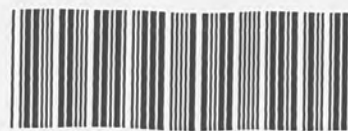


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ  
 ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ  
 ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

53 +

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ  
 ΕΤΑΙΡΕΙΩΝ ΠΑΡΟΧΗΣ ΥΠΗΡΕΣΙΩΝ  
 ΜΕ  
 ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ	
ΑΡ. ΕΙΣ.	36379
COMP.	21020 ω 22558
ΤΑΞΙΝ	346.07 ΔΗ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ	



00136379

Διδακτορική Διατριβή  
 του  
 Γιώργου Α. Δήμα, M.Sc.  
 Μαθηματικού - Στατιστικολόγου

Πειραιάς, Απρίλιος 2000

Στην Βάσω, τον Ανδρόνικο, την Αυγή

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον Καθηγητή κ.Νίκο Μπλέσιο για την υποστήριξη και την καθοδήγηση που μου έδωσε κατά την διάρκεια εκπόνησης της διατριβής.

Ευχαριστώ ακόμη τα υπόλοιπα μέλη της Τριμελούς Επιτροπής Καθηγητή κ.Κώστα Παππή και Αναπλ. Καθηγήτρια κα. Στέλλα Σοφianoπούλου για το ενδιαφέρον που εκδήλωσαν.

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή	1
Στόχοι και συνεισφορά στην έρευνα	5
Θεματολογία	6

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

#### **Μέθοδοι Αξιολόγησης Εταιρειών**

##### **Παροχής Υπηρεσιών**

1.1. Εισαγωγή	7
1.2. Ανάλυση με χρηματοοικονομικούς δείκτες	8
1.3. Ανάλυση συνόρου αποδοτικότητας	12
1.3.1. Παραμετρική ανάλυση	13
1.3.2. Μη Παραμετρική ανάλυση	15

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

#### **Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων**

2.1. Εισαγωγή	21
2.1.1. Σύνολα δυνατοτήτων παραγωγής	22
2.2. Μοντέλα περιβάλλουσας ανάλυσης δεδομένων- Μοντέλο CCR	39
2.2.1. Ερμηνεία μοντέλου CCR	45
2.2.2. Υποσύνολα αναφοράς	50
2.2.3. Στόχοι βελτίωσης	51
2.3. Μοντέλο BCC	55



2.3.1. Ερμηνεία μοντέλου BCC	60
Παράρτημα 2Α	66
Παράρτημα 2Β	70

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

#### **Εναλλακτικά Μοντέλα – Φραγμένα Μοντέλα**

3.1. Εναλλακτικά μοντέλα – Εισαγωγή	71
3.1.1. Προσθετικό μοντέλο	71
3.1.2. Επαυξημένο προσθετικό μοντέλο	77
3.1.3. Πολλαπλασιαστικό μοντέλο	78
3.1.4. Μοντέλα με εξωγενείς και κατηγορικές μεταβλητές	80
3.1.5. Μοντέλο με περιορισμούς πιθανοτήτων	83
3.1.6. Ανάλυση αποδοτικότητας κατά παράθυρο	84
3.1.7. Μέτρο αποδοτικότητας TDT	86
3.2. Περιορισμοί στους συντελεστές βαρύτητας	87
3.2.1. Χρήση απόλυτων φραγμάτων και διατύπωση νέων φραγμάτων	89
3.2.2. Εναλλακτικοί μέθοδοι περιορισμού των Συντελεστών βαρύτητας	96

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Εφαρμογή Αξιολόγηση των Γραφείων Παραγωγής Ασφαλιστικής Εταιρείας

4.1. Εισαγωγή	100
4.2. Γραφεία παραγωγής	102
4.2.1. Αξιολόγηση των γραφείων παραγωγής με τη χρήση δεικτών	103
4.3. Καθορισμός εισροών – εκροών και σεναρίων αποδοτικότητας	105
4.4. Αποτελέσματα	109
4.4.1. Στόχοι βελτίωσης	115
4.4.2. Αποδόσεις οικονομιών κλίμακας	117
4.4.3. Κερδοφορία και αποδοτικότητα	120
4.5. Χρήση φραγμένων μοντέλων	121
Παράρτημα 4Α	

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Συμπεράσματα και Προτάσεις για Επέκταση της Έρευνας

135

### Βιβλιογραφία

Ξένη Βιβλιογραφία	140
Ελληνική Βιβλιογραφία	144
Γλωσσάρι	155



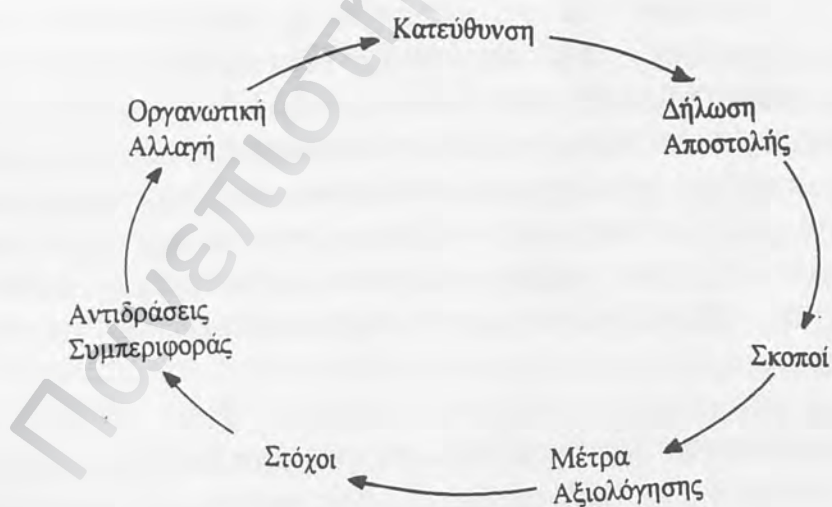
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο χώρος των υπηρεσιών έχει αναπτυχθεί σημαντικά τις τελευταίες δεκαετίες, όπως προκύπτει από επίσημες στατιστικές έρευνες. Στην Ενωμένη Ευρώπη πάνω από 60% των εργαζομένων απασχολείται στους χώρους των υπηρεσιών ενώ για τις ΗΠΑ το ποσοστό αυτό είναι 76% από επίσημα στοιχεία του 1992 (Fifzsimmons, 1994). Μεταγενέστερες εκτιμήσεις υποδεικνύουν για την Ευρώπη και τις ΗΠΑ μεγαλύτερα ποσοστά. Στον Ελληνικό χώρο το αντίστοιχο ποσοστό ήταν 56% (Ενημέρωση, Ιανουάριος 1997) για το 1995.

Καθώς η οικονομία των ανεπτυγμένων χωρών επεκτείνεται σημαντικά στον χώρο των υπηρεσιών, μεγάλο ενδιαφέρον και προσοχή εστιάζονται στην αξιολόγηση των εταιρειών αυτού του χώρου.

Η αυξανόμενη και άριστη χρήση των μέτρων αξιολόγησης, μπορεί να οδηγήσει μια εταιρεία σε επιθυμητά επίπεδα στρατηγικής ανάπτυξης. Η επιρροή των μέτρων αξιολόγησης στη στρατηγική ανάπτυξης παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα (Dyson, O'Brien, 1998) :



Σχήμα 1

Από τα ανωτέρω διαφαίνεται ο καθοριστικός ρόλος των μέτρων αξιολόγησης για μια αποτελεσματική διαδικασία λήψης στρατηγικών αποφάσεων. Εξάλλου, η ουσία της στρατηγικής διοίκησης εστιάζεται στην αποδοτική χρήση των κεφαλαίων μιας εταιρείας (Hunger, Wheelen, 1996), παραπέμποντας στον ορισμό των διαδικασιών ελέγχου. Ο Antony (1965) ορίζει τη συνάρτηση ελέγχου σαν “την διαδικασία κατά την οποία η διοίκηση διασφαλίζει ότι οι πόροι διατίθενται και χρησιμοποιούνται αποτελεσματικά και αποδοτικά στην επίτευξη των στόχων της εταιρείας”. Έτσι, η έμφαση στον στρατηγικό σχεδιασμό και τον έλεγχο δίδεται στην αποδοτική χρησιμοποίηση των πόρων (Banker, 1985). Απαραίτητη, επομένως, προϋπόθεση για την βιωσιμότητα και την ανταγωνιστική παραμονή μιας εταιρείας στο σημερινό μεταβαλλόμενο περιβάλλον είναι η βελτίωση της αποδοτικότητας των λειτουργιών της.

Για την βελτίωση της αποδοτικότητας, η διοίκηση οφείλει να προσδιορίσει μια διαδικασία αξιολόγησης της σχετικής θέσης της εταιρείας. Προκύπτει συνεπώς η ανάγκη παραγωγής δεικτών αξιολόγησης, οι οποίοι αποτυπώνουν την πραγματική αλλά και την δυνητική συμπεριφορά της εταιρείας σε σχέση με το περιβάλλον της. Ο Fortuin (1988) ορίζει ότι “ο δείκτης αξιολόγησης είναι μια μεταβλητή που υποδεικνύει την αποτελεσματικότητα και / ή την αποδοτικότητα μέρους ή του συνόλου μιας διαδικασίας ή συστήματος έναντι κάποιου ορίου, στόχου ή σχεδίου”. Το ερώτημα που ανακύπτει είναι : “Ποια θα πρέπει να είναι τα κριτήρια για να εκτιμηθεί η συμπεριφορά μιας εταιρείας ή ενός οργανισμού;”. Ο Campbell (1977) αναφερόμενος στην βιβλιογραφία της επιχειρησιακής αποτελεσματικότητας υποδεικνύει ότι “μέτρα επιχειρησιακής αποτελεσματικότητας θα πρέπει να αναπτυχθούν έτσι ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη σύγκριση επιχειρήσεων, την αξιολόγηση προσπαθειών ανάπτυξης και τον προσδιορισμό εκείνων των χαρακτηριστικών που είναι άμεσα συνδεδεμένα με την επιχειρησιακή αποτελεσματικότητα ως βασικό άξονα”.

Παρουσιάζει, έτσι, διάφορα κριτήρια που είχαν χρησιμοποιηθεί στην βιβλιογραφία τα οποία είναι “όλες οι μεταβλητές που έχουν προταθεί σοβαρά σαν δείκτες επιχειρησιακής αποτελεσματικότητας” (π.χ. αποδοτικότητα, ποιότητα, κέρδος, έλεγχος, ανάπτυξη, συμφωνία στόχων, κ.α.).

Οι Lewin και Minton (1986) ορίζουν μια “ερευνητική στρατηγική” για την εκτίμηση της επιχειρησιακής αποτελεσματικότητας. Κατά την γνώμη τους, “θα ήταν επιθυμητό να έχουμε μια μαθηματική σχέση (με θεωρητική υποδομή) για την εκτίμηση της σχετικής αποτελεσματικότητας ενός οργανισμού (διαχρονικά ή συγκριτικά), η οποία θα ήταν :

- 1) ικανή να προσδιορίζει αναλυτικά τους σχετικά περισσότερο αποτελεσματικούς οργανισμούς σε σύγκριση με τους σχετικά λιγότερο αποτελεσματικούς οργανισμούς.
- 2) ικανή να παράγει ένα μέτρο σχετικής αποτελεσματικότητας σε όρους χρησιμοποίησης των πόρων και περιβαλλοντολογικών παραγόντων προκειμένου να επιτευχθούν επιθυμητά αποτελέσματα.
- 3) ικανή να χειρισθεί δυσανάλογες, πολλαπλές εκροές (αποτελέσματα), πολλαπλές εισροές (πόρους) και πολλαπλούς παράγοντες του περιβάλλοντος, που δεν εξαρτώνται από προκαθορισμένες τιμές και συντελεστές βαρύτητας.
- 4) ικανή να χειρισθεί ποιοτικούς παράγοντες όπως βαθμούς ανταγωνισμού, ικανοποίηση συμμετέχοντος κλπ.
- 5) ικανή να παρέχει πληροφορίες σχετικά με τους παράγοντες που συνεισφέρουν στους βαθμούς σχετικής αποτελεσματικότητας.
- 6) ικανή να διατηρεί αξιοπιστία και ακρίβεια κατά την αξιολόγηση.

Μια τέτοια μαθηματική σχέση είναι αρκετά συναφής με τη μέθοδο της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων (ΠΑΔ). Ο αντίστοιχος Αγγλικός όρος είναι Data Envelopment Analysis (DEA). Η ΠΑΔ είναι μέθοδος γραμμικού προγραμματισμού, η οποία εκτιμά τη σχετική αποδοτικότητα σε ένα σύνολο παραγωγικών μονάδων που χρησιμοποιούν ίδιες πολλαπλές εισροές και παράγουν ίδιες πολλαπλές εκροές. Ως εκροές θεωρούνται οι υπηρεσίες που παρέχονται από τις μονάδες. Ως εισροές θεωρούνται καταρχήν οι πόροι που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή των εκροών, καθώς και παράγοντες του περιβάλλοντος που επιδρούν στις εκροές. Η ΠΑΔ πρωτοπαρουσιάστηκε από τους Charnes, Cooper και Rhodes (1978) και από τότε βρήκε μεγάλη απήχηση και εφαρμογή στον χώρο των υπηρεσιών. Η έννοια της αποδοτικότητας, όπως ορίζεται στις φυσικές επιστήμες, είναι το πηλίκον του έργου που παράγεται από μια μηχανή προς την ενέργεια που καταναλώνεται στη διαδικασία παραγωγής. Δεδομένου ότι οι μηχανές λειτουργούν σύμφωνα με τον νόμο της διατήρησης της ενέργειας, η αποδοτικότητα είναι πάντοτε μικρότερη ή ίση του 1.

Σύμφωνα με την ΠΑΔ, η σχετική αποδοτικότητα για οποιαδήποτε μονάδα υπολογίζεται σχηματίζοντας τον λόγο του σταθμισμένου άθροισματος των εκροών προς το σταθμισμένο άθροισμα των εισροών. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου, μονάδες που επιτυγχάνουν λόγο αποδοτικότητας ίσον με 1 χαρακτηρίζονται ως σχετικά αποδοτικές, ενώ μονάδες με λόγο μικρότερο του 1 θεωρούνται μη αποδοτικές. Η μέθοδος, εκτός των χαρακτηριστικών των Lewin και Minton, παρουσιάζει επιπρόσθετα τα ακόλουθα δύο σημαντικά χαρακτηριστικά :

- (i) η ΠΑΔ αξιολογεί την αποδοτικότητα ενός συνόλου παραγωγικών μονάδων, για τις οποίες δεν υπάρχει σαφής γνώση των σχέσεων εισροών-εκροών δηλαδή κάποιας συνάρτησης παραγωγής.
- (ii) Οι βαθμοί αποδοτικότητας που προκύπτουν από την ΠΑΔ, είναι ανεξάρτητοι των μονάδων μέτρησης των δεδομένων.

Το χαρακτηριστικό (i), η χρήση πολλαπλών εισροών και εκροών καθώς και η εφαρμογή του γραμμικού προγραμματισμού διαφοροποιεί και διακρίνει την ΠΑΔ από τις παραδοσιακές μεθόδους αξιολόγησης όπως είναι οι οικονομετρικές μέθοδοι και οι χρηματοοικονομικοί δείκτες αντίστοιχα. Τούτο δε οφείλεται στο γεγονός ότι οι οικονομετρικές μέθοδοι υποθέτουν συναρτησιακή σχέση των εισροών και εκροών, ενώ οι χρηματοοικονομικοί δείκτες χρησιμοποιούν συνήθως μια εκροή και μια εισροή. Εξάλλου, η αξιολόγηση της αποδοτικότητας στον χώρο των υπηρεσιών παρουσιάζει προβλήματα στη μέτρηση των εισροών, και εκροών τα οποία οφείλονται κυρίως στον άυλο χαρακτήρα των υπηρεσιών (McLaughlin, Cottey, 1990).

Οι προαναφερθέντες λόγοι, καθώς και οι σοβαρές δυσκολίες που παρουσιάζει ο χώρος των υπηρεσιών στον σαφή προσδιορισμό της φύσης της τεχνολογίας παραγωγής, υποδεικνύουν την καταλληλότητα της ΠΑΔ ως μεθόδου μέτρησης της αποδοτικότητας στον χώρο των υπηρεσιών.

Πρωταρχικός στόχος της παρούσας διατριβής είναι να ενοποιήσει και να επεκτείνει τη μέτρηση της αποδοτικότητας, κάτω από την θεώρηση της ΠΑΔ. Η διατριβή εστιάζεται στην τεχνητή αποδοτικότητα, όπου οι τιμές υποτίθεται είτε ότι δεν υπάρχουν είτε ότι δεν είναι σχετικές. Η συνεισφορά της διατριβής στο ερευνητικό πεδίο καταγράφεται από τα ακόλουθα:

- 1) Παρουσιάζει μια ολοκληρωμένη θεώρηση των συνόλων δυνατοτήτων παραγωγής (production possibilities sets). Βασισμένη σε ένα ολοκληρωμένο αξιωματικό πλαίσιο παραδοχών, η διατριβή υποδεικνύει τρόπους σύνθεσης των συνόλων δυνατοτήτων παραγωγής και, κατ'επέκταση, των αντίστοιχων μέτρων αποδοτικότητας. Αναλύει διεξοδικά την δομή του συνόρου αποδοτικότητας και προτείνει συνθήκες ικανές προκειμένου μια μονάδα να είναι αποδοτική.
- 2) Περιορίζει τους συντελεστές βαρύτητας των συμβατικών μοντέλων κάτω από νέες μορφές φραγμάτων. Υποδεικνύει, μέσω παραδειγμάτων, ότι τα προτεινόμενα μοντέλα παρουσιάζουν καλύτερη συμπεριφορά από εκείνα της βιβλιογραφίας. Διευρύνει, κατ'αυτόν τον τρόπο, την εκτίμηση των βαθμών αποδοτικότητας, ελλείπει εκ των προτέρων πληροφοριών στις εισροές και εκροές.
- 3) Εφαρμόζει τα συμβατικά και τα νέα μοντέλα στην πράξη (πρώτη εφαρμογή της μεθόδου στον Ασφαλιστικό κλάδο στην Ελλάδα). Ελέγχει, κατά την εφαρμογή, την Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων με άλλες στατιστικές μεθόδους αξιολόγησης και υποδεικνύει την μεγαλύτερη αξιοπιστία που εμφανίζουν τα νέα μοντέλα έναντι των συμβατικών.
- 4) Στην βιβλιογραφία έχουν καταγραφεί περισσότερα από 700 άρθρα, σχετικά με την ΠΑΔ (Seiford, 1996). Εκτιμάται ότι, στην τρέχουσα χρονική περίοδο, ο αριθμός των άρθρων ενδέχεται να είναι διπλάσιος. Η διατριβή παρουσιάζει μια ενοποιημένη θεώρηση της μεθόδου με την έννοια της ολοκληρωμένης ανάλυσης και παρουσίασης της ΠΑΔ, καθώς και των σημαντικότερων εναλλακτικών μοντέλων που την διέπουν.

Η διατριβή είναι οργανωμένη ως εξής :

Στο κεφάλαιο I παρουσιάζονται εναλλακτικές μέθοδοι αξιολόγησης των εταιρειών του χώρου των υπηρεσιών. Καταγράφονται τα μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα των μεθόδων και παρουσιάζεται μια συγκριτική εφαρμογή τους. Υποδεικνύονται οι αδυναμίες που ανακύπτουν στην αξιολόγηση του χώρου των υπηρεσιών και γίνεται ειδική αναφορά στον ασφαλιστικό κλάδο, που αποτελεί το πεδίο εφαρμογής της διατριβής.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται θεμελιώδεις έννοιες από την μικροοικονομική θεωρία. Μέσα από ένα πλαίσιο παραδοχών προσδιορίζονται εναλλακτικά σύνολα δυνατοτήτων παραγωγής, τα οποία οδηγούν σε αντίστοιχες εκτιμήσεις των βαθμών αποδοτικότητας. Παρουσιάζεται η θεωρητική δομή του συνόρου αποδοτικότητας. Σκοπός της μέτρησης της αποδοτικότητας είναι η αξιολόγηση της απόστασης μεταξύ αποδοτικών και μη αποδοτικών παραγωγικών δραστηριοτήτων. Τα βασικά μοντέλα της ΠΑΔ που εκτιμούν αυτές τις διαφορές παρουσιάζονται και αναλύονται.

Το κεφάλαιο 3 αποτελεί μια συνοπτική ανασκόπηση εναλλακτικών μοντέλων στη βιβλιογραφία της ΠΑΔ. Στο κεφάλαιο αυτό υποδεικνύονται οι λόγοι επιβολής περιορισμών στους συντελεστές βαρύτητας και προτείνονται νέοι τρόποι επιβολής φραγμάτων. Οι διαφορές των νέων φραγμάτων με εκείνα της βιβλιογραφίας παρουσιάζονται μέσα από ένα παράδειγμα. Διατυπώνεται το θεωρητικό πλαίσιο αντιστοίχισης των βαθμών αποδοτικότητας των φραγμένων μοντέλων και των συμβατικών.

Στο κεφάλαιο 4 εφαρμόζονται τα συμβατικά και τα νέα μοντέλα της ΠΑΔ σε μεγάλη Ελληνική Ασφαλιστική Εταιρεία. Η εμπειρία από την εφαρμογή υποδεικνύει ότι η ανάλυση μέσω της ΠΑΔ όχι μόνον συμπληρώνει τις εναλλακτικές μεθόδους αξιολόγησης που εφαρμόζονται, αλλά αποτελεί για την Διοίκηση χρήσιμο εργαλείο, προκειμένου να αποκτηθούν υψηλότερα επίπεδα αποδοτικότητας και κερδοφορίας.

Τέλος, το κεφάλαιο 5 καταγράφει τα συμπεράσματα της παρούσας διατριβής και διατυπώνει προτάσεις για επέκταση της έρευνας.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΩΝ ΠΑΡΟΧΗΣ ΥΠΗΡΕΣΙΩΝ

#### 1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μέτρα αξιολόγησης εκφράζουν σχέσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων ή εκροών των διαδικασιών παροχής υπηρεσιών και των πόρων ή εισροών που απαιτούνται για την λειτουργία αυτών των διαδικασιών, αποτελούν δε τα σημεία αναφοράς των μεθόδων αξιολόγησης. Το κρίσιμο σημείο των μεθόδων αξιολόγησης είναι η ανίχνευση του πραγματικού επιπέδου κατανάλωσης των εισροών, έναντι του ελάχιστου επιπέδου κατανάλωσης που απαιτείται για την παραγωγή του πραγματικού επιπέδου εκροών, καθώς και οι τρόποι που ελαχιστοποιούν τις προκύπτουσες διαφορές.

Ειδικότερα, η πολυδιάστατη φύση των περισσότερων παραγωγικών διαδικασιών προτρέπει τους λήπτες αποφάσεων στην ανάπτυξη τέτοιων μεθόδων αξιολόγησης, έτσι ώστε ο προσδιορισμός αποδοτικών μειγμάτων εισροών και εκροών να παράγει αξιόπιστα μέτρα αποδοτικότητας. Ως αποδοτικότητα θεωρείται η μέτρηση της ικανότητας μιας παραγωγικής μονάδας να παράγει εκροές από το σύνολο των εισροών της (Norman and Stoker, 1991). Έτσι, σε πολυδιάστατες παραγωγικές διαδικασίες, η τεχνική αποδοτικότητα (technical efficiency), η κατανομητική αποδοτικότητα (allocative efficiency), οι αποδόσεις οικονομικών κλίμακας (scale efficiency) και η αποδοτικότητα σκοπού (scope efficiency) αποτελούν τις κύριες συνιστώσες αξιολόγησης της συνολικής συμπεριφοράς των εταιρειών. Για την εκτίμηση τέτοιων συνιστωσών έχουν προταθεί από την επιστημονική κοινότητα οι ακόλουθες μέθοδοι αξιολόγησης :

- 1) Ανάλυση με χρηματοοικονομικούς δείκτες
- 2) Ανάλυση του συνόρου αποδοτικότητας



## 1.2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥΣ ΔΕΙΚΤΕΣ

Η ανάλυση μέσω χρηματοοικονομικών δεικτών αποτελεί, εδώ και αρκετά χρόνια, μία γερά θεμελιωμένη μέθοδο αξιολόγησης με πολλές εφαρμογές σε αρκετές περιοχές του χώρου των επιχειρήσεων.

Τα πλεονεκτήματα στη χρήση ενός δείκτη είναι ότι εκφράζει τη σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών, π.χ. μεταξύ μιας εκροής και μιας εισροής ή μεταξύ μείγματος εκροών ή μείγματος εισροών.

Οι δείκτες χρησιμοποιούνται για συγκρίσεις με προηγούμενες χρονικές περιόδους (intra-firm comparisons) και συγκρίσεις με παρόμοιες επιχειρήσεις ή παραγωγικές δραστηριότητες (inter-firm comparisons). Παρέχουν, επομένως, στην διοίκηση ένα αναλυτικό πλαίσιο πληροφοριών μέσω του οποίου μπορούν να διατυπωθούν υποθέσεις για επίτευξη στόχων ή αποκλίσεις από στόχους. Μια άλλη χρήση των δεικτών απορρέει από την προσπάθεια να θεμελιωθούν, μέσω αυτών, συναρτησιακές σχέσεις.

Στην βιβλιογραφία έχει καταγραφεί μεγάλος αριθμός δεικτών, ο οποίος μπορεί να αξιολογήσει πολλές διαφορετικές περιπτώσεις. Εν τούτοις, αρκετές φορές κάποιες περιπτώσεις ενδέχεται να αξιολογηθούν από διαφορετικούς δείκτες. Η επιλογή, επομένως, του κατάλληλου δείκτη είναι ένα πρόβλημα που ανακύπτει σε διαδικασίες αξιολόγησης.

Οι πιο σημαντικοί και εύχρηστοι δείκτες αποδοτικότητας (Eilon 1988, B. Elliot – J. Elliot 1997) είναι οι ακόλουθοι τρεις :

$$\text{Απόδοση συνόλου κεφαλαίων (ROCE) = } \frac{\text{Καθαρά Κέρδη}}{\text{Σύνολο Κεφαλαίων}} \quad (1)$$

(Return on capital employed)

$$\text{Δείκτης περιθωρίου καθαρού κέρδους = } \frac{\text{Καθαρά Κέρδη}}{\text{Πωλήσεις}} \quad (2)$$

(Profit margin)

$$\text{Δείκτης διαχείρισης (Asset return) = } \frac{\text{Πωλήσεις}}{\text{Σύνολο κεφαλαίων}} \quad (3)$$

όπου το σύνολο κεφαλαίων είναι η αξία των παγίων και των κυκλοφορούντων κεφαλαίων.

Ο πρώτος δείκτης αξιολογεί την διοικητική αποδοτικότητα, αφού υποδεικνύει το καθαρό κέρδος της εταιρείας έναντι του συνόλου των χρηματοοικονομικών πόρων που χρησιμοποιούνται και οι οποίοι ελέγχονται από την διοίκηση. Ο δεύτερος δείκτης υποδεικνύει το ποσοστό των πωλήσεων το οποίο διατηρείται, αφού έχουν αφαιρεθεί όλα τα έξοδα (εκτός φόρων). Ο τρίτος δείκτης εκτιμά το ποσόν των πωλήσεων που επιτυγχάνεται ανά μονάδα του συνολικού κεφαλαίου, δηλαδή αποτελεί ένα μέτρο της εμπορικής δραστηριότητας της εταιρείας.

Στον ασφαλιστικό χώρο, όπου εστιάζεται η παρούσα διατριβή, οι επιπλέον δείκτες που χρησιμοποιούνται σε εκτιμήσεις αποδοτικότητας είναι οι ακόλουθοι (Δεδούσης, Ρίζος, 1991), (Καρατζάς, Ρίζος, 1994) :

- i) Εσοδα Επενδύσεων / Επενδύσεις
- ii) Εσοδα Επενδύσεων/ Σύνολο Ενεργητικού

Οι δείκτες αυτοί αποτελούν σημαντικούς δείκτες αξιολόγησης των ασφαλιστικών εταιρειών, εφόσον η κερδοφορία μιας εταιρείας είναι συνάρτηση της αποδοτικότητας και των επενδύσεων, που κάθε εταιρεία υποχρεούται να πραγματοποιεί βάσει της σχετικής νομοθεσίας.

Μολονότι οι προηγούμενοι δείκτες (και γενικότερα οι δείκτες) παρέχουν σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την χρηματοοικονομική λειτουργία μιας εταιρείας ή μιας παραγωγικής μονάδας, οι ακόλουθες αδυναμίες προκύπτουν από την χρήση των δεικτών :

- (i) Κάθε δείκτης συμπεριλαμβάνει μια μόνο εισροή και μια μόνο εκροή από ένα σύνολο εισροών και εκροών που χαρακτηρίζουν το εύρος δραστηριοτήτων μιας παραγωγικής μονάδας. Έτσι, προκύπτει μια ανεπαρκής εκτίμηση της αποδοτικότητας, αφού η παραγωγική μονάδα μπορεί να δείχνει αποδοτική ως προς έναν δείκτη και μη αποδοτική ως προς έναν άλλο.

- (ii) Οι δείκτες επισημαίνουν περιοχές φτωχών ή πολύ καλών επιδόσεων καθώς και περιοχές σημαντικών αλλαγών. Δεν προσδιορίζεται όμως η τιμή του συγκεκριμένου δείκτη (cut off point) προκειμένου μια παραγωγική μονάδα να θεωρηθεί αποδοτική.
- (iii) Οι δείκτες δεν παρέχουν πληροφορίες σχετικά με την ικανότητα μιας παραγωγικής μονάδας να κατανέμει τους πόρους της.

Οι προηγούμενοι δείκτες είναι γνωστοί ως μέτρα μερικής αξιολόγησης, με την έννοια ότι χρησιμοποιούν μια εισροή και μια εκροή. Αντιθέτως, δείκτες που σχετίζουν όλες τις εισροές με όλες τις εκροές αναφέρονται ως μέτρα συνολικής αξιολόγησης.

Τέτοιοι δείκτες κατασκευάζονται άμεσα, χρησιμοποιώντας συντελεστές βαρύτητας ή γνωρίζοντας τις τιμές και τις ποσότητες των εισροών-εκροών, όπως, παραδείγματος χάριν, οι δείκτες του Fisher (1922) ή του Tornqvist (1936), που εκτιμούν τη συνολική παραγωγικότητα. Όταν οι συντελεστές βαρύτητας δεν είναι δυνατόν να εκτιμηθούν ή το σύνολο των τιμών δεν είναι διαθέσιμο, οι δείκτες Malmquist (1953) μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Οι δείκτες Malmquist βασίζονται στον υπολογισμό των αποστάσεων των παραγωγικών μονάδων από το σύνορο παραγωγής, η δομή του οποίου πρέπει να εκτιμάται. Προκειμένου να αντιληφθούμε μια συνάρτηση απόστασης των εκροών, θεωρούμε ότι η τεχνολογία παραγωγής μπορεί να παρουσιασθεί από ένα σύνολο εκροών :

$P(x) = \{y : (x,y) \text{ είναι εφικτό}\}$ , όπου  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ , είναι το

διάνυσμα των εισροών και

$y = (y_1, \dots, y_m) \in R^m$ , είναι το διάνυσμα των εκροών.

Η συνάρτηση απόστασης των εκροών ορίζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο (Shepard, 1970) :

$$D_o(x,y) = \min \{ \Theta : (y/\Theta) \in P(x) \}$$

Επίσης, η κατά Debreu – Farrell μέτρηση της τεχνητής αποδοτικότητας από την κατεύθυνση των εκροών, ορίζεται ως :

$$DF_o(x,y) = \max \{ \Theta : \Theta y \in P(x) \}$$

Έχουμε, επομένως, ότι :

$$DF_0(x,y) = \frac{1}{D_0(x,y)}$$

Έτσι, η συνάρτηση απόστασης θέτει το αναγόμενο διάνυσμα εκροών  $y/\Theta$  και το διάνυσμα εισροών  $x$  στο σύνορο παραγωγικότητας, παρέχοντας μέτρα τεχνητής αποδοτικότητας. Με βάση τις συναρτήσεις απόστασης των εκροών, ορίζεται ο ακόλουθος δείκτης Malmquist (Fare, Grosskopf, Lindgren, Roos, 1989) :

$$M_0(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \left[ \frac{D_0^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_0^t(x^t, y^t)} \frac{D^{t+1}_0(x^{t+1}, y^{t+1})}{D^{t+1}_0(x^t, y^t)} \right]^{1/2}$$

Ο δείκτης παραγωγικότητας Malmquist είναι ο γεωμετρικός μέσος δύο κλασμάτων με συναρτήσεις απόστασης.

Το πρώτο κλάσμα συγκρίνει τα δεδομένα της περιόδου  $t+1$  με τα δεδομένα της περιόδου  $t$ , χρησιμοποιώντας συναρτήσεις απόστασης των εκροών που χαρακτηρίζουν την τεχνολογία της περιόδου  $t$ , ενώ το δεύτερο κλάσμα χρησιμοποιεί τα ίδια δεδομένα έχοντας ως αναφορά τη δομή της τεχνολογίας που ισχύει στην περίοδο  $t+1$ .

Ο προηγούμενος δείκτης μπορεί να επαναδιατυπωθεί (Fare, Grosskopf, Lindgren, Roos, 1989) ως εξής :

$$M_0(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{D^{t+1}_0(x^{t+1}, y^{t+1})}{D^t_0(x^t, y^t)} \left[ \frac{D^t_0(x^{t+1}, y^{t+1})}{D^{t+1}_0(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{D^{t+1}_0(x^{t+1}, y^{t+1})}{D^{t+1}_0(x^t, y^t)} \right]^{1/2}$$

όπου το κλάσμα εκτός της παρένθεσης μετρά τη μεταβολή της τεχνητής αποδοτικότητας μεταξύ των περιόδων  $t$  και  $t+1$ .

Ο γεωμετρικός μέσος των δύο κλασμάτων εντός της παρένθεσης δηλώνει τη μεταβολή στην τεχνολογία μεταξύ των δύο περιόδων.

Ενώ η συνάρτηση απόστασης παρέχει μέτρα τεχνικής αποδοτικότητας, οι δείκτες Malmquist επιπρόσθετα ενσωματώνουν τα αποτελέσματα μεταβολών της τεχνολογίας διαχρονικά ή διαστρωματικά. Προκειμένου να υπολογισθούν οι δείκτες Malmquist, πρέπει να εκτιμηθεί η τεχνική αποδοτικότητα μέσω των συναρτήσεων απόστασης. Μεταξύ των μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την προηγούμενη εκτίμηση είναι η Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων (Grifell – Tatje, Lovell, 1994 και Grifell – Tatje, Lovell, 1997).

Μολονότι οι δείκτες συνολικής αξιολόγησης χρησιμοποιούν πολλαπλές εισροές και εκροές, οι αδυναμίες που ανακύπτουν από την χρήση τους εντοπίζονται είτε στην έλλειψη διαθέσιμων δεδομένων (συντελεστές βαρύτητας) είτε στις υπόλοιπες αδυναμίες που προαναφέρθηκαν για τα μέτρα μερικής αξιολόγησης.

Ειδικότερα για τους δείκτες Malmquist, ένα μειονέκτημα προκύπτει από τον προσδιοριστικό τους χαρακτήρα (Lovell 1996). Δηλαδή, είναι δυνατόν να προκληθεί σύγχυση μεταξύ των αποτελεσμάτων από παραλείψεις μεταβλητών και μέτρησης σφαλμάτων και των αποτελεσμάτων τεχνικής μεταβολής της αποδοτικότητας.

### 1.3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΟΡΟΥ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Οι αξιολογήσεις μέσω του συνόρου αποδοτικότητας προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της συνάρτησης παραγωγής. Η συνάρτηση παραγωγής εκφράζει το μέγιστο επίπεδο των εκροών που επιτυγχάνονται από δεδομένο επίπεδο εισροών που χρησιμοποιούνται. Η λέξη “σύνоро” προκύπτει από το όριο που θέτει η συνάρτηση παραγωγής στο σύνολο των δυνατών παρατηρήσεων. Παραγωγή, επομένως, μπορεί να επιτευχθεί κάτω από το σύνορο και όχι πάνω από αυτό. Οι ποσότητες με τις οποίες μια παραγωγική μονάδα βρίσκεται κάτω από το σύνορο αναφέρονται σαν μέτρα σχετικής αποδοτικότητας. Έτσι, το πρώτο βήμα στην αξιολόγηση της αποδοτικότητας εταιρειών παροχής υπηρεσιών είναι ο διαχωρισμός, με κάποιο κριτήριο, των αποδοτικών παραγωγικών μονάδων, οι οποίες προσδιορίζουν το σύνορο, από τις μη αποδοτικές.

Αυτό επιτυγχάνεται με την εφαρμογή παραμετρικής ή μη παραμετρικής ανάλυσης του συνόρου αποδοτικότητας σε εταιρείες του ίδιου κλάδου ή σε παραγωγικές μονάδες της ίδιας εταιρείας. Η παραμετρική ανάλυση προϋποθέτει συγκεκριμένη συναρτησιακή μορφή του συνόρου αποδοτικότητας, σε αντίθεση με τη μη παραμετρική προσέγγιση η οποία χρησιμοποιεί εμπειρικά δεδομένα. Έτσι, στην Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων (ΠΑΔ), που είναι μη παραμετρική μέθοδος, το ισοδύναμο της συνάρτησης παραγωγής είναι το κατά την ΠΑΔ σύνορο αποδοτικότητας.

Η ανάλυση του συνόρου αποδοτικότητας εκτιμά κατά τρόπο ολοκληρωμένο και αντικειμενικό τον βαθμό αποδοτικότητας κάθε παραγωγής μονάδας. Αξιολογεί, κατ'αυτόν τον τρόπο, τις παραγωγικές μονάδες επιλέγοντας μονάδες “άριστης πρακτικής” και προσδιορίζει περιοχές κατάχρησης των εισροών και/ή υποπαραγωγής των εκροών, σχετίζοντας τα αποτελέσματα αυτά με θέματα διοικητικής πολιτικής και πρακτικής.

### 1.3.1. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τρεις κυρίως προσεγγίσεις έχουν χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της αποδοτικότητας των εταιριών παροχής υπηρεσιών. Οι προσεγγίσεις αυτές είναι:

Η στοχαστική προσέγγιση (Stochastic frontier approach, SFA)

Η προσέγγιση χωρίς κατανομή (Distribution free approach ή Deterministic frontier approach, DFA)

Η πυκνή προσέγγιση (Thick frontier approach, TFA).

Η ουσιαστική διαφορά μεταξύ των τριών προσεγγίσεων είναι ο τρόπος κατά τον οποίο διαχωρίζονται πληροφορίες που οφείλονται στη μη αποδοτικότητα και σε τυχαία σφάλματα.

Η στοχαστική προσέγγιση (εναλλακτικά οικονομετρική προσέγγιση) προσδιορίζει μια συναρτησιακή μορφή του συνόρου και ορίζει ένα σύνθετο μοντέλο σφάλματος, όπου οι μη αποδοτικότητες ακολουθούν ασύμμετρη κατανομή, συνήθως την ημικανονική, ενώ οι τυχαίες διαταράξεις ακολουθούν συμμετρική κατανομή, συνήθως την κανονική.

Εστω, μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί τις εισροές  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , για να παράγει την εκροή  $y \in \mathbb{R}$ , σε ένα περιβάλλον που χαρακτηρίζεται από τις εξωγενείς μεταβλητές  $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$ . Ένα σύνορο παραγωγής παρουσιάζεται από τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ , με παραμετρικό διάνυσμα  $\beta$ , έτσι ώστε  $f(x, z; \beta)$  συμβολίζει το μέγιστο επίπεδο εκροής που επιτυγχάνεται από το διάνυσμα εισροών  $x$  στο περιβάλλον  $z$ .

Η παρατηρούμενη εκροή δεν μπορεί να υπερβεί τη μέγιστη δυνατή εκροή και επομένως  $y \leq f(x, z; \beta)$ .

Η στοχαστική διατύπωση της προηγούμενης ανίσωσης είναι :

$$y_i = f(x_i, z_i; \beta) e^{x_i} p\{v_i + u_i\}$$

όπου  $i = 1, \dots, I$  είναι οι παραγωγικές μονάδες.

Ο όρος  $v_i$ , είναι όρος τυχαίων διαταράξεων, ο οποίος συμπεριλαμβάνει εκείνα τα αποτελέσματα που δεν ελέγχονται από τις μονάδες, όπως σφάλματα μέτρησης, ανταγωνισμός κ.λ.π. Οι  $v_i$  μεταβλητές είναι ανεξάρτητα και ταυτοτικά κατανομημένες σαν  $N(0, \sigma_v^2)$ . Ο όρος  $u_i$  κατανέμεται ανεξάρτητα του  $v_i$  και ικανοποιεί την σχέση  $u_i \leq 0$ . Η  $u_i$  είναι μεταβλητή αποδοτικότητας και αντιπροσωπεύει εκείνους τους παράγοντες που μπορούν να ελεγχθούν από τις παραγωγικές μονάδες. Έτσι, ένα μέτρο τεχνικής αποδοτικότητας δίδεται από τη σχέση (Lovell, 1995) :  $f(x_i, z_i; \beta) e^{x_i} / y_i = e^{x_i} p\{-u_i\}$

Οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό της τεχνικής αποδοτικότητας είναι :

- (i) ο συναρτησιακός τύπος της  $f(\cdot)$ , έτσι ώστε το παραμετρικό διάνυσμα  $\beta$  να μπορεί να υπολογισθεί.
- (ii) η μορφή της κατανομής των  $v_i$ , που συνήθως είναι  $N(0, \sigma_v^2)$ .
- (iii) η μορφή της κατανομής των  $u_i$ , που κατά κανόνα είναι ημικανονική.
- (iv) οι προϋποθέσεις ανεξαρτησίας μεταξύ των  $v_i$  και  $u_i$ , αλλά και από τις  $(x_i, z_i)$ .

Το στοχαστικό σύνορο παραγωγής (SFA) είναι το  $[f(x_i, z_i; \beta) e^{x_i} p\{v_i\}]$  και το προσδιοριστικό σύνορο παραγωγής (DFA) είναι το  $f(x_i, z_i; \beta)$ .

Ετσι, η προσέγγιση χωρίς κατανομή (DFA) προσδιορίζει επίσης μια συναρτησιακή μορφή του συνόρου, αλλά διαχωρίζει τις μη αποδοτικότητες από τα τυχαία σφάλματα κατά διαφορετικό τρόπο. Η προσέγγιση (DFA) δεν επιβάλλει συγκεκριμένη κατανομή στη μη αποδοτικότητα, υποθέτοντας ότι οι παραγωγικές μονάδες παρουσιάζουν σταθερή μη αποδοτικότητα με την πάροδο του χρόνου. Υποθέτει, επίσης, ότι τα τυχαία σφάλματα τείνουν αθροιστικά στο μηδέν με την πάροδο του χρόνου.

Η εκτίμηση της μη αποδοτικότητας κάθε μονάδας, σε ένα διαχρονικό σύνολο δεδομένων, προσδιορίζεται από την διαφορά του μέσου καταλοίπου (residuals) της παραγωγικής μονάδας και του μέσου καταλοίπου των μονάδων του συνόρου. Τέλος, η πυκνή προσέγγιση (TFA) προσδιορίζει κάποια συναρτησιακή μορφή του συνόρου, δεν επιβάλλει, όμως, προϋποθέσεις κατανομής της αποδοτικότητας και των τυχαίων σφαλμάτων. Υποθέτει ότι αποκλίσεις μέσα στο υψηλότερο και μέσα στο χαμηλότερο τεταρτημόριο κάποιου εκτιμώμενου μεγέθους (π.χ. κόστος) των μονάδων αντιπροσωπεύουν τυχαία σφάλματα, ενώ αποκλίσεις μεταξύ των δύο τεταρτημορίων αντιπροσωπεύουν μη αποδοτικότητα. Η TFA προσέγγιση δεν εκτιμά την αποδοτικότητα για κάθε παραγωγική μονάδα, αλλά εκτιμά το γενικό επίπεδο της συνολικής αποδοτικότητας.

### 1.3.2. ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στη μη παραμετρική ανάλυση του συνόρου αποδοτικότητας οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ευρύτατα είναι η Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων (ΠΑΔ), κατά κύριο λόγο, και το Κέλυφος Ελεύθερης Διάθεσης (Free Disposal Hull, FDH).

Η ΠΑΔ είναι μέθοδος γραμμικού προγραμματισμού, στην οποία το σύνολο αποτελείται από εκείνες τις αποδοτικές μονάδες για τις οποίες καμιά μονάδα ή γραμμικός συνδυασμός μονάδων δεν παράγει το ίδιο ή μεγαλύτερο επίπεδο εκροών (δοθέντων των εισροών) ή εναλλακτικά χρησιμοποιεί το ίδιο ή μικρότερο επίπεδο εισροών (δοθέντων των εκροών).



Ετσι, το σύνορο σχηματίζεται από τα γραμμικά τμήματα που συνδέουν τις αποδοτικές μονάδες και περιβάλλει τις μη αποδοτικές μονάδες. Ο βαθμός αποδοτικότητας κάθε παραγωγικής μονάδας εκτιμάται από την απόσταση της μονάδας από το σύνορο. Στην Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων δεν απαιτείται η γνώση των τιμών των δεδομένων των παραγωγικών μονάδων. Απαιτείται, όμως, μεγαλύτερος αριθμός παραγωγικών μονάδων από εκείνον που χρησιμοποιούν άλλες μέθοδοι, προκειμένου η ανάλυση να είναι αξιόπιστη.

Το Κέλυφος Ελεύθερης Διάθεσης (FDH) αποτελεί ειδική περίπτωση του μοντέλου της ΠΑΔ, όπου τα γραμμικά τμήματα του ΠΑΔ συνόρου δεν συμπεριλαμβάνονται στο FDH-σύνορο. Το FDH-σύνορο αποτελείται από τις κορυφές του ΠΑΔ-συνόρου και τα σημεία ελεύθερης διάθεσης εσωτερικά των κορυφών.

Η διαγραμματική απεικόνιση των συνόρων ΠΑΔ και FDH αποδίδεται στο σχήμα 2 του επόμενου κεφαλαίου.

Μολονότι οι προηγούμενες προσεγγίσεις δεν υποθέτουν κάποια συναρτησιακή μορφή του αποδοτικού συνόρου, εν τούτοις ένα σημαντικό μειονέκτημά τους είναι η υπόθεση ότι δεν υπάρχουν τυχαία σφάλματα.

Οι Berger και Humphrey (1997), αναφορικά με τις μη παραμετρικές προσεγγίσεις, επισημαίνουν ότι σφάλματα μέτρησης στην κατασκευή του συνόρου ή ανακρίβειες στη λογιστική αποτίμηση των εισροών και εκροών μπορεί να αντανακλώνται σαν μεταβολή της μετρούμενης αποδοτικότητας.

Από τις δύο προσεγγιστικές αναλύσεις, παραμετρική και μη παραμετρική, δεν είναι δυνατόν να προσδιορισθεί ποια προσέγγιση κυριαρχεί της άλλης, αφού το πραγματικό επίπεδο της αποδοτικότητας δεν είναι γνωστό. Προκύπτει, όμως, από τις εφαρμογές ότι οι δύο προσεγγίσεις αξιολογούν τις ίδιες εταιρείες με διαφορετικούς βαθμούς.

Οι Berger, Hunter και Timme (1993), διατυπώνουν ότι τα αποτελέσματα από τη χρήση διαφορετικών μεθοδολογιών και μοντέλων (SFA, ΠΑΔ, DFA, TFA) στον τραπεζικό τομέα δεν είναι αμοιβαία συνεπή, κάνοντας δύσκολο τον προσδιορισμό των περισσότερων και λιγότερο αποδοτικών ινστιτούτων.

Οι Hjalmarrsson, Kumbhakar και Heshmati, (1996), σε μια συγκριτική εφαρμογή των ΠΑΔ, DFA και SFA μεθόδων επιβεβαιώνουν τον προηγούμενο ισχυρισμό, καταλήγοντας ότι οι βαθμοί αποδοτικότητας διαφέρουν μεταξύ των μοντέλων.

Ο Lovell, (1996), σε συγκριτική εφαρμογή των DFA, SFA και ΠΑΔ μεθόδων σε διαστρωματικά στοιχεία χρονολογικής σειράς, υποστηρίζει για την DFA ότι, παρά την αδιαμφισβήτητη ευελιξία της, έχει μειωθεί η εφαρμογή της λόγω του προσδιοριστικού και παραμετρικού χαρακτήρα της ως μεθόδου αξιολόγησης.

Η SFA έχει το πλεονέκτημα ότι είναι η μόνη στοχαστική μέθοδος μεταξύ των τριών. Η πλειοψηφία, όμως, των εφαρμογών της SFA σε διαστρωματικά στοιχεία χρονολογικής σειράς κατευθύνεται στην κατασκευή καλύτερων εκτιμήσεων της αποδοτικότητας και της μεταβολής της, παρά στην υπόδειξη καινούριων εκτιμητών των συνιστωσών της παραγωγικής μεταβολής. Όταν η αλλαγή στην κατεύθυνση γίνει εφικτή για την SFA, τότε η μέθοδος θα αποκτήσει την ίδια θέση με την ΠΑΔ, η οποία αφ'ενός εμφανίζει μια ραγδαία αύξηση εφαρμογής σε διαστρωματικά στοιχεία χρονολογικής σειράς και αφ'ετέρου η μέτρηση της παραγωγικότητας για την ΠΑΔ έχει δρομολογηθεί από το 1979.

Για να αποκτήσουμε ένα μέτρο σύγκρισης της εφαρμογής των προηγούμενων μεθόδων αλλά και των περιγραφικών μέτρων που τις διέπουν, θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του άρθρου των Berger και Humphrey, 1997. Το άρθρο ερευνά 130 μελέτες μέτρησης της αποδοτικότητας εταιρειών παροχής υπηρεσιών (κυρίως τραπεζικού και ασφαλιστικού χώρου) σε 21 χώρες στο χρονικό διάστημα 1988 έως 1997. Οι παραμετρικές μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν ήταν οι SFA, DFA, TFA, ενώ στις μη παραμετρικές χρησιμοποιήθηκαν οι ΠΑΔ και FDH καθώς και δύο άλλες, μια μέθοδος αριθμοδεικτών και η μέθοδος μικτής βέλτιστης στρατηγικής. Η κατανομή της εφαρμογής των μεθόδων παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 1.1.

Στο συγκεκριμένο δείγμα, διαφαίνεται η μεγάλη απήχηση που έχει η χρήση της ΠΑΔ (45,4% στο σύνολο) έναντι της πρώτης παραμετρικής μεθόδου SFA (15,4% στο σύνολο). Εξάλλου, μια γεωγραφική ομαδοποίηση των 130 μελετών καταδεικνύει ότι 72 εφαρμόστηκαν στις ΗΠΑ, 43 σε Ευρωπαϊκές χώρες και 15 σε διάφορες χώρες (Καναδάς, Ιαπωνία, Τυνησία, Τουρκία κ.λπ.). Η κατανομή των ομαδοποιημένων μελετών, ανά μέθοδο εφαρμογής, παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα :

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.3.1. ΚΑΤΑΝΟΜΗ 130 ΜΕΛΕΤΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΣ	SFA	DFA	TFA	DEA	FDH	ΑΛΛΕΣ	ΜΙΚΤΕΣ	ΣΥΝΟΛΟ
ΧΩΡΕΣ								
ΗΠΑ	14	16	10	23	3	1	5	72
ΕΥΡΩΠΗ	3	3	5	25	2	1	4	43
ΔΙΑΦ. ΧΩΡΕΣ	3	0	1	11	0	0	0	15
ΣΥΝΟΛΟ	20	19	16	59	5	2	3	130

ΠΗΓΗ : EJORS Vol.98 (Berger-Humphrey, 1997)

Τα στατιστικά μέτρα, τα οποία περιγράφουν τις κατανομές παραμετρικών και μη παραμετρικών μεθόδων σε ΗΠΑ και Ευρώπη, παρουσιάζονται στους ακόλουθους πίνακες. Αντίστοιχα μέτρα για την κατηγορία των “διαφόρων χωρών” δεν ήταν δυνατόν να εκτιμηθούν, λόγω ανεπάρκειας των δεδομένων.

Τα περιγραφικά μέτρα υποδεικνύουν ότι οι εναλλακτικές μέθοδοι παράγουν κατά μέσο όρο παρόμοια περίπου αποτελέσματα, αξιολογώντας, όμως, τις εταιρείες με διαφορετικούς βαθμούς αποδοτικότητας. Οι παραμετρικές μέθοδοι παρουσιάζουν υψηλότερα μέτρα κεντρικής τάσης και θέσης (μέσος, διάμεσος, τεταρτημόρια), ενώ οι μη παραμετρικές μέθοδοι εμφανίζουν μεγαλύτερη διασπορά στους βαθμούς αποδοτικότητας (τυπική απόκλιση, ενδοτεταρτημοριακό εύρος). Τούτο γίνεται ευδιάκριτο στην περίπτωση των εφαρμογών στις ΗΠΑ όπου οι παραμετρικές μέθοδοι έχουν μέσο και διάμεσο 0.81 και 0.85 έναντι 0.75 και 0.80 αντίστοιχα στις μη παραμετρικές. Οι τελευταίες εμφανίζουν τυπική απόκλιση και ενδοτεταρτημοριακό εύρος 0.17 και 0.19 έναντι 0.12 και 0.09 αντίστοιχα στις παραμετρικές μεθόδους.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.3.2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΑ ΜΕΤΡΑ ΜΕΘΟΔΩΝ Η.Π.Α.

ΜΕΘΟΔΟΙ	ΜΕΣΟΣ	ΔΙΑ-ΜΕΣΟΣ	ΤΥΠ. ΑΠΟ-ΚΛΙΣΗ	ΕΥΡΟΣ	1 <sup>ο</sup> ΤΕΤΑΡΤΗ-ΜΟΡΙΟ	3 <sup>ο</sup> ΤΕΤΑΡΤΗ-ΜΟΡΙΟ
ΠΑΡΑΜΕ-ΤΡΙΚΗ	0.81	0.85	0.12	0.24-0.99	0.79	0.87
ΜΗ ΠΑΡΑ-ΜΕΤΡΙΚΗ	0.75	0.80	0.17	0.31-0.98	0.69	0.88

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.3.3. ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΑ ΜΕΤΡΑ ΜΕΘΟΔΩΝ-ΕΥΡΩΠΗ

ΜΕΘΟΔΟΙ	ΜΕΣΟΣ	ΔΙΑ-ΜΕΣΟΣ	ΤΥΠ. ΑΠΟ-ΚΛΙΣΗ	ΕΥΡΟΣ	1 <sup>ο</sup> ΤΕΤΑΡΤΗ-ΜΟΡΙΟ	3 <sup>ο</sup> ΤΕΤΑΡΤΗ-ΜΟΡΙΟ
ΠΑΡΑΜΕ-ΤΡΙΚΕΣ	0.78	0.81	0.11	0.24-0.93	0.77	0.84
ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤ.	0.77	0.80	0.13	0.47-0.98	0.74	0.85

Οι προηγούμενες διαφορές των εναλλακτικών μεθόδων προκύπτουν από τις διαφορετικές προσεγγίσεις που υιοθετούνται στην εκτίμηση της αποδοτικότητας.

Οι παραμετρικές μέθοδοι επιβάλλουν συναρτησιακές μορφές οι οποίες περιορίζουν το σχήμα του συνόρου, και οι μη παραμετρικές μέθοδοι δεν επιτρέπουν την ύπαρξη τυχαίων σφαλμάτων που μπορεί να επηρεάσουν την μέτρηση της αποδοτικότητας.

Όπως προαναφέρθηκε, δεν μπορεί να προσδιορισθεί ποια προσέγγιση κυριαρχεί της άλλης. Διαπιστώνεται, όμως, η μεγάλη χρήση και εφαρμογή που έχει η ΠΑΔ από την εμφάνιση της έως σήμερα. Τούτο οφείλεται στην ικανότητα της μεθόδου να εκτιμά την αποδοτικότητα παραγωγικών δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούν πολλαπλές εισροές και παράγουν πολλαπλές εκροές, χωρίς να προϋποθέτει συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ των εισροών και εκροών. Επίσης η ΠΑΔ προτείνει, ανακατανομή μεταξύ των παραγωγικών συντελεστών μιας μη αποδοτικής δραστηριότητας, προκειμένου αυτή να καταστεί αποδοτική.

Παρ'όλα αυτά, σημαντικές μεθοδολογικές αναπτύξεις έχουν δρομολογηθεί μεταξύ των δύο προσεγγίσεων, επιτρέποντας την εκτίμηση ακριβέστερων βαθμών αποδοτικότητας και τον προσδιορισμό των παραγώνων της αποδοτικότητας. Για τις παραμετρικές μεθόδους οι νέες αναπτύξεις συμπεριλαμβάνουν, μεταξύ άλλων, τον προσδιορισμό "ευέλκτων" συναρτησιακών μορφών του συνόρου, τη χρήση λιγότερο περιοριστικών υποθέσεων των κατανομών μη αποδοτικότητας, τη μέτρηση διαστημάτων εμπιστοσύνης, τη διερεύνηση για ετεροσκεδαστικότητα στις κατανομές των τυχαίων σφαλμάτων και της μη αποδοτικότητας. Για τις μη παραμετρικές μεθόδους στις νέες αναπτύξεις συμπεριλαμβάνονται η χρήση συναρτήσεων απόστασης των εκροών, η μέτρηση διαστημάτων εμπιστοσύνης, η εισαγωγή κάποιου βαθμού τυχαίων σφαλμάτων των δεδομένων.

Ολοκληρώνοντας, θα πρέπει να επισημανθεί ότι οι δύο μέθοδοι αξιολόγησης της αποδοτικότητας, δηλαδή η παραμετρική προσέγγιση και η μη παραμετρική προσέγγιση, δεν πρέπει να θεωρηθούν σαν αμοιβαία αποκλειόμενες μέθοδοι. Μπορούν να συμπληρώνουν αποτελεσματικά η μια την άλλη, παρέχοντας επιπρόσθετες πληροφορίες και εξετάζοντας την ευαισθησία των μετρήσεων ως προς τις εναλλακτικές μεθόδους και υποθέσεις.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### 2. ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ (DATA ENVELOPMENT ANALYSIS, DEA)

#### 2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέτρηση της αποδοτικότητας κατά την μετατροπή εισροών σε εκροές είναι ιδιαίτερα σημαντική υπόθεση για οργανισμούς τόσο του δημοσίου όσο και του ιδιωτικού τομέα. Οποσδήποτε, για να βελτιωθούν οι μη αποδοτικοί οργανισμοί, πρέπει να μετρηθεί η αποδοτικότητά τους, να προσδιορισθούν οι πηγές μη αποτελεσματικότητας και να κατευθυνθούν σε περισσότερο αποδοτική συμπεριφορά. Αυτό είναι ένα πρόβλημα, πάνω στο οποίο ερευνητές των οικονομικών και της οικονομετρίας εργάζονται για πολλά χρόνια.

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων (ΠΑΔ), η οποία αναπτύχθηκε από την Διοικητική και Οικονομική Επιστήμη, είναι μέθοδος γραμμικού προγραμματισμού που εκτιμά τη σχετική αποδοτικότητα παραγωγικών μονάδων (Decision Making Units - DMUs) αναφορικά με ένα σύνολο ομοίων μονάδων που διαθέτουν πολλαπλές εισροές και εκροές.

Η ΠΑΔ βασίζεται στη μικροοικονομική έννοια του συνόλου δυνατοτήτων παραγωγής (production possibility set), το οποίο ορίζεται ως το σύνολο των εφικτών συνδυασμών εισροών και εκροών που επιτρέπονται από την υπάρχουσα τεχνολογία παραγωγής σε έναν οργανισμό.

Το «αποδοτικό σύνορο παραγωγής» (efficient production frontier) ενός συνόλου δυνατοτήτων παραγωγής προσδιορίζεται στην ΠΑΔ με την βοήθεια του γραμμικού προγραμματισμού και αποτελείται από γραμμικές τμηματικά πλευρές που σχηματίζουν οι αποδοτικές μονάδες.

Οι συνδυασμοί εισροών - εκροών των αποδοτικών μονάδων ορίζουν το σύνορο αποδοτικότητας, με βάση το οποίο αξιολογούνται οι συνδυασμοί εισροών - εκροών κάθε μονάδας.

Οι αποδοτικές μονάδες που χρησιμοποιούνται στον προσδιορισμό του συνόρου λαμβάνουν βαθμό αποδοτικότητας ίσο με τη μονάδα (=1), ενώ οι μη αποδοτικές μονάδες λαμβάνουν βαθμό αποδοτικότητας μικρότερο της μονάδας (<1).

Η κατασκευή του συνόρου αποδοτικότητας δεν απαιτεί τον προσδιορισμό μιας συνάρτησης παραγωγής. Με αυτή την έννοια η ΠΑΔ είναι μη παραμετρική μέθοδος.

Η εκτίμηση της αποδοτικότητας μέσω της ΠΑΔ βασίζεται στις πραγματικές παρατηρήσεις εισροών- εκροών οι οποίες μετριοούνται στις φυσικές τους κλίμακες, αποτελεί δε ακτινική (radial measure) μέθοδο αξιολόγησης.

Ο όρος ακτινική αναφέρεται στο ότι οι εισροές μπορεί να μειωθούν ή οι εκροές να αυξηθούν σε ίση αναλογία κατά μήκος μιας ακτίνας διερχομένης από την αρχή των αξόνων.

Το κεφάλαιο 2 είναι διαρθρωμένο ως εξής :

Η ενότητα 2 αναφέρεται σε βασικούς οικονομικούς όρους που διέπουν την παραγωγική διαδικασία. Στην ενότητα 3 παρουσιάζονται και αναδεικνύονται τα κυριότερα μοντέλα της ΠΑΔ μαζί με τις ερμηνείες και τις ιδιότητές τους.

### **2.1.1. ΣΥΝΟΛΑ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ (PRODUCTION POSSIBILITY SETS)**

Η ανάλυση της αποδοτικότητας (κάτω από την ΠΑΔ) προϋποθέτει την διατύπωση και συζήτηση συγκεκριμένων εννοιών από την άποψη της οικονομικής θεωρίας της παραγωγής.

Τέτοιες έννοιες, όπως το σύνολο δυνατοτήτων παραγωγής, το σύνολο αποδοτικότητας, κ.λ.π., θεμελιώνουν την Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων και επιτρέπουν τη διερεύνηση και ανάπτυξη της μεθόδου.

Σε αυτή την περιοχή υπάρχουν αρκετές αναφορές στη βιβλιογραφία όπως: (Shephard, 1970) , (Charnes Cooper and Rhodes, 1978) , (Banker, 1984), (Banker, Charnes, Cooper , 1985), (Charnes , Cooper , Golany, Seiford , Stutz, 1985) , (Banker , Mandiratta , 1985) , (Banker and Morey, 1986), (Grosskopf, 1986), (Fried , Lovell, Schmidt, 1993) , (Charnes , Cooper, Thrall, 1986) , (Lang , Yolalan, Ketani, 1990), (Banker and Thrall, 1992) , (Fare and Hunsaker, 1986), (Fare , Grosskopf, Lovell, 1993) , (Athanasopoulos, 1995), (Tulkens , Vanden Fenchaut, 1995) , (Petersen, 1990), (Athanasopoulos, Storbeck , 1995).

Η επόμενη ενότητα περιγράφει και αναλύει τις βασικές προϋποθέσεις της δομής της τεχνολογίας παραγωγής, που είναι απαραίτητες για την μελέτη της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων.

Η τεχνολογία παραγωγής μετατρέπει εισροές σε εκροές, μέσω των οποίων και εκφράζεται. Μία επιτυχής εφαρμογή της προηγούμενης διαδικασίας χαρακτηρίζεται ως αποδοτική.

Η αποδοτική μετατροπή εκφράζει «οριακές» σχέσεις (extremal) μεταξύ των εισροών και εκροών με την έννοια του μεγίστου όγκου εκροών που επιτυγχάνονται από δεδομένο συνδυασμό εισροών ή του ελαχίστου όγκου εισροών που χρησιμοποιούνται για δεδομένο όγκο εκροών.

Το σύνολο δυνατοτήτων παραγωγής είναι το σύνολο όλων των επιτρεπτών από την τεχνολογία μετατροπών, αποδοτικών και μη αποδοτικών.

Το σύνολο δυνατοτήτων παραγωγής είναι άγνωστο (μη παρατηρήσιμο) και στις περισσότερες αναλύσεις αποδοτικότητας μπορεί να κατασκευασθεί από τις διαθέσιμες ποσότητες εισροών και εκροών.

Ο ορισμός του συνόλου δυνατοτήτων παραγωγής (το οποίο στη συνέχεια θα ονομάζεται σύνολο αναφοράς) πλαισιώνεται από ένα σύνολο παραδοχών, με την έννοια ότι, κάθε παραγωγική μονάδα που δεν ανήκει στο σύνολο αναφοράς προκύπτει αναγκαία μέσω κάποιας παραδοχής.

Ετσι, μπορούν να κατασκευασθούν διαφορετικά σύνολα αναφοράς, ανάλογα με ποιες παραδοχές χρησιμοποιούνται.

Η χρησιμότητα του συνόλου αναφοράς προκύπτει από δύο επιπλέον έννοιες (i) του εσωτερικού του συνόλου αναφοράς και (ii) του ορίου ή συνόρου του συνόλου.

Παραγωγικές μονάδες που ανήκουν στο εσωτερικό του συνόλου αναφοράς ονομάζονται μη αποδοτικές, ενώ, αντίθετα, μονάδες που ανήκουν στο σύνολο (σε συγκεκριμένη πλευρά) του συνόλου ονομάζονται αποδοτικές.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δεδομένα σε ένα σύνολο  $j=1,2, \dots, n$  παραγωγικών μονάδων με  $X \in \mathbb{R}^{m+}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{s+}$  τους πίνακες εισροών - εκροών των  $n$  μονάδων, όπου  $X_j = (X_{1j}, \dots, X_{mj})$  και  $Y_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{sj})$  είναι τα διανύσματα των παρατηρούμενων εισροών - εκροών για την μονάδα  $j$ .



Το σύνολο αναφοράς  $T$  είναι το σύνολο όλων των εφικτών συνδυασμών εισροών - εκροών και μπορεί να εκφρασθεί ως :

$$T = \{ (X, Y) / Y \geq 0 \text{ μπορεί να παραχθεί από } X \geq 0 \}.$$

Με τον όρο «εφικτός» νοείται ότι οι ποσότητες είναι τέτοιες ώστε το σύνολο εκροών  $Y$  μπορεί κατά φυσικό τρόπο να παραχθεί χρησιμοποιώντας το σύνολο εισροών  $X$ .

Ο παραπάνω ορισμός ενδυναμώνεται περισσότερο από τις ακόλουθες παραδοχές :

### Παραδοχή 1 (Μονοτονικότητα, Monotonicity)

(α) Αν  $(X, Y) \in T$  και  $X' \geq X$ , τότε  $(X', Y) \in T$

(β) Αν  $(X, Y) \in T$  και  $Y' \leq Y$ , τότε  $(X, Y') \in T$

Η παραδοχή 1 (α) διατυπώνει ότι εάν ένα σύνολο εκροών μπορεί να παραχθεί με την χρήση του συνόλου εισροών τότε το ίδιο σύνολο εκροών μπορεί να παραχθεί με την χρήση περισσότερων εισροών.

Το (β) αντιστρέφει την παραπάνω διατύπωση .

### Παραδοχή 2 (Κυρτότητα, Convexity)

Αν  $(X_j, Y_j) \in T, j = 1, \dots, n$  και  $\lambda_j$  είναι μη αρνητικοί δείκτες έτσι ώστε :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad \text{τότε}$$

$$\left( \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \right) \in T$$

Η παραπάνω παραδοχή διατυπώνει ότι κάθε ενδιάμεσο εφικτό σημείο μπορεί να εκφρασθεί ως κυρτός συνδυασμός των παρατηρούμενων σημείων.

### Παραδοχή 3 (Μη περιορισμένη ακτίνα, Ray Unboundedness)

Αν  $(X, Y) \in T$  τότε  $(kX, kY) \in T, k > 0$ .

Η παραδοχή 3 διατυπώνει ότι ένα εφικτό μείγμα εισροών - εκροών μπορεί να είναι επίσης εφικτό σε μεγαλύτερη ή μικρότερη κλίμακα .

#### Παραδοχή 4 (Περίκλειση των παρατηρήσεων, Inclusion of Observations)

Κάθε παρατηρούμενο διάνυσμα,  $(X_j, Y_j) \in T$   $j=1, \dots, n$ . Η παραδοχή 4 διατυπώνει ότι όλες οι παρατηρούμενες εισροές - εκροές είναι εναρμονισμένες με την τεχνολογία παραγωγής.

#### Παραδοχή 5 (Τομή συνόλων, Minimality)

Το σύνολο  $T$  είναι η τομή όλων των  $T$  που ικανοποιούν τις προηγούμενες παραδοχές.

Η προηγούμενη παραδοχή υποστηρίζει ότι η μη γνώση εκ των προτέρων της τεχνολογίας παραγωγής δεν προϋποθέτει την ύπαρξη συνδυασμών εισροών - εκροών ανωτέρων από τους καλύτερους παρατηρούμενους συνδυασμούς.

Ετσι, το  $T$  είναι το «μικρότερο» σύνολο που είναι συνεπές με τις παρατηρήσεις και τις παραδοχές που αφορούν στο σύνολο δυνατοτήτων παραγωγής.

Ανάλογα με την επιλογή των προηγούμενων παραδοχών, διάφοροι τύποι συνόλων αναφοράς έχουν χρησιμοποιηθεί στην αξιολόγηση της αποδοτικότητας.

Αμέσου ενδιαφέροντος είναι τα ονομαζόμενα «εμπειρικά» σύνολα αναφοράς, τα οποία εκφράζονται μέσω «εμπειρικών» συναρτήσεων.

Ως εμπειρική συνάρτηση ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση, οι τιμές της οποίας είναι γνωστές για περιορισμένο αριθμό σημείων, ενώ οι τιμές της για άλλα σημεία στο πεδίο ορισμού της δίδονται από γραμμικούς συνδυασμούς (κυρίως κυρτούς) των τιμών σε γνωστά σημεία. (Charnes et al, 1985). Τα σημεία στο πεδίο ορισμού νοούνται ως «εισροές», ενώ ως «εκροές» λαμβάνονται τα σημεία του πεδίου τιμών της συνάρτησης. Σύμφωνα με τις παραπάνω παραδοχές, ορίζουμε το «εμπειρικό» σύνολο αναφοράς  $T_E$ :

$$T_E = \left\{ (X, Y) / X = \sum_{j=1}^n X_j \mu_j, Y = \sum_{j=1}^n Y_j \mu_j, \sum_{j=1}^n \mu_j = 1, \forall \mu_j \geq 0 \right\}$$

Το  $T_E$  είναι το κυρτό κέλυφος (convex hull) των παρατηρουμένων εισροών - εκροών και στηρίζεται στις παραδοχές 2,4 και 5.

Προσθέτοντας στο  $T_E$  όλα τα σημεία με εισροές στο  $T_E$  και εκροές όχι μεγαλύτερες από κάποιες εκροές στο  $T_E$  (παραδοχή 1(β)), ορίζεται το παρακάτω σύνολο αναφοράς  $T_{E1}$ .

$$T_{E1} = \{ (X, Y) / X = X', Y \leq Y' \text{ για κάποια } (X', Y') \in T_E \} =$$

$$= \{ (X, Y) / X = \sum_{j=1}^n X_j \mu_j, Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \mu_j, \sum_{j=1}^n \mu_j = 1, \forall \mu_j \geq 0 \}$$

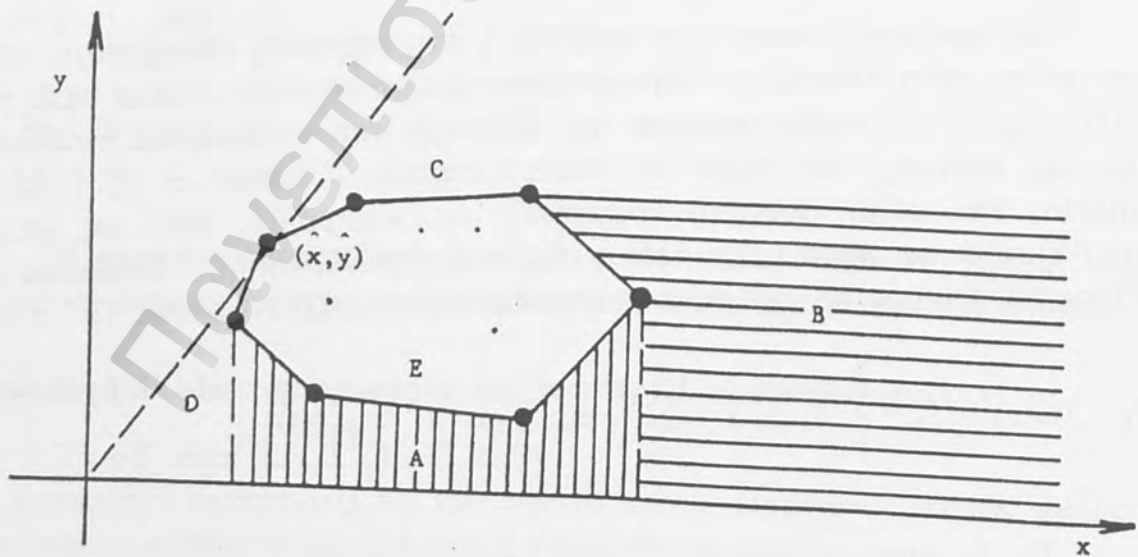
Προσθήκη της παραδοχής 1 (α) επεκτείνει το παραπάνω σύνολο αναφοράς στο  $T_{E2}$ :

$$T_{E2} = \{ (X, Y) / X \geq X', Y \leq Y' \text{ για κάποια } (X', Y') \in T_{E1} \} = \quad \eta$$

$$= T_{E2} \{ (X, Y) / X \geq \sum_{j=1}^n X_j \mu_j, Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \mu_j, \sum_{j=1}^n \mu_j = 1, \forall \mu_j \geq 0 \}$$

Τα παραπάνω σύνολα αναφοράς απεικονίζονται στο Σχήμα 1 (Charnes , Cooper, Golany, Seiford, Stutz, 1985) , όπου χρησιμοποιείται μια εισροή και μία εκροή.

Οι τελείες εκφράζουν τις παρατηρήσεις και τα ευθύγραμμα τμήματα που περικλείουν αυτά τα σημεία αποδίδουν το σύνολο αναφοράς  $T_E$ .



Σχήμα 2.1.  
26

Από τα παραπάνω έχουμε ότι :  $T_E = E$

$$T_{E1} = EUA, T_{E2} = EUA \cup B$$

Η παραδοχή 3 επεκτείνει περισσότερο το σύνολο αναφοράς στο  $T_{E3}$  :

$$T_{E3} = \{ (X, Y) / X \geq \sum_{j=1}^n X_j \mu_j, Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \mu_j, \sum_{j=1}^n \mu_j \leq 1, \mu_j > 0 \}$$

$$\text{όπου } T_{E3} = T_{E2} \cup D$$

Ο ρόλος της παραδοχής 3 είναι να διατυπώσει τους τύπους αποδόσεων οικονομικών κλίμακος που είναι δυνατές να επιτευχθούν στο σύνολο αποδοτικότητας του συνόλου αναφοράς.

Στην ανάλυση της αποδοτικότητας, τα σύνολα αναφοράς που κατά κανόνα ακολουθούνται στην βιβλιογραφία είναι εκείνα που ορίζονται κάτω από σταθερές αποδόσεις οικονομικών κλίμακος (Constant Returns to Scale, CRS) και εκείνα που ορίζονται κάτω από μεταβλητές αποδόσεις οικονομικών κλίμακος (Variable Returns to Scale, VRS). Αυτά είναι :

$$T_{CRS} = \{ (X, Y) / X \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, Y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \lambda_j \geq 0 \}$$

$$T_{VRS} = \{ (X, Y) / X \geq \sum_{j=1}^n X_j \mu_j, Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \mu_j, \sum_{j=1}^n \mu_j = 1, \mu_j \geq 0 \} = T_{E2}$$

Τα παραπάνω σύνολα αναφοράς CRS, VRS στηρίζονται στις παραδοχές 1,2,3,4, και 5, το πρώτο, και 1,2,4,5, το δεύτερο. Θεμελιώδες χαρακτηριστικό τους είναι ότι μπορούν να συμπεριλάβουν σαν στοιχεία τους γραμμικούς συνδυασμούς εισροών- εκροών των παρατηρούμενων παραγωγικών μονάδων.

Κάθε σύνολο αναφοράς περιβάλλεται από ένα σύνολο αποδοτικότητας (efficient frontier) το οποίο αποτελείται από ένα υποσύνολο των παραγωγικών μονάδων που ικανοποιούν την ιδιότητα της αποδοτικότητας.

Εν τούτοις, η παραδοχή της κυρτότητας χαρακτηρίζει το σύνολο των συνόλων αυτών. Στην περίπτωση CRS, το σύνολο ορίζεται ως το κωνικό κέλυφος (conical hull) του συνόλου αναφοράς, ενώ στην περίπτωση VRS, το σύνολο ορίζεται ως το κυρτό κέλυφος (convex hull) του συνόλου αναφοράς.

Αναίρεση της παραδοχής 2 (κυρτότητα) επαναπροσδιορίζει το σύνολο από κυρτό κέλυφος σε κέλυφος ελεύθερης διάθεσης (Free Disposal Hull, FDH).

Αναφορές στο πεδίο αυτό υπάρχουν στους (Deprins 1984, Petersen 1990, Tulkens 1993, Athanassopoulos 1995).

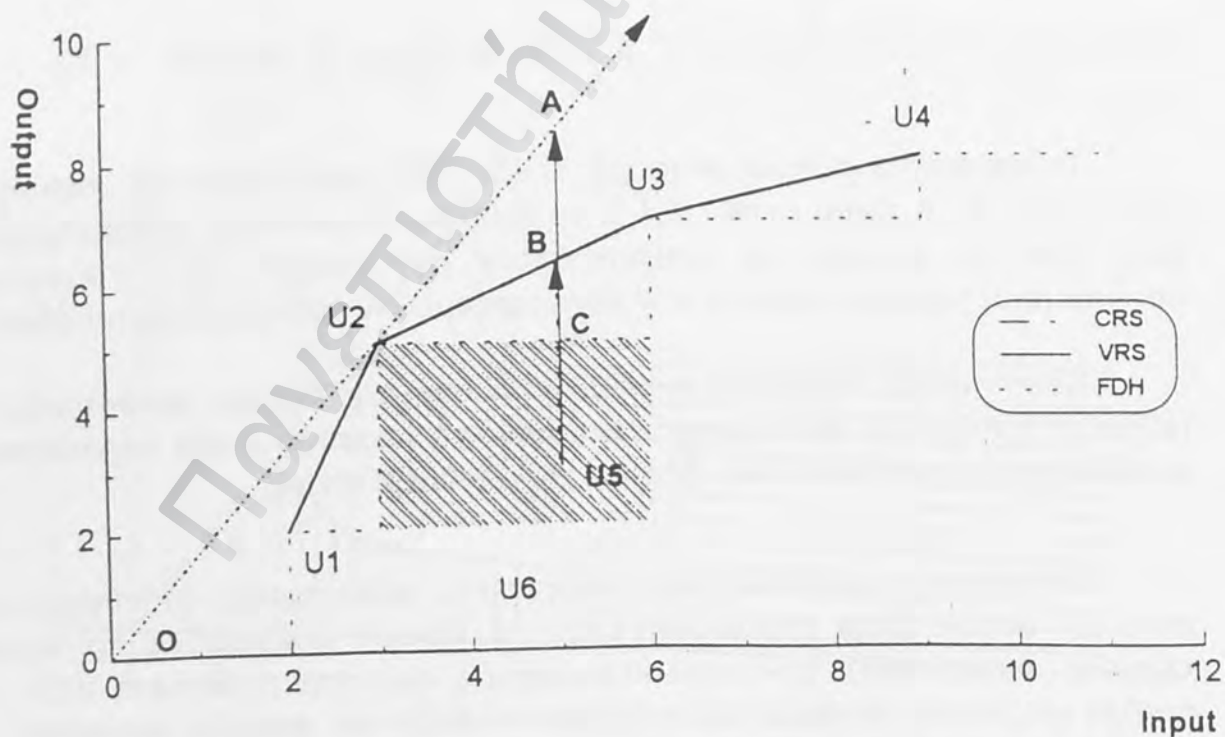
Το σύνολο αναφοράς FDH ορίζεται ως :

$$T_{FDH} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^{m+s} / X = X_j + S, Y = Y_j - S', (X_j, Y_j) \in T_R \cup \{0,0\}, S \in \mathbb{R}^m, S' \in \mathbb{R}^s\}$$

όπου  $T_R$  το σύνολο αναφοράς των παρατηρουμένων μονάδων που στηρίζεται στις παραδοχές 1, 2 και 4.

Το  $T_{FDH}$  περιέχει στο σύνολό του την αρχή των αξόνων. Τα διανύσματα  $S, S'$  εκφράζουν το ποσόν της μη αποδοτικότητας των αντιστοίχων εισροών, εκροών των παραγωγικών μονάδων. Αντίθετα με τα σύνολα  $T_{CRS}, T_{VRS}$ , το  $T_{FDH}$  σύνολο δεν μπορεί να συμπεριλάβει σε στοιχεία του γραμμικούς συνδυασμούς των παρατηρουμένων μονάδων.

Στο ακόλουθο σχήμα (Athanassopoulos, 1996) απεικονίζονται τα προαναφερθέντα σύνορα αποδοτικότητας, που προκύπτουν από την τεχνολογία παραγωγής (μια εισροής μια εκροής) έξι παραγωγικών μονάδων ( $U_1, \dots, U_6$ ).



Σχήμα 2.2

Το σύννορο αποδοτικότητας, κάτω από CRS προϋποθέσεις, δίδεται από το ευθύγραμμο τμήμα  $OU_2$ , ενώ κάτω από VRS παραδοχές, το σύννορο αποτελείται από την τμηματική γραμμή  $U1, U2, U3, U4$ . Κάτω από FDH παραδοχές, το σύννορο αποτελείται από τα κλιμακωτά ευθύγραμμα τμήματα, βορειοανατολικά των μονάδων  $U1, U2, U3, U4$ .

Η αποδοτικότητα (τεχνητή) μπορεί να ορισθεί είτε μέσα από την έννοια της μείωσης των εισροών είτε της αύξησης των εκροών ή χρησιμοποιώντας κάποιο συνδυασμό των δύο.

Συνυφασμένη με τα παραπάνω, στην οικονομική θεωρία της παραγωγής, είναι η αποδοτικότητα κατά Pareto (Pareto - efficiency).

Ένα σημείο  $x'$  είναι αποδοτικό, κατά Pareto, όταν για ένα πεπερασμένο σύνολο συναρτήσεων  $g_1(x), \dots, g_k(x)$  δεν υπάρχει άλλο σημείο  $x$  στο πεδίο ορισμού των προηγούμενων συναρτήσεων, έτσι ώστε  $g_k(x) \leq g_k(x')$   $k = 1, \dots, K$ .

Εναλλακτικός ορισμός της αποδοτικότητας δίδεται μέσω των εργασιών του Coormans (1951), ο οποίος διατυπώνει ότι :

Μία παραγωγική μονάδα είναι τεχνητά αποδοτική, όταν μία αύξηση σε οποιαδήποτε εκροή απαιτεί μία μείωση σε τουλάχιστον μία άλλη εκροή ή μία αύξηση σε τουλάχιστον μία εισροή και, όταν μία μείωση σε οποιαδήποτε εισροή απαιτεί μία αύξηση σε τουλάχιστον μία άλλη εισροή ή μία μείωση σε τουλάχιστον μία εκροή.

Έτσι, μία μη αποδοτική παραγωγική μονάδα μπορεί να παράγει τις ίδιες εκροές με λιγότερες από τουλάχιστον μία εισροή ή μπορεί με την χρήση των ίδιων εισροών να παράγει περισσότερες από τουλάχιστον μία εκροές.

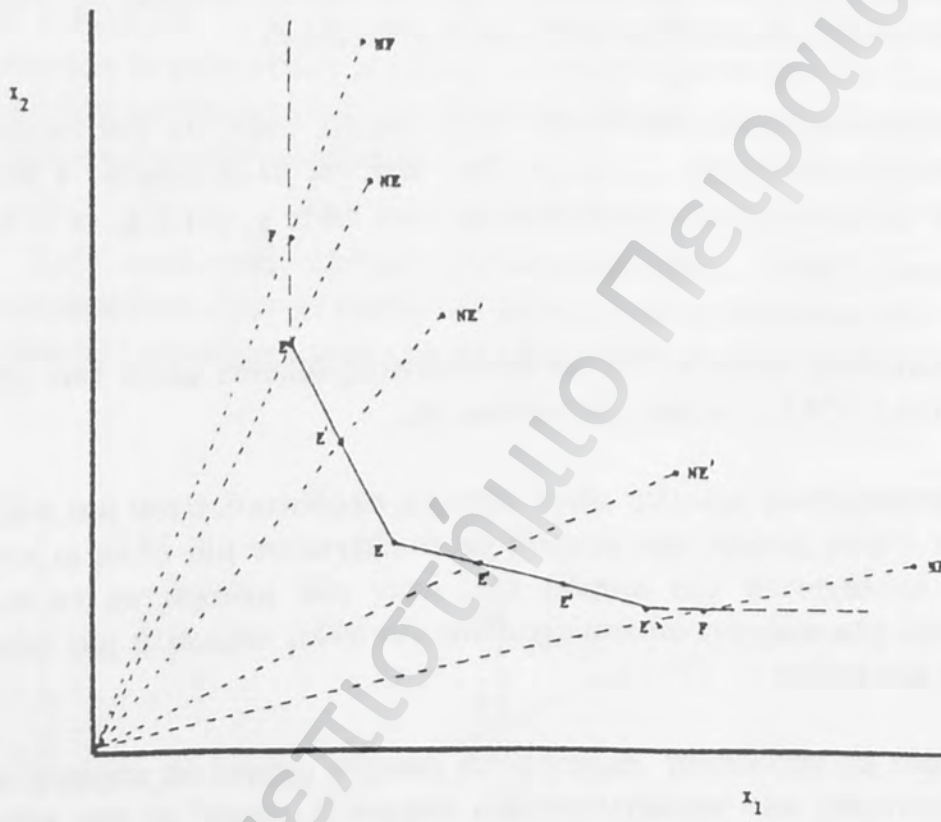
Οι εκφράσεις «αποδοτικότητα κατά Pareto» και «Pareto - Coormans αποδοτικότητα» αποδίδουν την ίδια έννοια και μπορούν να χρησιμοποιούνται εναλλακτικά.

Μπορούμε, επομένως, να ορίσουμε το σύννορο αποδοτικότητας  $P(T)$  ενός κυρτού συνόλου αναφοράς  $T$  σαν το υποσύνολο του  $T$  αποτελούμενο από τα αποδοτικά κατά Pareto σημεία, ήτοι :

$$P(T) = \{(X, Y) \in T / X' \leq X, Y' \geq Y, (X', Y') \neq (X, Y) \Rightarrow (X', Y') \in T\}$$

Δηλαδή, το σύννορο αποδοτικότητας αποτελείται από εκείνα τα σημεία του  $T$  που δεν κυριαρχούνται από κάποια άλλα σημεία (undominated points).

Το  $P(T)$  και η εξάρτησή του από το σύνολο αναφοράς  $T$  απεικονίζονται στο σχήμα 3 (Charnes, Cooper, Thrall, 1986), όπου οι συντεταγμένες  $X_1, X_2$  εκφράζουν τις παρατηρούμενες τιμές εισροών, διαφορετικών παραγωγικών μονάδων, που απαιτούνται ανά μονάδα εκροής.



Σχήμα 2.3

Τα σημεία  $E$  είναι αποδοτικά και αποτελούν τις κορυφές του αποδοτικού συνόρου. Εάν το σύνολο αναφοράς  $T$  είναι κυρτό, τα σημεία  $E'$  είναι επίσης αποδοτικά, αφού προκύπτουν από κυρτούς γραμμικούς συνδυασμούς των  $E$  σημείων.

Τα σημεία  $F$  δεν είναι αποδοτικά κατά Pareto αφού κυριαρχούνται από τα σημεία  $E$ . Τέλος, τα σημεία  $NF$ ,  $NE$ ,  $NE'$  είναι καθαρά μη αποδοτικά, ανεξαρτήτως συνόλου αναφοράς.

Προκειμένου να διαμορφώσουμε συνθήκες αναγκαίες για κάποια σημεία να ανήκουν στο σύνορο αποδοτικότητας, (ή εναλλακτικά περιβάλλουσα επιφάνεια), θα πρέπει να διατυπώσουμε προηγουμένως κάποιες απαραίτητες έννοιες.

Εστω  $K$  ο κώνος που παράγεται από όλα τα διανύσματα  $(y_1, \dots, y_s, -x_1, \dots, -x_m)$ .

Η  $j^{\text{th}}$  παραγωγική μονάδα προσδιορίζεται από το διάνυσμα  $P_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj}, -x_{1j}, \dots, -x_{mj})$ .

Η γενική εξίσωση ενός υπερεπίπεδου στον χώρο  $R^{m+s}$  με κανονικά διανύσματα:

$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s, -v_1, \dots, -v_m)$

$$\text{είναι } \sum_{r=1}^m \mu_r y_r - \sum_{j=1}^s v_j x_j - \phi = 0$$

Το παραπάνω υπερεπίπεδο ονομάζεται υπερεπίπεδο υποστήριξης (supporting hyperplane), εάν και μόνον εάν όλα τα σημεία  $(Y_j, X_j)$  βρίσκονται επάνω ή κάτω από το υπερεπίπεδο και επιπλέον το υπερεπίπεδο διέρχεται από τουλάχιστον ένα από αυτά τα σημεία. Οι συνθήκες αυτές διατυπώνονται από τις παρακάτω αντίστοιχες εξισώσεις :

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{j=1}^m v_j x_{ij} - \phi \leq 0 \text{ για όλα τα } j = 1, \dots, n \quad (\Sigma 1)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk} - \sum_{j=1}^m v_j x_{jk} - \phi = 0 \text{ για κάποια } k .$$

Οι συνθήκες αυτές εκφράζονται από το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (Ali, Seiford, 1993) για την παραγωγική μονάδα  $\rho$ , όπου οι παρατηρούμενες τιμές  $x_{ij}$ ,  $y_{rj}$  των μονάδων είναι οι σταθερές και μεταβλητές είναι οι  $\mu_r$ ,  $v_i$  και  $\phi$ .



$$\max \sum_{r=1}^s y_r \mu_r - \sum_{i=1}^m x_i v_i - \varphi$$

κάτω από

$$\sum_{r=1}^s y_r \mu_r - \sum_{i=1}^m x_i v_i - \varphi \leq 0, j=1, \dots, n$$

$$\mu_r \geq 1, r=1, \dots, s$$

$$v_i \geq 1, i=1, \dots, m$$

όπου το σύνολο των περιορισμών διασφαλίζει ότι όλα τα σημεία (παραγωγικές μονάδες) βρίσκονται επάνω ή κάτω από το υπερεπίπεδο:

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_r - \sum_{i=1}^m v_i x_i - \varphi = 0,$$

ενώ η αντικειμενική συνάρτηση μετράει την απόσταση της μονάδας  $\rho$  από το υπερεπίπεδο. Μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης επιλέγει ένα υπερεπίπεδο που ελαχιστοποιεί την απόσταση.

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μη θετική, που σημαίνει ότι η βέλτιστη τιμή μηδέν υποδεικνύει ότι η μονάδα  $\rho$  βρίσκεται επάνω στο υπερεπίπεδο, ενώ οι μη μηδενικές τιμές αντιστοιχούν σε μονάδες που βρίσκονται κάτω από το πλησιέστερο υπερεπίπεδο υποστήριξης.

Η ανάλυση απαιτεί την επίλυση η προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, όπως το προηγούμενο, ένα για κάθε παραγωγική μονάδα.

Κάθε ένα από τα  $n$  σύνολα τιμών  $\{\mu_r, v_i, \varphi\}$  είναι οι συντελεστές των υπερεπιπέδων που ορίζουν πλευρές (τμήματα) του συνόρου αποδοτικότητας.

Από το παραπάνω πρόγραμμα διαφαίνεται ο χαρακτηρισμός ενός σημείου (μονάδος) ως αποδοτικού. Το σημείο  $\rho$  είναι αποδοτικό, εάν βρίσκεται σε μια πλευρά του υπερεπιπέδου που ορίζεται από τη βέλτιστη λύση  $\{\mu_r, v_i, \varphi\}$ ,  $\rho=1,2,\dots,n$ .

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό ότι για δύο διανύσματα :

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$$

$$\alpha^T = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i$$

οι προηγούμενες διαπιστώσεις συνοψίζονται στην ακόλουθη πρόταση :

**Πρόταση 1.1.** : Εστω  $(y,x) \in T$ . Τότε  $(y,x) \in P(T)$  εάν και μόνον εάν υπάρχουν  $\mu \in \mathbb{R}^s, \nu \in \mathbb{R}^m$  που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες (Σ1) :

$$\mu^T Y - \nu^T X - \varphi \leq 0$$

$$\mu^T y - \nu^T x - \varphi = 0$$

$$\mu > 0, \nu > 0$$

Η απόδειξη της πρότασης δίδεται στο παράρτημα 1. Η πρόταση διατυπώνει ότι ένα σημείο του συνόλου αναφοράς  $T$  βρίσκεται στην αποδοτική πλευρά του  $T$ , εάν υπάρχει ένα υπερεπίπεδο υποστήριξης με θετικό κανονικό διάνυσμα που ικανοποιεί τις προηγούμενες συνθήκες (Σ1).

**Ορισμός** : Μια αποδοτική πλευρά (efficient face) του συνόλου αναφοράς  $T$  είναι μια πλευρά του  $T$  που περιέρχεται στο  $P(T)$ .

Με βάση τον προηγούμενο ορισμό και την πρόταση 1.1. διαμορφώνεται το ακόλουθο λήμμα (Lang, Yolalan, Kettani, 1994):

**Λήμμα 1** : Η  $F$  είναι αποδοτική πλευρά εάν και μόνον εάν υπάρχουν  $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^{s+m}$  έτσι ώστε :

$$\mu^T y - \nu^T X - \varphi = 0 \quad (y,x) \in F$$

$$\mu^T y - \nu^T x - \varphi < 0 \quad (y,x) \in T \setminus F$$

$$\mu > 0, \nu > 0$$

**Λήμμα 2** : Εστω  $F$  μία αποδοτική πλευρά,  $(y,x) \in F \setminus \{0\}$  και  $Y^F, X^F$  είναι οι υποπίνακες που σχηματίζονται από τις στήλες των  $Y, X$  πινάκων που αντιστοιχούν στα κατά Pareto αποδοτικά σημεία (τα σημεία  $E$  και  $E'$  του σχήματος 2). Τότε :

(i)  $F = \{(Y^F \Theta, X^F \Theta) / \Theta \in \mathbb{R}^{1 \times (T)^m}, \Theta > 0\}$

(ii) Η  $F$  είναι η μικρότερη αποδοτική πλευρά που περιέχει το  $(y,x)$  εάν και μόνον εάν :  $Y^F \Theta = y, X^F \Theta = X$  έχει λύση  $\Theta > 0$ .

Το παραπάνω λήμμα διατυπώνει ότι κάθε αποδοτικό σημείο μπορεί να εκφραστεί μέσω αποδοτικών παρατηρήσεων.

Εκτενέστερη εξέταση των υπερεπιπέδων που υποστηρίζουν μια αποδοτική πλευρά διερευνά τους τύπους αποδόσεων οικονομιών κλίμακας που επιτυγχάνονται σε αυτή την πλευρά.

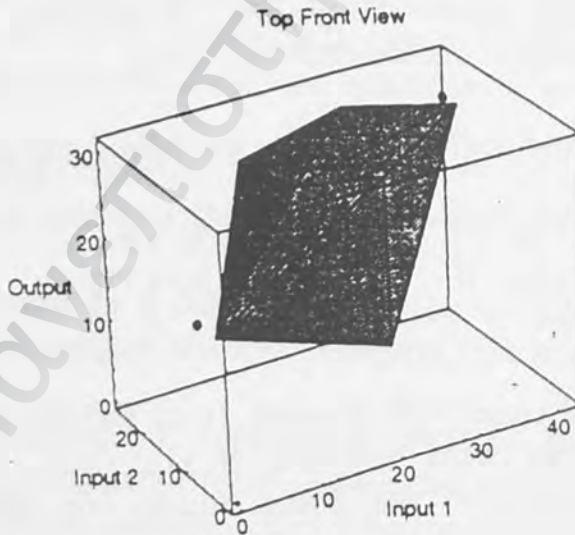
Μια περιβάλλουσα επιφάνεια μεταβλητών οικονομιών κλίμακος - VRS (Variable Returns to Scale) αποτελείται από τμήματα που προκύπτουν από την τομή των υπερεπιπέδων υποστήριξης στον χώρο  $R^{m+s}$  και του κυρτού κελυφους των σημείων  $(Y_j, X_j)$   $j=1, \dots, n$  στον χώρο  $R^{m+s}$ .

Ένα υπερεπίπεδο  $\mu^T Y - v^T X + \varphi = 0$  τέμνει το κυρτό κέλυφος σε μια πλευρά (τμήμα) της επιφάνειας εάν και μόνον εάν  $\mu^T Y_j - v^T X_j + \varphi =$

$$= \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \varphi \leq 0$$

για όλα τα  $j=1, \dots, n$  ( η ισότητα με τουλάχιστον ένα  $j$ ).

Μια τέτοια επιφάνεια αποδίδεται στο ακόλουθο σχήμα (Fried, Lovell, Schmidt 1993) . Τα δεδομένα που αντιστοιχούν στο σχήμα αναφέρονται στο παράρτημα .



Σχήμα 2.4.

Η ανάλυση της αποδοτικότητας που συνδέεται με επιφάνειες οι οποίες εκφράζουν μεταβλητές αποδόσεις οικονομιών κλίμακος είναι αυτή που διατυπώθηκε στα προηγούμενα με τις ισχύουσες εξισώσεις, προτάσεις και λήμματα.

Σημαντική συνεισφορά σε αυτό τον τομέα έχει γίνει από τους (Banker, 1984) , (Banker, Charnes, Cooper, 1984) , (Banker, Thrall, 1992).

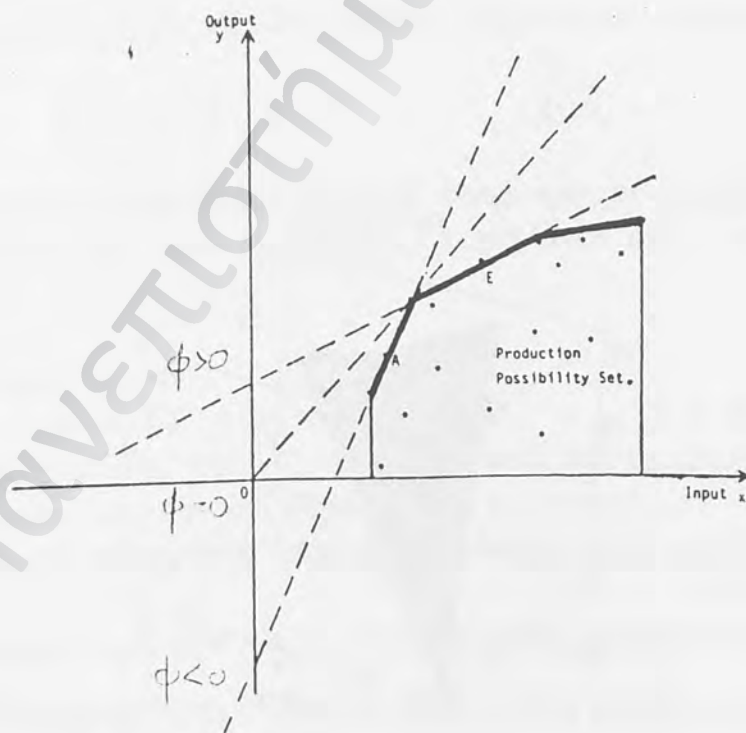
Σε δεδομένη πλευρά του συνόλου αναφοράς το πρόσημο της τεταγμένης υποδεικνύει τις οικονομίες κλίμακος που ισχύουν . Έτσι, έχουμε:

αυξουσες αποδόσεις οικονομιών κλίμακος  $\Leftrightarrow \phi < 0$

σταθερές αποδόσεις οικονομιών κλίμακος  $\Leftrightarrow \phi = 0$

φθίνουσες αποδόσεις οικονομιών κλίμακος  $\Leftrightarrow \phi > 0$

Τα παραπάνω αποδίδονται στο ακόλουθο σχήμα (Banker , Charnes, Cooper, 1984) , όπου οι αποδόσεις οικονομιών κλίμακος διερευνώνται στην περιοχή του σημείου E. Εχουμε, επομένως, ότι  $\phi > 0$  για την τιμή της τεταγμένης που είναι συνυφασμένη με την εφαπτόμενη στο σημείο E. Για το προηγούμενο τμήμα, όπου εμφανίζεται το σημείο A, έχουμε  $\phi < 0$  και, επομένως, παρουσιάζονται αύξουσες αποδόσεις . Τέλος, στην τομή των δύο προηγούμενων τμημάτων, έχουμε  $\phi = 0$  και άρα ισχύουν σταθερές αποδόσεις οικονομιών κλίμακος .



Σχήμα 2.5

Η όλη θεώρηση που αναπτύχθηκε προηγουμένως, για περιβάλλουσες επιφάνειες που εμφανίζουν μεταβλητές αποδόσεις οικονομιών κλίμακος, ισχύει κατ' αντιστοιχία και για επιφάνειες που εμφανίζουν σταθερές αποδόσεις οικονομιών κλίμακος.

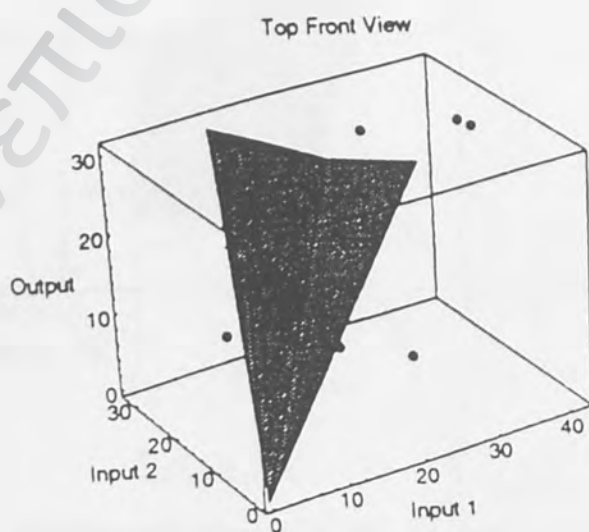
Μια τέτοια περιβάλλουσα επιφάνεια - CRS (Constant Returns to Scale) αποτελείται από υπερεπίπεδα στον χώρο  $R^{m+s}$  που σχηματίζουν συγκεκριμένες πλευρές του κωνικού κελυφους των σημείων  $(y_j, x_j) \quad j = 1, \dots, n$ .

Ένα υπερεπίπεδο  $\mu^T Y - v^T X = 0$  τέμνει τον κυρτό κώνο σε μια πλευρά της επιφανείας CRS (αποδοτικού συνόρου) εάν και μόνον εάν  $\mu^T Y_j - v^T X_j =$

$$= \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0$$

για όλα τα  $j=1, \dots, n$  ( η ισότητα με τουλάχιστον ένα  $j$ ).

Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται μία επιφάνεια σταθερών αποδόσεων οικονομιών κλίμακος με τα ίδια δεδομένα του σχήματος 3.



Σχήμα 2.6

Σε αντίθεση με τις επιφάνειες - VRS , όλα τα υπερεπίπεδα που υποστηρίζουν επιφάνειες σταθερών αποδόσεων οικονομικών κλίμακος διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Έτσι,  $\Phi=0$  και η εξίσωση για ένα τέτοιο υπερεπίπεδο γίνεται :

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_r - \sum_{i=1}^m v_i x_i = 0$$

Η πρόταση 1.1. διαμορφώνεται στην ακόλουθη πρόταση :

**Πρόταση 1.1.** : Εστω  $(Y,X) \in T = T_{CRS}$ . Τότε  $(Y,X) \in P(T)$  εάν και μόνον εάν υπάρχουν με  $R^s, V \in R^m$  που ικανοποιούν τις συνθήκες (Σ2) :

$$\begin{aligned} \mu^T Y - v^T X &\leq 0 \\ \mu^T y - v^T x &= 0 \\ \mu &> 0, v > 0 \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας αυτήν την ενότητα θα δώσουμε την οικονομική ερμηνεία των συνιστωσών  $\mu$  και  $v$  των κανονικών διανυσμάτων (Charnes, Cooper, Rhodes, 1978, Charnes, et al 1985, Banker, 1986) , η οποία αντανακλά παραγωγικά χαρακτηριστικά μετρούμενα στο περιθώριο συγκεκριμένου τμήματος του συνόρου αποδοτικότητας.

Όλα τα αποδοτικά κατά Pareto σημεία ικανοποιούν την εξίσωση (Λήμμα 1) :

$$\mu^T y - v^T x - \phi = 0 \quad (y,x) \in F$$

Επειδή η αποδοτική πλευρά είναι γραμμική επιφάνεια, είναι παντού διαφορήσιμη και όλες οι μερικές παράγωγοι είναι σταθερές σε όλη την επιφάνεια.

Επομένως, εάν:

$$F(X,Y) = \mu^T y - v^T x - \phi = 0 \quad (y,x) \in F$$

οι λόγοι  $\mu_r^* = \partial F / \partial y_r$  και  $-v_i^* = \partial F / \partial x_i$  εκφράζουν τα οριακά προϊόντα (marginal products) των εισροών και εκροών, ενώ ο λόγος  $\partial y_r / \partial x_i = -v_i^* / \mu_r^*$  δηλώνει την οριακή παραγωγικότητα (marginal productivity) των αντίστοιχων εκροών-εισορών .

Επίσης,  $\partial x_{i1} / \partial x_{i2} = -v_{i2}^* / v_{i1}^*$  εκφράζει τον οριακό λόγο αντικατάστασης των εισροών (Marginal Rate of Substitution) καθώς και  $\partial y_{r1} / \partial y_{r2} = -\mu_{r2}^* / \mu_{r1}^*$  εκφράζει τον οριακό λόγο υποκατάστασης μεταξύ των εκροών.

Στις προηγούμενες παραγράφους αναπτύξαμε την έννοια και την δομή ενός συνόλου δυνατοτήτων παραγωγής (συνόλου αναφοράς).

Είδαμε ότι κάτω από ένα σύνολο παραδοχών διαμορφώνονται εναλλακτικά σύνολα αναφοράς, τα οποία αποδίδουν εναλλακτικές οικονομικές ερμηνείες σχετικά με την αποδοτικότητα, και, επομένως, διαμορφώνουν εναλλακτικά μοντέλα της μεθόδου ΠΑΔ. Η μέθοδος ΠΑΔ, τα μοντέλα που την περιγράφουν καθώς και ανάλυση και ερμηνεία τους είναι ο στόχος της επόμενης ενότητας.

## 2.2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ. ΜΟΝΤΕΛΟ CCR (CHARNES, COOPER, RHODES).

Η ΠΑΔ αποτελεί εφαρμογή του γραμμικού προγραμματισμού για να προσδιορίσει σύνορα παραγωγής, τα οποία χρησιμοποιούνται στην αξιολόγηση της αποδοτικότητας παραγωγικών μονάδων (DMUs) που χρησιμοποιούν ίδιες εισροές και παράγουν ίδιες εκροές, σε διαφορετικές, όμως, ποσότητες.

Πολλαπλές εισροές και εκροές μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ΠΑΔ με διαφορετικές μονάδες μέτρησης η κάθε μία.

Η μέθοδος χρησιμοποιείται περισσότερο:

- (i) για να εντοπίσει τα μη αποδοτικά DMUs
- (ii) για να προσδιορίσει τις πηγές και τις ποσότητες μη αποδοτικότητάς τους, για κάθε μη εισροή και εκροή.

Η ΠΑΔ πρωτοπαρουσιάστηκε από τους Charnes, Cooper, Rhodes (1978) για την εκτίμηση της σχετικής αποδοτικότητας σε μη κερδοσκοπικούς οργανισμούς και τον Δημόσιο Τομέα, μπορεί δε να θεωρηθεί σαν επέκταση της έννοιας της τεχνικής αποδοτικότητας, δοσμένης από τον Farrell (1957).

Η σχετική τεχνική αποδοτικότητα (technical efficiency) μιας παραγωγικής μονάδας (DMU) υπολογίζεται σχηματίζοντας τον λόγο του σταθμικού αθροίσματος των εκροών προς το σταθμικό άθροισμα των εισροών, όπου οι συντελεστές βαρύτητας (weights) επιλέγονται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να υπολογίζεται η κατά Pareto αποδοτικότητα της υπό εξέταση μονάδας.

Η τεχνητή αποδοτικότητα εστιάζεται στα φυσικά επίπεδα των εκροών που επιτυγχάνονται, δεδομένων των φυσικών επιπέδων των εισροών, σε αντίθεση με την κατανομητική αποδοτικότητα (allocative efficiency) η οποία αναφέρεται στο κατάλληλο μίγμα των εισροών, δεδομένων των τιμών των εισροών. Η μεθοδολογία της ΠΑΔ επιλύει το ακόλουθο μη γραμμικό κλασματικό πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού για κάθε DMU.



$$\max h_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \quad (CCR)$$

κάτω από

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad \forall r, i$$

όπου :

- 0 = η μονάδα που αξιολογείται από το σύνολο των
- j = 1, ..., n μονάδων
- r = 1, ..., s είναι ο αριθμός των εκροών
- i = 1, ..., m είναι ο αριθμός των εισροών
- y<sub>rj</sub> = η εκροή r που πραγματοποιήθηκε στη μονάδα j
- x<sub>ij</sub> = η εισροή i που χρησιμοποιήθηκε στη μονάδα j
- v<sub>i</sub> u<sub>r</sub> = οι συντελεστές για την εισροή i και την εκροή r που μεγιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση για κάθε μονάδα που εξετάζεται.

Η σχετική αποδοτικότητα κάθε DMU επιτυγχάνεται θεωρώντας στο πρόβλημα (CCR) τους συντελεστές u<sub>r</sub>, v<sub>i</sub>, σαν μεταβλητές και μεγιστοποιώντας την αποδοτικότητα του DMU<sub>0</sub> κάτω από τον περιορισμό ότι κανένα DMU με το ίδιο σύνολο συντελεστών βαρύτητας δε θα έχει αποδοτικότητα μεγαλύτερη από 1.

Το (CCR) μπορεί να μετατραπεί σε γραμμικό πρόβλημα (Charnes, Cooper, 1962) θέτοντας τον παρανομαστή ίσο με κάποια σταθερά και μεγιστοποιώντας τον αριθμητή. Έτσι, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς:

$$v_i = tv_i \quad j=1, \dots, m$$

$$u_r = tu_r \quad r=1, \dots, s$$

$$t > 0$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$$

προκύπτει το ακόλουθο ισοδύναμο γραμμικό πρόβλημα, το οποίο περιορίζει το σταθμικό άθροισμα των εισροών να είναι μονάδα και μεγιστοποιεί τις εκροές που, κατ' αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνονται.

$$\max Y_o = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro}$$

κάτω από

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \quad (1)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j=1, \dots, n \quad (2)$$

$$\mu_r \geq 0, v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m \quad r=1, \dots, s$$

Το προηγούμενο πρόβλημα έχει το αντίστοιχο δυικό του, το οποίο προσφέρει επιπρόσθετες χρήσεις και ερμηνείες. Έτσι, στον περιορισμό [1] αντιστοιχεί η μεταβλητή  $\Theta_o$ , χωρίς περιορισμό στο πρόσημο, και στον περιορισμό [2] αντιστοιχεί η μεταβλητή  $\lambda_j \geq 0$ . Προκύπτει, κατ' αυτόν τον τρόπο, το ακόλουθο δυικό πρόβλημα, που επιζητεί τιμές  $\lambda_j$  για να κατασκευάσει ένα σύνθετο DMU με εισροές  $\sum \lambda_j x_{ij}$  ( $i=1, \dots, m$ ) και εκροές  $\sum \lambda_j y_{rj}$  ( $r=1, \dots, s$ ) το οποίο να υπερέχει του υπό αξιολόγηση DMUο.

$$\min \Theta_o$$

κάτω από

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r=1, \dots, s$$

$$x_{io} \Theta_o - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \geq 0 \quad i=1, \dots, m$$

$$\lambda_j \geq 0, \Theta_o \text{ χωρίς περιορισμό}$$

Το προηγούμενο πρόβλημα εκτιμά την οριακή αποδοτικότητα. Δηλαδή, ένα DMU μπορεί να ανήκει στο σύνορο αποδοτικότητας χωρίς να είναι ΠΑΔ – αποδοτικό, εφ’ όσον είναι δυνατόν να χρησιμοποιεί εισροές ή εκροές περισσότερες ή μικρότερες απ’ ό,τι χρειάζεται. Η δυσκολία αυτή αντιμετωπίστηκε (Charnes et al, 1979) με την εισαγωγή αυστηρά θετικών περιορισμών των μεταβλητών στο μοντέλο (CCR),  $u_r \geq \varepsilon$ ,  $v_i \geq \varepsilon$ , όπου  $\varepsilon$  ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός (π.χ.  $10^{-6}$ ). Με τους νέους περιορισμούς και τη χρήση των προηγούμενων μετασχηματισμών διατυπώνεται το ακόλουθο ζεύγος δυικών προβλημάτων :

$$\max Y_o = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro}$$

κάτω από

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \quad (\text{CCRp -I})$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j=1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \mu_r &\geq \varepsilon & v_i &\geq \varepsilon \\ \varepsilon &> 0 & i &= 1, \dots, m \quad r = 1, \dots, s \end{aligned}$$

$$\min Z_o = \Theta_o - \varepsilon \left( \sum_{j=1}^m s_j^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right)$$

κάτω από

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \quad r=1, \dots, s \quad (\text{CCRp -I})$$

$$x_{io} \Theta_o - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- = 0 \quad i=1, \dots, m$$

$$\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0$$

Ο καθορισμός των προηγούμενων μοντέλων σε πρωτεύον και δυικό είναι αυθαίρετος. Μολονότι στο αρχικό άρθρο (Charnes et al, 1978) το μοντέλο (CCR<sub>D</sub> - I) θεωρείται ως πρωτεύον, στην παρούσα διατριβή ονομάζεται πρωτεύον το (CCR<sub>p</sub> - I) πρόβλημα, εφ' όσον αποδίδει καλύτερα τη βασική ιδέα πίσω από την μέθοδο ΠΑΔ.

Χρησιμοποιώντας τους εναλλακτικούς συμβολισμούς της προηγούμενης ενότητας, τα μοντέλα διατυπώνονται ως εξής :

$$\min Z_o = \Theta_o - \varepsilon^T \cdot s^+ - \varepsilon^T \cdot s^-$$

κάτω από

$$\begin{aligned} Y_\lambda - s^+ &= Y_o \\ \Theta_o X_o - X\lambda - s^- &= 0 && \text{(CCR}_p\text{ - I)} \\ \lambda, s^+, s^- &\geq 0 \end{aligned}$$

και

$$\max Y_o = \mu^T Y_o$$

κάτω από

$$\begin{aligned} v^T X_o &= 1 && \text{(CCR}_D\text{ -I)} \\ \mu^T Y - v^T X &\leq 0 \\ \mu^T &\geq \varepsilon^T, v^T &\geq \varepsilon^T \end{aligned}$$

Τα παραπάνω μοντέλα εκτιμούν την αποδοτικότητα από την κατεύθυνση της μείωσης των εισροών (Input-Oriented) πράγμα που αποδίδεται συμβολικά με τον χαρακτήρα I στην ονομασία του μοντέλου.

Επιπρόσθετα, το μοντέλο (CCR) αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως κλασματικό μοντέλο (fractional model), το (CCR<sub>D</sub>- I) ως σταθμικό μοντέλο (weight or multiplier model) και το (CCR<sub>p</sub> - I) αναφέρεται ως μοντέλο περιβάλλουσας επιφανείας (envelopment model) .

Εναλλακτικά, η αποδοτικότητα μπορεί να εκτιμηθεί από την κατεύθυνση της αύξησης των εκροών (Output - Oriented). Τα μοντέλα που εκφράζουν αυτήν την κατεύθυνση προκύπτουν από λογική ανάλογη με εκείνη των προηγούμενων μοντέλων και είναι τα ακόλουθα :

$$\min v^T X_o / \mu^T Y_o$$

$$\begin{aligned} \text{κάτω από } v^T X_j / \mu^T Y_j &\geq 1 & j=1, \dots, n & \quad (\text{CCR-0}) \\ \mu^T &\geq \varepsilon^T, v^T &\geq \varepsilon^T & \end{aligned}$$

$$\max \Phi_o + \varepsilon^T \cdot s^+ + \varepsilon^T \cdot s^-$$

κάτω από

$$\begin{aligned} \Phi_o Y_o - Y\lambda + s^+ &= 0 & (\text{CCRp-0}) \\ X\lambda + s^- &= X_o \\ \lambda, s^+, s^- &\geq 0 & \Phi_o \text{ χωρίς περιορισμό} \end{aligned}$$

$$\min v^T X_o$$

κάτω από

$$\begin{aligned} \mu^T Y_o &= 1 & (\text{CCR}_o - 0) \\ -\mu^T Y_o + v^T X &\geq 0 \\ \mu^T &\geq \varepsilon^T, v^T &\geq \varepsilon^T \end{aligned}$$

### 2.2.1. ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ CCR

Στην παρούσα παράγραφο δίδεται η ερμηνεία και ανάλυση των βασικών μοντέλων (CCR<sub>D</sub> - I) και (CCR<sub>P</sub> - I) από την κατεύθυνση της μείωσης των εισροών (η περίπτωση της κατεύθυνσης αύξησης των εκροών μπορεί να ερμηνευθεί κατά παρόμοιο τρόπο). Τα μοντέλα αυτά αξιολογούν την αποδοτικότητα των DMU<sub>o</sub>, κάτω από σταθερές αποδόσεις οικονομικών κλίμακος, επιλύοντας ξεχωριστά για κάθε DMU ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού στο σύνολο αναφοράς T<sub>CRs</sub>.

Κάθε DMU που αξιολογείται από την ΠΑΔ θα έχει βαθμό αποδοτικότητας  $Y_o^*$  (βέλτιστη τιμή, CCR<sub>D</sub> - I)  $0 \leq Y_o^* \leq 1$ . Εάν  $Y_o^* < 1$  το DMU<sub>o</sub> χαρακτηρίζεται ως μη αποδοτικό, συγκρινόμενο με κάποια αποδοτικά DMU<sub>s</sub> (υποσύνολο αναφοράς). Εάν  $Y_o^* = 1$ , το υπό αξιολόγηση DMU<sub>o</sub> χαρακτηρίζεται ως ΠΑΔ - αποδοτικό.

Οι μεταβλητές  $\mu_r, \nu_i$  ονομάζονται «εικονικοί μετασχηματισμοί» ή «πολλαπλασιαστές» (virtual transformations or multipliers) ή είναι συντελεστές βαρύτητας και ορίζουν, μέσω της επιλογής τους από το πρόγραμμα, την «εικονική εκροή» (virtual output)

$$y_o = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro}$$

και την «εικονική εισροή» (virtual input)

$$x_o = \sum_{i=1}^m \nu_i x_{io}$$

για το υπό αξιολόγηση DMU<sub>o</sub>.

Ετσι, το πρόβλημα (CCR<sub>D</sub>- I) έχει την εξής ερμηνεία (Charnes et al, 1989):

Επιλέγονται τιμές για τους εικονικούς μετασχηματισμούς  $\mu_j$ ,  $\nu_i$  οι οποίες μεγιστοποιούν την εικονική εκροή του DMU<sub>o</sub> κάτω από τον περιορισμό ότι η εικονική εισροή του ισούται με τη μονάδα. Οι τιμές των εικονικών μετασχηματιστών πρέπει να λάβουν κατά τέτοιο τρόπο υπόψη τους τις παρατηρήσεις όλων των DMU<sub>s</sub>, ώστε να μην επιτρέπεται οι μετασχηματιζόμενες εκροές να υπερβαίνουν τις μετασχηματιζόμενες εισροές.

Κάθε ένα από τα η σύνολα τιμών  $\{\mu_j, \nu_i\}$   $j = 1, \dots, n$  είναι οι συντελεστές (ή κανονικά διανύσματα) των υπερεπιπέδων υποστήριξης τα οποία προσδιορίζουν πλευρές της περιβάλλουσας επιφανείας.

Επίσης, οι βέλτιστες τιμές των  $\mu_j^*$ ,  $\nu_i^*$  δηλώνουν «αποδοτικές ανταλλαγές» μεταξύ εισροών και εκροών μέσω των σχέσεων :

$$\partial y_{r_0} / \partial x_{i_0} = \nu_{i_0}^* / \mu_{r_0} \quad \text{οριακή παραγωγικότητα}$$

$$\partial -x_{i_1} / \partial -x_{i_2} = -\nu_{i_2}^* / \nu_{i_1}^* \quad \text{οριακός λόγος υποκατάστασης των εισροών}$$

(βλέπε ενότητα 2.1).

Εξάλλου, η δυική θεωρία, προσφέρει επιπρόσθετες ερμηνείες για τους βέλτιστους συντελεστές βαρύτητας. Έτσι, για κάθε μείωση /μονάδα της εισροής  $i$ , η αποδοτικότητα του DMU<sub>o</sub> αυξάνει κατά  $\nu_{i_0}^*$ . Όμοια, για κάθε αύξηση/μονάδα της εκροής  $r$ , ο βαθμός αποδοτικότητας του DMU<sub>o</sub> αυξάνει κατά  $\mu_{r_0}^*$ .

Οι μεταβλητές  $\mu_j$  και  $\nu_i$  θα έχουν κάποια θετική τιμή λόγω του ότι το  $\epsilon$  είναι θετικό. Ο ρόλος του  $\epsilon$  στο πρωτεύον και το δυικό πρόβλημα είναι να εξαιρεθούν από το σύνολο αποδοτικότητας εκείνα τα DMU που θεωρούνται αποδοτικά, αν και χρησιμοποιούν μεγαλύτερη ποσότητα κάποιας εισροής από εκείνη που χρειάζεται ή παράγουν μικρότερη ποσότητα κάποιας εκροής απ' ό,τι δύνανται (Miliotis, 1992).

Το  $\epsilon$  μπορεί να ερμηνευθεί ως το αντίστροφο του μεγάλου  $M$  που είναι συνδεδεμένο με τις τεχνητές μεταβλητές (artificial variables) στη μέθοδο Simplex.

Οι τιμές αυτές ονομάζονται «non Archimedean» στα μαθηματικά και μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς να απαιτείται να προσδιορισθεί η τιμή τους αριθμητικά.

Το  $\Theta_0^*$  (βέλτιστη τιμή) είναι το μικρότερο αριθμητικό μέγεθος για το οποίο το διάνυσμα :

$P'_j = (y_1, \dots, y_s), -\Theta_0^* x_1, \dots, -\Theta_0^* x_m$  ) ανήκει στον κώνο K. Ο K παράγεται από όλα τα διανύσματα  $(y_1, \dots, y_s, -x_1, \dots, -x_m)$  για τα οποία :

$$0 \leq y_r \leq \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \quad r=1, \dots, s$$

$$-x_j \leq \sum_{j=1}^n -x_{ij} \lambda_j \leq 0 \quad j=1, \dots, m$$

όπου  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  είναι ένα μη αρνητικό διάνυσμα και το  $DMU_j$  προσδιορίζεται από το διάνυσμα :

$$P_j = (y_1, \dots, y_{sj}, -x_j, \dots, -x_{mj})$$

Η μεταβλητή  $\Theta_0$  στο μοντέλο  $(CCR_p - I)$  υποδεικνύει την αναλογική μείωση που πρέπει να γίνει σε όλες τις εισροές του υπό εξέταση  $DMU_0$ , προκειμένου να βελτιώσει την αποδοτικότητά του. Οι  $s_r^-$  και  $s_r^+$  είναι χαλαρές μεταβλητές που εκφράζουν την επιπρόσθετη βελτίωση (έπειτα από την αναγωγή μέσω του  $\Theta_0$ ) που μπορεί να συμβεί στις εισροές και εκροές αντίστοιχα.

Έτσι, η βελτιστοποίηση μπορεί να υπολογισθεί μέσω μιας διαδικασίας δύο βημάτων, όπου στο πρώτο βήμα επιτυγχάνεται η μέγιστη μείωση των εισροών μέσω του βέλτιστου  $\Theta_0^*$  και στο δεύτερο βήμα η κίνηση προς το σύνορο αποδοτικότητας επιτυγχάνεται μέσω των μεταβλητών  $s_r^-$  και  $s_r^+$ .

Η παρουσία, επομένως, του  $\epsilon$  στην αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου  $(CCR_p - I)$  είναι να επιτρέψει τη μείωση μέσω του  $\Theta_0$  πριν τη βελτιστοποίηση μέσω των  $s_r^-$ ,  $s_r^+$ . Η διαδικασία βελτιστοποίησης μέσω των δύο βημάτων μπορεί να διατυπωθεί με δύο ξεχωριστά μοντέλα (Banker et al 1986) (Charnes, Cooper, Lewin, Seiford, 1994).



Οι μεταβλητές  $s_i, s_r$  περιορίζονται να είναι μη αρνητικές. Προκύπτει, επομένως ότι :

$$y_{r_0} \leq \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j$$

και

$$\Theta_0 x_{i_0} \leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j$$

όπου  $y_{r_0}$  και  $x_{i_0}$  είναι οι παρατηρούμενες τιμές εκροών και εισροών του  $DMU_0$ .

Ετσι, μια βέλτιστη λύση δημιουργεί δύο υπερεπίπεδα τα οποία περιβάλλουν τις εκροές του  $DMU_0$  από επάνω και τις εισροές του από κάτω, προσδίδοντας, κατ' αυτόν τον τρόπο, την ονομασία «Π.Α.Δ» στη μεθοδολογία. Οπως αναφέρθηκε, η βέλτιστη τιμή της μεταβλητής  $\Theta_0$  εκτιμά τον βαθμό αποδοτικότητας κάθε  $DMU$ . Από το δυϊκό θεώρημα του μαθηματικού προγραμματισμού ισχύει :

$$\text{Min } Z_0 = \Theta_0^* = \text{Max } Y_0 = Y_0^*$$

όπου οι αστερίσκοι υποδηλώνουν βέλτιστες τιμές .

Επίσης, οι μετασχηματισμοί των Charnes - Cooper που χρησιμοποιήθηκαν για την μετάβαση από το μοντέλο (CCR) στα επόμενα μοντέλα διατηρούν την προηγούμενη ισότητα , έτσι ώστε η ίδια βέλτιστη τιμή ισχύει για τα μοντέλα (CCR),  $(CCR_r - I)$  και  $(CCR_D - I)$ .

Ετσι λοιπόν,  $0 < \Theta_0^* \leq 1$ , όπου ένα  $DMU$  είναι μη αποδοτικό, εάν ο βαθμός αποδοτικότητας είναι μικρότερος της μονάδος ( $\Theta_0^* < 1$ ) . Εάν  $\Theta_0^* = 1$ , τότε το υπό εξέταση  $DMU$  βρίσκεται επάνω στο σύνορο αποδοτικότητας . Εν τούτοις, ένα  $DMU$  μπορεί να αποτελεί οριακό σημείο ( $\Theta_0^* = 1$ ) και να είναι μη αποδοτικό . Τα ισοδύναμα σκέλη της ακόλουθης πρότασης αποσαφηνίζουν την αποδοτικότητα των  $DMU_s$  (Seiford, Trhall, 1990).

### Πρόταση 2.1. :

1. Ένα DMU<sub>o</sub> είναι αποδοτικό εάν και μόνον εάν οι ακόλουθες συνθήκες ικανοποιούνται :

$$(i) \Theta_o^* = 1$$

$$(ii) s_j^- = 0, s_r^+ = 0 \text{ για όλα τα } i \text{ και } r.$$

2. Ένα DMU είναι αποδοτικό εάν και μόνον εάν  $Y_o^* = Z_o^* = 1$

Επιπρόσθετα υπάρχει αντιστοιχία των τιμών της μεταβλητής  $\lambda_j$  στο (CCR<sub>p</sub> - I) μοντέλο και της αποδοτικότητας των DMU<sub>s</sub>.

### Πρόταση 2.2. :

Για το αποδοτικό DMU<sub>j</sub> ισχύει  $\lambda_j^* = 1$  και  $\lambda_k^* = 0$  , για  $k \neq j$  . Αντίστοιχα για το μη αποδοτικό DMU<sub>o</sub> ,  $\lambda_o^* = 0$ .

### Απόδειξη

Θεωρούμε τις μεταβλητές χαλαρότητας του πρωτεύοντος και δυϊκού , δηλαδή:

$$s_j^- = x_{jo} \Theta - \sum_j \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, m \quad (1)$$

$$s_r^+ = y_{ro} + \sum_j y_{rj} \lambda_j \geq 0 \quad r=1, \dots, s \quad (2)$$

$$t_i = -\sum_r \mu_r y_{ri} + \sum_i v_i x_{ij} \geq 0 \quad j=1, \dots, n \quad (3)$$

Εάν το DMU<sub>j</sub> είναι αποδοτικό, τότε  $\Theta^* = 1$  και  $s_j^- = s_r^+ = 0$ , και από τις (1) και (2) είναι προφανές ότι  $\lambda_j^* = 1$  ,  $\lambda_k^* = 0$  με  $k \neq j$ .

Εάν το DMU<sub>o</sub> είναι μη αποδοτικό, τότε ισχύει :  $Y_o^* = Z_o^* < 1$ .

Επιπλέον, από το Complementary Slackness Theorem , για τις μεταβλητές χαλαρότητας, έχουμε :

$$s_i^- v_i = s_r^+ \mu_r = t_j \lambda_j = 0 \text{ για όλα τα } i, r, j.$$

Τότε  $t_o = -z_o^* + 1 > 0$  , επομένως  $\lambda_o^* = 0$  . Επίσης, κάποιο υποσύνολο των υπολοίπων  $\lambda_j^*$  ( $j \neq 0$ ) είναι θετικό.

## 2.2.2.ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ (REFERENCE SET OR PEER GROUP)

Μια παραγωγική μονάδα ( $DMU_0$ ) με βαθμό αποδοτικότητας  $Max h_o = h_o^* < 1$  σημαίνει ότι το  $DMU_0$  είναι σχετικά μη αποδοτικό, συγκρινόμενο με κάποια  $DMU_j$  με τιμές :

$$\sum_{r=1}^s u_r r_j / \sum_{j=1}^m v_j x_{0j} = 1$$

στο σύνολο περιορισμών του μοντέλου (CCR). Αυτά τα αποδοτικά  $DMU_j$  αποτελούν το υποσύνολο αναφοράς του  $DMU_0$  και είναι εκείνα που έχουν τιμές  $\lambda_j^* > 0$  στο μοντέλο (CCR<sub>p</sub>-I) (Πρόταση 3.2.).

Κάθε  $DMU$  του υποσυνόλου αναφοράς έχει συντελεστές βαρύτητας τους συντελεστές του μη αποδοτικού  $DMU_0$  και προσδιορίζεται άμεσα από την λύση του μοντέλου (CCR<sub>D</sub>-I). Η λύση του μοντέλου (CCR<sub>p</sub>-I) προσδιορίζει ένα σύνθετο  $DMU$  που σχηματίζεται από τα  $DMU_j$  του υποσυνόλου αναφοράς με  $\lambda_j^* > 0$ .

Αποδεικνύεται (πρόταση 1.1. και Complementary Slackness Θεώρημα) ότι το υποσύνολο αναφοράς του μη αποδοτικού  $DMU_0$ , βρίσκεται επάνω στο κοινό υπερεπίπεδο υποστήριξης.

$$\mu_0^* Y - v_0^* X = 0 \quad \forall j \text{ αποδοτικό}$$

Επιπλέον, τα υπερεπίπεδα υποστήριξης που διαμορφώνονται από το μοντέλο (CCR<sub>D</sub>-I) διέρχονται από την αρχή των αξόνων, με επακόλουθο οι βαθμοί αποδοτικότητας των μοντέλων (CCR) να εκτιμώνται κάτω από σταθερές αποδόσεις οικονομικών κλίμακας.

Τα υποσύνολα αναφοράς αποτελούν σημαντικές πηγές πληροφοριών για τη Διοίκηση (Thanassoulis 1987, Boussofiane et al 1991, Canley & Cubin, 1992).

Επιτρέπουν στη Διοίκηση να προσδιορίσει και να κατανοήσει τις δυσκολίες αποδοτικότητας του μη αποδοτικού  $DMU_0$ , συγκρίνοντάς το με το υποσύνολο αναφοράς του. Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι συχνά βοηθητικό να γίνει αναγωγή (scaling) του διανύσματος εισροών/εκροών, του υποσυνόλου αναφοράς, με το μη αποδοτικό  $DMU$  για λόγους συγκρισιμότητας.

### 2.2.3. ΣΤΟΧΟΙ ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ

Για τα μη αποδοτικά DMU, είναι επιθυμητό να τεθούν στόχοι βελτίωσης των εισροών - εκροών, έτσι ώστε να οδηγηθούν σε αποδοτικές συμπεριφορές.

Λόγω της ακτινικής ιδιότητας της μεθόδου, ένα μη αποδοτικό DMU μπορεί να βελτιωθεί μειώνοντας όλες τις εισροές του σε ίση αναλογία.

Όλα τα μοντέλα της ΠΑΔ παράγουν ένα σύνολο ποσοτήτων εισροών - εκροών που καθιστούν τα μη αποδοτικά DMU, σχετικά αποδοτικά.

Ετσι, χρησιμοποιώντας το (CCR<sub>p</sub> -I) μοντέλο, μπορούμε να διατυπώσουμε τη βέλτιστή του λύση ως ακολούθως:

$$\Theta_0^* x_{i0} - s_i^{*-} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j^* \quad i=1, \dots, m$$

$$y_{r0} + s_r^{*+} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^* \quad r=1, \dots, s$$

Το αριστερό μέρος των ανωτέρω περιορισμών παρέχει τους στόχους βελτίωσης των εισροών και εκροών αντίστοιχα του DMU<sub>0</sub>, ενώ από το δεξιό μέρος των περιορισμών προκύπτει το υποσύνολο αναφοράς. Κατ' αυτόν τον τρόπο, το μη αποδοτικό DMU<sub>0</sub> μπορεί να βελτιώσει τα επίπεδα εισροών - εκροών του από

$(x_{i0}, y_{r0})$  σε  $(\hat{x}_{i0}, \hat{y}_{r0})$  αντίστοιχα, όπου:

$$\hat{x}_{i0} = \Theta_0^* x_{i0} - s_i^{*-} \leq x_{i0}, \quad i=1, \dots, m$$

$$\hat{y}_{r0} = y_{r0} + s_r^{*+} \geq y_{r0}, \quad r=1, \dots, s$$

Εναλλακτικά το μη αποδοτικό  $(x_{i0}, y_{r0})$  συγκρίνεται με το σημείο του αποδοτικού συνόρου  $(\hat{x}_{i0}, \hat{y}_{r0})$  το οποίο εκφράζεται μέσω γραμμικών συνδυασμών:

$$\hat{x}_{i0} = \sum_k x_{ik} \lambda_k^*, \quad \hat{y}_{r0} = \sum_k y_{rk} \lambda_k^*$$

με  $\lambda_k^* \geq 0$

Οι προηγούμενες σχέσεις αφορούν βελτιώσεις των μη αποδοτικών DMU<sub>i</sub> από την κατεύθυνση μείωσης των εισροών και ονομάζονται «τελεστές προβολής» (projection operators, Charnes et al 1978), αφού προβάλλουν τις παρατηρούμενες εισροές  $(x_{i0}, y_{i0})$  του DMU<sub>i</sub> στο σημείο

$(x_{i0}, y_{i0})$  του συνόρου αποδοτικότητας.

Οι αξιολογήσεις οι οποίες προκύπτουν από τα προηγούμενα μοντέλα υπόκεινται στις ακόλουθες σημαντικές παρατηρήσεις - ιδιότητες της μεθόδου:

1. Το μοντέλο (CCR) παράγει ένα απεριόριστο αριθμό λύσεων. Εάν  $(u^*, v^*)$  είναι βέλτιστη λύση, τότε  $(au^*, av^*)$  είναι επίσης βέλτιστη λύση για  $a > 0$ , (Seiford, Thrall, 1990).

2. Στο μοντέλο (CCR<sub>p</sub> - I) υπάρχουν  $(m+s)$  περιορισμοί που πρέπει να ικανοποιηθούν για κάθε ένα από τα  $j = 1, 2, \dots, n$  DMU<sub>j</sub> που συμμετέχουν στην ανάλυση.

Λόγω των βαθμών ελευθερίας που θεωρούνται, θα πρέπει ο αριθμός των μεταβλητών  $\lambda_j$  που χρησιμοποιούνται στην λύση του προβλήματος να είναι τουλάχιστον ίσος με τον αριθμό των περιορισμών. Δηλαδή  $n \geq (m+s)$  και σύμφωνα με τους (Charnes et al, 1989)  $n \geq 3(m+s)$ .

Η παραπάνω παρατήρηση αποτελεί εμπειρικό κανόνα αφού προκύπτει σαν άμεσο αποτέλεσμα των διαστάσεων των εισροών - εκροών σε σχέση με τον αριθμό του DMU<sub>i</sub>.

Στη βιβλιογραφία έχει δειχθεί (Nunamaker, 1985) ότι «όσο περισσότερες μεταβλητές χρησιμοποιούνται, τόσο αυξάνει η πιθανότητα κάποια μη αποδοτικά DMUs να κυριαρχήσουν στις προστιθέμενες διαστάσεις και να καταστούν έτσι αποδοτικά». Κατ' αυτόν τον τρόπο, μειώνεται η δύναμη της ΠΑΔ να διακρίνει αποδοτικά και μη DMUs, αφού ένα DMU μπορεί να καταστεί αποδοτικό επεκτείνοντας μόνον το σύνολο των μεταβλητών που εισέρχονται στην ανάλυση χωρίς να αυξήσει την παραγωγική του προσπάθεια.

3. Μια άλλη ιδιότητα των μοντέλων είναι ότι παραμένουν αμετάβλητα ως προς τις μονάδες μέτρησης των DMUs (units invariant) . Αυτό σημαίνει ότι οι βαθμοί αποδοτικότητας είναι ανεξάρτητοι από τις μονάδες μέτρησης κάθε εισροής και εκροής, αρκεί να χρησιμοποιούνται οι ίδιες μονάδες μέτρησης για κάθε DMU. Τούτο οφείλεται στο απειροστό  $\varepsilon$  της αντικειμενικής συνάρτησης, το οποίο καταστέλλει τις μη μηδενικές μεταβλητές χαλαρότητας επειδή :

$$\varepsilon (\sum_j s_r^- + \sum_j s_r^+) \approx \varepsilon$$

Οι προηγούμενες αναλύσεις αναφέρονται στα μοντέλα (CCR-I) από την κατεύθυνση της μείωσης των εισροών . Κατ' αντιστοιχία, ισχύουν οι ανάλογες διατυπώσεις και ερμηνείες για τα ίδια μοντέλα από την κατεύθυνση, όμως, της αύξησης των εκροών (CCR-0).

Το ακόλουθο θεώρημα διατυπώνει την αντιστοιχία μεταξύ των βελτίστων λύσεων στα μοντέλα των δύο κατευθύνσεων.

### **Θεώρημα 2.1.**

Εστω  $(\Theta_o^*, \lambda^*)$  η βέλτιστη λύση του μοντέλου (CCR<sub>p</sub> -I). Τότε  $(\Phi_o, \lambda') = (1/\Theta_o^*, \lambda^* \cdot 1/\Theta_o^*)$  αποτελεί βέλτιστη λύση για το μοντέλο (CCR<sub>p</sub> -0) και η απεικόνιση  $(\Theta_o, \lambda) \rightarrow (1/\Theta_o, \lambda \cdot 1/\Theta_o)$  είναι 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των βελτίστων λύσεων των δύο μοντέλων.

### **Απόδειξη**

Για κάθε DMU<sub>o</sub>, ο περιορισμός  $\Theta_o X_o - X\lambda \geq 0$  συνεπάγεται ότι  $\Theta_o^* > 0$  και το εφικτό διάνυσμα  $[\lambda_o = 1, \lambda_j = 0 \text{ για } j \neq 0, \Theta = 1]$  για το (CCR<sub>p</sub> -I) συνεπάγεται ότι  $\Theta_o^* \leq 1$ . Επίσης το εφικτό διάνυσμα  $[\lambda_o = 1, \lambda_j = 0 \text{ για } j \neq 0, \Phi_o = 1]$  συνεπάγεται ότι  $\Phi_o^* \geq 1$ .

Σύγκριση μεταξύ των περιορισμών των μοντέλων (CCR<sub>p</sub> -I) και (CCR<sub>p</sub> -0) συνεπάγεται ότι η αντιστοίχιση  $(\Theta_o, \lambda) \rightarrow (1/\Theta_o, \lambda \cdot 1/\Theta_o)$  είναι ένα προς ένα μεταξύ εφικτών λύσεων.

Λόγω του ότι η αντικειμενική συνάρτηση στο  $(CCR_p -0)$  είναι μεγιστοποίηση, συμπεραίνουμε ότι  $\Phi_o^* \geq 1/\Theta_o^*$ . Από την αντίστροφη απεικόνιση συμπεραίνουμε παρόμοια ότι  $\Theta_o^* \leq 1/\Phi_o^*$  άρα  $\Theta_o^* \Phi_o^* = 1$  και, επομένως, οι βέλτιστες λύσεις για το  $(CCRR_p -1)$  έχουν 1-1 αντιστοιχία στις βέλτιστες λύσεις του  $(CCR_p -0)$ .

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

## 2.3. ΜΟΝΤΕΛΟ BCC (BANKER, CHARNES, COOPER) -ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΩΝ ΚΛΙΜΑΚΟΣ

Κάθε διαφορετικό μοντέλο της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων (ΠΑΔ) ζητά να προσδιορίσει ποιες από τις η παραγωγικές μονάδες (DMUs) ορίζουν την περιβάλλουσα επιφάνεια ή σύνορο αποδοτικότητας.

Η καταλληλότητα ενός συγκεκριμένου συνόρου συχνά υπαγορεύεται από προϋποθέσεις, κυρίως οικονομικές, που αφορούν στο σύνολο δεδομένων το οποίο υπεισέρχεται στην ανάλυση.

Στη βιβλιογραφία της αποδοτικότητας οι βελτιώσεις στην παραγωγή εξετάζονται σύμφωνα με τους ακόλουθους πέντε βασικούς τρόπους :

- παράγοντας τις ίδιες εκροές, χρησιμοποιώντας λιγότερες εισροές
- παράγοντας περισσότερες εκροές, χρησιμοποιώντας το ίδιο επίπεδο εισροών
- παράγοντας περισσότερες εκροές, χρησιμοποιώντας λιγότερες εισροές
- μεγαλύτερη αύξηση των εκροών από μια αύξηση των εισροών
- μικρότερη μείωση των εκροών από μια μείωση των εισροών

Στην ορολογία της ΠΑΔ οι τρεις πρώτες κατευθύνσεις αφορούν στην «τεχνική αποδοτικότητα» και εξετάζονται από τα μοντέλα της προηγούμενης ενότητας. Οι τελευταίες δύο κατευθύνσεις εντάσσονται στην κατηγορία των «αποδόσεων οικονομίων κλίμακος».

Στην οικονομική θεωρία οι αποδόσεις οικονομίων κλίμακος είναι :

- αύξουσες (IRS), εάν μια αύξηση στις εισροές συνεπάγεται μεγαλύτερη από την αναλογική αύξηση στις εκροές
- φθίνουσες (DRS), εάν η αύξηση στις εκροές είναι μικρότερη από την αναλογική αύξηση των εισροών
- σταθερές (CRS), εάν μια αύξηση (μείωση) των εισροών συνεπάγεται αναλογική αύξηση (μείωση) των εκροών.

Μολονότι υπάρχουν αρκετές αναφορές στο πεδίο αυτό, η εκτίμηση των αποδόσεων οικονομίων κλίμακος διερευνήθηκε αρχικά από τον Banker (Banker 1984, Banker ,Charnes ,Cooper, 1984) .



Οι αποδόσεις οικονομιών κλίμακος εκτιμώνται κάτω από το σύνολο αναφοράς  $T_{VRS}$  όπου :

$$T_{VRS} = \{(X, Y) / X \geq \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j, Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0\}$$

Το σύνολο  $T_{VRS}$  προκύπτει με την αναίρεση της παραδοχής 3 (ενότητα 1). Η παραδοχή 3 (Ray Unboundness) επιτρέπει την εκτίμηση σταθερών αποδόσεων οικονομιών κλίμακος, εφ' όσον μια μη περιορισμένη ακτίνα μπορεί να δημιουργηθεί από απεριόριστη επέκταση ή συρρίκνωση των βέλτιστων τιμών  $\lambda_j^*$ . Η προσθήκη του περιορισμού  $\sum_j \lambda_j^* = 1$  (και επομένως αναίρεση της παραδοχής 3) αποκλείει την κατασκευή της μη περιορισμένης ακτίνας, αφού το απεριόριστο διάνυσμα επέκτασης δεν είναι πλέον δυνατόν να δημιουργηθεί.

Κατ' αυτόν τον τρόπο, η αναίρεση της παραδοχής 3 εστιάζει την προσοχή στην εκτίμηση της αποδοτικότητας πάνω στο δεδομένο επίπεδο λειτουργίας κάθε DMU.

Θεωρώντας το μοντέλο (CCR<sub>p</sub>-I):

$$\min \theta_0 - \varepsilon \left[ \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right]$$

κάτω από

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} - \lambda_j - s_r^+ = y_{r0} \quad r=1, \dots, s$$

$$\theta_0 x_{i0} - \sum x_{ij} \cdot \lambda_j - s_i^- = 0 \quad i=1, \dots, m$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0$$

ορίζεται η νέα μεταβλητή  $k$  ως :

$$k = \sum_{j=1}^n \lambda_j^*$$

Διαιρώντας τους περιορισμούς του προηγούμενου μοντέλου με το θετικό  $k$  έχουμε :

$$\min \Theta_0 - \varepsilon \left[ \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right]$$

κάτω από

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \cdot \lambda_j / k - s_r^+ / k = 1/k \cdot y_{r0} \quad r=1, \dots, s$$

$$\Theta_0 / k \cdot x_{i0} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot \lambda_j / k - s_i^- / k = 0 \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j / k = 1$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0$$

Ορίζοντας νέες μεταβλητές  $\alpha, \beta, \mu_j$  ως :  
διατυπώνεται το ακόλουθο πρόβλημα :

$$\mu_j = \frac{\lambda_j}{k}, \quad \alpha = \frac{1}{k}, \quad \beta = \frac{\theta_0}{k}$$

$$\min \beta / \alpha - \varepsilon \left( \sum_{r=1}^m s_i^- + \sum_{s=1}^s s_r^+ \right)$$

κάτω από

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \cdot \mu_j - s_r^+ = \alpha \cdot y_{r0} \quad r=1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot \mu_j + s_i^- = \beta \cdot y_{i0} \quad j=1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j = 1$$

$$\mu_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0$$

όπου το σύνολο αναφοράς του προηγούμενου μοντέλου είναι :

$$T_{VRS} = \{(\alpha, \beta) / \beta \cdot X_0 \geq \sum X_j \cdot \mu_j, \alpha \cdot Y_0 \leq \sum Y_j \cdot \mu_j, \sum \mu_j = 1, \mu_j \geq 0\}$$

με  $\alpha$  και  $\beta$  να είναι αναλογικές μεταβολές (αύξηση ή μείωση) σε όλες τις εκροές και εισροές, αντίστοιχα, του υπό εξέταση DMU.

**Πρόταση 2.3 (Banker, 1984)** : Αύξουσες αποδόσεις οικονομιών κλίμακος αντιστοιχούν σε  $k > 1$  και φθίνουσες αποδόσεις οικονομιών κλίμακος αντιστοιχούν σε  $k < 1$ .

Η προηγούμενη πρόταση διατυπώνει ότι «τοπικές» αποδόσεις οικονομιών κλίμακος μπορούν να εκτιμηθούν μέσω του μοντέλου (CCR<sub>p</sub> -I) και της μεταβλητής  $k$ . Με τον όρο «τοπικές» νοείται ότι οι εκτιμήσεις των αποδόσεων ισχύουν μόνον για την τρέχουσα θέση του DMU<sub>0</sub>. Επίσης, σταθερές αποδόσεις οικονομιών κλίμακος αντιστοιχούν στην τιμή  $k=1$ .

Σύμφωνα επομένως με τις προηγούμενες αναφορές διατυπώνονται τα ακόλουθα μοντέλα (γνωστά ως BBC μοντέλα από τους Banker, Charnes, Cooper) το πρωτεύον (BCC<sub>p</sub> -I) και το δυϊκό (BCC<sub>D</sub> -I), τα οποία εκτιμούν την αποδοτικότητα από την κατεύθυνση μείωσης των εισροών :

$$\min \Theta_0 - \varepsilon \left[ \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right]$$

κάτω από

$$\Theta_0 \cdot x_{i0} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- = 0 \quad (\text{BCC}_p - \text{I})$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0$$

για  $j=1, \dots, n$      $i=1, \dots, m$      $r=1, \dots, s$

και

$$\max \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} - u_0$$

κάτω από

$$\sum_{j=1}^m v_j x_{1j} = 1 \quad (\text{BCC}_D - I)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - u_o \leq 0$$

$$\mu_r > \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s \quad i = 1, \dots, m$$

Η αντιστοιχία μεταξύ του αριθμού των περιορισμών στο ένα πρόβλημα και του αριθμού των μεταβλητών στο άλλο διατηρείται, εφ' όσον στον επιπλέον περιορισμό του πρωτεύοντος  $\sum \lambda_j = 1$  αντιστοιχεί η επιπλέον μεταβλητή  $u_o$  του δυϊκού.

Η εκτίμηση των αποδόσεων οικονομιών κλίμακος στο δυϊκό (BCC<sub>D</sub> -I) γίνεται μέσω της μεταβλητής  $u_o$ . Κάθε ένα από τα  $n$  σύνολα τιμών  $\{\mu_r, v_{ij}, u_j\}$   $j=1, \dots, n$  είναι οι συντελεστές ή τα κανονικά διανύσματα των υπερεπιπέδων υποστήριξης που προσδιορίζουν τις πλευρές της περιβάλλουσας επιφάνειας.

Θεωρώντας το υπερεπίπεδο  $\mu^* Y - v^{*T} X - u_o^* \leq 0$  που προκύπτει από τη βέλτιστη τιμή  $\{\mu^*, v^*, u_o^*\}$ , οι Banker, Charnes, Cooper [1984] διερεύνησαν τις αποδόσεις οικονομιών κλίμακος που ισχύουν σε μια περιοχή ενός σημείου στο υπερεπίπεδο και διατύπωσαν τις ακόλουθες σχέσεις αναφορικά με την μεταβλητή  $u_o^*$ :

- \* Αύξουσες αποδόσεις οικονομιών κλίμακος  $\leftrightarrow u_o^* < 0$
- \* Σταθερές αποδόσεις οικονομιών κλίμακος  $\leftrightarrow u_o^* = 0$
- \* Φθίνουσες αποδόσεις οικονομιών κλίμακος  $\leftrightarrow u_o^* > 0$

Σε αρκετές εφαρμογές για την διερεύνηση των αποδόσεων οικονομιών κλίμακος χρησιμοποιείται, πέραν των προηγουμένων εκτιμήσεων, η έννοια του «πλέον παραγωγικού μεγέθους κλίμακος» (mpss, must productive scale size, Banker 1984).

Μια παραγωγική δυνατότητα  $(X, Y)$  αντιπροσωπεύει το πλέον παραγωγικό μέγεθος κλίμακας (mpss), εάν και μόνον εάν για κάθε παραγωγική δυνατότητα  $(\beta X, \alpha Y)$  ισχύει  $\beta \geq \alpha$  για  $\alpha, \beta$  θετικά. Μια παραγωγική δυνατότητα  $(\beta X, \alpha Y)$  ισχύει  $\beta \geq \alpha$  για  $\alpha, \beta$  θετικά. Έτσι, το mpss αντιπροσωπεύει τη μέγιστη παραγωγικότητα των πόρων για δεδομένο μείγμα εισροών - εκροών, δηλαδή, εκείνο το μέγεθος κλίμακος στο οποίο φθίνουσες αποδόσεις δεν έχουν ακόμη οριοθετηθεί, αλλά όλα τα παραγωγικά οφέλη που αποδίδονται σε αύξουσες αποδόσεις έχουν ήδη εξαντληθεί. Ο υπολογισμός του mpss προκύπτει μέσα από το μοντέλο  $(CCR_p - I)$  και τον ακόλουθο τύπο (Banker, 1984).

Για το μείγμα εισροών, εκροών  $(X_o, Y_o)$  το σημείο  $(\theta_o^* / k, X_o, 1/k^* \cdot Y_o)$  αντιπροσωπεύει μια παραγωγική δυνατότητα, η οποία είναι mpss.

Οι προηγούμενες τεχνικές εκτίμησης των αποδόσεων οικονομιών κλίμακος βασίστηκαν στην προϋπόθεση ύπαρξης μιας μοναδικής βέλτιστης λύσης, τόσο στο μοντέλο CCR όσον και στο μοντέλο BCC (Banker 1984, Banker et al 1984), και, επομένως, στην ύπαρξη ενός μοναδικού υπερεπιπέδου υποστήριξης και ενός μοναδικού mpss. Ο περιορισμός αυτός δημιουργεί εύλογη ανησυχία καθώς στις περισσότερες εφαρμογές της ΠΑΔ συναντώνται εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (Charnes et al 1986, Seiford Thrall 1990, Charnes et al 1991). Οι (Chang - Guh, 1991) επισημαίνουν το προηγούμενο πρόβλημα με τη χρήση αντιπαραδειγμάτων.

Οι Banker - Thrall (1992), αναγνωρίζοντας το πρόβλημα, προτείνουν μια βελτιωμένη μέθοδο (ύπαρξη μη μοναδικής λύσης) η οποία συνίσταται στην επίλυση δύο βοηθητικών γραμμικών μοντέλων για κάθε DMU. Σε ένα πρόσφατο άρθρο (Golany, Yu 1997) οι συγγραφείς υποδεικνύουν μια ολοκληρωμένη διαδικασία κατηγοριοποίησης των αποδόσεων οικονομιών κλίμακος μέσω δύο γραμμικών μοντέλων παραλλαγής του BCC.

### 2.3.1 ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΥ BCC

Οι αναλύσεις και ερμηνείες που διέπουν τα μοντέλα  $(BCC_p - I)$  και  $(BCC_o - I)$  είναι ίδιες με εκείνες αντίστοιχα των μοντέλων  $(CCR_p - I)$  και  $(CCR_o - I)$ . Εν τούτοις, υπάρχουν οι ακόλουθες τρεις σημαντικές διαφορές στην κατάστρωση των μοντέλων (CCR) και (BCC) με ουσιαστικές συνεπαγωγές:

\* Ο περιορισμός :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

στο μοντέλο (BCC<sub>p</sub> -I) εφιστά την προσοχή σε κυρτούς συνδυασμούς των DMU<sub>s</sub> σε αντίθεση με γραμμικούς συνδυασμούς που επιτρέπει το μοντέλο (CCR<sub>p</sub> -I).

\* Η αντίστοιχη μεταβλητή  $u_0$  στο μοντέλο (BCC<sub>D</sub> -I) αναιρεί τον περιορισμό του (CCR<sub>D</sub> -I) ότι τα υπερεπίπεδα υποστήριξης πρέπει να διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

\* Το σύνολο περιορισμών του μοντέλου (BCC<sub>p</sub> -I) είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο του (CCR<sub>p</sub> -I) (λόγω του περιορισμού κυρτότητας) . Η εφικτή , επομένως, περιοχή του (BCC<sub>p</sub> -I) είναι μεγαλύτερη από το αντίστοιχο μοντέλο (CCR<sub>p</sub> -I) με αποτέλεσμα υψηλότεροι βαθμοί αποδοτικότητας να είναι δυνατοί στο (BCC<sub>p</sub> -I) και, κατ' επέκταση, περισσότερα DMU<sub>s</sub> να χαρακτηρίζονται αποδοτικά .

Οι προτάσεις 2.1 και 2.2 ισχύουν για τα μοντέλα (BCC) , δηλώνοντας, έτσι, ότι ένα DMU είναι αποδοτικό, εάν και μόνον εάν ,  $\Theta_0^* = 1$  και  $s_i^- = 0$ ,  $s_r^+ = 0$ .

Επίσης, οι στόχοι βελτίωσης για το μη αποδοτικό DMU<sub>o</sub>, για το (BCC<sub>p</sub> -I) μοντέλο δίδονται από τους αντίστοιχους του (CCR<sub>p</sub> -I), δηλαδή τα επίπεδα βελτίωσης των εισροών - εκροών προκύπτουν από τις σχέσεις :

$$\hat{x}_{i0} = \Theta_0^* x_{i0} - s_i^- \quad i=1, \dots, m$$

$$\hat{y}_{r0} = y_{r0} + s_r^+ \quad r=1, \dots, s$$

Οι προηγούμενες αναφορές αφορούν μοντέλα από την κατεύθυνση της μείωσης των εισροών. Για την κατεύθυνση αύξησης των εκροών ισχύουν αντίστοιχες αναλύσεις και ερμηνείες. Τα μοντέλα αυτής της κατεύθυνσης είναι:

$$\max \Phi_0 + \varepsilon \left[ \sum_i s_i^- + \sum_r s_r^+ \right]$$

κάτω από

$$\Phi_0 y_{r0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} + s_r^+ = 0 \quad (\text{BCC}_p -0)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{i0}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_i^+ \geq 0$$

για  $i=1, \dots, m \quad r=1, \dots, s \quad j=1, \dots, n$

$$\min \sum v_i x_{i0} + v_0$$

κάτω από

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} = 1 \quad (\text{BCC}_D - 0)$$

$$-\sum \mu_r y_{rj} + \sum v_i x_{ij} + v_0 \geq 0$$

$$\mu_r \geq \varepsilon, v_i \geq \varepsilon, r=1, \dots, s \quad i=1, \dots, m$$

Το θεώρημα 2.1 που δίνει την αντιστοιχία μεταξύ των βέλτιστων λύσεων στις δύο κατευθύνσεις ισχύει για τα μοντέλα (BCC).

Οι προηγούμενες αναλύσεις των μοντέλων πρωτεύοντος και δυϊκού παρέχουν μια βάση κατανόησης της δομής της ΠΑΔ, υπογραμμίζοντας κυρίως τον ρόλο των ισχυρά αποδοτικών DMU<sub>s</sub> (τάξη E). Η επόμενη παράγραφος υποδεικνύει τρόπους ταξινόμησης των αποδοτικών και μη αποδοτικών DMU<sub>s</sub>.

Διατυπώνονται, κατ' αυτόν τον τρόπο, μοντέλα και θεωρήματα τα οποία, πέραν της πρακτικής σημασίας, διευρύνουν σημαντικά την ανάλυση της μεθόδου.

Το σύνολο των οριακών DMU<sub>s</sub> ( $\Theta_o^* = 1$ ) μπορεί να χωρισθεί σε τρεις τάξεις E, E', F (Σχήμα 2.3 Charnes, Cooper, Thrall 1986). Η E τάξη αποτελείται από τα ισχυρά αποδοτικά DMU<sub>s</sub>, τα οποία τοποθετούνται στις άκρες (extreme points) του αποδοτικού συνόρου. Η E' αποτελείται από τα αποδοτικά DMU<sub>s</sub> τα οποία δε βρίσκονται στις άκρες του συνόρου αλλά μπορούν να εκφραστούν σα γραμμικοί συνδυασμοί των DMU<sub>s</sub> στην E τάξη με συντελεστές  $\lambda_j$ .

Η F τάξη περιλαμβάνει DMU<sub>s</sub> τα οποία βρίσκονται στο σύνορο, αλλά δεν είναι αποδοτικά κατά Pareto.

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα στο οποίο  $\Theta = 1$ .

κάτω από

$$\min \lambda_0$$

$$s_i^- = \Theta x_{i0} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j$$

$$s_r^+ = -y_{r0} + \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j$$

$$\lambda_j \geq 0, s_r^+ \geq 0, s_i^- \geq 0 \quad (i=1, \dots, m \quad r=1, \dots, s \quad j=1, \dots, n)$$

Εάν στο προηγούμενο μοντέλο  $\min \lambda_0 = 1$  ( $\lambda_0^* = 1$ ), τότε το υπό αξιολόγηση DMU<sub>0</sub> ανήκει στην E τάξη. Διαφορετικά ( $\min \lambda_0 < 1$ ) το DMU<sub>0</sub> ανήκει στις E' UF.

Εάν ανήκει στην E' UF τάξη, επιλύεται πρόβλημα με το ίδιο σύνολο περιορισμών όπως το προηγούμενο και αντικειμενική συνάρτηση την ακόλουθη:

$$\max \sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^-$$

Τότε, εάν η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι θετική, το DMU<sub>0</sub> ανήκει στην F τάξη και, εάν η μέγιστη τιμή είναι μηδέν, το DMU<sub>0</sub> ανήκει στην E' τάξη.

Επίσης, οι προηγούμενες τάξεις μπορούν να χαρακτηρισθούν με όρους των βέλτιστων λύσεων για το αρχικό πρόβλημα (CCR μοντέλο).



Για τα μη αρνητικά μη μηδενικά  $u, v$  (CCR μοντέλο) με  $s, m$  στοιχεία αντίστοιχα, ονομάζουμε το διάνυσμα  $W = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  σαν ουσιώδη, πολλαπλασιαστή και συμβολίζουμε με  $W$  το σύνολο όλων των ουσιωδών πολλαπλασιαστών. Επίσης συμβολίζουμε με  $W_j$ , το σύνολο όλων των βελτίστων πολλαπλασιαστών για το  $DMU_j$ .

Το σύνολο των οριακά αποδοτικών  $DMU_s$  ( $\Theta_s^* = 1$ ) συμβολίζεται με  $RE$  και μπορεί να χωριστεί στις τρεις προηγούμενες τάξεις  $E, E', F$  σύμφωνα με τις ακόλουθες διατυπώσεις :

$$E = \{DMU_k \in RE / \dim W_k = s + m\}$$

$$E' = \{DMU_k \in RE / \dim W_k < s + m \text{ και υπάρχει } W \in W_k \text{ έτσι ώστε } W > 0\}$$

$$F = \{DMU_k \in RE / \text{κάθε } W \in W_k \text{ τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο}\}.$$

Επιπλέον ορίζουμε τα ακόλουθα σύνολα :

$\bar{W}_j$  : το σύνολο των πλέον κοντινών πολλαπλασιαστών του  $DMU_j$ , το οποίο συνενώνει στο  $W_j$  όλα τα οριακά σημεία του  $W_j$  στο  $W$ .

$D(j) = \{DMU_k / \bar{W}_j \subset \bar{W}_k\}$  ονομάζεται κυρίαρχο σύνολο του  $DMU_j$  και είναι το σύνολο όλων των  $DMU_s$  των οποίων οι χώροι των πλέον κοντινών πολλαπλασιαστών περιέχουν το  $W_j$ .

$E(j) = D(j) \cap E$ , είναι το σύνολο όλων των  $DMU_s$  στην τάξη  $E$ , των οποίων οι χώροι των πλέον κοντινών πολλαπλασιαστών περιέχουν το  $\bar{W}_j$ .

$J(W) = \{DMU_j / w \in W_j\}$  είναι το σύνολο όλων των  $DMU_s$  για τα οποία τα  $W$  είναι βέλτιστα.

Με βάση τις προηγούμενες έννοιες και ορισμούς, διατυπώνονται τα ακόλουθα θεωρήματα (Charnes, Cooper, Thrall 1991) τα οποία αφορούν την ταξινόμηση των  $DMU_s$  στις τάξεις  $E, E', F$ .

**Θεώρημα 2.2** : Το  $DMU_0$  ανήκει στην τάξη E, εάν και μόνον εάν ισχύει κάποια από τις ακόλουθες ιδιότητες :

- [1]  $\dim W_0 = s+m$
- [2] για κάποια  $w \in W_0$ ,  $J(W) = \{DMU_0\}$
- [3]  $\dim W_0 \cap W_j = s+m$  εάν και μόνον εάν  $j=0$
- [4] το πρωτεύον (CCR) έχει την μοναδική βέλτιστη λύση  $\lambda$
- [5]  $D(0) = E(0) = \{DMU_0\}$
- [6]  $J(W_0) = \{DMU_0\}$

**Θεώρημα 2.3** : Το  $DMU_0$  ανήκει στην τάξη E', εάν και μόνον εάν ισχύει κάποια από τις ακόλουθες ιδιότητες :

- [1]  $\dim W_0 < s+m$  και  $w^0 > 0$
- [2]  $W_0$  είναι μη κενό, το πρωτεύον (CCR) έχει περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις και  $w^0 > 0$ .
- [3]  $W_0$  είναι μη κενό,  $S^0 = 0$  και  $\dim W_0 < s+m$
- [4]  $W_0$  είναι μη κενό,  $S(0) = 0$  και  $\dim W_0 < s+m$
- [5]  $W_0$  είναι μη κενό, περιέχει τουλάχιστον ένα θετικό διάνυσμα και  $\dim W_0 < s+m$

**Θεώρημα 2.4** : Το  $DMU_0$  ανήκει στην τάξη F, εάν και μόνον εάν ισχύει οποιαδήποτε από τις ακόλουθες ιδιότητες :

- [1]  $W_0$  είναι διάφορο του κενού αλλά περιέχει μη θετικό διάνυσμα
- [2]  $W_0$  είναι διάφορο του κενού και  $W^0$  έχει τουλάχιστον ένα μηδενικό στοιχείο
- [3]  $W_0$  είναι διάφορο του κενού και  $s(0) \neq 0$
- [4]  $W_0$  είναι διάφορο του κενού και  $s^0 \neq 0$   
όπου  $S^0$  είναι το διάνυσμα των χαλαρών μεταβλητών και  $S(0)$  προέρχεται από τη σχέση ορισμού του  $DMU_0$  στον χώρο RE .

$$P_0 = \sum_{DMU_j \in E(0)} \alpha_j P_j - S(0)$$

$$\text{με } \alpha_j > 0, P_j = \begin{bmatrix} x_j \\ -x_j \end{bmatrix},$$

$S(0)$  διάνυσμα μηδενικά ισοδύναμο του  $S^0$ .

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2Α

Για την απόδειξη της πρότασης 1.1 θεωρούμε το ακόλουθο γενικό, κυρτό σύνολο αναφοράς :

$$T = \{ (x,y) / x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^s, x \geq x\theta, y \leq y\theta, \theta \geq 0, \delta^+ e^T \theta \geq \delta^+, \delta^- e^T \leq \delta^- \}$$

Λήμμα : Αν  $(x,y) \in T$ , τότε το ακόλουθο σύστημα δεν έχει λύση  $(\mu, \nu, \varphi)$ .

$$\mu^T Y - \nu^T X - \varphi \leq 0$$

$$\mu^T x - \nu^T y - \varphi > 0$$

$$\mu, \nu \geq 0$$

$$- M(\delta^+) \leq \varphi \leq M(\delta^-)$$

όπου για  $\delta = \delta^+$  ή  $\delta = \delta^-$

$$M(\delta) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \delta=0 \\ +\infty & \text{αν } \delta=1 \end{cases}$$

Απόδειξη :

Αν  $(x, y) \in T$ , τότε το ακόλουθο σύστημα έχει μια λύση  $\theta$  :

$$- Y \theta \leq - y$$

$$X \theta \leq x$$

$$- \delta^+ e^T \theta \leq - \delta^+$$

$$\delta^- e^T \theta \leq \delta^-$$

$$- \theta \leq 0$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gale για γραμμικές ανισώσεις το ακόλουθο σύστημα δεν έχει λύση  $(\mu', \nu', \rho^+, \rho^-)$  :

$$\mu'^T Y - \nu'^T X + \rho^+ \delta^+ e^T - \rho^- \delta^- e^T \leq 0$$

$$\mu'^T Y - \nu'^T X + \rho^+ \delta^+ - \rho^- \delta^- = 1$$

$$\mu', \nu', \rho^+, \rho^- \geq 0$$

Με την αλλαγή της μεταβλητής  $\varphi' = \rho^- \delta^- - \rho^+ \delta^+$  το προηγούμενο σύστημα είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο :

$$\mu'^T Y - \nu'^T X - \varphi' e^T \leq 0$$

$$\mu'^T y - \nu'^T x - \varphi' = 1$$

$$\mu' \geq 0, \nu' \geq 0$$

$$-M(\delta^+) \leq \varphi' \leq M(\delta^-)$$

ή ισοδύναμα, για  $\varepsilon > 0$  θέτοντας  $(\mu, \nu, \varphi) = \varepsilon (\mu', \nu', \varphi')$

$$\mu^T Y - \nu^T X - \varphi \leq 0$$

$$\mu^T y - \nu^T x - \varphi = 1$$

$$\mu \geq 0, \nu \geq 0$$

$$-M(\delta^+) \leq \varphi \leq M(\delta^-)$$

δεν έχει λύση  $(\mu, \nu, \varphi)$ .

Πρόταση 1.1. : Έστω  $(x, y) \in T$ . Τότε  $(x, y) \in P(T)$ , εάν και μόνον εάν υπάρχουν  $\mu \in \mathbb{R}^s, \nu \in \mathbb{R}^m$  που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες :

$$\mu^T Y - \nu^T X - \varphi \leq 0$$

$$\mu^T y - \nu^T x - \varphi = 0$$

$$\mu, \nu > 0, \quad c \text{ σταθερά}$$

Απόδειξη : Εξ ορισμού  $(x, y) \in P(T)$ , εάν και μόνον εάν  $(x, y) \in T$  και για κάθε  $d \in \mathbb{R}^s$ ,  $f \in \mathbb{R}^m$ ,  $d > 0$ ,  $f > 0$ , το ακόλουθο σύστημα δεν έχει τη λύση  $\theta$  :

$$x' \leq x$$

$$y' \geq y$$

$$d^T (y' - y) + f^T (x - x') > 0$$

$$x' \geq x\theta$$

$$y' \leq Y\theta$$

$$\delta^+ e^T \theta \geq \delta^+$$

$$\delta^- e^T \theta \leq \delta^-$$

$$\theta \geq 0$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Farka το προηγούμενο σύστημα δεν έχει λύση, εάν και μόνον εάν κάποιο από τα ακόλουθα συστήματα (I) και (II) έχει λύση :

$$\mu^T Y - v^T X - \varphi e^T \leq 0$$

$$\mu^T y - v^T x - \varphi > 0$$

$$\mu \geq 0, v \geq 0 \quad (I)$$

$$-M(\delta^+) \leq \varphi \leq M(\delta^-)$$

$$-\alpha^T + \mu^T = d^T$$

$$b^T - v^T = f^T$$

$$\mu^T Y - v^T X - \varphi e^T \leq 0 \quad (II)$$

$$-\alpha^T y + b^T x - \varphi \leq d^T y - f^T x$$

$$\alpha^T, b^T, \mu^T, v^T \geq 0$$

$$-M(\delta^+) \leq \varphi \leq M(\delta^-)$$

Εφ' όσον  $(x, y) \in T$ , το σύστημα (I) δεν μπορεί να έχει λύση με βάση το προηγούμενο λήμμα. Επομένως, το (II) έχει λύση. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την απλοποίηση του συστήματος (II) :

$$\mu^T Y - v^T X - \varphi e^T \leq 0$$

$$\mu^T y - v^T x - \varphi \geq 0$$

$$\mu^T \geq d^T$$

$$v^T \geq f^T$$

$$-M(\delta^+) \leq c \leq M(\delta^-)$$

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2B

### Δεδομένα Σχημάτων

<i>Μονάδα</i>	<i>Εκροή 1</i>	<i>Εισροή 1</i>	<i>Εισροή 2</i>
1	12	5	13
2	14	16	12
3	25	16	26
4	26	17	15
5	8	18	14
6	9	23	6
7	27	25	10
8	30	27	22
9	31	37	14
10	26,5	42	25
11	12	5	17

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΗΣ ΠΑΔ – ΦΡΑΓΜΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

#### 3.1. ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ – ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η βιβλιογραφία της ΠΑΔ περιλαμβάνει έναν αριθμό εναλλακτικών μοντέλων τα οποία είναι προεκτάσεις των βασικών μοντέλων της μεθόδου. Τα μοντέλα αυτά προέκυψαν κατά την εφαρμογή της ΠΑΔ ή από την ανάγκη να αντιμετωπισθούν κάποιες ασυνέπειες ή από την ανάγκη ανάπτυξης «κομψότερων» μοντέλων. Αρκετά από αυτά μπορεί να θεωρηθούν ως τροποποιήσεις του συνόλου αναφοράς ή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα σημαντικότερα από τα εναλλακτικά μοντέλα τα οποία αναδεικνύουν την προσαρμοστικότητα και την επιπλέον χρήση της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων.

Η ενότητα που ακολουθεί αναφέρεται στους περιορισμούς των συντελεστών βαρύτητας των μοντέλων της ΠΑΔ. Η εξάσκηση «ελέγχου» στους συντελεστές βαρύτητας προκύπτει από την μεγάλη ευελιξία που διαθέτουν οι συντελεστές στα μη φραγμένα μοντέλα.

Η ευελιξία αυτή δημιουργεί, κυρίως στην πράξη, καταστάσεις όπου εισροές ή εκροές ενδεχομένως να αγνοούνται.

##### 3.1.1. ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ (ADDITIVE MODEL)

Το προσθετικό μοντέλο εισήχθη στη βιβλιογραφία (Charnes, Cooper, Golany, Seiford, Stuz, 1985) για την ανάλυση του κατά Pareto συνόρου αποδοτικότητας.

Οι Charnes και Cooper, 1962 έδειξαν ότι το  $\chi^*$  είναι αποδοτικό κατά Pareto, εάν και μόνον εάν το  $\chi^*$  είναι βέλτιστη λύση στο επόμενο πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού :

$$\begin{aligned} & \min \sum_{k=1}^K g_k(x) \\ & \text{κάτω από} \\ & g_k(x) \leq g_k(x^*) \quad k=1, \dots, K \end{aligned}$$



Για τη διερεύνηση της κατά Pareto αποδοτικότητας του σημείου  $(X_{i_0}, Y_{i_0})$  το προηγούμενο πρόβλημα διατυπώνεται :

$$\min -\sum_{r=1}^s (\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j) + \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j)$$

$$\text{κάτω από } \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^- = y_{r_0}$$

$$-\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- = -x_{i_0}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \quad j=1, \dots, n \quad i=1, \dots, m \quad r=1, \dots, s$$

$$\text{Επειδή } -\sum_{r=1}^s (\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - y_{r_0}) + \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - x_{i_0})$$

είναι ισοδύναμη συνάρτηση με την αντικειμενική συνάρτηση του προηγούμενου προβλήματος (διαφέρουν κατά μία σταθερά), το προηγούμενο πρόβλημα διατυπώνεται στην ακόλουθη έκφραση, η οποία αποτελεί το πρωτεύον του προσθετικού μοντέλου ( $ADD_p$ ) :

$$\min z_0 = -\sum_{r=1}^s s_r^+ - \sum_{i=1}^m s_i^-$$

$$\text{κάτω από } \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{r_0}$$

( $ADD_p$ )

$$-\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- = -x_{i_0}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$s_i, s_r, \lambda_j \geq 0 \quad i=1, \dots, m \quad r=1, \dots, s \quad j=1, \dots, n$   
 Το αντίστοιχο δυϊκό είναι :

$$\max w_0 = -\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} + u_0 \quad (\text{ADD}_0)$$

$$\begin{aligned} \text{κάτω από} \quad & -\sum_{i=1}^m v_i x_{ir} + \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + u_0 \leq 0 \\ & v_i \geq 1 \\ & \mu_r \geq 1 \text{ για } i=1, \dots, m \quad r=1, \dots, s \quad j=1, \dots, n \end{aligned}$$

Το σύνολο αναφοράς του προσθετικού μοντέλου είναι το :

$$\Sigma_E = \{(x, y) : x = \bar{x}, y \leq \bar{y} \text{ για κάποια } (\bar{x}, \bar{y}) \in T_E\}$$

όπου  $T_E$  το κωνικό κέλυφος των σημείων  $(X_j, Y_j)$  έτσι ώστε :

$$T_E = \{(x, y) / x = \sum_{j=1}^n X_j \mu_j, y = \sum_{j=1}^n Y_j \mu_j, \sum_{j=1}^n \mu_j = 1, \mu_j \geq 0\}$$

Από τη δυϊκή θεωρία ισχύει  $z_0^* = w_0^*$  για τις βέλτιστες λύσεις, όπου η βέλτιστη λύση παράγει έναν βαθμό αποδοτικότητας ο οποίος μετρά την απόσταση του υπό αξιολόγηση DMU από το σύνολο αποδοτικότητας.

Οι δύο συνθήκες της πρότασης 2.1. μπορεί να αντικατασταθούν από την ακόλουθη συνθήκη :

Το  $DMU_0$  χαρακτηρίζεται ως αποδοτικό, εάν και μόνον εάν όλες οι μεταβλητές χαλαρότητας στη βέλτιστη λύση του μοντέλου ( $ADD_0$ ) είναι μηδέν. Επιπλέον, κάθε μη μηδενική μεταβλητή χαλαρότητας προσδιορίζει την ποσότητα μη αποδοτικότητας για την αντίστοιχη εισροή ή εκροή.

Έτσι, το  $DMU_0$  είναι αποδοτικό κατά Pareto, εάν και μόνον εάν  $z_0^* = w_0^* = 0$ , ενώ  $z_0^* < 0$  υποδεικνύει το μη αποδοτικό  $DMU_0$ , το οποίο βρίσκεται κάτω από το σύνολο αποδοτικότητας.

Το μη αποδοτικό  $DMU_0$  μπορεί να βελτιώσει τα επίπεδα εισροών - εκροών του από  $(x_{i0}, y_{r0})$  σε :

$$(x_{i0} = x_{i0} - s_i^*, y_{r0} = y_{r0} + s_r^*)$$

Οι βέλτιστες τιμές  $s_i^*$ ,  $s_i^*$  μετρούν την L1 απόσταση (άθροισμα των  $s^+$ ,  $s^-$ ) από το σημείο  $(x_{i0}, y_{i0})$  στο σημείο του αποδοτικού συνόρου  $(x_{i0}, y_{i0})$ .

Το δυϊκό πρόβλημα (ADD<sub>0</sub>) ζητεί να προσδιορίσει ένα υπερεπίπεδο υποστήριξης με μέγιστο  $w_{i0}$ .

Το αποδοτικό σημείο  $(x_{i0}, y_{i0})$  βρίσκεται πάνω στο υπερεπίπεδο με εξίσωση:

$$\sum_r \mu_r^* y_{r0} - \sum_l \nu_l^* x_{l0} + u_{i0}^* = 0$$

Η μεταβλητή  $u_{i0}$  στο δυϊκό έχει την ίδια έννοια και ερμηνεία όπως στο μοντέλο BCC.

Έτσι, το προσθετικό μοντέλο διερευνά αποδόσεις οικονομιών κλίμακας λόγω του περιορισμού κυρτότητας:  $\sum_j \lambda_j = 1$

Εν τούτοις, πρέπει να επισημανθεί ότι, αν και τα δύο μοντέλα παράγουν ταυτόσημα σύνορα αποδοτικότητας, οι βαθμοί αποδοτικότητάς τους διαφέρουν.

Επιπλέον, για το προσθετικό μοντέλο οι βέλτιστες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης εξαρτώνται από τις μονάδες μέτρησης.

### Ανάλυση Ευαισθησίας

Για την εκτίμηση των βαθμών αποδοτικότητας από το προσθετικό μοντέλο απαιτείται η επίλυση ξεχωριστών γραμμικών προγραμμάτων για κάθε DMU που αξιολογείται. Είναι, επομένως, σημαντικό να γνωρίζουμε πόσο ευαίσθητες είναι οι λύσεις και οι αποδοτικότητες των DMUs ως προς τις παρατηρούμενες τιμές.

Έτσι, το ενδιαφέρον εστιάζεται στις μεταβολές των εισροών - εκροών ενός αποδοτικού DMU<sub>0</sub> που διατηρεί την αποδοτικότητά του. Μειώσεις εισροών δεν είναι δυνατόν να συμβούν σε αποδοτικά DMU<sub>0</sub>. Μία μείωση σε οποιαδήποτε εισροή δε χειροτερεύει έναν αποκτηθέντα βαθμό αποδοτικότητας. Θεωρούμε, επομένως, τις μεταβολές των εισροών - εκροών ενός αποδοτικού που διατηρεί την αποδοτικότητά του DMU<sub>0</sub> σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$x_{i0} = x_{i0} + \beta_i, \quad \beta_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots, m \quad (1)$$

$$y_{r0} = y_{r0} - \alpha_r > 0, \quad \alpha_r \geq 0 \quad r=1,2,\dots, s \quad (2)$$

Εστω  $P_j, j=1,\dots,n+s+m$  οι στήλες του πίνακα συντελεστών του μοντέλου  $(ADD_p)$  και  $P_0$  το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο δεξιό μέρος των περιορισμών.

Για κάθε αποδοτικό Pareto DMU, υπάρχει μία βασική βέλτιστη λύση  $(\lambda^*, s^{*+}, s^{*-})$  του μοντέλου  $(ADD_p)$  με τον βασικό υποπίνακα :

$$B = \begin{bmatrix} Y_B & -I_B^+ & O \\ -X_B & O & -I_B^- \\ \varepsilon^T & O & O \end{bmatrix}$$

όπου  $\varepsilon$  είναι το μοναδιαίο στήλη- διάνυσμα και  $\tau$  σημαίνει αναστροφή.

Χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς (οι οποίοι προέρχονται από την θεωρία της μεθόδου Simplex) :

$$\Gamma_j = B^{-1} P_j \quad j=0,1,\dots, n+s+m$$

$$\omega^T = C_B^T B^{-1}$$

79

με  $C_B$  τους συντελεστές της βασικής λύσης στην αντικειμενική συνάρτηση :

$$Z_j = C_B^T B^{-1} P_j = \omega^T P_j, \quad j=0,1,\dots, n+s+m$$

D ο πίνακας των μεταβολών, δηλαδή :

$$D = \begin{bmatrix} O \dots O & -\alpha_1 & O \dots O \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ O \dots O & -\alpha_s & O \dots O \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ O \dots O & -\beta_1 & O \dots O \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ O \dots O & -\beta_m & O \dots O \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & O \end{bmatrix}$$

$$\tau = -1/(1+\rho)$$

$$\text{όπου } \rho = - \left( \sum_{t=1}^s b_{kt}^{-1} \alpha_t + \sum_{t=1}^m b_{kt, \text{out}} \beta_t \right)$$

και  $b_{jt}^{-1}$  είναι στοιχεία του πίνακα  $B^{-1}$ .

Τότε το ακόλουθο θεώρημα (Charnes, Neralic, 1990) διατυπώνει συνθήκες ικανές για την διατήρηση της αποδοτικότητας έπειτα από μεταβολή των εισροών - εκροών.

**Θεώρημα 3.** Οι συνθήκες  $- \tau \omega^T D\Gamma_j \geq z_j - c_j$ , όπου  $j$  δείκτης των μη βασικών μεταβλητών, είναι ικανές, προκειμένου το αποδοτικό κατά Pareto DMU<sub>o</sub> να διατηρήσει την αποδοτικότητά του, ύστερα από τη μεταβολή των εισροών - εκροών του μέσω των σχέσεων (1) και (2).

Το προηγούμενο θεώρημα κατασκευάζει μέσω των ανισοτήτων που διατυπώνει μία πολυεδρική επιφάνεια από τα διανύσματα των μεταβολών  $\alpha_t$  και  $\beta_t$ . Κάθε σημείο που αντιστοιχεί στις μεταβολές εισροών- εκροών ενός αποδοτικού DMU<sub>o</sub> ανήκει στην πολυεδρική επιφάνεια, ενώ ταυτόχρονα διατηρείται η αποδοτικότητα του, DMU<sub>o</sub>, μέσω των συνθηκών βελτιστοποίησης  $z_j - c_j \leq 0$ .

### 3.1.2. ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΟ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ (EXTENDED ADDITIVE MODEL)

Το μοντέλο αυτό (Charnes, Cooper, Rousseau, Semple, 1987) προκύπτει από το προσθετικό μοντέλο, με τροποποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης και διεύρυνση του συνόλου των περιορισμών, σύμφωνα με την ακόλουθη διατύπωση :

$$\min z_s = -\sum_{r=1}^s s_r^+ / |y_{r0}| - \sum_{i=1}^m s_i^- / |x_{i0}|$$

$$\text{κάτω από } \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{r0}$$

$$-\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- = -x_{i0}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$-s_r^+ \geq -\gamma_r y_{r0}$$

$$-s_i^- \geq -\beta_i x_{i0}$$

$$s_i^-, s_r^+, \lambda_j \geq 0 \quad i=1, \dots, m \quad r=1, \dots, s \quad j=1, \dots, n$$

όπου οι παράμετροι  $\beta_i, \gamma_r$  ορίζονται στο διάστημα μηδέν έως ένα, κατά την κρίση του ερευνητή. Το επαυξημένο μοντέλο, εκτός από την εκτίμηση της κατά Pareto αποδοτικότητας, μπορεί να αντιμετωπίσει περιπτώσεις εισροών - εκροών που ορίζονται εξωγενώς. Επιπλέον, το μοντέλο αυτό, είναι ανεξάρτητο των μονάδων μέτρησης των εισροών και εκροών.

### 3.1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ (MULTIPLICATIVE MODEL)

Για να προσδιορισθεί η σχετική αποδοτικότητα του DMU<sub>o</sub> με εισροές - εκροές (X<sub>o</sub>, Y<sub>o</sub>) οι «πολλαπλασιαστικές» εικονικές εισροές και εκροές των DMUs είναι αντίστοιχα :

$$\prod_{i=1}^m X_{ij}^{v_i} \quad \prod_{r=1}^s Y_{rj}^{\mu_r} \quad j=1, \dots, n$$

και το μοντέλο που εκτιμά την αποδοτικότητα διατυπώνεται :

$$\max \prod_{r=1}^s Y_{ro}^{\mu_r} / \prod_{i=1}^m X_{io}^{v_i}$$

κάτω από

$$\prod_{r=1}^s Y_{rj}^{\mu_r} / \prod_{i=1}^m X_{ij}^{v_i} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\mu_r \geq 1 \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq 1 \quad i = 1, \dots, m$$

Θεωρώντας τους λογάριθμους αμφοτέρων των μελών διαμορφώνεται το ακόλουθο μοντέλο :

$$\max \sum_{r=1}^s \mu_r \hat{Y}_{ro} - \sum_{i=1}^m v_i \hat{X}_{io}$$

κάτω από

$$\sum_{r=1}^s \mu_r \hat{Y}_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \hat{X}_{ij} \leq 0, \quad j=1, \dots, n$$

$$-\mu_r \leq -1, \quad r = 1, \dots, s$$

$$-v_i \leq -1, \quad i = 1, \dots, m$$

όπου ο χαρακτήρας (  $\wedge$  ) συμβολίζει λογάριθμους . Χρησιμοποιώντας συμβολισμούς πινάκων το μοντέλο διατυπώνεται στο ακόλουθο :

$$\begin{aligned} & \max \quad \mu^T \hat{Y}_0 - v^T \hat{X}_0 \\ & \text{κάτω από} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu^T \hat{Y} - v^T \hat{X} \leq 0 \\ & -\mu^T \leq -e^T \\ & -v^T \leq -e^T \end{aligned}$$

με αντίστοιχο δυϊκό :

$$\begin{aligned} & \min \quad -e^T s^+ - e^T s^- \\ & \text{κάτω από} \\ & \hat{Y}\lambda - s^+ = \hat{Y}_0 \\ & \hat{X}\lambda + s^- = \hat{X}_0 \\ & \lambda, s^+, s^- \geq 0 \end{aligned}$$

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα μοντέλα της ΠΑΔ, που χρησιμοποιούν τμηματικά γραμμικές περιβάλλουσες επιφάνειες, το πολλαπλασιαστικό μοντέλο χρησιμοποιεί τμηματικά γραμμικές λογαριθμικές επιφάνειες. Αυτό επιτρέπει στον ερευνητή να επιτυγχάνει αντιστοιχίσεις με γραμμικά λογαριθμικά παραμετρικά μοντέλα, όπως οι συναρτήσεις παραγωγής Cobb - Douglas.

Το προηγούμενο μοντέλο μπορεί να τροποποιηθεί με την εισαγωγή του περιορισμού κυρτότητας :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

και την εμφάνιση της μεταβλητής  $u_0$  στο αντίστοιχο δυϊκό (Charnes, Seiford, Stutz, 1983). Η τροποποίηση επιτρέπει την εκτίμηση αποδόσεων οικονομιών κλίμακας και γενικότερα το τροποποιηθέν μοντέλο διέπεται από τις ερμηνείες και τα σχόλια του προσθετικού μοντέλου στον μετασχηματισμένο χώρο (Log (X) , Log (Y)).



### 3.1.4. ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕ ΕΞΩΓΕΝΕΙΣ ΚΑΙ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν έως τώρα προϋποθέτουν ότι όλες οι εισροές - εκροές είναι ελεγχόμενες. Εν τούτοις έχουν διαμορφωθεί μοντέλα, τα οποία επιτρέπουν την χρήση εξωγενών καθώς και κατηγορικών μεταβλητών. Οι (Banker, Morey, 1986a), θεωρούν  $m$  εισροές εκ των οποίων οι πρώτες  $m'$  είναι ελεγχόμενες (μπορούν να μεταβάλλονται κατά την κρίση του υπεύθυνου των  $DMU_j$  και οι υπόλοιπες  $m - m'$  είναι μη ελεγχόμενες. Έτσι η αξιολόγηση του  $DMU_{j_0}$ , από την κατεύθυνση μείωσης των εισροών, διατυπώνεται από το ακόλουθο μοντέλο:

$$\begin{aligned} & \min z_{j_0} - \varepsilon \left( \sum_{i \in V_D} s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \\ \text{κάτω από} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = z_{j_0} x_{ij_0}, \quad i \in V_D \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ij_0}, \quad i \in V_F \\ & \sum_{r=1}^s \lambda_j Y_{rj} - s_r^+ = Y_{rj_0} \quad r=1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \quad s_i^- \geq 0 \quad s_r^+ \geq 0 \\ & j=1, \dots, j_0, \dots, n \quad i=1, \dots, m \quad r=1, \dots, s \end{aligned}$$

όπου  $V_F$  είναι το υποσύνολο των εξωγενών εισροών του  $j_0$   $DMU$  και  $V_D$  το υποσύνολο των ελεγχόμενων εισροών. Σημειώνεται ότι, καμμία μεταβλητή χαλαρότητας που να αντιστοιχεί σε εξωγενή, εισροή δεν εμφανίζεται στην αντικειμενική συνάρτηση. Η δομή αυτή εξασφαλίζει την προτεραιότητα στην αναγωγή των επιπέδων των ελεγχόμενων μεταβλητών και στην αύξηση των (συνέχεια) επιπέδων των εκροών, έναντι της αναγωγής των επιπέδων των μη ελεγχόμενων μεταβλητών που μπορεί να είναι εφικτές.

Οι (Thanassoulis, Dyson, 1992) τροποποιούν το προηγούμενο μοντέλο έτσι ώστε να μπορούν να επιτευχθούν επιθυμητά επίπεδα βελτίωσης των εισροών - εκροών.

Αυτό επιτυγχάνεται με την διαίρεση του συνόλου των ελεγχόμενων εισροών  $V_D$  σε δύο αμοιβαία αποκλειστικά και εξαντλημένα υποσύνολα : το  $V_{D0}$  που αποτελείται από εκείνες τις εισροές η βελτίωση των οποίων πρέπει να κινηθεί σε επιθυμητά επίπεδα, και το υποσύνολο  $v_{D0}$  που συνίσταται από εισροές το επίπεδο των οποίων είναι επιθυμητό να μην χειροτερέψει. Το μοντέλο αυτό βασίζεται σε συντελεστές βαρύτητας  $w_i^+$  και  $w_i^-$  οι οποίοι προσδιορίζονται από τον χρήστη του μοντέλου και αντανακλούν τον σχετικό βαθμό επιθυμητής βελτίωσης των επιπέδων των αντιστοίχων εισροών - εκροών.

Η ενσωμάτωση κατηγορικών μεταβλητών (categorical variables) στα μοντέλα της ΠΑΔ έχει εισαχθεί από τους (Banker, Morey, 1986b) σε δύο περιπτώσεις.

Στην πρώτη περίπτωση, οι κατηγορικές μεταβλητές αντιπροσωπεύουν πόρους μη ελεγχόμενους από τα DMU<sub>s</sub>, όπου τα DMU<sub>s</sub> αξιολογούνται συγκριτικά με μονάδες στην ίδια κατηγορία. Στη δεύτερη περίπτωση, οι μεταβλητές αντιπροσωπεύουν ελεγχόμενες εκροές.

Μία κατηγορική εκροή σε L επίπεδα (διατεταγμένα από την κατηγορία 1 στην κατηγορία L, όπου η τελευταία αντιπροσωπεύει την υψηλότερη κατεύθυνση), κωδικοποιείται στις μεταβλητές  $W_{lj}$ , έτσι ώστε το μικρότερο επίπεδο της εκροής αυτής για το j DMU παρουσιάζεται από το διάνυσμα  $W_{lj} = (0,0,\dots,0)$ , το δεύτερο μικρότερο επίπεδο δίδεται από το  $W_{lj} = (1,0,0,\dots,0)$  και το υψηλότερο επίπεδο από το  $W_{lj} = 1$  ( $l=1,2,\dots, L,1$ ).

Το πρόβλημα διατυπώνεται στο ακόλουθο μεικτό μοντέλο ακέραιου-γραμμικού προγραμματισμού για ελεγχόμενες εκροές :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{l=1}^{L-1} t_l \\ \text{κάτω από} \quad & \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ij0} \quad i=1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \leq y_{rj0} \quad r=1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} - t_l = w_{lj0} \quad l=1, \dots, L-1 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$t_{l+1} - t_l \geq 0 \quad l = 2, \dots, L-1$$

όπου  $t_l$  είναι 0-1 ακέραιοι.

Η αντικειμενική συνάρτηση προσδιορίζει το μέγιστο δυνατό κέρδος στην κατηγορική εκροή.

Ο (Kamakura, 1988) επισημαίνει την περίπτωση υπερεκτίμησης της αποδοτικότητας, από το προηγούμενο μοντέλο (λόγω του τελευταίου περιορισμού), και προτείνει την επόμενη διατύπωση, από την κατεύθυνση αύξησης των εκροών :

$$\max \Phi_0 + \varepsilon \left( \sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{l=1}^L t_l \right)$$

κάτω από

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ - \Phi_0 y_{r0} = 0 \quad r=1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0} \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j w_{lj} - t_l = w_{l0} \quad l=1, \dots, L-1 \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$t_l - t_{l-1} \leq w_{l-1, j_0} - w_{l, j_0} \quad (l=2, \dots, L) \quad (2)$$

$$s_r^+, s_i^-, \lambda_j, \Phi_0 \geq 0$$

Στην αντικειμενική συνάρτηση, ο πρώτος όρος σχετίζεται με την δυνατότητα αναλογικής αύξησης των εκροών. Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος σχετίζονται με την αύξηση των χαλαρών μεταβλητών των εκροών και την μείωση των αντιστοιχών των εισροών. Ο τέταρτος όρος σχετίζεται με την δυνατότητα βελτίωσης της κατηγορικής εκροής.

Ο περιορισμός (1) εξασφαλίζει ότι τα DMU<sub>s</sub> του σύνθετου σημείου (composite DMU) είναι του ίδιου ή υψηλότερου κατηγορικού επιπέδου. Ο περιορισμός (2) διασφαλίζει ότι οι βελτιώσεις στις κατηγορικές εκροές προσδιορίζονται ακολουθιακά (δηλαδή μετατρέποντας τα στοιχεία του διανύσματος  $[W'_j]$  σε μονάδες).

### 3.1.5 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (CHANCE CONSTRAINED EFFICIENCY EVALUATION)

Ο προγραμματισμός κάτω από περιορισμούς πιθανοτήτων (Charnes et al 1963) είναι μέθοδος βελτιστοποίησης κάτω από αβεβαιότητα όπου κάποιοι ή όλοι οι συντελεστές του μοντέλου είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κάποια κατανομή πιθανοτήτων.

Το μοντέλο αποδοτικότητας σε αυτή τη μέθοδο (Olesen , Petersen, 1995) προϋποθέτει ότι τα διανύσματα εισροών - εκροών προέρχονται από πολυδιάστατες κανονικές κατανομές. Κατ' αυτόν τον τρόπο , το σύνολο αναφοράς αντικαθιστά την παραδοχή 4 με την παραδοχή πολυδιάστατης κανονικότητας των εισροών- εκροών. Έτσι το μοντέλο έχει στατιστική θεμελίωση και διαχωρίζει τη συνολική μεταβολή των δεδομένων σε δύο συνιστώσες, εκείνη που οφείλεται στη μεταβολή της μη αποδοτικότητας και εκείνη που οφείλεται σε τυχαίες διαταράξεις των δεδομένων. Ο χώρος των εισροών - εκροών σχηματίζει περιοχές εμπιστοσύνης  $D_j$  ( $\gamma$ ) με πιθανότητα  $\gamma$  για το  $DMU_j$  οι οποίες περιγράφουν τις δυνατότητες παραγωγής του κάθε  $DMU$ . Η περιοχή εμπιστοσύνης  $D_j$  ( $\gamma$ ) είναι προσαρμοσμένη κατά τέτοιο τρόπο ώστε  $(1-\gamma)\%$  της συνολικής μεταβολής των δεδομένων να οφείλεται σε τυχαίες διαταράξεις και  $\gamma\%$  της συνολικής μεταβολής να οφείλεται σε μεταβολή της μη αποδοτικότητας.

Το μοντέλο διερευνά κατά πόσον συνδυασμοί εισροών - εκροών στην περιοχή εμπιστοσύνης του υπό αξιολόγηση  $DMU$  σχετίζονται με το σύνολο αποδοτικότητας. Ένα  $DMU$  χαρακτηρίζεται αποδοτικό, εάν και μόνον εάν η τομή της αντίστοιχης περιοχής εμπιστοσύνης και του αποδοτικού συνόρου είναι μη κενή.

### 3.1.6. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΘΥΡΟ (WINDOW ANALYSIS)

Η ανάλυση κατά παράθυρο (Bowlin 1987, Boussofiane et al 1991) είναι μέθοδος η οποία εξετάζει τις μεταβολές των αποδοτικότητας σε ένα σύνολο παραγωγικών μονάδων (DMU<sub>j</sub>) διαχρονικά. Ένα σύνολο χρονικών περιόδων (1...t) επιλέγεται και η αποδοτικότητα κάθε DMU<sub>j</sub>, j=1,...,n υπολογίζεται ξεχωριστά για κάθε περίοδο έτσι ώστε η αποδοτικότητα ενός DMU για κάθε περίοδο να λογίζεται σαν καινούργια μονάδα καταλήγοντας σε ένα συνολικό αριθμό tn μονάδων (DMU<sub>j</sub>).

Οι αποδοτικότητες που επιτυγχάνονται κατ' αυτόν τον τρόπο υποδεικνύουν την μεταβολή στον βαθμό αποδοτικότητας κάθε DMU<sub>j</sub> διαχρονικά. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης μπορούν να πινακοποιηθούν καθιστώντας, έτσι, τις ερμηνείες προσφορότερες. Οι αριθμοί σε κάθε σειρά υποδεικνύουν τη μεταβολή που υφίσταται ένα DMU<sub>j</sub> με τον χρόνο, σε ένα παράθυρο (ως παράθυρο ορίζεται μια χρονική περίοδος π.χ. τρίμηνο, τετράμηνο κλπ). Οι αριθμοί στις στήλες αντανακλούν την αξιολόγηση του DMU στην δεδομένη χρονική περίοδο καθώς το σύνολο σύγκρισης των DMU<sub>j</sub> μεταβάλλεται προοδευτικά. Για την παρουσία της μεθόδου, θα χρησιμοποιήσουμε ένα υποθετικό παράδειγμα (Boussofiane et al 1991). Έστω ότι πρόκειται να αξιολογηθούν 10 καταστήματα μιας τράπεζας για τα οποία υπάρχουν δεδομένα 3 χρόνων εκφρασμένα σε τρίμηνο. Έτσι αν θεωρήσουμε ως «περίοδο» το τρίμηνο, διαθέτουμε συνολικά 12 χρονικές περιόδους. Μπορεί επομένως να ορισθεί παράθυρο 3 περιόδων, δηλαδή 3 τριμήνων. Το πρώτο παράθυρο περιλαμβάνει τις 3 πρώτες περιόδους (1,2 και 3) το δεύτερο δημιουργείται παραλείποντας την 1<sup>η</sup> περίοδο και ενσωματώνοντας την 4<sup>η</sup>, δηλαδή το δεύτερο παράθυρο είναι το (2, 3, 4) και ούτω καθεξής, δημιουργούνται συνολικά 10 παράθυρα. Κάθε κατάσταση στις 3 περιόδους του παραθύρου θεωρείται ξεχωριστή μονάδα έτσι ώστε η αξιολόγηση σε κάθε παράθυρο περιλαμβάνει 30 μονάδες. Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορεί να κατασκευασθεί ο ακόλουθος πίνακας :

**Σχετική Αποδοτικότητα (%)**

Περίοδος :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>Κατάστημα 1</b>												
Παράθυρο 1	87.8	87.3	88.4									
Παράθυρο 2		87.4	87.5	87								
.....												
Παράθυρο 10										94.3	97	97.7
<b>Κατάστημα 2</b>												
Παράθυρο 1	83.9	85.7	86.1									
.....												
<b>Κατάστημα 10</b>												
Παράθυρο 1	97.9	97.3	86.4									
Παράθυρο 2		89.4	88.5	86.4								
.....												
Παράθυρο 10										100	99	98.7

Στα πλεονεκτήματα της μεθόδου συμπεριλαμβάνονται:

- (i) η κάλυψη περιόδων με παρόμοιες λειτουργικές ή εποχικές συνθήκες
- (ii) η αύξηση των DMU, που εισέρχονται για να αξιολογηθούν αυξάνοντας, έτσι, την αξιοπιστία της ΠΑΔ.

### 3.1.7. ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ TDT

Το TDT μέτρο αποδοτικότητας εισήχθη στη βιβλιογραφία της ΠΑΔ (Thompson, Dharmarajula, Thrall 1994) και διατυπώνεται από την ακόλουθη συνάρτηση :

$$\max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} \quad (1)$$

όπου για κάθε επιλογή των  $(u,v)$  :

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = \max \left\{ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}, j = 1, \dots, n \right\}$$

Τα  $(u,v)$  είναι διανύσματα με συνιστώσες  $u_r, v_i \geq 0$  προσδιοριζόμενες από τις παρατηρούμενες τιμές των  $i = 1, \dots, m$  εισροών που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή των  $r = 1, \dots, s$  εκροών για κάθε  $DMU_j, j = 1, \dots, n$ .

Το  $DMU_o$ , στον αριθμητή της (1), αξιολογείται επιλέγοντας διανύσματα  $(u,v)$  που μεγιστοποιούν την αποδοτικότητα του, σχετικά με τις υψηλότερες αποδοτικότητες που προκύπτουν με τα ίδια διανύσματα  $(u,v)$  για ολόκληρο τον πληθυσμό των  $DMU_j$ , συμπεριλαμβανομένου του  $DMU_o$ . Επειδή τα δεδομένα είναι μη αρνητικά και επειδή ο αριθμητής είναι μικρότερος του παρονομαστού στην (1) (συμπεριλαμβάνεται στον παρονομαστή), η αντικειμενική συνάρτηση κυμαίνεται οριακά μεταξύ 0 και 1. Εξάλλου, στον παρονομαστή της (1) τουλάχιστον ένας από τους  $j = 1, \dots, n$  λόγους εισροών /εκροών πρέπει να ισούται με την μονάδα (λόγω βελτιστοποίησης). Έτσι, ο παρονομαστής της (1) είναι μονάδα και η αξιολόγηση του  $DMU_o$  ανάγεται στο κατά πόσον ο αριθμητής στην (1) είναι μικρότερος ή ίσος της μονάδας.

Οι (Cooper, Tone, 1997) διερευνούν το σύνολο λύσεων της (1) εξετάζοντας δυνατότητες για τις οποίες κάποια  $u_r$  τείνουν στο άπειρο στην (1).

Οι επεκτάσεις της ΠΑΔ που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την ενότητα προσφέρουν τροποποιήσεις οι οποίες ενσωματώνουν πολύτιμες κατευθύνσεις στην ανάλυση της αποδοτικότητας. Εν τούτοις, τα μοντέλα που περιγράφηκαν εδώ δεν εξαντλούν το θέμα.

Υπάρχουν και άλλα μοντέλα διαθέσιμα στη βιβλιογραφία, όπως η εκτίμηση κατανεμητής αποδοτικότητας (Banker, Mandirata, 1988), η εισαγωγή στοχαστικών ιδιοτήτων της ΠΑΔ (Sengupta, 1987), (Banker, 1993), η εκτίμηση αποδόσεων οικονομίων κλίμακας (Golany, Yu, 1997) κ.α.

Όπως προαναφέρθηκε, η επιλογή του μοντέλου γίνεται από τον ερευνητή με βάση την κατεύθυνση που δίδεται και το περιβάλλον της ανάλυσης.

Οι Charnes, Gallegos, Li (1996) σε αξιολόγηση αεροπορικών εταιρειών της Λατινικής Αμερικής διατυπώνουν ότι προτιμούν τη χρήση του πολλαπλασιαστικού μοντέλου έναντι του μοντέλου BCC ή του προσθετικού, διότι επιτρέπει στον ερευνητή να επιτυγχάνει αντιστοιχίσεις με συναρτήσεις Cobb-Douglas οι οποίες είναι επίσης πολλαπλασιαστικές.

### 3.2. ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

Στην προηγούμενη ενότητα αναλύθηκαν εναλλακτικά μοντέλα της ΠΑΔ, τα οποία προέκυψαν κυρίως από τροποποιήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης ή του συνόλου αναφοράς.

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται μοντέλα που προκύπτουν από περιορισμούς στους συντελεστές βαρύτητας (σ.β.).

Στο αρχικό μοντέλο της ΠΑΔ (CCR) οι περιορισμοί που επιβάλλονται είναι οι ακόλουθοι δύο :

- (i) ο βαθμός αποδοτικότητας κάθε DMU να μην υπερβαίνει τη μονάδα,
- (ii) οι συντελεστές βαρύτητας (σ.β.) πρέπει να είναι θετικοί ( $\geq \epsilon$ ).

Άλλες σχέσεις (άνω ή κάτω φράγματα) μεταξύ των σ.β. των εισροών - εκροών δεν επιβάλλονται.

Η μεγάλη ευελιξία των συντελεστών βαρύτητας επιτρέπει τον ισχυρισμό ότι η εκτίμηση των βαθμών αποδοτικότητας των DMU, έγινε κατά τον ευνοϊκότερο τρόπο.

Το μοντέλο επιλύεται ξεχωριστά για κάθε DMU δημιουργώντας διαφορετικούς συντελεστές βαρύτητας για τα διαφορετικά DMU, αποφεύγοντας, έτσι, την ανάγκη χρήσης ενός κοινού συνόλου συντελεστών βαρύτητας για όλα τα DMU.

Εν τούτοις, σε πρακτικές κυρίως εφαρμογές, το «μη φραγμένο» μοντέλο είναι δυνατόν να δημιουργήσει ανεπιθύμητες συνέπειες (Dyson et al, 1988). Δηλαδή, κατά την αξιολόγηση, το μοντέλο μπορεί να αντιστοιχίσει τόσο χαμηλούς συντελεστές βαρύτητας σε κάποιες εισροές και/ή σε κάποιες εκροές, έτσι ώστε να τις αποκλείσει από την διαδικασία αξιολόγησης. Έτσι, η αποδοτικότητα του DMU μπορεί να μην αντανακλά τη συμπεριφορά του στο σύνολο των εισροών - εκροών.



Σε ακραίες περιπτώσεις, ένα DMU μπορεί να χαρακτηριστεί ως αποδοτικό επειδή ο λόγος μιας εκροής (ενδεχομένως δευτερεύουσας) προς μια εισροή μπορεί να είναι υψηλός σε σχέση με αντίστοιχους λόγους των άλλων DMUs, ενώ οι υπόλοιπες εισροές - εκροές αγνοούνται λόγω των πολύ χαμηλών συντελεστών βαρύτητας.

Επιπλέον, έχει παρατηρηθεί ότι σε μερικές περιπτώσεις οι συντελεστές βαρύτητας σε κάποιες εισροές - εκροές παίρνουν μηδενική τιμή διαμορφώνοντας, έτσι, την άβολη θέση του χρήστη να αγνοήσει πρακτικά τις αντίστοιχες εισροές - εκροές.

Από τις προηγούμενες διαπιστώσεις γίνεται κατανοητή η ανάγκη εξάσκησης κάποιου «ελέγχου» στους συντελεστές βαρύτητας του μοντέλου. Τα τελευταία χρόνια ένας αυξανόμενος αριθμός ερευνητών έχει διαμορφώσει τρόπους ενσωμάτωσης πληροφοριών στο μοντέλο της ΠΑΔ. Έτσι, έχουν αναπτυχθεί νέες προσεγγίσεις της ΠΑΔ (συχνά αναφερόμενες σαν «post- DEA approaches») οι οποίες εκτιμούν την αποδοτικότητα κάθε DMU περιορίζοντας τους συντελεστές βαρύτητας ( $u, v$ ) σε αποδεκτές περιοχές. Οι προσεγγίσεις αυτές είναι κυρίως οι ακόλουθες :

- Η πρώτη προσέγγιση που αναπτύχθηκε στηρίζεται στην αρχή της «περιοχής διασφάλισης» (assurance region) (Thompson, Singleton, Thrall, Smith, 1986).
- Η δεύτερη προσέγγιση αναπτύσσει ένα μοντέλο φραγμένων κώνων των συντελεστών βαρύτητας (cone - ratio model) (Charnes, Cooper, Wei, Huang, 1989).
- Η τρίτη προσέγγιση επιβάλλει απόλυτα φράγματα στους συντελεστές βαρύτητας (factor weights), (Cook, Roll, Kazakov, 1990).

Η ενότητα 3.2. είναι οργανωμένη ως εξής : στην παράγραφο 3.2.1. (η οποία αποτελεί τον στόχο και την επιπλέον ανάπτυξη του θέματος στην παρούσα διατριβή) αναπτύσσονται η μαθηματική υποδομή, η μεθοδολογία και η παρουσίαση νέων απόλυτων φραγμάτων στη βιβλιογραφία της ΠΑΔ. Οι αναφορές και οι διαπιστώσεις της παραγράφου αποδεικνύονται με ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

Στην παράγραφο 3.2.2. δίδονται οι βασικοί ορισμοί με τα αντίστοιχα μοντέλα που διέπουν την «περιοχή διασφάλισης» των συντελεστών βαρύτητας, καθώς και η παρουσίαση του μοντέλου των φραγμένων κώνων των συντελεστών βαρύτητας.

### 3.2.1. ΧΡΗΣΗ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΦΡΑΓΜΑΤΩΝ ΣΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΕΙΣΡΟΩΝ- ΕΚΡΟΩΝ.

Η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιεί τους συντελεστές βαρύτητας που προκύπτουν από το αρχικό - μη φραγμένο μοντέλο της ΠΑΔ για να θέσει κατώτερα και ανώτερα φράγματα στους συντελεστές βαρύτητας του φραγμένου μοντέλου. Χρήσιμες αναφορές στη συγκεκριμένη περιοχή υπάρχουν στους (Dyson, Thanassoulis, 1988), (Beasley, Wong, 1990), (Cook, Roll, Kazakov, 1990), (Cook, Kress, 1990), (Roll, Cook, Golany, 1991), (Cook, Kress, Seiford, 1992), (Roll, Golany, 1993), (Podinovski, Athanassopoulos, 1998).

Η επιβολή των απολύτων φραγμάτων στους συντελεστές βαρύτητας προκύπτει από την χρήση του αρχικού μοντέλου κυρίως σε πρακτικές εφαρμογές. Σε τέτοιες περιπτώσεις διαπιστώθηκαν οι ακόλουθες ιδιομορφίες των συντελεστών βαρύτητας :

- (i) Κάποιες εισροές /εκροές να έχουν συντελεστές βαρύτητας με αρκετές ακραίες τιμές στην κατανομή τους (δηλαδή να λαμβάνουν την τιμή μηδέν ή υψηλές τιμές).
- (ii) Κάποια (κάποιες) εισροή /εκροή να εμφανίζεται με εντελώς μηδενικούς συντελεστές βαρύτητας, έτσι ώστε να αγνοείται πρακτικά η συγκεκριμένη εισροή /εκροή.

Η επιβολή, επομένως, φραγμάτων στους συντελεστές βαρύτητας στοχεύει στον περιορισμό της ευελιξίας των συντελεστών αναγκάζοντάς τους να περιέχονται μεταξύ προσδιορισμένων ορίων.

Τα όρια των φραγμάτων προσδιορίζονται είτε από υπάρχουσα πληροφόρηση ή στην αντίθετη περίπτωση από την παρατήρηση της μεταβλητότητας των συντελεστών βαρύτητας ή, όπως προτείνουμε, την κατασκευή διαστημάτων με τη χρήση στατιστικών μέτρων.

Το αρχικό κλασματικό (CCR) μοντέλο που εκτιμά τη σχετική αποδοτικότητα μιας ομάδας DMU<sub>s</sub> είναι το ακόλουθο :

$$\max h_o = \sum_r u_r y_{ro} / \sum_i v_i x_{io}$$

$$\text{κάτω από } \sum_r u_r y_{rj} / \sum_i v_i x_{ij} \leq 1, j=1, \dots, n \quad (1)$$

$$\mu_r, v_i \geq \epsilon \quad r=1, \dots, m \quad i=1, \dots, s$$

όπου  $x_{ij}, y_{rj}$  (όλες θετικές) είναι οι γνωστές εισροές, εκροές του DMU<sub>j</sub>, και  $v_i, u_r$  είναι οι συντελεστές βαρύτητας (ή πολλαπλασιαστές) που πρόκειται να προσδιορισθούν από το μοντέλο.

Το προηγούμενο μοντέλο (1), όταν επιβάλλονται περιορισμοί στους συντελεστές βαρύτητας, διαμορφώνεται στο ακόλουθο μοντέλο :

$$\max \varepsilon_o = \sum_r u_r y_{r_o} / \sum_i v_i x_{i_o}$$

$$\begin{aligned} \text{κάτω από } & \sum_r u_r y_{r_j} - \sum_i v_i x_{i_j} \leq 0, & \forall j & & (2) \\ & a_r \leq u_r \leq b_r, & r=1, \dots, s & \\ & c_i \leq v_i \leq d_i, & i=1, \dots, m & \end{aligned}$$

όπου  $a_r$ ,  $b_r$  και  $c_i$ ,  $d_i$  είναι θετικά κάτω και άνω φράγματα των συντελεστών βαρύτητας των εκροών και των εισροών αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι, ενώ οι συντελεστές βαρύτητας που προκύπτουν μπορεί να διαφέρουν από DMU σε DMU, τα όρια εντός των οποίων οι συντελεστές επιτρέπεται να μεταβάλλονται είναι τα ίδια για όλα τα DMUs. Το προηγούμενο κλασματικό μοντέλο (2) μετασχηματίζεται στο ακόλουθο γραμμικό μοντέλο (βλέπε ενότητα 3.2.) :

$$\max Y_o = \sum_r \mu_r y_{r_o}$$

$$\text{κάτω από } \sum_{i=1}^m v_i x_{i_o} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{r_j} - \sum_{i=1}^m v_i x_{i_j} \leq 0 \quad \forall j \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_r &\leq qb_r, \quad -u_r \leq -q \cdot a_r, & r=1, \dots, s \\ v_i &\leq qd_i, \quad -v_i \leq -q \cdot c_i, & i=1, \dots, m \end{aligned}$$

όπου  $q = (\sum_i v_i x_{i_o})^{-1} > 0$  είναι ο όρος μετασχηματισμού για το υπό αξιολόγηση DMU<sub>o</sub>.

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι στο σύνολο αναφοράς που χρησιμοποιούνται τα φραγμένα μοντέλα έχει χαλαρώσει η τελευταία παραδοχή (minimality assumption, βλέπε ενότητα 3.1.).

**Ιδιότητα 3.2.1.** : Οι βέλτιστες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων στα μοντέλα (2) και (3) συμπίπτουν. Ειδικότερα, αν  $u_o$ ,  $v_o$ ,  $q_o$  είναι μια λύση του προβλήματος (3), τότε  $u' = u_o / q_o$ ,  $v' = v_o / q_o$  είναι μια λύση του προβλήματος (2).

**Ιδιότητα 3.2.2.** : Για κάθε  $j_o$  η  $Y_{j_o}$  και αντίστοιχα η  $\varepsilon_{j_o}$  είναι μονοτονικά μη αύξουσες συναρτήσεις στα  $a_r$  και  $c_i$  και μη φθίνουσες στα  $b_r$  και  $d_i$ .

Η ιδιότητα προκύπτει από το ότι η εφικτή περιοχή των φραγμένων μοντέλων περιέχεται σε εκείνη των μη φραγμένων, συνεπώς, οι βαθμοί αποδοτικότητας των φραγμένων μοντέλων είναι μικρότεροι ή ίσοι εκείνων των μη φραγμένων.

**Πρόταση 3.2.1.** : Αν  $Y_{j_0}^* = 1$  (ή  $\varepsilon_{j_0}^* = 1$ ) τότε  $h_{j_0}^* = 1$ .

Η πρόταση ισχύει λόγω της ιδιότητας 3.5.2. και του  $i_0$ -στού περιορισμού στο μοντέλο (3) (ή αντίστοιχα 2).

Το δυϊκό πρόβλημα του μοντέλου (3) είναι το ακόλουθο :

min  $\Theta_{j_0}$

κάτω από

$$\sum_j l_{j_0} y_{j_0} + s1_{r_0} - s2_{r_0} \geq y_{r_0} \quad \forall r$$

$$\Theta_{j_0} x_{i_0} - \sum_j l_{j_0} x_{ij} + s3_{i_0} - s4_{i_0} \geq \quad \forall i \quad (4)$$

$$- \sum_r s1_{r_0} b_r + \sum_r s2_{r_0} a_r - \sum_i s3_{i_0} d_i + \sum_i s4_{i_0} c_i \geq 0$$

$$l_{j_0}, s1_{r_0}, s2_{r_0}, s3_{i_0}, s4_{i_0} \geq 0$$

όπου  $s1_{r_0}$ ,  $s2_{r_0}$ ,  $s3_{i_0}$ ,  $s4_{i_0}$  είναι μεταβλητές χαλαρότητας, με  $s2_{r_0}$ ,  $s4_{i_0}$  τις συμβατικές μεταβλητές χαλαρότητας που παρουσιάζουν έλλειψη εκροών και πλεόνασμα εισροών και  $s1_{r_0}$ ,  $s3_{i_0}$  τις μεταβλητές χαλαρότητας που προκύπτουν από την επιβολή των φραγμάτων. Η  $s1_{r_0}$  παρουσιάζει πλεόνασμα εκροών και η  $s3_{i_0}$  έλλειψη εισροών. Η  $l_{j_0}$  εκφράζει σχέσεις μεταξύ των εισροών - εκροών του  $DMU_{j_0}$  και των  $DMU_s$  που αποτελούν το υποσύνολο αναφοράς του.

Γεωμετρικά, η επιβολή φραγμάτων στους συντελεστές βαρύτητας ισοδυναμεί με την πρόσθεση σημείων στο υπό ανάλυση σύνολο (σύνορο αποδοτικότητας). Τα σημεία αυτά προκύπτουν από τις τομές των αντιστρόφων των φραγμάτων στους αντίστοιχους άξονες (Roll et al, 1991). Έτσι, η εφικτή περιοχή του φραγμένου μοντέλου περιέχεται σε εκείνη του μη φραγμένου, με αποτέλεσμα οι βαθμοί αποδοτικότητας του φραγμένου μοντέλου να είναι μικρότεροι ή ίσοι των αντίστοιχων του μη φραγμένου μοντέλου. Ο αριθμητικός προσδιορισμός των φραγμάτων γίνεται κατά την κρίση του ερευνητή. Εν τούτοις, οι ακόλουθες παρατηρήσεις θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη:

- (i) κάθε γραμμική μεταβολή των μονάδων των εισροών - εκροών επιφέρει αντίστοιχη μεταβολή στους συντελεστές βαρύτητας.
- (ii) κάθε διάστημα φραγμάτων που προκύπτει θα πρέπει να εξετάζεται ως προς την εφικτότητα του.

Ο προσδιορισμός των φραγμάτων στην παρούσα διατριβή γίνεται κατά τον ακόλουθο τρόπο :

**Βήμα 1 :** Τρέχουμε το αρχικό - μη φραγμένο μοντέλο και καταγράφουμε τους συντελεστές βαρύτητας όλων των εισροών και εκροών.

**Βήμα 2 :** Σε περίπτωση που κάποια εισροή /εκροή εμφανίζει όλους τους συντελεστές βαρύτητας με τιμή μηδέν, τυποποιούμε τις εισροές - εκροές ως προς μία σταθερά (π.χ. μέσος όρος) και επαναλαμβάνουμε το βήμα 1.

**Βήμα 3 :** Δεδομένου ότι το εύρος των τιμών κάθε εισροής /εκροής εκφράζεται μέσω του αντίστοιχου μέσου όρου και ότι το προηγούμενο εύρος τιμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του εύρους των αντίστοιχων αποδοτικών DMU, τα ακόλουθα τρία διαστήματα προτείνονται :

<u>Διάστημα</u>	<u>Κάτω Φράγμα</u>	<u>Ανω Φράγμα</u>
(A1)	$\frac{\bar{X}_E}{2a}$	$\frac{\bar{X}_E}{R_E - 2a}$
(A2)	$\frac{\bar{X}_A}{2a}$	$\frac{(1+2b_2) \bar{X}_E}{2b}$
(A3)	$\frac{\bar{X}_A - R_A}{2a - R_E}$	$\frac{(1 + b^2) X_E}{b}$

όπου  $R_E = a$ .  $X_E$  είναι το εύρος των τιμών των συντελεστών βαρύτητας κάθε εισροής/εκροής,  $R_A = \beta$ .  $\bar{X}_A$  είναι το εύρος των αποδοτικών DMU, κάθε εισροής/εκροής,  $\bar{X}_E$  και  $\bar{X}_A$  οι αντίστοιχοι μέσοι όροι. Η εφαρμογή των προηγούμενων φραγμάτων και η σύγκρισή τους παρουσιάζονται στο ακόλουθο παράδειγμα .

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΦΡΑΓΜΑΤΩΝ

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε έχουν παρουσιασθεί αρχικά από τους (Roll, Cook, Golany, 1991) για την αξιολόγηση 10 DMU, με επιβολή φραγμάτων στις εισροές και εκροές (πίνακας 3.2.1.).

Πίνακας 3.2.1. Εισροές και Εκροές

αρ. DMU	Εκροή 1	Εκροή 2	Εισροή 1	Εισροή 2	Εισροή 3
1	0,90	7,0	1,0	0,8	5,4
2	1,00	9,5	1,5	1,0	4,8
3	0,80	7,5	1,2	2,1	5,1
4	0,90	9,0	1,0	0,6	4,2
5	0,70	8,0	1,8	0,5	6,0
6	1,00	5,0	0,7	0,9	5,2
7	0,80	7,0	1,0	0,3	5,0
8	0,75	7,5	1,2	1,5	5,5
9	0,65	5,5	1,4	1,8	5,7
10	0,85	9,0	0,8	0,9	4,5

Εφαρμόζοντας τα δεδομένα του πίνακα 3.2.1. στο αρχικό μοντέλο της DEA (μοντέλο 1), χρησιμοποιούμε τους συντελεστές βαρύτητας που προκύπτουν για κάθε εισροή /εκροή (Βήμα 1) . Οι (Roll, Cook, Golany, 1991) κατασκευάζουν απόλυτα φράγματα παρατηρώντας τη μεταβλητότητα των συντελεστών σε κάθε εισροή/εκροή. Τα διαστήματα των RCG που προκύπτουν (Roll, Cook, Golany), καθώς και εκείνα που προκύπτουν από την εφαρμογή των (A1), (A2) , (A3) διαστημάτων της προηγούμενης παραγράφου, παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα :

Πίνακας 3.2.2. Φράγματα Εισροών - Εκροών

Μοντέλο	Εισροή 1	Εισροή 2	Εισροή 3	Εκροή 1	Εκροή 2
RCG	0,2-0,7	0,2-0,8	0,1-0,2	0,7-0,9	0,02-0,1
A1	0,08-0,82	0,07-1,12	0,02-0,33	0,08-1,54	0,01-0,13
A2	0,12-0,53	0,1-0,73	0,01-0,2	0,15-1,14	0,01-0,07
A3	0,07-0,8	0,07-0,7	0,001-0,18	0,05-1,14	0,005-0,07

Η αποδοτικότητα του μοντέλου RCG, όπως διατυπώνεται στο σχετικό άρθρο, καθώς και εκείνες των A1, A2, A3 μοντέλων, παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα :

Αρ. DMU	CCR	RCG	A1	A2	A3
1	0,847	0,826	0,845	0,843	0,843
2	0,972	0,869	0,924	0,905	0,913
3	0,734	0,626	0,686	0,668	0,681
4	1	1	1	1	1
5	0,829	0,667	0,789	0,667	0,675
6	1	0,985	1	1	1
7	1	1	1	1	1
8	0,660	0,618	0,642	0,633	0,639
9	0,532	0,449	0,509	0,444	0,443
10	1	1	1	1	1

Εξετάζοντας τους βαθμούς αποδοτικότητας των μοντέλων στον πίνακα 3.2.3. σε σχέση με τα φράγματα που τέθηκαν στους συντελεστές βαρύτητας, διαπιστώνουμε ότι τα φραγμένα μοντέλα εκτιμούν αποδοτικότητες μικρότερες από εκείνες του μη φραγμένου μοντέλου CCR. Επιπλέον, όσο περισσότερο φράσσεται το μοντέλο τόσο μικρότερους βαθμούς αποδοτικότητας εκτιμά, π.χ. το μοντέλο RCG σε σχέση με τα A1, A2, A3 μοντέλα.

Αυτό φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα, ο οποίος παρουσιάζει το εύρος των συντελεστών βαρύτητας κάθε εισροής και εκροής στα αντίστοιχα μοντέλα:

Μοντέλο	Εισροή 1	Εισροή 2	Εισροή 3	Εκροή 1	Εκροή 2
CCR	0,76	1,12	0,33	1,54	0,12
RCG	0,5	0,6	0,1	0,2	0,08
A1	0,74	1,05	0,31	1,43	0,12
A2	0,41	0,63	0,19	0,99	0,06
A3	0,73	0,63	0,18	1,09	0,065

Έτσι, το μοντέλο A1 με παρόμοιο εύρος συντελεστών βαρύτητας όπως το CCR, εκτιμά τους πιο κοντινούς βαθμούς αποδοτικότητας ως προς το μοντέλο CCR. Επιπλέον, τα φραγμένα μοντέλα A1, A2, A3, χαρακτηρίζουν τα ίδια DMUs ως αποδοτικά, όπως το CCR μοντέλο, σε αντίθεση με το φραγμένο μοντέλο RCG. Τούτο οφείλεται στον τρόπο κατασκευής των φραγμάτων του μοντέλου RCG και, επομένως, στο μικρό εύρος των συντελεστών βαρύτητας, με αποτέλεσμα οι συντελεστές να καταλαμβάνουν, τις περισσότερες φορές, τις ακραίες τιμές των αντίστοιχων φραγμάτων. Στο μοντέλο RCG, ο μέσος όρος των ακραίων τιμών που λαμβάνουν οι συντελεστές βαρύτητας κάθε DMU είναι 3.2., ενώ στο μοντέλο A2, που είναι το πλέον κοντινό στο RCG ως προς το εύρος, ο αντίστοιχος μέσος όρος είναι 1.8.

Διαπιστώνουμε, επομένως, ότι η ομοιόμορφη κατανομή των συντελεστών βαρύτητας εκτιμά βαθμούς αποδοτικότητας κατά τον ευνοϊκότερο τρόπο για τα DMU<sub>6</sub>, στα δεδομένα διαστήματα, πράγμα που αντανακλάται στα διαστήματα κατασκευασμένα με στατιστικά μέτρα. Ας θεωρήσουμε το DMU<sub>6</sub>, το οποίο στο μοντέλο A2 είναι αποδοτικό, ενώ στο RCG έχει βαθμό αποδοτικότητας 0.985. Οι συντελεστές βαρύτητας των εισροών-εκροών στα δυο μοντέλα είναι οι ακόλουθοι :

	ΕΙΣΡΟΗ 1	ΕΙΣΡΟΗ 2	ΕΙΣΡΟΗ 3	ΕΚΡΟΗ 1	ΕΚΡΟΗ 2
RCG	0.45	0.2	0.1	0.9	0.02
A2	0.358	0.094	0.129	0.943	0.011

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές βαρύτητας στο RCG λαμβάνουν 4 ακραίες τιμές των φραγμάτων και μια μέση τιμή, ενώ στο A2 λαμβάνουν 2 ακραίες τιμές. Ο οποιοσδήποτε συνδυασμός τεσσάρων ακραίων τιμών και μιας μέσης τιμής στα φράγματα του A2 μοντέλου καθιστά το DMU<sub>6</sub> είτε μη αποδοτικό είτε το οδηγεί σε μη εφικτή λύση.

Δηλαδή, αν το DMU<sub>6</sub> είχε στο A2 την κατανομή των συντελεστών του RCG, δεν θα χαρακτηριζόταν ως αποδοτικό. Αν, λόγω χάρη, για το DMU<sub>6</sub> υποθέταμε ότι οι συντελεστές του βαρύτητας λαμβάνουν ακραίες τιμές των φραγμάτων του μοντέλου A2 για την εισροή 1, εισροή 3, εκροή 1, εκροή 2 και μέση τιμή για την εισροή 2, τότε ο βαθμός αποδοτικότητας του DMU<sub>6</sub> θα υπολογιζόταν ως εξής :

$$\sum_r u_r y_{r0} = 0,15 \times 1 + 0,07 \times 5 = 0,50$$

$$\sum_i v_i x_{i0} = 0,12 \times 0,7 + 0,415 \times 0,9 + 0,01 \times 5,2 = 0,51$$

Αποδοτικότητα DMU<sub>6</sub> = 0,50 / 0,51 = 0,98, επομένως, το DMU<sub>6</sub> θα χαρακτηριζόταν μη αποδοτικό στο μοντέλο A2.

Η αξιολόγηση των φραγμένων μοντέλων θα πρέπει να γίνεται σε σύγκριση με το μοντέλο CCR καθώς και με τη χρήση στατιστικών μεθόδων. Μια τέτοια διεξοδική εφαρμογή παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.



### 3.2.2. ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

#### (i) Περιοχή Διασφάλισης (Assurance Region)

Η συγκεκριμένη μέθοδος (Thompson et al, 1986) χρησιμοποιεί τον συντελεστή βαρύτητας μιας εκροής ως βάση σύγκρισης με τους συντελεστές βαρύτητας όλων των υπολοίπων εκροών. Παρόμοια, οι συντελεστές βαρύτητας όλων των εισροών συγκρίνονται με τον συντελεστή μιας εισροής.

Ειδικότερα, η περιοχή διασφάλισης (AR) ορίζεται ως ακολούθως (Thompson et al, 1990) :

«Για προβλήματα της ΠΑΔ με πεπερασμένο αριθμό DMU, και ένα καλά προσδιορισμένο πεδίο ορισμού η AR είναι ένα υποσύνολο του W (συντελεστών βαρύτητας), έτσι ώστε διανύσματα w που δεν ανήκουν στην AR δεν θεωρούνται κατάλληλοι συντελεστές βαρύτητας των αντίστοιχων εισροών - εκροών (αυστηρή έννοια AR).

Εναλλακτικά, μια «ευέλικτη AR» επιτρέπει μικρές πιθανότητες απόκλισης κάποιων κατάλληλων συντελεστών βαρύτητας».

**Ορισμός Αποδοτικότητας :** Το DMU<sub>j</sub>, που είναι E - αποδοτικό (άκρως αποδοτικό) χαρακτηρίζεται ως AR - αποδοτικό σχετικά με μια περιοχή διασφάλισης AR, εάν η τομή του συνόλου W<sub>j</sub> (j=1,...,n) και της περιοχής AR δεν είναι κενή.

**Προσδιορισμός μιας AR σε «μορφή τομής» :** Έστω ότι επιλέγεται ως βάση σύγκρισης η εισροή X<sub>1</sub> και αντίστοιχα ως βάση σύγκρισης η εκροή Y<sub>1</sub>. Μια περιοχή διασφάλισης (AR) μπορεί να προσδιορισθεί από την λύση των ακόλουθων (m+s-2) ομογενών γραμμικών ανισώσεων :

$$a_i v_i \leq v_i \leq b_i v_i \quad i = 2, 3, \dots, m \text{ (κόνος εισροών)}$$

$$A_r u_r \leq u_r \leq B_r u_r \quad r = 2, 3, \dots, s \text{ (κόνος εκροών)}$$

όπου τα μη αρνητικά μεγέθη  $a_i, b_i, A_r, B_r, i=2, \dots, m$  &  $r=2, \dots, s$ , προσδιορίζονται βάσει οικονομικο-κοινωνικών / περιβαλλοντολογικών παρατηρήσεων καθώς και απόψεων ειδικών.

Το προηγούμενο σύστημα ανισώσεων μπορεί να διατυπωθεί με τη χρήση πινάκων στο ακόλουθο σύστημα :

$$\begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \leq 0$$

όπου  $D_{11}$  είναι  $P_1 \times s$  και  $C_{22}$  είναι  $P_2 \times m$  διάνυσμα με  $P_1=2s-2$  και  $P_2=2m-2$ .

Η σχέση  $D_{11}U \leq 0$  ορίζει τον κώνο εκροών U και η σχέση  $C_{22}V \leq 0$  ορίζει τον κώνο εισροών V, έτσι ώστε το προηγούμενο σύστημα πινάκων ορίζει την περιοχή διασφάλισης σε «μορφή τομής» ως το κατευθείαν γινόμενο των U και V.

Το μοντέλο της ΠΑΔ που ενσωματώνει την προηγούμενη περιοχή διασφάλισης, είναι το ακόλουθο :

$$\max z_0 = \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}$$

κάτω από

$$\begin{aligned} x_0^T v &= 1 \\ Y^T u - X^T v &\leq 0 \\ D_{11} u &\leq 0 \\ C_{22} v &\leq 0 \\ u &\geq 0, v \geq 0 \end{aligned}$$

εναλλακτικά χρησιμοποιώντας το σύστημα των ανισώσεων

$$\max z_0 = \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}$$

κάτω από

$$\sum_{r=1}^m v_r x_{r0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j=1, \dots, n$$

$$v_i - b_i v_1 \leq 0 \quad i=2, \dots, m$$

$$-v_i + a_i v_1 \leq 0 \quad i=2, \dots, m$$

$$u_r - B_r u_1 \leq 0 \quad r=2, \dots, s$$

$$-u_r + A_r u_1 \leq 0 \quad r=2, \dots, s$$

$$v_i \geq 0, u_r \geq 0 \quad i=1, \dots, m \quad r=1, \dots, s$$

Αναλυτικές αναφορές στην «περιοχή διασφάλισης» υπάρχουν στους (Thompson et al 1986), (Thompson et al, 1990), (Sueyoshi, 1992), (Thompson , Dharmarala, Rrothenberg, Thrall, 1994), (Thompson et al, 1996), (Thompson et al, 1997) , (Goto , Tsutsui, 1998).

## (ii) Μοντέλο φραγμένων κώνων (Cone - Ratio Model) .

Το μοντέλο αυτό (Charnes, Cooper, Wei, Huang, 1989), το οποίο θα συμβολίζεται ως (CR), γενικεύει το αρχικό (CCR) μοντέλο απαιτώντας οι συντελεστές βαρύτητας των εισροών και εκροών να περιορίζονται εντός δοθέντων κλειστών κώνων. Κατ' αυτόν τον τρόπο, το μοντέλο επιτρέπει την επιβολή ποικιλίας περιορισμών στους συντελεστές βαρύτητας, διαμέσου καταλλήλων ορισμών των φραγμένων κώνων. Το μαθηματικό πρότυπο που αποδίδει το (CR) μοντέλο είναι το ακόλουθο :

$$\max u^T y_{j_0} / v^T x_{i_0}$$

κάτω από

$$\begin{aligned} \bar{v}^T \bar{X} - \bar{u}^T \bar{Y} &\in K \\ v \in V, u \in U \quad (V \neq \emptyset, U \neq \emptyset) \end{aligned}$$

όπου  $VCE^m$ ,  $UCE^s$ ,  $KCE^n$  είναι κυρτοί κλειστοί κώνοι.

$\bar{X} = [x_1, \dots, x_n]$  είναι  $m \times n$  πίνακας

$\bar{Y} = [y_1, \dots, y_n]$  είναι  $s \times n$  πίνακας

$x_j$  είναι το διάνυσμα εισροών του  $DMU_j$ , έτσι ώστε  $x_j \in \text{Int}(-V^*)$

$y_j$  είναι το διάνυσμα εκροών του  $DMU_j$ , έτσι ώστε  $y_j \in \text{Int}(-U^*)$

$V^*$ ,  $U^*$  είναι οι αρνητικοί πολικοί κώνοι των  $V$ ,  $U$  αντίστοιχα, (τα οριακά διανύσματα του πολικού κώνου  $V^*$  αποτελούν τα κανονικά διανύσματα των υπερεπιπέδων που φράσσουν τον πολυεδρικό κώνο  $V$ ).

$$\text{Int}(-V^*) = \{v : v^T v > 0, \text{ για όλα τα } u' \in V \text{ και } u' \neq 0\}$$

$$\text{Int}(-U^*) = \{u : u^T u > 0, \text{ για όλα τα } u' \in U \text{ και } u' \neq 0\}$$

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς  $w=tv$ ,  $\mu=tu$ ,  $tu^T x_{j_0}=1$ , το προηγούμενο κλασματικό μοντέλο μετατρέπεται στο ακόλουθο γραμμικό μοντέλο :

$$\max \mu^T y_{j_0}$$

$$\begin{aligned} \text{κάτω από} \quad \bar{w}^T \bar{X} - \bar{\mu}^T \bar{Y} &\in K & (1) \\ \bar{w}^T x_{j_0} &= 1 \\ w \in V, \mu \in U \end{aligned}$$

**Ορισμός** : Το  $DMU_{j_0}$  ονομάζεται ΠΑΔ αποδοτικό, εάν υπάρχει βέλτιστη λύση  $(w^0, \mu^0)$  του μοντέλου (1), έτσι ώστε :

$$\mu^{0T} y_{j_0} = 1 \text{ με } w^0 \in \text{Int } V, \mu^0 \in \text{Int } U.$$

Οι πολυεδρικοί κώνοι  $V, U$  μπορούν να εκφρασθούν κατά την ακόλουθη αθροιστική μορφή :

$$V = \{A^T a : a \geq 0\}, a \in E^l, A^T = (a^1, a^2, \dots, a^l)$$

$$\text{με } a^i \in E^m, i=1, \dots, l$$

$$U = \{B^T \gamma : \gamma \geq 0\}, \gamma \in E^k, B^T = (b^1, b^2, \dots, b^k)$$

$$\text{με } b^r \in E^s, r=1, \dots, k$$

Εάν  $V=E^m$  και  $U=E^s$  τότε το μοντέλο φραγμένων κώνων και το αρχικό μοντέλο (CCR) συμπίπτουν . Αναλυτικές περιγραφές του μοντέλου (CR) υπάρχουν στους (Charnes et al, 1989), (Charnes et al, 1990).

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### 4. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΦΕΙΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΜΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

#### 4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Από την ανάλυση της Διεθνούς και Ελληνικής ασφαλιστικής αγοράς προέκυψε ότι ο ασφαλιστικός κλάδος έχει αλλάξει σημαντικά τα τελευταία χρόνια, ενώ σημαντικές ανακατατάξεις αναμένονται και στο μέλλον, καθώς η παρουσία ισχυρών ομίλων αποτελεί πλέον πραγματικότητα.

Οι κοινοτικές οδηγίες, όπως αυτές έχουν υιοθετηθεί από τα κράτη-μέλη, έχουν δημιουργήσει το νομικό και διοικητικό πλαίσιο για την ανάπτυξη της Ασφαλιστικής Βιομηχανίας στην Ευρωπαϊκή Ένωση.

Ήδη, από 1/7/1994 στα κράτη μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης ισχύει η λεγόμενη “Ενιαία Ασφαλιστική Αγορά” με ιδιαίτερη ρύθμιση για την Ελλάδα, η οποία θα ενταχθεί πλήρως στις συγκεκριμένες διατάξεις από την 1/1/1999.

Τα ασφαλιστρα ζωής αναπτύσσονται στην Ευρωπαϊκή Ένωση με ρυθμούς τουλάχιστον διπλάσιους από τους αντίστοιχους ρυθμούς του Α.Ε.Π., ενώ ο βαθμός διεξόδου (παραγωγή ασφαλιστρων ως ποσοστό του Α.Ε.Π.) βελτιώνεται συνεχώς.

Οι συγχωνεύσεις στην Ευρωπαϊκή Ασφαλιστική Βιομηχανία έχουν μετατρέψει, τα τελευταία χρόνια, τοπικές εταιρείες σε διεθνείς γίγαντες (Allianz, Generali, Royan and Sun Alliance κλπ.) ο ανταγωνισμός με τις οποίες θα είναι αυξανόμενα δύσκολος.

Στον ελληνικό χώρο ο ασφαλιστικός κλάδος (Ιδιωτική Ασφάλιση) άρχισε να γνωρίζει μεγάλη ανάπτυξη την τελευταία δεκαπενταετία. Το νομοθετικό πλαίσιο της ασφαλιστικής αγοράς, όπως αυτό διαμορφώθηκε (Ν.2171/93, Π.Δ.252/96, Ν.2496/97), εναρμονίζει την ασφαλιστική νομοθεσία με τα δεδομένα της Ευρωπαϊκής Ένωσης.

ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΔΕΛΤΙΟ  
ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΔΕΛΤΙΟ  
ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΔΕΛΤΙΟ

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Από την...  
Ο...  
Η...  
Το...  
Ο...  
Το...  
Ο...  
Το...  
Ο...  
Το...

Σήμερα στην Ελλάδα, οι ασφαλιστικές εταιρείες καλύπτουν το 2,6% του Α.Ε.Π., όταν ο αντίστοιχος μέσος όρος στα άλλα κράτη της Ευρωπαϊκής Ένωσης διαμορφώνεται στο 7%.

Τα τελευταία χρόνια έχουν προκύψει νέα δεδομένα στην ασφαλιστική αγορά. Ο κλάδος της Ιδιωτικής Ασφάλισης προσπαθεί με την συνένωση κεφαλαίων και τη μείωση λειτουργικών εξόδων να γίνει πιο ανταγωνιστικός. Πολλές εταιρείες έχουν ήδη συγχωνευθεί, ενώ σημαντικές ανακατατάξεις αναμένονται να γίνουν μετά το 2000, όχι μόνον λόγω του ευρώ αλλά και του γεγονότος ότι τότε θα έχουν προετοιμαστεί οι συνθήκες για τις συγχωνεύσεις των μεγάλων ασφαλιστικών εταιρειών.

Η είσοδος των τραπεζικών ομίλων στον ασφαλιστικό χώρο, με νέα προϊόντα που συνδυάζουν τον ασφαλιστικό με τον τραπεζικό χαρακτήρα (Bancassurance), δρομολογεί νέες εξελίξεις στην ασφαλιστική αγορά και αποτελεί ισχυρό παράγοντα ανταγωνισμού. Τέλος, ο ανταγωνισμός στον εξαγωγικό προσανατολισμό των εταιρειών χαρακτηρίζει τις προοπτικές νέων επενδυτικών πρωτοβουλιών.

Από τα παραπάνω, γίνεται σαφές ότι εταιρείες που δεν θα μπορούν να προσαρμοστούν στις νέες συνθήκες της αγοράς και δεν ανήκουν σε μεγάλους τραπεζο-ασφαλιστικούς ομίλους θα αντιμετωπίσουν προβλήματα.

Αναγκαία, επομένως, προϋπόθεση για την προσαρμογή και ανάπτυξη των ασφαλιστικών εταιρειών στο νέο ανταγωνιστικό περιβάλλον είναι η αναδιοργάνωση της λειτουργίας των εταιρειών με την βελτίωση της ποιότητας του Management και την αξιοποίηση των δυνατοτήτων των νέων τεχνολογιών πληροφορικής. Στα πλαίσια αυτά εντάσσεται η εφαρμογή της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων (ΠΑΔ), η συμβολή της οποίας είναι ιδιαίτερα σημαντική στην ποιοτική βελτίωση της Διοίκησης των Ασφαλιστικών Εταιρειών, αφού αποτελεί κριτήριο αξιολόγησης των υπηρεσιών τους. Ταυτόχρονα, η ΠΑΔ μπορεί να προτείνει τρόπους βελτίωσης των χαρακτηριστικών μεγεθών των εταιρειών (π.χ. μείωση λειτουργικού κόστους) και να διερευνά τις οικονομίες κλίμακας που επιτυγχάνονται εξυπηρετώντας, έτσι, σημαντικούς στόχους που διέπουν τις συγχωνεύσεις εταιρειών.

Η παρούσα εφαρμογή χρησιμοποιεί την Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων για να εκτιμήσει την αποδοτικότητα των γραφείων παραγωγής Αθηνών - Πειραιά μεγάλης ασφαλιστικής εταιρείας για το έτος 1996, να θέσει στόχους βελτίωσης των μη αποδοτικών γραφείων και να συγκρίνει τα αποτελέσματα της μεθόδου με άλλες μεθόδους αξιολόγησης.



## 4.2. ΓΡΑΦΕΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Τα γραφεία παραγωγής της Εταιρείας ασχολούνται κυρίως με τις πωλήσεις των ασφαλιστικών προϊόντων της Εταιρείας και αποτελούν το δίκτυο πωλήσεών της.

Η Εταιρεία εφαρμόζει για τα γραφεία, από τα τέλη της δεκαετίας του '70, το Agency System, ένα σύστημα που ασχολείται με τις πωλήσεις, καθώς και την επίβλεψη και παρακολούθηση των πωλητών.

Ένα γραφείο παραγωγής έχει την παρακάτω οργάνωση :

- Γραμματειακή υποστήριξη
- Πωλητές
- Ομαδάρχες
- Προϊστάμενος

Οι εργασίες που διεκπεραιώνει ένα γραφείο παραγωγής είναι οι πωλήσεις ασφαλιστικών προϊόντων, η εξυπηρέτηση των πελατών και η εκπαίδευση των ασφαλιστών.

Τα γραφεία παραγωγής ελέγχονται και παρακολουθούνται από τη Διεύθυνση Δικτύου Πωλήσεων της Εταιρείας. Η αξιολόγηση των γραφείων γίνεται με βάση τον όγκο παραγωγής, τον δείκτη ζημιών, το πλάφόν εξόδων και την διατηρησιμότητα.

Οι αδυναμίες που απορρέουν από τη χρήση των παραπάνω δεικτών και ο τρόπος βελτίωσης του υπάρχοντος συστήματος αξιολόγησης παρουσιάζονται διεξοδικά στις επόμενες παραγράφους.

#### 4.2.1. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΦΕΙΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΔΕΙΚΤΩΝ

Η μέτρηση της αποδοτικότητας των εταιρειών παροχής υπηρεσιών μπορεί να γίνει με διαφορετικά κριτήρια, οι διοικήσεις, όμως, και οι αναλυτές δείχνουν σαφή προτίμηση στη χρήση δεικτών.

Η ανάλυση μέσω δεικτών επιτρέπει την αξιολόγηση των εταιρειών κάτω από διαφορετικά μεγέθη (π.χ. κερδοφορία, ζημιές). Κατ' αυτόν τον τρόπο, προσδιορίζονται τάσεις και μεταβολές οι οποίες μπορούν να αξιοποιηθούν κατάλληλα από τη διοίκηση.

Η αξιολόγηση των γραφείων παραγωγής γίνεται από την Εταιρεία με την χρήση δεικτών που είναι: η καθαρή παραγωγή, ο δείκτης ζημιών, η διατηρησιμότητα, το πλαφόν εξόδων. Οι δείκτες αυτοί παρέχουν σημαντικές πληροφορίες για την συμπεριφορά ενός γραφείου συγκριτικά με κάποιο άλλο γραφείο και επιτρέπουν τη δυνατότητα διαχρονικών συγκρίσεων. Βοηθούν τους υπεύθυνους λήψης αποφάσεων να παρακολουθούν και να αναλύουν σημαντικές μεταβολές που ενδιαφέρουν και να εξετάζουν αν επιτεύχθηκαν οι στόχοι που είχαν τεθεί.

Παρόλα αυτά, υπάρχουν περιορισμοί στη χρήση των παραπάνω δεικτών:

1. Από την φύση τους, οι δείκτες χρησιμοποιούν μια εισροή και μια εκροή και δεν μπορούν να αποτυπώσουν εύκολα περιπτώσεις πολλαπλών εισροών και εκροών. Για να εκτιμηθεί ένας δείκτης με πολλές εισροές και εκροές απαιτούνται συντελεστές βαρύτητας που είτε δεν είναι διαθέσιμοι είτε είναι δύσκολο να εκτιμηθούν.
2. Η χρήση εναλλακτικών δεικτών οφείλεται στην αδυναμία ενός μόνο δείκτη να απεικονίσει με πληρότητα τη συμπεριφορά ενός γραφείου παραγωγής. Έτσι, ένα γραφείο μπορεί να δείχνει παραγωγικό ως προς ένα δείκτη και μη παραγωγικό ως προς έναν άλλο, ενώ το αντίθετο μπορεί να συμβαίνει για ένα άλλο γραφείο.
3. Η χρήση δεικτών δεν παρέχει πληροφορίες σχετικά με την ικανότητα ενός γραφείου να χρησιμοποιεί και να κατανέμει τους παραγωγικούς του συντελεστές.

4. Η ανάλυση μέσω δεικτών βασίζεται σε απλές σχετικά μαθηματικές έννοιες και είναι χρήσιμη στο να προσδιορίζει πολύ καλές ή πολύ φτωχές επιδόσεις.

Το ερώτημα που τίθεται είναι: ποια θα πρέπει να είναι η τιμή του συγκεκριμένου δείκτη (cut off point) για να θεωρηθεί ένα γραφείο παραγωγικό;

5. Η χρήση δεικτών δεν παρέχει πληροφορίες αναφορικά με τις οικονομίες κλίμακος κάθε γραφείου.

Οι περιορισμοί που ανακύπτουν από τη χρήση των δεικτών αντιμετωπίζονται με την Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων (ΠΑΔ), η μεθοδολογία της οποίας συμπληρώνει τις άλλες τεχνικές και μπορεί να είναι ιδιαίτερα επωφελής για την Διοίκηση.

Από την εφαρμογή της μεθόδου, μπορεί να προκύψουν οι παρακάτω πληροφορίες:

- **Προσδιορίζεται το σύνορο αποδοτικότητας**, αποτελούμενο από τα αποδοτικά γραφεία (γραφεία "άριστης πρακτικής").
- **Αξιολογούνται τα γραφεία** με βάση τον βαθμό αποδοτικότητάς τους. Εντοπίζονται, κατ' αυτόν τον τρόπο, τα μη αποδοτικά γραφεία που χρειάζονται βελτίωση.
- **Προσδιορίζεται το "υποσύνολο αναφοράς"** για κάθε μη παραγωγικό γραφείο, δηλαδή ένα σύνολο αποδοτικών γραφείων που παρουσιάζουν παρόμοιο προφίλ εισροών - εκροών με το μη παραγωγικό.
- **Τίθενται στόχοι βελτίωσης των μη αποδοτικών γραφείων** και υποδεικνύεται η κατάλληλη ανακατανομή των εισροών - εκροών προκειμένου τα γραφεία να καταστούν αποδοτικά.
- **Διερευνάται και εντοπίζεται** για κάθε γραφείο η **παρουσία αποδόσεων** οικονομιών κλίμακος.

#### 4.3. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΕΚΡΟΩΝ - ΕΙΣΡΟΩΝ ΚΑΙ ΣΕΝΑΡΙΩΝ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Το σημαντικότερο ίσως στάδιο στη χρήση της ΠΑΔ είναι ο σαφής καθορισμός των εισροών και εκροών, έτσι ώστε να μπορεί να προσδιορισθεί ποσοτικά η κατανάλωση και η παραγωγή τους, σε μια δεδομένη χρονική περίοδο.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι εισροές αντανακλούν όλους τους πόρους που απαιτούνται για την παραγωγή των παρεχόμενων υπηρεσιών, οι οποίες θεωρούνται εκροές.

Για τον καθορισμό των εισροών-εκροών, αναλύθηκε το σύστημα παραγωγής των γραφείων μέσου συναντήσεων με στελέχη του Δικτύου Πωλήσεων, των γραφείων Παραγωγής και άλλων τμημάτων της Εταιρείας.

Η επιλογή των εισροών-εκροών έγινε σύμφωνα με την παραγωγική προσέγγιση των γραφείων, κατά την οποία μόνον φυσικές εισροές όπως εργασία, κεφάλαιο και το κόστος τους πρέπει να συμπεριληφθούν, εφ' όσον μόνον φυσικές εισροές απαιτούνται, κατά κανόνα, για την παραγωγή των παρεχόμενων υπηρεσιών.

Οι εισροές που προσδιορίστηκαν είναι οι ακόλουθες:

Εμβαδόν Γραφείου (X1): Η μεταβλητή αυτή εκφράζει τη συνεισφορά στην παραγωγή του ίδιου του γραφείου και αντικατοπτρίζει τον όρο κεφάλαιο.

Ασφαλιστές (X2): Η μεταβλητή αυτή συμπεριλαμβάνει όλους τους εν ενεργεία ασφαλιστές κάθε γραφείου και αντιπροσωπεύει τον όρο εργασία στη λειτουργία των γραφείων.

Δείκτης Εξόδων (X3): Τα έξοδα κάθε γραφείου εκφράζουν συγκεντρωτικά την κατανάλωση μιας σειράς πόρων του γραφείου. Δεδομένου ότι ένα γραφείο ελέγχεται ως προς τα έξοδα με βάση ένα πλαφόν που τίθεται από την Εταιρεία, χρησιμοποιήθηκε σαν εισροή ο δείκτης εξόδων, δηλαδή το σύνολο εξόδων του γραφείου προς το πλαφόν του.

Σαν εκροές χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω μεγέθη:

Παραγωγή (Y1): Η παραγωγή ορίσθηκε ως το σύνολο εισπραχθέντων βάσει αποδείξεων μείον τις ακυρώσεις, για κάθε χρονική περίοδο.

Αντίστροφος Δείκτης Ζημιών (Y2): Κάθε γραφείο υπόκειται σε ένα συγκεκριμένο ύψος ζημιών και ελέγχεται από την Εταιρεία με ένα δείκτη ζημιών που είναι το σύνολο ζημιών προς τον όγκο παραγωγής σε δεδομένη χρονική περίοδο. Προσδιορίσθηκε λοιπόν ως εκροή ο αντίστροφος δείκτης ζημιών καθότι στην ΠΑΔ επιθυμητό είναι να μεγιστοποιηθούν οι εκροές ενώ οι εισροές να ελαχιστοποιηθούν.

Συμβόλαια (Y3): Εκφράζει τον συνολικό αριθμό συμβολαίων που διεκπεραιώνει κάθε γραφείο ανά έτος.

Συμβόλαια 1<sup>ου</sup> έτους (Y4): Αριθμός νέων συμβολαίων που διεκπεραιώνει κάθε γραφείο ανά έτος.

Συμβόλαια β' και επομένων ετών (Y5): Ο αριθμός συμβολαίων (πλην των νέων) που συνεχίζει να διεκπεραιώνει κάθε γραφείο ανά έτος.

Οι εισροές-εκροές χαρακτηρίζονται επί πλέον και από άλλες μεταβλητές όπως οι ομάδες, το κόστος εκπαίδευσης, η διατηρησιμότητα, η κατηγοριοποίηση των ασφαλιστών, τα ανείσπρακτα ποσά.

Τέτοια δεδομένα, μολονότι αναγνωρίσθηκε ότι είναι σημαντικά, δεν ήταν διαθέσιμα για την χρονική περίοδο της ανάλυσης. Ειδικότερα, οι ομάδες, παρ' ότι υπήρχαν δεδομένα και καθορίσθηκαν αρχικά ως εισροή, δεν εισήλθαν τελικά στην ανάλυση λόγω της υψηλής συσχέτισης με τους ασφαλιστές, αφ' ενός, και λόγω του χαμηλού ποσοστού συμμετοχής στην παραγωγή κάθε γραφείου, αφ' ετέρου.

Από την παραπάνω ανάλυση διαμορφώθηκαν τρία εναλλακτικά σενάρια, M1, M2, M3 με εισροές και εκροές που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Σενάριο	Εισροές	Εκροές
M1	X1, X2, X3	Y1, Y2
M2	X1, X2, X3	Y2, Y3
M3	X1, X2, X3	Y2, Y4, Y5

- \* Το σενάριο M1 εξετάζει την ικανότητα κάθε γραφείου να διαχειρίζεται τα οικονομικά του μεγέθη (χρηματοοικονομικό μοντέλο). Οι βασικοί πόροι κάθε γραφείου χρησιμοποιούνται ως εισροές, ενώ ως εκροές εκλαμβάνονται δύο σημαντικά μεγέθη που αποδίδουν το αποτέλεσμα κάθε γραφείου.  
Τα ασφάλιστρα δεν χρησιμοποιούνται ως επιπλέον εκροή μιας και ο συντελεστής συσχέτισης με την παραγωγή (εκροή) είναι πολύ υψηλός.  
Το σενάριο M1 προσφέρεται περισσότερο στη σύγκριση με τους αριθμοδείκτες και είναι αυτό που αναλύεται διεξοδικά στη χρονική περίοδο της εφαρμογής.
- \* Το σενάριο M2 εξετάζει την αποδοτικότητα κάθε γραφείου ως προς τον αριθμό συμβολαίων που διεκπεραιώνονται κατ' έτος (παραγωγικό μοντέλο).
- Το σενάριο M3 εξετάζει την αποδοτικότητα κάθε γραφείου ως προς την ταξινόμηση των ασφαλιστρών σε ασφάλιστρα πρώτου έτους και ασφάλιστρα β' και επόμενων ετών.

Παράλληλα με τα παραπάνω σενάρια, προσδιορίσθηκε μια σειρά δεικτών, τα αποτελέσματα των οποίων συγκρίθηκαν με εκείνα που προκύπτουν από την ΠΑΔ.

Καθώς ένας δείκτης αξιολογεί τα γραφεία κατά ένα μέγεθος (παραγωγή, έξοδα-πλαφόν, δείκτης ζημιών), η προσπάθεια επικεντρώθηκε στο να συνδυάσει τους παραπάνω δείκτες με νέους, έτσι ώστε η αξιολόγηση των γραφείων να είναι πιο ολοκληρωμένη και η σύγκριση με την ΠΑΔ πιο ομοιόμορφη (Thanassoulis et al, 1996).

Έτσι λοιπόν, χρησιμοποιήθηκαν η παραγωγή, ο αντίστροφος δείκτης ζημιών και ο αντίστροφος δείκτης εξόδων με τη λογική του να συνάδουν με τα μέτρα αποδοτικότητας, δηλαδή όσο υψηλότερη είναι η τιμή ενός δείκτη τόσο καλύτερη η συμπεριφορά ενός γραφείου στον αντίστοιχο δείκτη.

Κατ' αυτόν τον τρόπο, θεωρήθηκαν οι συντελεστές τάξης (ranks) των παραπάνω τριών δεικτών και υπολογίσθηκε για κάθε γραφείο ο μέσος όρος των τριών συντελεστών τάξης (Δείκτης D1).

Ο δεύτερος δείκτης (D2) προσδιορίστηκε θεωρώντας για κάθε γραφείο την υψηλότερη τιμή από τους τρεις προηγούμενους συντελεστές τάξης. Αυτό αντανακλά την πιο ευνοϊκή συμπεριφορά για κάθε γραφείο.

Ο τρίτος δείκτης (D3) εκφράζει την ικανότητα του κάθε γραφείου από άποψη κερδών, δηλαδή μια ένδειξη δυναμικής του γραφείου. Ο δείκτης αυτός (under writing ratio) είναι το πηλίκον του αποτελέσματος εκμετάλλευσης προς τον όγκο παραγωγής κάθε γραφείου. Το αποτέλεσμα εκμετάλλευσης προκύπτει, αν από τη συνολική παραγωγή αφαιρεθούν οι προμήθειες, υπερπρομήθειες, έξοδα και ζημιές.

#### 4.4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στόχος της εφαρμογής, όπως προαναφέρθηκε, είναι η μέτρηση της αποδοτικότητας των γραφείων παραγωγής Αθηνών - Πειραιώς, για το έτος 1996.

Από ένα σύνολο 53 υφισταμένων γραφείων, 7 παρουσιάζουν ελλειπή στοιχεία αναφορικά με τις εισροές και εκροές και ένα παρουσιάζει αμφισβητήσιμα στοιχεία. Έτσι, για το 1996, εισέρχονται στην ανάλυση 45 γραφεία.

Ένα γραφείο ορίζεται ως αποδοτικό, όταν μπορεί να παρέχει το ίδιο επίπεδο εκροών με λιγότερες εισροές από ό,τι καταναλώνει ή όταν μπορεί να αυξήσει τις εκροές του χρησιμοποιώντας το ίδιο επίπεδο εισροών.

Η εκτίμηση των βαθμών αποδοτικότητας γίνεται με την χρήση δύο εναλλακτικών μοντέλων. Το μοντέλο CCR μετρά την αποδοτικότητα κάτω από την παραδοχή σταθερών αποδόσεων κλίμακος, ενώ το μοντέλο BCC εντοπίζει μεταβλητές αποδόσεις κλίμακος στα γραφεία παραγωγής. Δεδομένου ότι οι ασφαλιστικές εταιρείες παρουσιάζουν κατά κανόνα σταθερές αποδόσεις κλίμακος, στην ανάλυση χρησιμοποιείται περισσότερο το μοντέλο CCR.

Τα μέτρα αποδοτικότητας των γραφείων μέσω των μοντέλων M1, M2, M3 καθώς και η συμπεριφορά τους μέσω των δεικτών D1, D2, D3, παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1. Ο πίνακας 4.2. δίνει τη συσχέτιση των συντελεστών τάξης (Rank Correlations) των παραπάνω μεγεθών.



**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1: ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΤΗΤΕΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ (CCR) - ΔΕΙΚΤΕΣ**

ΓΡΑΦ.	96 M1	96 M2	96 M3	D1	D2	D3	ΡΑΦ.	96 M1	96 M2	96 M3	D1	D2	D3
1	44,64	43,21	43,6	4	6	-0,0634	23	100	100	100	23	31	0,41
2	85,02	78,42	81,8	35,3 3	41	0,4841	24	92,28	84,61	100	36	39	0,39
3	87,06	93,3	94,26	33	38	0,514	25	100	100	100	24	45	0,22
4	100	100	100	32	35	0,4389	26	55,94	56,95	57,62	18	29	0,30
5	56,66	56,52	71,6	19,6 6	33	0,0737	27	100	100	100	30	44	0,51
6	83,37	81,74	94,96	26,6 6	40	0,296	28	73,15	66,29	67,65	25,33	36	0,41
7	100	98,61	100	27	37	0,3404	29	92,34	95,7	95,93	23,66	43	0,53
8	44,33	39,04	42,88	19,6 6	31	0,0223	30	100	100	100	16,83	42	0,44
9	93,2	96,79	100	34,6 6	36	0,4597	31	63,15	66,95	70,53	30,66	39	0,52
10	59,63	63,58	74,3	13	20	0,1743	32	71,92	68,24	72,84	30,33	41	0,47
11	85,07	89,81	92,36	28,6 6	36	0,3813	33	83,67	76,19	88,34	35	40	0,49
12	63,23	63,26	64,88	11,6 6	16	0,0113	34	48,87	46,66	50	13,33	24	0,34
13	75,8	73,45	76,66	19,3 3	23	0,2643	35	86,13	85,66	98,93	29,33	33	0,45
14	36,83	44,63	47,8	17	44	-0,1033	36	73,76	87,71	100	15,66	32	0,39
15	57,48	55,52	60,08	27,3 3	37	0,3953	37	40,12	36,77	51,83	10	15	0,13
16	85,47	85,84	90,68	21,6 6	28	0,3775	38	67,58	75,93	78,77	9,16	15	0,15
17	37,08	37,63	71,28	10,6 6	27	-0,6403	39	48,24	56,04	56,57	9,33	12	-0,0
18	76,27	58,18	100	35	45	0,3095	40	22,18	23,38	27,01	3	4	-0,4
19	48,59	44,54	48,67	8,33	11	0,0825	41	100	95,19	95,22	33	39	0,48
20	61,72	62,25	71,27	14	16	0,2702	42	67,68	67,38	67,82	20,33	29	0,19
21	100	100	100	37	45	0,5962	43	100	100	100	41	43	0,53
22	94,74	86,58	91,47	21,3 3	29	0,3164	44	100	100	100	32,66	44	0,24
							45	100	100	100	28,33	40	0,34

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2: ΣΥΣΧΕΤΙΣΕΙΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΤΑΞΗΣ**

	M1	M2	M3	D1	D2	D3
M1	1	0,969	0,905	0,683	0,621	0,678
M2		1	0,899	0,614	0,597	0,667
M3			1	0,646	0,636	0,588
D1				1	0,784	0,776
D2					1	0,595
D3						1

Ετσι, το γραφείο 5 παρουσιάζει αποδοτικότητα 56,66% σύμφωνα με το M1 μοντέλο. Αυτό σημαίνει ότι το γραφείο 5 είναι 56,66% αποδοτικό συγκρινόμενο με το υποσύνολο αναφοράς του που αποτελείται από τα γραφεία 21, 4, 44 (πίνακας 4.5.).

Επομένως, το γραφείο 5 θα πρέπει να μειώσει το επίπεδο των εισροών του κατά 43,34% διατηρώντας το ίδιο επίπεδο εκροών για να καταστεί τόσο αποδοτικό όσο το υποσύνολο αναφοράς του. Εναλλακτικά, το γραφείο 5 θα πρέπει να αυξήσει το επίπεδο των εκροών του κατά  $1/0,5666 - 1 = 0,7649$  διατηρώντας το ίδιο επίπεδο εισροών για να καταστεί το ίδιο αποδοτικό όπως το υποσύνολο αναφοράς του.

Τα σενάρια M1, M2, M3 παρουσιάζουν παρόμοια αποτελέσματα, ιδιαίτερα το M1 και M2, όπως αποδεικνύεται και από τους συντελεστές συσχέτισης του πίνακα 4.2.

Τούτο αποδίδεται στο ότι τα σενάρια χρησιμοποιούν τις ίδιες εισροές, ενώ μικρή διαφοροποίηση γίνεται στο μίγμα εκροών.

Ειδικότερα, για τα M1, M2 σενάρια η υψηλή συσχέτιση των εκροών, παραγωγή και συμβόλαια αντίστοιχα, διαμορφώνει τις μικρές αποκλίσεις των βαθμών αποδοτικότητας. Επίσης, η αύξηση της αποδοτικότητας στο σενάριο M3 οφείλεται στην ταξινόμηση των συμβολαίων, σε "συμβόλαια του έτους" και "συμβόλαια β' και επομένων ετών" που χρησιμοποιεί σαν εκροές το μοντέλο.

Οι συντελεστές συσχέτισης του πίνακα 2 υποδεικνύουν ότι η μέθοδος ΠΑΔ και η ομάδα δεικτών D1, D2, D3 παράγουν παρόμοιο τύπο αποτελεσμάτων. Τούτο γίνεται πιο φανερό (έντονη θετική συσχέτιση) μεταξύ του σεναρίου M1 και των δεικτών D1 και D3. Μολονότι οι αδυναμίες στην χρήση των δεικτών διατυπώθηκαν προηγουμένως, τα παραπάνω αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι, όταν ένας δείκτης μπορεί να ενσωματώσει πολλές εισροές και εκροές, τότε μπορεί να παράγει παρόμοιο προφίλ αποτελεσμάτων με εκείνα της ΠΑΔ.

Παρά ταύτα, η χρήση της ΠΑΔ πέρα από τον προσδιορισμό των αποδοτικότητων παρουσιάζει περισσότερες πληροφορίες.

#### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3: ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΑ ΜΕΤΡΑ ΣΕΝΑΡΙΩΝ

ΣΕΝΑΡΙΟ	MEAN	MEDIA N	STDE V	MIN	MAX	Q1	Q3
M1	74,74	76,27	22,16	22,18	100	57,07	97,37
M2	74,28	76,19	22,13	23,38	100	56,74	96,24
M3	79,99	88,34	20,79	27,01	100	66,26	100

Από τη σύγκριση των τριών σεναρίων προκύπτει το εξής συμπέρασμα :

\* Τα γραφεία χαμηλής αποδοτικότητας (εκείνα που είναι μικρότερα του 1<sup>ου</sup> τεταρτημορίου Q1) είναι 11 γραφεία για τα σεσάρια M1 και M2 και 10 για το M3.

Τα κοινά γραφεία χαμηλής αποδοτικότητας είναι 8 και συγκεκριμένα τα υπ' αριθμόν 1, 8, 14, 19, 34, 37, 39, 40. Τα γραφεία αυτά εμφανίζουν χαμηλές τιμές σε περισσότερους από έναν δείκτες. Παρόμοια, τα κοινά αποδοτικά γραφεία των σεναρίων (M1), (M2), (M3) είναι τα ακόλουθα : 4, 21, 23, 25, 27, 30, 43, 44, 45. Τα γραφεία αυτά θεωρούνται αξιόπιστα και εμφανίζουν καλές τιμές σε περισσότερους από έναν δείκτες.

Μολονότι η ΠΑΔ διακρίνει τα μη αποδοτικά γραφεία ανάλογα με τον βαθμό αποδοτικότητας, δεν πράττει το ίδιο και στα αποδοτικά γραφεία. Μια τέτοια διάκριση μπορεί να γίνει θεωρώντας τη συχνότητα (Smith, Mayston, 1987) εμφάνισης κάθε αποδοτικού γραφείου στα υποσύνολα αναφοράς των μη αποδοτικών. Εάν η συχνότητα είναι υψηλή, το γραφείο θεωρείται "γνήσια" αποδοτικό. Εάν η συχνότητα είναι αρκετά χαμηλή, τότε το γραφείο είναι αποδοτικό δεν υπάρχουν, όμως, αρκετά συγκριτικά στοιχεία για την ενίσχυση της κρίσης.

Ο ακόλουθος πίνακας εμφανίζει τη συχνότητα των κοινών (στα τρία σενάρια) αποδοτικών γραφείων στα υποσύνολα αναφοράς των.

#### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4. : ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΠΟΔΟΤΙΚΩΝ ΓΡΑΦΕΙΩΝ

##### ΑΠΟΔΟΤΙΚΑ ΓΡΑΦΕΙΑ /

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	4	21	2	25	27	30	43	44	45
(M1)	26	17	0	0	14	5	2	14	1
(M2)	31	11	5	11	9	13	2	23	3
(M3)	18	7	8	8	15	6	1	11	1

Τα παραπάνω οδηγούν στον προσδιορισμό γραφείων “άριστης πρακτικής” και γραφείων “κακής πρακτικής” και, επομένως, στην επαναδιατύπωση, από την διοίκηση, διαδικασιών και πολιτικής αναφορικά με την αποδοτική συμπεριφορά των γραφείων.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια διεξοδική ανάλυση των αποτελεσμάτων της ΠΑΔ, σύμφωνα με το σενάριο M1.

Ο πίνακας 4.6 εμφανίζει την αποδοτικότητα των γραφείων παραγωγής με τη χρήση του μοντέλου CCR (Σχήμα 4.1.).

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.5.: ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ  
ΑΝΑΦΟΡΑΣ (CCR)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	44,64	27,4,41	24	92,28	21,4,44
2	85,02	21,4,44	25	100	25
3	87,06	21,4,44	26	55,94	21,30
4	100	4	27	100	27
5	56,66	21,4,44	28	73,15	21,27,4
6	83,37	4,44	29	92,34	21,27,30
7	100	7	30	100	30
8	44,33	21,4,44	31	63,15	21,4,44
9	93,2	21,4,44	32	71,92	21,27,4
10	59,63	4,44	33	83,67	21,4,44
11	85,07	4,44	34	48,87	21,27,30,4 1
12	63,23	4,7	35	86,13	21,27,4
13	75,8	4,7	36	73,76	21,27,30,4 1
14	36,83	43	37	40,12	27,4,41
15	57,48	21,4,44	38	67,58	27,4,7
16	85,47	27,4,41	39	48,24	27,4,41
17	37,08	4,7	40	22,18	27,4,41
18	76,27	43,44	41	100	41
19	48,59	27,4,41	42	67,68	27,4,41
20	61,72	21,30,41	43	100	43
21	100	21	44	100	43
22	94,74	41,44,45	45	100	43
23	100	23			

Οι στήλες (1), (4) εμφανίζουν τον αύξοντα αριθμό των γραφείων.

Στις (2), (5) εμφανίζεται η αποδοτικότητα κάθε γραφείου σύμφωνα με το μοντέλο BCC.

Στις στήλες (3), (6) εμφανίζεται το υποσύνολο αναφοράς κάθε γραφείου σύμφωνα με το CCR.

Ετσι, το γραφείο 20 εμφανίζει αποδοτικότητα 61,72% συγκρινόμενο με το υποσύνολο αναφοράς του, που το αποτελούν τα αποδοτικά γραφεία 21, 30 και 41.

Αυτό σημαίνει ότι το γραφείο 20 θα πρέπει να μειώσει τις εισροές του κατά τουλάχιστον 38,3% διατηρώντας το ίδιο επίπεδο εκροών, προκειμένου να γίνει αποδοτικό.

#### **4.4.1.ΣΤΟΧΟΙ ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ**

Ενα από τα πλέον σημαντικά αποτελέσματα που προκύπτουν από την χρήση της ΠΑΔ είναι οι στόχοι βελτίωσης που τίθενται για κάθε μη αποδοτικό γραφείο προκειμένου αυτό να καταστεί αποδοτικό. Παραδείγματος χάριν, το γραφείο 26 εμφανίζει αποδοτικότητα 55,94% και, επομένως, θα πρέπει να μειώσει το επίπεδο εισροών του κατά 44,06% για να γίνει αποδοτικό. Οι μεταβολές αυτές παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.6.: ΣΤΟΧΟΙ ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΓΡΑΦΕΙΟ 26**

Εισροές/Εκροές (1)	Πραγματική Ποσότητα (2)	Στόχος (μείωση εισροών) (3)		Στόχος (αύξηση εκροών) (4)	
X1	110	61,5	(55,9%)	110	(0%)
X2	27	15,1	(55,9%)	27	(0%)
X3	1,2097	0,5621	(46,5%)	1,0048	(17%)
Y1	82.256	107.827	(0%)	192.744	(134,3%)
Y2	2,8994	2,8994	(31,1%)	5,1827	(79%)

Σύμφωνα με τον πίνακα 4.7, το γραφείο 26 για να γίνει αποδοτικό θα πρέπει να μειώσει τις εισροές του (Εμβαδόν, Ασφαλιστές, Δείκτης Εξόδων) σε 62 μ<sup>2</sup>, 15 εκατομ. και 0.5621 από 110μ<sup>2</sup>, 27 εκατομ. και 1.2097 που χρησιμοποιεί, διατηρώντας τις ίδιες ζημιές και αυξάνοντας την παραγωγή κατά 31%. Εναλλακτικά, μπορεί να γίνει αποδοτικό αυξάνοντας την παραγωγή του κατά 134,3% (192.744) και μειώνοντας τον δείκτη ζημιών κατά 79% χρησιμοποιώντας το ίδιο επίπεδο εισροών (στήλη (4)).

Επίσης, από την ανάλυση της ΠΑΔ προσδιορίζονται οι εικονικές εισροές - εκροές (Virtual Inputs, Virtual Outputs), δηλαδή, εκείνες οι εισροές - εκροές που συνεισφέρουν περισσότερο στην εκτίμηση του μέγιστου βαθμού αποδοτικότητας κάθε γραφείου, όταν συγκρίθηκε με τα υπόλοιπα γραφεία.

Οι εικονικές εισροές-εκροές για το γραφείο 26 (μοντέλο μείωσης εισροών) παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.7.: ΕΙΚΟΝΙΚΕΣ ΕΙΣΡΟΕΣ - ΕΚΡΟΕΣ ΓΡΑΦΕΙΟΥ 26**

<b>ΕΙΣΡΟΕΣ</b>	<b>-</b>	<b>VIRTUAL</b>	<b>INPUTS</b>	<b>-</b>
<b>ΕΚΡΟΕΣ</b>		<b>OUTPUTS</b>		
X1		60,03%		
X2		39,97%		
X3		0%		
Y1		0%		
Y2		55,94%		

#### **4.4.2 ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ**

Οι αποδόσεις κλίμακας εκφράζουν τη σχέση της μεταβολής των υπηρεσιών (εκροών) και της μεταβολής των ποσοτήτων των συντελεστών της παραγωγής (εισροών). Έτσι, σταθερές αποδόσεις κλίμακας παρουσιάζονται, όταν, αυξάνοντας τις εισροές κατά ένα συντελεστή, αυξάνονται οι εκροές κατά τον ίδιο συντελεστή. Αύξουσες αποδόσεις παρουσιάζονται, όταν η αύξηση στις εκροές είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη αύξηση των εισροών, ενώ στην αντίθετη περίπτωση παρουσιάζονται φθίνουσες αποδόσεις.

Οι αποδόσεις κλίμακας των γραφείων παραγωγής έχουν υπολογισθεί με το μοντέλο BCC, τα αποτελέσματα του οποίου εμφανίζονται στον πίνακα που ακολουθεί:



**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.8.: ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΦΟΡΑΣ (BCC)**

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	89,14	30,45,7	A	24	93,11	4,41,43,44	Φ
2	88,83	18,41,43,4 4	Φ	25	100	25	A
3	88,26	21,25,27,4	A	26	81,71	27,30,45,7	A
4	100	4	A	27	100	27	Σ
5	74,28	25,7	A	28	98,77	25,27,45,7	A
6	90,26	4,41,44	Φ	29	95,18	21,27,30,45	A
7	100	7	A	30	100	30	A
8	49,55	25,44,7	A	31	63,18	21,25,4,44	A
9	93,92	21,4,41,43	Φ	32	100	32	Φ
10	78,88	30,45,7	A	33	84,47	21,4,41,43	Φ
11	86,54	4,44,7	A	34	76,85	30,45,7	A
12	81,24	30,45,7	A	35	89,65	21,27,4,7,4 5	A
13	84,29	30,45,7	A	36	97,89	30,45,7	A
14	68,40	25,43	A	37	65,10	30,45,7	A
15	57,57	21,25,4,44	A	38	84,17	30,45,7	A
16	95,65	22,30,4,7	A	39	82,75	30,45,7	A
17	73,24	25,4,7	A	40	56,17	30,45,7	A
18	100	18	Φ	41	100	41	Σ
19	80,80	30,45,7	A	42	95,81	30,45,7	A
20	87,30	30,45,7	A	43	100	43	Σ
21	100	21	Σ	44	100	44	Σ
22	100	22	A	45	100	45	A
23	100	23	A				

Οι στήλες (1), (5) εμφανίζουν τον αύξοντα αριθμό των γραφείων.

Στις (2), (6) εμφανίζεται η αποδοτικότητα κάθε γραφείου σύμφωνα με το μοντέλο BCC.

Στις στήλες (3), (7) εμφανίζεται το υποσύνολο αναφοράς κάθε γραφείου αντίστοιχα. Τέλος, οι στήλες (4), (8) εμφανίζουν τις αποδόσεις κλίμακας κάθε γραφείου (Α : αύξουσες αποδόσεις κλίμακας, Σ: σταθερές αποδόσεις, Φ : φθίνουσες αποδόσεις).

Από τον πίνακα διαπιστώνεται ότι το μοντέλο CCR υπολογίζει αποδοτικότητες μικρότερες από εκείνες του μοντέλου BCC. Αυτό οφείλεται στον επιπλέον περιορισμό που χρησιμοποιεί το μοντέλο BCC, με αποτέλεσμα να διευρύνεται η εφικτή περιοχή του μοντέλου BCC.

Οι οικονομίες κλίμακας έχουν να κάνουν με το μέγεθος των γραφείων παραγωγής. Επιβεβαιώνεται επομένως από την ανάλυση (Πίνακας 4.9.) αυτό που υποστηρίζουν άλλοι ερευνητές (Γκιώκας, 1991) (Berg et al, 1993), ότι τα μικρά καταστήματα παροχής υπηρεσιών παρουσιάζουν κυρίως αύξουσες αποδόσεις κλίμακας.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.9.: ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΩΝ ΚΛΙΜΑΚΑΣ**

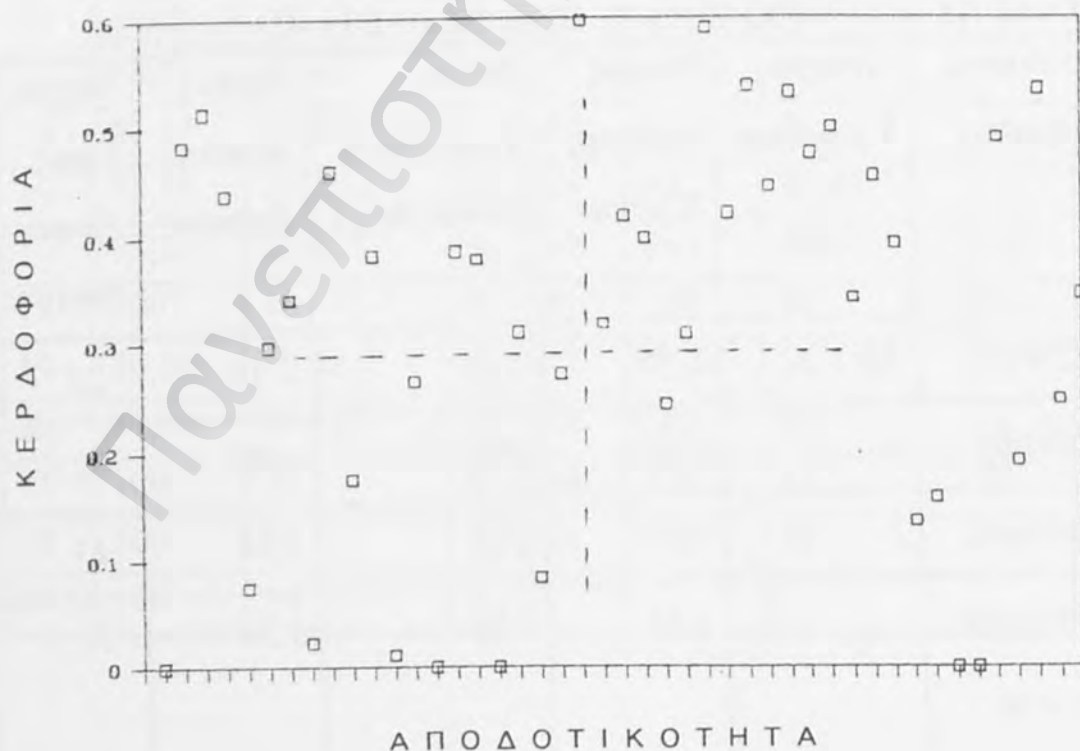
Αποδόσεις Κλίμακας	Αριθμός Γραφείων	Μέσος Δείκτης Εξόδων	Μέση Παραγωγή (εκατ. δρχ.)	Μέσος Δείκτης Ζημιών	Μέσος Όρος Ασφαλιστών	Μέσο Εμβαδόν
Αύξουσες	33	1,55	172	2.49	22	203
Σταθερές	5	0,94	298	4.03	32	130
Φθίνουσες	7	1,17	271	3.48	43	282
Μέσος όρος Συνόλου Γραφείων		1,42	212	3.33	32.3	205

Ετσι, αύξουσες αποδόσεις παρουσιάζουν 33 γραφεία, κυρίως μικρού μεγέθους, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχουν περιθώρια βελτίωσης της αποτελεσματικότητας των γραφείων. Φθίνουσες αποδόσεις παρουσιάζουν 7 γραφεία, κυρίως μεγάλου μεγέθους, που ενδεχομένως να οφείλεται σε θέματα διαχείρισης των γραφείων.

Η μέτρηση της αποδοτικότητας κάτω από σταθερές παραδοχές οικονομικής κλίμακας (μοντέλο CCR) μας επιτρέπει να συγκρίνουμε γραφεία μεγάλου μεγέθους με γραφεία μικρού μεγέθους, αποφεύγοντας, έτσι, να εκτιμήσουμε γραφεία μεγάλου μεγέθους σαν "τεχνικά" αποδοτικά.

#### 4.4.3. ΚΕΡΔΟΦΟΡΙΑ ΚΑΙ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ

Η σχέση μεταξύ κερδοφόρων γραφείων και αποδοτικών γραφείων αποδίδεται με το παρακάτω διάγραμμα, όπου στον οριζόντιο άξονα τίθενται οι βαθμοί αποδοτικότητας των γραφείων (σενάριο M1) και στον κάθετο άξονα τοποθετούνται οι συντελεστές περιθωρίου κέρδους (Δείκτης D3) των γραφείων.



Σχήμα 4.1.

Στο άνω δεξιό μέρος του διαγράμματος, απεικονίζονται τα γραφεία με την καλύτερη απόδοση (stars) ως προς τα δύο μεγέθη και πρέπει να αποτελούν παραδείγματα καλής πρακτικής.

Στο άνω αριστερό μέρος, απεικονίζονται γραφεία που είναι κερδοφόρα αλλά όχι αποδοτικά (sleepers). Η κερδοφορία τους ενδεχομένως να οφείλεται σε ευνοϊκές συγκυρίες και καταστάσεις του περιβάλλοντος. Τα γραφεία αυτά, κυρίως, μπορούν να γίνουν αποδοτικά και επομένως να αυξήσουν το κέρδος τους.

Στο κάτω αριστερό μέρος, απεικονίζονται γραφεία που μπορούν να βελτιωθούν και προς τα δύο μεγέθη.

Στο κάτω δεξιό μέρος, υπάρχουν γραφεία που λειτουργούν αποδοτικά, αλλά με χαμηλό κέρδος, ενδεχομένως λόγω μη ευνοϊκού περιβάλλοντος.

#### **4.5. ΧΡΗΣΗ ΦΡΑΓΜΕΝΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ**

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε τα φραγμένα μοντέλα που διατυπώθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα εφαρμόσουμε τη διαδικασία που προτείνεται στο ίδιο κεφάλαιο. Δηλαδή, καταγράφουμε αρχικά τους συντελεστές βαρύτητας των εισροών και εκροών του μοντέλου M1 (CCR-I) της προηγούμενης ενότητας. Οι συντελεστές αυτοί παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα :

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.10 : ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ Μ1 (CCR-I)

ΓΡΑΦΕΙΟ	ΕΜΒΑΔΟΝ	ΑΣΦΑΛΙΣΤΕΣ	Δ.ΕΞΟΔΩΝ	Δ.ΖΗΜΙΩΝ	ΠΑΡΑΓΩΓΗ
1	0.00321	0.03455	0	0.09190	0
2	0	0.01314	0.43157	0.07202	0
3	0	0.01776	0.58323	0.09738	0
4	0.00162	0.02346	0.27435	0.09833	0
5	0	0.01863	0.61199	0.10212	0
6	0.00177	0.02138	0	0	0
7	0.00034	0.07077	0.07944	0.07468	0
8	0	0.01112	0.36532	0.06096	0
9	0	0.01627	0.53439	0.08917	0
10	0.00234	0.02836	0	0	0
11	0	0.02375	0.40372	0	0
12	0.00027	0.06210	0	0	0
13	0.00027	0.06220	0	0	0
14	0	0	2.1796	0	0
15	0	0.01090	0.35815	0.05976	0
16	0.00292	0.03138	0	0.08346	0
17	0	0.04783	0.11866	0	0
18	0	0.00415	0.58420	0	0
19	0.00264	0.02836	0	0.07542	0
20	0.00404	0.02173	0	0.10768	0
21	0.00299	0.01179	0.40585	0.12573	0
22	0.00482	0.02517	0	0.12165	0
23	0.00015	0.07630	0.02732	0.07334	0
24	0	0.01489	0.48897	0.08159	0
25	0.00107	0.01695	1.79015	0.31640	0
26	0.00546	0.01480	0	0.19295	0
27	0.00167	0.02222	0.23221	0.12993	0
28	0	0.02547	0.56231	0.13846	0
29	0.00259	0.02341	0.08790	0.19391	0
30	0.00382	0.02860	0.05853	0.17956	0
31	0	0.01168	0.38358	0.06401	0
32	0	0.01406	0.31043	0.07644	0
33	0	0.01417	0.46534	0.07765	0
34	0.00302	0.02014	0.01702	0.09802	0
35	0	0.02216	0.48929	0.12048	0
36	0.00392	0.02613	0.02209	0.12722	0
37	0.00205	0.02204	0	0.05862	0
38	0.00042	0.06556	0	0.05553	0
39	0.00261	0.02804	0	0.07459	0
40	0.00174	0.01869	0	0.04971	0
41	0.00176	0.01746	0.23908	0.08737	0
42	0.00291	0.03131	0	0.08327	0
43	0.00379	0.00641	0.60972	0.08160	0
44	0.00287	0.01477	0.26881	0.10041	0
45	0.00732	0.01988	0.06592	0.15492	0

Από τον προηγούμενο πίνακα εμφανίζεται η εκροή “παραγωγή” με μηδενικούς συντελεστές βαρύτητας σε όλα τα γραφεία παραγωγής, με αποτέλεσμα να αγνοείται πρακτικά η συγκεκριμένη εκροή και να μην μπορούν να επιβληθούν φράγματα σε αυτήν την εκροή. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με την αναγωγή (normalization) των τιμών των εισροών και εκροών ως προς τον μέσο τους όρο. Μετά την αναγωγή των τιμών, το νέο μοντέλο που προκύπτει (συμβολιζόμενο με MIN) εκτιμά βαθμούς αποδοτικότητας οι οποίοι είναι σχεδόν ταυτοτικοί με εκείνους του μοντέλου M1 και αυτό οφείλεται στην παραδοχή 3 του συνόλου αναφοράς του μοντέλου M1. Οι βαθμοί αποδοτικότητας των δύο μοντέλων παρουσιάζονται στο παράρτημα Β. Τα δύο μοντέλα εκτιμούν ακριβώς τα ίδια γραφεία ως αποδοτικά και εμφανίζουν το ίδιο υποσύνολο αναφοράς για κάθε μη αποδοτικό γραφείο. Τα περιγραφικά μέτρα των δύο μοντέλων M1, MIN και ο συντελεστής τάξης παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.11. : ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΑ ΜΕΤΡΑ ΜΟΝΤΕΛΩΝ**

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΑΡΘ. ΓΡΑΦ.	ΜΕΣΟΣ	ΔΙΑΜΕΣΟΣ	Τ.Α.	MIN	MAX	Q1	Q3
M1	45	74.74	76.27	22.16	22.18	100	57.07	90.90
MIN	45	74.72	76.19	22.12	22.00	100	56.90	90.90

Συντελεστής τάξης (M1, MIN) = 0.999

Έτσι, χρησιμοποιώντας το μοντέλο MIN αντί του M1 καταγράφουμε τους συντελεστές βαρύτητας των εισροών και εκροών του μοντέλου, οι οποίοι παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα :

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.12 : ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ....ΜΙΝ**

ΓΡΑΦΕΙΟ	ΕΜΒΑΔΟΝ	ΑΣΦΑΛΙΣΤΕΣ	Δ.ΕΞΟΔΩΝ	Δ.ΖΗΜΙΩΝ	ΠΑΡΑΓΩΓΗ
1	0.00652	0.00897	0	0.00259	0.00684
2	0	0.00345	0.00614	0.00204	0.00359
3	0	0.00465	0.00828	0.00275	0.00485
4	0.00329	0.00603	0.00395	0.00279	0.00527
5	0	0.00488	0.00870	0.00289	0.00509
6	0.00350	0.00559	0	0	0.00521
7	0.00061	0.01880	0.00101	0.00200	0.00863
8	0	0.00292	0.00519	0.00179	0.00304
9	0	0.00426	0.00759	0.00252	0.00444
10	0.00503	0.00692	0	0.00200	0.00528
11	0	0.00624	0.00571	0	0.00640
12	0.00049	0.01647	0	0	0.00845
13	0.00049	0.01649	0	0	0.00847
14	0	0	0.03125	0	0.00699
15	0	0.00286	0.00509	0.00169	0.00298
16	0.00590	0.00812	0	0.00235	0.00620
17	0	0.01274	0.00147	0	0.00713
18	0	0.00108	0.00834	0	0.00313
19	0.00532	0.00732	0	0.00212	0.00559
20	0.00809	0.00571	0	0.00303	0.00523
21	0.00599	0.00308	0.00578	0.00353	0.00343
22	0.00969	0.00659	0	0.00351	0.00622
23	0.00022	0.02038	0.00029	0.00197	0.00844
24	0	0.00391	0.00697	0.00232	0.00408
25	0.00218	0.00450	0.02540	0.00890	0.00392
26	0.01094	0.00387	0	0.00543	0
27	0.00333	0.00585	0.00330	0.00284	0.00478
28	0	0.00664	0.00797	0.00389	0.00470
29	0.00514	0.00612	0.00126	0.00544	0
30	0.00766	0.00748	0.00083	0.00504	0.00355
31	0	0.00305	0.00543	0.00180	0.00318
32	0	0.00369	0.00443	0.00216	0.00261
33	0	0.00371	0.00661	0.00220	0.00387
34	0.00607	0.00526	0.00023	0.00275	0.00426
35	0	0.00579	0.00696	0.00340	0.00410
36	0.00784	0.00680	0.00030	0.00355	0.00550
37	0.00414	0.00569	0	0.00165	0.00435
38	0.00074	0.01716	0	0.00149	0.00775
39	0.00527	0.00724	0	0.00209	0.00553
40	0.00352	0.00484	0	0.00140	0.00369
41	0.00349	0.00460	0.00336	0.00246	0.00444
42	0.00589	0.00810	0	0.00234	0.00618
43	0.00379	0.00641	0.60972	0.08160	0
44	0.00584	0.00383	0.00388	0.00286	0.00443
45	0.01502	0.00511	0.00085	0.00440	0.00630

Ο προηγούμενος πίνακας παρουσιάζει τώρα την εκροή “παραγωγή” με συγκεκριμένους συντελεστές βαρύτητας. Μπορούμε, επομένως, να επιβάλλουμε φράγματα στις εισροές και εκροές του M1N μοντέλου, σύμφωνα με τους τύπους A1, A2, A3 που διατυπώθηκαν στο κεφάλαιο 3. Τα διαστήματα των φραγμάτων καθώς και οι βαθμοί αποδοτικότητας που προκύπτουν για τα αντίστοιχα μοντέλα A1, A2, A3 παρουσιάζονται στο παράρτημα Β. Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τους συντελεστές τάξης (Rank Correlations) μεταξύ των αρχικών μοντέλων M1 και M1N, των φραγμένων μοντέλων A1, A2, A3 και των δεικτών D1, D2, D3 που χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.13 : ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΑΞΗΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΚΑΙ ΔΕΙΚΤΩΝ**

	M1	M1N	A1	A2	A3	D1	D2	D3
M1	1	0.999	0.995	0.986	0.985	0.683	0.621	0.678
M1N		1	0.997	0.987	0.987	0.680	0.615	0.672
A1			1	0.990	0.990	0.681	0.624	0.684
A2				1	0.999	0.685	0.610	0.710
A3					1	0.685	0.606	0.716
D1						1	0.784	0.776
D2							1	0.595
D3								1

Τα επίπεδα σημαντικότητας όλων των μοντέλων με τους δείκτες D1, D2, D3 είναι  $\alpha = 0.05$ . Στον πίνακα, εμφανίζεται η βελτίωση των φραγμένων μοντέλων A1, A2, A3 στους περισσότερους από τους δείκτες D1, D2, D3 έναντι των αρχικών μοντέλων M1 και M1N. Ειδικότερα, το φραγμένο μοντέλο A3 εμφανίζει τη μεγαλύτερη βελτίωση ως προς του δείκτες.

Το μοντέλο αυτό εκτιμά 7 γραφεία παραγωγής ως αποδοτικά έναντι 11 αποδοτικών των μοντέλων M1, M1N και 10 αποδοτικών του A1. Το A2 μοντέλο εκτιμά τα ίδια γραφεία (7) ως αποδοτικά όπως το A3, έχουν δε συντελεστή τάξης 0.999. Τα περιγραφικά μέτρα των μοντέλων M1, M1N, A3 παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα :



**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.14 : ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΑ ΜΕΤΡΑ ΜΟΝΤΕΛΩΝ**

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΑΡΘ. ΓΡΑΦΕΙΟΥ	ΔΙΑΜΕΣΟΣ	Τ.Α.	MIN	MAX	Q1	Q2
M1	45	74.24	22.16	22.18	100	57.07	97.37
M1N	45	74.72	22.12	22.00	100	56.90	97.65
A3	45	73.21	22.20	21.81	100	55.06	92.86

Το μοντέλο A3 εκτιμά μικρότερους βαθμούς αποδοτικότητας έναντι των M1, M1N, επειδή περιορίζεται η εφικτή περιοχή του μοντέλου λόγω των φραγμάτων που επιβάλλονται στους συντελεστές βαρύτητας (βλέπε κεφάλαιο 3). Θα επαληθεύσουμε τη βελτίωση που παρουσιάζουν τα φραγμένα μοντέλα με τους δείκτες, έναντι των αρχικών μοντέλων, χρησιμοποιώντας ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης.

Θεωρούμε ως εξαρτημένη μεταβλητή (Y) τους βαθμούς αποδοτικότητας του συγκεκριμένου μοντέλου. Ως ανεξάρτητες μεταβλητές θεωρούμε τις ακόλουθες:

X1 : η παραγωγή κάθε γραφείου (εκατομ. δρχ.) προς τον αριθμό των ασφαλιστών του γραφείου. Η μεταβλητή αυτή υποδεικνύει την παραγωγική ικανότητα του γραφείου.

X2 : Θεωρούμε, αρχικά, τον λόγο των γενικών εξόδων κάθε γραφείου προς το σύνολο της παραγωγής. Ο δείκτης αυτός δείχνει τη συμμετοχή των εξόδων στην παραγωγή και όσο μικρότερος είναι ο λόγος αυτός τόσο καλύτερα είναι για το γραφείο παραγωγής. Ο λόγος αυτός παρέχει ένδειξη της οικονομικής δυνατότητας κάθε γραφείου.

Θεωρούμε, επομένως, ως X2, τον αντίστροφο του προηγούμενου λόγου, προκειμένου ο δείκτης να συνάδει με τους βαθμούς αποδοτικότητας και να εμφανίζεται η X2 με θετικό πρόσημο στην εξίσωση παλινδρόμησης.

X3 : Ως X3 θεωρούμε τον αντίστροφο δείκτη ζημιών όπως ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Ο δείκτης αυτός έχει και την ένδειξη ποιοτικής ικανότητας γραφείου.

Χρησιμοποιώντας ως  $y$  τους βαθμούς αποδοτικότητας του μοντέλου Μ1Ν και τις ορισθείσες μεταβλητές  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  (οι τιμές τους παρουσιάζονται στο παράρτημα Β) έχουμε την ακόλουθη ανάλυση γραμμικής παλινδρόμησης :

$$Y = 13.2 + 0.00274X_1 + 0.871 X_2 + 7.45 X_3 \quad (1)$$

$$R^2 = 75.5\%, \quad F = 42.18 \quad \rho = 0.000$$

<b>Μεταβλητές</b>	<b>t-ratio</b>	<b>p</b>
σταθερά	2.23	0.031
$X_1$	4.86	0.000
$X_2$	3.72	0.001
$X_3$	4.39	0.000

Χρησιμοποιώντας, τώρα, ως  $y$  τους βαθμούς αποδοτικότητας του μοντέλου Α3 με τις μεταβλητές  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , έχουμε την ακόλουθη ανάλυση :

$$y = 10 + 0.00283X_1 + 0.909X_2 + 7.50X_3 \quad (2)$$

$$R^2 = 79.3\%, \quad F = 52.43 \quad \rho = 0.000$$

<b>Μεταβλητές</b>	<b>t-ratio</b>	<b>p</b>
σταθερά	1.84	0.074
$X_1$	5.44	0.000
$X_2$	4.20	0.000
$X_3$	4.79	0.000

Από τα υποδείγματα (1) και (2) προκύπτει ότι ένα γραφείο παραγωγής με καλό επίπεδο παραγωγικής ικανότητας, με χαμηλό επίπεδο αποζημιώσεων και καλό επίπεδο οικονομικής ικανότητας έχει υψηλή πιθανότητα να είναι αποδοτικό.

Η αξιολόγηση της ερμηνευτικής ικανότητας του υποδείγματος (2), που χρησιμοποιεί το φραγμένο μοντέλο Α3, και ο στατιστικός του έλεγχος είναι ικανοποιητικότερα από εκείνα του υποδείγματος (1) που χρησιμοποιεί το μοντέλο Μ1Ν.

Τα ίδια αποτελέσματα έχουμε και με την χρήση του μοντέλου Μ1.

Η διαφορά στον συντελεστή προσδιορισμού ( $R^2$ ) των δύο υποδειγμάτων είναι αναμενόμενη. Δεν θα μπορούσε να είναι αρκετά μεγαλύτερη, λόγω της υψηλής συσχέτισης των 2 μοντέλων Μ1Ν και Α3 (συντελεστής τάξης = 0.987), αφενός, και τη χρήση μέσω όρων στην ανάλυση γραμμικής παλινδρόμησης, αφετέρου (οι μέσοι όροι των δυο μοντέλων είναι 74.22 και 73.21 αντίστοιχα).

Από τα προηγούμενα, είναι φανερή η βελτίωση στην αποδοτικότητα των γραφείων παραγωγής που γίνεται με τη χρήση του φραγμένου μοντέλου Α3, έναντι των αρχικών Μ1 και Μ1Ν. Η εκτίμηση αυτή συμπίπτει και με εκείνη των στελεχών της Ασφαλιστικής Εταιρείας.

Παρόμοια αποτελέσματα έχουν ληφθεί, όταν εφαρμόστηκαν τα φραγμένα μοντέλα στην ευρύτερη βιβλιογραφία της ΠΑΔ, όπως στα δεδομένα του άρθρου : "Giokas D., Bank branch operating efficiency : a comparative application of DEA and the longlinear model", Omega Vol. 19, No 6 (1991).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4.Α

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

**ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΣΡΟΩΝ - ΕΚΡΟΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΔΕΑ**

ΓΡΑΦ	ΕΜΒΑΔΟΝ	ΔΕΙΚΤΗΣ ΕΞΟΔΩΝ	ΑΣΦΑΛΙΣΤΕΣ	ΠΑΡΑΓΩΓΗ	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΔΕΙΚΤΗΣ ΖΗΜΙΩΝ
1	150	2,7313	15	93147	1,5949
2	280	1,0992	40	342518	3,7116
3	170	0,8925	27	198338	4,2589
4	185	1,0957	17	279759	3,0572
5	296	1,0555	19	161114	1,7409
6	191	1,2774	31	338000	2,3685
7	220	0,9494	12	203670	2,4219
8	350	1,3672	45	234338	1,7337
9	220	1,0492	27	276906	3,9078
10	197	1,3793	19	182276	1,7633
11	250	1,1233	23	281263	2,5465
12	250	1,557	15	159888	1,4265
13	244	1,2737	15	191362	2,206
14	245	0,4588	51	111838	1,1876
15	350	1,5133	42	285128	2,8793
16	160	1,5757	17	219175	2,5648
17	295	1,1712	18	109977	0,8032
18	500	1,0376	95	515951	2,7166
19	175	2,081	19	134830	1,7191
20	140	1,6949	20	150731	2,2978
21	110	0,8108	29	203724	5,3362
22	103	1,5067	20	226496	2,2983
23	290	1,5454	12	196447	3,1677
24	140	0,8881	38	358004	2,8498
25	191	0,2453	21	112100	2,5126
26	110	1,2097	27	82256	2,3994
27	200	1,4355	15	214054	5,1308
28	150	0,963	18	156373	2,7563
29	160	1,8723	18	168507	4,7619
30	130	3,2162	11	112995	4,5208
31	240	1,3587	41	235938	4,29
32	420	1,7265	33	307272	4,4444
33	222	1,0833	35	272557	4,3346
34	180	1,973	21	117790	2,586
35	200	1,1831	19	228104	3,4638
36	150	2,093	14	124623	3,2584
37	230	2,1791	24	132410	2,207
38	197	3,2162	14	157050	1,8395
39	190	1,7765	18	139579	1,5785
40	296	2,4175	26	88114	1,3763
41	160	1,1786	25	322190	3,7051
42	150	1,1188	18	175238	1,9892
43	88	0,5467	52	361873	4,085
44	91	0,7138	37	385843	1,911
45	64	0,824	24	211571	2,3747

**ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΣΡΩΩΝ-ΕΚΡΩΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΙΝ**

ΓΡΑΦΕΙΟ	ΕΜΒΑΔΟΝ	ΔΕΙΚΤΗΣ ΕΞΟΔΩΝ	ΑΣΦΑΛΙΣΤΕΣ	ΠΑΡΑΓΩΓΗ	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΔΕΙΚΤΗΣ ΖΗΜΙΩΝ
1	75	192	57	44	57
2	140	77	153	161	132
3	85	63	103	93	151
4	92,5	77	65	132	109
5	148	74	73	76	62
6	95,5	90	119	159	84
7	110	67	46	96	86
8	175	96	172	110	62
9	110	74	103	130	139
10	98,5	132	73	86	91
11	125	79	88	132	51
12	125	110	57	75	51
13	122	90	57	90	78
14	122,5	32	195	53	42
15	175	106	161	134	102
16	80	111	65	103	91
17	147,5	82	69	52	29
18	250	73	363	243	97
19	87,5	146	73	63	61
20	70	119	76	71	82
21	55	57	111	96	190
22	51,5	106	76	107	82
23	145	109	46	92	113
24	70	62	145	168	101
25	95,5	17	80	53	89
26	55	85	103	39	103
27	100	101	57	101	182
28	75	68	69	74	98
29	80	132	69	79	169
30	65	226	42	53	161
31	120	96	157	111	153
32	210	121	126	145	158
33	111	76	134	128	154
34	90	139	80	55	92
35	100	83	73	107	123
36	75	147	54	59	116
37	115	153	92	62	78
38	98,5	226	54	74	65
39	95	125	69	66	56
40	148	170	99	41	49
41	80	83	96	152	132
42	75	79	69	82	71
43	44	38	199	170	145
44	45,5	50	141	182	68
45	32	58	92	100	84

### ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΜΟΝΤΕΛΩΝ A1, A2, A3

Χρησιμοποιώντας τους τύπους των φραγμένων μοντέλων A1, A2, A3 που διατυπώθηκαν στο κεφάλαιο 3, προκύπτουν τα ακόλουθα φράγματα :

#### **ΜΟΝΤΕΛΟ A1**

$$0.00037 < \text{Εμβαδόν} < 0.015$$

$$0.00027 < \text{Δείκτης εξόδων} < 0.0315$$

$$0.001 < \text{Ασφαλιστές} < 0.021$$

$$0.00035 < \text{Αντιστρ. Δείκτης Ζημιών} < 0.0092$$

$$0.0014 < \text{Παραγωγή} < 0.01$$

#### **ΜΟΝΤΕΛΟ A2**

$$0.00055 < \text{Εμβαδόν} < 0.01038$$

$$0.00034 < \text{Δείκτης Εξόδων} < 0.02024$$

$$0.00117 < \text{Ασφαλιστές} < 0.0177$$

$$0.00052 < \text{Αντιστρ. Δείκτης Ζημιών} < 0.00528$$

$$0.00141 < \text{Παραγωγή} < 0.00834$$

#### **ΜΟΝΤΕΛΟ A3**

$$0.00054 < \text{Εμβαδόν} < 0.01037$$

$$0.00027 < \text{Δείκτης Εξόδων} < 0.02023$$

$$0.00107 < \text{Ασφαλιστές} < 0.0177$$

$$0.00061 < \text{Αντιστρ. Δείκτης Ζημιών} < 0.00528$$

$$0.00108 < \text{Παραγωγή} < 0.00833$$

**ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΛΟΤΙΚΟΤΗΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ Μ1, Μ1Ν ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ**

ΓΡΑΦΕΙΟ	Μ1	Μ1-Ν	Α1	Α2	Α3
1	44.64	44.89	43.46	43.09	43.46
2	35.02	84.79	82.83	81.88	81.93
3	87.06	86.78	85.94	85.63	85.64
4	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
5	56.66	56.61	55.34	54.72	54.75
6	83.37	82.91	82.19	81.91	81.80
7	100.00	100.00	100.00	99.37	99.40
8	44.33	44.14	42.95	42.36	42.39
9	93.20	92.86	91.77	91.29	91.32
10	59.63	63.58	62.87	62.68	62.87
11	85.07	84.71	81.96	80.73	80.37
12	63.23	63.40	62.35	61.72	61.85
13	75.80	76.19	75.93	75.80	75.88
14	36.83	37.02	34.72	33.63	33.63
15	57.48	57.20	55.95	55.34	55.37
16	85.47	85.18	84.28	84.04	84.28
17	37.08	37.10	35.94	35.38	35.27
18	76.27	76.06	67.76	63.78	63.01
19	48.59	48.10	47.26	47.05	47.26
20	61.72	61.99	61.90	61.71	61.90
21	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
22	94.74	95.29	93.95	93.60	93.95
23	100.00	100.00	99.32	95.87	95.87
24	92.28	91.99	91.65	91.48	91.49
25	100.00	100.00	100.00	91.19	91.14
26	55.94	55.89	54.05	53.99	54.42
27	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
28	73.15	72.95	72.92	72.90	72.90
29	92.34	92.06	91.71	91.71	91.77
30	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
31	63.15	62.89	62.43	62.20	62.21
32	71.92	72.03	70.11	69.18	69.23
33	83.67	83.38	82.36	81.87	81.90
34	48.87	48.78	48.63	48.48	48.65
35	86.13	95.39	85.45	85.34	85.34
36	78.76	73.69	78.69	78.57	78.69
37	40.12	39.99	39.38	39.28	29.28
38	68.58	66.97	64.16	63.44	64.16
39	48.84	48.21	47.63	47.48	47.63
40	22.18	22.00	21.81	21.76	21.81
41	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
42	67.68	67.28	67.11	67.06	67.11
43	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
44	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
45	100.00	100.00	100.00	99.32	99.45



**ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ**  
**ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ**

ΓΡΑΦΕΙΟ	X3	X1	X2
1	1.5749	6210	5.0900
2	3.7116	8563	23.7860
3	4.2589	7346	23.3960
4	3.0572	15456	27.1610
5	1.7409	8480	16.9590
6	2.3685	10903	19.3140
7	2.4219	16972	27.1560
8	1.7337	5208	7.5840
9	3.9078	10256	21.6330
10	1.7633	9593	16.7220
11	2.5465	12229	23.8360
12	1.4265	10659	12.9990
13	2.2060	12757	15.8150
14	1.1876	2193	12.5650
15	2.5793	6789	16.6940
16	2.5648	12893	21.1260
17	0.8032	6110	8.4590
18	2.7166	5431	15.5870
19	1.7191	7096	10.4520
20	2.2978	7519	15.0730
21	5.3362	7025	33.9540
22	2.2983	11325	20.0440
23	3.1677	16371	19.2590
24	2.8498	9421	30.0800
25	2.5126	5338	9.4200
26	2.8994	3047	1.0960
27	5.1308	14270	24.0960
28	2.7563	8687	30.1200
29	4.7619	9362	13.8470
30	4.5208	10272	9.4970
31	4.2900	5755	18.8760
32	4.4444	9311	15.2110
33	4.3346	7787	23.2950
34	2.5860	5609	16.1360
35	3.4638	12005	27.1550
36	3.2584	8902	13.8470
37	2.2070	5517	9.0690
38	1.8395	11218	13.1970
39	1.5785	7754	9.2440
40	1.3768	3389	3.5387
41	3.7051	12888	26.4090
42	1.9892	9735	15.5080
43	4.0850	6959	44.1310
44	1.9110	10428	34.4500
45	2.3747	8815	27.0270

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής αποτελεί η μέτρηση της αποδοτικότητας των εταιρειών παροχής υπηρεσιών με την μέθοδο της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων (ΠΑΔ).

Ειδικότερα, προσπαθήσαμε να ενοποιήσουμε και να επεκτείνουμε τη θεωρία που διέπει την ΠΑΔ. Η μέθοδος και τα ευρήματα της επέκτασης εφαρμόστηκαν σε πραγματικά δεδομένα ασφαλιστικής εταιρείας του ελληνικού χώρου.

Η ΠΑΔ, η οποία αναπτύχθηκε από την επιχειρησιακή έρευνα και την οικονομική επιστήμη, είναι μέθοδος γραμμικού προγραμματισμού που εκτιμά τη σχετική αποδοτικότητα παραγωγικών μονάδων (Decision Making Units – DMUs) αναφορικά με ένα σύνολο ομοίων μονάδων που χρησιμοποιούν πολλαπλές εισροές και παράγουν πολλαπλές εκροές.

Ως αποδοτικότητα μιας παραγωγικής μονάδας νοείται η σύγκριση μεταξύ των παρατηρούμενων τιμών και των βέλτιστων τιμών των εισροών και εκροών της μονάδας. Η σύγκριση μπορεί να έχει τη μορφή του λόγου του ελάχιστου δυνατού επιπέδου εισροών προς το παρατηρούμενο επίπεδο εισροών που απαιτείται για να παραχθεί το συγκεκριμένο επίπεδο εκροών και αντίστροφα.

Η λογική της ΠΑΔ βασίζεται στη μικροοικονομική έννοια του συνόλου δυνατοτήτων παραγωγής (production possibility set), το οποίο ορίζεται ως το σύνολο των εφικτών συνδυασμών εισροών και εκροών που επιτρέπονται από την υπάρχουσα τεχνολογία παραγωγής σε ένα οργανισμό. Η μεθοδολογία της ΠΑΔ επιτρέπει κάποιες παραγωγικές μονάδες να λειτουργούν πιο αποδοτικά από κάποιες άλλες ταξινομώντας, έτσι, τις παραγωγικές μονάδες σε αποδοτικές και μη αποδοτικές. Οι συνδυασμοί εισροών-εκροών των αποδοτικών μονάδων χρησιμοποιούνται για να ορίσουν το “σύνоро αποδοτικότητας”, έναντι του οποίου ο συνδυασμός εισροών-εκροών κάθε μονάδας αξιολογείται, προκειμένου να προσδιορισθεί ο βαθμός αποδοτικότητας της παραγωγικής μονάδας.

Οι αποδοτικές μονάδες που χρησιμοποιούνται ως μονάδες αναφοράς λαμβάνουν βαθμό αποδοτικότητας ίσο με την μονάδα, ενώ οι μη αποδοτικές μονάδες λαμβάνουν βαθμό αποδοτικότητας μικρότερο της μονάδας. Οι στόχοι της διατριβής και η συνεισφορά της στην έρευνα παρουσιάστηκαν στην εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται εναλλακτικές μέθοδοι αξιολόγησης των εταιρειών του χώρου των υπηρεσιών. Οι μέθοδοι ταξινομούνται σε “παραμετρικές” και “μη παραμετρικές” μεθόδους. Στις παραμετρικές μεθόδους συμπεριλαμβάνονται η στοχαστική προσέγγιση (Stochastic Frontier Approach), η προσέγγιση χωρίς κατανομή (Distribution Free Approach) και η πυχνή προσέγγιση (Thick Frontier Approach). Στις μη παραμετρικές μεθόδους συμπεριλαμβάνονται η περιβάλλουσα ανάλυση δεδομένων (Data Envelopment Analysis), το κέλυφος ελεύθερης διάθεσης (Free Disposal Hull) καθώς και η αξιολόγηση με τη χρήση δεικτών.

Οι εναλλακτικές μέθοδοι διαφοροποιούνται ως προς τη συναρτησιακή μορφή του συνόρου αποδοτικότητας και ως προς τις προϋποθέσεις κατανομής που επιβάλλονται στις τυχαίες διαταράξεις και στη μη αποδοτικότητα.

Οι μη παραμετρικές μέθοδοι δεν προϋποθέτουν κάποια συναρτησιακή μορφή του συνόρου αποδοτικότητας και δεν προϋποθέτουν την ύπαρξη τυχαίων σφαλμάτων. Μια συγκριτική εφαρμογή των εναλλακτικών μεθόδων παρουσιάζεται μέσα από ένα παράδειγμα.

Στόχος του κεφαλαίου 2 είναι η παρουσίαση ενός αξιωματικού πλαισίου των συνόλων δυνατοτήτων παραγωγής και η ανάλυση της δομής του συνόρου αποδοτικότητας. Επίσης παρουσιάζονται και αναλύονται, στο κεφάλαιο αυτό, τα δύο βασικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται στην DEA. Το μοντέλο CCR, που εκτιμά τη σχετική αποδοτικότητα παραγωγικών μονάδων κάτω από σταθερές παραδοχές οικονομιών κλίμακας, και το μοντέλο BCC, που εκτιμά τη σχετική αποδοτικότητα κάτω από μεταβλητές παραδοχές οικονομιών κλίμακας.

Το κεφάλαιο 3 αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται μια ανασκόπηση των εναλλακτικών μοντέλων που υπάρχουν στην βιβλιογραφία της ΠΑΔ.

Το δεύτερο μέρος ασχολείται με την επιβολή φραγμάτων στους συντελεστές βαρύτητας του μοντέλου CCR.

Η κριτική που δέχεται η ΠΑΔ στο πεδίο αυτό προκύπτει από την ευελιξία που διαθέτουν οι συντελεστές βαρύτητας των εισροών και εκροών στα συμβατικά μοντέλα, πράγμα που οδηγεί αρκετές φορές στην κατάργηση κάποιας εισροής/εκροής από την ανάλυση, λόγω εμφάνισης μηδενικών συντελεστών βαρύτητας της εισροής/εκροής.

Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με την επιβολή φραγμάτων στους συντελεστές βαρύτητας των εισροών και εκροών.

Νέοι τρόποι επιβολής φραγμάτων προτείνονται, που οδηγούν σε τροποποιημένα μοντέλα της μεθόδου. Οι διαφορές των νέων φραγμάτων και των αντίστοιχων μοντέλων με εκείνα της βιβλιογραφίας παρουσιάζονται μέσα από ένα παράδειγμα.

Στο κεφάλαιο 4, εφαρμόζονται τα συμβατικά και τα τροποποιημένα μοντέλα της ΠΑΔ σε Ελληνική Ασφαλιστική Εταιρία. Η συμπεριφορά των μοντέλων ελέγχεται με τη χρήση μιας ομάδας δεικτών αξιολόγησης καθώς και με τη χρήση γραμμικής ανάλυσης πολλαπλής παλινδρόμησης. Από την ανάλυση προκύπτει ότι τα τροποποιημένα μοντέλα συμπεριφέρονται καλύτερα από τα συμβατικά μοντέλα της ΠΑΔ. Με τα αποτελέσματα αυτά συμφωνεί και η Διοίκηση της Ασφαλιστικής Εταιρείας.

Επιπλέον, παρόμοια αποτελέσματα λαμβάνονται από την εφαρμογή των τροποποιημένων μοντέλων στην ευρύτερη βιβλιογραφία της ΠΑΔ.

Στην εισαγωγή της παρούσας διατριβής αναφέρθηκε ότι στην βιβλιογραφία έχουν καταγραφεί περισσότερα από 700 άρθρα σχετικά με την DEA (Seiford, 1996), πράγμα που υποδεικνύει τη μεγάλη απήχηση που είχε η μέθοδος στους ερευνητές, καθώς και το ευρύ φάσμα των σχετικών προβλημάτων που διαπραγματεύεται η βιβλιογραφία. Μολονότι η ΠΑΔ διαθέτει αρκετά πλεονεκτήματα έναντι εναλλακτικών μεθόδων αξιολόγησης της αποδοτικότητας, εν τούτοις υπάρχουν κάποια “αδύνατα σημεία” τα οποία μπορούν να αποτελέσουν προτάσεις για επέκταση της έρευνας. Τα θέματα στα οποία μπορεί να επεκταθεί η έρευνα είναι τα ακόλουθα :

### **Κριτήρια επιλογής εισροών – εκροών**

Οι εισροές και εκροές που εισέρχονται στα μοντέλα της ΠΑΔ, επιλέγονται κατά κανόνα από τον ερευνητή κάτω από πραγματικές ή αντιπροσωπευτικές θεωρήσεις του υπό εξέταση προβλήματος. Η βιβλιογραφία έχει υποδείξει τη χρήση του συντελεστή συσχέτισης (Thanassoulis 'et al 1987, Roll 'et al 1989, Boussofiane 'et al 1991) προκειμένου να αναχθεί το σύνολο των εισροών και εκροών. Η χρήση περισσότερων στατιστικών εργαλείων (π.χ. έλεγχος υποθέσεων) θα ήταν δυνατόν να παράγει τυπικά κριτήρια επιλογής του συνόλου των μεταβλητών.

## Στοχαστικός χαρακτήρας της ΠΑΔ

Ένας τομέας της μεθόδου που δεν έχει πλήρως ερευνηθεί, είναι ο τρόπος κατά τον οποίο στοχαστικές μεταβολές των εισροών και εκροών επηρεάζουν την κατά ΠΑΔ μέτρηση της αποδοτικότητας. Στα συμβατικά μοντέλα, οι αποκλίσεις της παρατηρούμενης συμπεριφοράς μιας παραγωγικής μονάδας από το σύνоро αποδοτικότητας αποδίδεται εξ ολοκλήρου στη μη αποδοτικότητά της. Αυτό αποτελεί και το κύριο σημείο επίκρισης της ΠΑΔ από τις αντίστοιχες παραμετρικές μεθόδους. Στην κατεύθυνση αυτή έχουν καταγραφεί σημαντικά άρθρα τα οποία προσεγγίζουν το θέμα. Ο Sengupta (1987) εξετάζει μεθόδους με τις οποίες στοχαστικές μεταβολές των εισροών – εκροών μπορούν να ενσωματωθούν στην ανάλυση. Ο Banker (1990) αναπτύσσει τη στοχαστική ΠΑΔ (SDEA), ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού στο οποίο η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιεί το σταθμικό άθροισμα των αποκλίσεων (που οφείλονται σε τυχαίες διαταράξεις και στη μη αποδοτικότητα) κάτω και επάνω από το σύνоро αποδοτικότητας. Ο Banker (1993) υποδεικνύει ότι, επιβάλλοντας στοχαστική δομή, οι εκτιμητές αποδοτικότητας της ΠΑΔ παρέχουν ενδιαφέρουσες στατιστικές ιδιότητες.

Οι Land et al (1993) και Olesen, Petersen (1995) επεκτείνουν την περίπτωση στοχαστικών εισροών και εκροών με τη χρήση προγραμματισμού κάτω από περιορισμούς πιθανοτήτων (chance – constrained programming).

Παρ'όλη τη σημαντική συνεισφορά των προηγούμενων άρθρων και άλλων, η ανάπτυξη ενός στοχαστικού μοντέλου της ΠΑΔ που να μπορεί να ενσωματώσει σφάλματα μέτρησης και τυχαίες διαταράξεις αποτελεί έναν τομέα για περισσότερη διερεύνηση.

## Στρατηγικός προσανατολισμός στην εφαρμογή της ΠΑΔ

Η πληθώρα των άρθρων της ΠΑΔ διαπραγματεύεται θέματα τακτικού χαρακτήρα (π.χ. η αξιολόγηση των υποκαταστημάτων μιας τράπεζας). Η σύνδεση μεταξύ στρατηγικής, στρατηγικών ομάδων και αξιολόγησης είναι ένας τομέας που μέχρι στιγμής έχει προσελκύσει λίγους ερευνητές. Οι Day, Lewin, Li (1995) εφαρμόζουν την ΠΑΔ για να προσδιορίσουν στρατηγικούς αρχηγούς και στρατηγικές ομάδες στην Αμερικάνικη Ζυθοποιία και εγείρουν σημαντικές ερωτήσεις για την κατασκευή στρατηγικών ομάδων. Οι Yue, Kosmetsky (1998) αξιολογούν, σε παγκόσμια κλίμακα, τις στρατηγικές και τις συμπεριφορές βιομηχανιών παραγωγής ημιαγωγών υψηλής τεχνολογίας, ενώ οι Goto, Tsutsui (1998) χρησιμοποιούν την ΠΑΔ για την αξιολόγηση Αμερικάνικων και Ιαπωνικών επιχειρήσεων ηλεκτρισμού.

Η εφαρμογή της ΠΑΔ σε θέματα στρατηγικού χαρακτήρα μπορεί να παρέχει νέες γνώσεις και να διερευνά την ανάλυση και επεξήγηση ετερογενών συμπεριφορών σε ανταγωνιστικές θεωρίες.

### **Παρουσίαση των αποτελεσμάτων**

Η ΠΑΔ είναι μέθοδος ευρέως διαδεδομένη και χρησιμοποιούμενη από τους ερευνητές. Υπάρχει, επομένως, ανάγκη να αναπτυχθούν αποτελεσματικά μέσα στην παρουσίαση-απεικόνιση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης. Τα είδη των γραφημάτων που θα χρησιμοποιηθούν θα πρέπει να απεικονίζουν ικανοποιητικά τα αποτελέσματα, έτσι ώστε η ΠΑΔ να είναι αρκετά επεξηγηματική στον χρήστη και περισσότερο στις παρουσιάσεις σε διοικήσεις εταιρειών. Στην κατεύθυνση αυτή κινείται το άρθρο των Maghazy, Landelma (1995) το οποίο εξετάζει διάφορα διαστάσιμα γραφήματα για την απεικόνιση των αποτελεσμάτων της ΠΑΔ. Οι προηγούμενες παρατηρήσεις οδηγούν στην ανάπτυξη περισσότερο ολοκληρωμένων πακέτων Η/Υ, τόσο των εξειδικευμένων στην ΠΑΔ όσο και εκείνων του γραμμικού προγραμματισμού.

Επίσης, η αξιοπιστία των μοντέλων της ΠΑΔ μπορεί να ενισχυθεί με τη χρήση διαστημάτων εμπιστοσύνης και την επέκταση της ανάλυσης ευαισθησίας. Οι Seiford και Zhu (1998) σε ένα πρόσφατο άρθρο τους αναπτύσσουν μια νέα προσέγγιση στην ανάλυση ευαισθησίας των μοντέλων της ΠΑΔ, όπου μεταβολές στα δεδομένα λαμβάνονται υπόψη ταυτόχρονα για όλες τις παραγωγικές μονάδες.

Τέλος προτάσεις για επέκταση της έρευνας της ΠΑΔ μπορούν επίσης να αποτελέσουν τα ακόλουθα :

- μεγαλύτερη διερεύνηση και ανάλυση της δομής των συνόλων δυνατοτήτων παραγωγής.
- διερεύνηση της εφικτότητας των διαστημάτων που προκύπτουν από την επιβολή απόλυτων φραγμάτων στους συντελεστές βαρύτητας.

Για την ανάλυση και τη συγγραφή της παρούσας διατριβής, χρησιμοποιήθηκαν τα ακόλουθα πακέτα Η/Υ :

- DEA Package (Πανεπιστήμιο Warwick)
- Minitab Statistical Package
- Excel '97
- Word '97

# Πανεπιστήμιο Πειραιώς

## ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adolphson, Donald L., Cornia, Gary C. and Walters, Lawrence C., "A Unified Framework for Classifying DEA Models", in *Operational Research '90 : Selected Papers from the Twelfth IFORS International Conference on Operational Research*, Hugh E. Bradley (editor), Athens, Greece, June 25-29, 1990, Pergamon Press, (1991). pp. 647-657.

Ali A.I., L.M. Seiford "The Mathematical Programming Approach to Efficiency Analysis" από το βιβλίο "The Measurement of Productive Efficiency" Oxford (1993).

Ali, Agha Iqbal, "Computational Aspects of Data Envelopment Analysis", in *Data Envelopment Analysis : Theory, Methodology, and Applications*, A. Charnes, W.W. Cooper, Arie Y. Lewin, and Lawrence M. Seiford (editors), Kluwer Academic Publishers, Boston, (1994).

Ali, Agha Iqbal, Cook, Wade D., and Seiford, Lawrence M., "Strict vs. Weak Ordinal Relations for Multipliers in Data Envelopment Analysis", *Management Science*, Vol. 37, No.6, (Jun 1991).

Ali, Agha Iqbal, Lenne, Catherine S., and Seiford, Lawrence M., "Components of Efficiency Evaluation in Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research*, Vol.80, No.3, (1995). pp. 462-473.

Allen R., Athanassopoulos A., Dyson R.G., Thanassoulis E. : Weight restrictions and value judgement in Data Envelopment Analysis : Evolution, development and future directions. *Annals of Operations Research* 73 (1997) 13-34.

Andersen, Per, and Petersen, Niels Christian. "A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis", *Management Science*, Vol. 39, No.10, (October 1993). pp. 1261-1264.

Antony R.N., "Planning and control systems : A framework for analysis" Harvard University Press (1965).

Athanassopoulos, Andreas D., "The Evolution of Non-parametric Frontier Analysis Methods : A Review of Recent Developments", *Journal of Spouday*, Vol.45, No 1-2, (1995a), pp. 13-45.



Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Athanassopoulos, Andreas D., and Ballantine, Joan A., "Ratio and frontier Analysis for Assessing Corporate Performance : Evidence from the Grocery Industry in the UK," *Journal of the Operational Research Society*, Vol.46, (1995). pp. 427-440.

Athanassopoulos, Andreas D., and Storbeck, James, "Non-Parametric Models for Spatial Efficiency," *The Journal of Productivity Analysis*, Vol.5, No3.

Athanassopoulos, Andreas D., and Thanassoulis, Emmanuel, "Seperating Market Efficiency from Probability and its Implications for Planning," *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 46, No. 1, (1995). pp.149-164.

Banker, Rajiv D., "Estimating Most Productive Scale Size Using Data Envelopment Analysis," *European Journal of Operational Research*, Vol.17, No.1, (Jul 1984). pp. 35-44.

Banker, Rajiv D., "A Game Theoretic Approach to Measuring Efficiency," *European Journal of Operational Research*, Vol.5, (1980a). pp. 262-266.

Banker, Rajiv D., "Maximum Likelihood, Consistency and Data Envelopment Analysis : A Statistical Foundation," *Management Science*, Vol.39, No.10 (October 1993b). pp. 1265-1273.

Banker, Rajiv D., Charnes, A., and Cooper, W.W., "Some Models in Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis," *Management Science*, Vol.30, No.9, (1984). pp. 1078-1092.

Banker, Rajiv D., Charnes, A., Cooper, W.W. and Clarke, Richard L., "Constrained Game Formulations and Interpretations for Data Envelopment Analysis," *European Journal of Operational Research*, Vol.40, No.3, (June 1989a), pp.299-308.

Banker, Rajiv D., Charnes, A., Cooper, W.W. Swarts, J., and Thomas, D., "An Introduction to Data Envelopment Analysis with Some of Its Models and Their Uses," in *Research in governmental and nonprofit accounting*, James L. Chan, and James M. Patton (editors), Vol.5, (1989c). pp.125-63.

Banker, Rajiv D., Conrad, R.F., and Strauss, R.P. "A Comparative Application of Data Envelopment Analysis and Translog Methods : An Illustrative Study of Hospital Production", *Management Science*, Vol.32, No.1, (Jan.1986) pp. 30-44.

Banker, Rajiv D., Datar, Srikant M., and Kemerer, Chris F., "A Model to Evaluate Variables Impacting the Productivity of Software Maintenance Projects," *Management Science*, Vol.37, No.1 (Jan 1991).

Banker, Rajiv D., and Maindiratta, Ajay, "Nonparametric Analysis of Technical and Allocative Efficiencies in Production", *Econometrica*, Vol.56, No.6, (1988) pp. 1315-1332.

Banker, Rajiv D., and Morey, Richard C., "Efficiency Analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs," *Operations Research*, Vol.34, No.4, (July-Aug. 1986a). pp. 245-521.

Banker, Rajiv D., and Morey, Richard C., "The Use of Categorical Variables in Data Envelopment Analysis," *Management Science*, Vol.32, No.12, (Dec 1986b). pp. 1613-1627.

Banker, Rajiv D., and Thrall, Robert M., "Estimation of Returns to Scale Using Data Envelopment Analysis," *European Journal of Operational Research*, Vol.62, No.1, (Oct 9, 1992).

Banker R.D., Bardham I., Cooper W.W., "A note of returns to scale in DEA", *EJOR* 88 (1996) 583-585.

Bardham I., Bowlin W., Cooper W., Sueyoshi T. "Models and measures for efficiency dominance in DEA, Part II" *Journal of O.R. Society of Japan* (1996), Vol.39, No.3, pp.333-344.

Bardham I., Bowlin W., Cooper W., Sueyoshi T., "Models and measures for efficiency dominance in DEA, Part I", *Journal of O.R. Society of Japan* (1996) Vol.39, No.3, pp.322-332.

Beasley, J.E., "Comparing University Departments," *Omega*, Vol.18, No.2, (1990a).

Beasley, J., "Determining teaching and research efficiencies", *JORS* (1995) 46, 441-452.

Belton V., Vickers S., "Demystifying DEA – A visual interactive approach based on multiple criteria analysis", *JORS* (1993) Vol.44, No.9 pp.883-896.

Berg, S., Fossund F., Hjalmarson L., Snominen M., "Banking efficiency in the Nordic countries", *Journal of Banking and Finance* 17 (1993) 371-388.

Berger A., Humphrey D. "Efficiency of Financial Institutions : International survey and directions for future research" *EJORS* 98 (1997) 175-212.

Berger A., Hunter W., Timmes, "The Efficiency of financial institutions" *Journal of Banking and Finance* 17, (1993) 221-249.

Bjurek, Hans, Hjalmarsson, Lennart and Forsund, Finn R., "Deterministic Parametric and Nonparametric Estimation of Efficiency in Service Production: A Comparison," *Journal of Econometrics*, Vol.46, No.1,2, (Oct/Nov 1990), pp.213-227.

Boussofiane, A., Dyson, R.G. and Thanassoulis, E., "Applied Data Envelopment Analysis," *European Journal of Operational Research*, Vol.52, No.1, (May 6, 1991), pp. 1-15.

Bowlin W. "Evaluating the efficiency of U.S. air force real-property maintenance activities" *JORS* (1987), Vol. 38, No.2 pp. 127-135.

Campbell J.P. "On the Nature of Organizational Effectiveness" από το βιβλίο "New Perspectives on Organizational Effectiveness" *Jossey-Bass*, San Francisco 1977, 13-55.

Charnes, Cooper, Golany, Seiford, Stutz : "Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto – koopmans efficient empirical Production functions", *Journal of Econometrics* 30 (1985) 91-107.

Charnes A., W.W. Cooper, J. Rousseau, J. Semple : "Data Envelopment Analysis and Axiomatic Notions of Efficiency and Reference Sets", Research Report CCS 558, Center for Cybernetic Studies, University of Texas, Austin, (1987).

Charnes A., Cooper W.W., Seiford L., Stutz J., "Invariant Multiplicative Efficiency and Piecewise Cobb-Douglas Envelopments" *Operations Research Letters* (1983), 2(3), 101-103.

Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, Arie Y., Morey, Richard C., and Rousseau, John J., "Sensitivity and Stability Analysis in DEA," *Annals of Operations Research*, Vol. 2, (1985f) pp. 139-156.

Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, Arie Y., and Seiford, Lawrence M., *Data Envelopment Analysis : The Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston (1994b).

Charnes, A., Cooper, W.W., and Rhodes, Edwardo L., "Evaluating Program and Managerial Efficiency : Application of Data Envelopment Analysis to Program Follow Through," *Management Science*, Vol.27, No (Jun 1981) pp. 668-697.

Charnes, A., Cooper W.W., and Rhodes, Edwardo L., "Measuring the Efficiency of Decision Making Unit," *European Journal of Operational Research*, Vol.2, No. 6, (1978b) pp. 429-444.

Charnes, A., Cooper, W.W., and Rhodes, Edwardo L., "Short Communication :Measuring the Efficiency Decision Making Units," *European Journal of Operational Research*, Vol.3, No.4, (1979) p.339/

Charnes, A., Cooper, W.W. and Thrall, Robert M., "Classifying and Characterising Efficiencies and Inefficiencies in Data Development Analysis," *Operations Research Letters*, Vol.5, No.3 (Aug. 1986).

Charnes, A., Cooper, W.W., and Thrall, Robert M., "A Structure for Classiying and Characterising Efficiency and Inefficiency in Data Development Analysis," *Journal of Productivity Analysis*, Vol.2, (1991 d).

Charnes, A. and Neralic, L., "Sensitivity Analysis of the Additive Model in Data Envelopment Analysis," *European Journal of Operatinal Research*, Vol.48, No.3 (1990) pp.332-341.

Chang, Kuo-Ping, and Guh, Yeah-Yuh, "Linear production functions and the data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research*, Vol.52, No.2 (1991), pp.215-223.

Charnes, A., Cooper, W.W., Huang, Z.M., and Sun, Dee Bruce, "Polyhedral Cone-Ratio DEA Models and Illustrative Application to Large Commercial Banks", *Journal of Econometrics*, Vol.46, No.1-2, (Oct/Nov. 1990a), pp.73-91.

Charnes, A., Cooper, W.W., Wei, Quan Ling, and Huang, Z.M., "Cone Ratio Data Envelopment Analysis Multi-objective Programming", *International Journal of Systems Science*, Vol.20, No.7, (1989e) pp.1099-11.

Charnes A., Gallegos A., Li H., "Robustly efficient parametric frontiers via multiplicative DEA for domestic and international operations of the Latin American airline industry", *EJORS* 88 (1996) 525-536.

Cook, Wade D., Kazakov, Alex, and Roll, Yaakov, "On the Measurement of the Relative Efficiency of a Set of Decision-Making Units," in *Studies in Economic Rationality: X-Efficiency Examined and Extolled. Essays written in the tradition of and to honor Harvey Leibenstein*, K. Weiermair, and M. Perlman (editors), Ann Arbor, (1990), pp. 351-368.

Cook, Wade D., and Kress Moshe, "A Data Envelopment Model for Aggregating Preference Rankings," *Management Science*, Vol. 36, No. 11, (1990a) pp. 1302-1310.

Cook, Wade D., and Kress Moshe, and Seiford, Lawrence M., "Prioritization Models for Frontier Decision Making Units in DEA," *European Journal of Operations Research*, Vol 59, NO. 2, (1992).

Cook, Wade D., Roll, Yaakov and Kazakov, Alex, "A DEA Model for Measuring the Relative Efficiency of Highway Maintenance Patrols," *INFOR*, Vol. 28, No. 2, (1990) pp.113-124

Cook, Wade D., Kress, Moshe, and Seiford, Lawrence M., "Data Envelopment Analysis in Presence of Both Quantitative and Quantitative Data", *JORS* (1996), 47, 949-953.

Cooper W., Tone K., "Measures of inefficiency in data envelopment analysis and stochastic frontier estimation" *EJORS* 99 (1997) 72-88.

Cummins D., Weiss M., "Measuring cost efficiency in the property-liability insurance industry", *Journal of Banking and Finance* 17 (1993) 463-481.

Day, D.L., Lewin, A.Y. and Li, H., "Strategic Leaders or Strategic Groups: A Longitudinal Data Envelopment Analysis of the U.S. Brewing Industry," *European Journal of Operational Research*, Vol.80, No.3, (1995). pp. 619-638.

Doyle, J.R., and Green, R.H., "Comparing products using data envelopment analysis," *Omega*, Vol.19, No 6, (1991).

Drake, L., and Howcroft, B., "Relative Efficiency in the Branch Network of a UK Bank : An Empirical Study, *Omega*, Vol.22, No. 1, (1994). pp. 83-90.

Dyson R., O'Brien F., "Strategic development", *WILEY* (1998).

Dyson R.G., Thanassoulis E., "Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis" *JORS* (1988), 39(6), 563-576.

Elliot B., Elliot J., "Financial accounting and reporting", *Prentice Hall* 1997/

Eilon S., "Three prominent performance ratios", *Omega* (1988), 16, No.6, 503-508.

Epstein, Michael K., and Henderson, John C., "Data Envelopment Analysis for Managerial Control and Diagnosis," *Decision Sciences*, Vol.20, No.1, (1989). pp. 263-277.

Fare R., Grosskopf S., Lovell K. "Production Frontiers", *Cambridge University Press* 1994.

Fare R., Grosskopf S., Lindgren B., Roos P., "Productivity Developments in Swedish Hospitals: A Malmquist Output Index Approach" Working Paper, Department of Economics, Southern Illinois University (1989).

Fare, Rolf, and Hunsaker, Worthen, "Notions of Efficiency and Their Reference Sets", *Management Science*, Vol.32, No.2 (Feb 1986), pp.237-243.

Fecher F., "Productive performance of the French Insurance industry", Franko-American economic seminar on productivity issues in services, Cambridge (1990).

Fitzsimmons J. "Service Management", *McGraw Hill*, (1994).

Fizel J., D'Itri M., "Managerial Efficiency, Managerial Succession and Organisational Performance", *Managerial and Decision Economics*, Vol.18, 295-308 (1997).

Fried H., Lovell K., Schmidt S., "The measurement of productive efficiency" *Oxford University Press* (1993).

Friedman Lea, Sinuary-Stern Zilla "Scaling units via the canonical correlation analysis in the DEA context" *EJORS* 100 (1997) p.p. 629-637.

Fortuin L., "Performance indicators : Why, where and how?" *EJORS*, 34 (1988), 1-9.

Ganley J.A., Cubbin J.S., "Public Sector Efficiency Measurement : Applications of Data Envelopment Analysis" North-Holland (1992).

Giokas, D.I., "Bank branch operating efficiency : a comparative application of DEA and the loglinear model," *Omega*, Vol. 19, No.6, (1991).

Giokas D., "The use of goal programming and data envelopment analysis for estimating efficient marginal costs of outputs" *Journal of the Operational Research Society* (1997) 48, 319-323.

Golany, Boaz, and Roll, Yaakov, "An Application Procedure for DEA," *Omega*, Vol.17, No.3 (1989). pp.237-250.

Golany, Boaz, and Roll, Yaakov, "Incorporating Standards Via Data Envelopment Analysis," in *Data Envelopment Analysis : Theory, Methodology and Applications*, A. Charnes, W.W. Cooper, Arie Y. Lewin, and Lawrence M. Seiford (editors), Kluwer Academic Publishers, Boston, (1994).

Golany, Boaz, and Roll, Yaakov, "Some Extensions of Techniques to Handle Non-Discretionary Factors in Data Envelopment Analysis," *The Journal of Productivity Analysis*, Vol. 4, No.4 (1993). pp. 419-432.

Golany, Boaz, and Yu, Gang, "A Goal Programmin Discriminant Function Approach to the Estimation of an Empirical Production Function Based on DEA Results," *The Journal of Productivity Analysis*, Vol.6, No.2 (1995), pp.171-186

Golany B., Yu G., "Estimating returns to scale in DEA" *EJORS* 103 (1997) 28-37.

Goto M., Tsutsui M. "Comparison of productive and cost efficiencies among Japanese and US electric utilities" *Omega* (1998) Vol.26, No.2, pp.177-194.



- Griffel-Tatje E., Lovell C., "The sources of Productivity Change in Spanish Banking" *EJORS* 98 (1997) 364-380.
- Grosskopf S., "Statistical inference and nonparametric efficiency : A selective survey", *Journal of Productivity Analysis* (1996) Vol.7.
- Grosskopf, S., "The Role of the Reference Technology in Measuring Productive Efficiency," *Economic Journal*, Vol.96, (June 1986), pp.499-513.
- Hand N., White L., "Banking on efficiency", *OR Insight* (1996), Vol.9, Issue 4.
- Hjalmarsson L., Kumbhakar S., Heshmati A., "DEA, DFA and SFA : A comparison" *Journal of Productivity Analysis* Vol.7, July 1996.
- Hunger, Wheelen "Strategic Management" Addison Wesley (1996).
- Kamakura, Wagner A., "A Note on the Use of Categorical Variables in Data Envelopment Analysis," *Management Science*, Vol.34, No.10 (1988), pp.1273-1276.
- Kozmetsky G., Yue P., "Comparative performance of global semiconductor companies" *Omega* (1998), Vol.26, No.2 pp.153-175.
- Land, A., Shuttler, M.F., and Kirthisingha, H.A., "Branch Operation: An Investigation Using DEA and Regression," in *Operational Research '90*, Hugh Bradley (ed.), Pergamon Press, Oxford, (1991). pp.261-276.
- Land, Kenneth C., Lovell, C.A. Knox, and Thore, Sten, "Chance-constrained Data Envelopment Analysis," *Managerial and Decision Economics*, Vol.14, No.6, (1993) pp.541-554.
- Lang P., Yolalan O., Kettani O., "Controlled Envelopment by face extension in DEA", *Journal of the Operational Research Society* (1994), 46, 473-491.
- Lewin, Arie Y., Morey, Richard C., and Cook, T.J., "Evaluating the Administrative Efficiency of Courts," *Omega*, Vol.10, No.4, (1982) pp.401-411.
- Lewin, Arie Y., and Minton J.W., "Determining Organisational Effectiveness : Another Look, and an Agenda for Research," *Management Science*, Vol.32, No.5, (1986), pp.514-538.

Lovell C.A. Knox "Econometric Efficiency Analysis : A Policy – Oriented Review" *EJORS* 80 (1995) 452-461.

Lovell K., "Applying efficiency measurement techniques to the measurement of productive change" *Journal of Productivity Analysis* (1996) Vol.7.

Maindiratta, Ajay, "Largest Size-Efficient Scale and Size Efficiencies of Decision-Making Units in Data Envelopment Analysis," *Journal of Econometrics*, Vol.46, No.1-2, (Oct-Nov 1990), pp.57-72.

McLarghlin, Coffey "Measuring productivity in services" *International journal of service industry management* Vol.1(1), (1990).

Miliotis P., "Data envelopment analysis applied to electricity distribution districts", *JORS* (1992) Vol.43, No.5 pp.549-555.

Norman M., Stoker B., "Data Envelopment Analysis : The Assessment of Performance" Wiley (1991).

Olesen, O., and Petersen, N.C., "Chance – Constrained Efficiency Evaluation", *Management Science*, Vol.41, No.3, (March, 1995) pp.442-457.

Oral, Muhitin, and Yolalan, Reha, "An Empirical Study on Measuring Operating Efficiency and Profitability of Bank Branches," *European Journal of Operational Research*, Vol.46, No.3, (1990). pp.282-294.

Ozcan Y., McCue M., "Development of a financial performance index for hospitals : DEA approach" *JORS* (1996) 47, 18-26.

Petersen, Niels Christian, "Data Envelopment Analysis on a Relaxed Set of Assumptions," *Management Science*, Vol.36, No.3, (1990). pp.305-314.

Ray, Subhash C., "Resource-Use Efficiency in Public Schools : A Study of Connecticut Data," *Management Science*, Vol.37, No.12, (1991). pp.1620-1628.

Roll, Yaakov, Cook, Wade D., and Golany, Boaz, "Controlling Factor Weights in Data Envelopment Analysis," *IIE Transactions*, Vol.23, No.1, (Mar.1991), pp.2-9.

Roll, Yaakov, and Golany, Boaz, "Alternative Methods of Treating Factor Weights in DEA," *Omega*, Vol.21, No.1, (1993). pp. 99-109.

Roll, Yaakov, Golany, Boaz, and Seroussy, D., "Measuring the Efficiency of Maintenance Units in the Israeli Air Force," *European Journal of Operational Research*, Vol.43, No.2, (1989). pp. 136-142.

Schefczyk, Michael, "Operational Performance of Airlines : An Extension of Traditional Measurement Paradigms," *Strategic Management Journal*, Vol.14, (1993). pp. 301-307.

Seiford, Lawrence M., and Thrall, Robert M., "Recent Developments in DEA: The Mathematical Programming Approach to Frontier Analysis," *Journal of Econometrics*, Vol.46, No.1-2, (Oct-Nov 1990). pp.7-38.

Sengupta, Jati K., "Data Envelopment Analysis for Efficiency Measurement in the Stochastic Case," *Computers and Operations Research*, Vol.14, No.2, (1987a). pp.117-129.

Sengupta, Jati K., "Transformations in Stochastic DEA Models," *Journal of Econometrics*, Vol.46, No.1,2, (Oct/Nov 1990c), pp.109-124.

Sengupta, Jati K., and Sfeir, Raymond E., "Efficiency Measurement by Data Envelopment Analysis with Econometric Applications," *Applied Economics*, Vol.20, No.3, (Mar 1988). pp.285-293.

Sherman, H. David, "Hospital Efficiency Measurement and Evaluation : Empirical Test of a New Technique", *Med Care*, Vol.22, No.10, (Oct.1984b) pp.922-38.

Sherman, H. David, "Improving the Productivity of Service Businesses," *Sloan Management Review*, Vol.25, No.3, (Spring 1984c). pp.11-23.

Sherman, H. David, and Gold, Franklin, "Bank Branch Operating Efficiency: Evaluation with Data Envelopment Analysis", *Journal of Banking and Finance*, Vol.9, No.2, (Jun 1985) pp.297-315.

Smith, Peter, "Data envelopment analysis applied to financial statements," *Omega*, Vol.18, No.2, (1990) pp.131-138.

Smith, Peter, and Mayston, David, "Measuring efficiency in the public sector", *Omega*, Vol.15, No.3, (1987), pp.181-189.

Subhash Ray, Hiung Joon Kim "Cost efficiency in the US steel industry : A non parametric analysis using DEA", *EJORS* 80 (1995) 654-671.

Sueyoshi, Toshiyuki, "Measuring Technical Allocative and Overall Efficiencies Using a DEA Algorithm", *Journal of the Operational Research Society*, Vol.43, No.2 (1992b), pp.141-155.

Sueyoshi, Toshiyuki, "A Special Algorithm for an Additive Model in Data Envelopment Analysis", *Journal of the Operational Research Society*, Vol.41, No.3 (1990a), pp.249-257.

Thanassoulis, E., "A Comparison of Regression Analysis and Data Envelopment Analysis as Alternative Methods for Performance Assessments", *Journal of Operational Research Society* (1993), Vol. 44, No 11, pp. 1129-1144.

Thanassoulis, E., "Assessing the Effectiveness of Schools Over Pupils of Different Ability Using Data Envelopment Analysis", *Journal of the Operational Research Society*, (1996) 47, 84-97.

Thanassoulis, E., Boussofiane, A., and Dyson, R.G. "Exploring Output Targets in the Provision of Perinatal Care in England Using DEA," *European Journal of Operational Research*, Vol. 80, No.3, (1995). pp. 588-607.

Thanassoulis, E., Boussofiane A., Dyson R., "A comparison of data envelopment analysis and ratio analysis as tools for performance assessment" *Omega* (1996), 24, No.3, 229-244.

Thanassoulis, E., and Dyson, R.G., "Estimating Preferred Target Input-Output Levels Using Data Envelopment Analysis," *European Journal of Operational Research*, Vol. 56, No.1, (1992). pp.80-97.

Thanassoulis, E., and Dyson, R.G. and Foster, M.J., "Relative Efficiency Assessments Using Data Envelopment Analysis : An Application to Data on Rates Departments," *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 38, No.5, (1987) pp.397-411.

Thanassoulis E., "Assessing the market efficiency of pubs" *OR Insight* Vol.10 Issue 4 (1997).

Thompson, Russel G., Dharmapala, P.S., Rothenberg, Louis J., and Thrall, Robert M., "DEA ARs and CRs Applied to Worldwide Major Oil Companies," *The Journal of Productivity Analysis*, Vol. 5, No.2, (1994a). pp.181-203.

Thompson, Russell G., Dharmapala, P.S. and Thrall, Robert M., "Sensitivity Analysis of Efficiency Measures With Applications to Kansas Farming and Illinois Coal Mining," in *Data Envelopment Analysis : Theory, Methodology, and Applications*, A. Charnes, W.W. Cooper, Arie Y. Lewin and Lawrence M. Seiford (editors), Kluwer Academic Publishers, Boston (1994b).

Thompson, Russell G., Singleton, F.D., Jr., Thrall, Robert M., and Smith, Barton A., "Comparative Site Evaluation for Locating a High-Energy Physics Lab in Texas," *Interfaces*, Vol. 16, No.6 (Nov/Dec 1986) pp.35-49.

Thompson R., Dharmapala P., Rothenberg L., Thrall R., "DEA/AR efficiency and profitability of 14 major oil companies in US exploration and production" *Computers Ops Res.*, Vol 23, No.4 pp. 357-373, 1996.

Thompson R., Langemeier L, Lee C., Lee E., Thrall R. "The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming" *Journal of Econometrics* 46 (1990) 93-108.

Toivanen Otto "Economies of scale and scope in the Finish non-life insurance industry" *Journal of Banking and Finance* 21 (1997) 759-779.

Tulkens, H., and Eechaut, P.V., "Non-parametric Efficiency Analysis, Progress and Regress Measures for Panel Data: Methodological Aspects" *European Journal of Operational Research*, Vol.80, No.3, (1995) pp.474-499.

Tulkens, Henry, "On FDH Efficiency Analysis : Some Methodological Issues and Application to Retail Banking, Courts, and Urban Transit," *The Journal of Productivity Analysis*, Vol.4, No.1/2, (1993) pp. 183-210.

Varian H., "Intermediate Microeconomics" *Norton*, (1993).

Vassiloglou, M. and Giokas, D.I. "A Study of the Relative Efficiency of Bank Branches : An Application of Data Envelopment Analysis," *Journal of the Operational Research Society*, Vol.41, No.7, (1990).

Wei, Q.L., Sun, B., and Xiao, Z.J. "Measuring Technical Progress with Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research*, Vol.80, No.3, (1995), pp.691-?

Wong, Y-H B., and Beasley, J.E., "Restricting Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis," *Journal of the Operational Research Society*, Vol.41, No.9, (Sep 1990), pp. 829-835.

Yue, Piyu, "Data Envelopment Analysis and Commercial Bank Performance: A Primer with Applications to Missouri Banks", *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, Vol. 74, No.1 (Jan-Feb 1992), pp.31-45.

Yuengert A.M. "Efficiency in life insurance" *Journal of Banking and Finance* 17 (1993).

Zhu J., Shen Z.H., "A discussion of testing DMU's returns to scale", *EJOR* 81 (1995) 590-596.

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

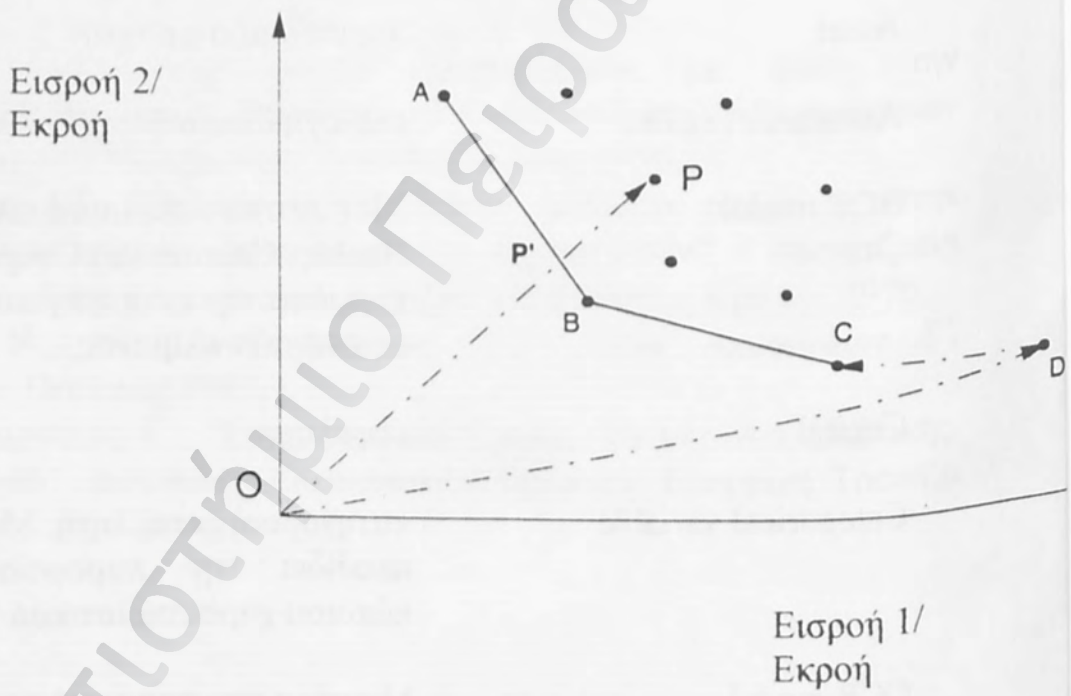
- Αθανασόπουλος Α., "Τεχνική αποδοτικότητα ως κριτήριο αξιολόγησης του ιδιωτικού και δημόσιου τομέα ως εναλλακτικών φορέων παροχής υπηρεσιών", Ορια και σχέσεις δημόσιου και ιδιωτικού, Ίδρυμα Σάκη Καραγιωργα, σελ. 281-301, Αθήνα 1996.
- Αθανασόπουλος Α., Γκιώκας Δ., "Υποδειγματικά σενάρια διαχείρισης του λειτουργικού κόστους τραπεζικών καταστημάτων", 11<sup>ο</sup> Συνέδριο ΕΕΕΕ, Αθήνα 1997.
- Δεδούσης, Ρίζος, "Υφιστάμενη κατάσταση και προοπτικές των ασφαλιστικών εταιρειών στην Ελλάδα", Διεύθυνση Οικονομικών Μελετών, Εμπορική Τράπεζα 1991.
- Δημόπουλου Μ., "Αξιολόγηση Επιχειρήσεων με βάση την χρηματοοικονομική τους συμπεριφορά", Μάνατζμεντ Μικρομεσαίων Επιχειρήσεων, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1996.
- Μιχαλόπουλος Μ., "Χρήση πολυκριτηρίων μεθόδων απόφασης στην έρευνα βιωσιμότητας μικρομεσαίων επιχειρήσεων", Μάνατζμεντ Μικρομεσαίων Επιχειρήσεων, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1996.
- Μπλέσσιος Ν., "Ποσοτική Ανάλυση Διοικητικών Αποφάσεων Γ", Πανεπιστήμιο Πειραιώς 1989.
- Ρίζος Δ., Καρατζάς Γ., "Επιχειρησιακό Σχέδιο Ιονικής Ασφαλιστικής. Περίοδος 94-96". Διεύθυνση Οικονομικών Μελετών, Εμπορική Τράπεζα 1994.

## ΓΛΩΣΣΑΡΙ

Additive	:	προσθετικό
Allocative efficiency	:	κατανομητική αποδοτικότητα. Η αποδοτικότητα που λαμβάνει υπόψη και τις τιμές των εισροών.
Approach	:	προσέγγιση
Artificial variable	:	τεχνητή μεταβλητή
Asset	:	περιουσιακό στοιχείο
Assurance region	:	περιοχή διασφάλισης
BCC model	:	Μοντέλο που παρουσιάστηκε από τους Banker, Charnes και Cooper και επιτρέπει την εκτίμηση αποδόσεων οικονομιών κλίμακας.
Capital	:	κεφάλαιο
Categorical variable	:	κατηγορική μεταβλητή. Μεταβλητή που αποδίδει την παρουσία ή απουσία κάποιου χαρακτηριστικού.
CCR model	:	Μοντέλο που παρουσιάστηκε από τους Charnes, Cooper και Rhodes. Είναι το πρώτο μοντέλο της ΠΑΔ και εκείνο που εφαρμόζεται συχνότερα.
Chance	:	πιθανότητα
Composite unit	:	Σύνθετη μονάδα. Μια υποθετική αποδοτική μονάδα, που σχηματίζεται από το υποσύνολο αναφοράς της υπό αξιολόγηση μονάδας σύμφωνα με τις αναλογίες που προκύπτουν από τους συντελεστές βαρύτητας.



Το σχήμα 1.α παρουσιάζει το διάγραμμα αποδοτικότητας 10 παραγωγικών μονάδων, οι οποίες χρησιμοποιούν 2 εισροές και παράγουν 1 εκροή. Για τη μη αποδοτική μονάδα P, η σύνθετη αποδοτική μονάδα είναι η P'.



Σχήμα 1.α

Constant returns to scale :	Σταθερές αποδόσεις οικονομιών κλίμακας. Μια παραγωγική μονάδα λειτουργεί κάτω από σταθερές αποδόσεις οικονομιών κλίμακας, όταν μια μεταβολή του επιπέδου των εισροών της συνεπάγεται ίση μεταβολή του επιπέδου των εκροών της. Στο παράδειγμα του σχήματος 1.α, οι ποσότητες των εισροών έχουν αναχθεί ανά μονάδα παραγόμενης εκροής και επομένως έχουν υιοθετηθεί σταθερές αποδόσεις οικονομιών κλίμακας.
Constrain :	περιορισμός
Conicall hull (Convex cone) :	Κωνικό κέλυφος (κυρτός κώνος). Περιέχει όλους τους μη αρνητικούς γραμμικούς συνδυασμούς των σημείων του. Η περιβάλλουσα επιφάνεια η οποία προκύπτει από το μοντέλο CCR έχει τη μορφή κωνικού κελυφους.
Convexity :	κυρτότητα
Convex hull :	Κυρτό κέλυφος. Το κυρτό κέλυφος ενός συνόλου σημείων είναι το μικρότερο κυρτό πολύγωνο που περιέχει όλα τα σημεία. Η επιφάνεια η οποία προκύπτει από το μοντέλο BCC, έχει τη μορφή του κυρτού κελυφους.
Data Envelopment Analysis:	Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων. Μεθοδολογία η οποία βασίζεται στο γραμμικό προγραμματισμό, και εκτιμά τη σχετική αποδοτικότητα ενός συνόλου συγκρίσιμων παραγωγικών μονάδων.

Decision Making Unit (DMU)	:	Παραγωγική μονάδα. Στο αρχικό άρθρο της ΠΑΔ (Charnes et al, 1978) ο όρος χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να υποδείξει ότι η έμφαση δίδεται σε μονάδες λήψης αποφάσεων και όχι σε μονάδες παραγωγής κέρδους.
Decreasing returns of scale	:	φθίνουσες αποδόσεις οικονομιών κλίμακας
Deterministic	:	προσδιοριστικός
Distribution	:	κατανομή
Dual Model	:	Δυϊκό μοντέλο.
Effectiveness	:	Αποτελεσματικότητα. Η αποτελεσματικότητα μετρά το βαθμό επιτυχίας ενός συνόλου προδιαγεγραμμένων στόχων (Norman, Stoker, 1991).
Efficiency	:	Αποδοτικότητα. Είναι η μέτρηση της ικανότητας μιας μονάδας να παράγει εκροές από το σύνολο των εισροών της.
Efficiency scale	:	Βαθμός αποδοτικότητας. Αποτυπώνει την αποδοτικότητα κάθε μονάδας και μετράται στην κλίμακα 0 έως 1, όπου η τιμή 1 υποδεικνύει ότι η μονάδα είναι σχετικά αποδοτική ενώ τιμή μικρότερη του 1 υποδεικνύει μη αποδοτική παραγωγική μονάδα.
Efficiency ή Efficiency frontier ή Efficient production Frontier	:	Σύνορο αποδοτικότητας. Αποτελείται

από το σύνολο των γραμμικών τμημάτων που συνδέουν τις αποδοτικές μονάδες μεταξύ τους και δρα ως τυπικό μέτρο σύγκρισης για τις υπο αξιολόγηση μονάδας.

Στο σχήμα 1.α, το σύνορο αποδοτικότητας αποτελούν τα ευθύγραμμα τμήματα AB και BC που συνδέουν τις αποδοτικές μονάδες A, B και C. Το σύνορο αποδοτικότητας στην ΠΑΔ ισοδυναμεί με τη συνάρτηση παραγωγής άλλων μεθόδων αξιολόγησης.

Envelopment	:	περιβάλλουσα
Evaluation	:	αξιολόγηση
Extend	:	επεκτείνω
Exogeneous	:	εξωγενής
Extremal	:	ακραίος
Facet	:	πλευρά. Όταν οι εισροές και οι εκροές είναι πολυδιάστατες, τα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζουν το σύνορο αποδοτικότητας αντιστοιχούν σε πλευρές. Εάν, παραδείγματος χάριν, το σχήμα 1.α ήταν τρισδιάστατο τότε το τμήμα AB θα σχημάτιζε πλευρά, πάνω στην οποία θα βρίσκονται οι αποδοτικές μονάδες A και B.
Factor	:	παράγοντας
Factor weight	:	συντελεστής βαρύτητας
Fractional	:	κλασματικός

Free	:	ελεύθερος
Frontier	:	σύνορο
Hull	:	κέλυφος
Hyperplane	:	υπερεπίπεδο
Increasing returns to scale	:	Αύξουσες αποδόσεις οικονομιών κλίμακας. Μια παραγωγική μονάδα λειτουργεί κάτω από αύξουσες αποδόσεις οικονομιών κλίμακας όταν μια μεταβολή του επιπέδου των εισροών της καταλήγει σε μεγαλύτερη μεταβολή του επιπέδου των εκροών της.
Index	:	δείκτης
Input	:	εισροή
Input-oriented	:	όρος που υποδεικνύει την εκτίμηση της αποδοτικότητας από την κατεύθυνση μείωσης των εισροών.
Marginal	:	οριακός
Minimal	:	μικρότερος
Monotonicity	:	μονοτονικότητα
Multiplicative	:	πολλαπλασιαστικός
Multiplier	:	πολλαπλασιαστής, εναλλακτικός όρος για τους συντελεστές βαρύτητας
Normal vector	:	κανονικό διάνυσμα

Output	:	εκροή
Output-oriented	:	όρος που υποδεικνύει την εκτίμηση της αποδοτικότητας από την κατεύθυνση αύξησης των εκροών
Pareto-efficiency	:	Μια παραγωγική μονάδα ονομάζεται αποδοτική κατά Pareto όταν μια προσπάθεια βελτίωσης κάποιας εισροής ή εκροής θα επηρεάσει αντίθετα κάποιες άλλες εισροές ή εκροές
Peer-group	:	ομοιόμορφη ομάδα σύγκρισης. Το υποσύνολο των αποδοτικών μονάδων από τις οποίες προσδιορίζεται ο βαθμός αποδοτικότητας μιας μη αποδοτικής μονάδας
Possibility	:	δυνατότητα
Primal	:	πρωτεύον
Productivity	:	παραγωγικότητα
Profit	:	κέρδος
Radial measure	:	ακτινικό μέτρο δηλαδή η κατά ίση αναλογία αναγωγή των εισροών/εκροών
Ratio model	:	κλασματικό μοντέλο
Ray	:	ακτίνα
Reference set	:	υποσύνολο αναφοράς ή peer group
Residual	:	κατάλοιπο, ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ της παρατηρούμενης και της δυνατής εκτίμησης μιας συνάρτησης παραγωγής
Rate	:	λόγος

Return	:	απόδοση
Scale	:	κλίμακα
Scope efficiency	:	αποδοτικότητα σκοπού. Αποδοτικότητα συνυφασμένη με την οικονομία σκοπού η οποία προκύπτει όταν, το κόστος παραγωγής κάποιων προϊόντων μιας εταιρείας, με την επιμέριση τουλάχιστον μιας εισροής μεταξύ των προϊόντων, είναι μικρότερο από το κόστος παραγωγής των προϊόντων ξεχωριστά
Scaling	:	αναγωγή
Slacks	:	μεταβλητές χαλαρότητας. Οι μεταβλητές αυτές υποδεικνύουν την επιπρόσθετη βελτίωση (μείωση των εισροών ή αύξηση των εκροών) που πρέπει να υποστεί μια μονάδα προκειμένου να γίνει αποδοτική. Στο σχήμα 1.α, η μονάδα D βρίσκεται στην επέκταση του συνόρου αποδοτικότητας όμως δεν είναι αποδοτική. Το τμήμα CD παρουσιάζει την αντίστοιχη μεταβλητή χαλαρότητας δηλαδή την ποσότητα κατά την οποία πρέπει να μειωθεί η εισροή $I$ προκειμένου η D να γίνει αποδοτική
Substitution	:	αντικατάσταση
Supporting hyperplane	:	υπερεπίπεδο υποστήριξης
Technical efficiency	:	τεχνική αποδοτικότητα. Αποδοτικότητα η οποία εστιάζεται στα φυσικά επίπεδα των εισροών-εκροών χωρίς να λαμβάνει υπόψη της τις τιμές των εισροών ή το μέγεθος κλίμακας των παραγωγικών μονάδων. Στο σχήμα 1 <sup>α</sup> η τεχνική αποδοτικότητα της μονάδας P δίδεται από τον λόγο $OP'/OP$ .

Thick	:	πυκνός
Unit	:	μονάδα, αντίστοιχο του DMU
Variable	:	μεταβλητή
Virtual input (output)	:	εικονική εισροή (εκροή). Η εικονική εισροή υπολογίζεται από τα γινόμενα των τιμών της εισροής και των βέλτιστων συντελεστών βαρύτητας που προκύπτουν από τη λύση του αντίστοιχου μοντέλου
Weights	:	άλλη ονομασία των συντελεστών βαρύτητας, οι οποίοι θεωρούνται ως οι άγνωστοι στα μοντέλα της ΠΑΔ
Window analysis	:	ανάλυση κατά παράθυρο