ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ
Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΥ

«ΤΡΕΙΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΕΙΣ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ»

Αναστασίου Αικατερίνη Σ/01006
Τυπογιώργος Δημήτριος Σ/01201

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Παλαιότερα, η πιθανότητα χρεοκοπίας υπολογιζόταν κατά προσέγγιση από την μαθηματική έκφραση e^{-Ru}, όπου το R είναι ο συντελεστής προσαρμογής και u το αρχικό αποθεματικό. Από τεχνικής άποψης, η ανάγκη για μία τέτοια προσέγγιση έγινε λιγότερο σημαντική, χάρη στην άφιξη των υπολογιστών, με τους οποίους μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς την πιθανότητα χρεοκοπίας. Σ' αυτή την εργασία, θα παρουσιάσουμε τρεις μεθόδους υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας, οι οποίες έχουν το πλεονέκτημα της εύκολης μαθηματικής εφαρμογής:

1.Η μέθοδος των πάνω και κάτω φραγμάτων

Η μέθοδος αυτή, σύμφωνα με τους Goovaerts και De Vylder, χρησιμοποιεί την σχέση ανάμεσα στην πιθανότητα χρεοκοπίας και την μέγιστη σωρευτική απώλεια και το γεγονός ότι η τελευταία ακολουθεί μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή. Το κύριο μειονέκτημα της είναι ότι περιορίζεται στην περίπτωση όπου οι αρνητικές απαιτήσεις εξαιρούνται.

2.Συνδυασμοί των εκθετικών κατανομών και των μετατοπίσεων τους

Η δεύτερη μέθοδος αποτελεί γενίκευση της μεθόδου που είχε προτείνει ο Bohman(1971). Εδώ, θεωρούμε ότι η κατανομή των απαιτήσεων ακολουθεί έναν συνδυασμό εκθετικών ή μετατοπισμένων εκθετικών κατανομών. Ο κύριος στόχος είναι να προσδιορίσουμε τις κατάλληλες ρίζες της εξίσωσης ,που καθορίζουν τον συντελεστή προσαρμογής.

3.Προσομοίωση

Για την τρίτη μέθοδο, παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας σχετίζεται με την στάσιμη συνάρτηση μιας ορισμένης, σχετικής διαδικασίας. Δηλαδή, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να προσδιοριστεί από μια προσομοίωση του τελευταίου.

Η μέθοδος , η οποία θα μας απασχολήσει κυρίως είναι η δεύτερη, δηλαδή οι συνδυασμοί των εκθετικών κατανομών και των μετατοπίσεων τους. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε αναλυτικά, αριθμητικά παραδείγματα συνδυασμών εκθετικών κατανομών και των μετατοπίσεων τους, καθώς και συνδυασμών γάμα κατανομών.

<u>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u>

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων βασίζεται στις παρακάτω υποθέσεις:

1.Το συνολικό ασφάλιστρο, P(t), που εισρέει στην εταιρία στο διάστημα [0,t] είναι μια γραμμική συνάρτηση του χρόνου. Ισχύει δηλαδή

$$P(t)= ct$$

όπου c>0, με το οποίο συμβολίζουμε το ασφάλιστρο που εισρέει στην εταιρία στην μονάδα του χρόνου.Το c δεν μεταβάλλεται στον χρόνο, ονομάζεται επίσης και ένταση ασφαλίστρου. $\left(c = \dfrac{P(t)}{t} \right)$

2.Οι μεταβλητές X_i, που δηλώνουν **το μέγεθος των απαιτήσεων**, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και είναι επίσης ανεξάρτητες από τον αριθμό των αποζημιώσεων σε ένα διάστημα, N(t).

3.Ο αριθμός των απαιτήσεων, N, προς την εταιρία σε ένα χρονικό διάστημα είναι μια ανέλιξη Poisson, $\{N(t): t \geq 0\}$, έτσι ώστε $\{S(t): t \geq 0\}$ είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson που ορίζεται για κάθε t από την σχέση

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & \text{αν } N(t) \geq 1 \\ 0, & \text{αν } N(t) = 0 \end{cases}$$

Η S(t) παριστάνει **το συνολικό ποσό** που θα πληρωθεί από τον ασφαλιστή στο χρονικό διάστημα (0,t].

Κάποιοι άλλοι συμβολισμοί που χρησιμοποιούμε στο κλασικό μοντέλο είναι οι εξής:

- λ είναι η ένταση της ανέλιξης Poisson
- το F δηλώνει την κατανομή των αποζημιώσεων. Όταν η κατανομή αυτή έχει πυκνότητα, τότε αυτή η πυκνότητα αυτή συμβολίζεται με f.
- το p_k δηλώνει την ροπή $k-$τάξης ροπή της F γύρω από το μηδέν, δηλαδή

$$p_k = \int_0^\infty x^k \, dF(x) = \int_0^\infty x^k \, f(x) \, dx$$

Μια βασική υπόθεση που κάνουμε πάντοτε στο κλασικό μοντέλο είναι ότι

$$\mathbf{c > \lambda p_1}$$

Στο αριστερό μέλος έχουμε την μέση τιμή των εσόδων στην μονάδα του χρόνου ενώ, στο δεξιό μέλος έχουμε το μέσο ρυθμό αποζημιώσεων στην μονάδα του χρόνου πολλαπλασιασμένο επί την μέση αποζημίωση. Συνεπώς, η παραπάνω συνθήκη δηλώνει ότι τα έσοδα θα πρέπει να υπερβαίνουν κατά μέσο όρο τα έξοδα στην μονάδα του χρόνου. Στην πράξη, για να εξασφαλιστεί η παραπάνω συνθήκη δημιουργήθηκε ο **συντελεστής ασφαλείας ή περιθώριο ασφαλείας**, το οποίο ορίζεται από την σχέση

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1$$

Άρα το θ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους για τον ασφαλιστή.

Η ποσότητα με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στην θεωρία χρεοκοπίας είναι **η πιθανότητα χρεοκοπίας**, δηλαδή η πιθανότητα το πλεόνασμα U(t) του ασφαλιστή να γίνει κάποια στιγμή αρνητικό. Το αποθεματικό ή πλεόνασμα U(t) ακολουθεί μια στοχαστική ανέλιξη $\{U(t), t \geq 0\}$ και ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ από την σχέση

$$U(t) = u + P(t) - S(t)$$

όπου u το αρχικό αποθεματικό, P(t) το συνολικό ασφάλιστρο στο διάστημα [0,t] και S(t) είναι η σύνθετη ανέλιξη για τις συνολικές αποζημιώσεις στο ίδιο διάστημα.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, λοιπόν, με αρχικό αποθεματικό u ορίζεται από την σχέση

$$\psi(u) = P[\, U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \,]$$

Η ψ(u) είναι μια φθίνουσα συνάρτηση, δηλαδή

$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0$$

Σημειώνουμε εδώ ότι ο όρος «χρεοκοπία» δε χρησιμοποιείται κυριολεκτικά, αλλά είναι περισσότερο ένας τεχνικός όρος, που χρησιμοποιείται σα μέτρο της φερεγγυότητας του χαρτοφυλακίου. Σε περίπτωση που το αποθεματικό U(t) πέσει κάτω από το μηδέν, η εταιρία στην πραγματικότητα δεν χρεοκοπεί, γιατί το έλλειμμα καλύπτεται με άλλους τρόπους. (π.χ. η εταιρία μπορεί να δανειοδοτηθεί, να έχει μερική κάλυψη μέσω αντασφάλισης, ή να αναπληρώσει κάποιες ζημιές από άλλο χαρτοφυλάκιο.)

Εκτός όμως από την πιθανότητα χρεοκοπίας, υπάρχει και η **πιθανότητα μη χρεοκοπίας δ(u)** που ορίζεται από την σχέση

$$\delta(u)=1-\psi(u)$$

Αυτή είναι η πιθανότητα να μην υπάρξει χρεοκοπία όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u.
Η δ(u) είναι μια αύξουσα συνάρτηση, δηλαδή

$$\lim_{u\to\infty} \delta(u)=1$$

Άρα όπως παρατηρούμε η δ(u) είναι μια συνεχής συνάρτηση από δεξιά και συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί σαν μία αθροιστική συνάρτηση.

Η δ(u) είναι μια μεικτή κατανομή, δηλαδή δεν είναι ούτε συνεχής ούτε διακριτή, αφού το δ(0)>0 , γιατί η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό είναι θετική, ενώ η δ(u) είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Στο κλασικό μοντέλο η δ(u) ικανοποιεί την εξίσωση

$$\delta(u)=\delta(0)+\frac{\lambda}{c}\cdot\int_0^u \delta(u-x)\cdot\bar{F}(x)dx$$

όπου $\bar{F}(x)$ είναι η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων δηλαδή 1-F(x).
Τώρα θα υπολογίσουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν. Παίρνουμε τα όρια για $u\to\infty$ με βάση την προηγούμενη σχέση θα έχουμε

$$1=\lim_{u\to\infty} \delta(u)=\delta(0)+\frac{\lambda}{c}\cdot\lim_{u\to\infty} \int_0^u \delta(u-x)\cdot\bar{F}(x)dx$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{u\to\infty} \delta(u-x)=1$$

και επίσης

$$\lim_{u\to\infty} \int_0^u \cdot\bar{F}(x)dx=\int_0^\infty \bar{F}(x)dx=p_1$$

Επομένως ,

$$1=\delta(0)+\frac{\lambda}{c}\cdot p_1$$

Το περιθώριο ασφαλείας όπως έχει οριστεί παραπάνω είναι

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 \iff \theta + 1 = \frac{c}{\lambda p_1}$$

Άρα, το δ(0) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του θ ως εξής

$$\delta(0) = 1 - \frac{1}{1+\theta} = \frac{\theta}{1+\theta}$$

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να υπολογίσουμε και την πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό, η οποία θα δίνεται από τον τύπο

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟ ΚΑΙ ΜΕΙΞΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Θεωρούμε ότι η κατανομή των απαιτήσεων είναι ένας συνδυασμός εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \beta_i \cdot e^{-\beta_i \cdot x}, \qquad x > 0 \qquad (1)$$

ή διαφορετικά, μια κατανομή που παίρνουμε αν ένας συνδυασμός από εκθετικές κατανομές μετατοπιστεί κατά τα $\tau > 0$ προς τα αριστερά. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας σε αυτή την περίπτωση είναι

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \beta_i \cdot e^{-\beta_i \cdot (x+\tau)}, \qquad x > -\tau \qquad (2)$$

- Τα β_i είναι πάντα θετικά και ισχύει $0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n$
- Πρέπει επίσης να ισχύει $\sum_{i=1}^{n} A_i = 1$

Κάποια από τα A_i μπορεί να είναι αρνητικά, αλλά πρέπει οπωσδήποτε να ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη. Αν τα A_i είναι όλα θετικά , τότε έχουμε μείξη εκθετικών κατανομών ή μείξη μετατοπισμένων εκθετικών κατανομών αντίστοιχα.

Θα περιγράψουμε την διαδικασία υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας για μείξη ή συνδυασμό δυο εκθετικών κατανομών.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των απαιτήσεων σύμφωνα με τον τύπο (1) θα είναι

$$p(x) = \alpha_1 \beta_1 \cdot e^{-\beta_1 \cdot x} + \alpha_2 \beta_2 \cdot e^{-\beta_2 \cdot x} \qquad (3)$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για μείξη και συνδυασμό δύο εκθετικών κατανομών με παραμέτρους β_1, β_2 είναι της μορφής

$$\psi(u) = C_1 \cdot e^{-r_1 \cdot u} + C_2 \cdot e^{-r_2 \cdot u} \qquad (4)$$

όπου τα r_1, r_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης για το συντελεστή προσαρμογής και C_1, C_2 είναι σταθερές. Υποθέτουμε ότι αν $0<\beta_1<\beta_2$ τότε ισχύει $0< r_1 <\beta_1< r_2 <\beta_2$.

<u>Υπολογισμός των C_1, C_2</u>

Για u=0, έχουμε

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

οπότε βλέπουμε από την (2) ότι τα C_i πρέπει να ικανοποιούν την

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{1+\theta} \qquad (5)$$

Για να βρούμε μια δεύτερη σχέση, χρησιμοποιούμε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\delta'(u) = \frac{1}{(1+\theta)p_1}\delta(u) - \frac{1}{(1+\theta)p_1}\int_0^u \delta(u-x) f(x)\,dx \qquad (6)$$

Γνωρίζοντας ότι η γενική λύση για την συνάρτηση δ είναι της μορφής

$$\delta(u)=1-C_1\cdot e^{-r_1\cdot u}-C_2\cdot e^{-r_2\cdot u} \quad (7)$$

έχουμε

$$\delta'(u)=C_1 r_1\cdot e^{-r_1\cdot u}+C_2 r_2\cdot e^{-r_2\cdot u} \quad (8)$$

Θέτοντας u=0 στην (6), παίρνουμε

$$\delta'(0)=\frac{1}{(1+\theta)p_1}\delta(0)=\frac{1}{(1+\theta)p_1}(1-C_1-C_2) \quad (9)$$

Αλλά από την (5) έχουμε ότι: $C_1+C_2=\frac{1}{(1+\theta)}$

άρα χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση και την (8) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} C_1 r_1 + C_2 r_2 &= \frac{1}{(1+\theta)p_1}\cdot\left(1-\frac{1}{1+\theta}\right) \\ &=\frac{1}{(1+\theta)p_1}\cdot\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \\ &=\frac{\theta}{(1+\theta)^2 p_1} \quad (10) \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός των C_1, C_2 γίνεται λύνοντας το σύστημα (5) και (10).

Πριν παρουσιάσουμε την αριθμητική εφαρμογή των παραπάνω, κρίνεται σκόπιμο να κάνουμε μια παρένθεση για να υπολογίσουμε τις ροπογεννήτριες των συνδυασμών των εκθετικών κατανομών και των μετατοπίσεων τους. Αυτό θα φανεί πολύ χρήσιμο στον υπολογισμό των r_1, r_2 στο αριθμητικό μας παράδειγμα.

ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Υπολογισμός ροπογεννήτριας εκθετικής κατανομής

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής είναι:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad , \quad \lambda > 0,\ x \geq 0$$

Η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$M_X(t) = E(e^{t \cdot X})$$

Επομένως η ροπογεννήτρια της εκθετικής κατανομής θα είναι:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot e^{tx}\, dx \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{tx} \cdot e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}\, dx \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θέτω

$$(t-\lambda)x = y \Rightarrow (t-\lambda)\,dx = dy \Rightarrow dx = \frac{dy}{(t-\lambda)}$$

οπότε η $M_X(t)$ γίνεται:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{\lambda}{(t-\lambda)} \cdot \int_0^\infty e^y\, dy \\ &= \frac{\lambda}{(t-\lambda)} \cdot \left[e^y\right]_0^\infty \\ &= \frac{\lambda}{(t-\lambda)} \cdot (0-1) \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda - t)} \end{aligned}$$

Υπολογισμός ροπογεννήτριας μετατοπισμένης εκθετικής κατανομής

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μετατοπισμένης εκθετικής κατανομής είναι:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (x+\tau)} \qquad , \qquad \lambda > 0, x \geq -\tau, \tau > 0$$

Η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής Χ είναι:

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

Επομένως η ροπογεννήτρια της μετατοπισμένης εκθετικής κατανομής θα είναι:

$$M_X(t) = \int_{-\tau}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (x+\tau)} \cdot e^{t \cdot x} \, dx$$

$$= \lambda \int_{-\tau}^{\infty} e^{-\lambda \cdot x} \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot e^{t \cdot x} \, dx$$

$$= \lambda \int_{-\tau}^{\infty} e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot e^{x \cdot (t-\lambda)} \, dx$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θέτω

$$(t-\lambda) \cdot x = y \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{(t-\lambda)}$$

$$x \in (-\tau, \infty) \Leftrightarrow y \in ((\lambda - t) \cdot \tau, \infty)$$

οπότε η $M_x(t)$ γίνεται:

$$M_X(t) = \lambda \cdot \int_{(\lambda-t)\cdot\tau}^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} \cdot e^{y} \cdot \frac{1}{(t-\lambda)} \, dy$$

$$= \frac{\lambda}{(t-\lambda)} \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \int_{(\lambda-t)\cdot\tau}^{\infty} e^{y} \, dy$$

$$= \frac{\lambda}{(t-\lambda)} \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \left[e^{y} \right]_{(\lambda-t)\cdot\tau}^{\infty}$$

$$=\frac{\lambda}{(t-\lambda)}\cdot e^{-\lambda\cdot\tau}\cdot(0-e^{\tau\cdot(\lambda-t)})$$

$$=\frac{\lambda}{(\lambda-t)}\cdot e^{-\lambda\cdot\tau+\lambda\cdot\tau-\tau\cdot t}$$

$$=\frac{\lambda}{(\lambda-t)}\cdot e^{-\tau\cdot t}$$

<u>Υπολογισμός ροπογεννήτριας συνδυασμού εκθετικών κατανομών</u>

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του συνδυασμού εκθετικών κατανομών είναι:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} A_i\beta_i\cdot e^{-\beta_i\cdot x} \quad \text{όπου} \quad \sum_{i=1}^{\infty} A_i=1,\ \beta_i>0\ ,x>0$$

Η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$M_X(t)=E(e^{t\cdot X})$$

Επομένως η ροπογεννήτρια του συνδυασμού των εκθετικών κατανομών θα είναι:

$$M_X(t)=\sum_{i=1}^{\infty} A_i\cdot\beta_i\cdot\int_0^{\infty} e^{t\cdot x}\cdot e^{-\beta_i\cdot x}\,dx$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} A_i\cdot\beta_i\cdot\int_0^{\infty} e^{(t-\beta_i)\cdot x}\,dx$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θέτω

$$(t-\beta_i)\cdot x=y \ \Rightarrow\ dx=\frac{dy}{(t-\beta_i)}$$

οπότε η $M_x(t)$ γίνεται:

$$M_X(t)=\sum_{i=1}^{\infty} A_i\cdot\frac{\beta_i}{(t-\beta_i)}\cdot\int_0^{\infty} e^{y}\,dy$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} A_i\cdot\frac{\beta_i}{(\beta_i-t)}$$

Η πρώτη παράγωγος της ροπογεννήτριας $M_X(t)$ είναι

$$
\begin{aligned}
M'_X(t) &= \left(\sum_1^2 A_i \cdot \frac{\beta_i}{(\beta_i - t)} \right)' \\
&= \sum_1^2 \left(A_i \cdot \frac{\beta_i}{(\beta_i - t)} \right)' \\
&= \sum_1^2 \left[A_i \cdot \beta_i \cdot (\beta_i - t)^{-1} \right]' \\
&= \sum_1^2 A_i \cdot \beta_i \cdot \left((\beta_i - t)^{-1} \right)' \\
&= \sum_1^2 A_i \cdot \beta_i \cdot (-1) \cdot (\beta_i - t)^{-2} \cdot (\beta_i - t)' \\
&= -\sum_1^2 A_i \cdot \beta_i \cdot (\beta_i - t)^{-2} \cdot (-1) \\
&= \sum_1^2 A_i \cdot \beta_i \cdot (\beta_i - t)^{-2}
\end{aligned}
$$

Η ροπή πρώτης τάξης της κατανομής ισούται με την $M'_X(0)$, οπότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
M'_X(0) &= \sum_1^2 A_i \cdot \beta_i \cdot (\beta_i - 0)^{-2} \\
&= \sum_1^2 A_i \cdot \beta_i \cdot (\beta_i)^{-2} \\
&= \sum_1^2 A_i \cdot \beta_i \cdot \frac{1}{(\beta_i)^2} \\
&= \sum_1^2 A_i \cdot \frac{1}{\beta_i}
\end{aligned}
$$

Η δεύτερη παράγωγος της ροπογεννήτριας $M_X(t)$ είναι

$$
\begin{aligned}
M''_X(t) &= \left(\sum_1^2 A_i \cdot \beta_i \cdot (\beta_i - t)^{-2} \right)' \\
&= \sum_1^2 \left(A_i \cdot \beta_i \cdot (\beta_i - t)^{-2} \right)' \\
&= \sum_1^2 A_i \cdot \beta_i \cdot \left((\beta_i - t)^{-2} \right)'
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{1}^{2} A_i \cdot \beta_i \cdot (-2) \cdot (\beta_i - t)^{-3} \cdot (\beta_i - t)'$$
$$= -2 \sum_{1}^{2} A_i \cdot \beta_i \cdot (\beta_i - t)^{-3} \cdot (-1)$$
$$= 2 \sum_{1}^{2} A_i \cdot \beta_i \cdot (\beta_i - t)^{-3}$$

Η ροπή δεύτερης τάξης της κατανομής ισούται με την $M'_X(0)$, οπότε έχουμε

$$M''_X(0) = 2 \sum_{1}^{2} A_i \cdot \beta_i \cdot (\beta_i - 0)^{-3}$$
$$= 2 \sum_{1}^{2} A_i \cdot \beta_i \cdot (\beta_i)^{-3}$$
$$= 2 \sum_{1}^{2} A_i \cdot \beta_i \cdot \frac{1}{(\beta_i)^3}$$
$$= 2 \sum_{1}^{2} A_i \cdot \frac{1}{\beta_i^2}$$

Υπολογισμός ροπογεννήτριας συνδυασμού μετατοπισμένων εκθετικών κατανομών

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του συνδυασμού μετατοπισμένων εκθετικών κατανομών είναι:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \beta_i \cdot e^{-\beta_i \cdot (x+\tau)} \qquad \text{όπου} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} A_i = 1,\ \beta_i > 0,\ x > -\tau,\ \tau > 0$$

Η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$M_X(t) = E(e^{t \cdot X})$$

Επομένως η ροπογεννήτρια του συνδυασμού των μετατοπισμένων εκθετικών κατανομών θα είναι:

$$M_X(t)=\sum_{i=1}^{\infty} A_i\cdot\beta_i\cdot\int_{-\tau}^{\infty} e^{t\cdot x}\cdot e^{-\beta_i\cdot(x+\tau)}dx$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} A_i\cdot\beta_i\cdot\int_{-\tau}^{\infty} e^{-\beta_i\cdot x}\cdot e^{-\beta_i\cdot\tau}\cdot e^{t\cdot x}dx$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} A_i\cdot\beta_i\cdot e^{-\beta_i\cdot\tau}\int_{-\tau}^{\infty} e^{(t-\beta_i)\cdot x}dx$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θέτω

$$(t-\beta_i)\cdot x=y\Leftrightarrow\ dx=\frac{dy}{(t-\beta_i)}$$

$$x\in(-\tau,\infty)\Leftrightarrow\ y\in((\beta_i-t)\cdot\tau,\infty)$$

οπότε η $M_x(t)$ γίνεται:

$$=\sum_{i=1}^{\infty} A_i\beta_i e^{-\beta_i\cdot\tau}\int_{(\beta_i-t)\tau}^{\infty}\frac{1}{(t-\beta_i)}\cdot e^{y}\,dy$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} A_i\cdot\frac{\beta_i}{(t-\beta_i)}\cdot e^{-\beta_i\cdot\tau}\cdot\left[e^{y}\right]_{(\beta_i-t)\tau}^{\infty}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} A_i\cdot\frac{\beta_i}{(t-\beta_i)}\cdot e^{-\beta_i\cdot\tau}\cdot(-e^{\beta_i\cdot\tau-t\cdot\tau})$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} A_i\cdot\frac{\beta_i}{(\beta_i-t)}\cdot e^{-t\cdot\tau}$$

1° ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για μείξη δύο εκθετικών απαιτήσεων

Για το αριθμητικό μας παράδειγμα θεωρούμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των απαιτήσεων:

$$p(x)=\frac{2}{3}\cdot 2\cdot e^{-2x}+\frac{1}{3}\cdot 5\cdot e^{-5x}, \quad x>0$$

με $\alpha_1=2/3$, $\alpha_2=1/3$, $\beta_1=2$, $\beta_2=5$ [Ισχύει ότι $\alpha_1+\alpha_2=1$ και $0<\beta_1<\beta_2$.]

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για συνδυασμό δύο εκθετικών κατανομών με παραμέτρους $\beta_1=2$, $\beta_2=5$ είναι της μορφής

$$\psi(u)=C_1\cdot e^{-r_1\cdot u}+C_2\cdot e^{-r_2\cdot u}$$

ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Για να είναι σωστή η επιλογή της p(x) θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

1.Εφ' όσον η p(x) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων θα πρέπει

$$\int_0^\infty p(x)dx=1$$

Απόδειξη:

$$\int_0^\infty p(x)dx=\int_0^\infty\left[\frac{4}{3}\cdot e^{-2x}+\frac{5}{3}\cdot e^{-5x}\right]dx=\frac{4}{3}\int_0^\infty e^{-2x}dx+\frac{5}{3}\int_0^\infty e^{-5x}dx=$$
$$=-\frac{2}{3}\cdot\left[e^{-2x}\right]_0^\infty-\frac{1}{3}\cdot\left[e^{-5x}\right]_0^\infty=1$$

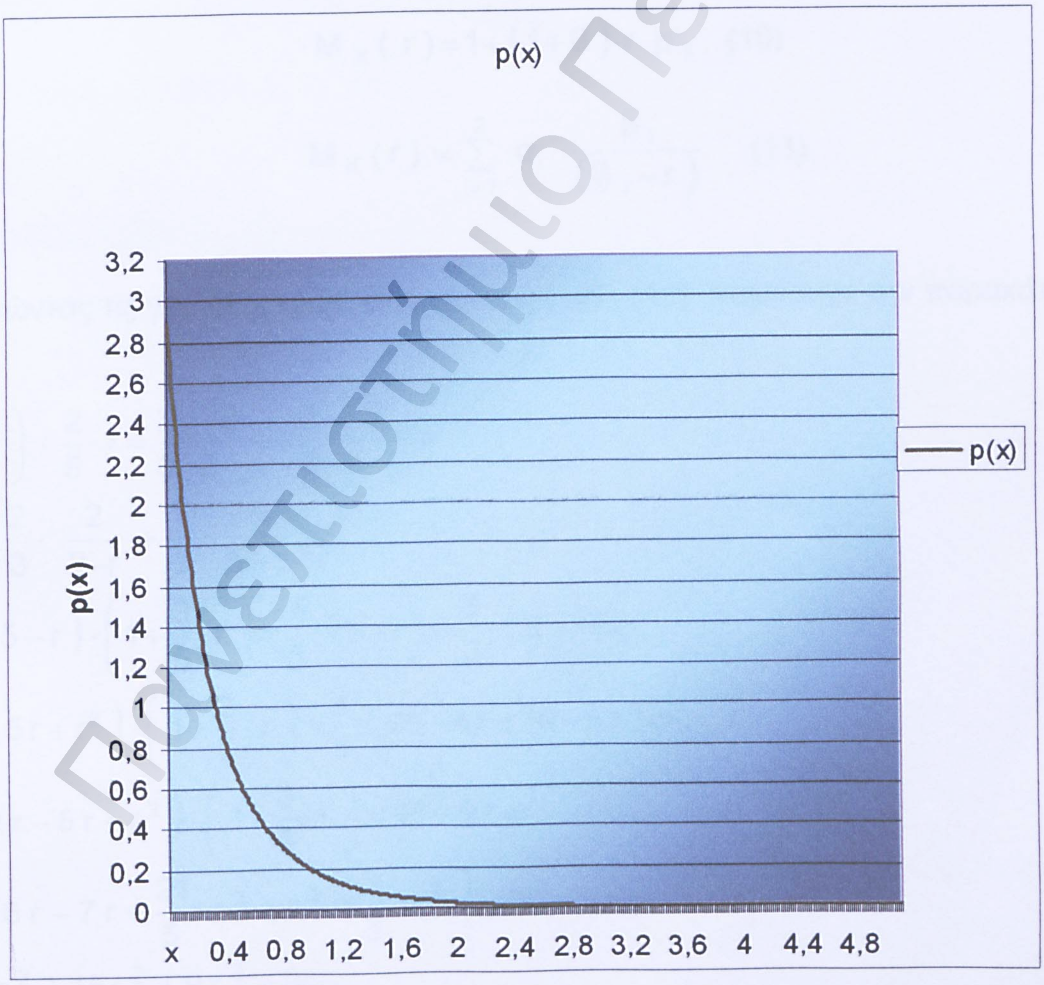
Άρα $\int_0^\infty p(x)dx=1$ ισχύει.

2.Η p(x) θα πρέπει να είναι θετική για κάθε x>0

Απόδειξη:

Θέλουμε p(x)>0

Οι e^{-2x}, e^{-5x} >0 για κάθε x, άρα το άθροισμα των δύο αυτών συναρτήσεων, πολλαπλασιασμένων με θετικούς αριθμούς είναι πάντα θετικό. Άρα p(x)>0 για κάθε x>0. Αυτό το διαπιστώνουμε επίσης, κάνοντας την γραφική παράσταση της p(x), η οποία δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Υπολογισμός των r_1, r_2

Θεωρούμε ότι c=0,9 , λ=1,5

$$p_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}=0,4$$

Άρα , $p_1=0,4$

$$\theta=\left(\frac{c}{\lambda\cdot p_1}\right)-1 \Leftrightarrow \theta=\left(\frac{0,9}{1,5\cdot 0,4}\right)-1 \Leftrightarrow \theta=0,5$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Αν και θεωρήσαμε αυθαίρετα τα c,λ , παρ' όλα αυτά οι τιμές τους είναι ικανοποιητικές γιατί :

1. Πρέπει $c>\lambda p_1$, που ισχύει αφού 0,9>0,6
2. Το θ πρέπει να ανήκει στο (0,1), που επίσης ισχύει

Για να υπολογίσουμε τα r_1, r_2 θα πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$M_X(r)=1+(1+\theta)\cdot r\cdot p_1 \quad (10)$$

$$M_X(r)=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\cdot\frac{\beta_i}{(\beta_i-r)} \quad (11)$$

Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές στις σχέσεις (10) , (11) παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$1+\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}\cdot r=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2-r}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{5-r}\Leftrightarrow$$

$$1+\frac{3}{5}\cdot r=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2-r}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{5-r}\Leftrightarrow$$

$$(2-r)\cdot(5-r)\cdot\left(1+\frac{3}{5}\cdot r\right)=\frac{4}{3}\cdot(5-r)=\frac{5}{3}\cdot(2-r)\Leftrightarrow$$

$$\left(10-2r-5r+r^2\right)\cdot\left(1+\frac{3}{5}\cdot r\right)=\frac{1}{3}\cdot(20-4r+10-5r)\Leftrightarrow$$

$$3\cdot\left(10-2r-5r+r^2\right)\cdot\left(1+\frac{3}{5}\cdot r\right)=30-9r\Leftrightarrow$$

$$3\cdot\left(10+6r-7r-\frac{21}{5}\cdot r^2+r^2+\frac{3}{5}\cdot r^3\right)=30-9r\Leftrightarrow$$

$$30r-63r^2+15r^2+9r^3=0\Leftrightarrow$$

$$9r^3-48r^2+30r=0\Leftrightarrow$$

$$r\cdot\left(3r^2-16r+10\right)=0$$

Για την επίλυση της εξίσωσης θα έχουμε $r = 0$ η οποία απορρίπτεται, ή

$$3r^2 - 16r + 10 = 0$$

Από την λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, θα βρούμε τα r_1, r_2.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 256 - 120 = 136$$

$$r_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Έχουμε λοιπόν $r_1 = \dfrac{16 - \sqrt{136}}{3} = 0{,}723$ και $r_2 = \dfrac{16 + \sqrt{136}}{3} = 4{,}610$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι $r_1=0{,}723$ και $r_2=4{,}610$

Παρατηρούμε ότι $0< r_1 <\beta_1 < r_2 <\beta_2$

Υπολογισμός των C_1, C_2

Για τον υπολογισμό των C_1, C_2 ,σύμφωνα με τύπους (5) και (10), πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$C_1 + C_2 = \frac{2}{3}$$

$$0{,}723 \cdot C_1 + 4{,}610 \cdot C_2 = \frac{5}{9}$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{3} - C_2 \\ 0{,}723 \cdot C_1 + 4{,}610 \cdot C_2 &= \frac{5}{9} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{3} - C_2 \\ 0{,}723 \cdot \left(\frac{2}{3} - C_2\right) + 4{,}610 \cdot C_2 &= \frac{5}{9} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{3} - C_2 \\ 0{,}482 - 0{,}723 \cdot C_2 + 4{,}610 \cdot C_2 &= 0{,}556 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} C_1 &= 0{,}667 - C_2 \\ 3{,}887 \cdot C_2 &= 0{,}074 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} C_1 &= 0{,}667 - C_2 \\ C_2 &= 0{,}019 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

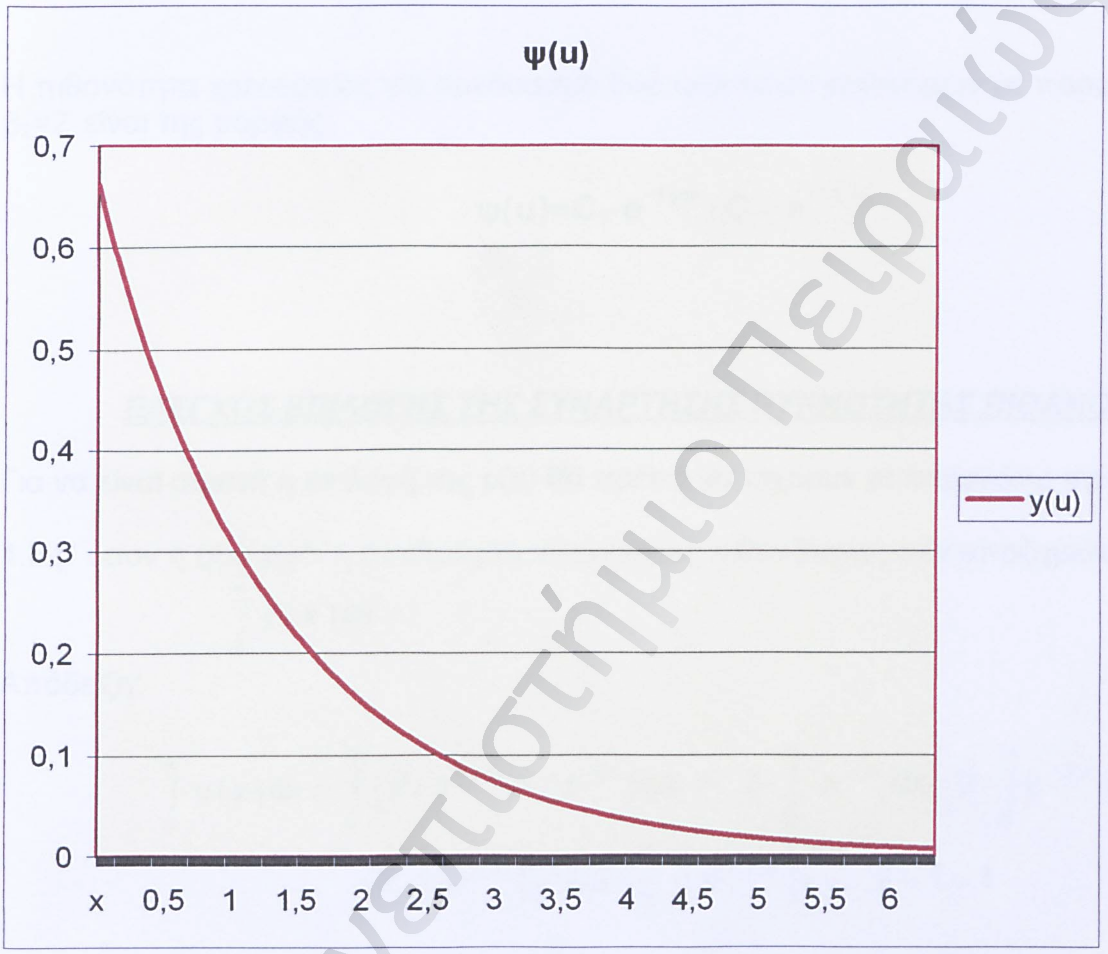
$$C_1 = 0{,}648$$

$$C_2 = 0{,}019$$

Άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας θα δίνεται από τον τύπο

$$\psi(u) = 0{,}648 \cdot e^{-0{,}723 \cdot u} + 0{,}019 \cdot e^{-4{,}610 \cdot u}$$

Η γραφική απεικόνιση της ψ(u)είναι η παρακάτω:



2ο ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για συνδυασμό δύο εκθετικών αποζημιώσεων

Για το αριθμητικό μας παράδειγμα θεωρούμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των απαιτήσεων:

$$p(x)=2\cdot e^{-x}-2\cdot e^{-2x}, \qquad x>0$$

με $\alpha_1=2$, $\alpha_2=-1$, $\beta_1=1$, $\beta_2=2$ [Ισχύει ότι $\alpha_1+\alpha_2=1$ και $0<\beta_1<\beta_2$.]

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για συνδυασμό δύο εκθετικών κατανομών με παραμέτρους $\beta_1=1$, $\beta_2=2$ είναι της μορφής

$$\psi(u)=C_1\cdot e^{-r_1\cdot u}+C_2\cdot e^{-r_2\cdot u}$$

ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Για να είναι σωστή η επιλογή της p(x) θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

1.Εφ' όσον η p(x) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων θα πρέπει

$$\int_0^\infty p(x)\,dx=1$$

Απόδειξη:

$$\int_0^\infty p(x)\,dx=\int_0^\infty (2\cdot e^{-x}-2\cdot e^{-2x})\,dx = 2\cdot\int_0^\infty e^{-x}\,dx-2\cdot\int_0^\infty e^{-2x}\,dx =$$

$$-2\cdot\left[e^{-x}\right]_0^\infty+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-2x}\right]_0^\infty = 2-1=1$$

Άρα $\int_0^\infty p(x)\,dx=1$ ισχύει

2.Η p(x) θα πρέπει να είναι θετική για κάθε x>0

Απόδειξη:

Θέλουμε $p(x)>0$, το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$2e^{-x}-2e^{-2x}>0 \Leftrightarrow$$
$$2e^{-x}>2e^{-2x} \Leftrightarrow$$
$$e^{-x}>e^{-2x}$$

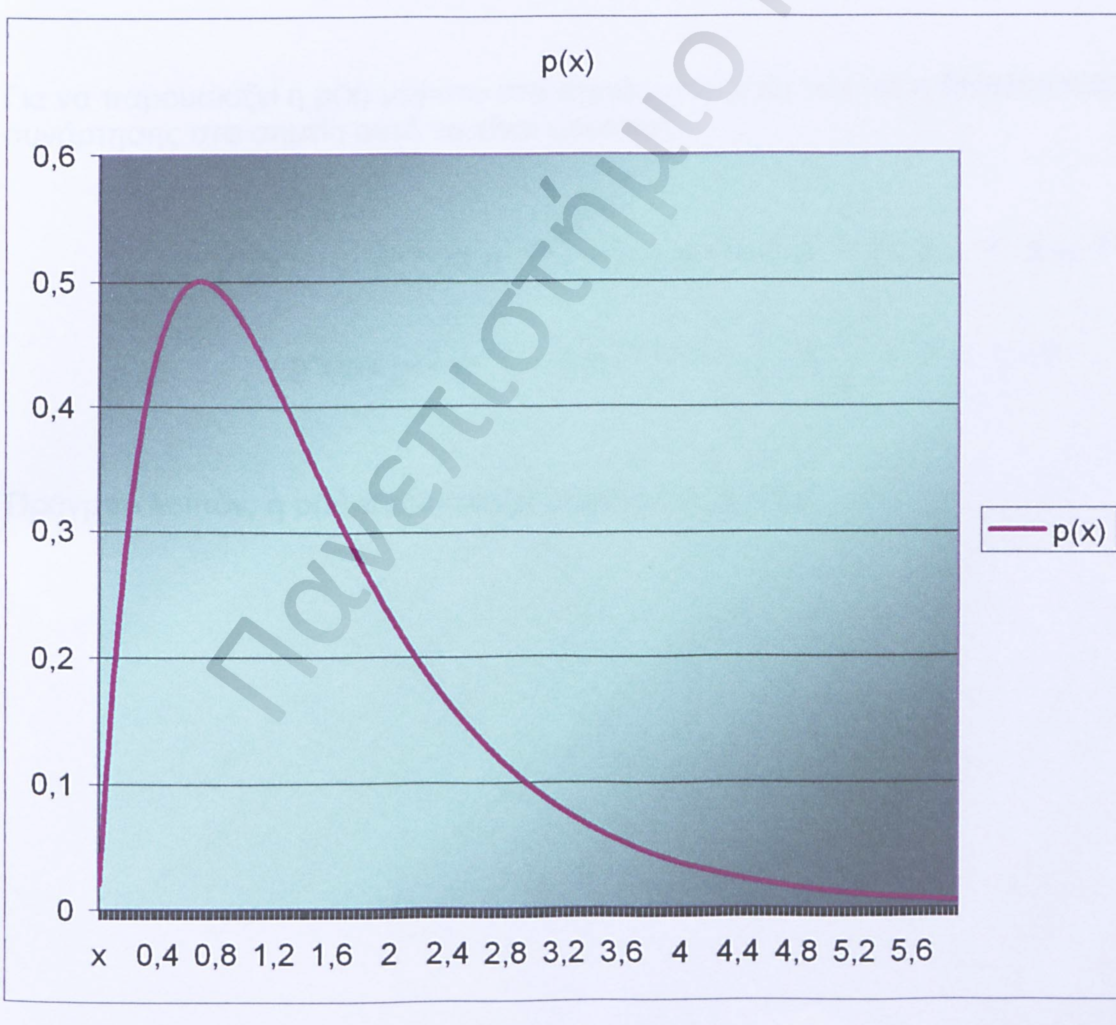
Επειδή η e^{x} είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε

$$-x>-2x \Leftrightarrow$$
$$x<2x\,, \quad x>0$$

δηλαδή $2>1$ που ισχύει πάντα.

Άρα $p(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Αυτό το διαπιστώνουμε επίσης, κάνοντας την γραφική παράσταση της p(x), η οποία δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Επίσης, κάποια επιπλέον συμπεράσματα για την συνάρτηση αποζημιώσεων μπορούν να εξαχθούν, υπολογίζοντας το μέγιστο, την διάμεσο και τον συντελεστή ασυμμετρίας της συνάρτησης.

- **Μέγιστο της p(x)**

Αρχικά υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της p(x) και βρίσκουμε σε ποιο σημείο μηδενίζεται , δηλαδή

$$
\begin{aligned}
p'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(2\cdot e^{-x} - 2\cdot e^{-2x}\right)' = 0 &\Leftrightarrow \\
-2\cdot e^{-x} + 4\cdot e^{-2x} = 0 &\Leftrightarrow \\
4\cdot e^{-2x} = 2\cdot e^{-x} &\Leftrightarrow \\
2\cdot e^{-2x} = e^{-x} &\Leftrightarrow \\
\ln 2 - 2\cdot x = -x &\Leftrightarrow \\
x = \ln 2 &
\end{aligned}
$$

Άρα η $p'(x)$ μηδενίζεται στο $x = \ln 2$

Για να παρουσιάζει η p(x) μέγιστο στο σημείο x= ln2 θα πρέπει η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο αυτό να είναι αρνητική.

$$p''(x) = \left(2\cdot e^{-x} - 2\cdot e^{-2x}\right)'' = \left(-2\cdot e^{-x} + 4\cdot e^{-2x}\right)' = 2\cdot e^{-x} - 8\cdot e^{-2x}$$

$$p''(\ln 2) = 2\cdot e^{-\ln 2} - 8\cdot e^{-2\cdot \ln 2} = 2\cdot\frac{1}{2} - 8\cdot\frac{1}{4} = 1 - 2 = -1 < 0$$

Πράγματι λοιπόν, η p(x) παρουσιάζει μέγιστο στο x = ln2

- **Διάμεσος της p(x)**

Η διάμεσος μ της p(x) θα είναι το σημείο εκείνο όπου

$$\int_0^{\mu} p(x)\,dx = 0,5 \text{ ισοδύναμα έχουμε}$$

$$\int_0^{\mu} \left(2\cdot e^{-x} - 2\cdot e^{-2x}\right) dx = 0,5 \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\mu} 2\cdot e^{-x}\,dx - \int_0^{\mu} 2\cdot e^{-2x}\,dx = 0,5 \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\int_0^{\mu} e^{-x}\,dx - 2\cdot\int_0^{\mu} e^{-2x}\,dx = 0,5 \Leftrightarrow$$

$$-2\cdot\left[e^{-x}\right]_0^{\mu} + 2\cdot\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^{\mu} = 0,5 \Leftrightarrow$$

$$-2\cdot\left(e^{-\mu} - 1\right) + \left(e^{-2\mu} - 1\right) = 0,5 \quad \Leftrightarrow$$

$$-2\cdot e^{-\mu} + 2 + e^{-2\mu} - 1 = 0,5 \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{-2\mu} - 2\cdot e^{-\mu} + 0,5 = 0$$

Θέτω $e^{-\mu} = x \Leftrightarrow e^{-2\cdot\mu} = x^2$,
οπότε η παραπάνω εξίσωση παίρνει την εξής μορφή

$$x^2 - 2\cdot x + 0,5 = 0$$

με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\cdot\alpha\cdot\gamma = 4 - 4\cdot 1\cdot 0,5 = 2$

και ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2}}{2\cdot 1}$ με,

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$$

άρα $x_1 = e^{-\mu_1} = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$ και $x_2 = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$

Επομένως ,

$$-\mu_1 = \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{και} \quad -\mu_2 = \ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\mu_1 = -0{,}535 \qquad \mu_2 = 1{,}227$$

Απορρίπτουμε την μ_1 γιατί δεν μπορούμε να δεχτούμε αρνητική τιμή για την διάμεσο, άρα η διάμεσος της p(x) είναι $\mu_2 = 1{,}227$.

- **Συντελεστής Ασυμμετρίας**

Ο συντελεστής ασυμμετρίας του Pearson ορίζεται από τον τύπο

$$pc_1 = \frac{3 \cdot (E(X) - \mu)}{\sqrt{Var(X)}}$$

όπου E(X) η μέση τιμή , μ η διάμεσος και $s = \sqrt{Var(X)}$ η τυπική απόκλιση της p(x).
Για τον υπολογισμό του συντελεστή ασυμμετρίας , χρειαζόμαστε την ροπή πρώτης τάξης καθώς και την ροπή δεύτερης τάξης στο μηδέν.

Έχουμε λοιπόν

$$E(X) = M'_X(0) = 2 \cdot \frac{1}{1} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 2 - 0{,}5 = 1{,}5$$

$$E(X^2) = M''_X(0) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{1^2} + 2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} = 4 - 1 = 3$$

Θα υπολογίσουμε την διακύμανση από τον εξής τύπο

$$Var(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \Leftrightarrow$$

$$Var(X) = 3 - (1{,}5)^2 = 3 - 2{,}25 = 0{,}75$$

Ο συντελεστής ασυμμετρίας θα είναι

$$pc_1 = \frac{3 \cdot (1{,}5 - 1{,}227)}{\sqrt{0{,}75}} = 3 \cdot \frac{0{,}273}{0{,}866} = \frac{0{,}819}{0{,}866} \approx 1$$

Παρατηρούμε ότι ο $pc_1 > 0$, αυτό σημαίνει ότι η κατανομή της p(x) έχει θετική συμμετρία, δηλαδή E(X) > μ. Την θετική ασυμμετρία της κατανομής, μπορούμε να διαπιστώσουμε επίσης και από το διάγραμμα μας παραπάνω ,αφού η καμπύλη που έχει προκύψει είναι χαρακτηριστική θετικώς ασύμμετρης κατανομής.

Υπολογισμός των r_1, r_2

Θεωρούμε ότι c=5/2 , λ=1

$$p_1 = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Άρα , $p_1 = \dfrac{3}{2}$ και

$$\theta = \left(\frac{c}{\lambda \cdot p_1} \right) - 1 \Leftrightarrow \theta = \left(\frac{\frac{5}{2}}{1 \cdot \frac{3}{2}} \right) - 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{2}{3}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Αν και θεωρήσαμε αυθαίρετα τα c,λ , παρ' όλα αυτά οι τιμές τους είναι ικανοποιητικές γιατί :

- Πρέπει c>λ p_1 , που ισχύει αφού (5/2)>(3/2)
- Το θ πρέπει να ανήκει στο (0,1), που επίσης ισχύει

Για να υπολογίσουμε τα r_1, r_2 θα πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$M_x(r) = 1 + (1 + \theta) \cdot r \cdot p_1$$

$$M_x(r) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \cdot \frac{\beta_i}{(\beta_i - r)}$$

Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$1 + \left(1 + \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{3}{2} \cdot r = 2 \cdot \frac{1}{(1-r)} - \frac{2}{(2-r)}$$

$$1 + \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \cdot r = \frac{2}{(1-r)} - \frac{2}{(2-r)}$$

$$(1-r) \cdot (2-r) \cdot 2 + 5 \cdot (1-r) \cdot (2-r) \cdot r = 2 \cdot 2\,(2-r) - 2 \cdot 2 \cdot (1-r)$$

$$(1-r) \cdot (2-r) \cdot (2 + 5r) = 4 \cdot (2 - r - 1 - r)$$

$$4 + 10r - 6r - 15r^2 + 2r^2 + 5r^3 = 4$$

$$5r^3 - 13r^2 + 4r = 0$$

$$r \cdot \left(5r^2 - 13r + 4 \right) = 0$$

Άρα $r=0$ η οποία απορρίπτεται, ή

$$5r^2 - 13r + 4 = 0$$

Από την λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, θα βρούμε τα r_1, r_2.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 169 - 80 = 89$$

$$r_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

οπότε έχουμε $r_1 = \dfrac{13 - \sqrt{89}}{10} = 0{,}357$ και $r_2 = \dfrac{13 + \sqrt{89}}{10} = 2{,}243$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι $r_1=0{,}357$ και $r_2=2{,}243$

Παρατηρούμε ότι $0< r_1 <\beta_1 <\beta_2< r_2$, δηλαδή το r_2 δεν βρίσκεται ανάμεσα στα β_1,β_2. Μια συνθήκη που συναντάμε όταν έχουμε συνδυασμό εκθετικών κατανομών και κάποιο από τα α_i είναι αρνητικό.
(Βλέπε THREE METHODS TO CALCULATE THE RUIN PROBABILITY, ASTIN παράδειγμα 3.8 σελ.83)

<u>Υπολογισμός των C_1, C_2</u>

Για τον υπολογισμό των C_1, C_2 ,σύμφωνα με τύπους (5) και (10), πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$C_1 + C_2 = \frac{3}{5}$$

$$0{,}357 \cdot C_1 + 2{,}243 \cdot C_2 = \frac{36}{225}$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{3}{5} - C_2 \\ 0{,}357 \cdot C_1 + 2{,}243 \cdot C_2 &= \frac{36}{225} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{3}{5} - C_2 \\ 0{,}357 \cdot \left(\frac{3}{5} - C_2\right) + 2{,}243 \cdot C_2 &= \frac{36}{225} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{3}{5} - C_2 \\ 0{,}214 - 0{,}357 \cdot C_2 + 2{,}243 \cdot C_2 &= 0{,}16 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} C_1 &= 0{,}6 - C_2 \\ 1{,}886 \cdot C_2 &= -0{,}054 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} C_1 &= 0{,}6 - C_2 \\ C_2 &= -0{,}029 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

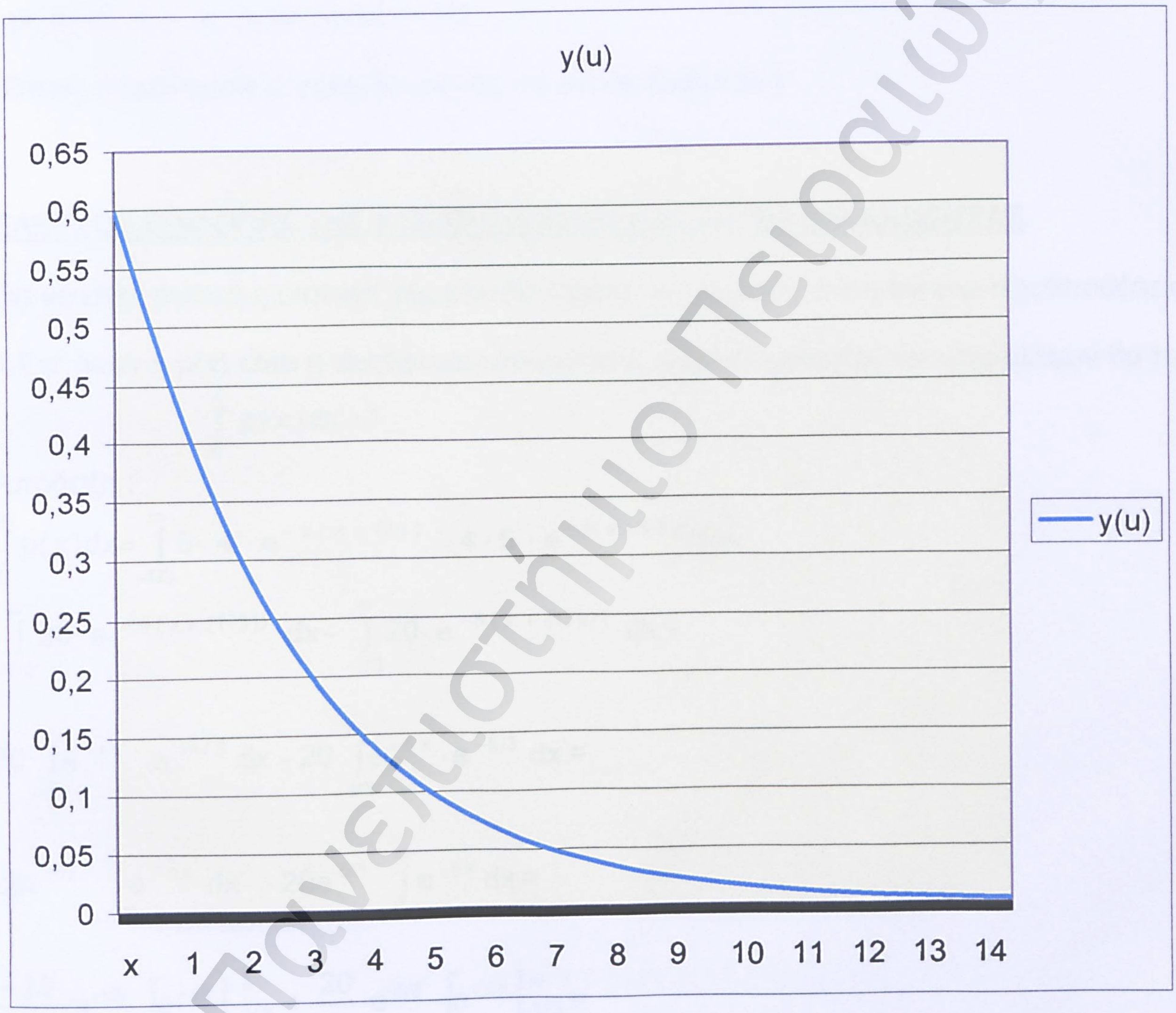
$$C_1 = 0{,}629$$

$$C_2 = -0{,}029$$

Άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας θα δίνεται από τον τύπο

$$\psi(u) = 0{,}629 \cdot e^{-0{,}357 \cdot u} - 0{,}029 \cdot e^{-2{,}243 \cdot u}$$

Η γραφική απεικόνιση της ψ(u)είναι η παρακάτω:



3^o ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για συνδυασμό δύο μετατοπισμένων εκθετικών αποζημιώσεων

Για το αριθμητικό μας παράδειγμα θεωρούμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των απαιτήσεων:

$$p(x) = 5 \cdot 4 \cdot e^{-4\cdot(x+1/3)} - 4 \cdot 5 \cdot e^{-5\cdot(x+1/3)}, \qquad x > -\frac{1}{3}$$

με $\alpha_1=5$, $\alpha_2=-4$, $\beta_1=4$, $\beta_2=5$, $\tau=1/3$

(Όπως παρατηρούμε ισχύει ότι $\alpha_1+\alpha_2=1$ και ότι $0<\beta_1<\beta_2$)

ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Για να είναι σωστή η επιλογή της p(x) θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

1.Εφ' όσον η p(x) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων θα πρέπει

$$\int_0^\infty p(x)dx = 1$$

Απόδειξη :

$$\int_0^\infty p(x)dx = \int_{-1/3}^\infty 5\cdot 4 \cdot e^{-4(x+1/3)} - 4\cdot 5 \cdot e^{-5(x+1/3)}\, dx =$$

$$\int_{-1/3}^\infty 20\cdot e^{-4(x+(1/3))}\, dx - \int_{-1/3}^\infty 20\cdot e^{-5(x+(1/3))}\, dx =$$

$$20 \int_{-1/3}^\infty e^{-4x}\cdot e^{-4/3}\, dx - 20 \int_{-1/3}^\infty e^{-5x}\cdot e^{-5/3}\, dx =$$

$$20e^{-4/3} \int_{-1/3}^\infty e^{-4x}\, dx - 20e^{-5/3} \int_{-1/3}^\infty e^{-5x}\, dx =$$

$$\frac{-20}{-4}\cdot e^{-4/3} \cdot \left[e^{-4x}\right]_{-1/3}^\infty + \frac{20}{5}\cdot e^{-5/3} \cdot \left[e^{-5x}\right]_{-1/3}^\infty =$$

$$-5e^{-4/3}(0 - e^{4/3}) + 4e^{-5/3}(0 - e^{5/3}) = 5 - 4 = 1$$

Άρα $\int_0^\infty p(x)\, dx = 1$ ισχύει

2.Η p(x) θα πρέπει να είναι θετική για κάθε x>0

Απόδειξη:

Θέλουμε p(x)>0 , το οποίο είναι ισοδύναμο με $20\, e^{-4\,(x+1/3)} - 20\, e^{-5\,(x+1/3)} > 0$

$$\text{δηλαδή}\quad 20\, e^{-4\,(x+1/3)} > 20\, e^{-5\,(x+1/3)} \Leftrightarrow$$

$$-4x - \frac{4}{3} > -5x - \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$5x - 4x > -\frac{5}{3} + \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

Άρα η p(x) δεν παίρνει αρνητικές τιμές αφού το x ορίζεται στο $(-\frac{1}{3}, \infty)$

Υπολογισμός των r_1, r_2

Τώρα θεωρούμε ότι λ=1 , $c=\frac{1}{5}$

$$p_1 = 5\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right) - 4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right) = 5\,\frac{3-4}{12} - 4\,\frac{3-5}{15} = -\frac{5}{12} + \frac{8}{15} = \frac{-75+96}{180} = \frac{21}{180} \Rightarrow p_1 = \frac{7}{60}$$

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{60}} - 1 = \frac{60}{35} - \frac{35}{35} = \frac{25}{35} \Rightarrow \theta = \frac{5}{7}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Αν και θεωρήσαμε αυθαίρετα τα c,λ , παρ' όλα αυτά οι τιμές τους είναι ικανοποιητικές γιατί

- Πρέπει c>λ p_1 , που ισχύει αφού (1/5)>(7/60)
- Το θ πρέπει να ανήκει στο (0,1), που επίσης ισχύει

Για να υπολογίσουμε τα r_1, r_2 θα πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$M_x(r) = 1 + (1+\theta)\cdot r \cdot p_1$$

$$M_X(r) = \sum_{i=1}^{2} A_i \frac{\beta_i}{(\beta_i - r)} e^{-r\cdot\tau}$$

Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$5\frac{4}{(4-r)}e^{-\frac{1}{3}r}-4\frac{5}{(5-r)}e^{-\frac{1}{3}r}=1+\left(1+\frac{5}{7}\right)r\frac{7}{60}\Leftrightarrow$$

$$20(5-r)e^{-\frac{r}{3}}-20(4-r)e^{-\frac{r}{3}}=1(4-r)(5-r)+\frac{12}{60}r(4-r)(5-r)\Leftrightarrow$$

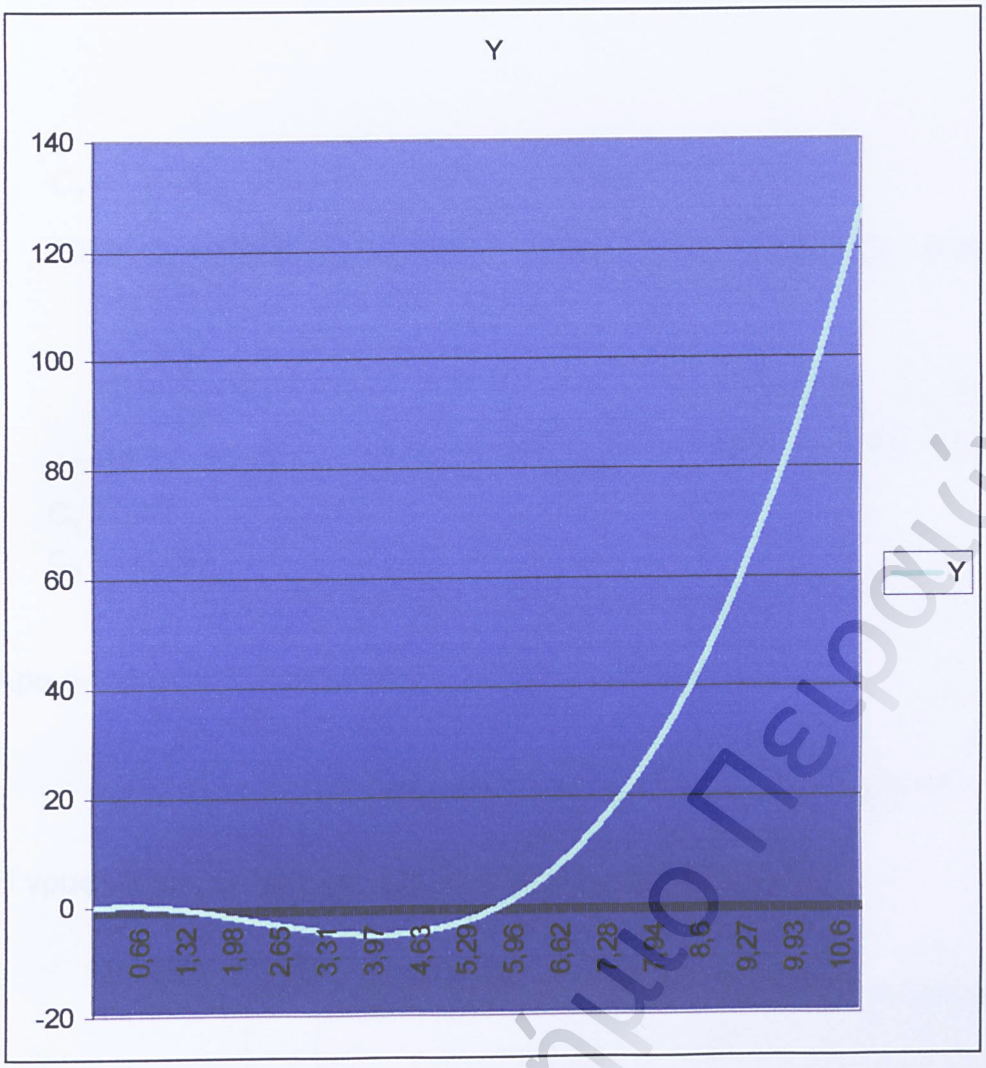
$$100e^{-\frac{r}{3}}-20r\,e^{-\frac{r}{3}}-80e^{-\frac{r}{3}}+20e^{-\frac{r}{3}}=20-9r+r^2+\frac{12}{60}r\left(20-9r+r^2\right)\Leftrightarrow$$

$$20\ e^{-\frac{r}{3}}=20-9r+r^2+\frac{240}{60}r-\frac{108}{60}r^2+\frac{12}{60}r^3\ \Leftrightarrow$$

$$20\ e^{-\frac{r}{3}}=20-9r+r^2+4r-1{,}8\,r^2+0{,}2\,r^3\Leftrightarrow$$

$$0.2\,r^3-0.8\,r^2-5\,r+20-20\ e^{-\frac{r}{3}}=0$$

Επειδή η εξίσωση είναι συνδυασμός γραμμικής και εκθετικής συνάρτησης, ο μόνος τρόπος για να βρούμε τις ρίζες, είναι να κάνουμε τη γραφική της παράσταση και να παρατηρήσουμε σε ποια σημεία τέμνει τον άξονα των Χ. Τα σημεία αυτά είναι οι ρίζες της εξίσωσης (δηλαδή, γραφική επίλυση της εξίσωσης).



Άρα οι ρίζες τις εξίσωσης είναι οι εξής :
$r = 0$, $r_1 = 1.059$, $r_2 = 5.768$

Εδώ η r=0 απορρίπτεται γιατί δεχόμαστε μόνο τις θετικές λύσεις της εξίσωσης!

<u>Παρατηρούμε ότι $0< r_1 <\beta_1 < \beta_2 < r_2$</u>

<u>Υπολογισμός των C_1, C_2</u>

Για τον υπολογισμό των C_1, C_2 ,σύμφωνα με τύπους (5) και (10), πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$C_1 + C_2 = \frac{7}{12}$$

$$1{,}059 \cdot C_1 + 5{,}768 \cdot C_2 = 0{,}208$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{7}{12} - C_2 \\ 1{,}059 \cdot C_1 + 5{,}768 \cdot C_2 = 0{,}208 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{7}{12} - C_2 \\ 1{,}059 \cdot \left(\dfrac{7}{12} - C_2 \right) + 5{,}768 \cdot C_2 = 0{,}208 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

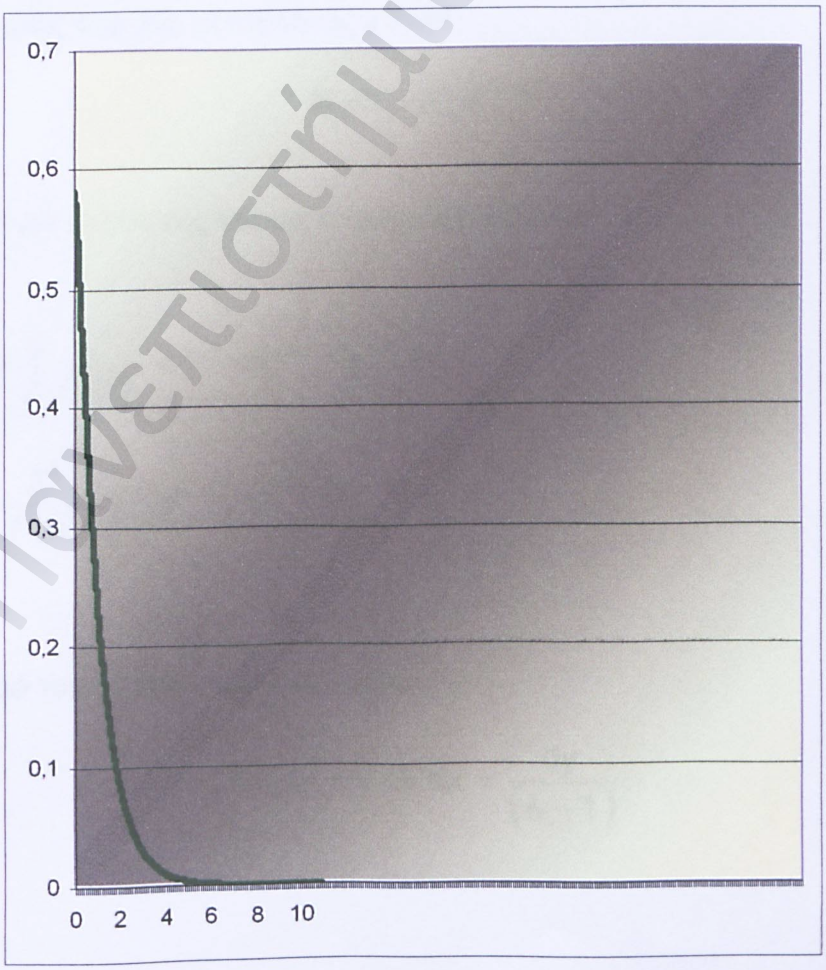
$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{7}{12} - C_2 \\ 0{,}618 - 1{,}059 \cdot C_2 + 5{,}768 \cdot C_2 = 0{,}208 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_1 = 0{,}583 - C_2 \\ 4{,}709 \cdot C_2 = -0{,}41 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_1 = 0{,}583 - C_2 \\ C_2 = -0{,}087 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} C_1 = 0{,}67 \\ C_2 = -0{,}087 \end{array}$$

Άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας θα δίνεται από τον τύπο

$$\psi(u) = 0{,}67 \cdot e^{-1{,}059 \cdot u} - 0{,}087 \cdot e^{-5{,}768 \cdot u}$$

Η γραφική απεικόνιση της ψ(u) είναι η παρακάτω



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟ ΓΑΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Σαν επέκταση του συνδυασμού της εκθετικής, θα υπολογίσουμε την συνάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας για μείξη γάμα κατανομών με γενικό τύπο

$$p(x)=\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\beta_i^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\cdot x^{\alpha_i-1}\cdot e^{-\beta_i x} \quad \text{όπου} \quad \sum_{i=1}^{\infty} A_i=1,\ \beta_i>0\ ,x>0$$

ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΓΑΜΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Υπολογισμός ροπογεννήτριας γάμμα κατανομής

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της γάμα κατανομής είναι:

$$f(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda\cdot x} \quad , \quad \lambda>0\ ,\ x\geq 0\ ,\ \alpha>0$$

Η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής x είναι:

$$M_X(t)=E(e^{t\cdot X})$$

Επομένως η ροπογεννήτρια της γάμμα κατανομής θα είναι:

$$M_X(t)=\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda\cdot x}\cdot e^{t\cdot x}\,dx$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\int_0^{\infty}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-x\cdot(\lambda-t)}\,dx$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θέτω

$$x\cdot(\lambda-t)=y \Leftrightarrow dx=\frac{dy}{(\lambda-t)}$$

οπότε η $M_x(t)$ γίνεται:

$$M_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty y^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(\lambda - t)^{\alpha-1}} \cdot e^{-y} \cdot \frac{1}{(\lambda - t)} dy$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{(\lambda - t)^\alpha} \cdot y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} dy$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{(\lambda - t)^\alpha} \cdot \underbrace{\int_0^\infty y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} dy}_{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - t)^\alpha}$$

Υπολογισμός ροπογεννήτριας συνδυασμού δύο γάμμα κατανομών

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του συνδυασμού δύο γάμμα κατανομών είναι:

$$f(x) = A_1 \cdot \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \cdot x^{\alpha_1 - 1} \cdot e^{-\beta_1 \cdot x} + A_2 \cdot \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \cdot x^{\alpha_2 - 1} \cdot e^{-\beta_2 \cdot x} \qquad \text{όπου}$$

$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = 1,\ \beta_i > 0,\ x > 0,\ \alpha_{1,2} > 0$

Η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής x είναι:

$$M_X(t) = E(e^{t \cdot X})$$

Επομένως η ροπογεννήτρια του συνδυασμού δύο γάμμα κατανομών θα είναι:

$$M_x(t) = \int_0^\infty \left(A_1 \cdot \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \cdot x^{\alpha_1 - 1} \cdot e^{-\beta_1 \cdot x} + A_2 \cdot \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \cdot x^{\alpha_2 - 1} \cdot e^{-\beta_2 \cdot x} \right) \cdot e^{t \cdot x} dx$$

$$= \int_0^\infty A_1 \cdot \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \cdot x^{\alpha_1 - 1} \cdot e^{-\beta_1 \cdot x} \cdot e^{t \cdot x} dx + \int_0^\infty A_2 \cdot \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \cdot x^{\alpha_2 - 1} \cdot e^{-\beta_2 \cdot x} \cdot e^{t \cdot x} dx$$

$$= A_1 \cdot \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \cdot \int_0^\infty x^{\alpha_1 - 1} \cdot e^{-x(\beta_1 - t)} dx + A_2 \cdot \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \cdot \int_0^\infty x^{\alpha_2 - 1} \cdot e^{-x \cdot (\beta_2 - t)} dx$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θέτω

$$x \cdot (\beta_1 - t) = y \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{(\beta_1 - t)} \qquad \text{και} \qquad x \cdot (\beta_2 - t) = z \Leftrightarrow dx = \frac{dz}{(\beta_2 - t)}$$

οπότε η $M_x(t)$ γίνεται:

$$M_X(t) = A_1 \cdot \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1) \cdot (\beta_1 - t)^{\alpha_1}} \cdot \underbrace{\int_0^\infty y^{\alpha_1 - 1} \cdot e^{-y}\, dy}_{\Gamma(\alpha_1)} + A_2 \cdot \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2) \cdot (\beta_2 - t)^{\alpha_2}} \cdot \underbrace{\int_0^\infty z^{\alpha_2 - 1} \cdot e^{-z}\, dz}_{\Gamma(\alpha_2)}$$

$$= A_1 \cdot \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{(\beta_1 - t)^{\alpha_1}} + A_2 \cdot \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{(\beta_2 - t)^{\alpha_2}}$$

4^o ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για το αριθμητικό μας παράδειγμα θεωρούμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των απαιτήσεων με παραμέτρους $\alpha_1, \alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 1{,}268$, $\beta_2 = 4{,}732$ και $A_1, A_2 = \frac{1}{2}$, η οποία θα έχει την μορφή

$$p(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}268^2}{\Gamma(2)} \cdot x^{2-1} \cdot e^{-1{,}268 \cdot x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4{,}732^2}{\Gamma(2)} \cdot x^{2-1} \cdot e^{-4{,}732 \cdot x}$$

(Όπως παρατηρούμε ισχύει ότι $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ και ότι $0 < \beta_1 < \beta_2$)

Αφού το n είναι ακέραιος αριθμός, το Γ(n) υπολογίζεται από τον τύπο

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Άρα , $\Gamma(2) = (2-1)! = 1! = 1$

Οπότε η p(x) θα είναι

$$p(x) = \frac{1{,}608}{2} \cdot x \cdot e^{-1{,}268 \cdot x} + \frac{22{,}39}{2} \cdot x \cdot e^{-4{,}732 \cdot x}$$

<u>ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ</u>

Για να είναι σωστή η επιλογή της p(x) θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

1.Εφ' όσον η p(x) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων θα πρέπει

$$\int_0^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

Θα πρέπει δηλαδή $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1,608}{2}\cdot x\cdot e^{-1,268.x} + \frac{22,39}{2}\cdot x\cdot e^{-4,732\cdot x} = 1 \Leftrightarrow$

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1,608}{2}\cdot x\cdot e^{-1,268.x}}_{A} + \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{22,39}{2}\cdot x\cdot e^{-4,732\cdot x}}_{B} = 1$$

<u>*Υπολογισμός ολοκληρώματος Α*</u>

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1,608}{2}\cdot x\cdot e^{-1,268\cdot x}\,dx}_{A} = -\frac{1,608}{2\cdot 1,268}\cdot\int_0^{\infty} x\cdot\left(e^{-1,268\cdot x}\right)'\,dx = -\frac{1,608}{2,536}\left(\left[x\cdot e^{-1,268\cdot x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-1,268\cdot x}\,dx\right)$$

$$= -\frac{1,608}{2,536}\left(\left[x\cdot e^{-1,268\cdot x}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{1,268}\left[e^{-1,268\cdot x}\right]_0^{\infty}\right) =$$

$$= -\frac{1,608}{2,536}\left[\left(\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-1,268\cdot x} - \underbrace{\lim_{x\to 0} x\cdot e^{-1,268\cdot x}}_{0}\right) + \frac{1}{1,268}\left(\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{-1,268\cdot x}}_{0} - \underbrace{\lim_{x\to 0} e^{-1,268\cdot x}}_{1}\right)\right]$$

Για τον υπολογισμό του **ολοκληρώματος Α** πρέπει να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-1,268\cdot x}$, το οποίο είναι απροσδιόριστης μορφής $(0\cdot\infty)$, γι' αυτό το λόγο εργαζόμαστε ως εξής :

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-1{,}268\cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^{-1{,}268\cdot x}}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\text{ DE L'HOSPITAL}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{\left(\frac{1}{e^{-1{,}268\cdot x}}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^{-1{,}268\cdot x}}} = 0$$

Οπότε το **ολοκλήρωμα Α** γίνεται

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{1{,}608}{2}\cdot x\cdot e^{-1{,}268\cdot x}}_{A} = -\frac{1{,}608}{2{,}536}\cdot\left[(0-0)+\frac{1}{1{,}268}(0-1)\right] = \frac{1{,}608}{3{,}216}$$

Άρα, $\underbrace{\int_0^\infty \frac{1{,}608}{2}\cdot x\cdot e^{-1{,}268\cdot x}}_{A} = \frac{1{,}608}{3{,}216}$

<u>Υπολογισμός ολοκληρώματος Β :</u>

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{22{,}39}{2}\cdot x\cdot e^{-4{,}732\cdot x}\,dx}_{B} = -\frac{22{,}39}{2\cdot 4{,}732}\cdot\int_0^\infty x\cdot\left(e^{-4{,}732\cdot x}\right)'\,dx = -\frac{22{,}39}{9{,}464}\left(\left[x\cdot e^{-4{,}732\cdot x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-4{,}732\cdot x}\,dx\right)$$

$$= -\frac{22{,}39}{9{,}464}\left(\left[x\cdot e^{-4{,}732\cdot x}\right]_0^\infty + \frac{1}{4{,}732}\left[e^{-4{,}732\cdot x}\right]_0^\infty\right) =$$

$$= -\frac{22{,}39}{9{,}464}\left[\left(\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-4{,}732\cdot x} - \underbrace{\lim_{x\to 0} x\cdot e^{-4{,}732\cdot x}}_{0}\right) + \frac{1}{4{,}732}\left(\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{-4{,}732\cdot x}}_{0} - \underbrace{\lim_{x\to 0} e^{-4{,}732\cdot x}}_{1}\right)\right]$$

Για τον υπολογισμό του **ολοκληρώματος Β** πρέπει να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-4{,}732\cdot x}$, το οποίο είναι απροσδιόριστης μορφής $(0\cdot\infty)$, γι' αυτό το λόγο εργαζόμαστε ως εξής :

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-4{,}732\cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^{-4{,}732\cdot x}}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\text{ DE L'HOSPITAL}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{\left(\frac{1}{e^{-4{,}732\cdot x}}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^{-4{,}732\cdot x}}} = 0$$

Οπότε το **ολοκλήρωμα B** γίνεται

$$\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{22{,}39}{2}\cdot x\cdot e^{-4{,}732\cdot x}}_{B} = -\frac{22{,}39}{9{,}464}\cdot\left[(0-0)+\frac{1}{4{,}732}(0-1)\right]=\frac{22{,}39}{44{,}784}$$

Άρα , $$\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{22{,}39}{2}\cdot x\cdot e^{-4{,}732\cdot x}}_{B}=\frac{22{,}39}{44{,}784}$$

Άρα το **αρχικό ολοκλήρωμα** είναι $A+B=\frac{1{,}608}{3{,}216}+\frac{22{,}39}{44{,}784}=0{,}5+0{,}5=1$

$$\text{Άρα}\quad \int_0^{\infty} p(x)\,dx = 1 \text{ ισχύει}$$

2.Θα πρέπει επίσης η p(x) να μην παίρνει αρνητικές τιμές δηλαδή

$$p(x) > 0 \text{ για κάθε } x>0 \iff$$

$$\frac{1{,}608}{2}\cdot x\cdot e^{-1{,}268\cdot x}+\frac{22{,}39}{2}\cdot x\cdot e^{-4{,}732\cdot x} > 0$$

το οποίο προφανώς ισχύει αφού το X ορίζεται μόνο στο $(0,+\infty)$

<u>Υπολογισμός των r_1, r_2</u>

Τώρα θεωρούμε ότι $\lambda = 1$, $c = 2$

$$p_1= A_1\frac{\alpha_1}{\beta_1}+A_2\cdot\frac{\alpha_2}{\beta_2} \iff p_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1{,}268}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4{,}732}=\frac{2}{2{,}536}+\frac{2}{9{,}464}=0{,}799+0{,}211=1{,}01$$

$$\theta=\frac{c}{\lambda\cdot p_1}=\frac{2}{1\cdot 1{,}01}-1=1{,}98-1=0{,}98$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Αν και θεωρήσαμε αυθαίρετα τα c,λ , παρ' όλα αυτά οι τιμές τους είναι ικανοποιητικές γιατί :

- Πρέπει c>λ p_1 , που ισχύει αφού (2)>(1,01)
- Το θ πρέπει να ανήκει στο (0,1), που επίσης ισχύει

Για να υπολογίσουμε τα r_1, r_2 θα πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα :

$$M_X(r) = 1 + (1+\theta)\cdot r \cdot p_1$$

$$M_X(r) = \sum_i A_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - r}\right)^{\alpha_i}$$

Στο παράδειγμά μας θα έχουμε :

$$M_X(r) = \frac{1}{2\cdot}\frac{1{,}268^2}{(1{,}268 - r)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4{,}732^2}{(4{,}732 - r)^2}$$

$$M_X(r) = 1 + (1 + 0{,}98)\cdot r \cdot 1{,}01$$

Οπότε παίρνουμε την εξίσωση :

$$\frac{1{,}268^2}{2\cdot(1{,}268 - r)^2} + \frac{4{,}732^2}{2\cdot(4{,}732 - r)^2} = 1 + (1 + 0{,}98)\cdot r \cdot 1{,}01 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1{,}608}{2\cdot(1{,}268-r)^2}+\frac{22{,}39}{2\cdot(4{,}732-r)^2}=1+1{,}98\cdot r\cdot 1{,}01 \Leftrightarrow$$

$$1{,}608\cdot(4{,}732-r)^2+22{,}39\cdot(1{,}268-r)^2=2\cdot(1{,}268-r)^2\cdot(4{,}732-r)^2+2\cdot r\cdot 2\cdot(1{,}268-r)^2\cdot(4{,}732-r)^2 \Leftrightarrow$$

$$1{,}608\cdot\left(22{,}39-9{,}464\cdot r+r^2\right)+22{,}39\cdot(1{,}608-2{,}536\cdot r+r^2)=$$
$$2\cdot(1{,}608-2{,}536\cdot r+r^2)\cdot\left(22{,}39-9{,}464\cdot r+r^2\right)+4\cdot r\cdot(1{,}608-2{,}536\cdot r+r^2)\cdot\left(22{,}39-9{,}464\cdot r+r^2\right)\Leftrightarrow$$

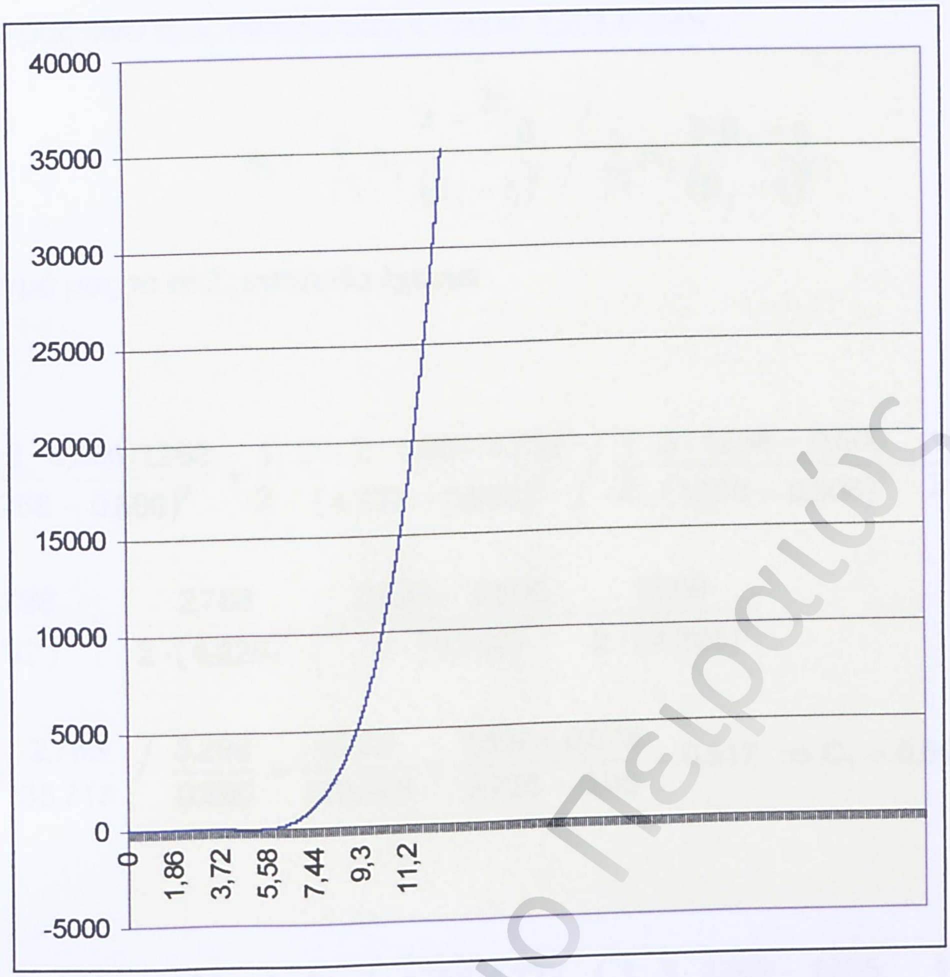
$$36-15{,}218r+1{,}608r^2+36-56{,}781r+22{,}39r^2=$$
$$\left(3{,}216-5{,}072r+2r^2\right)\cdot\left(22{,}39-9.464\cdot r+r^2\right)+\left(6{,}42r-10{,}144r^2+4r^3\right)\cdot\left(22{,}39-9{,}464\cdot r+r^2\right)\Leftrightarrow$$

$$36-15{,}218r+1{,}608r^2+36-56{,}781r+22{,}39r^2=$$
$$72-30{,}436\cdot r+3{,}216\cdot r^2-113{,}562\cdot r+48\cdot r^2-5{,}072\cdot r^3+44{,}78\cdot r^2-18{,}928\cdot r^3+2\cdot r^4+$$
$$143{,}743\cdot r-60{,}758\cdot r^2+6{,}42\cdot r^3-227{,}124\cdot r^2+96\cdot r^3-10{,}144\cdot r^4+89{,}56\cdot r^3-37.856\cdot r^4+4\cdot r^5\Leftrightarrow$$

$$-71{,}744\cdot r+215{,}884\cdot r^2-161{,}56\cdot r^3+46\cdot r^4-4\cdot r^5=0\Leftrightarrow$$

$$r\cdot\left(-4\cdot r^4+46\cdot r^3-161{,}56\cdot r^2+215{,}884\cdot r-71{,}744\right)=0$$

Ο μόνος τρόπος για να βρούμε τις ρίζες, είναι να κάνουμε τη γραφική της παράσταση και να παρατηρήσουμε σε ποια σημεία τέμνει τον άξονα των Χ. Τα σημεία αυτά είναι οι ρίζες της εξίσωσης (δηλαδή, γραφική επίλυση της εξίσωσης).



Άρα οι ρίζες τις εξίσωσης θα είναι οι ακόλουθες :

$r_1 = 0$, $r_2 = 0{,}506$, $r_3 = 1{,}765$, $r_4 = 3{,}544$, $r_5 = 6{,}685$
όπου η $r_1 = 0$ απορρίπτεται

Παρατηρούμε ότι $0<r_2<\beta_1< r_3< r_4< \beta_2< r_5$

Υπολογισμός των C_1, C_2 C_3, C_4

Στην περίπτωση της μείξης των γάμα κατανομών, η εύρεση των C_1, C_2 , C_3 και C_4 με τον τρόπο που υποδείξαμε παραπάνω, καθίσταται δύσκολη. Για τον υπολογισμό τους, λοιπόν, θα χρησιμοποιήσουμε έναν τύπο, τον οποίο παραθέτουν οι Hans, Goovaerts και Kaas σε σχετικό άρθρο **(On the probability and severity of ruin , Astin Bulletin Vol 17, No 2)**.

Ο τύπος που μας δίνει τους συντελεστές C_i για i= 1,2,3,4 είναι

$$C_i = \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{3 - {}^{2r_i}\!/_{\beta_j}}{(\beta_j - r_i)^2} \Bigg/ \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{3 \cdot \beta_j - r_i}{(\beta_j - r_i)^3}$$

Στο παράδειγμά μας το n=2, οπότε θα έχουμε

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 - 2 \cdot 0{,}506/1{,}268}{(1{,}268 - 0{,}506)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3 - 2 \cdot 0{,}506/4{,}732}{(4{,}732 - 0{,}506)^2} \Bigg/ \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 1{,}268 - 0{,}506}{(1{,}268 - 0{,}506)^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 4{,}732 - 0{,}506}{(4{,}732 - 0{,}506)^3}$$

$$= \frac{3 - 0{,}798}{2 \cdot (0{,}762)^2} + \frac{2{,}786}{2 \cdot (4{,}226)^2} \Bigg/ \frac{3{,}804 - 0{,}506}{2 \cdot (0{,}762)^3} + \frac{13{,}69}{2 \cdot (4{,}226)^3}$$

$$= \frac{2{,}202}{1{,}161} + \frac{2{,}786}{35{,}718} \Bigg/ \frac{3{,}298}{0{,}885} + \frac{13{,}69}{150{,}945} = \frac{1{,}897 + 0{,}078}{3{,}726 + 0{,}09} = 0{,}517 \;\Rightarrow C_1 = 0{,}517$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 - 2 \cdot 1{,}765/1{,}268}{(1{,}268 - 1{,}765)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3 - 2 \cdot 1{,}765/4{,}732}{(4{,}732 - 1{,}765)^2} \Bigg/ \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 1{,}268 - 1{,}765}{(1{,}268 - 1{,}765)^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 4{,}732 - 1{,}765}{(4{,}732 - 1{,}765)^3}$$

$$= \frac{3 - 2{,}784}{2 \cdot (0{,}497)^2} + \frac{2{,}254}{2 \cdot (2{,}967)^2} \Bigg/ \frac{3 \cdot 1{,}268 - 1{,}765}{2 \cdot (-0{,}497)^3} + \frac{12{,}431}{2 \cdot (2{,}967)^3}$$

$$= \frac{0{,}216}{2 \cdot (0{,}497)^2} + \frac{2{,}254}{2 \cdot (2{,}967)^2} \Bigg/ \frac{3{,}804 - 1{,}765}{2 \cdot (-0{,}497)^3} + \frac{12{,}431}{2 \cdot (2{,}967)^3}$$

$$= \frac{0{,}216}{0{,}494} + \frac{2{,}254}{17{,}606} \Bigg/ -\frac{2{,}039}{0{,}246} + \frac{12{,}431}{52{,}238}$$

$$= 0{,}437 + 0{,}128 \,/\, -8{,}289 + 0{,}238 = -\frac{0{,}565}{8{,}051} \Rightarrow C_2 = -\,0{,}07$$

$$C_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3-2\cdot 3{,}544\,/\,1{,}268}{(1{,}268-3{,}544)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{3-2\cdot 3{,}544\,/\,4{,}732}{(4{,}732-3{,}544)^2}\Big/\frac{1}{2}\,\frac{3\cdot 1{,}268-3{,}544}{(1{,}268-3{,}544)^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 4{,}732-3{,}544}{(4{,}732-3{,}544)^3}=$$

$$=\frac{3-5{,}59}{2\cdot(2{,}276)^2}+\frac{3-1{,}498}{2\cdot(1{,}188)^2}\Big/\frac{3\cdot 1{,}268-3{,}544}{2\cdot(-2{,}276)^3}+\frac{3\cdot 4{,}732-3{,}544}{2\cdot(1{,}188)^3}$$

$$=\frac{3-5{,}59}{2\cdot(2{,}276)^2}+\frac{3-1{,}498}{2\cdot(1{,}188)^2}\Big/\frac{3{,}804-3{,}544}{2\cdot(-2{,}276)^3}+\frac{14{,}196-3{,}544}{2\cdot(1{,}188)^3}$$

$$=\frac{-2{,}59}{2\cdot(2{,}276)^2}+\frac{1{,}502}{2\cdot(1{,}188)^2}\Big/\frac{0{,}26}{2\cdot(-2{,}276)^3}+\frac{10{,}652}{2\cdot(1{,}188)^3}$$

$$=\frac{-2{,}59}{10{,}36}+\frac{1{,}502}{2{,}822}\Big/-\frac{0{,}26}{23{,}58}+\frac{10{,}652}{3{,}353}=-0{,}25+0{,}532\,/-0{,}011+3{,}177$$

$$=0.282\;/\;3{,}167 \Rightarrow C_3=0{,}089$$

$$C_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3-2\cdot 5{,}685\,/\,1{,}268}{(1{,}268-5{,}685)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3-2\cdot 5{,}685\,/\,4{,}732}{(4{,}732-5{,}685)^2}\Big/\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 1{,}268-5{,}685}{(1{,}268-5{,}685)^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 4{,}732-5{,}685}{(4{,}732-5{,}685)^3}$$

$$=\frac{3-2\cdot 5{,}685\,/\,1{,}268}{(1{,}268-5{,}685)^2}+\frac{3-2\cdot 5{,}685\,/\,4{,}732}{(4{,}732-5{,}685)^2}\Big/\frac{3\cdot 1{,}268-5{,}685}{(1{,}268-5{,}685)^3}+\frac{3\cdot 4{,}732-5{,}685}{(4{,}732-5{,}685)^3}$$

$$=\frac{-5{,}967}{(4{,}417)^2}+\frac{0{,}597}{(-0{,}953)^2}\Big/\frac{-1{,}881}{(-4{,}417)^3}+\frac{8{,}511}{(-0{,}953)^3}$$

$$=\frac{-5{,}967}{(4{,}417)^2}+\frac{0{,}597}{(-0{,}953)^2}\Big/\frac{-1{,}881}{(-4{,}417)^3}+\frac{8{,}511}{(-0{,}953)^3}$$

$$=\frac{-5{,}967}{19{,}51}+\frac{0{,}597}{0{,}908}\Big/\frac{-1{,}881}{-86{,}176}+\frac{8{,}511}{-0{,}825}$$

$$=-0{,}306+0{,}657\;/\;0{,}021-10{,}316$$

$$=-0{,}306+0{,}657\;/\;(-10{,}295)\Rightarrow C_4=-0{,}036$$

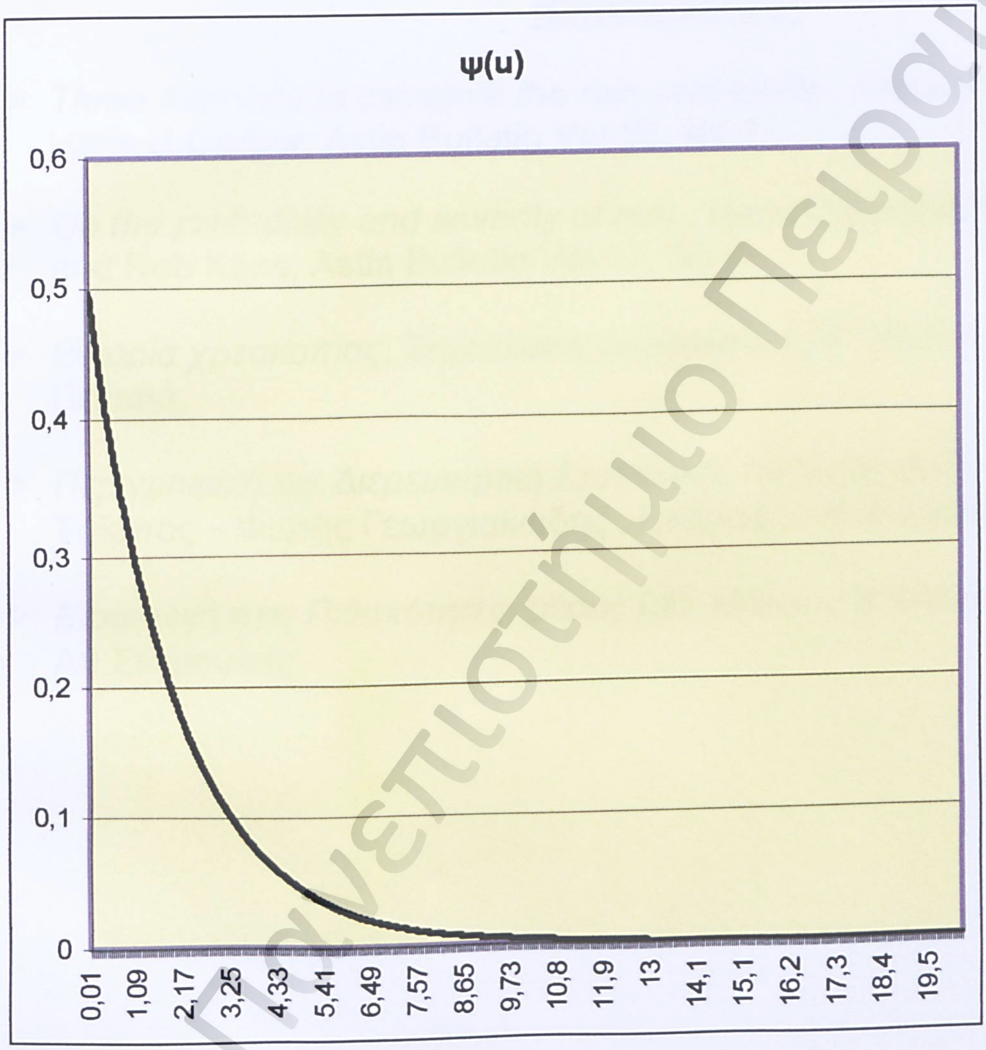
Επομένως η $\psi(u)$ θα είναι της μορφής:

$$\psi(u)=C_1\cdot e^{-r_1\cdot u}+C_2\cdot e^{-r_2\cdot u}+C_3\cdot e^{-r_3\cdot u}+C_4\cdot e^{-r_4\cdot u}$$

Η τελική μορφή της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι:

$$\psi(u)=0{,}517\cdot e^{-0{,}506\cdot u}-0{,}07\cdot e^{-1{,}765\cdot u}+0{,}089\cdot e^{-3{,}544\cdot u}-0{,}036\cdot e^{-5{,}685\cdot u}$$

και η γραφική της παράσταση :



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- *Three methods to calculate the ruin probability* , Francois Dufresne and Hans U.Gerber, Astin Bulletin Vol 19, No 1.

- *On the probability and severity of ruin* , Hans U.Gerber, Marc J.Goovaerts and Rob Kaas, Astin Bulletin Vol 17, No 2 .

- *Θεωρία χρεοκοπίας*, Σημειώσεις Διδάσκοντος Κ. Πολίτη, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

- *Περιγραφική και Διερευνητική Στατιστική, Ανάλυση δεδομένων*, Κλέων Τσίμπος – Φώτης Γεωργιακώδης , Εκδόσεις Αθ.Σταμούλης.

- *Εισαγωγή στις Πιθανότητες, μέρος I,II* ,Μάρκος Β.Κούτρας , Εκδόσεις Αθ.Σταμούλης.