρα, . . . , νιοστὴ συντεταγμένη τοῦ σημείου. Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀντίστοιχος γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις διὰ $\nu \geqq 4$, ἡ χρησιμότης τῆς γενικεύσεως θὰ καταστῇ ἐμφανὴς εἰς πολλὰ σημεῖα τῆς ἀκολουθούσης ἀναλύσεως.

Ἀπόστασις

Ἂς θεωρήσωμεν δοθὲν μονοδιάστατον σύστημα συντεταγμένων εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ σημείου μονάδος ἐκλαμβάνεται ὡς ἡ μονὰς μήκους. Τότε ἡ ἀπόστασις τῆς ἀρχῆς ἐκ τοῦ σημείου εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι 5 μονάδες, καί, ἀντιλαμβανόμενοι ὅτι ἡ ἀπόστασις δὲν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἕως τὸ σημεῖον τοῦ ὁποίου ἡ συντεταγμένη εἶναι —5 εἶναι ἐπίσης 5 μονάδες. Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἕως τὸ σημεῖον τοῦ ὁποίου ἡ συντεταγμένη εἶναι χ, καλεῖται ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πρα-



Σχῆμα 16

14) Ὑπαρχούσης τοιαύτης στενῆς σχέσεως μεταξὺ σημείου καὶ τῆς ἀντιστοίχου αὐτοῦ ἀριθμητικῆς ἀποδόσεως, δυνάμεθα νὰ κάμνωμεν χρῆσιν τοῦ ἑνὸς ἀντὶ τῆς ἄλλης καὶ ἀντιστρόφως ἄνευ ἀσαφείας, καὶ θὰ ἀναφερώμεθα ἐνίοτε εἰς τὸν μονοδιάστατον χῶρον ὡς εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἰς τὸν δισδιάστατον ὡς εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ εἰς τὸν τρισδιάστατον ὡς εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων τριάδων πραγματικῶν ἀριθμῶν.

γματικοῦ ἀριθμοῦ χ καὶ δηλοῦται ὑπὸ $|\chi|$, εἶναι δὲ ὁ ἀριθμὸς χ ἂν χ θετικὸς ἢ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς —χ ἂν χ ἀρνητικός. Δύναται ἐπίσης νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν Ρ καὶ Τ εἶναι τυχόντα σημεῖα ἔχοντα συντεταγμένας χ_1 καὶ ψ_1, ἀντιστοίχως, τότε ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν σημείων εἶναι $|\psi_1 - \chi_1|$. Ἐνθυμούμενοι ὅτι ὅταν γράφωμεν $\beta = \sqrt{\alpha}$, $\alpha \geqq 0$, ἐννοοῦμεν τὸν ἀριθμὸν $\beta \geqq 0$ τοιοῦτον ὥστε $\beta^2 = \alpha$, ἕτερος τρόπος ἐκφράσεως τῆς ἀποστάσεως $|\psi_1 - \chi_1|$ μεταξὺ δύο σημείων εἶναι $\sqrt{(\psi_1 - \chi_1)^2}$. Συχνάκις θὰ χρησιμοποιῆται ὁ συμβολισμὸς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης διὰ τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο σημείων εἰς μονοδιάστατον χῶρον.

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα δισδιάστατον χῶρον μὲ δοθὲν ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων ἔχον τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους ἐπὶ τῶν ἀξόνων. Τότε ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο σημείων $P_1 = (\chi_1, \chi_2)$ καὶ $P_2 = (\psi_1 \ \psi_2)$ δύναται νὰ ὁρισθῇ μέσῳ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, ἀφοῦ ἡ ἀπόστασις εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου. Τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος P_1P_2, ἢ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ P_1 ἕως P_2 εἶναι τότε

$$\delta = \sqrt{(\psi_1 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \chi_2)^2}$$

Αὐτὸ δηλοῖ τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμόν. Ἔστωσαν $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ καὶ $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$ σημεῖα εἰς τὸν ν διάστατον χῶρον. Τότε ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν σημείων εἶναι

$$\delta = \sqrt{(\psi_1 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \chi_2)^2 + \ldots + (\psi_\nu - \chi_\nu)^2} \quad (^{15})$$

Δύο ἀπόψεις τοῦ γενικοῦ ὁρισμοῦ πρέπει νὰ σημειωθοῦν. Ὅταν $\nu = 1$ καὶ $\nu = 2$, οἱ προηγουμένως δοθέντες ὁρισμοὶ ἀποστάσεως εἰς χῶρον μιᾶς καὶ δύο διαστάσεων ἐμφανίζονται ὡς εἰδικαὶ περιπτώσεις, καὶ ὁ ὁρισμὸς ἰσχύει μόνον διὰ χώρους ἔχοντας ὀρθογώνια συστήματα συντεταγμένων μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους ἐφ᾽ ἑκάστου ἄξονος.

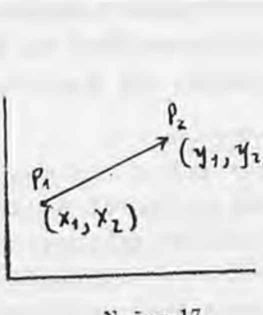
Διανύσματα

Ἡ ἀνάγκη νὰ δοθῇ μαθηματικὴ ἀπεικόνισις εἰς τινας φυσικὰς ποσότητας ὡς αἱ δυνάμεις καὶ ταχύτητες — ποσότητας ἐχούσας καὶ μέγεθος καὶ κατεύθυνσιν οὕτως ὥστε ἡ παρουσίασίς των ὑφ᾽ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἀνεπαρκὴς — ἐδημιούργησε τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν τοῦ διανύσματος, καὶ μαθηματικοὶ ὁρισμοὶ ἀναφερόμενοι εἰς τὰ διανύσματα συχνάκις αἰτιολογοῦνται ὑπὸ φυσικῶν ἢ γεωμετρικῶν ἀναλύσεων. Ὁρίζομεν ὅτι διάνυσμα εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον εἶναι διατεταγμένον ζεῦγος σημείων εἰς τὸν χῶρον (δηλ. διατεταγμένον ζεῦγος νιάδων). Τὸ πρῶτον σημεῖον καλεῖται ***ἀρχικὸν*** καὶ τὸ δεύτερον ***τελικόν***. Δίδομεν κατεύθυνσιν εἰς ἓν διάνυσμα ὁρίζοντες ποῖον τὸ ἀρχικὸν καὶ ποῖον τὸ τελικὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ἡ φυσικὴ ἔννοια τοῦ μεγέθους ἀντιπροσωπεύεται ὑπὸ τοῦ μήκους τοῦ διανύσματος.

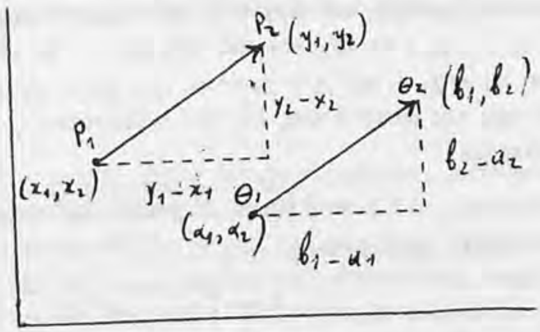
15) Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι οὗτος δὲν ἀποτελεῖ τὸν μόνον τρόπον προσδιορισμοῦ ἀποστάσεως. Εἰς πλέον προκεχωρημένα βιβλία μαθηματικῶν τόσον τὸ σύστημα συντεταγμένων ὅσον καὶ ἡ μονὰς μήκους εἶναι αὐθαίρετα, καὶ ἡ ἔννοια τῆς ἀποστάσεως γενικεύεται εἰς ἐκείνην τῆς συναρτήσεως, ἡ ὁποία ἔχει ὡρισμένας ἰδιότητας.

Διάνυσμα εἰς χῶρον R_ν ($\nu \leqq 3$) δύναται νὰ παρασταθῇ γεωμετρικῶς ὑπὸ προσανατολισμένου εὐθυγράμμου τμήματος ἢ «βέλους» συνδέοντος τὰ διατεταγμένα ζεύγη τῶν σημείων.

Δύο διανύσματα καλοῦνται ἴσα ἂν εἶναι παράλληλα καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν καὶ τὸ αὐτὸ μῆκος. Ἀφοῦ δύο διανύσματα δύνανται νὰ εἶναι ἴσα καὶ ἂν καταλαμβάνουν διαφορετικὰς θέσεις εἰς τὸν χῶρον, ἓν διάνυσμα δὲν ἔχει καθωρισμένην θέσιν (τὸ ἀρχικὸν σημεῖον δύναται νὰ ἐκλεγῇ αὐθαιρέτως) παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἔχει καὶ καθωρισμένην κατεύθυνσιν καὶ καθωρισμένον μῆκος. Αἱ συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος διανυσμάτων πρέπει νὰ κατανοηθοῦν σαφῶς. Ἔστωσαν τὰ P_1, P_2 καὶ Θ_1, Θ_2 ἴσα διανύσματα εἰς R_2, καὶ ἂς ἐξετάσωμεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ σχηματισθέντα εἰς τὸ σχ. 18. Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων εἶναι $\psi_1 - \chi_1$, $\psi_2 - \chi_2$, $\beta_1 - \alpha_1$, $\beta_2 - \alpha_2$. Ἀφοῦ τὰ διανύσματα εἶναι ἴσα, τὰ τρίγωνα ἔχουν τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν καὶ ὀξεῖαν γωνίαν, ἄρα εἶναι ἴσα. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ πλευραὶ εἶναι ἐπίσης ἴσαι,



Σχῆμα 17



Σχῆμα 18

$$\psi_1 - \chi_1 = \beta_1 - \alpha_1, \; \psi_2 - \chi_2 = \beta_2 - \alpha_2.$$

Ὁδηγούμεθα οὕτως εἰς τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος διανυσμάτων. Ἔστωσαν τὰ $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$, $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$ καὶ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu)$ δύο διανύσματα εἰς R_ν ἐν σχέσει πρὸς καθωρισμένον σύστημα συντεταγμένων. Τότε τὰ διανύσματα εἶναι ἴσα ἂν $\psi_1 - \chi_1 = \beta_1 - \alpha_1$, $\psi_2 - \chi_2 = \beta_2 - \alpha_2, \ldots, \psi_\nu - \chi_\nu = \beta_\nu - \alpha_\nu$.

Ἀφοῦ ἡ ἐκλογὴ τοῦ ἀρχικοῦ σημείου διανύσματος εἶναι αὐθαίρετος, οἱ ἀριθμοὶ $\varkappa_i = \psi_i - \chi_i$ εἶναι τὰ κριτήρια ἰσότητος διανυσμάτων. Διὰ πᾶν δοθὲν ἀρχικὸν σημεῖον $(\chi_1, \ldots, \chi_\nu)$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ τελικοῦ σημείου εἶναι $\psi_1 = \chi_1 + \varkappa_1$, $\psi_2 = \chi_2 + \varkappa_2, \ldots, \psi_\nu = \chi_\nu + \varkappa_\nu$. Τοῦτο εὐχερῶς φαίνεται εἰς R_2. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἓν διάνυσμα (χ_1, χ_2), (ψ_1, ψ_2) καὶ ὅτι μετακινοῦμεν τὸ διάνυσμα αὐτὸ παραλλήλως πρὸς τὸν ἑαυτόν του σχηματίζοντες τὸ διάνυσμα (χ_1', χ_2'), (ψ_1', ψ_2'). Αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἀρχικοῦ σημείου καὶ τοῦ τελικοῦ τοιούτου ἤλλαξαν, ἀλλ' ἡ μεταβολὴ εἰς τὰς συντεταγμένας τῶν χ_1 καὶ χ_2 εἶναι ἀκριβῶς ἡ αὐτὴ ὡς εἰς τὰς συντεταγμένας τῶν ψ_1, ψ_2. Ἐπομένως αἱ διαφοραὶ $\psi_i - \chi_i = \varkappa_i$ παραμένουν ἀμετάβλητοι, καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\varkappa_i$ δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν πρὸς ἀναγνώρισιν παντὸς διανύσματος ὅταν δίδεται τὸ ἀρχικὸν σημεῖον ([16]). Ἐκ τούτου ἀγόμεθα νὰ καλέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς $\varkappa_\iota$ **τὰς συνιστώσας** τοῦ διανύσματος $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$, $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$ εἰς R_ν (ἢ παντὸς διανύσματος ἴσου πρὸς αὐτὸ) καὶ ἂν ὁρίσωμεν τὰ σημεῖα διὰ P_1 καὶ P_2, ἀντιστοίχως, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$P_1P_2 = [\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu].$$

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι τὸ διάνυσμα P_2P_1 — τὸ διάνυσμα μὲ ἀρχικὸν σημεῖον P_2 καὶ τελικὸν P_1 — ἔχει ὡς συνιστώσας τοὺς ἀριθμοὺς $\chi_1 - \psi_1$, $\chi_2 - \psi_2, \ldots$, $\chi_\nu - \psi_\nu$. Ἀφοῦ $\varkappa_\iota = \psi_\iota - \chi_\iota$, ἔχομεν $\chi_\iota - \psi_\iota = -\varkappa_\iota$, οὕτως αἱ συνιστῶσαι τοῦ P_2P_1 εἶναι $-\varkappa_1, -\varkappa_2, \ldots, -\varkappa_\nu$, καὶ γράφομεν

$$P_2P_1 = [-\varkappa_1, -\varkappa_2, \ldots, -\varkappa_\nu].$$

Τὸ μῆκος ἐντετοπισμένου διανύσματος εἰς ν-διάστατον χῶρον ὁρίζεται ὡς ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ἀρχικοῦ καὶ τελικοῦ σημείου του. Εἰδικώτερον, ἔστωσαν $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ τὸ ἀρχικὸν καὶ $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$ τὸ τελικὸν σημεῖον διανύσματος. Τότε $\psi_1 = \chi_1 + \varkappa_1$, $\psi_2 = \chi_2 + \varkappa_2, \ldots, \psi_\nu = \chi_\nu + \varkappa_\nu$· χρησιμοποιοῦντες τὸν ὁρισμόν μας τῆς ἀποστάσεως εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον, τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος εὑρίσκομεν

$$\lambda = \sqrt{(\psi_1-\chi_1)^2 + (\psi_2-\chi_2)^2 + \ldots + (\psi_\nu - \chi_\nu)^2} \tag{13}$$

Ἀλλ' ἀφοῦ $\varkappa_\iota = \psi_\iota - \chi_\iota$

$$\lambda = \sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \ldots + \varkappa_\nu^2}.$$

Τὸ μῆκος διανύσματος ἀποφασίζεται ἑπομένως ἀπὸ τὰς συνιστώσας του, οὕτως ἡ ἐκλογὴ ἀρχικοῦ σημείου διανύσματος δὲν ἐπηρεάζει τὸ μῆκος του. Παράδειγμα δίδεται ἀπὸ τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων P_1P_2 καὶ P_2P_1 ἀνωτέρω. Εἶναι, βεβαίως, ἴσα διὰ $(-\varkappa_\iota^2) = \varkappa_\iota^2$.

Ἔχομεν τώρα δύο εἴδη διατεταγμένων νιάδων πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὸ διάνυσμα $[\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu]$ καὶ τὸ σημεῖον εἰς τὸν χῶρον R_ν $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$. Μολονότι αἱ ἔννοιαι εἶναι διαφορετικαί, εἶναι ἁπλοῦν νὰ ταυτίσωμεν τὰ δύο καὶ οὕτως ἀποφύγωμεν τὴν πιθανότητα συγχύσεως. Δοθέντος σημείου $(\chi_1\ \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$, ἁπλῶς καὶ μόνον θεωροῦμεν τὸ διάνυσμα μὲ ἀρχικὸν σημεῖον $O = (0, 0, \ldots, 0)$ καὶ τελικὸν $P = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$. Αἱ συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος OP εἶναι τότε $\chi_1 - O$, $\chi_2 - O, \ldots, \chi_\nu - O$, ἢ $OP = [\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu]$. Ἂν ἐγκαταλείψωμεν τὸν συμβολισμὸν δι' ἀγκυλῶν καὶ συμφωνήσωμεν νὰ χρησιμοποιῶμεν παρενθέσεις διὰ νὰ περικλείωμεν τὰς συνισταμένας διανυσμάτων τῶν ὁποίων ἀρχικὰ σημεῖα εἶναι ἡ ἀρχὴ τοῦ συστήματος, τότε ἡ διατεταγμένη νιὰς $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἢ ὡς σημεῖον εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον ἢ ὡς διάνυσμα μὲ ἀρχικὸν

16) Ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ ἴδῃ τὴν ἀλήθειαν αὐτοῦ. Σύρατε ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων εἰς χῶρον R_2 καὶ τὰ διανύσματα (3, 2), (10, 6) καὶ (—2, 4), (5, 8). Οἱ ἀριθμοὶ $\varkappa_\iota$ εἶναι οἱ αὐτοὶ διὰ τὰ δύο διανύσματα. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τρία διανύσματα ἔχοντα ἀρχικὰ σημεῖα (0, 5), (6, —1), (—3, —7) εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διάνυσμα τὸ ἔχον (3, 2), (10, 6) ὡς ἀρχικὸν καὶ τελικὸν σημ., ἀντιστοίχως. Τότε ποῖα τὰ τελικὰ σημεῖα τῶν τριῶν διανυσμάτων ;

σημεῖον τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος καὶ τὸ σημεῖον αὐτὸ ὡς τελικὸν σημεῖον (17). Πρέπει ἐπίσης νὰ κατανοηθῇ ὅτι αἱ λέξεις «συνιστῶσα» καὶ «συντεταγμένη» δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν συνωνύμως ἄνευ συγχύσεως διὰ πᾶν διάνυσμα μὲ ἀρχικὸν σημεῖον τὴν ἀρχήν, καὶ ὅτι τὸ τοιοῦτον διάνυσμα προσδιορίζεται ἐπαρκῶς ἂν μόνον ὁρίσωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ τελικοῦ σημείου του. Ἐπὶ πλέον, δύο διανύσματα καλοῦνται ἴσα ἂν αἱ ἀντίστοιχοι συντεταγμέναι των — ὡς πρὸς δοθὲν σύστημα συντεταγμένων — εἶναι ἴσαι. Τελικῶς, θὰ συμφωνήσωμεν νὰ θεωρῶμεν τὸ σημεῖον $(0, 0, \ldots, 0)$ ὡς διάνυσμα : καλεῖται δὲ τοῦτο μηδενικὸν διάνυσμα, (zero ἢ null vector) (18).

Ἔστω P ἓν σημεῖον εἰς R_2. Ἔχομεν δείξει ὅτι τὸ προσανατολισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα OP καλεῖται ἡ γεωμετρικὴ παρουσίασις τοῦ διανύσματος. Ἂν αἱ συντεταγμέναι τοῦ P εἶναι (χ_1, χ_2), τότε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἀλγεβρικὴ παρουσίασις τοῦ διανύσματος ἐν σχέσει πρὸς ἐκλεγὲν σύστημα συντεταγμένων εἶναι τὸ δεύτερον σκέλος τῆς ἐκφράσεως

$$\alpha = (\chi_1, \chi_2)$$

ὅπου α τὸ ἐν λόγῳ διάνυσμα.

Ὅλα τὰ διανύσματα εἰς R_ν, $\nu \leqq 3$, ἔχουν διττὴν ταυτότητα : ἀλγεβρικὴν καὶ γεωμετρικήν, καὶ εἶναι χρήσιμον νὰ τονίσωμεν ἀμφοτέρας, διότι μολονότι ἡ ἀλγεβρικὴ ἀπεικόνισις δύναται νὰ γενικευθῇ εἰς χώρους περισσοτέρων διαστάσεων καὶ συνεπῶς ἔχει μείζονα ἀναλυτικὴν ἰσχύν, ἡ γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις παρέχει καὶ αἰτιολόγησιν διὰ πολλὰς ἀφῃρημένας ἐννοίας καὶ διαισθητικῶς ἀποκαλυπτικὰς ἀπεικονίσεις αὐτῶν.

Πράξεις μὲ διανύσματα καὶ ἡ ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ χώρου

Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως διανυσμάτων αἰτιολογεῖται ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων τῆς φυσικῆς. Δοθέντων δύο διανυσμάτων $\alpha = (\chi_1, \chi_2)$ καὶ $\beta = (\psi_1, \psi_2)$ εἰς R_2, τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta$ εἶναι τὸ ἐν σχήματι 19 δεικνυόμενον, καὶ ἡ ἀλγεβρική του ἔκφρασις εἶναι

$$\alpha + \beta = (\chi_1 + \psi_1, \chi_2 + \psi_2).$$

Ἀφοῦ τὰ διανύσματα προστίθενται διὰ προσθέσεως τῶν ἀντιστοίχων των συντεταγμένων, καὶ ἀφοῦ αἱ συντεταγμέναι εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως διανυσμάτων προέρχονται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως

17) Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι τὸ μῆκος διανύσματος ἔχοντος τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος ὡς ἀρχικὸν σημεῖον εἶναι

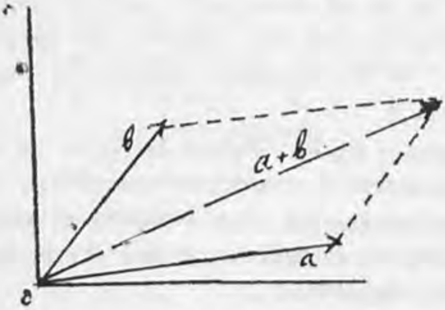
$$\lambda = \sqrt{(\chi_1 - O)^2 + (\chi_2 - O)^2 + \ldots + (\chi_\nu - O)^2} = \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \ldots + \chi_\nu^2}.$$

18) Διανύσματα μὲ αὐθαίρετα ἀρχικὰ σημεῖα θὰ καλοῦνται *ἐλεύθερα διανύσματα*, καὶ θὰ γίνεται χρῆσις τοῦ ὅρου «διάνυσμα» μόνον διὰ τὰ ἔχοντα ὡς ἀρχικὸν σημεῖον τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων. Ἐπίσης, ὁ συμβολισμὸς δι' ἀγκυλῶν θὰ διατηρηθῇ δι' ἐλεύθερα διανύσματα. Τελικῶς, δοθὲν διάνυσμα μὲ ἀρχικὸν σημεῖον ἕτερον ἢ τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος θὰ καλῆται *ἐντετοπισμένον διάνυσμα*.

εἰς τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ πρόσθεσις διανυσμάτων εἶναι ἑπομένως ἀντιμεταθετικὴ καὶ ἀναλυτική.

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$$



Σχῆμα 19

καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν διανυσμάτων εἰς R_2 περικλείεται ὑπὸ τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων, διότι ἂν α καὶ β εἶναι διανύσματα τοῦ R_2, τότε $\alpha + \beta \in R_2$ [19].

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι $-\alpha$ εἶναι τὸ διάνυσμα ἴσον ὡς πρὸς τὸ μῆκος ἀλλ' ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τοῦ α (γνωρίζομεν ὅτι ἂν α εἶναι τυχὸν διάνυσμα εἰς R_2, $-\alpha$ εἶναι εἰς R_2 διότι οἱ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι συντεταγμέναι τοῦ $-\alpha$ εὑρίσκονται εἰς τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν).

Ὑποτεθείσθω ὅτι τὰ α, $-\alpha$, καὶ β εἶναι ὡς δεικνύονται εἰς τὸ σχ. 20. Ἂν περιστρέψωμεν τὸ β περὶ τὸ μηδὲν ἕως ὅτου συμπέσῃ μὲ τὸ $-\alpha$, τότε τὸ μῆκος τοῦ $\alpha+\beta$ πρέπει νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην $\beta = -\alpha$, καὶ ἔχομεν $\alpha+\beta = \alpha+(-\alpha) = 0$. Ἐκ τούτου, ἂν α τυχὸν διάνυσμα εἰς R_2, τότε ὑπάρχει διάνυσμα $\beta \in R_2$ τοιοῦτον ὥστε $\alpha+\beta=0$. Τὸ διάνυσμα β εἶναι, φυσικά, τὸ $-\alpha$. Συμπεραίνομεν ἐπίσης ὅτι ἂν α καὶ δ τυχόντα διανύσματα εἰς R_2, τότε

---

19) Μεταξὺ τῶν αἰτημάτων ἢ ἀξιωμάτων, τὰ ὁποῖα ἐκλαμβάνομεν ὡς ἰσχύοντα εἰς τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι τὰ κάτωθι, ἔνθα α, β, γ πραγματικοὶ ἀριθμοί :

Περιληπτικὴ ἰδιότης : $\alpha, \beta \in R$, τότε $\alpha+\beta \in R$ καὶ $\alpha\beta \in R$.

Ἀντιμεταθέσεως : $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $\alpha\beta=\beta\alpha$·

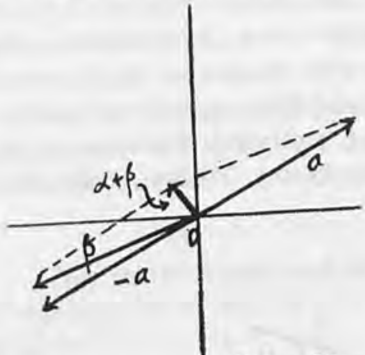
Ἀναλυτική : $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$, $\alpha(\beta\gamma)=(\sigma\beta)\gamma$·

Ἐπιμεριστική : $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$·

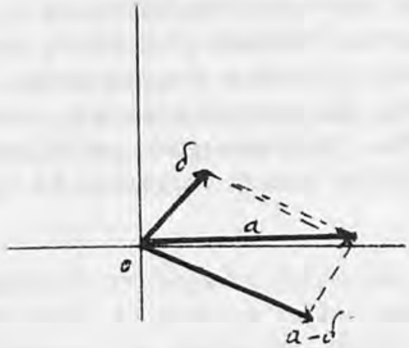
Μηδενικὰ καὶ μοναδιαῖα στοιχεῖα : τὸ R περιέχει στοιχεῖα 0 καὶ 1 ($\neq 0$) τοιαῦτα ὥστε $\alpha+0=\alpha$ καὶ $1\alpha=\alpha$ διὰ πᾶν $\alpha \in R$.

Ἐκ τούτου δεικνύοντες ὅτι $\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$, δεικνύομεν ὅτι τὰ διανύσματα εἶναι ἴσα συντεταγμένην πρὸς συντεταγμένην ἐπιστρέφοντες εἰς τὰς ἰδιότητας τοῦ ὑποκειμένου συστήματος πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι παράδειγμα γενικωτέρου ἀλγεβρικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον καλεῖται *πεδίον*. Εἰς πλέον προκεχωρημένας ἀναλύσεις διανυσματικῶν χώρων, τὰ διανύσματα ὁρίζονται ἐπὶ πεδίου, ὅπερ σημαίνει ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ πεδίου — καλούμενα *μονομετρικὰ μεγέθη* ἢ *μονόμετρα* (scalars) — εἶναι αἱ βασικαὶ μονάδες σχηματισμοῦ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου. Ὅλα τὰ ἐδῶ θεωρούμενα διανύσματα θὰ ὁρίζωνται ἐπὶ τοῦ πεδίου πραγματικῶν ἀριθμῶν.

τὸ διάνυσμα $\alpha+(-\delta)$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ $\alpha-\delta$. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν διαφορὰν $\alpha-\delta$ δύο διανυσμάτων μέσῳ τῆς πράξεως τῆς προσθέσεως· τὸ $\alpha-\delta$ εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον ὅταν προστίθεται εἰς τὸ διάνυσμα δ δίδει τὸ διάνυσμα α. Εἰς τὸ σχ. 21, τὸ $\alpha-\delta$ εἶναι τὸ προσανατολισμένον εὐθύγραμμον



Σχῆμα 20



Σχῆμα 21

τμῆμα τὸ σχηματίζον μίαν πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ δ ὡς μίαν πλευρὰν καὶ α ὡς διαγώνιον, καὶ ἂν $\alpha=(\chi_1, \chi_2)$ καὶ $\delta=(\psi_1, \psi_2)$, γράφομεν $\alpha-\delta=(\chi_1-\psi_1, \chi_2-\psi_2)$. Σημειώσατε ὅτι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα ἔχει τὴν ἰδιότητα $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$ διὰ πᾶν διάνυσμα $\alpha \in R_2$ [20].

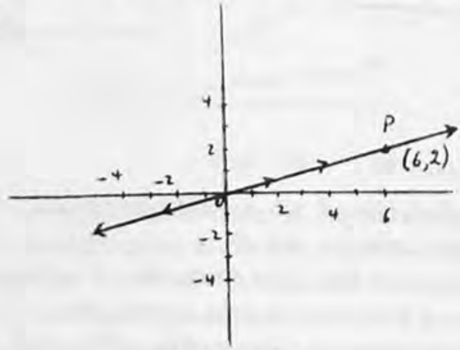
Ἔστω κ εἷς θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμός. Τότε διὰ τοῦ $\kappa\alpha$ ἐννοοῦμεν τὸ διάνυσμα τοῦ ὁποίου ἡ φορὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ ἐκείνην τοῦ α καὶ τὸ μῆκος κ φορὰς τὸ μῆκος τοῦ α. Ἂν κ ἀρνητικὸς πραγματικὸς ἀριθμός, τότε διὰ τοῦ $\kappa\alpha$ ἐννοοῦμεν $|\kappa|(-\alpha)$ ἢ $(-|\kappa|\alpha)$, τοῦ διανύσματος ἔχοντος φορὰν ἀντίθετον ἐκείνης τοῦ α καὶ μῆκος $|\kappa|\alpha$. Ἂν $\kappa=0$, τότε $\kappa\alpha$ εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα. Τώρα ἔστω κ πᾶς πραγματικὸς ἀριθμός. Τότε ὁρίζομεν τὸ $\kappa\alpha$ ὡς μονομετρικὸν γινόμενον ἢ ***μονομετρικὸν πολλαπλάσιον*** τοῦ α. Ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς κ καλεῖται μονομετρικὸν μέγεθος καὶ δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὴν ἔννοιαν τοῦ διανύσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ μῆκος καὶ φοράν. Ἡ ἐξέτασις τοῦ θέματος γεωμετρικῶς θὰ ὁδηγήσῃ πάλιν εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν παρουσίασίν του, διότι δύναται νὰ δειχθῇ διὰ τῆς χρήσεως τῶν ὁμοίων τριγώνων ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ $\kappa\alpha$ εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ α ἑκάστη πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ κ,

$$\kappa\alpha=\kappa(\chi_1, \chi_2)=(\kappa\chi_1, \kappa\chi_2).$$

Ἐπὶ παραδείγματι, ἂς λάβωμεν $\alpha=(6, 2)$. Ἂν κ εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἢ ἴσος πρὸς τὸ μηδέν, τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν μονομετρικῶν πολλαπλασίων $\kappa\alpha$ καλύπτει τὴν ἀκτῖνα ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τοῦ α. Ἂν $0 \leqq \kappa \leqq 1$, ἔχομεν ὅλα τὰ διανύσματα, τῶν ὁποίων αἱ φοραὶ εἶναι αἱ αὐταὶ ἐκείνης τοῦ α καὶ τὰ μήκη ποικίλλουν ἀπὸ 0 μέχρις ἐκείνου τοῦ α· τὸ μονομετρικὸν γινόμενον εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς καλύ-

20) Χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον 0 διὰ νὰ δηλώσωμεν τόσον τὸ μηδενικὸν διάνυσμα ὅσον καὶ τὸν ἀριθμὸν (μονομετρικὸν μέγεθος) 0 (μηδέν)· ποῖον τῶν δύο δηλοῦται θὰ γίνεται κατανοητὸν ἐκ τῶν συμφραζομένων.

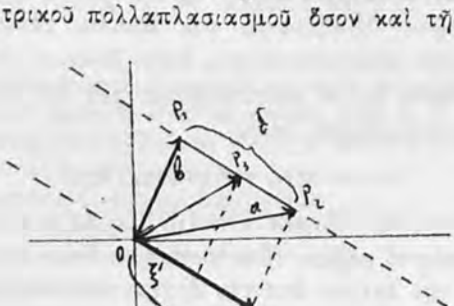
πτει ὅλα τὰ σημεῖα ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος OP. Ἂν $\varkappa > 1$, τὸ μονομετρικὸν γινόμενον καλύπτει ὅλα τὰ σημεῖα ἐπὶ τοῦ τμήματος πέραν τοῦ P (ἄνω δεξιὰ τοῦ P). Ἂν τὸ κ ποικίλλῃ ὑπὲρ τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε τὸ κα εἶναι ἡ ἀκτὶς ἡ ἐκτεινομένη ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος μὲ φορὰν ἀντίθετον ἐκείνης τοῦ α. Οὕτω βλέπομεν ὅτι μολονότι ὑπάρχει διαφορὰ μεταξὺ διανύσματος καὶ εὐθείας γραμμῆς — τὸ πρῶτον εἶναι διατεταγμένη νιὰς καὶ ὡς ἐκ τούτου στοιχεῖον συνόλου, ἐνῷ ἡ δευτέρα εἶναι σύνολον καὶ ὡς ἐκ τούτου τῆς ἰδίας κατηγορίας ὡς τὸ R_ν — ὑπάρχει διαισθητικὴ σχέσις μεταξὺ τοῦ συνόλου ὅλων τῶν μονομετρικῶν πολλαπλασίων δοθέντος μὴ μηδενικοῦ διανύσματος καὶ εὐθείας γραμμῆς διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος. Τῷ ὄντι, τοῦτο ἀπο-



Σχῆμα 22

τελεῖ ἁπλῶς καὶ μόνον εἰδικὴν περίπτωσιν τῆς προτάσεως τῆς ἐπιπεδομετρίας ὅτι δύο σημεῖα ὁρίζουν εὐθεῖαν, καθ' ὅσον, ἂν δοθοῦν ἡ ἀρχὴ τοῦ συστήματος καὶ ἓν διάνυσμα α διάφορον τοῦ μηδενός, τὸ σύνολον ὅλων τῶν μονομετρικῶν πολλαπλασίων ὁρίζει τὴν εὐθεῖαν τὴν περιέχουσαν τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ σημεῖον πέρατος τοῦ α.

Εὐχερὲς εἶναι νὰ γενικεύσωμεν τὰ σχόλια ταῦτα καὶ δείξωμεν διὰ τῆς χρήσεως τόσον τοῦ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅσον καὶ τῆς προσθέσεως διανυ-



Σχῆμα 23

σμάτων ὅτι ἂν δοθοῦν δύο σημεῖα οὐδὲν τῶν ὁποίων εἶναι ἡ ἀρχὴ τοῦ συστήματος συντεταγμένων δυνάμεθα νὰ καλύψωμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν περιέχουσαν τὰ δύο ταῦτα σημεῖα. Ἂς θεωρήσωμεν τὸ ἐντετοπισμένον διάνυσμα P_1P_2· δυνάμεθα νὰ καλέσωμεν αὐτὸ τὸ διάνυσμα δ ἔχον P_1 καὶ P_2 ὡς σημεῖα ἀρχῆς καὶ πέρατος, ἀντιστοίχως. Τότε α εἶναι ἡ διαγώνιος παραλληλογράμμου καὶ ἡ ἀπέναντι τοῦ δ πλευρὰ σχηματίζεται ὑπὸ τοῦ διανύσματος ξ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος ὡς ἀρχικὸν σημεῖον, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 23. Τότε δ=ξ, καὶ ἀφοῦ $6+\xi=\alpha$, ἔχομεν $6+\delta=\alpha$ ἢ $\delta=\alpha-6$. Ἔστω τώρα σημεῖον P_3 μεταξὺ P_1 καὶ P_2. Τότε τὸ ἐντετοπισμένον διάνυσμα P_1P_3 εἶναι ἴσον πρὸς τὸ διάνυσμα ξ', ἔνθα $\xi' = \varkappa\xi$, $0 \leqq \varkappa \leqq 1$. Ἐπομένως $P_1P_3=\varkappa\xi=\xi\delta$. Ἐπίσης OP_3 εἶναι ἡ διαγώνιος νέου παραλληλογράμμου, καὶ ἔχομεν $OP_3=6+\varkappa\xi=6+\varkappa\delta$. Ἀλλ' ἔχομεν ἴδει ὅτι $\delta=\alpha-6$, οὕτω λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως,

$$OP_3 = 6 + \varkappa(\alpha - 6) = \varkappa\alpha + (1 - \varkappa)6,\ 0 \leqq \varkappa \leqq 1.$$

Ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ λάβωμεν πᾶν σημεῖον ἐπὶ τοῦ τμήματος P_1P_2 ἁπλῶς δι' ἐκλογῆς τοῦ κ, ὅπου $0 \leqq \varkappa \leqq 1$, καὶ δι' ἅπαντα τὰ τοιαῦτα κ καλύπτομεν τὸ τμῆμα P_1P_2 (ἢ OP_4). Ἐπίσης, ἂν $\varkappa > 1$ καλύπτομεν τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας δεξιὰ τοῦ P_2 (ἢ τὰ σημεῖα δεξιὰ τοῦ P_4 ἐπὶ τοῦ τμήματος OP_4) καὶ ἂν $\varkappa < 0$ καλύπτομεν ὅλα τὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀριστερὰ τοῦ P_1. Διασαφηνίζομεν περαιτέρω:

Ἔστωσαν $\alpha = (8, 2)$, $6 = (2, 6)$, καὶ $\varkappa = 1/4$. Τότε

$$\varkappa\alpha + (1-\varkappa)6 = 1/4\,(8, 2) + 3/4\,(2, 6) = (3\,{}^1/_2, 5).$$

Ἂν $\varkappa = 1/2$, τότε

$$\varkappa\alpha + (1-\varkappa)6 = 1/2\,(8, 2) + 1/2\,(2, 6) = (5, 4),$$

ἤτοι τὸ μέσον (τὸ σημεῖον εἰς τὸ μέσον) τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος P_1P_2. Διὰ $\varkappa = 2/3$, $\varkappa\alpha + (1-\varkappa)6 = (6, 3\,{}^1/_3)$. Βλέπομεν καὶ ὅτι μία συλλογὴ κ, $0 \leqq \varkappa \leqq 1$, διαιρεῖ τὸ τμῆμα P_1P_2 κατὰ τὸν λόγον $\varkappa : 1-\varkappa$, καὶ ὅτι ὡς τὸ κ ποικίλλει ἀπὸ 0 ἕως 1, τὸ σημεῖον πέρατος τοῦ διανύσματος $\varkappa\alpha+(1-\varkappa)6$ κινεῖται ἐκ τοῦ P_1 πρὸς τὸ P_2. Διὰ $\varkappa = -1/4$ καὶ $\varkappa = 2$ ἔχομεν, ἀντιστοίχως, τὰ σημεῖα (1/2, 7) καὶ (14, −2). Διὰ νὰ ἀνακεφαλαιώσωμεν: δοθέντων δύο τυχόντων σημείων (χ_1, χ_2) καὶ (ψ_1, ψ_2), ἡ περιέχουσα ταῦτα εὐθεῖα ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ἀθροισμάτων τῶν μονομετρικῶν πολλαπλασίων τῶν διανυσμάτων $\alpha=(\chi_1, \chi_2)$, $6=(\psi_1, \psi_2)$ τῆς μορφῆς $\varkappa\alpha+(1-\varkappa)6$, ὅπου τὸ κ ποικίλλει ὑπὲρ τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν [21].

Ἄλλαι ἰδιότητες τῆς πράξεως τοῦ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ προέρχονται ἐξ ἐκείνων τὰς ὁποίας παρουσιάζουν αἱ πράξεις εἰς τὸ ὑποκείμενον σύστημα πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἂν $\alpha \in R_2$ τότε $\varkappa\alpha \in R_2$ — περιληπτικὴ ἰδιότης τοῦ R_2 μὲ ἰσχὺν εἰς τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμόν. Δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν καὶ τὰ κάτωθι, ἐξ ἄλλου: $\varkappa(\alpha+6) = \varkappa\alpha + \varkappa6$, $(\gamma+\varkappa)\alpha = \gamma\alpha+\varkappa\alpha$, $(\gamma\varkappa)\alpha = \gamma(\varkappa\alpha)$, καὶ $1\alpha = \alpha$.

Ἡ γεωμετρία ὑποδεικνύει ἑτέραν μίαν πρᾶξιν, σημαντικῆς σπουδαιότητος, τὸν ***ἐσωτερικὸν πολλαπλασιασμόν***. Ἂν $\alpha = (\chi_1, \chi_2)$ καὶ $\beta = (\psi_1, \psi_2)$ εἶναι

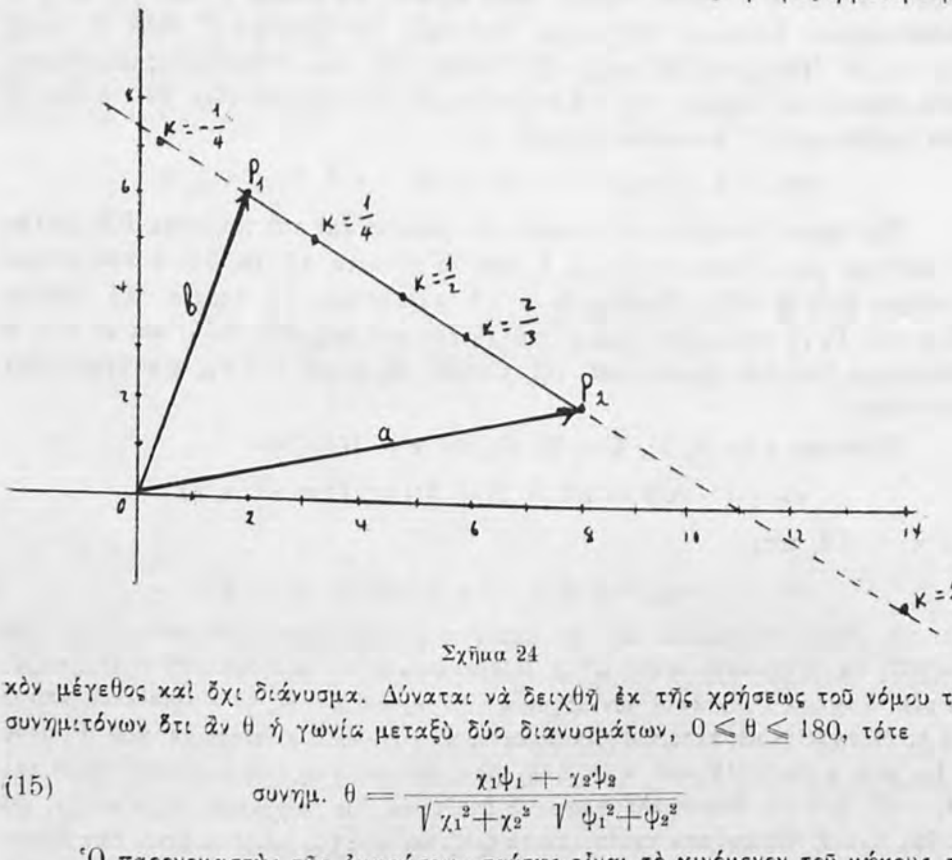
---

21) Θὰ δειχθῇ κατωτέρω ὅτι αἱ ἁπλαῖ αὗται γεωμετρικαὶ θεωρήσεις εἶναι βασικῆς σπουδαιότητος εἰς τὴν γεωμετρίαν τῶν κυρτῶν συνόλων.

διανύσματα ὡς πρὸς ὡρισμένον ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων, τότε τὸ ***ἐσωτερικὸν γινόμενον*** $\alpha \cdot \beta$ ὁρίζεται νὰ εἶναι

(14) $$\alpha \cdot \beta = \chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2.$$

Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων εἶναι οὕτως ἀριθμὸς ἢ μονομετρι-



Σχῆμα 24

κὸν μέγεθος καὶ ὄχι διάνυσμα. Δύναται νὰ δειχθῇ ἐκ τῆς χρήσεως τοῦ νόμου τῶν συνημιτόνων ὅτι ἂν θ ἡ γωνία μεταξὺ δύο διανυσμάτων, $0 \leq \theta \leq 180$, τότε

(15) $$\text{συνημ. } \theta = \frac{\chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2}{\sqrt{\chi_1^2+\chi_2^2}\ \sqrt{\psi_1^2+\psi_2^2}}$$

Ὁ παρονομαστὴς τῆς ἐκφράσεως ταύτης εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ διανύσματος α ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος β. Ἐκ τούτου

(16) $$\alpha \cdot \beta = \chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2 = |\alpha|\,|\beta| \text{ συνημ. } \theta,$$

οὕτως ὥστε τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν δύο διανυσμάτων ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς μεταξὺ αὐτῶν γωνίας.

Χρήσιμος εἶναι ἡ παρατήρησις ὅτι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον ἑνὸς διανύσματος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του,

$$\alpha \cdot \alpha = \chi_1^2 + \chi_2^2 ,$$

εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους τοῦ διανύσματος καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\alpha \cdot \alpha = |\alpha|^2$. Χρήσιμος εἶναι ἐπίσης καὶ ἡ παρατήρησις τῆς σπουδαιότητος τοῦ σημείου τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου. Ἂς λάβωμεν δύο μὴ μηδενικὰ διανύσματα α, β εἰς R_2· ταῦτα γίνονται κανονικὰ ἂν ἕκαστον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἓν μονόμετρον τοιοῦτον ὥστε τὸ προκῦπτον διάνυσμα νὰ ἔχῃ μῆκος 1. Διὰ πᾶν μὴ μηδενικὸν διάνυσμα α τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸ μονόμετρον $1 / |\alpha|$· τότε ἔχομεν διὰ τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος

$$\left| \frac{1}{|\alpha|}\alpha \right| = \left| \frac{\alpha}{\alpha} \right| = 1 .$$

Ἂς ὀνομάσωμεν α′ καὶ β′ τὰ κανονικὰ ἐκ τῶν α καὶ β προκύψαντα διανύσματα. Τότε ἂν θ ἡ μεταξὺ α′ καὶ β′ γωνία ἔχομεν ἐκ τῆς (15)

$$\text{συνημ. } \theta = \frac{\alpha' \cdot \beta'}{|\alpha'|\,|\beta'|} = \alpha' \cdot \beta',$$

ἀφοῦ ἕκαστον τῶν διανυσμάτων ἔχει μῆκος 1, καὶ τὸ συνημ θ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον. Τότε ἂν συνημ $\theta = \alpha' \cdot \beta' = 0$, γνωρίζομεν ὅτι $\theta = 90^0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι α′ καὶ β′ εἶναι ὀρθογώνια. Ἂν συνημ $\theta = \alpha' \cdot \beta' > 0$, τότε θ εἶναι ὀξεῖα γωνία καὶ ἂν συνημ $\theta = \alpha' \cdot \beta' < 0$, τότε θ εἶναι ἀμβλεῖα. Ἐπειδὴ ἡ θ εἶναι καὶ ἡ γωνία μεταξὺ α καὶ β (μόνον τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων ἀλλάσσουν κατὰ τὴν «κανονικοποίησιν») δύνανται νὰ γίνουν ἀκριβῶς ἀνάλογοι σκέψεις διὰ τὴν σπουδαιότητα τοῦ σημείου τοῦ $\alpha \cdot \beta$. Ἁπλῆ εἶναι ἐπίσης καὶ ἡ ἑξῆς ἐπαλήθευσις, διὰ τῆς χρήσεως τῆς (14) καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν : $\alpha \cdot \alpha \geqq 0$, ἡ ἰσότης ἰσχύει διὰ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα μόνον, $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, $\alpha \cdot (\kappa\beta) = \kappa(\alpha \cdot \beta)$ καὶ $\alpha \cdot (\beta + \delta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta$.

Γενικεύομεν τώρα τοὺς ὁρισμοὺς τῆς προσθέσεως διανυσμάτων καὶ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον. Ἂν $\alpha = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ καὶ $\beta = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$ διανύσματα εἰς χῶρον ν διαστάσεων, καὶ ἂν κ πραγματικὸς ἀριθμός, ὁρίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων

$$\alpha + \beta = (\chi_1 + \psi_1, \chi_2 + \psi_2, \ldots, \chi_3 + \psi_3),$$

καὶ τὸ μονομετρικὸν γινόμενον

$$\kappa\alpha = (\kappa\chi_1, \kappa\chi_2, \ldots, \kappa\chi_\nu)$$

Χρήσιμον ἄσκησιν θὰ ἀπετέλει ἡ ἀπόδειξις ὅτι οἱ κάτωθι νόμοι, οἱ ὁποῖοι εἶναι γενικεύσεις τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν εἰς χώρους δύο καὶ τριῶν διαστάσεων, ἰσχύουν ἐπίσης διὰ διανύσματα εἰς ν-διάστατον χῶρον.

Πρόσθεσις διανυσμάτων

(Π1) Συμπερίληψις : ἂν α καὶ β εἶναι εἰς τὸν χῶρον, τότε ὑπάρχει διάνυσμα $\alpha + \beta$ εἰς τὸν χῶρον, καλούμενον τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ β.

(Π2) Ἀντιμετάθεσις : $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(Π3) Ἀνάλυσις : $\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$

(Π4) Μηδενικὸν διάνυσμα : ὑπάρχει εἰς τὸν χῶρον διάνυσμα O τοιοῦτον ὥστε $\alpha + O = O + \alpha = \alpha$.

(Π5) Ἀρνητικὸν διανύσματος : διὰ πᾶν α, ὑπάρχει διάνυσμα β τοιοῦτον ὥστε $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0$. Τὸ β γράφεται συνήθως $-\alpha$.

Μονομετρικὸς πολλαπλασιασμὸς

(M1) Ἂν α εἶναι εἰς τὸν χῶρον καὶ κ εἶναι μονόμετρον, τότε κα εἶναι εἰς τὸν χῶρον.

(M2) $(\gamma\kappa)\alpha = \gamma(\kappa\alpha)$

(M3) $\kappa(\alpha+\beta) = \kappa\alpha + \kappa\beta$

(M4) $(\gamma+\kappa)\alpha = \gamma\alpha + \kappa\alpha$

(M5) Ἂν α εἶναι εἰς τὸν χῶρον, τότε $0\alpha = 0$, $1\alpha = \alpha$, $(-1)\alpha = -\alpha$.

Αἱ πράξεις αὗται, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸν ν διάστατον χῶρον δοθέντων τῶν ὁρισμῶν τῆς προσθέσεως διανυσμάτων καὶ τοῦ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λαμβάνονται ὡς **ἀξιώματα** διὰ μαθηματικὸν σύστημα γενικώτερον τοῦ ν-διαστάτου χώρου, τοῦ συστήματος τοῦ ***διανυσματικοῦ χώρου***. Διανυσματικὸς χῶρος V ὑπὲρ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ὁρίζεται ὡς μὴ κενὸν σύνολον στοιχείων, τὰ ὁποῖα καλοῦνται διανύσματα, ὁμοῦ μὲ δύο πράξεις, τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων καὶ τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμόν, ἱκανοποιουμένης τῆς (Π1) μέσῳ τῆς (Π5) καὶ τῆς (Μ1) μέσῳ τῆς (Μ5) ἀνωτέρω (ἔνθα διὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι α, β εἶναι τυχόντα διανύσματα εἰς χῶρον V καὶ γ, κ μονομετρικὰ μεγέθη). Τότε ὁ ν-διάστατος χῶρος καθίσταται εἰδικὴ περίπτωσις διανυσματικοῦ χώρου καὶ θὰ ἀναφερώμεθα εἰς αὐτὸν ὡς V_ν εἰς τὸ ἑξῆς.

Ἡ ἔννοια τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου δύναται ἐπίσης νὰ γενικευθῇ εἰς ν-χῶρον. Ἂν $\alpha = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ καὶ $\beta = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$ δύο διανύσματα εἰς ν χῶρον (ἔνθα ὁ χῶρος λαμβάνεται ἔχων ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων καὶ τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους ἐφ' ἑκάστου ἄξονος), τότε τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον ὁρίζεται $\chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2 + \ldots + \chi_\nu\psi_\nu$, καὶ οἱ ἀκόλουθοι κανόνες, οἱ ὁποῖοι θεωροῦνται πάλιν γενικεύσεις γεωμετρικῶν σχέσεων εἰς χώρους δύο καὶ τριῶν διαστάσεων, δύνανται νὰ ἐπαληθευθοῦν εἰς τὸν ν-χῶρον.

Ἐσωτερικὸς πολλαπλασιασμὸς

(E1) $\alpha\cdot\alpha \geqq 0$ διὰ πᾶν διάνυσμα α καὶ ἡ ἰσότης ἱκανοποιεῖται διὰ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα μόνον,

(E2) $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$,

(E3) $\alpha\cdot(\kappa\beta) = \kappa(\alpha\cdot\beta)$,

(E4) $\alpha\cdot(\beta+\delta) = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\delta$.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου ἑνὸς ζεύγους διανυσμάτων μᾶς λέγει κάτι διὰ τὴν μεταξὺ αὐτῶν γωνίαν, ὁδηγούμεθα φυσικῷ τῷ λόγῳ νὰ ἐρωτήσωμεν ἂν τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων εἰς ν-χῶρον ἔχῃ ἀντίστοιχον γεωμετρικὴν ἀπεικόνισιν. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ γενικεύσωμεν τὴν χρήσιμον ἔννοιαν τῆς γωνίας εἰς τὸν ν-χῶρον. Ἀλλὰ τὸ θέμα εἶναι, πῶς ὁρίζομεν γωνίαν εἰς τὸν ν-χῶρον; Ὁρίζομεν γωνίαν μεταξὺ δύο μὴ μηδενικῶν διανυσμάτων α καὶ β εἰς τὸν ν-χῶρον μέσῳ τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς, καὶ λαμβάνομεν

$$\text{(17)} \qquad \text{συνημ}\ \theta = \frac{\alpha\cdot\beta}{|\alpha|\,|\beta|}, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ.$$

Τώρα εἰς R_2 καὶ R_3 τὸ συνημ θ ποικίλλει ἀπὸ 1 μέχρι 0 μέχρι —1, οὕτω πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι, δοθέντος τοῦ ὁρισμοῦ (17), τὸ συνημ θ ἐπίσης ποικίλλει ἀπὸ $+1$ ἕως -1. Ἐὰν τοῦτο εἶναι ἀληθές, τότε τὸ ν-διάστατον ἀνάλογον θὰ ἔχῃ τὰς ζητουμένας ἰδιότητας καὶ θὰ εἶναι συμβιβαστὸν πρὸς τὴν γνωστήν μας ἤδη γεωμετρίαν. Τὸ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ (17) ποικίλλει ἀπὸ $+1$ ἕως -1 εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ νὰ γράψωμεν ὅτι

$$\left|\frac{\alpha\cdot\beta}{|\alpha|\,|\beta|}\right|\leqslant 1\,.$$

Ἡ ἐξέτασίς μας ποιεῖ χρῆσιν μιᾶς περιφήμου ἀνισότητος εἰς τὰ μαθηματικά, ἡ ὁποία καλεῖται ἀνισότης Σβάρτς (Schwartz inequality) καὶ λέγει ὅτι διὰ τυχόντα διανύσματα α καὶ β εἰς ἕνα χῶρον,

$$|\alpha\cdot\beta|\leqslant|\alpha|\,|\beta|\,. \tag{18}$$

Ἐπειδὴ τὰ α καὶ β ἐλήφθησαν μὴ μηδενικά, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (18) μὲ τὸν ἀριθμὸν $|\alpha|\,|\beta|$, καὶ νὰ λάβωμεν

$$\frac{|\alpha\cdot\beta|}{|\alpha|\,|\beta|}\leqslant 1$$

Ἀφοῦ τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων δὲν δύνανται ποτὲ νὰ εἶναι ἀρνητικὰ

$$\frac{|\alpha\cdot\beta|}{|\alpha|\,|\beta|}=\left|\frac{\alpha\cdot\beta}{|\alpha|\,|\beta|}\right|,$$

οὕτως ὥστε τὸ συνημ θ ποικίλλει ἀπὸ $+1$ ἕως -1 εἰς τὸν ν-χῶρον.

Ἂν εἷς διανυσματικὸς χῶρος ληφθῇ ὡς ἱκανοποιῶν τὴν (Ε1) μέσῳ τῆς (Ε4), καλεῖται Εὐκλείδιος διανυσματικὸς χῶρος, ἢ βραχύτερον ***Εὐκλείδιος χῶρος.*** Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ ἔννοια διανυσματικοῦ χώρου εἶναι γενικωτέρα ἐκείνης τοῦ Εὐκλειδίου χώρου, διότι εἷς διανυσματικὸς χῶρος δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην Εὐκλείδιος χῶρος. Ὅταν θέλωμεν κατωτέρω νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου εἰς διανυσματικὸν χῶρον, θὰ δηλοῦται σαφῶς ὅτι ὁ διανυσματικὸς χῶρος εἶναι Εὐκλείδιος· ἄλλως οἱ ὑπὸ ἐξέτασιν διανυσματικοὶ χῶροι θὰ εἶναι οἱ γενικώτεροι τοιοῦτοι ἱκανοποιοῦντες τὴν (Π1) μέσῳ τῆς (Π5) καὶ τὴν (Μ1) μέσῳ τῆς (Μ5) μόνον.

Πλείονα ἐπὶ τῶν διανυσματικῶν χώρων

Μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθέντων ἀξιωμάτων τοῦ ἀνυσματικοῦ χώρου ὑπάρχουν καὶ τὰ τοιαῦτα τῆς «συμπεριλήψεως» ὑπὸ τὰς πράξεις τῆς προσθέσως διανυσμάτων καὶ τοῦ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι αἱ πράξεις δὲν καταλήγουν εἰς διάνυσμα «ἔξωθεν» τοῦ χώρου. Χρήσιμον ἄσκησιν, ἀποτελεῖ ἡ ἀπόδειξις ὅτι ἂν ἓν σύνολον διανυσμάτων ὑπὲρ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς περιλαμβάνεται ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων καὶ τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμὸν τότε ἀποτελεῖ διανυσματικὸν χῶρον, δηλ., αἱ (Π1)–(Π5) καὶ (Μ1)–(Μ5) ἱκανοποιοῦνται διὰ τὸ σύνολον διανυσμάτων. Ὡς συνέπεια τούτου ἔχομεν τὸ ἑξῆς· ἂν ἓν σύνολον διανυσμάτων περιλαμβάνεται ἀναφορικῶς εἰς τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων καὶ τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμόν, καλεῖται διανυσματικὸς χῶρος ὑπὲρ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς.

Ἐπίσης, λέγοντες ὑποχῶρος τοῦ V ἐννοοῦμεν τὸ ὑποσύνολον τῶν διανυσμάτων τοῦ V τὸ ἀποτελοῦν ἐξ ἰδίων διανυσματικὸν χῶρον· ἤ, ποιοῦντες χρῆσιν τοῦ ἀμέσως ἀνωτέρω ἀποτελέσματος, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἓν ὑποσύνολον διανυσμάτων εἶναι ***ὑποχῶρος*** ἂν περιλαμβάνεται ὑπὸ τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων καὶ τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμόν. Οὕτως, ὁ τρισδιάστατος χῶρος, τὸν ὁποῖον τώρα θὰ γράφωμεν V_3, εἶναι ὑποχῶρος τοῦ V, ὡς εἶναι καὶ ὁ δισδιάστατος, V_2.

Ἔστω τώρα ἓν σύνολον διανυσμάτων εἰς V, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$. Τότε τὸ ***διάνυσμα*** $\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \ldots + \gamma_\kappa\alpha_\kappa$, τὸ προκῦπτον ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν πράξεων τῆς διανυσματικῆς προσθέσεως καὶ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καλεῖται ***γραμμικὸς συνδυασμὸς*** τῶν διανυσμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ (22). Εὐχερῶς δεικνύομεν ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν δοθέντος συνόλου διανυσμάτων ἀποτελεῖ διανυσματικὸν χῶρον. Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι β_1 καὶ β_2 εἶναι δύο διανύσματα εἰς τὸ σύνολον τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν,

$$\beta_1 = \varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \ldots + \varepsilon_\kappa\alpha_\kappa$$

$$\beta_2 = \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \ldots + \gamma_\kappa\alpha_\kappa,$$

τότε

$$\beta_1 + \beta_2 = (\varepsilon_1+\gamma_1)\alpha_1 + (\varepsilon_2+\gamma_2)\alpha_2 + \ldots + (\varepsilon_\kappa+\gamma_\kappa)\alpha_\kappa$$

καὶ

$$\delta\beta_1 = (\delta\varepsilon_1)\alpha_1 + (\delta\varepsilon_2)\alpha_2 + \ldots + (\delta\varepsilon_\kappa)\alpha_\kappa,$$

(ἔνθα ε, γ, δ μονόμετρα), εἶναι ἐπίσης γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$. Τὸ σύνολον (χῶρος) ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν δοθέντος συνόλου διανυσμάτων καλεῖται χῶρος ***ζευχθεὶς*** (spanned) ὑπὸ τοῦ δοθέντος συνόλου διανυσμάτων, καὶ τὸ σύνολον διανυσμάτων καλεῖται ***σύνολον ζεύξεως*** τοῦ χώρου.

Διὰ παραδείγματα τινὰ τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν, ἔστωσαν $\alpha_1 = (3, 4, 1)$ καὶ $\alpha_2 = (1, 6, 7)$. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν διανυσμάτων αὐτῶν εἶναι ἐπίπεδον V_2 εἰς V_3 περιέχον τὰ διανύσματα καὶ τέμνον τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων. Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ τὸ σύνολον $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ εἶναι σύνολον ζεύξεως καὶ ὁ ὑπὸ τοῦ συνόλου ζευγνύμενος χῶρος εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο διαστάσεων. Ἔστωσαν τώρα $\beta_1 = (6/7, 2)$, $\beta_2 = (-2, 1)$· τότε ὁ χῶρος ὁ ζευγνύμενος ὑπὸ β_1 καὶ β_2 εἶναι V_2 καὶ ὁ χῶρος ὁ ζευγνύμενος ὑπὸ μόνου τοῦ β_1 εἶναι γραμμὴ (μονοδιάστατος χῶρος) διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος, ἡ ὁποία περιέχει τὸ διάνυσμα β_1. Ἔστω $\beta_3 = (1, 7)$ καὶ θεωρήσατε τὸ σύνολον ζεύξεως $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$· ὁ ὑπὸ τῶν διανυσμάτων αὐτῶν ζευγνύμενος χῶρος εἶναι πάλιν V_2. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ «ἰσχὺς ζεύξεως» τῶν τριῶν διανυσμάτων $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ δὲν εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης δύο τυχόντων διανυσμάτων ἐκ τῶν τριῶν καί, ἀφ' ἑτέρου, ὅτι τὸ V_2 δὲν δύναται

---

22) Μολονότι ἡ πρόσθεσις ὡρίσθη διὰ ζεύγη διανυσμάτων μόνον, ἀποτελεῖ συνέπειαν τοῦ γενικευθέντος νόμου τῆς ἀναλύσεως εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὅτι τὸ ἄθροισμα $\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \ldots + \gamma_\kappa\alpha_\kappa$ εἶναι σαφὲς καὶ ἀναμφίβολον.

τὰ ζευχθῇ ὑπὸ ὀλιγωτέρων τῶν δύο ἐκ τῶν διανυσμάτων τούτων.

Ἂν τὰ διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ἱκανοποιοῦν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

(19) $$\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \ldots + \gamma_r\alpha_r = 0$$

καὶ τὰ μονόμετρα γ_ι δὲν εἶναι πάντα μηδενικά, τότε τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ καλεῖται ***γραμμικῶς ἐξηρτημένον*** (λέγομεν ἐπίσης ἐνίοτε ὅτι τὰ διανύσματα εἰς τὸ σύνολον εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα) ([23]). Ἡ ἐξίσωσις (19) ἱκανοποιεῖται, φυσικά, διὰ πᾶν σύνολον r διανυσμάτων ὅταν $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_r = 0$· ἂν τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων ἔχῃ τὴν ἰδιότητα ἡ (19) νὰ ἱκανοποιῆται ***μόνον*** διὰ $\gamma_\iota = 0$, $\iota = 1, \ldots, r$, τότε τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων καλεῖται ***γραμμικῶς ἀνεξάρτητον***, καὶ λέγομεν ἐνίοτε ὅταν τὰ διανύσματα καθ' ἑαυτὰ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

Παραδείγματα: Τὰ διανύσματα $\alpha_1 = (2, 1, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (4, 5, 3)$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα ἀφοῦ $2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0$. Τὰ διανύσματα $\beta_1 = (1, 0, 0)$, $\beta_2 = (0, 12, 0)$, καὶ $\beta_3 = (0, 0, 72)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, διότι ἂς ἐξετάσωμεν τὴν ἐξίσωσιν διανυσμάτων $\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0$. Τότε $\gamma_1(1, 0, 0) + \gamma_2(0, 12, 0) + \gamma_3(0, 0, 72) = (\gamma_1, 12\gamma_2, 72\gamma_3)$, διάνυσμα μηδενικὸν μόνον ἐν περιπτώσει $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$.

Ἡ ἔννοια τῆς ἐξαρτήσεως ἔχει ἁπλῆν γεωμετρικὴν παρουσίασιν. Ὑποτεθείσθω ὅτι γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (19) ἱκανοποιεῖται διά τι σύνολον μονομετρικῶν μεγεθῶν γ_ι ὄχι ὅλων μηδενικῶν καὶ ὅτι, ἂς εἴπωμεν, τὸ γ_1 εἶναι ἓν τῶν μονομέτρων τῶν διαφόρων τοῦ μηδενός. Τότε δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ὡς πρὸς α_1, λαμβάνοντες

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\alpha_2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}\alpha_3 - \ldots - \frac{\gamma_r}{\gamma_1}\alpha_r ,$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ α_1 εὑρίσκεται εἰς τὸν ὑπὸ τῶν $r-1$ διανυσμάτων $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ζευχθέντα χῶρον, καὶ τὸ α_1 εἶναι ὡς ἐκ τούτου ἐξηρτημένον ἐκ τοῦ συνόλου αὐτοῦ. Ἐν ἄλλοις λόγοις, τὸ α_1 οὐδόλως προσθέτει ἰσχὺν ζεύξεως εἰς τὸ σύνολον $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$· τὸ α_1 εἶναι οὐσιωδῶς πλεονάζον ὑπὸ τὴν ἄποψιν ταύτην. Ἡ ἔννοια τοῦ πλεονασμοῦ εἶναι κατ' οὐσίαν ἐκείνη τῆς ἐξαρτήσεως. Ἂν ἡ ἐξίσωσις (19) ἱκανοποιῆται διά τι σύνολον μονομέτρων γ_ι ὄχι ὅλων μηδενικῶν, γνωρίζομεν ὅτι κάποιο διάνυσμα εἰς τὸ σύνολον πρέπει νὰ εἶναι γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν παραμενόντων διανυσμάτων εἰς τὸ σύνολον. Ἐκτὸς τούτου, ἀληθὲς εἶναι καὶ τὸ ἀντίστροφον· ἂν β ἓν διάνυσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων $\beta_1, \ldots, \beta_\rho$, ἂς εἴπωμεν,

$$\beta = \delta_1\beta_1 + \ldots + \delta_\rho\beta_\rho ,$$

---

23) Λέγομεν ἐπίσης ὅτι ἓν διάνυσμα **β** εἶναι ἐξηρτημένον ἐκ τοῦ μὴ κενοῦ συνόλου τῶν διανυσμάτων Σ ἂν ὑπάρχουν εἰς Σ διανύσματα $\alpha_1, \ldots, \alpha_\kappa$ τοιαῦτα ὥστε

$$\beta = \gamma_1\alpha_1 + \ldots + \gamma_\kappa\alpha_\kappa ,$$

καὶ ὅτι τὸ σύνολον Τ εἶναι ἐξηρτημένον ἐκ τοῦ Σ ἂν πᾶν διάνυσμα εἰς Τ εἶναι ἐξηρτημένον ἐκ τοῦ Σ.

ἔνθα $\rho > 1$, τότε

$$6 - \delta_1 6_1 - \ldots - \delta_\rho 6_\rho = 0.$$

Τινὲς ἢ ἅπαντες τῶν συντελεστῶν δ_i δύνανται νὰ εἶναι μηδέν, ἀλλ' ὁ συντελεστὴς τοῦ 6 εἶναι 1, οὕτως ἔχομεν ἐξίσωσιν ἀνάλογον πρὸς τὴν (19) εἰς τὴν ὁποίαν δὲν εἶναι ἅπαντες οἱ συντελεσταὶ μηδέν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων $\{6, 6_1, \ldots, 6_\rho\}$ εἶναι ἐξηρτημένον.

Ὁ γενικὸς ὁρισμὸς τῆς βάσεως καὶ διαστάσεως διανυσματικοῦ χώρου ἐπίσης συμπίπτει μὲ τὴν διαισθητικὴν ἀντίληψιν τὴν λαμβανομένην ἐκ τοῦ δισδιαστάτου χώρου:

Ἔστω V εἷς διανυσματικὸς χῶρος περιέχων τὰ διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$. Τότε τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων $\alpha_1, \ldots, \alpha_\kappa$ εἶναι βάσις (κατ' οὐσίαν σύστημα συντεταγμένων) διὰ τὸν V ἂν καὶ μόνον ἂν

1. τὰ διανύσματα α_i ζευγνύουν τὸν V,
2. τὰ διανύσματα α_i εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα.

Οὕτω βάσις διά τινα χῶρον εἶναι ἓν «οἰκονομικὸν» ἢ «τὸ μικρότερον» σύνολον ζεύξεως διὰ τὸν χῶρον. Ἡ διάστασις διανυσματικοῦ χώρου εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων περιεχομένων εἰς τὸν χῶρον.

Εἶναι διδακτικὸν νὰ ἐπανεξετάσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐπὶ τῶν συστημάτων συντεταγμένων συζήτησιν εἰς τὸ φῶς τῶν ὁρισμῶν τῆς ***βάσεως*** καὶ τῆς ***διαστάσεως***. Ἡ ἐκλογὴ μονάδων μήκους καὶ ἡ κατασκευὴ συστημάτων συντεταγμένων εἰς χῶρον μιᾶς, δύο καὶ τριῶν διαστάσεων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ μέθοδος ἐκλογῆς βάσεως διὰ τὸ χῶρον καὶ σχηματισμοῦ κατόπιν τοῦ συνόλου ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν διανυσμάτων βάσεως, λαμβανομένου κατὰ συνέπειαν τοῦ δοθέντος χώρου. Ἐπὶ παραδείγματι, θεωρήσατε τὸν δισδιάστατον χῶρον, V_2. Ἡ ἀρχὴ πρότερον ἐγίνετο διὰ τῆς ἐκλογῆς δύο μὴ συγγραμμικῶν ἀξόνων, καὶ ἐν συνεχείᾳ προεβαίνομεν εἰς καθίδρυσιν ἀντιστοιχίας ἓν πρὸς ἓν μεταξὺ σημείων καὶ διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἰσοδύναμος μέθοδος εἶναι ἡ ἀκόλουθος: Ὑποτεθείσθω ὅτι ἐκλέγομεν δύο γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα εἰς V_2, ἔστωσαν $\alpha_1 = (1, 0)$ καὶ $\alpha_2 = (0, 1)$. Τότε τὸ V_2 εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν $\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2$ τῶν διανυσμάτων αὐτῶν βάσεως. Διότι ἔστω (χ_1, χ_2) τυχὸν σημεῖον ἢ διάνυσμα εἰς τὸν χῶρον. Τότε $\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 = \chi_1(1, 0) + \chi_2(0, 1) = (\chi_1, \chi_2)$ καὶ τὸ διάνυσμα ἐκφράζεται μέσῳ τῶν α_1 καὶ α_2. Εἰδικώτερον, λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν χ_1 ὑποθέτοντες $\chi_2 = 0$ καὶ χ_1 νὰ ποικίλλῃ ὑπὲρ R, τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ τὸν ἄξονα τῶν χ_2 ὑποθέτοντες $\chi_1 = 0$ καὶ χ_2 νὰ ποικίλλῃ ὑπὲρ R. Σημεῖα ἢ διανύσματα μὴ εὑρισκόμενα ἐπὶ τῶν ἀξόνων λαμβάνονται, βεβαίως, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι χ_1 καὶ χ_2 ποικίλλουν ὑπὲρ τοὺς μὴ μηδενικοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς. Βλέπομεν πάλιν ὅτι τὰ διανύσματα βάσεως δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην κάθετα· δύο τυχόντα γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα εἰς V_2 ζευγνύουν τὸν χῶρον.

Διαισθητικῶς ἀναμένομεν ὅτι ἡ διάστασις τοῦ V_2 θὰ εἶναι 2, καὶ ὁ γενικὸς ὁρισμὸς δηλοῖ ὅτι ἡ διάστασις εἶναι 2 ἂν 2 εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων εἰς τὸν χῶρον. Προφανῶς ἓν διάνυσμα δὲν δύναται νὰ ζεύξῃ τὸν V_2. Ἂς θεωρήσωμεν τὰ τρία διανύσματα α_1, α_2 (ὡς ὡρίσθησαν ἀνωτέρω) καὶ $\alpha_3 = (\chi_1, \chi_2)$, ὅπου α_3 τυχὸν μὴ μηδενικὸν διάνυσμα εἰς V_2. Τότε

$$\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \tag{20}$$

καὶ ἀφοῦ οἱ συντελεσταὶ τῶν διανυσμάτων εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένον (σημειώσατε ἐπίσης ὅτι ἂν ἡ (20) λυθῇ ὡς πρὸς α_3, θὰ λάβωμεν τὸ α_3 ἐκπεφρασμένον ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων βάσεως α_1 καὶ α_2). Ἕτερος τρόπος ἐκφράσεως τούτου εἶναι νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ διάνυσμα α_3 οὐδόλως προσθέτει εἰς τὴν ἰσχὺν ζεύξεως τῶν α_1 καὶ α_2.

Ἔχομεν δείξει ὅτι τὰ τρία διανύσματα α_1, α_2 καὶ α_3 εἰς V_2 εἶναι ἐξηρτημένα, ἀλλὰ πῶς γνωρίζομεν ὅτι ***τυχὸν*** σύνολον τριῶν, τεσσάρων, πέντε, ..., ν διανυσμάτων εἰς V_2 θὰ εἶναι ἐπίσης γραμμικῶς ἐξηρτημένον (ἢ ἄλλως, ὅτι δύο εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων εἰς V_2) ; Τὸ ἀκόλουθον θεώρημα, ἀποδεικνυόμενον εἰς πλεῖστα κείμενα γραμμικῆς ἀλγέβρας, δίδει τὴν ἀπάντησιν : τυχὸν σύνολον κ διανυσμάτων εἰς V_ν εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένον ἂν $\kappa > \nu$.

Παρόμοια σχόλια ἰσχύουν διὰ τὸν τρισδιάστατον χῶρον, V_3. Ἡ διάστασις εἶναι 3, καὶ ἡ βάσις δύναται νὰ ληφθῇ οὖσα τρία γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα (τρία τυχόντα διανύσματα μὴ κείμενα ἅπαντα εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον). Ὑποτεθείσθω ὅτι ἐκλέγομεν τὰ μοναδιαῖα διανύσματα ὡς βάσιν μας, $\alpha_1 = (1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, 0)$, καὶ $\alpha_3 = (0, 0, 1)$. Τότε τὸ V_3 εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῆς μορφῆς

$$\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 + \chi_3\alpha_3 = (\chi_1, \chi_2, \chi_3).$$

Ἐνδιαφέρον (καὶ ἰσχυρὸν) χαρακτηριστικὸν βάσεως ἑνὸς χώρου εἶναι τὸ ἑξῆς : ὄχι μόνον δύναται πᾶν διάνυσμα τοῦ χώρου νὰ ἐκφρασθῇ μέσῳ τῶν διανυσμάτων βάσεως, ἀλλ' ἐπίσης ἡ παρουσίασις εἶναι μοναδικὴ — δοθὲν διάνυσμα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μόνον κατὰ ἕνα τρόπον μέσῳ δοθείσης βάσεως. Πρέπει, ὁπωσδήποτε, νὰ γίνῃ κατανοητὸν ἐκ τῶν σχολίων μας ὅτι ἡ βάσις ***δὲν*** εἶναι μοναδική. Ἓν θεώρημα λέγει ὅτι ἂν V εἶναι διανυσματικὸς χῶρος πεπερασμένων διαστάσεων ν, τότε τυχὸν σύνολον ν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων εἶναι βάσις διὰ V. Ἡ αὐθαιρεσία εἰς τὴν ἐκλογὴν βάσεως διά τινα χῶρον πρέπει νὰ ἀντιδιασταλῇ τῆς μοναδικότητος παρουσιάσεως διανύσματος εἰς τὸν χῶρον ἅπαξ ἐκλεγῇ δοθεῖσα βάσις.

Ἐξάρτησις καὶ σημαντικαὶ λύσεις εἰς ὁμογενῆ συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων

Εἴδομεν εἰς προηγηθὲν παράδειγμα ὅτι τὰ διανύσματα $\beta_1 = (1, 0, 0)$, $\beta_2 = (0\ 12, 0)$, $\beta_3 = (0, 0, 73)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα (δηλ. ὅτι $\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0$ ἱκανοποιεῖται μόνον διὰ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$). Ἂς γράψωμεν τὰ διανύσματα ὑπὸ μορφὴν στηλῶν ἀντὶ σειρῶν,

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 73 \end{bmatrix}.$$

Τότε ἡ ἐξίσωσις διανυσμάτων

(21) $$\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0$$

δύναται νὰ γραφῇ

(22) $$\gamma_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ἤ

(23) $$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 12\gamma_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 73\gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ἀφοῦ τὰ διανύσματα προστίθενται κατὰ τὰ ἀντίθετα στοιχεῖα, ἡ (21) ἢ ἡ (23) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα μονομετρικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} \gamma_1 + 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 12\gamma_2 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + 73\gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα γενικωτέραν κατάστασιν. Ἔχομεν τὴν διανυσματικὴν ἐξίσωσιν

(24) $$\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 + \ldots + \chi_r\alpha_r = 0,$$

ἔνθα τὰ α_i εἶναι διανύσματα·στῆλαι ἐκφραζόμενα

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa 1} \end{bmatrix}, \ldots, \alpha_r = \begin{bmatrix} \alpha_{1r} \\ \alpha_{2r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa r} \end{bmatrix}$$

Τότε ἡ (24) δύναται νὰ γραφῇ

(25) $$\chi_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa 1} \end{bmatrix} + \chi_2 \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa 2} \end{bmatrix} + \ldots + \chi_r \begin{bmatrix} \alpha_{1r} \\ \alpha_{2r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Διὰ τῆς χρήσεως μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὕτη γίνεται

$$(26)\qquad \begin{bmatrix} \alpha_{11}\chi_1 \\ \alpha_{21}\chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa 1}\chi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{12}\chi_2 \\ \alpha_{22}\chi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa 2}\chi_2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \alpha_{1r}\chi_r \\ \alpha_{2r}\chi_r \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa r}\chi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ἂν τὸ διάνυσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸ ἀριστερὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως πρέπει νὰ εἶναι μηδέν, ἕκαστον στοιχεῖον εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων πρέπει νὰ εἶναι μηδέν, οὕτως ἡ (26) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα κ μονομετρικῶν ἐξισώσεων μὲ r ἀγνώστους,

$$(27)\qquad \begin{aligned} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \dots + \alpha_{1r}\chi_r &= 0 \\ \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \dots + \alpha_{2r}\chi_r &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \\ \alpha_{\kappa 1}\chi_1 + \alpha_{\kappa 2}\chi_2 + \dots + \alpha_{\kappa r}\chi_r &= 0. \end{aligned}$$

Ἓν τοιοῦτον σύστημα ἐξισώσεων, ὅπου τὰ α_{ij} εἶναι γνωσταὶ σταθεραί, καλεῖται *ὁμογενὲς* σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων. Ἐπίσης ἂν $\chi_1 = \gamma_1$, $\chi_2 = \gamma_2$, $\dots$, $\chi_r = \gamma_r$ λύσις τοῦ συστήματος (27), τότε τὸ διάνυσμα $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$ καλεῖται ***διάνυσμα λύσεως*** τοῦ (27). Ἂν $\gamma_\iota = 0$, $\iota = 1, \dots, r$, ἡ μόνη λύσις τοῦ (27), τὸ διάνυσμα λύσεως εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καλεῖται ***ἀσήμαντος*** λύσις καὶ λέγομεν ὅτι ἡ (27) ἱκανοποιεῖται ἀσημάντως. Ἂν κάποιο γ_ι εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς εἰς τὸ διάνυσμα λύσεως, τότε λέγομεν ὅτι ἡ (27) ἔχει ***σημαντικὴν*** λύσιν.

Ἡ στενὴ σχέσις μεταξὺ τῆς ὑπάρξεως σημαντικῶν λύσεων τῆς (27) καὶ γραμμικῆς ἐξαρτήσεως τοῦ συνόλου τῶν διανυσμάτων $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ καθίσταται τώρα σαφής. Ἐὰν ὑπάρχουν σημαντικαὶ λύσεις τῆς (27) τότε ἡ ἐξίσωσις διανυσμάτων (24), $\chi_1\alpha_1 + \dots + \chi_r\alpha_r = 0$, ἱκανοποιεῖται διά τινα χ_ι ὄχι ἅπαντα μηδέν. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι τὰ διανύσματα $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα, ἰσχύει δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον: ἂν τὰ $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ εἶναι ἐξηρτημένα, τότε τὸ ἀντίστοιχον σύστημα ἐξισώσεων (27) πρέπει νὰ ἔχῃ σημαντικὴν λύσιν. Ἀφ' ἑτέρου, ἂν ἡ (27) ἔχῃ μόνον τὴν ἀσήμαντον λύσιν, τότε ἡ (24) ἱκανοποιεῖται μόνον διὰ συντελεστὰς ἅπαντας μηδέν· τὰ διανύσματα $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην γραμμικῶς ἀνεξάρτητα (ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον, βεβαίως). Ὑπάρχει θεώρημα κατὰ τὸ ὁποῖον πᾶν σύνολον κ ὁμογενῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ r ἀγνώστους ἔχει σημαντικὰς λύσεις ἂν $\kappa < r$, δηλ., ἂν ὑπάρχουν ὀλιγώτεραι ἐξισώσεις ἢ ἄγνωστοι.

Ἕτερον σοβαρὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ συστήματος (27) εἶναι ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διανυσμάτων λύσεως σχηματίζει διανυσματικὸν χῶρον. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι καὶ ἁπλῆ καὶ διδακτική, οὕτω θὰ προβῶμεν τώρα εἰς τὴν ἐξέτασίν της. Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων λύσεως δὲν εἶναι κενόν, διότι ἡ (27) ἔχει τουλάχιστον μίαν λύσιν, $\chi_1 = \chi_2 = \ldots = \chi_r = 0$. Ἔστω τώρα ἓν διάνυσμα λύσεως $\alpha = (\chi_1, \ldots, \chi_r)$· τότε ἡ

$$\varkappa\alpha = (\varkappa\chi_1, \ldots, \varkappa\chi_r)$$

εἶναι λύσις ἀφοῦ ἡ

$$(\varkappa\chi_1)\alpha_1 + (\varkappa\chi_2)\alpha_2 + \ldots + (\varkappa\chi_r)\alpha_r = 0$$

ἱκανοποιῆται. Ἐπίσης ἂν $\beta = (\psi_1, \ldots, \psi_r)$ ἕτερον διάνυσμα λύσεως, τότε

$$\psi_1\alpha_1 + \ldots + \psi_r\alpha_r = 0 \tag{28}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν (28) καὶ (24) ἱκανοποιεῖ τὴν

$$(\chi_1 + \psi_1)\,\alpha_1 + \ldots + (\chi_r + \psi_r)\,\alpha_r = 0 \tag{29}$$

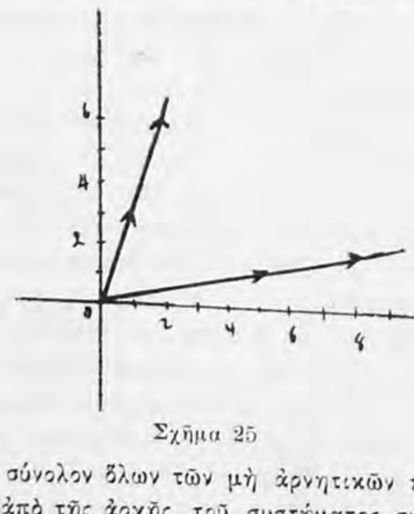
καὶ κατὰ συνέπειαν ἀποτελεῖ λύσιν. Τοῦτο δεικνύει ὅτι τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων λύσεως περικλείεται ὑπὸ τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων καὶ εἶναι κατὰ συνέπειαν διανυσματικὸς χῶρος.

Κυρτότης

Εἴδομεν ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῆς μορφῆς $\varkappa_1\alpha_1 + \varkappa_2\alpha_2$ δύο γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων εἰς V_2 πληροῖ τὸν δισδιάστατον χῶρον. Οἱ συντελεσταὶ εἰς τοὺς συνδυασμοὺς αὐτούς, βεβαίως, δύνανται νὰ εἶναι τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί, θετικοί, ἀρνητικοί, ἢ μηδέν. Ἂς ἐξετάσωμεν τοὺς συνδυασμοὺς τοὺς ἔχοντας μόνον μὴ ἀρνητικοὺς συντελεστάς, τοὺς συνδυασμοὺς

$$\varkappa_1\alpha_1 + \varkappa_2\alpha_2,\ \varkappa_1,\ \varkappa_2 \geqq 0.$$

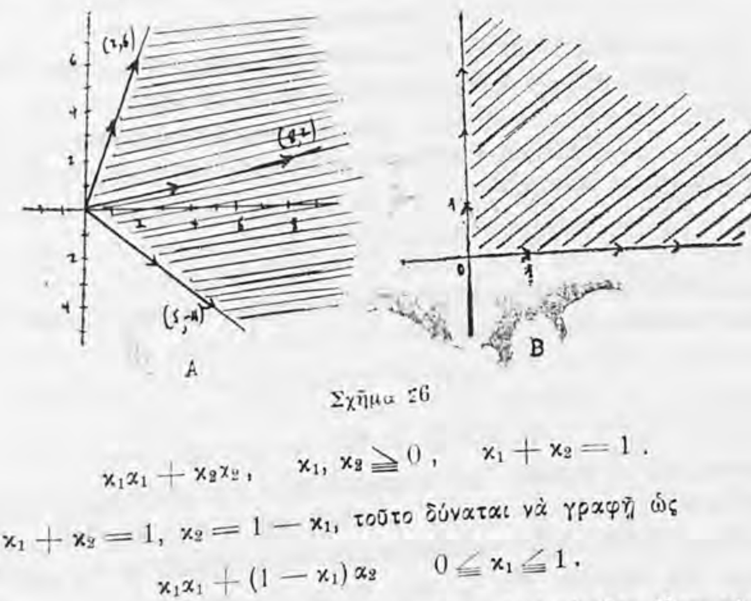
τότε τὸ ὑποσύνολον τὸ ζευγνύμενον ὑπὸ τῶν διανυσμάτων αὐτῶν εἶναι σημειοσύνολον καλούμενον *κῶνος*. Π.χ., ἔστωσαν $\alpha_1 = (8, 2)$, $\alpha_2 = (2, 6)$. Ἂν $\varkappa_1 = 0$



Σχῆμα 25

καὶ $\varkappa_2$ ποικίλλῃ ὑπὲρ τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, λαμβάνομεν τὴν ἀκτῖνα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ διὰ τοῦ σημείου (2, 6) μέρος τῆς ὁποίας δεικνύεται ὑπὸ εὐθυγράμμου τμήματος εἰς τὸ σχῆμα. Ἂν $\varkappa_1$ ποικίλλῃ ὑπὲρ τοὺς μὴ ἀρνητικοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς καὶ $\varkappa_2 = 0$, πληροῦμεν τὴν ἀκτῖνα ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος διὰ τοῦ σημείου πέρατος τοῦ διανύσματος α_1. Δι' ἁπάσας τὰς ἑτέρας ἐπιτρεπτὰς τιμὰς τῶν $\varkappa_1$ καὶ $\varkappa_2$ τὰ διανύσματα θὰ κεῖνται εἰς τὸν κῶνον τὸν περικλειόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἀκτίνων. Διὰ πρόσθετα παραδείγματα, ὑποτεθείσθω ὅτι ἔχομεν τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν α_1 καὶ α_2 ὡς ἀνωτέρω καὶ $\alpha_3 = (5, -4)$. Τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν αὐτῶν τῶν διανυσμάτων σχηματίζει ἐπίσης κῶνον ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 26α (σημειώσατε ὅτι τὰ διανύσματα εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα· ὁ ὑπὸ τῶν τριῶν διανυσμάτων ζευγνύμενος κῶνος εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ζευγνύμενον ὑπὸ τῶν διανυσμάτων α_1 καὶ α_2). Διαζευκτικῶς, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι τὰ διανύσματα εἶναι μοναδιαῖα, $\beta_1 = (1, 0)$ καὶ $\beta_2 = (0, 1)$. Ὁ κῶνος ἐν περιπτώσει ταύτῃ εἶναι τὸ πρῶτον τεταρτημόριον, ὡς δεικνύεται ὑπὸ τοῦ σχήματος 26β.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ εἰς τοὺς γραμμικοὺς συνδυασμοὺς ὄχι μόνον εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ ἀλλ' ἔχουν ἄθροισμα 1, δηλ. ἂν α_1, καὶ α_2 εἶναι ὡς ἀνωτέρω ὡρίσθησαν, ἔχομεν



Σχῆμα 26

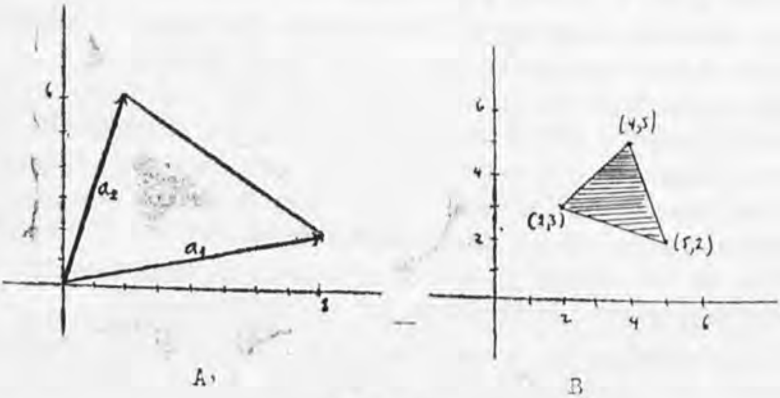
$$\varkappa_1\alpha_1 + \varkappa_2\alpha_2, \quad \varkappa_1, \varkappa_2 \geqq 0, \quad \varkappa_1 + \varkappa_2 = 1.$$

Ἀφοῦ ἂν $\varkappa_1 + \varkappa_2 = 1$, $\varkappa_2 = 1 - \varkappa_1$, τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ ὡς

$$\varkappa_1\alpha_1 + (1 - \varkappa_1)\alpha_2 \qquad 0 \leqq \varkappa_1 \leqq 1.$$

Οὗτος καλεῖται ***κυρτὸς γραμμικὸς συνδυασμός***, καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν κυρτῶν συνδυασμῶν τῶν διανυσμάτων α_1 καὶ α_2 εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ περιέχον τὰ σημεῖα πέρατος τῶν εἰς τὸ σχ. 27α δεικνυομένων διανυσμάτων. Ἂν $\beta_1=(5,2)$, $\beta_2=(2,3)$, $\beta_3=(4,5)$, τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν κυρτῶν συνδυασμῶν $\varkappa_1\beta_1+\varkappa_2\beta_2+\varkappa_3\beta_3$ τῶν διανυσμάτων αὐτῶν εἶναι τὸ τρίγωνον τοῦ σχ. 27β. Ἂν $\varkappa_3=0$, τότε οἱ κυρτοὶ συνδυασμοὶ τῆς μορφῆς $\varkappa_1\beta_1 + \varkappa_2\beta_2$ πληροῦν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ περιέχον τὰ σημεῖα (2, 3) καὶ (5, 2)· ἂν $\varkappa_2 = 0$, οἱ κυρτοὶ συνδυασμοὶ τῶν $\varkappa_1\beta_1$ καὶ $\varkappa_3\beta_3$ πληροῦν τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τὴν περιέχουσαν τὰ σημεῖα πέρατος τῶν β_1

καὶ β_3· καὶ ἂν $\kappa_1 = 0$, οἱ κυρτοὶ συνδυασμοὶ $\kappa_2\beta_2 + \kappa_3\beta_3$ πληροῦν τὴν ἀπομείνασαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου. Σημεῖα εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου λαμβάνονται ἂν τὰ ἐπιτρεπτὰ κ_ι, $\iota = 1, 2, 3$, λάβουν τιμὰς διαφόρους τοῦ μηδενός.



Σχῆμα 27

Ἐπειδὴ οἱ μὴ ἀρνητικοὶ καὶ κυρτοὶ συνδυασμοὶ διανυσμάτων εἶναι σπουδαιότατοι εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν καὶ ἐπειδὴ μέγα μέρος τοῦ ὑπολοίπου κεφαλαίου ἔχει σχέσιν πρὸς αὐτούς, θὰ χρειασθῶμεν τὰς γενικευμένας ἐννοίας, τὰς ὁποίας ἔδειξεν ἡ ἀνωτέρω γεωμετρικὴ ἐξέτασις.

Ἔστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ σύνολον διανυσμάτων, καὶ ἔστωσαν τὰ μονομετρικὰ μεγέθη $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$. Τότε ***μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς*** τῶν διανυσμάτων τούτων εἶναι τὸ διάνυσμα

$$\kappa_1\alpha_1 + \kappa_2\alpha_2 + \ldots + \kappa_r\alpha_r, \quad \kappa_\iota \geqq 0, \quad \iota = 1, \ldots, r.$$

Ἐπίσης ***κυρτὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς*** (ἢ βραχέως, κυρτὸς συνδυασμὸς) τῶν διανυσμάτων αὐτῶν εἶναι τὸ διάνυσμα

$$\kappa_1\alpha_1 + \ldots + \kappa_r\alpha_r,$$

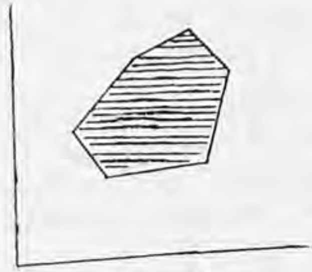
ἔνθα $\kappa_\iota \geqq 0$, $\iota = 1, \ldots, r$, καὶ $\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_r = 1$.

Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ἑνώνει δύο σημεῖα εἰς V_ν εἶναι κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν σημείων (διανυσμάτων) καὶ ὅτι ἂν τυχὸν σημεῖον δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς κυρτὸς συνδυασμὸς δύο σημείων εἰς V_ν τότε κεῖται ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ἑνώνει τὰ δύο σημεῖα. Δυνάμεθα μετὰ τὰ ἀποτελέσματα ταῦτα νὰ δώσωμεν ἀκριβῆ ὁρισμὸν τῆς γεωμετρικῆς ἐννοίας τοῦ ***κυρτοῦ συνόλου.*** Γεωμετρικῶς, ἓν σύνολον εἶναι κυρτὸν ἄν, δοθέντων δύο τυχόντων σημείων εἰς αὐτό, τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖον ἑνώνει τὰ σημεῖα κεῖται ἐντὸς τοῦ συνόλου. Ἀκριβέστερον:

Ἓν σύνολον Σ εἶναι ***κυρτὸν*** ἂν α καὶ β εἶναι διανύσματα (σημεῖα) εἰς Σ, καὶ $\kappa\alpha + (1 - \kappa)\beta \in \Sigma$ διὰ πᾶν κ τοιοῦτον ὥστε $0 \leqq \kappa \leqq 1$.

Παραδείγματα τοῦ κυρτοῦ συνόλου εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου, τοῦ τετραγώνου, τοῦ τριγώνου· ὅλος ὁ χῶρος· τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων εὐθυγράμμου τμήματος. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου δὲν εἶναι κυρτὸν σύνολον, οὔτε εἶναι κυρτὸν τὸ σύνολον τῶν τριῶν σημείων—κορυφῶν τοῦ τριγώνου.

Ἂς ἐξετάσωμεν δοθὲν κυρτὸν σύνολον εἰς τὸ ἐπίπεδον. Τὰ σημεῖα τὰ περικλείοντα τὰς γωνίας τοῦ συνόλου καλοῦνται ***ἄκρα σημεῖα***, δηλ., ἓν σημεῖον εἰς κυρτὸν σύνολον, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ἑνώνει δύο ***ἕτερα*** σημεῖα εἰς τὸ σύνολον καλεῖται ἄκρον σημεῖον (ἢ ἓν σημεῖον εἶναι ἄκρον ἂν δὲν ἀποτελῇ κυρτὸν συνδυασμὸν δύο ἄλλων σημείων εἰς τὸ σύν-



Σχῆμα 28

ολον). Τὸ σύνολον τῶν σημείων τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν ἓξ ἄκρων σημείων καὶ μόνον εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα δὲν εἶναι, βεβαίως, κυρτὸν σύνολον. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι πληροῦμεν τὸ ἀνωτέρω κυρτὸν σύνολον, λαμβάνοντες ὅλους τοὺς κυρτοὺς συνδυασμοὺς τῶν ἓξ διανυσμάτων τῶν ἐχόντων τὰ ἄκρα σημεῖα ὡς σημεῖα πέρατός των. Τὸ οὕτω πληρούμενον κυρτὸν σύνολον ἔχει εἰδικὴν ὀνομασίαν: καλεῖται ἡ ***κυρτὴ θήκη*** (convex hull) τοῦ δοθέντος σημειοσυνόλου:

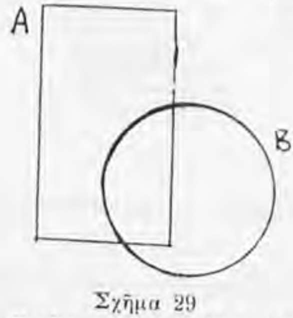
Ἔστω σημειοσύνολον Α. Τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν κυρτῶν συνδυασμῶν τῶν σημείων τοῦ Α καλεῖται ***κυρτὴ θήκη*** τοῦ συνόλου Α. Ἡ κυρτὴ θήκη δύο τυχόντων σημείων εἰς V_ν εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἑνώνει τὰ σημεῖα, ἡ κυρτὴ θήκη τριῶν τυχόντων διαφόρων ἀλλήλων καὶ μὴ ὅλων κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον εἶναι τρίγωνον, καὶ ἡ κυρτὴ θήκη τοῦ συνόλου τῶν σημείων ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου εἶναι ὁ ἔχων ὡς σύνορον τὴν περιφέρειαν στερεὸς δίσκος (σημειώσατε ὅτι πᾶν σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ κυρτοῦ συνόλου). Ἡ κυρτὴ θήκη δοθέντος συνόλου δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐπίσης ὡς τὸ μικρότερον κυρτὸν σύνολον περιέχον τὸ δοθὲν σύνολον.

Τὸ κυρτὸν σύνολον τοῦ ἀνωτέρω διαγράμματος εἶναι παράδειγμα ***κυρτοῦ πολυέδρου***, σύνολον ὁριζόμενον ὡς ἀκολούθως: ἂν Μ πεπερασμένον σημειοσύνολον, τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν κυρτῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν σημείων τοῦ Μ καλεῖται ***κυρτὸν πολύεδρον*** (ἤ, ἐν ἄλλοις λόγοις, κυρτὸν πολύεδρον εἶναι ἡ κυρτὴ θήκη πεπερασμένου σημειοσυνόλου).

Δυνάμεθα τώρα νὰ ὁρίσωμεν μετὰ προσοχῆς καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ κώνου. Ἓν μὴ κενὸν σύνολον διανυσμάτων Τ καλεῖται κῶνος ἄν, διὰ πᾶν διάνυσμα $\alpha \in T$ τὸ διάνυσμα $\kappa\alpha \in T$ διὰ πᾶν $\kappa \geqq 0$. Οὕτω τὰ σύνολα εἰς τὰ σχήματα 26Α καὶ Β ἀνωτέρω εἶναι κῶνοι, ὡς κῶνος ἐπίσης εἶναι καὶ ἅπας ὁ χῶρος. Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι εἷς κῶνος περιέχει τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων ἀφοῦ κ δύναται νὰ ἰσοῦται πρὸς μηδέν.

Κῶνος, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐπίσης κυρτὸν σύνολον καλεῖται κυρτὸς κῶνος (οἱ κῶνοι τῶν σχημάτων 26Α καὶ Β εἶναι κυρτοὶ κῶνοι)· ὁ κυρτὸς κῶνος δύναται ἐπίσης νὰ ὁρισθῇ ὡς τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν πεπερασμένου συνόλου διανυσμάτων.

Ὑπάρχει ἓν θεώρημα κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ τομὴ τυχούσης συλλογῆς κυρτῶν συνόλων εἶναι κυρτὸν σύνολον, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἕνωσις δύο κυρτῶν συνόλων δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην κυρτὴ ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 29 ([24]). Δύναται ἐπίσης νὰ



Σχῆμα 29
Τὰ σύνολα Α, Β εἶναι κυρτά· $A \cup B$ δὲν εἶναι κυρτή.

δειχθῇ ὅτι ὁ ἡμιχῶρος εἶναι κυρτὸν σύνολον. Αὐτό, ὁμοῦ μετὰ τοῦ θεωρήματος περὶ τῆς κυρτότητος τῆς τομῆς κυρτῶν συνόλων, μᾶς διαβεβαιοῖ ὅτι ἡ τομὴ τυχόντος ἀριθμοῦ ἡμιχώρων εἶναι κυρτὸν σύνολον. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεως συστήματος γραμμικῶν ἀνισοτήτων εἶναι κυρτὸν σύνολον—ἀποτέλεσμα βασικῆς σπουδαιότητος εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμόν.

Τὸ ἀθροιστικὸν σύμβολον

Ἀθροίσματα πολλῶν ὅρων ἀθρόως ἀπαντῶνται εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν ὡς καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν, καὶ εἶναι συχνάκις ἐξυπηρετικὸν νὰ παρουσιάζωμεν τὰ ἀθροίσματα ταῦτα διὰ συγκεντρωτικοῦ συμβολισμοῦ περιέχοντος τὸ ἀθροιστικὸν σύμβολον. Τὸ σύμβολον τοῦτο δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ νὰ δηλώσῃ τὸ ἄθροισμα οἱωνδήποτε εἰς σειρὰν τεθεισῶν ποσοτήτων,

24) Ἀποδεικνύομεν αὐτὸ διὰ δύο κυρτὰ σύνολα Σ καὶ Τ. Ἂν $\Sigma \cap T$ εἶναι τὸ μηδενικὸν σύνολον ἢ σύνολον περιέχον ἓν στοιχεῖον, τότε εἶναι κυρτὸν (εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς, ὁ μαθηματικὸς θὰ ἔλεγεν ὅτι ὁ προσδιορισμὸς τῆς κυρτότητος ἱκανοποιεῖται «κατ' ἀνόητον τρόπον»). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $\Sigma \cap T$ περιέχει τουλάχιστον δύο σημεῖα α καὶ β. Ἐξ ὁρισμοῦ τῆς τομῆς συνόλων ἕπεται ὅτι $\alpha, \beta \in \Sigma$ καὶ $\alpha, \beta \in T$. Ἂν $\alpha, \beta \in \Sigma$, τότε $\varkappa\alpha + (1-\varkappa)\beta \in \Sigma$, $0 \leqq \varkappa \leqq 1$, ἀφοῦ τὸ Σ εἶναι κυρτόν. Ἐπίσης, ἂν $\alpha, \beta \in T$, τότε $\varkappa\alpha + (1-\varkappa)\beta \in T$, διότι τὸ Τ εἶναι κυρτόν. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι $\varkappa\alpha + (1-\varkappa)\beta \in (\Sigma \cap T)$. Ἐδείξαμεν ὅτι $\alpha, \beta \in (\Sigma \cap T)$ καὶ $\varkappa\alpha + (1-\varkappa)\beta \in (\Sigma \cap T)$, $0 \leqq \varkappa \leqq 1$. οὕτως ἡ $\Sigma \cap T$ εἶναι κυρτὸν σύνολον.

αἱ ὁποῖαι ὑπόκεινται εἰς κοινοὺς νόμους, ὡς οἱ ἀριθμοὶ καὶ τὰ διανύσματα. Διὰ τῆς χρήσεως τούτου, ἐπὶ παραδείγματι, τὸ ἄθροισμα

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_6$$

δύναται νὰ γραφῇ εἰς τὴν συνοπτικὴν μορφὴν

$$\sum_{\iota=1}^{6} \chi_\iota \,.$$

Ἕκαστος ὅρος ἢ ποσότης εἰς ἓν ἄθροισμα καλεῖται προσθετέος, οὗτος δὲ δύναται νὰ εἶναι τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ὅρων, ὡς π.χ. εἰς τὸ ἄθροισμα

$$\chi_1 \psi_1 + \chi_2 \psi_2 + \ldots + \chi_\nu \psi_\nu = \sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota \psi_\iota \,.$$

Τὸ γράμμα ι καλεῖται ὁ δείκτης τοῦ ἀθροίσματος· τὸ πρῶτον καὶ τελευταῖον ὑπόσημα τῶν ὅρων εἰς τὸ ἄθροισμα γράφονται συνήθως κάτωθεν καὶ ἄνωθεν τοῦ ἀθροιστικοῦ συμβόλου, ἀντιστοίχως, διὰ νὰ δηλώσουν τὰ ὅρια τοῦ ἀθροίσματος ἀλλ' ἐνίοτε παραλείπονται εἰς περιπτώσεις ἔνθα ταῦτα εἶναι ἐμφανῆ ἐκ τῶν συμφραζομένων.

Πρέπει νὰ κατανοηθῇ ὅτι δοθὲν ἄθροισμα εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ εἰδικοῦ δείκτου ἐν χρήσει,

$$\sum_{\iota=1}^{5} \chi_\iota = \sum_{j=1}^{5} \chi_j = \sum_{\kappa=1}^{5} \chi_\kappa = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 \,,$$

καὶ οἱ ἀκόλουθοι κανόνες, τὸ κῦρος τῶν ὁποίων δύναται νὰ φανῇ διὰ τῆς καταγραφῆς τῶν δηλουμένων ἀθροισμάτων, ἰσχύουν διὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς μὲ τὸ ἀθροιστικὸν σύμβολον. Ὡς συνέπεια τῶν νόμων ἀντιμεταθέσεως καὶ ἀναλύσεως διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὸ ἄθροισμα δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς σειρᾶς καὶ συνθέσεως τῶν προσθετέων,

$$\sum_{\iota=1}^{\nu} \alpha_\iota + \sum_{\iota=1}^{\nu} \beta_\iota = \sum_{\iota=1}^{\nu} (\alpha_\iota + \beta_\iota) \,,$$

ἢ γενικῶς,

$$\sum_{\iota=1}^{\nu} \alpha_\iota + \sum_{\iota=1}^{\nu} \beta_\iota + \ldots + \sum_{\iota=1}^{\nu} \zeta_\iota = \sum_{\iota=1}^{\nu} (\alpha_\iota + \beta_\iota + \ldots + \zeta_\iota) \,,$$

καὶ ὑπάρχει ἐπιμεριστικὸς νόμος διὰ τὰ ἀθροίσματα,

$$\sum_{\iota=1}^{\nu} \kappa \chi_\iota = \kappa \sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota \,,$$

ἔνθα κ τυχοῦσα σταθερά.

Τὸ ἀθροιστικὸν σύμβολον δύναται ἐπίσης νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν παρουσίασιν συστημάτων ἐξισώσεων εἰς συνοπτικὴν μορφήν. Θεωρήσατε τὸ σύστημα τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων,

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \alpha_{13}\chi_3 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \alpha_{23}\chi_3 &= \beta_2 \\ \alpha_{31}\chi_1 + \alpha_{32}\chi_2 + \alpha_{33}\chi_3 &= \beta_3 \end{aligned} \qquad (30)$$

(ἐνθυμούμεθα ὅτι τὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι ὁμογενὲς γραμμικὸν ἂν $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$· ἂν τουλάχιστον ἓν $\beta_\iota \neq 0$ τότε τὸ σύστημα καλεῖται μὴ ὁμογενὲς γραμμικὸν σύστημα). Αἱ ἐξισώσεις αὗται δύνανται νὰ γραφοῦν ἀντιστοίχως ὡς

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{1j}\chi_j = \beta_1$$

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{2j}\chi_j = \beta_2$$

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{3j}\chi_j = \beta_3 ,$$

ὅπερ ἔτι περαιτέρω συμπτύσσεται εἰς

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\iota j}\chi_j = \beta_\iota \qquad (\iota = 1, 2, 3) \tag{31}$$

Διὰ νὰ ἀντιπροσωπευθῇ ἡ (30) ὑπὸ τῆς (31), ἀθροίσματα τῆς μορφῆς (31) πρέπει νὰ ἑρμηνεύωνται κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Πρῶτον λαμβάνομεν $\iota = 1$ καὶ καταγράφομεν τὸ ἄθροισμα ὡς τὸ j κυμαίνεται μεταξὺ 1 καὶ 3. Κατόπιν λαμβάνομεν $\iota = 2$ καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν μέθοδον. Τελικῶς, λαμβάνομεν $\iota = 3$ καὶ καταγράφομεν τὸ δηλούμενον ἄθροισμα. Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι, βεβαίως, τὸ σύστημα (30). Αἱ κατευθύνσεις αὗται δύνανται νὰ γενικευθοῦν καὶ κατὰ παρόμοιον τρόπον τὰ ἀθροίσματα

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\iota j}\chi_j = \beta_\iota \qquad (\iota = 1, \ldots, \mu) \tag{32}$$

δύνανται νὰ παρουσιάσουν μεταγραφόμενα τὸ σύστημα μ γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους,

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu &= \beta_1 \\ \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu &= \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{\mu 1}\chi_1 + \alpha_{\mu 2}\chi_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}\chi_\nu &= \beta_\mu . \end{aligned} \tag{33}$$

Εἰδικῶς, ἔστω $\iota = 1$ εἰς τὴν (32), καὶ τὸ ἄθροισμα ὡς τὸ j ποικίλλει ἀπὸ 1 ἕως ν εἶναι ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ (33)· ἔστω $\iota = 2$, ἡ μέθοδος ἐπαναλαμβάνεται, καὶ τὸ προκῦπτον ἄθροισμα εἶναι ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (33), κ.ο.κ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2ον

ΤΙΝΑ ΕΠΙ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΜΗΤΡΩΝ

Πράξεις ἐπὶ μητρῶν

Ὁρίζομεν τὴν μήτραν ὡς ὀρθογώνιον διευθέτησιν πραγματικῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} \ldots \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}.$$

Ἡ μήτρα Α ἔχει μ σειρὰς καὶ ν στήλας (ὅπου μ καὶ ν θετικοὶ ἀκέραιοι) καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἡ μήτρα καλεῖται τάξεως μ ἐπὶ ν. Οἱ ἀριθμοὶ α_{ij} οἱ ὁποῖοι ἐμφανίζονται εἰς τὴν διευθέτησιν καλοῦνται στοιχεῖα τῆς μήτρας, καὶ τὰ στοιχεῖα $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{\mu\nu}$ εἶναι τὰ στοιχεῖα τῆς κυρίας διαγωνίου αὐτῆς. Ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν σειρῶν καὶ στηλῶν εἶναι ἐμφανὴς ἐκ τῶν συμφραζομένων, ἡ μήτρα δύναται νὰ γραφῇ εἰς συνοπτικὴν μορφὴν (α_{ij}), τοῦ α_{ij} δηλοῦντος τὸ στοιχεῖον τῆς i σειρᾶς καὶ j στήλης τῆς μήτρας Α.

Ὁ ὁρισμὸς περιλαμβάνει τετραγωνικὰς μήτρας (μ=ν), μήτρας μιᾶς σειρᾶς καὶ ν στηλῶν (1 ἐπὶ ν)

(1) $$(\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \ldots \alpha_{1\nu}),$$

καὶ μήτρας μ σειρῶν καὶ μιᾶς στήλης (μ ἐπὶ 1)

(2) $$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu 1} \end{bmatrix}.$$

Μῆτραι τῆς μορφῆς (1) καὶ (2) καλοῦνται διάνυσμα-σειρὰ καὶ διάνυσμα-στήλη, ἀντιστοίχως, καὶ ἀναφερόμεθα εἰς τὰς σειρὰς καὶ στήλας τῆς μήτρας Α ἀνωτέρω ὡς εἰς διανύσματα - σειρὰς καὶ διανύσματα - στήλας. Ἀφοῦ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν $\mu=\nu=1$, ὑπάρχει καὶ μήτρα 1 ἐπὶ 1 ἡ ὁποία εἶναι εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς ἢ ἓν μονομετρικὸν μέγεθος.

Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος μητρῶν εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἐκεῖνον τῆς ἰσότητος διανυσμάτων: αἱ μῆτραι Α καὶ Β λέγονται ἴσαι ἂν εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ ἕκαστον στοιχεῖον τῆς Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον τῆς Β.

Ἂν Α μία μήτρα $\mu \times \nu$, τότε ἡ μήτρα $\nu \times \mu$ ἡ λαμβανομένη ἐκ τῆς Α ἂν αἱ σειραὶ γίνουν στῆλαι καὶ αἱ στῆλαι σειραὶ καλεῖται ***ἐνηλλαγμένη*** (transpose) τῆς Α καὶ δηλοῦται διὰ Α΄. Π.χ. ἂν

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{bmatrix},$$

τότε

$$A' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{bmatrix}.$$

Σημειώσατε ἐπίσης ὅτι τὸ ἐνηλλαγμένον ἑνὸς διανύσματος - στήλης εἶναι διάνυσμα - σειρά, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἑπομένως, τὸ διάνυσμα - στήλη

$$X = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{bmatrix}$$

δύναται νὰ γραφῇ $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)'$.

Ἔχομεν ἤδη προσδιορίσει τρεῖς πράξεις ἐπὶ τῶν διανυσμάτων: τὴν πρόσθεσιν (καὶ κατὰ συνέπειαν ἀφαίρεσιν), τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμόν, καὶ τὸν ἐσωτερικὸν πολλαπλασιασμόν. Ἀφοῦ τὰ διανύσματα - στῆλαι καὶ - σειραὶ εἶναι μῆτραι, θέλομεν τώρα νὰ προσδιορίσωμεν ἀντιστοίχους πράξεις ἐπὶ μητρῶν κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ ἔχουν ἰσχὺν αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν διανυσμάτων.

Διανύσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν συνιστωσῶν προστίθενται ἂν προστεθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι συνιστῶσαι αὐτῶν, οὕτως ὁρίζομεν τὴν πρόσθεσιν μητρῶν ὡς ἀκολούθως. Ἔστωσαν αἱ μῆτραι $A = (\alpha_{ij})$ καὶ $B = (\beta_{ij})$ ἀμφότεραι τάξεως $\mu \times \nu$. Τότε τὸ ***ἄθροισμα*** $A+B$ εἶναι ἡ μήτρα $(\alpha_{ij} + \beta_{ij})$ λαμβανομένη διὰ προσθέσεως τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν Α καὶ Β. Πρέπει νὰ παρατηρηθῇ ὅτι πρόσθεσις ὁρίζεται μόνον διὰ μήτρας τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑνὸς διανύσματος ἐπὶ ἓν μονόμετρον ὁδηγεῖ εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου ἑνὸς μονομέτρου κ καὶ τῆς μήτρας $A = (\alpha_{ij})$: ἡ κΑ ὁρίζεται ὡς ἡ μήτρα ἡ λαμβανομένη ἐκ τῆς Α ἂν ἕκαστον στοιχεῖον τῆς Α πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ μονόμετρον κ,

$$\kappa A = \begin{bmatrix} \kappa\alpha_{11} & \kappa\alpha_{12} \ldots \kappa\alpha_{1\nu} \\ \kappa\alpha_{21} & \kappa\alpha_{22} \ldots \kappa\alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots \\ \kappa\alpha_{\mu 1} & \kappa\alpha_{\mu 2} \ldots \kappa\alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}.$$

Ἡ πρᾶξις πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν εἶναι ὀλίγον πολυπλοκωτέρα ἀλλὰ βασίζεται ἐπὶ τῆς πράξεως τοῦ «πολλαπλασιασμοῦ» διανυσμάτων. Τὰ διανύσματα «πολλαπλασιάζονται» διὰ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ ἐσωτερικοῦ των γινομένου, οὕτω θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν πρᾶξιν ταύτην διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν. Δι' εἰδικὸν παράδειγμα πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν, ἔστωσαν Α μήτρα 2×3 καὶ Β μήτρα 3×2. Τότε ἡ μήτρα γινομένου ΑΒ εἶναι

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{32} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \alpha_{23}\beta_{31} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{23}\beta_{32} \end{bmatrix}.$$

Ἡ μήτρα γινομένου εἶναι τάξεως 2×2, καὶ ἕκαστον στοιχεῖον τῆς ΑΒ εἶναι τὸ ***ἐσωτερικὸν γινόμενον*** μιᾶς τῶν σειρῶν τῆς Α μὲ μίαν τῶν στηλῶν τῆς Β. Ἂν ἡ ΑΒ παριστᾶται διὰ (γ_{ij}), τότε τὸ στοιχεῖον τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ πρώτης στήλης τῆς ΑΒ, γ_{11}, εἶναι ὁ ***ἀριθμὸς*** $\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31}$, τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς πρώτης σειρᾶς τῆς Α καὶ τῆς πρώτης στήλης τῆς Β. Τὸ στοιχεῖον τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ δευτέρας στήλης τῆς ΑΒ, γ_{12}, εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{32}$, ἢ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς πρώτης σειρᾶς τῆς Α καὶ τῆς δευτέρας στήλης τῆς Β. Ἐν ἄλλοις λόγοις, τὸ στοιχεῖον τῆς ι σειρᾶς καὶ j στήλης τῆς ΑΒ εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς ι σειρᾶς τῆς Α καὶ τῆς j στήλης τῆς Β. (Ὁ ἀναγνώστης πρέπει νὰ ἐλέγξῃ τοῦτο διὰ πᾶν στοιχεῖον τῆς ΑΒ).

Αἱ παρατηρήσεις αὗται εἶναι ὅ,τι χρειαζόμεθα διὰ νὰ δώσωμεν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν. Ἔστωσαν αἱ μῆτραι $A = (\alpha_{ij})$ τάξεως $\mu \times \nu$, καὶ $B = (\beta_{ij})$ τάξεως $\nu \times \xi$. Τότε ἡ ΑΒ εἶναι ἡ μήτρα (γ_{ij}) τάξεως $\mu \times \xi$ τῆς ὁποίας στοιχεῖα εἶναι

$$\gamma_{ij} = (\alpha_{i1} \quad \alpha_{i2} \ldots \alpha_{i\nu}) \begin{bmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{\nu j} \end{bmatrix} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{i\nu}\beta_{\nu j}.$$

Πρέπει νὰ σημειωθοῦν μετὰ προσοχῆς τρία χαρακτηριστικὰ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου. Πρῶτον αἱ μῆτραι A καὶ B εἶναι, ἀντιστοίχως, τάξεως $\mu\times\nu$ καὶ $\nu\times\xi$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μήτρας ὁ ἀριθμὸς τῶν στηλῶν τῆς A πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν σειρῶν τῆς B. Οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ξ, πάντως, ὁ ἀριθμὸς τῶν σειρῶν τῆς πρώτης καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν στηλῶν τῆς δευτέρας, ἀντιστοίχως, δύνανται νὰ εἶναι τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί. Δεύτερον, ἡ μήτρα AB εἶναι τάξεως $\mu\times\xi$· ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν σειρῶν μὲ τὴν A καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στηλῶν μὲ τὴν B. Τελικῶς, τὸ στοιχεῖον τῆς i σειρᾶς καὶ j στήλης τῆς AB εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς i σειρᾶς τῆς A καὶ j στήλης τῆς B.

Ἀκολουθοῦν παραδείγματα τῶν τριῶν ἐπὶ μητρῶν ὁρισθεισῶν πράξεων :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \\ -9 & 7 & 0 \end{bmatrix}\cdot$$

$$5\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & -7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 15 & 10 \\ 20 & -35 & -5 \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 5 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & -9 \\ 10 & -8 \end{bmatrix}.$$

Μολονότι δὲν εἶναι σκοπός μας νὰ παρουσιάσωμεν ἐκτεταμένην μελέτην τῆς ἀλγέβρας μητρῶν, χρήσιμος θὰ ἦτο ἡ ἀναφορὰ ὡρισμένων ἰδιοτήτων τῶν πράξεων τὰς ὁποίας ἔχομεν προσδιορίσει ὁμοῦ μέ τινας τῶν ἐφαρμογῶν των. Δύναται νὰ ἀποδειχθῇ, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι ἡ πρόσθεσις μητρῶν εἶναι ἀντιμεταθετικὴ καὶ ἀναλυτική, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς μητρῶν εἶναι ἐπιμεριστικὸς ἐν σχέσει μὲ τὴν πρόσθεσιν,

$$A + B = B + A,$$

$$A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma,$$

$$A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma,$$

διὰ μήτρας καταλλήλου τάξεως. Ἐπίσης, ἂν $A = (\alpha_{ij})$ εἶναι τάξεως $\mu\times\nu$ καὶ ἂν $\varkappa = -1$, τότε διὰ τοῦ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν λαμβάνομεν

$$\varkappa A = (-1)A = \begin{bmatrix} -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1\nu} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\alpha_{\mu 1} & -\alpha_{\mu 2} & \dots & -\alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

οὕτω διὰ πᾶσαν μήτραν A ὑπάρχει μία ἀρνητικὴ μήτρα $-A$ μὲ τὴν ἰδιότητα $A + (-A) = A - A = 0$, ἔνθα τὸ σύμβολον 0 δηλοῖ τὴν μηδενικὴν μήτραν - μήτρα πᾶν στοιχεῖον τῆς ὁποίας εἶναι μηδὲν (ἔχομεν ἐπίσης $A + 0 = 0 + A = A$ διὰ πᾶσαν μήτραν A). Πάλιν, ὡς καὶ εἰς τὰ διανύσματα, ἡ ἀφαίρεσις μητρῶν ὁρίζεται μέσῳ τῆς προσθέσεως. Ἡ μήτρα $A-B$ ὁρίζεται ὡς ἡ μήτρα ἡ ὁποία ὅταν προστεθῇ εἰς τὴν B δίδει τὴν A, οὕτως ἔχομεν $A-B = A + (-B)$.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν A εἶναι τάξεως $\mu\times\nu$, B $\nu\times\xi$, καὶ Γ $\xi\times\rho$, τότε

$$AB\Gamma = A(B\Gamma) = (AB)\Gamma\cdot$$

ὁ νόμος τῆς ἀναλύσεως ἰσχύει διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν μητρῶν, ὡς ἴσως ἀνεμένετο, ἀλλ' ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δὲ ἰσχύει γενικῶς,

$$AB \neq BA$$

δι' ἁπάσας τὰς καταλλήλους μήτρας A, B. Ἐπὶ παραδείγματι, ἔστωσαν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

τότε $$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

καὶ $$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Τῷ ὄντι, εἶναι δυνατὸν τὸ γινόμενον $X\Psi$ νὰ εἶναι καθωρισμένον καὶ τὸ ΨX νὰ εἶναι ἀκαθόριστον.

Ἂν $$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

τότε $$X\Psi = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ἀλλὰ τὸ ΨX δὲν εἶναι καθωρισμένον διότι αἱ τάξεις τῶν μητρῶν δὲν ἐπιτρέπουν πολλαπλασιασμόν.

Ἡ μήτρα $\nu\times\nu$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ . & . \quad . \quad . \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix}$$

ἡ ὁποία ἔχει μονάδας εἰς τὴν κυρίαν αὐτῆς διαγώνιον, καλεῖται ἡ ***μοναδιαία*** ἢ ***ταυτοτικὴ*** μήτρα, διότι παίζει τὸν αὐτὸν ρόλον εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μητρῶν ὁποῖον ὁ ἀριθμὸς 1 εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἂν A τυχοῦσα μήτρα ἔχομεν

$$AI = IA = A.$$

Παρατηρήσατε ὅτι ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἓν μόνον μοναδιαῖον στοιχεῖον ἢ ἀριθμός, ὑπάρχει ταυτοτικὴ μήτρα I διὰ πᾶν ν. Ἐπίσης ὁ ρόλος τοῦ μηδενὸς παίζεται ὑπὸ τῶν μητρῶν ἕκαστον στοιχεῖον τῶν ὁποίων εἶναι μηδέν. Αὗται καλοῦνται, βεβαίως, μηδενικαὶ μῆτραι, ἔχομεν δὲ μηδενικὴν μήτραν διὰ πᾶσαν ἐκλογὴν μ καὶ ν.

Ἐπιθυμοῦμεν ἐνίοτε νὰ θεωρήσωμεν τινά, ὄχι ὅμως ὅλα, τῶν στοιχείων τῆς μήτρας. Ἂν A μία μήτρα, τότε ***ὑπομήτρα*** τῆς A εἶναι ἡ ἀπομένουσα μετὰ τὴν διαγραφὴν ὡρισμένων σειρῶν ἢ στηλῶν τῆς δοθείσης. Π.χ., ἂν A εἶναι ἡ μήτρα

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

τότε αἱ κάτωθι εἶναι ὑπομῆτραι

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν εἶναι ἐπίσης χρήσιμος διὰ τὴν γραφὴν συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων εἰς συνοπτικὴν μορφήν. Π.χ. τὸ σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} 2\chi_1 + 8\chi_2 + 6\chi_3 &= 2 \\ 2\chi_1 + 5\chi_2 + 4\chi_3 &= 4 \\ -\chi_1 + 3\chi_2 + 2\chi_3 &= -5 \end{aligned}$$

δύναται νὰ γραφῇ

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Τοῦτο, βεβαίως, δύναται νὰ γενικευθῇ· τὸ σύστημα μ μὴ ὁμογενῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu &= \beta_1 \\ \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu &= \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\mu 1}\chi_1 + \alpha_{\mu 2}\chi_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}\chi_\nu &= \beta_\mu \end{aligned}$$

δύναται νὰ γραφῇ

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} \ldots \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

ἢ ἔτι βραχύτερον

$$AX = B,$$

ἔνθα $A = (\alpha_{ij})$ ἡ μήτρα $\mu \times \nu$ τῶν συντελεστῶν τῶν μεταβλητῶν εἰς τὰς ἐξισώσεις, X τὸ $\nu \times 1$ διάνυσμα-στήλη τῶν ἀγνώστων, καὶ B τὸ $\mu \times 1$ διάνυσμα-στήλη τῶν σταθερῶν ὅρων.

Βαθμὸς μήτρας

Ἔστω A τυχοῦσα μήτρα τάξεως $\mu \times \nu$. Τότε ὁ μέγιστος ἀριθμὸς γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων-σειρῶν εἰς τὴν A καλεῖται ὁ βαθμὸς σειρῶν τῆς A, καὶ ὁ μέγιστος ἀριθμὸς γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων-στηλῶν καλεῖται ὁ βαθμὸς στηλῶν τῆς A. Ὑπάρχει ἐπίσης ἓν θεώρημα εἰς τὴν γραμμικὴν ἄλγεβραν κατὰ τὸ ὁποῖον ὁ βαθμὸς σειρῶν μήτρας εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν βαθμὸν στηλῶν αὐτῆς· τοῦτο σημαίνει, βεβαίως, ὅτι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων-σειρῶν εἶναι πάντοτε ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μέγιστον ἀριθμὸν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων-στηλῶν μιᾶς μήτρας. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ὁρίζομεν τὸν ***βαθμὸν*** μιᾶς μήτρας ὡς τὸν μέγιστον ἀριθμὸν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων-σειρῶν ἢ -στηλῶν τῆς μήτρας.

Ὁ βαθμὸς τῆς μήτρας μεγάλην ἐπέχει σπουδαιότητα εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμόν, πρὸς καθορισμὸν τῆς ὑπάρξεως λύσεων συστημάτων ταυτοχρόνων γραμμικῶν ἐξισώσεων, καὶ εἴς τινας ἀκόμη ἀπόψεις τῆς ἀλγέβρας μητρῶν. Δοθείσης μήτρας A, συχνάκις ἐπιθυμοῦμεν νὰ γνωρίζωμεν τὸν βαθμόν της. Δυσχερὲς ἴσως θὰ ἐφαίνετο τὸ ἔργον τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ μεγίστου ἀριθμοῦ τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων, ἂς εἴπωμεν, διανυσμάτων-σειρῶν μιᾶς μήτρας. Εὐτυχῶς δύναται κατὰ πολὺ νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ ἔργον τοῦτο, ἂν γίνουν στοιχειώδεις μετασχηματισμοὶ σειρῶν ὡς ἀκολούθως ὁρίζεται :

α — ἂν πολλαπλασιασθῇ τυχοῦσα σειρὰ τῆς μήτρας μὲ ἓν μὴ μηδενικὸν μονομετρικὸν μέγεθος,

β — ἂν προστεθῇ ἓν μονομετρικὸν πολλαπλάσιον τυχούσης σειρᾶς εἰς ἑτέραν σειρὰν τῆς μήτρας,

γ — ἂν μεταβληθῇ ἡ θέσις τυχουσῶν δύο σειρῶν τῆς μήτρας.

Δυναμένου νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοὶ δὲν μεταβάλλουν τὸν βαθμὸν τῆς μήτρας, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μήτραν A, μετασχηματίσωμεν αὐτὴν εἰς ἁπλουστέραν μήτραν, τῆς ὁποίας ὁ βαθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ οὕτω προσδιορισθῇ, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὕρωμεν τὸν βαθμὸν τῆς A. Ἐπὶ παραδείγματι, ἔστω A ἡ μήτρα

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν ταύτην εἰς τὴν ταυτοτικὴν μήτραν I διὰ τῆς ἀκολούθου σειρᾶς στοιχειωδῶν μετασχηματισμῶν.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 2 ἐπὶ 1/2.

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 3 ἐπὶ 1/2 καὶ προσθέτομεν εἰς τὴν σειρὰν 2.

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 2 ἐπὶ −1 καὶ προσθέτομεν εἰς τὴν σειρὰν 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 1 ἐπὶ 1/2.

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 3 ἐπὶ −1 καὶ προσθέτομεν εἰς τὴν σειρὰν 1.

Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἡ ταυτοτικὴ μήτρα ὡς ἦτο ἐπιθυμητόν.

Δύναται ἐπίσης νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ἡ A ἔχῃ βαθμὸν ρ, τότε δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὴν μήτραν

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 \ldots 1 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix},$$

ἡ ὁποία ἔχει τὰ πρῶτα ρ στοιχεῖα εἰς τὴν κυρίαν διαγώνιον ἴσα πρὸς τὴν μονάδα καὶ μηδενικὰ ὅλα τὰ ἄλλα αὐτῆς στοιχεῖα (δὲν χρειάζεται νὰ εἴπωμεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν βαθμὸν μιᾶς μήτρας, δυνάμεθα ἁπλῶς νὰ εὕρωμεν μήτραν ἁπλουστέρας μορφῆς, τῆς ὁποίας ὁ βαθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ οὕτω προσδιορισθῇ, καὶ δυνάμεθα συχνάκις νὰ σταματήσωμεν ὅταν λάβωμεν μήτραν τοῦ τύπου B ἀνωτέρω)

Ἡ ἀντίστροφος τετραγωνικῆς μήτρας

Ἔστωσαν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β, $\alpha \neq 0$, καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha\chi = \beta.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν ταύτην ὡς πρὸς χ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ α, λαμβάνοντες, βεβαίως, $\chi = \beta/\alpha$. Τυπικώτερον ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νὰ περιγραφῇ ὡς ἀκολούθως. Ὁ ἀριθμὸς α ἔχει ἓν ἀντίστροφον στοιχεῖον δηλούμενον διὰ α^{-1} καὶ τὴν ἰδιότητα $\alpha^{-1}\alpha = 1$. Τὸ ἀντίστροφον εὐχερῶς ἐξευρίσκεται ἀφοῦ δι᾽ ἕκαστον μὴ μηδενικὸν ἀριθμὸν α, $\alpha^{-1} = 1/\alpha$, τὸ ἀντίστροφον τοῦ α·

Ὅταν τὸ ἀντίστροφον ἔχῃ προσδιορισθῆ, πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπ' αὐτό, λαμβάνοντες

$$\alpha^{-1}\alpha\chi = \alpha^{-1}\beta$$
$$1\chi = \alpha^{-1}\beta$$
$$\chi = \alpha^{-1}\beta = (1/\alpha)\beta = \beta/\alpha.$$

Ὑποτεθείσθω ὅτι ἔχομεν ἐξίσωσιν μητρῶν τῆς μορφῆς

$$AX = B,$$

ἔνθα A τετραγωνικὴ μήτρα τάξεως ν, X τάξεως $\nu \times 1$ καὶ B τάξεως $\nu \times 1$. Ἀναλογικῶς πρὸς τὰ προηγούμενα, θὰ ἀνεμένομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν μητρῶν διὰ προσδιορισμοῦ ἑνὸς στοιχείου ἢ μιᾶς μήτρας ἀντιστρόφου τῆς A, τῆς A^{-1} ἡ ὁποία ἔχει τὴν ἰδιότητα $A^{-1}A = I$, ἀφοῦ ἡ ταυτοτικὴ μήτρα I παίζει τὸν ρόλον τῆς μονάδος διὰ τὰς μήτρας. Τότε

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B.$$

Δίδομεν τώρα κάποιαν ἔννοιαν εἰς τὴν ἀναλογίαν ταύτην εἰς τὰς μήτρας. Ἂν A εἶναι τετραγωνικὴ μήτρα τάξεως ν καὶ ὑπάρχῃ ἑτέρα τετραγωνικὴ μήτρα τάξεως ν τοιαύτη ὥστε

$$BA = I,$$

τότε καλοῦμεν τὴν B ***ἀντίστροφον*** τῆς A, καὶ δηλοῦμεν αὐτὴν διὰ A^{-1}. Διὰ παράδειγμα, ἔστωσαν

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & -1/10 \\ -7/45 & 2/9 & 1/45 \\ 1/45 & 1/9 & 19/90 \end{bmatrix},$$

καὶ

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & -1/10 \\ -7/45 & 2/9 & 1/45 \\ 1/45 & 1/9 & 19/90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Ἰσχύει ἐπίσης διὰ πᾶσαν μήτραν ἔχουσαν ἀντίστροφον,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Ἐπιστρέφοντες εἰς τὴν θεώρησιν τῶν ἀναλογιῶν μὲ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς, ἐνθυμούμεθα ὅτι πᾶς διάφορος τοῦ μηδενὸς ἀριθμὸς ἔχει ἓν καὶ μόνον ἓν ἀντίστροφον στοιχεῖον. Ἐκ τούτου ἐγείρεται τὸ ἐρώτημα: ἂν ἡ A ἔχῃ ἀντίστροφον, εἶναι αὕτη ἡ μοναδική; ἡ ἀπάντησις εἶναι καταφατική, διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ A ἔχει δύο ἀντιστρόφους A^{-1} καὶ B. Τότε $BA = I$ καὶ $AA^{-1} = I$· ἐπίσης

$$B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$$

ὑπάρχει ἑπομένως μόνον μία ἀντίστροφος μήτρα τῆς A.

Σημειώσατε ὅτι ἀντίστροφος ὁρίζεται μόνον διὰ τετραγωνικὰς μήτρας A, οὕτω μὴ τετραγωνικαὶ μῆτραι δὲν ἔχουν ἀντίστροφον. Ἴσως τώρα ἐγερθῇ τὸ ἐρώτημα: ἂν μία μήτρα εἶναι τετραγωνική, ἔχει ἀντίστροφον; Ἡ ἀπάντησις εἶναι ὄχι κατ' ἀνάγκην. Ἐπὶ παραδείγματι, ἔστωσαν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

καὶ δυνάμεθα νὰ δείξωμεν ὅτι διὰ δύο ***τυχούσας*** διαφόρους τῆς μηδενικῆς μήτρας ἐχούσας τὴν ἰδιότητα $AB = 0$, οὔτε ἡ μία οὔτε ἡ ἄλλη δύναται νὰ ἔχῃ ἀντίστροφον. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι αἱ A καὶ B εἶναι δύο μὴ μηδενικαὶ μῆτραι τοιαῦται ὥστε $AB = 0$ καὶ ὅτι ἡ A ἔχει ἀντίστροφον. Τότε

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0,$$

ὅπερ ἀποτελεῖ ἀντίφασιν ἀφοῦ ἡ B ὑπετέθη ἀρχικῶς ὡς μὴ μηδενικὴ μήτρα. Ἀντίστοιχον ἐπιχείρημα δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ B δὲν ἔχει ἀντίστροφον.

Παρετηρήσαμεν προηγουμένως ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀντιστρόφου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ διαφόρου τοῦ μηδενὸς ἀποτελεῖ ἁπλοῦν θέμα ἀφοῦ α^{-1} εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ α. Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἀντιστρόφου τετραγωνικῆς μήτρας (ἂν ὑπάρχῃ) εἶναι βεβαίως δυσχερέστερος, καὶ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν αὐτὸν εἰσάγομεν τὸ κάτωθι θεώρημα.

Θεώρημα. Ἔστω A τετραγωνικὴ μήτρα τάξεως ν· διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $(A \mid I)$ ἐννοοῦμεν τὴν $\nu \times 2\nu$ μήτραν, τῆς ὁποίας αἱ πρῶται ν σειραὶ καὶ πρῶται ν στῆλαι ἀποτελοῦνται ἐκ τῆς μήτρας A καὶ τῆς ὁποίας αἱ ἀπομένουσαι σειραὶ καὶ στῆλαι σχηματίζουν τὴν ταυτοτικὴν μήτραν τάξεως ν. Τότε ἡ μήτρα A ἔχει ἀντίστροφον ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ἡ μήτρα

$$(A \mid I)$$

δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὴν μήτραν

$$(I \mid A^{-1})$$

διὰ στοιχειωδῶν μετασχηματισμῶν σειρῶν.

Διὰ παράδειγμα, ἂς λάβωμεν τὴν μήτραν A τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου καὶ ἂς προσκολλήσωμεν ταύτην εἰς τὴν ταυτοτικὴν μήτραν, λαμβάνοντες

$$(\mathrm{A} \mid \mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ὁ σκοπός μας εἶναι νὰ προβῶμεν εἰς στοιχειώδεις πράξεις ἐπὶ τῶν σειρῶν τῆς μήτρας ταύτης οὕτως ὥστε νὰ καταλήξωμεν μὲ ταυτοτικὴν μήτραν εἰς τὰς πρώτας τρεῖς στήλας. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα λοιπὸν λέγει ὅτι ἡ ὑπομήτρα ἡ καταλαμβάνουσα τὰς τελευταίας τρεῖς στήλας θὰ εἶναι ἡ A^{-1}. Διὰ νὰ ἴδωμεν αὐτό, ἂς προβῶμεν ἐπὶ τῆς μήτρας $(\mathrm{A} \mid \mathrm{I})$ εἰς τοὺς αὐτοὺς μετασχηματισμοὺς σειρῶν εἰς τοὺς ὁποίους προέβημεν ἐνωρίτερον διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὴν μήτραν A εἰς τὴν ταυτοτικὴν μήτραν. Ἀρχίζομεν πολλαπλασιάζοντες τὴν σειρὰν 3 ἐπὶ 1/2 καὶ προσθέτοντες τὴν σειρὰν 3 εἰς τὴν σειρὰν 2, καὶ αἱ ἄλλαι πράξεις φαίνονται κατωτέρω.

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 2 ἐπὶ 1/2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 3 ἐπὶ 1/2 καὶ προσθέτομεν εἰς τὴν σειρὰν 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 2 ἐπὶ −1 καὶ προσθέτομεν εἰς τὴν σειρὰν 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 1 ἐπὶ 1/2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 3 μὲ −1 καὶ προσθέτομεν εἰς τὴν σειρὰν 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\,\mathrm{I} \mid \mathrm{A}^{-1}\,) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & -5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἡ μήτρα εἰς τὰς τελευταίας τρεῖς στήλας εἶναι ἡ A^{-1}, ἀφοῦ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & -5/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσατε ὅτι τὸ θεώρημα περιέχει ἀναγκαίαν καὶ ἐπαρκῆ συνθήκην («ἐὰν καὶ μόνον ἐάν»). Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον ταύτην εἰς τετραγωνικὴν μήτραν πρέπει ἢ νὰ λάβωμεν τὴν ἀντίστροφον ἢ ἔνδειξιν ὅτι ἡ μήτρα δὲν ἔχει ἀντίστροφον. Ἂν συμβαίνῃ τὸ δεύτερον, τότε κάποια ἀλληλουχία πράξεων ἐπὶ τῶν σειρῶν θὰ δώσῃ σειρὰν εἰς τὴν ἐκ τῆς $(A \mid I)$ μετασχηματισθεῖσαν μήτραν, τὰ τρία πρῶτα στοιχεῖα τῆς ὁποίας θὰ εἶναι μηδέν. Ὅταν τοῦτο συμβῇ, δὲν δυνάμεθα ποτὲ νὰ λάβωμεν ταυτοτικὴν μήτραν δεούσης τάξεως εἰς τὴν ἀριστερὰν θέσιν τῆς ἐπηυξημένης μήτρας καὶ ἡ ἀρχικὴ μήτρα δὲν ἔχει ἀντίστροφον.

Χρήσεις τῆς ἀντιστρόφου μήτρας

Μία σπουδαία χρῆσις τῆς ἀντιστρόφου μήτρας ἐδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον — ἡ λύσις συστημάτων ἐξισώσεων. Παραδείγματος χάριν, ἂς θεωρήσωμεν σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων,

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 &= 3 \\ \chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3 &= 4 \\ 2\chi_1 + 2\chi_2 + 4\chi_3 &= 5\,, \end{aligned}$$

τὸ ὁποῖον δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν μητρῶν

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι ἂν ἡ A ἔχῃ ἀντίστροφον, τότε

$$X = A^{-1} B\,.$$

Τώρα διὰ τὴν A τοῦ ἀνωτέρω συστήματος ἔχομεν

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

οὕτω

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = A^{-1} B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Χρήσιμον ἰδιότητα τῆς ἀντιστρόφου μήτρας ἀποτελεῖ ἡ ἱκανότης αὐτῆς νὰ λύῃ διάφορα συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων ἔχοντα τὴν αὐτὴν μήτραν συντελεστῶν. Εἰς τὸ ἀνωτέρω σύστημα ἐξισώσεων τὸ διάνυσμα B ἦτο (3, 4, 5)'· δυνάμεθα ν' ἀλλάξωμεν τὸ διάνυσμα τοῦτο καὶ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἀντίστροφον μήτραν πρὸς λύσιν τοῦ ἀπορρέοντος νέου συστήματος. Π. χ., ἂν τὸ σύστημα γίνῃ

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 &= 6 \\ \chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3 &= -1 \\ 2\chi_1 + 2\chi_2 + 4\chi_3 &= 7 \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{vmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{vmatrix} .$$

Ἐκ τούτου λαμβάνομεν $\chi_1 = 31/2$, $\chi_2 = -7$, $\chi_3 = -5/2$.

Μία ἐφαρμογὴ τῆς ἀντιστρόφου μήτρας

Τὸ βασικὸν ὑπόδειγμα εἰσροῶν - ἐκροῶν (στατικὸν) ἀναπτυχθὲν ὑπὸ τοῦ Leontieff καὶ τῶν συνεργατῶν αὐτοῦ καὶ ἐπεξεργασθὲν ὑπὸ τῶν Chenery καὶ Clark ἀναφέρεται εἰς τὴν παραγωγὴν ἐντὸς ἁπλοποιημένης οἰκονομίας λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν κάτωθι ὑποθέσεων.

1. Σταθερὰ ἀπόδοσις κλίμακος.
2. Ὑπάρχουν ν παραγωγικοὶ κλάδοι, καὶ εἶναι ἀδύνατος πᾶσα ὑποκατάστασις μεταξὺ εἰσροῶν εἰς τὴν παραγωγὴν παντὸς ἀγαθοῦ ἢ ὑπηρεσίας — δηλ. χρησιμοποιεῖται μία καὶ μόνον μία μέθοδος πρὸς παραγωγὴν ἑκάστου ἀγαθοῦ καὶ ὑπηρεσίας.
3. Αἱ ῥοαὶ ἐξετάζονται μόνον βραχυχρονίως—τὰ προβλήματα τοῦ κεφαλαίου καὶ τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος ἀγνοοῦνται.

Ἔστω χ_ι = ποσότης προϊόντος τοῦ ι κλάδου, διὰ $\iota = 1, \ldots, \nu$. Τὸ προϊὸν ἑκάστου κλάδου δύναται νὰ κατευθυνθῇ πρὸς ἄλλους κλάδους (περίπτωσις καθ' ἣν τὸ προϊὸν κατατάσσεται εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν διαμέσων ἀγαθῶν) ἢ πρὸς τὸν καταναλωτήν. Ἔστωσαν

(3) ψ_ι = ἐκροὴ τοῦ ι κλάδου πρὸς τὴν κατανάλωσιν,

(4) $\chi_{\iota j}$ = ποσότης ἐκροῆς τοῦ ι κλάδου πρὸς τὸν j κλάδον.

Τότε δι' ἕκαστον κλάδον ι ἔχομεν

(5) $$\chi_\iota = \psi_\iota + \sum_{j=1}^{\nu} \chi_{\iota j} \qquad (\iota = 1, \ldots, \nu).$$

Πλέον τούτου, λαμβάνονται ὡς γνωσταὶ αἱ τεχνολογικαὶ συνθῆκαι παραγωγῆς,

(6) $$\chi_{\iota j} = \alpha_{\iota j} \chi_j ,$$

ἔνθα $\alpha_{\iota j}$ τὸ ποσὸν ἐκροῆς τοῦ κλάδου ι τὸ χρησιμοποιούμενον πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος ὑπὸ τοῦ κλάδου j. Τὰ $\alpha_{\iota j}$ καλοῦνται οἱ «τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ παραγωγῆς» καὶ ἡ μήτρα $A = (\alpha_{ij})$ καλεῖται ἡ *τεχνολογικὴ μήτρα*. Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς (6) εἰς τὴν (5) λαμβάνομεν δι' ἕκαστον κλάδον i,

$$(7) \qquad \chi_i = \psi_i + \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{ij} \chi_j ,$$

καὶ δι' ἅπαντας τοὺς κλάδους

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_\nu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{vmatrix} .$$

Ἡ (8) γράφεται ὑπὸ μορφὴν μητρῶν,

$$X = \Psi + AX$$

Ἐπίσης

$$X - AX = \Psi,$$

$$(I - A)\, X = \Psi.$$

Ἂν δοθῇ ἓν διάνυσμα τελικῆς ζητήσεως Ψ καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ διάνυσμα παραγωγῆς X τὸ ὁποῖον θὰ ἱκανοποιοῦσε τὴν ζήτησιν Ψ διὰ κατανάλωσιν ὡς καὶ διὰ διάμεσα ἀγαθά, τότε θὰ πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀντίστροφον τῆς μήτρας $(I - A)$, λαμβάνοντες

$$X = (I - A)^{-1}\, \Psi,$$

καὶ θὰ ἠδυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν αὐτὴν ἀντίστροφον πρὸς μελέτην τῶν συνθηκῶν παραγωγῆς διὰ ποικίλα διάφορα μεταξύ των διανύσματα τελικῆς ζητήσεως Ψ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3ον

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΝ

Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον

Δυνάμενοι σαφῶς νὰ παρουσιάσωμεν πολλὰς τῶν βασικῶν ἐννοιῶν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον, θὰ ἐξετάσωμεν κατ' ἀρχὰς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τὸν χῶρον τῶν δύο διαστάσεων πρὸ τῆς γενικῆς αὐτοῦ ἐξετάσεως γεωμετρικῶς καὶ ἀλγεβρικῶς. Θὰ λάβωμεν ἅπαντας τοὺς ὑπὸ ἐξέτασιν χώρους Εὐκλειδίους - δηλαδὴ θὰ θεωρήσωμεν τοὺς ἄξονας καθέτους καὶ ἕκαστον ἄξονα ἔχοντα τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους.

Ἂς ἐξετάσωμεν λοιπὸν τὸ κάτωθι πρόβλημα: νὰ εὑρεθοῦν χ καὶ ψ τοιαῦτα ὥστε νὰ καθιστοῦν τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως τῆς ὁποίας κανὼν εἶναι

$$\varphi(\chi,\psi) = \chi + 5\psi$$

ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέραν, ἔνθα χ καὶ ψ δὲν εἶναι τυχόντα ἀλλ' ὑπακούουν εἰς τοὺς κάτωθι περιορισμούς:

(1) $$5\chi + 6\psi \leqq 30$$

(2) $$3\chi + 2\psi \leqq 12$$

(3) $$\chi \geqq 0$$

(4) $$\psi \geqq 0.$$

Ἂς ἐπιχειρήσωμεν ἐκλέγοντες διαφόρους τιμὰς διὰ χ καὶ ψ καὶ παρατηροῦντες πόσον μεγάλην δύνανται αὗται νὰ καταστήσουν τὴν τιμὴν $\varphi(\chi,\psi)=\chi+5\psi$ [1]. Ἐκλέγομεν πρῶτον $\chi = 2$ καὶ $\psi = 2$. Δι' ἀντικαταστάσεως ἑκάστης τούτων εἰς τὰς (1) — (4) βλέπομεν ὅτι ἕκαστος περιορισμὸς ἱκανοποιεῖται (π.χ. ἀντικατάστασις εἰς τὴν (1) δίδει $5(2) + 6(2) = 22 \leqq 30$). Κατόπιν ὑπολογίζομεν $\varphi(\chi,\psi) = \chi + 5\psi = 2 + 5(2) = 12$. Ἂν ἐκλέξωμεν ἕτερον ζεῦγος τιμῶν, ἂς εἴπωμεν

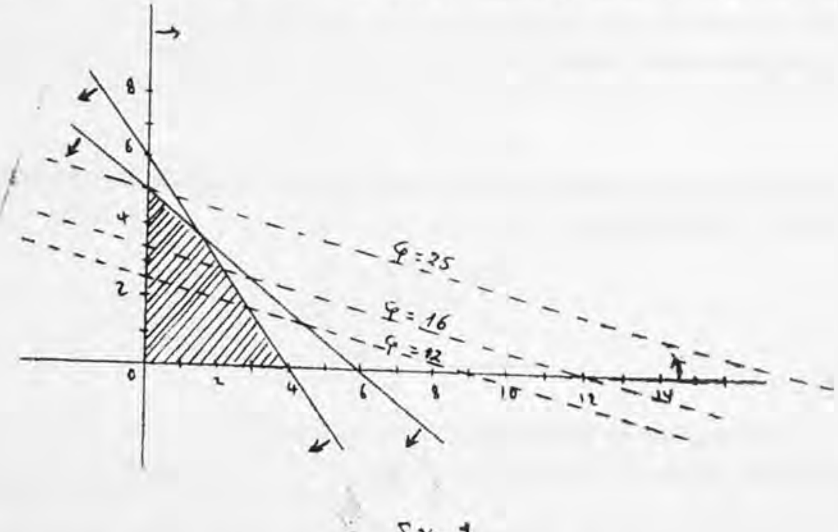
---

1) Ἡ ἐξίσωσις $\varphi(\chi,\psi) = \chi + 5\psi$ ὁρίζει ὁμάδα εὐθειῶν εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον, ἕκαστον μέλος τῆς ὁποίας κτᾶται ἂν θέσωμεν $\varphi(\chi,\psi)$ ἴσον πρὸς κάποιον πραγματικὸν ἀριθμόν. Π.χ., $\chi + 5\psi = -10$, $\chi + 5\psi = 2$, $\chi + 5\psi = 47$: τρεῖς ἐξισώσεις ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν ὁποίων δίδει παραλλήλους εὐθείας ἀνηκούσας εἰς τὴν ὁμάδα.

$\chi = 1$ καὶ $\psi = 3$ (οἱ περιορισμοὶ (3) καὶ (4) ἀπαγορεύουν τὴν ἐκλογὴν ἀρνητικῶν τιμῶν διὰ τὰ χ καὶ ψ), τότε δι᾽ ἀντικαταστάσεως τούτων εἰς τὰς (1) — (4) εὑρίσκομεν πάλιν ὅτι ἑκάστη αὐτῶν ἱκανοποιεῖται. Διὰ τὸ ζεῦγος τοῦτο τιμῶν $\varphi(\chi,\psi) = 1 + 5(3) = 16$ τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (1,3) δίδει μεγαλυτέραν τιμὴν διὰ $\varphi(\chi,\psi)$ ἢ τὸ (2,2). Ἂς ἐκλέξωμεν ἕτερον ἓν ζεῦγος τιμῶν, $\chi = 2$ καὶ $\psi = 4$. Ἀντικατάστασις εἰς τὴν (1) δεικνύει ὅτι ὁ περιορισμὸς δὲν ἱκανοποιεῖται, οὕτω δὲν εἶναι ἐπιτρεπτὴ ἡ ἐκλογὴ τοῦ διετεταγμένου ζεύγους (2,4). Ἂς λάβωμεν $\chi = 0$ καὶ $\psi = 5$. Οἱ περιορισμοὶ ἱκανοποιοῦνται καὶ ἔχομεν $\varphi(\chi,\psi) = 0 + 5(5) = 25$, τὴν μεγίστην ἕως τώρα τιμὴν τῆς συναρτήσεως.

Ἐγείρεται τώρα τὸ ἐρώτημα ἕως πότε θὰ ἐξακολουθῇ ἡ μέθοδος αὕτη. Θεωρητικῶς ὑπάρχουν ἄπειρα διατεταγμένα ζεύγη ἱκανοποιοῦντα τοὺς περιορισμούς, οὕτω χρειαζόμεθα ἄλλας μεθόδους πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἀντὶ τῆς μεθόδου ταύτης. Εὐτυχῶς ὑπάρχουν θεωρήματα τινὰ ἁπλοποιοῦντα μεγάλως τὴν μέθοδον λύσεως προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, καὶ κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς ὑπ᾽ αὐτὰ γεωμετρίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν πολλὰς τῶν παρουσιασθεισῶν εἰς τὸ κεφάλαιον 1 γεωμετρικῶν ἐννοιῶν.

Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν γεωμετρίαν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος· ἑκάστη περιοριστικὴ ἀνισότης (1) — (4) ὁρίζει ἡμιχῶρον καὶ τὸ σημειοσύνολον (χ,ψ) τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ ταυτοχρόνως τὰς ἀνισότητας εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἀντιστοίχων ἡμιχώρων. Ἤδη γνωρίζομεν ὅτι ὁ ἡμιχῶρος εἶναι κυρτὸν σύνολον, καὶ ὅτι ἡ τομὴ



Σχ. 1

τυχούσης συλλογῆς ἡμιχώρων εἶναι κυρτὸν σύνολον, οὕτω τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν ἱκανοποιούντων τὰς (1) — (4) εἶναι (κλειστὸν) κυρτὸν σύνολον. Τὸ κυρτὸν σύνολον τῶν λύσεων Σ εἶναι τὸ σημειούμενον εἰς τὸ σχ. 1 πολύγωνον. Αἱ $\chi + 5\psi = 12$, $\chi + 5\psi = 16$, καὶ $\chi + 5\psi = 25$ εἶναι αἱ διακεκομμέναι εὐθεῖαι, ἔνθα 12, 16, καὶ 25 εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως διὰ τὰ διατεταγμένα ζεύγη (2,2), (1,3), (0,5), ἀντιστοίχως. Γεωμετρικῶς, ἡ μεγιστοποίησις τῆς

$\varphi(\chi,\psi) = \chi + 5\psi$ ὡς ὑπόκειται εἰς τοὺς περιορισμοὺς (1)—(4) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μετακίνησις τῆς ὑπὸ τῆς $\varphi(\chi,\psi) = \chi + 5\psi$ ὁριζομένης εὐθείας κατὰ πλάτος τοῦ κυρτοῦ συνόλου Σ ἕως ὅτου φθάσῃ αὕτη εἰς σημεῖον τοῦ Σ κείμενον ἐπὶ τῆς πλέον ἀπομεμακρυσμένης τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος εὐθείας. Αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τούτου θὰ δώσουν τότε μεγίστην τιμὴν διὰ $\varphi(\chi,\psi)$. Εἶναι φανερὸν ὅτι τοιοῦτον σημεῖον εἶναι τὸ (0,5) — ἄκρον σημεῖον τοῦ Σ. Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως δύναται νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα τοῦ 25 ἂν ἡ εὐθεῖα κινηθῇ πρὸς τὰ ἄνω, τοῦτο δὲ θὰ μᾶς ἔφερεν ἔξωθεν τοῦ συνόλου Σ. Ἄν, ἐξ ἄλλου, ἐνδιαφερώμεθα διὰ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως ὡς ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς (1) — (4) θὰ ἐζητούσαμεν τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας $\varphi(\chi,\psi) = \chi + 5\psi$ κείμενον σημεῖον ἐκεῖνο τοῦ Σ τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τὸ σημεῖον εἶναι προφανῶς ἡ ἀρχὴ τοῦ συστήματος (ἐπίσης ἄκρον σημεῖον τοῦ Σ) καὶ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως ὡς ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς εἶναι $\varphi(\chi,\psi) = 0 + 5(0) = 0$.

Τὸ κυρτὸν σύνολον Σ καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ***πραγματοποιησίμων λύσεων*** τοῦ δοθέντος προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ αἱ πραγματοποιήσιμοι λύσεις, αἱ μεγιστοποιοῦσαι ἢ ἐλαχιστοποιοῦσαι τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν καλοῦνται ***ἄρισται πραγματοποιήσιμοι λύσεις***.

Τὸ σχ. 1 ὑποδηλοῖ ὅτι μία γραμμικὴ συνάρτησις θὰ λάβῃ τὴν μεγίστην ἢ ἐλαχίστην τιμὴν εἰς ἓν ἄκρον σημεῖον τοῦ κυρτοῦ συνόλου τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων. Τοῦτο ὅμως δὲν ἰσχύει ἐν γένει διότι ἡ γραμμικὴ συνάρτησις δύναται νὰ μὴ ἔχῃ οὔτε μεγίστην οὔτε ἐλαχίστην τιμήν, ἢ δύναται νὰ ἔχῃ τὴν μίαν καὶ ὄχι τὴν ἄλλην. Παραδείγματα τινὰ θὰ καταστήσουν τοῦτο σαφές. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει ὡς ἑξῆς :

νὰ μεγιστοποιηθῇ $\qquad \varphi(\chi,\psi) = 3\chi + 2\psi$

ὑποκειμένη εἰς

$$\begin{aligned} -2\chi + 3\psi &\leqq 9 \\ -\chi + 5\psi &\leqq 20 \\ \chi &\geqq 0 \\ \psi &\geqq 0\,. \end{aligned}$$

Ὡς τὸ σχ. 2 δεικνύει, τὸ κυρτὸν σύνολον λύσεων εἶναι ἀπεριόριστον καὶ ἡ $\varphi(\chi,\psi)$ δὲν ἔχει πεπερασμένην μεγίστην, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἔχει ἐλαχίστην τιμὴν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος.

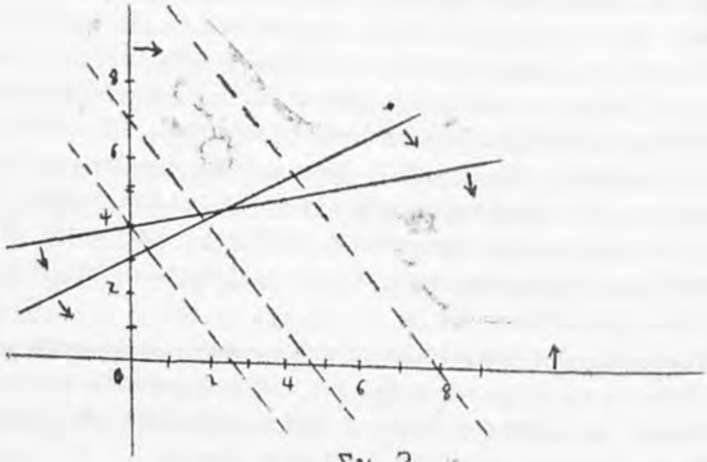
Διαζευκτικῶς, πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον ἡ συνάρτησις ἔχει μεγίστην τιμὴν ἀλλ' ὄχι ἐλαχίστην εἶναι τὸ κάτωθι :

νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ $\qquad \varphi(\chi,\psi) = 2\chi + 9\psi$

ὑποκειμένη εἰς

$$\begin{aligned} -\chi + \psi &\leqq 5 \\ 2\chi + 3\psi &\leqq 24 \\ \chi &> 0 \\ \psi &> 0\,. \end{aligned}$$

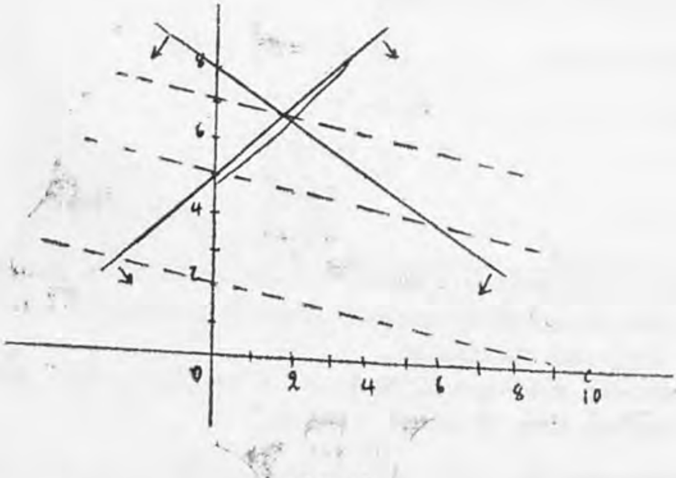
Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ σύνολον λύσεων Σ εἶναι περιωρισμένον ἀλλ' ὄχι κλειστόν· ἡ συνάρτησις λαμβάνει τιμὰς τεινούσας πρὸς τὸ μηδὲν καθὼς τὰ χ καὶ τὰ ψ τείνουν πρὸς τὸ μηδὲν ἀλλὰ δὲν ὑπάρχει ἐλαχίστη τιμὴ διὰ τὴν συνάρτησιν διὰ (χ,ψ) ∈Σ. Ὑπάρχει, ὅμως, μεγίστη τιμὴ διὰ τὴν συνάρτησιν ὑπὲρ τὸ σύνο-



Σχ. 2

λον. Ἂν τὸ Σ ἦτο κλειστὸν (δηλ. ἂν οἱ περιορισμοὶ ἦσαν $\chi \geqq 0$, $\psi \geqq 0$ ἀντὶ τῶν ἀντιστοίχων αὐστηρῶν ἀνισοτήτων) τότε ἡ συνάρτησις θὰ εἶχεν ἐλαχίστην τιμὴν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος.

Τὰ παραδείγματα ταῦτα ὑποδηλοῦν ὅτι μία γραμμικὴ συνάρτησις θὰ ἔχῃ



Σχ. 3

μεγίστην καὶ ἐλαχίστην τιμὴν ὑπὲρ ἓν σύνολον λύσεων ἂν τὸ σύνολον εἶναι περιωρισμένον καὶ ταυτοχρόνως κλειστόν. Τῷ ὄντι τοῦτο ἀποτελεῖ εἰδικὴν περίπτωσιν γενικοῦ θεωρήματος ἐπὶ τῶν συνεχῶν συναρτήσεων ὀφειλομένου εἰς τὸν Weierstrass : ἂν φ μία συνεχὴς συνάρτησις ὁριζομένη ἐπὶ κλειστοῦ καὶ περιωρισμένου συνόλου, τότε ἡ φ λαμβάνει μεγίστην καὶ ἐλαχίστην τιμὴν τουλάχιστον ἅπαξ ὑπὲρ τὸ σύνολον. Τὸ ἀξιοσημείωτον τοῦτο θεώρημα, πρέπει νὰ σημειωθῇ, ἰσχύει διὰ πᾶσαν συνεχῆ συνάρτησιν, ὄχι μόνον διὰ γραμμικὴν τοιαύτην.

Χρήσιμον ἀποτελεῖ ἄσκησιν ἡ ἀπόδειξις διὰ παραδειγμάτων ὅτι ἂν τὸ Σ, τὸ σύνολον λύσεων, εἶναι ἀπεριόριστον, ἡ γραμμικὴ συνάρτησις δύναται ἀκόμη νὰ ἔχῃ τόσον πεπερασμένην μεγίστην ὅσον καὶ ἐλαχίστην τιμὴν ὑπὲρ τὸ σύνολον καὶ ὅτι μέγισται καὶ ἐλάχισται τιμαὶ δύνανται νὰ ὑπάρχουν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σύνολον δὲν εἶναι κλειστόν. Ἀμφότεραι αἱ δυνατότητες αὗται ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς σχέσεως μεταξὺ τῆς κλίσεως τῶν ὑπὸ τῆς $\varphi(\chi,\psi)$ ὁριζομένων εὐθειῶν καὶ τῶν κλίσεων τῶν εὐθειῶν τῶν σχηματιζουσῶν τὰ σύνορα τῶν σχετικῶν ἡμιχώρων.

Τὸ θεώρημα Weierstrass δὲν ἀναφέρει ποῦ ἐπιτυγχάνεται ἡ μεγίστη ἢ ἐλαχίστη τιμὴ ὑπὲρ κλειστὸν καὶ περιωρισμένον σύνολον, οὔτε πόσας φορὰς λαμβάνει ἡ συνάρτησις μεγίστην καὶ ἐλαχίστην τιμὴν (αἱ τιμαὶ αὗται δύνανται νὰ ἐμφανισθοῦν ὑπὲρ ἓν σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἢ εἰς τὸ σύνορον, καὶ δύνανται νὰ ἐμφανισθοῦν ὑπὲρ ἄπειρα σημεῖα τοῦ συνόλου). Κατὰ ἓν θεώρημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἂν ἡ συνάρτησις εἶναι γραμμικὴ καὶ ἂν οἱ περιορισμοὶ εἶναι (ἀσθενεῖς) γραμμικαὶ ἀνισότητες, τότε αἱ μεγίστη καὶ ἐλαχίστη τιμαὶ θὰ ἐπιτευχθοῦν εἰς ἓν ἄκρον σημεῖον τοῦ περιωρισμένου κυρτοῦ συνόλου τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων. Τοῦτο ἁπλοποιεῖ μεγάλως τὸ πρόβλημα τῆς λύσεως προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ διότι τώρα ὑπάρχει ἡ μόνη ἀνάγκη τῆς ἐξετάσεως τῶν ἄκρων σημείων πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀρίστων λύσεων, ὑπάρχει δὲ πεπερασμένος ἀριθμὸς τούτων ἀφοῦ ὑπάρχει πεπερασμένος ἀριθμὸς περιορισμῶν (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἄκρων σημείων δύναται, παρὰ ταῦτα, νὰ εἶναι ἐντελῶς μέγας).

Τὸ γενικὸν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ

Τὸ πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχει ὡς ἀκολούθως: νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ γραμμικὴ συνάρτησις

(5) $$\varphi = \gamma_1\chi_1 + \gamma_2\chi_2 + \ldots + \gamma_\nu\chi_\nu,$$

ὑποκειμένη εἰς

(6) $$\begin{aligned} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu &\leqq \beta_1 \\ \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu &\leqq \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\mu 1}\chi_1 + \alpha_{\mu 2}\chi_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}\chi_\nu &\leqq \beta_\mu \end{aligned}$$

(7) $$\chi_\iota = 0, \ (\iota = 1, \ldots, \nu),$$

ἔνθα τὰ α_{ij}, β_i καὶ γ_j εἶναι γνωσταὶ σταθεραί. Αὕτη εἶναι γενικωτέρα διατύπωσις ἀπ' ὅ,τι ἴσως φαίνεται, διότι ἂν μία (ἀσθενὴς) ἀνισότης δὲν ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ὡς ἐκεῖναι τῆς (6), τότε ὁ πολλαπλασιασμὸς τῆς ἀνισότητος ἐπὶ —1 θὰ τὴν μετατρέψῃ εἰς τὴν μορφὴν ταύτην. Ἡ διατύπωσις ἐπιτρέπει τὴν ὕπαρξιν ἰσότητος, οὕτως εἰς περιορισμὸς δύναται νὰ εἶναι ἰσότης, καὶ περιγράφει πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως, ἐπίσης, διότι ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς $-\varphi$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὴν μεγιστοποίησιν τῆς φ. Αἱ ἀνισότητες (6) καὶ (7) ὁρίζουν κλειστὸν σύνολον· ἂν ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι καὶ περιωρισμένον, τότε βάσει τοῦ θεωρήματος Weierstrass ἡ συνάρτησις λαμβάνει καὶ μεγίστην καὶ ἐλαχίστην τιμὴν ὑπὲρ τὸ σύνολον, καὶ θὰ ὑπάρχουν ἄρισται πραγματοποιήσιμοι λύσεις εἰς τὸ πρόβλημα. Ἐπὶ πλέον, ἀφοῦ τὸ πρόβλημα εἶναι γραμμικόν, γνωρίζομεν ὅτι αἱ ἄρισται πραγματοποιήσιμοι λύσεις θὰ εἶναι ἄκρα σημεῖα τοῦ κυρτοῦ συνόλου λύσεων.

Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ παρουσίασις τῆς γενικῆς διατυπώσεως εἶναι κάπως ἀντιπαθητική, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν γεωμετρίαν τοῦ προηγηθέντος κεφαλαίου διὰ τὴν σαφεστέραν ἀντίληψιν τοῦ προβλήματος. Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ ἁπλούστερον πρόβλημα, ἑκάστη ἀνισότης εἰς (6) καὶ (7) ὁρίζει κλειστὸν ἡμιχῶρον εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον. Τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεων εἶναι κυρτὸν σύνολον εἰς τὸν ν-χῶρον, καὶ ἡ εἰς ἑκάστην ἀνισότητα ἀντιστοιχοῦσα ἰσότης ὁρίζει ἓν ὑπερεπίπεδον εἰς τὸν ν-χῶρον. Τὸ ὑπερεπίπεδον εἶναι οὐσιωδῶς γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς εὐθείας γραμμῆς· ὑπερεπίπεδον εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ὡς εἶναι ἓν ἐπίπεδον εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον (ἡ ἔννοια τοῦ ὑπερεπιπέδου θὰ ἐξετασθῇ πληρέστερον κατωτέρω). Ἡ ἐξίσωσις $\varphi = \gamma_1 \chi_1 + \gamma_2 \chi_2 + \ldots + \gamma_\nu \chi_\nu$ ὁρίζει ὁμάδα ὑπερεπιπέδων εἰς τὸν ν-χῶρον, καὶ ἡ μεγιστοποίησις τῆς φ ὑποκειμένης εἰς (6) καὶ (7) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μετακίνησις τοῦ ὑπερεπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (5) κατὰ πλάτος τοῦ κυρτοῦ συνόλου Σ τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων μέχρις ὅτου ἐπιτευχθῇ τὸ πλέον ἀπομεμακρυσμένον τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος καὶ κείμενον ἐπὶ τοῦ ὑπερεπιπέδου σημεῖον τοῦ Σ. Τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ δώσῃ μεγίστην τιμὴν διὰ τὴν φ, καὶ τὸ περὶ τῶν ἄκρων σημείων θεώρημα μᾶς διαβεβαιοῖ ὅτι ἡ φ θὰ λάβῃ τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμὴν εἰς ἓν ἄκρον σημεῖον τοῦ Σ ἂν τὸ Σ εἶναι περιωρισμένον. Παρόμοιαι παρατηρήσεις δύνανται νὰ γίνουν ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς φ.

Διαζευκτικαὶ διατυπώσεις τοῦ γενικοῦ προβλήματος ποιοῦν χρῆσιν τοῦ ἀθροιστικοῦ συμβόλου καὶ τῆς ἀλγέβρας μητρῶν. Δυνάμεθα νὰ καταγράψωμεν τὸ πρόβλημα εἰς τὴν συνοπτικὴν μορφήν,
νὰ μεγιστοποιηθῇ

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \chi_j \,,$$

ὑποκειμένη εἰς

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{ij} \chi_j \leqq \beta_i \qquad (\iota = 1, \ldots, \mu)$$

$$\chi_j \geqq 0 \qquad (j = 1, \ldots, \nu)\,,$$

καὶ ἂν γράψωμεν τὰ διανύσματα ὡς διανύσματα-στήλας καὶ δηλώσωμεν τὰ διανύσματα-σειρὰς ὡς ἀντίστροφα τῶν διανυσμάτων-στηλῶν, τότε τὸ πρόβλημα δύναται νὰ γραφῇ κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον: νὰ εὑρεθῇ διάνυσμα X μεγιστοποιοῦν τὴν $\varphi = \Gamma' X$ ὑποκειμένην εἰς

$$AX \leqq B$$
$$X \geqq 0 \,.$$

ὅπου διὰ $X \geqq 0$ ἐννοοῦμεν $\chi_\iota \geqq 0$ διὰ $\iota = 1, \ldots, \nu$, καὶ αἱ μῆτραι A καὶ B εἶναι ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν διανυσμάτων στηλῶν τῶν σταθερῶν ὅρων τῆς (6), ἀντιστοίχως.

Συστήματα γραμμικῶν ἀνισοτήτων καὶ σχετικὰ συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων

Τὰ θεωρήματα καὶ αἱ τεχνικαὶ λύσεως γενικῶν προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἐκφράζονται συνήθως μέσῳ σχετικοῦ συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων μᾶλλον ἢ μέσῳ ἀνισοτήτων. Ἑκάστη ἀνισότης εἰς (6) μετατρέπεται εἰς ἐξίσωσιν διὰ τῆς χρήσεως μιᾶς «χαλαρᾶς» μεταβλητῆς. Θεωρήσατε, π.χ., τὴν πρώτην ἀνισότητα τοῦ συστήματος (6),

$$\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu \leqq \beta_1. \tag{8}$$

Αὕτη δηλοῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν β_1. Κατ' ἄλλον τρόπον ἐκφράσεως, ἡ (8) δηλοῖ ὅτι ὑπάρχει ἀριθμὸς $\chi_{\nu+1} \geqq 0$, ὁ ὁποῖος, προστιθέμενος εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους, μετατρέπει ταύτην εἰς ἐξίσωσιν,

$$\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots \alpha_{1\nu}\chi_\nu + \chi_{\nu+1} = \beta_1.$$

Παρόμοιαι παρατηρήσεις ἰσχύουν διὰ τὰς ἄλλας τῆς (6) ἀνισότητας. Ἀφοῦ ὑπάρχουν μ ἀνισότητες εἰς (6), εἰσάγονται μ «χαλαραὶ» μεταβληταὶ (ἂν ὁ περιορισμὸς εἶναι ἰσότης οὐδεμία χαλαρὰ μεταβλητὴ εἰσάγεται), καὶ τὸ προκῦπτον γραμμικὸν σύστημα ἐξισώσεων εἶναι

$$\begin{array}{lllll} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu + \chi_{\nu+1} & & & & = \beta_1 \\ \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu & + \chi_{\nu+2} & & & = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\mu1}\chi_1 + \alpha_{\mu2}\chi_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}\chi_\nu & & & + \chi_{\nu+\mu} & = \beta_\mu , \end{array} \tag{9}$$

$$\chi_\iota \geqq 0 \quad (\iota = 1, \ldots, \nu + \mu). \tag{10}$$

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἑκάστη ἐξίσωσις εἰς (9) περιέχει ν+μ μεταβλητάς. Εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν αἱ μεταβληταὶ $\chi_{\nu+2}, \ldots, \chi_{\nu+\mu}$ ἔχουν μηδενικοὺς συντελεστάς, εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν αἱ μεταβληταὶ $\chi_{\nu+1}, \chi_{\nu+3}, \ldots, \chi_{\nu+\mu}$ ἔχουν μηδενικοὺς συντελεστάς, κ.ο.κ. οὕτως ἡ (9) δύναται νὰ ἐννοηθῇ ὡς σύστημα μ μὴ ὁμογενῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ν+μ ἀγνώστους. Τότε τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ τὸ περικλεῖον ἐξισώσεις ἀντιστοιχούσας εἰς (5) — (7) δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἀκολούθως :

νὰ μεγιστοποιηθῇ

$$\varphi = \gamma_1\chi_1 + \gamma_2\chi_2 + \ldots + \gamma_\nu\chi_\nu + 0\chi_{\nu+1} + \ldots + 0\chi_{\nu+\mu}, \tag{11}$$

ὑποκειμένη εἰς

$$\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu+\mu}\chi_{\nu+\mu} = \beta_1$$
$$\alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha_{2\nu+\mu}\chi_{\nu+\mu} = \beta_2$$
$$(12) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{\mu 1}\chi_1 + \alpha_{\mu 2}\chi_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu+\mu}\chi_{\nu+\mu} = \beta_\mu$$

$$(13) \qquad \chi_\iota \geqq 0 \quad (\iota = 1, \ldots, \nu + \mu).$$

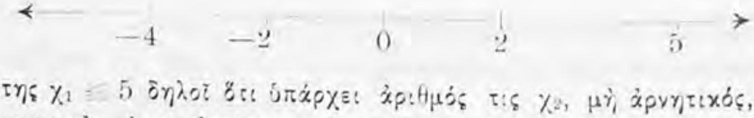
Σημειώσατε ὅτι παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι αἱ χαλαραὶ μεταβληταὶ δυνατὸν ν' ἀποτελοῦν σπουδαῖον τμῆμα τῆς τελικῆς λύσεως δὲν δύνανται διὰ τῆς (11) νὰ συνεισφέρουν εἰς τὴν φ.

Μολονότι ἴσως νομισθῇ ἐκ πρώτης ὄψεως ὅτι τὰ δύο προβλήματα εἶναι διαφορετικὰ κατὰ τὸ ὅτι ἡ (12) ἀναφέρεται εἰς τομὴν ὑπερεπιπέδων εἰς χῶρον $\nu+\mu$ διαστάσεων ἐνῷ τὸ σύστημα ἀνισοτήτων (6) καὶ (7) ἀναφέρεται εἰς τομὴν ἡμιχώρων εἰς χῶρον ν διαστάσεων, αἱ διατυπώσεις εἶναι ἀλγεβρικῶς ἰσοδύναμοι διότι μία πραγματοποιήσιμος λύσις εἰς τὸ ἓν πρόβλημα ἀποτελεῖ πραγματοποιήσιμον λύσιν καὶ εἰς τὸ ἕτερον. Διὰ νὰ κατανοηθῇ πλήρως ἡ ἰσοδυναμία αὕτη, θὰ ἐξετάσωμεν πρῶτον τὰς γεωμετρικὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας τὸ σύνολον λύσεων τῶν (12) καὶ (13) εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπὸ τῶν (6) καὶ (7) ὁριζόμενον κυρτὸν σύνολον καὶ θὰ προβῶμεν μετὰ ταῦτα εἰς τὴν ἐξέτασιν περαιτέρω γεωμετρίας σχέσιν ἐχούσης πρὸς τὰς ἀρίστας λύσεις εἰς τὰς δύο διατυπώσεις.

Ἃς ἀρχίσωμεν διὰ τῆς ἐξετάσεως τῆς ἀνισότητος

$$(14) \qquad \chi_1 \leqq 5\,,$$

ἥτις ὁρίζει σύνολον εἰς τὸν μονοδιάστατον χῶρον, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ κλειστὸν καὶ κυρτόν:



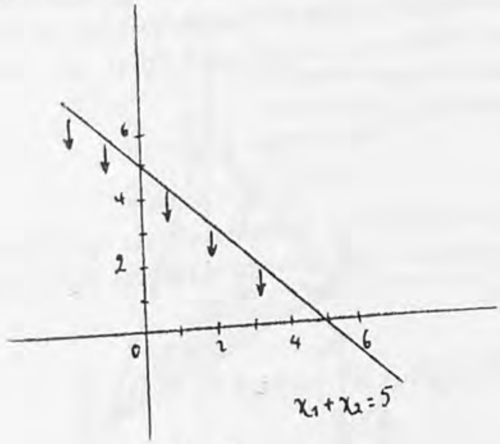
Ἡ ἀνισότης $\chi_1 \leqq 5$ δηλοῖ ὅτι ὑπάρχει ἀριθμός τις χ_2, μὴ ἀρνητικός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν χ_1 ἰσοῦται πρὸς 5 (ἂν χ_1 εἶναι -12, π.χ., χ_2 θὰ ἦτο 17· ἀφοῦ χ_1 εἶναι μεταβλητή, χ_2 εἶναι μεταβλητή, ἐπίσης). Ἐπομένως ἡ ἀνισότης (14) δύναται νὰ ἐννοηθῇ ὡς

$$(15) \qquad \chi_1 + \chi_2 = 5$$

$$(16) \qquad \chi_1 \geqq 0\,.$$

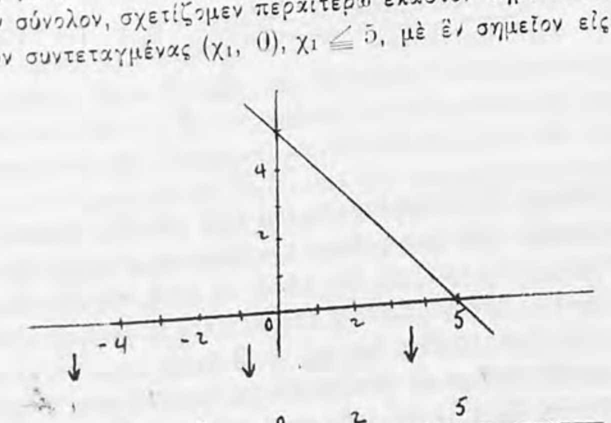
Τὸ ἐρώτημα τώρα εἶναι, ὑπὸ ποίας συνθήκας αἱ (15) καὶ (16) ὁρίζουν τὸ αὐτὸ σύνολον ὡς ἡ (14); Διαγραμματικῶς ἡ (15) δεικνύει ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (χ_1, χ_2) ἱκανοποιούντων τὴν (15) καὶ τὴν (16) εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀριστερὰ καὶ ἄνω τοῦ σημείου τομῆς μὲ τὸν ἄξονα τοῦ χ_1. Τὸ σύνολον τοῦτο, βεβαίως, δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ἀνισότητος $\chi_1 \leqq 5$. Αἱ (15) καὶ (16), ὅμως, θὰ ὁρίσουν τὸ αὐτὸ σύνολον ὡς ἡ (14) ἂν ἐννοηθοῦν ὡς ἀκολούθως. Ἃς θεωρήσωμεν ὅλας τὰς τιμὰς

τοῦ χ_1 μόνου εἰς τὰ ἱκανοποιοῦντα τὰς (15) καὶ (16) διατεταγμένα ζεύγη. Τὸ σύ-
νολον τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ «προβολὴ» ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ_1 τῶν τι-
μῶν τοῦ χ_1 εἰς τὰ διατεταγμένα ζεύγη (χ_1, χ_2) τὰ ἱκανοποιοῦντα τὰς (15) καὶ
(16)· εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς μορφῆς (χ_1, 0). Ἐπει-



Σχ. 4

δὴ τὸ σύνολον τοῦτο τῶν σημείων εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον δὲν εἶναι, κατ'
αὐστηρὰν θεώρησιν, τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς $\chi_1 \leqq 5$ εἰς τὸν μοναδι-
άστατον χῶρον σύνολον, σχετίζομεν περαιτέρω ἕκαστον σημεῖον εἰς τὸν δισδιάστα-
τον χῶρον ἔχον συντεταγμένας (χ_1, 0), $\chi_1 \leqq 5$, μὲ ἓν σημεῖον εἰς τὸν μονοδιά-



Σχ. 5

στατον χῶρον ἔχον συντεταγμένην $\chi_1 \leqq 5$. Τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν τιμῶν χ_1
εἰς τὰ διατεταγμένα ζεύγη τὸ ἱκανοποιοῦν τὰς (15) καὶ (16), ὑπ' αὐτὴν τὴν ἔν-
νοιαν, εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς τὸ ὑπὸ τῆς (14) ὁριζόμενον σύνολον. Διαγραμματικῶς παρου-
σιάζεται εἰς τὸ σχ. 5.

Δι' ἓν ἐπὶ πλέον παράδειγμα, θεωρήσατε τὰς ἀνισότητας

(17) $$\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 \leqq \beta$$

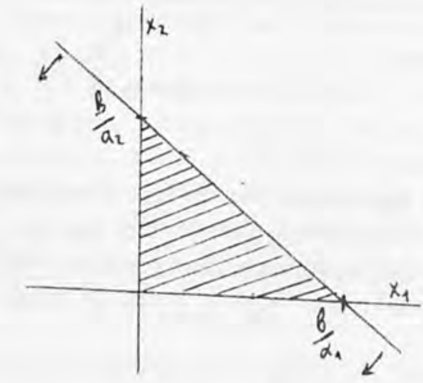
(18) $$\chi_1\,,\ \chi_2 \geqq 0\,,$$

ὅπου θὰ λάβωμεν ἐπίσης ὅτι α_1 καὶ α_2 εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί. Τότε ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 = \beta$ εὐθεῖα θὰ ἔχῃ ἀρνητικὴν κλίσιν καὶ ἡ τομὴ τῶν ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων ὁριζομένων ἡμιχώρων εἶναι τὸ κυρτὸν σύνολον ὡς δεικνύεται κατωτέρω. Πάλιν, $\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 \leqq \beta$ δηλοῖ ὅτι ὑπάρχει ἀριθμός τις $\chi_3 \geqq 0$ τοιοῦτος ὥστε

(19) $$\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 + \chi_3 = \beta$$

(20) $$\chi_1,\ \chi_2\,,\ \chi_3 \geqq 0\,.$$

Τὸ διάγραμμα τῆς (19) εἶναι ἐπίπεδον εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον καὶ αἱ ἀνισότητες (20) περιορίζουν τὰς ἱκανοποιούσας τὴν (19) διατεταγμένας τριάδας



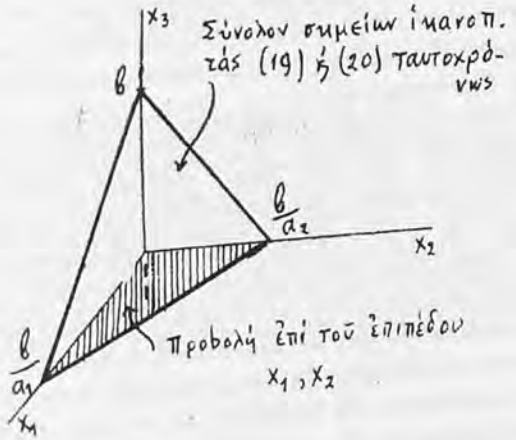
Σχ.6

εἰς τὸ πρῶτον «ὄγδοον». Τὰ διαγράμματα τῶν (19) καὶ (20) ἐμφανίζονται κατωτέρω. Βλέπομεν πάλιν ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων τριάδων (χ_1, χ_2, χ_3) τῶν ἱκανοποιουσῶν τὰς (19) καὶ (20) δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ σύνολον ὡς τὸ ὑπὸ τῶν (17) καὶ (18) ὁριζόμενον. Δύναται ὅμως ἡ προβολὴ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν χ_1 καὶ χ_2, ἢ αἱ διατεταγμέναι ἐκεῖναι τριάδες $(\chi_1, \chi_2, 0)$, ἔνθα (χ_1, χ_2, χ_3) ἱκανοποιοῦν τὰς (19) καὶ (20), νὰ συσχετισθῇ μὲ τὸ σύνολον εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα ἱκανοποιοῦν τὰς (17) καὶ (18) κατὰ τρόπον ἀνάλογον ἐκείνου εἰς τὸ προηγηθὲν παράδειγμα. Συσχετίζομεν ἁπλῶς τὰ σημεῖα $(\chi_1, \chi_2, 0)$ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν χ_1, χ_2 εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον μὲ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα (χ_1, χ_2) εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην αἱ (19) καὶ (20) ὁρίζουν τὸ αὐτὸ σύνολον ὡς αἱ (17) καὶ (18). Καθίσταται φανερὸν ἐκ τῶν σχημάτων 6 καὶ 7 ὅτι ἡ ἀντιστοιχία

$$(\chi_1\,, \chi_2\,, 0) \rightarrow (\chi_1\,, \chi_2)$$

θὰ φέρῃ εἰς συσχέτισιν σημεῖα εἰς τὸ σύνολον λύσεων τοῦ σχ. 7 μὲ σημεῖα εἰς τὸ σύνολον λύσεως τοῦ σχ. 6.

Παρομοία προβολὴ δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ πρὸς συσχέτισιν τοῦ συνόλου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῆς τομῆς τῶν ὑπερεπιπέδων εἰς τὴν γενικὴν διατύπωσιν (12) καὶ (13) ἀνωτέρω μὲ τὸ σύνολον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῆς τομῆς τῶν ἡμι-χώρων εἰς (6) καὶ (7). Ἑκάστη ἐξίσωσις εἰς τὴν (12), παρετηρήσαμεν, ὁρίζει



Σχ. 7

ὑπερεπίπεδον εἰς $\nu + \mu$ χῶρον. Ὑπερεπίπεδον εἰς χῶρον ρ διαστάσεων ὁρίζεται ὡς γραμμικὴ πολλαπλότης $\rho - 1$ διαστάσεων, ἔνθα γραμμικὴ πολλαπλότης εἶναι ὁ χῶρος ὁ ἔχων ἁπάσας τὰς ἰδιότητας διανυσματικοῦ χώρου ἐκτὸς τοῦ ὅτι ἡ ἀρχὴ τοῦ συστήματος συντεταγμένων τοῦ διανυσματικοῦ χώρου δὲν ἀπαιτεῖται νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν γραμμικὴν πολλαπλότητα. Διὰ τοὺς σκοποὺς μας χρειαζόμεθα μόνον τὴν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν ὅτι γραμμικὴ πολλαπλότης εἶναι διανυσματικὸς χῶρος, ὁ ὁποῖος ἔχει μετατοπισθῆ διὰ τῆς προσθέσεως εἰς ἕκαστον διάνυσμα ἐν τῷ χώρῳ ἑνὸς σταθεροῦ διανύσματος. Διὰ παραδείγματα τινά, εἰς V_2 γραμμικὴ πολλαπλότης εἶναι τὸ διάγραμμα εὐθείας γραμμῆς ὁριζομένης ὑπὸ ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 = \beta$, ἔνθα τὰ α_1 καὶ α_2 δὲν εἶναι ἀμφότερα μηδενικά. Ἂν $\beta = 0$, τότε ἡ γραμμικὴ πολλαπλότης περιέχει τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ γραμμικὴ πολλαπλότης εἶναι ἐπίσης διανυσματικὸς χῶρος. Παρόμοια σχόλια ἔχουν ἰσχὺν καὶ εἰς V_3. Ἡ ἐξίσωσις $\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 + \alpha_3\chi_3 = \beta$ ὁρίζει ἓν ἐπίπεδον ἢ γραμμικὴν πολλαπλότητα εἰς V_3 καὶ ἡ διάστασις τῆς πολλαπλότητος εἶναι $\rho - 1 = 3 - 1 = 2$. Πάλιν, ἂν $\beta = 0$, ἡ πολλαπλότης περιέχει τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ εἶναι διανυσματικὸς χῶρος. Ἂν $\beta \neq 0$, ἡ ἀρχὴ δὲν περιέχεται εἰς τὴν γραμμικὴν πολλαπλότητα καὶ δὲν εἶναι αὐτὴ διανυσματικὸς χῶρος.

Ἡ τομὴ δύο ὑπερεπιπέδων, ἑκάστου ἔχοντος διάστασιν $\rho - 1$ εἰς χῶρον ρ, εἶναι γραμμικὴ πολλαπλότης διαστάσεως $\rho - 2$, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἑνὸς ὑπερεπιπέδου δὲν εἶναι γραμμικὸς συνδυασμὸς τοῦ ἑτέρου. Δι' εἰδικὴν τούτου περίπτωσιν ἂς θεωρήσωμεν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον. Ἡ τομὴ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον, ἢ μονοδιάστατος γραμμικὴ πολλαπλότης. Τὰ σχόλια ταῦτα δύνανται νὰ γενικευθοῦν. Ἂν ἔχωμεν κ τεμνόμενα ὑπερεπίπεδα εἰς χῶρον ρ καὶ ἂν ἡ ἐξίσωσις ἑκάστου ὑπερεπιπέδου δὲν εἶναι γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ἑτέρων, τότε δύο τῶν ὑπερεπιπέδων τέμνονται εἰς γραμμικὴν πολλαπλότητα διαστάσεως $\rho - 2$, τρία τῶν ὑπερεπιπέδων τέμνονται εἰς γραμμικὴν πολλαπλότητα διαστάσεως $\rho - 3$, καὶ ἡ τομὴ κ ὑπερεπιπέδων εἶναι γραμμικὴ πολλαπλότης ἔχουσα διάστασιν $\rho - \kappa$.

Ἐπιστρέφοντες εἰς τὰς γενικὰς διατυπώσεις προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἂς ἐξετάσωμεν τὰς (6) καὶ (7) ὡς καὶ τὰς (12) καὶ (13) εἰς τὸ φῶς τῶν ἀνωτέρω ἐπὶ τῶν γραμμικῶν πολλαπλοτήτων λαβόντων χώραν σχολίων. Ἕκαστον τῶν ὑπερεπιπέδων εἰς (12) εἶναι γραμμικὴ πολλαπλότης διαστάσεως $\nu + \mu - 1$· ἡ τομὴ μ ἐξ αὐτῶν τῶν ὑπερεπιπέδων εἶναι γραμμικὴ πολλαπλότης διαστάσεως $\nu + \mu - \mu = \nu$ [2]. Τὸ ὑπὸ τῆς (6) ὁριζόμενον κυρτὸν σύνολον εἶναι ἐπίσης χῶρος ν διαστάσεων, καὶ ἀφοῦ εἰς ἀμφοτέρας τὰς διατυπώσεις περιοριζώμεθα εἰς μὴ ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν, αἱ τιμαὶ ὁρίζουν τὸ αὐτὸ σύνολον. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀληθὲς ἂν ἀκολουθηθῇ ἡ ἀνωτέρω ἐξετασθεῖσα μέθοδος ἡ ἀφορῶσα εἰς συσχετισμὸν μέσῳ δεούσης καταλλήλου προβολῆς.

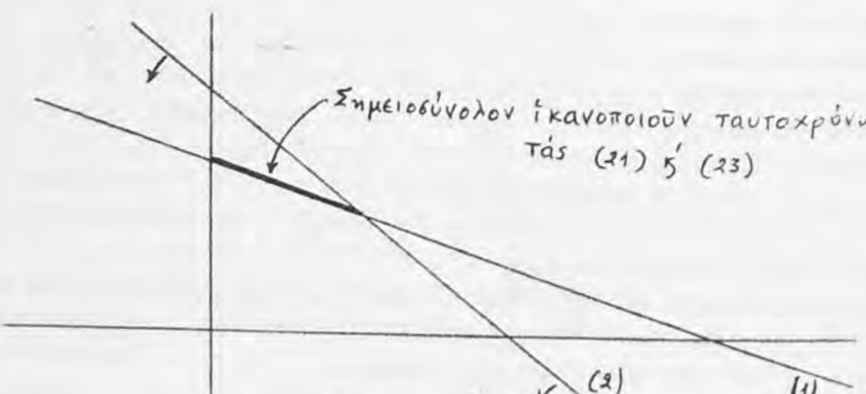
Ἓν ἁπλοῦν παράδειγμα θὰ διασαφίσῃ τὰ σχόλια ταῦτα. Ὑποτεθείσθω ὅτι θέλομεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν $\varphi = \gamma_1\chi_1 + \gamma_2\chi_2$ ὑποκειμένην εἰς

(21) $$\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 = \beta_1$$

(22) $$\alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 = \beta_2$$

(23) $$\chi_1, \chi_2 \geqq 0,$$

ὅπου διὰ λόγους ἁπλότητος δεχόμεθα περαιτέρω ὅτι ἕκαστον $\alpha_{ij} > 0$. Τὸ διάγραμμα τῆς (21) εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ (1) εἰς τὸ σχ. 8 καὶ τὸ σύνορον τοῦ ἡμιχώ-



Σχ. 8

2) Λαμβάνομεν ὅτι οὐδεμία ἐξίσωσις εἰς τὴν (12) εἶναι γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ἄλλων.

ρου (22) εἶναι ἡ εὐθεῖα (2). Τὸ σύνολον τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων τοῦ προβλήματος εἶναι τὸ δεικνυόμενον εὐθύγραμμον τμῆμα.

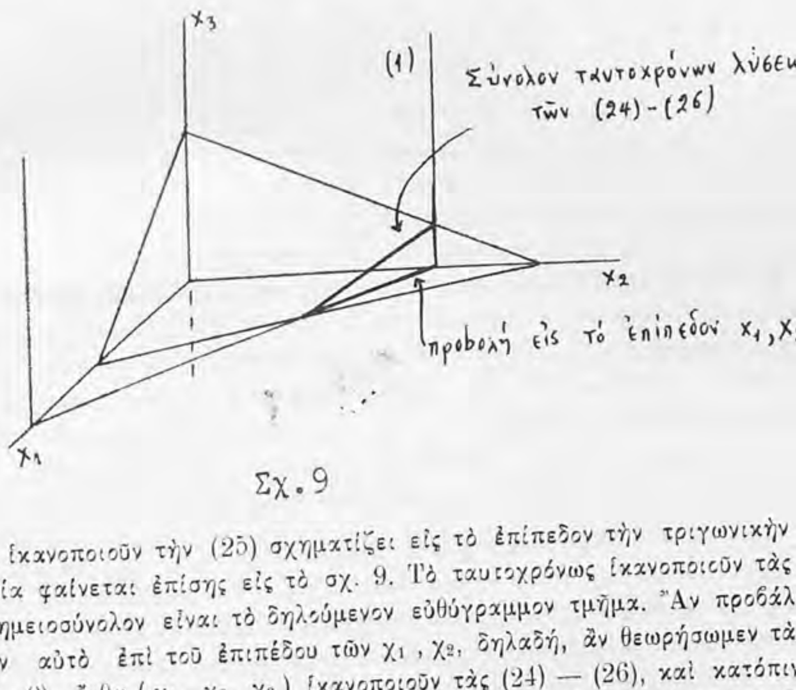
Διὰ τῆς χρήσεως χαλαρῶν μεταβλητῶν λαμβάνομεν τὸ σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων

(24) $$\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + 0\chi_3 = \beta_1$$

(25) $$\alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \chi_3 = \beta_2$$

(26) $$\chi_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ἐξισώσεις προσδιορίζουν ὑπερεπίπεδα εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον. Διαγράμματα τῶν ἐξισώσεων ἐμφανίζονται κατωτέρω, ὅπου διὰ λόγους ἁπλότητος δεικνύονται μόνον αἱ τιμαὶ ἐκεῖναι τῶν μεταβλητῶν αἱ ἱκανοποιοῦσαι τὰς (24) καὶ (25), αἱ ὁποῖαι (τιμαὶ) εἶναι ἐπίσης μὴ ἀρνητικαί. Τὸ ἐπίπεδον (1) εἶναι τὸ διάγραμμα τῆς (24)· ἀφοῦ ἡ (24) ἔχει μηδενικὸν συντελεστὴν διὰ χ_3 τυχοῦσα τιμὴ τοῦ χ_3 θὰ ἱκανοποιήσῃ τὴν ἐξίσωσιν, οὕτως ἔχομεν τὸ ἐπίπεδον (1) μέρος τοῦ ὁποίου δεικνύεται εἰς τὸ σχ. 9. Τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι



Σχ. 9

γμέναι ἱκανοποιοῦν τὴν (25) σχηματίζει εἰς τὸ ἐπίπεδον τὴν τριγωνικὴν «φέτα» — ἡ ὁποία φαίνεται ἐπίσης εἰς τὸ σχ. 9. Τὸ ταυτοχρόνως ἱκανοποιοῦν τὰς (24) — (26) σημειοσύνολον εἶναι τὸ δηλούμενον εὐθύγραμμον τμῆμα. Ἂν προβάλωμεν τὸ σύνολον αὐτὸ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν χ_1, χ_2, δηλαδή, ἂν θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα $(\chi_1, \chi_2, 0)$ ἔνθα (χ_1, χ_2, χ_3) ἱκανοποιοῦν τὰς (24) — (26), καὶ κατόπιν συσχετίσωμεν αὐτὰ μὲ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα (χ_1, χ_2) εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον, θὰ λάβωμεν τὸ εἰς τὸ σχ. 8 σύνολον.

Ἡ γενικὴ περίπτωσις δύναται ἀναλόγως νὰ ἐξετασθῇ. Τὸ σύνολον πραγματοποιησίμων λύσεων τῶν ἀνισοτήτων (6) καὶ (7) εἶναι κυρτὸν σύνολον εἰς τὸν χῶρον τῶν ν διαστάσεων καὶ τὸ σύνολον πραγματοποιησίμων λύσεων τῶν (12) καὶ (13) εἶναι ἐπίσης σύνολον εἰς τὸν $(\nu + \mu) - \mu = \nu$ - χῶρον. Τὰ δύο σύνολα πραγματοποιησίμων λύσεων θὰ εἶναι τὰ αὐτὰ ἂν προβάλωμεν τὸ σύνολον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἱκανοποιοῦν τὰς (12) καὶ (13), δηλαδὴ τὸ σύνολον $(\chi_1, \dots, \chi_\nu, \dots, \chi_{\nu+\mu})$, ἐπὶ τοῦ γραμμικοῦ ὑποχώρου τῶν σημείων $(\chi_1, \dots, \chi_\nu, 0, \dots, 0)$ καὶ κατόπιν συσχετίσωμεν τὰ σημεῖα ταῦτα μὲ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\nu)$ εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον.

Χῶροι λύσεων καὶ χῶροι ἀπαιτήσεων εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν

Ἡ διατύπωσις (11), (12) καὶ (13) ἔχει ἑτέραν μίαν ἑρμηνείαν. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι αἱ μονομετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (12) δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς μία ἐξίσωσις διανυσμάτων ἂν οἱ συντελεσταὶ α_{ij} ἑκάστης μεταβλητῆς θεωρηθοῦν ὡς διάνυσμα—στήλη. Ἡ ἐξίσωσις διανυσμάτων, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν (12) εἶναι

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu 1} \end{bmatrix} \chi_1 + \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu 2} \end{bmatrix} \chi_2 + \cdots + \begin{bmatrix} \alpha_{1\nu+\mu} \\ \alpha_{2\nu+\mu} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu\nu+\mu} \end{bmatrix} \chi_{\nu+\mu} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\mu \end{bmatrix},$$

ἡ ὁποία δύναται νὰ γραφῇ, ἂν $P_i = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu i} \end{bmatrix}$ καὶ P_0 ἀντιπροσωπεύῃ

τὸ διάνυσμα—στήλη τῶν σταθερῶν β_i, ὡς

$$P_1\chi_1 + P_2\chi_2 + \cdots + P_{\nu+\mu}\chi_{\nu+\mu} = P_0 . \tag{27}$$

Ὁ ἔχων $\mu + \nu$ διαστάσεις χῶρος σημείων $(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{\nu+\mu})$ καλεῖται ὁ ***χῶρος λύσεων*** (solution space) διότι σημεῖα τοῦ χώρου τούτου παριστάνουν λύσεις τοῦ προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἡ ἐξίσωσις διανυσμάτων (27), ἀφ' ἑτέρου, ἀναφέρεται εἰς χῶρον μ διαστάσεων, ἑκάστου τῶν διανυσμάτων P_i ἀποτελουμένου ἐκ μ συνιστωσῶν. Ὁ χῶρος μ διαστάσεων καλεῖται ὁ ***χῶρος ἀπαιτήσεων*** (requirements space) διότι τινὰ τῶν σημείων του προέρχονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῶν περιορισμῶν, οἱ ὁποῖοι καθορίζουν τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος. Σημειώσατε ὅτι παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{\nu+\mu})$ εἶναι αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου εἰς τὸν χῶρον λύσεων, εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων δὲν ἀντιπροσωπεύουν σημεῖον ἀλλὰ συλλογὴν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἐμφανίζονται ὡς συντελεσταὶ διανυσμάτων εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων.

Ἂν τὸ P_0 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων P_i, τότε οἱ συντελεσταὶ χ_i εἰς τὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν θὰ ἱκανοποιοῦν ἀμφοτέρας τὰς (12) καὶ (13), καὶ τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ συντελεσταὶ θὰ εἶναι αἱ συντεταγμέναι σημείου εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων εἰς τὸν χῶρον $\nu + \mu$ (τὸν χῶρον λύσεων)[3]. Ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον ($\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{\nu+\mu}$) εἰς τὸ σύνολον πραγματοποιησίμων λύσεων δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων ὡς τρόπος ἐκφράσεως τοῦ P_0 ὡς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν διανυσμάτων $P_1, \ldots, P_{\nu+\mu}$ μὴ ἀρνητικοῦ. Τελικῶς, ἂν τὸ P_0 εἶναι μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν $P_1, \ldots, P_{\nu+\mu}$, τότε τὸ P_0 κεῖται ἐντὸς τοῦ ὑπὸ τῶν P_i ζευγνυμένου κώνου· ἐξ ἄλλου, ἂν τὸ P_0 δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸν κῶνον, τότε ὁ μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν P_i θὰ δώσῃ P_0 καὶ τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ δὲν ἔχει πραγματοποιήσιμον λύσιν.

Ἓν ἁπλοῦν παράδειγμα θὰ ἦτο χρήσιμον εἰς τὸ σημεῖον αὐτό. Ὑποτεθείσθω ὅτι τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς $\varphi(\chi_1, \chi_2) = 2\chi_1 + 5\chi_2$ ὑποκειμένης εἰς

(28) $$\chi_1 + 4\chi_2 \leqq 24$$

(29) $$3\chi_1 + \chi_2 \leqq 21$$

(30) $$\chi_1 + \chi_2 \leqq 9$$

(31) $$\chi_1, \chi_2 \geqq 0.$$

Αἱ ἀνισότητες ὁρίζουν κυρτὸν σύνολον Σ εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον. Αἱ σχηματίζουσαι τὰ σύνορα τῶν σχετικῶν ἡμιχώρων εὐθεῖαι εἰς τὸ κατωτέρω διάγραμμα ἔχουν τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὰς ἀνωτέρω ἀντιστοίχους ἀνισότητας. Δεικνύεται ἐπίσης ἡ γραμμικὴ συνάρτησις, καὶ τὸ σημεῖον τοῦ Σ διὰ τὸ ὁποῖον ἡ $\varphi(\chi_1, \chi_2)$ ἐπιτυγχάνει μεγίστην τιμὴν εἶναι τὸ σημεῖον (4,5) διὰ τὸ ὁποῖον $\varphi(\chi_1, \chi_2) = 2\chi_1 + 5\chi_2 = 2(4) + 5(5) = 33$. Ὁ χῶρος ὁ περιέχων τὴν τομὴν τῶν ἡμιχώρων τῶν προσδιοριζομένων ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων εἰς τὴν ἀρχικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος καλεῖται ὁ *ἀρχικὸς χῶρος*. Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτό, ὁ ἀρχικὸς χῶρος εἶναι δισδιάστατος.

Εἰσάγονται τώρα χαλαραὶ μεταβληταί, μία δι' ἑκάστην τῶν ἀνισοτήτων (28) — (30), καὶ ἡ ἰσοδύναμος διατύπωσις τοῦ προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς $\varphi(\chi_1, \chi_2) = 2\chi_1 + 5\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5$ ὑποκειμένης εἰς

(32) $$\chi_1 + 4\chi_2 + \chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5 = 24$$

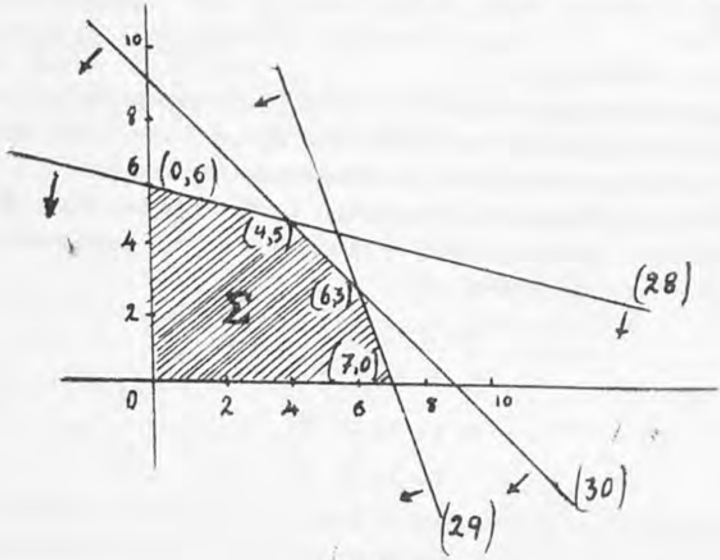
(33) $$3\chi_1 + \chi_2 + 0\chi_3 + \chi_4 + 0\chi_5 = 21$$

(34) $$\chi_1 + \chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 + \chi_5 = 9$$

(35) $$\chi_i \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, 5).$$

3) Πρὸς ἁπλοποίησιν τῆς ἐξετάσεως ταύτης, ὅταν ὁμιλῶμεν διὰ τὸ σύνολον λύσεων θὰ γίνεται κατανοητὸν ὅτι ἔχει γίνει κατάλληλος προβολὴ τῶν σημείων ($\chi_1, \ldots, \chi_{\nu+\mu}$) ἐπὶ τοῦ γραμμικοῦ ὑποχώρου τῶν σημείων ($\chi_1, \ldots, \chi_\nu, 0, \ldots, 0$).

Ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων τούτων ὁρίζει ὑπερεπίπεδον τεσσάρων διαστάσεων εἰς χῶρον πέντε διαστάσεων. Ἡ τομὴ τῶν τριῶν ὑπερεπιπέδων εἶναι γραμμικὴ πολλαπλότης διαστάσεως $5-3=2$. Ἂν προβάλωμεν τὸ σύνολον λύσεων (χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, χ_5) τῶν (32) — (35) ἐπὶ τοῦ γραμμικοῦ ὑποχώρου (χ_1, χ_2, 0, 0, 0) καὶ ταυτίσωμεν τὰ σημεῖα ταῦτα μὲ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ δισδιαστάτου χώρου (χ_1, χ_2), τότε τὸ σύνολον τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων τῶν (32) καὶ (35) δύνα-



Σχ. 10

ται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ αὐτὸ σύνολον μὲ τὸ κυρτὸν Σ εἰς τὸ σχ. 10 δεικνυόμενον τοιοῦτον.

Ἂς γράψωμεν τώρα τὰ συστήματα (32) — (35) εἰς τὴν μορφὴν διανυσμάτων,

$$(36)\qquad \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\chi_1+\begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}\chi_2+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\chi_3+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\chi_4+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\chi_5=\begin{bmatrix}24\\21\\9\end{bmatrix}$$

$$(37)\qquad \chi_i \geqq 0 \qquad (i=1,\cdots,5).$$

Διὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο ὁ χῶρος λύσεων εἶναι πέντε διαστάσεων καὶ αἱ πραγματοποιήσιμοι λύσεις τοῦ προβλήματος εἶναι τῆς μορφῆς (χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, χ_5). Ἂς λεχθῇ ἐνταῦθα ὅτι ἡ μόνη καταγραφὴ τῆς ἐξισώσεως εἰς τὴν μορφὴν ταύτην δηλοῖ δυνατὴν λύσιν: ($\chi_1=0, \chi_2=0, \chi_3=24, \chi_4=21, \chi_5=9$. Δὲν εἶναι ὅμως αὕτη ἀρίστη λύσις διότι διὰ τὸ σημεῖον αὐτὸ

$$\varphi(\chi_1, \chi_2)=2\chi_1+5\chi_2=2(0)+5.0)=0\,.$$

Ὁ χῶρος ἀπαιτήσεων εἶναι τρισδιάστατος, ὡς δεικνύει ἓν βλέμμα εἰς τὰ διανύσματα—στήλας τῆς (36). Εἰς τὴν εἰδικὴν ταύτην περίπτωσιν, δυνάμεθα νὰ εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ὑπάρχει τουλάχιστον μία δυνατὴ λύσις ἀφοῦ τὸ διάνυσμα $\begin{bmatrix} 24 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix}$ κεῖται εἰς τὸ θετικὸν τεταρτημόριον καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τῆς ἐξισώσεως εὑρισκομένων διανυσμάτων τῆς (36) εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ θετικὸν τεταρτημόριον, τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων τοῦ τρισδιαστάτου χώρου ὄντων μεταξὺ τῶν διανυσμάτων αὐτῶν. Ἂς λεχθῇ ὅτι αὕτη εἶναι ἁπλῶς καὶ μόνον γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς διατυπώσεως ὅτι $\chi_1 = 0, \chi_2 = 0, \chi_3 = 24, \chi_4 = 21, \chi_5 = 9$ εἶναι λύσις πραγματοποιήσιμος.

Διὰ νὰ λύσωμεν ὅμως τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, θέλομεν ὄχι μόνον ἔκφρασιν τοῦ P_0 ὡς μὴ ἀρνητικοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν P_i, ἀλλὰ μὴ ἀρνητικὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν ὁ ὁποῖος θὰ δώσῃ εἰς τὴν φ τὴν μεγίστην τιμήν. Γνωρίζοντες ὅτι ἡ φ θὰ μεγιστοποιηθῇ εἰς ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου λύσεων, χρειαζόμεθα ἓν μέσον πειραματισμοῦ μὲ μὴ ἀρνητικοὺς γραμμικοὺς συνδυασμοὺς τῶν P_i τὸ ὁποῖον θὰ δώσῃ ὄχι ἁπλῶς σημεῖα εἰς τὸν χῶρον λύσεων ἀλλὰ ἄκρα σημεῖα εἰς τὸν χῶρον λύσεων. Ὑπάρχει ἐνταῦθα ἓν θεώρημα τὸ ὁποῖον θὰ διατυπωθῇ προσεκτικώτερον καὶ θὰ ἀποδειχθῇ κατωτέρω. Κατ' αὐτὸ ἂν P_0 ἐκφράζεται ὡς μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς συνόλου ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων, τότε οἱ συντελεσταὶ εἰς τὸν συνδυασμὸν αὐτόν, ἑρμηνευόμενοι ὡς συντεταγμέναι σημείου εἰς τὸν χῶρον λύσεων, εἶναι αἱ συντεταγμέναι ἄκρου σημείου εἰς τὸ κυρτὸν σύνολον τῶν δυνατῶν λύσεων. Τοῦ χώρου ἀπαιτήσεων ὄντος τρισδιαστάτου εἰς τὸ παράδειγμα, οὐδὲν σύνολον περιέχον πλείονα τῶν τριῶν διανυσμάτων εἶναι ἀνεξάρτητον γραμμικῶς, οὕτως οἱ γραμμικοὶ συνδυασμοί, οἱ ὁποῖοι θὰ καταλήξουν εἰς ἄκρα σημεῖα εἰς τὸν χῶρον λύσεων δύνανται νὰ ἔχουν τὸ πλεῖστον τρεῖς θετικοὺς συντελεστὰς εἰς τὸ παράδειγμα αὐτό. Τὸ σημεῖον (0,0,24,21,9) τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τῆς ἀνωτέρω ἐξετασθείσης λύσεως εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου τῶν δυνατῶν λύσεων εἰς χῶρον πέντε διαστάσεων.

Ἔχοντες τώρα προσδιορίσει ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου λύσεων, ἀναπτύσσομεν ἓν μέσον μετακινήσεως ἐξ ἑνὸς ἄκρου σημείου εἰς παρακείμενον ἄκρον σημεῖον, τὸ ὁποῖον δίδει τουλάχιστον τὴν αὐτὴν μεγάλην τιμὴν εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν φ. Ἀρχίζομεν μὲ τὴν ἀνωτέρω ὑπολογισθεῖσαν λύσιν διὰ τὴν ὁποίαν $\varphi(\chi_1, \chi_2) = 0$,

$$P_0 = 0P_1 + 0P_2 + 24P_3 = 21P_4 = 9P_5. \tag{38}$$

Ἀφοῦ ἐπιθυμοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἕτερον ἄκρον σημεῖον, καὶ ἀφοῦ δὲν δύνανται νὰ ὑπάρξουν πλείονα τῶν τριῶν ἐκ τῶν πέντε διανυσμάτων ἔχοντα θετικοὺς συντελεστάς, πρέπει νὰ ἐξαιρέσωμεν τοῦ συνδυασμοῦ ἓν τῶν διανυσμάτων P_3, P_4, P_5 (ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι θὰ ἔχῃ συντελεστὴν μηδὲν) ἂν πρέπει νὰ δώσωμεν συντελεστὴν διάφορον τοῦ μηδενὸς εἰς ἓν τῶν διανυσμάτων P_1, P_2. Δίδοντες θετικὸν συντελεστὴν εἰς ἓν ἢ ἀμφότερα τὰ P_1, P_2, δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τὴν $\varphi(\chi_1, \chi_2)$ μεγαλυτέραν ἢ εἶναι αὕτη ἐκ τῆς ἀνωτέρω λύσεως. Ἂς ἐκλέξωμεν τὸ

P_1 ὡς τὸ διάνυσμα ποὺ θὰ λάβῃ τὸν μὴ μηδενικὸν συντελεστὴν (δυνάμεθα ὁμοίως νὰ ἐκλέξωμεν καὶ τὸ P_2 ὡς τὸ ἀρχικὸν διάνυσμα). Τότε τὰ P_3, P_4, ἢ P_5, πρέπει νὰ λάβουν συντελεστὴν μηδέν. Παρατηροῦμεν κατ᾿ ἀρχὰς ὅτι τὸ P_1 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν P_3, P_4, P_5, ἀφοῦ τὰ τελευταῖα διανύσματα εἶναι βάσις διὰ τὸν τρισδιάστατον χῶρον. Περαιτέρω, ἡ ἀντιπροσώπευσις τοῦ P_1 μέσῳ τῶν P_3, P_4, P_5 εἶναι μοναδική, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ κεφάλαιον 1. Ἀφοῦ $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, ἔχομεν

$$P_1 = 1P_3 + 3P_4 + 1P_5 .$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ σκέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ $\tau > 0$, λαμβάνομεν

$$\tau P_1 = \tau P_3 + 3\tau P_4 + \tau P_5 . \tag{39}$$

Αὐτὸ ἰσχύει διὰ πᾶν τ, περιορίζομεν ὅμως τὸ τ νὰ εἶναι θετικὸν διότι ἐπιθυμοῦμεν τὸ διάνυσμα P_1 νὰ ἔχῃ θετικὸν συντελεστήν. Προσθέτομεν τώρα τP_1 εἰς τὸ δεύτερον σκέλος τῆς (38), καὶ πρὸς διατήρησιν τῆς ἰσότητος ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον σκέλος τῆς (39) ἀπὸ τὸ δεύτερον σκέλος τῆς (38),

$$P_0 = 0P_1 + 0P_2 + 24P_3 + 21P_4 + 9P_5 + \tau P_1 - \tau P_3 - 3\tau P_4 \ \tau P_5 .$$

Αὕτη γίνεται

$$P_0 = \tau P_1 + 0P_2 + (24 - \tau)\, P_3 + (21 - 3\tau)P_4 + (9 - \tau)P_5 . \tag{40}$$

Ἐπιθυμοῦμεν τὸ τ νὰ εἶναι τὸ μεγαλύτερον δυνατόν, ὄχι ὅμως τόσον μέγα ὥστε νὰ ἔχῃ διάνυσμα τι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ἀρνητικὸν συντελεστήν. Ἐξέτασις τῆς ἐξισώσεως θὰ δείξῃ ὅτι $\tau = 7$ εἶναι ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τοῦ τ, διότι ἂν $\tau > 7$, ὁ συντελεστὴς τοῦ P_4 καθίσταται ἀρνητικός. Ἀντικαθιστῶντες $\tau = 7$ εἰς τὴν (40) λαμβάνομεν

$$P_0 = 7P_1 + 0P_2 + 17P_3 + 0P_4 + 2P_5 . \tag{41}$$

Τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον εἰς τὸ σύνολον λύσεων εἶναι $(7, 0, 17, 0, 2)$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου δυνατῶν λύσεων εἰς χῶρον πέντε διαστάσεων. Διὰ τὴν λύσιν ταύτην,

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\chi_1 + 5\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5 , \\ \varphi &= 2(7) + 5(0) = 14 , \end{aligned} \tag{42}$$

ὅπερ δηλοῖ ὅτι ἡ τιμὴ τῆς φ ἐβελτιώθη ὡς πρὸς τὴν προηγηθεῖσαν λύσιν, καὶ ὑπὸ τὴν ἀντιστοιχίαν $(7, 0, 17, 0, 2) \rightarrow (7, 0, 0, 0, 0) \rightarrow (7, 0)$, λαμβάνομεν ἄκρον σημεῖον τοῦ κυρτοῦ συνόλου Σ εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον (ἴδε σχ. 10). Σημειώσατε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία $(7, 0, 17, 0, 2) \rightarrow (7, 0, 0, 0, 0)$ ἐγκαθίσταται ὑπὸ τῶν μηδενικῶν συντελεστῶν τῶν χαλαρῶν μεταβλητῶν εἰς (42).

Ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον ἐκ νέου, δίδοντες τώρα μὴ μηδενικὸν συντελεστὴν εἰς τὸ P_2. Πρῶτον ἐκφράζομεν τὸ P_2 ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων τῶν ἐχόντων συντελεστὰς διαφόρους τοῦ μηδενὸς εἰς (41). Τὰ διανύσματα ταῦτα ἀποτελοῦν βάσιν διὰ τρισδιάστατον χῶρον, καὶ ἐκ τῆς λύσεως καταλλήλου συστήματος ταυτοχρόνων γραμμικῶν ἐξισώσεων, λαμβάνομεν

$$P_2 = 1/3P_1 + 11/3P_3 + 2/3P_5 \,.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ σκέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ $\varkappa > 0$ καὶ ἐπαναλαμβάνοντες τὴν ἀνωτέρω μέθοδον, λαμβάνομεν

$$(43) \quad P_0 = (7 - 1/3\varkappa)P_1 + \varkappa P_2 + (17 - 11/3\varkappa)P_3 + 0P_4 + (2 - 2/3\varkappa)P_5 \,.$$

Ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ $\varkappa$ ἂν ὅλοι οἱ συντελεσταὶ εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ εἶναι 3. Ἀντικαθιστῶντες $\varkappa = 3$ εἰς τὴν (43) ἔχομεν

$$(44) \qquad P_0 = 6P_1 + 3P_2 + 6P_3 + 0P_4 + 0P_5 \,.$$

Τὸ σημεῖον εἰς τὸν χῶρον λύσεων εἶναι (6, 3, 6, 0, 0) δίδον τὸ σημεῖον (6,3) εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ ἄκρον σημεῖον τὸ παρακείμενον τοῦ κατὰ τὸ προηγούμενον στάδιον ληφθέντος ἄκρου σημείου (ἴδε σχ. 10), καὶ δι' αὐτὸ ἔχομεν

$$\varphi = 2(6) + 5(3) = 27$$

ὁποία εἶναι ἔτι μεγαλυτέρα τιμὴ διὰ τὴν φ.

Πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ παραδείγματος ἐπαναλαμβάνομεν τὴν διαδικασίαν. Ἐπιθυμοῦμεν νὰ αὐξήσωμεν τὸν συντελεστὴν ἑνὸς τῶν διανυσμάτων P_1, P_2, οὕτω θὰ δώσωμεν εἰς ἓν τῶν διανυσμάτων P_4, P_5 μὴ μηδενικὸν συντελεστήν. Ἐκλέγομεν τὸ P_4 καὶ ἐκφράζομεν αὐτὸ ὡς συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων εἰς τὴν (44) τὰ ὁποῖα ἔχουν συντελεστὰς διαφόρους τοῦ μηδενός, δηλαδὴ τῶν P_1, P_2 καὶ P_3. Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι

$$P_4 = 1/2P_1 - 1/2P_2 + 3/2P_3 \,.$$

Ἂν $\alpha > 0$, τότε

$$\alpha P_4 = 1/2\alpha P_1 - 1/2\alpha P_2 + 3/2\alpha P_3 \,.$$

Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὴν (44), λαμβάνομεν τελικῶς,

$$P_0 = (6 - 1/2\alpha)P_1 + (3 + 1/2\alpha)P_2 + (6 - 3/2\alpha)P_3 + \alpha P_4 + 0P_5 \,.$$

Ἡ μεγίστη ἐπιτρεπτὴ τιμὴ διὰ τὸ α εἶναι 4. Ἀντικαθιστῶντες,

$$P_0 = 4P_1 + 5P_2 + 0P_3 + 4P_4 + 0P_5 \,.$$

Τὸ εἰς τὸν χῶρον λύσεων ἀντιστοιχοῦν σημεῖον εἶναι (4, 5, 0, 4, 0). Ἡ γραμμικὴ συνάρτησις προβάλλει τοῦτο ἐπὶ τοῦ σημείου (4, 5, 0, 0, 0) καὶ ἔχομεν

$$\varphi = 2(4) + 5(5) + 0\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5 = 33 \,.$$

Ἐπιστρέφοντες εἰς τὸ σχ. 10 βλέπομεν ὅτι αὕτη εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ διὰ φ καὶ βλέπομεν ἐπίσης ὅτι ἡ μέθοδός μας λύσεως ἤρχισε μὲ ἓν ἄκρον σημεῖον καὶ μετεκινήθη εἰς παρακείμενον ἄκρον σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔδωκεν εἰς τὴν φ τὴν αὐτὴν τουλάχιστον τιμήν.

Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι κατ' οὐσίαν ἐκείνη τῆς μεθόδου simplex διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἡ μέθοδος simplex εἶναι ἐξευγενισμένη τεχνικὴ διενεργείας τῶν χειρισμῶν αὐτῶν καὶ θὰ ἐξετασθῇ λεπτομερῶς εἰς ἑπόμενα κεφάλαια.

Οὕτω, συμπληρώνεται ἡ ἐξέτασίς μας τῆς γεωμετρίας τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἐν κατακλεῖδι πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ὑπάρχουν **τρεῖς** χῶροι σχέσιν ἔχοντες πρὸς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Πρῶτον, ὁ χῶρος εἰς τὸν ὁποῖον ἡ τομὴ τῶν ἀνισοτήτων εἰς τὴν ἀρχικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ὁρίζει κυρτὸν σύνολον. Καλούμενος ὁ ἀρχικὸς χῶρος, ἦτο οὗτος δισδιάστατος εἰς τὸ παράδειγμά μας. Κατόπιν, μετὰ τὴν εἴσοδον τῶν καταλλήλων χαλαρῶν μεταβλητῶν, ἔχομεν τὸν χῶρον λύσεων (χῶρον πέντε διαστάσεων εἰς τὸ παράδειγμά μας). Μετ' αὐτὸν ὁ χῶρος ἀπαιτήσεων εἶναι ὁ περιέχων τὰ διανύσματα—στήλας τῶν σταθερῶν ὅρων (τρισδιάστατος εἰς τὸ παράδειγμα). Σημειώσατε ὅτι παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ χῶροι λύσεων καὶ ἀπαιτήσεων δύνανται νὰ εἶναι τῆς αὐτῆς διαστάσεως, πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωνται ὡς ξεχωριστοὶ χῶροι κατὰ τὴν μελέτην προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.

Πρέπει ὁμοίως νὰ σημειωθῇ ἓν σπουδαῖον χαρακτηριστικὸν τῆς ἀρίστης λύσεως. Ἡ ἀρίστη λύσις εἶναι τὸ σημεῖον (4, 5, 0, 4, 0), ἔνθα ἓν χαλαρὸν διάνυσμα, τὸ P_4, ἔχει συντελεστὴν διάφορον τοῦ μηδενός. Τοῦτο δὲν δημιουργεῖ περιπλοκάς, διότι ἡ μορφὴ τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ὑπὸ μορφὴν γραμμικῆς ἐξισώσεως,

$$\varphi = 4\chi_1 + 5\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5$$

διαβεβαιοῖ ὅτι τὸ εἰς τὸν πέντε διαστάσεων χῶρον σημεῖον θὰ προβληθῇ ἐπὶ τοῦ σημείου (4, 5, 0, 0, 0). Συσχετίζοντες περαιτέρω (4, 5, 0, 0, 0) $\rightarrow$ (4, 5) λαμβάνομεν τὸ σημεῖον εἰς τὸ σχ. 10 τὸ ὁποῖον, ὡς εἴδομεν γραφικῶς ἐπέφερε τὴν ἀρίστην λύσιν εἰς τὴν ἀρχικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος.

Λύσις προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ

Ἀφοῦ ἡ συνάρτησις, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν εἶναι γραμμικὴ καὶ ἀφοῦ τὸ σύνολον τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων εἶναι κυρτόν, πρέπει νὰ κατανοηθῇ ὅτι ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς φ, ἂν ὑπάρχῃ, πρέπει νὰ ληφθῇ ὡς ἓν τουλάχιστον ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου λύσεων. Ἡ μέθοδος Simplex, ἀναπτυχθεῖσα ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ George Dantzig, εἶναι ἐπαρκὴς ἀλγόριθμος ἢ σύνολον διαδικασιῶν πρὸς εὕρεσιν ἄκρων σημείων, οὕτω θὰ ἐξετάσωμεν κατὰ πρῶτον θεωρήματα τινά, τὰ ὁποῖα θὰ ἐξυπηρετήσουν εἰς τὸν χαρακτηρισμὸν ἄκρων σημείων εἰς τὸν χῶρον λύσεων.

Εἴδομεν ὅτι ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ περιέχον ἀνισότητας δύναται νὰ μετατραπῇ διὰ τῆς χρήσεως χαλαρῶν μεταβλητῶν εἰς πρόβλημα περιέχον γραμμικάς ἐξισώσεις εἰς μεταβλητὰς μὴ ἀρνητικάς. Διατυπώνομεν ἐνταῦθα ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ μετατραπὲν οὕτω καὶ εἰς τὰ θεωρήματα τοῦ κεφαλαίου τούτου θὰ ἀντιλαμβανώμεθα ὅτι ἀναφερόμεθα εἰς τὸ πρόβλημα τῆς ἑξῆς μορφῆς:

Νὰ μεγιστοποιηθῇ $\varphi = \gamma_1 \chi_1 + \ldots + \gamma_\nu \chi_\nu$

ὑποκειμένη εἰς

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11}\chi_1 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu = \beta_1\\
&\alpha_{21}\chi_1 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu = \beta_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{\mu 1}\chi_1 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}\chi_\nu = \beta_\mu
\end{aligned}
\tag{45}
$$

$$\chi_j \geqq 0 \quad (j = 1, \ldots, \nu), \tag{46}$$

ἔνθα α_{ij}, β_i, γ_j εἶναι γνωσταὶ σταθεραὶ καὶ $\mu < \nu$. Δι' ἔμφασιν ἐπαναγράφομεν τοὺς περιορισμοὺς (45) ὑπὸ μορφὴν διανυσμάτων

$$\chi_1 P_1 + \ldots + \chi_\nu P_\nu = P_0, \tag{47}$$

ἔνθα

$$P_j = \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu j} \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad P_0 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\mu \end{bmatrix}.$$

Γίνεται ἐπίσης ἡ ἀκόλουθος ὑπόθεσις (καλουμένη ***μὴ ἐκφυλισμένη ὑπόθεσις***): τὸ διάνυσμα P_0 εἰς τὴν (47) δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς ὀλιγωτέρων τῶν ρ γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων P_j, ἔνθα ρ ὁ βαθμὸς τῆς μήτρας εἰς (45).

Θεώρημα 1. Ἂν ὑπάρχουν ρ γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα $P_1, \ldots P_\rho$ (εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων) τοιαῦτα ὥστε

$$\chi_1 P_1 + \chi_2 P_2 + \cdots + \chi_\rho P_\rho = P_0,$$

τότε τὸ σημεῖον

$$X = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\rho \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

εἰς τὸν χῶρον λύσεων ἔχον ρ θετικὰς συντεταγμένας καὶ ν — ρ μηδενικὰς συντεταγμένας εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου δυνατῶν λύσεων Σ τοῦ προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ X δὲν εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ Σ. Τότε εἶναι κυρτὸς συνδυασμὸς δύο ἄλλων σημείων τοῦ Σ, ἂς εἴπωμεν τῶν X_1 καὶ X_2, διαφόρων ἀλλήλων,

$$X = \varkappa X_1 + (1-\varkappa)X_2, \qquad 0 \leqslant \varkappa \leqslant 1 .$$

Αἱ συντεταγμέναι τῶν X_1 καὶ X_2 εἶναι μὴ ἀρνητικαὶ ὡς εἶναι καὶ τὰ μονόμετρα κ καὶ (1—κ) καὶ ἀφοῦ αἱ τελευταῖαι ν—ρ συντεταγμέναι τοῦ X εἶναι μηδέν, μηδὲν εἶναι αὗται καὶ διὰ X_1 καὶ X_2,

$$X_1 = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\rho, 0, \cdots, 0)',$$
$$X_2 = (\beta_1, \cdots, \beta_\rho, 0, \cdots, 0)'.$$

Ἀφοῦ αὗται εἶναι δυναταὶ λύσεις καὶ τῆς (45) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$AX_1 = B$$
$$AX_2 = B ,$$

ἔνθα A ἡ $\mu \times \nu$ μήτρα καὶ B δηλοῖ τὸ διάνυσμα—στήλη τῶν σταθερῶν ὅρων, ἀντιστοίχως, εἰς (45) Αἱ ἐξισώσεις αὗται μητρῶν δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς ἐξισώσεις διανυσμάτων ὡς ἑξῆς,

$$\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_\rho P_\rho = P_0$$
$$\beta_1 P_1 + \cdots + \beta_\rho P_\rho = P_0 .$$

Ἂν ἀφαιρεθῇ ἡ δευτέρα ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν

$$(\alpha_1 - \beta_1)P_1 + \cdots + (\alpha_\rho - \beta_\rho)P_\rho = 0 .$$

Τὰ $P_1, \cdots, P_\rho$ ὅμως εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, οὕτω δι' ἕκαστον j, $\alpha_j - \beta_j = 0$, ἤτοι, $\alpha_j = \beta_j$ διὰ $j = 1, \cdots, \rho$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον διότι ἀρχικῶς ἐλάβομεν ὅτι τὰ X_1 καὶ X_2 εἶναι σημεῖα τοῦ Σ διάφορα ἀλλήλων. Ἑπομένως τὸ X πρέπει νὰ εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ Σ.

Θεώρημα 2. Ἂν $X = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\rho \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$ εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ Σ, τότε τὰ διανύσματα P_i εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων τὰ σχετιζόμενα μὲ $\chi_i > 0$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν θετικοὶ οἱ πρῶτοι ρ συντελεσταί. Τότε

$$\chi_1 P_1 + \cdots + \chi_\rho P_\rho = P_0 \qquad \chi_i > 0,\ i = 1, \cdots, \rho. \tag{48}$$

Ἂς λάβωμεν τώρα τὰ διανύσματα $P_1, \cdots, P_\rho$ ἐξηρτημένα. Τότε ὑπάρχουν ἀριθμοὶ ψ_i ὄχι ἅπαντες μηδὲν ὥστε

$$\psi_1 P_1 + \cdots + \psi_\rho P_\rho = 0.$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἐπὶ $\tau > 0$, προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν (48) καὶ λαμβάνομεν τὰ διανύσματα

$$X_1 = (\chi_1 + \tau\psi_1)P_1 + \cdots + (\chi_\rho + \tau\psi_\rho)P_\rho$$

$$X_2 = (\chi_1 - \tau\psi_1)P_1 + \cdots + (\chi_\rho - \tau\psi_\rho)P_\rho.$$

Τὰ X_1 καὶ X_2 ἐμφανῶς εἶναι μὴ πραγματοποιήσιμα διανύσματα διά τινας ἐκλογὰς τοῦ τ. Ἀφοῦ ὅμως ἕκαστον χ_i εἶναι αὐστηρῶς θετικόν, δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν τ τοιοῦτον ὥστε $(\chi_i \pm \tau\psi_i) \geqq 0$. Διὰ τοιαύτας ἐκλογὰς τοῦ τ λαμβάνομεν πραγματοποιησίμους λύσεις. Ἔστω τ' μία τοιαύτη λύσις καὶ τὰ προκύπτοντα δυνατὰ διανύσματα

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \chi_1 + \tau'\psi_1 \\ \chi_2 + \tau'\psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\rho + \tau'\psi_\rho \end{bmatrix}, \qquad \Psi_2 = \begin{bmatrix} \chi_1 - \tau'\psi_1 \\ \chi_2 - \tau'\psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\rho + \tau'\psi_\rho \end{bmatrix}.$$

Ἀλλὰ $X = 1/2\Psi_1 + 1/2\Psi_2$, ὅπερ δηλοῖ ὅτι τὸ X δὲν εἶναι ἄκρον σημεῖον, οὕτως ἔχομεν ἄτοπον καὶ τὰ διανύσματα P_i δὲν δύνανται νὰ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα.

Κατὰ τὴν λύσιν προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἑπομένως, πρέπει νὰ ἐξετάζωμεν μόνον ἐκείνους τοὺς μὴ ἀρνητικοὺς γραμμικοὺς συνδυασμοὺς (47) εἰς τοὺς ὁποίους τὰ γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα λαμβάνουν θετικοὺς συντελεστὰς καὶ τὰ μένοντα διανύσματα λαμβάνουν μηδενικοὺς συντελεστάς.

Ὑπάρχει ὅμως ἀνάγκη ἑτέρου ἑνὸς θεωρήματος διὰ τὴν γενικὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου simplex. Ὑποτεθείσθω ὅτι ἔχομεν λύσιν εἰς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχουσαν κ, ἂς εἴπωμεν, θετικὰς συντεταγμένας, ποῦ ἔχομεν $\kappa > \rho$; Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἔχομεν σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ συνόλου λύσεων. Δυνάμεθα νὰ κινηθῶμεν ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εἰς ἓν ἄκρον σημεῖον καὶ ἀρχίσωμεν ἐν συνεχείᾳ τὴν διαδικασίαν λύσεως simplex; Ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο δίδει τὸ θεώρημα 3. Ἂς προηγηθῇ ὅμως εἷς ὁρισμός:

Ἓν διάνυσμα λύσεως X τοῦ ὁποίου οἱ θετικοὶ συντελεσταὶ σχετίζονται μὲ γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα εἰς τὸν χῶρον τῶν ἀπαιτήσεων καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ἀπομένοντες συντελεσταὶ εἶναι μηδὲν καλεῖται ***βασικὴ λύσις*** (basic solution).

Θεώρημα 3. Ἂν ἡ (47) ἔχῃ δυνατὴν λύσιν, τότε ἔχει βασικὴν λύσιν.

Ἀπόδειξις. Ἂς λάβωμεν τὰ $P_1, \ldots, P_\kappa$ ἐξηρτημένα (ἂν δὲν εἶναι, ἤδη ἔχομεν βασικὴν λύσιν). Τότε ὑπάρχουν ἀριθμοὶ ψ_ι ὄχι ἅπαντες μηδενικοὶ τοιοῦτοι ὥστε

$$(49) \qquad \psi_1 P_1 + \cdots + \psi_\kappa P_\kappa = 0.$$

Ὑποτεθείσθω ὅτι $\psi_\iota > 0$ διά τινα ι (ἂν ὄχι, πολλαπλασιάζομεν τὴν (49) ἐπὶ -1), καὶ ὅτι ἡ δυνατὴ λύσις εἶναι

$$(50) \qquad \chi_1 P_1 + \cdots + \chi_\kappa P_\kappa = P_0.$$

Τώρα ἄς ἐκλέξωμεν ἀριθμὸν θ, ἔνθα

$$\theta = \text{μέγιστον}_{\iota} \frac{\psi_\iota}{\chi_\iota} = \frac{\psi_\pi}{\chi_\pi}$$

διά τινα ὡρισμένον ἀκέραιον π. Ἀφοῦ $\psi_\iota > 0$, $\chi_\iota > 0$, ἔχομεν $\theta > 0$. Πολλαπλασιάζομεν τὴν (49) ἐπὶ $1/\theta$ καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ ἀποτέλεσμα ἐκ τῆς (50),

$$(51) \qquad \left(\chi_1 - \frac{\psi_1}{\theta}\right) P_1 + \cdots + \left(\chi_\kappa - \frac{\psi_\kappa}{\theta}\right) P_\kappa = P_0.$$

Οὕτως ἔχομεν πραγματοποιήσιμον λύσιν, διότι ἐκ κατασκευῆς

$$\theta \geqslant \frac{\psi_\iota}{\chi_\iota}$$

ἢ

$$\chi_\iota - \frac{\psi_\iota}{\theta} \geqslant 0.$$

Διὰ τὸν π ιοστὸν συντελεστὴν εἰς (51) ἔχομεν ἐπίσης

$$\chi_\pi - \frac{\psi_\pi}{\theta} = \chi_\pi - \frac{\psi_\pi}{\frac{\psi_\pi}{\chi_\pi}} = \chi_\pi - \chi_\pi = 0.$$

Οὕτως ἔχομεν εἰς τὴν (51) τὸ P_0 ἐκφραζόμενον ὡς μὴ ἀρνητικὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν $\kappa - 1$ διανυσμάτων. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν διαδικασίαν ταύτην μέχρις ὅτου λάβωμεν βασικὴν λύσιν.

Ἐπιστρέφοντες τώρα εἰς τὴν μέθοδον simplex, παρατηροῦμεν ὅτι πρωταρχικῶς συνίσταται ἐκ συνόλου πράξεων, αἱ ὁποῖαι θὰ μετακινήσουν τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν ἐξ ἑνὸς ἄκρου σημείου τοῦ κυρτοῦ συνόλου τῶν δυνατῶν λύσεων εἰς ἓν παρακείμενον ἄκρον σημεῖον, τὸ ὁποῖον δίδει εἰς τὴν φ τιμὴν τουλάχιστον τὴν αὐτήν. Ἂν ὑπάρχουν ἄρισται λύσεις καὶ ἂν ἱκανοποιῆται ἡ μὴ ἐκφυλισμένη ὑπόθεσις, ἡ διαδικασία θὰ μετακινήσῃ τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν εἰς ἄκρον σημεῖον πλέον ἀπομεμακρυσμένον τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων (ἢ εἰς ἄκρον σημεῖον πλησιέστερον πρὸς τὴν ἀρχὴν εἰς τὰ προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως), καὶ τὸ ἄκρον τοῦτο σημεῖον θὰ δώσῃ τιμὴν διὰ τὴν φ μεγίστην (ἢ ἐλαχίστην).

Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ μέθοδος θὰ διασαφισθῇ δι' ἑνὸς ἁπλοῦ προβλήματος τοῦ ὁποίου ἡ ἀρίστη λύσις εἶναι ἐμφανὴς ἐκ τῆς καταλλήλου γεωμετρίας εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον, τὸ μέγιστον μέρος τῆς χρησιμοποιηθησομένης τεχνικῆς κατὰ τὴν λύσιν μακροσκελεστέρων προβλημάτων δύναται νὰ παρουσιασθῇ εἰς τὸ ἁπλοῦν τοῦτο σχῆμα καὶ ἀπαιτοῦνται δύο μόνον ἐπαναλήψεις τῆς μεθόδου πρὸς ἐπίτευξιν ἀρίστης λύσεως εἰς τὸ πρόβλημα.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς $\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2$ ὑποκειμένης εἰς

$$\begin{aligned} \chi_1 &\leqq 4 \\ \chi_2 &\leqq 6 \\ \chi_1 + \chi_2 &\leqq 8 \\ \chi_\iota &\geqq 0 \qquad (\iota = 1,2) \end{aligned}$$

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς χαλαρῶν μεταβλητῶν λαμβάνομεν τὸ σύστημα ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_3 &= 4 \\ \chi_2 + \chi_4 &= 6 \\ \chi_1 + \chi_2 + \chi_5 &= 8, \end{aligned}$$

τὸ ὁποῖον δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν ἐξισώσεως διανυσμάτων,

$$\underset{P_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \chi_1 + \underset{P_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \chi_2 + \underset{P_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \chi_3 + \underset{P_4}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \chi_4 + \underset{P_5}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \chi_5 = \underset{P_0}{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}}.$$

Τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι τότε ἡ μεγιστοποίησις τῆς

$$\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5 \tag{52}$$

ὑποκειμένης εἰς

$$\begin{aligned} P_1\chi_1 + P_2\chi_2 + P_3\chi_3 + P_4\chi_4 + P_5\chi_5 &= P_0, \\ \chi_\iota \geqq 0 \qquad (\iota &= 1,\cdots,5). \end{aligned} \tag{53}$$

Θεωρήσατε τὸν πίνακα simplex τῆς ἑπομένης σελίδος. Τὰ διανύσματα $P_1, \cdots, P_5$, καὶ P_0 ἐμφανίζονται εἰς τὸ πρῶτον στάδιον, ἡ σειρὰ ὅμως ἐμφανίσεώς των ἔχει ἀλλάξει. Πρῶτον ἐμφανίζεται τὸ P_0 ἀκολουθούμενον ἀπὸ τὰ διανύσματα βάσεως P_3, P_4, P_5. Τότε εἰσέρχονται τὰ ἐκτὸς βάσεως διανύσματα P_1 καὶ P_2. Αἱ τιμαὶ γ_j εἰς τὴν πρώτην σειρὰν τοῦ πίνακος εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν μεταβλητῶν εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν (52) τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν. Τὸ ζ_j εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τοῦ διανύσματος εἰς τὴν γ_j στήλην εἰς τ' ἀριστερὰ τοῦ πίνακος ἐπὶ τὸ j διάνυσμα ἐντὸς τοῦ πίνακος. Οὕτω, τὸ ζ_0, τὸ στοιχεῖον εἰς τὴν ζ_j σειρὰν διὰ τὴν στήλην τῶν P_0 εἶναι $0\,4 + 0.6 + 0.\,8 = 0$.

Ἀφοῦ εἰς τὸ πρῶτον στάδιον τὸ διάνυσμα εἰς τὴν στήλην τῶν γ_j εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα, ἡ σειρὰ τῶν ζ_j ἀποτελεῖται ἀπὸ μηδενικὰ καὶ μόνον. Ἐπίσης, τὰ στοιχεῖα εἰς τὸ πρῶτον στάδιον τοῦ πίνακος, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὴν τομὴν τῆς σειρᾶς τῶν P_i καὶ τῆς στήλης τῶν P_j θὰ δηλοῦνται α_{ij}. Π.χ. τὸ α_{30} δηλοῖ τὸν ἀριθμὸν **4** ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὴν τομὴν τῆς σειρᾶς τῶν P_3 καὶ τῆς στήλης τῶν P_0 καὶ α_{51} δηλοῖ τὸν ἀριθμὸν 1 κείμενον εἰς τὴν τομὴν τῆς σειρᾶς τῶν P_5 καὶ τῆς στήλης τῶν P_1.

Πίναξ Simplex

γ_j		0	0	0	0	2	5
	Διάνυσμα	P_0	P_3	P_4	P_5	P_1	P_2
0	P_3	4	1	0	0	1	0
$0 \leftarrow$	P_4	6	0	1	0	0	1
0	P_5	8	0	0	1	1	1
ζ_j		0	0	0	0	0	0
$\zeta_j - \gamma_j$		0	0	0	0	-2	-5
0	P_3	4	1	0	0	1	0
$5 \rightarrow$	P_2	6	0	1	0	0	1
$0 \leftarrow$	P_5	2	0	-1	1	1	0
ζ_j		30	0	5	0	0	5
$\zeta_j - \gamma_j$		30	0	5	0	-2	0
0	P_3	2	1	1	-1	0	0
5	P_2	6	0	1	0	0	1
$2 \rightarrow$	P_1	2	0	-1	1	1	0
ζ_j		34	0	3	2	2	5
$\zeta_j - \gamma_j$		34	0	3	2	0	0

Ἡ καταγραφὴ καὶ μόνον τῶν διανυσμάτων κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν παρέχει δυνατὴν λύσιν, διότι ὅλα τὰ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ πίνακος ἐμφανιζόμενα διανύσματα ἔχουν ἐκφρασθῆ μέσῳ τῶν εἰς τὴν πλευρὰν ἐμφανιζομένων διανυσμάτων, καὶ τὸ P_0 εἶναι θετικόν. Ἂν $\chi_3 = 4, \chi_4 = 6, \chi_5 = 8$, τότε διὰ νὰ ἱκανοποιηθῇ ἡ (53), τὰ χ_1 καὶ χ_2 πρέπει νὰ εἶναι ἀμφότερα μηδενικά. Ἐκ τούτου, ἡ $(0,0)'$ ἀποτελεῖ λύσιν πραγματοποιήσιμον καὶ ἔχομεν διὰ τὸ σημεῖον αὐτὸ $\varphi = 2(0) + 5(0) + 0 + 0 + 0 = 0$.

Διὰ νὰ ἴδωμεν κατὰ πόσον ἡ λύσις εἶναι ἡ ἀρίστη δυνατή, ἂν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προχωρήσωμεν ἢ ἂν δὲν ὑπάρχῃ πεπερασμένη λύσις, χρησιμοποιοῦμεν τὸν κάτωθι ἔλεγχον:

1. Ἂν ὅλα τὰ $\zeta_j - \gamma_j \geqslant 0$, ἔχομεν λάβει ἀρίστην λύσιν.
2. Ἂν $\zeta_j - \gamma_j < 0$ διὰ τινα στήλην, τότε ἓν τῶν δύο συμβαίνει:

α. ἂν οὐδὲν α_{ij} εἰς τὴν στήλην ταύτην εἶναι θετικόν, ἡ λύσις εἶναι ἄπειρος (ὑπάρχουν ἄπειροι λύσεις)·

β. ἂν $\alpha_{ij} > 0$ διά τινα ι εἰς τὴν στήλην ταύτην, ἀπαιτοῦνται περαιτέρω ἐπαναλήψεις τῆς διαδικασίας.

Ἂν πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν διαδικασίαν, προχωροῦμεν ὡς ἑξῆς. Ἐν διάνυσμα ἐκτὸς τῆς βάσεως θὰ χρησιμοποιηθῇ πρὸς ἀντικατάστασιν διανύσματος βάσεως, οὕτως ἔχομεν διάνυσμα «ἀντικαθιστὸν» (μὲ ὑπόσημον κ) καὶ διάνυσμα «ἀντικαθιστάμενον» (μὲ ὑπόσημον ρ). Τὸ ἀντικαθιστὸν διάνυσμα θὰ εἶναι τὸ διάνυσμα ἐκεῖνο ἐκτὸς βάσεως μὲ τὴν μεγίστην ἀρνητικὴν τιμὴν $\zeta_j - \gamma_j$. Εἰς τὸ πρῶτον στάδιον τοῦ πίνακος, παραδείγματος χάριν, θὰ ἐκλέξωμεν ὡς ἀντικαθιστὸν διάνυσμα τὸ P_2 ἀφοῦ διὰ P_2 ἔχομεν $\zeta_j - \gamma_j = -5$.

Τὸ ἀντικαθιστάμενον διάνυσμα P_ρ ὁρίζεται μέσῳ τοῦ κανόνος.

$$\theta = \text{ἐλάχιστον}\ \frac{\alpha_{\iota o}}{\alpha_{\iota\kappa}},\ \alpha_{\iota\kappa} > 0, \qquad (\iota = 3, 4, 5), \tag{55}$$

ἔνθα τὸ ι ἀναφέρεται εἰς τὰ ὑπόσημα τῶν διανυσμάτων βάσεως εἰς τὸ δοθὲν στάδιον. Τοῦτο μᾶς λέγει νὰ διαιρέσωμεν δι' ἑκάστης τῶν συνιστωσῶν τοῦ ἀντικαθιστῶντος διανύσματος P_2 τὰς ἀντιστοίχους συντεταγμένας τοῦ διανύσματος P_0 (δηλουμένας διὰ $\alpha_{\iota o}$). Τὸ σχετιζόμενον μὲ τὸν μικρότερον λόγον διάνυσμα εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ. Εἰς τὸ πρῶτον στάδιον ἔχομεν διὰ τοὺς τρεῖς λόγους

$$\frac{\alpha_{30}}{\alpha_{32}}\ \text{μὴ ὡρισμένον}\ (\alpha_{32} = 0) \qquad \frac{\alpha_{40}}{\alpha_{42}} = \frac{6}{1} = 6\cdot \qquad \frac{\alpha_{50}}{\alpha_{52}} = \frac{8}{1} = 8.$$

Ἑπομένως τὸ P_4 ἐκλέγεται διὰ ν' ἀντικατασταθῇ (τοῦτο δηλοῦται διὰ βέλους μὲ φορὰν ἔξωθεν τοῦ πίνακος).

Τὸ δεύτερον στάδιον τοῦ πίνακος ἔχει τώρα σχηματισθῆ πρὸς ἀντανάκλασιν τῶν μεταβολῶν αὐτῶν. Γράφομεν πρῶτον εἰς τὴν δευτέραν στήλην τὰ νέα διανύσματα βάσεως P_3, P_2, P_5, καὶ εἰς τὰ ἀριστερὰ ἑκάστου τοποθετοῦμεν εἰς τὴν στήλην τῶν γ_j ἕνα κατάλληλον συντελεστὴν ληφθέντα ἐκ τῆς (52). Προσδιορίζομεν ἐν συνεχείᾳ τὰ στοιχεῖα τὰ εἰσερχόμενα εἰς τὴν ἔναντι σειρὰν τοῦ νέου διανύσματος βάσεως P_2. Ταῦτα λαμβάνονται μέσῳ τῆς ἐκφράσεως

$$\alpha'_{\kappa j} = \frac{\alpha_{\rho j}}{\alpha_{\rho\kappa}}. \tag{56}$$

Ἔχομεν τώρα, $\rho = 4$ καὶ $\kappa = 2$, ἀφοῦ τὸ ἀντικατασταθὲν διάνυσμα ἦτο P_4 καὶ τὸ ἀντικαταστῆσαν P_2. Οὕτως $\alpha_{\rho\kappa} = \alpha_{42} = 1$. Ὁ κανὼν κατόπιν μᾶς λέγει νὰ θέσωμεν ὡς στοιχεῖα εἰς τὴν νέαν σειρὰν τὰ στοιχεῖα τῆς αὐτῆς σειρᾶς τοῦ προηγηθέντος σταδίου διῃρημένα διὰ 1 (εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ κανὼν μόνον δηλοῖ ὅτι πρέπει νὰ θέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης σειρᾶς εἰς τὴν ἔναντι τοῦ P_2 σειρὰν τοῦ δευτέρου σταδίου). Τὰ στοιχεῖα εἰς τὰς μενούσας σειρὰς προσδιορίζονται ὑπὸ τοῦ κανόνος

$$(57) \qquad \alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{\rho j}}{\alpha_{\rho\kappa}}\,\alpha_{i\kappa} = \alpha_{ij} - (\alpha'_{\kappa j})\,(\alpha_{i\kappa})\,.$$

Διὰ παράδειγμα προσδιορίζομεν τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τεθῇ εἰς τὴν τομὴν τῆς σειρᾶς τῶν P_3 καὶ τῆς στήλης τῶν P_0 εἰς τὸ δεύτερον στάδιον. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, $\iota = 3$, $j = 0$, καὶ ἔχομεν ἤδη, $\rho = 4$ καὶ $\kappa = 2$. Ἐκ τούτου, διὰ τὸ στοιχεῖον αὐτὸ ὁ κανὼν δηλοῖ

$$\alpha'_{30} = \alpha_{30} - (\alpha'_{20})\,(\alpha_{32}) = 4 - 6(0) = 4.$$

Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ἑπομένου στοιχείου εἰς τὴν αὐτὴν σειράν, α'_{33}, ὁ κανὼν δηλοῖ, ἀφοῦ $\iota = 3$ καὶ $j = 3$,

$$\alpha'_{33} = \alpha_{33} - (\alpha'_{23})\,(\alpha_{32}) = 1 - (0)\,(0) = 1\,.$$

Τελικῶς, πρὸς προσδιορισμὸν τῶν στοιχείων εἰς τὴν ζ_j σειράν, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον στοιχεῖον εἰς ἑκάστην στήλην ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον εἰς τὴν στήλην τῶν γ_j τοῦ σταδίου τούτου καὶ προσθέτομεν ἐν συνεχείᾳ τὰ γινόμενα (σχηματιζομένου οὕτως ἐσωτερικοῦ γινομένου εἰς ἑκάστην περίπτωσιν). Ἐπὶ παραδείγματι, τὰ στοιχεῖα εἰς τὴν στήλην P_0 τοῦ δευτέρου σταδίου εἶναι 4, 6, 2. Πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον τούτων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα εἰς τὴν στήλην τῶν γ_j καὶ προσθέτοντες κατόπιν, λαμβάνομεν $0.4 + 5.6 + 0.2 = 30$, τὸ πρῶτον στοιχεῖον εἰς τὴν σειρὰν ζ_j.

Συμπληρώνομεν τὰ στοιχεῖα εἰς τὴν σειρὰν $\zeta_j - \gamma_j$ διὰ τὸ δεύτερον στάδιον δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἑκάστου στοιχείου εἰς τὴν σειρὰν ζ_j τοῦ ἀντιστοίχου στοιχείου εἰς τὴν σειρὰν γ_j εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ πίνακος. Παρατηροῦμεν ἐκ νέου ὅτι $\zeta_j - \gamma_j < 0$ διὰ τινα στήλην, οὕτω πρέπει νὰ προβῶμεν εἰς ἑτέραν μίαν ἐπανάληψιν. Ἐπαναλαμβάνομεν τὰς ἀνωτέρω διαδικασίας, ἔνθα τώρα α_{ij} δηλοῖ στοιχεῖον εἰς τὸ δεύτερον στάδιον τοῦ πίνακος καὶ α'_{ij} δηλοῖ στοιχεῖον εἰς τὸ τρίτον στάδιον τοῦ πίνακος.

Εἰς τὸ τρίτον στάδιον τοῦ πίνακος ἕκαστον $\zeta_j - \gamma_j \geqslant 0$, οὕτω διὰ τοῦ κριτηρίου simplex ἔχομεν φθάσει εἰς ἀρίστην λύσιν. Τὸ ἐρώτημα τώρα εἶναι, πῶς ἀναγνωρίζομεν τὴν ἀρίστην λύσιν εἰς τὸν πίνακα; Παρετηρήσαμεν προηγουμένως ὅτι τὰ διανύσματα εἰς τὴν στήλην ὑπὸ τὸν τίτλον «Διάνυσμα» εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ πίνακος ἐκφράζονται μέσῳ τῶν διανυσμάτων εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ πίνακος δι' ἕκαστον στάδιον. Ἐπὶ πλέον, ἡ μέθοδος simplex τοποθετεῖ ἓν ἀνεξάρτητον σύνολον διανυσμάτων εἰς τὴν πλευρὰν ἑκάστου σταδίου, καὶ ἀφοῦ ὁ ἀριθμὸς τῶν τοποθετουμένων διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὰς διαστάσεις τοῦ χώρου ἀπαιτήσεων, ὡς ἔχομεν λάβει, τὰ εἰς τὴν πλευρὰν διανύσματα περικλείουν βάσιν διὰ τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων. Τῷ ὄντι, ἡ μέθοδος simplex διὰ τῶν μετασχηματισμῶν (56) καὶ (57) μετατοπίζει ἐκ μιᾶς βάσεως εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων εἰς ἑτέραν καὶ ἐκ τῶν θεωρημάτων 1 καὶ 2 γνωρίζομεν ὅτι ἑκάστη βάσις θὰ δώσῃ γραμμικοὺς συνδυασμούς, τῶν ὁποίων οἱ συντελεσταὶ μὲ τὴν σειράν των ὁδηγοῦν εἰς ἄκρα σημεῖα τοῦ συνόλου λύσεων εἰς τὸν χῶρον λύσεων. Περαιτέρω, ἡ μέθοδος simplex μᾶς διαβεβαιοῖ ὅτι μετὰ μετατόπισιν τινὰ εἰς τὴν βάσιν ἡ τιμὴ τῆς φ θὰ εἶναι τουλάχιστον τόσον μεγάλη ὅσον ἦτο προηγουμένως.

Πᾶν διάνυσμα εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μόνον ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων βάσεως δι'ἕκαστον στάδιον. Τοῦτο ἰσχύει, εἰδικώτερον, διὰ τὰ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ πίνακος διανύσματα, καὶ τὸ σπουδαῖον σημεῖον εἶναι ὅτι αἱ ἐγγραφαὶ εἰς αὐτὸν τοῦτον τὸν πίνακα παρέχουν τοὺς συντελεστὰς εἰς τοὺς γραμμικοὺς αὐτοὺς συνδυασμούς. Παραδείγματα τινὰ θὰ διασαφίσουν τοῦτο.

Ἄς θεωρήσωμεν τὸ δεύτερον στάδιον τοῦ ἀνωτέρω πίνακος. Ἡ βάσις εἶναι $\{P_3, P_2, P_5\}$ Ὑπὸ τὴν στήλην τῶν P_0 βλέπομεν τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6, 2 ἐμφανιζομένους κάτωθι ἀλλήλων. Αἱ ἐγγραφαὶ αὗται μᾶς λέγουν τίνι τρόπῳ τὸ P_0 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῆς βάσεως,

$$P_0 = 4P_3 + 6P_2 + 2P_5$$

$$P_0 = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Παρομοίως, αἱ ἐγγραφαὶ εἰς τὸ δεύτερον στάδιον ὑπὸ τὴν στήλην τῶν P_4 δεικνύουν τίνι τρόπῳ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ τὸ P_4 μέσῳ τῆς βάσεως ταύτης,

$$P_4 = 0P_3 + P_2 - P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Εἰς τὸ τρίτον στάδιον ἡ βάσις εἶναι τὸ σύνολον $\{P_3, P_2, P_1\}$, καὶ μέσω τῆς βάσεως ταύτης τὸ διάνυσμα P_0 ἐκφράζεται ὡς ἀκολούθως,

$$P_0 = 2P_3 + 6P_2 + 2P_1\,.$$

Παρόμοια σχόλια ἰσχύουν διὰ τὰ διανύσματα $P_1, \cdots, P_5$. Πρέπει νὰ παρατηρηθῇ ἐπίσης ὅτι εἰς ἕκαστον τῶν γραμμικῶν τούτων συνδυασμῶν τὰ ἐκτὸς βάσεως διανύσματα ἐμφανίζονται καὶ αὐτά, ἕκαστον ὅμως ἔχει συντελεστὴν μηδέν. Ἡ ἀμέσως ἀνωτέρω ἐξίσωσις, ἐπὶ παραδείγματι, εἶναι σύντμησις τῆς

$$P_0 = 2P_3 + 6P_2 + 2P_1 + 0P_4 + 0P_5\,.$$

Ὡς συνήθως, ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου δυνατῶν λύσεων εἰς τὸν χῶρον λύσεων, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς διευθετήσεως τῶν ὑποσήμων εἰς τὰ διανύσματα τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ. Οὕτω $\chi_1 = 2$, $\chi_2 = 6$, $\chi_3 = 2$, $\chi_4 = 0$, $\chi_5 = 0$, καὶ τὸ ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου λύσεων εἶναι

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (52) λαμβάνομεν

$$\varphi = 2(2) + 6(5) + 0(2) + 0(0) = 34 .$$

Ἀνακεφαλαιώνοντες λέγομεν ὅτι ἡ ἀρίστη λύσις ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἐγγραφῶν εἰς τὴν στήλην τῶν P_0 εἰς τὸ τελευταῖον στάδιον τοῦ πίνακος, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς σειρᾶς τῶν διανυσμάτων εἰς τὸν κατάλληλον γραμμικὸν συνδυασμὸν καὶ μὲ καταλλήλους μηδενικὰς συντεταγμένας προσηρτημένας καθ' ὃν τρόπον ἀνωτέρω ἐδείχθη.

Περαιτέρω ἀνάλυσις

Εἰς τὸ προηγηθὲν κεφάλαιον, ἑκάστη ἀνισότης εἰς τὴν ἀρχικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος (ἐκτὸς τῶν ὑποθέσεων περὶ μὴ ἀρνητικότητος) ἀπετέλει περιορισμὸν ἔχοντα τὸ σύμβολον $\leqslant$. Τῷ ὄντι τοῦτο δὲν μᾶς περιορίζει διότι δυνάμεθα νὰ λύσωμεν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχον ἀρίστην λύσιν διὰ τῆς μεθόδου simplex καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν οἱ περιορισμοὶ εἶναι μαζὶ (1) περιορισμοὶ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $\leqslant$, (2) ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $\geqslant$, (3) ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $=$. Διὰ τὸν πρῶτον ἐξ αὐτῶν, εἴδομεν ἤδη ὅτι περιορισμὸς τῆς μορφῆς ταύτης δύναται νὰ γίνῃ ἐξίσωσις διὰ τῆς προσθέσεως μιᾶς μὴ ἀρνητικῆς χαλαρᾶς μεταβλητῆς. Διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μετατροπὴ εἰς περιορισμὸν ἐξισώσεως διὰ τῆς χρήσεως ***πλεοναζούσης μεταβλητῆς*** (surplus variable). Π.χ., ἂν ἔχωμεν τὸ σύστημα ἀνισοτήτων

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 &\geqslant 2 \\ 2\chi_1 + \chi_3 &\geqslant 5 \\ \chi_j &\geqslant 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,), \end{aligned}$$

δυνάμεθα νὰ εἰσαγάγωμεν μὴ ἀρνητικὰς πλεοναζούσας μεταβλητὰς χ_4 καὶ χ_5, λαμβάνοντες τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 - \chi_4 &= 2 \\ 2\chi_1 + \chi_3 - \chi_5 &= 5 \\ \chi_j &\geqslant 0 \qquad (j = 1, \cdots, 5) . \end{aligned}$$

Ὡς συμβαίνει καὶ μὲ τὰς χαλαρὰς μεταβλητάς, αἱ πλεονάζουσαι μεταβληταὶ εἰσέρχονται εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν μὲ μηδενικοὺς συντελεστάς.

Ἀφοῦ ἡ περιοριστικὴ ἐξίσωσις δὲν χρειάζεται τροποποίησιν, δυνάμεθα τώρα νὰ μετατρέψωμεν πᾶν σύστημα γραμμικῶν ἀνισοτήτων εἰς ἀντίστοιχον σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων. Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τούτου, ὑποτεθείσθω ὅτι ἐπιθυμοῦμεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν τὴν $\varphi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$ ὑποκειμένην εἰς

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 &\geqslant 2 \\ 2\chi_1 + \chi_3 &\leqslant 5 \\ \chi_2 + 2\chi_3 &= 6 \\ \chi_j &\geqslant 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned}$$

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ γίνεται : νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ

$$\varphi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5$$

ὑποκειμένη εἰς

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 - \chi_4 &= 2 \\ 2\chi_1 + \chi_3 + \chi_5 &= 5 \\ \chi_2 + 2\chi_3 &= 6 \\ \chi_j &\geqslant 0 \qquad (j = 1, \cdots, 5). \end{aligned}$$

Παρετηρήθη ἐπίσης προηγουμένως ὅτι ἡ μεγιστοποίησις τῆς φ εἰς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς —φ, οὕτω δὲν περιοριζόμεθα νὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἢ τὴν μέθοδον simplex πρὸ λύσιν αὐτοῦ εἰς τὰ ὅρια τῆς μεγιστοποιήσεως καὶ μόνον. Δι' αὐτὸν ἀκριβῶς τὸν λόγον ἡ διάκρισις μεταξὺ προβλημάτων μεγιστοποιήσεως καὶ προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως εἶναι κάπως τεχνική. Διὰ πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ σημείου τούτου ὅμως θὰ ἔπρεπε νὰ γίνῃ λεπτομερεστέρα σπουδὴ τῆς ἀλγέβρας τῆς μεθόδου simplex, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν περιέχεται εἰς τὸν ἀντικειμενικὸν σκοπὸν τοῦ βιβλίου τούτου. Συνεπῶς, θὰ θεωρῶμεν ἓν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν ὡς διακεκριμένον καὶ θὰ ἐξετάσωμεν τίνι τρόπῳ αἱ εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἐκτεθεῖσαι διαδικασίαι δύνανται νὰ τροποποιηθοῦν πρὸς λύσιν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπιθυμοῦμεν τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς

$$\xi = \chi_1 - 3\chi_2 + 2\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5 + 0\chi_6$$

ὑποκειμένης εἰς

$$\begin{aligned} 3\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3 + \chi_4 &= 7 \\ -2\chi_1 + 4\chi_2 \qquad + \chi_5 &= 12 \\ -4\chi_1 + 3\chi_2 + 8\chi_3 + \chi_6 &= 10 \\ \chi_j &\geqslant 0 \qquad (j = 1, \cdots, 6) \end{aligned}$$

Ὑπὸ μορφὴν διανυσμάτων οἱ περιορισμοὶ δύνανται νὰ γραφοῦν

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \chi_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \chi_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \chi_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \chi_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \chi_5 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_6 = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ἂς παραστήσωμεν μὲ P_i τὸ διάνυσμα τὸ σχετιζόμενον μὲ τὸ χ_i καὶ ἔστω

$$P_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Τὸ πρῶτον στάδιον τοῦ πίνακος ἐμφανίζεται ὡς ἀκολούθως, ἔνθα πάλιν τοποθετοῦμεν τὰ μοναδιαῖα διανύσματα εὐθὺς μετὰ τὸ P_0.

γ_i			0	0	0	1	−3	2
	Διάνυσμα	P_0	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3
0	P_4	7	1	0	0	3	−1	2
0	P_5	12	0	1	0	−2	4	0
0	P_6	10	0	0	1	−4	3	8
	ζ_j	0	0	0	0	0	0	0
	$\zeta_j - \gamma_j$	0	0	0	0	−1	3	2

Εἰς ἓν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως ἐκλέγομεν τὸ διάνυσμα, τὸ ὁποῖον θὰ εἰσέλθῃ εἰς τὴν βάσιν (τὸ ἀντικαθιστὸν διάνυσμα) συμφώνως πρὸς τὸν κάτωθι κανόνα: τὸ ἀντικαθιστὸν διάνυσμα εἶναι τὸ ἔχον τὴν μεγίστην τιμὴν $\zeta_j - \gamma_j$ διὰ $\zeta_j - \gamma_j > 0$. Τὸ διάνυσμα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ προσδιορίζεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς εἰς τὰ προβλήματα μεγιστοποιήσεως καὶ οἱ μετασχηματισμοὶ (56) καὶ (57) οἱ ἐπιτρέποντες μετακινήσεις ἐξ ἑνὸς σταδίου τοῦ πίνακος εἰς ἕτερον εἶναι ἐπίσης οἱ αὐτοὶ διὰ τὸ πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως. Τελικῶς, ἀκολουθεῖται ὁ κατωτέρω ἔλεγχος διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ἂν μία λύσις εἶναι ἀρίστη. Ἂν ἕκαστον $\zeta_j - \gamma \leqslant 0$, τότε ἔχει ἐπιτευχθῇ ἀρίστη λύσις. Ἀφ' ἑτέρου, ἂν $\zeta_j - \gamma_j > 0$ διά τι διάνυσμα, ὑπάρχουν δύο δυνατότητες. (1) Ἂν εἰς τὸ διάνυσμα διὰ τὸ ὁποῖον $\zeta_j - \gamma_j > 0$, ἔχωμεν ἕκαστον $\alpha_{ij} \leqslant 0$, τότε δὲν ὑπάρχει ἀρίστη λύσις. (2) Ἂν εἰς τὸ διάνυσμα διὰ τὸ ὁποῖον $\zeta_j - \gamma_j > 0$ τουλάχιστον ἓν $\alpha_{ij} > 0$, ἀπαιτοῦνται περαιτέρω ἐπαναλήψεις τῆς διαδικασίας.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, π. χ., ἔχομεν $\zeta_j - \gamma_j > 0$ διά τινα στήλην καὶ εἰς τὴν στήλην ταύτην ἔχομεν κάποιο $\alpha_{ij} > 0$. Τὸ μέγιστον θετικὸν $\zeta_j - \gamma_j$ σχετίζεται μὲ τὸ διάνυσμα P_2, οὕτω τὸ P_2 εἶναι τὸ ἀντικαθιστὸν διάνυσμα διὰ τὸ δεύτερον στάδιον καὶ ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ ἐπαληθεύσῃ ὅτι τὸ P_5 εἶναι τὸ ὑπὸ τοῦ P_2 ἀντικαθιστάμενον διάνυσμα. Ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ ἐπαληθεύσῃ ἐπίσης ὅτι χρειάζεται ἑτέρα ἐπανάληψις τῆς διαδικασίας καὶ ὅτι εἰς τὸ τρίτον στάδιον ἐπιτυγχάνεται ἀρίστη λύσις, ἡ $\chi_1 = 4, \chi_2 = 5, \chi_3 = 11$, μὲ τὸ ἀπομένον $\chi_i = 0$. Ἡ ἐλαχίστη τιμὴ εἶναι

$$\xi = 4 - 3(5) + 2(0) + 0(0) + 0(0) + 0(11) = -11$$

Προσδιορισμὸς ἀρχικῆς βασικῆς λύσεως

Εἰς ὅλα τὰ μέχρι τοῦδε λυθέντα προβλήματα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἡ στήλη - διάνυσμα τῶν σταθερῶν P_0 ἦτο θετικὴ καὶ ἡ εἰσαγωγὴ χαλαρῶν μεταβλητῶν παρῆχε κατάλληλον ἀριθμὸν μοναδιαίων διανυσμάτων οὕτως ὥστε ὁ χῶρος ἀπαιτήσεων ἠδύνατο νὰ ζευχθῇ ὑπ' αὐτῶν καὶ μόνον. Συνεπῶς, ἁπλοῦν ἀπετέλει θέμα ἡ ἔκφρασις τοῦ P_0 μέσῳ τῶν (ἀνεξαρτήτων) αὐτῶν διανυσμάτων καὶ ἡ ἐπίτευξις ἀρχικῆς λύσεως ἄκρου σημείου μὲ τὴν ὁποίαν ἠδύνατο ν' ἀρχίσῃ ἡ μέθοδος simplex. Ἐπὶ παραδείγματι, ἄς θεωρήσωμεν ἓν πρόβλημα προηγουμένως ἐξετασθέν:

νὰ μεγιστοποιηθῇ $\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2$ ὑποκειμένη εἰς τοὺς περιορισμοὺς

$$\begin{aligned} \chi_1 + 4\chi_2 &\leqslant 24 \\ 3\chi_1 + \chi_2 &\leqslant 21 \\ \chi_1 + \chi_2 &\leqslant 9 \\ \chi_j &\geqslant 0 \qquad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν χαλαρῶν μεταβλητῶν οἱ περιορισμοὶ δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_1 + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \chi_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \chi_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_5 = \begin{bmatrix} 24 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Τρία μοναδιαῖα διανύσματα ἐμφανίζονται τώρα εἰς τὸ ἀριστερὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως, οὕτω διὰ θεωρήσεως δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἓν ἀρχικὸν ἄκρον σημεῖον: $\chi_1 = 0, \chi_2 = 0, \chi_3 = 24, \chi_4 = 21, \chi_5 = 9$. Τοῦτο δύναται νὰ φανῇ κατ' ἄλλον τρόπον, ἂν γράψωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὑπὸ μορφὴν μήτρας,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ \chi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix},$$

εἰς τὴν ὁποίαν τὰ μοναδιαῖα διανύσματα ἐμφανίζονται ὡς ταυτοτικὴ ὑπομήτρα καταλλήλου τάξεως εἰς τὴν μήτραν τῶν περιορισμῶν.

Εἰς τὴν πραγματικότητα, ἡ μέθοδος αὕτη προσδιορισμοῦ ἀρχικοῦ ἄκρου σημείου δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὁποτεδήποτε ἡ μήτρα περιορισμῶν περιέχῃ ταυτοτικὴν ὑπομήτραν καταλλήλου τάξεως, καὶ δὲν ἐξαρτᾶται κατ' ἀνάγκην ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς χαλαρῶν μεταβλητῶν. Ὁπωσδήποτε, δυνάμεθα νὰ συναντήσωμεν προβλήματα μὴ ἔχοντα ταυτοτικὴν ὑπομήτραν ὡς τμῆμα τῆς μήτρας περιορισμῶν, ἀκόμη καὶ ὅταν ἔχῃ εἰσαχθῇ κατάλληλος ἀριθμὸς χαλαρῶν ἢ πλεοναζουσῶν μεταβλητῶν. Ὁ προσδιορισμὸς ἀρχικῆς λύσεως εἰς ἄκρον σημεῖον εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς δὲν εἶναι συνήθως εὐχερής. Εἰσάγομεν τώρα γενικὴν μέθοδον διὰ τὴν λύσιν τοιούτων προβλημάτων. Ὑποτεθείσθω ὅτι θέλομεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν τὴν $\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2$ ὑποκειμένην εἰς τοὺς περιορισμοὺς

$$(58) \qquad \begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 &\geqslant 9 \\ 3\chi_1 + \chi_2 &\geqslant 21 \\ \chi_1 + 4\chi_2 &\leqslant 24 \\ \chi_i &\geqslant 0 \qquad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

Εἰσάγοντες πλεονάζούσας μεταβλητὰς εἰς τὰς πρώτην καὶ δευτέραν ἀνισότητας καὶ χαλαρὸν διάνυσμα εἰς τὴν τρίτην λαμβάνομεν τὸ κάτωθι πρόβλημα: νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ

$$\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 \qquad \text{ὑποκειμένη εἰς}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ \chi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\chi_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, \cdots, 5)$$

Ἡ μήτρα περιορισμῶν A δὲν περιέχει ταυτοτικὴν ὑπομήτραν καταλλήλου τάξεως. Ἀλλάσσομεν τώρα τὸ πρόβλημα ἐπισυνάπτοντες εἰς τὰ διανύσματα — στήλας τῆς A ἐπαρκῆ ἀριθμὸν μοναδιαίων διανυσμάτων λαμβάνοντες οὕτω μήτραν B ἔχουσαν ταυτοτικὴν ὑπομήτραν καταλλήλου τάξεως. Ἐπίσης ἕκαστον τῶν οὕτω συναπτομένων διανυσμάτων καλεῖται *τεχνητὸν* διάνυσμα καὶ εἰσάγομεν μίαν ἀντίστοιχον μεταβλητὴν χ_i, καλουμένην *τεχνητὴν* μεταβλητήν. Τὸ ἀποτέλεσμα ἔχει ὡς ἑξῆς,

(59)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ \chi_5 \\ \chi_6 \\ \chi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\chi_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, \cdots, 6)$$

ἔνθα χ_5 καὶ χ_6 εἶναι τεχνηταὶ μεταβληταί, χ_3 καὶ χ_4 εἶναι πλεονάζουσαι μεταβληταί, καὶ χ_7 εἶναι χαλαρὰ μεταβλητή.

Εὐχερῶς τώρα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν βασικὴν λύσιν εἰς τὸ νέον πρόβλημα. Μολονότι ἡ λύσις αὕτη δὲν εἶναι πραγματοποιήσιμος εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα, δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν τὴν διαδικασίαν simplex μὲ αὐτὴν καὶ νὰ φθάσωμεν εἰς βάσιν ἀποτελουμένην ἐκ διανυσμάτων — στηλῶν τῆς B μὴ περιέχουσαν τεχνητὰ διανύσματα. Ἀφοῦ τοιαύτη βάσις θ' ἀποτελῆται ἐπίσης ἐκ διανυσμάτων — στηλῶν τῆς μήτρας A, θὰ ἔχωμεν τότε λύσιν εἰς ἄκρον σημεῖον εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα. Ἐν ἄλλοις λόγοις, χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον simplex διὰ νὰ ὁδηγήσωμεν τὰς τιμὰς τῶν τεχνητῶν μεταβλητῶν εἰς τὸ μηδέν. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ἂν δώσωμεν μίαν τῶν κάτωθι ἑρμηνειῶν εἰς τὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ γ_i ἑκάστης τεχνητῆς μεταβλητῆς χ_i εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν. Ἂν θέλωμεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν τὴν φ, ἔστω $\gamma_i = -M$, ἔνθα M εἷς αὐθαιρέτως μέγας θετικὸς ἀριθμὸς (τὸ M λαμβάνεται τοσοῦτον μέγα ὥστε ὁ συντελεστὴς πάσης μὴ τεχνητῆς μεταβλητῆς εἶναι ἀμελητέος ἐν συγκρίσει πρὸς αὐτόν). Ἂν θέλωμεν νὰ ἐλαχιστοποιήσωμεν τὴν φ, ἔστω $\gamma_i = M$, διὰ M ὡς ἀνωτέρω. Τοῦτο ἔχει τὸ ἀποτέλεσμα τῆς παροχῆς συντελεστῶν εἰς τὰς τεχνητὰς μεταβλητὰς τοσοῦτον δυσμενῶν, ὥστε ἡ τιμὴ τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως δύναται πάντοτε νὰ βελτιωθῇ ἐνόσῳ παραμένῃ εἰς βάσιν μοναδιαῖον διάνυσμα.

Πρὸς ἀνακεφαλαίωσιν: ἂν διὰ θεωρήσεως δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀρχικὴν λύσιν εἰς ἄκρον σημεῖον, εἰσάγομεν τεχνητὰς μεταβλητὰς καὶ χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον simplex πρὸς λύσιν τοῦ νέου προβλήματος. Αὕτη ὁδηγεῖ εἰς λύσιν ἄκρου σημείου τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος (ἂν τοῦτο ἔχῃ λύσεις)· χρησιμοποιοῦμεν ἐν συνεχείᾳ τὴν λύσιν ταύτην διὰ νὰ ἀρχίσωμεν τὴν διαδικασίαν simplex πρὸς λύσιν τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος. Δύναται ἐπίσης νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ἀρχίσωμεν κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν μὲ ἐπηυξημένον πρόβλημα καὶ ἐπιτύχωμεν ἀρίστην αὐτοῦ λύσιν, ἡ ὁποία δὲν ἀποτελεῖ λύσιν ἄκρου σημείου εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα (δηλαδὴ ὑπάρχει μία τουλάχιστον τεχνητὴ μεταβλητὴ εἰς ἀρίστην λύσιν τοῦ ἐπηυξημένου προβλήματος), τότε τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα δὲν ἔχει δυνατὰς λύσεις. Συμβατικῶς ἀρχίζομεν, ἂς λεχθῇ παρεμπιπτόντως, μὲ ἓν μὴ ἀρνητικὸν διάνυσμα — στήλη P_0 εἰς τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου simplex διὰ προβλήματα περιέχοντα τεχνητὰς μεταβλητάς. Ἂν μία συνιστῶσα τοῦ διανύσματος τούτου εἶναι ἀρχικῶς ἀρνητική, τότε ἁπλῶς πολλαπλασιάζομεν μίαν κατάλληλον περιοριστικὴν ἐξίσωσιν ἐπὶ — 1.

Δυνάμεθα νὰ διασαφηνίσωμεν τὰς ἐννοίας αὐτὰς σχηματίζοντες τὸ πρῶτον στάδιον τῆς λύσεως simplex διὰ τὸ πρόβλημα τοῦ ὁποίου οἱ περιορισμοὶ ἐκφράζονται ὑπὸ μορφὴν μήτρας εἰς τὴν (59). Ἀφοῦ μεγιστοποιῶμεν, ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος συνάρτησις διὰ τὸ πρόβλημα (59) εἶναι

$$\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 - M\chi_5 - M\chi_6 + 0\chi_7,$$

ἔνθα τὸ M ἔχει τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν ἑρμηνείαν. Σχηματίζεται τότε τὸ πρῶτον στάδιον τῆς λύσεως simplex. Τὸ διάνυσμα μὲ τὴν μεγίστην ἀρνητικὴν $\zeta_j - \gamma_j$ εἶναι τὸ ἀντικαθιστὸν διάνυσμα. Ἡ μεγίστη ἀρνητικὴ τιμὴ εἶναι $-4M - 2$, οὕτω τὸ P_1 εἰσέρχεται εἰς τὴν βάσιν. Τὸ διάνυσμα πρὸς ἀντικατάστασιν εὑρίσκεται ἂν διαιρέσωμεν τὰς συνιστώσας τοῦ P_0 διὰ τῶν ἀντιστοίχων συνιστωσῶν τοῦ P_1. Τὸ σχετιζόμενον μὲ τὸν μικρότερον τῶν προκυπτόντων λόγων διάνυσμα εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τῆς βάσεως. Ὁ μικρότερος λόγος εἶναι 21/3, οὕτω, τὸ τεχνητὸν διάνυσμα P_6, ἐξέρχεται τῆς βάσεως. Συνεχίζοντες κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν θὰ λάβωμεν λύσιν ἄκρου σημείου εἰς τὸ πρόβλημα (58) καὶ δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν περαιτέρω διὰ νὰ εὕρωμεν ἀρίστην λύσιν.

γ_j			$-M$	$-M$	0	2	5	0	0
	Διάνυσμα	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
$-M$	P_5	9	1	0	0	1	1	-1	0
$-M$	P_6	21	0	1	0	3	1	0	-1
0	P_7	24	0	0	1	1	4	0	0
	ζ_j		$-M$	$-M$	0	$-4M$	$-2M$	M	M
	$\zeta_j - \gamma_j$		0	0	0	$-4M-2$	$-2M-5$	M	M

Ἐκφυλισμὸς εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν

Πρὸς ἁπλοποίησιν τῆς ἐξετάσεώς μας τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ τῆς μεθόδου simplex ἐδέχθημεν ὅτι τὸ P_0, τὸ διάνυσμα — στήλη τῶν σταθερῶν εἰς τὸ πρόβλημα, δὲν ἐκφράζεται ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς ὀλιγωτέρων τῶν ρ γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων, ὅπου ρ ὁ βαθμὸς τῆς μήτρας τῶν περιορισμῶν. Αὕτη καλεῖται συνήθως ὑπόθεσις μὴ ἐκφυλισμένη καὶ πᾶν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ διὰ τὸ ὁποῖον αὕτη δὲν ἰσχύει καλεῖται ἐκφυλισμένον. Ὁ ἐκφυλισμὸς δημιουργεῖ δυσχερῆ θεωρητικὰ προβλήματα, εἶναι ὅμως εὐτυχῶς μικρᾶς πρακτικῆς σημασίας διότι εἶναι ἁπλοῦν θέμα ἡ τροποποίησις τοῦ ἀλγορίθμου simplex (καὶ ἄλλων ἐπίσης ἀλγορίθμων) διὰ νὰ προσαρμοσθῇ πρὸς αὐτόν. Ἐπὶ παραδείγματι, κατὰ τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου simplex ἔχομεν ἐκφυλισμὸν ὅταν δύο ἢ πλείονες τῶν λόγων (55) εἶναι δεσμευμένοι διὰ τὴν ἐλαχίστην τιμήν. Ἂν ὅλα τὰ διανύσματα τὰ σχετιζόμενα μὲ τοὺς δεσμευμένους λόγους ἐξήρχοντο τῆς βάσεως, θὰ ὑπῆρχεν ἀνεπαρκὴς ἀριθμὸς διανυσμάτων παραμενόντων πρὸς συνέχισιν τῆς διαδικασίας λύσεως. Ἀφοῦ ἓν μόνον διάνυσμα πρέπει ν' ἀντικατασταθῇ εἰς ἕκαστον στάδιον τῆς λύσεως, ἀπαιτεῖται συνθήκη «λύσεως» τοῦ δεσμοῦ ὅταν ἐμφανισθῇ. Κατὰ ἕνα κανόνα ἐκλέγομεν τὸ διάνυσμα τὸ σχετιζόμενον μὲ ἕνα τῶν μικροτέρων λόγων μὲ τὸ μικρότερον ὑπόσημον· ἕτερος κανὼν εἶναι νὰ θέτωμεν ἐκτὸς τὸ διάνυσμα τὸ σχετιζόμενον μὲ ἕνα τῶν μικροτέρων λόγων τοῦ ὁποίου τὸ ὑπόσημον ἐμφανίζεται πρῶτον εἰς πίνακα τυχόντων ἀριθμῶν. Μολονότι ὑπάρχουν πλέον περιπεπλεγμένοι κανόνες «λύσεως» δεσμῶν, ἡ πεῖρα ἔχει δείξει ὅτι ἕκαστος τῶν δύο τούτων κανόνων θὰ ἐπιτρέψῃ περαιτέρω ἐπαναλήψεις τῆς διαδικασίας καὶ ἐπίτευξιν ἀρίστης λύσεως ἂν ὑφίσταται τοιαύτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4ον

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Ἁπλᾶ τινα παραδείγματα

Αἱ πρῶται ἐφαρμογαὶ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ θὰ παρουσιασθοῦν
μέσῳ δύο ὑποθετικῶν παραδειγμάτων. Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ταῦτα εἶναι ὑπερ-
απλοποιημένα προβλήματα, εἶναι διδακτικὰ διότι ἕκαστον παρουσιάζει σπουδαῖα
χαρακτηριστικὰ ἀπαντώμενα καὶ εἰς πλέον ἐξεζητημένας ἐφαρμογὰς καὶ ἡ σχετι-
κή των ἁπλότης θὰ καταστήσῃ εὐχερῆ τὴν μετάβασιν ἐκ τῆς προηγηθείσης μαθη-
ματικῆς ἀναλύσεως εἰς τὰς ἀκολουθούσας γενικωτέρας ἐφαρμογάς.

Εἷς βιομήχανος δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ μίαν ἢ περισσοτέρας ἐκ τεσσά-
ρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα παράγουν ἓν προϊὸν
Χ καὶ ἡ τρίτη καὶ ἡ τετάρτη παράγουν ἓν προϊὸν Ψ. Ὑπάρχουν τρεῖς εἰσροαὶ
εἰς ἑκάστην τῶν μεθόδων αὐτῶν: ἐργασία κατ' ἐργάτην - ἑβδομάδα, λίτραι πρώ-
της ὕλης Α, κυτία πρώτης ὕλης Β. Ἑκάστη μέθοδος ἔχει διαφόρους ἀπαιτήσεις
εἰσροῶν· ἑπομένως τὰ προερχόμενα ἐκ τῶν ποικίλων μεθόδων ἀποτελέσματα διαφέ-
ρουν ἀκόμη καὶ διὰ παραγούσας τὸ αὐτὸ προϊὸν μεθόδους. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν
παραγωγῆς μιᾶς ἑβδομάδος ὁ βιομήχανος δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ πλέον τῶν
διαθεσίμων ποσοτήτων τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ καὶ τῶν δύο πρώτων ὑλῶν. Ὁ
πίναξ 1 παρέχει τὰς σχετικὰς πληροφορίας. Ἕκαστον διάνυσμα παραγωγῆς πρέ-
πει νὰ ἱκανοποιῇ τοὺς περιορισμοὺς εἰς τὴν διαθεσιμότητα ποσοτήτων εἰσροῆς.

Πίναξ 1

	Μία μονὰς προϊόντος Χ		Μία μονὰς προϊόντος Ψ		Διαθεσιμότητες εἰσροῆς
	Μέθοδος 1	Μεθ. 2	Μέθ. 3	Μεθ. 4	
Ἐργάται - ἑβδομάδες	1	2	1	2	20
Λίτραι πρώτης ὕλης Α	6	5	3	2	100
Κυτία ὕλης Β	3	4	9	12	75
Ἐπίπεδα παραγωγῆς	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3 + 2\chi_4 &\leqq 20 \\
6\chi_1 + 5\chi_2 + 3\chi_3 + 2\chi_4 &\leqq 100 \\
3\chi_1 + 4\chi_2 + 9\chi_3 + 12\chi_4 &\leqq 75 .
\end{aligned}
$$

Περαιτέρω, δὲν εἶναι νοητὰ ἀρνητικὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς, οὕτω θέτομεν περιορισμοὺς μὴ ἀρνητικότητος εἰς τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς,

$$(2) \qquad \chi_j \geqq 0, \quad (j = 1, \cdots, 4).$$

Ὑποτεθείσθω τώρα ὅτι τὰ ἔσοδα κατὰ μονάδα ἀποτελέσματος τῆς μεθόδου 1 ἐκ πωλήσεως εἶναι \$6, καὶ διὰ τὰς ἄλλας μεθόδους εἶναι \$4, \$7, καὶ \$5. Τότε τὰ ὁλικὰ ἔσοδα διὰ πᾶν διάνυσμα παραγωγῆς $(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)'$ δίδονται διὰ

$$(3) \qquad R = 6\chi_1 + 4\chi_2 + 7\chi_3 + 5\chi_4$$

Τὸ πρόβλημα εἶναι λοιπὸν νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ (3) ὑποκειμένη εἰς τοὺς περιορισμοὺς (1) καὶ (2). Χρησιμοποιοῦντες τὴν μέθοδον simplex εἰσάγομεν πρῶτον χαλαρὰς μεταβλητὰς χ_5, χ_6 καὶ χ_7, ἔνθα ἡ χ_5 δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς ἀχρησιμοποίητος ποσότης ἐργατῶν-ἑβδομάδων, καὶ αἱ χ_6 καὶ χ_7 παριστοῦν μὴ χρησιμοποιηθείσας ποσότητας τῶν πρώτων ὑλῶν Α καὶ Β, ἀντιστοίχως. Τὰ κάτωθι πινάκια ἐκθέτουν τὰς ποικίλας ἐπαναλήψεις τῆς διαδικασίας. Εἰς τὸ πρῶτον στάδιον ἡ μεγίστη ἀρνητικὴ $\zeta_j - \gamma_j$ εἶναι -7, οὕτω τὸ P_3 εἶναι τὸ ἀντικαθιστὸν διάνυσμα. Τὸ πρὸς ἀντικατάστασιν διάνυσμα προσδιορίζεται, ὡς συνήθως, διὰ διαδοχικῶν διαιρέσεων τῶν συνιστωσῶν τοῦ διανύσματος P_0 διὰ τῶν ἀντιστοίχων συνιστωσῶν τοῦ ἀντικαθιστῶντος διανύσματος, ἤτοι τοῦ P_3. Τὸ σχετιζόμενον μὲ τὸν μικρότερον λόγον διάνυσμα εἶναι τὸ πρὸς ἀντικατάστασιν, καὶ ἐδῶ τὸ μικρότερον πηλίκον εἶναι 75/9, οὕτω

γ_j			0	0	0	6	4	7	5
	Διάν.	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
0	P_5	20	1	0	0	1	2	1	2
0	P_6	100	0	1	0	6	5	3	2
0	P_7	75	0	0	1	3	4	9	12
	ζ_j	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\zeta_j - \gamma_j$	0	0	0	0	−6	−4	−7	−5

τὸ P_7 ἐξέρχεται τῆς βάσεως. Ἡ ἑπομένη ἐπανάληψις δίδει τὸ ἑξῆς:

γ_j			0	0	0	6	4	7	5
	Διάν.	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
0	P_5	35/3	1	0	−1/9	2/3	14/9	0	2/3
0	P_6	75	0	1	−1/3	5	11/3	0	−2
7	P_7	25/3	0	0	1/9	1/3	4/9	1	4/3
	ζ_j	175/3	0	0	7/9	7/3	28/9	7	28/3
	$\zeta_j - \gamma_j$	175/3	0	0	7/9	−11/3	−8/9	0	13/3

Ἡ μεγίστη ἀρνητικὴ $\zeta_j - \gamma_j$ εἶναι $-11/3$, οὕτω τὸ P_1 εἰσέρχεται εἰς τὴν βάσιν. Σχηματίζοντες πηλίκα κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ P_6 ἐξέρχεται τῆς βάσεως. Τὸ τελικὸν στάδιον δεικνύεται κατωτέρω.

γ_j			0	0	0	6	4	7	7
	Διάν.	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
0	P_5	5/3	1	—2)15	—1)15	0	16)15	0	14)15
6	P_1	15	0	1)5	—1)15	1	11)15	0	—2)5
7	P_3	10/3	0	—1)15	2)15	0	1)5	1	22)15
	ζ_i	340/3	0	11)15	8)15	6	87)15	7	118)15
	$\zeta_j - \gamma_j$	340)3	0	11)15	8)15	0	9)15	0	43)15

Ὡς ἀρίστην λύσιν ἔχομεν

$$\chi_1 = 15, \chi_2 = 0, \chi_3 = 10/3, \chi_4 = 0, \ \chi_5 = 5/3, \ \chi_6 = 0, \ \chi_7 = 0, \quad \text{καὶ}$$

$$\text{μεγ } R = 6(15) + 4(0) + 7(10/3) + 5(0) + 0(5/3) + 0(0) + 0(0) = 133{,}33 .$$

Διὰ τὸ δεύτερον παράδειγμά μας ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μία ἑταιρεία αὐτοκινήτων διαθέτει ἐγκαταστάσεις συναρμολογήσεως δυναμένας νὰ παράγουν αὐτοκίνητα κατὰ πρότυπον μεγέθους, αὐτοκίνητα κατὰ παραγγελίαν μετὰ πολυτελοῦς συσκευασίας καὶ αὐτοκίνητα κατὰ παραγγελίαν ἄνευ τῆς πολυτελοῦς συσκευασίας. Αἱ ἐγκαταστάσεις ἔχουν ὀργανωθῆ εἰς πέντε τμήματα: πρεσσάρισμα, συναρμολόγησις μηχανῶν, τελικὴ συναρμολόγησις προτύπου αὐτοκινήτου, τελικὴ συναρμολόγησις πολυτελοῦς κατὰ παραγγελίαν αὐτοκινήτου καὶ τελικὴ συναρμολόγησις κανονικοῦ κατὰ παραγγελίαν αὐτοκινήτου.

Ἕκαστον τμῆμα ἔχει περιορισμοὺς παραγωγικοῦ δυναμικοῦ, οἱ ὁποῖοι ἐκτίθενται εἰς τὸν πίνακα 2 (ταῦτα ἀποτελοῦν τὰ ἀνώτατα ὅρια, τὰ τμήματα δυνατὸν νὰ παράγουν ὀλιγώτερον ἢ οἱ ἀριθμοὶ εἰς τὸν πίνακα δεικνύουν).

Πίναξ 2

Μηνιαῖαι Παραγωγικότητες Τμημάτων

Τμῆμα	*Πρότυπα Αὐτοκ.*	*Πολυτ. Παραγ.*	*Κανον Παραγ*
Πρεσσάρισμα	10.116	13.000	14.500
Συναρμολ. μηχανῶν	16.200	19.110	19.970
Συναρμολ. αὐτοκ. προτύπου μεγ.	8.760		
Συναρμολ. αὐτοκ. πολυτελῶν παραγ.		7.640	
Συναρμολ. αὐτοκ. κανονικῶν παραγ.			12 274

Ὑπάρχουν τρεῖς παραγωγικαὶ δραστηριότητες ἢ μέθοδοι εἰς τὰς ἐγκαταστάσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων παράγει ἕνα τῶν τριῶν τύπων αὐτοκινήτων, καὶ ἑκάστη μέθοδος ἔχει ἓν αὐτοκίνητον ὡς ἐκροὴν (παραγωγικὸν ἀποτέλεσμα) καὶ ποσοστὸν ἑκάστης τῶν εἰς τὸν πίνακα 2 δεικνυομένων παραγωγικοτήτων. Ἐπὶ παραδείγματι, ἓν προτύπου μεγέθους αὐτοκίνητον ἀπαιτεῖ ὡς εἰσροὰς

$\frac{1}{10.116} = 0,0099$ %, παραγωγικότητα τοῦ τμήματος πρεσσαρίσματος

$\frac{1}{16.200} = 0,0062$ %, παραγωγικότητα τοῦ τμήματος συναρμολογήσεως μηχανῶν

$\frac{1}{8.760} = 0,0114$ %, παραγωγικότητα τοῦ τμήματος συναρμολογήσεως αὐτοκινήτων προτύπου μεγέθους.

Ταῦτα καὶ τὰ ἀποτελέσματα παρομοίων ὑπολογισμῶν διὰ τὰς ὑπολοίπους μεθόδους παρουσιάζονται εἰς τὸν πίνακα 3.

Πίναξ 3

Ποσοστὸν ἀπαιτουμένης παραγωγικότητος κατὰ μονάδα ἐκροῆς

Τμῆμα	*Πρότυπα*	*Πολυτ. Παραγ.*	*Κανον. Παραγ.*
Πρεσσάρισμα	0,0099	0,0077	0,0069
Συναρμολόγησις μηχανῶν	0,0062	0,0052	0,0050
Συναρμολόγησις αὐτοκ. προτ. μεγ.	0,0114		
Συναρμολόγησις πολυτ. παραγγελ.		0,0131	
Συναρμολόγησις κανον. παραγγελ.			0,0082

Κάμνομεν τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ διοίκησις ἔχει καλῶς κατὰ προσέγγισιν ὑπολογίσει τὴν σχετικὴν ἀπόδοσιν κέρδους τῶν τριῶν τύπων αὐτοκινήτων οὕτως ὥστε πιστεύει ὅτι ἡ τιμὴ πωλήσεως ἑνὸς αὐτοκινήτου προτύπου μεγέθους εἶναι \$260 μεγαλυτέρα τοῦ συνολικοῦ κόστους κατασκευῆς του καὶ ὅτι παρόμοιοι ἀριθμοὶ διὰ τὰ πολυτελῆ καὶ κανονικὰ κατὰ παραγγελίαν αὐτοκίνητα εἶναι \$290 καὶ \$280, ἀντιστοίχως. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ὁλικὴ ἀπόδοσις δίδεται ὑπὸ

(4) $$R = 260\chi_1 + 290\chi_2 + 280\chi_3 .$$

Τὸ ὑπὸ κρίσιν πρόβλημα συνίσταται τώρα ἐκ τοῦ προσδιορισμοῦ ἑνὸς συνδυασμοῦ ἐκροῶν τῶν τριῶν αὐτοκινήτων, ὁ ὁποῖος θὰ ἔχῃ ὡς ἀποτέλεσμα τὴν μεγίστην ὁλικὴν ἀπόδοσιν, ὑποκειμένου εἰς τοὺς περιορισμοὺς τοῦ παραγωγικοῦ δυναμικοῦ ἑκάστου τμήματος εἰς τὰς ἐγκαταστάσεις.

Ἔστωσαν χ_1 ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐντὸς ἑνὸς μηνὸς παραγομένων προτύπων αὐτοκινήτων καὶ χ_2 καὶ χ_3 οἱ ἀριθμοὶ τῶν πολυτελῶν παραγγελίας καὶ κανονικῶν παραγγελίας, ἀντιστοίχως. Τότε, διὰ τῆς χρήσεως τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος 3 δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$0,0099\chi_1 + 0,0077\chi_2 + 0,0069\chi_3 = \%$ ἐκμετάλλευσις τοῦ τμήματος πρεσσαρίσματος.

Ἀφοῦ τὸ ὅριον τῆς παραγωγικότητος εἶναι 100%, ὁ περιορισμὸς τοῦ τμήματος πρεσσῶν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὴ ἀνισότης ὡς ἑξῆς:

$$0,0099\chi_1 + 0,0077\chi_2 + 0,0069\chi_3 \leqq 100 .$$

Σκεπτόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ὡς πρὸς τοὺς ἄλλους περιορισμοὺς παραγωγικότητος, φθάνομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον σύστημα γραμμικῶν ἀνισοτήτων.

$$(5)\quad \begin{aligned} 0{,}0099\chi_1 + 0{,}0077\chi_2 + 0{,}0069\chi_3 &\leqq 100\\ 0{,}0062\chi_1 + 0{,}0052\chi_2 + 0{,}0050\chi_3 &\leqq 100\\ 0{,}0114\chi_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &\leqq 100\\ 0{,}0131\chi_2 \qquad\qquad &\leqq 100\\ 0{,}0082\chi_3 &\leqq 100\\ \chi_j &\geqq 0, \qquad (j=1,\ 2,\ 3), \end{aligned}$$

καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ (4) ὡς πρὸς τὴν (5).

Χρησιμοποιοῦντες τὴν μέθοδον simplex εὑρίσκομεν μετὰ τέσσαρας ἐπαναλήψεις τῆς διαδικασίας ὅτι ἡ μεγίστη ἀπόδοσις εἶναι $ 4.011.719,96. Ἐπίσης, $\chi_1 = 0$ εἰς τὴν ἀρίστην μας λύσιν, οὕτω δὲν πρέπει αἱ ἐγκαταστάσεις συναρμολογήσεως νὰ παράγουν αὐτοκίνητα κατὰ πρότυπον μεγέθους. Ὅλη ἡ παραγωγὴ πρέπει νὰ ἀφιερωθῇ εἰς τὴν κατασκευὴν αὐτοκινήτων κατὰ παραγγελίαν καὶ ἄριστον παραγωγικὸν ἀποτέλεσμα εἶναι 2.059 πολυτελῆ καὶ 12.195 κανονικὰ αὐτοκίνητα.

Πρέπει νὰ τονισθῇ ὅτι δύναται νὰ ὑπάρξῃ δυσχέρεια ἐνίοτε κατὰ τὴν χρῆσιν τοῦ μαθηματικοῦ ὑποδείγματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ πρὸς λύσιν προβλήματος τοῦ εἴδους αὐτοῦ. Τὸ ὑπόδειγμα ἐπιτρέπει εἰς τὰ διανύσματα λύσεως νὰ ἔχουν συνιστώσας, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἡ μέθοδος simplex, ἐπὶ παραδείγματι, ἔδωκεν ὡς ἀρίστην λύσιν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο $\chi_1=0$, $\chi_2=2.058{,}92$, $\chi_3=12.195{,}12$. Καὶ αἱ τιμαὶ τῶν χ_2 καὶ χ_3 ἔχουν στρογγυλοποιηθῆ εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐκτεθὲν ἀποτέλεσμα. Κατ' αὐστηρὸν προσδιορισμόν, ἂν γίνεται χρῆσις τῆς διαδικασίας simplex εἰς πρόβλημα τοῦ εἴδους αὐτοῦ πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωμεν ὡς προϊὸν καὶ ἓν μερικῶς περατωθὲν αὐτοκίνητον. Ἂν τοῦτο δὲν συμβαίνῃ, τότε τὸ πρόβλημα εἶναι πρόβλημα ***ἀκεραίου προγραμματισμοῦ*** καὶ εἰδικοὶ ἀλγόριθμοι, περικλείοντες πλέον περίπλοκον μαθηματικὸν ἐξοπλισμόν, ἀπαιτοῦνται πρὸς ἐπίτευξιν λύσεως. Μελέται ἔχουν δείξει ὅτι δύναται νὰ ὑπάρξῃ σημαντικὴ διαφορὰ μεταξὺ ἀρίστης λύσεως εἰς πρόβλημα ἀκεραίου προγραμματισμοῦ ὑπολογισθείσης διὰ τῆς δεούσης τεχνικῆς, καὶ διανύσματος ἀρίστης λύσεως κτηθέντος ἐκ μιᾶς λύσεως προτύπου γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν ἔχουν ἐπιτραπῆ μὴ ἀκέραιαι τιμαὶ συνιστωσῶν, καὶ εἰς τὴν ὁποίαν αἱ συνιστῶσαι ἔχουν στρογγυλοποιηθῆ, ὅπου ἔδει, πρὸς τὸν πλησιέστερον ἀκέραιον ἀριθμόν.

Τὸ πρόβλημα ἀποθηκεύσεως

Ὁ διαχειριστὴς μιᾶς ἀποθήκης ἀντιμετωπίζει ποικίλα δυνατὰ σχέδια (ὑποδείγματα) ἀγορῶν, πωλήσεων καὶ ἀποθηκεύσεως κατὰ τὰς $j = 1, \ldots, \nu$ περιόδους, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸν ὁρίζοντα σχεδιασμοῦ του. Τὸ πρόβλημα κατ' οὐσίαν ἔγκειται εἰς τὸν προσδιορισμὸν ἀρίστου ὑποδείγματος ἀγορῶν (ἢ παραγωγῆς), ἀποθηκεύσεως καὶ πωλήσεων, δοθείσης ἀποθήκης τινὸς μὲ καθωρισμένον παραγωγικὸν δυναμικὸν καὶ ἀρχικὴν προμήθειαν ἑνὸς ἀγαθοῦ ὑποκειμένου εἰς γνωστὰς ἐποχιακὰς διακυμάνσεις τιμῶν καὶ κόστους.

Ἔστωσαν:

B = ἡ ὡρισμένη παραγωγικὴ δυναμικότης τῆς ἀποθήκης

A = ἀρχικὸν ἀπόθεμα ἀποθήκης ἐξ ἀπογραφῆς

χ_j = ποσότης πρὸς ἀγορὰν κατὰ τὴν περίοδον j

ψ_j = ποσότης πρὸς πώλησιν κατὰ τὴν περίοδον j

ρ_j = τιμὴ πωλήσεως κατὰ μονάδα ἰσχύουσα κατὰ τὴν περίοδον j.

γ_j = τιμὴ ἀγορᾶς κατὰ μονάδα (ἢ κατὰ μονάδα κόστος) ἐν ἰσχύι κατὰ τὴν περίοδον j.

Αἱ ὑποθέσεις εἶναι αἱ ἑξῆς:

1) Τὸ εἰς τὴν ἀποθήκην ἀγαθὸν πωλεῖται ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ οὕτως ὥστε αἱ δυναταὶ πωλήσεις τοῦ ἀγαθοῦ εἰς τιμὴν ρ_j δύνανται νὰ εἶναι παντὸς μεγέθους.

2) Αἱ πωλήσεις πρέπει νὰ γίνωνται ἐξ ἀπογραφῆς ἀρχῆς περιόδου, ὥστε ἡ πωλουμένη κατὰ τὴν ι περίοδον ποσότης νὰ μὴ δύναται νὰ ὑπερβῇ τὴν εἰς τὸ τέλος τῆς περιόδου $(\iota-1)$ διαθέσιμον ποσότητα. Ἑπομένως εἰς τὴν περίοδον ι τὸ ἄθροισμα τῶν πωλήσεων πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ:

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{\iota}\psi_j \leqq A + \sum_{j=1}^{\iota-1}\chi_j \,.$$

3) Πλήρης ἀνταγωνισμὸς ἐπικρατεῖ εἰς τὴν ἀγορὰν ἔνθα ὁ ἐπὶ τῆς ἀποθήκης ἀγοράζει τὸ ἀγαθόν, οὕτω δύναται οὗτος νὰ ἀγοράσῃ πᾶσαν ποσότητα ἀγαθοῦ εἰς τὴν τιμὴν γ_j. Δὲν δύναται ὅμως νὰ ἀποθηκεύσῃ πλέον ἢ ἡ καθαρὰ διαθέσιμος δυναμικότης τῆς ἀποθήκης τοῦ ἐπιτρέπει, οὕτω διὰ πᾶσαν περίοδον $\iota > 1$ ἔχομεν

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{\iota}\chi_j \leqq B - A + \sum_{j=1}^{\iota}\psi_j \,.$$

Τὸ πρόβλημα εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῶν καθαρῶν ἐσόδων (ὁλικὰ ἔσοδα μεῖον ὁλικὸν κόστος) ὑποκειμένων εἰς τοὺς περιορισμοὺς ἀγορᾶς καὶ πωλήσεως καὶ εἰς τὰς συνθήκας μὴ ἀρνητικότητος ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν χ_j καὶ ψ_j:

νὰ μεγιστοποιηθῇ $$\pi = \sum_{j=1}^{\nu} -\gamma_j\,\chi_j + \sum_{j=1}^{\nu}\rho_j\,\psi_j$$

ὡς πρὸς

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{\iota}\chi_j - \sum_{j=1}^{\iota}\psi_j \leqq B-A$$ [ν περιορισμοὶ ἀγορῶν ἐκ τῆς (7)]

$$(9) \qquad -\sum_{j=1}^{\iota-1}\chi_j + \sum_{j=1}^{\iota}\psi_j \leqq A$$ [ν περιορισμοὶ πωλήσεων ἐκ τῆς (6)]

$$(10) \qquad \chi_j \geqq 0$$

$$(11) \qquad \psi_j \geqq 0 \qquad\qquad (j = 1, \cdots, \nu).$$

Σημειώσατε ὅτι μεγιστοποιοῦμεν τὰ συνολικὰ κέρδη ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἔχει γίνει εἰς τὸν διαχειριστὴν μία παραχώρησις κεφαλαίων καὶ δὲν γίνονται σκέψεις οὔτε δι' ἀπολήψεις κεφαλαίων οὔτε πρὸς ἐπαύξησιν τῶν ὑπαρχόντων πρὶν φθάσωμεν εἰς τὴν νέαν περίοδον ὁρίζοντος.

Οἱ περιορισμοὶ (8) καὶ (9) καταγραφόμενοι λαμβάνουν τὴν μορφὴν

$$\begin{array}{ll}
\chi_1 + 0\chi_2 + \cdots + 0\chi_\nu - \psi_1 - 0\psi_2 - \cdots - 0\psi_\nu \leqq B-A & (\iota = 1) \\
\chi_1 + \chi_2 + \cdots + 0\chi_\nu - \psi_1 - \psi_2 - \cdots - 0\psi_\nu \leqq B-A & (\iota = 1, 2) \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\
\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_\nu - \psi_1 - \psi_2 - \cdots - \psi_\nu \leqq B-A & (\iota = 1,2,\ldots,\nu) \\
-0\chi_1 - 0\chi_2 - \cdots - 0\chi_\nu + \psi_1 + 0\psi_2 + \cdots + 0\psi_\nu \leqq A & (\iota = 1) \\
-\chi_1 - 0\chi_2 - \cdots - 0\chi_\nu + \psi_1 + \psi_2 + \cdots + 0\psi_\nu \leqq A & (\iota = 1, 2) \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\
-\chi_1 - 0\chi_2 - \cdots - 0\chi_\nu + \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_\nu \leqq A & (\iota = 1, 2,\ldots,\nu).
\end{array}$$

Ἑπομένως, τὸ πρόβλημα ὑπὸ μορφὴν μητρῶν εἶναι

(12) νὰ μεγιστοποιηθῇ $\quad \pi = \sum_{j=1}^{\nu} - \gamma_j \chi_j + \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j \psi_j$

$$= [-\gamma_1, \cdots, -\gamma_\nu, \rho_1, \cdots, \rho_\nu] \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \\ \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_\nu \end{bmatrix} = \rho'\lambda$$

ὡς πρὸς

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & -1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \\ \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_\nu \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} B-A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B-A \\ A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A \end{bmatrix}$$

δι' ὅλα τὰ μὴ ἀρνητικὰ διανύσματα λ. Τὸ πρόβλημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ συντομώτερον

(13) νὰ μεγιστοποιηθῇ $\pi = \rho'\lambda$

ὡς πρὸς

(14) $$M\lambda \leqq \beta$$

(15) $$\lambda \geqq 0$$

ὅπου M εἶναι ἡ ἀνωτέρω μήτρα 2ν ἐπὶ 2ν, β εἶναι τὸ διάνυσμα - στήλη τῶν σταθερῶν ὅρων, ρ' καὶ λ εἶναι τὰ διάνυσμα - γραμμὴ καὶ διάνυσμα - στήλη, ἀντιστοίχως, τὰ ἐμφανιζόμενα εἰς τὴν (12).

Τὸ πρόβλημα μεταφορᾶς

Ὑπάρχουν μ λιμένες, κέντρα προμηθεύσεως ἢ προελεύσεις καὶ ν προορισμοὶ ἢ ἀγοραὶ πρὸς τὰς ὁποίας θὰ ἀποσταλῇ δοθὲν (ὁμογενὲς) προϊόν. Ἡ ι προέλευσις ἔχει ποσότητα s_ι τοῦ ἀγαθοῦ ($\iota = 1, \ldots, \mu$) καὶ αἱ ἀπαιτήσεις εἶναι τοιαῦται ὥστε ὁ κ προορισμὸς νὰ λάβῃ ποσότητα ρ_κ ($\kappa = 1, \ldots, \nu$). Ἔστωσαν $\chi_{\iota\kappa}$ ἡ ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ, τὸ ὁποῖον θὰ μεταφερθῇ ἐκ προελεύσεως ι εἰς προορισμὸν κ, καὶ $\gamma_{\iota\kappa}$ τὸ κατὰ μονάδα ἀγαθοῦ κόστος μεταφορᾶς αὐτοῦ ἐκ προελεύσεως ι εἰς προορισμὸν κ. Τὸ πρόβλημα συνεπῶς εἶναι

νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ $$\sum_{\iota=1}^{\mu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \gamma_{\iota\kappa} \chi_{\iota\kappa}$$

ὡς πρὸς

(16) $$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \chi_{\iota\kappa} \leqslant s_\iota$$

(17) $$\sum_{\iota=1}^{\mu} \chi_{\iota\kappa} \geqslant \rho_\kappa$$

(18) $$\chi_{\iota\kappa} \geqslant 0 \quad \text{δι' ἅπαντα τὰ } \iota, \kappa.$$

Λαμβάνομεν ἐπίσης ὅτι $\gamma_{\iota\kappa} > 0$, $\rho_\kappa > 0$, $s_\iota > 0$ καὶ ὅτι $\sum_\kappa \rho_\kappa \leqslant \sum_\iota s_\iota$ (αἱ διαθέσιμοι προσφερόμεναι ποσότητες εἰς τὸν τόπον προελεύσεως εἶναι ἐπαρκεῖς πρὸς ἱκανοποίησιν τῶν ζητουμένων ποσοτήτων εἰς τὸν τόπον προορισμοῦ).

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἐξητάσθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Hitchcock, φυσικοῦ, τὸ 1941 (The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities», Journal of Mathematics and Physics 20, 1941) καὶ ἀνεξαρτήτως ὑπὸ τοῦ Ρώσσου μαθηματικοῦ Kantorovich (1942) καὶ ὑπὸ τοῦ Koopmans (1944 - 46). Μὲ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ αἱ μαθηματικαὶ ἰδιότητες τοῦ προβλήματος ἐμελετήθησαν (ἐφαίνετο ὡς πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ), ἀνεπτύχθη γενική τις ἔκφρασις τῆς τάξεως ταύτης τῶν προβλημάτων, καὶ ἐγένοντο γνωσταὶ γενικαὶ συνθῆκαι διὰ τὴν ὕπαρξιν λύσεως.

Ἐκτὸς τῆς ἀναπτύξεως τῶν μαθηματικῶν ἰδιοτήτων τοῦ ὑποδείγματος, ἤρχισε νὰ λαμβάνῃ χώραν εὐρεῖα ποικιλία ἐφαρμογῶν τούτου. Μέγα ποσοστὸν ὅμως τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως εἶναι κάπως περίπλοκον, καὶ ἐξετάζομεν ἐδῶ μόνον τὰ σπουδαιότερα ἀποτελέσματα.

Ἔστω X ἓν διάνυσμα αἱ συνιστῶσαι τοῦ ὁποίου εἶναι $\chi_{\iota\kappa}$ διὰ $\iota = 1, \ldots, \mu$ καὶ $\kappa = 1, \ldots, \nu$. Τότε δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι X εἶναι λύσις εἰς (16), (17) καὶ (18) μόνον ἂν X ἱκανοποιῇ

$$\sum_{\kappa} \chi_{\iota\kappa} \leqq s_\iota$$

$$\sum_{\iota} \chi_{\iota\kappa} = \rho_\kappa$$

$$\chi_{\iota\kappa} \geqq 0 \qquad \text{δι' ἅπαντα τὰ } \iota,\ \kappa.$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ X εἶναι πραγματοποιήσιμος μόνον ἂν αἱ ἀπαιτήσεις προορισμοῦ πληροῦνται εἰς ἰσότητα. Ἂν ληφθῇ ἐπιπροσθέτως ὅτι $\sum_{\kappa} \rho_\kappa = \sum_{\iota} s_\iota$ (δηλαδὴ ὅτι ἡ προσφορὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ζήτησιν), τότε πᾶν διάνυσμα X ἱκανοποιοῦν τὰς (16), (17), (18), ἱκανοποιεῖ κατ' ἀνάγκην τὰς ἐξισώσεις

(19) $$\sum_{\kappa} \chi_{\iota\kappa} = s_\iota$$

(20) $$\sum_{\iota} \chi_{\iota\kappa} = \rho_\kappa$$

(21) $$\chi_{\iota\kappa} \geqq 0 \qquad \text{δι' ἅπαντα τὰ } \iota,\ \kappa.$$

Τὸ πρόβλημα μεταφορᾶς ὡς ἐμφανίζεται εἰς τὰς (19), (20), (21) εὑρίσκεται εἰς τὴν μορφὴν εἰς τὴν ὁποίαν συχνότατα ἐξετάζεται. Οἱ περιορισμοὶ (19) καὶ (20), γραφόμενοι ἀναλυτικῶς, εἶναι ἀντιστοίχως

$$\begin{array}{l}
\chi_{11} + \chi_{12} + \cdots + \chi_{1\nu} = s_1 \\
\chi_{21} + \chi_{22} + \cdots + \chi_{2\nu} = s_2 \\
\quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\chi_{\mu 1} + \chi_{\mu 2} + \cdots + \chi_{\mu\nu} = s_\mu \\
\chi_{11} + \chi_{21} + \cdots + \chi_{\mu 1} = \rho_1 \\
\chi_{12} + \chi_{22} + \cdots + \chi_{\mu 2} = \rho_2 \\
\quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\chi_{1\nu} + \chi_{2\nu} + \cdots + \chi_{\mu\nu} = \rho_\nu .
\end{array}$$

Τὸ σύστημα ὅμως δύναται νὰ γραφῇ ἔτι ἀναλυτικώτερον, ὁπότε ἔχει $\mu + \nu$ ἐξισώσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιλαμβάνει τὰς $\mu\nu$ μεταβλητὰς $\chi_{\iota\kappa}$. Ἡ μήτρα τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν περιορισμῶν ἔχει τὴν κάτωθι μορφήν :

$$A = \begin{array}{c} \\ \mu \text{ σειραὶ} \\ \\ \\ \nu \text{ σειραὶ} \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
\chi_{11}, & \cdots, & \chi_{1\nu}, & \chi_{21}, & \cdots, & \chi_{2\nu}, & \cdots, & \chi_{\mu 1}, & \cdots, \chi_{\mu\nu}
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & \cdots & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & \cdots & 1 & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & 1 & & & \cdots 1 & & \\
 & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\
 & & 1 & & & 1 & \cdots & & 1
\end{array}\right]
\end{array}$$

ἔνθα ὅλαι αἱ ἐγγραφαὶ εἶναι μηδὲν ἐκτὸς τῶν δεικνυομένων μονάδων. Αἱ μεταβληταὶ $\chi_{\iota\kappa}$ γράφονται ὑπεράνω τῆς μήτρας πρὸς βοήθειαν τοῦ ἀναγνώστου εἰς τὴν κατανόησιν τῆς αἰτίας διὰ τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν ἐγγραφῶν εἰς τὴν μήτραν καὶ τῶν μεταβλητῶν $\chi_{\iota\kappa}$. Ἐπίσης, ἂν λάβωμεν $X = [\chi_{11}, \cdots, \chi_{1\mu}, \chi_{21}, \cdots, \chi_{2\nu}, \cdots, \chi_{\mu 1}, \cdots, \chi_{\mu\nu}]'$ καὶ $B = [s_1, \cdots, s_\mu, \rho_1, \cdots, \rho_\nu]'$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς (19), (20) καὶ (21) ὑπὸ μορφὴν μητρῶν ὡς ἑξῆς:

$$AX = B$$
$$X \geqslant 0 .$$

Ἔχομεν παρατηρήσει ὅτι εἰς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ κατευθύνομεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὰ ἀκραῖα σημεῖα τοῦ κυρτοῦ συνόλου πραγματοποιησίμων λύσεων, ἐφ' ὅσον μία ἀρίστη λύσις, ἂν ὑπάρχῃ, πρέπει νὰ θεωρηθῇ εἰς ἓν ἄκρον σημεῖον. Τὰ ἀκόλουθα ἀποτελοῦν δύο σπουδαιότατα θεωρήματα ἀφορῶντα εἰς τὸ πρόβλημα μεταφορᾶς.

Θεώρημα Α. Ἔστω ὅτι ἕκαστον ρ_κ καὶ s_ι εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς (ὄχι ἅπαντα τὰ ρ_κ καὶ s_ι μηδενικά), καὶ ἔστω X ἓν διάνυσμα εἰς T, ἑκάστη τῶν συνιστωσῶν τοῦ ὁποίου εἶναι ἀκέραιος. Τότε τὰ ἀκραῖα σημεῖα τοῦ συνόλου λύσεως T περιέχονται εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν $X \in T$ ἔνθα X ἔχει ἀκεραίας συνιστώσας.

Θεώρημα Β. Ἂν ρ_κ καὶ s_ι εἶναι ἀκέραιοι, τότε ὑπάρχει ἀρίστη λύσις X εἰς τὰς (19), (20) καὶ (21) ἔχουσα ἀκεραίους ὡς συνιστώσας.

Τὸ θεώρημα Β, βεβαίως, δηλοῖ ὅτι ἂν ἡ προσφορὰ καὶ ἡ ζήτησις ἐκφράζωνται μέσῳ ἀκεραίων (ἀδιαιρέτων) ποσοτήτων ἀγαθοῦ, τότε μία ἀρίστη λύσις διὰ τὴν ἐλαχιστοποίησιν τοῦ κόστους ἀπαιτεῖ τὴν μεταφορὰν μόνον ἀκεραίων ποσοτήτων ἐκ τῶν τόπων προελεύσεως εἰς τοὺς τόπους προορισμοῦ παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὴν ἀνωτέρω διατύπωσιν ἐπιτρέπονται δυναταὶ λύσεις περιλαμβάνουσαι μεταφορὰν κλασματικῶν ποσοτήτων τοῦ ἀγαθοῦ.

Τὸ κάτωθι παράδειγμα θὰ διασαφίσῃ τὰς ἀνωτέρω ἐννοίας. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ κόστος μεταφορᾶς προϊόντος τινὸς ἐκ προελεύσεων 0, 1, 2 πρὸς προορισμοὺς 3, 4, 5 εἶναι ὡς δίδεται ὑπὸ τοῦ παρατιθεμένου πινακίου.

		Προορισμοί		
		3	4	5
Προελεύσεις	0	73	40	9
	1	62	93	96
	2	95	65	80

Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαθεσίμων μονάδων τοῦ ἀγαθοῦ εἰς τοὺς τόπους προελεύσεως (τὰ s_i) εἶναι : εἰς τὸν 0,8 · εἰς τὸν 1,7 · εἰς τὸν 2,9. Ὁμοίως ἔστω ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων μονάδων ἀγαθοῦ εἰς τοὺς τόπους προορισμοῦ (τὰ ρ_κ) εἶναι 6 εἰς τὸν 3, καὶ 8 καὶ 10, ἀντιστοίχως, εἰς τοὺς 4 καὶ 5. Τελικῶς λαμβάνομεν ὅτι ἅπασαι αἱ μονάδες τοῦ ἀγαθοῦ, μεταφέρονται εἰς τοὺς προορισμοὺς ($\mathbf{\Sigma} s_i = \mathbf{\Sigma}\rho_\kappa$). Ἔστω $\chi_{\iota\kappa}$ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ ἀγαθοῦ τοῦ μεταφερομένου ἐκ προελεύσεως ι εἰς προορισμὸν κ. Τὸ πρόβλημα τότε εἶναι νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ

$$\Gamma = 73\chi_{03} + 40\chi_{04} + 9\chi_{05} + 62\chi_{13}\ 93\chi_{14} + 96\chi_{15} + 95\chi_{23} + 65\chi_{24} + 80_{25}$$

ὡς πρὸς

$$\left.\begin{aligned} \chi_{03} + \chi_{04} + \chi_{05} &= 8 \\ \chi_{13} + \chi_{14} + \chi_{15} &= 7 \\ \chi_{23} + \chi_{24} + \chi_{25} &= 9 \end{aligned}\right\} \text{δυναμικότης προελεύσεων}$$

$$\left.\begin{aligned} \chi_{03} + \chi_{13} + \chi_{23} &= 6 \\ \chi_{04} + \chi_{14} + \chi_{24} &= 8 \\ \chi_{05} + \chi_{15} + \chi_{25} &= 10 \end{aligned}\right\} \text{ἀπαιτήσεις προορισμῶν}$$

Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐννέα μεταβλητὰς εἰς τὸ στάδιον τοῦτο, καὶ πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι νοοῦμεν ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ὡς ἐξίσωσιν εἰς τὰς ἐννέα ταύτας μεταβλητάς. Οὐδεμία χαλαρὰ ὑπάρχει εἰς τὸ πρόβλημα, οὕτως εἰσάγομεν μίαν τεχνητὴν μεταβλητὴν εἰς ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων, καί, συμφώνως πρὸς τὴν συζήτησίν μας ἐπὶ τῶν τεχνητῶν μεταβλητῶν εἰς τὸ προηγηθὲν κεφάλαιον, ἑκάστη μεταβλητὴ αὐτοῦ τοῦ εἴδους τοποθετεῖται εἰς τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος συνάρτησιν μὲ μίαν αὐθαιρέτως μεγάλην τιμὴν (κόστος) \$M.

Δύναται νὰ δειχθῇ διὰ τῆς χρήσεως τῆς μεθόδου simplex ὅτι ἀρίστη λύσις εἶναι $\chi_{05} = 8$, $\chi_{04} = 0$, $\chi_{25} = 1$, $\chi_{13} = 6$, $\chi_{24} = 8$, καὶ $\chi_{15} = 1$, καὶ ὅτι $\Gamma = \$\,1.140$ εἶναι τὸ μικρότερον κόστος, εἰς τὸ ὁποῖον δύνανται νὰ ἱκανοποιηθοῦν αἱ ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος.

Ἕνεκα τῆς εἰδικῆς ἰδιότητος τῆς μήτρας περιορισμῶν εἰς τὰ προβλήματα μεταφορᾶς — ἡ μήτρα ἀποτελεῖται μόνον ἀπὸ μηδενικὰ καὶ μονάδας — ἡ μέθοδος simplex ἀποτελεῖ ἀλγόριθμον σημαντικῶς ὀλιγώτερον ἐπαρκῆ ἀρκετῶν ἄλλων μεθόδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀναπτυχθῇ καὶ αἱ ὁποῖαι ἐκμεταλλεύονται πλήρως τὴν ἰδιότητα ταύτην.

Τὸ πρόβλημα ἀναθέσεως ἐργασίας

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀποτελεῖ εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ προβλήματος μεταφορᾶς καὶ προέρχεται ἐκ τούτου ὅταν $\rho_\kappa = s_i = 1$ καὶ $\mu = \nu$. Τὸ πρόβλημα ἀναθέσεως ἐργασίας ἐκφράζεται συνήθως ὡς ἑξῆς: Ὑπάρχουν ν εἴδη ἐργασίας καὶ ν ἐργάται νὰ τὰ ἀναλάβουν. Ἡ «τιμὴ» (ἢ τὸ κόστος) τῆς ἀναθέσεως εἰς τὸν ἐργάτην κ τῆς ἐργασίας ι εἶναι $\alpha_{\iota\kappa}$ ($\alpha_{\iota\kappa} > 0$ ἂν ἀντιπροσωπεύῃ ἀξίαν). Τὸ πρόβλημα ἔγκειται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν ν προσλήψεων, αἱ ὁποῖαι θὰ μεγιστοποιήσουν τὴν ὁλικὴν ἀξίαν (ἢ θὰ ἐλαχιστοποιήσουν τὸ ὁλικὸν κόστος). Διὰ παράδειγμα, θεωρήσατε τὴν κάτωθι διάταξιν εἰς τὴν ὁποίαν οἱ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ νὰ δείξουν τὰς «ἐκτιμήσεις» τῶν ἀνδρῶν Α,Β,Γ διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἔργων 1,2,3. Π.χ. θὰ ἐκόστιζε \$7 κατὰ τμῆμα ἐργασίας ἂν τὸ τμῆμα τοῦτο τῆς ἐργασίας 1 ἀνελαμβάνετο ὑπὸ τοῦ Α. Τὸ τμῆμα θὰ κοστίσῃ \$ 6 ἂν ὁ Β ἀναλάβῃ τὴν ἐργασίαν 1 καὶ \$ 12 ἂν ἡ αὐτὴ ἐργασία ἀνατεθῇ εἰς τὸν Γ. Ὁ πίναξ 4 δεικνύει ὅλας τὰς δυνατὰς ἀναθέσεις ἐργασίας καὶ τὰ «ἀθροίσματα ἐκτιμήσεων» τὰ προκύπτοντα ἐξ ἑκάστης. Ἡ περίπτωσις 3 εἶναι ἡ ἐλαχιστοποιοῦσα τὸ ὁλικὸν κόστος κατασκευῆς τῶν τριῶν τμημάτων (ἀναθέσεως τῶν τριῶν ἐργασιῶν).

Ἄνδρας \ Ἐργασία	1	2	3
Α	7	3	2
Β	6	4	1
Γ	12	8	6

Πίναξ 4

Ἀριθμ. ἀναθέσεως ἐργασίας	Ἐργασία 123	Ἄθροισμα ἐκτιμήσεων
1	ΑΒΓ	$7+4+6=17$
2	ΑΓΒ	$7+8+1=16$
3	ΒΑΓ	$6+3+6=15$
4	ΒΓΑ	$6+8+2=16$
5	ΓΑΒ	$12+3+1=16$
6	ΓΒΑ	$12+4+2=18$

Αὐτὸ διασαφηνίζει ἕνα τρόπον λύσεως τοῦ προβλήματος ἀναθέσεως ἐργασίας.

Ἂν ἔχωμεν τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῆς ἀρίστης ἀναθέσεως ἔργων εἰς προσωπικόν, τότε δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν «κατάλογον» ὅλων τῶν δυνατῶν συνδυασμῶν καὶ ἐκ τούτου νὰ ἐκλέξωμεν τὸν ἀρίστως ἱκανοποιοῦντα τὸ κριτήριον συνδυασμόν. Μολονότι ἁπλοῦν ἀποτελεῖ ἔργον νὰ σχηματίσωμεν μίαν διάταξιν 3×3, παρομοία διάταξις 20×20 θὰ ἀπῄτει ἐκτίμησιν 4.3×10^{18} ἀναθέσεων. Τοῦτο θὰ ἀπῄτει ἔτη πρὸς συμπλήρωσίν του ἀκόμη καὶ μὲ ὑπολογιστὴν ὑψηλῆς ταχύτητος. Γενικώτερον, ἀπὸ διάταξιν $\nu \times \nu$ εἶναι δυνατοὶ $\nu!$ ἀναθέσεις (συνδυασμοὶ) καὶ τὸ $\nu!$ εἶναι, βεβαίως, πολὺ μέγα ἀκόμη καὶ διὰ σχετικῶς μικρὸν ν.

Πρέπει νὰ παρατηρηθῇ ὅτι εἰς τὸν ἄριστον συνδυασμὸν ἀνωτέρω, τὸν 3, μόνον εἰς ἄνδρας ἀναλαμβάνει τὸ ἔργον εἰς τὸ ὁποῖον ἁρμόζει καλύτερον, (ὁ Γ), καὶ ὅτι ὁ Β ἀναλαμβάνει τὸ ἔργον διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ὀλιγώτερον κατάλληλος (ἔχει τὸ ὑψηλότερον κόστος διὰ τὸ ἔργον 1). Εἰς ἀρίστας λύσεις τῶν προβλημάτων ἀναθέσεως ἐργασίας δὲν εἶναι σπάνιον νὰ ἔχωμεν ἀρκετὰ πρόσωπα εἰς ἔργα μὴ κατάλληλα δι' αὐτά, καὶ διὰ μίαν μεγάλην κατηγορίαν προβλημάτων προκύπτει ὅτι ἂν ἕκαστος ἄνδρας ἀναλαμβάνῃ τὸ ἔργον διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ πλέον κατάλληλος, τότε ὁ συνδυασμὸς ἀναθέσεως τῶν ἔργων δὲν εἶναι ἄριστος.

Δύναται νὰ κατανοηθῇ ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος ὅτι ἡ εὕρεσις ἀρίστης ἀναθέσεως ἔργου εἶναι ἁπλῶς ζήτημα εὑρέσεως ἀρίστου συνδυασμοῦ ἢ διευθετήσεως, οὕτως ἡ ἔννοια τοῦ ***συνδυασμοῦ*** εἶναι σοβαρὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ προβλήματος ἀναθέσεως ἔργου. Ἡ ἔννοια αὕτη εἶναι προφανὴς ἔτι μᾶλλον ὅταν τὸ τοιοῦτον πρόβλημα ἐκφράζεται διὰ ***συνδυαστικῶν μητρῶν*** (permutation matrices). Ἡ συνδυαστικὴ μήτρα εἶναι τετραγωνικὴ μήτρα, ἑκάστη σειρὰ καὶ ἑκάστη στήλη τῆς ὁποίας περιέχει τὸν ἀριθμὸν 1 καὶ μηδενικὰ παντοῦ ἀλλοῦ. Αἱ κάτωθι, παραδείγματος χάριν, συνιστοῦν τὸ σύνολον ὅλων τῶν συνδυαστικῶν μητρῶν 3×3:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ἑτέρα μία ἔννοια ἐκ τῆς θεωρίας τῶν μητρῶν εἶναι ἀπαραίτητος πρὶν προβῶμεν εἰς διαζευκτικὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος, ἡ ἔννοια τοῦ ***ἴχνους*** (trace) μιᾶς τετραγωνικῆς μήτρας. Ἴχνος τετραγωνικῆς μήτρας εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων τῆς κυρίας αὐτῆς διαγωνίου.

Διὰ νὰ ἴδωμεν τίνι τρόπῳ χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸ πρόβλημα ἀναθέσεως ἔργου αἱ συνδυαστικαὶ μῆτραι καὶ τὰ ἴχνη τῶν μητρῶν, ἂς θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς κόστους εἰς τὴν διάταξιν τῆς σελ. 108 ὡς τετραγωνικὴν μήτραν. Ἂς καλέσωμεν ταύτην A καὶ ἂς πολλαπλασιάσωμεν τὴν A εἰς τὰ δεξιὰ διαδοχικῶς ἐπὶ ἑκάστην τῶν συνδυαστικῶν 3×3 μητρῶν P_i ($i = 1, \ldots, 6$) ἀνωτέρω, καὶ ἂς προσδιορίσωμεν μετὰ ταῦτα τὸ ἴχνος ἑκάστης τῶν μητρῶν - γινομένων AP_i.

Ἀθροίσματα ἐκτιμήσεων

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{ἴχνος} = 7 + 4 + 6 = 17 \qquad (\text{ἀνάθεσις } 1).$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 8 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

ἴχνος $= 3 + 6 + 6 = 15$ (ἀνάθεσις 3).

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 12 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

ἴχνος $= 7 + 1 + 8 = 16$ (ἀνάθεσις 2).

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

ἴχνος $= 2 + 4 + 12 = 18$ (ἀνάθεσις 6).

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \\ 8 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

ἴχνος $= 3 + 1 + 12 = 16$ (ἀνάθεσις 5).

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 6 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

ἴχνος $= 2 + 6 + 8 = 16$ (ἀνάθεσις 4).

Τὰ ἀνωτέρω εὑρεθέντα ἴχνη πρέπει νὰ συγκριθοῦν μὲ τὴν στήλην τοῦ ἀθροίσματος ἐκτιμήσεων τοῦ πίνακος 4. Εἶναι, ἐξαιρουμένης τῆς σειρᾶς ἐμφανίσεως, τὰ αὐτά.

Ἡ γενικὴ ἔκφρασις τοῦ προβλήματος ἀναθέσεως ἐργασίας μέσῳ συνδυαστικῶν μητρῶν εἶναι ἁπλῶς καὶ μόνον γενίκευσις τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης ἰδέας. Ἔστωσαν P τὸ σύνολον ὅλων τῶν $\nu \times \nu$ συνδυαστικῶν μητρῶν καὶ $A = (\alpha_{\iota\kappa})$ μήτρα τοιαύτη ὥστε $\alpha_{\iota\kappa}$ νὰ εἶναι ἡ ἀξία (ἢ τὸ κόστος) τῆς ἀναθέσεως τοῦ ἔργου ι εἰς τὸν ἐργάτην κ. Τότε τὸ πρόβλημα τῆς ἀρίστης ἀναθέσεως τοῦ ἔργου εἶναι ἡ εὕρεσις τῆς συνδυαστικῆς μήτρας P^* τοιαύτης ὥστε τὸ ἴχνος τῆς AP^* νὰ εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

Ἡ νέα αὐτὴ ἔκφρασις τοῦ προβλήματος, μονονότι ἐνδιαφέρουσα, δὲν ἁπλοποιεῖ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, καὶ εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν οὐδόλως εὐχερεστέρα θὰ ἦτο ἡ λύσις διὰ τὸν λόγον ὅτι περικλείονται ν! συνδυαστικαὶ μῆτραι. Εὐτυχῶς, ὑπάρχουν εὐχερεῖς ὑπολογιστικαὶ μέθοδοι διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων ἀναθέσεως ἔργου ἀλλὰ ἐπειδὴ ἡ ἐξέτασις αὐτῶν θὰ ἀπήτει ἐπιπρόσθετον μαθηματικὸν ὑπόβαθρον, δὲν θὰ προβῶμεν ἐδῶ εἰς τὴν ἐξέτασίν των.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5ον

ΔΥΑΔΙΚΟΤΗΣ

Τὸ δυαδικὸν πρόβλημα

Στενὴν σχέσιν πρὸς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχει ἓν ἑτε-
ρον πρόβλημα, ὁμοίως γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, καλούμενον τὸ **δυαδικὸν** τοῦ
δοθέντος προβλήματος. Διακρίνομεν ἐνίοτε τὰ δύο προβλήματα μεταξύ των, κα
λοῦντες τὸ ἓν τὸ **ἀρχικὸν** (primal) καὶ τὸ δεύτερον τὸ **δυαδικὸν** (dual). Δὲν
ἔχει πάντως σημασίαν ποῖον πρόβλημα ὁρίζεται ὡς ἀρχικόν, διότι δύναται νὰ
δειχθῇ ὅτι τὸ δυαδικὸν τοῦ δυαδικοῦ εἶναι τὸ ἀρχικόν. Ἐπὶ πλέον, ἀρίστη λύσις
εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα παρέχει πληροφορίας περὶ ἀρίστης λύσεως εἰς τὸ δυα-
δικόν, καί, ἂν ἓν ἀρχικὸν πρόβλημα εἶναι ἑρμηνεύσιμον, τότε καὶ τὸ δυαδικόν του
εἶναι ἑρμηνεύσιμον.

Διὰ νὰ ἀποκτήσωμεν γνώσεις τινὰς περὶ δυαδικότητος, ἐπιστρέφομεν εἰς ἓν
προηγουμένως (Κεφ. 3) ἐξετασθὲν πρόβλημα, τὸ τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς γραμ-
μικῆς συναρτήσεως $\varphi\ (\chi_1, \chi_2) = \chi_1 + 5\chi_2$

ὡς πρὸς (1) $5\chi_1 + 6\chi_2 \leqq 30$

(2) $3\chi_1 + 2\chi_2 \leqq 12$

(3) $\chi_1 \geqq 0$

(4) $\chi_2 \geqq 0$.

Ὡς ἀρίστη λύσις εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶχε προσδιορισθῇ γεωμετρικῶς τὸ
σημεῖον $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ καὶ ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς φ, 25. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἐνδιαφε-
ρόμεθα νὰ ***ἀποδείξωμεν*** ὅτι $\varphi\,(\chi_1, \chi_2) = 25$ εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς
$\varphi\,(\chi_1, \chi_2)$ ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμούς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι θέλομεν νὰ
ἀποδείξωμεν ὅτι διὰ πᾶν διάνυσμα $\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}$ εἰς τὸ σύνολον δυνατῶν λύσεων

$$\varphi = \chi_1 + 5\chi_2 \leqq 25,$$

ἢ ἰσοδυνάμως, διὰ πᾶν διάνυσμα εἰς τὸ σύνολον πραγματοποιησίμων λύσεων

$$\chi_1 + 5\chi_2 - 25 \leqq 0 .$$

Εἷς τρόπος ἀποδείξεως ὅτι $\chi_1 + 5\chi - 25$ οὐδέποτε εἶναι θετικόν, εἶναι
νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ποσότης αὕτη εἶναι δυνατὸν νὰ γραφῇ ὡς μὴ ἀρνητικὸς γραμ-
μικὸς συνδυασμὸς ποσοτήτων, αἱ ὁποῖαι οὐδέποτε δύνανται νὰ εἶναι θετικαί. Εὐτυ-
χῶς δυνάμεθα πρὸς τοῦτο νὰ χρησιμοποιήσωμεν πληροφορίας περιεχομένας εἰς
τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Συγκεκριμένως αἱ
(1) — (4) δηλοῦν ὅτι αἱ κάτωθι ποσότητες δὲν δύνανται ποτὲ νὰ εἶναι θετικαί :

$$\begin{aligned} 5\chi_1 + 6\chi_2 - 30 &\leq 0 \\ 3\chi_1 + 2\chi_2 - 12 &\leq 0 \\ -\chi &\leq 0 \\ -\chi &\leq 0. \end{aligned}$$

Συνεπῶς, ἡ ἐπαλήθευσις τοῦ ὅτι $\varphi = 25$ εἶναι μέγιστον μᾶς ἄγει εἰς ἐξέτασιν τῶν συνθηκῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας ὑπάρχουν μὴ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ υ_i ἱκανοποιοῦντες

$$\begin{aligned} \chi_1 + 5\chi_2 - 25 &= \upsilon_1(5\chi_1 + 6\chi_2 - 30) + \upsilon_2(3\chi_1 + 2\chi_2 - 12) + \upsilon_3(-\chi_1) + \\ &+ \upsilon_4(-\chi_2) = (5\upsilon_1 + 3\upsilon_2 - \upsilon_3)\chi_1 + (6\upsilon_1 + 2\upsilon_2 - \upsilon_4)\chi_2 - (30\upsilon_1 + 12\upsilon_2). \end{aligned}$$

Ἐξισοῦντες τοὺς ἀντιστοίχους συντελεστὰς λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} 5\upsilon_1 + 3\upsilon_2 - \upsilon_3 &= 1 \\ 6\upsilon_1 + 2\upsilon_2 - \upsilon_4 &= 2 \\ 30\upsilon_1 + 12\upsilon_2 &= 25, \end{aligned}$$

ἤ, ἀφοῦ τὰ υ_i πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικά,

$$\begin{aligned} 5\upsilon_1 + 3\upsilon_2 &\geqq 1 \\ 6\upsilon_2 + 2\upsilon_2 &\geqq 5 \\ \upsilon_1 &\geqq 0 \\ \upsilon_2 &\geqq 0 \\ 30\upsilon_1 + 12\upsilon_2 &= 25 \end{aligned}$$

Δυνάμεθα, συνεπῶς, νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι μεγ $\varphi = 25$ ἂν ὑπάρχουν μεταβληταὶ υ_1 καὶ υ_2 ἱκανοποιοῦσαι τὸ ἀμέσως ἀνωτέρω σύστημα.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι κατ' οὐσίαν τὸ **δυαδικὸν** τοῦ εἰς τὰς (1) — (4) ἐκφραζομένου προβλήματος, καὶ εἷς τρόπος καταγραφῆς τοῦ δυαδικοῦ εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

$$\text{νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ } \xi = 30\upsilon_1 + 12\upsilon_2$$

ὑποκειμένη εἰς

$$(\upsilon_1, \upsilon_2) \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geqq (1{,}5)$$

$$(\upsilon_1, \upsilon_2) \geqq 0.$$

Πάλιν, ἂν θελήσωμεν νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι $\xi = 25$ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ξ ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμούς, θὰ ἀχθῶμεν εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα.

Γενικώτερον, τὰ οὐσιώδη χαρακτηριστικὰ τῆς σχέσεως μεταξὺ ἀρχικῶν καὶ δυαδικῶν προβλημάτων ἐννοοῦνται ὀπτικῶς καλύτερον ἂν χρησιμοποιηθῇ συμβολισμὸς μητρῶν ὡς ἀκολούθως:

Ἀρχικὸν	*Δυαδικὸν*
$\text{μεγ} \quad \varphi = \Gamma X$	$\text{ἐλαχ} \quad \xi = \Psi B$
ὡς πρὸς	ὡς πρὸς
$AX \leqq B$	$\Psi A \geqq \Gamma$
$X \geqq O$	$\Psi \geqq O,$

ἔνθα Α εἶναι μ × ν, Χ εἶναι ν × 1, Γ εἶναι 1 × ν, καὶ Ψ εἶναι 1 × μ. Συγκεκριμένως, τὸ διάνυσμα τῶν συντελεστῶν εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν τοῦ ἀρχικοῦ ἐμφανίζεται εἰς τὸ δυαδικὸν ὡς τὸ διάνυσμα · στήλη τῶν σταθερῶν, καὶ τὸ διάνυσμα · στήλη τῶν σταθερῶν Β εἰς τὸ ἀρχικόν, ἐμφανίζεται ὡς τὸ διάνυσμα συντελεστῶν εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν τοῦ δυαδικοῦ. Ἡ μήτρα Α εἶναι ἡ μήτρα τῶν περιορισμῶν εἰς ἀμφότερα τὰ προβλήματα (1).

Τὰ κάτωθι θεωρήματα περιλαμβάνουν μαθηματικὴν ὕλην ἐπὶ τῆς δυαδικότητος.

Θεώρημα 1. Ἂν Χ* καὶ Ψ* εἶναι δυναταὶ λύσεις τῶν σχετικῶν προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, τότε $\Gamma X^* \leqslant \Psi^* B$.

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ αἱ Χ* καὶ Ψ* εἶναι δυναταί,

$$AX^* \leqslant B$$
$$\Psi^* A \geqslant \Gamma .$$

Ἐπίσης, ἀφοῦ αἱ Χ* καὶ Ψ* εἶναι μὴ ἀρνητικαί,

$$\Psi^* AX^* \leqslant \Psi^* B$$
$$\Psi^* AX^* \geqslant \Gamma X^* ,$$

καὶ

$$\Gamma X^* \leqslant \Psi^* B .$$

Θεώρημα 2. Ἂν Χ* καὶ Ψ* εἶναι δυναταὶ λύσεις καὶ ἂν $\Gamma X^* = \Psi^* B$, τότε Χ* καὶ Ψ* εἶναι ἄρισται.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἀφοῦ Χ* καὶ Ψ* εἶναι δυναταί,

$$\Gamma X \leqslant \Psi^* B,$$

ἔνθα Χ εἶναι τυχοῦσα δυνατὴ λύσις εἰς τὸ ἀρχικόν. Ἐπίσης,

$$\Psi^* B = \Gamma X^*,$$

---

1. Τὸ δυαδικὸν δύναται ἐπίσης νὰ γραφῇ ὡς $A'\Psi \geqq \Gamma$, $\Psi \geqq O$, ἐλαχ $\xi = B'\Psi$. Εἰς τὸν συμβολισμὸν αὐτὸν τὸ δυαδικὸν διάνυσμα Ψ εἶναι στήλη καὶ ἡ μήτρα τῶν περιορισμῶν τοῦ δυαδικοῦ εἶναι ἡ ἐνηλλαγμένη τῆς μήτρας περιορισμῶν τοῦ ἀρχικοῦ. Τὰ ἀποτελέσματα εἶναι τὰ αὐτὰ εἴτε ὡς σειρὰ θεωρήσωμεν τὸ διάνυσμα Ψ εἴτε ὡς στήλη. Ἐκλέγομεν τὸ πρῶτον διότι εἶναι κατά τινα τρόπον ἁπλούστερος συμβολισμὸς διὰ τοὺς παρόντας σκοπούς. Εἰς ἑπομένην παράγραφον ὅταν ἀσχολούμεθα μὲ τὸ δυαδικὸν τοῦ προβλήματος ἀποθηκεύσεως, θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν συμβολισμὸν τῆς ἐνηλλαγμένης εἰς τὸ δυαδικόν.

ἑπομένως

$$\Gamma X \leq \Gamma X^*$$

καὶ ἡ X^* εἶναι ἀρίστη. Παρόμοιον ἐπιχείρημα θὰ ἀποδείξῃ ὅτι καὶ ἡ Ψ^* εἶναι ἀρίστη.

Αἱ ἀποδείξεις τῶν ἀκολούθων σπουδαίων θεωρημάτων ἀπαιτοῦν ἰσχυρότερον μαθηματικὸν ἐξοπλισμὸν τοῦ ἐμφανιζομένου εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο, οὕτω παρατίθενται ἐδῶ ἄνευ ἀποδείξεως.

Θεώρημα 3. (Θεώρημα δυαδικότητος). Ἓν δυνατὸν διάνυσμα X^* εἶναι ἄριστον διάνυσμα διὰ τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ὑπάρχῃ ἓν δυνατὸν διάνυσμα Ψ^* διὰ τὸ δυαδικόν, τοιοῦτον ὥστε,

$$\Gamma X^* = \Psi^* B.$$

Θεώρημα 4. (Θεώρημα ὑπάρξεως). Ἀναγκαία καὶ ἐπαρκὴς συνθήκη διὰ τὴν ὕπαρξιν ἀρίστης λύσεως εἰς ἓν (καὶ συνεπῶς εἰς ἀμφότερα) τῶν προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ ὕπαρξις δυνατῶν λύσεων εἰς ἀμφότερα τὰ προβλήματα.

Τὸ θεώρημα δυαδικότητος εἶναι λίαν ἀξιοπρόσεκτον. Δηλοῖ μεταξὺ τῶν ἄλλων ὅτι ἂν καὶ τὸ ἀρχικὸν καὶ τὸ δυαδικὸν πρόβλημα ἔχουν ἄριστα διανύσματα, τότε διὰ τὰ διανύσματα αὐτὰ αἱ δύο γραμμικαὶ συναρτήσεις λαμβάνουν ἴσας τιμάς:

$$\text{μεγ}\ \varphi = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \gamma_\kappa \chi_\kappa^* = \sum_{\iota=1}^{\mu} \beta_\iota \upsilon_\iota^* = \text{ἐλαχ}\ \xi\,.$$

Παρατηρήσατε ὅτι X^*, ἀρίστη λύσις εἰς τὸ ἀρχικόν, εἶναι $\nu \times 1$ καὶ ὅτι Ψ^* εἶναι $1 \times \mu$ διάνυσμα. Τὸ θεώρημα δυαδικότητος, βεβαίως, δὲν λέγει ὅτι τὰ διανύσματα ταῦτα εἶναι ἴσα· λέγει ὅτι ἡ τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ γραμμικὴ συνάρτησις διὰ X^* εἰς τὸ ἀρχικὸν εἶναι ἴση πρὸς τὴν τιμὴν τὴν λαμβανομένην ὑπὸ τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως εἰς τὸ δυαδικὸν διὰ Ψ^*. Ἡ ἰσότης αὕτη ἔχει πολὺ σπουδαίας πρακτικὰς ἑρμηνείας ἐν σχέσει πρὸς τὰς μεταβλητὰς τοῦ δυαδικοῦ, ὡς ἐντὸς ὀλίγου θὰ ἴδωμεν.

Οἰκονομικὴ ἑρμηνεία τῆς δυαδικότητος

Ὑποτεθείσθω ὅτι μία ἐπιχείρησις ἔχει μ εἰσροὰς καὶ ν ἐκροὰς $X_1, \ldots, X_\nu$, ἔνθα

χ_κ = ποσότης ἐκροῆς X_κ,

ρ_κ = καθαρὰ ἔσοδα κατὰ μονάδα τοῦ X_κ,

$\alpha_{\iota\kappa}$ = ποσότης εἰσροῆς ι ἀπαιτουμένη πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐκροῆς (παραγομένου προϊόντος) X_κ,

β_ι = συνολικὸν ποσὸν διαθεσίμου εἰσροῆς ι.

Τότε πρόβλημα μεγιστοποιήσεως διὰ τὴν ἐπιχείρησιν εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς ὁλικῆς καθαρᾶς προσόδου

(5) $$\text{OKΠ (TNR)} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \rho_\kappa \chi_\kappa$$

ὑποκειμένης εἰς

(6) $$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\iota\kappa}\chi_\kappa \leq \beta_\iota \qquad \chi_\kappa \geq 0$$

← Ἐν λέξεσιν: ἡ ὁλικὴ ποσότης τῆς εἰσροῆς ι χρησιμοποιουμένη εἰς τὴν παραγωγὴν τῶν $X_1, \ldots, X_\nu$ πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς τὴν ὁλικὴν διαθέσιμον ποσότητα τῆς εἰσροῆς ι.

Τὸ δυαδικὸν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ

(7) $$\sum_{\iota=1}^{\mu} \beta_\iota \upsilon_\iota$$

ὡς πρὸς

(8) $$\sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\iota\kappa} \upsilon_\iota \geq \rho_\kappa \qquad (\kappa = 1, \ldots, \nu)$$
$$\upsilon_\iota \geq 0 .$$

Ἐκ τοῦ θεωρήματος 1 γνωρίζομεν ὅτι

(9) $$\sum_\kappa \rho_\kappa \chi_\kappa \leq \sum_\iota \beta_\iota \upsilon_\iota$$

καὶ ἐκ τοῦ θεωρήματος 3 ὅτι

(10) $$\text{μεγ} \sum_\kappa \rho_\kappa \chi_\kappa = \text{ἐλαχ} \sum_\iota \beta_\iota \upsilon_\iota .$$

Ἀφοῦ τὰ χ_κ καὶ β_ι ἐκφράζωνται μέσῳ μονάδων πραγματικῶν (φυσικῶν) καὶ ἀφοῦ τὰ ρ_κ ἐκφράζωνται μέσῳ χρηματικῶν μονάδων, ἄς εἴπωμεν δολλαρίων, τὰ υ_ι πρέπει ἐπίσης νὰ ἐκφρασθοῦν εἰς δολλάρια διὰ νὰ ἔχῃ ἡ (10) ἔννοιαν κατὰ τὴν ἑρμηνείαν. Ὑποτεθείσθω ὅτι ἡ διεύθυνσις ἐνδιεφέρετο διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀναλογίας κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὁλικὴ καθαρὰ πρόσοδος ἀποδίδεται εἰς ἑκάστην εἰσροήν. Τότε διὰ νὰ ἔχουν χρῆσιν τινὰ αἱ οὕτως ὑπολογιζόμεναι ἀξίαι ἢ τιμαὶ πρέπει νὰ ἱκανοποιηθοῦν δύο ἁπλαῖ ἀπαιτήσεις:

(α) ἡ ὁλικὴ ὑπολογιστικὴ ἀξία ὅλων τῶν εἰσροῶν δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὁλικῆς καθαρᾶς προσόδου τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῶν πωλήσεων τῶν ἐκροῶν (προϊόντων) — (δηλαδὴ πρέπει νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ διὰ τὰς εἰσροάς, αἱ ὁποῖαι ἐλαχιστοποιοῦν τὴν ὁλικὴν ὑπολογιστικὴν ἀξίαν ὅλων τῶν εἰσροῶν τῆς ἐπιχειρήσεως), καὶ

(β) πρέπει νὰ καταλογισθοῦν τιμαὶ εἰς τὰς εἰσροάς, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι μικρότεραι τῆς συνεισφορᾶς τῶν εἰσροῶν εἰς τὴν καθαρὰν πρόσοδον (ἄλλως δὲν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῶν εἰσροῶν κατὰ τὸν ἐπιθυμητὸν τρόπον).

Ἡ ἀπαίτησις (α) εἶναι ἑρμηνεία τῶν μαθηματικῶν ἐκφράσεων (9) καὶ (10).
Ἡ κ ἀνισότης τῆς (8),

$$\alpha_{1\kappa}\upsilon_1 + \alpha_{2\kappa}\upsilon_2 + \cdots + \alpha_{\mu\kappa}\upsilon_\mu \geqslant \rho_\kappa$$

σημαίνει ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν ποσοτήτων εἰσροῶν 1, · · ·, μ τῶν χρησιμοποιουμένων εἰς τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος X_κ δὲν εἶναι μικρότερον τῆς συνεισφορᾶς εἰς τὴν καθαρὰν πρόσοδον ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ X_κ καὶ ἀποτελεῖ ἐκ τούτου μαθηματικὴν ἔκφρασιν τῆς ἀπαιτήσεως (6).

Τοῦτο εἶναι ἐνδιαφέρον ἀποτέλεσμα διότι δηλοῖ ὅτι, ἂν θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν μεγίστην ὁλικὴν καθαρὰν πρόσοδον, εἴμεθα ἐλεύθεροι νὰ λύσωμεν ἓν φαινομενικῶς διάφορον πρόβλημα —τὸ πρόβλημα τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῆς ὁλικῆς ὑπολογιστικῆς ἀξίας ὅλων τῶν εἰσροῶν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Διὰ τοῦ θεωρήματος δυαδικότητος, ἀρίστη λύσις εἰς τὸ ἓν πρόβλημα ἄγει εἰς τὴν τιμὴν τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως εἰς τὸ ἀρχικόν, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμὴν τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ δυαδικὸν δι' ἀρίστην λύσιν εἰς τὸ δυαδικόν.

Γεωμετρία ἀναλύσεως δυαδικότητος καὶ εὐαισθησίας

Ἂς ἐξετάσωμεν δύο ἁπλᾶ προβλήματα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι τὸ δυαδικὸν τοῦ ἑτέρου :

νὰ μεγιστοποιηθῇ $\varphi = 7\chi_1 + 6\chi_2$	νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ $\xi = 3\upsilon_1 + 4\upsilon_2$
ὡς πρὸς	ὡς πρὸς
$2\chi_1 + \chi_2 \leqslant 3$	$2\upsilon_1 + \upsilon_2 \geqslant 7$
$\chi_1 + 4\chi_2 \leqslant 4$	$\upsilon_1 + 4\upsilon_2 \geqslant 16$
$\chi_1 \geqslant 0$	$\upsilon_1 \geqslant 0$
$\chi_2 \geqslant 0$	$\upsilon_2 \geqslant 0$.

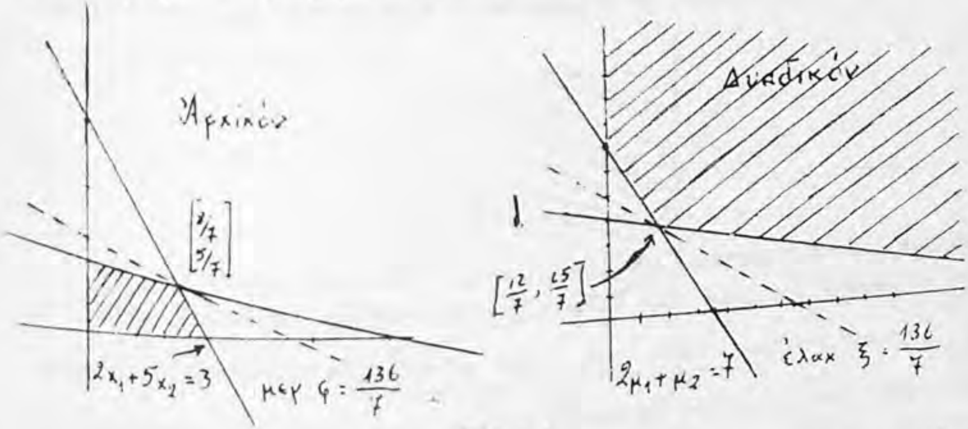
Τὸ σχῆμα 1 δεικνύει τὰς διαδικασίας ἀριστοποιήσεως καὶ τοῦ ἀρχικοῦ καὶ τοῦ δυαδικοῦ. Ἀρίστην λύσιν εἰς τὸ ἀρχικὸν ἀποτελεῖ τὸ διάνυσμα $\begin{bmatrix} 8/7 \\ 5/7 \end{bmatrix}$ καὶ ἀρίστην λύσιν εἰς τὸ δυαδικὸν ἀποτελεῖ τὸ διάνυσμα [12/7, 25/7]. Ἐπίσης,

$$\mu\epsilon\gamma\ \varphi = 7\,(8/7) + 16(5/7) = 136/7,$$
$$\grave{\epsilon}\lambda\alpha\chi\ \xi = 3\,(12/7) + 4(25/7) = 136/7,$$

ὁπότε ἔχομεν μεγ $\varphi =$ ἐλαχ ξ.

Εἰς τὸ ἀρχικὸν ἡ ἀριστοποίησις ἔχει κατεύθυνσιν «ἀπομακρυνομένην» τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων, καὶ εἰς τὸ δυαδικὸν ἡ ἀριστοποιοῦσα κατεύθυνσις εἶναι «πρὸς» τὴν ἀρχήν. Τὰ διανύσματα τῶν συντελεστῶν εἰς τὰς γραμμικὰς συναρτήσεις, [7, 16] καὶ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, καθορίζουν πλήρως τὰς κατευθύνσεις ἀριστοποιήσεως. Αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῆς φ, διὰ ποικίλας τιμὰς τῆς φ, εἶναι εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς τὸ [7, 16] ἢ πρὸς ἓν μονομετρικὸν πολλαπλάσιον τοῦ διανύσματος, καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῆς ξ εἶναι εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς ἓν μονομετρικὸν πολλαπλάσιον τοῦ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Ἐν ἄλλοις λόγοις, αἱ κλίσεις τῶν αποτελουσῶν τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν φ καὶ ξ εὐθειῶν προσδιορίζονται ἀπὸ τὰς συνιστώσας τῶν διανυσμάτων [7, 16] καὶ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, ἀντιστοίχως.

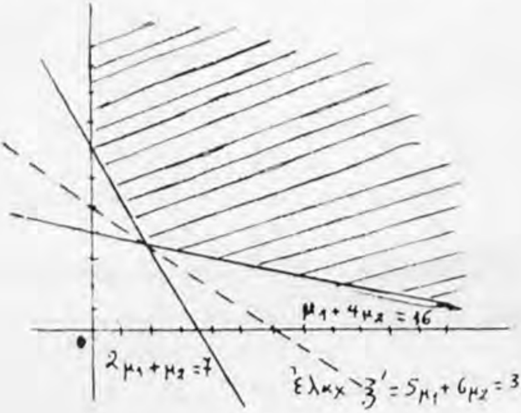
Αὕτη ἀποτελεῖ ἁπλῆν πλὴν ὅμως σπουδαίαν παρατήρησιν. Ὑποτεθείσθω ὅτι ἐπιθυμοῦμεν ν' ἀλλάξωμεν τὸ διάνυσμα - στήλη τῶν σταθερῶν B εἰς τὸ ἀρχι-



Σχῆμα 1.

κὸν (εἰς ἐφηρμοσμένον πρόβλημα, αἱ συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος τούτου πρέπει συνήθως νὰ ἐκτιμηθοῦν καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ εἴμεθα βέβαιοι διὰ τὴν ἀκρίβειαν τῆς ἐκτιμήσεως). Ἀφοῦ αἱ συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος αὐτοῦ ἐμφανίζωνται ὡς οἱ συντελεσταὶ εἰς τὴν ἔκφρασιν τῆς ξ, καὶ ἀφοῦ προσδιορίζουν τὴν κλίσιν τῆς γεωμετρικῶς ἀπεικονιζούσης τὴν ξ εὐθείας, ἡ μεταβολὴ τῶν συνιστωσῶν τοῦ διανύσματος σταθερῶν B εἰς τὸ ἀρχικὸν ἔχει τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μεταβολῆς τῆς κλίσεως τῆς εὐθείας τῆς ξ. Ἐπίσης, ἑκάστη τοιαύτη ἀλλαγὴ εἰς τὰς B δίδει νέον ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ νέον δυαδικὸν τοιοῦτον. Πάντως, καὶ τοῦτο ἔχει τὴν σπουδαιότητα, διὰ μίαν ὁμάδα μεταβολῶν τῶν B, δι' ἕκαστον τῶν προκυπτόντων δυαδικῶν προβλημάτων ἡ κλίσις τῆς εὐθείας τῆς ξ θὰ ἔχῃ μεταβληθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἕκαστον τοιοῦτον δυαδικὸν πρόβλημα θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ἄριστον ἄκρον σημεῖον [12/7, 25/7] ὡς τὸ πρῶτον ληφθὲν δυαδικὸν πρόβλημα. Δι' ἕκαστον τῶν νέων τούτων προβλημάτων δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν τὰς νέας τιμὰς τῶν B εἰς τὴν ἐξίσωσιν διὰ τὴν ξ, καί, ἀφοῦ ἡ ἀρίστη λύσις δὲν ἔχῃ μεταβληθῇ, δυνάμεθα ταχέως νὰ λάβωμεν καὶ τὸ μέγιστον τῆς φ καὶ τὸ ἐλάχιστον τῆς ξ διὰ τὸ νέον πρόβλημα ἄνευ λύσεως τῶν προβλημάτων ἐκ νέου. Ἐπὶ παραδείγματι, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι μεταβάλλομεν τὸ B ἀπὸ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ εἰς $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Ἡ συνάρτησις τοῦ δυαδικοῦ μεταβάλλεται ἀπὸ $\xi = 3\upsilon_1 + 4\upsilon_2$ εἰς $\xi' = 5\upsilon_1 + 6\upsilon_2$, καὶ διὰ $(\upsilon_1, \upsilon_2) = (12/7,\ 25/7)$ ἔχομεν $\xi' = 5\,(12/7) + 6\,(25/7) = 30$. Ἀπεικονίζομεν τώρα τὸ πρόβλημα γεωμετρικῶς εἰς τὸ σχῆμα 2 μὲ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ πρώτου ληφθέντος δυαδικοῦ καὶ μὲ $5\upsilon_1 + 6\upsilon_2 = 30$ διὰ $\upsilon_1 = 12/7$ καὶ $\upsilon_2 = 25/7$. Βλέπομεν ὅτι τὸ σημεῖον (12/7, 25/7) ἀποτελεῖ ἄριστον ἄκρον σημεῖον διὰ τὸ πρόβλημα τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῆς $\xi' = 5\upsilon_1 + 6\upsilon_2$ ὡς πρὸς τοὺς περιορισμοὺς τοῦ πρώτου ληφθέντος δυαδικοῦ προβλήματος.

Ἡ μεταβολὴ τῶν σταθερῶν εἰς τὸ ἀρχικόν, ἤ, ἀκριβέστερον, ἡ μεταβολὴ τῶν σταθερῶν εἰς παραμέτρους καὶ ἡ παρατήρησις τῶν ἀποτελεσμάτων ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν προβλημάτων, ἀρχικοῦ καὶ δυαδικοῦ, καλεῖται *ἀνάλυσις εὐαισθησίας* (sensitivity analysis). Ὅταν συνδυάσωμεν ταύτην μὲ ἑρμηνείαν ἐκτιμήσεως τοῦ δυαδικοῦ δυνάμεθα νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰς μεταβολὰς καὶ δυνάμεθα κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ ἀρχικὸν καὶ τὸ δυαδικὸν πρὸς ἐκτίμησιν διαζευκτι-



Σχ. 2

κῶν χρήσεων καὶ νὰ λάβωμεν προκαταβολικῶς ἀποφάσεις περὶ τῆς πραγματώσεως τῶν πραγματικῶν μεταβολῶν εἰς τὸ πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζομεν τὸ ὑπόδειγμα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Θὰ ἴδωμεν τοῦτο πληρέστερον ἀργότερα εἰς τὸ κείμενον τοῦ προβλήματος ἀποθηκεύσεως. Πρὸς τὸ παρὸν θὰ συνεχίσωμεν τὴν ἐξέτασιν μόνον τῶν βασικῶν χαρακτηριστικῶν τῆς ἀναλύσεως εὐαισθησίας.

Ἐπιστρέφοντες εἰς τὰ προβλήματα ἀνωτέρω, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπιθυμοῦμεν νὰ γνωρίζωμεν τὰ ὅρια ἐντὸς τῶν ὁποίων εἴμεθα ἐλεύθεροι νὰ μεταβάλλωμεν τὸ διάνυσμα - στήλη τῶν σταθερῶν B. Προκύπτει ὅτι ἔχομεν μεγάλην ἐλευθερίαν· δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν τὸ B παντοιοτρόπως, βεβαίως, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅτι δὲν θὰ «ξεφύγωμεν» ἀπὸ τὸ σημεῖον (12/7, 25/7). Γεωμετρικῶς, δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο θὰ ἔχῃ ἰσχὺν διὰ πᾶν διάνυσμα B τὸ ὁποῖον ἄγει εἰς δυαδικὴν συνάρτησιν ξ τῆς ὁποίας ἡ γεωμετρικὴ παράστασις εὑρίσκεται *μεταξὺ* τῶν εὐθειῶν - ὁρίων τῶν τεμνομένων εἰς τὸ σημεῖον (12/7, 25/7) ἢ τῆς ὁποίας ἡ γεωμετρικὴ ἀπεικόνησις συμπίπτει μὲ μίαν τῶν εὐθειῶν - ὁρίων. Διὰ νὰ ἴδωμεν τὴν ἔννοιαν τούτου ἂς ἴδωμεν τοὺς δυαδικοὺς περιορισμούς.

$$2\upsilon_1 + \upsilon_2 \geqq 7$$
$$\upsilon_1 + 4\upsilon_2 \geqq 16.$$

Λαμβάνομεν σύνορα τοῦ συνόλου λύσεως τοῦ δυαδικοῦ ἐκ τῶν ἐξισώσεων $2\upsilon_1 + \upsilon_2 = 7$ καὶ $\upsilon_1 + 4\upsilon_2 = 16$. Πρὸς ἁπλοποίησιν τῆς ἐξετάσεώς μας θὰ «μεταφράσωμεν» τὸ ὑπὸ κρίσιν ἄκρον σημεῖον εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων διὰ μετατοπίσεως τῶν εὐθειῶν - συνόρων παραλλήλως πρὸς ἑαυτὰς οὕτως ὥστε νὰ τέμνωνται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος. Αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν αὐτῶν τότε καθίστανται

(11) $$2\upsilon_1 + \upsilon_2 = 0$$

(12) $$\upsilon_1 + 4\upsilon_2 = 0\,.$$

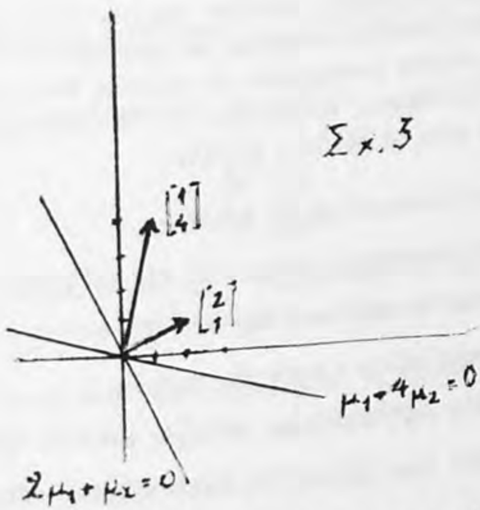
Ἂς γράψωμεν αὐτὰς ὡς

$$[\,\upsilon_1,\ \upsilon_2\,]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

καὶ

$$[\,\upsilon_1,\ \upsilon_2\,]\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἱκανοποιούντων τὴν (11) σημείων εἶναι ἀκριβῶς τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων πέρατος ὅλων τῶν πρὸς τὸ ὡρισμένον διάνυσμα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ὀρθογωνίων διανυσμάτων καὶ παρόμοια σχόλια ἰσχύουν δια τὸ $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Τὰ διανύσματα τῶν ὁποίων αἱ συνιστῶσαι ἀποτελοῦν τοὺς συντελεστὰς τῶν μεταβλητῶν τῆς (11) καὶ τῆς (12) καλοῦνται ***κανονικὰ*** διανύσματα, καὶ ἡ περίπτωσις δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 3, ὅπου ἕκαστον κανονικὸν διάνυσμα δεικνύεται κάθετον (ὀρθογώνιον) πρὸς τὴν κατάλληλον εὐθεῖαν - ὅριον. Τώρα ἂς θεωρήσωμεν τὸν ὑπὸ τῶν κανονικῶν διανυσμάτων ζευγνύμενον κῶνον. Πᾶν διάνυσμα εἰς τὸν



κῶνον αὐτὸν δύναται νὰ εἶναι τὸ κανονικὸν διάνυσμα πρὸς εὐθεῖαν τινὰ διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος. Ἐπὶ πλέον, διὰ πᾶν εἰς τὸν κῶνον κανονικὸν διάνυσμα, ἡ ἀντίστοιχος εὐθεῖα θὰ κεῖται *μεταξὺ* τῶν δύο εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπεικονίζονται εἰς τὸ σχ. 2. Ἐπειδὴ δυνάμεθα ἐπίσης νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς ἓν κανονικὸν διάνυσμα εἰς τὸν κῶνον εὐθεῖαν ὡς τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως εἰς ἓν (δυαδικὸν) πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, διὰ πᾶν διάνυσμα εἰς τὸν κῶνον αὐτὸν ἔχομεν πρόβλημα προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ ἄριστον ἀκραῖον σημεῖον ὡς τὸ κατὰ πρῶτον ληφθὲν (μεταφρασθὲν) πρόβλημά μας. Εὐκρινῶς, ἡ «μετάφρασις» καθ' ἑαυτὴ δὲν ἐπηρεάζει τὰς παρατηρήσεις ταύτας καὶ καταλήγομεν εἰς τοῦτο: δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν πᾶν διάνυσμα εἰς τὸν ἐν σχήματι 3 δεικνυόμενον κῶνον εἰς τὸ διάνυσμα-στήλη τῶν σταθερῶν B εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα. Δι' ἑκάστην τοιαύτην ἐκλογὴν τοῦ B λαμβάνομεν ἓν νέον δυαδικὸν πρόβλημα προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ ἄκρον σημεῖον ὡς τὸ πρωταρχικὸν δυαδικὸν πρόβλημα.

Ἕτερος τρόπος ἐξευρέσεως διανύσματος B τὸ ὁποῖον θὰ προκαλέσῃ τὴν ἀπομάκρυνσιν τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως ἀπὸ τὸ ἀκραῖον σημεῖον (12/7, 25/7) εἶναι ὁ ἀκόλουθος. Σχετιζόμενος μὲ ἕκαστον ἀκραῖον σημεῖον τοῦ συνόλου λύσεων εἶναι εἷς γραμμικὸς συνδυασμὸς διανυσμάτων-στηλῶν ἀπὸ τὴν μήτραν περιορισμῶν τοῦ δυαδικοῦ, καὶ εἰς τὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν τὰ ἀνεξάρτητα διανύσματα (διανύσματα βάσεως) ἔχουν ὡς θετικοὺς συντελεστὰς τὰς συνιστώσας τοῦ ἄκρου σημείου καὶ τὰ μένοντα διανύσματα ἔχουν μηδενικοὺς συντελεστάς. Ἂν ἐκλεγῇ διάνυσμα B ἐπιφέρον μεταβολὴν εἰς τὴν σύνθεσιν τῶν διανυσμάτων εἰς ἀρίστην βάσιν, τότε ἡ γραμμικὴ συνάρτησις πρέπει νὰ ἔχῃ μετατοπισθῇ εἰς ἓν νέον ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου λύσεων τοῦ δυαδικοῦ.

Μία ἐφαρμογὴ τῆς ἀναλύσεως δυαδικότητος καὶ εὐαισθησίας

Εἰς τὸ πρόβλημα ἀποθήκης ζητοῦμεν ἄριστον ὑπόδειγμα ἀγορῶν, ἀποθηκεύσεως καὶ πωλήσεων, δοθείσης ἀποθήκης μὲ ὡρισμένην δυναμικότητα καὶ ἀρχικὴν προμήθειαν ἑνὸς ἀγαθοῦ ὑποκειμένου εἰς γνωστὰς ἐποχιακὰς διακυμάνσεις τιμῆς καὶ κόστους. Αἱ ὑποθέσεις ἐξετέθησαν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον· πρὸς εὐκολίαν ὁρίζομεν ἐκ νέου τὰ σύμβολα ὡς ἑξῆς:

$B =$ ἡ ὡρισμένη δυναμικότης τῆς ἀποθήκης,

$A =$ ἀρχικὸν ἐξ ἀπογραφῆς ἀπόθεμα εἰς τὴν ἀποθήκην,

$\chi_j =$ ποσότης πρὸς ἀγορὰν κατὰ τὴν περίοδον j,

$\psi_j =$ ποσότης πρὸς πώλησιν κατὰ τὴν περίοδον j,

$p_j =$ κατὰ μονάδα τιμὴ πωλήσεως ἐν ἰσχύι κατὰ τὴν περίοδον j,

$\gamma_j =$ κατὰ μονάδα τιμὴ ἀγορᾶς (ἢ κατὰ μονάδα κόστος) ἐν ἰσχύι κατὰ τὴν περίοδον j.

Τὸ πρόβλημα δύναται νὰ γραφῇ ὡς

(13) νὰ μεγιστοποιηθῇ $\pi = \sum_{j=1}^{\nu} -\gamma_j \chi_j + \sum_{j=1}^{\nu} p_j \psi_j$

$$
= [-\gamma_1, \cdots, -\gamma_\nu, \rho_1, \cdots, \rho_\nu] \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \\ \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_\nu \end{bmatrix} = \rho'\lambda
$$

ὡς πρὸς τοὺς περιορισμοὺς

$$
(14) \qquad \begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & -1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \chi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi \\ \psi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi \end{bmatrix}
\leqq
\begin{bmatrix} B-A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B-A \\ A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A \end{bmatrix}
$$

δι' ἅπαντα τὰ μὴ ἀρνητικὰ διανύσματα λ. Βραχύτερον τὸ πρόβλημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς

(15) $\qquad$ νὰ μεγιστοποιηθῇ $\pi = \rho'\lambda$

ὡς πρὸς

(16) $\qquad M\lambda \leqq \beta$

(17) $\qquad \lambda \geqq 0$

ἔνθα M ἡ ἀνωτέρω μήτρα 2ν ἐπὶ 2ν, β τὸ διάνυσμα - στήλη τῶν σταθερῶν ὅρων, ρ' καὶ λ τὰ διάνυσμα - γραμμὴ καὶ διάνυσμα - στήλη, ἀντιστοίχως, τὰ ἐμφανιζόμενα εἰς τὴν (13).

Τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ δυαδικὸν τοῦ προβλήματος (15), (16) καὶ (17) ἔχει ὡς ἀκολούθως:

(18) $\qquad$ νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ $E = \omega'\beta$

ὡς πρὸς

(19) $\qquad M'\omega \geqq \rho$

(20) $\qquad \omega \geqq 0$

ἔνθα M' ἡ ἐνηλλαγμένη τῆς μήτρας εἰς τὴν (14) καὶ ἔνθα τὸ διάνυσμα - στήλη ω ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς μεταβλητὰς τοῦ δυαδικοῦ. Ἂς ὁρίσωμεν

$$\omega = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_\nu \\ \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_\nu \end{bmatrix}$$

καὶ τὸ δυαδικὸν πρόβλημα εἶναι

νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ

$$E = [\,\tau_1, \cdots, \tau_\nu, \mu_1, \cdots, \mu_\nu\,] \begin{bmatrix} B-A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B-A \\ A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A \end{bmatrix} = \omega'\beta$$

ὡς πρὸς τοὺς περιορισμοὺς

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & -1 & \ldots & -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_\nu \\ \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_\nu \end{bmatrix} \geqq \begin{bmatrix} -\gamma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\gamma_\nu \\ \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_\nu \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\omega \geqq 0 .$$

Τὸ δυαδικὸν δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς μέσῳ ἀθροιστικῶν συμβόλων,

(22) νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ $E = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (B-A)\,\tau_\kappa + \sum_{\kappa=1}^{\nu} A\mu_\kappa$

ὡς πρὸς

(23) $$\sum_{\iota=\kappa}^{\nu} \tau_\iota - \sum_{\iota=\kappa+1}^{\nu} \mu_\iota \geqq -\gamma_\kappa \qquad (\kappa = 1, \ldots, \nu)$$

(24) $$-\sum_{\iota=r}^{\nu} \tau_\iota + \sum_{\iota=r}^{\nu} \mu_\iota \geqq \rho_r \qquad (r = 1, \ldots, \nu)$$

(25) $$\left.\begin{array}{l} \tau_\iota \geqq 0 \\ \mu_\iota \geqq 0 \end{array}\right\} (\iota = 1, \ldots, \nu) \quad (2).$$

Ἀμφότερα τὰ προβλήματα, ἀρχικὸν καὶ δυαδικὸν δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν μέσῳ τοῦ κάτωθι διαγράμματος :

ω \ λ	χ_1	…	χ_κ	…	χ_ν	ψ_1	…	ψ_r	…	ψ_ν	Ὅρος β	
τ_1	1	…	0	…	0	−1	…	0	…	0	B−A	Καθαρὰ ἀποθήκευσις
.	.										.	
τ_κ	1	…	…	…	0	−1	…	…	…	0	B−A	
.	.										.	
τ_ν	1	…	1	…	1	−1	…	−1	…	−1	B−A	
.												
μ_1	0	…	0	…	0	1	…	…	…	0	A	Πωλήσεις
.											.	
μ_r	−1	…	…	…	0	1	…	…	…	0	A	
.											.	
μ_ν	−1	…	…	…	0	1	…	…	…	1	A	
ρ	$-\gamma_1$	…	$-\gamma_r$	…	$-\gamma_\nu$	ρ_1	…	ρ_r	…	ρ_ν		

2) Ὑποδεικνύεται εἰς τὸν ἀναγνώστην νὰ ἐπαληθεύσῃ ὅτι ἡ (23) διὰ $\kappa = 1$ καὶ $\kappa = 2$ καὶ ἡ (24) διὰ $r = 1$ καὶ $r = 2$ δύνανται νὰ ληφθοῦν ἐκ τῆς (21).

Τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα δύναται νὰ σχηματισθῇ ἀπὸ τὰς σειρὰς καὶ τὸ δυαδικὸν ἀπὸ τὰς στήλας. Ἐπὶ παραδείγματι, ὁ πρῶτος καὶ οἱ διαδοχικοὶ περιορισμοὶ εἰς τὸ ἀρχικὸν δύνανται νὰ σχηματισθοῦν ἂν λάβωμεν τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς πρώτης γραμμῆς καὶ δευτέρας γραμμῆς, κλπ., καὶ ὁ πρῶτος καὶ οἱ διαδοχικοὶ περιορισμοὶ τοῦ δυαδικοῦ δύνανται νὰ σχηματισθοῦν ἂν λάβωμεν τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς πρώτης στήλης καὶ τῆς δευτέρας στήλης, κλπ. Τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα δύνανται νὰ σχηματισθοῦν ἐπίσης ὡς ἑξῆς: τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς πρώτης καὶ τελευταίας γραμμῆς εἰς τὸ διάγραμμα εἶναι ἡ ἔκφρασις (15) καὶ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς πρώτης καὶ τελευταίας στήλης εἶναι ἡ ἔκφρασις (18) ἢ (22).

Ἐκ τοῦ θεωρήματος δυαδικότητος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι μεγ π = ἐλαχ Ε. Ἂν δηλώσωμεν τὰς ἀρίστας λύσεις ὡς ἑξῆς,

$$\lambda^* = \begin{bmatrix} \chi_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu^* \\ \psi_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_\nu^* \end{bmatrix} \qquad \omega^* = \begin{bmatrix} \tau_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_\nu^* \\ \mu_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_\nu^* \end{bmatrix}$$

ἔχομεν ὡς ἀρίστην λύσιν

$$(26) \qquad \pi^* = -\sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \chi_j^* + \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j \psi_j^* = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (B-A)\tau_\kappa^* + \sum_{\kappa=1}^{\nu} A\mu_\kappa^* = E^*.$$

Διὰ νὰ ἔχῃ ἔννοιαν ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ἀμφότερα τὰ μέλη πρέπει νὰ ἐκφρασθοῦν εἰς τὰς αὐτὰς μονάδας μετρήσεως. Ἀφοῦ τὰ ψ_j, χ_j, $B-A$, καὶ A ἐκφράζωνται εἰς φυσικὰς μονάδας (τόννους, ἂς εἴπωμεν), καὶ ἀφοῦ τὰ ρ_j καὶ γ_j ἐκφράζωνται εἰς δολλάρια κατὰ μονάδα, τὰ τ_κ^* καὶ μ_κ^* πρέπει ἐπίσης νὰ ἐκφράζωνται εἰς δολλάρια κατὰ μονάδα. Συγκεκριμένως, τὸ τ_κ^* πρέπει νὰ ἐκφρασθῇ εἰς δολλάρια κατὰ τόννον καθαρᾶς δυναμικότητος τῆς ἀποθήκης, ἐν διαθέσει κατὰ τὴν περίοδον κ καὶ τὸ μ_κ^* πρέπει νὰ ἐκφρασθῇ εἰς δολλάρια κατὰ μονάδα τῆς ἀρχικῆς ἀπογραφῆς εἰς τὴν περίοδον κ. Ἀρίστη λύσις τοῦ δυαδικοῦ ἑρμηνεύεται οὕτως ὡς λύσις τοῦ προβλήματος ἐκτιμήσεως τῶν ὡρισμένων πόρων τοῦ κτήτορος τῆς ἀποθήκης. Οἰκονομικῶς, ὁ διαχειριστὴς δύναται εὐθέως νὰ προχωρήσῃ εἰς τὴν μεγιστοποίησιν τῆς καθαρᾶς ἀποδόσεως ὡς πρὸς τοὺς περιορισμοὺς τοὺς τιθεμένους ὑπὸ τῶν φυσικῶν ὁρίων καὶ ὁρίων κεφαλαίου (τὸ ἀρχικόν), ἢ ἐμμέσως διὰ κατανομῆς τῶν πόρων μεταξὺ ἀνταγωνιστικῶν χρήσεων ἕως ὅτου τὸ χαμηλότερον ἐπίπεδον αὐξητικῆς ἀξίας, τὸ ἐπιτρεπόμενον ἐξ ἐξωτερικῶν συνθηκῶν ἢ μὴ ἀρνητικότητος, φέρῃ ἀποτελέσματα (τὸ δυαδικόν). Ἡ ***ἐλαχίστη*** ὁλικὴ τιμὴ τῶν πόρων εἶναι βεβαίως, ἡ μεγίστη ἀξία ἡ ὁποία δύναται νὰ κτηθῇ διὰ τῆς παραγωγικῆς αὐτῶν χρήσεως ὑπὸ αὐτοῦ τούτου τοῦ ἰδιοκτήτου εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ (ἢ κόστος εὐκαιρίας) εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐξετασθῇ ἡ πώλησις ἢ ἐκμίσθωσις τῶν πόρων ἀντὶ τῆς παραγωγικῆς αὐτῶν χρησιμοποιήσεως.

Διὰ νὰ διευκρινίσωμεν τὴν χρῆσιν τῶν τ_κ^* καὶ μ_κ^* πρὸς ἐκτίμησιν τῶν περιουσιακῶν στοιχείων, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀποθήκη ἀποκτᾷ κατὰ τὴν περίοδον 1 πρόσθετον μονάδα δυναμικότητος. Τότε ἐκ τῆς (22),

$$(27) \qquad \Sigma_\kappa (B + 1 - A)\, \tau_\kappa^* + \Sigma_\kappa A \mu_\kappa^* = (B + 1)\, \Sigma \tau_\kappa^* - A \Sigma\, (\tau_\kappa^* - \mu_\kappa^*).$$

Αὐτὴ περικλείει τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὰ τ_κ^* καὶ μ_κ^* δὲν μεταβάλλονται (θὰ ἴδωμεν ἀργότερον τὸν προσδιορισμὸν τῶν ὁρίων ἐντὸς τῶν ὁποίων τὰ τ_κ^* καὶ μ_κ^* παραμένουν ἀμετάβλητα). Ἂν δὲν μεταβληθοῦν τὰ τ_κ^* καὶ μ_κ^*, τότε ἑτέρα ἀρίστη λύσις, ἡ E^{**}, προσδιορίζεται ὑπὸ τῆς (27).

Ἐπιστρέφοντες εἰς τὸ δεξιὸν μέλος τῆς (22), παρατηροῦμεν ὅτι

$$(28) \qquad \begin{aligned} \pi^* &= \Sigma_\kappa (B - A) \tau_\kappa^* + \Sigma_\kappa A \mu_\kappa^* = B \Sigma_\kappa \tau_\kappa^* - A \Sigma_\kappa (\tau_\kappa^* - \mu_\kappa^*) = \\ &= B \Sigma_\kappa \tau_\kappa^* + A \Sigma_\kappa (\mu_\kappa^* - \tau_\kappa^*), \end{aligned}$$

ἔνθα τὸ $\Sigma_\kappa (\mu_\kappa^* - \tau_\kappa^*)$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ ***καθαρὰ ἐξ ἀπογραφῆς ἀξία***, τοῦ τ_κ^* ἀντιπροσωπεύοντος κόστος εὐκαιρίας προκῦπτον ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ ἄλλως διατιθεμένου χώρου τῆς ἀποθήκης καὶ τοῦ μ_κ^* ἀντιπροσωπεύοντος κέρδη εἴτε ἐξ οἰκονομιῶν τῶν ἀγορῶν εἴτε ἐκ δυνατοτήτων πωλήσεων. Ἐκ τῆς (27) ἐπίσης,

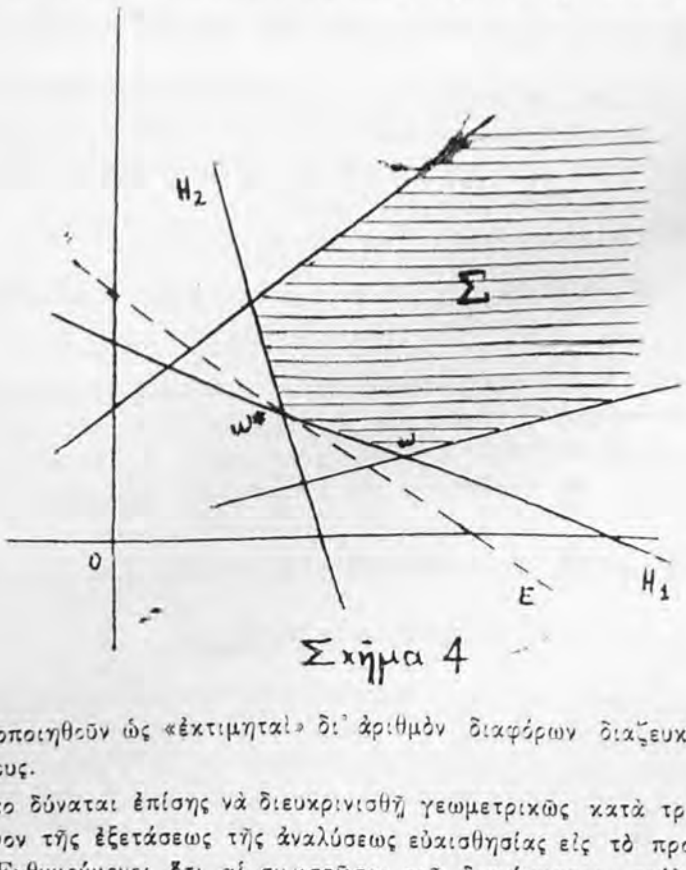
$$\pi^{**} = E^{**} = B \Sigma_\kappa \tau_\kappa^* - A \Sigma_\kappa (\tau_\kappa^* - \mu_\kappa^*) + \Sigma_\kappa \tau_\kappa^* = \pi^* + \Sigma \tau_\kappa^*,$$

καὶ

$$(29) \qquad \pi^{**} = \pi^* + \Sigma \tau_\kappa^* \geqq \pi^*,$$

ἀφοῦ $\tau_\kappa^* \geqslant 0$. Συνεπῶς, αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν τοῦ δυαδικοῦ παρέχουν ***ἐκ τῶν προτέρων*** μέσον προσδιορισμοῦ τῶν ἐπερχομένων αὐξήσεων ἢ μειώσεων εἰς τὰ κέρδη, τὸ κόστος, κλπ., αἱ ὁποῖαι θὰ ἐμφανισθοῦν ἂν λάβῃ χώραν ἀρίστη χρῆσις τῶν μελετουμένων μεταβολῶν τῶν περιουσιακῶν στοιχείων. Οὕτω, τὸ θεώρημα δυαδικότητος καθίσταται ἰσχυρὸν πρακτικὸν ὄργανον· δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ πρὸς ἐξέτασιν ταυτοχρόνων ἀλληλεπιδράσεων τῶν μεταβολῶν τῆς περιουσίας καὶ ἀρίστων συνθέσεων προγράμματος καὶ ἐπιτρέπει τὴν ἐξέτασιν ἑνὸς προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἀντὶ τοῦ ὅ,τι θὰ ἐφαίνετο νὰ εἶναι μία σειρὰ πολυπλόκων προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.

Σημειώσατε ὅτι ἡ μεταβολὴ (αὔξησις) κατὰ ἕνα τόννον τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τῆς ἀποθήκης εἰς τὴν πραγματικότητα ἀνέρχεται εἰς κατὰ μίαν μονάδα αὔξησιν τοῦ B καὶ τὸ $B - A$ ἀντικαθίσταται ὑπὸ τοῦ $B + 1 - A$ δι᾽ ἑκάστην τοιαύτην ἐγγραφὴν εἰς τὸ διάγραμμα τῆς σελίδος 123. Πράγματι, αὐτὸ συμβαίνει ὅταν ὁ ἀριθμὸς 1 εἰσέλθῃ εἰς τὴν (22). Ἐπίσης, οἱ σταθεροὶ ὅροι δύνανται νὰ μεταβληθοῦν, ἄνευ μεταβολῆς τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν τοῦ δυαδικοῦ (δηλ., ἄνευ μεταβολῆς τῆς ἀρίστης λύσεως) καθ᾽ ὃν χρόνον δὲν ἐπέλθῃ μεταβολή εἰς τὰ διανύσματα βάσεως τοῦ δυαδικοῦ, τὰ ὁποῖα ἐπέφερον τὴν ἀρίστην λύσιν. Παρατηρήσατε ὅτι ὅταν αἱ συνιστῶσαι τοῦ 6 μεταβάλλωνται ἡ *τιμὴ* τοῦ μεγίστου (καὶ ἑπομένως τοῦ ἐλαχίστου) δύναται νά, καὶ εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων θά, μεταβληθῇ (ἴδε τὴν (29) διὰ τὴν ἀλλαγὴν ταύτην), ἀλλὰ διὰ μεταβολὰς εἰς τὸ 6 ἱκανοποιούσας τὰς ἀνωτέρω ἀπαιτήσεις δὲν θὰ ὑπάρξῃ μεταβολὴ εἰς τὴν ἀρίστην λύσιν (δηλ., δὲν θὰ ὑπάρξῃ μεταβολὴ εἰς τὸ σημεῖον ἔνθα ἐπιτυγχάνεται ἀρίστη λύσις), καὶ αἱ συνιστῶσαι αὐτοῦ τοῦ διανύσματος ἀρίστης λύσεως δύνανται τότε



Σχῆμα 4

νὰ χρησιμοποιηθοῦν ὡς «ἐκτιμηταί» δι' ἀριθμὸν διαφόρων διαζευκτικῶν ἐπιτεύξεων κέρδους.

Τοῦτο δύναται ἐπίσης νὰ διευκρινισθῇ γεωμετρικῶς κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνον τῆς ἐξετάσεως τῆς ἀναλύσεως εὐαισθησίας εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον. Ἐνθυμούμενοι ὅτι αἱ συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος - στήλης τῶν σταθερῶν εἰς τὸ ἀρχικὸν (τοῦ διανύσματος 6) εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν μεταβλητῶν εἰς τὴν γραμμικὴν μορφὴν Ε τοῦ δυαδικοῦ (ἴδε τὰς (16) καὶ (18)), καὶ ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ Ε εἶναι ὑπερεπίπεδον, τὸ ὁποῖον δι' ἀρίστην λύσιν τέμνει τὸ κυρτὸν σύνολον τῶν δυνατῶν λύσεων τοῦ δυαδικοῦ εἰς ἓν ἄκρον σημεῖον «ἐγγύτατον» πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων, βλέπομεν ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ 6 δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ γεωμετρικῶς ὡς ἡ μεταβολὴ τῆς κλίσεως τοῦ ὑπερεπιπέδου τοῦ ἀντιπροσωπεύοντος τὴν γραμμικὴν μορφὴν τοῦ δυαδικοῦ. Ἂς ὑποθέσωμεν, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι ἡ γραμμικὴ μορφὴ τοῦ δυαδικοῦ εἶναι ἡ εὐθεῖα Ε εἰς τὸ σχῆμα 4 καὶ ὅτι τὸ σύνολον τῶν δυνατῶν λύσεων εἰς τὸ δυαδικὸν εἶναι τὸ σύνολον Σ. Τότε αἱ συνιστῶσαι τοῦ 6 εἰς τὸ ἀρχικὸν δύνανται νὰ μετα-

βληθοῦν καθ' οἱονδήποτε τρόπον ἐφ' ὅσον τὸ ὑπερεπίπεδον τέμνῃ τὸ Σ εἰς τὸ ση-
μεῖον ω*. Ἂν τὸ β μετεβάλλετο κατὰ τοιοῦτον τροπον ὥστε ἡ κλίσις τοῦ Ε νὰ
καθίστατο «πιὸ ἐπίπεδος» ἐκείνης τοῦ H_1, τότε τὸ σημεῖον ω θὰ ἦτο ἀρίστη λύ-
σις καὶ τοῦτο θὰ ἐσήμαινεν ὅτι ἠλλάξαμε τὰ διανύσματα βάσεως. Ἐπίσης, ἂν ἡ
κλίσις τῆς Ε ἐγίνετο «πιὸ ἀπότομος» ἐκείνης τῆς H_2, θὰ ἀπεμακρυνώμεθα πάλιν
τοῦ ἄκρου σημείου ω* καὶ ἡ βάσις θὰ εἶχε μεταβληθῆ. Πάντως, δι' ἑκάστην μετα-
βολὴν εἰς τὸ β (καὶ εἰς τὴν Ε) τοιαύτην ὥστε ἡ ω* παραμένει ἀρίστη λύσις, λαμ-
βάνομεν ἓν *νέον* πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχον τὴν αὐτὴν ἀρίστην
λύσιν ὡς τὸ παλαιόν, καὶ δυνάμεθα εὐχερῶς τότε νὰ προσδιορίσωμεν τὴν νέαν
τιμὴν τῆς γραμμικῆς μορφῆς. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν
τὰς τιμὰς τῶν γραμμικῶν μορφῶν διὰ νὰ ἴδωμεν ἂν ἡ μεταβολὴ εἰς τὸ β ηὔξησεν
ἢ ἐλάττωσε τὴν τιμὴν τῆς μορφῆς χωρὶς νὰ καθίσταται ἀναγκαῖον νὰ λύσωμεν ἓν
νέον πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Εἰς τὸ ὑπόδειγμα τῆς ἀποθήκης, ἐπὶ
παραδείγματι, ἡ μεταβολὴ τοῦ β σημαίνει ἢ μεταβολὴν τῶν ἀπαιτήσεων καθαρᾶς
ἀποθηκεύσεως, ἢ μεταβολὴν τῶν ἀπαιτήσεων πωλήσεων, ἢ μεταβολὴν καὶ τῶν
δύο. οὕτω δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς μεταβλητὰς τοῦ δυαδικοῦ πρὸς ἐκτί-
μησιν μιᾶς ποικιλίας δυνατῶν μεταβολῶν εἰς τὴν δυναμικότητα τῆς ἀποθήκης καὶ
τὴν ἀρχικὴν ἀπογραφήν.