ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Π.Μ.Σ. στην ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Διπλωματική Εργασία:

Τιμολόγηση και Αντιστάθμιση Κινδύνου Σύνθετων Προϊόντων Ασφαλειών Ζωής σε Στοχαστικό Περιβάλλον

Κωνσταντίνος Τρούσας ΜΑΕ 08023

Επιβλέπων Καθηγητής:

Σπυρίδων Βρόντος

-Σεπτέμβριος 2012-

Πρόλογος

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου» του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς. Αποτελείται από Εισαγωγή και τα Κεφάλαια 1,2,3 και 4. Αφιερώνεται στην οικογένειά μου και ιδιαίτερα στην αδερφή μου Ελευθερία, για την υποστήριξη που μου παρείχε, και στον Επιβλέποντα Καθηγητή μου, κ. Σπυρίδωνα Βρόντο, Λέκτορά του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, δίχως τη μεγαλοψυχία και την αμέριστη συμπαράσταση του οποίου θα ήταν αδύνατο να ολοκληρωθεί.

Οφείλω να εκφράσω θερμές ευχαριστίες και ευγνωμοσύνη σε όλους ανεξαιρέτως τους Υπεύθυνους για τη λειτουργία του Προγράμματος για την κατανόηση και την ανοχή που επέδειξαν στα απρόβλεπτα δυσάρεστα γεγονότα που αντιμετώπισα κατά τη διάρκεια εκπόνησής της. Επίσης ευχαριστώ τους κυρίους Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη και Μιλτιάδη Νεκτάριο, Αναπληρωτές Καθηγητές του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς και Διδάσκοντες του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, οι οποίοι αποτέλεσαν, μαζί με τον κ. Βρόντο, την Κριτική Επιτροπή της Εργασίας μου. Οι γόνιμες παρατηρήσεις και διορθώσεις της Κριτικής Επιτροπής συνέβαλλαν καθοριστικά στην επιστημονική αρτιότητα του περιεχομένου της Εργασίας. Τα λάθη και οι παραλήψεις που παρέμειναν βαρύνουν αποκλειστικά εμένα τον ίδιο.

Σεπτέμβριος 2012

Κωνσταντίνος Τρούσας

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σύνθετα Ασφαλιστικά Προϊόντα

Στη σύγχρονη εποχή παρατηρείται μεγάλη ποικιλία ασφαλιστικών συμβολαίων και εν γένει ασφαλιστικών παροχών από τους κάθε είδους ασφαλιστικούς φορείς (δημόσιους ή ιδιωτικούς). Η διαφοροποίηση ανάμεσα στην πληθώρα των ασφαλιστικών προϊόντων που διατίθενται μπορεί να οφείλεται σε οποιονδήποτε παράγοντα που επηρεάζει τη λειτουργία του συμβολαίου. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με συμβόλαια που έγιναν γνωστά στη βιβλιογραφία κατά τις τελευταίες δεκαετίες και εν συνεχεία, με τις αναγκαίες προσαρμογές, ενσωματώθηκαν στη σύγχρονη ασφαλιστική αγορά. Για το λόγο αυτό τα χαρακτηρίζουμε εξ αρχής ως Σύγχρονα Ασφαλιστικά Προϊόντα.

Κοινό χαρακτηριστικό για το σύνολο των συμβολαίων που θα συναντήσουμε στη συνέχεια αποτελεί η σύνδεση της Ασφαλιστικής Παροχής με έναν Τίτλο που διαπραγματεύεται ελεύθερα σε μία Οργανωμένη Αγορά. Ο τίτλος αυτός μπορεί να αντιπροσωπεύει οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό προϊόν όπως μετοχές, ομόλογα, παράγωγα προϊόντα ή συνδυασμό των παραπάνω, δηλαδή, όπως συνηθίζεται στην πράξη, κάποιο αμοιβαίο κεφάλαιο. Το γεγονός αυτό επιβάλλει τη μεταχείριση σε επίπεδο μαθηματικών της ασφαλιστικής παροχής ως τυχαίας μεταβλητής και προσδίδει μεγαλύτερη πολυπλοκότητα στη διαδικασία αποτίμησης των συμβολαίων. Με αυτό τον τρόπο δικαιολογείται ο χαρακτηρισμός τους ως Σύνθετα Ασφαλιστικά Προϊόντα, που στοχεύει επίσης στο να τα διαφοροποιήσει εξαρχής από τα Παραδοσιακά Ασφαλιστικά Προϊόντα, στα οποία η παροχή είναι εν γένει απολύτως προκαθορισμένη. Θα μπορούσαμε να ισχυρισθούμε ότι τα σύγχρονα ασφαλιστικά προϊόντα, με την απόδοση στοχαστικού χαρακτήρα στην ασφαλιστική παροχή, αποτελούν επέκταση των αντίστοιχων παραδοσιακών, στα οποία η αβεβαιότητα οφείλεται αποκλειστικά στον παράγοντα Θνησιμότητα (Mortality). Παρά τα επιμέρους διαφορετικά χαρακτηριστικά, τα προϊόντα που θα μελετήσουμε εντάσσονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα Equity-Linked ή Unit-Linked και τα Συμβόλαια Συμμετοχής (Participating Contracts).

Τα Equity-Linked προϊόντα οφείλουν το όνομά τους στη σύνδεση παροχής τίτλου που έχει ήδη αναφερθεί. Ο εν λόγω τίτλος εφεξής θα αναφέρεται, ακολουθώντας τη βιβλιογραφία, ως Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς (Reference Portfolio), ενώ οι προϋποθέσεις που οφείλει να ικανοποιεί παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο. Η βασική λογική λειτουργίας των συμβολαίων αυτών είναι ότι τα χρήματα που καταβάλλει ο ασφαλισμένος ως ασφάλιστρα τοποθετούνται/επενδύονται κατά το μεγαλύτερο ποσοστό σε αυτό το Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς. Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις όπου τα καταβαλλόμενα ασφάλιστρα είναι σταθερά, δηλαδή θα αντιμετωπίσουμε τα Συμβόλαια Equity-Linked ως Προϊόντα Καθορισμένης Εισφοράς (Defined Contribution Contracts).

Όπως θα γίνει ξεκάθαρο στη συνέχεια, το προϊόν ονομάζεται Equity-Linked όταν η σύνδεση Χαρτοφυλακίου Αναφοράς και παροχής εκφράζεται «απευθείας», υπονοώντας ότι το σύνολο των ασφαλίστρων τοποθετούνται εξ ολοκλήρου στο Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς. Όταν όμως ο σχεδιασμός του προϊόντος και της παροχής πραγματοποιείται με βάση τις Μονάδες (Units) του Χαρτοφυλακίου, τότε το προϊόν ονομάζεται Unit-Linked. Στην περίπτωση, αυτή κάθε χρονική στιγμή, το Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς διαιρείται σε μονάδες, κάθε μία από τις οποίες έχει αξία ίση με τη συνολική αξία του Χαρτοφυλακίου διά του αριθμού των μονάδων. Από τα χρήματα των καταβαλλόμενων ασφαλίστρων αγοράζονται μονάδες του Χαρτοφυλακίου σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές και η αξία του συνόλου των μονάδων που κατέχει ο ασφαλισμένος τη στιγμή της πληρωμής της Παροχής καθορίζουν το ύψος της Παροχής αυτής. Οι υπολογισμοί τροποποιούνται με βάση τα παραπάνω, αλλά δεν υφίσταται περαιτέρω ουσιαστικός διαχωρισμός μεταξύ Unit-Linked και Equity-Linked Προϊόντων, κάτι που φαίνεται και στην ενιαία αντιμετώπιση τους στη βιβλιογραφία.

Τα Συμβόλαια Συμμετοχής οφείλουν το όνομά τους στο γεγονός ότι ο ασφαλισμένος συμμετέχει με βάση κάποια διαδικασία στα κέρδη τα οποία ενδεχομένως σημειώνονται από το χαρτοφυλάκιο αναφοράς καθ' όλη τη διάρκεια του συμβολαίου. Λόγω πολυπλοκότητας η διαδικασία απόδοσης κερδών στον ασφαλισμένο θα περιγραφεί σε επόμενο κεφάλαιο.

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η παρουσίαση κάποιων χαρακτηριστικών περιπτώσεων από τις προαναφερθείσες κατηγορίες συμβολαίων και η μελέτη των μεθόδων αποτίμησής τους. Στο Κεφάλαιο 1 παρατίθενται συνοπτικά οι Αρχές Αποτίμησης και οι καθιερωμένες μεθοδολογίες από τα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά. Από την πλούσια βιβλιογραφία τονίζουμε, ενδεικτικά, τα βιβλία των Fries C. [2007], Hull J. [2003], Neftci S. [1996] και την εργασία των Aase K. and S.A. Persson [1994], στην οποία παρουσιάζεται η Αρχή Αποτίμησης Ασφαλιστικών Συμβολαίων, που χρησιμοποιείται σε όλη την έκταση της εργασίας. Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφεται το κλασσικό ELEPAVG Συμβόλαιο των Brennan M.J. and Schwartz E.S. [1976,1979], υιοθετώντας τους συμβολισμούς του Delbaen F. [1990] και αξιοποιούνται οι σχέσεις αποτίμησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης των Black F. and Scholes M. [1973]. Μελετάται η εισαγωγή Ενδογενώς Καθορισμένου Εγγυημένου Ποσού, που προτείνεται από τους Bacinello A.R. and F. Ortu [1993a] και αποτελεί τροποποίηση του κλασικού προϊόντος. Εξάγονται αριθμητικά αποτελέσματα για διάφορες τιμές των εμπλεκόμενων παραμέτρων του Συμβολαίου, κάτω από τις συνήθεις παραδοχές μιας Οργανωμένης Αγοράς με επενδυτές ουδέτερους ως προς τον κίνδυνο, κατά το πρότυπο των Black F. and Scholes M. Στο Κεφάλαιο 3 αποτιμάται το κλασσικό προϊόν των Brennan M.J. and Schwartz E.S. σε περιβάλλον Στοχαστικών Επιτοκίων σύμφωνα με το μοντέλο των Heath, Jarrow and Morton (HJM). Επίσης, παρατίθεται το Εναλλακτικό Unit-Linked προϊόν που εισήγαγαν οι Bacinello A.R. and Persson S.A. [2002], ως εναλλακτικό του κλασικού ELEPAVG. Στο Κεφάλαιο 4 μελετώνται οι δύο παραλλαγές ενός συμβολαίου συμμετοχής σύμφωνα με την εργασία των Grosen A. and P.L. Jorgensen [2000]. Η διαδικασία αποτίμησης οποιουδήποτε Ασφαλιστικού Συμβολαίου μπορεί εναλλακτικά να βασιστεί στην παραδοχή ότι οι αποδόσεις του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς ακολουθούν μία διαδικασία Levy. Οι διαδικασίες Levy αποτελούν γενίκευση της γνωστής Γεωμετρικής Κίνησης Brown και αναλύονται εκτενώς στα βιβλία των Schoutens W. [2003] και Cont R. and Tankov P. [2004]. Στην εργασία των Albrecher H. and Predota M. [2004] χρησιμοποιείται η NIG (Normal Inverse Gaussian) διαδικασία Levy για την αποτίμηση παραγώγων ως εναλλακτική της Γεωμετρικής Κίνησης Brown, ενώ ο Meucci A. [2010] παρουσιάζει 3 επιπλέον παραλλαγές διαδικασιών Levy για τη μοντελοποίηση των αποδόσεων. Οι Ballotta L. [2005] και Kassberger S., Kiesel R. and Liebmann T. [2008] χρησιμοποιούν διαδικασίες Levy για την αποτίμηση διάφορων ασφαλιστικών συμβολαίων.

Κεφάλαιο 1

1. Αρχές Αποτίμησης – Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

1.1 Αρχές Αποτίμησης

Υποθέτουμε ότι όλοι οι τίτλοι διαπραγματεύονται σε μια οργανωμένη αγορά, η οποία έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Επιτρέπεται η Ανοιχτή Πώληση (Short Selling) των Τίτλων που διαπραγματεύονται στη συγκεκριμένη Αγορά.
2. Δεν υπάρχουν κόστη ούτε φόροι κατά τη διενέργεια των συναλλαγών.
3. Όλοι οι Τίτλοι μπορούν να αγοράζονται και να πωλούνται σε οποιεσδήποτε κλασματικές μονάδες.
4. Οι τίτλοι που διαπραγματεύονται στην Αγορά δεν αποδίδουν μερίσματα στους κατόχους τους.
5. Είναι αδύνατη η επίτευξη βέβαιου κέρδους χωρίς ανάληψη επενδυτικού κινδύνου (Κινδύνου Αγοράς). Το γεγονός αυτό ονομάζεται Συνθήκη Έλλειψης Ευκαιριών Αποκόμισης Βέβαιου Κέρδους (No Arbitrage Opportunities Condition).
6. Η διαπραγμάτευση των τίτλων γίνεται σε συνεχή χρόνο.
7. Οι τιμές των τίτλων ακολουθούν μία γενική κίνηση Brown, όπως περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.
8. Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι σταθερό και έχει ίδια τιμή για κάθε πιθανή χρονική διάρκεια ισχύος του.

Οι συνθήκες 7 και 8 μπορούν να γενικευθούν, θεωρώντας ότι οι τιμές των τίτλων και των επιτοκίων είναι στοχαστικές διαδικασίες προσαρμοσμένες σε μία σ-άλγεβρα $\boldsymbol{\mathcal{F}_t}$, η οποία μοντελοποιεί την αβεβαιότητα στην αγορά. Για περισσότερες λεπτομέρειες, παραπέμπουμε σε βιβλιογραφία σχετική με Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά, π.χ. στον Christian Fries [2007].

Θεωρούμε ότι σε αυτή την αγορά συμμετέχουν επενδυτές οι οποίοι είναι Ουδέτεροι ως προς τον Κίνδυνο της Αγοράς (Risk Neutral World), γεγονός που σημαίνει ότι σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα $\boldsymbol{\Delta t}$ όλοι οι τίτλοι έχουν απόδοση ίση με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο για το χρονικό διάστημα αυτό. Άρα, η προεξόφληση πραγματοποιείται στο μοντέλο του συνεχούς ανατοκισμού χρησιμοποιώντας το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Αν $\boldsymbol{X_t}$ και $\boldsymbol{X_T}$ η αξία ενός τίτλου τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$ και $\boldsymbol{T}$ αντίστοιχα, όπου $\boldsymbol{t \le T}$, ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{X_t = V_t(X_T) \Rightarrow X_t = e^{-r(T-t)} \cdot X_T}$$

Όπου $\boldsymbol{V_t}$ η αξία τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$, συμβολισμός που διατηρείται και στη συνέχεια.

Η Συνθήκη Έλλειψης Ευκαιριών Αποκόμισης Βέβαιου Κέρδους ή, εφεξής, Συνθήκη Έλλειψης Arbitrage, αποτελεί θεμελιώδη λίθο στην διαδικασία προεξόφλησης αβέβαιων χρηματορροών ή αβέβαιων μελλοντικών τιμών τίτλων. Σε επίπεδο Μαθηματικών, εκφράζεται με την ύπαρξη ενός μέτρου πιθανότητας $\boldsymbol{Q}$ (Risk Neutral Measure), τέτοιου ώστε οι προεξοφλημένες μέσες τιμές των τίτλων να είναι Martingales. Με αυτόν τον τρόπο, πραγματοποιείται σε έναν Risk Neutral World η αποτίμηση των τίτλων. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ως Δίκαιη Τιμή (Αξία) $\boldsymbol{S_t}$ ενός τίτλου τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$ την προεξοφλημένη μέση τιμή κάτω από το μέτρο $\boldsymbol{Q}$ μιας μελλοντικής τιμής του $\boldsymbol{S_T}$. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$S_t = V_t^Q(S_T) \Rightarrow S_t = E^Q[V_t(S_T)] \Rightarrow S_t = E^Q\left[e^{-r(T-t)} \cdot S_T\right] \Rightarrow S_t = e^{-r(T-t)} \cdot E^Q[S_T] \qquad (1.1)$$

Όπου: $E^Q[S_T] = e^{r(T-t)} \cdot S_t$, λόγω της Martingale ιδιότητας της διαδικασίας των προεξοφλημένων τιμών.

Στο μοντέλο της αγοράς που χρησιμοποιούμε, εκτός από τους τίτλους που διαπραγματεύονται μπορούμε να θεωρήσουμε και τα επιτόκια ως Στοχαστικές Διαδικασίες. Στην περίπτωση αυτή, όπως γίνεται αντιληπτό, δεν ισχύει η συνθήκη 8 που αναφέρθηκε προηγουμένως, αλλά χρησιμοποιείται κάποιο μοντέλο για τις τιμές των επιτοκίων. Σε επόμενη ενότητα θα περιγράψουμε πώς τροποποιούνται οι προηγούμενες σχέσεις σε περιβάλλον Στοχαστικών Επιτοκίων, και συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό μοντέλο των Heath, Jarrow και Morton. Τονίζουμε προκαταβολικά ότι όλα τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά της αγοράς παραμένουν αναλλοίωτα, ενώ εξακολουθούν να ισχύουν η συνθήκη Έλλειψης Ευκαιριών Arbitrage και η παραδοχή ότι οι επενδυτές είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο.

1.2 Μοντελοποίηση Στοχαστικής Διαδικασίας Υποκείμενου Τίτλου

1.2.1 Γεωμετρική κίνηση Brown

Για να μοντελοποιήσουμε τη συμπεριφορά ενός τίτλου που διαπραγματεύεται σε μια αγορά με τα χαρακτηριστικά που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα, θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της κίνησης Brown. Κίνηση Brown ονομάζεται η στοχαστική διαδικασία $\{W_t, t \geq 0\}$, η οποία φέρει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου $\boldsymbol{t}$.
2. Οι μεταβολές της $\boldsymbol{W_t}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.
3. Οι μεταβολές της είναι κανονικά κατανεμημένες με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση ίση με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου στον οποίο αναφέρονται. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$W_{t+\Delta t} - W_t \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$$

Θεωρούμε ότι $\boldsymbol{dW_t}$ είναι η απειροστή μεταβολή της κίνησης Brown όταν $\boldsymbol{\Delta t \to 0}$.

Οι αποδόσεις των τίτλων που διαπραγματεύονται ακολουθούν την γεωμετρική κίνηση Brown, σύμφωνα με την οποία ισχύει ότι:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \qquad (1.2)$$

Ο όρος $\boldsymbol{\mu dt}$ αποτελεί την μέση τιμή της απόδοσης στο χρονικό διάστημα $\boldsymbol{dt}$ ή, όπως συνήθως αναφέρεται, ο ρυθμός μεταβολής της απόδοσης (drift rate of return) είναι $\boldsymbol{\mu}$. Η μεταβλητή $\boldsymbol{\sigma}$ αντικατοπτρίζει την μεταβλητότητα των αποδόσεων στο ίδιο χρονικό διάστημα. Όπου $\boldsymbol{dW_t}$,είναι η μεταβολή της κίνησης Brown στο ίδιο χρονικό διάστημα και αντανακλά τη στοχαστική συμπεριφορά των αποδόσεων.

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε ότι η τιμή ενός τίτλου $\boldsymbol{S_t}$ ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \qquad (1.3)$$

Παρατηρούμε ότι το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown για τις τιμές των τίτλων είναι Μαρκοβιανό, καθώς η μεταβολή $\boldsymbol{dS_t}$ εξαρτάται μόνο από την $\boldsymbol{S_t}$ και όχι από τις προγενέστερες τιμές $\boldsymbol{S_i, 0 \leq i < t}$.

1.2.2 Λήμμα του Ito

Μια στοχαστική διαδικασία $\{\boldsymbol{X_t, t \geq 0}\}$ αποκαλείται διαδικασία Ito, αν ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t} \qquad (\mathbf{1.4})$$

Όπου $\boldsymbol{a(X_t, t)}$ και $\boldsymbol{b(X_t, t)}$ αποτελούν συναρτήσεις των $\boldsymbol{X_t, t}$. Σύμφωνα με το Λήμμα του Ito, για μία συνάρτηση $\boldsymbol{G = G(X_t, t)}$, ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X_t} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial {X_t}^2} b^2\right) \cdot dt + \left(\frac{\partial G}{\partial X_t} b\right) \cdot dW_t} \qquad (\mathbf{1.5})$$

Σημειώνουμε ότι στην παραπάνω διαδικασία η παραγώγιση της συνάρτησης $\boldsymbol{G(X_t, t)}$ πραγματοποιείται θεωρώντας τις μεταβλητές $\boldsymbol{X_t, t}$ ως ανεξάρτητες.

1.2.3 Υπολογισμός της S_t

Αν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση $\boldsymbol{G(S_t, t) = lnS_t}$, επειδή η $\boldsymbol{S_t}$ ικανοποιεί την εξίσωση $(\mathbf{1.3})$, με χρήση του λήμματος του Ito τελικά προκύπτει ότι:

$$\boldsymbol{dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt + \sigma \cdot dW_t \Rightarrow \int_0^T dG = \int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt + \int_0^T \sigma \cdot dW_t \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{G(S_T) - G(S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T + \sigma \cdot W_T \Rightarrow} \ (\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}\ \alpha\pi\acute{o}\ \pi\rho\acute{\alpha}\xi\varepsilon\iota\varsigma)$$

$$\boldsymbol{S_T = S_0 \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T + \sigma \cdot W_T}} \qquad (\mathbf{1.6})$$

Η σχέση $(\mathbf{1.6})$ αποτελεί λύση σε κλειστή μορφή της διαφορικής εξίσωσης $(\mathbf{1.3})$.

Αν θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε σε ένα Risk Neutral World, όπως συμβαίνει σε όλη την έκταση της εργασίας, στις προηγούμενες εξισώσεις αρκεί να θέσουμε ότι $\boldsymbol{\mu = r}$.

1.2.4 Διωνυμικό Δέντρο

Μία εναλλακτική προσέγγιση για την προσομοίωση των τιμών των τίτλων αποτελεί η χρησιμοποίηση ενός Διωνυμικού Δέντρου. Η μεθοδολογία αυτή προτάθηκε από τους Cox, Ross και Rubinstein [1979] και είναι απλούστερη από αυτήν της γεωμετρικής κίνησης Brown. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε συνοπτικά τα βασικά σημεία της, ενώ για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στους προαναφερθέντες ή στο βιβλίο του Hull [2003].

Βασική υπόθεση της εν λόγω μεθοδολογίας είναι ότι αν η τιμή του τίτλου τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$ είναι $\boldsymbol{S_t}$, τότε για την τιμή του στην επόμενη χρονική στιγμή $(\boldsymbol{t + \Delta t})$, δηλαδή την $\boldsymbol{S_{t+\Delta t}}$ υπάρχουν μόνο οι εξής πιθανές περιπτώσεις:

$$\boldsymbol{S_{t+\Delta t} = S_t \cdot u} \quad \acute{\eta} \quad \boldsymbol{S_{t+\Delta t} = S_t \cdot d} \qquad (\mathbf{1.7})$$

Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{u} > 1$ και $\boldsymbol{d} < 1$, δηλαδή η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε ανοδική κίνηση του τίτλου, ενώ η δεύτερη σε καθοδική κίνηση του τίτλου. Υποθέτουμε, επίσης, ότι $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ είναι οι πιθανότητες για το κάθε ένα από τα παραπάνω σενάρια. Για τους παράγοντες $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{d}$ ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad (\mathbf{1.8})$$

Όπου $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η μεταβλητότητα του τίτλου.

Η Συνθήκη Απουσίας Ευκαιριών Arbitrage και η υπόθεση ότι βρισκόμαστε σε έναν Risk Neutral World επιβάλλουν ότι:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{e}^{r\Delta t} - \boldsymbol{d}}{\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d}} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \boldsymbol{q} = \mathbf{1} - \boldsymbol{p} \qquad (\mathbf{1.9})$$

Όπου $\boldsymbol{r}$ το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Οι πιθανότητες $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ αποτελούν το μέτρο πιθανότητας $\boldsymbol{Q}$ στο συγκεκριμένο μοντέλο.

Θεωρώντας μία αρχική χρονική στιγμή $\boldsymbol{t_0}$, την αρχική τιμή του τίτλου $\boldsymbol{S_0}$ και χωρίζοντας το χρονικό διάστημα $\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{T}$ που μας ενδιαφέρει σε $\boldsymbol{n}$ τμήματα, έτσι ώστε: $\boldsymbol{\Delta_t} = (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{t_0})/\boldsymbol{n}$, μπορούμε να υπολογίσουμε, ακολουθώντας τα προηγούμενα σενάρια, την τιμή του τίτλου την πρώτη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{\Delta t}$, τη δεύτερη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t_0} + \mathbf{2}\boldsymbol{\Delta t}$ κ. ο. κ. Έτσι, δημιουργείται ένα Διωνυμικό Δέντρο με πολλά πιθανά μονοπάτια για την πορεία της τιμής του τίτλου $\boldsymbol{S_t}$, όπου $\boldsymbol{t_0} \leq \boldsymbol{t} \leq \boldsymbol{T}$.

Σημειώνουμε ότι οι τιμές των $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{d}$ προσδιορίζονται πλήρως αν γνωρίζουμε το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο $\boldsymbol{r}$ και την μεταβλητότητα του τίτλου $\boldsymbol{\sigma}$, όπως φαίνεται στις προηγούμενες εξισώσεις. Οι τιμές αυτές σε κάθε κόμβο του Δέντρου ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\boldsymbol{S_t} = \boldsymbol{e}^{-r\Delta t} \cdot \boldsymbol{E}^{Q}[\boldsymbol{S_{t+\Delta t}}] \Rightarrow \boldsymbol{S_t} = \boldsymbol{e}^{-r\Delta t} \cdot (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{S_t} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{S_t} \cdot \boldsymbol{d}) \qquad (\mathbf{1.10})$$

1.3 Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης στο μοντέλο των Black & Scholes

Έστω ότι σε μία Αγορά με τα χαρακτηριστικά που περιγράφηκαν νωρίτερα, διαπραγματεύονται εκτός από τον Τίτλο (Asset) $\boldsymbol{S}$ και κάποια Παράγωγα Προϊόντα (Derivatives) ”πάνω” στον Υποκείμενο Τίτλο (Underlying Asset). Επειδή η αξία $\boldsymbol{f}$ οποιουδήποτε παραγώγου αποτελεί συνάρτηση των $\boldsymbol{S_t}, \boldsymbol{t}$, με χρήση του λήμματος του Ito και εξαιτίας της συνθήκης απουσίας ευκαιριών arbitrage, σύμφωνα με τους Black, Scholes και Merton πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{t}} + \boldsymbol{r}\boldsymbol{S_t}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{S_t}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\sigma}^2 {\boldsymbol{S_t}}^2\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial {\boldsymbol{S_t}}^2} = \boldsymbol{r}\boldsymbol{f} \qquad (\mathbf{1.11})$$

Γνωστά παραδείγματα παραγώγων αποτελούν τα Δικαιώματα Προαίρεσης, τα οποία μπορεί να είναι είτε Αγοράς (Call Option) είτε Πώλησης (Put Option). Στα δικαιώματα προαίρεσης συμμετέχουν δύο πλευρές, ο εκδότης-πωλητής (Writer) και ο κάτοχος-αγοραστής (Owner). Το Δικαίωμα Προαίρεσης Αγοράς δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα (όχι την υποχρέωση) να αγοράσει από τον Εκδότη τον Τίτλο $\boldsymbol{S}$ σε μία προκαθορισμένη μελλοντική στιγμή, που ονομάζεται στιγμή Λήξης ή Ωρίμανσης (Maturity) του Δικαιώματος, σε μία προσυμφωνημένη τιμή, που ονομάζεται Τιμή Εξάσκησης (Exercise Price ή Strike Price) του Δικαιώματος. Αντίστοιχα, το Δικαίωμα Προαίρεσης Πώλησης δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να πουλήσει στον Εκδότη σε μελλοντικό χρόνο τη μετοχή σε μία προκαθορισμένη τιμή. Θεωρώντας $\boldsymbol{t = 0}$ τη στιγμή έναρξης ισχύος του δικαιώματος, στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

$\boldsymbol{T}$: η χρονική στιγμή στην οποία λήγει/ωριμάζει το Δικαίωμα,
$\boldsymbol{S_t}$: η αξία του Υποκείμενου Τίτλου τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$, όπου $\boldsymbol{0 \leq t \leq T}$
$\boldsymbol{K}$: Η Τιμή Εξάσκησης του Δικαιώματος Προαίρεσης
$\boldsymbol{r}$: το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο για όλη τη διάρκεια ισχύος του Δικαιώματος,
$\boldsymbol{\sigma}$: η μεταβλητότητα του Υποκείμενου Τίτλου, που επίσης θεωρείται σταθερή για όλη τη διάρκεια του Δικαιώματος

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο κάτοχος επιλέγει να εξασκήσει (όπως έχει επικρατήσει να αναφέρεται) το δικαίωμα στη λήξη του, μόνο σε περίπτωση που αποκομίζει κέρδος. Πιο συγκεκριμένα, ο κάτοχος Δικαιώματος Αγοράς (Long Call) εξασκεί το δικαίωμα αν η τιμή της μετοχής στη λήξη είναι υψηλότερη από την τιμή εξάσκησης, δηλαδή αν έχει την ευκαιρία να αγοράσει χαμηλότερα από την τρέχουσα τιμή. Με αυτόν τον τρόπο αποκομίζει τη στιγμή λήξης του δικαιώματος κέρδος ίσο με τη διαφορά μεταξύ τρέχουσας και τιμής εξάσκησης του υποκείμενου τίτλου. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω συμβολισμούς, αν $\boldsymbol{K < S_T}$ αγοράζει με τιμή $\boldsymbol{K}$ και πουλά με τιμή $\boldsymbol{S_T}$, σημειώνοντας κέρδος $(\boldsymbol{S_T - K})$. Αντίθετα, ο κάτοχος Δικαιώματος Πώλησης (Long Put) επιλέγει να εξασκήσει το δικαίωμά του αν τιμή της μετοχής στη λήξη είναι χαμηλότερη από την τιμή εξάσκησης, δηλαδή αποκομίζει αυτόματα κέρδος πουλώντας σε υψηλότερη τιμή από την τρέχουσα (αν $\boldsymbol{K > S_T}$, αγοράζει με τιμή $\boldsymbol{S}$ και πουλά με τιμή $\boldsymbol{K}$, κερδίζοντας $(\boldsymbol{K - S_T})$). Εάν δεν συντρέχουν οι προϋποθέσεις αποκόμισης κέρδους, τότε ο κάτοχος δεν εξασκεί το δικαίωμα, με αποτέλεσμα να ζημιώνεται κατά το ποσό που διέθεσε για να αποκτήσει το δικαίωμα. Αν συμβολίσουμε με $\boldsymbol{c(t, \dots)}$ και $\boldsymbol{p(t, \dots)}$ την αξία του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και πώλησης, αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$, αφήνοντας τις υπόλοιπες παραμέτρους που καθορίζουν την αξία των δικαιωμάτων στην παρένθεση να αποσαφηνιστούν παρακάτω, τότε σύμφωνα με τις αρχές αποτίμησης που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα, ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{c(t, \dots) = E^Q\left[e^{-r(T-t)} \cdot max(S_T - K, 0)\right]} \quad \textit{και} \quad \boldsymbol{p(t, \dots) = E^Q\left[e^{-r(T-t)} \cdot max(K - S_T, 0)\right]} \qquad (\boldsymbol{1.12})$$

Οι Black και Scholes [1973] απέδειξαν ότι σε έναν Risk Neutral World α) για το μοντέλο της Αγοράς που περιγράψαμε παραπάνω, β) όταν οι αποδόσεις του υποκείμενου τίτλου ακολουθούν τη δυναμική σύμφωνα με την εξίσωση $(\boldsymbol{1.2})$ και γ) σε περιβάλλον σταθερών επιτοκίων, οι προηγούμενες εξισώσεις έχουν αναλυτικές λύσεις και άρα οι τιμές των Δικαιωμάτων Προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου υπολογίζονται σε κλειστή μορφή, σύμφωνα με τις επόμενες σχέσεις:

$$\boldsymbol{c(t, S_0, K, r, \sigma, T) = S_0 \cdot N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \cdot N(d_2)} \qquad (\boldsymbol{1.13a})$$

$$\boldsymbol{p(t, S_0, K, r, \sigma, T) = Ke^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - S_0 \cdot N(-d_1)} \qquad (\boldsymbol{1.13b})$$

Όπου:

$$\boldsymbol{d_1 = \frac{ln(S_0/K) + \left(r + \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}}, \quad \boldsymbol{d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}} \qquad (\boldsymbol{1.13c})$$

Με $\boldsymbol{N(x)}$ συμβολίζουμε την Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας της Τυπικής Κανονικής Κατανομής (μέση τιμή 0 και Διασπορά 1).

Στις παραπάνω εξισώσεις βλέπουμε πως οι τιμές των δικαιωμάτων δεν εξαρτώνται από την μέση απόδοση μ του υποκείμενου τίτλου, ενώ μπορούν να δώσουν και τις τιμές των δικαιωμάτων τη στιγμή έναρξης της ισχύος τους, αντικαθιστώντας απλά $\boldsymbol{t = 0}$.

1.4 Στοχαστικά Επιτόκια

Αρχικά, δίνουμε μόνο τους παρακάτω ορισμούς που είναι απαραίτητοι για τη συνέχεια. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα είδη των επιτοκίων παραπέμπουμε στη σχετική βιβλιογραφία[1].

1.4.1 Ορισμοί

Instantaneous Forward Rate[2] $\boldsymbol{f(t,T)}$: είναι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο που παρατηρείται τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$, έχει ως έναρξη ισχύος τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{T}$ και διαρκεί μέχρι τη στιγμή $\boldsymbol{T+dt}$.

Προοπτικό Επιτόκιο (Short Rate) $\boldsymbol{r(t)}$: είναι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο που έχει έναρξη ισχύος τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$, και διαρκεί μέχρι τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t+dt}$.

Από τους παραπάνω ορισμούς απορρέει ότι: $\boldsymbol{r(t) = f(t,t)}$

1.4.2 Heath, Jarrow και Morton Μοντέλο Επιτοκίων

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε συνοπτικά το θεωρητικό υπόβαθρο για το μοντέλο επιτοκίων των Heath, Jarrow και Morton, εφεξής **HJM**, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για την τιμολόγηση κάποιων Ασφαλιστικών Προϊόντων. Δίνεται έμφαση στις προϋποθέσεις /παραδοχές του μοντέλου, αποσαφήνιση μεγεθών που εμφανίζονται στις εξισώσεις, και όχι στις τεχνικές λεπτομέρειες οι οποίες είναι διαθέσιμές στη βιβλιογραφία.

Για καλύτερη κατανόηση, αλλά και μεγαλύτερη εγγύτητα στην πρακτική των σύγχρονων αγορών, θα ξεκινήσουμε με την έννοια του Μοναδιαίου Ομολόγου χωρίς κουπόνι, (zero coupon unit bond). Ο εκδότης ενός Μοναδιαίου Ομολόγου πληρώνει 1 χρηματική μονάδα στη λήξη του, ενώ από τη στιγμή έκδοσης-έναρξης μέχρι και τη στιγμή λήξης-πληρωμής του ομολόγου δεν πληρώνει κουπόνι. Θεωρούμε επιπλέον ότι τα ομόλογα αυτά δεν φέρουν πιστωτικό κίνδυνο (default free), ή ισοδύναμα ότι οι εκδότες τους είναι απόλυτα φερέγγυοι και άρα η πληρωμή της ονομαστικής τους αξίας είναι βέβαιο ότι θα πληρωθεί Η έννοια των παραπάνω ομολόγων (και η παραδοχή της ύπαρξής του σε μία οργανωμένη αγορά) υπαγορεύει την ύπαρξη της αρχικής καμπύλης των επιτοκίων χωρίς κίνδυνο (zero curve), καθώς και των Instantaneous Forward Rates επιτοκίων και των προοπτικών επιτοκίων, σύμφωνα με τη διαδικασία που θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

Συμβολίζοντάς το με $\boldsymbol{P(t,T)}$ την αξία του μοναδιαίου ομολόγου τη χρονική στιγμή t, ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{P(t,T) = exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right)}, \qquad 0 \le t \le u \le T \qquad \textbf{(1.14)}$$

Στην παραπάνω σχέση το επιτόκιο $\boldsymbol{f(t,u)}$ αποτελεί εν γένει μία στοχαστική διαδικασία.

[1] Luenberger [1998], Hull [2003], Fries[2007]

[2] Υιοθετούμε αποκλειστικά την ορολογία στα αγγλικά ελλείψει ικανοποιητικής απόδοσης στα ελληνικά

[3] [illegible] Υιοθετούμε αποκλειστικά την ορολογία στα αγγλικά ελλείψει ικανοποιητικής απόδοσης στα ελληνικά

Θεωρούμε ότι οι αρχικές τιμές των ομολόγων είναι γνωστές και συμβολίζουμε (προς αποφυγή σύγχυσης) με $\boldsymbol{B_0(t)}$ την τιμή τη στιγμή $t = 0$ ενός μοναδιαίου ομολόγου που λήγει τη στιγμή $t \geq 0$. Για τις αρχικές τιμές των ομολόγων $\boldsymbol{B_0(t)}$[3] (ως αρχική μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε χρονική στιγμή) ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{B_0(t) = exp\left(-\int_0^t f(0,u)du\right)} \qquad (\mathbf{1.15})$$

1.4.3 Στοχαστική Διαδικασία Ομολόγων και Επιτοκίων

Έστω $\boldsymbol{P(t,T)}$ η αξία τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$ ενός Ομολόγου που λήγει τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{T}$, με $t \leq T$. Σε μία Αγορά με τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα και οι επενδυτές είναι ουδέτεροι ως προς τον Κίνδυνο, η διαφορική εξίσωση που προσδιορίζει τις μεταβολές των τιμών του ομολόγου, κάτω από το Μέτρο Πιθανότητας Q, είναι:

$$\boldsymbol{dP(t,T) = r(t)P(t,T)\cdot dt + v(t,T,\Omega_t)P(t,T)\cdot dW_t} \qquad (\mathbf{1.16})$$

Όπου $\boldsymbol{W_t}$ είναι μία τυπική κίνηση Brown και $\boldsymbol{r(t)}$ είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο για το χρονικό διάστημα $(t, t+dt)$, το οποίο ισούται για το ίδιο χρονικό διάστημα με την απόδοση του ομολόγου. Η ποσότητα $\boldsymbol{v(t,T,\Omega_t)}$ αποτελεί τη μεταβλητότητα του ομολόγου και καθορίζεται τόσο από τις χρονικές στιγμές t και $\boldsymbol{T}$, όσο και από τη μεταβλητή $\boldsymbol{\Omega_t}$. Η $\boldsymbol{\Omega_t}$ θεωρούμε ότι είναι ένα διάνυσμα που περιέχει όλη την ιστορία των τιμών του ομολόγου και των επιτοκίων, δηλαδή τις τιμές αυτών στις προγενέστερες της t χρονικές στιγμές. Βλέπουμε λοιπόν ότι σε αυτό το μοντέλο η τιμή ενός ομολόγου είναι μια Μη-Μαρκοβιανή στοχαστική διαδικασία, καθώς κάθε μεταβολή της τιμής ενός ομολόγου εξαρτάται όχι μόνο από την τρέχουσα τιμή του, αλλά και από τις προηγούμενες τιμές του (ή έστω κάποιες από αυτές).

Η συνθήκη Μη Ύπαρξης Ευκαιριών Αποκόμισης Βέβαιου Κέρδους (No Arbitrage Pricing) επιβάλλει την σύνδεση τιμών ομολόγων και Στιγμιαίων Μελλοντικών Επιτοκίων (Instantaneous Forward Rates) με τη σχέση:

$$\boldsymbol{f(t,T) = \lim_{\delta t \to 0}\left\{\frac{ln\big(P(t,T)\big) - ln\big(P(t,T+\delta t)\big)}{\delta t}\right\} \Rightarrow f(t,T) = -\frac{\partial ln\big(P(t,T)\big)}{\partial T}} \qquad (\mathbf{1.17})$$

Επειδή από την $(\mathbf{1.16})$ φαίνεται ότι οι τιμές των ομολόγων είναι διαδικασίες Ito, η δυναμική που ακολουθούν τα Instantaneous Forward Rate επιτόκια είναι[4]:

$$\boldsymbol{df(t,T) = \sigma(t,T,\Omega_t)\left(\int_t^T \sigma(t,u,\Omega_t)du\right)\cdot dt + \sigma(t,T,\Omega_t)\ \cdot dW_t} \qquad (\mathbf{1.18})$$

Όπου τα μεγέθη της $(\mathbf{1.18})$ προκύπτουν από τα αντίστοιχα της $(\mathbf{1.16})$ ως εξής:

$$\boldsymbol{\sigma(t,T,\Omega_t) = -\frac{\partial v(t,T,\Omega_t)}{\partial T}} \text{ ή } \textit{ισοδύναμα:}\ \boldsymbol{v(t,T,\Omega_t) = -\int_t^T \sigma(t,u,\Omega_t)du}, \textit{με}\ \boldsymbol{v(t,t,\Omega_t) = 0} \qquad (\mathbf{1.19})$$

[3] Αυστηρότερα: η τιμή του ομολόγου είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη, όπως κάθε τίτλου στην αγορά.
[4] Hull [2003], pages: 574-575

Από τη σχέση $(\mathbf{1.19})$ βλέπουμε ότι οι τιμές ομολόγων και επιτοκίων σε μία οργανωμένη αγορά όπου οι επενδυτές είναι ουδέτεροι ως προς τον Κίνδυνο, παρόλο που είναι στοχαστικές διαδικασίες, παραμένουν άρρηκτα συνδεδεμένες, κάτω από το μέτρο Q. Συγκεκριμένα, η μεταβλητότητα των τιμών των ομολόγων καθορίζει πλήρως τόσο την βραχυπρόθεσμη τάση όσο και τη μεταβλητότητα των επιτοκίων. Εφεξής θα υιοθετήσουμε τον απλούστερο και μάλλον συνηθέστερο συμβολισμό:

$$\boldsymbol{df(t,s) = \sigma(t,s,\Omega_t)\alpha(t,s,\Omega_t)\cdot dt + \sigma(t,s,\Omega_t)\ \cdot dW_t} \qquad (\mathbf{1.20a})$$

$$\mu\varepsilon\ \boldsymbol{\alpha(t,s) = \int_t^s \sigma(t,s,\Omega_t)du}, \qquad \acute{o}\pi o\upsilon\ \boldsymbol{t \le s} \qquad (\mathbf{1.20b})$$

Με αυτό το συμβολισμό η αρχική εξίσωση $(\mathbf{1.16})$ παίρνει την ισοδύναμη μορφή:

$$\boldsymbol{dP(t,s) = r(t)P(t,s)\cdot dt - \alpha(t,s,\Omega_t)P(t,s)\cdot dW_t} \qquad (\mathbf{1.21})$$

Στην $(\mathbf{1.21})$ βλέπουμε και πάλι ότι οι μεταβλητότητες των επιτοκίων και των ομολόγων είναι απόλυτα αλληλοεξαρτημένες.

Στη βιβλιογραφία συνηθίζεται η εξαγωγή της δυναμικής των επιτοκίων από τις τιμές των ομολόγων, όπως φαίνεται στην εξίσωση $(\mathbf{1.20})$. Ωστόσο, σημειώνουμε ότι είναι δυνατόν να υιοθετηθεί και η αντίστροφη διαδικασία από την προηγούμενη, δηλαδή με αρχική υπόθεση ότι τα Instantaneous Forward Rates ακολουθούν τη δυναμική των εξισώσεων $(\mathbf{1.20a}, \mathbf{1.20b})$ και με χρήση της εξίσωσης ορισμού των Ομολόγων $(\mathbf{1.14})$, να αποδειχθεί ότι οι τιμές των ομολόγων στο υπακούουν στην εξίσωση $(\mathbf{1.16})$ ή στην $(\mathbf{1.21})$.[5]

Με ολοκλήρωση της εξίσωσης $(\mathbf{1.20\alpha})$ ως προς t, σχέσης, έχουμε:

$$\boldsymbol{f(t,s) = f(0,s) + \int_0^s df(u,s)} \qquad (\mathbf{1.22})$$

Αλλά, εξ ορισμού για το προοπτικό επιτόκιο $\boldsymbol{r(t)}$ ισχύει ότι: $\boldsymbol{r(t) = f(t,t)}$, οπότε λόγω $(\mathbf{1.21})$ και $(\mathbf{1.22})$ των προκύπτει:

$$\boldsymbol{r(t) = f(0,t) + \int_0^t \sigma(u,t,\Omega_u)\alpha(u,t,\Omega_u)du + \int_0^t \sigma(u,t,\Omega_u)dW_u} \qquad (\mathbf{1.23})$$

Η μεταβολή του προοπτικού επιτοκίου που απορρέει από την προηγούμενη εξίσωση είναι:

$$\boldsymbol{dr(t) = \left(\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \alpha(t,t,\Omega_t) + \int_0^t \left[\frac{\partial \alpha(u,s,\Omega_u)}{\partial s}\right]_{s=t} du + \int_0^t \left[\frac{\partial \sigma(u,s,\Omega_u)}{\partial s}\right]_{s=t} dW_u\right)dt + \sigma(t,t)dW_t}$$

Αν και η παραπάνω σχέση δεν θα μας χρειαστεί στη συνέχεια, αναφέρουμε ότι από τη μορφή της είμαι εμφανές ότι η διαδικασία του προοπτικού επιτοκίου στο HJM μοντέλο είναι Μη-Μαρκοβιανή, όπως ισχύει και για τη διαδικασία των τιμών των ομολόγων. Τα δύο αυτά αποτελέσματα βρίσκονται σε πλήρη

[5] Fries, §22.2

συμφωνία μεταξύ τους, καθώς, όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι τιμές των εν λόγω μεγεθών είναι απόλυτα αλληλοεξαρτημένες.

1.4.4 Στοχαστικός Συντελεστής Προεξόφλησης

Γενικά, σε οποιοδήποτε μοντέλο επιτοκίων, μπορεί να ορισθεί ο Στοχαστικός Συντελεστής Προεξόφλησης $\boldsymbol{v(t,T) = exp\left(-\int_t^T r(u)\,du\right)}$, ο οποίος χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί η αξία τη χρονική στιγμή t μιας χρηματοροής μεταγενέστερης κατά $(T-t)$ έτη. Αποτελεί γενίκευση του κλασικούντετερμινιστικού συντελεστή προεξόφλησης σε περιβάλλον σταθερών επιτοκίων καθώς τον συμπεριλαμβάνει στην ειδική περίπτωση που $\boldsymbol{r(u) = r}$. Η διαδικασία για το προοπτικό επιτόκιο $\boldsymbol{r(u)}$ σύμφωνα με το HJM μοντέλο προσδιορίζεται από την $(\mathbf{1.23})$. Για τις ανάγκες τις εργασίας θα χρειαστούμε μόνο την απλουστευμένη εκδοχή του Στοχαστικού Συντελεστή Προεξόφλησης, κατά την οποία η στιγμή αποτίμησης είναι πάντα η στιγμή $t = 0$, οπότε εφεξής θα τον συναντάμε αποκλειστικά στη μορφή:

$$\boldsymbol{v(t) = v(0,t) \Rightarrow v(t) = exp\left(-\int_0^t r(u)\,du\right)} \qquad (\mathbf{1.24})$$

Γενικεύοντας όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, η προεξοφλημένη αξία μιας αβέβαιης χρηματορροής $\boldsymbol{X_t}$ (ή της τιμής ενός τίτλου) τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$$\boldsymbol{V_0^Q(X_t) = E^Q[v(t)\cdot X_t]} \qquad (\mathbf{1.25})$$

Αναφέρουμε προκαταβολικά ότι, σε μία Οργανωμένη Αγορά στην οποία συμμετέχουν επενδυτές ουδέτεροι ως προς τον Κίνδυνο, η βραχυπρόθεσμη απόδοση όλων των Τίτλων ισούται με $\boldsymbol{r(u)}$, ενώ η απόδοση για το τυχαίο χρονικό διάστημα $(0,t)$ ισούται με $\boldsymbol{exp\left(\int_0^t r(u)\,du\right) = [v(t)]^{-1}}$.

1.5 Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης στο μοντέλο Επιτοκίων HJM

Όταν σε μία οργανωμένη αγορά τα επιτόκια ακολουθούν μοντέλο HJM η απόδοση ενός τίτλου θεωρούμε ότι είναι:

$$\boldsymbol{dS_t = r(t)S_t\cdot dt + \sigma_1 S_t\cdot dW_t^1 + \sigma_2 S_t\cdot dW_t^2} \qquad (\mathbf{1.26\alpha})$$

Όπου $\boldsymbol{r(t)}$ είναι το προοπτικό βραχυπρόθεσμο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, του οποίου η μεταβλητότητα εξαρτάται από την τυπική κίνηση Brown $\boldsymbol{W_t^1}$ σύμφωνα με την $(\mathbf{1.24})$. Στην προηγούμενη εξίσωση, που αποτελεί επέκταση της $(\mathbf{1.2})$ σε έναν Risk Neutral World, βλέπουμε μια τροποποίηση της δυναμικής που ακολουθεί η απόδοση ενός τίτλου ούτως ώστε να ενσωματώσει τη συσχέτιση μεταξύ των τιμών του τίτλου και των επιτοκίων, η οποία εκφράζεται από τον παράγοντα $\boldsymbol{\sigma_1}$. Η τυπική κίνηση Brown $\boldsymbol{W_t^2}$, που είναι ανεξάρτητη της $\boldsymbol{W_t^1}$, και ο παράγοντας $\boldsymbol{\sigma_2}$ καθορίζουν τη μεταβλητότητα του τίτλου που οφείλεται σε οποιαδήποτε άλλη αιτία, εκτός από τις τιμές των επιτοκίων, όπως στην εξίσωση $(\mathbf{1.2})$ στο περιβάλλον των σταθερών επιτοκίων. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η συνολική μεταβλητότητα του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς $\boldsymbol{\sigma}$ είναι πλέον: $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$. Η παραπάνω εξίσωση έχει λύση ως προς $\boldsymbol{S_t}$, τροποποιημένη σε σχέση με αυτή του περιβάλλοντος σταθερών επιτοκίων, ως εξής:

$$\boldsymbol{S_t = \frac{S_0}{v(t)}\cdot exp\left(-\frac{t}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sigma_1 W_t^1 + \sigma_2 W_t^2\right)} \qquad (\mathbf{1.26b})$$

Όπου $\boldsymbol{v(t)}$ ο Στοχαστικός Συντελεστής Προεξόφλησης, σύμφωνα με τη σχέση $(\mathbf{1.24})$.

Έστω τα Ευρωπαϊκού Τύπου Δικαιώματα Προαίρεσης πάνω στον τίτλο $\boldsymbol{S_t}$, όπως περιγράφηκαν στην ενότητα 1.3, με τη μοναδική διαφορά ότι διαπραγματεύονται σε μία αγορά όπου τα επιτόκια ακολουθούν το μοντέλο HJM. Αν συμβολίσουμε με $\boldsymbol{\pi}(\dots)$ και $\boldsymbol{\rho}(\dots)$ την αξία του Δικαιώματος Αγοράς και Πώλησης αντίστοιχα, έχουμε:

$$\boldsymbol{\pi(S_0, K, r(t), \sigma_1, \sigma_2, T) = E^Q[v(T)\cdot max(S_T - K, 0)]} \qquad (\mathbf{1.27a})$$

$$\boldsymbol{\rho(S_0, K, r(t), \sigma_1, \sigma_2, T) = E^Q[v(T)\cdot max(K - S_T, 0)]} \qquad (\mathbf{1.27b})$$

Σύμφωνα με τους Amin και Jarrow [1992][6] αν τα επιτόκια ακολουθούν την εξίσωση $(\mathbf{1.23})$ και ο υποκείμενος τίτλος την εξίσωση $(\mathbf{1.26a})$ (ή ισοδύναμα την $(\mathbf{1.26b})$), οι τιμές των Δικαιωμάτων μπορούν να υπολογιστούν σε αυτή την περίπτωση σε κλειστή μορφή ως εξής:

$$\boldsymbol{\pi(S_0, K, r(t), \sigma_1, \sigma_2, T) = S_0\cdot N\left(d_1^T\right) - K\cdot B_0(T)\cdot N\left(d_2^T\right)} \qquad (\mathbf{1.28a})$$

$$\boldsymbol{\rho(S_0, K, r(t), \sigma_1, \sigma_2, T) = K\cdot B_0(T)\cdot N\left(-d_2^T\right) - S_0\cdot N\left(-d_1^T\right)} \qquad (\mathbf{1.28b})$$

Όπου $\boldsymbol{B_0(T)}$ η τιμή τη στιγμή $t = 0$ ενός μοναδιαίου ομολόγου που λήγει τη στιγμή $\boldsymbol{T}$ και:

$$\boldsymbol{d_1^T(K) = \frac{1}{\Theta_T}\left(\frac{1}{2}\Theta_T^2 + ln\left(\frac{S_0}{B_0(T)\cdot K}\right)\right), \qquad d_2^T(K) = d_1^T(K) - \Theta_T,} \qquad (\mathbf{1.28c})$$

$$\boldsymbol{\Theta_T = \sqrt{\int_0^T \left(\alpha(u,T)\right)^2 du + \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)T + 2\sigma_1\cdot\int_0^T \alpha(u,T)du}} \qquad (\mathbf{1.28d})$$

Οι παραπάνω σχέσεις των αποτελούν γενίκευση των σχέσεων των Black και Scholes καθώς τις συμπεριλαμβάνουν ως υποπερίπτωση. Αν θέσουμε στις σχέσεις των Amin και Jarrow $\boldsymbol{\sigma(t, T, \Omega_t) = 0}$, που ισοδυναμεί με μετάβαση σε περιβάλλον σταθερών επιτοκίων, τότε μετά από πράξεις αυτές μετατρέπονται στις σχέσεις των Black και Scholes.

1.6 Αρχές Υπολογισμού Ασφαλίστρων

1.6.1 Αναλογιστική Αρχή της Ισοδυναμίας (Principle of Equivalence)

Η Αναλογιστική Αρχή της Ισοδυναμίας αποτελεί γενική αρχή στο χώρο του Αναλογισμού και χρησιμοποιείται παραδοσιακά από τις ασφαλιστικές εταιρείες για τον προσδιορισμό του Ασφαλίστρου για οποιοδήποτε είδος Ασφαλιστικού Συμβολαίου. Συνοψίζεται στο ότι τη στιγμή έναρξης/σύναψης ενός Συμβολαίου η αξία του (Δίκαιο Ασφάλιστρο) ισούται με την Αναλογιστική Αξία Μελλοντικών Υποχρεώσεων/Πληρωμών της Ασφαλιστικής Εταιρείας την ίδια χρονική στιγμή. Επειδή η χρονική στιγμή καταβολής της ασφαλιστικής παροχής σε πολλούς τύπους Συμβολαίων όπως έχει ήδη αναφερθεί δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, χρησιμοποιείται η αντίστοιχη Μέση Τιμή. Η Ασφαλιστική Εταιρεία που εφαρμόζει την Αρχή της Ισοδυναμίας θεωρείται ότι είναι ουδέτερη ως προς τον Ασφαλιστικό Κίνδυνο, καθώς δεν απαιτεί κάποιο ποσό ως «αποζημίωση» (πέραν αυτού που προκύπτει από την εφαρμογή της) για την ανάληψη του εν λόγω

[6] Στη συγκεκριμένη εργασία υπολογίζονται οι τιμές των Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων Προαίρεσης πάνω σε Τιμές Συναλλάγματος, με περισσότερες από 2 πηγές μεταβλητότητας. Άρα η δική μας προσέγγιση αποτελεί υποπερίπτωση.

κινδύνου. Η παραδοχή αυτή θεωρείται εύλογη, καθώς ο Ασφαλιστικός Κίνδυνος μπορεί να εξουδετερωθεί με τη σύναψη μεγάλου αριθμού από κάθε κατηγορία συμβολαίων (για τον ίδιο κίνδυνο θνησιμότητας) και η Εταιρεία να μη ζημιώνεται, λόγω του νόμου των μεγάλων αριθμών.

Αν υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε σε περιβάλλον *σταθερών επιτοκίων* και θεωρήσουμε: $\boldsymbol{V_0(Y_T)} = \boldsymbol{e^{-rT} \cdot Y_T}$, την (προεξοφλημένη) αξία της Ασφαλιστικής Παροχής (και άρα τη Δίκαιη Τιμή του Συμβολαίου) τη στιγμή σύναψης ($t = 0$) και $\boldsymbol{Pr(T = t)}$ την Πιθανότητα η Ασφαλιστική Παροχή να καταλαληθεί τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$, η Αρχή της Ισοδυναμίας στη γλώσσα των Μαθηματικών παίρνει τις εξής μορφές:

Εφάπαξ Ασφάλιστρο (U):

$$\boldsymbol{U = E_T[V_0(Y_T)] \Rightarrow U = \sum_{t=1}^{T} Pr(T = t) \cdot V_0(Y_t)} \qquad \boldsymbol{(1.29a)}$$

Περιοδικό Ασφάλιστρο (P):

$$\boldsymbol{P \cdot \ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{T}|} = E_T[V_0(Y_T)] \Rightarrow P \cdot \ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{T}|} = \sum_{t=1}^{T} Pr(T = t) \cdot V_0(Y_t)} \qquad \boldsymbol{(1.29b)}$$

Όπου: $\boldsymbol{\ddot{a}^{(r)}_{x:\overline{T}|} = \sum_{t=0}^{T-1} {}_{t}p_x \cdot e^{-rt}}$, ακολουθώντας τους γνωστούς συμβολισμούς του Αναλογισμού

1.6.2 Αρχή Ισοδυναμίας κάτω από το Μέτρο Πιθανότητας Q

Στην περίπτωση που το ύψος της Ασφαλιστικής Παροχής είναι συνάρτηση της τιμής ενός Τίτλου που διαπραγματεύεται σε μία Οργανωμένη Αγορά, δηλαδή είναι εν γένει τυχαία μεταβλητή, η Αναλογιστική Αρχή της Ισοδυναμίας δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Πρέπει να τροποποιηθεί ώστε να είναι συνεπής με τη μεθοδολογία αποτίμησης των Contingent Claims, υπό τις προϋποθέσεις που έχουν αναφερθεί σχετικά με τη λειτουργία της Αγοράς, τη συμπεριφορά του Υποκείμενου Τίτλου και του Παράγοντα Προεξόφλησης (Risk Neutral World). Για να πραγματοποιηθεί μία Δίκαιη Αποτίμηση του Ασφαλιστικού Συμβολαίου, πρέπει η (προεξοφλημένη) αξία της Ασφαλιστικής Παροχής τη χρονική στιγμή σύναψης του Συμβολαίου πρέπει να αντικατασταθεί από την αντίστοιχη Μέση Τιμή κάτω από το Μέτρο Q. Σύμφωνα με τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας την έννοια της Δεσμευμένης Μέσης Τιμής από τη Στατιστική, θα πρέπει να υπολογισθεί η Δεσμευμένη Μέση Τιμή (ως προς το χρόνο καταβολής της Ασφαλιστικής Παροχής) της Προεξοφλημένης Αξίας της Ασφαλιστικής Παροχής ως προς το Μέτρο Q.

Έστω ότι χρησιμοποιούμε το συμβολισμό για τη Μέση Τιμή κάτω από το Μέτρο Q της (προεξοφλημένης) αξίας της Ασφαλιστικής Παροχής, τη στιγμή σύναψης ($t = 0$) ως εξής:

$$\boldsymbol{V_0^Q(Y_T) = E^Q[V_0(Y_T)]} = \begin{cases} \boldsymbol{e^{-rT} \cdot E^Q[Y_T]}, & \text{σε Περιβάλλον } \textbf{Σταθερών} \text{ Επιτοκίων} \\ \boldsymbol{E^Q[v(T) \cdot Y_T]}, & \text{σε Περιβάλλον } \textbf{Στοχαστικών} \text{ Επιτοκίων} \end{cases} \qquad \boldsymbol{(1.30)}$$

Η τροποποιημένη μεθοδολογία αποτίμησης, η οποία αποκαλείται από τους Aase και Persson [1994] ***Αρχή της Ισοδυναμίας κάτω από το Μέτρο Q (Principle of Equivalence under Q),*** αποτελεί επέκταση/γενίκευση της Αναλογιστικής Αρχής της Ισοδυναμίας και μπορεί (στην πιο γενική μορφή της) να γραφεί ως εξής:

$$\boldsymbol{U = E_T\left[E^Q[v(T)\cdot Y_T|(T=t)]\right] = E_T\left[E^Q[V_0(Y_T)|(T=t)]\right] = E_T\left[V_0^Q(Y_T)|(T=t)\right]}$$

Για να απλοποιηθεί ο συμβολισμός θέτουμε: $\boldsymbol{E_T\left[V_0^Q(Y_T)|(T=t)\right] = E_T\left[V_0^Q(Y_T)\right]}$ και εργαζόμαστε ανάλογα με το Περιβάλλον Επιτοκίων την αντίστοιχη Μέση Τιμή κάτω από το Μέτρο Q.Οι νέες εξισώσεις για τον υπολογισμό των Ασφαλίστρων σύμφωνα με την ***Αρχή της Ισοδυναμίας κάτω από το Μέτρο Q***, είναι:

Εφάπαξ Ασφάλιστρο $(\boldsymbol{U})$:

$$\boldsymbol{U = E_T\left[V_0^Q(Y_T)\right] \Rightarrow U = \sum_{t=1}^{T} Pr(T=t)\cdot V_0^Q(Y_t)} \qquad (\boldsymbol{1.31a})$$

Περιοδικό Ασφάλιστρο $(\boldsymbol{P})$:

$$\boldsymbol{P\cdot \ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)} = E_T\left[V_0^Q(Y_T)\right] \Rightarrow P\cdot \ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)} = \sum_{t=1}^{T} Pr(T=t)\cdot V_0^Q(Y_t)} \qquad (\boldsymbol{1.31b})$$

Οι τελευταίες εξισώσεις αποτελούν τη βάση για την αποτίμηση **όλων** των Ασφαλιστικών Προϊόντων με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια.

Κεφάλαιο 2

2. Προϊόντα Equity-Linked και Unit-Linked (I)

Στο παρόν αλλά και στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με σύγχρονα Ασφαλιστικά Προϊόντα τα οποία παρά τα επιμέρους χαρακτηριστικά που τα διαφοροποιούν, ανήκουν στις ευρύτερες κατηγορίες των Equity-Linked και Unit-Linked, όπως έχουν περιγραφεί στην Εισαγωγή. Στην πορεία αποσαφηνίζεται ο χαρακτηρισμός κάθε προϊόντος, ο οποίος εξαρτάται από το μηχανισμό επένδυσης και αντανακλάται στη μέθοδό αποτίμησής του.

2.1 Περιγραφή Συμβολαίων ELEPAVG

Ο παραπάνω όρος αποτελεί αρκτικόλεξο της ονομασίας: **Equity-Linked Endowment Policy with an Asset Value Guarantee**, με την οποία καθιερώθηκε από τις εργασίες των Brenan και Schwartz [1976 και 1979] και φέρει τα χαρακτηριστικά στα οποία οφείλει το όνομά του, τα οποία αναλύονται παρακάτω.

Ένα συμβόλαιο ELEPAVG έχει διάρκεια T έτη και παρέχει στον ασφαλισμένο κάλυψη σε περίπτωση θανάτου για χρονικό διάστημα ίσο με τη διάρκεια του συμβολαίου ή την καταβολή μιας χρηματικής παροχής σε περίπτωση επιβίωσης μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Πρόκειται δηλαδή για ένα συμβόλαιο Μικτής Ασφάλισης (Endowment), όπως έχει επικρατήσει στην Αναλογιστική ορολογία. Συνεπώς, ο χρόνος καταβολής της Ασφαλιστικής Παροχής (έστω t, όπου: $0 < t \leq T$) δεν είναι γνωστός κατά τη στιγμή σύναψης του συμβολαίου και αποτελεί, εν γένει, τυχαία μεταβλητή.

Επιπλέον, η ασφαλιστική εταιρεία προκειμένου να εξασφαλίσει την καταβολή της Παροχής διαχειρίζεται τα χρήματα που καταβάλει ο ασφαλισμένος ως εξής: Επενδύει ένα μέρος αυτών (το μεγαλύτερο) στο Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς και διακρατεί το υπόλοιπο σαν περιθώριο ασφαλείας. Το ύψος της Ασφαλιστικής Παροχής εξαρτάται από το την αξία του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς τη στιγμή καταβολής της Παροχής, η οποία θεωρούμε ότι είναι στο τέλος του έτους κατά τη διάρκεια του οποίου επήλθε ο θάνατος του ασφαλισμένου ή στο τέλος του τελευταίου έτους ισχύος του συμβολαίου, σε περίπτωση επιβίωσης του ασφαλισμένου. Άρα, όπως ο χρόνος, έτσι και το ύψος της Ασφαλιστικής Παροχής είναι άγνωστο κατά την έναρξη ενός ELEPAVG συμβολαίου.

Θεωρούμε επίσης ότι η εταιρεία αποδίδει στον Ασφαλισμένο τη χρονική στιγμή καταβολής το σύνολο του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς (ρευστοποιώντας το) ή ένα Εγγυημένο Ελάχιστο Ποσό αν η (τρέχουσα) αξία του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς είναι μικρότερη από αυτό το εγγυημένο ποσό. Δηλαδή η Εταιρεία για κάθε πιθανή χρονική στιγμή καταβολής της Ασφαλιστικής Παροχής, εγγυάται την πληρωμή ενός ελάχιστου ποσού (Guarantee), αναλαμβάνοντας η ίδια την υποχρέωση να καλύψει την τυχόν διαφορά του από την αξία του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς. Με αυτό το μηχανισμό πληρωμής, η Ασφαλιστική Εταιρεία αναλαμβάνει εκτός από τον Κίνδυνο Θνησιμότητας, λόγω κάλυψης θανάτου, και τον Κίνδυνο Αγοράς, που απορρέει από την ύπαρξη του Εγγυημένου Ποσού. Κατά τη διαδικασία αποτίμησης θα γίνει ξεκάθαρο το τμήμα του Ασφαλίστρου που αναλογεί στην κάλυψη του Κινδύνου Αγοράς που αναλαμβάνει η Ασφαλιστική Εταιρεία, σε περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο αναφοράς δεν επαρκεί. Το ύψος του ελάχιστου ποσού μπορεί να είναι σταθερό και προκαθορισμένο, αλλά μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που αναλύεται στη συνέχεια, κατά την οποία το Εγγυημένο Ποσό εξαρτάται από τη χρονική στιγμή καταβολής αλλά ταυτόχρονα συναρτάται με το καταβαλλόμενο Ασφάλιστρο.

Χρησιμοποιώντας τους εξής συμβολισμούς:

G_t: το Εγγυημένο Ποσό, εφόσον η Ασφαλιστική Παροχή καταβληθεί τη χρονική στιγμή t
S_t: η αξία του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς τη χρονική στιγμή t
Y_t: το ύψος της Ασφαλιστικής Παροχής που καταβάλλεται τη χρονική στιγμή t,

Η τιμή της Ασφαλιστικής Παροχής Y_t, προσδιορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{Y_t = max(G_t, S_t) = G_t + max(S_t - G_t, 0) = S_t + max(G_t - S_t, 0)}, \quad 0 < t \leq T \qquad (\mathbf{2.1})$$

Η παραπάνω εξίσωση καταδεικνύει την ομοιότητα που έχει η Ασφαλιστική Παροχή με την πληρωμή ενός Δικαιώματος Προαίρεσης Αγοράς ή Πώλησης, το οποίο λήγει τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$. Θεωρούμε ότι βρισκόμαστε σε έναν Risk neutral World, ότι οι αποδόσεις του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς υπακούουν στην εξίσωση $(\mathbf{1.2})$, ότι το Χαρτοφυλάκιο είναι ένας τίτλος που διαπραγματεύεται σε μία Αγορά με τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν στην Εισαγωγή και ότι βρισκόμαστε *σε περιβάλλον σταθερών επιτοκίων*. Άρα, η (προεξοφλημένη κάτω από το μέτρο Q) αξία της Ασφαλιστικής Παροχής τη χρονική στιγμή σύναψης του συμβολαίου, περιέχει την τιμή ενός Δικαιώματος Προαίρεσης την ίδια χρονική στιγμή, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\boldsymbol{V_0^Q(Y_t) = e^{-rt}G_t + E^Q[e^{-rt}\,max(S_t - G_t, 0)] \Rightarrow V_0^Q(Y_t) = e^{-rt}G_t + c(S_0, G_t, t)} \qquad (\mathbf{2.2a})$$

ή

$$\boldsymbol{V_0^Q(Y_t) = E^Q[e^{-rt}S_t] + E^Q[e^{-rt}\,max(G_t - S_t, 0)] \Rightarrow V_0^Q(Y_t) = S_0 + \ p(S_0, G_t, t)} \qquad (\mathbf{2.2b})$$

Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό που χρησιμοποιήθηκε στην Εισαγωγή, θέτουμε ότι $\boldsymbol{c(S_0, G_t, t) = c(S_0, G_t, r, \sigma, t)}$ και $\boldsymbol{p(S_0, G_t, t) = p(S_0, G_t, r, \sigma, t)}$ είναι οι τιμές των Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων Αγοράς και Πώλησης αντίστοιχα, όπου $\boldsymbol{r, \sigma}$ το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και η μεταβλητότητα του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς, θεωρώντας ότι παραμένουν *σταθερά* καθ' όλη τη διάρκεια του συμβολαίου.

2.2 Τιμολόγηση ELEPAVG σε Περιβάλλον Σταθερών Επιτοκίων

Για να προχωρήσουμε στην τιμολόγηση των παραπάνω προϊόντων, όπως έχει ήδη αναφερθεί, θα χρησιμοποιήσουμε την *Αρχή της Ισοδυναμίας κάτω από το Μέτρο Πιθανότητας Q*. Κατά την εφαρμογή της, μπορεί να υπάρχουν αναλυτικές λύσεις, οπότε οδηγούμαστε σε εξισώσεις προσδιορισμού του ασφαλίστρου σε κλειστή μορφή, ενώ στις περιπτώσεις κατά τις οποίες αναλυτικές λύσεις είναι αδύνατον να εξαχθούν, το ασφάλιστρο προσδιορίζεται αριθμητικά με χρήση Monte Carlo υπολογισμών. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, η ύπαρξη ή μη αναλυτικών λύσεων εξαρτάται τόσο από τα μοντέλα επιτοκίων που χρησιμοποιούνται, όσο και από τα χαρακτηριστικά που αφορούν τον τρόπο λειτουργίας του συμβολαίου. Σε κάποιες περιπτώσεις οδηγούμαστε στον προσδιορισμό του ασφαλίστρου με χρήση επαναληπτικών αλγορίθμων σε συνδυασμό με διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις, όπως περιγράφεται αναλυτικά στην ενότητα των Αριθμητικών Αποτελεσμάτων.

Εφάπαξ Ασφάλιστρο

Για το συγκεκριμένο συμβόλαιο, αν συμβολίσουμε με $\boldsymbol{a_t}$ την πιθανότητα η Ασφαλιστική Παροχή να καταβληθεί τη χρονική στιγμή t, τότε ακολουθώντας τους συμβολισμούς που χρησιμοποιούνται ευρέως στον Αναλογισμό, έχουμε:

$$\boldsymbol{Pr(T=t)=a_t=}\begin{cases} {}_{t-1/1}\boldsymbol{q_x} = {}_{t-1}\boldsymbol{p_x}\cdot \boldsymbol{q_{x+t-1}}\ , & 1\le t<T \\ {}_{T-1/1}\boldsymbol{q_x} + {}_{T}\boldsymbol{p_x} = {}_{T-1}\boldsymbol{p_x}\ , & t=T \end{cases} \qquad (\mathbf{2.3})$$

Οι πιθανότητες a_t μπορούν να υπολογιστούν με χρήση **Πινάκων Επιβίωσης**, ενώ *σημειώνουμε* ότι, ύστερα από πράξεις, προκύπτει ότι: $\boldsymbol{\sum_{t=1}^{T} a_t = 1}$.

Με εφαρμογή της *Αρχής της Ισοδυναμίας κάτω από το Μέτρο Q* για τον υπολογισμό του Εφάπαξ Ασφαλίστρου $\boldsymbol{U}$ έχουμε:

$$\boldsymbol{U=\sum_{t=1}^{T} a_t\cdot V_0^Q(Y_t)} \overset{(\mathbf{2.2a,b})}{\Longrightarrow} \begin{cases} \boldsymbol{U=\sum_{t=1}^{T} a_t G_t e^{-rt}+\sum_{t=1}^{T} a_t\cdot c(S_0,G_t,t)} \\ \text{ή} \\ \boldsymbol{U=S_0+\sum_{t=1}^{T} a_t\cdot p(S_0,G_t,t)} \end{cases} \qquad (\mathbf{2.4})$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι η δίκαιη τιμή για το Εφάπαξ Ασφάλιστρο ενός συμβολαίου ELEPAVG επηρεάζεται από όλα τα χαρακτηριστικά του συμβολαίου που περιγράψαμε και αποτελείται από δύο τμήματα. Το πρώτο είναι το ποσό που επενδύεται στο Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς και το δεύτερο αποτελείται από ένα σταθμισμένο άθροισμα Δικαιωμάτων Πώλησης. Σημειώνουμε ότι στο άθροισμα αυτό συνεισφέρει σχεδόν αποκλειστικά ο τελευταίος όρος, καθώς οι πιθανότητες $\boldsymbol{a_t}$, όπως ορίστηκαν στην εξίσωση $(\mathbf{2.3})$ έχουν όλες, εκτός από την τελευταία, τιμή πολύ κοντά στο μηδέν. Το δεύτερο τμήμα αποτελεί την αποτίμηση της εξασφάλισης των ελάχιστων εγγυημένων ποσών για όλη τη διάρκεια του συμβολαίου που παρέχει η Εταιρεία στον Ασφαλισμένο. Είναι, όπως έχει ήδη αναφερθεί, το ποσό που πρέπει να χρεώσει η Εταιρεία για τον Κίνδυνο της Αγοράς που αναλαμβάνει λόγω της επένδυσης στο Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς. Υπό καθαρά Χρηματοοικονομική σκοπιά, η Εταιρεία που πουλά ένα συμβόλαιο ELEPAVG αναλαμβάνει τον κίνδυνο που αντιστοιχεί σε μία σειρά από θέσεις “Short Put”, που αναλογούν στα ποσοστά $\boldsymbol{a_t}$, τα οποία όπως αναφέραμε είναι μικρά, με εξαίρεση το τελευταίο. Η προηγούμενη διαπίστωση υποδεικνύει και την ενδεδειγμένη στρατηγική Αντιστάθμισης του Χρηματοοικονομικού Κινδύνου που μπορεί να ακολουθηθεί από την Ασφαλιστική Εταιρεία. Θα επανέλθουμε στις στρατηγικές αντιστάθμισης σε επόμενη ενότητα, αλλά προκαταβολικά αναφέρουμε ότι μια τέτοια στρατηγική είναι πρακτικά δυσανάλογα δαπανηρή και γι’ αυτό είναι δύσκολο να ακολουθηθεί.

Σημειώνουμε ότι σε όλη τη διαδικασία αποτίμησης του Εφάπαξ Ασφαλίστρου, μέχρι να καταλήξουμε στην εξίσωση $(\mathbf{2.4})$, αναφερθήκαμε απευθείας στο Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς και στην αξία του ως σύνολο και όχι σε επιμέρους μονάδες αυτού. Αντιμετωπίσαμε δηλαδή το συμβόλαιο ELEPAVG ως προϊόν Equity-Linked.

Τελικά, με αντικατάσταση στην εξίσωση $(\mathbf{2.4})$ της τιμής του Δικαιώματος Πώλησης από την σχέση $(\mathbf{1.13b})$ των Black and Scholes, αν είναι γνωστές οι τιμές των μεγεθών $\boldsymbol{a_t, S_0, G_t, t, r, \sigma}$ και θεωρώντας ότι βρισκόμαστε σε περιβάλλον σταθερών επιτοκίων, προκύπτει μια σχέση προσδιορισμού σε *κλειστή μορφή* για το Εφάπαξ Ασφάλιστρο $\boldsymbol{U}$:

$$U = \sum_{t=1}^{T} a_t G_t e^{-rt} \cdot \left[1 - N\big(d_2(G_t)\big)\right] + S_0 \cdot \sum_{t=1}^{T} a_t \cdot N\big(d_1(G_t)\big) \qquad (2.5)$$

Όπου: $d_1(G_t) = \frac{ln(S_0/G_t)+(r+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$, $d_2(G_t) = d_1(G_t) - \sigma\sqrt{t}$ και $N(x)$ η αθροιστική συνάρτηση μιας τυπικής κανονικής κατανομής, όπως έχει ήδη αναφερθεί.

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, το Εγγυημένο Ποσό G_t και ο τρόπος υπολογισμού του αποτελούν βασικό στοιχείο του Συμβολαίου. Ακολουθώντας την ορολογία των Bacinello και Ortu [1993], ο τρόπος καθορισμού του Εγγυημένου Ποσού μπορεί να είναι:

i) *Εξωγενής*, δηλαδή να μην επηρεάζεται από τα χαρακτηριστικά του συμβολαίου.

ii) *Ενδογενής*, που σημαίνει να εξαρτάται από το ύψος του καταβαλλόμενου ασφάλιστρου, το οποίο αποτελεί χαρακτηριστικό του συμβολαίου.

Στην περίπτωση (i) μία λογική επιλογή για τον καθορισμό του Εγγυημένου Ποσού είναι:

$$G_t = S_0 e^{\delta t} \qquad (2.6a) \qquad ή \qquad G_t = S_0 / A^{(\delta)}_{x:\overline{T}|} \qquad (2.6b)$$

όπου $\delta < r$, που σημαίνει ότι η Ασφαλιστική Εταιρεία εγγυάται (και άρα ο Ασφαλισμένος εξασφαλίζει) με το πέρασμα του χρόνου συσσώρευση κεφαλαίου με ρυθμό δ, ο οποίος όμως είναι μικρότερος από το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Η παραπάνω τακτική είναι συνηθισμένη σε όλα τα χρηματοοικονομικά/ασφαλιστικά προϊόντα, με τις εταιρείες που τα πουλούν να εγγυώνται εν γένει μία απόδοση ετήσια ή συνολική μικρότερη από αυτή που αναμένουν ότι θα σημειώσουν τα χαρτοφυλάκια τους.

Σε αναλογία με τις προηγούμενες, στην περίπτωση (ii) οι Bacinello και Ortu [1993] προτείνουν για τον υπολογισμό του Ασφαλίστρου με ενδογενώς καθορισμένο Εγγυημένο Ποσό τις εξής υποπεριπτώσεις,:

$$G_t(U) = U e^{\delta t} \qquad (2.7a) \qquad ή \qquad G_t(U) = U / A^{(\delta)}_{x:\overline{T}|} \qquad (2.7b)$$

Όπου: $A^{(\delta)}_{x:\overline{T}|} = \sum_{t=1}^{T} a_t \cdot e^{-\delta t}$ είναι η Αξία τη στιγμή σύναψης μίας Μικτής Ασφάλιση Ζωής διάρκειας Τ ετών που πληρώνει στον ασφαλισμένο 1 χρηματική μονάδα με προεξοφλητικό επιτόκιο δ, κατά τους γνωστούς συμβολισμούς του Αναλογισμού.

Όπως είναι λογικό, σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, ο ενδογενής ή εξωγενής τρόπος καθορισμού του Εγγυημένου Ποσού είναι τέτοιος ώστε όσο αργότερα επέρχεται η στιγμή της πληρωμής τόσο υψηλότερο να είναι το Εγγυημένο Ποσό.

Με εισαγωγή των σχέσεων (2.6) στην εξίσωση (2.5) υπολογίζεται αναλυτικά το Εφάπαξ Ασφάλιστρο U, δεν μπορεί να συμβεί όμως το ίδιο με τις εξισώσεις (2.7), καθώς η χρήση τους οδηγεί την εξίσωση (2.5) στη μορφή:

$$U = \sum_{t=1}^{T} a_t G_t e^{-rt} \cdot \left[1 - N\Big(d_2\big(G_t(U)\big)\Big)\right] + S_0 \cdot \sum_{t=1}^{T} a_t \cdot N\Big(d_1\big(G_t(U)\big)\Big) \qquad (2.8)$$

Η πολυπλοκότητα της παραπάνω εξίσωσης καθιστά αδύνατη την εξαγωγή αναλυτικών λύσεων για το Εφάπαξ Ασφάλιστρο $\boldsymbol{U}$, ο προσδιορισμός του οποίου αποτελεί πλέον ένα Πρόβλημα Σταθερού Σημείου (Fixed Point Problem), που έχει τη μορφή $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})$, όπου $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})$ είναι όλο το δεξί μέλος της $(\mathbf{2.8})$.

Οι Bacinello και Ortu [1993] αποδεικνύουν ότι και στις 2 παραπάνω περιπτώσεις $(\mathbf{2.7}\boldsymbol{a})$ και $(\mathbf{2.7}\boldsymbol{b})$ ενδογενούς προσδιορισμού του Εγγυημένου Ποσού $\boldsymbol{G_t}(\boldsymbol{U})$, πληρούνται οι προϋποθέσεις ενός Θεωρήματος από τη Συναρτησιακή Ανάλυση (Kolmogorov και Fomin [1970]), που εξασφαλίζουν όχι μόνο την ύπαρξη αλλά και τη μοναδικότητα της λύσης στο παραπάνω Πρόβλημα Σταθερού Σημείου. Άρα αρκεί η εύρεση μιας τιμής για το Εφάπαξ Ασφάλιστρο $\boldsymbol{U}$ που να ικανοποιεί την εξίσωση $(\mathbf{2.8})$, η οποία μπορεί να επιτευχθεί με μία "Μικτή" Αναλυτική και Αριθμητική μέθοδο, καθώς βασίζεται τόσο στην αναλυτική σχέση $(\mathbf{2.5})$, όσο και στην εφαρμογή ενός επαναληπτικού αλγορίθμου που περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

<u>Περιοδικό Ασφάλιστρο</u>

Αν θεωρήσουμε, όπως συνηθίζεται, ότι η πληρωμή του ασφαλίστρου ενός συμβολαίου ELEPAVG γίνεται περιοδικά, με ετήσιες ισόποσες καταβολές για όλη τη διάρκεια του Συμβολαίου, η διαδικασία υπολογισμού του Περιοδικού Ασφαλίστρου $\boldsymbol{P}$ διαφοροποιείται αισθητά σε σχέση με αυτήν που ακολουθήθηκε για το Εφάπαξ Ασφάλιστρο. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η Ασφαλιστική Εταιρεία επενδύει περιοδικά (όχι μόνο στην έναρξη), τοποθετώντας σε κάθε χρονική στιγμή καταβολής Ασφαλίστρου ένα μέρος αυτού στο Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς. Υποθέτουμε ότι το ποσό που χρησιμοποιείται για επένδυση σε κάθε χρονική στιγμή είναι καθορισμένο εκ των προτέρων. Επειδή όμως με αυτόν τον τρόπο πραγματοποιούνται αγορές σε διαφορετικές τιμές του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς, δεν είναι γνωστός ο αριθμός των *μονάδων* του Χαρτοφυλακίου που αγοράζονται σε κάθε χρονική στιγμή, ούτε ο συνολικός αριθμός των μονάδων του Χαρτοφυλακίου που θα έχει στην κατοχή της η Ασφαλιστική Εταιρεία τη στιγμή καταβολής της Ασφαλιστικής Παροχής. Σύμφωνα με τη φρασεολογία που χρησιμοποιήθηκε ήδη, γίνεται φανερό ότι ο σχεδιασμός ενός τέτοιου συμβολαίου ακολουθεί τη λογική του Unit-Linked, πράγμα που αποτυπώνεται τόσο στους παρακάτω συμβολισμούς, όσο και στον τελικό υπολογισμό του Ασφαλίστρου.

Έστω ότι $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{t})$ είναι ο αριθμός των μονάδων του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς που έχει στη κατοχή της η Ασφαλιστική Εταιρεία τη χρονική στιγμή t , δηλαδή που έχουν αγορασθεί από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $(t-1)$, χρησιμοποιώντας μέρος από τα ασφάλιστρα που έχει εισπράξει το ίδιο χρονικό διάστημα, όπως έχει ήδη αναφερθεί. Τότε έχουμε:

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \boldsymbol{d}(\mathbf{0})/\boldsymbol{S}(\mathbf{0}), & \boldsymbol{t} = \mathbf{0} \\ \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}-\mathbf{1}} \frac{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{k})}{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{k})}, & \mathbf{1} \leq \boldsymbol{t} < T \end{cases} \qquad (\mathbf{2.9})$$

Όπου χρησιμοποιείται ο ελαφρά διαφοροποιημένος συμβολισμός: $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{k}) \equiv \boldsymbol{S_k}$ για κάθε $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{T}$, για να είναι πιο ξεκάθαρη η διαδικασία υπολογισμού και $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})$ είναι το προκαθορισμένο τμήμα του Ασφαλίστρου που επενδύεται τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$.

Αν υποθέσουμε όπως και πριν ότι η Ασφαλιστική Εταιρεία εγγυάται ένα ελάχιστο ποσό $\boldsymbol{G_t}$ σε κάθε πιθανή χρονική στιγμή καταβολής t, τότε η Ασφαλιστική Παροχή $\boldsymbol{Y_t}$, αντί της $(\mathbf{2.2})$, υπολογίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{Y_t = G_t + max\left(S_t \cdot \sum_{k=0}^{t-1} \frac{d(k)}{S(k)} - G_t, 0\right) = S_t \cdot \sum_{k=0}^{t-1} \frac{d(k)}{S(k)} + max\left(G_t - S_t \cdot \sum_{k=0}^{t-1} \frac{d(k)}{S(k)}, 0\right)} \qquad (\mathbf{2.10})$$

Θεωρούμε για λόγους απλοποίησης, χωρίς να στερούμαστε ακρίβειας, ότι το μέρος του ασφαλίστρου που επενδύεται στο Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς είναι σταθερό για όλη τη διάρκεια ισχύος του Συμβολαίου, δηλαδή ότι: $\boldsymbol{d(k) = d,\ 0 \le k \le T}$

Αν συμβολίσουμε ως $\boldsymbol{c^*(G_t, t)}$ και $\boldsymbol{p^*(G_t, t)}$ την αξία τη χρονική στιγμή σύναψης των ποσοτήτων $\boldsymbol{max\left(S_t \cdot \sum_{k=0}^{t-1} \frac{d}{S(k)} - G_t, 0\right)}$ και $\boldsymbol{max\left(G_t - S_t \cdot \sum_{k=0}^{t-1} \frac{d}{S(k)}, 0\right)}$ αντίστοιχα, σε περιβάλλον *σταθερών επιτοκίων,* τότε μπορούμε να γράψουμε ότι η αξία της Ασφαλιστικής Υποχρέωσης τη χρονική στιγμή έναρξης του συμβολαίου είναι:

$$\boldsymbol{V_0^Q(Y_t) = G_t e^{-rt} + c^*(G_t, t) = d \cdot \sum_{k=0}^{t-1} e^{-rk} + p^*(G_t, t)} \qquad (\mathbf{2.11})$$

Όπως και πριν, ο υπολογισμός του Περιοδικού Ασφαλίστρου $\boldsymbol{P}$ ενός ELEPAVG ασφαλιστικού συμβολαίου προκύπτει με εφαρμογή της *Αρχής της Ισοδυναμίας κάτω από το Μέτρο Q* ως εξής:

$$\boldsymbol{P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)} = \sum_{t=1}^{T} a_t \cdot V_0^Q(Y_t) \Rightarrow P = \frac{\sum_{t=1}^{T} a_t \cdot V_0^Q(Y_t)}{\ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)}}} \qquad (\mathbf{2.12})$$

Όπου: $\boldsymbol{\ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)} = \sum_{t=0}^{T-1}\ {}_t p_x \cdot e^{-rt}}$ και *μετά από πράξεις*: $\boldsymbol{\ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)} = \sum_{t=1}^{T} a_t \cdot \sum_{k=0}^{t-1} e^{-rk}}$ $(\mathbf{2.13})$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις $(\mathbf{2.11})$ στην $(\mathbf{2.12})$ προκύπτει τελικά ότι:

$$\boldsymbol{P = \frac{\sum_{t=1}^{T} a_t G_t e^{-rt}}{\ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)}} + \frac{\sum_{t=1}^{T} a_t \cdot c^*(G_t, t)}{\ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} a_t d \cdot \sum_{k=0}^{t-1} e^{-rk}}{\ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)}} + \frac{\sum_{t=1}^{T} a_t \cdot p^*(G_t, t)}{\ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)}}}$$

Χρησιμοποιώντας για ευκολία το 2^{o} τμήμα της παραπάνω εξίσωσης και με τη βοήθεια της σχέσης $(\mathbf{2.13})$, τελικά έχουμε:

$$\boldsymbol{P = \frac{d \cdot \sum_{t=1}^{T} a_t \cdot \sum_{k=0}^{t-1} e^{-rk}}{\sum_{t=1}^{T} a_t \cdot \sum_{k=0}^{t-1} e^{-rk}} + \frac{\sum_{t=1}^{T} a_t \cdot p^*(G_t, t)}{\ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)}} \Rightarrow P = d + \frac{\sum_{t=1}^{T} a_t \cdot p^*(G_t, t)}{\ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)}}} \qquad (\mathbf{2.14})$$

Όπως αναφέρει ο Delbaen [1990] , αν για το Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς, την Αγορά και τα Επιτόκια ισχύει ό, τι και στην περίπτωση του Εφάπαξ Ασφαλίστρου, για την ποσότητα $\boldsymbol{p^*(G_t, t)}$ ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{p^*(G_t, t) = e^{-rt} \cdot E\left[max\left(G_t - d \cdot \sum_{k=0}^{t-1} e^{(r-\sigma^2/2)(t-k)+\sigma[W(t)-W(k)]}, 0\right)\right]} \qquad (\mathbf{2.15})$$

Όπου $\{\boldsymbol{W(t)},\ \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}\}$ είναι η γνωστή Γεωμετρική Κίνηση Brown. Η παραπάνω σχέση φυσικά δεν είναι εξίσωση προσδιορισμού του $\boldsymbol{p^*(G_t, t)}$ σε κλειστή μορφή, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αριθμητικό υπολογισμό του $\boldsymbol{p^*(G_t, t)}$ με τη μέθοδο Monte Carlo και στη συνέχεια του Περιοδικού Ασφαλίστρου $\boldsymbol{P}$ από τη σχέση $(\boldsymbol{2.14})$.

Όπως και προηγουμένως, θα ασχοληθούμε με τον προσδιορισμό του Περιοδικού Ασφαλίστρου $\boldsymbol{P}$ στις περιπτώσεις όπου το Εγγυημένο Ποσό καθορίζεται:

$$\textit{Εξωγενώς}: \boldsymbol{G_t = d \cdot \sum_{k=0}^{t-1} e^{\delta(t-k)}}\ ,\ \textit{όπου}\ \boldsymbol{\delta < r} \quad (\boldsymbol{2.16a})\ \ \textit{και}\ \boldsymbol{G_t = d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(\delta)} / A_{x:\overline{T}|}^{(\delta)}} \qquad (\boldsymbol{2.16b})$$

$$\textit{Ενδογενώς}: \ \boldsymbol{G_t(P) = P \cdot \sum_{k=0}^{t-1} e^{\delta(t-k)}} \quad (\boldsymbol{2.17a}) \qquad \textit{και} \quad \boldsymbol{G_t(P) = P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(\delta)} / A_{x:\overline{T}|}^{(\delta)}} \quad (\boldsymbol{2.17b})$$

Οποιονδήποτε από τους παραπάνω τρόπους υπολογισμού του Εγγυημένου Ποσού κι αν επιλέξουμε, το Περιοδικό Ασφάλιστρο μπορεί να προσεγγιστεί, όπως αναφέραμε νωρίτερα, μόνο αριθμητικά, με τη μέθοδο Monte Carlo, μέσω των $(\boldsymbol{2.15})$ και $(\boldsymbol{2.14})$. Στην περίπτωση του εξωγενώς καθορισμένου Εγγυημένου Ποσού πρέπει να προηγηθεί του Monte Carlo η αντικατάσταση μιας εκ των $(\boldsymbol{2.16a})$ και $(\boldsymbol{2.16b})$ στην $(\boldsymbol{2.15})$, ενώ στην περίπτωση του ενδογενώς καθορισμένου Εγγυημένου Ποσού, με αντικατάσταση της $(\boldsymbol{2.17a})$ ή $(\boldsymbol{2.17b})$ στην $(\boldsymbol{2.14})$ προκύπτει και πάλι ένα πρόβλημα Σταθερού Σημείου, που έχει τη μορφή:

$$\boldsymbol{P = f(P)}, \qquad \textit{με} \quad \boldsymbol{f(P) = d + \frac{\sum_{t=1}^{T} a_t \cdot p^*(G_t(P), t)}{\ddot{a}_{x:\overline{T}|}^{(r)}}} \qquad (\boldsymbol{2.18})$$

Οι Bacinello και Ortu [1993] επίσης αποδεικνύουν ότι και για τις δύο περιπτώσεις $(\boldsymbol{2.17a})$ και $(\boldsymbol{2.17b})$ ενδογενούς προσδιορισμού του Εγγυημένου Ποσού $\boldsymbol{G_t(P)}$, πληρούνται οι προϋποθέσεις για τη μοναδικότητα της λύσης του Προβλήματος Σταθερού Σημείου της μορφής της $(\boldsymbol{2.18})$. Η παραπάνω λύση μπορεί να βρεθεί προσεγγιστικά όπως και πριν με την βοήθεια ενός επαναληπτικού αλγορίθμου, όπως περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

2.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Στη συνέχεια παραθέτουμε στους Πίνακες **2.1.Α** έως και **2.4.Ε** κάποια αριθμητικά αποτελέσματα, για τις τιμές των παραμέτρων τις οποίες θεωρούμε πιο ρεαλιστικές, κυρίως σε επίπεδο επιτοκίων και αντίστοιχων εγγυημένων αποδόσεων. Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές $\boldsymbol{S_0 = 1, d = 1, g = 1}$, ενώ οι πιθανότητες $\boldsymbol{a_t}$ και $\boldsymbol{{}_tp_x}$ βασίστηκαν στους Ελληνικούς Πίνακες Ανδρικής Θνησιμότητας που δημοσίευσε η Ένωση Αναλογιστών Ελλάδος [2005]. Σε κάθε περίπτωση αναφέρονται όλες οι υπόλοιπες τιμές των παραμέτρων με βάση τις οποίες πραγματοποιήθηκαν οι υπολογισμοί και μας βοηθούν ώστε στη συνέχεια να προβούμε στις απαραίτητες συγκρίσεις. Δίνονται σε αντιπαραβολή οι τιμές του Ασφαλίστρου (Εφάπαξ ή Περιοδικού) με το Εγγυημένο Ποσό Ασφαλιστικής Παροχής να καθορίζεται εξωγενώς ή ενδογενώς, για να είναι πιο εύκολα αντιληπτή η μεταξύ τους διαφορά. Αναφέρουμε προκαταβολικά ότι σε όλες τις περιπτώσεις, για ίδιες τιμές των παραμέτρων των συμβολαίων, το Συμβόλαιο με Ενδογενώς καθορισμένο Εγγυημένο Ποσό ως ελάχιστη Ασφαλιστική Παροχή έχει υψηλότερη τιμή από το αντίστοιχο με Εξωγενώς καθορισμένο Εγγυημένο Ποσό.

Οι τιμές για το Εφάπαξ Ασφάλιστρο με εξωγενώς Εγγυημένο Ποσό για τις παραπάνω περιπτώσεις $(\boldsymbol{2.6a})$ και $(\boldsymbol{2.6b})$ προέκυψαν αναλυτικά με απευθείας αντικατάσταση των παραμέτρων στη σχέση

$(\boldsymbol{2.5})$, ενώ στην περίπτωση του ενδογενούς καθορισμού του Εγγυημένου Ποσού για τις περιπτώσεις $(\boldsymbol{2.7a})$ και $(\boldsymbol{2.7b})$ εφαρμόστηκε μία "Μικτή Μέθοδος" υπολογισμού, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα. Πιο συγκεκριμένα, για τον προσδιορισμό του Εφάπαξ Ασφαλίστρου $\boldsymbol{U}$ με τη "Μικτή Μέθοδο", εφαρμόζεται ένας επαναληπτικός αριθμητικός αλγόριθμος ο οποίος χρησιμοποιεί μία τιμή "έναρξης" $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U_0}$ και στη συνέχεια προβαίνει σε διαδοχικές αντικαταστάσεις $\boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U_{n-1}})$ (σύμφωνα με την εξίσωση $(\boldsymbol{2.8})$) μέχρι η διαφορά $\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{U_{n-1}}$ να προσεγγίσει ένα επιθυμητό επίπεδο ακριβείας. Με αυτόν τον τρόπο σε κάθε επανάληψη υπολογίζεται μία προσεγγιστική λύση του Προβλήματος Σταθερού Σημείου, με την προσέγγιση να βελτιώνεται συνεχώς, μέχρι την τελική προσέγγιση που θεωρείται η βέλτιστη λύση για το συγκεκριμένο επίπεδο ακρίβειας. Για τον υπολογισμό του Εφάπαξ Ασφαλίστρου ορίστηκε τιμή έναρξης $\boldsymbol{U_0} = \boldsymbol{S_0} = \boldsymbol{1}$ και επίπεδο ακρίβειας $\boldsymbol{10^{-6}}$, ενώ δίπλα σε κάθε τιμή του Ασφαλίστρου που έχει προκύψει με τη *Μικτή Μέθοδο* παρατίθεται και ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν.

Στους Πίνακες **2.1.A** και **2.2.A** βλέπουμε τη μεταβολή της τιμής του Εφάπαξ Ασφαλίστρου με Εξωγενώς και Ενδογενώς καθορισμένο Εγγυημένο Ποσό για διάφορες ηλικίες του Ασφαλισμένου στην έναρξη του συμβολαίου και για διάφορες χρονικές διάρκειες του συμβολαίου. Βλέπουμε ότι γενικά υπάρχει πολύ μικρή διαφοροποίηση στις τιμές, γεγονός που οφείλεται στις παραπλήσιες και πολύ χαμηλές τιμές των $\boldsymbol{a_t}$ για όλες τις πιθανές ηλικίες του Ασφαλισμένου στην έναρξη. Για το λόγο αυτό παρουσιάζουμε στους επόμενους πίνακες μόνο τις τιμές του Ασφαλίστρου που αντιστοιχούν στις ενδεικτικές περιπτώσεις ηλικίας 45 ετών του Ασφαλισμένου στην έναρξη και διάρκειας 10, 20 και 30 ετών συμβολαίου.

Στους Πίνακες **2.1.B** και **2.2.B** βλέπουμε τη μεταβολή της τιμής του Εφάπαξ Ασφαλίστρου, συναρτήσει της μεταβλητότητας του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς, για Συμβόλαια με την ίδια ηλικία έναρξης του Ασφαλισμένου (45) αλλά τρεις διαφορετικές διάρκειες (10, 20, 30). Στον Πίνακα **2.1.B** έχουμε Εγγυημένο Ποσό σύμφωνα με τις σχέσεις $(\boldsymbol{2.6a})$ και $(\boldsymbol{2.7a})$, ενώ στον Πίνακα **2.2.B** σύμφωνα με τις σχέσεις $(\boldsymbol{2.6b})$ και $(\boldsymbol{2.7b})$. Εν γένει παρατηρείται πλήρης ομοιότητα της συμπεριφοράς του Ασφαλίστρου και στους δύο Πίνακες. Σε όλες τις περιπτώσεις, ξεκινούν και τα δύο από μία πολύ χαμηλή τιμή (κοντά στη μονάδα) και αυξάνονται όσο αυξάνεται η μεταβλητότητα του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς. Το φαινόμενο αυτό είναι αναμενόμενο αν θυμηθούμε ότι η αποτίμηση του Συμβολαίου ισοδυναμεί με "σταθμισμένο" άθροισμα Δικαιωμάτων Πώλησης, σύμφωνα με την εξίσωση $(\boldsymbol{2.4})$, των οποίων η τιμή είναι αύξουσα συνάρτηση της μεταβλητότητας, όπως επίσης και ο Χρηματοοικονομικός Κίνδυνος στον οποίο εκτίθεται η Εταιρεία. Η αύξηση μάλιστα είναι πιο έντονη για τα Συμβόλαια με Ενδογενώς καθορισμένο Εγγυημένο Ποσό, η οποία αποτυπώνεται στις κατώτερες περιοχές του πίνακα, που αντιστοιχούν στις υψηλότερες μεταβλητότητες. Δεν παρατηρείται ιδιαίτερη αλλαγή στις τιμές των Ασφαλίστρων ανάμεσα στις 3 περιπτώσεις Διάρκειας Συμβολαίων. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί να ερμηνευθεί, όπως και πριν, από τις χαμηλές τιμές των $\boldsymbol{a_t}$ του αθροίσματος της σχέσης $(\boldsymbol{2.4})$, (οι τιμές των Δικαιωμάτων Πώλησης παραμένουν ίδιες) καθώς, παρά την αύξηση του πλήθους των όρων, όσο αυξάνεται η διάρκεια του συμβολαίου, η συνεισφορά στο άθροισμα παραμένει πολύ μικρή. Επιπλέον, ο τελευταίος και καθοριστικός σε επίπεδο συνεισφοράς τελευταίος όρος του εν λόγω αθροίσματος βαίνει μειούμενος όσο αυξάνεται η διάρκεια του συμβολαίου, άρα η έστω μικρή συνεισφορά των προηγούμενων όρων ισοσκελίζεται, η ακόμα υποσκελίζεται για μεγάλες διάρκειες συμβολαίων. Όσον αφορά τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για την εξαγωγή του Ασφαλίστρου με Εξωγενή τρόπο καθορισμού του Εγγυημένου Ποσού, βλέπουμε σε όλες τις περιπτώσεις ότι αύξηση της μεταβλητότητας συνεπάγεται και μεγαλύτερο αριθμό επαναλήψεων. Ο αργότερος ρυθμός σύγκλισης του επαναληπτικού αλγορίθμου δικαιολογείται καθώς η αύξηση της μεταβλητότητας συνεπάγεται και υψηλότερες τιμές Ασφαλίστρου, άρα περισσότερα βήματα μέχρι να καλυφθεί η απόσταση από την τιμή έναρξης που είναι πάντα η μονάδα.

Στους Πίνακες **2.1.Γ-Ε** και **2.2.Γ-Ε** βλέπουμε τη μεταβολή της τιμής του Εφάπαξ Ασφαλίστρου συναρτήσει της εγγυημένης απόδοσης $\boldsymbol{\delta}$, για τις ίδιες περιπτώσεις με τους Πίνακες 2.1.Β και 2.2.Β όσον αφορά την ηλικία του Ασφαλισμένου κατά την έναρξη του Συμβολαίου και τη Διάρκειά του σε έτη, αλλά για τρεις διαφορετικές τιμές της μεταβλητότητας (0,1 0,3 και 0,5). Αναμενόμενα, παρατηρούμε σε όλες τις περιπτώσεις αύξηση της τιμής του Ασφαλίστρου όσο η εγγυημένη απόδοση $\boldsymbol{\delta}$ πλησιάζει την τιμή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο. Όπως και στους Πίνακες 2.1.Β και 2.2.Β βλέπουμε την απόκλιση μεταξύ Ασφαλίστρου με Εξωγενώς καθορισμένο και Ασφαλίστρου με Ενδογενώς καθορισμένο Εγγυημένο Ποσό να αυξάνεται όσο πιο μεταβλητό θεωρείται το Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς.

Το Περιοδικό Ασφάλιστρο του ELEPAVG Συμβολαίου υπολογίστηκε με Monte Carlo προσομοίωση 100.000 μονοπατιών του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς στο διάστημα $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{T})$ με χρήση της εξίσωσης $(\mathbf{2.14})$, για τις περιπτώσεις $(\mathbf{2.16}\boldsymbol{a})$ και $(\mathbf{2.16}\boldsymbol{b})$ του Εξωγενώς καθορισμένου Εγγυημένου Ποσού και με τη χρήση διαδοχικών αντικαταστάσεων που περιγράφηκε νωρίτερα για τις περιπτώσεις $(\mathbf{2.17}\boldsymbol{a})$ και $(\mathbf{2.17}\boldsymbol{b})$ του Ενδογενώς καθορισμένου Εγγυημένου Ποσού στην εξίσωση $(\mathbf{2.18})$. Το επίπεδο ακρίβειας του επαναληπτικού αλγορίθμου ορίστηκε ως $\mathbf{10^{-4}}$, δηλαδή χαμηλότερα σε σχέση με το Εφάπαξ Ασφάλιστρο, καθώς για κάθε επανάληψη πραγματοποιείται νέα εξαγωγή τιμής του Περιοδικού Ασφαλίστρου μέσω Monte Carlo, οπότε η διαδικασία είναι χρονικά δαπανηρή. Επιπλέον, με χρήση 100.000 μονοπατιών οι τιμές του Ασφαλίστρου δεν μπορούν να έχουν ακρίβεια της τάξης του $\mathbf{10^{-6}}$, οπότε συγκρίσεις σε αυτό το επίπεδο θα ήταν άστοχες.

Η συμπεριφορά των τιμών Περιοδικού Ασφαλίστρου σε όλο το φάσμα των παραμέτρων που παρουσιάζονται στη συνέχεια και στο Παράρτημα είναι πανομοιότυπη με αυτή των τιμών του Εφάπαξ Ασφαλίστρου. Με μία προσεκτικότερη ανάλυση θα μπορούσε να αναφερθεί μια αναλογικά μικρότερη απόκλιση μεταξύ των τιμών Ασφαλίστρου με Εξωγενώς-Ενδογενώς καθορισμένο Εγγυημένο Ποσό, από την αντίστοιχη που παρατηρείται για το Εφάπαξ Ασφάλιστρο.

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ποια είναι τα περιθώρια σε επίπεδο λήψης αποφάσεων μιας Ασφαλιστικής Εταιρείας ως προς τη διαμόρφωση της τακτικής της. Σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, που αποτελεί στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων την αναμενόμενη απόδοση στα πλαίσια μιας δίκαιης αποτίμησης ενός συμβολαίου με χρήση των μεθόδων από τα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά (Risk Neutral Valuation – No Arbitrage Pricing – Q Martingales προεξοφλημένες τιμές), είναι γνωστό. Η εταιρεία μπορεί να καθορίσει το επίπεδο της εγγυημένης απόδοσης $\boldsymbol{\delta}$ που παρέχει στα συμβόλαια ELEPAVG και το Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς στο οποίο επενδύει λογαριασμό των Ασφαλισμένων, δηλαδή την παράμετρο $\boldsymbol{\sigma}$. Με κατάλληλους συνδυασμούς $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}$ όπως φαίνεται και στα αποτελέσματα στους Πίνακες (και του Παρατήματος) μπορεί να δημιουργήσει Συμβόλαια με παραπλήσιο (δίκαιο) Ασφάλιστρο. Συνήθως επιλέγονται από τις εταιρείες συντηρητικά Χαρτοφυλάκια με κυρίαρχο στοιχείο τα ομόλογα, τα οποία παρουσιάζουν διαχρονικά τις χαμηλότερες μεταβλητότητες (αλλά και τις χαμηλότερες αποδόσεις). Η τακτική αυτή οδηγεί σε μικρή Ανάληψη Κινδύνου από πλευράς των Ασφαλιστικών Εταιρειών (η οποία αποτελεί κυρίαρχη επιλογή που στοχεύει στην μακροπρόθεσμη βιωσιμότητα), αλλά πρακτικά σε χαμηλές αποδόσεις, πέραν της εγγυημένης, για τους Ασφαλισμένους. Σε κάποιες περιπτώσεις στη σύγχρονη αγορά παρέχεται η δυνατότητα στον Ασφαλισμένο να επιλέξει το Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς που επιθυμεί να επενδυθούν τα Ασφάλιστρά του, όμως στις περιπτώσεις αυτές δεν παρέχονται καθόλου εγγυήσεις και ο Ασφαλισμένος αναλαμβάνει εξ ολοκλήρου τον (Επενδυτικό) Κίνδυνο της Αγοράς.

Εφάπαξ Ασφάλιστρο U

$U^{\varepsilon\xi}$ όταν: $G_t = S_0 e^{\delta t}$ και $U^{\varepsilon\nu\delta}$ όταν: $G_t(U) = U e^{\delta t}$

Πίνακες 2.1.Α:

r	δ	σ	T
0,03	0,02	0,3	10
x	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
25	1,300637	2,017636	51
30	1,300720	2,017707	51
35	1,300621	2,017568	51
40	1,300213	2,017136	51
45	1,299424	2,016282	51
50	1,297942	2,014737	51
55	1,295815	2,012473	52

r	δ	σ	T
0,03	0,02	0,3	20
x	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
25	1,364132	2,038132	37
30	1,364085	2,038215	37
35	1,363514	2,038152	37
40	1,362131	2,037867	37
45	1,359706	2,037243	37
50	1,355676	2,036092	38
55	1,349832	2,034296	39

r	δ	σ	T
0,03	0,02	0,3	30
x	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
25	1,386531	1,967685	30
30	1,386148	1,968860	30
35	1,384937	1,970710	30
40	1,382507	1,973480	30
45	1,378504	1,977462	31

r	δ	σ	x
0,03	0,02	0,3	45
T	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
5	1,231919	1,884592	68
10	1,299424	2,016282	51
15	1,337360	2,047030	43
20	1,359706	2,037243	37
25	1,372299	2,010119	34
30	1,378504	1,977462	31

Πίνακες 2.1.Β:

r	δ	X	T
0,030	0,02	45	10
σ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,050	1,023969	1,034223	11
0,100	1,077508	1,148650	20
0,150	1,133958	1,310201	28
0,200	1,190291	1,510113	36
0,250	1,245611	1,745839	44
0,300	1,299424	2,016282	51
0,350	1,351373	2,320418	58
0,400	1,401180	2,656736	65
0,450	1,448620	3,022988	71
0,500	1,493517	3,416083	77

r	δ	x	T
0,030	0,02	45	20
σ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,050	1,020685	1,025895	8
0,100	1,084847	1,139980	15
0,150	1,155904	1,309659	21
0,200	1,226675	1,520311	27
0,250	1,294983	1,764801	32
0,300	1,359706	2,037243	37
0,350	1,420133	2,331380	42
0,400	1,475802	2,640245	46
0,450	1,526441	2,956319	50
0,500	1,571942	3,271924	53

r	δ	x	T
0,030	0,02	45	30
σ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,050	1,017343	1,020472	7
0,100	1,084173	1,128184	13
0,150	1,161316	1,293441	18
0,200	1,238017	1,497120	23
0,250	1,310949	1,728261	27
0,300	1,378504	1,977462	31
0,350	1,439791	2,235465	34
0,400	1,494370	2,493217	37
0,450	1,542135	2,742391	40
0,500	1,583250	2,975975	42

Πίνακες 2.1.Γ:

r	σ	x	T
0,030	0,1	45	10
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,024926	1,030123	7
0,005	1,033920	1,043835	9
0,010	1,045400	1,064200	11
0,015	1,059788	1,095721	14
0,020	1,077508	1,148650	20

r	σ	x	T
0,030	0,3	45	10
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,201517	1,380516	20
0,005	1,223012	1,463675	23
0,010	1,246408	1,577372	28
0,015	1,271834	1,743589	36
0,020	1,299424	2,016282	51

r	σ	x	T
0,030	0,5	45	10
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,372675	1,910743	29
0,005	1,400077	2,095441	34
0,010	1,429281	2,353375	41
0,015	1,460392	2,742969	54
0,020	1,493517	3,416083	77

Πίνακες 2.1.Δ:

r	σ	x	T
0,030	0,1	45	20
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,014490	1,015809	5
0,005	1,023562	1,026994	6
0,010	1,037213	1,045899	8
0,015	1,057038	1,078725	10
0,020	1,084847	1,139980	15

r	σ	x	T
0,030	0,3	45	20
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,191443	1,296684	14
0,005	1,225067	1,383268	16
0,010	1,263863	1,507626	20
0,015	1,308498	1,699792	26
0,020	1,359706	2,037243	37

r	σ	x	T
0,030	0,5	45	20
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,357566	1,673184	19
0,005	1,402532	1,849336	23
0,010	1,452842	2,106251	28
0,015	1,509092	2,515123	36
0,020	1,571942	3,271924	53

Πίνακες 2.1.Ε:

r	σ	x	T
0,030	0,1	45	30
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,000	1,009353	1,009864	5
0,005	1,016958	1,018549	5
0,010	1,029953	1,034805	7
0,015	1,051159	1,065702	9
0,020	1,084173	1,128184	13

r	σ	x	T
0,030	0,3	45	30
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,000	1,168276	1,235240	11
0,005	1,207003	1,315796	13
0,010	1,253896	1,435367	17
0,015	1,310474	1,626816	21
0,020	1,378504	1,977462	31

r	σ	x	T
0,030	0,5	45	30
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,000	1,313398	1,509208	15
0,005	1,366180	1,661545	18
0,010	1,427757	1,889211	22
0,015	1,499561	2,261737	29
0,020	1,583250	2,975975	42

Εφάπαξ Ασφάλιστρο U

$$U^{\varepsilon\xi} \text{ όταν: } G_t = S_0 / A^{(\delta)}_{x:\overline{T|}} \text{ και } U^{\varepsilon\nu\delta} \text{ όταν: } G_t(U) = U / A^{(\delta)}_{x:\overline{T|}}$$

Πίνακες 2.2.Α:

r	δ	σ	T
0,03	0,02	0,3	10
x	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
25	1,300682	2,019187	51
30	1,300760	2,019107	51
35	1,300663	2,019064	51
40	1,300271	2,019228	51
45	1,299511	2,019489	51
50	1,298087	2,020153	52
55	1,296036	2,020933	52

r	δ	σ	T
0,03	0,02	0,3	20
x	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
25	1,364593	2,044631	37
30	1,364529	2,044543	37
35	1,364033	2,045743	37
40	1,362872	2,048961	37
45	1,360822	2,054517	38
50	1,357373	2,063484	39
55	1,352198	2,074999	41

r	δ	σ	T
0,03	0,02	0,3	30
x	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
25	1,388293	1,983104	30
30	1,388002	1,985394	30
35	1,387259	1,992150	31
40	1,385774	2,004897	31
45	1,383079	2,024202	33

r	δ	σ	x
0,03	0,02	0,3	45
T	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
5	1,231925	1,885191	68
10	1,299511	2,019489	51
15	1,337752	2,055569	43
20	1,360822	2,054517	38
25	1,374764	2,040105	35
30	1,383079	2,024202	33

Πίνακες 2.2.Β:

r	δ	x	T
0,030	0,02	45	10
σ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,050	1,024920	1,035845	11
0,100	1,078041	1,150433	20
0,150	1,134302	1,312266	29
0,200	1,190520	1,512516	37
0,250	1,245760	1,748624	44
0,300	1,299511	2,019489	51
0,350	1,351411	2,324085	58
0,400	1,401177	2,660899	65
0,450	1,448582	3,027677	71
0,500	1,493450	3,421325	77

r	Δ	x	T
0,030	0,02	45	20
σ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,050	1,027483	1,035519	9
0,100	1,089051	1,150109	16
0,150	1,158812	1,321098	22
0,200	1,228777	1,533461	28
0,250	1,296520	1,779920	33
0,300	1,360822	2,054517	38
0,350	1,420926	2,350943	42
0,400	1,476348	2,662186	47
0,450	1,526800	2,980677	50
0,500	1,572165	3,298702	54

r	δ	x	T
0,030	0,02	45	30
σ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,050	1,037643	1,048273	9
0,100	1,097652	1,157050	14
0,150	1,171029	1,325450	20
0,200	1,245374	1,533429	24
0,250	1,316685	1,769566	29
0,300	1,383079	2,024202	33
0,350	1,443534	2,287901	36
0,400	1,497532	2,551462	39
0,450	1,544920	2,806435	42
0,500	1,585823	3,045699	44

Πίνακες 2.2.Γ:

r	σ	x	T
0,030	0,1	45	10
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,000	1,024926	1,030123	7
0,005	1,034021	1,044024	9
0,010	1,045634	1,064711	11
0,015	1,060174	1,096734	14
0,020	1,078041	1,150433	20

r	σ	x	T
0,030	0,3	45	10
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,000	1,201517	1,380516	20
0,005	1,223049	1,464058	23
0,010	1,246476	1,578320	28
0,015	1,271920	1,745394	36
0,020	1,299511	2,019489	51

r	σ	x	T
0,030	0,5	45	10
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,000	1,372675	1,910743	29
0,005	1,400090	2,096034	34
0,010	1,429290	2,354842	41
0,015	1,460375	2,745802	54
0,020	1,493450	3,421325	77

Πίνακες 2.2.Δ:

r	σ	x	T
0,030	0,1	45	20
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,000	1,014490	1,015809	5
0,005	1,024242	1,027917	7
0,010	1,038936	1,048558	8
0,015	1,060020	1,084239	11
0,020	1,089051	1,150109	16

r	σ	x	T
0,030	0,3	45	20
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,000	1,191443	1,296684	14
0,005	1,225483	1,385053	16
0,010	1,264652	1,512208	20
0,015	1,309551	1,708918	26
0,020	1,360822	2,054517	38

r	σ	x	T
0,030	0,5	45	20
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,000	1,357566	1,673184	19
0,005	1,402869	1,852025	23
0,010	1,453379	2,113081	28
0,015	1,509622	2,528811	37
0,020	1,572165	3,298702	54

Πίνακες 2.2.Ε:

r	σ	x	T
0,030	0,1	45	30
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,000	1,009353	1,009864	5
0,005	1,018825	1,020821	6
0,010	1,035028	1,041734	7
0,015	1,060400	1,080742	10
0,020	1,097652	1,157050	14

r	σ	x	T
0,030	0,3	45	30
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,000	1,168276	1,235240	11
0,005	1,208568	1,320318	14
0,010	1,256977	1,447167	17
0,015	1,314713	1,650787	22
0,020	1,383079	2,024202	33

r	σ	x	T
0,030	0,5	45	30
δ	$U^{\varepsilon\xi}$	$U^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,000	1,313398	1,509208	15
0,005	1,367750	1,668305	18
0,010	1,430528	1,906522	22
0,015	1,502822	2,296797	30
0,020	1,585823	3,045699	44

Περιοδικό Ασφάλιστρο P

$$P^{\varepsilon\xi} \text{ όταν: } G_t = d \cdot \sum_{k=0}^{t-1} e^{\delta(t-k)} \quad \text{και } P^{\varepsilon\nu\delta} \text{ όταν: } G_t(P) = P \cdot \sum_{k=0}^{t-1} e^{\delta(t-k)}$$

Πίνακες 2.3.Α:

r	δ	σ	T
0,03	0,02	0,3	10
x	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
25	1,202351	1,725126	35
30	1,203809	1,725576	36
35	1,204440	1,724495	29
40	1,202417	1,719508	23
45	1,201888	1,720902	36
50	1,201801	1,721660	37
55	1,200556	1,718626	30

r	δ	σ	T
0,03	0,02	0,3	20
x	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
25	1,256515	1,811552	31
30	1,255088	1,808831	26
35	1,255813	1,798064	15
40	1,254986	1,806507	21
45	1,253599	1,800350	20
50	1,252209	1,800387	20
55	1,249931	1,802834	44

r	δ	σ	T
0,03	0,02	0,3	30
x	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
25	1,287592	1,822812	20
30	1,286853	1,818852	20
35	1,286824	1,821094	27
40	1,284712	1,820254	35
45	1,283088	1,822316	24

r	δ	σ	x
0,03	0,02	0,3	45
T	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
5	1,160654	1,622381	38
10	1,202390	1,718780	27
15	1,231884	1,779412	56
20	1,254202	1,805203	43
25	1,270659	1,818562	23
30	1,282178	1,817326	26

Πίνακες 2.3.Β:

r	δ	x	T
0,030	0,02	45	10
σ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,050	1,017447	1,025933	5
0,100	1,053033	1,107848	12
0,150	1,090716	1,221314	20
0,200	1,128611	1,362694	40
0,250	1,166378	1,526746	22
0,300	1,202531	1,725231	58
0,350	1,238977	1,932496	33
0,400	1,272906	2,183459	40
0,450	1,306997	2,459312	42
0,500	1,338169	2,771227	57

r	δ	x	T
0,030	0,02	45	20
σ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,050	1,016261	1,021264	8
0,100	1,061558	1,107074	12
0,150	1,110257	1,233930	11
0,200	1,160358	1,397481	53
0,250	1,207961	1,588730	51
0,300	1,254473	1,798305	17
0,350	1,300269	2,049725	37
0,400	1,340729	2,322442	41
0,450	1,381730	2,611519	52
0,500	1,420888	2,922015	55

r	δ	x	T
0,030	0,02	45	30
σ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	**n**
0,050	1,014411	1,017421	4
0,100	1,063509	1,102977	11
0,150	1,119182	1,234939	16
0,200	1,175283	1,402928	16
0,250	1,230617	1,598414	29
0,300	1,282213	1,817779	32
0,350	1,330756	2,060522	23
0,400	1,378376	2,314932	40
0,450	1,419700	2,588951	28
0,500	1,459004	2,858329	44

Πίνακες 2.3.Γ:

r	δ	x	T
0,050	0,03	45	10
δ	$p^{εξ}$	$p^{ενδ}$	**n**
0,000	1,020586	1,025874	5
0,005	1,026547	1,036324	11
0,010	1,033939	1,050306	7
0,015	1,042669	1,072665	10
0,020	1,053139	1,108045	14

r	δ	x	T
0,050	0,03	45	10
δ	$p^{εξ}$	$p^{ενδ}$	**n**
0,000	1,146444	1,305064	29
0,005	1,159066	1,363315	31
0,010	1,172457	1,438125	14
0,015	1,187155	1,551301	44
0,020	1,201611	1,726221	32

r	σ	x	T
0,030	0,5	45	10
δ	$p^{εξ}$	$p^{ενδ}$	**n**
0,000	1,272779	1,764141	85
0,005	1,289117	1,888275	20
0,010	1,305576	2,068915	34
0,015	1,321873	2,336504	67
0,020	1,340041	2,758532	83

Πίνακες 2.3.Δ:

r	σ	x	T
0,030	0,1	45	20
δ	$p^{εξ}$	$p^{ενδ}$	**n**
0,000	1,013858	1,015729	5
0,005	1,020731	1,025139	8
0,010	1,030542	1,044664	6
0,015	1,043327	1,068284	7
0,020	1,060721	1,108227	9

r	σ	x	T
0,030	0,3	45	20
δ	$p^{εξ}$	$p^{ενδ}$	**n**
0,000	1,155511	1,270284	9
0,005	1,174922	1,337543	11
0,010	1,198278	1,440247	17
0,015	1,225377	1,569826	20
0,020	1,254138	1,778307	22

r	σ	x	T
0,030	0,5	45	20
δ	$p^{εξ}$	$p^{ενδ}$	**n**
0,000	1,296106	1,668894	13
0,005	1,322385	1,819457	54
0,010	1,353458	2,065091	19
0,015	1,384474	2,377648	57
0,020	1,420398	2,893287	112

Πίνακες 2.3.Ε:

r	σ	x	T
0,030	0,1	45	30
δ	$p^{εξ}$	$p^{ενδ}$	**n**
0,000	1,009643	1,010566	3
0,005	1,016251	1,018144	3
0,010	1,026519	1,031973	4
0,015	1,041799	1,057128	9
0,020	1,063554	1,103095	7

r	σ	x	T
0,030	0,3	45	30
δ	$p^{εξ}$	$p^{ενδ}$	**n**
0,000	1,148918	1,235154	12
0,005	1,174166	1,303470	11
0,010	1,205671	1,399404	13
0,015	1,240924	1,554383	19
0,020	1,282666	1,818078	35

r	σ	x	T
0,030	0,5	45	30
δ	$p^{εξ}$	$p^{ενδ}$	**n**
0,000	1,289058	1,568204	12
0,005	1,322809	1,712330	13
0,010	1,363463	1,922065	25
0,015	1,408804	2,252465	71
0,020	1,458916	2,854619	25

Περιοδικό Ασφάλιστρο P

$$P^{\varepsilon\xi} \text{ όταν: } G_t = d \cdot \ddot{a}^{(\delta)}_{x:\overline{T}|} / A^{(\delta)}_{x:\overline{T}|} \quad \text{και } P^{\varepsilon\nu\delta} \text{ όταν: } G_t(P) = P \cdot \ddot{a}^{(\delta)}_{x:\overline{T}|} / A^{(\delta)}_{x:\overline{T}|}$$

Πίνακες 2.4.Α:

r	δ	σ	T
0,030	0,02	0,3	10
x	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
25	1,204826	1,736851	70
30	1,205103	1,732892	25
35	1,206881	1,737929	70
40	1,205788	1,741315	34
45	1,208318	1,746083	55
50	1,209660	1,765168	83
55	1,213868	1,788931	36

r	δ	σ	T
0,030	0,02	0,3	20
x	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
25	1,261794	1,833658	21
30	1,260931	1,836606	38
35	1,263454	1,847210	37
40	1,264071	1,864992	36
45	1,270211	1,901881	34
50	1,278289	1,956259	41
55	1,288777	2,039820	31

r	δ	σ	T
0,030	0,02	0,3	30
x	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
25	1,297959	1,880013	25
30	1,301331	1,887538	35
35	1,303572	1,910457	39
40	1,309801	1,957194	27
45	1,317393	2,036614	51

r	δ	σ	x
0,030	0,02	0,3	45
T	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
5	1,161901	1,625953	29
10	1,206444	1,746844	75
15	1,242157	1,831479	44
20	1,271381	1,903282	33
25	1,295092	1,961443	18
30	1,317635	2,036760	65

Πίνακες 2.4.Β:

r	δ	x	T
0,030	0,02	45	10
σ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,050	1,028342	1,041987	9
0,100	1,061745	1,124728	28
0,150	1,098751	1,239617	22
0,200	1,135534	1,381318	47
0,250	1,171297	1,550585	25
0,300	1,206537	1,739508	23
0,350	1,242609	1,973780	55
0,400	1,276693	2,222331	60
0,450	1,310785	2,500308	89
0,500	1,342417	2,808906	81

r	δ	x	T
0,030	0,02	45	20
σ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,050	1,056372	1,076260	6
0,100	1,091186	1,166134	18
0,150	1,135052	1,298890	17
0,200	1,180467	1,465222	19
0,250	1,225340	1,668641	58
0,300	1,270513	1,899253	30
0,350	1,312199	2,161018	29
0,400	1,354039	2,442440	97
0,450	1,392472	2,749145	37
0,500	1,431900	3,074808	37

r	δ	x	T
0,030	0,02	45	30
σ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,050	1,104401	1,149716	9
0,100	1,132447	1,239771	11
0,150	1,174956	1,383222	13
0,200	1,223123	1,570323	24
0,250	1,270813	1,786217	19
0,300	1,317665	2,032630	26
0,350	1,363378	2,304418	29
0,400	1,406241	2,594979	29
0,450	1,446093	2,887544	23
0,500	1,482983	3,209075	33

Πίνακες 2.4.Γ:

r	σ	x	T
0,030	0,1	45	10
δ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,029873	1,038301	12
0,005	1,036014	1,049072	5
0,010	1,043260	1,065101	9
0,015	1,051430	1,087854	13
0,020	1,061777	1,123103	9

r	σ	x	T
0,030	0,3	45	10
δ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,151884	1,321428	19
0,005	1,164329	1,379522	68
0,010	1,178601	1,460521	17
0,015	1,191752	1,573294	26
0,020	1,207097	1,743942	28

r	σ	x	T
0,030	0,5	45	10
δ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,277867	1,781318	47
0,005	1,291873	1,919488	20
0,010	1,308707	2,118137	65
0,015	1,325691	2,434720	29
0,020	1,343985	2,976679	59

Πίνακες 2.4.Δ:

r	σ	x	T
0,030	0,1	45	20
δ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,042395	1,050605	5
0,005	1,050883	1,064101	7
0,010	1,061129	1,084095	8
0,015	1,074492	1,114240	12
0,020	1,091327	1,165285	34

r	σ	x	T
0,030	0,3	45	20
δ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,172447	1,314508	17
0,005	1,193553	1,389511	15
0,010	1,216011	1,489372	27
0,015	1,242250	1,643585	34
0,020	1,270228	1,895687	22

r	σ	x	T
0,030	0,5	45	20
δ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,308838	1,731599	43
0,005	1,336439	1,890156	21
0,010	1,365571	2,116580	36
0,015	1,397619	2,462067	27
0,020	1,431289	3,064874	33

Πίνακες 2.4.Ε:

r	σ	x	T
0,030	0,1	45	30
δ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,063502	1,077252	6
0,005	1,075603	1,097070	8
0,010	1,090636	1,125136	7
0,015	1,109381	1,168856	10
0,020	1,132339	1,240034	11

r	σ	x	T
0,030	0,3	45	30
δ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,186516	1,321555	13
0,005	1,213007	1,406062	19
0,010	1,244625	1,528312	49
0,015	1,278675	1,711861	16
0,020	1,318408	2,028171	18

r	σ	x	T
0,030	0,5	45	30
δ	$P^{\varepsilon\xi}$	$P^{\varepsilon\nu\delta}$	n
0,000	1,320451	1,686632	22
0,005	1,354900	1,859013	24
0,010	1,394067	2,106166	18
0,015	1,436135	2,495264	29
0,020	1,482614	3,201216	29

Κεφάλαιο 3

3. Προϊόντα Equity-Linked και Unit-Linked (II)

3.1 Τιμολόγηση ELEPAVG συμβολαίου σε HJM Περιβάλλον Στοχαστικών Επιτοκίων

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ένα ELEPAVG Ασφαλιστικό Συμβόλαιο που φέρει τα ίδια χαρακτηριστικά, αλλά η τιμολόγηση του γίνεται σε Περιβάλλον Στοχαστικών Επιτοκίων και πιο συγκεκριμένα σύμφωνα με το Μοντέλο των Heath, Jarrow και Morton. Υπενθυμίζουμε ότι σε μία αγορά που οι επενδυτές είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο, η διαφορική εξίσωση που ικανοποιούν πλέον οι αποδόσεις του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς έχει τη μορφή:

$$dS_t = r(t)S_t \cdot dt + \sigma_1 S_t \cdot dW_t^1 + \sigma_2 S_t \cdot dW_t^2 \qquad (3.1a)$$

Επίσης, η τιμή του τίτλου S_t ως λύση της προηγούμενης εξίσωσης, σε περιβάλλον σταθερών επιτοκίων προσδιορίζεται ως εξής:

$$S_t = \frac{S_0}{v(t)} \cdot exp\left(-\frac{t}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sigma_1 W_t^1 + \sigma_2 W_t^2\right) \qquad (3.1b)$$

Όπου $v(t)$ είναι ο στοχαστικός παράγοντας προεξόφλησης, σύμφωνα με την εξίσωση (1.24). Όμοια με προηγουμένως, η Ασφαλιστική Παροχή Y_t, προσδιορίζεται από την εξίσωση (2.1), όμως η (προεξοφλημένη) αξία της τη χρονική στιγμή σύναψης του συμβολαίου, είναι πλέον:

$$V_0^Q(Y_t) = E^Q[v(t) \cdot max(S_t, G_t)] \Rightarrow V_0^Q(Y_t) = E^Q[v(t) \cdot (G_t + max(S_t - G_t, 0))] \Rightarrow$$

$$V_0^Q(Y_t) = E^Q[v(t) \cdot G_t] + E^Q[v(t) \cdot max(S_t - G_t, 0)] \Rightarrow V_0^Q(Y_t) = B_0(t)G_t + \pi(S_0, G_t, t) \Rightarrow$$

$$V_0^Q(Y_t) = B_0(t)G_t + S_0 N\left(d_1^t(G_t)\right) - G_t B_0(T) N\left(d_2^t(G_t)\right) \Rightarrow$$

$$\{Ιδιότητα\ Κανονικής\ Κατανομής: 1 - N(x) = N(-x)\}$$

$$V_0^Q(Y_t) = S_0 N\left(d_1^t(G_t)\right) + B_0(t) G_t N\left(-d_2^t(G_t)\right), \quad 0 < t \le T \qquad (3.2)$$

Το προηγούμενο αποτέλεσμα προέκυψε αντικαθιστώντας την τιμή του Δικαιώματος Αγοράς $c(S_0, G_t, t)$ (που ισχύει σε Περιβάλλον Σταθερών Επιτοκίων) από την τιμή του ίδιου Δικαιώματος σε Περιβάλλον Επιτοκίων που ακολουθούν το μοντέλο των HJM. Δηλαδή, χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $(1.27a)$ και θεωρήσαμε ότι: $\pi(S_0, G_t, t) = \pi(S_0, K, r(t), \sigma_1, \sigma_2, T)$, για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, όπου σ_1, σ_2 είναι οι ποσότητες που φαίνονται στις εξισώσεις (3.1).

Τη στιγμή σύναψης του συμβολαίου, όπως έχουμε αναφέρει στην Εισαγωγή, οι τιμές των ομολόγων $B_0(t)$ είναι γνωστές, καθώς προκύπτουν από την αρχική καμπύλη επιτοκίων $f(0, t)$, μέσω της σχέσης (1.15). Η αρχική αξία του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς και οι ποσότητες σ_1, σ_2 είναι επίσης γνωστές, ενώ, θα θεωρήσουμε ότι για το Εγγυημένο Ποσό καθορίζεται εξωγενώς όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή ότι: $G_t = S_0 e^{\delta t}$, *όπου* δ μια σταθερά. Αυτό που απομένει είναι η γνώση της μεταβλητότητας των forward επιτοκίων $\sigma(t,s,\Omega_t)$, η οποία θα θεωρήσουμε ότι έχει εκθετική μορφή, δηλαδή:

$$\sigma(t,s,\Omega_t) = \sigma(t,s) = \sigma \cdot exp\big(-\eta(s-t)\big), \qquad t \leq s \qquad (3.3)$$

Προς αποφυγή σύγχυσης αναφέρουμε ότι εφεξής δεν θα αναφερθούμε ποτέ ξανά στη μεταβλητότητα του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς με το συμβολισμό σ, ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά σύμφωνα με την προηγούμενη εξίσωση. Η παραδοχή της εκθετικής μεταβλητότητας σημαίνει ότι η μεταβλητότητα που παρατηρείται στα forward επιτόκια μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t και s εξαρτάται αποκλειστικά από το χρονικό διάστημα $(s-t)$ που χωρίζει τις δύο στιγμές. Οι ποσότητες των σ, η είναι σταθερές και αποτελούν παραμέτρους του μοντέλου επιτοκίων, η επιλογή των τιμών τους όμως αποτελεί καθοριστικό παράγοντα διαμόρφωσης του αποτελέσματος για το $\pi(S_0, G_t, t)$, καθώς επηρεάζουν τους υπολογισμούς, όπως φαίνεται στην επόμενη ενότητα.

Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι με την υιοθέτηση της εκθετικής μεταβλητότητας το γενικό μοντέλο των HJM παίρνει τη μορφή του ομώνυμου μοντέλου των Hull και White (ή Γενικευμένο Μοντέλο του Vasicek). Η διαδικασία μετάβασης και η μορφή των εξισώσεων $r(t)$ και $dr(t)$ για το προοπτικό επιτόκιο και τις αντίστοιχες τιμές των ομολόγων, περιγράφονται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 24 του βιβλίου του Fries [2007]. Σημειώνουμε μονάχα ότι το μοντέλο επιτοκίων που προκύπτει είναι Μαρκοβιανό, καθώς ο όρος Ω_t, ο οποίος περιέχει τις πληροφορίες για τις παρελθοντικές τιμές, έχει εξαλειφθεί. Επιπλέον, η μεταβλητή η εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο το προοπτικό επιτόκιο επιστρέφει στη μα-κροπρόθεσμη μέση τιμή του. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται *Επαναφορά προς το Μέσο (Mean Reversion)*και η μεταβλητή η *Συντελεστής Επαναφοράς προς το Μέσο (Mean Reversion Coefficient).* Εφεξής θα χρησιμοποιούμε την καθιερωμένη αγγλική ορολογία, επειδή είναι πιο εύχρηστη από την ελληνική.

Με βάση την παραδοχή για εκθετική μεταβλητότητα, παραθέτουμε στη συνέχεια τις μορφές (σε μορφή συναρτήσεων) για όλα τα μεγέθη που απαιτούνται για τον υπολογισμό του $\pi(S_0, G_t, t)$ σύμφωνα με την εξίσωση $(1.27a)$, με την αναγκαία σειρά:

$$\alpha(t,s) = \int_t^s \sigma(t,u)du \Rightarrow \alpha(t,s) = \frac{\sigma}{\eta}\Big(1 - exp\big(-\eta(s-t)\big)\Big)$$

$$\int_0^t \alpha(u,t)du = \frac{\sigma}{\eta}t + \frac{\sigma}{\eta^2}(exp(-\eta t) - 1)$$

$$\int_0^t \big(\alpha(u,t)\big)^2 du = \frac{\sigma^2}{\eta^2}t + \frac{2\sigma^2}{\eta^3}exp(-\eta t) - \frac{\sigma^2}{2\eta^3}exp(-2\eta t) - \frac{3\sigma^2}{2\eta^3}$$

$$\Theta_t = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\eta^3}\left(\eta t + 2exp(-\eta t) - \frac{1}{2}exp(-2\eta t) - \frac{3}{2}\right) + \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)t + \frac{2\sigma_1\sigma}{\eta^2}(\eta t + exp(-\eta t) - 1)}$$

$$d_1^t(G_t) = \frac{1}{\Theta_t}\left(\frac{1}{2}\Theta_t^2 + ln\left(\frac{S_0}{B_0(t)\cdot G_t}\right)\right) \; \textit{και} \; d_2^t(G_t) = d_1^t(G_t) - \Theta_t$$

Για τον προσδιορισμό της στοχαστικής διαδικασίας των επιτοκίων $r(u)$ και του παράγοντα προεξόφλησης $v(t)$ όπως φαίνεται στις εξισώσεις (1.24), απαιτείται η ποσότητα:

$$\int_0^t \sigma(u,t)\alpha(u,t)du = \int_0^t \sigma \cdot exp\big(-\eta(t-u)\big) \cdot \frac{\sigma}{\eta}\Big(1 - exp\big(-\eta(t-u)\big)\Big)du =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\eta}\int_0^t exp\big(-\eta(t-u)\big)du - \frac{\sigma^2}{\eta}\int_0^t exp\big(-2\eta(t-u)\big)du = \frac{\sigma^2}{2\eta^2}\big(1 - exp(-\eta t)\big)^2$$

Και τελικά προκύπτει ότι:

$$r(u) = f(0,u) + \frac{\sigma^2}{2\eta^2}\big(1 - exp(-\eta u)\big)^2 + \sigma\int_0^u exp\big(-\eta(u-x)\big)dW_x^1 \qquad (3.5)$$

$$v(t) = \int_0^t f(0,u)du + \frac{\sigma^2}{2\eta^2}\Big(t + \frac{2}{\eta}exp(-\eta t) - \frac{1}{2\eta}exp(-2\eta t) - \frac{3}{4\eta}\Big)$$
$$+ \int_0^t \sigma \cdot exp(-\eta u) \cdot \left[\int_0^u exp(\eta x)dW_x^1\right]du \qquad (3.6)$$

Εφάπαξ Ασφάλιστρο

Με εφαρμογή της *Αρχής της Ισοδυναμίας κάτω από το Μέτρο Q*, θεωρώντας ότι τα short επιτόκια ακολουθούν το μοντέλο των HJM, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της σχέσης (3.2) προκύπτει μια σχέση προσδιορισμού σε κλειστή μορφή για το Εφάπαξ Ασφάλιστρο U:

$$U = \sum_{t=1}^{T} a_t \cdot V_0^Q(Y_t) \Rightarrow U = \sum_{t=1}^{T} a_t \cdot \left[S_0 N\left(d_1^t(G_t)\right) + B_0(t)G_t N\left(-d_2^t(G_t)\right)\right] \qquad (3.7)$$

Στην παραπάνω σχέση, οι πιθανότητες a_t προκύπτουν από την (2.3) και σημειώνουμε ότι το Προϊόν αντιμετωπίστηκε σαν Equity Linked, καθώς τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την αποτίμησή του είναι σε πλήρη αντιστοιχία με τις σχέσεις (2.2), (2.4) και (2.5), αλλά προσαρμοσμένα για το Περιβάλλον Στοχαστικών Επιτοκίων, σύμφωνα με το Μοντέλο HJM.

Περιοδικό Ασφάλιστρο

Αν η πληρωμή του ασφαλίστρου γίνεται ετησίως, ακολουθώντας τη διαδικασία επένδυσης στο Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς (και τους αντίστοιχους συμβολισμούς) που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, τότε η Ασφαλιστική Παροχή υπολογίζεται και πάλι από τη σχέση (2.10) για: $d(k) = d$, $0 \leq k < T$, όμως η προεξόφληση πρέπει να πραγματοποιηθεί με τον στοχαστικό παράγοντα $v(t)$. Έτσι, η αξία της Ασφαλιστικής Παροχής τη χρονική στιγμή σύναψης, στο HJM περιβάλλον επιτοκίων, είναι:

$$V_0^Q(Y_t) = E^Q\left[v(t) \cdot S_t \sum_{k=0}^{t-1}\frac{d}{S(k)}\right] + E^Q\left[v(t) \cdot max\left(G_t - S_t \cdot \sum_{k=0}^{t-1}\frac{d}{S(k)}, 0\right)\right] \qquad (3.8)$$

Επειδή η τιμή του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς υπακούει στις εξισώσεις $(3.1a)$ και $(3.1b)$, ο πρώτος όρος από το παραπάνω άθροισμα γίνεται:

$$d \cdot E^Q\left[v(t)\sum_{k=0}^{t-1}\frac{S(t)}{S(k)}\right] = d \cdot E^Q\left[v(t)\sum_{k=0}^{t-1}\frac{v(k)}{v(t)}\right] = d \cdot E^Q\left[\sum_{k=0}^{t-1}v(k)\right] = d \cdot \sum_{k=0}^{t-1}B_0(k) \qquad (3.9)$$

Σύμφωνα με την *Αρχή της Ισοδυναμίας κάτω από το Μέτρο Q*, για τον υπολογισμό του Περιοδικού Ασφαλίστρου $\boldsymbol{P}$ ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{P} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} {}_{t}\boldsymbol{p}_{x} \cdot \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{t}) = \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{a}_t \cdot \boldsymbol{V}_0^{Q}(\boldsymbol{Y}_t) \Rightarrow \quad \{\lambda \acute{o} \gamma \omega \ \tau \omega \nu \ (\mathbf{3.8}) \kappa \alpha \iota \ (\mathbf{3.9})\} \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} {}_{t}\boldsymbol{p}_{x} \cdot \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{d} \cdot \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{a}_t \left[\sum_{k=0}^{t-1} \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{k}) \right] + \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{a}_t \cdot \boldsymbol{E}^{Q} \left[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) \cdot \boldsymbol{max} \left(\boldsymbol{G}_t - \boldsymbol{S}_t \cdot \sum_{k=0}^{t-1} \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{k})}, \mathbf{0} \right) \right]$$

Επειδή μετά από πράξεις προκύπτει ότι: $\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{a}_t \left[\sum_{k=0}^{t-1} \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{k}) \right] = \sum_{t=0}^{T-1} {}_{t}\boldsymbol{p}_{x} \cdot \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{t})$**,** η προηγούμενη σχέση γράφεται τελικά:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{d} + \frac{\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{a}_t \cdot \boldsymbol{E}^{Q} \left[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) \cdot \boldsymbol{max} \left(\boldsymbol{G}_t - \boldsymbol{S}_t \cdot \sum_{k=0}^{t-1} \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{k})}, \mathbf{0} \right) \right]}{\sum_{t=0}^{T-1} {}_{t}\boldsymbol{p}_{x} \cdot \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{t})} \qquad (\mathbf{3.10})$$

Όπου: $\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{t})$ οι τιμές των μοναδιαίων ομολόγων χωρίς πιστωτικό κίνδυνο τη στιγμή σύναψης για το Εγγυημένο Ποσό, όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα θεωρήσουμε ότι: $\boldsymbol{G}_t = \boldsymbol{d} \sum_{k=0}^{t-1} \boldsymbol{e}^{\delta(t-k)}$. Η παραπάνω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του Περιοδικού Ασφαλίστρου με χρήση Προσομοίωσης Monte Carlo, τόσο για τις τιμές του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς από τη σχέση $(\mathbf{3.1b})$ όσο και για τη στοχαστική διαδικασία των επιτοκίων στο μοντέλο των HJM, με την παραδοχή της εκθετικής μεταβλητότητας από τις σχέσεις $(\mathbf{3.5})$ και $(\mathbf{3.6})$.

3.2 Συμβόλαιο "Εναλλακτικό Unit - Linked"

Το Ασφαλιστικό Προϊόν με το οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχεια είναι ένα Unit-Linked Συμβόλαιο, το οποίο προτάθηκε από τους Bacinello και Persson [2002] σαν εναλλακτικό του «κλασικού» ELEPAVG προϊόντος των Brenan και Swartz που παρουσιάστηκε νωρίτερα. Εφεξής θα αποκαλείται "Εναλλακτικό Unit-Linked" για λόγους ευκολίας. Είναι αποκλειστικά σχεδιασμένο στη λογική του Σταθερού Ετήσιου και προκαταβλητέου Ασφαλίστρου για το σύνολο της διάρκειάς του και στην αντίστοιχη ετήσια επένδυση σε Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς, με διαφορετική όμως διαδικασία από αυτήν που περιγράψαμε στο προϊόν ELEPAVG με περιοδικό ασφάλιστρο. Το στοιχείο που διαφοροποιεί το συγκεκριμένο Συμβόλαιο είναι το ότι η Ασφαλιστική Εταιρεία εγγυάται ότι θα πιστώνει σε κάθε στιγμή είσπραξης Ασφαλίστρου (δηλαδή στην αρχή κάθε έτους) τον ασφαλισμένο με έναν προκαθορισμένο ελάχιστο αριθμό μονάδων του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς, σε αντίθεση με το συμβόλαιο ELEPAVG που εγγυάται ένα Ελάχιστο Ποσό σε χρηματικές μονάδες για κάθε πιθανή στιγμή καταβολής της Ασφαλιστικής Παροχής, όπως έχουμε ήδη περιγράψει. Χρησιμοποιούμε εφεξής τον όρο "πιστώνει" αυστηρά για να δηλώσει την αύξηση της υποχρέωσης χρόνο με το χρόνο της Ασφαλιστικής Εταιρείας απέναντι στον Ασφαλισμένο, και όχι τον όρο "καταβάλλει" ή οποιονδήποτε άλλο ισοδύναμο. Σύμφωνα με τη φρασεολογία που έχουμε ακολουθήσει μέχρι τώρα, ο όρος "καταβάλλει" χρησιμοποιείται για να δηλώσει χρηματική πληρωμή, δηλαδή καταβολή της Υποχρέωσης της Ασφαλιστικής Εταιρείας ή, ισοδύναμα, της Ασφαλιστικής Παροχής. Μια ακόμα αναγκαία διαφοροποίηση στην ορολογία αφορά το τμήμα του *ασφαλίστρου προς επένδυση*, το οποίο εφεξής είναι διαφορετικό από το τμήμα του ασφαλίστρου που *επενδύεται*, που χρησιμοποιήθηκε μέχρι τώρα. Η έννοια του τμήματος *προς επένδυση* αποσαφηνίζεται στην περιγραφή του μηχανισμού επένδυσης που ακολουθεί.

Έστω ότι $\boldsymbol{n(t)}$ είναι ο αριθμός των μονάδων του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς που πιστώνει η Ασφαλιστική Εταιρεία στον Ασφαλισμένο τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{d(t)}$ το τμήμα του Ασφαλίστρου προς επένδυση και $\boldsymbol{g_t}$ είναι ο Εγγυημένος Αριθμός των μονάδων του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς που έχει αναλάβει ότι θα αποδώσει τουλάχιστον η Εταιρεία. Τότε έχουμε:

$$\boldsymbol{n(t) = max\left(g_t\,, \frac{d(t)}{S(t)}\right)}\,, \qquad 0 \le t < T-1 \qquad (\mathbf{3.11})$$

Δηλαδή κάθε έτος ο ασφαλισμένος εξασφαλίζει-καρπώνεται έναν ελάχιστο αριθμό μονάδων του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς, ακόμα κι αν το τμήμα *προς επένδυση* του Ασφαλίστρου που καταβάλλει δεν επαρκεί (με βάση την τρέχουσα αξία κάθε μονάδας) για την αγορά αυτού του ελάχιστου αριθμού. Η Ασφαλιστική Παροχή καταβάλλεται είτε τη στιγμή λήξης του Συμβολαίου είτε τη στιγμή θανάτου του ασφαλισμένου, αν αυτή συμβεί εντός της διάρκειας ισχύος του Συμβολαίου. Στην τελευταία περίπτωση θεωρούμε ότι η πληρωμή γίνεται πάντα στο τέλος του έτους εντός του οποίου επήλθε ο θάνατος του Ασφαλισμένου. Πρόκειται, δηλαδή, για ένα συμβόλαιο Μικτής Ασφάλισης. Μέχρι και τη στιγμή καταβολής της Ασφαλιστικής Παροχής, πιστώνονται κάθε χρόνο μονάδες του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς στον Ασφαλισμένο, σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία. Η Ασφαλιστική Παροχή ισούται με την αξία του αθροίσματος των μονάδων που έχει συγκεντρώσει ο Ασφαλισμένος μέχρι τη στιγμή της καταβολής.

Για να αποτιμηθεί το “Εναλλακτικό Unit-Linked” πρέπει να υπολογισθεί η αξία του συνόλου των μονάδων του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς που έχουν πιστωθεί στον Ασφαλισμένο μέχρι τη στιγμή καταβολής και αποτελούν την υποχρέωση της Εταιρείας. Αν $\boldsymbol{Y_t}$ είναι η αξία αυτής της υποχρέωσης τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$, λόγω της $(\mathbf{3.11})$ έχουμε:

$$\boldsymbol{Y_t = n(t)\cdot S(t) \Rightarrow Y_t = S(t)\cdot max\left(g_t\,, \frac{d(t)}{S(t)}\right) \Rightarrow Y_t = max(\,g_t\,S(t)\ \ ,d(t)\,) \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{Y_t = d(t) + max(\,g_t\,S(t) -\ d(t), 0\,) \Rightarrow Y_t = d(t) + g_t\ \cdot max(\,S(t) -\ k(t), 0\,)} \qquad (\mathbf{3.12})$$

Έχοντας θέσει ότι: $\boldsymbol{k(t) = d(t)/g_t}$.

Η αξία τη χρονική στιγμή σύναψης του Συμβολαίου της παραπάνω υποχρέωσης, σε περιβάλλον στοχαστικών επιτοκίων HJM, είναι:

$$\boldsymbol{V_0^Q(Y_t) = E^Q[d(t) + g_t\,max(S(t) -\ k(t), 0)] \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{V_0^Q(Y_t) = d(t)B_0(t) + g_tE^Q[max(S(t) -\ k(t), 0)] \Rightarrow V_0^Q(Y_t) = d(t)B_0(t) + g_t\,\pi(S_0, k(t), t) \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{V_0^Q(Y_t) = d(t)B_0(t) + g_t\left[S_0N\left(d_1^t\big(k(t)\big)\right) - k(t)B_0(T)N\left(d_2^t\big(k(t)\big)\right)\right]} \qquad (\mathbf{3.13})$$

Από την παραπάνω διαδικασία βλέπουμε ότι η δίκαιη αποτίμηση της Υποχρέωσης τη στιγμή σύναψης μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή, αν εκμεταλλευτούμε την ομοιότητά της με ένα Δικαίωμα Αγοράς πάνω στο Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς με τιμή εξάσκησης $\boldsymbol{k(t)}$. Το αποτέλεσμα δίνεται στην πιο γενική μορφή για οποιεσδήποτε τιμές των μεγεθών που εμφανίζονται. Παρατηρούμε επίσης ότι το Εναλλακτικό Unit-Linked θα μπορούσε να χαρακτηριστεί σαν ένα προϊόν που η αξία του τη στιγμή καταβολής της Ασφαλιστικής Παροχής, και συνεπώς η δίκαιη αποτίμησή του, *εξαρτάται από τη διαδρομή* (Path Dependent) του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς, δηλαδή από όλες τις ενδιάμεσες τιμές από τη στιγμή σύναψης μέχρι τη στιγμή καταβολής και όχι μόνο από την “τελική” του αξία, όπως συνέβαινε στα

ELEPAVG Ασφαλιστικά Συμβόλαια που περιγράψαμε ως τώρα. Σημειώνουμε τέλος ότι οι ενδιάμεσες τιμές που παίζουν ρόλο είναι αυτές που παρατηρούνται στην αρχή κάθε έτους, ή αλλιώς *σε ακέραιες χρονικές στιγμές*, αφού σε αυτές τις στιγμές γίνεται η πίστωση των μονάδων στον Ασφαλισμένο.

Η παραπάνω διαδικασία επίσης καταδεικνύει τον Κίνδυνο που αναλαμβάνει η Ασφαλιστική Εταιρεία, η οποία κάθε έτος, σε περίπτωση που το τμήμα του Ασφαλίστρου προς επένδυση δεν επαρκεί για την αγορά του εγγυημένου αριθμού μονάδων του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς, υποχρεώνεται να καλύψει τη διαφορά μεταξύ ελάχιστου αριθμού μονάδων και αριθμού μονάδων που μπορούν να αγοραστούν από το τμήμα του Ασφαλίστρου προς επένδυση. Σε χρηματική αξία, σύμφωνα με τις προηγούμενες εξισώσεις, η Ασφαλιστική Εταιρεία ενδέχεται τη χρονική $\boldsymbol{t}$ να καταγράψει ζημιά ίση με: $\boldsymbol{g_t[S(t)-k(t)]}$, ενώ η αντίστοιχη (προεξοφλημένη) αξία της ενδεχόμενης ζημιάς τη στιγμή σύναψης του συμβολαίου είναι: $\boldsymbol{B_0(t)g_t[S(t)-\ k(t)]}$. Αξίζει να τονιστεί ότι ο παραπάνω Κίνδυνος Αγοράς είναι ο μοναδικός που αναλαμβάνει η Ασφαλιστική Εταιρεία με το Εναλλακτικό Unit-Linked, καθώς λόγω του μηχανισμού λειτουργίας του δεν φέρει καθόλου Κίνδυνο Θνησιμότητας. Αν σκεφτούμε κάθε συμβόλαιο ξεχωριστά, σε περίπτωση που ο Ασφαλισμένος αποβιώσει πριν τη λήξη του συμβολαίου, η Ασφαλιστική Εταιρεία καταβάλλει ποσό ίσο με την Ασφαλιστική Υποχρέωση που έχει διαμορφωθεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή και τίποτε επιπλέον. Θα μπορούσαμε επομένως να ισχυριστούμε ότι μοιάζει περισσότερο με ένα Αποταμιευτικό Πρόγραμμα συγκεκριμένης διάρκειας, η οποία μειώνεται σε περίπτωση πρόωρου θανάτου του Ασφαλισμένου.

Σύμφωνα με την *Αρχή της Ισοδυναμίας κάτω από το Μέτρο Q* για τον υπολογισμό του Ετήσιου Σταθερού Ασφαλίστρου $\boldsymbol{P}$ για το Εναλλακτικό Unit-Linked Ασφαλιστικό Προϊόν, ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{P\cdot\sum_{t=0}^{T-1}{}_tp_x\cdot B_0(t)=\sum_{t=0}^{T-1}{}_tp_x\cdot V_0^Q(Y_t)}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P\sum_{t=0}^{T-1}{}_tp_x\cdot B_0(t)=\sum_{t=0}^{T-1}[\,d(t)B_0(t)+g_t\,\pi(S_0,k(t),t)\,]\cdot\ {}_tp_x}\qquad(\boldsymbol{3.14a})$$

Όπου για $\boldsymbol{t=0}$, έχουμε: $\boldsymbol{\pi(S_0,k(0),0)=max(S_0-k(0))}$

Σημειώνουμε ότι οι πιθανότητες στο 2ο μέλος της εξίσωσης είναι οι πιθανότητες επιβίωσης και όχι οι πιθανότητες θανάτου, καθώς, σύμφωνα με τη λειτουργία του συμβολαίου, στην Ασφαλιστική Εταιρεία καταλογίζεται η Υποχρέωση $\boldsymbol{Y_t}$ ταυτόχρονα με την καταβολή του Ασφαλίστρου που σηματοδοτεί την επιβίωση του Ασφαλισμένου. Έτσι, η απουσία κινδύνου θνησιμότητας που αναφέρθηκε αποτυπώνεται στην εξίσωση αποτίμησης του συμβολαίου με απουσία των πιθανοτήτων θανάτου.

Αν θεωρήσουμε ότι η Ασφαλιστική Εταιρεία εγγυάται κάθε χρόνο ότι θα πιστώσει τον Επενδυτικό Λογαριασμό με τον ίδιο αριθμό μονάδων κατ' ελάχιστον, δηλαδή ότι: $\boldsymbol{g_t=g}$, και όπως και προηγουμένως ότι: $\boldsymbol{d(k)=d}$, με $0\leq k<T$, και συνεπώς: $\boldsymbol{k(t)=k=d/g}$, η σχέση προσδιορισμού του Ασφαλίστρου $(\boldsymbol{3.14a})$ απλοποιείται ως εξής:

$$\boldsymbol{P\cdot\sum_{t=0}^{T-1}{}_tp_x\cdot B_0(t)=\sum_{t=0}^{T-1}[\,dB_0(t)+g\cdot\pi(S_0,k,t)\,]\cdot\ {}_tp_x}\Rightarrow$$

$$P = d + g \cdot \frac{\sum_{t=0}^{T-1} \pi(S_0, k, t) \cdot {}_t p_x}{\sum_{t=0}^{T-1} {}_t p_x \cdot B_0(t)} \qquad (3.14b)$$

Στις σχέσεις $(3.14a)$ και $(3.14b)$ βλέπουμε ότι το Ασφάλιστρο του Εναλλακτικού Unit-Linked συμβολαίου μπορεί να υπολογισθεί σε κλειστή μορφή.

3.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Στους Πίνακες **3.A.1** έως **3.B.9** που ακολουθούν, παρουσιάζουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα για διάφορες τιμές των παραμέτρων, δίνοντας έμφαση σε αυτές που θεωρούμε πιο ρεαλιστικές. Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές $S_0 = 1, d = 1, g = 1$, ενώ ο υπολογισμός των πιθανοτήτων A_t και ${}_t p_x$ προέκυψε από τους ελληνικούς πίνακες ανδρικής θνησιμότητας, όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο. Σε κάθε περίπτωση αναφέρονται όλες οι υπόλοιπες τιμές των παραμέτρων με βάση τις οποίες πραγματοποιήθηκαν οι υπολογισμοί και μας βοηθούν ώστε στη συνέχεια να προβούμε στις απαραίτητες συγκρίσεις. Δίνονται σε αντιπαραβολή οι τιμές του εφάπαξ ασφαλίστρου για το ELEPAVG ασφαλιστικό προϊόν με εξωγενώς καθορισμένο εγγυημένο ποσό (του προηγούμενου κεφαλαίου) U^{flat}, και του αντίστοιχου προϊόντος αποτιμημένου σε περιβάλλον στοχαστικών επιτοκίων U^{HJM}. Στους Πίνακες για τα περιοδικά ασφάλιστρα περιέχονται τόσο το προϊόν ELEPAVG του προηγούμενου κεφαλαίου όσο και το αντίστοιχο ELEPAVG σε περιβάλλον στοχαστικών επιτοκίων, αλλά και το ασφάλιστρο του Εναλλακτικού Unit-Linked προϊόντος, που παρουσιάστηκε νωρίτερα.

Στους Πίνακες **3.A.1** και **3.A.2** βλέπουμε τη μεταβολή της τιμής του εφάπαξ ασφαλίστρου για διάφορες ηλικίες του ασφαλισμένου στην έναρξη του συμβολαίου και για διάφορες χρονικές διάρκειες του συμβολαίου. Βλέπουμε ότι γενικά υπάρχει πολύ μικρή διαφοροποίηση στις τιμές, γεγονός που ερμηνεύθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο με βάση τις τιμές των πιθανοτήτων θανάτου A_t. Για το λόγο αυτό στη συνέχεια παρουσιάζουμε μόνο τις ενδεικτικές περιπτώσεις που αντιστοιχούν σε ηλικία 45 ετών για τον ασφαλισμένο και σε διάρκεια συμβολαίου 10 ετών.

Στον Πίνακα **3.A.3** παρουσιάζεται το εφάπαξ ασφάλιστρο συναρτήσει του παράγοντα μεταβλητότητας σ_1. Ο παράγοντας αυτός απουσιάζει από τα προϊόντα του προηγούμενου κεφαλαίου και για το λόγο αυτό παρουσιάζεται -για λόγους σύγκρισης- η τιμή του ασφαλίστρου του προηγούμενου Κεφαλαίου για $\sigma = \sigma_2 = 0,3$. Όπως έχει αναφερθεί, ο παράγοντας σ_1 εκφράζει τη συσχέτιση των τιμών του επιτοκίου και του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς. Γενικά, δεν τίθεται περιορισμός για το εύρος τιμών του, καθώς, ανάλογα με τη σύνθεση του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς, μπορεί να παρατηρηθεί θετική ή αρνητική συσχέτιση. Βλέπουμε ότι η τιμή του ασφαλίστρου δεν παρουσιάζει σταθερή συμπεριφορά: αρχικά μειώνεται, μέχρι να προσεγγίσει μία ελάχιστη τιμή, και στη συνέχεια ακολουθεί συνεχώς ανοδική πορεία. Η φθίνουσα συμπεριφορά παρουσιάζεται για αρνητικές τιμές του σ_1, μέχρι την ελάχιστη τιμή του ασφαλίστρου (περιοχή όπου $\sigma_1 \cong -0,14$). Για μεγαλύτερες τιμές του σ_1, παρατηρείται συνεχής αύξηση της τιμής του ασφαλίστρου.

Στον επόμενο Πίνακα **3.A.4** παρουσιάζεται η τιμή των εφάπαξ ασφαλίστρων για διάφορες τιμές του παράγοντα μεταβλητότητας σ_2. Υπενθυμίζουμε ότι ο παράγοντας μεταβλητότητας σ_2 αντιπροσωπεύει την εγγενή μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου αναφοράς και είναι ανάλογο του σ του προηγούμενου κεφαλαίου. Επισημαίνουμε ότι η συνεισφορά του παράγοντα σ_1 για την ενδεικτική τιμή του 0,03 είναι ανεπαίσθητη και, συνεπώς, η σύγκριση μεταξύ των δύο συμβολαίων που αναφέρθηκαν προηγουμένως ευσταθεί. Παρατηρείται πανομοιότυπη συμπεριφορά και για τα δύο ασφάλιστρα, με την τιμή τους να αποτελεί αύξουσα συνάρτηση της μεταβλητότητας. Η κυριότερη διαφορά που γίνεται εμφανής από το συγκεκριμένο πίνακα είναι ότι η τιμή του ασφαλίστρου αυξάνεται αισθητά όταν αυτό αποτιμάται σε περιβάλλον στοχαστικών επιτοκίων. Μία ερμηνεία του γεγονότος αυτού αποτελεί η ύπαρξη της επί πλέον μεταβλητότητας που οφείλεται στα επιτόκια και αντανακλάται στα αποτελέσματα. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι η διαφορά ανάμεσα στα δύο συμβόλαια για την ενδεικτική τιμή της μεταβλητότητας $\boldsymbol{\sigma_2 = 0,3}$ είναι της τάξεως του 5%.

Στον Πίνακα **3.A.5** παρουσιάζονται οι τιμές των ασφαλίστρων συναρτήσει της εγγυημένης απόδοσης $\boldsymbol{\delta}$, η αύξηση της οποίας συνεπάγεται (αναμενόμενη) αύξηση της τιμής των ασφαλίστρων.

Στους Πίνακες **3.A.6** έως και **3.A.9** μελετάται η μεταβολή της τιμής του εφάπαξ ασφαλίστρου ως προς τις μεταβλητές που καθορίζουν την συμπεριφορά των επιτοκίων. Στον πρώτο πίνακα βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται το αρχικό επίπεδο των επιτοκίων, θεωρώντας ότι η αρχική καμπύλη είναι επίπεδη (flat zero curve), τόσο μειώνεται η τιμή του ασφαλίστρου. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο ότι παρά την όποια μεταβλητότητα παρουσιάζουν τα επιτόκια, κυρίαρχο ρόλο στην προεξόφληση και στις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου αναφοράς παίζει η αρχική καμπύλη επιτοκίων.

Η αρχική καμπύλη επιτοκίων, αν δεν την θεωρήσουμε επίπεδη, επηρεάζεται από τον παράγοντα $\boldsymbol{q}$, ο οποίος της προσδίδει αύξουσα ή φθίνουσα μορφή αν είναι θετικός ή αρνητικός, αντίστοιχα, σύμφωνα με την εξίσωση $\boldsymbol{f(o,t) = r_0 + q \cdot t}$. Στον Πίνακα **3.A.9** βλέπουμε μία όμοια συμπεριφορά με αυτήν του πίνακα **3.A.6**, η οποία οφείλεται στα επιτόκια που επικρατούν κατά την σύναψη του συμβολαίου.

Στον Πίνακα **3.A.7** παρατηρούμε την μεταβολή του εφάπαξ ασφαλίστρου για διάφορες τιμές του Mean Reversion Coefficient $\boldsymbol{\eta}$. Υπενθυμίζουμε ότι όσο ο παράγοντας αυτός αυξάνεται, τόσο πιο γρήγορα οι τιμές των επιτοκίων επανέρχονται στη μακροπρόθεσμη μέση τιμή τους, παρά την όποια μεταβλητότητα παρουσιάζουν στην πορεία τους. Με αυτό τον τρόπο, η επίδραση της μεταβλητότητας εξασθενεί στη διαμόρφωση της τιμής του επιτοκίου. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα, εν γένει, τον περιορισμό της αβεβαιότητας των τιμών των επιτοκίων μακροπρόθεσμα και βραχυπρόθεσμα. Συνεπώς, η αύξηση της τιμής του Mean Reversion Coefficient οδηγεί σε όλο και μικρότερη απόκλιση σε οποιοδήποτε χρονικό ορίζοντα της στοχαστικής καμπύλης επιτοκίων από την αντίστοιχη αρχική – μη στοχαστική καμπύλη. Οι τιμές του συγκεκριμένου πίνακα επιβεβαιώνουν πλήρως τα παραπάνω, καθώς το ασφάλιστρο σε περιβάλλον στοχαστικών επιτοκίων προσεγγίζει την τιμή του αντίστοιχου σε περιβάλλον σταθερών επιτοκίων, όσο αυξάνεται η τιμή του παράγοντα $\boldsymbol{\eta}$.

Στον Πίνακα **3.A.8** βλέπουμε τη μεταβολή της τιμής του ασφαλίστρου για διάφορες τιμές του παράγοντα $\boldsymbol{\sigma}$, που επηρεάζει τη μεταβλητότητα των επιτοκίων σύμφωνα με την εξίσωση $(\boldsymbol{3.3})$. Παρατηρούμε ότι τα δύο μεγέθη κινούνται πάντα προς την ίδια κατεύθυνση, γεγονός που αντανακλά ότι η αύξηση της αβεβαιότητας στις τιμές των επιτοκίων συνεπάγεται αύξηση της τιμής του ασφαλίστρου. Στην ειδική περίπτωση $\boldsymbol{\sigma = 0}$, που σημαίνει ότι η μεταβλητότητα των επιτοκίων εξαλείφεται, παρατηρούμε ότι η τιμή του συμβολαίου ταυτίζεται με αυτήν του προηγούμενη Κεφαλαίου (η ελάχιστη απόκλισή τους οφείλεται στην επίδραση του παράγοντα $\boldsymbol{\sigma_1}$).

Στους Πίνακες **3.B.1** έως και **3.B.9** παρουσιάζονται σε αντιπαραβολή οι τιμές του περιοδικού ασφαλίστρου ενός ELEPAVG συμβολαίου αποτιμημένου σε περιβάλλον σταθερών επιτοκίων (όπως στο προηγούμενο Κεφάλαιο), καθώς και σε περιβάλλον στοχαστικών επιτοκίων, σύμφωνα με το μοντέλο HJM. Επίσης, δίνονται οι τιμές για τις ίδιες παραμέτρους του Εναλλακτικού Unit-Linked συμβολαίου.

Όπως και πριν, χρησιμοποιούνται παντού οι τιμές των παραμέτρων $\boldsymbol{S_0 = 1, d = 1, g = 1}$, ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι που χρησιμοποιούνται αναγράφονται σε κάθε Πίνακα ξεχωριστά. Επειδή στην περίπτωση των περιοδικών ασφαλίστρων δεν έχουμε αναλυτικές λύσεις, για τον προσδιορισμό τους, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Monte Carlo για το επιτόκιο $\boldsymbol{r(t)}$, τον παράγοντα προεξόφλησης $\boldsymbol{v(t)}$ και την τιμή του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς $\boldsymbol{S_t}$, σύμφωνα με τις εξισώσεις $(\mathbf{3.5}), (\mathbf{3.6})\ \textit{και}\ (\mathbf{3.1b})$, αντίστοιχα. Πραγματοποιήθηκε προσομοίωση 100.000 μονοπατιών για τα παραπάνω μεγέθη και αντίστοιχος υπολογισμός του ασφαλίστρου από την εξίσωση $(\mathbf{3.10})$**.** το Εναλλακτικό Unit-Linked προσδιορίστηκε από την αναλυτική σχέση $(\mathbf{3.14b})$.

Στους Πίνακες **3.B.1** και **3.B.2** βλέπουμε τις τιμές για τα τρία είδη συμβολαίων για διάφορες ηλικίες του ασφαλισμένου κατά τη στιγμή σύναψης και για διάφορες διάρκειες συμβολαίων. Επειδή, όπως και πριν, οι μεταβολές που παρατηρούνται είναι πολύ μικρές, στη συνέχεια παρουσιάζουμε μόνο τις τιμές για ενδεικτική ηλικία 45 ετών του ασφαλισμένου και διάρκεια συμβολαίου 10 ετών.

Στον Πίνακα **3.B.3** παρουσιάζονται οι τιμές των συμβολαίων συναρτήσει του παράγοντα μεταβλητότητας $\boldsymbol{\sigma_1}$. Όπως και στην περίπτωση του εφάπαξ ασφαλίστρου, ο παράγοντας $\boldsymbol{\sigma_1}$ απουσιάζει κατά την αποτίμηση σε περιβάλλον σταθερών επιτοκίων (προϊόν προηγούμενου Κεφαλαίου). Για το λόγο αυτό, γίνεται σύγκριση μοναχά με την τιμή που αντιστοιχεί σε $\boldsymbol{\sigma = \sigma_2 = 0,3}$. Βλέπουμε όμοια συμπεριφορά (δηλαδή αρχικά φθίνουσα και εν συνεχεία αύξουσα πορεία), τόσο για το συμβόλαιο ELEPAVG, όσο και για το Εναλλακτικό Unit-Linked. Συγκεκριμένα, το ELEPAVG παρουσιάζει ελάχιστο για την περιοχή όπου $\boldsymbol{\sigma_1 = 0}$, ενώ το Εναλλακτικό Unit-Linked παρουσιάζει ελάχιστο για τιμές του $\boldsymbol{\sigma_1 = -0,1}$.

Στον επόμενο Πίνακα **3.B.4** δίνονται οι τιμές των περιοδικών ασφαλίστρων για τα τρία είδη συμβολαίων ως προς την μεταβλητότητα $\boldsymbol{\sigma_2}$ του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς ($\boldsymbol{\sigma}$ για το προϊόν του προηγούμενου Κεφαλαίου). Παρατηρείται η αναμενόμενη αύξηση των τιμών όσο πιο μεταβλητό γίνεται το Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς.

Στον Πίνακα **3.B.5** παρατηρούμε ότι οι τιμές των ασφαλίστρων αυξάνονται όσο αυξάνεται η ετήσια εγγυημένη απόδοση $\boldsymbol{\delta}$. Σημειώνουμε ότι το Εναλλακτικό Unit-Linked δεν παρέχει ετήσια εγγυημένη απόδοση και γι' αυτό δεν εμφανίζονται οι τιμές του στον συγκεκριμένο Πίνακα.

Στον Πίνακα **3.B.6** βλέπουμε τις τιμές των περιοδικών ασφαλίστρων για διαφορετικές τιμές του αρχικού επιτοκίου (θεωρώντας την αρχική καμπύλη επιτοκίων επίπεδη). Οι τιμές του συμβολαίου ELEPAVG μειώνονται, καθώς η αύξηση του αρχικού επιτοκίου συνεπάγεται μείωση του αριθμητή και αύξηση του παρονομαστή του κλάσματος στην εξίσωση $(\mathbf{3.10})$. Όσον αφορά το Εναλλακτικό Unit-Linked, η τιμή του οποίου υπολογίζεται από την αναλυτική σχέση $(\mathbf{3.14b})$, βλέπουμε ότι αποτελεί αύξουσα συνάρτηση του αρχικού επιτοκίου. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί να αποδειχθεί και αναλυτικά, παραγωγίζοντας την εξίσωση $(\mathbf{1.28a})$ και εισάγοντας το αποτέλεσμα στην εξίσωση $(\mathbf{3.14b})$. Με όμοια επιχειρήματα μπορούν να εξηγηθούν και οι τιμές στον Πίνακα **3.B.9**, που σχετίζονται με την αρχική μορφή της καμπύλης επιτοκίων.

Στους Πίνακες **3.B.7** και **3.B.8** έχουμε επίσης όμοια συμπεριφορά με αυτήν που παρατηρήθηκε στους αντίστοιχους Πίνακες για το Εφάπαξ Ασφάλιστρο.

Γενικότερη παρατήρηση όλων των προηγουμένων αποτελεί το γεγονός ότι το ELEPAVG συμβόλαιο έχει υψηλότερη τιμή όταν αποτιμάται σε περιβάλλον στοχαστικών επιτοκίων απ' ότι σε περιβάλλον σταθερών επιτοκίων. Επίσης, το Εναλλακτικό Unit-Linked έχει ακόμα υψηλότερη τιμή, διατηρώντας πάντα σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους.

Εφάπαξ Ασφάλιστρα U^{flat} και U^{HJM}

για Συμβόλαιο ELEPAVG με Σταθερά ή HJM Στοχαστικά Επιτόκια, όταν: $G_t = S_0 e^{\delta t}$

Πίνακες 3.Α.1:

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
σ_1	σ_2	δ	**T**
0,03	0,3	0,02	**10**
x	U^{flat}	U^{HJM}	
25	1,300637	1,349574	
30	1,300720	1,349681	
35	1,300621	1,349543	
40	1,300213	1,348998	
45	1,299424	1,347941	
50	1,297942	1,345971	
55	1,295815	1,343140	

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
σ_1	σ_2	δ	**T**
0,03	0,3	0,02	**20**
x	U^{flat}	U^{HJM}	-
25	1,364132	1,438589	
30	1,364085	1,438516	
35	1,363514	1,437721	
40	1,362131	1,435816	
45	1,359706	1,432475	
50	1,355676	1,426946	
55	1,349832	1,418922	

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
σ_1	σ_2	δ	**T**
0,03	0,3	0,02	**30**
x	U^{flat}	U^{HJM}	-
25	1,386531	1,467729	
30	1,386148	1,467226	
35	1,384937	1,465607	
40	1,382507	1,462354	
45	1,378504	1,456978	

Πίνακας 3.Α.2:

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
σ_1	σ_2	δ	**X**
0,03	0,3	0,02	**45**
T	U^{flat}	U^{HJM}	-
5	1,231919	1,255039	
10	1,299424	1,347941	
15	1,337360	1,401550	
20	1,359706	1,432475	
25	1,372299	1,449243	
30	1,378504	1,456978	

Πίνακας 3.Α.3:

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
σ_2	δ	x	T
0,3	0,02	45	10

σ1	U^{flat}	U^{HJM}
-0,20		1,311122
-0,18		1,307442
-0,16		1,305095
-0,14		1,304116
-0,12		1,304521
-0,10		1,306304
-0,08		1,309436
-0,06		1,313870
-0,04		1,319543
-0,02		1,326376
0,00	1,299424	1,334281
0,02		1,343164
0,04		1,352926
0,06		1,363470
0,08		1,374698
0,10		1,386517
0,12		1,398839
0,14		1,411579
0,16		1,424661
0,18		1,438012
0,20		1,451565

Πίνακας 3.Α.4:

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
σ_1	δ	x	T
0,03	0,02	45	10

σ2	U^{flat}	U^{HJM}
0,050	1,023969	1,168588
0,100	1,077508	1,190704
0,150	1,133958	1,223050
0,200	1,190291	1,261793
0,250	1,245611	1,304072
0,300	1,299424	1,347941
0,350	1,351373	1,392096
0,400	1,401180	1,435641
0,450	1,448620	1,477949
0,500	1,493517	1,518570

Πίνακας 3.Α.5:

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
σ_1	σ_2	x	T
0,03	0,3	45	10

Δ	U^{flat}	U^{HJM}
0,000	1,201517	1,243794
0,005	1,223012	1,266926
0,010	1,246408	1,291915
0,015	1,271834	1,318879
0,020	1,299424	1,347941

Πίνακας 3.Α.6

q	η	σ	x
0	0,3	0,06	45
σ1	σ2	δ	T
0,03	0,3	0,02	10

r_0	U^{flat}	U^{HJM}
0,03	1,299424	1,347941
0,04		1,291915
0,05		1,243794
0,06		1,202654
0,07		1,167648
0,08		1,138009
0,09		1,113041
0,10		1,092119

Πίνακας 3.Α.7:

r_0	q	σ	x
0,03	0	0,06	45
σ1	σ2	δ	T
0,03	0,3	0,02	10

η	U^{flat}	U^{HJM}
0,1		1,405630
0,2		1,368874
0,3	1,299424	1,347941
0,4		1,335357
0,5		1,327349
0,6		1,321978
0,7		1,318211
0,8		1,315464
0,9		1,313396
1,0		1,311795

Πίνακας 3.Α.8:

r_0	q	η	x
0,03	0	0,3	45
σ1	σ2	δ	T
0,03	0,3	0,02	10

σ	U^{flat}	U^{HJM}
0,00	1,299424	1,301007
0,01		1,304396
0,02		1,309740
0,03		1,316922
0,04		1,325796
0,05		1,336195
0,06		1,347941
0,07		1,360856
0,08		1,374761
0,09		1,389491
0,10		1,404889
0,11		1,420810
0,12		1,437123
0,13		1,453711
0,14		1,470467
0,15		1,487297
0,16		1,504117
0,17		1,520854
0,18		1,537442
0,19		1,553823
0,20		1,569947

Πίνακας 3.Α.9:

r_0	η	σ	x
0,03	0,3	0,06	45
σ_1	σ_2	δ	T
0,03	0,3	0,02	10

q	U^{flat}	U^{HJM}
-0,0010		1,487041
-0,0005		1,412510
0,0000	1,299424	1,347941
0,0005		1,292237
0,0010		1,244389

Περιοδικά Ασφάλιστρα $\boldsymbol{P^{flat}}$, $\boldsymbol{P^{HJM}}$ και $\boldsymbol{P^{alter}}$

για ELEPAVG με Σταθερά ή HJM Στοχαστικά Επιτόκια, όταν: $\boldsymbol{G_t = d \cdot \sum_{k=0}^{t-1} e^{\delta(t-k)}}$ και για το Εναλλακτικό Unit-Linked αντίστοιχα

Πίνακες 3.Β.1:

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
δ	σ_1	σ_2	T
0,02	0,03	0,3	10
x	P^{flat}	P^{HJM}	P^{alter}
25	1,202351	1,212560	1,335401
30	1,203809	1,212697	1,335439
35	1,204440	1,213323	1,335293
40	1,202417	1,215814	1,334925
45	1,201888	1,220859	1,334177
50	1,201801	1,229573	1,332924
55	1,200556	1,244678	1,331030

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
δ	σ_1	σ_2	T
0,02	0,03	0,3	20
x	P^{flat}	P^{HJM}	P^{alter}
25	1,256515	1,285637	1,585031
30	1,255088	1,287040	1,584501
35	1,255813	1,290441	1,583047
40	1,254986	1,301611	1,580298
45	1,253599	1,320911	1,575757
50	1,252209	1,354291	1,568616
55	1,249931	1,404151	1,557701

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
δ	σ_1	σ_2	T
0,02	0,03	0,3	30
x	P^{flat}	P^{HJM}	P^{alter}
25	1,287592	1,347677	1,814314
30	1,286853	1,348027	1,810790
35	1,286824	1,365686	1,804347
40	1,284712	1,390836	1,793768
45	1,283088	1,445989	1,777370

Πίνακας 3.Β.2:

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
δ	σ_1	σ_2	X
0,02	0,03	0,3	45
T	P^{flat}	P^{HJM}	P^{alter}
5	1,160654	1,166573	1,187904
10	1,202390	1,221616	1,334177
15	1,231884	1,272864	1,460447
20	1,254202	1,321932	1,575757
25	1,270659	1,379052	1,681798
30	1,282178	1,443467	1,777370

Πίνακας 3.Β.3:

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
σ_2	δ	x	T
0,3	0,02	45	10
σ_1	P^{flat}	P^{HJM}	P^{alter}
-0,20		1,259525	1,328327
-0,18		1,253579	1,324081
-0,16		1,247435	1,320687
-0,14		1,241152	1,318184
-0,12		1,234455	1,316604
-0,10		1,230689	1,315966
-0,08		1,227485	1,316278
-0,06		1,224069	1,317535
-0,04		1,222407	1,319721
-0,02		1,220220	1,322805
0,00	1,202531	1,219916	1,326750
0,02		1,220171	1,331509
0,04		1,222115	1,337029
0,06		1,223884	1,343252
0,08		1,227360	1,350119
0,10		1,229775	1,357569
0,12		1,235081	1,365543
0,14		1,240882	1,373983
0,16		1,246417	1,382834
0,18		1,252914	1,392044
0,20		1,261306	1,401565

Πίνακας 3.Β.4:

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
σ_1	δ	x	T
0,03	0,02	45	10
σ_2	P^{flat}	P^{HJM}	P^{alter}
0,050	1,017447	1,053398	1,197948
0,100	1,053033	1,080646	1,215750
0,150	1,090716	1,114615	1,240722
0,200	1,128611	1,149556	1,269912
0,250	1,166378	1,186007	1,301450
0,300	1,202531	1,218770	1,334177
0,350	1,238977	1,256860	1,367360
0,400	1,272906	1,289035	1,400511
0,450	1,306997	1,324714	1,433291
0,500	1,338169	1,356641	1,465454

Πίνακας 3.Β.5:

r_0	q	η	σ
0,03	0	0,3	0,06
σ_1	σ_2	x	T
0,03	0,3	45	10
δ	P^{flat}	P^{HJM}	P^{alter}
0,000	1,146444	1,161192	
0,005	1,159066	1,175904	
0,010	1,172457	1,189422	
0,015	1,187155	1,205181	
0,020	1,201611	1,221675	

Πίνακας 3.Β.6:

q	η	σ	x
0	0,3	0,06	45
σ_1	σ_2	δ	T
0,03	0,3	0,02	10
r_0	p^{flat}	p^{HJM}	p^{alter}
0,03	1,202531	1,220474	1,334177
0,04		1,192839	1,367221
0,05		1,165896	1,402204
0,06		1,143303	1,439101
0,07		1,123497	1,477878
0,08		1,105655	1,518492
0,09		1,091793	1,560887
0,10		1,077988	1,605001

Πίνακας 3.Β.7:

r_0	q	σ	x
0,03	0	0,06	45
σ_1	σ_2	δ	T
0,03	0,3	0,02	10
η	p^{flat}	p^{HJM}	p^{alter}
0,1		1,238973	1,351200
0,2		1,224113	1,340799
0,3	1,202531	1,221546	1,334177
0,4		1,219598	1,329776
0,5		1,218410	1,326725
0,6		1,217999	1,324529
0,7		1,217315	1,322895
0,8		1,217766	1,321645
0,9		1,217208	1,320665
1,0		1,216523	1,319880

Πίνακας 3.Β.8:

r_0	q	η	x
0,03	0	0,3	45
σ_1	σ_2	δ	T
0,03	0,3	0,02	10
σ	p^{flat}	p^{HJM}	p^{alter}
0,00	1,202531	1,216449	1,313680
0,01		1,217203	1,315255
0,02		1,218103	1,317616
0,03		1,218896	1,320733
0,04		1,219153	1,324564
0,05		1,220370	1,329062
0,06		1,221455	1,334177
0,07		1,223348	1,339856
0,08		1,227934	1,346043
0,09		1,230753	1,352686
0,10		1,235465	1,359733
0,11		1,243558	1,367135
0,12		1,251843	1,374845
0,13		1,260825	1,382821
0,14		1,270381	1,391022
0,15		1,283789	1,399411
0,16		1,285466	1,407954
0,17		1,310137	1,416620
0,18		1,321363	1,425381
0,19		1,334510	1,434211
0,20		1,352568	1,443086

Πίνακας 3.Β.9:

r_0	η	σ	x
0,03	0,3	0,06	45
σ_1	σ_2	δ	T
0,03	0,3	0,02	10
Q	p^{flat}	p^{HJM}	p^{alter}
-0,0010		1,263638	1,304371
-0,0005		1,240824	1,319116
0,0000	1,202531	1,220717	1,334177
0,0005		1,202700	1,349529
0,0010		1,184277	1,365146

Κεφάλαιο 4

4. Προϊόντα Συμμετοχής

Ένα ακόμα δημοφιλές Ασφαλιστικό Προϊόν τόσο στην Αγορά όσο και στη βιβλιογραφία είναι το Συμβόλαιο Συμμετοχής στα Κέρδη (Participating ή With Profits). Κυριότερη διαφορά του με τα προηγούμενα προϊόντα είναι το ότι η Ασφαλιστική Παροχή δεν υπολογίζεται αποκλειστικά τη στιγμή καταβολής της, αλλά διαμορφώνεται σταδιακά καθ' όλη τη διάρκεια ισχύος του συμβολαίου, σύμφωνα με ένα Μηχανισμό Πίστωσης Κερδών (ή Μηχανισμό Συμμετοχής στα Κέρδη ή Μηχανισμό Απόδοσης Κερδών). Χρησιμοποιούμε τον όρο "Πίστωση" για να δηλώσουμε αύξηση της Υποχρέωσης της Ασφαλιστικής Εταιρείας όπως και στο Εναλλακτικό Unit-Linked, σε αντιδιαστολή με τον όρο Καταβολή που δηλώνει πληρωμή της Ασφαλιστικής Παροχής.

4.1 Μηχανισμός Συμμετοχής στα Κέρδη

Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην περιγραφή αυτού του Μηχανισμού Πίστωσης και στο σύνολο των παραμέτρων που τον καθορίζουν. Στη βιβλιογραφία έχουν παρουσιαστεί πολλές παραλλαγές μηχανισμών πίστωσης κερδών, όπως αυτές που περιγράφονται στους Kassberger, Kiesel και Liebmann [2008]. Οι Bauer, Kiesel, Kling και Rub [2006] παρουσιάζουν μία ακόμη ενδιαφέρουσα εκδοχή, η οποία συμπεριλαμβάνει μία μέθοδο αποτίμησης βασισμένη στη Θεωρία των Δικαιωμάτων Προαίρεσης. Θα ακολουθήσουμε την προσέγγιση των Grosen και Jorgensen [2000], καθώς είναι ξεκάθαρη και, κατά την κρίση μας, κοντά στην σημερινή πραγματικότητα. Όπως είναι αναμενόμενο, στη συνέχεια θα γίνει σαφές ότι οι παράμετροι αυτοί παίζουν καθοριστικό ρόλο και στην αποτίμηση του συμβολαίου. Σύμφωνα με το Μηχανισμό Πίστωσης (Μηχανισμό Απόδοσης Κερδών) υπολογίζεται η ετήσια απόδοση $\boldsymbol{r_P(t)}$ που πιστώνεται στον Ασφαλισμένο και, άρα, η Υποχρέωση της Ασφαλιστικής Εταιρείας $\boldsymbol{Y(t)}$ (ισοδύναμος συμβολισμός του $\boldsymbol{Y_t}$) υπολογίζεται σε ετήσια βάση ως εξής:

$$\boldsymbol{Y(t)} = \big(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{r_P(t)}\big) \cdot \boldsymbol{Y(t-1)}, \;\; 0 < t \leq T \qquad (\boldsymbol{4.1a})$$

$$\text{ή ισοδύναμα: } \boldsymbol{Y(t)} = \boldsymbol{Y(0)} \cdot \prod_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{t}} \big(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{r_P(i)}\big) \qquad (\boldsymbol{4.1.b})$$

Όπου $\boldsymbol{0 < t \leq T}$, $\boldsymbol{T}$ η συνολική διάρκεια του συμβολαίου και $\boldsymbol{r_P(t)}$ η απόδοση που πιστώνεται στον Ασφαλισμένο κατά τη χρονική περίοδο $(\boldsymbol{t-1}\,,\boldsymbol{t})$.

Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό του $\boldsymbol{r_P(t)}$, πρέπει να αποσαφηνίσουμε τα επιμέρους χαρακτηριστικά των Συμβολαίων Συμμετοχής. Συνήθως η Ασφαλιστική Εταιρεία εγγυάται μία Ελάχιστη Απόδοση σε ετήσια βάση, η οποία είναι προκαθορισμένη και γνωστή από την έναρξη μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Όπως και στα προηγούμενα προϊόντα, η Ασφαλιστική Εταιρεία διατηρεί ένα Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς, στο οποίο όμως επενδύει το σύνολο του Ασφαλίστρου που εισπράττει τη χρονική στιγμή σύναψης του Συμβολαίου. Εξετάζουμε δηλαδή την περίπτωση του Εφάπαξ Ασφαλίστρου. Ένα καινούριο χαρακτηριστικό, που δεν έχει εμφανιστεί στα συμβόλαια που περιγράφηκαν ως τώρα, είναι η διατήρηση, από πλευράς της Ασφαλιστικής Εταιρείας, ενός Αποθεματικού Κέρδους, στο οποίο θα αναφερόμαστε εφεξής με κάποιον από τους όρους που συνηθίζονται στη βιβλιογραφία: Bonus Reserve ή απλά Buffer, επειδή είναι πιο εύχρηστοι. Κατ' αντιστοιχία συνηθίζεται και ο όρος Policy Reserve, που στα πλαίσια της παρούσας εργασίας είναι ισοδύναμο της Ασφαλιστικής Υποχρέωσης. Το Bonus Reserve $\boldsymbol{B(t)}$ κάθε χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$ ισούται με τη διαφορά της αξίας του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς και της Ασφαλιστικής Υποχρέωσης. Δηλαδή, ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{B(t) = S(t) - Y(t), \qquad 0 \le t \le T \qquad (4.2)}$$

Πρέπει να τονιστεί ότι τόσο η Ασφαλιστική Υποχρέωση όσο και το Bonus Reserve αποτελούν Λογιστικά Μεγέθη, καθώς, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η Εταιρεία απλά καταλογίζει, δεν πληρώνει, κάθε χρόνο την Υποχρέωσή της απέναντι στο Ασφαλισμένο. Ισοδύναμα, η ποσότητα $\boldsymbol{Y(t)}$ είναι το μέρος της Ασφαλιστικής Παροχής το οποίο έχει εξασφαλίσει ο Ασφαλισμένος από την έναρξη του συμβολαίου μέχρι τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$. Το Bonus Reserve θα μπορούσε να θεωρηθεί ως το μέγεθος που δείχνει σε λογιστικό επίπεδο το κέρδος ή τη ζημιά, σε ετήσια βάση, για την Ασφαλιστική Εταιρεία από ένα Συμβόλαιο Συμμετοχής.

Επανερχόμαστε στον υπολογισμό της ετήσιας απόδοσης, θεωρώντας ότι κάθε έτος πιστώνεται στον Ασφαλισμένο το μεγαλύτερο ανάμεσα στην Ελάχιστη Απόδοση και μία πιο σύνθετη ποσότητα που εξαρτάται από το Μηχανισμό Απόδοσης Κερδών, ο οποίος εξαρτάται από την πορεία του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς. Συγκεκριμένα, κάθε έτος, υπολογίζεται ο λόγος ανάμεσα σε Bonus Reserve και Ασφαλιστική Υποχρέωση, ο οποίος, αν ξεπερνά ένα όριο, τότε αποδίδεται στον Ασφαλισμένο το επόμενο έτος ένα μέρος αυτής της διαφοράς. Το όριο που αναφέραμε θα το ονομάσουμε Απόδοση - Στόχο (Target Buffer Ratio) και το μέρος θα το ονομάσουμε Ποσοστό Συμμετοχής στα κέρδη (Participation Rate).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ότι η ετήσια απόδοση του Συμβολαίου $\boldsymbol{r_P(t)}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{r_P(t) = max\left(r_G, a\left(\frac{B(t-1)}{Y(t-1)} - \gamma\right)\right) \Rightarrow r_P(t) = r_G + max\left(0, a\left(\frac{B(t-1)}{Y(t-1)} - \gamma\right) - r_G\right) \quad (4.3)}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι ο Ασφαλισμένος καρπώνεται ετησίως τουλάχιστον απόδοση ίση με $\boldsymbol{r_G}$ συν ένα μέρος από τα κέρδη (εφόσον υπάρχουν) που έχουν καταγραφεί τον προηγούμενο χρόνο. Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι κάθε έτος ο Ασφαλισμένος προσδοκά να λάβει, πέραν της Ελάχιστης Απόδοσης, μια επιπλέον απόδοση – bonus $\boldsymbol{r_B(t)}$ ίση με:

$$\boldsymbol{r_B(t) = max\left(0, a\left(\frac{B(t-1)}{Y(t-1)} - \gamma\right) - r_G\right) \qquad (4.4)}$$

Όπου: $\boldsymbol{a}$ το Ποσοστό Συμμετοχής και $\boldsymbol{\gamma}$ η Απόδοση Στόχος. Αν αντικαταστήσουμε την $(\boldsymbol{4.3})$ στην αρχική σχέση $(\boldsymbol{4.1a})$, έχουμε:

$$\boldsymbol{Y(t) = Y(t-1)\cdot\left(1 + r_G + max\left(0, a\left(\frac{B(t-1)}{Y(t-1)} - \gamma\right) - r_G\right)\right) \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{Y(t) = Y(t-1)\cdot(1 + r_G) + Y(t-1)\cdot max\left(0, a\left(\frac{B(t-1)}{Y(t-1)} - \gamma\right) - r_G\right) \qquad (4.5)}$$

Η τελευταία σχέση μας δείχνει ξεκάθαρα ότι στο Συμβόλαιο Συμμετοχής η Ασφαλιστική Παροχή επί της ουσίας δομείται από ένα ομόλογο με απόδοση $\boldsymbol{r_G}$ και ένα "Bonus Option", δηλαδή ένα Δικαίωμα που ενδέχεται να αποφέρει επιπλέον ποσοστιαίο κέρδος, ίσο με την ποσότητα $\boldsymbol{max\left(0, a\left(\frac{B(t-1)}{Y(t-1)} - \gamma\right) - r_G\right)}$, ανάλογα με την πορεία του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς. Και τα δύο στοιχεία θεωρείται ότι έχουν διάρκεια ενός έτους και συνεχώς ανανεώνονται καθ' όλη τη διάρκεια ισχύος του Συμβολαίου Συμμετοχής. Η Ασφαλιστική Εταιρεία λειτουργεί σαν εκδότης του ομολόγου και του "Bonus Option", καθώς εγγυάται ότι θα καλύψει κάθε έτος την ελάχιστη απόδοση $\boldsymbol{r_G}$, ακόμα κι αν η πορεία του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς είναι τέτοια ώστε να της αποφέρει ζημιά. Αξίζει να σημειωθεί ότι επειδή ο Μηχανισμό Απόδοσης Κερδών λειτουργεί σε ετήσια βάση, κάθε αποδοτικό έτος κατά τη διάρκεια του συμβολαίου συνεισφέρει σε μεγάλο βαθμό στην αύξηση της Ασφαλιστικής Παροχής στη λήξη, καθώς η οποιαδήποτε ενδιάμεση αξία της Ασφαλιστικής Υποχρέωσης γίνεται τιμή εκκίνησης για τη συνέχεια του συμβολαίου, όπως φαίνεται στην $(\boldsymbol{4.1.b})$. Επίσης, η παροχή της ελάχιστης ετήσιας εγγυημένης απόδοσης $\boldsymbol{r_G}$ συνεπάγεται μία ελάχιστη εγγυημένη Ασφαλιστική Παροχή στη λήξη, ίση με $\boldsymbol{Y_{min}(T) = Y(0) \cdot (1 + r_G)^T}$, γεγονός που αποτελεί στοιχείο ομοιότητας με τα Συμβόλαια ELEPAVG των προηγούμενων κεφαλαίων. Από όλα τα παραπάνω, γίνεται εμφανής η έκθεση της Ασφαλιστικής Εταιρείας στον Επενδυτικό Κίνδυνο.

4.2 Τιμολόγηση Participating Συμβολαίου

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι το Συμβόλαιο Συμμετοχής δεν περιλαμβάνει ασφαλιστική κάλυψη σε περίπτωση θανάτου και λειτουργεί σαν Πρόγραμμα Αποταμίευσης. Άρα η Εταιρεία από ένα τέτοιο συμβόλαιο δεν αντιμετωπίζει Κίνδυνο Θνησιμότητας, αλλά μόνο τον Επενδυτικό Κίνδυνο ο οποίος αναφέρθηκε προηγουμένως. Ο Ασφαλισμένος αγοράζοντας το συμβόλαιο προσβλέπει στη Συσσώρευση Κεφαλαίου σύμφωνα με το Μηχανισμό Απόδοσης Κερδών, εξασφαλίζοντας την ετήσια εγγυημένη απόδοση $\boldsymbol{r_G}$, και προσδοκά την επιπλέον απόδοση-bonus $\boldsymbol{r_B(t)}$. Έτσι, αναφέρουμε προκαταβολικά ότι απουσιάζουν από τις παραμέτρους που παίζουν ρόλο στην αποτίμηση του συμβολαίου τόσο η ηλικία του Ασφαλισμένου όσο και οι πιθανότητες θανάτου και επιβίωσης.

Θα εξετάσουμε δύο παραλλαγές Συμβολαίων Συμμετοχής. Σύμφωνα με την πρώτη, το συμβόλαιο έχει ορισμένη χρονική διάρκεια ισχύος, η οποία είναι προκαθορισμένη από την σύναψη του Συμβολαίου. Ο Ασφαλισμένος εισπράττει στη λήξη του συμβολαίου (ποτέ νωρίτερα) το κεφάλαιο που του έχει πιστωθεί καθ' όλη τη διάρκεια του συμβολαίου. Μπορεί όμως να δοθεί η δυνατότητα στον Ασφαλισμένο να εισπράξει οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια του συμβολαίου το ποσό που του έχει πιστωθεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή. Ακολουθώντας τους Grosen και Jorgensen [2000], στην πρώτη περίπτωση ονομάζουμε το Συμβόλαιο Συμμετοχής "Ευρωπαϊκού Τύπου", ενώ στη δεύτερη περίπτωση "Αμερικάνικου Τύπου". Τα ονόματα αυτά οφείλονται στην ομοιότητα των Συμβολαίων Συμμετοχής και των γνωστών Δικαιωμάτων Προαίρεσης ως προς τη στιγμή πληρωμής.

Η αξία της Ασφαλιστικής Παροχής στη λήξη του Συμβολαίου Συμμετοχής Ευρωπαϊκού Τύπου, σύμφωνα με την εξίσωση $(\boldsymbol{4.1.b})$, είναι:

$$\boldsymbol{Y(T) = Y(0) \cdot \prod_{i=1}^{T}\left(1 + r_P(i)\right)} \qquad (\boldsymbol{4.6})$$

Η προηγούμενη εξίσωση, σε συνδυασμό με την (4.3), καθιστά εμφανές το ότι η συνολική απόδοση για όλη τη διάρκεια ή, ισοδύναμα, το ύψος της Ασφαλιστικής Παροχής στη λήξη, σε αυτό το συμβόλαιο εξαρτάται από όλες τις τιμές που καταγράφει το Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς σε ετήσια βάση κατά τη διάρκεια ισχύος του συμβολαίου. Το γεγονός αυτό αποτελεί βασική διαφορά ανάμεσα στο Συμβόλαιο Συμμετοχής και στα ELEPAVG συμβόλαια (Equity-Linked ή Unit-Linked) που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια (με εξαίρεση το Εναλλακτικό Unit-Linked), στα οποία η Ασφαλιστική Παροχή εξαρτιόταν αποκλειστικά από την αξία του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς στη λήξη του συμβολαίου. Επίσης αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο αποδίδεται τόσο στην Ασφαλιστική Παροχή όσο και στο ίδιο το Συμβόλαιο ο χαρακτηρισμός *Εξαρτώμενα από τη Διαδρομή* (Path Dependent) και επιβάλλεται διαφορετική μεθοδολογία αποτίμησης σε σχέση με τα συμβόλαια των προηγούμενων Κεφαλαίων.

Όπως σε όλα τα προηγούμενα, για την αποτίμηση του Συμβολαίου Συμμετοχής απαιτείται ο υπολογισμός της αξίας της προαναφερθείσας Ασφαλιστικής Παροχής $\boldsymbol{Y(T)}$ τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t=0}$, δηλαδή τη στιγμή σύναψης. Θεωρούμε εφεξής ότι το Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς διαπραγματεύεται σε μία οργανωμένη αγορά όπου οι επενδυτές είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο, και ότι ακολουθεί τη γνωστή Δυναμική σύμφωνα με την εξίσωση (1.2). Στο συγκεκριμένο συμβόλαιο η χρήση της *Αρχής της Ισοδυναμίας κάτω από το Μέτρο Q* είναι ταυτόσημη με τον υπολογισμό της προεξοφλημένης αξίας της $\boldsymbol{Y(T)}$ κάτω από το μέτρο Q, καθώς ο χρόνος καταβολής της Ασφαλιστικής Παροχής δεν αποτελεί τυχαία μεταβλητή επειδή, όπως έχει ήδη αναφερθεί, αυτή καταβάλλεται υποχρεωτικά στη λήξη, ενώ δεν παρέχεται κάλυψη σε περίπτωση θανάτου του Ασφαλισμένου. Συμβολίζοντας με $\boldsymbol{U^{Eur}}$ το Εφάπαξ Ασφάλιστρο για το Συμβόλαιο Συμμετοχής Ευρωπαϊκού Τύπου και θεωρώντας ότι βρισκόμαστε σε περιβάλλον σταθερών επιτοκίων, έχουμε:

$$\boldsymbol{U^{Eur}=V_0^Q\big(Y(T)\big)=e^{-rT}\cdot E^Q[Y(T)]} \qquad (4.7)$$

Όπου $\boldsymbol{r}$ το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο για όλη τη διάρκεια ισχύος του συμβολαίου. Η εξάρτηση από τη διαδρομή της $\boldsymbol{Y(T)}$ όπως φαίνεται στην (4.6), καθιστά αδύνατο τον προσδιορισμό σε κλειστή μορφή του $\boldsymbol{U^{Eur}}$ από την (4.7). Μια εν μέρει ερμηνεία μπορεί να δοθεί αν επιστρέψουμε στην εξίσωση (4.3), κατά την οποία η απόδοση $\boldsymbol{r_P(t)}$, που αντιστοιχεί στη χρονική περίοδο $(\boldsymbol{t-1},\boldsymbol{t})$, καθορίζεται από την τιμή του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς στην αρχή της περιόδου και όχι στο τέλος της[7]. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι το Bonus Option της σχέσης (4.5) δεν είναι όμοιο με το Δικαίωμα Προαίρεσης Αγοράς και, άρα, η αξία του δεν μπορεί να υπολογιστεί από την αναλυτική σχέση (1.13) των Black και Scholes.

Για τον υπολογισμό του $\boldsymbol{U^{Eur}}$ θα μπορούσε να εφαρμοστεί μία μέθοδος κατά την οποία θεωρούνται γνωστές οι τιμές των $\boldsymbol{Y(0)}$ και $\boldsymbol{S(0)}$, σαν τιμές έναρξης στις σχέσεις (4.2) και (4.6), και προσομοιώνονται με Monte Carlo πολλά μονοπάτια του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς. Κάθε μονοπάτι περιέχει τις τιμές του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς σε ετήσια βάση: $\boldsymbol{S(t)},\ \ \boldsymbol{0<t\le T}$, και στη συνέχεια, για κάθε μονοπάτι, υπολογίζονται με τη σειρά οι αποδόσεις $\boldsymbol{r_P(t)},\ \ \boldsymbol{0<t\le T}$ από τη σχέση (4.3) και η Ασφαλιστική Παροχή $\boldsymbol{Y(T)}$ από την (4.6). Τελικά, υπολογίζεται η προεξοφλημένη μέση τιμή της Ασφαλιστικής Παροχής για το σύνολο των μονοπατιών από την (4.7), η οποία είναι η αξία του συμβολαίου τη στιγμή σύναψης και άρα η τιμή του Εφάπαξ Ασφαλίστρου $\boldsymbol{U^{Eur}}$. Όμως, η μέθοδος που μόλις περιγράψαμε δεν μπορεί να εφαρμοστεί για την αποτίμηση του Συμβολαίου Αμερικάνικου Τύπου και για το λόγο αυτό δεν θα την χρησιμοποιήσουμε.

[7] Μαθηματικά η $\boldsymbol{r_P(t)}$ είναι $\mathcal{F}_{t-1}$ και όχι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη

Θα ακολουθήσουμε, με τις αναγκαίες διαφοροποιήσεις, τη μέθοδο προσομοίωσης πολλών μονοπατιών του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς μέσω ενός Διωνυμικού Δέντρου, κατά το πρότυπο των Cox, Ross και Rubinstein [1979]. Θεωρούμε γνωστή την τιμή αρχική αξία του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς $\boldsymbol{S(0)}$ και χρίζουμε το διάστημα $[\boldsymbol{0}\ ,\boldsymbol{T}]$ σε βήματα διάρκειας 1 έτους. Στη συνέχεια, θεωρώντας επίσης γνωστά και σταθερά το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο $\boldsymbol{r}$ και τη μεταβλητότητα $\boldsymbol{\sigma}$, δημιουργούμε το Διωνυμικό Δέντρο όπως περιγράφηκε στην Εισαγωγή. Σε κάθε κόμβο του Δέντρου υπολογίζουμε, εκτός από την αξία του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς $\boldsymbol{S(t)}$, το Buffer Reserve $\boldsymbol{B(t)}$ μέσω της $(\boldsymbol{4.2})$ και την απόδοση $\boldsymbol{r_P(t)}$ για το χρονικό διάστημα $(\boldsymbol{t-1,t})$ από την $(\boldsymbol{4.3})$. Αφού πλέον γνωρίζουμε όλες τις τιμές των αποδόσεων $\boldsymbol{r_P(t)}$, $\mu\varepsilon$ $\boldsymbol{0<t\le T}$, και θεωρώντας γνωστή την αρχική τιμή $\boldsymbol{Y(0)}$, μπορούμε να υπολογίσουμε την Ασφαλιστική Παροχή στη λήξη του συμβολαίου $\boldsymbol{Y(T)}$ από τη σχέση $(\boldsymbol{4.6})$. Η αξία του συμβολαίου τη στιγμή σύναψης $\boldsymbol{U^{Eur}}$ μπορεί πλέον να υπολογισθεί από την προεξοφλημένη μέση τιμή των $\boldsymbol{Y(T)}$ για το σύνολο των μονοπατιών, μέσω της σχέσης $(\boldsymbol{4.7})$.

Όσον αφορά το Συμβόλαιο Συμμετοχής Αμερικανικού Τύπου, υπενθυμίζουμε ότι ο Ασφαλισμένος διαθέτει το δικαίωμα να εισπράξει οποιαδήποτε στιγμή πριν τη λήξη του συμβολαίου το ποσό της Ασφαλιστικής Παροχής που έχει συσσωρευτεί μέχρι εκείνη τη στιγμή, σύμφωνα με το Μηχανισμό Απόδοσης Κερδών. Το δικαίωμα αυτό συναντάται στη βιβλιογραφία ως *Δικαίωμα Παράδοσης* (Surrender Option), με τον όρο παράδοση να ισοδυναμεί με επιστροφή του συμβολαίου από τον Ασφαλισμένο στην Εταιρεία. Θεωρούμε, χάριν απλότητας, ότι ο Ασφαλισμένος αποφασίζει αποκλειστικά στο τέλος κάθε έτους (και όχι σε ενδιάμεσες χρονικές στιγμές) αν θα ασκήσει το δικαίωμά του για πρόωρη είσπραξη ή θα παραμείνει στο συμβόλαιο για ένα ακόμα έτος. Ο κανόνας λήψης απόφασης είναι ο εξής: Παραμένει στο συμβόλαιο αν η αναμενόμενη απόδοση για το επόμενο έτος είναι υψηλότερη από το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Αν αυτό δεν ισχύει, επιλέγει να εισπράξει το μέχρι εκείνη τη στιγμή συσσωρευμένο ποσό, καθώς μπορεί να το επενδύσει την ίδια στιγμή αποκομίζοντας απόδοση ίση με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

Για να προχωρήσουμε στη διαδικασία αποτίμησης, πρέπει πρώτα να τροποποιήσουμε το συμβολισμό. Εφεξής θα αντικαταστήσουμε -για λόγους κατανόησης- την αξία της Ασφαλιστικής Υποχρέωσης του συμβολαίου Ευρωπαϊκού Τύπου $\boldsymbol{Y(t)}$ τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$ με την ισοδύναμη $\boldsymbol{Y_{Eur}(t)}$, ενώ με $\boldsymbol{Y_{Am}(t)}$ θα συμβολίζουμε την αντίστοιχη Υποχρέωση για το Συμβόλαιο Αμερικανικού Τύπου. Η μεθοδολογία αυτή ακολουθεί την αντίστοιχη της αποτίμησης των Δικαιωμάτων Προαίρεσης Αμερικανικού Τύπου, με χρήση Διωνυμικού Δέντρου κατά τους Cox, Ross και Rubinstein [1979].

Θεωρούμε ότι και οι δύο τύποι Συμβολαίων Συμμετοχής έχουν ίδια αξία στη λήξη $\left(\boldsymbol{Y_{Eur}(T)=Y_{Am}(T)}\right)$, όπως και τα Δικαιώματα Προαίρεσης. Στη συνέχεια, γίνεται έλεγχος με αντίστροφη χρονολογική σειρά (από τη λήξη προς την έναρξη) για το αν εξασκείται ή όχι πρόωρα το Δικαίωμα Παράδοσης, σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα λήψης απόφασης. Αν το Δικαίωμα Παράδοσης εξασκείται σε κάποια ενδιάμεση χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$, τότε τροποποιείται αντίστοιχα η αξία του Δικαιώματος από $\boldsymbol{Y_{Eur}(t)}$ σε $\boldsymbol{Y_{Am}(t)}$.

Στη γλώσσα των μαθηματικών, ο κανόνας λήψης απόφασης για τον Ασφαλισμένο οδηγεί στην τροποποίηση του υπολογισμού της Ασφαλιστικής Υποχρέωσης ως εξής:

Για $\boldsymbol{t=T-1}$ *έως* $\boldsymbol{1}$: $\quad \boldsymbol{Y_{Am}(t)=max\big(\,Y_{Eur}(t),e^{-r}\,E^{Q}[Y_{Am}(t+1)]\,\big)}\Rightarrow$

$$\boldsymbol{Y_{Am}(t)=Y_{Eur}(t)+max\left(0,e^{-r}\,E^{Q}[Y_{Am}(t+1)]-Y_{Eur}(t)\right)}\qquad(\boldsymbol{4.8})$$

Ο παραπάνω έλεγχος σύμφωνα με την εξίσωση (4.8) πραγματοποιείται για όλα τα μονοπάτια, σε όλους τους κόμβους του Δέντρου. Η μέση τιμή που εμφανίζεται υπολογίζεται:

$$E^Q[Y_{Am}(t+1)] = p \cdot Y_{Am}^{Up}(t+1) + q \cdot Y_{Am}^{Down}(t+1) \quad (4.8*)$$

$Y_{Am}^{Up}(t+1)$ είναι η αξία της Ασφαλιστικής Υποχρέωσης αν το Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς κινηθεί ανοδικά στο διάστημα $(t, t+1)$, σενάριο το οποίο έχει πιθανότητα p στο μέτρο πιθανότητας Q, όπως περιγράφηκε στην Εισαγωγή. Ομοίως οι συμβολισμοί $Y_{Am}^{Down}(t+1)$ και q, σε περίπτωση καθοδικής πορείας του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς.

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία αποτίμησης με χρήση Διωνυμικού Δέντρου, η αξία του Συμβολαίου Συμμετοχής Αμερικανικού Τύπου τη στιγμή σύναψης $(t=0)$ είναι η μέση τιμή κάτω από το μέτρο Q της προεξοφλημένης αξίας της Ασφαλιστικής Υποχρέωσης τη χρονική $t=1$. Δηλαδή το Εφάπαξ Ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλλει ο Ασφαλισμένος είναι:

$$U^{Am} = max\left(Y_{Am}(0), e^{-r}\, E^Q[Y_{Am}(1)]\right) \Rightarrow$$

$$U^{Am} = max\left(Y_{Am}(0), e^{-r}\left[p \cdot Y_{Am}^{Up}(1) + q \cdot Y_{Am}^{Down}(1)\right]\right) \quad (4.9)$$

4.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Στη συνέχεια παραθέτουμε στους Πίνακες **4.1** έως και **4.5.Γ** κάποια αριθμητικά αποτελέσματα, για τις τιμές των παραμέτρων τις οποίες θεωρούμε πιο ρεαλιστικές. Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές $S(0)=1$ και $Y_{Am}(0) = Y_{Eur}(0) = 1$, ενώ αναφέρονται ξεχωριστά όλες οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων που εμπλέκονται στους υπολογισμούς και μας βοηθούν ώστε στη συνέχεια να προβούμε στις απαραίτητες συγκρίσεις. Όπως έχει αναφερθεί, δημιουργήθηκε για τις τιμές του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς ένα Διωνυμικό Δέντρο με T βήματα και 2^T διαφορετικά μονοπάτια και σε κάθε κόμβο του Δέντρου υπολογίστηκαν όλα τα μεγέθη των εξισώσεων (4.2) έως και (4.5). Η Ασφαλιστική Παροχή στη λήξη προκύπτει από την (4.6) και τελικά το Ασφάλιστρο για το Συμβόλαιο Συμμετοχής Ευρωπαϊκού Τύπου από τη σχέση (4.7). Ομοίως και για το Συμβόλαιο Αμερικανικού Τύπου, με την επιπλέον τροποποίηση ότι σε κάθε κόμβο η αξία της Ασφαλιστικής Υποχρέωσης αναπροσαρμόστηκε σύμφωνα με την εξίσωση (4.8) και το Ασφάλιστρο υπολογίστηκε τελικά από την (4.9). Σε όλους του Πίνακες δίνονται σε αντιπαραβολή οι τιμές του Εφάπαξ Ασφαλίστρου για το Συμβόλαιο Συμμετοχής Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού Τύπου. Όπως φαίνεται στην εξίσωση (4.8), το συμβόλαιο Αμερικανικού Τύπου έχει εξ ορισμού υψηλότερη τιμή από το αντίστοιχο Ευρωπαϊκού Τύπου και η μεταξύ τους διαφορά αποτυπώνεται στην τιμή του Δικαιώματος Παράδοσης. Για να είναι απόλυτα εμφανής η διαφοροποίηση μεταξύ των δύο παραλλαγών του συμβολαίου, στους πρώτους πίνακες παρουσιάζεται και η τιμή του Δικαιώματος Παράδοσης. Επίσης, όπου το Συμβόλαιο Αμερικανικού τύπου εμφανίζει τιμή ίση με τη μονάδα, σημαίνει ότι για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων ο (θεωρητικά) κάτοχός του πρέπει να ασκήσει το Δικαίωμα Παράδοσης από την έναρξη του συμβολαίου, δηλαδή να μην παραμείνει ούτε το πρώτο έτος (ισοδύναμα: δεν έχει νόημα να μπει εξ' αρχής στο συμβόλαιο).

Στους Πίνακες **4.1** βλέπουμε τις τιμές των Ασφαλίστρων και του Δικαιώματος Παράδοσης για διάφορες χρονικές διάρκειες του συμβολαίου. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι η μέγιστη διάρκεια συμβολαίων που φαίνεται στους πίνακες είναι τα 20 έτη, επειδή για μεγαλύτερες διάρκειας απαιτείται μεγαλύτερο μέγεθος πινάκων και μνήμης από αυτά που μπορεί να υποστηρίξει το υπολογιστικό Πακέτο Εφαρμογών (Matlab) που χρησιμοποιήθηκε. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η διάρκεια, αυξάνεται και η τιμή των Ασφαλίστρων, γεγονός που ερμηνεύεται εύκολα, καθώς με αύξηση της διάρκειας αυξάνονται οι ευκαιρίες για πίστωση των αποδόσεων-bonus στον Ασφαλισμένο. Υπενθυμίζουμε ότι σχετικά λίγα έτη με υψηλές αποδόσεις κατά τη διάρκεια του συμβολαίου συνήθως συνεπάγονται μια υψηλή Παροχή στη λήξη για το Ευρωπαϊκού Τύπου συμβόλαιο, ή δίνουν την ευκαιρία για γρήγορη αποκόμιση υψηλών κερδών στην περίπτωση του Αμερικανικού Συμβολαίου. Εξ' αιτίας του τελευταίου γεγονότος, όσο αυξάνεται η διάρκεια τόσο περισσότερο αξίζει και το Δικαίωμα Παράδοσης.

Στους Πίνακες **4.2** παρατηρούμε ότι οι τιμές και των δύο συμβολαίων βαίνουν μειούμενες όσο μεγαλύτερο γίνεται το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Για το συμβόλαιο Ευρωπαϊκού Τύπου, η συμπεριφορά αυτή φαίνεται ξεκάθαρα από την εξίσωση $(\mathbf{4.6})$, ενώ για το Συμβόλαιο Αμερικανικού Τύπου, παρόλο που είναι πιο πολύπλοκο, είναι επίσης αναμενόμενη, καθώς το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο χρησιμοποιείται στην προεξόφληση βήμα-βήμα της Ασφαλιστικής Υποχρέωσης, όπως περιγράφηκε νωρίτερα. Και εδώ βλέπουμε την απόσταση μεταξύ των συμβολαίων να μεγαλώνει, καθώς όσο αυξάνεται το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο τόσο αυξάνονται οι πιθανότητες για άσκηση του Δικαιώματος Παράδοσης.

Στους Πίνακες **4.3** έχουμε τις τιμές των Ασφαλίστρων και του Δικαιώματος Παράδοσης συναρτήσει της εγγυημένης απόδοσης $\boldsymbol{r_G}$, για τρεις διαφορετικές τιμές διάρκειας του συμβολαίου (10, 15 και 20). Αναμενόμενα, παρατηρούμε σε όλες τις περιπτώσεις αύξηση της τιμής του Ασφαλίστρου όσο η εγγυημένη απόδοση $\boldsymbol{r_G}$ πλησιάζει την τιμή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο. Όμως, σε αυτούς τους πίνακες η αξία του Δικαιώματος Παράδοσης μειώνεται, καθώς όσο αυξάνεται η εγγυημένη απόδοση τόσο πιο δύσκολα σημειώνονται υπεραποδόσεις, και το φαινόμενο αυτό ισχύει και για τις δύο παραλλαγές του συμβολαίου. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να ισχυριστούμε ότι όσο υψηλότερο είναι το επίπεδο των επιτοκίων, τόσο περισσότερο όμοια γίνονται τα συμβόλαια συμμετοχής Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου και, άρα, οι τιμές τους πλησιάζουν.

Στους Πίνακες **4.4** βλέπουμε τη μεταβολή της τιμής των Ασφαλίστρων συναρτήσει της μεταβλητότητας του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς, για Συμβόλαια με 3 διαφορετικές διάρκειες (10, 15 και 20). Παρατηρείται και για τα δύο Ασφάλιστρα η ίδια συμπεριφορά με τα όλα τα συμβόλαια που μελετήθηκαν ως τώρα. Σε όλες τις περιπτώσεις, ξεκινούν και τα δύο από μία τιμή κοντά στη μονάδα και αυξάνονται όσο αυξάνεται η μεταβλητότητα του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς. Το φαινόμενο αυτό είναι αναμενόμενο αν αναλογισθούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η μεταβλητότητα, τόσο μεγαλύτερη είναι και η πιθανότητα να σημειωθούν υπεραποδόσεις, σύμφωνα με το Μηχανισμό Συμμετοχής στα Κέρδη. Παρόλο που οι τιμές Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού Συμβολαίου απέχουν λίγο, βλέπουμε ότι η απόστασή τους (αξία του Δικαιώματος Παράδοσης) ξεκάθαρα αυξάνεται όσο πιο μεταβλητό γίνεται το Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς. Από την πλευρά της Ασφαλιστικής Εταιρείας η αυξητική τάση των τιμών των Συμβολαίων αντανακλά το γεγονός της αύξησης του αναλαμβανόμενου Επενδυτικού Κινδύνου, λόγω της ύπαρξης της ελάχιστης εγγυημένης ετήσιας απόδοσης.

Εκτενέστεροι όλων είναι οι Πίνακες **4.5.Α, Β** και **Γ,** που παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Περιέχουν τις τιμές των Ασφαλίστρων για τις δύο παραλλαγές του συμβολαίου (και όχι του Δικαιώματος Παράδοσης για λόγους οικονομίας) για πολλούς συνδυασμούς του ποσοστού συμμετοχής $\boldsymbol{a}$ και της απόδοσης στόχου $\boldsymbol{\gamma}$. Οφείλουν το μέγεθός τους στο ότι το εύρος των ενδεδειγμένων τιμών για αυτές τις παραμέτρους είναι πρακτικά μεγαλύτερο συγκριτικά με τις παραμέτρους που μελετήθηκαν στους προηγούμενους πίνακες. Η Ασφαλιστική Εταιρεία έχει τη δυνατότητα να επιλέξει τις ακριβείς τιμές για τα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{\gamma}$, ανάλογα με την τιμολογιακή πολιτική της και το επίπεδο κινδύνου που επιθυμεί να αναλάβει.

Κάθε Πίνακας περιέχει αποτελέσματα για διαφορετική τιμή μεταβλητότητας του Χαρτοφυλακίου Αναφοράς (0,1 , 0,3 και 0,5), αλλά η παρατηρούμενη συμπεριφορά είναι ίδια.

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι προκύπτουν υψηλότερες τιμές των Ασφαλίστρων όσο μεγαλύτερο είναι το ποσοστό συμμετοχής, καθώς σε αυτή την περίπτωση όλο και μεγαλύτερο τμήμα από τα κέρδη που σημειώνει το Χαρτοφυλάκιο Αναφοράς αποδίδονται στον Ασφαλισμένο. Στην ειδική περίπτωση που $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, βλέπουμε ότι τα συμβόλαια και των δύο τύπων έχουν τις ίδιες τιμές στους πίνακες, ανεξάρτητα από την απόδοση και τις υπόλοιπες παραμέτρους. Αυτό συμβαίνει επειδή μηδενικό ποσοστό συμμετοχής σημαίνει ότι ο Ασφαλισμένος δεν λαμβάνει ποτέ την απόδοση-bonus και το Συμβόλαιο Συμμετοχής ισοδυναμεί με ένα Ομόλογο Χωρίς Πιστωτικό Κίνδυνο με ετήσια απόδοση $\boldsymbol{r_G}$. Αντιθέτως, οι τιμές των Ασφαλίστρων μειώνονται όσο περισσότερο αυξάνεται η τιμή της απόδοσης-στόχου $\boldsymbol{\gamma}$, γεγονός που ερμηνεύεται από την αυξανόμενη δυσκολία επίτευξης υπεραποδόσεων όσο ανεβαίνει το όριο πάνω από το οποίο αυτές επιτυγχάνονται. Συνεπώς, βλέπουμε τις μέγιστες τιμές των Ασφαλίστρων όταν $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$.

Όσον αφορά τα Δικαιώματα Παράδοσης που δεν παρουσιάζονται, βλέπουμε ότι για συγκεκριμένο ποσοστό συμμετοχής έχουν παραπλήσια αξία για όλες τις τιμές της απόδοσης-στόχου. Με βάση αυτό θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ο βαθμός διαφοροποίησης μεταξύ Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού Τύπου Συμβολαίου καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από το ποσοστό συμμετοχής και όχι από την απόδοση στόχο.

Μία χρήσιμη παρατήρηση στα δεδομένα των Πινάκων **4.5** αποτελεί το ότι μπορούν να προκύψουν παραπλήσιες τιμές Ασφαλίστρων για διαφορετικούς συνδυασμούς των $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{\gamma}$. Όπως αναφέραμε και νωρίτερα, το γεγονός αυτό δίνει την ευχέρεια στην Ασφαλιστική Εταιρεία να δημιουργήσει και να διαθέσει στην αγορά, για δεδομένο επίπεδο τιμών, συμβόλαια με επιθυμητά για αυτήν χαρακτηριστικά. Βέβαια, χωρίς περαιτέρω ανάλυση είναι δύσκολο να επιλεγεί ένα βέλτιστο ζεύγος τιμών $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\gamma})$ που εξυπηρετεί μία συγκεκριμένη στρατηγική, π.χ. την ελαχιστοποίηση του Επενδυτικού Κινδύνου ή την αποκόμιση του μέγιστου δυνατού κέρδους (το τμήμα των κερδών που απομένει στην Εταιρεία μετά τον καταλογισμό του ποσοστού $\boldsymbol{a}$ στον Ασφαλισμένο).

Εφάπαξ Ασφάλιστρα U^{Eur} , U^{Am} και Δικαίωμα Παράδοσης $S-\ Option$

Πίνακες 4.1:

r	r_G	σ	α	γ
0,030	0,02	0,3	0,75	0,02

T	U^{Eur}	U^{Am}	$S-\ Option$
2	1,074623	1,079889	0,005267
4	1,202934	1,216389	0,013456
6	1,309634	1,330797	0,021163
8	1,402930	1,431878	0,028948
10	1,487284	1,523823	0,036539
12	1,564987	1,609916	0,044928
14	1,637470	1,691356	0,053886
16	1,705926	1,768887	0,062962
18	1,770762	1,843685	0,072923
20	1,832397	1,916020	0,083623

Πίνακες 4.2:

r_G	σ	α	γ	T
0,020	0,3	0,75	0,02	10

r	U^{Eur}	U^{Am}	$S-\ Option$
0,03	1,487284	1,523823	0,036539
0,04	1,408354	1,480674	0,072320
0,05	1,337236	1,442282	0,105046
0,06	1,273123	1,408644	0,135521
0,07	1,215285	1,380353	0,165068
0,08	1,163059	1,352731	0,189672
0,09	1,115848	1,324938	0,209090
0,10	1,073112	1,299032	0,225920

Πίνακες 4.3:

r	σ	α	γ	T
0,030	0,3	0,75	0,02	10

r_G	U^{Eur}	U^{Am}	$S-Option$
0,000	1,370700	1,471905	0,1012048
0,005	1,397026	1,483548	0,0865213
0,010	1,425316	1,496200	0,0708836
0,015	1,455396	1,509513	0,0541165
0,020	1,487284	1,523823	0,0365391

r	σ	α	γ	T
0,030	0,3	0,75	0,02	15

r_G	U^{Eur}	U^{Am}	$S-Option$
0,000	1,484716	1,644792	0,1600754
0,005	1,525678	1,662761	0,1370830
0,010	1,570869	1,682977	0,1121077
0,015	1,619852	1,705511	0,0856586
0,020	1,672456	1,730534	0,0580781

r	σ	α	γ	T
0,030	0,3	0,75	0,02	20

r_G	U^{Eur}	U^{Am}	$S-Option$
0,000	1,570742	1,793933	0,2231912
0,005	1,625890	1,819477	0,1935868
0,010	1,688254	1,848022	0,1597677
0,015	1,756893	1,879707	0,1228136
0,020	1,832397	1,916020	0,0836229

Πίνακες 4.4:

r	r_G	α	γ	T
0,03	0,02	0,75	0,02	10

σ	U^{Eur}	U^{Am}	$S-Option$
0,050	0,986814	1,019641	0,032827
0,100	1,082606	1,112149	0,029543
0,150	1,178507	1,208699	0,030192
0,200	1,277175	1,309675	0,032500
0,250	1,380234	1,414977	0,034743
0,300	1,487284	1,523823	0,036539
0,350	1,597605	1,636171	0,038565
0,400	1,711290	1,752563	0,041273
0,450	1,827902	1,872098	0,044196
0,500	1,947188	1,994476	0,047288

r	r_G	α	γ	T
0,03	0,02	0,75	0,02	15

σ	U^{Eur}	U^{Am}	$S-Option$
0,050	0,991307	1,032224	0,040917
0,100	1,114273	1,156057	0,041784
0,150	1,242089	1,286917	0,044828
0,200	1,377715	1,426467	0,048752
0,250	1,521405	1,574544	0,053139
0,300	1,672456	1,730534	0,058078
0,350	1,830482	1,893716	0,063234
0,400	1,995150	2,064504	0,069354
0,450	2,165807	2,241851	0,076045
0,500	2,341975	2,425239	0,083264

r	r_G	α	γ	T
0,03	0,02	0,75	0,02	20

σ	U^{Eur}	U^{Am}	$S-Option$
0,050	0,994082	1,042888	0,048806
0,100	1,138579	1,192809	0,054230
0,150	1,293699	1,353960	0,060262
0,200	1,461247	1,528338	0,067091
0,250	1,641142	1,715881	0,074739
0,300	1,832397	1,916020	0,083623
0,350	2,034341	2,127865	0,093525
0,400	2,246711	2,351331	0,104619
0,450	2,468630	2,585187	0,116556
0,500	2,699167	2,828575	0,129408

Εφάπαξ Ασφάλιστρα $\boldsymbol{U^{Eur}}$ (πάνω) και $\boldsymbol{U^{Am}}$ (κάτω) για διάφορα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\gamma}$

Πίνακας 4.5.Α:

r	r_G	T	σ
0,03	0,02	10	0,10

α \ γ	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
0,00	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053
	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,10	0,928597	0,925932	0,923558	0,921277	0,919245	0,917565	0,915928	0,914499	0,913163	0,911882	0,910997
	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,20	0,974710	0,967828	0,961622	0,955864	0,950573	0,946106	0,941774	0,937894	0,934148	0,930809	0,928014
	1,015240	1,011044	1,007067	1,003247	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,30	1,010658	1,000320	0,991532	0,983231	0,975858	0,968788	0,962624	0,957117	0,951842	0,947039	0,942363
	1,042968	1,035043	1,028622	1,022610	1,017305	1,012527	1,008491	1,004962	1,001727	1,000000	1,000000
0,40	1,038524	1,026305	1,014902	1,005104	0,995645	0,987359	0,979267	0,972444	0,966106	0,960077	0,954514
	1,068987	1,057781	1,047646	1,039869	1,032891	1,026397	1,020166	1,015519	1,011487	1,007620	1,003970
0,50	1,060235	1,046601	1,033422	1,022162	1,011524	1,001770	0,992791	0,984434	0,977350	0,970423	0,964124
	1,089801	1,077245	1,065065	1,054894	1,045641	1,038084	1,031002	1,024620	1,019273	1,014784	1,010677
0,60	1,077477	1,062663	1,048556	1,035762	1,024302	1,013436	1,003832	0,994448	0,986746	0,979292	0,972298
	1,106678	1,092681	1,079573	1,067895	1,057651	1,048062	1,040038	1,032580	1,026690	1,021066	1,016278
0,70	1,092246	1,076505	1,061664	1,047677	1,035468	1,023556	1,013290	1,003315	0,994704	0,986754	0,979156
	1,121116	1,106179	1,092051	1,079133	1,068233	1,057615	1,048180	1,039801	1,033038	1,026928	1,021185
0,80	1,104799	1,088160	1,072595	1,057583	1,044698	1,032138	1,021090	1,010635	1,001299	0,992949	0,984871
	1,133437	1,117610	1,102691	1,088521	1,077056	1,065889	1,055567	1,046017	1,038438	1,031870	1,025697
0,90	1,115248	1,097884	1,081717	1,066026	1,052428	1,039321	1,027601	1,016762	1,006854	0,998194	0,989753
	1,143893	1,127253	1,111711	1,096605	1,084487	1,072862	1,062022	1,051842	1,042996	1,036160	1,029522
1,00	1,124053	1,106174	1,089499	1,073386	1,059125	1,045552	1,033260	1,022068	1,011650	1,002715	0,994015
	1,152871	1,135548	1,119457	1,103888	1,090835	1,078820	1,067538	1,056846	1,047303	1,039826	1,032950

Εφάπαξ Ασφάλιστρα $\boldsymbol{U^{Eur}}$ (πάνω) και $\boldsymbol{U^{Am}}$ (κάτω) για διάφορα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\gamma}$

Πίνακας 4.5.Β:

r	r_G	T	σ
0,03	0,02	10	0,30

α\γ	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
0,00	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053
	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,10	1,039532	1,035565	1,031764	1,028009	1,024458	1,021073	1,017718	1,014909	1,012238	1,009596	1,006976
	1,078621	1,075086	1,071621	1,068187	1,064966	1,061914	1,058890	1,056452	1,054157	1,051894	1,049660
0,20	1,164341	1,156589	1,149042	1,141679	1,134509	1,127582	1,120847	1,114362	1,108031	1,102057	1,096334
	1,197364	1,190106	1,183086	1,176174	1,169407	1,162795	1,156369	1,150129	1,144039	1,138315	1,132853
0,30	1,255214	1,244651	1,234327	1,224322	1,214747	1,205410	1,196372	1,187608	1,179102	1,171008	1,163221
	1,287858	1,277611	1,267587	1,257852	1,248433	1,239227	1,230275	1,221549	1,213083	1,205056	1,197514
0,40	1,328733	1,316452	1,304459	1,292750	1,281270	1,270232	1,259437	1,248995	1,238809	1,228948	1,219571
	1,361864	1,349816	1,338115	1,326727	1,315547	1,304622	1,293937	1,283529	1,273346	1,263495	1,254135
0,50	1,391481	1,377186	1,363195	1,349526	1,336193	1,323292	1,310763	1,298592	1,286823	1,275497	1,264622
	1,425491	1,411440	1,397686	1,384212	1,371073	1,358266	1,345863	1,333784	1,322007	1,310666	1,299775
0,60	1,442868	1,426836	1,411268	1,396062	1,381211	1,366749	1,352838	1,339336	1,326404	1,313756	1,301525
	1,477822	1,462033	1,446659	1,431638	1,416968	1,402622	1,388612	1,375030	1,362043	1,349365	1,337113
0,70	1,486136	1,468661	1,451625	1,435051	1,418948	1,403406	1,388479	1,373868	1,359738	1,345990	1,332654
	1,521799	1,504545	1,487742	1,471480	1,455702	1,440490	1,425588	1,410984	1,396826	1,383025	1,369628
0,80	1,523338	1,504715	1,486766	1,469298	1,452701	1,436667	1,421235	1,406197	1,391600	1,377437	1,363596
	1,560327	1,542064	1,524487	1,507364	1,490998	1,475133	1,459589	1,444357	1,429543	1,415138	1,401058
0,90	1,559102	1,540306	1,521921	1,503934	1,486332	1,469105	1,452500	1,436395	1,420738	1,405601	1,390780
	1,597202	1,578382	1,560184	1,542386	1,524976	1,507942	1,491280	1,474971	1,459091	1,443699	1,428626
1,00	1,593380	1,573324	1,553728	1,534576	1,515852	1,497542	1,479872	1,462806	1,446192	1,430179	1,414512
	1,632028	1,611878	1,592289	1,573361	1,554864	1,536784	1,519108	1,501821	1,484975	1,468689	1,452752

Εφάπαξ Ασφάλιστρα $\boldsymbol{U^{Eur}}$ (πάνω) και $\boldsymbol{U^{Am}}$ (κάτω) για διάφορα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\gamma}$

Πίνακας 4.5.Γ:

r	r_G	T	σ
0,03	0,02	10	0,50

α\γ	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
0,00	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053	0,903053
	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,10	1,149961	1,146119	1,142325	1,138576	1,134877	1,131273	1,127711	1,124199	1,120749	1,117449	1,114232
	1,190570	1,187037	1,183534	1,180071	1,176647	1,173316	1,170028	1,166781	1,163578	1,160507	1,157474
0,20	1,349679	1,342278	1,334998	1,328016	1,321132	1,314322	1,307591	1,300947	1,294387	1,287927	1,281551
	1,387753	1,380567	1,373507	1,366753	1,360094	1,353500	1,346980	1,340539	1,334177	1,327912	1,321727
0,30	1,501256	1,491046	1,481205	1,471620	1,462198	1,452956	1,444027	1,435303	1,426889	1,418654	1,410538
	1,540130	1,530120	1,520488	1,511118	1,501891	1,492869	1,484184	1,475685	1,467431	1,459322	1,451306
0,40	1,634553	1,622575	1,610775	1,599146	1,587695	1,576421	1,565309	1,554380	1,543631	1,533043	1,522616
	1,675083	1,663195	1,651486	1,639949	1,628615	1,617489	1,606542	1,595752	1,585120	1,574647	1,564331
0,50	1,749440	1,734817	1,720440	1,706310	1,692462	1,678850	1,665492	1,652385	1,639524	1,626877	1,614431
	1,791333	1,776824	1,762566	1,748561	1,734802	1,721296	1,708046	1,695046	1,682338	1,669849	1,657556
0,60	1,846316	1,829351	1,812731	1,796432	1,780473	1,764831	1,749512	1,734505	1,719771	1,705337	1,691161
	1,890246	1,873308	1,856757	1,840590	1,824760	1,809241	1,794026	1,779096	1,764438	1,750087	1,736045
0,70	1,929651	1,910665	1,892043	1,873806	1,856001	1,838614	1,821542	1,804792	1,788399	1,772471	1,756982
	1,975935	1,956949	1,938325	1,920062	1,902191	1,884734	1,867605	1,850934	1,834620	1,818949	1,803697
0,80	2,002282	1,981455	1,961280	1,941547	1,922259	1,903596	1,885474	1,868674	1,852578	1,836738	1,821147
	2,050737	2,029883	2,009885	1,990336	1,971209	1,952714	1,934754	1,917877	1,901609	1,885601	1,869928
0,90	2,067870	2,047698	2,028061	2,008771	1,989821	1,971201	1,952903	1,934920	1,917242	1,899863	1,882775
	2,120005	2,099536	2,079568	2,059955	2,040756	2,021934	2,003440	1,985265	1,967402	1,949843	1,932581
1,00	2,138767	2,116949	2,095543	2,074539	2,053925	2,033690	2,013824	1,994318	1,975160	1,956343	1,937857
	2,192304	2,170119	2,148354	2,126997	2,106038	2,085474	2,065399	2,045690	2,026337	2,007330	1,988660

Βιβλιογραφία

Βρόντος Σ. (2009). «Ειδικά Θέματα Ασφαλίσεων Ζωής» (Πανεπιστημιακές Σημειώσεις), *Παν/μιο Πειραιώς.*

Ένωση Αναλογιστών Ελλάδος, (2005). «Πίνακες Θνησιμότητας (ΕΑΕ 2005 Α)». Ομάδα Εργασίας: Κραββαρίτης Γ. (συντονιστής), Αγογλωσσάκη Ν., Γεωργιάδης Δ., Παπαροδόπουλος Ν., Πριναράκης Μ., Σίνος Γ. και Τσαγάκης Ν., *Ένωση Αναλογιστών Ελλάδος.*

Aase K. and S.A. Persson, (1994). "Pricing of Unit-Linked Life Insurance Policies", *Scandinavian Actuarial Journal,* p. 26-52.

Albrecher H. and Predota M., (2004). "On Asian Option Pricing for NIG Levy Processes", *Journal of Computational and Applied Mathematics 172,* p. 153-168.

Amin K.I. and R.A. Jarrow, (1992). "Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy", *Mathematical Finance, Vol 2, No 4,* p. 217-237.

Bacinello A.R. and F. Ortu, (1993a). "Pricing Equity-Linked Life Insurance with Endogenous Minimum Guarantees", *Insurance: Mathematics and Economics, Vol 12, No 3,* p. 245-257.

Bacinello A.R. and F. Ortu, (1993b). "Pricing Equity-Linked Life Insurance with Endogenous Minimum Guarantees: A Corrigendum", *Insurance: Mathematics and Economics, Vol 13,* p. 303-304.

Bacinello A.R. and Persson S.A., (2002). "Design and Pricing of Equity-Linked Life Insurance under Stochastic Interest Rates", *The Journal of Risk Finance 3, 2,* p. 6-21.

Ballotta L. (2005). "A Levy Process-based Framework for the Fair Valuation of Participating Life Insurance contracts", *Insurance: Mathematics and Economics 37 (2),* p. 173-196.

Bauer D., Kiesel R., Kling A. and Rub J., (2006). "Risk-Neutral Valuation of Participating Life Insurance Contracts", *Insurance: Mathematics and Economics 39,* p. 171-183.

Black F. and Scholes M., (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy 81,* p. 637-659.

Borak S., Misiorek A. and Weron R., (2010). "Models for Heavy-Tailed Asset Returns", *Economic Risk, SFB649 Discussion Paper, Berlin.*

Brennan M.J. and Schwartz E.S., (1976). "The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee", *Journal of financial Economics 3,* p. 195-213.

Brennan M.J. and Schwartz E.S., (1979). "Pricing and Investment Strategies for Guaranteed Equity-Linked Life Insurance", *Monograph No 7, The SS Huebner Foundation for Insurance Education, Wharton School, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA.*

Cont R. and Tankov P., (2004). "Financial Modeling with Jump Processes", *Chapman and Hull/CRC Financial Mathematics Series.*

Cox J., Ross S. and M. Rubinstein, (October 1979). “Option Pricing: A Simplified Approach”, *Journal of Financial Economics 7,* p. 229-264.

Delbaen F., (1990). “Equity Linked Policies”, *Bulletin Association Royal Actuaries Belges,* p. 33-52.

Fries C., (2007). “Mathematical Finance: Theory, Modeling, Implementation”, *J. Willey and Sons INC.*

Grosen A. and P.L. Jorgensen, (2000). “Fair Valuation of Life Insurance Liabilities: The impact of Interest Rate Guarantees, Surrender Options and Bonus Policies”*, Insurance: Mathematics and Economics 26*, p. 37-57.

Harrison M.J. and D. Kreps, (1979). “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets”, *Journal of Economic Theory 20,* p. 381-408.

Harrison M.J. and S.R. Pliska*,* (1981). “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, *Stochastic Processes and their Applications 11,* p. 215-260.

Hull J., (2003). “Options, Futures and Other Derivatives (Fifth Edition)”, *Prentice Hall*.

Kassberger S., Kiesel R. and Liebmann T., (2008). “Fair Valuation of Insurance Contracts under Levy Process Specifications”, *Insurance: Mathematics and Economics 42,* p. 419-433.

Luenberger D., (1998). “Investment Science”, *Oxford University Press*.

Meucci A., (2010). “Review of Discrete and Continuous Processes in Finance, Theory and Applications”, *http://ssrn.com/abstract=1373102*.

Neftci S., (1996). “An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives”, *Academic Press*.

Schoutens W., (2003). “Levy Processes in Finance”, *Willey Series in Probability and Finance*.