ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Π.Μ.Σ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
&
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Στρατηγικές Ανοσοποίησης Χαρτοφυλακίου στην Περίπτωση

Πολλαπλών Υποχρεώσεων

ΘΕΟΦΑΝΙΔΟΥ ΧΡΙΣΤΙΝΑ-ΒΑΣΙΛΕΙΑ

Διπλωματική Εργασία

Πειραιάς
Αύγουστος 2014

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND
INCURANCE SCIENCE

M. SC. IN ACTUARIAL SCIENCE
&
RISK MANAGEMENT

Immunization Strategies for a Bond Portfolio in the Case of Multiple Liabilities

THEOFANIDOU CHRISTINA-VASILEIA

Dissertation Thesis

Piraeus
August 2014

Αφιέρωση

Στην οικογένειά μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να εκφράσω θερμά τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα μου κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύ σημαντική υποστήριξη, καθοδήγηση, βοήθεια και υπομονή σε όλη τη διάρκεια διεκπεραίωσης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Παράλληλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Αντζουλάκο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, καθώς και τον κύριο Τζαβελά, Επίκουρο Καθηγητή του ίδιου Τμήματος, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω τους γονείς μου, καθώς και τον αγαπημένο μου αδερφό Αχιλλέα για την αμέριστη συμπαράστασή τους καθ' όλη τη διάρκεια των ακαδημαϊκών μου σπουδών. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω όλους τους φίλους μου και ιδιαίτερα τις Χριστίνα και Αντωνία οι οποίοι με ενθάρρυναν θετικά καθ' όλη τη διάρκεια συγγραφής αυτής της εργασίας.

Περίληψη

Στο χώρο των επενδύσεων, τα ομόλογα αποτελούν χρηματοοικονομικούς τίτλους που συχνά κατέχουν τον πρωταγωνιστικό ρόλο στη δομή ενός χαρτοφυλακίου. Από επενδυτική σκοπιά μας ενδιαφέρει η συστηματική παρακολούθηση καθώς και η ελαχιστοποίηση του βαθμού επικινδυνότητας του χαρτοφυλακίου, διαμορφώνοντας τις επενδύσεις (περιουσιακά στοιχεία) με τέτοιο τρόπο ώστε να αντικατοπτρίζουν τα χαρακτηριστικά των υποχρεώσεων τους. Στην παρούσα διπλωματική εργασία το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στις «*Στρατηγικές Ανοσοποίησης*» (immunization strategies) ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων πολλαπλών δικαιωμάτων και υποχρεώσεων.

Αρχικά, εξετάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά των ομολόγων, οι κίνδυνοι επένδυσης σε αυτά ενώ παράλληλα παρουσιάζονται βασικές χρηματοοικονομικές έννοιες με ιδιαίτερη έμφαση στη διάρκεια και την κυρτότητα που αποτελούν μέτρα τα οποία παρέχουν τη δυνατότητα μέτρησης και διαχείρισης της έκθεσης στον επιτοκιακό κίνδυνο. Επίσης, γίνεται αναφορά των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών που κρίνονται απαραίτητοι για την κατανόηση του αναγνώστη.

Τέλος, παρουσιάζονται οι στρατηγικές που βασίζονται στην ενιαία ή στην πολλαπλή μέτρηση διαφόρων κινδύνων των αναλογιστικών μοντέλων, κάτω από την υπόθεση των πολλαπλών αλλαγών διάρθρωσης των επιτοκίων. Το πρόβλημα ανοσοποίησης θα παρουσιαστεί ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό την *open-loop* στρατηγική, καθώς και θα οριστούν νέα μέτρα κινδύνου σε σχέση με τις αλλαγές των επιτοκίων.

Abstract

In the investment area, bond as a usual financial instrument, often holds the leading role in the structure of a portfolio. From the investment hand, our purpose is to control and minimize the portfolio's risks, by managing assets in such a way as to reflect the characteristics of their liabilities. In this dissertation we focus on «*Immunisation Strategies*» of a bond portfolio in the case of multiple liabilities.

First of all, we present bond's characteristics, the risks of investing in them while useful financial meanings and definitions are presented. We focus on duration and convexity, which are measures that manage the exposure of interest rate risk. In addition, mathematical tools are referred too, in order to facilitate the reader.

Finally, we present strategies based on single or multiple measure of risks in actuarial models that are based on multiple shocks in the term structure of interest rates. The problem of immunization will be presented as an optimization problem, under a *fixed - open loop strategy*. New risk measures associated with changes of the term structure are also defined.

Εισαγωγή

“The safest way to double your money is to fold it over and put it in your pocket.”

-Kin Hubberd, American cartoonist and humorist (1968-1930)

Στο σύγχρονο οικονομικό κόσμο κάθε χρηματοπιστωτικό ίδρυμα, χρηματοοικονομικός οργανισμός ή απλούστερα ένας επενδυτής χρειάζεται να λαμβάνουν συνεχώς υπόψη όλους τους κίνδυνους που εγκυμονούν προκειμένου να εξασφαλιστεί η οικονομική τους ευρωστία. Γίνεται, λοιπόν, σαφές ότι η έννοια της *«διαχείρισης κινδύνου»* μπορεί να θεωρηθεί όχι μόνο ως χρήσιμο εργαλείο αλλά και ως αναγκαιότητα.

Στο χώρο των επενδύσεων, οι κίνδυνοι που εγκυμονούν είναι εξίσου πολλαπλοί αλλά ως πιο συχνός, σημαντικός και επώδυνος μπορεί να χαρακτηριστεί ο επιτοκιακός. Η διαχείριση, λοιπόν, του επιτοκιακού κινδύνου καθώς και ο συνεχής έλεγχος των αλλαγών των μελλοντικών χρηματοροών, που προκύπτουν λόγω των επιτοκιακών μεταβολών, είναι κυρίαρχες αρμοδιότητες για τον επενδυτή.

Για το λόγο αυτό, πολλοί ερευνητές εφάρμοσαν τη «*στρατηγική της ανοσοποίησης*» σε ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου ο επενδυτής υποχρεούται να το εξοφλήσει σε μια προκαθορισμένη ημερομηνία. Ως ιδανική περίπτωση θεωρείται όταν η *Παρούσα Αξία* του χαρτοφυλακίου ισούται με την *Προεξοφλημένη Αξία* των *Υποχρεώσεων* του επενδυτή την παρούσα χρονική στιγμή και δεν υπολείπεται της *Μελλοντικής Αξίας* (η τελική αξία του χαρτοφυλακίου στην περίπτωση που δε μεταβάλλεται το επιτόκιο) του προσυμφωνημένου χρόνου.

Σε προηγούμενες αναφορές της ανοσοποίησης, βασιζόμενες στον ορισμό της *Διάρκειας* κατά τον *Macaulay*, ανεξάρτητα από τον Samuelson [12] και Redington [5, 7], έδειξαν ότι αν οι *Macaulay Διάρκειες* των *Υποχρεώσεων* και των *Περιουσιακών Στοιχείων* είναι ίσες, αυτό συνεπάγεται ότι το χαρτοφυλάκιο είναι προστατευμένο από τις παράλληλες μεταβολές της καμπύλης των αποδόσεων.

Εν συνεχεία, οι Fisher και Weil (1971) επισημοποίησαν την παραδοσιακή θεωρία της ανοσοποίησης, ορισμένη σε συνθήκες υπό τις οποίες η αξία μιας επένδυσης σε χαρτοφυλάκιο ομολόγων αντισταθμίζεται από τυχόν παράλληλες αλλαγές στα προθεσμιακά επιτόκια. Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της προσέγγισης είναι ότι ανοσοποίηση θεωρείται επιτυχής εφόσον η *Fisher και Weil Διάρκεια* του χαρτοφυλακίου είναι ίση με το μήκος του επενδυτικού ορίζοντα (βλ. Rządkowski και Zaremba, 2000).

Δυστυχώς, αυτή η προσέγγιση παρουσιάζει σημαντικούς περιορισμούς και μειονεκτήματα αφού προϋποθέτει καταστάσεις βέβαιου κέρδους (*arbitrage)* οι οποίες δε συμφωνούν με τους κανόνες της σύγχρονης οικονομικής θεωρίας.

Ως εκ τούτου, η στρατηγική της ανοσοποίησης επαναδιατυπώνεται ως μία στρατηγική μεγιστοποίησης – ελαχιστοποίησης (*min – max* στρατηγική) (βλέπε Bierwag και Khang, 1979) ή αλλιώς ως Μπεϋσιανή (*Bayesian)* (βλέπε Kondratiuk - Janyska και Kałuszka, 2005). Ακόμα όμως, κι αυτές οι προσεγγίσεις δεν επέφεραν ικανοποιητικά αποτελέσματα δεδομένου ότι τα αποτελέσματα αυτά εξαρτώνται κατά πολύ από τις επιτοκιακές αλλαγές και όχι από τη *Διάρκεια.*

Λίγα χρόνια μετά, η πρωτοποριακή εργασία των Fong και Vasicek(1984) υποδεικνύει μια νέα κατεύθυνση προς τη μελέτη της ανοσοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, προτάθηκε να καθοριστεί ένα μέγιστο κάτω φράγμα της μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου, που οδηγεί σε μία στρατηγική ελέγχου του κινδύνου.

Ακολούθως, οι Nawalkha και Chambers (1996), Balbás και Ibáñez (1998), Balbás et aï. (2002), Nawalkha et aï. (2003) και Kałuszka και Kondratiuk -Janyska (2004) προσεγγίζουν το πρόβλημα της ανοσοποίησης λαμβάνοντας υπόψη μόνο μία *υποχρέωση* καθώς και μία αλλαγή στην καμπύλη της διάθρωσης των επιτοκίων (*Term structure of interest rates, (TSIR)*). Παρόλα αυτά, κι αυτή η προσέγγιση δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα καθώς οι επενδυτές έχουν να αντιμετωπίσουν πολλαπλές υποχρεώσεις υπό τη θεώρηση πολλαπλών αλλαγών στην *TSIR*. Είναι όμως προφανές ότι οι πολλαπλές *υποχρεώσεις* μπορούν να αντιμετωπιστούν σα μια επέκταση μίας και μόνο *υποχρέωσης,* ανοσοποιώντας ξεχωριστά κάθε μία από τις *υποχρεώσεις* μίας χρηματοροής. Ωστόσο, κι αυτή η στρατηγική ενδέχεται να μην είναι η βέλτιστη λύση.

* *Arbitrage:* είναι μια επενδυτική ευκαιρία που επιφέρει κέρδος με μηδενικό ρίσκο.

Για το λόγο αυτό, στην εργασία αυτή θα τεθούν διαφορετικού τύπου κάτω φράγματα για τη μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου και θα επεκταθεί σε ένα χαρτοφυλάκιο σταθερού εισοδήματος δοθείσας ενός μοντέλου *υποχρεώσεων* (βλ. Hürlimann, 2002) υπό τη θεώρηση αλλαγών της *TSIR*.

Στη συνέχεια, θα επιλεχθεί μία από τις λεγόμενες *open-loop* στρατηγικές και θα διατυπωθεί το πρόβλημα της ανοσοποίησης ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Θα παρουσιαστούν οι στρατηγικές ανοσοποίησης με βάση τα μοντέλα μέτρησης απλού κινδύνου, γνωστά ως *single-risk models* (βλ. Ενότητα 3) ή με τα μοντέλα μέτρησης πολλαπλού κινδύνου, γνωστά ως *multiple-risk measure models* (βλ. Ενότητα 4). Επίσης, θα οριστούν νέα μέτρα κινδύνου που συνδέονται με τις αλλαγές της επιτοκιακής καμπύλης. Τέλος, θα γενικευτεί το μέτρο του κινδύνου όπως ορίστηκε από τους Nawalkha και Chambers (1996) και θα σκιαγραφιστεί το πρόβλημα της ανοσοποίησης στην περίπτωση αλλαγής της *open-loop* στρατηγική. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι η παρούσα διπλωματική εξετάζει μόνο την *open-loop* και όχι την *close-loop* στρατηγική, για την οποία προκαταρκτικά αποτελέσματα μπορεί να βρεθούν από τον Ghezzi (1997, 1999, 2000).

** *Term structure of interest rates* (*TSIR*): η σχέση μεταξύ των επιτοκίων των ομολόγων διαφορετικής διάρκειας, συνήθως απεικονίζεται με τη μορφή ενός γραφήματος που συχνά ονομάζεται καμπύλη απόδοσης *(yield curve).*

Περιεχόμενα

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Ανάπτυγμα Γεωμετρικής Προόδου	Το άθροισμα n όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_n), όπου: $\alpha_n = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \cdots + \alpha_1\lambda^{n-2} + \alpha_1\lambda^{n-1}$, με $\lambda \neq 1$ είναι: $S_n = a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$
Δευτερογενής Αγορά	Διαπραγματεύονται χρεόγραφα παλαιοτέρων εκδόσεων, δηλαδή δε δημιουργούνται νέα αξιόγραφα και οι διαπραγματεύσεις γίνονται μεταξύ των επενδυτών.
Υπέρ το άρτιο (100)	Όταν η τιμή του ομολόγου είναι υψηλότερη από την ονομαστική του αξία (100).
ν.μ	Νομισματικές Μονάδες
short selling	Οι επενδυτές δανείζονται περιουσιακά στοιχεία που δεν κατέχουν, από άλλους επενδυτές, τα πουλάνε και σε μεταγενέστερη χρονική στιγμή θα αναγκαστούν να τα αγοράσουν πάλι για να τα επιστρέψουν στο δανειστή. Σκοπός είναι να κερδίσουν από την πτώση των τιμών περιουσιακών στοιχείων.

strip bond	Ένα ομόλογο, όπου τόσο το κεφάλαιο όσο και τακτικές πληρωμές τοκομεριδίων, τα οποία έχουν αφαιρεθεί, πωλούνται ξεχωριστά (*ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου*)
$\mathbb{Z}^+$	Το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών.
ανταγωνιστικό πλεονέκτημα	Μια επιχείρηση θεωρείται ότι έχει ανταγωνιστικό πλεονέκτημα έναντι των ανταγωνιστών της, όταν η διατήρηση των αποδόσεων ξεπερνά το μέσο όρο του κλάδου της. Το πλεονέκτημα αυτό προκύπτει από τα χαρακτηριστικά ενός προϊόντος, που το καθιστούν ανώτερο των ανταγωνιστικών.
Πλήρης αγορά	Η αγορά ενός προϊόντος θεωρείται πλήρως ανταγωνιστική, όταν παρουσιάζει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά [ebooks.edu.gr]: ○ εμφανίζεται πλήθος επιχειρήσεων οι οποίες παράγουν το συγκεκριμένο προϊόν. ○ το προϊόν όλων των επιχειρήσεων είναι ομοιογενές, δηλαδή τόσο οι παραγόμενες όσο και οι προσφερόμενες μονάδες του προϊόντος από τις επιχειρήσεις του κλάδου είναι ίδιες. ○ υπάρχει ελευθερία εισόδου - εξόδου των επιχειρήσεων στον κλάδο παραγωγής.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Χρηματοοικονομικές Έννοιες

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, θα γίνει αναφορά όλων των βασικών χρηματοοικονομικών εννοιών, που κρίνονται απαραίτητες για την καλύτερη κατανόηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, σε πρώτο στάδιο γίνεται μια ανάλυση της θεωρίας ανατοκισμού, καθώς και μια εισαγωγή στις σειρές πληρωμών (ή διαφορετικά στις *Ράντες*) οι οποίες και κατηγοριοποιούνται. Εν συνεχεία, αναφέρονται τα βασικά χαρακτηριστικά των τίτλων σταθερού εισοδήματος, ενώ γίνεται μια εξιδείκευση στην περίπτωση των ομολόγων. Αναφέρονται επίσης οι σημαντικότεροι κίνδυνοι επένδυσης σε αυτά ενώ γίνεται αναλυτική παρουσίαση του τρόπου αποτίμησης αυτών καθώς και των μέθοδων υπολογισμού της απόδοσής τους.

Ακολούθως, γίνεται μια μικρή αναφορά των *Παράγωγων Χρηματοοικονομικών Προϊόντων,* της καμπύλης διάθρωσης των επιτοκίων και της σχέση της με τα ομόλογα ενώ παρουσιάζεται και η έννοια του χαρτοφυλακίου. Επιπρόσθετα, γίνεται λεπτομερής ανάλυση του μέτρου της *Διάρκειας* σε περίπτωση σταθερού και μεταβλητού επιτοκίου καθώς επίσης και της *Κυρτότητας.* Τέλος, παρουσιάζεται η ανάγκη της διαχείρησης του Ενεργητικού – Παθητικού (ΔΕΠ) η οποία στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται μέσω της στρατηγικής της ανοσοποίησης. Σε κάθε ενότητα περιλαμβάνονται υπολογιστικές εφαρμογές και παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών.

1.1. Θεωρία Ανατοκισμού

Σε κάθε πτυχή της καθημερινής μας ζωή, καθένας μας λαμβάνει το ρόλο είτε του δανειστή είτε του δανειζόμενου ή απλούστερα του καταθέτη, εκτελώντας διαφόρων ειδών συναλλαγές, οι οποίες καλούνται «*χρηματοοικονομικές συναλλαγές*». Οι συναλλαγές αυτές επεκτείνονται και λαμβάνουν χώρα όχι μόνο σε ατομικό επίπεδο, αλλά ευρύτερα σε εταιρίες, οργανισμούς ακόμη και κράτη.

Οι χρηματοοικονομικές συναλλαγές είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με το *επιτόκιο*, δηλαδή τη *χρονική αξία του χρήματος*, το οποίο και αποτελεί την τιμή για τη χρήση συγκεκριμένου χρηματικού κεφαλαίου για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Ως απλούστερη μορφή χρηματοοικονομικής συναλλαγής μπορεί να θεωρηθεί η επένδυση ενός ποσού χρημάτων για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και περιγράφεται ως εξής:

- **Κεφάλαιο** *(Principal)*: το αρχικό ποσό επένδυσης.
- **Μελλοντική Αξία** *(Future ή Accumulated Value)*: το ποσό που έχει συσσωρευτεί στο τέλος τη συγκεκριμένης χρονικής περιόδου.
- **Παρούσα Αξία** *(Present Value)*: Η σημερινή αξία των μελλοντικών επενδύσεων.
- **Τόκος** *(Interest)*: Η διαφορά μεταξύ της Μελλοντικής Αξίας και του Κεφαλαίου της συγκεκριμένης χρονικής περιόδου (τα χρήματα που αποφέρει η επένδυση).

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση μαθηματικών μοντέλων και πρακτικών για την καλύτερη περιγραφή των χρηματοοικονομικών συναλλαγών ενώ ταυτόχρονα το ενδιαφέρον στρέφεται και στον προσδιορισμό της επίδραση του επιτοκίου σε τέτοιου είδους συναλλαγές.

1.1.1. Συσσώρευση Τόκου και Αποτελεσματικό επιτόκιο

Συνηθέστερα, ένα επιτόκιο λαμβάνει τη μορφή ενός ετησίου ποσοστού. Για να υπολογιστεί ο τόκος που περιέχεται στο χρονικό διάστημα ενός έτους απαιτείται ο τοκισμός του αρχικού ποσού επένδυσης με το ετήσιο επιτόκιο [Samuel A.Broverman]. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι για χρονικό ορίζοντα επένδυσης άνω του ενός έτους η διαδικασία επαναλαμβάνεται (δηλαδή το ποσό του τόκου που προκύπτει επανεπενδύεται) και περιγράφεται από τις λεγόμενες «*συναρτήσεις ανατοκισμού*».

<u>Παράδειγμα 1.1</u> *Έστω επενδυτής ο οποίος καταθέτει 1000 ν.μ, με ετήσιο επιτόκιο 9%. Να υπολογιστεί το ποσό που θα προκύψει με την πάροδο 3 ετών.*

Πράγματι έχουμε:

Κατά τη λήξη του 1ου έτους, ο τόκος που προκύπτει είναι: $1000(0.09) = 90$ επομένως το ποσό που θα λάβει στο τέλος του 1ου έτους είναι:

$$1000 + 90 = 1000 + 1000(0.09) = 1000(1 + 0.09) = 1090 \tag{1.1}$$

Αντίστοιχα, το ποσό που θα λάβει στη λήξη του 2ου έτους, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.1) υπολογίζεται ως εξής:

$$1090 + 1090(0.09) = 1090(1 + 0.09) = 1000(1 + 0.09)(1 + 0.09)$$

$$= 1000(1 + 0.09)^2 = 1188{,}11 \tag{1.2}$$

Τέλος, το ποσό που θα λάβει στη λήξη του 3ου έτους, με χρήση της σχέσης (1.2) είναι:

$$1188{,}11 + 1188{,}11(1 + 0.09) = 1000(1 + 0.09)^2 + 1000(1 + 0.09)^2(1 + 0.09) = 125{,}03$$

Σχηματική Αναπαράσταση

0	1	2	3
↑	↑	↑	↑
1000	$1000 \times .09 = 90$	$1090 \times .09 = 98.10$	$1188.10 \times .09 = 106.93$
Κεφάλαιο	*Τόκος*	*Τόκος*	*Τόκος*
Σύνολο:	$1000+90$ $=1090$ $=1000 \times 1.09$	$1090+98.10$ $=1188.10$ $=1090 \times 1.09$ $=1000(1.09)^2$	$1188.10+106.93$ $=1295.03$ $=1188.10 \times 1.09$ $=1000(1.09)^3$

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι στην περίπτωση επανεπένδυσης του τόκου, έχοντας ένα ετήσιο επιτόκιο i, το αρχικό κεφάλαιο επένδυσης C θα κερδίσει τον τόκο Ci για την επόμενη χρονιά. Έτσι, η Μελλοντική Αξία στο τέλος του έτους θα είναι:

$$C + Ci = C(1 + i)$$

Εάν το ποσό $C + Ci = C(1 + i)$ επανεπενδυθεί για έναν ακόμη χρόνο, ο τόκος που προκύπτει είναι $C(1 + i)i$ και η Μελλοντική Αξία στο τέλος του δευτέρου έτους θα είναι: $C(1 + i) + C(1 + i)\,i = C(1 + i)^2$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι στο τέλος του n έτους, η Μελλοντική Αξία θα είναι:

$$C(1 + i)^n$$

Σχηματική Αναπαράσταση

	0	1	2	$n-1$	n
	$\uparrow$ $\longrightarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
	C	Ci	$C(1+i)i$	$C(1+i)^{n-2}i$	$C(1+i)^{n-1}i$
	Κεφάλαιο	*Τόκος*	*Τόκος*	*Τόκος*	*Τόκος*
		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
Σύνολο:		$C+Ci$ $= C(1+i)$	$C(1+i)$ $+C(1+i)i$ $= C(1+i)^2$	$= C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1}$ $+C(1+i)^{n-1}i$ $= C(1+i)^n$

❖ Συναρτήσεις Ανατοκισμού

Οι Συναρτήσεις Ανατοκισμού *(Accumulated Functions)* χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν προβλήματα επενδύσεων σε σχέση με το χρόνο t και εκφράζουν τη σχέση της αρχικής επένδυσης (Παρούσα Αξία) και της αξίας σε χρόνο t (Μελλοντική Αξία), στις περιπτώσεις επανεπένδυσης τόκου και μη. Ορίζονται ως εξής:

- Μοντέλο Απλού Τόκου*(Simple Interest)*: $\alpha(t) = 1 + it$, $t \in \mathbb{Z}^+$

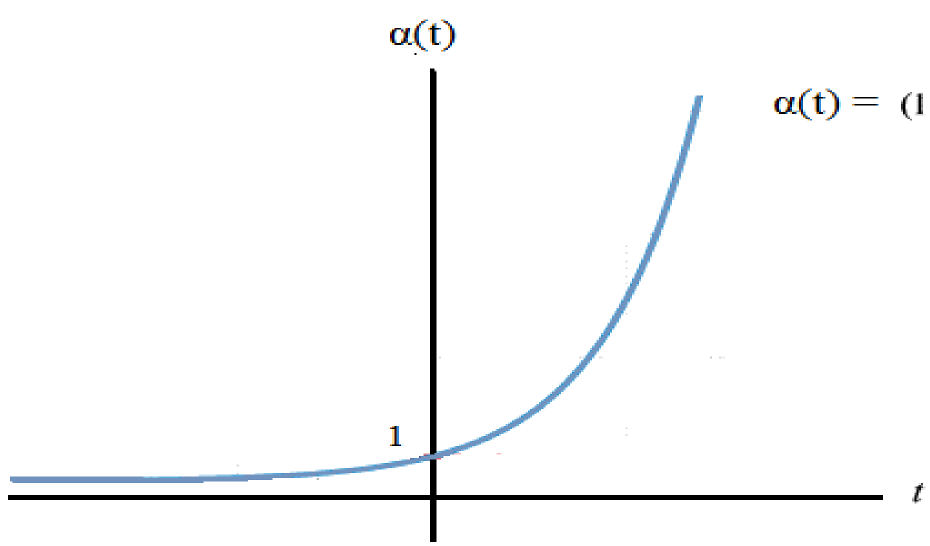
- Μοντέλο Σύνθετου Τόκου*(Compound Interest)*: $\alpha(t) = (1+i)^t, t \in \mathbb{Z}^+$

όπου, t: χρονικός ορίζοντας επένδυσης, i: ετήσιο επιτόκιο.

<u>Παρατήρηση 1.1</u>: Το *Μοντέλο Σύνθετου Τόκου* επεκτείνεται για αρνητικές τιμές (όλο το $\mathbb{R}$), το οποίο αποδεικνύεται από τις αλγεβρικές σχέσεις καθώς και τη σχηματική αναπαράσταση που ακολουθούν ως εξής:

- $a(t) = (1+i)^t, t \geq 0$
- $a(t)^{-1} = v^t = \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t}$
- $a(-1) = (1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i} = v$

Σχηματική Αναπαράσταση



Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι μπορούμε να επεκτείνουμε την $a(t) = (1+i)^t$ και για αρνητικές τιμές του χρόνου t, λόγω της ύπαρξης του v.

<u>Παράδειγμα 1.2</u>: *Έστω επενδυτής ο οποίος επενδύει 1ν.μ, με ετήσιο επιτόκιο 5%. Να υπολογιστεί το ποσό που θα προκύψει με την πάροδο 3-ετών (μελλοντική αξία), χρησιμοποιώντας το Μοντέλο Απλού Τόκου και το Μοντέλο Σύνθετου Τόκου.*

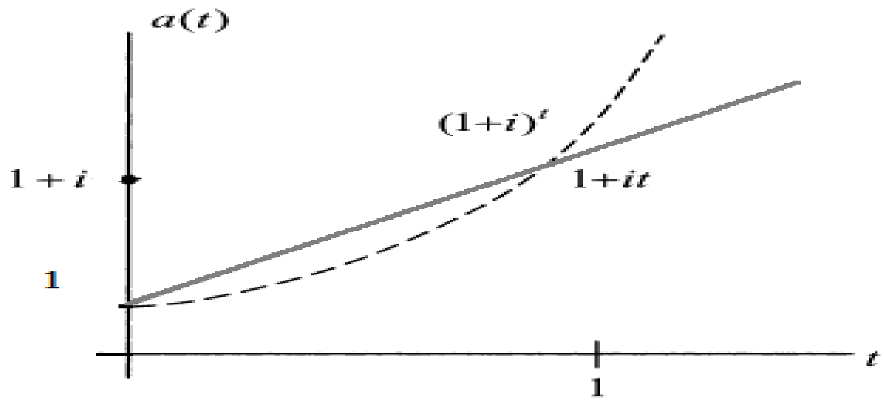
Πράγματι έχουμε:

	Μοντέλο Απλού Τόκου	***Μοντέλο Σύνθετου Τόκου***
1ος χρόνος	$1 + (0.05)1 = 1.05$ ν.μ.	$(1 + 0.05)^1 = 1.05$ ν.μ.
2ος χρόνος	$1 + (0.05)2 = 1.1$ ν.μ.	$(1 + 0.05)^2 = 1.1025$ ν.μ.
3ος χρόνος	$1 + (0.05)3 = 1.15$ ν.μ.	$(1 + 0.05)^3 = 1.157625$ ν.μ.

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι το *Μοντέλο Σύνθετου Τόκου* αποφέρει μεγαλύτερα κέρδη στον επενδυτή, και αυτό είναι απόλυτα δικαιολογημένο διότι από μαθηματική σκοπία το *Μοντέλο Σύνθετου Τόκου* περιγράφεται από μία εκθετική συνάρτηση ενώ το *Μοντέλο Απλού Τόκου* από μία γραμμική.

Αυτό γίνεται ευκολότερο κατανοητό παρατηρώντας τις διαφορές των γραφικών παραστάσεων των δύο αυτών μοντέλων, όσον αφορά το ρυθμό εξέλιξής τους σε συνάρτηση με την πάροδο του χρόνου, στη σχηματική αναπαράσταση που ακολουθεί.

Γραφική παράσταση



<u>Παρατήρηση 1.2</u>: Παρατηρώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

- $t > 1$: λαμβάνουμε μεγαλύτερη απόδοση από το Μοντέλο Σύνθετο Τόκου
- $t < 1$: λαμβάνουμε μεγαλύτερη απόδοση από το Μοντέλο Απλού Τόκου
- $t = 1$: λαμβάνουμε την ίδια απόδοση.

Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι στην καθημερινή μας ζωή χρησιμοποιείται το μοντέλο σύνθετου τόκου και όχι του απλού τόκου. Αυτό συμβάινει διότι στο μοντέλο απλού τόκου ο τοκος δεν κεφαλαιοποιείται όσο μεγαλώνει ο χρόνος επενδυσης και το αποτελεσματικό επιτόκιο μικραίνει γεγονός που δεν είναι αρεστό στον επενδυτή, σε αντίθεση με το μοντέλο σύνθετου τόκου ο τοκος κεφαλαιοποιείται [Β.Σεβρόγλου 2014].

❖ Παρούσα Αξία – Μελλοντική Αξία

Όπως έχει προαναφερθεί, με τον όρο *Παρούσα Αξία (Present Value)* αναφερόμαστε στην τρέχουσα αξία ενός μελλοντικού ποσού, ενώ με τη *Μελλοντική αξία (Accumulated Value)* αναφερόμαστε στο ποσό που έχει συσσωρευτεί στο τέλος μιας χρονικής περιόδου. Η σχέση των δύο εννοιών είναι αλληλένδετη και απαντά στο εξής ερώτημα:

Εάν μια επένδυση υπόσχεται να δώσει ένα μελλοντικό ποσό (AV) μετά από t -χρόνια, τι ποσό (PV) πρέπει να επενδυθεί σήμερα με δοθέντος επιτοκίου i;

$$PV = AV\ \frac{1}{(1+i)^t}$$

όπου:

- $\boldsymbol{PV}$*:* παρούσα αξία
- $\boldsymbol{AV}$*:* μελλοντική αξία
- $\boldsymbol{t}$*:* αριθμός περιόδων
- $\boldsymbol{AV = PV\ (1+i)^t}$

Ορίζουμε επίσης και τη σχέση $\boldsymbol{v = \frac{1}{(1+i)^t}}$ η οποία και αποτελεί το «*Συντελεστή Προεξόφλησης*».

<u>Παράδειγμα 1.3</u>: *Έστω ότι ένας γονιός θέλει να βάλει χρήματα σε ένα λογαριασμό σήμερα για να βεβαιωθεί ότι το παιδί του θα έχει αρκετά χρήματα σε 5 χρόνια, ώστε να πληρώσει τα δίδακτρα του μεταπτυχιακού στον Αναλογισμό & Διοικητική Κινδύνου του Πανεπιστημίου Πειραιώς, τα οποία ανέρχονται στις 7.200 ν.μ. Γνωρίζει ότι μπορεί να πάρει 5% σταθερό επιτόκιο ετησίως από έναν λογαριασμό ταμιευτηρίου. Τι πόσο θα πρέπει να βάλει στο λογαριασμό τώρα;*

Πράγματι έχουμε:

$$PV = AV\ \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{7200}{(1+0.05)^5} = 5642{,}63\ \text{ν. μ}$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ο γονίος θα πρέπει να καταθέσει 5642,63 ν.μ με ετήσιο σταθερό επιτόκιο 5%, έτσι ώστε σε 5 χρόνια το ποσό να ανέλθει στις 7.200 ν.μ.

Παρατήρηση 1.3 : Υπάρχει μία οξύμορη σχέση μεταξύ των ονομασιών της *Παρούσας Αξίας - Μελλοντικής Αξίας* και των αντίστοιχων χρονικών στιγμών που αφορούν τις πληρωμές τους, καθότι:

- Η *Μελλοντική Αξία* αφορά πληρωμές που έγιναν στο παρελθόν.
- Η *Παρούσα Αξία* αφορά πληρωμές που θα γίνουν στο μέλλον.

1.1.2. Μεταβαλλόμενο Επιτόκιο

Στην πραγματικότητα, πολλές φορές ο τόκος δύναται να εξοφληθεί ή να πιστωθεί με διαφορετική συχνότητα από την ετήσια. Πιο συγκεκριμένα, το επιτόκιο παύει να είναι ετήσιο κι αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ο ανατοκισμός δε πραγματοποιείται ετήσια βάση. Ένα χαρακτηριστικό παραδειγμα τέτοιων συναλλαγών είναι η περίπτωση των πιστωτικών κάρτων κατά τις οποίες ο τοκισμός των απλήρωτων ποσών πραγματοποιείται σε μηνιαία βάση. Γίνεται λοιπόν σαφές, ότι σε αυτές τις περιπτώσεις κρίνεται απαραίτητη η μετατροπή των ετήσιων επιτοκίων βάση της δοθείσας συχνότητα τοκισμού.

❖ Αποτελεσματικό Επιτόκιο (ERI)

Στην περίπτωση μιας κατάθεσης που αφήνεται να συσσωρευτεί στο λογαριασμό της όχι ανά έτος αλλά με διαφορετική συχνότητα βάση του μοντέλου σύνθετου τόκου, η αλγεβρική μορφή της συσσώρευσης θα είναι αρκετά όμοια με εκείνη που δόθηκε προηγουμένως για τον ετήσιο τόκο [Β.Σεβρόγλου 2012]. Δηλαδή, εάν συμβολίσουμε με j το επιτόκιο ανά περίοδο τοκισμού, τότε η αρχική κατάθεση (ποσό C) μετά από n - περιόδους ανατοκισμού είναι:

$$C\,(1 + j)^{n}$$

<u>Παράδειγμα 1.4</u> : *Έστω το επιτόκιο 0,75% <u>ανά μήνα</u> σε ένα τραπεζικό λογαριασμό, στον οποίο ο τόκος πιστώνεται <u>μηνιαίως</u>. Έτσι, ο αυξητικός παράγοντας για ετήσια περίοδο διαμορφώνεται ως εξής:*

$$(1 + 0{,}75\%)^{12} = (1{,}0075)^{12} = 1{,}0938 \text{ ν.μ.}$$

Δηλαδή, στο τέλος του έτους ο λογαριασμός κερδίζει τόκο 9,38% και το 9,38% ονομάζεται *Ετήσιο Αποτελεσματικό Επιτόκιο.*

Εναλλακτικά, το Αποτελεσματικό Επιτόκιο εμφανίζεται ως ο λόγος του ποσού του τόκου που κερδήθηκε κατά τη διάρκεια της n - περιόδου, ως προς το αρχικό ποσό επένδυσης.

$$i_n = \frac{I_n}{A(n-1)} \text{ , για κάθε } n \geq 1 \qquad (1.3)$$

όπου:
- $\boldsymbol{I_n}$: Ο τόκος που κερδήθηκε κατά τη διάρκεια της n −περιόδου (δηλαδή στο διάστημα $[0, n]$)
- $\boldsymbol{A(n-1)}$: το ποσό επένδυσης, δηλαδή η μελλοντική αξία τη $(n-1)$ - περίοδο (ισχύει $A(t) = C\, a(t)$, όπου C: αρχικό ποσό επένδυσής).

Στη συνέχεια ακολουθεί η απόδειξη σχέσης (1.3) η οποία προκύπτει ως εξής:

Έστω I_n ο τόκος που κερδίζεται κατά τη διάρκεια της n −περιόδου, δηλαδή για το διάστημα $[n-1, n]$, $n \geq 1$. Έτσι, ακολουθώντας επαγωγική απόδειξη καταλήγουμε στη σχέση $I_n = A(n) - A(n-1)$.

Δηλαδή, $I_1 = A(1) - A(0) = Ca(1) - Ca(0) = C(a(1) - 1)$

$$I_2 = A(2) - A(1)$$

$$I_3 = A(3) - A(2)$$

$$\vdots$$

$$I_n = A(n) - A(n-1)$$

Αντίστοιχα, στην περίπτωση του *σύνθετου τόκου* και για $C = 1$, προκύπτει:

$$i_1 \cong i + 1 - 1 = \frac{(i+1) - 1}{1} = \frac{a(1) - a(0)}{a(0)} = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)}$$

$$\vdots$$

$$i_n = \frac{I_n}{A(n-1)}$$

❖ Ονομαστικό Επιτόκιο (NRI)

Το *Ονομαστικό Επιτόκιο (Nominal Rate of Interest)* χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις κατά τις οποίες η συχνότητα τοκισμού δεν είναι ετήσια. Συμβολίζεται με:

- $i^{(m)}$, όπου
- m: το πλήθος πληρωμών του τόκου που είναι m - φορές μέσα σε μια χρονική περίοδο

***<u>Παράδειγμα 1.5</u>*:** Δανειστής Α χρεώνει με επιτόκιο 8% με ανατοκισμό ανά τρίμηνο (NRI). Το επιτόκιο τροποποιείται ως $\frac{i^{(m)}}{m}$% ανά τρίμηνο, δηλαδή m = 4 (αφού το έτος αποτελείται από 4 τρίμηνα).

Πράγματι έχουμε:

$$\frac{i^{(4)}}{4} = \frac{8\%}{4} = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02 = 2\%$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το επιτόκιο σε ετήσια βάση είναι 2%.

Σχέση ERI – NRI

- Ένα Ονομαστικό Επιτόκιο $i^{(m)}$ ταυτίζεται με το Αποτελεσματικό Επιτόκιο $\frac{i^{(m)}}{m}$, για κάθε $m - οστό$ μιας περιόδου.

- $1 + i = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^m \leftrightarrow i^{(m)} = m\left[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$

ή

- $1 + i = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^m \leftrightarrow i = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^m - 1$

❖ Προεξοφλητικό Επιτόκιο

Πολλές φορές οι τόκοι χρειάζεται να εξοφληθούν στη αρχή της επενδυτικής διαδικασίας ενώ το υπόλοιπο ποσό στο τέλος. Ως εκ τούτου, ορίζεται ένα νέο είδος τόκου, γνωστό ως *προεξόφλημα (discount),* το οποίο αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ του αρχικού ποσού επένδυσης με του τελικού. Δηλαδή:

$$I_n = A(n) - A(n-1),\ n \geq 0.$$

Η διαφορά μεταξύ του *τόκου* και του *προεξοφλήματος* έγκειται στη ημερομηνία πληρωμής τους. Πιο συγκεκριμένα, ο τόκος καταβάλλεται στο τέλος της περιόδου και βασίζεται συνάρτηση $A(n)$ στην αρχή της περιόδου σε αντίθεση με το *προεξόφλημα* που πληρώνεται στην αρχή της περιόδου και βασίζεται στην συνάρτηση $A(n)$ στο τέλος της περιόδου [Β.Σεβρόγλου 2012].

Επίσης, όπως είναι λογικό οι *Συναρτήσεις Ανατοκισμού* διαφοροποιούνται. Πρόκειται για το *Μοντέλο Απλού Προεξοφλήματος (Simple Discou*) και το *Μοντέλο Σύνθετου Προεξοφλήματος (Compound Discount)* και ορίζονται ως εξής:

- *Μοντέλο Απλού Προεξοφλήματος* : $\alpha(t) = (1 - dt)^{-1}$, $t \in \mathbb{Z}^{+}$
- *Μοντέλο Σύνθετου Προεξοφλήματος*: $\alpha(t) = (1 - d)^{-t}, t \in \mathbb{Z}^{+}$

όπου, με d συμβολίζουμε το προεξοφλητικό επιτόκιο.

Τέλος, στη θέση του *Αποτελεσματικού Επιτοκίου* ορίζουμε το *Αποτελεσματικό Προεξοφλητικό Επιτόκιο (ERD)* και αντίστοιχα στη θέση του *Ονομαστικού Επιτοκίου* ορίζουμε το *Ονομαστικό Προεξοφλητικό Επιτόκιο (NRD),* τα οποία παρουσιάζονται ως εξής:

I. **Αποτελεσματικό Προεξοφλητικό Επιτόκιο (ERD)**: είναι ο λόγος του προεξοφλήματος που έχουμε κατά τη διάρκεια της $n-$οστης περιόδου, ως προς το ποσό που κερδήθηκε στο τέλος της περιόδου.

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} \text{ για κάθε } n \geq 0$$

Παράδειγμα 1.6: *Έστω ο Α δανείζεται από την τράπεζα* 100€ *για ένα χρόνο με ετήσιο επιτόκιο(ERD)* $d = 6\%$. *Τότε η τράπεζα θα κρατήσει τον τόκο* (6 €) *στην αρχή και θα δώσει στον Α 94 ν.μ. Στο τέλος του χρόνου ο Α πρέπει να επιστρέψει στην τράπεζα*:

$$100(1 + 6\%) = 10\ \nu.\mu.$$

II. **Ονομαστικό Προεξοφλητικό Επιτόκιο(NRD):** $d^{(m)}$, όπου m: το πλήθος πληρωμών του τόκου που είναι m φορές μέσα σε μια χρονική περίοδο.

Παράδειγμα 1.7: Εάν το *Ονομαστικό Προεξοφλητικό Επιτόκιο (NRD)* είναι 6% ανατοκιζόμενο ανά μήνα, τότε μετατρέπεται σε *Αποτελεσματικό Προεξοφλητικό Επιτόκιο (*ERD) ως εξής:

$$d = \frac{d^{(12)}}{12} = \frac{6\%}{12} = 5\%$$

Σχέση ERD – NRD

- $1 - d = \left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^m \leftrightarrow d^{(m)} = m\left[1 - (1-d)^{\frac{1}{m}}\right]$

ή

- $1 - d = \left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^m \leftrightarrow d = 1 - \left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^m$

Σχέση ERD – NRD

- $\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m}=\left[1-\frac{d^{(p)}}{p}\right]^{-p}$

<u>*Απόδειξη:*</u> Αν $m=p$, τότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m}=\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^{-m}\overset{\sqrt[m]{}}{\leftrightarrow}\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]=\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^{-1}$$

<u>***Παράδειγμα 1.8***</u> : Να βρεθεί το NRI με ανατοκισμό ανά τρίμηνο το οποίο είναι ισοδύναμο με το $NRD=6\%$ με ανατοκισμό ανά μήνα.

Πράγματι έχουμε:

$$\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m}\xleftrightarrow{\text{το έτος έχει 4 τρίμηνα}}\left[1+\frac{i^{(4)}}{4}\right]^{4}$$

$$\left[1-\frac{d^{(p)}}{p}\right]^{-p}\xleftrightarrow{\text{το έτος έχει 12 μήνες}}\left[1-\frac{d^{(12)}}{12}\right]^{-12}=\left[1-\frac{6\%}{12}\right]^{-12}=[1-0.005]^{-12}=1{,}06199$$

Αφού $\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m}=\left[1-\frac{d^{(p)}}{p}\right]^{-p}$, τότε προκύπτει:

$$\left[1+\frac{i^{(4)}}{4}\right]^{4}=\left[1-\frac{d^{(12)}}{12}\right]^{-12}\leftrightarrow\left[1+\frac{i^{(4)}}{4}\right]^{4}=1{,}06199\overset{\sqrt[4]{}}{\leftrightarrow}1+\frac{i^{(4)}}{4}=1{,}01515\leftrightarrow i^{(4)}\cong 0{,}06$$

$$1+\frac{i^{(4)}}{4}=1{,}01515\leftrightarrow i^{(4)}\cong 0{,}06$$

1.1.3. Ράντες Πληρωμών

Πολλές φορές οι πληρωμές και οι εισπράξεις δεν γίνονται με μια μοναδική καταβολή του ποσού που οφείλεται αλλά τμηματικά, δηλαδή με δόσεις. Ειδικότερα, υπάρχουν χρηματοοικονομικές συναλλαγές που περιλαμβάνουν μία σειρά περιοδικών προκαθορισμένων πληρωμών, όπως στην περίπτωση ενός δανείου, ενός ομολόγου (με κουπόνι) κλπ. Ένας γενικός όρος που χρησιμοποιείται για να περιγράψει αυτές τις περιοδικές πληρωμές είναι οι Σειρές *Πληρωμών* ή αλλιώς *Ράντες Πληρωμών* και ορίζονται ως εξής:

«Μία ακολουθία χρηματικών ποσών είτε εισροών είτε εκροών τα οποία εισπράττονται ή πληρώνονται αντίστοιχα σε ισαπέχουσες χρονικές στιγμές ονομάζεται ράντα ή σειρά πληρωμών.»

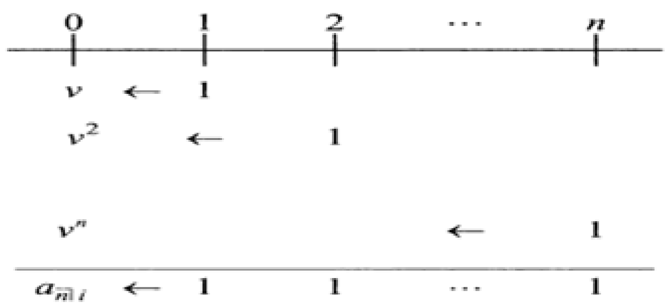
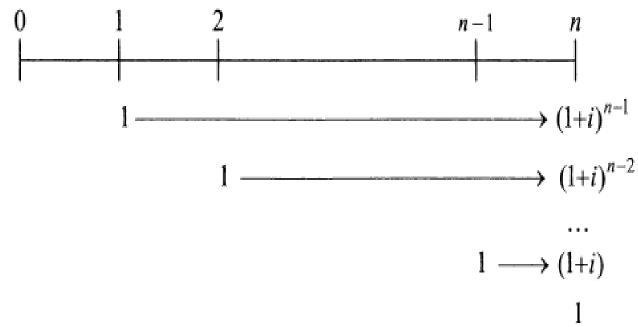
Κάθε ράντα πληρωμών διαφοροποιείται βάση των χαρακτηριστικών που παρουσιάζει τα οποία είναι η συχνότητα και το πλήθος των περιοδικών πληρωμών καθώς επίσης και το χρηματικό ποσό (όροι της ράντας) που πληρώνεται. Πιο συγκεκριμένα, η ράντα πληρωμών μπορεί να κατηγοριοποιηθεί λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω χαρακτηριστικά ως εξής:

- **Ληξιπρόθεσμη**: όταν οι πληρωμές γίνονται στο τέλος κάθε περιόδου.
- **Προκαταβλητέα**: όταν οι πληρωμές γίνονται στην αρχή κάθε περιόδου.
- **Διηνεκείς**: όταν ο αριθμός των δόσεων είναι άπειρος.
- **Σταθερή**: όταν όλες οι δόσεις είναι ίσες μεταξύ τους.
- **Μοναδιαία**: όταν το ποσό της δόσης είναι ίσο με μία νομισματική μονάδα.

❖ Παρούσα Αξία – Μελλοντική Αξία Ράντας

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την Παρούσα Αξία και Μελλοντική Αξία μίας ράντας πληρωμών. Πιο συγκεκριμένα, θα αναφερθούμε στις ληξιπρόθεσμες, προκαταβλητέες καθώς και τις διηνεκείς. Όσον αφορά τη *ληξιπρόθεσμη* ράντα πληρωμών, δηλαδή οι πληρωμές πραγματοποιούνται στο τέλος κάθε περιόδου χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $a_{n\rceil}$ προκειμένου να περιγράψουμε την Παρούσα Αξία της 1ν.μ, ενώ με το συμβολισμό $s_{n\rceil}$ περιγράφουμε τη Μελλοντική Αξία. Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται οι αντίστοιχες μαθηματικές σχέσεις, σχηματική αναπαράσταση για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών καθώς και σχέσεις που τις συνδέουν, ως εξής:

Ληξιπρόθεσμη Ράντα		
Παρούσα Αξία	$a_{n\rceil} = v + v^2 + \dots + v^n$	$a_{n\rceil} = \sum_{t=1}^{n} v^t = \frac{1-v^n}{i}$
Μελλοντική Αξία	$s_{n\rceil} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1$	$s_{n\rceil} = \sum_{t=1}^{n-1} (1+i)^t \Leftrightarrow$ $s_{n\rceil} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

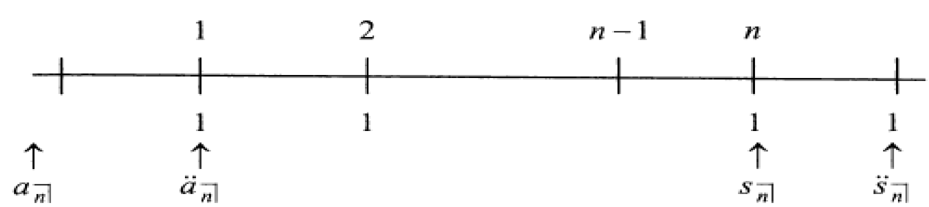
Σχηματική Αναπαράσταση	
Παρούσα Αξία: $a_{n\rceil}$	***Μελλοντική Αξία:*** $s_{n\rceil}$
	
Σχέση των $a_{n\rceil}$ ***και*** $s_{n\rceil}$	
$s_{n\rceil} = (1+i)^n a_{n\rceil}$	$a_{n\rceil} = v^{\nu} s_{n\rceil}$

Στη συνέχεια, όσον αφορά την περίπτωση μίας <u>*προκαταβλητέας*</u> *σειράς πληρωμών,* χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\ddot{a}_{n\rceil}$ προκειμένου να περιγράψουμε την παρούσα αξία της 1ν.μ. ενώ ο συμβολισμός $\ddot{s}_{n\rceil}$ περιγράφει τη μελλοντική αξία, και ορίζονται ως εξής:

Προκαταβλητέα Ράντα		
Παρούσα Αξία	$\ddot{a}_{n\rceil} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$	$\ddot{a}_{n\rceil} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}$
Μελλουτική Αξία	$\ddot{s}_{n\rceil} = (1+i)^n + \cdots + (1+i)^2 + (1+i) \Leftrightarrow$ $\ddot{s}_{n\rceil} = (1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$	$\ddot{s}_{n\rceil} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$

Σχέση Ληξιπρόθεσμης – Προκαταβλητέας Ράντας

Σχηματική Αναπαράσταση



Αλγεβρική Αναπαράσταση

- $\ddot{a}_{n\rceil} = (1+i)^n a_{n\rceil}$
- $\ddot{s}_{n\rceil} = (1+i)^n s_{n\rceil}$

Τέλος, στην περίπτωση μιας *διηνεκούς* ράντας τα έτη πληρωμών είναι άπειρα, δηλαδή $n \to \infty$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι:

- για $n \to \infty$ τότε $v^n \to 0$, αφού $v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$, $i > 0$

Ως εκ τούτου, στην περίπτωση μιας *διηνεκούς* <u>*ληξιπρόθεσμης*</u> *ράντας* προκύπτει ότι:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n\urcorner} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i}$$

ενώ στην περίπτωση μιας *διηνεκούς* <u>*προκαταβλητέας*</u> *ράντας* προκύπτει ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{n\urcorner} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{1-v} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{d} = \frac{1}{d}$$

Αντίστοιχα, οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να προκύψουν και με διαφορετική προσέγγιση, ως εξής:

- $a_{\infty\urcorner} = v + v^2 + v^3 + \cdots = v\frac{1}{1-v} = \frac{1}{i}$

- $\ddot{a}_{\infty\urcorner} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d} = \frac{1+i}{i} = (1+i)a_{\infty\urcorner} = 1 + a_{\infty\urcorner}$

1.1.4. Ράντες Μη Σταθερών Πληρωμών

Είναι γεγονός ότι πολλές χρηματοοικονομικές συναλλαγές επιβάλλουν μη σταθερές σειρές πληρωμών, δηλαδή οι όροι της ράντας ποικίλλουν. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η παρούσα αξία καθώς και η μελλοντική αξία προσεγγίζεται ως εξής:

Θεωρούμε μια σειρά n – πληρωμών οι οποίες διαφοροποιούνται ανά σταθερά χρονικά διαστήματα και συμβολίζονται με $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$. Τότε για σταθερό επιτόκιο i καθ' όλη τη διάρκεια των πληρωμών η Παρούσα Αξία και Μελλοντική Αξία προκύπτουν ως εξής:

- *Παρούσα Αξία*: $K_1 v + K_2 v^2 + \cdots + K_{n-1} v^{n-1} + K_n v^n$

- *Μελλοντική Αξία*: $K_1 (1+i)^{n-1} + \cdots + K_{n-1}(1+i) + K_n (1+i)^n$

Υπάρχουν όμως και πιο εξειδικευμένες περιπτώσεις πληρωμών, όταν για παράδειγμα τα ποσά συνεχώς αυξάνονται ή μειώνονται, οι οποίες περιγράφονται με χρήση αριθμητικών ή γεωμετρικών προόδων. Ως εκ τούτου, θεωρούμε δύο νέα είδη ραντών, την αύξουσα και φθίνουσα ράντα.

❖ Αύξουσες - Φθίνουσες Ράντες

Θεωρούμε μία ράντα n- πληρωμών της οποίας η πρώτη πληρωμή είναι 1ν.μ και κάθε επόμενη πληρωμή αυξάνεται κατά 1ν.μ. Πρόκειται, δηλαδή για μία *αυξανόμενη ληξιπρόθεσμη ράντα n – πληρωμών.* Έχοντας ένα επιτόκιο i σταθερό για όλες τις περιόδους, η παρούσα αξία αυτής της σειράς εκφράζεται ως εξής:

$$v + 2v^2 + 3v^3 + \cdots + (n-1)v^{n-1} + nv^n \tag{1.4}$$

Έστω ότι ορίζουμε με X την παραπάνω σειρά, ως εξής:

$$(1+i)X = 1 + 2v + 3v^2 + \cdots + nv^{n-1} \tag{1.5}$$

Αφαιρώντας τη σχέση (1.4) από τη (1.5), εύκολα προκύπτει ότι:

$$iX = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} - nv^n \Leftrightarrow$$

$$X = \frac{1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} - nv^n}{i} \Leftrightarrow$$

$$X = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}\, i} - nv^n}{i}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, εύκολα προκύπτει ότι η μελλοντική αξία μιας αυξανόμενης ληξιπρόθεσμής ράντας είναι $\frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{i}$. Τα παραπάνω αποτελέσματα καθώς και η περίπτωση μίας *αυξανόμενη προκαταβλητέας* ράντας n– πληρωμών απεικονίζονται στον ακόλουθο πίνακα ως εξής:

Αυξανόμενη ληξιπρόθεσμη ράντα n - πληρωμών	***Παρούσα Αξία***	***Μελλοντική Αξία***
	$(I_\alpha)_{n\rceil} = \dfrac{\ddot{a}_{n\rceil} - nv^n}{i}$	$(I_s)_{n\rceil} = \dfrac{\ddot{s}_{n\rceil} - n}{i}$
Αυξανόμενη προκαταβλητέα ράντα n - πληρωμών	$(I_{\ddot{a}})_{n\rceil} = (1+i)\,(I_\alpha)_{n\rceil}$	$(I_{\ddot{s}})_{n\rceil} = (1+i)\,(I_s)_{n\rceil}$

Τέλος, στην περίπτωση μιας *αυξανόμενης ληξιπρόθεσμης διηνεκούς* ράντας, προκύπτει ότι:

$$(I_\alpha)_{\infty\rceil} = v + 2v^2 + 3v^3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} (I_\alpha)_{n\rceil\, i} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ddot{a}_{n\rceil} - nv^n}{i}$$

Μια άλλη κατηγορία μη σταθερών πληρωμών που ακολουθούν αριθμητική πρόοδο είναι οι *φθίνουσες ράντες*. Σε αυτή την περίπτωση θα θεωρήσουμε μία ληξιπρόθεσμη ράντα n - πληρωμών της οποίας η πρώτη πληρωμή είναι n ν.μ. και κάθε επόμενη πληρωμή μειώνεται κατά 1 ν.μ. από την προηγούμενη. Η παρούσα αξία και η μελλοντική αξία αυτής της ράντας εκφράζεται ως εξής:

- $(D_\alpha)_{n\rceil} = nv + (n-1)v^2 + (n-2)v^3 + \cdots + 2v^{n-1} + v^n = \frac{n - a_{n\rceil}}{i}$

- $(D_s)_{n\rceil} = \frac{n(1+i)^n - s_{n\rceil\, i}}{i} = (D_\alpha)_{n\rceil}\,(1+i)^n$

❖ Ράντες με μεταβλητό επιτόκιο

Μέχρι στιγμής είχαμε θεωρήσει ένα σταθερό επιτόκιο για όλη τη διάρκεια των ραντών, ενώ σε αυτή την ενότητα θα θεωρήσουμε την περίπτωση κατά την οποία το επιτόκιο ποικίλλει, δηλαδή διαφοροποιείται σε κάθε χρονική περίοδο. Έτσι, συμβολίζουμε αρχικά με i_k το επιτόκιο που αντιστοιχεί σε κάθε $k-$ περίοδο, δηλαδή στο το διάστημα $[k-1, k]$ και στη συνέχεια θα αναφέρουμε τα δύο πρότυπα μεταβαλλόμενου επιτοκίου, στην περίπτωση μιας ληξιπρόθεσμης ράντας $n-$ περιόδων.

Στην πρώτη περίπτωση, θα υπολογιστεί η παρούσα αξία της ράντας θεωρώντας το μεταβλητό επιτόκιο i_k για την περίοδο k ανεξάρτητα με το πότε έγινε η πληρωμή. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται «*term portfolio rate method*» και διατυπώνεται ως εξής:

- $a_{n\rceil} = (1+i_1)^{-1} + (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1} + \cdots + (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1} \dots (1+i_k)^{-1}$

$$a_{n\rceil} = \sum_{t=1}^{k} \prod_{s=1}^{t} (1+i_s)^{-1}$$

Στη δεύτερη περίπτωση, θα χρησιμοποιήσουμε το επιτόκιο i_k για κάθε πληρωμή που πραγματοποιείται τη στιγμή k και για όλες τις $k-$ περιόδους. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται «*yield curve method*» συμφωνα με την οποία η παρούσα αξία προκύπτει ως εξής:

- $a_{n\rceil} = (1+i_1)^{-1} + (1+i_2)^{-2} + \cdots + (1+i_n)^{-n}$

$$a_{n\rceil} = \sum_{t=1}^{n} (1+i_t)^{-t}$$

Παρατήρηση 1.4: Στην περίπτωση μιας προκαταβλητέας ράντας με μεταβλητό επιτόκιο, η παρούσα αξία εκρφράζεται μέσω του τύπου:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 - a_{\overline{n-1}|}$$

Όσον αφορά τη μελλοντική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας μεταβλητού επιτοκίου, για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις αντίστοιχα, προκύπτουν τα εξής:

- $\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i_n) + (1+i_n)(1+i_{n-1}) + \cdots + (1+i_n)(1+i_{n-1}) \dots (1+i_1)$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} \prod_{s=1}^{t} (1 + i_{n-s+t})$$

- $\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i_n) + (1+i_{n-1})^2 + \cdots + (1+i_1)^n$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} (1 + i_{n-t+1})^t$$

Παρατήρηση 1.5: στην περίπτωση μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, για να βρούμε τη μελλοντική αξία χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$s_{\overline{n+1}|} = \ddot{s}_{\overline{n}|} + 1$$

1.2. Τίτλοι Σταθερού Εισοδήματος

Ως «*Τίτλοι Σταθερού Εισοδήματος*» νοούνται εκείνοι οι οποίοι αποδίδουν στους κατόχους τους εισόδημα, υπό τη μορφή τόκου, ο οποίος προσδιορίζεται σύμφωνα με ένα προσυμφωνημένο επιτόκιο, το οποίο μπορεί είτε να είναι σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του τίτλου είτε να προσδιορίζεται με βάση κάποιου δείκτη αναφοράς (πχ. Το επιτόκιο συχνά ορίζεται ως *Euribor* + *α%,*όπου *α%* είναι κάποιο ποσοστό το οποίο συνήθως κυμαίνεται από 0,5% έως 3%)[Μ.Γκλεζάκος 2013].

Οι βασικότερες μορφές των τίτλων αυτής της κατηγορίας είναι τα ομόλογα, τα έντοκα γραμμάτια και τα ομόλογα, ενώ ο μεγαλύτερος κίνδυνος που ενέχει σε επενδύσεις τίτλων σταθερού εισοδήματος είναι ο κίνδυνος χρεοκοπίας του εκδότη τους καθώς και οι κίνδυνοι *επιτοκίου, συναλλαγών* και *πληθωρισμού*.

1.2.1. Ομόλογα – Χαρακτηριστικά

Με τον όρο *ομόλογο* αναφερόμαστε σε ένα χρεόγραφο το οποίο εκδίδεται από το κράτος ή μια επιχείρηση, με σκοπό να δανειστεί κεφάλαια από τους επενδυτές, έχοντας όμως την υποχρέωση να καταβάλει, στη λήξη της σύμβασης, την ονομαστική αξία αυτού.

Στην περίπτωση όμως των *ομολόγων με κουπόνι*, ο εκδότης υποχρεούται να καταβάλλει περιοδικά τον προσυμφωνημένο τόκο (κουπόνι) καθ' όλη τη διάρκεια του ομολόγου και στη συνέχεια να το εξοφλήσει κατά τη λήξη του.

❖ Χαρακτηριστικά Ομολόγων

- **Τύπος εκδότη**: Είναι ιδιωτικός ή δημόσιος οργανισμός δηλαδή κάποιο κράτος ή εταιρία. Έτσι τα ομόλογα διακρίνονται σε κρατικά ή εταιρικά.
- **Ονομαστική Αξία** *(face ή par value)*: Είναι το ποσό που θα εισπράξει ο κάτοχος της ομολογίας (δανειστής) στην ημερομηνία λήξης της. Πρόκειται, δηλαδή για το αρχικό κεφάλαιο το οποίο προκύπτει και ως αξία του κάθε μεριδίου που αναγράφεται στην ομολογία όταν εκδίδεται.
- **Τοκομερίδιο ή κουπόνι** *(coupon)*: Το ποσό που λαμβάνει περιοδικά ο κάτοχος του ομολόγου.
- **Επιτόκιο τοκομεριδίου** (*coupon rate ή nominal rate)*: Η απόδοση του τοκομεριδίου.

Ως εκ τούτου, τα ομόλογα διακρίνονται σε:

- *Ομόλογα σταθερού τοκομεριδίου* καθ' όλη τη διάρκεια. Για παράδειγμα ένα 10 - ετές ομόλογο ονομαστικής αξίας 100 ν.μ και επιτόκιο τοκομεριδίου 10% ανά έτος θα πληρώνει 10 ν.μ. κάθε έτος για 10 έτη.

- *ομόλογα κυμαινόμενου επιτοκίου:* σε αυτή την κατηγορία γίνεται επαναπροσδιορισμός τοκομεριδίου ανά τακτά χρονικά διαστήματα, σύμφωνα με ένα επιτόκιο αναφοράς και προσθέτωντας το επιτοκιακό περιθώριο *(spread).*

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το μέγεθος του τοκομεριδίου επιδρά στη διαμόρφωση του ομολόγου του επενδυτή και πιο συγκεκριμένα στη διακύμανση της τιμής της ομολογίας. Ειδικότερα, όσο μεγαλύτερο είναι το τοκομερίδιο τόσο μικρότερη είναι η ευαισθησία της τιμή του ομολόγου στις επιτοκιακές αλλαγές.

- **Συχνότητα τοκομεριδίου** *(coupon frequency)*: Τα τοκομερίδια καθορίζονται από το επιτόκιο έκδοσης και η συχνότητα πληρωμής τους διαφέρει από έκδοση σε έκδοση. Για παράδειγμα, συνιθέστερα τα τοκομερίδια κρατικών ομολόγών πληρώνονται μία φορά τον χρόνο, εκτός των Η.Π.Α. όπου η πληρωμή γίνεται δύο φορές το χρόνο.

Ανάλογα με τη συχνότητα καταβολής του τοκομεριδίου, τα ομόλογα κατηγοριοποιούνται ως εξής:

- Ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου *(zero coupon bonds)*
- Ομόλογα σταθερού (περιοδικού) τοκομεριδίου *(coupon bonds)*
- Ομόλογα κυμαινόμενου επιτοκίου *(floating rate bonds)*

- **Ληκτότητα** *(maturity)*: Η ημερομηνία λήξης της ομολογιακής σύμβασης όπου ο εκδότης είναι υποχρεωμένος να καταβάλλει στον δανειστή την ονομαστική αξία της ομολογίας.

Η ληκτότητα στην ουσία αντιπροσωπεύει την εκτιμώμενη διάρκεια του χρηματοοικονομικού προϊόντος. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ότι ο κάτοχος του προϊόντος είναι σε θέση να γνωρίζει των αριθμό των περιόδων που θα λαμβάνει το τοκομερίδιο καθώς επίσης και τον υπολειπόμενο χρόνο για την εξόφληση του αρχικού κεφαλαίου. Ειδικότερα, στην περίπτωση ενός ομολόγου γίνεται σαφές ότι το ομόλογο εξαρτάται άμεσα από τη ληκτότητά του. Υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες ο εκδότης δύναται να ανακαλέσει το ομόλογο *(ανάκλητο ομόλογο)* προκειμένου να εξοφληθεί πριν τη ληκτότητά του, καταβάλλοντας όμως κι ένα πριμ ανάκλησης στους επενδυτές. Τέτοιου είδους επενδυτικές στρατηγικές εφαρμόζονται σε περιπτώσεις που τα επιτόκια της αγοράς είναι πολύ μικρότερα από το επιτόκιο που χρησιμοποιήθηκε κατά την έκδοση του ομολόγου. Με αυτόν τον τρόπο, αποσκοπείται η ισοστάθμιση των των εξόδων αντικατάστασης ενώ ταυτόχρονα δίνεται και η δυνατότητα να αντικατασταθούν τα ομόλογα μεγάλου επιτοκίου με ομόλογα μικρού επιτοκίου. Τέλος, τα ομόλογα κατηγοριοποιούνται βάση τη ληκτότητα τους. Για παράδειγμα, τα εταιρικά ομόλογα έχουν συνήθως διάρκεια από ένα έως τριάντα χρόνια, ωστόσο μπορεί να διαρκεί και λιγότερο κατηγοριοποιώντας τα σε:

- *Βραχυπρόθεσμα:* ληκτότητα από ένα έως πέντε έτη
- *Μεσοπρόθεσμα:* ληκτότητα από πέντε έως δώδεκα έτη
- *Μακροπρόθεσμα:* ληκτότητα από δώδεκα έτη και άνω

- **Τιμή Αγοράς ή Διαπραγμάτευσης *(Market Price)*:** Πρόκειται για την τιμή του ομολόγου που διαπραγματέυεται στη δευτερογενή αγορά, εκεί δηλαδή που διαπραγματεύονται χρεόγραφα παλαιοτέρων εκδόσεων και δε δημιουργούνται νέα αξιόγραφα, ενώ οι διαπραγματεύσεις γίνονται μεταξύ των επενδυτών. Η τιμή του υπό διαπραγμάτευση ομολόγου αναφέρεται στην εκατοστιαία βάση ενώ ταυτόχρονα υποδηλώνεται και η σχέση μεταξύ της τρέχουσας και ονομαστικής αξίας. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η τιμή διαπραγμάτευσης του ομολόγου προκύπτει ως ποσοστό επί τοις εκατό της ονομαστικής του αξίας. Για παράδειγμα, έστω ότι η τιμή ενός ομολόγου με ονομαστική αξία 1000 ν.μ. Τότε η τρέχουσα αξία του ομολόγου είναι το 90% της ονομαστικής του αξίας, που αυτό ισούται με 90 ν.μ. Συχνά, όμως, παρουσιάζονται πολλές διακυμάνσεις στη δευτερογενή αγορά οι οποίες εξαρτώνται άμεσα από παράγοντες που επηρεάζουν όπως για παράδειγμα το μέγεθος του τοκομεριδίου, τα αγοραία επιτόκια καθώς επίσης και η πιστοληπτική ικανότητα του εκδότη. Επιπρόσθετα, αξίζει να τονίσουμε ότι τα επιτόκια της αγοράς και η ομολογιακή τιμή έχουν αντοστρόφως ανάλογη σχέση. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όταν αυξάνονται τα επιτόκια της αγοράς μειώνεται η ομολογιακή τιμή και αντιστρόφως. Τέλος, στην περίπτωση που η αγοραία τιμή του ομολόγου είναι μικρότερη της ονομαστικής του αξίας, τότε διαπραγματεύεται υπέρ το άρτιο (εκατοστιαία βάση), στην αντίθετη περίπτωση θα διαπραγματεύεται υπό το άρτιο και σε περίπτωση ισότητας στο άρτιο.

1.2.2. Κίνδυνοι Επενδύσεως σε Ομόλογα

Όλων των ειδών οι επενδύσεις ενέχουν μία σειρά κινδύνων, εκ των οποίων άλλοι είναι πιο συνηθισμένοι ενώ άλλοι πιο σπάνιοι και καταστροφικοί. Αντίστοιχα, από τη σκοπιά επένδυσης σε ομόλογα εγγυμονούν αντίστοιχα πολλοί κίνδυνοι, σημαντικότεροι από τους οποίους είναι ο επιτοκιακός κίνδυνος, ο κίνδυνος επανεπένδυσης, ο συναλλαγματικός, ο κίνδυνος πληθωρισμού καθώς και οι κίνδυνοι ρευστότητας και πτώχευσης. Ακολουθεί μία λεπτομέρης ανάλυση των παραπάνω κινδύνων [Fabozzi1989].

❖ Επιτοκιακός Κίνδυνος

Με τον όρο *«Επιτοκιακός κίνδυνος»* αναφερόμαστε στον κίνδυνο αλλαγής της αξίας μιας επένδυσης λόγω των επιτοκιακών μεταβολών. Οι μεταβολές αυτές ενδέχεται να δημιουργήσουν σοβαρές επιπτώσεις στην οικονομική κατάσταση των επιχειρήσεων. Το γεγονός ότι δεν υπάρχει μόνο ένα επιτόκιο, αλλά μια σειρά επιτοκίων που διαμορφώνουν την χρονική καμπύλη των επιτοκίων ενισχύει την πολυπλοκότητα του κινδύνου. Οι μεταβολές των επιτοκίων που επηρεάζουν μια επιχείρηση μπορεί να μην είναι ομοιόμορφες κατά μήκος όλης της χρονικής καμπύλης, αλλά διαφορετικές για κάθε μια χρονική διάρκεια.

Όσον αφορά την επίδραση των επιτοκιακών μεταβολών στην τιμή του ομολόγου, έχει προαναφερθεί ότι μια ομολογία κινείται αντίθετα από τις μεταβολές των επιτοκίων. Έτσι, καθώς αυξάνονται τα επιτόκια οι τιμές των ομολόγων μειώνονται στη δευτερογενή αγορά και αντιστρόφως. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι καθώς τα επιτόκια αυξάνονται, το κόστος ευκαιρίας διακράτησης ενός ομολόγου μειώνεται με αποτέλεσμα οι επενδυτές να στρέφονται σε προϊόντα με υψηλότερες αποδόσεις. Για παράδειγμα, ένα ομόλογο με επιτόκιο 5% αξίζει περισσότερο αν τα επιτόκια είναι χαμηλά καθώς ο επενδυτής λαμβάνει μία σταθερή απόδοση σε σχέση με την αγορά που προσφέρει μειωμένες αποδόσεις όταν τα επιτόκια είναι χαμηλά. Γενικότερα, στην περίπτωση επιτοκιακών αλλαγών ο επενδυτής που έχει επενδύσει σε ένα ομόλογο επηρεάζεται ως εξής:

- ο επενδυτής που σχεδιάζει να διακρατήσει το ομόλογο μέχρι τη λήξη του, η μεταβολή της τιμής του δεν τον επηρεάζει.
- ο επενδυτής σε περίπτωση που χρειαστεί να πουλήσει το ομόλογο πριν τη λήξη, μια άνοδος των επιτοκίων θα δημιουργήσει ζημιά επί του κεφαλαίου.

Κίνδυνος Επανεπένδυσης

Ως γνωστόν, οι χρηματοροές που λαμβάνονται από μία επένδυση, συνήθως επανεπενδύονται. Το επιπλέον εισόδημα που προκύπτει από τέτοιου είδους επένδυση εξαρτάται άμεσα από τα υπάρχοντα επιτόκια κατά την ημερομηνία της επανεπένδυσης καθώς επίσης και τη στρατηγική που ακολουθείται. Ως κίνδυνο επανεπένδυσης πρακτικά μπορούμε να θεωρήσουμε τη διακύμανση στις αποδόσεις που έπεται λόγω των επιτοκιακών αλλαγών. Στην περίπτωση αυτή, ο κίνδυνος πηγάζει από το γεγονός ότι τα εκάστοτε επιτόκια της αγοράς, βάσει των οποίων ο επενδυτής θα επανεπενδύσει τις χρηματοροές που θα λάβει (με τη μορφή τοκομεριδίων), ενδέχεται να μειωθούν. Ακόμη, ο κίνδυνος επανεπένδυσης είναι τόσο μεγαλύτερος όσο μεγαλύτερη είναι η περίοδος διακράτησης και είναι επίσης μεγαλύτερος σε ομόλογα με μεγάλες αρχικές χρηματοροές, όπως για παράδειγμα τα ομόλογα υψηλών τοκομεριδίων. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι ο επιτοκιακός κίνδυνος και ο κινδυνος επανεπένδυσης φέρουν αντίθετα αποτελέσματα.

Συναλλαγματικός Κίνδυνος

Ο συναλλαγματικός κίνδυνος εμφανίζεται στην περίπτωση που ένα ομόλογο δεν αποτιμάται στο εκχώριο νόμισμα του επενδυτή, αλλά σε κάποιο άλλο. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός ομολόγου που αποτιμάται σε ευρώ έχει μη βέβαιες χρηματοροές στην αγγλική λίρα. Αυτό συμβαίνει για το λόγο ότι οι χρηματοροές εξαρτώνται άμεσα από την ισοτιμία που υπάρχει στην αγορά τη στιγμή της κάθε αποπληρωμής. Για παράδειγμα, έστω ο επενδυτής που έχει αγοράσει ομόλογο του οποίου οι πληρωμές γίνονται σε αμερικάνικα δολλάρια. Σε περίπτωση που το αμερικάνικο δολλάριο υπερτιμηθεί έναντι του ευρώ, τότε θα λάβει περισσότερα ευρώ και αντιστρόφως.

❖ Κίνδυνος Πληθωρισμού

Ο κίνδυνος πληθωρισμού προκύπτει λόγω της μεταβολή που υφίσταται η αξία των χρηματοροών του ομολόγου εξαιτίας του πληθωρισμού. Για παράδειγμα, ένας επενδυτής που έχει στην κατοχή του ένα πενταετές ομόλογο τοκομεριδίου τάξης 6% και ρυθμό πληθωρισμού 7%, έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της αγοραστικής δύναμης των χρηματοροών του. Σε όλα τα ομόλογα σταθερού τοκομεριδίου, ο επενδυτής εκτείθεται σε κίνδυνο πληθωρισμού καθότι ο εκδότης έχει υποσχεθεί την πραγματοποίηση σταθερών πληρωμών έως τη λήξη του ομολόγου. Όμως, όσο τα επιτόκια αντικατοπτρίζουν τον προσδοκώμενο πληθωρισμό, τα ομόλογα κυμαινόμενου επιτοκίου έχουν μικρότερο κίνδυνο πληθωρισμού.

❖ Κίνδυνος Ρευστότητας

Ο κίνδυνος ρευστότητας εμφανίζεται στην περίπτωση της έγκαιρης ρευστοποίησης μίας επένδυσης. Στην περίπτωση ενός ομολόγου, όταν προκύπτει ανάγκη ρευστοποίησης δύναται να πουληθεί στην πραγματική του τιμή ή διαφορετικά σε μία προσεγγιστική τιμή αλλά ταυτόχρονα και κοντινή σε αυτή. Ως μέτρο ρευστότητας μπορούμε να θεωρήσουμε το μέγεθος του περιθωρίου (spread) που δημιουργείται μεταξύ της τιμής της αγοράς και της τιμής πώλησης. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του περιθωρίου που δημιουργείται ανάμεσα στην τιμή αγοράς και πώλησης, τόσο μεγαλύτερος είναι και ο κίνδυνος ρευστότητας. Για έναν επενδυτή, όμως, που σκοπεύει να διακρατήσει το ομόλογο μέχρι την ωρίμανσή του, ο κίνδυνος ρευστότητας δεν είναι τόσο σημαντικός. Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ορισμένα περιουσιακά στοιχεία ρευστοποιούνται ευκολότερα και με μικρό κίνδυνο όπως για παράδειγμα οι μετοχές ανώνυμων εταιριών, ενώ άλλα όπως τα ακίνητα εμπεριέχουν αρκετά μεγάλο κίνδυνο.

❖ Κίνδυνος Πτώχευσης

Με τον όρο «*Κίνδυνο Πτώχευσης*» αναφερόμαστε στον κίνδυνο κατά τον οποίο ο εκδότης ενός ομολόγου πτωχεύει με αποτέλεσμα να αδυνατεί να αποπληρώσει το κεφάλαιο και τους τόκους του. Η πιστοληπτική ικανότητα του εκδότη συνδέεται με την ικανότητα του, δεδομένης της οικονομικής του κατάστασης, να πληρώνει τους τόκους των ομολόγων και να αποπληρώσει την ονοματική αξία αυτού στη λήξη και αξιολογείται χρησιμοποιώντας ποιοτικές διαβαθμίσεις που ορίζουν εξειδικευμένες διεθνείς εταιρίες αξιολόγησης κυριότερες από τις οποίες είναι η Moody’s Investor Services, Standard, Poor’s Corporation, και η Fitch Investors Services.

1.2.3. Τιμολόγηση Ομολόγων

Η διαδικασία *Τιμολόγησης Ομολόγων (bond pricing bond)* αφορά τον προσδιορισμό της εύλογης αξίας του ομολόγου. Ως γνωστόν, η αξία οποιαδήποτε επένδυσης ισούται με την Παρούσα Αξία των χρηματοροών της. Αντίστοιχα συμβαίνει και στη περίπτωση των ομολόγων, δηλαδή η τρέχουσα τιμή μιας ομολογίας, είναι το άθροισμα των Παρουσών Αξιών των ετήσιων πληρωμών των τόκων σε όλη τη διάρκεια της ομολογίας, καθώς επίσης και της ονομαστικής αξίας της ομολογίας που καταβάλλεται στη λήξη της.

Έστω ένα ομόλογο *Ονομαστικής Αξίας F*, με *αξία στη λήξη M*, το οποίο πληρώνει *κουπόνι C* ανά περίοδο, υπό το *r προεξοφλητικό επιτόκιο* που καταβάλλεται στον κάτοχο του ομολόγου (θεωρούμε ότι το ομόλογο δεν ενέχει κινδύνους και το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο r είναι σταθερό για όλες τις περιόδους). Σύμφωνα με τα ανωτέρω, προκύπτει ότι η δίκαιη τιμή του ομολόγου ισούται με τη παρούσα αξία των αναμενόμενων χρηματοροών προεξοφλημένων με το κατάλληλο επιτόκιο (δηλαδή την απόδοση που απαιτεί να έχει ο επενδυτής προκειμένου να αγοράσει το ομόλογο)[Α.Ευγενίδης και Κ.Συριόπουλος, 2012].

Ως εκ τούτου, η δίκαιη τιμή αυτού του ομολόγου είναι:

$$P = \frac{C}{(1+r)^1} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^n} + \frac{M}{(1+r)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{M}{(1+r)^n} \tag{1.6}$$

όπου:
- $\boldsymbol{P}$: η τιμή του ομολόγου
- $\boldsymbol{C}$: το τοκομερίδιο
- $\boldsymbol{n}$: ο αριθμός περιόδων μέχρι τη λήξη
- $\boldsymbol{r}$: το προεξοφλητικό επιτόκιο

<u>Παρατήρηση 1.6</u>: Στην περίπτωση του ομολόγου ***μηδενικού τοκομεριδίου*** (*Zero-coupon bond*) η αντίστοιχη τιμή του διαμορφώνεται ως εξής:

$$P = M\frac{1}{(1+r)^n}$$

Η σχέση (1.6), με χρήση του *αναπτύγματος γεωμετρικής προόδου* διαμορφώνεται ως εξής:

$$P = C\frac{1}{(1+r)}\left[\frac{\frac{1}{(1+r)^n}-1}{\frac{1}{(1+r)}-1}\right] + M\frac{1}{(1+r)^n} = C\frac{1}{(1+r)}\left[\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{\frac{r}{(1+r)}}\right] \leftrightarrow$$

$$P = C\left[\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{r}\right] + M\frac{1}{(1+r)^n}$$

Στην περίπτωση που η πληρωμή των τοκομεριδίων πραγματοποιείται συχνότερα από ένα έτος, έστω m φορές, η τιμή του ομολόγου προσδιορίζεται ως εξής:

$$P = \sum_{t=1}^{mn}\frac{C}{m}\,\frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{mn}} + \; M\frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{mn}}$$

ή

$$P = \frac{C}{m}\left[\frac{1-\frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{mn}}}{r/m}\right] + M\frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{mn}}$$

όπου:
- $\boldsymbol{r/m}$: το επιτόκιο ανά περίοδο m
- $\boldsymbol{C/m}$: το ύψος των πληρωμών ανά περίοδο m(όπου C είναι ετήσιες πληρωμές)

__Παράδειγμα 1.9__: *Να βρεθεί η τιμή ενός 10 - ετούς ομολόγου, με 6% τοκομερίδιο, ονομαστική αξία 1000 ν.μ. και προεξοφλητικό επιτόκιο 18%.*

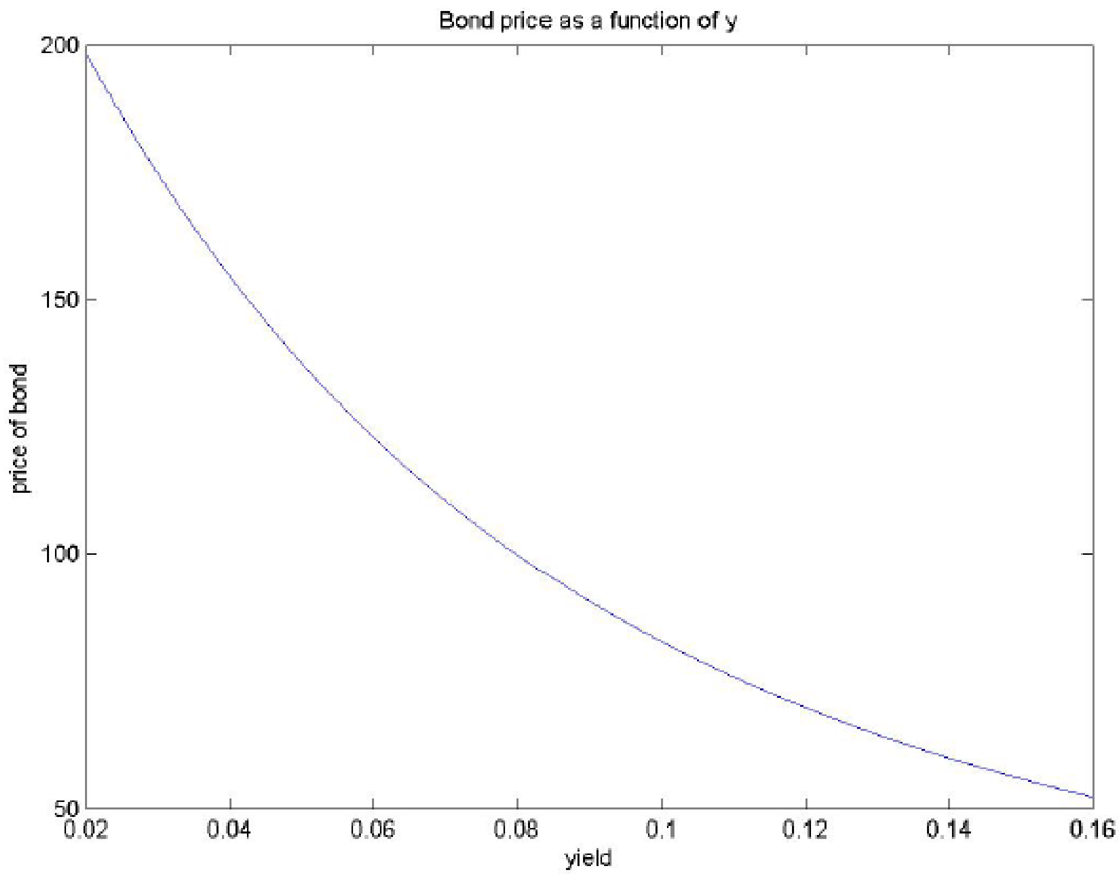
$$P = \sum_{t=1}^{10} \frac{60}{(1+0{,}18)^t} + \frac{M}{(1+0{,}18)^{10}} = 460{,}71$$

Αν $r < 18\%$, τότε $P > 460{,}71$ και $r > 18\%$, τότε $B < 460.7$, δηλαδή απόδοση r, μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με την τιμή του ομολόγου Β.

❖ Σχέση τιμής ομολόγου – απόδοσης

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση που ορίσαμε για την τιμή του ομολόγου (1.6), εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι πρόκειται για μία φθίνουσα συνάρτηση του επιτοκίου r, δηλαδή οι τιμή των ομολόγων είναι αντιστρόφως ανάλογες με τα επιτόκια ή ην απαιτούμενη απόδοση. Αυτό συμβαίνει διότι η τιμή ενός ομολόγου είναι στην ουσία η παρούσα αξία των χρηματοροών του. Ως εκ τούτου, εάν η απαιτούμενη απόδοση αυξηθεί, τότε η παρούσα αξία των χρηματοροών θα μειωθεί και αντίστροφα εάν η απαιτούμενη απόδοση μειωθεί τότε η παρούσα αξία των χρηματοροών τα αυξηθεί [Letsios 2009].

__Παράδειγμα 1.10__: *Έστω ένα δεκαετές ομόλογο το οποίο πληρώνει τοκομερίδιο 8% ανά έτος επί της ονομαστικής του αξίας 100 ν.μ και το επιτόκιο της αγοράς είναι 10%. Τότε, η τιμή του σύμφωνε με τον τύπο (1.6) είναι 82,974 ν.μ.. Η γραφική παράσταση της τιμής του ομολόγου ως συνάρτηση της απόδοσης, είναι η εξής:*


Bond price as a function of y
200
150
100
50
price of bond
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
yield

1.2.4. Αποδόσεις ομολόγων

Μέχρι στιγμής, κατά τη διαδικασία τιμολόγησης του ομολόγου θεωρήθηκε σταθερό το προεξοφλητικό επιτόκιο r στην αποτίμηση του ομολόγου μας, το οποίο καλείται επίσης και *απόδοση στην λήξη (yield to maturity).* Όμως, εκτός της παραδοσιακής προσέγγισης τιμολόγησης, υπάρχει και η *arbitrage- free (χωρίς περιθώριο κερδοσκοπίας)* προσέγγιση, η οποία χρησιμοποιεί διαφορετικό προεξοφλητικό επιτόκιο για κάθε ταμειακή ροή ξεχωριστά. Έτσι, ο τύπος υπολογισμού της αξίας του ομολόγου διαμορφώνεται ως εξής:

$$P = \frac{C}{(1+r_1)^1} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r_{n-1})^{n-1}} + \frac{M}{(1+r)^n}$$

Τα μεμονωμένα επιτόκια r_1,r_2,…,r_nονομάζονται ***τρέχοντα επιτόκια*** *(spot - rates)*, τα οποία στην ουσία αντιπροσωπεύουν το επιτόκιο προεξόφλησης κάθε μίας ταμειακής ροής χωριστά.

❖ Τρέχουσα Απόδοση

Η *τρέχουσα απόδοση (current yield)* ισούται με το πηλίκο των ετήσιων χρηματοροών ενός ομολόγου ως προς την τρέχουσα τιμή του [Ι.Λέτσιος, 2009].

$$\textit{τρέχουσα απόδοση} = \frac{\textit{ετήσιες χρηματοροες}}{\textit{τρέχουσα τιμή}}$$

<u>Παράδειγμα 1.11</u>*:* *Έστω ένα ομόλογο με σταθερό ετήσιο κουπόνι 10%, ονομαστική αξία 1000 ν.μ και τρέχουσα αξία 870 ν.μ., το οποίο δίνει 100 ν.μ. ανά έτος. Τότε η τρέχουσα απόδοση υπολογίζεται ως εξής:*

$$τρέχουσα\ απόδοση = \frac{100}{870} \cong 11{,}4\%$$

❖ Απόδοση στη λήξη

Με τον όρο *απόδοση στη λήξη (yield to maturity)* αναφερόμαστε στην τιμή του επιτοκίου που εξισώνει την Παρούσα Αξία των χρηματοροών ενός ομολόγου με την τρέχουσα τιμή του [Letsios, 2009]. Πρόκειται για τον *εσωτερικό βαθμό της επένδυσης (internal rate of return)*, τον οποίο συμβολίζουμε με y και ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+y)^t} + \frac{M}{(1+y)^T}$$

<u>*Προϋποθέσεις:*</u>

- Ο κάτοχος του ομολόγου το κρατά ως τη λήξη του.
- Κάθε τοκομερίδιο επανεπενδύεται έως τη λήξη με την ίδια απόδοση y.

1.3. Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

Τα *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα* αναφέρονται σε κάθε χρηματοοικονομικό προϊόν το οποίο δεν έχει τη δική του οντότητα, αλλά υιοθετεί τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα ενός άλλου προϊόντος ή οικονομικής μεταβλητής, όπως για παράδειγμα μετοχές, δείκτες μετοχών, επιτόκια, ομόλογα, ισοτιμίες κλπ. Αποτελούν συμβόλαια, η αξία των οποίων εξαρτάται από την αξία κάποιων άλλων βασικότερων προϊόντων, γνωστά ως υποκείμενα προϊόντα ή underlying assets. Κάθε συμβόλαιο συνάπτεται από δύο αντισυμβαλλόμενους, όπου ο ένας έχει τη θέση του αγοραστή (long position) και ο άλλος έχει τη θέση του πωλητή (short position).

Τα *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα* διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες οι οποίες είναι τα *Futures* (Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης) *και Forwards (Προθεσμιακά Συμβόλαια)* καθώς και τα *Options* (Δικαιώματα Προαίρεσης). Υπάρχει, όμως, και μία πιο πολύπλοκη κατηγορία, τα Swaps ,τα οποία θεωρούνται υβριδικά διότι μπορούν να αποσυντεθούν σε forwards και options. Έτσι, τα Παράγωγα Προϊόντα εμφανίζονται με τρείς διαφορετικές μορφές, ως εξής:

- *Futures και Forwards*
- *Options*
- *Swaps*

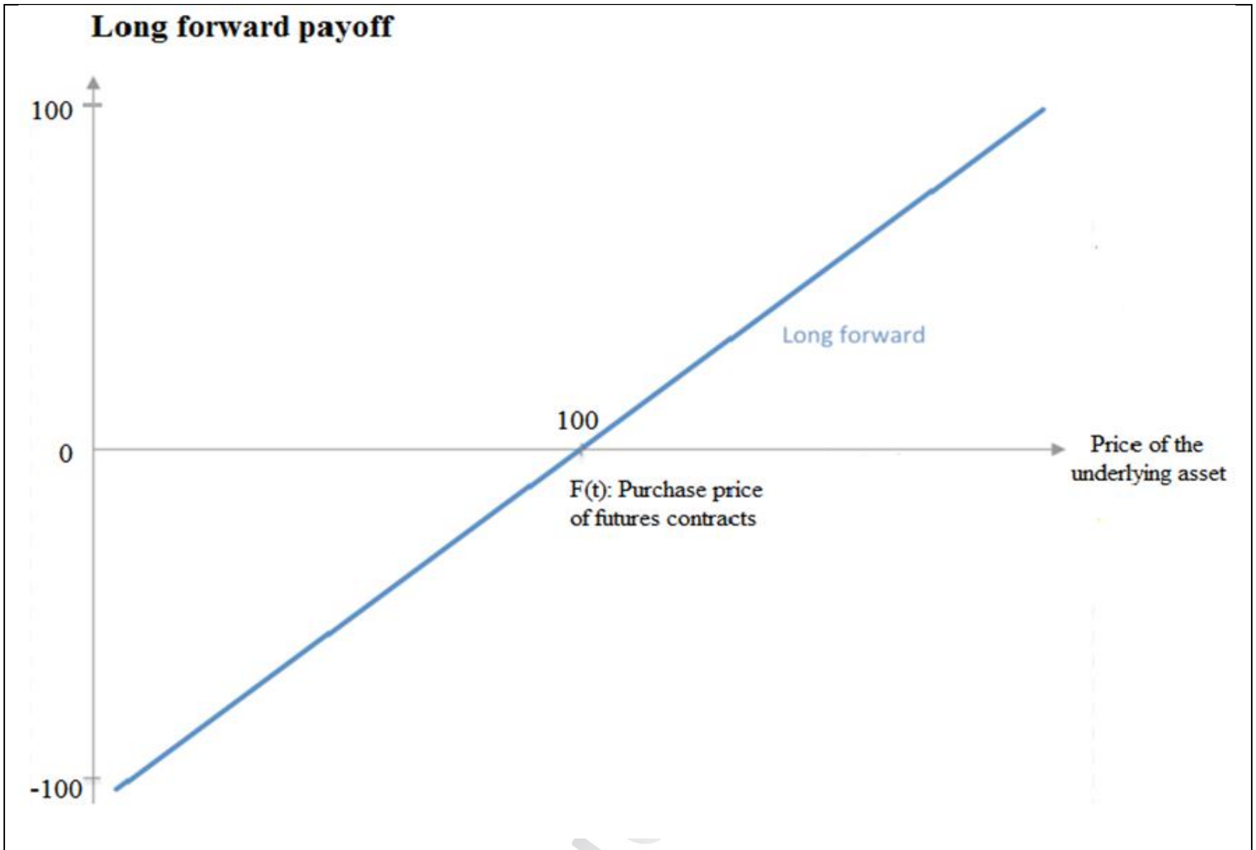
Ως βασικό κίνητρο της δημιουργίας αλλά και επένδυσης σε *Παράγωγα Προϊόντα* είναι η εξουδετέρωση κινδύνων, γι’ αυτό άλλωστε δύναται να λειτουργήσουν και ως ασφαλιστικά προϊόντα. Ταυτόχρονα, όμως, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως κερδοσκοπικά μέσα δεδομένου ότι δίνουν τη δυνατότητα αποκόμισης σημαντικών κερδών με περιορισμένα κεφάλαια (εφ’ όσον βέβαια η πρόβλεψη για τις εξελίξεις στο επίπεδο τιμών των προϊόντων στα οποία αναφέρονται τα *Παράγωγα Προϊόντα* θεωρηθεί επιτυχής). Αντίθετα, οι εσφαλμένες εκτιμήσεις εγκυμονούν κινδύνους μεγάλων απωλειών. Τέλος, θα πρέπει να τονιστεί ότι ο κερδοσκοπικός τους χαρακτήρας αποτελεί κίνητρο για τη συμμετοχή μεγάλου αριθμού επενδυτών στην αγορά [Μ.Γκλεζάκος 2012, 2013].

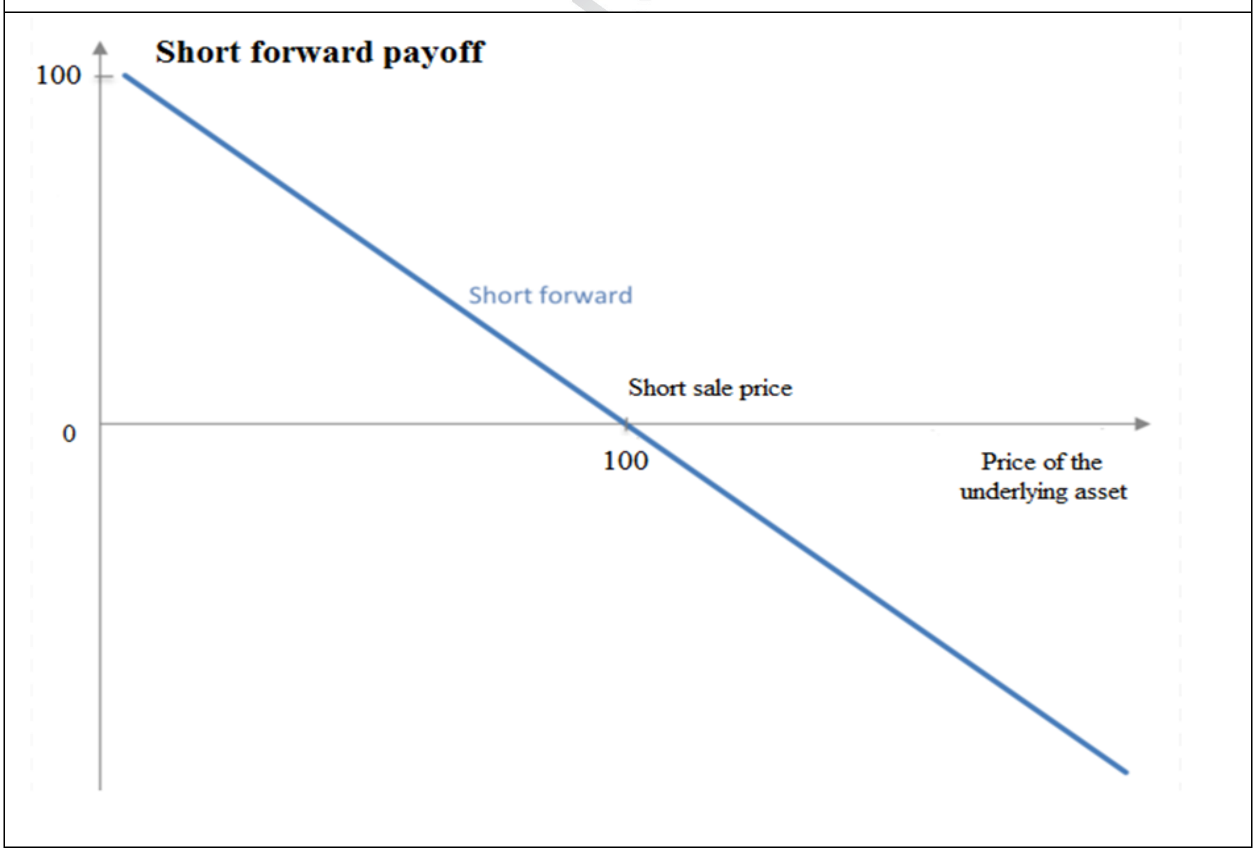
❖ Futures και Forwards

Τα Forwards αποτελούν την απλούστερη μορφή παραγώγου. Πραγματοποιούνται μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, όπως για παράδειγμα μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων ή δύο εταιρειών και συνήθως η διαπραγμάτευση τους γίνεται εκτός χρηματιστηριακής αγοράς. Πρόκειται για διαπραγμάτευση της μορφής *«Over The Counter»*, και ορίζονται ως εξής:

«Τα forwards συμβόλαια αποτελούν μία υποχρέωση να αγοραστεί ή να πουληθεί ένα περιουσιακό στοιχείο σε μία προκαθορισμένη τιμή (forward price), σε μία συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία».

Ως εκ τούτου, ο ένας αντισυμβαλλόμενος και ειδικότερα αυτός που έχει τη θέση αγοράς (long position) συμφωνεί να αγοράσει μια ποσότητα ενός συγκεκριμένου προϊόντος σε μια προκαθορισμένη τιμή και σε μία προκαθορισμένη μελλοντική χρονική στιγμή, ενώ ο αντισυμβαλλόμενος που έχει τη θέση πώλησης (short position), είναι υποχρεωμένος να πουλήσει τη συγκεκριμένη ποσότητα του προϊόντος, στην προκαθορισμένη τιμή και προκαθορισμένη μελλοντική χρονική στιγμή. Η ημερομηνία λήξεως του συμβολαίου καθώς και η προκαθορισμένη τιμή ορίζονται κατά τη σύναψη του συμβολαίου. Ο κάτοχος ενός forward (long position), του οποίου η cash price υπερβαίνει τη forward price κατά την ημερομηνία λήξεως, θεωρείται κερδισμένος, ενώ ο αντισυμβαλλόμενος στη short position ζημιωμένος. Τα payoff διαγράμματα που ακολουθούν, βοηθούν στην κατανόηση των long και short position [Sahn N.Neftci, 2002].


Long forward payoff
100
0
-100
Long forward
100
Price of the underlying asset
F(t): Purchase price of futures contracts


Short forward payoff
100
0
Short forward
Short sale price
100
Price of the underlying asset

Όσον αφορά τα *futures* είναι κι αυτά χρηματοοικονομικά προϊόντα παρόμοια με τα *forwards*. Πιο συγκεκριμένα, τα *Futures* είναι συμβόλαια αγοράς κάποιου προϊόντος, το οποίο θα παραδοθεί σε μελλοντική ημερομηνία, με όρους οι οποίοι προσδιορίζονται κατά το χρόνο σύναψης του συμβολαίου. Το υποκείμενο προϊόν μπορεί να έχει φυσική υπόσταση, όπως για παραγειγμα τα μέταλλα, αγροτικά προϊόντα κλπ, να είναι χρηματοοικονομικό προϊόν όπως μετοχές και συνάλλαγμα ή ακόμη και να αποτελεί πλασματικό μέγεθος όπως οι δείκτες τιμών των μετοχών.

Παράδειγμα 1.12: *Συμφωνούμε να παραλάβουμε / παραδώσουμε μετά από 28 ημέρες 12.000 μετοχές και να πληρώσουμε / εισπράξουμε 1,6 ν.μ. ανά μετοχή, ανεξάρτητα από την τιμή που θα έχει τότε.*

❖ Δικαιώματα Προαίρεσης

Τα *Δικαιώματα (Options)* αποτελούν συμφωνίες που παρέχουν στον αγοραστή τους το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει ορισμένη ποσότητα τίτλων σε προκαθορισμένη τιμή, εφόσον εκείνος το θελήσει. Με βάση το είδος της συναλλαγής που δικαιούται να πραγματοποιήσει ο αγοραστής ενός *Δικαιώματος*, αυτές διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες, οι οποίες είναι τα *Δικαιώματα Αγοράς (call options)* και τα *Δικαιώματα πώλησης (put options)*.

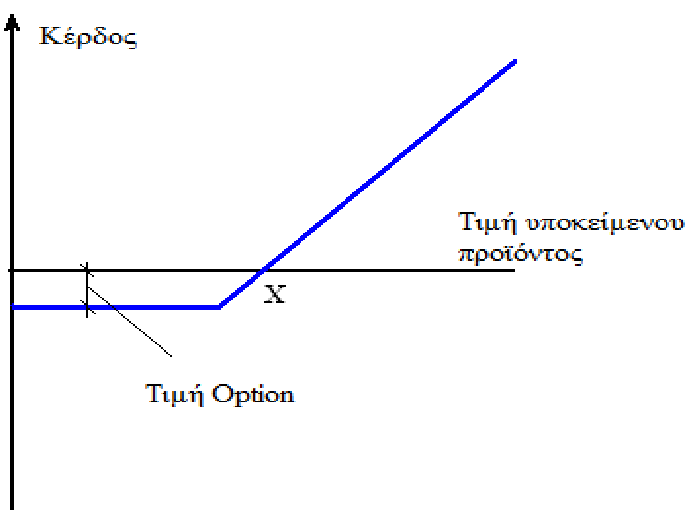
Παράδειγμα 1.13: *Αγοράζουμε / Πουλάμε το δικαίωμα να παραλάβουμε / παραδώσουμε (εάν θέλουμε / εάν ζητηθεί), μετά από 28 μέρες 12.000 μετοχές πληρώνοντας / εισπράττοντας 1,6 ν.μ. για κάθε μετοχή.*

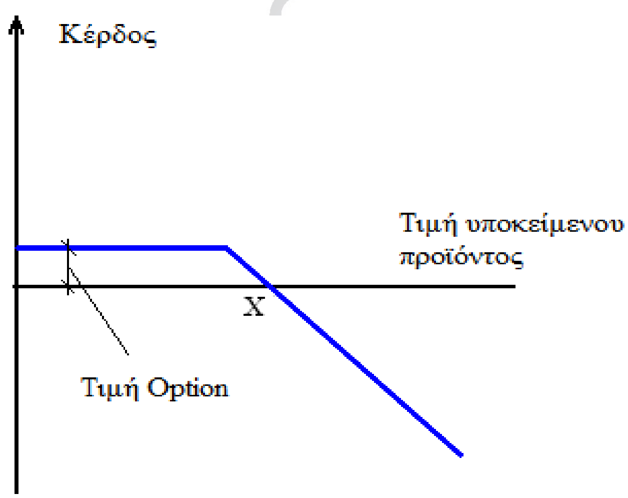
❖ Δικαιώματα Αγοράς

Ο αγοραστής ενός *call option* έχει την ευχέρεια να αγοράσει το συμφωνημένο αριθμό υποκείμενων στοιχείων σε προκαθορισμένη τιμή, μέχρι κάποια συγκεκριμένη ημερομηνία *(call options αμερικάνικου τύπου)* ή σε μία συγκεκριμένη και μόνο ημερομηνία *(call options ευρωπαϊκού τύπου)*. Όπως είναι λογικό, τόσο ο αγοραστής όσο και ο πωλητής των *call options* προσδοκούν, ο καθένας από τη σκοπιά του, να αποκομίσουν κέρδη από την αγορά / πώληση τους.

Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση ενός πωλητή ο οποίος εκτιμά ότι οι μεταβολές των τιμών, των υποκείμενων στοιχείων στις οποίες αναφέρεται το *option*, θα είναι τέτοιες έτσι ώστε ο αγοραστής δε θα ασκήσει τα δικαιώματα που αγόρασε, τότε ο πωλητής του *option* επιτυγχάνει κέρδος ίσο με το ποσό που εισέπραξε διαθέτοντάς τη. Από την αντίθετη πλευρά, ο αγοραστής είναι διατίθεται καταβάλλει κάποιο ποσό για να εξασφαλίσει όρους συναλλαγής ευνοϊκότερους από εκείνους που προσδοκά ότι θα διαμορφωθούν αργότερα στην αγορά. Για παράδειγμα, εάν ο αγοραστής μπορέσει να συμφωνήσει τιμή αγοράς T_0 για κάποια μετοχή (*call option*), ενώ προβλέπει ότι η τιμή της θα διαμορφωθεί κοντά στο επίπεδο T_1 (όπου $T_1 > T_0$) θα μπορεί ασκώντας το *call option* που αγόρασε να αποκομίσει κέρδη όσα προς $T_1 - T_0$ ανά μετοχή.

Τέλος, γίνεται σαφές ότι οι συναλλαγές με *options* εμφανίζουν μεγαλύτερες πιθανότητες κέρδους σε εκείνους που είναι καλύτερα πληροφορημένοι και μπορούν να εκτιμήσουν καλύτερα τις διαγραφόμενες εξελίξεις στο χώρο του Χρηματιστηρίου (οι συμφωνίες των *options* γίνονται συνήθως αντικείμενο συναλλαγής στα Χρηματιστήρια, διασφαλίζοντας έτσι ρευστότητα στους δικαιούχους τους) [Μ.Γκλεζάκος 2012, 2013].

<table>
<tr><th colspan="2">Σχηματική Αναπαράσταση</th></tr>
<tr><th>Long Call</th><th>Short Call</th></tr>
<tr><td>


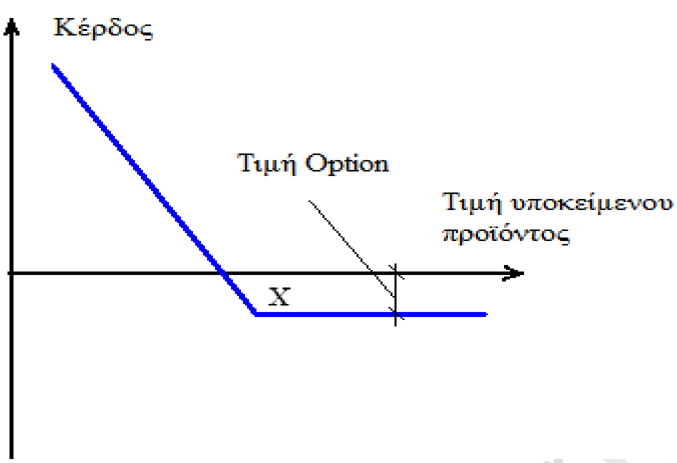
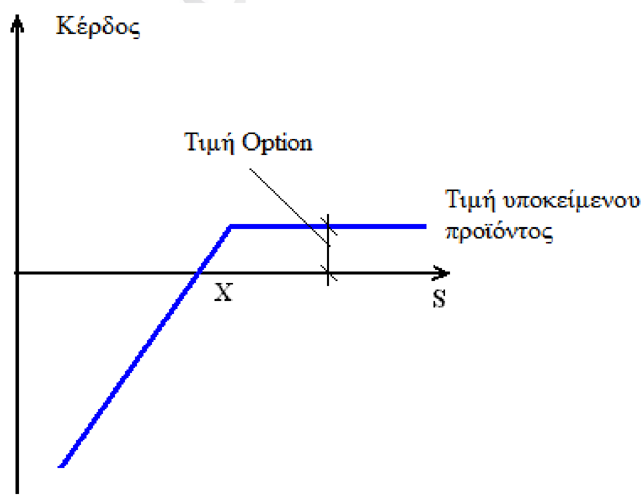
</td><td>


</td></tr>
</table>

❖ Δικαιώματα Πώλησης

Τα *Δικαιώματα Πώλησης (put options)* δε διαφέρουν, όσον αφορά τη φιλοσοφία εφαρμογής τους και το μηχανισμό, από τα *call options* ενώ η μοναδική τους διαφορά έγκειται στην αντιστροφή των *Δικαιωμάτων* και *Υποχρεώσεων* των αγοραστών και πωλητών τους.

Πιο συγκεκριμένα, ο εκδότης – πωλητής ενός *put option* δεσμεύεται να αγοράσει συγκεκριμένο αριθμό για παράδειγμα χρεογράφων σε προκαθορισμένη τιμή, ο δε αγοραστής έχει την ευχέρεια να πωλήσει τα αντίστοιχα χρεόγραφα (με τους συμφωνημένους όρους), μόνο αν το θελήσει. Επίσης, η τιμή του *put option* διαμορφώνεται ανάλογα με τις προσδοκίες τις *Αγοράς* για τις μελλοντικές εξελίξεις στο επίπεδο των τιμών των υποκείμενων στοιχείων. Τέλος, αν ο πωλητής πιστεύει ότι θα αυξηθούν οι τιμές και ο αγοραστής προσδοκά τη μείωσή τους, τότε και οι δύο συμβαλλόμενοι θεωρούν ότι έχουν συμφέρον να συμφωνήσουν με βάση το τρέχον επίπεδο τιμών.

Σχηματική Αναπαράσταση	
Long Put	***Short Put***
	

❖ Swaps

Όπως έχουμε προαναφέρει, τα swaps αποτελούν ένα από τους πιο διαδεδομένους τύπους των Παράγωγων Χρηματοοικονομικών Προϊόντων. Αξίζει να αναφέρουμε ότι μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μέθοδος τιμολόγησής τους η οποία απαιτεί υπέρθεση των forwards και options. Λόγω αυτού, εύκολα γίνεται αντιληπτή η σημαντικότητα των forwards και options μιας και αποτελούν τη σταθερή δομή των swaps. Η έννοια του *swap* ορίζεται ακολούθως, ως εξής:

«Με τον όρο Swap αναφερόμαστε σε μια συμφωνία ταυτόχρονης πώλησης και αγοράς των ταμειακών ροών που αφορούν διάφορα νομίσματα, επιτόκια ή ακόμη και περιουσιακά στοιχεία».

Οι ταμειακές ροές υπολογίζονται βάση ενός προκαθορισμένου ποσού. Σε αντίθεση με τα υπόλοιπα παράγωγα προϊόντα που έχουμε μελετήσει προηγουμένως *(futures, forwards,* και *options),* το προκαθορισμένο ποσό συνήθως δεν ανταλλάσσεται μεταξύ των αντισυμβαλλομένων. Ως εκ τούτου, οι ανταλλαγές μπορεί να είναι σε ρευστό χρήμα (cash) ή σε εγγυήσεις (collateral). Αξίζει να τονιστεί ότι τα *swaps* χρησιμοποιούνται ευρέως για την αντιστάθμιση κινδύνων, κυριότερα του επιτοκιακού.

Ο πιο διαδεδομένος τύπος *swap* είναι το *Interest Rate Swap (IRS)*, ο οποίος αφορά την ανταλλαγή ενός δανείου σταθερού επιτοκίου σε ένα δάνειο κυμαινόμενου επιτοκίου. Η διάρκεια ζωής ενός *swap* κυμαίνεται από δύο έως δεκαπέντε χρόνια. Σκοπός αυτής της ανταλλαγής είναι να επωφεληθούν οι δανειζόμενοι από το *ανταγωνιστικό πλεονέκτημα**. Ορισμένες εταιρείες μπορεί να έχουν ανταγωνιστικό πλεονέκτημα σε αγορές σταθερού επιτοκίου, ενώ άλλες σε κυμαινόμενου. Όταν οι εταιρείες θέλουν να δανειστούν, ψάχνουν για φτηνό δανεισμό, δηλαδή από την αγορά, όπου έχουν ανταγωνιστικό πλεονέκτημα γεγονός που μπορεί να οδηγήσει μια εταιρεία σε δανεισμό σταθερού επιτοκίου ενώ θέλει κυμαινόμενου ή σε δανεισμό κυμαινόμενου επιτοκίου όταν θέλει σταθερό. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιείται το *swap* [Sahn N.Neftci].

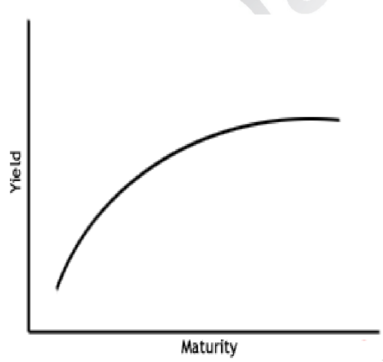
*****_ανταγωνιστικό πλεονέκτημα_: Μια επιχείρηση θεωρείται ότι έχει ανταγωνιστικό πλεονέκτημα έναντι των ανταγωνιστών της, όταν η διατήρηση των αποδόσεων ξεπερνά το μέσο όρο του κλάδου της. Το πλεονέκτημα αυτό προκύπτει από τα χαρακτηριστικά ενός προϊόντος, που το καθιστούν ανώτερο των ανταγωνιστικών.

1.4. Term Structure of Interest Rates (TSIR)

Κάθε δανειστής που σκοπεύει να εκδώσει ένα δάνειο και να καθορίσει κατάλληλα επιτόκια, οφείλει να λάβει υπόψη του ένα πλήθος παραγόντων που μπορούν να επηρεάσουν αυτή τη συναλλαγή. Πρόκειται για τα χαρακτηριστικά του δανειολήπτη τα οποία ενδέχεται να επηρεάσουν τη αρνητικά την εξόφληση του δανείου όπως για παράδειγμα η πιστοληπτική του ικανότητα, η οποία καθορίζει κατά πόσο δύναται να ανταπεξέλθει στις προγραμματισμένες πληρωμές. Επίσης, ένας ακόμη παράγοντας ο οποίος επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τέτοιου είδους συναλλαγές είναι οι επιτοκιακές αλλαγές.

Για το λόγο αυτό μας είναι εξαιρετικά χρήσιμη η μελέτη της *Καμπύλης Επιτοκίων ή TSIR* η οποία αντανακλά τις προσδοκίες των συμμετεχόντων στην αγορά σχετικά με τις μελλοντικές μεταβολές των επιτοκίων και την εκτίμηση τους για τις συνθήκες της νομισματικής πολιτικής. Ειδικότερα αποτελεί τη δομή των επιτοκίων που χρησιμοποιούμε για να προεξοφλούμε χρηματοροές με διαφορετικές ημερομηνίες λήξης.

Στην περίπτωση ενός ομολόγου, η *TSIR* εκφράζει τη σχέση μεταξύ της απόδοσης του ομολόγου και της ωρίμανσής του.



Συνήθως τα ομόλογα με μεγαλύτερη διάρκεια έχουν μεγαλύτερη απόδοση στη λήξη *(ytm).* Αυτό οφείλεται:

- είτε στο ότι οι επενδυτές περιμένουν τα επιτόκια να ανέβουν
- είτε ότι ζητούν πριμ κινδύνου για διακράτηση του ομολόγου μεγάλης διάρκειας και άρα με μεγαλύτερο κίνδυνο [Θ.Πουφινάς 2004].

- Η *TSIR* την παρούσα χρονική στιγμή, αποτελεί τη δομή των *yield rates* των ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου όλων των ληκτοτήτων. Πρόκειται για το σύνολο:

$$\{s_0(t)\}_{t>0}$$

όπου, ▪ $s_0(t)$: είναι το ετήσιο αποτελεσματικό επιτόκιο τη στιγμή 0 για ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου.

Για το λόγο αυτό, η καμπύλη επιτοκίων συχνά εκφράζεται και ως *καμπύλη επιτοκίων ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου (zero-coupon bond yield curve).*

Χρήσιμοι Ορισμοί

- *Το yield to maturity* ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου τη στιγμή της ληκτότητας καλείται *τρέχον επιτόκιο* (*Spot Rate of interest).* Έτσι, συμβολίζουμε με:

  - $s_0(t)$: το τρέχον επιτόκιο ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου, ληκτότητας *t.*

- Το *προθεσμιακό επιτόκιο* (*forward* rate) αποτελεί τη μελλοντική απόδοση ενός ομολόγου και υπολογίζεται με βάση την καμπύλη απόδοσης. Δοθέντος *TSIR* των ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου $\{s_0(t)\}_{t>0}$ που προαναφέραμε, μπορούμε να ορίσουμε το *n -1 – year forward*: το μελλοντικό επιτόκιο ενός έτους από τη στιγμή $n-1$ έως n, συμβολίζεται ως $i_0(n-1,n)$ και ικανοποιεί τη σχέση:

$$1 + i_0(n-1,n) = \frac{(1 + s_0(n))^n}{(1 + s_0(n-1))^{n-1}}$$

Αντίστοιχα, το *forward - rate* της περιόδου από τη στιγμή 0 έως 1 είναι:

$$i_0(0,1) = s_0(1)$$

1.5. Διάρκεια – Ανοσοποίηση

1.5.1. Η Έννοια του Χαρτοφυλακίου

Είναι αναμφισβήτητο ότι οι επενδύσεις κατέχουν το πρωταρχικό ρόλο στο σύγχρονο χρηματοοικονομικό κόσμο. Πρόκειται για τη δέσμευση κεφαλαίων σε ένα χρονικό διάστημα, η οποία αναμένεται να αποφέρει πρόσθετα κεφάλαια στον επενδυτή. Πιο συγκεκριμένα, οι επενδυτές τοποθετούν τον πλούτο τους σε διάφορα *Περιουσιακά Στοιχεία,* τα οποία μπορεί να είναι καταθέσεις, έντοκα γραμμάτια, ομολογίες, μετοχές, ομόλογα, χρηματοοικονομικά δικαιώματα κτλ, αναμένοντας μελλοντικό κέρδος. Στην περίπτωση, όμως, ενός επενδυτή που επενδύει σε παραπάνω από ένα *Περιουσιακό Στοιχείο*, τότε δημιουργεί ένα *χαρτοφυλάκιο.* Ως εκ τούτου, με τον όρο *Χαρτοφυλάκιο* αναφερόμαστε στο σύνολο των Περιουσιακών Στοιχείων που κατέχει ένας επενδυτής. Σκοπός της δημιουργίας ενός χαρτοφυλακίου είναι η μεγιστοποίηση της απόδοσης και η ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση του κινδύνου, ή απλούστερα την επίτευξη ενός συνδυασμού απόδοσης-κινδύνου κατάλληλου για τις ανάγκες του κάθε επενδυτή.

Αυτό επιτυγχάνεται μέσω δύο διαδικασιών, η πρώτη είναι η ανάλυση των περιουσιακών στοιχείων και αγορών στην οποία μελετάμε τον κίνδυνο και την αναμενόμενη απόδοση των δυνατών επενδυτικών σχημάτων και η δεύτερη είναι ο σχηματισμός του βέλτιστου χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων στο οποίο βρίσκουμε την καλύτερη δυνατή σχέση μεταξύ κινδύνου και απόδοσης ανάμεσα στα εφικτά χαρτοφυλάκια και επιλέγουμε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Πρόκειται, λοιπόν, για μια πολύπλοκη διαδικασία όσον αφορά την επιλογή των καταλληλότερων περιουσιακών στοιχείων, αφού για καθένα από αυτά πρέπει να λάβουμε υπόψη τον *κίνδυνο* που ενέχει καθώς και την *προσδοκώμενη απόδοση*.

- Ο *κίνδυνος:* αντιπροσωπεύει την απόκλιση του πραγματοποιηθέντος αποτελέσματος από μια μέση αναμενόμενη άξια. Κίνδυνος μπορεί επίσης να θεωρηθεί η πιθανότητα να υπάρξει ζημία ή κέρδος από την επένδυση σε κάποιο περιουσιακό στοιχείο. Τα χαρακτηριστικά του κινδύνου είναι ο χρόνος και η μεταβλητότητα.

- Η *προσδοκώμενη απόδοση:* ισοδυναμεί με τον αποδεχόμενο κίνδυνο.

Τέλος, στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι μπορούν να δημιουργηθούν ομοιοτρόπως πολλών ειδών χαρτοφυλάκια, για παράδειγμα το επενδυτικό, το ασφαλιστικό όπως και το χαρτοφυλάκιο ζημιών.

❖ Χαρτοφυλάκιο ομολόγων

Για έναν τυπικό παρατηρητή, η επένδυση σε ομόλογα θεωρείται αρκετά ασφαλής καθότι οι κάτοχοι των ομολόγων αποτελούν δανειστές του εκδότη. Επίσης τα ομόλογα έχουν καθορισμένη διάρκεια ζωής (ληκτότητα), μετά την πάροδο της οποίας το ομόλογο εξαγοράζεται. Πιο συγκεκριμένα, το ομόλογο είναι μία υποχρέωση η οποία συνήθως απαιτεί περιοδικές πληρωμές (κουπόνια), υπό καθορισμένο επιτόκιο και για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, καθώς και την επιστροφή του αρχικού κεφαλαίου κατά τη λήξη.

Γίνεται σαφές, από επενδυτική σκοπιά, ότι η επένδυση σε ομόλογα, δηλαδή η δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων, μπορεί να θεωρηθεί σχετικά ασφαλής καθότι η πληρωμή του κουπονιού προηγείται της απόδοσης μερίσματος από την αντίστοιχη εταιρεία (σε περίπτωση πτώχευσης της εταιρείας εάν ο κάτοχος του ομολόγου δε λάβει το κουπόνι μπορεί να προσφύγει στη δικαιοσύνη).

Ωστόσο, ενώ η επένδυση σε ομόλογα φαντάζει απλή δεδομένου ότι το κριτήριο επιλογής του ομολόγου θα είναι η υψηλότερη απόδοση, στην πραγματικότητα πρόκειται για μια ιδιαιτέρως πολύπλοκη διαδικασία. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχει πληθώρα επιλογών όσον αφορά τη διαμόρφωση ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων, και όποια στρατηγική κι αν επιλεχθεί απαιτεί και τα αντίστοιχα ανταλλάγματα ή *tradeoffs*.

❖ Ισορροπημένο Χαρτοφυλάκιο

Ένα ισορροπημένο ή σταθμισμένο χαρτοφυλάκιο προκύπτει από τη διαδικασία αναδιάταξης των συντελεστών ή βάρη των περιουσιακών στοιχείων του αρχικού χαρτοφυλακίου. Επιτυγχάνεται μέσω της αγοράς ή πώλησης κατάλληλων περιουσιακών στοιχείων και στόχος είναι η διατήρηση του επιθυμητού επιπέδου της κατανομής των περιουσιακών στοιχείων.

Για παράδειγμα, έστω ότι η αρχική κατανομή περιουσιακών στοιχείων αφορούσε 50% μετοχές και 50% ομόλογα. Εάν οι μετοχές είχαν καλές επιδόσεις κατά τη διάρκεια της περιόδου, το βάρος των μετοχών θα αυξάνονταν (για παράδειγμα στο 70%) με αποτέλεσμα την ανατροπή της αρχικής ισορροπίας του χαρτοφυλακίου. Έτσι, θα μπορούσαμε να πουλήσουμε ορισμένες μετοχές και να αγοράσουμε ομόλογα προκειμένου να επαναφέρουμε τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου στην αρχική τους κατανομή (50/50).

❖ Διάρκεια

Στην περίπτωση επενδύσεων σε *Τίτλους Σταθερού Εισοδήματος*, οι αλλαγές των επιτοκίων ενδέχεται να επηρεάσουν σε μεγάλο βαθμό την αξία του τίτλου. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τη *Διάρκεια (Duration)*, η οποία αντιπροσωπεύει ένα μέτρο ευαισθησίας της τιμής του τίτλου από τις επιτοκιακές αλλαγές. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση ενός ομολόγου το οποίο πληρώνει τις χρηματοροές του καθ’ όλη την περίοδο μέχρι την ωρίμανσή του, μέσω της *Διάρκειας* μπορούμε να αναλύσουμε τις ιδιότητες του και να διαπιστώσουμε το πως κατανέμονται οι χρηματοροές του. Με πιο απλά λόγια, η *Διάρκεια* αποτελεί ένα μέτρο κινδύνου το οποίο εκφράζει το πόσο γρήγορα θα αποπληρωθεί το αρχικό κεφάλαιο του ομολόγου, αφορά και το δανειστή αλλά και το δανειζόμενο και δείχνει το πόσο κινδυνεύει, λόγω των επιτοκιακών μεταβολών, ο καθένας από τη σκοπιά του.

Η *Διάρκεια* προκύπτει σταθμίζοντας κάθε χρονική στιγμή t_i , που γίνονται οι πληρωμές, με την αντίστοιχη *Παρούσα Αξία* $C_i v^{t_i}$ και δίνεται ως εξής:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i v^{t_i} t_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i v^{t_i}} \tag{1.7}$$

Αν θεωρηθεί ότι το επιτόκιο είναι σταθερό και ίσο με την απόδοση στη λήξη y καθώς επίσης και τα διαστήματα πληρωμών ισαπέχοντα τις χρονικές στιγμές $1,2, \dots . n$, τότε η σχέση (1.7) διαμορφώνεται ως εξής:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_t t}{(1+r)^t}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}}$$

Στην περίπτωση, όμως, που η συχνότητα πληρωμής των τοκομεριδίων δεν είναι ετήσια αλλά είναι μεγαλύτερη από μία φορά ανά έτος, έστω για m, αυτό συνεπάγεται τροποποίηση του επιτοκίου σε $\frac{r}{m}$ ανά περίοδο. Αν συμβολίσουμε με C_t τις πληρωμές ανά περίοδο κι έχοντας ως r το ετήσιο επιτόκιο όπου n ο αριθμός ετών ως την ωρίμανση, τότε η Διάρκεια προσεγγίζεται ως εξής:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{mn} C_t t / (1 + \frac{r}{m})^t}{\sum_{i=1}^{mn} C_t / (1 + \frac{r}{m})^t}$$

Ως εκ τούτου, το μέγεθος αυτό ονομάζεται *Διάρκεια κατά Macaulay* και παρουσιάζεται ως εξής:

$$MacD = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i PV_i}{V}$$

όπου,
- $\boldsymbol{PV_i}$: η *Παρούσα Αξία* κάθε i-πληρωμής
- $\boldsymbol{V = \sum_{i=1}^{n} PV_i}$

<u>Παρατήρηση 1.7</u>: Η *Διάρκεια* ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου με λήξη σε Τ έτη, είναι Τ.

<u>Παράδειγμα 1.14</u>: *Να βρεθεί η διάρκεια ενός τυπικού ομολόγου με λήξη σε 4 έτη, ονομαστική αξία 100 ν.μ. και ονομαστικό επιτόκιο 5%, εάν το επιτόκιο της αγοράς είναι 4%.*

Πράγματι έχουμε:

Οι πληρωμές του ομολόγου είναι: 5, 5, 5, 105.

$$MacD = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i PV_i}{V} = \frac{5(1.04)^{-1} + 2 * 5(1.04)^{-2} + 3 * 5(1.04)^{-3} + 4 * 105(1.04)^{-4}}{5(1.04)^{-1} + 5(1.04)^{-2} + 5(1.04)^{-3} + 105(1.04)^{-4}} = 3{,}73$$

<u>Παράδειγμα 1.15</u>: Να βρεθεί η διάρκεια ενός ομολόγου $5yrs/10\%$ που πληρώνει τριμηνιαία τα κουπόνια του.

Πράγματι έχουμε:

t	*κουπόνι*	*συχνότητα πληρωμής*	*Προεξόφληση*	*ΠΑ*	*ΠΑ*t*
1/4	250	1	0.985	246.305	61.576
1/2	250	2	0.971	242.665	121.333
3/4	250	3	0.956	239.079	179.309
1	250	4	0.942	235.546	235.546
1 1/4	250	5	0.928	232.065	290.081
1 1/2	250	6	0.915	228.636	342.953
1 3/4	250	7	0.901	225.257	394.199
2	250	8	0.888	221.928	443.856
2 1/4	250	9	0.875	218.648	491.958
2 1/2	250	10	0.862	215.417	538.542
2 3/4	250	11	0.849	212.233	583.642
3	250	12	0.836	209.097	627.291
3 1/4	250	13	0.824	206.007	669.522
3 1/2	250	14	0.812	202.962	710.368
3 3/4	250	15	0.800	199.963	749.861
4	250	16	0.788	197.008	788.031
4 1/4	250	17	0.776	194.096	824.909
4 1/2	250	18	0.765	191.228	860.526
4 3/4	250	19	0.754	188.402	894.909
5	10250	20	0.742	7610.322	38051.609
		Άθροισμα		**11716.864**	**47860.02**

Διάρκεια
4.084712549

❖ Διάρκεια Χαρτοφυλακίου

Στην περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου που διαθέτει ως περιουσιακά στοιχεία ομόλογα, η διάρκειά του θα ισούται με το σταθμισμένο μέσο των επιμέρους διαρκειών του κάθε ομολόγου που περιλαμβάνεται στο χαρτοφυλάκιο, σταθμισμένο με το ποσοστό ή βάρος που διαθέτει το κάθε ομόλογο στο χαρτοφυλάκιο. Η διάρκεια, λοιπόν, του χαρτοφυλακίου ομολόγων υπολογίζεται ως εξής:

$$D^{port} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{(C_{t_1}+C_{t_2}+\cdots+C_{t_n})t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{(C_{t_1}+C_{t_2}+\cdots+C_{t_n})}{(1+r)^t}}$$

Αν αναπτύξουμε το άθροισμα, καταλήγουμε στο εξής:

$$D^{port} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_{t_1}t}{(1+r)^t} + \sum_{t=1}^{n} \frac{C_{t_2}t}{(1+r)^t} + \cdots + \sum_{t=1}^{n} \frac{C_{t_n}t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{(C_{t_1}+C_{t_2}+\cdots+C_{t_n})}{(1+r)^t}}$$

Επίσης, το ποσοστό του κάθε i-ομολόγου που εμπεριέχεται στο χαρτοφυλάκιο προσεγγίζεται ως εξής:

$$w_i = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_{t_i}t}{(1+r)^t} \bigg/ \sum_{t=1}^{n} \frac{C_{t_1}+C_{t_2}+\cdots+C_{t_n}}{(1+r)^t}$$

Αντίστοιχα, αν θεωρήσουμε ότι η τιμή κάθε ομολόγου που έχουμε συμπεριλάβει αντιπροσωπεύει τη δίκαιη τιμή του, τότε *διάρκεια* του χαρτοφυλακίου ομολόγων μετασχηματίζεται ως εξής:

$$D^{port} = D_1 w_1 + D_2 w_2 + \cdots + D_n w_n$$

❖ Κατηγορίες χαρτοφυλακίου βάση της Διάρκεια

Bullet portfolio	Ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από διάρκειες που βρίσκονται πολύ κοντά στο επενδυτικό ορίζοντα.
barbell portfolio	Ένα σταθμισμένο χαρτοφυλάκιο ομολόγων από μεγάλες και μικρές διάρκειες, αλλά και μερικές ενδιάμεσες διάρκειες. (Ομόλογα μικρής διάρκειας παρέχουν ρευστότητα, ενώ μεγάλης διάρκειας προσφέρουν υψηλότερες αποδόσεις)

❖ **Fisher – Weill Διάρκεια**

Έστω ότι η καμπύλη των επιτοκίων που συμβολίζονται με r_t, $t = 1, \dots, T$ υφίσταται παράλληλη μετατόπιση κατά μία ποσότητα Δ_r, τέτοια ώστε:

$$dr_t = dr = \Delta_r \text{ για κάθε } t = 1, \dots, T.$$

Έστω ακόμη ότι η αρχική παρούσα αξία του ομολόγου πριν την επιτοκιακή αλλαγή είναι P, και οι χρηματοροές του συμβολίζονται με C_t, τότε η *Fisher – Weill* διάρκεια προσδιορίζεται ως εξής:

Διακριτός χρόνος	$D^{FW} = \frac{1}{P}\sum_{t=1}^{T}\frac{tC_t}{(1+r_t)^{t+1}}, t = 1,2, \dots, T$
Συνεχής χρόνος	$D^{FW} = \frac{1}{P}\sum_{t=1}^{T} tC_t e^{-r_t t}$

❖ **Ερμηνεία Διάρκειας**

Στην περίπτωση μίας επένδυσης, εν προκειμένου σε ομόλογο, μας ενδιαφέρει να προσεγγίσουμε τη σχέση της διάρκειας με τη διαφορά της αξίας του ομολόγου, που δημιουργείται λόγω των επιτοκιακών αλλαγών [Ανθρωπέλος 2013]. Όπως έχει προαναφερθεί, η αξία του ομολόγου υπολογίζεται ως εξής:

$$P = C\frac{1}{(1+r)^1} + C\frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + C\frac{1}{(1+r)^n} + M\frac{1}{(1+r)^n}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το επιτόκιο προεξόφλησης r, προκύπτει:

$$\frac{\theta R}{\Theta r} = \frac{-C}{(1+r)^2} + \frac{-2C}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{-n(C+M)}{(1+r)^{n+1}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\theta R}{\Theta r} = \frac{-1}{(1+r)}\left[\frac{C}{(1+r)} + \frac{2C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{n(C+M)}{(1+r)^n}\right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{\theta R}{\Theta r} = -\frac{1}{(1+r)}(PD) \qquad (1.8)$$

Στην περίπτωση που η μεταβολή του επιτοκίου τόσο μικρή ώστε να τείνει στο μηδέν, τότε ισχύει:

$$\frac{\theta R}{\Theta r} \approx \frac{\Delta P}{\Delta r}$$

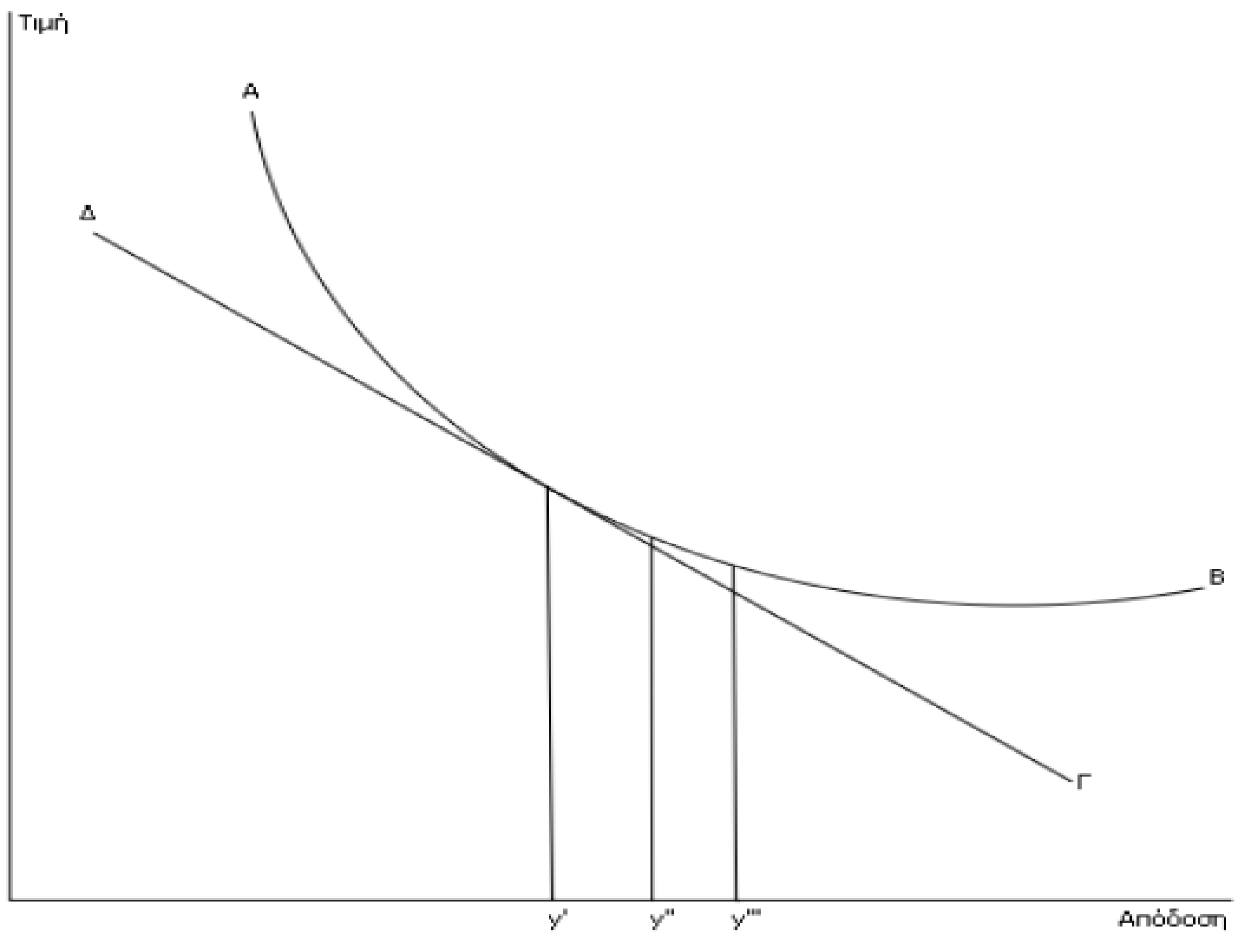
Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.8) εύκολα προκύπτει ότι:

$$D \approx -\frac{\Delta P/_{P}}{\Delta r/_{1+r}}$$

το οποίο εκφράζει την *ελαστικότητα* της αξίας του ομολόγου ως προς το επιτόκιο.

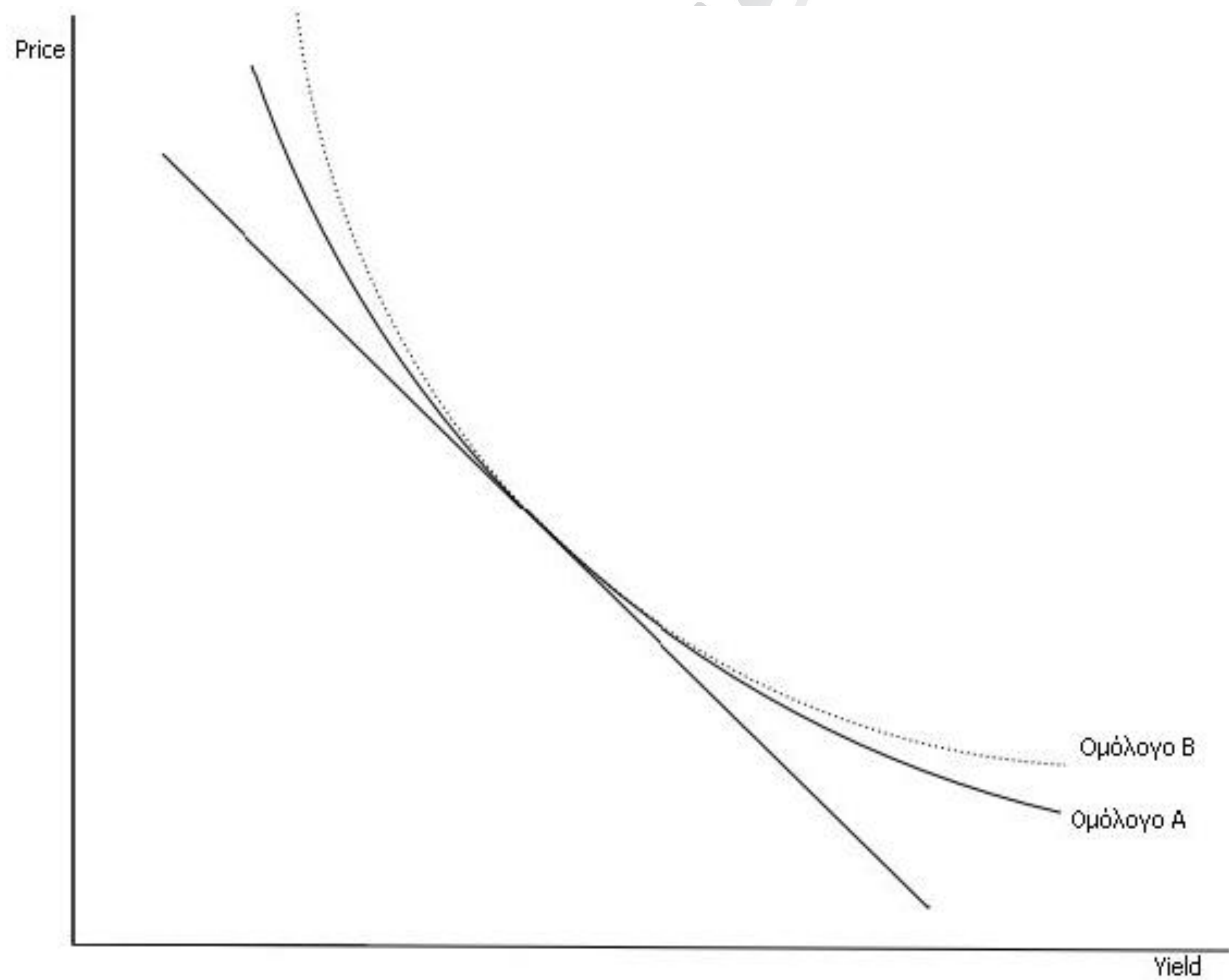
1.5.2. Κυρτότητα

Όπως έχει προαναφερθεί, η *Διάρκεια* χρησιμοποιείται προκειμένου να ποσοτικοποιήσουμε τις μεταβολές της τιμής των ομολόγων εξαιτίας των μικρών διακυμάνσεων των αποδόσεων. Πρόκειται ουσιαστικά για τη γραμμική προσέγγιση της καμπύλης $P = P(y)$, της οποίας η γραφική παράσταση απεικονίζει τη σχέση του ομολόγου και των επιτοκίων, από την εφαπτόμενή της σε ένα σημείο y'. Όμως, παρόλο που η προσέγγιση αυτή μπορεί να θεωρηθεί επαρκής προκειμένου να ποσοτικοποιηθούν οι τιμές του ομολόγου, στην περίπτωση μόνο των μικρών μεταβολών των αποδόσεων, ωστόσο θεωρείται μη αποτελεσματική στην περίπτωση των μεγάλων μεταβολών των αποδόσεων.



Από το παραπάνω διάγραμμα γίνεται εύκολα αντιληπτή η εφαπτόμενη στο σημείο y' της σχέσης μεταξύ της τιμής ομολόγου και απόδοσης $P(y)$ ενώ διαπιστώνεται ότι η καμπύλη ΑΒ απεικονίζει την πραγματική σχέση μεταξύ της τιμή και απόδοσης του ομολόγου και η ευθεία ΔΓ τη διάρκεια. Όμως, στην περίπτωση που η απόδοση μεταβληθεί από y' σε y'', αυτό συνεπάγεται ότι το σφάλμα υπολογισμού της τιμής του ομολόγου μέσω της διάρκειας θα είναι πολύ μικρό. Αντίθετα, στην περίτωση που η απόδοση μεταβληθεί από y' σε y''', τότε το σφάλμα θα είναι σημαντικό [Ι.Σπύρου 2003].

Αντίστοιχα, στην περίπτωση δύο ομολόγων τα οποία έχουν την ίδια διάρκεια αλλά διαφορετικές καμπύλες, δηλαδή διαφορετική *κυρτότητα*, η πραγματική σχέση τιμής και απόδοσης διαφέρει από αυτή που υπολογίζεται με τη βοήθεια της διάρκειας.



Για το λόγο αυτό, γίνεται σαφές ότι πρέπει να ληφθεί υπόψη η μη γραμμικότητα της καμπύλης $P(y)$, ενώ η χρήση ενός μέτρου ποσοτικοποίησης των αποκλίσεων της καμπύλης $P(y)$ από την ευθεία γίνεται αναγκαιότητα. Η *Κυρτότητα*, λοιπόν, αποτελεί ένα μέτρο ικανό να ποσοτικοποιήσει τον κίνδυνο σε χαρτοφυλάκια ομολόγων για μεγάλες μεταβολές των αποδόσεων.

Πιο συγκεκριμένα, η *Κυρτότητα* προκύπτει από το γεγονός ότι η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής προσεγγίζει μία κυρτή παρά γραμμική συνάρτηση και ορίζεται ως η δεύτερη παράγωγος της αξίας της χρηματοροής ως προς την αξία της χρηματοροής, δηλαδή:

$$C = \frac{P''}{P} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t(t+1)Z_t(1+r)^{-t}}{(1+r)^2 \sum_{t=1}^{n} Z_t(1+r)^{-t}}$$

Στην περίπτωση των ομολόγων η κυρτότητα ορίζεται ως εξής:

$$C = \frac{P''}{P} = \frac{1}{P}\sum_{t=1}^{n} \frac{t(t+1)C}{(1+r)^{t+2}} + \frac{n(n+1)M}{(1+r)^{n+2}} \tag{1.9}$$

Στην περίπτωση, όμως, η συχνότητα πληρωμής τοκομεριδίων είναι συχνότερη από μία φορά ανά έτος, έστω m, τότε το επιτόκιο είναι μετασχηματίζεται σε r/m ανά περίοδο και το ύψος των πληρωμών C/m αντίστοιχα. Τότε η σχέση (1.9) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$C = \frac{P''}{P} = \frac{1}{P(1+\frac{y}{m})^2}\sum_{t=1}^{mn} \frac{t(t+1)}{m^2} + \frac{C}{(1+\frac{y}{m})^t}$$

1.5.3. Διαχείριση Ενεργητικού – Παθητικού

Ως γνωστόν, κάθε εταιρία ή οργανισμός είθισται να επενδύει σε διάφορα Περιουσιακά Στοιχεία, δηλαδή να δημιουργεί ένα επενδυτικό χαρτοφυλάκιο, αποσκοπώντας σε μελλοντικά έσοδα και κέρδη. Λόγω, όμως, της ταυτόχρονης ύπαρξης επενδυτικού χαρτοφυλακίου και υποχρεώσεων, τα οποία διαφέρουν μεταξύ τους, η εταιρία εκτίθεται σε διαφόρους χρηματοοικονομικούς κινδύνους, σημαντικότερος των οποίων είναι ο επιτοκιακός. Απαιτείται, λοιπόν, η ταυτόχρονη μελέτη του *Ενεργητικού* (Περιουσιακών Στοιχείων) και *Παθητικού* (Υποχρεώσεων) προκειμένου να βελτιωθούν οι εργασίες της εταιρίας όσον αφορά τα έσοδα, την ασφάλεια και τη ρευστότητα.

Έτσι, η μελέτη του ισολογισμού της εταιρίας πραγματοποιείται σύμφωνα με τη μέθοδο «*Διαχείριση Ενεργητικού – Παθητικού*» η οποία επιδιώκει τη μεγιστοποίηση των χρηματοοικονομικών αποδόσεων με τον περιορισμό ότι η εταιρία πρέπει να είναι φερέγγυα, και χρησιμοποιεί τη *Στρατηγική Ανοσοποίησης (immunization)*, μία στρατηγική η οποία είναι ικανή να ανοσοποιεί την εταιρία σε αλλαγές των επιτοκίων.

❖ Στρατηγική Ανοσοποίησης σε Χαρτοφυλακίου Ομολόγων

Οι μετατοπίσεις της καμπύλης αποδόσεων, ως αποτέλεσμα των επιτοκιακών μεταβολών, θεωρείται από τους διαχειριστές χαρτοφυλακίων ως μία τεράστια πηγή κινδύνου. Ως εκ τούτου, η *Στρατηγική Ανοσοποίησης* αποσκοπεί στη θωράκιση ενός χαρτοφυλακίου και επιτυγχάνεται διασφαλίζοντας ότι οι αλλαγές των επιτοκίων δε θα επηρεάσουν την αξία του χαρτοφυλακίου.

Πιο συγκεκριμένα, η *Ανοσοποίηση* αποσκοπεί στο να εξαλείψει την ευαισθησία της τιμής σε αλλαγές των επιτοκίων και πραγματοποιείται με την εφαρμογή διαφόρων μεθόδων, που επιτυγχάνονται μέσω της *Αντιστοίχισης Ταμειακών Ροών*, *Διάρκειας* και *Κυρτότητας*. Μπορεί επίσης να επιτευχθεί και με διαπραγμάτευση *Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Futures)* και γενικότερα με χρήση *Παραγώγων Προϊόντων*.

Είδαμε προηγουμένως ότι η *Διάρκεια* αποτελεί ένα μέτρο ευαισθησίας της τιμής του ομολόγου σε μία μεταβολή των επιτοκίων. Η *Στρατηγική Ανοσοποίησης* επιχειρεί να εξαλείψει την ευαισθησία της τιμής σε αλλαγές των επιτοκίων, αντιστοιχώντας τη *Διάρκεια* του χαρτοφυλακίου ομολόγων με την *Διάρκεια* της υποχρέωσης μας.

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να ανταποκριθούμε σε μία υποχρέωση σε $n = 4$ έτη, αγοράζοντας ένα ομόλογο λήξης άνω των 4 ετών. Αν υπάρξει αύξηση / μείωση των επιτοκίων, τότε στο τέλος του $n = 4$, αυτό συνεπάγεται ότι η αξία του εισοδήματος από επανεπένδυση των κουπονιών θα έχει αυξηθεί, δηλαδή θα έχουμε ευνοϊκότερα επιτόκια, ενώ η αξία του ομολόγου θα έχει πέσει / ανέβει αντίστοιχα. Επομένως, οι δύο πηγές εισοδήματος δρουν σε αντίθετες κατευθύνσεις, με αποτέλεσμα να υπάρχει ο κίνδυνος αναλόγως βέβαια με το ποια επιρροή είναι πιο ισχυρή, η υποχρέωση μας να μην καλυφθεί.

Στόχος, λοιπόν, είναι η διαμόρφωση κατάλληλου χαρτοφυλακίου ομολόγων, ικανό να εξασφαλίσει ότι οι δύο προηγούμενες επιρροές αλληλοεξουδετερώνονται.

<u>Παράδειγμα 1.16</u>: *Αν μια εταιρία έχει αναλάβει την υποχρέωση να πληρώσει 20.000 ν.μ. σε 9 χρόνια πως μπορεί να ανοσοποιήσει τον κίνδυνο του επιτοκίου χρησιμοποιώντας ένα ομόλογο 14yrs/8%, διάρκεια ίση με 9 χρόνια και επιτόκιο προεξόφλησης 7,5%.*

Πράγματι έχουμε:

Η ασφαλιστική προκειμένου να εξασφαλίσει την υποχρέωση των 20.000 ν.μ από τον επιτοκιακό κίνδυνο, θα πρέπει να επενδύσει ως εξής:

- Αγορά ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου, ληκτότητας 9 ετών (εάν υπάρχει κάτι τέτοιο διαθέσιμο στην αγορά. Έτσι, για επιτόκιο 7,5%, η ομολογίας των 20.000€ τιμολογείται ως εξής:

$$P = \frac{20.000}{(1 + 0{,}075)^9} = 10.432{,}97€$$

  Αν υποθέσουμε ότι κάθε ομόλογο κοστίζει 1000 ν.μ, γίνεται σαφές ότι ο επενδυτής θα αγοράσει 10 ομόλογα.

- Αγορά ομολόγου με δείκτη διάρκειας ίσο με την υποχρέωση που έχει αναλάβει, δηλαδή 9 χρόνια.

Ο επενδυτής δύναται να επιλέξει την παραπάνω ομολογία $P = 10.432{,}97 \text{ν. μ}$, και να την πουλήσει τον 9ο χρόνο. Επενδύει 10432,97 ν.μ. και με επιτόκιο σταθερό στο 7,5% εισπράττουμε τα παρακάτω:

- Κουπόνια : $10 * 9 * 80 = 7200$ €
- Τοκιζόμενα κουπόνια: $10[80(1+\mathrm{r})^8 + \cdots + 80(1+\mathrm{r}) + 80] = 9783{,}806$€
- Τόκοι κουπονιών: $9783{,}806 - 7200 = 2583{,}806$ €
- Πώληση ομολόγου (9ο έτος): $10 * 1000 = 10.000$€

$$\text{Σύνολο} = 7200 + 2583{,}806 + 10.000 = 19783{,}8064 \text{ €}$$

Κεφάλαιο 2

Βασικές Μαθηματικές Έννοιες

2.1. Χώρος Πιθανότητας

Η θεωρία πιθανοτήτων ασχολείται με φαινόμενα στα οποία οι συνθήκες κάτω από τις οποίες εξελίσσονται δεν προκαθορίζουν την έκβαση τους. Τα φαινόμενα αυτά καλούνται τυχαία πειράματα. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται *δειγματικός χώρος* ενώ τα στοιχεία που τον απαρτίζουν καλούνται *δειγματικά σημεία.* Επίσης, τονίζεται ότι:

- Τα ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου.
- Ενδεχόμενα τα οποία περιέχουν ένα μόνο δειγματικό σημείο ονομάζονται *απλά ενδεχόμενα* .
- Ενδεχόμενα τα οποία περιέχουν περισσότερα από ένα δειγματικά σημεία ονομάζονται *σύνθετα ενδεχόμενα.*

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια του χώρου της πιθανότητας, ως εξής:

Ένας χώρος πιθανότητας που σχετίζεται με ένα τυχαίο πείραμα αποτελείται από τρία στοιχεία $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *για τα οποία ισχύουν τα εξής:*

i) ***Ω****: είναι ο δειγματικός χώρος, δηλαδή το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.*

ii) ***ℱ****: αποτελεί μία οικογένεια υποσυνόλων του δειγματικού χώρου Ω, η οποία έχει τη δομή μίας σ-άλγεβρας, τα χαρακτηριστικά της οποίας θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.*

iii) ***P****: μέτρο πιθανότητας και αποτελεί μία συνάρτηση η οποία σχετίζει έναν αριθμό, έστω* $P(A)$ *αυτός, σε κάθε σύνολο* $A \in \mathcal{F}$ *και χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:*

a) $0 \leq P(A) \leq 1$

b) $P(A) = 1$

c) *Για κάθε ακολουθία* $A_{1,}A_{2,\dots}$, *δηλαδή συνόλων που αποτελούν διαμερίσεις του συνόλου* $\mathcal{F}$ *και ισχύει ότι:* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *για* $i \neq j$, *δηλαδή τα ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους, ορίζεται η σχέση:*

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Όσον αφορά τα στοιχεία $\mathcal{F}$ που αποτελούν τη σ-άλγεβρα μπορούν να χαρακτηριστούν υπό την έννοια του γεγονότος. Λαμβάνοντας υπόψη και το μέτρο πιθανότητας P, μπορούμε κατά αυτό τον τρόπο να ορίσουμε την ερμηνεία του παραπάνω μοντέλου:

$$P(\mathcal{F}) = \text{"}\pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \nu\alpha\ \sigma\upsilon\mu\beta\epsilon\acute{\iota}\ \tau o\ \gamma\epsilon\gamma o\nu\acute{o}\varsigma\ \mathcal{F}\text{"}$$

Επίσης, ορίζουμε το ενδεχόμενο ∅ το οποίο ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο και πρόκειται για ένα κενό σύνολο, ενώ αντίθετα το ενδεχόμενο Ω ονομάζεται βέβαιο γεγονός. Γίνεται εύκολα αντιληπτό, ότι για ένα ενδεχόμενο A του δειγματικού χώρου Ω ισχύει πάντα η σχέση:

$$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$$

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι η έννοια της *σ - άλγεβρας* είναι πολύ σημαντική καθότι αποτελεί το μαθηματικό εργαλείο μέσα από το οποίο δίνεται ο ορισμός της έννοιας του συμβάντος ή της συλλογής συμβάντων, την οποία και θα ορίσουμε ως εξής:

Θεωρούμε το σύνολο Ω και $\mathcal{F}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του Ω με τις παρακάτω ιδιότητες:

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii) Αν $A \in \mathcal{F}$ τότε και $A^c \equiv \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$

iii) Αν $A_1, A_2, \dots, \in \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Η πρώτη ιδιότητα υποδηλώνει ότι η οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του Ω περιλαμβάνει το κενό σύνολο, ενώ στη δεύτερη και τρίτη ιδιότητα υποδηλώνεται ότι η οικογένεια των υποσυνόλων $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα των υποσυνόλων του αλλά καθώς επίσης και ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις του αντιστοίχως. Τέλος, έχοντας ορίσει ως Ω το δειγματικό χώρο ορίζουμε ως σ-άλγεβρα την οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του Ω.

Παράδειγμα 2.1: Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{7,8,9\}$.

Τότε για το σύνολο:

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{8\}, \{7,9\}\}$$

μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιούνται οι τρείς συνθήκες του χώρου της πιθανότητας και επομένως θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως μία σ-άλγεβρα.

Εν συνεχεία, στο παράδειγμα που ακολουθεί θα διαπιστώσουμε το πώς ένα σύνολο $\mathcal{F}$ βάση κάποιου αρχικύ συνόλου Ω δημιουργεί μία σ-άλγεβρα, καθώε επίσης και πώς το ίδιο σύνολο έχοντας διαφορετική σύνθεση υποσυνόλων δεν αποτελεί μία σ-άλγεβρα.

<u>Παράδειγμα 2.2</u>: Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{5, 6, 7, 8\}$.

Τότε για το σύνολο:

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{5\}, \{6\}, \{5, 7, 8\}\}$$

μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δε πληρούνται οι τρεις συνθήκες και αυτό συνεπάγεται ότι δεν είναι μία σ-άλγεβρα παρόλο που περιέχει τα υποσύνολα $\{5\}$ και $\{6\}$ δεν περιέχει το $\{5, 6\}$.

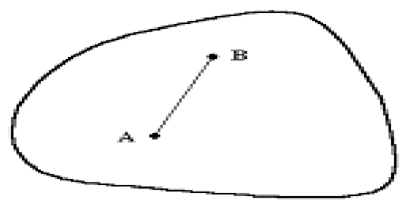
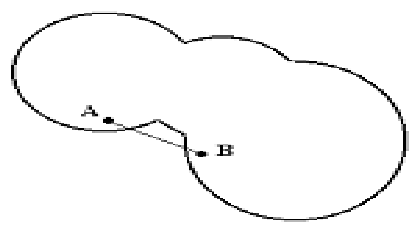
Αντίθετα όμως, το σύνολο:

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{5\}, \{6\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{5, 7, 8\}, \{6, 7, 8\}\}$$

αποτελεί σ-άλγεβρα αφού πληρούνται και τις τρείς προϋποθέσεις.

❖ Κυρτό Σύνολο

Ένα σύνολο ονομάζεται κυρτό στην περίπτωση που το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει δύο οποιαδήποτε στοιχεία του, ανήκει ολόκληρο μέσα στο σύνολο. Εναλλακτικά, στην περίπτωση που υπάρχουν ζεύγη σημείων των οποίων το ευθύγραμμο τμήμα δεν βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο σύνολο, τότε πρόκειται για μη κυρτό.

Σχηματική αναπαράσταση	
Κυρτό σύνολο	
Μη κυρτό σύνολο	

2.2 Κάτω φράγμα και Ανω φράγμα

Έστω το σύνολο Α το οποίο αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς ($A \subseteq \mathbb{R}$). Το σύνολο αυτό μπορεί να χαρακτηριστεί ως κάτω φραγμένο, αν υπάρχει ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο να ισχύει:

$$x \leq \alpha \ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \alpha\ \sigma\tau o\ A$$

όπου, ένας τέτοιος αριθμός x καλείται κάτω φράγμα για το Α. Επίσης, ένας αριθμός x αντιπροσωπεύει το μέγιστο κάτω φράγμα του Α, αν:

- Ο αριθμός x αντιπροσωπεύει το κάτω φράγμα του συνόλου Α
- Ο αριθμός y αντιπροσωπεύει το κάτω φράγμα του συνόλου Α, τότε $x \geq y$

Τέλος, το *μέγιστο κάτω φράγμα* του συνόλου Α ονομάζεται *infimum του A* και συμβολίζεται με: $infA$.

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε και την έννοια του άνω φράγματος.

Έστω το σύνολο Α το οποίο αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς ($A \subseteq \mathbb{R}$). Το σύνολο αυτό μπορεί να χαρακτηριστεί ως άνω φραγμένο, αν υπάρχει ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο να ισχύει:

$$x \geq \alpha \ \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ \alpha \ \sigma\tau o \ A$$

όπου, ένας τέτοιος αριθμός x καλείται άνω φράγμα για το Α και αριθμός x αντιπροσωπεύει το μέγιστο κάτω φράγμα του Α, αν:

- Ο αριθμός x αντιπροσωπεύει το άνω φράγμα του συνόλου Α
- Ο αριθμός y αντιπροσωπεύει το άνω φράγμα του συνόλου Α, τότε $x \leq y$

Τέλος, το *ελάχιστο άνω φράγμα* του συνόλου Α ονομάζεται *supremum του A* και συμβολίζεται με: $supA$.

Τέλος, στην περίπτωση που ένα σύνολο παρουσιάζει ελάχιστο άνω φράγμα, τότε αυτό είναι μοναδικό, διότι αν οι αριθμοί x, y αντιπροσωπεύουν ελάχιστα άνω φράγματα του συνόλου Α, τότε θα ισχύουν ταυτόχρονα:

- $x \leq y$: αφού ο αριθμός x είναι ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου A.
- $y \leq x$: αφού ο αριθμός y είναι ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου A.

Επομένως, ισχύει $x = y$, δηλαδή το ελάχιστο άνω φράγμα είναι μοναδικό.

Αντίστοιχα, ισχύει και η μοναδικότητα στην περίπτωση μέγιστου κάτω φράγματος.

<u>Παράδειγμα 2.2</u> Έστω το σύνολο $A = \{x: 1 \leq x \leq 2\}$. Το σύνολο Α είναι και άνω και κάτω φραγμένο. Συγκεκριμένα, το κάτω φράγμα είναι το 1 ενώ το άνω φράγμα είναι το 2.

<u>Παράδειγμα 2.3</u> Έστω το σύνολο $A = \{\chi \in \mathbb{Q}: 1 < x^2 < 2\}$. Ένα κάτω φράγμα του συνόλου Α είναι το 0 και ένα άνω φράγμα ο αριθμός 4.

<u>Παράδειγμα 2.4</u> Έστω το σύνολο $A = \{ 1/\nu : \nu \in \mathbb{N}^*\}$. Το σύνολο A είναι άνω και κάτω φραγμένο και ως κάτω φράγμα ορίζουμε το 0, ενώ ως άνω φράγμα είναι το 1, αφού ισχύει ότι: $0 < \frac{1}{\nu} \leq 1 , \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

Κεφάλαιο 3

Πρόβλημα Βελτιστοποίησης σε Στρατηγικές Ανοσοποίησης Πολλαπλών Υποχρεώσεων

3.1. Τοποθέτηση του Προβλήματος – Βασικοί Συμβολισμοί

Έστω ένα *ισορροπημένο χαρτοφυλάκιο,* δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου τα περιουσιακά στοιχεία έχουν το ίδιο βάρος και λαμβάνει χώρα στο *χρονικό διάστημα* [0,T], όπου:

- $\boldsymbol{t = 0}$: η *παρούσα χρονική στιγμή* (σήμερα)
- $\boldsymbol{H}$: αντιπροσωπεύει ένα *χρονικό επενδυτικό ορίζοντα (0 < H < T)*
- $\boldsymbol{T}$*:* ημερομηνία λήξεως του επενδυτικού ορίζοντα

Στο *χρονικό διάστημα* [0,T] περιλαμβάνονται *εισροές ομολόγων* χαρτοφυλακίου *οι οποίες:*

- συμβολίζονται με $\boldsymbol{A_t \geq 0}$
- πραγματοποιούνται σε προκαθορισμένες χρονικές στιγμές $t \leq T$, με σκοπό να καλύψουν τις πολλαπλές του υποχρεώσεις $\boldsymbol{L_t}$, κατά τις ημερομηνίες: $t \leq T$ $(0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_d = T)$.

<u>Παράδειγμα 3.1</u>*:* Μία ασφαλιστική εταιρία προκειμένου να αποπληρώσει τις τυχαίες υποχρεώσεις της επενδύει τα χρήματά της με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργήσει ένα ανοσοποιημένο χαρτοφυλάκιο ομολόγων.

Έστω $\mathcal{A}$: το σύνολο των *διαθέσιμων ομολόγων*. Πρόκειται για ένα αυθαίρετο υποσύνολο του συνόλου $[0,\infty)^d$, για το οποίο υποθέτουμε ότι:

- είναι ενδεχομένως *μη κυρτό* αφού η αγορά δεν είναι *πλήρης* και τα ομόλογα *απείρως διαιρέσιμα.* Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι είναι διαπραγματεύσιμα στην αγορά κι επομένως μπορούν να αγοραστούν.

- οι υποχρεώσεις είναι μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές.

- ορίζουμε τη σχέση $N_t = A_t - L_t$ που αντιπροσωπεύει την ***καθαρή χρηματοροή*** τη στιγμή t.

- ορίζουμε το ***στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο*** κατά το χρονικό διάστημα $[t,s]$ και συμβολίζεται με $f(t,s)$.

- Ισχύει ότι: επενδύοντας 1ν.μ σε ένα *ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου* τη στιγμή t, λαμβάνουμε τη στιγμή s, το ποσό των $e^{\int_t^s f(t,u)du}$ ν.μ.

- Το σύνολο των στιγμιαίων προθεσμιακών επιτοκίων $\{f(t,s) : 0 < t \leq s\}$ υποδηλώνει μια τυχαία διάθρωση των επιτοκίων, η οποία είναι ορισμένη ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Τη στιγμή $t = 0$, $s \to f(0,s)$ είναι ντετερμινιστικό, δηλαδή προκαθορισμένο.

Ως εκ τούτου, ορίζονται οι παρακάτω σχέσεις, των οποίων η κατανόηση είναι απαραίτητη για τη συνέχεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας και συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα, ως εξής:

Χρήσιμες Σχέσεις

- $\boldsymbol{\alpha_t = A_t\, e^{\int_t^H f(0,u)du}}$: είναι η αξία του A_t (εισροές) τη χρονική στιγμή H.
- $\boldsymbol{l_t = L_t\, e^{\int_t^H f(0,u)du}}$: είναι η αξία του L_t τη χρονική στιγμή H.
- $\boldsymbol{n_t = N_t\, e^{\int_t^H f(0,u)du} = (A_t - L_t)e^{\int_t^H f(0,u)du} = A_t\, e^{\int_t^H f(0,u)du} - L_t e^{\int_t^H f(0,u)du}} \Leftrightarrow$
  $\boldsymbol{n_t = \alpha_t - l_t}$**:** η καθαρή αξία τη χρονική στιγμή H.

- $\boldsymbol{\alpha_t = A_t\, e^{-\int_0^t f(0,u)du}}$: είναι η αξία του A_t για όλο τον επενδυτικό ορίζοντα.
- $\boldsymbol{l_t = L_t\, e^{-\int_0^t f(0,u)du}}$: είναι η αξία του L_t για όλο τον επενδυτικό ορίζοντα.
- $\boldsymbol{n_t = N_t\, e^{-\int_0^t f(0,u)du}}$: η καθαρή αξία για όλο τον επενδυτικό ορίζοντα.

- $\boldsymbol{A(t) = \sum_{s \le t} a_s}$: η μελλοντική αξία των περιουσιακών στοιχείων
- $\boldsymbol{L(t) = \sum_{s \le t} l_s}$: η μελλοντική αξία των υποχρεώσεων
- $\boldsymbol{N(t) = A(t) - L(t)}$: η καθαρή αξία των ροών των περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων του χαρτοφυλακίου.

- $\boldsymbol{V(0) = E[\sum_t n_t] = E\left[\int_0^T dN(t)\right] = \int_0^T d(E[N(t)]) = \left[E[N(t)]\right]_0^T} \Leftrightarrow$
  $\boldsymbol{V(0) = E[N(T)] - E[N(0)] \xLeftrightarrow{E[N(0)]=0}}$
- $\boldsymbol{V(0) = E[N(T)]}$: η μέση τιμή της η καθαρής αξίας τη χρονική στιγμή *H*, δεδομένου ότι τα *προθεσμιακά επιτόκια* ισούνται με τα μελλοντικά *spot επιτόκια* (δηλαδή το spot επιτόκιο κατά τη ληκτότητα (r_T) θα ισούται με το προθεσμιακό επιτόκιο που κλείσαμε στην αρχή της επένδυσης, για $t = 0$).

Είναι αναμφισβήτητο ότι η σύνθεση ενός επενδυτικού χαρτοφυλακίου ομολόγων παρουσιάζει πολλές δυσκολίες καθότι είναι αρκετά δύσκολο να αποφασιστεί το πως θα σχεδιαστούν οι ροές των ομολόγων (περιουσιακά στοιχεία), προκειμένου να καλύψουν τις ροές των υποχρεώσεων. Ένα κριτήριο, όμως, που θα μπορούσε να ληφθεί υπόψη σε τέτοιου είδους επενδυτικές κινήσεις είναι το εξής:

«Αν μεταξύ των διαθέσιμων ομολόγων η καθαρή χρηματορροή μηδενίζεται, δηλαδή $N_t = 0$*, για κάθε* t*, τότε το χαρτοφυλάκιο είναι ανοσοποιημένο, αφού οι υποχρεώσεις και τα περιουσιακά στοιχεία ισοσταθμίζονται».*

Όμως, στην πραγματικότητα, η αγορά δεν είναι πλήρης, γεγονός που αποκλείει την ιδανική προσαρμογή των περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων. Έτσι, η κατασκευή ενός επενδυτικού χαρτοφυλακίου ομολόγων από έναν επενδυτή, επηρεάζεται κυριότερα από τους ακόλουθους κινδύνους:

- ***Επιτοκιακός Κίνδυνος***: εμφανίζεται κατά την *τιμολόγηση των ομολόγων* πριν την ημερομηνία λήξεως.

- ***Κίνδυνος Επανεπένδυσης***: αφορά τον τρόπο επανεπένδυσης των κουπονιών που πληρώνονται πριν τη λήξη του επενδυτικού ορίζοντα.

Δεδομένου ότι η αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή H, εξαρτάται από τη στρατηγική επανεπένδυσης που θα ακολουθηθεί, απαιτείται να εφαρμοστεί μία στρατηγική η οποία θα αποσκοπεί στον περιορισμό ή την εξάλειψη του επενδυτικού κινδύνου και θα καθιστά το χαρτφυλάκιο ασφαλές. Αυτή είναι η λεγόμενη «*open-loop*» στρατηγική, η οποία παρουσιάζει τις εξής δύο επενδυτικές επιλογές:

Open loop στρατηγική

i) Αν $\boldsymbol{t} < \boldsymbol{H}$: τότε η τιμή του N_t τη στιγμή H ισούται με:

$$N_t\, e^{\int_t^H f(t,s)ds}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν: $N_t \ = A_t \ - L_t \ > 0$ για $0 \ < t < H$, ο επενδυτής:

- αγοράζει $(H - t)$ ετήσια *strip bonds*

Σε διαφορετική περίπτωση, ο επενδυτής:

- εφαρμόζει την τεχνική «*short selling*» σε $(H - t)$ ετήσια *strip bonds*.

ii) (b) Αν $\boldsymbol{t} > \boldsymbol{H}$: τότε η τιμή του N_t τη στιγμή H ισούται με:

$$N_t\, e^{-\int_H^t f(H,s)ds} = N_t \ e^{\int_t^H f(H,s)ds}$$

Αυτό σημαίνει ότι τη στιγμή H, το χαρτοφυλάκιο που έχει τιμολογηθεί με βάση τη *TSIR,* πουλήθηκε από τον επενδυτή.

Κατά συνέπεια, η **αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή H**, ισούται με:

$$\sum_t N_t e^{\int_t^H f(t\wedge H,s)ds} = \sum_t n_t e^{k(t)}$$

όπου:

- $k(t) = \int_t^H f(t \wedge H, s) - f(0,s)]ds$ (3.1)
  με $k(t)$ να αντιπροσωπεύει μία διαταραχή *(shock)* στο στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο

- $t \wedge H = \min\{t, H\}$

<u>*Απόδειξη*</u>: Ξεκινώντας από το 2ο μέλος και με χρήση της (3.1), λαμβάνουμε:

$$\sum_t n_t e^{k(t)} = \sum_t n_t e^{\int_t^H f(t\wedge H,s)-f(0,s)ds}$$

Όμως, $n_t = N_t e^{\int_t^H f(0,s)ds}$, επομένως η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\sum_t n_t\, e^{k(t)} = \sum_t N_t\, e^{\int_t^H f(0,s)ds}\, e^{\int_t^H f(t\wedge H,s)\,-\,f(0,s)ds} \Leftrightarrow$$

$$\sum_t n_t\, e^{k(t)} = \sum_t N_t\, e^{\int_t^H f(0,s)ds+\int_t^H f(t\wedge H,s)ds-\int_t^H f(0,s)ds} \Leftrightarrow$$

$$\sum_t N_t\, e^{\int_t^H f(t\wedge H,s)ds} = \sum_t n_t\, e^{k(t)}$$

Από τη σκοπιά του επενδυτή, η ***μέση τιμή του χαρτοφυλακίου*** του, τη στιγμή H, συμφωνα με τις υποθέσεις $(i), (ii)$ είναι:

$$V(k(t)) = \boldsymbol{E}[\int_0^T e^{k(t)} dN(t)] = \boldsymbol{E}[\int_0^T e^{\int_t^H f(t \wedge H, s) - f(0,s) ds} dN(t)] \tag{3.2}$$

Το *«κλασσικό πρόβλημα της ανοσοποίησης»* αποσκοπεί στην εύρεση ενός χαρτοφυλακίου για το οποίο να ισχύει:

$$V(k(t)) \geq V(k(0)) \text{ για κάθε } k \in \mathcal{K}$$

όπου:

- $\mathcal{K}$: το σύνολο που περιλαμβάνει όλες τις πιθανές διαταραχές του στιγμιαίου επιτοκίου (shocks).
- $V(0) = \boldsymbol{E}[\int_0^T dN(t)] = \boldsymbol{E}[N(T)]$
- $k(0) = 0$

Σκοπός μας είναι να βρούμε ένα *κατώτερο όριο,* δηλαδή ένα *μέγιστο κάτω φράγμα,* για τη μέση τιμή του χαρτοφυλακίου $V(k(t))$ το οποίο να εξαρτάται μόνο από τα δεδομένα του χαρτοφυλακίου ομολόγων, δηλαδή ψάχνουμε το:

$$inf_{k \in K} V(k(t))$$

3.2. Μοντέλα μέτρων κινδύνου πρώτης τάξης

Τα *μοντέλα μέτρων κινδύνου πρώτης τάξης* αφορούν την περίπτωση χαρτοφυλακίου *Μοναδικής – Υποχρέωσης,* εφαρμόζονται εύκολα και δημιουργήθηκαν με σκοπό τη διευκόλυνση των επενδυτών όσον αφορά τη δημιουργία ενός ανοσοποιημένου χαρτοφυλακίου. Θα παρουσιάσουμε αναλυτικά το *μέτρο ταμειακών ροών γραμμικής διασποράς (M-Absolute)* καθώς και το *Duration Gap.*

❖ Το μέτρο ταμειακών ροών γραμμικής διασποράς (M-Absolute)

Το μέτρο *ταμειακών ροών γραμμικής διασποράς* ή διαφορετικά το *M-Absolute,* όπως ορίστηκε από τους Nawalkha και Chambers (1996), είναι ένα μέτρο κινδύνου που εφαρμόζεται στη στρατηγική της ανοσοποίησης.

Σχεδιάστηκε με σκοπό τη δημιουργία ανοσοποιημένων χαρτοφυλακίων ομολόγων, στην περίπτωση *μοναδικής – υποχρέωσης*, και παρουσιάζεται ως εξής:

$$M_{NCh} = \frac{\int_0^T |t - H| \, A'(t) dt}{\int_0^T A'(t) \, dt}$$

όπου:
- $t = 0$: η *παρούσα χρονική στιγμή*
- H: ο επενδυτικός ορίζοντα (0 < H < T)
- $A(t)$: η μελλοντική αξία των περιουσιακών στοιχείων

Αντίστοιχα, στην περίπτωση των <u>*πολλαπλών – υποχρεώσεων*</u>, ορίζεται το *γενικευμένο M-Absolute μέτρο* από τους Nawalkha και Chambers ως εξής:

$$M = \int_0^T |A(t) - A(T) + E[L(T) - L(t)]|dt$$

<u>Λήμμα 3.1</u> Στην περίπτωση μίας μη-τυχαίας *μοναδικής – υποχρέωσης*, τη στιγμή H, κατά την οποία $N(T) = 0$, ισχύει $M = A(T)\, M_{NCh}$

<u>Απόδειξη:</u>

Αρχικά, ορίζουμε τη συμπεριφορά της υποχρέωσης μας, κατά τη διάρκεια του επενδυτικού ορίζοντα.

$$L(t) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ t < H \\ L, & \alpha\nu\ t \geq H \end{cases}$$

Ξεκινώντας από το *γενικευμένο M-Absolute μέτρο*, το οποίο αναφέρεται στην περίπτωση των πολλαπλών – υποχρεώσεων, θα το προσαρμόσουμε ανάλογα για την περίπτωση της μοναδικής υποχέωσης. Ετσι, λαμβάνουμε:

$$M = \int_0^T |A(t) - A(T) + E[L(T) - L(t)]|dt \Leftrightarrow$$

$$M = \int_0^T |A(t) - A(T) + E[L(T)] - E[L(t)]|dt$$

Στην περίπτωσή μας, όμως δεδομένης της μοναδικής υποχρέωσης, εύκολα προκύπτει ότι:

$$E[L(t)] = L(t) \text{ και } E[L(T)] = L(T)$$

Επίσης, έχουμε υποθέσει ότι $N(T) = 0$, όπου $N(T) = A(T) - L(T)$ και προκύπτουν τα εξής:

$$M = \int_0^T |A(t) - L(t)|dt = \int_0^T (t-H)'|A(t) - L(t)|dt \Leftrightarrow$$

$$M = \int_0^H (t-H)'|A(t) - L(t)|dt + \int_H^T (t-H)'|A(t) - L(t)|dt \xLeftrightarrow{L(t)=0,\ t<H}$$

$$M = \int_0^H (t-H)'A(t)dt + \int_0^T (t-H)'|A(t) - L(t)|dt \xLeftrightarrow{L(t)=L,\ t\geq H}$$

$$M = \int_0^H (t-H)'A(t)dt + \int_H^T (t-H)'[A(t) - L]dt \Leftrightarrow$$

$$M = [(t-H)A(t)]_0^H - \int_0^H (t-H)A'(t)\,dt + |(t-H)[A(t) - L|_H^T - \int_H^T (t-H)[A(t) - L]'dt \Leftrightarrow$$

$$M = HA(0) - \int_0^H (t-H)A'(t)\,dt + TA(T) - TL - HA(T) + HL - \int_H^T (t-H)A'(t)dt \Leftrightarrow$$

$$M = HA(0) + TN(T) - HN(T) - \int_0^T (t-H)A'(t)\,dt \xLeftrightarrow{N(T)=0}$$

$$M = HA(0) - \int_0^T (t-H)A'(t)\,dt$$

Όμως, η σχέση $A(t) = \sum_{s\leq t} a_s$ αντιπροσωπεύει τη μελλοντική αξία των περιουσιακών στοιχείων τη χρονική στιγμή t και αντίστοιχα για $t = 0$ προκύπτει ότι $A(0) = 0$. Ως εκ τούτου, λαμβάνουμε:

$$M = \int_0^T |t - H|A'(t)dt$$

Από την τελευταία είναι προφανές ότι $M = A(T)\, M_{NCh}$ ■

Στο σημείο αυτό, θα παρουσιάσουμε το χώρο διαταραχών *(shock)* στο στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο υπό τη προσέγγιση Nawalkha και Chambers (1996), ως εξής:

$$K_{NCh} = \left\{k(\cdot): k_1 \leq \left(\boldsymbol{E}[e^{k(t)}]\right)' \leq k_2 \; για \; κάθε \; t \in [0, T]\right\}$$

Όπου, k_1, k_2 να είναι αυθαίρετοι αριθμοί.

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $t \to \left(\boldsymbol{E}[e^{k(t)}]\right)'$ είναι συνεχής για κάθε $k(\cdot) \in K_{NCh}$, με τον τόνο αντιπροσωπεύει την παράγωγο ως προς t.

Στη συνέχεια της εργασίας θα ακολουθούμε την παρακάτω υπόθεση την οποία και θα συμβολίζουμε με $(*)$:

<u>Υπόθεση</u> <u>$(*)$</u> *: «Μία τυχαία μεταβλητή l_t, αναφέρεται σε μοναδική υποχρέωση, είναι ανεξάρτητη από την* καμπύλη της διάθρωσης των επιτοκίων (*TSIR), για κάθε* $t > 0$ *»*

<u>Πρόταση 3.1</u>: Ενα κάτω φράγμα που προκύπτει από τις αλλαγές που έχει υποστεί η *μέση τιμή του χαρτοφυλακίου* $V(k(t))$, τη στιγμή H, δίνεται από:

$$inf_{\kappa \in K_{NCh}}\{V(k(t)) - V(k(0))\} \geq -k_3 M$$

ή απλούστερα,

$$inf_{\kappa \in K_{NCh}}\{V(k) - V(0)\} \geq -k_3 M \tag{3.3}$$

Όπου, $k_3 = max(-k_1, k_2)$ και $M = \int_0^T |t - H| A'(t) dt$

<u>Απόδειξη:</u> λόγω της υπόθεσης (∗) λαμβάνουμε:

$$V(k) = \sum_t \boldsymbol{E}[n_t\, e^{k(t)}] = \boldsymbol{E}\left[\int_0^T e^{k(t)}\, dN(t)\right] \xLeftrightarrow{\alpha\nu\varepsilon\xi\alpha\rho\tau\eta\sigma\acute{\iota}\alpha}$$

$$V(k) = \int_0^T \boldsymbol{E}\,[e^{k(t)}]d\boldsymbol{E}[N(t)] \Leftrightarrow$$

$$V(k) = \left|\boldsymbol{E}[e^{k(t)}]\boldsymbol{E}[N(t)]\right|_0^T - \int_0^T (\boldsymbol{E}[\, e^{k(t)'}]\boldsymbol{E}[N(t)]dt \Leftrightarrow$$

$$V(k) = \boldsymbol{E}\big[e^{k(T)}\big]\boldsymbol{E}[N(T)] - \boldsymbol{E}[e^{k(0)}]\boldsymbol{E}[N(0)] - \int_0^T (\boldsymbol{E}[\, e^{k(t)}])'\boldsymbol{E}[N(t)]dt \xLeftrightarrow{N(0)=0}$$

$$V(k) = \boldsymbol{E}\big[e^{k(T)}\big]\boldsymbol{E}[N(T)] - \int_0^T (\boldsymbol{E}\,[e^{k(t)}])'\boldsymbol{E}[N(t)]dt \xLeftrightarrow{\pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \kappa\alpha\iota\ \alpha\varphi\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \tau o\ \boldsymbol{E}[N(T)]}$$

$$V(k) = \boldsymbol{E}\big[e^{k(T)}\big]\boldsymbol{E}[N(T)] + \boldsymbol{E}[N(T)] - \boldsymbol{E}[N(T)] - \int_0^T (\boldsymbol{E}\,[e^{k(t)}])'\boldsymbol{E}[N(t)]dt \Leftrightarrow$$

$$V(k) = \boldsymbol{E}[N(T)]\big[\,\boldsymbol{E}\big[e^{k(T)}\big] - 1 + 1\big] - \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{T}} (\boldsymbol{E}\,[e^{k(t)}])'\boldsymbol{E}[N(t)]dt \Leftrightarrow$$

$$V(k) = \boldsymbol{E}[N(T)]\left[\int_0^T (E\,[e^{k(t)}])'dt + 1\right] - \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{T}} (\boldsymbol{E}\,[e^{k(t)}])'\boldsymbol{E}[N(t)]dt \Leftrightarrow$$

$$V(k) = \int_0^T \boldsymbol{E}[N(T)](\boldsymbol{E}\,[e^{k(t)}])'dt + \boldsymbol{E}[N(T)] - \int_0^T (\boldsymbol{E}\,[e^{k(t)}])'\boldsymbol{E}[N(t)]dt \Leftrightarrow$$

$$V(k) = \int_0^T (\boldsymbol{E}[N(T)] - \boldsymbol{E}[N(t)])\big(\boldsymbol{E}\big[e^{k(t)}\big]\big)'dt + \boldsymbol{E}[N(T)]$$

Όμως, αφού $\boldsymbol{E}[N(T)] = V(0)$, προκύπτει:

$$V(k) = \int_0^T (\boldsymbol{E}[N(T)] - \boldsymbol{E}[N(t)])\big(\boldsymbol{E}[e^{k(t)}]\big)' dt + V(0) \Leftrightarrow$$

$$V(k) - V(0) = \int_0^T (\boldsymbol{E}[N(T)] - \boldsymbol{E}[N(t)])\big(\boldsymbol{E}[e^{k(t)}]\big)' dt \Leftrightarrow$$

$$V(k) - V(0) = -\int_0^T (\boldsymbol{E}[N(t)] - \boldsymbol{E}[N(T)])\big(\boldsymbol{E}[e^{k(t)}]\big)' dt$$

Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη το χώρο των επιτοκιακών διαταραχών που έχουμε ορίσει:

$$K_{NCh} = \left\{k(\cdot): k_1 \leq \big(\boldsymbol{E}\big[e^{k(t)}\big]\big)' \leq k_2 \text{ για κάθε } t \in [0,T]\right\} \text{ με } k_1, k_2 \text{: αυθαίρετοι αριθμοί}$$

και εύκολα συμπεραίνουμε ότι η $\big(\boldsymbol{E}\big[e^{k(t)}\big]\big)'$ φράσσεται από τους αριθμούς k_1, k_2. Όμως η ιδιότητα αυτή επεκτείνεται και φράσσεται αντίστοιχα και το ολοκλήρωμα της. Συνεπώς, προκύπτει:

$$inf_{\kappa \in K_{NCh}}\{V(k) - V(0)\} \geq -k_3 \int_0^T |\boldsymbol{E}[N(t)] - \boldsymbol{E}[N(T)]|\, dt = -k_3 M$$

και επομένως το ζητούμενο απεδείχθη. ∎

Ως συνέπεια της παραπάνω πρότασης λαμβάνουμε ακόλουθη *στρατηγική ανοσοποίησης* στην περίπτωση των <u>*πολλαπλών – υποχρεώσεων*</u> *(γενικευμένο M-Absolute):*

$$\min M_{(A_t)\epsilon A} = \min_{(A_t)\epsilon A} \int_0^T |A(T) - A(t) + \boldsymbol{E}[L(t) - L(T)]| dt$$

δηλαδή ζητάμε να ελαχιστοποιήσουμε το παραπάνω συναρτησοειδές.

<u>Παράδειγμα 3.2</u>: Υποθέτουμε ότι d - είδη ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου είναι διαθέσιμα στην αγορά, για τα οποία ορίζουμε τα εξής:

- $\boldsymbol{B_t}$: Η ονομαστική αξία του ομολόγου την ημερομηνία λήξης t, και
- $\boldsymbol{b_t} = \boldsymbol{B_t}\, \boldsymbol{e}^{\int_t^H \boldsymbol{f(0,u)du}}$: η τιμή της μεταβλητής B_t τη χρονική στιγμή Η
- $\boldsymbol{x_t}$: το ποσό των αγορασμένων τεμαχίων t –ετών ομολόγων (t - *year bond units)*

Έστω ότι ο επενδυτής δημιουργεί ένα ανοσοποιημένο χαρτοφυλάκιο ώστε να είναι ικανό να αποπληρώσει τις υποχρεώσεις L_t, υποθέτοντας ότι $\boldsymbol{E}[N(T)] = 0$.

Στην περίπτωση αυτή, το πρόβλημα της ανοσοποίησης μπορεί να επιλυθεί σύμφωνα με το ακόλουθο μοντέλο:

$$\min_{(x_t)} \int_0^T \left| \sum_{s \le t} x_s b_s - \boldsymbol{E}[L(t)] \right| dt \qquad (3.4)$$

υπό τη θεώρηση της:

$$\sum_t x_t b_t = \boldsymbol{E}[L(t)], \text{ όπου } x_t \ge 0, \text{ για κάθε } t.$$

<u>Παρατήρηση 3.1</u> Αν η ακολουθία (N_t) είναι μη-τυχαία, τότε κρίνεται απαραίτητο να υποθέσουμε ότι:

$$k_1 < 0 \text{ και } k_2 > 0$$

Έτσι, το κατώτερο όριο της σχέσης (3.3): $inf_{\kappa \in K_{NCh}}\{V(k) - V(0)\} \geq -k_3 M$ είναι αρνητικό και αυτί πρακτικά σημαίνει ότι μηδενίζεται η πιθανότητα να υφίστανται καταστάσεις βέβαιου κέρδους (*arbitrage)* στην αγορά.

Αναφέρουμε επίσης, ότι η πρόταση 3.1 ισχύει σύμφωνα με την υπόθεση (∗). *Από την άλλη μεριά* η περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από δικαώματα αγοράς / πώλησης επιτοκίου (*interest rates options)* ή άλλου είδους παράγωγων προϊόντων, των οποίων η αξία εξαρτάται από τη *TSIR,* η υπόθεση (∗) δεν ικανοποιείται. Παρόλα αυτά, παραλείποντας τη, λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$inf_{\kappa \in K_{NCh}^{mod}}\{V(k) - V(0)\} \geq -k_3 M$$

όπου:

- $K_{NCh}^{mod} = \left\{k(\cdot): k_1 \leq \left(e^{k(t)}\right)' \leq k_2 \; για \; κάθε \; t \in [0,T], \omega \in \Omega\right\}$ με $k_1, k_2 \in R$, και
- $M_{mod} = \boldsymbol{E}[\int_0^T |N(t) - N(T)|\, dt]$

❖ **Duration Gap ως μέτρο κινδύνου**

Όπως έχει προαναφερθεί, η *Διάρκεια* αποτελεί ένα από τα πιο χρήσιμα και διαδεδομένα μέτρα κινδύνου στο χώρο των επενδύσεων και εν προκειμένω στην περίπτωση των ομολόγων. Θα ορίσουμε, λοιπόν, τις *Διάρκειες* των ταμειακών ροών των περιουσιακών στοιχείων και των υποχρεώσεων που δίνονται από τις σχέσεις:

- $D_A = \int_0^T t\, dA(t) = \sum_t t\, a_t = \sum_t t\, A_t\, e^{-\int_0^t f(0,u)du}$
- $D_L = \int_0^T t\, dL(t) = \sum_t t\, l_t = \sum_t t\, L_t\, e^{-\int_0^t f(0,u)du}$

Επίσης η Διάρκεια της καθαρής αξίας, παρουσιάζεται ως εξής:

- $D_N = D_A - D_L = \int_0^T t\, dN(t) = \sum_t t\, n_t = \sum_t t\, N_t\, e^{-\int_0^t f(0,u)du}$

Εύκολα κανείς μπορεί να δείξει ότι:

- $D_A = A(T)\, D_A^{FW}$ (3.5)
- $D_L = L(T)\, D_L^{FW}$
- $D_N = D_A - D_L = A(T)\, D_A^{FW} - L(T)\, D_L^{FW} = N(T)\, D_N^{FW}$

όπου η *Fisher - Weill Διάρκεια* ενός χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων, είναι η:

$$D_A^{FW} = \frac{\sum_t tA_t\, e^{-\int_0^t f(0,s)ds}}{\sum_t A_t e^{-\int_0^t f(0,s)ds}}$$

Ας αποδείξουμε τη σχέση (3.2.2):

Γνωρίζουμε ότι $A(t) = \sum_{s \le t} a_s$ και αντίστοιχα προκύπτει ότι:

$$A(T)=\sum_{s\le T} a_s=\sum_{s\le T} A_s e^{\int_s^t f(0,s)ds}$$

Όμως, δεδομένου ότι $t \in [0,T]$, η παραπάνω σχέση τροποποιείται ως εξής:

$$A(T)=\sum_t a_t=\sum_t A_t e^{\int_t^0 f(0,s)ds}=\sum_t A_t e^{-\int_0^t f(0,s)ds}$$

Ως εκ τούτου, προκύπτει:

$$D_A=\sum_t A_t e^{-\int_0^t f(0,s)ds}\frac{\sum_t tA_t\, e^{-\int_0^t f(0,s)ds}}{\sum_t A_t e^{-\int_0^t f(0,s)ds}} \Leftrightarrow$$

$$D_A=\sum_t tA_t\, e^{-\int_0^t f(0,s)ds}$$

και επομένως το ζητούμενο απεδείχθη. ∎

Εν συνεχεία, σε αντίθεση με τους Nawalkha και Chambers οι Fong και Vasicek (1984) όρισαν τον χώρο των επιτοκιακών διαταραχών ως εξής:

$$K_{FV}=\left\{k(\cdot):\left(\boldsymbol{E}[e^{k(t)}]\right)' \le k_1\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ t\in[0,T]\right\},\qquad \text{όπου } k_1>0.$$

Μια κατάλληλη στρατηγική ανοσοποίησης θα πρέπει να καθιστά το χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων ικανό, τέτοιο ώστε, με βάση το χρονοδιάγραμμα των ταμειακών ροών, να καλύπτει τις υποχρεώσεις του. Υπάρχει, όμως, ένα ιδανικότερο σενάριο σύμφωνα με το οποίο όχι μόνο να υπάρχει ισορροποία μεταξύ περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων του χαρτοφυλακίου αλλά να υπάρχει και ένα είδος «αποθέματος», το οποίο εκφράζεται μέσω της σχέσης:

$$A(t) \geq L(t) + c(t), \text{για κάθε } t$$

όπου: $c(t)$: μη αρνητική συνάρτηση

Έτσι, κρίνεται σημαντική η ανοσοποίηση μεταξύ των χαρτοφυλακίων τα οποία ανήκουν στο σύνολο:

$$A_{\boldsymbol{E}}(c) = \{A(\cdot): A(t) \geq \boldsymbol{E}[N(T) + L(t)] + c(t), \text{για κάθε } t \in [0,T]\} \tag{3.6}$$

<u>Πρόταση 3.3</u> Για $A(\cdot) \in A_{\boldsymbol{E}}(c)$ και σύμφωνα με την υπόθεση $(*)$, ισχύει:

$$inf_{\kappa \in K_{FV}}\{V(k) - V(0)\} \geq k_1(D_A - \mathbf{E}[D_L])$$

<u>*Απόδειξη:*</u> Σύμφωνα με την ***πρόταση 3.2***, εύκολα προκύπτει ότι:

$$V(k) - V(0) = \int_0^T (\boldsymbol{E}[N(T)] - \boldsymbol{E}[N(t)])\left(\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]\right)'dt \xLeftrightarrow[\alpha\varphi\alpha\iota\rho\acute{\omega}]{\pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega \;\; \tau\eta\; c(t)(\boldsymbol{E}[e^{k(t)}])'}$$

$$V(k) - V(0) = \int_0^T (\boldsymbol{E}[N(T)] - \boldsymbol{E}[N(t)])\left(\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]\right)'dt + c(t)\left(\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]\right)' - c(t)\left(\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]\right)' \Leftrightarrow$$

$$V(k) - V(0) = \int_0^T \left(\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]\right)'[\boldsymbol{E}[N(T)] - \boldsymbol{E}[N(t)] + c(t)] - c(t)\left(\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]\right)' \Leftrightarrow$$

$$V(k)-V(0)=\int_0^T \left(\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]\right)'\left[\boldsymbol{E}[N(T)]-\boldsymbol{E}[N(t)]+c(t)\right]\,dt-\int_0^T c(t)\left(\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]\right)'\,dt$$

Όμως η ποσότητα $\left(\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]\right)'$ είναι θετική όπως την έχουμε ορίσει πιο πάνω, επομένως η σχέση φράσσεται ώς εξής:

$$V(k)-V(0)=\int_0^T (\boldsymbol{E}[N(T)]-\boldsymbol{E}[N(t)])\left(\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]\right)'dt+c(t)\left(\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]\right)'-c(t)\left(\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]\right)'\Leftrightarrow$$

$$\geq k_1\int_0^T \left(\boldsymbol{E}[N(T)]-\boldsymbol{E}[N(t)]+c(t)\right)dt-\int_0^T c(t)(\boldsymbol{E}[e^{k(t)}])'dt$$

$$\geq k_1\int_0^T \boldsymbol{E}[N(T)]-\boldsymbol{E}[N(t)]+c(t)-c(t)(\boldsymbol{E}[e^{k(t)}])'dt$$

$$\geq k_1\int_0^T (\boldsymbol{E}[N(T)]-\boldsymbol{E}[N(t)])+c(t)[1-\boldsymbol{E}\left[e^{k(t)}\right]]'dt$$

$$=k_1\,\boldsymbol{E}\left[\int_0^T \left(N(T)-N(t)\right)dt\right]+\int_0^T c(t)(k_1-(\boldsymbol{E}[e^{k(t)}])')dt$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες προκύπτει:

$$\boldsymbol{E}\left[\int_0^T \left(N(T)-N(t)\right)dt\right]=-\boldsymbol{E}\left[\int_0^T td\left(N(T)-N(t)\right)\right]=\boldsymbol{E}\left[\int_0^T td\,N(t)\right]=\boldsymbol{E}[D_A-D_L]=D_A-\boldsymbol{E}[D_L]$$

<u>Παράδειγμα 3.4</u> Έστω μία μη-τυχαία ακολουθία των υποχρεώσεων. Με τη βοήθεια της *Πρότασης 3.2* έχουμε:

$$inf_{\kappa\in K_{FV}}\{V(k)-V(0)\}\geq k_1(D_A-D_L) \tag{3.7}$$

Επειδή $A(\cdot)\in A_{\boldsymbol{E}}(0)$, τότε προκύπτει:

$$D_A-D_L=\int_0^T (N(T\,)\;-\;N(t))\,dt\;\leq\;0$$

Αυτό συνεπάγεται ότι το δεύτερο μέλος της ανισότητας ανισότητας (8): $inf_{\kappa\in K_{FV}}\{V(k)-V(0)\}\geq k_1(D_A-D_L)$ είναι αρνητικό, επομένως η περίπτωση βέβαιου κέρδους (*arbitrage)* αποκλείεται. Η στρατηγική της ανοσοποίησης αποσκοπεί στην εύρεση του χαρτοφυλακίου με το μικρότερο *duration gap.*

<u>Παρατήρηση 3.2</u> Το γενικευμένο μέτρο *M - Absolute* και το *duration gap* $D_A-\boldsymbol{E}[D_L]$ σχετίζεται με:

$$|D_A-\boldsymbol{E}[D_L]|\leq M$$

Αυτό σημαίνει ότι το χαρτοφυλάκιο του οποίου Μ ανοσοποιείται έχει μικρό *duration gap.*

<u>Απόδειξη:</u>

M – Absolute: $M=\int_0^T A(t)-A(T)+\boldsymbol{E}[L(T)-L(t)]dt=\int_0^T A(t)-A(T)dt+\int_0^T \boldsymbol{E}[L(T)-L(t)]dt$

Duration gap: $D_A-\boldsymbol{E}[D_L]=\boldsymbol{E}\left[\int_0^T\big(N(T)-N(t)\big)dt\right]=-\boldsymbol{E}\left[\int_0^T\big(N(t)-N(T)\big)dt\right]\Leftrightarrow$

$$D_A - \boldsymbol{E}[D_L] \ = \ -\boldsymbol{E}\left[\int_0^T A(t) - L(t) - A(T) + L(T)\, dt\right] \Leftrightarrow$$

$$D_A - \boldsymbol{E}[D_L] = \ -\boldsymbol{E}\left[\int_0^T A(t) - A(T)\, dt\right] - \boldsymbol{E}\left[\int_0^T L(T) - L(t)\, dt\right]$$

Δηλαδή, λαμβάνουμε ότι:

M – Absolute: $M = \int_0^T A(t) - A(T) dt + \int_0^T \boldsymbol{E}[L(T) - L(t)] dt$

Duration gap: $D_A - \boldsymbol{E}[D_L] = \ -\boldsymbol{E}\left[\int_0^T A(t) - A(T)\, dt\right] - \boldsymbol{E}\left[\int_0^T L(T) - L(t)\, dt\right]$

Από τις σχέσεις των δύο μέτρων που προέκυψαν, καταλήγουμε στην ακόλουθη ανοσότητα:

$$\left|-\boldsymbol{E}\left[\int_0^T A(t) - A(T)\, dt\right] - \ \boldsymbol{E}\left[\int_0^T L(T) - L(t)\, dt\right]\right| \leq \int_0^T A(t) - A(T) dt + \int_0^T \boldsymbol{E}[L(T) - L(t)] dt$$

και επομένως το ζητούμενο απεδείχθη. ■

Έστω το σύνολο:

$$A(c) = \{A(\cdot): A(t) \geq N(T) + \ L(t) + \ c(t), για\ κάθε\ t \in [0, T], \omega \in \Omega\}.$$

Απορρίπτοντας την υπόθεση (∗) που έχουμε προαναφέρει κατά την οποία:

«Μία τυχαία μεταβλητή l_t*, αναφέρεται σε μοναδική υποχρέωση, είναι ανεξάρτητη από την* καμπύλη της διάθρωσης των επιτοκίων (*TSIR*) *, για κάθε* $t > 0$*»,*

καταλήγουμε στην τελευταία πρόταση.

Πρόταση 3.3 Αν $A(\cdot) \in A(c)$, τότε:

$$inf_{k \in K_0}\{ V(k) - V(0)\} \geq k_1(D_A - \boldsymbol{E}D_L)$$

Όπου,
- $K_0 = \{k(\cdot): sup_{\, t \in [0,T]} \left(e^{k(t)}\right)' \leq k_1, για\ κάθε\ ω \in Ω \}$
- k_1: πραγματικός αριθμός

Στο σημείο αυτό, προκειμένου να ολοκληρωθεί η παρουσίαση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα παρουσιάσουμε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα.

3.4 Συμπεράσματα

Η παραδοσιακή προσέγγιση του προβλήματος της ανοσοποίησης αποσκοπεί στη διάθρωση ενός χαρτοφυλακίου, για το οποίο θα ισχύει:

$$V(k) \geq V(0) \text{ για κάθε } \kappa \epsilon K$$

όπου:
- K αντιπροσωπεύει τον πιθανό χώρο των επιτοκιακών διαταραχών.
- $V(k) = E[\int_0^T e^{\,(t)}\, dN(t)]$: *μέση τιμή του χαρτοφυλακίου* του, τη στιγμή H

Δυστυχώς όμως, αυτή η προσέγγιση προϋποθέτει καταστάσεις βέβαιου κέρδους (arbitrage), αφού σε ολές τις προσεγγίσεις μας υποθέταμε ότι οι υποχρεώσεις ήταν ανεξάρτητες από την καμπύλη διάθρωσης των επιτοκίων (TSIR), οι οποίες αντιστρατεύονται τους κανόνες της σύγχρονης χρηματοοικονομικής θεωρίας.

Ένας τρόπος, όμως, που θα μπορούσε να παραβλέψει την υπόθεση βέβαιου κέρδους (arbitrage) είναι να προσεγγιστεί η στρατηγική της ανοσοποίησης ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης (βλέπε Bierwag και Khang, 1979) η οποία εγγυάται τη δημιουργία ενός ιδανικού ή και βέλτιστου χαρτοφυλακίου. Παρ' όλα αυτά, τα κριτήρια επιλογής ως προς τη διάθρωση του χαρτοφυλακίου είναι πολύπλοκα αφού παρουσιάζονται πολλές δυσκολίες δεδομένου ότι η αγορά δεν είναι πλήρης.

Έτσι, οι Fong και Vasicek (1984) προτείνουν την εύρεση ενός κατώτερου ορίου, δηλαδή ένα κάτω φράγμα της μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου το οποίο λειτουργεί ως στρατηγική έλεγχου του κινδύνου. Ως εκ τούτου, ακολουθούμε την προσέγγισή τους μεγιστοποιώντας τα κατώτερα όρια της μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου, υποθέτοντας την περίπτωση των πολλαπλών υποχρεώσεων καθώς επίσης και των επιτοκιακών διαταραχών που λαμβάνουν χώρα στην TSIR (σε διακριτό χρόνο).

Γι' αυτή την προσέγγιση απαιτούνται νέες στρατηγικές ανοσοποίησης οι οποίες συνίστανται στα μέτρα κινδύνου πρώτης τάξης υπό την open loop στρατηγική. Τέλος, εν συντομία παρουσιάζουμε το πρόβλημα της ανοσοποίησης στην περίπτωση που η open loop στρατηγική διαφοροποιείται.

Βιβλιογραφία

1. Balbás, A. and Ibáñez, A. (1998) When can you immunize a bond portfolio? *Journal of Banking & Finance* 22, 1571-1594.
2. Balbás, A., Ibáñez, A. and López, S. (2002) Dispersion measures as immunization risk measures. *Journal of Banking & Finance* 26, 1229-1244.
3. Bierwag, G.O. and Khang, C. (1979) An immunization strategy is a min-max strategy. *Journal of Banking & Finance* 34, 389-414.
4. Fisher, L. and Weil, R.L. (1971) Coping with risk of interest rate fluctuations: returns to bondholders from naive and optimal strategies. *Journal of Bussiness 44*, 408-431.
5. Fong, H.G. and Vasicek, O.A. (1984) A risk minimizing strategy for portfolio immunization. *Journal of Finance* 39, 1541-1546.
6. Frank J. and Fabozzi, T. Dessa Fabozzi (1989) Bond Markets, Analysis and Strategies.
7. Gajek, L. (2005) Axiom of solvency and portfolio immunization under random interest rates. *Insurance Mathematics and Economics* 36, 317-328.
8. Ghezzi L.L. (1997) Immunization and maximin optimal control. *Journal of Optimization Theory & Applications* 95, 701-711.
9. Ghezzi L.L. (1999) A maximin policy for bond management. *European Journal of Operational Research* 114, 389-394.
10. Ghezzi L.L. (2000) Bond management and man-mix optimal control. *Applied Mathematics & Computation* 112, 33-40.
11. Hürlimann, W, (2002) On immunization, stop – loss order and the maximum Shiu measure. *Insurance Mathematics and Economics* 31, 315-325.
12. Kaluszka, M. and Kondratiuk-Janyska, A. (2004a) On duration-dspersion strategies fpr portfolio immunization. *Acta Universitatis Lidziensis. Folia Economica* 177, 191-202.
13. Kaluszka, M. and Kondratiuk-Janyska, A. (2004b) On risk minimizing strategies for default-free bond portfolio immunization. *Applicationes Mathematicae* 31, 259-272.

14. Kondratiuk-Janyska, A. and Kaluszka, M. (2005) Bond portfolio immunization in arbitrage free models. To appear in *Acta Universitatis Lidziensis. Folia Oeconomica.*

15. Nawalkha, S.K. and Chambers, D.R. (1996) An improved immunization strategy: M-Absolute. Financial Analysts Journal 52, 69-76.

16. Nawalkha, S.K., Soto, G.M. and Zhang, J. (2003) Generilizes M-vectoe models for hedging interest rate risk. *Journal of Banking & Finance* 27, 1581-1604.

17. Panjer, H.H. (Editor, 1998) *Financial Economics with Applications to Investment, Insurance & Pensions*. The Actuarial Foundation, Schaumburg IL.

18. Redington, F.M. (1952) Review of the principle of life-office valuation. *Journal of the Institute of Actuaries* 18, 286-340.

19. Rzadkowski, G, and Zaremba, L.S. (2000) New formulas for immunizing durations. *Journal for Derivatives*, 28-36.

20. Sahn N.Neftci (2002) An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives,1-12

21. Samuel A.Broverman (2010) Mathematics of Investment and Credit, 5th Edition (ACTEX Academic Series)

22. Samuelson, P.A. (1945) The effects of interest rates on the banking system. *American Economic Review* 35, 16-27.

23. Zaremba, L.S. (1988) Construction of a k-immunization strategy with the highest convexity. Control and Cybernetics 27, 135-144.

24. Zaremba, L.S. and Smolenski, W. (2000a) Optimal portfolio choice under a liability constraint. *Annals of Operations Research* 97,131-141.

25. Zaremba, L.S. and Smolenski, W. (2000b) How to find a bond portfolio with the highest convexity in a class of fixed duration portfolios. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Texhnical Sciences* 48, 279-286.

26. Ανθρωπέλος Μ.(2013), Τιμολόγηση Ασφαλίστρων και Διαχείριση Περιουσιακών Στοιχείων και Υποχρεώσεων, 5-19.

27. Γκλεζάκος Μ. (2012) Θεωρία Επενδύσεων Και Διοίκηση Χαρτοφυλακίου, 90-93

28. Γκλεζάκος Μ. (2013) Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα, 17-28.

29. Ευγενίδης Α. και Συριόπουλος Κ. (2012) Θεωρία Ομολόγων, 1-19
30. Λέτσιος Ι. (2009) Από Κοινού Διαχείριση Περιουσιακών Στοιχείων και Υποχρεώσεων Επαγγελματικών Ταμείων Με Τη Χρήση Μεθόδων Ανοσοποίησης, 46 – 52.
31. Πουφινάς Θ. (2004) Επενδύσεις, Καμπύλη Επιτοκίων, 20-22.
32. Σεβρόγλου Β. (2012) Σημειώσεις Εξαμηνιαίου Μαθήματος στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά.
33. Σπύρου Ι. (2003) Αγορές Χρήματος και κεφαλαίου, 26-32.
34. ebooks.edu.gr,http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C117/130/944,3461
35. Wikipedia,http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9A%CF%85%CF%81%CF%84%CF%8C_%CF%83%CF%8D%CE%BD%CE%BF%CE%BB%CE%BF