ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ ΜΕΣΩ ΔΙΩΝΥΜΙΚΩΝ ΔΕΝΤΡΩΝ

Ιωάννης Β. Παππάς

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς,
Ιανουάριος 2015

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

CONSTRUCTION OF HEDGING PORTOFOLIOS VIA BINOMIAL TREES

BY

John B. Pappas

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

January 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- …………………………………. (Επιβλέπων)
- ………………………………….
- ………………………………….

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ την οικογένεια μου για την υποστήριξη και τον κύριο Μ. Μπούτσικα για την πολύτιμη καθοδήγησή του καθ’όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα παρουσιαστούν αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού της δίκαιης (no-arbitrage) αξίας παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμοι αναλυτικοί τύποι. Αρχικά θα πραγματοποιηθεί μια εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία που δύναται να περιγράψει την κίνηση των τιμών χρηματοοικονομικών τίτλων. Επίσης, θα περιγραφεί η έννοια του μέτρου πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου καθώς και κάποια αποτελέσματα που συνδέονται με αυτό. Το κύριο μέρος της εργασίας αποτελείται από την περιγραφή της τεχνικής που βασίζεται σε διωνυμικά δέντρα και οδηγεί στον προσεγγιστικό υπολογισμό της αξίας παραγώγων και των παραμέτρων αντιστάθμισης του κινδύνου (Delta hedging). Στα πλαίσια της εργασίας θα υλοποιηθούν οι υπολογιστικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό (Wolfram Mathematica).

Abstract

The main aim of this MSc thesis is to present numerical procedures that can be used to calculate the fair value of financial derivatives when exact formulas are not available. Initially, we present the basic theory which describes the movements of financial instruments. Furthermore, the risk neutral probability measure is depicted as well as some relevant results. The main part of this thesis consists of the presentation and implementation of option pricing techniques through binomial trees and delta hedging. Finally, we include several applications of option pricing using appropriate computer software (Wolfram Mathematica).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα σύγχρονα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα προσφέρουν μια ποικιλία προϊόντων στους πελάτες τους. Όταν ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα πωλεί ένα παράγωγο προϊόν έρχεται αντιμέτωπο με το πρόβλημα διαχείρισης του κινδύνου που συνεπάγεται. Αν το παράγωγο διατίθεται ήδη στην αγορά, τότε το ίδρυμα μπορεί αν το θέλησει να κλείσει την ανοικτή του θέση αγοράζοντας αυτό το παράγωγο από την αγορά. Όταν όμως το παράγωγο προσαρμόζεται στις ανάγκες του πελάτη και δεν υπάρχει αντιστοιχία με ένα προϊόν της αγοράς τότε η αντιστάθμιση του κινδύνου είναι πιο δύσκολη. Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να προσεγγίσει το πρόβλημα αυτό με την χρήση διωνυμικών δέντρων.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικά παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα και οι διαφορές μεταξύ τους. Ο στόχος τους κεφαλαίου αυτού είναι μέσα από τα παραδείγματα και τα γραφήματα να γίνει σαφές πως λειτουργεί ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης. Οι έννοιες όπως το κουπόνι, η τιμή εξάσκησης, η ημερομηνία λήξης είναι απαραίτητες για τα κεφάλαια που ακολουθούν.

Το δεύτερο κεφάλαιο ξεκινάει με την περιγραφή του απλούστερου μοντέλου τιμολόγησης με την χρήση διωνυμικών δέντρων, το οποίο περιλαμβάνει μια περίοδο σε διακριτό χρόνο. Στην συνέχεια αυτό γενικεύεται σε πολλές περιόδους και παρουσιάζεται ο αναδρομικός τύπος υπολογισμού της δίκαιης τιμής του παραγώγου σε διακριτό χρόνο. Επίσης, υλοποιούνται παραδείγματα τιμολόγησης σε διακριτό χρόνο για δικαιώματα αγοράς (Call Option), πώλησης (Put Option) αλλά και Ασιατικού τύπου δικαιώματα (Asian Option). Επίσης για μικρό αριθμό επαναλήψεων υλοποιείται μια στρατηγική εξασφάλισης με ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει μετοχές και μετρητά. Το κεφάλαιο κλείνει με παρατηρήσεις που αφορούν υπολογιστικά θέματα, ώστε να αποφεύγονται άσκοποι υπολογισμοί.

Το τρίτο κεφάλαιο έχει σκοπό να δομήσει θεωρητικά το δεύτερο κεφάλαιο. Γίνεται διαχωρισμός του μέτρου πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου από το πραγματικό (ιστορικό) μέτρο πιθανότητας της αγοράς. Αποδεικνύεται ότι υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου η ακολουθία των προεξοφλημένων τιμών των υποκείμενων τίτλων (π.χ. μετοχών) είναι martingales. Δηλαδή, υπό το μέτρο πιθανότητας του ουδέτερου ρίσκου η καλύτερη εκτίμηση, με βάση την πληροφορία στο χρόνο n, για την προεξοφλημένη τιμή της μετοχής στο χρόνο $n+1$ είναι η προεξοφλημένη τιμή της μετοχής στο χρόνο n. Επίσης προσδιορίζεται πιο αυστηρά ποιά πληροφορία χρειάζεται σε κάθε περίπτωση και ποιά όχι ώστε να μειώνονται οι υπολογισμοί, αξιοποιώντας την γνωστή Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο επιχειρείται η προσέγγιση ενός μοντέλου συνεχούς χρόνου λαμβάνοντας το όριο του διακριτού μοντέλου. Αρχικά γίνεται μια προσαρμογή στις βασικές παραμέτρους του διωνυμικού δέντρου που παρουσιάστηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο ώστε να προκύψει φυσιολογικά ως όριό του το κλασσικό μοντέλο Black and

Scholes. Στην συνέχεια περιγράφεται αναλυτικά ο αλγόριθμος τιμολόγησης για ένα δικαίωμα αγοράς (Call Option) και υλοποιείται για μικρό αριθμό βημάτων. Αμέσως μετά κατασκευάζεται ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης για ένα δικαίωμα αγοράς θεωρώντας ότι η τιμή του υποκείμενου αγαθού κινείται τυχαία, σύμφωνα με μια γεωμετρική κίνηση Brown προκειμένου να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα της αντιστάθμισης. Η ίδια διαδικασία πραγματοποιείται και για ένα δικαίωμα Ασιατικού τύπου (Asian Option) με δυο βασικές διαφορές. Το διωνυμικό δέντρο εξαρτάται από το μονοπάτι που ακολούθησε η μετοχή, και η τιμή του δικαιώματος υπολογίζεται μέσω προσομοίωσης. Τέλος, παρουσιάζονται γραφήματα για διάφορες τιμές των παραμέτρων στα οποία ελέγχεται η ευαισθησία του μοντέλου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

1.1 Προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts)

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο είναι μία συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων (συνήθως δύο χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων) για την αγορά ή την πώληση ενός υποκείμενου τίτλου σε μία προκαθορισμένη τιμή σε μία συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον. Η προκαθορισμένη αυτή τιμή ονομάζεται τιμή συναλλαγής (delivery price). Ο κάτοχος του συμβολαίου λαμβάνει *long position*, δηλαδή συμφωνεί να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο μία συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον. Παράλληλα ο πωλητής του συμβολαίου λαμβάνει *short position* και οφείλει να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο στην προκαθορισμένη τιμή και την μελλοντική ημερομηνία. Για παράδειγμα, έστω μία επιχείρηση στην Ελλάδα ότι οφείλει να πληρώσει $\$1000000$ σε έναν από τους Αμερικανούς προμηθευτές της σε 60 μέρες. Η ισοτιμία που δίνει η αγορά για 60 μέρες μετά είναι 0.7923 (USD/EUR). Η επιχείρηση επιλέγει να κάνει ένα προθεσμιακό συμβόλαιο και να αγοράσει $\$1000000$ σε 60 μέρες για €792300. Την στιγμή που η επιχείρηση μπαίνει στο προθεσμιακό συμβόλαιο δεν έχει κέρδος ούτε ζημιά. Την αμέσως επόμενη στιγμή όμως το συμβόλαιο έχει θετικές και αρνητικές τιμές. Αυτό διότι αν μετά από 60 μέρες η ισοτιμία στο χρηματιστήριο είναι 0.801 (USD/EUR) τότε η επιχείρηση έχει κερδίσει €8700. Αντίθετα αν η ισοτιμία μετά από 60 μέρες υποχωρούσε στο 0.779 η επιχείρηση θα έπρεπε να πληρώσει €13300 παραπάνω.

Γενικά, το κέρδος ενός αγοραστή από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο είναι

$$S_T - E,$$

όπου S_T είναι η τιμή του υποκείμενου αγαθού στο χρόνο της λήξης του συμβολαίου και E η προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής. Αντίθετα το κέρδος του πωλητή από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο είναι

$$E - S_T,$$

Η τιμή E καθορίζεται έτσι ώστε την ημέρα της σύναψης του συμβολαίου να είναι ίση με το μηδέν. Η S_T είναι μια τυχαία μεταβλητή. Υπό το πρίσμα ότι η αγορά βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας δηλαδή δεν δημιουργούνται ευκαιρίες για arbitrage μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του E.

***Πρόταση* 1.1.1.** Η τιμή συναλλαγής E ενός ΠΣ με λήξη μετά από T έτη είναι

$$E = S_0 e^{rT},$$

όπου S_0 η τιμή του υποκείμενου τίτλου την ημέρα της σύναψης του συμβολαίου και r το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο της αγοράς.

1.2 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts)

Ένα Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ) λειτουργεί όπως ένα Προθεσμιακό Συμβόλαιο. Μιλάμε δηλαδή πάλι για μια συμφωνία ανάμεσα σε δύο αντισυμβαλλόμενους όπου ο ένας αγοράζει (long position) και άλλος πουλάει (short position) έναν υποκείμενο τίτλο σε μία συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον σε μια προκαθορισμένη τιμή παράδοσης (delivery price). Σε αυτά τα συμβόλαια η ημερομηνία παράδοσης δεν είναι απόλυτα καθορισμένη. Το συμβόλαιο για παράδειγμα μπορεί να αναφέρει μήνα παράδοσης τον Ιανουάριο αλλά την ακριβή ημερομηνία την καθορίζει το Χρηματιστήριο.

Μια ουσιαστική διαφορά ανάμεσα σε αυτά τα δύο συμβόλαια είναι ότι τα ΣΜΕ συναλλάσσονται στο Χρηματιστήριο. Το Χρηματιστήριο λειτουργεί ως εγγυητής της εκπλήρωσης των συμβολαίων. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση των λογαριασμών περιθωρίων (margin accounts). Έτσι ο αγοραστής και ο πωλητής του ΣΜΕ υποχρεούνται να ανοίξουν ένα λογαριασμό περιθωρίων και να καταθέσουν ένα ποσοστό της τιμής συναλλαγής E ως εγγύηση. Το γεγονός ότι τα ΣΜΕ συναλλάσσονται καθημερινά συνεπάγεται ότι η τιμή τους θα μεταβάλλεται ανάλογα με την μεταβολή του υποκείμενου αγαθού ή τις προσδοκίες των επενδυτών. Έτσι αγοραστές και πωλητές μπορούν να κλείσουν τη θέση τους οποιαδήποτε στιγμή πριν τη λήξη του συμβολαίου κάνοντας την αντίστροφη κίνηση. Αντίθετα τα Προθεσμιακά Συμβόλαια διαπραγματεύονται στην εξωχρηματιστηριακή αγορά (Over The Counter) όπου κάθε επενδυτής αξιολογεί από μόνος του την φερεγγυότητα του αντισυμβαλλομένου.

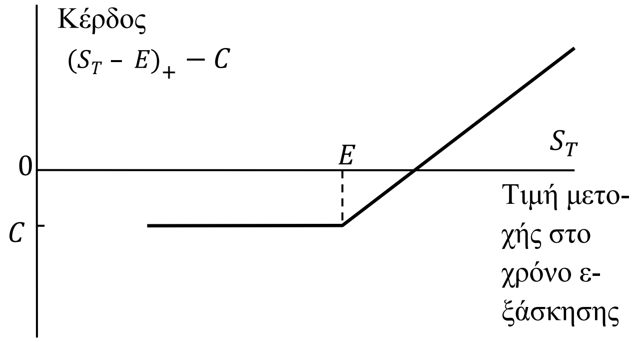
Για παράδειγμα, ένας επενδυτής πωλεί ένα ΣΜΕ με υποκείμενο τίτλο 10 τόνους σιτάρι με τιμή συναλλαγής $E = 0{,}20\ €/Kg$ και με ημερομηνία συναλλαγής μετά από 6 μήνες. Την ίδια στιγμή ένας άλλος επενδυτής αγοράζει αυτό το συμβόλαιο. Το επόμενο βήμα είναι να ανοιχτούν οι λογαριασμοί περιθωρίων και να βάλει ο καθένας ένα ποσοστό (π.χ. 10% του 2000) ως εγγύηση. Στην επόμενη συνεδρίαση του χρηματιστηρίου η τιμή συναλλάγης του συμβολαίου θα έχει αλλάξει. Μιά ξαφνική φωτιά θα ήταν μια αιτία για την αύξηση της τιμής συναλλαγής $E = 0{,}25\ €/Kg$. Αν ο αγοραστής επέλεγε να κλείσει την θέση του (δηλ. να λάβει short position επί του ίδιου αγαθού με την ίδια ημερομηνία λήξης) θα κέρδιζε €500. Ενώ μια καλή σοδιά θα είχε ως αποτέλεσμα να μειωθεί η τιμή στα $E = 0{,}18\ €/Kg$. Αν ο πωλητής επέλεγε να κλείσει την θέση του (δηλ. να λάβει long position επί του ίδιου αγαθού με την ίδια ημερομηνία λήξης) θα κέρδιζε €200. Το χρηματιστήριο παραγώγων παρεμβάλει αυτή τη κίνηση του αγοραστή και πιστώνει στο λογαριασμό περιθωρίων του πωλητή €500. Στο σενάριο που η τιμή πέφτει ο λογαριαμός που γίνεται η πίστωση είναι του αγοραστή. Το ίδιο επαναλαμβάνεται στο τέλος κάθε συνεδρίασης. Η παραπάνω διαδικασία καλείται *ημερήσιος διακανονισμός* (marking to market). Τέλος το περιθώριο ασφάλισης αποδεσμεύεται όταν ο επενδυτής κλείσει την ανοιχτή θέση του.

1.3 Δικαιώματα προαίρεσης (options)

Οι δύο βασικοί τύποι δικαιωμάτων προαίρεσης είναι το δικαίωμα αγοράς (*call option*) και το δικαίωμα πώλησης (*put option*). Ο κάτοχος του δικαιώματος αγοράς έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο σε μια προκαθορισμένη τιμή (*strike price*) σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία (*exercise date*). Αντίστοιχα ένα δικαίωμα πώλησης δίνει το δικαίωμα στο κάτοχό του να πωλήσει τον υποκείμενο τίτλο σε μία προκαθορισμένη τιμή σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία. Ανάλογα με το χρόνο εξάσκησης τα δικαιώματα χαρακτηρίζονται ως Αμερικανικού και Ευρωπαϊκού τύπου. Η διαφορά τους είναι ότι στα αμερικανικού τύπου το δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημερομηνία της λήξης ενώ στα ευρωπαϊκού τύπου εξασκείται μόνο στην ημερομηνία της λήξης. Έστω τώρα ότι στο παραπάνω παράδειγμα με την ελληνική επιχείρηση και τους αμερικάνους προμηθευτές η επιχείρηση επιλέγει να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς $1000000 με τιμή εξάσκησης 0.7923 (USD/EUR) και λήξη μετά από 60 μέρες. Εδώ η επιχείρηση οφείλει να καταβάλει στην αρχή ένα αντίτιμο C. Ας υποθέσουμε ότι το δικαίωμα είναι ευρωπαϊκού τύπου. Αν μετά από 60 μέρες η ισοτιμία είναι 0.801 (USD/EUR) τότε η επιχείρηση έχει κερδίσει €8700 μείον το ασφάλιστρο C. Αντίθετα αν η ισοτιμία μετά από 60 μέρες υποχωρούσε στο 0.779 τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκούσε το δικαίωμά του καθώς η ισοτιμία στην αγορά είναι συμφέρουσα. Είναι φανερό ότι το δικαίωμα είναι πιο σύνθετο παράγωγο από τα ΠΣ και τα ΣΜΕ διότι ο αγοραστής του δικαιώματος (holder) δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμα του. Αυτή η στρατηγική καθιστά ικανό το αγοραστή του δικαιώματος να ασφαλίζεται ενάντια σε δυσμενείς κινήσεις των υποκείμενων τίτλων. Φυσικά, αυτή η ασφάλιση που απολαμβάνει ο αγοραστής έχει ένα αντίτιμο C, το οποίο δεν είναι τίποτα άλλο από την τιμή του δικαιώματος. Το ασφάλιστρο C διαμορφώνεται από την προσφορά κα την ζήτηση του κάθε δικαιώματος. Η θέση που θα λάβει ένα επενδυτής εξαρτάται από την εικόνα που προβλέπει για τον υποκείμενο τίτλο.

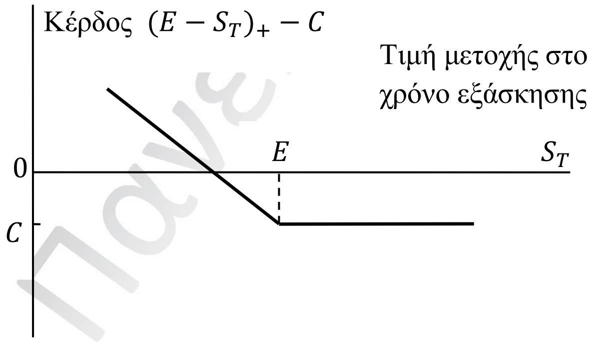
Ας υποθέσουμε την κατάσταση στην οποία ένας επενδυτής προβλέπει άνοδο μίας μετοχής. Η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής είναι €95. Επειδή όμως δεν θέλει να ρισκάρει την αγορά των μετοχών επιλέγει να αγοράσει 100 δικαιώματα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου επί της μετοχής αυτής, με τιμή εξάσκησης €100 και ημερομηνία λήξης σε 2 μήνες. Η τιμή κάθε δικαιώματος είναι €5. Αν στην ημερομηνία λήξης η τιμή της μετοχής είναι €126 τότε ο κάτοχος του δικαιώματος θα εξασκήσει το δικαίωμα του. Στην ουσία ο κάτοχος του δικαιώματος εξασκεί το δικαίωμά του και αγοράζει €100 την μετοχή και μετά την πωλεί άμεσα στην αγορά με τιμή €126. Αν αφαιρεθεί και το κόστος του ασφαλίστρου το καθαρό κέρδος είναι €21 ανά μετοχή. Αντίθετα αν την ημερομηνία της λήξης η τιμή της μετοχής είναι €86 τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα του.

Γενικά αν συμβολίσουμε με S_T την χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής στο χρόνο εξάσκησης τότε η αποπληρωμή από την χρήση του δικαιώματος αγοράς (*call option*) για τον αγοραστή θα είναι



$$(S_T - E)+ = max\{ S_T - E , 0 \} = \begin{cases} S_T - E, & S_T > E \\ 0, & S_T \leq E \end{cases}$$

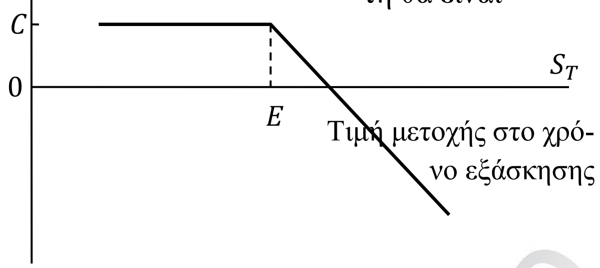
Αν και ο αγοραστής ενός δικαιώματος αγοράς ελπίζει ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα αυξηθεί, ο αγοραστής ενός δικαιώματος πώλησης ελπίζει ότι αυτή θα μειωθεί. Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής αγοράζει 100 δικαιώματα πώλησης ευρωπαϊκού τύπου επί μία μετοχής με τιμή εξάσκησης €80. Η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής είναι €66, η ημερομηνία λήξης είναι σε 2 μήνες και η τιμή του δικαιώματος είναι €8. Αφού μιλάμε για δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου η εξάσκησή τους θα γίνει στην ημερομηνία λήξης και μόνο αν η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι κάτω από τα €80. Για παράδειγμα αν ο επενδυτής μπορεί να αγοράσει στη λήξη 100 μετοχές με €50 ανά μετοχή τότε εξασκώντας το δικαίωμα πώλησης κερδίζει €30 ανά μετοχή ή €3000. Όταν και το αρχικό κόστος του ασφαλίστρου λαμβάνεται υπόψη το καθαρό κέρδος είναι €22 ανά μετοχή ή €2200. Φυσικά αν η μετοχή ξεπεράσει τα €80 ανά μετοχή στη λήξη, τότε το δικαίωμα πώλησης δεν έχει καμία αξία και ο κάτοχος του δικαιώματος χάνει €800. Γενικά αν συμβολίσουμε με S_T την χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής στο χρόνο εξάσκησης τότε η αποπληρωμή από την χρήση του δικαιώματος πώλησης (*put option*) για τον αγοραστή θα είναι



$$(E - S_T)_+ = max\{ E - S_T, 0\} = \begin{cases} E - S_T, & E > S_T \\ 0, & E \leq S_T \end{cases}$$

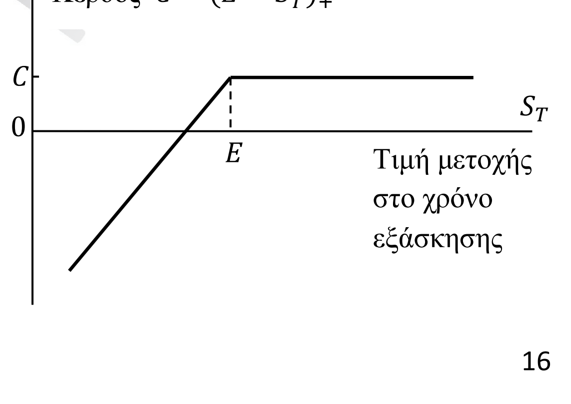
Όμως εκτός από την πλευρά του αγοραστή υπάρχει και η πλευρά του πωλητή σε κάθε δικαίωμα προαίρεσης. Ο πωλητής (writer) από ένα δικαίωμα λαμβάνει το ασφάλιστρο στην αρχή του συμβολαίου αλλά παράλληλα αναλαμβάνει και όλες τις πιθανές υποχρεώσεις.

Για παράδειγμα, έστω ένας επενδυτής που είναι κάτοχος των παραπάνω μετοχών προβλέπει μια καθοδική τάση της μετοχής μετά από 2 μήνες. Επιλέγει λοιπόν να πωλήσει 100 δικαιώματα αγοράς με ημερομηνία λήξης μετά από 2 μήνες και τιμή εξάσκησης €100. Παράλληλα ως πωλητής (writer) θα εισπράξει και το ασφάλιστρο που είναι €5. Αν στην ημερομηνία λήξης η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης τότε ο αγοραστής δεν εξασκεί το δικαίωμα του και ο πωλητής κερδίζει το κουπόνι. Αντίθετα αν η τιμή της μετοχής ξεπεράσει τα €100 τότε ο πωλητής έχει την υποχρέωση να πωλήσει στα 100 και όχι στα 120 που είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής. Με αυτή τη στρατηγική ο επενδυτής αυξάνει το ρίσκο που έχει αναλάβει, ιδιαίτερα αν δεν κατέχει και τις μετοχές αλλά περιμένει να τις αγοράσει στη λήξη. Γενικά αν συμβολίσουμε με S_T την χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής στο χρόνο εξάσκησης τότε η αποπληρωμή από την χρήση του δικαιώματος αγοράς (*call option*) για τον πωλητή θα είναι



$$-(S_T - E)_+ = -max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} K - S_T, S_T > E \\ 0 \quad\quad , S_T \leq E \end{cases}$$

Η τέταρτη βασική στρατηγική που μπορεί να ακολουθήσει ένας επενδυτής στα δικαιώματα προαίρεσης είναι να πωλήσει ένα δικαίωμα πώλησης. Εδώ ο επενδυτής προβλέπει άνοδο των τιμών του υποκείμενου τίτλου. Αυτό διότι την ημέρα της λήξης του δικαιώματος ο πωλητής θα είναι υποχρεωμένος να αγοράσει στην τιμή εξάσκησης. Στην ουσία ο αγοραστής του συμβολαίου σε αυτή την περίπτωση δεν εξασκεί το δικαίωμα του και ο πωλητής κερδίζει το ασφάλιστρο *C*. Έστω ότι η τιμή εξάσκησης είναι €100, η ημερομηνία λήξης είναι σε 2 μήνες και το ασφάλιστρο είναι €5. Αν η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής στη λήξη είναι €105, ο κάτοχος του συμβολαίου δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα του γιατί πουλάει την μετοχή στα €100 ενώ αυτή αξίζει €105. Το κέρδος για τον πωλητή είναι το ασφάλιστρο *C* ή στο συγκεκριμένο παράδειγμα €5. Αλλιώς, αν η τιμή πέσει στα €85 ο πωλητής είναι υποχρεωμένος να αγοράσει την μετοχή στα €100, χάνοντας €20 ανά μετοχή. Γενικά αν συμβολίσουμε με S_T την χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής στο χρόνο εξάσκησης τότε η αποπληρωμή από την χρήση του δικαιώματος πώλησης (*put option*) για τον πωλητή θα είναι



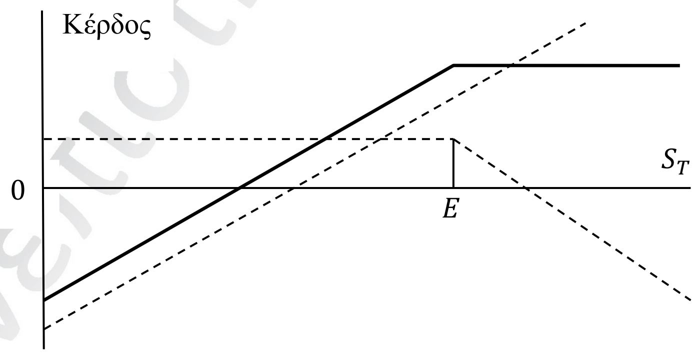
$$-(E - S_T)_+ = -max\{E - S_T, 0\} = \begin{cases} S_T - E, E > S_T \\ 0 \quad\quad , E \leq S_T \end{cases}$$

Στρατηγικές αγοραπωλησιών μετοχών και δικαιωμάτων προαίρεσης

Το δικαίωμα αγοράς (call option) και το δικαίωμα πώλησης (put option) που αναλύθηκαν παραπάνω μερικές φορές ορίζονται και ως «plain vanilla» ή «standard» παράγωγα. Όμως ένας επενδυτής μπορεί να λάβει και πιο σύνθετες θέσεις χρησιμοποιώντας ένα δικαίωμα προαίρεσης και μία μετοχή ταυτόχρονα. Επίσης, ο συνδυασμός δύο δικαιωμάτων προαίρεσης δημιουργεί ένα εύρος επιλογών για την στρατηγική που ταιριάζει στον επενδυτή. Ενδεικτικά αναφέρουμε κάποιες τέτοιες στρατηγικές. Για περισσότερες τεχνικές και αποτελέσματα παραπέμπουμε στα [1], [4].

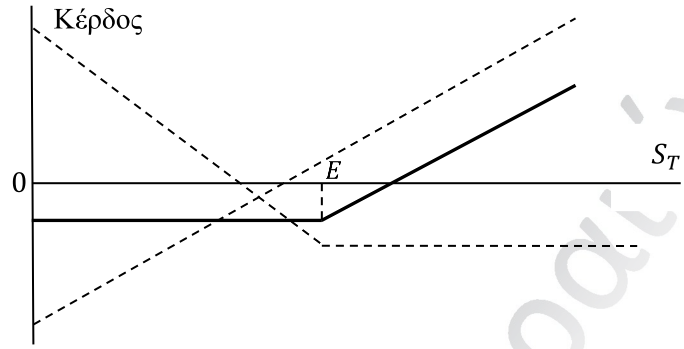
2.1 Στρατηγικές που αφορούν μια μετοχή και ένα δικαίωμα προαίρεσης επί αυτή της μετοχής.

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο κατασκευάζεται από την αγορά μιας μετοχής και την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς. Στην ουσία μιλάμε για ένα σύνθετο παράγωγο που ονομάζεται «covered call» (π.χ.βλ.[10]). Αυτό, διότι η αγορά της μετοχής προστατεύει τον επενδυτή από μια απότομη αύξηση της τιμής της μετοχής. Είναι λογικό, ο επενδυτής με την πώληση του δικαιώματος αγοράς προβλέπει πτώση των τιμών της μετοχής. Αν συμβεί το αντίθετο είναι υποχρεωμένος να πληρώσει την διαφορά $S_T - E$. Το κέρδος όμως από την άνοδο της μετοχής αντισταθμίζει την ζημιά. Στο γράφημα που ακολουθεί καθώς και στα υπόλοιπα γραφήματα αυτής της παραγράφου οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν την σχέση ανάμεσα στο κέρδος και στην χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής, για κάθε χρεόγραφο ξεχωριστά στο χαρτοφυλάκιο. Ενώ η συνεχής γραμμή δείχνει την σχέση ανάμεσα στο κέρδος και στην χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής για όλο το χαρτοφυλάκιο.



Παρατηρούμε ότι το γράφημα του κέρδους από το συνδυασμό των δύο αυτών τοποθετήσεων είναι ίδιο με το γράφημα του κέρδους που προκύπτει από την πώληση ενός δικαιώματος πώλησης (short put).

Σε αντιστοιχία με το «covered call» υπάρχει και ένα άλλο σύνθετο παράγωγο που ονομάζεται «protective put». Η στρατηγική αυτή περιλαμβάνει την ταυτόχρονη αγορά μιας μετοχής και ενός δικαιώματος πώλησης επί της ίδιας μετοχής. Αυτό, διότι η αγορά του δικαιώματος προαίρεσης προστατεύει τον επενδυτή από μία απότομη πτώση της τιμής της μετοχής. Έτσι ο επενδυτής μπορεί να έχει απώλειες σε περίπτωση πτώσης της χρηματιστηριακής τιμής μετοχής αλλά εξασκώντας το δικαίωμα του αγοράζει φτηνά την μετοχή και την πουλάει στην τιμή εξάσκησης έχοντας ένα κέρδος $S_T - E$. Έτσι αντισταθμίζει τις ζημιές από την πτώση της μετοχής. Το παρακάτω γράφημα απεικονίζει την σχέση του κέρδους με την χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής για το σύνολο του χαρτοφυλακίου.

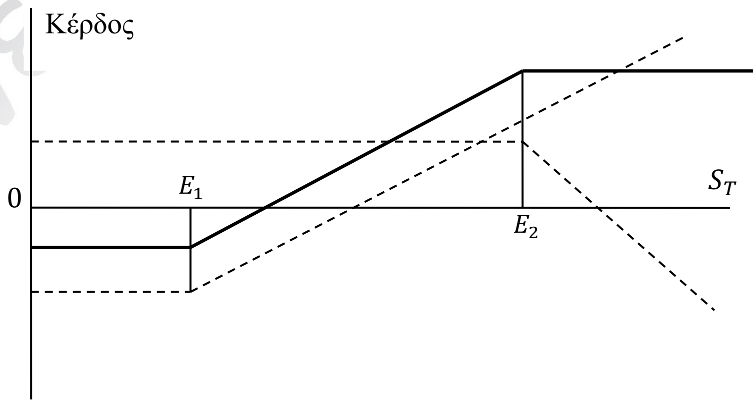


Παρατηρούμε ότι το γράφημα του κέρδους από το συνδυασμό των δύο αυτών τοποθετήσεων είναι το ίδιο με το γράφημα του κέρδους που προκύπτει από την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς (long call).

2.2 Στρατηγικές που αφορούν δικαιώματα προαίρεσης ίδιου τύπου επί της ίδιας μετοχής.

Bull spread – Ανοδικό άνοιγμα

Η στρατηγική αυτή υλοποιείται με την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς (long call) με τιμή εξάσκησης E_1 και την παράλληλη πώληση ενός δικαιώματος αγοράς (short call) με τιμή εξάσκησης $E_2 > E_1$ επί της ίδιας μετοχής. Η ημερομηνία λήξης είναι κοινή και για τα δύο παράγωγα. Το κέρδος από την στρατηγική αυτή απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα:



Δηλαδή, το κέρδος δίνεται από τύπο

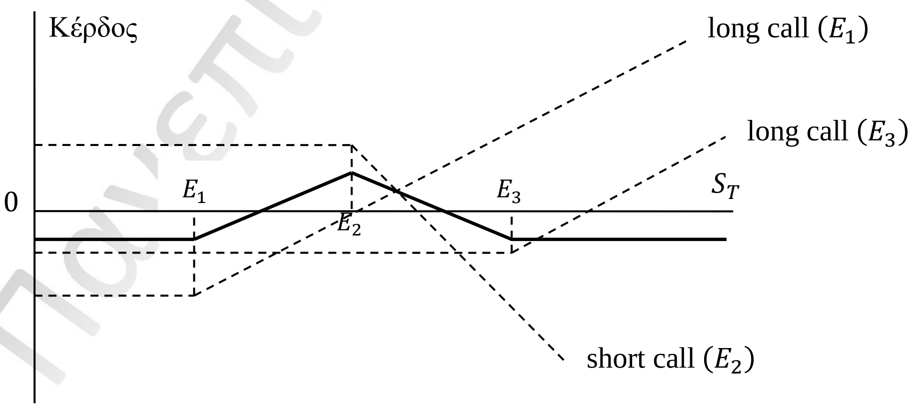
$$(S_T - K_1)_+ - (S_T - K_2)_+ = \begin{cases} 0 & , S_T < K_1 \\ S_T - K_1 & , K_1 < S_T < K_2 \\ S_T - K_1 - S_T + K_2 & , S_T > K_2 \end{cases}$$

Αν αφαιρέσουμε και την ποσότητα $C_1 - C_2$ τότε βρίσκουμε το καθαρό κέρδος. Η ποσότητα $C_1 - C_2$ είναι θετική. Αυτό διότι η τιμή του δικαιώματος εξαρτάται από τη μεταβολή του χρόνου αλλά και από την μεταβολή του υποκείμενου τίτλου. Όσο ο χρόνος πλησιάζει τη στιγμή της λήξης του δικαιώματος η τιμή του θα μειώνεται. Επίσης όσο πλησιάζει η τρέχουσα τιμή S_T με την τιμή εξάσκησης K τόσο η τιμή του δικαιώματος θα μειώνεται.

Η στρατηγική του bull spread-ανοδικού ανοίγματος περιορίζει τόσο τις προοπτικές του επενδυτή για μεγάλες τιμές του υποκείμενου τίτλου όσο και για τον κίνδυνο εμφάνισης μικρών τιμών. Δηλαδή αν ο επενδυτής είχε επιλέξει να αγοράσει μόνο το δικαίωμα προαίρεσης με τιμή εξάσκησης K_1 για $S_T > K_2$ το κέρδος του θα ήταν $S_T - K_1$, ενώ τώρα είναι $S_T - K_2$. Αντίθετα αν $S_T < K_1$ ο επενδυτής θα είχε ζημιά C_1 ενώ με αυτή τη στρατηγική η ζημιά μειώνεται στα $C_1 - C_2$. Συνεπώς ο επενδυτής θυσιάζει κάποια από τα ενδεχόμενα κέρδη του και μειώνει την αρχική του δαπάνη.

Butterfly spread

Ένα butterfly spread περιλαμβάνει τέσσερεις θέσεις με τρείς διαφορετικές τιμές εξάσκησης. Δηλαδή αγοράζω ταυτόχρονα δύο δικαίωμα αγοράς με μία τιμή εξάσκησης K_1 και K_3 αντίστοιχα με $K_1 < K_3$. Παράλληλα πουλάω δύο δικαιώματα αγοράς με τιμή εξάσκησης K_2 με $K_2 = 0{,}5(K_1 + K_3)$. Το κέρδος από την στρατηγική αυτή απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα.



Όπως φαίνεται και από το γράφημα του κέρδους κέρδος υπάρχει μόνο όταν η τιμή στη λήξη βρίσκεται «κοντά» στο K_2. Αυτό το παράγωγο λοιπόν είναι κατάλληλο για ένα επενδυτή που οποίος πιστεύει ότι ο υποκείμενος τίτλος δεν θα έχει μεγάλες διακυμάνσεις. Ο τύπος που δίνει το κέρδος είναι:

$$(S_T - K_1)_+ + (S_T - K_3)_+ - 2(S_T - K_2)_+ = \begin{cases} 0 & , S_T < K_1 \\ S_T - K_1 & , K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_3 - S_T & , K_2 < S_T \leq K_3 \\ 0 & , S_T > K_3 \end{cases}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το διωνυμικό μοντέλο

2.1 Τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης μιας περιόδου

Σε αυτήν την παράγραφο θα αναφερθούμε στο απλούστερο μοντέλο τιμολόγησης, το διωνυμικό μοντέλο, το οποίο περιλαμβάνει μια περίοδο σε διακριτό χρόνο. Αυτό στην συνέχεια γενικεύεται σε ένα περισσότερο ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο με περισσότερες περιόδους (πχ βλ. [5]). Το σχήμα 2.1.1, απεικονίζει το γενικό διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου. Αφού μιλάμε για μοντέλο μιας περιόδου ο χρόνος μηδέν συμβολίζει την αρχή και ο χρόνος ένα το τέλος της περιόδου. Στο χρόνο μηδέν στον οποίο βρισκόμαστε και εμείς έχουμε μια μετοχή με τρέχουσα τιμή S_0. Στο χρόνο ένα η τιμή της μετοχής μπορεί να πάρει δυο πιθανές τιμές, είτε $S_1(K)$ είτε $S_1(\Gamma)$. Θεωρούμε για απλότητα ότι η τιμή στο χρόνο ένα καθορίζεται από την ρίψη ενός νομίσματος, όπου Κ και Γ συμβολίζουν κεφάλι και γράμματα αντίστοιχα. Φυσικά το αποτέλεσμα από τη ρίψη του νομίσματος και ως συνέπεια και η τιμή της μετοχής στο χρόνο ένα, είναι γνωστά μόνο στο χρόνο ένα αλλά όχι στο χρόνο μηδέν. Έτσι οποιαδήποτε άγνωστη ποσότητα στο χρόνο μηδέν θεωρείται τυχαία, καθώς εξαρτάται από το αποτέλεσμα της ρίψης του νομίσματος. Το νόμισμα δεν είναι υποχρεωτικό να είναι αμερόληπτο. Το μόνο που υποθέτουμε είναι ότι η πιθανότητα να έρθει κεφάλι είναι θετική και συμβολίζεται με p, ενω η πιθανότητα για γράμματα είναι $q = 1 - p$ και ειναι επισης θετική.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
 & S_1(K) = uS_0 \text{ , με πιθανοτητα } p \\
S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_1(\Gamma) = dS_0 \text{ , με πιθανοτητα } q
\end{tikzcd}
$$

Σχήμα 2.1.1. Διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου.

Όπως φαίνεται κα στο παραπάνω σχήμα έχουμε εισάγει δυο θετικούς αριθμούς u και d με $u > d$ τέτοιους ώστε

$$u = \frac{S_1(K)}{S_0}\,, \qquad d = \frac{S_1(\Gamma)}{S_0} \tag{2.1.1}$$

Στην περίπτωση που $d = u$ η μετοχή ακολουθεί ένα σίγουρο μονοπάτι και το μοντέλο μας δεν είναι τόσο ενδιαφέρον για μελέτη. Η περίπτωση $u < d$ είναι ανάλογη με την αρχική αν αναπροσαρμόσουμε τις πλευρές του νομίσματος. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι το επιτόκιο δανεισμού και το επιτόκιο επένδυσης είναι το ίδιο.

Όμως τι είναι το arbitrage και πως αυτό σχετίζεται με την τιμολόγηση των παραγώγων ; Ορίζουμε λοιπόν σαν arbitrage μια στρατηγική η οποία ξεκινάει χωρίς χρήματα, έχει μηδενική πιθανότητα να χάσει χρήματα και θετική πιθανότητα για κέρδος. Δηλαδή μια στρατηγική η οποία μετατρέπει το «τίποτα» σε «κάτι» χωρίς κίνδυνο. Ένα μαθηματικό μοντέλο που εμπεριέχει arbitrage δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ανάλυση. Αυτό διότι σε ένα τέτοιο μοντέλο ο πλούτος μπορεί να δημιουργηθεί από το τίποτα, με αποτέλεσμα τα αρχικά ερωτήματα να συνοδεύονται από παράδοξες απαντήσεις.

Στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου η συνθήκη που πρέπει να θεωρήσουμε για να αποκλείσουμε την ύπαρξη arbitrage είναι:

$$0 < d < 1 + r < u \tag{2.1.2}$$

Αρχικά η ανισότητα $d > 0$ ικανοποιείται από την υπόθεση ότι οι τιμές της μετοχής είναι θετικές ποσότητες. Στην συνέχεια οι επόμενες δύο ανισότητες ισχύουν λόγω της απουσίας arbitrage και αντίστροφα. Η αντίστροφη ανισότητα δηλαδή $d > 1 + r$ συνεπάγεται ότι ένας επενδυτής χωρίς αρχικό κεφάλαιο στο χρόνο μηδέν θα μπορούσε να δανειστεί με σκοπό να αγοράσει μετοχές. Έτσι στο χρόνο ένα, ακόμα και να επιβεβαιωθεί η χειρότερη περίπτωση που το κέρμα έρθει γράμματα η μετοχή όχι μόνο αποπληρώνει το αρχικό δάνειο αλλά αφήνει και υπόλοιπο. Στην περίπτωση που το κέρμα έρθει κεφάλι τα κέρδη είναι πολύ περισσότερα. Επίσης αν $u \leq 1 + r$ ένας επενδυτής μπορεί να λάβει θέση short σε μια μετοχή και να επενδύσει τα χρήματα αυτά στην αγορά. Στην συνέχεια ακόμα και στην καλύτερη περίπτωση για την μετοχή ο επενδυτής είναι σε θέση να την αντικαταστήσει αφού τα χρήματα που επένδυσε είναι τουλάχιστον όσο η μετοχή.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι έχουμε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς το οποίο ο κάτοχος του έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει μια μετοχή σε μια στιγμή στην τιμή εξάσκησης E. Η περίπτωση που $S_1(K) > E > S_1(\Gamma)$ είναι η πιο ενδιαφέρουσα. Αν η ρίψη του νομίσματος είναι γράμματα τότε δεν εξασκώ το δικαίωμα μου, συνεπώς το δικαίωμα την στιγμή της λήξης δεν έχει καμιά αξία. Αντίθετα αν το νόμισμα έρθει κεφάλι, το δικαίωμα αποφέρει κέρδος $S_1(K) - E$. Το θεμελιώδες ερώτημα στην τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης είναι πόσο πρέπει να κοστίζει ένα δικαίωμα στην στιγμή μηδέν πριν να γνωρίζουμε αν το αποτέλεσμα της ρίψης του νομίσματος είναι κεφάλι ή γράμματα. Η θεωρία τιμολόγησης χωρίς arbitrage προσεγγίζει αυτό το πρόβλημα της τιμολόγησης των δικαιωμάτων αναπαράγοντας το δικαίωμα αυτό κατασκευάζοντας ένα χαρτοφυλάκιο με μετοχές και μετρητά. Πριν παρουσιάσουμε το γενικό διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου ας δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1.1. Κοιτάζοντας το σχήμα 2.1.1 ας υποθέσουμε ότι $S_0 = €20$, $u = 1.1$, $d = 0.9$ και $r = 0.05$. Άρα $S_1(K) = €22$ και $S_1(\Gamma) = €18$. Ας υποθέσουμε ότι η τιμή εξάσκησης για ένα δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου είναι $E = €21$. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι ξεκινάμε με αρχικό κεφάλαιο $X_0 = €0.7142$ και αγοράζουμε $\Delta_0 = 0.25$ μετοχές στο χρόνο μηδέν. Αφού οι μετοχές κοστίζουν €20 ανά μετοχή, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το αρχικό μας κεφάλαιο $X_0 = 0.7142$ και να δανειστούμε επιπρόσθετα $0.25 \cdot 20 - 0.7142 = \ 4.2858$.

Έτσι το χαρτοφυλάκιό μας τη στιγμή μηδέν έχει ποσό $X_0 - \Delta_0 S_0 = -4.2858$ (δάνειο). Στο χρόνο ένα αυτό το ποσό θα γίνει $(1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = -4.5$.

$$\begin{tikzcd} & S_1(K) = 22 \text{ , με πιθανοτητα } p = \frac{1}{2} \\ S_0 = 20 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S_1(\Gamma) = 18 \text{ , με πιθανοτητα } q = \frac{1}{2} \end{tikzcd}$$

Άρα, αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι κεφάλι τότε η αξία του χαρτοφυλακίου που αποτελείται από τις μετοχές και ένα τραπεζικό λογαριασμό στο χρόνο ένα θα είναι :

$$X_1(K) = 0.25 S_1(K) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 1$$

Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι γράμματα το τότε η αξία του χαρτοφυλακίου που αποτελείται από τις μετοχές και ένα τραπεζικό λογαριασμό στο χρόνο ένα θα είναι :

$$X_1(\Gamma) = 0.25 S_1(\Gamma) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 0$$

Σε κάθε περίπτωση η αξία του χαρτοφυλακίου συμφωνεί με την αξία του δικαιώματος στο χρόνο ένα, η οποία είναι είτε $(S_1(K) - 21)^+ = 1$ όταν το νόμισμα έρθει κεφάλι είτε $(S_1(\Gamma) - 21)^+ = 0$ όταν το νόμισμα έρθει γράμματα. Με αυτό το τρόπο εχόυμε αναπαράγει το δικαίωμα ανταλλάσοντας μετοχές και χρήματα στις αγορές.

Το αρχικό κεφάλαιο $X_0 =$ €0.7142 που χρησιμοποιήσαμε για να αναπαράγουμε το δικαίωμα μέσω χαρτοφυλακίου, είναι η τιμή του δικαιώματος χωρίς arbitrage στο χρόνο μηδέν. Οποιαδήποτε άλλη τιμή θα σήμαινε ότι υπάρχει arbitrage. Στην περίπτωση που το δικαίωμα είναι υπερτιμολογημένο, για παράδειγμα €1, τότε ο πωλητής του δικαιώματος επενδύει το υπερβάλλον ποσό $1 - 0.7142$ στην αγορά και χρησιμοποιεί τα υπόλοιπα 0.7142 για να αναπαράγει το δικαίωμα. Στο χρόνο ένα ο πωλητής του δικαιώματος ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα της ρίψης του νομίσματος όχι μόνο μπορεί να αποπληρώσει το δικαίωμα αλλά παράλληλα έχει κέρδος €$0.2858 \cdot 1.05 = 0.3$ από την επένδυση του υπερβάλλοντος ποσού. Αυτή η στρατηγική εμπεριέχει arbitrage διότι ο πωλητής δεν χρειάζεται αρχικό κεφάλαιο και χωρίς κίνδυνο στο χρόνο ένα βρίσκεται με €0,3. Από την άλλη μεριά έστω ότι το δικαίωμα είναι υποτιμολογημένο, για παράδειγμα €0.6. Τότε ένας επενδυτής θα μπορούσε να αγοράσει αυτό το δικαίωμα και να ξεκινήσει την αντίστροφη διαδικασία αναπαραγωγής. Δηλαδή να λάβει θέση short για 0.25 μετοχές, οι οποίες θα του αποφέρουν €5. Τα €0.6 τα χρησιμοποιεί για να αγοράσει το δικαίωμα, και τα €4,4 τα τοποθετεί στην αγορά. Όταν έρθει ο χρόνος ένα, αν το αποτέλεσμα της ρίψης του νομίσματος είναι κεφάλι χρειαζόμαστε €5.5 για να αντικαταστήσουμε τις μετοχές. Από αυτά το €1 προέρχεται από την αξία του δικαιώματος στο χρόνο ένα και τα €4.5 από την επένδυση του ποσού €4.4. Αν το νόμισμα έρθει γράμματα, το δικαίωμα δεν έχει καμιά αξία. Ο επενδυτής χρειάζεται €4,5 για να αντικαταστήσει τις μετοχές, τα οποία βρίσκει από την επένδυση των €4.4. Σε κάθε περίπτωση ο αγοραστής του δικαιώματος έχει ένα καθαρό κέρδος από την επένδυση των $4.4 \cdot 1.05 - 4.5 = 0.12$. Είναι ξεκάθαρο και σε αυτήν την περίπτωση ότι υπάρχει arbitrage. Συνεπάγεται λοιπόν ότι υπάρχει arbitrage αν η τιμή δεν είναι €0.7142. Με άλλα λόγια αν η τιμή του δικαιώματος είναι €0.7142 τότε δεν υπάρχει arbitrage. Οι δύο παραπάνω προτάσεις είναι ισοδύναμες ως αντίστροφο-αντίθετες.

Στο γενικό μοντέλο μιας περιόδου ορίζεται ότι ένα παράγωγο είναι ένα συμβόλαιο το οποίο πληρώνει ένα ποσό $C_1(K)$ στο χρόνο ένα αν το νόμισμα έρθει κεφάλι και πληρώνει ένα διαφορετικό ποσό $C_1(\Gamma)$ στο χρόνο ένα αν το νόμισμα έρθει γράμματα. Τέτοια είδη συμβολαίου είναι τόσο τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης αλλά ακόμα και τα προθεσμιακά συμβόλαια.

Στο παράδειγμα 2.1.1 ο κύριος στόχος ήταν να καθοριστεί η τιμή C_0 στο χρόνο μηδέν για το δικαίωμα προαίρεσης. Γενικεύοντας αυτό το παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ξεκινάμε με αρχικό κεφάλαιο X_0 και αγοράζουμε Δ_0 μετοχές στο χρόνο μηδέν. Η ταμειακή θέση μας εκείνη την στιγμή είναι $X_0 - \Delta_0 S_0$. Η αξία του χαρτοφυλακίου στο χρόνο ένα θα είναι

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = (1+r)X_0 + \Delta_0(S_1 - (1+r)S_0)$$

Θέλουμε να διαλέξουμε X_0 και Δ_0 τέτοια ώστε $X_1(K) = C_1(K)$ και $X_1(\Gamma) = C_1(\Gamma)$. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι οι ποσότητες $C_1(K)$ και $C_1(\Gamma)$ είναι δοσμένες. Δηλαδή στο χρόνο μηδέν γνωρίζουμε ποίο είναι το ποσό της αποπληρωμής ανάλογα με το αποτέλεσμα του νομίσματος αλλά δεν γνωρίσουμε ποίο από τα δυο αποτελέσματα θα επαληθευτεί τελικά. Εξισώνοντας την τιμή του χαρτοφυλακίου στο χρόνο ένα με την αξία του δικαιώματος ανάλογα το αποτέλεσμα της ρίψης θα έχω :

$$X_0 + \Delta_0\left(\frac{1}{1+r}S_1(K) - S_0\right) = \frac{1}{1+r}C_1(K) \tag{2.1.3}$$

$$X_0 + \Delta_0\left(\frac{1}{1+r}S_1(\Gamma) - S_0\right) = \frac{1}{1+r}C_1(\Gamma) \tag{2.1.4}$$

Ένας τρόπος να τρόπος να λύσουμε ως προς τους δύο μας αγνώστους είναι να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με ένα αριθμό $\tilde{p}$ και την δεύτερη με έναν αριθμό $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$ και να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

$$X_0 + \Delta_0\left(\frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_1(K) + \tilde{q}S_1(\Gamma)] - S_0\right) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}C_1(K) + \tilde{q}C_1(\Gamma)]$$

(2.1.5)

Αν διαλέξουμε $\tilde{p}$ τέτοιο ώστε

$$S_0 = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_1(K) + \tilde{q}S_1(\Gamma)] \tag{2.1.6}$$

τότε ο όρος που πολλαπλασιάζει το Δ_0 μηδενίζεται και έχουμε μια πολύ απλή σχέση για το X_0,

$$X_0 = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}C_1(K) + \tilde{q}C_1(\Gamma)]. \tag{2.1.7}$$

Αυτό το $\tilde{p}$ μπορούμε να το υπολογίσουμε άμεσα από την (2.1.6) ως εξής :

$$S_0 = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}uS_0 + (1-\tilde{p})dS_0] = \frac{S_0}{1+r}[(u-d)\tilde{p} + d]$$

Μετά από απλοποιήσεις καταλήγουμε στην εξισώσεις

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d} \tag{2.1.8}$$

Για να βρούμε το Δ_0 αρκεί να αφαιρέσουμε κατά μέλη τις (2.1.3) και (2.1.4)

$$\Delta_0 = \frac{C_1(K) - C_1(\Gamma)}{S_1(K) - S_1(\Gamma)} \tag{2.1.9}$$

Εν κατακλείδι, αν ένας επενδυτής ξεκινούσε με αρχικό κεφάλαιο X_0 υπολογισμένο από τον τύπο (2.1.7) και στο χρόνο μηδέν αγόραζε Δ_0 στο πλήθος μετοχές υπολογισμένες από τον τύπο (2.1.9) τότε στο χρόνο ένα αν το αποτέλεσμα του νομίσματος είναι κεφάλι, τότε ο επενδυτής θα έχει ένα χαρτοφυλάκιο με αξία $C_1(K)$, ενώ αν το νόμισμα έρθει γράμματα τότε το χαρτοφυλάκιο του θα έχει αξία $C_1(\Gamma)$. Συνεπώς ο επενδυτής έχει αντισταθμίσει το κίνδυνο από την πώληση ενός δικαιώματος προαίρεσης. Συνεπώς ένα δικαίωμα προαίρεσης το οποίο πληρώνει C_1 στο χρόνο ένα θα πρέπει να τιμολογείται με

$$C_0 = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}C_1(K) + \tilde{q}C_1(\Gamma)]. \tag{2.1.10}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται εξίσωση τιμολόγησης ουδέτερου ρίσκου (risk-neutral pricing formula). Παρατηρούμε ότι τα δεύτερα μέλη στις (2.1.7) και (2.1.10) είναι ίδια. Αυτό δίοτι οι συμβολισμοί Δ_n και X_n χρησιμοποιούνται γενικά για να περιγράψουν το πλήθος των μετοχών και των αξιών των χαρτοφυλακίων αντίστοιχα, ανεξάρτητα από το πως είναι επιλεγμένο το αρχικό X_0 και οι μετοχές Δ_n. Όταν όμως τα X_0, Δ_n είναι επιλεγμένα έτσι ώστε να αναπαράγουν ένα δικαίωμα τότε χρησιμοποιείται ο συμβολισμός C_n αντί για X_n ο οποίος ονομάζεται η τιμή του δικαιώματος χωρίς arbitrage στο χρόνο n.

Αν και ο καθορισμός της τιμής του δικαιώματος χωρίς arbitrage έγινε αντισταθμίζοντας μια θέση short στο δικαίωμα, κάποιος θα μπορούσε να καταλήξει στο ίδιο συμπέρασμα από θέση long στο δικαίωμα. Με την διαφορά ότι η σχέση (2.1.9) που δίνει τον αριθμό των μετοχών που πρέπει να έχει ο επενδυτής θα έχει ένα μείον μπροστά. Το μείον υποδηλώνει ότι οι μετοχές πωλούνται.

Κατά την διαδικασία της παρουσίασης του γενικευμένου διωνυμικού μοντέλου μιας περιόδου για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης χρησιμοποιήθηκαν δύο αριθμοί $\tilde{p}$ και $\tilde{q}$. Αυτοί οι δύο αριθμοί είναι θετικοί λόγω της (2.1.2) και αθροίζονται στο ένα. Για αυτό το λόγο θα μπορούσε κανείς να τις ερμηνεύσει ως πιθανότητες εμφάνισης κεφαλής ή γράμματα στο νόμισμα αντίστοιχα. Δεν είναι όμως οι πραγματικές πιθανότητες που συμβολίζουμε με p και q. Αν χρησιμοποιούσαμε τις πιθανότητες p και q για να τιμολογήσουμε το δικαίωμα θα παρατηρούσαμε ότι

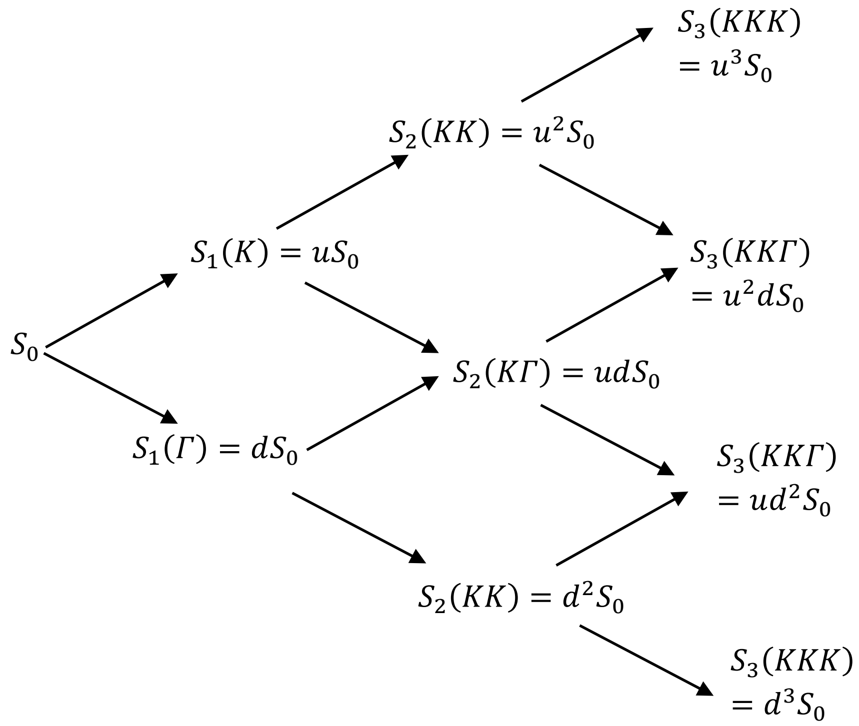
$$S_0 < \frac{1}{1+r}[pS_1(K) + qS_1(\Gamma)]$$

Διότι η μέση απόδοση των μετοχών είναι αυστηρά μεγαλύτερη από την μέση απόδοση από μια επένδυση (σε ομόλογα) στην αγορά χρήματος. Αν δεχόμασταν ότι οι αριθμοί $\tilde{p}$ και $\tilde{q}$ είναι οι πραγματικές πιθανότητες από την σχέση (2.1.6) θα έπρεπε να δεχτούμε ότι η μέση απόδοση των μετοχών είναι ίση με την μέση απόδοση μιας επένδυσης στην αγορά χρήματος. Δηλαδή ένας επενδυτής θα ήταν ουδέτερος στο κίνδυνο, και δεν θα απαιτούσε περισσότερη απόδοση για να αγοράσει την μετοχή. Αυτό όμως δεν είναι λογικό και συνεπώς οι $\tilde{p}$ και $\tilde{q}$ δεν είναι οι πραγματικές πιθανότητες. Είναι απλά αριθμοί οι οποίοι μας βοηθάνε να λύσουμε τις εξισώσεις (2.1.3) και (2.1.4) ως προς X_0 και Δ_0. Συγκεκριμένα μηδενίζουν το παράγοντα που πολλαπλασιάζει το άγνωστο Δ_0 στην (2.1.5). Στην πραγματικότητα επειδή οι αριθμοί $\tilde{p}$ και $\tilde{q}$ είναι επιλεγμένοι έτσι ώστε να κάνουν την μέση απόδοση των μετοχών να εμφανίζεται ίση με την μέση απόδοση στην αγορά χρήματος, στην ουσία κάνουν την μέση απόδοση ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από μετοχές και μετρητά να εμφανίζεται ίση με την μέση απόδοση στην αγορά χρήματος. Υπό αυτό το πρίσμα είναι λογικό οι αριθμοί $\tilde{p}$ και $\tilde{q}$ να ονομάζονται πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου. Έτσι αν κάποιος θέλει να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου η τιμή στο χρόνο ένα θα είναι C_1 , τότε η αξία του στο χρόνο μηδέν θα πρέπει να δίνεται από την (2.1.7) , έτσι ώστε η απόδοση του χαρτοφυλακίου κάτω από το κόσμο του ουδέτερου ρίσκου να είναι η απόδοση της αγοράς χρήματος. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι πραγματικές πιθανότητες απουσιάζουν από την εξίσωση (2.1.10). Αυτό είναι λογικό διότι, το μοντέλο που κατασκευάστηκε πρέπει να είναι ανεξάρτητο από το εάν η μετοχή θα κινηθεί ανοδικά η καθοδικά. Τα βάρη u και d αποδεικνύουν ότι αυτό που παίζει ρόλο είναι το μέγεθος το οποίο μετακινείται. Στο διωνυμικό μοντέλο οι τιμές των δικαιωμάτων εξαρτώνται από το σύνολο των πιθανών μονοπατιών που θα ακολουθήσουν οι μετοχές και όχι πόσο πιθανά είναι αυτά τα μονοπάτια.

2.2 Το διωνυμικό μοντέλο με πολλαπλές περιόδους

Αυτή η παράγραφος έρχεται να συμπληρώσει την προηγούμενη και να προχωρήσει την ανάλυση του διωνυμικού μοντέλου ένα βήμα παραπάνω. Εδώ όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.2.1 το διωνυμικό δέντρο αποτελείται από παραπάνω από μία περιόδους.

Ο στόχος όπως και πριν είναι να υπολογίσουμε την τιμή του δικαιώματος στο χρόνο μηδέν. Αυτό μπορεί να γίνει επαναλαμβάνοντας τις αρχές που χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Συγκεκριμένα ρίχνουμε το νόμισμα ξανά και ξανά. Όταν το νόμισμα έρχεται κεφάλι η μετοχή κινείται ανοδικά κατά ποσοστό $u-1$, ενώ όταν έρχεται γράμματα η μετοχή ακολουθεί καθοδική πορεία κατά ποσοστό $1-d$. Επιπλέον το επιτόκιο της αγοράς είναι r. Απαραίτητη προϋπόθεση για αυτές τις παραμέτρους είναι να ισχύει η τριπλή ανισότητα (2.1.2), που διασφαλίζει συνθήκες χωρίς arbitrage.



Σχήμα 2.2.1 Γενικό διωνυμικό μοντέλο τριών περιόδων

Σημειώνεται ότι μετά την δεύτερη ρίψη του νομίσματος υπάρχουν τέσσερεις πιθανές ακολουθίες ρίψεων. Ωστόσο οι ακολουθίες αυτές δεν καταλήγουν όλες σε διαφορετικές τιμές του υποκείμενου τίτλου. Δηλαδή,

$$S_2(\Gamma K) = uS_1(T) = udS_0\,, \qquad S_2(K\Gamma) = uS_1(K) = duS_0$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου το οποίο λήγει μετά από δύο περιόδους. Στην λήξη η αποπληρωμή του δικαιώματος με τιμή εξάσκησης E και λήξη στο χρόνο δύο είναι $C_2 = (S_2 - E)^+$,όπου το C_2 και το S_2 εξαρτώνται από την πρώτη και δεύτερη ρίψη του νομίσματος. Όπως και στο μοντέλο μιας περιόδου ο σκοπός μας εδώ είναι να προσδιορίσουμε την τιμή χωρίς arbitrage το δικαιώματος την στιγμή μηδέν. Έστω ένας επενδυτής ο οποίος πουλάει ένα δικαίωμα στο χρόνο μηδέν έναντι αξίας C_0. Στην συνέχεια αγοράζει Δ_0 το πλήθος μετοχές με τιμή ανά μετοχή S_0 . Η ταμειακή θέση του εκείνη την στιγμή είναι $C_0 - \Delta_0 S_0$. Μετά από μια περίοδο, δηλαδή στο χρόνο ένα, το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή θα έχει αξία

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(C_0 - \Delta_0 S_0) \tag{2.2.1}$$

Μέσα στην (2.2.1) κρύβονται δύο εξισώσεις καθώς η τιμή της μετοχής στο χρόνο ένα, άρα και η αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή ένα, εξαρτώνται από το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης του νομίσματος.

Δηλαδή,

$$X_1(K) = \Delta_0 S_1(K) + (1+r)(C_0 - \Delta_0 S_0) \tag{2.2.2}$$

$$X_1(\Gamma) = \Delta_0 S_1(\Gamma) + (1+r)(C_0 - \Delta_0 S_0) \tag{2.2.3}$$

Μετά την πρώτη ρίψη ο επενδυτής είναι σε θέση να αναπροσαρμόσει την στρατηγική του, έχοντας ένα χαρτοφυλάκιο αξίας X_1. Όπως και στο χρόνο ένα ο επενδυτής θα αυξήσει ή θα μειώσει το πλήθος των μετοχών του από Δ_0 σε Δ_1. Το Δ_1 εξαρτάται από την πρώτη ρίψη του νομίσματος. Ο επενδυτής για να επιλέξει αν αυξήσει ή θα μειώσει το πλήθος των μετοχών και να καταλήξει στο Δ_1 πρέπει να ξέρει το αποτέλεσμα της ρίψης. Το υπόλοιπο ποσό $X_1 - \Delta_1 S_1$ που μένει επενδύεται σε ένα λογαριασμό με το επιτόκιο της αγοράς. Η αξία του χαρτοφυλακίου στο χρόνο δύο θα είναι ίση με :

$$X_2 = \Delta_1 S_2 + (1+r)(X_1 - \Delta_1 S_1) \tag{2.2.4}$$

Εμείς όμως θέλουμε να επιλέξουμε τα C_0, Δ_0, $X_1(K)$, $X_1(\Gamma)$, $\Delta_1(K)$, $\Delta_1(\Gamma)$, τέτοια ώστε $C_2(KK) = X_2(KK)$ και $C_2(K\Gamma) = X_2(K\Gamma)$ και $C_2(\Gamma K) = X_2(\Gamma K)$ και $C_2(\Gamma\Gamma) = X_2(\Gamma\Gamma)$. Άρα λαμβάνοντας υπόψη όλα τα πιθανά αποτελέσματα η εξίσωση (2.2.4) γράφεται ως τέσσερεις εξισώσεις.

$$C_2(KK) = \Delta_1(K)S_2(KK) + (1+r)\big(X_1(K) - \Delta_1(K)S_1(K)\big), \tag{2.2.5}$$

$$C_2(K\Gamma) = \Delta_1(K)S_2(K\Gamma) + (1+r)\big(X_1(K) - \Delta_1(K)S_1(K)\big), \tag{2.2.6}$$

$$C_2(\Gamma K) = \Delta_1(\Gamma)S_2(\Gamma K) + (1+r)\big(X_1(\Gamma) - \Delta_1(\Gamma)S_1(\Gamma)\big), \tag{2.2.7}$$

$$C_2(\Gamma\Gamma) = \Delta_1(\Gamma)S_2(\Gamma\Gamma) + (1+r)\big(X_1(\Gamma) - \Delta_1(\Gamma)S_1(\Gamma)\big), \tag{2.2.8}$$

Άρα έχουμε έξι εξισώσεις , οι δύο προέρχονται από την (2.2.1) και οι άλλες τέσσερεις προέρχονται από την (2.2.4) και έξι αγνώστους C_0, Δ_0, $X_1(K)$, $X_1(\Gamma)$, $\Delta_1(K)$, $\Delta_1(\Gamma)$.

Αφαιρώντας την (2.2.8) από την (2.2.7) και λύνοντας ως προς $\Delta_1(\Gamma)$ βρίσκουμε ότι

$$\Delta_1(\Gamma) = \frac{C_2(\Gamma K) - C_2(\Gamma\Gamma)}{S_2(\Gamma K) - S_2(\Gamma\Gamma)} \tag{2.2.9}$$

Αντικαθιστώντας την (2.2.9) στην (2.2.7) μπορούμε να λύσουμε ως προς

$$X_1(\Gamma) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}C_2(\Gamma K) + \tilde{q}C_2(\Gamma\Gamma)\right] \tag{2.2.10}$$

Όπου $\tilde{p}$ και $\tilde{q}$ είναι οι πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου που υπολογισμένες από την (2.1.8). Η εξίσωση (2.2.10) δίνει την αξία που πρέπει να έχει το χαρτοφυλάκιο στο χρόνο ένα αν η μετοχή ακολουθήσει καθοδική πορεία από το χρόνο μηδέν στο χρόνο ένα. Έτσι όμως όπως κατασκευάσαμε αυτό το διωνυμικό μοντέλο σε κάθε κόμβο του δέντρου η αξία του χαρτοφυλακίου και είναι ίση με την αποπληρωμή του δικαιώματος ή αλλιώς με την τιμή του δικαιώματος. Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να γράψουμε

$$C_1(\Gamma) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}C_2(\Gamma K) + \tilde{q}C_2(\Gamma\Gamma)] \tag{2.2.11}$$

η οποία ονομάζεται εξίσωση τιμολόγησης κάτω από το κόσμου του ουδέτερου ρίσκου (risk-neutral pricing formula). Αυτή η εξίσωση είναι ανάλογη τις εξίσωσης (2.1.10) αναβαλλόμενη κατά μία περίοδο. Επίσης οι εξισώσεις (2.2.5) και (2.2.6) οδηγούν με ανάλογο τρόπο στην εξίσωση

$$\Delta_1(K) = \frac{C_2(KK) - C_2(K\Gamma)}{S_2(KK) - S_2(K\Gamma)} \tag{2.2.12}$$

και

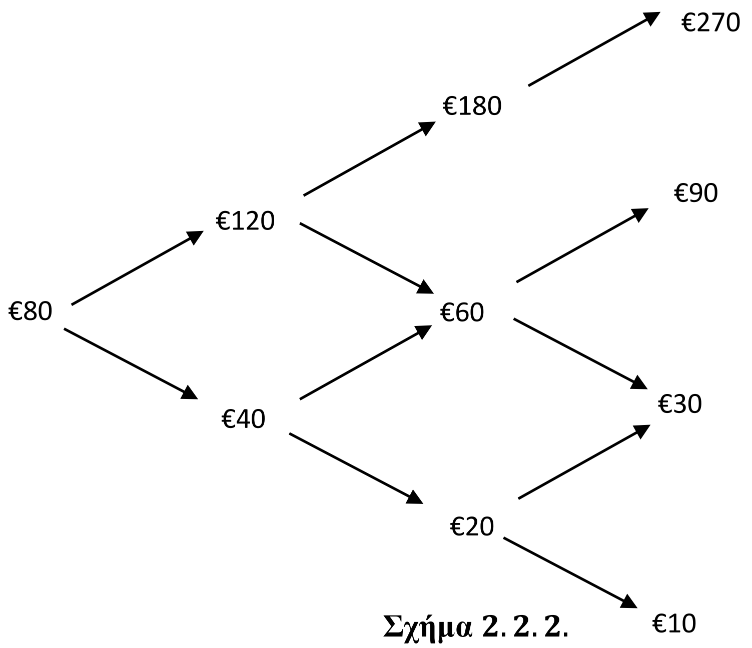
$$C_1(K) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}C_2(KK) + \tilde{q}C_2(K\Gamma)] \tag{2.2.13}$$

τελικά συμπληρώσαμε τις τιμές $X_1(K) = C_1(K)$ και $X_1(\Gamma) = C_1(\Gamma)$ στις εξισώσεις (2.2.2) και (2.2.3) αντίστοιχα. Η λύση από αυτές τις εξισώσεις για τα Δ_0 και C_0 είναι η ίδια όπως στις (2.1.3), (2.1.4) και καταλήγει ξανά στις (2.1.9), (2.1.10). Παρατηρώντας τους τύπους (2.2.1) και (2.2.4), ο γενικός τύπος για να υπολογίσουμε την αξία του χαρτοφυλακίου μας, ξεκινώντας με αρχικό κεφάλαιο X_0 είναι

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n) \tag{2.2.14}$$

Μπορούμε να πούμε τώρα, όπως πριν στο παράδειγμα 2.1.1, ότι υπάρχει δυνατότητα για arbitrage χωρίς κίνδυνο, αν η τιμή του δικαιώματος στο χρόνο μηδέν είναι διαφορετική από την αξία του χαρτοφυλακίου ; Ναι, αλλά υπάρχει μια σημαντική διαφορά. Έχοντας μια περίοδο να ακολουθεί, μπορούμε να υλοποιήσουμε ένα σχέδιο αποκτώντας κέρδος χωρίς κίνδυνο με το υπερτιμολογημένο δικαίωμα να πωλείται και μέρος από τα έσοδα να χρησιμοποιείται για την κατασκευή του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης. Στο τέλος της περιόδου ξέραμε ότι η τιμή του δικαιώματος πρέπει να είναι ίση με την αξία του χαρτοφυλακίου έτσι ώστε ολόκληρη η θέση να είναι ρευστοποιήσιμη με βεβαιότητα σε εκείνο το σημείο. Αλλά αυτό ήταν αληθές μόνο και μόνο γιατί το τέλος της περιόδου συνέπιπτε με την ημερομηνία λήξης. Τώρα δεν υπάρχει τέτοια εγγύηση. Στο τέλος της τρέχουσας περιόδου, όταν υπάρχει μια περίοδος ακόμα, η αξία του δικαιώματος μπορεί να βρίσκεται σε ανισορροπία, και μεγαλύτερη από την αξία του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης. Αν κλείσουμε την θέση μας τότε πωλώντας το χαρτοφυλάκιο και αγοράζοντας το δικαίωμα μπορούμε να υποστούμε μια ζημιά η οποία θα μπορούσε να ξεπερνά το αρχικό κέρδος. Παρ'όλα αυτά, μπορούμε πάντα να αποφύγουμε αυτή την ζημιά διατηρώντας το χαρτοφυλάκιο για μία ακόμα περίοδο. Η αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος της τρέχουσας περιόδου θα είναι πάντα επαρκής για να αγοράσουμε το χαρτοφυλάκιό μας για την τελευταία περίοδο. Στην πραγματικότητα αναπροσαρμόζουμε τις αναλογίες στο χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης, χωρίς να τοποθετούμε περισσότερα χρήματα. Στο ακόλουθο αριθμητικό παράδειγμα διευκρινίζεται πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση τιμολόγησης όταν η τρέχουσα τιμή του δικαιώματος διαφοροποιείται από την δίκαιη τιμή. Επίσης γίνεται φανερό ότι στους ενδιάμεσους χρόνους υπάρχει ανισορροπία ανάμεσα στην τιμή του δικαιώματος και στην αξία του χαρτοφυλακίου.

Παράδειγμα 2.2.1 Θεωρούμε μια τράπεζα η οποία σκοπεύει να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου επί μία μετοχής S_0 (Σχήμα 2.2.2.). Το δικαίωμα λήγει μετά από τρείς περιόδους και έχει τιμή εξάσκησης $E = €80$. Το δικαίωμα αυτό δίνεται στην αγορά με €36. Θεωρούμε το επιτόκιο της αγοράς να είναι 10% και $u = 1.5$ και $d = 0.5$. Άρα $\tilde{p} = 0.6$ και $\tilde{q} = 0.4$



Σχήμα 2.2.2.

Ξεκινώντας από το χρόνο τρία και πηγαίνοντας προς τα πίσω βρίσκω την αξία του χαρτοφυλακίου αλλά και τις μετοχές που πρέπει να έχω σε κάθε χρόνο για να αντισταθμίσω στην αξία του δικαιώματος. Υπολογίζονται ενδεικτικά κάποιες αξίες χαρτοφυλακίων και πλήθος μετοχών σε ενδιάμεσους χρόνους.

$$\Delta_2(KK) = \frac{C_3(KKK) - C_3(KK\Gamma)}{S_3(KKK) - S_3(KK\Gamma)} = \frac{max(270-80,0) - max(90-80,0)}{270-90} = 1.0$$

$$C_2(K\Gamma) = C_2(\Gamma K) = \frac{[\tilde{p}C_3(K\Gamma K) + \tilde{q}C_3(K\Gamma\Gamma)]}{1+r} = \frac{[0.6(10) - 0.4(0)]}{1.1} = 5.454$$

$$C_2(KK) = \frac{[\tilde{p}C_3(KKK) + \tilde{q}C_3(KK\Gamma)]}{1+r} = \frac{[0.6(190) + 0.4(10)]}{1.1} = 107.272$$

$$C_1(K) = \frac{[\tilde{p}C_2(KK) + \tilde{q}C_2(K\Gamma)]}{1+r} = \frac{[0.6(107{,}272) + 0.4(5{,}454)]}{1.1} = 60.49$$

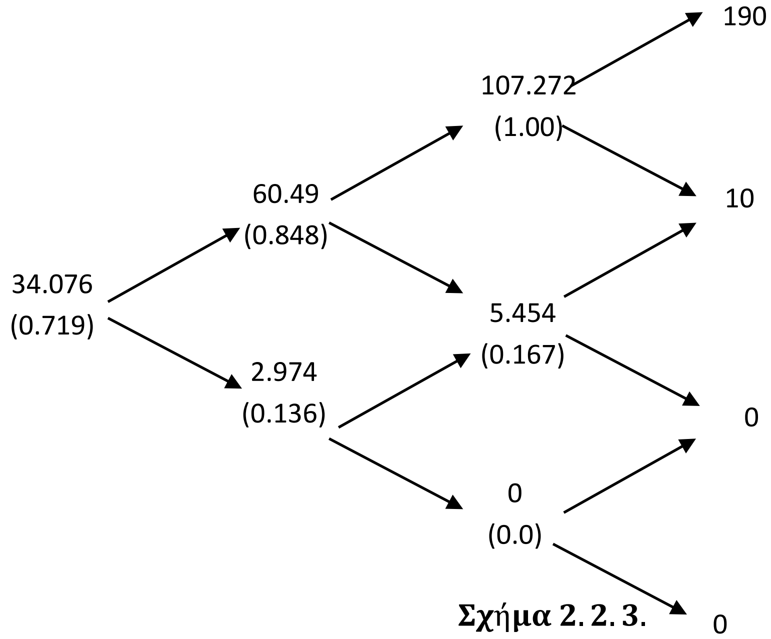
$$\Delta_1(K) = \frac{C_2(KK) - C_2(K\Gamma)}{S_2(KK) - S_2(K\Gamma)} = \frac{107.272 - 5.454}{180 - 60} = \frac{101.818}{60} = 0.848$$

$$C_2(\Gamma\Gamma) = \frac{[\tilde{p}C_3(\Gamma\Gamma K) + \tilde{q}C_3(\Gamma\Gamma\Gamma)]}{1+r} = \frac{[0.6(0) + 0.4(0)]}{1.1} = 0$$

$$C_1(\Gamma) = \frac{[\tilde{p}C_2(\Gamma K) + \tilde{q}C_2(\Gamma\Gamma)]}{1+r} = \frac{[0.6(5.454) + 0.4(0)]}{1.1} = 2.974$$

$$C_0 = \frac{[\tilde{p}C_1(K) + \tilde{q}C_1(\Gamma)]}{1+r} = \frac{[0.6(60.49) + 0.4(2.974)]}{1.1} = 34.076$$

Το ακόλουθο δέντρο (Σχήμα 2.2.3.) δίνει τα μονοπάτια που μπορεί να ακολουθήσει η τιμή του δικαιώματος αγοράς ή αλλιώς η αξία του χαρτοφυλακίου και το αντίστοιχο πλήθος μετοχών σε παρένθεση.



Σχήμα 2.2.3.

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι το δικαίωμα είναι υπερτιμολογημένο. Η τράπεζα πωλεί το δικαίωμα και έχει ένα βέβαιο κέρδος, όσο και η απόκλιση της τιμής της αγοράς €36 από την δίκαιη τιμή €34.076. Λαμβάνεται ένα τυχαίο μονοπάτι που θα μπορούσε να ακολουθήσει η τιμή της μετοχής.

Βήμα 1: Το δικαίωμα πωλείται έναντι €36. Από αυτά η τράπεζα χρησιμοποιεί τα €34.076 και τα επενδύει σε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο περιέχει $\Delta = 0.719$. Για να τις αποκτήσει χρειάζεται να δανειστεί $0.719 \cdot 80 - 34.076 = 23.444$. Τα υπόλοιπα $36 - 34.076 = 1.924$ τοποθετούνται σε ένα λογαριασμό της τράπεζας.

Βήμα 2 : Υποθέτουμε ότι η μετοχή μετά από μια περίοδο γίνεται €120. Το νέο πλήθος μετοχών που πρέπει να αποτελείται το χαρτοφυλάκιο είναι $\Delta = 0.848$. Συνεπώς η τράπεζα αγοράζει μέσω δανεισμού ακόμα $0.848 - 0.719 = 0.129$ μετοχές με κόστος €120 ανα μετοχή. Συνολικά το άνοιγμα φτάνει €15.48. Με ένα επιτόκιο 10% η τράπεζα οφείλει μέχρι τώρα $23.444 \cdot 1.1 = 25.7884$. Άρα το συνολικό τρέχον χρέος είναι $25.7884 + 15.48 = 41.268$.

Βήμα 3: Υποθέτουμε ότι μετοχή τώρα πέφτει στα €60. Το νέο πλήθος μετοχών που πρέπει να αποτελείται το χαρτοφυλάκιο είναι $\Delta = 0.167$. Αντίθετα με πριν, η τράπεζα πωλεί $0.848 - 0.167 = 0.681$ μετοχές με €60 ανα μετοχή, έχοντας μια εισροή $0.681 \cdot 60 = 40.86$. Η τράπεζα χρησιμοποιεί το ποσό αυτό για να αποπληρώσει ένα μέρος από το χρέος της. Συνεπώς το τρέχον χρέος από $41.268 \cdot 1.1 = 45.394$ θα μειωθεί στα $45.394 - 40.86 = 4.5348$.

Βήμα 4: Υποθέτουμε ότι μετοχή τώρα πέφτει στα €30. Το δικαίωμα δεν έχει καμία αξία. Η τράπεζα έχει στην κατοχή της $\Delta = 0.167$ μετοχές με συνολική αξία $0.167(30) = 5$ τις οποίες πουλάει για να αποπληρώσει τα $4.5348 \cdot 1.1 = 5$. Το κέρδος της τράπεζας προκύπτει από την επένδυση των €1.924 σε ένα ξεχωριστό λογαριασμό στο βήμα 1 και είναι ίσο με $1.924 \cdot (1.1)^3 = 2.560$.

Προχωρώντας ένα ακόμα βήμα στην ανάλυση του διωνυμικού μοντέλου πολλαπλών περιόδων και συναντάμε τον όρο στοχαστική διαδικασία. Οι $(\Delta_0, \Delta_1 \dots \Delta_N)$, $(X_1, X_2 \dots X_N)$ και $(C_1, C_2 \dots C_N)$ είναι στοχαστικές διαδικασίες. Δηλαδή είναι τυχαίες μεταβλητές που εξαρτώνται από την τυχαία ρίψη του νομίσματος. Συγκεκριμένα ο δείκτης σε κάθε μια από τις παραπάνω τυχαίες μεταβλητές υποδηλώνει τον αριθμό των ρίψεων από τις οποίες εξαρτάται. Για παράδειγμα αν τα διαδοχικά αποτελέσματα της ρίψης είναι $\rho_1\rho_2 \dots \rho_N$, η μετοχή στο χρόνο δύο είναι $S_2(\rho_1\rho_2 \dots \rho_N)$ και η τιμή του δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου θα πρεπει να είναι ίση με $C_2(\rho_1\rho_2 \dots \rho_N) = (S_2(\rho_1\rho_2 \dots \rho_N) - E)^+$. Εμείς θέλουμε να προσδιορίσουμε τις αρχικές ποσότητες X_0, Δ_0, καθώς και τις ποσότητες στους ενδιάμεσους χρόνους $\Delta_1(K)$ και $\Delta_1(\Gamma)$, μέχρι $\Delta_{N-1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_{N-2}K)$ και $\Delta_{N-1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_{N-2}\Gamma)$ έτσι ώστε η αξία X_N η οποία δίνεται από τον τύπο (2.1.14) να ικανοποιεί την $X_N(\rho_1\rho_2 \dots \rho_N) = C_N(\rho_1\rho_2 \dots \rho_N)$ ανεξάρτητα από τιμές $\rho_1\rho_2 \dots \rho_N$. Αυτό επιτυγχάνεται ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία από το χρόνο N στο χρόνο μηδέν.

Θεωρούμε ένα διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης N-περιόδων, με $0 < d < 1 + r < u$, και

$$\tilde{p} = \frac{1 + r - d}{u - d}, \quad \tilde{q} = \frac{u - 1 - r}{u - d} \tag{2.2.15}$$

Θεωρούμε την αποπληρωμή του δικαιώματος C_N στο χρόνο N να είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία εξαρτάται από τις πρώτες N ρίψεις $\rho_1\rho_2 \dots \rho_N$. Ορίζεται η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $C_{N-1}, C_{N-2} \dots C_0$ από τον αναδρομικό τύπο

$$C_n(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}C_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n K) + \tilde{q}C_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n \Gamma)]$$

(2.2.16)

Όπου το n είναι ακέραιος και ανήκει στο διάστημα 0 έως $N-1$.

Ακόμα ορίζεται

$$\Delta_n(\rho_1 \dots \rho_n) = \frac{C_{n+1}(\rho_1 \dots \rho_n K) - C_{n+1}(\rho_1 \dots \rho_n \Gamma)}{S_{n+1}(\rho_1 \dots \rho_n K) - S_{n+1}(\rho_1 \dots \rho_n \Gamma)} \quad (2.2.17)$$

Όπου το n είναι ακέραιος και ανήκει στο διάστημα 0 έως $N-1$.

Η τιμή του δικαιώματος στο χρόνο μηδέν ορίζεται να είναι C_0.

Θεώρημα 2.1.1 *Αν $X_0 = C_0$ και προβάλουμε μελλοντικά την αξία των χαρτοφυλακίων από τον τύπο* (2.2.14) *θα έχουμε, για* $0 \leq n \leq N$, *ότι*

$$X_N(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n) = C_N(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n) \quad \text{για όλα τα } \rho_1\rho_2 \dots \rho_N \quad (2.2.18)$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο n ότι

$$X_N(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n) = C_N(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n) \qquad \text{για όλα τα } \rho_1\rho_2 \dots \rho_N \quad (2.2.19)$$

Όπου το n κινείται από 0 έως N. Η περίπτωση για $n = 0$ ισχύει από την αρχική υπόθεση. Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε η (2.2.19) ισχύει για $n \leq N$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$. Δηλαδή θεωρούμε μια τυχαία ακολουθία ρίψεων $\rho_1\rho_2 \dots \rho_n\rho_{n+1}$ και υποθέτουμε ότι για τις συγκεκριμένες πρώτες n ρίψεις $\rho_1\rho_2 \dots \rho_n$ ισχύει η (2.2.19). Επειδή δεν γνωρίζουμε αν $\rho_{n+1} = K$ ή $\rho_{n+1} = \Gamma$, θεωρούμε και τις δύο περιπτώσεις. Από την σχέση (2.2.14) για $\rho_{n+1} = K$ θα έχουμε

$$X_{n+1}(\rho_1 \dots \rho_n K) =$$

$$= \Delta_n(\rho_1 \dots \rho_n)uS_n(\rho_1 \dots \rho_n) + (1+r)\big(X_n(\rho_1 \dots \rho_n) - \Delta_n S_n(\rho_1 \dots \rho_n)\big)$$

Χάριν απλούστευσης συμβολισμού η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$X_{n+1}(K) = \Delta_n u S_n + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n) \quad (2.2.20)$$

Αναλόγως και η (2.1.17) γράφεται απλουστευμένα ως εξής :

$$\Delta_n = \frac{C_{n+1}(K) - C_{n+1}(\Gamma)}{S_{n+1}(K) - S_{n+1}(\Gamma)} = \frac{C_{n+1}(K) - C_{n+1}(\Gamma)}{(u-d)S_n}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην (2.1.20), χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση (2.1.19) και την σχέση (2.1.16) για τον υπολογισμό των C_n θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
X_{n+1}(K) &= (1+r)(X_n) + \Delta_n S_n\big(u-(1+r)\big) \\
&= (1+r)(C_n) + \frac{C_{n+1}(K) - C_{n+1}(\Gamma)}{(u-d)}\big(u-(1+r)\big) \\
&= (1+r)C_n + \tilde{p}C_{n+1}(K) - \tilde{q}C_{n+1}(\Gamma) \\
&= \tilde{p}C_{n+1}(K) + \tilde{q}C_{n+1}(\Gamma) + \tilde{q}C_{n+1}(K) - \tilde{q}C_{n+1}(\Gamma) \\
&= C_{n+1}(K)
\end{aligned}
$$

Επαναφέροντας το αρχικό συμβολισμό θα έχουμε

$$X_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n K) = C_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n K)$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι

$$X_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n \Gamma) = C_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n \Gamma)$$

Συνεπώς ανεξάρτητα αν η $\rho_{n+1} = K$ ή $\rho_{n+1} = \Gamma$ θα ισχύει ότι

$$X_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n\rho_{n+1}) = C_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n\rho_{n+1})$$

Και αφού η ακολουθία των ρίψεων ήταν τυχαία, η επαγωγή έχει ολοκληρωθεί. ■

Το Θεώρημα 2.1.1 καθώς και οι υποθέσεις που έγιναν για αυτό περιγράφουν στην ουσία τα βήματα τα οποία γίνονται για την κατασκευή του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης. Δηλαδή, αφού έχουμε υποθέσει ποία θα είναι η αποπληρωμή για κάθε μονοπάτι στη λήξη, με τον αναδρομικό τύπο (2.2.16) πηγαίνοντας προς τα πίσω (από την λήξη στο χρόνο μηδέν) υπολογίζουμε την αποπληρωμή σε κάθε χρόνο για κάθε πιθανό μονοπάτι. Ταυτόχρονα υπολογίζουμε και τις μετοχές που πρέπει να έχει το χαρτοφυλάκιο σε κάθε χρόνο για κάθε πιθανό μονοπάτι με τον αναδρομικό τύπο (2.2.17). Φτάνοντας στο χρόνο μηδέν αν κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο ίσης αξίας με την αποπληρωμή του δικαιώματος στο χρόνο αυτό τότε ανεξάρτητα από την πορεία της μετοχής, πάντα το χαρτοφυλάκιο μας θα είναι ίσο με την αποπληρωμή του δικαιώματος σε κάθε χρόνο για κάθε μονοπάτι. Το χαρτοφυλάκιο περιέχει ένα πλήθος μετοχών και ένα τραπεζικό λογαριασμό τα οποία αναπροσαρμόζονται ανάλογα με το μονοπάτι. Το Θεώρημα χρησιμοποιείται τόσο στα δικαιώματα που εξαρτώνται από το μονοπάτι που θα ακολουθήσει ο υποκείμενος τίτλος όσο και σε δικαιώματα που εξαρτώνται μόνο από την τελική τιμή του υποκείμενου τίτλου.

Παράδειγμα 2.2.2 Ας υποθέσουμε όπως στο σχήμα 2.2.2. ότι $S_0 = 80$, με $u = 1.5$ και $d = 0.5$. Θεωρούμε το επιτόκιο της αγοράς να είναι 10%. Άρα, $\tilde{p} = 0.6$ και $\tilde{q} = 0.4$. Στο χρόνο τρία θεωρούμε ότι η αποπληρωμή ενός δικαιώματος δίνεται από τον εξής τύπο:

$$C_3 = max_{0\le n\le 3} S_n - S_3$$

Η παραπάνω τελική αξία μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί σε ένα δικαίωμα πώλησης όπου η τιμή πώλησης E (strike price) δεν είναι προκαθορισμένη αλλά ισούται με την μέγιστη τιμή του υποκείμενου αγαθού μέχρι και τον χρόνο λήξης (lookback option). Συνεπώς,

$$C_3(KKK) = S_3(KKK) - S_3(KKK) = 270 - 270 = 0$$

$$C_3(KK\Gamma) = S_2(KK) - S_3(KK\Gamma) = 180 - 90 = 90$$

$$C_3(K\Gamma K) = S_1(K) - S_3(K\Gamma K) = 120 - 90 = 30$$

$$C_3(K\Gamma\Gamma) = S_1(K) - S_3(K\Gamma\Gamma) = 120 - 30 = 90$$

$$C_3(\Gamma KK) = S_3(\Gamma KK) - S_3(\Gamma KK) = 90 - 90 = 0$$

$$C_3(\Gamma K\Gamma) = S_0 - S_3(\Gamma K\Gamma) = 80 - 30 = 50$$

$$C_3(\Gamma\Gamma K) = S_0 - S_3(\Gamma\Gamma K) = 80 - 30 = 50$$

$$C_3(\Gamma\Gamma\Gamma) = S_0 - S_3(\Gamma\Gamma\Gamma) = 80 - 10 = 70$$

Στους χρόνους από μηδέν έως τρία θα χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο (2.2.16). Πιο συγκεκριμένα στο χρόνο δύο θα έχουμε:

$$C_2(KK) = \frac{1}{1.1}\left[\frac{3}{5}C_3(KKK) + \frac{2}{5}C_3(KK\Gamma)\right] = 32.72$$

$$C_2(K\Gamma) = \frac{1}{1.1}\left[\frac{3}{5}C_3(K\Gamma K) + \frac{2}{5}C_3(K\Gamma\Gamma)\right] = 49.09$$

$$C_2(\Gamma K) = \frac{1}{1.1}\left[\frac{3}{5}C_3(\Gamma KK) + \frac{2}{5}C_3(\Gamma K\Gamma)\right] = 18.18$$

$$C_2(\Gamma\Gamma) = \frac{1}{1.1}\left[\frac{3}{5}C_3(\Gamma\Gamma K) + \frac{2}{5}C_3(\Gamma\Gamma\Gamma)\right] = 52.72$$

Ακολούθως στο χρόνο ένα συνεπάγεται ότι:

$$C_1(K) = \frac{1}{1.1}\left[\frac{3}{5}C_2(KK) + \frac{2}{5}C_2(K\Gamma)\right] = 35.69$$

$$C_1(\Gamma) = \frac{1}{1.1}\left[\frac{3}{5}C_2(\Gamma K) + \frac{2}{5}C_2(\Gamma\Gamma)\right] = 29.06$$

Τέλος στο χρόνο ένα έχουμε:

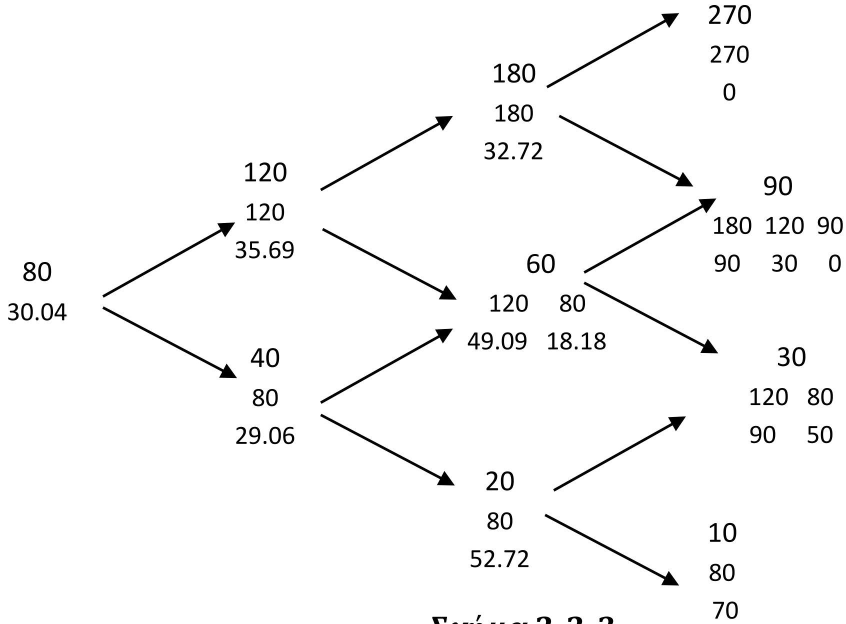
$$C_0 = \frac{1}{1.1}\left[\frac{3}{5}C_1(K) + \frac{2}{5}C_1(\Gamma)\right] = 30.04$$

Αν ο επενδυτής πουλήσει αυτό το δικαίωμα στο χρόνο μηδέν έναντι 30.04, μπορεί να αντιστάθμιση την θέση του (short position) στο δικαίωμα, με το να αγοράσει

$$\Delta_0 = \frac{C_1(K) - C_1(\Gamma)}{S_1(K) - S_1(\Gamma)} = \frac{35.69 - 29.08}{120 - 40} = 0.083$$

μετοχές επί αυτού του υποκείμενου τίτλου. Αυτό θα κοστίσει €6.64 και θα αφήσει στον επενδυτή $30.04 - 6.64 = 23.4$ για να τα επενδύσει σε ένα λογαριασμό με επιτόκιο 10%. Στο χρόνο ένα ο λογαριασμός θα έχει €25.74. Αν η τιμή της μετοχής ανέβει στα €120, το νέο πλήθος μετοχών που πρέπει να αποτελείται το χαρτοφυλάκιο μας είναι $\Delta = 0.1364$. Συνεπώς ο επενδυτής πρέπει να αγοράσει ακόμα 0.0534 μετοχές, με τιμή ανά μετοχή €120. Άρα το υπόλοιπο του λογαριασμού θα είναι $25.74 - 0.0534 \cdot 120 = 19.33$. Έτσι η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου να είναι $0.1364 \cdot 120 + 19.33 = 35.69$, δηλαδή η αποπληρωμή $C_1(K)$. Αν η μετοχή πέσει στα €40, το χαρτοφυλάκιο πρέπει να αποτελείται από $\Delta = 0.8635$ μετοχές. Άρα, ο επενδυτής πρέπει να αγοράσει ακόμα 0.7805 μετοχές με τιμή ανά μετοχή €40, δηλαδή συνολικά €31.22. Σε αυτή την περίπτωση ο επενδυτής πρέπει να δανειστεί $31.22 - 25.74 = 5.48$. Συνολικά το χαρτοφυλάκιο έχει αξία $0.8635 \cdot 40 - 5.48 = 29.06$, δηλαδή η αποπληρωμή $C_1(\Gamma)$. Συνεχίζοντας να αναπροσαρμόζουμε ανάλογα το χαρτοφυλάκιό μας σε κάθε χρόνο, ακλουθώντας τις τιμές του δέντρου ($\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha$ 2.2.3), ο επενδυτής θα είναι σίγουρος ότι στη λήξη το χαρτοφυλάκιο θα αξίζει C_3, ανεξάρτητα από ποίο μονοπάτι ακολούθησε η μετοχή.

Στο $\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha$ 2.2.3 σε κάθε κόμβο εμφανίζονται αριθμοί σε τρία επίπεδα. Ο αριθμός στην κορυφή είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής. Ο αριθμός στο επόμενο επίπεδο δείχνει το μέγιστο που μπορεί να λάβει η μετοχή μέχρι το κόμβο αυτό, για κάθε μονοπάτι που καταλήγει στο κόμβο. Ο αριθμός στο τελευταίο επίπεδο δείχνει την αξία του δικαιώματος που αντιστοιχεί σε κάθε πιθανό μέγιστο της μετοχής. Για περισσότερες τεχνικές και αποτελέσματα παραπέμπουμε στο [9].



$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha$ 2.2.3

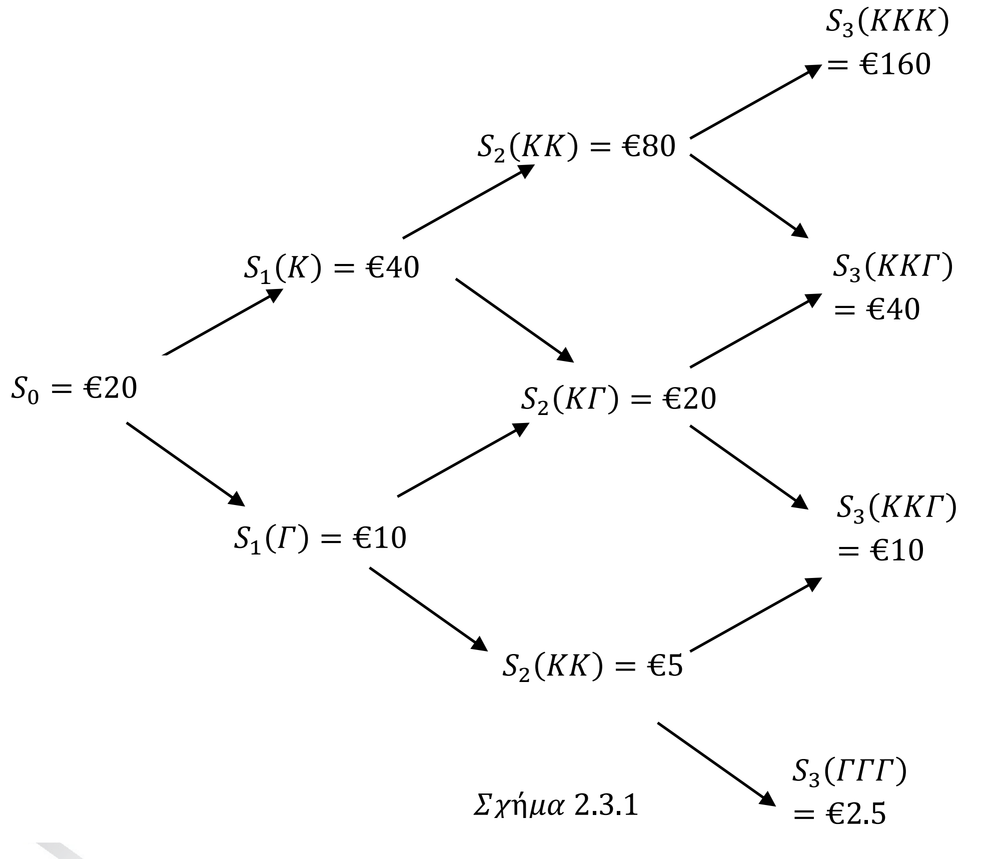
■

2.3 Υπολογιστικά ζητήματα

Τα διωνυμικά μοντέλα που περιγράφηκαν στις προηγούμενες παραγράφους είχαν μέχρι τρείς περιόδους. Στην πράξη όμως, χρησιμοποιούνται συχνά διωνυμικά μοντέλα με 100 ή περισσότερες περιόδους. Η ποσότητα των υπολογισμών που απαιτούνται για την εκτέλεση του αλγορίθμου του Θεωρήματος 2.1.1, αυξάνονται εκθετικά με τον αριθμό των περιόδων. Συνεπώς τα πιθανά αποτελέσματα είναι $2^{100} \approx 10^{30}$ για κάθε ακολουθία 100 ρίψεων. Ένας αλγόριθμος που ξεκινάει με καταχώρηση 2^{100} μεταβλητών δεν είναι υπολογιστικά εφικτός.

Μέσα από ένα παράδειγμα θα δείξουμε πως το Θεώρημα 2.1.1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ένα υπολογιστικά αποδοτικό τρόπο.

$\textbf{Παράδειγμα 2.3.1}$ Ας θεωρήσουμε ένα μοντέλο με $S_0 = €20$, $u = 2$, $d = 0.5$ και $r = 0.25$. Άρα οι πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου θα είναι $\tilde{p} = 0.5$ και $\tilde{q} = 0.5$. Το πρόβλημα ανάγεται στην τιμολόγηση ενός δικαιώματος πώλησης ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης $E = €30$ και λήξη μετά από τρείς χρόνους ($σχήμα$ 2.3.1).



$Σχήμα$ 2.3.1

Η αποπληρωμή του δικαιώματος πώλησης δίνεται από τον τύπο $C_3 = (30 - S_3)^+$. Τα πιθανά αποτελέσματα είναι $2^3 = 8$. Πιο συγκεκριμένα είναι:

$$C_3(KKK) = €0, \qquad C_3(KKΓ) = C_3(ΓKK) = C_3(KΓK) = €0$$

$$C_3(KΓΓ) = C_3(ΓKΓ) = C_3(ΓΓK) = €20, \qquad C_3(ΓΓΓ) = €27.5$$

Οι αποπληρωμές που συμπίπτουν έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό. Αν και χρησιμοποιούν διαφορετικό μονοπάτι καταλήγουν στη ίδια ενδεχόμενη τιμή της μετοχής. Θεωρώ λοιπόν μια συνάρτηση $c_3(s)$ οι οποία υπολογίζει την αποπληρωμή στο χρόνο τρία όταν η τιμή της μετοχής στο χρόνο αυτό είναι s. Με το τρόπο αυτό μειώνω τα πιθανά αποτελέσματα της τιμής του δικαιώματος σε τέσσερα χωρίς να χάνω πληροφορία για να τιμολογήσω το δικαίωμα. Συνεπώς ο αλγόριθμος θα πρέπει να καταχωρήσει αρχικά τις τιμές

$$c_3(160) = €0, \qquad c_3(40) = €0, \qquad c_3(10) = €20, \qquad c_3(s) = €27.5.$$

Αν το δικαίωμα πώλησης έληγε μετά από 100 περιόδους ο τύπος C_{100} μόνο για την περίοδο 100 θα είχα 2^{100} αποτελέσματα. Ενώ με την συνάρτηση c_{100} τα αποτελέσματα μειώνονται δραστικά σε 101 για την περίοδο 100.

Σύμφωνα με το θεωρήμα 2.1.1, το C_2 υπολογίζεται από την σχέση

$$C_2(\rho_1\rho_2) = \frac{1}{1{,}25}\left[\frac{1}{2}C_3(\rho_1\rho_2K) + \frac{1}{2}C_3(\rho_1\rho_2\Gamma)\right], \tag{2.3.1}$$

Η εξίσωση (2.3.1) αντιπροσωπεύει τέσσερεις εξισώσεις, μία για κάθε ένα πιθανό μονοπάτι που θα ακολουθήσει η μετοχή. Κάνοντας κάποιες πράξεις και θεωρώντας αντίστοιχη συνάρτηση $c_2(s)$ η (2.3.1) γράφεται :

$$c_2(s) = \frac{2}{5}[c_3(us) + c_3(ds)]$$

Και αντιπροσωπεύει τρείς μόνο εξισώσεις, μία για κάθε πιθανή τιμή της μετοχής στο χρόνο δύο. Στο παράδειγμα μας θα πρέπει να υπολογίσουμε τα εξής

$$c_2(80) = \frac{2}{5}[c_3(160) + c_3(40)] = 0$$

$$c_2(20) = \frac{2}{5}[c_3(40) + c_3(10)] = 8$$

$$c_2(5) = \frac{2}{5}[c_3(10) + c_3(2{,}5)] = 19$$

Αντίστοιχα

$$c_1(40) = \frac{2}{5}[c_2(80) + c_2(20)] = 3.2$$

$$c_2(10) = \frac{2}{5}[c_2(20) + c_2(5)] = 10.8$$

Η τιμή στο χρόνο μηδέν είναι:

$$c_1(20) = \frac{2}{5}[c_2(40) + c_2(10)] = 5.6$$

Επίσης αν σε κάθε χρόνο $n = 0,1,2,$ η μετοχή είναι s τότε, οι μετοχές που πρέπει να αποτελείται το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης είναι

$$\delta_n(s) = \frac{c_{n+1}(us) - c_{n+1}(ds)}{us - ds}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ανάλογη της (2.2.17).

■

Στο παράδειγμα 2.3.1, η τιμή του δικαιώματος για κάθε χρόνο n ήταν μια συνάρτηση της τιμής της μετοχής σε αυτό το χρόνο, και έτσι και αλλιώς ανεξάρτητη από την ακολουθία της ρίψης του νομίσματος. Η σχέση $C_n = c_n(S_n)$ αποδεικνύει ακριβώς αυτό μειώνοντας σε μεγάλο βαθμό τους υπολογισμούς.

Μπορεί να επιτευχθεί παρόμοια μείωση όταν η τιμή του δικαιώματος δεν εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της μετοχής αλλά και από το από το μονοπάτι που ακολούθησε αυτή ;

Παράδειγμα 2.3.2 Θεωρούμε το δικαίωμα που περιγράφηκε στο παράδειγμα 2.2.2. Σε κάθε χρόνο n η τιμή του δικαιώματος μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση της τιμής της μετοχής S_n και της μέγιστης τιμής της $M_n = max_{0\le k\le n} S_k$. Στο χρόνο τρία υπάρχουν επτά πιθανά ζευγάρια (S_3, M_3), και είναι τα εξής:

$$(270,270), (90,180), (90,120), (90,90), (30,120), (30,80), (10,80).$$

Ορίζεται $c_N(s,m)$ να είναι η αποπληρωμή στο χρόνο λήξης αν $S_N = s$ και $M_N = m$. Άρα για το χρόνο τρία θα έχουμε:

$$c_3(270,270) = 0, c_3(90,180) = 90, c_3(90,120) = 30,$$

$$c_3(90,90) = 0, c_3(30,120) = 90, c_3(30,80) = 50, c_3(10,80) = 70.$$

Για τους ενδιάμεσους χρόνους από $0, \dots, N-1$ ορίζουμε ως $c_n(s,m)$ την αξία του δικαιώματος στο χρόνο n, αν $S_n = s$ και $M_n = m$. Ο αλγόριθμος που περιγράφει τον υπολογισμό της αξίας του δικαιώματος, λαμβάνοντας υπόψη το μονοπάτι που ακολούθησε η μετοχή είναι:

$$c_n(s,m) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p} c_{n+1}\big(us, m \vee (us)\big) + \tilde{q} c_{n+1}(ds,m)\right],$$

όπου $m \vee (us)$ δηλώνει το μέγιστο από m και us.

Κάνοντας εφαρμογή του αλγορίθμου, υπολογίζουμε ότι:

$$c_2(180,180) = \frac{1}{1.1}[0.6 c_3(270,270) + 0.4 c_3(90,180)] = 32.72$$

$$c_2(60,120) = \frac{1}{1.1}[0.6 c_3(90,120) + 0.4 c_3(30,120)] = 49.09$$

$$c_2(60,80) \;=\; \frac{1}{1.1}[0.6c_3(90,90) + 0.4c_3(30,80)] \;=\; 18.18$$

$$c_2(20,80) \;=\; \frac{1}{1.1}[0.6c_3(30,80) + 0.4c_3(10,80)] \;=\; 52.72$$

στην συνέχεια υπολογίζουμε για το χρόνο ένα:

$$c_1(120,120) = \frac{1}{1.1}[0.6c_2(180,180) + 0.4c_2(60,120)] = 35.69$$

$$c_1(40,80) \;=\; \frac{1}{1.1}[0.6c_2(60,80) + 0.4c_2(20,80)] = \;29.08$$

και τελικά στο χρόνο μηδέν θα έχω:

$$c_0(80,80) = \frac{1}{1.1}[0.6c_3(120,120) + 0.4c_3(40,80)] = 30.09$$

Σε κάθε χρόνο $n = 0,1,2,\dots,N-1$,αν η τιμή της μετοχής είναι s και η μέγιστη τιμής της μέχρι εκείνη τη στιγμή είναι m, τότε το πλήθος των μετοχών το οποίο πρέπει να αποτελείται το χαρτοφυλάκιο είναι:

$$\delta_n(s,m) = \frac{c_{n+1}(us, m \vee us) - c_{n+1}(ds,m)}{us - ds}.$$

Η παραπάνω σχέση είναι ανάλογη με την εξίσωση (2.2.17)

■

Παράδειγμα 2.3.3 (***Asian option***) Θεωρούμε ένα μοντέλο τριών περιόδων με $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$. Το επιτόκιο είναι $r = 0.25$ και συνεπάγεται ότι $\tilde{p} = \tilde{q} = 0.5$. Για $n = 0,1,2,3$ ορίζεται ότι $Y_n = \sum_{k=0}^{n} S_k$ να είναι το άθροισμα των τιμών των μετοχών από το χρόνο μηδέν μέχρι και το χρόνο n. Ένα δικαίωμα αγοράς Ασιατικού τύπου (Asian option, European style) με λήξη στο χρόνο τρία και τιμή εξάσκησης $E = 4$ θα έχει τελική τιμή (στο χρόνο τρία)

$$C_3 = \left(\frac{1}{4}Y_3 - 4\right)^{+}$$

Η παραπάνω αποπλρωμή μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί σε ένα δικαίωμα αγοράς όπου η τρέχουσα τιμή S_n δεν είναι προκαθορισμένη αλλά ισούται με την μέση τιμή του υποκείμενου αγαθού μέχρι και τον χρόνο λήξης.

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση c_n και συμβολίζοντας με $S_n = s$ και $Y_n = y$ για κάθε χρόνο n θα έχουμε:

$$c_3(s,y) = \left(\frac{1}{4}y - 4\right)^+$$

Δηλαδή, θα έχουμε:

$c_3(32{,}60) = 11,\quad c_3(8{,}36) = 5,\quad c_3(8{,}24) = 2,\quad c_3(8{,}18) = 0.5\quad c_3(2{,}18) = 0.5$
$c_3(2{,}12) = 0,\ c_3(2{,}9) = 0,\ c_3(0.5{,}7.5) = 0$

Ο αναδρομικός τύπος για τον υπολογισμό των c_n για $n = 0{,}1{,}2$ είναι ο εξής:

$$c_n(s,y_n) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}c_{n+1}(us, y_n + us) + \tilde{q}c_{n+1}(ds, y_n + ds)\right]$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο υπολογίζουμε ότι:

$$c_2(16{,}28) = \frac{1}{1.25}[0.5c_3(32{,}60) + 0.5c_3(8{,}36)] = 6.4$$

$$c_2(4{,}16) = \frac{1}{1.25}[0.5c_3(8{,}24) + 0.5c_3(2{,}18)] = 1.00$$

$$c_2(4{,}10) = \frac{1}{1.25}[0.5c_3(8{,}18) + 0.5c_3(2{,}12)] = 0.20$$

$$c_2(1{,}7) = \frac{1}{1.25}[0.5c_3(2{,}9) + 0.5c_3(0.5{,}7.5)] = 0.00$$

στην συνέχεια θα έχουμε:

$$c_1(8{,}12) = \frac{1}{1.25}[0.5c_2(16{,}28) + 0.5c_2(4{,}16)] = 2.96$$

$$c_1(2{,}6) = \frac{1}{1.25}[0.5c_2(4{,}10) + 0.5c_2(1{,}7)] = 0.08$$

Άρα στο χρόνο μηδέν συνεπάγεται ότι:

$$c_0(4{,}4) = \frac{1}{1.25}[0.5c_2(8{,}12) + 0.5c_3(2{,}6)] = 1.216$$

Τέλος σε κάθε χρόνο $n = 0{,}1{,}2$ αν η τιμή της μετοχής είναι s και το άθροισμα των τιμών της μετοχής μέχρι εκείνη τη στιγμή είναι y, τότε το πλήθος των μετοχών το οποίο πρέπει να αποτελείται το χαρτοφυλάκιο είναι:

$$\delta_n(s,y_n) = \frac{c_{n+1}(us, y_n + us) - c_{n+1}(ds, y_n + ds)}{us - ds}$$

■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το μέτρο ουδέτερου ρίσκου

3.1 Υπό συνθήκη μέση τιμή

Στο διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης στο προηγούμενο κεφάλαιο υπάρχουν δύο μέτρα πιθανότητας τα οποία μοιράζονται την προσοχή μας. Το πρώτο είναι το μέτρο πραγματικής πιθανότητας και συμβολίζεται με $\mathbb{P}$. Ο χαρακτηρισμός «πραγματική πιθανότητα» αναφέρεται στο ότι οι πιθανότητες προέρχονται από εμπειρικές εκτιμήσεις των παραμέτρων του μοντέλου. Το δεύτερο μέτρο είναι το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου και συμβολίζεται με $\widetilde{\mathbb{P}}$. Αυτά τα δύο μέτρα πιθανότητας δείνουν διαφορετικά βάρη για το μονοπάτι της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Οι πραγματικές πιθανότητες είναι οι «σωστές». Οι πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου είναι πλασματικές αλλά αποτελούν μια πολύ χρήσιμη κατασκευή που μας επιτρέπει να λύσουμε ένα πολύπλοκο σύστημα απλά. Σημειώνεται ότι το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου και το μέτρο πραγματικής πιθανότητας συμφωνούν όσο αναφορά ποια μονοπάτια έχουν μηδενική πιθανότητα.

Ας θεωρήσουμε γενικά ένα πεπερασμένο δειγματικό χώρο Ω στον οποίο έχουμε τα μέτρα πιθανότητας $\mathbb{P}$ και $\widetilde{\mathbb{P}}$. Μία τυχαία μεταβλητή S που ορίζεται στο πεπερασμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathbb{P})$ έχει μέση τιμή η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{\rho \epsilon \Omega} S(\rho)\mathbb{P}(\rho).$$

Όταν υπολογίζουμε την μέση τιμή με το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου $\widetilde{\mathbb{P}}$, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$\widetilde{\mathbb{E}}[S] = \sum_{\rho \epsilon \Omega} S(\rho)\widetilde{\mathbb{P}}(\rho).$$

Η τυχαία μεταβλητή S είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις, αν και οι δύο μέσες τιμές είναι διαφορετικές. Αυτό συμβαίνει διότι όταν θα αλλάξουμε μέτρο πιθανότητας αυτό που αλλάζει είναι η κατανομή και όχι η τυχαία μεταβλητή.

Σε αυτό το σημείο υπενθυμίζουμε τους τύπους υπολογισμού των πιθανοτήτων ουδέτερου ρίσκου.

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d} \tag{3.1.1}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{\tilde{p}u + \tilde{q}d}{1+r} = 1. \tag{3.1.2}$$

Στην συνέχεια αν πολλαπλασιάσουμε την (3.1.2) με $S_n(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n)$, συνεπάγεται ότι για κάθε χρόνο n και για κάθε ακολουθία ρίψεων $(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n)$ έχουμε ότι:

$$S_n(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}uS_n(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n) + \tilde{q}dS_n(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n)]$$

ή αλλιώς

$$S_n(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n K) + \tilde{q}S_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n \Gamma)] \qquad (3.1.3)$$

Δηλαδή η τιμή της μετοχής στο χρόνο n είναι ο προεξοφλημένος σταθμισμένος μέσος όρος της τιμής των μετοχών στο χρόνο $n+1$, όπου τα $\tilde{p}$ και $\tilde{q}$ είναι τα βάρη που χρησιμοποιούνται στη στάθμιση του μέσου όρου. Έτσι το δεξί μέλος της (3.1.3) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n[S_{n+1}](\rho_1\rho_2 \dots \rho_n) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n K) + \tilde{q}S_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n \Gamma)] \qquad (3.1.4)$$

Συνεπώς η (3.1.3) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής:

$$S_n = \frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_n[S_{n+1}] \qquad (3.1.5)$$

Ο συμβολισμός $\widetilde{\mathbb{E}}_n[S_{n+1}]$ αντιπροσωπεύει την υπό συνθήκη μέση τιμή της S_{n+1} βασισμένη στην πληροφορία στο χρόνο n. Η υπό συνθήκη μέση τιμή μπορεί να θεωρηθεί ως μια εκτίμηση της S_{n+1} βασισμένη στην πληροφορία από τις πρώτες n ρίψεις.

Για παράδειγμα στο σχήμα 3.1.1 παρακάτω αν θεωρήσουμε $\tilde{p} = \tilde{q} = 1/2$ τότε θα έχουμε $\widetilde{\mathbb{E}}_1[S_2](K) = 50$ και $\widetilde{\mathbb{E}}_1[S_2](\Gamma) = 12.5$. Από αυτό το παράδειγμα φαίνεται ότι η πληροφορία που έχουμε για την πρώτη ρίψη επηρεάζει το αποτέλεσμα για την $\widetilde{\mathbb{E}}_1[S_2]$. Άρα η $\widetilde{\mathbb{E}}_1[S_2]$ είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία θα καθοριστεί από τη ρίψη του νομίσματος στο χρόνο ένα. Γενικότερα, όταν έχουμε μια τυχαία μεταβλητή S να εξαρτάται από τις πρώτες N ρίψεις του νομίσματος, μπορούμε να εκτιμήσουμε την S βάση της διαθέσιμης πληροφορίας σε προηγούμενος χρόνους $n \leq N$.

Ορισμός 3.1.1 *Έστω ένα προκαθορισμένο μονοπάτι $\rho_1\rho_2 \dots \rho_n$ όπου $n \in [1, N]$. Οι πιθανές επεκτάσεις $\rho_{n+1}\rho_{n+2} \dots \rho_N$ για το προκαθορισμένο μονοπάτι $\rho_1\rho_2 \dots \rho_n$ είναι 2^{N-n}. Αν συμβολίσουμε με $\#K(\rho_{n+1}\rho_{n+2} \dots \rho_N)$ και με $\#\Gamma(\rho_{n+1}\rho_{n+2} \dots \rho_N)$ το πλήθος των κεφαλών και τον γραμμάτων αντίστοιχα για την επέκταση $\rho_{n+1}\rho_{n+2} \dots \rho_N$ ορίζεται ότι:*

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n[S](\rho_1 \dots \rho_n) = \sum_{\rho_{n+1} \dots \rho_N} \tilde{p}^{\#K(\rho_{n+1} \dots \rho_N)} \tilde{q}^{\#\Gamma(\rho_{n+1} \dots \rho_N)} S(\rho_1 \dots \rho_n \rho_{n+1} \dots \rho_N) \qquad (3.1.6)$$

Επίσης για τις ακραίες περιπτώσεις $n = 0$ και $n = N$ ορίζεται ότι:

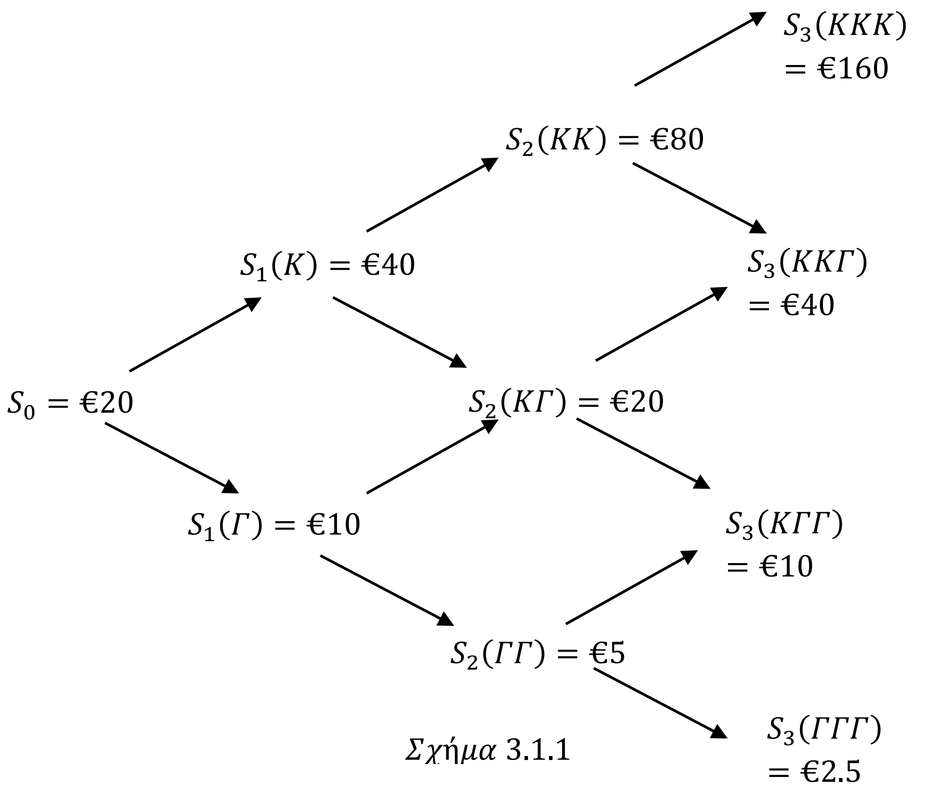
$$\widetilde{\mathbb{E}}_0[S] = \widetilde{\mathbb{E}}[S] \text{ και } \widetilde{\mathbb{E}}_N[S] = S.$$

Ο Ορισμός 3.1.1 αποτελεί μια γενίκευση της σχέσης (3.1.4). Η $\widetilde{\mathbb{E}}_n[S]$ καλείται υπό συνθήκη μέση τιμή της S και είναι μια τυχαία μεταβλητή διότι εξαρτάται από τις πρώτες n ρίψεις. Για παράδειγμα για το σχήμα 3.1.1 παρατηρούμε ότι:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_1[S_3](K) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 160 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 40 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 10 = 62.5$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_1[S_3](\Gamma) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 40 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 10 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2.5 = 15.625$$

Άρα η $\widetilde{\mathbb{E}}_1[S_3]$ είναι μια τυχαία μεταβλητή.



Σχήμα 3.1.1

3.2 Martingales

Στην προηγούμενη παράγραφο χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου $\tilde{p}$ και $\tilde{q}$ καταλήξαμε στην σχέση (3.1.3). Υπό το πρίσμα της υπο συνθήκης μέσης τιμής δείξαμε ότι η (3.1.3) μπορεί να γραφεί ως (3.1.5). Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη τις (3.1.5) με $(1+r)^n$, έχουμε την εξίσωση

$$\frac{S_n}{(1+r)^n} = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] \tag{3.2.1}$$

Το επιτόκιο είναι σταθερό οπότε ο προεξοφλητικός όρος δεν επηρεάζει αν βρίσκεται εντός η εκτός της υπό συνθήκης μέσης τιμής. Σε μοντέλα με τυχαίο επιτόκιο θα επηρέαζε και θα έπρεπε να είναι υποχρεωτικά μέσα στην υπό συνθήκη μέση τιμή. Η εξίσωση (3.2.1) εκφράζει το γεγονός ότι κάτω από το μέτρο πιθανότητας του ουδέτερου ρίσκου η καλύτερη εκτίμηση, με βάση την πληροφορία στο χρόνο n, για την προεξοφλημένη τιμή της μετοχής στο χρόνο $n+1$ είναι η προεξοφλημένη τιμή της μετοχής στο χρόνο n. Οι διαδικασίες αυτές λέγονται Martingales (π.χ βλ. [4]). Έτσι, κάτω από το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου οι προεξοφλημένες τιμές των υποκείμενων τίτλων είναι martingales. Σημειώνεται ότι θεωρούμε ότι οι υποκείμενοι τίτλοι δεν μοιράζουν κάποιο μέρισμα.

Ορισμός 3.2.1 *Θεωρούμε το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης και έστω $Z_1, Z_2, \ldots Z_3$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Κάθε τ.μ. Z_n εξαρτάται μόνο από τις πρώτες n ρίψεις και η Z_0 είναι σταθερή. Μια τέτοια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών καλείται προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία και διακρίνεται ως εξής:*

i. Αν

$$Z_n = \widetilde{\mathbb{E}}_n[Z_{n+1}] \quad \text{για} \quad n = 0,1,\ldots,N-1, \tag{3.2.2}$$

η διαδικασία καλείται martingale.

ii. Αν

$$Z_n \leq \widetilde{\mathbb{E}}_n[Z_{n+1}] \quad \text{για} \quad n = 0,1,\ldots,N-1,$$

η διαδικασία καλείται submartingale.

iii. Αν

$$Z_n \geq \widetilde{\mathbb{E}}_n[Z_{n+1}] \quad \text{για} \quad n = 0,1,\ldots,N-1,$$

η διαδικασία καλείται supermartingale.

■

Σε αυτό το σημείο αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η μέση τιμή μιας διαδικασίας martingale είναι σταθερή στο χρόνο. Αυτό ισχύει διότι παίρνοντας μέσες τιμές και στα δύο μέλη της (3.2.2) θα έχω:

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}\left[\widetilde{\mathbb{E}}_n[Z_{n+1}]\right] = \mathbb{E}[Z_{n+1}] \quad \text{για} \quad n = 0,1,\ldots,N-1,$$

δηλαδή,

$$\mathbb{E}[Z_0] = \mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[Z_2] = \cdots = \mathbb{E}[Z_{N-1}] = \mathbb{E}[Z_N].$$

Όμως η Z_0 δεν είναι τυχαία , έτσι $\mathbb{E}[Z_0] = Z_0$. Άρα συνεπάγεται ότι:

Αν $Z_0, Z_1, \ldots Z_N$ είναι μια martingale τότε για $n = 0,1,\ldots,N$

$$Z_0 = \mathbb{E}[Z_n] \tag{3.2.3}$$

Με άλλα λόγια η σχέση (3.2.3) λέει ότι μια στοχαστική διαδικασία martingale δεν έχει την τάση να αυξάνεται ή να μειώνεται, αφού η εκτίμηση για τις τιμές της επόμενης περιόδου είναι η τιμή στην προηγούμενη περίοδο. Σε ένα διωνυμικό δέντρο για να έχω μια διαδικασία martingale, θα πρέπει η σχέση (3.2.2) να ικανοποιείται για όλα τα πιθανά μονοπάτια ρίψεων. Αν επιστρέψουμε στο σχήμα 3.1.1 και πάρουμε πιθανότητες ανόδου και καθόδου $p = 1/3$ και $p = 2/3$ αντίχοιχα, τότε η ακολουθία $S_0, S_1, \dots S_N$ είναι μια martingale. Συγκριμένα σε κάθε κόμβο του διωνυμικού δέντρου θα ισχύει:

$$S_n(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n) = \frac{1}{3} S_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n K) + \frac{2}{3} S_{n+1}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n \Gamma)$$

ή αλλιώς $$S_n = \widetilde{\mathbb{E}}_n[S_{n+1}].$$

Όμως στην πραγματικότητα οι μετοχές έχουν την τάση να ανεβαίνουν κατά μέσο όρο πιο γρήγορα από την αγορά έτσι ώστε να αποζημιώνονται οι επενδυτές για τον επιπλέον κίνδυνο που έχουν αναλάβει. Συνεπώς ένα πιο ρεαλιστικό παράδειγμα θα είχε ως πιθανότητες $p = 2/3$ και $p = 1/3$. Με αυτές τις επιλογές προκύπτει ότι σε κάθε κόμβο του διωνυμικού δέντρου θα ισχύει:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n[S_{n+1}] = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot S_n + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_n = \frac{3}{2} S_n$$

Δηλαδή εκτιμάμε ότι η επόμενη τιμή θα αυξηθεί κατά 50% σε σχέση με την προηγούμενη. Το επιτόκιο που χρησιμοποιείται στο διωνυμικό μοντέλο είναι το επιτόκιο της αγοράς και υποθέτουμε ότι είναι $r = 1/4$. Άρα, ο ρυθμός αύξησης της μετοχής υπερβαίνει το 25% που θα χρησιμοποιούσαμε σε αυτό το μοντέλο όπως θα έπρεπε. Έτσι η εκτίμηση για την προεξοφλημένη τιμή της μετοχής έχει τάση να αυξάνεται, αφού προεξοφλούμε με το επιτόκιο της αγοράς που είναι μικρότερο από το ρυθμό αύξησης της μετοχής. Διατυπώνοντάς την παραπάνω πρόταση και με μαθηματικούς τύπους φαίνεται ότι:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} S_{n+1}\right] = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \widetilde{\mathbb{E}}_n[S_{n+1}] = \left(\frac{4}{5}\right)^{n} \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot S_n \geq \left(\frac{4}{5}\right)^{n} S_n$$

Άρα, η προεξοφλημένη τιμή της μετοχής είναι μια submartingale κάτω από το μέτρο πραγματικής πιθανότητας. Ενώ, οι πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου είναι κατασκευασμένες έτσι ώστε να κάνουν την προεξοφλημένη τιμή της μετοχής μια martingale. Χρησιμοποιώντας στο προηγούμενο παράδειγμα τις πιθανότατες ουδέτερου ρίσκου $\tilde{p} = \frac{1}{2}$ και $\tilde{q} = \frac{1}{2}$ υπολογίζουμε ότι:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n[S_{n+1}] = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot S_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_n = \frac{5}{4} S_n$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} S_{n+1}\right] = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \widetilde{\mathbb{E}}_n[S_{n+1}] = \left(\frac{4}{5}\right)^{n} \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5}{4} \cdot S_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n} S_n$$

Θεώρημα 3.2.1 *Θεωρούμε το γενικό διωνυμικό μοντέλο με* $0 < d < 1 + r < u$ *και πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου οι οποίες δίνονται από τους τύπους:*

$$\tilde{p} = \frac{1 + r - d}{u - d}, \quad \tilde{q} = \frac{u - 1 - r}{u - d}.$$

Τότε, κάτω από το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου η προεξοφλημένη τιμή της μετοχής είναι martingale. Δηλαδή, η εξίσωση $(3.2.1)$ *ισχύει σε κάθε χρόνο* n *για κάθε ακολουθία ρίψεων.*

Στο διωνυμικό μοντέλο κάθε επενδυτής πρέπει να αναπροσαρμόζει το χαρτοφυλάκιο που έχει στην κατοχή του έτσι ώστε να αντισταθμίζει την θέση του κάθε στιγμή. Η στρατηγική αυτή περιλαμβάνει την αγορά ή πώληση ενός πλήθους μετοχών Δ_n στο χρόνο n και την διατήρησή τους μέχρι την χρόνο $n+1$. Στο χρόνο $n+1$ ο επενδυτής αγοράζει ή πουλάει μετοχές έτσι ώστε να έχει Δ_{n+1} το πλήθος μετοχές. Δηλαδή, η Δ_n είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία εξαρτάται από τις πρώτες n ρίψεις του νομίσματος και η τυχαία μεταβλητή Δ_{n+1} από τις πρώτες $n+1$ ρίψεις. Συμφωνα με την πρόταση 3.2.1 η στοχαστική διαδικασία $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{N-1}$ είναι προσαρμοσμένη. Κάθε φορά όμως που αναπροσαρμόζεται το πλήθος των μετοχών στο χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης, αναπροσαρμόζεται και η αξία του από τον αναδρομικό τύπο:

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n), \qquad n = 0,1, \dots, N-1 \quad (3.2.4)$$

Έτσι μπορούμε να πούμε και ότι κάθε X_n είναι μια προσαρμοσένη στοχαστική διαδικασία, αφού εξαρτάται μόνο από τις πρώτες n ρίψεις του νομίσματος.

Όπως και πριν, αν μελετήσουμε τι γίνεται όταν παίρνουμε τον μέσο όρο ως μια εκτιμήτρια για την πρόβλεψη της μέσης απόδοσης του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης παρατηρούμε ότι το μέτρο πιθανότητας παίζει σημαντικό ρόλο. Αυτό διότι, κάτω από το μέτρο πραγματικής πιθανότητας ο μέσος όρος εξαρτάται από την δομή και την διαχείριση του χαρτοφυλακίου που θα επιλέξει κάθε επενδυτής. Πιο συγκεκριμένα ένας επενδυτής αν ακολουθήσει τις εκτιμήσεις (πιθανότητες) της αγοράς μπορεί να πετύχει μεγαλύτερη απόδοση από αυτήν που προσφέρει η αγορά χρήματος. Η διαφορά ανάμεσα στην απόδοση των μετοχών και στο επιτόκιο της αγοράς για τους επενδυτές σημαίνει κέρδος. Παράλληλα όμως αυτή η στρατηγική εμπεριέχει κίνδυνο αφού οι αποδόσεις των μετοχών δεν επαληθεύονται πάντα.

Αντίθετα όταν χρησιμοποιούμε το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου για να εκτιμήσουμε την μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης τότε η δομή του χαρτοφυλακίου μας είναι αδιάφορη. Αυτό διότι, κάτω από το μέτρο του ουδέτερου ρίσκου η μέση απόδοση των μετοχών είναι ίση με το επιτόκιο της αγοράς. Ανεξάρτητα το πως ο επενδυτής θα διαιρέσει την αξία του χαρτοφυλακίου σε μετοχές και σε ένα τραπεζικό λογαριασμό κατά μέσο όρο θα έχει πετύχει μια απόδοση ίσης με το επιτόκιο της αγοράς. Έτσι πολλά χαρτοφυλάκια που είναι πιο επικίνδυνα από άλλα κάτω από το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου έχουν όλα την ίδια κατά μέσο όρο απόδοση.

Θεώρημα 3.2.2 *Θεωρούμε το διωνυμικό μοντέλο με* N *περιόδους και έστω* $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{N-1}$ *η προσαρμοσμένη διαδικασία του χαρτοφυλακίου με* X_0 *αρχικό πλού-*

το. Αν η $X_1, \dots, X_N$ είναι η διαδικασία πλούτου που παράγεται αναδρομικά από την σχέση (3.2.4) τότε η προεξοφλημένη διαδικασία πλούτου $\frac{X_n}{(1+r)^n}$ για $n = 0,1, \dots, N$ είναι martingale κάτω από το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου. Δηλαδή:

$$\frac{X_n}{(1+r)^n} = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] \tag{3.2.5}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] &= \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n}\right] \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] + \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^{n+1}}\right] \\
&= \Delta_n \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} \\
&= \Delta_n \frac{S_n}{(1+r)^n} + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} \\
&= \frac{X_n}{(1+r)^n}
\end{aligned}$$

■

Στην συνέχεια αν συνδυάσουμε το συμπέρασμα από την σχέση (3.2.3) και το Θεώρημα 3.2.2 προκύπτει ένα ένα πόρισμα.

Πόρισμα 2.4.6 *Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2.2 ισχύει ότι*:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_n}{(1+r)^n}\right] = X_0, \qquad n = 0,1, \dots, N \tag{3.2.5}$$

Το Θεώρημα 3.2.2 και το Πόρισμα 2.4.6 αποδεικνύουν ότι στο διωνυμικό μοντέλο δεν μπορεί να υπάρξει arbitrage (δηλαδή μια στρατηγική αγοραπωλησιών που οδηγεί σε σίγουρο κέρδος, χωρίς κίνδυνο). Κάτω από το μέτρο του ουδέτερου ρίσκου, η προεξοφλημένη διαδικασία πλούτου έχει σταθερή μέση τιμή. Έτσι δεν μπορεί να ξεκινάει το χαρτοφυλάκιο με μηδενική αξία (πλούτο) και στην συνέχεια να αποκτά αξία (πλούτο) με θετική πιθανότητα. Άρα, αν μπορούμε να βρούμε ένα μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου, δηλαδή, ένα μέτρο κάτω από το οποίο οι προεξοφλημένες τιμές όλων των πρωταρχικών τίτλων να είναι martingale, τότε δεν θα υπάρχει arbitrage στο μοντέλο. Αυτή η πρόταση είναι γνωστή και ως *Το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα Τιμολόγησης*.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο συναντήσαμε την εξίσωση τιμολόγησης κάτω από το κόσμου του ουδέτερου ρίσκου (risk-neutral pricing formula). Το θεώρημα 3.2.2 έρχεται να εκφράσει την εξίσωση αυτή με ένα διαφορετικό τρόπο. Οι πιθανές αποπληρωμές στο χρόνο n μας ωθούν να δούμε τα C_n ως τυχαίες μεταβλητές οι οποίες εξαρτώνται από τις πρώτες n ρίψεις. Επίσης από το Θεώρημα 2.1.1 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα αρχικό κεφάλαιο X_0 και μια διαδικασία ανακατασκευής του χαρτοφυλακίου Δ_0, $\Delta_1, \dots, \Delta_{N-1}$ που παράγει μια διαδικασία πλούτου $X_1, \dots, X_N$ τέτοια ώστε $X_N = C_N$ για κάθε ακολουθία ρίψης του νομίσματος. Το γεγονός ότι η $\frac{X_n}{(1+r)^n}, n = 0,1, \dots, N$ είναι martingale ως προς το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου, συνεπάγεται ότι:

$$\frac{X_n}{(1+r)^n} = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\widetilde{\mathbb{E}}_{n+1}\left[\frac{X_{n+2}}{(1+r)^{n+2}}\right]\right] = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_{n+2}}{(1+r)^{n+2}}\right]$$
$$= \dots = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right] =_{X_N=C_N} \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{C_N}{(1+r)^N}\right]$$

Άρα,

$$\frac{X_n}{(1+r)^n} = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{C_N}{(1+r)^N}\right] \tag{3.2.6}$$

Στην συνέχεια όμως, αφού βρούμε το X_0 και προβάλουμε αυτήν την αξία στο μέλλον, η αξία του χαρτοφυλακίου θα ισούται με την αποπληρωμή του δικαιώματος εκείνη την στιγμή. Δηλαδή, μπορούμε να εξισώσουμε το X_n με το C_n και να έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{C_n}{(1+r)^n} = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{C_N}{(1+r)^N}\right] \Leftrightarrow C_n = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{C_N}{(1+r)^{N-n}}\right] \tag{3.2.7}$$

Τα παραπάνω οδηγούν στο επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.2.3 *Θεωρούμε το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης με N περιόδους και $0 < d < 1 + r < u$. Αν C_N είναι η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει την αποπληρωμή του δικαιώματος στο χρόνο N τότε η τιμή του δικαιώματος στο χρόνο n, ώστε να μην δημιουργείται ευκαιρία για arbitrage ($n = 0,1, \dots N$) δίνεται από την εξίσωση:*

$$C_n = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{C_N}{(1+r)^{N-n}}\right]$$

Επιπλέον η προεξοφλημένη τιμή του δικαιώματος είναι μια διαδικασία martingale κάτω από το μέτρο $\widetilde{\mathbb{P}}$, δηλαδή,

$$\frac{C_n}{(1+r)^n} = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{C_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right], \quad n = 0,1, \dots, N-1, \tag{3.2.8}$$

3.3 Διαδικασίες Markov

Στην παράγραφο 2.3 είδαμε ότι οι υπολογισμοί που απαιτούνται για την τιμολόγηση ενός παραγώγου μέσω του αλγορίθμου στο Θεώρημα 2.1.1 μπορούν συχνά να μειωθούν σημαντικά. Αυτό επιτυγχάνεται με την αξιοποίηση της επαρκούς και αναγκαίας πληροφορίας που χρειάζεται για να μετακινούμαστε από περίοδο σε περίοδο. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν το Παραδείγμα 2.3.1 και το Παράδειγμα 2.3.2. Στο πρώτο παράδειγμα το μονοπάτι που ακολουθησε η μετοχή δεν παίζει ρόλο στην τιμολόγηση του δικαιώματος αλλά μόνο η τιμή της μετοχής σε εκείνο το σημείο. Ενώ στο δεύτερο παράδειγμα αρκεί να ξέρουμε την τιμή της μετοχής και το μέγιστο μέχρι εκείνη την στιγμή για κάθε κόμβο και επαρκούν για την τιμολόγηση. Σε αυτη την παράγραφο ερχόμαστε να προσδιορίσουμε πιο αυστηρά για το ποιά πληροφορία χρειάζεται και ποιά όχι.

Ορισμός 3.3.1 *Θεωρούμε το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης. Έστω* $X_0, \dots, X_N$ *μια προσαρμοσμένη διαδικασία. Αν για κάθε* n *μεταξύ του* 0 *και του* $N-1$ *και για κάθε συνάρτηση* $f(x)$ *υπάρχει μια άλλη συνάρτηση* $g(x)$ *,που εξαρτάται από τα* n *και* f*, τέτοια ώστε*

$$\mathbb{E}_n[f(X_{n+1})] = g(X_n), \tag{3.3.1}$$

λέμε ότι η ακολουθία $X_0, \dots, X_N$ *είναι μία διαδικασία Markov.*

Με άλλα λόγια παρατηρούμε τις πρώτες n ρίψεις ενός νομίσματος $(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n)$ και θέλουμε να εκτιμήσουμε είτε μια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X_{n+1} είτε γενικότερα μια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X_{n+k} με k ανάμεσα το 1 και στο $N-n$. Δηλαδή, εμείς γνωρίζουμε το μονοπάτι ή αλλιώς την ακολουθία ρίψης ζαριών $\rho_1\rho_2 \dots \rho_n$ και την τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X_n(\rho_1\rho_2 \dots \rho_n)$. Έτσι η εκτίμηση μας θα πρέπει να εξαρτάται από αυτές τις πληροφορίες. Όντως η $\mathbb{E}_n[f(X_{n+1})]$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που εξατάται από τις πρώτες n ρίψεις. Η Μαρκοβιανή ιδιότητα λέει ότι αυτή η εξάρτηση στην ρίψη του νομίσματος συμβαίνει μέσω της τυχαίας μεταβλητής X_n. Η πληροφορία των ρίψεων του νομίσματος προκειμένου να τιμολογηθεί η $\mathbb{E}_n[f(X_{n+1})]$ συνοψίζεται στην X_n.

Η ύπαρξη και μόνο της συνάρτησης g υποδηλώνει ότι η αποπληρωμή του δικαιώματος είναι τυχαία μεταβλητή μόνο μέσω της εξάρτησης με την X_n. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος τιμολόγησης του δικαιώματος που δεν χρειάζεται να απομημονεύει κάθε μονοπάτι που ακολουθεί ο υποκείμενος τίτλος. Ας δούμε όμως πως μπορούμε να αναπτύξουμε μια μεθοδολογία για τον υπολογισμό της g.

Στο διωνυμικό μοντέλο η τιμή της μετοχής στο χρόνο $n+1$ δίνεται συναρτήσει της μετοχής στο χρόνο n από την εξίσωση:

$$S_{n+1}(\rho_1 \dots \rho_n\rho_{n+1}) = \begin{cases} uS_n(\rho_1 \dots \rho_n), & \alpha\nu\ \rho_{n+1} = K \\ dS_n(\rho_1 \dots \rho_n), & \alpha\nu\ \rho_{n+1} = \Gamma \end{cases}$$

Αν εφαρμόσουμε μια συνάτηση f στην παραπάνω εξίσωση θα έχουμε:

$$f\big(S_{n+1}(\rho_1 \dots \rho_n\rho_{n+1})\big) = \begin{cases} f\big(uS_n(\rho_1 \dots \rho_n)\big), & \alpha\nu\ \rho_{n+1} = K \\ f\big(dS_n(\rho_1 \dots \rho_n)\big), & \alpha\nu\ \rho_{n+1} = \Gamma \end{cases}$$

Συνεπώς η υπό συνθήκη μέση τιμή για την παράπανω εξίσωση θα είναι:

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1})](\rho_1 \dots \rho_n) = pf\big(uS_n(\rho_1 \dots \rho_n)\big) + qf\big(dS_n(\rho_1 \dots \rho_n)\big), \tag{3.3.2}$$

και το δεξιό μέλος εξαρτάται από την ακολουθία ρίψης $\rho_1 \dots \rho_n$ μόνο μέσω της τιμής $S_n(\rho_1 \dots \rho_n)$. Απλουστεύοντας τον συμβολισμό παραλείποντας τον όρο $\rho_1 \dots \rho_n$ μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση ως:

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1})] = g(S_n),$$

όπου $g(x) = pf(ux) + qf(dx)$. Άρα η διαδικασία της τιμής της μετοχής είναι μια διαδικασία Markov. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν κάναμε κάποια υπόθεση για τις πιθανότητες p και q που χρησιμοποιήθηκαν. Συνεπώς η διαδικασία της τιμής της μετοχής είναι Markov κάτω από το μέτρο πραγματικής πιθανότητας και κάτω από το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου. Αντίθετα για να καθορίσουμε την συνάρτηση για τον υπολογισμό της αξίας του δικαιώματος C_n χρησιμοποιούμε την (3.2.8) η οποία ισχύει κάτω από το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου,

$$C_n = \frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_n[C_{n+1}]\,, \qquad n = 0,1,\dots,N-1$$

Αν η αποπληρωμή του δικαιώματος στην λήξη δίνεται από τον τύπο $C_N = u_N(S_N)$ και η διαδικασία της τιμής της μετοχής είναι Markov τότε:

$$C_{N-1} = \frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_{N-1}[u_N(S_N)] = u_{N-1}(S_{N-1})$$

Για κάποια συνάρτηση u_{N-1} (διαφορετική από την u_N).

Όμοια,

$$C_{N-2} = \frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_{N-2}[u_{N-1}(S_{N-1})] = u_{N-2}(S_{N-2})$$

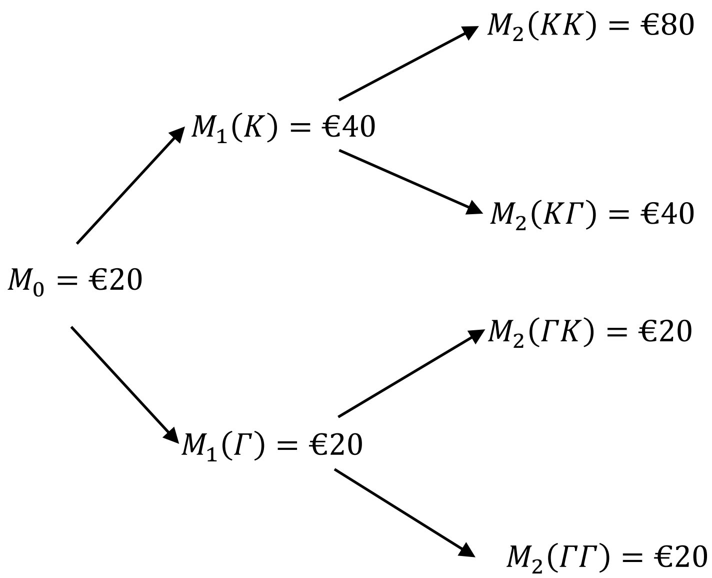
για κάποια συνάρτηση u_{N-2} (διαφορετική από την u_N και την u_{N-1}). Συνεπώς γενικά θα ισχύει $C_n = u_n(S_n)$. Η συνάρτηση u_n υπολογίζεται με ένα αναδρομικό αλγόριθμο κάνοντας χρήση της σχέσης (3.3.2). Ο αναδρομικός αυτός αλγόριθμος είναι ο εξής:

$$u_n(s) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}u_{n+1}(us) + \tilde{q}u_{n+1}(ds)], \qquad n = N-1, N-2, \dots, 0.$$

Ο αλγόριθμος δουλεύει για το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης για κάθε παράγωγο προϊόν που η αποπληρωμή του στο χρόνο N είναι συνάρτηση μόνο της τιμής της μετοχής στο χρόνο N. Ο αλγόριθμος παραμένει ο ίδιος ακόμα και σε παράγωγα προϊόντα διαφορετικού τύπου. Συγκεκριμένα ανάμεσα σε ένα δικαίωμα αγοράς και σε ένα δικαίωμα πώλησης το μόνο που αλλάζει είναι η συνάτηση $u_N(s)$. Για τα μεν δικαιώματα αγοράς η αποπληρωμη στη λήξη είναι $u_N(s) = (s-E)^+$ ενώ για τα διακιώμτα πώλησης η αποπληρωμή στη λήξη είναι $u_N(s) = (E-s)^+$.

Σημειώνεται ότι η ιδιότητα martingale είναι μια ειδική περίπτωση της 3.3.1 με $f(x) = x$ και $g(x) = x$. Όμως για να είναι μια διαδικασία Markov θα πρέπει για κάθε εξίσωση f να υπάρχει αντίστοιχη συνάρτηση g τέτοια ώστε να επαληθεύεται η 3.3.1 Οπότε κάθε διαδικασία που είναι martingale δεν είναι διαδικασία Markov. Επίσης κάθε διαδικασία Markov δεν είναι διαδικασία martingale. Αυτό διότι, ακόμα και αν η συνάρτηση f ήταν η $f(x) = x$, η διαδικασία Markov απαιτεί μόνο ότι η $\mathbb{E}_n[X_{n+1}] = g(X_n)$ για κάποια συνάρτηση g και όχι αναγκαία για $g(x) = x$.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα το οποίο δεν είναι διαδικασία Markov. Στο διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης στο Σχήμα 3.1.1 θεωρούμε τη διαδικασία $M_n = max_{0 \le k \le n} S_k$, η οποία υπολογίζει το μέγιστο σε κάθε κόμβο μέχρι εκείνη την στιγμή για κάθε μονοπάτι. Στο Σχήμα 3.1.1 παρουσιάζουμε το διωνυμικό δέντρο της παραπάνω διαδικασίας μέχρι το χρόνο δύο.



Σχήμα 3.3.1

Αν χρησιμοποιήσουμε τις πιθανότητες $p = \frac{2}{3}$ και $q = \frac{1}{3}$ θα έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}_2[M_3](ΓK) = \frac{2}{3} M_3(ΓKK) + \frac{1}{3} M_3(ΓKΓ) = \frac{2}{3} \cdot 40 + \frac{1}{3} \cdot 20 = \frac{100}{3} = 33.3,$$

$$\mathbb{E}_2[M_3](ΓΓ) = \frac{2}{3} M_3(ΓΓK) + \frac{1}{3} M_3(ΓΓΓ) = \frac{2}{3} \cdot 20 + \frac{1}{3} \cdot 20 = \frac{60}{3} = 20.$$

Αφού $M_2(ΓK) = M_2(KK) = 20$ σημαίνει ότι δεν γίνεται να υπάρχει μια συνάρτηση g τέτοια ώστε $\mathbb{E}_2[M_3](ΓK) = g\big(M_2(ΓK)\big)$ και $\mathbb{E}_2[M_3](ΓΓ) = g\big(M_2(KK)\big)$. Αυτό διότι τα δεξιά μέλη είναι ίσα αλλά τα αριστερά δεν είναι. Η διαδικασία M_n δεν είναι Markov. Στο χρόνο δύο αν καταγράψουμε μόνο τις τιμές $16, 8, 4$ χωρίς να καταγράψουμε τη τιμή της μετοχής σε κάθε κόμβο χάνουμε πληροφορία. Πιο πρακτικά, δεν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε μέγιστο σε κάθε χρόνο με ένα μοναδικό μονοπάτι, έχοντας ως μοναδική πληροφορία την τιμή του και σε ποιό χρόνο συμβαίνει. Έτσι όταν αντιμετωπίζουμε μια μη Μαρκοβιανή διαδικασία την μετατρέπουμε σε Μαρκοβιανή προσθέτοντας μια ή περισσότερες μεταβλητές οι οποίες ονομάζονται *μεταβλητές αναφοράς*. Η ονομασία *μεταβλητές αναφοράς* χρημοποιείται γιατί με την χρήση των μεταβλητών αυτών δίνεται μια αναφορά για την εικόνα της αγοράς. Αυτή η προσέγγιση ωστόσο απαιτεί την γενικεύση του Ορισμού 3.3.1 με μονοδιάστατες διαδικασίες στο Ορισμό 3.3.2 με πολυδιάστατες διαδικασίες.

Ορισμός $3.3.2$ *Έστω $\{(X_n^1, \dots, X_n^K) | n = 0,1, \dots, N\}$ μια K-διάστατη προσαρμοσμένη διαδικασία ή αλλιώς K μονοδιάστατες προσαρμοσμένες διαδικασίες. Αν για κάθε n μεταξύ του 0 και του $N-1$ και για κάθε συνάρτηση $f(x^1, \dots, x^K)$ υπάρχει μια άλλη συνάρτηση $g(x^1, \dots, x^K)$ η οποία εξαρτάται από τα f και n τέτοια ώστε*

$$\mathbb{E}_n[f(X_{n+1}^1, \dots, X_{n+1}^K)] = g(X_n^1, \dots, X_n^K), \tag{3.3.3}$$

Λέμε ότι η $\{(X_n^1, \dots, X_n^K) | n = 0,1, \dots, N\}$ είναι μία K-διάστατη διαδικασία Markov.

Τα παραδείγματα που έχουμε συναντήσει είναι μέχρι δισδιάστατες προσαρμοσμένες διαδικασίες. Συγκεκριμένα το Παράδειγμα 2.3.2 χρησιμοποιεί μια δισδιάστατη προσαρμοσμένη διαδικασία $\{(S_n, M_n) | n = 0,1,2,3\}$. Γενικεύοντας το παράδειγμα για N περιόδους αποδεικνύεται ότι αυτή η δισδιάστατη διαδικασία είναι Markov. Αρχικά ορίζουμε την τυχαία μετάβλητη $Y = \frac{S_{n+1}}{S_n}$ η οποία εξαρτάται μόνο από τη $(n+1)$ -οστή ρίψη. Έτσι

$$S_{n+1} = Y S_n.$$

Επίσης η μέγιστη τιμή στο χρόνο $n+1$ θα είναι το μέγιστο ανάμεσα στην τιμή της μετοχής στο χρόνο αυτό και στη μέγιστη τιμή για το χρόνο n. Δηλαδή,

$$M_{n+1} = M_n \vee S_{n+1} = M_n \vee (Y\, S_n),$$

όπου $x \vee y = max(x, y)$. Εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε το εξής:

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1}, M_{n+1})] = \mathbb{E}_n\big[f\big(S_n Y, M_n \vee (Y\, S_n)\big)\big].$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να εισάγουμε ένα Λήμμα το οποίο θα μας βοηθήσει στον υπολογισμό της υπο-συνθήκης μέσης τιμής μιας συνάρτησης με δύο ή περισσότερες τυχαίες μεταβλητές ως ορίσματα.

Λήμμα $3.3.3$ *Σε ένα διωνυμικό μοντέλο N περιόδων έστω ακέραιος αριθμός n που ανήκει στο $[0, N]$. Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X^1, \dots, X^K$ εξαρτώνται από τις πρώτες n ρίψεις και οι τυχαίες μεταβλητές $Y^1, \dots, Y^L$ εξαρτώνται μόνο από τις ρίψεις από $n+1$ μέχρι N. Αν $f(x^1, \dots, x^K, y^1, \dots, y^L)$ είναι μια συνάρτηση με $(K+L+2)$ μεταβλητές και ορίζεται ότι:*

$$g(x^1, \dots, x^K) = \mathbb{E}[f(x^1, \dots, x^K, Y^1, \dots, Y^L)], \tag{3.3.4}$$

τότε

$$\mathbb{E}_n[f(X^1, \dots, X^K, Y^1, \dots, Y^L)] = g(X^1, \dots, X^K). \tag{3.3.5}$$

Το παράδειγμά μας είναι μια ειδική περίπτωση για $K = L = 1$. Συνεπώς η σχέση (3.3.4) γίνεται

$$g(x) = \mathbb{E}[f(x, Y)]$$

και η σχέση (3.3.5) παίρνει την μορφή:

$$\mathbb{E}_n[f(X, Y)] = g(X)$$

όπου η τυχαία μεταβλητή X εξαρτάται από τις πρώτες n ρίψεις και η τυχαία μεταβλητή Y εξαρτάται μόνο από την $(n + 1)$ - οστή ρίψη μέχρι την N.

Στην ουσία το Λήμμα 3.3.3 εκφράζει μια ιδιότητα ανεξαρτησίας τυχαίων μεταβλητών. Στην υπό συνθήκη μέση τιμή $\mathbb{E}_n[f(X, Y)]$ η τυχαία μεταβλητή X είναι γνωστή αφού έχει συμβεί και η n-οστή ρίψη. Όμως λόγω του ότι η X είναι μέσα στην συνάρτηση f δεν μπορούμε να την βγάλουμε έξω ως παράγοντα. Συνεπώς, χρησιμοποιούμε την μεταβλητή x για να δηλώσουμε ότι μιλάμε για κάτι σταθερό. Έτσι, υπολογίζουμε την υπό συνθήκη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $f(x, Y)$ της οποίας η τυχαιότητα εξαρτάται από την τυχαία μεταβλητή Y από την $(n + 1)$-οστή ρίψη μέχρι την N.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα μας, κάνοντας χρήση του Λήμματος 3.3.3 αντικαθιστούμε την S_n με την μεταβλητή s και την M_n με την μεταβλητή m και υπολογίζουμε ότι :

$$g(s, m) = \mathbb{E}[f(sY, m \vee (sY)\,)\,] = pf(us, m \vee (us) + qf\big(ds, m \vee (ds)\big).$$

Άρα

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1}, M_{n+1})] = g(S_n, M_n).$$

Η υπό συνθήκη μέση τιμή $\mathbb{E}_n[f(S_{n+1}, M_{n+1})]$ είναι τυχαία μεταβλητή ως συνάρτηση των τυχαίων μεταβλητών S_n και M_n και άρα η $\{(S_n, M_n) | n = 0,1, \dots, N\}$ είναι μια δισδιάστατη διαδικασία Markov. Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου $\widetilde{\mathbb{P}}$.

Πριν προχωρήσουμε στην αποπληρωμή του δικαιώματος C_n και πως αυτή συνδέεται με την συνάρτηση u_n θα αναφέρουμε μια ιδιότητα της Μαρκοβιανής διαδικασίας. Μέχρι τώρα η διαδικασία Markov είτε ήταν μονοδιάσταση είτε δισδιάστατη όριζε μια εξίσωση για την υπό συνθήκη μέση τιμή της X_{n+1} σε όρους X_n. Αυτό όμως γενικεύεται για τυχαίες μεταβλητές που διαφέρουν πάνω από μια περίοδο. Πράγματι, αν $X_0, \dots, X_N$ είναι μία διαδικασία Markov και ένας ακέραιος αριθμός $n \leq N - 2$, γνωρίζαμε ότι για κάθε συνάρτηση f υπάρχει μια συνάρτηση g τέτοια ώστε:

$$\mathbb{E}_{n+1}[f(X_{n+2})] = g(X_{n+1}).$$

Αν πάρουμε και στα δύο μέλη υπό συνθήκη μέσες τιμές θα έχουμε:

$$\mathbb{E}_n\big[\mathbb{E}_{n+1}[f(X_{n+2})]\big] = \mathbb{E}_n[g(X_{n+1})] \Leftrightarrow \mathbb{E}_n[f(X_{n+2})] = \mathbb{E}_n[g(X_{n+1})]$$

όμως αφού βρίσκομαι στο χρόνο n και η X_n είναι διαδικασία Markov θα έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}_n[f(X_{n+2})] = \mathbb{E}_n[g(X_{n+1})] \xRightarrow{X\sim Markov} \mathbb{E}_n[f(X_{n+2})] = h(X_n).$$

Άρα επαναλαβάνοντας διαδοχικά το παραπάνω συμπέρασμα αποδεικνύεται ότι για κάθε n με $0 \le n \le m \le N$ και για κάθε συνάρτηση f υπάρχει μια συνάρτηση g (όχι η ίδια με πάνω) τέτοια ώστε:

$$\mathbb{E}_n[f(X_m)] = g(X_n). \tag{3.3.6}$$

Όμοια αν $\{(X_n^1, \dots, X_n^K) | n = 0,1, \dots, N\}$ είναι μία K-διάστατη διαδικασία Markov, τότε για κάθε n με $0 \le n \le m \le N$ και για κάθε συνάρτηση $f(x^1, \dots, x^K)$ υπάρχει μια συνάρτηση $g(x^1, \dots, x^K)$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}_n[f(X_m^1, \dots, X_m^K)] = g(X_n^1, \dots, X_n^K). \tag{3.3.7}$$

Επιστρέφουμε τώρα στο διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης και την αποπληρωμή του δικαιώματος C_n. Η αποπληρωμή στη λήξη δίνεται από τον τύπο $C_N = u_N(S_N)$. Το πρώτο μέλος της εξίσωσης εξαρτάται από την ακολουθία των ρίψεων του νομίσματος ενώ το δεύτερο μέλος από έναν πραγματικό αριθμό, την τιμή της μετοχής. Υπό αυτό το πρίσμα η $u_N(S_N)$ δεν περιέχει τίποτα τυχαίο. Αν όμως γράψουμε $u_N\big(S_N(\rho_1 \dots \rho_n)\big)$ τότε μιλάμε για μια τυχαία μεταβλητή για την οποία ισχύει:

$$C_N(\rho_1 \dots \rho_N) = u_n\big(X_N(\rho_1 \dots \rho_N)\big) \quad \text{για όλα τα } \rho_1 \dots \rho_N$$

Επίσης από Θεώρημα 3.2.3 ισχύει ότι:

$$C_n(\rho_1 \dots \rho_N) = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{C_N}{(1+r)^{N-n}}\right](\rho_1 \dots \rho_N) \quad \text{για όλα τα } \rho_1 \dots \rho_N$$

Αν εφαρμόσουμε την σχέση (3.3.6) συνεπάγεται ότι:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{C_N}{(1+r)^{N-n}}\right](\rho_1 \dots \rho_N) = u_n\big(X_n(\rho_1 \dots \rho_N)\big) \quad \text{για όλα τα } \rho_1 \dots \rho_N$$

Άρα η τιμή του δικαιώματος στο χρόνο n είναι μία συνάρτηση ως προς X_n. Δηλαδή,

$$C_n = u_n(X_n)$$

Θεώρημα 3.3.4 *Έστω $X_0, \dots, X_N$ μια διαδικασία Markov σε ένα διωνυμικό μοντέλο. Αν θεωρήσουμε ένα παράγωγο προϊόν του οποίου η αποπληρωμή στο χρόνο N είναι $u_N(X_N)$ τότε για κάθε n στο $[0, N]$ η τιμή C_n του παραγώγου αυτού είναι κάποια συνάρτηση u_n του X_n. Δηλαδή,*

$$C_n = u_n(X_n), n = 0,1, \dots, N. \tag{3.3.8}$$

Η συνάρτηση u_n υπολογίζεται με έναν αναδρομικό αλγόριθμο του οποίου ο ακριβής τύπος εξαρτάται από την διαδικασία Markov $X_0, \dots, X_N$.

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν όταν η διαδικασία Markov είναι πολυδιάστατη. Στο διωνυμικό μοντέλο όπου συναντήσαμε παραπάνω η αποπληρωμή στο χρόνο N είναι $u_N(X_N, C_N)$. Μια συνάρτηση ως προς την τιμή της μετοχής και την μέγιστη τιμή που έχει λάβει μέχρι την λήξη. Σύμφωνα με το θεώρημα θα ισχύει:

$$C_n = u_n(S_n, M_n) = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{u_N(S_N, M_N)}{(1+r)^{N-n}}\right]$$

Επίσης, αν θυμηθούμε το Θεώρημα 3.2.3 για την τιμολόγηση κάτω από το μέτρο του ουδέτερου ρίσκου συνεπάγεται ότι:

$$C_n = \frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_n[C_{n+1}]$$

Συνδιάζοντας της δύο παραπάνω σχέσεις και κάνοντας χρήση του Λήμματος 3.3.3 προκύπτει ένας αναδρομικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό της συνάρτησης u_n. Έτσι αν υποθέσουμε για κάποιο χρόνο n ανάμεσα στο μηδέν και στο $N-1$ ότι έχουμε υπολογίσει την συνάρτηση u_{n+1} τέτοια ώστε $C_{n+1} = u_{n+1}(S_{n+1}, M_{n+1})$ τότε:

$$\begin{aligned} C_n = u_n(S_n, M_n) &= \frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_n[u_{n+1}(S_{n+1}, M_{n+1})] \\ &= \frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[u_{n+1}\left(S_n \cdot \frac{S_{n+1}}{S_n}, M_n \vee \left(S_n \cdot \frac{S_{n+1}}{S_n}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

Αφού δεσμεύουμε στο χρόνο n σημαίνει ότι οι ποσότητες S_n και M_n είναι γνωστές. Έτσι μπορούν να αντικατασταθούν με τις μεταβλητές s και m αντίστοιχα. Ο όρος $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ εξαρτάται από την $(n+1)$-οστή ρίψη. Άρα,

$$\begin{aligned} u_n(s,m) &= \frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[u_{n+1}\left(s \cdot \frac{S_{n+1}}{S_n}, m \vee \left(s \cdot \frac{S_{n+1}}{S_n}\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}u_{n+1}\big(us, m \vee (us) + \tilde{q}(ds, m \vee ds)\big)\right] \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να απλοποιηθεί αν σκεφτεί κανείς ότι $m \geq s$. Στο διωνυμικό μοντέλο όμως έχουμε υποθέσει ότι $d \leq 1$ ή αλλιώς ότι $s \geq ds$. Άρα, συνεπάγεται για n από μηδέν μέχρι $N-1$ ότι $m \geq ds$ ή αλλιώς $(m \vee ds) = m$. Συνεπώς ο αλγόριθμος τιμολόγησης γίνεται:

$$u_n(s,m) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}u_{n+1}\big(us, m \vee (us) + \tilde{q}(ds, m)\big)\right] \quad n = N-1, N-2, \dots, 0.$$

(3.3.10)

Με αυτό το τρόπο καταφέραμε να κατασκευάσουμε ένα τύπο για τον υπολογισμό της τιμής του δικαιώματος χωρίς να μας ενδιαφέρει το μονοπάτι που ακολούθησε η μετοχή. Για περισσότερες τεχνικές και αποτελέσματα παραπέμπουμε στο [9].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Οριακή συμπεριφορά Διωνυμικού μοντέλου

Διαβάζοντας τις προηγούμενες ενότητες υπάρχει μια φυσική τάση να ταυτίζουμε κάθε περίοδο με μια συγκεκριμένη διάρκεια σε πραγματικό χρόνο. Η διάρκεια μιας ημέρας είναι η πιο συνηθισμένη επιλογή. Στην πραγματικότητα όμως τα πράγματα είναι πολύ διαφορετικά. Πρώτον οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει μια μετοχή σε μια ημέρα μπορεί να είναι παραπάνω από δυο. Επίσης η αγορά δεν είναι διαθέσιμη για συναλλαγές μια συγκεκριμένη ημέρα, αντιθέτως οι συναλλαγές είναι σχεδόν συνεχόμενες.

Οι δυο παραπάνω παρατηρήσεις είναι πολύ βάσιμες. Το διακριτό μοντέλο με το οποίο προσεγγίσαμε την τιμολόγηση των δικαιωμάτων έχει την ευελιξία να προσαρμοστεί σε αυτήν την πραγματικότητα. Αν και είναι φυσικό να σκεφτόμαστε μια περίοδο ως μια ημέρα, από την άλλη δεν υπάρχει κάτι που να μας αναγκάζει να το κάνουμε. Έτσι θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε μικρότερα διαστήματα, όπως μιας ώρας ή ενός λεπτού. Την ίδια στιγμή λοιπόν, οι συναλλαγές θα ήταν πάρα πολύ συχνές και η μετοχή θα μπορούσε να πάρει εκατοντάδες τιμές μέχρι το τέλος της μέρας. Η παραπάνω σκέψη προϋποθέτει ότι η πιθανότητα η τιμή μιας μετοχής να έχει μεγάλες αυξομειώσεις μέσα σε ένα λεπτό είναι μικρή. Αυτό βοηθάει το μοντέλο μας να προσημειώσει πιο πιστά την πραγματικότητα. Σε αντίθετη περίπτωση οι ποσοστιαίες μεταβολές της ημέρας θα ήταν ίδιες με αυτές του λεπτού. Για αυτό θεωρούμε ότι η ποσοστιαίες μεταβολές της μετοχής είναι πολύ μικρές σε κάθε λεπτό.

4.1 Προσαρμογή των r, u και d στην οριακή περίπτωση.

Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε μια μεταβλητή h η οποία αντιπροσωπεύει τον ενδιάμεσο χρόνο ανάμεσα σε δυο διαδοχικές μεταβολές της τιμής της μετοχής. Δηλαδή, αν T είναι ο προκαθορισμένος χρόνος μέχρι την λήξη, και n το πλήθος των διαστημάτων μήκους h πριν την λήξη, τότε θα έχουμε ότι :

$$h \equiv \frac{T}{n} \tag{4.1.1}$$

Καθώς οι συναλλαγές γίνονται όλο και πιο συχνές, το h πλησιάζει όλο και περισσότερο προς το μηδέν. Επίσης, το επιτόκιο και οι ποσοστιαίες μεταβολές της μετοχής πρέπει κάθε φορά να προσαρμόζονται σε αυτό το διάστημα για να προκύπτουν ρεαλιστικά αποτελέσματα. Με άλλα λόγια οι μεταβλητές u και d είναι εξαρτημένες από την μεταβλητή h. Άρα πρέπει να τις προσαρμόσουμε καθώς τα διαστήματα ανάμεσα στις διαδοχικές μεταβολές τις μετοχής γίνονται όλο και πιο μικρά ή ισοδύναμα το $n \to \infty$.

Μέχρι πριν από αυτό το κεφάλαιο δεν υπήρχε η ανάγκη το επιτόκιο για ένα συγκεκριμένο διάστημα πριν λήξη να διαφοροποιηθεί από το επιτόκιο της μιας περιόδου.

Αυτό διότι, ταυτίζαμε αυτό το συγκεκριμένο διάστημα με το μέτρο μιας περιόδου. Σε αυτό το σημείο ερχόμαστε να κάνουμε ένα διαχωρισμό ανάμεσα σε αυτά τα δύο μοντέλα. Η μεταβλητή r θα συνεχίσει να συμβολίζει το επιτόκιο για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (συνήθως ένα έτος). Έτσι, σε διάστημα n περιόδων και χρόνο T να απομένει μέχρι τη λήξη, η συνολική απόδοση είναι $\left(1+\frac{rT}{n}\right)^n$. Καθώς το $n \to \infty$ θα έχουμε:

$$\left(1+\frac{rT}{n}\right)^n \approx e^{rT} \tag{4.1.2}$$

Από τον τρόπο που ορίσαμε τα ενδιάμεσα διαστήματα καθώς το $n \to \infty$, ή ισοδύναμα το $h \to 0$, το διωνυμικό μοντέλο πολλαπλών περιόδων, για κατάλληλα u και d, μπορεί να θεωρηθεί ότι προσεγγίζει μια συνεχή στοχαστική διαδικασία. Αυτό διότι σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα θα συμβαίνουν πολλές μικρές τυχαίες μεταβολές στην τιμή της μετοχής. Αν ένα μολύβι προσομοίωνε στο χαρτί το μονοπάτι της μετοχής, δεν θα χρειαζόταν να σηκωθεί από αυτό. Η τιμή της μετοχής θα ταλαντεύεται ακατάπαυστα. Με την σειρά της η συνεχής στοχαστική διαδικασία μας οδηγεί στην formula των Fisher Black και Myron Scholes για την τιμολόγηση δικαιωμάτων στο συνεχή χρόνο.

Για να υπολογίσουμε τα κατάλληλα αυτά u και d πρέπει να θυμηθούμε πως τα είχαμε ορίσει. Σε κάθε περίοδο το $u-1$ αντιστοιχούσε στην ποσοστιαία αύξηση της μετοχής με πιθανότητα p και το $1-d$ στην ποσοστιαία μείωση της μετοχής με πιθανότητα $1-p$. Αν η τρέχουσα τιμή μετοχής ήταν S, η τιμή στο τέλος της περιόδου θα είναι είτε uS είτε dS. Αντί αυτού θα είναι πιο εύκολο για την ανάλυση στην συνέχεια να δουλέψουμε με τους φυσικούς λογάριθμους $logu$ και $logd$ (π.χ βλ.[3]). Οι φυσικοί λογάριθμοι δίνουν την σύνθετη απόδοση σε συνεχή χρόνο για μια μετοχή σε κάθε περίοδο. Οι αποδόσεις είναι τυχαίες μεταβλητές οι οποίες για κάθε περίοδο είναι ίσες με $logu$ με πιθανότητα p και $logd$ με πιθανότητα $1-p$.

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία ακολουθία από 5 κινήσεις της μετοχής, K, Γ, K, K, Γ όπου K και Γ αντιστοιχούν σε αποδόσεις της μετοχής $u-1$ και $1-d$ αντίστοιχα. Τότε η τελική τιμή της μετοχής θα είναι $S_T = uduudS$ ή ισοδύναμα $S_T/S = u^3d^2$ το οποίο συνεπάγεται $\log(S_T/S) = 3logu + 2logd$.

Γενικά για n περιόδους θα έχω:

$$\log(S_T/S) = \kappa logu + (n-\kappa)logd = \kappa log(u/d) + nlogd,$$

Όπου κ είναι η τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής K που μετράει το πλήθος των ανοδικών κινήσεων που θα συμβούν μέχρι τη λήξη. Η κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή K είναι Διωνυμική με μέση τιμή $\mathbb{E}[K] = np$ και διασπορά $Var[K] = np(1-p)$.

Αν η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής $\log(S_T/S)$ είναι:

$$\mathbb{E}[\log(S_T/S)] = log(u/d) \cdot \mathbb{E}(K) + nlogd,$$

και η διασπορά της:

$$Var[\log(S_T/S)] = [log(u/d)]^2 \cdot Var(K).$$

Τότε αν συνδυάσουμε τα δύο παραπάνω συμπεράσματα θα έχουμε:

$$\mathbb{E}[\log(S_T/S)] = [plog(u/d) + logd]n \equiv \hat{\mu}n \tag{4.1.3}$$

$$Var[\log(S_T/S)] = p(1-p)[log(u/d)]^2 n \equiv \hat{\sigma}^2 n \tag{4.1.4}$$

Άρα, για μια μετοχή αρκεί να πάρω μια σύνθετη απόδοση σε συνεχή χρόνο με μέση τιμή $\hat{\mu}n$ και διασπορά $\hat{\sigma}^2 n$. Ακόμα όμως δεν έχουμε φτάσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Αν θεωρήσουμε ότι όλα παραμένουν σταθερά καθώς το n γίνεται μεγάλο αντιμετωπίζουμε το ίδιο πρόβλημα με πριν. Αυτό διότι, δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα λογικό συμπέρασμα όταν είτε το $\hat{\mu}n$ είτε το $\hat{\sigma}^2 n$ πηγαίνει στο μηδέν ή στο άπειρο καθώς το n γίνεται πολύ μεγάλο. Για αυτό το λόγο θα επιλέξω τα u, d, και p με τέτοιο τρόπο ώστε η μέση τιμή και η διασπορά της σύνθετης απόδοσης σε συνεχή χρόνο για ένα μονοπάτι της μετοχής να συμπίπτει με αυτή της μετοχής στην πραγματικότητα καθώς το $n \to \infty$. Συνεπώς, θα επιλέξουμε u, d, και p τέτοια ώστε καθώς το $n \to \infty$ να ισχύει:

$$[plog(u/d) + logd]n \to \mu T$$

και

$$p(1-p)[log(u/d)]^2 n \to \sigma^2 T$$

Αυτό επιτυγχάνεται αν θέσουμε:

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}},$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}},$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mu/\sigma)\sqrt{T/n}$$

Στην παραπάνω ανάλυση θα ήταν ισοδύναμο να επιλέξουμε u, d και p τέτοια ώστε η μέση τιμή και η διασπορά των μελλοντικών τιμών της μετοχής στο διακριτό διωνυμικό μοντέλο να προσεγγίζει την προκαθορισμένη μέση και διασπορά της πραγματικής μετοχής καθώς $n \to \infty$. Υπολογιστικά όμως, είναι πιο βολικό να δουλεύουμε με την σύνθετη απόδοση σε συνεχή χρόνο.

Η μέση τιμή και η διασπορά περιγράφουν μόνο δύο πτυχές της κατανομής. Αν και οι αρχικές μας απαιτήσεις ικανοποιούνται από τους παραπάνω δείκτες, είναι χρήσιμο να τις επαληθεύσουμε φτάνοντας σε μια οριακή κατανομή για την σύνθετη απόδοση σε συνεχή χρόνο. Η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την σύνθετη απόδοση σε συνεχή χρόνο για ένα διάστημα T είναι ένα άθροισμα από n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Οι τιμές που μπορούν να πάρουν οι παραπάνω τυχαίες μεταβλητές είναι $logu$ και $logd$ με πιθανότητα p και $1-p$ αντίστοιχα. Εμείς θέλουμε να μελετήσουμε την κατανομή αυτού του αθροίσματος καθώς το n γίνεται μεγάλο. Σημειώνεται ότι όταν το n αλλάζει, δεν προσθέτουμε απλά περισσότερες τυχαίες μεταβλητές στο προηγούμενο άθροισμα, αντί αυτού αλλάζουν οι πιθανότητες και τα πιθανά αποτελέσματα για κάθε όρο το αθροίσματος. Σε αυτό το σημείο θα βασιστούμε σε μια μορφή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος που αναφέρεται στην ταχύτητα της σύγκλισης το οποίο και παραθέτουμε χωρίς απόδειξη. Το θεώρημα είναι γνωστό στην βιβλιογραφία ως Θεώρημα των Berry και Esseen (π.χ βλ. [10]).

Θεώρημα 4.1.1 *Έστω ακολουθία* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με* $\mathbb{E}\{|X|^3\} < +\infty$, *και έστω* $\mu = \mathbb{E}X_1$ *και* $\sigma^2 = Var(X_1)$. *Τότε υπάρχει μια γενική σταθερά* $c \in \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, 0.8\right)$ *τέτοια ώστε:*

$$sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{c\mathbb{E}\{|X_1|^3\}}{\sqrt{n}\sigma^3}$$

όπου Φ είναι η τυπική κανονική κατανομή.

Όταν εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα στο πρόβλημα μας παρατηρούμε ότι καθώς το $n \to \infty$, αν

$$\frac{p|logu-\hat{\mu}|^3 + (1-p)|logd-\hat{\mu}|^3}{\hat{\sigma}^3\sqrt{n}} \to 0 \qquad (4.1.5)$$

τότε

$$P\left(\frac{\log(S^*/S) - \hat{\mu}n}{\hat{\sigma}\sqrt{n}} \leq z\right) \to \Phi(z) \qquad (4.1.6)$$

Πράγματι, αν στην σχέση (4.1.5) αντικαταστήσουμε τις (4.1.3) και (4.1.4) προκύπτει:

$$\frac{p|logu-\hat{\mu}|^3 + (1-p)|logd-\hat{\mu}|^3}{\hat{\sigma}^3\sqrt{n}} = \frac{(1-p)^2+p^2}{\sqrt{np(1-p)}} \to 0$$

αν συνυπολογίσουμε ότι το $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mu/\sigma)\sqrt{T/n}$.

Η παραπάνω συνθήκη δηλώνει ότι υψηλής τάξης ιδιότητες της κατανομής όπως είναι η κυρτότητά της, γίνονται όλο και λιγότερο σημαντικές σε σχέση με την τυπική απόκλισή της καθώς $n \to \infty$.

Με την σειρά της η σχέση (4.1.6) συνεπάγεται ότι το διωνυμικό μοντέλο πολλαπλών περιόδων για μια μετοχή περιλαμβάνει την λογαριθμική κατανομή ως οριακή περίπτωση. Αυτό διότι, μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί λογαριθμική κατανομή αν ο φυσικός λογάριθμος της μεταβλητής ακολουθεί κανονική κατανομή.

Οι Fisher Black και Myron Scholes ξεκίνησαν κατευθείαν με συναλλαγές σε συνεχή χρόνο και την υπόθεση μιας λογαριθμική κατανομής για την κίνηση της τιμή της μετοχής. Έτσι, στο τύπο των Black και Scholes που δίνει την no- arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με ημερομηνίας λήξης T και τιμή εξάσκησης K στο χρόνο t απέδειξαν ότι είναι:

$$C = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \tag{4.1.7}$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{4.1.8}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{4.1.9}$$

και Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$, σ η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής και r το επιτόκιο της αγοράς.

4.2 Παραδείγματα και αλγόριθμοι στην οριακή περίπτωση.

Η παράγραφος αυτή έρχεται ως συνέχεια της προηγούμενης με σκοπό να υλοποιήσει μέσω κατάλληλων αλγορίθμων το παραπάνω θεωρητικό κομμάτι. Οι αλγόριθμοι που ακολουθούν διαφέρουν από αυτούς στο Κεφάλαιο 2. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές r, u και d των αλγορίθμων έχουν αλλάξει όπως περιγράφηκε παραπάνω έτσι ώστε το διωνυμικό μοντέλο να προσεγγίζει το μοντέλο Black και Scholes όταν το $n \to \infty$. Τα συμβόλαια που θα τιμολογηθούν θα είναι ένα Call Option και ένα Asian Option. Για να γίνει καλύτερη παρουσίαση, οι σχετικοί αλγόριθμοι θα είναι χωρισμένοι σε ενότητες οι οποίες θα συνοδεύονται από παραδείγματα. Στην συνέχεια, για το call option ο αλγόριθμος θα υλοποιηθεί για ένα μεγάλο n και θα γίνει σύγκριση με το αποτέλεσμα που δίνει ο τύπος των Black και Scholes. Για το Asian Option ο αλγόριθμος θα υλοποιηθεί για ένα μεγάλο n και η σύγκριση θα γίνει μέσω προσομοίωσης.

Call Option – Διωνυμικό Μοντέλο (περιγραφή αλγορίθμου).

Αρχικά δηλώνονται οι παράμετροι του μοντέλου:

h: ενδιάμεσος χρόνος ανάμεσα σε δυο διαδοχικές μεταβολές της τιμής της μετοχής.
n: πλήθος των διαστημάτων μήκους h.

S_0: τιμή εκίνησης της μετοχής.
K: τιμή εξάσκησης.
r: ετήσιο επιτόκιο (θεωρείται συνεχής ανατοκισμός).
μ: τάση (σύμφωνα με το μέτρο ουδέτερου κινδύνου)
σ: volatility
up: ποσοστιαία αύξηση.
$down$: ποσοστιαία μείωση.
p: η πιθανότητα η μετοχή να κινηθεί ανοδικά.
q: η πιθανότητα η μετοχή να κινηθεί καθοδικά.

Όλοι οι κώδικες που ακολουθούν υλοποιούνται στο υπολογιστικό πακέτο Wolfram Mathematica 7

```
h=T/n;
n=3;
S0=20;
K=22;
T=1;
r=0.5;
μ=r-σ^2/2;
σ=0.2;
up=Exp[σ*h^0.5];
down=Exp[-σ*h^0.5];
p=(Exp[r*h]-down)/(up-down);
q=1-p;
```

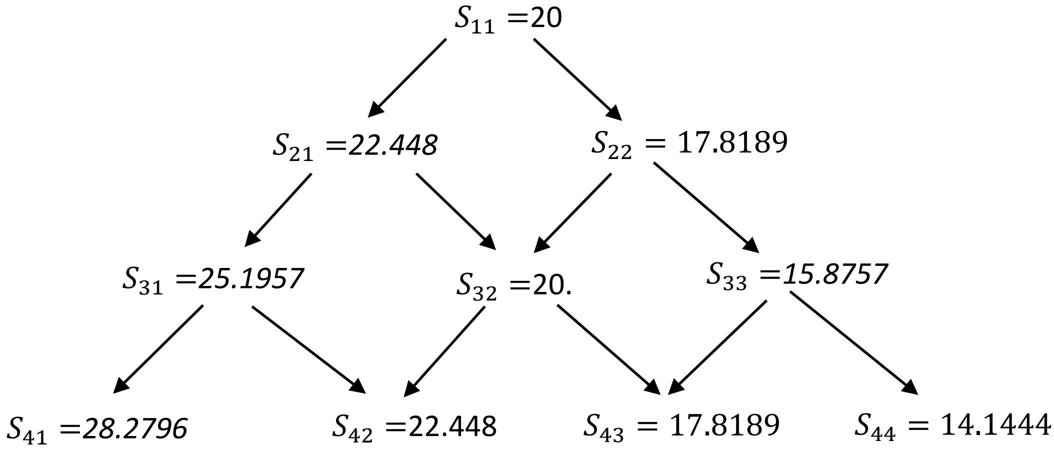
Το επόμενο βήμα αναφέρεται στα πιθανά μονοπάτια που θα ακολουθήσει η μετοχή. Αυτό στον αλγόριθμο περιγράφεται με έναν πίνακα. Αρχικά δημιουργείται ένας πίνακας S με μηδενικά $n+1$ γραμμών όπου η i γραμμή περιέχει ένα διάνυσμα i κελιών. Στην συνέχεια με μια εμφωλευμένη επανάληψη γεμίζει ο πίνακας από πάνω προς τα κάτω και από τα αριστερά προς τα δεξιά έτσι ώστε στη θέση S_{ij} η τιμή να είναι $S_0 up^{i-j} down^{j-1}$.

```
S=Table[0,{n+1}];
Do[
      S[[i]]=Table[0,{i}],
{i,1,n+1}];
Do[
 Do[S[[i,j]]=S0*(up^(i-j))*(down^(j-1))
    ,{j,1,Length[S[[i]]]}];

,{i,1,n+1}];

Print[S]
```

```
{{20.},{22.448,17.8189},{25.1957,20.,15.8757},{28.2796,22.448,17.8189,14.144
4}}
```

Παράδειγμα με παραμέτρους: $\boldsymbol{n = 3, S_0 = 20, K = 22, T = 1, r = 0.5, \sigma = 0.2}$

Κίνηση Μετοχής



Ο κώδικας μέχρι τώρα έχει κατασκευάσει ένα δέντρο με όλα τα πιθανά μονοπάτια της μετοχής. Στο βήμα που ακολουθεί αρχικά κατασκευάζεται ένας πίνακας ίσης διάστασης με τον πίνακα $\boldsymbol{S}$ και γεμίζει με μηδενικά. Στην συνέχεια ξεκινάει μια από κάτω προς τα πάνω διαδικασία για τον υπολογισμό της τιμής του δικαιώματος. Στο χρόνο $\boldsymbol{n=3}$ δηλαδή στην γραμμή **4** ο αλγόριθμος υπολογίζει το θετικό μέρος της διαφοράς της τιμής εξάσκησης από την τιμή της μετοχής στο χρόνο αυτό, δηλαδή $\boldsymbol{C_{n,i}} = (\boldsymbol{S_{n,i}} - \boldsymbol{K})_+$ (call option). Για τις γραμμές από $\boldsymbol{n-1}$ μέχρι 1 ο αλγόριθμος κινούμενος προς τα πάνω υπολογίζει για τον $\boldsymbol{ij}$ κόμβο:

$$\boldsymbol{C_{ij} = e^{-rh}\left(pC_{i+1j} + qC_{i+1j+1}\right)}$$

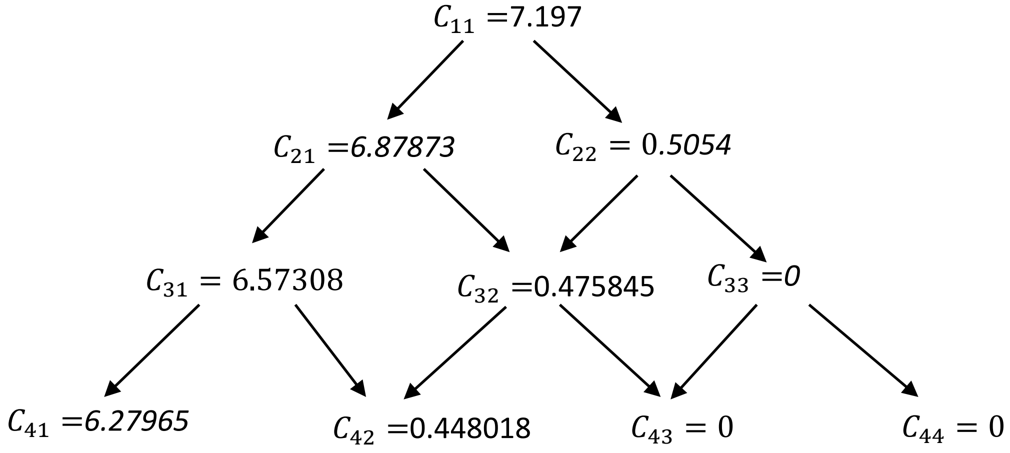
Η διαδικασία αυτή επιτυγχάνεται πάλι με μια εμφωλευμένη επανάληψη. Με τη λήξη της επανάληψης ο αλγόριθμος εμφανίζει στο κελί 11 την τιμή $\boldsymbol{C_{11}}$, δηλαδή την τιμή του δικαιώματος στο χρόνο μηδέν.

```
c=Table[0,{n+1}];

Do[c[[i]]=Table[0,{i}]
  ,{i,1,n+1}];

Do[c[[n+1,j]]=Max[S[[n+1,j]]-K,0]
,{j,1,n+1}];

Do[
   Do[
      c[[i,j]]=Exp[-r*h]*(p*c[[i+1,j]]+q*c[[i+1,j+1]])
   ,{j,1,Length[c[[i]]]}];
,{i,n,1,-1}];
Print[c]
Print["Αξία Δικαιώματος=",c[[1,1]],"\[Euro]"]
```

```
{{7.197},{6.87873,0.5054},{6.57308,0.475845,0.},{6.27965,0.448018,0,0}}
```

Ως συνέχεια του παραπάνω παραδείγματος ο αλγόριθμος υλοποιείται ώς εξής:

Τιμή δικαιώματος



Σε αυτό το σημείο μπορούμε να πούμε ότι ο αλγόριθμος έχει ολοκληρώσει το σκοπό του, αφού έχει υπολογίζει την τιμή του δικαιώματος στο χρόνο μηδέν. Ωστόσο, για πραγματοποιήσουμε μια στρατηγική αντιστάθμισης κινδύνου χρειαζόμαστε μια ακόμα μεταβλητή. Στο διωνυμικό μοντέλο αυτή ονομάζεται $\boldsymbol{delta}$ και αναφέρεται στο πλήθος των μετοχών που πρέπει να έχω σε κάθε κόμβο για την αποπληρωμή του δικαιώματος. Ο κώδικας που ακολουθεί έχει να κάνει ακριβώς με αυτό. Σε αντίθεση με τα δύο προηγούμενα βήματα ο πίνακας που θα κατασκευάζεται έχει μια γραμμή λιγότερη. Και εδώ όμως η διαδικασία υπολογισμού είναι από κάτω προς τα πάνω. Όπου το $\boldsymbol{delta}$ στο κόμβο $\boldsymbol{ij}$ θα προκύπτει ως εξής:

$$\boldsymbol{delta_{ij}} = \frac{\boldsymbol{C_{i+1,j} - C_{i+1,j+1}}}{\boldsymbol{S_{i+1,j} - S_{i+1,j+1}}}.$$

Επίσης, σε κάθε κόμβο ο αλγόριθμος εμφανίζει ακόμα έναν πραγματικό αριθμό ο οποίος αναφέρεται στο χρηματικό ποσό που πρέπει να έχει το χαρτοφυλάκιο τη δεδομένη χρονική στιγμή. Ο αλγόριθμος αφού έχει υπολογίσει τις μετοχές για το συγκεκριμένο κόμβο, τις πολλαπλασιάζει με την τρέχουσα τιμή της μετοχής. Το πόσο αυτό αφαιρείται από την αντίστοιχη θέση του πίνακα $\boldsymbol{C}$. Αν αυτή η διαφορά είναι θετική τότε ο διαχειριστής του χαρτοφυλακίου χρειάζεται να δανειστεί αυτό το πόσο με το επιτόκιο της αγοράς. Αν η διαφορά είναι αρνητική σημαίνει ότι οι υπάρχει υπερβάλλον ποσό οπότε ο διαχειριστής του χαρτοφυλακίου πρέπει να δανείσει την διαφορά με το επιτόκιο της αγοράς.

```
delta=Table[0,{n}];
bank = Table[0, {n}];
Do[ bank[[i]]=Table[0,{i}],{i,1,n}];
Do[delta[[i]]=Table[0,{i}],{i,1,n}];
Do[
  Do[
   delta[[i,j]]=(c[[i+1,j]]-c[[i+1,j+1]])/(S[[i+1,j]]-S[[i+1,j+1]]);
   bank[[i,j]] = (c[[i,j]]) - ((delta[[i,j]])*(S[[i, j]]));
   ,{j,1,i}];
,{i,n,1,-1}];
```

Δομή χαρτοφυλακίου

$D_{11} = 1.376$
$B_{11} = -20.33$

$D_{21} = 1.17352$
$B_{21} = -19.46$

$D_{22} = 0.115377$
$B_{22} = -1.55$

$D_{31} = 1$
$B_{31} = -18.6226$

$D_{32} = 0.09678$
$B_{32} = -1.459$

$D_{33} = 0$
$B_{33} = 0$

Η οριακή κατάσταση του διωνυμικού μοντέλου μέσα από τον παραπάνω αλγόριθμο επιτυγχάνεται όταν η επιλογή του $\boldsymbol{n}$ είναι αρκετά μεγάλος αριθμός. Με άλλα λόγια αν ο αλγόριθμος υλοποιηθεί για ένα μεγάλο $\boldsymbol{n}$ το αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι πάρα πολύ κοντά στο αποτέλεσμα που δίνει ο τύπος των Black and Scholes. Ο τύπος των Black and Scholes δίνεται παρακάτω:

$$\boldsymbol{C = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi\left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)}$$

Όπου $\boldsymbol{d_1}$:

$$\boldsymbol{d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}$$

Ο παραπάνω τύπος υλοποιείται μέσω του ακόλουθου κώδικα:

```
t=0;

d1=(r*(T-t)+σ^2*(T-t)/2-Log[K/S0])/(σ*Sqrt[T-t]);

c=S0*CDF[NormalDistribution[0,1],d1]-

Exp[-r*(T-t)]*K*CDF[NormalDistribution[0,1],d1-σ*Sqrt[T-t]];

Print["T=",T//N,",K=",K,",Option Price=",c];
```

Επιλέγεται ένα μεγάλο $\boldsymbol{n}$, έστω $\boldsymbol{n = 1000}$. Ο αλγόριθμος του διωνυμικού δέντρου θα δώσει σαν αποτέλεσμα για την τιμή του δικαιώματος $\boldsymbol{6.68201}$€ Ενώ ο παραπάνω κώδικας για τον τύπο των Black and Scholes βγάζει ως αποτέλεσμα $\boldsymbol{6.68227}$ €. Για μεγαλύτερο $\boldsymbol{n}$ τα αποτελέσματα είναι ακόμα πιο κοντά. Άρα το διακριτό διωνυμικό μοντέλο είναι μια καλή προσέγγιση για συμβόλαια όπως το Call Option, Put Option ή παρόμοια με αυτά.

Επίσης, μέσω του παραπάνω κώδικα που αφορά το διωνυμικό δέντρο μπορούμε να υπολογίζουμε την τιμή του Delta για το call option στο χρόνο 0 ώστε να διαμορφώσουμε κατάλληλα το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης. Αν πάρουμε και πάλι $\boldsymbol{n = 1000}$ τότε ο παραπάνω κώδικας του διωνυμικού δέντρου δίνει

$$\boldsymbol{Delta_0} = \frac{\boldsymbol{C_{2,1} - C_{2,2}}}{\boldsymbol{S_{2,1} - S_{2,2}}} = \mathbf{0.98321}$$

Στο μοντέλο Black and Scholes το Delta του Call option είναι η παράγωγος του C ως προς το $\boldsymbol{S}$, και είναι γνωστό ότι στο χρόνο 0 θα είναι:

$$\boldsymbol{\Delta_0 = \Phi(d_1)},$$

όπου το $\boldsymbol{t}$ λαμβάνεται ίσο με 0. Ο κώδικας υπολογισμού του είναι

```
CDF[NormalDistribution[0,1],(r(T-0)+1/2*σ^2(T-0)-Log[K/S0])/(σ*(T-
0)^0.5)]]
```

Ο παραπάνω τύπος δίνει αποτέλεσμα 0.983142 που συμφωνεί με την τιμή του Δέλτα, $\mathbf{0.98321}$, που υπολογίστηκε προσεγγιστικά μέσω του διωνυμικού δέντρου.

4.3 Στρατηγική εξασφάλισης Δέλτα - Delta Hedging.

Σε αυτή την παράγραφο θα κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης για ένα call option θεωρώντας ότι η τιμή του υποκείμενου αγαθού κινείται τυχαία, σύμφωνα με μια γεωμετρική κίνηση Brown ($S(t), t \in [0, T] \sim$ GBM(μ, σ^2)), προκειμένου να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα της αντιστάθμισης. Συγκεκριμένα, παράγουμε τυχαίες διαδρομές της S και κατασκευάζουμε για κάθε μια από αυτές ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης (το οποίο αναδιαμορφώνεται σε διακριτά χρονικά σημεία) και συγκρίνουμε την τελική αξία του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης με την τελική αξία του call option. Αν η διαφορά είναι μικρή τότε έχουμε σχετικά καλή αντιστάθμιση. Τέλεια αντιστάθμιση θα είχαμε μόνο αν το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης αναπροσαρμόζεται συνεχώς, κάτι που είναι πρακτικά αδύνατο.

Η κατασκευή του χαρτοφυλακίου στα call options θα γίνει για λόγους σύγκρισης με δύο τρόπους:

(α) χρησιμοποιώντας της ακριβή τιμή του Delta, από τον τύπο των Black and Scholes ($\Delta_t = \Phi(d_1)$),

(β) προσεγγίζοντας την τιμή του Delta μέσω ενός διωνυμικού δέντρου, όπως είδαμε παραπάνω.

(α) Κατασκευή χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης μέσω της ακριβούς τιμής του Delta

Σε κάθε ένα από τους χρόνους 0, h, $2h$, …, $T = nh$ αγοράζουμε ή πωλούμε μετοχές έτσι ώστε στο χρόνο t να κατέχουμε

$$\Delta_t = \Phi\left(\frac{r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \log\frac{K}{S(t)}}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

μετοχές. Συγκεκριμένα:

• στο $t = 0$ αγοράζουμε Δ_0 μετοχές δανειζόμενοι το ποσό $\alpha_0 = -\Delta_0 S(0)$.

• Στο $t = h$ αγοράζουμε (ή πωλούμε αν είναι αρνητικό) $\Delta_h - \Delta_0$ μετοχές, ώστε να έχουμε Δ_h μετοχές. Το ποσό που έχουμε μέχρι τώρα δανεισθεί είναι

$$\alpha_h = \alpha_0\, e^{rh} - (\Delta_h - \Delta_0) S(h)$$

κ.ο.κ. …

• Στο $t = nh = T$ αγοράζουμε (ή πωλούμε αν είναι αρνητικό) $\Delta_{nh} - \Delta_{(n-1)h}$ μετοχές, ώστε να έχουμε Δ_{nh}. Το ποσό που έχουμε μέχρι τώρα δανεισθεί είναι

$$\alpha_{nh} = \alpha_{(n-1)h}\, e^{rh} - (\Delta_{nh} - \Delta_{(n-1)h}) S(nh).$$

• Στο τέλος όσες μετοχές έχουμε τις πωλούμε στην τιμή $S(T)$ και καταλήγουμε με ένα τελικό κέρδος α (αρνητικό ή θετικό).

Στη συνέχεια προσομοιώνουμε την παραπάνω διαδικασία πολλές φορές καταγράφοντας κάθε φορά το τελικό κέρδος α και την τελική τιμή της μετοχής $S(T)$. Τέλος κατασκευάζουμε ένα γράφημα με τα σημεία $(S(T), \alpha)$ που παρήχθησαν. Για λόγους σύγκρισης στο ίδιο γράφημα συμπεριλαμβάνεται και η αξία του Call option

$$(S(T) - K)_+ - e^{rT}\, C_0.$$

Ως παράδειγμα θεωρούμε ότι

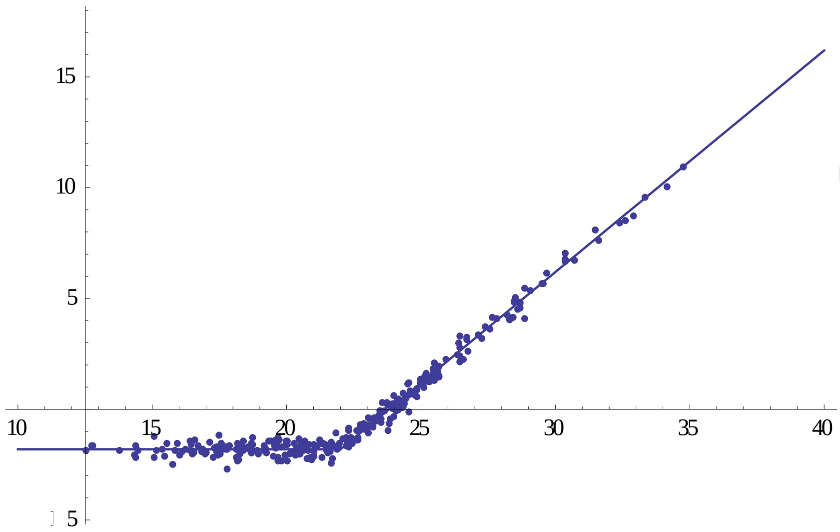
$$S_0 = 20, K = 22, T = 1, \sigma = 0.2, r = 0.1.$$

Ο αντίστοιχος κώδικας Mathematica είναι ο ακόλουθος:

```
S0 = 20; K = 22; T = 1; r = 0.1; σ = 0.2; μ = r - σ^2/2;

n2=100;points=300;
S=Table[0,{n2+1}];
d=Table[0,{n2+1}];
h=T/n2;b={};
Do[S[[1]]=S0;d[[1]]=0;a=0;
  Do[x=(i-1)*h;
   Z=Random[NormalDistribution[0,1]];
   S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[h*μ+σ*h^0.5*Z];
   d[[i]]=CDF[NormalDistribution[0,1],(r (T-x)+1/2*σ^2(T-x)-
Log[K/S[[i]]])/(σ*(T-x)^0.5)];
   a=a*Exp[r*h]-(d[[i]]-d[[i-1]])*S[[i]];
,{i,2,n2}];
  Z=Random[NormalDistribution[0,1]];
  S[[n2+1]]=S[[n2]]*Exp[h*μ+σ*h^0.5*Z];
  If[-Log[K/S[[n2+1]]]>=0,d[[n2+1]]=1,d[[n2+1]]=0];
  a=a*Exp[r*h]-(d[[n2+1]]-d[[n2]])*S[[n2+1]];
  a=a+d[[n2+1]]*S[[n2+1]];
  AppendTo[b,{S[[n2+1]],a}],{points}];
p1=ListPlot[b];

omega=(r*T+σ^2*T/2-Log[K/S0])/(σ*T^0.5);
C0=S0*CDF[NormalDistribution[0,1],omega]-K*Exp[-
r*T]*CDF[NormalDistribution[0,1],omega-σ*T^0.5];
```

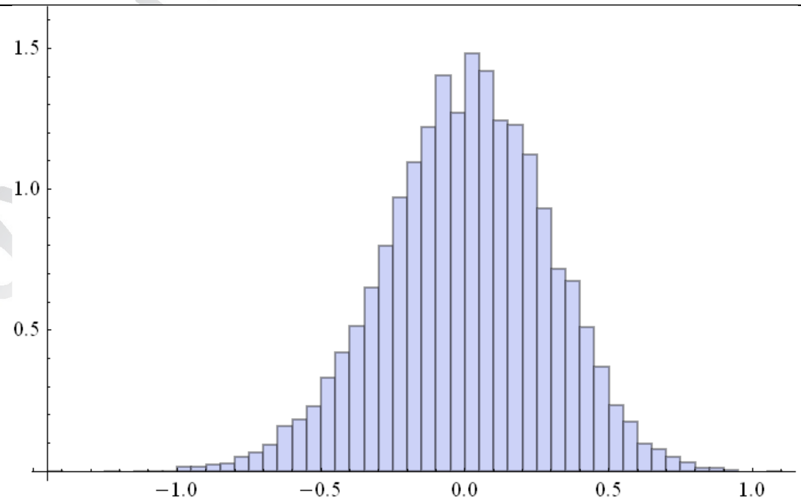
```
p2=Plot[Max[(s-K),0]-C0*Exp[r*T],{s,10,40}];
Show[p1,p2,PlotRange→{{10,40},{-5,18}}]
```

Το αποτέλεσμα του παραπάνω κώδικα είναι το ακόλουθο σχήμα:



Παρατηρούμε ότι το συνθετικό παράγωγο (δηλαδή το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης) έχει σχεδόν το ίδιο τελικό κέρδος με το call option και επομένως έχουμε αρκετά καλή αντιστάθμιση. Εάν είχαμε πάρει περισσότερα σημεία n_2 θα είχαμε ακόμη καλύτερα αποτελέσματα. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται το σφάλμα της στρατηγικής εξασφάλισης (τώρα χρησιμοποιούμε 10000 σημεία (points)):

```
HedgeError=Table[b[[i,2]]-(Max[(b[[i,1]]-K),0]-
C0*Exp[r*T]),{i,1,points}];
Histogram[HedgeError,Automatic,PDF]

Mean[HedgeError]
Variance[HedgeError]^0.5
```



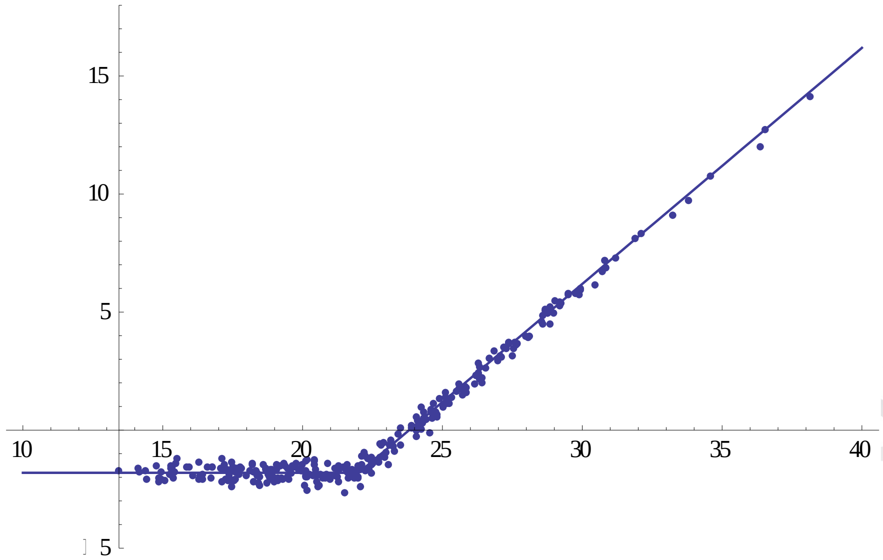
Η εκτίμηση του μέσου των σφαλμάτων είναι 0.00470655 ενώ η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης είναι 0.287513.

(β) Κατασκευή χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης μέσω της προσέγγισης της τιμής του Delta από το διωνυμικό μοντέλο.

Επαναλαμβάνουμε τώρα την παραπάνω διαδικασία κατασκευής του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης. Η μόνη διαφορά τώρα είναι ότι δεν χρησιμοποιούμε την τιμή Δέλτα που δίνεται από το μοντέλο Black and Scholes αλλά την θεωρούμε άγνωστη και την προσεγγίζουμε μέσω ενός κατάλληλου διωνυμικού δέντρου $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}$ βημάτων (όπως έχουμε δει παραπάνω).

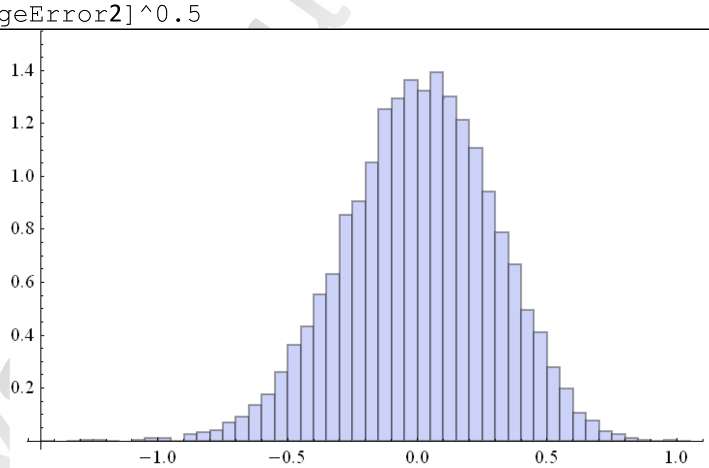
```
S0 = 20; K = 22; T = 1; r = 0.1; σ = 0.2; μ = r - σ^2/2;

(*Simulation of Delta Hedging (rebalancing n2 times) using delta from
Binomial model with n steps*)
n2=100;n=10;points=300;
S=Table[0,{n2+1}];
d=Table[0,{n2+1}];
h=T/n2;b={};
Do[S[[1]]=S0;d[[1]]=0;a=0;
  Do[x=(i-1)*h;
   Z=Random[NormalDistribution[0,1]];
   S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[h*μ+σ*h^0.5*Z];

   (*calculation of Delta using binomial model*);
   hh=(T-x)/n;up=Exp[σ*hh^0.5];down=Exp[-σ*hh^0.5];
   SS=Table[0,{n+1}];
           Do[SS[[ii]]=Table[0,{ii}],{ii,1,n+1}];
           Do[Do[SS[[ii,j]]=S[[i]]*(up^(ii-j))*(down^(j-
1)),{j,1,Length[SS[[ii]]]}];,{ii,1,n+1}];
           p=(Exp[r*hh]-down)/(up-down);q=1-p;
           c=Table[0,{n+1}];
           Do[c[[ii]]=Table[0,{ii}],{ii,1,n+1}];
           Do[c[[n+1,j]]=Max[SS[[n+1,j]]-K,0],{j,1,n+1}];
           Do[Do[c[[ii,j]]=Exp[-
r*hh]*(p*c[[ii+1,j]]+q*c[[ii+1,j+1]]),{j,1,Length[c[[ii]]]}];,{ii,n,1
,-1}];
   d[[i]]=(c[[2,2]]-c[[2,1]])/(SS[[2,2]]-SS[[2,1]]);
   (*end of delta calculation*)

   a=a*Exp[r*h]-(d[[i]]-d[[i-1]])*S[[i]];,{i,2,n2}];
  Z=Random[NormalDistribution[0,1]];
  S[[n2+1]]=S[[n2]]*Exp[h*μ+σ*h^0.5*Z];
  If[-Log[K/S[[n2+1]]]>=0,d[[n2+1]]=1,d[[n2+1]]=0];
  a=a*Exp[r*h]-(d[[n2+1]]-d[[n2]])*S[[n2+1]];
  a=a+d[[n2+1]]*S[[n2+1]];
  AppendTo[b,{S[[n2+1]],a}];
  ,{points}];
p1=ListPlot[b,PlotRange->{-5,10}];

omega=(r*T+σ^2*T/2-Log[K/S0])/(σ*T^0.5);
C0=S0*CDF[NormalDistribution[0,1],omega]-K*Exp[-
r*T]*CDF[NormalDistribution[0,1],omega-σ*T^0.5];
p2=Plot[Max[(s-K),0]-C0*Exp[r*T],{s,10,40}];
Show[p1,p2,PlotRange→{{10,40},{-5,18}}]
```

Το αποτέλεσμα του παραπάνω κώδικα είναι το ακόλουθο σχήμα:



Παρατηρούμε ότι το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης έχει σχεδόν το ίδιο τελικό κέρδος με το call option, ακόμη και τώρα που έχουμε προσεγγίσει την τιμή του Delta μέσω του διωνυμικού μοντέλου $n = 10$ βημάτων. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται το σφάλμα της στρατηγικής εξασφάλισης (τώρα χρησιμοποιούμε 10000 σημεία (points)):

```
HedgeError2=Table[b[[i,2]]-(Max[(b[[i,1]]-K),0]-
C0*Exp[r*T]),{i,1,points}];
Histogram[HedgeError2,Automatic,PDF]
Mean[HedgeError2]
Variance[HedgeError2]^0.5
```



Η εκτίμηση του μέσου των σφαλμάτων είναι 0.00656939 ενώ η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης είναι 0.290181.

Μεγαλύτερη όμως αξία έχει να εφαρμόσουμε την παραπάνω τεχνική κατασκευής χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης (που βασίζεται στην προσέγγιση του Delta από το διωνυμικό μοντέλο) σε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει ακριβής κλειστός τύπος για το Delta. Μια τέτοια περίπτωση θα εξετάσουμε στην επόμενη παράγραφο.

Asian Option – Διωνυμικό Μοντέλο (περιγραφή αλγορίθμου).

Το στοιχείο που διαφοροποιεί το δικαίωμα Ασιατικού τύπου είναι ότι η αποπληρωμή του συμβολαίου εξαρτάται από το μονοπάτι που ακολούθησε η μετοχή. Όπως και πριν το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε το πίνακα C. Τα επόμενα βήματα θα είναι τα ίδια για οποιοδήποτε συμβόλαιο τιμολογείται με το διωνυμικό μοντέλο.

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος θα είναι οι εξής:

h: ενδιάμεσος χρόνος ανάμεσα σε δυο διαδοχικές μεταβολές της τιμής της μετοχής.
n: πλήθος των διαστημάτων μήκους h.
S_0: τιμή εκκίνησης της μετοχής.
r: ετήσιο επιτόκιο.
μ: παράμετρος τάσης
σ: παράμετρος μεταβλητότητας
up: 1+ ποσοστιαία αύξηση.
$down$: 1- ποσοστιαία μείωση.
p: η πιθανότητα η μετοχή να κινηθεί ανοδικά.
q: η πιθανότητα η μετοχή να κινηθεί καθοδικά.

```
                    ΚΩΔΙΚΑΣ MATHEMATICA
h=T/n;
n=3;
S0=20;
T=1;
r=0.5;
μ=r-σ^2/2;
σ=0.2;
up=Exp[σ*h^0.5];
down=Exp[-σ*h^0.5];
p=(Exp[r*h]-down)/(up-down);
q=1-p;
```

Στην συνέχεια ο αλγόριθμος κατασκευάζει τα πιθανά μονοπάτια που μπορεί να ακολουθήσει η μετοχή. Όπως και πριν κατασκευάζεται ένας πίνακας S με μηδενικά. Ο πίνακας S θα έχει πάλι $n+1$ στήλες όμως τώρα κάθε στήλη i θα περιέχει ένα πίνακα 2^i κελιών. Στην συνέχεια με μια εμφωλευμένη επανάληψη γεμίζει ο πίνακας από αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω. Σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος δημιουργεί τις δυνατές μελλοντικές τιμές και τις τοποθετεί σε ξεχωριστά κελιά ανεξάρτητα αν είναι ίσες. Το διωνυμικό δέντρο για το Asian Option έχει τις ίδιες τιμές με το δέντρο του Call Option. Η διαφορά είναι ότι για κάθε κελί υπάρχει μοναδικός δρόμος. Τα μονοπάτια είναι ανεξάρτητα. Αυτό επιτρέπει στον αλγόριθμο να υλοποιηθεί όπως ο προηγούμενος απλά για περισσότερα κελιά, άρα και επαναλήψεις.

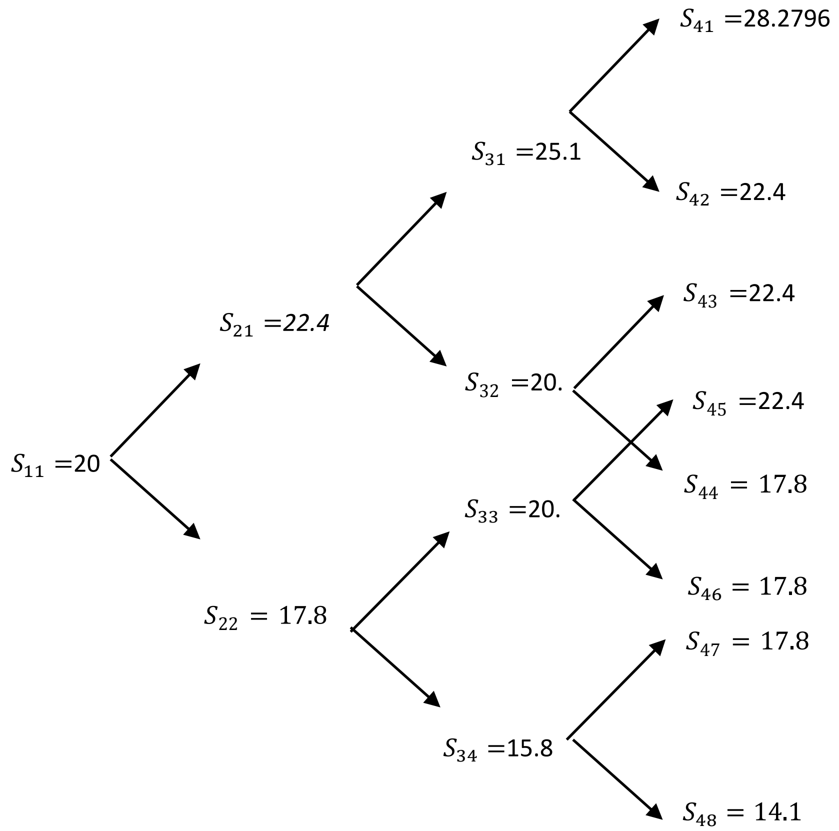
```
                    ΚΩΔΙΚΑΣ MATHEMATICA
S=Table[0,{n+1}];
Do[S[[i]]=Table[0,{2^(i-1)}],{i,1,n+1}];
S[[1,1]]=S0;
Do[
   Do[
```

```
      S[[i+1,2j]]=S[[i,j]]*up;
      S[[i+1,2j-1]]=S[[i,j]]*down;

   ,{j,1,Length[S[[i]]]}];
,{i,1,n}];
```

Οι αλγόριθμοι που ακολουθούν θα υλοποιηθουν με τις παρακάτω ανεξάρτητες μεταβλητές :

$$n = 3, S_0 = 20, T = 1, r = 0.5, \sigma = 0.2$$

Κίνηση Μετοχής



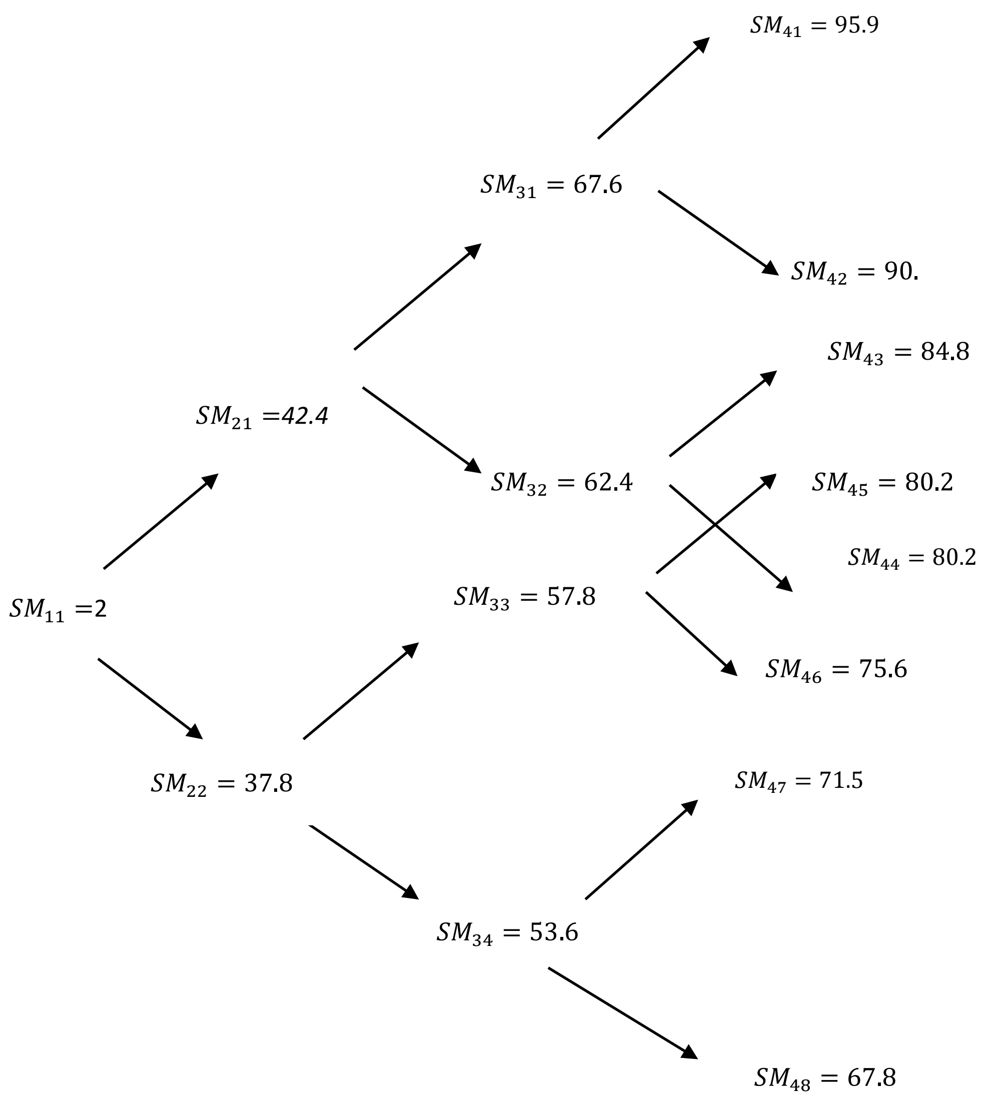
Στο Asian Option η τιμή εξάσκησης δεν είναι σταθερή. Στο παράδειγμα μας η τιμή εξάσκησης υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των τιμών της μετοχής μέχρι τη λήξη. Ο επόμενος πίνακας που κατασκευάζεται υπολογίζει σε κάθε θέση το άθροισμα των τιμών της μετοχής μέχρι και αυτήν την θέση. Έχει ίδιες διαστάσεις με τον πίνακας S και συμβολίζεται με SM. Και σε αυτό το βήμα ο πίνακας έχει αρχικοποιηθεί με μηδενικά.

```
                         ΚΩΔΙΚΑΣ MATHEMATICA
SM=Table[0,{n+1}];
Do[SM[[i]]=Table[0,{2^(i-1)}],{i,1,n+1}];
SM[[1,1]]=S[[1,1]];
Do[
```

```
   Do[
      SM[[i+1,2j]]=SM[[i,j]]+S[[i+1,2j]];
      SM[[i+1,2j-1]]=SM[[i,j]]+S[[i+1,2j-1]];
,{j,1,Length[S[[i]]]}];
,{i,1,n}];
Print[TableForm[[SM]]
```

```
20
37.8189 42.448
53.6947 57.8189 62.448  67.6437
67.8391 71.5136 75.6379 80.267 80.267 84.896 90.0917 95.9233
```

Άθροισματα Μονοπατιών



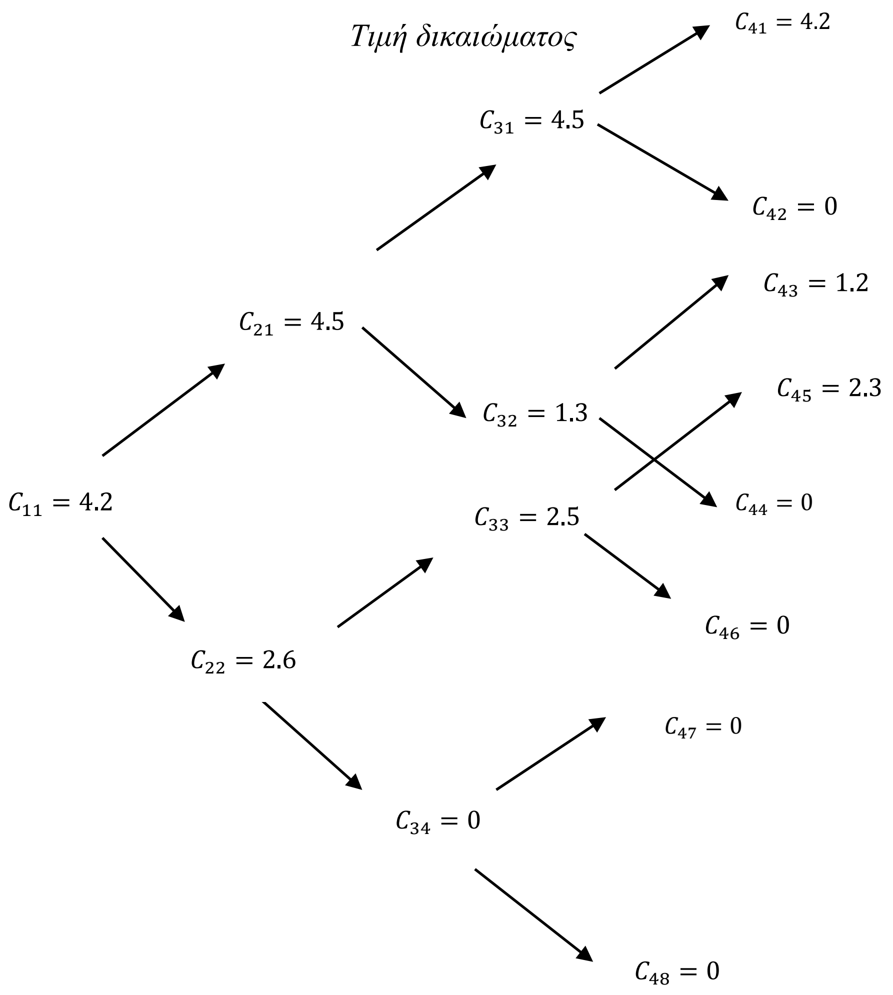
Σε αυτό το σημείο ο αλγόριθμος είναι έτοιμος να υπολογίσει την δίκαιη τιμή του δικαιώματος. Αρχικά με μία επανάληψη κατασκευάζει την τιμή εξάσκησης και την αφαιρεί από την τρέχουσα τιμή της μετοχής. Πιο συγκεκριμένα κάθε στοιχείο της στήλης $n+1$ του πίνακα SM διαιρείται με $n+1$ και στην συνέχεια αφαιρείται από την αντίστοιχη θέση του πίνακα S. Για τις στήλες από n μέχρι 1 ο αλγόριθμος κινούμενος προς τα πίσω υπολογίζει για τον ij κόμβο:

$$C_{ij} = e^{-rh}\left(pC_{i+1j} + qC_{i+1j+1}\right)$$

Η διαδικασία αυτή επιτυγχάνεται πάλι με μια εμφωλευμένη επανάληψη. Με τη λήξη της επανάληψης ο αλγόριθμος εμφανίζει το κελί C_{11}, δηλαδή την τιμή του δικαιώματος στο χρόνο μηδέν.

```
c=Table[0,{n+1}];
Do[c[[i]]=Table[0,{2^(i-1)}],{i,1,n+1}];
Do[c[[n+1,j]]=Max[S[[n+1,j]]-SM[[n+1,j]]/(n+1),0],{j,1,2^(n)}];
Do[
  Do[
   c[[i-1,(j+1)/2]]=Exp[-r*h]*(q*c[[i,j]]+p*c[[i,j+1]]);
,{j,1,2^(i-1),2}];
,{i,n+1,2,-1}];
Print["Αξία Δικαιώματος=",c[[1,1]]," €"]
c
```

```
Αξία Δικαιώματος = 4.27363_ €

{{4.27363},{2.68627,4.56908},{0.,2.52918,1.30003,4.56582},{0,0,0,2.38
128,0,1.22401,0,4.29881}}
```



Τέλος, υπολογίζεται το πλήθος των μετοχών και οι χρηματικές μονάδες που πρέπει να έχει σε κάθε κόμβο ο πωλητής του δικαιώματος ώστε να αντισταθμίζει την αποπληρωμή του συμβολαίου. Στο διωνυμικό μοντέλο αυτή η μεταβλητή ονομάζεται delta. Και εδώ η διαδικασία υπολογισμού είναι από δεξιά προς τα αριστερά. Όπου το delta στο κόμβο $[\boldsymbol{i-1},(\boldsymbol{j+1})/\boldsymbol{2}]$ θα προκύπτει ως εξής:

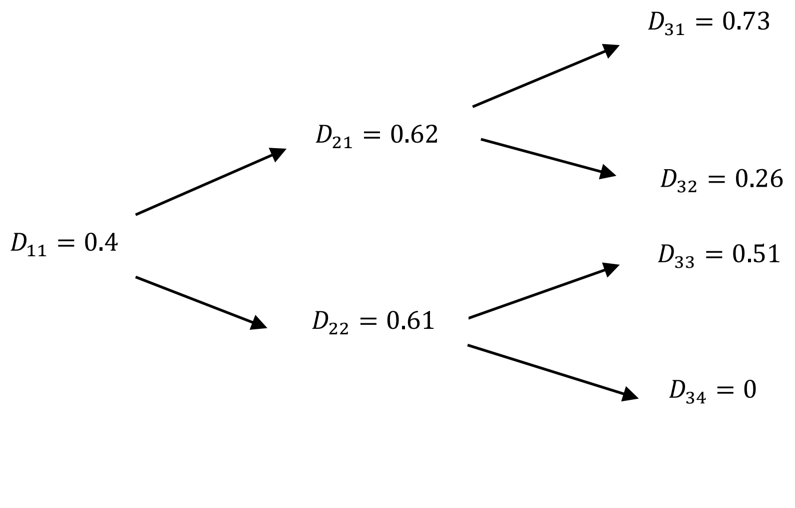
$$\boldsymbol{delta_{i-1,(j+1)/2}} = \frac{\boldsymbol{C_{i,j} - C_{i,j+1}}}{\boldsymbol{S_{i,j} - S_{i,j+1}}}$$

Επίσης, σε κάθε κόμβο ο αλγόριθμος εμφανίζει ακόμα έναν πραγματικό αριθμό ο οποίος αναφέρεται στο χρηματικό ποσό που πρέπει να έχει το χαρτοφυλάκιο τη δεδομένη χρονική στιγμή. Ο αλγόριθμος αφού έχει υπολογίσει τις μετοχές για το συγκεκριμένο κόμβο, τις πολλαπλασιάζει με την τρέχουσα τιμή της μετοχής. Το πόσο αυτό αφαιρείται από την αντίστοιχη θέση του πίνακα C. Αν αυτή η διαφορά είναι θετική τότε ο διαχειριστής του χαρτοφυλακίου χρειάζεται να δανειστεί αυτό το πόσο με το επιτόκιο της αγοράς. Αν η διαφορά είναι αρνητική σημαίνει ότι οι υπάρχει υπερβάλλον ποσό οπότε ο διαχειριστής του χαρτοφυλακίου πρέπει να δανείσει την διαφορά με το επιτόκιο της αγοράς.

```
delta=Table[0,{n+1}];
bank=Table[0,{n+1}];
Do[bank[[i]]=Table[0,{2^(i-1)}],{i,1,n+1}];
Do[delta[[i]]=Table[0,{2^(i-1)}],{i,1,n+1}];
Do[
  Do[
    delta[[i-1,(j+1)/2]]=(c[[i,j]]-c[[i,j+1]])/(S[[i,j]]-S[[i,j+1]]);
    bank[[i-1,(j+1)/2]]=(c[[i,j]])-((delta[[i,j]])*(S[[i,j]]));
  ,{j,1,2^(i-1),2}];
,{i,n+1,2,-1}];
delta
bank
```

```
{{0.406735},{0.613245,0.628558},{0.,0.514418,0.264418,0.737155},{0,0,0,0,0,0,0,0}}

{{-8.2411},{0.,-3.98832},{0.,0.,0.,0.},{0,0,0,0,0,0,0,0}}
```

Δομή χαρτοφυλακίου



Το Asian Option δεν έχει ένα κλειστό τύπο για την τιμολόγηση του. Οπότε ο έλεγχος τον παραπάνω βημάτων θα γίνει μέσω προσομοίωσης. Πιο συγκεκριμένα ο αλγόριθμος που ακολουθεί αρχικά παράγει τιμές από την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Αποδεικνύεται ότι η κίνηση της μετοχής ακολουθεί κίνηση Brown οπότε οι τιμές της για κάθε διάστημα d μπορούν να υπολογιστούν μέσω του παρακάτω τύπου:

$$S_{(i+1)d} = S_{id} * Exp[d * \mu + \sigma * d^{0.5} * Z], \qquad \text{όπου} \quad Z \sim N(0,1)$$

Έτσι φτιάχνεται ένα μονοπάτι για την μετοχή χωρίζοντας το διάστημα $[0, T]$ σε $k = 100$ υποδιαστήματα. Υπολογίζεται ο μέσος όρος των τιμών της μετοχής σε αυτά τα k χρονικά σημεία και αφαιρείται από την τελική τιμή της μετοχής. Με αυτό το τρόπο υπολογίζεται η αποπληρωμή του συμβολαίου για την συγκεκριμένη κίνηση της μετοχής υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου. Αυτή η διαδικασία θα πραγματοποιείται 5000 φορές. Οπότε ο αλγόριθμος θα έχει υπολογίσει 5000 ενδεχόμενες αποπληρωμές. Τέλος, ο μέσος όρος αυτών τον αποπληρωμών προεξοφλείται και εμφανίζεται ως έξοδος από τον αλγόριθμο. Με άλλα λόγια ο αλγόριθμος εμφανίζει την δίκαιη τιμή του δικαιώματος στην έναρξη του συμβολαίου. Η τιμή αυτή είναι πολύ κοντά στην τιμή που υπολόγισε το διακριτό διωνυμικό μοντέλο στην οριακή περίπτωση.

```
σ=0.2;k=100;T=1;r=0.5;μ=r-σ^2/2;n=5000;d=T/k;S0=20;
sum=0;
Do[meanS=0;S=S0;
  Do[Z=Random[NormalDistribution[0,1]];
   S=S*Exp[d*μ+σ*d^0.5*Z];
   meanS=meanS+S/k;,{j,1,k}];
  sum=sum+Max[S-meanS,0];,{i,1,n}];
Exp[-r*T]*N[sum/n]
```
```
4.23346
```

4.4 Στρατηγική εξασφάλισης Δέλτα - Delta Hedging.

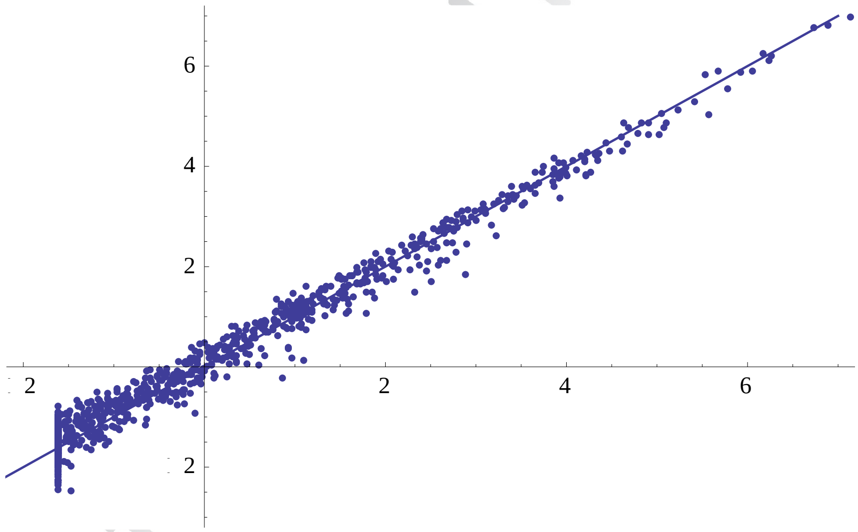
Σε αντιστοιχία με την προηγούμενη παράγραφο θα κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης για ένα Asian option θεωρώντας πάλι ότι η τιμή του υποκείμενου αγαθού κινείται τυχαία, σύμφωνα με μια γεωμετρική κίνηση Brown ($S(t)$, $t \in [0, T] \sim$ GBM(μ, σ^2)), προκειμένου να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα της αντιστάθμισης. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία, παράγοντας τυχαίες διαδρομές της S και κατασκευάζουμε για κάθε μια από αυτές ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης (το οποίο αναδιαμορφώνεται σε διακριτά χρονικά σημεία) και συγκρίνουμε την τελική αξία του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης με την τελική αξία του Asian option. Σε αντίθεση με το Call Option, το Asian Option δεν έχει ένα κλειστό τύπο για τον υπολογισμό της δίκαιης τιμής του. Συνεπώς τόσο ο υπολογισμός της δικαίης τιμής του δικαιώματος αλλά και η κατασκευή του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης θα υλοποιηθεί με διωνυνικό δέντρο με εξάρτηση μονοπατιού, όπως περιγράφηκε παραπάνω. Αν η διαφορά είναι μικρή τότε έχουμε σχετικά καλή αντιστάθμιση. Τέλεια αντιστάθμιση θα είχαμε μόνο αν το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης αναπροσαρμόζεται συνεχώς, κάτι που είναι πρακτικά αδύνατο.

(α) Κατασκευή χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης μέσω της προσέγγισης της τιμής του Delta από το διωνυμικό μοντέλο (με εξάρτηση μονοπατιού).

```
S0=20;dd={};
K=20;T=1;σ=0.2;r=0.1;μ=r-(σ^2)/2;
l={};sum=0;

b={};points=1000;
n2=10;
S=Table[0,{n2+1}];d=Table[0,{n2+1}];h=T/n2;
up=Exp[σ*h^0.5];down=Exp[-σ*h^0.5];
SS=Table[0,{n2+1}];
Do[SS[[ii]]=Table[0,{2^(ii-1)}],{ii,1,n2+1}];
SS[[1,1]]=S0;
Do[Do[SS[[ii+1,2j]]=SS[[ii,j]]*up;
    SS[[ii+1,2j-
1]]=SS[[ii,j]]*down;,{j,1,Length[SS[[ii]]]}];,{ii,1,n2}];
SM=Table[0,{n2+1}];
Do[SM[[ii]]=Table[0,{2^(ii-1)}],{ii,1,n2+1}];
SM[[1,1]]=SS[[1,1]];
Do[Do[SM[[ii+1,2j]]=SM[[ii,j]]+SS[[ii+1,2j]];
    SM[[ii+1,2j-1]]=SM[[ii,j]]+SS[[ii+1,2j-
1]];,{j,1,Length[SS[[ii]]]}];,{ii,1,n2}];
c=Table[0,{n2+1}];
Do[c[[ii]]=Table[0,{2^(ii-1)}],{ii,1,n2+1}];
Do[c[[n2+1,j]]=Max[SM[[n2+1,j]]/(n2+1)-K,0],{j,1,2^(n2)}];
Do[Do[c[[ii-1,(j+1)/2]]=Exp[-
r*h]*(q*c[[ii,j]]+p*c[[ii,j+1]]);,{j,1,2^(ii-1),2}];,{ii,n2+1,2,-1}];
price0=c[[1,1]];d[[1]]=(c[[2,2]]-c[[2,1]])/(SS[[2,2]]-SS[[2,1]]);

Do[S[[1]]=S0;
  a=-S[[1]]*d[[1]];
  meanS=S[[1]]/(n2+1);
    Do[x=(i-1)*h;
   Z=Random[NormalDistribution[0,1]];
   S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[h*μ+σ*h^0.5*Z];
   meanS=meanS+(S[[i]]/(n2+1));

   (*calculation of Delta using binomial model*);
   n=n2-i+1;
   hh=(T-x)/(n);
   up=Exp[σ*hh^0.5];down=Exp[-σ*hh^0.5];
   p=(Exp[r*hh]-down)/(up-down);q=1-p;
   SS0=S[[i]];
   SS=Table[0,{n+1}];
   Do[SS[[ii]]=Table[0,{2^(ii-1)}];,{ii,1,n+1}];
   SS[[1,1]]=SS0;
   Do[Do[SS[[ii+1,2 j]]=SS[[ii,j]]*up;
       SS[[ii+1,2 j-1]] =SS[[ii,j]]*down;,{j,1,Length[SS[[ii]]]}];
       ,{ii,1,n}];
   SM=Table[0,{n+1}];
   Do[SM[[ii]]=Table[0,{2^(ii-1)}];,{ii,1,n+1}];
   SM[[1,1]]=meanS*(n2+1);
   Do[Do[SM[[ii+1,2 j]]=SM[[ii,j]]+SS[[ii+1,2 j]];
      SM[[ii+1,2 j-1]]=SM[[ii,j]]+SS[[ii+1,2 j-1]];
    ,{j,1,Length[SS[[ii]]]}];,{ii,1,n}];
   c=Table[0,{n+1}];
   Do[c[[ii]]=Table[0,{2^(ii-1)}],{ii,1,n+1}];
   Do[c[[n+1,j]]=Max[SM[[n+1,j]]/(i+n)-K,0];,{j,1,2^(n)}];
   Do[Do[c[[ii-1,(j+1)/2]]=Exp[-r*hh]*(q*c[[ii,j]]+p*c[[ii,j+1]]);
```

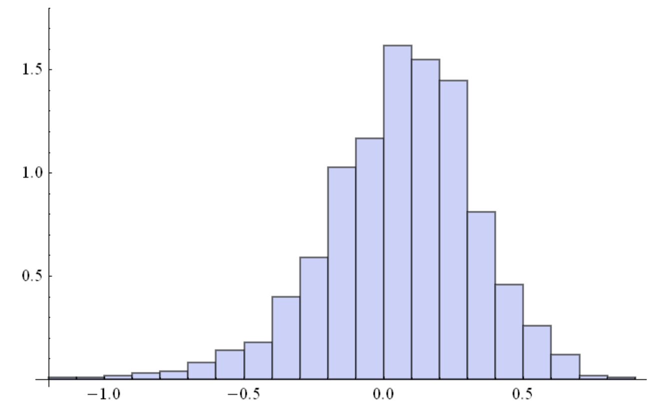
```
    ,{j,1,2^(ii-1),2}];
  ,{ii,n+1,2,-1}];
   d[[i]]=(c[[2,2]]-c[[2,1]])/(SS[[2,2]]-SS[[2,1]]);
   (*end of calculation of Delta using binomial model*);

   a=a*Exp[r*h]-(d[[i]]-d[[i-1]])*S[[i]];,{i,2,n2}];
  Z=Random[NormalDistribution[0,1]];
  S[[n2+1]]=S[[n2]]*Exp[h*μ+σ*h^0.5*Z];
  If[-Log[meanS/S[[n2+1]]]≥0,d[[n2+1]]=1,d[[n2+1]]=0];
  a=a*Exp[r*h]-(d[[n2+1]]-d[[n2]])*S[[n2+1]];
  a=a+d[[n2+1]]*S[[n2+1]];
  meanS=meanS+(S[[n2+1]]/(n2+1));
  A=Max[(meanS-K),0];
  AppendTo[b,{A,a}],{points}];

price1=Exp[-r*T]*Sum[b[[i,1]],{i,1,points}]/points;
Do[b[[i,1]]=b[[i,1]]-price1*Exp[r*T],{i,1,points}];

pl1=Plot[x,{x,-3,7}];
pl2=ListPlot[b,PlotRange→{{-2,7},{-3,7}}];
Show[pl1,pl2,PlotRange→{{-2,7},{-3,7}}]
```

Το αποτέλεσμα το παραπάνω κώδικα είναι το ακόλουθο σχήμα:



Ο ένας άξονας έχει τιμές του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης και ο άλλος το τελικό κέρδος για το Asian option. Τα σημεία θα πρέπει να προσεγγίζουν την $y = x$. Παρατηρούμε μια αρκετά ικανοποιητική αντιστάθμιση του παραγώγου μέσω του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου.

```
HedgeError=Table[b[[i,2]]-b[[i,1]],{i,1,points}];
Histogram[HedgeError,Automatic,"ProbabilityDensity"]
m=Mean[HedgeError];s=Variance[HedgeError]^0.5;
0.0586536
0.271042
```



Η εκτίμηση του μέσου των σφαλμάτων είναι 0.0586536 ενώ η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης είναι 0.271042.

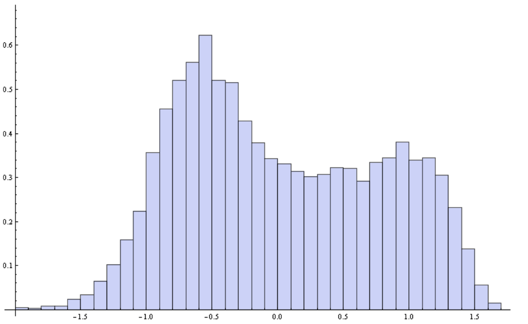
Στην συνέχεια ακολουθούν σχήματα και εκτιμήσεις του μέσου σφάλματος και της τυπικής απόκλισης των σφαλμάτων για διάφορες τιμές των παραμέτρων τόσο για το Call Option όσο και για το Asian Option.

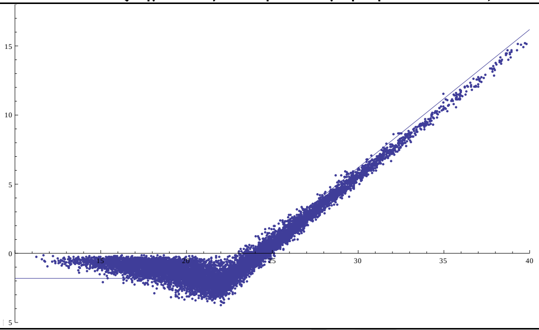
Εκτιμήσεις του σφάλματος αντιστάθμισης ενός Call Option για διάφορες τιμές των παραμέτρων

Παρακάτω παρουσιάζουμε γραφήματα αντίστοιχα με αυτά που παρουσιάζονται στην Παράγραφο 4.3.(β) παραπάνω και αφορούν την κατασκευή χαρτοφυλακίων αντιστάθμισης ενός call option. Σκοπός μας είναι η διακρίβωση της αποτελεσματικότητας της αντιστάθμισης για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Συγκεκριμένα παράγουμε 10000 τυχαίες διαδρομές της S και κατασκευάζουμε για κάθε μια από αυτές ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης του call option (το οποίο αναδιαμορφώνεται σε n_2 διακριτά χρονικά σημεία, σε καθένα από τα οποία η τιμή του delta εκτιμάται από κατάλληλο διωνυμικό δέντρο n βημάτων). Σε κάθε τυχαία διαδρομή καταγράφουμε την τελική αξία του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης με την τελική αξία του call option.

Αριστερά παρουσιάζεται το ιστόγραμμα των 10000 σφαλμάτων της αντιστάθμισης (διαφορά τελικής αξίας option και αξίας χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης), ενώ δεξιά παρουσιάζονται σε ένα κοινό γράφημα η τελική αξία του δικαιώματος (συνεχής γραμμή) και η αξία των χαρτοφυλακίων αντιστάθμισης (10000 σημεία) ως συνάρτηση της τελικής τιμής της μετοχής (S_T). Επίσης περιλαμβάνονται και εκτιμήσεις του μέσου σφάλματος και της τυπικής απόκλισης των σφαλμάτων (εκτιμώνται από τα 10000 σφάλματα).

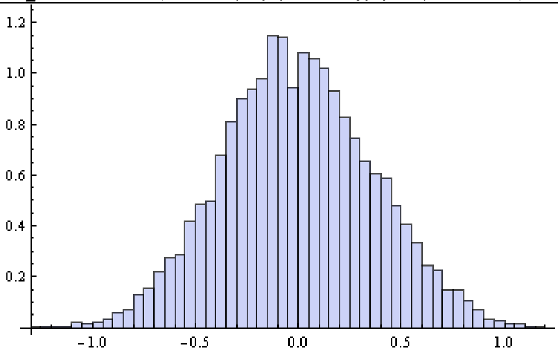
$n_2 = 100$ (*αναδιαμορφώσεις χαρτοφυλακίου*), $n = 1$ (*βήματα για την εκτίμηση του delta*);

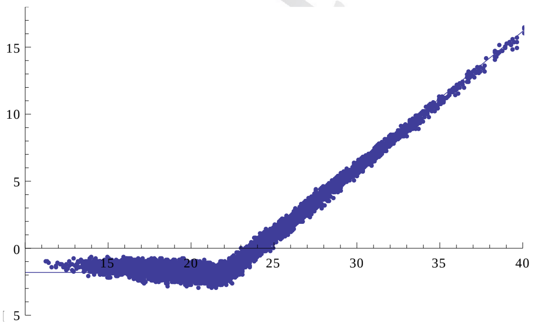




Mean: **0.0247212**, Standard error: **0.761842**

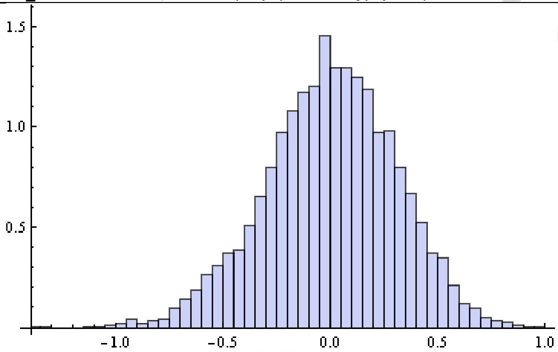
$n_2 = 100$ (*αναδιαμορφώσεις χαρτοφυλακίου*), $n = 2$ (*βήματα για την εκτίμηση του delta*);

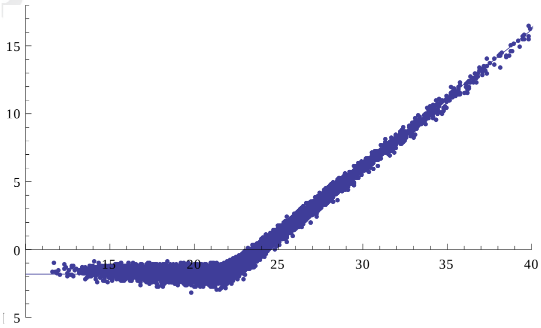




Mean: **-0.00481154**, Standard error: **0.364578**

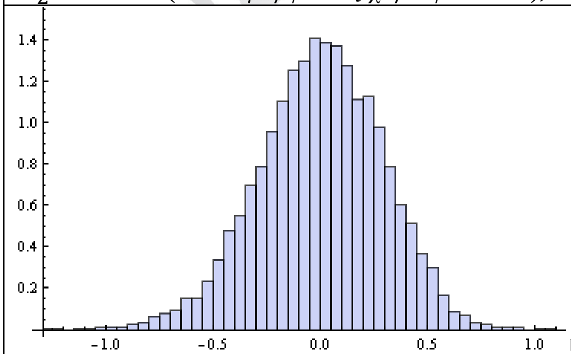
$n_2 = 100$ (*αναδιαμορφώσεις χαρτοφυλακίου*), $n = 5$ (*βήματα για την εκτίμηση του delta*);

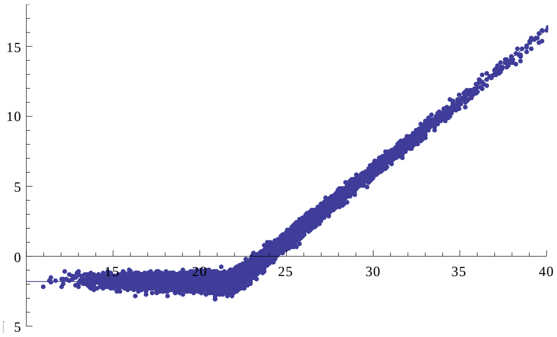




Mean: **-0.00127159**, Standard error: **0.303345**

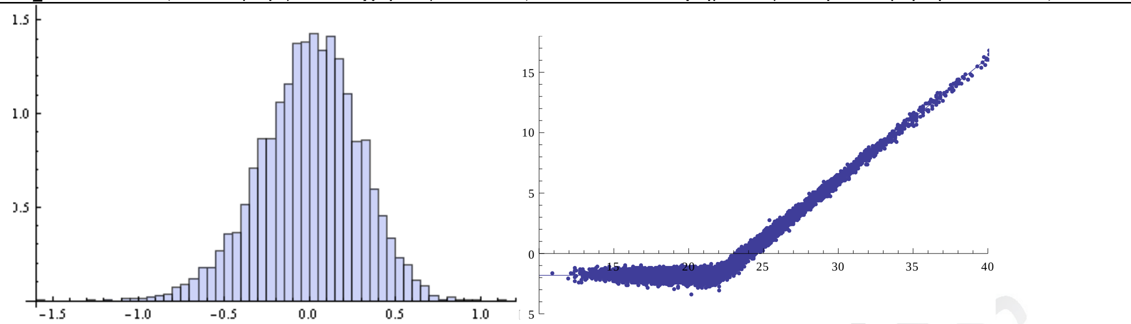
$n_2 = 100$ (*αναδιαμορφώσεις χαρτοφυλακίου*), $n = 10$ (*βήματα για την εκτίμηση του delta*);





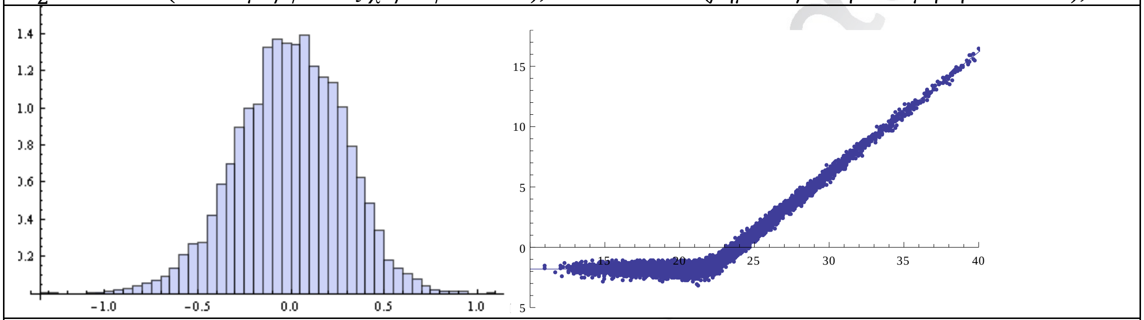
Mean: **0.000799869**, Standard error: **0.289143**

$n_2 \;=\; 100$ (*αναδιαμορφώσεις χαρτοφυλακίου*), $n \;=\; 30$ (*βήματα για την εκτίμηση του delta*);



Mean: **-0.00182076**, Standard error: **0.288945**

$n_2 \;=\; 100$ (*αναδιαμορφώσεις χαρτοφυλακίου*), $n \;=\; 100$ (*βήματα για την εκτίμηση του delta*);



Mean: **-0.00280382**, Standard error: **0.28549**

Παρατηρούμε ότι τα σφάλματα μειώνονται (μειώνεται η διασπορά τους) όσο αυξάνεται το πλήθος των βημάτων που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του delta, αλλά σταθεροποιούνται για περίπου $n = 10$ βήματα και άνω.

Εκτιμήσεις του σφάλματος αντιστάθμισης ενός Asian Option για διάφορες τιμές των παραμέτρων

Όμοια με την προηγούμενη παράγραφο, σκοπός μας τώρα είναι η διακρίβωση της αποτελεσματικότητας της αντιστάθμισης ενός Asian option (βλ. Παράγραφος 4.1.3) για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Συγκεκριμένα παράγουμε και πάλι 1000 τυχαίες διαδρομές της S και κατασκευάζουμε για κάθε μια από αυτές ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης του Asian option (το οποίο αναδιαμορφώνεται σε n_2 διακριτά χρονικά σημεία, σε καθένα από τα οποία η τιμή του delta εκτιμάται από κατάλληλο διωνυμικό δέντρο)..

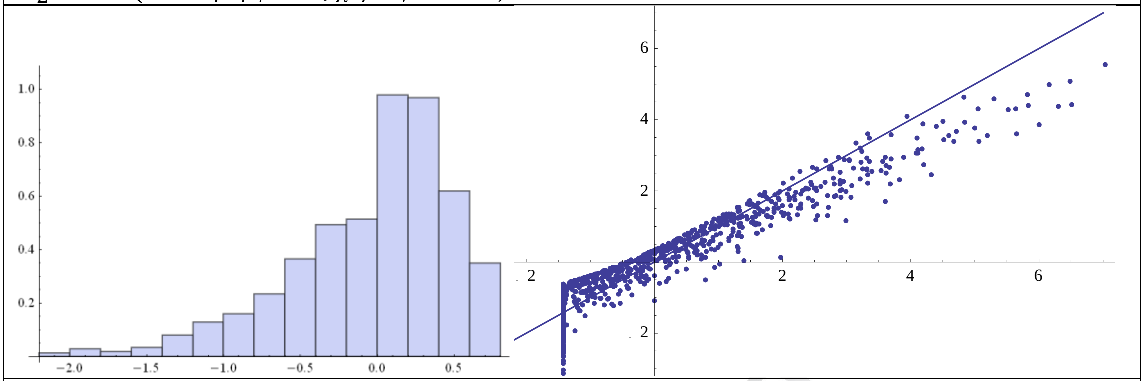
Αριστερά παρουσιάζεται το ιστόγραμμα των 1000 σφαλμάτων της αντιστάθμισης, ενώ δεξιά κάθε σημείο παριστά το ζεύγος:

(δίκαιη αξία δικαιώματος, αξία χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης)

. Όσο πιο κοντά στην διαγώνιο είναι τα σημεία αυτά, τόσο καλύτερη είναι η αναπαραγωγή του δικαιώματος μέσω του χαρτοφυλακίου.

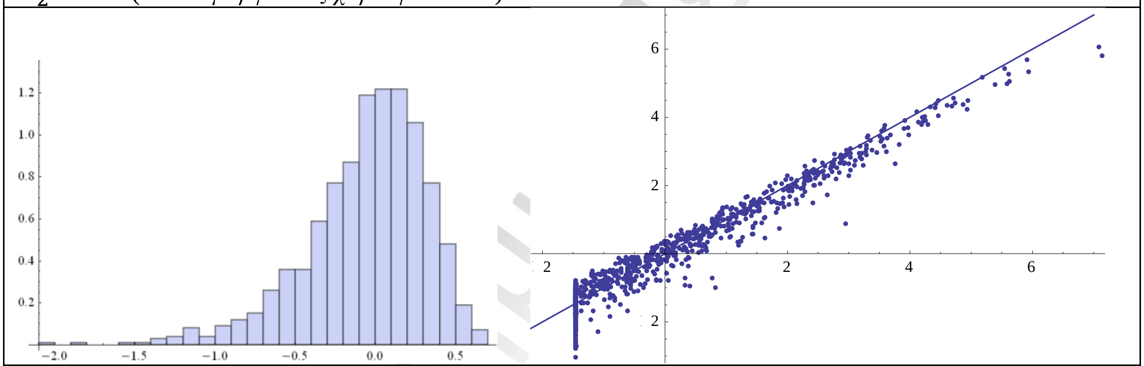
Επίσης περιλαμβάνονται και οι εκτιμήσεις του μέσου σφάλματος και της τυπικής απόκλισης των σφαλμάτων.

$n_2 \; = \; 2$ (*αναδιαμορφώσεις χαρτοφυλακίου*)



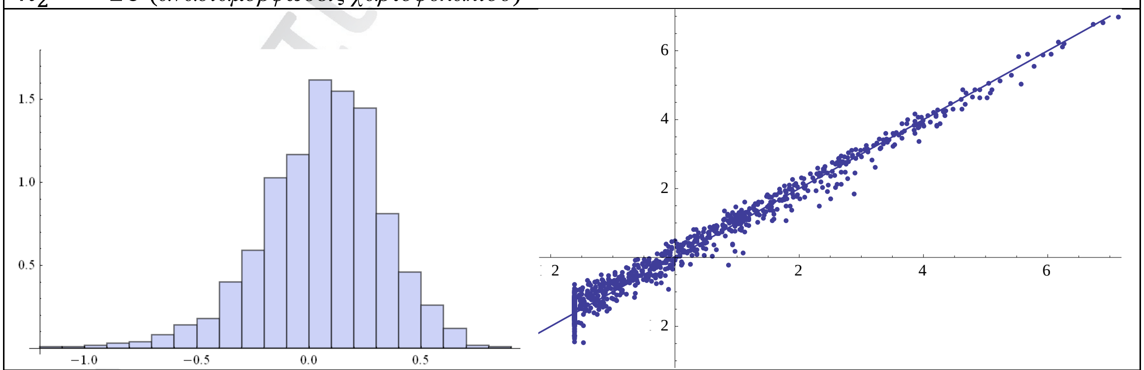
Mean: `-0.034181`, Standard error: `0.527106`

$n_2 \; = \; 5$ (*αναδιαμορφώσεις χαρτοφυλακίου*)



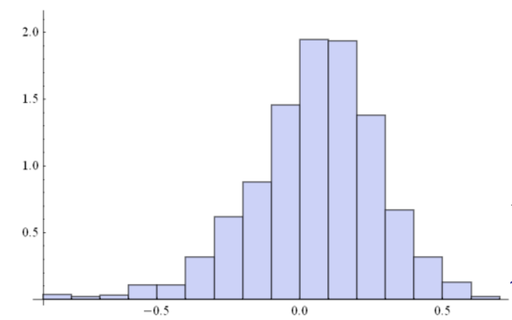
Mean: `-0.0573405`, Standard error: `0.375231`

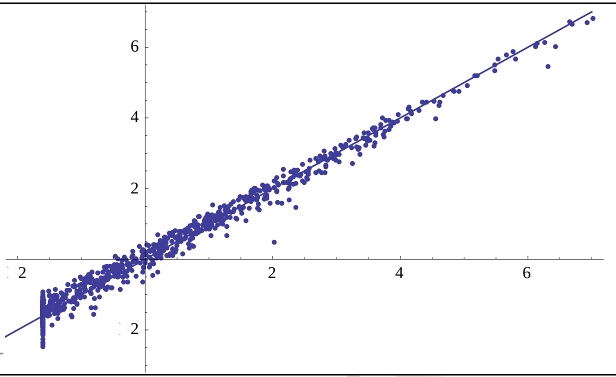
$n_2 \; = \; 10$ (*αναδιαμορφώσεις χαρτοφυλακίου*)



Mean: `0.0586536`, Standard error: `0.271042`

$n_2 = 15$ (*αναδιαμορφώσεις χαρτοφυλακίου*)





Mean: `0.0540654`, Standard error: `0.224516`

Παρατηρούμε ότι τα σφάλματα μειώνονται (μειώνεται η διασπορά τους) όσο αυξάνεται το πλήθος των αναδιαμορφώσεων του χαρτοφυλακίου.

Βιβλιογραφία

[1] Bookstaber R.M. *Option Pricing and Strategies in Investing*, Probus Professional Pub.

[2] Boyle Phelim P. (1988) A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables, *journal of Financial and Quantitative Analysis*, **23**,1-12.

[3] Cox, J. C.; Ross, S. A.; Rubinstein, M. (1979) Option pricing: A simplified approach, *Journal of Financial Economics*, **7**, 229-263.

[4] Harisson Michael J and Kreps David M. (1979), Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, *Journal of Economic Theory*, **20**, 381-408.

[5] Hull, John C. (2011), *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall.

[6] Millan, L.G. (2002), *Options as a Strategy Investment*, Prentice Hall Press.

[7] Rendleman, R. and B.Bartter, (1979), Two State Option Pricing, *Journal of Finance*, **34**, 1092-1110.

[8] Rubinstein M. and Leland Hayne E. (1981), Replicating Options with Positions in Stock and Cash, *Financial Analysts Journal*, **37**, 63-72.

[9] Shreve, Steve E. (2004) *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer.

[10] Κλωνιάς Β.Κ (2008), *Πιθανότητες*, Σημειώσεις Διδασκαλίας, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

[11] Μπούτσικας Μιχαήλ (2007), *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά προϊόντα*, Σημειώσεις Διδασκαλίας, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.