

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ
ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΑΤΩΝ ΓΙΑ
ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΣΥΝΔΕΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΗΝ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΡΙΑ Π. ΠΑΠΑΔΟΔΗΜΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΨΑΡΡΑΚΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2015

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ
ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΑΤΩΝ ΓΙΑ
ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΣΥΝΔΕΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΗΝ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΡΙΑ Π. ΠΑΠΑΔΟΔΗΜΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΨΑΡΡΑΚΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2015

Πανεπιστήμιο Πειραιώς



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

**ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΑΤΩΝ ΓΙΑ
ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΣΥΝΔΕΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΡΙΑ Π. ΠΑΠΑΔΟΔΗΜΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΨΑΡΡΑΚΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΓΚΡΙΘΗΚΕ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΙΜΕΛΗ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΨΑΡΡΑΚΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΠΟΛΙΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΒΡΟΝΤΟΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE
SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL
SCIENCE AND RISK THEORY**

**APPROXIMATION AND BOUNDS FOR QUANTITIES
ASSOCIATED WITH THE RUIN PROBABILITY**

MSc DISSERTATION

MARIA P. PAPADODIMA

SUPERVISOR: GEORGE PSARRAKOS

ATHENS, MARCH 2015

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Στον αδερφό μου

Ηλία

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την περάτωση αυτής της διπλωματικής εργασίας κλείνει ένας κύκλος της ζωής μου και νιώθω έντονη την ανάγκη, να ευχαριστήσω αρχικά, τον επιβλέποντα καθηγητή μου κο. Γεώργιο Ψαρράκο για όλη την υπομονή που έδειξε αλλά και την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής κ. Κωνσταντίνο Πολίτη και κ. Σπυρίδων Βρόντο για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου.

Ένα θερμό ευχαριστώ θα ήθελα να δώσω σε όλους τους συναδέλφους, τους φίλους και τις φίλες μου που μου συμπαραστάθηκαν και με εμπύχωναν καθ' όλη τη διάρκεια της μελέτης μου και κυρίως στην Έφη για τις γνώσεις που μου μετέδωσε όσον αφορά στο υπολογιστικό πρόγραμμα Mathematica.

Τέλος, δεν θα μπορούσα να μην αναφερθώ στην οικογένειά μου για την κατανόηση, την ηθική και υλική υποστήριξη και την αστείρευτη αγάπη που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, αλλά και στη ζωή μου γενικότερα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η Αναλογιστική Επιστήμη, χρησιμοποιεί μαθηματικά μοντέλα για να περιγράψει την φερεγγυότητα του χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής εταιρίας. Σε τέτοια μοντέλα, βασικές ποσότητες που προκαλούν ενδιαφέρον είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, το πλεόνασμα αμέσως πριν την επέλευση του ζημιογόνου ενδεχομένου και το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Στην εργασία αυτή, θα επικεντρωθούμε στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου και θα υπολογίσουμε αρχικά τις ακριβείς τιμές για τις παραπάνω ποσότητες στην περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί (α) Γάμμα (3,3) (β) Μείξη εκθετικών (γ) Μείξη Γάμμα κατανομών.

Στο επόμενο στάδιο θα υπολογίσουμε τις αντίστοιχες προσεγγίσεις και θα δώσουμε συμπεράσματα για το ποιά είναι η πιο αποτελεσματική.

Τέλος, σε κάθε περίπτωση, θα δοθούν τα φράγματα τόσο για την πιθανότητα χρεοκοπίας όσο και για το έλλειμμα μετά από την επέλευση του ζημιογόνου ενδεχομένου.

ABSTRACT

Actuarial Science uses mathematical models to describe the portfolios' solvency of an insurance company. In such models, basic quantities of interest are ruin probability, the surplus immediately before ruin and the deficit at the time of ruin.

In this paper, we will focus on the classical Risk Model of Ruin Theory and will initially calculate the exact values of these quantities in case which claim distribution follows (a) Gamma(3,3) (b) Mixture of Exponentials and (c) Mixture of Gamma distributions.

In the next stage, we will calculate the corresponding approaches and give conclusions on which is the most effective.

Finally, in each case, bounds will be given for both ruin probability and the deficit after ruin.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Στοχαστικές Ανελιξίες	1
1.3 Το κλασσικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου	3
1.4 Ο χρόνος και η πιθανότητα χρεοκοπίας	6
1.5 Ο Συντελεστής Προσαρμογής	10
1.6 Τα κλιμακωτά ύψη	13
1.7 Η βαθμίδα αποτυχίας	16

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΟ

ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

2.1 Εισαγωγή	21
2.2 Ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας	21
2.2.1 Ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας για εκθετικές αποζημιώσεις	22
2.2.2 Ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας για αποζημιώσεις που ακολουθούν μείξη εκθετικών	23
2.2.3 Ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας για αποζημιώσεις που ακολουθούν κατανομή Γάμμα	23
2.3 Προσεγγίσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας	24
2.3.1 Η πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασσικό μοντέλο	24
2.3.2 Ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg	25
2.3.3 Η προσέγγιση του Tijms	27
2.3.4 Η προσέγγιση του Willmot	28

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

3.1 Εισαγωγή	33
3.2 Ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας	33
3.3 Αριθμητική εφαρμογή για κατανομή Γάμμα (3,3)	38
3.4 Αριθμητική εφαρμογή για μείξη εκθετικών κατανομών	43
3.5 Αριθμητική εφαρμογή για μείξη Γάμμα Κατανομών	49

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4.1 Εισαγωγή	56
4.2 Αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής	56
4.3 Το πλεόνασμα πριν και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας	62
4.4 Φραγματα για την κατανομή του ελλείμματος	67
4.5 Αριθμητικές εφαρμογές	70
4.5.1 Αριθμητική εφαρμογή για την κατανομή Γάμμα (3,3)	70
4.5.2 Αριθμητική εφαρμογή για μείξη εκθετικών κατανομών	73
4.5.3 Αριθμητική εφαρμογή για μείξη Γάμμα κατανομών	81
Παράρτημα	88
Βιβλιογραφία	99

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι αρχικά η επισκόπηση βασικών εισαγωγικών εννοιών που αφορούν το Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας. Θα παρατεθούν ορισμοί που περιγράφουν την έννοια της Χρεοκοπίας, οι οποίοι θα αναλυθούν και σε επόμενα κεφάλαια.

Το κλασικό μοντέλο, εισήχθη το 1903 από το Σουηδό Filip Lundberg και αναπτύχθηκε το 1930 από τον Harald Cramer, ο οποίος ενσωμάτωσε τη θεωρία των Στοχαστικών Ανελιξεων στη θεωρία κινδύνου. Βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου αυτού είναι ότι το πλήθος των ζημιών σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων ακολουθεί την κατανομή Poisson.

1.2 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

Οι Στοχαστικές Ανελιξεις, έχουν εφαρμογές σε όλες τις επιστήμες, αφού μελετούν φαινόμενα τα οποία εξαρτώνται από το χώρο ή το χρόνο όπως θα δούμε παρακάτω. Μοντέλα Στοχαστικών Ανελιξεων περιγράφουν βιολογικά φαινόμενα όπως η συμπεριφορά ενός πληθυσμού που υπόκειται σε γέννηση, θάνατο, ή σε πολυπλοκότερες συνθήκες, στην κατανομή των φυτών και των ζώων κτλ. Ένας βασικός κλάδος στον οποίο εφαρμόζονται με ιδιαίτερη επιτυχία είναι η Οικονομία.

Παρακάτω θα δοθεί μια πιο εκτενής ανάλυση των Στοχαστικών Ανελιξεων, βλέπε Πολίτης (2012) και Χρυσ αφίνου (2011).

Ορισμός 1.1

Μία στοχαστική ανέλιξη είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών (τ.μ.) $\{X_t: t \in T\}$. Το σύνολο T καλείται δεικτοσύνολο και συνήθως παριστά χρόνο. Διακρίνουμε δύο κατηγορίες που αφορούν τα μοντέλα αυτά.

- $T = \{0,1,2, \dots\}$ και τότε θα λέμε ότι η στοχαστική ανέλιξη X_t ή $\{X(t), t \geq 0\}$, είναι διακριτού χρόνου.
- $T = [0, \infty)$ και τότε θα λέμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$, είναι συνεχούς χρόνου.

Ένας ακόμα διαχωρισμός γίνεται βάσει του πλήθους των τιμών για το X_t . Θα λέμε ότι μία ανέλιξη λαμβάνει διακριτές τιμές εάν το πλήθος τους είναι αριθμήσιμο, ενώ στην περίπτωση που είναι μη αριθμήσιμο θα αναφερόμαστε σε μία στοχαστική ανέλιξη με συνεχείς τιμές.

Δύο χρήσιμες ιδιότητες των στοχαστικών ανελίξεων όπως αναφέρονται και στο σύγγραμμα “Εισαγωγή τη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου” είναι οι παρακάτω

1. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$, θα λέμε ότι έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, οι τ.μ. $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες.
2. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$, έχει στάσιμες προσαυξήσεις αν για κάθε $n = 1, 2, \dots$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ και $h > 0$, η κατανομή των τ.μ. $X_{t_{1+h}} - X_{t_{0+h}}, X_{t_{2+h}} - X_{t_{1+h}}, \dots, X_{t_{n+h}} - X_{t_{n-1+h}}$ είναι η ίδια, δηλαδή η κατανομή αυτή δεν εξαρτάται από την παράμετρο h .

Μία από τις κυριότερες στοχαστικές ανελίξεις, που χρησιμοποιείται για να παραστήσει πόσες φορές συμβαίνει ένα γεγονός που μας ενδιαφέρει (π.χ. μια απαίτηση για αποζημίωση σε ασφαλιστική εταιρία,) στο χρόνο, είναι η ανέλιξη Poisson.

Ορισμός 1.2

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{N(t), t \geq 0\}$ λέγεται ανέλιξη Poisson όταν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

1. $N(0) = 0$, και για $t \leq s$ είναι $N(t) \leq N(s)$, δηλαδή η συνάρτηση $N(t)$ είναι αύξουσα ως προς t .
2. Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα h μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί είναι ανάλογη με το μήκος του διαστήματος.
3. Για κάθε $t < s$, η τ.μ. $N(s) - N(t)$ είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής $N(t)$.

Η ανέλιξη Poisson, όπως προκύπτει από τα παραπάνω, μπορεί να οριστεί ισοδύναμα ως μια απαριθμήτρια ανέλιξη με ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις.

Δύο σημαντικές ιδιότητες της ανέλιξης Poisson θα αναφερθούν παρακάτω

1. Για κάθε σταθερό t , η τ.μ. $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt , όπου λ λέγεται ένταση ή ρυθμός της ανέλιξης Poisson και συμβολικά γράφεται $N(t) \sim Poi(\lambda t)$.
2. Για κάθε $i \neq j$, οι μεταβλητές T_i, T_j είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και η καθεμία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ .
Οι μεταβλητές T_i, T_j , ονομάζονται χρόνοι αναμονής ή ενδιάμεσοι χρόνοι και περιγράφονται από την ακολουθία $\{T_k: k = 1, 2, \dots\}$ ως εξής

$$\begin{aligned} T_1 &= Y_1 \\ T_2 &= Y_2 - Y_1 \\ &\dots \\ T_k &= Y_k - Y_{k-1}. \end{aligned}$$

Οι τ.μ. Y_1, Y_2, \dots ορίζουν μια ακολουθία, που ονομάζεται ακολουθία των χρόνων άφιξης, με τον παρακάτω τρόπο

$$\begin{aligned} Y_1 &= \min\{t: N(t) = 1\} \\ Y_2 &= \min\{t: N(t) = 2\} \\ &\dots \\ Y_k &= \min\{t: N(t) = k\}. \end{aligned}$$

Η συνεχής τ.μ. Y_k παριστάνει το χρόνο άφιξης του k γεγονότος.

1.3 ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Κάθε ασφαλιστική εταιρία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καλύψει τον ασφαλισμένο από τον κίνδυνο για τον οποίο έχει ασφαλιστεί έναντι συγκεκριμένων ασφαλιστρών, με την σύναψη συμβολαίων. Ανά τακτά χρονικά διαστήματα δέχεται ένα πλήθος απαιτήσεων για αποζημιώσεις εξαιτίας της επέλευσης των ζημιών στο χαρτοφυλάκιό της. Η θεωρία χρεοκοπίας εξετάζει την εξέλιξη των συνολικών αποζημιώσεων στο χρόνο, οι οποίες περιγράφονται σύμφωνα με μία σύνθετη κατανομή. Συγκεκριμένα, για $t \geq 0$, οι συνολικές απαιτήσεις στο διάστημα $[0, t]$, είναι

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \text{αν } N(t) \geq 1 \\ 0 & \text{αν } N(t) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές X_i παριστάνουν τις απαιτήσεις για αποζημίωση που φτάνουν σε μία ασφαλιστική εταιρία και θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες, ενώ η $N(t)$ δηλώνει τον αριθμό των απαιτήσεων που εισέρχονται στην εταιρία κατά την εξέλιξη του χρόνου.

Στο μοντέλο αυτό ισχύει ότι ο αριθμός των απαιτήσεων που φτάνουν στην εταιρία στο χρόνο είναι μία ανέλιξη Poisson $\{N(t): t \geq 0\}$. Αντίστοιχα, η $\{S(t): t \geq 0\}$ είναι μία σύνθετη ανέλιξη Poisson.

Ορισμός 1.3

Η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ από την σχέση

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (1.2)$$

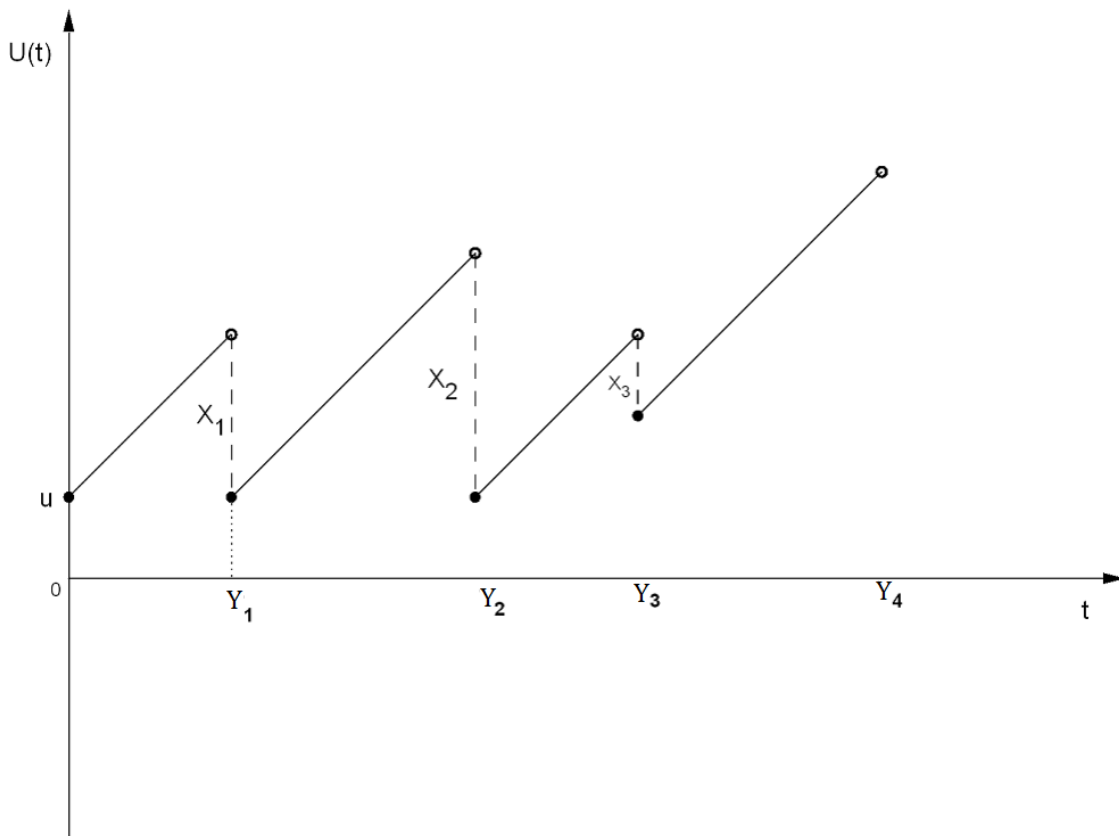
όπου u είναι το αρχικό αποθεματικό, δηλαδή το κεφάλαιο που διαθέτει η εταιρία ώστε να αποφύγει τη χρεοκοπία που μπορεί να επιφέρει ένα πλήθος ζημιών μικρής ή μεγάλης έντασης. Το ασφάλιστρο που εισρέει στην εταιρία στη μονάδα του χρόνου, συμβολίζεται με c . Το $U(t)$ καλείται αποθεματικό ή πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t , ενώ το $U(0) = u$ λέγεται αρχικό αποθεματικό.

Αν ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις

- ✚ Η ct είναι μία γραμμική συνάρτηση
- ✚ Οι μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και ανεξάρτητες από το πλήθος των αποζημιώσεων
- ✚ Η $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μία ανέλιξη Poisson, έτσι ώστε η ανέλιξη $\{S(t): t \geq 0\}$ είναι μία σύνθετη ανέλιξη Poisson.

τότε βλέπε Πολίτης (2012), αναφερόμαστε στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει την ανέλιξη πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο. Η εταιρία ξεκινάει με ένα αρχικό αποθεματικό το οποίο στη συνέχεια διαμορφώνεται καθώς εισέρχονται οι απαιτήσεις από τους ασφαλισμένους έως ότου γίνει σε κάποια χρονική στιγμή αρνητικό οπότε και επέρχεται η χρεοκοπία.



Σχήμα 1.1: Η ανέλιξη πλεονάσματος

Συνοψίζοντας, ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί για το κλασικό μοντέλο είναι ο παρακάτω

- λ η ένταση της ανέλιξης Poisson.
- $N(t)$ η ανέλιξη Poisson η οποία απαριθμεί τις απαιτήσεις που φτάνουν στην ασφαλιστική εταιρία.
- X_i οι απαιτήσεις για αποζημίωση που φτάνουν στην ασφαλιστική εταιρία.
- $S(t)$ σύνθετη ανέλιξη Poisson, που παριστάνει τις συνολικές αποζημιώσεις καθώς αυτές μεταβάλλονται στο χρόνο.
- c ο σταθερός ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών ανά μονάδα χρόνου στο διάστημα $[0, t]$.
- $U(t)$ στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος που εκφράζει το πλεόνασμα της εταιρίας τη χρονική στιγμή t .
- F η κατανομή των αποζημιώσεων. Όταν η κατανομή έχει πυκνότητα, τότε η πυκνότητα της κατανομής των αποζημιώσεων θα συμβολίζεται με f .

- p_k η k -τάξης ροπή της F γύρω από το μηδέν, δηλαδή

$$p_k = \int_0^{\infty} x^k dF(x) = \int_0^{\infty} x^k f(x) dx. \quad (1.3)$$

Η πρώτη ροπή εκφράζει την μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων.

Μία βασική υπόθεση που κάνουμε πάντα στο κλασικό μοντέλο είναι ότι

$$c > \lambda p_1, \quad (1.4)$$

όπου

c : μέση τιμή των εσόδων στην μονάδα του χρόνου.

λp_1 : η μέση τιμή των εξόδων στην μονάδα του χρόνου.

Επομένως, η παραπάνω συνθήκη υποδηλώνει ότι τα έξοδα πρέπει να είναι πάντα μικρότερα από τα έσοδα κατά μέσο όρο στη μονάδα του χρόνου έτσι ώστε να οδηγηθούμε σε συμπεράσματα για την βιωσιμότητα της εταιρίας.

Επιπλέον όμως, η ασφαλιστική εταιρία επιδιώκει να έχει κέρδος από τους κινδύνους που ασφαλίζει. Επομένως είναι απαραίτητο να ορίσουμε την έννοια του περιθωρίου ασφαλείας, όπως αυτή δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 1.4

Το περιθώριο ασφαλείας ή συντελεστής ασφαλείας θ (premium loading factor) στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας ορίζεται από τη σχέση

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1. \quad (1.5)$$

Όπως βλέπουμε από τη σχέση (1.4) το θ παίρνει πάντα θετικές τιμές και εκφράζει πόσο μεγαλύτερα είναι τα έσοδα από τα έξοδα της εταιρίας, κατά μέσο όρο σε ένα χαρτοφυλάκιο.

1.4 Ο ΧΡΟΝΟΣ ΚΑΙ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Ο όρος “χρεοκοπία” χρησιμοποιείται ως μέτρο της φερεγγυότητας του χαρτοφυλακίου. Όταν τα έξοδα της εταιρίας υπερβαίνουν τα έσοδα, τότε το πλεόνασμα γίνεται αρνητικό και σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι επέρχεται χρεοκοπία.

Η χρονική στιγμή που συμβαίνει η χρεοκοπία ονομάζεται χρόνος χρεοκοπίας και ορίζεται από τη μαθηματική σχέση

$$T = \begin{cases} \inf\{t: U(t) < 0\} \\ \infty \text{ αν } U(t) > 0 \forall t \end{cases} \quad (1.6)$$

Ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μία ελαττωματική τ.μ. αφού μπορεί με θετική πιθανότητα να πάρει την τιμή άπειρο, δηλαδή

$$P(T < \infty) < 1 \text{ ή } P(T = \infty) > 0.$$

και μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος. Στην περίπτωση που είναι άπειρος, δεν επέρχεται ποτέ χρεοκοπία.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι μία σημαντική ποσότητα στη θεωρία κινδύνου είναι η πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία και η οποία ορίζεται ως εξής

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 \mid U(0) = u]. \quad (1.7)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει την πιθανότητα η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος να πέσει τελικά κάτω από το μηδέν. Η μελέτη αυτής της πιθανότητας είναι σημαντική για τις ασφαλιστικές εταιρίες γιατί αν προσδιοριστεί κατάλληλα το αρχικό αποθεματικό u και το ασφάλιστρο c , τότε μπορεί να αποφευχθεί, ή έστω να επιμηκυνθεί η επέλευση της χρεοκοπίας.

Παρατηρήσεις

- Όταν τα αναμενόμενα έξοδα, υπερβαίνουν τα έσοδα στην μονάδα του χρόνου, τότε η χρεοκοπία είναι βέβαιη. Δηλαδή εάν η συνθήκη (1.4) δεν ισχύει τότε $\psi(u) = 1 \forall u \geq 0$.
- Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς το αρχικό αποθεματικό u .
- Ισχύει ότι $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$.

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, μελετά τη λειτουργία του χαρτοφυλακίου σε άπειρο χρόνο και ενώ δεν είναι το πιο ρεαλιστικό, σε σχέση με μοντέλα σε πεπερασμένο ή και διακριτό χρόνο, παρ' όλα αυτά η έρευνα για αρκετές δεκαετίες

επικεντρώθηκε σε αυτό καθώς προσφέρει πιο αναλυτικά αποτελέσματα. Ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας δεν είναι πάντοτε δυνατός παρά μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις όσον αφορά στην κατανομή των αποζημιώσεων (όπως θα δούμε και παρακάτω), έτσι έχουμε ορίσει και κάποια άλλα μεγέθη.

Σημαντική ποσότητα για την μελέτη του μοντέλου αποτελεί και η πιθανότητα μη χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u και αυτή ορίζεται ως

$$\delta(u) = P[U(t) \geq 0, \forall t \mid U(0) = u] = 1 - \psi(u). \quad (1.8)$$

Παρατηρήσεις

- Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς το αρχικό αποθεματικό u .
- Ισχύει ότι $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$.
- Η $\delta(u)$ είναι μεικτή κατανομή δηλαδή έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν, αφού ισχύει ότι η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό είναι θετική και είναι και συνεχής στο $(0, \infty)$.

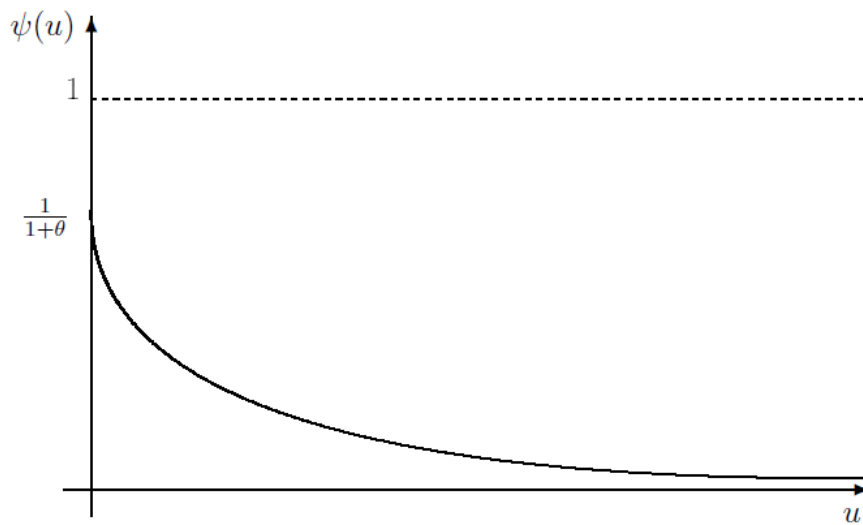
Έχει αποδειχθεί ότι για $u = 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την σχέση

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}, \quad (1.9)$$

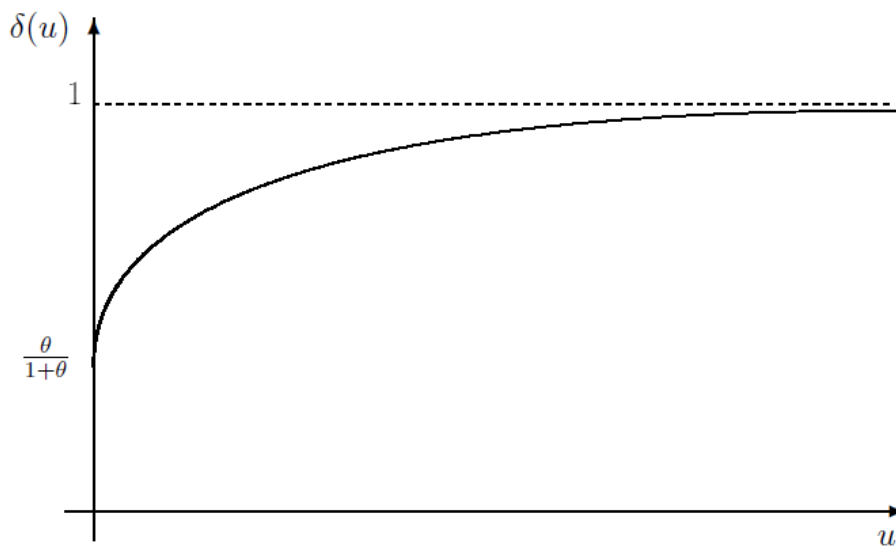
ενώ η πιθανότητα μη χρεοκοπίας ικανοποιεί την σχέση

$$\delta(0) = \frac{\theta}{1 + \theta}. \quad (1.10)$$

Στη συνέχεια δίνονται οι γραφικές παραστάσεις για τις $\psi(u)$ και $\delta(u)$ αντίστοιχα.



Σχήμα 1.2: Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας



Σχήμα 1.3: Γραφική παράσταση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας

Στη συνέχεια, θα εκφράσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω των ανανεωτικών εξισώσεων.

Μια εξίσωση της μορφής

$$y(t) = g(t) + \pi \int_0^t y(t-x) dF(x), \quad (1.11)$$

λέγεται εξίσωση ανανεωτικού τύπου ή απλά ανανεωτική εξίσωση. Στην παραπάνω σχέση, η g είναι μία φραγμένη συνάρτηση, το π είναι μία σταθερά που παίρνει τιμές από μηδέν μέχρι και την μονάδα, η F είναι μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής και τέλος η y είναι η άγνωστη συνάρτηση. Ανάλογα με την τιμή που παίρνει η σταθερά π οι ανανεωτικές εξισώσεις διακρίνονται σε ελλειμματικές και σε κανονικές ή μη ελλειμματικές. Στην περίπτωση που $0 < \pi < 1$ έχουμε μία ελλειμματική εξίσωση ενώ όταν $\pi = 1$ προκύπτει μία κανονική εξίσωση.

Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης, βλέπε Πολίτης (2012) δίνεται από την εξής σχέση

$$y(t) = g(t) + \int_0^t g(t-x) dY(x). \quad (1.12)$$

όπου η Y περιγράφεται από τον τύπο

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi^k F^{*k}(t). \quad (1.13)$$

Ορισμός 1.5

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (defective renewal equation) που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\psi(u) = \psi(0) \int_0^u \psi(u-x) dF_e(x) + \psi(0) \bar{F}_e(u). \quad (1.14)$$

Από τη σχέση (1.14) παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας εξαρτάται από την $F_e(x)$ η οποία ονομάζεται κατανομή ισορροπίας, σχετίζεται με την κατανομή των αποζημιώσεων και ορίζεται ως

$$F_e(x) = 1 - \bar{F}_e(x) = \frac{1}{p_1} \int_0^x \bar{F}(y) dy. \quad (1.15)$$

1.5 Ο ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ

Μια σημαντική ποσότητα στη θεωρία χρεοκοπίας είναι ο συντελεστής προσαρμογής (adjustment coefficient) που συμβολίζεται με $R > 0$.

Ο συντελεστής προσαρμογής ορίζεται ως η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης Lundberg, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$1 + (1 + \theta)p_1 r = M_X(r). \quad (1.16)$$

Ο συμβολισμός $M_X(r)$ εκφράζει τη ροπογεννήτρια της κατανομής του μεγέθους των αποζημιώσεων και ισχύει ότι

$$M_X(r) = \int_0^\infty e^{rt} dF(t). \quad (1.17)$$

Ονομάζουμε το αριστερό μέλος της σχέσης (1.17) με $y_1(r)$ η οποία είναι μία γραμμική συνάρτηση του r και το δεξί μέλος με $y_2(r)$ η οποία είναι αύξουσα και κυρτή συνάρτηση αφού

- $y_2'(r) = E(Xe^{rx}) = \int_0^\infty x e^{rx} f(x) dx > 0.$
- και
- $y_2''(r) = E(X^2 e^{rx}) = \int_0^\infty x^2 e^{rx} f(x) dx > 0.$

Επίσης ισχύουν τα εξής

$$y_1(0) = 0$$

και

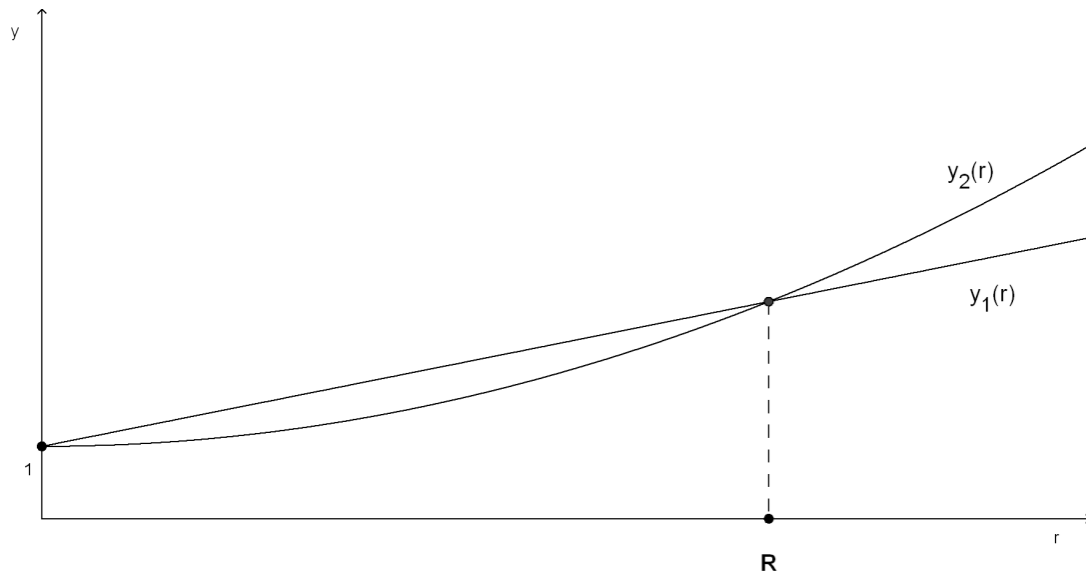
$$y_2(0) = 0$$

καθώς και

$$y_1'(r) = (1+\theta)p_1 \Rightarrow y_1'(0) = (1+\theta)p_1.$$

$$y_2'(r) = M'_X(r) \Rightarrow y_2'(0) = E(X).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι στο σημείο μηδέν ισχύει ότι $y_2'(0) < y_1'(0)$ και ότι το μηδέν αποτελεί πάντα μία λύση στην εξίσωση (1.17), βλέπε Bowers et al. (1986). Θυμίζουμε ότι ο συντελεστής προσαρμογής R είναι γνήσια μεγαλύτερος του μηδενός και αποτελεί λύση της (1.17), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1.4: Συντελεστής Προσαρμογής

Παρατηρήσεις

Ο συντελεστής προσαρμογής δεν υφίσταται όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων ακολουθούν κατανομές με βαριές ουρές όπως για παράδειγμα οι $Pa(\alpha, \beta)$, $Weibull(\tau, \gamma)$ $\gamma < 1$, για τις οποίες δεν υπάρχει η ροπογεννήτρια.

Επίσης, οι λόγοι που κάνουν τον συντελεστή προσαρμογής τόσο σημαντικό είναι δύο και θα μελετηθούν εκτενέστερα σε επόμενα κεφάλαια τόσο θεωρητικά όσο και με αριθμητικές εφαρμογές.

Καταρχάς, ικανοποιεί την ανισότητα του Lundberg η οποία δίνεται παρακάτω

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad \forall u \geq 0 \quad (1.18)$$

Επιπλέον ικανοποιεί τον ασυμπτωτικό τύπο Cramer-Lundberg

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru} \quad \text{καθώς } u \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το μέγεθος των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή, δηλαδή ότι $X \sim Exp(a)$, με $a > 0$. Τότε (βλέπε Πολίτης, 2012) είναι γνωστό ότι

$$M_X(r) = \frac{a}{a - r}$$

και η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο

$$p_1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.16) για την εύρεση του συντελεστή προσαρμογής προκύπτει

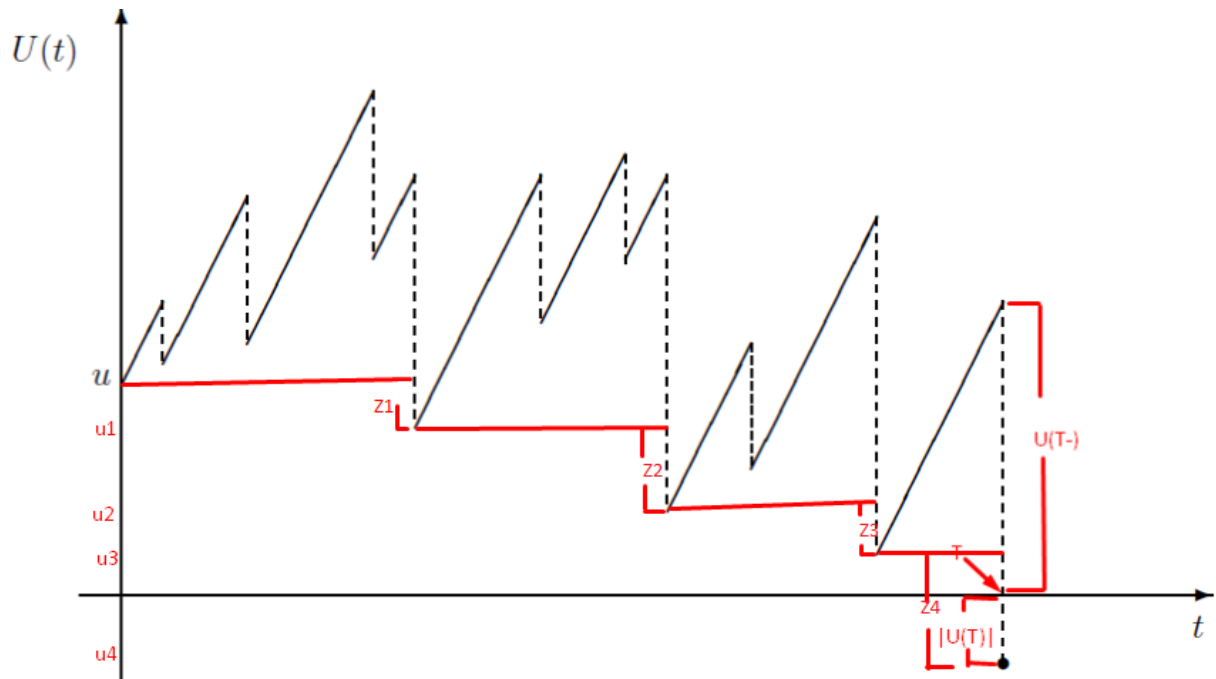
$$\begin{aligned} 1 + (1 + \theta) \frac{1}{\alpha} r &= \frac{a}{a - r} \\ (1 + \theta) \frac{r}{\alpha} &= \frac{\alpha}{\alpha - r} - 1 \\ (1 + \theta) \frac{r}{\alpha} &= \frac{r}{\alpha - r} (a - r + \theta\alpha - \theta r) = a \\ \theta a &= \theta r + r \\ \theta a &= r(1 + \theta) \\ r &= \frac{\theta a}{1 + \theta} = R. \end{aligned} \tag{1.20}$$

1.6 ΤΑ ΚΛΙΜΑΚΩΤΑ ΥΨΗ

Κάποιες σημαντικές ποσότητες στη θεωρία κινδύνων, οι οποίες θα αναλυθούν εκτενέστερα και στο Κεφάλαιο 4, είναι το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία. Με $U(T)$ θα συμβολίζουμε από εδώ και στο εξής το έλλειμμα το οποίο είναι αρνητικό, ενώ η τ.μ. που δηλώνει το μέγεθος του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρονική στιγμή που πληρωθεί από τον ασφαλιστή η αποζημίωση η οποία προκαλεί χρεοκοπία, θα συμβολίζεται με $U(T-)$ και ικανοποιείται από τη σχέση

$$U(T-) = \lim_{t \rightarrow T-} U(t).$$

Στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε την ύπαρξη και μιας ακόμα μεταβλητής η οποία συμβολίζεται με Z_i και εκφράζει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το προηγούμενο αποθεματικό, ή αλλιώς κλιμακωτό ύψος (ladder height). Η μεταβλητή αυτή παίρνει θετικές τιμές εφόσον η πτώση του πλεονάσματος εξετάζεται κατά απόλυτη τιμή.



Σχήμα 1.5: Ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν και το έλλειμμα μετά τη χρεοκοπία

Έστω ότι η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό συμβαίνει τη χρονική στιγμή t_1 και το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή αυτή είναι $U(t_1) = u_1$. Η τιμή που παίρνει η τυχαία μεταβλητή Z_1 είναι

$$Z_1 = u - u_1.$$

Συνεχίζοντας, ορίζουμε κατά αντιστοιχία την τ.μ. Z_2 η οποία εκφράζει την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u_1 , η οποία συμβαίνει τη χρονική στιγμή t_2 και το πλεόνασμα τη στιγμή αυτή είναι $U(t_2) = u_2$.

$$Z_2 = u_1 - u_2.$$

Κατά αντιστοιχία ορίζουμε και τις υπόλοιπες πτώσεις του πλεονάσματος κάτω από το τελευταίο αποθεματικό που έχει η εταιρία την προηγούμενη χρονική στιγμή (το οποίο είναι μικρότερο από το αρχικό αποθεματικό u)

Δηλαδή,

$$Z_3 = u_2 - u_3$$

$$Z_4 = u_3 - u_4$$

...

$$Z_i = Z_{i-1} - Z_i.$$

Το άθροισμα όλων των πτώσεων αποτελεί την τυχαία μεταβλητή Z που ορίζεται ως εξής

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_K,$$

η οποία δηλώνει μια σύνθετη τυχαία μεταβλητή που ονομάζεται μέγιστη σωρευτική απώλεια και εκφράζει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό. Οι τ.μ. Z_1, Z_2, Z_3, \dots είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και ακολουθούν την κατανομή ισορροπίας (equilibrium distribution).

Ορισμός 1.6

Έστω μια τυχαία μεταβλητή X , που ακολουθεί την κατανομή ισορροπίας μιας κατανομής F . Τότε η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση επιβίωσης είναι

- Συνάρτηση κατανομής (βλέπε σχέση 1.17)

$$F_e(x) = \frac{1}{p_1} \int_0^x \bar{F}(t) dt.$$

- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_e(x) = \frac{\bar{F}_e(x)}{p_1}. \quad (1.21)$$

- Συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}_e(x) = \frac{1}{p_1} \int_x^\infty \bar{F}(t) dt. \quad (1.22)$$

Η Z είναι μία τ.μ. που έχει μάζα στο μηδέν και είναι συνεχής στο $[0, \infty)$

$$P(Z = 0) = \delta(0).$$

Έστω K το πλήθος των πτώσεων κάτω από το αρχικό αποθεματικό. Η μεταβλητή K είναι διακριτή, εφόσον παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές, και ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή. Κάθε φορά που στην ανέλιξη πλεονάσματος έχουμε ένα καινούριο Z_i , η πιθανότητα να “εμφανιστεί” το Z_{i+1} ισούται με $\psi(0)$. Συνεπώς αν θεωρήσουμε “αποτυχία” την εμφάνιση μιας πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό, η μεταβλητή

K , μετρά τον αριθμό των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία και η κατανομή της δίνεται από τον τύπο

$$P(K = k) = [\psi(0)]^k \delta(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

Ισοδύναμα, μέσω της σχέσης (1.10) ο παραπάνω τύπος μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$P(K = k) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \frac{\theta}{1+\theta}. \quad (1.24)$$

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι εφόσον η τ.μ. K ακολουθεί γεωμετρική κατανομή, η μέγιστη σωρευτική απώλεια θα ακολουθεί σύνθετη γεωμετρική κατανομή. Η πιθανότητα η τ.μ. Z να πάρει την τιμή μηδέν είναι

$$P(Z = 0) = P(K = 0) = \delta(0).$$

Εάν η μέγιστη σωρευτική απώλεια είναι μεγαλύτερη από το αρχικό αποθεματικό, τότε συμβαίνει χρεοκοπία. Το παραπάνω μαθηματικά εκφράζεται ως

$$P(Z \leq u) = \delta(u) \quad (1.25)$$

και επίσης

$$P(Z > u) = \psi(u). \quad (1.26)$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η δεξιά ουρά μιας σύνθετης Γεωμετρικής κατανομής στο σημείο u .

1.7 Η ΒΑΘΜΙΑ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ

Στην ενότητα αυτή θα δοθούν ορισμοί που χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο στη θεωρία αξιοπιστίας και έχουν ιδιαίτερη σημασία στα συστήματα παραγωγής, αφού θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία και θα γίνει εκτενέστερη ανάλυσή τους σε επόμενα κεφάλαια βλέπε Μπούτσικας (Σημειώσεις μαθήματος “Θεωρία Αξιοπιστίας”).

Η θεωρία της αξιοπιστίας μελετά μεμονωμένες μονάδες και συστήματα μονάδων που υπόκεινται σε βλάβες. Σκοπός της είναι η επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με τον υπολογισμό, την εκτίμηση και τη βελτιστοποίηση της πιθανότητας λειτουργίας (αξιοπιστίας) τέτοιων συστημάτων.

Ένα σύστημα αξιοπιστίας μπορεί να είναι μια ηλεκτρική συσκευή, ένα δίκτυο τηλεπικοινωνιών ή δορυφόρων, ακόμα και ένα έμβιο ον. Η αποτυχία του συστήματος είναι αντίστοιχα το κάψιμο της ηλεκτρικής συσκευής, η πτώση του δικτύου και ο θάνατος.

Ορισμός 1.7

Έστω μία μη αρνητική συνεχής τ.μ. T με συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) G και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) g . Η ποσότητα

$$\lambda(t) = \frac{G'(t)}{1 - G(t)} = \frac{g(t)}{\bar{G}(t)}, \quad (1.27)$$

ονομάζεται βαθμίδα αποτυχίας, ή ένταση αποτυχίας ή ένταση θνησιμότητας και εκφράζει το ρυθμό κατά τον οποίο αποτυγχάνει μία μονάδα.

Η παραπάνω συνάρτηση χρησιμοποιείται για να χωρίσει τους χρόνους μέχρι την επόμενη βλάβη σε δύο κλάσεις. Καταρχήν είναι αυτές που έχουν αύξοντα ρυθμό αποτυχίας (increasing failure rate/ IFR), δηλαδή όταν η μονάδα φθείρεται με την πάροδο του χρόνου και αυτές που έχουν φθίνοντα ρυθμό αποτυχίας (decreasing failure rate/ DFR), δηλαδή όταν η μονάδα λειτουργεί ομαλότερα όσο περνά ο χρόνος.

Για να γίνουν περισσότερο κατανοητά τα παραπάνω θα δοθούν οι αντίστοιχοι ορισμοί για τις IFR/DFR κατανομές.

Ορισμός 1.8

Μία κατανομή G είναι IFR (DFR), συμβολίζουμε με $G \in \text{IFR (DFR)}$, όταν για κάθε $x, y \geq 0$, η συνάρτηση

$$\frac{\bar{G}(x+y)}{\bar{G}(x)}$$

είναι φθίνουσα (αύξουσα) ως προς x . Επιπρόσθετα, αν η κατανομή G είναι απολύτως συνεχής τότε η G είναι IFR (DFR) όταν η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του x .

Όταν $\lambda(t) = h$, όπου h σταθερός θετικός αριθμός τότε η συνάρτηση G είναι ταυτόχρονα και φθίνουσα και αύξουσα στο χρόνο. Είναι προφανές ότι σ' αυτή την κλάση ανήκει η εκθετική κατανομή, αφού εάν

$$g(x) = \beta e^{-\beta x}$$

είναι η σ.π.π. της εκθετικής κατανομής με παράμετρο β ενώ η συνάρτηση επιβίωσης της δίνεται από τον τύπο

$$\bar{G}(x) = e^{-\beta x}$$

και η βαθμίδα αποτυχίας κάνοντας χρήση τον τύπο (1.27) προκύπτει ότι είναι

$$\lambda(t) = \beta.$$

Η μείξη εκθετικών κατανομών με ουρά

$$\bar{G}(x) = qe^{-\beta_1 x} + (1 - q)e^{-\beta_2 x}, \quad x \geq 0,$$

$$\beta_2 > \beta_1 > 0 \text{ και } 0 < q < 1$$

είναι DFR.

Η κατανομή Γάμμα με παραμέτρους (α, γ) και πυκνότητα

$$g(x) = \frac{\gamma^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\gamma x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0,$$

όπου $\gamma > 0$, $\alpha > 0$ είναι IFR εάν $\alpha > 1$ και DFR εάν $0 < \alpha < 1$.

Ορισμός 1.9

Μία κατανομή $G(t)$ ανήκει στην κλάση NBU (NWU), που είναι ευρύτερη από την IFR (DFR), αν και μόνο αν ισχύει η παρακάτω ανίσωση

$$\bar{G}(x + y) \leq (\geq) \bar{G}(x)\bar{G}(y), \quad \text{για } x, y \geq 0.$$

Η ιδιότητα NBU δηλώνει ότι η πιθανότητα επιβίωσης πέρα από την ηλικία $x + y$, δεδομένου ότι η μονάδα λειτουργεί τη χρονική στιγμή x , η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\frac{\bar{G}(x+y)}{\bar{G}(x)}.$$

είναι μικρότερη ή ίση από την πιθανότητα επιβίωσης χρόνου y για μια καινούρια μονάδα (η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής).

Η ιδιότητα NWU δηλώνει ότι η πιθανότητα επιβίωσης μιας μονάδας με ηλικία x είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα επιβίωσης $\bar{G}(y)$ μιας καινούριας μονάδας.

Ορισμός 1. 10

Μία κατανομή $G(t)$ είναι NBUC (NWUC) αν και μόνο αν ισχύει η παρακάτω ανίσωση

$$\int_t^\infty \bar{G}(x+y)dy \leq (\geq) \bar{G}(x) \int_t^\infty \bar{G}(y)dy, \quad \text{για } x, y \geq 0.$$

Αυτή η κλάση κατανομών είναι ευρύτερη από την κλάση NBU (NWU).

Ορισμός 1. 11

Στη συνέχεια θα δοθεί ο ορισμός για την κλάση NBUE (NWUE) η οποία είναι ευρύτερη από την κλάση NBUC (NWUC).

Έστω ότι η τ.μ. T ακολουθεί την κατανομή G με μέση τιμή $E(T) = \int_0^\infty \bar{G}(x)dx < \infty$.

Τότε η $G(t)$ ονομάζεται NBUE (NWUE) αν και μόνο αν ισχύει η ανίσωση

$$\mu_t \leq (\geq) E(T) \quad \text{για } t > 0$$

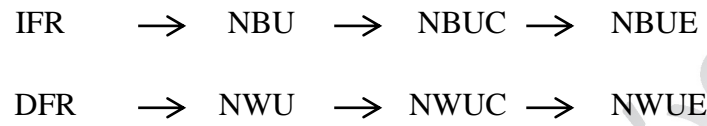
όπου ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας με ηλικία t να συμβολίζεται με

$$\mu_t = \int_0^\infty \bar{G}(x/t)dx = \frac{\int_0^\infty \bar{G}(x+t)dx}{\bar{G}(t)} = \frac{\int_t^\infty \bar{G}(y)dy}{\bar{G}(t)}.$$

Πρακτικά ο ορισμός σημαίνει ότι στην περίπτωση της NBUE κατανομής, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας χρησιμοποιημένης μονάδας δεν υπερβαίνει το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής μιας καινούριας μονάδας.

Ενώ, στην περίπτωση της κατανομής NWUE ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας καινούριας μονάδας δεν υπερβαίνει το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής μιας χρησιμοποιημένης μονάδας.

Στο επόμενο διάγραμμα θα δούμε συνοπτικά τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις κλάσεις που προαναφέραμε.



Πανεπιστήμιο Πειραιώς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούν οι περιπτώσεις στις οποίες η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς. Στη συνέχεια θα παρατεθούν διάφορες προσεγγίσεις και φράγματα για τις περιπτώσεις που ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας δεν είναι δυνατός.

2.2 ΑΚΡΙΒΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια στην περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί εκθετική κατανομή, μείξη εκθετικών και Γάμμα με μέση τιμή 1 και παράμετρο α μικρότερη ή και ίση με την μονάδα.

Ένας τρόπος υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας (Bowers et al. 1986) είναι μέσω ροπογεννητριών. Συγκεκριμένα υπολογίζεται αρχικά η ροπογεννήτρια της μέγιστης σωρευτικής απώλειας Z , η κατανομή της οποίας έχει ουρά την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$.

Πρόταση 2.2.1

Έστω $M_X(r)$ η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων και $M_{Z_1}(r)$ η ροπογεννήτρια των κλιμακωτών υψών. Τότε ισχύει ότι

$$M_{Z_1}(r) = \frac{1}{p_1 r} (M_X(r) - 1). \quad (2.2.1)$$

Απόδειξη

Η ροπογεννήτρια της τ.μ. Z , με σ.π.π. $f_e(x) = \bar{F}(x)/p_1$ περιγράφεται από τον παρακάτω τύπο

$$M_{Z_1}(r) = \int_0^\infty e^{rx} f_e(x) dx = \int_0^\infty \frac{e^{rx}}{p_1} [1 - F(x)] dx.$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση παίρνουμε

$$M_{Z_1}(r) = \frac{1}{r} \frac{e^{rx}}{p_1} [1 - F(x)] \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{e^{rx}}{p_1} f(x) dx = -\frac{1}{r p_1} + \frac{1}{r p_1} M_X(r),$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πρόταση 2.2.2

Αν η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί $Exp(\beta)$, τότε η μεταβλητή Z_1 , ακολουθεί επίσης την εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο.

Απόδειξη

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών είναι

$$\begin{aligned} P(Z_1 \leq x) &= \int_0^x \frac{1}{p_1} [1 - F(t)] dt \\ &= \beta \int_0^x e^{-\beta t} dt = \beta \left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \right]. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$P(Z_1 \leq x) = 1 - e^{-\beta x},$$

το οποίο δείχνει ότι η Z_1 ακολουθεί την εκθετική με παράμετρο β .

2.2.1 ΑΚΡΙΒΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΕΙΣ

Έστω ότι η τ.μ. X που εκφράζει το μέγεθος των απαιτήσεων, ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο α , συμβολίζουμε με $X \sim Exp(\alpha)$. Όπως έχει δειχθεί και στη σελίδα 13 προκύπτει ότι ο συντελεστής προσαρμογής περιγράφεται από τον τύπο

$$r = \frac{\theta \alpha}{1 + \theta} = R.$$

Υπενθυμίζουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η δεξιά ουρά της τ.μ. Z , η οποία ακολουθεί σύνθετη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\delta(0)$.

Επομένως για την πιθανότητα χρεοκοπίας ισχύει βλέπε Πολίτης (2012)

$$\psi(u) = P(Z > u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta \alpha}{1+\theta} u}. \quad (2.2.2)$$

Μέσω της σχέσης (1.20) και επειδή $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\psi(u) = P(Z > u) = \psi(0) e^{-Ru}. \quad (2.2.3)$$

2.2.2 ΑΚΡΙΒΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΜΕΙΞΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Έστω ότι η τ.μ. X που εκφράζει το μέγεθος των απαιτήσεων ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας βλέπε Gerber et al. (1987)

$$f(x) = A_1 b_1 e^{-b_1 x} + A_2 b_2 e^{-b_2 x}. \quad (2.2.4)$$

όπου ισχύει $A_1 + A_2 = 1$.

Όσον αφορά την πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει από Bowers et al. (1986) ότι

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u}. \quad (2.2.5)$$

όπου τα C_1, C_2 είναι σταθερές για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{1 + \theta} \quad (2.2.6)$$

και r_1, r_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης για τον συντελεστή προσαρμογής.

2.2.3 ΑΚΡΙΒΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΓΑΜΜΑ

Όπως αναφέρεται και στη δημοσίευση των Jan Grandell and C.-O. Segerdahl (1971) η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια όταν η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί την κατανομή Γάμμα (a, β) με μέση τιμή ίση με την μονάδα και $a \leq 1$.

Ισχύει ο τύπος

$$\psi(u) = \frac{\theta(1 - R/a)e^{-Ru}}{1 + (1 + \theta)R - (1 + \theta)\left(1 - \frac{R}{a}\right)} + \frac{a\theta \sin(a\pi)}{\pi} I, \quad (2.2.7)$$

όπου

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^a e^{-(x+1)au}}{[x^a(1 + a(1 + \theta)(x + 1)) - \cos(a\pi)]^2 + \sin^2(a\pi)} dx. \quad (2.2.8)$$

2.3 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

2.3.1 Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Έστω $\{Z_i: i = 1, 2, 3, \dots\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με συνάρτηση κατανομής

$$F_e(x) = \Pr(Z_i \leq x) = 1 - \bar{F}_e(x).$$

Έστω N μια τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη των Z_i που ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\Pr(N = n) = (1 - p)p^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.1)$$

Πόρισμα 2.3.1

Έστω $S = 0$ εάν $N = 0$ και $S = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N$ αν $N = 1, 2, 3, \dots$ Τότε,

$$\psi(u) = \Pr(Z > u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)p^n \bar{F}_e^{*n}(u), \quad u \geq 0. \quad (2.3.2)$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας την σύνθετη γεωμετρική έκφραση της τ.μ. $Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N$ προκύπτει ότι

$$\psi(u) = \Pr(Z > u) = \Pr(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N > u)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N > u | N = n) \Pr(N = n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda p_1}{c}\right) \left(\frac{\lambda p_1}{c}\right)^n \bar{F}_e^{*n}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)p^n \bar{F}_e^{*n}(u).$$

Όπου $\bar{F}^{*n}(u) = \Pr(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N > u)$ για $n = 1, 2, 3, \dots$, η n -οστή συνέλιξη της κατανομής των αποζημιώσεων. Η μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων δίνεται από τον τύπο

$$p_1 = \int_0^{\infty} \bar{F}(y) dy$$

και

$$p = \frac{1}{1 + \theta} = \frac{\lambda p_1}{c},$$

ενώ η κατανομή ισορροπίας (equilibrium) περιγράφεται από τον τύπο

$$F_e(x) = \frac{\int_0^x (1-F(y)) dy}{\int_0^{\infty} (1-F(y)) dy}.$$

Υποθέτουμε ότι οι απαιτήσεις ακολουθούν ανέλιξη Poisson με ένταση λ και το ύψος των απαιτήσεων απαρτίζεται από ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $F(x)$. Τα ασφάλιστρα πληρώνονται συνεχώς, με ρυθμό που δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(1 + \theta) \int_0^{\infty} (1 - F(y)) dy \quad \text{όπου} \quad \theta > 0$$

είναι το περιθώριο ασφαλείας και u το αρχικό αποθεματικό. Θυμίζουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας συμβολίζεται με $\psi(u)$ ενώ με $\psi(0) = p = \frac{1}{1+\theta}$, συμβολίζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό.

2.3.2 Ο ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ CRAMER-LUNDBERG

Εάν υπάρχει $R > 0$ που να ικανοποιεί την

$$E(e^{RZ_i}) = \int_0^{\infty} e^{Rz} dF(z) = \frac{1}{p}, \quad (2.3.3)$$

(Θυμίζουμε ότι τα κλιμακωτά ύψη Z_1, Z_2, \dots, Z_N είναι ανεξάρτητα και ισόνομα με την κατανομή F_e).

Τότε ισχύει προσεγγιστικά

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-Ru} \psi(u) = C \quad (2.3.4)$$

με $C > 0$ να ορίζεται ως

$$C = \frac{1 - p}{pRE(Z_i e^{RZ_i})}. \quad (2.3.5)$$

Με βάση την προσέγγιση αυτή, ορίζουμε την συνάρτηση

$$\psi_c(u) = Ce^{-Ru}, \quad u \geq 0$$

την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στο Κεφάλαιο 3.

Ακόμα όπως παρατηρούμε από την σχέση (2.3.4) ισχύει $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{Ce^{-Ru}} = 1$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν το ύψος των απαιτήσεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με συνάρτηση επιβίωσης,

$$\bar{F}(x) = e^{-\frac{x}{p_1}} \quad x \geq 0,$$

η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από την σχέση

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{\left\{-\frac{\theta}{(1+\theta)p_1}u\right\}}, \quad u \geq 0. \quad (2.3.6)$$

Επομένως, ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg είναι ακριβής σ' αυτή την περίπτωση.

Παρατηρώντας τις σχέσεις που δίνονται παραπάνω διαπιστώνουμε πως απαραίτητη προϋπόθεση για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι η ύπαρξη της ροπογεννήτριας και άρα του συντελεστή προσαρμογής. Σε περιπτώσεις που δεν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής ή που υπάρχει μεν αλλά είναι δύσκολος ο υπολογισμός του, όπως στην κατανομή Pareto(a) και στην Weibull(τ, γ) χρησιμοποιούμε φράγματα προκειμένου να υπολογίσουμε στην συνέχεια την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ειδικά για την κατανομή Weibull(τ, γ) όπου $\tau, \gamma > 0$ η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \tau\gamma x^{\gamma-1}e^{-\tau x^\gamma}$ ισχύουν

- Για $\gamma = 1$ προκύπτει η εκθετική κατανομή.
- Για $\gamma < 1$ η ροπογεννήτρια δεν υπάρχει άρα ούτε και ο συντελεστής προσαρμογής.
- Για $\gamma > 1$ η ροπογεννήτρια υπάρχει αλλά δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά.

Ενδεικτικά δύο γενικά άνω φράγματα για τον συντελεστή προσαρμογής, σύμφωνα με Πολίτης (2012) είναι

$$\blacksquare R < \frac{2\theta p_1}{p_2}. \quad (2.3.7)$$

$$\blacksquare R < \frac{12\theta p_1}{\sqrt{9p_2^2 + 24\theta p_1 p_3} + 3p_2}. \quad (2.3.8)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το άνω φράγμα που περιγράφεται στην σχέση (2.3.8) είναι καλύτερο από αυτό που περιγράφεται στην (2.3.7), απαιτεί όμως την ύπαρξη της τρίτης ροπής.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας λοιπόν, ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg δίνει πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα καθώς το αρχικό αποθεματικό παίρνει μεγάλες τιμές. Επίσης, είναι περισσότερο αποτελεσματικός όταν η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων μειώνεται με εκθετικό ρυθμό όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της κατανομής Γάμμα ή στην μείξη εκθετικών κατανομών. Σημαντικό μειονέκτημα είναι ότι για να μπορεί να εφαρμοστεί θα πρέπει να υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής.

2.3.3 Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΤΙJMS

Η προσέγγιση του Tijms είναι μία επέκταση του ασυμπτωτικού τύπου του Cramer, στον οποίο προστέθηκε ένας ακόμη εκθετικός όρος. Η φόρμουλα δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\psi_T(u) = (p - C)e^{-mu} + Ce^{-Ru}, \quad u \geq 0, \quad (2.3.9)$$

όπου το m είναι ίσο με

$$m = (p - C) \left\{ \frac{pE(Z_i)}{1 - p} - \frac{C}{R} \right\}^{-1}. \quad (2.3.10)$$

και $E(Z_i)$ συμβολίζει τη μέση τιμή των κλιμακωτών υψών.

Ουσιαστικά δηλαδή ο Tijms, πρότεινε η πιθανότητα χρεοκοπίας να προσεγγίζεται από μία μείξη εκθετικών κατανομών. Σημειώνεται επίσης ότι η προσέγγιση δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση που $m \leq R$.

Στη σχέση (2.3.9) ισχύει ότι $R < m$ άρα ο δεύτερος όρος συγκλίνει πιο αργά στο μηδέν απ' ότι ο πρώτος καθώς το $u \rightarrow \infty$ άρα ισχύει ότι $\psi_T(u) = Ce^{-Ru}$. Θέτοντας $u = 0$ προκύπτει ότι

$$\psi_T(0) = p,$$

δηλαδή βλέπουμε ότι είναι πάντα ακριβής η προσέγγιση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η προσέγγιση του Tijms είναι πιο αποτελεσματική από την προηγούμενη αλλά όταν το αρχικό αποθεματικό u είναι σχετικά μικρό εξακολουθούν να υπάρχουν αποκλίσεις από την πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας. Επιπρόσθετα και σ' αυτή την περίπτωση δε δίνονται ικανοποιητικά αποτελέσματα για κατανομές αποζημιώσεων με βαριές ουρές. Όπως και στην προηγούμενη προσέγγιση, θα πρέπει να υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής, αλλά και να είναι γνωστή η μαθηματική του έκφραση. Τέλος είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η προσέγγιση ταυτίζεται με τις πραγματικές τιμές της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι (α) μείξη δύο εκθετικών κατανομών (β) συνέλιξη δύο εκθετικών κατανομών, δηλαδή η F είναι μία Γάμμα $(2, \beta)$ για κάποιο $\beta > 0$.

2.3.4 Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ WILLMOT

Ο Willmot (1998) πρότεινε μια γενίκευση της προσέγγισης του Tijms, η οποία όμως δε θα έχει τα ίδια μειονεκτήματα με αυτή. Αντικατέστησε την εκθετική ουρά e^{-mu} με μια πιο γενική ουρά όπως θα παρατηρήσουμε και από τον παρακάτω τύπο

$$\psi_W(u) = (p - C)\bar{H}(u) + Ce^{-Ru}, \quad u \geq 0. \quad (2.3.11)$$

όπου $1 - \bar{H}(u)$ συμβολίζει τη συνάρτηση πυκνότητας που ικανοποιεί τη σχέση

$$(p - C) \int_0^\infty \bar{H}(u) du = \frac{pE(Z_i)}{1 - p} - \frac{C}{R}. \quad (2.3.12)$$

Παρατήρηση: Η προσέγγιση του Tijms είναι η ειδική περίπτωση όπου $\bar{H}(u) = e^{-mu}$. Επίσης υπογραμμίζεται ότι εάν η $H(u)$ είναι η ουρά του αθροίσματος ή της μείξης δύο εκθετικών κατανομών τότε προκύπτει προσέγγιση τριών εκθετικών βλέπε Choudhury et al. (1996).

Παρατηρούμε ότι για την προσέγγιση (2.3.11) ισχύει $\psi(0) = p$. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε κάτω από ποιές συνθήκες έχει τη σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς

$u \rightarrow \infty$.

Θεώρημα 2.3.1

Υποθέτουμε ότι $R > 0$, ικανοποιεί την (2.3.3) με $R \neq \frac{1-p}{E(Z_i)}$ και $C \neq p$. Εάν $1 - \bar{H}(u)$ είναι μια IFR που ικανοποιεί την (2.3.12) και η $F(x)$ είναι NBUC (NWUC) τότε $p - C < (>) 0$ και η (2.3.11) ικανοποιεί την

$$\psi_T(u) \approx C e^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty \quad (2.3.13)$$

Απόδειξη

Εφόσον η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ είναι NBUC (NWUC), προκύπτει από Lin (1996) ότι $\psi(u) \geq (\leq) p e^{-Ru}$, $u \geq 0$. Έτσι δεδομένου της (2.3.4) πρέπει να ισχύει $p \leq (\geq) C$. Όμως $C \neq p$ και έτσι $p - C < (>) 0$. Είναι φανερό ότι εάν $\bar{H}(u) = 0$ για $u > u_0$ όπου $u_0 < \infty$ τότε προκύπτει ότι $\bar{H}(u) > 0$ για $u_0 < \infty$. Έτσι, η $H(u)$ είναι συνεχής και έστω ότι ο ρυθμός αποτυχίας της είναι $\mu_H(u) = -\left(\frac{d}{du}\right) \ln \bar{H}(u)$, $u \geq 0$. Έτσι για $\mu_H(u)$ ισχύει

$$\mu_H(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \mu_H(u).$$

Στη συνέχεια έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} - \frac{1}{\mu_H(\infty)} &= \frac{1}{R} - \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu_H(\infty)} dH(u) \\ &\geq \frac{1}{R} - \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu_H(x)} dH(u) \\ &= \frac{1}{R} - \int_0^{\infty} \bar{H}(u) du \\ &= \frac{1}{p-C} \left\{ \frac{p-C}{R} - \frac{pE(Z_i)}{1-p} + \frac{C}{R} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{p}{p-C} \left\{ \frac{1}{R} - \frac{E(Z_i)}{1-p} \right\}.$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (2.3.12).

Όμως η F είναι NBUC (NWUC) και η F_e είναι NBUE (NWUE). Έτσι, (Willmot 1998 σελ 405), $\int_0^\infty e^{Rx} dF(x) \geq (\leq) \int_0^\infty e^{Rx} dF_e(x)$ είναι μία αναδιατύπωση της ανίσωσης

$$p^{-1} \geq (\leq) (p^{-1} - 1) / \{RE(Z_i)\}$$

το οποίο προκύπτει αν ολοκληρώσουμε κατά μέλη την σχέση (2.3.3). Όμως το παραπάνω μπορεί να γραφεί και ως εξής: $R^{-1} \leq (\geq) \frac{E(Z_i)}{1-p}$.

Επίσης, αφού $R^{-1} \neq \frac{E(Z_i)}{1-p}$ ισχύει και $R^{-1} < (>) \frac{E(Z_i)}{1-p}$. Επειδή ισχύει $p - C < (>) 0$, προκύπτει ότι

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{\mu_H(\infty)} \geq \frac{p}{p-C} \left\{ \frac{1}{R} - \frac{E(Z_i)}{1-p} \right\} > 0,$$

επομένως, $\mu_H(\infty) > R$. Δηλαδή, $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru} \bar{H}(u) = 0$ το οποίο υποθέτει από την (2.3.11) ότι η (2.3.13) ισχύει.

Καταλήγουμε επομένως στο συμπέρασμα, ότι κάτω από τις συνθήκες που περιγράφηκαν στο προαναφερθέν θεώρημα, η προσέγγιση του Willmot επαληθεύει την $\psi(0) = p$ για αρχικό αποθεματικό ίσο με το μηδέν, τη μέση τιμή $E(Z_i)$ και την σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς το u τείνει στο άπειρο.

ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΟΥΡΑ ΜΙΑΣ ΓΑΜΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Μια χρήσιμη επιλογή για την $\bar{H}(u)$ στην σχέση (2.3.11) είναι η ουρά μιας κατανομής Γάμμα, η οποία περιγράφεται από τον τύπο

$$\bar{H}(u) = \int_u^\infty \frac{\mu(\mu t)^{\varphi-1} e^{-\mu t}}{\Gamma(\varphi)} dt, \quad u \geq 0. \quad (2.3.14)$$

Αυτό το μοντέλο έχει πολλές επιθυμητές ιδιότητες για την παρούσα προσέγγιση. Ξεκινώντας, η συνάρτηση κατανομής $1 - \bar{H}(u)$ είναι IFR εάν $\varphi \geq 1$, το οποίο είναι ένα χρήσιμο χαρακτηριστικό όπως είδαμε και στο Θεώρημα (2.3.1). Ακόμα, διαθέτει δύο

παραμέτρους ($\mu > 0, \varphi > 0$) οι οποίες προσδίδουν μεγαλύτερη "ελαστικότητα" στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$. Εάν φ είναι θετικός ακέραιος αριθμός διατηρεί την απλότητα της προσέγγισης του Tijms αφού

$$\bar{H}(u) = e^{-\mu u} \sum_{j=0}^{\varphi-1} \frac{(\mu u)^j}{j!}, \quad \varphi = 1, 2, 3, \dots$$

Η σχέση (2.3.12) σ' αυτή την περίπτωση μπορεί να περιγραφεί ως

$$\mu = \varphi(p - C) \left\{ \frac{pE(Z_i)}{1-p} - \frac{C}{R-1} \right\}. \quad (2.3.15)$$

Μπορούμε εύκολα κάνοντας χρήση του νόμου του L' Hospital να δούμε ότι η (2.3.14) ικανοποιεί την $\bar{H}(u) \sim \{\Gamma(\varphi)\}^{-1} (\mu u)^{\varphi-1} e^{-\mu u}$, $u \rightarrow \infty$. Έτσι, η σχέση (2.3.13) ισοδυναμεί με $\lim_{u \rightarrow \infty} u^{\varphi-1} e^{-(\mu-R)u} = 0$ το οποίο ισχύει εφόσον $\mu > R$. Όμως από την (2.3.15) κάνοντας πράξεις,

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{\mu} = \frac{p}{\varphi(p-C)} \left\{ \frac{1}{R} - \frac{E(Z_i)}{1-p} \right\} + \frac{\varphi-1}{\varphi R}.$$

Επομένως, $\mu - R = \frac{\mu(\varphi-\varphi_0)}{\varphi}$ και $\mu > R$ εάν $\varphi > \varphi_0$ όπου

$$\varphi_0 = 1 - \frac{p\{1-p-RE(Z_i)\}}{(1-p)(p-C)}. \quad (2.3.16)$$

Υπογραμμίζεται ότι δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι αν $p \neq C$, $R \neq \frac{(1-p)}{E(X)}$, και $F(u)$ είναι NBUC ή NWUC τότε $\varphi_0 < 1$. Ένας τρόπος ακόμα για να επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε το φ είναι για να διατηρηθεί η εξής σχέση που αφορά την δεύτερη ροπή της κατανομής των κλιμακωτών υψών

$$E(Z^2) = \frac{pE(Z_i^2)}{(1-p)} + 2 \left\{ \frac{pE(Z_i)}{1-p} \right\}^2$$

από το οποίο προκύπτει

$$\frac{\varphi(\varphi+1)(p-C)}{\mu^2} + \frac{2C}{R^2} = \frac{pE(Z_i^2)}{1-p} + 2 \left\{ \frac{pE(Z_i)}{1-p} \right\}^2. \quad (2.3.17)$$

Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις (2.3.14) και (2.3.16) καταλήγουμε στην παρακάτω εκτίμηση για το φ

$$\varphi = \left(\frac{(p - C) \left\{ \frac{pE(Z_i^2)}{1-p} + 2 \left\{ \frac{pE(Z_i)}{1-p} \right\}^2 - \frac{2C}{R^2} \right\}}{\left\{ \frac{pE(Z_i)}{1-p} - \frac{C}{R} \right\}^2} - 1 \right)^{-1}. \quad (2.3.18)$$

Εάν η εκτιμηθείσα τιμή του φ από την παραπάνω σχέση, είναι αρνητική ή μικρότερη από φ_0 , τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μικρότερη θετική ακέραιη τιμή που είναι μεγαλύτερη ή ίση με το φ_0 . Η προσέγγιση αυτή ικανοποιεί τη μέση τιμή, την ποσότητα $\psi(0) = p$ και διατηρεί σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς $\varphi > \varphi_0$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η προσέγγιση του Willmot αποτελεί γενίκευση της προσέγγισης που πρότεινε ο Tijms, αντικαθιστώντας τον όρο e^{-mu} με τη γενική ουρά $\bar{H}(u)$, χωρίς όμως να έχουν τα ίδια μειονεκτήματα. Η χρήση αυτής της προσέγγισης, προϋποθέτει, όπως και οι δύο προηγούμενες, την ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

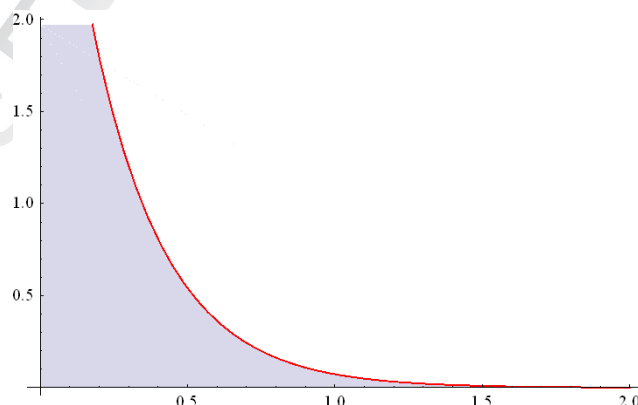
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αναλυτικότερα ορισμένες εφαρμογές που έχουν ως στόχο την καλύτερη κατανόηση όσων προαναφέρθηκαν, για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας αλλά και το πόσο ικανοποιητικές είναι οι προσεγγίσεις που μελετήσαμε. Θα υπολογιστεί η πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση της εκθετικής, της μείξης εκθετικών και της κατανομής Γάμμα. Στη συνέχεια θα παρατεθούν παραδείγματα όπου η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί (α) Γάμμα (3,3) (β) Μείξη Εκθετικών και (γ) Μείξη Γάμμα κατανομών και θα προσεγγιστεί η πιθανότητα χρεοκοπίας με την χρήση του τύπου των Cramer-Lunberg την μέθοδο του Tijms και τέλος του Willmot. Παράλληλα θα σχηματιστούν συμπεράσματα σχετικά με το ποιά είναι καλύτερη προσέγγιση. Όλα τα παραπάνω παραδείγματα έχουν γίνει με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica.

3.2 ΑΚΡΙΒΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Υποθέτουμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha = 4$ και συμβολίζουμε $X \sim \text{Exp}(4)$ και το περιθώριο είναι $\theta = 0,3$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι

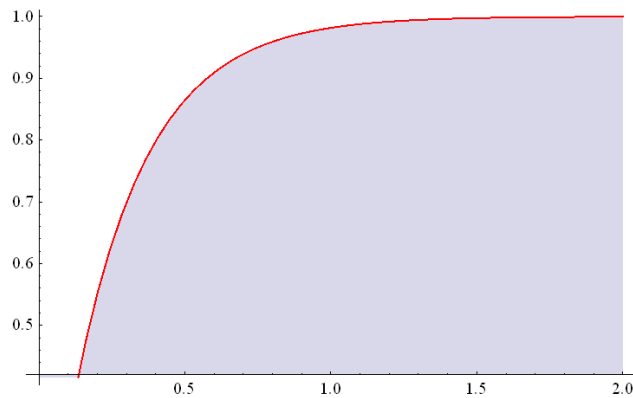
$$f(x) = 4e^{-4x}, \quad x > 0$$



Σχήμα 3.1: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας της εκθετικής

Η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(x) = 1 - e^{-4x} \quad x > 0$$



Σχήμα 3.2: Συνάρτηση κατανομής της εκθετικής

Η μέση τιμή είναι

$$p_1 = \frac{1}{4}.$$

Στη συνέχεια κάνοντας χρήση του τύπου (2.2.2) καταλήγουμε ότι

$$\psi(u) = 0,7692e^{-0,9230u} \quad (3.2.1)$$

όπου

$$\psi(0) = 1/(1 + \theta) = 0,7692$$

και

$$R = \frac{\theta\alpha}{1 + \theta} = 0,9230.$$

Στη συνέχεια για τις διάφορες τιμές του u δίνεται ο πίνακας 3.1 όπως προέκυψε από το υπολογιστικό πρόγραμμα Mathematica.

u	$\psi(u)$
0,10	0,7014
0,25	0,6107
0,50	0,4848
0,75	0,3849
1	0,3056

Πίνακας 3.1

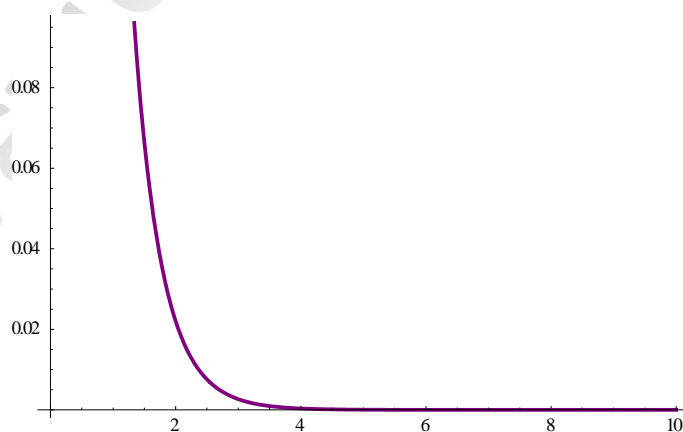
Όπως βλέπουμε από τα παραπάνω αποτελέσματα, για αρχικό αποθεματικό ίσο με 0,10 μονάδες, το $\psi(u)$ είναι ίσο με 0,7014 ενώ στη συνέχεια καθώς το αρχικό αποθεματικό u αυξάνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας ελλατώνεται. Έτσι για u ίσο με 1 η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι ίση με 0,3056.

Επίσης να σημειωθεί ότι σ' αυτή την περίπτωση, όπως και στα επόμενα αποτελέσματα που θα δοθούν, έχει γίνει στρογγυλοποίηση στο τέταρτο δεκαδικό ψηφίο.

Συνεχίζοντας, θα εξεταστεί μια πιο περίπλοκη περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών.

Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μείξη δύο εκθετικών κατανομών με παραμέτρους $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, αντίστοιχα βάρη $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$ και $\theta = 0,2$ είναι της μορφής

$$f(x) = \frac{3e^{-3x}}{2} + e^{-2x}$$



Σχήμα 3.3 : Συνάρτηση πυκνότητας μείξης εκθετικών κατανομών

Η μέση τιμή είναι

$$p_1 = \frac{2}{3}.$$

Η ροπογεννήτρια δίνεται από

$$M_X[r] = \frac{1}{2(1-r)} + \frac{3}{2(3-r)}.$$

Προκύπτει στη συνέχεια με εφαρμογή του τύπου (2.2.5) ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας έχει τη μορφή

$$\psi(u) = 0,8141e^{-0,1957u} + 0,0192e^{-2,5542u}$$

όπου

- $C_1 = 0,8141$ και $C_2 = 0,0192$.
- r_1, r_2 είναι οι λύσεις του συντελεστή εφαρμογής για τα οποία προκύπτει μέσω της χρήσης του προγράμματος Mathematica ότι $r_1 = 0,1957$ και $r_2 = 2,5542$.

Επομένως όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα δίνεται ο παρακάτω πίνακας για τις διάφορες τιμές του αρχικού αποθεματικού u .

u	$\psi(u)$
0,10	0,8131
0,25	0,7853
0,50	0,7435
0,75	0,7057
1	0,6708

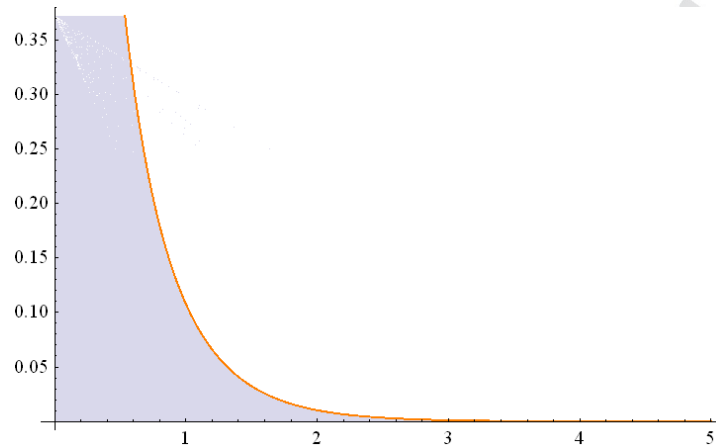
Πίνακας 3.2

Όπως βλέπουμε από τον πίνακα (3.2), για αρχικό αποθεματικό ίσο με 0,10 μονάδες, το $\psi(u)$ είναι ίσο με 0,8131 ενώ στη συνέχεια καθώς το αρχικό αποθεματικό u αυξάνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας ελλοτώνεται. Έτσι για u ίσο με 1 η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι ίση με 0,6708.

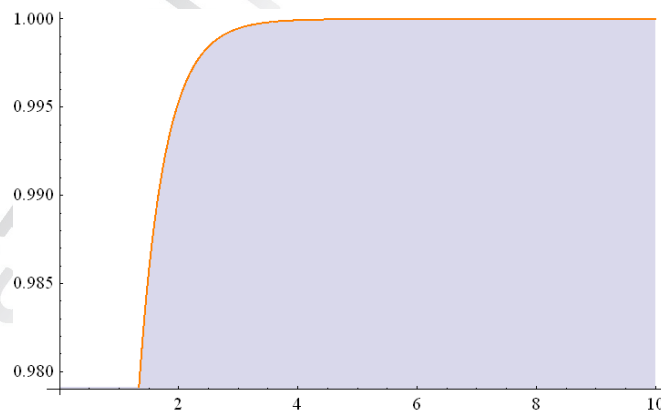
Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι εάν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η Γάμμα (α, β) όπου $\alpha \leq 1$ και η μέση τιμή ισούται με την μονάδα τότε μπορούμε να

υπολογίσουμε με ακρίβεια την πιθανότητα χρεοκοπίας. Παρακάτω λοιπόν θα δοθεί ένα αριθμητικό παράδειγμα.

Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν την κατανομή Γάμμα $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και ότι το περιθώριο ασφαλείας θ , ισούται με 0,2. Δίνονται παρακάτω οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής της Γάμμα $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



Σχήμα 3.5: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας



Σχήμα 3.6: Συνάρτηση κατανομής

Κάνοντας χρήση των τύπων (2.2.7) και (2.2.8) προκύπτει για τις διάφορες τιμές του u ο παρακάτω πίνακας.

u	$\psi(u)$
0,10	0,8378
0,25	0,8248
0,50	0,8035
0,75	0,7828
1	0,7626

Πίνακας 3.3

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα έτσι και εδώ, όταν το αρχικό αποθεματικό αυξάνεται παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας ελλατώνεται. Συγκεκριμένα, όταν το αρχικό αποθεματικό έχει τιμή ίση με 0,10 μονάδες η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με 0,8378. Σταδιακά μειώνεται το $\psi(u)$ για να φτάσει στο σημείο 1 να έχει τιμή ίση με 0,7626.

3.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΓΑΜΜΑ(3,3)

Στην ενότητα αυτή, θα δοθούν προσεγγιστικές τιμές για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η Γάμμα (3,3). Οι προσεγγίσεις που θα χρησιμοποιηθούν θα είναι (α) Ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg (β) η προσέγγιση του Tijms και (γ) η προσέγγιση του Willmot. Επιπρόσθετα θα δοθούν φράγματα που οριοθετούν την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Υποθέτουμε λοιπόν, ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί την κατανομή Γαμμα (3,3), για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι της μορφής

$$f(u) = \frac{27}{2}u^2e^{-3u}, \quad u > 0. \quad (3.3.1)$$

Η δεξιά ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων είναι

$$\bar{F}(u) = 1 + \frac{1}{2}(-2 + e^{-3u}(2 + 6u + 9u^2)). \quad (3.3.2)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών δίνεται από τον τύπο

$$f_e(u) = 1 + \frac{1}{2}(-2 + e^{-3u}(2 + 6u + 9u^2)), \quad (3.3.3)$$

ενώ η δεξιά ουρά των κλιμακωτών υψών είναι η εξής

$$\bar{F}_e(u) = \frac{1}{2}e^{-3u}(2 + 4u + 3u^2). \quad (3.3.4)$$

Στη συνέχεια για τις διάφορες τιμές του $p = \frac{1}{1+\theta}$, δίνεται ο παρακάτω πίνακας για τις ακριβής τιμές της πιθανότητας χρεοκοπίας βλέπε Willmot (1998).

p	u	$\psi(u)$
0,2	0,10	0,1839
	0,25	0,1594
	0,50	0,1209
	0,75	0,0882
	1,00	0,0626
0,5	0,10	0,4744
	0,25	0,4342
	0,50	0,3664
	0,75	0,3033
	1,00	0,2484
0,8	0,10	0,7834
	0,25	0,7562
	0,50	0,7074
	0,75	0,6577
	1,00	0,6097

Πίνακας 3.4

Ας θυμηθούμε τώρα τον ασυμπτωτικό τύπο των Cramer-Lundberg ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$\psi_c(u) \sim Ce^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty.$$

όπου

$$C = \frac{1-p}{pRE(Z_i e^{Rz})}.$$

Κάνοντας χρήση του τύπου (1.16) προκύπτει ότι ο συντελεστής προσαρμογής R ισούται με 1,54215 για $p = 0,2$, ενώ για $p = 0,50$ και $p = 0,80$ είναι αντίστοιχα 0,84046 και 0,311349.

Με τη βοήθεια του Mathematica, για τις διάφορες τιμές του p , υπολογίζουμε την τιμή του C . Έτσι προκύπτει ότι για $p = 0,2$ το C ισούται με 0,3095, για $p = 0,50$ το C ισούται με 0,5795, ενώ για $p = 0,8$ το C ισούται με 0,8331.

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, η προσέγγιση του Tijms για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η εξής

$$\psi_T(u) = (p - C)e^{-mu} + Ce^{-Ru}, \quad u \geq 0$$

όπου

$$m = (p - C) \left\{ \frac{pE(Z_i)}{1-p} - \frac{C}{R} \right\}^{-1}.$$

Προκύπτει λοιπόν μετά από υπολογισμούς ότι το m ισούται με 3,2207, 3,4207 και 3,5460 για τις διάφορες τιμές του p .

Τέλος, δίνεται η προσέγγιση του Willmot,

$$\psi_W(u) = (p - C)\bar{H}(u) + Ce^{-Ru}, \quad u \geq 0.$$

όπου

$$\bar{H}(u) = \int_u^\infty \frac{\mu(\mu t)^{\varphi-1} e^{-\mu t}}{\Gamma(\varphi)} dt, \quad u \geq 0.$$

και

$$\varphi = \left(\frac{(p - C) \left\{ \frac{pE(Z_i^2)}{1-p} + 2 \left\{ \frac{pE(Z_i)}{1-p} \right\}^2 - \frac{2C}{R^2} \right\}}{\left\{ \frac{pE(Z_i)}{1-p} - \frac{C}{R} \right\}^2} - 1 \right)^{-1}.$$

Μετά από πράξεις έχουμε ότι

- Για $p = 0,2$ προκύπτει ότι $\varphi = 1,1811$.
- Για $p = 0,5$ προκύπτει ότι $\varphi = 1,2226$.
- Για $p = 0,8$ προκύπτει ότι $\varphi = 1,2962$

Επομένως, με βάση τα παραπάνω και μέσω του Mathematica, καταλήγουμε στον πίνακα

p	u	$\psi(u)$	$\psi_c(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_W(u)$
0,2	0,10	0,1839	0,2652	0,1860	0,1822
	0,25	0,1594	0,2104	0,1615	0,1596
	0,50	0,1209	0,1431	0,1212	0,1218
	0,75	0,0882	0,0974	0,0875	0,0886
	1,00	0,0626	0,0662	0,0618	0,0627
0,5	0,10	0,4744	0,5332	0,4764	0,4729
	0,25	0,4342	0,4700	0,4360	0,4345
	0,50	0,3664	0,3809	0,3665	0,3672
	0,75	0,3033	0,3088	0,3026	0,3036
	1,00	0,2484	0,2502	0,2476	0,2483
0,8	0,10	0,7834	0,8076	0,7843	0,7826
	0,25	0,7562	0,7708	0,7571	0,7564
	0,50	0,7074	0,7131	0,7074	0,7078
	0,75	0,6577	0,6597	0,6573	0,6578
	1,00	0,6097	0,6103	0,6093	0,6096

Πίνακας 3.5

Για κάθεμια από τις προσεγγίσεις παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένο p , καθώς το αρχικό αποθεματικό u αυξάνεται, η πιθανότητα χρεοκοπίας μειώνεται. Στη συνέχεια συμβολίζουμε με $E_C(u)$ την απόκλιση του ασυμπτωτικού τύπου από την πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας, κατά απόλυτη τιμή, για τις διάφορες τιμές του u . Μαθηματικά εκφράζεται με τον εξής τύπο

$$E_C(u) = |\psi_c(u) - \psi(u)| \quad (3.3.5)$$

Ομοίως ορίζεται και το $E_T(u)$ ως η απόκλιση της προσέγγισης του Tijms από την πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας, κατά απόλυτη τιμή, για τις διάφορες τιμές του u και δίνεται από την σχέση

$$E_T(u) = |\psi_T(u) - \psi(u)| \quad (3.3.6)$$

Τέλος, δίνεται και ο τύπος που εκφράζει την απόκλιση της προσέγγισης του Willmot από την πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας κατά απόλυτη τιμή για τις διάφορες τιμές του αρχικού αποθεματικού.

$$E_W(u) = |\psi_W(u) - \psi(u)| \quad (3.3.7)$$

Έτσι, για τις διάφορες τιμές των p, u δίνεται ο παρακάτω πίνακας

p	u	$E_c(u)$	$E_T(u)$	$E_W(u)$
0,2	0,10	0,0813	0,0021	0,0017
	0,25	0,0510	0,0021	0,0002
	0,50	0,0222	0,0003	0,0009
	0,75	0,0092	0,0007	0,0004
	1,00	0,0036	0,0008	0,0001
0,5	0,10	0,0588	0,0020	0,0015
	0,25	0,0358	0,0018	0,0003
	0,50	0,0145	0,0001	0,0008
	0,75	0,0055	0,0007	0,0003
	1,00	0,0018	0,0008	0,0001
0,8	0,10	0,0242	0,0009	0,0008
	0,25	0,0146	0,0009	0,0002
	0,50	0,0057	0,0000	0,0004
	0,75	0,0020	0,0004	0,0001
	1,00	0,0006	0,0004	0,0001

Πίνακας 3.6

Αν συγκρίνουμε τις προσεγγίσεις μεταξύ τους, για να δούμε ποια από τις τρεις είναι η πιο αποτελεσματική, βλέπουμε κατά κύριο λόγο η προσέγγιση του Willmot φαίνεται να είναι καλύτερη καθώς έχει την μικρότερη απόκλιση από την πραγματική τιμή.

Σημαντικό είναι ακόμα, να δοθούν κάποια φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας για να μπορούμε να υπολογίσουμε πού θα κυμαίνεται η τιμή της.

Έχουμε αναφερθεί με τον τύπο(1.18) ο οποίος είναι ο εξής,

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

σε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Είναι λοιπόν χρήσιμο να δοθεί και ένα κάτω φράγμα. Έχουμε λοιπόν οτι (βλέπε Πολίτης 2012)

$$\psi(u) \geq \frac{\bar{F}_e(u)}{\frac{1-p}{p} + \bar{F}_e(u)}. \quad (3.3.8)$$

Εάν συνοψίσουμε τα δύο παραπάνω προκύπτει οτι

$$\frac{\bar{F}_e(u)}{\frac{1-p}{p} + \bar{F}_e(u)} \leq \psi(u) \leq e^{-Ru}. \quad (3.3.9)$$

Η σχέση αυτή δίνει, για τις διάφορες τιμές του u , μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή όπως περιγράφεται και από τον πίνακα

p	u	$\frac{\overline{F_e(u)}}{\frac{1-p}{p} + \overline{F_e(u)}}$	$\psi(u)$	$\psi_c(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_W(u)$	e^{-Ru}
0,2	0,10	0,1836	0,1839	0,2652	0,1860	0,1822	0,8570
	0,25	0,1583	0,1594	0,2104	0,1615	0,1596	0,6800
	0,50	0,1169	0,1209	0,1431	0,1212	0,1218	0,4625
	0,75	0,0809	0,0882	0,0974	0,0875	0,0886	0,3145
	1,00	0,0530	0,0626	0,0662	0,0618	0,0627	0,2139
0,5	0,10	0,4737	0,4744	0,5332	0,4764	0,4729	0,9193
	0,25	0,4294	0,4342	0,4700	0,4360	0,4345	0,8104
	0,50	0,3463	0,3664	0,3809	0,3665	0,3672	0,6568
	0,75	0,2605	0,3033	0,3088	0,3026	0,3036	0,5324
	1,00	0,1830	0,2484	0,2502	0,2476	0,2483	0,4315
0,8	0,10	0,7826	0,7834	0,8076	0,7843	0,7826	0,9693
	0,25	0,7507	0,7562	0,7708	0,7571	0,7564	0,9251
	0,50	0,6794	0,7074	0,7131	0,7074	0,7078	0,8558
	0,75	0,5850	0,6577	0,6597	0,6573	0,6578	0,7917
	1,00	0,4726	0,6097	0,6103	0,6093	0,6096	0,7324

Πίνακας 3.7

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι, τόσο η πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας, όσο και οι προσεγγίσεις της, βρίσκονται ανάμεσα σε μία ανώτατη και μία κατώτατη τιμή για δεδομένα p και u .

3.4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΜΕΙΞΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα εφαρμοστούν τόσο οι προσεγγίσεις που έχουν προαναφερθεί όσο και τα φράγματα στην περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών.

Αν υποθέσουμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μείξη εκθετικών ο γενικός τύπος για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον παρακάτω τύπο βλέπε (Gerber et al. 1987)

$$f(x) = \sum_{j=1}^n A_j b_j e^{-b_j x}, \quad x > 0 \quad (3.4.1)$$

όπου τα b_j είναι θετικά και

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = 1. \quad (3.4.2)$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι στην περίπτωση που τα A_j είναι όλα θετικά προκύπτει μείξη κατανομών ενώ σε αντίθετη περίπτωση έχουμε συνδυασμό. Από την (3.4.1) προκύπτει ότι

$$1 - F(x) = \sum_{j=1}^n A_j e^{-b_j x}, \quad x > 0. \quad (3.4.3)$$

Όσον αφορά την πιθανότητα χρεοκοπίας από Bowers et al (1986) προκύπτει ο εξής τύπος

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^n C_k e^{-r_k u}, \quad (3.4.4)$$

όπου

$$C_k = \sum_{j=1}^n C_{jk} / b_j \quad (3.4.5)$$

και

$$C_{jm} = \frac{A_j / (b_j - r_m)}{\sum_{i=1}^n A_i / (b_i - r_m)^2}. \quad (3.4.6)$$

Στην αριθμητική εφαρμογή που δίνεται στη συνέχεια θεωρούμε ότι $n = 2$, $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 3$, $b_2 = 7$, $\lambda = 1$ και ένταση ασφαλιστρού $c = \frac{25}{21}$ ενώ $p = 0,2$. Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής των αποζημιώσεων που ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών περιγράφεται από τη σχέση

$$f(u) = \frac{7e^{-7u}}{2} + \frac{3e^{-3u}}{2}, \quad u \geq 0 \quad (3.4.7)$$

ενώ η δεξιά ουρά είναι

$$\bar{F}(u) = \frac{e^{-7u}}{2} + \frac{e^{-3u}}{2}. \quad (3.4.8)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής ισοροπίας δίνεται από τον τύπο

$$f_e(u) = \frac{21}{5} \left(\frac{e^{-7u}}{2} + \frac{e^{-3u}}{2} \right), \quad (3.4.9)$$

η δεξιά ουρά της είναι

$$\bar{F}_e(u) = \frac{1}{10} e^{-7u} (3 + 7e^{4u}) \quad (3.4.10)$$

και η μέση τιμή είναι

$$p_1 = \frac{11}{23} + \frac{11}{27} = \frac{5}{21}. \quad (3.4.11)$$

Στη συνέχεια όπως και στην προηγούμενη ενότητα θα υπολογίσουμε αρχικά την πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας για τις διάφορες τιμές του p , με την βοήθεια των παραπάνω τύπων.

Υπολογίζουμε αρχικά την τιμή του συντελεστή προσαρμογής από τη σχέση

$$1 + (1 + \theta)p_1 r = M_x(r).$$

Προκύπτουν δύο τιμές για το r . Η μία είναι $r_1 = 2,536$ και η άλλη είναι $r_2 = 6,623$.

Όταν η ένταση ασφαλιστρου είναι ίση με $c = \frac{10}{21}$ ενώ $p = 0,5$, οι δύο τιμές που προκύπτουν για τον συντελεστή προσαρμογής είναι 1,691 και 6,2088. Ακόμα τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το Mathematica για $c = 0,297$ ενώ $p = 0,8$ είναι $r_1 = 0,7022$ και $r_2 = 5,9307$

Τα αποτελέσματα θα δοθούν στον πίνακα που ακολουθεί.

p	u	$\psi(u)$
0,2	0,10	0,1448
	0,25	0,0924
	0,50	0,0464
	0,75	0,0241
	1,00	0,0127
0,5	0,10	0,4083
	0,25	0,3075
	0,50	0,1972
	0,75	0,1283
	1,00	0,0839
0,8	0,10	0,7397
	0,25	0,6603
	0,50	0,5512
	0,75	0,4618
	1,00	0,3873

Πίνακας 3.8

Παρατηρούμε ότι για $p = 0,2$ και $u = 0,10$ η πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι 0,1448 και στη συνέχεια καθώς το u αυξάνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας ελατώνεται για να καταλήξει να είναι ίση με 0,0127 για αρχικό αποθεματικό ίσο με τη μονάδα. Ομοίως και για τις υπόλοιπες τιμές του p .

Στον παραπάνω πίνακα θα προσθέσουμε και τρεις ακόμα στήλες για τον ασυμπτωτικό τύπο των Cramer-Lundberg, την προσέγγιση του Tijms και τέλος αυτή του Willmot όπως κάναμε και στην προηγούμενη ενότητα στην περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί την κατανομή Γάμμα (3,3).

Παρατηρούμε ότι για $p = 0,2$ και $u = 0,10$ η πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι 0,1448 και στη συνέχεια καθώς το u αυξάνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας ελατώνεται για να καταλήξει να είναι ίση με 0,0127 για αρχικό αποθεματικό ίσο με τη μονάδα. Ομοίως και για τις υπόλοιπες τιμές του p .

Στον παραπάνω πίνακα θα προσθέσουμε και τρεις ακόμα στήλες για τον ασυμπτωτικό τύπο των Cramer-Lundberg, την προσέγγιση του Tijms και τέλος αυτή του Willmot όπως κάναμε και στην προηγούμενη ενότητα στην περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί την κατανομή Γάμμα (3,3).

Όσον αφορά τον ασυμπτωτικό τύπο, προκύπτει με χρήση του μαθηματικού πακέτου, ότι για $p = 0,2$ η αποδεκτή λύση του R είναι 2,536 ενώ το C προκύπτει ότι είναι ίσο με 0,1599. Ομοίως, $C = 0,4548$ για $p = 0,5$ και αποδεκτή λύση $R = 1,691$. Τέλος, για $p = 0,8$, $C = 0,78018$ και αποδεκτή λύση $R = 0,7078$.

Όπως και πριν διαπιστώνουμε ότι, για συγκεκριμένο p , καθώς το αρχικό αποθεματικό αυξάνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας ελατώνεται. Αξιοσημείωτο όμως είναι το γεγονός ότι για αποθεματικό μεγαλύτερο του 0,50 και για $p = 0,50$ η πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση τον ασυμπτωτικό τύπο, έχει μικρή διαφορά από την πραγματική τιμή με αυτή τη διαφορά να γίνεται ελάχιστη όταν το αρχικό αποθεματικό ισούται με τη μονάδα.

p	u	$\psi(u)$	$\psi_c(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_W(u)$
0,2	0,10	0,1448	0,1241	0,1446	0,1448
	0,25	0,0924	0,0848	0,0923	0,0922
	0,50	0,0464	0,0450	0,0464	0,0463
	0,75	0,0241	0,0238	0,0241	0,0241
	1,00	0,0127	0,0126	0,0127	0,0127
0,5	0,10	0,4083	0,3841	0,4082	0,4087
	0,25	0,3075	0,2980	0,3074	0,3073
	0,50	0,1972	0,1952	0,1972	0,1970
	0,75	0,1283	0,1279	0,1283	0,1283
	1,00	0,0839	0,0838	0,0839	0,0839
0,8	0,10	0,7397	0,7268	0,7358	0,7369
	0,25	0,6603	0,6536	0,6563	0,6578
	0,50	0,5512	0,5476	0,5480	0,5492
	0,75	0,4618	0,4588	0,4588	0,4611
	1,00	0,3873	0,3844	0,3844	0,3882

Πίνακας 3.9

Επίσης, το ίδιο ισχύει και για την προσέγγιση του Tijms ενώ παρατηρούμε ότι την ίδια συμπεριφορά αλλά για $p = 0,20$ έχουμε στην προσέγγιση του Willmot. Στον πίνακα που θα δοθεί στη συνέχεια απεικονίζεται η απόκλιση κάθε προσέγγισης, κατά απόλυτη τιμή, από την πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας για δεδομένα p και u .

Βλέπουμε ότι, αρχικά για τις διάφορες τιμές του p , συγκριτικά με τις προσεγγίσεις του Tijms και του Willmot, ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg, έχει μεγαλύτερη απόκλιση από την πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας. Για $p = 0,2$ και $p = 0,5$ η αποτελεσματικότητα των δύο προσεγγίσεων είναι πανομοιότυπη, ενώ καθώς το p αυξάνεται, καλύτερη φαίνεται να είναι τελικά η προσέγγιση του Willmot.

p	u	$E_c(u)$	$E_T(u)$	$E_W(u)$
0,2	0,10	0,0207	0,0002	0,0000
	0,25	0,0076	0,0001	0,0002
	0,50	0,0014	0,0000	0,0001
	0,75	0,0003	0,0000	0,0000
	1,00	0,0001	0,0000	0,0000
0,5	0,10	0,0242	0,0001	0,0004
	0,25	0,0095	0,0001	0,0002
	0,50	0,0020	0,0000	0,0002
	0,75	0,0004	0,0000	0,0000
	1,00	0,0001	0,0000	0,0000
0,8	0,10	0,0129	0,0039	0,0028
	0,25	0,0067	0,0040	0,0025
	0,50	0,0036	0,0032	0,0020
	0,75	0,0030	0,0030	0,0007
	1,00	0,0029	0,0029	0,0009

Πίνακας 3.10

Στη συνέχεια, με βάση τη σχέση (3.3.9), θα κατασκευάσουμε ένα πίνακα, στον οποίο θα απεικονίζεται για τις διάφορες τιμές των p, u μια ελάχιστη και μια μέγιστη τιμή.

Παρατηρώντας τον παρακάτω πίνακα, βλέπουμε ότι για $p = 0,2$ και για αρχικό αποθεματικό ίσο με 0,10 η πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι 0,1448 ενώ το κάτω φράγμα έχει την τιμή 0,1430 και το άνω ισούται με 0,7760. Επίσης, αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι τόσο ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg, όσο και οι προσεγγίσεις των Tijms και Willmot με τιμές 0,1241 0,1446 και 0,1448 αντίστοιχα βρίσκονται ανάμεσα στα δύο όρια. Την ίδια συμπεριφορά διαπιστώνουμε και για τις υπόλοιπες τιμές των p, u . Έτσι λοιπόν καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τόσο η πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας, όσο και οι τρεις προσεγγίσεις, βρίσκονται ανάμεσα στο κατώτερο και στο ανώτερο όριο όπως έχει περιγραφεί και στη σχέση (3.3.9) στη σελίδα 42 της παρούσας εργασίας.

p	u	$\frac{\overline{F_e(u)}}{\frac{1-p}{p} + \overline{F_e(u)}}$	$\psi(u)$	$\psi_c(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_W(u)$	e^{-Ru}
0,2	0,10	0,1430	0,1448	0,1241	0,1446	0,1448	0,7760
	0,25	0,0873	0,0924	0,0848	0,0923	0,0922	0,5304
	0,50	0,0396	0,0464	0,045	0,0464	0,0463	0,2813
	0,75	0,0184	0,0241	0,0238	0,0241	0,0241	0,1492
	1,00	0,0087	0,0127	0,0126	0,0127	0,0127	0,0791
0,5	0,10	0,4003	0,4083	0,3841	0,4082	0,4087	0,8444
	0,25	0,2768	0,3075	0,298	0,3074	0,3073	0,6552
	0,50	0,1418	0,1972	0,1952	0,1972	0,1970	0,4293
	0,75	0,0700	0,1283	0,1279	0,1283	0,1283	0,2813
	1,00	0,0339	0,0839	0,0838	0,0839	0,0839	0,1843
0,8	0,10	0,7275	0,7397	0,7268	0,7358	0,7369	0,9321
	0,25	0,6049	0,6603	0,6536	0,6563	0,6578	0,8389
	0,50	0,3979	0,5512	0,5476	0,548	0,5492	0,7039
	0,75	0,2316	0,4618	0,4588	0,4588	0,4611	0,5905
	1,00	0,1231	0,3873	0,3844	0,3844	0,3882	0,4954

Πίνακας 3.11

3.5 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΜΕΙΞΗ ΓΑΜΜΑ

Στην ενότητα αυτή θα εφαρμοστούν τόσο οι προαναφερθέντες προσεγγίσεις όσο και τα προαναφερθέντα φράγματα στην περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μείξη Γάμμα κατανομών.

Ο γενικός τύπος για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, σύμφωνα με την εργασία των Gerber et al. (1987) δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \sum_{j=1}^n A_j b_j^2 x e^{-b_j x}, \quad \text{για } x > 0 \quad (3.5.1)$$

όπου $b_j > 0$ και

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = 1. \quad (3.5.2)$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{2n} C_k e^{-r_k u} \quad (3.5.3)$$

και C'_k να περιγράφεται από τον τύπο

$$C'_k = \frac{\sum_{j=1}^n A_j \frac{3-2r_k/b_j}{(b_j-r_k)^2}}{\sum_{j=1}^n A_j \frac{3b_j-r_k}{(b_j-r_k)^3}}. \quad (3.5.4)$$

Εδώ οι συντελεστές προσαρμογής r υπολογίζονται από την εξίσωση

$$1 - \left(\frac{\lambda}{c}\right) \sum_{j=1}^n A_j \frac{2b_j-r}{(b_j-r)^2} = 0. \quad (3.5.5)$$

Υποθέτουμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μείξη Γάμμα(2, b) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(u) = A_1 b_1^2 e^{-b_1 u} u + A_2 b_2^2 e^{-b_2 u} u \quad (3.5.6)$$

Είναι δυνατό να προσδιορίσουμε τις άγνωστες παραμέτρους της $f(u)$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ροπών μέσω των παρακάτω σχέσεων, όπως αναφέρεται και στο παράδειγμα 4, της προαναφερθείσης εργασίας.

- $A_1 + A_2 = 1.$
- $A_1 \frac{2}{b_1} + A_2 \frac{2}{b_2} = E(X).$
- $A_1 \frac{6}{b_1^2} + A_2 \frac{6}{b_2^2} = E(X^2).$
- $A_1 \frac{24}{b_1^3} + A_2 \frac{24}{b_2^3} = E(X^3).$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα και αφού υποθέσουμε για χάρην ευκολίας, ότι οι ροπές της κατανομής που επιθυμούμε να εκτιμήσουμε, είναι ίδιες με αυτές μιας εκθετικής κατανομής με παράμετρο 1, δηλαδή

- $E(X) = 1.$
- $E(X^2) = 1.$
- $E(X^3) = 2,$

παίρνουμε τις παρακάτω τιμές για τις άγνωστες παραμέτρους

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \quad b_1 = 3 - \sqrt{3} = 1,268 \quad b_2 = 3 + \sqrt{3} = 4,732$$

Αρχικά θα υπολογίσουμε βάση των παραπάνω σχέσεων τις πραγματικές τιμές της πιθανότητας χρεοκοπίας και στη συνέχεια θα βρούμε και θα συγκρίνουμε τις προσεγγίσεις και το άνω και κάτω φράγμα.

Η συνάρτηση πυκνότητας που έχουμε να μελετήσουμε είναι η εξής

$$f(u) = 11,1959e^{-4.732u}u + 0,8039e^{-1,268u}u. \quad (3.5.7)$$

Η δεξιά ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων είναι

$$\bar{F}(u) = e^{-1,268u}(0,5 + 0,634u) - (0,5 + 2,3660u)e^{-4,732u}. \quad (3.5.8)$$

Η πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας περιγράφεται από τον τύπο

$$f_e(u) = (e^{-4,732u}(0,5 + 2,3660u) + e^{-1,268u}(0,5 + 0,634u)). \quad (3.5.9)$$

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε σε πίνακα για τις διάφορες τιμές των p, u την πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας όπως αυτή υπολογίστηκε με την βοήθεια των παραπάνω τύπων και του μαθηματικού πακέτου Mathematica.

Αξίζει να σημειωθεί ότι υποθέσαμε $\lambda = 1$. Για $p = 0,2$ το ασφάλιστρο c ισούται με 5, για $p = 0,5$ προκύπτει ότι $c = 2$, ενώ για $p = 0,8$ έχουμε ότι $c = 1,25$.

p	u	$\psi(u)$
0,2	0,10	0,1840
	0,25	0,1620
	0,50	0,1318
	0,75	0,1084
	1,00	0,0897
0,5	0,10	0,4747
	0,25	0,4383
	0,50	0,3852
	0,75	0,3406
	1,00	0,3019
0,8	0,10	0,7835
	0,25	0,7589
	0,50	0,7207
	0,75	0,6857
	1,00	0,6530

Πίνακας 3.12

Όπως βλέπουμε στον πίνακα για $p = 0,2$ και αρχικό αποθεματικό ίσο με $0,10$ η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μείξη γάμμα κατανομών είναι ίση με $0,1840$ και στη συνέχεια καθώς το u αυξάνεται το $\psi(u)$ ελαττώνεται. Η ίδια συμπεριφορά παρατηρείται και για τις υπόλοιπες τιμές των p, u .

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με βάση τον ασυμπτωτικό τύπο των Cramer-Lundberg. Αρχικά θα πρέπει να υπολογιστεί ο συντελεστής προσαρμογής και στη συνέχεια η μεταβλητή C . Με την βοήθεια των τύπων (1.16) και (2.3.5) και μέσω του Mathematica προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα για τις διάφορες τιμές του p

- Για $p = 0,2$ έχουμε ότι $R = 0,8444$ και $C = 0,2417$.
- Για $p = 0,5$ έχουμε ότι $R = 0,5063$ και $C = 0,5168$.
- Για $p = 0,8$ έχουμε ότι $R = 0,2003$ και $C = 0,8023$.

Δίνεται ο πίνακας με τις προαναφερθείσες προσεγγίσεις της πιθανότητας χρεοκοπίας. Όσον αφορά τις τιμές της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν αυτή προσεγγίζεται από τον τύπο των Cramer-Lundberg, βλέπουμε ότι για $p = 0,2$ και αρχικό αποθεματικό ίσο με $0,10$ προκύπτει ότι $\psi_c(u) = 0,2222$ ενώ η πραγματική τιμή ισούται με $0,1840$. Για $p = 0,5$ αρχικό αποθεματικό ίσο με $0,10$ προκύπτει ότι $\psi_c(u) = 0,4912$ και $\psi(u) = 0,4747$. Για $p = 0,8$ και αρχικό αποθεματικό ίσο με $0,10$ προκύπτει ότι $\psi_c(u) = 0,7864$ με $\psi(u) = 0,7835$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η προσέγγιση αυτή γίνεται καλύτερη, καθώς το p αυξάνεται. Σχετικά με την προσέγγιση του Tijms παρατηρούμε ότι είναι αρκετά αποτελεσματική, αφού σε αντίθεση με την προηγούμενη προσέγγιση δίνει αξιόλογα αποτελέσματα ακόμα και για $p = 0,2$ και $p = 0,5$. Όσον αφορά την προσέγγιση του Willmot, παρατηρούμε ότι δίνει σχετικά καλά αποτελέσματα για όλες τις τιμές των p, u .

p	u	$\psi(u)$	$\psi_c(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_W(u)$
0,2	0,10	0,1840	0,2222	0,1849	0,1825
	0,25	0,1620	0,1957	0,1644	0,1611
	0,50	0,1318	0,1585	0,1349	0,1323
	0,75	0,1084	0,1283	0,1107	0,1092
	1,00	0,0897	0,1039	0,0906	0,0902
0,5	0,10	0,4747	0,4912	0,4757	0,4744
	0,25	0,4383	0,4553	0,4416	0,4387
	0,50	0,3852	0,4012	0,3899	0,3859
	0,75	0,3406	0,3535	0,3443	0,3407
	1,00	0,3019	0,3114	0,3039	0,3016
0,8	0,10	0,7835	0,7864	0,7841	0,7827
	0,25	0,7589	0,7631	0,7610	0,7595
	0,50	0,7207	0,7258	0,7239	0,7222
	0,75	0,6857	0,6904	0,6886	0,6867
	1,00	0,6530	0,6567	0,6551	0,6530

Πίνακας 3.13

Παρακάτω θα δοθεί ο πίνακας με τις αποκλίσεις των τριών προσεγγίσεων από τις πραγματικές τιμές της πιθανότητας χρεοκοπίας και έτσι θα μπορέσουμε να δούμε ποια από αυτές έχει τη μικρότερη τιμή και επομένως είναι και η πιο αποτελεσματική.

Όπως είχε οριστεί και στις δύο προηγούμενες ενότητες με $E_C(u)$ συμβολίζουμε κατά απόλυτη τιμή την απόκλιση του ασυμπτωτικού τύπου από την ακριβή τιμή, ενώ με $E_T(u)$ την απόκλιση της προσέγγισης του Tijms από την πραγματική τιμή κατά απόλυτη τιμή και τέλος με $E_W(u)$ αντίστοιχα, την απόκλιση, κατά απόλυτη τιμή της προσέγγισης του Willmot, από την πραγματική τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πίνακα (3.14), η προσέγγιση του Tijms φαίνεται να είναι πιο αποτελεσματική από τον ασυμπτωτικό τύπο των Cramer-Lundberg ενώ η προσέγγιση του Willmot φαίνεται να είναι η καλύτερη από τις τρεις, καθώς έχει την μικρότερη απόκλιση για τις διάφορες τιμές των p, u .

p	u	$E_c(u)$	$E_T(u)$	$E_W(u)$
0,2	0,10	0,0382	0,0009	0,0015
	0,25	0,0337	0,0024	0,0009
	0,50	0,0267	0,0031	0,0005
	0,75	0,0199	0,0023	0,0008
	1,00	0,0142	0,0009	0,0005
0,5	0,10	0,0165	0,0010	0,0003
	0,25	0,0170	0,0033	0,0004
	0,50	0,0160	0,0047	0,0007
	0,75	0,0129	0,0037	0,0001
	1,00	0,0095	0,0020	0,0003
0,8	0,10	0,0029	0,0006	0,0008
	0,25	0,0042	0,0021	0,0006
	0,50	0,0051	0,0032	0,0015
	0,75	0,0047	0,0029	0,0010
	1,00	0,0037	0,0021	0,0000

Πίνακας 3.14

Στη συνέχεια, θα δοθούν δύο όρια μέσα στα οποία βρίσκεται η πιθανότητα χρεοκοπίας και θα παρατηρήσουμε ότι αυτά φράζουν και τις αντίστοιχες προσεγγίσεις που μελετήσαμε προηγουμένως. Όπως έχουμε προαναφέρει, για την πιθανότητα χρεοκοπίας ισχύει

$$\frac{\bar{F}_e(u)}{\frac{1-p}{p} + \bar{F}_e(u)} \leq \psi(u) \leq e^{-Ru},$$

όπου το άνω φράγμα είναι το

$$e^{-Ru}$$

και το κάτω φράγμα δίνεται από τον τύπο

$$\frac{\bar{F}_e(u)}{\frac{1-p}{p} + \bar{F}_e(u)}.$$

p	u	$\frac{\overline{F_e}(u)}{\frac{1-p}{p} + \overline{F_e}(u)}$	$\psi(u)$	$\psi_c(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_W(u)$	e^{-Ru}
0,2	0,10	0,1839	0,1840	0,2222	0,1849	0,1825	0,9190
	0,25	0,1611	0,1620	0,1957	0,1644	0,1611	0,8096
	0,50	0,1293	0,1318	0,1585	0,1349	0,1323	0,6556
	0,75	0,1044	0,1084	0,1283	0,1107	0,1092	0,5308
	1,00	0,0844	0,0897	0,1039	0,0906	0,0902	0,4298
0,5	0,10	0,4741	0,4747	0,4912	0,4757	0,4744	0,9506
	0,25	0,4345	0,4383	0,4553	0,4416	0,4387	0,8811
	0,50	0,3727	0,3852	0,4012	0,3899	0,3859	0,7763
	0,75	0,3180	0,3406	0,3535	0,3443	0,3407	0,6840
	1,00	0,2694	0,3019	0,3114	0,3039	0,3016	0,6027
0,8	0,10	0,7829	0,7835	0,7864	0,7841	0,7827	0,9801
	0,25	0,7545	0,7589	0,7631	0,7610	0,7595	0,9511
	0,50	0,7038	0,7207	0,7258	0,7239	0,7222	0,9047
	0,75	0,6510	0,6857	0,6904	0,6886	0,6867	0,8605
	1,00	0,5960	0,6530	0,6567	0,6551	0,6530	0,8184

Πίνακας 3.14

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι για $p = 0,2$ και αρχικό αποθεματικό ίσο με 0,25 το κάτω φράγμα και η προσέγγιση του Willmot ταυτίζονται και ισούται με 0,1611.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε ποσότητες που σχετίζονται με την πιθανότητα χρεοκοπίας, όπως για παράδειγμα, η κατανομή του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας και η από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν και μετά τη χρεοκοπία. Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να μελετήσουμε τη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος στην περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί (α) Γάμμα(3,3), (β) μείξη εκθετικών και (γ) μείξη Γάμμα κατανομών. Επίσης, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο έτσι και σε αυτό θα δοθούν, στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, για την παραπάνω ποσότητα, προσεγγίσεις μέσω του ασυμπτωτικού τύπου Cramer-Lundberg, της προσέγγισης του Tijms και τέλος του Willmot.

4.2 ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΙΝΗΣ

Οι Gerber-Shiu, το 1998, με το άρθρο τους, “On the time of value of ruin”, εισήγαγαν μια καινούρια συνάρτηση που ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, η οποία αποτελεί τομή στη μελέτη της θεωρίας χρεοκοπίας. Η συνάρτηση αυτή, ονομάζεται αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ή αλλιώς, συνάρτηση Gerber-Shiu και αποτελεί ένα πολύ σημαντικό εργαλείο σε στοχαστικά μοντέλα της θεωρίας χρεοκοπίας.

Ορισμός 4.2.1

Η συνάρτηση

$$\varphi_{\delta}(u) = E[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u], \quad \delta \geq 0 \quad (4.2.1)$$

ονομάζεται προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu και όπως παρατηρούμε μοντελοποιεί το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας $U(T-)$ και το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$.

Θα πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι:

- u : Το αρχικό αποθεματικό.
- $w(U(T-), |U(T)|)$: Η συνάρτηση ποινής (penalty function).

- $\delta \geq 0$: Προεξοφλητικός παράγοντας που παίρνει πάντα μη αρνητικές τιμές.
- $I(T < \infty)$: Δείκτη συνάρτηση η οποία παίρνει την τιμή ένα αν συμβεί χρεοκοπία, διαφορετικά παίρνει την τιμή μηδέν.

Διαισθητικά, η συνάρτηση των Gerber-Shiu μπορεί να ερμηνευτεί σαν η προεξοφλημένη ποινή που επιβάλλεται όταν συμβεί χρεοκοπία.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε το μετασχηματισμό Laplace ο οποίος χρησιμοποιείται ευρέως στον υπολογισμό και την έκφραση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής.

Ορισμός 4.2.2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)$ που ορίζεται για κάθε $t \geq 0$. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (4.2.2)$$

το οποίο είναι συνάρτηση της παραμέτρου s , ονομάζεται μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ και συμβολίζεται με $\hat{f}(s)$. Ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται για κάθε $s \geq 0$, αρκεί η συνάρτηση f να είναι ολοκληρώσιμη.

Ειδικές Περιπτώσεις της συνάρτησης Gerber-Shiu

Η παραπάνω συνάρτηση για τις διαφορετικές τιμές της συνάρτησης ποινής και του προεξοφλητικού παράγοντα μπορεί να πάρει και άλλη μορφή. Στη συνέχεια θα δοθούν κάποιες από τις πιο σημαντικές περιπτώσεις που έχουν υπολογιστεί (Gerber-Shiu 1998).

- Όταν $\delta = 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = 1$ τότε προκύπτει

$$\varphi_0(u) = E[I(T < \infty) | U(0) = u] = P(T < \infty | U(0) = u) = \psi(u).$$
- Όταν $\delta > 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = 1$ προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u].$$

- Όταν $\delta = 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x)I(|U(T)| \leq y)$ τότε προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ $|U(T)|, U(T-)$

$$\begin{aligned} \varphi_0(u) &= E[I(U(T-) \leq x)I(|U(T)| \leq y)I(T < \infty) | U(0) = u] \\ &= P[U(T-) \leq x, |U(T)| \leq y, T < \infty | U(0) = u]. \end{aligned}$$

- Όταν $\delta \neq 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x)I(|U(T)| \leq y)$ τότε η $\varphi_\delta(u)$ παριστά την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των $|U(T)|, U(T-)$.
- Όταν $\delta > 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) = x)I(|U(T)| = y)$ τότε προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $|U(T)|, U(T-)$ η οποία εκφράζεται ως

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u].$$
- Όταν $\delta = 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) = x)I(|U(T)| = y)$ τότε προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ $|U(T)|, U(T-)$

$$\varphi_0(u) = E[I(U(T-) = x)I(|U(T)| = y)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
- Όταν $\delta = 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x)$ τότε προκύπτει η συνάρτηση κατανομής της τ.μ $U(T-)$

$$\varphi_0(u) = E[I(U(T-) \leq x)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
- Όταν $\delta > 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x)$ τότε προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής της τ.μ $U(T-)$

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T-) \leq x)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
- Όταν $\delta = 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) = x)$ τότε προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U(T-)$

$$\varphi_0(u) = E[I(U(T-) = x)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
- Όταν $\delta > 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) = x)$ τότε προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U(T-)$

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T-) = x)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
- Όταν $\delta = 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| \leq y)$ τότε προκύπτει η συνάρτηση κατανομής της τ.μ $|U(T)|$

$$\varphi_0(u) = E[I(|U(T)| \leq y)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
- Όταν $\delta > 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| \leq y)$ τότε προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(|U(T)| \leq y)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
- Όταν $\delta = 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| = y)$ τότε προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $|U(T)|$

$$\varphi_0(u) = E[I(|U(T)| = y)I(T < \infty)|U(0) = u].$$

- Όταν $\delta > 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| = y)$ τότε προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $|U(T)|$

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T}I(|U(T)| = y)I(T < \infty)|U(0) = u].$$

Σύμφωνα με τους Gerber and Shiu (1998) η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u \varphi(u-x) \int_x^\infty e^{-\xi(y-x)} dF(x) dx \\ &+ \frac{\lambda}{c} e^{\xi u} \int_u^\infty e^{-\xi x} \int_x^\infty w(x, y-x) dF(y) dx \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

όπου $\xi = \xi(\delta)$ είναι η μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης

$$c\xi - \delta = \lambda - \lambda \hat{f}(\xi) \quad (4.2.4)$$

όπου ξ ένας μη αρνητικός αριθμός, δ ο προεξοφλητικός παράγοντας, λ η ένταση της ανέλιξης Poisson και $\hat{f}(\xi)$ ο μετασχηματισμός Laplace.

Την παραπάνω εξίσωση, που ονομάζεται γενικευμένη εξίσωση Lundberg θα την δούμε πιο αναλυτικά καθώς αποτελεί γενίκευση της (1.16) και η ρίζα της παίζει πολύ σημαντικό ρόλο σε κάθε συνάρτηση που παράγεται από οποιαδήποτε όρισμα της συνάρτησης ποινής.

Για να γίνει πιο κατανοητό ας θεωρήσουμε τις δύο καμπύλες

$$\varepsilon_1: y = \delta + \lambda - c\xi \quad (4.2.5)$$

και

$$\varepsilon_2: y = \lambda \hat{f}(\xi). \quad (4.2.6)$$

Το σημείο τομής των δύο παραπάνω καμπυλών ορίζει την γενικευμένη εξίσωση Lundberg. Παρατηρούμε ότι η ε_1 καμπύλη είναι γραμμική και φθίνουσα συνάρτηση ως προς ξ αφού η πρώτη της παράγωγος ισούται με $-c < 0$. Επίσης η ε_2 είναι φθίνουσα συνάρτηση με τα κοίλα προς τα άνω αφού για την πρώτη παράγωγο της ισχύει ότι είναι ίση με $\lambda \hat{f}'(\xi) < 0$, ενώ για την δεύτερη παράγωγο της ισχύει ότι $\lambda \hat{f}''(\xi) > 0$. Παράλληλα στο σημείο $\xi = 0$ ισχύουν

$$\varepsilon_1: y = \delta + \lambda \quad (4.2.7)$$

και

$$\varepsilon_1: y = \lambda \hat{f}(0) = \lambda. \quad (4.2.8)$$

Από τις παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η γενικευμένη εξίσωση Lundberg έχει μοναδική θετική ρίζα.

Σύμφωνα με Lin and Willmot (2000) η ανανεωτική εξίσωση που περιγράφεται στην (4.2.3) μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^u \varphi(u-x) dG(x) + \frac{1}{1+\beta} M(u), \quad u \geq 0 \quad (4.2.9)$$

όπου

$$\bar{G}(x) = \frac{\bar{F}(x) - e^{\xi x} \int_x^\infty e^{-\xi y} dF(y)}{\xi \int_0^\infty e^{-\xi y} \bar{F}(y) dy}, \quad (4.2.10)$$

η σταθερά β ισούται με

$$\beta = \frac{(1+\theta)p_1}{\int_0^\infty e^{-\xi y} \bar{F}(y) dy} - 1 \quad (4.2.11)$$

και

$$M(u) = \frac{e^{\xi u} \int_u^\infty e^{-\xi x} \int_x^\infty w(x, y-x) dF(y) dx}{\int_0^\infty e^{-\xi y} \bar{F}(y) dy}. \quad (4.2.12)$$

Η λύση της (4.9) είναι μοναδική και μπορεί να αποδειχθεί μέσω της χρήσης μετασχηματισμών Laplace. Επίσης μια εναλλακτική μορφή για την ουρά της $G(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$\bar{G}(x) = \frac{\int_0^\infty e^{-\xi y} \bar{F}(x+y) dy}{\int_0^\infty e^{-\xi y} \bar{F}(y) dy}, \quad x \geq 0. \quad (4.2.13)$$

Ακόμα η $G(x)$ είναι διαφορίσιμη και μπορεί να γραφεί ως

$$G'(x) = \frac{e^{\xi x} \int_x^{\infty} e^{-\xi y} dF(y)}{\int_0^{\infty} e^{-\xi y} \bar{F}(y) dy}, \quad x \geq 0. \quad (4.2.14)$$

Επίσης, οι Lin and Willmot με τη δημοσίευσή τους το 2000 προσπάθησαν να εκφράσουν τη λύση της παραπάνω ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης μέσω της ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, όπως θα δούμε και στην συνέχεια.

Ορίζουμε τη συνάρτηση κατανομής $K(u) = 1 - \bar{K}(u)$ η οποία ακολουθεί σύνθετη γεωμετρική κατανομή και περιγράφεται από τον εξής τύπο

$$\bar{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n \bar{G}^{*n}(u), \quad u \geq 0, \quad (4.2.15)$$

όπου με $\bar{G}^{*n}(u)$ συμβολίζουμε την ουρά της n -οστης συνέλιξης της $G(u)$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η $\bar{K}(u)$ είναι η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης που ακολουθεί

$$\bar{K}(u) = \frac{\beta}{1+\beta} \int_0^u \bar{K}(u-x) dG(x) + \frac{\beta}{1+\beta} \bar{G}(u), \quad u \geq 0, \quad (4.2.16)$$

όπου για την $\bar{K}(u)$ μπορούμε επίσης να προσθέσουμε ότι αντιστοιχεί με το μετασχηματισμό Laplace κατά τη στιγμή χρεοκοπίας T . Προκειμένου να το διαπιστώσουμε ας θέσουμε $w(x_1, x_2) = 1$. Προκύπτει αμέσως από τις (4.2.12) και (4.2.13) ότι $M(u) = \bar{G}(u)$ και $\varphi(u)$ να αντιπροσωπεύει τον μετασχηματισμό Laplace της τ.μ T . Τελικά, έτσι καταλήγουμε ότι $\bar{K}(u) = \varphi(u)$.

Ας παρατηρήσουμε τώρα την ειδική περίπτωση όπου $\xi = 0$, από την (4.2.13) είναι φανερό ότι

$$G(x) = \frac{1}{p_1} \int_0^x \bar{F}(y) dy \quad (4.2.17)$$

Επομένως, σ' αυτή την περίπτωση καταλήγουμε ότι $\bar{K}(u) = \psi(u)$.

Οι Lin and Willmot με δημοσίευσή τους το (1999) διατύπωσαν το θεώρημα με την αντίστοιχη απόδειξη το οποίο παρουσιάζει ότι η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης που περιγράφεται στην σχέση (4.2.9) μπορεί να εκφραστεί μέσω της σύνθετης γεωμετρικής ουράς $\bar{K}(u)$.

Θεώρημα 4.2.1

Η λύση της (4.2.9) μπορεί επίσης να εκφραστεί και ως

$$\varphi(u) = \frac{1}{\beta} \int_0^u M(u-x) dK(x) + \frac{1}{1+\beta} M(u), \quad (4.2.18)$$

$$\varphi(u) = -\frac{1}{\beta} \int_0^u \bar{K}(u-x) dH(x) + \frac{H(0)}{\beta} \bar{K}(u) + \frac{1}{\beta} H(u) \quad (4.2.19)$$

Ακόμα εφόσον η $M(u)$ είναι διαφορίσιμη, τότε η $\varphi(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\varphi(u) = -\frac{1}{\beta} \int_0^u \bar{K}(u-x) M'(x) dx - \frac{H(0)}{\beta} \bar{K}(u) + \frac{1}{\beta} M(u), \quad u \geq 0 \quad (4.2.20)$$

4.3 ΤΟ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΤΟ ΕΛΛΕΙΜΜΑ ΤΗ ΣΤΙΓΜΗ ΤΗΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Σύμφωνα με Gerber et al. (1987) η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι μικρότερο ή ίσο του y , περιγράφεται από τον τύπο

$$G(u, y) = P(T < \infty, -y < U(T) < 0) \quad u \geq 0, y \geq 0 \quad (4.3.1)$$

και αντίστοιχα ορίζεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$g(u, y) = \frac{d}{dy} G(u, y), \quad (4.3.2)$$

η οποία εκφράζει την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία και το έλλειμμα που προκύπτει ακριβώς μετά την απαίτηση του ζημιολόγου ενδεχομένου να είναι μεταξύ $-y$ και $-y + dy$.

Στο σύγγραμμα των Bowers et al (1986) και θεώρημα 12.2, δόθηκε η πιθανότητα το πλεόνασμα να μην πέσει ποτέ κάτω από το αρχικό αποθεματικό u και να είναι στο διάστημα $(u-x, u-x+dx)$, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\frac{\lambda}{c} [1 - F(x)] dx. \quad (4.3.3)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση και τον νόμο της ολικής πιθανότητας καταλήγουμε ότι

$$G(u, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u G(u-x, y) [1 - F(x)] dx + \frac{\lambda}{c} \int_u^{u+y} [1 - F(x)] dx. \quad (4.3.4)$$

Σημειώνεται ότι $G(u, \infty) = \psi(u)$. Εν συνεχεία παραγωγίζοντας την (4.3.4) ως προς y παίρνουμε την εξής εξίσωση για το g

$$g(u, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u g(u-x, y)[1-F(x)] dx + \frac{\lambda}{c} [1-F(u+y)]. \quad (4.3.5)$$

Επίσης, σύμφωνα με Willmot and Lin (1998) μια άλλη μορφή για τη σχέση (4.3.4) δίνεται από τον τύπο

$$G(u, y) = \frac{1}{(1+\theta)p_1} \int_0^u G(u-x, y)\bar{F}(x)dx + \frac{1}{(1+\theta)} \{\bar{F}_e(u) - \bar{F}_e(u+y)\}. \quad (4.3.6)$$

Το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία δίνεται από τον τύπο

$$G_u(y) = 1 - \bar{G}_u(y) = \frac{G(u, y)}{\psi(u)}, \quad y \geq 0. \quad (4.3.7)$$

Μια ακόμα συνάρτηση η οποία χρίζει ενδιαφέροντος είναι η $F(u, y)$ η δίνει την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία ξεκινώντας με αρχικό αποθεματικό u και το πλεόνασμα ακριβώς πριν από τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι μικρότερο από y .

$$F(u, y) = G(u-y, y) - \left\{1 + \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}\right\} \{\psi(u-y) - \psi(u)\}, \quad u \geq y. \quad (4.3.8)$$

Στην περίπτωση που $u < y$, (βλέπε Dickson 1992) ο παραπάνω τύπος παίρνει απλούστερη μορφή που δεν εξαρτάται από το $G(u, y)$ και είναι η

$$F(u, y) = \frac{\{1+\bar{F}_e(y)\}}{\theta} \psi(u) - \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}. \quad (4.3.9)$$

Παρακάτω θα εκφράσουμε την πιθανότητα $G(u, y)$ ως προς την συνάρτηση των κλιμακωτών υψών Z_i και την πιθανότητα χρεοκοπίας, έχοντας τα αποτελέσματα που δίνονται στη συνέχεια.

Θεώρημα 4.3.1

Για κάθε $u \geq 0$ και $y \geq 0$, η κατανομή του ελλείμματος $G(u, y)$ ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$G(u, y) = \psi(u) - \frac{1}{\theta} \int_0^u \bar{F}_e(y+u-x)d\delta(x). \quad (4.3.10)$$

Απόδειξη

Έχουμε ότι

$$\psi(u) = \frac{1}{(1+\theta)p_1} \int_0^u \psi(u-x) \bar{F}(x) dx + \frac{1}{(1+\theta)} \bar{F}_e(u), \quad u \geq 0. \quad (4.3.11)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.11) με την (4.3.6) οδηγούμαστε στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (βλέπε Dufresne and Gerber 1988) η οποία είναι η

$$\psi(u) \bar{G}_u(y) = \frac{1}{(1+\theta)p_1} \int_0^u \psi(u-x) \bar{G}_{u-x}(y) \bar{F}(x) dx + \frac{\bar{F}_e(u+y)}{(1+\theta)}.$$

Στη συνέχεια μέσω της χρήσης μετασχηματισμών Laplace έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-su} \psi(u) \bar{G}_u(y) du = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{-su} \bar{F}_e(u+y) du \int_0^\infty e^{-su} d\delta(u),$$

όπου

$$\int_0^\infty e^{-su} d\delta(u) = \left\{ 1 - \frac{1}{\theta} \left(\int_0^\infty e^{-su} dF_e(u) - 1 \right) \right\}^{-1}.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace οδηγεί στο εξής

$$\bar{G}_u(y) = \frac{1}{\theta\psi(u)} \int_0^u \bar{F}_e(y+u-x) d\delta(x). \quad (4.3.12)$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Πόρισμα 4.3.1

Η κατανομή του ελλείμματος ικανοποιεί τον παρακάτω τύπο

$$\begin{aligned} G(u, y) &= F_e(y)\psi(u) + \frac{1+\theta}{\theta} \{ \bar{F}_e(y)\psi(u) - \psi(u+y) \} \\ &+ \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi(u+y-x) \bar{F}(x) dx. \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Απόδειξη

Έστω L_y μια τυχαία μεταβλητή η οποία είναι ανεξάρτητη από τα κλιμακωτά ύψη Z και ικανοποιεί την

$$P(L_y > x) = \frac{\bar{F}_e(x+y)}{\bar{F}_e(y)}.$$

Από την (4.3.12) έχουμε οτι

$$\bar{G}_u(y) = \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta\psi(u)} \int_0^u P(L_y > u - x) dP(Z \leq x).$$

Σύμφωνα με το νόμο της ολικής πιθανότητας αυτό συνεπάγεται οτι

$$\bar{G}_u(y) = \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta\psi(u)} \{P(Z + L_y > u) - \psi(u)\}. \quad (4.3.14)$$

Κάνοντας εναλλαγή της τ.μ. Z με την L_y προκύπτει

$$\bar{G}_u(y) = \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta\psi(u)} \left\{ P(+L_y > u) + \int_0^u \psi(u - x) dP(L_y \leq x) - \psi(u) \right\}.$$

Στη συνέχεια έχουμε

$$\bar{G}_u(y) \psi(u) = \frac{\bar{F}_e(u + y)}{\theta} + \frac{1}{\theta p_1} \int_0^u \psi(u - x) \bar{F}(x + y) dx - \frac{\bar{F}_e(y) \psi(u)}{\theta}.$$

Μια αλλαγή στις μεταβλητές του ολοκληρώματος και χρησιμοποιώντας την (4.3.11) έχει ως αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} \bar{G}_u(y) \psi(u) &= \frac{\bar{F}_e(u + y)}{\theta} + \frac{1}{\theta p_1} \int_y^{u+y} \psi(u - x) \bar{F}(x) dx - \frac{\bar{F}_e(y) \psi(u)}{\theta} \\ &= \frac{1}{\theta} \left\{ \int_0^{u+y} \psi(u - x + y) \frac{\bar{F}(x)}{p_1} dx + \bar{F}_e(u + y) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi(u + y - x) \bar{F}(x) dx - \frac{\bar{F}_e(y) \psi(u)}{\theta} \\ &= \frac{1 + \theta}{\theta} \psi(u + y) - \frac{\bar{F}_e(y) \psi(u)}{\theta} - \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi(u + y - x) \bar{F}(x) dx \end{aligned}$$

Έτσι από την (4.3.7) προκύπτει

$$\begin{aligned} G(u, y) &= \left\{ 1 + \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta} \right\} \psi(u) - \frac{1 + \theta}{\theta} \psi(u + y) + \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi(u + y - x) \bar{F}(x) dx \\ &= F_e(y) \psi(u) + \frac{1 + \theta}{\theta} \{ \bar{F}_e(y) \psi(u) - \psi(u + y) \} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi(u+y-x) \bar{F}(x) dx.$$

Πόρισμα 4.3.2

Για κάθε $u \geq y$ ισχύει η παρακάτω σχέση

$$F(u, y) = \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi(u-x) \bar{F}(x) dx - \frac{F_e(y)\psi(u)}{\theta}, \quad u \geq y \quad (4.3.15)$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.3.8) και το παραπάνω πόρισμα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} F(u, y) &= F_e(y)\psi(u-y) + \frac{1+\theta}{\theta} \{ \bar{F}_e(y)\psi(u-y) - \psi(u) \} \\ &+ \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi(u-x) \bar{F}(x) dx - \left\{ 1 + \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta} \right\} \{ \psi(u-y) - \psi(u) \} \\ &= \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi(u-x) \bar{F}(x) dx - \left\{ \frac{1+\theta}{\theta} - 1 - \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta} \right\} \psi(u) \\ &+ \left\{ F_e(y) + \frac{1+\theta}{\theta} \bar{F}_e(y) - 1 - \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta} \right\} \\ &= \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi(u-x) \bar{F}(x) dx - \frac{F_e(y)\psi(u)}{\theta} \end{aligned}$$

4.4 ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΟΣ

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος (4.3.1) θα κατασκευάσουμε ένα απλό, αλλά γενικό φράγμα για το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Θεώρημα 4.4.1

Έστω $A(y) = 1 - \bar{A}(y)$ μια συνάρτηση κατανομής στο $(0, \infty)$ η οποία ικανοποιεί την

$$\frac{\bar{F}_e(x+y)}{\bar{F}_e(x)} \geq (\leq) \bar{A}(y), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad (4.4.1)$$

τότε

$$\bar{G}_u(y) \geq (\leq) \bar{A}(y). \quad (4.4.2)$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.3.12) τη (4.3.11) και ολοκληρώνοντας κατά μέρη προκύπτει

$$\begin{aligned} \bar{G}_u(y) &\geq (\leq) \frac{\bar{A}(y)}{\theta\psi(u)} \int_0^u \bar{F}_e(u-x) d\delta(x) \\ &= \frac{\bar{A}(y)}{\theta\psi(u)} \left\{ \bar{F}_e(u) + \frac{1}{p_1} \int_0^u \psi(u-x) \bar{F}(x) dx - \psi(u) \right\} \\ &= \frac{\bar{A}(y)}{\theta\psi(u)} \{(1+\theta)\psi(u) - \psi(u)\} = \bar{A}(y). \end{aligned}$$

Με βάση τους Willmot and Lin (1998) προκύπτουν τα παρακάτω πορίσματα για το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Πόρισμα 4.4.1

Εάν η $F(x)$ είναι μια $2 - NWU$ ($2 - NBU$) τότε

$$\bar{G}_u(y) \geq (\leq) \bar{F}_e(y) \quad (4.4.3)$$

Απόδειξη

Με βάση το θεώρημα (4.4.1) και αντικαθιστώντας το $\bar{A}(y)$ με το $\bar{F}_e(y)$ προκύπτει το ζητούμενο.

Πόρισμα 4.4.2

Εάν η $F(x)$ είναι μια $NWUC$ ($NBUC$) τότε

$$\bar{G}_u(y) \geq (\leq) \bar{F}(y) \quad (4.4.4)$$

Απόδειξη

Ομοίως με παραπάνω και εδώ η απόδειξη βασίζεται σε αυτή του προαναφερθέντος θεωρήματος όπου αντί για $\bar{A}(y)$ θέτουμε $F(y)$.

Πόρισμα (4.4.3)

Εάν η $F(x)$ είναι μια $NWUE$ ($NBUE$) τότε

$$\bar{G}_u(y) \geq (\leq) e^{-y/p_1} \quad (4.4.5)$$

Απόδειξη

Αφού η βαθμίδα αποτυχίας για την κατανομή ισορροπίας περιγράφεται από τον τύπο

$$\{\lambda(x)\}^{-1} = \frac{-d\ln\bar{F}_e(x)}{dx} \quad (4.4.6)$$

τότε ισχύει

$$\bar{F}_e(x) = \exp\left\{-\int_0^x \{\lambda(y)\}^{-1} dy\right\}. \quad (4.4.7)$$

Προκύπτει έτσι ότι

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_e(x+y)}{\bar{F}_e(x)} &= \exp\left\{-\int_x^{x+y} \{\lambda(t)\}^{-1} dt\right\} \geq (\leq) \exp\left\{-\int_x^{x+y} p_1^{-1} dt\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{-y}{p_1}\right\}. \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν το πόρισμα (4.4.1) επαληθεύεται αν θέσουμε $A(y) = 1 - e^{-\frac{y}{p_1}}$.

Πόρισμα 4.4.4

Έστω $A(y) = 1 - \bar{A}(y)$ μια συνάρτηση κατανομής στο $(0, \infty)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση (4.4.1), τότε

$$F(u, y) \leq (\geq) \left\{1 + \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}\right\} \psi(u) - \left\{\bar{A}(y) + \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}\right\} \psi(u-y), \quad u \geq y. \quad (4.4.8)$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.3.8) και το θεώρημα (4.4.1) έχουμε

$$\begin{aligned} F(u, y) &\leq (\geq) A(y)\psi(u - y) - \left\{1 + \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}\right\} \{\psi(u - y) - \psi(u)\} \\ &= \left\{1 + \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}\right\} \psi(u) - \left\{\bar{A}(y) + \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}\right\} \psi(u - y). \end{aligned}$$

Θεώρημα 4.4.2

Για την ουρά της κατανομής του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας ισχύει το παρακάτω

$$\bar{G}_u(y) \leq \frac{1+\theta}{\theta} \left\{ \frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} - \psi(y) \right\}. \quad (4.4.9)$$

Απόδειξη

Με τη βοήθεια του τύπου (4.3.11) που περιγράφει την πιθανότητα χρεοκοπίας έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1} \int_0^y \psi(u + y - x) \bar{F}(x) dx &\geq \frac{\psi(u)}{p_1} \int_0^y \psi(y - x) \bar{F}(x) dx \\ &= \psi(u) \{(1 + \theta)\psi(y) - \bar{F}_e(y)\}. \end{aligned}$$

Έτσι από το πόρισμα (4.3.1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} G(u, y) &\geq F_e(y)\psi(u) + \frac{1 + \theta}{\theta} \{\bar{F}_e(y)\psi(u) - \psi(u + y)\} \\ &\quad + \frac{\psi(u)}{\theta} \{(1 + \theta)\psi(y) - \bar{F}_e(y)\} \\ &= \left\{ F_e(y) + \frac{1 + \theta}{\theta} \bar{F}_e(y) - \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta} \right\} \psi(u) \\ &\quad - \frac{1 + \theta}{\theta} \{\psi(u + y) - \psi(u)\psi(y)\} \\ &= \psi(u) - \frac{1 + \theta}{\theta} \{\psi(u + y) - \psi(u)\psi(y)\}. \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (4.3.7) από την οποία προκύπτει ότι

$$G(u, y) = \psi(u) - \bar{G}_u(y)\psi(u)$$

παίρνουμε

$$\psi(u) - \bar{G}_u(y)\psi(u) \geq \psi(u) - \frac{1 + \theta}{\theta} \{\psi(u + y) - \psi(u)\psi(y)\}$$

Κάνοντας πράξεις και διαιρώντας κατά μέλη με $\psi(u)$ την παραπάνω έχουμε

$$\bar{G}_u(y) \leq -\frac{1 + \theta}{\theta} \left\{ \frac{\psi(u + y)}{\psi(u)} - \psi(y) \right\}$$

που είναι και το ζητούμενο.

4.5 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Στην ενότητα αυτή θα δοθούν ακριβής τιμές για τις ποσότητες που έχουν προαναφερθεί στην περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί τις κατανομές Gamma (3,3) μείξη εκθετικών και μείξη Gamma κατανομών. Στη συνέχεια για τις δύο τελευταίες περιπτώσεις θα δοθούν οι προσεγγίσεις των Cramer-Lundberg, Tijms και Willmot και θα παρατεθούν και τα αντίστοιχα συμπεράσματα σχετικά με το ποιά από τις προσεγγίσεις είναι η πιο ικανοποιητική.

4.5.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΓΑΜΜΑ (3,3)

Στην περίπτωση αυτή θα παραθέσουμε τους πίνακες (βλ. Willmot and Lin 1998) που αφορούν τις ακριβής τιμές για τις ποσότητες των $G(u, y)$, $G_u(y)$, $\psi(u)$ για τις διάφορες τιμές των u, y με περιθώριο ασφαλείας $\theta = 0,25$, $\theta = 1$ και $\theta = 4$.

Γάμμα(3,3) $\theta = 0,25$

y	u	$G(u, y)$	$G_u(y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,0857	0,1094	0,7834
	0,25	0,0920	0,1217	0,7562
	0,50	0,0958	0,1354	0,7074
	1,00	0,0886	0,1453	0,6097
0,25	0,10	0,2090	0,2668	0,7834
	0,25	0,2200	0,2909	0,7562
	0,50	0,2237	0,3163	0,7074
	1,00	0,2035	0,3338	0,6097
0,50	0,10	0,3883	0,4957	0,7834
	0,25	0,3973	0,5254	0,7562
	0,50	0,3926	0,5550	0,7074
	1,00	0,3501	0,5742	0,6097

Source: G.E Willmot, X.S Lin/Insurance: Mathematics and Economics 23 (1998) 91 – 110

Πίνακας 4.5.1

Παρατηρούμε από τον παραπάνω πίνακα ότι η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία και το έλλειμμα ακριβώς μετά την επέλευση του ζημιογόνου ενδεχομένου να είναι μεγαλύτερο του 0,10 ξεκινώντας με αρχικό αποθεματικό $u = 0,10$ ισούται με 0,0857. Επίσης, το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, όταν το αρχικό αποθεματικό είναι 0,10, είναι ίσο με 0,1094. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι για σταθερό αρχικό αποθεματικό, καθώς το y αυξάνεται, αυξάνονται και οι τιμές του $G_u(y)$.

Στην περίπτωση που το περιθώριο ασφαλείας θ ισούται με τη μονάδα και για $y = 0,10$ το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι ίσο με 0,1095 και όπως παρατηρούμε από τον άνω πίνακα για y σταθερό, καθώς το αρχικό αποθεματικό αυξάνεται αυξάνεται και το $G_u(y)$. Η ίδια συμπεριφορά διαπιστώνεται και για τις υπόλοιπες τιμές του y .

Γάμμα(3,3) $\theta = 1$

y	u	$G(u, y)$	$G_u(y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,0520	0,1095	0,4744
	0,25	0,0533	0,1227	0,4342
	0,50	0,0508	0,1386	0,3664
	1,00	0,0380	0,1530	0,2484
0,25	0,10	0,1267	0,2671	0,4744
	0,25	0,1271	0,2927	0,4342
	0,50	0,1181	0,3224	0,3664
	1,00	0,0864	0,3477	0,2484
0,50	0,10	0,2354	0,4961	0,4744
	0,25	0,2291	0,5277	0,4342
	0,50	0,2060	0,5623	0,3664
	1,00	0,1466	0,5901	0,2484

Source: G.E Willmot, X.S Lin/Insurance: Mathematics and Economics 23 (1998) 91 – 110

Πίνακας 4.5.2

Γάμμα(3,3) $\theta = 4$

y	u	$G(u, y)$	$G_u(y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,0202	0,1097	0,1839
	0,25	0,0197	0,1237	0,1595
	0,50	0,0172	0,1424	0,1209
	1,00	0,0103	0,1639	0,0626
0,25	0,10	0,0492	0,2674	0,1839
	0,25	0,0470	0,2947	0,1595
	0,50	0,0398	0,3295	0,1209
	1,00	0,0230	0,3676	0,0626
0,50	0,10	0,0913	0,4965	0,1839
	0,25	0,0845	0,5301	0,1595
	0,50	0,0690	0,5707	0,1209
	1,00	0,0384	0,6128	0,0626

Source: G.E Willmot, X.S Lin/Insurance: Mathematics and Economics 23 (1998) 91 – 110

Πίνακας 4.5.3

Τέλος, για $\theta = 4$, η πιθανότητα χρεοκοπίας ξεκινώντας με αρχικό αποθεματικό ίσο με 0,10 μονάδες και το έλλειμμα ακριβώς μετά την έλευση της ζημιογόνου απαίτησης να είναι το πολύ ίσο με 0,10, έχει την τιμή 0,0202 ενώ το έλλειμμα κατα τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία είναι ίσο με 0,1097. Εξετάζοντας τον πίνακα 4.5.3 βλέπουμε ότι για σταθερό $y = 0,10$ το $G(u, y)$ ελαττώνεται καθώς το αρχικό αποθεματικό αυξάνεται, ενώ το $G_u(y)$, αντίθετα, αυξάνεται. Στη συνέχεια βλέπουμε ότι για $y = 0,25$ το $G(u, y)$ ισούται με 0,0492 και ελαττώνεται παίρνοντας την τιμή 0,0230 όταν το αρχικό αποθεματικό είναι ίσο με τη μονάδα. Αντίθετα συμπεριφέρεται το $G_u(y)$ το οποίο ξεκινάει από την τιμή 0,2674 και καταλήγει να έχει αυξηθεί κατά 0,1002 μονάδες όταν $u = 1$. Όμοια αποτελέσματα παίρνουμε και για $y = 0,5$.

4. 5. 2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΜΕΙΞΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιώντας όσα προαναφέρθηκαν σε συνδυασμό με τα συγγράμματα των Willmot and Lin (1998) και των Gerber et al. (1987) θα δοθούν πίνακες με τη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος, τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας καθώς και οι προσεγγίσεις των Cramer, Tijms και Willmot.

Οι Willmot and Lin στην εργασία τους το 1998 πρότειναν την προσέγγιση των $G(u, y)$ και $F(u, y)$ αντικαθιστώντας την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ με την προσέγγιση του Tijms για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_T(u)$.

Έτσι λοιπόν με βάση τα παραπάνω η σχέση (4.3.13) γίνεται

$$G_T(u, y) = F_e(y)\psi(u) + \frac{1 + \theta}{\theta} \{ \bar{F}_e(y)\psi(u) - \psi(u + y) \} + \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi_T(u + y - x) \bar{F}(x) dx. \quad (4.5.1)$$

Επίσης, η σχέση (4.3.15) γίνεται

$$F_T(u, y) = \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi_T(u - x) \bar{F}(x) dx - \frac{F_e(y)\psi(u)}{\theta}, \quad u \geq y \quad (4.5.2)$$

Βασιζόμενοι στα παραπάνω μπορούμε να δώσουμε αντίστοιχες προσεγγίσεις για τα $G(u, y)$ και $F(u, y)$ μέσω του ασυμπτωτικού τύπου του Cramer αντικαθιστώντας αντίστοιχα την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ με $\psi_C(u)$.

Έτσι λοιπόν έχουμε,

$$G_C(u, y) = F_e(y)\psi(u) + \frac{1 + \theta}{\theta} \{ \bar{F}_e(y)\psi(u) - \psi(u + y) \} + \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi_C(u + y - x) \bar{F}(x) dx. \quad (4.5.3)$$

$$F_C(u, y) = \frac{1}{\theta p_1} \int_0^y \psi_C(u - x) \bar{F}(x) dx - \frac{F_e(y)\psi(u)}{\theta}, \quad u \geq y \quad (4.5.4)$$

Ως εφαρμογή των παραπάνω, θα παραθέσουμε το παράδειγμα από την εργασία των Gerber et al. (1987) όπως και στο Κεφάλαιο 3. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής των αποζημιώσεων ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών και δίνεται από την σχέση

$$f(u) = \frac{7e^{-7u}}{2} + \frac{3e^{-3u}}{2} \quad u \geq 0. \quad (4.5.5)$$

Στη συνέχεια θα δοθεί πίνακας με τις ακριβής τιμές του $G(u, y)$ και του $G_u(y)$ για τις διάφορες τιμές του περιθωρίου ασφαλείας θ .

Εξετάζοντας τον παρακάτω πίνακα διαπιστώνουμε ότι για περιθώριο ασφαλείας $\theta = 4$, η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία, όταν το αρχικό αποθεματικό είναι ίσο με 0,10 μονάδες και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι μικρότερο από 0,10 μονάδες, είναι ίση με 0,0455. Επίσης το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας, δεδομένου ότι συμβαίνει χρεοκοπία είναι ίσο με 0,3142. Επίσης, παρατηρούμε ότι για σταθερό $y = 0,10$ καθώς το αρχικό αποθεματικό u αυξάνεται, το $G(u, y)$ ελατώνεται. Το ίδιο συμβαίνει και με την ποσότητα $G_u(y)$ αφού όπως είδαμε στον τύπο (4.3.7) υπολογίζεται βάσει της πιθανότητας χρεοκοπίας και του $G(u, y)$. Αντίστοιχα αποτελέσματα παίρνουμε και για τις υπόλοιπες τιμές του y .

$$\theta = 4$$

y	u	$G(u, y)$	$G_u(y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,0455	0,3142	0,1448
	0,25	0,0273	0,2954	0,0924
	0,50	0,0129	0,2780	0,0464
	0,75	0,0065	0,2697	0,0241
	1,00	0,0034	0,2677	0,0127
0,25	0,10	0,0861	0,5946	0,1448
	0,25	0,0529	0,5725	0,0924
	0,50	0,0256	0,5517	0,0464
	0,75	0,0131	0,5435	0,0241
	1,00	0,0068	0,5354	0,0127
0,50	0,10	0,1188	0,8204	0,1448
	0,25	0,0751	0,8127	0,0924
	0,50	0,0368	0,7931	0,0464
	0,75	0,0190	0,7883	0,0241
	1,00	0,0099	0,7795	0,0127

Πίνακας 4.5.4

$$\theta = 1$$

y	u	$G(u, y)$	$G_u(y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,1287	0,3152	0,4083
	0,25	0,0921	0,2995	0,3075
	0,50	0,0568	0,2880	0,1972
	0,75	0,0365	0,2844	0,1283
	1,00	0,0237	0,2824	0,0839
0,25	0,10	0,2535	0,5963	0,4083
	0,25	0,1775	0,5772	0,3075
	0,50	0,1110	0,5628	0,1972
	0,75	0,0716	0,5580	0,1283
	1,00	0,0467	0,5566	0,0839
0,50	0,10	0,3353	0,8212	0,4083
	0,25	0,2487	0,8087	0,3075
	0,50	0,1577	0,7996	0,1972
	0,75	0,1022	0,7965	0,1283
	1,00	0,0667	0,7949	0,0839

Πίνακας 4.5.5

$$\theta = 0,25$$

y	u	$G(u, y)$	$G_u(y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,2332	0,3136	0,7397
	0,25	0,1994	0,3115	0,6603
	0,50	0,1618	0,2928	0,5512
	0,75	0,1344	0,2906	0,4618
	1,00	0,1123	0,2899	0,3873
0,25	0,10	0,4406	0,5929	0,7397
	0,25	0,3825	0,5771	0,6603
	0,50	0,3134	0,5673	0,5512
	0,75	0,2610	0,5647	0,4618
	1,00	0,2183	0,5639	0,3873
0,50	0,10	0,6062	0,8165	0,7397
	0,25	0,5339	0,8063	0,6603
	0,50	0,4415	0,7998	0,5512
	0,75	0,3686	0,7981	0,4618
	1,00	0,3085	0,7978	0,3873

Πίνακας 4.5.6

Όπως στον πίνακα 4.5.4 έτσι και στους δύο επόμενους, παρατηρούμε ότι, τόσο για $\theta = 1$ όσο και για $\theta = 0,25$, για σταθερό y καθώς το αρχικό αποθεματικό u αυξάνεται οι ποσότητες $G(u, y)$ και $G_u(y)$ μειώνονται.

Στη συνέχεια θα δοθεί ο πίνακας με τις προσεγγίσεις των $G(u, y)$ και $G_u(y)$ και συγκρίνοντάς τις με τις ακριβείς τιμές θα προσπαθήσουμε να βγάλουμε συμπεράσματα σχετικά με το ποια προσέγγιση είναι η πιο ικανοποιητική.

Ας εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση που το y είναι σταθερό και ίσο με 0,10 μονάδες. Παρατηρούμε ότι η ακριβής τιμή του $G(u, y)$ είναι ίση με 0,0455, η προσέγγισή της μέσω του ασυμπτωτικού τύπου των Cramer-Lundber δίνει την τιμή 0,0443, ενώ η τιμή που δίνει η προσέγγιση του Tijms είναι ίση με την ακριβή. Ομοίως συμβαίνει και για τις υπόλοιπες τιμές του u . Συνεχίζοντας, για την τιμή $y = 0,25$, βλέπουμε ότι για όλες τις τιμές του αρχικού αποθεματικού εκτός από την τιμή 0,25 ισχύει ότι $G(u, y) = G_T(u, y)$. Ομοίως συμβαίνει και στην περίπτωση που $y = 0,50$.

$$\theta = 4$$

y	u	$G(u, y)$	$G_C(u, y)$	$G_T(u, y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,0455	0,0443	0,0455	0,1448
	0,25	0,0273	0,0268	0,0273	0,0924
	0,50	0,0129	0,0128	0,0129	0,0464
	0,75	0,0065	0,0065	0,0065	0,0241
	1,00	0,0034	0,0034	0,0034	0,0127
0,25	0,10	0,0861	0,0848	0,0861	0,1448
	0,25	0,0529	0,0524	0,0528	0,0924
	0,50	0,0256	0,0255	0,0256	0,0464
	0,75	0,0131	0,0131	0,0131	0,0241
	1,00	0,0068	0,0068	0,0068	0,0127
0,50	0,10	0,1188	0,1180	0,1188	0,1448
	0,25	0,0751	0,0742	0,0744	0,0924
	0,50	0,0368	0,0367	0,0368	0,0464
	0,75	0,0190	0,0190	0,0190	0,0241
	1,00	0,0099	0,0099	0,0099	0,0127

Πίνακας 4.5.7

$$\theta = 1$$

y	u	$G(u, y)$	$G_C(u, y)$	$G_T(u, y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,1287	0,1229	0,1287	0,4083
	0,25	0,0921	0,0898	0,0921	0,3075
	0,50	0,0568	0,0563	0,0568	0,1972
	0,75	0,0365	0,0364	0,0365	0,1283
	1,00	0,0237	0,0237	0,0237	0,0839
0,25	0,10	0,2535	0,2369	0,2434	0,4083
	0,25	0,1775	0,1749	0,1774	0,3075
	0,50	0,1110	0,1105	0,1110	0,1972
	0,75	0,0716	0,0715	0,0716	0,1283
	1,00	0,0467	0,0467	0,0467	0,0839
0,50	0,10	0,3353	0,3316	0,3353	0,4083
	0,25	0,2487	0,2473	0,2487	0,3075
	0,50	0,1577	0,1574	0,1577	0,1972
	0,75	0,1022	0,1022	0,1022	0,1283
	1,00	0,0667	0,0667	0,0667	0,0839

Πίνακας 4.5.8

Παρατηρώντας τις στήλες (3), (4), (5), στην περίπτωση που $y = 0,10$ βλέπουμε ότι για τις διάφορες τιμές του αρχικού αποθεματικού, $G(u, y) = G_T(u, y)$ ενώ η προσέγγιση των

Cramer-Lundberg παρουσιάζει κατά κύριο λόγο, κάποια απόκλιση από τις ακριβείς τιμές του $G(u, y)$. Ομοίως, και στην περίπτωση που το y είναι ίσο με 0,50.

Βλέπουμε από τον παρακάτω πίνακα, ότι για τις διάφορες τιμές των u, y η προσέγγιση του Tijms είναι πιο αποτελεσματική καθώς είναι ίση με την ακριβή τιμή του $G(u, y)$ ή έχει μικρότερη απόκλιση σε σχέση με την προσέγγιση του Cramer.

Έτσι λοιπόν, αφού εξετάσαμε την αποτελεσματικότητα των δύο προσεγγίσεων, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η προσέγγιση του Tijms δίνει καλύτερα αποτελέσματα από αυτή των Cramer-Lundberg.

$$\theta = 0,25$$

y	u	$G(u, y)$	$G_C(u, y)$	$G_T(u, y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,2332	0,2222	0,2306	0,7397
	0,25	0,1994	0,1953	0,1977	0,6603
	0,50	0,1618	0,1611	0,1614	0,5512
	0,75	0,1344	0,1344	0,1344	0,4618
	1,00	0,1123	0,1124	0,1124	0,3873
0,25	0,10	0,4406	0,4287	0,4368	0,7397
	0,25	0,3825	0,3779	0,3804	0,6603
	0,50	0,3134	0,3127	0,3131	0,5512
	0,75	0,2610	0,2611	0,2612	0,4618
	1,00	0,2183	0,2186	0,2186	0,3873
0,50	0,10	0,6062	0,5996	0,6037	0,7397
	0,25	0,5339	0,5316	0,5328	0,6603
	0,50	0,4415	0,4414	0,4416	0,5512
	0,75	0,3686	0,3689	0,3690	0,4618
	1,00	0,3085	0,3089	0,3089	0,3873

Πίνακας 4.5.9

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ένα ανώτατο όριο για το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία, δίνεται από την σχέση

$$\bar{G}_u(y) \leq \frac{1 + \theta}{\theta} \left\{ \frac{\psi(u + y)}{\psi(u)} - \psi(y) \right\}.$$

Στη συνέχεια λοιπόν, θα δοθούν οι πίνακες για τις ανώτατες τιμές της δεξιάς ουράς του ελλείμματος για τις διάφορες τιμές των u, y, θ . Ας σημειωθεί ότι θα συμβολίσουμε το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης με $j(u, y)$ δηλαδή

$$j(u, y) = \frac{1 + \theta}{\theta} \left\{ \frac{\psi(u + y)}{\psi(u)} - \psi(y) \right\}.$$

Ξεκινώντας από την περίπτωση $y = 0,10$ και $u = 0,10$ βλέπουμε ότι η ανώτατη τιμή που μπορεί να πάρει η δεξιά ουρά του $G_u(y)$ είναι ίση με $0,7422$, δηλαδή $\bar{G}_u(y) \leq 0,7422$. Όπως έχει υπολογιστεί προηγουμένως έχουμε ότι $\bar{G}_u(y) = 0,6858$. Επομένως διαπιστώνουμε ότι επαληθεύεται η σχέση (4.4.9). Το ίδιο συμβαίνει για τις υπόλοιπες τιμές του y αλλά και του αρχικού αποθεματικού u .

$\theta = 4$

y	u	$\bar{G}_u(y)$	$\psi(u + y)$	$\psi(u)$	$\psi(y)$	$j(u, y)$
0,10	0,10	0,6858	0,1069	0,1448	0,1448	0,7422
	0,25	0,7046	0,0697	0,0924	0,1448	0,7618
	0,50	0,7220	0,0356	0,0464	0,1448	0,7786
	0,75	0,7303	0,0186	0,0241	0,1448	0,7851
	1,00	0,7323	0,0098	0,0127	0,1448	0,7875
0,25	0,10	0,4054	0,0697	0,1448	0,0924	0,4865
	0,25	0,4275	0,0464	0,0924	0,0924	0,5121
	0,50	0,4483	0,0241	0,0464	0,0924	0,5340
	0,75	0,4565	0,0127	0,0241	0,0924	0,5425
	1,00	0,4646	0,0067	0,0127	0,0924	0,5456
0,50	0,10	0,1796	0,0356	0,1448	0,0464	0,2497
	0,25	0,1873	0,0241	0,0924	0,0464	0,2681
	0,50	0,2069	0,0127	0,0464	0,0464	0,2839
	0,75	0,2117	0,0067	0,0241	0,0464	0,2901
	1,00	0,2205	0,0035	0,0127	0,0464	0,2923

Πίνακας 4.5.10

Συνεχίζοντας με τους πίνακες (4.5.11) και (4.5.12) διαπιστώνουμε ότι για $\theta = 1$ και για $\theta = 0,25$ επαληθεύεται η σχέση (4.4.9).

$$\theta = 1$$

y	u	$\bar{G}_u(y)$	$\psi(u+y)$	$\psi(u)$	$\psi(y)$	$j(u,y)$
0,10	0,10	0,6848	0,3373	0,4083	0,4083	0,8355
	0,25	0,7005	0,2567	0,3075	0,4083	0,8530
	0,50	0,7120	0,1659	0,1972	0,4083	0,8658
	0,75	0,7156	0,1082	0,1283	0,4083	0,8700
	1,00	0,7176	0,0708	0,0839	0,4083	0,8714
0,25	0,10	0,4037	0,2567	0,4083	0,3075	0,6425
	0,25	0,4228	0,1972	0,3075	0,3075	0,6676
	0,50	0,4372	0,1283	0,1972	0,3075	0,6861
	0,75	0,4420	0,0839	0,1283	0,3075	0,6923
	1,00	0,4434	0,0549	0,0839	0,3075	0,6943
0,50	0,10	0,1788	0,1659	0,4083	0,1972	0,4183
	0,25	0,1913	0,1283	0,3075	0,1972	0,4401
	0,50	0,2004	0,0839	0,1972	0,1972	0,4561
	0,75	0,2035	0,0549	0,1283	0,1972	0,4615
	1,00	0,2051	0,0359	0,0839	0,1972	0,4632

Πίνακας 4.5.1

$$\theta = 0,25$$

y	u	$\bar{G}_u(y)$	$\psi(u+y)$	$\psi(u)$	$\psi(y)$	$j(u,y)$
0,10	0,10	0,6864	0,6853	0,7397	0,7397	0,9339
	0,25	0,6885	0,6138	0,6603	0,7397	0,9492
	0,50	0,7072	0,5134	0,5512	0,7397	0,9588
	0,75	0,7094	0,4304	0,4618	0,7397	0,9613
	1,00	0,7101	0,3610	0,3873	0,7397	0,9620
0,25	0,10	0,4071	0,6138	0,7397	0,6603	0,8474
	0,25	0,4229	0,5512	0,6603	0,6603	0,8721
	0,50	0,4327	0,4618	0,5512	0,6603	0,8875
	0,75	0,4353	0,3873	0,4618	0,6603	0,8916
	1,00	0,4361	0,3249	0,3873	0,6603	0,8928
0,50	0,10	0,1835	0,5134	0,7397	0,5512	0,7145
	0,25	0,1937	0,4618	0,6603	0,5512	0,7408
	0,50	0,2002	0,3873	0,5512	0,5512	0,7572
	0,75	0,2019	0,3249	0,4618	0,5512	0,7616
	1,00	0,2372	0,2726	0,3873	0,5512	0,7628

Πίνακας 4.5.12

4. 5. 3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΜΕΙΞΗ ΓΑΜΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Όπως στην προηγούμενη ενότητα έτσι και εδώ θα εφαρμόσουμε τους τύπους από Willmot & Lin (1998) στο παράδειγμα (4) από το άρθρο των Gerber et al (On the probability and severity of ruin) που αφορά στην περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μείξη δύο Γαμμα (2,β) κατανομών. Οι αναλυτικές τιμές των παραμέτρων δίνονται στο κεφάλαιο 3 έτσι στο σημείο αυτό θα υπενθυμίσουμε τις βασικές συναρτήσεις που θα χρησιμοποιηθούν στο πρόγραμμα Mathematica προκειμένου να δοθούν οι πίνακες τόσο με τις ακριβείς τιμές των $G(u, y)$ και $G_u(y)$ όσο και των προσεγγίσεών τους. Υπενθυμίζεται λοιπόν ότι

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής των αποζημιώσεων είναι

$$f(u) = 11.1959e^{-4.732u}u + 0.8039e^{-1.268u}u.$$

Η δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$\bar{F}(u) = e^{-4.732u}(-0.5 - 2.3660u) - e^{-1.268u}(-0.5 - 0.634u).$$

Η πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας είναι η εξής

$$f_e(u) = (-e^{-4.732u}(-0.5 - 2.3660u) - e^{-1.268u}(-0.5 - 0.634u)).$$

Ενώ η δεξιά ουρά της κατανομής ισορροπίας δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned}\bar{F}_e(u) = & (-1.6417 \cdot 10^{-17} + e^{-1.2679u}(0.7886 + 0.5u) \\ & + e^{-4.732u}(0.2113 + 0.5u) + 6.566 \cdot 10^{-17}u + 5.2535 \cdot 10^{-16}u^2).\end{aligned}$$

Στη συνέχεια για τις διάφορες τιμές των u, y και του περιθωρίου ασφαλείας θ θα δοθούν οι πίνακες για τις ακριβείς τιμές των $G(u, y)$ και $G_u(y)$.

$$\theta = 4$$

y	u	$G(u, y)$	$G_u(y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,0186	0,1010	0,1840
	0,25	0,0161	0,0993	0,1620
	0,50	0,0124	0,0940	0,1318
	0,75	0,0098	0,0904	0,1084
	1,00	0,0080	0,0891	0,0897
0,25	0,10	0,0427	0,2320	0,1840
	0,25	0,0367	0,2265	0,1620
	0,50	0,0285	0,2162	0,1318
	0,75	0,0228	0,2103	0,1084
	1,00	0,0188	0,2095	0,0897
0,50	0,10	0,0741	0,4027	0,1840
	0,25	0,0637	0,3932	0,1620
	0,50	0,0501	0,3801	0,1318
	0,75	0,0407	0,3754	0,1084
	1,00	0,0338	0,3768	0,0897

Πίνακας 4.5.13

$$\theta = 1$$

y	u	$G(u, y)$	$G_u(y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,0479	0,1009	0,4747
	0,25	0,0436	0,0994	0,4383
	0,50	0,0365	0,0947	0,3852
	0,75	0,0313	0,0918	0,3406
	1,00	0,0275	0,0910	0,3019
0,25	0,10	0,1103	0,2323	0,4747
	0,25	0,0996	0,2272	0,4383
	0,50	0,0838	0,2175	0,3852
	0,75	0,0725	0,2128	0,3406
	1,00	0,0641	0,2123	0,3019
0,50	0,10	0,1911	0,4025	0,4747
	0,25	0,1727	0,3940	0,4383
	0,50	0,1473	0,3823	0,3852
	0,75	0,1289	0,3784	0,3406
	1,00	0,1144	0,3789	0,3019

Πίνακας 4.5.14

$$\theta = 0,25$$

y	u	$G(u, y)$	$G_u(y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,0791	0,1009	0,7835
	0,25	0,0756	0,0996	0,7589
	0,50	0,0687	0,0956	0,7207
	0,75	0,0638	0,0930	0,6857
	1,00	0,0604	0,0924	0,6530
0,25	0,10	0,1821	0,2324	0,7835
	0,25	0,1726	0,2274	0,7589
	0,50	0,1578	0,2189	0,7207
	0,75	0,1475	0,2151	0,6857
	1,00	0,1401	0,2145	0,6530
0,50	0,10	0,3155	0,4026	0,7835
	0,25	0,2994	0,3945	0,7589
	0,50	0,2769	0,3842	0,7207
	0,75	0,2611	0,3807	0,6857
	1,00	0,2490	0,3813	0,6530

Πίνακας 4.5.15

Παρατηρώντας τους τρεις παραπάνω πίνακες όπου για τις διάφορες τιμές του περιθωρίου ασφαλείας θ και των u, y δίνονται οι ακριβεί τιμές των $G(u, y)$ και $G_u(y)$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για σταθερό y , καθώς το u αυξάνεται τόσο το $G(u, y)$ όσο και το $G_u(y)$ ελαττώνονται.

Στο σημείο αυτό θα παρατεθούν οι πίνακες με τις προσεγγίσεις των Cramer και Tijms σχετικά με το $G(u, y)$ και θα δοθούν ακολούθως συμπεράσματα σχετικά με το ποιά από αυτές είναι η πιο αποτελεσματική.

Στον πίνακα (4.5.16) δίνονται για $\theta = 4$ τόσο οι πραγματικές τιμές του $G(u, y)$ όσο και οι προσεγγίσεις των Cramer και Tijms. Στον πίνακα (4.5.17) απεικονίζονται οι ίδιες ποσότητες για $\theta = 1$ και στον πίνακα (4.5.18) για $\theta = 0,25$.

$$\theta = 4$$

y	u	$G(u, y)$	$G_C(u, y)$	$G_T(u, y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,0186	0,0195	0,0186	0,1840
	0,25	0,0161	0,0169	0,0161	0,1620
	0,50	0,0124	0,0130	0,0124	0,1318
	0,75	0,0098	0,0103	0,0099	0,1084
	1,00	0,0080	0,0084	0,0081	0,0897
0,25	0,10	0,0427	0,0447	0,0429	0,1840
	0,25	0,0367	0,0385	0,0369	0,1620
	0,50	0,0285	0,0298	0,0286	0,1318
	0,75	0,0228	0,0238	0,0229	0,1084
	1,00	0,0188	0,0195	0,0188	0,0897
0,50	0,10	0,0741	0,0771	0,0743	0,1840
	0,25	0,0637	0,0663	0,0640	0,1620
	0,50	0,0501	0,0521	0,0503	0,1318
	0,75	0,0407	0,0421	0,0408	0,1084
	1,00	0,0338	0,0347	0,0338	0,0897

Πίνακας 4.5.16

$$\theta = 1$$

y	u	$G(u, y)$	$G_C(u, y)$	$G_T(u, y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,0479	0,0496	0,0481	0,4747
	0,25	0,0436	0,0453	0,0440	0,4383
	0,50	0,0365	0,0380	0,0369	0,3852
	0,75	0,0313	0,0325	0,0316	0,3406
	1,00	0,0275	0,0284	0,0277	0,3019
0,25	0,10	0,1103	0,1142	0,1110	0,4747
	0,25	0,0996	0,1034	0,1006	0,4383
	0,50	0,0838	0,0871	0,0848	0,3852
	0,75	0,0725	0,0751	0,0732	0,3406
	1,00	0,0641	0,0660	0,0644	0,3019
0,50	0,10	0,1911	0,1978	0,1927	0,4747
	0,25	0,1727	0,1789	0,1744	0,4383
	0,50	0,1473	0,1524	0,1488	0,3852
	0,75	0,1289	0,1327	0,1297	0,3406
	1,00	0,1144	0,1171	0,1146	0,3019

Πίνακας 4.5.17

$$\theta = 0,25$$

y	u	$G(u, y)$	$G_C(u, y)$	$G_T(u, y)$	$\psi(u)$
0,10	0,10	0,0791	0,0804	0,0795	0,7835
	0,25	0,0756	0,0774	0,0766	0,7589
	0,50	0,0687	0,0707	0,0700	0,7207
	0,75	0,0638	0,0655	0,0649	0,6857
	1,00	0,0604	0,0617	0,0611	0,6530
0,25	0,10	0,1821	0,1857	0,1838	0,7835
	0,25	0,1726	0,1771	0,1753	0,7589
	0,50	0,1578	0,1624	0,1607	0,7207
	0,75	0,1475	0,1513	0,1498	0,6857
	1,00	0,1401	0,1430	0,1416	0,6530
0,50	0,10	0,3155	0,3230	0,3197	0,7835
	0,25	0,2994	0,3074	0,3043	0,7589
	0,50	0,2769	0,2842	0,2814	0,7207
	0,75	0,2611	0,2668	0,2643	0,6857
	1,00	0,2490	0,2530	0,2507	0,6530

Πίνακας 4.5.18

Μελετώντας τους τρεις παραπάνω πίνακες διαπιστώνουμε ότι η προσέγγιση του Tijms δίνει πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα από του Cramer καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις ταυτίζονται τα $G(u, y)$ και $G_T(u, y)$ ή η απόκλιση του Tijms από την ακριβή τιμή είναι μικρότερη από αυτή των Cramer-Lundberg.

Σημαντικό είναι να γνωρίζουμε ποιά είναι η ανώτερη τιμή που μπορεί να πάρει το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας. Έτσι λοιπόν, χρησιμοποιώντας την σχέση (4.4.9) θα δοθούν πίνακες με τις ανώτατες τιμές που μπορεί να πάρει το $G_u(y)$ για τις διαφορετικές τιμές των u, y και του περιθωρίου ασφαλείας.

Ας συμβολίσουμε το ανώτατο όριο της δεξιάς ουράς της κατανομής του ελλείμματος με $j(u, y)$.

$$\theta = 4$$

y	u	$\bar{G}_u(y)$	$\psi(u+y)$	$\psi(u)$	$\psi(y)$	$j(u,y)$
0,10	0,10	0,8990	0,1690	0,1840	0,1840	0,9177
	0,25	0,9007	0,1489	0,1620	0,1840	0,9193
	0,50	0,9060	0,1218	0,1318	0,1840	0,9247
	0,75	0,9096	0,1005	0,1084	0,1840	0,9280
	1,00	0,9101	0,0831	0,0897	0,1840	0,9288
0,25	0,10	0,7680	0,1489	0,1840	0,1620	0,8090
	0,25	0,7735	0,1318	0,1620	0,1620	0,8147
	0,50	0,7838	0,1084	0,1318	0,1620	0,8257
	0,75	0,7897	0,0897	0,1084	0,1620	0,8312
	1,00	0,7905	0,0742	0,0897	0,1620	0,8319
0,50	0,10	0,5973	0,1218	0,1840	0,1318	0,6637
	0,25	0,6068	0,1084	0,1620	0,1318	0,6720
	0,50	0,6199	0,0897	0,1318	0,1318	0,6856
	0,75	0,6246	0,0742	0,1084	0,1318	0,6907
	1,00	0,6232	0,0613	0,0897	0,1318	0,6898

Πίνακας 4.5.1

$$\theta = 1$$

y	u	$\bar{G}_u(y)$	$\psi(u+y)$	$\psi(u)$	$\psi(y)$	$j(u,y)$
0,10	0,10	0,8991	0,4501	0,4747	0,4747	0,9468
	0,25	0,9006	0,4159	0,4383	0,4747	0,9483
	0,50	0,9053	0,3665	0,3852	0,4747	0,9532
	0,75	0,9082	0,3245	0,3406	0,4747	0,9560
	1,00	0,9090	0,2877	0,3019	0,4747	0,9567
0,25	0,10	0,7677	0,4159	0,4747	0,4383	0,8756
	0,25	0,7728	0,3852	0,4383	0,4383	0,8811
	0,50	0,7825	0,3406	0,3852	0,4383	0,8913
	0,75	0,7872	0,3019	0,3406	0,4383	0,8962
	1,00	0,7877	0,2677	0,3019	0,4383	0,8969
0,50	0,10	0,5975	0,3665	0,4747	0,3852	0,7736
	0,25	0,6060	0,3406	0,4383	0,3852	0,7834
	0,50	0,6177	0,3019	0,3852	0,3852	0,7968
	0,75	0,6216	0,2677	0,3406	0,3852	0,8017
	1,00	0,6211	0,2372	0,3019	0,3852	0,8012

Πίνακας 4.5.20

$$\theta = 0,25$$

y	u	$\bar{G}_u(y)$	$\psi(u+y)$	$\psi(u)$	$\psi(y)$	$j(u,y)$
0,10	0,10	0,8991	0,7670	0,7835	0,7835	0,9769
	0,25	0,9004	0,7432	0,7589	0,7835	0,9782
	0,50	0,9044	0,7064	0,7207	0,7835	0,9827
	0,75	0,9070	0,6724	0,6857	0,7835	0,9851
	1,00	0,9076	0,6405	0,6530	0,7835	0,9857
0,25	0,10	0,7676	0,7432	0,7835	0,7589	0,9475
	0,25	0,7726	0,7207	0,7589	0,7589	0,9529
	0,50	0,7811	0,6857	0,7207	0,7589	0,9624
	0,75	0,7849	0,6530	0,6857	0,7589	0,9668
	1,00	0,7855	0,6220	0,6530	0,7589	0,9674
0,50	0,10	0,5974	0,7064	0,7835	0,7207	0,9039
	0,25	0,6055	0,6857	0,7589	0,7207	0,9139
	0,50	0,6158	0,6530	0,7207	0,7207	0,9271
	0,75	0,6193	0,6220	0,6857	0,7207	0,9318
	1,00	0,6187	0,5923	0,6530	0,7207	0,9315

Πίνακας 4.5

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ενδεικτικά στο σημείο αυτό θα δίνεται ο γενικός κώδικας που προέκυψε από το υπολογιστικό πρόγραμμα Mathematica για τους σημαντικότερους πίνακες που έχουν παρατεθεί σε προηγούμενα κεφάλαια

Πίνακας (3. 1)

```
l = 4;

tailF[x_] := Exp[-(l * x)]

tailF[x]
e-4x

Mx[r_] := 1 / (1 - r)
Mx[r]
 $\frac{4}{4 - r}$ 

tailF1[x_] := Integrate[tailF[t], {t, x, Infinity}] /
  Integrate[tailF[t], {t, 0, Infinity}]

tailF1[x]
e-4x

o = 0.3;

a = o / (1 + o)
0.230769

R = (o * l) / (1 + o)
0.923077

ψ[0] = 1 / (1 + o)
0.769231

Mz[r_] := a + ψ[0] * (R / (R - r))
Mz[r]
 $0.230769 + \frac{0.710059}{0.923077 - r}$ 

ψ[u_] := ψ[0] * Exp[-R * u]
ψ[u]
0.583164
```

Πίνακας (3.2)

```

θ = 0.2
0.2

l1 = 1; l2 = 3;
w1 = 1/2; w2 = 1/2;
f[x_] := w1 * l1 * Exp[-l1 * x] + w2 * l2 * Exp[-l2 * x]
f[x]

$$\frac{3 e^{-3x}}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$

mean[x] = Integrate[x * f[x], {x, 0, Infinity}]

$$\frac{2}{3}$$

Solve[1 + (1 + θ) * t * mean[x] = Mx[t], t]
Solve::ratnz: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer
was obtained by solving a corresponding exact system and numerizing the result. >>
{{t -> 0.}, {t -> 0.195752}, {t -> 2.55425}}

Mx[r_] := w1 * (l1 / (l1 - r)) + w2 * (l2 / (l2 - r))
Mx[r]

$$\frac{1}{2(1-r)} + \frac{3}{2(3-r)}$$

t1 = 0.1957;
t2 = 2.5542;

Set::write: Tag Plus in 0.1957 + 2.5542 is Protected. >>
c1 + c2 = 1 / (1 + θ)
Set::write: Tag Plus in c1 + c2 is Protected. >>
0.833333
RootApproximant[0.833333]

$$\frac{5}{6}$$

Syntax::sntxf: "θ/" cannot be followed by "[(1 + θ)^2]".
c1 * t1 + c2 * t2 = θ / (1 + θ) ^ 2 * mean[x]
Set::write: Tag Plus in 0.1957 c1 + 2.5542 c2 is Protected. >>

ψ[u_] := 0.8141 * Exp[-0.1957 * u] + 0.0192 * Exp[-2.5542 * u]
ψ[u]

$$0.0192 e^{-2.5542 u} - 0.8141 e^{-0.1957 u}$$

u = 1;
ψ[u_] := 0.8141 * Exp[-0.1957 * u] + 0.0192 * Exp[-2.5542 * u]
ψ[u]
0.670894

```


Πίνακας (3.5)

Για την προσέγγιση του Cramer

```
a = 3;  
b = 3;  
p = 0.2;  
θ = 4;  
u = 0.1;  
  
mesi = a / b
```

```
M[r_] = (3 / (3 - r)) ^ 3
```

```
M[r]
```

```
1
```

$$\frac{27}{(3-r)^3}$$

$$\frac{27}{(3-r)^3}$$

```
Solve[1 + (1 + θ) * mesi * R = M[R], R]
```

```
{R → 0},
```

$$\left\{ R \rightarrow \frac{44}{15} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(1553 - 135\sqrt{131})^{1/3}}{15 \times 2^{2/3}} + \frac{23(1 - i\sqrt{3})}{15(2(1553 - 135\sqrt{131}))^{1/3}} \right\},$$

```
Solve[1 + (1 + θ) * mesi * R = M[R], R]
```

```
{R → 0},
```

$$\left\{ R \rightarrow \frac{44}{15} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(1553 - 135\sqrt{131})^{1/3}}{15 \times 2^{2/3}} + \frac{23(1 - i\sqrt{3})}{15(2(1553 - 135\sqrt{131}))^{1/3}} \right\},$$

$$\left\{ R \rightarrow \frac{44}{15} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(1553 - 135\sqrt{131})^{1/3}}{15 \times 2^{2/3}} + \frac{23(1 + i\sqrt{3})}{15(2(1553 - 135\sqrt{131}))^{1/3}} \right\},$$

$$\left\{ R \rightarrow \frac{1}{15} \left(44 - \frac{23 \times 2^{2/3}}{(1553 - 135\sqrt{131})^{1/3}} - (2(1553 - 135\sqrt{131}))^{1/3} \right) \right\}$$

```
R = 1.542;
```

```

g1[x_] = (x^(a - 1)) * Exp[-x]
g1[x]

e^-x x^2
e^-x x^2

Gamma[x_] = Integrate[g1[t], {t, 0, Infinity}]
Gamma[x]

2
2

gamma[x_] = Integrate[g1[t], {t, 0, (b * x)}]
gamma[x]

2 - e^-3x (2 + 6 x + 9 x^2)
2 - e^-3x (2 + 6 x + 9 x^2)

F[x_] = (gamma[x]) / (Gamma[x])

```

```

F[x]
1/2 (2 - e^-3x (2 + 6 x + 9 x^2))
1/2 (2 - e^-3x (2 + 6 x + 9 x^2))

tailF[x_] = 1 - F[x]
tailF[x]

1 + 1/2 (-2 + e^-3x (2 + 6 x + 9 x^2))
1 + 1/2 (-2 + e^-3x (2 + 6 x + 9 x^2))

tailF1[x_] := (Integrate[tailF[t], {t, x, Infinity}]) /
(Integrate[tailF[t], {t, 0, Infinity}])
tailF1[x]

1/2 e^-3x (2 + 4 x + 3 x^2)

f1[x_] := (tailF[x]) / (mesi)

```

`f1[x]`

$$1 + \frac{1}{2} \left(-2 + e^{-3x} (2 + 6x + 9x^2) \right)$$

`b1[x_] := x * (Exp[R * x])`

`b1[x]`

$$e^{1.542x} x$$

`b2[x_] := b1[x] * f1[x]`

`b2[x]`

$$e^{1.542x} x \left(1 + \frac{1}{2} \left(-2 + e^{-3x} (2 + 6x + 9x^2) \right) \right)$$

`b3[z_] := Integrate[b2[z], {z, 0, Infinity}]`

`b3[z]`

8.38124

`b4 = p * R * b3[z]`

2.58477

`C = 0.8 / 2.58477`

Set::wrsym: Symbol C is Protected. >>

0.309505

`psi[u_] := 0.309505 * (Exp[-R * u])`

`psi[u]`

0.265277

Για την προσέγγιση του Tijms

```
a = 3;
b = 3;
u = 0.10;
p = 0.2;
R = 1.542;
c = 0.309358;

g1[x_] = (x^(a - 1)) * Exp[-x]
e^-x x^2

Γ[x_] = Integrate[g1[t], {t, 0, Infinity}]
2

γ[x_] = Integrate[g1[t], {t, 0, (b*x)}]
2 - e^-3x (2 + 6 x + 9 x^2)

F[x_] = (γ[x]) / (Γ[x])
1/2 (2 - e^-3x (2 + 6 x + 9 x^2))

tailF[x_] = 1 - F[x]
1 + 1/2 (-2 + e^-3x (2 + 6 x + 9 x^2))

tailF1[x_] := (Integrate[tailF[t], {t, x, Infinity}]) /
(Integrate[tailF[t], {t, 0, Infinity}])

meanL = Integrate[tailF1[x], {x, 0, Infinity}]
2/3

a1 = p - c
-0.109358

a2 = p * meanL
0.133333

a3 = 1 - p
0.8

a4 = a2 / a3
0.166667

a5 = c / R
0.200621
```

```
a6 = a4 - a5
```

```
-0.0339546
```

```
a7 = 1 / a6
```

```
-29.4511
```

```
m = a1 * a7
```

```
3.22071
```

```
b1[x_] := Exp[-m * x]
```

```
b1[x]
```

```
 $e^{-3.22071 x}$ 
```

```
b2[x_] := a1 * b1[x]
```

```
b2[x]
```

```
 $-0.109358 e^{-3.22071 x}$ 
```

```
Denominator[-0.109358  $e^{-3.22071 x}$ ]
```

```
 $e^{3.22071 x}$ 
```

```
 $\Psi[u] = 0.265277$ 
```

```
0.265277
```

```
 $\Psi\tau[u] := b2[u] + \Psi[u]$ 
```

```
 $\Psi\tau[u]$ 
```

```
0.186031
```

Για την προσέγγιση του Willmot

```

a = 3;
b = 3;
u = 0.10;
p = 0.2;
R = 1.542;
c = 0.309358;

g1[x_] = (x^(a - 1)) * Exp[-x]
e^-x x^2

Γ[x_] = Integrate[g1[t], {t, 0, Infinity}]
2

γ[x_] = Integrate[g1[t], {t, 0, (b*x)}]
2 - e^-3x (2 + 6x + 9x^2)

F[x_] = (γ[x]) / (Γ[x])
1/2 (2 - e^-3x (2 + 6x + 9x^2))

tailF[x_] = 1 - F[x]
1 + 1/2 (-2 + e^-3x (2 + 6x + 9x^2))

tailF1[x_] := (Integrate[tailF[t], {t, x, Infinity}]) /
(Integrate[tailF[t], {t, 0, Infinity}])

tailF1[x]
1/2 e^-3x (2 + 4x + 3x^2)

meanL = Integrate[tailF1[x], {x, 0, Infinity}]
2/3

f1[x_] := tailF[x] / 1
f1[x]
1 + 1/2 (-2 + e^-3x (2 + 6x + 9x^2))

k[x_] := (x^2) * f1[x]
k[x]
x^2 (1 + 1/2 (-2 + e^-3x (2 + 6x + 9x^2)))

```

```
meanL2 = Integrate[k[x], {x, 0, Infinity}]
```

```
 $\frac{20}{27}$ 
```

```
a1 = p - c  
-0.109358
```

```
a2 = p * meanL2  
0.148148
```

```
a3 = 1 - p  
0.8
```

```
a4 = p * meanL  
0.133333
```

```
a5 = (2 * c) / (R ^ 2)  
0.260209
```

```
a6 = a2 / a3  
0.185185
```

```
a7 = a4 / a3  
0.166667
```

```
a8 = a7 ^ 2  
0.0277778
```

```
a9 = c / R  
0.200621
```

```
a10 = 2 * a8  
0.0555556
```

```
b1 = a6 + a10 - a5  
-0.0194684
```

```

b2 = a1 * b1
0.00212903

b3 = a7 - a9
-0.0339546

b4 = b3 ^ 2
0.00115292

c1 = b2 / b4
1.84665

c2 = c1 - 1
0.846648

f = 1 / c2
1.18113

m1 = f * a1 * (1 / (a7 - a9))
3.80407

g2[x_] := (x ^ (f - 1)) * (Exp[-x])
g2[x]
e-x x0.181128

If[x_] := Integrate[g2[t], {t, 0, Infinity}]
If[x]
0.923401

d1[t_] := (m1 * t) ^ (f - 1)
d1[t]
1.27379 t0.181128

d2[t_] := m1 * d1[t]
d2[t]
4.84561 t0.181128

d3[t_] := Exp[-m1 * t]
d3[t]

```


$e^{-3.80407t}$

`d4[t_] := d2[t] * d3[t]`

`d4[t]`

$4.84561 e^{-3.80407t} t^{0.181128}$

`d5[t_] := d4[t] / Tf[t]`

`d5[t]`

$5.24757 e^{-3.80407t} t^{0.181128}$

`tailH[u_] := Integrate[d5[t], {t, u, Infinity}]`

`tailH[u]`

0.760376

`psi[u] = 0.265277;`

`psi2[u_] := (a1 * tailH[u]) + psi[u]`

`psi2[u]`

0.182124

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Μπούτσικας Μ. (2003 – 8). *Σημειώσεις μαθήματος Θεωρία Αξιοπιστίας*, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Πολίτης Κ. (2012). *Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου*, Εκδόσεις Σταμούλη.

Χρυσ αφίνου Ο. (2011). *Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών.

Ξένα

Bowers N., Gerber H., Hickman J., Jones D., Nesbitt C., (1986). “ *Actuarial Mathematics* ”, The Society of Actuaries 399 – 409.

Choudhury G., Lucantoni D. Whitt W., (1996). “ *Squeezing the most out of ATM* ”, IEEE Trans Commun. 4, 203 – 217.

Dickson, D.C.M. (1992). “ *On the distribution of the surplus prior to ruin* ”, Insurance: Mathematics and Economics 11, 191 – 207.

Dufresne F., Gerber H., (1988). “ *The probability and Severity of Ruin for Combinations of Exponential Claim amount Distributions and their Translations* ”, Insurance: Mathematics and Economics 7, 75 – 80.

Gerber H., Goovaerts M.J, Kaas R. (1987). “ *On the probability and severity of ruin* ”, Astin Bulletin 17, 151 – 163.

Gerber H., Shiu E. (1998). “ *On the time value of ruin* ”, Actuarial Research Clearing House 1, 145 – 199.

Grandell J. and Segerdahl, C.-O. (1971). “ *A Comparison of Some Approximations of Ruin Probabilities* ”, Skand. AktuarTidskr 143 – 158.

Lin X. (1996). “ *Tail of compound distributions and excess time* ”, J. Appl. Probab. 33 184 – 195

Willmot G.E. (1998). “*On a class of approximations for ruin and waiting time probabilities*”, Operations Research Letters 22, 27 – 32.

Willmot G.E. and Lin X.S. (1998). “*Exact and approximate properties of the distribution of surplus before and after ruin*”, Insurance: Mathematics and Economics 23, 91 – 110.

Willmot G.E. and Lin, X. (1999) “*Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory*”, Insurance: Mathematics and Economics. 25, 63-84.

Willmot G.E. and Lin X.S. (2000). “*The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin*”, Insurance: Mathematics and Economics 27, 19 – 44.

Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Πανεπιστήμιο Πειραιώς