



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΡΟΤΥΠΑ ΣΕ ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ ΔΥΣΚ
ΚΑΙ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΔΕΝΔΡΑ

ΙΩΑΝΝΗΣ Ε. ΤΑΣΟΥΛΑΣ



00160977

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ	
ΑΡ. ΕΙΣ.	60977 + ω
ΣΟΜΠ.	49296
ΤΑΞΗ	001.642 ΤΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ	

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2009



Συμβουλευτική επιτροπή

Επιβλέπων:

Αριστείδης Σαπουνάκης

Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Μέλη:

Θεμιστοκλής Παναγιωτόπουλος

Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Παναγιώτης-Γεώργιος Τσικούρας

Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τμήμα Πληροφορικής

Διατριβή για την απόκτηση

Διδακτορικού Διπλώματος

του Τμήματος Πληροφορικής

“Πρότυπα σε μονοπάτια Dyck
και διατεταγμένα δένδρα”

Εξεταστική Επιτροπή

Θεόδωρος Αρτίκης

Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Θεμιστοκλής Παναγιωτόπουλος

Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Ιωάννης-Χρήστος Παναγιωτόπουλος

Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Αριστείδης Σαπουνάκης

Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Ευάγγελος Φούντας

Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Χαράλαμπος Χαραλαμπίδης

Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Παναγιώτης-Γεώργιος Τσικούρας

Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Στους γονείς μου
Επαμεινώνδα και Πολυξένη
και στις αδελφές μου
Ευθυμία και Παρασκευή

Περιεχόμενα

Πρόλογος	4
Ευχαριστίες	6
Περίληψη	7
Δημοσιεύσεις - Ανακοινώσεις	8
1 Βασικές έννοιες	10
1.1 Γεννήτριες συναρτήσεις	10
Το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange	12
1.2 Βασικοί αριθμοί	12
Αριθμοί Catalan	12
Αριθμοί Narayana	16
Αριθμοί Motzkin	17
Αριθμοί Fine	19
Αριθμοί Schröder	21
Αριθμοί Fibonacci	22
1.3 Μονοπάτια και λέξεις Dyck	23
Μονοπάτια και λέξεις	23
Διασπάσεις μονοπατιών Dyck	25
Βασικές απαριθμήσεις των μονοπατιών Dyck	27
Κυρίαρχες ακολουθίες	30
2 Το δικτυωτό των μονοπατιών Dyck	31
2.1 Εισαγωγή	31
2.2 Βασικές έννοιες	32
Δικτυωτά	32
Διαγράμματα Ferrers και Young tableaux	34
2.3 Η διάταξη κυριαρχίας του \mathcal{D}	36
2.4 Κλειστότητες και βαθμοί	42
2.5 Η συνάρτηση Möbius	48
2.6 Μεγιστικές αλυσίδες και τριγωνικά Young tableaux	52
2.7 Μονοπάτια Dyck και μεταθέσεις	55
2.8 Τα δικτυωτά (S_n, κ) και (D_n, \preceq)	58
3 Πρότυπα σε μονοπάτια Dyck	61
3.1 Εισαγωγή	61
3.2 Πρότυπα μήκους το πολύ 4	62

Πρότυπα μήκους 2	62
Πρότυπα μήκους 3	63
Πρότυπα μήκους 4	66
1. Το πρότυπο $uuud$	67
2. Το πρότυπο $uudd$	67
3. Το πρότυπο $uudu$	68
4. Το πρότυπο $uduu$	68
5. Το πρότυπο $udud$	69
6. Το πρότυπο $dduu$	69
7. Το πρότυπο $uuuu$	70
8. Το πρότυπο $uddu$	71
9. Το πρότυπο $duuu$	72
10. Το πρότυπο $dudu$	74
11. Γενικές προτάσεις	75
3.3 Πρότυπα σε ύψος j	78
3.4 Πρότυπα σε χαμηλό ύψος	85
1. Το πρότυπο u^μ , $\mu \in \mathbb{N}^*$	85
2. Το πρότυπο $u^\mu d$, $\mu \in \mathbb{N}^*$	89
3. Το πρότυπο du^μ , $\mu \in \mathbb{N}^*$	91
4. Τα πρότυπα $u^\mu du$ και udu^μ , $\mu \in \mathbb{N}$ με $\mu \geq 2$	96
5. Τα πρότυπα $(ud)^\mu$ και $(du)^\mu$, $\mu \in \mathbb{N}^*$	97
6. Γενικές προτάσεις	98
3.5 Πρότυπα σε ύψος τουλάχιστον j	111
Το πρότυπο $d^\nu u^\mu$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$	113
3.6 Πρότυπα σε άρτιο και περιττό ύψος	115
1. Το πρότυπο u^μ , $\mu \in \mathbb{N}^*$	116
2. Το πρότυπο $u^\mu d^\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$	118
3. Το πρότυπο du^μ , $\mu \in \mathbb{N}^*$	120
4. Το πρότυπο $u^\mu du$, $\mu \in \mathbb{N}^*$	123
5. Το πρότυπο udu^μ , $\mu \in \mathbb{N}^*$	125
6. Τα πρότυπα $(ud)^\mu$ και $(du)^\mu$, όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$	127
Οι ενελιξεις χ και θ	129
3.7 Σχέση μεταξύ των στατιστικών N_τ , E_τ και O_τ : μια συνδυαστική προσέγγιση	130
Η απεικόνιση ϕ	131
Η απεικόνιση ψ	137
3.8 Πολυγεννήτριες προτύπων	140
Α. Τα πρότυπα $(usd)^j$ και $(usd)^j u$	140
Β. Το πρότυπο $u^j d u^j$	151
4 Μονοπάτια Dyck και διατεταγμένα δένδρα	161
4.1 Εισαγωγή	161
4.2 Βασικές έννοιες	161
Διατεταγμένα δένδρα	161
Διασπάσεις διατεταγμένων δένδρων	164
4.3 Απαρίθμηση συνόλων διατεταγμένων δένδρων	166
Η απεικόνιση ϕ	167
Η απεικόνιση ψ	168
4.4 Διατεταγμένα δένδρα και ενδοδιάταξη	178
Ορισμένες στατιστικές των συνόλων \mathcal{T} , \mathcal{T}^*	182

4.5	Διατεταγμένα δένδρα με συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών	186
5	Λογισμικό	195
5.1	Λεξικογραφική κατασκευή των μονοπατιών Dyck	195
5.2	Κατασκευή μεγιστικών αλυσίδων λέξεων Dyck	197
5.3	Κατασκευή του συνόλου του Γ_α	203
5.4	Αλγοριθμική κατασκευή της στατιστικής N_τ , όπου $\tau \in \mathcal{D}^*$	207
5.5	Κατασκευή διατεταγμένων δένδρων με συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών	214
5.5.1	Πλήθος διατεταγμένων δένδρων με δοσμένη ακολουθία βαθμών	214
5.5.2	Σύνολο διατεταγμένων δένδρων με δοσμένη ακολουθία βαθμών	219
5.5.3	Κατασκευή του συνόλου των μονοπατιών Dyck που αποφεύγουν το <i>uudu</i>	224

Πρόλογος

Η παρούσα διατριβή ανήκει στην περιοχή της Συνδυαστικής Ανάλυσης και της Θεωρητικής Πληροφορικής, με επίκεντρο την μελέτη των μονοπατιών Dyck.

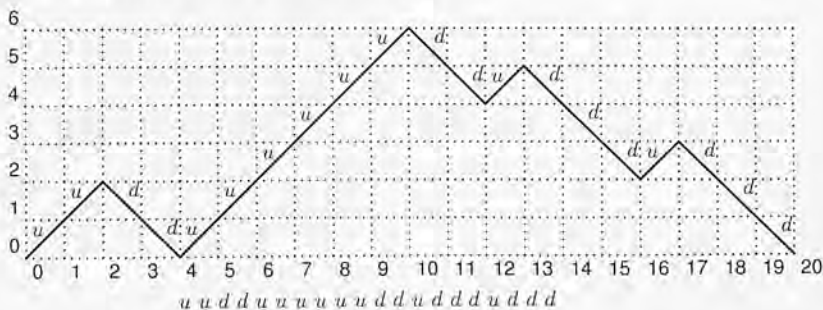
Τα μονοπάτια Dyck είναι γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία έχουν εφαρμογές σε πολλές επιστήμες και κωδικοποιούνται από τις λέξεις Dyck. Σύμφωνα με πολλούς η γλώσσα Dyck θεωρείται ως η σημαντικότερη αλγεβρική γλώσσα, χωρίς συμπραζόμενα (βλέπε για παράδειγμα [131, σελ. 205]). Χαρακτηριστικά ο Delest [32] αναφέρει ότι η γλώσσα Dyck είναι η πιο αξιόλογη γλώσσα, όχι λόγω της πολυπλοκότητάς της αλλά της μεγάλης συχνότητας που εμφανίζεται σε πλήθος διαφορετικών δομών της Συνδυαστικής και της Πληροφορικής.

Η μελέτη των ιδιοτήτων της γλώσσας Dyck συγκεντρώνει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών [5, 30, 31, 69, 85].

Μια λέξη Dyck (ή μονοπάτι Dyck) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή των καταστάσεων μιας στοίβας κατά την εκτέλεση ενός προγράμματος. Συγκεκριμένα, σε κάθε άνοδο (αντ. κάθοδο) του μονοπατιού Dyck εισάγεται (αντ. εξάγεται) ένα αντικείμενο στη στοίβα.

Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας τα μονοπάτια Dyck και με τη βοήθεια μιας στοίβας μπορούν να κατασκευασθούν όλες οι μεταθέσεις που αποφεύγουν το πρότυπο 312, γνωστές και ως μεταθέσεις

Έτσι με οδηγό το μονοπάτι Dyck του επόμενου σχήματος



έχουμε

ΕΙΣΟΔΟΣ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ								8		
T							7	7	9	
O						6	6	6	6	6
I					5	5	5	5	5	5
B		2		4	4	4	4	4	4	4
A	□	1	1	1	□	3	3	3	3	3
ΕΞΟΔΟΣ		2	1					8	7	9

και τελικά προκύπτει η μετάθεση στοίβας $\sigma = 2\ 1\ 8\ 7\ 9\ 6\ 5\ 10\ 4\ 3^1$.

Τα μονοπάτια Dyck και οι λέξεις Dyck εμφανίζονται τα τελευταία χρόνια σε περισσότερες από 500 εργασίες από τις οποίες ορισμένες αναφέρονται και σε χώρους εκτός της Συνδυαστικής και της Πληροφορικής.

Στα Μαθηματικά, τα μονοπάτια Dyck εμφανίζονται στη Θεωρία Πιθανοτήτων, στη Στατιστική και στη Θεωρία Ουρών Αναμονής [8, 11, 49, 93], στη Θεωρία Πολυωνύμων [9], στην Θεωρία Πινάκων [53, 94], στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις και στα Δυναμικά Συστήματα [51, 84].

Στη Φυσική τα μονοπάτια Dyck εμφανίζονται στην Στατιστική Μηχανική [17–22, 89, 141], στην Οπτική και στην Τοπογραφία [23].

Τα μονοπάτια Dyck εμφανίζονται στη Χημεία κατά την κατασκευή των δένδρων Morgan, τα οποία χρησιμοποιούνται για την εύρεση όλων μη ισόμορφων χημικών δένδρων [47, 86–88, 142].

Στη Βιολογία τα μονοπάτια Dyck εμφανίζονται στη μελέτη των πολυμερών και δευτεροταγών δομών [4, 48, 96, 126, 144].

Τέλος, τα μονοπάτια Dyck εμφανίζονται στην Οικονομική Θεωρία σε μοντέλα μικροοικονομίας με τοπικούς κανόνες [50].

¹Βλ. Κεφάλαιο 2, ενότητα 2.7 για μια αυστηρή μελέτη του θέματος.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ ολόψυχα τον επιβλέποντα καθηγητή μου Καθηγητή κ. Αριστείδη Σαπουνάκη για την καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης του διδακτορικού μου και για τις ατέλειωτες ώρες που έχει αφιερώσει στη δουλειά αυτή. Διδάχτηκα πάρα πολλά μαζί του και θεωρώ τιμή μου το ότι δέχτηκε να αναλάβει την επιβλεψη του διδακτορικού μου. Η ικανότητά του να αναδεικνύει το ουσιώδες και παράλληλα η εξαντλητική και σε βάθος μελέτη των θεμάτων με τα οποία ασχολείται αποτελεί το μέτρο για κάθε μελλοντική επιστημονική μου εργασία. Πιστεύω ότι εκτός της ανεκτίμητης επιστημονικής διδασκαλίας, το παράδειγμα “τρόπου ζωής” που μου μετέφερε είναι το σημαντικότερο κέρδος από αυτή τη διαδικασία.

Επίσης ευχαριστώ θερμά τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Παναγιώτη Τσικούρα, μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, για την πεντάχρονη επιστημονική συνεργασία από την οποία απέκομισα την μαθηματική αυστηρότητα και τον επιστημονικό τρόπο γραφής. Η οργανωτικότητα του με βοήθησε σε όλο αυτό το διάστημα και αποτελεί πρότυπο για τη μελλοντική επιστημονική μου εξέλιξη.

Επίσης ευχαριστώ τον Καθηγητή κ. Θεμιστοκλή Παναγιωτόπουλο, μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, για την αμέριστη συμπαράσταση του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης του διδακτορικού μου.

Επιπλέον ευχαριστώ τον Ομότιμο Καθηγητή κ. Αντώνιο Παναγιωτόπουλο· η εμπνευσμένη και ανώτερης πνοής διδασκαλία του υπήρξε καθοριστική για τη διαμόρφωση των επιστημονικών μου ενδιαφερόντων και αποτελεί πάντα πηγή έμπνευσης για μένα.

Επίσης ευχαριστώ τον Πρόεδρο του Τμήματος Πληροφορικής Καθηγητή κ. Ευάγγελο Φούντα, για την επιστημονική και ηθική συμπαράσταση του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης του διδακτορικού μου.

Επιπρόσθετα ευχαριστώ τον συνάδελφο κ. Κώστα Μανέ, υποψήφιο διδάκτορα του Τμήματος, για τις πολύωρες επιστημονικές συζητήσεις, άλλοτε με χαμηλούς τόνους και άλλοτε με έντονες διαφωνίες πάντα όμως με γόνιμα αποτελέσματα.

Επίσης ευχαριστώ τον Δρ. κ. Γιώργο Δρίχο και τον Πρόεδρο της Ελληνικής Επιτροπής Ατομικής Ενέργειας Καθηγητή κ. Λεωνίδα Καμαρινόπουλο για τη βοήθεια και τη στήριξη τους κατά τη διάρκεια εκπόνησης του διδακτορικού μου.

Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου Επαμεινώνδα και Πολυξένη και τις αδελφές μου Ευθυμία και Παρασκευή για τη συνεχή υποστήριξη και ενθάρρυνση που μου προσέφεραν. Τους αφιερώνω αυτό το διδακτορικό ως ένα μικρό δείγμα αναγνώρισης για τις θυσίες που έκαναν για μένα.

Πειραιάς, 27 Μαΐου 2009
Ιωάννης Τασούλας

Περίληψη

Η διατριβή αυτή ασχολείται με τη μελέτη ορισμένων προβλημάτων στο σύνολο των μονοπατιών Dyck.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίδονται βασικές έννοιες και προκαταρκτικά αποτελέσματα που χρησιμοποιούνται στα υπόλοιπα κεφάλαια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται το σύνολο των μονοπατιών Dyck εφοδιασμένο με τη (μερική) διάταξη κυριαρχίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο, που αποτελεί και το κεντρικό θέμα της διατριβής, μελετάται το πρόβλημα της απαρίθμησης συγκεκριμένων προτύπων που εμφανίζονται μέσα σε μονοπάτια Dyck.

Στο τέταρτο κεφάλαιο χρησιμοποιούνται τα μονοπάτια Dyck για τη μελέτη προβλημάτων του συνόλου των διατεταγμένων δένδρων.

Τέλος, τη διατριβή αυτή συμπληρώνει λογισμικό που υλοποιεί τους αλγόριθμους που προκύπτουν σε κάθε κεφάλαιο.

Δημοσιεύσεις - Ανακοινώσεις

Ορισμένα από τα αποτελέσματα αυτής της διατριβής έχουν δημοσιευθεί στις παρακάτω εργασίες.
Εργασίες σε διεθνή περιοδικά με κριτές

1. On the dominance partial ordering of Dyck paths, *Journal of Integer Sequences* **9** (2006), Article 06.2.5, (με Α. Σαπουνάκη και Π. Τσικούρα).
2. Ordered trees and the inorder traversal, *Discrete Mathematics* **306** (2006), 1732–1741, (με Α. Σαπουνάκη και Π. Τσικούρα).
3. Counting strings in Dyck paths, *Discrete Mathematics* **307** (2007), 2909–2924, (με Α. Σαπουνάκη και Π. Τσικούρα).
4. Some strings in Dyck paths, *Australasian Journal of Combinatorics* **39** (2007), 49–72, (με Α. Σαπουνάκη και Π. Τσικούρα).
5. Enumeration of strings in Dyck paths: a bijective approach, *Discrete Mathematics* **309** (2009), 3032–3039, (με Α. Σαπουνάκη και Π. Τσικούρα).

Ανακοινώσεις σε διεθνή συνέδρια με κριτές

1. Dominating sequences and traversals of ordered trees, *20th British Combinatorial Conferences*, Durham, July 11–15, 2005, (με Π. Τσικούρα).
2. Dyck path statistics, *Proceedings of the WSEAS 10th Int'l Conference in Applied Mathematics*, Istanbul, Turkey, May 27–29, 2006, (με Α. Σαπουνάκη και Π. Τσικούρα).
3. A bijective approach for the enumeration of strings in Dyck paths, *21st British Combinatorial Conference*, Reading, July 9, 2007, (με Α. Σαπουνάκη και Π. Τσικούρα).

Δημοσιεύσεις σε τιμητικούς τόμους

1. Το δικτυωτό των λέξεων Dyck, *Επιστημονική Επετηρίδα πριν τιμήν του Καθηγητή Α. Παπαγωγόπουλου*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Πειραιάς, 2006. (με Α. Σαπουνάκη).

Ετεροαναφορές

Για την εργασία 1 υπάρχει η παρακάτω ετεροαναφορά:

1. L. Ferrari and E. Munarini, Lattices of Paths: Representation Theory and Valuations, *preprint*, (2009), available at <http://arxiv.org/abs/0905.3764>.

Για την εργασία 3 υπάρχουν οι παρακάτω ετεροαναφορές:

1. H. Niederhausen and S. Sullivan, Euler coefficients and restricted Dyck paths, *Congr Numer.* **188** (2007), 196–210.

2. H. Niederhausen and S. Sullivan, Pattern Avoiding Dyck Paths, and Finite Operator Calculus, Part I: Patterns of Length Four, *6th International Conference on Lattice Path Combinatorics and Applications*, July 12–14, 2007, Johnson City, TN, USA.
3. H. Niederhausen and S. Sullivan, Pattern Avoiding Ballot paths and Finite Operator Calculus, *preprint*, (2007), available at <http://arxiv.org/abs/0709.0878v1>.
4. D. Vukičević, T. Došlić and A. Graovac, Recursive functions and Morgan trees, *Magyar Kémiai Folyóirat* **114** (4) (2008), 166–170.
5. E. S. Rowland, Pattern avoidance in binary trees, *preprint*, (2008), available at <http://arxiv.org/abs/0809.0488>.
6. Y. Sun and Z. Wang, String pattern avoidance in generalized non-crossing trees, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, **11:1** (2009), 79–94.
7. V. P. Kostov, A. Martínez-Finkelshtein and B. Z. Shapiro, Narayana numbers and Schur-Szegő composition, *J. Approx. Theory*, in press, (2009), available at <http://dx.doi.org/10.1016/j.jat.2008.10.013>.
8. F. Disanto, L. Ferrari, R. Pinzani and S. Rinaldi, Catalan numbers and relations, *preprint*, (2009), available at <http://arxiv.org/abs/0901.3509>.
9. M. Barnabei, F. Bonetti and M. Silimbani, Occurrences of consecutive patterns of length 3 in $3-1-2$ -avoiding permutations, *preprint*, (2009), available at <http://arxiv.org/abs/0904.0079>.

Οι εργασίες 1, 2, 3 αναφέρονται και στην Online Encyclopedia of Integer Sequences [124]. Συγκεκριμένα:

Η εργασία 1 αναφέρεται από τους N. J. A. Sloane (A000045, A000108, A006327) και M. Somos (A086581).

Η εργασία 2 αναφέρεται από τους P. D. Hanna (A105633), W. L. J. Meussen (A028364) και N. J. A. Sloane (A001006).

Η εργασία 3 αναφέρεται από τους E. Deutsch (A091156, A091867, A091869, A091894, A091958, A092107, A094507, A102405, A102407, A114486, A114487, A114492, A127153, A127154), C. Kimberling (A025242), W. Lang (A053117), N. J. A. Sloane (A000108, A001006, A001263, A005773, A036765, A078481, A135305, A135306, A135307, A135308, A135309, A135310, A135328, A135329, A135330, A135331, A135333, A135334, A135335, A135336, A135337, A135339) και M. Somos (A086581).

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό δίδονται συνοπτικά ορισμένες βασικές γνώσεις που χρησιμοποιούνται στα επόμενα κεφάλαια.

1.1 Γεννήτριες συναρτήσεις

Οι γεννήτριες συναρτήσεις αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων απαρίθμησης. Στην παράγραφο αυτή δίδονται ορισμένα βασικά στοιχεία για τις συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις ή απλά γεννήτριες συναρτήσεις.

Υπάρχουν δύο ισοδύναμοι τρόποι ορισμού των γεννητριών συναρτήσεων: Στην πρώτη προσέγγιση ξεκινάμε με βάση μια ακολουθία (a_n) ενώ στη δεύτερη δίδεται ένα σύνολο και μια παράμετρος του.

Έστω S είναι ένα σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων. Κάθε απεικόνιση $p: S \rightarrow \mathbb{N}$ ονομάζεται παράμετρος.

(1η προσέγγιση) Γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας (a_n) ονομάζεται το άθροισμα

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

(2η προσέγγιση) Γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου S ως προς την παράμετρο p ονομάζεται το άθροισμα

$$F(x) = \sum_{\alpha \in S} x^{p(\alpha)}.$$

Παρατήρηση Η παράμετρος p διαμερίζει το σύνολο S σε κλάσεις ισοδυναμίας S_n , $n \in \mathbb{N}$ όπου

$$S_n = \{\alpha \in S : p(\alpha) = n\}.$$

οπότε,

$$\sum_{\alpha \in S} x^{p(\alpha)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\alpha \in S_n} x^{p(\alpha)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\alpha \in S_n} x^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n \sum_{\alpha \in S_n} 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |S_n| x^n.$$

Οι παραπάνω δύο προσεγγίσεις είναι ισοδύναμες, αρκεί να θεωρήσουμε $a_n = |S_n|$, $n \in \mathbb{N}$.

Με άλλα λόγια, μια συνήθης γεννήτρια συνάρτηση είναι μια δυναμοσειρά του x , στην οποία ο συντελεστής του x^n ισούται με το πλήθος των στοιχείων του S που έχουν τιμή παραμέτρου p ίση με n .

Στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $|x^n|F$ για τον συντελεστή του x^n .

Γεννήτρια συνάρτηση δύο μεταβλητών της ακολουθίας $(a_{n,k})$ ονομάζεται το διπλό άθροισμα

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} x^n y^k.$$

Γεννήτρια συνάρτηση δύο μεταβλητών του συνόλου S ως προς τις παραμέτρους $p, q : S \rightarrow \mathbb{N}$ όπου τα x, y μετρούν τα p, q αντίστοιχα ονομάζεται το άθροισμα

$$F(x, y) = \sum_{\alpha \in S} x^{p(\alpha)} y^{q(\alpha)}.$$

Ο συντελεστής του $x^n y^k$ συμβολίζεται με $[x^n y^k] F$.

Ανάλογα ορίζονται γεννήτριες συναρτήσεις τριών ή περισσότερων μεταβλητών¹.

Σε πολλά συνδυαστικά αντικείμενα συχνά ορίζεται μια παράμετρος αναφοράς που ονομάζεται συνήθως “μέγεθος” ή “μήκος”. Η παράμετρος αυτή είναι πολύ σημαντική αφού δίνει μια φυσική διαμέριση του αντίστοιχου συνόλου και συνδέεται άμεσα με την απαρίθμηση και κατασκευή των αντίστοιχων αντικειμένων.

Παραδείγματα τέτοιων παραμέτρων είναι για τις δυαδικές λέξεις το “μήκος της λέξης”, για τα δένδρα το “πλήθος δεσμών ενός δένδρου”, για τις μεταθέσεις “το μήκος της μετάθεσης”.

Μια άλλη πολύ σημαντική έννοια που σχετίζεται με τις παραμέτρους είναι η έννοια της στατιστικής. Αν θεωρήσουμε δύο παραμέτρους όπου η πρώτη είναι παράμετρος αναφοράς για το συνδυαστικό αντικείμενο που μας ενδιαφέρει τότε **στατιστική** της δεύτερης παραμέτρου (ως προς την πρώτη παράμετρο) ονομάζεται η κατανομή των αντικειμένων με συγκεκριμένο μέγεθος σε μικρότερες κλάσεις με βάση τις τιμές της δεύτερης παραμέτρου.

Για παράδειγμα, στις δυαδικές λέξεις για τις παραμέτρους “μήκος της λέξης” και “αριθμός μονάδων της λέξης”, η στατιστική “αριθμός μονάδων της λέξης” ισούται με

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ \text{κ.ο.κ.} & & & \end{array}$$

ή σε συμβολισμό μιας γραμμής με $1; 1, 1; 1, 2, 1; 1, 3, 3, 1, \dots$, διότι η κενή λέξη δεν έχει καμία μονάδα, από τις 2 λέξεις μήκους 1, η μια δεν έχει καμία μονάδα και η άλλη έχει μια, από τις 4 λέξεις μήκους 2, 1 δεν έχει καμία μονάδα, 2 έχουν μια μονάδα και 1 έχει δύο μονάδες, από τις 8 λέξεις μήκους 3, 1 δεν έχει καμία μονάδα, 3 έχουν μια μονάδα, 3 έχουν δύο μονάδες και 1 έχει τρεις μονάδες.

Δύο παράμετροι q_1, q_2 ονομάζονται **ισοκατανεμημένες** (ως προς τις παραμέτρους αναφοράς p_1, p_2) όταν

$$|\{\alpha \in S_{1,n} : q_1(\alpha) = k\}| = |\{\alpha \in S_{2,n} : q_2(\alpha) = k\}|$$

όπου $S_{i,n}$ είναι τα $\alpha \in S_i$ με $p_i(\alpha) = n, i = 1, 2$, για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα, οι q_1, q_2 είναι ισοκατανεμημένες όταν οι γεννήτριες συναρτήσεις που ορίζονται από αυτές είναι ίσες, δηλαδή

$$\sum_{\alpha \in S_1} x^{p_1(\alpha)} y^{q_1(\alpha)} = \sum_{\alpha \in S_2} x^{p_2(\alpha)} y^{q_2(\alpha)}.$$

Στην περίπτωση αυτή οι αντίστοιχες στατιστικές ονομάζονται **ισοκατανεμημένες**.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ με

$$p_1(\alpha) = \phi(p_2(\alpha)) \text{ και } q_1(\alpha) = \phi(q_2(\alpha))$$

τότε οι παράμετροι q_1, q_2 είναι ισοκατανεμημένες ως προς τις παραμέτρους αναφοράς p_1, p_2 .

¹ Στο Κεφάλαιο 3 θα υπολογίσουμε γεννήτριες συναρτήσεις με αριθμήσιμο πλήθος μεταβλητών.

Το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange

Ένα σημαντικό εργαλείο για την επίλυση συναρτησιακών εξισώσεων που αφορούν γεννήτριες συναρτήσεις είναι το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange. Παρακάτω δίδεται μια ειδική μορφή του, όπως παρουσιάζεται στην εργασία του Deutsch [38].

Θεώρημα 1.1.1 (Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange). *Αν η γεννήτρια συνάρτηση $F(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση*

$$F(x) = 1 + xH(F(x)),$$

όπου $H(\lambda)$ είναι πολυώνυμο του λ , τότε για κάθε πολυώνυμο $G(\lambda)$ του λ ισχύει ότι

$$[x^n]G(F(x)) = \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}]G'(1 + \lambda)(H(1 + \lambda))^n.$$

Μια άλλη μορφή του δίδεται στο βιβλίο του Wilf [145, σελ. 167]:

Θεώρημα 1.1.2 (Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange). *Έστω $f(y)$, $\phi(y)$ συνήθεις δυναμοσειρές του y , με $\phi(0) = 1$. Τότε υπάρχει μοναδική δυναμοσειρά $y = y(x)$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση*

$$y = x\phi(y).$$

Επιπλέον, η τιμή $f(y(x))$ της f στην ρίζα $y = y(x)$, αν αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά του x στο $x = 0$, ικανοποιεί την εξίσωση

$$[x^n]f(y(x)) = \frac{1}{n}[y^{n-1}]f'(y)\phi(y)^n.$$

1.2 Βασικοί αριθμοί

Στα προβλήματα απαρίθμησης που αφορούν ετερόκλητα αντικείμενα εμφανίζονται συχνά οι ίδιες ακολουθίες αριθμών. Το γεγονός αυτό δεν είναι καθόλου συμπτωματικό, διότι όταν δύο συνδυαστικά αντικείμενα απαριθμούνται από την ίδια ακολουθία βαθμών συνήθως υπάρχει μια “δομική” συγγένεια μεταξύ τους. Παραδείγματος χάριν τα αντικείμενα στα οποία εμφανίζονται οι αριθμοί Catalan μπορούν να ορισθούν αναδρομικά από “μικρότερα” αντικείμενα του ίδιου τύπου με αυτά. Πολλές εργασίες έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια οι οποίες κατασκευάζουν αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις ανάμεσα σε διάφορα αντικείμενα, για να ερμηνεύσουν αυτές τις κοινές απαριθμήσεις.

Από το γεγονός αυτό προέκυψε η ανάγκη συστηματικής μελέτης και καταγραφής ορισμένων ακολουθιών αριθμών. Το 1973 ο Sloane εξέδωσε το βιβλίο *A Handbook of Integer Sequences* το οποίο περιλάμβανε στοιχεία για περίπου 2300 ακολουθίες. Το 1995 ακολούθησε νέα έκδοση υπό τον τίτλο *The Encyclopedia of Integer Sequences*, μαζί με τον Plouffe, η οποία περιλάμβανε περίπου 5000 ακολουθίες. Η χρησιμότητα αυτών των βιβλίων έγινε φανερή από την αρχή (βλ. για παράδειγμα τις βιβλιοκριτικές των J. M. Borwein και Robert M. Corless [16], ή του Guy [68]).

Από το 1996 τα βιβλία αυτά πέρασαν σε ηλεκτρονική μορφή διαθέσιμη στο διαδίκτυο, γνωστή ως *Online Encyclopedia of Integer Sequences* [124] και σήμερα περιλαμβάνει πάνω από 150.000 ακολουθίες ακεραίων αριθμών, η οποία ανανεώνεται καθημερινά από ερευνητές με νέες ακολουθίες ή με νέα στοιχεία για τις υπάρχουσες ακολουθίες.

Αριθμοί Catalan

Οι αριθμοί Catalan εμφανίζονται πρώτη φορά στο παρακάτω πρόβλημα, το οποίο είναι γνωστό ως πρόβλημα του Euler:

Έστω $P_1 P_2 \dots P_n$ ένα κυρτό πολύγωνο. Να ευρεθεί με πόσους τρόπους μπορεί να διαιρεθεί σε τρίγωνα χρησιμοποιώντας μη τεμνόμενες ευθείες με άκρα τις κορυφές του.

Για παράδειγμα, για ένα 5-γώνο έχουμε τις επόμενες 5 λύσεις:



Ο Leonard Euler ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με το πρόβλημα αυτό (1758) και έδωσε την λύση του χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις [57].

Όμως οι αριθμοί Catalan έλαβαν το όνομα τους από τον E. C. Catalan, ο οποίος το 1838 όρισε τους ομώνυμους αριθμούς όταν έδωσε μια διαφορετική λύση του προβλήματος του Euler χωρίς την χρήση γεννητριών συναρτήσεων. Η σύνδεση τους με τις λέξεις Dyck ανακαλύφθηκε από τον D. André το 1887. Από τότε οι αριθμοί Catalan εμφανίζονται σε ποικίλα συνδυαστικά προβλήματα.

Οι αριθμοί Catalan είναι σημαντικοί και στην Πληροφορική αφού μετρούν το πλήθος των δυαδικών (και διατεταγμένων) δένδρων με συγκεκριμένο αριθμό κόμβων. Οι αριθμοί Catalan θεωρούνται ως οι σημαντικότεροι αριθμοί στη Συνδυαστική μετά τους διωνυμικούς συντελεστές.

Οι αριθμοί Catalan (A000108 στο [124]) C_n ορίζονται από τον αναδρομικό τύπο του Segner²

$$C_0 = 1 \text{ και } C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \text{ για κάθε } n \geq 1. \quad (1.1)$$

από τον οποίο προκύπτει ο τύπος

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}. \quad (1.2)$$

Η γεννήτρια των αριθμών Catalan $C(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$C(x) = 1 + xC^2(x) \quad (1.3)$$

οπότε

$$C(x) = \frac{3 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Οι δυνάμεις της $C(x)$ δίδονται από την εξίσωση (για παράδειγμα βλ. [38])

$$[x^n]C^s = \frac{s}{n+s} \binom{2n+s-1}{n} = \frac{s}{2n+s} \binom{2n+s}{n} = \binom{2n+s-1}{n} - \binom{2n+s-1}{n-1}. \quad (1.4)$$

Οι αριθμοί $b_{n,s} = \frac{s}{2n+s} \binom{2n+s}{n}$ ονομάζονται **αριθμοί ψηφοφορίας** (αριθμοί ballot). Η ονομασία τους προέρχεται από το πρόβλημα της εύρεσης του αριθμού των ψηφοφοριών για δύο επιλογές, με $2n$ ψήφους, όπου σε όλη τη διάρκεια της ψηφοφορίας η πρώτη επιλογή προηγείται ή ισοψηφεί της δεύτερης ενώ στο τέλος την κερδίζει με $s-1$ ψήφους. Προφανώς ισχύει ότι $b_{n,1} = C_n$.

Ειδικότερα για $s=2$ λαμβάνουμε ότι $[x^n]C^2 = C_{n+1}$, η οποία προκύπτει και από την (1.3).

Μερικές από τις αρχικές τιμές των αριθμών Catalan δίδονται στον παρακάτω πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786	208012	742900

²Ο τύπος του Segner, οφείλεται στον Andreas von Segner, ο οποίος είχε δώσει λύση στο πρόβλημα του Euler νωρίτερα από τον Catalan.

³Η ρίζα $\frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$ απορρίπτεται δεδομένου ότι $C(0) = 1$.

Από την (1.2) προκύπτει η αναδρομική σχέση

$$C_n = \frac{2(2n+1)}{n+1} C_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (1.5)$$

από την οποία συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{C_{n-1}} = 4. \quad (1.6)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

προκύπτει ότι οι αριθμοί Catalan υπολογίζονται από τον επόμενο προσεγγιστικό τύπο:

$$C_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}. \quad (1.7)$$

Για πιο ακριβείς προσεγγίσεις (βλ. [77]) έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$C_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{3/2}}} \left(1 - \frac{9}{8n} + \frac{145}{128n^2} + \frac{1155}{1024n^3} + \frac{36939}{32768n^4} + O(n^{-5}) \right).$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\frac{C_{n-k}}{C_n} = \frac{1}{4^k} \left(1 + \frac{3k}{2n} + O\left(\frac{k^2}{n^2}\right) \right) \quad \text{όταν } |k| \leq \frac{n}{2}.$$

Επιπρόσθετα ισχύει ο τύπος

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} C_k = C_{n+1}.$$

Μια σύντομη αλγεβρική απόδειξη της σχέσης αυτής δίδεται από τους Donaghey και Shapiro [46] χρησιμοποιώντας τον τύπο που συνδέει του αριθμούς Catalan με τους αριθμούς Motzkin (βλ. (1.17), σελ. 18).

Οι αριθμοί $(a_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ με

$$a_{n,k} = \binom{n}{2k} 2^{n-2k} C_k = \frac{2^{n-2k}}{n} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k+1}$$

ονομάζονται **αριθμοί Touchard**.

Οι αριθμοί Touchard πήραν το όνομά τους από τον J. Touchard ο οποίος σε εργασία του [140] το 1928 απέδειξε αλγεβρικά ένα τύπο που συνδέει τους ομώνυμους αριθμούς με τους αριθμούς Catalan. Η συνδυαστική ερμηνεία των αριθμών Touchard δόθηκε πολύ αργότερα από τον Shapiro [119] [120].

Περισσότερα στοιχεία για τους αριθμούς Touchard υπάρχουν στις εργασίες [65], [70], [106].

Επιπλέον, χρήσιμες είναι οι ακόλουθες ταυτότητες⁴

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{2} C_n + \frac{2m-n}{2n(n+1)} \binom{2m}{m} \binom{2n-2m}{n-m} \quad \text{για } 0 \leq m \leq n. \quad (1.8)$$

⁴Βλ. ασκήσεις 56, 58 στο [77].

$$\sum_{k=0}^{m-1} (k+1)C_k C_{n-1-k} = \frac{m}{2n} \binom{2m}{m} \binom{2n-2m}{n-m}.$$

Επιπρόσθετα ισχύουν (βλ. [38]) οι ακόλουθες σχέσεις για τους συντελεστές ορισμένων γεννητριών συναρτήσεων που σχετίζονται με την γεννήτρια των αριθμών Catalan:

$$[x^n] \frac{C^p(x)}{(1-x)^q} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{q+i-1}{i} \frac{p}{2n-2i+p} \binom{2n-2i+p}{n-i}.$$

$$[x^n] \frac{C^p(x)}{(1+x)^p} = (-1)^n \binom{q+n-1}{n} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{p}{p+2n-2i} \binom{q+i-1}{i} \binom{p+2n-2i}{n-1}.$$

$$[x^n] \frac{C^p(x)}{(1-x^2 C^2(x))^q} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2i+p}{p+2n-2i} \binom{q+i-1}{i} \binom{p+2n-2i}{n-2i}.$$

Οι αριθμοί Catalan εμφανίζονται στην απαρίθμηση πολλών και διαφόρων συνδυαστικών αντικειμένων [131]. Παρακάτω αναφέρονται μερικά από αυτά:

1. Τα δυαδικά δένδρα με n κόμβους.
2. Τα διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς.
3. Οι τρόποι που μπορούν να τοποθετηθούν παρενθέσεις σε ένα γινόμενο $n+1$ παραγόντων.
4. Τα μονοπάτια Dyck μήκους $2n$.
5. Οι μη διασταυρούμενες διαμερίσεις του συνόλου $[n]$.
6. Οι διαμερίσεις ενός κυρτού πολυγώνου με $n+2$ διαγώνιους σε n τρίγωνα, φέροντας $n-1$ μη τεμνόμενες διαγώνιους.
7. Οι τρόποι που μπορούν να ενωθούν $2n$ στοιχεία της περιφέρειας ενός κύκλου ανά δύο, χωρίς να διασταυρωθούν οι χορδές.
8. Οι μεταθέσεις μήκους n που μπορούν να ταξινομηθούν μέσω στοίβας (stack-sortable permutations).
9. Οι κυρίαρχες ακολουθίες μήκους n .
10. Οι καταμετρήσεις των ψήφων σε μια εκλογική αναμέτρηση δύο υποψηφίων A και B με $2n$ ψήφους συνολικά, ώστε ο A να προηγείται του B καθ' όλη την διάρκεια της καταμέτρησης των ψήφων και στο τέλος να ισοψηφεί (πρόβλημα ψηφοφορίας).

Για περισσότερες πληροφορίες για τους αριθμούς Catalan βλέπε A000108 στο [124]. Από τις πρώτες εργασίες όπου γίνεται καταγραφή όσων είναι γνωστά για τους αριθμούς Catalan είναι οι εργασίες των Alter [3], Brown [24], καθώς και το βιβλίο του Gould [64] όπου υπάρχουν 431 αναφορές για τους αριθμούς Catalan. Τα τελευταία χρόνια ο Richard Stanley έχει αναλάβει να συγκεντρώσει τα βασικά αποτελέσματα για τους αριθμούς Catalan. Στο βιβλίο του [131] υπάρχουν 66 συνδυαστικές ερμηνείες για τους αριθμούς Catalan και πολλά άλλα στοιχεία, τα οποία ανανεώνονται τακτικά με την ειδική έκδοση Catalan Addendum [132] όπου σήμερα περιέχονται πάνω από 140 συνδυαστικές ερμηνείες.

Αριθμοί Narayana

Η διπλή ακολουθία των αριθμών Narayana συνδέεται άμεσα με την ακολουθία Catalan. Οι αριθμοί Narayana ορίστηκαν πρώτη φορά το 1955 από τον T. Narayana μελετώντας ορισμένες διαμερίσεις ακέραιων αριθμών [99]. Ο ίδιος το 1959 μελετώντας τα παραλληλόγραμμα πολυόμινα [100] απέδειξε ότι μετρούν επίσης τον αριθμό των παραλληλόγραμμων πολυομίμων με συγκεκριμένη ημιπερίμετρο και πλήθος στηλών αλλά και τον αριθμό των μονοπατιών Dyck με συγκεκριμένο ημιμήκος και αριθμό κορυφών (βλέπε επίσης [101]).

Η διπλή ακολουθία των αριθμών Narayana (A001263 στο [124]) $(\nu_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο

$$\nu_{n,0} = \delta_{n,0} \text{ και } \nu_{n,k} = \nu_{n-1,k-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\min\{i,k\}} \nu_{i,j} \nu_{n-i-1,k-j}, \text{ για } 1 \leq k \leq n \quad (1.9)$$

από τον οποίο προκύπτει ότι

$$\nu_{n,k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k-1} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-1}{k-2} \binom{n-1}{k}. \quad (1.10)$$

Η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Narayana $N(x, y)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$N(x, y) = 1 - x(1-y)N(x, y) + xN^2(x, y) \quad (1.11)$$

οπότε

$$N(x, y) = \frac{1 + (1-y)x + \sqrt{(1+(1-y)x)^2 - 4x}}{2x}.$$

Οι δυνάμεις της γεννήτριας συνάρτησης $N(x, y)$ δίδονται από τον τύπο

$$[x^n y^k] N^s = \begin{cases} \delta_{n,k} & \text{αν } k=0 \\ \frac{s}{n} \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+s-1}, & \text{αν } k \geq 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

όπου $s \in \mathbb{N}^*$ και $k \leq n$.

Μερικές από τις αρχικές τιμές του $\nu_{n,k}$ που προκύπτουν από την σχέση (1.9) δίδονται στον παρακάτω πίνακα:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	C_n
0	1									1
1	0	1								1
2	0	1	1							2
3	0	1	3	1						5
4	0	1	6	6	1					14
5	0	1	10	20	10	1				42
6	0	1	15	50	50	15	1			132
7	0	1	21	105	175	105	21	1		429
8	0	1	28	196	490	490	196	28	1	1430

όπου τα άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι οι αριθμοί Catalan.

⁵Στην περίπτωση όπου $n = 1$ το διπλό άθροισμα θεωρείται ίσο με 0.

Σημειώνεται ότι πολλοί συγγραφείς (βλέπε για παράδειγμα [38]) θεωρούν ως αριθμούς Narayana τους μετατοπισμένους αριθμούς Narayana $\nu_{n,k+1}$ με γεννήτρια συνάρτηση $N_1(x, y)$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$N_1(x, y) = 1 + x(1 - y)N_1(x, y) + xyN_1^2(x, y). \quad (1.13)$$

Οι αριθμοί Narayana απαριθμούν αρκετά συνδυαστικά αντικείμενα. Μερικά από αυτά είναι τα ακόλουθα:

1. Τα δυαδικά δένδρα με n κόμβους και k jumps.
2. Τα διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς και με k φύλλα.
3. Τα μονοπάτια Dyck ημιμήκους n με k κορυφές.
4. Οι μη διασταυρούμενες διαμερίσεις του $[n]$ σε k μπλοκ.
5. Τα πολύγωνα στο επίπεδο $n \times n$ με ημιπερίμετρο $n + 1$ και μέγιστη τετμημένη k , που περνούν από τα σημεία $(0, 0)$ και $(k, n - k + 1)$, παραμένουν στο πρώτο τεταρτημόριο και δεν τέμνουν τον εαυτό τους.

Ο Sulanke έχει ασχοληθεί συστηματικά με την καταγραφή των συνδυαστικών αντικειμένων που απαριθμούνται από τους αριθμούς Narayana. Στις εργασίες του [134], [135] [136] υπάρχουν πάνω από 200 εμφανίσεις των αριθμών Narayana, πολλές από τις οποίες όμως είναι τεχνητές και δεν έχουν προσελκύσει το ενδιαφέρον της έρευνας.

Αριθμοί Motzkin

Οι αριθμοί Motzkin εμφανίζονται για πρώτη φορά στην εργασία του T. Motzkin [98] στο παρακάτω πρόβλημα:

Έστω P_1, P_2, \dots, P_n είναι n διακεκριμένα σημεία τα οποία βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να συνδεθούν μερικά από τα σημεία αυτά με k μη τεμνόμενες χορδές, για κάθε $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ο αριθμός αυτών των συνδέσεων των n σημείων ονομάζεται αριθμός Motzkin n -τάξης και συμβολίζεται με M_n .

Για παράδειγμα αν $n = 4$ υπάρχουν 9 τρόποι σύνδεσης που απεικονίζονται παρακάτω:



Οι αριθμοί Motzkin (A001006 στο [124]) ορίζονται από την αναδρομική σχέση

$$M_0 = 1 \text{ και } M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-k-2}, \text{ για } n \geq 1. \quad (1.14)$$

Η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Motzkin ικανοποιεί την εξίσωση

$$M(x) = 1 + xM(x) + x^2M^2(x) \quad (1.15)$$

οπότε

$$M(x) = \frac{1 - x\sqrt{(1-x)^2 - 4x^2}}{2x^2}.$$

Οι δυνάμεις της $M(x)$ δίδονται από την εξίσωση

$$|x^n| M^s = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{s}{n-i} \binom{n-i}{i} \binom{n+s-1}{s+i}. \quad (1.16)$$

Μερικές από τις αρχικές τιμές του M_n όπως προκύπτουν από τη σχέση 1.14 δίδονται στον παρακάτω πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
M_n	1	1	2	4	9	21	51	127	323	835	2188	5798	15511	41835

Οι αριθμοί Motzkin έχουν άμεση σύνδεση με τους αριθμούς Catalan. Συγκεκριμένα ισχύουν οι σχέσεις:

$$M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} C_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} C_{n+1-k},$$

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k, \quad (1.17)$$

$$C(x) = \frac{x}{1-x} M\left(\frac{x}{1-x}\right) + 1,$$

$$M(x) = \frac{1}{1-x} C\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right).$$

Οι αριθμοί Motzkin απαριθμούν αρκετά συνδυαστικά αντικείμενα [131]. Μερικά από αυτά είναι:

1. Τα δυαδικά δένδρα με $n-1$ δεσμούς τα οποία δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς δεσμούς στα δεξιά.
2. Τα δυαδικά δένδρα με $n+1$ κορυφές στα οποία κάθε κορυφή περιττού ύψους έχει το πολύ ένα απόγονο.
3. Τα διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς στα οποία κάθε κορυφή έχει το πολύ δύο απόγονους.
4. Τα διατεταγμένα δένδρα με $n+1$ δεσμούς στα οποία καμία κορυφή πλην της ρίζας δεν έχει μόνο ένα απόγονο.
5. Οι τρόποι σχεδίασης οποιουδήποτε αριθμού μη τεμνόμενων χορδών ανάμεσα σε n διακεκριμένα σημεία της περιφέρειας ενός κύκλου.
6. Τα μονοπάτια από το σημείο $(0,0)$ στο $(0,2n)$ τα οποία δεν διέρχονται κάτω από τον οριζόντιο άξονα και αποτελούνται από βήματα $(1,0)$, $(1,1)$ και $(1,-1)$. Τα μονοπάτια αυτά ονομάζονται **μονοπάτια Motzkin**.
7. Τα μονοπάτια από το σημείο $(0,0)$ στο $(0,2n)$ τα οποία δεν διέρχονται κάτω από τον οριζόντιο άξονα και αποτελούνται από βήματα $(2,0)$, $(0,2)$ και $(1,1)$.
8. Τα ζεύγη $1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq n$ και $1 \leq b_1 < \dots < b_k \leq n$ από ακολουθίες ακεραίων τέτοιες ώστε $a_i \leq b_i$ και όπου κάθε αριθμός του $|n|$ εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά ανάμεσα στους όρους των (a_n) και (b_n) .

9. Οι μη διασταυρούμενες διαμερίσεις του $[n+1]$ στις οποίες κανένα block δεν περιέχει δύο διαδοχικά στοιχεία.
10. Οι μη διασταυρούμενες διαμερίσεις του συνόλου $[n]$ σε blocks που αποτελούνται από ένα ή δύο στοιχεία.
11. Οι μη αρνητικές ακέραιες ακολουθίες μήκους $2n$ με $a_0 = 0$ και $a_{2n} = 0$ για τις οποίες $a_n = a_{n-1} + i$, όπου $i \in \{1, 0, -1\}$.
12. Οι καταμετρήσεις $2n$ ψήφων (επιτρεπόμενης της άκυρης ή λευκής) ανάμεσα σε δύο υποψηφίους Α και Β, κατά τις οποίες ο Α πάντα προηγείται ή ισοψηφεί του Β και το τελικό αποτέλεσμα είναι ισοψηφία.

Οι αριθμοί Motzkin σχετίζονται άμεσα με τους αριθμούς Donaghey $a_{n,k} = \binom{n-1}{k} M_{n-1-k}$, οι οποίοι απαριθμούν πολλά συνδυαστικά αντικείμενα όπως για παράδειγμα μονοπάτια Dyck ημιμήκους n με k *udu* και διατεταγμένα δένδρα μεγέθους n με k φύλλα σε άρτιο ύψος.

Για περισσότερα στοιχεία σχετικά με τους αριθμούς Motzkin βλέπε στο βιβλίο του Stanley [131]. Οι πρώτοι που ασχολήθηκαν συστηματικά με τους αριθμούς Motzkin είναι οι Donaghey και Shapiro [46], [45]. Από τις πρώτες εργασίες πάνω στους αριθμούς Motzkin είναι τα άρθρα των Carlitz [29], Klarner [73] και Riordan [107]. Πιο σύγχρονες συστηματικές εργασίες πάνω στους αριθμούς Motzkin έχουν γίνει από τον Aigner [2].

Αριθμοί Fine

Οι αριθμοί Fine εμφανίζονται για πρώτη φορά στην εργασία του T. Fine [59] κατά την έρευνα του πάνω σε σχέσεις ομοιότητας (similarity relations) που αφορούν τη θεωρία παρεμβολής.

Οι αριθμοί Fine (A000957 στο [124]) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ορίζονται συνήθως συναρτήσει των αριθμών Catalan από τη σχέση

$$C_n = f_n + \sum_{k=1}^n f_{k-1} C_{n-k} \quad \text{για } n \geq 1. \quad (1.18)$$

Άρα αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Fine, τότε

$$C(x) - 1 = f(x) - 1 + x f(x) C(x).$$

Άρα προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Fine συνδέεται με την γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan με τη σχέση

$$f(x) = \frac{C(x)}{1 + x C(x)} = \frac{1}{1 - x^2 C^2(x)}. \quad (1.19)$$

οπότε η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Fine δίδεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{x(3 - \sqrt{1 - 4x})} = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 - 4x}}{2x(2 + x)}. \quad (1.20)$$

Επιπρόσθετα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} (2+x)f(x) &= \frac{(2+x)C(x)}{1+xC(x)} = \frac{2C^2(x) + xC^2(x)}{C(x) + xC^2(x)} \\ &= \frac{2C^2(x) + C(x) - 1}{2C(x) - 1} = \frac{(2C(x) - 1)(C(x) + 1)}{2C(x) - 1} \\ &= C(x) + 1. \end{aligned}$$

Άρα

$$C_n = 2f_n + f_{n-1} \quad \text{για κάθε } n \geq 1. \quad (1.21)$$

Μερικές από τις αρχικές τιμές του f_n δίδονται στον παρακάτω πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
f_n	1	0	1	2	6	18	57	186	622	2120	7338	25724	91144	325878

Επιπλέον ισχύουν οι τύποι:

$$f_n = \frac{1}{2} \left(C_n - \frac{1}{2}C_{n-1} + \frac{1}{2^2}C_{n-2} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{1}{2^{n-2}}C_2 \right). \quad (1.22)$$

$$2(n+1)f_n = (7n-5)f_{n-1} + 2(2n-1)f_{n-2} \quad n \geq 2. \quad (1.23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{C_n} = \frac{4}{9}, \quad (1.24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1}{4}. \quad (1.25)$$

Οι αριθμοί Fine έχουν πολλές εφαρμογές στην απαρίθμηση διαφόρων συνδυαστικών αντικειμένων [42]. Παρακάτω αναφέρονται μερικά από αυτά :

1. Τα μονοπάτια Dyck ημιμήκους n χωρίς καμιά χαμηλή κορυφή.
2. Τα μονοπάτια Dyck ημιμήκους n στα οποία το ύψος της πρώτης κορυφής είναι άρτιο.
3. Τα μονοπάτια Dyck ημιμήκους n με άρτιο αριθμό επιστροφών.
4. Τα διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς και κανένα φύλλο ύψους 1.
5. Τα διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς και ρίζα άρτιου βαθμού.
6. Οι μη διασταυρούμενες διαμερίσεις του $[n]$ με μη-ορατές κλάσεις μήκους 1.
7. Οι μη διασταυρούμενες διαμερίσεις του $[n]$ που η πρώτη κλάση έχει άρτιο μήκος.
8. Οι μη διασταυρούμενες διαμερίσεις του $[n]$ με άρτιο αριθμό εξωτερικών κλάσεων.
9. Οι μη διασταυρούμενες διαμερίσεις του $[n]$ στις οποίες η πρώτη κλάση έχει τουλάχιστον δύο διαδοχικά σημεία.
10. Τα 2-Motzkin μονοπάτια μήκους n χωρίς οριζόντια βήματα ύψους 0.
11. Οι σχέσεις ομοιότητας του $[n]$ που αποτελούνται από σύνολα με περισσότερα από 1 στοιχεία.

Μια συστηματική έρευνα πάνω σε αποτελέσματα σχετικά με τους αριθμούς Fine έχει γίνει από τους Deutsch και Shapiro [42]. Οι πρώτες εργασίες πάνω στις σχέσεις ομοιότητας και τους αριθμούς Fine έχουν γίνει από τους Rogers [108], Strehl [133] και Moon [97].

Αριθμοί Schröder

Οι αριθμοί Schröder πήραν το όνομά τους από τον Ernst Schröder ο οποίος μελέτησε (βλ. εργασία [122]) το παρακάτω πρόβλημα:

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν ισορροπημένες (balanced) παρενθέσεις σε ένα γινόμενο από n όρους έτσι ώστε κάθε ζεύγος παρενθέσεων να περιέχει τουλάχιστον δύο όρους;

Για παράδειγμα, για το γινόμενο $x_1x_2x_3x_4$ υπάρχουν 11 τρόποι:

$$x_1x_2x_3x_4 \quad (x_1x_2)x_3x_4 \quad x_1(x_2x_3)x_4 \quad x_1x_2(x_3x_4) \quad (x_1x_2x_3)x_4 \quad x_1(x_2x_3x_4) \\ ((x_1x_2)x_3)x_4 \quad (x_1(x_2x_4))x_4 \quad (x_1x_2)(x_3x_4) \quad x_1((x_2x_3)x_4) \quad x_1(x_2(x_3x_4))$$

Οι μικροί αριθμοί Schröder⁶ (A001003 στο [124]) s_n ορίζονται από την αναδρομική σχέση

$$s_0 = s_1 = 1 \text{ και } s_{n+1} = s_n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} s_k s_{n-k} \text{ για } n \geq 2. \quad (1.26)$$

Η γεννήτρια συνάρτηση των μικρών αριθμών Schröder ικανοποιεί την εξίσωση

$$s(x) = 1 - xs(x) + 2xs^2(x) \quad (1.27)$$

οπότε

$$s(x) = \frac{1+x-\sqrt{1-6x+x^2}}{4x}.$$

Οι δυνάμεις της $s(x)$ δίδονται από την εξίσωση

$$[x^n]s^k = \frac{k}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n+k-1}{n-j-1} 2^j. \quad (1.28)$$

Μερικές από τις αρχικές τιμές της ακολουθίας των μικρών αριθμών Schröder δίδονται στον παρακάτω πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_n	1	1	3	11	45	197	903	4279	20793	103049	518859

Οι μικροί αριθμοί Schröder s_n απαριθμούν αρκετά συνδυαστικά αντικείμενα. Μερικά από αυτά είναι τα ακόλουθα:

1. Οι τρόποι που μπορούν να τοποθετηθούν ισορροπημένες παρενθέσεις σε ένα γινόμενο από $n+1$ όρους έτσι ώστε κάθε ζεύγος παρενθέσεων να περιέχει τουλάχιστον δύο όρους.
2. Τα διατεταγμένα δένδρα με $n+1$ φύλλα και κανένα κόμβο βαθμού 1.
3. Τα δυαδικά δένδρα με n κόμβους στα οποία κάθε αριστερός δεσμός είναι χρωματισμένος με ένα από δύο συγκεκριμένα χρώματα.
4. Τα μονοπάτια Schröder μήκους $n-1$ (δηλαδή μονοπάτια στο πρώτο τεταρτημόριο με αρχή το σημείο $(0,0)$, πέρασ στο σημείο $(2n-2,0)$ και βήματα $(2,0)$, $(1,1)$ και $(1,-1)$) χωρίς κορυφές σε ύψος 1.
5. Τα μονοπάτια στο πρώτο τεταρτημόριο με αρχή το σημείο $(0,0)$, πέρασ στον άξονα x , βήματα $(1,k)$, όπου $k \in \mathbb{N}^* \cup \{-1\}$ τα οποία έχουν ακριβώς n βήματα της μορφής $(1,-1)$.

⁶Στη βιβλιογραφία οι αριθμοί s_n αναφέρονται σε ορισμένες εργασίες ως αριθμοί super-Catalan.

6. Τα μονοπάτια από το $(0,0)$ στο (n,n) με βήματα $(k,0)$ ή $(0,1)$ όπου $k \in \mathbb{N}^*$, τα οποία βρίσκονται κάτω από την διαγώνιο $y = x$.
7. Τα μονοπάτια Motzkin μήκους $(n-1)$ στα οποία οι άνοδοι χρωματίζονται με 2 χρώματα και τα οριζόντια βήματα χρωματίζονται με 3 χρώματα.
8. Οι τρόποι σύνδεσης (κανενός, δύο ή περισσότερων) σημείων ενός κυρτού $(n+2)$ -γώνου από μη τεμνόμενες διαγωνίους του.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι μεγάλοι αριθμοί Schröder οι οποίοι ορίζονται από τις σχέσεις

$$S_0 = 1 \text{ και } S_n = 2s_n \text{ για κάθε } n \geq 1.$$

Οι μεγάλοι αριθμοί Schröder συνδέονται με τους αριθμούς Catalan με τον τύπο

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{k} C_{n-k}. \quad (1.29)$$

Για περισσότερα στοιχεία πάνω στους αριθμούς Schröder βλέπε το βιβλίο του Stanley [131]. Επίσης, βλέπε τις εργασίες των Bonin, Shapiro και Simion [15], Klazar [75], Rogers και Shapiro [109], Shapiro και Stephens [121] και West [143]. Τέλος, για μια ενδιαφέρουσα εμφάνιση των αριθμών Schröder στα κείμενα του Πλούταρχου βλέπε την εργασία του Stanley [129] και την εργασία του Acerbi [1].

Αριθμοί Fibonacci

Οι αριθμοί Fibonacci (A000045 στο [124]) ορίζονται από την αναδρομική σχέση

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ και } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \quad (1.30)$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα η ταυτότητα

$$F_{n+2} = 1 + \sum_{i=1}^n F_i. \quad (1.31)$$

Η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Fibonacci ικανοποιεί την εξίσωση

$$F(x) = x + xF(x) + x^2F(x) \quad (1.32)$$

απ' όπου προκύπτει ότι ο n -οστός αριθμός Fibonacci δίδεται συναρτήσει των δυνάμεων του λόγου της χρυσής τομής $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ από τη σχέση

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}.$$

Οι αριθμοί Fibonacci F_n απαριθμούν αρκετά συνδυαστικά αντικείμενα. Μερικά από αυτά είναι τα ακόλουθα:

1. Οι δυαδικές λέξεις μήκους n που δεν περιέχουν δύο διαδοχικές μονάδες.
2. Τα υποσύνολα του $[n]$ που δεν περιέχουν δύο διαδοχικά στοιχεία.
3. Τα μονοπάτια Fibonacci (δηλαδή μονοπάτια Dyck με πρώτες συνιστώσες της μορφής ud ή $uudd$), μήκους n .

Οι αριθμοί Fibonacci έχουν πολλές εφαρμογές σε εφαρμοσμένες επιστήμες όπως για παράδειγμα στην Βιολογία και στη Φυσική. Η σπουδαιότητά τους επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι υπάρχει το περιοδικό *The Fibonacci Quarterly* το οποίο δημοσιεύει εργασίες που σχετίζονται με αυτούς.

1.3 Μονοπάτια και λέξεις Dyck

Μονοπάτια και λέξεις

Βήμα από το σημείο $A(x, y)$ στο σημείο $B(s, t)$ ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία A και B . Το σημείο A ονομάζεται *αρχή* και το σημείο B *πέρας* του βήματος. Συνήθως τα βήματα κωδικοποιούνται από το διατεταγμένο ζεύγος $(s - x, t - y)$.

Μονοπάτι ονομάζεται μια ακολουθία από βήματα (ισοδύναμα από σημεία) έτσι ώστε η αρχή κάθε βήματος να είναι πέρας του προηγούμενου βήματος (ισοδύναμα κάθε σημείο συνδέεται με το προηγούμενο με κάποιο βήμα).

Αλφάβητο ονομάζεται κάθε μη κενό πεπερασμένο σύνολο E . Τα στοιχεία του E ονομάζονται *γράμματα*.

Έστω E ένα αλφάβητο. Κάθε πεπερασμένη ακολουθία $u = u_1 u_2 \dots u_n$ από στοιχεία του E ονομάζεται *λέξη* στο αλφάβητο E . Η κενή λέξη, δηλαδή η λέξη χωρίς κανένα γράμμα, συμβολίζεται με ϵ . Με E^* συμβολίζεται το σύνολο όλων των λέξεων του αλφάβητου E .

Γλώσσα στο αλφάβητο E ονομάζεται κάθε υποσύνολο L του E^* .

Το **μήκος** μια λέξης u ορίζεται ως ο πληθύνσιμος του u και συμβολίζεται με $|u|$.

Με $[k, n]$, όπου $k \leq n$ συμβολίζεται το σύνολο των ακεραίων $\{k, k + 1, \dots, n\}$. Ειδικά το $[1, n]$ συμβολίζεται με $[n]$.

Η λέξη $u = u_1 u_2 \dots u_n$ έχει ως **υπολέξη** την $w = w_1 w_2 \dots w_k$, όπου $k \leq n$ αν και μόνο αν υπάρχει γνησίως αύξουσα απεικόνιση $f: [k] \rightarrow [n]$ με $w_i = u_{f(i)} \forall i \in [k]$.

Στην ειδική περίπτωση όπου $f(i) = j + i$, για κάποιο $j \leq n - k$ η λέξη $w = u_{j+1} u_{j+2} \dots u_{j+k}$ ονομάζεται **τμήμα** της λέξης u .

Το τμήμα $w = w_1 w_2 \dots w_k$ της λέξης $u = u_1 u_2 \dots u_n$ ονομάζεται **αριστερό** (αντίστοιχα **δεξιό**) αν και μόνο αν $u_1 = w_1$ (αντίστοιχα $u_n = w_k$).

Δύο τμήματα $w = w_1 w_2 \dots w_k$ και $v = v_1 v_2 \dots v_l$ της λέξης $u = u_1 u_2 \dots u_n$ ονομάζονται **διαδοχικά** αν και μόνο αν υπάρχει $i \in [n]$ τέτοιο ώστε $u_i = w_k$ και $u_{i+1} = v_1$, ή $u_i = v_l$ και $u_{i+1} = w_1$.

Αν $v = v_1 v_2 \dots v_n$ και $w = w_1 w_2 \dots w_m$ τότε **σύζευξη** ή **γινόμενο** των v και w ονομάζεται η λέξη $u = u_1 u_2 \dots u_{m+n}$, με $u_i = v_i \forall i \in [n]$ και $u_{n+j} = w_j \forall j \in [m]$.

Επίσης ορίζεται το **κενό μονοπάτι** (μονοπάτι χωρίς βήματα) που συμβολίζεται με ϵ .

Μονοπάτι Dyck ονομάζεται κάθε μονοπάτι στο πρώτο τεταρτημόριο, με αρχή το σημείο $(0, 0)$ και πέρας στον άξονα των x , το οποίο αποτελείται από βήματα $(1, 1)$ και $(1, -1)$ που ονομάζονται **άνοδος** και **κάθοδος** αντίστοιχα.

Είναι προφανές ότι κάθε μονοπάτι Dyck αποτελείται από άρτιο αριθμό βημάτων. Αν ένα μονοπάτι Dyck α αποτελείται από $2n$ βήματα τότε ο αριθμός n ονομάζεται **ημιμήκος** του μονοπατιού α και συμβολίζεται με $l(\alpha)$. Το κενό μονοπάτι ϵ θεωρείται μονοπάτι Dyck ημιμήκους 0.

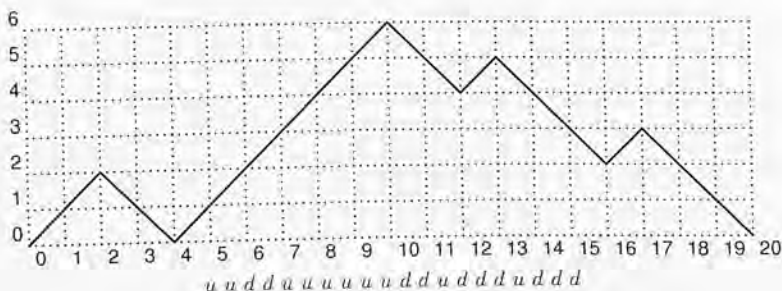
Κάθε μονοπάτι Dyck α κωδικοποιείται από μια λέξη σε ένα αλφάβητο δύο γραμμάτων που ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες. Στη βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται τα γράμματα u, d (Αγγλοσαξωνική σχολή), ή τα γράμματα a, \bar{a} (Γαλλική σχολή), ή τα γράμματα 1, 0 (σπανιότερα, σε εργασίες που σχετίζονται με την Πληροφορική). Εδώ θα υιοθετηθεί ο πρώτος από τους προηγούμενους συμβολισμούς, ως πιο διαδεδομένος.

Συγκεκριμένα σε κάθε άνοδο (αντίστοιχα κάθοδο) ενός μονοπατιού Dyck αντιστοιχίζουμε το γράμμα u (αντίστοιχα d).

Για παράδειγμα το μονοπάτι του Σχήματος 1.1 κωδικοποιείται από την λέξη $\alpha = u u d d u u u u u u d d u d d d u d d d$.

Οι λέξεις που κωδικοποιούν τα μονοπάτια Dyck ονομάζονται **λέξεις Dyck**. Ένας άλλος ισοδύναμος ορισμός της λέξης Dyck είναι ο εξής:

Μια λέξη $\alpha \in \{u, d\}^*$ ονομάζεται **λέξη Dyck** αν και μόνο αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:



Σχήμα 1.1: Ένα μονοπάτι Dyck και η αντίστοιχη λέξη Dyck

α) $|\alpha|_u = |\alpha|_d$.

β) $|\beta|_u \geq |\beta|_d$ για κάθε αριστερό τμήμα β της λέξης α , όπου $|\alpha|_u, |\beta|_u$, (αντίστοιχα $|\alpha|_d, |\beta|_d$) δηλώνουν τον αριθμό των εμφανίσεων του γράμματος u (αντίστοιχα d) στις λέξεις α, β . Είναι προφανές ότι κάθε λέξη Dyck αρχίζει με u και τελειώνει σε d .

Στα επόμενα θα ταυτίζουμε το μονοπάτι Dyck με την αντίστοιχη λέξη Dyck και θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο και για τα δύο.

Το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck (ημιμήκους n) συμβολίζεται με \mathcal{D} (αντίστοιχα \mathcal{D}_n). Άρα, $\mathcal{D}_0 = \{e\}$ και $\mathcal{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n$. Το σύνολο των μη κενών μονοπατιών Dyck συμβολίζεται με \mathcal{D}^* .

Ένα μονοπάτι στο πρώτο τεταρτημόριο που αρχίζει από τον άξονα x (αντ. τελειώνει στον άξονα x) ονομάζεται **αριστερό** (αντ. **δεξιό**) μονοπάτι Dyck.

Προφανώς ένα μονοπάτι στο πρώτο τεταρτημόριο είναι μονοπάτι Dyck αν και μόνο αν είναι συγχρόνως αριστερό και δεξιό μονοπάτι Dyck.

Κάθε μονοπάτι Dyck γράφεται ως γινόμενο ενός αριστερού μονοπατιού Dyck και ενός δεξιού μονοπατιού Dyck τα οποία ονομάζονται **αριστερός** και **δεξιός** παράγοντας. Προφανώς για κάθε μονοπάτι Dyck ημιμήκους n υπάρχουν $2n + 1$ τέτοιοι τρόποι ανάλυσης.

Έστω ένα μονοπάτι Dyck α . **Επιστροφή** ονομάζεται κάθε σημείο του α (εκτός της αρχής των αξόνων) το οποίο ανήκει στον άξονα x . Ιδιαίτερη σημασία έχει η **πρώτη επιστροφή**. **Ανάβαση** (αντίστοιχα **κατάβαση**) ονομάζεται κάθε μεριστική ακολουθία από διαδοχικές ανόδους (αντίστοιχα καθόδους).

Ένα σημείο ενός μονοπατιού Dyck καλείται **κορυφή** (αντίστοιχα **κοιλιάδα**) αν έπεται μιας ανόδου (αντίστοιχα καθόδου) και προηγείται μιας καθόδου (αντίστοιχα ανόδου). Ένα σημείο ενός μονοπατιού Dyck καλείται **διπλή άνοδος** (αντίστοιχα **διπλή κάθοδος**) αν έπεται και προηγείται μιας ανόδου (αντίστοιχα καθόδου).

Η τεταγμένη του σημείου (x, y) ενός μονοπατιού Dyck α ονομάζεται **ύψος** του μονοπατιού στο σημείο αυτό, και συμβολίζεται με $h_\alpha(x)$. Επομένως το σημείο (x, y) είναι κορυφή (αντίστοιχα κοιλιάδα) του α αν $h_\alpha(x - 1) = h_\alpha(x + 1) = h_\alpha(x) - 1$ (αντίστοιχα $h_\alpha(x - 1) = h_\alpha(x + 1) = h_\alpha(x) + 1$). Ανάλογα το σημείο (x, y) είναι διπλή άνοδος (αντίστοιχα διπλή κάθοδος) του α αν $h_\alpha(x - 1) = h_\alpha(x) - 1 = h_\alpha(x + 1) - 2$ (αντίστοιχα $h_\alpha(x - 1) = h_\alpha(x) + 1 = h_\alpha(x + 1) + 2$).

Για παράδειγμα το μονοπάτι Dyck του Σχήματος 1.1 έχει δύο σημεία επιστροφής τα σημεία με $x = 4$ και $x = 20$, τέσσερις αναβάσεις και τέσσερις καταβάσεις, τέσσερις κορυφές στα σημεία με $x = 2, 10, 13$ και 17 , τρεις κοιλιάδες στα σημεία με $x = 4, 12$, και 16 , έξι διπλές ανόδους και έξι διπλές καθόδους.

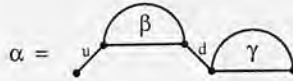
Διασπάσεις μονοπατιών Dyck

Τα μονοπάτια Dyck μπορούν να ορισθούν αναδρομικά ως προς το ημιμήκος. Τούτο επιτυγχάνεται με τη βοήθεια διαφόρων διασπάσεων κάθε μονοπατιού Dyck σε μονοπάτια μικρότερου μήκους. Συγκεκριμένα κάθε μη κενό μονοπάτι Dyck γράφεται μονοσήμαντα υπό τη μορφή

$$\alpha = u\beta d\gamma,$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$.

Η διάσπαση αυτή αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως *διάσπαση της πρώτης επιστροφής* [38] (βλ. Σχήμα 1.2).



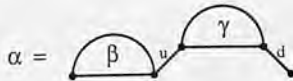
Σχήμα 1.2: Η διάσπαση της πρώτης επιστροφής

Παραδείγματος χάριν για το μονοπάτι Dyck α του Σχήματος 1.1 είναι $\beta = u d$ και $\gamma = u u u u u d d d u d d d u d d d$.

Ανάλογα ορίζεται και η *διάσπαση της τελευταίας επιστροφής*

$$\alpha = \beta\gamma d,$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$ (βλ. Σχήμα 1.3).



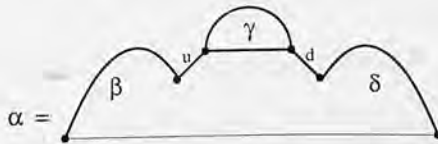
Σχήμα 1.3: Η διάσπαση της τελευταίας επιστροφής

Παραδείγματος χάριν για το μονοπάτι Dyck α του Σχήματος 1.1 είναι $\beta = u u d d$ και $\gamma = u u u u u d d d u d d d u d d d$.

Είναι προφανές ότι σε κάθε άνοδο u ενός μονοπατιού Dyck αντιστοιχεί μια και μοναδική κάθοδος d με την ιδιότητα

$$\alpha = \beta\gamma d\delta,$$

όπου $\gamma \in \mathcal{D}$ και $\beta\delta \in \mathcal{D}$.



Σχήμα 1.4: Ένα ζεύγος συζυγών βημάτων

Στην περίπτωση αυτή τα βήματα u, d ονομάζονται *συζυγή*.

Γεωμετρικά, η συζυγής κάθοδος μιας ανόδου είναι η πρώτη κάθοδος που έπεται της ανόδου αυτής και το πέρας της ανόδου βρίσκεται στο ίδιο ύψος με την αρχή της ανόδου (βλ. Σχήμα 1.4).

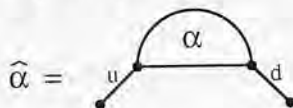
Παραδείγματος χάριν για το μονοπάτι Dyck α του Σχήματος 1.1 τα ζεύγη των συζυγών βημάτων είναι τα εξής: (1, 4), (2, 3), (5, 20), (6, 19), (7, 16), (8, 15), (9, 12), (10, 11), (13, 14), (17, 18).

Ένα μη κενό μονοπάτι Dyck ονομάζεται **πρώτο** αν και μόνο αν η αρχική άνοδος και η τελική κάθοδος του είναι συζυγείς. Είναι προφανές ότι κάθε πρώτο μονοπάτι Dyck συναντά τον άξονα x μόνο στα άκρα του⁷ και γράφεται υπό την μορφή

$$\alpha = u\beta d,$$

όπου $\beta \in \mathcal{D}$. Η λέξη Dyck που αντιστοιχεί σε ένα πρώτο μονοπάτι ονομάζεται **πρώτη λέξη Dyck**.

Αντίστροφα, για κάθε μονοπάτι Dyck α ορίζεται ένα και μοναδικό πρώτο μονοπάτι Dyck $\widehat{\alpha} = u\alpha d$, το οποίο ονομάζεται **ανύψωση** του α (βλ. Σχήμα 1.5).



Σχήμα 1.5: Η ανύψωση ενός μονοπατιού Dyck

Αποδεικνύεται (βλ. για παράδειγμα [103]) ότι κάθε μη κενό μονοπάτι Dyck α αναλύεται **μονοσήμαντα** σε γινόμενο πρώτων μονοπατιών Dyck. Με άλλα λόγια ισχύει ότι

$$\alpha = \widehat{\beta}_1 \widehat{\beta}_2 \cdots \widehat{\beta}_k,$$

όπου $\beta_i \in \mathcal{D}$, $i \in [k]$.

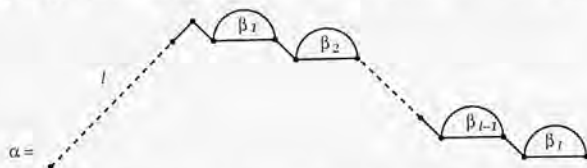
Στην περίπτωση αυτή τα $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \dots, \widehat{\beta}_k$ ονομάζονται **πρώτες συνιστώσες** του μονοπατιού α .

Για παράδειγμα το μονοπάτι Dyck α του Σχήματος 1.1 γράφεται ως γινόμενο των πρώτων μονοπατιών $\beta_1 = u u d d$, $\beta_2 = u u u u u d d u d d d u d d d$.

Ένας άλλος τρόπος διάσπασης των μονοπατιών Dyck μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας το ύψος της πρώτης κορυφής (ισοδύναμα το μήκος της πρώτης ανάβασης). Αποδεικνύεται ότι κάθε μη κενό μονοπάτι Dyck α γράφεται **μονοσήμαντα** υπό τη μορφή

$$\alpha = u^l d \beta_1 d \beta_2 d \cdots \beta_{l-1} d \beta_l,$$

όπου l είναι το ύψος της πρώτης κορυφής του α και $\beta_i \in \mathcal{D}$ για κάθε $i \in [l]$ (βλ. Σχήμα 1.6).



Σχήμα 1.6: Η διάσπαση σύμφωνα με το ύψος της πρώτης κορυφής

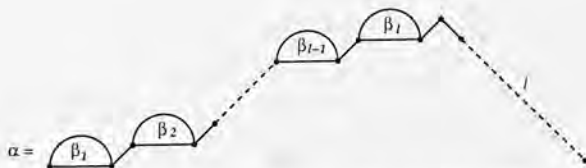
Για παράδειγμα το μονοπάτι Dyck α του Σχήματος 1.1 γράφεται υπό την μορφή $\alpha = u u d \beta_1 d \beta_2 d$ όπου $\beta_1 = \epsilon$, $\beta_2 = u u u u u d d u d d d u d d d$.

Ανάλογα ορίζεται η διάσπαση χρησιμοποιώντας το ύψος της τελευταίας κορυφής (ισοδύναμα το μήκος της τελευταίας κατάβασης), δηλαδή

$$\alpha = \beta_1 u \beta_2 u \cdots \beta_l u d^l,$$

όπου l είναι το ύψος της τελευταίας κορυφής του α και $\beta_i \in \mathcal{D}$ για κάθε $i \in [l]$ (βλ. Σχήμα 1.7).

⁷Γενικεύοντας, ένα αριστερό μονοπάτι Dyck ονομάζεται **πρώτο** αν και μόνο αν συναντά τον άξονα το πολύ δύο φορές.



Σχήμα 1.7: Η διάσπαση σύμφωνα με το ύψος της τελευταίας κορυφής

Για παράδειγμα το μονοπάτι Dyck α του Σχήματος 1.1 γράφεται υπό τη μορφή $\alpha = \beta_1 u \beta_2 u \beta_3 u d d d$ όπου $\beta_1 = u u d d$, $\beta_2 = \epsilon$ και $\beta_3 = u u u u d d u d d d$.

Συγγένεια ανόδων

Δύο άνοδοι σε ένα μονοπάτι Dyck ονομάζονται **συγγενικές** αν και μόνο αν το τμήμα του μονοπατιού α με αρχή την αριστερότερη από τις δύο ανόδους και τέλος το συζυγές βήμα της δεξιότερης από τις δύο είναι μονοπάτι Dyck. Εύκολα προκύπτει ότι η σχέση συγγένειας είναι σχέση ισοδυναμίας, της οποίας οι κλάσεις ονομάζονται **κλάσεις συγγένειας**.

Μια άνοδος ονομάζεται **μεμονωμένη** όταν δεν έχει συγγενικές ανόδους (εκτός της ίδιας).

Για παράδειγμα, στο μονοπάτι Dyck του Σχήματος 1.1 η πρώτη και η τρίτη άνοδος είναι συγγενικές ενώ η δεύτερη άνοδος είναι μεμονωμένη και υπάρχουν συνολικά 7 κλάσεις συγγένειας.

Βασικές απαριθμήσεις των μονοπατιών Dyck

Το σύνολο \mathcal{D}_n και ορισμένα υποσύνολά του έχουν απαριθμηθεί από πολλούς συγγραφείς (βλ. για παράδειγμα [38, 103]).

Υπάρχουν δύο γνωστές μέθοδοι απαρίθμησης, οι οποίες χρησιμοποιούνται ευρέως στην εργασία αυτή. Η πρώτη στηρίζεται στις γεννήτριες συναρτήσεις, ενώ η δεύτερη στην κατασκευή αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων του \mathcal{D} στο \mathcal{D} , και οι δύο όμως χρησιμοποιούν διασπάσεις των μονοπατιών Dyck.

Προκειμένου να εμποδισθούν αυτές οι μέθοδοι, θα χρησιμοποιηθούν οι διασπάσεις της προηγούμενης παραγράφου για την απόδειξη των παρακάτω γνωστών τύπων απαρίθμησης:

1. $|\mathcal{D}_n| = C_n$,
2. $|\{\alpha \in \mathcal{D}_n : p(\alpha) = k\}| = \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-1}$,
3. $|\{\alpha \in \mathcal{D}_n : q(\alpha) = k\}| = \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-1}$,

όπου $p(\alpha)$ είναι ο αριθμός των πρώτων συνιστωσών του α και $q(\alpha)$ είναι το ύψος της πρώτης κορυφής του α .

Πράγματι:

1. Αν $F(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{D}_n| x^n$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{D} ως προς το

ημιμήχος, τότε χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(u\beta d\gamma)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} \\ &= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)} \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} \\ &= 1 + xF^2(x). \end{aligned}$$

Τότε, σύμφωνα με την σχέση (1.3) θα είναι $F(x) = C(x)$ και $|D_n| = C_n$.

2. Αν $F(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{p(\alpha)}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{D} ως προς το ημιμήχος και τον αριθμό των πρώτων συνιστωσών, τότε χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(u\beta d\gamma)} y^{p(u\beta d\gamma)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{1+p(\gamma)} \\ &= 1 + xy \sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)} \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{p(\gamma)} \\ &= 1 + xyC(x)F(x, y). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{1}{1 - xyC(x)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (xyC(x))^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k}{2\nu+k} \binom{2\nu+k}{\nu} x^\nu \right) x^k y^k. \end{aligned}$$

Αν τεθεί $n = \nu + k$, τότε είναι

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n-k} x^n y^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n-k} x^n y^k. \end{aligned}$$

Άρα,

$$|\{\alpha \in \mathcal{D}_n : p(\alpha) = k\}| = |x^n y^k| F = \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n-k}.$$

3. Αν $F(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{q(\alpha)}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{D} ως προς τη ημιμήκος και το ύψος της πρώτης κορυφής, τότε χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(u\beta d\gamma)} y^{q(u\beta d\gamma)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{1+q(\beta)} \\ &= 1 + xy \sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)} y^{q(\beta)} \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} \\ &= 1 + xyF(x, y)C(x). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$F(x, y) = \frac{1}{1 - xyC(x)}.$$

Άρα, από το 2, οι στατιστικές p και q είναι ισοκατανομημένες, οπότε

$$|\{\alpha \in \mathcal{D}_n : q(\alpha) = k\}| = |\{\alpha \in \mathcal{D}_n : p(\alpha) = k\}| = \frac{k}{2n - k} \binom{2n - k}{n - k}.$$

Η ισοκατανομή των δύο προηγούμενων στατιστικών μπορεί να προκύψει και με τη βοήθεια μιας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης ϕ του \mathcal{D} στο \mathcal{D} η οποία στέλνει την παράμετρο p στην παράμετρο q δηλαδή $p(\alpha) = q(\phi(\alpha))$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$.

Η απλούστερη τέτοια απεικόνιση ορίζεται ως εξής:

$$\phi(\epsilon) = \epsilon$$

και

$$\phi(\widehat{\beta}_1 \widehat{\beta}_2 \cdots \widehat{\beta}_k) = u^k d \widehat{\beta}_1 d \widehat{\beta}_2 d \cdots \widehat{\beta}_k,$$

όπου $\beta_i \in \mathcal{D}$, για κάθε $i \in [k]$.

Μια άλλη τέτοια απεικόνιση (γνωστή ως ενέλιξη⁸ (involution) του Deutsch [39]) ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$\phi(\epsilon) = \epsilon$$

και

$$\phi(u\beta d\gamma) = u\phi(\gamma)d\phi(\beta),$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$.

Τέλος, στην εργασία [110], κατασκευάζεται μια διαφορετική ενέλιξη, η οποία χρησιμοποιείται για τον ίδιο σκοπό αλλά σε πιο γενικούς χώρους. Για ένα μονοπάτι Dyck α , ορίζεται ως εξής:

$$\phi(\alpha) = \theta^{p(\alpha)-q(\alpha)}(\alpha),$$

όπου $\theta : \{a \in \mathcal{D} : p(a) \geq 2\} \rightarrow \{a \in \mathcal{D} : q(a) \geq 2\}$ με

$$\theta(uu\beta d\gamma d\delta) = u\beta d u \gamma d \delta.$$

⁸Υπενθυμίζεται ότι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ϕ ονομάζεται **ενέλιξη** αν $\phi = \phi^{-1}$.

Μια άλλη πολύ σημαντική ενέλιξη, που χρησιμοποιείται για την ισοκατανομή πολλών παραμέτρων, είναι η κατοπτρική απεικόνιση, που ορίζεται ως εξής:

$$\phi(\epsilon) = \epsilon$$

και

$$\phi(ubd\gamma) = \phi(\gamma)u\phi(\beta)d$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$. Γεωμετρικά, η εικόνα ενός μονοπατιού Dyck μέσω της ϕ είναι το συμμετρικό μονοπάτι του ως προς κατακόρυφο άξονα.

Έτσι για το μονοπάτι Dyck $\alpha = u u d d u u u u u d d u d d d u d d d$ είναι $\phi(\alpha) = u u u d u u u d u u d d d d d u u d d$.

Μέσω της ϕ προκύπτει άμεσα ότι οι παράμετροι “ύψος της πρώτης κορυφής” και “ύψος της τελευταίας κορυφής” είναι ισοκατανεμημένες.

Κυρίαρχες ακολουθίες

Ένα άλλος τρόπος κωδικοποίησης των μονοπατιών Dyck είναι η χρήση των κυρίαρχων ακολουθιών.

Μια ακολουθία $d = (d_i)_{i \in [n]}$ κυριαρχεί μιας άλλης ακολουθίας $d' = (d'_i)_{i \in [n]}$ αν και μόνο αν $\sum_{i=1}^{\nu} d_i \geq \sum_{i=1}^{\nu} d'_i$ για κάθε $\nu \in [n-1]$ και $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n d'_i$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η d' κυριαρχείται από τη d .

Για παράδειγμα η ακολουθία 3, 1, 3, 1, 0, 1, 0, 0, 0 κυριαρχεί της ακολουθίας 3, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 0.

Μια ακολουθία $d = (d_i)_{i \in [n]}$ ονομάζεται κυρίαρχη αν

$$i) \sum_{i=1}^n d_i = n.$$

$$ii) \sum_{i=1}^{\nu} d_i \geq \nu.$$

Παρατηρήστε ότι κάθε κυρίαρχη ακολουθία κυριαρχεί της σταθερής ακολουθίας με στοιχεία ίσα με 1.

Είναι γνωστό ότι κάθε μονοπάτι Dyck α ημιμήκους n κωδικοποιείται από μια κυρίαρχη ακολουθία $d(\alpha) = (d_i)_{i \in [n]}$ ως εξής: d_1 ισούται με το μήκος της πρώτης ανάβασης δηλαδή ο αριθμός των u πριν την πρώτη εμφάνιση d και d_i ισούται με τον αριθμό των u μεταξύ της $(i-1)$ -οστής και i -οστής εμφάνισης d στο α για κάθε $i \in [2, n]$.

Για παράδειγμα το μονοπάτι Dyck $\alpha = u u d d u u u u u d d u d d d u d d d$ του Σχήματος 1.1 αναπαριστάνεται από την κυρίαρχη ακολουθία $d(\alpha) = 2, 0, 6, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0$.

Κεφάλαιο 2

Το δικτυωτό των μονοπατιών Dyck

2.1 Εισαγωγή

Ένα σημαντικό θέμα της Συνδυαστικής Ανάλυσης αποτελεί η μελέτη δικτυωτών από συνδυαστικά αντικείμενα, όπως για παράδειγμα τα δικτυωτά από διαμερίσεις ακεραίων [25, 130], από μετθέσεις [67, 138], και από μη τεμνόμενες διαμερίσεις [55, 123]. Στο σύνολο \mathcal{D} υπάρχουν πολλές (βλ. για παράδειγμα [10]) μερικές διατάξεις, έτσι ώστε να ορίζονται πολλά δικτυωτά από μονοπάτια Dyck.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται το δικτυωτό των μονοπατιών Dyck με τη διάταξη κυριαρχίας. Το δικτυωτό αυτό έχει μελετηθεί από τον Kreweras [81, 82] και από τους Narayana και Fulton [102] σε μια ισοδύναμη μορφή. Μια πιο γενική προσέγγιση στο αντικείμενο αυτό παρουσιάζεται από τους Ferrari και Pinzani [58].

Στη δεύτερη ενότητα δίδονται μερικοί βασικοί ορισμοί και προκαταρκτικά αποτελέσματα που χρησιμοποιούνται στο υπόλοιπο κεφάλαιο.

Στην τρίτη ενότητα, μελετάται η τάξη ενός μονοπατιού Dyck σύμφωνα με τη διάταξη κυριαρχίας και υπολογίζεται η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτησης.

Στην τέταρτη ενότητα εισάγονται και μελετώνται οι έννοιες της κλειστότητας και του βαθμού ενός μονοπατιού Dyck και παρουσιάζονται σχετικά αποτελέσματα απαρίθμησης. Οι έννοιες αυτές χρησιμοποιούνται στην πέμπτη ενότητα για τον υπολογισμό της συνάρτησης του Möbius του εν λόγω δικτυωτού, καθώς και των δυνάμεών της. Σε αυτό το πλαίσιο προκύπτει και μια νέα εμφάνιση των αριθμών Fibonacci (A000045 στο [124]).

Στην έκτη ενότητα δίδεται μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ του συνόλου όλων των μεγίστων αλυσίδων του δικτυωτού των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n και του συνόλου όλων των τριγωνικών Young tableaux μεγέθους n .

Τέλος, στην έβδομη ενότητα μελετάται η σχέση ανάμεσα στη συμμετρική ομάδα S_n των μεταθέσεων εφοδιασμένη με την ασθενή διάταξη Bruhat, και το \mathcal{D}_n . Πιο αναλυτικά, κατασκευάζεται μια διαμέριση του S_n σε C_n το πλήθος κλάσεις, η οποία ικανοποιεί μια σχέση διάταξης, και υπολογίζονται οι πληθικοί αριθμοί των μελών της. Τέλος, αποδεικνύεται ότι κάθε κλάση της διαμέρισης αυτής περιέχει μια ακριβώς μετάθεση του S_n (312).

Τα περισσότερα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού έχουν δημοσιευτεί στις εργασίες [112, 146].

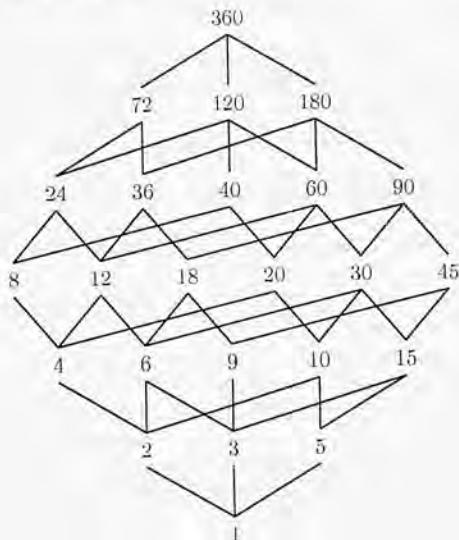
2.2 Βασικές έννοιες

Δικτυωτά

Έστω P ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (μ.δ.σ.) εφοδιασμένο με την διάταξη \preceq . Τα στοιχεία x, y του P ονομάζονται **συγκρίσιμα** αν $x \preceq y$ ή $y \preceq x$. Σημειώνουμε $x \prec y$ (και $y \succ x$) αν $x \preceq y$ και $x \neq y$. Λέμε ότι το y **καλύπτει** το x , αν $x \prec y$ και δεν υπάρχει $z \in P$ με $x \prec z \prec y$. Η σχέση αυτή ονομάζεται **σχέση κάλυψης**.

Το **διάγραμμα Hasse** ενός πεπερασμένου μ.δ.σ. P είναι ένα γράφημα με κόμβους τα στοιχεία του P , δεσμούς τις σχέσεις κάλυψης και τέτοιο ώστε αν $x \prec y$ τότε το y σχεδιάζεται "πάνω" από το x .

Για παράδειγμα, το διάγραμμα Hasse του (P, \preceq) , όπου P είναι το σύνολο των διαιρετών του 360 και \preceq είναι η σχέση διαιρετότητας είναι



Δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα P και Q ονομάζονται **ισόμορφα** αν υπάρχει αμφιμοσφημαντη απεικόνιση μεταξύ τους που μεταφέρει την διάταξη.

Ένα στοιχείο $x \in P$ ονομάζεται **ελαχιστικό** (maximal) (αντίστοιχα **μεγιστικό** (minimal)) αν δεν υπάρχει $y \in P$ με $y \prec x$ (αντίστοιχα $x \prec y$), και **ελάχιστο** (αντίστοιχα **μέγιστο**) αν $x \preceq y$ (αντίστοιχα $y \preceq x$) για κάθε $y \in P$. Το ελάχιστο (αντίστοιχα μέγιστο) στοιχείο του P εφόσον υπάρχει θα συμβολίζονται με 0 (αντίστοιχα 1).

Μια οικογένεια $C = (x_i)_{i \in I}$ ονομάζεται **αλυσίδα** (chain) (αντ. **επαναληπτική αλυσίδα**) (multichain) αν $x_i \prec x_j$ ή $x_j \prec x_i$ (αντ. $x_i \preceq x_j$ ή $x_j \preceq x_i$) για κάθε $i, j \in I$ με $i \neq j$. Η αλυσίδα C λέγεται **μεγιστική** αν για κάθε αλυσίδα C' στο P με $C \subseteq C'$ ισχύει $C = C'$. Το μήκος μιας πεπερασμένης αλυσίδας ορίζεται από την σχέση $l(C) = |C| - 1$.

Έτσι, στο μ.δ.σ. του προηγούμενου παραδείγματος το μέγιστο είναι ο αριθμός 360 και το ελάχιστο ο αριθμός 1. Το σύνολο $C = \{20, 60, 120\}$ είναι μια αλυσίδα η οποία όμως δεν είναι μεγιστική αφού περιέχεται στην αλυσίδα $C' = \{1, 5, 10, 20, 60, 120, 360\}$ η οποία είναι μεγιστική. Επιπλέον, ισχύουν $l(C) = 2$ και $l(C') = 6$.

Το μέγιστο μήκος όλων των αλυσίδων ενός πεπερασμένου μ.δ.σ. P ονομάζεται **μήκος** ή **τάξη** του P . Το μήκος ενός διαστήματος $[x, y]$ συμβολίζεται με $l(x, y)$.

Αν κάθε μεγιστική αλυσίδα του P έχει το ίδιο μήκος n τότε το P ονομάζεται **διαβαθμισμένο τάξεως n** . Στην περίπτωση αυτή, ορίζεται η **τάξη** $\rho(x)$ του στοιχείου $x \in P$ με τη βοήθεια της απεικόνισης $\rho : P \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ με $\rho(x) = 0$ αν x είναι ένα ελαχιστικό στοιχείο του P και $\rho(y) = \rho(x) + 1$ αν y καλύπτει το x . Τότε, προκύπτει εύκολα ότι $l(x, y) = \rho(y) - \rho(x)$ όταν $x \preceq y$. Αν, επιπλέον, το P έχει ελάχιστο στοιχείο, τότε ισχύει ότι $\rho(x) = l(0, x)$.

Έτσι, για το μ.δ.σ. του προηγούμενου παραδείγματος ισχύει ότι $\rho(20) = l(1, 20) = 3$.

Για ένα διαβαθμισμένο μ.δ.σ. P τάξης n το πολυώνυμο

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \rho_i x^i$$

όπου ρ_i είναι ο αριθμός των στοιχείων του P τάξεως i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, ονομάζεται **γεννήτρια συνάρτηση της τάξης** του P .

Για κάθε $x, y \in P$, με $x \vee y$ (αντίστοιχα $x \wedge y$) συμβολίζεται το supremum (αντίστοιχα το infimum) των x, y .

Έτσι, για το μ.δ.σ. του προηγούμενου παραδείγματος ισχύει ότι $x \vee y = \text{E.K.Π.}(x, y)$ και $x \wedge y = \text{M.K.Δ.}(x, y)$.

Το P ονομάζεται **δικτυωτό** (lattice) αν κάθε ζεύγος στοιχείων του έχει supremum και infimum. Ένα υποσύνολο του δικτυωτού P ονομάζεται **υποδικτυωτό** (sublattice) του P αν και μόνο $x \vee y, x \wedge y \in S$.

Γενικότερα, επειδή οι πράξεις \vee, \wedge είναι προσεταιριστικές, σε κάθε δικτυωτό περιέχεται το supremum και το infimum οποιονδήποτε ν στοιχείων του x_1, x_2, \dots, x_ν τα οποία συμβολίζονται με $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_\nu$ και $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_\nu$ (ή, συντομότερα, με $\bigvee_{i=1}^{\nu} x_i$ και $\bigwedge_{i=1}^{\nu} x_i$ αντίστοιχα).

Επιπλέον, αν τα $y_i, i \in [\nu]$ καλύπτουν το x , τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\rho\left(\bigvee_{i=0}^{\nu} y_i\right) = \rho(x) + \nu.$$

Τέλος, το δικτυωτό P ονομάζεται **επιμεριστικό** αν για κάθε $x, y, z \in P$ ισχύει ότι

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ και } x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Ένα μ.δ.σ. P ονομάζεται **τοπικά πεπερασμένο** (locally finite) αν για κάθε $x, y \in P$ με $x \preceq y$, το διάστημα $[x, y]$ είναι πεπερασμένο.

Για παράδειγμα, το σύνολο \mathbb{N}^* εφοδιασμένο με τη σχέση διαιρετότητας είναι ένα τοπικά πεπερασμένο μ.δ.σ.

Είναι γνωστό ότι αν P είναι ένα τοπικά πεπερασμένο μ.δ.σ. τότε το σύνολο $I(P)$ που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = 0$ αν $x \not\preceq y$ με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης, του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και της συνέλιξης που ορίζεται ως εξής:

$$(f * g) = \sum_{x \preceq z \preceq y} f(x, z)g(z, x)$$

είναι μια άλγεβρα με μοναδιαίο στοιχείο το δέλτα του Kronecker

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = y \\ 0, & \text{αν } x \neq y. \end{cases}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν ορισμένες συναρτήσεις στο $I(P)$. Συγκεκριμένα, η χαρακτηριστική συνάρτηση της μερικής διάταξης η οποία ονομάζεται **συνάρτηση ζήτα** (zeta function),

με

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \preceq y \\ 0, & \text{αν } x \not\preceq y \end{cases}$$

και η αντίστροφή της (ως προς την πράξη της συνέλιξης) η οποία ονομάζεται συνάρτηση Möbius και υπολογίζεται αναδρομικά σύμφωνα με τη σχέση

$$\mu(x, y) = - \sum_{x \preceq z \prec y} \mu(x, z), \text{ για } x \prec y, \text{ και } \mu(x, x) = 1.$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέλιξης, προκύπτουν οι δυνάμεις των συναρτήσεων αυτών. Έτσι, για $k \in \mathbb{N}^*$ η $\zeta^k(x, y)$ ισούται με τον αριθμό όλων των επαναληπτικών αλυσίδων $x = x_0 \preceq x_1 \preceq \dots \preceq x_k = y$ και

$$\mu^k(x, y) = \sum_{x=x_0 \preceq x_1 \preceq \dots \preceq x_k=y} \mu(x_0, x_1) \mu(x_1, x_2) \dots \mu(x_{k-1}, x_k).$$

Αν το μ.δ.σ. P έχει μέγιστο $\hat{1}$ και ελάχιστο $\hat{0}$, αποδεικνύεται ότι το $\zeta^n(\hat{0}, \hat{1})$ είναι ένα πολυώνυμο το οποίο ονομάζεται πολυώνυμο ζήτα (zeta polynomial) και συμβολίζεται με $Z(P, n)$, δηλαδή

$$Z(P, n) = \zeta^n(\hat{0}, \hat{1}).$$

Προφανώς ισχύουν

$$Z(P, 1) = 1, \quad Z(P, 0) = 0 \quad \text{και} \quad Z(P, -1) = \mu(\hat{0}, \hat{1})$$

Γενικότερα αποδεικνύεται [127] ότι

$$Z(P, -n) = \mu^n(\hat{0}, \hat{1})$$

Οι συναρτήσεις ζήτα και Möbius, καθώς επίσης οι δυνάμεις τους και το πολυώνυμο ζήτα έχουν σημαντικές εφαρμογές (βλ. για παράδειγμα τον τύπο αντιστροφής του Möbius [130, σελ. 116]).

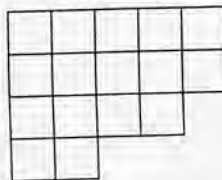
Για περισσότερα στοιχεία σχετικά με τα μ.δ.σ. βλ. [130].

Διαγράμματα Ferrers και Young tableaux

Διάγραμμα Ferrers είναι μια συλλογή από διατεταγμένα κελιά (φατνία) τοποθετημένα σε αριστερά στοιχισμένες γραμμές, έτσι ώστε κάθε γραμμή να περιέχει το πολύ τόσο κελιά όσο περιέχει η προηγούμενη της. Ορίζεται και το κενό διάγραμμα Ferrers που δεν περιέχει κανένα κελί.

Κάθε μη κενό διάγραμμα Ferrers με n γραμμές αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε ένα διάνυσμα $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ με $\lambda_i \geq \lambda_j$ όταν $i < j$ για κάθε $i, j \in [n]$, όπου το λ_i ισούται με τον αριθμό των κελιών της i -οστής γραμμής. Το διάνυσμα λ ονομάζεται σχήμα του διαγράμματος Ferrers.

Για παράδειγμα, το διάγραμμα Ferrers



κωδικοποιείται από το διάνυσμα $\lambda = (5, 5, 4, 2)$.

Τριγωνικό ονομάζεται ένα διάγραμμα Ferrers για το οποίο $\lambda_n = 1$ και $\lambda_{i+1} = \lambda_i - 1$ για κάθε $i \in [n - 1]$.

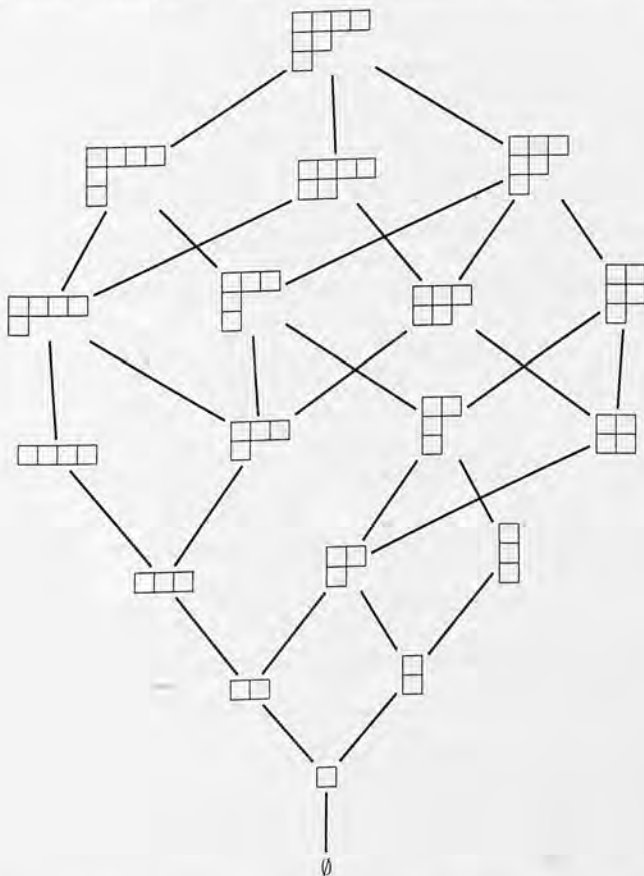
Ο αριθμός των κελιών ενός διαγράμματος Ferrers ονομάζεται **μέγεθος** του διαγράμματος.

Το μέγεθος ενός τριγωνικού διαγράμματος Ferrers με n γραμμές είναι ίσο με $\binom{n+1}{2}$.

Στο σύνολο των διαγραμμάτων Ferrers ορίζεται μια σχέση μερικής διάταξης " \preceq " η οποία ονομάζεται **σχέση εγκλεισμού**, όπου $\lambda \preceq \lambda'$ αν και μόνο αν το λ περιέχεται στο λ' . Με άλλα λόγια, αν $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ και $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n)$ τότε

$$\lambda \preceq \lambda' \Leftrightarrow m \leq n \text{ και } \lambda_i \leq \lambda'_i \text{ για κάθε } i \in [m].$$

Αποδεικνύεται [60] ότι το σύνολο των διαγραμμάτων Ferrers που περιέχονται σε ένα διάγραμμα Ferrers με σχήμα λ , εφοδιασμένο με τη διάταξη εγκλεισμού, είναι ένα επιμεριστικό δικτυωτό με μέγιστο στοιχείο το λ και ελάχιστο στοιχείο το κενό διάγραμμα και ονομάζεται **δικτυωτό Young**.

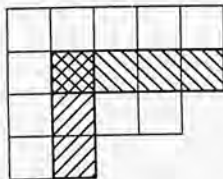


Για παράδειγμα, έστω $\lambda = (4, 2, 1)$. Τα διαγράμματα Ferrers που περιέχονται στο λ είναι τα ακόλουθα: $(4, 2, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 1, 1)$, $(4, 1)$, (4) , $(3, 2, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(3, 1)$, (3) , $(2, 2, 1)$,

$(2, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(2, 1)$, (2) , $(1, 1, 1)$, $(1, 1)$, (1) , \emptyset . Το αντίστοιχο δικτυωτό απεικονίζεται από το προηγούμενο διάγραμμα Hasse.

Για το κελί (i, j) ενός διαγράμματος Ferrers ορίζεται ο λεγόμενος γάντζος του (hook) που περιλαμβάνει όλα τα κελιά που βρίσκονται στην ίδια γραμμή στα δεξιά του και στην ίδια στήλη από κάτω του (συμπεριλαμβανομένου του ίδιου). Με $h(i, j)$ συμβολίζεται το μέγεθος του γάντζου που αντιστοιχεί στο κελί (i, j) .

Για παράδειγμα, στο επόμενο σχήμα, ο γάντζος του κελιού $(2, 2)$ είναι



με $h(2, 2) = 6$.

Young tableau (ή πίνακας Young) ονομάζεται ένα διάγραμμα Ferrers στα κελιά του οποίου περιέχονται φυσικοί αριθμοί έτσι ώστε

- οι αριθμοί κάθε γραμμής (από τα αριστερά προς τα δεξιά) να είναι σε αύξουσα σειρά,
- οι αριθμοί κάθε στήλης (από πάνω προς τα κάτω) να είναι σε γνησίως αύξουσα σειρά.

Στην περίπτωση όπου δεν έχουμε επαναλαμβανόμενα στοιχεία και χρησιμοποιούνται όλοι οι αριθμοί του συνόλου $[n]$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, το Young tableau ονομάζεται πρότυπο (standard).

Παράδειγμα ενός πρότυπου Young tableau μεγέθους 16 είναι το παρακάτω

1	2	5	7	8
3	4	6	9	16
10	11	13	15	
12	14			

Ο αριθμός f_λ των πρότυπων Young tableaux σχήματος λ και μεγέθους n δίδεται από τον τύπο

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod h(i, j)} \quad (2.1)$$

όπου (i, j) λαμβάνεται στο σύνολο όλων των κελιών του tableau και ο οποίος είναι γνωστός ως hook-length formula (βλ. [61]).

2.3 Η διάταξη κυριαρχίας του D

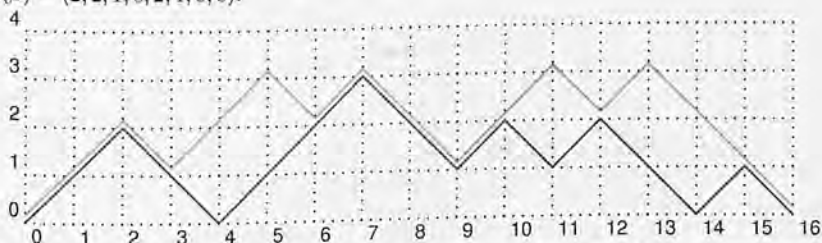
Η (μερική) διάταξη κυριαρχίας ' \preceq ' του D ορίζεται ως εξής:

$\alpha \preceq \beta$ αν και μόνο αν $l(\alpha) = l(\beta)$ και το μονοπάτι β είναι πάνω (με την ευρεία έννοια) από το μονοπάτι α .

Ισοδύναμα, με τη βοήθεια των κυριαρχών ακολουθιών προκύπτει ότι

$\alpha \preceq \beta$ αν και μόνο αν $l(\alpha) = l(\beta)$ και η ακολουθία $d(\alpha)$ κυριαρχείται από την ακολουθία $d(\beta)$.

Για παράδειγμα για τα μονοπάτια Dyck $\alpha = u u d d u u u d d u d u d d u d$ και $\beta = u u d d u u u d d u d u d d u d$ ισχύει ότι $\alpha \preceq \beta$ (βλ. επόμενο σχήμα), το οποίο μπορεί να επαληθευτεί αλγεβρικά με τη βοήθεια των κυρίαρχων ακολουθιών τους $d(\alpha) = (2, 0, 3, 0, 1, 1, 0, 1)$ και $d(\beta) = (2, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 0)$.



Προφανώς, ένα μονοπάτι β καλύπτει ένα μονοπάτι α αν το β προκύπτει μετατρέποντας μια κοιλιάδα (x, y) του α στην κορυφή $(x, y + 2)$.

Ισοδύναμα, αν $d(\alpha) = (d_i)_{i \in [n]}$ και $d(\beta) = (d'_i)_{i \in [n]}$ τότε το β καλύπτει το α αν και μόνο αν υπάρχει $j \in [n - 1]$ τέτοιο ώστε $d'_i = d_i$ για κάθε $i \neq j, j + 1$ και $d'_j = d_j + 1, d'_{j+1} = d_{j+1} - 1$.

Οι Narayana και Fulton [102], χρησιμοποιώντας μια ισοδύναμη προσέγγιση, αποδεικνύουν ότι το σύνολο όλων των μονοπατιών Grand-Dyck σταθερού ημιμήκους n (δηλαδή μονοπάτια που ορίζονται παρόμοια με τα μονοπάτια Dyck αλλά επιτρέπουν βήματα κάτω από τον άξονα x , βλ. για παράδειγμα [105]) εφοδιασμένο με την διάταξη κυριαρχίας είναι τοπικά πεπερασμένο επιμεριστικό δικτυωτό. Επιπλέον, δουλειά σε αυτό το πλαίσιο έχει γίνει σε εργασίες από τον Kreweras [81, 82]. Μια πιο γενική προσέγγιση παρουσιάστηκε πρόσφατα από τους Ferrari και Pinzani [58].

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το \mathcal{D}_n είναι υποδικτυωτό του δικτυωτού όλων των μονοπατιών Grand-Dyck ημιμήκους n , έτσι ώστε αν $d(\alpha) = (d'_i)_{i \in [n]}, d(\beta) = (d''_i)_{i \in [n]}$ έχουμε

$d(\alpha \vee \beta) = (d_i)_{i \in [n]}$, όπου

$$d_1 = \max\{d'_1, d''_1\} \text{ και } d_i = \max\left\{\sum_{j=1}^i d'_j, \sum_{j=1}^i d''_j\right\} - \max\left\{\sum_{j=1}^{i-1} d'_j, \sum_{j=1}^{i-1} d''_j\right\} \text{ για κάθε } i \in [2, n]$$

και

$d(\alpha \wedge \beta) = (d_i)_{i \in [n]}$, όπου

$$d_1 = \min\{d'_1, d''_1\} \text{ και } d_i = \min\left\{\sum_{j=1}^i d'_j, \sum_{j=1}^i d''_j\right\} - \min\left\{\sum_{j=1}^{i-1} d'_j, \sum_{j=1}^{i-1} d''_j\right\} \text{ για κάθε } i \in [2, n].$$

Σημειώνουμε ότι το μέγιστο (αντ. το ελάχιστο) στοιχείο του \mathcal{D}_n είναι το $\bar{1}_n = u^n d^n$ (αντ. το $\bar{0}_n = (ud)^n$), με $d(\bar{1}_n) = (\underbrace{n, 0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ φορές}})$ και $d(\bar{0}_n) = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n)$. Τέλος, για κάθε $n \geq 2$ το $\bar{1}_n$

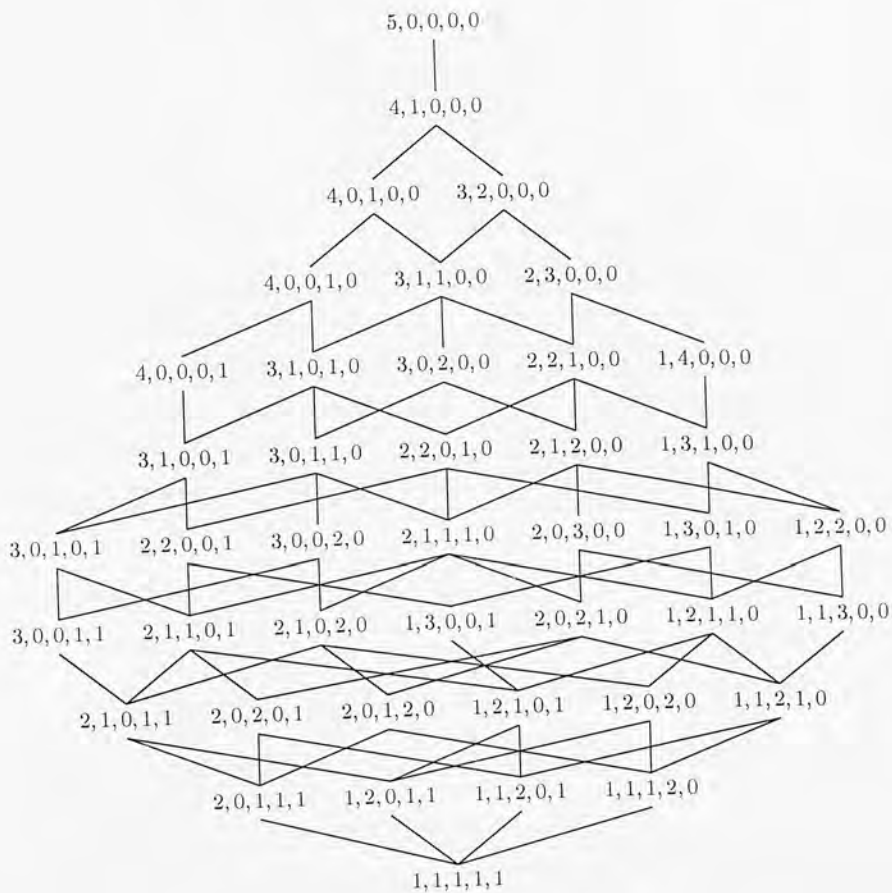
καλύπτει ένα και μόνο στοιχείο του \mathcal{D}_n , το $u^{n-1} d u d^{n-1}$.

Το διάγραμμα Hasse του \mathcal{D}_5 , κωδικοποιημένο με κυρίαρχες ακολουθίες, απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1.

Στην ενότητα αυτή πρώτα υπολογίζεται το μήκος των μεγιστικών αλυσίδων των διαστημάτων του \mathcal{D}_n .

Πρόταση 2.3.1. Έστω $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_n$ με $\alpha \preceq \beta$ και $d(\alpha) = (d_i)_{i \in [n]}, d(\beta) = (d'_i)_{i \in [n]}$. Τότε το μήκος κάθε μεγιστικής αλυσίδας \mathcal{C} του $[\alpha, \beta]$ ισούται με

$$\sum_{i=1}^n i(d_i - d'_i).$$



Σχήμα 2.1: Το διάγραμμα Hasse του \mathcal{D}_5

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς το μήκος k της C . Αν $k = 1$ τότε το β καλύπτει το α , άρα υπάρχει $j \in [n-1]$ με $d_i = d'_i$ για κάθε $i \in [n] \setminus \{j, j+1\}$ και $d'_j = d_j + 1, d'_{j+1} = d_{j+1} - 1$.

Επομένως,

$$\sum_{i=1}^n i(d_i - d'_i) = j(d_j - d'_j) + (j+1)(d_{j+1} - d'_{j+1}) = j(-1) + (j+1)1 = 1.$$

Επειδή στην περίπτωση αυτή η μοναδική μεγιστική αλυσίδα του $[\alpha, \beta]$ είναι η $\{\alpha, \beta\}$ και έχει μήκος 1, το αποτέλεσμα ισχύει όταν $k = 1$.

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε μεγιστική αλυσίδα του $[\alpha, \beta]$ μήκους k , για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_n$ με $\alpha \preceq \beta$. Θα αποδειχθεί ότι η ότι η πρόταση ισχύει επίσης για κάθε μεγιστική αλυσίδα C του $[\alpha, \beta]$ μήκους $k+1$.

Αν γ είναι προηγούμενος του β στην αλυσίδα C , τότε η $C \setminus \{\beta\}$ είναι μια μεγιστική αλυσίδα του $[\alpha, \gamma]$ μήκους k οπότε, από την υπόθεση της επαγωγής ισχύει ότι

$$k = \sum_{i=1}^n i(d_i - d''_i)$$

όπου $d(\gamma) = (d''_i)_{i \in [n]}$.

Επειδή $\sum_{i=1}^n i(d''_i - d'_i) = 1$, λαμβάνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^n i(d_i - d'_i) = \sum_{i=1}^n i(d_i - d''_i + d''_i - d'_i) = \sum_{i=1}^n i(d_i - d''_i) + \sum_{i=1}^n i(d''_i - d'_i) = k + 1.$$

□

Πόρισμα 2.3.2. Το δικτυωτό \mathcal{D}_n είναι διαβαθμισμένο με τάξη $\binom{n}{2}$, και η τάξη κάθε μονοπατιού $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με $d(\alpha) = (d_i)_{i \in [n]}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\rho(\alpha) = \binom{n+1}{2} - \sum_{i=1}^n id_i. \quad (2.2)$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση για $\alpha = \hat{0}_n$ και $\beta = \hat{1}_n$ οπότε προκύπτει ότι κάθε μεγιστική αλυσίδα του \mathcal{D}_n έχει μήκος

$$\sum_{i=1}^n i(d_i - d'_i) = 1 - n + \sum_{i=2}^n i(1 - 0) = 1 - n + \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \binom{n}{2}.$$

Επιπλέον, εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση για το $\hat{0}_n$ αντί του α , και το α αντί του β , προκύπτει ότι

$$\rho(\alpha) = \sum_{i=1}^n i(1 - d_i) = \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n id_i = \binom{n+1}{2} - \sum_{i=1}^n id_i.$$

□

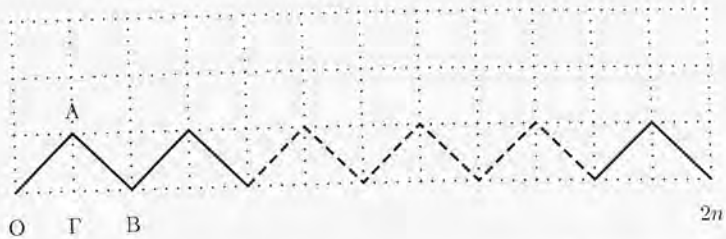
Οι Ferrari και Pinzani [58, Proposition 3.1] δίνουν μια ισοδύναμη έκφραση της παραπάνω σχέσης, χρησιμοποιώντας την έννοια του εμβραδού ενός μονοπατιού Dyck.

Για κάθε $\alpha \in D \setminus \{\epsilon\}$ ισχύει ότι

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{2}(E(\alpha) - l(\alpha)) \quad (2.3)$$

όπου $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που ευρίσκεται ανάμεσα στο α και τον άξονα των x .
Πράγματι, είναι

$$E(\bar{0}_n) = n(OAB) = n \frac{1}{2}(A\Gamma)(OB) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = n$$



και $E(\beta) = E(\alpha) + 2$, όταν $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_n$ με β καλύπτει το α , αφού σε αυτή την περίπτωση τα χωρία που ορίζονται από τα β, α και τον άξονα των x διαφέρουν κατά ένα τετράγωνο πλευράς $\sqrt{2}$ (βλ. επόμενο σχήμα).



Κατόπιν τούτων η απεικόνιση g/D_n με

$$g(\alpha) = \frac{1}{2}(E(\alpha) - n)$$

ικανοποιεί τις σχέσεις $g(\bar{0}_n) = 0$ και $g(\beta) = g(\alpha) + 1$ όταν το β καλύπτει το α , οπότε θα ισχύει ότι

$$\rho(\alpha) = g(\alpha) = \frac{1}{2}(E(\alpha) - n)$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Χρησιμοποιώντας τη (2.2) (ή την ισοδύναμή της (2.3)) προκύπτει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.3.3. Η παράμετρος “τάξη” ικανοποιεί ιδιότητα

$$\rho(u\beta d\gamma) = \rho(\beta) + \rho(\gamma) + l(\beta),$$

για κάθε $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει για $\beta, \gamma \neq \varepsilon$. (Οι περιπτώσεις όπου $\beta = \varepsilon$ ή $\gamma = \varepsilon$ αποδεικνύονται ανάλογα.)

Έστω $\beta \in \mathcal{D}_n$ και $\gamma \in \mathcal{D}_m$. Αν $\alpha = u\beta d\gamma$ με $d(\alpha) = (d_i)_{i \in |n+m+1|}$, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$d(\beta) = (d_1 - 1, d_2, \dots, d_n), \quad d(\gamma) = (d_{n+2}, d_{n+3}, \dots, d_{n+m+1}) \text{ και } d_{n+1} = 0.$$

Άρα, από την σχέση (2.2) έχουμε

$$\begin{aligned}
 & \rho(\beta) + \rho(\gamma) + l(\beta) \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=2}^n id_i - d_1 + 1 + \frac{m(m+1)}{2} - \sum_{i=1}^m id_{n+i+1} + n \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + n + 1 - \sum_{i=1}^n id_i - \sum_{i=1}^m (n+i+1)d_{n+i+1} + (n+1) \sum_{i=1}^m d_{n+i+1} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + n + 1 + (n+1)m - \sum_{i=1}^{n+m+1} id_i \\
 &= \binom{n+m+2}{2} - \sum_{i=1}^{n+m+1} id_i \\
 &= \rho(\alpha).
 \end{aligned}$$

□

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.3.4. Η γεννήτρια συνάρτηση των μονοπατιών Dyck σύμφωνα με το ημιμήκος και την τάξη ικανοποιεί την εξίσωση

$$F_\rho(x, y) = 1 + xF_\rho(xy, y)F_\rho(x, y). \quad (2.4)$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής $\alpha = u\beta d\gamma$ και την Πρόταση 2.3.3 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 F_\rho(x, y) &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{\rho(\beta)+l(\beta)+\rho(\gamma)} \\
 &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D}} (xy)^{l(\beta)} y^{\rho(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{\rho(\gamma)} \right) \\
 &= 1 + xF_\rho(xy, y)F_\rho(x, y).
 \end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.3.5. Η γεννήτρια συνάρτηση τάξης του \mathcal{D}_n δίδεται από τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο

$$f_{n+1}(y) = \sum_{\nu=0}^n f_\nu(y) f_{n-\nu}(y) y^\nu,$$

όπου $f_0(y) = 1$.

Απόδειξη. Αν $f_n(y) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} y^k$ όπου $a_{n,k}$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του \mathcal{D}_n τάξεως k , τότε

επειδή $F_\rho(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)x^n$, από την Πρόταση 2.3.4 ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)x^n &= 1 + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)y^n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)x^n \right) \\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)x^{n-1} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)y^n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)x^n \right) \\ \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(y)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n f_\nu(y) f_{n-\nu}(y) y^\nu \right) x^n. \end{aligned}$$

Επομένως, τελικά προκύπτει ότι

$$f_{n+1}(y) = \sum_{\nu=0}^n f_\nu(y) f_{n-\nu}(y) y^\nu.$$

□

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρόβλημα της εύρεσης του αναλυτικού τύπου των συντελεστών της γεννήτριας συνάρτησης F , η δυσκολία του οποίου έγκειται στην επίλυση της συναρτησιακής εξίσωσης (2.4). Εντούτοις, χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση της ακολουθίας f_n προκύπτει ο παρακάτω πίνακας τιμών της $a_{n,k}$.

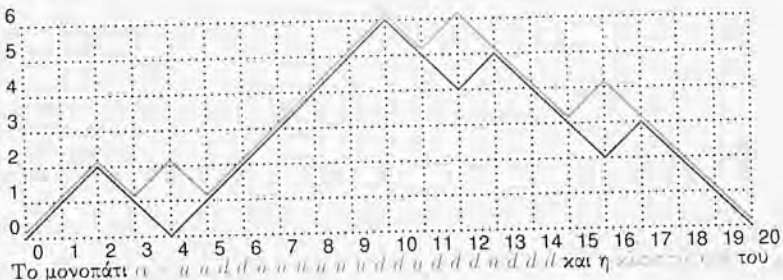
$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15
1	1														
2	1	1													
3	1	2	1	1											
4	1	3	3	3	2	1	1								
5	1	4	6	7	7	5	5	3	2	1	1				
6	1	5	10	14	17	16	14	11	9	7	5	3	2	1	1

2.4 Κλειστότητες και βαθμοί

Στην ενότητα αυτή εισάγονται και μελετώνται οι έννοιες της κλειστότητας και του βαθμού των μονοπατιών Dyck, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν και στην επόμενη ενότητα.

Κλειστότητα (closure) $\bar{\alpha}$ ενός μη κενού μονοπατιού Dyck α ονομάζεται το μονοπάτι Dyck που προκύπτει μετατρέποντας κάθε κοιλάδα (x, y) του α στην κορυφή $(x, y + 2)$. Κλειστότητα του κενού μονοπατιού θεωρείται το κενό μονοπάτι.

Για παράδειγμα η κλειστότητα του μονοπατιού $\alpha = u u u d d u u u u u u u u d d u d d d u d d d$ είναι το μονοπάτι $\bar{\alpha} = u u u d d u u u u u u u u d d u d d d$.



Παρακάτω δίδονται οι βασικές ιδιότητες της κλειστότητας.

Πρόταση 2.4.1. Έστω $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_n$, τότε ισχύει ότι

- i) $\alpha \preceq \tilde{\alpha}$, και $\alpha = \tilde{\alpha}$ αν και μόνο αν $\alpha = 1_{l(\alpha)}$.
- ii) Αν $\alpha \preceq \beta$, τότε $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$.
- iii) Το μήκος $l(\alpha, \tilde{\alpha})$ του διαστήματος $[\alpha, \tilde{\alpha}]$ ισούται με τον αριθμό $\text{val}(\alpha)$ όλων των κοιλάδων του α .
- iv) Η ισχύς του διαστήματος $[\alpha, \tilde{\alpha}]$ ισούται με $2^{\text{val}(\alpha)}$.

Απόδειξη. Οι αποδείξεις για τα i), ii), iii) είναι τετριμμένες και παραλείπονται.

Για την απόδειξη του iv) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι κάθε $\beta \in [\alpha, \tilde{\alpha}]$ τέτοιο ώστε το μήκος του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ είναι $l(\alpha, \beta) = \nu$, μπορεί να ληφθεί από το α μετατρέποντας ακριβώς ν από τις κοιλάδες του α σε κορυφές.

Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned} |[\alpha, \tilde{\alpha}]| &= \sum_{\nu=0}^{l(\alpha, \tilde{\alpha})} |\{\beta \in [\alpha, \tilde{\alpha}] : l(\alpha, \beta) = \nu\}| \\ &= \sum_{\nu=0}^{\text{val}(\alpha)} \binom{\text{val}(\alpha)}{\nu} \\ &= 2^{\text{val}(\alpha)}. \end{aligned}$$

□

Παρατηρήσεις

1. Από την ιδιότητα iii) προκύπτει άμεσα ότι

$$\rho(\tilde{\alpha}) = \rho(\alpha) + \text{val}(\alpha).$$

2. Παρατηρούμε ότι, επειδή η παράμετρος val που ορίζεται από τον αριθμό των κοιλάδων ακολουθεί την κατανομή Narayana [38], προκύπτει ότι ο αριθμός $a_{n,k}$ όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ τέτοιων ώστε το διάστημα $[\alpha, \tilde{\alpha}]$ να περιέχει ακριβώς k στοιχεία ισούται με

$$a_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n} \binom{n}{\lambda} \binom{n}{\lambda-1}, & \text{αν } k = 2^\lambda, \lambda \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{αν } k \neq 2^\lambda, \lambda \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Στη συνέχεια, χαρακτηρίζονται τα μονοπάτια Dyck που είναι κλειστότητες μονοπατιών Dyck.

Πρόταση 2.4.2. Ένα μονοπάτι Dyck α είναι κλειστότητα ενός μονοπατιού Dyck αν και μόνο αν το α είναι πρώτο και αποφεύγει το πρότυπο¹ $dduu$.

Απόδειξη. Αν $\alpha = \tilde{\beta}$ για κάποιο $\beta \in \mathcal{D}$, τότε προφανώς το α δεν έχει κοιλάδες ύψους μηδέν και άρα το α είναι πρώτο. Επιπλέον, αν το α περιέχει το πρότυπο $dduu$, τότε υπάρχει μια κοιλάδα (x, y) του α τέτοια ώστε τα σημεία $(x-1, y+1)$ και $(x+1, y+1)$ να είναι διπλή κάθετος και διπλή άνοδος του α αντίστοιχα. Από τον ορισμό της κλειστότητας προκύπτει άμεσα ότι κάθε σημείο από το οποίο διέρχεται το μονοπάτι $\tilde{\beta}$ αλλά δεν διέρχεται το β είναι κορυφή του $\tilde{\beta}$. Κατόπιν τούτου το β

¹ Δηλαδή δεν περιέχει το πρότυπο $dduu$ (βλ. Κεφάλαιο 3, σελ. 61).

διέρχεται από τα σημεία σημεία $(x-1, y+1)$, (x, y) και $(x+1, y+1)$, οπότε το (x, y) είναι επίσης κοιλάδα του β . Αυτό όμως αντιφάσκει με τον ορισμό της κλειστότητας επειδή το $(x, y+2)$ δεν είναι κορυφή του α .

Αντίστροφα, έστω ότι το α είναι πρώτο και αποφεύγει το $dduu$.

Έστω β το μονοπάτι που προκύπτει από το α μετατρέποντας κάθε κορυφή (x, y) του α στην κοιλάδα $(x, y-2)$. Προφανώς, επειδή το α είναι πρώτο δεν έχει χαμηλές κορυφές (εκτός από την τετριμμένη περίπτωση $\alpha = ud$, για την οποία το συμπέρασμα ισχύει αφού $\bar{\alpha} = \alpha$) και άρα το β δεν κατεβαίνει κάτω από τον άξονα x και άρα $\beta \in \mathcal{D}$. Για να δείξουμε ότι $\bar{\beta} = \alpha$, αρκεί να δειχθεί ότι κάθε κοιλάδα του β προέρχεται από μια κορυφή του α σύμφωνα με την προηγούμενη διαδικασία. Πράγματι, αν αυτό δεν αληθεύει και (x, y) είναι μια κοιλάδα του β που δεν κατασκευάζεται με αυτό τον τρόπο, τότε η (x, y) πρέπει να είναι επίσης κοιλάδα και του α . Αλλά επειδή το α αποφεύγει το $dduu$, έπεται ότι τουλάχιστον ένα από τα σημεία $(x-1, y+1)$ και $(x+1, y+1)$ είναι κορυφή του α και επομένως κοιλάδα του β , το οποίο αντιφάσκει με το γεγονός ότι το (x, y) είναι κοιλάδα του β . \square

Παρατηρούμε ότι το μονοπάτι Dyck β που κατασκευάζεται αλλάζοντας κάθε κορυφή ενός μονοπατιού Dyck α σε κοιλάδα είναι το ελάχιστο μονοπάτι Dyck με την ιδιότητα $\bar{\beta} = \alpha$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το β είναι η **αντικλειστότητα** (anticlosure) του α .

Στην συνέχεια, μελετάμε το σύνολο $\tilde{\mathcal{D}}$ όλων των μονοπατιών Dyck τα οποία είναι κλειστότητας μονοπατιών Dyck.

Στο παρακάτω αποτέλεσμα δίδεται η απαρίθμηση του συνόλου $\tilde{\mathcal{D}}$ όλων των μονοπατιών Dyck που είναι κλειστότητας μονοπατιών Dyck.

Πρόταση 2.4.3. Η γεννήτρια συνάρτηση F του $\tilde{\mathcal{D}}$ σύμφωνα με το ημιμήκος ικανοποιεί την εξίσωση

$$F(x) = 1 - x^2 F(x) + x F^2(x).$$

Επιπλέον, ο αριθμός a_n όλων των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n τα οποία είναι κλειστότητας μονοπατιών Dyck δίδεται από τον τύπο

$$a_n = \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} \binom{k}{n-k} \binom{3k-n}{k-1}, \quad \text{για } n \geq 2.$$

όπου $a_0 = a_1 = 1$.

Απόδειξη. Έστω \mathcal{A} το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck τα οποία αποφεύγουν το πρότυπο $dduu$ και $A(x)$ η γεννήτρια συνάρτησή τους ως προς το ημιμήκος.

Προφανώς, από την προηγούμενη πρόταση κάθε μη κενό στοιχείο του $\tilde{\mathcal{D}}$ μπορεί να γραφεί υπό την μορφή $u\beta d$ όπου $\beta \in \mathcal{A}$, και άρα $F(x) = 1 + xA(x)$.

Επιπλέον, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι κάθε μη κενό μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{A}$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο υπό τις μορφές $\alpha = u\delta\gamma$, $\alpha = u\beta d$ ή $\alpha = u\beta d u \delta \gamma$ όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$ και $\beta \neq \varepsilon$.

Επομένως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{l(\alpha)} = 1 + \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{l(\gamma)+1} + \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{A} \\ \beta \neq \varepsilon}} x^{l(\beta)+1} + \sum_{\substack{\beta, \gamma \in \mathcal{A} \\ \beta \neq \varepsilon}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+2} \\ &= 1 + xA(x) + x(A(x)-1) + x^2(A(x)-1)A(x). \end{aligned}$$

Άρα,

$$x^2 A^2(x) - (x-1)^2 A(x) + 1 - x = 0$$

οπότε

$$xF^2(x) - (1+x^2)F(x) + 1 = 0 \tag{2.5}$$

η οποία δίνει την εξίσωση που ζητάμε.

Προκειμένου να υπολογισθούν οι συντελεστές $a_{n,k}$ της γεννήτριας συνάρτησης F από την παραπάνω εξίσωση γράφουμε

$$F(x) = 1 + xH(F(x))$$

όπου $H(\lambda) = (\lambda - x)\lambda$. Από το Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange προκύπτει ότι

$$[x^\sigma]F(x) = \frac{1}{\sigma}[\lambda^{\sigma-1}](H(1+\lambda))^\sigma.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα προκύπτει ότι

$$(H(\lambda))^\sigma = \sum_{j=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{j} (-1)^j x^j \lambda^{2\sigma-j}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} (H(\lambda+1))^\sigma &= \sum_{j=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{j} (-1)^j x^j (\lambda+1)^{2\sigma-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\sigma} \sum_{i=0}^{2\sigma-j} (-1)^j \binom{\sigma}{j} \binom{2\sigma-j}{i} x^j \lambda^i \\ &= \sum_{i=0}^{2\sigma} \sum_{j=0}^{\min\{2\sigma-i, \sigma\}} (-1)^j \binom{\sigma}{j} \binom{2\sigma-j}{i} x^j \lambda^i. \end{aligned}$$

Για $i = \sigma - 1$ έπεται ότι

$$[x^\sigma]F(x) = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=0}^{\sigma} (-1)^j \binom{2\sigma-j}{\sigma-1} \binom{\sigma}{j} x^j.$$

Άρα

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\sigma} \frac{1}{\sigma} \binom{\sigma}{j} \binom{2\sigma-j}{\sigma-1} (-1)^j x^{j+\sigma} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{n-j} \binom{n-j}{j} \binom{2n-3j}{n-j-1} (-1)^j x^n. \end{aligned}$$

Αν τεθεί $n - j = k$ τότε προκύπτει ότι

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} \binom{k}{n-k} \binom{3k-n}{k-1} x^n.$$

□

Μια εκτενής μελέτη των κατανομών που ορίζονται από τα πρότυπα γίνεται στο Κεφάλαιο 3. Από τη συναρτησιακή εξίσωση της προηγούμενης πρότασης προκύπτει η αναδρομική εξίσωση

$$a_{n+1} = a_n + \sum_{\nu=0}^{n-2} a_\nu a_{n-\nu}, \text{ όπου } n \geq 2$$

με $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

Πράγματι είναι

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n a_\nu a_{n-\nu} \right) x^{n+1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} &= - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n a_\nu a_{n-\nu} \right) x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n a_\nu a_{n-\nu} \right) x^n \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^n &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n a_\nu a_{n-\nu} \right) x^n. \end{aligned}$$

Άρα,

$$a_{n+1} = \sum_{\nu=0}^n a_\nu a_{n-\nu} - a_{n-1}$$

και τελικά

$$a_{n+1} = a_n + \sum_{\nu=0}^{n-2} a_\nu a_{n-\nu}.$$

Η ακολουθία (a_n) απαρτιθμεί επίσης τα μονοπάτια Dyck που αποφεύγουν το $uudd$ (A086581 στο [124]). Το γεγονός αυτό μπορεί να εξηγηθεί αποδεικνύοντας ότι το σύνολο όλων των αντικλειστοτήτων συμπίπτει με το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck που αποφεύγουν το $uudd$.

Στη συνέχεια εισάγεται και μελετάται η έννοια του βαθμού ενός μονοπατιού Dyck. Καταρχήν, ορίζεται αναδρομικά η i -οστή κλειστότητα $\alpha^{(i)}$ ενός μη κενού μονοπατιού Dyck α ως εξής:

$$\alpha^{(0)} = \alpha \text{ και } \alpha^{(i)} = \widetilde{\alpha^{(i-1)}}, \text{ με } i \geq 1.$$

Ο ελάχιστος μη αρνητικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $\alpha^k = \tilde{1}_{l(\alpha)}$, ονομάζεται **βαθμός** του α και σημειώνεται με $\delta(\alpha)$. Ο βαθμός του κενού μονοπατιού θεωρείται μηδέν.

Για παράδειγμα, αν $\alpha = uudduuddid$ τότε $\alpha^1 = uuiduduudd$, $\alpha^2 = uuuiduduudd$, $\alpha^3 = uuuuuduudd$ και $\alpha^4 = \tilde{1}_5$, οπότε $\delta(\alpha) = 4$.

Παρακάτω δίδονται οι βασικές ιδιότητες του βαθμού.

Πρόταση 2.4.4. Έστω $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$. Τότε ισχύει ότι

- i) $\delta(\bar{\alpha}) = \delta(\alpha) - 1$, για κάθε $u \neq 1_{l(\alpha)}$.
- ii) $\delta(u\alpha d) = \delta(\alpha)$.
- iii) $0 \leq \delta(\alpha) \leq l(\alpha) - 1$, και $\delta(\alpha) = l(\alpha) - 1$ αν και μόνο αν το α δεν είναι πρώτο.
- iv) Αν $\alpha \leq \beta$, τότε $\delta(\beta) \leq \delta(\alpha)$.

Απόδειξη. Η ιδιότητα i) είναι προφανής, ενώ η ii) βασίζεται στην ισότητα $(u\alpha d)^{(i)} = u\alpha^{(i)}d$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Για την απόδειξη της iii) πρώτα θα αποδείξουμε με επαγωγή ως προς το ημιμήκος του α ότι αν α είναι μη πρώτο τότε $\delta(\alpha) = l(\alpha) - 1$.

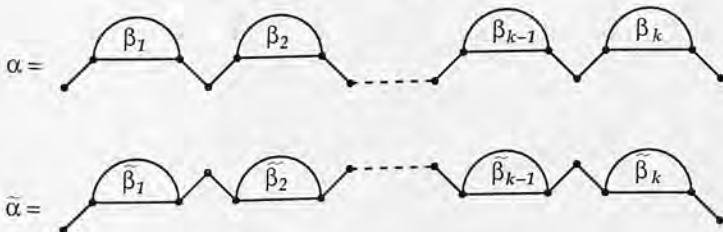
Πράγματι, αν $l(\alpha) = 2$, τότε $\alpha = udud$ και $\delta(\alpha) = 1 = l(\alpha) - 1$. Έστω ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε μη πρώτο μονοπάτι Dyck ημιμήκους $n - 1$, όπου $n \geq 3$, και έστω α ένα μη πρώτο

μονοπάτι Dyck ημιμήκους n . Τότε, χρησιμοποιώντας την διάσπαση του α σε πρώτες συνιστώσες υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία $(\beta_i)_{i \in [k]}$, $k \geq 2$, από λέξεις Dyck έτσι ώστε

$$\alpha = u\beta_1 d u \beta_2 d u \cdots d u \beta_{k-1} d u \beta_k d.$$

Εύκολα προκύπτει (βλ. επόμενο σχήμα) ότι

$$\tilde{\alpha} = u\tilde{\beta}_1 u d \tilde{\beta}_2 u d \cdots u d \tilde{\beta}_{k-1} u d \tilde{\beta}_k d.$$



Αν τεθεί

$$\gamma = \tilde{\beta}_1 u d \tilde{\beta}_2 u d \cdots u d \tilde{\beta}_{k-1} u d \tilde{\beta}_k,$$

τότε $\gamma \in \mathcal{D}$, $l(\gamma) = n - 1$, $\tilde{\alpha} = u\gamma d$ και γ είναι μη πρώτο. Άρα, από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε $\delta(\gamma) = l(\gamma) - 1$ και επομένως

$$\delta(\alpha) = \delta(\tilde{\alpha}) + 1 = \delta(\gamma) + 1 = l(\gamma) = l(\alpha) - 1.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $0 \leq \delta(\alpha)$, και $\delta(\alpha) = 0$ αν και μόνο αν $\alpha = 1_{l(\alpha)}$. Επιπλέον, αν $\alpha \neq 1_{l(\alpha)}$, τότε υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\alpha = u^\nu \beta d^\nu$, όπου β είναι ένα μη πρώτο μονοπάτι Dyck.

Οπότε, από την ii) λαμβάνουμε ότι

$$\delta(\alpha) = \delta(\beta) = l(\beta) - 1 \leq l(\alpha) - 1.$$

Αρκεί να ελεγχθεί ότι $\delta(\alpha) < l(\alpha) - 1$ για κάθε πρώτο μονοπάτι Dyck α . Πράγματι, $\alpha = u\beta d$, για $\beta \in \mathcal{D}$ και άρα $\delta(\alpha) = \delta(\beta) \leq l(\beta) - 1 = l(\alpha) - 2$.

Τέλος η ιδιότητα iv) θα αποδειχθεί χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς το ημιμήκος του α . Είναι προφανές ότι το η ιδιότητα αληθεύει όταν $l(\alpha) = 1$. Υποθέτοντας ότι η ιδιότητα ισχύει για κάθε μονοπάτι Dyck ημιμήκους $n - 1$, όπου $n \geq 2$, θα αποδείξουμε ότι αν $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_n$ με $\alpha \preceq \beta$ τότε $\delta(\beta) \leq \delta(\alpha)$. Προφανώς, από την iii), αρκεί να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου το α είναι πρώτη λέξη. Επομένως, αν $\alpha = u\alpha' d$ όπου $\alpha' \in \mathcal{D}_{n-1}$ προκύπτει ότι β είναι πρώτο με $\beta = u\beta' d$, όπου $\beta' \in \mathcal{D}_{n-1}$ και $\alpha' \preceq \beta'$. Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι $\delta(\beta) = \delta(\beta') \leq \delta(\alpha') = \delta(\alpha)$. \square

Με τη βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων, απαριθμούνται τα μονοπάτια Dyck με καθορισμένο μήκος και βαθμό.

Πρόταση 2.4.5. Ο αριθμός όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$, $n \geq 2$ με βαθμό ίσο με k , όπου $k \in [n - 1]$, υούται με $C_{k+1} - C_k$.

Απόδειξη. Προφανώς, επειδή κάθε μη κενό μονοπάτι Dyck α μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο υπό τις μορφές $\alpha = u\beta d$ ή $\alpha = u\beta d\gamma$, όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$ και $\gamma \neq \epsilon$, από την Πρόταση 2.4.5 προκύπτει ότι

$$\delta(u\beta d) = \delta(\beta) \text{ και } \delta(u\beta d\gamma) = l(u\beta d\gamma) - 1 = l(\beta) + l(\gamma),$$

οπότε

$$\begin{aligned}
 F_{\delta}(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{\delta(\alpha)} \\
 &= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{l(u\beta d)} y^{\delta(u\beta d)} + \sum_{\substack{\beta, \gamma \in \mathcal{D} \\ \gamma \neq \epsilon}} x^{l(u\beta d\gamma)} y^{\delta(u\beta d\gamma)} \\
 &= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)} y^{\delta(\beta)} + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D}} (xy)^{l(\beta)} \right) \left(\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{D} \\ \gamma \neq \epsilon}} (xy)^{l(\gamma)} \right) \\
 &= 1 + x F_{\delta}(x, y) + x C(xy) (C(xy) - 1).
 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
 F_{\delta}(x, y) &= \frac{1 + y^{-1}(C(xy) - 1) - xC(xy)}{1 - x} \\
 &= \frac{1 + y^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(xy)^n - x \sum_{n=0}^{\infty} C_n(xy)^n}{1 - x} \\
 &= \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - C_{n-1}) y^{n-1} x^n}{1 - x} \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(y) x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right),
 \end{aligned}$$

όπου

$$g_n(y) = \begin{cases} (C_n - C_{n-1}) y^{n-1}, & \text{αν } n \geq 1 \\ 1, & \text{αν } n = 0. \end{cases}$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned}
 F_{\delta}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n g_k(y) x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^n (C_k - C_{k-1}) y^{k-1} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (C_{k+1} - C_k) y^k x^n,
 \end{aligned}$$

το οποίο δίνει το επιθυμητό αποτέλεσμα. □

2.5 Η συνάρτηση Möbius

Στην ενότητα αυτή μελετάται η συνάρτηση Möbius του D_n και οι δυνάμεις της.

Πρόταση 2.5.1. Η συνάρτηση Möbius του \mathcal{D}_n δίνεται από τον τύπο

$$\mu(\alpha, \beta) = \begin{cases} (-1)^{l(\alpha, \beta)}, & \text{αν } \alpha \leq \beta \leq \bar{\alpha} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_n$.

Θα δοθούν δύο αποδείξεις. Η πρώτη είναι συντομότερη και βασίζεται σε ένα γενικότερο αποτέλεσμα για τις συναρτήσεις Möbius, ενώ η δεύτερη είναι αυτόνομη και χρησιμοποιεί τις ιδιότητες της κλειστότητας.

Απόδειξη. 1η απόδειξη

Θα εφαρμοσθεί το επόμενο γνωστό θεώρημα (βλ. [130, σελ. 24]):

Για κάθε πεπερασμένο (ή γενικότερα τοπικά πεπερασμένο) επιμεριστικό δικτυωτό η συνάρτηση Möbius δίνεται από την σχέση

$$\mu(x, y) = \begin{cases} (-1)^\nu, & \text{αν } y = \bigvee_{i=1}^{\nu} y_i \text{ όπου το } y_i \text{ καλύπτει το } x \text{ για κάθε } i \in [\nu] \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}_n$, παρατηρούμε ότι το supremum β των μονοπατιών $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ όπου β_i καλύπτει το α βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha, \bar{\alpha}]$ και ισχύει ότι $l(\alpha, \beta) = \nu$.

Πράγματι, κάθε $\beta_i, i \in [\nu]$ προκύπτει από το α δια μετατροπής μιας ακριβώς κοιλάδας του α σε κορυφή, οπότε από τον ορισμό της κλειστότητας έπεται ότι $\beta_i \leq \bar{\alpha}$ και επομένως $\bigvee_{i=1}^{\nu} \beta_i \leq \bar{\alpha}$.

Αντίστροφα, για κάθε $\beta \in [\alpha, \bar{\alpha}]$ υπάρχουν μονοπάτια $\beta_i, i \in [\nu]$ με β_i καλύπτει το α και $\beta = \bigvee_{i=1}^{\nu} \beta_i$. Τούτο έπεται άμεσα από το γεγονός ότι το β προκύπτει δια μετατροπής ορισμένων κοιλάδων του α σε κορυφές.

Κατόπιν τούτων, επειδή

$$l(\alpha, \beta) = \rho(\beta) - \rho(\alpha) = \rho\left(\bigvee_{i=1}^{\nu} \beta_i\right) - \rho(\alpha) = \rho(\alpha) + \nu - \rho(\alpha) = \nu,$$

από τη σχέση (2.6) προκύπτει άμεσα το αποτέλεσμα.

2η απόδειξη Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς το μήκος $l(\alpha, \beta)$.

Αν $l(\alpha, \beta) = 1$, τότε το β καλύπτει το α και άρα $\mu(\alpha, \beta) = -\mu(\alpha, \alpha) = -1$.

Αν ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $\beta \in \mathcal{D}_n$ με $l(\alpha, \beta) < k$, όπου $k \geq 2$, θα αποδειχθεί όταν $\beta \in \mathcal{D}_n$ με $l(\alpha, \beta) = k$.

Διακρίνονται δύο περιπτώσεις.

1. Αν $\beta \leq \bar{\alpha}$, τότε το β προκύπτει μετατρέποντας k από τις κοιλάδες του α , έστω τις B_1, B_2, \dots, B_k , σε κορυφές.

Επιπλέον, κάθε μονοπάτι $\gamma \in [\alpha, \beta]$ με $l(\alpha, \gamma) = \nu$, όπου $0 \leq \nu \leq k-1$, λαμβάνεται από το α μετατρέποντας ν από τις κοιλάδες B_1, B_2, \dots, B_k του α σε κορυφές και επομένως υπάρχουν ακριβώς $\binom{k}{\nu}$ μονοπάτια $\gamma \in [\alpha, \beta]$ με $l(\alpha, \gamma) = \nu$. Για κάθε ένα από τα μονοπάτια αυτά ισχύει $l(\alpha, \gamma) < k$ και $\gamma \in [\alpha, \bar{\alpha}]$. Συνεπώς, από την υπόθεση της επαγωγής, προκύπτει $\mu(\alpha, \gamma) = (-1)^{l(\alpha, \gamma)}$.

Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} \mu(\alpha, \beta) &= - \sum_{\gamma \in [\alpha, \beta]} \mu(\alpha, \gamma) \\ &= - \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{\substack{\gamma \in [\alpha, \beta] \\ l(\alpha, \gamma) = \nu}} \mu(\alpha, \gamma) \\ &= - \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k}{\nu} (-1)^\nu \\ &= (-1)^{l(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

2. Αν $\beta \not\leq \bar{\alpha}$ τότε $\bar{\alpha} \wedge \beta < \beta$.

Εξάλλου, αν $\gamma \in [\alpha, \beta]$ με $\mu(\alpha, \gamma) \neq 0$ τότε, επειδή $l(\alpha, \gamma) < l(\alpha, \beta) = k$, από την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι $\gamma \leq \bar{\alpha}$ και άρα $\gamma \leq \bar{\alpha} \wedge \beta$.

Επομένως,

$$\begin{aligned} \mu(\alpha, \beta) &= - \sum_{\alpha \leq \gamma < \beta} \mu(\alpha, \gamma) = - \sum_{\substack{\alpha \leq \gamma < \beta \\ \mu(\alpha, \gamma) \neq 0}} \mu(\alpha, \gamma) \\ &= - \sum_{\alpha \leq \gamma \leq \bar{\alpha} \wedge \beta} \mu(\alpha, \gamma) = 0. \end{aligned}$$

□

Στα επόμενα, χρησιμοποιώντας ανάλογες ιδέες μελετώνται οι δυνάμεις της συνάρτησης Möbius στο \mathcal{D}_n . Θα χρησιμοποιηθεί το επόμενο λήμμα, το οποίο είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης.

Λήμμα 2.5.2. Για κάθε επαναληπτική αλυσίδα $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k$ στο \mathcal{D}_n με

$$\mu(\alpha_0, \alpha_1)\mu(\alpha_1, \alpha_2)\cdots\mu(\alpha_{k-1}, \alpha_k) \neq 0$$

ισχύει ότι $\alpha_i \leq \widetilde{\alpha_{i-1}}$ και $\alpha_i \leq \alpha_0^{(i)}$ για κάθε $i \in [k]$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις δυνάμεις $\mu^k(\alpha, \bar{1}_n)$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}_n$.

Αν $k < \delta(\alpha)$, τότε για κάθε επαναληπτική αλυσίδα $\alpha = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k = \bar{1}_n$ ισχύει ότι $\alpha_0^{(k)} < \alpha_k = \bar{1}_n$ οπότε από το προηγούμενο Λήμμα προκύπτει ότι

$$\mu(\alpha_0, \alpha_1)\mu(\alpha_1, \alpha_2)\cdots\mu(\alpha_{k-1}, \alpha_k) = 0.$$

Κατόπιν τούτων θα είναι $\mu^k(\alpha, \bar{1}_n) = 0$ για κάθε $k < \delta(\alpha)$.

Στο επόμενο αποτέλεσμα θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου $k = \delta(\alpha)$.

Πρόταση 2.5.3. Έστω $\alpha \in \mathcal{D}_n$ και $j, \nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha^{(j)} = \bar{0}_n^{(\nu)}$. Τότε, ισχύει ότι

$$\mu^{\delta(\alpha)}(\alpha, \bar{1}_n) = (-1)^{l(\alpha^{(j)}, \bar{1}_n)} \mu^j(\alpha, \alpha^{(j)}).$$

Απόδειξη. Αν $\alpha = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{\delta(\alpha)} = \bar{1}_n$ είναι μια επαναληπτική αλυσίδα του \mathcal{D}_n με

$$\mu(\alpha_0, \alpha_1)\mu(\alpha_1, \alpha_2)\cdots\mu(\alpha_{\delta(\alpha)-1}, \alpha_{\delta(\alpha)}) \neq 0,$$

τότε από το Λήμμα 2.5.2 προκύπτει ότι $\alpha_i \leq \widetilde{\alpha_{i-1}}$ και $\alpha_i \leq \alpha^{(i)}$ για κάθε $i \in [\delta(\alpha)]$.

Αρχικά θα αποδειχθεί ότι $\alpha_i = \alpha^{(i)}$ για κάθε $i \geq j$. Πράγματι, εάν αυτό δεν αληθεύει, έστω ξ το μέγιστο στοιχείο του διαστήματος $[j, \delta(\alpha)]$ με $\alpha_\xi < \alpha^{(\xi)}$. Προφανώς, επειδή $\alpha_{\delta(\alpha)} = \bar{1}_n = \alpha^{(\delta(\alpha))}$, προκύπτει ότι $\xi < \delta(\alpha)$. Επειδή $\alpha^{(\xi+1)} = \alpha_{\xi+1} \leq \widetilde{\alpha_\xi} \leq \alpha^{(\xi+1)}$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha^{(\xi+1)} = \widetilde{\alpha_\xi}$. Επιπλέον, επειδή $\alpha^{(\xi)} = \bar{0}_n^{(\nu+\xi-j)}$, $\alpha^{(\xi+1)} = \bar{0}_n^{(\nu+\xi-j+1)}$ και η αντικλειστότητα κάθε $\bar{0}_n^{(k+1)}$ είναι το $\bar{0}_n^{(k)}$ προκύπτει ότι $\alpha^{(\xi)}$ είναι η αντικλειστότητα του $\alpha^{(\xi+1)}$, ενώ ισχύει ότι $\widetilde{\alpha_\xi} = \alpha^{(\xi+1)}$ και $\alpha_\xi < \alpha^{(\xi)}$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $\alpha_i = \alpha^{(i)}$ για κάθε $i \geq j$.

Κατόπιν τούτων θα είναι

$$\mu^{\delta(\alpha)}(\alpha, \bar{1}_n) = \sum \mu(\alpha_0, \alpha_1)\mu(\alpha_1, \alpha_2)\cdots\mu(\alpha_{j-1}, \alpha^{(j)})\mu(\alpha^{(j)}, \alpha^{(j+1)})\cdots\mu(\alpha^{(\delta(\alpha)-1)}, \alpha^{(\delta(\alpha))})$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται στο σύνολο των επαναληπτικών αλυσίδων $\alpha = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_j = \alpha^{(j)}$ του \mathcal{D}_n .

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.5.1, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \mu(\alpha^{(j)}, \alpha^{(j+1)}) \mu(\alpha^{(j+1)}, \alpha^{(j+2)}) \dots \mu(\alpha^{(\delta(\alpha)-1)}, \alpha^{(\delta(\alpha))}) \\ &= (-1)^{l(\alpha^{(j)}, \alpha^{(j+1)})} (-1)^{l(\alpha^{(j+1)}, \alpha^{(j+2)})} \dots (-1)^{l(\alpha^{(\delta(\alpha)-1)}, \alpha^{(\delta(\alpha))})} \\ &= (-1)^{l(\alpha^{(j)}, \hat{1}_n)}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\mu^{\delta(\alpha)}(\alpha, \hat{1}_n) = (-1)^{l(\alpha^{(j)}, \hat{1}_n)} \mu^j(\alpha, \alpha^{(j)}).$$

□

Παρατήρηση Έστω \mathcal{N} το σύνολο όλων των μη κενών μονοπατιών Dyck α με $\tilde{\alpha} = \hat{0}_{l(\alpha)}^{(\nu)}$ για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}^*$. Τότε, εφαρμόζοντας την προηγούμενη Πρόταση για $j = 1$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mu^{\delta(\alpha)}(\alpha, \hat{1}_{l(\alpha)}) &= (-1)^{l(\tilde{\alpha}, \hat{1}_{l(\alpha)})} \mu(\alpha, \tilde{\alpha}) \\ &= (-1)^{l(\tilde{\alpha}, \hat{1}_{l(\alpha)})} (-1)^{l(\alpha, \tilde{\alpha})} \\ &= (-1)^{l(\alpha, \hat{1}_{l(\alpha)})} \end{aligned}$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$.

Ειδικότερα αν $\alpha = \hat{0}_n$ όπου $n \in \mathbb{N}^*$, τότε $\delta(\alpha) = n - 1$ και

$$\mu^{n-1}(\hat{0}_n, \hat{1}_n) = (-1)^{\binom{n}{2}}.$$

Άρα προκύπτει ότι το πολυώνυμο ζήτα του \mathcal{D}_n ικανοποιεί την επόμενη ισότητα:

$$Z(\mathcal{D}_n, -k) = \begin{cases} (-1)^{\binom{n}{2}}, & \text{αν } k = n - 1 \\ 0, & \text{αν } 1 \leq k < n - 1. \end{cases}$$

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με την απαρίθμηση των συνόλων $\mathcal{N} \cap \mathcal{D}_n$.

Πρόταση 2.5.4. Έστω $\mathcal{N}_{\nu, n} = \{\alpha \in \mathcal{D}_n : \tilde{\alpha} = \hat{0}_n^{(\nu)}\}$.

(i) Για κάθε ν, n με $n \geq \nu + 1$ ισχύει ότι

$$|\mathcal{N}_{\nu, n}| = F_{n-\nu+2},$$

όπου (F_n) είναι η ακολουθία των αριθμών Fibonacci.

(ii) $|\mathcal{N} \cap \mathcal{D}_n| = F_{n+3} - 3$.

Απόδειξη.

(i) Είναι φανερό, ότι για κάθε $p \in \mathbb{N}^*$, η απεικόνιση $\mathcal{N}_{\nu, n} \ni \alpha \rightarrow u^p \alpha d^p \in \mathcal{N}_{\nu+p, n+p}$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επομένως συμπεραίνουμε ότι

$$|\mathcal{N}_{\nu, n}| = |\mathcal{N}_{\nu+p, n+p}| \tag{2.7}$$

για κάθε $p \in \mathbb{N}^*$.

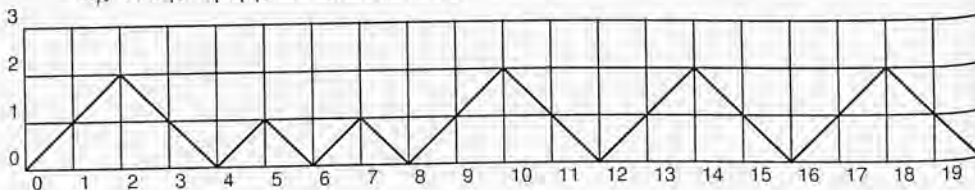
Κατόπιν τούτου αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$|\mathcal{N}_{1, n}| = F_{n+1}$$

για κάθε $n \geq 2$.

Για το σκοπό αυτό θα αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{N}_{1,n}$ συμπίπτει με το σύνολο των μονοπατιών Fibonacci. Πράγματι, κάθε στοιχείο του $\mathcal{N}_{1,n}$ προκύπτει δια μετατροπής ορισμένων κορυφών του $\tilde{0}_n$ σε κοιλάδες. Εντούτοις, κατά τη διαδικασία γέννησης των στοιχείων του $\mathcal{N}_{1,n}$ πρέπει να μετατρέψουμε τουλάχιστον μια κορυφή από κάθε ζεύγος διαδοχικών κορυφών του $\tilde{0}_n$ σε κοιλάδα.

Για παράδειγμα το μονοπάτι α του Σχήματος 2.2 προκύπτει δια μετατροπής της 2ης, 3ης, 4ης, 6ης και 8ης κορυφής του $\tilde{0}_{10}$ σε κοιλάδες.



Σχήμα 2.2: Ένα μονοπάτι Fibonacci

Τότε όμως, τα στοιχεία του $\mathcal{N}_{1,n}$ θα είναι όλα τα γινόμενα πυραμίδων ύψους 1 ή 2, (βλ. Σχήμα 2.2), δηλαδή μονοπάτια Fibonacci (βλ. σελ. 22).

(ii) Από το (i) και την ταυτότητα (1.31) προκύπτει ότι

$$|\mathcal{N} \cap \mathcal{D}_n| = \sum_{\nu=1}^{n-1} |\mathcal{N}_{\nu,n}| = \sum_{\nu=1}^{n-1} F_{n-\nu+2} = \sum_{k=3}^{n+1} F_k = F_{n+3} - 3.$$

□

Σημειώνουμε ότι οι αριθμοί $F_n - 3$ απαριθμούν και ορισμένα άλλα συνδυαστικά αντικείμενα (βλ. A006327 στο [124]).

2.6 Μεγιστικές αλυσίδες και τριγωνικά Young tableaux

Στην ενότητα αυτή υπολογίζεται ο αριθμός των μεγιστικών αλυσίδων του \mathcal{D}_n . Τούτο επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των τριγωνικών tableaux Young και της hook-length formula (2.1).

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας δίδεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.6.1. Υπάρχει μια αμφιμοσσήμαντη απεικόνιση μεταξύ του συνόλου όλων των μεγιστικών αλυσίδων του \mathcal{D}_n και του συνόλου όλων των τριγωνικών tableaux Young μεγέθους $\binom{n}{2}$.

Μια απόδειξη της πρότασης αυτής μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας την γνωστή αμφιμοσσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των tableaux Young σχήματος λ και των μεγιστικών αλυσίδων του δικτυωτού Young σχήματος λ . Σύμφωνα με την απεικόνιση αυτή, μια δοσμένη αλυσίδα από διαγράμματα Ferrers αντιστοιχεί σε ένα tableau το οποίο αριθμείται σύμφωνα με τη σειρά που προστίθεται το αντίστοιχο κελί στην αλυσίδα [60]. Κατόπιν, παρατηρώντας ότι το συμπλήρωμα ενός τριγωνικού διαγράμματος Ferrers αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε ένα μονοπάτι Dyck (βάζοντας στην αρχή μια άνοδο και στο τέλος μια κάθοδο), προκύπτει ότι κάθε αλυσίδα από μονοπάτια Dyck αντιστοιχεί σε μια αλυσίδα από διαγράμματα Ferrers με αντίστροφη διάταξη.

Στην παρούσα διατριβή θα δοθεί μια άμεση απόδειξη, κατασκευάζοντας μια απευθείας απεικόνιση μεταξύ των μεγιστικών αλυσίδων του \mathcal{D}_n και των τριγωνικών tableaux Young μεγέθους $\binom{n}{2}$.

Απόδειξη. Έστω C μια μεγιστική αλυσίδα του \mathcal{D}_n . Για κάθε $i \in [n-1]$, $j \in [n-i]$ έστω α_{ij} το ελάχιστο στοιχείο της C το οποίο βρίσκεται πάνω (με την ευρεία έννοια) από το σημείο $B_{ij} = (n-i+j, n-i-j+2)$, δηλαδή

$$h_{\alpha_{ij}}(n-i+j) \geq n-i-j+2.$$

(Ένα παράδειγμα μονοπατιού που βρίσκεται πάνω από το σημείο B_{ij} είναι το μονοπάτι $\bar{1}_n$ με $h_{\bar{1}_n}(n-i+j) = n-|i-j| \geq n-i-j+2$.)

Καταρχήν, παρατηρούμε ότι το α_{ij} διέρχεται από το σημείο B_{ij} , δηλαδή

$$h_{\alpha_{ij}}(n-i+j) = n-i-j+2.$$

Πραγματικά, αν β είναι το προηγούμενο του α_{ij} στην C , τότε ισχύει ότι

$$h_{\beta}(n-i+j) = h_{\alpha_{ij}}(n-i+j) - 2 < n-i-j+2 \leq h_{\alpha_{ij}}(n-i+j).$$

Επειδή οι αριθμοί $n-i-j+2$ και $h_{\alpha_{ij}}(n-i+j)$ είναι της ίδιας αρτιότητας, προκύπτει $h_{\alpha_{ij}}(n-i+j) = n-i-j-2$.

Ορίζουμε την απεικόνιση f από το σύνολο των μεγιστικών αλυσίδων του \mathcal{D}_n στο σύνολο των τριγωνικών tableaux Young, με $f(C) = (t_{ij})$, $i \in [n-1]$, $j \in [n-i]$, όπου

$$t_{ij} = \binom{n}{2} - \rho(\alpha_{ij}) + 1.$$

Θα δείχθει ότι το (t_{ij}) είναι ένα τριγωνικό tableau Young.

Προφανώς, επειδή $\rho(\alpha_{ij}) \in \left\{ \binom{n}{2} \right\}$, έπεται ότι $t_{ij} \in \left\{ \binom{n}{2} \right\}$.

Θα δείξουμε ότι $t_{i_1 j_1} \neq t_{i_2 j_2}$, αν $i_1 \neq i_2$ ή/και $j_1 \neq j_2$. Αρχεί να δείχθει ότι $\alpha_{i_1 j_1} \neq \alpha_{i_2 j_2}$. Δίχως βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $\alpha_{i_1 j_1} \preceq \alpha_{i_2 j_2}$. Αφού το προηγούμενο μονοπάτι, έστω β , του $\alpha_{i_2 j_2}$ στην C ευρίσκεται πάνω από τα ίδια σημεία από τα οποία ευρίσκεται πάνω και το $\alpha_{i_2 j_2}$ με εξαίρεση το σημείο $B_{i_2 j_2}$, προκύπτει ότι το β ευρίσκεται επίσης πάνω από το σημείο $B_{i_1 j_1}$: επομένως, $\alpha_{i_1 j_1} \preceq \beta$ και άρα $\alpha_{i_1 j_1} \neq \alpha_{i_2 j_2}$.

Τέλος, ισχύει ότι $t_{ij} < \min\{t_{i+1,j}, t_{i,j+1}\}$, για κάθε $i \in [n-2]$, $j \in [n-i-1]$. Πραγματικά, εύκολα αποδεικνύεται ότι το α_{ij} ευρίσκεται πάνω από τα σημεία $B_{i,j+1}$ και $B_{i+1,j}$, οπότε $\alpha_{i,j+1} \prec \alpha_{ij}$ και $\alpha_{i+1,j} \prec \alpha_{ij}$, αφού το $\alpha_{i,j+1}$ (αντίστοιχα το $\alpha_{i+1,j}$) είναι το ελάχιστο στην C το οποίο ευρίσκεται πάνω από το $B_{i+1,j}$ (αντίστοιχα το $B_{i,j+1}$).

Επομένως (t_{ij}) είναι τριγωνικό tableau Young.

Αντίστροφα, δοθέντος ενός τριγωνικού tableau Young (t_{ij}) , ορίζουμε αναδρομικά μια οικογένεια από μονοπάτια α_{ij} , $i \in [n-1]$, $j \in [n-i]$ του \mathcal{D}_n τέτοια ώστε αν $t_{i',j'} = t_{ij} + 1$, τότε το σημείο $B_{i+1,j+1}$ είναι κοιλάδα του $\alpha_{i',j'}$ και το α_{ij} λαμβάνεται από το $\alpha_{i',j'}$ μετατρέποντας αυτή την κοιλάδα στην κορυφή B_{ij} . Συνεπώς, αν $t_{lm} = \binom{n}{2}$ τότε $m = n-l$ και το σημείο $B_{l+1,m+1} = (2m, 0)$ είναι κοιλάδα του $\hat{0}_n$, οπότε το α_{lm} ορίζεται ως το μονοπάτι Dyck το οποίο λαμβάνεται μετατρέποντας κοιλάδα του $\hat{0}_n$ στην κορυφή $B_{lm} = (2m, 2)$.

Υποθέτοντας τώρα ότι το $\alpha_{i',j'}$ έχει οριστεί για κάθε $i' \in [n-1]$, $j' \in [n-i']$ με $t_{i',j'} < t_{i',j'}$, θα ορίσουμε το α_{ij} .

Αν $j = n-i$, τότε το σημείο $B_{i+1,j+1} = (2j, 0)$ είναι κοιλάδα του $\alpha_{i',j'}$, όπου $t_{i',j'} = t_{ij} + 1$: άρα, το α_{ij} ορίζεται και πάλι ως το μονοπάτι Dyck το οποίο λαμβάνεται μετατρέποντας αυτή την κοιλάδα στην κορυφή $B_{ij} = (2j, 2)$. Αλλιώς, επειδή $t_{ij} < \min\{t_{i+1,j}, t_{i,j+1}\}$, τα μονοπάτια Dyck $\alpha_{i+1,j}$ στην κορυφή $B_{ij} = (2j, 2)$. Αλλιώς, επειδή $t_{ij} < \min\{t_{i+1,j}, t_{i,j+1}\}$, τα μονοπάτια Dyck $\alpha_{i+1,j}$ είναι ήδη καθορισμένα. Δίχως βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $t_{i+1,j} < t_{i,j+1}$. Αφού $\alpha_{i+1,j}$ είναι ήδη καθορισμένα. Δίχως βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\alpha_{i+1,j} \prec \alpha_{i+1,j}$, το $\alpha_{i+1,j}$ διέρχεται από τα σημεία $B_{i+1,j+1}$ και $B_{i,j+1}$, οπότε το σημείο $B_{i+1,j+1}$ είναι κοιλάδα του $\alpha_{i+1,j}$.

Επιπλέον, το σημείο B_{i+1j+1} είναι προφανώς κοιλιάδα του $\alpha_{i'j'}$, όπου $t_{i'j'} = t_{ij} + 1$, άρα το α_{ij} λαμβάνεται από το $\alpha_{i'j'}$, μετατρέποντας την κοιλιάδα B_{i+1j+1} στην κορυφή B_{ij} .

Έτσι $t_{i'j'} = t_{ij} + 1$ αν $\rho(\alpha_{ij}) = \rho(\alpha_{i'j'}) + 1$, και $\rho(\alpha_{im}) = 1$ όπου $t_{im} = \binom{n}{2}$, το οποίο δίδει

$$t_{ij} = \binom{n}{2} - \rho(\alpha_{ij}) + 1$$

και συνεπώς, η οικογένεια $C = \{\bar{0}_n\} \cup \{\alpha_{ij} : i \in [n-1], j \in [n-i]\}$ είναι μια μέγιστη αλυσίδα του \mathcal{D}_n με $f(C) = (t_{ij})$. \square

Παρατήρηση Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση των λέξεων Dyck από κυρίαρχες ακολουθίες μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την αντιστοιχία f ως εξής:

Για κάθε μεγιστική αλυσίδα $C = (\alpha_k)_{k \in [0, \binom{n}{2}]}$ του \mathcal{D}_n με $\rho(\alpha_k) = k$ και $d(\alpha_k) = (d_j^k)_{j \in [n]}$, έστω j_k το μοναδικό στοιχείο του $[n-1]$ τέτοιο ώστε $d_{j_k}^k = d_{j_k}^{k-1} + 1$, $k \in [1, \binom{n}{2}]$.

Τότε, $f(C) = (t_{ij})$ με $t_{ij} = \binom{n}{2} - k + 1$, όπου k είναι η τάξη στην C του $(n-i-j+1)$ -οστού στοιχείου της υποαλυσίδας του C , τα στοιχεία της οποίας έχουν $j_k = j$.

Η αντίστροφη διαδικασία δίνει $\alpha_0 = \bar{0}_n$ και αν, για $k \geq 1$, το α_{k-1} έχει προσδιορισθεί, τότε το α_k προκύπτει ως εξής:

$$d_i^k = d_i^{k-1}, \text{ για κάθε } i \in [n] \setminus \{j, j+1\} \text{ με } t_{ij} = \binom{n}{2} + 1 - k$$

και

$$d_j^k = d_j^{k-1} + 1, \quad d_{j+1}^k = d_{j+1}^{k-1} - 1.$$

Παράδειγμα Για τη μεγιστική αλυσίδα του \mathcal{D}_5 με

$d^0 = 1, 1, 1, 1, 1$, $d^1 = 1, 1, 1, 2, 0$, $d^2 = 1, 2, 0, 2, 0$, $d^3 = 1, 2, 1, 1, 0$, $d^4 = 2, 1, 1, 1, 0$, $d^5 = 2, 2, 0, 1, 0$, $d^6 = 3, 1, 0, 1, 0$, $d^7 = 3, 1, 1, 0, 0$, $d^8 = 4, 0, 1, 0, 0$, $d^9 = 4, 1, 0, 0, 0$, $d^{10} = 5, 0, 0, 0, 0$, ισχύει ότι

$$j_1 = 4, j_2 = 2, j_3 = 3, j_4 = 1, j_5 = 2, j_6 = 1, j_7 = 3, j_8 = 1, j_9 = 2, j_{10} = 1.$$

Άρα, η υποαλυσίδα του C με $j_k = 1$ αποτελείται από τα d^4, d^6, d^8 και d^{10} , δίδοντας

$$t_{11} = \binom{5}{2} - 10 + 1 = 1, \quad t_{21} = \binom{5}{2} - 8 + 1 = 3, \quad t_{31} = \binom{5}{2} - 6 + 1 = 5, \quad t_{41} = \binom{5}{2} - 4 + 1 = 7.$$

Δουλεύοντας παρόμοια, για $j_k = 2, 3$ και 4 , τελικά προκύπτει το ακόλουθο τριγωνικό tableau Young:

1	2	4	10
3	6	8	
5	9		
7			

Αντίστροφα, αν δοθεί το προηγούμενο tableau Young θεωρούμε την $d^0 = 1, 1, 1, 1, 1$.

Για $k = 1$, $\binom{5}{2} + 1 - k = \binom{5}{2} + 1 - 1 = 10 = a_{14}$: άρα $j = 4$ και επομένως $d_i^1 = d_i^0$ για κάθε $i \neq 4, 5$, ενώ $d_4^1 = d_4^0 + 1 = 2$ και $d_5^1 = d_5^0 - 1 = 0$, δίδοντας $d^1 = 1, 1, 1, 2, 0$.

Για $k = 2$, $\binom{5}{2} + 1 - k = \binom{5}{2} + 1 - 2 = 9 = a_{32}$: άρα $j = 2$ και επομένως $d_i^2 = d_i^1$ για κάθε $i \neq 2, 3$, ενώ $d_2^2 = d_2^1 + 1 = 2$ και $d_3^2 = d_3^1 - 1 = 0$, δίδοντας $d^2 = 1, 2, 0, 2, 0$ και ούτω καθεξής, δημιουργώντας την αρχική μέγιστη αλυσίδα.

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 2.6.2. Ο αριθμός των μεγιστικών αλυσίδων του \mathcal{D}_n ισούται με

$$\frac{\binom{n}{2}!}{\prod_{i=1}^{n-1} (2i-1)^{n-i}}$$

Απόδειξη. Από την hook-length formula (2.1) προκύπτει ότι το πλήθος των tableaux Young σχήματος $\lambda = (n-1, n-2, \dots, 2, 1)$ ισούται με

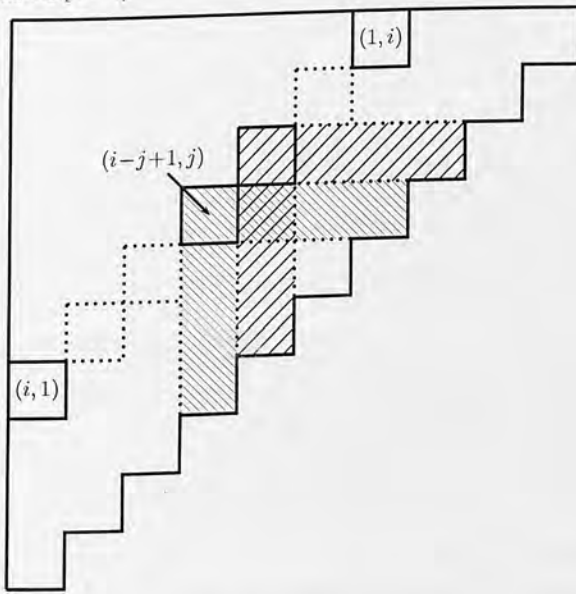
$$f_\lambda = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right)!}{\prod h(i, j)}$$

όπου (i, j) λαμβάνεται στο σύνολο όλων των κελιών του tableau.

Ισχύει ότι

$$h(i, 1) = h(i-1, 2) = \dots = h(i-j+1, j) = \dots = h(2, i-1) = h(1, i) = 2(n-i) - 1$$

για κάθε $j \in [i]$ και $i \in [n-1]$.



Επομένως,

$$f_\lambda = \frac{\binom{n}{2}!}{\prod_{i=1}^{n-1} (2(n-i) - 1)^i} = \frac{\binom{n}{2}!}{\prod_{i=1}^{n-1} (2i-1)^{n-i}}$$

□

2.7 Μονοπάτια Dyck και μεταθέσεις

Στην παράγραφο αυτή μελετάται η σχέση μεταξύ των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n και των μεταθέσεων του $[n]$. Καταρχήν, θα συνοψίσουμε ορισμένες βασικές έννοιες που αφορούν το σύνολο S_n όλων των μεταθέσεων του $[n]$.

Η ασθενής διάταξη Bruhat

Είναι γνωστό ότι το σύνολο S_n μπορεί να εφοδιαστεί με διαφορετικές διατάξεις (βλ. για παράδειγμα [14]) σύμφωνα με τις οποίες το S_n είναι ένα δικτυωτό που ικανοποιεί ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την ασθενή διάταξη Bruhat.

Μια απλή αντιμετάθεση μιας μετάθεσης $\pi = \pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)$ είναι μια άλλη μετάθεση του $[n]$ η οποία προκύπτει από την π εναλλάσσοντας κάποιο στοιχείο της, $\pi(i)$ με το $\pi(i+1)$, υπό την προϋπόθεση ότι $\pi(i) > \pi(i+1)$.

Για παράδειγμα, η μετάθεση $\sigma = 2\ 1\ 3\ 4\ 6\ 5$ είναι μια απλή αντιμετάθεση της $\pi = 2\ 1\ 3\ 6\ 4\ 5$.

Σύμφωνα με την ασθενή διάταξη Bruhat κ που ορίζεται στο S_n , μια μετάθεση π καλύπτεται μια μετάθεση σ αν η σ είναι μια απλή αντιμετάθεση της π . Επομένως, θα είναι

$\sigma \kappa \pi$ αν $\sigma = \pi$ ή υπάρχει μια ακολουθία $(\sigma_j)_{j \in [\nu]}$ στο S_n όπου $\nu \geq 2$ ώστε $\sigma_1 = \pi$, $\sigma_\nu = \sigma$ και η σ_{i+1} είναι απλή αντιμετάθεση της σ_i για κάθε $i \in [\nu-1]$.

Για παράδειγμα, αν $\pi = 6\ 3\ 4\ 2\ 5\ 1$ και $\sigma = 3\ 2\ 1\ 4\ 5\ 6$ τότε $\sigma \kappa \pi$.

Είναι γνωστό ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο S_n εφοδιασμένο με την ασθενή διάταξη Bruhat είναι ένα διαβαθμισμένο τάξεως $\binom{n}{2}$ επιμεριστικό δικτυωτό και ο αριθμός όλων των μεγιστικών αλυσίδων του ισούται με $\frac{\binom{n}{2}}{\prod_{i=1}^{n-1} (2i-1)^{n-i}}$ [54, 128].

Πρότυπα μεταθέσεων

Μια μετάθεση $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ περιέχει την μετάθεση $\tau = \tau(1)\tau(2)\cdots\tau(n)$, όπου $\nu \in [n]$ αν υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(j_i)_{i \in [\nu]}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(\sigma(j_i))$, $i \in [n]$ να έχει την ίδια σχετική διάταξη στοιχείων με τη μετάθεση τ .

Αν η μετάθεση σ δεν περιέχει τη μετάθεση τ τότε λέγεται ότι η σ αποφεύγει την τ .

Για παράδειγμα, η μετάθεση $\sigma = 4\ 3\ 6\ 1\ 5\ 2$ περιέχει τη μετάθεση $3\ 1\ 2$ τέσσερις φορές: $3\ 1\ 2$, $4\ 1\ 2$, $6\ 1\ 2$ και $6\ 1\ 5$, τη μετάθεση $1\ 3\ 2$ τρεις φορές: $1\ 5\ 2$, $3\ 6\ 5$ και $4\ 6\ 5$, ενώ αποφεύγει τη μετάθεση $1\ 2\ 3$.

Πολλοί συγγραφείς (βλ. την εργασία [72] για μια βιβλιογραφική έρευνα) έχουν ασχοληθεί με το εξής πρόβλημα: Δεδομένης μιας μετάθεσης τ , η οποία συνήθως αναφέρεται ως πρότυπο, ζητείται να ευρεθεί το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $S_n(\tau)$ όλων των μεταθέσεων μήκους n που αποφεύγουν το τ . Είναι προφανές ότι $S_n(12) = \{n(n-1)\cdots 21\}$ και $S_n(21) = \{12\cdots(n-1)n\}$. Ένα κλασικό αποτέλεσμα στην κατεύθυνση αυτή είναι ότι

$$|S_n(\tau)| = C_n, \text{ για κάθε } \tau \in S_3.$$

Κωδικοποιήσεις μεταθέσεων

Στην παράγραφο αυτή δίδεται μια κωδικοποίηση του συνόλου S_n από πεπερασμένες ακολουθίες συνόλων, η οποία θα χρησιμοποιηθεί στην επόμενη παράγραφο.

Έστω \mathcal{L}_n το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών $(A_i)_{i \in [n]}$ που αποτελούνται από ξένα ανά δύο υποσύνολα του $[n]$ έτσι ώστε $[\nu] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\nu} A_i$ για κάθε $\nu \in [n]$.

Για παράδειγμα

$$\mathcal{L}_3 = \{(\{1\}, \{2\}, \{3\}), (\{1\}, \{2, 3\}, \emptyset), (\{1, 2\}, \emptyset, \{3\}), (\{1, 2\}, \{3\}, \emptyset), (\{1, 3\}, \{2\}, \emptyset), (\{1, 2, 3\}, \emptyset, \emptyset)\}.$$

Προφανώς, από τον ορισμό του \mathcal{L}_n προκύπτει ότι $\bigcup_{i=1}^n A_i = [n]$ και αν $j \in A_i$ τότε $i \leq j$.

Θα δείξουμε ότι τα σύνολα S_n και \mathcal{L}_n μπορούν να ταυτιστούν.

Για κάθε $\sigma \in S_n$ και $i \in [n]$ ορίζουμε A_i^σ το σύνολο όλων των στοιχείων $j \in [n]$ για τα οποία υπάρχουν ακριβώς $i-1$ στοιχεία της σ , τα οποία είναι μικρότερα του j και βρίσκονται στα αριστερά του j στην σ .

Για παράδειγμα, αν $\sigma = 2\ 4\ 3\ 1\ 8\ 6\ 7\ 5$ τότε $A_1^\sigma = \{1, 2\}$, $A_2^\sigma = \{3, 4\}$, $A_3^\sigma = \emptyset$, $A_4^\sigma = \emptyset$, $A_5^\sigma = \{5, 6, 8\}$, $A_6^\sigma = \{7\}$, $A_7^\sigma = \emptyset$, $A_8^\sigma = \emptyset$.

Πρόταση 2.7.1. Η απεικόνιση $\sigma \rightarrow (A_i^\sigma)_{i \in [n]}$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των συνόλων S_n και \mathcal{L}_n .

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδειχθεί ότι $(A_i^\sigma) \in \mathcal{L}_n$. Πράγματι για $j \in [n]$, έστω l το πλήθος των στοιχείων της μετάθεσης σ τα οποία είναι μικρότερα του j και βρίσκονται στα αριστερά του j στην σ . Τότε, $j \in A_{l+1}^\sigma$ και $l+1 \in [j] \subseteq [n]$. Άρα, $j \in \bigcup_{i=1}^j A_i^\sigma$ οπότε $[n] \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i^\sigma$ και επομένως $(A_i^\sigma) \in \mathcal{L}_n$.

Αντίστροφα, αν $(A_i)_{i \in [n]} \in \mathcal{L}_n$ θα δείχθει ότι υπάρχει μοναδική μετάθεση $\sigma \in S_n$ με $A_i^\sigma = A_i$ για κάθε $i \in [n]$.

Για τον καθορισμό της μετάθεσης σ ορίζεται αναδρομικά μια πεπερασμένη ακολουθία μεταθέσεων $(\sigma_j)_{j \in [n]}$ με $\sigma_j \in S_j$ και για κάθε $j > 1$ με $j \in A_i$, όπου $i \in [n]$, η μετάθεση σ_j προκύπτει από τη μετάθεση σ_{j-1} δια τοποθετήσεως του j πριν από το i -οστό στοιχείο της σ_{j-1} αν $i < j$, ή τοποθετώντας το j στο τέλος της σ_{j-1} αν $i = j$.

Αρχικά θα αποδειχθεί ότι $A_i \subseteq A_i^\sigma$ για κάθε $i \in [n]$. Έστω $j \in A_i$. Αν $j = 1$ τότε $i = 1$ και $1 \in A_1^\sigma$. Υποθέτουμε ότι $j > 1$ τότε επειδή η μετάθεση σ_j γεννιέται από τη μετάθεση σ_{j-1} δια τοποθετήσεως του αριθμού j πριν το i -οστό στοιχείο της σ_{j-1} (αντ. στο τέλος της σ_{j-1}) αν $j > i$ (αντ. $j = i$) έπεται ότι θα υπάρχουν ακριβώς $i-1$ στοιχεία της μετάθεσης σ_j που βρίσκονται αριστερά του j στη σ_j . Επιπλέον, επειδή η μετάθεση σ προκύπτει από τη σ_j δια διαδοχικής τοποθέτησης μεγαλύτερων του j αριθμών, έπεται ότι θα υπάρχουν επίσης ακριβώς $i-1$ στοιχεία της μετάθεσης σ που βρίσκονται αριστερά του j στη σ και είναι μικρότερα του j και επομένως $j \in A_i^\sigma$. Άρα, $A_i \subseteq A_i^\sigma$ για κάθε $i \in [n]$. Αντίστροφα, αν $j \in A_i^\sigma$ θεωρούμε $k \in [n]$ με $j \in A_k$. Επειδή τότε $j \in A_k^\sigma$ θα πρέπει $i = k$ και $j \in A_i$. Άρα, $A_i^\sigma \subseteq A_i$ για κάθε $i \in [n]$, οπότε τελικά ισχύει η επιθυμητή ισότητα.

Για τη μοναδικότητα της μετάθεσης σ αρκεί να δείχθει ότι αν $A_i^\sigma = A_i^\pi$ για κάθε $i \in [n]$ έπεται ότι $\sigma = \pi$. Αν $\sigma \neq \pi$ έστω μ ο ελάχιστος αριθμός του $[n]$ με $\sigma(\mu) \neq \pi(\mu)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\sigma(\mu) < \pi(\mu)$. Έστω $i \in [n]$ με $\pi(\mu) \in A_i^\sigma$. τότε θα υπάρχουν $i-1$ στοιχεία της μετάθεσης π μικρότερα του $\pi(\mu)$ και στα αριστερά του. Επειδή λόγω της ελαχιστότητας του μ κάθε στοιχείο της π που βρίσκεται αριστερά του $\pi(\mu)$ στην π θα είναι στην ίδια θέση και στη σ και επειδή το $\pi(\mu)$ βρίσκεται δεξιά του $\sigma(\mu)$ στη σ , θα υπάρχουν τουλάχιστον i στοιχεία της σ που είναι μικρότερα του $\pi(\mu)$ και βρίσκονται αριστερά του $\pi(\mu)$ στη σ . Άρα, $\pi(\mu) \notin A_i^\sigma$ και επομένως $A_i^\sigma \neq A_i^\pi$ το οποίο είναι άτοπο. \square

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ο επόμενος χαρακτηρισμός του συνόλου S_n (312).

Πρόταση 2.7.2. Για κάθε $\sigma \in S_n$ ισχύει ότι

$\sigma \in S_n(312)$ αν για κάθε $j, k \in [n]$ με $j \in A_i^\sigma$, $k \in A_l^\sigma$ και $i < l$ έπεται ότι $j < k$.

Απόδειξη. Έστω $\sigma \in S_n(312)$ και $j, k \in [n]$ με $j \in A_i^\sigma$, $k \in A_l^\sigma$, $i < l$ και $j > k$. Επειδή κάθε στοιχείο της μετάθεσης που είναι μικρότερο του k θα είναι μικρότερο και του j και υπάρχουν περισσότερα στοιχεία της μετάθεσης που είναι μικρότερα του k και αριστερά του j στη σ από αυτά που είναι μικρότερα του j και αριστερά του j στη σ , έπεται ότι το j θα βρίσκεται αριστερά του k στη σ και θα υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο m της σ που είναι μικρότερο του k και βρίσκεται μεταξύ τους. Τότε, όμως η τριάδα jmk είναι μια εμφάνιση του προτύπου 312 στη σ , το οποίο είναι άτοπο.

Αντίστροφα, υποτίθεται ότι η ακολουθία $(A_i^σ)_{i \in [n]}$ ικανοποιεί τη συνθήκη της πρότασης ενώ η μετάθεση σ περιέχει το πρότυπο 312. Έστω jmk η πρώτη εμφάνιση του προτύπου 312 στη σ με $j \in A_i^σ$ και $k \in A_j^σ$. Τότε, επειδή $j > k$, από τη δοσμένη συνθήκη προκύπτει ότι $i \geq l$ οπότε επειδή και το m είναι μικρότερο του k και αριστερά του στη σ , πρέπει να υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο ξ που βρίσκεται αριστερά του j στη σ με $k < \xi < j$. Τότε η τριάδα ξmk είναι μια εμφάνιση του προτύπου 312 στη σ που εμφανίζεται πριν την τριάδα jmk το οποίο είναι άτοπο. \square

Πόρισμα 2.7.3. Αν $\sigma \in S_n(312)$ τότε κάθε (μη κενό) σύνολο $A_i^σ$ αποτελείται από διαδοχικούς ακεραίους αριθμούς.

Απόδειξη. Έστω $j, m \in A_i^σ$ και $k \in [n]$ με $m < k < j$. Θα αποδειχθεί ότι $k \in A_i^σ$. Πράγματι, αν $k \in A_l^σ$, με $k \neq l$, τότε εφαρμόζοντας δύο φορές τη συνθήκη της προηγούμενης πρότασης για τα ζεύγη j, k και k, m προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις $i < l$ και $l < i$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $k \in A_i^σ$. \square

2.8 Τα δικτυωτά (S_n, \times) και (\mathcal{D}_n, \preceq)

Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.7 τα δικτυωτά (S_n, \times) και (\mathcal{D}_n, \preceq) έχουν πολλές κοινές ιδιότητες και ως εκ τούτου είναι ενδιαφέρον να μελετηθεί η σχέση τους.

Για το σκοπό αυτό για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}_n$ ορίζεται το σύνολο

$$\Gamma_\alpha = \{\sigma \in S_n : d(\alpha) = (|A_i^σ|)_{i \in [n]}\}.$$

Πρόταση 2.8.1. Η οικογένεια $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}_n}$ είναι μια διαμέριση του S_n τέτοια ώστε αν $\sigma \in \Gamma_\alpha$, $\pi \in \Gamma_\beta$ και η π καλύπτει τη σ , τότε το β καλύπτει το α .

Απόδειξη. Αρχικά αποδεικνύεται ότι $\Gamma_\alpha \neq \emptyset$, για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}_n$. Πράγματι, αν $d(\alpha) = (d_i)_{i \in [n]}$, τίθεται $A_1 = \{d_1\}$ και για $i > 1$, $A_i = \emptyset$ αν $d_i = 0$ και $A_i = \{\sum_{j=1}^{i-1} d_j + 1, \sum_{j=1}^i d_j\}$ αν $d_i \neq 0$.

Θα αποδειχθεί ότι η ακολουθία $(A_i)_{i \in [n]} \in \mathcal{L}_n$ δηλαδή $[\nu] \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$. Αν $\xi \in [\nu]$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Αν $\xi \leq d_1$ τότε $\xi \in A_1$.

(ii) Αν $\xi > d_1$ τότε επειδή $\xi \leq \nu \leq \sum_{j=1}^n d_j$, θεωρώντας το ελάχιστο στοιχείο i του $[\nu]$ με $\xi \leq \sum_{j=1}^i d_j$

προκύπτει ότι $i > 1$ και $\sum_{j=1}^{i-1} d_j + 1 < \xi \leq \sum_{j=1}^i d_j$, οπότε $d_i > 0$ και $\xi \in A_i$. Άρα, $\xi \in \bigcup_{j=1}^n A_j$.

Από την Πρόταση 2.7.1 προκύπτει ότι θα υπάρχει μοναδική $\sigma \in S_n$ τέτοια ώστε $A_i = A_i^σ$ για κάθε $i \in [n]$, οπότε επειδή $|A_i| = d_i$ για κάθε $i \in [n]$ θα είναι $d(\alpha) = (|A_i^σ|)_{i \in [n]}$ και $\sigma \in \Gamma_\alpha$.

Στην συνέχεια, αν $\sigma \in S_n$, τότε επειδή η ακολουθία $(A_i^σ)_{i \in [n]}$ ανήκει στο \mathcal{L}_n , προκύπτει ότι $(|A_i^σ|)_{i \in [n]}$ είναι μια κυρίαρχη ακολουθία, οπότε υπάρχει μοναδικό μονοπάτι $\alpha \in \mathcal{D}_n$ τέτοιο ώστε $d(\alpha) = (|A_i^σ|)_{i \in [n]}$ και επομένως $\sigma \in \Gamma_\alpha$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{D}_n} \Gamma_\alpha = S_n$, και επειδή τα σύνολα Γ_α είναι ανά δύο ξένα, η οικογένεια $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}_n}$ είναι μια διαμέριση του S_n .

Τέλος, επειδή η π καλύπτει τη σ , υπάρχει μοναδικό $k \in [n-1]$ έτσι ώστε $\sigma(j) = \pi(j)$ για κάθε $j \in [n] \setminus \{k, k+1\}$ και

$$\sigma(k) = \pi(k+1) < \pi(k) = \sigma(k+1).$$

Τότε, αν $\pi(k) \in A_\nu^\pi$ ισχύουν ότι:
 $\pi(k) \in A_{\nu+1}^\sigma$, $A_i^\pi = A_i^\sigma$ για κάθε $i \in [n] \setminus \{\nu, \nu+1\}$, $A_\nu^\pi = A_\nu^\sigma \cup \{\pi(k)\}$ και $A_{\nu+1}^\pi = A_{\nu+1}^\sigma \setminus \{\pi(k)\}$.
 Άρα, επειδή $d(\alpha) = (|A_i^\sigma|)_{i \in [n]}$, $d(\alpha) = (|A_i^\pi|)_{i \in [n]}$, $|A_i^\pi| = |A_i^\sigma|$ για κάθε $i \in [n] \setminus \{\nu, \nu+1\}$, $|A_\nu^\pi| = |A_\nu^\sigma| + 1$ και $|A_{\nu+1}^\pi| = |A_{\nu+1}^\sigma| - 1$, προκύπτει ότι το β καλύπτει το α . \square

Παρατηρήσεις

1. Από την Πρόταση 2.8.1 εύκολα προκύπτει ότι αν $\sigma \in \Gamma_\alpha$ και $\pi \in \Gamma_\beta$ με $\sigma \ll \pi$, τότε $\alpha \leq \beta$.
2. Επειδή $\Gamma_{0_n} = \{0_n\}$ και $\Gamma_{1_n} = \{1_n\}$ όπου 0_n και 1_n είναι το ελάχιστο και το μέγιστο στοιχείο του S_n αντίστοιχα, από την Πρόταση 2.8.1 έπεται ότι για $\alpha \in \mathcal{D}_n$ έχουμε

$$\rho(\sigma) = \rho(\alpha) \text{ για κάθε } \sigma \in \Gamma_\alpha,$$

όπου ρ συμβολίζει την συνάρτηση τάξης.

Πρόταση 2.8.2. Το σύνολο $S_n(312) \cap \Gamma_\alpha$ είναι μονοσύνολο για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}_n$.

Απόδειξη. Για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}_n$ η μετάθεση $\sigma \in \Gamma_\alpha$ που κατασκευάζεται στο πρώτο μέρος της απόδειξης της Πρότασης 2.8.1 ικανοποιεί τη συνθήκη της Πρότασης 2.7.2, οπότε $\sigma \in S_n(312)$ και συνεπώς $S_n(312) \cap \Gamma_\alpha \neq \emptyset$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}_n$.

Επειδή $|S_n(312)| = |D_n| = C_n$ προκύπτει ότι το σύνολο $S_n(312) \cap \Gamma_\alpha$ είναι μονοσύνολο για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}_n$. \square

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τον πληθικό αριθμό του Γ_α για ένα μονοπάτι Dyck $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με $n \geq 2$. Για το σκοπό αυτό, θα αποδείξουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 2.8.3. Αν $\alpha \in \mathcal{D}_n$, έστω α' το μονοπάτι Dyck το οποίο προκύπτει από το α διαγράφοντας την πρώτη κορυφή του. Τότε, αν $d(\alpha) = (d_i)_{i \in [n]}$ και $d(\alpha') = (d'_i)_{i \in [n-1]}$, έχουμε ότι

$$d'_1 = d_1 + d_2 - 1, d'_i = d_{i+1} \text{ για κάθε } i \in [2, n-1]$$

και

$$|\Gamma_\alpha| = \binom{d_1 + d_2 - 1}{d_2} |\Gamma_{\alpha'}|. \quad (2.8)$$

Απόδειξη. Το πρώτο τμήμα του λήμματος είναι προφανές, οπότε θα περιορισθούμε στην απόδειξη της σχέσης (2.8).

Αν $\sigma' \in \Gamma_{\alpha'}$ και $B \subseteq A_1^{\sigma'}$ με $|B| = d_2$, τότε θεωρούμε την πεπερασμένη ακολουθία $(A_i)_{i \in [n]}$ που ορίζεται ως εξής: $A_1 = \{1\} \cup \{x : x-1 \in A_1^{\sigma'} \setminus B\}$, $A_2 = \{x : x-1 \in B\}$ και $A_i = \{x : x-1 \in A_{i-1}^{\sigma'}\}$ για $i \geq 3$.

Τότε, εύκολα προκύπτει ότι $(A_i)_{i \in [n]} \in \mathcal{L}$, οπότε από την Πρόταση 2.7.1 υπάρχει μοναδική $\sigma \in S_n$ τέτοια ώστε

$A_1^\sigma = \{1\} \cup \{x : x-1 \in A_1^{\sigma'} \setminus B\}$, $A_2^\sigma = \{x : x-1 \in B\}$ και $A_i^\sigma = \{x : x-1 \in A_{i-1}^{\sigma'}\}$, για κάθε $i \geq 2$.

Άρα, $|A_1^\sigma| = 1 + (|A_1^{\sigma'}| \setminus |B|) = d_1$, $|A_2^\sigma| = |B| = d_2$ και $|A_i^\sigma| = |A_{i-1}^{\sigma'}| = d'_{i-1} = d_i$ για κάθε $i \geq 3$.

Επομένως, $d(\alpha) = (|A_i^\sigma|)_{i \in [n]}$ και $\sigma \in \Gamma_\alpha$.

Επιπλέον, εύκολα προκύπτει ότι κάθε $\sigma \in \Gamma_\alpha$ κατασκευάζεται από ένα μοναδικό ζεύγος (σ', B) όπως προηγουμένως.

Άρα, επειδή $|A_1^{\sigma'}| = d_1 + d_2 - 1$ και $|B| = d_2$, προκύπτει ότι κάθε μετάθεση $\sigma' \in \Gamma_{\alpha'}$ παράγει ακριβώς $\binom{d_1 + d_2 - 1}{d_2}$ μεταθέσεις $\sigma \in \Gamma_\alpha$ σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$|\Gamma_\alpha| = \binom{d_1 + d_2 - 1}{d_2} |\Gamma_{\alpha'}|.$$

□

Πρόταση 2.8.4. Αν $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με $d(\alpha) = (d_i)_{i \in [n]}$, τότε ισχύει ότι

$$|\Gamma_\alpha| = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sum_{i=1}^j d_i - j + 1}{d_j!}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την πεπερασμένη ακολουθία $(\alpha_j)_{j \in [n]}$ από μονοπάτια Dyck, όπου $\alpha_1 = \alpha$ και για $j > 1$ το μονοπάτι Dyck α_j προκύπτει από το α_{j-1} διαγράφοντας την πρώτη του κορυφή.

Προφανώς, $\alpha_j \in \mathcal{D}_{n-j+1}$ για κάθε $j \in [n]$. Αν $d(\alpha_j) = (d_i^j)_{i \in [n-j+1]}$, τότε από το Λήμμα 2.8.3 έχουμε ότι

$$d_1^j = d_1^{j-1} + d_2^{j-1} - 1, d_i^j = d_{i+1}^{j-1} \text{ για κάθε } i \in [2, n-1]$$

και

$$|\Gamma_{\alpha_{j-1}}| = \binom{d_1^{j-1} + d_2^{j-1} - 1}{d_2^{j-1}} |\Gamma_{\alpha_j}| \quad (2.9)$$

για κάθε $j \in [2, n]$.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι $d_2^{j-1} = d_j$ και $d_1^{j-1} + d_2^{j-1} - 1 = \sum_{i=1}^j d_i - j + 1$, για κάθε $j \in [2, n]$.

Επιπλέον, από τις προηγούμενες ισότητες και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.9) για κάθε $j \in [2, n]$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} |\Gamma_\alpha| &= \prod_{j=2}^n \binom{\sum_{i=1}^j d_i - j + 1}{d_j} |\Gamma_{\alpha_n}| \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sum_{i=1}^j d_i - j + 1}{d_j!}. \end{aligned}$$

□

Σημειώνουμε ότι επειδή η οικογένεια $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}_n}$ είναι μια διαμέριση του S_n , από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει μια ταυτότητα για τον παραγοντικό αριθμό, δηλαδή

$$\sum_d \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sum_{i=1}^j d_i - j + 1}{d_j!} = n!$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται για όλες τις κυρίαρχες ακολουθίες $d = (d_i)_{i \in [n]}$.

Κεφάλαιο 3

Πρότυπα σε μονοπάτια Dyck

3.1 Εισαγωγή

Ένα σημαντικό θέμα με το οποίο ασχολούνται πολλοί ερευνητές τα τελευταία δέκα χρόνια είναι η απαρίθμηση των μονοπατιών Dyck σύμφωνα με το μήκος τους και τον αριθμό των εμφανίσεων μιας δοσμένης μορφής μονοπατιών σε αυτά.

Έτσι για παράδειγμα αν θεωρήσουμε το μονοπάτι (ή, ισοδύναμα τη λέξη) $\tau = uddd$ διατυπώνεται το ερώτημα: Πόσα μονοπάτια Dyck μήκους 50 περιέχουν το τ ακριβώς 3 φορές;

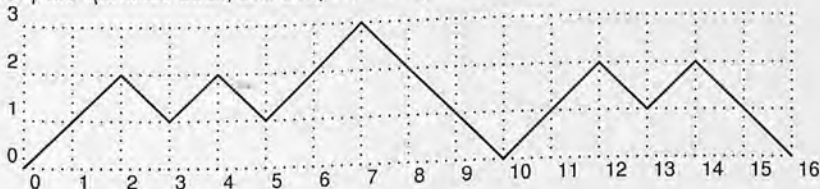
Για την απάντηση τέτοιας μορφής προβλημάτων στη γενική περίπτωση, θα δοθούν ορισμένοι ορισμοί.

Ένα μονοπάτι τ που αποτελείται από ανόδους u και καθόδους d (ή ισοδύναμα μια λέξη $\tau \in \{u, d\}^*$) το οποίο ονομάζεται **πρότυπο**, εμφανίζεται σε ένα μονοπάτι (ή ισοδύναμα σε μια λέξη) Dyck α αν $\alpha = \beta\tau\gamma$ όπου $\beta, \gamma \in \{u, d\}^*$.



Αν ένα πρότυπο τ δεν εμφανίζεται στο α τότε λέγεται ότι το α **αποφεύγει** το τ .

Για παράδειγμα το μονοπάτι α του επόμενου σχήματος έχει 3 εμφανίσεις του προτύπου uud , 1 εμφάνιση του προτύπου $uudd$, ενώ αποφεύγει το πρότυπο $duuu$.



Σχήμα 3.1: Το μονοπάτι Dyck $\alpha = u u d u d u u d d d u u d u d d$

Στη βιβλιογραφία υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός εργασιών που ασχολούνται με την εμφάνιση συγκεκριμένων προτύπων σε μονοπάτια Dyck [28, 33, 38, 83, 91, 92, 95, 115–117, 137].

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια συστηματική μελέτη της στατιστικής “αριθμός εμφανίσεων του τ ” (ή απλούστερα “αριθμός των τ ”) για οποιοδήποτε πρότυπο τ με μήκος μικρότερο ή ίσο του 4. Ορισμένα από τα αποτελέσματα είναι γνωστά, αλλά δίδονται και πολλά νέα αποτελέσματα.

Επιπλέον, γίνεται μελέτη του ίδιου προβλήματος όταν ζητείται το πρότυπο τ να εμφανίζεται σε συγκεκριμένο ύψος ή όταν εμφανίζεται σε άρτιο ή περιττό ύψος.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται είναι κυρίως αλγεβρικές, όπου εφαρμόζεται ο λογισμός των γεννητριών συναρτήσεων δύο μεταβλητών.

Το πρόβλημα αυτό όμως εξετάζεται και με συνδυαστικές μεθόδους όπου κατασκευάζονται ορισμένες καινούργιες αμφομοσώματες απεικονίσεις του συνόλου των μονοπατιών Dyck, οι οποίες παρουνιάζουν γενικότερο ενδιαφέρον.

Τα περισσότερα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού έχουν ανακοινωθεί στα συνέδρια [114, 118] και δημοσιευθεί στις εργασίες [115–117].

3.2 Πρότυπα μήκους το πολύ 4

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η στατιστική

$$N_\tau: \text{“αριθμός εμφανίσεων του } \tau\text{”}$$

για κάθε πρότυπο με μήκος μικρότερο ή ίσο του 4.

Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθεί η γεννήτρια συνάρτηση $F(x, y)$, όπου η μεταβλητή y μετράει τις εμφανίσεις του προτύπου τ στο μονοπάτι και η μεταβλητή x το μήκος του μονοπατιού. Με άλλα λόγια, ισχύει ότι

$$F(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n,k} y^k x^n$$

όπου $a_{n,k}$ είναι ο αριθμός όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ στα οποία το πρότυπο τ εμφανίζεται k φορές. Ειδικά θα συμβολίζουμε $a_n = a_{n,0}$ τον αριθμό των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ τα οποία αποφεύγουν το τ , η δε ακολουθία (a_n) θα ονομάζεται **αποφεύγουσα** (avoiding) ακολουθία για το πρότυπο τ .

Υπάρχει μια γενική μέθοδος για τον υπολογισμό των αριθμών $a_{n,k}$. Αρχικά χρησιμοποιώντας κατάλληλη διάσπαση (που εξαρτάται από τη μορφή του προτύπου) των μονοπατιών Dyck ευρίσκεται η συναρτησιακή εξίσωση που ικανοποιείται από τη γεννήτρια συνάρτηση F . Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange¹ ευρίσκεται ο αναλυτικός τύπος για τον υπολογισμό των συντελεστών της.

Παρακάτω θα δοθούν οι γεννήτριες συναρτήσεις (ή ακριβέστερα οι συναρτησιακές εξισώσεις που τις καθορίζουν) και οι αντίστοιχες ακολουθίες $a_{n,k}$ για πρότυπα με μήκος μικρότερο ή ίσο του 4.

Αποδείξεις θα δοθούν μόνο στις περιπτώσεις που δεν αναφέρονται στη βιβλιογραφία. Τέλος, ο υπολογισμός των συντελεστών $a_{n,k}$ από την αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση F θα γίνει αναλυτικά σε ένα παράδειγμα (για τα πρότυπα της μορφής $\tau = u^i d$, όπου $\mu \geq 2$) αφού οι άλλες περιπτώσεις είναι ανάλογες.

Πρότυπα μήκους 2

Τα πρότυπα μήκους 2 είναι τα εξής: uu, ud, du και dd . Έχουν μελετηθεί αναλυτικά και έχει αποδειχθεί (βλ. [38]) ότι οι αντίστοιχες στατιστικές τους ακολουθούν την κατανομή Narayana (A001263 στο [124]).

¹βλ. σελ. 12.

Συγκεκριμένα, για $\tau = ud$, ισχύει ότι

$$xF^2 - (1 + x - xy)F + 1 = 0$$

και

$$a_{n,k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k-1} \binom{n}{k} = \nu_{n,k}^2, \text{ όπου } n, k \in \mathbb{N}^*.$$

Για $\tau = uu$ ή du ή dd ισχύει ότι

$$xyF^2 - (1 - x + xy)F + 1 = 0$$

και

$$a_{n,k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k+1} = \nu_{n,k+1}, \text{ όπου } n \in \mathbb{N} \text{ και } k \in \mathbb{N}^*.$$

Επιπλέον επειδή σε κάθε μονοπάτι Dyck $\alpha \in \mathcal{D}$ ισχύει ότι

$$\# \text{ κλάσεων συγγένειας του } \alpha = N_{uu}(\alpha) + 1$$

εύκολα προκύπτει ότι ο αριθμός των Dyck μονοπατιών ημιμήκους n με k κλάσεις ισοδυναμίας ισούται με $\nu_{n,k}$.³

Σημειώνεται ότι τα πρότυπα μήκους 2 έχουν μελετηθεί γενικότερα για k -χρωματιστά μονοπάτια Motzkin [111] (Τα μονοπάτια Dyck είναι ειδική περίπτωση αυτών για $k = 0$).

Πρότυπα μήκους 3

Υπάρχουν 8 πρότυπα τ μήκους 3 από τα οποία προκύπτουν 4 διαφορετικές περιπτώσεις για μελέτη, αφού λόγω συμμετρίας ως προς τον κατακόρυφο άξονα οι στατιστικές N_τ για μερικά από αυτά (που δίδονται παρακάτω ως ζεύγη) είναι ισοκατανομημένες: $\{duu, ddu\}$, $\{udu, dud\}$, $\{uuu, ddd\}$ και $\{uid, udd\}$.

Το πρότυπο $\tau = duu$ έχει μελετηθεί από τον Deutsch [38] και έχει αποδειχθεί ότι η αντίστοιχη στατιστική ακολουθεί την κατανομή Touchard, δηλαδή ισχύει ότι

$$xyF^2 - (1 - 2(1 - y)x)F + 1 - (1 - y)x = 0$$

και

$$a_{n,k} = \frac{2^{n-2k-1}}{n} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k+1} = 2^{n-2k-1} C_k \binom{n-1}{2k}, \text{ όπου } n \in \mathbb{N}^* \text{ και } k \in \mathbb{N}.$$

Μια συνδυαστική απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος δίδεται από τον Callan [27].

Το πρότυπο $\tau = udu$ έχει μελετηθεί από τους Merlini, Sprungoli και Verrì [95] και ανεξάρτητα από τον Sun [137] και έχει αποδειχθεί ότι η αντίστοιχη στατιστική ακολουθεί την κατανομή Donaghey, δηλαδή ισχύει ότι

$$xF^2 - (1 + (1 - y)x)F + 1 + (1 - y)x = 0$$

και

$$a_{n,k} = \binom{n-1}{k} M_{n-1-k}, \text{ όπου } n \in \mathbb{N}^* \text{ και } k \in \mathbb{N},$$

όπου $M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} C_k$ είναι ο n -οστός αριθμός Motzkin (A001006 στο [124]).

²Όπου $\nu_{n,k}$ είναι οι αριθμοί Narayana, βλ. σελ. 16.

³Για περισσότερες αναρτήσεις που σχετίζονται με την έννοια της συγγένειας βλ. σελ. 166.

Ενδιαφέρουσες συνδυαστικές αποδείξεις του παραπάνω αποτελέσματος δίδονται από τον Callan [27] και τον Sun [137].

Είναι γνωστό (βλ. A092107 στο [124]) ότι για το $\tau = uuu$ η γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$x(y + x - xy)F^2 - (1 - x + xy)F + 1 = 0.$$

Επιπλέον σε αυτή την περίπτωση αποδεικνύεται ότι

$$a_{n,k} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{n+j}{n} \binom{n+1}{k-j} \sum_{i=j}^{\lfloor \frac{n+j}{2} \rfloor} \binom{n+j+1-k}{i+1} \binom{n-i}{i-j}.$$

Η απόδειξη προκύπτει, όπως για όλα τα αποτελέσματα αυτής της κατηγορίας, από το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange.

Ο τύπος είναι πολύπλοκος και θα ήταν ενδιαφέρον αν μπορούσε να απλοποιηθεί. Στην ειδική περίπτωση όπου $k = 0$, δίδει

$$a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{i} \binom{n+1-i}{i+1}$$

οπότε, χρησιμοποιώντας ένα πολύ γνωστό τύπο των αριθμών Motkzin (A001006 στο [124]), προκύπτει τελικά ότι $a_n = M_n$, δηλαδή ο αριθμός όλων των Dyck μονοπατιών που αποφεύγουν το πρότυπο uuu ισούται με τον αριθμό M_n . Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται συνδυαστικά στο [28].

Το πρότυπο $\tau = uud$ από όσο γνωρίζω δεν έχει μελετηθεί. Γενικότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρότυπο $\tau = u^\mu d$, όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$.

Προκειμένου να ευρεθεί η εξίσωση της γεννήτριας F σε αυτή την περίπτωση, θεωρείται η παρακάτω διάσπαση των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = u^i d \beta_1 d \beta_2 \cdots d \beta_{i-1} d \beta_i, \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

Επειδή

$$N_\tau(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \alpha = \epsilon \\ \sum_{j=1}^i N_\tau(\beta_j), & \text{αν } i \leq \mu - 1 \\ \sum_{j=1}^i N_\tau(\beta_j) + 1 & \text{αν } i \geq \mu \end{cases}$$

⁴Προφανώς αν $\mu = 1$ η περίπτωση αυτή δεν υφίσταται.

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{N_r(\alpha)} \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^{\mu-1} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{\sum_{j=1}^i l(\beta_j) + i} y^{N_r(\beta_j)} + \sum_{i=\mu}^{\infty} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{\sum_{j=1}^i l(\beta_j) + i} y^{\sum_{j=1}^i N_r(\beta_j) + 1} \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^{\mu-1} x^i \prod_{j=1}^i \left(\sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} y^{N_r(\beta_j)} \right) + y \sum_{i=\mu}^{\infty} x^i \prod_{j=1}^i \left(\sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} y^{N_r(\beta_j)} \right) \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^{\mu-1} x^i F^i(x, y) + y \sum_{i=\mu}^{\infty} x^i F^i(x, y) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} x^i F^i(x, y) + (y-1) \sum_{i=\mu}^{\infty} x^i F^i(x, y) \\
 &= \frac{1}{1 - xF(x, y)} + \frac{(y-1)x^\mu F^\mu(x, y)}{1 - xF(x, y)}.
 \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων προκύπτει η συναρτησιακή εξίσωση

$$(y-1)x^\mu F^\mu + xF^2 - F + 1 = 0. \quad (3.1)$$

Επειδή, η εξίσωση αυτή ικανοποιείται και από τη γεννήτρια συνάρτηση της κατανομής "αριθμός κόμβων με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του μ " σε διατεταγμένα δένδρα [40], προκύπτει ότι οι δύο αυτές στατιστικές είναι ισοκατανομημένες.

Μια συνδυαστική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος δίδεται στο Κεφάλαιο 4 (βλ. σελ. 176).

Προκειμένου να υπολογισθούν οι συντελεστές $a_{n,k}$ της γεννήτριας συνάρτησης F από την προηγούμενη εξίσωση, τίθεται

$$H(\lambda) = (y-1)x^{\mu-1}\lambda^\mu + \lambda^2$$

και

$$A(x) = F(x, y)$$

(εδώ το y θεωρείται ως παράμετρος). Στη συνέχεια εφαρμόζεται το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange, οπότε προκύπτει ότι

$$[x^\sigma]A(x) = \frac{1}{\sigma} [\lambda^{\sigma-1}] (H(1+\lambda))^\sigma$$

για κάθε $\sigma \in \mathbb{N}^*$.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 (H(1+\lambda))^\sigma &= ((y-1)x^{\mu-1}(\lambda+1)^\mu + (\lambda+1)^2)^\sigma \\
 &= (\lambda+1)^{2\sigma} ((y-1)x^{\mu-1}(\lambda+1)^{\mu-2} + 1)^\sigma \\
 &= \sum_{j=0}^{\sigma} \sum_{i=0}^{(\mu-2)j+2\sigma} \binom{\sigma}{j} \binom{(\mu-2)j+2\sigma}{i} (y-1)^j x^{(\mu-1)j} \lambda^i \\
 &= \sum_{i=0}^{\mu\sigma} \sum_{j=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{j} \binom{(\mu-2)j+2\sigma}{i} (y-1)^j x^{(\mu-1)j} \lambda^i.
 \end{aligned}$$

Για $i = \sigma - 1$ έπεται ότι

$$[x^\sigma]A(x) = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{j} \binom{(\mu-2)j+2\sigma}{\sigma-1} (y-1)^j x^{(\mu-1)j}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\sigma} \frac{1}{\sigma} \binom{\sigma}{j} \binom{(\mu-2)j+2\sigma}{\sigma-1} (y-1)^j x^{(\mu-1)j+\sigma} \\ &= 1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\sigma} \sum_{k=0}^j \frac{1}{\sigma} \binom{\sigma}{j} \binom{(\mu-2)j+2\sigma}{\sigma-1} \binom{j}{k} (-1)^{k-j} y^k x^{(\mu-1)j+\sigma} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{\mu} \rfloor} \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{\mu} \rfloor} (-1)^{k-j} \frac{1}{n - (\mu-1)j} \binom{n - (\mu-1)j}{j} \binom{2n - \mu j}{n - (\mu-1)j - 1} \binom{j}{k} y^k x^n. \end{aligned}$$

Επομένως

$$a_{n,k} = \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{\mu} \rfloor} (-1)^{j-k} \frac{1}{n - (\mu-1)j} \binom{n - (\mu-1)j}{j} \binom{2n - \mu j}{n - (\mu-1)j - 1} \binom{j}{k}$$

ή ισοδύναμα

$$a_{n,k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{\mu} \rfloor} (-1)^{j-k} \binom{2n - \mu j}{n} \binom{n+1-k}{j-k}.$$

Από τα προηγούμενα, για $\mu = 2$, προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση F της κατανομής N_τ με $\tau = uud$ και οι συντελεστές της $a_{n,k}$ δίδονται από τις σχέσεις:

$$x((y-1)x+1)F^2 - F + 1 = 0$$

και

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{j-k} \binom{2n-2j}{n} \binom{n+1-k}{j-k} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \sum_{j=2k}^n \binom{j-k-1}{k-1} \binom{n+1-k}{n-j}. \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι ο παραπάνω τύπος μετράει επίσης το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck μήκους n με k μακριές αναβάσεις (βλ. A091156 στο [124]).

Πρότυπα μήκους 4

Υπάρχουν 16 πρότυπα τ μήκους 4 από τα οποία προκύπτουν 10 διαφορετικές περιπτώσεις για μελέτη, αφού λόγω συμμετρίας ως προς τον κατακόρυφο άξονα οι στατιστικές N_τ για μερικά από αυτά (που δίδονται παρακάτω ως ζεύγη) είναι ισοκατανεμημένες: $\{uuiud, uddd\}$, $\{uudd\}$, $\{uudu, dudd\}$, $\{udui, dudud\}$, $\{udud\}$, $\{dduu\}$, $\{uiuu, dddd\}$, $\{uddu, duud\}$, $\{duuu, dddu\}$, $\{dudu\}$.

Η στατιστική N_τ έχει μελετηθεί για κάθε πρότυπο τ που ανήκει στα πρώτα 6 από τα προηγούμενα σύνολα.

Παρακάτω χάριν πληρότητας δίδονται ορισμένα στοιχεία γι' αυτά.

1. Το πρότυπο $uuud$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3.1) για $r = 3$, προκύπτει η γεννήτρια συνάρτηση F της κατανομής $\tau = uuud$ και οι συντελεστές της $a_{n,k}$:

$$(y-1)x^3F^3 + xF^2 - F + 1 = 0$$

και

$$a_{n,k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} (-1)^{j-k} \binom{2n-3j}{n} \binom{n+1-k}{j-k}. \quad (3.2)$$

Σημειώνεται ότι ο αριθμός των μονοπατιών $\alpha \in D_n$ τα οποία αποφεύγουν το πρότυπο $uuud$ (ή ισοδύναμα το πρότυπο uuu) ισούται με τον αριθμό Motzkin M_n (βλ. [27, 56]).

Τούτο προκύπτει με τη βοήθεια της αφιμοноσήμαντης απεικόνισης ϕ μεταξύ του συνόλου όλων των μονοπατιών Dyck μήκους n που αποφεύγουν το πρότυπο uuu και του συνόλου όλων των μονοπατιών Motzkin μήκους n , η οποία δίδεται σε αναδρομική μορφή ως εξής:

$$\phi(\epsilon) = \epsilon, \quad \phi(ud\gamma) = h\phi(\gamma), \quad \phi(uud\beta d\gamma) = u\phi(\beta)d\phi(\gamma),$$

όπου $\beta, \gamma \in D$.

Για παράδειγμα, αν $\alpha = u u d u d u d u d d u u d d d$, τότε

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= u \phi(u d u u d u d d u u d d) d \\ &= u h \phi(u u d u d d u u d d) d \\ &= u h u \phi(u d) d \phi(u u d d) d \\ &= u h u h d u d d. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων εφαρμόζοντας τον τύπο (3.2) για $k = 0$ προκύπτει η παρακάτω έκφραση για τους αριθμούς Motzkin (βλ. A001006 στο [124]):

$$M_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{2n-3j}{n}.$$

2. Το πρότυπο $uudd$

Η γεννήτρια συνάρτηση F και η ακολουθία των συντελεστών της $a_{n,k}$ (βλ. A098978 στο [124]) δίδονται από τις σχέσεις:

$$xF^2 + (x^2(y-1) - 1)F + 1 = 0 \quad (3.3)$$

και

$$a_{n,k} = \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{j-k}}{n-j} \binom{j}{k} \binom{n-j}{j} \binom{2n-3j}{n-j-1}.$$

Για την ακολουθία (a_n) σε αυτή την περίπτωση βλ. A086581 και A025242 στο [124].

Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία μονοπατιών είναι τα μονοπάτια Lukasiewicz. Τα μονοπάτια αυτά ορίζονται στο πρώτο τεταρτημόριο, αρχίζουν από το σημείο $(0, 0)$ και καταλήγουν στον άξονα των x με βήματα $u_i = (i, 0)$, όπου $i \in \mathbb{N}^*$, $h = (1, 0)$ και $d = (1, -1)$. Το μήκος ενός μονοπατιού Lukasiewicz είναι η τετημημένη του τελικού σημείου του. Το κενό μονοπάτι είναι το μοναδικό μονοπάτι μήκους 0.

Αποδεικνύεται ότι το πλήθος των μονοπατιών Lukasiewicz μήκους n ισούται με C_n . Επιπλέον ο αριθμός των μονοπατιών Lukasiewicz μήκους n με k κορυφές ισούται με τον αριθμό των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n στα οποία το πρότυπο $uudd$ εμφανίζεται ακριβώς k φορές.

Μια συνδυαστική απόδειξη για τους παραπάνω ισχυρισμούς επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την απεικόνιση ϕ σύμφωνα με την οποία ένα μονοπάτι Lukasiewicz απεικονίζεται στο μονοπάτι Dyck που προκύπτει από αυτό δια αντικαταστάσεως κάθε βήματος h με ud και κάθε βήματος u_i με $u^{i+1}d$.

Αναλυτικότερα, η συνάρτηση ϕ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$\phi(\epsilon) = \epsilon, \quad \phi(h\beta) = ud\phi(\beta) \quad \text{και} \quad \phi(u_i\beta_1d\beta_2d \cdots \beta_id\beta_{i+1}) = u^{i+1}d\phi(\beta_1)d\phi(\beta_2)d \cdots \phi(\beta_i)d\phi(\beta_{i+1}).$$

Τότε εύκολα προκύπτει ότι η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη και ισχύουν οι σχέσεις:

1. Μήκος του $\alpha = l(\phi(\alpha)).$

2. Αριθμός κορυφών του $\alpha = N_{uudd}(\phi(\alpha)),$ για κάθε μονοπάτι Lukasiewicz $\alpha.$

3. Το πρότυπο $uudu$

Η γεννήτρια συνάρτηση F και η ακολουθία των συντελεστών της $a_{n,k}$ δίδονται από τις σχέσεις:

$$x(1 - (1 - y)x)F^2 + ((1 - y)x^2 - 1)F + 1 = 0 \quad (3.4)$$

και

$$a_{n,k} = \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{j-k}}{n-j} \binom{j}{k} \binom{n-j}{j} \binom{2n-3j}{n-j+1}.$$

Γενικότερα στο [92] μελετώνται τα πρότυπα της μορφής $u^{\mu}du$, $\mu \in \mathbb{N}^*.$

4. Το πρότυπο $uudu$

Οι εμφανίσεις του προτύπου $uudu$ μπορούν να απεικονισθούν με μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση στις εμφανίσεις του προτύπου $uudu$, δια αλλαγής των δύο μεσαίων γραμμάτων σ' αυτές.

Αυτό λειτουργεί, διότι επικαλύψεις μπορούν να εμφανίζονται μόνο στο πρώτο ή τελευταίο u μιας εμφάνισης.

Αυστηρότερα, μπορεί να ορισθεί αναδρομικά η απεικόνιση $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ με

$$\phi(\epsilon) = \epsilon, \quad \phi(ud\gamma) = u\phi(\gamma)d \quad \text{και} \quad \phi(uu\beta d\delta d\gamma) = u\phi(\beta)du\phi(\delta)d\phi(\gamma).$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη με

$$N_{uudu}(\alpha) = N_{uudu}(\phi(\alpha)).$$

Πράγματι, αν $\alpha = uu\beta d\delta d\gamma$ (η απόδειξη των άλλων περιπτώσεων είναι απλούστερη) τότε είναι

$$\begin{aligned} N_{uudu}(\alpha) &= N_{uudu}(\beta) + N_{uudu}(\delta) + N_{uudu}(\gamma) + |\beta = \epsilon||\delta \neq \epsilon| \\ &= N_{uudu}(\phi(\beta)) + N_{uudu}(\phi(\delta)) + N_{uudu}(\phi(\gamma)) + |\phi(\beta) = \epsilon||\phi(\delta) \neq \epsilon| \\ &= N_{uudu}(\phi(\alpha)). \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, η κατανομή N_{uudu} είναι ισοκατανεμημένη με την κατανομή N_{uudu} , και επομένως η γεννήτριά της και οι συντελεστές της δίδονται στο 3.

5. Το πρότυπο $udud$

Η γεννήτρια συνάρτηση F (βλ. A094507 στο [124]) στην περίπτωση αυτή ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση

$$x(1 + (1 - y)x)F^2 - (1 + (1 - y)x(x + 1))F + 1 + (1 - y)x = 0$$

Εντούτοις, δεν γνωρίζω, απλό τύπο για τον υπολογισμό των συντελεστών της.

Για την ακολουθία (a_n) σε αυτή την περίπτωση βλ. A078481 στο [124].

Γενικότερα αποδεικνύεται⁵ ότι η γεννήτρια συνάρτηση F στη περίπτωση όπου $\tau = (ud)^\mu$, $\mu \in \mathbb{N}^*$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$x(1 + (1 - y) \sum_{i=1}^{\mu-1} x^i)F^2 - (1 + (1 - y) \sum_{i=1}^{\mu} x^i)F + (1 + (1 - y) \sum_{i=1}^{\mu-1} x^i) = 0.$$

6. Το πρότυπο $dduu$

Η γεννήτρια συνάρτηση F (βλ. A114492 στο [124]) στην περίπτωση αυτή ικανοποιεί την εξίσωση

$$x(y + (1 - y)x)F^2 - (1 + (1 - y)(x - 2)x)F + 1 - (1 - y)x = 0. \quad (3.5)$$

Δεν γνωρίζω απλό τύπο για τον υπολογισμό των συντελεστών της γεννήτριας αυτής.

Εντούτοις, αν τεθεί $y = 0$ στην παραπάνω συναρτησιακή εξίσωση προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση F της αποφεύγουσας ακολουθίας για το πρότυπο $dduu$ ικανοποιεί τις παρακάτω ισοδύναμες εξισώσεις.

$$x^2F^2 - (1 + (x - 2)x)F + (1 - x) = 0$$

$$x(1 + xF)^2 - (x^2 + 1)(1 + xF) + 1 = 0.$$

Έτσι η γεννήτρια συνάρτηση $G = 1 + xF$ ικανοποιεί τη σχέση

$$xG^2 - (x^2 + 1)G + 1 = 0.$$

Επιπλέον, αν τεθεί $y = 0$ στη συναρτησιακή εξίσωση που αντιστοιχεί στην κατανομή N_{uudd} προκύπτει ανάλογα ότι η γεννήτρια συνάρτηση της αποφεύγουσας ακολουθίας που αντιστοιχεί στο πρότυπο $uudd$ ικανοποιεί επίσης την παραπάνω εξίσωση, οπότε συμπίπτει με την G .

Κατόπιν τούτων για τις γεννήτριες συναρτήσεις F, G των αποφεύγουσων ακολουθιών που αντιστοιχούν στα πρότυπα $dduu$ και $uudd$ ισχύει η σχέση

$$G(x) = 1 + xF(x),$$

οπότε ο αριθμός των $a \in \mathcal{D}_n$ που αποφεύγουν το πρότυπο $dduu$ θα ισούται με τον αριθμό των $a \in \mathcal{D}_{n+1}$ που αποφεύγουν το πρότυπο $uudd$.

Θα δοθεί μια συνδυαστική απόδειξη του προηγούμενου αποτελέσματος.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τα σύνολα A, B όλων των μονοπατιών Dyck που αποφεύγουν τα πρότυπα $dduu$ και $uudd$ αντίστοιχα και θα κατασκευασθεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των A και B^* με $l(\phi(a)) = l(a) + 1$.

Για το σκοπό αυτό, διασπάμε τα σύνολα A, B^* σε τέσσερα υποσύνολα τα στοιχεία των οποίων αντιστοιχίζονται μεταξύ τους.

Οδηγός στις διασπάσεις αυτές είναι τα ελάχιστα στοιχεία (ως προς το μήκος) ϵ και $u\bar{d}$ των A, B^* αντίστοιχα.

⁵Βλ. παράγραφο 3.8 σελ. 140 για μια γενικότερη προσέγγιση.

Συγκεκριμένα κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$ γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω μορφές:

$$\alpha = \epsilon \text{ ή } \alpha = u d \gamma \text{ ή } \alpha = u \beta d \text{ ή } \alpha = u \beta d u d \gamma$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$ με $\beta \neq \epsilon$.

Ανάλογα, κάθε $\alpha \in \mathcal{B}^*$ γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω μορφές:

$$\alpha = u d \text{ ή } \alpha = u d \gamma \text{ ή } \alpha = u \beta d \text{ ή } \alpha = u \beta d \gamma$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{B}^*$ με $\beta \neq u d$.

Κατόπιν τούτων η απεικόνιση ϕ ορίζεται ως εξής:

$$\phi(\epsilon) = u d, \quad \phi(u d \gamma) = u d \phi(\gamma), \quad \phi(u \beta d) = u \phi(\beta) d \text{ και } \phi(u \beta d u d \gamma) = u \phi(\beta) d \phi(\gamma).$$

Τα υπόλοιπα 4 πρότυπα μήκους 4 απ' όσο γνωρίζω δεν έχουν μελετηθεί.

7. Το πρότυπο $uuuu$

Γενικότερα θα μελετηθεί το πρότυπο $\tau = u^\mu$, όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$. Προκειμένου να ευρεθεί η εξίσωση της γεννήτριας συνάρτησης F σε αυτή την περίπτωση, θεωρείται η παρακάτω διάσπαση των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = u^i d \beta_1 d \beta_2 \cdots d \beta_{i-1} d \beta_i, \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

Επειδή,

$$N_\tau(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \alpha = \epsilon \\ \sum_{j=1}^i N_\tau(\beta_j), & \text{αν } i \leq \mu - 1 \\ \sum_{j=1}^i N_\tau(\beta_j) + i - \mu + 1, & \text{αν } i \geq \mu \end{cases}$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\mu-1} \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D} \\ j \in [i]}} x^{\sum_{j=1}^i l(\beta_j) + i} y^{\sum_{j=1}^i N_\tau(\beta_j)} + \sum_{i=\mu}^{\infty} \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D} \\ j \in [i]}} x^{\sum_{j=1}^i l(\beta_j) + i} y^{\sum_{j=1}^i N_\tau(\beta_j) + i - \mu + 1} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\mu-1} x^i \prod_{j=1}^i \left(\sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} y^{N_\tau(\beta_j)} \right) + y^{1-\mu} \sum_{i=\mu}^{\infty} (xy)^i \prod_{j=1}^i \left(\sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} y^{N_\tau(\beta_j)} \right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\mu-1} x^i F^i(x, y) + y^{1-\mu} \sum_{i=\mu}^{\infty} (xy)^i F^i(x, y) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\mu-1} x^i F^i(x, y) + \frac{yx^\mu F^\mu(x, y)}{1 - xy F(x, y)}. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων προκύπτει εύκολα ότι

$$F = 1 + xy F^2 + (1 - y) \sum_{i=1}^{\mu-1} x^i F^i. \quad (3.6)$$

⁶ Προφανώς αν $\mu = 1$ η περίπτωση αυτή δεν υφίσταται.

Ειδικά για $\mu = 4$ προκύπτει η εξίσωση της γεννήτριας συνάρτησης που αντιστοιχεί στην κατανομή Narayana (βλ. σχέση (1.11))

$$(1-y)x^3F^3 + x(x+y-xy)F^2 + ((1-y)x-1)F + 1 = 0 \quad (3.7)$$

Εντούτοις, δεν γνωρίζω απλό τύπο για τον υπολογισμό των συντελεστών της.

Για την αποφεύγουσα ακολουθία (a_n) για το πρότυπο $\tau = u^{\mu}$, όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει⁷ ότι

$$a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{\mu} \rfloor} (-1)^j \binom{2n-\mu j}{n} \binom{n+1}{j}.$$

Ειδικά για $\mu = 4$ ισχύει ότι

$$a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} (-1)^j \binom{2n-4j}{n} \binom{n+1}{j}$$

ή ισοδύναμα

$$a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{n-2j} \binom{n+1}{j}.$$

Ο τελευταίος τύπος έχει δοθεί από τον E. Deutsch (βλ. A036765 στο [124]).

8. Το πρότυπο $uddu$

Γενικότερα θα μελετηθεί το πρότυπο $\tau = ud^{\mu}u$, $\mu \in \mathbb{N}^*$. Προκειμένου να ευρεθεί η εξίσωση της γεννήτριας συνάρτησης F σε αυτή την περίπτωση, θεωρείται η διάσπαση της τελευταίας επιστροφής των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = \beta u \gamma d,$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$.

Ισχύει ότι

$$N_{\tau}(\alpha) = N_{\tau}(\beta) + N_{\tau}(\gamma) + |\beta \in \mathcal{A}|$$

όπου \mathcal{A} είναι το σύνολο των μονοπατιών Dyck με μήκος της τελευταίας κατάβασης ίσο με μ .

Επομένως

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{N_{\tau}(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{N_{\tau}(\beta)+N_{\tau}(\gamma)+|\beta \in \mathcal{A}|} \\ &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\beta)} y^{N_{\tau}(\beta)} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{l(\beta)} y^{N_{\tau}(\beta)+1} \right) \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{N_{\tau}(\gamma)} \\ &= 1 + x(F - \mathcal{A} + y\mathcal{A})F \end{aligned} \quad (3.8)$$

όπου $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς τις παραμέτρους l και N_{τ} , δηλαδή

$$\mathcal{A}(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{l(\alpha)} y^{N_{\tau}(\alpha)}.$$

⁷Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του τύπου $u^{\mu}d$.

Κάθε μονοπάτι Dyck $\alpha \in \mathcal{A}$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή

$$\alpha = \beta_1 u \beta_2 u \cdots \beta_{\mu-1} u \beta_{\mu} u d^{\mu}$$

όπου $\beta_j \in \mathcal{D}$, για κάθε $j \in [\mu]$.

Επειδή

$$N_{\tau}(\alpha) = \sum_{j=1}^{\mu} (N_{\tau}(\beta_j) + |\beta_j \in \mathcal{A}|)$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{l(\alpha)} y^{N_{\tau}(\alpha)} \\ &= \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D} \\ j \in [\mu]}} x^{\sum_{j=1}^{\mu} l(\beta_j) + \mu} y^{\sum_{j=1}^{\mu} (N_{\tau}(\beta_j) + |\beta_j \in \mathcal{A}|)} \\ &= x^{\mu} \prod_{j=1}^{\mu} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} y^{N_{\tau}(\beta_j) + |\beta_j \in \mathcal{A}|} \\ &= x^{\mu} \prod_{j=1}^{\mu} \left(\sum_{\beta_j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\beta_j)} y^{N_{\tau}(\beta_j)} + \sum_{\beta_j \in \mathcal{A}} x^{l(\beta_j)} y^{N_{\tau}(\beta_j) + 1} \right) \end{aligned}$$

οπότε τελικά

$$A = x^{\mu} (F - A + yA)^{\mu}. \quad (3.9)$$

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9) έπεται ότι

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x \frac{(F-1)^{\mu}}{F^{\mu-1}}. \quad (3.10)$$

Ειδικά για $\mu = 2$ προκύπτει η εξίσωση της γεννήτριας συνάρτησης F που αντιστοιχεί στο πρότυπο $\tau = uddu$:

$$xF^3 - ((1-y)x+1)F^2 + (1+2(1-y)x)F - (1-y)x = 0. \quad (3.11)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange στην εξίσωση (3.11) προκύπτει ότι

$$a_{n,k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^{j-k} \binom{n-k}{j-k} \binom{2n-3j}{n-j+1}.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε εδώ, για τον υπολογισμό της γεννήτριας συνάρτησης F εφαρμόζεται και σε άλλες περιπτώσεις με κατάλληλη επιλογή του συνόλου \mathcal{A} .

9. Το πρότυπο $duuu$

Γενικότερα θα μελετηθεί το πρότυπο du^{μ} , όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$.

Ο υπολογισμός της γεννήτριας συνάρτησης F σε αυτή τη περίπτωση γίνεται ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση χρησιμοποιώντας ως \mathcal{A} το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck με μήκος της πρώτης ανάβασης τουλάχιστον μ .

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = u\beta d\gamma$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$, ισχύει ότι

$$N_\tau(\alpha) = N_\tau(\beta) + N_\tau(\gamma) + [\gamma \in \mathcal{A}],$$

οπότε

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{N_\tau(\beta)+N_\tau(\gamma)+[\gamma \in \mathcal{A}]} \\ &= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)} y^{N_\tau(\beta)} \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)+1} \right) \\ &= 1 + xF(F - A + yA). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Επειδή κάθε μονοπάτι Dyck $\alpha \in \mathcal{A}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $\alpha = u^{\mu-1} \beta_1 d \beta_2 d \dots \beta_{\mu-1} d \beta_\mu$, όπου $\beta_j \in \mathcal{D}$, $j \in [\mu]$ με $\beta_1 \neq \epsilon$, ισχύει ότι

$$N_\tau(\alpha) = N_\tau(\beta_1) + \sum_{j=2}^{\mu} (N_\tau(\beta_j) + [\beta_j \in \mathcal{A}])$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)} \\ &= \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D}, \beta_1 \neq \epsilon \\ j \in [\mu]}} x^{\sum_{j=1}^{\mu} l(\beta_j) + \mu - 1} y^{N_\tau(\beta_1) + \sum_{j=2}^{\mu} (N_\tau(\beta_j) + [\beta_j \in \mathcal{A}])} \\ &= x^{\mu-1} \sum_{\beta_1 \in \mathcal{D}^*} x^{l(\beta_1)} y^{N_\tau(\beta_1)} \prod_{j=2}^{\mu} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} y^{N_\tau(\beta_j) + [\beta_j \in \mathcal{A}]} \\ &= x^{\mu-1} (F - 1) \prod_{j=2}^{\mu} \left(\sum_{\beta_j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\beta_j)} y^{N_\tau(\beta_j)} + \sum_{\beta_j \in \mathcal{A}} x^{l(\beta_j)} y^{N_\tau(\beta_j)+1} \right) \end{aligned}$$

και τελικά

$$A = x^{\mu-1} (F - 1) (F - A + yA)^{\mu-1}. \quad (3.13)$$

Από τις σχέσεις (3.12) και (3.13) έπεται ότι

$$F = 1 + xF^2 + (y - 1)x \frac{(F - 1)^\mu}{F^{\mu-2}}. \quad (3.14)$$

Ειδικά για $\mu = 3$ προκύπτει η εξίσωση της γεννήτριας συνάρτησης F που αντιστοιχεί στο πρότυπο $\tau = duuu$:

$$xyF^3 + (3(1 - y)x - 1)F^2 - (3(1 - y)x - 1)F + (1 - y)x = 0. \quad (3.15)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange στην προηγούμενη εξίσωση προκύπτει ότι

$$a_{n,k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \sum_{j=3k+1}^n (-1)^{j-k+1} 3^{n-j} \binom{n-k}{j-k} \binom{2j-2-3k}{j-1}.$$

Για $k=0$ προκύπτει η αντίστοιχη αποφεύγουσα ακολουθία (a_n) με

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} 3^{n-j} \binom{n}{j} \binom{2j-2}{j-1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j 3^{n-j-1} \binom{n-1}{j} C_j.$$

Η ακολουθία αυτή έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές διότι απαριθμεί πολλά γνωστά συνδυαστικά αντικείμενα. Για παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι με a_n ισούται ο αριθμός όλων των μονοπατιών που αποτελούνται από n ανοδικά (u) και n καθοδικά (d) βήματα, ξεκινούν με άνοδο και αποφεύγουν το πρότυπο udu .

Επίσης με a_n ισούται το άθροισμα των $(n-1)$ -οστού και $(n-2)$ -οστού συντελεστή του ανάπτυγμα του πολυωνύμου $(1+x+x^2)^n$.

Υπάρχουν πολλοί ισοδύναμοι τύποι που δίνουν το a_n , όπως για παράδειγμα ο επόμενος τύπος του Deutsch:

$$a_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \binom{j}{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}.$$

Για περισσότερες πληροφορίες για την ακολουθία (a_n) βλ. A005773 στο [124].

10. Το πρότυπο $dudu$

Γενικότερα θα μελετηθεί το πρότυπο $(du)^\mu$, $\mu \in \mathbb{N}^*$.

Για τον υπολογισμό της γεννήτριας συνάρτησης F , σε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιείται η μέθοδος που εφαρμόστηκε στα 8 και 9.

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = u\beta d\gamma$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$, ισχύει ότι

$$N_\tau(\alpha) = N_\tau(\beta) + N_\tau(\gamma) + |\gamma \in \mathcal{A}|$$

όπου \mathcal{A} είναι το σύνολο των μονοπατιών Dyck της μορφής $(ud)^i$ με $i \geq \mu$ ή της μορφής $(ud)^i u\beta d\gamma$ με $i \geq \mu-1$ και $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$ με $\beta \neq \epsilon$.

Επομένως

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{N_\tau(\beta)+N_\tau(\gamma)+|\gamma \in \mathcal{A}|} \\ &= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)} y^{N_\tau(\beta)} \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)+1} \right) \\ &= 1 + xF(F - A + yA) \end{aligned} \quad (3.16)$$

όπου $A = A(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς τις παραμέτρους l και N_τ , δηλαδή

$$A(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)}.$$

Επίσης, για κάθε μονοπάτι Dyck $\alpha \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι

$$N_\tau(\alpha) = \begin{cases} i - \mu, & \text{αν } \alpha = (ud)^i, i \geq \mu \\ i - \mu + 1 + N_\tau(\beta) + N_\tau(\gamma) + |\gamma \in \mathcal{A}|, & \text{αν } \alpha = (ud)^i u \beta d \gamma, i \geq \mu - 1, \end{cases}$$

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)} \\ &= \sum_{\substack{\alpha = (ud)^i \\ i \geq \mu}} x^i y^{i-\mu} + \sum_{\substack{\alpha = (ud)^i u \beta d \gamma \\ i \geq \mu - 1, \beta \neq \epsilon}} x^{i+1+l(\beta)+l(\gamma)} y^{i-\mu+1+N_\tau(\beta)+N_\tau(\gamma)+|\gamma \in \mathcal{A}|} \\ &= \sum_{i=\mu}^{\infty} x^i y^{i-\mu} + \sum_{i=\mu-1}^{\infty} x^{i+1} y^{i-\mu+1} \sum_{\beta \in \mathcal{D}^*} x^{l(\beta)} y^{N_\tau(\beta)} \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)+|\gamma \in \mathcal{A}|} \\ &= \frac{x^\mu}{1-xy} + (F-1) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)+1} \right) \frac{x^\mu}{1-xy} \\ &= \frac{x^\mu}{1-xy} + (F-1)(F+(y-1)A) \frac{x^\mu}{1-xy}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Από τις σχέσεις (3.16) και (3.17) έπεται ότι

$$F = 1 + xF^2 + (y-1) \frac{x^\mu}{1-xy} (xF + (F-1)^2). \quad (3.18)$$

Ειδικά για $\mu = 2$ προκύπτει η εξίσωση της γεννήτριας συνάρτησης F το πρότυπο $\tau = dudu$

$$xF^2 + ((1-y)(x-1)x-1)F + (1-y)x + 1 = 0. \quad (3.19)$$

Παρατηρούμε ότι η F ταυτίζεται με τη γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου όλων των μονοπατιών Dyck ως προς το ημιμήκος και τον αριθμό των αναβάσεων μήκους 1 που ξεκινούν σε περιττό επίπεδο (βλ. A102405 στο [124]). Άρα οι στατιστικές “αριθμός των εμφανίσεων του $dudu$ ” και “αριθμός των αναβάσεων μήκους 1 που ξεκινούν σε περιττό επίπεδο” (ή ισοδύναμα “αριθμός των εμφανίσεων του dud σε περιττό ύψος”⁸) είναι ισοκαταμεμημένες.

Μια συνδυαστική απόδειξη του αποτελέσματος αυτού δίδεται στην παράγραφο 3.6.

Για την ακολουθία $(a_{n,k})$ των συντελεστών της γεννήτριας συνάρτησης F δεν γνωρίζω απλό τύπο.

Εντούτοις, χρησιμοποιώντας το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange αποδεικνύεται ότι η αποφεύγουσα ακολουθία (a_n) δίδεται από τον τύπο

$$a_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{n-j} \binom{n-j}{j} \sum_{i=0}^{n-2j} \binom{n-2j}{i} \binom{j+i}{n-2j-i+1}.$$

11. Γενικές προτάσεις

Πολλά από τα πρότυπα που μελετήθηκαν στη παράγραφο αυτή μπορούν να ενταχθούν σε μια γενικότερη κατηγορία προτύπων των οποίων η γεννήτρια συνάρτηση υπολογίζεται στην επόμενη πρόταση.

⁸Βλ. παράγραφο 3.4.

Αρχικά θα χρειαστούμε τον επόμενο ορισμό. Ένα πρότυπο τ ονομάζεται **περιοδικό** αν γράφεται υπό τη μορφή

$$\tau = \rho\sigma\rho$$

όπου $\rho \neq \epsilon$ και $\rho, \sigma \in \{u, d\}^*$.

Η έκφραση ενός περιοδικού προτύπου στην προηγούμενη μορφή δεν είναι μονοσήμαντη. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το τ είναι περιοδικό αν και μόνο αν υπάρχουν μη κενά $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \{u, d\}^*$ με

$$\tau = \rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_3.$$

Για παράδειγμα το πρότυπο $\tau = (ud)^\mu$ με $\mu \geq 2$, $\mu \in \mathbb{N}$ είναι περιοδικό ενώ το πρότυπο $\tau = u^{\mu}d^{\mu}$ όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$ δεν είναι περιοδικό.

Πρόταση 3.2.1. Αν το πρότυπο τ είναι ένα μη περιοδικό πρώτο αριστερό μονοπάτι Dyck τότε ισχύει ότι

$$F(x, y) = 1 + xF^2(x, y) + (y - 1)x^k F^{\lambda+1}(x, y) \quad (3.20)$$

όπου $k = |\tau|_u$ και $\lambda = |\tau|_u - |\tau|_d$.

Απόδειξη. Προκειμένου να υπολογίσουμε τη γεννήτρια συνάρτηση F θα χρησιμοποιήσουμε την διάσπαση της πρώτης επιστροφής των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = u\beta d\gamma$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\lambda > 0$ τότε το πρότυπο τ γράφεται⁹ ως $\tau = us$ όπου s είναι ένα αριστερό μονοπάτι Dyck.

Αν \mathcal{A} είναι το σύνολο των μονοπατιών Dyck που αρχίζουν με s τότε για κάθε $\alpha = u\beta d\gamma$, όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$ ισχύει ότι

$$N_\tau(\alpha) = N_\tau(\beta) + N_\tau(\gamma) + |\beta \in \mathcal{A}|.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{N_\tau(\beta)+N_\tau(\gamma)+|\beta \in \mathcal{A}|} \\ &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\beta)} y^{N_\tau(\beta)} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{l(\beta)} y^{N_\tau(\beta)+1} \right) \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} \\ &= 1 + x(F + (y - 1)A)F \end{aligned}$$

όπου $A = A(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς τις παραμέτρους x και N_τ .

Επιπλέον, επειδή κάθε $\beta \in \mathcal{A}$ γράφεται υπό τη μορφή

$$\beta = s\beta_1 d\beta_2 \cdots d\beta_\lambda$$

⁹Επειδή το πρότυπο τ είναι πρώτο αριστερό μονοπάτι.

όπου $\beta_j \in \mathcal{D}$, $j \in [\lambda]$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} N_\tau(\beta) &= N_\tau(\beta_1 d \beta_2 \cdots d \beta_\lambda) \\ &= \sum_{j=1}^{\lambda} N_\tau(\beta_j) \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{l(\beta)} y^{N_\tau(\beta)} \\ &= \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D} \\ j \in [\lambda]}} x^{k-1 + \sum_{j=1}^{\lambda} l(\beta_j)} y^{\sum_{j=1}^{\lambda} N_\tau(\beta_j)} \\ &= x^{k-1} \prod_{j=1}^{\lambda} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} y^{N_\tau(\beta_j)} \\ &= x^{k-1} F^\lambda. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^k F^{\lambda+1}.$$

2. Αν $\lambda = 0$ τότε το πρότυπο τ γράφεται ως $\tau = usd$ όπου s είναι ένα μονοπάτι Dyck, και ισχύει ότι

$$N_\tau(\alpha) = N_\tau(\beta) + N_\tau(\gamma) + [\beta = s].$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta) + l(\gamma) + 1} y^{N_\tau(\beta) + N_\tau(\gamma) + [\beta = s]} \\ &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D} \setminus \{s\}} x^{l(\beta)} y^{N_\tau(\beta)} + x^{k-1} y \right) \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} \\ &= 1 + x(F + (y-1)x^{k-1})F \\ &= 1 + xF^2 + (y-1)x^k F. \end{aligned}$$

□

¹⁰Επειδή τ είναι μη περιοδικό.

¹¹Επειδή τ είναι πρώτο αριστερό μονοπάτι Dyck.

Παρατηρήσεις

1. Ο τύπος (3.20) δεν εφαρμόζεται για τα πρώτα αριστερά μονοπάτια Dyck $\tau = u^{\mu}$ και $\tau = u^{\mu}d^k u^{\nu}$, όπου $\mu, \nu, k \in \mathbb{N}^*$ με $\mu > k$, γιατί είναι περιοδικά.
2. Αν $\tau = u^{\mu}d$ τότε εφαρμόζοντας τον τύπο (3.20) για $k = \mu$ και $\lambda = \mu - 1$ προκύπτει ο τύπος (3.1).

Γενικότερα αν $\tau = u^{\mu}d^{\nu}$ με $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ η γεννήτρια συνάρτηση $F(x, y)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{\max(\mu, \nu)} F^{|\mu-\nu|+1}. \quad (3.21)$$

Πράγματι, αν $\mu \geq \nu$, ο παραπάνω τύπος είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 3.2.1. Ο τύπος ισχύει και στην περίπτωση όπου $\mu < \nu$, αφού χρησιμοποιώντας την κατοπτρική απεικόνιση προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις του αριθμού των εμφανίσεων των προτύπων $u^{\mu}d^{\nu}$ και $u^{\nu}d^{\mu}$ είναι ίσες.

Έτσι η γεννήτρια F στην περίπτωση της πυραμίδας ύψους μ ικανοποιεί την εξίσωση

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^{\mu}F.$$

Ειδικά για $\mu = 2$ προκύπτει η εξίσωση (3.3).

3.3 Πρότυπα σε ύψος j

Στη παράγραφο αυτό μελετάται η εμφάνιση προτύπων σε συγκεκριμένο ύψος.

Ένα πρότυπο τ λέγεται ότι **εμφανίζεται σε ύψος j** σε ένα μονοπάτι Dyck, όπου $j \in \mathbb{N}$, αν το ελάχιστο ύψος των σημείων του τ σε αυτή την εμφάνιση είναι ίσο με j .

Για παράδειγμα το μονοπάτι του Σχήματος 3.1 έχει δύο εμφανίσεις του προτύπου $udud$ σε ύψος 1, δύο εμφανίσεις του προτύπου uu σε ύψος 0 και μία εμφάνιση του προτύπου uu σε ύψος 1. Είναι προφανές ότι το πρότυπο ud εμφανίζεται σε ύψος j σε ένα μονοπάτι Dyck αν η αντίστοιχη κορυφή ευρίσκεται στο $j + 1$ επίπεδο.

Μια εμφάνιση ενός προτύπου σε ύψος 0 συνήθως αναφέρεται ως **χαμηλή εμφάνιση** του τ (low occurrence of τ). Η στατιστική “αριθμός των χαμηλών εμφανίσεων του τ ” (ή απλούστερα “αριθμός των χαμηλών τ ”) έχει μελετηθεί για τα πρότυπα $\tau = ud$ και $\tau = du$ από τον Deutsch [38], για το πρότυπο $\tau = udu$ από τον Sun [137], καθώς και για τα πρότυπα της μορφής $\tau = (ud)^{\mu}u$, όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$, από τον Mansour [92].

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η στατιστική $N_{\tau, j}$: “αριθμός των εμφανίσεων του τ σε ύψος j ” με αντίστοιχη γεννήτρια $F_j(x, y)$, όπου το x μετράει το ημιμήκος και το y μετράει τις εμφανίσεις του προτύπου τ σε ύψος j . Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η γεννήτρια συνάρτηση $L(x, y) = F_0(x, y)$ η οποία μετράει τις χαμηλές εμφανίσεις του προτύπου τ , με συντελεστές τους αριθμούς $l_{n, k}$.

Για τα πρότυπα $\tau = ud$ και $\tau = du$, ο Mansour [91] απέδειξε ότι η γεννήτρια συνάρτηση F_j μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια των πολυωνύμων Chebyshev δευτέρου είδους¹² και της γεννήτριας συνάρτησης των αριθμών Catalan.

Στα επόμενα θα αποδειχθεί ότι μια ανάλογη διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί για οποιοδήποτε πρότυπο τ .

Αρχικά θα δοθούν ορισμένα βασικά στοιχεία για τα πολυώνυμα Chebyshev δευτέρου είδους (βλ. A053117 στο [124]).

¹²Η σχέση των μονοπατιών Dyck με τα πολυώνυμα Chebyshev δευτέρου είδους δίδεται από τον Krattenthaler [80].

Τα πολυώνυμα Chebyshev U_j δευτέρου είδους ορίζονται ως εξής:

$$U_j(\cos \theta) = \frac{\sin(j+1)\theta}{\sin \theta}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $U_{-1}(x) = 0$, $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ και

$$U_j(x) = 2xU_{j-1}(x) - U_{j-2}(x), \quad (3.22)$$

$$U_{j-1}^2(x) - U_j(x)U_{j-2}(x) = 1.$$

Επιλύοντας τη γραμμική αναγωγική σχέση (3.22) λαμβάνεται η ακόλουθη έκφραση των πολυωνύμων Chebyshev

$$U_j(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \left((x + \sqrt{x^2-1})^{j+1} - (x - \sqrt{x^2-1})^{j+1} \right). \quad (3.23)$$

Με τη βοήθεια των πολυωνύμων Chebyshev δευτέρου είδους ορίζεται η ακολουθία συναρτήσεων $(R_j(x))$, $j \in \mathbb{N}$, με

$$R_j(x) = \frac{U_{j-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}U_j\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \quad (3.24)$$

η οποία θα παίξει σημαντικό ρόλο στα επόμενα.

Παρατήρηση Είναι γνωστό [80, σελ. 529] ότι η γεννήτρια συνάρτηση, ως προς το μήκος, των μονοπατιών στο πρώτο τεταρτημόριο με βήματα $(1, 1)$ και $(1, -1)$, αρχή το σημείο $(0, 0)$, πέρασ σε ύψος s και τα οποία είναι φραγμένα από την ευθεία $y = j$ ισούται με

$$\frac{U_{j-s}\left(\frac{1}{2x}\right)}{xU_{j+1}\left(\frac{1}{2x}\right)}.$$

Επομένως το πολυώνυμο $R_j(x)$ ισούται με την γεννήτρια των μονοπατιών Dyck, ως προς το ημιμήκος, τα οποία είναι φραγμένα από την ευθεία $y = j - 1$.

Λήμμα 3.3.1. Η συνάρτηση $R_j(x)$ εκφράζεται με τη βοήθεια της γεννήτριας συνάρτησης των αριθμών Catalan ως εξής:

$$R_j(x) = \frac{C(x)(1 - (C(x) - 1)^j)}{1 - (C(x) - 1)^{j+1}} \quad (3.25)$$

και ισχύει ότι

$$[x^n]R_j = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{j+1} \rfloor} \frac{2(j+1)i+1}{2n+1} \binom{2n+1}{n-(j+1)i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-j}{j+1} \rfloor} \frac{2(j+1)i+2j+1}{2n+1} \binom{2n+1}{n-(j+1)i-j}.$$

Απόδειξη. Πράγματι από τις σχέσεις (3.23) και (3.24) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} R_j(x) &= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{1}{4x}-1}\right)^j - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{1}{4x}-1}\right)^j}{\sqrt{x} \left(\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{1}{4x}-1}\right)^{j+1} - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{1}{4x}-1}\right)^{j+1} \right)} \\ &= 2 \frac{(1 + \sqrt{1-4x})^j - (1 - \sqrt{1-4x})^j}{(1 + \sqrt{1-4x})^{j+1} - (1 - \sqrt{1-4x})^{j+1}} \\ &\stackrel{13}{=} 2(1 - \sqrt{1-4x}) \frac{(4x)^j - (4x^2C^2(x))^j}{(4x)^{j+1} - (4x^2C^2(x))^{j+1}} \\ &= \frac{C(x) \left(1 - (xC^2(x))^j\right)}{1 - (xC^2(x))^{j+1}}. \end{aligned}$$

Τελικά,

$$R_j(x) = \frac{C(x) \left(1 - (C(x) - 1)^j\right)}{1 - (C(x) - 1)^{j+1}}.$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών της $R_j(x)$ έχουμε

$$\begin{aligned} R_j(x) &= (C(x) - x^j C^{2j+1}(x)) \sum_{i=0}^{\infty} (x^{j+1} C^{2j+2}(x))^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x^{(j+1)i} C^{2(j+1)i+1} - \sum_{i=0}^{\infty} x^{(j+1)i+j} C^{2(j+1)i+2j+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x^{(j+1)i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2(j+1)i+1}{2r+2(j+1)+1} \binom{2r+2(j+1)i+1}{r} x^r \\ &\quad - \sum_{i=0}^{\infty} x^{(j+1)i+j} \sum_{r'=0}^{\infty} \frac{2(j+1)i+2j+1}{2r'+2(j+1)+2j+1} \binom{2r'+2(j+1)i+2j+1}{r'} x^{r'}. \end{aligned}$$

Θέτουμε $r = n - (j+1)i$ με $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{j+1} \right\rfloor$ και $r' = n - (j+1)i - j$ με $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-j}{j+1} \right\rfloor$, οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} R_j(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{j+1} \right\rfloor} \frac{2(j+1)i+1}{2n+1} \binom{2n+1}{n-(j+1)i} x^n \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{j+1} \right\rfloor} \frac{2(j+1)i+2j+1}{2n+1} \binom{2n+1}{n-(j+1)i-j} x^n. \end{aligned}$$

Άρα τελικά ο αριθμός $a_{n,j-1}$ των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n τα οποία είναι φραγμένα από την ευθεία $y = j - 1$ ισούται με

$$a_{n,j-1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{j+1} \right\rfloor} \frac{2(j+1)i+1}{2n+1} \binom{2n+1}{n-(j+1)i} - \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{j+1} \right\rfloor} \frac{2(j+1)i+2j+1}{2n+1} \binom{2n+1}{n-(j+1)i-j}.$$

□

Λήμμα 3.3.2.

(i) Για την ακολουθία $(R_j(x))$ ισχύουν οι σχέσεις

$$R_0(x) = 0, \quad R_j(x) = \frac{1}{1 - xR_{j-1}(x)}, \quad \text{για κάθε } j \in \mathbb{N}^* \text{ και}$$

$$xR_j^2(x) - R_j(x) + 1 = \frac{1}{U_j^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}, \quad \text{για κάθε } j \in \mathbb{N}.$$

¹³Με πολλαπλασιασμό αριθμητή και παρανομαστή με $(1 - \sqrt{1-4x})^{j+1}$.

(ii) Κάθε ακολουθία συναρτήσεων $(f_j(x))$, $j \in \mathbb{N}$, με

$$f_j(x) = \frac{1}{1 - x f_{j-1}(x)}, \text{ για κάθε } j \in \mathbb{N}^*$$

δίδεται από τη σχέση

$$f_j(x) = R_j(x) + \frac{1}{U_j^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{f_0(x)} - x R_j(x)\right)}$$

Απόδειξη.

(i) Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς το j . Για $j = 0$ έχουμε ότι

$$R_0(x) = \frac{U_{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}U_1\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} = \frac{0}{\sqrt{x}2\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 0$$

Έστω ότι ισχύει για το $j - 1$ θα το αποδείξουμε για το j .

$$\begin{aligned} 1 - x R_{j-1}(x) &= 1 - x \frac{U_{j-2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}U_{j-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \\ &= \frac{U_{j-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}U_{j-2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{U_{j-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{x}\left(2\frac{1}{2\sqrt{x}}U_{j-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - U_{j-2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)}{U_{j-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{x}U_j\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{U_{j-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \\ &= \frac{1}{R_j(x)}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$R_j(x) = \frac{1}{1 - x R_{j-1}(x)}.$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 xR_j^2(x) - R_j(x) + 1 &= x \left(\frac{U_{j-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}U_j\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \right)^2 - \frac{U_{j-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{U_j\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} + 1 \\
 &= \frac{U_{j-1}^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - 2\frac{1}{2\sqrt{x}}U_{j-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)U_j\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + U_j^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{U_j^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \\
 &= \frac{U_{j-1}^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \left(U_{j-2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + U_j\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)U_j\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + U_j^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{U_j^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \\
 &= \frac{U_{j-1}^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - U_j\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)U_{j-2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{U_j^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \\
 &= \frac{1}{U_j^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}.
 \end{aligned}$$

(ii) Αν τεθεί

$$g_j(x) = \frac{R_j(x) - f_0(x)R_j(x) + f_0(x)}{1 - xf_0(x)R_j(x)}$$

τότε είναι

$$g_0(x) = \frac{R_0(x) - f_0(x)R_0(x) + f_0(x)}{1 - xf_0(x)R_0(x)} = f_0(x)$$

και για $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 1 - xg_{j-1}(x) &= 1 - \frac{xR_{j-1}(x) - xf_0(x)R_{j-1}(x) + xf_0(x)}{1 - xf_0(x)R_{j-1}(x)} \\
 &= \frac{1 - xR_{j-1}(x) - xf_0(x)}{1 - xf_0(x)R_{j-1}(x)} \\
 &= \frac{\frac{1}{R_j(x)} - xf_0(x)}{1 - \left(1 - \frac{1}{R_j(x)}\right)f_0(x)} \\
 &= \frac{1 - xf_0(x)R_j(x)}{R_j(x) - R_j(x)f_0(x) + f_0(x)} \\
 &= \frac{1}{g_j(x)}.
 \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων θα είναι $g_i(x) = f_j(x)$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$, και επομένως

$$\begin{aligned}
 f_j(x) &= \frac{R_j(x) - f_0(x)R_j(x) + f_0(x)}{1 - xf_0(x)R_j(x)} \\
 &= \frac{R_j(x) - xf_0(x)R_j^2(x) - f_0(x)R_j(x) + f_0(x) + xf_0(x)R_j^2(x)}{1 - xf_0(x)R_j(x)} \\
 &= R_j(x) + \frac{f_0(x)\left(xR_j^2(x) - R_j(x) + 1\right)}{1 - xf_0(x)R_j(x)} \\
 &= R_j(x) + \frac{1}{U_j^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{f_0(x)} - xR_j(x)\right)}.
 \end{aligned}$$

Στην επόμενη πρόταση δίδεται το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

Πρόταση 3.3.3. Για κάθε πρότυπο τ η γεννήτρια συνάρτηση $F_j(x, y)$ δίδεται από τη σχέση

$$F_j(x, y) = R_j(x) + \frac{1}{U_j^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1}{L(x, y)} - xR_j(x) \right)}$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη. Θα δοθούν δύο αποδείξεις. Η πρώτη είναι στοιχειώδης και χρησιμοποιεί αλγεβρικές μεθόδους, ενώ η δεύτερη στηρίζεται σε ένα γνωστό θεώρημα του Krattenthaler (βλ. παρατήρηση σελ. 79) και χρησιμοποιεί συνδυαστικές μεθόδους.

1η απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής προκύπτει ότι για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}^*$ με $\alpha = u\beta d\gamma$, όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$ ισχύει ότι

$$N_{\tau, j}(\alpha) = N_{\tau, j-1}(\beta) + N_{\tau, j}(\gamma), \text{ για } j \geq 1$$

και επομένως

$$\begin{aligned} F_j(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{N_{\tau, j}(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{N_{\tau, j-1}(\beta)+N_{\tau, j}(\gamma)} \\ &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)} y^{N_{\tau, j-1}(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{N_{\tau, j}(\gamma)} \right) \\ &= 1 + x F_{j-1}(x, y) F_j(x, y) \end{aligned}$$

Για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$.

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι

$$F_j(x, y) = \frac{1}{1 - x F_{j-1}(x, y)}$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$, και σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι

$$F_j(x, y) = R_j(x) + \frac{1}{U_j^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1}{L(x, y)} - xR_j(x) \right)}$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$.

2η απόδειξη

Έστω \mathcal{A} (αντ. \mathcal{B}) το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck που είναι (αντ. δεν είναι) φραγμένα από την ευθεία $y = j - 1$, για δοσμένο $j \in \mathbb{N}^*$.

Επειδή κάθε μονοπάτι του συνόλου \mathcal{A} δεν έχει καμία εμφάνιση του προτύπου τ σε ύψος j , η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς τις παραμέτρους l , $N_{\tau, j}$ ισούται¹⁴ με

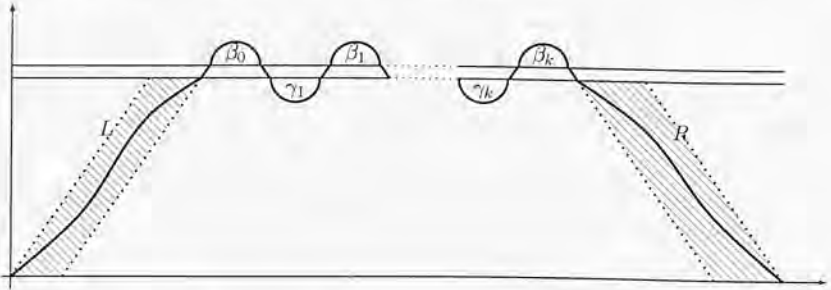
$$R_j(x) = \frac{U_{j-1} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x} U_j \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}.$$

¹⁴Βλ. παρατήρηση σελ. 79.

Από την άλλη, κάθε $\alpha \in B$ γράφεται υπό τη μορφή

$$\alpha = Lu\beta_0d\gamma R$$

όπου L (αντ. R) είναι ένα μονοπάτι στο πρώτο τεταρτημόριο που αρχίζει από ύψος 0 (αντ. $j-1$), τελειώνει σε ύψος $j-1$ (αντ. 0) και φράσσεται από την ευθεία $y = j-1$ και $\gamma = \prod_{i=1}^{15} \gamma_i u \beta_i d$, $k \in \mathbb{N}$, όπου $\beta_i \in \mathcal{D}$ και γ_i μονοπάτια στο πρώτο τεταρτημόριο με αρχή και τέλος σε ύψος $j-1$ και φράσσονται από την ευθεία $y = j-1$ (βλ. επόμενο σχήμα).



Κατόπιν τούτου εύκολα προκύπτει ότι

$$N_{\tau, j}(\alpha) = \sum_{i=0}^k N_{\tau, \theta}(\beta_i), \quad \text{όπου } k \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου B ως προς τις παραμέτρους $l, N_{\tau, j}$ είναι

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{L, R, \beta_i, \gamma_i} x^{l(L)+l(R)+\sum_{i=0}^k l(\beta_i)+\sum_{i=1}^k l(\gamma_i)+k+1} y^{\sum_{i=0}^k N_{\tau, \theta}(\beta_i)} \\ &= x \sum_L x^{l(L)} \sum_R x^{l(R)} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left(\prod_{i=1}^k \sum_{\gamma_i} x^{l(\gamma_i)} \right) \left(\prod_{i=0}^k \sum_{\beta_i} x^{l(\beta_i)} y^{N_{\tau, \theta}(\beta_i)} \right) \\ & \stackrel{16}{=} x \frac{U_{(j-1)-(j-1)}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) U_{(j-1)-(j-1)}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x} U_j\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \frac{U_{(j-1)-(j-1)}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x} U_j\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} x^k R_j^k(x) L^{k+1}(x, 1) \\ &= \frac{1}{U_j^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \frac{L(x, y)}{1 - x R_j(x) L(x, y)}. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, η ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει ως άθροισμα των παραπάνω γεννητριών συναρτήσεων των A και B . \square

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, για τον υπολογισμό της γεννήτριας συνάρτησης $F_j(x, y)$, αρκεί να υπολογίσουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $L(x, y)$.

Για παράδειγμα αν $\tau = udu$, είναι γνωστό [137] ότι

$$L(x, y) = 1 + \frac{x C(x)}{1 + x(1 - y - C(x))} \quad (3.26)$$

¹⁵ Προφανώς, αν $k=0$ θεωρείται $\gamma = \epsilon$.

¹⁶ Αφού τα μονοπάτια γ_i μπορούν να θεωρηθούν ως μονοπάτια που αρχίζουν και τελειώνουν στον άξονα x και φράσσονται από την ευθεία $y = j-1$, βλ. παρατήρηση σελ. 79.

οπότε χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.3.3 προκύπτει ότι

$$F_j(x, y) = R_j(x) + \frac{1}{U_j^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(1 - \frac{x C(x)}{1+x(1-y)} - x R_j(x) \right)}.$$

Από την Πρόταση 3.3.3 και το Λήμμα 3.3.2 προκύπτει η επόμενη έκφραση της γεννήτριας συνάρτησης F_j με τη βοήθεια της αντίστοιχης γεννήτριας συνάρτησης L και της γεννήτριας συνάρτησης των αριθμών Catalan.

Πόρισμα 3.3.4. Για κάθε πρότυπο τ η γεννήτρια συνάρτηση $F_j(x, y)$ δίδεται από τη σχέση

$$F_j(x, y) = \frac{C(x) (1 - x^j C^{2j}(x)) + (1 - C(x) + x^j C^{2j}(x)) L(x, y)}{1 - x^{j+1} C^{2(j+1)}(x) - x C(x) (1 - x^j C^{2j}(x)) L(x, y)}$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$.

Στην επόμενη ενότητα υπολογίζονται οι γεννήτριες συναρτήσεις $L(x, y)$ (και επομένως και οι $F_j(x, y)$, για $j \in \mathbb{N}^*$) για τα υπόλοιπα πρότυπα μήκους 3, όπως επίσης για τα πρότυπα μήκους 4.

3.4 Πρότυπα σε χαμηλό ύψος

Στη παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η στατιστική

$$L_\tau: \text{“αριθμός των χαμηλών εμφανίσεων του } \tau\text{”}$$

για κάθε πρότυπο τ μήκους 3 ή 4 (εκτός από το πρότυπο $\tau = udu$ το οποίο έχει ήδη αναφερθεί). Η μελέτη θα γίνει για ορισμένα πρότυπα γενικότερης μορφής και τα αποτελέσματα θα εφαρμοσθούν για τα πρότυπα μήκους 3 και 4.

1. Το πρότυπο u^μ , $\mu \in \mathbb{N}^*$

Όπως και στη περίπτωση της στατιστικής N_{u^μ} θεωρείται η παρακάτω διάσπαση των μη κενών μονοπατιών Dyck:

$$\alpha = u^i d\beta_1 d\beta_2 \dots d\beta_{i-1} d\beta_i, \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

Επειδή,

$$L_\tau(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \alpha = \epsilon \\ L_\tau(\beta_i), & \text{αν}^{17} i \leq \mu - 1 \\ L_\tau(\beta_i) + 1, & \text{αν } i \geq \mu \end{cases}$$

¹⁷ Προφανώς αν $\mu = 1$ η περίπτωση αυτή δεν υφίσταται.

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
L(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{L_\tau(\alpha)} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{\mu-1} \sum_{\substack{b_j \in \mathcal{D} \\ j \in [i]}} x^{\sum_{j=1}^i l(\beta_j) + i} y^{L_\tau(\beta_i)} + \sum_{i=\mu}^{\infty} \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D} \\ j \in [i]}} x^{\sum_{j=1}^i l(\beta_j) + i} y^{L_\tau(\beta_i) + 1} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{\mu-1} x^i \left(\prod_{j=1}^{i-1} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} \right) \left(\sum_{\beta_i \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_i)} y^{L_\tau(\beta_i)} \right) + y \sum_{i=\mu}^{\infty} x^i \left(\prod_{j=1}^{i-1} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} \right) \left(\sum_{\beta_i \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_i)} y^{L_\tau(\beta_i)} \right) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{\mu-1} x^i C^{i-1}(x) L(x, y) + y \sum_{i=\mu}^{\infty} x^i C^{i-1}(x) L(x, y) \\
&= 1 + \left(xC(x) - (1-y) \sum_{i=\mu}^{\infty} x^i C^{i-1}(x) \right) L(x, y) \\
&= 1 + \left(xC(x) - \frac{(1-y)x^\mu C^{\mu-1}(x)}{1-xC(x)} \right) L(x, y) \\
&\stackrel{18}{=} 1 + (xC(x) - (1-y)x^\mu C^\mu(x)) L(x, y).
\end{aligned}$$

οπότε

$$L(x, y) = \frac{1}{1 - xC(x) + (1-y)x^\mu C^\mu}$$

και τελικά¹⁹

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^\mu C^{\mu+1}(x)}. \quad (3.27)$$

Στη συνέχεια, αναπτύσσοντας την παραπάνω γεννήτρια σε γεωμετρική σειρά και χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.4), σελ. 13 του Κεφαλαίου 1 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
L(x, y) &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (1-y)^s x^{\mu s} C^{(\mu+1)s+1} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j (-1)^s \frac{(\mu+1)j+1}{2i + (\mu+1)j+1} \binom{2i + (\mu+1)j+1}{i} (-1)^k \binom{j}{k} x^{\mu s + i} y^k \\
&\stackrel{20}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{\mu} \rfloor} \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{\mu} \rfloor} (-1)^{j-k} \frac{(\mu+1)j+1}{2n - \mu j + j + 1} \binom{j}{k} \binom{2n - 2\mu j + j + 1}{n - \mu j} x^n y^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{\mu} \rfloor} \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{\mu} \rfloor} (-1)^{j-k} \frac{(\mu+1)j+1}{n + j + 1} \binom{j}{k} \binom{2n - (\mu-1)j}{n - \mu j} x^n y^k.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$l_{n,k} = \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{\mu} \rfloor} (-1)^{j-k} \frac{(\mu+1)j+1}{n + j + 1} \binom{j}{k} \binom{2n - (\mu-1)j}{n + j}. \quad (3.28)$$

¹⁸ Διότι $xC^2 - C + 1 = 0$.

¹⁹ Διότι $xC^2 - C + 1 = 0$.

²⁰ Όπου $n = \mu j + i$.

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3.27) και (3.28) για $\mu = 3$ και $\mu = 4$ προκύπτουν αντίστοιχα οι γεννήτριες συναρτήσεις των αριθμών των χαμηλών εμφανίσεων των προτύπων uuu και $uuuu$ όπως επίσης και οι συντελεστές τους.

Συγκεκριμένα για $\tau = uuu$ είναι

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^3C^4(x)} \quad (3.29)$$

με συντελεστές

$$l_{n,k} = \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} (-1)^{j-k} \frac{4j+1}{n+j+1} \binom{j}{k} \binom{2n-2j}{n+j}$$

και για $\tau = uuuu$ είναι

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^4C^5(x)}$$

με συντελεστές

$$l_{n,k} = \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} (-1)^{j-k} \frac{5j+1}{n+j+1} \binom{j}{k} \binom{2n-3j}{n+j}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η αποφεύγουσα ακολουθία (l_n) που αντιστοιχεί στο πρότυπο uuu η οποία όπως θα αποδειχθεί συμπίπτει με άλλες γνωστές αποφεύγουσες ακολουθίες (βλ. A114489 και A059019 στο [124]).

Συγκεκριμένα θα αποδειχθεί αλγεβρικά και συνδυαστικά ότι οι παρακάτω τρεις στατιστικές είναι ισοκατανομημένες.

- (i) "Αριθμός των μονοπατιών $\alpha \in \mathcal{D}$ που δεν έχουν χαμηλές εμφανίσεις του προτύπου uuu ".
- (ii) "Αριθμός των μονοπατιών $\alpha \in \mathcal{D}$ που αποφεύγουν το πρότυπο du σε ύψος 1".
- (iii) "Αριθμός των μονοπατιών $\alpha \in \mathcal{D}$ που αποφεύγουν το πρότυπο ud σε ύψος 2".

Πράγματι, αν τεθεί $y = 0$ στη σχέση (3.29) προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση που αντιστοιχεί στην πρώτη στατιστική είναι ίση με

$$L(x, 0) = \frac{C(x)}{1 + x^3C^4(x)} \quad (3.30)$$

Για τη δεύτερη, θα εφαρμοσθεί η Πρόταση 3.3.3 για $\tau = du$, $j = 1$ και $y = 0$, οπότε προκύπτει ότι

$$F_1(x, 0) \stackrel{21}{=} R_1(x) + \frac{1}{U_1^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1}{L(x, 0)} - xR_1(x) \right)}$$

²¹ Εδώ $L(x, y) = 1 + \frac{x C(x)}{1 - y C(x)}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών των χαμηλών εμφανίσεων του προτύπου $\tau = du$ (βλ. [38]).

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{\frac{1}{x} \left(\frac{1}{1+xC(x)} - x \right)} \\
&= \frac{1}{1-x-x^2C(x)} \\
&= \frac{C(x)}{C(x)-xC(x)-x^2C^2(x)} \\
&\stackrel{22}{=} \frac{C(x)}{1+xC(x)(C(x)-1-xC(x))} \\
&\stackrel{22}{=} \frac{C(x)}{1+x^2C^2(x)(C(x)-1)}
\end{aligned}$$

Άρα,

$$F_1(x, 0) \stackrel{22}{=} \frac{C(x)}{1+x^3C^4(x)}. \quad (3.31)$$

Για την τρίτη θα εφαρμοσθεί η Πρόταση 3.3.3 για $\tau = ud$, $j = 2$ και $y = 0$, οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
F_2(x, 0) &= R_2(x) + \frac{1}{U_2^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1}{L(x,0)} - xR_2(x) \right)} \\
&\stackrel{23}{=} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)^2 \left((1 - (C(x) - 1)x) - \frac{x}{1-x} \right)} \\
&= \frac{1-x-xC(x)+x^2C(x)}{(1-x)((1-x)(1-xC)-x^2)} \\
&= \frac{1-xC(x)}{(1-x)(1-xC(x))-x^2} \\
&= \frac{C(x)-xC^2(x)}{(1-x)(C-xC^2)-x^2C} \\
&\stackrel{24}{=} \frac{1}{1-x-x^2C(x)}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$F_2(x, 0) \stackrel{25}{=} \frac{C(x)}{1+x^3C^4(x)}. \quad (3.32)$$

Από τις σχέσεις (3.30), (3.31) και (3.32) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις των στατιστικών (i), (ii) και (iii) συμπίπτουν οπότε οι στατιστικές αυτές είναι ισοκατανομημένες.

²² Χρησιμοποιώντας τη σχέση $xC^2(x) - C(x) + 1 = 0$.

²³ Εδώ $L(x, y) = \frac{1}{1-(y+C(x)-1)x}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του αριθμού των χαμηλών εμφανίσεων του προτύπου $\tau = ud$ (βλ. [38]).

²⁴ Χρησιμοποιώντας τη σχέση $xC^2(x) - C(x) + 1 = 0$.

²⁵ Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

Για μια συνδυαστική απόδειξη της ισοκατανομής των στατιστικών (i) και (ii) θεωρούμε τα σύνολα \mathcal{A} και \mathcal{B} που αποτελούνται από όλα τα μονοπάτια Dyck που αποφεύγουν το πρότυπο uuu σε χαμηλό επίπεδο και το πρότυπο du σε ύψος 1 αντίστοιχα.

Προφανώς κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$\alpha = \epsilon \text{ ή } \alpha = u d \gamma \text{ ή } \alpha = u^2 d \beta d \gamma \text{ όπου } \gamma \in \mathcal{A} \text{ και } \beta \in \mathcal{D}.$$

Από την άλλη κάθε $\alpha \in \mathcal{B}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$\alpha = \epsilon \text{ ή } \alpha = u d \gamma \text{ ή } \alpha = u^2 \beta d^2 \gamma \text{ όπου } \gamma \in \mathcal{B} \text{ και } \beta \in \mathcal{D}.$$

Κατόπιν τούτων η απεικόνιση $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ με

$$\phi(\epsilon) = \epsilon, \quad \phi(u d \gamma) = u d \phi(\gamma) \text{ και } \phi(u^2 d \beta d \gamma) = u^2 \beta d d \phi(\gamma)$$

όπου $\gamma \in \mathcal{A}$ και $\beta \in \mathcal{D}$, είναι αμφιμονοσήμαντη και διατηρεί το μήκος οπότε οι δύο στατιστικές είναι ισοκατανεμημένες.

Τέλος, μια συνδυαστική απόδειξη της ισοκατανομής των στατιστικών (ii) και (iii) προκύπτει με τη βοήθεια της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης που ορίζεται μεταξύ μονοπατιών Dyck, σύμφωνα με την οποία κάθε κοιλάδα ενός μονοπατιού Dyck στο πρώτο επίπεδο μετατρέπεται σε κορυφή στο τρίτο επίπεδο και κάθε κορυφή του στο τρίτο επίπεδο σε κοιλάδα στο πρώτο επίπεδο (βλ. [91], Θεώρημα 2.1).

2. Το πρότυπο $u^\mu d$, $\mu \in \mathbb{N}^*$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση θεωρείται η παρακάτω διάσπαση των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = u^i d \beta_1 d \beta_2 \dots d \beta_{i-1} d \beta_i, \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

Επειδή

$$L_\tau(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \alpha = \epsilon \\ L_\tau(\beta_i), & \text{αν } i \neq \mu \\ L_\tau(\beta_i) + 1, & \text{αν } i = \mu \end{cases}$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} L(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{L_\tau(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \mu}}^{\infty} \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D} \\ j \in [i]}} x^{\sum_{j=1}^i l(\beta_j) + i} y^{L_\tau(\beta_i)} + \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D} \\ j \in [\mu]}} x^{\sum_{j=1}^{\mu} l(\beta_j) + \mu} y^{L_\tau(\beta_\mu) + 1} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \left(\prod_{j=1}^{i-1} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} \right) \left(\sum_{\beta_i \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_i)} y^{L_\tau(\beta_i)} \right) + (y-1)x^\mu \left(\prod_{j=1}^{\mu-1} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} \right) \left(\sum_{\beta_\mu \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_\mu)} y^{L_\tau(\beta_\mu)} \right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i C^{i-1}(x) L(x, y) + (y-1)x^\mu C^{\mu-1}(x) L(x, y) \\ &= 1 + \frac{x}{1-xC(x)} L(x, y) + (y-1)x^\mu C^{\mu-1}(x) L(x, y) \\ &= 1 + xC(x) L(x, y) + (y-1)x^\mu C^{\mu-1}(x) L(x, y) \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$L(x, y) = \frac{1}{1 - xC(x) + (1 - y)x^\mu C^{\mu-1}(x)}$$

και τελικά²⁶

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + (1 - y)x^\mu C^\mu(x)}. \quad (3.33)$$

Εργαζόμενοι όπως και στην προηγούμενη περίπτωση προκύπτει ότι

$$l_{n,k} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{\mu} \rfloor} (-1)^{j-k} (\mu j + 1) \binom{j}{k} \binom{2n - \mu j}{n}. \quad (3.34)$$

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3.33) και (3.34) για $\mu = 2$ και $\mu = 3$ προκύπτουν διαδοχικά οι γεννήτριες συναρτήσεις των αριθμών των χαμηλών εμφανίσεων των προτύπων uud και $uuud$ όπως επίσης και οι συντελεστές τους.

Συγκεκριμένα για $\tau = uud$ είναι

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + (1 - y)x^2 C^2(x)}$$

με συντελεστές

$$l_{n,k} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{j-k} (2j + 1) \binom{j}{k} \binom{2n - 2j}{n}$$

και για $\tau = uuud$ είναι

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + (1 - y)x^3 C^3(x)}$$

με συντελεστές

$$l_{n,k} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} (-1)^{j-k} (3j + 1) \binom{j}{k} \binom{2n - 3j}{n}.$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η αποφεύγουσα ακολουθία (l_n) που αντιστοιχεί στο πρότυπο χαμηλά uud , η οποία συμπίπτει με την ακολουθία των μονοπατιών Dyck ημιμήκους $n + 1$ που αρχίζουν με πυραμίδα και στα οποία οι υπόλοιπες συνιστώσες δεν είναι πυραμίδες (βλ. A035929 στο [124]).

Για μια συνδυαστική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος θεωρούμε τα παρακάτω σύνολα:

Έστω \mathcal{A} το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck που δεν έχουν χαμηλά uud και \mathcal{A}_1 το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck της μορφής

$$u\gamma d(ud)^\mu$$

όπου $\mu \geq 0$ και $\gamma \neq \epsilon$ και γ δεν αρχίζει με ud .

Τότε κάθε στοιχείο $\alpha \in \mathcal{A}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$\alpha = (ud)^\mu \text{ ή } \alpha = (ud)^\mu \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k$$

όπου $\mu \geq 0$, $\alpha_i \in \mathcal{A}_1$ για κάθε $i \in [k]$ και $k \in \mathbb{N}^*$.

²⁶Χρησιμοποιώντας τη σχέση $xC^2(x) - C(x) + 1 = 0$.

Εστω B το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck που αρχίζουν με μια πυραμίδα και κάθε επόμενη συνιστώσα τους δεν είναι πυραμίδα και B_1 το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck της μορφής

$$u(ud)^s \delta d$$

όπου $s \geq 0$ και δ δεν αρχίζει με ud , $\delta \neq \epsilon$ και όχι πυραμίδα όταν $s = 0$, και $s \geq 2$ όταν $\delta = \epsilon$.

Τότε κάθε στοιχείο $\beta \in B$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$\beta = u^{\mu+1} d^{\mu+1} \text{ ή } \beta = u^{\mu+1} d^{\mu+1} \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\lambda$$

όπου $\mu \geq 0$ και $\beta_i \in B_1$ για κάθε $i \in [\lambda]$ και $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow B_1$ ώστε αν $\alpha = u\gamma d(ud)^\mu$ τότε

$$\phi_1(\alpha) = \begin{cases} u(ud)^\mu \gamma d, & \text{αν } \mu > 0, \\ u\gamma d, & \text{αν } \mu = 0 \text{ και } \gamma \text{ δεν είναι πυραμίδα} \\ u(ud)^s d, & \text{αν } \mu = 0 \text{ και } \gamma \text{ είναι πυραμίδα ύψους } s. \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει ότι η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη με $l(\phi_1(\alpha)) = l(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}_1$.

Τότε και η απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B$ με

$$\phi((ud)^\mu) = u^{\mu+1} d^{\mu+1}$$

και

$$\phi((ud)^\mu \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k) = u^{\mu+1} d^{\mu+1} \phi_1(\alpha_1) \phi_1(\alpha_2) \cdots \phi_1(\alpha_k)$$

όπου $\alpha_i \in \mathcal{A}_1$, $i \in [k]$, $k \in \mathbb{N}^*$ και $\mu \in \mathbb{N}$ είναι αμφιμονοσήμαντη με $l(\phi(\alpha)) = l(\alpha) + 1$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$.

Κατόπιν τούτων ο αριθμός των μονοπατιών ημιμήκους n που αποφεύγουν το πρότυπο uud σε χαμηλό επίπεδο ισούται με τον αριθμό των μονοπατιών ημιμήκους $n + 1$ που αρχίζουν με πυραμίδα και καμιά από τις άλλες συνιστώσες τους δεν είναι πυραμίδα.

3. Το πρότυπο du^μ , $\mu \in \mathbb{N}^*$

Στην περίπτωση αυτή θεωρείται η παρακάτω διάσπαση των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = \beta_1 u^i d \text{ ή } \alpha = \beta_1 u^i d \beta_2 d \cdots \beta_i d, \quad i \in \mathbb{N} \text{ με } i \geq 2.$$

όπου $\beta_i \in \mathcal{D}$, $i \in \mathbb{N}^*$.

Επειδή

$$L_\tau(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \alpha = \epsilon \\ L_\tau(\beta_1), & \text{αν } \beta_1 = \epsilon \text{ ή } i \leq \mu - 1 \\ L_\tau(\beta_1) + 1, & \text{αν } \beta_1 \neq \epsilon \text{ και } i \geq \mu \end{cases}$$

²⁷ Προφανώς αν $\mu = 1$ η περίπτωση αυτή δεν υφίσταται.

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 L(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{L_\tau(\alpha)} \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D}, j \neq 1 \\ \beta_1 = \epsilon}} x^{\sum_{j=1}^i l(\beta_j) i} y^{L_\tau(\beta_1)} + \sum_{i=1}^{\mu-1} \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D}, j \neq 1 \\ \beta_1 \in \mathcal{D}^*}} x^{\sum_{j=1}^i l(\beta_j) i} y^{L_\tau(\beta_1)} + \sum_{i=\mu}^{\infty} \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D}, j \neq 1 \\ \beta_1 \in \mathcal{D}^*}} x^{\sum_{j=1}^i l(\beta_j) i} y^{L_\tau(\beta_1) i} \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=2}^i \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} + \sum_{i=1}^{\mu-1} x^i \left(\prod_{j=2}^i \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} \right) \left(\sum_{\beta_1 \in \mathcal{D}^*} x^{l(\beta_1)} y^{L_\tau(\beta_1)} \right) \\
 &\quad + \sum_{i=\mu}^{\infty} x^i \left(\prod_{j=2}^i \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} \right) \left(\sum_{\beta_1 \in \mathcal{D}^*} x^{l(\beta_1)} y^{L_\tau(\beta_1)+1} \right) \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i C^{i-1}(x) + \sum_{i=1}^{\mu-1} x^i C^{i-1}(x) (L(x, y) - 1) + y \sum_{i=\mu}^{\infty} x^i C^{i-1}(x) (L(x, y) - 1) \\
 &= 1 + xC(x) + \left(xC(x) - (1-y) \sum_{i=\mu}^{\infty} x^i C^{i-1}(x) \right) (L(x, y) - 1) \\
 &= 1 + xC(x) + \left(xC(x) - \frac{(1-y)x^\mu C^{\mu-1}(x)}{1-xC(x)} \right) (L(x, y) - 1) \\
 &= 1 + xC(x) + (xC(x) - (1-y)x^\mu C^\mu(x)) (L(x, y) - 1)
 \end{aligned}$$

οπότε

$$L(x, y) = \frac{1 + (1-y)x^\mu C^\mu(x)}{1 - xC(x) + (1-y)x^\mu C^\mu(x)}$$

και τελικά

$$L(x, y) = 1 + \frac{x C^2(x)}{1 + (1-y)x^\mu C^{\mu+1}(x)}. \quad (3.35)$$

Αναπτύσσοντας την παραπάνω γεννήτρια συνάρτηση σε γεωμετρική σειρά όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις προκύπτει ότι

$$l_{n,k} = \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n-1}{\mu} \rfloor} (-1)^{j-k} \frac{(\mu+1)j+2}{n+j+1} \binom{j}{k} \binom{2n - (\mu-1)j - 1}{n+j} \quad (3.36)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3.35) και (3.36) για $\mu = 3$ και $\mu = 4$ προκύπτουν αντίστοιχα οι γεννήτριες συναρτήσεις των αριθμών των χαμηλών εμφανίσεων των προτύπων duu και $duuu$ όπως επίσης και οι συντελεστές τους.

Συγκεκριμένα για $\tau = duu$ είναι

$$L(x, y) = 1 + \frac{x C^2(x)}{1 + (1-y)x^2 C^3(x)} \quad (3.37)$$

με συντελεστές

$$l_{n,k} = \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^{j-k} \frac{3j+2}{n+j+1} \binom{j}{k} \binom{2n-j-1}{n+j}$$

και για $\tau = duuu$ είναι

$$L(x, y) = 1 + \frac{x C^2(x)}{1 + (1 - y)x^3 C^4(x)}$$

με συντελεστές

$$l_{n,k} = 2 \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} (-1)^{j-k} \frac{2j+1}{n+j+1} \binom{j}{k} \binom{2n-2j-1}{n+j}.$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η αποφεύγουσα ακολουθία (l_n) που αντιστοιχεί στο πρότυπο $duuu$ η οποία όπως θα αποδειχθεί συμπίπτει με άλλες γνωστές ακολουθίες.

Καταρχήν θα αποδειχθεί ότι η ακολουθία αυτή είναι ένα άθροισμα από αριθμούς Catalan (βλ. A014137 στο [124]).

Συγκεκριμένα ισχύει η σχέση

$$l_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Πραγματικά αν τεθεί $y = 0$ στη σχέση (3.37) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= 1 + \frac{x C^2(x)}{1 + x^2 C^3(x)} \\ &= 1 + \frac{x C^2(x)}{1 + x C(x)(C(x) - 1)} \\ &= 1 + \frac{x C^2(x)}{1 + x C^2(x) - x C(x)} \\ &= 1 + \frac{x C^2(x)}{C(x) - x C(x)} \\ &= 1 + \frac{x C(x)}{1 - x}. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτου, θα ισχύουν οι ισοδύναμες σχέσεις

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n &= 1 + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \\ \sum_{n=1}^{\infty} l_n x^{n-1} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \\ \sum_{n=0}^{\infty} l_{n+1} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n C_k \right) x^n \end{aligned}$$

και τελικά

$$l_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k.$$

Για την απόδειξη του παραπάνω τύπου χωρίς τη χρήση των γεννητριών συναρτήσεων παρατηρούμε ότι κάθε $\alpha \in \mathcal{D}_{n+1}$ που αποφεύγει τις χαμηλές εμφανίσεις του προτύπου $duuu$ γράφεται στη μορφή

$$\alpha = u\beta d(ud)^\mu$$



όπου $\mu = 0, 1, \dots, n$ και $\beta \in \mathcal{D}_{n-\mu}$.



Επομένως, θα ισχύει ότι

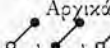
$$l_{n+1} = \sum_{\mu=0}^n |\mathcal{D}_{n-\mu}| = \sum_{\mu=0}^n C_{n-\mu} = \sum_{k=0}^n C_k.$$

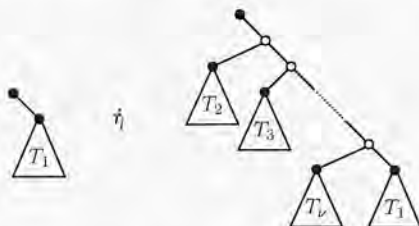
Συνδυαστικά η ακολουθία αυτή απαρτιθεί μια ενδιαφέρουσα κατηγορία δένδρων.

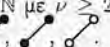
Ένα δυαδικό δένδρο που οι κορυφές του είναι χρωματισμένες με δύο χρώματα, μαύρο και λευκό, ονομάζεται 2-δυαδικό δένδρο (βλ. [66]). Η ρίζα των δένδρων αυτών συνήθως θεωρείται ότι έχει μαύρο χρώμα.

Είναι γνωστό ότι τα 2-δυαδικά δένδρα που δεν περιέχουν δεσμούς της μορφής , απαρτιούνται από τους αριθμούς Catalan. Για το σκοπό αυτό οι Gu, Li και Mansour [66] κατασκεύασαν μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των 2-δυαδικών δένδρων με n κορυφές, που δεν έχουν δεσμούς της μορφής  και των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n .

Παρακάτω θα κατασκευασθεί μια διαφορετική απεικόνιση ϕ που έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι κάθε 2-δυαδικό δένδρο που δεν περιέχει δεσμούς της μορφής  και το δεξιό μονοπάτι του δεν περιέχει δεσμούς της μορφής  απεικονίζεται σε ένα μονοπάτι Dyck που αποφεύγει το πρότυπο duu .

Αρχικά παρατηρούμε ότι κάθε μη κενό 2-δυαδικό δένδρο T που δεν περιέχει δεσμούς της μορφής , γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω μορφές:





όπου $n \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$ και T_1, T_2, \dots, T_ν είναι 2-δυαδικά δένδρα που δεν περιέχουν δεσμούς της μορφής .

Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί στα 2-δυαδικά δένδρα των οποίων το παιδί της ρίζας είναι μαύρο ενώ η δεύτερη όταν αυτό είναι λευκό.

Στη συνέχεια ορίζεται αναδρομικά η απεικόνιση ϕ με²⁸ $\phi(\square) = \varepsilon$ και

$$\phi(T) = \phi(T_1)ud \text{ ή } \phi(T) = \phi(T_1)u^\nu d\phi(T_2)d\phi(T_3)\cdots d\phi(T_\nu)d.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη και μεταφέρει τα 2-δένδρα με n κορυφές που δεν περιέχουν δεσμούς της μορφής  σε μονοπάτια Dyck ημιμήκους n , για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον ισχύει ότι κάθε δένδρο που δεν περιέχει δεσμούς της μορφής  στο δεξιό μονοπάτι του απεικονίζεται μέσω της ϕ σε ένα μονοπάτι Dyck που αποφεύγει τις χαμηλές εμφανίσεις του προτύπου duu και αντίστροφα.

Παρατήρηση

²⁸Το \square είναι το κενό δένδρο.

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.3.3 για $\tau = u^\mu d$ και $j + 1$ αντί j προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση F_{j+1} των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = u^\mu d$ σε ύψος $j + 1$ είναι

$$\begin{aligned}
 F_{j+1}(x, y) &= R_{j+1}(x) + \frac{1}{U_{j+1}^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1+(1-y)x^\mu C^\mu(x)}{C(x)} - xR_{j+1}(x) \right)} \\
 &= R_{j+1}(x) + \frac{U_j^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{xR_{j+1}^2(x)} \left(1 + (1-y)x^\mu C^\mu(x) - xC(x)R_{j+1}(x) \right) \\
 &\stackrel{29}{=} \frac{1}{1 - xR_j(x)} + \frac{x C(x)}{U_j^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) (1 - xR_j(x))^2 \left(1 + (1-y)x^\mu C^\mu(x) - \frac{x C(x)}{1 - xR_j(x)} \right)} \\
 &\stackrel{29}{=} R_j(x) + \frac{1}{U_j^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) (1 - xR_j(x))} \frac{(1 + (1-y)x^\mu C^\mu(x)) (1 - xR_j(x)) - x C(x) + x(C(x))}{((1 + (1-y)x^\mu C^\mu(x)) (1 - xR_j(x)) - x C(x))} \\
 &= R_j(x) + \frac{1}{U_j^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)} \frac{1}{1 - xR_j(x) - \frac{x C(x)}{1 + (1-y)x^\mu C^\mu(x)}} \\
 &= R_j(x) + \frac{1}{U_j^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)} \frac{1}{\frac{1 + (1-y)x^\mu C^\mu - x C(x)}{1 + (1-y)x^\mu C^\mu(x)} - xR_j(x)} \\
 &= R_j(x) + \frac{1}{U_j^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)} \frac{1}{\frac{1 + (1-y)x^\mu C^{\mu+1}}{C(x) + (1-y)x^\mu C^{\mu+1}(x)} - xR_j(x)} \\
 &= R_j(x) + \frac{1}{U_j^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + (1-y)x^\mu C^{\mu+1}} - xR_j(x)}.
 \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτου, επειδή η συνάρτηση $L(x, y) = 1 + \frac{x C^2(x)}{1 + (1-y)x^\mu C^{\mu+1}(x)}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των χαμηλών εμφανίσεων του προτύπου du^μ , από την Πρόταση 3.3.3 προκύπτει ότι η συνάρτηση F_{j+1} ταυτίζεται με τη γεννήτρια συνάρτηση των εμφανίσεων του προτύπου du^μ σε ύψος j . Άρα, F_{j+1} ταυτίζεται με τη γεννήτρια συνάρτηση των εμφανίσεων του προτύπου du^μ σε ύψος j και “αριθμός εμφανίσεων του σ_i στατιστικές “αριθμός εμφανίσεων του προτύπου du^μ σε ύψος j ” και “αριθμός εμφανίσεων του προτύπου $u^\mu d$ σε ύψος $j + 1$ ” είναι ισοκατανομημένες, για κάθε $j \in \mathbb{N}$.

Για μια συνδυαστική απόδειξη της ισοκατανομής των δύο παραπάνω στατιστικών θεωρείται η απεικόνιση $\sigma_j : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, σύμφωνα με την οποία για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ το μονοπάτι $\sigma_j(\alpha)$ κατασκευάζεται από το μονοπάτι α χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο κανόνα:

Κάθε μεγιστικό τμήμα του α της μορφής

$$(du)^k u^{\mu-1} (du)^l, \quad k \in \mathbb{N}^*, l \in \mathbb{N}$$

που ξεκινάει από το $j + 1$ επίπεδο αντικαθίσταται από το ανάστροφό του

$$(ud)^l u^{\mu-1} (ud)^k$$

και αντιστρόφως.

Για παράδειγμα για $\mu = 3$, αν

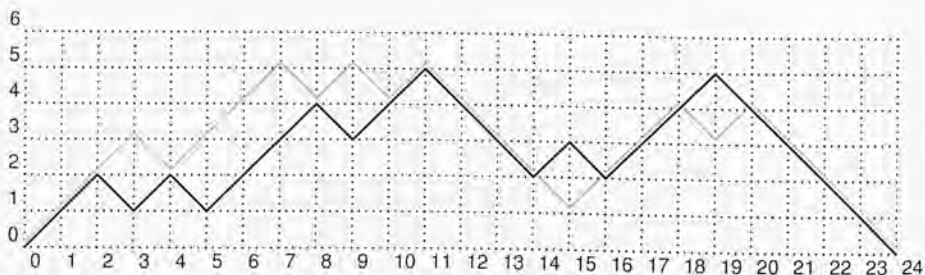
$$\alpha = u u d u d u u u d u u d d d d u d u u u d d d d d$$

τότε

$$\sigma_1(\alpha) = u u u d u u u d u d u d d d d d u u u d u d d d d d$$

(βλ. επόμενο σχήμα).

²⁹Βλ. Λήμμα 3.3.2.



Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η απεικόνιση αυτή είναι μια ενέλιξη του \mathcal{D} η οποία διατηρεί το μήκος, και ισχύει ότι ο αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου du^{μ} σε ύψος j στο α ισούται με τον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $u^{\mu}d$ σε ύψος $j+1$ στο $\sigma_j(\alpha)$, για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$.

4. Τα πρότυπα $u^{\mu}du$ και udu^{μ} , $\mu \in \mathbb{N}$ με $\mu \geq 2$

Το πρότυπο $u^{\mu}du$ όπου $\mu \in \mathbb{N}$ με $\mu \geq 2$ έχει μελετηθεί από τον Mansour [92].

Θα αποδειχθεί ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{N}$ με $\mu \geq 2$ και $j \in \mathbb{N}$ οι επόμενες τρεις στατιστικές είναι ισοκατανομημένες.

1. "Αριθμός εμφανίσεων του $u^{\mu+1}d$ σε ύψος j ".
2. "Αριθμός εμφανίσεων του $u^{\mu}du$ σε ύψος j ".
3. "Αριθμός εμφανίσεων του udu^{μ} σε ύψος j ".

Για την απόδειξη της ισοκατανομής των δύο πρώτων στατιστικών θεωρείται η γνωστή ενέλιξη ψ_j του \mathcal{D} σύμφωνα με την οποία κάθε κορυφή στο $j+2$ επίπεδο ενός μονοπατιού Dyck μετατρέπεται σε μια κοιλάδα στο j επίπεδο και αντιστρόφως. (βλ. Θεώρημα 2.1 στο [91]).

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι ο αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου $u^{\mu}du$ σε ύψος j στο α είναι ίσος με τον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $u^{\mu+1}d$ σε ύψος j στο $\psi_{j+2}(\alpha)$, για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$, οπότε οι στατιστικές "αριθμός εμφανίσεων του $u^{\mu}du$ σε ύψος j " και "αριθμός εμφανίσεων του $u^{\mu+1}d$ σε ύψος j " είναι ισοκατανομημένες.

Για την απόδειξη της ισοκατανομής των δύο τελευταίων από τις παραπάνω τρεις στατιστικές θεωρείται η απεικόνιση $\chi_j : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ σύμφωνα με την οποία για κάθε α το μονοπάτι $\chi_j(\alpha)$ κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο κανόνα.

Κάθε μεγιστικό τμήμα του α της μορφής

$$(ud)^k u^{\mu} (du)^l, \quad k, l \in \mathbb{N}$$

που ξεκινάει από το επίπεδο j αντικαθίσταται από το ανάστροφό του

$$(ud)^l u^{\mu} (du)^k$$

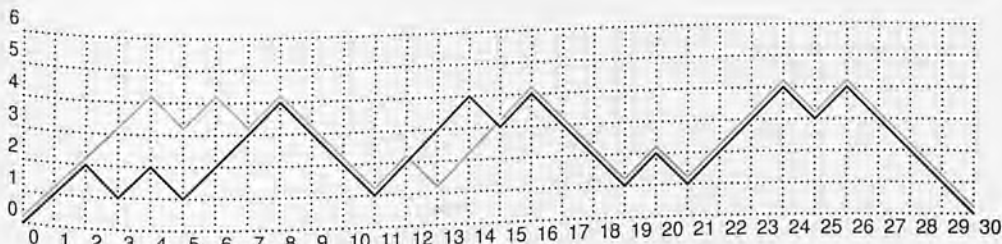
και αντιστρόφως.

Για παράδειγμα για $\mu = 3$, αν

$$\alpha = u u d u d u u u d d d d u u u d u d d d u d u u u d u d d d d$$

τότε

$$\chi_1(\alpha) = u u u u d u d u d d d d u d u u u d d d u d u u u d u d d d d$$



(βλέπε επόμενο σχήμα).

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η απεικόνιση αυτή είναι μια ενέλιξη του \mathcal{D} η οποία διατηρεί το μήκος και ισχύει ότι ο αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου $u^{\mu}du$ σε ύψος j στο α ισούται με τον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου udu^{μ} σε ύψος j στο $\chi_j(\alpha)$, για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$, οπότε οι στατιστικές “αριθμός εμφανίσεων του $u^{\mu}du$ σε ύψος j ” και “αριθμός εμφανίσεων του udu^{μ} σε ύψος j ” είναι ισοκατανεμημένες.

Σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο οι τρεις στατιστικές της παρούσας ενότητας είναι ισοκατανεμημένες με τη στατιστική “αριθμός εμφανίσεων του $du^{\mu+1}$ σε ύψος $j-1$ ”. Αυτό μπορεί να προκύψει επίσης χρησιμοποιώντας και την απεικόνιση ψ_{j-1} διότι ο αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου $du^{\mu+1}$ σε ύψος $j-1$ στο α ισούται με τον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου udu^{μ} σε ύψος j στο $\psi_{j-1}(\alpha)$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$.

5. Τα πρότυπα $(ud)^{\mu}$ και $(du)^{\mu}$, $\mu \in \mathbb{N}^*$

Προκειμένου να υπολογισθεί η γεννήτρια συνάρτηση $L(x, y)$ στη περίπτωση όπου $\tau = (ud)^{\mu}$ θεωρείται η παρακάτω διάσπαση των μονοπατιών Dyck:

$$\alpha = (ud)^k \text{ ή } \alpha = (ud)^k u \beta d \gamma \text{ όπου } k \in \mathbb{N}, \beta \in \mathcal{D}^* \text{ και } \gamma \in \mathcal{D}.$$

Επειδή

$$L_{\tau}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \alpha = (ud)^k \text{ και } k < \mu \\ k - \mu + 1, & \text{αν } \alpha = (ud)^k \text{ και } k \geq \mu \\ L_{\tau}(\gamma), & \text{αν } \alpha = (ud)^k u \beta d \gamma \text{ και } k < \mu \\ L_{\tau}(\gamma) + k - \mu + 1, & \text{αν } \alpha = (ud)^k u \beta d \gamma \text{ και } k \geq \mu \end{cases}$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} L(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{L_{\tau}(\alpha)} \\ &= \sum_{k=0}^{\mu-1} x^k + \sum_{k=\mu}^{\infty} x^k y^{k-\mu+1} + \sum_{k=0}^{\mu-1} \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{D}^* \\ \gamma \in \mathcal{D}}} x^{k+l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{L_{\tau}(\gamma)} + \sum_{k=\mu}^{\infty} \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{D}^* \\ \gamma \in \mathcal{D}}} x^{k+l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{L_{\tau}(\gamma)+k-\mu+1} \\ &= \frac{1-x^{\mu}}{1-x} + \frac{x^{\mu}y}{1-xy} + \sum_{k=0}^{\mu-1} x^{k+1} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D}^*} x^{l(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{L_{\tau}(\gamma)} \right) \\ &\quad + \sum_{k=\mu}^{\infty} x^{k+1} y^{k-\mu+1} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D}^*} x^{l(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{L_{\tau}(\gamma)} \right) \\ &= \frac{1-x^{\mu}}{1-x} + \frac{x^{\mu}y}{1-xy} + \frac{x-x^{\mu+1}}{1-x} (C(x)-1) L(x, y) + \frac{x^{\mu+1}y}{1-xy} (C(x)-1) L(x, y). \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων η γεννήτρια συνάρτηση του αριθμού των χαμηλών εμφανίσεων του προτύπου $(ud)^\mu$ δίδεται από τον τύπο

$$L(x, y) = \frac{1 - xy - x^\mu(1 - y)}{1 - x^{\mu+1} - x(1 - x^\mu)C(x) - xy(1 - x^\mu - x(1 - x^{\mu-1})C(x))}. \quad (3.38)$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι για κάθε μονοπάτι Dyck α ισχύει ότι ο αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου $(du)^\mu$ σε ύψος j στο α ισούται με τον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $(ud)^\mu$ σε ύψος $j + 1$ στο $\psi_j(\alpha)$, όπου ψ_j είναι η ενέλιξη σύμφωνα με την οποία κάθε κορυφή στο επίπεδο $j + 2$ ενός μονοπατιού Dyck μετατρέπεται σε κοιλάδα στο επίπεδο j και αντιστρόφως.

Συνεπώς, οι στατιστικές

(i) "αριθμός των εμφανίσεων του $(du)^\mu$ σε ύψος j "

(ii) "αριθμός των εμφανίσεων του $(ud)^\mu$ σε ύψος $j + 1$ "

είναι ισοκατανεμημένες.

Κατόπιν τούτων, εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.3.3 για $j = 1$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.38) προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση του αριθμού των χαμηλών εμφανίσεων του προτύπου $(du)^\mu$ δίδεται από τον τύπο

$$L(x, y) = 1 + \frac{x(1 - xy - x^\mu(1 - y))}{1 - x - x(1 - x^2)C(x) - xy(1 - x - x(1 - x^{\mu-1})C(x))}. \quad (3.39)$$

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3.38) και (3.39) για $\mu = 2$ προκύπτουν οι επόμενοι τύπου που δίνουν τις γεννήτριες συναρτήσεις $L(x, y)$ για $\tau = udud$ και $\tau = dudu$ αντίστοιχα.

$$L(x, y) = \frac{(1 + (1 - y)x)C(x)}{1 + (1 - y)x(1 + xC(x))} \quad (3.40)$$

και

$$L(x, y) = 1 + xC(x) + \frac{x^2C^3(x)}{1 + (1 - y)xC(x)}. \quad (3.41)$$

Από τον τελευταίο τύπο προκύπτει ότι ο αριθμός των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n που έχουν k εμφανίσεις του προτύπου $dudu$ ισούται με

$$l_{n,k} = \delta_{0k}C_{n-1} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=k}^{n-2} (-1)^{j-k} (j+3) \binom{j}{k} \binom{2n-j-2}{n}$$

όπου δ_{0k} είναι το δέλτα του Kronecker.

6. Γενικές προτάσεις

Στην ενότητα αυτή δίδονται ορισμένες προτάσεις με τη βοήθεια των οποίων υπολογίζεται η γεννήτρια συνάρτηση L για πρότυπα γενικότερης μορφής.

Η πρώτη πρόταση αφορά τα μη ισοπεριδικά πρότυπα.

Έστω τ ένα πρότυπο με $|\tau|_u = |\tau|_d$. Το τ ονομάζεται **ισοπεριδικό** αν γράφεται υπό τη μορφή

$$\tau = \rho\sigma\rho$$

όπου $\rho \neq \varepsilon$, $|\rho|_u = |\rho|_d$ και $\rho, \sigma \in \{u, d\}^*$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το τ είναι ισοπεριδικό αν και μόνο αν υπάρχουν μη κενά $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \{u, d\}^*$ με $|\rho_2|_u = |\rho_2|_d$, τέτοια ώστε

$$\tau = \rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_3.$$

Για παράδειγμα το πρότυπο $\tau = (ud)^\mu$ είναι ισοπεριδικό, το πρότυπο $\tau = u^k d^\mu u^{\mu-k}$, για $\mu \geq 2$ και $k \in |\mu - 1|$ είναι περιοδικό, ενώ τα πρότυπα $u^\mu d^\mu$ και $d^\mu u^\mu$ δεν είναι περιοδικά πρότυπα, όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$

Πρόταση 3.4.1. Αν τ είναι ένα μη ισοπεριδικό πρότυπο με $|\tau|_u = |\tau|_d = \mu$ και $m = \min(|\omega|_u - |\omega|_d)$ όπου ω είναι αριστερός παράγοντας του τ , τότε οι στατιστικές.

- (i) "αριθμός εμφανίσεων του τ σε ύψος j "
 (ii) "αριθμός εμφανίσεων του $\pi_\mu = u^\mu d^\mu$ σε ύψος $j + m$ "

είναι ισοκατανεμημένες για κάθε $\mu, j \in \mathbb{N}$ με $\mu \geq 1$.

Απόδειξη. Προφανώς κάθε εμφάνιση του τ σε ύψος j αρχίζει από ύψος $j + m$.

Έστω \mathcal{A} το σύνολο των μονοπατιών στο πρώτο τεταρτημόριο, με βήματα u, d , τα οποία αποφεύγουν τα πρότυπα τ, π_μ ³⁰ που αρχίζουν στο επίπεδο $j + m$.

Θα αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}$ δύο οποιεσδήποτε εμφανίσεις των προτύπων γ, δ όπου $\gamma, \delta \in \{\tau, \pi_\mu\}$ που αρχίζουν στο επίπεδο $j + m$ στο μονοπάτι α , δεν έχουν κοινά βήματα.

Πράγματι, το συμπέρασμα είναι προφανές όταν $\gamma = \delta = \pi_\mu$. Αν το μονοπάτι α έχει δύο εμφανίσεις του προτύπου τ που αρχίζουν στο επίπεδο $j + m$ οι οποίες έχουν ένα τουλάχιστον κοινό βήμα, και ρ_2 είναι το μονοπάτι που αποτελείται από τα κοινά βήματα των εμφανίσεων αυτών τότε το τ γράφεται ως $\tau = \rho_1 \rho_2 = \rho_2 \rho_3$. Επομένως, επειδή η αρχή του ρ_2 θα συμπίπτει με την αρχή της δεύτερης από τις παραπάνω εμφανίσεις του τ ενώ το τέλος του ρ_2 με το τέλος της πρώτης εμφάνισης του τ , έπεται ότι το ρ_2 αρχίζει και τελειώνει στο επίπεδο $j + m$ και επομένως $|\rho_2|_u = |\rho_2|_d$. Κατόπιν τούτων το πρότυπο τ είναι ισοπεριδικό, το οποίο είναι άτοπο.

Η άλλη περίπτωση είναι το μονοπάτι α να έχει μια εμφάνιση του προτύπου τ και μια εμφάνιση της πυραμίδας π_μ που αρχίζουν στο επίπεδο $j + m$ και οι οποίες έχουν ένα τουλάχιστον κοινό βήμα. Τότε θα πρέπει η εμφάνιση αυτή του τ να διέρχεται από την αρχή και το τέλος της πυραμίδας και άρα να περιέχει την πυραμίδα π_μ . Τότε όμως επειδή $|\pi_\mu| = |\tau| = 2\mu$ προκύπτει ότι $\pi_\mu = \tau$ το οποίο είναι άτοπο.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι κάθε $\alpha \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$\alpha = \beta_1 \gamma_1 \beta_2 \gamma_2 \cdots \beta_k \gamma_k \beta_{k+1}$$

όπου γ_i είναι οι μοναδικές εμφανίσεις των προτύπων π_μ, τ στην α που αρχίζουν στο επίπεδο $j + m$ και $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k \beta_{k+1} \in \mathcal{D}$.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi_j : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ με

$$\phi_j(\alpha) = \alpha \text{ για κάθε } \alpha \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}$$

και

$$\phi_j(\alpha) = \beta_1 \tilde{\gamma}_1 \beta_2 \tilde{\gamma}_2 \cdots \beta_k \tilde{\gamma}_k \beta_{k+1}$$

όπου

$$\tilde{\gamma}_i = \begin{cases} \pi_\mu, & \text{αν } \gamma_i = \tau \\ \tau, & \text{αν } \gamma_i = \pi_\mu \end{cases}$$

για $\alpha = \beta_1 \gamma_1 \beta_2 \gamma_2 \cdots \beta_k \gamma_k \beta_{k+1} \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση αυτή είναι μια ενέλιξη του \mathcal{D} που διατηρεί το μήκος και ισχύει ότι ο αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου τ σε ύψος j στο α ισούται με τον αριθμό των εμφανίσεων της πυραμίδας π_μ σε ύψος $j + m$ στο $\phi_j(\alpha)$. Επομένως οι στατιστικές (i) και (ii) είναι ισοκατανεμημένες. \square

³⁰Θεωρείται $\tau \neq \pi_\mu$.

Με βάση την προηγούμενη πρόταση, προκειμένου να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση L για οποιοδήποτε ισοπεριοδικό πρότυπο, αρκεί να περιορισθούμε στην περίπτωση της πυραμίδας $\pi_\mu = u^\mu d^\mu$.

Οι στατιστικές L_{π_1} και L_{π_2} έχουν ήδη μελετηθεί (βλ. A065600 και A114486 στο [124] αντίστοιχα). Παρακάτω θα μελετηθεί η στατιστική L_{π_μ} για κάθε $\mu \in \mathbb{N}^*$.

Επειδή, $L_{\pi_\mu}(\epsilon) = 0$ και

$$L_{\pi_\mu}(u\beta d\gamma) = L_{\pi_\mu}(\gamma) + |\beta = \pi_{\mu-1}|$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} L(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{L_{\pi_\mu}(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{D} \setminus \{\pi_{\mu-1}\} \\ \gamma \in \mathcal{D}}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{L_{\pi_\mu}(\gamma)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)+\mu} y^{L_{\pi_\mu}(\gamma)+1} \\ &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D} \setminus \{\pi_{\mu-1}\}} x^{l(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{L_{\pi_\mu}(\gamma)} \right) + x^\mu y \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{L_{\pi_\mu}(\gamma)} \\ &= 1 + x (C(x) - x^{\mu-1}) L(x, y) + y x^\mu L(x, y) \\ &= 1 + x C(x) L(x, y) - (1 - y) x^\mu L(x, y) \end{aligned}$$

οπότε

$$L(x, y) = \frac{1}{1 - xC(x) + (1 - y)x^\mu}$$

και τελικά

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + (1 - y)x^\mu C(x)}. \quad (3.42)$$

Στη συνέχεια αναπτύσσοντας την παραπάνω γεννήτρια συνάρτηση σε γεωμετρική σειρά και χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.4), (βλ. σελ. 13 του Κεφαλαίου 1) προκύπτει³¹ ότι

$$l_{n,k} = \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{\mu} \rfloor} (-1)^{j-k} \frac{j+1}{n - (\mu-1)j + 1} \binom{j}{k} \binom{2n - (2\mu-1)j}{n - (\mu-1)j} \quad (3.43)$$

Εφαρμογές

1. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση για το μη ισοπεριοδικό πρότυπο $\tau = u^k d^\mu u^{\mu-k}$, $\mu \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ και $k \leq \mu$, προκύπτει³² ότι οι στατιστικές

(i) “αριθμός εμφανίσεων του $u^k d^\mu u^{\mu-k}$ σε ύψος j ”

(ii) “αριθμός εμφανίσεων του $\pi_\mu = u^\mu d^\mu$ σε ύψος $j + \mu - k$ ”

είναι ισοκατανεμημένες.

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση $L(x, y)$ για το πρότυπο $u^k d^\mu u^{\mu-k}$ ισούται με τη γεννήτρια συνάρτηση $F_{\mu-k}$ για το πρότυπο $u^\mu d^\mu$.

³¹ Χρησιμοποιώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στις προηγούμενες περιπτώσεις.

³² Εδώ έχουμε $n = \mu - k$.

Από την σχέση (3.42) και το Πρόρισμα 3.3.4 προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση L για το πρότυπο $\tau = u^k d^\mu u^{\mu-k}$ ισούται με

$$\begin{aligned}
 L(x, y) &= \frac{C(x) (1 - x^{\mu-k} C^{2(\mu-k)}(x)) + (1 - C(x) + x^{\mu-k} C^{2(\mu-k)}(x)) \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^\mu C(x)}}{1 - x^{\mu-k+1} C^{2(\mu-k+1)}(x) - x C(x) (1 - x^{\mu-k} C^{2(\mu-k)}(x)) \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^\mu C(x)}} \\
 &= \frac{C(x) (1 - x^{\mu-k} C^{2(\mu-k)}(x)) (1 + (1-y)x^\mu C(x)) + (1 - C(x) + x^{\mu-k} C^{2(\mu-k)}(x)) C(x)}{(1 - x^{\mu-k+1} C^{2(\mu-k+1)}(x)) (1 + (1-y)x^\mu C(x)) - x (1 - x^{\mu-k} C^{2(\mu-k)}(x)) C^2(x)} \\
 &= \frac{2C(x) - C^2(x) + (1-y) (1 - x^{\mu-k} C^{2(\mu-k)}(x)) x^\mu C^2(x)}{1 - x C^2(x) + (1-y) (1 - x^{\mu-k+1} C^{2(\mu-k+1)}(x)) x^\mu C(x)} \\
 &= \frac{C(x) (2 - C(x) + (1-y) (1 - x^{\mu-k} C^{2(\mu-k)}(x)) x^\mu C(x))}{1 - x C^2(x) + (1-y) (1 - x^{\mu-k+1} C^{2(\mu-k+1)}(x)) x^\mu C(x)}.
 \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$L(x, y) = \frac{1 - x C^2(x) + (1-y) (1 - x^{\mu-k} C^{2(\mu-k)}(x)) x^\mu C(x)}{1 - x C^2(x) + (1-y) (1 - x^{\mu-k+1} C^{2(\mu-k+1)}(x)) x^\mu C(x)} C(x) \quad (3.44)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (3.44) για $\mu = 2$ και $k = 0, k = 1$ προκύπτουν αντίστοιχα οι γεννήτριες συναρτήσεις των αριθμών των χαμηλών εμφανίσεων των προτύπων $dduu$ και $uddu$.

Συγκεκριμένα για $\tau = dduu$ είναι

$$\begin{aligned}
 L(x, y) &= \frac{1 - x C^2(x) + (1-y) (1 - x^2 C^4(x)) x^2 C(x)}{1 - x C^2(x) + (1-y) (1 - x^3 C^6(x)) x^2 C(x)} C(x) \\
 &= \frac{1 + (1-y) (1 + x C^2(x)) x^2 C(x)}{1 + (1-y) (1 + x C^2(x) + x^2 C^4(x)) x^2 C(x)} C(x) \\
 &= \frac{1 + (1-y) x^2 C^2(x)}{1 + (1-y) ((1 + x C^2(x))^2 - x C^2(x)) x^2 C(x)} C(x) \\
 &= \frac{1 + (1-y) x^2 C^2(x)}{1 + (1-y) (C^2(x) - x C^2(x)) x^2 C(x)} C(x) \\
 &= \frac{1 + (1-y) x^2 C^2(x)}{1 + (1-y) (1-x) x^2 C^3(x)} C(x) \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

και για $\tau = uddu$ είναι

$$\begin{aligned}
 L(x, y) &= \frac{1 - x C^2(x) + (1-y) (1 - x C^2(x)) x^2 C(x)}{1 - x C^2(x) + (1-y) (1 - x^2 C^4(x)) x^2 C(x)} C(x) \\
 &= \frac{1 + (1-y) x^2 C(x)}{1 + (1-y) (1 + x C^2(x)) x^2 C(x)} C(x) \\
 &= \frac{1 + (1-y) x^2 C(x)}{1 + (1-y) x^2 C^2(x)} C(x) \\
 &= \frac{C(x) + (1-y) x^2 C^2(x)}{1 + (1-y) x^2 C^2(x)} \\
 &= 1 + \frac{x C^2(x)}{1 + (1-y) x^2 C^2(x)} \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

με συντελεστές

$$i_{n,k} = \frac{2(k+1)}{n+1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - k} (-1)^j \binom{j+k+1}{k+1} \binom{2n-2j-2k-1}{n}. \quad (3.47)$$

2. Ανάλογα, η Πρόταση 3.4.1 μπορεί να εφαρμοσθεί για τα πρότυπα $d^\mu u^\nu d^\nu u^\mu$ με $\mu \neq \nu$, $d^\mu (ud)^\nu u^\mu$ και $u^\mu d^\nu u^\mu d^{\nu+\xi-\nu}$ με $\nu \neq \xi$, όπου $\mu, \nu, \xi \in \mathbb{N}$.

Όπως είδαμε στη παράγραφο αυτή, η γεννήτρια συνάρτηση $L(x, y)$ πολλών διαφορετικών προτύπων είναι της αυτής μορφής (βλ. τους τύπους (3.27), (3.33)).

Τα πρότυπα αυτά μπορούν να ενταχθούν σε μια γενική κατηγορία προτύπων των οποίων, όπως αποδεικνύεται στην επόμενη πρόταση, η γεννήτρια συνάρτηση $L(x, y)$ υπολογίζεται με ένα απλό τύπο.

Πρόταση 3.4.2. Αν το πρότυπο τ είναι ένα αριστερό μονοπάτι Dyck και κάθε πρώτη συνιστώσα του (εκτός της αρχικής) δεν ταυτίζεται με κάποιο αριστερό παράγοντα του τ τότε ισχύει ότι

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^k C^{\lambda+1}(x)} \quad (3.48)$$

όπου $k = |\tau|_u$ και $\lambda = |\tau|_u - |\tau|_d$.

Απόδειξη.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν το πρότυπο τ δεν έχει σημείο επιστροφής, τότε γράφεται ως $\tau = us$ όπου s είναι ένα αριστερό μονοπάτι Dyck.

Αν \mathcal{A} είναι το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck που αρχίζουν με s τότε για κάθε $\alpha = u\beta d\gamma$, όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$ ισχύει ότι

$$L_\tau(\alpha) = L_\tau(\gamma) + |\beta \in \mathcal{A}|,$$

οπότε είναι

$$\begin{aligned} L(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{L_\tau(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{L_\tau(\gamma)+|\beta \in \mathcal{A}|} \\ &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{L_\tau(\gamma)} \right) + xy \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{l(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{L_\tau(\gamma)} \right) \\ &= 1 + x(C(x) - A(x))L(x, y) + xyA(x)L(x, y) \end{aligned}$$

όπου $A(x)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς το ημίμηχος.

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι

$$L(x, y) = \frac{1}{1 - xC(x) + x(1-y)A(x)}$$

και τελικά

$$L(x, y) \stackrel{33}{=} \frac{C(x)}{1 + x(1-y)C(x)A(x)}. \quad (3.49)$$

Επιπλέον, επειδή κάθε $\beta \in \mathcal{A}$ γράφεται στη μορφή

$$\beta = s\beta_1 d\beta_2 \cdots d\beta_\lambda$$

όπου $\beta_i \in \mathcal{D}$, $i \in [\lambda]$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{l(\beta)} = x^{l(s)} \sum_{\substack{\beta_i \in \mathcal{D} \\ i \in [\lambda]}} x^{l(\beta_1) + l(\beta_2) + \cdots + l(\beta_\lambda)} \\ &= x^{k-1} \prod_{i=1}^{\lambda} \sum_{\beta_i \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_i)} \\ &= x^{k-1} C^\lambda(x). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Κατόπιν τούτων από τις σχέσεις (3.49) και (3.50) προκύπτει άμεσα ο τύπος

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^k C^{\lambda+1}(x)}.$$

2. Αν το πρότυπο τ έχει τουλάχιστον ένα σημείο επιστροφής, τότε γράφεται ως $\tau = u w d s$ όπου $w \in \mathcal{D}$ και s είναι ένα αριστερό μονοπάτι Dyck του οποίου κάθε πρώτη συνιστώσα δεν ταυτίζεται με κάποιο αριστερό παράγοντα του τ .

Εργαζόμενοι όπως στην προηγούμενη περίπτωση έχουμε

$$L_\tau(\alpha) = L_\tau(\gamma) + [\beta = w][\gamma \in \mathcal{A}]$$

για κάθε $\alpha = u\beta d\gamma$, με $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$, όπου \mathcal{A} είναι το σύνολο των μονοπατιών Dyck που αρχίζουν με s .

Επομένως ισχύει ότι

$$\begin{aligned} L(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{L_\tau(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta) + l(\gamma) + 1} y^{L_\tau(\gamma) + [\beta = w][\gamma \in \mathcal{A}]} \\ &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D} \setminus \{w\}} x^{l(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{L_\tau(\gamma)} \right) + x^{l(w) + 1} \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{L_\tau(\gamma)} + y \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{L_\tau(\gamma)} \right) \\ &= 1 + x \left(C(x) - x^{l(w)} \right) L(x, y) + x^{l(w) + 1} L(x, y) + (y - 1) x^{l(w) + 1} A(x, y). \end{aligned}$$

Άρα

$$L(x, y) = 1 + xC(x)L(x, y) + (y - 1)x^{l(w) + 1}A(x, y) \tag{3.51}$$

όπου $A(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς τις παραμέτρους l και L_τ .

Επιπλέον επειδή κάθε $\beta \in \mathcal{A}$ γράφεται στη μορφή

$$\beta = s\beta_1 d\beta_2 \cdots d\beta_{\lambda+1}$$

³³ Χρησιμοποιώντας την ισότητα $C(x) - xC^2(x) = 1$.

όπου $\beta_j \in \mathcal{D}$, $j \in |\lambda + 1|$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 A(x, y) &= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{l(\beta)} y^{L_\tau(\beta)} \\
 &= x^{|\lambda|u} \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D} \\ j \in |\lambda-1|}} x^{\sum_{j=1}^{|\lambda-1|} l(\beta_j)} y^{L_\tau(\beta_{|\lambda+1|})} \\
 &= x^{|\lambda|u} \prod_{j=1}^{\lambda} \left(\sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} \right) \sum_{\beta_{\lambda+1} \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_{\lambda+1})} y^{L_\tau(\beta_{\lambda+1})} \\
 &= x^{|\lambda|u} C^\lambda(x) L(x, y).
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Κατόπιν τούτων, από τις σχέσεις (3.51) και (3.52) προκύπτει ότι

$$L(x, y) = 1 + xC(x)L(x, y) + (y - 1)x^{l(w)+|s|u+1}C^\lambda(x)L(x, y)$$

και τελικά

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + (1 - y)x^k C^{\lambda+1}(x)}. \tag{3.53}$$

□

Εφαρμογές

- Αν $\tau = u^\mu$ τότε εφαρμόζοντας τον τύπο (3.48) για $k = \lambda = \mu$ προκύπτει ο τύπος (3.27).
 - Αν $\tau = u^\mu d$ τότε εφαρμόζοντας τον τύπο (3.48) για $k = \mu$ και $\lambda = \mu - 1$ προκύπτει ο τύπος (3.33).
 - Αν $\tau = u^\mu d^\mu$ τότε εφαρμόζοντας τον τύπο (3.48) για $k = \mu$ και $\lambda = 0$ προκύπτει ο τύπος (3.42).
- Γενικότερα αν $\tau = u^\mu d^\nu$ με $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$, η γεννήτρια συνάρτηση $L(x, y)$ δίδεται από τον τύπο

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + (1 - y)x^{\max\{\mu, \nu\}} C^{|\mu - \nu| + 1}(x)}. \tag{3.54}$$

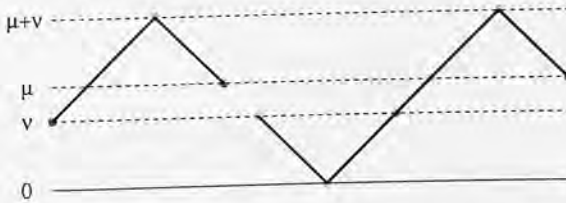
Πράγματι αν $\mu \geq \nu$ ο παραπάνω τύπος είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.4.2. Ο τύπος ισχύει και στην περίπτωση όπου $\mu < \nu$, αφού χρησιμοποιώντας την κατοπτρική απεικόνιση³⁴ προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις των χαμηλών εμφανίσεων των προτύπων $u^\mu d^\nu$ και $u^\nu d^\mu$ είναι ίσες.

- Για την εύρεση της γεννήτριας συνάρτησης $L(x, y)$ για το πρότυπο $\tau = d^\nu u^\mu$ όπου $\nu, \mu \in \mathbb{N}^*$ θα αποδειχθεί ότι οι παρακάτω στατιστικές είναι ισοκατανεμημένες:
 - Αριθμός χαμηλών εμφανίσεων του προτύπου $d^\nu u^\mu$.
 - Αριθμός εμφανίσεων του προτύπου $u^\mu d^\nu$ σε ύψος $m = \min\{\mu, \nu\}$.

³⁴Βλ. σελ. 30.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\nu \leq \mu$.

Παρατηρούμε (βλ. επόμενο σχήμα) ότι οποιεσδήποτε δύο εμφανίσεις του προτύπου $d^\nu u^\mu$ (αντ. $u^\mu d^\nu$) σε ύψος 0 (αντ. ν) σε ένα μονοπάτι Dyck δεν έχουν κοινά βήματα. Επίσης, κάθε χαμηλή εμφάνιση του προτύπου $d^\nu u^\mu$ και κάθε εμφάνιση του προτύπου $u^\mu d^\nu$ σε ύψος ν μπορεί να έχουν κοινά βήματα μόνο όταν το πρώτο προηγείται του δεύτερου.



Κατόπιν τούτων ορίζεται η απεικόνιση $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ σύμφωνα με την οποία για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ το μονοπάτι $\phi(\alpha)$ κατασκευάζεται από το μονοπάτι α χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο κανόνα:

Κάθε χαμηλή εμφάνιση του προτύπου $d^\nu u^\mu$ (αντ. εμφάνιση του προτύπου $u^\mu d^\nu$ σε ύψος ν) σε ένα μονοπάτι αντικαθίσταται από ένα μονοπάτι της μορφής $u^\mu d^\nu$ (αντ. $d^\nu u^\mu$) με την ίδια αρχή και τέλος, εκτός από την περίπτωση που υπάρχει στα δεξιά του (αντ. αριστερά του) εμφάνιση του προτύπου $u^\mu d^\nu$ σε ύψος ν (αντ. $d^\nu u^\mu$ σε ύψος 0) με κοινά βήματα.

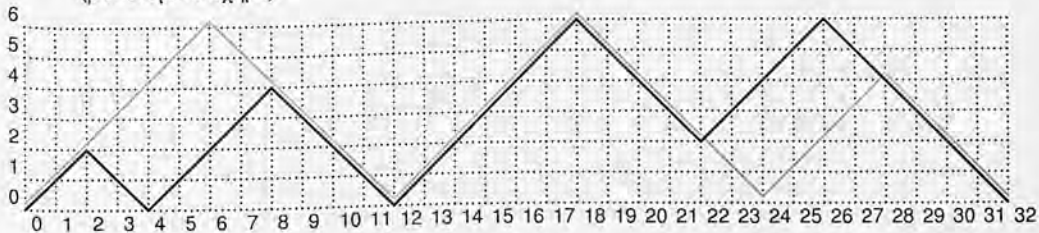
Για παράδειγμα, αν $\nu = 2$, $\mu = 4$ και

$$\alpha = u u d d u u u d d d d d u u u u u d d d d d u u u u d d d d d d$$

τότε

$$\phi(\alpha) = u u u u u d d d d d d d u u u u u d d d d d d d u u u u d d d d$$

(βλ. επόμενο σχήμα).



Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση ϕ είναι μια ενέλιξη του \mathcal{D} που διατηρεί το μήκος. Άρα οι παραπάνω στατιστικές είναι ισοκατανεμημένες, οπότε η γεννήτρια συνάρτηση $L(x, y)$ για το πρότυπο $\tau = d^\nu u^\mu$ ισούται με τη γεννήτρια συνάρτηση F_m για το πρότυπο $\tau = u^\mu d^\nu$, όπου $m = \min\{\mu, \nu\}$.

³⁵ Αφού χρησιμοποιώντας την κατοπτρική απεικόνιση προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις των χαμηλών εμφανίσεων των προτύπων $d^\nu u^\mu$ και $d^\nu u^\mu$ είναι ίσες.

Από την σχέση (3.54) και το Πόρισμα 3.3.4 προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση L για το πρότυπο $\tau = d^\nu u^\mu$ ισούται με

$$\begin{aligned} L(x, y) &= \frac{C(x) (1 - x^m C^{2m}(x)) + (1 - C(x) + x^m C^{2m}(x)) \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^M C^{M-m+1}(x)}}{1 - x^{m+1} C^{2(m+1)}(x) - x C(x) (1 - x^m C^{2m}(x)) \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^M C^{M-m+1}(x)}} \\ &= \frac{C(x) (1 - x^m C^{2(m)}(x)) (1 + (1-y)x^M C^{M-m+1}(x)) + (1 - C(x) + x^m C^{2(m)}(x)) C(x)}{(1 - x^{m+1} C^{2(m+1)}(x)) (1 + (1-y)x^M C^{M-m+1}(x)) - x (1 - x^m C^{2m}(x)) C^2(x)} \\ &= \frac{2C(x) - C^2(x) + (1-y) (1 - x^m C^{2m}(x)) x^M C^{M-m+2}(x)}{1 - x C^2(x) + (1-y) (1 - x^{m+1} C^{2(m+1)}(x)) x^M C^{M-m+1}(x)} \\ &= \frac{C(x) (2 - C(x) + (1-y) (1 - x^m C^{2m}(x)) x^M C^{M-m+1}(x))}{1 - x C^2(x) + (1-y) (1 - x^{m+1} C^{2(m+1)}(x)) x^M C^{M-m+1}(x)}. \end{aligned}$$

Άρα, τελικά,

$$L(x, y) = \frac{1 - x C^2(x) + (1-y) (1 - x^m C^{2m}(x)) x^M C^{M-m+1}(x)}{1 - x C^2(x) + (1-y) (1 - x^{m+1} C^{2(m+1)}(x)) x^M C^{M-m+1}(x)} C(x) \quad (3.55)$$

όπου $m = \min\{\mu, \nu\}$ και $M = \max\{\mu, \nu\}$.

Ειδικά για $\nu = 1$ από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ο τύπος (3.35).

4. Για την εύρεση της γεννήτριας συνάρτησης L για το πρότυπο $u^\mu d^\nu u^\xi$, όπου $\mu, \nu, \xi \in \mathbb{N}^*$ διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

- (i) Αν $\nu < \mu$, ή $\nu = \mu$ και $\xi > \mu$, τότε εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.4.2 προκύπτει ότι

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^{\mu+\xi} C^{\mu+\xi-\nu+1}(x)}. \quad (3.56)$$

Ειδικά για $\nu = 1$ και $\mu = 1$ (αντ. $\xi = 1$) προκύπτει η γεννήτρια συνάρτηση L για τα πρότυπα της τέταρτης ενότητας της παραγράφου 3.4.

- (ii) Αν $\nu = \mu$ και $\xi \leq \mu$ τότε δεν ισχύει ο τύπος της προηγούμενης πρότασης, ακόμα και στην απλή περίπτωση $\nu = \mu = \xi = 1$ (βλ. τη σχέση (3.26)). Γι' αυτό θα δοθεί η επόμενη παραλλαγή της Πρότασης 3.4.2.

Πρόταση 3.4.3. Αν τ είναι ένα αριστερό μονοπάτι Dyck με τουλάχιστον δύο πρώτες συνιστώσες, του οποίου η τελευταία συνιστώσα ταυτίζεται με ένα αριστερό παράγοντα του τ και οι υπόλοιπες πρώτες συνιστώσες (εκτός της αρχικής) δεν ταυτίζονται με την αρχική τότε ισχύει ότι

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + \frac{(1-y)x^k C^{\lambda+1}(x)}{1 + (1-y)x^\nu}} \quad (3.57)$$

όπου $k = |\tau|_u$, $\lambda = |\tau|_u - |\tau|_d$ και

$$\nu = \begin{cases} \rho, & \text{αν το } \tau \text{ δεν καταλήγει στον άξονα } x \\ k - \rho, & \text{αν το } \tau \text{ καταλήγει στον άξονα } x \end{cases}$$

όπου ρ το ημιμήκος της πρώτης συνιστώσας.

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι το πρότυπο τ δεν καταλήγει στον άξονα x οπότε γράφεται στη μορφή

$$\tau = us\delta_1d\delta_2d \cdots \delta_\lambda d\delta_{\lambda+1},$$

όπου s είναι πρώτο αριστερό μονοπάτι Dyck, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\lambda \in \mathcal{D}$ και $\delta \in \mathcal{D}$ είναι ένα μονοπάτι που καμιά πρώτη συνιστώσα του δεν ταυτίζεται με την αρχική του τ .

Αν \mathcal{A} είναι το σύνολο των μονοπατιών Dyck που αρχίζουν με δus τότε, χρησιμοποιώντας ανάλογο τρόπο με αυτό που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη της δεύτερης περίπτωσης της Πρότασης 3.4.2, αποδεικνύεται ότι

$$L(x, y) = 1 + xC(x)L(x, y) + (y-1)x^\rho A(x, y) \quad (3.58)$$

όπου $A(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς τις παραμέτρους l, L_τ . Επιπλέον, επειδή κάθε $\beta \in \mathcal{A}$ γράφεται στη μορφή

$$\beta = \delta us\beta_1d\beta_2d \cdots \beta_\lambda d\beta_{\lambda+1}$$

όπου $\beta_i \in \mathcal{D}$, $i \in [\lambda+1]$, προκύπτει ότι

$$L_\tau(\beta) = L_\tau(\beta_{\lambda+1}) + \prod_{j=1}^{\lambda} [\beta_j = \delta_j] [\beta_{\lambda+1} \in \mathcal{A}]$$

και

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{l(\beta)} y^{L_\tau(\beta)} \\ &= x^{k-\rho} \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D} \\ j \in [\lambda+1]}} x^{\sum_{j=1}^{\lambda+1} l(\beta_j)} y^{L_\tau(\beta_{\lambda+1}) + \prod_{j=1}^{\lambda} [\beta_j = \delta_j] [\beta_{\lambda+1} \in \mathcal{A}]} \\ &= x^{k-\rho} \left(\sum_{j=1}^{\lambda} l(\delta_j) \right) \sum_{\beta_{\lambda+1} \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_{\lambda+1})} y^{L_\tau(\beta_{\lambda+1}) + |\beta_{\lambda+1} \in \mathcal{A}|} \\ &\quad + \left(C^\lambda(x) - x^{\sum_{j=1}^{\lambda} l(\delta_j)} \right) \sum_{\beta_{\lambda+1} \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_{\lambda+1})} y^{L_\tau(\beta_{\lambda+1})} \\ &= x^{k-\rho} \left(x^{2\rho-k} (L(x, y) + (y-1)A(x, y)) + (C^\lambda(x) - x^{2\rho-k}) L(x, y) \right) \\ &= x^{k-\rho} C^\lambda(x) L(x, y) + x^\rho (y-1) A(x, y). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Κατόπιν τούτων, από τις σχέσεις (3.58) και (3.59) προκύπτει ότι

$$L(x, y) = 1 + xC(x)L(x, y) + (y-1)x^\rho \frac{x^{k-\rho} C^\lambda(x) L(x, y)}{1 + (1-y)x^\rho}$$

και τελικά

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + \frac{(1-y)x^k C^{\lambda+1}(x)}{1+(1-y)x^\rho}}.$$

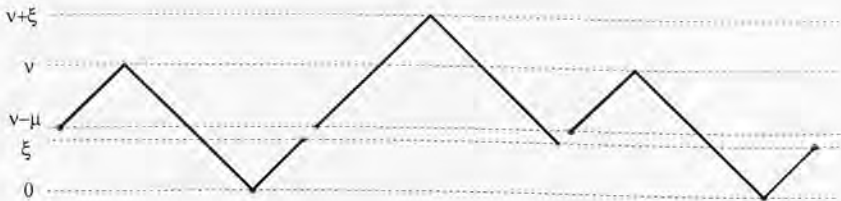
Η απόδειξη για την περίπτωση όπου το πρότυπο τ καταλήγει στον άξονα x είναι ανάλογη και παραλείπεται. \square

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση, προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση $L(x, y)$ για το πρότυπο $\tau = u^\mu d^\nu u^\xi$ όπου $\xi \leq \mu$ δίδεται από την σχέση

$$L(x, y) = \frac{C(x)}{1 + \frac{(1-y)x^{\mu+\xi}C^{\xi-1}(x)}{1+(1-y)x^\mu}} \quad (3.60)$$

Ειδικά για $\mu = \xi = 1$, από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ο τύπος (3.26).

- (iii) Αν $\nu > \mu$ και $\mu + \xi \leq \nu$ τότε παρατηρούμε (βλ. επόμενο σχήμα) ότι κάθε δύο εμφανίσεις του προτύπου $u^\mu d^\nu u^\xi$ (αντ. $u^{\mu+\xi} d^\nu$) σε ύψος 0 (αντ. ύψος ξ) σε ένα μονοπάτι Dyck δεν έχουν κοινά βήματα. Επίσης, κάθε χαμηλή εμφάνιση του προτύπου $u^\mu d^\nu u^\xi$ και κάθε εμφάνιση του προτύπου $u^{\mu+\xi} d^\nu$ σε ύψος ξ δεν έχουν κοινά βήματα.



Κατόπιν τούτων ορίζεται η απεικόνιση $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, σύμφωνα με την οποία για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ το μονοπάτι $\phi(\alpha)$ κατασκευάζεται από το μονοπάτι α χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο κανόνα:

Κάθε χαμηλή εμφάνιση του προτύπου $u^\mu d^\nu u^\xi$ (αντ. εμφάνιση του προτύπου $u^{\mu+\xi} d^\nu$ σε ύψος ξ) σε ένα μονοπάτι αντικαθίσταται από ένα μονοπάτι της μορφής $u^{\mu+\xi} d^\nu$ (αντ. $u^\mu d^\nu u^\xi$) με την ίδια αρχή και τέλος.

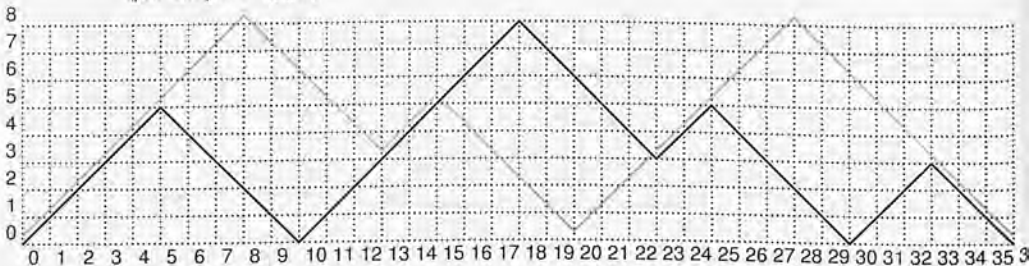
Για παράδειγμα, αν $\mu = 1, \nu = 5, \xi = 3$ και

$$\alpha = u u u u u d d d d d u u u u u u u d d d d d u u d d d d d u u u d d d d$$

τότε

$$\phi(\alpha) = u u u u u u u u d d d d d u u d d d d d u u u u u u u d d d d d d d d$$

(βλ. επόμενο σχήμα).



Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση ϕ είναι μια ενέλιξη του \mathcal{D} που διατηρεί το μήκος. Άρα οι στατιστικές “αριθμός των χαμηλών εμφανίσεων του προτύπου $u^\mu d^\nu u^\xi$ ” και “αριθμός των εμφανίσεων του προτύπου $u^{\mu+\xi} d^\nu$ σε ύψος ξ ” όπου $\mu < \nu$ και $\mu + \xi \leq \nu$ είναι ισοκαταναμημένες.

Συνεπώς η γεννήτρια συνάρτηση $L(x, y)$ για το πρότυπο $\tau = u^\mu d^\nu u^\xi$ όπου $\nu > \mu$ και $\mu + \xi \leq \nu$ ισούται με την γεννήτρια συνάρτηση F_ξ για το πρότυπο $\tau = u^{\mu+\xi} d^\nu$. Από την σχέση (3.54) και το Πρόσχημα 3.3.4 προκύπτει³⁶ ότι η γεννήτρια συνάρτηση L για το πρότυπο $\tau = u^\mu d^\nu u^\xi$ σ' αυτή την περίπτωση δίδεται από τη σχέση

$$L(x, y) = \frac{1 - xC^2(x) + (1 - y)(1 - x^\xi C^{2\xi}(x))x^\nu C^{\nu-\mu-\xi+1}(x)}{1 - xC^2(x) + (1 - y)(1 - x^{\xi+1}C^{2(\xi+1)}(x))x^\nu C^{\nu-\mu-\xi+1}(x)} C(x). \quad (3.61)$$

Ειδικά για $\mu + \xi = \nu$ προκύπτει ο τύπος (3.44).

- (iv) Αν $\nu > \mu$, $\mu + \xi > \nu$ και $\xi \leq \nu$ τότε παρατηρούμε (βλ. επόμενο σχήμα) ότι κάθε δύο εμφανίσεις του προτύπου $u^\mu d^\nu u^\xi$ (αντ. $u^\nu d^\mu u^{\mu+\xi-\nu}$) σε ύψος 0 (αντ. ύψος $\nu - \mu$) μπορεί να έχουν κοινά βήματα που βρίσκονται ανάμεσα στα ύψη $\nu - \mu$ και ξ . Επίσης κάθε χαμηλή εμφάνιση του προτύπου $u^\mu d^\nu u^\xi$ και κάθε εμφάνιση του προτύπου $u^\nu d^\mu u^{\mu+\xi-\nu}$ σε ύψος $\nu - \mu$ σε ένα μονοπάτι Dyck έχουν κοινά βήματα μόνο ανάμεσα στα ύψη $\nu - \mu$ και ξ και μόνο όταν το πρώτο προηγείται του δεύτερου.



Κατόπιν τούτων ορίζεται η απεικόνιση $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ σύμφωνα με την οποία για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ το μονοπάτι $\phi(\alpha)$ κατασκευάζεται από το α χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο κανόνα:

Κάθε χαμηλή εμφάνιση του προτύπου $u^\mu d^\nu u^\xi$ (αντ. εμφάνιση του προτύπου $u^\nu d^\mu u^{\mu+\xi-\nu}$ σε ύψος $\nu - \mu$) σε ένα μονοπάτι αντικαθίσταται από ένα μονοπάτι της μορφής $u^\nu d^\mu u^{\mu+\xi-\nu}$ (αντ. $u^\mu d^\nu u^\xi$) με την ίδια αρχή και τέλος.

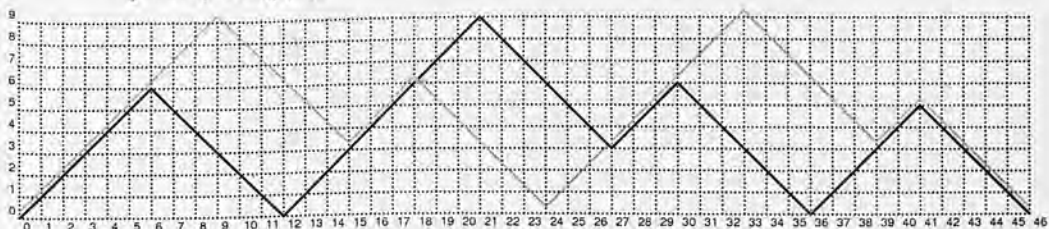
Για παράδειγμα, αν $\nu = 6$, $\mu = 3$, $\xi = 5$ και

$$\alpha = u u u u u d d d d d u u u u u u u u d d d d d u u u d d d d d u u u u u d d d d d$$

τότε

$$\phi(\alpha) = u u u u u u u d d d d d d u u u d d d d d u u u u u u u u d d d d d d u u d d d d d$$

(βλ. επόμενο σχήμα).



Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση ϕ είναι μια ενέλιξη του \mathcal{D} που διατηρεί το μήκος. Άρα οι παραπάνω στατιστικές είναι ισοκατανεμημένες, οπότε η γεννήτρια συνάρτηση

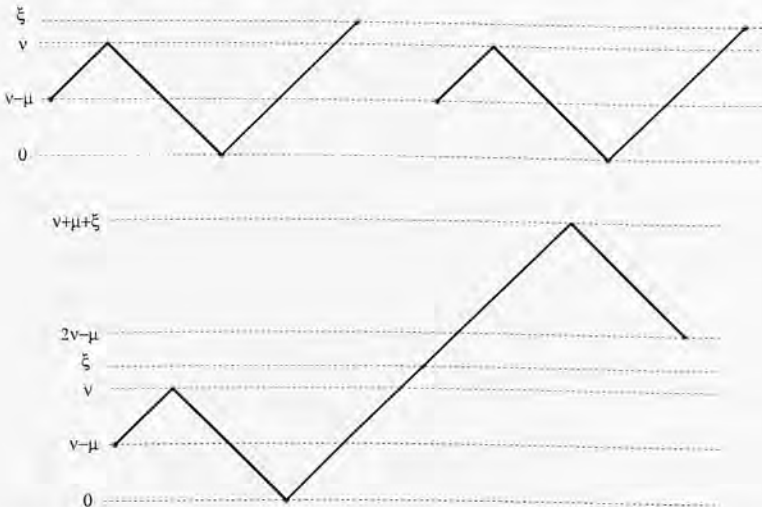
³⁶Μετά από πράξεις.

$L(x, y)$ για το πρότυπο $\tau = u^\mu d^\nu u^\xi$ στην περίπτωση αυτή ισούται με τη γεννήτρια συνάρτηση $F_{\nu-\mu}$ για το πρότυπο $\tau = u^\nu d^\nu u^{\mu+\xi-\nu}$.

Από τη σχέση (3.60) και το Πρόσλημα 3.3.4 προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση L για το πρότυπο $\tau = u^\mu d^\nu u^\xi$ όταν $\nu < \nu + \xi$ και $\mu, \xi \leq \nu$ ισούται με

$$L(x, y) = \frac{C(x) (1 - x^{\nu-\mu} C^{2(\nu-\mu)}(x)) + (1 - C(x) + x^{\nu-\mu} C^{2(\nu-\mu)}(x)) \frac{C(x)}{1 + \frac{(1-y)x^{\mu+\xi} C^{\mu+\xi-\nu+1}(x)}{1+(1-y)x^\nu}}}{1 + x^{\nu-\mu+1} C^{2(\nu-\mu+1)}(x) - x C(x) (1 - x^{\nu-\mu} C^{2(\nu-\mu)}(x)) \frac{C(x)}{1 + \frac{(1-y)x^{\mu+\xi} C^{\mu+\xi-\nu+1}(x)}{1+(1-y)x^\nu}}} \quad (3.62)$$

- (v) Αν $\nu > \mu$, $\mu + \xi > \nu$ και $\xi > \nu$ τότε παρατηρούμε (βλ. τα επόμενα σχήματα) ότι κάθε δύο εμφανίσεις του προτύπου $u^\mu d^\nu u^\xi$ (αντ. $u^{\mu+\xi} d^\nu$) σε ύψος 0 (αντ. ύψος $\nu - \mu$) δεν έχουν κοινά βήματα. Επίσης κάθε χαμηλή εμφάνιση του προτύπου $u^\mu d^\nu u^\xi$ και κάθε εμφάνιση του προτύπου $u^{\mu+\xi} d^\nu$ σε ύψος ν σε ένα μονοπάτι Dyck έχουν κοινά βήματα μόνο όταν το πρώτο προηγείται του δεύτερου.



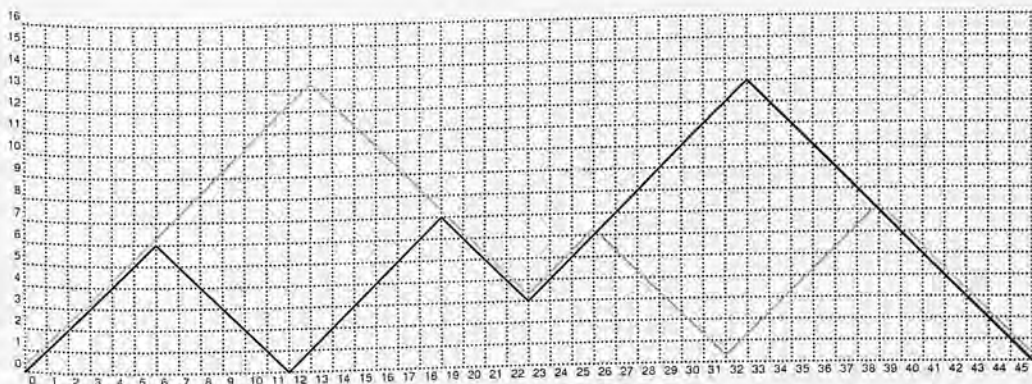
Κατόπιν τούτων ορίζεται η απεικόνιση $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ σύμφωνα με την οποία για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ το μονοπάτι $\phi(\alpha)$ κατασκευάζεται από το α χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο κανόνα: Κάθε χαμηλή εμφάνιση του προτύπου $u^\mu d^\nu u^\xi$ (αντ. εμφάνιση του προτύπου $u^{\mu+\xi} d^\nu$ σε ύψος $\nu - \mu$) σε ένα μονοπάτι αντικαθίσταται από ένα μονοπάτι της μορφής $u^{\mu+\xi} d^\nu$ (αντ. $u^\mu d^\nu u^\xi$) με την ίδια αρχή και τέλος, εκτός από την περίπτωση που υπάρχει στα δεξιά του (αντ. αριστερά του) εμφάνιση του προτύπου $u^{\mu+\xi} d^\nu$ σε ύψος $\nu - \mu$ (αντ. $u^\mu d^\nu u^\xi$ σε ύψος 0).

Για παράδειγμα, αν $\nu = 6$, $\mu = 3$, $\xi = 7$ και

$$\alpha = u u u u u u d d d d d d u u u u u u d d d d u u u u u u u u u u d d d d d d d d d d d d$$

τότε

$$\phi(\alpha) = u u u u u u u u u u u u u u u u d d d d d d d d d d u u u u d d d d d d u u u u u u u u d d d d d d d d$$



(βλ. επόμενο σχήμα).

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση ϕ είναι μια ενέλιξη του \mathcal{D} που διατηρεί το μήκος. Άρα οι παραπάνω στατιστικές είναι ισοκατανεμημένες, οπότε η γεννήτρια συνάρτηση $L(x, y)$ για το πρότυπο $\tau = u^\mu d^\nu u^\xi$ στην περίπτωση αυτή ισούται με τη γεννήτρια συνάρτηση F_ν για το πρότυπο $\tau = u^{\mu+\xi} d^\nu$.

Από τη σχέση (3.54) και το Πόρισμα 3.3.4 προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση L για το πρότυπο $\tau = u^\mu d^\nu u^\xi$ όταν $\mu < \nu$, $\mu < \mu + \xi$ και $\nu < \xi$ δίδεται από τη σχέση

$$L(x, y) = \frac{C(x) (1 - x^\nu C^{2(\nu)}(x)) + (1 - C(x) + x^\nu C^{2(\nu)}(x)) \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^{\mu+\xi} C^{\mu+\xi-\nu+1}(x)}}{1 + x^{\mu+1} C^{2(\mu+1)}(x) - x C(x) (1 - x^\nu C^{2(\nu)}(x)) \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^{\mu+\xi} C^{\mu+\xi-\nu+1}(x)}} \quad (3.63)$$

3.5 Πρότυπα σε ύψος τουλάχιστον j

Ένα πρότυπο τ λέγεται ότι εμφανίζεται σε ύψος τουλάχιστον j σε ένα μονοπάτι Dyck, όπου $j \in \mathbb{N}$, αν το ελάχιστο ύψος των σημείων του τ σε αυτή την εμφάνιση είναι μεγαλύτερο ή ίσο του j .

Για παράδειγμα το μονοπάτι του Σχήματος 3.1 έχει πέντε εμφανίσεις του προτύπου ud σε ύψος τουλάχιστον 1 (τέσσερις σε ύψος 1 και μια σε ύψος 2).

Μια εμφάνιση ενός προτύπου σε ύψος τουλάχιστον 1 συνήθως αναφέρεται ως υψηλή εμφάνιση του τ (high occurrence of τ). Για $\tau = ud$ είναι γνωστό [36, 37] ότι η στατιστικές “αριθμός των υψηλών εμφανίσεων του ud ” και “αριθμός των εμφανίσεων του du ” είναι ισοκατανεμημένες. Γενικότερα, οι Σαπουνάκης και Τσικούρας (βλ. Πρόταση 5.3 στο [111]) κατασκεύασαν μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ορισμένη στο σύνολο όλων των k -χρωματισμένων μονοπατιών Motzkin με τη βοήθεια της οποίας αποδεικνύεται ότι οι στατιστικές αυτές παραμένουν ισοκατανεμημένες ακόμα και στην περίπτωση των k -χρωματισμένων μονοπατιών Motzkin. Αυτή η απεικόνιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να αποδειχθεί η ισοκατανομή των στατιστικών “αριθμός των υψηλών εμφανίσεων του προτύπου $\tau = (ud)^\mu$ ” και “αριθμός εμφανίσεων του $(du)^\mu$ ” για κάθε $\mu \in \mathbb{N}^*$.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η στατιστική “αριθμός των εμφανίσεων του τ σε ύψος τουλάχιστον j ” με αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση $G_j = G_j(x, y)$, όπου το x μετράει το ημιμήκος και το y τις εμφανίσεις του προτύπου τ σε ύψος μεγαλύτερο ή ίσο του j .

Προφανώς ισχύει ότι $G_0 = F$ όπου η F είναι η γεννήτρια της στατιστικής “αριθμός των εμφανίσεων του τ ”. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η γεννήτρια συνάρτηση $H(x, y) = G_1(x, y)$

η οποία μετράει τις υψηλές εμφανίσεις του προτύπου τ .

Εύκολα αποδεικνύεται³⁷ ότι ισχύει η σχέση

$$G_j(x, y) = \frac{1}{1 - xG_{j-1}(x, y)}, \quad (3.64)$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$, οπότε από το Λήμμα 3.3.2 προκύπτει άμεσα το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.5.1. Για κάθε πρότυπο τ η γεννήτρια συνάρτηση $G_j(x, y)$ δίδεται από τη σχέση

$$G_j(x, y) = R_j(x) + \frac{1}{U_j^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{F(x, y)} - xR_j(x)\right)}$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$.

Ειδικά ισχύει ότι

$$H(x, y) = \frac{1}{1 - xF(x, y)}. \quad (3.65)$$

Πρόταση 3.5.2. Αν το πρότυπο τ είναι ένα μη περιοδικό πρώτο αριστερό μονοπάτι Dyck τότε η γεννήτρια συνάρτηση G_j του αριθμού των εμφανίσεων του προτύπου τ σε ύψος τουλάχιστον j , όπου $k = |\tau|_u$ και $\lambda = |\tau|_u - |\tau|_d$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$G_j(x, y) = 1 + xG_j^2(x, y) + (y - 1)x^{k-\lambda-j+1}\frac{p_j^{\lambda+1}(G_j(x, y))}{p_{j-1}^{\lambda-1}(G_j(x, y))} \quad (3.66)$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$, όπου $k = |\tau|_u$, $\lambda = |\tau|_u - |\tau|_d$ και (p_j) είναι η ακολουθία πολυωνύμων που ορίζεται από τις σχέσεις³⁸

$$p_0(t) = t, \quad p_1(t) = t - 1 \quad \text{και} \quad p_j(t) = p_{j-1}(t) - xp_{j-2}(t) \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad j \geq 2.$$

Απόδειξη.

Θα αποδειχθεί με επαγωγή ως προς j .

Επειδή $G_0 = \frac{G_1 - 1}{xG_1}$, από την Πρόταση 3.2.1 προκύπτει ότι

$$\frac{G_1 - 1}{xG_1} = 1 + x\left(\frac{G_1 - 1}{xG_1}\right)^2 + (y - 1)x^k\left(\frac{G_1 - 1}{xG_1}\right)^{\lambda+1}.$$

Κατόπιν τούτων εύκολα προκύπτει³⁹ ότι

$$\begin{aligned} G_1 &= 1 + xG_1^2 + (y - 1)x^{k-\lambda}\frac{(G_1 - 1)^{\lambda+1}}{G_1^{\lambda-1}} \\ &= 1 + xG_1^2 + (y - 1)x^{k-\lambda-1+1}\frac{p_1^{\lambda+1}(G_1)}{p_0^{\lambda-1}(G_1)}. \end{aligned}$$

Άρα το συμπέρασμα ισχύει για $j = 1$.

Στη συνέχεια υποτίθεται ότι η σχέση (3.66) ισχύει για το j και θα αποδειχθεί για το $j + 1$.

³⁷Όπως στην απόδειξη της προτάσεως 3.3.3.

³⁸Τα πολυώνυμα αυτά ονομάζονται πολυώνυμα τύπου Fibonacci.

³⁹Μετά από πράξεις.

Επειδή $G_j = \frac{G_{j+1}-1}{xG_{j+1}}$, λόγω της σχέσης (3.66) προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις

$$\frac{G_{j+1}-1}{xG_{j+1}} = 1 + x \left(\frac{G_{j+1}-1}{xG_{j+1}} \right)^2 + (y-1)x^{k-\lambda-j+1} \frac{p_j^{\lambda+1} \left(\frac{G_{j+1}-1}{xG_{j+1}} \right)}{p_{j-1}^{\lambda-1} \left(\frac{G_{j+1}-1}{xG_{j+1}} \right)}$$

$$(G_{j+1}-1)G_{j+1} = xG_{j+1}^2 + (G_{j+1}-1)^2 + (y-1)x^{k-\lambda-j} \frac{x^2 G_{j+1}^2 p_j^{\lambda+1} \left(\frac{G_{j+1}-1}{xG_{j+1}} \right)}{p_{j-1}^{\lambda-1} \left(\frac{G_{j+1}-1}{xG_{j+1}} \right)},$$

οπότε, τελικά, χρησιμοποιώντας την ισότητα⁴⁰

$$xt p_j \left(\frac{t-1}{xt} \right) = p_{j+1}(t)$$

προκύπτει η επιθυμητή σχέση

$$G_{j+1} = 1 + xG_{j+1}^2(x, y) + (y-1)x^{k-\lambda-j} \frac{p_{j+1}^{\lambda+1}(G_{j+1}(x, y))}{p_j^{\lambda-1}(G_{j+1}(x, y))}.$$

□

Εφαρμογή

Η γεννήτρια συνάρτηση G_j του αριθμού των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = u^\mu d^\nu$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ σε ύψος τουλάχιστον j ικανοποιεί την εξίσωση

$$G_j = 1 + xG_j^2 + (y-1)x^{m-j+1} \frac{p_j^{M-m+1}(G_j)}{p_{j-1}^{M-m-1}(G_j)} \quad (3.67)$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$, όπου $m = \min\{\mu, \nu\}$, $M = \max\{\mu, \nu\}$.

Πράγματι, αν $\mu \geq \nu$ ο παραπάνω τύπος είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 3.5.2. Ο τύπος ισχύει και στην περίπτωση όπου $\mu < \nu$, αφού χρησιμοποιώντας την κατοπτρική απεικόνιση προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις των αριθμών των εμφανίσεων των προτύπων $u^\mu d^\nu$ και $u^\nu d^\mu$ σε ύψος τουλάχιστον j είναι ίσες.

Το πρότυπο $d^\nu u^\mu$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$

Ο υπολογισμός της γεννήτριας συνάρτησης F που απαριθμεί τις εμφανίσεις του προτύπου $d^\nu u^\mu$ παρουσιάζει δυσκολίες.

Στα προηγούμενα έχει υπολογισθεί μόνο σε ειδικές περιπτώσεις (βλ. τον τύπο (3.5) όπου $\nu = \mu = 2$ και τον τύπο (3.39) όπου $\nu = 1$ και $\mu \in \mathbb{N}^*$).

Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή που έχει ο ακέραιος ν τόσο πιο δύσκολος είναι ο υπολογισμός της γεννήτριας F .

Για παράδειγμα αν $\nu = 2$ και $\mu \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή $\tau = d^2 u^\mu$, τότε προκειμένου να υπολογίσουμε την αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση F χρησιμοποιούμε τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής των μονοπατιών Dyck $\alpha = u\beta d\gamma$ οπότε ισχύει ότι

$$N_\tau(\alpha) = N_\tau(\beta) + N_\tau(\gamma) + [\beta \neq \epsilon][\gamma \in A],$$

⁴⁰ Η οποία προκύπτει επαγωγικά με τη βοήθεια της δοσμένης αναδρομικής σχέσης των πολυωνύμων p_j .

όπου \mathcal{A} είναι το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck που αρχίζουν με u^μ και επομένως ισχύει ότι

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{N_\tau(\beta)+N_\tau(\gamma)+|\beta \neq \epsilon|} \mathbb{1}_{\{\gamma \in \mathcal{A}\}} \\ &= 1 + x \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D} \setminus \{\epsilon\}} x^{l(\beta)} y^{N_\tau(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} + y \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} \right) \\ &= 1 + xF + x(F-1)(F + (y-1)A). \end{aligned}$$

Άρα

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x(F-1)A. \quad (3.68)$$

Επειδή κάθε $\beta \in \mathcal{A}$ γράφεται υπό τη μορφή

$$\beta = u^{\mu-1} \beta_1 d \beta_2 d \cdots \beta_\mu$$

όπου $\beta_1 \in \mathcal{D} \setminus \{\epsilon\}$ και $\beta_i \in \mathcal{D}$ για κάθε $i \in [2, \mu]$, προκύπτει ότι

$$N_\tau(\beta) = \sum_{j=2}^{\mu} (N_\tau(\beta_j) + |\beta_j \in \mathcal{A}|) + N_\tau(\beta_1)$$

οπότε είναι

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{l(\beta)} y^{N_\tau(\beta)} \\ &= \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D}, j \in [2, \mu] \\ \beta_1 \in \mathcal{D} \setminus \{\epsilon\}}} x^{\sum_{j=1}^{\mu} l(\beta_j) + \mu - 1} y^{\sum_{j=2}^{\mu} (N_\tau(\beta_j) + |\beta_j \in \mathcal{A}|) + N_\tau(\beta_1)} \\ &= x^{\mu-1} \left(\sum_{\beta_1 \in \mathcal{D} \setminus \{\epsilon\}} x^{l(\beta_1)} y^{N_\tau(\beta_1)} \right) \prod_{j=2}^{\mu} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} y^{N_\tau(\beta_j) + |\beta_j \in \mathcal{A}|}. \end{aligned}$$

Άρα

$$A = x^{\mu-1} (F-1)(F + (y-1)A)^{\mu-1}. \quad (3.69)$$

Από τις σχέσεις (3.68) και (3.69) προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση F για το πρότυπο $d^2 u^\mu$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x \frac{(F-1-xF)^{\mu-1}}{(F-1)^{\mu-3}} \quad (3.70)$$

οπότε

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x \frac{(p_2(F))^{\mu-1}}{(p_1(F))^{\mu-3}}$$

όπου p_j είναι τα πολυώνυμα της Πρότασης 3.5.2. Κατόπιν τούτου, από την εφαρμογή της Πρότασης 3.5.2 προκύπτει ότι η παρακάτω δύο στατιστικές είναι ισοκατανομημένες:

- i) “Αριθμός εμφανίσεων του προτύπου $d^2 u^{\mu-1}$,”
- ii) “Αριθμός εμφανίσεων του προτύπου $u^\mu d^2$ σε ύψος τουλάχιστον 2”.

Ανάλογο αποτέλεσμα προκύπτει και όταν $\nu = 1$ και $\mu \in \mathbb{N}^*$.

Εικασία Για κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ οι επόμενες στατιστικές είναι ισοκαταμεμημένες:

- i) "Αριθμός εμφανίσεων του προτύπου $d^\nu u^\mu$ ",
- ii) "Αριθμός εμφανίσεων του προτύπου $u^\mu d^\nu$ σε ύψος τουλάχιστον m ",

όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ και $m = \min\{\mu, \nu\}$.

Η εικασία αυτή έχει αποδειχθεί σε διάφορες άλλες ειδικές περιπτώσεις, αλλά δεν έχω απόδειξη για όλες τις τιμές των μ, ν .

Θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να μπορούσε να αποδειχθεί συνδυαστικά με κάποια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση.

Αν υποθεθεί ότι η εικασία αυτή είναι αληθής, τότε η γεννήτρια συνάρτηση F του προτύπου $d^\nu u^\mu$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x \frac{P_m^{M-m+1}(F)}{P_{m-1}^{M-m-1}(F)}$$

όπου $m = \min\{\mu, \nu\}$ και $M = \max\{\mu, \nu\}$.

3.6 Πρότυπα σε άρτιο και περιττό ύψος

Στη παράγραφο αυτή μελετάται η εμφάνιση προτύπων σε άρτιο και περιττό ύψος.

Για κάθε πρότυπο τ θεωρούνται οι παράμετροι

- $E_\tau(\alpha)$: ο αριθμός των εμφανίσεων του τ σε άρτιο ύψος στο α
 $O_\tau(\alpha)$: ο αριθμός των εμφανίσεων του τ σε περιττό ύψος στο α

και οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις

$$E(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{E_\tau(\alpha)}$$

και

$$O(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{O_\tau(\alpha)}.$$

Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής $\alpha = \alpha\beta d\gamma$ προκύπτει ότι

$$O_\tau(\alpha) = E_\tau(\beta) + O_\tau(\gamma)$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}^*$, οπότε θα είναι

$$\begin{aligned} O(x, y) &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{E_\tau(\beta)+O_\tau(\gamma)} \\ &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)} y^{E_\tau(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{O_\tau(\gamma)} \right) \\ &= 1 + xE(x, y)O(x, y) \end{aligned}$$

και τελικά

$$O(x, y) = \frac{1}{1 - xE(x, y)}. \quad (3.71)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι αρκεί να ευρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση $E(x, y)$. Παρακάτω θα υπολογισθεί η γεννήτρια αυτή για πρότυπα με μήκος μικρότερο ή ίσο του 4. Στην προσπάθεια αυτή θα δούμε και ορισμένα πρότυπα μεγαλύτερου μήκους.

1. Το πρότυπο u^μ , $\mu \in \mathbb{N}^*$

Προκειμένου να υπολογισθεί η γεννήτρια συνάρτηση $E(x, y)$ στην περίπτωση όπου $\tau = u^\mu$, θεωρείται η παρακάτω διάσπαση των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = u^i d \beta_1 d \beta_2 d \dots \beta_{i-1} d \beta_i$$

όπου $\beta_j \in \mathcal{D}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$.

Επειδή

$$E_\tau(\alpha) = \sum_{\substack{j \in [i] \\ i-j \text{ άρτιος}}} E_\tau(\beta_j) + \sum_{\substack{j \in [i] \\ i-j \text{ περιττός}}} O_\tau(\beta_j) + \lambda_i$$

όπου $\lambda_i = \left(\left[\frac{i-\mu}{2} \right] + 1 \right)^+ \cdot 4^i$
προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E(x, y) &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D} \\ j \in [i]}} x^{i + \sum_{j=1}^i l(\beta_j)} y^{i-j} \sum_{\substack{j \in [i] \\ \text{άρτιος}}} E_\tau(\beta_j) + \sum_{\substack{j \in [i] \\ \text{περιττός}}} O_\tau(\beta_j) + \lambda_i \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i y^{\lambda_i} \left(\prod_{\substack{j \in [i] \\ i-j \text{ άρτιος}}} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} y^{E_\tau(\beta_j)} \right) \left(\prod_{\substack{j \in [i] \\ i-j \text{ περιττός}}} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} y^{O_\tau(\beta_j)} \right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i y^{\lambda_i} E^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}(x, y) O^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}(x, y) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i} y^{\lambda_{2i}} E^i(x, y) O^i(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i-1} y^{\lambda_{2i-1}} E^i(x, y) O^{i-1}(x, y). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Ο μ είναι άρτιος, με $\mu = 2s$, $s \in \mathbb{N}^*$.

Τότε είναι

$$\lambda_{2i} = \begin{cases} i - s + 1, & \text{αν } i \geq s \\ 0, & \text{αν } i \leq s - 1 \end{cases}$$

και

$$\lambda_{2i-1} = \begin{cases} i - s, & \text{αν } i \geq s \\ 0, & \text{αν } i \leq s - 1 \end{cases}$$

οπότε από τη σχέση (3.72) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E(x, y) &= 1 + \sum_{i=1}^{s-1} x^{2i} E^i O^i + \sum_{i=s}^{\infty} x^{2i} y^{i-s+1} E^i O^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{s-1} x^{2i-1} E^i O^{i-1} + \sum_{i=s}^{\infty} x^{2i-1} y^{i-s} E^i O^{i-1} \\ &= 1 + (1 + xO) \sum_{i=1}^{s-1} x^{2i-1} E^i O^{i-1} + (1 + xyO) \sum_{i=s}^{\infty} x^{2i-1} y^{i-s} E^i O^{i-1} \\ &= 1 + (1 + xO) \frac{x E (1 - x^{2(s-1)} E^{s-1} O^{s-1})}{1 - x^2 E O} + (1 + xyO) \frac{x^{2s-1} E^s O^{s-1}}{1 - x^2 y E O}. \end{aligned}$$

⁴¹ Γεννημιζείται ότι $a^+ = \max(a, 0)$.

Από τη σχέση (3.71) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις $E(x, y)$ και $O(x, y)$ που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = u^{2s}$ σε άρτιο και περιττό ύψος αντίστοιχα ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1) \frac{x^{2s}(1+xE)E^s}{(1-xE)^{s-2}(1-xE-x^2yE)} \quad (3.73)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1) \frac{x^{s+2}(O-1)^s}{1-xy(O-1)}. \quad (3.74)$$

Εφαρμόζοντας τους παραπάνω τύπους για $s = 1$ (αντ. $s = 2$) προκύπτει ότι η γεννήτριες συναρτήσεις που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = uu$ (αντ. $\tau = uuuu$) σε άρτιο και περιττό⁴² ύψος ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$x((y-1)x+1)E^2 - E + 1 = 0 \quad (3.75)$$

και

$$x^2yO^3 + x(y(1-x)-1)O^2 + x(y(2-x^2)+x^2)O - x(y-(1-y)x^2) - 1 = 0 \quad (3.76)$$

(αντ.

$$(1-y)x^5E^3 + x((1-y)x^3 - xy - 1)E^2 + (1+x(1+xy))E - 1 = 0 \quad (3.77)$$

και

$$x^2yO^3 - x(1+y-xy+(1-y)x^3)O^2 - x(1-2(y-(1-y)x^3))O + x((1-y)x^3 - y) - 1 = 0. \quad (3.78)$$

2. Ο μ είναι περιττός με $\mu = 2s - 1$, $s \in \mathbb{N}^*$.

Τότε είναι

$$\lambda_{2i} = \lambda_{2i-1} = \begin{cases} i - s + 1, & \text{αν } i \geq s \\ 0, & \text{αν } i \leq s - 1 \end{cases}$$

οπότε από τη σχέση (3.72) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E(x, y) &= 1 + \sum_{i=1}^{s-1} x^{2i} E^i O^i + \sum_{i=s}^{\infty} x^{2i} y^{i-s+1} E^i O^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{s-1} x^{2i-1} E^i O^{i-1} + \sum_{i=s}^{\infty} x^{2i-1} y^{i-s+1} E^i O^{i-1} \\ &= 1 + (1+xO) \left(\sum_{i=1}^{s-1} x^{2i-1} E^i O^{i-1} + \sum_{i=s}^{\infty} x^{2i-1} y^{i-s+1} E^i O^{i-1} \right) \\ &= 1 + (1+xO) \left(\frac{x E (1 - x^{2(s-1)} E^{s-1} O^{s-1})}{1 - x^2 E O} + \frac{x^{2s-1} y E^s O^{s-1}}{1 - x^2 y E O} \right). \end{aligned}$$

⁴²Βλ. Α091894 στο [124].

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.71) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις $E(x, y)$ και $O(x, y)$ που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = u^{2s-1}$ σε άρτιο και περιττό ύψος ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1) \frac{x^{2s-1}(1+x+xE)E^s + x^2(E-1-xE^2)E}{(1-xE)^{s-2}(1-xE-x^2E)} \quad (3.79)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1) \frac{x^s(1+xO)(O-1)^s + x(O-1-xO^2)(O-1)}{1-x(O-1)} \quad (3.80)$$

Εφαρμόζοντας τους παραπάνω τύπους για $s = 1$ (αντ. $s = 2$) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις που αντιστοιχούν στον αριθμό των ανόδων (αντ. του προτύπου $\tau = uuu$) σε άρτιο και περιττό ύψος ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$xE^2 - (1 + (1-y)x)E + 1 = 0 \quad (3.81)$$

και

$$xyO^2 + ((1-y)x-1)O + 1 = 0. \quad (3.82)$$

(αντ.

$$x(1+(y-1)x)E^2 + ((1-y)x^2-1)E + 1 = 0 \quad (3.83)$$

και

$$x(y+(1-y)x)O^2 - (1+(1-y)(x-2)x)O + 1 + (y-1)x = 0. \quad (3.84)$$

Κατόπιν τούτου από τη σχέση (1.11) (αντ. (1.13)) προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση E (αντ. O) που αντιστοιχούν στον αριθμό των ανόδων σε άρτιο (αντ. περιττό) ύψος είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Narayana (αντ. μετατοπισμένων αριθμών Narayana) και επομένως ο αριθμός των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n με k ανόδους σε άρτιο ύψος ισούται με $N(n, k)$ (αντ. ο αριθμός των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n με k ανόδους σε περιττό ύψος ισούται με $N(n, k-1)$).

2. Το πρότυπο $u^\mu d^\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}^+$

Θα δοθεί μια πρόταση⁴³ για πρότυπα γενικότερης μορφής

Πρόταση 3.6.1. Αν το πρότυπο τ είναι ένα μη περιοδικό πρώτο αριστερό μονοπάτι Dyck τότε ισχύει ότι

$$E(x, y) = 1 + xE^2(x, y) + (y-1)x^k \frac{E^{\lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor + 1}(x, y)}{1 - xE^{\lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor}(x, y)} \quad (3.85)$$

και

$$O(x, y) = 1 + xO^2(x, y) + (y-1)x^{k-\lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor} O(O-1)^{\lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor + 1}(x, y) \quad (3.86)$$

όπου $k = |\tau|_u$ και $\lambda = |\tau|_u - |\tau|_d$.

Απόδειξη.

Προκειμένου να υπολογισθεί η γεννήτρια συνάρτηση $E(x, y)$ θα χρησιμοποιήσουμε τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = u\beta d\gamma$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

⁴³Ανάλογη με την Πρόταση 3.2.1

1. Αν $\lambda > 0$ τότε το πρότυπο τ γράφεται ως $\tau = us$, όπου s είναι ένα αριστερό μονοπάτι Dyck.

Αν \mathcal{A} είναι το σύνολο των μονοπατιών Dyck που αρχίζουν με s τότε

$$E_\tau(\alpha) = O_\tau(\beta) + E_\tau(\gamma) + |\beta \in \mathcal{A}|.$$

Τότε είναι

$$\begin{aligned} E(x, y) &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{O_\tau(\beta)+E_\tau(\gamma)+|\beta \in \mathcal{A}|} \\ &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\beta)} y^{O_\tau(\beta)} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{l(\beta)} y^{O_\tau(\beta)+1} \right) \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)} y^{E_\tau(\gamma)} \\ &= 1 + x(O - A + yA)E \end{aligned} \quad (3.87)$$

όπου $A = A(x, y)$ η γεννήτρια συναρτήση του συνόλου \mathcal{A} ως προς τις παραμέτρους l και O_τ .

Κάθε στοιχείο $\beta \in \mathcal{A}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\beta = s\beta_1 d\beta_2 d \cdots \beta_{\lambda-1} d\beta_\lambda$$

όπου $\beta_i \in \mathcal{D}$ για κάθε $i \in [\lambda]$ και ισχύει ότι

$$O_\tau(\beta) = O_\tau(\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 \cdots d\beta_{\lambda-1} d\beta_\lambda)$$

$$\stackrel{45}{=} \sum_{\substack{i \in [\lambda] \\ \lambda-i \text{ άρτιος}}} O_\tau(\beta_i) + \sum_{\substack{i \in [\lambda] \\ \lambda-i \text{ περιττός}}} E_\tau(\beta_i)$$

Τότε είναι

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\substack{\beta_i \in \mathcal{D} \\ i \in [\lambda]}} x^{k-1 + \sum_{i=1}^{\lambda} l(\beta_i)} y^{\sum_{\substack{\lambda-i \text{ άρτιος} \\ i \in [\lambda]}} O_\tau(\beta_i) + \sum_{\substack{\lambda-i \text{ περιττός} \\ i \in [\lambda]}} E_\tau(\beta_i)} \\ &= x^{k-1} \left(\prod_{\substack{\lambda-i \text{ άρτιος} \\ i \in [\lambda]}} \sum_{\beta_i \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_i)} y^{O_\tau(\beta_i)} \right) \left(\prod_{\substack{\lambda-i \text{ περιττός} \\ i \in [\lambda]}} \sum_{\beta_i \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_i)} y^{E_\tau(\beta_i)} \right) \\ &= x^{k-1} O^{\lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor + 1} E^{\lceil \frac{\lambda}{2} \rceil}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Από τις εξισώσεις (3.87) και (3.88) προκύπτει ότι

$$E = 1 + x(1 + (y-1)x^{k-1}(OE)^{\lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor})OE \quad (3.89)$$

Από την σχέση (3.71) και την προηγούμενη εξίσωση προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις $E(x, y)$ και $O(x, y)$ που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου τ σε άρτιο και περιττό ύψος, στην περίπτωση αυτή ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1)x^k \frac{E^{\lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor + 1}}{(1-xE)^{\lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor}} \quad (3.90)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)x^{k-1} O(O-1)^{\lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor + 1}. \quad (3.91)$$

⁴⁴Επειδή το τ είναι μη περιοδικό.

⁴⁵Επειδή το τ είναι πρώτο αριστερό μονοπάτι.

2. Αν $\lambda = 0$ τότε το πρότυπο τ γράφεται ως $\tau = usd$ όπου s είναι ένα μονοπάτι Dyck και ισχύει ότι

$$E_\tau(\alpha) = O_\tau(\beta) + E_\tau(\gamma) + |\beta = s|$$

οπότε

$$\begin{aligned} E(x, y) &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{O_\tau(\beta)+E_\tau(\gamma)+|\beta=s|} \\ &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D} \setminus \{s\}} x^{l(\beta)} y^{O_\tau(\beta)} + \sum_{\beta=s} x^{l(\beta)} y^{O_\tau(\beta)+1} \right) \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{E_\tau(\gamma)} \\ &= 1 + x \left(O(x, y) - x^{k-1} + yx^{k-1} \right) E(x, y). \end{aligned}$$

Από τη σχέση (3.71) και την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις $E(x, y)$ και $O(x, y)$ που αντιστοιχούν στο πρότυπο τ , στην περίπτωση αυτή ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1)x^k(1-xE)E \quad (3.92)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)x^k(O-1). \quad (3.93)$$

□

Εφαρμογή

Αν $\tau = u^\mu d^\nu$ με $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ οι γεννήτριες συναρτήσεις $E(x, y)$ και $O(x, y)$ δίδονται από τις σχέσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1)x^\mu \frac{E^{\lfloor \frac{\mu-\nu}{2} \rfloor + 1}}{(1-xE)^{\lfloor \frac{\mu-\nu}{2} \rfloor}} \quad (3.94)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)x^{\mu - \lfloor \frac{\mu-\nu}{2} \rfloor} O(O-1)^{\lfloor \frac{\mu-\nu}{2} \rfloor + 1}. \quad (3.95)$$

Πράγματι, αν $\mu \geq \nu$ ο παραπάνω τύπος είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.6.1. Ο τύπος ισχύει και στην περίπτωση όπου $\mu < \nu$ αφού χρησιμοποιώντας την κατοπτρική απεικόνιση, προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις του αριθμών των εμφανίσεων των προτύπων $u^\mu d^\nu$ και $u^\nu d^\mu$ σε άρτιο (αντ. περιττό) ύψος είναι ίσες.

3. Το πρότυπο du^μ , $\mu \in \mathbb{N}^*$

Προκειμένου να υπολογισθεί η γεννήτρια συνάρτηση $E(x, y)$ στη περίπτωση όπου $\tau = du^\mu$ θεωρείται η παρακάτω διάσπαση των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = u^i d \beta_1 d \beta_2 d \cdots \beta_{i-1} d \beta_i, \quad i \in \mathbb{N}^*$$

όπου $\beta_i \in \mathcal{D}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}^*$.

Τότε είναι

$$E_\tau(\alpha) = \sum_{\substack{j \in [i] \\ i-j \text{ άρτιος}}} E_\tau(\beta_j) + \sum_{\substack{j \in [i] \\ i-j \text{ περιττός}}} O_\tau(\beta_j) + \sum_{\substack{j \in [i] \\ i-j \text{ άρτιος}}} |\beta_j \text{ αρχίζει με τουλάχιστον } \mu \text{ ανόδους}|.$$

Αν $A_i = A_i(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου των μονοπατιών Dyck που έχουν μήκος της πρώτης ανάβασης ίσο με i , ως προς τις παραμέτρους l, E_{du^μ} τότε είναι

$$E = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$$

και

$$A_i = x^i O^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \left(\sum_{k=0}^{\mu-1} A_k + y \sum_{k=\mu}^{\infty} A_k \right)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor} = x^i O^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \left(E + (y-1) \sum_{k=\mu}^{\infty} A_k \right)^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}.$$

Αν τεθεί $A = \sum_{k=\mu}^{\infty} A_k$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{\infty} A_{2i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} A_{2i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i-1} O^{i-1} (E + (y-1)A)^i + \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} O^i (E + (y-1)A)^i \\ &= \frac{1 + x(E + (y-1)A)}{1 - x^2 O(E + (y-1)A)} \end{aligned}$$

και επομένως

$$xO(E + (y-1)A) = E - 1. \quad (3.96)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Ο μ είναι άρτιος, με $\mu = 2s, s \in \mathbb{N}^*$.

Τότε είναι

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=s+1}^{\infty} A_{2i-1} + \sum_{i=s}^{\infty} A_{2i} \\ &= \frac{x^{2s} O^s (E + (y-1)A)^s (1 + x(E + (y-1)A))}{1 - x^2 O(E + (y-1)A)}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Από τις σχέσεις (3.96) και (3.97) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^s (E-1)^s (1 + \frac{E-1}{O})}{1 - x(E-1)} \\ &= \frac{x^s (E-1)^s (1 + (E-1)(1-xE))}{1 - x(E-1)} \\ &= x^s (E-1)^s E. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Από τις σχέσεις (3.71), (3.96) και (3.98) τελικά προκύπτει ότι

$$E = 1 + xE^2 + (y-1)x^{s+1}(E-1)^s E \quad (3.99)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)x^{s+1}(O-1)^s \frac{(O-1-xO)^s}{O^{s-1}}. \quad (3.100)$$

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3.99) και (3.100) για $s = 1$ προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου du^2 σε άρτιο και περιττό ύψος ικανοποιούν αντίστοιχα τις εξισώσεις

$$x(1 - (1 - y)x)E^2 + ((1 - y)x^2 - 1)E + 1 = 0 \quad (3.101)$$

και

$$x(y + (1 - y)x)O^2 - (1 + (1 - y)(x - 2)x)O + 1 - (1 - y)x = 0. \quad (3.102)$$

2. Ο μ είναι περιττός, με $\mu = 2s - 1$, $s \in \mathbb{N}^*$.

Τότε είναι

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=s}^{\infty} A_{2i-1} + \sum_{i=s}^{\infty} A_{2i} \\ &= \frac{x^{2s-1}O^{s-1}(E + (y-1)A)^s(1+xO)}{1-x^2O(E+(y-1)A)}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Από τις σχέσεις (3.96) και (3.103) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^{s-1}(E-1)^s(1+xO)}{O(1-x(E-1))} \\ &= \frac{x^{s-1}(E-1)^s(1+xO)}{O-(O-1)+xO} \\ &= x^{s-1}(E-1)^s. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Από τις σχέσεις (3.71), (3.103) και (3.104), τελικά προκύπτει ότι

$$E = 1 + xE^2 + (y-1)x^s(E-1)^s \quad (3.105)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)\frac{x(O-1-xO)^s}{O^{s-2}}. \quad (3.106)$$

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3.105) και (3.106) για $s = 1$ (αντ. $s = 2$) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = du$ (αντ. $\tau = duuu$) σε άρτιο και περιττό ύψος ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$xE^2 - (1 + (1 - y)x)E + 1 + (1 - y)x = 0 \quad (3.107)$$

και

$$x(y + x - yx)O^2 - (1 - x + xy)O + 1 = 0 \quad (3.108)$$

(αντ.

$$x(1 - (1 - y)x)E^2 - (1 - 2(1 - y)x^2)E + 1 - (1 - y)x^2 = 0 \quad (3.109)$$

και

$$x(1 - (1 - y)(1 - x)^2)O^2 - (1 - 2x(1 - x)(1 - y))O + 1 - (1 - y)x = 0. \quad (3.110)$$

4. Το πρότυπο $u^\mu du$, $\mu \in \mathbb{N}^*$

Προκειμένου να υπολογισθεί η γεννήτρια συνάρτηση $E(x, y)$ στην περίπτωση όπου $\tau = u^\mu du$, θεωρείται η διάσπαση της πρώτης ανάβασης των μη κενών μονοπατιών Dyck που χρησιμοποιήθηκε και στις προηγούμενες περιπτώσεις:

$$\alpha = u^i d\beta_1 d\beta_2 d \cdots \beta_{i-1} d\beta_i, i \in \mathbb{N}^*$$

όπου $\beta_i \in \mathcal{D}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}^*$.

Τότε είναι

$$E_\tau(\alpha) = \sum_{\substack{j \in [i] \\ i-j \text{ άρτιος}}} E_\tau(\beta_j) + \sum_{\substack{j \in [i] \\ i-j \text{ περιττός}}} O_\tau(\beta_j) + [i \geq \mu \text{ και } i - \mu \text{ άρτιος και } \beta_1 \neq \epsilon].$$

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E(x, y) &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{\beta_j \in \mathcal{D} \\ j \in [i]}} x^{i+\sum_{j=1}^i l(\beta_j)} y^{\sum_{\substack{j \in [i] \\ i-j \text{ άρτιος}}} E_\tau(\beta_j) + \sum_{\substack{j \in [i] \\ i-j \text{ περιττός}}} O_\tau(\beta_j) + [i \geq \mu \text{ και } i - \mu \text{ άρτιος και } \beta_1 \neq \epsilon]} \\ &\stackrel{46}{=} 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \left(\prod_{\substack{j \in [2, i] \\ i-j \text{ άρτιος}}} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} y^{E_\tau(\beta_j)} \right) \left(\prod_{\substack{j \in [2, i] \\ i-j \text{ περιττός}}} \sum_{\beta_j \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_j)} y^{O_\tau(\beta_j)} \right) \sum_{\beta_1 \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_1)} y^{q_1(\beta_1) + [i \geq \mu, i - \mu \text{ άρτιος}, \beta_1 \neq \epsilon]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{47}{=} 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i E^{[\frac{i}{2}]} O^{[\frac{i-1}{2}]} (1 + y^{[i \geq \mu, i - \mu \text{ άρτιος}]} (Q_i - 1)) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i} E^i O^{i-1} (1 + y^{[2i \geq \mu, 2i - \mu \text{ άρτιος}]} (O - 1)) + \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i-1} E^{i-1} O^{i-1} (1 + y^{[2i-1 \geq \mu, 2i-1 - \mu \text{ άρτιος}]} (E - 1)) \\ &= 1 + \frac{x(1+xE)}{1-x^2EO} + \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i} y^{[2i \geq \mu, 2i - \mu \text{ άρτιος}]} E^i O^{i-1} (O - 1) + \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i-1} y^{[2i-1 \geq \mu, 2i-1 - \mu \text{ άρτιος}]} E^{i-1} O^{i-1} (E - 1). \end{aligned}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Ο μ είναι άρτιος, με $\mu = 2s$, $s \in \mathbb{N}^*$.

$$^{46} \text{Όπου } q_i = \begin{cases} E_\tau, & \text{αν } i \text{ είναι περιττός} \\ O_\tau, & \text{αν } i \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$$

$$^{47} \text{Όπου } Q_i = \begin{cases} E, & \text{αν } i \text{ είναι περιττός} \\ O, & \text{αν } i \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$$

Τότε είναι

$$\begin{aligned}
E(x, y) &= 1 + \frac{x(1+xE)}{1-x^2EO} + \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i} y^{[i \geq s]} E^i O^{i-1} (O-1) + \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i-1} E^{i-1} O^{i-1} (E-1) \\
&= 1 + \frac{x(1+xE)}{1-x^2EO} + \sum_{i=1}^{s-1} x^{2i} E^i O^{i-1} (O-1) + \sum_{i=s}^{\infty} x^{2i} y E^i O^{i-1} (O-1) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i-1} E^{i-1} O^{i-1} (E-1) \\
&= 1 + \frac{x(1+xE)}{1-x^2EO} + x^2 E (O-1) \frac{1-x^{2(s-1)} E^{s-1} O^{s-1}}{1-x^2EO} + \frac{x^{2s} y E^s O^{s-1} (O-1)}{1-x^2EO} \\
&\quad + \frac{x(E-1)}{1-x^2EO} \\
&= \frac{1+xE - (1-y)x^{2s+1} E^{s+1} O^s}{1-x^2EO}. \tag{3.111}
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (3.71) και (3.111) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις $E(x, y)$ και $O(x, y)$ που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του πρότυπου $\tau = u^2 s du$, $s \in \mathbb{N}^*$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1) \frac{x^{2s+1} E^{s+1}}{(1-xE)^{s-1}} \tag{3.112}$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)x^{s+1}(O-1)^{s+1}. \tag{3.113}$$

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3.112) και (3.113) για $s = 1$ προκύπτουν αντίστοιχα οι γεννήτριες συναρτήσεις $E(x, y)$ και $O(x, y)$ για το πρότυπο $\tau = uudu$:

$$x(1+x^2(y-1))E^2 - E + 1 = 0 \tag{3.114}$$

και

$$x(1+x(y-1))O^2 - (1+2x^2(y-1))O + 1 + x^2(y-1) = 0. \tag{3.115}$$

2. Ο μ είναι περιττός, με $\mu = 2s - 1$, $s \in \mathbb{N}^*$.

Τότε είναι

$$\begin{aligned}
E(x, y) &= 1 + \frac{x(1+xE)}{1-x^2EO} + \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i} E^i O^{i-1} (O-1) + \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i-1} y^{[i \geq s]} E^{i-1} O^{i-1} (E-1) \\
&= 1 + \frac{x(1+xE)}{1-x^2EO} + \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i} E^i O^{i-1} (O-1) + \sum_{i=1}^{s-1} x^{2i-1} E^{i-1} O^{i-1} (E-1) \\
&\quad + \sum_{i=s}^{\infty} x^{2i-1} y E^{i-1} O^{i-1} (E-1) \\
&= 1 + \frac{x(1+xE)}{1-x^2EO} + \frac{x^2 E (O-1)}{1-x^2EO} + x(E-1) \frac{1-x^{2(s-1)} E^{s-1} O^{s-1}}{1-x^2EO} \\
&\quad + \frac{x^{2s-1} y E^{s-1} O^{s-1} (E-1)}{1-x^2EO} \\
&= \frac{1+xE - (1-y)x^{2s-1} E^{s-1} O^{s-1} (E-1)}{1-x^2EO}. \tag{3.116}
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (3.71) και (3.116) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις $E(x, y)$ και $O(x, y)$ που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = u^{2s-1}du$, $s \in \mathbb{N}^*$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1) \frac{x^{2s-1}E^{s-1}(E-1)}{(1-xE)^{s-2}} \quad (3.117)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)x^s(O-1)^{s-1}(O-1-xO). \quad (3.118)$$

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3.117) και (3.118) για $s = 1$ προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις των γεννητριών συναρτήσεων $E(x, y)$ και $O(x, y)$ για το πρότυπο $\tau = udu$:

$$x(1 + (1-y)x)E^2 - (1 + (1-y)x(x+1))E + 1 + (1-y)x = 0 \quad (3.119)$$

και

$$xO^2 + ((1-y)(1-x)x-1)O + 1 + x(1-y) = 0 \quad (3.120)$$

5. Το πρότυπο udu^μ , $\mu \in \mathbb{N}^*$

Η περίπτωση όπου $\mu = 1$ έχει ήδη εξετασθεί στην προηγούμενη παράγραφο.

Προκειμένου να υπολογισθεί η γεννήτρια συνάρτηση $E(x, y)$ στη περίπτωση όπου $\tau = udu^\mu$, με $\mu \geq 2$ θεωρείται η διάσπαση της πρώτης επιστροφής των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = ubd\gamma$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$.

Τότε είναι

$$E_\tau(\alpha) = O_\tau(\beta) + E_\tau(\gamma) + [\beta = \epsilon] \gamma \text{ αρχίζει με τουλάχιστον } \mu \text{ ανόδους.}]$$

Αν \mathcal{A} είναι το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck που αρχίζουν με τουλάχιστον μ ανόδους και $A = A(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του \mathcal{A} ως προς τις παραμέτρους l , E_τ τότε είναι

$$\begin{aligned} E(x, y) &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{O_\tau(\beta)+E_\tau(\gamma)+[\beta=\epsilon]} \gamma \text{ αρχίζει με τουλάχιστον } \mu \text{ ανόδους.}] \\ &= 1 + \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{D}^* \\ \gamma \in \mathcal{D}}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{O_\tau(\beta)+E_\tau(\gamma)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\gamma)+1} y^{E_\tau(\alpha)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{l(\gamma)+1} y^{E_\tau(\gamma)+1} \\ &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D}^*} x^{l(\beta)} y^{O_\tau(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{E_\tau(\gamma)} \right) + x \sum_{\gamma \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{E_\tau(\gamma)} + xy \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{E_\tau(\gamma)} \\ &= 1 + x(O-1)E + x(E-A) + xyA. \end{aligned}$$

Άρα

$$E = 1 + xOE + x(y-1)A. \quad (3.121)$$

Για τον υπολογισμό της γεννήτριας συνάρτησης A παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο α του \mathcal{A} γράφεται στη μορφή

$$\alpha = u^{r-1} \beta_1 d \beta_2 \cdots d \beta_\mu$$

όπου $\beta_i \in \mathcal{D}$, $i \in [\mu]$ και $\beta_1 \neq \epsilon$ με

$$E_\tau(\alpha) = \sum_{\substack{i \in [\mu] \\ \mu-i \text{ άρτιος}}} E_\tau(\beta_i) + \sum_{\substack{i \in [\mu] \\ \mu-i \text{ περιττός}}} O_\tau(\beta_i).$$

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι

$$A(x, y) = \sum_{\substack{\beta_1 \in \mathcal{D}, i \in [\mu] \\ \beta_1 \neq \epsilon}} x^{\mu-1 + \sum_{i \in [\mu]} l(\beta_i)} \frac{\sum_{i \in [\mu]} E_{\tau}(\beta_i) + \sum_{i \in [\mu]} O_{\tau}(\beta_i)}{y^{\mu-i} \text{άρτιος} \quad \mu-i \text{περιττός}}$$

$$\stackrel{48}{=} x^{\mu-1} \left(\prod_{\substack{i \in [2, \tau] \\ \mu-i \text{άρτιος}}} \sum_{\beta_i \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_i)} y^{E_{\tau}(\beta_i)} \right) \left(\prod_{\substack{i \in [2, \mu] \\ \mu-i \text{περιττός}}} \sum_{\beta_i \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_i)} y^{O_{\tau}(\beta_i)} \right) \left(\sum_{\beta_1 \in \mathcal{D}^*} x^{l(\beta_1)} y^{q(\beta_1)} \right)$$

$$\stackrel{49}{=} x^{\mu-1} E^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} O^{\lfloor \frac{\mu-1}{2} \rfloor} (Q-1).$$

Άρα

$$E = 1 + xOE + x^{\mu}(y-1)E^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} O^{\lfloor \frac{\mu-1}{2} \rfloor} (Q-1). \quad (3.122)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Ο μ είναι άρτιος με $\mu = 2s$, $s \in \mathbb{N}^*$.

Τότε είναι

$$E = 1 + xOE + (y-1)x^{2s}E^s O^{s-1}(O-1) \\ = 1 + xOE + (y-1)x^{2s+1}E^{s+1}O^s. \quad (3.123)$$

Από τις σχέσεις (3.71) και (3.123) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις $E(x, y)$ και $O(x, y)$ που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = udu^{2s}$, $s \in \mathbb{N}^*$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1) \frac{x^{2s+1}E^{s+1}}{(1-xE)^{s-1}} \quad (3.124)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)x^{s+1}(O-1)^{s+1}. \quad (3.125)$$

2. Ο μ είναι περιττός με $\mu = 2s-1$, $s \in \mathbb{N}$ με $s \geq 2$.

Τότε είναι

$$E = 1 + xOE + (y-1)x^{2s-1}E^{s-1}O^{s-1}(E-1) \quad (3.126)$$

Από τις σχέσεις (3.71) και (3.123) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις $E(x, y)$ και $O(x, y)$ που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = udu^{2s-1}$, $s \in \mathbb{N}$ με $s \geq 2$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1) \frac{x^{2s-1}E^{s-1}(E-1)}{(1-xE)^{s-2}} \quad (3.127)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)x^s(O-1)^{s-1}(O-1-xO). \quad (3.128)$$

Από τις σχέσεις (3.112), (3.113), (3.117), (3.118), (3.124), (3.125), (3.127) και (3.128) προκύπτει ότι οι στατιστικές $E_{u^{\mu}du}$, $E_{udu^{\mu}}$ και $O_{u^{\mu}du}$, $O_{udu^{\mu}}$ είναι ισοκαταναμημένες για κάθε $\mu \in \mathbb{N}^*$.

⁴⁸Όπου $q = \begin{cases} O_{\tau}, & \text{αν } r \text{ είναι άρτιος} \\ E_{\tau}, & \text{αν } r \text{ είναι περιττός} \end{cases}$

⁴⁹Όπου $Q = \begin{cases} O, & \text{αν } r \text{ είναι άρτιος} \\ E, & \text{αν } r \text{ είναι περιττός} \end{cases}$

6. Τα πρότυπα $(ud)^\mu$ και $(du)^\mu$, όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$

Προκειμένου να υπολογισθεί η γεννήτρια συνάρτηση $E(x, y)$ στη περίπτωση όπου $\tau = (du)^\mu$ θεωρείται η διάσπαση της πρώτης επιστροφής των μη κενών μονοπατιών Dyck

$$\alpha = u\beta d\gamma$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$.

Επειδή

$$E_\tau(\alpha) = O_\tau(\beta) + E_\tau(\gamma) + [\gamma \in \mathcal{A}]$$

όπου \mathcal{A} είναι το σύνολο των μονοπατιών Dyck της μορφής $(ud)^i$ με $i \geq \mu$ ή της μορφής $(ud)^i u\beta d\gamma$ με $i \geq \mu - 1$ και $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$ με $\beta \neq \epsilon$. προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)} \\ &= 1 + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} y^{O_\tau(\beta)+E_\tau(\gamma)+[\gamma \in \mathcal{A}]} \\ &= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{l(\beta)} y^{O_\tau(\beta)} \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{E_\tau(\gamma)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{E_\tau(\gamma)+1} \right) \\ &= 1 + xO(E - A + yA) \end{aligned} \quad (3.129)$$

όπου $A = A(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου \mathcal{A} ως προς τις παραμέτρους l και E_τ , δηλαδή

$$A(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{l(\alpha)} y^{E_\tau(\alpha)}.$$

Επίσης, για κάθε μονοπάτι Dyck $\alpha \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι

$$E_\tau(\alpha) = \begin{cases} i - \mu, & \text{αν } \alpha = (ud)^i, i \geq \mu \\ i - \mu + 1 + O_\tau(\beta) + E_\tau(\gamma) + [\gamma \in \mathcal{A}], & \text{αν } \alpha = (ud)^i u\beta d\gamma, i \geq \mu - 1. \end{cases}$$

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)} \\ &= \sum_{\substack{\alpha = (ud)^i \\ i \geq \mu}} x^i y^{i-\mu} + \sum_{\substack{\alpha = (ud)^i u\beta d\gamma \\ i \geq \mu - 1, \beta \neq \epsilon}} x^{i+1+l(\beta)+l(\gamma)} y^{i-\mu+1+O_\tau(\beta)+E_\tau(\gamma)+[\gamma \in \mathcal{A}]} \\ &= \sum_{i=\mu}^{\infty} x^i y^{i-\mu} + \sum_{\beta \in \mathcal{D}^*} x^{l(\beta)} y^{O_\tau(\beta)} \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{E_\tau(\gamma)+[\gamma \in \mathcal{A}]} \sum_{i=\mu-1}^{\infty} x^{i+1} y^{i-\mu+1} \\ &= \frac{x^\mu}{1-xy} + (O-1) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{E_\tau(\gamma)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{l(\gamma)} y^{E_\tau(\gamma)+1} \right) \frac{x^\mu}{1-xy} \\ &= \frac{x^\mu}{1-xy} + (O-1)(E + (y-1)A) \frac{x^\mu}{1-xy}. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Από τις σχέσεις (3.129), (3.130) και (3.71) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις $E(x, y)$ και $O(x, y)$ που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = (du)^\mu$, $\mu \in \mathbb{N}^*$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1) \frac{x^{\mu+1}}{1-xy} (E^2 - E + 1) \quad (3.131)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)\frac{x^\mu}{1-xy}((x^2-x+1)O^2 - (2-x)O + 1). \quad (3.132)$$

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3.131) και (3.132) για $\mu = 1$ (αντ. $\mu = 2$) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = du$ (αντ. $\tau = dudu$) σε άρτιο και περιττό ύψος ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1)\frac{x^2}{1-xy}(E^2 - E + 1) \quad (3.133)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)\frac{x}{1-xy}((x^2-x+1)O^2 - (2-x)O + 1) \quad (3.134)$$

(αντ.

$$E = 1 + xE^2 + (y-1)\frac{x^3}{1-xy}(E^2 - E + 1) \quad (3.135)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)\frac{x^2}{1-xy}((x^2-x+1)O^2 - (2-x)O + 1)). \quad (3.136)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την απεικόνιση ψ της Πρότασης 5.3 στο [111], εύκολα επαληθεύεται ότι οι στατιστικές

(i) “αριθμός των εμφανίσεων του $(ud)^\mu$ σε περιττό ύψος”,

(ii) “αριθμός των εμφανίσεων του $(du)^\mu$ σε άρτιο ύψος”

είναι ισοκατανεμημένες, οπότε από τις σχέσεις (3.71), (3.131) και (3.132) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις $E(x, y)$ και $O(x, y)$ που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = (ud)^\mu$, $\mu \in \mathbb{N}^*$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1)\frac{x^\mu}{1-xy}(x^2E^2 - xE + 1) \quad (3.137)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)\frac{x^{\mu+1}}{1-xy}(O^2 - O + 1) \quad (3.138)$$

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3.137) και (3.138) για $\mu = 1$ (αντ. $\mu = 2$) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις που αντιστοιχούν στον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $\tau = ud$ (αντ. $\tau = udud$) σε άρτιο και περιττό ύψος ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1)\frac{x}{1-xy}(x^2E^2 - xE + 1) \quad (3.139)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)\frac{x^2}{1-xy}(O^2 - O + 1) \quad (3.140)$$

(αντ.

$$E = 1 + xE^2 + (y-1)\frac{x^2}{1-xy}(x^2E^2 - xE + 1) \quad (3.141)$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)\frac{x^3}{1-xy}(O^2 - O + 1)). \quad (3.142)$$

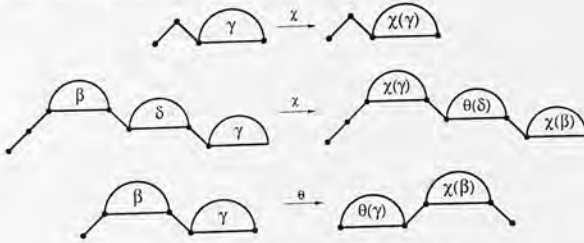
Υπάρχουν ορισμένα πρότυπα τ_1, τ_2 , μερικά από τα οποία εξετάστηκαν ήδη στην παράγραφο αυτή, για τα οποία οι στατιστικές E_{τ_1} και E_{τ_2} (όπως και O_{τ_1} και O_{τ_2}) είναι ισοκατανεμημένες.

Στη συνέχεια θα δοθούν δύο ενδείξεις του \mathcal{D} μέσω των οποίων αποδεικνύονται και συνδυαστικά αυτές οι ισοκατανομές.

Οι ενελιξεις χ και θ

Ορίζουμε αναδρομικά τις απεικονίσεις $\chi, \theta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ως εξής:

$\chi(\epsilon) = \epsilon$, $\chi(ud\gamma) = ud\chi(\gamma)$, $\chi(u\widehat{\beta\delta d\gamma}) = u\widehat{\chi(\gamma)\theta(\delta)d\chi(\beta)}$ και
 $\theta(\widehat{\beta\gamma}) = \theta(\gamma)\widehat{\chi(\beta)}$ (βλ. Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2: Οι ενελιξεις χ και θ

Για παράδειγμα για το μονοπάτι Dyck $\alpha = u u d u d u u d d d u u d u d d$ του Σχήματος 3.1 είναι

$$\begin{aligned}\chi(\alpha) &= \chi(u u d u d u u d d d u u d u d d) \\ &= u u \chi(u u d u d d) d \theta(u d u u d d) d \chi(\epsilon) \\ &= u u u u \chi(\epsilon) d \theta(u d) d \chi(\epsilon) d \theta(u u d d) \widehat{\chi(\epsilon)} d \\ &= u u u u d u d d d u u d d u d d\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\theta(\alpha) &= \theta(u u d u d u u d d d u u d u d d) \\ &= \theta(u u d u d d) u \chi(u d u d u u d d) d \\ &= \theta(\epsilon) u \chi(u d u d) d u u d \chi(u d u u d d) d \\ &= u u d \chi(u d) d u u d u d \chi(u u d d) d \\ &= u u d u d d u u d u d u u \chi(\epsilon) d \theta(\epsilon) d \chi(\epsilon) d \\ &= u u d u d d u u d u d u u d d d.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της θ επαναληπτικά προκύπτει ότι

$$\theta(\widehat{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l}) = \widehat{\chi(\beta_1) \dots \chi(\beta_2) \chi(\beta_1)}.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς το ημιμήκος του μονοπατιού θα αποδειχθεί ταυτόχρονα ότι οι απεικονίσεις χ, θ είναι ενελιξεις. Πράγματι

$$\chi^2(ud\gamma) = \chi(ud\chi(\gamma)) = ud\chi^2(\gamma) = ud\gamma,$$

$$\chi^2(u\widehat{\beta\delta d\gamma}) = \chi(u\widehat{\chi(\gamma)\theta(\delta)d\chi(\beta)}) = u\widehat{\chi^2(\beta)\theta^2(\delta)d\chi^2(\gamma)} = u\widehat{\beta\delta d\gamma}$$

και

$$\theta^2(\widehat{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l}) = \theta(\widehat{\chi(\beta_1) \dots \chi(\beta_2) \chi(\beta_1)}) = \widehat{\chi^2(\beta_1) \chi^2(\beta_2) \dots \chi^2(\beta_1)} = \widehat{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l}.$$

Αυτές οι ενελίξεις έχουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες: Η χ απεικονίζει τα σύνολα⁵⁰ \mathcal{A}, \mathcal{B} στον εαυτό τους και η θ διατηρεί τον αριθμό των πρώτων συνιστωσών και το μήκος κάθε συνιστώσας. Επιπρόσθετα, με τη βοήθεια αυτών των απεικονίσεων μπορούν να αποδεχθούν επαγωγικά οι επόμενες ισότητες:

- i. $E_{uuu}(\alpha) = E_{ddu}(\chi(\alpha))$, (A116424 στο [124]), $O_{uuu}(\alpha) = O_{ddu}(\theta(\alpha))$, (A114492 στο [124]).
- ii. $E_{uuuu}(\alpha) = E_{dduu}(\chi(\alpha))$, $O_{uuuu}(\alpha) = O_{dduu}(\theta(\alpha))$.
- iii. $E_{uuud}(\alpha) = E_{ddud}(\chi(\alpha))$, $O_{uuud}(\alpha) = O_{ddud}(\theta(\alpha))$.

Θα αποδείξουμε μόνο τις ισότητες ii αφού οι αποδείξεις των i και iii είναι ανάλογες. Για την πρώτη ισότητα θα περιοριστούμε στη μη τετριμμένη περίπτωση όπου $\alpha = u\widehat{\beta}d\gamma$,

$$\begin{aligned} \bar{E}_{uuuu}(\alpha) &= E_{uuuu}(\beta) + O_{uuuu}(\delta) + E_{uuuu}(\gamma) + |\beta \in \mathcal{B}| \\ &= E_{dduu}(\chi(\beta)) + O_{dduu}(\theta(\delta)) + E_{dduu}(\chi(\gamma)) + |\chi(\beta) \in \mathcal{B}| = E_{dduu}(\chi(\alpha)) \end{aligned}$$

Επιπλέον, για $\alpha = \widehat{\beta}\gamma$ ισχύει ότι

$$O_{uuuu}(\widehat{\beta}\gamma) = \bar{E}_{uuuu}(\beta) + O_{uuuu}(\gamma) = E_{dduu}(\chi(\beta)) + O_{dduu}(\theta(\gamma)) = O_{dduu}(\theta(\alpha)).$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι οι στατιστικές $E_\tau, E_{\tau'}$ όπως επίσης και οι $O_\tau, O_{\tau'}$ είναι ισοκατανεμημένες όταν $(\tau, \tau') = (uuu, ddu)$, ή $(uuuu, dduu)$, ή $(uuud, ddu)$.

3.7 Σχέση μεταξύ των στατιστικών N_τ, E_τ και O_τ : μια συνδυαστική προσέγγιση

Οι στατιστικές N_τ, E_τ και O_τ μελετήθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους αναλυτικά για διάφορα πρότυπα τ . Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν ήταν κυρίως αλγεβρικές με τη βοήθεια αντίστοιχων γεννητριών συναρτήσεων.

Στην παράγραφο αυτή, θα δοθεί μια άλλη διάσταση του θέματος με τη χρήση συνδυαστικών μεθόδων.

Συγκεκριμένα, θα μελετηθεί το εξής πρόβλημα:

Δοθέντος ενός προτύπου τ , υπάρχουν πρότυπα τ_1, τ_2 με μήκος μία μονάδα μεγαλύτερο από το μήκος του τ έτσι ώστε οι στατιστικές E_τ και O_τ να είναι ισοκατανεμημένες με τις στατιστικές N_{τ_1} και N_{τ_2} αντίστοιχα.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να μελετηθεί με τη χρήση των γεννητριών συναρτήσεων που ευρέθησαν στις προηγούμενες παραγράφους.

Για παράδειγμα, αν $\tau = uud$ τότε εφαρμόζοντας τις σχέσεις (3.94) και (3.95) για $\mu = 2$ και $\nu = 1$ προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις E και O που αντιστοιχούν στο πρότυπο αυτό ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$E = 1 + xE^2 + (y-1)x^2E$$

και

$$O = 1 + xO^2 + (y-1)x^2O(O-1).$$

Από την άλλη, αν $\tau_1 = uudd$ και $\tau_2 = uuudu$ τότε από τις σχέσεις (3.3) και (3.4) προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις F που αντιστοιχούν στα πρότυπα $\tau_1 = uudd$ και $\tau_2 = uuudu$ ικανοποιούν αντίστοιχα τις εξισώσεις

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^2F$$

και

$$F = 1 + xF^2 + (y-1)x^2F(F-1).$$

⁵⁰Όπου \mathcal{A} (αντ. \mathcal{B}) το σύνολο των μονοπατιών Dyck που αρχίζουν με ud (αντ. u^2).

Κατόπιν τούτων, η στατιστική E_{uud} (αντ. O_{uud}) είναι ισοκατανεμημένη με τη στατιστική N_{uud} (αντ. N_{uuu}).

Παρακάτω θα μελετηθεί το πρόβλημα της ισοκατανομής για κάθε πρότυπο με μήκος μικρότερο ή ίσο τους 4 χρησιμοποιώντας και τελείως διαφορετική προσέγγιση.

Συγκεκριμένα, θα κατασκευασθούν δύο αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις ϕ, ψ στο \mathcal{D} με τη βοήθεια των οποίων θα δειχθούν οι ζητούμενες ισοκατανομές.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε την διαμέριση $\{A, B\}$ του συνόλου \mathcal{D}^* όπου A (αντ. B) είναι το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck που έχουν μήκος της πρώτης ανάβασης ίσο με (αντ. μεγαλύτερο από) 1. Με άλλα λόγια, κάθε μονοπάτι του A αρχίζει με ud ενώ κάθε μονοπάτι του B αρχίζει με uu .

Αν $\alpha \in B$ με $\alpha = u\beta d\gamma$, τότε χρησιμοποιώντας την αρχική πρώτη συνιστώσα του α , προκύπτουν δύο ειδών διασπάσεις για το α .

Η πρώτη προκύπτει όταν διασπασθεί το β σε πρώτες συνιστώσες, δηλαδή

$$\tilde{\alpha} = u\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 \cdots \tilde{\beta}_l d\beta_{l+1} \quad (\text{βλ. Σχήμα 3.3})$$

όπου $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{l+1} \in \mathcal{D}$

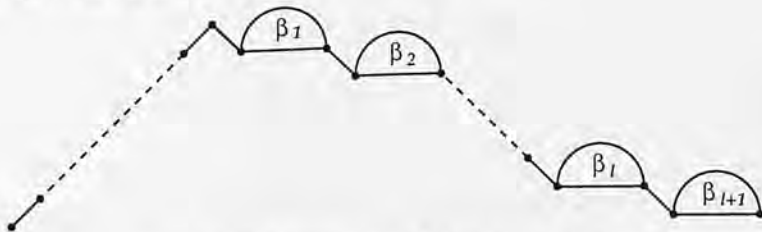


Σχήμα 3.3: Η διάσπαση $\alpha = u\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 \cdots \tilde{\beta}_l d\beta_{l+1}$

ενώ η δεύτερη προκύπτει χρησιμοποιώντας τη πρώτη ανάβαση του $\tilde{\beta}$, δηλαδή

$$\alpha = u^{l+1} d\beta_1 d\beta_2 \cdots d\beta_l d\beta_{l+1} \quad (\text{βλ. Σχήμα 3.4})$$

όπου $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{l+1} \in \mathcal{D}$.



Σχήμα 3.4: Η διάσπαση $\alpha = u^{l+1} d\beta_1 d\beta_2 \cdots d\beta_l d\beta_{l+1}$

Το κλειδί για την κατασκευή των ζητούμενων απεικονίσεων είναι η κατάλληλη αντιστοίχιση μονοπατιών της μορφής του Σχήματος 3.3 με μονοπάτια της μορφής του Σχήματος 3.4 (για την ϕ) ή σε μονοπάτια της μορφής 3.5 (για την ψ).

Η απεικόνιση ϕ

Ορίζουμε αναδρομικά την απεικόνιση $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ως εξής:

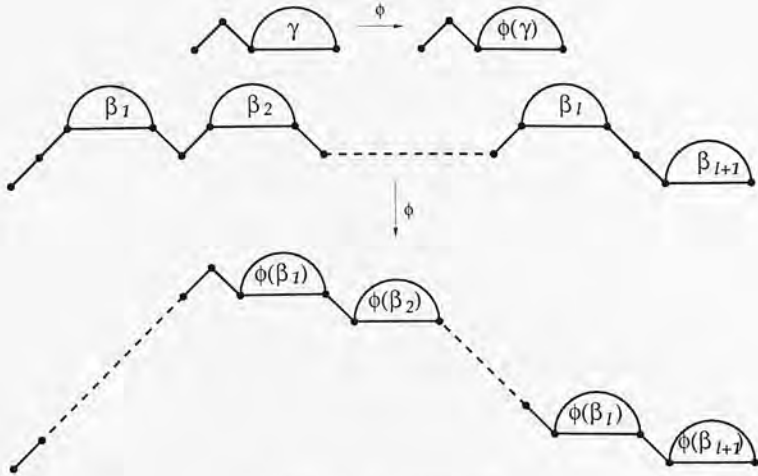
$$\phi(\epsilon) = \epsilon, \quad \phi(ud\gamma) = ud\phi(\gamma)$$



Σχήμα 3.5: Η διάσπαση σε πρώτες συνιστώσες

και για $\alpha = u\widehat{\beta_1\beta_2}\cdots\widehat{\beta_l}d\beta_{l+1}$

$$\phi(\alpha) = u^{l+1}d\phi(\beta_1)d\phi(\beta_2)\cdots d\phi(\beta_l)d\phi(\beta_{l+1}).$$



Σχήμα 3.6: Η απεικόνιση ϕ

Για παράδειγμα, για το μονοπάτι Dyck $\alpha = u u d u d u d d d u u d u d d$ του Σχήματος 3.1 είναι

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= \phi(u \widehat{u \widehat{u d d u d u d d}}) \\ &= u u u u d \phi(\epsilon) d \phi(\epsilon) d \phi(u d) d \phi(u u d u d d) \\ &= u u u u d d d d u d \phi(u \widehat{\epsilon d \epsilon}) \\ &= u u u u d d d d u d u u d \phi(\epsilon) d \phi(\epsilon) d \phi(\epsilon) \\ &= u u u u d d d d u d u u d d d. \end{aligned}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη, διατηρεί το μήκος του μονοπατιού Dyck, τον αριθμό των πρώτων συνιστωσών, το μήκος κάθε συνιστώσας και ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα του γινομένου

$$\phi(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k) = \phi(\alpha_1) \phi(\alpha_2) \cdots \phi(\alpha_k)$$

για κάθε $\alpha_i \in \mathcal{D}$, $i \in [k]$.

Τα (μη κενά) σταθερά σημεία της απεικόνισης ϕ είναι της μορφής $\prod_{i=1}^k \alpha_i$, όπου κάθε α_i είναι μια πυραμίδα ύψους 1 ή 2. Τα μονοπάτια αυτά αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως μονοπάτια Fibonacci. (βλ. για παράδειγμα [6]).

Επιπλέον, η απεικόνιση ϕ μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να αποδειχθεί επαγωγικά η ισοκατανομή πολλών στατιστικών.

Συγκεκριμένα για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $E_{uu}(\alpha) = N_{uud}(\phi(\alpha))$, (A091156 στο [124]).
2. $E_{ud}(\alpha) = \overline{N}_{dud}(\phi(\alpha))$, (A091867 στο [124]).
3. $O_{du}(\alpha) = N_{uuu}(\phi(\alpha))$, (A092107 στο [124]).
4. $E_{uuu}(\alpha) = N_{uudu}(\phi(\alpha))$, (A116424 στο [124]).
5. $E_{uud}(\alpha) = N_{uudd}(\phi(\alpha))$, (A098978 στο [124]).
6. $E_{uuuu}(\alpha) = N_{uuuu}(\phi(\alpha))$.
7. $E_{uudu}(\alpha) = N_{uudd}(\phi(\alpha))$.
8. $E_{uudd}(\alpha) = N_{uudd}(\phi(\alpha))$.
9. $E_{uudd}(\alpha) = \overline{N}_{duudd}(\phi(\alpha))$.
10. $E_{udud}(\alpha) = \overline{N}_{dudud}(\phi(\alpha))$,

όπου $\overline{N}_{dr}(\alpha) = N_{dr}(\alpha) + [\alpha \text{ αρχίζει με } \tau]$.

Θα αποδειχθούν μόνο οι ιδιότητες 3 και 7 στη μη τριμιμένη περίπτωση όπου $\alpha = u\widehat{\beta}_1\widehat{\beta}_2 \cdots \widehat{\beta}_l d\beta_{l+1}$, αφού οι αποδείξεις των υπολοίπων ιδιοτήτων είναι ανάλογες.

Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned} O_{du}(\alpha) &= \sum_{i=1}^{l+1} O_{du}(\beta_i) + l - 1 = \sum_{i=1}^{l+1} N_{uuu}(\phi(\beta_i)) + l - 1 \\ &= N_{uuu}(\phi(\alpha)) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} E_{uuuu}(\alpha) &= \sum_{i=1}^{l+1} E_{uuuu}(\beta_i) + [\beta_1 = \epsilon][l \geq 2] = \sum_{i=1}^{l+1} N_{uuud}(\phi(\beta_i)) + [\phi(\beta_1 = \epsilon)][l \geq 2] \\ &= N_{uuud}(\phi(\alpha)). \end{aligned}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι ιδιότητες 2,9 και 10 είναι ειδικές περιπτώσεις του επόμενου αποτελέσματος:

$$E_{\tau}(\alpha) = \overline{N}_{dr}(\phi(\alpha))$$

για κάθε Fibonacci μονοπάτι τ .

Για την απόδειξη της παραπάνω ιδιότητας χρησιμοποιείται η ιδιότητα του γινομένου της ϕ και ότι το μονοπάτι τ είναι σταθερό σημείο της ϕ .

Αρχικά, αν $\alpha = ud\gamma \in A$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E_\tau(\alpha) &= E_\tau(\gamma) + [\alpha \text{ αρχίζει με } \tau] \\ &= \overline{N}_{d\tau}(\phi(\gamma)) + |\phi(\alpha) \text{ αρχίζει με } \tau| \\ &= N_{d\tau}(\phi(\gamma)) + |\phi(\gamma) \text{ αρχίζει με } \tau| + [\phi(\alpha) \text{ αρχίζει με } \tau] \\ &= N_{d\tau}(\phi(\alpha)) + |\phi(\alpha) \text{ αρχίζει με } \tau| \\ &= \overline{N}_{d\tau}(\phi(\alpha)). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, αν $\alpha = u\widehat{\beta}_1\widehat{\beta}_2 \cdots \widehat{\beta}_l d \widehat{\beta}_{l+1} \in B$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E_\tau(\alpha) &= \sum_{i=1}^{l+1} E_\tau(\beta_i) + [\alpha \text{ αρχίζει με } \tau] \\ &= \sum_{i=1}^{l+1} \overline{N}_{d\tau}(\phi(\beta_i)) + [\phi(\alpha) \text{ αρχίζει με } \tau] \\ &= \sum_{i=1}^{l+1} (N_{d\tau}(\phi(\gamma)) + |\phi(\beta_i) \text{ αρχίζει με } \tau|) + [\phi(\alpha) \text{ αρχίζει με } \tau] \\ &= N_{d\tau}(\phi(\alpha)) + |\phi(\alpha) \text{ αρχίζει με } \tau| \\ &= \overline{N}_{d\tau}(\phi(\alpha)). \end{aligned}$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν δύο παραλλαγές ϕ_1, ϕ_2 της ϕ οι οποίες προκύπτουν με αλλαγή της σειράς των β_i . Η ϕ_1 προκύπτει αλλάζοντας τη σειρά των $\phi(\beta_i)$, $i \in [l+1]$ στο Σχήμα (3.4), τοποθετώντας το $\phi(\beta_{l+1})$ πρώτα.

Συγκεκριμένα, ορίζουμε αναδρομικά την απεικόνιση $\phi_1 : D \rightarrow D$ ως εξής:

$$\phi_1(\epsilon) = \epsilon, \quad \phi_1(ud\gamma) = ud\phi_1(\gamma)$$

και για $\alpha = u\widehat{\beta}_1\widehat{\beta}_2 \cdots \widehat{\beta}_l d \beta_{l+1}$

$$\phi_1(\alpha) = u^{l+1} d \phi_1(\beta_{l+1}) d \phi_1(\beta_l) \cdots d \phi_1(\beta_2) d \phi_1(\beta_1)$$

(βλ. Σχήμα 3.7).

Για παράδειγμα, για το μονοπάτι Dyck $\alpha = u u u d u d u u d d d u u d u d d$ του Σχήματος 3.1 είναι

$$\begin{aligned} \phi_1(\alpha) &= \phi_1(u \widehat{\epsilon} \widehat{\epsilon} u \widehat{d} d u u d u d d) \\ &= u u u u d \phi_1(u u d u d d) d \phi(u d) d \phi(\epsilon) d \phi(\epsilon) \\ &= u u u u d \phi_1(u \widehat{\epsilon} \widehat{\epsilon} d \epsilon) d u d d d \\ &= u u u u d u u u d \phi_1(\epsilon) d \phi_1(\epsilon) d \phi_1(\epsilon) d u d d d \\ &= u u u u d u u u d d d d u d d d. \end{aligned}$$

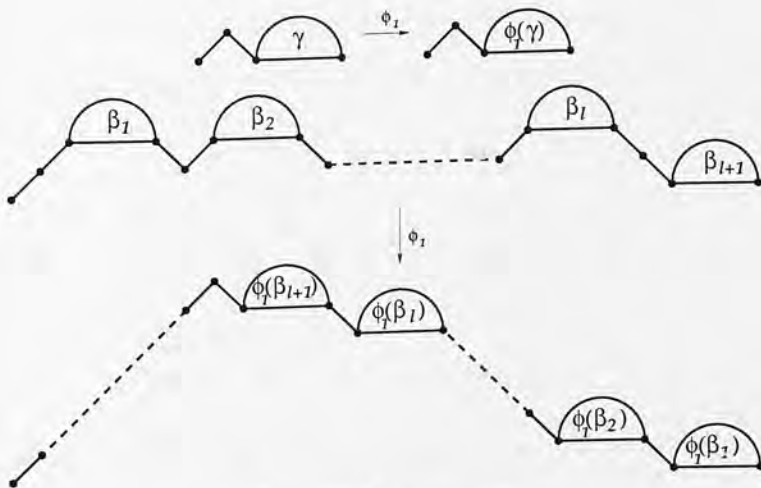
Θα αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς το μήκος, η ισότητα

$$\phi_1 = \phi \circ \chi$$

όπου χ είναι η ενέλιξη στο τέλος της παραγράφου 3.6 (βλ. σελ. 129).

Πράγματι, είναι

$$(\phi \circ \chi)(ud\gamma) = \phi(ud\chi(\gamma)) = ud\phi(\chi(\gamma)) = ud\phi_1(\gamma) = \phi_1(ud\gamma)$$



Σχήμα 3.7: Η απεικόνιση ϕ_1

και

$$\begin{aligned}
 (\phi \circ \chi)(u\widehat{\beta}_1\widehat{\beta}_1 \cdots \widehat{\beta}_l d\beta_{l+1}) &= \phi \left(u\widehat{\chi(\beta_{l+1})} \theta \left(\widehat{\beta}_2 \cdots \widehat{\beta}_l \right) d\chi(\beta_1) \right) \\
 &= \phi \left(u\widehat{\chi(\beta_{l+1})} \widehat{\chi(\beta_1)} \cdots \widehat{\chi(\beta_2)} d\chi(\beta_1) \right) \\
 &= u^{l+1} d\phi(\chi(\beta_{l+1})) d\phi(\chi(\beta_1)) \cdots d\phi(\chi(\beta_2)) d\phi(\chi(\beta_1)) \\
 &= u^{l+1} d\phi_1(\beta_{l+1}) d\phi_1(\beta_1) \cdots d\phi_1(\beta_2) d\phi_1(\beta_1) \\
 &= \phi_1(u\widehat{\beta}_1\widehat{\beta}_1 \cdots \widehat{\beta}_l d\beta_{l+1}).
 \end{aligned}$$

Προφανώς, η ϕ_1 είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, με $\phi_1(A) = A$ και $\phi_1(B) = B$, διατηρεί το μήκος του μονοπατιού αλλά δεν διατηρεί τον αριθμό των πρώτων συνιστωσών του. Επιπλέον η ϕ_1 ικανοποιεί τις ιδιότητες 1, 2 και 3 της ϕ όπως επίσης και τις επόμενες ιδιότητες:

11. $E_{du}(\alpha) = N_{udu}(\phi_1(\alpha))$, (A091869 στο [124]).
12. $O_{uuu}(\alpha) = N_{duu}(\phi_1(\alpha))$, (A114492 στο [124]).
13. $O_{uud}(\alpha) = N_{duud}(\phi_1(\alpha))$, (A116424 στο [124]).
14. $E_{dud}(\alpha) = N_{udud}(\phi_1(\alpha))$, (A094507 στο [124]).
15. $E_{ddu}(\alpha) = N_{uudu}(\phi_1(\alpha))$, (A116424 στο [124]).
16. $E_{dudu}(\alpha) = N_{ududu}(\phi_1(\alpha))$.
17. $E_{dduu}(\alpha) = N_{uuduu}(\phi_1(\alpha))$.
18. $E_{ddud}(\alpha) = N_{uudud}(\phi_1(\alpha))$.
19. $O_{uudu}(\alpha) = N_{duudu}(\phi_1(\alpha))$.

Οι αποδείξεις των παραπάνω ισοτήτων είναι στο ίδιο πνεύμα με αυτές των ιδιοτήτων 1-10 και παραλείπονται.

Εντούτοις θα αποδειχθεί μια γενίκευση των ιδιοτήτων 11 και 16 στη μη τετριμμένη περίπτωση όπου $\alpha = u\beta_1\beta_2 \cdots \beta_l d\beta_{l+1}$:

$$E_{(du)^\mu}(\alpha) = N_{u(du)^\mu}(\phi_1(\alpha)), \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N}^* .$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} E_{(du)^\mu}(\alpha) &= \sum_{i=1}^{l+1} E_{(du)^\mu}(\beta_i) + [\beta_{l+1} \text{ αρχίζει με } u(du)^{\mu-1}] \\ &= \sum_{i=1}^{l+1} N_{u(du)^\mu}(\phi_1(\beta_i)) + [\phi_1(\beta_{l+1}) \text{ αρχίζει με } u(du)^{\mu-1}] \\ &= N_{u(du)^\mu}(\phi_1(\alpha)). \end{aligned}$$

Οι ισότητες 14, 16 και 17 μπορούν να αποδειχθούν άμεσα, ή χρησιμοποιώντας τις ισότητες 1, 6 και 8 μαζί με την ισότητα $\phi_1 = \phi \circ \chi$ και τις ισότητες i, ii, iii της παραγράφου 3.6.

Επιπλέον, από τις ισότητες i και 12 μπορεί να αποδειχθεί η ισότητα:

$$20. O_{ddu}(\alpha) = N_{dduu}((\phi_1 \circ \theta)(\alpha)).$$

Παρατήρηση

Επειδή η ϕ_1 ικανοποιεί τις ισότητες 3 και 11, στέλνει τη στατιστική N_{du} στη στατιστική N_{uuu} (όπου uxu είναι είτε το udu είτε το udu). Επιπλέον, αν h είναι η κατοπτρική απεικόνιση⁵¹ τότε η $h \circ \phi_1$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση που στέλνει το du στο dxd . Ο Callan [28] παρουσιάζει μια άλλη αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με την οποία αποδεικνύεται ότι η στατιστική N_{dxd} ακολουθεί την κατανομή Narayana. Η παρούσα αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση έχει το πλεονέκτημα ότι στέλνει τις στατιστικές E_{du} και O_{du} στις στατιστικές N_{dud} και N_{ddd} αντίστοιχα.

Η ϕ_2 προκύπτει εναλλάσσοντας την σειρά των $\phi_1(\beta_{l+1})$ και $\phi_1(\beta_l)$ στο Σχήμα (3.7), τοποθετώντας το $\phi(\beta_l)$ πρώτα.

Συγκεκριμένα, ορίζουμε αναδρομικά την απεικόνιση $\phi_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ως εξής:

$$\phi_2(\epsilon) = \epsilon, \quad \phi_2(ud\gamma) = ud\phi_2(\gamma)$$

και για $\alpha = u\widehat{\beta}_1\widehat{\beta}_2 \cdots \widehat{\beta}_l d\widehat{\beta}_{l+1}$

$$\phi_2(\alpha) = u^{l+1} d\phi_2(\beta_1)d\phi_2(\beta_{l+1}) \cdots d\phi_2(\beta_2)d\phi_2(\beta_1)$$

(βλ. Σχήμα 3.8).

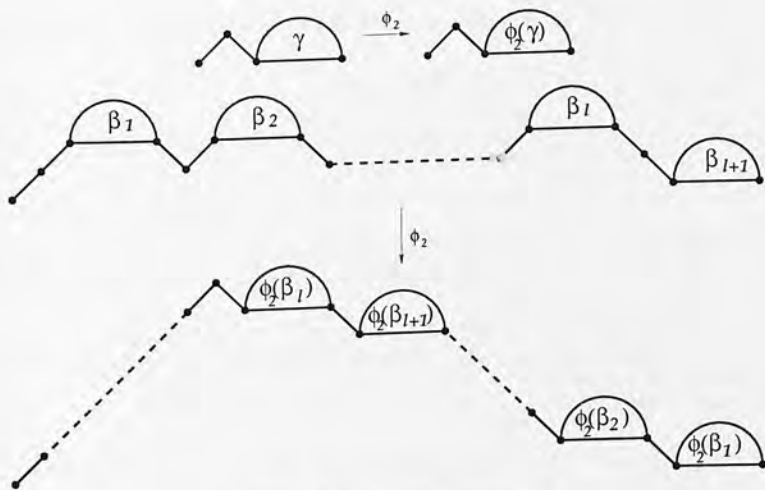
Για παράδειγμα, για το μονοπάτι Dyck $\alpha = u u d u d u u d d d u u d u d d$ του Σχήματος 3.1 είναι

$$\begin{aligned} \phi_2(\alpha) &= \phi_2(u \widehat{\epsilon} \widehat{\epsilon} u \widehat{d} d u u d u d d) \\ &= u u u u d \phi_2(u d) d \phi_2(u u d u d d) d \phi(\epsilon) d \phi(\epsilon) \\ &= u u u u d u d d u u u d \phi(\epsilon) d \phi(\epsilon) d \phi(\epsilon) d d \\ &= u u u u d u d d u u u d d d d. \end{aligned}$$

Προφανώς, η ϕ_2 είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, με $\phi_2(A) = A$ και $\phi_2(B) = B$, διατηρεί το μήκος του μονοπατιού, αλλά δεν διατηρεί τον αριθμό των πρώτων συνιστωσών του. Επιπλέον εύκολα προκύπτει ότι η ϕ_2 ικανοποιεί την επόμενη ισότητα.

$$21. E_{uddu}(\alpha) = N_{uuddu}(\phi_2(\alpha)).$$

⁵¹ Βλ. σελ. 30.



Σχήμα 3.8: Η απεικόνιση ϕ_2

Η απεικόνιση ψ

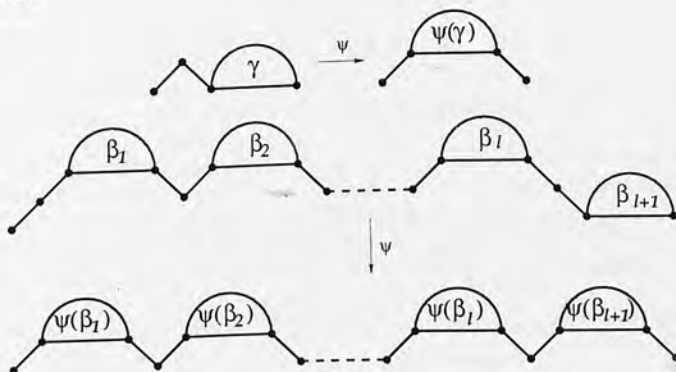
Ορίζουμε αναδρομικά την απεικόνιση $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ως εξής:

$$\psi(\epsilon) = \epsilon, \quad \psi(ud\gamma) = \widehat{\phi(\gamma)}$$

και για $\alpha = u\widehat{\beta_1}\widehat{\beta_2}\cdots\widehat{\beta_l}d\beta_{l+1}$

$$\psi(\alpha) = \widehat{\psi(\beta_1)}\widehat{\psi(\beta_2)}\cdots\widehat{\psi(\beta_l)}\widehat{\psi(\beta_{l+1})}$$

(βλ. Σχήμα 3.9).



Σχήμα 3.9: Η απεικόνιση ψ

Για παράδειγμα για το μονοπάτι Dyck $\alpha = u u d u d u d d d u u d u d d$ του Σχήματος 3.1 είναι

$$\begin{aligned}\psi(\alpha) &= \psi(u \widehat{\varepsilon} \widehat{\varepsilon} \widehat{u} d d u u d u d d) \\ &= u \psi(\varepsilon) d u \psi(\varepsilon) d u \psi(u d) d u \psi(u d u d d) d \\ &= u d u d u u d d u \psi(\varepsilon) d u \psi(\varepsilon) d u \psi(\varepsilon) d u \psi(\varepsilon) d \\ &= u d u d u u d d u d u d u d.\end{aligned}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση ψ είναι αμφιμονοσήμαντη, διατηρεί το μήκος του μονοπατιού Dyck και απεικονίζει τα σύνολα \mathcal{A} και \mathcal{B} στα σύνολα των πρώτων και μη πρώτων (μη κενών) μονοπατιών Dyck αντίστοιχα.

Τα (μη κενά) σταθερά σημεία της απεικόνισης ψ είναι της μορφής $(ud)^\mu$, όπου $\mu \in \mathbb{N}^+$.

Επιπλέον, η απεικόνιση ψ μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να αποδειχθεί επαγωγικά η ισοκατανομή πολλών στατιστικών.

Συγκεκριμένα για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ ισχύουν οι ισότητες:

22. $O_{uu}(\alpha) = N_{ddu}(\psi(\alpha))$, (A091894 στο [124]).
23. $O_{ud}(\alpha) = N_{udu}(\psi(\alpha))$, (A091869 στο [124]).
24. $O_{dud}(\alpha) = N_{dudu}(\psi(\alpha))$, (A102405 στο [124]).
25. $O_{uudd}(\alpha) = N_{uuddu}(\psi(\alpha))$, (A114848 στο [124]).
26. $O_{ddud}(\alpha) = N_{udduu}(\psi(\alpha))$.
27. $O_{ddud}(\alpha) = N_{ddudu}(\psi(\alpha))$.

Θα αποδειχθούν μόνο οι ισότητες 22 και 27 στη μη τετριμμένη περίπτωση όπου $\alpha = u\widehat{\beta}_1\widehat{\beta}_2 \cdots \widehat{\beta}_l d\beta_{l+1}$, αφού οι αποδείξεις των υπολοίπων ισοτήτων είναι ανάλογες.

Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}O_{uu}(\alpha) &= \sum_{i=1}^{l+1} O_{uu}(\beta_i) + \sum_{i=1}^l [\beta_i \neq \varepsilon] \\ &= \sum_{i=1}^{l+1} N_{ddu}(\psi(\beta_i)) + \sum_{i=1}^l [\psi(\beta_i) \neq \varepsilon] \\ &= N_{ddu}(\psi(\alpha))\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}O_{ddud}(\alpha) &= \sum_{i=1}^{l+1} O_{ddud}(\beta_i) + \sum_{i=1}^{l-1} [\beta_i \neq \varepsilon][\beta_{i+1} = \varepsilon] \\ &= \sum_{i=1}^{l+1} N_{ddudu}(\psi(\beta_i)) + \sum_{i=1}^{l-1} [\psi(\beta_i) \neq \varepsilon][\psi(\beta_{i+1}) = \varepsilon] \\ &= N_{ddudu}(\psi(\alpha)).\end{aligned}$$

Από τις ισότητες iii και 27 προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

28. $O_{uuud}(\alpha) = N_{ddudu}((\psi \circ \theta)(\alpha))$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι ισότητες 23, 25, 26 είναι ειδικές περιπτώσεις του ακόλουθου αποτελέσματος:

$$O_\tau(\alpha) = N_{\tau u}(\psi(\alpha))$$

για κάθε μονοπάτι Fibonacci τ .

Για την απόδειξη της παραπάνω ισότητας θα περιοριστούμε στη μη τετριμμένη περίπτωση όπου $\alpha = u\beta_1\beta_2 \cdots \beta_l d\beta_{l+1} \in B$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} O_\tau(\alpha) &= \sum_{i=1}^{l+1} O_\tau(\beta_i) + \sum_{i=1}^{l-|\tau|} [\beta_i = \epsilon][\beta_{i+1} = \epsilon] \cdots [\beta_{i+|\tau|} = \epsilon] \\ &= \sum_{i=1}^{l+1} N_{\tau u}(\psi(\beta_i)) + \sum_{i=1}^{l-|\tau|} [\psi(\beta_i) = \epsilon][\psi(\beta_{i+1}) = \epsilon] \cdots [\psi(\beta_{i+|\tau|}) = \epsilon] \\ &= N_{\tau u}(\psi(\alpha)). \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Οι αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις που έχουν δοθεί στην παράγραφο αυτή δεν καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις ισοκατανομής για τα πρότυπα μήκους 4.

Μια από τις περιπτώσεις αυτές αφορά τη στατιστική O_{uddu} . Θα αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας μια άλλη αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, ότι η στατιστική O_{uddu} είναι ισοκατανεμημένη με τη στατιστική N_{uuddu} .

Πράγματι, επειδή οι στατιστικές E_{uddu} και N_{uuddu} είναι ισοκατανεμημένες (βλ. ισόκατανομή 17.) αρκεί να δείχθει ότι και οι στατιστικές E_{dduu} και O_{uddu} είναι ισοκατανεμημένες. Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι για κάθε $j \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια ενέλιξη ω_j του \mathcal{D} (ανάλογη με την ενέλιξη ϕ_j της ενότητας 3.1 στην εργασία [114]) τέτοια ώστε

- (i) ο αριθμός των εμφανίσεων του $dduu$ σε ύψος j στην α ισούται με τον αριθμό των εμφανίσεων του $uudd$ σε ύψος $j+1$ στο $\omega_j(\alpha)$, και
- (ii) ο αριθμός των εμφανίσεων του $dduu$ (αντ. $uudd$) σε ύψος i (αντ. $i+1$) στο α ισούται με τον αριθμό των εμφανίσεων του $dduu$ (αντ. $uudd$) στο $\omega_j(\alpha)$ για κάθε $i \neq j$.

Επιπρόσθετα, είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ με $\omega(\epsilon) = \epsilon$ και για $\alpha \neq \epsilon$, $\omega(\alpha) = \omega_{2\rho} \circ \omega_{2(\rho-1)} \circ \cdots \circ \omega_2 \circ \omega_1(\alpha)$ όπου $\rho = \lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor$ (h είναι το ύψος του μονοπατιού α) είναι αμφιμονοσήμαντη με $E_{dduu}(\alpha) = O_{uddu}(\omega(\alpha))$.

Οι περιπτώσεις που απομένουν αφορούν τις στατιστικές O_{uuuu} (ή την ισοκατανεμημένη της στατιστική O_{dduu}), O_{dudu} , E_{dddu} , O_{dddu} .

Με απευθείας απαρίθμηση έχω ελέγξει ότι ακόμη και για μικρές τιμές του ημιμήκους οι πρώτες δύο από τις παραπάνω στατιστικές δεν έχουν την ίδια κατανομή με καμία στατιστική N_τ (ή \bar{N}_τ) για κάθε πρότυπο μήκους 5. Από την άλλη πλευρά, εύκολα αποδεικνύεται με αλγεβρικές μεθόδους ότι οι στατιστικές E_{dddu} και O_{dddu} είναι ισοκατανεμημένες με τις στατιστικές N_{ddudu} και N_{duuuu} αντίστοιχα. Προς το παρόν δεν μπορώ να βρω κατάλληλες απεικονίσεις που να δικαιολογούν συνδυαστικά αυτές τις ισοκατανομές.

Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου δίδονται περιληπτικά στους παρακάτω πίνακες:

τ	E_τ	O_τ	τ	E_τ	O_τ
uu	N_{uud}	N_{duu}	$uuuu$	N_{uuudu}	
ud	\bar{N}_{dud}	N_{udu}	$uudu$	N_{uudd}	N_{ddudu}
du	N_{udu}	N_{uuu}	$dudu$	N_{udddu}	
			$dduu$	N_{uuudu}	
			$uuud$	N_{uudd}	N_{ddudu}
			$uudd$	\bar{N}_{duudd}	N_{uudd}
			$udud$	\bar{N}_{duud}	N_{uudd}
			$ddud$	N_{uudd}	N_{ddudu}
			$uddu$	N_{uudd}	N_{uudd}
			$dddu$	N_{ddudu}	N_{dduuu}
τ	E_τ	O_τ			
uuu	N_{uuudu}	N_{duuu}			
uud	N_{uudd}	N_{uudd}			
dud	N_{uddu}	N_{ddud}			
ddu	N_{uudd}	N_{duuu}			

3.8 Πολυγεννήτριες προτύπων

Δίδεται ένα αριθμήσιμο σύνολο προτύπων $\mathcal{T} = \{\tau_j : j \in \mathbb{N}^*\}$.

Στην παράγραφο αυτή αναλύεται μια μέθοδος για την ταυτόχρονη μελέτη των στατιστικών N_{τ_j} , $j \in \mathbb{N}^*$ με τη βοήθεια της πολυγεννήτριας

$$F(x; \mathbf{s}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} s_j^{N_{\tau_j}(\alpha)}$$

όπου $\mathbf{s} = (s_j)$, $j \in \mathbb{N}^*$.

Η μέθοδος αυτή θα περιγραφεί όταν

$$\mathcal{T} = \{(u\sigma d)^j : j \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(u\sigma d)^j u : j \in \mathbb{N}^*\}$$

όπου σ δοσμένο μονοπάτι Dyck και όταν

$$\mathcal{T} = \{u^i d u^j : i, j \in \mathbb{N}^*\}$$

Στο ίδιο πνεύμα γίνεται μελέτη για τις στατιστικές L_{τ_j} και H_{τ_j} , $j \in \mathbb{N}^*$.

Ανάλογη μελέτη έχει γίνει πρόσφατα από τον Mansour [92] όταν

$$\mathcal{T} = \{(ud)^j : j \in \mathbb{N}^*\} \text{ ή } \mathcal{T} = \{u^i d u^j : j \in \mathbb{N}^*\}.$$

Προφανώς, τα αποτελέσματα του Mansour περιέχονται στα αποτελέσματα της παραγράφου αυτής αφού τα σύνολα που θεωρεί είναι υποσύνολα των συνόλων που θεωρούνται εδώ.

A. Τα πρότυπα $(u\sigma d)^j$ και $(u\sigma d)^j u$

Στη παράγραφο αυτή θεωρούμε ένα συγκεκριμένο μονοπάτι Dyck σ ημιμήκους r και γίνεται η ταυτόχρονη μελέτη των στατιστικών N_{τ_j} και $N_{\tau'_j}$ όπου $\tau_j = (u\sigma d)^j$ και $\tau'_j = (u\sigma d)^j u$.

Το ίδιο πρόβλημα εξετάζεται και για τις στατιστικές L_{τ_j} και $L_{\tau'_j}$ καθώς και για τις στατιστικές H_{τ_j} και $H_{\tau'_j}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$.

A₁. Οι στατιστικές N_{τ_j} και $N_{\tau'_j}$

Θεωρούμε την πολυγεννήτρια συνάρτηση $F = F(x; \mathbf{s}, \mathbf{t})$ του συνόλου των μονοπατιών Dyck ως προς το ημιμήκος και τις στατιστικές N_{τ_j} και $N_{\tau'_j}$ όπου $j \in \mathbb{N}^*$:

$$F(x; \mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} s_j^{N_{\tau_j}(\alpha)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} t_j^{N_{\tau'_j}(\alpha)}$$

όπου $s = (s_j)$ και $t = (t_j)$, $j \in \mathbb{N}^*$.

Πρόταση 3.8.1. Η γεννήτρια συνάρτηση F ικανοποιεί την εξίσωση

$$x \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)i} \prod_{j=1}^{i+1} (s_j t_j)^{i-j+1} \right) F^2 - \left(1 + x^{r+1} \sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)i} \prod_{j=1}^{i+1} (s_j t_j)^{i-j+1} \right) F + \left(1 + x^{r+1} \sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)i} \prod_{j=1}^{i+1} (s_j t_j)^{i-j+1} \prod_{j=1}^{i+1} s_j \right) = 0. \quad (3.143)$$

Απόδειξη.

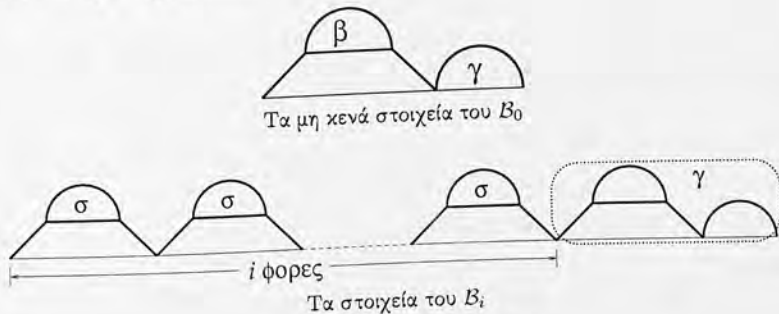
Θεωρούμε τη διαμέριση (B_i) του \mathcal{D} με

$$B_0 = \{\epsilon\} \cup \{u\beta d\gamma : \beta \in \mathcal{D} \setminus \{\sigma\}, \gamma \in \mathcal{D}\}$$

και

$$B_i = \{(u\sigma d)^i \gamma : \gamma \in B_0\}$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}^*$ (βλ. Σχήμα 3.10).



Σχήμα 3.10: Η διαμέριση (B_i)

Έστω $\alpha = u\beta d\gamma$, όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$ και $\beta \neq \sigma$. Επειδή για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι

$$N_{\tau_j}(\alpha) = N_{\tau_j}(\beta) + N_{\tau_j}(\gamma)$$

και

$$N_{\tau'_j}(\alpha) = N_{\tau'_j}(\beta) + N_{\tau'_j}(\gamma)$$

προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση $B_0 = B_0(x; s, t)$ του συνόλου B_0 είναι

$$\begin{aligned} B_0 &= \sum_{\alpha \in B_0} x^{l(\beta)+l(\gamma)+1} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} s_j^{N_{\tau_j}(\beta)+N_{\tau_j}(\gamma)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} t_j^{N_{\tau'_j}(\beta)+N_{\tau'_j}(\gamma)} \\ &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D} \setminus \{\sigma\}} x^{l(\beta)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} s_j^{N_{\tau_j}(\beta)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} t_j^{N_{\tau'_j}(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} s_j^{N_{\tau_j}(\gamma)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} t_j^{N_{\tau'_j}(\gamma)} \right) \\ &= 1 + x(F - x^r)F. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Επιπλέον, για κάθε $\gamma \in \mathcal{B}_0$ και $i, j \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι

$$N_{\tau_j}((u\sigma d)^i \gamma) = \begin{cases} N_{\tau_j}(\gamma), & \text{αν } i < j \\ N_{\tau_j}(\gamma) + i - j + 1, & \text{αν } j \leq i \end{cases}$$

και

$$N_{\tau_j'}((u\sigma d)^i \gamma) = \begin{cases} N_{\tau_j'}(\gamma), & \text{αν } i < j \\ i - j & \text{αν } j \leq i, \text{ και } \gamma = \epsilon \\ N_{\tau_j'}(\gamma) + i - j + 1, & \text{αν } j \leq i \text{ και } \gamma \neq \epsilon \end{cases}$$

οπότε προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση $B_i = B(x; s, t)$ του συνόλου \mathcal{B}_i , για $i \in \mathbb{N}^*$ δίδεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} B_i &= \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_0} x^{l((u\sigma d)^i) + l(\gamma)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} s_j^{N_{\tau_j}(u\sigma d)^i \gamma} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} t_j^{N_{\tau_j'}(u\sigma d)^i \gamma} \\ &= x^{(r+1)i} \left(\left(\sum_{\gamma \in \mathcal{B}_0 \setminus \{\epsilon\}} x^{l(\gamma)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} s_j^{N_{\tau_j}(\gamma)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} t_j^{N_{\tau_j'}(\gamma)} \right) \prod_{j=1}^{i+1} s_j^{i-j+1} \prod_{j=1}^{i+1} t_j^{i-j+1} + \prod_{j=1}^{i+1} s_j^{i-j+1} \prod_{j=1}^{i+1} t_j^{i-j} \right) \\ &= x^{(r+1)i} \prod_{j=1}^{i+1} s_j^{i-j+1} \left((B_0 - 1) \prod_{j=1}^{i+1} t_j^{i-j+1} + \prod_{j=1}^i t_j^{i-j} \right). \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, από τη σχέση (3.144) προκύπτει ότι

$$F = \sum_{i=0}^{\infty} B_i = 1 + xF^2 - x^{r+1}F + \sum_{i=1}^{\infty} x^{(r+1)i} \prod_{j=1}^{i+1} s_j^{i-j+1} \left((xF^2 - x^{r+1}F) \prod_{j=1}^{i+1} t_j^{i-j+1} + \prod_{j=1}^i t_j^{i-j} \right)$$

η οποία δίνει τελικά τη σχέση (3.143). \square

Παρατήρηση

Λόγω της εξίσωσης (3.143) προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση F εξαρτάται μόνο από το μήκος του μονοπατιού σ και όχι από το ίδιο το σ .

Για να γίνει καλύτερα αντιληπτό αυτό, θα αποδειχθεί συνδυαστικά ότι η στατιστική $N_{(u\sigma d)^i}$ (αντ. $N_{(u\sigma d)^i u}$) είναι ισοκατανομημένη με τη στατιστική $N_{(u\sigma^* d)^i}$ (αντ. $N_{(u\sigma^* d)^i u}$) για κάθε μονοπάτι Dyck $\sigma^* \in \mathcal{M}(\sigma^*) = \mathcal{M}(\sigma)$ και κάθε $j \in \mathbb{N}^*$.

Πράγματι, αν τεθεί $h(\epsilon) = \epsilon$ και για κάθε μη κενό μονοπάτι Dyck $\alpha = u\beta d\gamma$

$$h(\alpha) = \begin{cases} uh(\beta)dh(\gamma), & \text{αν } \beta \neq \sigma, \sigma^* \\ u\sigma^* dh(\gamma), & \text{αν } \beta = \sigma \\ u\sigma dh(\gamma), & \text{αν } \beta = \sigma^* \end{cases}$$

τότε αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ως προς το ημιμήκος του μονοπατιού α ότι η απεικόνιση h είναι μια ενέλιξη του \mathcal{D} με

$$N_{(u\sigma^* d)^j}(h(\alpha)) = N_{(u\sigma d)^j}(\alpha)$$

και

$$N_{(u\sigma^* d)^j u}(h(\alpha)) = N_{(u\sigma d)^j u}(\alpha)$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ και $j \in \mathbb{N}^*$.

Εφαρμογή

Η γεννήτρια συνάρτηση $F = F(x; t)$ η οποία μετράει τα μονοπάτια Dyck συγκεκριμένου ημιμήκους ως προς τις στατιστικές l και $N_{(ud)j\mu^2}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$x(1-x) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=1}^i t_j \right) F + (x-1) \left(1 + x \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=1}^i t_j \right) \right) F + 1 = 0. \quad (3.145)$$

Πράγματι, επειδή

$$N_{(ud)j\mu^2}(\alpha) = N_{(ud)j\mu}(\alpha) - N_{(ud)j+1}(\alpha)$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ και $j \in \mathbb{N}^*$, προκύπτει ότι η ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση ταυτίζεται με τη γεννήτρια συνάρτηση της Πρότασης 3.8.1 για $r=0$, $s_1=1$ και $s_j = t_{j-1}^{-1}$, $j \geq 2$, και επομένως θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$x \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=2}^{i+1} t_{j-1}^{i-j+1} \prod_{j=1}^{i+1} t_j^{i-j+1} \right) F^2 - \left(1 + x \left(\sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=2}^{i+1} t_{j-1}^{i-j+1} \prod_{j=1}^{i+1} t_j^{i-j+1} \right) \right) F + \left(1 + x \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=2}^{i+1} t_{j-1}^{i-j+1} \prod_{j=1}^{i+1} t_j^{i-j+1} \prod_{j=2}^{i+1} t_{j-1} \right) \right) = 0$$

από την οποία προκύπτει και η τελική εξίσωση (3.145)

Για συγκεκριμένο $k \in \mathbb{N}^*$, αν εφαρμοσθεί η εξίσωση (3.145) για $t_k = t$ και $t_j = 1$ όταν $j \neq k$, προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση $F_k = F_k(x, t)$ του \mathcal{D} ως προς το ημιμήκος και τον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $(ud)^k \mu^2$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$x \left(1 + (t-1)x^k \right) F_k^2 - \left(1 + (t-1)x^{k+1} \right) F_k + 1 = 0. \quad (3.146)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange (βλ. σελ. 12), από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι

$$F_k^\mu(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{k+1} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{k+1} \rfloor - j} (-1)^i \frac{\binom{i+j}{j} \binom{n-k(i+j)}{i+j} \binom{2n-(2k+1)(i+j)+\mu-1}{n-k(i+j)+\mu}}{n-k(i+j)} x^n t^k \quad (3.147)$$

για κάθε $\mu \in \mathbb{N}^*$.

Προκειμένου να μελετηθούν ανεξάρτητα οι στατιστικές N_{r_j} και $N_{r_j'}^*$, $j \in \mathbb{N}^*$, θεωρούμε τις αντίστοιχες γεννήτριες

$$\Gamma(x; s) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} s_j^{N_{r_j}(\alpha)}$$

και

$$\Delta(x; t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} t_j^{N_{r_j'}^*(\alpha)}$$

οι οποίες προκύπτουν από τη γεννήτρια συνάρτηση $F = F(x; s, t)$ αν τεθεί $t_j = 1$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$ και $s_j = 1$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$, αντίστοιχα.

Κατόπιν τούτων, από την Πρόταση 3.8.1 εύκολα προκύπτει ότι οι γεννήτριες αυτές ικανοποιούν αντίστοιχα τις εξισώσεις

$$xA(x; s)\Gamma^2(x; s) - (1+x^{r+1}A(x; s))\Gamma(x; s) + A(x; s) = 0$$

και

$$xA(x; t)\Delta^2(x; t) - (1 + x^{r+1}A(x; t)) \Delta(x; t) + (1 + x^{r+1}A(x; t)) = 0$$

όπου

$$A(x; s) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)i} \prod_{j=1}^{i+1} s_j^{i-j+1}.$$

Από τις προηγούμενες εξισώσεις προκύπτει άμεσα⁵² το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.8.2. Η γεννήτρις συναρτήσεις $\Gamma(x; s)$ και $\Delta(x; s)$ δίδονται από τις σχέσεις

$$\Gamma(x; s) = \frac{A(x; s)}{1 + x^{r+1}A(x; s)} C \left(x \left(\frac{A(x; s)}{1 + x^{r+1}A(x; s)} \right)^2 \right) \quad (3.148)$$

και

$$\Delta(x; s) = C \left(x \frac{A(x; s)}{1 + x^{r+1}A(x; s)} \right). \quad (3.149)$$

Σημειώνεται ότι η δεύτερη σχέση της πρότασης έχει αποδειχθεί από τον Mansour [92] για $r = 1$.

Εφαρμογή

Ζητείται να ευρεθούν οι γεννήτρις συναρτήσεις

$$\Gamma(x, s) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} s^{\gamma(\alpha)}$$

και

$$\Delta(x, s) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} s^{\delta(\alpha)}$$

όπου $\gamma(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} N_{\pi_i}(\alpha)$ και $\delta(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} N_{\tau_i}(\alpha)$.

Για το σκοπό αυτό εφαρμόζεται η Πρόταση 3.8.2 για $s_{2i-1} = s$ και $s_{2i} = s^{-1}$, $i \in \mathbb{N}^*$, οπότε είναι

$$\begin{aligned} A(x; s) &= \sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)2i} \prod_{j=1}^{2i+1} s_j^{2i-j+1} + \sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)(2i+1)} \prod_{j=1}^{2i+2} s_j^{2i-j+2} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)2i} \prod_{j=1}^{i+1} s^{2i-2j+2} \prod_{j=1}^i (s^{-1})^{2i-2j+1} + \sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)(2i+1)} \prod_{j=1}^{i+1} s^{2i-2j+3} \prod_{j=1}^{i+1} (s^{-1})^{2i-2j+2} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)2i} s^i + \sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)(2i+1)} s^{i+1} \\ &= (1 + sx^{r+1}) \sum_{i=0}^{\infty} (x^{2(r+1)} s)^i \\ &= \frac{1 + sx^{r+1}}{1 - sx^{2(r+1)}}. \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (3.148) και (3.149) προκύπτει τελικά ότι

$$\Gamma(x, s) = \frac{1 + sx^{r+1}}{1 + x^{r+1}} C \left(x \left(\frac{1 + sx^{r+1}}{1 + x^{r+1}} \right)^2 \right) \quad (3.150)$$

⁵²Χρησιμοποιώντας τη σχέση $x C^2 = C - 1$.

και

$$\Delta(x, s) = C \left(x \frac{1 + sx^{r+1}}{1 + x^{r+1}} \right). \quad (3.151)$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει εύκολα ότι ο αριθμός των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με $\gamma(\alpha) = j$ και $\delta(\alpha) = j$ αντίστοιχα, δίδεται από τους τύπους

$$[x^n s^j] \Gamma = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2n+1-(2r+3)j}{2(r+1)} \rfloor} (-1)^j \binom{2n-2(r+1)(i+j)+1}{j} \binom{2n-(2r+1)i-2(r+1)j}{i} C_{n-(r+1)(i+j)} \quad (3.152)$$

και

$$[x^n s^j] \Delta = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-(r+2)j}{r+1} \rfloor} (-1)^i \binom{n-(r+1)(i+j)}{j} \binom{n-(r+1)j-ri-1}{i} C_{n-(r+1)(i+j)} \quad (3.153)$$

για κάθε $n, j \in \mathbb{N}$ με $j \leq \lfloor \frac{n}{r+1} \rfloor$.

Ειδικά για $r = 1$ και $j = 0$ προκύπτει η ακολουθία 1, 1, 1, 2, 5, 13, 35, 97, 275, 794, 2327, 6905, 20705, ... (βλ. A082582 στο [124]) (αντ. 1, 1, 2, 4, 10, 28, 82, 248, 770, 2440, 7858, 25644, ...) η οποία μετράει τον αριθμό όλων των μονοπατιών Dyck α που έχουν την ιδιότητα οι συνολικός αριθμός εμφανίσεων των προτύπων $(uudd)^{2i-1}$ (αντ. $(uudd)^{2i-1}u$), $i \in \mathbb{N}^*$, στο α να ισούται με τον συνολικό αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $(uudd)^{2i}$ (αντ. $(uudd)^{2i}u$), $i \in \mathbb{N}^*$, στο α .

Στη συνέχεια, θεωρούμε συγκεκριμένο $k \in \mathbb{N}^*$ και έστω $\Gamma_k(x, s)$ και $\Delta_k(x, s)$ οι γεννήτριες συναρτήσεις που προκύπτουν αν τεθούν $s_k = s$ και $s_j = 1$ για $j \neq k$, στις $\Gamma(x; s)$ και $\Delta(x; s)$ αντίστοιχα.

Στην περίπτωση αυτή είναι

$$\begin{aligned} A(x; s) &= \sum_{i=0}^{k-1} x^{(r+1)i} + \sum_{i=k}^{\infty} x^{(r+1)i} s^{i-k+1} \\ &= \frac{1 - x^{(r+1)k}}{1 - x^{r+1}} + \frac{sx^{r+1k}}{1 - sx^{r+1}} \\ &= \frac{1 - sx^{r+1} + (s-1)x^{(r+1)k}}{(1 - x^{r+1})(1 - sx^{r+1})}. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτου, από την Πρόταση (3.8.2) προκύπτει άμεσα το επόμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.8.3. Οι γεννήτριες συναρτήσεις $\Gamma_k(x, s)$ και $\Delta_k(x, s)$ δίδονται από τις σχέσεις

$$\Gamma_k(x, s) = \frac{1 - sx^{r+1} + (s-1)x^{(r+1)k}}{1 - sx^{r+1} + (s-1)x^{(r+1)(k+1)}} C \left(x \left(\frac{1 - sx^{r+1} + (s-1)x^{(r+1)k}}{1 - sx^{r+1} + (s-1)x^{(r+1)(k+1)}} \right)^2 \right) \quad (3.154)$$

και

$$\Delta_k(x, s) = C \left(x \frac{1 - sx^{r+1} + (s-1)x^{(r+1)k}}{1 - sx^{r+1} + (s-1)x^{(r+1)(k+1)}} \right). \quad (3.155)$$

Παραδείγματα

1. Για $k = 1$ προκύπτει ότι

$$\Gamma_1(x, s) = \frac{1}{1 + x^{r+1}(1-s)} C \left(\frac{x}{(1 + (1-s)x^{r+1})^2} \right) \quad (3.156)$$

και

$$\Delta_1(x, s) = C \left(\frac{x}{1 + (1-s)x^{r+1}} \right). \quad (3.157)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις αποδεικνύεται εύκολα ότι ο αριθμός όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με j εμφανίσεις του προτύπου usd και ο αριθμός όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με j εμφανίσεις του προτύπου $usdu$ αντίστοιχα, δίδεται από τους τύπους

$$[x^n s^j] \Gamma_1 = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{r+1} \rfloor - j} \frac{(-1)^i}{n-r(i+j)} \binom{i+j}{j} \binom{n-r(i+j)}{i+j} \binom{2n-(2r+1)(i+j)}{n-r(i+j)-1} \quad (3.158)$$

για $0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{r+1} \rfloor$, και

$$[x^n s^j] \Delta_1 = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{r+1} \rfloor - j} (-1)^i \binom{i+j}{j} \binom{n-1-r(i+j)}{i+j} C_{n-(r+1)(i+j)} \quad (3.159)$$

για $0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-1}{r+1} \rfloor$.

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3.158) και (3.159) για διάφορες τιμές του r προκύπτουν ορισμένα γνωστά αποτελέσματα και άλλα καινούργια.

Για παράδειγμα αν $r = 0$ προκύπτει ο αριθμός όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με j εμφανίσεις του προτύπου ud (βλ. [38], και A001263 στο [124]) και ο αριθμός όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με j εμφανίσεις του προτύπου udu (βλ. [95], [137], και A091869 στο [124]).

Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.49 από το βιβλίο του Gould [63] έχουμε ότι

$$\begin{aligned} [x^n s^j] \Gamma_1 &= \sum_{i=0}^{n-j} \frac{(-1)^i}{n} \binom{i+j}{j} \binom{n}{i+j} \binom{2n-(i+j)}{n-1} \\ &= \frac{1}{n} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} \binom{2n-(i+j)}{n-1} \\ &= \frac{1}{n} \binom{n}{j} \binom{n}{j-1} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} [x^n s^j] \Delta_1 &= \sum_{i=0}^{n-1-j} (-1)^i \binom{i+j}{j} \binom{n-1}{i+j} C_{n-(i+j)} \\ &= \binom{n-1}{j} \sum_{i=0}^{n-1-j} (-1)^i \binom{n-1-j}{i} C_{n-(i+j)} \\ &= \binom{n-1}{j} M_{n-1-j}. \end{aligned}$$

Για $r = 1$ ευρίσκουμε τα επόμενα τρίγωνα, τα στοιχεία των οποίων αν διαβαστούν κατά γραμμές μετρούν τον αριθμό όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με j εμφανίσεις του προτύπου $uudd$ (βλ. A098978 στο [124]) και τον αριθμό όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με j εμφανίσεις του προτύπου $uuddu$ (βλ. A114848 στο [124]) αντίστοιχα:

1; 1; 1; 2; 3; 5, 8, 1; 13, 23, 6; 35, 69, 27, 1; 97, 212, 110, 10; ... και
1; 1; 2; 4, 1; 10, 4; 28, 13, 1; 82, 44, 6; 248, 153, 27, 1; 770, 536, 116, 8; ...

2. Μια άμεση εφαρμογή του Πορίσματος 3.8.3 για $k=2$, $r=0$ και $s=0$ δίνει τους τύπους

$$|x^n|\Gamma_2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^i \binom{2n-2j-i}{i} \binom{2n-2j-i+1}{j} C_{n-i-j}$$

και

$$|x^n|\Delta_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-i}{i} M_{n-i-1}.$$

Ο πρώτος τύπος δίνει την ακολουθία 1, 1, 1, 3, 7, 19, 53, 153, 453, 1367, 4191, 13015, ... η οποία μετράει τον αριθμό όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ που αποφεύγουν το πρότυπο $udud$ (A078481 στο [124]) ενώ ο δεύτερος δίνει την ακολουθία 1, 1, 2, 4, 11, 31, 92, 283, 893, 2875, ... η οποία μετράει τον αριθμό όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ που αποφεύγουν το πρότυπο $ududu$.

A₂. Οι στατιστικές L_{τ_j} και $L_{\tau'_j}$

Θεωρούμε την πολυγεννήτρια συνάρτηση $L = L(x; s, t)$ του συνόλου των μονοπατιών Dyck ως προς το ημιμήκος και τις στατιστικές L_{τ_j} και $L_{\tau'_j}$, όπου $j \in \mathbb{N}^*$:

$$L(x; s, t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} s_j^{L_{\tau_j}(\alpha)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} t_j^{L_{\tau'_j}(\alpha)}$$

όπου $s = (s_j)$ και $t = (t_j)$, $j \in \mathbb{N}^*$.

Εστω $\{B_i\}$ η διαμέριση του \mathcal{D} που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη της Πρότασης 3.8.1 και $B'_i = B'_i(x; s, t)$ η γεννήτρια συνάρτηση του B_i ως προς τις παραμέτρους $l, L_{\tau_j}, L_{\tau'_j}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$.

Χρησιμοποιώντας ανάλογη διαδικασία όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 3.8.1, προκύπτουν οι σχέσεις

$$B'_0 = 1 + xL(C - x^2)$$

και

$$B'_i = x^{(r+1)i} \prod_{j=1}^{i+1} s_j^{i-j+1} \left((B'_0 - 1) \prod_{j=1}^{i+1} t_j^{i-j+1} + \prod_{j=1}^i t_j^{i-j} \right)$$

για κάθε $i \in \mathbb{N}^*$, από τις οποίες προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.8.4. Η γεννήτρια συνάρτηση $L = L(x; s, t)$ δίδεται από τη σχέση

$$L = \frac{1 + x^{r+1} \sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)i} \prod_{j=1}^{i+1} (s_j t_j)^{i-j+1} \prod_{j=1}^{i+1} s_j}{1 - x(C(x) - x^2) \sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)i} \prod_{j=1}^{i+1} (s_j t_j)^{i-j+1}}. \quad (3.160)$$

Εφαρμογή

Η γεννήτρια συνάρτηση $L = L(x; t)$ η οποία μετράει τα μονοπάτια Dyck συγκεκριμένου ημιμήκους ως προς τις στατιστικές $L_{(ud)^j u^2}$, $j \in \mathbb{N}^*$ δίδεται από τη σχέση

$$L = \frac{1}{(1-x) \left(1 - (x(C(x) - 1) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=1}^i t_j \right) \right) \right)}.$$

Πράγματι επειδή

$$L_{(ud)^j a^2}(\alpha) = L_{(ud)^j a}(\alpha) - L_{(ud)^{j+1}}(\alpha)$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ και $j \in \mathbb{N}^*$ προκύπτει ότι η ζητούμενη γεννήτρια ταυτίζεται με τη γεννήτρια $L(x; s, t)$ της Πρότασης 3.8.4 για $r = 0$, $s_1 = 1$ και $s_j = t_{j-1}^{-1}$, $j \geq 2$ και επομένως θα είναι

$$\begin{aligned} L &= \frac{1 + x \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=2}^{i+1} (\tau_{j-1}^{-1})^{i-j+1} \prod_{j=1}^{i+1} t_j^{i-j+1} \prod_{j=2}^{i+1} t_{j-1}^{-1} \right)}{1 - x(C(x) - 1) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=2}^{i+1} (t_{j-1}^{-1})^{i-j+1} \prod_{j=1}^{i+1} t_j^{i-j+1} \right)} \\ &= \frac{1 + x \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=1}^i (t_j^{-1})^{i-j} \prod_{j=1}^i t_j^{i-j+1} \prod_{j=1}^i t_j^{-1} \right)}{1 - x(C(x) - 1) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=1}^i (t_j^{-1})^{i-j} \prod_{j=1}^i t_j^{i-j+1} \right)} \\ &= \frac{1 + \frac{x}{1-x}}{1 - x(C(x) - 1) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=1}^i (t_j^{-1})^{i-j} \prod_{j=1}^i t_j^{i-j+1} \right)} \end{aligned}$$

Οπότε τελικά

$$L = \frac{1}{(1-x) \left(1 - x(C(x) - 1) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \prod_{j=1}^i t_j \right) \right)} \quad (3.161)$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ και $j \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση $L_k = L_k(x, t)$ του \mathcal{D} ως προς το ημιμήκος και τον αριθμό των χαμηλών εμφανίσεων του προτύπου $(ud)^k u^2$ είναι

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{1}{(1-x) \left(1 - x(C(x) - 1) \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} x^i + t \sum_{i=k}^{\infty} x^i \right) \right)} \\ &= \frac{1}{(1-x) \left(1 - x(C(x) - 1) \left(\frac{1}{1-x} + \frac{(t-1)x^k}{1-x} \right) \right)} \\ &= \frac{1}{1-x-x(C(x)-1)(1+(t-1)x^k)} \end{aligned}$$

και τελικά

$$L_k = \frac{C(x)}{1 + (1-t)x^{k+2}C^3(x)}. \quad (3.162)$$

Σημειώνεται ότι η παραπάνω πρόταση προκύπτει επίσης ως εφαρμογή της Πρότασης 3.4.2.

Τέλος, εύκολα προκύπτει από τον τύπο (3.162) ότι ο αριθμός όλων των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n με j χαμηλές εμφανίσεις του προτύπου $(ud)^k u^2$ ισούται με

$$|x^n t^j| L_k = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{k+2} \rfloor - j} (-1)^i \frac{3(i+j)+1}{\binom{2n-(2k+1)(i+j)}{j} \binom{2n-(2k+1)(i+j)+1}{n-(k-1)(i+j)+1}}.$$

Προκειμένου να μελετηθούν ανεξάρτητα οι στατιστικές L_{τ_j} και $L_{\tau_j^{-1}}$, $j \in \mathbb{N}^*$ θεωρούμε τις αντίστοιχες γεννήτριες

$$\Gamma^V(x; s) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} s_j^{L_{\tau_j}(\alpha)}$$

και

$$\Delta'(x; t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} t_j^{L_{r,j}(\alpha)}$$

οι οποίες προκύπτουν από τη γεννήτρια $L = L(x; s, t)$ αν τεθεί $t_j = 1$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$ και $s_j = 1$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$, αντίστοιχα.

Κατόπιν τούτων, εύκολα προκύπτει από την Πρόταση 3.8.3 το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.8.5. Οι γεννήτριες συναρτήσεως $\Gamma'(x; s)$ και $\Delta'(x; s)$ δίδονται από τις σχέσεις

$$\Gamma' = \frac{A}{1 - x(C(x) - x^2)A} \quad (3.163)$$

και

$$\Delta' = \frac{1 + x^{r+1}A}{1 - x(C(x) - x^2)A} \quad (3.164)$$

όπου $A = A(x; s) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{(r+1)s} \prod_{j=1}^{i+1} s_j^{i-j+1}$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε συγκεκριμένο $k \in \mathbb{N}^*$ και έστω $\Gamma'_k(x, s)$ και $\Delta'_k(x, s)$ οι γεννήτριες συναρτήσεως που προκύπτουν αν τεθούν $s_k = s$ και $s_j = 1$ για $j \neq k$ στις $\Gamma'(x; s)$ και $\Delta(x; s)$ αντίστοιχα.

Τότε, επειδή

$$A(x; s) = \frac{53}{(1 - xs^{r+1} + (s-1)x^{(r+1)k})} \cdot \frac{1 - xs^{r+1} + (s-1)x^{(r+1)k}}{(1 - xs^{r+1})(1 - xs^{r+1})}$$

από την Πρόταση 3.8.4 προκύπτει άμεσα το επόμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.8.6. Οι γεννήτριες συναρτήσεως $\Gamma'_k(x, s)$ και $\Delta'_k(x, s)$ δίδονται από τις σχέσεις.

$$\Gamma'_k = \frac{1 - xs^{r+1} - (1-s)x^{(r+1)k}}{1 - x^{(r+1)(k+1)} - x(1 - x^{(r+1)k})C(x) - xs^{r+1}(1 - x^{(r+1)k} - x(1 - x^{(r+1)(k-1)})C(x))} \quad (3.165)$$

και

$$\Delta'_k = \frac{1 - x^{(r+1)(k+1)} - xs^{r+1}(1 - x^{(r+1)k})}{1 - x^{(r+1)(k+1)} - x(1 - x^{(r+1)k})C(x) - xs^{r+1}(1 - x^{(r+1)k} - x(1 - x^{(r+1)(k-1)})C(x))} \quad (3.166)$$

Παράδειγμα Για $k = 1$ προκύπτει ότι

$$\Gamma'_1(x, s) = \frac{C(x)}{1 + (1-s)x^{r+1}C(x)} \quad (3.167)$$

και

$$\Delta'_1(x, s) = \frac{(1 + (1-s)x^{r+1})C(x)}{1 + (1-s)x^{r+1}C(x)} \quad (3.168)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ισότητες αποδεικνύεται εύκολα ότι οι αριθμοί όλων $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με j χαμηλές εμφανίσεις του προτύπου usd και ο αριθμός όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με j χαμηλές εμφανίσεις του προτύπου $usdu$ δίδεται αντίστοιχα από τους τύπους

$$[x^n s^j] \Gamma'_1 = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{r+1} \rfloor - j} (-1)^i \frac{(i+j+1) \binom{i+j}{j} \binom{2n-(2r+1)(i+j)+1}{n+1-r(i+j)}}{2n - (2r+1)(i+j) + 1} \quad (3.169)$$

⁵³ Η σχέση αυτή έχει αποδειχθεί πριν το Πόρισμα 3.8.3.

για $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{r+1} \right\rfloor$ και

$$[x^n s^j] \Delta'_1 = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{r+1} \right\rfloor - j} (-1)^i \frac{(i+j+2) \binom{i+j}{j} \binom{2n-(2r+1)(i+j)-1}{n-r(i+j)}}{n+1-(i+j)r} \quad (3.170)$$

για $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{r+1} \right\rfloor$.

Σημειώνουμε ότι για $r=0$ από τη σχέση (3.169) (αντ. (3.170)) προκύπτει ότι ο αριθμός όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με j χαμηλές κορυφές (αντ. χαμηλές εμφανίσεις του προτύπου udu) είναι ίσος με

$$\frac{s+1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^{n-j-i} \binom{n-j+1}{j+1} \binom{n+i}{n}$$

(αντ.

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-s-1} (-1)^{n-j-i} (n-i+1) \binom{n-i-1}{j} \binom{n+i}{n}.)$$

Λαμβάνεται έτσι μια ισοδύναμη σχέση με τη σχέση 6.16 στο [38] (αντ. με τη σχέση του Θεωρήματος 3.1 στο [137]).

Για $r=1$, ευρίσκουμε τα επόμενα δύο τρίγωνα, τα στοιχεία των οποίων αν διαβαστούν κατά γραμμές μετρούν τον αριθμό όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με j χαμηλές εμφανίσεις του προτύπου $uudd$ (βλ. A114486 στο [124]) και τον αριθμό όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ με j χαμηλές εμφανίσεις του προτύπου $uuddu$ αντίστοιχα:

1; 1; 1, 1; 3; 2; 10, 3, 1; 31, 8, 3; 98, 27, 6, 1; 321, 88, 16, 4, ...

και

1; 1; 2; 4, 1; 11, 3; 34, 7, 1; 108, 20, 4; 352, 65, 11, 1; 1176, 216, 35, 5; ...

Α3. Οι στατιστικές H_{τ_j} και $H_{\tau'_j}$

Θεωρούμε τη πολυγεννήτρια συνάρτηση $H = H(x; s, t)$ του συνόλου των μονοπατιών Dyck ως προς το ημιμήκος και τις στατιστικές⁵⁴ H_{τ_j} και $H_{\tau'_j}$, όπου $j \in \mathbb{N}^*$:

$$H(x; s, t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} s_j^{H_{\tau_j}(\alpha)} \prod_{j \in \mathbb{N}^*} t_j^{H_{\tau'_j}(\alpha)}$$

όπου $s = (s_j)$ και $t = (t_j)$, $j \in \mathbb{N}^*$.

Πρόταση 3.8.7. Η γεννήτρια συνάρτηση $H = H(x; s, t)$ δίδεται από τη σχέση

$$H = \frac{1}{1 - xF}$$

όπου F ικανοποιεί τη σχέση (3.143)

Χρησιμοποιώντας την εφαρμογή της Πρότασης 3.8.1 και την Πρόταση 3.8.5 προκύπτει εύκολα ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ ο αριθμός όλων των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n με j υψηλές εμφανίσεις του προτύπου $(ud)^k u^2$ ισούται με

$$\delta_{0j} + \sum_{m=j}^{\left\lfloor \frac{n-2}{k+1} \right\rfloor} \sum_{i=(k+1)m+1}^{n-1} (-1)^{m+j} \frac{\binom{n-i}{j} \binom{i-km}{m} \binom{i+n-(2k+1)m-1}{n-km}}{i-km}$$

⁵⁴Γων υψηλών εμφανίσεων των προτύπων τ_j και τ'_j .

όπου δ_{0j} είναι το δέλτα του Kronecker.

Ειδικά για $k = 1$ και $j = 0$ προκύπτει η ακολουθία A086581 στο [124] udu^2 σε υψηλό επίπεδο.

Στη συνέχεια θεωρούμε συγκεκριμένο $k \in \mathbb{N}^*$ και έστω $\Gamma_k''(x, s)$ και $\Delta_k''(x, s)$ οι γεννήτριες συναρτήσεις του συνόλου όλων των μονοπατιών Dyck ως προς το ημιμήκος και τις στατιστικές H_{τ_k} και h_{τ_k}' αντίστοιχα.

Τότε από την Πρόταση 3.8.5 προκύπτει άμεσα ότι

$$\Gamma_k'' = \frac{1}{1-x\Gamma_k} \text{ και } \Delta_k'' = \frac{1}{1-x\Delta_k} \quad (3.171)$$

όπου Γ_k, Δ_k οι γεννήτριες συναρτήσεις που δίδονται στο Πρόγραμμα 3.8.2.

Παραδείγματα

1. Για $k = 1$ και $r = 0$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.156) και (3.157) και τον τύπο (1.4) προκύπτουν οι σχέσεις

$$[x^n s^j] \Gamma_1'' = \sum_{m=j}^{\lfloor \frac{n-1}{r+1} \rfloor} \frac{(-1)^{m+j}}{n-rm+1} \binom{m}{j} \binom{n-rm-1}{m} \binom{2n-(2r+1)m}{n-2m} \quad (3.172)$$

και

$$[x^n s^j] \Delta_1'' = \delta_{0j} + \sum_{m=j}^{\lfloor \frac{n-2}{r+1} \rfloor} \sum_{i=0}^{n-2-(r+1)m} (-1)^{m+j} \binom{m}{j} \binom{i+m}{m} b_{i+1, n-(r+1)m-(i+1)} \quad (3.173)$$

όπου $b_{n,s}$ είναι οι αριθμοί ψηφοφορίας⁵⁵.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο 3.49 του [63], ο πρώτος από τους προηγούμενους τύπους για $r = 0$ δίνει

$$\begin{aligned} [x^n s^j] \Gamma_1'' &= \frac{1}{n+1} \sum_{m=j}^{n-1} (-1)^{m+j} \binom{n-1}{j} \binom{n-1-j}{m-j} \binom{2n-m}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{n-1}{j} \binom{n+1}{j+1} \\ &= \frac{1}{n} \binom{n}{j} \binom{n}{j+1}. \end{aligned}$$

Άρα λαμβάνουμε το πολύ γνωστό αποτέλεσμα (βλ. [38]) ότι η στατιστική “αριθμός των υψηλών κορυφών” ακολουθεί την κατανομή Narayana.

2. Για $k = 2, r = 0$ και $s = 0$, από τον τύπο (3.171) προκύπτουν οι ακολουθίες 1, 1, 2, 4, 10, 26, 72, 206, 606, 1820, 5558, 17206, ... και 1, 1, 2, 5, 13, 37, 110, 338, 1066, 3430, ... οι οποίες μετρούν τον αριθμό όλων των $\alpha \in \mathcal{D}_n$ που αποφεύγουν τις υψηλές εμφανίσεις του προτύπου $udud$ και του προτύπου $ududu$ αντίστοιχα.

B. Το πρότυπο $u^i du^j$

Στη παράγραφο αυτή θα γίνει ταυτόχρονη μελέτη των στατιστικών $N_{u^i du^j}$, όπου $i, j \in \mathbb{N}^*$. Το ίδιο πρόβλημα εξετάζεται και για τις στατιστικές $L_{u^i du^j}$ και $H_{u^i du^j}$, όπου $i, j \in \mathbb{N}^*$.

⁵⁵Βλ. Κεφάλαιο 1, σελ. 13.

B₁. Η στατιστική $N_{u^i d u^j}$

Θεωρούμε την πολυγεννήτρια συνάρτηση $F = F(x; \mathbf{q})$ του συνόλου των μονοπατιών Dyck ως προς το ημιμήκος και τις στατιστικές $N_{u^i d u^j}$, όπου $i, j \in \mathbb{N}^*$:

$$F(x; \mathbf{q}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} \prod_{i, j \in \mathbb{N}^*} q_{ij}^{N_{u^i d u^j}(\alpha)}$$

όπου $\mathbf{q} = (q_{ij})$ $i, j \in \mathbb{N}^*$.

Πρόταση 3.8.8. Η γεννήτρια συνάρτηση F ικανοποιεί τη σχέση

$$F(x; \mathbf{q}) = F(x; \mathbf{q}^T)$$

όπου $\mathbf{q} = (q_{ij})$ και $\mathbf{q}^T = (q_{ji})$.

Απόδειξη. Είναι αρκετό να ορισθεί μια ενέλιξη ϕ του \mathcal{D} τέτοια ώστε

$$l(\phi(\alpha)) = l(\alpha) \text{ και } N_{u^i d u^j}(\phi(\alpha)) = N_{u^j d u^i}(\alpha)$$

για κάθε $i, j \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha \in \mathcal{D}$.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε το σύνολο \mathcal{P} όλων των μονοπατιών με βήματα u, d τα οποία αρχίζουν και τελειώνουν με άνοδο και δεν περιέχουν διπλές καθόδους. Κάθε μονοπάτι $p \in \mathcal{P}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$p = u^{\xi_1} d u^{\xi_2} d \dots u^{\xi_{\rho-1}} d u^{\xi_{\rho}}$$

όπου $\xi_i \in \mathbb{N}^*$, $i \in [\rho]$ και $\rho \in \mathbb{N}^*$.

Αρχικά, ορίζουμε μια ενέλιξη ψ του \mathcal{P} ως εξής:

$$\psi(p) = u^{\xi_{\rho}} d u^{\xi_{\rho-1}} d \dots u^{\xi_2} d u^{\xi_1}.$$

Προφανώς κάθε μη κενό μονοπάτι Dyck α μπορεί να διασπασθεί μονοσήμαντα στη μορφή

$$\alpha = p_1 v_1 p_2 v_2 \dots p_l v_l$$

όπου $p_i \in \mathcal{T}$, $v_i \in \{d\}^* \setminus \{\epsilon\}$, και το μήκος του v_i είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2 για κάθε $i \neq l$.

Ορίζουμε $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ με $\phi(\epsilon) = \epsilon$ και για κάθε μη κενό μονοπάτι Dyck $\alpha = p_1 v_1 p_2 v_2 \dots p_l v_l$,

$$\phi(\alpha) = \psi(p_1) v_1 \psi(p_2) v_2 \dots \psi(p_l) v_l.$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η απεικόνιση ϕ είναι μια ενέλιξη του \mathcal{D} που ικανοποιεί τις ζητούμενες συνθήκες. □

Παρατήρηση Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι οι στατιστικές $N_{u^i d u^j}$ και $N_{u^j d u^i}$ είναι ισοκατανεμημένες για κάθε $i, j \in \mathbb{N}^*$.

Στα επόμενα θα υπολογισθεί η γεννήτρια συνάρτηση $F = F(x; \mathbf{q})$.

Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε τη διαμέριση (A_{ν}) , $\nu \in \mathbb{N}$ του \mathcal{D} όπου $A_0 = \{\epsilon\}$ και A_{ν} είναι το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck που έχουν μήκος πρώτης ανάβασης ίσο με ν (όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$) και τη γεννήτρια $A_{\nu} = A_{\nu}(x; \mathbf{q})$ του συνόλου A_{ν} ως προς τις παραμέτρους l και $N_{u^i d u^j}$, για κάθε $i, j \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή

$$A_{\nu}(x; \mathbf{q}) = \sum_{\alpha \in A_{\nu}} x^{l(\alpha)} \prod_{i, j \in \mathbb{N}^*} q_{ij}^{N_{u^i d u^j}(\alpha)}$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$\Gamma = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu}. \quad (3.174)$$

Επιπλέον, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\mu \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την απεικόνιση $f_{\nu,\mu} = f_{\nu,\mu}(\mathbf{q})$ με

$$f_{\nu,0}(\mathbf{q}) = 1 \text{ και } f_{\nu,\mu}(\mathbf{q}) = \prod_{\substack{i \in [\nu] \\ j \in [\mu]}} q_{ij}$$

όπου $\mathbf{q} = (q_{ij})$ και $i, j \in \mathbb{N}^*$.

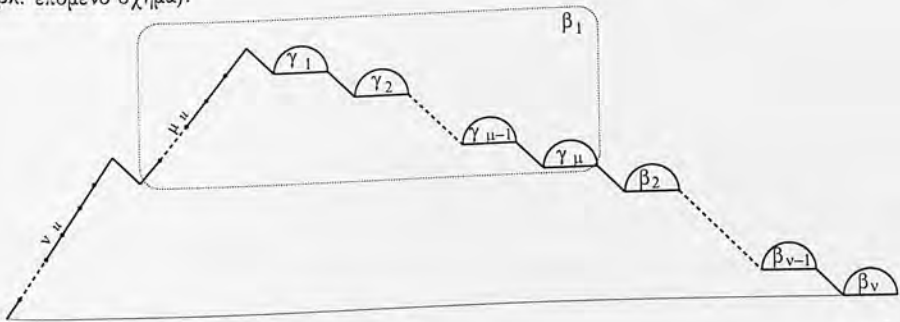
Πρόταση 3.8.9. Η γεννήτρια συνάρτηση $A_{\nu} = A_{\nu}(x; \mathbf{q})$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, ικανοποιεί την εξίσωση

$$A_{\nu} = x^{\nu} \Gamma^{\nu-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{\nu,\mu} A_{\mu}. \quad (3.175)$$

Απόδειξη. Κάθε σύνολο A_{ν} διαμερίζεται στα σύνολα $A_{\nu,\mu}$, όπου $\mu \in \mathbb{N}$ με

$$A_{\nu,\mu} = \{u^{\nu} d\beta_1 d\beta_2 d \dots \beta_{\nu-1} d\beta_{\nu} : \beta_1 \in A_{\mu}, \beta_i \in \mathcal{D} \text{ για κάθε } i \in [2, \nu]\}$$

(βλ. επόμενο σχήμα).



Επειδή για κάθε $\alpha \in A_{\nu,\mu}$ και $i, j \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$N_{u^i d u^j}(\alpha) = \sum_{i=1}^{\nu} N_{u^i d u^j}(\beta_i) + [\mu \neq 0][i \in [\nu]][j \in [\mu]]$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A_{\nu} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in A_{\nu,\mu}} x^{l(\alpha)} \prod_{i,j \in \mathbb{N}^*} q_{ij}^{N_{u^i d u^j}(\alpha)} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\substack{\beta_1 \in A_{\mu} \\ \beta_i \in \mathcal{D}, i \neq 1}} x^{\sum_{i=1}^{\nu} l(\beta_i) + \nu} \prod_{i,j \in \mathbb{N}^*} q_{ij}^{\sum_{i=1}^{\nu} N_{u^i d u^j}(\beta_i)} \prod_{\substack{1 \leq i \leq \nu \\ 1 \leq j \leq \mu}} q_{ij} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} x^{\nu} f_{\nu,\mu} \left(\sum_{\beta_1 \in A_{\mu}} x^{l(\beta_1)} \prod_{i,j \in \mathbb{N}^*} q_{ij}^{N_{u^i d u^j}(\beta_1)} \right) \prod_{i \in [2, \nu]} \left(\sum_{\beta_i \in \mathcal{D}} x^{l(\beta_i)} \prod_{i,j \in \mathbb{N}^*} q_{ij}^{N_{u^i d u^j}(\beta_i)} \right) \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} x^{\nu} f_{\nu,\mu} A_{\mu} \Gamma^{\nu-1} = x^{\nu} \Gamma^{\nu-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{\nu,\mu} A_{\mu}. \end{aligned}$$

□

Εφαρμογή

i. Αν τεθεί

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } j \geq 2 \\ q_i, & \text{αν } j = 1 \end{cases}$$

προκύπτει η εξίσωση του Θεωρήματος 2.1 του [92], την οποία ικανοποιεί η γεννήτρια συνάρτηση του \mathcal{D} ως προς το ημιμήκος και τις στατιστικές $N_{u^i d u}$, $i \in \mathbb{N}^*$.

Πράγματι στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι

$$f_{\nu, \mu} = \prod_{i=1}^{\nu} q_i, \text{ για κάθε } \nu, \mu \in \mathbb{N}^*$$

οπότε από τη σχέσεις (3.174) και (3.175) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu} F^{\nu-1} \left(1 - \prod_{i=1}^{\nu} q_i (1 - F) \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} F^{\nu} (1 + x(1 - F)) - \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} F^{\nu} x \sum_{i=1}^{\nu+1} q_i (1 - F) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} F^{\nu} \left(1 + x(1 - F) \left(1 - \prod_{i=1}^{\nu+1} q_i \right) \right) \end{aligned}$$

ii. Για συγκεκριμένα $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$ θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση $T_{k, \lambda} = T_{k, \lambda}(x, y)$ η οποία μετράει τα μονοπάτια Dyck καθορισμένου ημιμήκους ως προς τις στατιστικές $N_{u^k d u \lambda}$.

Είναι προφανές ότι $T_{k, \lambda}(x, y) = F(x; \mathbf{q})$ για $q_{k \lambda} = q$, $q_{k \lambda + 1} = q^{-1}$ και $q_{ij} = 1$ διαφορετικά.

Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι $f_{\nu, \mu} = y$ όταν $\nu \geq k$ και $\mu = \lambda$, και $f_{\nu, \mu} = 1$ διαφορετικά.

Συνεπώς, από την Πρόταση 3.8.9 προκύπτει ότι

$$A_{\nu} = x^{\nu} T_{k, \lambda}^{\nu}, \text{ για } \nu < k \quad (3.176)$$

και

$$A_{\nu} = x^{\nu} T_{k, \lambda}^{\nu} + (y - 1) x^{\nu} T_{k, \lambda}^{\nu-1} A_{\lambda}, \text{ για } \nu \geq k. \quad (3.177)$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\begin{aligned} T_{k, \lambda} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu} T_{k, \lambda}^{\nu} + (y - 1) A_{\lambda} \sum_{\nu=k}^{\infty} x^{\nu} T_{k, \lambda}^{\nu-1} \\ &= \frac{1}{1 - x T_{k, \lambda}} + \frac{(y - 1) A_{\lambda} x^k T_{k, \lambda}^{k-1}}{1 - x T_{k, \lambda}} \end{aligned}$$

και επομένως

$$T_{k, \lambda} = 1 + x T_{k, \lambda}^2 + (y - 1) A_{\lambda} x^k T_{k, \lambda}^{k-1}. \quad (3.178)$$

Θεωρούμε τις επόμενες δύο περιπτώσεις:

i) Για $\lambda < k$ από τη σχέση (3.176) προκύπτει ότι

$$A_\lambda = x^\lambda T_{k,\lambda}^\lambda$$

οπότε από τη σχέση (3.178) θα είναι

$$T_{k,\lambda} = 1 + xT_{k,\lambda}^2 + (y-1)x^{k+\lambda}T_{k,\lambda}^{k+\lambda-1}. \quad (3.179)$$

ii) Για $\lambda \geq k$ από τη σχέση (3.177) προκύπτει ότι

$$A_\lambda = \frac{x^\lambda T_{k,\lambda}^\lambda}{1 + (1-y)x^\lambda T_{k,\lambda}^{\lambda-1}}$$

οπότε από τη σχέση (3.178) θα είναι

$$T_{k,\lambda} = 1 + xT_{k,\lambda}^2 + (y-1)\frac{x^{k+\lambda}T_{k,\lambda}^{k+\lambda-1}}{1 + (1-y)x^\lambda T_{k,\lambda}^{\lambda-1}}. \quad (3.180)$$

Παρατηρήσεις

1. Ο τύπος (3.179) προκύπτει και ως εφαρμογή της Πρότασης 3.2.1, αφού το πρότυπο $\tau = u^k du^\lambda d$ είναι μη περιοδικό πρώτο αριστερό μονοπάτι Dyck όταν $k > \lambda$. Τούτο όμως δεν ισχύει και για τον τύπο (3.180), αφού το $\tau = u^k du^\lambda d$ είναι περιοδικό όταν $k \leq \lambda$.

2. Για $k = 2$ και $\lambda = 1$ (αντ. $k = 1$ και $\lambda = 2$) ο τύπος (3.179) (αντ. (3.180)) δίδει το τρίγωνο 1; 1; 2; 4, 1; 10, 4; 27, 15; 78, 52, 2; 234, 180, 15; 722, 624, 84; 2274, 2178, 405, 5; ... (αντ. 1; 1; 2; 4, 1; 10, 4; 28, 13, 1; 83, 42, 7; 254, 147, 33, 1; 795, 489, 135, 11; ...) το οποίο μετράει τον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $u^2 dud$ (αντ. $udu^2 d$).

Κατόπιν τούτων, είναι προφανές ότι οι στατιστικές $N_{u^k du^\lambda d}$ και $N_{u^\lambda du^k d}$ δεν είναι εν γένει ισοκατανομημένες σε αντίθεση με τις στατιστικές $N_{u^k du^\lambda}$ και $N_{u^\lambda du^k}$ που όπως είδαμε προηγουμένως είναι ισοκατανομημένες.

Στα επόμενα θα μελετηθεί η στατιστική $N_{u^k du^\lambda}$ για συγκεκριμένα k, λ . Είναι προφανές ότι αρκεί να περιορισθούμε στην περίπτωση όπου $k \geq \lambda$.

Πρόταση 3.8.10. Η γεννήτρια συνάρτηση $F = F_{k,\lambda}(x, y)$ η οποία μετράει τα μονοπάτια Dyck ως προς το ημιμήκος και τον αριθμό των εμφανίσεων του προτύπου $u^k du^\lambda$, με $k \geq \lambda$, ικανοποιεί την εξίσωση

$$F_{k,\lambda} = 1 + xF_{k,\lambda}^2 + (y-1)x^k F_{k,\lambda}^{k-1} \left(F_{k,\lambda} - \frac{1 - x^\lambda F_{k,\lambda}^\lambda}{1 - xF_{k,\lambda}} \right).$$

Απόδειξη. Αν τεθεί

$$q_{ij} = \begin{cases} y, & \text{αν } (i, j) = (k, \lambda) \\ 1, & \text{αν } (i, j) \neq (k, \lambda) \end{cases}$$

τότε προκύπτει ότι $F_{k,\lambda}(x, y) = F(x; \mathbf{q})$ και

$$f_{\nu,\mu} = \begin{cases} y, & \text{αν } \nu \geq k \text{ και } \mu \geq \lambda \\ 1, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

οπότε από τις σχέσεις (3.174) και (3.175) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 F_{k,\lambda} &= 1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} x^\nu F_{k,\lambda}^{\nu-1} \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu \right) + \sum_{\nu=k}^{\infty} x^\nu F_{k,\lambda}^{\nu-1} \left(\sum_{\mu=0}^{\lambda-1} A_\mu + y \sum_{\mu=\lambda}^{\infty} A_\mu \right) \\
 &= 1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} x^\nu F_{k,\lambda}^{\nu} + \sum_{\nu=k}^{\infty} x^\nu F_{k,\lambda}^{\nu-1} \left(F_{k,\lambda} + (y-1) \left(F_{k,\lambda} - \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} A_\mu \right) \right) \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu F_{k,\lambda}^{\nu} + (y-1) \sum_{\nu=k}^{\infty} x^\nu F_{k,\lambda}^{\nu-1} \left(F_{k,\lambda} - \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} A_\mu \right). \tag{3.181}
 \end{aligned}$$

Επειδή $k \geq \lambda$ προκύπτει ότι

$$\sum_{\mu=0}^{\lambda-1} A_\mu = \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} x^\mu F_{k,\lambda}^\mu = \frac{1 - x^\lambda F_{k,\lambda}^\lambda}{1 - x F_{k,\lambda}}$$

οπότε από τη σχέση (3.181) προκύπτει ότι

$$F_{k,\lambda} = \frac{1}{1 - x F_{k,\lambda}} + (y-1) \frac{x^k F_{k,\lambda}^{k-1}}{1 - x F_{k,\lambda}} \left(F_{k,\lambda} - \frac{1 - x^\lambda F_{k,\lambda}^\lambda}{1 - x F_{k,\lambda}} \right)$$

και τελικά

$$F_{k,\lambda} = 1 + x F_{k,\lambda}^2 + (y-1) x^k F_{k,\lambda}^{k-1} \left(F_{k,\lambda} - \frac{1 - x^\lambda F_{k,\lambda}^\lambda}{1 - x F_{k,\lambda}} \right).$$

□

Για παράδειγμα, αν $k = \lambda = 2$ από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση $F = F(x, y)$ του συνόλου \mathcal{D} ως προς το ημιμήκος και την στατιστική $N_{u^2 d u^2}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$x(1 + (1-y)x(x-1)F^2) - (1 + (y-1)x^2)F + 1 = 0. \tag{3.182}$$

Οι πρώτοι όροι του αντίστοιχου τριγώνου είναι:

1; 1; 2; 5; 13, 1; 36, 6; 105, 26, 1; 317, 104, 8; 982, 402, 45, 1.

B₂. Η στατιστική $L_{u^i d u^j}$

Θεωρούμε την πολυγεννήτρια συνάρτηση $L = L(x; \mathbf{q})$ του συνόλου των μονοπατιών Dyck ως προς το ημιμήκος και τις στατιστικές $L_{u^i d u^j}$, όπου $i, j \in \mathbb{N}^*$:

$$L(x; \mathbf{q}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} \prod_{i,j \in \mathbb{N}^*} q_{ij}^{L_{u^i d u^j}(\alpha)}$$

όπου $\mathbf{q} = (q_{ij})$, $i, j \in \mathbb{N}^*$.

Για $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\mu \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την απεικόνιση $g_{\nu,\mu} = g_{\nu,\mu}(\mathbf{q})$ με $g_{\nu,0}(\mathbf{q}) = 1$ και $g_{\nu,\mu} = \prod_{j \in [\mu]} q_{\nu,j}$, όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$.

Πρόταση 3.8.11. Η γεννήτρια συνάρτηση $L = L(x; \mathbf{q})$ δίδεται από τον τύπο

$$L(x; \mathbf{q}) = \frac{1 + x(1 - q_{11})}{1 - x q_{11} - \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_{\nu,\mu} (x(g_{1,\nu} - q_{11}) + 1) x^{\nu+\mu} C^{\nu+\mu-2}(x)}. \tag{3.183}$$

Απόδειξη. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha \in \mathcal{A}_\nu$ με $\alpha = u^\nu d\beta_1 d\beta_2 d \cdots \beta_{\nu-1} d\beta_\nu$, ισχύει ότι

$$L_{u^i d u^j}(\alpha) = L_{u^i d u^j}(\beta_\nu) + [i = \nu][\beta_1 \in \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu].$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ισότητα θα υπολογίσουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $A' = A'_\nu(x; \mathbf{q})$ του συνόλου \mathcal{A}_ν ως προς το ημιμήκος και τις παραμέτρους $L_{u^i d u^j}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.
 Πράγματι, για $\nu = 1$ είναι

$$\begin{aligned} A'_1 &= x + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\beta_1 \in \mathcal{A}_\nu} x^{l(\beta_1)+1} \prod_{i,j \in \mathbb{N}^*} q_{ij}^{L_{u^i d u^j}(\beta_1) + [i=1][\beta_1 \in \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu]} \\ &= x + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\beta_1 \in \mathcal{A}_\nu} x^{l(\beta_1)+1} \prod_{i,j \in \mathbb{N}^*} q_{ij}^{L_{u^i d u^j}(\beta_1)} \prod_{j \in [\nu]} q_{1j} \\ &= x + x \sum_{\nu=1}^{\infty} g_{1,\nu} A'_\nu \\ &= x + x q_{11} A'_1 + x \sum_{\nu=2}^{\infty} g_{1,\nu} A'_\nu \end{aligned}$$

οπότε

$$A'_1 = \frac{x + x \sum_{\nu=2}^{\infty} g_{1,\nu} A'_\nu}{1 - x q_{11}}. \quad (3.184)$$

Επιπλέον, για $\nu \geq 2$ είναι

$$\begin{aligned} A'_j &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\substack{\beta_1 \in \mathcal{A}_\mu \\ \beta_i \in \mathcal{D}, i \geq 2}} x^{\sum_{i=1}^{\nu} l(\beta_i) + \nu} \prod_{i,j \in \mathbb{N}^*} q_{ij}^{L_{u^i d u^j}(\beta_\nu) + [i=\nu][\beta_1 \in \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{A}_\mu]} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\substack{\beta_1 \in \mathcal{A}_\mu \\ \beta_i \in \mathcal{D}, i \geq 2}} x^{\sum_{i=1}^{\nu} l(\beta_i) + \nu} \prod_{i,j \in \mathbb{N}^*} q_{ij}^{L_{u^i d u^j}(\beta_\nu)} \prod_{j \in [\mu]} q_{\nu j} \\ &= x^\nu C^{\nu-2}(x) L(x; \mathbf{q}) \sum_{\mu=0}^{\infty} g_{\nu,\mu} \sum_{\beta_1 \in \mathcal{A}_\mu} x^{l(\beta_1)} \\ &= x^\nu C^{\nu-2}(x) L(x; \mathbf{q}) \sum_{\mu=0}^{\infty} g_{\nu,\mu} x^\mu C^\mu(x). \end{aligned} \quad (3.185)$$

Επειδή

$$L(x; \mathbf{q}) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A'_\nu$$

από τις σχέσεις (3.184) και (3.185) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 L(x; q) &= 1 + \frac{x + x \sum_{\nu=2}^{\infty} g_{1,\nu} A'_{\nu}}{1 - xq_{11}} + \sum_{\nu=2}^{\infty} A'_{\nu} \\
 &= \frac{1 - xq_{11} + x + x \sum_{\nu=2}^{\infty} g_{1,\nu} A'_{\nu} + (1 - xq_{11}) \sum_{\nu=2}^{\infty} A'_{\nu}}{1 - xq_{11}} \\
 &= \frac{1 + x(1 - q_{11}) + \sum_{\nu=2}^{\infty} (x(g_{1,\nu} - q_{11}) + 1) A'_{\nu}}{1 - xq_{11}} \\
 &= \frac{1 + x(1 - q_{11}) + \sum_{\nu=2}^{\infty} (x(g_{1,\nu} - q_{11}) + 1) x^{\nu} C^{\nu-2} L(x; \mathbf{q}) \sum_{\mu=0}^{\infty} g_{\nu,\mu} x^{\mu} C^{\mu}(x)}{1 - xq_{11}}
 \end{aligned}$$

οπότε τελικά προκύπτει ότι

$$L(x; \mathbf{q}) = \frac{1 + x(1 - q_{11})}{1 - xq_{11} - \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_{\nu,\mu} (x(g_{1,\nu} - q_{11}) + 1) x^{\nu+\mu} C^{\nu+\mu-2}(x)}.$$

□

Εφαρμογή

Για συγκεκριμένα $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$ θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση $T'_{k,\lambda} = T'_{k,\lambda}(x, y)$ η οποία μετράει τα μονοπάτια Dyck καθορισμένου ημιμήκους ως προς τη στατιστική $L_{u^k d u^{\lambda} d}$.

Είναι προφανές ότι $T'_{k,\lambda}(x, y) = L(x; \mathbf{q})$ για $q_{k,\lambda} = y$, $q_{k,\lambda+1} = y^{-1}$, και $q_{ij} = 1$ διαφορετικά.

Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι $g_{\nu,\mu} = y$ όταν $\nu = k$ και $\mu = \lambda$, και $g_{\nu,\mu} = 1$ διαφορετικά.

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.8.11 υπολογίζεται η γεννήτρια συνάρτηση $T'_{k,\lambda}$ θεωρώντας τις επόμενες περιπτώσεις:

Για $k \geq 2$

$$\begin{aligned}
 T'_{k,\lambda}(x, y) &= \frac{1}{1 - x - \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} x^{\nu+\mu} C^{\nu+\mu-2}(x) + (1 - y)x^{k+\lambda} C^{k+\lambda-2}(x)} \\
 &= \frac{1}{1 - x - x^2 C^2(x) + (1 - y)x^{k+\lambda} C^{k+\lambda-2}(x)} \\
 &= \frac{C(x)}{1 + (1 - y)x^{k+\lambda} C^{k+\lambda-1}(x)}.
 \end{aligned} \tag{3.186}$$

Για $k = 1$ και $\lambda \geq 2$

$$\begin{aligned}
 T'_{1,\lambda}(x,y) &= \frac{1}{1-x - \sum_{\nu=2}^{\infty} (x(g_{1,\nu} - 1) + 1) x^{\nu} C^{\nu-2}(x) \sum_{\mu=0}^{\infty} g_{\nu,\mu} x^{\mu} C^{\mu}(x)} \\
 &= \frac{1}{1-x - \sum_{\nu=2}^{\infty} (x(g_{1,\nu} - 1) + 1) x^{\nu} C^{\nu-1}(x)} \\
 &= \frac{1}{1-x - \sum_{\nu=2}^{\infty} x^{\nu} C^{\nu-1}(x) - x(y-1)x^{\lambda} C^{\lambda-1}(x)} \\
 &= \frac{C(x)}{1 + (1-y)x^{\lambda+1} C^{\lambda}(x)}. \tag{3.187}
 \end{aligned}$$

Τέλος για $k = \lambda = 1$

$$T'_{1,1}(x,y) = \frac{1+x(1-y)}{1-xy - (x(1-y)+1)x^2 C^2(x)}. \tag{3.188}$$

Παρατήρηση

Οι τύποι (3.186) και (3.187) προκύπτουν επίσης ως εφαρμογές της Πρότασης 3.4.2 αφού για $k \geq 2$ ή $k = 1$ και $\lambda \geq 2$ κάθε πρώτη συνιστώσα (εκτός της αρχικής) του προτύπου $\tau = u^k du^{\lambda}$ δεν ταυτίζεται με κάποιο αριστερό παράγοντα του τ .

Αντίθετα ο τύπος (3.188) που αντιστοιχεί στην περίπτωση που $k = \lambda = 1$ δεν προκύπτει ως εφαρμογή της Πρότασης 3.4.2 αλλά έχει αποδειχθεί σε ισοδύναμη μορφή ως εφαρμογή του τύπου (3.38).

Στα επόμενα θα μελετηθεί η στατιστική $L_{u^k du^{\lambda}}$ για συγκεκριμένα k, λ με γεννήτρια συνάρτηση $L_{k,\lambda} = L_{k,\lambda}(x,y)$.

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.8.11 για $q_{11} = y$, και $q_{ij} = 1$ διαφορετικά, προκύπτει ο τύπος

$$L_{11}(x,y) = 1 + \frac{x C(x)}{1 + x(1-y) - x C(x)}$$

ο οποίος έχει επίσης αποδειχθεί από τον Sun [137].

Για $k \geq 2$ και $\lambda = 1$ η γεννήτρια συνάρτηση $L_{k,\lambda}$ έχει υπολογισθεί από τον Mansour [92].

Στο επόμενο αποτέλεσμα υπολογίζεται η γεννήτρια συνάρτηση $L_{k,\lambda}$ για $(k,\lambda) = (1,1)$.

Πρόταση 3.8.12. Η γεννήτρια συνάρτηση $L_{k,\lambda} = L_{k,\lambda}(x,y)$ η οποία μετράει τα μονοπάτια Dyck ως προς το ημιμήκος και τον αριθμό των χαμηλών εμφανίσεων του προτύπου $u^k du^{\lambda}$ όπου $(k,\lambda) \neq (1,1)$, δίδεται από τον τύπο:

$$L_{k,\lambda}(x,y) = \frac{C(x)}{1 + (1-y)(x C(x))^{k+\lambda}}.$$

Απόδειξη. Αρχικά θεωρείται η περίπτωση όπου $k \geq 2$ και $\lambda \geq 1$. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζεται η Πρόταση 3.8.11 για $q_{k\lambda} = y$, και $q_{ij} = 1$ διαφορετικά, οπότε προκύπτει ότι $g_{\nu,\mu} = y$ αν $\nu = k$ και $\mu \geq \lambda$, ενώ $g_{\nu,\mu} = 1$ διαφορετικά.

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L_{k,\lambda} &= \frac{1}{1-x - \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_{\nu,\mu} x^{\nu+\mu} C^{\nu+\mu-2}(x)} \\ &= \frac{1}{1-x - \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} x^{\nu+\mu} C^{\nu+\mu-2}(x) + (1-y) \sum_{\mu=\lambda}^{\infty} x^{k+\mu} C^{k+\mu-2}(x)} \\ &= \frac{1}{1-x - x^2 C^2(x) + (1-y) x^{k+\lambda} C^{k+\lambda-1}(x)} \\ &= \frac{C(x)}{1 + (1-y) x^{k+\lambda} C^{k+\lambda}(x)}. \end{aligned}$$

Η περίπτωση όπου $k=1$ και $\lambda \geq 2$ αποδεικνύεται ανάλογα. \square

Παρατήρηση Ο τύπος της προηγούμενης πρότασης προκύπτει και ως εφαρμογή της Πρότασης 3.4.2.

Πόρισμα 3.8.13. Ο αριθμός όλων των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n με j χαμηλές εμφανίσεις του προτύπου $u^k d u^\lambda$ για $(k, \lambda) \neq (1, 1)$ είναι ίσος με

$$|x^n y^j| L_{k,\lambda} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{k+\lambda} \rfloor - j} (-1)^j \frac{(j+i)(k+\lambda)+1}{2n+1-(j+1)(k+\lambda)} \binom{j+i}{i} \binom{2n+1-(j+1)(k+\lambda)}{n+1}$$

όπου $0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{k+\lambda} \rfloor$.

B₂. Η στατιστική $H_{u^i d u^j}$

Θεωρούμε την πολυγεννήτρια $H = H(x; \mathbf{q})$ του συνόλου των μονοπατιών Dyck ως προς το ημιμήκος και τις στατιστικές $H_{u^i d u^j}$, όπου $i, j \in \mathbb{N}^*$:

$$H(x; \mathbf{q}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} x^{l(\alpha)} \prod_{i,j \in \mathbb{N}^*} q_{ij}^{H_{u^i d u^j}(\alpha)}$$

όπου $\mathbf{q} = (q_{ij})$, $i, j \in \mathbb{N}^*$.

Ανάλογα με τη σχέση (3.65) προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.8.14. Η γεννήτρια συνάρτηση $H = H(x; \mathbf{q})$ δίδεται από τη σχέση

$$H = \frac{1}{1-xF}$$

όπου η F ικανοποιεί τις σχέσεις (3.174) και (3.175).

Εφαρμογή

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση και τη σχέση (3.182) προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση $H = H(x, y)$ του \mathcal{D} , ως προς το ημιμήκος και τη στατιστική $H_{u^2 d u^2}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$(yx + 2x^2 - 2yx^2)H^2 - (1 - (1-y)(3x-2)x)H + 1 + (1-y)(x-1)x = 0. \quad (3.189)$$

Οι πρώτοι όροι του αντίστοιχου τριγώνου που προκύπτει είναι:
1; 1; 2; 5; 14; 41, 1; 124, 81; 385, 43, 1; 1220, 200, 10; 3929, 866, 66, 1.

Κεφάλαιο 4

Μονοπάτια Dyck και διατεταγμένα δένδρα

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν δύο γενικά προβλήματα με τα οποία έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές:

1. Το πρόβλημα της απαρίθμησης του συνόλου των διατεταγμένων δένδρων ως προς διάφορες στατιστικές (βλ. για παράδειγμα [34, 35, 41, 62]).
2. Το πρόβλημα του προσδιορισμού των διατεταγμένων δένδρων με προκαθορισμένα χαρακτηριστικά (βλ. για παράδειγμα [7, 76–79, 125]).

Για την επίλυση του πρώτου προβλήματος χρησιμοποιούνται δύο αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις μεταξύ του συνόλου των διατεταγμένων δένδρων και του συνόλου των μονοπατιών Dyck, αξιοποιώντας τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3.

Σχετικά με το δεύτερο πρόβλημα κατασκευάζεται το σύνολο των διατεταγμένων δένδρων με συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών ως προς την ενδοδιάταξη με τη βοήθεια των μονοπατιών Dyck και υπολογίζεται αναδρομικά ο πληθικός αριθμός του.

Τα περισσότερα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού έχουν ανακοινωθεί στο συνέδριο [139] και έχουν δημοσιευθεί στην εργασία [113].

4.2 Βασικές έννοιες

Διατεταγμένα δένδρα

Διατεταγμένο δένδρο με ρίζα (ή απλώς δένδρο) είναι ένα δένδρο με ρίζα όπου η σειρά των υποδένδρων κάθε κόμβου είναι καθορισμένη. Η ρίζα του δένδρου T θα σημειώνεται με γ_T .

Στα επόμενα, το σύνολο όλων των διατεταγμένων δένδρων (αντ. με n δεσμούς) θα σημειώνεται με T (αντ. T_n). Το σύνολο T_0 περιέχει μόνο το δένδρο με ένα κόμβο το οποίο ονομάζεται **κενό δένδρο** και συμβολίζεται με 0 ενώ το σύνολο T_1 περιέχει μόνο το δένδρο με ένα δεσμό το οποίο συμβολίζεται με 1 . Είναι γνωστό ότι ο αριθμός όλων των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς ισούται με τον n -οστό αριθμό Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Ο αριθμός των παιδιών ενός κόμβου v ονομάζεται **βαθμός** $d(v)$ αυτού του κόμβου. Αν $d(v) = 0$ (αντ. $d(v) > 0$) τότε ο v ονομάζεται **φύλλο** (αντ. **εσωτερικός κόμβος**). Προφανώς η ρίζα ενός μη κενού δένδρου δεν είναι φύλλο. Στα παρακάτω θα θεωρείται ότι τούτο ισχύει και στην περίπτωση του κενού δένδρου, οπότε το κενό δένδρο δεν έχει φύλλα. Το **επίπεδο** (level) ή **ύψος**

(height) ενός κόμβου ορίζεται αναδρομικά ως εξής: το επίπεδο της ρίζας r_T ισούται με 1^1 , ενώ το επίπεδο ενός παιδιού είναι ίσο με το επίπεδο του γονέα του αυξημένο κατά 1.

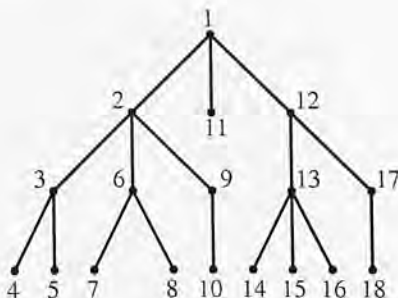
Διασχίσεις διατεταγμένων δένδρων

Υπάρχουν 4 βασικοί τρόποι να διασχίσουμε (αριθμήσουμε) τους κόμβους ενός διατεταγμένου δένδρου. Καθένας από τους τρόπους αυτούς καθορίζει μια ολική διάταξη των κόμβων του δένδρου. Επιπλέον για κάθε μια διάταξη προκύπτει μια ακολουθία βαθμών του δένδρου σύμφωνα με τους βαθμούς κάθε κόμβου η οποία ονομάζεται ακολουθία βαθμών ως προς τη συγκεκριμένη διάταξη.

1. Προδιάταξη

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο πριν διασχίσουμε (σύμφωνα με τη διάταξη τους) τα δένδρα-παιδιά του σε προδιάταξη. Δηλαδή αριθμείται πρώτα ο γονέας και έπειτα τα δένδρα-παιδιά του με τη σειρά της διάταξής τους.

Παράδειγμα



Η ακολουθία βαθμών του T σύμφωνα με την προδιάταξη είναι:

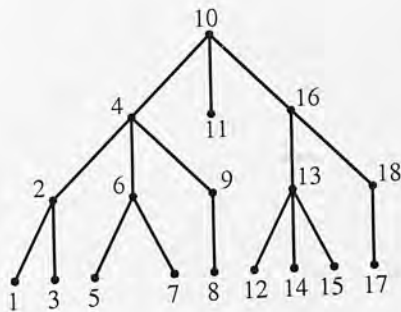
3, 3, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 3, 0, 0, 0, 1, 0.

2. Ενδοδιάταξη

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) τη ρίζα μετά τη διάσχιση σε ενδοδιάταξη του πρώτου δένδρου-παιδιού και πριν τη διάσχιση (σύμφωνα με την διάταξή τους) των υπόλοιπων δένδρων-παιδιών της σε ενδοδιάταξη. Δηλαδή αριθμείται πρώτα το πρώτο παιδί, μετά ο γονέας κι έπειτα τα υπόλοιπα δένδρα-παιδιά του με τη σειρά της διάταξής τους.

Παράδειγμα

¹ Στη βιβλιογραφία αρκετοί συγγραφείς ορίζουν το επίπεδο της ρίζας ίσο με 0.



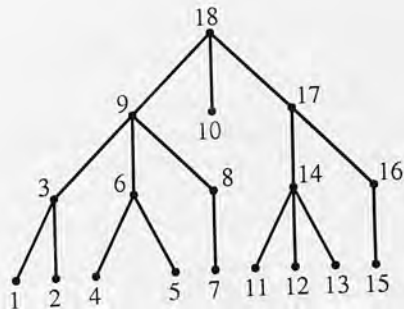
Η ακολουθία βαθμών του T σύμφωνα με την ενδοδιάταξη είναι:

0, 2, 0, 3, 0, 2, 0, 0, 1, 3, 0, 0, 3, 0, 0, 2, 0, 1.

3. Μεταδιάταξη

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού διασχίσουμε σύμφωνα με τη διάταξή τους τα δένδρα-παιδιά του σε μεταδιάταξη. Δηλαδή αριθμούνται πρώτα τα δένδρα-παιδιά με τη σειρά της διάταξής τους και έπειτα ο γονέας.

Παράδειγμα



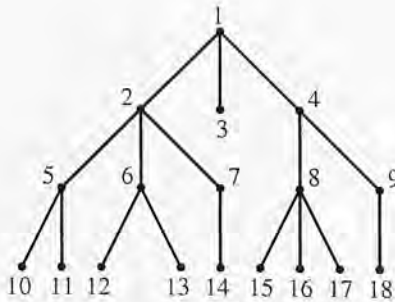
Η ακολουθία βαθμών του T σύμφωνα με τη μεταδιάταξη είναι:

0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 1, 2, 3.

4. Διάταξη κατά επίπεδα

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) τους κόμβους κατά επίπεδο (από το μικρότερο επίπεδο στο μεγαλύτερο), όπου σε κάθε επίπεδο επισκεπτόμαστε τους κόμβους από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Παράδειγμα



Η ακολουθία βαθμών του T σύμφωνα με τη διάταξη κατά επίπεδα είναι:

3, 3, 0, 2, 2, 2, 1, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.

Παρατηρήσεις

1. Το τελευταίο στοιχείο της ακολουθίας βαθμών ενός δένδρου ως προς την προδιάταξη ή ως προς τη διάταξη κατά επίπεδα είναι πάντα ίσο με 0.
2. Το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας βαθμών ενός δένδρου ως προς την ενδοδιάταξη ή ως προς τη μεταδιάταξη είναι πάντα ίσο με 0.

Λόγω των παραπάνω παρατηρήσεων, στα επόμενα όταν μιλάμε για ακολουθία βαθμών ως προς την προδιάταξη ή τη διάταξη κατά επίπεδα (αντίστοιχα ενδοδιάταξη ή μεταδιάταξη) θα αγνοούμε το τελευταίο (αντίστοιχα το πρώτο) στοιχείο.

Είναι γνωστό ότι η ακολουθία βαθμών ενός δένδρου είτε σύμφωνα με την προδιάταξη είτε σύμφωνα με τη διάταξη κατά επίπεδα καθορίζει το δένδρο μονοσήμαντα (βλ. για παράδειγμα [13,90]). Επιπρόσθετα, και στις δύο περιπτώσεις η ακολουθία βαθμών του δένδρου είναι κυρίαρχη ακολουθία, οπότε μπορεί να κωδικοποιηθεί και από ένα μονοπάτι Dyck. Επομένως προκύπτουν δύο πολύ γνωστές αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις μεταξύ των διατεταγμένων δένδρων και των μονοπατιών Dyck [12,38].

Στην περίπτωση της διάσχισης σε μεταδιάταξη έχουμε αντίστοιχο αποτέλεσμα, αφού η ανάστροφη ακολουθία βαθμών ενός δένδρου σε προδιάταξη ισούται με την ακολουθία βαθμών του κατοπτρικού του σε μεταδιάταξη.

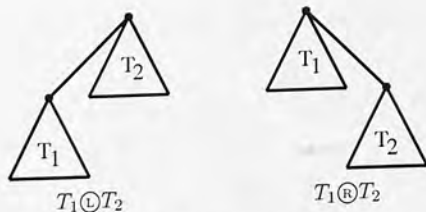
Διασπάσεις διατεταγμένων δένδρων

Το σύνολο \mathcal{T} των διατεταγμένων δένδρων μπορεί να ορισθεί αναδρομικά όπως και το σύνολο \mathcal{D} χρησιμοποιώντας διάφορους τρόπους διάσπασης.

Παρακάτω θα δούν δύο βασικοί τρόποι διάσπασης των διατεταγμένων δένδρων. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε δύο πράξεις ① και ② στα διατεταγμένα δένδρα. Συγκεκριμένα για $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ ορίζουμε τα δένδρα:

$T_1 \circledast T_2$ που προκύπτει προσθέτοντας το T_1 στο T_2 ως πρώτο υποδένδρο της ρίζας του T_2 .

$T_1 \textcircled{+} T_2$ που προκύπτει προσθέτοντας το T_2 στο T_1 ως τελευταίο υποδένδρο της ρίζας του T_1 . (βλ. επόμενο σχήμα).



Εύκολα προκύπτει ότι κάθε διατεταγμένο δένδρο T γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

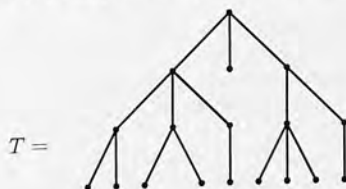
$$T = T_1 \oplus T_2$$

η οποία ονομάζεται *αριστερή διάσπαση*, και στη μορφή

$$T = T'_1 \otimes T'_2$$

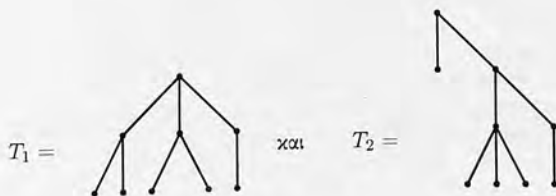
η οποία ονομάζεται *δεξιά διάσπαση*.

Για παράδειγμα αν T είναι το διατεταγμένο δένδρο του Σχήματος 4.1

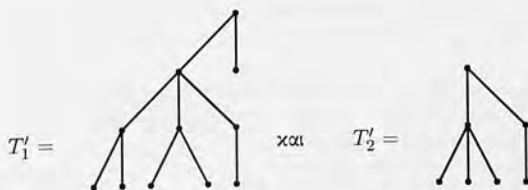


Σχήμα 4.1: Το διατεταγμένο δένδρο T

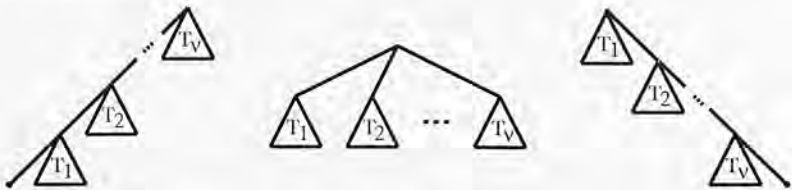
τότε



και



Χρησιμοποιώντας αναδρομικά τις διασπάσεις αυτές, προκύπτουν οι παρακάτω λεπτότερες διασπάσεις του δένδρου T .



Η διάσπαση του αριστερού μονοπατιού² προκύπτει χρησιμοποιώντας επαναληπτικά την αριστερή διάσπαση προς τα αριστερά, οπότε προκύπτει ότι

$$T = (((\dots((0 \oplus T_1) \oplus T_2) \oplus T_3 \dots) \oplus T_{\nu-1}) \oplus T_\nu.$$

Η διάσπαση του δεξιού μονοπατιού³ προκύπτει χρησιμοποιώντας επαναληπτικά τη δεξιά διάσπαση προς τα δεξιά, οπότε προκύπτει ότι

$$T = T_1 \oplus (T_2 \oplus (T_3 \oplus \dots \oplus (T_{\nu-1} \oplus (T_\nu \oplus 0) \dots))).$$

Η διάσπαση των υποδένδρων της ρίζας μπορεί να προκύψει με δύο τρόπους: είτε χρησιμοποιώντας επαναληπτικά την αριστερή διάσπαση προς τα δεξιά είτε τη δεξιά διάσπαση προς τα αριστερά, οπότε προκύπτει ότι

$$T = T_1 \oplus (T_2 \oplus (T_3 \oplus \dots (T_{\nu-1} \oplus (T_\nu \oplus 0) \dots))) = (((\dots((0 \oplus T_1) \oplus T_2) \oplus T_3 \dots) \oplus T_{\nu-1}) \oplus T_\nu.$$

4.3 Απαρίθμηση συνόλων διατεταγμένων δένδρων

Στο σύνολο \mathcal{T} αρίζονται ενδιαφέρουσες παράμετροι οι οποίες έχουν μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς (βλ. για παράδειγμα [34, 41]).

Η βασικότερη παράμετρος στο \mathcal{T} είναι το μέγεθος $s(T)$ ενός δένδρου T που ορίζεται ως ο αριθμός των δεσμών του.

Άλλες γνωστές παράμετροι είναι ο βαθμός της ρίζας ενός δένδρου, ο αριθμός των φύλλων του, ο αριθμός των κόμβων με συγκεκριμένο βαθμό κλπ.

Η μελέτη μιας παραμέτρου g του συνόλου \mathcal{T} και της αντίστοιχης στατιστικής μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση

$$F(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}} x^{s(T)} y^{g(T)}.$$

Για τον ίδιο σκοπό μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ένας άλλος τρόπος, με τη βοήθεια μιας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης μεταξύ των συνόλων \mathcal{T} και \mathcal{D} η οποία μεταφέρει την παράμετρο g σε μια παράμετρο του συνόλου \mathcal{D} , της οποίας η αντίστοιχη στατιστική έχει ευρεθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Στο παρόν θα χρησιμοποιηθούν δύο αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις ϕ και ψ , οι οποίες δίδονται στη βιβλιογραφία με περιγραφικό και πρακτικό τρόπο, ενώ εδώ ορίζονται αναδρομικά με τη βοήθεια των διασπάσεων των διατεταγμένων δένδρων.

²Για τον ορισμό του αριστερού μονοπατιού βλέπε σελ. 179.

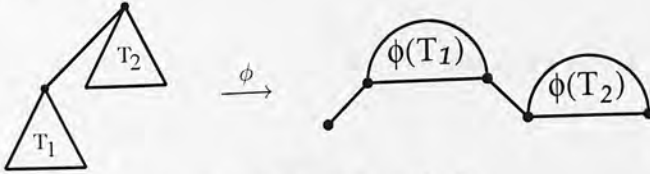
³Για τον ορισμό του δεξιού μονοπατιού βλέπε σελ. 179.

Η απεικόνιση ϕ

Η απεικόνιση ϕ ορίζεται ως εξής:

$$\phi(0) = \epsilon \text{ και } \phi(T_1 \oplus T_2) = u\phi(T_1)d\phi(T_2)$$

ή, σχηματικά,



Για παράδειγμα, για το δένδρο T του Σχήματος 4.1 ισχύει ότι

$$\phi(T) = u u u d u d d u u d u d d d u u d u u u d u d u d d u u d d d.$$

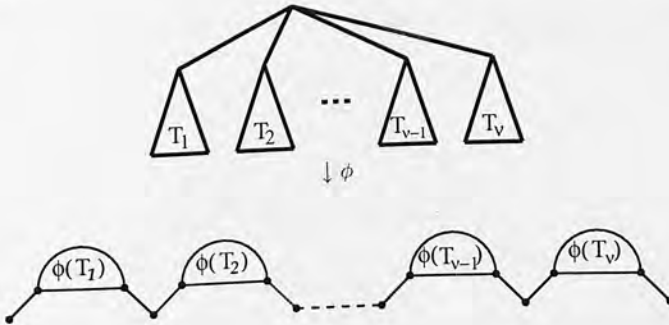
Εύκολα προκύπτει ότι

$$\phi(T_1 \oplus (T_2 \oplus (T_3 \oplus \dots (T_{\nu-1} \oplus (T_{\nu} \oplus 0) \dots))) = u\phi(T_1)du\phi(T_2)d \dots u\phi(T_{\nu-1})du\phi(T_{\nu})d,$$

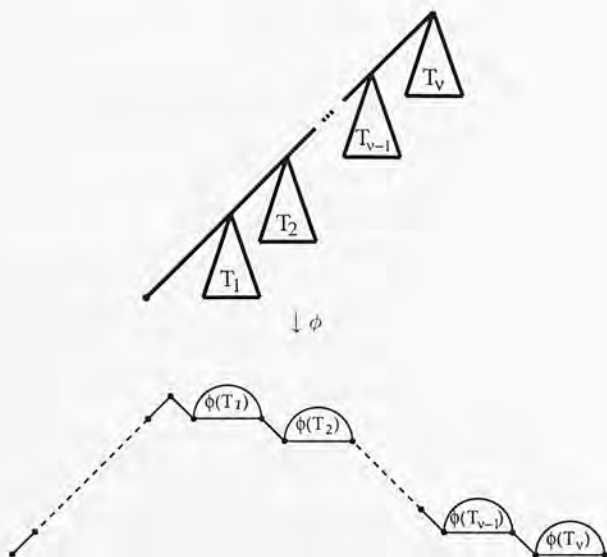
και

$$\phi(((\dots((0 \oplus T_1) \oplus T_2) \oplus T_3 \dots) \oplus T_{\nu-1} \oplus) T_{\nu}) = u^{\nu} d\phi(T_1)d\phi(T_2)d \dots \phi(T_{\nu-1})d\phi(T_{\nu})$$

ή, σχηματικά,



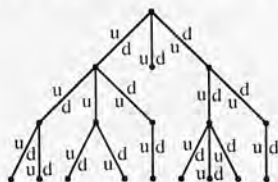
και



Η απεικόνιση ϕ ορίσθηκε πρώτη φορά από τους Dershowitz και Zaks [34] χρησιμοποιώντας τη διάσχιση των διατεταγμένων δένδρων σε προδιάταξη. Συγκεκριμένα, διασχίζουμε τους κόμβους του δένδρου σε προδιάταξη και όταν συναντάμε ένα δεσμό πρώτη φορά σημειώνουμε u , ενώ όταν τον συναντάμε δεύτερη φορά σημειώνουμε d .

Για παράδειγμα, για το δένδρο T του Σχήματος 4.1 προκύπτει ότι

$$\phi(T) = u u u d u d d u u d u d d d u u d d d u d u u u d u d u d d d u u d d d.$$

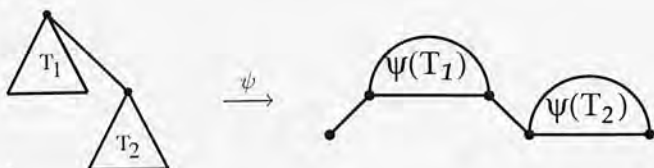


Η απεικόνιση ψ

Η απεικόνιση ψ ορίζεται ως εξής:

$$\psi(0) = \epsilon \text{ και } \psi(T_1 \oplus T_2) = u\psi(T_1)d\psi(T_2)$$

ή, σχηματικά,



Για παράδειγμα, για το δένδρο T του Σχήματος 4.1 ισχύει ότι

$$\psi(T) = u u u d u u u d u u d d d u u d d d u d d d u u u d u u u d d d d u d$$

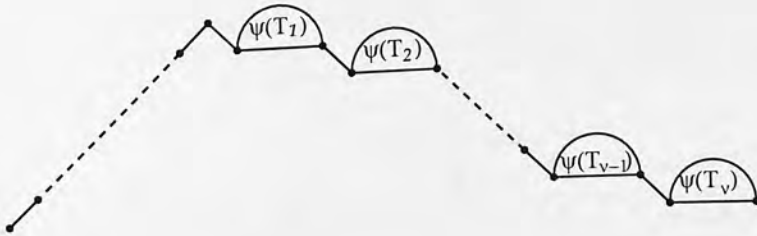
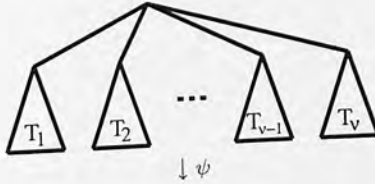
Εύκολα προκύπτει ότι

$$\psi(((\dots((0 \oplus T_1) \oplus T_2) \oplus T_3 \dots) \oplus T_{\nu-1}) \oplus T_{\nu})) = u^{\nu} d \psi(T_1) d \psi(T_2) d \dots \psi(T_{\nu-1}) d \psi(T_{\nu})$$

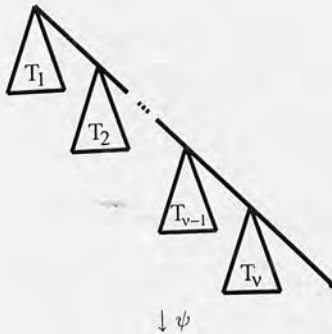
και

$$\psi(T_1 \oplus (T_2 \oplus (T_3 \dots \oplus (T_{\nu-1} \oplus (T_{\nu} \oplus 0) \dots)))) = u \psi(T_1) d u \psi(T_2) d \dots u \psi(T_{\nu-1}) d u \psi(T_{\nu}) d,$$

ή, σχηματικά,



και

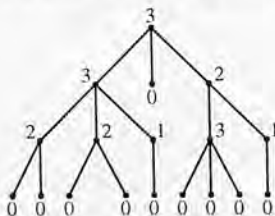


Η απεικόνιση ψ είναι γνωστή, και σχετίζεται με την ακολουθία βαθμών των διατεταγμένων δένδρων σε προδιάταξη. Ένας άλλος τρόπος ορισμού της, μη αναδρομικός, είναι ο ακόλουθος: Διασχίζουμε τους κόμβους του δένδρου T σε προδιάταξη και σημειώνουμε $u^i d$ για κάθε κόμβο (πλην του τελευταίου), όπου r ο αριθμός των παιδιών του.

Με άλλα λόγια, η ακολουθία βαθμών του T σε προδιάταξη ισούται με την ακολουθία αναβάσεως του $\psi(T)$.

Για παράδειγμα, για το δένδρο T του Σχήματος 4.1 ισχύει ότι

$$\psi(T) = u^3 d u^3 d u^2 d d d u^2 d d d u^1 d d d u^2 d u^3 d d d u^1 d$$



Οι απεικονίσεις ϕ, ψ στέλνουν κάθε δένδρο μεγέθους n σε ένα μονοπάτι Dyck ημιμήκους n .

Επιπλέον, για πολλές ενδιαφέρουσες παραμέτρους q του συνόλου T μια τουλάχιστον εκ των παραμέτρων $q \circ \phi^{-1}$ και $q \circ \psi^{-1}$ έχει μελετηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο στα μονοπάτια Dyck οπότε μέσω αυτής μπορεί να υπολογισθεί η στατιστική που αντιστοιχεί στην q .

Στον επόμενο πίνακα συνοψίζονται οι κυριότερες αντιστοιχίες μεταξύ ορισμένων παραμέτρων q του T και των παραμέτρων $q \circ \phi^{-1}$ και $q \circ \psi^{-1}$ που μεταφέρονται μέσω των ϕ και ψ αντίστοιχα στο D .

Ισοκατανομές Στατιστικών

q	$q \circ \phi^{-1}$	$q \circ \psi^{-1}$
1. βαθμός της ρίζας	η # πρώτων συνιστωσών # επιστροφών	η ύψος πρώτης κορυφής ή μήκος πρώτης ανάβασης
2. # εσωτερικών κόμβων	$N_{uu} + 1$	$N_{ud} + \neq \epsilon $
3. # φύλλων	N_{ud}	$N_{dd} + \neq \epsilon $
4. μήκος αριστερού μονοπατιού	η ύψος πρώτης κορυφής μήκος πρώτης ανάβασης	αριθμός κορυφών πριν την πρώτη διπλή κάθετοδο
5. μήκος δεξιού μονοπατιού	η ύψος τελευταίας κορυφής μήκος τελευταίας ανάβασης	η # πρώτων συνιστωσών # επιστροφών
6. # πρώτων παιδιών	$N_{uu} + \neq \epsilon $	N_{ud}
7. # τελευταίων παιδιών	$N_{uu} + \neq \epsilon $	N_{ud}
8. # εσωτερικών κόμβων που είναι πρώτο παιδί	$N_{uuu} + \text{αρχίζει με } uu $	N_{udu}
9. # εσωτερικών κόμβων που είναι τελευταίο παιδί	$N_{ddd} + \text{τελειώνει με } dd $	# τριάδων από συγγενικές ⁴ διαδοχικές ανόδους + όχι πρώτο
10. # εσωτερικών κόμβων που δεν είναι πρώτο παιδί	$N_{duu} + 1$	$N_{ddu} + 1$
11. # εσωτερικών κόμβων που δεν είναι τελευταίο παιδί	$N_{ddu} + 1$	# uu όπου η δεύτερη άνοδος δε είναι μεμονωμένη + 1
12. # φύλλων που είναι πρώτο παιδί	$N_{uuu} + \text{αρχίζει με } uu $	$N_{udd} + \text{τελειώνει με } ud $
13. # φύλλων που είναι τελευταίο παιδί	$N_{udd} + \text{τελειώνει με } ud $	# κλάσεων συγγένειας μη μεμονωμένων ανόδων + πρώτο

⁴Η έννοια της συγγένειας των ανόδων ενός μονοπατιού Dyck ορίζεται στη σελίδα 27.

q	$q \circ \phi^{-1}$	$q \circ \psi^{-1}$
14. # φύλλων που δεν είναι πρώτο παιδί	N_{dud}	# uu όπου η πρώτη άνοδος δεν έχει δεξιά της συγγενική άνοδο
15. # φύλλων που δεν είναι τελευταίο παιδί	N_{udu}	# uu όπου η δεύτερη άνοδος είναι μεμονωμένη
16. # κόμβων βαθμού 1	# μεμονωμένων ανόδων	N_{dud}
17. # κόμβων βαθμού r	# κλάσεων συγγένειας με r ανόδους	$N_{dur d}$
18. # κόμβων βαθμού τουλάχιστον r	# κλάσεων συγγένειας με τουλάχιστον r ανόδους	$N_{ur d}$
19. # μονοπατιών μήκους μ που αποτελούνται από κόμβους βαθμού 1	# $u^{\mu+1}$ με όλες τις ανόδους μεμονωμένες	$N_{d(ud)^{\mu+1}}$
20. # κόμβων βαθμού 2 που το πρώτο τους παιδί είναι φύλλο	# udu που οι άνοδοι του δεν είναι συγγενικές με άλλες ανόδους	N_{duudd}
21. # κόμβων βαθμού τουλάχιστον 2 που το πρώτο τους παιδί δεν είναι φύλλο	# uu όπου η πρώτη άνοδος έχει συγγενικές ανόδους δεξιά αλλά όχι αριστερά	N_{uudu}
22. # κόμβων βαθμού τουλάχιστον 2 που το πρώτο τους παιδί είναι φύλλο	$N_{uudu} + [\text{αρχίζει με } udu]$	N_{uudd}

Αποδειξείς:

1. Η στατιστική q : “βαθμός της ρίζας” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική p : “αριθμός πρώτων συνιστωσών” και μέσω της ψ στη στατιστική p' : “ύψος πρώτης κορυφής”.
- Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \oplus T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_2) + 1 \\ &= p(\phi(T_2)) + 1 \\ &= p(\phi(T)). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \oplus T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} r(T) &= r(T_1) + 1 \\ &= p'(\psi(T_1)) + 1 \\ &= p'(\psi(T)). \end{aligned}$$

2. Η στατιστική q : “αριθμός εσωτερικών κόμβων” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική $N_{uu} + 1$ και μέσω της ψ στη στατιστική $N_{ud} + [= \epsilon]$.
- Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \oplus T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) - [T_1 = 0] \\ &= N_{uu}(\phi(T_1)) + 1 + N_{uu}(\phi(T_2)) + 1 - [\phi(T_1) = \epsilon] \\ &= N_{uu}(\phi(T_1)) + [\phi(T_1) \neq \epsilon] + N_{uu}(\phi(T_2)) + 1 \\ &= N_{uu}(\phi(T)) + 1. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \oplus T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) - [T_2 = 0] \\ &= N_{ud}(\psi(T_1)) + [\psi(T_1) = \epsilon] + N_{ud}(\psi(T_2)) + [\psi(T_2) = \epsilon] - [\psi(T_2) = \epsilon] \\ &= N_{ud}(\psi(T)) + [\psi(T) = \epsilon]. \end{aligned}$$

Η απόδειξη του 3 είναι ανάλογη με αυτή του 2. Εναλλακτικά μπορεί επίσης να προκύψει με τη βοήθεια του 2 χρησιμοποιώντας τις ισότητες

$$\begin{aligned} \# \text{ εσωτερικών κόμβων του } T + \# \text{ φύλλων του } T &= s(T) \\ N_{uu}(\alpha) + N_{ud}(\alpha) &= l(\alpha) \end{aligned}$$

για κάθε $T \in \mathcal{T}$ και $\alpha \in \mathcal{D}$.

4. Η στατιστική q : “μήκος αριστερού μονοπατιού” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική p : “ύψος της πρώτης κορυφής” και μέσω της ψ στη στατιστική p' : “αριθμός κορυφών πριν την πρώτη διπλή κάθοδο”⁵.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \circledast T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + 1 \\ &= p(\phi(T_1)) + 1 \\ &= p(\psi(T)). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \circledast T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1)[T_1 \neq \mathbf{0}] + (q(T_2) + 1)[T_1 = \mathbf{0}] \\ &= p'(\psi(T_1))[\psi(T_1) \neq \epsilon] + (p'(\psi(T_2)) + 1)[\psi(T_1) = \epsilon] \\ &= p'(\psi(T)). \end{aligned}$$

5. Η στατιστική q : “μήκος δεξιού μονοπατιού” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική p : “ύψος της τελευταίας κορυφής” και μέσω της ψ στη στατιστική p' : “αριθμός πρώτων συνιστωσών”.

Χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \circledast T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_2) + [T_2 = \mathbf{0}](1 + q(T_1)) \\ &= p(\phi(T_2)) + [\phi(T_2) = \epsilon](1 + p(\phi(T_1))) \\ &= p(\phi(T)). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \circledast T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_2) + 1 \\ &= p'(\psi(T_2)) + 1 \\ &= p'(\psi(T)). \end{aligned}$$

6. Η στατιστική q : “αριθμός πρώτων παιδιών” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική $N_{uu} + [\neq \epsilon]$ και μέσω της ψ στη στατιστική N_{ud} .

Χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \circledast T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + 1 - [T_2 \neq \mathbf{0}] \\ &= N_{uu}(\phi(T_1)) + [\phi(T_1) \neq \epsilon] + N_{uu}(\phi(T_2)) + [\phi(T_2) \neq \epsilon] + 1 - [\phi(T_2) \neq \epsilon] \\ &= N_{uu}(\phi(T)) + 1 \\ &= N_{ud}(\phi(T)) + [\phi(T) \neq \epsilon]. \end{aligned}$$

⁵Για κάθε μονοπάτι α της μορφής $(ud)^r$, που δεν έχει διπλή κάθοδο, θεωρείται $p'(\alpha) = r$.

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 = 0] \\ &= N_{ud}(\psi(T_1)) + N_{ud}(\psi(T_2)) + |\psi(T_1) = \epsilon| \\ &= N_{ud}(\psi(T)). \end{aligned}$$

Η απόδειξη του 7 είναι ανάλογη με αυτή του 6.

8. Η στατιστική q : “αριθμός εσωτερικών κόμβων που είναι πρώτο παιδί!” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική $N_{uuu} + [\text{αρχίζει με } uu]$ και μέσω της ψ στη στατιστική N_{udu} . Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \oplus T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 \neq 0] - [\text{πρώτο παιδί της ρίζας του } T_2 \text{ είναι εσωτερικός κόμβος}] \\ &= N_{uuu}(\phi(T_1)) + [\phi(T_1) \text{ αρχίζει με } uu] + N_{uuu}(\phi(T_2)) + [\phi(T_2) \text{ αρχίζει με } uu] \\ &\quad + [\phi(T_1) \neq \epsilon] - [\phi(T_2) \text{ αρχίζει με } uu] \\ &= N_{uuu}(\phi(T_1)) + N_{uuu}(\phi(T_2)) + [\phi(T_1) \text{ αρχίζει με } uu] + [\phi(T_1) \neq \epsilon] \\ &= N_{uuu}(\phi(T)) + [\phi(T) \text{ αρχίζει με } uu]. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 = 0][T_2 \neq 0] \\ &= N_{udu}(\psi(T_1)) + N_{udu}(\psi(T_2)) + |\psi(T_1) = \epsilon| |\psi(T_2) \neq \epsilon| \\ &= N_{udu}(\psi(T)). \end{aligned}$$

9. Η στατιστική q : “αριθμός εσωτερικών κόμβων που είναι τελευταίο παιδί!” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική $N_{ddd} + [\text{τελειώνει με } dd]$ και μέσω της ψ στη στατιστική “ $p + [\text{όχι πρώτο }]$ ” όπου $p(\alpha)$ είναι ο αριθμός των τριάδων από συγγενικές διαδοχικές ανόδους στο α . Η απόδειξη της πρώτης ισοκατανομής (δηλαδή μέσω της ϕ) είναι ανάλογη με την απόδειξη της δεύτερης ισοκατανομής του 8, ενώ για την απόδειξη της δεύτερης ισοκατανομής (δηλαδή μέσω της ψ) θα χρησιμοποιηθεί η δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_2 \neq 0] - [\text{τελευταίο παιδί της ρίζας του } T_1 \text{ είναι εσωτερικός κόμβος}] \\ &= p(\psi(T_1)) + [\psi(T_1) \text{ όχι πρώτο}] + p(\psi(T_2)) + [\psi(T_2) \text{ όχι πρώτο}] \\ &\quad + [\psi(T_2) \neq \epsilon] - [\psi(T_1) \text{ όχι πρώτο}] \\ &= p(\psi(T)) + [\psi(T) \neq \epsilon] \\ &= p(\psi(T)) + [\psi(T) \text{ όχι πρώτο}]. \end{aligned}$$

10. Η στατιστική q : “αριθμός εσωτερικών κόμβων που δεν είναι πρώτο παιδί!” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική $N_{duu} + 1$ και μέσω της ψ στη στατιστική $N_{ddu} + 1$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \oplus T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) - 1 + [\text{το πρώτο παιδί της ρίζας του } T_2 \text{ είναι εσωτερικός κόμβος}] \\ &= N_{duu}(\phi(T_1)) + 1 + N_{duu}(\phi(T_2)) + 1 - 1 + [\phi(T_2) \text{ αρχίζει με } uu] \\ &= N_{duu}(\phi(T)) + 1. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) - 1 + |T_1 \neq 0||T_2 \neq 0| \\ &= N_{ddu}(\psi(T_1)) + 1 + N_{ddu}(\psi(T_2)) + 1 - 1 + |\psi(T_1) \neq \epsilon||\psi(T_2) \neq \epsilon| \\ &= N_{ddu}(\psi(T)) + 1. \end{aligned}$$

11. Η στατιστική q : “αριθμός εσωτερικών κόμβων που δεν είναι τελευταίο παιδί” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική $N_{ddu} + 1$ και μέσω της ψ στη στατιστική $p + 1$ όπου $p(\alpha)$ ο αριθμός των uu στο α στα οποία η δεύτερη άνοδος δεν είναι μεμονωμένη.

Η απόδειξη της πρώτης ισοκατανομής (δηλαδή μέσω της ϕ) είναι ανάλογη με την απόδειξη της δεύτερης ισοκατανομής του 10, ενώ για την απόδειξη της δεύτερης ισοκατανομής (δηλαδή μέσω της ψ) χρησιμοποιείται η δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) - 1 + [\text{το τελευταίο παιδί της ρίζας του } T_1 \text{ είναι εσωτερικός κόμβος}] \\ &= p(\psi(T_1)) + 1 + p(\psi(T_2)) + 1 - 1 + [\psi(T_1) \text{ όχι πρώτο}] \\ &= p(\psi(T)) + 1. \end{aligned}$$

12. Η στατιστική q : “αριθμός φύλλων που είναι πρώτο παιδί” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική “ $N_{udd} + |\text{αρχίζει με } ud|$ ” και μέσω της ψ στη στατιστική “ $N_{udd} + |\text{τελειώνει με } ud|$ ”. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \oplus T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + |T_1 = 0| - |T_2 = 0| \\ &= N_{udd}(\phi(T_1)) + |\phi(T_1) \text{ αρχίζει με } ud| + N_{udd}(\phi(T_2)) + |\phi(T_2) \text{ αρχίζει με } ud| \\ &\quad + |\phi(T_1) = \epsilon| - |\phi(T_2) = ud\phi(T_2')| \\ &= N_{udd}(\phi(T_1)) + |\phi(T_1) \text{ αρχίζει με } ud| + N_{udd}(\phi(T_2)) + |\phi(T_1) = \epsilon| \\ &= N_{udd}(\phi(T)) + |\phi(T) \text{ αρχίζει με } ud|. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + |T_1 = 0||T_2 = 0| \\ &= N_{udd}(\psi(T_1)) + |\psi(T_1) \text{ τελειώνει με } ud| + N_{udd}(\psi(T_2)) + |\psi(T_2) \text{ τελειώνει με } ud| \\ &\quad + |\psi(T_1) = \epsilon||\psi(T_2) = \epsilon| \\ &= N_{udd}(\psi(T_1)) + |\psi(T_1) \text{ τελειώνει με } ud| + N_{udd}(\psi(T_2)) + |\psi(T_1) = \epsilon||\psi(T_2) = \epsilon| \\ &= N_{udd}(\psi(T)) + |\psi(T) \text{ τελειώνει με } ud|. \end{aligned}$$

13. Η στατιστική q : “αριθμός φύλλων που είναι τελευταίο παιδί” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική $N_{udd} + |\text{τελειώνει με } ud|$ και μέσω της ψ στη στατιστική “ $p + |\text{πρώτο}|$ ” όπου $p(\alpha)$ είναι ο αριθμός των κλάσεων συγγένειας των μη μεμονωμένων ανόδων του α .

Η απόδειξη της πρώτης ισοκατανομής (δηλαδή μέσω της ϕ) είναι ανάλογη με την απόδειξη της δεύτερης ισοκατανομής του 12, ενώ για την απόδειξη της δεύτερης ισοκατανομής (δηλαδή μέσω της ψ) χρησιμοποιείται η δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \oplus T_2$, οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + |T_2 = 0| - |T_1 = T_1' \otimes 0| \\ &= p(\psi(T_1)) + |\psi(T_1) \text{ πρώτο}| + p(\psi(T_2)) + |\psi(T_2) \text{ πρώτο}| + |\psi(T_2) = \epsilon| - |\psi(T_1) \text{ πρώτο}| \\ &= p(\psi(T_1)) + p(\psi(T_2)) + |\psi(T_2) \text{ πρώτο}| + |\psi(T) \text{ πρώτο}| \\ &= p(\psi(T)) + |\psi(T) \text{ πρώτο}|. \end{aligned}$$

14. Η στατιστική q : “αριθμός φύλλων που δεν είναι πρώτο παιδί” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική N_{dud} και μέσω της ψ στη στατιστική p : “αριθμός uu όπου η πρώτη άνοδος δεν έχει δεξιά της συγγενική άνοδο”.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \oplus T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_2 = 0 \oplus T_2'] \\ &= N_{dud}(\phi(T_1)) + N_{dud}(\phi(T_2)) + [\phi(T_2) = ud\phi(T_2')] \\ &= N_{dud}(\phi(T_1)) + N_{dud}(\phi(T_2)) + [\phi(T_2) \text{ αρχίζει με } ud] \\ &= N_{dud}(\phi(T)). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 \neq 0][T_2 = 0] \\ &= p(\psi(T_1)) + p(\psi(T_2)) + [\psi(T_1) \neq \epsilon][\psi(T_2) = \epsilon] \\ &= p(\psi(T)). \end{aligned}$$

15. Η στατιστική q : “αριθμός φύλλων που δεν είναι τελευταίο παιδί” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική N_{udu} και μέσω της ψ στη στατιστική p : “αριθμός uu όπου η δεύτερη άνοδος είναι μεμονωμένη”.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \oplus T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 = 0][T_2 \neq 0] \\ &= N_{udu}(\phi(T_1)) + N_{udu}(\phi(T_2)) + [\phi(T_1) = \epsilon][\phi(T_2) \neq \epsilon] \\ &= N_{udu}(\phi(T)). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 = T_1' \otimes 0] \\ &= p(\psi(T_1)) + p(\psi(T_2)) + [\psi(T_1) = u\psi(T_1')d] \\ &= p(\psi(T_1)) + p(\psi(T_2)) + [\psi(T_1) \text{ πρώτο}] \\ &= p(\psi(T)). \end{aligned}$$

16. Η στατιστική q : “αριθμός κόμβων βαθμού 1” μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική p : “αριθμός μεμονωμένων ανόδων” και μέσω της ψ στη στατιστική $N_{dud} + [\text{αρχίζει από } ud]$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \oplus T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_2 = 0] - [T_2 = T_2' \oplus 0] \\ &= p(\phi(T_1)) + p(\phi(T_2)) + [\phi(T_2) = \epsilon] - [\phi(T_2) = u\phi(T_2')d] \\ &= p(\phi(T_1)) + p(\phi(T_2)) + [\phi(T_2) = \epsilon] - [\phi(T_2) \text{ πρώτο}] \\ &= p(\phi(T)). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \circledR T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 = 0] - [T_1 = 0 \circledR T_1'] \\
 &= N_{dud}(\psi(T_1)) + |\psi(T_1) \text{ αρχίζει με } ud| + N_{dud}(\psi(T_2)) + |\psi(T_2) \text{ αρχίζει με } ud| \\
 &\quad + |\psi(T_1) = \epsilon| - |\psi(T_1) = ud\psi(T_1')| \\
 &= N_{dud}(\psi(T_1)) + N_{dud}(\psi(T_2)) + |\psi(T_2) \text{ αρχίζει με } ud| + |\psi(T) \text{ αρχίζει με } ud| \\
 &= N_{dud}(\psi(T)) + |\psi(T) \text{ αρχίζει με } ud| \\
 &= \bar{N}_{dud}(\psi(T)).
 \end{aligned}$$

Η απόδειξη του 17 είναι ανάλογη με την απόδειξη του 16.

18. Η στατιστική q : “αριθμός κόμβων βαθμού τουλάχιστον r μεταφέρεται μέσω της ϕ στη στατιστική p : “αριθμός κλάσεων συγγένειας με τουλάχιστον r ανόδους” και μέσω της ψ στη στατιστική $N_{u^r d}$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \circledL T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + |\eta \text{ ρίζα του } T_2 \text{ έχει βαθμό } r-1| \\
 &= p(\phi(T_1)) + p(\phi(T_2)) + |\phi(T_2) \text{ έχει } r-1 \text{ πρώτες συνιστώσες}| \\
 &= p(\phi(T)).
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \circledR T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + |\eta \text{ ρίζα του } T_1 \text{ έχει βαθμό } r-1| \\
 &= p(\psi(T_1)) + p(\psi(T_2)) + |\mu\text{ήκος της πρώτης ανάβασης του } \psi(T_1) \text{ είναι } r-1| \\
 &= p(\psi(T)).
 \end{aligned}$$

19. Η στατιστική q : “αριθμός μονοπατιών μήκους μ τα οποία αποτελούνται από κόμβους με βαθμό 1” μεταφέρεται μέσω της ϕ στη στατιστική p : “αριθμός $u^{\mu+1}$ με όλες τις ανόδους μεμονωμένες” και μέσω της ψ στην στατιστική $\bar{N}_{d(ud)^{\mu+1}}$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \circledL T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_2 = 0][T_1 = \underbrace{((\dots (T_1' \circledL 0 \circledL \dots) \circledL 0) \circledL 0)}_{\mu \text{ φορές}}] \\
 &\quad - [T_2 = \underbrace{((\dots (T_2' \circledL 0 \circledL \dots) \circledL 0) \circledL 0)}_{\mu+1 \text{ φορές}}] \\
 &= p(\phi(T_1)) + p(\phi(T_2)) + |\phi(T_2) = \epsilon| |\phi(T_1) = u^\mu \phi(T_1') d^\mu| - |\phi(T_2) = u^{\mu+1} \phi(T_2') d^{\mu+1}| \\
 &= p(\phi(T)).
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 = 0][T_2 = \underbrace{(0_{\mathbb{R}} (0_{\mathbb{R}} (\dots (0_{\mathbb{R}} T_2'') \dots)))}_{\mu \text{ φορές}})] \\
 &\quad - [T_1 = \underbrace{(0_{\mathbb{R}} (0_{\mathbb{R}} (\dots (0_{\mathbb{R}} T_2'') \dots)))}_{\mu + 1 \text{ φορές}})] \\
 &= N_{d(ud)^{\mu+1}} \psi(T_1) + [\psi(T_1) \text{ αρχίζει με } (ud)^{\mu+1}] + N_{d(ud)^{\mu+1}} \psi(T_2) + [\psi(T_2) \text{ αρχίζει με } (ud)^{\mu+1}] \\
 &\quad + |\psi(T_1) = \epsilon| [\psi(T_2) = (ud)^{\mu} \psi(T_1')] - [\psi(T_1) = (ud)^{\mu+1} \psi(T_1')] \\
 &= N_{d(ud)^{\mu+1}} (\psi(T)) + |\psi(T) \text{ αρχίζει με } (ud)^{\mu+1}| \\
 &= \overline{N}_{d(ud)^{\mu+1}} (\psi(T))
 \end{aligned}$$

20. Η στατιστική q : “αριθμός κόμβων βαθμού 2 που το πρώτο τους παιδί είναι φύλλο” μεταφέρεται μέσω της ϕ στη στατιστική p : “αριθμός udu που οι ανοδοί του δεν είναι συγγενικές με άλλες ανόδους” και μέσω της ψ στη στατιστική \overline{N}_{duudd} .

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 = 0][T_2 = T_2' \otimes 0] - [T_2 = 0 \otimes (T_2'' \otimes 0)] \\
 &= p(\phi(T_1)) + p(\phi(T_2)) + [\phi(T_1) = \epsilon][\phi(T_2) = u\phi(T_2')d] - [\phi(T_1) = udu\phi(T_2'')d] \\
 &= p(\phi(T)).
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 = 0 \otimes 0] - [T_1 = (0 \otimes 0) \otimes T_1'] \\
 &= N_{duudd}(\psi(T_1)) + |\psi(T_1) \text{ αρχίζει με } uudd| + N_{duudd}(\psi(T_2)) + |\psi(T_2) \text{ αρχίζει με } uudd| \\
 &\quad + |\psi(T_1) = ud| - |\psi(T_1) = uudd\psi(T_1')| \\
 &= N_{duudd}(\psi(T)) + |\psi(T) \text{ αρχίζει με } uudd| \\
 &= \overline{N}_{duudd}(\psi(T)).
 \end{aligned}$$

21. Η στατιστική q : “αριθμός κόμβων βαθμού τουλάχιστον 2 που το πρώτο τους παιδί δεν είναι φύλλο” μεταφέρεται μέσω της ϕ στη στατιστική p : “αριθμός ui όπου η πρώτη άνοδος έχει συγγενικές ανόδους δεξιά αλλά όχι αριστερά” και μέσω της ψ στη στατιστική N_{uudu} .

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 \neq 0][T_2 \neq 0] - [T_2 = T_2' \otimes T_2'' \text{ και } T_2', T_2'' \neq 0] \\
 &= p(\phi(T_1)) + p(\phi(T_2)) + [\phi(T_1) \neq \epsilon][\phi(T_2) \neq \epsilon] \\
 &\quad - [\phi(T_2) = u\phi(T_2')d\phi(T_2'') \text{ και } \phi(T_2'), \phi(T_2'') \neq \epsilon] \\
 &= p(\phi(T)).
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \otimes T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 = 0 \otimes T_1'] [T_1' \neq 0] \\
 &= N_{uudu}(\psi(T_1)) + N_{uudu}(\psi(T_2)) + |\psi(T_1) = ud\psi(T_1')| |\psi(T_1') \neq \epsilon| \\
 &= N_{uudu}(\psi(T_1)) + N_{uudu}(\psi(T_2)) + |\psi(T_1) \text{ αρχίζει με } udu| \\
 &= N_{uudu}(\psi(T)).
 \end{aligned}$$

22. Η στατιστική q : "αριθμός κόμβων βαθμού τουλάχιστον 2 που το πρώτο τους παιδί είναι φύλλο" μέσω της ϕ μεταφέρεται στη στατιστική " $N_{udu} + |\text{αρχίζει με } udu|$ " και μέσω της ψ στη στατιστική N_{udd} .

Πράγματι, χρησιμοποιώντας της αριστερή διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \circledast T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 = 0][T_2 \neq 0] - [T_2 = 0][T_1' \neq 0] \\ &= N_{udu}(\phi(T_1)) + |\phi(T_1) \text{ αρχίζει με } udu| + N_{udu}(\phi(T_2)) - |\phi(T_2) \text{ αρχίζει με } udu| \\ &\quad + |\phi(T_1) = \epsilon| |\phi(T_2) \neq \epsilon| + |\phi(T_2) = udu| |\phi(T_1') \neq \epsilon| \\ &\equiv N_{udu}(u\phi(T_1)d) + N_{udu}(\phi(T_2)) + |\phi(T_2) \text{ αρχίζει με } udu| - |\phi(T_2) \text{ αρχίζει με } udu| \\ &\quad + |\phi(T_1) = \epsilon| |\phi(T_2) \neq \epsilon| \\ &= N_{udu}(\psi(T)) + |\phi(T) \text{ αρχίζει με } udu|. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη δεξιά διάσπαση των διατεταγμένων δένδρων $T = T_1 \circledast T_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q(T) &= q(T_1) + q(T_2) + [T_1 = 1] \\ &= N_{udd}(\psi(T_1)) + N_{udd}(\psi(T_2)) + |\psi(T_1) = ud| \\ &= N_{udd}(\psi(T)). \end{aligned}$$

Παρατήρηση Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτουν ορισμένες νέες ισοκατανομές στατιστικών που ορίζονται από πρότυπα σε μονοπάτια Dyck και στατιστικών που συνδέονται με την έννοια της συγγένειας. Για παράδειγμα, η στατιστική "αριθμός εμφανίσεων των διπλών ανόδων όπου η δεύτερη άνοδος είναι μεμονωμένη" είναι ισοκατανεμημένη με τη στατιστική "αριθμός εμφανίσεων του προτύπου udu " και η στατιστική "αριθμός των κλάσεων συγγένειας με τουλάχιστον r ανόδους" είναι ισοκατανεμημένη με τη στατιστική "αριθμός εμφανίσεων του προτύπου $u^r d$ ".

4.4 Διατεταγμένα δένδρα και ενδοδιάταξη

Όπως ήδη έχει λεχθεί, η ακολουθία βαθμών ενός διατεταγμένου δένδρου ως προς την προδιάταξη ή μεταδιάταξη ή διάταξη κατά επίπεδα, καθορίζει το δένδρο μονοσήμαντα. Τούτο όμως δεν συμβαίνει και για την ακολουθία βαθμών του δένδρου ως προς την ενδοδιάταξη. Είναι δηλαδή δυνατόν δύο ή περισσότερα διατεταγμένα δένδρα να έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών ως προς την ενδοδιάταξη.

Η κατασκευή και απαρίθμηση του συνόλου όλων των διατεταγμένων δένδρων με συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών ως προς την ενδοδιάταξη επιτυγχάνεται στην επόμενη παράγραφο.

Για το σκοπό αυτό θα μελετηθούν σε αυτή την παράγραφο ορισμένα χαρακτηριστικά των διατεταγμένων δένδρων που σχετίζονται με την ενδοδιάταξη του δένδρου και παρουσιάζουν γενικότερο ενδιαφέρον.

Πιο συγκεκριμένα θα δοθούν δύο καινούργιες διασπάσεις των διατεταγμένων δένδρων και θα μελετηθούν ορισμένες παράμετροι των διατεταγμένων δένδρων που σχετίζονται με αυτές.

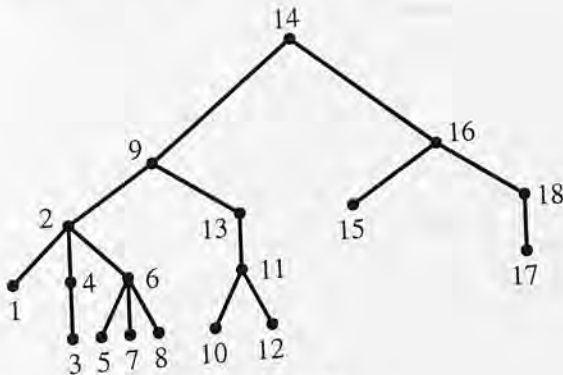
Αρχικά θα δοθούν ορισμένοι βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα.

Για κάθε $T \in \mathcal{T}$ θα συμβολίζεται με m_T ο αριστερότερος κόμβος του T , δηλαδή ο ελάχιστος κόμβος του T ως προς την ενδοδιάταξη. Προφανώς αν το δένδρο T είναι μη κενό τότε ο κόμβος m_T είναι ένα φύλλο και επομένως διαφορετικός της ρίζας r_T . Στην περίπτωση αυτή $d(m_T) = 0$ οπότε, όπως έχει ήδη αναφερθεί, θα αγνοείται το πρώτο μηδενικό (που αντιστοιχεί στο m_T) όταν γράφουμε την ακολουθία βαθμών $d(T)$ του δένδρου T ως προς την ενδοδιάταξη.

Ο γονέας του m_T θα συμβολίζεται με z_T . Αν $d(z_T) \geq 2$ θα συμβολίζεται με M_T το δεξιότερο παιδί του z_T .

Το αριστερό⁶ μονοπάτι ενός δένδρου T είναι το μονοπάτι που ενώνει τη ρίζα του δένδρου με το m_T . Το μήκος του αριστερού μονοπατιού του T θα σημειώνεται με $l(T)$.

Στο δένδρο T του επόμενου σχήματος, όπου οι κόμβοι του είναι αριθμημένοι σύμφωνα με την ενδοδιάταξη, οι κόμβοι m_T , z_T και M_T αντιστοιχούν στους κόμβους με αριθμούς 1, 2 και 6 αντίστοιχα.



Σχήμα 4.2:

Η ακολουθία βαθμών $d(T)$ ως προς την ενδοδιάταξη είναι

$$d(T) = (3, 0, 1, 0, 3, 0, 0, 2, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 2, 0, 1).$$

Επιπλέον $l(T) = 3$ επειδή το αριστερό μονοπάτι του T περιέχει τους κόμβους αριθμημένους με 14, 9, 2, 1.

Τέλος πρέπει να τονισθεί ότι αν και τα υποδένδρα του T τα οποία έχουν ρίζες τους κόμβους με αριθμούς 13 και 16 δεν είναι ισόμορφα, έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών $(2, 0, 1)$ ως προς την ενδοδιάταξη.

Στα επόμενα θα σημειώνεται με \mathcal{T}^* (αντ. \mathcal{T}_n^*) το σύνολο όλων των μη κενών (αντ. μεγέθους n) διατεταγμένων δένδρων T με $l(T) = 1$, δηλαδή με $r_T = z_T$.

Είναι προφανές ότι κάθε δένδρο στο \mathcal{T}_n^* προκύπτει από ένα μοναδικό δένδρο του \mathcal{T}_{n-1} δια προσθέσεως ενός αριστερότερου παιδιού στη ρίζα του, οπότε ισχύει ότι $|\mathcal{T}_n^*| = C_{n-1}$.

Στη συνέχεια ορίζουμε μια διμελή πράξη \otimes στο \mathcal{T} ως εξής: Αν $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ τότε το διατεταγμένο δένδρο $T_1 \otimes T_2$ προκύπτει δια προσαρτήσεως του δένδρου T_1 στο m_{T_2} (και διατηρώντας τις διατάξεις των δένδρων T_1, T_2). Με άλλα λόγια το δένδρο $T_1 \otimes T_2$ προκύπτει δια προσαρτήσεως των υποδένδρων της ρίζας του T_1 στο T_2 θεωρώντας τα ως υποδένδρα του m_{T_2} .

Στο επόμενο σχήμα δίδονται τα δένδρα $T_1 \otimes T_2$ και $T_2 \otimes T_1$ για δύο δένδρα $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$.

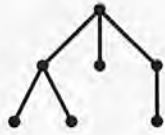
Είναι προφανές ότι η πράξη αυτή είναι προσεταιριστική αλλά όχι αντιμεταθετική και για $T_1, \bar{T}_1 \in \mathcal{T}^*$ ισχύει ότι

$$T_1 \otimes T_2 = \bar{T}_1 \otimes \bar{T}_2 \Leftrightarrow T_1 = \bar{T}_1 \text{ και } T_2 = \bar{T}_2.$$

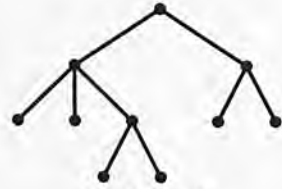
Επιπλέον ισχύει ότι η ακολουθία βαθμών του $T_1 \otimes T_2$ ως προς την ενδοδιάταξη ισούται με τη σύζευξη των ακολουθιών βαθμών των T_1, T_2 δηλαδή $d(T) = d(T_1)d(T_2)$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε μη κενό δένδρο T διασπάται μονοσήμαντα στη μορφή $T = T_1 \otimes T_2$ όπου $T_1 \in \mathcal{T}^*$ και $T_2 \in \mathcal{T}$ (βλ. Σχήμα 4.3(α)). Για παράδειγμα στο δένδρο T του Σχήματος 4.2,

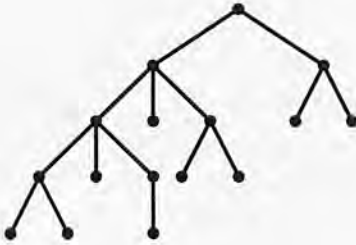
⁶Ανάλογα το δεξιό μονοπάτι ενός δένδρου είναι το μονοπάτι που ενώνει τη ρίζα του με το δεξιότερο κόμβο του δένδρου.



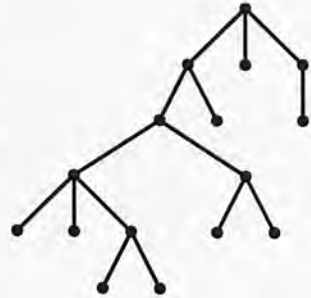
Το δένδρο T_1



Το δένδρο T_2



Το δένδρο $T_1 \otimes T_2$



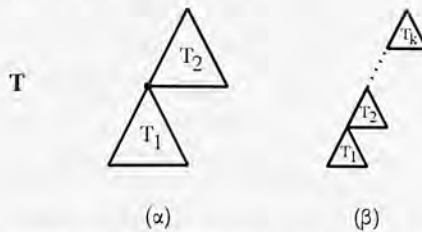
Το δένδρο $T_2 \otimes T_1$

T_1 είναι το υποδένδρο με ρίζα το z_T (αριθμημένο με 2) και το T_2 το δένδρο που προκύπτει από το T αν διαγράψουμε από αυτό όλους τους κόμβους T_1 εκτός του z_T .

Χρησιμοποιώντας αυτή τη διάσπαση αναδρομικά, μπορούμε να εκφράσουμε μονοσήμαντα κάθε μη κενό δένδρο $T \in \mathcal{T}$ στη μορφή

$$T = T_1 \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes T_k,$$

όπου $k \in \mathbb{N}^*$ και $T_i \in \mathcal{T}^*$, $i \in [k]$ (βλ. Σχήμα 4.3(β))



Σχήμα 4.3: Η διάσπαση με βάση την πράξη \otimes

Τα δένδρα T_i , $i \in [k]$ ονομάζονται \mathcal{T}^* -συνιστώσες (ή απλά συνιστώσες) του T .

Για παράδειγμα το δένδρο T του Σχήματος 4.2 αναλύεται σε τρεις συνιστώσες οι οποίες έχουν ρίζες τους κόμβους αριθμημένους με 2, 9 και 14. Συγκεκριμένα ισχύει ότι $T = T_1 \otimes T_2 \otimes T_3$ όπου τα T_1, T_2, T_3 είναι τα δένδρα του \mathcal{T}^* που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα

Στη συνέχεια θα δοθεί μια λεπτότερη διάσπαση του συνόλου \mathcal{T} του διατεταγμένων δένδρων.



Αρχικά παρατηρούμε ότι κάθε μη κενό δένδρο γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω μορφές:

$$1 \otimes T \text{ ή } T^* \otimes T$$

όπου $T \in \mathcal{T}$ και $T^* = \mathcal{T}^* \setminus \{1\}$.

Τα δένδρα της πρώτης κατηγορίας είναι πολύ απλά ενώ τα δένδρα της δεύτερης κατηγορίας μπορούν να αναλυθούν περαιτέρω.

Αν T' (αντ. T'_n) είναι το σύνολο των δένδρων (αντ. μήκους n) της δεύτερης κατηγορίας τότε είναι προφανές ότι αυτό αποτελείται από όλα τα $T \in \mathcal{T}$ (αντ. $T \in \mathcal{T}_n$) με $d(z_T) \geq 2$.

Επιπλέον ισχύει ότι

$$|T'_n| = C_n - C_{n-1} \text{ και } T'_n \subseteq \mathcal{T}_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$.

Προκειμένου να δοθεί μια διάσπαση για τα δένδρα του T' θα χρησιμοποιηθεί η πράξη \circledast που ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Είναι προφανές ότι η πράξη αυτή δεν είναι προσεταιριστική ούτε αντιμεταθετική, $1 = 0 \circledast 0$ και για $T_1 \neq 0$ ισχύει ότι

$$T_1 \circledast T_2 \in T^* \text{ αν και μόνο αν } T_1 \in T^*.$$

Επιπλέον, αν $T_1 \in T^*$ τότε η ακολουθία βαθμών του δένδρου $T_1 \circledast T_2$ ως προς την ενδοδιάταξη είναι:

$$d(T_1 \circledast T_2) = (d'_1 + 1, d'_2, \dots, d'_\mu, 0, d''_1, d''_2, \dots, d''_\nu) \quad (4.1)$$

όπου $d(T_1) = (d'_1, d'_2, \dots, d'_\mu)$ και $d(T_2) = (d''_1, d''_2, \dots, d''_\nu)$. (Σημειώνουμε ότι το μηδενικό στοιχείο που εμφανίζεται στη σχέση (4.1) αντιστοιχεί στο βαθμό του αριστερότερου κόμβου του δένδρου T_2 , το οποίο όπως έχει ήδη λεχθεί δεν αναγράφεται στην ακολουθία $d(T_2)$.)

Συνδυάζοντας τις διασπάσεις των δένδρων που βασίζονται στις πράξεις \otimes και \circledast (βλ. Σχήμα 4.3(α) και Σχήμα 4.3(β)) προκύπτει, στην επόμενη πρόταση, η γενική διάσπαση των δένδρων του συνόλου T' (βλ. Σχήμα 4.4(α)).

Πρόταση 4.4.1. Κάθε δένδρο $T \in T'$ μπορεί να γραφεί μονοσήμαντα στη μορφή

$$T = (T_1 \circledast T_2) \otimes T_3$$

όπου $T_1 \in T^*$ και $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$.

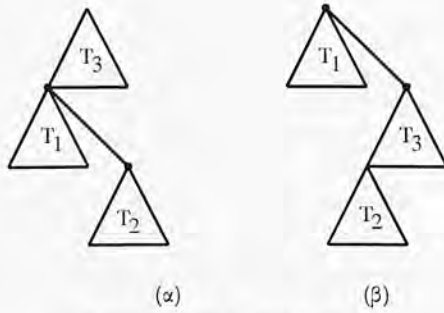
Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι για τον καθορισμό όλων των δένδρων του T' με συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών ως προς την ενδοδιάταξη, αρκεί να περιοριστούμε σε δένδρα του T^* .

Πράγματι, αν $T = (T_1 \circledast T_2) \otimes T_3 \in T'$ τότε το δένδρο $T^* = T_1 \circledast (T_2 \otimes T_3)$ (βλ. Σχήμα 4.4(β)) ανήκει στο T^* (αφού σύμφωνα με την Πρόταση 4.4.1 ισχύει ότι $T_1 \in T^*$) και $d(T^*) = d(T)$ ⁷.

Κατόπιν τούτων ενδιαφέρον παρουσιάζει ο καθορισμός του συνόλου

$$\mathcal{T}(R) = \{T \in T' : T^* = R\}$$

⁷ Προκύπτει εύκολα από τη σχέση (4.1).



Σχήμα 4.4: Τα δένδρα T και T^*

για δοσμένα $R \in \mathcal{T}^*$.

Τούτο επιτυγχάνεται στην επόμενη πρόταση, η απόδειξη της οποίας προκύπτει εύκολα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πράξεων \otimes και \mathbb{R} .

Πρόταση 4.4.2. Για κάθε $R \in \mathcal{T}^*$ με $s(R) \geq 2$ ισχύει ότι

$$\mathcal{T}(R) = \{(R_1 \mathbb{R} (T_0 \otimes T_1 \otimes \cdots \otimes T_i)) \otimes (T_{i+1} \otimes T_{i+2} \otimes \cdots \otimes T_k) : 0 \leq i \leq k\},$$

όπου $R = R_1 \mathbb{R} R_2$, $R_1 \in \mathcal{T}^*$, $R_2 \in \mathcal{T}$, $T_0 = 0$ και T_i , $i \in [k]$, είναι οι συνιστώσες του δένδρου R .

Σχηματικά, για το επόμενο δένδρο R



το σύνολο $\mathcal{T}(R)$ περιέχει όλα τα δένδρα της μορφής:

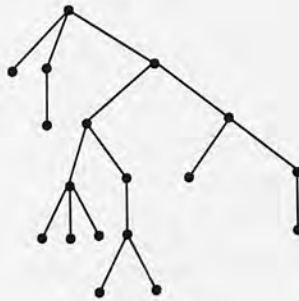
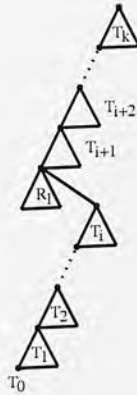
Για παράδειγμα, για το επόμενο δένδρο R
το σύνολο $\mathcal{T}(R)$ θα αποτελείται από τα δένδρα του Σχήματος 4.5.

Ορισμένες στατιστικές των συνόλων \mathcal{T} , \mathcal{T}^*

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου θα απαριθμηθούν τα σύνολα \mathcal{T} και \mathcal{T}^* ως προς ορισμένες παραμέτρους που προκύπτουν από τις έννοιες που μελετήθηκαν στα προηγούμενα.

1. Στο σύνολο \mathcal{T} θεωρούμε τις παραμέτρους μήκος s , αριθμός c των συνιστωσών του δένδρου, βαθμός δ του z_T και τη γεννήτρια συνάρτηση $F = F(x, y, t)$ του \mathcal{T} που προκύπτει από αυτές, δηλαδή

$$F(x, y, t) = \sum_{T \in \mathcal{T}} x^{s(T)} y^{c(T)} t^{\delta(T)}.$$



Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση κάθε μη κενού δένδρου $T = T_1 \otimes T_2$ όπου $T_1 \in \mathcal{T}^*$ και $T_2 \in \mathcal{T}$ προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} s(T) &= s(\widetilde{T}_1) + s(T_2) + 1 \\ c(T) &= c(T_2) + 1 \end{aligned}$$

και

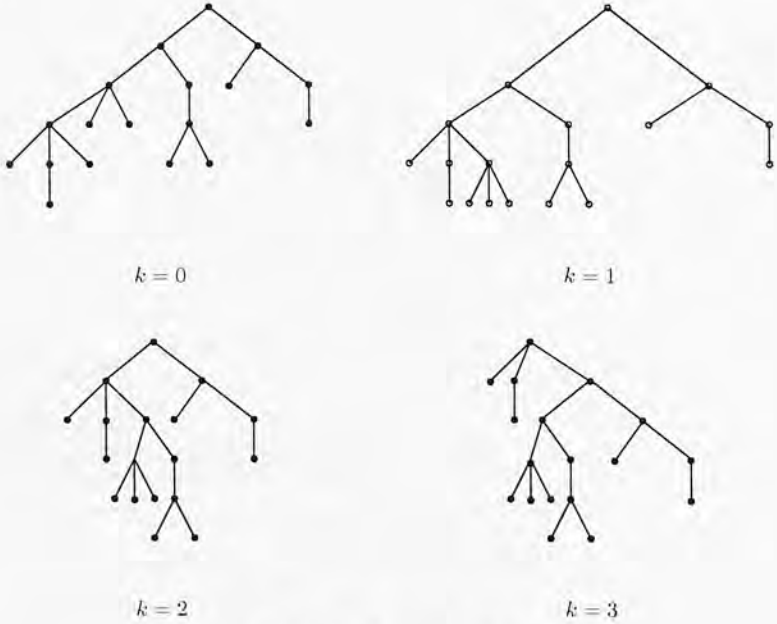
$$\delta(T) = r(\widetilde{T}_1) + 1$$

όπου \widetilde{T}_1 είναι το δένδρο που προκύπτει από το T_1 με τη διαγραφή του κόμβου m_{T_1} , και r η παράμετρος που ορίζεται από το βαθμό της ρίζας. Η παράμετρος r έχει μελετηθεί αρχικά από τους Dershowitz και Zaks [34] και στη συνέχεια από τον Deutsch [40] και είναι γνωστό ότι η γεννήτρια συνάρτηση $F_r = F_r(x, y)$ του \mathcal{T} ως προς τις παραμέτρους s και r , δηλαδή η

$$F_r(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}} x^{s(T)} y^{r(T)}$$

δίδεται από τον τύπο

$$F_r(x, y) = \frac{1}{1 - xyC(x)}$$



Σχήμα 4.5: Το σύνολο $\mathcal{T}(R)$

με συντελεστές

$$[x^n y^k] F_r = \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n}.$$

Κατόπιν τούτων είναι

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 1 + \sum_{\tilde{T}_1, T_2 \in \mathcal{T}} x^{s(\tilde{T}_1) + s(T_2) + 1} y^{c(T_2) + 1} t^{r(\tilde{T}_1) + 1} \\ &= 1 + xy t \left(\sum_{\tilde{T}_1 \in \mathcal{T}} x^{s(\tilde{T}_1)} t^{r(\tilde{T}_1)} \right) \left(\sum_{T_2 \in \mathcal{T}} x^{s(T_2)} y^{c(T_2)} \right) \\ &= 1 + xy t F_r(x, t) F_c(x, y) \end{aligned} \quad (4.2)$$

όπου $F_c = F_c(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του \mathcal{T} ως προς τις παραμέτρους s και c . Αν τεθεί $t = 1$ στη σχέση (4.2) προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις

$$\begin{aligned} F(x, y, 1) &= 1 + xy F_r(x, 1) F_c(x, y) \\ F_c(x, y) &= 1 + xy C(x) F_c(x, y) \\ F_c(x, y) &= \frac{1}{1 - xy C(x)}. \end{aligned}$$

Αν τεθεί $y = 1$ στη σχέση (4.2) προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις

$$\begin{aligned} F(x, 1, t) &= 1 + xtF_r(x, t)F_c(x, 1) \\ F_\delta(x, t) &= 1 + \frac{xt}{1 - xtC(x)}C(x) \\ F_\delta(x, t) &= \frac{1}{1 - xyC(x)} \end{aligned}$$

όπου $F_\delta = F_\delta(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του \mathcal{T} ως προς τις παραμέτρους s και F . Κατόπιν τούτων οι παράμετροι c, δ, r είναι ισοκατανεμημένες και ισχύει η σχέση

$$F(x, y, t) = 1 + \frac{xyt}{(1 - xyC(x))(1 - xtC(x))}. \quad (4.3)$$

Από τη σχέση αυτή, χρησιμοποιώντας τον τύπο που δίνει τους συντελεστές των δυνάμεων του $C(x)$ (βλ. Κεφάλαιο 1, σελ. 13) προκύπτουν εύκολα οι συντελεστές της γεννήτριας συνάρτησης F με τη βοήθεια των αριθμών ψηφοφορίας $b_{n,s}$

Πρόταση 4.4.3. Ο αριθμός $a_{n,k,\lambda}$ όλων των δένδρων $T \in \mathcal{T}_n$ που έχουν k συνιστώσες και βαθμό του z_T ίσο με λ δίδεται από τον τύπο

$$a_{n,k,\lambda} = \sum_{\nu=k-1}^{n-\lambda} b_{\nu-k+1,k-1} b_{n-\lambda-\nu,\lambda-1}$$

όπου $k + \lambda \leq n + 1$ και $k, \lambda \geq 2$.

Σημειώνουμε τις παρακάτω ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις:

$$a_{n,k,1} = a_{n,1,k} = b_{n-k,k-1}.$$

2. Στο σύνολο \mathcal{T}^* θεωρούμε τις παραμέτρους s, p, δ όπου $p(R) = |T(R)|$, για κάθε $R \in \mathcal{T}^*$ και τη γεννήτρια συνάρτηση $G = G(x, y, t)$ του \mathcal{T}^* που προκύπτει από αυτές, δηλαδή

$$G(x, y, t) = \sum_{R \in \mathcal{T}^*} x^{s(R)} y^{p(R)} t^{\delta(R)}.$$

Προκειμένου να υπολογισθεί ο τύπος της γεννήτριας συνάρτησης G θα χρησιμοποιηθεί η απεικόνιση $\chi: \mathcal{T}^* \rightarrow \mathcal{T}$ με $\chi(1) = 0$ και

$$\chi(R_1 \oplus R_2) = R_1 \otimes R_2$$

ή σχηματικά



όπου $R_1 \in \mathcal{T}^*$ και $R_2 \in \mathcal{T}$.

Εύκολα προκύπτει ότι η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη και ισχύουν οι σχέσεις:

$$s(\chi(R)) = s(R) - 1, c(\chi(R)) = p(R) \text{ και } \delta(\chi(R)) = \delta(R) - 1$$

για κάθε $R \in \mathcal{T}^* \setminus \{1\}$.

Κατόπιν τούτων ο τύπος της γεννήτριας συνάρτησης G προκύπτει με τη βοήθεια του τύπου (4.3) της γεννήτριας συνάρτησης F .

Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= xt + \sum_{R \in \mathcal{T}^* \setminus \{1\}} x^{s(\chi(R))} y^{c(\chi(R))} t^{\delta(\chi(R))+1} \\ &= xt + xt \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus \{0\}} x^{s(T)} y^{c(T)} t^{\delta(T)} \\ &= xtF(x, y, t) \\ &= xt + \frac{x^2 yt^2}{(1 - xyC(x))(1 - xtC(x))}. \end{aligned}$$

4.5 Διατεταγμένα δένδρα με συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών

Στο πρώτο αποτέλεσμα της παραγράφου αυτής συνοψίζονται οι κυριότερες ιδιότητες της ακολουθίας βαθμών των διατεταγμένων δένδρων ως προς την ενδοδιάταξη.

Πρόταση 4.5.1. Για κάθε δένδρο $T \in \mathcal{T}_n$, η ακολουθία βαθμών⁸ $d(T) = (d_i)_{i \in [n]}$ του δένδρου είναι κυρίαρχη και ισχύει ότι

$$d_i \geq 2 \implies d_{i+1} = 0, \text{ για κάθε } i \in [n-1]. \quad (4.4)$$

Απόδειξη. Θα αποδειχθεί επαγωγικά ως προς n .

Για $n = 1$ το συμπέρασμα της πρότασης ισχύει διότι $T = 1$.

Για $n \geq 2$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $d_1 = 1$ τότε $T = 1 \otimes T'$, όπου $T' \in \mathcal{T}_{n-1}$ και $d(T') = (d_{i+1})_{i \in [n-1]}$. Επειδή λόγω της υπόθεσης της επαγωγής η ακολουθία $d(T')$ είναι κυρίαρχη και ικανοποιεί την ιδιότητα (4.4), έπεται ότι και η ακολουθία $d(T)$ θα είναι κυρίαρχη και θα ικανοποιεί επίσης την ιδιότητα (4.4).
2. Αν $d_1 \geq 2$, δηλαδή $T \in \mathcal{T}'_n$ τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε⁹ ότι $T \in \mathcal{T}'_n$, οπότε υπάρχουν δένδρα $T_1 \in \mathcal{T}^*$ και $T_2 \in \mathcal{T}$ με $T = T_1 \oplus T_2$. Επειδή $s(T) = s(T_1) + s(T_2) + 1$ έπεται ότι $s(T_1) < n$ και $s(T_2) < n$ οπότε εφαρμόζοντας την υπόθεση της επαγωγής για τα δένδρα T_1, T_2 προκύπτει ότι οι ακολουθίες $d(T_1), d(T_2)$ είναι κυρίαρχες και ικανοποιούν την ιδιότητα (4.4).

Κατόπιν τούτων εύκολα προκύπτει με τη βοήθεια της σχέσης (4.1) ότι και η ακολουθία $d(T)$ είναι κυρίαρχη και ικανοποιεί την ιδιότητα (4.4)

□

⁸Ως προς την ενδοδιάταξη

⁹Αφού, όπως έχει ήδη λεχθεί στην προηγούμενη παράγραφο για κάθε $T \in \mathcal{T}'_n$ υπάρχει ένα δένδρο $T^* \in \mathcal{T}'_n$ με $d(T) = d(T^*)$.

Σημειώνεται ότι οι κυρίαρχες ακολουθίες που ικανοποιούν την ιδιότητα (4.4) κωδικοποιούν ακριβώς τα μονοπάτια Dyck που αποφεύγουν το πρότυπο $uudu$.

Αν $\widehat{\mathcal{D}}$ είναι το σύνολο των μονοπατιών Dyck που αποφεύγουν το πρότυπο $uudu$ τότε ισχύει ότι¹⁰

$$|\{\alpha \in \widehat{\mathcal{D}} : l(\alpha) = n\}| = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j}{n-j} \binom{n-j}{j} \binom{2n-3j}{n-j+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Στη συνέχεια θα μελετηθεί η σχέση των διατεταγμένων δένδρων και των μονοπατιών Dyck, μέσω της ενδοδιάταξης.

Για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ ορίζουμε $\mathcal{T}(\alpha)$ (αντ. $\mathcal{T}^*(\alpha)$) το σύνολο όλων των δένδρων $T \in \mathcal{T}$ (αντ. \mathcal{T}^*) με $d(T) = d(\alpha)$.

Προφανώς $\mathcal{T}(\epsilon) = \{0\}$ και $\mathcal{T}(ud) = \{1\}$. Επιπλέον, σύμφωνα με τα προηγούμενα ισχύει ότι

$$\mathcal{T}(\alpha) \neq \emptyset \text{ αν και μόνο αν } \alpha \in \widehat{\mathcal{D}}.$$

Πρόταση 4.5.2. Έστω $\alpha = u\beta d\gamma \in \widehat{\mathcal{D}}$ όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$. Τότε, για $\beta = \epsilon$ και $\gamma \neq \epsilon$ ισχύει ότι

$$\mathcal{T}(\alpha) = \{1 \otimes T : T \in \mathcal{T}(\gamma)\} \quad (4.5)$$

ενώ για $\beta \neq \epsilon$ ισχύει ότι

$$\mathcal{T}^*(\alpha) = \{T_1 \otimes T_2 : T_1 \in \mathcal{T}^*(\beta) \text{ και } T_2 \in \mathcal{T}(\gamma)\} \quad (4.6)$$

και

$$\mathcal{T}(\alpha) = \bigcup \{(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 : T_1 \in \mathcal{T}^*(\beta), T_2 \in \mathcal{T}(\delta) \text{ και } T_3 \in \mathcal{T}(\gamma \setminus \delta)\} \quad (4.7)$$

όπου η ένωση λαμβάνεται πάνω σε όλα τα $\delta \in \mathcal{D}$ που είναι αριστεροί παράγοντες του γ και $\gamma \setminus \delta$ είναι ο δεξιός παράγοντας του γ που συμπληρώνει το δ .

Απόδειξη. Αρχικά υποτίθεται ότι $\beta = \epsilon$, οπότε $\alpha = ud\gamma$ και $d(\alpha) = 1d(\gamma)$. Τότε όμως η ακολουθία βαθμών $d(S)$ κάθε δένδρου $S \in \mathcal{T}(\alpha)$ αρχίζει με 1 οπότε θα υπάρχει $T \in \mathcal{T}$ με $S = 1 \otimes T$.

Κατόπιν τούτων θα ισχύει ότι

$$1d(T) = d(S) = d(\alpha) = 1d(\gamma)$$

και επομένως $d(T) = d(\gamma)$ και $T \in \mathcal{T}(\gamma)$.

Άρα ισχύει η ισότητα (4.5).

Στη συνέχεια υποτίθεται ότι $\beta \neq \epsilon$.

Επειδή κάθε δένδρο $T \in \mathcal{T}^*$ γράφεται μονοσήμαντα στην μορφή $T = T_1 \otimes T_2$, όπου $T_1 \in \mathcal{T}^*$ και $T_2 \in \mathcal{T}$, προκύπτει εύκολα από τη σχέση (4.1) ότι

$$\begin{aligned} T \in \mathcal{T}^*(\alpha) &\Leftrightarrow d(T) = d(\alpha) \\ &\Leftrightarrow d(T_1) = d(\beta) \text{ και } d(T_2) = d(\gamma) \\ &\Leftrightarrow T_1 \in \mathcal{T}^*(\beta) \text{ και } T_2 \in \mathcal{T}(\gamma) \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η ισότητα (4.6).

Για την απόδειξη της ισότητας (4.7) θεωρούμε $T \in \mathcal{T}(\alpha)$. Αφού $\beta \neq \epsilon$, προκύπτει ότι $T \in \mathcal{T}'$ οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.4.1 θα υπάρχουν $T_1 \in \mathcal{T}^*$ και $T_2, T_3 \in \mathcal{T}$ με $T = (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3$.

¹⁰Βλ. το πρότυπο $uudu$, σελ. 68.

Αν τεθεί $T^* = T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3)$, επειδή $T^* \in \mathcal{T}^*$ και $d(T^*) = d(T) = d(\alpha)$ έπεται ότι $T \in \mathcal{T}^*(\alpha)$. Τότε από την ισότητα (4.6) προκύπτει ότι

$$T_1 \in \mathcal{T}^*(\beta) \text{ και } T_2 \otimes T_3 \in \mathcal{T}(\gamma).$$

Επιπλέον επειδή η ακολουθία $d(\gamma) = d(T_2 \otimes T_3)$ είναι η σύζευξη των ακολουθιών $d(T_2)$ και $d(T_3)$ οι οποίες σύμφωνα με την Πρόταση (4.5.1) είναι κυρίαρχες, προκύπτει ότι θα υπάρχει $\delta \in \mathcal{D}$, αριστερός παράγοντας του γ , με $d(\delta) = d(T_2)$ και $d(\gamma \setminus \delta) = d(T_3)$.

Άρα κάθε $T \in \mathcal{T}(\alpha)$ ανήκει στην παραπάνω ένωση¹¹ και επειδή το αντίστροφο προφανώς επίσης ισχύει, έπεται ότι η ισότητα είναι αληθής. \square

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου θα ασχοληθούμε με την απαρίθμηση των συνόλων $\mathcal{T}(\alpha)$ και $\mathcal{T}^*(\alpha)$.

Για το σκοπό αυτό ορίζουμε τις απεικονίσεις f, g στο \mathcal{D} με

$$f(\alpha) = |\mathcal{T}(\alpha)| \text{ και } g(\alpha) = |\mathcal{T}^*(\alpha)|.$$

Είναι προφανές ότι $f(\epsilon) = 1$, $f(\pi_1) = g(\pi_1) = 1$ και $f(\alpha) > 0$ (αντ. $g(\alpha) > 0$) αν και μόνο αν $\alpha \in \bar{\mathcal{D}}$ (αντ. $\alpha \in \bar{\mathcal{D}}$ και $\alpha \neq u\delta\gamma$ για κάθε $\gamma \in \bar{\mathcal{D}} \setminus \{\epsilon\}$).

Επιπλέον, από την Πρόταση 4.5.2 προκύπτουν οι ισότητες

$$f(u\delta\gamma) = f(\gamma)$$

και

$$g(u\beta d\gamma) = g(\beta)f(\gamma), \quad f(u\beta d\gamma) = g(\beta)f^2(\gamma) \quad (4.8)$$

για κάθε $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$ με $\beta \neq \epsilon$ όπου $f^2(\gamma) = \sum_{\delta} f(\delta)f(\gamma \setminus \delta)$ με $\delta \in \mathcal{D}$, αριστερό παράγοντα του γ .

Ειδικά, αν α είναι ένα πρώτο μονοπάτι Dyck, τότε από τις παραπάνω ισότητες

$$f(\alpha) = g(\alpha) = g(\beta) \quad (4.9)$$

όταν $\alpha = u\beta d$.

Επιπλέον, επειδή κάθε πρώτο μονοπάτι Dyck α γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις μορφές:

$$\alpha = \pi_\nu \text{ ή } \alpha = u^\mu \pi_\nu \beta_1 d \beta_2 d \cdots \beta_\mu d$$

όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$, $\beta_i \in \mathcal{D}$ για κάθε $i \in [\mu]$ και $\beta_1 \neq \epsilon$, προκύπτει επαγωγικά ο τύπος

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \alpha = \pi_\nu \\ f(\beta_1)f(\beta_2) \cdots f(\beta_\mu), & \text{αν } \alpha = u^\mu \pi_\nu \beta_1 d \beta_2 d \cdots \beta_\mu d \end{cases} \quad (4.10)$$

για κάθε πρώτο μονοπάτι Dyck α .

Πράγματι, η επαγωγή θα γίνει ως προς το ημιμήκος n του μονοπατιού Dyck.

Αν $n = 1$ τότε $\alpha = \pi_1$ και ο τύπος (4.10) ισχύει αφού $f(\pi_1) = 1$.

Υποθέτουμε ότι $n \geq 2$ και ο τύπος (4.10) ισχύει για κάθε πρώτο μονοπάτι Dyck ημιμήκους μικρότερου του n και θα αποδειχθεί για το πρώτο μονοπάτι Dyck α με $l(\alpha) = n$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

¹¹Της ισότητας (4.7).

¹²Δηλαδή f^2 είναι η συνέλιξη $f \circ f$. Υπενθυμίζουμε ότι για δύο συναρτήσεις $f, g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνέλιξη ορίζεται ως εξής:

$$(f \circ g)(\alpha) = \sum f(\delta)g(\alpha \setminus \delta)$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται πάνω σε όλα τα $\delta \in \mathcal{D}$ που είναι αριστεροί παράγοντες του α .

1. Αν $\alpha = \pi_n$ τότε από τη σχέση (4.9) και την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι

$$f(\alpha) = f(u\pi_{n-1}d) = g(\pi_{n-1}) = f(\pi_{n-1}) = 1.$$

2. Αν $\alpha = u^\mu \pi_\nu \beta_1 d \beta_2 d \cdots \beta_\mu d$, τότε διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

i. Αν $\mu = 1$ τότε από τις σχέσεις (4.9) και την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι

$$f(\alpha) = f(u\pi_\nu \beta_1 d) = g(\pi_\nu \beta_1) = g(\pi_{\nu-1})f(\beta_1) = f(\pi_{\nu-1})f(\beta_1) = f(\beta_1).$$

ii. Αν $\mu \geq 2$ τότε από τις σχέσεις (4.8) και (4.9) και την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(u^\mu \pi_\nu \beta_1 d \beta_2 d \cdots \beta_{\mu-1} d \beta_\mu d) \\ &= g(u^{\mu-1} \pi_\nu \beta_1 d \beta_2 d \cdots \beta_{\mu-1} d \beta_\mu) \\ &= g(u^{\mu-2} \pi_\nu \beta_1 d \beta_2 d \cdots \beta_{\mu-1})f(\beta_\mu) \\ &= f(u^{\mu-1} \pi_\nu \beta_1 d \beta_2 d \cdots \beta_{\mu-1} d)f(\beta_\mu) \\ &= f(\beta_1)f(\beta_2) \cdots f(\beta_{\mu-1})f(\beta_\mu). \end{aligned}$$

Στα επόμενα, θα υπολογισθεί η τιμή της απεικόνισης f για οποιοδήποτε $\alpha \in \mathcal{D}$, χρησιμοποιώντας τις πρώτες συνιστώσες του.

Για το σκοπό αυτό συμβολίζουμε με α' το μονοπάτι Dyck που προκύπτει από το α αντικαθιστώντας κάθε μη τετριμμένη¹³ πρώτη συνιστώσα του α με την πυραμίδα π_2 .

Για παράδειγμα, αν $\alpha = u u d u d d u d u d u u d d u d u d d u u d d u d$ τότε $\alpha' = \pi_2 \pi_1^2 \pi_2^2 \pi_1$.

Πρόταση 4.5.3. Για κάθε μη κενό μονοπάτι Dyck $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k$ όπου $\alpha_i, i \in [k]$, είναι οι πρώτες συνιστώσες του, ισχύει ότι

$$f(\alpha) = f(\alpha')f(\alpha_1)f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_k). \quad (4.11)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά ως προς τον αριθμό k των πρώτων συνιστωσών του μονοπατιού Dyck.

Προφανώς αν $k = 1$, δηλαδή $\alpha = \alpha_1$ πρώτο μονοπάτι τότε $\alpha' = \pi_1$ ή $\alpha' = \pi_2$, οπότε $f(\alpha') = 1$ και η ισότητα (4.11) ισχύει.

Αν υποθέσει ότι $k \geq 2$ και η ισότητα (4.11) ισχύει για κάθε μονοπάτι Dyck που αναλύεται σε λιγότερες από k συνιστώσες θα αποδειχθεί για το μονοπάτι Dyck $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k$.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τις επόμενες δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\alpha_1 = \pi_1$ τότε είναι

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(\alpha_2 \cdots \alpha_k) \\ &= f((\alpha_2 \cdots \alpha_k)')f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_k) \\ &= f(\alpha_1(\alpha_2 \cdots \alpha_k)')f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_k) \\ &= f(\alpha')f(\alpha_1)f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_k). \end{aligned}$$

¹³ Δηλαδή διάφορη του π_1 .

2. Αν $\alpha_1 \neq \pi_1$ τότε είναι:

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= f(\alpha_1)f^2(\alpha_2 \cdots \alpha_k) \\
 &= f(\alpha_1)(2f(\alpha_2 \cdots \alpha_k) + \sum_{\lambda=2}^{k-1} f(\alpha_2 \cdots \alpha_\lambda)f(\alpha_{\lambda+1} \cdots \alpha_k)) \\
 &= f(\alpha_1)(2f((\alpha_2 \cdots \alpha_k)')f(\alpha_2)f(\alpha_3) \cdots f(\alpha_k)) \\
 &\quad + \sum_{\lambda=2}^{k-1} f((\alpha_2 \cdots \alpha_\lambda)')f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_\lambda)f((\alpha_{\lambda+1} \cdots \alpha_k)')f(\alpha_{\lambda+1}) \cdots f(\alpha_k) \\
 &= \left(2f(\alpha'_2 \cdots \alpha'_k) + \sum_{\lambda=2}^{k-1} f(\alpha'_2 \cdots \alpha'_\lambda)f(\alpha'_{\lambda+1} \cdots \alpha_k) \right) f(\alpha_1)f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_k) \\
 &= f^2(\alpha'_2 \cdots \alpha'_k)f(\alpha_1)f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_k) \\
 &= f(\alpha')f(\alpha_1)f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_k).
 \end{aligned}$$

□

Λαμβάνοντας υπόψιν τους τύπους (4.10) και (4.11) προκύπτει ότι για να υπολογισθεί αναδρομικά η απεικόνιση f αρκεί να καθορισθούν οι τιμές $f(\alpha')$, για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$.

Με άλλα λόγια αρκεί να υπολογισθεί ο τύπος του περιορισμού της απεικόνισης στο σύνολο \mathcal{D}' των μονοπατιών Fibonacci (δηλαδή στο σύνολο των μονοπατιών Dyck των οποίων οι πρώτες συνιστώσες ισούνται με π_1 ή π_2).

Είναι προφανές ότι η οικογένεια $\mathcal{T}(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{D}'$ είναι μια διαμέριση του συνόλου όλων των $\{0, 1, 2\}$ -δένδρων. Τα δένδρα αυτά έχουν μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς (βλ. τις εργασίες των Deutsch και Shapiro [43], Donaghey [45], [46] και Klarner [73]) και είναι γνωστό ότι απαριθμούνται από τους αριθμούς Motzkin.

Για κάθε μονοπάτι $\gamma \in \mathcal{D}'$ ισχύουν οι ισότητες:

$$f(\pi_1\gamma) = f(\gamma), \quad f(\pi_2\gamma) = f^2(\gamma) \quad \text{και} \quad f(\gamma\pi_1) = f(\gamma\pi_2). \quad (4.12)$$

Πράγματι, από τις σχέσεις (4.8) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 f(\pi_1\gamma) &= f(ud\gamma) = f(\gamma), \\
 f(\pi_2\gamma) &= f(u(ud)\gamma) = g(ud)f^2(\gamma) = f^2(\gamma).
 \end{aligned}$$

Η τρίτη ισότητα του (4.12) προκύπτει επαγωγικά ως προς το ημιμήκος n του μονοπατιού γ .

Προφανώς αν $n = 0$ ισχύει, αφού $f(\pi_1) = f(\pi_2) = 1$.

Αν υποθέσει ότι η ζητούμενη ισότητα ισχύει για κάθε μονοπάτι στο \mathcal{D}' με ημιμήκος μικρότερο του n θα αποδειχθεί και για το μονοπάτι $\gamma \in \mathcal{D}'$ με $l(\gamma) = n$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\gamma = \pi_1\delta$, όπου $\delta \in \{\epsilon\} \cup \mathcal{D}'$, τότε από τους τύπους (4.8) προκύπτει ότι

$$f(\gamma\pi_1) = f(\pi_1\delta\pi_1) = f(\delta\pi_1) = f(\delta\pi_2) = f(\pi_1\delta\pi_2) = f(\gamma\pi_2).$$

2. Αν $\gamma = \pi_2 \delta$, όπου $\delta \in \{\epsilon\} \cup D'$, τότε από τους τύπους (4.8) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 f(\gamma \pi_1) &= f(\pi_2 \delta \pi_1) = f(u(ud)d\delta \pi_1) = g(ud)f^2(\delta \pi_1) \\
 &= \sum_{\substack{\beta \in D' \\ \beta \text{ αριστερός παράγοντας του } \delta \pi_1}} f(\beta)f(\beta \setminus (\delta \pi_1)) \\
 &= \sum_{\substack{\beta \in D' \\ \beta \text{ αριστερός παράγοντας του } \delta}} f(\beta)f((\beta \setminus \delta)\pi_2) + f(\delta \pi_1)f(\epsilon) \\
 &= \sum_{\substack{\beta \in D' \\ \beta \text{ αριστερός παράγοντας του } \delta}} f(\beta)f((\beta \setminus \delta)\pi_2) + f(\delta \pi_2)f(\epsilon) \\
 &= \sum_{\substack{\beta \in D' \\ \beta \text{ αριστερός παράγοντας του } \delta \pi_2}} f(\beta)f(\beta \setminus (\delta)\pi_2) \\
 &= g(ud)f^2(\delta \pi_2) = f(u(ud)d\delta \pi_2) = f(\pi_2)\delta \pi_1 = f(\gamma \pi_2).
 \end{aligned}$$

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι επειδή το $\mathcal{T}(\pi_2^\nu)$ είναι το σύνολο όλων των πλήρων δυαδικών δένδρων με 2ν κορυφές προκύπτει ότι $f(\pi_2^\nu) = C_\nu$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Στο επόμενο αποτέλεσμα δίδεται ο τύπος της απεικόνισης f στο D' .

Πρόταση 4.5.4. Για την απεικόνιση f ισχύουν οι ισότητες:

$$(i) f(\pi_2^\nu \pi_1 \gamma) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} C_\lambda f(\pi_2^{\nu-\lambda} \gamma), \text{ όπου } \gamma \in D' \text{ και } \nu \in \mathbb{N}.$$

$$(ii) f(\pi_2^{\nu_1} \pi_1 \pi_2^{\nu_2} \pi_1 \cdots \pi_1 \pi_2^{\nu_\rho}) = \sum_{i=1}^{\rho} \prod_{i=1}^{\rho} C_{\lambda_i}, \quad \nu_i \in \mathbb{N}, i \in [\rho], \rho \geq 2,$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται στο σύνολο όλων των μη αρνητικών ακολουθιών $(\lambda_i)_{i \in [\rho]}$ οι οποίες κυριαρχούνται από την ακολουθία $(\nu_i)_{i \in [\rho]}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη της ισότητας (i) θα γίνει με επαγωγή ως προς ν .

Προφανώς ισχύει όταν $\nu = 0$.

Αν $\nu \geq 1$ και υποθεθεί ότι η ισότητα (i) ισχύει για κάθε $\lambda < \nu$ θα αποδειχθεί για το ν .

Αν $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k$ τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 f(\pi_2^\nu \pi_1 \gamma) &= f^2(\pi_2^{\nu-1} \pi_1 \gamma) \\
 &= 2f(\pi_2^{\nu-1} \pi_1 \gamma) + \sum_{i=1}^{\nu-1} f(\pi_2^i) f(\pi_2^{\nu-1-i} \pi_1 \gamma) + f(\pi_2^{\nu-1} \pi_1) f(\gamma) + \\
 &\quad \sum_{\rho=1}^{k-1} f(\pi_2^{\nu-1} \pi_1 \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_\rho) f(\gamma_{\rho+1} \gamma_{\rho+2} \cdots \gamma_k) \\
 &= 2 \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} C_\lambda f(\pi_2^{\nu-1-\lambda} \gamma) + \sum_{i=1}^{\nu-1} C_i \sum_{\lambda=0}^{\nu-i-1} C_\lambda f(\pi_2^{\nu-i-1-\lambda} \gamma) + C_\nu f(\gamma) + \\
 &\quad \sum_{\rho=1}^{k-1} \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} C_\lambda f(\pi_2^{\nu-1-\lambda} \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_\rho) f(\gamma_{\rho+1} \gamma_{\rho+2} \cdots \gamma_k) \\
 &= C_\nu f(\gamma) + 2 \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} C_\lambda f(\pi_2^{\nu-1-\lambda} \gamma) + \sum_{\lambda=0}^{\nu-2} \sum_{i=1}^{\nu-\lambda-1} C_i C_\lambda f(\pi_2^{\nu-\lambda-1-i} \gamma) + \\
 &\quad \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \sum_{\rho=1}^{k-1} C_\lambda f(\pi_2^{\nu-1-\lambda} \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_\rho) f(\gamma_{\rho+1} \gamma_{\rho+2} \cdots \gamma_k) \\
 &= C_\nu f(\gamma) + C_{\nu-1} f^2(\gamma) + \sum_{\lambda=0}^{\nu-2} C_\lambda f^2(\pi_2^{\nu-1-\lambda} \gamma) \\
 &= C_\nu f(\gamma) + C_{\nu-1} f(\pi_2 \gamma) + \sum_{\lambda=0}^{\nu-2} C_\lambda f(\pi_2^{-\lambda} \gamma) \\
 &= \sum_{\lambda=0}^{\nu} C_\lambda f(\pi_2^{-\lambda} \gamma).
 \end{aligned}$$

Η απόδειξη της ισότητας (ii) θα γίνει με επαγωγή ως προς το ρ . Για $\rho = 2$ από τη σχέση (i) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 f(\pi_2^{\nu_1} \pi_1 \pi_2^{\nu_2}) &= \sum_{\lambda_1=0}^{\nu_1} C_{\lambda_1} f(\pi_2^{\nu_1+\nu_2-\lambda_1}) \\
 &= \sum_{\lambda_1=0}^{\nu_1} C_{\lambda_1} C_{\nu_1+\nu_2-\lambda_1} \\
 &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0} C_{\lambda_1} C_{\lambda_2}
 \end{aligned}$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται ως προς όλες τις ακολουθίες λ_1, λ_2 που κυριαρχούνται από την ακολουθία ν_1, ν_2 .

Αν υποθεθεί ότι $\rho \geq 3$ και η σχέση (ii) ισχύει για το $\rho - 1$ θα αποδειχθεί ότι ισχύει και για το ρ .

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την σχέση (i) και την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f(\pi_2^{\nu_1} \pi_1 \pi_2^{\nu_2} \dots \pi_1 \pi_2^{\nu_\rho}) &= \sum_{\lambda_1=1}^{\nu_1} C_{\lambda_1} f(\pi_2^{\nu_1+\nu_2-\lambda_1} \pi_1 \pi_2^{\nu_3} \dots \pi_1 \pi_2^{\nu_\rho}) \\ &= \sum_{\lambda_1=1}^{\nu_1} C_{\lambda_1} \sum_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ i \in [2, \rho]}} \prod_{i=2}^{\rho} C_{\lambda_i} \end{aligned}$$

όπου η ακολουθία $(\lambda_i)_{i \in [2, \rho]}$ κυριαρχείται από την ακολουθία $\nu_1 + \nu_2 - \lambda_1, \nu_3, \dots, \nu_\rho$, οπότε τελικά προκύπτει ότι

$$f(\pi_2^{\nu_1} \pi_1 \pi_2^{\nu_2} \pi_1 \dots \pi_2^{\nu_\rho}) = \sum_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ i \in [2, \rho]}} \prod_{i=1}^{\rho} C_{\lambda_i}$$

όπου η ακολουθία $(\lambda_i)_{i \in [2, \rho]}$ κυριαρχείται από την ακολουθία $(\nu_i)_{i \in [2, \rho]}$. □

Εφαρμογή

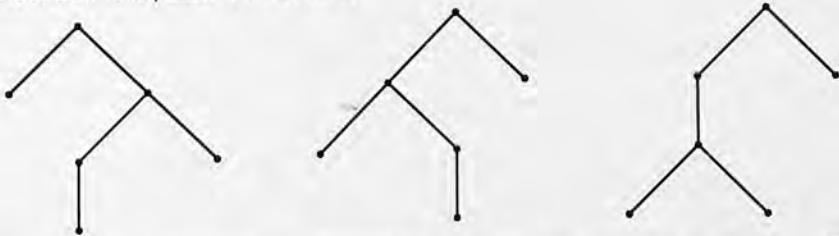
Αν τεθεί $\rho = 2$, $\nu_1 = \mu - 1$ και $\nu_2 = k - \mu$ στη σχέση (ii) της Πρότασης 4.5.4, όπου $\mu, k \in \mathbb{N}^*$ με $\mu \leq k$, προκύπτει ότι το πλήθος όλων των $\{0, 1, 2\}$ -δένδρων με $2k$ κόμβους από τις οποίες μόνο ο 2μ -οστός (ως προς την ενδοδιάταξη) έχει βαθμό 1, ισούται με

$$\begin{aligned} f(\pi_2^{\mu-1} \pi_1 \pi_2^{k-\mu}) &= \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 \leq \mu-1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = k-1}} C_{\lambda_1} C_{\lambda_2} \\ &= \sum_{\lambda_1=0}^{\mu-1} C_{\lambda_1} C_{k-1-\lambda_1} \\ &= \frac{1}{2} C_k + \frac{2\mu - k}{2k(k+1)} \binom{2\mu}{\mu} \binom{2k-2\mu}{k-\mu}. \end{aligned}$$

Έτσι για $k = 3$ και $\mu = 2$ προκύπτει ότι το πλήθος των αντίστοιχων $\{0, 1, 2\}$ -δένδρων ισούται με

$$\frac{1}{2} C_3 + \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 3(3+1)} \binom{2 \cdot 2}{2} \binom{2 \cdot 3 - 2 \cdot 2}{3-2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

Αυτά είναι τα παρακάτω $\{0, 1, 2\}$ -δένδρα:



Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό του αθροίσματος $\sum_{\alpha \in \mathcal{D}'(k, \mu)} f(\alpha)$,

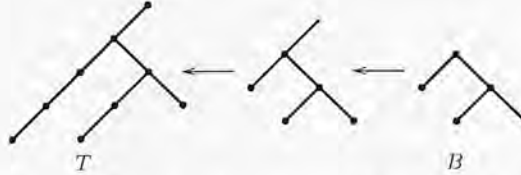
$k, \mu \in \mathbb{N}^*$, $\mu \leq k$, όπου $\mathcal{D}'(k, \mu)$ είναι το σύνολο όλων των μονοπατιών Fibonacci με k πρώτες συνιστώσες, εκ των οποίων ακριβώς μ είναι τετριμμένες.

¹⁴Βλ. Κεφάλαιο 1, σελ. 14, σχέση (1.8).

Ένας αλγεβρικός υπολογισμός χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.5.4 μοιάζει αρκετά πολύπλοκος. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιηθεί μια συνδυαστική προσέγγιση.

Είναι προφανές ότι στο σύνολο $T(\alpha)$, με $\alpha \in D'(k, \mu)$ αποτελείται από τα $\{0, 1, 2\}$ -δένδρα T με $2k - \mu + 1$ κόμβους εκ των οποίων ακριβώς μ έχουν βαθμό 1.

Παρατηρούμε ότι κάθε τέτοιο δένδρο T παράγεται από ένα μοναδικό πλήρες δυαδικό δένδρο B με $2(k - \mu) + 1$ κόμβους με πρόσθεση μ νέων κόμβων κατανομημένων¹⁵ στους δεσμούς του B όπως επίσης και σ' ένα υποθετικό δεσμό πάνω από τη ρίζα. Η διαδικασία αυτή αποτυπώνεται στο παράδειγμα του επόμενου σχήματος.



Επειδή ο αριθμός όλων των δυνατών τρόπων που μπορεί να γίνει αυτό είναι ίσος με τον αριθμό των επαναληπτικών συνδυασμών $\left[\binom{2(k-\mu)+1}{\mu} = \binom{2k-\mu}{\mu} \right]$ και ο αριθμός των πλήρων δυαδικών δένδρων με $2(k - \mu) + 1$ κόμβους ισούται με $C_{k-\mu}$, προκύπτει τελικά ότι

$$\sum_{\alpha \in D'(k, \mu)} f(\alpha) = \binom{2k - \mu}{\mu} C_{k-\mu} \quad (4.13)$$

Σημειώνουμε ότι ο αριθμός αυτός μετράει επίσης τα μονοπάτια Schröder ημιμήκους n με μ οριζόντια βήματα [15], όπως επίσης και των αριθμό των διατεταγμένων δένδρων με κυκλωμένους κόμβους τα οποία έχουν $k - 1$ κόμβους από τους οποίους μ είναι κυκλωμένοι [74].

Τέλος, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.13), προκύπτει¹⁶ ότι ο αριθμός όλων των $\{0, 1, 2\}$ -δένδρων με k εσωτερικούς κόμβους ισούται με τον k -οστό (μεγάλο) αριθμό Schröder (A006318 στο [124]).

¹⁵ Σε κάθε δεσμό μπορούν να τοποθετηθούν περισσότεροι από ένας νέοι κόμβοι, ή κανένας.

¹⁶ Βλ. Κεφάλαιο 1, σελ. 22, σχέση (1.29).

Κεφάλαιο 5

Λογισμικό

Στο κεφάλαιο αυτό δίδονται ορισμένες κατασκευές αντικειμένων που συνδέονται με τις έννοιες των προηγούμενων κεφαλαίων. Η ορθότητα των περισσότερων αλγορίθμων που υλοποιούνται στηρίζεται σε προτάσεις που έχουν ήδη αναφερθεί. Εντούτοις υπάρχουν και αλγόριθμοι οι οποίοι τεκμηριώνονται με καινούργιες ιδέες.

5.1 Λεξικογραφική κατασκευή των μονοπατιών Dyck

Τα μονοπάτια Dyck είναι γνωστό ότι μπορούν να κατασκευασθούν με πολλούς τρόπους (βλ. για παράδειγμα [26, 44, 52, 71, 104]). Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιηθεί η λεξικογραφική διάταξη των λέξεων Dyck για την κατασκευή των αντίστοιχων μονοπατιών.

Αν α, β είναι δύο ισομήκεις λέξεις Dyck τότε θα λέμε ότι η α προηγείται¹ της β (σύμφωνα με την λεξικογραφική διάταξη) αν $\alpha = \gamma d \delta$ και $\beta = \gamma u \delta'$, όπου $\gamma, \delta, \delta' \in \{u, d\}^*$.

Στο σύνολο των λέξεων ημιμήκους n η διάταξη αυτή είναι ολική με ελάχιστο στοιχείο την λέξη $(ud)^n$ και μέγιστο στοιχείο την λέξη $u^n d^n$. Επιπλέον αν $\alpha = \gamma d u^\mu d^\nu$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ τότε η λέξη $\beta = \gamma u d^{\nu-\mu+2} (ud)^{\mu-1}$ είναι η επόμενη σύμφωνα με τη διάταξη αυτή.

Πράγματι, αν υπάρχει μια λέξη Dyck w μεταξύ των α και β θα ισχύουν

$$\alpha = \gamma_1 d \delta_1, \quad w = \gamma_1 u \delta'_1 = \gamma_2 d \delta_2, \quad \beta = \gamma_2 u \delta'_2.$$

Τότε θα υπάρχει μια λέξη γ_3 με $\gamma_2 = \gamma_1 u \gamma_3$ ή $\gamma_1 = \gamma_2 d \gamma_3$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας² υποτίθεται ότι $\gamma_2 = \gamma_1 u \gamma_3$.

Τότε θα ισχύουν

$$\alpha = \gamma_1 d \delta_1, \quad w = \gamma_1 u \gamma_3 d \delta_2, \quad \beta = \gamma_1 u \gamma_3 u \delta'_2$$

οπότε $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_3 u \delta'_2 = d^{\nu-\mu+2} (ud)^{\mu-1}$, δηλαδή $\gamma_3 = d^{\nu-\mu+2} (ud)^k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.

Κατόπιν τούτων

$$w = \gamma u d^{\nu-\mu+2} (ud)^k d \delta_2.$$

Τούτο όμως είναι άτοπο, αφού $|\gamma u d^{\nu-\mu+2} (ud)^k d|_d = |\gamma u d^{\nu-\mu+2} (ud)^k d|_u + 1$.

Στα παραπάνω στηρίζεται η λεξικογραφική κατασκευή του συνόλου των λέξεων Dyck συγκεκριμένου μήκους. Συγκεκριμένα, ξεκινώντας από την ελάχιστη λέξη $(ud)^n$ ευρίσκουμε κάθε φορά την επόμενη μιας λέξης, ώπου να σαρώσουμε όλες τις λέξεις Dyck ημιμήκους n .

Πρακτικά, δεδομένου ενός μονοπατιού Dyck α το επόμενο μονοπάτι Dyck σύμφωνα με την λεξικογραφική διάταξη κατασκευάζεται μετατρέποντας την τελευταία κοιλιάδα του α σε κορυφή και

¹ Η ισοδύναμη β έπεται της α .

² Ανάλογα αποδεικνύεται και η άλλη περίπτωση.

³ Σύμφωνα με την έκφραση της β .

Ο συνολικός αριθμός των πράξεων που απαιτούνται για την κατασκευή του D_n είναι

$$\begin{aligned}
 A_n &= \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_n} (4p(\alpha) + 2) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{D}_n \\ p(\alpha)=i}} 4i + 2 \\
 &= \sum_{i=1}^n a_{n,i}(4i + 2) \\
 &= 4F'_n(1) + 2F_n(1)
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

όπου $F_n(y) = \sum_{i=1}^n a_{n,i}y^i$.

Προφανώς $F_n(1) = C_n$.

Επιπλέον, από τη σχέση (5.1) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{y=1} = \frac{C-1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n C_i x^n$$

οπότε $F'_n(1) = \sum_{i=1}^n C_i$.

Κατόπιν τούτων από τη σχέση (5.2) προκύπτει ότι

$$A_n = 4 \sum_{i=1}^n C_i + 2C_n.$$

Επιπλέον, επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{C_{n-1}} = 4$ εύκολα προκύπτει⁴ ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n-1}} = 4.$$

Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι η κατασκευή του D_n απαιτεί 4 φορές περισσότερο χρόνο από την κατασκευή του D_{n-1} , το οποίο επιβεβαιώνεται και πειραματικά.

5.2 Κατασκευή μεγιστικών αλυσίδων λέξεων Dyck

Σκοπός της παραγράφου αυτής είναι η κατασκευή μεγιστικών αλυσίδων του D_n από τριγωνικά tableaux Young μεγέθους $\binom{n}{2}$.

Επειδή, όπως προκύπτει από το Πρόσκιμα 2.6.2, ο ρυθμός αύξησης της ακολουθίας⁵ που δίνει τον αριθμό των μεγιστικών αλυσίδων του D_n τείνει πολύ γρήγορα⁶ στο άπειρο είναι ανέφικτη η αλγοριθμική κατασκευή του συνόλου όλων των μεγιστικών αλυσίδων του D_n .

Για το λόγο αυτό θα περιοριστούμε στην κατασκευή ενός προγράμματος στο οποίο η είσοδος θα είναι ένα τριγωνικό tableaux Young μεγέθους $\binom{n}{2}$ και έξοδος μια μεγιστική αλυσίδα του D_n . Τα τριγωνικά tableaux Young μπορούν να δίδονται από το χρήστη ή να παράγονται τυχαία με τη βοήθεια ενός συμπληρωματικού προγράμματος.

⁴Ως απλή εφαρμογή του λήμματος Stolz του Απειροστικού Λογισμού.

⁵Βλ. A005118 στο [124].

⁶Για παράδειγμα, για $n = 5$ υπάρχουν 768 μεγιστικές αλυσίδες, ενώ για $n = 6$ και $n = 7$ υπάρχουν 296864 και 1100742656 μεγιστικές αλυσίδες αντίστοιχα.

Στο κυρίως πρόγραμμα προτιμάται αντί της κωδικοποίησης των μονοπατιών Dyck με κυρίαρχες ακολουθίες (που χρησιμοποιήθηκε στην θεωρία της παραγράφου 2.6) η κωδικοποίησή τους με τη βοήθεια της ακολουθίας των ανόδων τους (όπως στην προηγούμενη παράγραφο).

Αρχικά κωδικοποιείται το δοσμένο tableau Young ως ένας πίνακας γραμμή K του οποίου το i -στό στοιχείο $K[i]$ δείχνει τη γραμμή όπου βρίσκεται ο αριθμός i στο tableau Young, για κάθε $i \in \binom{n}{2}$.

Στη συνέχεια κατασκευάζεται η ζητούμενη αλυσίδα (σε μορφή κωδικοποίησης ως προς την θέση των ανόδων) ως εξής:

Αρχικά, το μέγιστο μονοπάτι της αλυσίδας είναι η ακολουθία $1, 2, 3, \dots, n$. Αν υποθεθεί ότι έχει κατασκευασθεί το i -στό μονοπάτι της αλυσίδας, όπου $i \in [(\binom{n}{2}) - 1]$, τότε το επόμενο του προκύπτει από αυτό με πρόσθεσεως μιας μονάδας στο $(n + 1 - K[i])$ -στο στοιχείο του.

Για παράδειγμα, για το τριγωνικό tableau Young του παραδείγματος της σελίδας 82 με κωδικοποίηση

1	1	2	1	3	2	4	2	3	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

προκύπτει η αλυσίδα του παραδείγματος, τα μονοπάτια της οποίας είναι κωδικοποιημένα από τις ακολουθίες των ανόδων τους:

1, 2, 3, 4, 5
 1, 2, 3, 4, 6
 1, 2, 3, 4, 7
 1, 2, 3, 5, 7
 1, 2, 3, 5, 8
 1, 2, 4, 5, 8
 1, 2, 4, 6, 8
 1, 3, 4, 6, 8
 1, 3, 4, 7, 8
 1, 3, 5, 7, 8
 1, 3, 5, 7, 9

Κατόπιν τούτων προκύπτει το παρακάτω πρόγραμμα σε Java.

Κατασκευή μεγιστικών αλυσίδων από τριγωνικά tableaux Young

```

1 //
2 // Containers of tableaux.java
3 //
4 // 1. An algorithm to generate a random triangular Young tableaux of size n
5 //    = (n+1)/2.
6 // 2. An algorithm to generate a chain in the poset of Dyck paths ordered
7 //    by the partial dominance ordering from a triangular Young tableaux
8 // 3. An algorithm to encode a triangular Young tableaux as a sequence of
9 //    integers.
10 //
11 //
12 //
13 //
14 public class tableaux {

```

```

15 int[ ][ ] Table;
16
17 //max_size : the length of the first row = the number of rows;
18 public static int max_size(tableaux T){
19 return T.Table.length;
20 }
21
22 // size: the number of cells of T
23 public static int size(tableaux T){
24 int mikos_protis_grammis = max_size(T);
25 return mikos_protis_grammis*(mikos_protis_grammis+1)/2;
26 }
27
28 // creates an empty triangular tableau with n rows;
29 // For instance for n = 4 the following tableau is created
30 // 0 0 0 0 0
31 // 0 0 0 0
32 // 0 0 0
33 // 0 0
34 // 0
35 // as an array of arrays of decreasing length
36 public static tableaux create_empty(int n){
37 tableaux T = new tableaux();
38 int[ ][ ] Temp_Table = new int[n][ ];
39 for(int i = 0; i<=n-1; i++){ Temp_Table[i] = new int[n-i];}
40 T.Table = Temp_Table;
41 return T;
42 }
43
44 // creates a random triangular tableau by gradually filling an
45 // empty triangular tableau
46 // we start with an empty tableau
47 // firstly we put element 1 in the upper left cell (i.e. T.Table
48 // [0][0])
49 // every number is added to the tableau by
50 // computing the set of cells that can be filled with this number
51 // using the current filling and by choosing a random element of
52 // this set
53 public static tableaux random_fill(tableaux T){
54 // stoixeia_se_kathe_grammi : stores the number of elements
55 // in each row
56 int[] stoixeia_se_kathe_grammi = new int[max_size(T)];
57 // put 1 in the upper left cell
58 T.Table[0][0] = 1;
59 // row[0] has one element: 1
60 stoixeia_se_kathe_grammi[0] = 1;
61 // anoixtes-grammes : the number of rows that contain cells
62 // that can be filled by the next element
63 // in the beginning anoixtes-grammes = 2
64 // 1 X
65 // X
66 int anoixtes_grammes = 2;
67 // generator : random generator used to select a cell from
68 // the set of allowable cells
69 Random generator = new Random();

```

```

64 // element ; the next number to insert into T
65 // for every element find an allowable cell and place
66 // element in it
67 for(int element = 2; element <= size(T); element++){
68 // choose a row from the set of rows that contain cells
69 // that can be filled by the next element
70 // randomIndex = 0.. anoixtes_grammes-1
71 int randomIndex = generator.nextInt(anoixtes_grammes);
72 // find the randomIndex row that contain a cell that can be
73 // filled by the next element
74 // since some rows can be filled or do not contain cells
75 // that can be filled by the next element
76 // randomIndex does not (in general) correspond to the
77 // randomIndex row
78 // so we need to find the randomIndex-th free row from the
79 // available ones
80 // this row is the final value of j-1
81 int i = 0; int j = 0;
82 while(i<=randomIndex){
83 // There are two conditions for a row to satisfy in
84 // order to have available cells
85 // 1. stoixeia_se_kathe_grammi[j] <= row length (=
86 // max_size(T)-j-1 )
87 // 2. the previous row (if exists) must have more
88 // elements
89 if((stoixeia_se_kathe_grammi[j] <= max_size(T)-j-1
90 && (j==0 || stoixeia_se_kathe_grammi[j] <
91 stoixeia_se_kathe_grammi[Math.max(0,j-1)]))){
92 i++; j++;
93 }
94 } else{
95 j++;
96 }
97 }
98 // fill the cell [j-1][stoixeia_se_kathe_grammi[j-1]] with
99 // element:
100 T.Table[j-1][stoixeia_se_kathe_grammi[j-1]] = element;
101 // compute the new information about the rows that contain
102 // cells that can be filled by the next element:
103 // 1. increase by one stoixeia_se_kathe_grammi[j-1]
104 // 2. determine the number of anoixtes_grammes after the
105 // insertion of element:
106 // There are four cases:
107 // i. if the (j-1)-th row is full then anoixtes_grammes
108 // is reduced by one
109 // ii. if the (j-1)-th row has the same elements as the
110 // previous row (if exists) then anoixtes_grammes is
111 // reduced by one
112 // iii. if the (j-1)-th row is not the last row and it has
113 // free cells and the next j-th row has one element less
114 // then anoixtes_grammes is increased by one
115 // iv. if none of the above happens the anoixtes_grammes
116 // remains unchanged
117 stoixeia_se_kathe_grammi[j-1] = stoixeia_se_kathe_grammi[j
118 -1]+1;

```

```

98         || (stoixeia_se_kathe_grammi[j-1] == max.size(T)-(j-1) || (j
99             !=1 && stoixeia_se_kathe_grammi[j-1] ==
100             stoixeia_se_kathe_grammi[Math.max(0,j-2)]))){
101             anoixtes_grammes--;
102         }
103     }
104     return T;
105 }
106
107 // prints tableau T to screen (row by row)
108 public static void print(tableaux T){
109     for (int i = 0; i <= T.Table.length-1; i++) {
110         for (int j = 0; j <= T.Table[i].length-1; j++){
111             System.out.print(T.Table[i][j] + " ");
112         }
113         System.out.println();
114     }
115 }
116
117 // encodes a tableau as a sequence K such that
118 // K[i] = the row that contains i
119 // K[0] is not used, so K.length = size(T)+1;
120 public static int[] katanomi_stis_grammes(tableaux T){
121     int[] katanomi = new int[size(T)+1];
122     for (int i = 0; i <= T.Table.length-1; i++) {
123         for (int j = 0; j <= T.Table[i].length-1; j++){
124             katanomi[T.Table[i][j]] = i;
125         }
126     }
127     return katanomi;
128 }
129
130 // decodes the sequence K and returns the corresponding tableau
131 // the length of the first row which is needed for the creation of
132 // tableaux T
133 // is computed by counting the number of zeros in K
134 // the element i is placed in T by finding the first 0 (from the
135 // left) in row K[i]
136 public static tableaux decode_katanomi_stis_grammes(int[] katanomi)
137 {
138     int mikos_protis_grammis = 0;
139     for(int j = 1; j <= katanomi.length-1; j++){
140         if(katanomi[j] == 0){
141             mikos_protis_grammis++;
142         }
143     }
144     tableaux T = create_empty(mikos_protis_grammis);
145     for(int i = 1; i <= katanomi.length-1; i++){
146         for (int j = 0; j <= T.Table[katanomi[i]].length-1;
147             j++){

```

```

145         if (T.Table[katanomi[i]][j] == 0){
146             T.Table[katanomi[i]][j] = i;
147             break;
148         }
149     }
150 }
151 return T;
152 }
153
154
155
156 // copies an array into another array:
157 public static int[] copy_sequence(int[] seq){
158     int[] copy = new int[seq.length];
159     for (int i=0; i<=seq.length-1; i++){
160         copy[i] = seq[i];
161     }
162     return copy;
163 }
164
165 // finds a chain of Dyck paths that corresponds to a tableau T
166 // the chain is computed from the maximum element to the minimum
167 public static int[][] find_chain(tableaux T){
168     // dyck_chain : the chain of dyck paths
169     int[][] dyck_chain = new int[size(T)+1][];
170     // dyck : used to temporarily store the elements of the
171     // chain
172     int[] dyck = new int[max_size(T)+1];
173     // katanomi : the encoding of T as a sequence
174     int[] katanomi = katanomi_stis_grammes(T);
175     // create the maximum element
176     for (int i = 0; i <= max_size(T); i++){
177         dyck[i] = i+1;
178     }
179     // add the maximum element to chain
180     dyck_chain[0] = copy_sequence(dyck);
181     // find the next element in chain
182     // using the current element dyck and the array katanomi
183     for (int i = 1; i <= katanomi.length-1; i++){
184         // the next element is obtained by increasing (i.e.
185         // moving right)
186         // the (max_size(T) - katanomi[i])-th element (
187         // upstep) of dyck
188         dyck[max_size(T)-katanomi[i]] = dyck[max_size(T)-
189         katanomi[i]]+1;
190         // add the element to chain
191         dyck_chain[i] = copy_sequence(dyck);
192     }
193     return dyck_chain;
194 }
195 }
196 }
197 // End of class tableaux.java

```

5.3 Κατασκευή του συνόλου του Γ_α

Στην παράγραφο αυτή θα δοθεί ένας αλγόριθμος για την κατασκευή του συνόλου⁷ Γ_α των μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε δοσμένο μονοπάτι Dyck με $d(\alpha) = d_1, d_2, \dots, d_n$.

Η κατασκευή του συνόλου Γ_α μπορεί να γίνει αναδρομικά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Λήμματος 2.8.3.

Εδώ θα αναπτυχθεί μια επαναληπτική μέθοδος στηριζόμενη στην κωδικοποίηση του συνόλου S_n των μεταθέσεων⁸, με ένα ισοδύναμο τρόπο, από το σύνολο των λέξεων

$$w = w_1 w_2 \dots w_n, \text{ με } w_i \in [n] \text{ για κάθε } i \in [n].$$

Συγκεκριμένα κάθε μετάθεση $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$, κωδικοποιείται από τη λέξη

$$w = w_1 w_2 \dots w_n \text{ όπου } w_i = |\{ \sigma_j : \sigma_j < \sigma_i \text{ για κάθε } j < i \}|.$$

με άλλα λόγια το w_i δηλώνει ότι το στοιχείο i περιέχεται στο σύνολο⁹ $A_{w_i}^\sigma$.

Για παράδειγμα, αν $\sigma = 2\ 4\ 3\ 1\ 8\ 6\ 7\ 5$ τότε $w = 1\ 1\ 2\ 2\ 5\ 6\ 5$.

Για τον καθορισμό της μετάθεσης σ που αντιστοιχεί στη λέξη $w = w_1 w_2 \dots w_n$, με $w_i \in [i]$ για κάθε $i \in [n]$ χρησιμοποιείται η ακόλουθη διαδικασία:

Ξεκινώντας από τη λέξη $\underbrace{00\dots0}_n$ τα στοιχεία της σ αντικαθιστούν τα μηδενικά της w , τοποθε-

τώντας τα από το μεγαλύτερο στο μικρότερο ως εξής:

Αφού τοποθετηθούν τα στοιχεία $n, n-1, \dots, n-j$, το στοιχείο $n-j-1$ αντικαθιστά τα w_{n-j-1} -οστό (από τα αριστερά) από τα μηδενικά που έχουν απομείνει.

Για παράδειγμα, για $w = 1\ 1\ 2\ 2\ 5\ 6\ 5$ προκύπτει ότι

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ w_8 = 5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 8\ 0\ 0\ 0 \\ w_7 = 6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 8\ 0\ 7\ 0 \\ w_6 = 5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 8\ 6\ 7\ 0 \\ w_5 = 6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 8\ 6\ 7\ 5 \\ w_4 = 2\ 0\ 4\ 0\ 0\ 8\ 6\ 7\ 5 \\ w_3 = 2\ 0\ 4\ 3\ 0\ 8\ 6\ 7\ 5 \\ w_2 = 1\ 2\ 4\ 3\ 0\ 8\ 6\ 7\ 5 \\ w_1 = 1\ 2\ 4\ 3\ 1\ 8\ 6\ 7\ 5 = \sigma \end{array}$$

Μια χρήσιμη ιδιότητα αυτής της κωδικοποίησης, στην οποία στηρίζεται η κατασκευή του Γ_α , είναι η εξής:

$\sigma \in \Gamma_\alpha$ αν και μόνο αν η κωδικοποίηση w αυτής περιέχει d_i στοιχεία ίσα με i για κάθε $i \in [n]$.

Κατόπιν τούτων κατασκευάζεται λεξικογραφικά το σύνολο όλων των λέξεων w με $w_i \in [n]$ οι οποίες περιέχουν d_i στοιχεία ίσα με i .

Κατασκευή του συνόλου Γ_α

1 //
2 // Contents of permutatious.java
3 //
4 // 1. An algorithm to generate all elements of Gamma for every Dyck path
α

⁷Βλ. σελ. 58.

⁸Βλ. σελ. 56.

⁹Βλ. σελ. 56.

```

5 // 2: An algorithm to encode a permutation by the sets A
6
7
8 import java.awt.*;
9 import java.util.*;
10
11 public class permutations{
12
13     // w : an encoding of permutation p as a sequence of integers
14     // w[i] := (the number of elements of p that lie on the left of i
15     //         in p and that are larger than i+1) + 1
16     public static int[] permutation2wencoding(int[] p){
17         int[] w = new int [p.length];
18         for(int i=0;i<=p.length-1;i++){
19             // j<=i and p[j]>=p[i] (and not j<i and p[i]>p[j]) in order
20             // to count i+1 itself and thus get an extra 1
21             for(int j=0;j<=i;j++){
22                 if(p[i]>=p[j]){
23                     w[p[i]-1] = w[p[i]-1]+1;
24                 }
25             }
26         }
27         return w;
28     }
29
30     // finds the permutation p with encoding wencoding
31     public static int[] wencoding2permutation(int[] w){
32         int[] p = new int [w.length];
33         int[] p_index = new int [w.length];
34         for(int i=w.length-1;i>=0;i--){
35             p_index[i] = w[i];
36             for(int j=i+1;j<=w.length-1;j++){
37                 if(w[i]>=w[j]) { p_index[i] = p_index[i]+1;
38                 };
39             }
40             //int j = Aencoding[i]-1;
41             int j = p_index[i]-1;
42             while(p[j] != 0){
43                 j++;
44             }
45             p[j] = i+1;
46         }
47         return p;
48     }
49
50     // Finds the minimum element of Gamma_A in wencoding from the Dyck
51     // path a
52     public static int[] dyck2minw(int[] a){
53         int[] min_w = new int [a.length];
54         int i,j,k=0;
55         for(i=0;i<a.length;i++){
56             if(a[i]!=0){
57                 for(j=0; j < a[i]; j++,k++){
58                     min_w[k]=i+1;
59                 }
60             }
61         }
62     }
63 }

```

```

56     }
57     }
58     }
59     return min_w;
60 }
61
62 // finds all permutations that belong to the same set Gamma_A
63 // lexicographically using their wencodings
64 public static ArrayList<int[]> generate_Gamma_a(int[] a){
65     ArrayList<int[]> Gamma_a = new ArrayList<int[]>();
66     int[] w = dyck2minw(a);
67     Gamma_a.add(copy_sequence(w));
68     //right_bound: search from this point on to the left
69     int k,l, right_bound=w.length-1;
70     int temp,mu,n;
71
72     while(right_bound>1){
73         //start searching from right to left
74         k=right_bound-1;
75         //Start searching from position k
76         while(w[k]>=w[k+1]){
77             k--;
78             if(k==1){
79                 return Gamma_a;
80             }
81         }
82         // Found a decrease at position k
83         l = w.length-1;
84         while(w[l]<=w[k]){
85             l--;
86             if(l==2){
87                 return Gamma_a;
88             }
89         }
90         // Found candidate for swapping at position
91         l
92         if(w[l]<=k+1){
93             //permute entries w[k], w[l]
94             temp=w[k];
95             w[k]=w[l];
96             w[l]=temp;
97             //reverse the list w[k+1]...w[
98             length-1]
99             mu = k+1;
100            n = w.length-1;
101            while(mu<n){
102                temp=w[mu];
103                w[mu]=w[n];
104                w[n]=temp;
105                mu++;
106                n--;
107            }
108            //reset bound
109            right_bound=w.length-1;

```



```

109         Gamma.a.add(copy_sequence(w));
110     }
111     //order w[k]...w[length-1] descending, then
112     //search for next position to the left
113     else{
114         // Candidate rejected
115         for(int m=k;m<w.length-1;m++){
116             if(w[m]<w[m+1]){
117                 temp=w[m];
118                 w[m]=w[m+1];
119                 w[m+1]=temp;
120             }
121         }
122     }
123     // Intermediate permutation with maximized
124     // suffix
125     right.bound=k;
126 }
127 public Gamma a;
128 }
129
130
131 // finds the number of elements of Gamma a
132 // without constructing them using Proposition 2.8.1
133 public static int count_Gamma_a(int[] a){
134     int Prod=1, Sum=0, results=0, N = a.length-1;
135     int i, j;
136
137     for(j=1;j<=N;j++){
138         Sum=0;
139         for(i=1;i<=j;i++){
140             Sum += a[i-1];
141         }
142         Sum = Sum - j + 1;
143
144         Prod = Prod*Sum;
145     }
146     results=Prod; Prod=1;
147
148     for(j=1;j<=N;j++){
149         for(i=1;i<=a[j-1];i++){
150             Prod = Prod * i;
151         }
152     }
153
154     results = results/Prod;
155     return results;
156 }
157
158
159 // copies an array into another array:
160 public static int[] copy_sequence(int[] seq){
161     int[] copy = new int[seq.length];

```

```

162     for (int i=0; i<=seq.length-1; i++){
163         copy[i] = seq[i];
164     }
165     return copy;
166 }
167
168
169
170 }
171 // End of class permutation.java

```

5.4 Αλγοριθμική κατασκευή της στατιστικής N_τ , όπου $\tau \in D^*$

Το βασικότερο πρόβλημα που πραγματεύεται αυτή η διατριβή είναι η μελέτη της στατιστικής

N_τ : αριθμός εμφανίσεων του προτύπου τ .

Στο Κεφάλαιο 3 βρέθηκε η γεννήτρια συνάρτηση F αυτής της στατιστικής για πολλές κατηγορίες προτύπων.

Υπάρχουν όμως πολλά ενδιαφέροντα πρότυπα για τα οποία η εύρεση της F με μαθηματικές μεθόδους παρουσιάζει δυσκολίες.

Ένα από αυτά τα πρότυπα είναι τα μονοπάτια Dyck. Στην παράγραφο 3.8 έχει βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση F στην περίπτωση όπου το μονοπάτι Dyck τ είναι πρώτο ή γενικότερα όταν οι πρώτες συνιστώσες του είναι όλες ίδιες.

Στην παράγραφο αυτή θα δοθεί ένας αλγοριθμικός προσδιορισμός της γεννήτριας συνάρτησης F για οποιαδήποτε πρότυπο τ που είναι μονοπάτι Dyck.

Αν $\tau = uwdv$, όπου $w, v \in D$ τότε ισχύει ο τύπος

$$F = 1 + x(F - x^{l(w)})F + x^{l(w)+1}(F + (y-1)F_v) \quad (5.3)$$

όπου F_v είναι η γεννήτρια του συνόλου \mathcal{A}_v όλων των μονοπατιών Dyck που αρχίζουν με v ως προς τις παραμέτρους l, N_τ ¹⁰.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη διάσπαση της πρώτης επιστροφής των μη κενών μονοπατιών Dyck $\alpha = u\beta d\gamma$ προκύπτει ότι

$$N_\tau(\alpha) = N_\tau(\beta) + N_\tau(\gamma) + [\beta = w][\gamma \in \mathcal{A}_v]$$

και

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \sum_{\alpha \in D} x^{l(\alpha)} y^{N_\tau(\alpha)} \\
 &= 1 + x \sum_{\beta, \gamma \in D} x^{l(\beta)+l(\gamma)} y^{N_\tau(\beta)+N_\tau(\gamma)+[\beta=w][\gamma \in \mathcal{A}_v]} \\
 &= 1 + x \left(\sum_{\beta \in D \setminus \{w\}} x^{l(\beta)} y^{N_\tau(\beta)} \sum_{\gamma \in D} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} + x^{l(w)} \left(\sum_{\gamma \in D \setminus \mathcal{A}_v} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_v} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)+1} \right) \right) \\
 &= 1 + x \left((F(x, y) - x^{l(w)}) F(x, y) + x^{l(w)} (F(x, y) + (y-1)F_v(x, y)) \right) \\
 &= 1 + xF - x^{l(w)}F + x^{l(w)+1}(F + (y-1)F_v),
 \end{aligned}$$

¹⁰ Αν τ είναι πρώτο, τότε $v = \epsilon$ και $F_v = F$.

Κατόπιν τούτου ο προσδιορισμός της F ανάγεται στην εύρεση της γεννήτριας συνάρτησης F_τ .

Για το σκοπό αυτό θεωρείται το εξής πρόβλημα:

Δίδεται ένα μη κενό μονοπάτι Dyck δ με $l(\delta) < l(\tau)$ και ζητείται να εκφραστεί η γεννήτρια συνάρτηση F_δ του συνόλου \mathcal{A}_δ των μονοπατιών Dyck που αρχίζουν με δ ως προς τις παραμέτρους l και N_τ , με τη βοήθεια του συνόλου των γεννητριών συναρτήσεων F_α , όπου $\alpha \in \mathcal{D}$, $l(\alpha) < l(\tau)$ και το μονοπάτι $\delta\alpha$ περιέχει το πρότυπο τ .

Για την επίλυση του προβλήματος αυτού θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{M}_\delta = \{\alpha \in \mathcal{D} : \delta\alpha \text{ τελειώνει σε } \tau \text{ και } l(\alpha) < l(\tau)\}.$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\mathcal{M}_\delta = \emptyset$ τότε εύκολα προκύπτει ότι

$$F_\delta = x^{l(\delta)} F. \quad (5.4)$$

2. Αν $\mathcal{M}_\delta \neq \emptyset$ τότε ορίζουμε μια δενδροειδή διάταξη¹¹ στο σύνολο αυτό ως εξής:

$$\alpha \preceq \beta \text{ αν και μόνο αν } \beta \text{ αρχίζει με } \alpha.$$

Θα αποδειχθεί η σχέση

$$F_\delta = x^{l(\delta)} \left(F + (y-1) \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_\delta} y^{r(\alpha)} F_\alpha \right) \quad (5.5)$$

όπου $r(\alpha) = |\{\beta \in \mathcal{M}_\delta : \beta \prec \alpha\}|$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$N_\tau(\delta\gamma) = N_\tau(\gamma) + |\{\alpha \in \mathcal{M}_\delta : \gamma \text{ αρχίζει με } \alpha\}|$$

¹¹Μια διάταξη ονομάζεται δενδροειδής αν $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$ έπεται ότι $\alpha \leq \beta$ ή $\beta \leq \alpha$.

οπότε

$$\begin{aligned}
 F_\delta(x, y) &= \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\delta\gamma)} y^{N_\tau(\delta\gamma)} \\
 &= x^{l(\delta)} \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma) + |\{a \in M_\delta: \gamma \text{ αρχίζει με } a\}|} \\
 &= x^{l(\delta)} \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{D}'} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} \left(y^{|\{a \in M_\delta: \gamma \text{ αρχίζει με } a\}|} - 1 \right) \right) \\
 &= x^{l(\delta)} \left(F(x, y) + \sum_{a \in M_\delta} (y^{r(a)+1} - 1) \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{D} \\ a \text{ μέγιστο στο } M_\delta \\ \text{με } \gamma \text{ αρχίζει με } a}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} \right) \\
 &= x^{l(\delta)} \left(F(x, y) + (y-1) \sum_{a \in M_\delta} (y^{r(a)} + y^{r(a)-1} + \dots + y + 1) \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{D} \\ a \text{ μέγιστο στο } M_\delta \\ \text{με } \gamma \text{ αρχίζει με } a}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} \right) \\
 &= x^{l(\delta)} \left(F(x, y) + (y-1) \sum_{a \in M_\delta} \sum_{\substack{\beta \in M_\delta \\ \beta \leq a}} y^{r(\beta)} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{D} \\ a \text{ μέγιστο στο } M_\delta \\ \text{με } \gamma \text{ αρχίζει με } a}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} \right) \\
 &= x^{l(\delta)} \left(F(x, y) + (y-1) \sum_{\beta \in M_\delta} y^{r(\beta)} \sum_{\substack{a \in M_\delta \\ \beta \leq a}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{D} \\ a \text{ μέγιστο στο } M_\delta \\ \text{με } \gamma \text{ αρχίζει με } a}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} \right) \\
 &= x^{l(\delta)} \left(F(x, y) + (y-1) \sum_{\beta \in M_\delta} y^{r(\beta)} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{D} \\ \text{με } \gamma \text{ αρχίζει με } \beta}} x^{l(\gamma)} y^{N_\tau(\gamma)} \right) \\
 &= x^{l(\delta)} \left(F(x, y) + (y-1) \sum_{\beta \in M_\delta} y^{r(\beta)} F_\beta \right).
 \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων οι γεννήτριες συναρτήσεις F, F_v προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (5.3), (5.4) και (5.5) για κατάλληλα $\delta \in \mathcal{D}$.

Προκειμένου να προσδιορισθούν αυτά τα $\delta \in \mathcal{D}$ παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1 Κάθε $\alpha \in M_v$ είναι συμπλήρωμα ενός προθέματος που είναι ταυτόχρονα και επιθέμα του τ .

2 Αν $\alpha \in M_\delta$ και το δ είναι συμπλήρωμα ενός προθέματος που είναι ταυτόχρονα και επιθέμα του τ , τότε και το α θα είναι συμπλήρωμα κάποιου προθέματος που είναι ταυτόχρονα και επίθεμα του τ .

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το σύστημα των εξισώσεων (5.4) και (5.5) θα εφαρμοσθεί για επιθέματα δ των οποίων τα συμπληρώματα είναι και επιθέματα του τ .

Κατόπιν τούτων ο ζητούμενος αλγόριθμος στηρίζεται στα ακόλουθα επιμέρους βήματα:

¹²Όπου $\mathcal{D}' = \{\gamma \in \mathcal{D} : \gamma \text{ αρχίζει με κάποιο } a \in M_\delta\}$.

1. Εύρεση του συνόλου \mathcal{M} όλων των επιθεμάτων του τ των οποίων τα συμπληρώματα είναι και επιθέματα του τ .
2. Εύρεση του συνόλου \mathcal{M}_δ και υπολογισμός των τιμών της συνάρτησης r στα στοιχεία αυτού για κάθε $\delta \in \mathcal{M} \cup \{v\}$.
3. Κατασκευή του συστήματος των εξισώσεων (5.4) και (5.5) για κάθε $\delta \in \mathcal{M} \cup \{v\}$, και υπολογισμός της F_v συναρτήσει της F .
4. Αντικατάσταση της έκφρασης της F_v στην εξίσωση (5.3) και υπολογισμός της γεννήτριας συνάρτησης F .

Με βάση τα προηγούμενα προκύπτει το παρακάτω πρόγραμμα σε Java

Υπολογισμός της γεννήτριας συνάρτησης F που απαριθμεί τις εμφανίσεις ενός προτύπου Dyck

```

1 //
2 Contents of strings.java
3
4 1. An algorithm to create a system of equations whose solution
5 is the generating function F that counts the number of Dyck
6 paths according to semilength the number of occurrences of
7 the Dyck path tau
8
9 import java.awt.*;
10 import java.util.*;
11
12 public class strings{
13
14     // finds the substrings of s called periods, with the property
15     // that they are both prefixes and suffixes of s
16     public static ArrayList<String> find_periods(String s){
17         ArrayList<String> periods = new ArrayList<String>();
18         for(int i=1;i<=s.length()-2;i++){
19             if(s.regionMatches(0,s,s.length()-i,i)){
20                 periods.add(s.substring(s.length()-i,s.
21                     length()));
22             }
23         }
24     }
25
26     // find the set M of all strings that are matching with
27     // the periods of s union {v} where s = u w d v
28     public static ArrayList<String> find_M(String s){
29         ArrayList<String> M = new ArrayList<String>();
30         ArrayList<String> periods = find_periods(s);
31         for(int i=0;i<=periods.size()-1;i++){
32             M.add(s.substring(periods.get(i).length(),s.length
33                 ()));
34         }
35         String v = find_v(s);
36         if(!isInside(M,v)){
37             M.add(v);

```

```

37     }
38     return M;
39 }
40
41 // checks if the string s is already in M
42 // used only once to check if v is already in M.
43 public static boolean isInside(ArrayList<String> M, String s){
44     if(M == null){
45         return false;
46     }
47     else{
48         for(int i = 0; i<=M.size()-1; i++){
49             if(M.get(i).equals(s)){
50                 return true;
51             }
52         }
53     }
54     return false;
55 }
56
57 // finds v where s = u w d v
58 public static String find_v(String s){
59     int upstep = 1;
60     int downstep = 0;
61     int position = 0;
62     while(upstep - downstep != 0){
63         position++;
64         if(s.charAt(position) == '1'){
65             upstep++;
66         }
67         else{
68             downstep++;
69         }
70     }
71     return s.substring(position+1,s.length());
72 }
73
74 // finds M_d i.e. the set of all strings a such that da ends with s
75 public static ArrayList<String> find_M_d(String s, String d){
76     ArrayList<String> M_d = new ArrayList<String>();
77     for(int i=0;i<=d.length()-1;i++){
78         if(s.regionMatches(0, d, i, d.length()-i)){
79             M_d.add(s.substring(d.length()-i, s.length()
80             ));
81         }
82     }
83     return M_d;
84 }
85
86 // checks whether the string prothema is prefix of s
87 public static boolean isProthema(String prothema, String s){
88     return s.regionMatches(0, prothema, 0, prothema.length());
89 }
90
91 // computes the values of function r on the set M_d

```

```

91 // i[] : the number of elements that are smaller than a
92 //         according to the prefix order
93 public static int[] find_r( ArrayList<String> M_d){
94     int[] r = new int[M_d.size()];
95     for(int i=0; i <= M_d.size()-1; i++){
96         for(int j=i+1; j<=M_d.size()-1; j++){
97             if(isProthema(M_d.get(i),M_d.get(j))){
98                 r[j] = r[j] + 1;
99             }
100         }
101     }
102     return r;
103 }
104
105 // generates the equations for the elements of M
106 public static ArrayList<String> create_equations(String s){
107     ArrayList<String> equations = new ArrayList<String>();
108     if(isPrime(s)) { return equations; }
109     ArrayList<String> M = find.M(s);
110     for(int i = 0; i<=M.size()-1; i++){
111         ArrayList<String> M_d = find.M_d(s, M.get(i));
112         int[] r = find_r(M_d);
113         String eq = "";
114         if(M_d.size()==0) { eq = "F" + M.get(i) + " == x^( " + M.get
115             (i).length()/2 + " ) * F"; }
116         else{
117             eq = "F" + M.get(i) + " == x^( " + M.get(i).length()
118                 /2 + " ) * ( F + (y-1) * ("
119                 for(int j = 0; j<= M_d.size()-1; j++){ eq = eq + "
120                     y^( " + r[j] + " ) * F" + M_d.get(j); if(j<M_d.
121                         size()-1) { eq = eq + " + "; }
122                 eq = eq + "));";
123         }
124         equations.add(eq);
125     }
126     return equations;
127 }
128
129 // generates the basic equation for s = u w d v
130 // P = 1 + x ( F - x (1|w)) + x^2(1|w)+1) ( F + (y-1) F_y
131 public static String create_basic_equation(String s){
132     if(s == null){
133         return null;
134     }
135     if(isPrime(s)){
136         return "F == 1 + x (F - x^( " + (s.length()/2-1) + " )
137             * F + " + "x^( " + (s.length()/2) + " ) * y * F";
138     }
139     else{
140         String eq = "";
141         int upstep = 1;
142         int downstep = 0;
143         int position = 0;
144         while(upstep - downstep != 0){
145             position++;

```

```

141         if(s.charAt(position) == '1'){
142             upstep++;
143         }
144         else{
145             downstep++;
146         }
147     }
148     String b = s.substring(1, position);
149     String c = s.substring(position+1, s.length());
150     eq = "F == 1 + x * (F - x^( " + b.length()/2 + ")) *
        F + " + "x^( " + (b.length()/2+1) + ") * (F - F" +
        c + " + y * (F" + c + "))";
151     return eq;
152 }
153 }
154 // generates the basic equation with Fv known
155 public static String create_equation_F(String s, String Fv){
156     if(s == null) {return null;}
157     if(isPrime(s)){
158         return "F == 1 + x (F - x^( " + (s.length()/2-1) + ")
159             * F + " + "x^( " + (s.length()/2) + " * y * F";
160     }
161     else{
162         String eq = "";
163         int upstep = 1;
164         int downstep = 0;
165         int position = 0;
166         while(upstep - downstep != 0){
167             position++;
168             if(s.charAt(position) == '1'){
169                 upstep++;
170             }
171             else{
172                 downstep++;
173             }
174         }
175         String b = s.substring(1, position);
176         eq = "F == 1 + x * (F - x^( " + b.length()/2 + ") * F
            + " + "x^( " + (b.length()/2+1) + " * (F - (1-y)*(
            + Fv + "))";
177         return eq;
178     }
179 }
180
181 public static boolean isPrime(String s){
182     int upstep = 1;
183     int downstep = 0;
184     int position = 0;
185     while(upstep - downstep != 0){
186         position++;
187         if(s.charAt(position) == '1'){upstep++;} else{downstep++;}
188     }
189     if(position == s.length()-1) { return true; } else {return false; }
190 }

```


Τούτο επιτυγχάνεται λεξικογραφικά ως εξής: Αν έχει κατασκευασθεί η ακολουθία $(\lambda'_i)_{i \in [\rho]}$ η οποία κυριαρχείται από την ακολουθία $(\nu'_i)_{i \in [\rho]}$, η επόμενη της είναι η ακολουθία $(\lambda''_i)_{i \in [\rho]}$ όπου

$$\lambda''_i = \begin{cases} \lambda'_i, & i \in [j-1] \cup \{\rho\} \\ \lambda'_j + 1, & i \in [j, \rho-1] \end{cases}$$

όπου j είναι το μέγιστο στοιχείο του $[\rho]$ με $\lambda'_j < \nu'_j$.

Με βάση τα προηγούμενα προκύπτει το παρακάτω πρόγραμμα σε Java.

Υπολογισμός του πληθικού αριθμού του $\mathcal{T}(\alpha)$

```

1 //
2 // Contents of inorder.java
3 //
4 // 1. An algorithm to compute the number of trees with prescribed degree
5 // 2. An algorithm to generate all sequences that are dominated by a given
6 // sequence
7 //
8 import java.awt.*;
9 import java.util.*;
10 import java.math.*;
11
12 public class inorder{
13
14     // computes the number of ordered trees having as degree
15     // sequence the sequence of ascents of a
16     public static double f(dyck a){
17         double result = 1;
18         if(a == null){
19             return result;
20         }
21         // Every Dyck path a is decomposed using the first ascent
22         // decomposition
23         // a = u^m d a_1 d a_2 d ... a_{(m-1)} d a_m
24         // f is first evaluated on the prime component;
25         // u^m d a_1 d a_2 d ... a_{(m-1)}
26         // and the same continues repetitively for the next prime
27         // component
28         ArrayList<dyck> A = first_ascent_decomposition(a);
29         while (A.size() >= 1){
30             int m = A.size();
31             for(int i = 0; i <= m-2; i++){
32                 result = result * f(A.get(i));
33             }
34             A = first_ascent_decomposition(A.get(m-1));
35         }
36         // f is evaluated on the corresponding fibonacci path
37         return result * f_fibonacci(dyck2fibonacci(a));
38     }
39     // Evaluates f on fibonacci paths encoded according to

```

```

40 // Proposition 4.5.4. There is also an algorithm to
41 // generate all sequences that are dominated by a specific sequence
42 public static double f.fibonacci(int[] nu){
43     if(nu == null) {
44         return 1;
45     }
46     // find all sequences lambda that are dominated by the
47     // sequence nu
48     // in lexicographic ordering, the trick is to find the
49     // sequences
50     // that are dominated by the sum sequence of a and then
51     // compute
52     // back the difference sequence
53     int size = nu.length;
54     // fragma: the upper sum sequence = the sum sequence of nu
55     int[] fragma = sum_sequence(nu);
56     // lambda_sum: the sum sequence of lambda, temporarily used
57     // for the computations
58     int[] lambda_sum = new int[size];
59     // lambda: the required sequence lambda
60     int[] lambda = new int[size];
61
62     // the last element of lambda, lambda_sum is set equal to
63     // the sum of the elements and all other elements are equal
64     // to zero
65     lambda_sum[size-1]=fragma[size-1];
66     lambda[size-1]=fragma[size-1];
67
68     double sum = 0;
69
70     while(!isLast(lambda_sum, fragma)){
71         double product = 1;
72         for(int i=0; i<=size-1; i++){
73             product = product * catalan(lambda[i]);
74         }
75         sum += product;
76
77         // compute the next sequence
78         for(int i=size-2; i>=0; i--){
79             if(lambda_sum[i] < fragma[i]){
80                 lambda_sum[i]=lambda_sum[i]+1;
81                 for(int j=i+1; j<=size-2; j++){
82                     lambda_sum[j]=lambda_sum[j]
83                     +1;
84                 }
85                 break;
86             }
87         }
88         lambda = difference_sequence(lambda_sum);
89     }
90     double product = 1;
91     for(int i=0; i<=size-1; i++){
92         product = product * catalan(nu[i]);
93     }
94     sum += product;

```

```

89         return sum;
90     }
91
92     // this method is used in the construction of all the
93     // sequence that are dominated by a specific one.
94     // it checks if the sequence a equals the sequence b
95     // in this case starting from the beginning is more efficient
96     // than starting from the end because the sequences are
97     // generated lexicographically.
98     public static boolean isLast(int[] a, int[] b){
99         int size = a.length;
100        for(int i = 0; i <= size - 1; i++){ if(a[i] != b[i]){return false;} }
101        return true;
102    }
103
104    // returns the sum sequence of the sequence of a
105    // i.e. the sequence of partial sums of a
106    public static int[] sum_sequence(int[] a){
107        int size = a.length; // the size of a;
108        int[] partial_sum = new int[size];
109        partial_sum[0] = a[0];
110        for(int i=1; i <= size - 1; i++){
111            partial_sum[i] = partial_sum[i-1] + a[i];
112        }
113        return partial_sum;
114    }
115
116    // return the difference sequence of the sequence a
117    // i.e. the sequence of whose partial sums is a
118    public static int[] difference_sequence(int[] a){
119        int size = a.length; // the size of a;
120        int[] difference_seq = new int[size];
121        difference_seq[0] = a[0];
122        for(int i=1; i <= size - 1; i++){
123            difference_seq[i] = a[i] - a[i-1];
124        }
125        return difference_seq;
126    }
127
128    // computes c_n. used in the evaluation of f on fibonacci paths
129    public static double catalan(int n){
130        double result = 1;
131        if(n == 0){
132            return result;
133        }
134        for(double i = 1; i <= n; i++){
135            result = (result*(4*i-2))/(i+1);
136        }
137        return result;
138    }
139
140    // returns an encoding of the fibonacci path corresponding to Dyck
141    // path a
142    // according to Proposition 4.5.4
143    public static int[] dyck2fibonacci(dyck a){

```

```

143 // find the prime components of a
144 ArrayList<dyck> B = prime_component_decomposition(a);
145 if(B.size() !=0){
146     // Start with the empty encoding
147     ArrayList<Integer> Fibonacci = new ArrayList<
148         Integer>();
149     // j: counts the number of non trivial components
150     int j = 0;
151     for(int i = 0; i<=B.size()-1 ; i++){
152         dyck p = B.get(i);
153         // if p = ud then a trivial component has
154         // been found
155         // so store the number of non-trivial
156         // components j
157         // set j=0 and start again the count
158         // else increase j and continue to the next
159         // prime
160         // component p
161         // Note that j is stored only if a trivial
162         // component
163         // is found so after we finish with all
164         // prime components
165         // we have one more step to complete the
166         // encoding
167         if(dyck.semilength(p) == 1){
168             Fibonacci.add(j); j=0;
169         }
170         else{
171             j++;
172         }
173     }
174     // after finishing with all the prime components
175     // there are two cases to be examined in order to
176     // complete the encoding
177     // 1. if the last component is not ud then store j
178     // 2. if the last component is ud the store 0
179     if(dyck.semilength(B.get(B.size()-1)) != 1){
180         Fibonacci.add(j);
181     }
182     if(dyck.semilength(B.get(B.size()-1)) == 1){
183         Fibonacci.add(0);
184     }
185     // convert into an array of integers
186     int[] Fibonacci_int = new int[Fibonacci.size()];
187     for(int i=0; i<=Fibonacci.size()-1; i++){
188         Fibonacci_int[i] = Fibonacci.get(i).
189             intValue();
190     }
191     return Fibonacci_int;
192 }
193 return null;
194 }
195
196 // returns a list with the prime components of a
197 public static ArrayList<dyck> prime_component_decomposition(dyck a)

```

```

190 {
191     ArrayList<dyck> prime_components = new ArrayList<dyck>();
192     dyck temp = new dyck();
193     if ( a == null){
194         return prime_components;
195     }
196     else{
197         temp.b = a.b; temp.c = null ;
198         prime_components.add(temp);
199         prime_components.addAll(
200             prime_component_decomposition(a.c));
201     }
202     return prime_components;
203 }
204 // returns a list with components of the first ascent decomposition
205 of a
206 public static ArrayList<dyck> first_ascent_decomposition(dyck a){
207     ArrayList<dyck> components = new ArrayList<dyck>();
208     if (a == null){
209         return components;
210     }
211     else{
212         components.add(0,a.c);
213         if (a.b != null){
214             components.addAll(0,
215                 first_ascent_decomposition(a.b));
216         }
217         return components;
218     }
219 }
220 // End of class inorder.java

```

5.5.2 Σύνολο διατεταγμένων δένδρων με δοσμένη ακολουθία βαθμών

Δίδεται ένα μονοπάτι Dyck $a \in \mathcal{D}_n$ και ζητείται να κατασκευασθούν τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{T}(a)$ όλων των διατεταγμένων δένδρων $T \in \mathcal{T}(a)$ με $d(T) = d(a)$.

Για την κατασκευή αυτή, η οποία είναι εφαρμογή της Πρότασης 4.5.2 (βλ. σελ. 187), θα χρησιμοποιηθούν τα εξής:

A. Η αναπαράσταση των διατεταγμένων δένδρων σύμφωνα με τη δεξιά διάσπαση, δηλαδή $tree = (tree.tree1, tree.tree2)$ και τέσσερις πράξεις:

Οι δύο πρώτες¹⁶ ορίζονται στο σύνολο \mathcal{T} ως εξής:

Για δύο δένδρα T_1, T_2 έχουμε

1. $CR(T_1, T_2)$ είναι το δένδρο $tree$ με $tree.tree1 = T_1$ και $tree.tree2 = T_2$,
2. $Product(T_1, T_2)$ είναι το δένδρο $tree$ με

¹⁶ Αντιστοιχούν στις πράξεις \oplus και \otimes της Πρότασης 4.5.2.

$$\text{tree} = \begin{cases} T_1, & \text{αν } T_2 = 0 \\ \text{CR}(T_2.\text{tree1}, \text{Product}(T_1, T_2.\text{tree2})), & \text{αν } T_2.\text{tree1} = 0 \\ \text{CR}(\text{Product}(T_1, T_2.\text{tree1}), T_2.\text{tree2}), & \text{αν } T_2.\text{tree1} \neq 0, \end{cases}$$

και οι δύο επόμενες στο σύνολο όλων των λιστών από διατεταγμένα δένδρα που ορίζονται ως εξής:

Για δύο λίστες L_1, L_2 ορίζονται οι λίστες $\text{Cartesian_CR}(L_1, L_2)$ και $\text{Cartesian_Product}(L_1, L_2)$ που περιέχουν αντίστοιχα όλα τα διατεταγμένα δένδρα $\text{CR}(T_1, T_2)$ και $\text{Product}(T_1, T_2)$ για κάθε $T_1 \in L_1$ και $T_2 \in L_2$.

B. Η κατασκευή των προθεμάτων και επιθεμάτων μιας λέξης Dyck α που είναι λέξεις Dyck.

Για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ ευρίσκονται ταυτόχρονα οι λίστες L, R των προθεμάτων και επιθεμάτων στις οποίες χωρίζεται η λέξη α προκειμένου να εφαρμοσθεί ο τύπος (4.7) της Πρότασης 4.5.2.

Για το σκοπό αυτό ορίζονται οι πράξεις elevate (ανύψωση) και concatenate (σύζευξη) στο σύνολο \mathcal{D} ως εξής:

$$\text{elevate}(\alpha) = (\alpha, \epsilon)$$

και

$$\text{concatenate}(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} \alpha_2 & \text{αν } \alpha_1 = \epsilon \\ (\alpha_1.b, \text{concatenate}(\alpha_1.e, \alpha_2)), & \text{αν } \alpha_1 \neq \epsilon. \end{cases}$$

Κατόπιν τούτων για κάθε $\alpha \in \mathcal{D}$ οι ζητούμενες λίστες $L = L[i], R = R[i], i = 0, 1, \dots, l(\alpha)$ ορίζονται ως εξής:

$$L[0] = \epsilon, \quad R[0] = \alpha$$

και

$$L[i] = \text{concatenate}(L[i-1], \text{elevate}(R[i-1].b)), \quad R[i] = R[i-1].e.$$

Γ. Ο ταυτόχρονος αναδρομικός καθορισμός δύο μεθόδων compute_T και compute_T_astro ως εξής:

Για ένα μονοπάτι Dyck α η μέθοδος compute_T ορίζεται ως εξής:

$$\text{compute_T}(\alpha) = \begin{cases} \epsilon, & \text{αν } \alpha = \epsilon \\ \text{Cartesian_CR}((0, 0), \text{compute_T}(a.c)), & \text{αν } \alpha.b = \epsilon \\ \text{Cartesian_Product}(\text{Cartesian_CR}(\text{compute_T_astro}(a.b), \text{compute_T}(\text{delta})) \\ \text{compute_T}(\text{gamma_meion_delta})), \text{ για όλα τα προθέματα delta του } a.c \\ \text{με αντίστοιχο επίθεμα gamma_meion_delta, αν } \alpha.b \neq \epsilon. \end{cases}$$

Για ένα μη κενό μονοπάτι Dyck α

$$\text{compute_T_astro} = \begin{cases} (0, 0), & \text{αν } \alpha = (\epsilon, \epsilon) \\ \text{Cartesian_CR}(\text{compute_T_astro}(a.b), \text{compute_T}(a.c)), & \text{αν } \alpha \neq (\epsilon, \epsilon). \end{cases}$$

Με βάση τα προηγούμενα προκύπτει το παρακάτω πρόγραμμα σε Java.

Κατασκευή του συνόλου $T^*(\alpha)$

```

1 //
2 // Contents of tree.java
3 //
4 // 1. An algorithm to compute all trees with prescribed degree sequence
5 //
6 //
7 import java.awt.*;
8 import java.util.*;
9 //
10 // right decomposition of an ordered tree:
11 //  $T = T_1T_2$ , where  $T_1$  and  $T_2$  are ordered trees such that
12 //  $T$  is rooted at the root of  $T_1$  and
13 //  $T_2$  is the rightmost child of the root of  $T$ 
14 public class tree{
15     tree tree1;
16     tree tree2;
17
18     //returns the string of 1's and 0's which corresponds to the
19     //bijection between trees and dyck paths according to the preorder
20     public static String tree2string(tree T){
21         String w = "";
22         if(T == null){
23             return w;
24         }
25         else{
26             return w = tree2string(T.tree1) + "1" + tree2string
27                 (T.tree2) + "0";
28         }
29     }
30
31     //returns the right concatenation of two trees
32     public static tree CR(tree T1, tree T2){
33         tree newtree = new tree();
34         newtree.tree1 = T1;
35         newtree.tree2 = T2;
36         return newtree;
37     }
38
39     //returns the product of two trees
40     public static tree Product(tree T1, tree T2){
41         //tree newtree = new tree();
42         if(T2 == null){
43             return T1;
44         }
45         else{
46             if(T2.tree1 == null){
47                 return CR(T2.tree1, Product(T1, T2.tree2));
48             }
49             else{
50                 return CR(Product(T1, T2.tree1), T2.tree2);
51             }
52         }
53     }
54
55     // returns a list with the right concatenation of

```



```

55 // every element of g1 with every element of g2
56 public static ArrayList<tree> Cartesian_CR(ArrayList<tree> g1,
    ArrayList<tree> g2){
57     ArrayList<tree> g = new ArrayList<tree>();
58     int sizeofg1 = g1.size();
59     int sizeofg2 = g2.size();
60     for(int i = 0; i <= sizeofg1 - 1; i++){
61         for(int j = 0; j <= sizeofg2 - 1; j++){
62             g.add(CR(g1.get(i), g2.get(j)));
63         }
64     }
65     return g;
66 }
67
68 // returns a list with the product of
69 // every element of g1 with every element of g2
70 public static ArrayList<tree> Cartesian_Product(ArrayList<tree> g1,
    ArrayList<tree> g2){
71     ArrayList<tree> g = new ArrayList<tree>();
72     int sizeofg1 = g1.size();
73     int sizeofg2 = g2.size();
74     for(int i = 0; i <= sizeofg1 - 1; i++){
75         for(int j = 0; j <= sizeofg2 - 1; j++){
76             g.add(Product(g1.get(i), g2.get(j)));
77         }
78     }
79     return g;
80 }
81
82
83 // returns the elevation of a dyck path a
84 public static dyck elevate(dyck a){
85     dyck temp = new dyck();
86     temp.b = a;
87     temp.c = null;
88     return temp;
89 }
90
91 // returns the dyck path a1a2 i.e. the concatenation of a1, a2
92 public static dyck concatenate(dyck a1, dyck a2){
93     if( a1 == null){
94         return a2;
95     }
96     else{
97         dyck temp = new dyck();
98         temp.b = a1.b;
99         temp.c = concatenate(a1.c, a2);
100        return temp;
101    }
102 }
103
104 // computes all trees with specified degree sequence
105 // encoded by the sequence of ascents of Dyck path a
106 public static ArrayList<tree> compute_T(dyck a){
107     ArrayList<tree> alltrees = new ArrayList<tree>();

```

```

108 ArrayList<dyck> prothemata = new ArrayList<dyck>();
109 ArrayList<dyck> epithemata = new ArrayList<dyck>();
110 tree emptytree = null;
111 tree unarytree = new tree();
112 unarytree.tree1 = null;
113 unarytree.tree2 = null;
114 ArrayList<tree> unaryl原因 = new ArrayList<tree>();
115 unaryl原因.add(unarytree);
116 if( a == null ){
117     alltrees.add(emptytree); return alltrees;
118 }
119 if( a.b == null){
120     alltrees.addAll(Cartesian_Product(unaryl原因,
121         compute.T(a.c)));
122     return alltrees;
123 }
124 else{
125     // find the prefixes and the matching suffixes of a
126     prothemata.add(null);
127     epithemata.add(a.c);
128     while(epithemata.get(epithemata.size()-1) != null){
129         prothemata.add(concatenate(prothemata.get(
130             prothemata.size()-1), elevate(epithemata
131                 .get(epithemata.size()-1).b)));
132         epithemata.add(epithemata.get(epithemata.
133             size()-1).c);
134     }
135     for(int i = 0; i <= prothemata.size()-1; i++){
136         dyck delta = prothemata.get(i);
137         dyck gamma_meion_delta = epithemata.get(i);
138         alltrees.addAll(Cartesian_Product(
139             Cartesian_CR(compute.T_astro(a.b),
140                 compute.T(delta)), compute.T(
141                     gamma_meion_delta)));
142     }
143     return alltrees;
144 }
145 }
146 // computes all trees in T* with specified degree sequence
147 // encoded by the sequence of ascents of Dyck path a
148 public static ArrayList<tree> compute.T_astro(dyck a){
149     ArrayList<tree> g = new ArrayList<tree>();
150     tree temp = new tree();
151     if( a.b == null && a.c == null){
152         temp.tree1 = null;
153         temp.tree2 = null;
154         g.add(temp);
155         return g;
156     }
157     else{
158         return Cartesian_CR(compute.T_astro(a.b), compute.T
159             (a.c));
160     }
161 }

```

5.5.3 Κατασκευή του συνόλου των μονοπατιών Dyck που αποφεύγουν το *uudu*

Στην ενότητα αυτή κατασκευάζονται τα μονοπάτια Dyck που αποφεύγουν το πρότυπο *uudu* για τα οποία ουσιαστικά έχει νόημα¹⁷ να γίνει εφαρμογή των δύο προηγούμενων προγραμμάτων.

Για την κατασκευή του συνόλου αυτού χρησιμοποιείται η κωδικοποίηση των μονοπατιών Dyck από κυρίαρχες ακολουθίες με την ιδιότητα ότι εμφανίζουν 0 μετά από κάθε στοιχείο με τιμή μεγαλύτερη ή ίση του 2, σύμφωνα με την πρόταση 4.5.1.

Οι κυρίαρχες αυτές ακολουθίες κατασκευάζονται λεξικογραφικά ξεκινώντας από την ελάχιστη κυρίαρχη ακολουθία που αποτελείται μόνο από μονάδες και φτάνοντας στη μέγιστη κυρίαρχη ακολουθία με πρώτο στοιχείο n (το ημιμήκος της λέξης Dyck) και όλα τα άλλα στοιχεία μηδέν.

Συγκεκριμένα, για κάθε κυρίαρχη ακολουθία (διάφορη της μέγιστης)

$$d = d_1, d_2, \dots, d_\lambda, 0, 0, \dots, 0$$

με $\lambda \geq 3$ και $\alpha_\lambda > 0$, η επόμενη της είναι η ακολουθία

$$d_1, d_2, \dots, d_{\lambda-2}, d_{\lambda-1} + 1, 0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, \text{ αν } \alpha_{\lambda-2} \leq 1$$

ή

$$d_1, d_2, \dots, d_{\lambda-2} + 1, 0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, \text{ αν } \alpha_{\lambda-2} > 1,$$

όπου ο αριθμός των μονάδων στο τέλος των παραπάνω εκφράσεων είναι ίσος με $\alpha_{\lambda-1}$ και στην ειδική περίπτωση της κυρίαρχης ακολουθίας

$$d_1, d_2, 0, 0, \dots, 0$$

η επόμενη της είναι η ακολουθία

$$d_1 + 1, 0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1$$

όπου ο αριθμός των μονάδων στο τέλος της παραπάνω έκφρασης είναι ίσος με $\alpha_2 - 1$.

Κατασκευή των μονοπατιών Dyck που αποφεύγουν το πρότυπο *uudu*

```

1
2 // Contents of uudu.java
3
4 // 1. An algorithm to generate all Dyck paths that avoid uudu.
5 // 2. An algorithm to convert a dominating sequence into a Dyck path.
6
7
8 import java.awt.*;
9 import java.util.*;
10
11
12 public class uudu{

```

¹⁷Αφού $T(\alpha) = \emptyset$ για κάθε μονοπάτι α που περιέχει το πρότυπο *uudu*.

```

13 // generates all Dyck paths that avoid uudu encoded by their
14 // sequence of ascents in lexicographic order,
15 // the basic idea is to try to move "one's" from the right
16 // to the left. this ensures that the new sequence is still
17 // dominating
18 // public static ArrayList<int[]> generate_uudu_avoiding(int n){
19 //     ArrayList<int[]> uudu_avoiding = new ArrayList<int[]>();
20 //     // the minimum sequence is the constant with every element
21 //     // 1;
22 //     int[] word = new int[n];
23 //     for(int i = 0; i<=n-1; i++){ word[i] = 1; }
24 //     // if word[0] = n we have the maximum sequence that avoids
25 //     // uudu i.e. n,0,0,...,0
26 //     while(word[0]!=n){
27 //         uudu_avoiding.add(copy_sequence(word));
28 //         // We start from right to left, seeking for the
29 //         // first
30 //         // non-zero element word[i]. There are three cases:
31 //         // 1. if word[i-2] <= 1 increase by one word[i-1]
32 //         // 2. if word[i-2] > 2 increase by word[i-2]
33 //         // 3. if i=1 increase by one word[0]
34 //         // and for every case distribute the remaining ones
35 //         // of word[i] to the end of the word
36 //         for(int i = n-1; i >= 0; i--){
37 //             if(i>=2 && word[i] > 0 && word[i-2] <=1){
38 //                 word[i-1] = word[i-1]+1;
39 //                 int save_ones = word[i];
40 //                 word[i] = 0;
41 //                 for(int j=1;j<=save_ones-1;j++){
42 //                     word[n-j] = 1;
43 //                 }
44 //                 break;
45 //             }
46 //             if(i>=2 && word[i] > 0 && word[i-2] >1){
47 //                 word[i-2] = word[i-2]+1;
48 //                 int save_ones = word[i];
49 //                 word[i] = 0;
50 //                 for(int j=1;j<=save_ones-1;j++){
51 //                     word[n-j] = 1;
52 //                 }
53 //                 break;
54 //             }
55 //             if(i==1){
56 //                 word[0] = word[0]+1;
57 //                 int save_ones = word[1];
58 //                 word[1] = 0;
59 //                 for(int j=1;j<=save_ones-1;j++){
60 //                     word[n-j] = 1;
61 //                 }
62 //                 break;
63 //             }
64 //         }
65 //     }
66 //     uudu_avoiding.add(copy_sequence(word));

```

```

66         return uudu_avoiding;
67     }
68
69     // generates all Dyck paths that avoid uudu as Dyck paths
70     // it is slower from the above because of the cost of conversion
71     // see the previous method for comments
72     public static ArrayList<dyck> generate_uudu_avoiding_dyck(int n){
73         ArrayList<dyck> uudu_avoiding = new ArrayList<dyck>();
74         int[] word = new int[n];
75         for(int i = 0; i<=n-1; i++){ word[i] = 1; }
76         while(word[0]!=n){
77             uudu_avoiding.add(dominating2dyck(word));
78             for(int i = n-1; i >= 0; i--){
79                 if(i>=2 && word[i] > 0 && word[i-2] <=1){
80                     word[i-1] = word[i-1]+1;
81                     int save_ones = word[i];
82                     word[i] = 0;
83                     for(int j=1;j<=save_ones-1;j++){
84                         word[n-j] = 1;
85                     }
86                     break;
87                 }
88                 if(i>=2 && word[i] > 0 && word[i-2] >1){
89                     word[i-2] = word[i-2]+1;
90                     int save_ones = word[i];
91                     word[i] = 0;
92                     for(int j=1;j<=save_ones-1;j++){
93                         word[n-j] = 1;
94                     }
95                     break;
96                 }
97                 if(i==1){
98                     word[0] = word[0]+1;
99                     int save_ones = word[1];
100                     word[i] = 0;
101                     for(int j=1;j<=save_ones-1;j++){
102                         word[n-j] = 1;
103                     }
104                     break;
105                 }
106             }
107         }
108         uudu_avoiding.add(dominating2dyck(word));
109         return uudu_avoiding;
110     }
111
112     // returns the Dyck word with dominating sequence d
113     public static dyck dominating2dyck(int[] d){
114         if(d == null) {return null;}
115         int length = d.length;
116         dyck a = new dyck();
117         int[] b;
118         int[] c;
119         // find the return point of d
120         // i.e. with sum{d[k],k=0..i} = 0

```

```

121 int height = d[0]-1;
122 int returnpoint=0;
123 while(height != 0){
124     returnpoint++;
125     height += d[returnpoint]-1;
126 }
127 // find b
128 if(returnpoint > 0){
129     b = new int[returnpoint];
130     b[0] = d[0]-1;
131     for(int j = 1; j<=b.length-1; j++){
132         b[j] = d[j];
133     }
134 }
135 else{
136     b = null;
137 }
138 // find c
139 if((length - returnpoint-1 > 0){
140     c = new int[length - returnpoint -1];
141     for(int j = 0; j<=c.length-1; j++){
142         c[j] = d[returnpoint+1+j];
143     }
144 }
145 else{
146     c = null;
147 }
148 // generate the dyck path
149 a.b = dominating2dyck(b);
150 a.c = dominating2dyck(c);
151 return a;
152 }
153 // returns the Dyck string with dominating sequence d
154 public static String dominating2string(int[] d){
155     String dyck = "";
156     for(int i=0;i<=d.length-1;i++){
157         for(int j=1;j<=d[i];j++){
158             dyck = dyck + "1";
159         }
160         dyck = dyck + "0";
161     }
162     return dyck;
163 }
164 }
165 // makes a copy of a sequence
166 public static int[] copy_sequence(int[] a){
167     int size = a.length; // the size of a;
168     int[] copy_seq = new int[size];
169     for(int i=0;i<=size-1;i++){
170         copy_seq[i] = a[i];
171     }
172     return copy_seq;
173 }
174 }
175 }

```

```
176 // End of class uudu.java
```

Βιβλιογραφία

- [1] F. Acerbi, On the shoulders of Hipparchus: a reappraisal of ancient Greek combinatorics, *Arch. Hist. Exact Sci.* **57** (2003), 465–502.
- [2] M. Aigner, Motzkin numbers, *European J. Combin.* **19** (1998), 663–675.
- [3] R. Alter, Some remarks and results on Catalan numbers, in *Proceedings of the Second Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Baton Rouge, 1971*, 109–132.
- [4] J. Alvarez, Localization of random copolymers, *33rd Annual Meeting of the Statistical Society of Canada, University of Saskatchewan, June 13, 2005*.
- [5] S. Asakura, A note on Dyck code, *Research reports of Fukui National College of Technology, Natural science and Engineering*, **38** (2004), 45–48.
- [6] A. Asinowski and T. Mansour, Dyck paths with coloured ascents, *European J. Combin.* **29** (2008), 1262–1279.
- [7] M. Atkinson, Uniform generation of rooted ordered trees with prescribed degrees, *The Computer Journal* **36** (1993), 593–594.
- [8] I. Bajunaid, J. M. Cohen, F. Colonna and D. Singman, Function Series, Catalan Numbers, and Random Walks on Trees, *Amer. Math. Monthly* **112** (2005), 765–785.
- [9] M. Barakat and T. Constantinescu, Tensor Algebras and Displacement Structure III: Asymptotic properties, *Journal for Analysis and its Applications* **23** (2004), 253–274.
- [10] J. L. Baril and J. M. Pallo, The Phagocyte Lattice of Dyck paths, *Order* **23** (2006), 97–107.
- [11] F. Benaych-Georges and I. Nechita, A permutation model for free random variables and its classical analogue, *Pacific J. Math.*, to appear, (2009), available at <http://arxiv.org/abs/0801.4229>.
- [12] S. Benchekroun and P. Moszkowski, A new bijection between ordered trees and legal bracketings, *European J. Combin.* **17** (1996), 605–611.
- [13] A. Berztiss, A taxonomy of binary tree traversal, *BIT* **26** (1986), 266–276.
- [14] H. W. Block, D. Chhetry, Z. Fang, and A. R. Sampson, Partial orderings on permutations, in *Topics in statistical dependence*, Institute of Mathematical Statistics Hayward, CA, 1990, 45–55.

- [15] J. Bonin, L. W. Shapiro and R. Simion, Some q -analogues of the Schröder numbers arising from combinatorial statistics on lattice paths, *J. Statist. Plann. Inference* **34** (1993), 33–55.
- [16] J. M. Borwein and R. M. Corless, An Encyclopedia of Integer Sequences, *SIAM Review* **38** (1996), 333–337.
- [17] R. Brak and J. W. Essam, Directed percolation near a wall: III. exact results for the mean length and number of contacts, *J. Phys. A* **31** (1999), 4851–4869.
- [18] R. Brak and J. W. Essam, Return polynomials for non-intersecting paths above a surface on the directed square lattice, *J. Phys. A* **34** (2001), 10763–10782.
- [19] R. Brak and J. W. Essam, Bicoloured Dyck paths and the contact polynomial for n non-intersecting paths in a half-plane lattice, *Electron. J. Combin.* **10** (2003), R35.
- [20] R. Brak, J. W. Essam and A. Owczarek, New results for directed vesicles and chains near an attractive wall, *J. Stat. Phys.* **93** (1998), 155–192.
- [21] R. Brak, J. W. Essam and A. Owczarek, From the Bethe Ansatz to the Gessel-Viennot theorem, *Ann. Comb.* **3** (1998), 251–263.
- [22] R. Brak, J. W. Essam and A. Owczarek, Scaling analysis for the absorption transition in a watermelon network of n directed non-intersecting walks, *J. Stat. Phys.* **102** (2001), 997–1017.
- [23] A. Brown, A. Hategan, D. Safer, Y. Goldman, D. Discher, Cross-Correlated TIRF/AFM Reveals Asymmetric Distribution of Force-Generating Heads along Self-Assembled, “Synthetic” Myosin Filaments, *Biophysical Journal* **96** (2009), 1952–1960.
- [24] W. G. Brown, Historical note on a recurrent combinatorial problem, *Amer. Math. Monthly* **72** (1965), 973–977.
- [25] T. Brylawski, The lattice of integer partitions, *Discrete Math.* **6** (1973), 210–219.
- [26] E. Barucci, E. Pergola, R. Pinzani and S. Rinaldi, ECO-systems for Dyck and Schröder paths, *P.U.M.A.* **11** (2000), 401–407.
- [27] D. Callan, Two bijections for Dyck path parameters, preprint, (2004), 4pp, available at <http://www.arxiv.org/abs/math.CO/0406381>.
- [28] D. Callan, Some bijections and identities for the Catalan and Fine numbers, *Sém. Lothar. Combin.* **53** (2006), Article B53e.
- [29] L. Carlitz, Solutions of certain recurrences, *SIAM J. Appl. Math.* **17** (1969), 251–259.
- [30] K.-H. Chen, C.-M. Fan and H. J. Shyr, Non-disjunctive dense languages and generalized Dyck codes, *Soochow J. Math.* **32** (2006), 253–276.
- [31] K.-H. Chen, Z.-Z. Li and Y.-S. Tsai, Overlapping words, codes, disjunctivity and density of language, *Int. J. Comput. Math.* **85** (2008), 169–189.
- [32] M. Delest, Algebraic Languages : A Bridge between Combinatorics and Computer Science, *FPSAC '94*, Rutgers, USA, 23–27 May 1994.

- [33] A. Denise and R. Simion, Two combinatorial statistics on Dyck paths, *Discrete Math.* **137** (1995), 155–176.
- [34] N. Dershowitz and S. Zaks, Enumerations of ordered trees, *Discrete Math.* **31** (1980), 9–28.
- [35] N. Dershowitz and S. Zaks, Patterns in trees, *Discrete Appl. Math.* **25** (1989), 241–255.
- [36] E. Deutsch, A bijection on Dyck paths and its consequences, *Discrete Math.* **179** (1998), 253–256.
- [37] E. Deutsch, A bijection on Dyck paths and its consequences (note), *Discrete Math.* **187** (1998), 297.
- [38] E. Deutsch, Dyck path enumeration, *Discrete Math.* **204** (1999), 167–202.
- [39] E. Deutsch, An involution on Dyck paths and its consequences, *Discrete Math.* **204** (1999), 163–166.
- [40] E. Deutsch, A Bijection on Ordered Trees and Its Consequences, *J. Combin. Theory Ser. A* **90** (2000), 210–215.
- [41] E. Deutsch, Ordered trees with prescribed root degrees, node degrees, and branch lengths, *Discrete Math.* **282** (2004), 89–94.
- [42] E. Deutsch and L. Shapiro, A survey of the Fine numbers, *Discrete Math.* **241** (2001) 241–265.
- [43] E. Deutsch and L. W. Shapiro, A bijection between ordered trees and 2-Motzkin paths and its many consequences, *Discrete Math.* **256** (2002), 655–670.
- [44] P.T. Do and V. Vajnovszki, CAT generation of Dyck words and relatives, *International Combinatorics, Geometry and Computer Science Conference CGCS2007*, Luminy, France, May 2-4, 2007.
- [45] R. Donaghey, Restricted plane tree representations of four Motzkin-Catalan equations, *J. Combin. Theory Ser. B* **22** (1977), 114–121.
- [46] R. Donaghey and L. W. Shapiro, Motzkin numbers, *J. Combin. Theory Ser. A* **23** (1977), 291–301.
- [47] T. Došlić, Morgan Trees and Dyck paths, *Croatica Chemica Acta* **75** (4) (2002), 881–889.
- [48] T. Došlić, D. Svrtan and D. Veljan, Enumerative aspects of secondary structures, *Discrete Math.* **285** (2004), 67–82.
- [49] M. Drmota, D. Gardy and B. Gittenberger, General urn models with several types of balls and Gaussian limiting fields, *Random Structures Algorithms* **24** (2003), 75–103.
- [50] G. H. E. Duchamp, H. Hadj Kacem and C. Bertelle, Moderate growth time series for dynamic combinatorics modelisation, *ICELM-2, International Conference on Economics, Law and Management, May 31 - June 3, 2006, Tirgu-Mures, Romania.*
- [51] G. H. E. Duchamp, C. Bertelle and R. Ghnemat, Dynamic combinatorics, complex systems and applications to physics, *MACIS2, ACEA, 23-24 July 2008, Al-Balqa Applied University, As-Sull, Jordan.*

- [52] P. Duchon, On the enumeration and generation of generalized Dyck words, *Discrete Math.* **225** (2000), 121–135.
- [53] I. Dumitriu and E. Rassart, Path counting and random matrix theory, *Electron. J. Combin.* **10** (2003), R43.
- [54] P. Edelman and C. Greene, Balanced tableaux, *Adv. in Math.* **63** (1987), 42–99.
- [55] P. H. Edelman and R. Simion, Chains in the lattice of noncrossing partitions, *Discrete Math.* **126** (1994), 107–119.
- [56] S. Elizalde and T. Mansour, Restricted Motzkin permutations, Motzkin paths, continued fractions, and Chebyshev polynomials, *Discrete Math.* **305** (2005), 170–189.
- [57] L. Euler, *Novi Commentarii Academiae Scienetarium Imperialis Petropolitanque* **7**, (1758/9), 13-14.
- [58] L. Ferrari and R. Pinzani, Lattices of lattice paths, *J. Statist. Plann. Inference* **135** (2005), 77-92.
- [59] T. Fine, Extrapolation when very little is known about the source, *Inform. Control* **16** (1970), 331-359.
- [60] W. Fulton, *Young tableaux: With applications to representation theory and geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [61] J. S. Frame, G. B. Robinson and R. M. Thrall, The hook graphs of the symmetric group, *Canad. J. Math.* **6** (1954), 316–325.
- [62] I.M. Gessel, B. Sagan and Y.N. Yeh, Enumeration of trees by inversions, *J. Graph Theory* **19** (1995), 435–459.
- [63] H. Gould, *Combinatorial Identities*, Morgantown, 1972.
- [64] H. W. Gould, *Research Bibliography of Two Special Number Sequences*, revised ed, Published by the author, Morgantown, W. Va., 1976.
- [65] H. W. Gould, Generalization of a Formula of Touchard for Catalan Numbers, *J. Combin. Theory Ser. A* **23** (1977), 351–353.
- [66] N. S.S. Gu, N. Y. Li and T. Mansour, 2-Binary trees: Bijections and related issues, *Discrete Math.* **308** (2008), 1209–1221.
- [67] G. Guilband and P. Rosenstiehl, Analyse algébrique d'un scrutin, *Math. Sci. Hum.* **4** (1963), 9–33.
- [68] R. Guy, The Encyclopedia of Integer Sequences *Amer. Math. Monthly* **104**(2), 180–184.
- [69] S. Hirose and S. Okawa, Characterizations of language classes: universal grammars, Dyck reductions, and homomorphisms, in *Grammars and automata for string processing*, *Topics in Computer Mathematics* **9**, Taylor & Francis, London, 2003.
- [70] H. Izbicki, Über Unterbäume eines Baumes, *Monatsh. Math.* **74** (1970), 56–62.
- [71] Z. Kása, Generating and ranking of Dyck words, *Acta Univ. Sapientiae, Informatica*, **1** (2009), 109–118.

- [72] S. Kitaev and T. Mansour, A survey on certain pattern problems, preprint (2003), available at <http://math.haifa.ac.il/toufik/pappre014.pdf>
- [73] D. A. Klarner, Correspondence between plane trees and binary sequences, *J. Combin. Theory* **9** (1970), 401–411.
- [74] M. Klazar, On numbers of Davenport-Schinzel sequences, *Discrete Math.* **185** (1998), 77–87.
- [75] M. Klazar, On *abab*-free and *abba*-free set partitions, *European J. Combin.* **17** (1996), 53–68.
- [76] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming, Volume 1, Addison-Wesley, 1997.*
- [77] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 4, Generating All Trees, Addison-Wesley, 2006.*
- [78] J. Korsh and P. LaFollette, Multiset Permutations and Loopless Generation of Ordered Trees with Specified Degree Sequence, *J. Algorithms* **34** (2000), 309–336.
- [79] J. Korsh and P. LaFollette, Loopless generation of trees with specified degrees, *The Computer Journal* **45** (2002), 364–372.
- [80] C. Krattenthaler, Permutations with Restricted Patterns and Dyck paths, *Adv. in Appl. Math.* **27** (2001), 510–530.
- [81] G. Kreweras, Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions d'entiers, *Cahiers du B.U.R.O.* **6** (1965), 5–105.
- [82] G. Kreweras and H. Niederhausen, Solution of an enumerative problem connected with lattice paths, *European J. Combin.* **2** (1981), 55–60.
- [83] Y. Le Borgne, Counting upperinteractions in Dyck paths, *Sém. Lothar. Combin.* **54** (2005/06), Article B54f.
- [84] P. Leroux and X. G. Viennot, A combinatorial approach to functionals expansions: An introduction with an example, *Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control, Austin Texas, December 1988.*
- [85] Z.-Z. Li, Classifications of Bifix Codes, *Ph.D. Thesis* (2005), Chung Yuan Christian University, Taiwan.
- [86] I. Lukovitz and I. Gutman, On Morgan-trees, *Croatian Chemical Acta* **75** (4) (2002), 563–576.
- [87] I. Lukovits, Isomer Generation: Syntactic Rules for Detection of Isomorphism, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* **39**(3) (1999), 563–568.
- [88] I. Lukovits, A Compact Form of the Adjacency Matrix, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* **40**(5) (2000), 1147–1150.
- [89] S. N. Majumdar, Brownian functionals in Physics and Computer Science, *Current Science* **89** (12) (2005), 2076–2092.
- [90] E. Mäkinen, A survey on binary tree codings, *The Computer Journal* **34** (1991), 438–443.

- [91] T. Mansour, Counting peaks at height k in a Dyck path, *J. Integer Seq.* **5** (2002), Article 02.1.1.
- [92] T. Mansour, Statistics on Dyck paths, *J. Integer Seq.* **9** (2006), Article 06.1.5.
- [93] C.R. Mathieu and J. S. Vitter, Maximum queue size and hashing with lazy deletion, *Rapports de Recherche* **851**, INRIA, France, 1988.
- [94] E. McNicholas, Embedded Tree Structures and Eigenvalue Statistics of Genus Zero One-Face Maps, *Ph.D. Thesis*, University of Arizona, 2006.
- [95] D. Merlini, R. Sprungoli and M. Verrì, Some statistics on Dyck paths, *J. Statist. Plann. and Infer.* **101** (2002), 211–227.
- [96] O. Milenković, Constrained coding for context-free languages with applications to genetic sequence modelling, *ISIT 2007*, Nice, France, June 24–29, 2007.
- [97] J. W. Moon, Some enumeration problems for similarity relations, *Discrete Math.* **26** (1979), 251–260.
- [98] T. Motzkin, Relations between hypersurface cross ratios, and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent preponderance, and for non-associative products, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 352–360.
- [99] T. V. Narayana, Sur les treillis formes par les partitions d'un entier; leurs applications à la théorie des probabilités, *Comp. Rend. Acad. Sci. Paris* **240** (1955), 1188–1189.
- [100] T. V. Narayana, A partial order and its applications to probability theory, *Sankhyā* **21** (1957), 91–98.
- [101] T. V. Narayana, *Lattice Path Combinatorics with Statistical Applications*, University of Toronto Press, 1979.
- [102] T. V. Narayana and G. E. Fulton, A note on the compositions of an integer, *Canad. Math. Bull.* **1** (1958), 169–173.
- [103] A. Panayotopoulos and A. Sapounakis, On the prime decomposition of Dyck words, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **40** (2002), 33–39.
- [104] J.-G. Penaud and O. Roques, Génération de chemins de Dyck à pics croissants, *Discrete Math.* **246** (2002), 255–267.
- [105] E. Pergola, Two bijections for the area of Dyck paths, *Discrete Math.* **241** (2001), 435–447.
- [106] J. Riordan, A note on Catalan parentheses, *Amer. Math. Monthly* **80** (1973), 904–906.
- [107] J. Riordan, Enumeration of plane trees by branches and endpoints, *J. Combin. Theory Ser. A* **19** (1975), 214–222.
- [108] D. G. Rogers, Similarity relations on finite ordered sets, *J. Combin. Theory Ser. A* **23** (1977), 88–98 Erratum: 25 (1978) 95–96.
- [109] D. G. Rogers and L. W. Shapiro, Deques, trees and lattice paths, in *Combinatorial Mathematics VIII*, LNM 884, Springer-Verlag, Berlin, (1980), 293–303.

- [110] A. Sapounakis and P. Tsikouras, On k -colored Motzkin words, *J. Integer Seq.* **7** (2004), Article 04.2.5.
- [111] A. Sapounakis and P. Tsikouras, Counting peaks and valleys in k -colored Motzkin paths, *Electron. J. Combin.* **12** (2005), R16.
- [112] A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, On the dominance partial ordering of Dyck paths, *J. Integer Seq.* **9** (2006), Article 06.2.5.
- [113] A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Ordered trees and the inorder traversal, *Discrete Math.* **306** (2006), 1732–1741.
- [114] A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Dyck path statistics, *Proceedings of the WSEAS 10th Int'l Conference in Applied Mathematics*, Istanbul, Turkey, May 27-29, 2006.
- [115] A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Counting strings in Dyck paths, *Discrete Math.* **307** (2007), 2909–2924.
- [116] A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Some strings in Dyck paths, *Australasian J. Combin.* **39** (2007), 49–72.
- [117] A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, Enumeration of strings in Dyck paths: a bijective approach, *Discrete Math.* **309** (2009), 3032–3039.
- [118] A. Sapounakis, I. Tasoulas and P. Tsikouras, A bijective approach for the enumeration of strings in Dyck paths, *21st British Combinatorial Conference*, Reading, July 9, 2007.
- [119] L. W. Shapiro, Catalan numbers and total information numbers, in *Proc. Sixth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Florida, Atlantic University, 1975*, 531–539 (*Congressus Numerantium*) Vol. 14).
- [120] L. W. Shapiro, A short proof of an identity of Touchard's concerning Catalan numbers, *J. Combin. Theory Ser. A* **20** (1976), 375–376.
- [121] L. W. Shapiro and A. B. Stephens, Bootstrap percolation, the Schröder numbers, and the n -kings problem, *SIAM J. Discrete Math.* **4** (1991), 275–280.
- [122] E. Schröder, Vier combinatorische Probleme, *Z. für Math. Physik* **15** (1870), 361–376.
- [123] R. Simion and D. Ullman, On the structure of the lattice of noncrossing partitions, *Discrete Math.* **98** (1991), 193–206.
- [124] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (2009), published electronically at <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.
- [125] W. Slough and K. Efe, Efficient algorithms for tree reconstruction, *BIT* **29** (1989), 361–363.
- [126] C. Soteris, Bounds for directed walk models of random copolymer localization, *Random Polymers, June 18-22, 2007, EURANDOM, Eindhoven, The Netherlands*.
- [127] R. P. Stanley, Combinatorial reciprocity theorems, *Adv. in Math.* **14** (1974), 194–252.
- [128] R. Stanley, On the number of reduced decompositions of elements of Coxeter groups, *European J. Combin.* **5** (1984), 359–372.

- [129] R. P. Stanley, Hipparchus, Plutarch, Schröder, and Hough, *Amer. Math. Monthly* **104** (1997), 344–350.
- [130] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 1, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [131] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2, volume 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [132] R. P. Stanley, *Catalan Addendum*, available at <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf>.
- [133] V. Strehl, A note on similarity relations, *Discrete Math.* **19** (1977), 99–101.
- [134] R. A. Sulanke, Catalan Path Statistics Having the Narayana distribution, *Discrete Math.* **180** (1998), 369–389.
- [135] R. A. Sulanke, Constraint sensitive Catalan path statistics having the Narayana distribution, *Discrete Math.* **204** (1999), 397–414.
- [136] R. A. Sulanke, The Narayana distribution, *J. Statist. Plan. Inf.* **101** (2002), 311–326.
- [137] Y. Sun, The statistic “number of *udu*’s” in Dyck paths, *Discrete Math.* **287** (2004), 177–186.
- [138] D. Tamari, The algebra of bracketings and their enumeration, *Nieuw. Arch. Wisk.* **10** (1962), 131–146.
- [139] I. Tasoulas and P. Tsikouras, Dominating sequences and traversals of ordered trees, *20th British Combinatorial Conference* Durham, July 11–15, 2005.
- [140] J. Touchard, Sur certaines équations fonctionnelles, in *Proc. Internat. Math. Congress Toronto, 1924*, Vol. 1 (1928), 465–472.
- [141] M. Vöge and K. Simon, The Kubelka-Munk model and Dyck paths, *J. Stat. Mech.* (2007), 2–18.
- [142] D. Vukičević, T. Došlić and A. Graovac, Recursive functions and Morgan trees, *Magyar Kémiai Polyóirat* **114** (4) (2008), 166–170.
- [143] J. West, Generating trees and the Catalan and Schröder numbers, *Discrete Math.* **146** (1995), 247–262.
- [144] S. Whittington, Directed walk models of polymers subject to a force, *Workshop: Combinatorial Problems Raised by Statistical Mechanics February 19–23, 2007*, CRM, University of Montreal, Canada.
- [145] H. S. Wilf, *generatingfunctionology*, Academic Press, 1993.
- [146] Α. Σαπουνάκης και Ι. Τασούλας, Το δικτυωτό των λέξεων Dyck, *Επιστημονική Επετηρίδα πριν τιμήν του Καθηγητή Α. Παναγιωτόπουλου*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Πειραιάς, 2006.

Ευρετήριο

$D, D_n, 24$

$\Gamma_a, 58$

$\kappa, 56$

$\bar{N}_{dr}, 133$

Young tableau, 36

πρότυπο, 36

hook-length formula, 36

ακολουθία

A005118, 197

A091894, 117

A000045, 31

A000108, 13, 15

A000957, 19

A001003, 21

A001006, 17, 63, 64, 67

A001263, 16, 62, 146

A005773, 74

A006318, 194

A006327, 52

A014137, 93

A025242, 67

A035929, 90

A036765, 71

A053117, 78

A059019, 87

A065600, 100

A078481, 69, 147

A082582, 145

A086581, 46, 67, 151

A091156, 66, 133

A091867, 133

A091869, 135, 138, 146

A091894, 138

A092107, 64, 133

A094507, 69, 135

A098978, 67, 133, 146

A100537, 196

A102405, 75, 138

A114486, 100, 150

A114489, 87

A114492, 69, 130, 135

A114848, 146

A116424, 130, 133, 135

αποφεύγουσα, 62

κυρίαρχη, 30

κυριαρχεί, 30

κυριαρχείται, 30

αλφάβητο, 23

αλυσίδα, 32

ανάβαση, 24

ανύψωση, 26

άνοδος, 23

αντικλειστότητα, 44

απλή αντιμετάθεση, 56

αριθμοί

Catalan, 13

Donaghey, 19

Fibonacci, 22

Fine, 19

Motzkin, 17

Narayana, 16

Narayana (μετατοπισμένοι), 17

Schröder (μεγάλοι), 22

Schröder (μικροί), 21

Touchard, 14

ψηφοφορίας, 13

αριστερή διάσπαση, 165

αριστερό μονοπάτι Dyck

πρώτο, 26

αριστερό μονοπάτι Dyck, 24

αριστερό μονοπάτι δένδρου, 179

αριστερό τμήμα λέξης, 23

αριστερός παράγοντας, 24

αρχή μονοπατιού, 23

ασθενής διάταξη Bruhat, 56

βήμα, 23

βαθμός κόμβου, 161

βαθμός μονοπατιού, 46

δένδρο, 161

2-δυναδικό, 94
 κενό, 161
 δεξιά διάσπαση, 165
 δεξιό μονοπάτι Dyck, 24
 δεξιό μονοπάτι δένδρου, 179
 δεξιό τμήμα, 23
 δεξιός παράγοντας, 24
 διάγραμμα Ferrers, 34
 μέγεθος, 35
 σχήμα, 34
 τριγωνικό, 35
 διάσπαση της πρώτης επιστροφής, 25
 διάσπαση της τελευταίας επιστροφής, 25
 διάσπαση του αριστερού μονοπατιού, 166
 διάσπαση του δεξιού μονοπατιού, 166
 διάσπαση των υποδένδρων της ρίζας, 166
 διάταξη κυριαρχίας, 36
 διαδοχικά τμήματα, 23
 διατεταγμένο δένδρο με ρίζα, 161
 δικτυωτό, 33
 Young, 35
 διάγραμμα Hasse, 32
 διαβαθμισμένο, 33
 επιμεριστικό, 33
 τάξη, 33
 τοπικά πεπερασμένο, 33
 υποδικτυωτό, 33
 διπλή άνοδος, 24
 διπλή κάθοδος, 24

 επίπεδο κόμβου, 161
 επαναληπτική αλυσίδα, 32
 επιστροφή, 24
 εσωτερικός κόμβος, 161

 φύλλο, 161

 γάντζος, 36
 γεννήτρια συνάρτηση, 10
 γεννήτρια συνάρτηση τάξης, 33
 γινόμενο, 23
 γλώσσα, 23

 ημιμήκος μονοπατιού, 23

 θεώρημα αντιστροφής του Lagrange, 12

 κάθοδος, 23
 κατάβαση, 24
 κατοπτρική απεικόνιση, 30
 κλάσεις συγγένειας, 27

κλειστότητα, 42
i-οστή κλειστότητα, 46
 κοιλάδα, 24
 κορυφή, 24

 λέξη
 Dyck, 23

 μήκος αλυσίδας, 32
 μήκος λέξης, 23
 μ.δ.σ., 32
 μεγιστική αλυσίδα, 32
 μεμονωμένη άνοδος, 27
 μετάθεση
 αποφεύγει, 56
 περιέχει, 56
 μονοπάτι, 23
 Dyck, 23
 Fibonacci, 22, 52
 Lukasiewicz, 67
 Motzkin, 18
 κενό, 23

 πέρας μονοπατιού, 23
 παράμετρος, 10
 ισοκατανεμημένες, 11
 πολυώνυμα Chebyshev δευτέρου είδους, 79
 πολυώνυμα τύπου Fibonacci, 112
 πολυώνυμο ζήτα, 34
 πρότυπο, 61
 αποφεύγει, 61
 εμφανίζεται, 61
 εμφανίζεται σε ύψος j , 78
 εμφανίζεται σε ύψος τουλάχιστον j , 111
 ισοπεριοδικό, 98
 περιοδικό, 76
 χαμηλή εμφάνιση, 78
 υψηλή εμφάνιση, 111
 πρώτες συνιστώσες, 26
 πρώτη επιστροφή, 24
 πρώτη λέξη Dyck, 26
 πρώτο μονοπάτι Dyck, 26

 σύζευξη, 23
 σχέση εγκλεισμού, 35
 σχέση κάλυψης, 32
 στατιστική, 11
 ισοκατανεμημένες, 11
 συγγενικές άνοδοι, 27
 συνάρτηση Möbius, 34

συνάρτηση ζήτα, 33
συνιστώσες, 180
συζυγή βήματα, 25
τάξη στοιχείου, 33
τύπος του Segner, 13
τμήμα λέξης, 23
υπολέξη, 23
ύψος, 24
ύψος κόμβου, 161