ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

ΑΣΙΑΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ:

Χαρακτηριστικα, Τιμολογηση, Εφαρμογες

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Α. ΑΝΤΖΟΥΛΑΤΟΣ
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Παπαδοπουλος Ιωαννης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

ΑΣΙΑΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ:

Χαρακτηριστικα, Τιμολογηση, Εφαρμογες

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: [illegible]

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Παπαδοπουλος Ιωαννης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

ΑΣΙΑΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ:

Χαρακτηριστικα, Τιμολογηση, Εφαρμογες

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΝΑΠΛ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Α. ΑΝΤΖΟΥΛΑΤΟΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Παπαδοπουλος Ιωαννης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΔΜΤ = Δικαιώματα Μέσης Τιμής
AROs = Average Rate Options
ΜΔΕ = Μερική Διαφορική Εξίσωση
ΣΔΕ = Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση
RNGs = Γεννήτριες Τυχαίων Αριθμών
G-Y = Geman & Yor
T -W = Turnbull & Wakeman
M - P = Milevsky & Posner

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΣΧΕΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι να παρουσιάσει και ν' αναλύσει μια ιδιαίτερη μορφή παραγώγων και συγκεκριμένα δικαιωμάτων, τα οποία κατατάσσονται στην κατηγορία των *εξωτικών* δικαιωμάτων (*Exotics*) και αποκαλούνται *"Ασιατικά Δικαιώματα"* (*Asian Options*).

Το γεγονός ότι τα *Εξωτικά* παράγωγα αποτελούν ένα νέο σχετικά χρηματοοικονομικό εργαλείο του οποίου όμως η χρήση είναι αρκετά διαδεδομένη στις αγορές, αποτέλεσε το κύριο κίνητρο της όλης μας προσπάθειας. Η βιβλιογραφία δεν μπορούμε να πούμε ότι έχει εξαντλήσει την ανάλυση του όλου θέματος των εξωτικών παραγώγων, τουλάχιστον όχι σε εκτενές επίπεδο και αυτό οφείλεται στο δυναμισμό, που αυτά επιδεικνύουν, καθώς το μέγεθός τους συνεχώς αυξάνεται. Τα *Εξωτικά* δικαιώματα μπορούμε να πούμε ότι υπακούουν στις εκάστοτε ανάγκες της αγοράς, προσαρμόζονται σ' αυτές και δημιουργούν νέα καινοτόμα προϊόντα που αυξάνουν τον κατάλογό τους. Αποτελούν λοιπόν ένα ζωντανό κομμάτι των χρηματοοικονομικών. Αντίθετα, η αρθρογραφία και το ερευνητικό πεδίο, που κινούνται γύρο από αυτό το θέμα, είναι και μεγάλη και ενδιαφέρουσα. Η σύγχρονη επιστήμη προσπαθεί να επιλύσει τα προβλήματα που δημιουργούνται στην αγορά και να δώσει τις λύσεις εκείνες που θα την βοηθήσουν στην χρήση και ανάπτυξη των προϊόντων αυτών. Για το λόγο αυτό παρατηρούμε τις περισσότερες ερευνητικές προσπάθειες αλλά και άρθρα να επικεντρώνονται σε ορισμένα μόνο θέματα-προβλήματα όπως η τιμολόγηση κάποιας ιδιαίτερης κατηγορίας δικαιωμάτων. Το δικό μας λοιπόν κίνητρο ήταν να προσπαθήσουμε, να συγκεντρώσουμε όλο αυτό το αξιόλογο υλικό και να το δούμε από μια τόσο περιγραφική όσο και συγκριτική οπτική γωνία. Όμως, όπως έχουμε αναφέρει το μέγεθος των εξωτικών δικαιωμάτων είναι τέτοιο, που καθιστά *"απαγορευτική"* την προσέγγιση όλου αυτού του γνωστικού πεδίου. Επιλέξαμε λοιπόν μια κατηγορία αυτών, τα *Ασιατικά* δικαιώματα, την οποία και παρουσιάζουμε, χωρίς όμως η προτίμησή μας αυτή να σημαίνει ότι θεωρούμε τις υπόλοιπες κατηγορίες λιγότερο σημαντικές ή ενδιαφέρουσες.

Αρχικά αναφερόμαστε στην ειδικότερη κατηγορία των εξωτικών δικαιωμάτων (*Exotic Options*). Κάνουμε μια μικρή περιγραφή των χαρακτηριστικών των ιδιαίτερων αυτών δικαιωμάτων που την απαρτίζουν και αναφερόμαστε στους κινδύνους που η αγορά αυτή επιφέρει στους επενδυτές. Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στην κύρια κατηγορία των *Εξωτικών Δικαιωμάτων* που μας ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία, τα *Ασιατικά Δικαιώματα*, καθώς και την κατηγοριοποίηση που τα δικαιώματα αυτά επιδέχονται. Συγκρίνοντάς τα με τα απλά δικαιώματα (plain vanilla options), βλέπουμε την ιδική μορφή και τα χαρακτηριστικά, που έχουν αυτά τα δικαιώματα. Η συνέχεια αποτελεί και το πιο ενδιαφέρον, ίσως, αλλά και το πιο δύσκολα τμήμα της εργασίας αυτής εφόσον αναφέρεται στα τρόπο τιμολόγησης των δικαιωμάτων αυτών. Περιγράφοντας, ως βοηθητικά στον αναγνώστη εργαλεία, το λήμμα του Itô, καθώς και η ανάλυση των Black-Scholes-Miller, δίνουμε συγκριτικά τον τρόπο με τον οποίο τα *Ασιατικά* αυτά δικαιώματα τιμολογούνται. Καταλήγοντας κάνουμε μια συγκριτική παρουσίαση των μεθόδων αποτίμησης έχοντας ως γενικό κριτήριο την καλύτερη δυνατή εφαρμογή τους.

Στο τελευταίο τμήμα αναφερόμαστε στις εφαρμογές, και στον τρόπο χρήσης των *Ασιατικών δικαιωμάτων*. Πως αυτά τα δικαιώματα λειτουργούν στην πράξη, σε πιες κατηγορίες συναλλαγών βρίσκουν καλύτερη εφαρμογή και προσφέρουν περισσότερα πλεονεκτήματα από τα υπόλοιπα είδη παραγώγων, εξωτικών ή απλών.

ΕΞΩΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ (EXOTIC OPTIONS)

Η προσαρμοστικότητα και η ευκαμψία των έξω-χρηματιστηριακών παραγώγων επιτρέπει τις συναλλαγές ασυνήθιστων συμβολαίων, και συμβάλει στη δημιουργία καινοτόμων προϊόντων, που καλύπτουν οποιαδήποτε ανάγκη των επενδυτών. Στα απλά-πρότυπα δικαιώματα (plain vanilla options), ο αγοραστής τους, πληρώνει ένα τίμημα (premium) στην αρχή και ως αντάλλαγμα λαμβάνει το δικαίωμα είτε να αγοράσει (αν πρόκειται για δικαίωμα αγοράς) ή να πουλήσει (αν πρόκειται για δικαίωμα πώλησης) την υποκείμενη αξία σε μια προκαθορισμένη τιμή. Το δικαίωμα αυτό, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μπορεί είτε να εξασκηθεί μόνο στη λήξη αν πρόκειται για Ευρωπαϊκού τύπου, είτε να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι τη λήξη του αν πρόκειται για Αμερικάνικου τύπου. Όταν εξασκηθεί η απόδοσή του ισούται με τη διαφορά ανάμεσα στην τιμή εξάσκησης και στην τιμή της υποκείμενης αξίας (την εσωτερική του αξία). Τα δικαιώματα που έχουν μια δομή όπως αυτή που αναφέρθηκε παραπάνω είναι γνωστά ως "plain vanilla" δικαιώματα.

Τα *Εξωτικά* δικαιώματα έχουν το χαρακτηριστικό ότι μπορούν να έχουν ένα ή περισσότερα από αυτά τα στοιχεία διαφοροποιημένο. Έτσι:

- Τα δικαιώματα μπορούν να εξασκηθούν σε αρκετά προκαθορισμένα χρονικά σημεία ή χρονικές περιόδους (Bermuda options ή Mid-Atlantic, Semi-American, Quasi-American options). Αποτελούν κατά κάποιο τρόπο τη μέση λύση ανάμεσα στα Ευρωπαϊκού και Αμερικάνικου τύπου δικαιώματα και για το λόγο αυτό το ασφάλιστρό τους θα βρίσκεται ανάμεσα στα δύο ανάλογα με το πότε θα εξασκηθεί.
- Το τίμημα μπορεί να καταβληθεί στη λήξη του δικαιώματος και όχι στην έναρξη (break forward, Boston options)
- Τα δικαιώματα μπορούν να αρχίσουν με κάποια καθυστέρηση (forward start options)
- Η υποκείμενη αξία μπορεί να είναι κάποιο άλλο δικαίωμα (compound option)
- Η υποκείμενη αξία μπορεί να είναι κάποιο άλλο παράγωγο, για παράδειγμα κάποιο συμβόλαιο ανταλλαγής (swaption)

- Ο κάτοχος του δικαιώματος μπορεί να διαλέξει, σε κάποια χρονική στιγμή, αν το δικαίωμά του είναι δικαίωμα αγοράς ή πώλησης (chooser options)

- Τα δικαιώματα φραγμού (Barrier options) ακυρώνονται (Knock-out) ή ενεργοποιούνται (Knock-in) όταν η τιμή περάσει κάποιο συγκεκριμένο όριο

- Τα Balloon options αποτελούν δικαιώματα των οποίων το μέγεθος αυξάνεται κατά πολύ όταν κάποιο όριο ξεπεραστεί. Αποτελούν δικαιώματα αγοράς ή πώλησης των οποίων το ποσό αναφοράς αυξάνεται κατά ένα προκαθορισμένο τρόπο αν η τιμή spot ξεπεράσει κάποιο προκαθορισμένο όριο κατά τη ζωή του δικαιώματος.

- Τα δυαδικά δικαιώματα (Binary ή digital options) πληρώνουν ένα σταθερό ποσό (μετρητά ή τίποτα) ή την αξία ενός ενεργητικού (το ενεργητικό ή τίποτα). Η κατανομή του αποτελέσματος είναι μη συνεχής και το δικαίωμα πληρώνει ένας σταθερό ποσό ανεξάρτητα από το πόσο μέσα στα λεφτά του θα λήξει το δικαίωμα. Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες αυτών των δικαιωμάτων : (1) τα One-Touch των οποίων το αποτέλεσμα εξαρτάται από το αν κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος η τιμή ξεπεράσει κάποιο προκαθορισμένο όριο και (2) τα At-Expiry (End-Touch), τα οποία διαφέρουν κατά την έννοια ότι το όριο αυτό μπορεί να διαπεραστεί ή όχι μόνο στη λήξη.

- Το αποτέλεσμα μπορεί να εξαρτάται από τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή την οποία μπορεί να έχει πάρει η υποκείμενη αξία (look back options) ή από τη μέση τιμή της τιμής της υποκείμενης αξίας κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος (Asian options)

- Κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος, ο κάτοχός του μπορεί να επιλέξει μια συγκεκριμένη μέρα, και στη λήξη του μπορεί να λάβει το μεγαλύτερο από την εσωτερική αξία του δικαιώματος την ημέρα αυτή και την αντίστοιχη στην ημερομηνία λήξης του (shout option)

- Το αποτέλεσμα μπορεί να εξαρτάται από την τιμή πολλών υποκείμενων αξιών (rainbow, basket, exchange options)

- Το αποτέλεσμα του δικαιώματος μπορεί να μην είναι γραμμική συνάρτηση της τιμή της υποκείμενης αξίας (power option)
- Το αποτέλεσμα του δικαιώματος μπορεί να είναι εκφρασμένο σε διαφορετικό νόμισμα απ' ότι η τιμή της υποκείμενης αξίας (quonto)
- Τα Corridor options αποτελούν δικαιώματα των οποίων το αποτέλεσμα καθορίζεται από τον αριθμό των ημερών κατά τη διάρκεια των οποίων η τιμή της spot αγοράς παραμένει μέσα σε κάποια προκαθορισμένη ζώνη.
- Πολλές άλλες παραλλαγές των δικαιωμάτων είτε συνδυάζουν ένα ή περισσότερα από αυτά τα χαρακτηριστικά ή αναφέρονται σε ένα χαρτοφυλάκιο από δικαιώματα[1].

Ο κατάλογος όμως των εξωτικών παραγώγων είναι πολύ μεγάλος και συνεχώς νέα είδη εμφανίζονται στην αγορά για να τον εμπλουτίσουν. Τα προϊόντα που αναφέραμε παραπάνω αποτελούν μόνο ενδεικτικά παραδείγματα του μεγέθους αλλά κυρίως της μορφής και του τρόπου λειτουργίας αυτών των ιδιαίτερων εργαλείων.

Η πληθώρα των εξωτικών δικαιωμάτων μπορεί να ταξινομηθεί σύμφωνα με τα παρακάτω ευδιάκριτα χαρακτηρίστηκα:

- Τη δομή του αποτελέσματος
- Την αυστηρότητα της ιδιομορφίας
- Ο βαθμός της μόχλευσης
- Ο βαθμός της εξάρτησης από κάποιο μονοπάτι που ακολουθεί η τιμή της υποκείμενης αξίας
- Η ποικιλομορφία των διαφόρων στοιχείων
- Η επιλογή του χρόνου εξάσκησης ή επιλογής
- Τα είδη των ενσωματωμένων προϊόντων στη δομή τους

Στον παρακάτω πίνακα κατατάσσουμε τα *Εξωτικά* παράγωγα με βάση τα χαρακτηριστικά που αναφέραμε παραπάνω.

[1] Περισσότερα για τις κατηγορίες των εξωτικών παραγώγων, καθώς και για τις φόρμουλες τιμολόγησης του βλέπε "Interactive Derivatives Handbook" στην διαδικτυακή διεύθυνση: www.vbfi.com

"Κατηγοριοποίηση των Εξωτικών Παραγώγων"

- Path-Dependent
  - Extremum-Dependent
    - Barrier
      - Partial
      - Outside
      - Multiple
      - Curvilinear
    - Lookback
      - Partial
      - Modified
    - Ladder
      - Modified
      - Step-Lock
    - Ratchet
    - Shout
      - Simple
      - Modified
  - Average
    - Average Rate
    - Average strike
    - Inverse Average rate
    - Partial Average
    - Flexible Average
    - Geometric
  - Capped Options
  - Caps and Floors
- Singular Payoffs
  - Contingent Premium
  - Digitals
    - Cash - or - Nothing
    - Asset - or -Nothing

        - Correlation Digitals
    - Digital Barriers
- Time-Dependent or Preference
    - American
    - Quasi-American
    - Chooser
        - Simple
        - Complex
    - Forward Start
    - Ratchets
- Multivariety
    - Basket
    - Rainbow
        - First-Order Correlation Products
            - Best/Worst of n Assets or Cash
            - Min or Max of n Assets
            - Portfolio Options
            - Multi-Strike
            - Pyramid
            - Madonna
            - Spread
            - Exchange
            - Generalized Rainbow
        - Second-Order Correlation Products
            - FX-Linked Options
                - Cross-Currency Options
                - Quantos
                    - Fixed
                    - Flexible
                - Compos
                    - Type A
                    - Type B
- Nested or Compounded
    - Chooser
        - Simple or Complex
    - Compound

		Simple or Complex
	Caption	
	Floortion	
Leveraged		
	Power	
	Curvilinear	
	Inverse Floaters	
Embeddos		
	Implicity Embedded	
		Delevered Floater
		Dual-Index Floater
		Levered Inverse Floater
		Hi-Low Floater Reverse
		Principal FX-Linked Bond
		Stepped Cap/Floor Floater
		Index Principal Swap
		Miscellaneous
	Explicity Embedded	
		Range Floater
		Ranfe Rover
		Ratchet Floater

Στο Παράρτημα Α παραθέτουμε μια συνοπτική επισκόπηση των εξωτικών δικαιωμάτων κατηγοριοποιώντας τα ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης του αποτελέσματός τους (payoff function)

Πριν το 1973 η αγορά των δικαιωμάτων ήταν αποκλειστικά έξω-χρηματιστηριακή. Ήταν απλά θέμα χρόνου να δημιουργηθεί η αγορά των εξωτικών παραγώγων, ως αποτέλεσμα του κορεσμού που επήλθε στην αγορά των απλών δικαιωμάτων, στα τέλη του 1980. Έτσι, ο μόνος δρόμος για να ξεφύγει η αγορά από τον περιορισμό των απλών δικαιωμάτων ήταν να γυρίσει πάλι στον έξω-χρηματιστηριακό χώρο. Οι επενδυτές άρχισαν ολοένα και πιο πολύ να ζητούν περισσότερο εξειδικευμένα προϊόντα, που να προσαρμόζονται στις ιδιαίτερες προτιμήσεις και ανάγκες τους. Όσο περισσότερο αυξανόταν η ανάγκη για εξειδικευμένα προϊόντα, τόσο πιο πολύ αυξανόταν και η αγορά των εξωτικών παραγώγων. Αρχικά το αποτέλεσμα των εξωτικών αυτών δικαιωμάτων μπορούσε να αναπαραχθεί από απλό γραμμικό συνδυασμό των αποτελεσμάτων των απλών παραγώγων. Όσο όμως οι ανάγκες για περισσότερο εξειδικευμένα προϊόντα αυξάνονταν τόσο πιο πολύπλοκα γινόντουσαν και τα *Εξωτικά* παράγωγα (πολλές φορές η γραμμική αναπαραγωγή τους γινόταν ακριβότερη από τα ίδια τα παράγωγα) μέχρι που τελικά δημιουργήθηκαν νέοι τύποι παραγώγων. Συνοψίζοντας τους λόγους, που οδήγησαν σ' αυτή τη ραγδαία αύξηση της αγοράς των εξωτικών παραγώγων, μπορούμε ν' αναφέρουμε[2]:

- Η αυξημένη απαίτηση των επιχειρήσεων για περισσότερο πολύπλοκά και εξειδικευμένα προϊόντα, που ν' ανταποκρίνονται στις υψηλές τους απαιτήσεις.
- Το γεγονός ότι μερικές φορές είναι φθηνότερο για την εταιρεία ν' αγοράσει το εξωτικό δικαίωμα παρά να το δημιουργήσει με τη χρήση των απλών παραγώγων.
- Η μεγάλη ευελιξία που προσφέρουν τα *Εξωτικά* παράγωγα, δίνοντας τη δυνατότητα να προσαρμοστούν ή να δημιουργήσουν νέα είδη, έτσι ώστε να ικανοποιήσουν κάθε επιθυμία των επενδυτών.
- Το γεγονός ότι η αγορά άρχισε να κατανοεί τη χρήση και τα οφέλη αυτών των παραγώγων.
- Ο αυξημένος ανταγωνισμός ανάμεσα στους "δημιουργούς" αυτών των εργαλείων, που μερικές μάλιστα φορές είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία προϊόντων που ήταν περισσότερο ένα πυροτέχνημα για να καταπλήξουν την αγορά, παρά να ικανοποιήσουν και να λύσουν κάποιο πρόβλημα.
- Η δυνατότητα που παρέχουν ορισμένα *Εξωτικά* δικαιώματα να έχουν αποδώσεις μεγαλύτερες από τις αποδώσεις που προσφέρει η αγορά. Στα δικαιώματα αυτά ο αγοραστής τους θα πρέπει να πάρει κάποια θέση ως προς το που θα κινηθεί η αγορά και αν οι προσδοκίες του επαληθευτούν, τότε τα οφέλη θα είναι πολύ μεγαλύτερα από άλλες θέσεις που θα μπορούσε να είχε πάρει σε άλλα προϊόντα.

[2] Israel Nelken "THE HANDBOOK OF EXOTIC OPTIONS - Instruments, Analysis, and Applications" IRWIN 1996

- Ο *"τσαρλατανισμός"* και η *εγωπάθεια* των όσων χρησιμοποιούν αυτά τα εργαλεία, που μερικές φορές έχουν την εντύπωση ότι κατανοούν απόλυτα τις ανάγκες της εταιρείας τους και ξεκαθαρίζουν απόλυτα το είδος του ρίσκου που αντιμετωπίζουν, χωρίς αυτό να συμβαίνει στην πραγματικότητα.

Παρά το γεγονός ότι τα *Εξωτικά δικαιώματα* χαρακτηρίζονται από μια σχετικά μακρόχρονη πορεία στο χρηματοοικονομικό χώρο, ο όρος *Εξωτικά* είναι σχετικά πρόσφατος. Όταν τα *barrier options* πρωτοεμφανίστηκαν στην αγορά, την περίοδο του 1960, είχαν χρησιμοποιηθεί όροι όπως *"boutique options"* ή *"designer options*[3]*"* προκειμένου να τα ορίσουν. Ο όρος *"exotic"* μπορεί να αποδοθεί στον Mark Rubinstein ο οποίος τον πρωτοχρησιμοποίησε τιτλοφορώντας μια μονογραφία του το Νοέμβριο του 1990 ως *"Exotic Options"*. Το έργο όμως αυτό του Rubinstein αποτελούσε και μια άλλη καινοτομία για το χρηματοοικονομικό χώρο εφόσον ήταν η πρώτη συλλογή άρθρων που περιέγραφε τον τρόπο τιμολόγησης, σε απλή μορφή βασισμένη στα πρότυπα των Black and Scholes, αυτών των *"designer options"*. Το έργο αυτό, παρά το γεγονός ότι δεν ήταν πλήρες και οι τρόποι τιμολόγησης που περιέγραφε δεν εφαρμόστηκαν από την αγορά, λόγω της γενικότητάς τους και των περιοριστικών συνθηκών που όριζε το πλαίσιο των Black and Scholes, αποτέλεσε ένα σημαντικό βήμα και τη βάση για να γραφτούν, σε ακαδημαϊκό αρχικά επίπεδο αλλά και σε επιχειρηματικό στη συνέχεια, πολλά δοκίμια αλλά και έρευνες.

Σήμερα, παρά το γεγονός ότι έχουν γίνει πολλά τόσο προς την κατεύθυνση της εύρεσης εφαρμοσμένου τρόπου τιμολόγησης, όσο και τρόπου χρήσης αυτών των δικαιωμάτων για την επίλυση των διαφόρων προβλημάτων των επιχειρήσεων, και παρά το γεγονός ότι η αγορά του συγκεκριμένου αυτού τύπου παραγώγων έχει αποκτήσει τόσο βάθος όσο και έκταση, ακούγονται πολλές φωνές ανησυχίας. Πολλοί είναι αυτοί που προειδοποιούν για την επικινδυνότητα αυτών των προϊόντων και υποστηρίζουν ότι αυξάνουν το ρίσκο ολόκληρου του χρηματοπιστωτικού συστήματος. Όχι και άδικα. Τα παραδείγματα πολλών τραπεζικών ιδρυμάτων που έχασαν μεγάλο μέρος των κεφαλαίων τους ποντάροντας σ' αυτή την αγορά είναι πολλά. Γνωστή είναι η περίπτωση της Βρετανικής τράπεζας Barings η οποία τον Φεβρουάριο του 1995 χρεοκόπησε. Ο λόγος;

"η χωρίς άδεια συναλλαγή ενός απατεώνα trader του Nick Leeson, του οποίου οι διευθυντές δεν καταλάβαιναν τι έκανε"[4].

Πολλοί ήταν επίσης αυτοί που είπαν ότι η χρεοκοπία της Barings είχε γίνει μάθημα στην αγορά και ότι πλέον κάτι έχει αλλάξει. Ένα χρόνο αργότερα από την Barings η Daiwa Bank ανακοίνωσε ότι σημείωσε ζημιές της τάξεως του 1 δις δολαρίων και λίγους μήνες μετά, μια από τις μεγαλύτερες επενδυτικές εταιρείες, η Sumitomo Corporation ανακοίνωσε ότι έχασε 1.7 δις δολάρια από παρόμοιες συναλλαγές. Τον Αύγουστο του 1998 η Long Term Capital Management (LTCM) παραλίγο να καταρρεύσει ύστερα από τέτοιου είδους συναλλαγές. Και τα παραδείγματα δεν τελειώνουν εδώ, παρά το γεγονός ότι είναι αρκετά δύσκολο να βγουν στην επιφάνεια τέτοια προβλήματα, εφόσον πλήττεται η εμπιστοσύνη των καταθετών, το σημαντικότερο στοιχείο για την ύπαρξη ενός τραπεζικού ιδρύματος και κατά συνέπεια ολόκληρου του χρηματοπιστωτικού συστήματος.

Το πρόβλημα όμως δεν βρίσκεται στα *Εξωτικά* παράγωγα, αλλά στον τρόπο που αυτά αντιμετωπίζονται από αυτούς που τα χρησιμοποιούν. Τα παράγωγα αυτά αποτελούν γέννημα του ίδιου του χρηματοπιστωτικού συστήματος και δεν μπορούν, ούτε να απεμποληθούν από αυτό, ούτε να περιοριστούν. Αυτό που μπορεί να γίνει είναι να οργανωθεί καλύτερα η αγορά, έτσι ώστε να αντέχει τα σοκ, που σημειώνονται στο σύστημά της με τη βοήθεια τόσο του ιδιωτικού όσο και του δημόσιου τομέα. Η καλύτερη κατανόηση του τρόπου λειτουργίας και των προβλημάτων, που τα *Εξωτικά* παράγωγα μπορούν να επιφέρουν στην ορθή λειτουργία της αγοράς, αποτελεί την αναγκαία αλλά και ικανή συνθήκη προκειμένου να αποφθεχθούν μελλοντικά τέτοια προβλήματα.

[3] Israel Nelken "THE HANDBOOK OF EXOTIC OPTIONS - Instruments, Analysis, and Applications" IRWIN 1996

[4] Ritchard Thomson "APOCALYPSE ROULETTE - THE LETHAL WORLD OF DERIVATIVES" 1998

ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (AVERAGE RATE OPTIONS - AROs)

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΙΔΗ

Από τα μέσα του 1980 τα δικαιώματα μέσης τιμής ήταν από τα πιο δημοφιλή *Εξωτικά* παράγωγα τα οποία διαπραγματεύονταν στις έξω - χρηματιστηριακές αγορές. Είδη από το 1970 τα δικαιώματα μέσης τιμής αποτελούσαν ένα κομμάτι μιας ιδιαίτερης κατηγορίας ομολόγων, αυτών που ήταν συνδεδεμένα με αγαθά. Ένα από τα πρώτα τέτοια ομόλογα ήταν το Μεξικάνικο Petrobond το οποίο εμφανίστηκε το 1977. Μερικές φορές τα δικαιώματα μέσης τιμής αποκαλούνται και *Ασιατικά* Δικαιώματα (Asian Options) και αυτό γιατί δημιουργήθηκαν πρώτη φορά στην Ιαπωνία από την Bankers Trust. Η Bankers Trust ήταν το πρώτο χρηματοπιστωτικό ίδρυμα που πρόσφερε Ασιατικού τύπου παράγωγα υπό τη μορφή δικαιωμάτων από τα γραφεία της στο Τόκιο[5]. Τα δικαιώματα αυτά ανήκουν στην ευρύτερη κατηγορία των path depended options[6], και αυτό γιατί το τελικό αποτέλεσμα εξαρτάται από την *"ιστορία"* της τιμής της υποκείμενης αξίας. Η κύρια διαφορά ανάμεσα στα δικαιώματα μέσης τιμής και στα συμβατικά δικαιώματα είναι ότι η αξία στη λήξη αυτών των δικαιωμάτων εξαρτάται από την μέση τιμή της υποκείμενης αξίας κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος, δηλαδή η απόδοση των δικαιωμάτων αυτών εξαρτάται από την ιστορία του τυχαίου περιπάτου (random walk) τον οποίο ακολουθεί η υποκείμενη αξία, κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος. Τα δικαιώματα μέσης τιμής συνήθως κοστίζουν σημαντικά λιγότερο από τα εφάμιλλα δικαιώματα και αυτό γιατί η μέση τιμή έχει λιγότερη διασπορά από τις ημερήσιες τιμές.

Τα ΔΜΤ μπορεί να έχουν είτε σταθερή τιμή εξάσκησης, είτε κυμαινόμενη. Στην πρώτη περίπτωση η τιμή εξάσκησης καθορίζεται και είναι γνωστή από την αρχή της σύμβασης. Στη λήξη η αξία του δικαιώματος ισούται με το ποσό κατά το οποίο η τιμή εξάσκησης υπερβαίνει (δικαίωμα πώλησης) ή υπολείπεται (δικαίωμα αγοράς)

[5] Zhang, P.G. "EXOTIC OPTIONS" 1997 Singapore: World Scientific.
[6] βλ. Πίνακα 2 "Κατηγοριοποίηση των Εξωτικών Παραγώγων" σελ.8-10

την μέση τιμή της υποκείμενης αξίας, όπως αυτή υπολογίζεται από ένα προκαθορισμένο δείγμα περιοδικών αγοραίων τιμών.

Τα ΔΜΤ με σταθερή τιμή εξάσκησης χρησιμοποιούνται για ν' αντισταθμίσουν την έκθεση ενός επενδυτή στον κίνδυνο που επιφέρουν χρηματοροές, οι οποίες είτε δημιουργούνται κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, είτε εξαρτώνται από τη μέση τιμή ενός αγαθού στη λήξη μιας περιόδου. Ένας αντισταθμιστής μιας επιχείρησης μπορεί με το να σταθεροποιήσει την αξία της τιμής άσκησης ενός δικαιώματος μείων το τίμημά του και να το θέση ίσο με ένα προϋπολογιζόμενο ποσοστό να θέση ένα κατώτερο επίπεδο ίσο με αυτό που έχει υπολογίσει στον προϋπολογισμό του, ενώ αφήνει ελεύθερη τη δυνατότητα ανατίμησης της τιμής. Έστω για παράδειγμα μια μητρική εταιρεία η οποία έχει θυγατρικές στο εξωτερικό και πραγματοποιεί χρηματικές εισροές ή εκροές προς αυτές (πχ έχει κάποια έσοδα από αυτές ή πραγματοποιεί κάποιες πληρωμές προς αυτές), ο αντισταθμιστής της εταιρείας υπολογίζει ότι μπορεί να αντισταθμίσει τον κίνδυνο από την διακύμανση της τιμής συναλλάγματος (με βάση την οποία μετατρέπει τις ροές σ' εγχώριο νόμισμα), με την αγορά ενός ΔΜΤ.

Η αξία στη λήξη ενός ΔΜΤ με κυμαινόμενη τιμή άσκησης καθορίζεται από τη διαφορά ανάμεσα στη μέση τιμή κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος και της τιμής στην αγορά spot. Στη λήξη η τιμή εξάσκησης θέτεται ίση με τη μέση τιμή. Το δικαίωμα είναι μέσα στα λεφτά του αν η τιμή εξάσκησης είναι κατώτερη από την τιμή στην αγορά spot για τα δικαιώματα αγοράς και ανώτερη από την spot για τα δικαιώματα πώλησης. Τα ΔΜΤ με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης χρησιμοποιούνται στην αντιστάθμιση κινδύνων που προέρχονται από την τιμή spot στο τέλος της περιόδου. Επειδή η τιμή εξάσκησης δεν είναι γνωστή προκαταβολικά, τα ΔΜΤ με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης είναι λιγότερο αποτελεσματικά για την αντιστάθμιση προϋπολογιζόμενης τιμής από τα απλά δικαιώματα ή συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Αλλά όταν η εταιρεία δεν ενδιαφέρεται για την προοπτική της αγοράς, ή προϋπολογιστικοί περιορισμοί, τότε τα ΔΜΤ με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης εξασφαλίζουν τη μέση τιμή (μείων το premium) ή καλύτερη.

Τα δικαιώματα αυτά ονομάζονται και path-dependent και αυτό γιατί ακολουθούν ένα μονοπάτι το οποίο λαμβάνει υπόψη του το μέσο ή τη διαδρομή που ακολουθεί η υποκείμενη αξία. Ο μέσος σ' αυτό το πλαίσιο μπορεί να είναι είτε απλός αριθμητικός (simple arithmetic average) είτε ένας σταθμικός μέσος (weighted arithmetic average). Μιλώντας αυστηρά μπορούμε να πούμε ότι ο όρος "μέσος" αναφέρεται μόνο σ' αυτές τις αποδόσεις που εξαρτώνται από τον απλό αριθμητικό μέσο.

Υποθέτοντας την πιο γενική περίπτωση όπου οι τιμές της υποκείμενης αξίας σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο είναι $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$ και τα αντίστοιχα σταθμά τους είναι $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n$ (εκφρασμένα σε ποσοστά) τότε ο σταθμικός αριθμητικός μέσος είναι:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \omega_i * S_i$$

θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τα σταθμά ω_i αθροίζουν στην μονάδα.

Παραλλαγές των ΔΜΤ[7]

1. *Δικαιώματα μέσης τιμής της υποκείμενης αξίας (Average Rate):* τα δικαιώματα αυτά αποτελούν την πιο συνηθισμένη περίπτωση δικαιωμάτων (vanilla options) στα οποία η τιμή της υποκείμενης αξίας αντικαθιστάται από τη μέση τιμή των παρατηρήσεων κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος. Η συνάρτηση απόδοσης ενός δικαιώματος αγοράς μέσης τιμής δίνεται από:

$$\text{Max}\,[A - K, 0]$$

2. *Δικαιώματα μέσης τιμής εξάσκησης:* στην περίπτωση αυτή αντί για την υποκείμενη αξία, η τιμή εξάσκησης ενός δικαιώματος αγοράς είναι αυτή η οποία αντικαθίσταται από το μέσο όρο των παρατηρήσεων κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος. Η συνάρτηση απόδοσης δίνεται από:

$$\text{Max}\,[S_T - A, 0]$$

3. *Δικαιώματα αντίστροφης μέσης τιμής:* πολλές φορές στις αγορές συναλλάγματος, οι συμβαλλόμενοι μπορούν να είναι εκτεθειμένοι σε νομίσματα αντίθετα από αυτά που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό των συμβάσεων. Στην περίπτωση αυτή ο αντισυμβαλλόμενος μπορεί να επιθυμεί να αγοράσει ένα

[7] Israel Nelken "THE HANDBOOK OF EXOTIC OPTIONS: Instruments, Analysis and Applications" IRWIN 1996.

δικαίωμα αντίστροφης μέσης τιμής, του οποίου η συνάρτηση απόδοσης δίνεται από:

$$\text{Max}\,[A^{-1} - K, 0]$$

Φυσικά η τιμή εξάσκησης Κ και η τιμή της αντίστροφης μέσης τιμής A^{-1} θα πρέπει να είναι εκφρασμένα στο ίδιο νόμισμα. Έτσι για παράδειγμα αν η τιμή του συναλλάγματος είναι εκφρασμένη ως $/GRD τότε ο όρος A^{-1} θα είναι και αυτό εκφρασμένο σε $/GRD. Μια άλλη μορφή που το δικαίωμα αντίστροφης μέσης τιμής θα μπορούσε να έχει είναι και η ακόλουθη:

$$\text{Max}\,[\tilde{A}^{-1} - K, 0]$$

Όπου ο όρος $\tilde{A}^{-1}$ υπολογίζεται ως:

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S_i}}$$

Και σ' αυτή την περίπτωση θα πρέπει τα $\tilde{A}^{-1}$ και το Κ να είναι εκφρασμένα στο ίδιο νόμισμα

4. *Δικαιώματα Μερικού Μέσου Όρου:* στις προηγούμενες παραλλαγές των δικαιωμάτων μέσης τιμής, ο μέσος όρος του Α υπολογίζεται σε όλη τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος. Στα δικαιώματα μερικού μέσου όρου ο μέσος μπορεί να υπολογιστεί σ' ένα υποσύνολο της ζωής του δικαιώματος. Το υποσύνολο αυτό μπορεί να είναι είτε μέρα, εβδομάδα, μήνας κτλ.

5. *Δικαιώματα Ελαστικού Μέσου Όρου:* στην περίπτωση αυτή η ελαστικότητα (flexible) αναφέρεται στη δυνατότητα που έχουμε να δίνουμε ένα ιδιαίτερο βάρος στην κάθε παρατήρηση, την οποία λαμβάνουμε υπόψη μας προκειμένου να υπολογίσουμε το μέσο όρο. Έστω ότι υπάρχουν n παρατηρήσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του Α. Αν η κάθε παρατήρηση έχει ένα ειδικό βάρος $\omega_i = 1/n$ και αν υποθέσουμε ότι αυτό το βάρος είναι το ίδιο για όλες τις παρατηρήσεις τότε ο μέσος γίνεται ένας απλός αριθμητικός μέσος:

$$\tilde{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$$

Τα δικαιώματα ελαστικού μέσου όρου με ίσα βάρη για όλες τις παρατηρήσεις αναφέρονται συχνά ως *Ασιατικά Δικαιώματα.*

6. *Δικαιώματα Γεωμετρικού Μέσου Όρου:* στην περίπτωση αυτή ο μέσος όρος υπολογίζεται με βάση το γεωμετρικό μέσο και όχι τον αριθμητικό όπως είχε αναφερθεί στις παραπάνω περιπτώσεις. Ο γεωμετρικός μέσος **G** δίνεται από:

$$G = \{\prod_{i=1}^{n} S_i\}^{\frac{1}{n}}$$

θα πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι είναι δυνατό τα δικαιώματα *Γεωμετρικού Μέσου* όρου να είναι ελαστικά στην περίπτωση που έχουμε διαφορετικά βάρη στην κάθε παρατήρηση η οποία χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του *Γεωμετρικού Μέσου* όρου. Στην περίπτωση αυτή ο παραπάνω τύπος διαμορφώνεται σε:

$$G = \{\prod_{i=1}^{n} S_i \omega_i\}^{\frac{1}{n}}$$

Το κύριο και σημαντικότερο ίσως χαρακτηριστικό των δικαιωμάτων *Γεωμετρικού Μέσου* είναι ότι κάτω από τις βασικές υποθέσεις των Black - Scholes μπορούν να δώσουν μια κλειστή φόρμα στον τύπο τιμολόγησής τους. Η ευκολία αυτή στον τρόπο τιμολόγησης οφείλεται στο γεγονός ότι όταν έχουμε μία μεταβλητή S_i η οποία κατανέμεται λογαριθμικά κανονικά, τότε και το γινόμενο της κατανομής αυτής κατανέμεται λογαριθμικά κανονικά, εφόσον ο λογάριθμος ενός γινομένου ισούται με το άθροισμα των λογαρίθμων του δηλαδή:

$$\log(S_1 * S_2 * ... * S_n) = \log(S_1) + \log(S_2) + ... + \log(S_n)$$

ή διαφορετικά:

$$\log(\prod_{i=1}^{n} S_i) = (\sum_{i=1}^{n} \log(S_i))$$

Αντίθετα στην περίπτωση του *Αριθμητικού Μέσου* δεν είναι δυνατό να καταλήξουμε σε κάποια κλειστή φόρμουλα και αυτό γιατί το άθροισμα των λογαριθμικών στοιχείων, που ακολουθούν την κανονική κατανομή, δεν έχει κάποια συγκεκριμένη απεικόνιση.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν πολλοί παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν τον ορισμό του μέσου όρου και σε κάθε περίπτωση δίνουν και ένα διαφορετικό είδος δικαιώματος. Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε:

1. Τη χρονική περίοδο κατά την οποία λαμβάνουμε - υπολογίζουμε τον μέσο όρο.
2. Αν είναι ο μέσος όρος λαμβάνεται ως απλώς αριθμητικός ή γεωμετρικός.
3. Αν έχουμε προσθέσει σε κάθε παρατήρηση κάποιο συγκεκριμένο βάρος ή όχι και αν αυτά τα βάρη είναι τα ίδια για όλες τις παρατηρήσεις μας ή όχι.
4. Αν το δείγμα μας, με βάση το οποίο υπολογίζουμε τον μέσο όρο, είναι διακριτό ή συνεχόμενο. Φυσικά είναι πολύ πιο απλό να υπολογίσουμε το μέσο όταν έχουμε ένα μικρό αριθμό παρατηρήσεων παρά όταν έχουμε ολόκληρο τον πληθυσμό αυτών. Έτσι ο μέσος για παράδειγμα μπορεί να είναι ο μέσος των τιμών κλεισίματος στο τέλος κάθε εβδομάδας πριν τη λήξη του δικαιώματος αντί του μέσου που υπολογίζεται για κάθε τιμή την οποία λαμβάνει η υποκείμενη αξία.

Γενικές Ιδιότητες των Ασιατικών Δικαιωμάτων

Τα ασιατικού τύπου δικαιώματα όπως έχουμε είδη αναφέρει εκδίδονται πάνω στη μέση τιμή ενός αγαθού το οποίο αποτελεί την υποκείμενη αξία του δικαιώματος. Προκειμένου να γίνει κατανοητή η ανάλυση που θ' ακολουθήσει, θα πρέπει να ορίσουμε σημειολογικά ορισμένες έννοιες.

Έτσι ορίσουμε με P(t) την αγοραία τιμή (spot) της υποκείμενης αξίας στο χρόνο t, και ως r ορίσουμε την αγοραία τιμή του σταθερού[8] επιτοκίου. Επίσης ως Ασιατικό Αριθμητικού Μέσου Δικαίωμα θα ορίζεται αυτό του οποίου το αποτέλεσμα στο χρόνο t + τ. εξαρτάται από τον Αριθμητικό Μέσο της τιμής της υποκείμενης αξίας όπως αυτός δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$= \frac{1}{t+\tau} \int_0^{t+\tau} P(u)du \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι ο Αριθμητικός Μέσος (Α.Μ.) της τιμής λαμβάνει υπόψη του όλες τις ιστορικές τιμές που έχει λάβει η υποκείμενη αξία. Για λόγους πρακτικότητας, και χωρίς να μειώνουμε τη γενίκευση, η αρχική ημερομηνία (ημερομηνία αναφοράς) από την οποία αρχίσουμε να υπολογίσουμε τον Α.Μ. τίθεται ίση με μηδέν.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι έχουμε ένα Ευρωπαϊκού τύπου ασιατικό δικαίωμα με τιμή εξάσκησης k και τ. περιόδους μέχρι τη λήξη. Ορίζουμε ως C(t,τ.) και H(t,τ.) την τιμή σε χρόνο t ενός Αριθμητικού Δικαιώματος αγοράς (call) και πώλησης (put) αντίστοιχα. Στη λήξη το αποτέλεσμα του δικαιώματος αγοράς και πώλησης θα είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} C(t+\tau,0) &= \max\left(\frac{1}{t+\tau}\int_0^{t+\tau} P(u)du - k, 0\right) \\ H(t+\tau,0) &= \max\left(k - \frac{1}{t+\tau}\int_0^{t+\tau} P(u)du, 0\right) \end{aligned} \quad (2)\ \&\ (3)$$

[8] Το επιτόκιο μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι τόσο στοχαστικό όσο και ντετερμινιστικό (όπως εμφανίζεται στις αναλύσεις των Bakshi, Cao, Chen (1997), Bergman, Grundy, Wiener (1996)). Η υπόθεση των σταθερών επιτοκίων εδώ γίνεται μόνο για λόγους απλοποίησης του προβλήματος.

Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει *"free-launch"* η τιμή του δικαιώματος αγοράς στο χρόνο t δίνεται από τη σχέση:

$$C(t,\tau) = E_t^Q\{e^{-r\tau}\max(\frac{1}{t+\tau}\int_0^{t+\tau} P(u)du - k, 0)\} \quad (4)$$

όπου $E_t^Q\{.\}$ είναι η υποσυνθήκη προσδοκία υπό το ισοδύναμο martingale μέτρο.

Χρησιμοποιώντας τη martingale ιδιότητα ότι: $E_t^Q\{e^{-r\tau}P(t+\tau)\} = P(t)$ και ορίζοντας $A(t+\tau) \equiv \int_0^{t+\tau} P(u)du$, το ασιατικό δικαίωμα αγοράς μπορεί να εκφραστεί και ως:

$$C(t,\tau) = P(t)[\frac{1-e^{-r\tau}}{(t+\tau)r}]\Pi_1(t,\tau) - e^{-r\tau}\{k - \frac{A(t)}{t+\tau}\}\Pi_2(t,\tau) \quad (5)$$

όπου Π_1 και Π_2 είναι οι ουδέτερες ρίσκου πιθανότητες κάτω από διαφορετικά μέτρα πιθανότητας:

$$\begin{aligned}\Pi_1(t,\tau) &\equiv E_t^{\tilde{Q}}\{1[\int_t^{t+\tau} P(u)du \geq [t+\tau]k - A(t)]\} \\ \Pi_2(t,\tau) &\equiv E_t^Q\{1[\int_t^{t+\tau} P(u)du \geq [t+\tau]k - A(t)]\}\end{aligned} \quad (6)\ \&\ (7)$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή του δικαιώματος, όπως αυτή δίνεται από τη σχέση (4), έχει κληρονομήσει τη συναρτησιακή μορφή ενός παραδοσιακού δικαιώματος: το ασιατικό δικαίωμα αγοράς είναι η τιμή ενός προθεσμιακού συμβολαίου, πάνω στην ίδια υποκείμενη αξία, στο χρόνο t, επί την τιμή ενός zero coupon ομολόγου επί την πιθανότητα ουδέτερου ρίσκου, μείων την παρούσα αξία της προσαρμοσμένης τιμής εξάσκησης. Το αν το ασιατικό δικαίωμα αγοράς θα λήξει μέσα στα λεφτά του ή όχι καθορίζεται από την κατανομή της αβεβαιότητας της υπολειπόμενης πορείας της τιμής της υποκείμενης αξίας, $\int_t^{t+\tau} P(u)du$, παρά από τη τελευταία αγοραία τιμή. Για κάθε τιμή την οποία μπορεί να λάβει το επιτόκιο r, ή ο υπολειπόμενος για τη λήξη χρόνος τ. το πρώτο τμήμα της σχέσης (4) θα είναι πάντα μικρότερο από το αντίστοιχο ενός κανονικού (παραδοσιακού) δικαιώματος αγοράς, δηλαδή:

$P(t)\frac{1-e^{-r\tau}}{[t+\tau]r} < P(t), \forall r, \tau$. Παρόλα αυτά, η φύση της υπολειπόμενης αβεβαιότητας είναι αυτή που καθορίζει το αν οι πιθανότητες Π_1 και Π_2 θα είναι αντίστοιχα μεγαλύτερες ή μικρότερες. Συνεπώς, ο συνδυασμός της λειτουργίας των παραπάνω παραγόντων καθορίζουν το αν η τιμή του ασιατικού δικαιώματος αγοράς θα είναι υψηλότερη ή χαμηλότερη από την αντίστοιχη ενός παραδοσιακού δικαιώματος.

Όταν η αγοραία τιμή ακολουθεί μια ανάλογη στοχαστική διαδικασία (με ή χωρίς στοχαστική διακύμανση) τα παραδοσιακά δικαιώματα είναι ομογενή πρώτου βαθμού ως προς την αγοραία τιμή και ως προς την τιμή εξάσκησης. Αλλά δεν υπάρχει κανένας λόγος για τα ασιατικά δικαιώματα να χαρακτηρίζονται από τις παραπάνω ιδιότητες. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τη σχέση (4) το δικαίωμα αγοράς αριθμητικού μέσου μπορεί να είναι ομογενή πρώτου βαθμού ως προς την αγοραία τιμή και ως προς την τιμή εξάσκησης μόνο στην περίπτωση που οι πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου Π_1 και Π_2 είναι ομογενής μηδενικού βαθμού αντίστοιχα. Παρατηρώντας ότι η κατανομή της υπολειπόμενης αβεβαιότητας δεν είναι λογαριθμικά κανονική, όταν η αγοραία τιμή είναι λογαριθμικά κανονική, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για κάθε ανάλογη στοχαστική διαδικασία, οι πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου δεν είναι ομογενής μηδενικού βαθμού και ως κατά συνέπεια το δικαίωμα αγοράς δεν είναι ομογενή πρώτου βαθμού ως προς τις σχετικές μεταβλητές. Παρόλα αυτά υπάρχει μόνο μια εξαίρεση στην οποία θα μπορούσε αυτό το δικαίωμα αγοράς να είναι ομογενή πρώτου βαθμού ως προς την τριπλέτα (P, k, A). Υπό τη συνθήκη ότι $[t+\tau]k - A(t) \le 0$, το ασιατικό δικαίωμα θα λήξει με βεβαιότητα στα λεφτά του. Αυτή η βεβαιότητα αποτελεί ικανή συνθήκη και εγγυάται ότι $\Pi_1 = \Pi_2 = 1$ και συνεπώς από την (4) έχουμε την παρακάτω τιμή του δικαιώματος:

$$C(t,\tau) = P(t)[\frac{1-e^{-r\tau}}{[t+\tau]r}] - e^{-r\tau}[k - \frac{A(t)}{t+\tau}] \quad (8)$$

Στην περίπτωση αυτή:

A. το δικαίωμα είναι ομογενές πρώτου βαθμού ως προς (P,k,A)

B. το *δέλτα* του δικαιώματος είναι μικρότερο της μονάδας, $\frac{1-e^{-r\tau}}{[t+\tau]r} \le 1$

C. το γάμα τόσο του δικαιώματος αγοράς όσο και πώλησης είναι μηδέν

Ɒ. η επίδραση του επιτοκίου στην τιμή του ασιατικού δικαιώματος είναι αρνητική

Άνω και κάτω Όρια στα Ασιατικά Δικαιώματα

Κάτω Όριο:

Προκειμένου να μπορέσουμε να βρούμε το κάτω όριο σε ένα Ευρωπαϊκού τύπου ασιατικό δικαίωμα αγοράς, υποθέτουμε ότι έχουμε δύο εναλλακτικές επενδυτικές δυνατότητες στο χρόνο t. Πρώτον: παίρνουμε μία θέση πώλησης σ' ένα ασιατικό δικαίωμα αγοράς, το οποίο έχει τιμή εξάσκησης k και ο υπολειπόμενος χρόνος μέχρι τη λήξη του είναι τ., και ταυτόχρονα επενδύουμε το ποσό $k^*e^{-r\tau}$ σ' ένα zero coupon ομόλογο. Αν το δικαίωμα εξασκηθεί τότε το αποτέλεσμά του στο χρόνο t + τ. θα είναι $\frac{1}{t+\tau}\int_0^{t+\tau} P(u)du$ και k στη περίπτωση που δεν εξασκηθεί. Η δεύτερη επενδυτική δυνατότητα που έχουμε είναι ν' αγοράσουμε ένα δικαίωμα το οποίο στο χρόνο t + τ. αποδίδει: $\frac{1}{t+\tau}\int_0^{t+\tau} P(u)du$. Συγκρίνοντας τις δύο επενδυτικές δραστηριότητες και υποθέτοντας ότι καμία δεν υπερισχύει της άλλης καταλήγουμε στο ότι θα πρέπει:

$$C(t,\tau) \geq \max(0, P(t)\{\frac{1-e^{-r\tau}}{(t+\tau)r}\} + \frac{e^{-r\tau}}{t+\tau}A(t) - ke^{-r\tau}) \quad (1)$$

Η διαφορά ανάμεσα στην τιμή του δικαιώματος αγοράς και στην *εσωτερική του αξία* μας δίνει το *time-value* του ασιατικού δικαιώματος αγοράς:

$$\max(0, C(t,\tau) - P(t)\{\frac{1-e^{-r\tau}}{(t+\tau)r}\} - \frac{e^{-r\tau}}{t+\tau}A(t) + ke^{-r\tau}) \quad (2)$$

Άνω Όριο:

Με βάση την αρχική μας υπόθεσης ότι οι δύο εναλλακτικές επενδυτικές δυνατότητες θα πρέπει να είναι ισοδύναμες (διαφορετικά θα είχαμε το φαινόμενο της κερδοσκοπικής αγοροπωλησίας) μπορούμε αναδιατάσσοντας την παραπάνω σχέση να πάρουμε το *άνω όριο* του δικαιώματος αγοράς. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$0 \leq C(t,\tau) \leq P(t)\{\frac{1-e^{-r\tau}}{(t+\tau)r}\} + \frac{e^{-r\tau}}{t+\tau}A(t) \quad (3)$$

Ερμηνεύοντας τη προαναφερθείσα σχέση μπορούμε να πούμε ότι μία θέση πώλησης σ' ένα δικαίωμα αγοράς υπολείπεται πάντα ενός δικαιώματος το οποίο στη λήξη του αποδίδει την ποσότητα: $\frac{1}{t}\int_0^{t+\tau} P(u)du$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της μη-ύπαρξης κερδοσκοπικής αγοροπωλησίας μπορούμε να δημιουργήσουμε την *ισότητα αγοράς - πώλησης (put-call parity)*[9]: $H(t,\tau)+P(t)\{\frac{1-e^{-r\tau}}{(t+\tau)r}\}+\frac{e^{-r\tau}}{t+\tau}A(t)=C(t,\tau)+ke^{-r\tau}$ (4)

Πώς δημιουργείται όμως η παραπάνω ισότητα; Δεν έχουμε παρά να πάρουμε μια θέση πώλησης σ' ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης k και τ. περιόδους μέχρι τη λήξη, να επενδύσουμε την ποσότητα $ke^{-r\tau}$ σ' ένα zero coupon ομόλογο, και ταυτόχρονα ν' αγοράσουμε ένα δικαίωμα πώλησης (με την ίδια πάντα τιμή εξάσκησης και τον ίδιο χρόνο μέχρι τη λήξη) και ένα τίτλο ο οποίος στο χρόνο t + τ. (χρόνος λήξης και των δικαιωμάτων) αποδίδει $\frac{1}{t}\int_0^{t+\tau} P(u)du$ ποσότητες της υποκείμενης αξίας. Εξισώνοντας το αποτέλεσμα αυτών των δύο επενδυτικών δυνατοτήτων καταλήγουμε στην (4). Λύνοντας την (4) ως προς το δικαίωμα αγοράς και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα που θα βρούμε στην (3) μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε τα αντίστοιχα όρια για το δικαίωμα πώλησης.

Συγκριτική Στατιστική Ανάλυση

Α. Ως Προς Τη Μεταβολή της Αγοραίας Τιμής της Υποκείμενης Αξίας

Προκειμένου να μπορέσουμε να μελετήσουμε τις υπόλοιπες οικονομικές ιδιότητες των ασιατικών δικαιωμάτων θα πρέπει να κάνουμε άλλη μία υπόθεση απλοποίησης. Έτσι λοιπόν υποθέτουμε ότι η ουδέτερη κινδύνου δυναμική συνάρτηση της δομής της υποκείμενης αξίας αποτελεί μια Markov διαδικασία συνεχόμενου χρόνου, της μορφής:

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = rdt + \sigma[P(t),t]dw(t) \quad (1)$$

[9] Περισσότερα για τη σχέση της εξισορροπητικής αγοροπωλησίας στο σχετικό κεφάλαιο.

όπου ο συντελεστής της διασποράς σ[P(t), t] θεωρείται, το πολύ, ότι αποτελεί συνάρτηση της αγοραίας τιμής και ίσος και του χρόνου, και το w απεικονίζει τη γνωστή Brownian κίνηση. Η μονοδιάστατη αυτή στοχαστική διαδικασία αποτελεί κοινή παραδοχή σε πολλές εργασίες αποτίμησης των ασιατικών δικαιωμάτων. *Οι εργασίες των Bergman, Grundy και Wiener (1996), των Cox και Ross (1976), του Merton (1973) και του Smith (1976) έχουν αναλύσει σε τέτοιο βαθμό την υπόθεση αυτή που την έχουν καταστήσει χαρακτηριστικό πρότυπο στη βιβλιογραφία.*

Από την διαδικασία λοιπόν αυτή που ακολουθεί η αγοραία τιμή μπορούμε να λάβουμε την παρακάτω Μερική Διαφορική Εξίσωση (PDE) για ένα δικαίωμα αγοράς:

$$\frac{1}{2}\sigma^2[P,t]P^2\frac{\partial^2 C}{\partial P^2}+rP\frac{\partial C}{\partial P}+P\frac{\partial C}{\partial A}-rC-\frac{\partial C}{\partial r}=0 \quad (2)$$

με $C(t+\tau,0)=\frac{1}{t+\tau}\max(\int_0^{t+\tau}P(u)du-\widetilde{K},0)$ και η οντότητα $\widetilde{K}=[t+\tau]k-A(t)$ αποτελεί τη *προσαρμοσμένη τιμή εξάσκησης* (όπως έχουμε αναφέρει ήδη) και η A(t) συνοψίζει την όλη ιστορική πορεία της τιμής της υποκείμενης αξίας μέχρι τη χρονική στιγμή t (το σήμερα) και ισούται με: $A(t)=\int_0 P(u)du$.

Όταν λοιπόν η τιμή της Υποκείμενης Αξίας ακολουθεί μια Markov διαδικασία τότε:

1. *Η συνάρτηση του Ασιατικού τύπου δικαιώματος, έχοντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή την τιμή της υποκείμενης αξίας, είναι κυρτή και μη αρνητική. Το δέλτα λοιπόν στην περίπτωση του δικαιώματος αγοράς ορίζεται με άνω και κάτω όρια:*

$$0\le\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial P(t)}\le\frac{1-e^{-r\tau}}{[t+\tau]r} \quad (3)$$

2. *Και η αξία του δέλτα στο χρόνο t δίνεται από:* $\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial P(t)}=E_t^{Q^*}\{\int^{t+\tau}\frac{\partial C(u,\tau)}{\partial A(u)}du\}$ *(4) όπου ο όρος* $E_t^{Q^*}$ *αποτελεί την υπό συνθήκη προσδοκία της μετασχηματισμένης στοχαστικής διαδικασίας:*

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = \{r + \sigma^2[t,P(t)] + P\sigma[t,P(t)]\frac{\partial\sigma[t,P(t)]}{\partial P(t)}\}dt + \sigma[t,P(t)]dw(t), \qquad (5)\ \&\ (6)$$

$$dA(t) = P(t)dt$$

όπου η σχέση: $\frac{\partial C(u,\tau)}{\partial A(u)}$ *εκφράζει την αξία του μη προεξοφλημένου μελλοντικού μερίσματος που δίνει η υποκείμενη αξία.*

Ερμηνεύοντας τη σχέση (3) μπορούμε να πούμε ότι όταν αυξάνεται η αγοραία τιμή της υποκείμενης αξίας αυξάνεται και η τιμή του δικαιώματος αγοράς. Η τιμή όμως του δικαιώματος δεν μπορεί να υπερβεί την τιμή του άνω ορίου: $\frac{1-e^{-r\tau}}{[t+\tau]r}$. Το άνω αυτό όριο εξαρτάται από:

- Το ανεξάρτητο από το χρόνο επιτόκιο
- Το χρόνο που υπολείπεται για να λήξει το δικαίωμα
- Το χρονικό σύνολο (t+τ.), που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το μέσο όρο

Ceteris paribus ένα υψηλότερο επιτόκιο ή μια μακρύτερη χρονικά περίοδος μέχρι τη λήξη, συνεπάγονται ένα μεγαλύτερο *δέλτα* για το δικαίωμα, αλλά ολόκληρη η μεταβολή δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από ένα. Αντίστροφα, όταν το τ.⟶0, τότε το *δέλτα* είναι μηδέν ανεξάρτητα από τη μεταβολή της αγοραίας τιμής και αυτό γιατί το αποτέλεσμα του δικαιώματος εξαρτάται από το μέσο όρο της τιμής της υποκείμενης αξίας. Η χρήση του μέσου όρου είναι αυτή που κάνει το *δέλτα* του δικαιώματος να μην επηρεάζεται από την τελευταία αγοραία τιμή.

Ερμηνεύοντας την (4) μπορούμε να πούμε ότι το *δέλτα* του δικαιώματος στο χρόνο t μπορεί να ειδωθεί ως μια υπό συνθήκη προσδοκία της ροής των μη προεξοφλημένων μελλοντικών μερισμάτων.

Αν υποθέσουμε ότι η τιμή του δικαιώματος αποτελεί ένα Markov σύστημα από κοινού των P(t) και A(t), τότε με τη χρήση των δύο τελευταίων σχέσεων έχουμε τη δυνατότητα να το αναπαράγουμε λαμβάνοντας μια θέση στην υποκείμενη αξία και μια αντίστοιχη σε μετρητά. Δηλαδή: $C(t,\tau;P(t),A(t)) = P(t)\Delta_P(t,\tau) + b_0$ (7)

όπου b_0 είναι η (υπολειμματική) θέση μας σε μετρητά και $\Delta_P(t,\tau) \equiv \dfrac{\partial C(t,\tau)}{\partial P(t)}$ όπως αυτό καθορίζεται από την (4). Η κυρτότητα του δικαιώματος και τα άνω και κάτω όρια του *δέλτα* περιορίζουν την ποσότητα της θέσης μας σε μετρητά και στην υποκείμενη αξία αντίστοιχα στο χαρτοφυλάκιό μας όπως αυτό δίνεται από την (7). Μπορούμε να δούμε, με βάση την κυρτότητα, που όπως έχουμε δει χαρακτηρίζει το δικαίωμα, και με βάση την οριακή συνθήκη $C(t,\tau;0,A(t)) = 0$ ότι η ελαστικότητα του δικαιώματος $\Omega(t,\tau) \equiv \dfrac{\Delta_P(t,\tau)}{\frac{C}{P}}$ είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα.

Έτσι από τη σχέση (7) εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η θέση μας σε μετρητά δεν μπορεί παρά να είναι αρνητική, εφόσον η ποσότητα b_0 είναι μικρότερη του μηδενός.

Β. Ως Προς Τη Μεταβολή Του Αθροίσματος Των Τιμών Της Υποκείμενης Αξίας, Της τιμής Εξάσκησης και Ως Προς Τη Μεταβλητότητα.

Υποθέτοντας ότι η τιμή της αγοραίας αξίας ακολουθεί τη Markov διαδικασία όπως αυτή την έχουμε ορίσει από την (1) μπορούμε να πούμε ότι:

1. Η τιμή του ασιατικού τύπου δικαιώματος αυξάνεται όταν αυξάνεται η τιμή της μεταβλητής $A(t)$, η οποία αποτελεί το άθροισμα των ιστορικών τιμών της υποκείμενης αξίας, και είναι κυρτή ως προς αυτή. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial A(t)} = \frac{e^{-r\tau}}{t+\tau} \operatorname{Prob}\left(\int^{t+\tau} P(u)du \geq [t+\tau]K - A(t)\right) = \frac{e^{-r\tau}}{t+\tau}\Pi_2(t,\tau) \geq 0$$

με $0 \leq \dfrac{\partial C(t,\tau)}{\partial A(t)} \leq \dfrac{e^{-r\tau}}{t+\tau}$ *και επίσης:*

$$\frac{\partial^2 C(t,\tau)}{\partial A^2(t)} = \frac{e^{-r\tau}}{t+\tau}\Phi\left(\int^{t+\tau} P(u)du\right) \geq 0$$

όπου Φ(.) αποτελεί τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της υπολειπόμενης πορείας της τιμής της υποκείμενης αξίας όπως αυτή δίνεται από το ολοκλήρωμα.

2. Η τιμή του ασιατικού τύπου δικαιώματος μειώνεται όταν αυξάνεται η τιμή της τιμής εξάσκησης (ή η τιμή της προσαρμοσμένης τιμής εξάσκησης) και είναι κυρτή ως προς αυτές. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial K} = -e^{-r\tau}\Pi_2(t,\tau) \leq 0$$

με $-e^{-r\tau} \leq \frac{\partial C(t\tau)}{\partial K} \leq 0$. *Αναφορικά ως προς την κυρτότητα, αυτή αποδεικνύεται από το ότι η δεύτερη μερική παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την τιμή εξάσκησης είναι θετική. Δηλαδή:*

$$\frac{\partial^2 C(t,\tau)}{\partial K^2} = (t+\tau)e^{-r\tau}\Phi(\int^{t+\tau} P(u)du) \geq 0$$

3. *Αν η μεταβλητότητα της τιμής της υποκείμενης αξίας αυξηθεί τότε θα αυξηθεί και η τιμή του ασιατικού δικαιώματος. Δηλαδή η πρώτη μερική παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς τη διακύμανση είναι θετική.*

Γ. Ως Προς Τη Μεταβολή Του Επιτοκίου

Κάτω από τις γνωστές μας υποθέσεις ως προς την τιμή της υποκείμενης αξίας, μπορούμε να πούμε ότι η μεταβολή στην τιμή του δικαιώματος όταν μεταβάλλεται το επιτόκιο δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial r} = -\tau C(t,\tau) + \frac{P(t)(r\tau - 1 + e^{-r\tau})}{(t+\tau)r^2} * \left(\frac{\int_K^{\infty} e^{-r\tau}\frac{\partial W(P(t),r,u)}{\partial r}\overline{\Phi}(u)du}{\int_0^{\infty} e^{-r\tau}\frac{\partial W(P(t),r,u)}{\partial r}\overline{\Phi}(u)du}\right)$$

με $-\frac{P(t)}{(t+\tau)r^2}(1-(1+r\tau)e^{-r\tau}) \leq \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial r} \leq \frac{P(t)}{(t+\tau)r^2}(e^{-r\tau} - 1 + r\tau)$

Δ. Ως Προς Τη Μεταβολή Της Μερισματικής Απόδοσης

Μέχρι τώρα είχαμε υποθέσει ότι η υποκείμενη αξία δεν έχει καμία μερισματική απόδοση. Στο σημείο όμως αυτό θα κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι το αγαθό αποδίδει κάποιο συνεχόμενο μέρισμα το ποσοστό του οποίου θα συμβολίσουμε με z. Με τη χρήση αυτής της επιπλέον υπόθεσης η δυναμική διαδικασία την οποία ακολουθεί η τιμή της υποκείμενης αξίας (η γνωστή μας Markov διαδικασία) θα εκφράζεται από τη σχέση:

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = (r - z)dt + \sigma[t, P(t)]dw(t)$$

έχοντας κάνει αυτή τη βασική υπόθεση τώρα είμαστε σε θέση να δούμε την επίδραση της μεταβολής της μερισματικής απόδοσης πάνω στην τιμή του δικαιώματος.

Η τιμή του ασιατικού δικαιώματος μειώνεται όταν αυξάνει η μερισματική απόδοση της υποκείμενης αξίας. Δηλαδή από τη μερική παράγωγο ως προς τη μερισματική απόδοση έχουμε:

$$\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial z} = -\frac{P(t)e^{-z\tau}}{(r-z)^2}\left(e^{-(r-z)\tau} + (r-z)\tau - 1\right)\left(\frac{\int_{\tau}^{\infty} e^{-r\tau}\frac{\partial W(P(t),r,z,u)}{\partial z}\overline{\Phi}(u)du}{\int_{0}^{\infty} e^{-r\tau}\frac{\partial W(P(t),r,z,u)}{\partial z}\overline{\Phi}(u)du}\right) \leq 0$$

με $-\frac{P(t)e^{-z\tau}}{(r-z)^2}\left(e^{-(r-z)\tau} + (r-z)\tau - 1\right) \leq \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial z} \leq 0$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε ότι όλες οι παραπάνω ιδιότητες των ασιατικών δικαιωμάτων, όπως αυτές παρουσιάστηκαν για ένα δικαίωμα αγοράς, ισχύουν αντίστοιχα και για ένα δικαίωμα πώλησης, με βάση την ισότητα αγοράς - πώλησης (put-call parity). Έτσι για παράδειγμα το δέλτα ενός ασιατικού δικαιώματος πώλησης "περιορίζεται" (δηλαδή έχει άνω και κάτω όριο) ως εξής:

$$-\frac{1-e^{-r\tau}}{(t+\tau)r} \leq \frac{\partial H(t,\tau)}{\partial P(t)} \leq 0 .$$

Θα πρέπει όμως επίσης να σημειώσουμε ότι όλες οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν μόνο όταν η τιμή της υποκείμενης αξίας ακολουθεί τη μονοδιάστατη-Markov διαδικασία. Στην περίπτωση που η τιμή αυτή ακολουθεί μια Markov διαδικασία μεγαλύτερου βαθμού, ή στην περίπτωση που το αποτέλεσμα του ασιατικού δικαιώματος εξαρτάται από ένα μεταβαλλόμενο επιτόκιο, τότε δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες, ακόμα και οι πιο γενικές.

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΑΣΙΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Η τιμολόγηση των ασιατικών δικαιωμάτων μέσης τιμής, όταν η μέση τιμή υπολογίζεται ως ο αριθμητικός μέσος των τιμών που έχει λάβει η υποκείμενη αξία είναι αρκετά δύσκολη εξαιτίας της δυσκολίας που παρουσιάζει η λογαριθμικά κανονική διαδικασία του αριθμητικού μέσου. Ένας τύπος κλειστής φόρμουλας που να υπολογίζει την τιμή του δικαιώματος δεν έχει βρεθεί και με βάση τα σημερινά δεδομένα ίσως να μην βρεθεί. Το πρόβλημα αυτό της επίλυσης της τιμής των δικαιωμάτων αυτού του τύπου έχει απασχολήσει την επιστήμη κατά πολύ και οι περισσότερες αξιόλογες προσπάθειες στρέφονται προς την κατεύθυνση υπολογισμού μιας προσεγγιστικής μεθόδου, που θα είναι ικανή να δίνει μέσα σε αποδεκτά επίπεδα εμπιστοσύνης μια "σωστή" τιμή για τα συγκεκριμένα δικαιώματα. Όλες αυτές τις προσπάθειες μπορούμε να τις ταξινομήσουμε σε τρεις κατηγορίες:

Α. Στην πρώτη κατηγορία μπορούμε να κατατάξουμε όλες αυτές τις μεθόδους που έχουν ως αντικείμενο την "αριθμητική" επίλυση του όλου προβλήματος (numerical approach). Οι **Kemna & Vorst** (1990) πρώτοι παρουσιάζουν μια κλειστού τύπου λύση για τα Ασιατικά δικαιώματα γεωμετρικού μέσου, και εκτιμούν την τιμή των ασιατικών δικαιωμάτων αριθμητικού μέσου με τη χρήση της Monte-Carlo προσομοίωσης, κάνοντας χρήση ορισμένων μεθόδων μείωσης των συντελεστών του προβλήματος (variable reduction techniques), και επίσης χρησιμοποιούν το γεωμετρικό μέσο σαν μεταβλητή ελέγχου. Το πρόβλημα όμως στο όλο τους εγχείρημα έγκειται στο ότι ο έλεγχος που κάνουν δίνει μόνο μια εκτίμηση του λάθους για κάποιο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας και δεν μπορεί να κρίνει το μέγεθος του σφάλματος. Την ίδια περίοδο οι **Carverhill & Clewlow** χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό κατά fast Fourier υπολογίζουν τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αθροίσματος των τυχαίων μεταβλητών. Και αυτή όμως η λύση δεν μπορεί να μας δώσει το ακριβές μέγεθος του σφάλματος. Πολύ αργότερα (2000) ο **Benhamou** προσπαθεί να βελτιώσει τον αλγόριθμο των Carverhill & Clewlow και να τον προσαρμόσει και σε περιπτώσεις μη λογαριθμικά κανονικών κατανομών. Οι **Hull & White** το 1993 δημιούργησαν ένα αρκετά αναλυτικό δυονιμικό μοντέλο με βάση το οποίο κατασκευάζουν ένα δυονιμικό δέντρο του οποίου κάθε κόμβος (node) αποτελεί ένα διάνυσμα μέσων τιμών. Την ίδια επίσης χρονιά οι **Dewynne & Wilmott** επιλύουν αριθμητικά τη μερική διαφορική εξίσωση (PDE) για τα δικαιώματα μέσης τιμής. Οι **Rogers & Shi** το 1995, οι **He & Takahashi** το1996 και οι **Aliziary, Decamps & Koehl** το 1997 υπολογίζουν την τιμή του Ασιατικού τύπου δικαιώματος αριθμητικού μέσου, επιλύνοντας τη Μερική Διαφορική Εξίσωση (PDE) αριθμητικά με τη χρήση πεπερασμένων διαφορικών μεθόδων, ενώ οι **Forsyth & Zvan** (1998) προκειμένου να λύσουν την PDE χρησιμοποιούν τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Β. Σ' αυτή τη δεύτερη κατηγορία μπορούμε να κατατάξουμε όλες τις προσπάθειες που έχουν σαν κοινό τους παρανομαστή την αναλυτική προσέγγιση (analytical approximation). Ο **Vorst** το 1990 προσπαθεί με τη χρήση της προσαρμοσμένης τιμής εξάσκησης να προσεγγίσει τον αριθμητικό μέσο μέσω του γεωμετρικού κάνοντας τις αναγκαίες και ικανές προσαρμογές τόσο στο μέσο όσο και στη διακύμανση. Ο Vorst συγκεκριμένα αντικαθιστά τον αριθμητικό με το γεωμετρικό μέσο και προσαρμόζει κατάλληλα την τιμή εξάσκησης προκειμένου να διορθώσει την επίδραση του μέσου. Προς την ίδια κατεύθυνση κινούνε και οι προσπάθειες των **Kunitomo & Takahashi** (1992) οι οποίοι χρησιμοποιούν τη μέθοδο του προσαρμοσμένου γεωμετρικού μέσου, μέθοδος με την οποία αντικαθιστάτε ο αριθμητικός μέσος από το γεωμετρικό του οποίου ο μέσος και η διακύμανση προσαρμόζονται έτσι ώστε να εξισώνονται με το μέσο και τη διακύμανση του αριθμητικού μέσου. Ο **Curran** το 1992 χρησιμοποιεί τη γεωμετρική υπό συνθήκη μέθοδο, με βάση την οποία αντικαθιστά τον αριθμητικό μέσο με την υπό συνθήκη προσδοκία αυτού, με συνθήκη το γεωμετρικό μέσο. Λίγο νωρίτερα, το 1991, οι **Turnbull & Wakeman** βρίσκουν μια εκτιμητική φόρμουλα εξισώνοντας τις πρώτες ροπές του αριθμητικού μέσου με τις αντίστοιχες μιας λογαριθμικά κανονικής διαδικασίας. Χρησιμοποιούν τη μέθοδο ανάπτυξης της σειράς κατά Edgeworth, η οποία μέθοδος συνεπάγεται την ανάπτυξη της κατανομής του αριθμητικού μέσου γύρω από την κατανομή του γεωμετρικού μέσου (η οποία είναι λογαριθμικά κανονική). Και αυτοί κάνουν χρήση της Monte-Carlo προσομοίωσης προκειμένου να λάβουν μια "σωστή" τιμή για να μπορέσουν να εκτιμήσουν το σφάλμα στη μέθοδό τους. Όλες οι παραπάνω μέθοδοι που προσπαθούν να προσεγγίσουν τον αριθμητικό μέσο μέσω του γεωμετρικού είναι αρκετά αξιόπιστοι μόνο στη περίπτωση που η διακύμανση της υποκείμενης αξίας δεν είναι αρκετά μεγάλη. Έχει εκτιμηθεί ότι για να αποδίδουν αξιόπιστα αποτελέσματα θα πρέπει η συγκεκριμένη διακύμανση να είναι κάτω από 30%. Σε διαφορετική περίπτωση τα αριθμητικά λάθη μπορεί να είναι πολύ σημαντικά και να οδηγούν σε λανθασμένα συμπεράσματα. Ένα χρόνο αργότερα ο **Levy** (1992) υπολογίζει τη προσεγγιστική μέθοδο για την τιμή ενός ασιατικού τύπου δικαίωμα με διακριτό δείγμα. Στην προσπάθειά του αυτή ο Levy εξισώνει μόνο τις δύο πρώτες ροπές. Και στην περίπτωση αυτή η Monte-Carlo προσομοίωση χρησιμοποιείτε ως η μέθοδος που θα δώσει τη σωστή τιμή του δικαιώματος και με τη βοήθειά της υπολογίζεται το μέγεθος του σφάλματος. Το 1993 οι Geman & Yor καταλήγουν σε μια οιονεί-σαφή λύση για το ασιατικό δικαίωμα αριθμητικού μέσου χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό κατά Laplace μιας υπεργεωμετρικής συνάρτησης. Και αυτοί χρειάστηκαν να κάνουν χρήση αριθμητικών μεθόδων προκειμένου να μπορέσουν να αντιστρέψουν το μετασχηματισμό κατά Laplace (βλέπε Geman & Eydeland 1995), αλλά τελικά στερούνται κάποιου ορίου σφάλματος. Ο Zhang (1995)(1998) δημιουργεί μια Teylor ανάπτυξη προκειμένου να καταλήξει σε μια εκτίμηση βασισμένη στο γεωμετρικό μέσο. Το 1998 οι Milevsky & Posner εκτιμούν το άθροισμά των λογαριθμικά κανονικών κατανομών χρησιμοποιώντας την αντίστροφη Γάμμα κατανομή (η οποί αποτελεί το ασυμπτοτικό όριο του αθροίσματος των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των λογαριθμικά κανονικών κατανομών) και βρίσκουν μια νέα φόρμουλα τιμολόγησης των αριθμητικού μέσου δικαιωμάτων. Και η μέθοδος όμως αυτή δεν δίνει κάποια όρια μέσα στα οποί κινείται το σφάλμα της.

Γ. Η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει τις μεθόδους που προσπαθούν να "περιορίσουν" την τιμή του δικαιώματος εκτιμώντας τα άνω και κάτω όρια. Οι **Rogers & Shi** το 1995 υπολογίζουν το άνω και κάτω όριο για το ασιατικό δικαίωμα εκτιμώντας την προσδοκώμενη τιμή βασιζόμενοι σε μια μηδενικού μέσου Gaussian μεταβλητή. Η διαφορά όμως ανάμεσα στο άνω και κάτω όριο της τιμής του δικαιώματος είναι αρκετά μεγάλη και μπορεί να φτάσει και το 6% της αξίας του δικαιώματος. Οι **Chalasani, Jha & Varikooty** το 1998, χρησιμοποιούν μια διαφορετική μέθοδο προκειμένου να μπορέσουν να εκτιμήσουν τα όρια της τιμής του δικαιώματος. Χρησιμοποιούν τη μέθοδο των τρυονομικών δέντρων και επίσης χρησιμοποιούν διακριτό δείγμα τιμών. Η μέθοδός τους φαίνεται αρκετά ακριβής εφόσον η διαφορά του άνω και κάτω ορίου, την οποία υπολογίζουν κυμαίνεται στο 0,2% της τιμής του δικαιώματος.

Το Βασικό Μοντέλο Αποτίμησης Ασιατικών Δικαιωμάτων[10]

Όταν υπολογίζουμε το μέσο για συνεχείς παρατηρήσεις της τιμής της υποκείμενης αξίας, όπως αυτές δημιουργούνται από τον τυχαίο περίπατο που η αξία αυτή ακολουθεί, θα πρέπει, αναπόφευκτα, να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα των μεγεθών που εξαρτώνται από το χρονικό αυτό μονοπάτι. Ο υπολογισμός αυτών των ολοκληρωμάτων είναι αναγκαίος προκειμένου να καταλήξουμε στην επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης που χρησιμοποιείται για την επίλυση της αξίας ενός δικαιώματος. Η μερική διαφορική εξίσωση στην οποία καταλήγουμε όταν αποτιμούμε ένα Ασιατικό δικαίωμα, συνεχόμενων τιμών, μοιάζει με αυτή των Black - Scholes μόνο που στην περίπτωση αυτή έχουμε ακόμη ένα παράγοντα, (όπως θα δούμε παρακάτω). Αντίθετα όταν ο μέσος υπολογίζεται από διακριτό δείγμα τιμών τότε η αξία του δικαιώματος ικανοποιεί τη εξίσωση των Black-Scholes υπό τη συνθήκη της αναπήδησης των τιμών.

Ανεξάρτητα από το αν ο μέσος υπολογίζεται σε συνεχόμενο ή διακριτό δείγμα τιμών, το πρόβλημα της αποτίμησης είναι τριών διαστάσεων υπό την έννοια ότι θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας τόσο την τιμή της υποκείμενης αξίας και τον χρόνου, όσο και την ποσότητα που εξαρτάται από το μονοπάτι που ακολουθεί το δικαίωμα, που στην περίπτωση των ασιατικών δικαιωμάτων είναι ο μεταβαλλόμενος μέσος. Παρά το γεγονός ότι πολλές πραγματοποιήσεις του τυχαίου περιπάτου της τιμής της υποκείμενης αξίας, οδηγούν στην ισχύουσα τιμή του δικαιώματος, γενικά κάθε δύο από αυτές δίνουν διαφορετική αξία στην εξαρτώμενη από το μονοπάτι ποσότητα. Έτσι η ιδέα ήταν να προστεθεί και μια τρίτη μεταβλητή εκτός των S και t της οποίας ο ρόλος είναι να μετράει αυτή τη σχετική ποσότητα.

Για να εισάγουμε την έννοια αυτή της τρίτης μεταβλητής ας δούμε την απόδοση ενός δικαιώματος με μέση τιμή εξάσκησης, η οποία μέση τιμή λαμβάνεται σ' ένα συνεχόμενο δείγμα. Έτσι λοιπόν ο μέσος μας εξαρτάται από το χρόνο. Στην περίπτωση που έχουμε δικαίωμα αγοράς (αριθμητικού μέσου) το αποτέλεσμα αυτού του δικαιώματος δίνεται από:

[10] Paul Wilmott, Sam Howison, Jeff Dewynne "THE MATHEMATICS OF FINANCIAL DERIVATIVES - A Student Introduction" CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS 1995 Chapter 13 σελ 213 - 215

$$\max(S - \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt, 0)$$

Στον παραπάνω τύπο βλέπουμε ότι χρησιμοποιούμε το ολοκλήρωμα προκειμένου να υπολογίσουμε το μέσο και αυτό γιατί αναφερόμαστε σε συνεχείς τιμές για τη χρονική περίοδο από μηδέν ως T. Στη συνέχεια ορίζουμε τη συνάρτηση f η οποία έχει τις εξής δύο μεταβλητές S και t. Στην παραπάνω συνάρτηση έχουμε $f(S,t)=S$. Τώρα μπορούμε να εισάγουμε τη νέα μεταβλητή I η οποία ισούται με:

$$I = \int_0^t f(S(t),t)dt$$

Εφόσον η ιστορία των τιμών της υποκείμενης αξίας είναι ανεξάρτητη από τη ισχύουσα τιμή, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές I, S, t είναι ανεξάρτητες και ότι διαφορετικές πραγματοποιήσεις του τυχαίου περιπάτου οδηγούν σε διαφορετικές τιμές της I. Επειδή το αποτέλεσμα του δικαιώματος εξαρτάται τόσο από το S όσο και από το I συμπεραίνουμε ότι η αξία ενός εξωτικού δικαιώματος που ακολουθεί κάποιο μονοπάτι, μπορεί να γραφεί ως V(S,I,t). Αυτό σημαίνει ότι η αξία του δικαιώματος αποτελεί μια συνάρτηση τριών μεταβλητών, του χρόνου t, της τωρινής τιμής S, και της ιστορίας της τιμής της υποκείμενης αξίας I.

Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση για την I. Προκειμένου να την υπολογίσουμε θα πρέπει βρούμε τη μεταβολή στη μεταβλητή I όταν μεταβληθούν ταυτόχρονα τόσο το t όσο και το S κατά κάποια μικρή ποσότητα. Έτσι έχουμε:

$$I(t+dt) = I + dI = \int_0^{t+dt} f(S(t),t)dt \Rightarrow$$
$$I + dI = \int_0^t f(S(t),t)dt + f(S(t),t)dt$$

και καταλήγουμε ότι:

$$dI = f(S,t)dt$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση αποτελεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση για την μεταβλητή I και παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κάποιο τυχαίο στοιχείο σ' αυτήν.

Τώρα μπορούμε να τιμολογήσουμε κάθε δικαίωμα το οποίο εξαρτάται από τις μεταβλητές S, t και I.

Προκειμένου να το κάνουμε αυτό δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε την μέθοδο του Itô's (Itô's lemma)[11] στην συνάρτηση V(S,t,I) και έχουμε:

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial I}\right)dt \quad (1)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με την αντίστοιχη των Black-Scholes βλέπουμε ότι το μόνο νέο στοιχείο είναι η μερική παράγωγος της V ως προς το I. Η παράγωγος αυτή δεν προσθέτει κάποιο νέο στοχαστικό στοιχείο στον τυχαίο περίπατο που ακολουθεί η V. Έτσι εφόσον το dI δεν αποτελεί πηγή κινδύνου, το δικαίωμα μπορεί να αντισταθμιστεί χρησιμοποιώντας μόνο την υποκείμενη αξία. Όπως έχουμε είδη αναφέρει το δικαίωμα είναι Ευρωπαϊκού τύπου, και με τη βοήθειά του κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο, το οποίο αποτελείται από αυτό το δικαίωμα και μια αγορασμένη θέση σε Δ ποσότητες της υποκείμενης αξίας. Με βάση την υπόθεση της μη ύπαρξης κερδοσκοπικής αγοραπωλησίας, και έχοντας $\Delta = \partial V / \partial S$, καταλήγουμε στο:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί τη γενική μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης που μας δίνει την αξία ενός ασιατικού δικαιώματος. Στη λήξη του δικαιώματος γνωρίζουμε τον ακριβή τύπο του αποτελέσματός του, ο οποίος είναι:

V(S,I,T) = Λ(S,I,T)

Όπου η συνάρτηση Λ αποτελεί τη γνωστή συνάρτηση απόδοσης του δικαιώματος. Στην περίπτωση του δικαιώματος με μέση τιμή εξάσκησης έχουμε:

$$I = \int_0 S(\tau)d\tau$$

και Λ(S,I,T) = max (S-I/T, 0), και η μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) για την αξία αυτού του δικαιώματος δίνεται από:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+S\frac{\partial V}{\partial I}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

Στην περίπτωση που η τιμή εξάσκησης υπολογίζεται από το γεωμετρικό μέσο όρο:

$$G=\{\prod_{i=1}^{n}S_i\}^{\frac{1}{n}}$$

τότε ο γεωμετρικός μέσος συνεχούς δείγματος δίνεται από:

$$\exp(\frac{1}{t}\int_0^t \log(S(\tau))d\tau$$

η οποία σχέση αποτελεί το όριο της προηγούμενης καθώς το $n \to \infty$. Όταν το αποτέλεσμα του δικαιώματος καθορίζεται από την παραπάνω σχέση τότε η μεταβλητή I ορίζεται ως:

$$I=\int_0^t \log(S(\tau))d\tau$$

και η ΜΔΕ της αξίας του δικαιώματος δίνεται από:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\log S\frac{\partial V}{\partial I}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

Περιορισμοί Ομοιότητας

Είδαμε λοιπόν ότι η αξία ενός δικαιώματος εξαρτάται από τις τρις μεταβλητές S, t και I. Αυτό ισχύει ανεξάρτητα από το γεγονός αν η ποσότητα I υπολογίζεται ως αριθμητικός ή γεωμετρικός μέσος, με συνεχείς ή διακριτές τιμές. Ο υπολογισμός αυτών των δικαιωμάτων είναι αρκετά πιο χρονοβόρος, συγκρινόμενος με τον αντίστοιχο των απλών δικαιωμάτων, εξαιτίας της παραπάνω μεταβλητής. Παρόλα αυτά μερικά δικαιώματα έχουν μια ιδιαίτερη μαθηματική δομή η οποία επιτρέπει τη μείωση της διάστασης τους από τρις μεταβλητές σε δύο, με τη χρήση μεταβλητών ομοιότητας. Στην περίπτωση των (αριθμητικού δείγματος) Ασιατικών δικαιωμάτων μπορούμε να μειώσουμε τις μεταβλητές από τρις σε δύο αν ισχύει η ακόλουθη προϋπόθεση:

[11] Περισσότερα για το λήμμα του Itô βλέπε "ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ΙΤΟ" σελ 54

- Το αποτέλεσμα του δικαιώματος έχει τη μορφή $S^{\alpha}F(I/S,t)$ για κάποια σταθερή τιμή του α (συνήθως είναι ίση με μηδέν ή ένα) και κάποια συνάρτηση F.

Αν αυτή η προϋπόθεση ισχύει τότε δεν έχουμε παρά να βρούμε λύση για αυτό το διμεταβλητό πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση του συνεχόμενου δείγματος βρίσκουμε ότι:

$V = S^{\alpha}H(R, t)$, (A)

όπου το R=I/S και η ΜΔΕ είναι:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}+(1+(\sigma^2(1-\alpha)-r)R)\frac{\partial H}{\partial R}-(1-a)(\frac{1}{2}\sigma^2\alpha+r)H=0$$

και τελική συνθήκη:

H(R,T) = F(R).

Συνεχούς δείγματος, δικαιώματα μέσης τιμής εξάσκησης.

Το αποτέλεσμα στη λήξη ενός τέτοιου είδους δικαιώματος, στην περίπτωση που έχουμε δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, εκφράζεται από τη σχέση:

$$\max(S-\frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt, 0)$$

ενώ στην περίπτωση που έχουμε δικαίωμα πώλησης η σχέση αναμορφώνεται σε:

$$\max(\frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt-S, 0)$$

τις δύο παραπάνω σχέσεις μπορούμε να τις ξαναγράψουμε βγάζοντας έξω από την παρένθεση τη μεταβλητή S, ως κοινός μέσος όρος, έτσι έχουμε:

$$S\max(1-\frac{1}{TS}\int_0^T S(t)dt, 0)$$

και

$$S\max(\int_0^T S(t)dt-1, 0)$$

αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση R = I/S, όπως δείξαμε παραπάνω, το αποτέλεσμα του δικαιώματος δίνεται από:

S max (1-R/T, 0) για την περίπτωση του δικαιώματος αγοράς και

S max(R/T-1, 0) για την περίπτωση του δικαιώματος πώλησης.

Έτσι η αξία του δικαιώματος λαμβάνει τη μορφή:

V(S,R,t) = S H(R,t) με R=I/S.

Η σχέση αυτή είναι ακριβώς ίδια με την (A), με α=1. Έτσι καταλήγουμε στη ΜΔΕ:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}+(1-rR)\frac{\partial H}{\partial R}=0$$

Οι οριακές συνθήκες για τα ευρωπαϊκά αυτά δικαιώματα δίνονται από τις αντίστοιχες σχέσεις για R=0 και R→∞. Για τελευταία συνθήκη έχουμε:

Εφόσον η μεταβλητή S είναι περιορισμένη στο πεπερασμένο χρονικό πλαίσιο της t, t∈ [0,T], ο μόνος τρόπος που η μεταβλητή R μπορεί να τείνει στο άπειρο είναι αν η S τείνει στο μηδέν. Στην περίπτωση αυτή το δικαίωμα δεν εξασκείται και έτσι η απόδωσή του στη λήξη του θα είναι:

$H(\infty, t) = 0.$

Στην πρώτη περίπτωση από τη σχέση του R που είναι: R = I/S ή

$$R=\frac{1}{S}\int_0^t S(\tau)\,d\tau$$

η R ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$dR = -\sigma R dx + (1+(\sigma^2 - \mu)R)dt$. Αν θέσουμε R=0 τότε από τη σχέση αυτή παίρνουμε ότι:

$dR = dt > 0.$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ενώ στην περίπτωση των απλών δικαιωμάτων όταν η μεταβλητή S λάμβανε τη μηδενική τιμή, τότε παρέμενε μηδέν για όλη τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος, εδώ δεν ισχύει κάτι τέτοιο, έστω και αν η R γίνει σε κάποια χρονική στιγμή μηδέν, ο τυχαίος περίπατος της R θα την απομακρύνει από την τιμή αυτή και θα είναι R>0. Έτσι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την αξία του δικαιώματος στην περίπτωση που R=0. Το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι η τιμή θα πρέπει να είναι πεπερασμένη. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συμπέρασμα αυτό προκειμένου να καταλήξουμε σε μία νέα συνθήκη από την διαφορική εξίσωση. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν το R λάβει πολύ μικρές τιμές (τείνει στο μηδέν), τότε ο όρος $R\partial H/\partial R$ είναι ασήμαντος συγκρινόμενος με τον $\partial H/\partial R$. Έτσι μπορούμε να παραλείψουμε τον όρο αυτό. Επίσης μπορούμε να παραλείψουμε και τον όρο $R^2 \partial^2 H/\partial R^2$ καθώς ο R τείνει στο μηδέν. Έτσι συμπεραίνουμε ότι που συμβάλλουν όταν R=0 είναι οι $\partial H/\partial t$ και $\partial H/\partial R$. Με άλλα λόγια $\partial H/\partial t + \partial H/\partial R = 0$ όταν R=0.

Έτσι η ΜΔΕ, οι τελική και οι οριακές συνθήκες είναι αρκετές για να καθορίσουν την αξία του δικαιώματος.

Είναι δυνατό να δοθεί μια πλήρως αναλυτική μορφή της επίλυσης του προβλήματος αποτίμησης ως ένα απειροστό άθροισμα από συμβάλλουσες υπεργεωμετρικές συναρτήσεις (confluent hypergeometric functions).

Η Ισότητα μεταξύ Ευρωπαϊκού Δικαιώματος αγοράς - πώλησης μέσης τιμής εξάσκησης (put-call parity)

Το αποτέλεσμα στη λήξη ενός χαρτοφυλακίου το οποίο αποτελείται από ένα αγορασμένο Ευρωπαϊκό δικαίωμα, με μέση τιμή εξάσκησης, και από ένα πουλημένο δικαίωμα πώλησης είναι:

$$S \max(1-R/T, 0) - S \max(R/T - 1, 0).$$

Ανεξάρτητα από το αν η R είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από το T, το αποτέλεσμα στο χαρτοφυλάκιο είναι ίσο με:

$$S - RS/T$$

Η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου είναι ίδια με την αντίστοιχη ενός άλλου χαρτοφυλακίου το οποίο αποτελείται από την υποκείμενη αξία και ένα χρηματοοικονομικό προϊόν, το οποίο δεύτερο χαρτοφυλάκιο έχει ως αποτέλεσμα το:

$$-RS/T$$

Προκειμένου να τιμολογήσουμε αυτό το προϊόν, πρέπει να βρούμε τη λύση στην ακόλουθη εξίσωση της μέσης τιμής εξάσκησης:

$$H(R, t) = a(t) + b(t)R$$

Με $a(T) = 0$ και $b(T) = -1/T$. Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στη ΜΔΕ που υπολογίσαμε για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα με μέση τιμή εξάσκησης και ικανοποιώντας τις οριακές συνθήκες, βρίσκουμε ότι:

$$a(t) = -1/rT * (1 - e^{-r(T-t)}), \quad b(t) = -1/T * e^{-r(T-t)}$$

καταλήγουμε λοιπόν στην σχέση:

$$C - P = S - \frac{S}{rT}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right) - \frac{1}{T} e^{-r(T-t)} \int_0^t S(\tau)\, d\tau$$

όπου C, P είναι η αξία του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και πώλησης αντίστοιχα. Η σχέση που αναφέραμε παραπάνω είναι η σχέση ισότητας δικαιώματος αγοράς και πώλησης.

Δικαιώματα Μέσης Τιμής της Υποκείμενης Αξίας (Average Rate Options)

Το δικαίωμα μέσης τιμής προσομοιάζει με το απλό δικαίωμα (plain vanilla) ως προς τη μορφή του αποτελέσματος, στη λήξη του δικαιώματος, αλλά διαφέρουν κατά το πώς υπολογίζεται η τιμή της υποκείμενης αξίας, το οποίο στην πρώτη περίπτωση λαμβάνεται ως ο μέσος όρος της τιμής. Στην περίπτωση που ο μέσος υπολογίζεται ως αριθμητικός και έχουμε ένα δικαίωμα αγοράς, τότε το αποτέλεσμα αυτού του δικαιώματος στη λήξη του, δίνεται από τη σχέση:

$$\max (I/T - E, 0)$$

Τα δικαιώματα αυτά είναι πιο δύσκολα στην τιμολόγησή τους και αυτό γιατί δεν δέχονται περιορισμούς ομοιότητας, δηλαδή δεν μπορούμε να μειώσουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές από τρις σε δύο. Γενικά αυτά τα προβλήματα λύνονται με αριθμητικούς τρόπους (numerically). Παρόλα αυτά όταν ο μέσος υπολογίζεται ως γεωμετρικός είναι δυνατό να μειώσουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές.

Γεωμετρικός Μέσος και Συνεχόμενο Δείγμα

Το γεγονός ότι μπορούμε να έχουμε μια ακριβή λύση στην περίπτωση που ο μέσος λαμβάνεται ως γεωμετρικός οφείλεται στο ότι ο λογάριθμος της τιμής της αξίας ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο, με διακύμανση ανεξάρτητη της τιμής της αξίας.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δικαίωμα μέσης τιμής, Ευρωπαϊκού τύπου το οποίο στη λήξη του έχει το εξής αποτέλεσμα (τελικός περιορισμός):

$$V(S,I,T) = \Lambda(I)$$

Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή I και όχι από την S. Το γεγονός αυτό κάνει τη επίλυση του προβλήματος δυνατή.

Όταν ο γεωμετρικός μέσος υπολογίζεται σε συνεχές δείγμα, η μεταβλητή I περιγράφεται από το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^t \log S(\tau)\, d\tau$$

όπως έχουμε ήδη δει στην περίπτωση των ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα η ΜΔΕ την οποία χρειάζεται να επιλύσουμε είναι η[12]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \log S\,\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

εφόσον το αποτέλεσμα εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή I μπορούμε να βρούμε μια λύση της μορφής $F(y, t)$ όπου η μεταβλητή y ισούται με:

$y = (I + (T-t)\log S)/T$

και ο τελικός περιορισμός μετατρέπεται σε: $V(S,I,T) = F(y, t)$

Με αυτή την ανεξάρτητα μεταβλητή η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε παραβολική μερική διαφορική εξίσωση με συντελεστές που είναι ανεξάρτητοι της y και χωρίς το λογαριθμικό τμήμα. Έτσι έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma(T-t)}{T}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{T-t}{T}\right)\frac{\partial F}{\partial y} - rF = 0$$

Οι συντελεστές της παραπάνω εξίσωσης είναι μεν ανεξάρτητες της y αλλά αποτελούν συνάρτηση του χρόνου. Τελικά αντικαθιστώντας την

$Z = \exp(y)$

λαμβάνουμε την ΜΔΕ:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma(T-t)}{T}\right)^2 Z^2 \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} + \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{T-t}{T}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\right)\frac{\partial F}{\partial Z} - rF = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση προσομοιάζει με την αντίστοιχη των Black-Scholes με διακύμανση και επιτόκιο που εξαρτώνται από το χρόνο. Αν ο συντελεστής της F ήταν $((T-t)/T)r$, τότε θα ήταν ακριβώς η ΜΔΕ των Black-Scholes. Οι τεχνικές επίλυσης της ΜΔΕ των Black-Scholes με κυμαινόμενους συντελεστές, όπως παρουσιάστηκαν από τους Wilmott και λοιποί (1993 & 1997) εξακολουθούν να δουλεύουν και για την παραπάνω ΜΔΕ. Πιο συγκεκριμένα κάνοντας τις παρακάτω αντικαταστάσεις:

$F` = Fe^{\alpha(t)}$

$V` = Ve^{\beta(t)}$ και

$t` = \gamma(t)$

όπου οι συναρτήσεις α, β και γ δίνονται από:

$$a(t) = \int_t^T [(r - \sigma^2 \frac{1}{2})(\frac{\mathrm{T}-u}{T}) + (\frac{\sigma^2}{2}(\frac{\mathrm{T}-u}{T})^2)]du =$$

$$(r - \frac{\sigma^2}{2})(\frac{(\mathrm{T}-t)^2}{2T}) + \frac{\sigma^2 (T-u)^2}{6T^2}$$

$$\beta(t) = r(T\text{-}t)$$

και

$$\gamma(t) = \int_t^T \sigma^2 (\frac{\mathrm{T}-u}{T})^2 du =$$

$$\frac{\sigma^2 (\mathrm{T}-t)^3}{3T^2}$$

η ΜΔΕ μετατρέπεται στην:

$$\partial V' / \partial t' = (F'^2/2)(\partial^2 V' / \partial F'^2)$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση μπορεί να επιλυθεί ανεξάρτητα από τις παραμέτρους, και υπό τους όρους των αρχικών μεταβλητών η λύση της ΜΔΕ που ικανοποιεί την τελική συνθήκη:

$V(F, T) = V'(F, 0)$

είναι:

$V(F,t) = e^{-\beta(t)} V'(Fe^{\alpha(t)}, \gamma(t))$.

Στο Παράρτημα Α παραθέτουμε, με τη βοήθεια του Mathematica V.4.0, την ολοκληρωμένη επίλυση του προβλήματος εύρεσης της τιμής ενός δικαιώματος μέσης τιμής εξάσκησης, του οποίου ο μέσος υπολογίζεται, σε συνεχόμενο δείγμα, και είναι γεωμετρικός.

[12] Wilmott P., Dewynne J., Howison S. "OPTION PRICING: MATHEMATICAL MODELS AND COMPUTATIONS" OXFORD FINANCIAL PRESS 1993

Μετασχηματισμός κατά Laplace

Ένα από τα πιο αναλυτικά εργαλεία, το οποίο οδήγησε σε μια σαφή φόρμουλα τιμολόγησης, αναπτύχθηκε από τους Geman και Yor[13] και Geman και Eydeland[14]. Η μέθοδος αυτή κάνει χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού κατά Laplace, ο οποίος τουλάχιστον, μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά. Τα αποτελέσματα των Geman, Yor, και Eydeland μπορούν να συνοψισθούν στα παρακάτω:

Σύμφωνα και με την ανάλυση που κάναμε παραπάνω, υποθέτουμε ότι η τιμή της υποκείμενης αξίας δίνεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ):

$$dSt = rStdt + \sigma Std\hat{W}t$$

όπου το r δηλώνει το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, το σ τη μεταβλητότητα της υποκείμενης αξίας και το $\hat{W}t$ τη στάνταρ Brownian κίνηση αναφορικά προς το Q. Έχουμε, επίσης, δει ότι το αποτέλεσμα ενός ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος στη λήξη T, με τιμή εξάσκησης k και με τη μέση τιμή να υπολογίζεται στο χρονικό διάστημα [t0, T] δίνεται από:

$$\max [\, A(t) - k, 0]$$

όπου η μεταβλητή A(t) υπολογίζεται ως εξής:

$$A(t) = 1/(T - t_0) \int_{t_0}^{T} S_u du$$

Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα τιμολόγησης ουδέτερου κινδύνου (Risk Neutral Valuation)[15], η αξία ενός ασιατικού δικαιώματος στο χρόνο t, το οποίο ωριμάζει στο χρόνο T και του οποίου η υποκείμενη αξία ακολουθεί τη γεωμετρική Brownian κίνηση, δίνεται από:

$$u(T-t, S_t) = \exp(-r * (T-t)) * E_Q[\max(A(T) - k, 0)|f_t].$$

Οι Geman και Yor χρησιμοποίησαν μια αναλυτική διαδικασία τριών βημάτων η οποία απλοποιεί την παραπάνω σχέση.

Βήμα 1° : εφόσον η περίοδος την οποία λαμβάνουμε υπόψη μας για τον

[13] Geman H., Yor M., "Bessel Processes, Asian Options, and Perpetuities" MATHEMATICAL FINANCE, 3 1993 σελ. 349 - 375

[14] Geman H., Eydeland A., "Domino Effect" RISK, 8 1995 σελ. 65 - 67

[15] Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δικαίωμα το οποίο πληρώνει ένα τυχαίο μετρήσιμο ποσό στο χρόνο T, και αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα αντισταθμισμένο χαρτοφυλάκιο, πχ η διαδικασία Δ(t), 0≤t≤T, του οποίου η αντίστοιχη διαδικασία αποτελέσματος ικανοποιεί τη σχέση X(T)=V, τότε:

$$X(0) = \tilde{E}[\frac{V}{\beta(T)}]$$

υπολογισμό της μέσης τιμής ξεκινά από τη χρονική στιγμή t_0 (δεδομένη τιμή), χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των υποσυνθήκη προσδοκιών, βγάζουν ως κοινό παράγοντα τον όρο $(T - t_0)$, έξω από τη σχέση της αναμενόμενης τιμής, και στη συνέχεια πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας την τιμή εξάσκησης με το μήκος του παρατηρούμενου χρόνου $(T - t_0)$, καταλήγουν:

$$u(T-t, S_t) = (1/(T-t_0) \exp(-r * (T-t)) * E_Q[\max(\tilde{A}(T) - \tilde{k}, 0)|f_t]$$

όπου:

$$\tilde{A}(T) = \int_0^T S_u du \text{ και } \tilde{k} = k(T - t_0)$$

Βήμα 2°: με ένα κατάλληλο μετασχηματισμό των μεταβλητών διευκολύνουν τον υπολογισμό της υποσυνθήκη προσδοκίας σε μια "ντετερμινιστική συνάρτηση", διασπώντας το παραπάνω ολοκλήρωμα σε δύο ολοκληρώματα, το ένα εκ των οποίων είναι ντετερμινιστικό, ως προς το χρόνο t και το δεύτερο είναι τυχαίο. Πιο συγκεκριμένα οι Geman και Yor ορίζουν:

$$\hat{y}_s = \sigma\hat{W}_s + (r - \sigma^2/2)s$$

όπου:

$\hat{W}_s = \tilde{W}_{s+t} - \tilde{W}_t$ και $s \geq 0$.

Ακολούθως, θέτοντας $b = (r - 1/2\,\sigma^2)$, η παραπάνω σχέση γράφεται ως:

$$\hat{y}_s = \sigma\hat{W}_s + bs$$

η οποία και αποτελεί μια νέα Brownian κίνηση (με μέσο (drift) ίσο με b) ανεξάρτητη από την f_t. Έτσι στην περίπτωση που $t_0 \leq t \leq T$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\tilde{A}(T) = \tilde{A}(t) + S_t \int_0^{T-t} \exp(\hat{y}_s) ds$$

καταλήγουμε ύστερα από τις αναγκαίες αντικαταστάσεις στην παρακάτω μορφή της αναμενόμενης τιμής:

$$E_Q[\max(\tilde{A}(T) - \tilde{k}, 0)\,|F_t] = S_t E_Q[\max(\int_0^{T-t} \exp(\hat{y}_s) ds - \hat{k}, 0)\,|\,F_t].$$

Βήμα 3°: χρησιμοποιώντας την κλιμακωτή ιδιότητα της Brownian κίνησης, προχωρούν σε μια ακόμα αντικατάσταση ως ακολούθως:

Θέτοντας: $s = \dfrac{4u}{\sigma^2}$ οι G-Y βρίσκουν: $ds = \dfrac{4du}{\sigma^2}$ και:

$$\hat{W}_s = \hat{W}_{\frac{4u}{\sigma^2}} = \frac{2}{\sigma}\hat{W}_u$$ [16]

και κάνοντας τις κατάλληλες αντικαταστάσεις μετασχηματίζουν τη σχέση της αναμενόμενης τιμής και καταλήγουν στην:

$$E_Q[\max(\int_0^{T-t}\exp(\sigma\hat{W}_s + bs)ds - \hat{k},0) \mid F_t] = \frac{4}{\sigma^2}\mathrm{E}_Q[\max(\int_0^{\frac{\sigma^2(T-t)}{4}}\exp(2\hat{W}_u + \frac{4b}{\sigma^2}u)du - \frac{\sigma^2\hat{k}}{4},0) \mid F_t]$$

στη συνέχεια ορίζοντας ως:

$$C^{(v)}(h,q) = E_Q[\max(\int_0^h \exp(2\hat{W}_u + 2vu)du - q,0)]$$

καταλήγουμε στον τύπο τιμολόγησης των Ασιατικών δικαιωμάτων των G-Y, ο οποίος στην περίπτωση ενός δικαιώματος αγοράς είναι:

$$u(T-t,S_t) = \frac{4S_t e^{-r(T-t)}}{\sigma^2(T-t_0)}C^{(v)}(h,q)$$

με τις κανονικοποιημένες παραμέτρους:

$v = \dfrac{2r}{\sigma^2} - 1$, (normalized adjusted interest rate)

$h = \dfrac{\sigma^2}{4}(\mathrm{T}-t)$,(normalized time to maturity)

και $q = \dfrac{\sigma^2\hat{k}}{4} = \dfrac{\sigma^2(\tilde{k} - \tilde{A}(t))}{4S_t} = \dfrac{\sigma^2}{4S_t}[k(T-t_0) - \int_0^t S_u du$ (normalized strike price)

Έτσι οι Geman και Yor (G-Y) διπλασιάζοντας το ντετερμινιστικό ολοκλήρωμα με τη νέα τιμή εξάσκησης, επαναλαμβάνοντας την Brownian motion για το τυχαίο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας την scaling ιδιότητα της Brownian κίνησης και αλλάζοντας το χρόνο καταλήγουν στη σχέση αποτίμησης των Ασιατικών δικαιωμάτων[17]. Το μόνο πρόβλημα στον παραπάνω τύπο αποτίμησης των Geman-Yor είναι να βρούμε την αξία του $C^{(v)}(h,q)$ η οποία σχέση αποτελεί την κανονικοποιημένη ως προς το χρόνο t τιμή του Ασιατικού δικαιώματος.[18]

Προκειμένου να εκτιμήσουν την αξία του $C^{(v)}(h,q)$ οι G-Y, όπως περιγράφεται στο έργο των Geman-Edyeland και Musiela-Rutkowski[19] χρησιμοποιούν τη μέθοδο του μετασχηματισμό κατά Laplace ως προς την πρώτη παράμετρο. Εμείς

[16] Με τη χρήση της διπλής ισότητας {=} εδώ εννοούμε ότι οι δύο σχέσεις είναι ισοδύναμες από άποψη κατανομής.
[17] Geman H., "Functionals of Brownian Motion in Path-Dependent Option Valuation"
[18] Sudler G. "Asian Options: Inverse Laplace Transforms and Martingale Methods Reviseted" 1999.
[19] Musiela M.,Rutkowski M., "Martingale Methods in Financial Modeling" SPRINGER 1997.

χρησιμοποιώντας την υπό ρουτίνα Nintegrate του Mathematica 4.0 προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την τιμή της $C^{(v)}(h,q)$:

```
Clear[s, r, t, T, t0, k, S, A, v, h, q, sigma]
r = 0.09; sigma = 0.5; T = 2; t = 1; t0 = 1; k = 100; S = 100; A = 100;
v = 2*r/sigma^2-1;   h = sigma^2/4*(T-t);
q = sigma^2/(4*S)*(k*(T-t0) - (t-t0)*A)
g[s_] =
  NIntegrate[Exp[-x]*x^(0.5*(Sqrt[2*s+v^2] - v) - 2)*
     (1-2*q*x)^(0.5*(Sqrt[2*s+v^2] + v) + 1), {x, 0, 1/(2*q)},
    MinRecursion→ 3, MaxRecursion→ 10] /
   (s*(s-2-2*v)*Gamma[0.5*(Sqrt[2*s+v^2] - v) - 1]);
alpha = 1/sigma^2*(2*v+2)
g1[x_] := g[alpha+x];
c[x_] =
  Re[NIntegrate[Exp[x*h]*g1[x],
    {x, -100000*I, -(2*v+2)*I, (2*v+2)*I, 100000*I},
    WorkingPrecision→ 9]];
F[x_] = 1/(2*Pi*I)*c[x]*Exp[alpha*h]*4*S*
  Exp[-r*(T-t)]/(sigma^2*(T-t0))
```
[20]

[20] Cliff J. Huang, Philip S. Crooke "MATHEMATICS AND MATHEMATICA FOR ECONOMISTS" BLACKWELL 1997 και Hal R. Varian "ECONOMIC AND FINANCIAL MODELING WITH MATHEMATICA" SPRINGER TELOS 1993

Ο αλγόριθμος των Turnbull και Wakeman (T-W)

Οι Turnbull και Wakeman[21] χρησιμοποιούν μια διαφορετική προσέγγιση στην προσπάθεια τιμολόγησης των Ασιατικών δικαιωμάτων. Συγκεκριμένα προσπαθούν να προσεγγίσουν την κατανομή που ακολουθεί ο αριθμητικός μέσος μέσω της κανονικής λογαριθμικής κατανομής. Παρόμοιες μέθοδοι έχουν χρησιμοποιηθεί και από πολλούς άλλους όπως από τον Levy[22] αλλά οι T-W χρησιμοποιούν μια γενικευμένη ανάπτυξη της σειράς κατά Edgeworth (generalized Edgeworth series expansion) η οποία λαμβάνει υπόψη της τις διαφορές "λοξότητας" (skewness) και κύρτωσης (kurtosis). Η προσέγγιση αυτή στηρίζεται στο ότι όλες οι ροπές του αριθμητικού μέσου μπορούν πολύ εύκολα να υπολογιστούν παρά το γεγονός ότι η κατανομή παραμένει άγνωστη. Ο αλγόριθμός τους είναι αρκετά γρήγορος αλλά και ακριβής.

Η γενικευμένη ανάπτυξη της σειράς κατά Edgeworth

Η γενικευμένη ανάπτυξη της σειράς κατά Edgeworth αποτελεί μια τεχνική που χρησιμοποιείται προκειμένου να προσεγγίσουμε την πραγματική συνάρτηση της κατανομής G από μια εναλλακτική συνάρτηση κατανομής F. Η ανάπτυξη αυτή έχει κάποιες ομοιότητες με την γνωστή ανάπτυξη της σειράς κατά Taylor (Taylor series expansion). Υποθέτουμε ότι τόσο η G όσο και η F έχουν συνεχείς συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας g και f, αντίστοιχα, και ότι η τυχαία μεταβλητή X ~ F. Ορίζουμε την ροπή m τάξης ως:

$$\alpha_m(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)dx = E[X^m] \text{ με m=1,2,...}$$

και η κεντρική ροπή m τάξης δίνεται από:

$$\mu_m(F) = E[(X - E[X])^m]$$

και οι πρώτες τέσσερις ροπές είναι:

κ1(F)=α1(F)=E[X]=μέσος

κ2(F)=E[(X-E[X])2]=διακύμανση

κ3(F)=E[(X-E[X])3]=μέτρο της skewness

---

[21] Turnbull S.M., Wakeman L.M., "A Quick Algorithm For Pricing European Average Options" JOURNAL OF FINANCIAL AND QUANTITATIVE ANALYSIS 1991 σελ 377-389.

[22] Levy E., "Pricing European Average Rate Currency Options." JOURNAL OF INTERNATIONAL MONEY AND FINANCE, (11), 1992, σελ. 474 - 491.

κ4(F)=E[(X-E[X])4]-3(E[(X-E[X])2])2 =μέτρο της κύρτωσης

Υποθέτοντας ότι υπάρχουν και οι πέντε ροπές και των δύο κατανομών και ότι η G μπορεί να παραγωγηθεί πέντε φορές, (υπάρχουν και οι πέντε παράγωγοι), μπορούμε να αναπτύξουμε την f(x) ως προς την g(x) ως ακολούθως:

$$f(x)=g(x)+\frac{\kappa_2(F)-\kappa_2(G)}{2!}\frac{d^2g}{dx^2}(x)-\frac{\kappa_3(F)-\kappa_3(G)}{3!}\frac{d^3g}{dx^3}(x)$$
$$+\frac{\kappa_4(F)-\kappa_4(G)+3(\kappa_2(F)-\kappa_2(G))^2}{4!}\frac{d^4g}{dx^4}(x)+\varepsilon(x)$$

όπου ε(χ) είναι η υπολειμματική αξία (σφάλμα), και η $\kappa_1(G)=\kappa_2(F)$, εκ κατασκευής.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η διαφορά ανάμεσα στις f(x) και g(x) δίνεται από τρις όρους και το σφάλμα. Ο πρώτος όρος αποτελεί την προσαρμογή της διαφοράς ανάμεσα στη διακύμανση των δύο κατανομών, ο δεύτερος και ο τρίτος όρος την προσαρμογή της αντίστοιχης διαφοράς για την skewness και την κύρτωση. Οι αντίστοιχοι συντελεστές βαρύτητας δίνονται από τη δεύτερη, τρίτη και τέταρτη παράγωγο της g ως προς το x.

Ο αλγόριθμος

Το μοντέλο

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις τιμολόγησης, υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής δίνεται από τη σχέση:

$dS_t = rS_tdt + \sigma S_tdW_t$

και ο αριθμητικός μέσος δίνεται από:

$$A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_{t_i}$$

όπου ο μέσος των ημερών δίνεται από:

$t_i = ih,\ h=T/n,\ \iota=1,2,\ldots,n$

Το αποτέλεσμα του δικαιώματος στη λήξη του Τ δίνεται από το:

Max{A - K,0}

και έτσι η τιμή του δικαιώματος δίνεται από:

C = exp(-rT)E[max(A - K,0)] = …=

$$=\exp(-rT)\int_K^{\infty}(x-K)f_A(x)dx$$

όπου η f_A είναι η πραγματική αλλά άγνωστη συνάρτηση της κατανομής του

A. Ξαναγράφοντας τον αριθμητικό μέσο έχουμε, εφόσον πρώτα καθορίσουμε τη σχετική τιμή της μετοχής από το χρόνο t_{i-1} μέχρι t_i ως:

$R_i = S_{ti} / S_{ti-1}$, $i = 1,2,\ldots,n$ $t_0=0$

και ορίζοντας:

$L_{n+1} = 1$

$L_i = 1 + R_i L_{n+1}$ $i = 2,3,\ldots,n$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε:

$S_t = S_{ti-1} R_i = S_{ti} R_2 \ldots R_i$ $i = 2,3,\ldots,n$

και ο μέσος μπορεί να γραφεί ως:

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i} =$$

$=1/n(S_{t1}+S_{t1}R_2+S_{t1}R_2R_3+\ldots+S_{ti}R_2\ldots R_n)=$

$=S_{t1}/n(1+R_2+R_2R_3+\ldots+R_2\ldots R_n)$

$= (S_{t1}/n)L_2$

$=(S_0/n)R_1L_2$

Προκειμένου να απαλλαχθούμε από το ντετερμινιστικό κομμάτι της παραπάνω σχέσης ορίζουμε το κλιμακωτό μέσο Y ως:

$Y=(n/S_0)A=R_1L_2$

και η κλιμακωτή τιμή εξάσκησης είναι:

$k=(n/S_0)K$.

Ροπές της πραγματικής κατανομής

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την ανάπτυξη της σειράς κατά Edgeworth στην κατανομή της Y, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ροπές της Y. Έτσι από τη σχέση:

$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$

έχουμε:

$S_{ti}=S_{ti-1}\exp((r-(1/2)\sigma^2)h + \sigma(W_{ti}-W_{ti-1}))$ με $i=1,2,\ldots,n$

και βλέπουμε ότι η $R_i \sim N((r-(1/2)\sigma^2)h, \sigma^2 h)$

και οι ροπές της είναι:

$E[R_i^m]=\exp((r-(1/2)\sigma^2)hm + (1/2)\sigma^2 hm^2)$, $m=1,2,\ldots$

Εφόσον τα απειροστά μικρά τμήματα της Brownian κίνησης είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, τα R_1 και L_2 είναι και αυτά ανεξάρτητα και έχουμε:

$E[Y^m] = E[(R_1 L_2)^m] = E[R_1^m]E[L_2^m]$, $m=1,2,\ldots$

Με βάση την παραπάνω σχέση έχουμε:

$E[L_i^m]=E[(1+R_iL_{i+1})^m]$ i=2,3,…,n   m=1,2,…

Και οι ροπές της L_i είναι:

$E[L_i] = E[1+R_iL_{i+1}]$

$E[L_i^2]=1+E[R_i^2]E[L_{i+1}^2]+2E[R_i]E[L_{i+1}]$

$E[L_i^3]=1+E[R_i^3]E[L_{i+1}^3]+3E[R_i^2]E[L_{i+1}^2]+3\,E[R_i]E[L_{i+1}]$

$E[L_i^4]=1+E[R_i^4]E[L_{i+1}^4]+4E[R_i^3]E[L_{i+1}^3]+6E[R_i^2]E[L_{i+1}^2]$

$+4E[R_i]E[L_{i+1}]$

Και επίσης έχουμε:

$\kappa_1(F) = E[Y]$

$\kappa_2(F) = E[Y^2] - E[Y]^2$

$\kappa_3(F) = E[Y^3] + 2E[Y]^3 - 3\,E[Y^2]\,E[Y]$

$\kappa_4(F) = E[Y^4] - 6E[Y]^4 - 4\,E[Y^3]\,E[Y] + 12\,E[Y^2]E[Y]^2 - 3\,E[Y^2]^2$

Προσεγγίζοντας την Κατανομή

Οι T-W επέλεξαν την λογαριθμικά κανονική κατανομή, ως την προσεγγιστική, κυρίως λόγω της μεγάλης εφαρμογής που έχει στα σύγχρονα χρηματοοικονομικά. Εκ κατασκευής, η πρώτη ροπή της προσεγγιστικής κατανομής G τίθεται ίση με την πρώτη ροπή της πραγματικής (άγνωστης) κατανομής F. Το γεγονός ότι η λογαριθμική κανονική ορίζεται από τις πρώτες δύο παραγώγους, συνεπάγεται ότι αυτό που χρειαζόμαστε είναι να θέσουμε τις δεύτερες ροπές των δύο αυτών κατανομών ίσες. Έτσι έχουμε:

$\alpha_2(G) = \alpha_2(F)$ και εφόσον $\alpha_1(G) = \alpha_1(F)$ (εκ' κατασκευής) έχουμε:

$\kappa_2(G)=\kappa_2(F)$

Με τον τρόπο αυτό υποθέτουμε ότι με το να εξισώσουμε τις δύο πρώτες ροπές και προσαρμόζοντας για της μεγαλύτερης τάξης ροπές, μπορούμε να ερμηνεύσουμε ένα σημαντικό κομμάτι της επιρροής την οποία η κατανομή του μέσου έχει πάνω στην τιμή του δικαιώματος.

Οι ροπές της λογαριθμικής κανονικής κατανομές με παραμέτρους v και λ^2 δίνονται από:

$$\alpha_m(G) = \int_{\infty}^{\infty} x^m g(x)dx = \exp(vm + \frac{1}{2}\lambda^2 m^2)$$

με m=1,2,…

Προκειμένου να βρούμε τις παραμέτρους της προσεγγιστικής κατανομής θα πρέπει να εξισώσουμε τις δύο αντίστοιχες πρώτες ροπές και να λύσουμε το σύστημα:

$\alpha_1(F)=\exp(v+1/2\,\lambda^2)$

$\alpha_2(F)=\exp(2v+2\,\lambda^2)$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα λαμβάνουμε τις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων:

$v=2\ln\alpha_1(F) - 1/2\ln\alpha_2(F)$

$\lambda^2=\ln\alpha_2(F) - 2\ln\alpha_1(F)$

Από τη στιγμή που θα υπολογίσουμε τις ροπές της πραγματικής κατανομής, μπορούμε να υπολογίσουμε και τις παραπάνω παραμέτρους, και έτσι μπορούμε να έχουμε μια πλήρη περιγραφή της προσεγγιστικής κατανομής.

Η Τιμή του Δικαιώματος

Η τιμή του δικαιώματος όπως αναφέραμε πιο πάνω δίνεται από τη σχέση:

$$C=\exp(-rT)E[\max(A-K,0)]$$

$$=\exp(-rT)(S_0/n)E[\max(Y-k,0)]$$

$$=\exp(-rT)\frac{S_0}{n}\int_k^\infty (x-k)f(x)dx$$

όπου η f είναι η πραγματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y.

Εφαρμόζοντας την ανάπτυξη της σειράς κατά Edgeworth στο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης έχουμε:

$$\int_k^\infty (x-k)f(x)dx=\int_k^\infty (x-k)g(x)dx+\frac{\kappa_2(F)-\kappa_2(G)}{2!}g(k)-\frac{\kappa_3(F)-\kappa_3(G)}{3!}\frac{dg}{dx}(k)$$
$$+\frac{\kappa_4(F)-\kappa_4(G)+3(\kappa_2(F)-\kappa_2(G))^2}{4!}\frac{d^2g}{dx^2}(k)+\varepsilon(k)$$

όπου G είναι η προς προσέγγιση λογαριθμική κανονική κατανομή.

Έτσι καταλήγουμε στο ότι ο τύπος τιμολόγησης ενός Ασιατικού δικαιώματος τη χρονική στιγμή 0 με λήξη στο χρόνο T και τιμή εξάσκησης ίση με K, κατά τους T-W είναι:

$$C=\exp(-rT)\frac{S_0}{n}\{\exp(v+\frac{1}{2}\lambda^2)\Phi(d_1)-k\Phi(d_2)+\frac{\kappa_2(F)-\kappa_2(G)}{2!}g(k)$$
$$-\frac{\kappa_3(F)-\kappa_3(G)}{3!}\frac{dg}{dx}(k)+\frac{\kappa_4(F)-\kappa_4(G)+3(\kappa_2(F)-\kappa_2(G))^2}{4!}\frac{d^2g}{dx^2}(k)\}$$

όπου η Φ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και

$d_1=(v+\lambda^2-\ln k)/\lambda$

$d_2= d_1 - \lambda$

Αυτό που θα πρέπει να σημειώσουμε είναι το γεγονός ότι ο αλγόριθμος των Turnbull και Wakeman είναι αρκετά καλός και ακριβής σε περιπτώσεις που η διακύμανση της τιμής της μετοχής είναι χαμηλή και το δικαίωμα λήγει σε βραχύ σχετικά χρονικό διάστημα. Πιο συγκεκριμένα θα πρέπει να ήμαστε ιδιαίτερα επιφυλακτικοί στην χρήση του τρόπου αυτού τιμολόγησης όταν η διακύμανση υπερβαίνει τι 20-30%, και δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις που το δικαίωμα έχει ημερομηνία λήξης μεγαλύτερη από 2-3 χρόνια. Τα προβλήματα αυτά δημιουργούνται από την εφαρμογή της ανάπτυξης της σειράς κατά Edgeworth, με τις διορθώσεις, που αυτή επιδέχεται για την αντιμετώπιση της κύρτωσης και Skewness, που δημιουργούν μεγάλα σφάλματα τιμολόγησης όταν η λήξη του δικαιώματος απομακρύνεται στο χρόνο[23].

[23] Nelken I., "The Handbook Of Exotic Options - Instruments, Analysis, and Applications" IRWIN 1996
Hull J., "Options, Futures, & Other Derivatives" PRENTICE-HULL INTERNATIONAL, Inc.
Briys E., Bellalah M., Mai H., Varenne F. "Options, Futures and Exotic Derivatives - Theory, Application and Practice" JOHN WILEY & SONS 1998
Nielsen L., "Pricing Asian Options" 2001.
Neave E., "A Frequency Distribution Method For Valuing Average options" ASTIN BULLETIN Vol. 27, No 2., 1997 σελ 173-205
"Elements of Probability Theory" Σημειώσεις παραδόσεων

Η μέθοδος των Milevsky και Posner

Οι Milevsky και Posner[24] (M-P) εμπνεύστηκαν από προηγούμενες προσπάθειες εύρεσης μιας προσεγγιστικής κατανομής του αριθμητικού μέσου και χρήσης αυτής για την τιμολόγηση των Ασιατικών δικαιωμάτων. Η προσπάθειά τους όμως διαφέρει ως προς το γεγονός ότι προσπαθούν να προσεγγίσουν την άγνωστη πραγματική κατανομή όχι με βάση την κανονική λογαριθμική αλλά με βάση τη κατανομή Gamma. Και αυτό γιατί το απειροστό άθροισμα των λογαριθμικά κανονικών τυχαίων μεταβλητών ακολουθεί την αντίστροφη κατανομή Gamma. Οι M-P καταλήγουν σε μία φόρμουλα τιμολόγησης η οποία έχει πολλές ομοιότητες με τη γνωστή φόρμουλα των Black-Scholes, και είναι αρκετά γρήγορη και εύκολη στον υπολογισμό της.

Η αντίστροφη κατανομή Gamma

Η Gamma κατανομή

Η συνάρτηση:

$\Gamma(t)=\int_0^\infty e^{-y}y^{t-1}dy$ με t>0

ονομάζεται συνάρτηση Γάμμα. Θα λέμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους α και β όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτής είναι:

$g(x)=\Gamma(\alpha)^{-1}\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}\exp(-\beta^{-1}x)$ για χ, α,β>0 και μηδέν για κάθε άλλη περίπτωση.

Αν β=1 τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας παίρνει τη μορφή:

$$g(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x}$$

και ονομάζεται *τυπική κατανομή γάμμα*. Αποδεικνύεται ότι ο μέσος και η διακύμανση της κατανομής γάμμα είναι:

E(X)=αβ και Var(X)=$\alpha\beta^2$

Η αντίστροφη κατανομή Γάμμα.

[24] Milevsky M.A, Posner S.E., "Asian Options, the Sum of Lognormals, and the Reciprocal Gamma Distribution" JOURNAL OF FINANCIAL AND QUANTITATIVE ANALYSIS, 33, 1998,σελ 409-422.

Ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή Y ως: $Y = \frac{1}{x}$. Η τυχαία αυτή μεταβλητή ακολουθεί τη Γάμμα κατανομή με παραμέτρους α και β. Η συνάρτηση της κατανομής G_R της Y σχετίζεται με τη συνάρτηση της κατανομής G της X με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$G_R(y) = P(Y \le y) = P(\frac{1}{Y} \ge \frac{1}{y}) = P(X \ge \frac{1}{y}) = 1 - P(X \le \frac{1}{y})$$

$$= 1 - G(\frac{1}{y})$$

με y≥0. Εφόσον η κατανομή Γάμμα είναι συνεχείς, έχουμε: $\frac{d}{dy}(G(y)) = g(y)$ και έτσι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας g_R της αντίστροφης κατανομής Γάμμα είναι:

$$g_R(y) = \frac{d}{dy}(G_R(y)) = \frac{d}{dy}(1 - G(\frac{1}{y})) = 0 - \frac{-1}{y^2} g(\frac{1}{y}) = \frac{1}{y^2} g(\frac{1}{y}), \ y>0$$

Οι ροπές της αντίστροφης Γάμμα κατανομής υπολογίζονται με βάση την παρακάτω σχέση:

$M_i = E[Y^i] = E[\frac{1}{X^i}] = \frac{1}{\beta^i(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-\iota)}, i \in \mathrm{N}, i < \alpha$ και οι παράμετροι α και β υπολογίζονται με βάση τις δύο πρώτες ροπές, οι οποίες ορίζουν πλήρως την κατανομή, ως εξής:

$$\alpha = \frac{2\mathrm{M}_2 - \mathrm{M}_1^{\ 2}}{\mathrm{M}_2 - \mathrm{M}^2{}_1}$$

$$\beta = \frac{\mathrm{M}_2 - \mathrm{M}^2{}_1}{\mathrm{M}_1 \mathrm{M}_2}$$

Η Μέθοδος

Το Μοντέλο

Η τιμή της μετοχής δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

και ο αριθμητικός μέσος δίνεται από:

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$$

όπου οι μέρες του μέσου όρου είναι;

$t_i = ih, h = \frac{T}{n}, i = 1,2,...,n$

και στην περίπτωση που έχουμε συνεχόμενο δείγμα, ο μέσος υπολογίζεται από το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$A = \frac{1}{T}\int_0^T S_u du$$

Το αποτέλεσμα του δικαιώματος στη λήξη του Τα δίνεται από:

max{A-K,0} και η τιμή του στο χρόνο μηδέν είναι:

C=exp(-rT)E[max(A - K,0)]=...=

$$= \exp(-rT)\int_K^\infty (y-K)f(y)dy$$

όπου η f είναι η πραγματική αλλά άγνωστη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της A. Θα προσεγγίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας g_R της αντίστροφης κατανομής Γάμμα. Προκειμένου να πάρουμε μια καλή προσέγγιση της κατανομής υπολογίζουμε τις ροπές της πραγματικής κατανομής τις οποίες και θέτουμε ίσες με τις αντίστοιχες ροπές της αντίστροφης κατανομής Γάμμα. Έτσι η τιμή δίνεται από:

$$C = \exp(-rT)\int_K^\infty (y-K)g_R(y)dy$$

Διακριτός Μέσος Όρος

Ορίζουμε:

$$I = \frac{1}{S_0}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$$

το οποίο αποτελεί το άθροισμα των μέσων τιμών κλιμακούμενο προς τη σημερινή τιμή. Η σχέση μεταξύ της I και του αριθμητικού μέσου A δίνεται από τη σχέση:

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i} = \frac{S_0}{n} I$$

και οι πρώτες δύο ροπές ουδέτερου κινδύνου του αριθμητικού μέσου είναι:

$$E[A] = \frac{S_0}{n} e^{rh} \left(\frac{1-e^{rnh}}{1-e^{rh}}\right)$$

$$E[A^2] = \frac{S_0^{\,2}}{n^2}(a_1 - a_2 + a_3 - a_4)$$

με

$$a_1 = \frac{e^{(2r+\sigma^2)h} - e^{(2r+\sigma^2)(n+1)h}}{(1-e^{rh})(1-e^{(2r+\sigma^2)h})}$$

$$a_2 = \frac{e^{(r(n+2)+\sigma^2)h} - e^{(2r+\sigma^2)(n+1)h}}{(1-e^{rh})(1-e^{(r+\sigma^2)h})}$$

$$a_3 = \frac{e^{(3r+\sigma^2)h} - e^{(r(n+2)+\sigma^2)h}}{(1-e^{rh})(1-e^{(r+\sigma^2)h})}$$

$$a_4 = \frac{e^{(4r+2\sigma^2)h} - e^{(r(n+2)+\sigma^2)h}}{(1-e^{(r+\sigma^2)h})(1-e^{(2r+\sigma^2)h})}$$

διαλέγουμε τις παραμέτρους της αντίστροφης κατανομής Γάμμα έτσι ώστε να είναι ίσες με τις παραπάνω ροπές της πραγματικής κατανομής. Έτσι έχουμε:

$$\alpha = \frac{2\mathrm{E}[\mathrm{A}^2] - \mathrm{E}[\mathrm{A}]^2}{\mathrm{E}[\mathrm{A}^2] - \mathrm{E}[\mathrm{A}]^2}$$

$$\beta = \frac{\mathrm{E}[\mathrm{A}^2] - \mathrm{E}[\mathrm{A}]^2}{\mathrm{E}[\mathrm{A}]\mathrm{E}[\mathrm{A}^2]}$$

Έτσι η τιμή του Ασιατικού δικαιώματος κατά τους M-P με λήξη στο χρόνο T, και τιμή εξάσκησης K είναι:

$$C = \exp(-rT)E[A]G(\frac{1}{K} \mid \alpha - 1, \beta) - \exp(-rT)KG(\frac{1}{K} \mid \alpha, \beta)$$

όπου G(.|α,β) είναι η συνάρτηση κατανομής της κατανομής Γάμμα με παραμέτρους α και β (όπως αυτές δίνονται από την παραπάνω σχέση).

Συνεχόμενος Αριθμητικός Μέσος

Στην περίπτωση που ο μέσος υπολογίζεται σε συνεχόμενο δείγμα τιμών οι M-P ορίζουν το κλιμακωτό ολοκλήρωμα I ως:

$I = \frac{1}{S_0}\int_0^T S_u du$ και ο συνεχόμενος μέσος δίνεται από:

$$A = \frac{1}{T}\int_0^T S_u du = \frac{S_0}{T} I$$

η I στο όριό της κατανέμεται με βάση την αντίστροφη Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $1 + \frac{-2r}{\sigma^2}$ και $\frac{1}{2}\sigma^2$. Η σχέση αυτή ισχύει όταν $r - \frac{1}{2}\sigma^2 < 0$, δηλαδή όσο μεγαλύτερη η διακύμανση τόσο καλύτερο είναι το αποτέλεσμα που μας δίνει η μέθοδος των M-P.

Οι δύο πρώτες ροπές υπολογίζονται ως:

$$E[A] = S_0 \frac{\exp(rT) - 1}{rT}$$

$$E[A^2] = 2\frac{{S_0}^2}{T^2}\{\frac{\exp(2r+\sigma^2)\mathrm{T}}{(r+\sigma^2)(2r+\sigma^2)} + \frac{1}{r}[\frac{1}{2r+\sigma^2} - \frac{\exp(rT)}{r+\sigma^2}]\}$$

και μπορούμε όπως προηγουμένως να υπολογίσουμε τις παραμέτρους α και β. Τελικά ο τύπος τιμολόγησης δίνεται από τη σχέση:

$$C = S_0 \frac{-\exp(-rT)}{rT} G(\frac{1}{K} \mid \alpha - 1, \beta) - \exp(-rT) K G(\frac{1}{K} \mid \alpha, \beta)$$

Η μέθοδος Του Vorst

Ο Vorst[25] παρουσιάζει ένα ακριβή τύπο τιμολόγησης των Ασιατικών δικαιωμάτων ο οποίος βασίζεται στο γεωμετρικό μέσο. Χρησιμοποιεί τον τρόπο αυτό προκειμένου να προσεγγίσει την τιμή του αριθμητικού μέσου Ασιατικό δικαίωμα προσαρμόζοντας την τιμή εξάσκησης με βάση τη διαφορά ανάμεσα στον αναμενόμενο αριθμητικό και γεωμετρικό μέσο. Στη συνέχεια ορίζει ανώτερα και κατώτερα όρια στην τιμή του δικαιώματος.

Η Μέθοδος

Το Μοντέλο

Έστω ότι η τιμή της μετοχής δίνεται από τη σχέση:

$$S_t = S_0 \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$$

ο γεωμετρικός μέσος δίνεται από τη σχέση:

$$G = (\prod_{i=1}^{n} S_{t_i})^{\frac{1}{n}}$$

και ο αριθμητικός μέσος δίνεται από:

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$$

Γεωμετρικού Μέσου Ασιατικά Δικαιώματα

Παίρνοντας το λογάριθμο του τύπου του γεωμετρικού μέσου έχουμε:

$$\ln G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln S_{t_i} = \ln S_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{S_{t_i}}{S_0}$$

και κάνοντας το ίδιο και στον τύπο της τιμής της μετοχής έχουμε:

$$\ln \frac{S_{t_i}}{S_0} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t_i + \sigma W_{t_i}$$

η οποία σχέση ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο:

[25] Vorst T., "Prices and Hedge Ratios of Average Exchange Rate Options" INTERNATIONAL REVIEW OF FINANCIAL ANALYSIS, 1992 σελ. 179-193.

$(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t_i$ και διακύμανση $\sigma^2 t_i$. Εφόσον η Brownian κίνηση έχει ανεξάρτητα τμήματα, από τις δύο παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι η lnG κατανέμεται κανονικά με μέσο μ_G και διακύμανση σ^2_G. Ο μέσος ισούται με:

$$\mu_G = \ln S_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[\ln\frac{S_{t_i}}{S_0}] = \ldots =$$

$$= \ln S_0 + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T+h}{2}$$

και η διακύμανση ισούται με:

$$\sigma_G^{\ 2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(\ln\frac{S_{t_i}}{S_0}, \ln\frac{S_{t_j}}{S_0}) = \ldots =$$

$$= \frac{\sigma^2 h}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) = \ldots =$$

$$= \frac{\sigma^2 h}{n}\frac{(2n+1)(n+1)}{6}$$

Έτσι βλέπουμε ότι ο γεωμετρικός μέσος G κατανέμεται λογαριθμικά κανονικά.

Σύμφωνα λοιπόν με τον Vorst η τιμή ενός Ασιατικού δικαιώματος με γεωμετρικό μέσο όρο, το οποίο λήγει στο χρόνο T και έχει τιμή εξάσκησης ίση με K, στο χρόνο μηδέν δίνεται από τον τύπο:

$$C_G = \exp(-rT)\{\exp(\mu_G + \frac{1}{2}\sigma_G^{\ 2})\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\}$$

όπου:

$$d_1 = \frac{\mu_G - \ln K + \sigma_G^{\ 2}}{\sigma_G}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_G$$

Δικαιώματα Αριθμητικού Μέσου Όρου και Όρια

Εφόσον ο γεωμετρικός μέσος όρος είναι μικρότερος από τον αριθμητικό μέσο, G≤A, η τιμή του δικαιώματος με γεωμετρικό μέσο όρο αποτελεί ένα κάτω όριο για την τιμή του δικαιώματος με αριθμητικό μέσο όρο, δηλαδή:

$$C_G = \exp(-rT)E[\max(G-K,0)] \le \exp(-rT)E[\max(A-K,0)] = C$$

Η ανισότητα:

max(A - K, 0) = max(G - K, G - A) + A - G

$\leq \max(G - K, 0) + A - G$[26]

οδηγεί στο άνω όριο:

$\exp(-rT)E[\max(G - K, 0) + A - G]$

$= \exp(-rT)\{E[\max(G - K, 0)] + E[A] - E[G]\}$

$= C_G + \exp(-rT)(E[A] - E[G])$

έτσι καταλήγουμε στα ακόλουθα άνω και κάτω όρια:

$C_G \leq C \leq C_G + \exp(-rT)\,(E[A] - E[G])$.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή του πάνω ορίου θα πρέπει να υπολογίσουμε τη πρώτη ροπή του αριθμητικού μέσου όρου και του γεωμετρικού αντίστοιχα. Έτσι έχουμε για τον αριθμητικό μέσο:

$$E[A] = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}] = \ldots = \frac{S_0}{n} e^{rh} \frac{1 - e^{rnh}}{1 - e^{rh}}$$

και για το γεωμετρικό μέσο αντίστοιχα:

$$E[G] = \exp(\mu_G + \frac{1}{2}{\sigma_G}^2)$$

Όπως αναφέραμε και στην αρχή της περιγραφής της μεθόδου η προσπάθεια του Vorst έγκειται στην προσέγγιση της τιμής του αριθμητικού μέσου όρου δικαιώματος με τη χρήση της τιμής του γεωμετρικού μέσου όρου δικαιώματος με αντίστοιχη προς τα κάτω μετατροπή της τιμής εξάσκησης. Η λογική στην προσέγγιση αυτή βρίσκεται στο ότι ο γεωμετρικός και ο αριθμητικός μέσος διακρίνονται από μεγάλη θετική συσχέτιση και το ίδιο συμβαίνει και στις αντίστοιχες τιμές των δικαιωμάτων. Επίσης όταν τιμολογούμε ένα δικαίωμα με χαμηλότερη τιμή εξάσκησης κατά κάποιο τρόπο αντικαθιστά το γεγονός ότι η τιμή του δικαιώματος με γεωμετρικό μέσο όρο είναι πάντα χαμηλότερη από την αντίστοιχη τιμή ενός αριθμητικού μέσου όρου δικαιώματος. Έτσι σύμφωνα με τον Vorst ορίζουμε την τιμή, στη χρονική στιγμή μηδέν, ενός ασιατικού δικαιώματος που λήγει στο χρόνο T και έχει τιμή εξάσκησης ίση με K ως εξής:

$\widetilde{C} = \exp(-rT)E[\max(G - K', 0)]$

όπου η προσαρμοσμένη τιμή εξάσκησης K' ορίζεται ως:

$K' = K - (E[A] - E[G])$

Τελικά η φόρμουλα τιμολόγησης ορίζεται ως:

[26] Η ισότητα ισχύει στην περίπτωση που A=G, ενώ στην περίπτωση που έχουμε A≥G ισχύει η ανισότητα.

$$\widetilde{C} = \exp(-rT)\{\exp(\mu_G + \frac{1}{2}\sigma_G{}^2)\Phi(d_1') - K'\Phi(d_2')\}$$

όπου τα μ_G και σ^2_G ορίζονται όπως έχουμε αναλύσει παραπάνω, και επίσης οι d'_1 και d'_2 ορίζονται όπως ακολούθως:

$$d_1' = \frac{\mu_G - \ln K' + \sigma_G{}^2}{\sigma_G}$$

$$d_2' = d_1' - \sigma_G$$

Η κατά προσέγγιση τιμή του δικαιώματος όπως υπολογίστηκε από την παραπάνω σχέση, εξακολουθεί να βρίσκεται ανάμεσα στο άνω και κάτω όριο της τιμής του δικαιώματος, γεγονός που συνεπάγεται ότι το σφάλμα τιμολόγησης μπορεί να περιοριστεί ως:

$$|\,\widetilde{C} - C\,| \le \exp(-rT)(E[A] - E[G])$$

Η Μέθοδος του Curran

Ο Curran εισάγει μια εξαιρετικά ακριβή μέθοδο αποτίμησης των ασιατικών δικαιωμάτων. Η προσέγγισή του βασίζεται στην προσπάθεια να θέσει το γεωμετρικό μέσο όρο υπό συνθήκη και στη συνέχεια να τον ολοκληρώσει ως προς τη λογαριθμική κανονική κατανομή του.

Η Μέθοδος

Το Μοντέλο

Όπως έχουμε αναφέρει και στις παραπάνω μεθόδους που αναλύσαμε υποθέτουμε και εδώ ότι η τιμή της μετοχής δίνεται από τη γνωστή στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

ο αριθμητικός μέσος όρος δίνεται από:

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$$

και η τιμή της μετοχής στο χρόνο t_i κατανέμεται λογαριθμικά κανονικά, έχοντας:

$$\ln\frac{S_{t_i}}{S_0} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t_i + \sigma W_{t_i} \sim N(\mu_i, \sigma^2_i)$$

Ο γεωμετρικός μέσος δίνεται από τη σχέση:

$$G = (\prod_{i=1}^{n} S_{t_i})^{\frac{1}{n}}$$

και παίρνοντας το λογάριθμό του έχουμε:

$$\ln G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln S_{t_i} = \ln S_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{S_{t_i}}{S_0}$$

από την ανάλυση που προηγήθηκε ξέρουμε ότι ο λογάριθμος του γεωμετρικού μέσου όρου κατανέμεται και αυτός κανονικά με παραμέτρους μ_G και σ^2_G.

Καταλήγουμε λοιπόν να έχουμε τόσο την οριακή κατανομή της $\ln S_{ti}$ όσο και της $\ln G$ να είναι και οι δύο κανονικές, γεγονός που μας οδηγεί στην υπόθεση ότι και η από κοινού κατανομή τους είναι και αυτή κανονική.

Πρόταση 1: Το τυχαίο διάνυσμα $\eta_i = (\ln S_{ti}, \ln G)$ έχει μια δισδιάστατη κανονική κατανομή για i = 1,2,…,n με μέσο το διάνυσμα:

(μ_i, μ_G), i = 1,2,…,n

και με το πίνακα διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων:

$$\begin{bmatrix} \sigma_i^2 & \gamma_i \\ \gamma_i & \sigma_G^2 \end{bmatrix}$$

όπου γ_i = Cov($\ln S_{ti}$, lnG)=$\frac{\sigma^2 h}{2n}((2n+1)i-i^2)$

Πρόταση 2: Η υποσυνθήκη κατανομή της $\ln S_{ti}$ δεδομένου της lnG κατανέμεται κανονικά:

$$(\ln S_{t_i} \mid \ln G = y) \sim N(\mu_i + (y-\mu_G)\frac{\gamma_i}{\sigma_G^2}, \sigma_i^2 - \frac{\gamma^2_i}{\sigma_G^2}) \text{ i=1,2,...,n}$$

Επίσης η (S_{ti}|lnG) κατανέμεται και αυτή λογαριθμικά κανονικά και

$$E[S_{t_i} \mid \ln G = y] = \exp(\mu_i + (y-\mu_G)\frac{\gamma_i}{\sigma_G^2} + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 - \frac{\gamma_i^2}{\sigma_G^2}))$$

Τα Όρια στην Τιμή του Δικαιώματος

Η τιμή του δικαιώματος όπως έχουμε δει δίνεται από τη σχέση:

$C=e^{-rT}E[\max(A - K, 0)]$

Παίρνοντας την παραπάνω σχέση υπό τη συνθήκη του γεωμετρικού μέσου όρου έχουμε:

$C= e^{-rT}E[E[\max(A - K, 0)|G]]$

$$= e^{-rT}\int_0^{\infty} E[\max(A-K,0) \mid G = x]g(x)dx$$

όπου g είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της λογαριθμικής κανονικής κατανομής της G. Στη συνέχεια σπάμε το παραπάνω ολοκλήρωμα σε δύο και ορίζουμε:

$$C_1 = \int_0^K E[\max(A-K,0) \mid G = x]g(x)dx$$

$$C_2 = \int_K^{\infty} E[\max(A-K,0) \mid G = x]g(x)dx$$

και έτσι η τιμή του δικαιώματος ορίζεται πλέον ως:

$C = e^{-rT}(C_1+C_2)$

Εφόσον ο αριθμητικός μέσος είναι μεγαλύτερος από το γεωμετρικό A≥G έχουμε:

$$C_2 = \int_K^{\infty} E[A-K \mid G = x]g(x)dx$$

η C_1 αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου το δικαίωμα γεωμετρικού μέσου λήγει έξω από τα λεφτά του και δεν γνωρίζουμε πως λήγει το δικαίωμα αριθμητικού μέσου. Το

C_2 αντιστοιχεί στην περίπτωση που και τα δύο δικαιώματα λήγουν μέσα στα λεφτά τους.

Η πρόταση 2 μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το C_2 χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση, αλλά θα πρέπει να ορίσουμε μια προσέγγιση του C_1. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Jensen παίρνουμε ένα κάτω όριο για το C_1:

$$C_1 = \int_0^K E[\max(A-K,0) \mid G=x]g(x)dx$$

$$\geq \int_0^K (\max(E[A-K \mid G=x],0)g(x)dx$$

$$= \int_L^K E[A-K \mid G=x]g(x)dx$$

$$= \widetilde{C}_1$$

όπου:

$$L = \{x \mid E[A \mid G=x]=K\}$$

Προκειμένου να βρούμε το L υπολογίσουμε τη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή:

$$E[A \mid G=x] = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i} \mid G=x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[S_{t_i} \mid \ln G = \ln x]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp(\mu_i + (\ln x - \mu_G)\frac{\gamma_i}{\sigma_G^2} + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 - \frac{\gamma^2{}_i}{\sigma_G^2}))$$

Στη συνέχεια θέτουμε την παραπάνω σχέση ίση με Κ και λύνουμε ως προς χ.

Έτσι λοιπόν το κάτω όριο της τιμής ενός Ασιατικού δικαιώματος με τιμή εξάσκησης Κ και λήξη στο χρόνο Τ δίνεται από:

$$\widetilde{C} = \exp(-rT)\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2)\Phi(\frac{\mu_G - \ln L + \gamma_i}{\sigma_G}) - K\Phi(\frac{\mu_G - \ln L}{\sigma_G})$$

με όλες τις παραμέτρους γνωστές.

Η Προσέγγιση των Bouaziz - Briys - Crouhy

Οι Bouaziz-Briys-Crouhy το 1994, παρουσίασαν μια κλειστού τύπου φόρμουλα για την τιμολόγηση Ευρωπαϊκού τύπου δικαιωμάτων με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης. Η τιμή εξάσκησης υπολογίζεται ως ένας αριθμητικός μέσος. Η φόρμουλά τους εφαρμόζεται σε "plain vanilla" δικαιώματα μέσης τιμής (αυτά των οποίων η τιμή εξάσκησης υπολογίζεται με βάση όλη τη ζωή του δικαιώματος μέχρι τη λήξη του) και σε Forward-starting δικαιώματα, (δηλαδή δικαιώματα στα οποία ο μέσος όρος αρχίζει να υπολογίζεται από μελλοντική στιγμή t μετά την δημιουργία του δικαιώματος). Η φόρμουλα βασίζεται πάνω σε μία μικρή γραμμική προσέγγιση.

Στο μοντέλο αυτό το Ασιατικό δικαίωμα είναι γραμμένο πάνω σε μια υποκείμενη αξία και λήγει στη περίοδο Τ. Το δικαίωμα είναι Forward-Starting εφόσον η τιμή εξάσκησης αρχίζει να υπολογίζεται, ως ο αριθμητικός μέσος των τιμών που λαμβάνει η υποκείμενη αξία, στη χρονική περίοδο [Τ. - Α, Τ.]:

$$K = \frac{1}{A}\int_{T-A}^{T} S(u)du \quad (1)$$

όπου το Α αποτελεί μια χρονική στιγμή μετά τη χρονική στιγμή μηδέν, (ως μηδέν θεωρούμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία εκδίδεται το δικαίωμα). Στην περίπτωση του "plain vanilla" δικαιώματος έχουμε ότι Τ. - Α = 0.

Και στην περίπτωση αυτή θεωρείται ότι η τιμή της υποκείμενης αξίας δημιουργείται από τη γνωστή μας εξίσωση:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (2)$$

Η τιμή του Ασιατικού Forward-Starting δικαιώματος στη χρονική στιγμή t ορίζεται ως: $C^e(S,K,t)$ και είναι ίση με:

$$C^e(S,K,t) = e^{-r(T-t)}E[\max(S_T-k,0)|F_T] \quad (3)$$

Διακρίνουμε δύο χρονικές περιόδους: η πρώτη είναι αυτή πριν από τη στιγμή που αρχίζουμε να υπολογίζουμε τη τιμή της τιμής εξάσκησης, δηλαδή η [0, Τ. - Α], και η δεύτερη η μεταγενέστερη δηλαδή η [Τ. - Α, Τ.]. Εφαρμόζοντας την επαναλαμβανόμενη υποσυνθήκη προσδοκία στην (3) για τη χρονική περίοδο πριν από τη στιγμή Τ.-Α, έχουμε:

$$C^c(S,K,t) = e^{-r(T-t)}E\{E[\max(S_T-K, 0)|F_{T-A}]|F_T\} \quad (4)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη κατά Teylor και κάνοντας την παραπάνω σχέση γραμμική και ύστερα από μερικές πράξεις καταλήγουν στη κλειστή τύπου επίλυση της τιμής του ασιατικού τύπου δικαιώματος για τη χρονική περίοδο [0, T. - A], η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$C(S,K,t) = S_t e^{-rA}[\frac{A\hat{r}}{2} N(\frac{\sqrt{3}\hat{r}\sqrt{A}}{2\sigma}) + \sqrt{\frac{\sigma^2 A}{6\pi}} e^{-3\hat{r}A/8\sigma^2}] \quad (5) \quad \text{για } t \le T - A$$

με $\hat{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$

Στη χρονική περίοδο [T. - A, T.] η τιμή της τιμής εξάσκησης αρχίζει σιγά σιγά να διαμορφώνεται και οι επενδυτές γνωρίζουν την ακολουθία [S_{T-A}, S_t] και το M_t το οποίο δίνεται από τη σχέση: $\frac{1}{A}\int_{T-A}^{t} S(u)du$

Η τιμή εξάσκησης, έχοντας ως κριτήριο τη χρονική στιγμή t, μπορεί να χωριστεί σε δύο τμήματα ως ακολούθως:

$$\frac{1}{A}\int_{T-A}^{T} S(u)du = \frac{1}{A}\int_{T-A}^{t} S(u)du + \frac{1}{A}\int_{t}^{T} S(u)du \quad (6)$$

στη συνέχεια το πρόβλημα της τιμολόγησης μπορεί να αναμορφωθεί ως:

$$C^e(S,K,t) = e^{-r(T-t)} E[\max(S_T - M_t - \frac{1}{A}\int_{t}^{T} S(u)du, 0) \mid F_t] \quad (7)$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι την ανάπτυξη κατά Teylor και τη γραμμικότητα καταλήγουμε στην επιθυμητή φόρμουλα:

$$C(S,K,t) = S_t e^{-r(T-t)}[mN(\frac{m}{\sqrt{\upsilon}}) + \sqrt{\frac{\upsilon}{2\pi}} e^{-m^2/2\upsilon}] \quad (7)$$ για t > T - A, και με

$$m = \sigma^2[(T-t) + \frac{(T-t)^3}{3A^3} - \frac{(T-t)^2}{A}]$$

Η αντίστοιχη φόρμουλα για το put δίνεται από τη σχέση:

$$P(S,K,t) = [\frac{1-e^{rA}}{rA} - 1]S_t + C(S,K,t), \forall t \le T - A$$

$$P(S,K,t) = M_t e^{-r(T-t)} + [\frac{1-e^{r(T-t)}}{rA} - 1]S_t + C(S,K,t), \forall t > T - A$$

(8) & (9)

Monte Carlo προσομοίωση

Η Monte Carlo προσομοίωση (Monte Carlo Simulation-MCS) αποτελεί βασικά μια μέθοδο εκτίμησης ενός ολοκληρώματος. Συχνά δεν είναι τόσο η καλύτερη μέθοδος εφαρμογής ούτε και η πιο γρήγορη, αλλά είναι εύκολη στην εφαρμογή της και βρίσκει εφαρμογές σε μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων.

Εισροές στον αλγόριθμο προσομοίωσης αποτελούν ένα σετ από τυχαίους αριθμούς. Οι τυχαίοι αυτοί αριθμοί προέρχονται από *μηχανές παραγωγής τυχαίων αριθμών (random number generators-RNG)* οι οποίες μπορούν να χαρακτηριστούν ως ιδανικές στις περιπτώσεις που παράγουν μια ακολουθία IID (independent and identically distributed) αριθμών. Στις περισσότερες περιπτώσεις εφαρμόζεται η ομοιόμορφη κατανομή Φ[0,1].

Δεμένου του ότι είναι δύσκολο να βρούμε πραγματικές RNG, έχουν αναπτυχθεί ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι αποκαλούνται *μηχανές παραγωγής τυχαίων ψευδό-μεταβλητών* (pseudo-random number generators).

Δειγματοληψία

Ξέρουμε ότι η λύση στη σχέση:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

δίνεται από:

$$S_t = S_0 \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$$

και ξέρουμε ότι $W_t \sim N(0,t)$

και έτσι:

$$\ln\frac{S_t}{S_0} \sim N((r-\frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$$

τα δείγματα $S_t^{(i)}$ από την κατανομή της S_t μπορούμε να τα πάρουμε αν θέσουμε:

$$S^{(i)}{}_t = S_0 \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z^i), i = 1,2,\dots,n$$

όπου $Z^{(i)} \sim N(0,1)$ και $i = 1,2,\dots,n$ ανεξάρτητα.

Αν θέλουμε να πάρουμε ένα δείγμα σε διαφορετικές χρονικές περιόδους τότε μπορούμε να μετατρέψουμε την παραπάνω λύση ως εξής:

$$S^{(i)}{}_{t_j} = S_{t_{j-1}}{}^{(i)} \exp((r-\frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_{j-1}) + \sigma\sqrt{t_j - t_{j-1}} Z^{i,j}), j = 1,2,\ldots,m, i = 1,2,\ldots,n$$

με $0<t_1<t_2<\ldots<t_m = T$

Η προσομοίωση

Σύμφωνα με το νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε:

$$\hat{S}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S^{(i)}{}_t \to E[S_t]$$

η σχέση αυτή αποτελεί την καρδία της Monte Carlo προσομοίωσης. Προσεγγίζουμε λοιπόν την αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής παίρνοντας τυχαία δείγματα από την κατανομή της και στη συνέχεια λαμβάνουμε τον μέσο όρο τους. Η $\hat{S}_t$ όπως ορίστηκε στην παραπάνω σχέση αποτελεί την εκτίμηση που μας δίνει η Monte Carlo προσομοίωση για την αναμενόμενη τιμή $E[S_t]$.

Ένας καλός εκτιμητής θα πρέπει να έχει τα ακόλουθα δύο χαρακτηριστικά:

1. Θα πρέπει να συγκλίνει στο σωστό μέσο και
2. Η διακύμανσή του θα πρέπει να μειώνεται όσο αυξάνεται το δείγμα το μέγεθος του δείγματος.

Έτσι στη γενικότερη περίπτωση που θέλουμε να αποτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή $E[f(S_t)]$ για κάποια συνάρτηση $f : R^m \to R$, της οποίας η κατανομή είναι άγνωστη έχουμε:

Θέτουμε $X = (S_{t1}, S_{t2}, \ldots, S_{tm})$. Ορίσουμε στη συνέχεια την $Y = f(X)$ και ως $Y^{(i)}$ ορίζουμε τις προσομοιωμένες τιμές της Y τις οποίες λαμβάνουμε με δειγματοληψία από την κατανομή της S_{tj}

$$Y^{(i)} = f(S^{(i)}{}_{t1}, \ldots, S^{(i)}{}_{tm}), i = 1,2,\ldots,n$$

Η εκτίμηση της E[Y] από την Monte Carlo προσομοίωση δίνεται από:

$$\hat{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y^{(i)}$$

η οποία σύμφωνα με το νόμο των μεγάλων αριθμών τείνει να προσεγγίσει την τιμή του σωστού μέσου, όσο αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος που χρησιμοποιούμε, δηλαδή καθώς το n→∞ και γράφουμε ότι:

$$\hat{Y} \rightarrow E[Y],\ n\rightarrow\infty$$

με άλλα λόγια ο εκτιμητής μας είναι ubiased. Επίσης η διακύμανση του εκτιμητή δίνεται από τη σχέση:

$$Var(\hat{Y}) = Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y^{(i)}) = \frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^{n} Y^{(i)}) = \frac{Var(Y)}{n}$$

η οποία προφανώς μειώνεται καθώς αυξάνεται το μέγεθος του n. Προκειμένου όμως να βρούμε πόσο ακριβής είναι η εκτίμηση την οποία έχουμε υπολογίσει θα πρέπει να βρούμε ένα διάστημα τιμών το οποίο εμπεριέχει την πραγματική τιμή με ένα αποδεχτό επίπεδο εμπιστοσύνης α. Έχουμε λοιπόν την υπόθεση ότι γεγονότα τα οποία συμβαίνουν με πιθανότητα μικρότερη από α χαρακτηρίζονται ως μη σημαντικά. Το διάστημα εμπιστοσύνης (1-α) είναι λοιπόν αυτό το οποίο με πιθανότητα (1-α) εμπεριέχει τη σωστή πραγματική τιμή. Κάνοντας χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος έχουμε:

$$\frac{\hat{Y} - E[Y]}{\sigma_Y / \sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

όπου σ_Y είναι η τυπική απόκλιση της $Y^{(1)}$. Εφόσον η διακύμανση του δείγματος s^2_Y των $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)}$ που δίνεται από:

$$s_Y^{\,2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y^{(i)} - \hat{Y})^2$$

συγκλίνει προς την σ^2_Y μπορούμε να αντικαταστήσουμε την σ_Y με την s_Y και να έχουμε:

$$\frac{\hat{Y}-E[Y]}{s_Y/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Γνωρίζουμε ότι το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας (1-α) της E[Y] μας δίνει το διάστημα σημαντικότητας:

$$[\hat{Y}-z_{1-a/2}\frac{s_Y}{\sqrt{n}},\hat{Y}+z_{1-a/2}\frac{s_Y}{\sqrt{n}}]$$

δηλαδή η E[Y] βρίσκεται στο παραπάνω διάστημα με πιθανότητα (1-α). Το παραπάνω διάστημα είναι ασυμπτωτικά έγκυρο καθώς το n→∞, γεγονός που σημαίνει ότι η σχέση αυτή ισχύει καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος.

Η τιμή του ασιατικού δικαιώματος δίνεται από το γνωστό μας τύπο:

$$C=\exp(-rT)E[\max(A-K,0)]$$

όπου ο διακριτός αριθμητικός μέσος δίνεται από τη σχέση:

$$A=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}S_{t_j}$$

οι μέσοι που παίρνουμε από τα δείγματα δίνονται από:

$$A^{(i)}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}S_{t_j}^{(i)}$$

οι τιμές του δικαιώματος όπως αυτές υπολογίζονται από το δείγμα δίνονται από:

$$C^{(i)}=\exp(-rT)\max(A^{(i)}-k,0)$$

οι οποίες οδηγούν στην εκτιμημένη τιμή της Monte Carlo προσομοίωσης:

$$\hat{C}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}C^{(i)}$$

και η διακύμανση του δείγματος δίνεται από:

$$s^2{}_C = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(C^{(i)} - \hat{C})^2$$

και με 95% επίπεδο εμπιστοσύνης παίρνουμε το διάστημα:

$$[\hat{C} - 1{,}96\frac{s_C}{\sqrt{n}}, \hat{C} + 1{,}96\frac{s_C}{\sqrt{n}}]$$

Συνοψίζοντας την όλη διαδικασία της Monte Carlo προσομοίωσης μπορούμε να πούμε ότι:

Αρχικά δημιουργούμε τυχαίους αριθμούς οι οποίοι ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή. Στη συνέχεια τους εκφράζουμε σε όρους της τυπικής κανονικής κατανομής. Παίρνουμε δειγματοληπτικές τιμές από την κατανομή της τιμής της υποκείμενης αξίας (π.χ. μετοχής), υπολογίζουμε το προεξοφλημένο αποτέλεσμα των ασιατικών δικαιωμάτων, λαμβάνουμε μια εκτίμηση της τιμής του δικαιώματος με τη χρήση του μέσου όρου των προσομοιώσεων που λαμβάνουμε και τελικά υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση από το δείγμα για την εκτιμημένη τιμή και την χρησιμοποιούμε προκειμένου να κατασκευάσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης.

Προκειμένου να πάρουμε όσο το δυνατό καλύτερες εκτιμήσεις θα πρέπει να μειώσουμε όσο το δυνατό περισσότερο το μέγεθος αυτού του διαστήματος. Για να το πετύχουμε αυτό υπάρχουν δύο τρόποι: ο πρώτος έγκειται στην μείωση της διακύμανσης και ο δεύτερος στην αύξηση των επαναλήψεων. Ο δεύτερος αυτός τρόπος δημιουργεί όμως προβλήματα όσον αφορά το χρόνο που χρειάζεται για να γίνει ο υπολογισμός.

Επίσης θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η Monte Carlo προσομοίωση, στην αρχική της μορφή, μπορεί να μην οδηγήσει σε ακριβή αποτελέσματα. Μια λύση στην επίλυση αυτού του προβλήματος είναι να αυξήσουμε τον αριθμό των επαναλήψεων. Με τον τρόπο όμως αυτό δυσκολεύουμε την ταχύτητα των υπολογισμών. Για το σκοπό αυτό έχουν εφαρμοστεί άλλες μέθοδοι όπως η χρήση μεθόδων μείωσης των μεταβλητών. Θα πρέπει επίσης να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην γεννήτρια των τυχαίων αριθμών RNG και το κατά πόσο αυτή μας δίνει σωστά αποτελέσματα.

Συμπεράσματα

Αρχικά θα πρέπει να ομολογήσουμε ότι δεν είναι εύκολο να κατατάξουμε τις μεθόδους αυτές με κριτήριο το ποια είναι καλύτερη συγκριτικά με τις άλλες και αυτό γιατί καμία δεν υπερέχει από όλες τις απόψεις. Επίσης οι υποθέσεις που κάνει η κάθε μία είναι διαφορετικές γεγονός που δεν μας δίνει κάποια ενιαία βάση. Έτσι λοιπόν αναγκαστικά θα περιοριστούμε σ' ένα γενικότερο πλαίσιο σύγκρισης.

Η μέθοδος λοιπόν του Vorst υποτιμά κατά πολύ την αξία των ασιατικών δικαιωμάτων όταν αυτά καταλήγουν έξω από τα λεφτά τους και για αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η λιγότερο προτεινόμενη μέθοδος. Στη συνέχεια μπορούμε να πούμε ότι ακολουθεί η προσέγγιση των Levy και Milevsky-Posner εξαιτίας των προβλημάτων που δημιουργεί η μεγάλη διακύμανση της υποκείμενης αξίας, αλλά και ο χρόνος λήξης του δικαιώματος, όταν αυτός υπερβαίνει την περίοδο των δύο ετών, στην ακρίβεια των τιμών που μας δίνουν. Επόμενες στην κλίμακά μας είναι η μέθοδος των Turnbull-Wakeman η οποία στις περισσότερες περιπτώσεις λειτουργεί με ικανοποιητικά αποτελέσματα εκτός μόνο από την περίπτωση που έχουμε μεγάλες διακυμάνσεις στην τιμή της υποκείμενης αξίας. Καταλήγουμε λοιπόν στην μέθοδο του Curran, της οποίας το κάτω όριο που μας δίνει είναι πολύ κοντά στις εκτιμήσεις που παίρνουμε από την Monte Carlo προσομοίωση, τόσο στις περιπτώσεις μεγάλης διακύμανσης, όσο και στις περιπτώσεις που η λήξη του δικαιώματος είναι χρονικά αρκετά μεγάλη.

Ο κατάλογος των μεθόδων, που προσπαθούν να επιλύσουν το πρόβλημα τιμολόγησης των ασιατικών δικαιωμάτων, θα πρέπει να ομολογήσουμε ότι δεν τελειώνει στις παραπάνω μεθόδους που αναλύσαμε. Στη μοντέρνα βιβλιογραφία και κυρίως σε ερευνητικό στάδιο υπάρχει μια πληθώρα εργασιών που προσπαθούν, είτε να βελτιώσουν τις είδη υπάρχουσες μεθόδους με το να διαφοροποιούν κάποιες από τις βασικές υποθέσεις τους, είτε προσπαθούν να τις προσεγγίσουν από μια διαφορετική οπτική γωνία, είτε αποτελούν ένα συνδυασμό αυτών, είτε επίσης εφαρμόζουν μία τελείως νέα τακτική και μέθοδο. Η ανάλυση όμως αυτών των προσπαθειών, αν και είναι πάρα πολύ ενδιαφέρουσα, δυστυχώς απαιτεί χρονικά πλαίσια που ξεφεύγουν από τα όρια τις παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Εφαρμογές των Ασιατικών Δικαιωμάτων

Έχοντας δει τις κυριότερες μεθόδους τιμολόγησης των ασιατικών δικαιωμάτων στη συνέχεια θ' αναφερθούμε στις χρήσεις τους και στο γιατί αυτό το ιδιαίτερο είδος δικαιωμάτων χρησιμοποιείται από την αγορά.

Τα Δικαιώματα Μέσης τιμής με σταθερή τιμή εξάσκησης χρησιμοποιούνται για την αντιστάθμιση μιας ιδικής κατηγορίας κινδύνου. Έτσι όταν έχουμε κάποιο στοιχείο του ενεργητικού του οποίου η αξία υπολογίζεται είτε στο τέλος κάποιας χρονικής περιόδου, ως ο μέσος όρος των τιμών που λαμβάνει σ' αυτό το χρονικό διάστημα, είτε έχουμε μια σειρά από χρηματοροές οι οποίες τιμολογούνται στην κρατούσα τιμή τους και φυσικά στις αντίστοιχες διαφορετικές χρονικές στιγμές, τότε τα οικονομικά αυτά αγαθά εμπεριέχουν το στοιχείο του κινδύνου, που τα δικαιώματα αυτά αντισταθμίζουν. Έτσι ο οικονομικός διευθυντής μιας εταιρείας μπορεί με το να επιλέξει την αξία της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος μείων της τιμής του ασφαλίστρου (premium) ίση προς κάποια προϋπολογιζόμενη τιμή, η οποία ανταποκρίνεται στις ανάγκες του, να θέσει κάποιο κατώτερο όριο στην κίνηση της αξίας του αγαθού, αλλά ταυτόχρονα να έχει ανοιχτό το ενδεχόμενο για θετική ανοδική κίνηση αυτής. Έτσι αν υποθέσουμε ότι μία εταιρεία έχει θυγατρικές στο εξωτερικό και λαμβάνει από αυτές χρηματοροές, εκφρασμένες στο αντίστοιχο ξένο νόμισμα, τότε είναι εκτεθειμένη στο κίνδυνο διακύμανσης της τιμής του συναλλάγματος. Οι ροές αυτές έρχονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές γεγονός που σημαίνει ότι η πιθανότητα μεταβολής της συναλλαγματικής ισοτιμίας μεταξύ αυτών των χρονικών στιγμών είναι πολύ μεγάλη. Έτσι λοιπόν ο οικονομικός υπεύθυνος της εταιρείας δεν μπορεί να προϋπολογίσει την αξία των ροών αυτών και πολύ περισσότερο να διασφαλιστεί από τον κίνδυνο πτώσης της τιμής του συναλλάγματος, αν υποθέσουμε ότι οι ροές αυτές λαμβάνουν χώρα σε μη προγραμματισμένες χρονικά στιγμές. Με το να έχει όμως εκτιμήσει ένα μέσο όρο της τιμής του συναλλάγματος και με το να χρησιμοποιήσει το συγκεκριμένο αυτό δικαίωμα μπορεί να κλειδώσει αυτό το μέσο και κατά συνέπεια την αξία των εν λόγω εισροών. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι σύμφωνα με το Αμερικάνικο λογιστικό σχέδιο (Financial Accounting Statement No. 52) τα στοιχεία του λογαριασμού

Αποτελέσματα Χρήσης που είναι εκφρασμένα σε ξένο νόμισμα μεταφράζονται με βάση το μέσο όρο της τιμής του συναλλάγματος. Με το να κλειδώσουν λοιπόν το μέσο όρο της συναλλαγματικής ισοτιμίας αποφεύγουν την ύπαρξη συναλλαγματικών ζημιών από την αποτίμηση των αντίστοιχων στοιχείων, και έτσι κατά συνέπεια τους παρέχεται ένα τέλειο μέσο αντιστάθμισης του κινδύνου. Σύμφωνα όμως με το Ελληνικό λογιστικό σχέδιο οι ποσότητες αυτές μεταφράζονται σύμφωνα με την τιμή του συναλλάγματος την ημερομηνία που κλείνει ο ισολογισμός. Με τη χρήση των ασιατικών δικαιωμάτων δίνοντας μεγαλύτερο βάρος στις τελευταίες παρατηρήσεις μπορούμε να αντισταθμίσουμε τον κίνδυνο όχι τέλεια μεν, αλλά τουλάχιστον κατά το μεγαλύτερο μέρος του.

Το γεγονός ότι τα *Ασιατικά* δικαιώματα μπορούν να προσαρμοσθούν απόλυτα στις ανάγκες του επενδυτή τους δίνει το μεγαλύτερο πλεονέκτημα έναντι των υπόλοιπων εναλλακτικών τρόπων αντιστάθμισης του κινδύνου. Έτσι αν έχουμε την επιχείρηση, που αναφέραμε παραπάνω, να χαρακτηρίζεται από εισροές κεφαλαίου οι οποίες όχι μόνο πραγματοποιούνται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, αλλά και με διαφορετικές συχνότητες, δηλαδή να αναμένει χρηματοροές αρχικά μία φορά τη βδομάδα, στη συνέχεια δύο ή και πιο συχνά, ο αντισταθμιστής μας μπορεί να απαλλάξει την εταιρεία του από τον κίνδυνο συναλλάγματος επιλέγοντας το κατάλληλο αυτό ασιατικό δικαίωμα προσαρμοσμένο με τα αντίστοιχα ποσοστά (weighted average rate option), όπου ο μέσος αρχικά θα υπολογίζεται μια φορά τη βδομάδα, στη συνέχεια δύο, ανάλογα με το πώς θα έρχονται χρονικά οι εισροές.

Επίσης στην περίπτωση που και η αξία των εισροών διαφέρει από εισροή σε εισροή τα *Ασιατικά* δικαιώματα παρέχουν την αναγκαία ευκαμψία έτσι ώστε να προσαρμοσθούν απόλυτα σ' αυτές τις ανομοιότητες. Στην περίπτωση λοιπόν αυτή θα πρέπει να επιλεγεί το ΔΜΤ που δίνει μεγαλύτερα βάρη (weights) στις ημέρες με τις μεγαλύτερες χρηματοροές.

Στην περίπτωση αυτή το δικαίωμα θα είναι της μορφής:

$$C_{E,A}(X,0,T,S_0,w_1,...,w_n,t_1,..t_n)$$

και το αποτέλεσμα του στη λήξη θα είναι:

$$\max(-P^{*}{}_{T,CA}, \sum_{i=1}^{n} w_i S_{t_i} - X - P^{*}{}_{T,CA})$$

όπου $C_{E,A}(.)$ είναι το σταθμικό ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αριθμητικής μέσης τιμής αγοράς και X είναι η τιμή εξάσκησης, 0 ο τωρινός χρόνος, T ο χρόνος λήξης του δικαιώματος, S_0 η τωρινή τιμή της υποκείμενης αξίας, w_i είναι τ' αντίστοιχα σταθμά, t_i τα χρονικά διαστήματα στα οποία υπολογίζουμε το μέσο όρο και P^* το ασφάλιστρο (premium).

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που η επιχείρηση είναι εκτεθειμένη όχι σε ένα νόμισμα αλλά σε περισσότερα. Στην κατάσταση αυτή βρίσκουν εφαρμογή τα ΔΜΤ με υποκείμενη αξία ένα *καλάθι* από συναλλαγματικές ισοτιμίες. Η γενικότερη μορφή του δικαιώματος αυτού δίνεται από:

$$C_E(X,0,T,S_{1,0},\ldots,S_{n,0},w_1,\ldots,w_n)$$

και το αποτέλεσμά του στη λήξη του είναι:

$$\max(-P^{*}{}_{T,C}, \sum_{i=1}^{n} w_i S_{i,T} - X - P^{*}{}_{T,C})$$

Κάθε διάκριση των ασιατικών δικαιωμάτων όπως αυτή αναφέρθηκε στην αρχή της όλης εργασίας, αποτελεί τη λύση μιας αντίστοιχης πραγματικής κατάστασης, την οποία αντιμετωπίζει ο επενδυτής.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι τα *Ασιατικά* δικαιώματα με την ευελιξία που τους διακατέχει μπορούν να προσαρμοστούν στις εκάστοτε ανάγκες των επενδυτών, επιτρέποντας να είναι εφικτή τόσο η αντιστάθμιση της θέσης τους όσο και η κερδοσκοπική προσδοκία τους.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα αναλυτικό παράδειγμα συγκριτικής παρουσίασης και σύγκρισης των δυνατών τρόπων αντιστάθμισης του κινδύνου.

Η "Α. Μακεδονικά Καπνά Α.Ε." αποτελεί μια μεγάλη, γνωστή εταιρεία παραγωγής καπνών. Η εξαγωγική της δραστηριότητα είναι σημαντική και η εταιρεία συνεργάζεται με μεγάλες πολυεθνικές εταιρείες, των οποίων αποτελεί βασικό προμηθευτή. Στα πλαίσια αυτής της συνεργασίας η "Α. Μακεδονικά Καπνά Α.Ε."

έχει υπογράψει συμφωνία με ένα από τους βασικούς πελάτες της, την "Tobacco USA", με βάση την οποία η Ελληνική εταιρεία θα προμηθεύει την Αμερικάνικη, με καπνά "Ανατολικού Τύπου", σε προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα, με ποσότητα καπνών των οποίων η τιμή θα διαμορφώνεται στην παγκόσμια αγορά καπνού. Η "Α. Μακεδονικά Καπνά Α.Ε." έχει συμφωνήσει να πληρώνεται σε US$, σε ισοτιμία η οποία έχει συμφωνηθεί και προκαθοριστεί στην αρχή κάθε οικονομικού έτους. Η συμφωνία περιέχει τον ιδικό όρο ότι οποιαδήποτε διαφορά παρατηρηθεί στην συναλλαγματική ισοτιμία (spot) η πλευρά που θα επωφελείται από τη μεταβολή αυτή θα καταβάλλει τη διαφορά στον άλλο αντισυμβαλλόμενο. Με τον σχήμα αυτό και τα δύο μέλη της συμφωνίας έχουν εξαλείψει το συναλλαγματικό κίνδυνο. Ο μόνος κίνδυνος που απομένει στην όλη συναλλαγή είναι αυτός της τιμής. Δηλαδή ο κίνδυνος από την αντίθετη μεταβολή της τιμής του καπνού στη διεθνή αγορά, υποτίμηση και ανατίμηση αντίστοιχα για την Ελληνική και την Αμερικάνικη εταιρεία.

Ο οικονομικός διευθυντής της "Α. Μακεδονικά Καπνά Α.Ε." γνωρίζει ότι μέσα στις επόμενες 58 μέρες θα πρέπει να παραδώσει μια ποσότητα 9.000.000 κιλών καπνών με βάση τον χρονοδιάγραμμα όπως αυτό παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα 1.

Πίνακας 1 Χρονοδιάγραμμα Παράδοσης Εμπορεύματος

Ημερομηνία	Κιλά Καπνού "Ανατολικού" Τύπου
03/1/00	1.000.000
10/1/00	1.000.000
17/1/00	1.000.000
24/1/00	1.000.000
31/1/00	1.000.000
07/2/00	1.000.000
14/2/00	1.000.000
21/2/00	1.000.000
28/2/00	1.000.000
Συνολική Ποσότητα	9.000.000

Η παράδοση του εμπορεύματος θα γίνει με βάση τις παραπάνω ημερομηνίες και ταυτόχρονα, στις ίδιες χρονικές στιγμές, θα γίνει και η αντίστοιχη πληρωμή από την αμερικάνικη εταιρεία. Η "Α. Μακεδονικά Καπνά Α.Ε." λοιπόν αναμένει στις γνωστές προθεσμίες να λάβει τις αντίστοιχες χρηματοροές όπως αυτές θα προσδιοριστούν από την εκάστοτε τιμή των καπνών στην αγορά. Ο οικονομικός διευθυντής της εταιρείας έχει προϋπολογίσει, ότι θα πρέπει να πωλήσει τις παραπάνω ποσότητες σε μια μέση τιμή ίση με ΔΡΧ 1.200 ανά κιλό. Με βάση αυτή την τιμή και συνεπώς από τα έσοδα που θα έχει η εταιρεία, έχει καθοριστεί και το πρόγραμμα εξόδων και επενδύσεων και γενικά έχει βασιστεί όλος ο προγραμματισμός της εταιρείας. Η επίτευξη λοιπόν αυτής της μέσης τιμής είναι ζωτικής σημασίας για τον προγραμματισμό της εταιρείας και για τη σωστή και εύρυθμη λειτουργία της. Βασικός σκοπός, λοιπόν, του οικονομικού διευθυντή είναι να μπορέσει να διασφαλίσει την ποσότητα αυτή των εσόδων, μέσα από τη διασφάλιση της επιθυμητής τιμής, και φυσικά θα ήταν ακόμα καλύτερο ν' αφήσει ανοικτό κάθε ενδεχόμενο για θετικά οφέλη από την ανοδική κίνηση των τιμών.

Συνοψίζοντας λοιπόν τα στοιχεία του προβλήματος μπορούμε να πούμε ότι:

- Η "Α. Μακεδονικά Καπνά Α.Ε." αντιμετωπίζει κίνδυνο τιμής και συγκεκριμένα προς τα κάτω μεταβολή της τιμής των καπνών.

- Η εταιρεία γνωρίζει με μεγάλη ακρίβεια το χρόνο πραγματοποίησης της κάθε συναλλαγής, την ποσότητα παράδοσης και τον τρόπο και το χρόνο της πληρωμής της.

- Ο οικονομικός της διευθυντής έχει προϋπολογίσει μια μέση τιμή για την αξία των καπνών, που θα παραδώσει η εταιρεία του, και βασιζόμενος στην τιμή αυτή έχει καθορίσει και σχεδιάσει τις μετέπειτα οικονομικές δραστηριότητες της εταιρείας.

- Σκοπός λοιπόν του οικονομικού διευθυντή είναι να μπορέσει να βρει το καλύτερο δυνατό τρόπο, με τον οποίο θα καταφέρει, τόσο να εξασφαλιστεί από τον κίνδυνο της τιμής, όσο και να συνεχίσει την προγραμματισμένη λειτουργία της εταιρείας.

Στα πλαίσια αυτά, υπάρχουν οι ακόλουθες δυνατότητες-σενάρια προκειμένου να μπορέσει η εταιρεία ν΄ αντιμετωπίσει τον κίνδυνο της τιμής:

1. Το πρώτο σενάριο είναι να μην κάνει τίποτα η εταιρεία (no-hedging) και να πουλήσει το προϊόν στην τιμή που θα ισχύει στην αγορά στην εκάστοτε

χρονική στιγμή. Με τον τρόπο αυτό η εταιρεία δεν πληρώνει κανένα ασφάλιστρο και φυσικά δεν έχει και καμία ασφάλεια για την πορεία της τιμής των καπνών. Το σχήμα αυτό έχει το μεγαλύτερο κίνδυνο για την εταιρεία, ανεξάρτητα από την τελική έκβαση της μεταβολής των τιμών (ανοδικά ή καθοδικά) και από το ύψος των εσόδων που θα προκύψουν για την εταιρεία.

2. Η δεύτερη δυνατότητα που έχει η εταιρεία είναι να πουλήσει συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures) με υποκείμενη αξία τα καπνά και ειδικότερα την ιδιαίτερη ποικιλία την οποία η εταιρεία εμπορεύεται. Τέτοια προϊόντα, όμως δεν υπάρχουν στην Ελληνική αγορά, αλλά ούτε και στη διεθνή μπορεί η εταιρεία να βρει αντίστοιχα προϊόντα που ν' αντικατροπτίζουν τις ιδιαίτερες ανάγκες της, τόσο από την άποψη της υποκείμενης αξίας, όσο και από την άποψη ρευστότητας της αγοράς των τίτλων. Επιπλέον η λύση αυτή απαιτεί ιδική παρακολούθηση (monitoring) των σχετικών τίτλων από την πλευρά της εταιρείας καθώς και ένα λογαριασμό περιθωρίου (margin account). Τα παραπάνω στοιχεία καθιστούν την χρήση των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, για την αντιστάθμιση του κινδύνου τιμής, δυσχερή.

3. Η τρίτη δυνατότητα που δίνεται στην "Α. Μακεδονικά Καπνά Α.Ε.", είναι να βρει ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα και να πουλήσει σ' αυτό forwards. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν τα ακόλουθα σενάρια:

- Να πουλήσει στη χρονική στιγμή μηδέν-σήμερα (01/01/00) 9 forwards (για 1.000.000 κιλά καπνών έκαστο), το καθένα με λήξη στην περίοδο που πληρώνεται η κάθε παρτίδα καπνών.

- Να πουλήσει 9 διαδοχικά forwards (του 1.000.000 κιλών καπνών έκαστο). Το πρώτο με διάρκεια από 01/01/00 - 03/01/00, το δεύτερο με διάρκεια από 03/01/00 - 10/01/00 κ.ο.κ.

- Φυσικά η δυνατότητα του να πουλήσει ένα forward για 9 εκ. κιλά καπνών, με διάρκεια από 01/01/00 - 28/02/00 και ταυτόχρονα να καταθέτει τις αντίστοιχες εισροές μέχρι τη λήξη του forward δεν προσφέρει καμία ασφάλεια στην εταιρεία γιατί το μόνο που θα καταφέρει είναι να εξασφαλίσει την τιμή του προϊόντος μόνο για την τελική τιμή (28/02/00).

4. Η τέταρτη δυνατότητα που έχει είναι να προβεί στην αγορά ευρωπαϊκού τύπου δικαιωμάτων πώλησης (plain vanilla put options). Στην περίπτωση αυτή έχουμε τα ακόλουθα σχήματα:

- Την αγορά στο χρόνο μηδέν 9 δικαιωμάτων πώλησης (το καθένα για 1 εκ κιλά) και με λήξεις που να αντικατροπτίζουν τις αντίστοιχες εισροές.

- Την αγορά 9 δικαιωμάτων πώλησης ένα για κάθε εισροή και με διάρκεια αντίστοιχη αυτής των εισροών. Δηλαδή το πρώτο από 01/01/00 - 03/01/00, το δεύτερο από 03/01/00 - 10/01/00 κ.ο.κ.

5. Τέλος η τελευταία δυνατότητα που θα εξετάσουμε είναι η αγορά ενός δικαιώματος μέσης τιμής πώλησης, ευρωπαϊκού τύπου. Στο δικαίωμα αυτό η εταιρεία έχει τη δυνατότητα και ορίζει το μέσο να υπολογίζεται:

- Ως ο αριθμητικός μέσος των ημερήσιων τιμών κλεισίματος της τιμής του καπνού από την περίοδο 01/01/00 - 28/02/00

- Ως ο γεωμετρικός μέσος των ημερήσιων τιμών κλεισίματος της τιμής του καπνού από την περίοδο 01/01/00 - 28/02/00

- Ως ο αριθμητικός μέσος των τιμών κλεισίματος της τιμής του καπνού για τις συγκεκριμένες ημερομηνίες στις οποίες θα πραγματοποιηθούν οι πωλήσεις

- Ως ο γεωμετρικός μέσος των τιμών κλεισίματος της τιμής του καπνού για τις συγκεκριμένες ημερομηνίες στις οποίες θα πραγματοποιηθούν οι πωλήσεις

1ο Σενάριο

Εξετάζοντας το πρώτο σενάριο, όπως αναφέραμε και παραπάνω, αν δηλαδή η εταιρεία δεν αναλάβει κανένα μέτρο προστασίας έναντι πτωτικής κίνησης των τιμών των καπνών (no-hedging), τότε οι χρηματικές εισροές της, στα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα, θα είναι αυτές όπως εμφανίζονται στον παρακάτω Σχεδιάγραμμα 2

("Cash Inflows"). Στο Σχεδιάγραμμα 1 παρουσιάζουμε την πορεία της τιμής των καπνών κατά το ενδιαφερόμενο χρονικό διάστημα.

Στον κάτωθι πίνακα παραθέτουμε τις τιμές που πραγματοποιήθηκαν στις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές των πληρωμών καθώς και την αξία των εισροών και την παρούσα αξία αυτών:

Πίνακας 2 Πραγματοποιηθείσες Τιμές και Χρηματικές Εισροές

Εισροή	Ημερομηνία	Πραγματική Τιμή	Ποσότητα	Χρηματική Εισροή	Παρούσα Αξία Των Εισροών
1	03/01/00	1.193,83	1.000.000	1.193.826.602	1.193.499.571
2	10/01/00	1.206,05	1.000.000	1.206.053.341	1.204.567.342
3	17/01/00	1.153,48	1.000.000	1.153.482.370	1.150.956.958
4	24/01/00	1.154,10	1.000.000	1.154.101.128	1.150.470.641
5	31/01/00	1.188,85	1.000.000	1.188.849.595	1.183.973.937
6	01/02/00	1.201,21	1.000.000	1.201.210.770	1.195.137.845
7	14/02/00	1.178,39	1.000.000	1.178.392.914	1.171.311.634
8	21/02/00	1.168,74	1.000.000	1.168.744.325	1.160.607.581
9	28/02/00	1.166,04	1.000.000	1.166.040.411	1.156.812.687
				Σύνολο Παρούσας Αξίας των Εισροών	10.567.338.197

Αυτό λοιπόν που παρατηρούμε είναι μια σημαντική διακύμανση των εισροών η οποία προέρχεται από τη διακύμανση της τιμής των καπνών. Αυτό όμως που είναι σημαντικότερο ίσως να δούμε, προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα το πρόβλημα που δημιουργεί αυτή η μεταβλητότητα των τιμών, είναι η επίδραση που έχει στον προϋπολογισμό της εταιρείας. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο προϋπολογισμός έχει βασιστεί σε μία μέση τιμή για το σύνολο των 9 εισροών ίση με ΔΡΧ 1.200/κιλό καπνών. Προϋπολογίζει λοιπόν να έχει 9 εισροές αξίας κατά μέσο όρο ίσες με ΔΡΧ 1.200.000.000 η κάθε μια. Η διαφορά της προϋπολογιζόμενης εισροής με την πραγματική φαίνεται στον Σχεδιάγραμμα 3 (Gain / Loss from Price Fluctuations). Στο σημείο αυτό θα πρέπει να πούμε ότι η όλη πορεία των εισροών κατέληξε σε μια αξία σημαντικά χαμηλότερη από την προϋπολογιζόμενη επειδή οι τιμές κινήθηκαν αρκετά κάτω από τη τιμή στόχο. Αν αντίθετα είχαν κινηθεί ανοδικά, τότε το σίγουρο είναι ότι η εταιρεία θα πραγματοποιούσε σημαντικά κέρδη. Υπάρχει λοιπόν αυτή η αβεβαιότητα από την οποία, με το σχήμα που έχει επιλέξει η εταιρεία, δεν μπορεί ν' απαλλαγεί και αφήνεται στην τύχη της διακύμανσης των τιμών.

2ο Σενάριο

Σύμφωνα με το δεύτερο αυτό σενάριο η εταιρεία μπορεί να πουλήσει Forwards. Στην περίπτωση αυτή διακρίνουμε δύο δυνατότητες:

α) Να πουλήσει εννέα forwards στη χρονική στιγμή μηδέν, δηλαδή την 01/01/00, το καθένα με λήξη τη χρονική στιγμή που πραγματοποιούνται οι αντίστοιχες εισροές. Στην περίπτωση αυτή η εταιρεία μπορεί να κλειδώσει την τιμή που την ενδιαφέρει και να έχει την επιθυμητή χρηματική εισροή, όπως και αν κινηθούν οι τιμές, είτε ανοδικά είτε καθοδικά. Όπως παρατηρούμε και από το σχετικό πίνακα (Πίνακας 3 - Hedging with Forwards - I), με τη χρήση αυτού του εργαλείου η εταιρεία επιτυγχάνει να πραγματοποιήσει εισροές ίσες με ΔΡΧ 10,8 δις. όσες ακριβώς έχει προϋπολογίσει. Η μέθοδος λοιπόν αυτή εμφανίζεται αρκετά επιτυχημένη, όμως έχει και αυτή ένα μειονέκτημα. Όπως αναφέραμε στις υποθέσεις μας ο οικονομικός διευθυντής της εταιρείας, ναι μεν ενδιαφέρεται για την πλήρη εξασφάλιση έναντι πτώσης της τιμής, αλλά ταυτόχρονα επιθυμεί ν' αφήσει ανοικτό κάθε ενδεχόμενο για ανοδική κίνηση αυτής. Η δεύτερη αυτή περίπτωση, όμως, δεν εξασφαλίζεται με τη χρήση αυτού του τρόπου αντιστάθμισης του κινδύνου. Στον Πίνακα 4 - Hedging with Forwards - II, παραθέτουμε μια δεύτερη κατάσταση με βάση την οποία οι τιμές των καπνών κινούνται ανοδικά και οι εισροές πραγματοποιούνται σε τιμές υψηλότερες της τιμής στόχου. Στην περίπτωση αυτή, όπως φαίνεται και από τον σχετικό πίνακα, τα Forwards θα δώσουν πάλι παρούσα αξία των εισροών ίση με ΔΡΧ 10,8 δις. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η εταιρεία δεν επωφελήθηκε από αυτή την ανοδική κίνηση.

β) Προκειμένου λοιπόν να μπορέσει να επωφεληθεί από τυχόν ανοδικές κινήσεις της τιμής της υποκείμενης αξίας, ο οικονομικός διευθυντής της εταιρείας κάνει μια δεύτερη υπόθεση - σενάριο, με βάση το οποίο πουλάει μια σειρά από 9 forwards, των οποίων όμως η ημερομηνία έναρξης και λήξης είναι διαφορετικές και πιο συγκεκριμένα, αγοράζει την 01/01/00 forward με λήξη σε δύο μέρες, όταν λήξει αυτό αγοράζει το επόμενο με λήξη σε 7 μέρες, στη λήξη αυτού αγοράζει το τρίτο κ.ο.κ. Με τον τρόπο αυτό η εταιρεία προσπαθεί ν' αντισταθμίσει την κάθε εισροή ξεχωριστά και θέτει ως τιμή εξάσκησης κάθε φορά την τιμή κλεισίματος του προηγούμενου συμβολαίου. Στην κατάσταση όμως αυτή, η εταιρεία ναι μεν κερδίζει από τυχόν ανοδικές κινήσεις της τιμής, αλλά ταυτόχρονα χάνει από τις αντίστοιχες πτωτικές. Στον πίνακα 3 στο δεύτερο μέρος (Part B) εμφανίζονται τα αποτελέσματα του σεναρίου αυτού, όπου οι τιμές όμως κινούνται κατά το μεγαλύτερο τμήμα τους πτωτικά και η εταιρεία καταλήγει με μια παρούσα αξία των εισροών αρκετά χαμηλότερη από ότι στην α) περίπτωση. Στον πίνακα όμως 4 (Part B), όπου έχουμε υποθέσει ανοδική πορεία, κατά το μεγαλύτερο τμήμα της κίνησης των τιμών, παρατηρούμε ότι η στρατηγική αυτή αποδίδει πολύ καλύτερα αποτελέσματα από την προηγούμενη. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η χρήση της μεθόδου αυτή, βελτιώνει μεν τα αποτελέσματα στην περίπτωση ανοδικής τάσης των τιμών, αλλά τα χειροτερεύει στην αντίθετη περίπτωση. Άρα παρέχει μεν την επιθυμητή εξασφάλιση στην εταιρεία, όχι όμως και τη δυνατότητα εκμετάλλευσης τυχόν ανοδικής κίνησης των τιμών και άρα μπορεί ν' αποκλειστεί.

3ο Σενάριο

Στην περίπτωση αυτή ο οικονομικός διευθυντής της εταιρείας στρέφεται προς την αγορά των δικαιωμάτων. Διακρίνουμε και εδώ δύο υπό περιπτώσεις:

α) Η εταιρεία προβαίνει στην αγορά 9 at the money δικαιωμάτων, ευρωπαϊκού τύπου, πώλησης (plain vanilla put options) στη χρονική στιγμή μηδέν, το καθένα με λήξη την αντίστοιχη χρονική στιγμή που θα πραγματοποιηθεί η χρηματική εισροή. Στον Πίνακα 5 - "Hedging using Plain Vanilla Put Options" παρουσιάζουμε αναλυτικά τον υπολογισμό της τιμής τόσο του δικαιώματος αγοράς όσο και πώλησης και παράλληλα το αποτέλεσμα αυτής της στρατηγικής. Με τη στρατηγική αυτή η εταιρεία μπορεί να εξασφαλίσει μια ελάχιστη συνολική εισροή ίση με ΔΡΧ 10,66 δις. (σε όρους παρούσας αξίας) ενώ έχει ανοικτό κάθε ενδεχόμενο για άμεση εκμετάλλευση τυχών ανοδικής κίνησης. Παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός της long θέσης στην υποκείμενη αξία και στο δικαίωμα πώλησης μας δίνει μια στρατηγική "protective put" και το αποτέλεσμά του είναι το ίδιο με αυτό του call. Έτσι εξασφαλίζεται το κατώτατο όριο και είναι ανοικτό το ενδεχόμενο για κέρδος από θετική κίνηση της τιμής της υποκείμενης αξίας. Το αποτέλεσμα λοιπόν αυτό φαίνεται αρκετά ικανοποιητικό και καλύπτει τις ανάγκες της εταιρείας. Αυτό που έχει επιτύχει ο οικονομικός διευθυντής είναι να εξασφαλιστεί, σε κάθε χρονική στιγμή που έρχονται οι εισροές, από τον κίνδυνο πτώσης της τιμής. Αυτό όμως που ενδιαφέρει, είναι η εξασφάλιση έναντι της μέσης τιμής και όχι κάθε τιμής. Η στρατηγική αυτή οδηγεί σε μια κατάσταση "υπέρ-ασφάλισης" (over-hedging), η οποία είναι απόλυτα λογικό να κοστίζει ακριβότερα, εφόσον η επιπλέον (από την επιθυμητή) ασφάλεια κοστίζει. Το μόνο λοιπόν αρνητικό στοιχείο της όλης στρατηγικής είναι ότι οδηγεί σε μεγαλύτερη εξασφάλιση από την επιθυμητή και άρα είναι ακριβότερη.

β) Στη δεύτερη αυτή υπό κατηγορία υποθέτουμε, όπως είχαμε κάνει και στην αντίστοιχη περίπτωση των forward, ότι αγοράζονται μία σειρά από 9 δικαιώματα πώλησης ευρωπαϊκού τύπου. Το πρώτο τη χρονική στιγμή 1/1/00 με λήξη 3/1/00, το δεύτερο τη στιγμή 3/1/00 με λήξη 10/1/00 κ.ο.κ. Το πρώτο είναι "πάνω στα λεφτά του" ενώ για τα επόμενα υπάρχει κάποια αβεβαιότητα (βλέπε πίνακα 5 - Part B). Η στρατηγική αυτή εξασφαλίζει την κάθε εισροή και όχι το σύνολό τους. Η τιμή του δικαιώματος διαμορφώνεται κάθε φορά ανάλογα με την τιμή της υποκείμενης αξίας που επικρατεί στην αντίστοιχη χρονική στιγμή. Έτσι υπάρχει αβεβαιότητα για το συνολικό κόστος της όλης ενέργειας. Για τους λόγους αυτούς δεν θεωρείται η καλύτερη επιλογή που μπορεί να έχει η εταιρεία.

4ο Σενάριο

Τέλος επιλέγουμε να εξετάσουμε την περίπτωση αγοράς Ασιατικών δικαιωμάτων πώλησης. Στο σενάριο αυτό διακρίνουμε τέσσερις συνολικά υπό-περιπτώσεις, όπου η διαφοροποίηση βασίζεται στον τρόπο με τον οποίο θα γίνει ο υπολογισμός του μέσου όρου, και το είδος του δείγματος που θα χρησιμοποιήσουμε. Έτσι έχουμε:

α) Αριθμητικός Μέσος και ημερήσιες παρατηρήσεις

β) Αριθμητικός Μέσος και παρατηρήσεις ίσες με το σύνολο των εισροών (δηλαδή 9 παρατηρήσεις)

γ) Γεωμετρικός Μέσος και ημερήσιες παρατηρήσεις

δ) Γεωμετρικός Μέσος και παρατηρήσεις ίσες με το σύνολο των εισροών (δηλαδή 9 παρατηρήσεις).

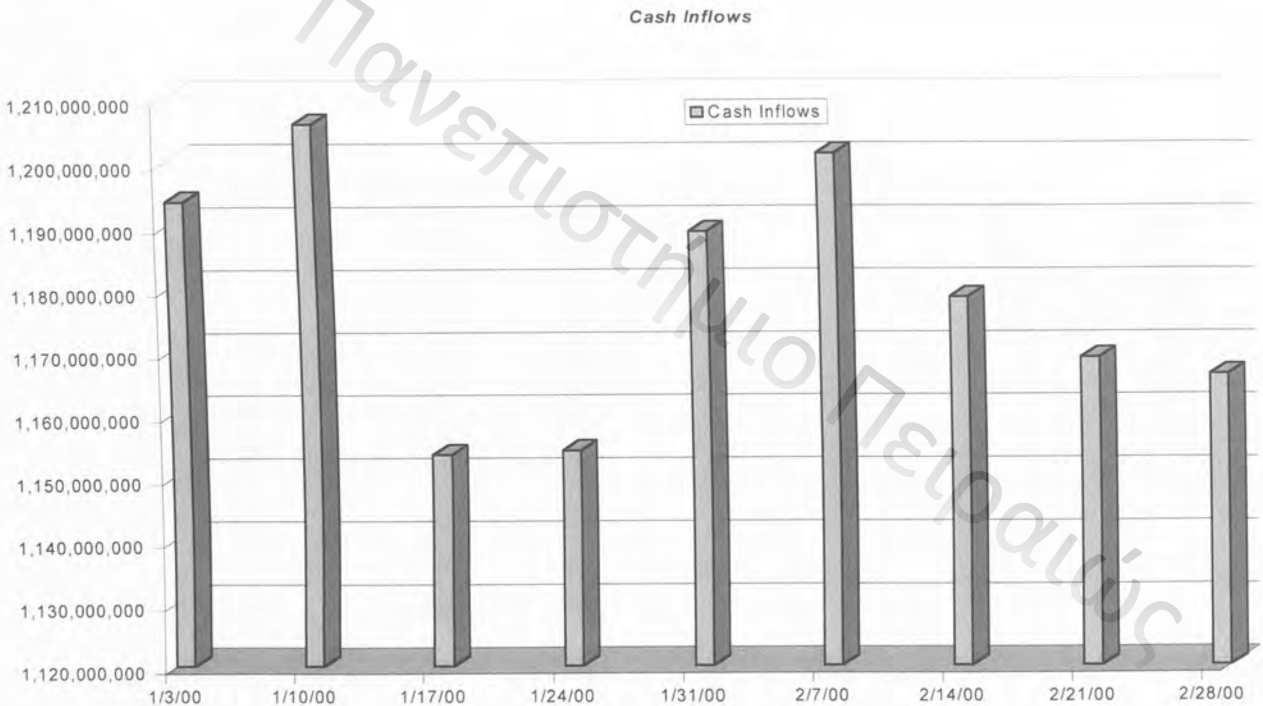
Το αν ο μέσος θα υπολογιστεί ως αριθμητικός ή γεωμετρικός εξαρτάται από το τι επιθυμεί η εταιρεία και από το πώς έχει υπολογίσει τον προϋπολογιζόμενο μέσο στον προγραμματισμό της. Η θεωρία λεει ότι ο γεωμετρικός μέσος χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις όπου οι παρατηρήσεις είναι εκφρασμένες σε ποσοστά είτε σε περιπτώσει όπου οι τιμές μιας μεταβλητής εμφανίζουν μεγάλη μεταβλητικότητα (διότι σε σύγκριση με τον αριθμητικό, επηρεάζεται λιγότερο από τις ακραίες τιμές). Στη συγκεκριμένη λοιπόν περίπτωση, όπου οι τιμές είναι εκφρασμένες σε απόλυτα νούμερα και όχι σε ποσοστά και δεδομένου ότι δεν έχουμε μεγάλη μεταβλητικότητα θα χρησιμοποιήσουμε τον αριθμητικό μέσο. Ο υπολογισμός όμως της τιμής του Ασιατικού δικαιώματος με αριθμητικό μέσο, όπως έχουμε αναλύσει στην παρούσα εργασία, δεν έχει κάποια κλειστή φόρμουλα τιμολόγησης, τύπου Black-Scholes, και για τον υπολογισμό της χρησιμοποιήσαμε τη Monte-Carlo προσομοίωση με τη χρήση 4.000 προσομοιώσεων. Ο αριθμός αυτός μπορεί να φαίνεται μικρός αλλά οι δυνατότητες του υπολογιστή που χρησιμοποιήσαμε δεν επαρκούσαν για μεγαλύτερα νούμερα. Στον Πίνακα 6 - "Monte Carlo Simulation" παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης και για τα δύο είδη δείγματος. Και σ' αυτή την περίπτωση, όπως και στην αντίστοιχη του απλού δικαιώματος, ο συνδυασμός της αγοράς του δικαιώματος πώλησης και η κατοχή του υποκείμενου τίτλου αντιστοιχούν σε μία στρατηγική "protective put" η οποία εξασφαλίζει ένα κατώτερο όριο και θετικά αποτελέσματα στην περίπτωση ανοδικής κίνησης των τιμών. Στην περίπτωση του ασιατικού δικαιώματος αυτό το κατώτερο όριο ισούται με ΔΡΧ 10,7 δις. Όσον αφορά στην επιλογή του δείγματος, συμπεραίνουμε ότι όσο αυξάνει το πλήθος των παρατηρήσεων τόσο μικρότερο είναι το κόστος του δικαιώματος πώλησης. Η επιλογή όμως του αριθμού των παρατηρήσεων, αλλά και η επιλογή των παρατηρήσεων που θα χρησιμοποιηθούν στον υπολογισμό του μέσου όρου είναι στην διακριτική ευχέρεια της εταιρείας.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα Ασιατικά δικαιώματα παρέχουν ένα υψηλότερο κάτω όριο και αυτό γιατί το κόστος τους είναι χαμηλότερο από τα απλά δικαιώματα.

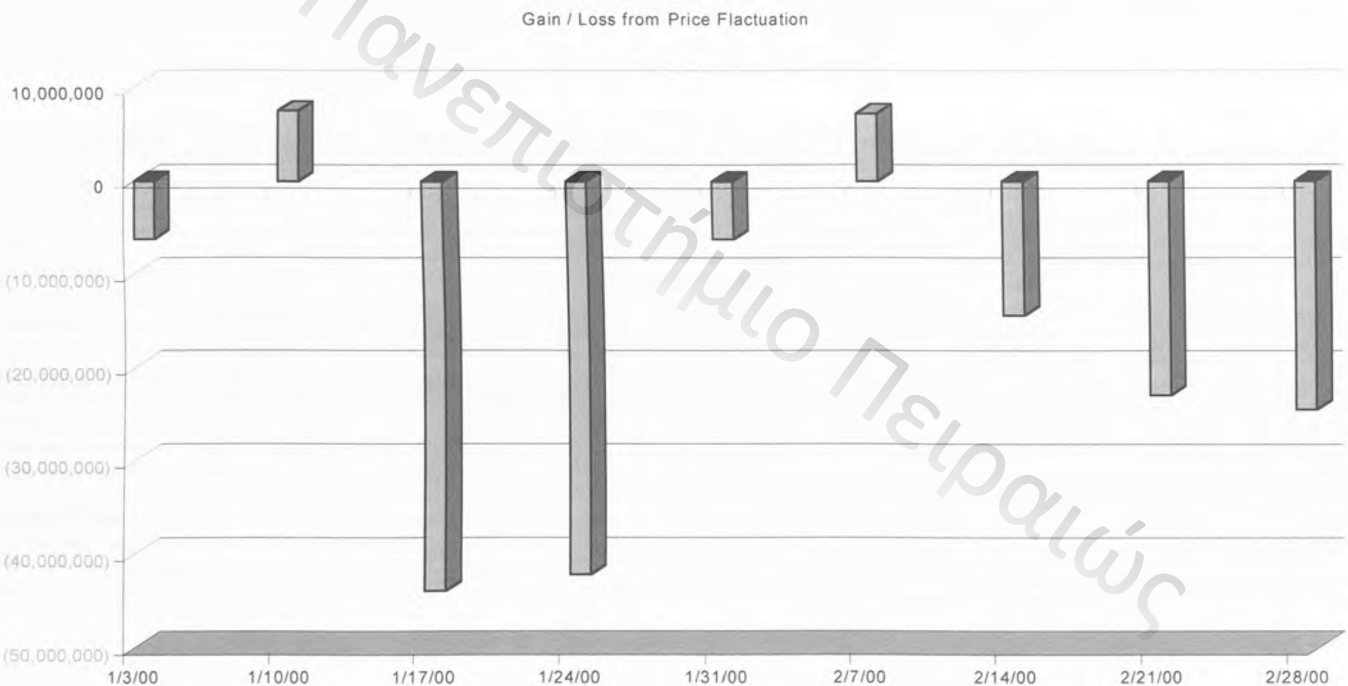
Έτσι, καταλήγοντας, μπορούμε να πούμε ότι θα ήταν προς το συμφέρον της εταιρείας να επιλέξει ως μέσο αντιστάθμισης του κινδύνου της τιμής, τα ασιατικά δικαιώματα πώλησης με αριθμητικό μέσο και με παρατηρήσεις τις τιμές της υποκείμενης αξίας στις συγκεκριμένες ημερομηνίες που πραγματοποιούνται οι εισροές.

Σχεδιάγραμμα 1 Price Movement

Σχεδιάγραμμα 2 Cash Inflows



Σχεδιάγραμμα 3 Gain / Loss from Price Fluctuation



Πίνακας 3 - Hedging using Forwards - I

Risk Free Rate	5.00%	flat								
All amounts in GRD	Accumulative Dates	2	9	16	23	30	37	44	51	58
	Dates	2	7	7	7	7	7	7	7	7
Current Time:	**01-Jan-00**	03-Jan-00	10-Jan-00	17-Jan-00	24-Jan-00	31-Jan-00	07-Feb-00	14-Feb-00	21-Feb-00	28-Feb-00
Price (Actual)	**1,200.00**	**1,193.83**	**1,206.05**	**1,153.48**	**1,154.10**	**1,188.85**	**1,201.21**	**1,178.39**	**1,168.74**	**1,166.04**
Amount	**1,000,000**	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000
Value	1,200,000,000	1,193,826,602	1,206,053,341	1,153,482,370	1,154,101,128	1,188,849,595	1,201,210,770	1,178,392,914	1,168,744,325	1,166,040,411
	[illegible]	1,193,499,571	1,204,567,342	1,150,956,958	1,150,470,641	1,183,973,937	1,195,137,845	1,171,311,634	1,160,607,581	1,156,812,687
[illegible]										
Part A										
Forward Price		1,200.33	1,201.48	1,202.63	1,203.79	1,204.94	1,206.10	1,207.25	1,208.41	1,209.57
Gain/Loss from Future		6,502,210	(4,572,977)	49,150,651	49,685,657	16,092,059	4,886,862	28,861,804	39,668,590	43,531,812
Gain/Loss from Asset		(6,173,398)	6,053,341	(46,517,630)	(45,898,872)	(11,150,405)	1,210,770	(21,607,086)	(31,255,675)	(33,959,589)
Total Gain / loss		328,812	1,480,364	2,633,021	3,786,784	4,941,654	6,097,632	7,254,718	8,412,915	9,572,223
Investing the value in Rf		328,812	1,480,364	2,633,021	3,786,784	4,941,654	6,097,632	7,254,718	8,412,915	9,572,223
Perfect Hedging which costs:		0	(0)	(0)	(0)	(0)	0	0	(0)	0
Total Cost	(0)	0	(0)	(0)	(0)	(0)	0	0	(0)	0
Inflows per month		**1,200,328,812**	**1,201,480,364**	**1,202,633,021**	**1,203,786,784**	**1,204,941,654**	**1,206,097,632**	**1,207,254,718**	**1,208,412,915**	**1,209,572,223**
PV of Inflows	10,800,000,000	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***
Part B										
Forward Price		1,200.33	1,194.97	1,207.21	1,154.59	1,155.21	1,189.99	1,202.36	1,179.52	1,169.87
Gain/Loss from Future		6,502,210	(11,081,424)	53,728,015	487,852	(33,641,264)	(11,220,635)	23,970,254	10,779,097	3,825,165
Gain/Loss from Asset		(6,173,398)	12,226,739	(52,570,971)	618,757	34,748,467	12,361,175	(22,817,855)	(9,648,589)	(2,703,914)
Total Gain / loss		328,812	1,145,314	1,157,044	1,106,609	1,107,203	1,140,540	1,152,398	1,130,508	1,121,251
Investing the value in Rf		328,812	1,145,314	1,157,044	1,106,609	1,107,203	1,140,540	1,152,398	1,130,508	1,121,251
Perfect Hedging which costs:		0	(0)	0	0	(0)	(0)	(0)	(0)	0
Total Cost	(0)	0	(0)	0	0	(0)	(0)	(0)	(0)	0
Inflows per month		1,200,328,812	1,194,971,917	1,207,210,385	1,154,588,980	1,155,208,331	1,189,990,135	1,202,363,168	1,179,523,422	1,169,865,576
PV of Inflows	10,610,525,510	***1,200,000,000***	***1,193,499,571***	***1,204,567,342***	***1,150,956,958***	***1,150,470,641***	***1,183,973,937***	***1,195,137,845***	***1,171,311,634***	***1,160,607,581***

Πίνακς 4 - Hedging using Forwards - II

Risk Free Rate	5.00%	flat									
All amounts in GRD	Accumulative Dates		2	9	16	23	30	37	44	51	58
	Dates		2	7	7	7	7	7	7	7	7
Current Time:	**01-Jan-00**		03-Jan-00	10-Jan-00	17-Jan-00	24-Jan-00	31-Jan-00	07-Feb-00	14-Feb-00	21-Feb-00	28-Feb-00
Price (Actual)	**1,200.00**		**1,250.00**	**1,260.00**	**1,300.00**	**1,310.00**	**1,325.00**	**1,375.00**	**1,400.00**	**1,420.00**	**1,490.00**
Amount	**1,000,000**		1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000
Value	1,200,000,000		1,250,000,000	1,260,000,000	1,300,000,000	1,310,000,000	1,325,000,000	1,375,000,000	1,400,000,000	1,420,000,000	1,490,000,000
	12,078,662,036		1,249,657,581	1,258,447,533	1,297,153,805	1,305,879,098	1,319,565,968	1,368,048,454	1,391,587,023	1,410,114,025	1,478,208,549

Part A

Forward Price		1,200.33	1,201.48	1,202.63	1,203.79	1,204.94	1,206.10	1,207.25	1,208.41	1,209.57
Gain/Loss from Future		(49,671,188)	(58,519,636)	(97,366,979)	(106,213,216)	(120,058,346)	(168,902,368)	(192,745,282)	(211,587,085)	(280,427,777)
Gain/Loss from Asset		50,000,000	60,000,000	100,000,000	110,000,000	125,000,000	175,000,000	200,000,000	220,000,000	290,000,000
Total Gain / loss		**328,812**	**1,480,364**	**2,633,021**	**3,786,784**	**4,941,654**	**6,097,632**	**7,254,718**	**8,412,915**	**9,572,223**
Investing the value in Rf		328,812	1,480,364	2,633,021	3,786,784	4,941,654	6,097,632	7,254,718	8,412,915	9,572,223
Perfect Hedging which costs:		0	(0)	-	(0)	(0)	0	0	(0)	-
Total Cost	(0)	0	(0)	-	(0)	(0)	0	0	(0)	-
Inflows per month		**1,200,328,812**	**1,201,480,364**	**1,202,633,021**	**1,203,786,784**	**1,204,941,654**	**1,206,097,632**	**1,207,254,718**	**1,208,412,915**	**1,209,572,223**
PV of Inflows	10,800,000,000	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***	***1,200,000,000***

Part B

Forward Price		1,200.33	1,251.20	1,261.21	1,301.25	1,311.26	1,326.27	1,376.32	1,401.34	1,421.36
Gain/Loss from Future		(49,671,188)	(8,800,795)	(38,791,201)	(8,752,827)	(13,743,233)	(48,728,843)	(23,680,874)	(18,656,890)	(68,637,703)
Gain/Loss from Asset		50,000,000	10,000,000	40,000,000	10,000,000	15,000,000	50,000,000	25,000,000	20,000,000	70,000,000
Total Gain / loss		**328,812**	**1,199,205**	**1,208,799**	**1,247,173**	**1,256,767**	**1,271,157**	**1,319,126**	**1,343,110**	**1,362,297**
Investing the value in Rf		328,812	1,199,205	1,208,799	1,247,173	1,256,767	1,271,157	1,319,126	1,343,110	1,362,297
Perfect Hedging which costs:		0	(0)	(0)	0	0	0	(0)	0	(0)
Total Cost	0	0	(0)	(0)	0	0	0	(0)	0	(0)
Inflows per month		1,200,328,812	1,251,199,205	1,261,208,799	1,301,247,173	1,311,256,767	1,326,271,157	1,376,319,126	1,401,343,110	1,421,362,297
PV of Inflows	11,308,453,488	***1,200,000,000***	***1,249,657,581***	***1,258,447,533***	***1,297,153,805***	***1,305,879,098***	***1,319,565,968***	***1,368,048,454***	***1,391,587,023***	***1,410,114,025***

Πίνακας 5 - Hedging using Plain Vanilla Put Options - Part A

	0								
Accumulative Number of Days:	2	9	16	23	30	37	44	51	58
Number of Days between each Cash Inflow	2	7	7	7	7	7	7	7	7
01-Jan-00	03-Jan-00	10-Jan-00	17-Jan-00	24-Jan-00	31-Jan-00	07-Feb-00	14-Feb-00	21-Feb-00	28-Feb-00
So=	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200
X=	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200
r=	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%
T=	0.005479452	0.024657534	0.043835616	0.063013699	0.082191781	0.101369863	0.120547945	0.139726027	0.15890411
σ=	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%
d1=	0.040712827	0.086364947	0.115153263	0.138063912	0.157680099	0.175112488	0.190960083	0.205589696	0.219245281
d2=	0.033310494	0.07066223	0.094216306	0.112961383	0.12901099	0.143273854	0.156240068	0.168209752	0.179382502
N(d1)=	0.516237645	0.53441191	0.545838227	0.554905076	0.562645571	0.569504375	0.575721551	0.58144426	0.586770472
N(d2)=	0.513286564	0.528166779	0.537531396	0.544969464	0.551325561	0.556963073	0.562078116	0.566790869	0.571181309
N(-d1)=	0.483762355	0.46558809	0.454161773	0.445094924	0.437354429	0.430495625	0.424278449	0.41855574	0.413229528
N(-d2)=	0.486713436	0.471833221	0.462468604	0.455030536	0.448674439	0.443036927	0.437921884	0.433209131	0.428818691
Realized Price at Maturity	1,193.83	1,206.05	1,153.48	1,154.10	1,188.85	1,201.21	1,178.39	1,168.74	1,166.04
Amount=	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000
Call Price =	3.710025355	8.275073318	11.38043016	13.97992476	16.297299	18.42854796	20.4253363	22.31923643	24.13120244
Put Price =	3.381303265	6.79653288	8.753173411	10.20505268	11.37591151	12.36174394	13.21421357	13.96489175	14.63473153
Payoff from Put	MAX(X-St,0)								
Payoff from Put=	6,173,398	-	46,517,630	45,898,872	11,150,405	-	21,607,086	31,255,675	33,959,589
Price for Put=	3,381,303.26	6,796,533	8,753,173	10,205,053	11,375,912	12,361,744	13,214,214	13,964,892	14,634,732
Gain/Loss from Asset	(6,173,398)	6,053,341	(46,517,630)	(45,898,872)	(11,150,405)	1,210,770	(21,607,086)	(31,255,675)	(33,959,589)
Total Payoff=	1,196,618,697	1,199,256,808	1,191,246,827	1,189,794,947	1,188,624,088	1,188,849,026	1,186,785,786	1,186,035,108	1,185,365,268
Total Present Value	*Present Value of each Total Payoff*								
10,668,765,628	*1,196,290,901*	*1,197,779,184*	*1,188,638,734*	*1,186,052,178*	*1,183,749,355*	*1,182,838,598*	*1,179,654,071*	*1,177,777,987*	*1,175,984,613*
Check with Put-Call Parity*	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

*must be zero

Πίνακας 6 - Hedging using Plain Vanilla Put Options - Part B

0

Accumulative Number of Days:	2	9	16	23	30	37	44	51	58
Number of Days between each Cash Inflow	2	7	7	7	7	7	7	7	7
01-Jan-00	03-Jan-00	10-Jan-00	17-Jan-00	24-Jan-00	31-Jan-00	07-Feb-00	14-Feb-00	21-Feb-00	28-Feb-00
So=	1200	1,193.83	1,206.05	1,153.48	1,154.10	1,188.85	1,201.21	1,178.39	1,168.74
X=	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200
r=	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%	5.00%
T=	0.005479452	0.019178082	0.019178082	0.019178082	0.019178082	0.019178082	0.019178082	0.019178082	0.019178082
σ=	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%
d1=	0.040712827	-0.296276376	0.439510916	-2.778731307	-2.740006402	-0.597945795	0.148988079	-1.235887991	-1.829571779
d2=	0.033310494	-0.310124871	0.42566242	-2.792579803	-2.753854897	-0.61179429	0.135139583	-1.249736486	-1.843420274
N(d1)=	0.516237645	0.383509577	0.669854286	0.002728641	0.003071954	0.274937999	0.5592185	0.108250166	0.03365694
N(d2)=	0.513286564	0.378233065	0.664823042	0.002614538	0.002944949	0.270336877	0.553749275	0.105697978	0.032633775
N(-d1)=	0.483762355	0.616490423	0.330145714	0.997271359	0.996928046	0.725062001	0.4407815	0.891749834	0.96634306
N(-d2)=	0.486713436	0.621766935	0.335176958	0.997385462	0.997055051	0.729663123	0.446250725	0.894302022	0.967366225
Realized Price at Maturity	1,193.83	1,206.05	1,153.48	1,154.10	1,188.85	1,201.21	1,178.39	1,168.74	1,166.04
Amount=	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000
Call Price =	3.710025355	4.399276044	10.8569848	0.013000217	0.014792806	2.766599601	7.877040759	0.845221751	0.213360111
Put Price =	3.381303265	9.422540265	3.653510262	45.38049653	44.76353177	12.76687107	5.516137518	21.30217394	30.31890157
Payoff from Put	MAX(X-St,0)								
Payoff from Put=	6,173,398	-	46,517,630	45,898,872	11,150,405	-	21,607,086	31,255,675	33,959,589
Price for Put=	3,381,303	9,422,540	3,653,510	45,380,497	44,763,532	12,766,871	5,516,138	21,302,174	30,318,902
Total Payoff=	1,196,618,697	1,196,630,801	1,196,346,490	1,154,619,503	1,155,236,468	1,188,443,899	1,194,483,862	1,178,697,826	1,169,681,098
Total Present Value=	*Present Value of each Total Payoff*								
10,587,318,349	*1,196,290,901*	*1,195,156,412*	*1,193,727,232*	*1,150,987,386*	*1,150,498,663*	*1,182,435,519*	*1,187,305,888*	*1,170,491,786*	*1,160,424,563*
Check with Put-Call Parity	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Πίνακας 7 Monte Carlo Simulation

Volatility=	6%									
Risk Free rate=	5%									
Strike Price=	1200									
Date	01-Jan-00	03-Jan-00	10-Jan-00	17-Jan-00	24-Jan-00	31-Jan-00	07-Feb-00	14-Feb-00	21-Feb-00	28-Feb-00
Realized Price	1,200.0000	1,193.8266	1,206.0533	1,153.4824	1,154.1011	1,188.8496	1,201.2108	1,178.3929	1,168.7443	1,166.0404
Cash Flow (Amount)		1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000
Cash Flow (Value)		1,193,826,602	1,206,053,341	1,153,482,370	1,154,101,128	1,188,849,595	1,201,210,770	1,178,392,914	1,168,744,325	1,166,040,411
PV of Cash Flow		1,193,499,571	1,204,567,342	1,150,956,958	1,150,470,641	1,183,973,937	1,195,137,845	1,171,311,634	1,160,607,581	1,156,812,687
Total Cash Inflow		10,567,338,197								

Hedging with ARO - Monte Carlo Simulation (Daily Average)	
Hedging Amount	9,000,000
Payoff from Asset	*10,567,338,197*
Payoff from Put Option	
Average Price	1179.2536
Put Price	4.06146
Gain/Loss from Put	186,717,345
Total Payoff from Put	150,164,178
Total Payoff	10,717,502,375

Hedging with ARO - Monte Carlo Simulation ("Monday" Average)		
Hedging Amount		9,000,000
Payoff from Asset		*10,567,338,197*
Payoff from Put Option		
Average Price		1178.966829
Put Price		4.093793513
Gain/Loss from Put		189,298,543
Total Payoff from Put		152,454,401
Total Payoff		10,719,792,599

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α'

ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ΙΤÔ (Itô's lemma)

Στο ντετερμινιστικό περιβάλλον όταν θέλουμε να δούμε πως η μεταβλητή χ, μια μικρή μεταβολή στην τιμή της, dx, επηρεάζει τη συνάρτηση f(x), δεν έχουμε παρά να πάρουμε την πρώτη παράγωγο της f(.) ως προς την χ. Στο στοχαστικό περιβάλλον δεν υπάρχει η έννοια της παραγώγου. Οι απότομες μεταβολές στην τιμή μιας αξίας (πχ η τιμή μιας μετοχής) προσλαμβάνονται ως απρόβλεπτες και στην περίπτωση συνεχούς χρόνου μπορεί να είναι τελείως ακανόνιστες. Το αποτέλεσμα λοιπόν στην τιμή είναι ότι μπορεί μεν να είναι συνεχόμενη, χωρίς ασυνέχειες, αλλά δεν είναι ομαλή (smooth). Στη θέση λοιπόν της παραγώγου θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το στοχαστικό διαφορικό λογισμό. Ο κανόνας του Itô μας δίνει μια αναλυτική φόρμουλα η οποία απλοποιεί τον χειρισμό των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και οδηγεί σε ακριβείς υπολογισμούς.

Υποθέτουμε ότι έχουμε τη συνάρτηση $F(S_t,t)$, η οποία εξαρτάται από τις δύο μεταβλητές S_t και t, με την S_t να μεταβάλλεται ως προς το χρόνο t και να αποτελεί μία τυχαία διαδικασία. Στον κλασικό λογισμό, όπου όλες οι μεταβλητές είναι ντετερμινιστικές, υπάρχουν τρία είδη παραγώγων:

1. Η μερική παράγωγος, η οποία για την $F(S_t,t)$ ορίζεται ως:

$$F_S = \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t}, \quad F_t = \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial t}$$

2. Η ολική παράγωγος που έχει να κάνει με τα διαφορικά:

$$dF_t = F_S dS_t + F_t dt$$

3. Ο κανόνας της αλυσίδας (chain rule):

$$dF(S_t,t)/dt = F_S(dS_t/dt) + F_t$$

Η στοχαστική έκδοση του αλυσιδωτού κανόνα είναι γνωστή ως Itô's Lemma. Ας υποθέσουμε ότι η S_t αποτελεί μια, συνεχούς χρόνου, διαδικασία η οποία εξαρτάται από την Wiener διαδικασία W_t, έχουμε δηλαδή τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (*Stochastic Differential Equation* - SDE):

$dS_t = \alpha(S_t\,, t)dt + b(S_t\,, t)dW_t$ (1)

όπου η dW_t αποτελεί το κομμάτι που εκφράζει τα απρόβλεπτα γεγονότα που μπορούν να συμβούν κατά τη διάρκεια της απειροελάχιστης μεταβολής του χρόνου dt. Τα $\alpha(S_t\,, t)$ και $b(S_t\,, t)$ αποτελούν τους συντελεστές του μέσου και της διασποράς αντίστοιχα. Υποθέσουμε ότι η S_t εκφράζεται από τη συνάρτηση $F(S_t,t)$ και ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την μεταβολή στην F(.) όταν μεταβάλλεται ο χρόνος κατά dt. Η μεταβολή του χρόνου επηρεάζει την συνάρτηση $F(S_t,t)$ κατά δύο τρόπους: Πρώτον υπάρχει μια άμεση επίδραση μέσω της μεταβλητής t στην $F(S_t,t)$ και κατά δεύτερον καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος έχουμε διαφορετικές πληροφορίες αναφορικά με την W_t και παρατηρούμε μια απειροστή αύξηση στην dS_t. Το άθροισμα αυτών των δύο επιρροών απεικονίζεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (SDE) $dF(S_t,t)$ και δίνεται από το στοχαστικό ισοδύναμο του αλυσιδωτού κανόνα.

Το λήμμα του Itô μας λεει ότι η συνάρτηση $G(S_t, t)$ ακολουθεί τη διαδικασία[27]:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S_t} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} b^2\right) dt + \frac{\partial G}{\partial S_t} b\, dW_t \qquad (2)$$

όπου η dW_t είναι η ίδια Wiener διαδικασία όπως εμφανίζεται στην (1). Η συνάρτηση G ακολουθεί επίσης τη διαδικασία του Itô και έχει μέσο (drift rate) ίσο με:

$$\frac{\partial G}{\partial S_t} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} b^2$$

και τυπική απόκλιση ίση με :

$$\frac{\partial G}{\partial S_t} b$$

[27] John C.Hull "OPTIONS, FUTURES, & OTHER DERIVATIVES" 4th Edition 2000 PRENTICE-HALL Inc.σελ 229

Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ BLACK - SCHOLES

Η ιδέα πίσω από την επινόηση της φόρμουλας των Fisher Black και Myron Scholes όπως περιγράφεται από τον ίδιο τον Black[28] ήταν η δημιουργία μιας φόρμουλας που θα ανέλυε το πώς:

"...the value of a call option depends on the price of the underlying stock, the volatility of the stock, the exercise price and maturity of the option, and the interest rate".

Σκοπός τους ήταν να μπορέσουν να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου και να το καταστήσουν ακίνδυνο. Η προσπάθεια του Black ξεκίνησε από την αποτίμηση ενός warrant. Το πρώτο βήμα στην επίλυση του προβλήματος ήταν να περιγράψει την αξία του warrant ως μια συνάρτηση η οποία εξαρτάται από την τιμή της μετοχής και από άλλους παράγοντες. Το δεύτερο βήμα ήταν ν' αφαιρεθεί από το μοντέλο κάθε στοιχείο που αύξανε την πολυπλοκότητα και συνεπώς τη δυσκολία επίλυσής του:

"Another thing that made it possible to solve the problem was to assume away all kinds of complications. I assumed that trading costs are zero, that both borrowing and lending can done at a single short-term interest rate that is constant...I made a few other simplifying assumptions, some of which turned out to be unnecessary".

Οι βασικές λοιπόν υποθέσεις των Black - Scholes μπορούν να συνοψισθούν στα παρακάτω:

* Η τιμή της υποκείμενης αξίας ακολουθεί τον λογαριθμικό κανονικό τυχαίο περίπατο:

$$dS = \sigma S dx + \mu S dt \quad (1)$$

όπου η παράμετρος μ είναι το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης της S καθώς ο χρόνος t μεταβάλλεται κατά dt, και η σ αποτελεί τη μεταβλητότητα της S. Και οι δύο αυτοί παράμετροι θεωρούνται σταθεροί. Η dx αποτελεί μια Wiener διαδικασία, (Wiener Process)[29]. Αποτελεί μια ιδιαίτερη μορφή της στοχαστικής Markov διαδικασίας, με μέσο μηδέν και διακύμανση 1. Πολλές φορές αναφέρεται και ως Brownian κίνηση (Brownian motion).

* Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk free interest rate) r και η μεταβλητότητα σ της υποκείμενης αξίας αποτελούν γνωστές συναρτήσεις ως προς το χρόνο κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος.
* Δεν υπάρχει κόστος συναλλαγών, που να σχετίζεται με την αντιστάθμιση του χαρτοφυλακίου του επενδυτή.
* Η υποκείμενη αξία δεν πληρώνει κάποιο μέρισμα κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος
* Δεν υπάρχει δυνατότητα κερδοσκοπικής αγοραπωλησίας (arbitrage)
* Η διαπραγμάτευση της υποκείμενης αξίας μπορεί να γίνεται συνεχώς.
* Η υποκείμενη αξία είναι διαιρετή και επιτρέπεται η προπώληση τίτλων (short selling)

Έστω τώρα ότι έχουμε ένα δικαίωμα του οποίου η αξία V(S,t) εξαρτάται μόνο από τις 2 μεταβλητές S και t. Προς το παρόν δεν μας ενδιαφέρει αν το δικαίωμα αυτό είναι δικαίωμα αγοράς ή πώλησης. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Itô (Itô's lemma) έχουμε:

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt \qquad (2)$$

Η παραπάνω συνάρτηση μας δίνει τον τυχαίο περίπατο που ακολουθεί η V. Προκειμένου να λυθεί η παραπάνω εξίσωση το μόνο που χρειάζεται είναι να ορίζεται

[28] Fisher Black "How We Came Up With The Option Formula" Journal of Portfolio Management 1989, Vol. 15, No 2, page 4 - 8.

[29] Μια μεταβλητή χ ακολουθεί την Wiener διαδικασία αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:
1. Η μεταβολή στη Δχ κατά τη διάρκεια μιας μικρής μεταβολής στο χρόνο Δt είναι: $\Delta\chi=\varepsilon(\Delta t)^{1/2}$ όπου η ε αποτελεί μια τυχαία τιμή η οποία προέρχεται από μια τυπική κανονική κατανομή φ(0,1)
2. Οι αξίες της Δχ σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές Δt είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

Η πρώτη ιδιότητα μας λεει ότι η Δχ κατανέμεται κανονικά με μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση $(\Delta t)^{1/2}$. Η δεύτερη ιδιότητα συνεπάγεται ότι η χ ακολουθεί τη Markov διαδικασία.

η πρώτη παράγωγος ως προς το χρόνο t και επίσης να ορίζονται οι δύο πρώτες παράγωγοι ως προς το S.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από ένα δικαίωμα και μια ποσότητα -Δ από την υποκείμενη αξία. Η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού είναι:

$$\Pi = V - \Delta S \quad (3)$$

Η μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου μετά από μία χρονική περίοδο είναι:

$$d\Pi = dV - \Delta dS \quad (4)$$

το Δ στη χρονική αυτή στιγμή παραμένει σταθερό, γιατί διαφορετικά στην παραπάνω εξίσωση θα υπήρχε και ένας όρος dΔ. Χρησιμοποιώντας τις (1), (2) και (3) βρίσκουμε ότι το χαρτοφυλάκιο Π ακολουθεί τον τυχαίο περίπατο:

$$d\Pi = \sigma S\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dX + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu\Delta S\right) dt \quad (5)$$

Στην εξίσωση (5) μπορούμε να αποβάλουμε την τυχαιότητα επιλέγοντας

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \quad (6)$$

η επιλογή[30] αυτή έχει ως αποτέλεσμα το χαρτοφυλάκιο να αποτελείται μόνο από ντετερμινιστικά στοιχεία και πιο συγκεκριμένα:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt \quad (7)$$

Αν κάποιος επενδυτής είχε επενδύσει την αξία του χαρτοφυλακίου του Π σε μια επένδυση που θα του έδινε την απόδοση μηδενικού κινδύνου r τότε στο χρόνο dt θα κατέληγε με χαρτοφυλάκιο αξίας rΠdt. Σύμφωνα με την υπόθεση της μη ύπαρξης δυνατότητας κερδοσκοπικής αγοραπωλησίας θα πρέπει το δεξιό μέρος της (7) να

[30] Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το Δ (delta) αποτελεί τη μεταβολή στην αξία του δικαιώματος ή του χαρτοφυλακίου καθώς μεταβάλλεται η τιμή της υποκείμενης αξίας S και αποτελεί ένα μέτρο της συσχέτισης ανάμεσα στην τιμή του δικαιώματος και στην τιμή της υποκείμενης αξίας.

ισούται με $r\Pi dt$, διαφορετικά θα υπήρχε η δυνατότητα για άμεσο κέρδος. Έτσι λοιπόν θα πρέπει να ισχύει:

$$r\Pi dt=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \qquad (8)$$

Αντικαθιστώντας στην (8) τις (3) και (6) και διαιρώντας και τα δύο μέρη με dt έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \qquad (9)$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί τη γνωστή **μερική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes**[31]. Η συμβολή του Robert Merton στην ολοκλήρωση της παραπάνω φόρμουλας ήταν σημαντική,

"Merton made a number of suggestions that improved our paper. In particular he pointed out that..."

και για το λόγο αυτό η παραπάνω διαφορική εξίσωση πολλές φορές αποκαλείται και **μερική διαφορική εξίσωση των Black - Scholes - Merton.**

Αυτό που θα πρέπει να γίνει κατανοητό είναι ότι το χαρτοφυλάκιο στην παραπάνω εξίσωση δεν είναι απαλλαγμένο μόνιμα από τον κίνδυνο, παρά μόνο για τη χρονική περίοδο dt. Για να παραμείνει το χαρτοφυλάκιο τελείως ακίνδυνο θα πρέπει να μεταβάλλεται το ποσοστό που είναι επενδυμένο σε δικαιώματα και το αντίστοιχο της υποκείμενης αξίας κάθε φορά που μεταβάλλεται η τιμή της υποκείμενης αξίας.

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι πολλές αντίστοιχα με τα παράγωγα που χρησιμοποιούνται κάθε φορά σε συνδυασμό με την υποκείμενη αξία και τις οριακές και τελικές συνθήκες (boundary and final conditions) που χρησιμοποιούνται Στην περίπτωση για παράδειγμα του Ευρωπαϊκού δικαιώματος η τελική συνθήκη είναι:

$C(S_t,t) = \max(S-X, 0)$ όταν $t = T$.

και οι οριακές: $C(0,t) = 0$, $C(S_t,t) \sim S$ όταν το $S \to \infty$

[31] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne "THE MATHEMATICS OF FINANCIAL DERIVATIVES - A Student Introduction" CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS 1995 σελ 41 - 45.

Οι Black - Scholes έλυσαν αυτή τη μερική διαφορική εξίσωση και πήραν την ακριβή συνάρτηση της $V(S_t, t)$[32]

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (10)$$

με

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

και

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

τα $N(d_i)$, με $i = 1,2$ αποτελούν τιμές από το ολοκλήρωμα πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής:

$$N(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση των Black - Scholes καθώς και τις οριακές συνθήκες, θα πρέπει να πάρουμε την πρώτη και δεύτερη μερική παράγωγο της (10) ως προς το S_t και τα αποτελέσματα που θα λάβουμε να τα αντικαταστήσουμε στην (9). Το αποτέλεσμα θα πρέπει να ισούται με το μηδέν. Επίσης καθώς το $t \to T$, η συνάρτηση θα πρέπει να ισούται με την τελική συνθήκη.

Με τη βοήθεια του Mathematica παρουσιάζουμε τη λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης των Black-Scholes και παρουσιάζουμε τη γραφική παράσταση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς[33]:

Για να διευκολύνουμε την επίλυση χρησιμοποιούμε τη βοηθητική συνάρτηση d1BS, η οποία είναι η d1 των Black-Scholes και για S = η τιμή της υποκείμενης αξίας, k= η τιμή εξάσκησης, sd= η τυπική απόκλιση, r = το επιτόκιο μηδενικού

[32] Salih N. Neftci "AN INTRODUCTION TO THE MATHEMATICS OF FINANCIAL DERIVATIVES" ACADEMIC PRESS 1996 chapter 13 - 'The Black-Scholes PDE'
[33] Cliff J. Huang, Philip S. Crooke "MATHEMATICS AND MATHEMATICA FOR ECONOMISTS" BLACKWELL 1997 και Hal R. Varian "ECONOMIC AND FINANCIAL MODELING WITH MATHEMATICA" SPRINGER TELOS 1993

κινδύνου, t = ο χρόνος που απομένει μέχρι τη λήξη του δικαιώματος (σε χρόνια) έχουμε:

```
d1BS[S_, k_, sd_, r_, t_] = (Log[S/k] + r*t) / (sd*Sqrt[t]) + .5*sd*Sqrt[t]
```

$$0.5\,\mathrm{sd}\sqrt{t} + \frac{r\,t + \mathrm{Log}\left[\frac{S}{k}\right]}{\mathrm{sd}\sqrt{t}}$$

```
BlackScholes[S_, k_, sd_, r_, t_] =
 S*Norm[d1BS[S, k, sd, r, t]] - k*Exp[-r*t]*(Norm[d1BS[S, k, sd, r, t] - sd*Sqrt[t]])
```

$$-e^{-r\,t}\,k\left(0.5 + 0.5\,\mathrm{Erf}\left[0.707107\left(-0.5\,\mathrm{sd}\sqrt{t} + \frac{r\,t + \mathrm{Log}\left[\frac{S}{k}\right]}{\mathrm{sd}\sqrt{t}}\right)\right]\right) +$$
$$S\left(0.5 + 0.5\,\mathrm{Erf}\left[0.707107\left(0.5\,\mathrm{sd}\sqrt{t} + \frac{r\,t + \mathrm{Log}\left[\frac{S}{k}\right]}{\mathrm{sd}\sqrt{t}}\right)\right]\right)$$

η συνάρτηση Norm αποτελεί τη συνάρτηση της αθροιστικής κανονικής κατανομής και ορίζεται για να μας δίνει αριθμητικές τιμές ως:

```
Norm[z_] := N[0.5 + 0.5*Erf[z / Sqrt[2]]]
```

δίνοντας στην συνάρτηση των Black-Scholes τις παρακάτω τιμές μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία του δικαιώματος:

```
BlackScholes[58.5, 60., 0.29, 0.04, 0.3]
```

3.34886

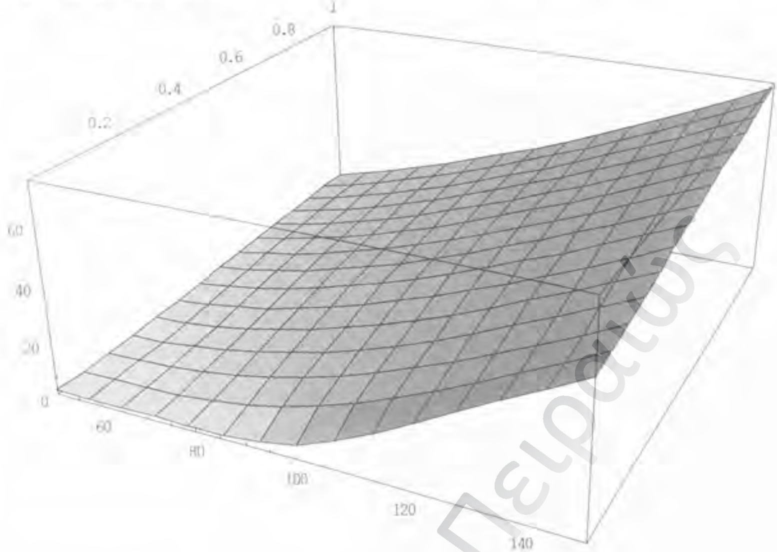
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης των Black-Scholes για τιμές της υποκείμενης αξίας από 50 - 70, και για όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές έχουμε:

```
Plot[BlackScholes[x, 60., 0.29, 0.04, 0.3], {x, 50, 70}]
```

- Graphics -

Στη συνέχεια μπορούμε να δούμε την γραφική τρισδιάστατη απεικόνιση της συνάρτησης των Black-Scholes όταν παράλληλα με την τιμή της υποκείμενης αξίας μεταβάλλουμε και το χρόνο (στην παρακάτω συνάρτηση ο χρόνος είναι η μεταβλητή y):

```
Plot3D[BlackScholes[x, 100., 0.80, 0.065, y], {x, 50, 150}, {y, 0.01, 1},
 ViewPoint→{1, -2, 1}]
```




```
- SurfaceGraphics -
```

θεωρήσαμε ενδιαφέρον, επίσης, να δείξουμε και το πώς υπολογίζονται αλλά και την γραφική παράσταση των μεταβολών στην αξία του δικαιώματος όταν μεταβάλλεται κάθε μία από τις παραμέτρους της εξίσωσης των Black-Scholes (B-S), ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν σταθερές. Έτσι παραθέτουμε τα γνωστά ως *"the Greeks"*. Πρωτού όμως προχωρήσουμε στην ανάλυσή τους θα πρέπει να μετατρέψουμε την συνάρτηση της αθροιστικής κανονικής κατανομής προκειμένου να μας δίνει την πρώτη παράγωγο αυτής. Στο Mathematica η πρώτη παράγωγος της Norm δίνεται από:

```
Norm'[z_] = N[(1/Sqrt[2 Pi])] * Exp[-z^2/2]
```

$0.398942\, e^{-\frac{z^2}{2}}$

το δέλτα ("Delta") της συνάρτησης των B-S, που μας δίνει τη σχέση - ρυθμό μεταβολής της αξίας του δικαιώματος όταν μεταβληθεί κατά μια μονάδα η τιμή της υποκείμενης αξίας, δίνεται από την παρακάτω σχέση[34]:

```
Delta[p_, k_, sd_, r_, t_] = D[BlackScholes[p, k, sd, r, t], p]
```

[34] Για να ορίσουμε την πρώτη παράγωγο στο Mathematica χρησιμοποιούμε τον τελεστή D

$$0.5+\frac{0.398942\,e^{-0.5\left(0.5\,sd\sqrt{t}+\frac{r\,t+\mathrm{Log}\left[\frac{p}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)^2}}{sd\sqrt{t}}-$$

$$\frac{0.398942\,e^{-r\,t-0.5\left(-0.5\,sd\sqrt{t}+\frac{r\,t+\mathrm{Log}\left[\frac{p}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)^2}k}{p\,sd\sqrt{t}}+0.5\,\mathrm{Erf}\left[0.707107\left(0.5\,sd\sqrt{t}+\frac{r\,t+\mathrm{Log}\left[\frac{p}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)\right]$$

και η γραφική παράσταση αυτής από:

```
Plot[Delta[x, 60, 0.29, 0.04, 0.3], {x, 20, 100}]
```

- Graphics -

το θήτα Θ ("Theta") αντίστοιχα είναι το ποσοστό μεταβολής της αξίας ενός χαρτοφυλακίου όταν μεταβάλλεται ο χρόνος, (φυσικά όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές παραμένουν σταθερές) και δίνεται από:

```
Theta[p_, k_, sd_, r_, t_] = -D[BlackScholes[p, k, sd, r, t], t]
```

$$-e^{-r\,t}k\,r\left(0.5+0.5\,\mathrm{Erf}\left[0.707107\left(-0.5\,sd\sqrt{t}+\frac{r\,t+\mathrm{Log}\left[\frac{p}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)\right]\right)+$$

$$0.398942\,e^{-r\,t-0.5\left(-0.5\,sd\sqrt{t}+\frac{r\,t+\mathrm{Log}\left[\frac{p}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)^2}k\left(\frac{r}{sd\sqrt{t}}-\frac{0.25\,sd}{\sqrt{t}}-\frac{r\,t+\mathrm{Log}\left[\frac{p}{k}\right]}{2\,sd\,t^{3/2}}\right)-$$

$$0.398942\,e^{-0.5\left(0.5\,sd\sqrt{t}+\frac{r\,t+\mathrm{Log}\left[\frac{p}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)^2}p\left(\frac{r}{sd\sqrt{t}}+\frac{0.25\,sd}{\sqrt{t}}-\frac{r\,t+\mathrm{Log}\left[\frac{p}{k}\right]}{2\,sd\,t^{3/2}}\right)$$

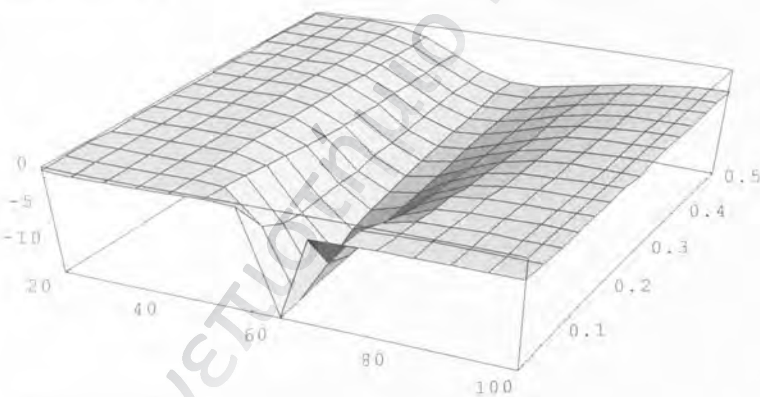
με γραφική απεικόνιση αυτού:

```
Plot[Theta[x, 60, 0.29, 0.04, 0.3], {x, 20, 100}]
```

- Graphics -

παρατηρούμε ότι το Θ είναι αρνητικό και αυτό γιατί καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος το δικαίωμα χάνει συνεχώς σε αξία και τείνει να πλησιάσει ασυμπτωτικά την τιμή $-rSe^{-rT}$. Σε τρισδιάστατη μορφή το Θ απεικονίζεται ως:

```
Plot3D[Theta[x, 60, 0.29, 0.04, y], {x, 20, 100}, {y, 0.01, 0.5}]
```



- SurfaceGraphics -

ομοίως συνεχίζουμε με τα Gamma, Vega και Rho

```
Gamma1[S_, k_, sd_, r_, t_] = D[Delta[S, k, sd, r, t], S]
```

$$\frac{0.398942\, e^{-rt-0.5\left(-0.5\, sd\sqrt{t}+\frac{rt+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)^2} k}{S^2\, sd\sqrt{t}}+\frac{0.398942\, e^{-0.5\left(0.5\, sd\sqrt{t}+\frac{rt+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)^2}}{S\, sd\sqrt{t}}+$$

$$\frac{0.398942\, e^{-rt-0.5\left(-0.5\, sd\sqrt{t}+\frac{rt+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)^2} k\left(-0.5\, sd\sqrt{t}+\frac{rt+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)}{S^2\, sd^2\, t}-$$

$$\frac{0.398942\, e^{-0.5\left(0.5\, sd\sqrt{t}+\frac{rt+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)^2}\left(0.5\, sd\sqrt{t}+\frac{rt+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)}{S\, sd^2\, t}$$

```
Gamma1[20, 60, 0.29, 0.04, 0.3]
Plot[Gamma1[S, 60, 0.29, 0.04, 0.3], {S, 20, 100}]
```

1.48368×10^{-11}

- Graphics -

```
Vega[S_, k_, sd_, r_, t_] = D[BlackScholes[S, k, sd, r, t], sd]
```

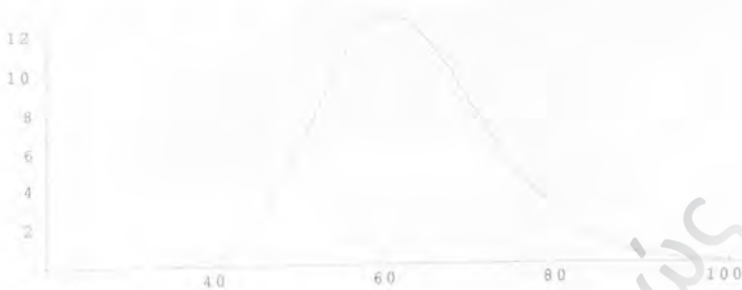
$$-0.398942\, e^{-rt-0.5\left(-0.5\, sd\sqrt{t}+\frac{rt+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)^2} k\left(-0.5\sqrt{t}-\frac{rt+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd^2\sqrt{t}}\right)+$$

$$0.398942\, e^{-0.5\left(0.5\, sd\sqrt{t}+\frac{rt+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)^2} S\left(0.5\sqrt{t}-\frac{rt+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd^2\sqrt{t}}\right)$$

```
Vega[20, 60, 0.29, 0.04, 0.3]
```

5.16321×10^{-10}

```
Plot[Vega[S, 60, 0.29, 0.04, 0.3], {S, 20, 100}]
```



- Graphics -

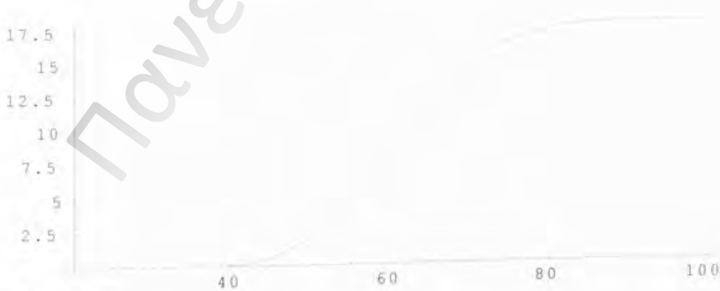
```
Rho[S_, k_, sd_, r_, t_] = D[BlackScholes[S, k, sd, r, t], r]
```

$$-\frac{0.398942\, e^{-r t-0.5\left(-0.5\, sd\sqrt{t}+\frac{r t+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)^2} k\sqrt{t}}{sd}+\frac{0.398942\, e^{-0.5\left(0.5\, sd\sqrt{t}+\frac{r t+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)^2} S\sqrt{t}}{sd}+$$
$$e^{-r t} k\, t\left(0.5+0.5\, Erf\left[0.707107\left(-0.5\, sd\sqrt{t}+\frac{r t+Log\left[\frac{S}{k}\right]}{sd\sqrt{t}}\right)\right]\right)$$

```
Rho[20, 60, 0.29, 0.04, 0.3]
```

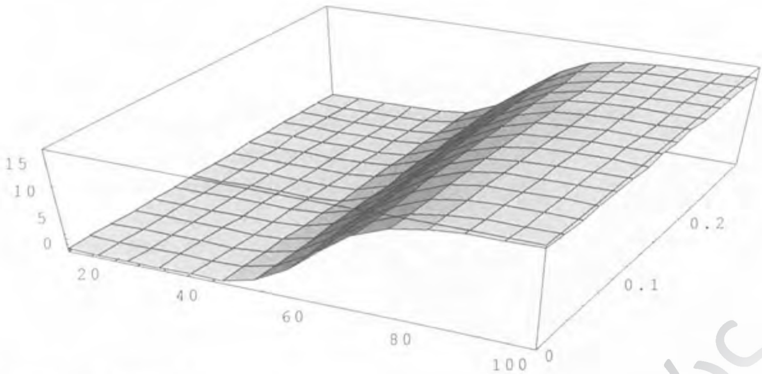
4.006×10^{-11}

```
Plot[Rho[S, 60, 0.29, 0.04, 0.3], {S, 20, 100}]
```



- Graphics -

```
Plot3D[Rho[S, 60, 0.29, r, 0.3], {S, 10, 100}, {r, 0, 0.3}]
```



- SurfaceGraphics -

Geometric Average Rate Put - Continuously Sampled

```
<< Statistics`NormalDistribution`
ndist = NormalDistribution[0, 1]
```

NormalDistribution[0, 1]

```
cdf1 = CDF[ndist, q]
```

$$\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{Erf}\left[\frac{q}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

```
a = 1/2 * (r - D - (1/6) σ^2)
s = σ / Sqrt[3]
d1 = (Log[S/K] + (a + (1/2) s^2) * (T - t)) / (s * Sqrt[(T - t)])
d2 = d1 - s * Sqrt[(T - t)]
Vgeconput[S_, K_, D_, r_, T_, t_, σ_] =
 K * Exp[(-r (T - t))] * CDF[ndist, -d2] -
  S * Exp[((a - r) * (T - t))] * CDF[ndist, -d1]
Plot[Vgeconput[S, 40, 0.004, 0.35, 1, 0.3, 0.9], {S, 1, 109}]
 "Geometric Average rate Put"
Deltagcput[S_, K_, D_, r_, T_, t_, σ_] =
 D[Vgeconput[S, K, D, r, T, t, σ], S]
Plot[Deltagcput[S, 40, 0.004, 0.35, 1, 0.3, 0.9], {S, 10, 109}] "Delta"
Thetagcput[S_, K_, D_, r_, T_, t_, σ_] =
 -D[Vgeconput[S, K, D, r, T, t, σ], T]
Plot[Thetagcput[S, 40, 0.004, 0.35, 1, 0.3, 0.9], {S, 20, 109}] "Theta"
Gammagcput[S_, K_, D_, r_, T_, t_, σ_] =
 D[Deltagcput[S, K, D, r, T, t, σ], S]
Plot[Gammagcput[S, 40, 0.004, 0.35, 1, 0.3, 0.9], {S, 1, 109}] "Gamma"
Vegagcput[S_, K_, D_, r_, T_, t_, σ_] =
 D[Vgeconput[S, K, D, r, T, t, σ], σ]
Plot[Vegagcput[S, 40, 0.004, 0.35, 1, 0.3, 0.9], {S, 1, 109}] "Vega"
Rhogcput[S_, K_, D_, r_, T_, t_, σ_] =
 D[Vgeconput[S, K, D, r, T, t, σ], r]
Plot[Rhogcput[S, 40, 0.004, 0.35, 1, 0.3, 0.9], {S, 1, 109}]
"Rho"
```

$$\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)$$

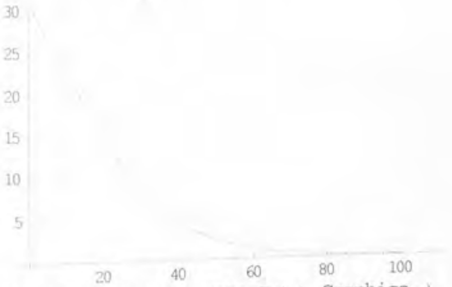
$$\frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}$$

$$-\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}$$

$$-\frac{1}{2} e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)} S \left(1-\mathrm{Erf}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right]\right)+$$

$$\frac{1}{2} e^{-r(-t+T)} K \left(1+\mathrm{Erf}\left[\frac{\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

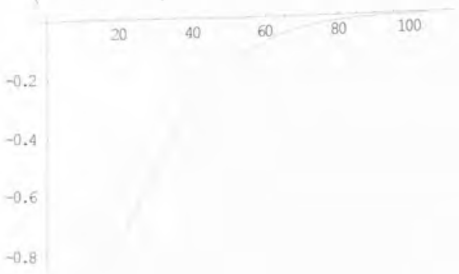


Geometric Average rate Put (- Graphics -)

$$\frac{e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)-\frac{3\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)^2}{2\sigma^2(-t+T)}}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}}{\sigma\sqrt{-t+T}}-$$

$$\frac{e^{-r(-t+T)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)^2} K\sqrt{\frac{3}{2\pi}}}{\sigma S\sqrt{-t+T}}-$$

$$\frac{1}{2} e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)} \left(1-\mathrm{Erf}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right]\right)$$



Delta (- Graphics -)

$$\frac{1}{2} e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)}\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right) S$$

$$\left(1-\mathrm{Erf}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right]\right)+$$

$$\frac{1}{2} e^{-r(-t+T)} K r \left(1+\mathrm{Erf}\left[\frac{\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}}{\sqrt{2}}\right]\right)-$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)-\frac{3\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)^2}{2\sigma^2(-t+T)}}\right.$$

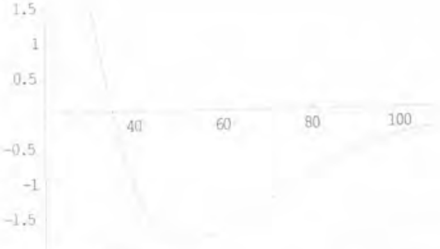
$$S\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}-\right.$$

$$\left.\left.\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{2\sigma(-t+T)^{3/2}}\right)\right)-$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-r(-t+T)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)^2}\right.$$

$$K\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{3}\sqrt{-t+T}}-\frac{\sqrt{3}\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}+\right.$$

$$\left.\left.\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{2\sigma(-t+T)^{3/2}}\right)\right)$$



Theta (- Graphics -)

$$\frac{e^{-r(-t+T)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)^2} K\sqrt{\frac{3}{2\pi}}}{\sigma S^2\sqrt{-t+T}}+$$

$$\frac{e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)-\frac{3\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)^2}{2\sigma^2(-t+T)}}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}}{\sigma S\sqrt{-t+T}}-$$

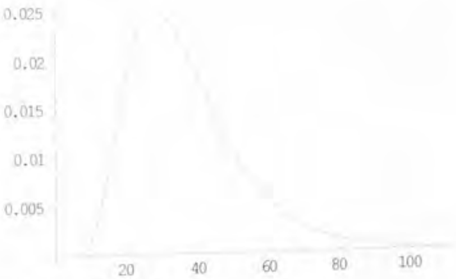
$$\frac{1}{\sigma^3 S(-t+T)^{3/2}}\left(3e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)-\frac{3\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)^2}{2\sigma^2(-t+T)}}\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)\right)-$$

$$\left(3e^{-r(-t+T)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)^2} K\right.$$

$$\left.\left(\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)\right)\Big/$$

$$\left(\sigma^2\sqrt{2\pi}\,S^2(-t+T)\right)$$

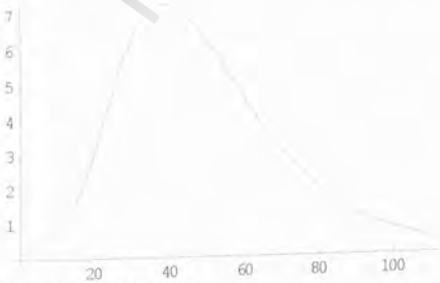


Gamma (- Graphics -)

$$\frac{1}{12} e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)} \sigma S(-t+T) \left(1-\mathrm{Erf}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right]\right)+$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)-\frac{3\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)^2}{2\sigma^2(-t+T)}} S \left(\frac{\sqrt{-t+T}}{2\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma^2\sqrt{-t+T}}\right)\right)+$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-r(-t+T)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)^2} K \left(\frac{\sqrt{-t+T}}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma^2\sqrt{-t+T}}\right)\right)$$



Vega (- Graphics -)

$$-\frac{1}{2\sigma}\left(e^{-r(-t+T)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)^2}\right.$$

$$\left.K\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sqrt{-t+T}\right)+\frac{1}{2\sigma}$$

$$\left(e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)-\frac{3\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)^2}{2\sigma^2(-t+T)}}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,S\sqrt{-t+T}\right)-$$

$$\frac{1}{4}e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)}S(t-T)$$

$$\left(1-\text{Erf}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right]\right)+$$

$$\frac{1}{2}e^{-r(-t+T)}K(t-T)\left(1+\text{Erf}\left[\frac{\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

Rho (- Graphics -)

Geometric Average Rate Call - Continuously Sampled

```
<< Statistics`NormalDistribution`
ndist = NormalDistribution[0, 1]
```

NormalDistribution[0, 1]

```
cdf1 = CDF[ndist, q]
```

$$\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{Erf}\left[\frac{q}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

```
a = 1/2 * (r - D - (1/6) σ^2)
s = σ / Sqrt[3]
d1 = (Log[S / K] + (a + (1/2) s^2) * (T - t)) / (s * Sqrt[(T - t)])
d2 = d1 - s * Sqrt[(T - t)]
Vgeconcall[S_, K_, D_, r_, T_, t_, σ_] =
  S * Exp[((a - r) * (T - t))] * CDF[ndist, d1] -
   K * Exp[(-r (T - t))] * CDF[ndist, d2]
Plot[Vgeconcall[S, 40, 0.004, 0.35, 1, 0.3, 0.9], {S, 1, 109}]
  "Geometric Average rate Call"
Deltagccall[S_, K_, D_, r_, T_, t_, σ_] =
  D[Vgeconcall[S, K, D, r, T, t, σ], S]
Plot[Deltagccall[S, 40, 0.004, 0.35, 1, 0.3, 0.9], {S, 10, 109}] "Delta"
Thetagccall[S_, K_, D_, r_, T_, t_, σ_] =
  -D[Vgeconcall[S, K, D, r, T, t, σ], T]
Plot[Thetagccall[S, 40, 0.004, 0.35, 1, 0.3, 0.9], {S, 20, 109}] "Theta"
Gammagccall[S_, K_, D_, r_, T_, t_, σ_] =
  D[Deltagccall[S, K, D, r, T, t, σ], S]
Plot[Gammagccall[S, 40, 0.004, 0.35, 1, 0.3, 0.9], {S, 1, 109}] "Gamma"
Vegagccall[S_, K_, D_, r_, T_, t_, σ_] =
  D[Vgeconcall[S, K, D, r, T, t, σ], σ]
Plot[Vegagccall[S, 40, 0.004, 0.35, 1, 0.3, 0.9], {S, 1, 109}] "Vega"
Rhogccall[S_, K_, D_, r_, T_, t_, σ_] =
  D[Vgeconcall[S, K, D, r, T, t, σ], r]
Plot[Rhogccall[S, 40, 0.004, 0.35, 1, 0.3, 0.9], {S, 1, 109}]
"Rho"
```

$$\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}$$

$$-\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}$$

$$\frac{1}{2} e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)} S \left(1+\text{Erf}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right]\right) -$$

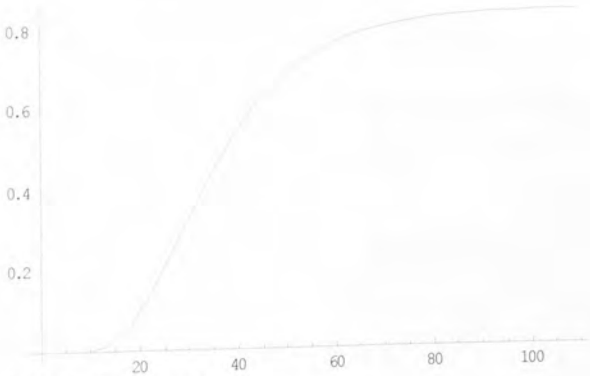
$$\frac{1}{2} e^{-r(-t+T)} K \left(1+\text{Erf}\left[\frac{-\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

Geometric Average rate Call (- Graphics -)

$$\frac{e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)-\frac{3\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)^2}{2\sigma^2(-t+T)}}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}}{\sigma\sqrt{-t+T}} -$$

$$\frac{e^{-r(-t+T)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)^2} K\sqrt{\frac{3}{2\pi}}}{\sigma S\sqrt{-t+T}} +$$

$$\frac{1}{2} e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)} \left(1+\text{Erf}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right]\right)$$



Delta (- Graphics -)

$$-\frac{1}{2} e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)} \left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right) S$$

$$\left(1+\text{Erf}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right]\right)-$$

$$\frac{1}{2} e^{-r(-t+T)} K r \left(1+\text{Erf}\left[\frac{-\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}}{\sqrt{2}}\right]\right)-$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)-\frac{3\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)^2}{2\sigma^2(-t+T)}}\right.$$

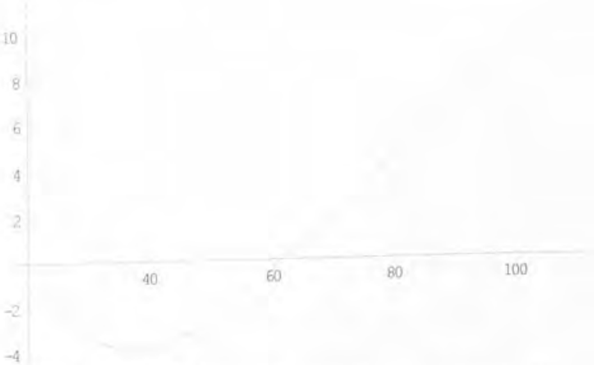
$$S\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}-\right.$$

$$\left.\left.\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{2\sigma(-t+T)^{3/2}}\right)\right)+$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-r(-t+T)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)^2}\right.$$

$$K\left(-\frac{\sigma}{2\sqrt{3}\sqrt{-t+T}}+\frac{\sqrt{3}\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}-\right.$$

$$\left.\left.\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\text{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{2\sigma(-t+T)^{3/2}}\right)\right)$$



Theta (- Graphics -)

$$\frac{e^{-r(-t+T)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)^2} K\sqrt{\frac{3}{2\pi}}}{\sigma S^2\sqrt{-t+T}}+$$

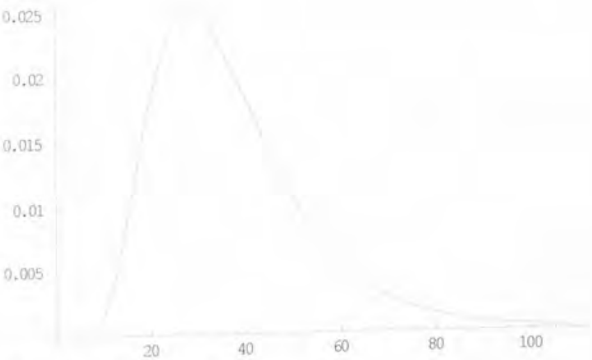
$$\frac{e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)-\frac{3\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)^2}{2\sigma^2(-t+T)}}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}}{\sigma S\sqrt{-t+T}}-$$

$$\frac{1}{\sigma^3 S(-t+T)^{3/2}}\left(3e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)-\frac{3\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)^2}{2\sigma^2(-t+T)}}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\right.$$

$$\left.\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)\right)+\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}\;S^2(-t+T)}$$

$$\left(3e^{-r(-t+T)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)^2} K\right.$$

$$\left.\left(-\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)\right)$$



Gamma (- Graphics -)

$$-\frac{1}{12} e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)} \sigma S (-t+T)$$

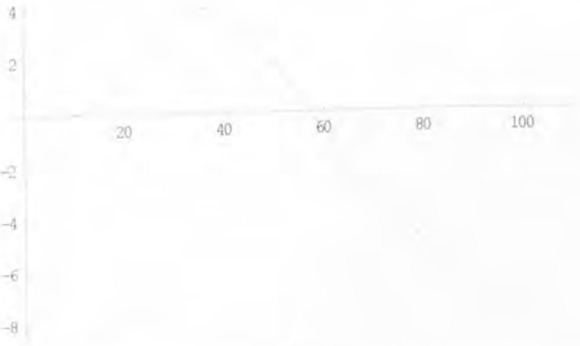
$$\left(1+\mathrm{Erf}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right]+\right.$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{\left(r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)-\frac{3\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)^2}{2\sigma^2(-t+T)}} S\right.$$

$$\left.\left.\left(\frac{\sqrt{-t+T}}{2\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma^2\sqrt{-t+T}}\right)\right)\right)-$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-r(-t+T)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)^2} K\right.$$

$$\left.\left(-\frac{\sqrt{-t+T}}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma^2\sqrt{-t+T}}\right)\right)$$



Vega (- Graphics -)

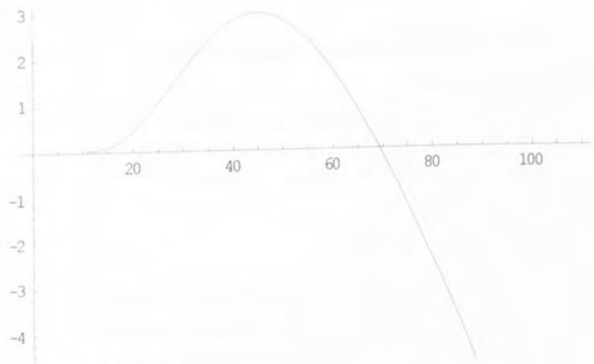
$$-\frac{1}{2\sigma}\left(e^{-r(-t+T)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right)^2} K\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sqrt{-t+T}\right)+\frac{1}{2\sigma}$$

$$\left(e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)-\frac{3\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)^2}{2\sigma^2(-t+T)}}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,S\sqrt{-t+T}\right)+$$

$$\frac{1}{4}e^{\left(-r+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)}S(t-T)$$

$$\left(1+\mathrm{Erf}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}\right]\right)-$$

$$\frac{1}{2}e^{-r(-t+T)}K(t-T)\left(1+\mathrm{Erf}\left[\frac{-\frac{\sigma\sqrt{-t+T}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{\sigma^2}{6}+\frac{1}{2}\left(-D-\frac{\sigma^2}{6}+r\right)\right)(-t+T)+\mathrm{Log}\left[\frac{S}{K}\right]\right)}{\sigma\sqrt{-t+T}}}{\sqrt{2}}\right]\right)$$



Rho (- Graphics -)

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΕΞΩΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

Η ακόλουθη επισκόπηση, κατηγοριοποιεί τα εξωτικά δικαιώματα σε δεκατρείς κατηγορίες. Κάθε κατηγορία διαφοροποιείται ανάλογα με τη συνάρτηση του αποτελέσματος (payoff - function) που τη χαρακτηρίζει, χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σημειογραφία:

A^* ≡ geometric or arithmetic average underlying asset price through expiration date
C (P) ≡ current value of call (put)
F ≡ forward price of underlying asset for delivery on option expiration date
H ≡ barrier price of underlying asset
H_1 (H_2) ≡ barrier price of underlying asset 1 (2)
K ≡ option strike price
K_1 (K_2) ≡ first (second) strike price
K' ≡ strike price denominated in foreign currency
S ≡ current underlying asset price
S_1 (S_2) ≡ current underlying asset price of asset 1 (2)
S_t (S_T) ≡ underlying asset price after elapsed time t (T)
S^* ≡ underlying asset price on option expiration date
$S_1^*(S_2^*)$ ≡ underlying asset price of asset 1 (2) on option expiration date
S'^* ≡ underlying asset price on option expiration date denominated in foreign currency
X ≡ constant
X_0 ≡ current exchange rate (domestic/foreign)
X^* ≡ exchange rate on option expiration date (domestic/foreign)
n_1 (n_2) ≡ number of shares held in underlying asset 1 (2)
t, T ≡ elapsed time from current date to some date in the future
T_1 (T_2) ≡ first (second) time-to-expiration
α, β ≡ multiplicative constants
λ ≡ exponential constant
MAX^* ≡ maximum underlying asset price through expiration date
MIN^* ≡ minimum underlying asset price through expiration date

(1) <u>Packages</u>: δικαιώματα τα οποία είναι αντίστοιχα με ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται μόνο από standard European calls και πιθανώς και μετρητά και την υποκείμενη αξία.

- ☐ **collars** *[minimax]*
  $\min[\max(S^*, K_1), K_2]$ where $0 < K_1 < K_2$
- ☐ **zero-cost options**:
  - zero-cost collar *[if $F = K_1 = K_2$ termed a synthetic forward]*
    $\max[0, S^* - K_1] - \max[0, K_2 - S^*]$ where $K_1 < K_2$ set so $C = 0$
  - break forward *[Boston option, cancelable forward, forward break]*
    $(F - K) + \max[0, S^* - F]$ where $F < K$ and K set such that $C = 0$

- range forward *[flexible forward, cylinder option, option fence, forward band, tunnels]*

  $(S^* - F) + \max[0, K_1 - S^*] - \max[0, S^* - K_2]$ where $K_1 < F < K_2$ set such that $C = 0$

☐ **portfolio insurance**:
- upside capture portfolio insurance

  $\max[K, \alpha S^*]$ where $0 < \alpha < 1$
- upside gain portfolio insurance

  $\max[K, S + \beta(S^* - S)]$ where $0 < \beta < 1$

☐ **simple choosers**: *[as-you-like-it options]*
- buyer's choice

  $\max[C(S_t, K, T\text{-}t), P(S_t, K, T\text{-}t); t]$
- dealer's choice

  $\min[C(S_t, K, T\text{-}t), P(S_t, K, T\text{-}t); t]$

(2) <u>**Forward-start**</u>: δικαιώματα των οποίων το premium πληρώνεται τώρα, αλλά η τιμή εξάσκησης καθορίζεται σε κάποιο μεταγενέστερο χρονικό σημείο. *[deferred strike options, delayed options]*

☐ **employee stock options**

$\max[0, S_T - \alpha S_t]$ where $\alpha > 0$ and $t < T$

(3) <u>**Compound Options**</u>: δικαιώματα των οποίων η υποκείμενη αξία είναι και αυτή δικαίωμα

☐ **ordinary compounds**:
- call/put on a call

  call on a call: $\max[0, C(S_t, K_2, T\text{-}t) - K_1; t]$
- call/put on a put

  call on a put: $\max[0, P(S_t, K_2, T\text{-}t) - K_1; t]$

☐ **complex choosers** (strikes or expiration dates not equal):
- buyer's choice

  $\max[C(S_t, K_1, T_1\text{-}t), P(S_t, K_2, T_2\text{-}t); t]$
- dealers's choice

  $\min[C(S_t, K_1, T_1\text{-}t), P(S_t, K_2, T_2\text{-}t); t]$

☐ **extendible calls/puts**:
- buyer's choice

  $\max[\ 0, (S_t - K_1), C(S_t, K_2, T\text{-}t) - X; t]$
- writer's choice

  $\max[(S_t - K_1)\times(S_t \geq K_1) + C(S_t, K_2, T\text{-}t)\times(S_t < K_1); t]$

(4) <u>**Lock-in options**</u>: δικαιώματα τα οποία κλειδώνουν κάποιο ελάχιστο αποτέλεσμα (payoff) πριν την λήξη τους

☐ **simple lock-in call/put**

call: $\max[0, S_s - K]$ where $s < T$ is set by buyer at date s, paid at date T)

☐ **cliquet call/put** (one click) *[rachet option, reset option]*

call: $\max[0, (S_t - K), (S^* - K)]$ where $t < T$ is preset

☐ **shout call/put** (one click) *[rachet option, reset option]* call: $\max[0, (S_s - K), (S^* - K)]$ where $s < T$ is set by buyer on date s

☐ **shout floor call/put** *[deferred strike option]*

call: $\max[0, S^* - S_s]$ where $s < T$ is set by buyer on date s

(5) **<u>Power and log options</u>:** δικαιώματα των οποίων το αποτέλεσμα εξαρτάται: από την τιμή της υποκείμενης αξία υψωμένη σε κάποια δύναμη ή στο φυσικό λογάριθμο της τιμής της υποκείμενης αξίας.

☐ **power call/put**

call: $\max[0, (S^*)^\lambda - K]$ where $\lambda > 0$

☐ **log call/put**

call: $\max[0, (\log S^*) - K]$

☐ **self-quanto call/put** *[turbo option]*

call: $S^* \max[0, S^* - K]$

(6) **<u>Barrier options</u>:** δικαιώματα των οποίων το αποτέλεσμα εξαρτάται όχι μόνο από την τιμή της υποκείμενης αξίας στη λήξη, αλλά και από το αν η τιμή αυτή στη πορεία της έφτασε σε κάποιο όριο (barrier) ή όχι *[inside barrier options, limit options, trigger options]*

☐ **down-and-out or up-and-out call/put** (with/without rebate) *[knock-out option, drop-out option, extinguishable option]*

down-and-out call: $S > H$: $\max[0, S^* - K]$ if for all $t \le T$, $S_t > H$

☐ **down-and-in or up-and-in call/put** (with/without rebate) *[kick-in option, pop-up options]*

down-and-in call: $S > H$: $\max[0, S^* - K]$ if for some $t \le T$, $S_t < H$

☐ **cap call** (up-and-out call where rebate = barrier - strike)

$S < H$: $\max[0, S^* - K]$ if for all $t \le T$, $S_t < H$ where $R = H - K$

☐ **cap put** (down-and-out put where rebate = strike - barrier)

$S > H$: $\max[0, K - S^*]$ if for all $t \le T$, $S_t > H$ where $R = K - H$

☐ **double barrier call/put (in/out)** *[double knock-out, double kick-in, corridor option]*

out-call: $H_1 < S < H_2$: $\max[0, S^* - K]$ if for all $t \le T$, $H_1 < S_t < H_2$

☐ **roll down calls or roll up puts:**

roll down call: $S > H_1 > H_2$, $K_1 > K_2$:

$\max[0, S^* - K_1]$ if for all $t \le T$, $S_t > H_1$

$\max[0, S^* - K_2]$ if for some $t \le T$, $S_t < H_1$ and for all $t \le T$, $S_t > H_2$

(7) **<u>Binary options</u>:** δικαιώματα με δυαδικό ή ασυνεχές μοντέλο αποτελέσματος *[digital options, bet options]*

☐ **cash-or-nothing or call/put** *[all-or-nothing options, one touch options]*

call: 0 if $S^* \le K$ or X if $S^* > K$

☐ **asset-or-nothing call/put**

call: 0 if $S^* \le K$ or S^* if $S^* > K$

☐ **gap options**:

- general gap call/put

call: 0 if $S^* \le K$ or $S^* - X$ if $S^* > K$

• pay-later call/put *[contingent premium option]*

call: 0 if $S^* \leq K$ or $S^* - K - X$ if $S^* > K$ where $X > 0$ is set such that $C = 0$

• money-back call/put *[contingent premium option]*

call: 0 if $S^* \leq K$ or $S^* - K + C$ if $S^* > K$

☐ **range binaries**:

• cash-or-nothing option

X if and only if $K_1 \leq S^* < K_2$

• asset-or-nothing option *[supershare]*

S^*/K_1 if and only if $K_1 \leq S^* < K_2$

☐ **barrier-dependent cash- or asset-or-nothing call/put**

(8) <u>Lookback options</u>: δικαιώματα των οποίων το αποτέλεσμα εξαρτάται όχι μόνο από την πιθανή τιμή της υποκείμενης αξίας στη λήξη του δικαιώματος αλλά και από την ελάχιστη ή μέγιστη τιμή την οποία έλαβε η υποκείμενη αξία κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος για κάποια χρονική στιγμή

☐ **floating-strike lookbacks**:

• call with minimum as strike *[buy-at-the-low option]*

$S^* - MIN^*$

• put with maximum as strike *[sell-at-the-high option]*

$MAX^* - S^*$

☐ **fixed-strike lookbacks**: *[if K = S, termed a lookforward]*

• call with maximum as asset

$\max[0, MAX^* - K]$

• put with minimum as asset

$\max[0, K - MIN^*]$

☐ **lookback straddle** *[range option, hi-low option]*

$MAX^* - MIN^*$

☐ **lookback spread call/put** *[double lookback, swing option]*

call: $\max[0, (MAX^* - MIN^*) - K]$

☐ **partial lookback call/put**

$\max[0, S^* - \alpha MIN^*]$ $(\alpha > 1)$ or $\max[0, \alpha MAX^* - S^*]$ $(\alpha < 1)$

☐ **ladder call/put**

call: $\max[0, \max(S^*, S^{**}) - K]$ where $S^{**} = 0$ if for all $t \leq T$, $S_t < H$, otherwise $S^{**} = H$

☐ **do-nothing call/put**

call: $\max\{0, [\alpha S/(MAX^* - MIN^* + X)] - K\}$

(9) <u>"Asian" options</u>: δικαιώματα των οποίων το αποτέλεσμα εξαρτάται όχι μόνο από 6την τιμή που έλαβε η υποκείμενη αξία στη λήξη του δικαιώματος αλλά και από το μέσο όρο της τιμής για κάποιο χρονικό διάστημα

☐ **arithmetic or geometric average price call/put** *[average rate option]*

$\max[0, A^* - K]$ or $\max[0, K - A^*]$

☐ **arithmetic or geometric average strike call/put**

$\max[0, S^* - A^*]$ or $\max[0, A^* - S^*]$

(10) <u>Exchange options</u>: δικαιώματα ανταλλαγής μιας υποκείμενης αξίας με κάποια άλλη

- ☐ **option to exchange one asset for another** *[difference options]*
  $\max[0, S_2^* - S_1^*]$
- ☐ **better-of-two-assets option** *[out-performance option]*
  $\max[S_1^*, S_2^*]$
- ☐ **worse-of-two-assets options** *[under-performance option]*
  $\min[S_1^*, S_2^*]$
- ☐ **composite calls/puts**:
  - ratio call/put *[relative performance option]*
    call: $\max[0, S_2^*/S_1^* - K]$
  - product call/put
    call: $\max[0, S_1^* S_2^* - K]$

(11) <u>Currency-translated options</u>: δικαιώματα των οποίων η υποκείμενη αξία ή η τιμή εξάσκησης είναι εκφρασμένη σε κάποιο ξένο νόμισμα, αλλά μεταφράζεται στο εγχώριο νόμισμα με κάποια τυχαία ή προκαθορισμένη ισοτιμία

- ☐ **foreign equity call/put struck in foreign currency**
  call: $\max[0, S'^*X^* - K'X^*]$
- ☐ **foreign equity call/put struck in domestic currency**
  call: $\max[0, S'^*X^* - K]$
- ☐ **domestic equity call/put struck in foreign currency**
  call: $\max[0, S^* - K'X^*]$
- ☐ **fixed exchange rate foreign equity call/put** *[quanto]*
  call: $\max[0, S'^*X_0 - K'X_0]$
- ☐ **equity-linked foreign exchange call/put**
  call: $S'^*\max[0, X^* - K]$

(12) <u>Two-color "rainbow" options</u>: δικαιώματα σε δύο risky υποκείμενες αξίες τα οποία δεν μπορούν να αναπαραχθούν σαν να ήταν δικαιώματα σε κάθε μία υποκείμενη αξία

- ☐ **option delivering better of two risky assets and cash**
  $\max[S_1^*, S_2^*, K]$
- ☐ **call or put on maximum or minimum of two risky assets**
  call on maximum: $\max[0, \max(S_1^*, S_2^*) - K]$
- ☐ **spread call/put**
  call: $\max[0, (S_2^* - S_1^*) - K]$
- ☐ **portfolio call/put** *[basket option]*
  call: $\max[0, (n_1 S_1^* + n_2 S_2^*) - K]$
- ☐ **dual-strike call/put**
  call: $\max[0, S_1^* - K_1, S_2^* - K_2]$ where $K_1 \neq K_2$
- ☐ **dual-asset choosers** (call-call, call-put, put-call, put-put):
  - buyer's choice
    call-call: $\max[C(S_{1t}, K, T\text{-}t), C(S_{2t}, K, T\text{-}t); t]$
  - dealer's choice
    call-call: $\min[C(S_{1t}, K, T\text{-}t), C(S_{2t}, K, T\text{-}t); t]$
- ☐ **defined exercise call/put** (exercise permitted only if condition on second asset is satisfied)
  example: $\max[0, (S_1^* - K)\times(S_2^* > X)]$

- **dual-asset barriers options**: *[dynamite warrants]*
  - outside barrier up/down-in/out-call/put (barrier determined by second asset price)

    down-and-out call: $S_2 > H$: $\max[0, S_1^* - K]$ if for all $t \le T$, $S_{2t} > H$
  - dual-asset, double barrier up/down-in/out-call/put

    down-and-out call on maximum: $\max[0, \max(S_1^*, S_2^*) - K]$ if for all $t \le T$, $S_{1t} > H_1$ and $S_{2t} > H_2$
- **dual-asset binary option** (binary where positive cash flow depends on second asset)

  asset-or-nothing call: 0 if $S_2^* \le K$ or S_1^* if $S_2^* > K$
- **dual-asset lookbacks**:
  - call/put on the maximum

    $\max[0, (MAX_2^* - MAX_1^*) - K]$ or $\max[0, K - (MAX_2^* - MAX_1^*)]$
  - call/put on the minimum

    $\max[0, (MIN_2^* - MIN_1^*) - K]$ or $\max[0, K - (MIN_2^* - MIN_1^*)]$
  - semi-dual-asset lookback call/put

    $\max[0, MAX_2^* - S_1^*]$ or $\max[0, S_1^* - MIN_2^*]$

(13) <u>Multi-color "rainbow options</u>: δικαιώματα όπως στην παραπάνω κατηγορία (12) μόνο που εδώ οι υποκείμενες αξίες είναι περισσότερες από δύο *[multi-factor options]*

- **multi-index option**

  $\max[S_1^*, S_2^*, S_3^*, ...]$ or $\min[S_1^*, S_2^*, S_3^*, ...]$
- **portfolio call/put** *[basket option]*

  call: $\max[0, (n_1 S_1^* + n_2 S_2^* + n_3 S_3^* + \dots + n_m S_m^*) - K]$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Προκειμένου να γίνει καλύτερα κατανοητή η χρήση των *Ασιατικών Δικαιωμάτων*, και το πώς αυτά χρησιμοποιούνται από την αγορά, παραθέτουμε μερικούς τύπους συμβάσεων με βάση των οποίων γίνονται οι συναλλαγές.

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι οι συμβάσεις αυτές αποτελούν πνευματική ιδιοκτησία της Citibank N.A. την οποία και ευχαριστούμε θερμά για την συνεργασία της ~~και~~ την άδειά της προκειμένου να μπορέσουμε να τα αναδημοσιεύσουμε.

FX OPTION CONFIRMATION

AVERAGE RATE BASKET OPTION

Date: [ ]

To: [ ]

Telefax No.:
Attention: FX Option Operations

From: Citibank N.A.
FX Options Division

Transaction Reference Number: [ ]

We, Citibank N.A., confirm having [BOUGHT from/SOLD to] you the following over-the-counter Average Rate Basket option (the "Option").

Trade Date:	[ ]
Effective Date:	[ ]
Seller:	[ ]
Buyer:	[ ]
Expiration Date:	[ ]
Final Value Date:	Spot on Expiry Date
Option Style:	European
Type:	[Call/Put]
Basket Strike:	[ ], which is the aggregate of the Local Currency Notional Amounts of each at the Basket Currencies as set forth in Paragraph 1 below.
Premium Amount:	[ ]
Calculation Agent:	Citibank, whose determinations shall be binding save in the case of manifest error.
Local Currency	[USD]

1. **Basket Currencies**

Basket Currency [USD]	Basket Currency Notional Amount	Currency Strike Rate	Local Currency Notional Amounts
[ZAR]	[ ]	[ ]	[ ]
[IDR]	[ ]	[ ]	[ ]
[etc]	[ ]	[ ]	[ ]

(Negative signs indicate short currencies.)

2. **Procedure for Exercise**

Exercise Period:	The Expiration Date
Automatic Exercise:	Applicable: The Option shall be deemed automatically exercised on the Expiration Date. The Calculation Agent will notify the other party of its determination of the Cash Settlement

Amount on the Expiration Date. In the event of a dispute as to the amount of the Cash Settlement Amount, the Calculation Agent reserves the right to select a third party independent broker to verify the Cash Settlement Amount. Buyer and Seller agree to be bound by the determination of the third party independent broker.

3. **Cash Settlement Terms**

Cash Settlement: Applicable: Seller shall pay to Buyer the Cash Settlement Amount, if any, on the Cash Settlement Payment Date.

Cash Settlement Amount: The greater of (i) zero, and (ii) the sum of the Local Currency Amounts [USD] for each Basket Currency subject to the Adjustment provisions in Paragraph 4 below. The Local Currency Amount for each Basket Currency shall be determined by the Calculation Agent according to the following formula:

$$\frac{\text{Basket Currency Notional Amount}}{\text{Average Rate}} - \frac{\text{Basket Currency Notional Amount}}{\text{Currency Strike Rate}}$$

For the avoidance of doubt short currency Local Currency Amounts shall be deducted.

Average Rate: The sum of the Source Rates for a Basket Currency on each Observation Day divided by the total number of Observation Days.

Cash Settlement Payment Date: Spot on Expiry

Source Rate: [Primary and fall back sources for each currency] as at [12.00 pm] on the Expiration Date. If none of the above rates are available, a mutually agreeable substitute will be determined.

Observation Day: Each Business Day from and including [ ] to [but excluding/and including] [ ]. The total number of Observation Days is [ ].

Business Day: A day on which commercial banks and foreign exchange markets settle payments in the relevant currency.

4. **Adjustment**

a) With respect to each Basket Currency, the parties agree that if the Calculation Agent determines that an Event of Sovereign Risk has occurred on any day during the term of this Transaction with respect to such Basket Currency, such Basket Currency shall be removed as a Basket

Currency and shall not be included in calculating the Cash Settlement Amount.

b) An "Event of Sovereign Risk" shall occur if there is a failure by the Central Bank of the Subject Jurisdiction or any successor to such central bank and monetary authority of such jurisdiction to exchange, or to approve or permit the exchange of the Basket Currency for US Dollars, or any other action of any Dominant Authority (including the promulgation, operation or enforcement of any law, act, decree, regulation, ordinance, order, policy, or determination, or modification of, or change in the interpretation of any of the foregoing) or any event in the Subject Jurisdiction that has the effect of restricting such exchange or the transfer of any funds outside such jurisdiction, or the transfer of the Basket Currency within such jurisdiction, or US Dollars are unavailable in any legal exchange market thereof in such jurisdiction in accordance with normal commercial practice. For purposes of this paragraph, "Dominant Authority" means at any time the government of the Subject Jurisdiction or any political subdivision thereof or any other authority asserting governmental, military or political power of any kind in such jurisdiction at such time, whether or not such authority is recognised as a de facto or de jure government. "Subject Jurisdiction" shall mean the jurisdiction where the Basket Currency is issued and is principally circulated as legal tender.

5. Other Conditions

The option fee is payable within two business days of the Transaction Date, with full settlement. Terms and Conditions are as per the British Bankers Association's International Currency Option Market (ICOM) Agreement, unless you and we are parties to either a 1987 or 1992 ISDA Master Agreement ("Master Agreement") in which case this confirmation supplements, forms part of and is subject to such agreement. In addition, upon execution and delivery by you and us of such an agreement, this confirmation shall supplement, form part of and be subject to such agreement. In either such case, the definitions and provisions contained in the 1992 ISDA FX and Currency Option definitions are incorporated into this confirmation. In the event of any inconsistency between those definitions and provisions and this confirmation, this confirmation will govern.

6. Governing Law

This confirmation shall be governed by and construed in accordance with the law specified in the Master Agreement, failing which, English law.

7. Miscellaneous

a) Party B hereby agrees (a) to check this confirmation carefully and immediately upon receipt so that errors or discrepancies can be promptly identified and rectified and (b) to confirm that the foregoing correctly sets forth the terms of the agreement between Party A and Party B with respect to the particular Basket Option to which this confirmation relates, by manually signing this confirmation and immediately returning an executed copy to:

Citibank N.A.
FX Options
Citibank House
336 The Strand
London WC2R 1HB

Fax: 0171 508 1849

b) Each party hereby confirms (i) it is not relying on any advice, statements or recommendations (written or oral) of the other party concerning this transaction and it has the capacity to understand, and is willing to accept, the terms, conditions and risks of this transaction and (ii) it is an "eligible swap participant" as such term is defined in 17 CFR S 35.1(b)(2).

Very truly yours
CITIBANK, N.A., LONDON

By: ________________

Name: ________________

Title: ________________

Agreed and accepted by:

By: ________________

Name: ________________

Title: ________________

PLEASE COMMUNICATE ANY DISCREPANCIES TO US IMMEDIATELY, TELEPHONE: OR 0171-508 1567

FX OPTION CONFIRMATION

AVERAGE-AVERAGE RATE OPTION - AMERICAN

Date: [ ]

To: [

]

Telefax No.:
Attention: FX Option Operations

From: Citibank N.A.
FX Options Division

Transaction Reference Number: [ ]

We, Citibank N.A., confirm having [BOUGHT from/SOLD to] you the following over-the-counter average-average rate option (the "Option"). The Option has features that differ from a standard currency option as detailed below.

For the purposes of this confirmation, Party A shall mean Citibank, N.A., and Party B shall mean [ ].

Trade Date:	[ ]
Effective Date:	[ ]
Buyer:	Party [ ]
Seller:	Party [ ]
Calculation Agent:	Party A, whose determinations and calculations shall be binding in the absence of manifest error
Option Style:	American
Option Type:	[[Currency] Put/[Currency] Call]
Notional Amount and Currency:	[ ]
Counter Currency:	[ ]
Strike Price:	Average Strike Rate [x the In/Out-the-Money-Amount]
In/Out-The-Money-Amount:	[ ]
Expiration Date:	[ ]
Value Date:	Spot on Expiry
Premium:	[ ]
Premium Payment Date:	[ ]

1. **Definitions**

"Average Strike Rate" means the rate ascertained by taking the sum of the Source Rates for each Strike Averaging Date and dividing the sum by the number of Strike Averaging Dates.

"Calculation Period" means, unless otherwise agreed, the period commencing on [ ] to and including the Expiration Date.

"Cash Settlement Amount" means an amount in [Currency] equal to the greater of zero and:

[Call = (1/ Strike Price - 1/ Settlement Rate) x Notional Amount]
[Put = (1/ Settlement Rate - 1/ Strike Price) x Notional Amount]

"Settlement Rate" means the rate ascertained by taking the sum of the Source Rates for each Reset Date and dividing the sum by the number of Reset Dates.

"Strike Averaging Dates" are [STATE FREQUENCY] during the Strike Averaging Period.

"Strike Averaging Period" means the period commencing on [ ] to and including [ ].

"Reset Date" means each [Business Day] during the Calculation Period.

"Business Day" means a day on which commercial banks and foreign exchange markets settle payments in each of the Notional Currency and the Counter Currency.

"Source Rate" means the Notional Currency/Counter Currency exchange rate as published on [Source] at the relevant fixing time for such source on each Reset Date and Strike Averaging Date. If such source is unavailable, the Calculation Agent shall determine the Source Rate in such commercially reasonable manner as it shall in good faith deem appropriate.

2. **Notification of Strike Price**

The Calculation Agent shall promptly on or after the last Strike Averaging Date notify the other party of the Strike Rate.

In the event of dispute as to the Strike Price, the Calculation Agent exclusively reserves the right to select a third party independent broker to verify the Strike Price. Party A and Party B agree to be bound by the determination of the third party independent broker.

3. **Notification of Cash Settlement Amount**

The Calculation Agent shall promptly on or after the Expiration Date notify the other party of the amount of the Cash Settlement Amount in relation to the Option. Under no circumstances shall there be any return of premium or any other consideration payable by the Seller to the Buyer.

In the event of dispute as to the amount of the Cash Settlement Amount, the Calculation Agent exclusively reserves the right to select a third party independent broker to verify the Cash Settlement Amount. Party A and Party B agree to be bound by the determination of the third party independent broker.

4. **Exercise and Settlement**

Unless otherwise agreed this Option shall be settled on its Value Date by the payment by the Seller to the Buyer of the full amount of the Cash Settlement Amount. The Buyer will make no delivery to the Seller.

5. **Other Conditions**

The General Business Conditions for Foreign Exchange Options shall apply in accordance with the British Bankers Association International Currency Options Market (ICOM) agreement, unless you and we are parties to either a 1987 ISDA Interest Rate and Currency Exchange Agreement or a 1992 ISDA Master Agreement (the 'Agreement') in which case this Confirmation supplements, forms part of and is subject to such Agreement. In addition, upon execution and delivery by you and us of an Agreement, this Confirmation shall supplement, form part of and be subject to such Agreement. In either such case, the definitions and provisions contained in the 1992 ISDA FX and Currency Options Definitions are incorporated into this Confirmation. In the event of any inconsistency between those definitions and provisions and this Confirmation, this Confirmation will govern.

6. **Governing Law**

This confirmation will be governed by the laws specified in the Agreement, failing which, by English law.

7. **Miscellaneous**

a) Party B hereby agrees (a) to check this confirmation carefully and immediately upon receipt so that errors or discrepancies can be promptly identified and rectified and (b) to confirm that the foregoing correctly sets forth the terms of the agreement between Party A and Party B with respect to the particular Average Rate Option to which this confirmation relates, by manually signing this confirmation and immediately returning an executed copy to:

Citibank N.A.
FX Options
Citibank House
336 The Strand
London WC2R 1HB   Fax: 0171 508 1849

b) Each party hereby confirms (i) it is not relying on any advice, statements or recommendations (written or oral) of the other party concerning this transaction and it has the capacity to understand, and is willing to accept, the terms, conditions and risks of this transaction and (ii) it is an "eligible swap participant" as such term is defined in 17 CFR S 35.1(b)(2).

Very truly yours

CITIBANK, N.A., LONDON.

By: ____________________

Name: ____________________

Title: ____________________

Agreed and accepted by:

By: ____________________

Name: ____________________

Title: ____________________

PLEASE COMMUNICATE ANY DISCREPANCIES TO US IMMEDIATELY, TELEPHONE: 0171-500-1567

FX OPTION CONFIRMATION

AVERAGE-AVERAGE RATE OPTION - EUROPEAN

Date: [ ]

To: [

]

Telefax No.:
Attention: FX Option Operations

From: Citibank N.A.
FX Options Division

Transaction Reference Number: [ ]

We, Citibank N.A., confirm having [BOUGHT from/SOLD to] you the following over-the-counter average-average rate option (the "Option"). The Option has features that differ from a standard currency option as detailed below.

For the purposes of this confirmation, Party A shall mean Citibank, N.A., and Party B shall mean [ ].

Trade Date:	[ ]
Effective Date:	[ ]
Buyer:	Party [ ]
Seller:	Party [ ]
Calculation Agent:	Party A, whose determinations and calculations shall be binding in the absence of manifest error
Option Style:	European
Option Type:	[[Currency] Put/[Currency] Call]
Notional Amount and Currency:	[ ]
Counter Currency:	[ ]
Strike Price:	Average Strike Rate [x the In/Out-the-Money-Amount]
In/Out-The-Money-Amount:	[ ]
Expiration Date:	[ ]
Value Date:	Spot on Expiry
Premium:	[ ]
Premium Payment Date:	[ ]

1. Definitions

"Average Strike Rate" means the rate ascertained by taking the sum of the Source Rates for each Strike Averaging Date and dividing the sum by the number of Strike Averaging Dates.

"Calculation Period" means, unless otherwise agreed, the period commencing on [ ] to and including the Expiration Date.

"Cash Settlement Amount" means an amount in [Currency] equal to the greater of zero and:

[Put = (Strike Price - Settlement Rate) x Notional Amount]
[Call = (Settlement Rate - Strike Price) x Notional Amount]

"Settlement Rate" means the rate ascertained by taking the sum of the Source Rates for each Reset Date and dividing the sum by the number of Reset Dates.

"Strike Averaging Dates" are [STATE FREQUENCY] during the Strike Averaging Period.

"Strike Averaging Period" means the period commencing on [ ] to and including [ ].

"Reset Date" means each [Business Day] during the Calculation Period.

"Business Day" means a day on which commercial banks and foreign exchange markets settle payments in each of the Notional Currency and the Counter Currency.

"Source Rate" means the Notional Currency/Counter Currency exchange rate as published on [Source] at the relevant fixing time for such source on each Reset Date and Strike Averaging Date. If such source is unavailable, the Calculation Agent shall determine the Source Rate in such commercially reasonable manner as it shall in good faith deem appropriate.

2. Notification of Strike Price

The Calculation Agent shall promptly on or after the last Strike Averaging Date notify the other party of the Strike Rate.

In the event of dispute as to the Strike Price, the Calculation Agent exclusively reserves the right to select a third party independent broker to verify the Strike Price. Party A and Party B agree to be bound by the determination of the third party independent broker.

3. Notification of Cash Settlement Amount

The Calculation Agent shall promptly on or after the Expiration Date notify the other party of the amount of the Cash Settlement Amount in relation to the Option. Under no circumstances shall there be any return of premium or any other consideration payable by the Seller to the Buyer.

In the event of dispute as to the amount of the Cash Settlement Amount, the Calculation Agent exclusively reserves the right to select a third party independent broker to verify the Cash Settlement Amount. Party A and Party B agree to be bound by the determination of the third party independent broker.

4. Exercise and Settlement

Unless otherwise agreed this Option shall be settled on its Value Date by the payment by the Seller to the Buyer of the full amount of the Cash Settlement Amount. The Buyer will make no delivery to the Seller.

5. **Other Conditions**

The General Business Conditions for Foreign Exchange Options shall apply in accordance with the British Bankers Association International Currency Options Market (ICOM) agreement, unless you and we are parties to either a 1987 ISDA Interest Rate and Currency Exchange Agreement or a 1992 ISDA Master Agreement (the 'Agreement') in which case this Confirmation supplements, forms part of and is subject to such Agreement. In addition, upon execution and delivery by you and us of an Agreement, this Confirmation shall supplement, form part of and be subject to such Agreement. In either such case, the definitions and provisions contained in the 1992 ISDA FX and Currency Options Definitions are incorporated into this Confirmation. In the event of any inconsistency between those definitions and provisions and this Confirmation, this Confirmation will govern.

6. **Governing Law**

This confirmation will be governed by the laws specified in the Agreement, failing which, by English law.

7. **Miscellaneous**

a) Party B hereby agrees (a) to check this confirmation carefully and immediately upon receipt so that errors or discrepancies can be promptly identified and rectified and (b) to confirm that the foregoing correctly sets forth the terms of the agreement between Party A and Party B with respect to the particular Average Rate Option to which this confirmation relates, by manually signing this confirmation and immediately returning an executed copy to:

Citibank N.A.
FX Options
Citibank House
336 The Strand
London WC2R 1HB   Fax: 0171 508 1849

b) Each party hereby confirms (i) it is not relying on any advice, statements or recommendations (written or oral) of the other party concerning this transaction and it has the capacity to understand, and is willing to accept, the terms, conditions and risks of this transaction and (ii) it is an "eligible swap participant" as such term is defined in 17 CFR S 35.1(b)(2).

Very truly yours

CITIBANK, N.A., LONDON.

CITIBANK, N.A., LONDON	Agreed and accepted by:
By: ____________________	By: ____________________
Name: ____________________	Name: ____________________
Title: ____________________	Title: ____________________

PLEASE COMMUNICATE ANY DISCREPANCIES TO US IMMEDIATELY, TELEPHONE: 0171-500-1567

FX OPTION CONFIRMATION

AVERAGE RATE OPTION - EUROPEAN

Date: [ ]

To: [

]

Telefax No.:
Attention: FX Option Operations

From: Citibank N.A.
FX Options Division

Transaction Reference Number: [ ]

We, Citibank N.A., confirm having [BOUGHT from/SOLD to] you the following over-the-counter average rate option (the "Average Rate Option"). The Average Rate Option has features that differ from a standard currency option as detailed below.

For the purposes of this confirmation, Party A shall mean Citibank, N.A., and Party B shall mean [ ].

Trade Date:	[ ]
Effective Date:	[ ]
Nominal Amount:	[ ]
Buyer:	Party [ ]
Seller:	Party [ ]
Calculation Agent:	Party A, whose determinations and calculations shall be binding in the absence of manifest error
Option Style:	European
Option Type:	[Put/Call]
Notional Currency and Amount:	[ ]
Counter Currency and Amount:	[ ]
Strike Price:	[ ]
Expiration Date:	[ ]
Value Date:	Spot on Expiry
Premium:	[ ]
Premium Payment Date:	[ ]

1. **Definitions**

"Calculation Period" means, unless otherwise agreed, the period commencing on the Effective Date to and excluding the Expiration Date.

"Cash Settlement Amount" means an amount in [Currency] equal to the greater of zero and:

[Call = (Settlement Rate - Strike Price) x Notional Amount]
[Put = (Strike Price - Settlement Rate) x Notional Amount]
"Settlement Rate" means the rate ascertained by taking the sum of the Source Rates for each Reset Date and dividing the sum by the number of Reset Dates.

"Reset Date" means each Business Day during the Calculation Period.

"Business Day" means a day on which commercial banks and foreign exchange markets settle payments in each of the Notional Currency and the Counter Currency.

"Source Rate" means the Notional Currency/Counter Currency exchange rate as published on [Source] at [Closing] on each Reset Date. If such source is unavailable, the Calculation Agent shall determine the Source Rate in such commercially reasonable manner as it shall in good faith deem appropriate.

2. **Notification of Cash Settlement Amount**

The Calculation Agent shall promptly on or after the Expiration Date notify the other party of the amount of the Cash Settlement Amount in relation to the Average Rate Option. Under no circumstances shall there be any return of premium or any other consideration payable by the Seller to the Buyer.

In the event of dispute as to the amount of the Cash Settlement Amount, the Calculation Agent exclusively reserves the right to select a third party independent broker to verify the Cash Settlement Amount. Party A and Party B agree to be bound by the determination of the third party independent broker.

3. **Exercise and Settlement**

Unless otherwise agreed this Average Rate Option shall be settled on its Value Date by the payment by the Seller to the Buyer of the full amount of the Cash Settlement Amount. The Buyer will make no delivery to the Seller.

4. **Other Conditions**

The General Business Conditions for Foreign Exchange Options shall apply in accordance with the British Bankers Association International Currency Options Market (ICOM) agreement, unless you and we are parties to either a 1987 ISDA Interest Rate and Currency Exchange Agreement or a 1992 ISDA Master Agreement (the 'Agreement') in which case this Confirmation supplements, forms part of and is subject to such Agreement. In addition, upon execution and delivery by you and us of an Agreement, this Confirmation shall supplement, form part of and be subject to such Agreement. In either such case, the definitions and provisions contained in the 1992 ISDA FX and Currency Options Definitions are incorporated into this Confirmation. In the event of any inconsistency between those definitions and provisions and this Confirmation, this Confirmation will govern.

5. **Governing Law**

This confirmation will be governed by the laws specified in the Agreement, failing which, by English law.

6. **Miscellaneous**

a) Party B hereby agrees (a) to check this confirmation carefully and immediately upon receipt so that errors or discrepancies can be promptly identified and rectified and (b) to confirm that the foregoing correctly sets forth the terms of the agreement between Party A and Party B with respect to the particular Average Rate Option to which this confirmation relates, by manually signing this confirmation and immediately returning an executed copy to:

Citibank N.A.
FX Options
Citibank House
336 The Strand
London WC2R 1HB Fax: 0171 508 1849

b) Each party hereby confirms (i) it is not relying on any advice, statements or recommendations (written or oral) of the other party concerning this transaction and it has the capacity to understand, and is willing to accept, the terms, conditions and risks of this transaction and (ii) it is an "eligible swap participant" as such term is defined in 17 CFR S 35.1(b)(2).

Very truly yours

CITIBANK, N.A., LONDON.

By: ____________________

Name: ____________________

Title: ____________________

Agreed and accepted by:

By: ____________________

Name: ____________________

Title: ____________________

PLEASE COMMUNICATE ANY DISCREPANCIES TO US IMMEDIATELY, TELEPHONE: 0171-500-1567

FX OPTION CONFIRMATION

AVERAGE STRIKE OPTION

Date: [ ]

To: [

]

Telefax No.:
Attention: FX Option Operations

From: Citibank N.A.
FX Options Division

Transaction Reference Number: [ ]

We, Citibank N.A., confirm having [SOLD to/BOUGHT from] you the following Average Strike option.

Expiring:	[ ] 10.00 am New York Time
Final Value Date:	Spot on Expiry Date
Option Style:	[European/American]
Option Type:	[Put/Call]
Transaction Date:	[ ]
Put Currency:	[ ]
Call Currency:	[ ]
Calculation Agent:	Citibank, N.A.
Strike Price:	Strike Price will be the average [ ] spot exchange rate as shown on the Rate Source during the Average Rate Period.
Rate Source:	[ ], failing which as determined in good faith by the Calculation Agent.
Average Rate Period:	Each Business Day from [ ] to [and including/but excluding] [ ].
Premium Amount:	[ ]
Business Day:	A day on which commercial banks and foreign exchange markets settle payments in both the Put and Call Currency.

The option fee is payable within two business days of the transaction Date, with full settlement. Terms and conditions are as per the British Bankers Associations International Currency Options Market (ICOM) Agreement, unless you and we are parties to either a 1987 or a 1992 ISDA Master Agreement (a "Master Agreement"), in which case this confirmation supplements, forms part of and is subject to such agreement. In addition, upon execution and delivery by you and us of such an agreement, this confirmation shall supplement, form part of and be subject to such agreement. In either such case, the definitions and provisions contained in the 1992 ISDA FX and Currency Option Definitions are incorporated into this confirmation. In the event of any inconsistency between those definitions and provisions and this confirmation, this confirmation will govern. This confirmation shall be governed by the law specified in the Master Agreement, failing which, by English law.

Please sign and return the attached copy to the above address.

Citibank N.A.
FX Options
Citibank House
336 The Strand
London WC2R 1HB

Fax: 0171-508-1849

Yours faithfully,

CITIBANK, N.A., LONDON.

This is an electronically generated confirmation document and as such requires no authorised signature from Citibank

Agreed and accepted by:

By: ______________________

Name: ______________________

Title: ______________________

PLEASE COMMUNICATE ANY DISCREPANCIES TO US IMMEDIATELY, TELEPHONE: 0171-508 1567

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ

1. **Israel Nelken:** The Handbook Of Exotic Options: Instruments, Analysis, and Applications (1996). [IRWIN]
2. **The Globecon Group, Ltd:** Derivatives Engineering: A guide to Structuring, Pricing and Marketing Derivatives. (1995).
3. **John C. Hull:** Options Futures and Other Derivatives 4th Edition. (2000). [PRENTICE-HALL INTERNATIONAL, INC.]
4. **Eric Briys, Mondher Bellalah and Mai, Francois de Varenne:** Options, Futures and Exotic Derivatives: Theory, Applications and Practice. (1998). [JOHN WILEY & SONS].
5. **Γεώργιος Παπούλιας:** Παράγωγα. **(1998). [ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΠΑΠΟΥΛΙΑΣ].**
6. **Robert C. Merton:** Continuous-Time Finance. (1990). [BASIL BLACKWELL].
7. **P. J. Hunt and J.E. Kennedy:** Financial Derivatives In Theory And Practice. (2000). [JOHN WILEY & SONS LTD].
8. **Darrell Duffie:** Security Markets - Stochastic Models. (1998). [ACADEMIC PRESS, INC].
9. **Ravindran, Kuppusamy:** Customized Derivatives: a step-by-step guide to using exotic options, swaps and other customized Derivatives.
10. **Salih N. Neftci:** An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives. (1996). [ACADEMIC PRESS].
11. **Paul Wilmott, Sam Howison, Jeff Dewynne:** The Mathematics of Financial Derivatives. A student Introduction. (1995). [CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS].
12. **Martin Anhony and Norman Biggs.:** Mathematics for Economics and Finance: Methods and Modeling. (1995). [CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS].
13. **Steven Shreve:** Stochastic Calculus and Finance. (1997).
14. **Richard Thomson:** Apocalypse Roulette: The Lethal World of Derivatives. (1998) **[MACMILLAN]**
15. **Ιωάννης Λ. Ζερέϊ:** Εξωχρηματιστηριακές Συμβάσεις Παραγώγων. (1999) **[ΝΟΜΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ]**
16. **C. J. Huang, P.S,Crooke:** Mathematics and Mathematica for Economists. (1997) **[BLACKWELL]**

17. **H. R. Varian:** Economic and Financial Modeling with Mathematica. (1993) **[SPRINGER TELOS]**
18. **J. O, Grabbe:** International Financial Markets. (1996) **[PRENTICE HALL]**

ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

1. "Accelerated Simulation for Pricing Asian Options", *Felisa J. Vazquez-Abab & Daniel Dufresne*
2. "Pricing Continuous Asian Options: A comparison of Monte Carlo and Laplace Transform Inversion Methods", *M.C. Fu, D.B. Madan, T.Wang*, August 1997.
3. "The Geman-Yor Laplace transform revisited", *P. Carr, M. Schroder*
4. "Asian Options: Inverse Laplace Transforms and Martingale Methods Revisited", *G. F. Sudler*, June 1999.
5. "Computing Laplace transforms for numerical inversions via continued fractions", *Joseph Abate & Ward Whitt*, May 1998.
6. "On the Valuation of Arithmetic - Average Asian Options: The Geman-Yor Laplace transform revisited", *Peter Carr & Michael Schroder*, February 2001.
7. "Arithmetic Asian Options with Continuous Sampling", *Jin E. Zhang*, May 1999.
8. "Average - Rate Contingent Claims", *Gurdip Bakshi & Dilip Madan*, May 1998.
9. "An Alternative Approach for Valuing Continuous Cash Flows", *Peter Carr, Alex Lipton & Dilip Madan*, June 2000
10. "A Note on Pricing Asian Derivatives with Continuous Geometric Averaging", *J. E. Angus*
11. "Path - Dependent Option Valuation with Underlying Path Discontinuous", *Chunsheng Zhou*, March 1997.
12. "Path - Dependent Option Pricing: the path integral partial averaging method", *Andrew Matacz* November 1999.
13. "Small Dimension PDE for Discrete Asian Options", *E. Benhamou & A. Duguet*, May 2000.
14. "Accurate Approximations for European Asian options", *P. Chalasani, S. Jha & A. Varikooty*, January 1998.
15. "Asian Exchange Rate Options under Stochastic Interest Rates: Pricing as a Sum of Delayed Payment Options", *A. Nielsen, K. Sandmann*
16. "Fast Fourier Transform for Discrete Asian Options", *E. Benhamou*, March 2000.

17. "Laguerre Series for Asian and Other Options", *D. Dufresne*, February 1999
18. "On the Valuation of Arithmetic - Average Asian Options: Laguerre Series & Theta integrals", *Michael Schroder*, December 2000.
19. "Pricing & Hedging Asian options: a recursive integration approach", *Tiong Wee Lim*
20. "The Arbitrage-Free Pricing of Average Interest Rate Options: A General Approach", *G. Chascko & S. R. Das*
21. "A Variable Reduction Technique for Pricing Average-Rate options", *H. He & A. Takahashi*, April 2000.
22. "Parallel Monte Carlo Methods for Derivative Security Pricing", *Giorgio Pauletto*,
23. "Monte Carlo Simulation - Technical Note" *D.M. Chance*, 16/5/2001
24. "Hedged Monte Carlo: low variance derivative pricing with objective probabilities", *Marc Potters, Jean-Philippe Bouchaud & Dragan Sestovic*, September 2000.
25. "Implied Valuation of Asian Options", *E. Dinenis, D. Flamouris & J. Hatgioannides*, March 2000.
26. "On the Hedging Portfolio of Asian Options", *M. Jacques*
27. "Functionals of Brownian Motion in Path-Dependent Option Valuation", *H. Geman*
28. "A Frequency Distribution Method for Valuing Average Options", *E. Neave*, 1997
29. "Valuing Bonds with Embedded Average Price Options", *S. A. Easton*, June 1996.
30. "Asian Exchange Rate Options under Stochastic Interest Rates: pricing as a sum of delayed payment options", *Aase Nielsen & Klaus Sandman*, April 1998.
31. "Optimal Importance Sampling in Securities Pricing", *Y. Su, M. C. Fu*
32. "Optimal Exercise Policies and Simulation-based Valuation for American-Asian Options", *R. Wu, M.C.Fu*
33. "On the Valuation of Arithmetic - Average Asian Options: Integral Representations", *M. Schroder*, November 1999.
34. Product Summary: "Energy Derivatives - Crude Oil & Nature Gas", *Federal Reserve Bank Of Chicago*
35. "Asset prices are Brownian motion: only in Business Time" *Helyette Geman, Dilip Madan & Marc Yor*, October 1998.
36. FAS 133: Mark-To-Market Issues for Strategies and Exotic Options.

37. "Hedging downside risk: futures vs. options" *Donald Lien & Yiu Kuen Tse,* International Review of Economics and Finance 10/2001, pages 159 - 169

38. "The Perfect hedge instrument" *H. Battermann, M. Braulke, U. Broll, J. Schimmelpfenning,* Economics Letters, 66/2000, pages 85 - 91

39. "A PDE approach to Asian Options: analytical and numerical evidence" *Benedicte Alziary, Jean-Paul Decamps, Pierre-Francois Koehl,* Journal of Banking and Finance, 21/1997, pages 613 - 640

40. "On the equivalence of floating and fixed-strike Asian options" *Vicky Henderson, Rafal Wojakowski,* Applied Probability Trust, 7/9/2001

41. "An easy computable upper bound for the price of an arithmetic Asian option", *S. Simon, M.J. Goovaerts, J. Dhaene,* Insurance: Mathematics and Economics 26/2000, pages 175 - 183

42. "A framework for valuing Exotic Asian and Basket Options" *G. Castellacci, M. Siclari,* 3/6/2001, Forecasting Financial Markets Conference - London

43. "A Semi-analytical method for pricing and hedging continuously sampled arithmetic average rate options" *Jin E. Zhang*

44. " New Pricing of Asian Options" *Jan Vecer,* 21/5/2001

ΔΙΚΤΥΑΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

1. http://l3www.cern.ch/homepages/susinnog/finance
2. http://Finance.Wat.ch/
3. http://margrade.com
4. http://www.RiskManagementDigest.com
5. http://FreeOptioPricing.com
6. http://in-the-money.com
7. http://mgmt.utoronto.ca/~hull/
8. http://www.numa.com
9. http://fenews.com
10. http://www.dbquant.com
11. http://www.worldscientific.com
12. http://appliederivatives.com
13. http://www.adtrading.com/
14. http://www.cme.com/
15. http://www.liffe.com/
16. http://www.futuresmag.com/
17. http://www.cob.ohio-state.edu/dept/fin/journal/jofsites.h
18. http://www.ozforex.com.au
19. http://corporate.barclays.com
20. http://citiweb.citibank.com
21. http://www.cob.ohio-state.edu/dept/fin/journal/jofsites.h
22. http://sbufaculty.tcu.edu/mann/optionslive.htm
23. http://www.vbfi.com/finance/onlineotc.asp
24. http://www.kbcderivatives.be/optionlab/optionlab.html
25. http://www.montecarlo.com

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Για την παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω προγράμματα:

1. MICROSOFT® EXCEL 97 SR - 1
2. MATHEMATICA® Ver. 4.0.0.0 - Wolfram Research, Inc
3. Finacad® XL (Excel add in - Trial Version) - FinancialCAD Corporation
4. Opti-Exotic (Excel add in - Trial Version) - J&E Research, Inc
5. The Option Pricing Tool 0.2.0.1 - Copyright 1996, 1997 Stefen Hoffmeister